

DLA
ABSOLWENTÓW
SZKÓŁ
PODSTAWOWYCH

Zrozumieć fizykę

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

1

Zakres rozszerzony

nowa
era



Marcin Braun

Krzysztof Byczuk

Agnieszka Seweryn-Byczuk

Elżbieta Wójtowicz

Zrozumieć fizykę

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

1

Zakres rozszerzony



Twoje mocne strony

Zrozumieć fizykę

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania fizyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: **prof. dr. hab. Bronisława Słowińskiego, prof. dr. hab. Aleksandra Filipa Żarneckiego i dr hab. Iwony Benenowskiej.**

Zakres kształcenia: rozszerzony

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa (liceum ogólnokształcące i technikum)

Rok dopuszczenia: 2019

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 1002/1/2019

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania fizyki w liceum ogólnokształcącym i technikum do zakresu rozszerzonego. Zrozumieć fizykę* autorstwa Agnieszki Byczuk, Krzysztofa Byczuka, Stanisława Suwolda i Zuzanny Suwald.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują.

Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2019

ISBN 978-83-267-3650-6

Wydanie drugie

Warszawa 2020

Współpraca autorska: Bartłomiej Piotrowski (zad.: 4 s. 89, 3 s. 125, 4 s. 126)

Konsultacje merytoryczne: Jacek Hirsch, Michał Matraszek, dr Piotr Nieżurawski, dr Weronika Śliwa

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: dr Agnieszka Grzeleńska

Współpraca redakcyjna: Dorota Brzozowiec-Dek, Miłosz Budzyński

Redakcja językowa: Dorota Rzeszewska

Korekta: Zofia Psota, Anna Wesołowska

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Klaudia Jarocka, Aleksandra Szpunar

Projekt okładki: Maciej Galiński

Opracowanie graficzne: ULTRA, Klaudia Jarocka, Ewa Kaletyn, Aleksandra Szpunar, Paulina Tomaszewska, Enzo di Giacomo

Ilustratorzy: Andrzej Dukata, Joanna Ptak, Zuzanna Dudzic, Rafał Buczkowski, Ewa Sowulewska

Realizacja projektu graficznego: Adam Pocziwek

Podręcznik „Zrozumieć fizykę” cz. 1 został napisany z wykorzystaniem fragmentów podręcznika do fizyki w zakresie rozszerzonym autorstwa S. Bajtlika, A. i K. Byczuków, S. i Z. Suwaldów, E. Wójtowicz. Na stronach 6–9 wykorzystano tekst Weroniki Śliwy z podręcznika „Odkryć fizykę”.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl, Centrum Kontaktów tel. 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: Drukarnia Orthdruk

Spis treści

O czym jest podręcznik	4
----------------------------------	---

1. Wprowadzenie

1.1. Przedmiot i metody badań fizyki	6
1.2. Pomiary i jednostki	16
1.3. Wstęp do analizy danych pomiarowych	20
1.4. Opisywanie zależności między wielkościami	26

Analiza tekstu. Komu przyda się wiedza z fizyki	35
--	----

2. Ruch prostoliniowy

2.1. Jak opisać położenie ciała	40
2.2. Opis ruchu prostoliniowego	45
2.3. Prędkość w ruchu prostoliniowym	50
2.4. Ruch jednostajny prostoliniowy	55
2.5. Ruch prostoliniowy zmienny	62
2.6. Przyspieszenie w ruchu zmiennym	66
2.7. Położenie w ruchu jednostajnie zmiennym	73

Analiza tekstu. Przyspieszenie pojazdów	81
--	----

Wiesz, umiesz, zdasz	84
---------------------------------------	----

3. Ruch krzywoliniowy

3.1. Ruch krzywoliniowy	92
3.2. Rzut poziomy	100
3.3. Prędkość w różnych układach odniesienia	107
3.4. Ruch po okręgu	111
3.5. Przyspieszenie dośrodkowe	115

Projekt. Analiza ruchu za pomocą kamery	119
--	-----

Wiesz, umiesz, zdasz	120
---------------------------------------	-----

4. Ruch i siły

4.1. Oddziaływania	128
4.2. Dodawanie sił i rozkładanie ich na składowe	133
4.3. Pierwsza i druga zasada dynamiki	140
4.4. Trzecia zasada dynamiki	146
4.5. Siła tarcia	150

4.6. Siła dośrodkowa	158
--------------------------------	-----

4.7. Siły bezwładności	167
----------------------------------	-----

Analiza tekstu. Czy można biegać po wodzie	178
---	-----

Wiesz, umiesz, zdasz	180
---------------------------------------	-----

5. Energia i pęd

5.1. Praca i moc jako wielkości fizyczne	188
--	-----

5.2. Pojęcie energii. Energia potencjalna grawitacji	193
--	-----

5.3. Energia kinetyczna. Zasada zachowania energii	199
--	-----

5.4. Energia potencjalna sprężystości	205
---	-----

5.5. Pęd. Zasada zachowania pędu	211
--	-----

5.6. Zderzenia sprężyste i niesprężyste	216
---	-----

Analiza tekstu. Fizyk ogląda TV	223
--	-----

Wiesz, umiesz, zdasz	225
---------------------------------------	-----

6. Bryła sztywna

6.1. Ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej	234
---	-----

6.2. Moment siły	243
----------------------------	-----

6.3. Środek ciężkości i energia potencjalna bryły sztywnej	252
--	-----

6.4. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym	258
---	-----

6.5. Druga zasada dynamiki w ruchu obrotowym	264
--	-----

6.6. Moment pędu	269
----------------------------	-----

Projekt. Wahadło Oberbecka	279
---	-----

Wiesz, umiesz, zdasz	280
---------------------------------------	-----

Tabele	286
-------------------------	-----

Spis dodatków matematycznych	287
---	-----

Spis doświadczeń obowiązkowych	288
---	-----

Spis infografik	288
----------------------------------	-----

Odpowiedzi i wskazówki do wybranych zadań	289
--	-----

Indeks	294
-------------------------	-----

Spis działów w pozostałych częściach	295
---	-----

O czym jest podręcznik

W podręczniku *Zrozumieć fizykę 1* znajdziesz ważne i ciekawe informacje dotyczące ruchu, sił czy energii. Dzięki tym wiadomościom zrozumiesz wiele zjawisk z otaczającego cię świata i sprawnie przejdziesz do kolejnych działów fizyki.

Czy wiesz, że siły zawsze działają parami?

Dlaczego wirujący bączek odchylony od pionu się nie przewraca?

Czy możemy przewidzieć zachowanie zderzających się ciał?

Czemu służą poszczególne elementy podręcznika

Przypomnij sobie

Łatwo zorientujesz się, co powinieneś wiedzieć z wcześniejszej edukacji.

Po tej lekcji powinieneś

Podsumowanie tematu podpowie ci, które treści są w nim najważniejsze.

$$\frac{y}{x} = a = \text{const}$$

Dzięki czytelnym wyróżnieniom łatwo odnajdziesz wzory, definicje i ważne stwierdzenia.

Ciężar ciała o masie ...

Komentarze ułatwią ci zrozumienie informacji z tekstu głównego.

Dodatek matematyczny

Dodatki matematyczne pomogą ci opanować lub przypomnieć sobie niezbędne umiejętności i wiadomości z matematyki.

■ Przykład

Przykłady umożliwią ci prześledzenie toku rozumowania podczas rozwiązywania zadań.

Pytania i zadania

Wykonanie poleceń i zadań na końcu tematu pozwoli ci utrwalić zdobytą wiedzę i umiejętności.

Doświadczenie 1

Doświadczenie obowiązkowe

Czytelnie opisane i zilustrowane doświadczenia ułatwią ci przeprowadzanie i analizowanie eksperymentów. Doświadczenia obowiązkowe zostały wyraźnie oznaczone.

A to ciekawe

Dzięki ciekawostkom dowiesz się interesujących faktów związanych z lekcją.

Naukowcy niepewność pomiaru wyznaczają ...

Treści wykraczające poza podstawę programową oznaczyliśmy w wyraźny sposób.



WIESZ, UMIESZ, ZDASZ

Podsumowanie

Na tych stronach znajdziesz najważniejsze wiadomości z danego działu.

Sposób na zadanie

Wskazówki i podpowiedzi ułatwią ci rozwiązywanie różnych typów zadań.

Zadania powtórzeniowe

Dzięki tym zadaniom sprawdzisz stopień opanowania umiejętności i wiadomości z danego działu.



1 Wprowadzenie

1. Przedmiot i metody badań fizyki
2. Pomiary i jednostki
3. Wstęp do analizy danych pomiarowych
4. Opisywanie zależności między wielkościami

1.1. Przedmiot i metody badań fizyki

■ Poznaj świat fizyki i astronomii

Rozpoczynamy naszą naukową wędrówkę do świata fizyki i astronomii. To ta sama rzeczywistość, w której wszyscy żyjemy – tyle, że obserwowana w różnych skalach i bardziej wnikliwie, niż czynimy to na co dzień. Postaramy się, byś dostrzegł zachodzące w niej zjawiska i lepiej je zrozumiał. Na początek wzniesmy się wysoko nad Ziemię i przyjrzymy kosmosowi z całym jego ogromem. Co nas czeka w tej podróży?



Rys. 1.1. Podróż wzdłuż równika Ziemi z prędkością $140 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ trwałaby prawie 12 dni bez przerwy

■ Oddalamy się od Ziemi

Już po wzniesieniu się na wysokość kilkuset kilometrów, gdzie znajduje się wiele sztucznych satelitów, zauważymy, że **Ziemia** ma kształt zbliżony do kuli. Jej średnica to prawie 13 000 km.

Wokół Ziemi w odległości niemal 400 000 km krąży **Księżyc**, którego średnica jest niemal cztery razy mniejsza od średnicy naszej planety. Odległość tego naturalnego satelity od Ziemi jest tak duża, że gdyby na Księżyc można było pojechać autostradą, taka podróż samochodem jadącym bez przerwy ze stałą prędkością $140 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ trwałaby 4 miesiące! Dla porównania: światło z Ziemi do Księżyca dociera w niewiele ponad sekundę.

Wędrujmy dalej. Gdy będziemy kontynuować oddalanie się od Ziemi, zobaczymy olbrzymie i rozgrzane **Słońce**. Ta gazowa kula ma średnicę ponad sto razy większą od średnicy Ziemi – 1 400 000 km (1,4 mln km). W pobliżu Słońca dostrzeżemy krążące wokół niego planety.

Odległość od Ziemi do Słońca wynosi aż 150 mln km. Samochodem pokonywalibyśmy ją przez 120 lat! Tymczasem światło przebywa tę odległość w czasie nieco ponad 8 minut, a do najdalszych planet **Układu Słonecznego** dociera już po kilku godzinach.

Gdybyśmy znaleźli się w pobliżu najdalszej z planet – Neptuna, do którego dojechalibyśmy samochodem po upływie około czterech tysięcy lat, stanęlibyśmy dopiero u progu kosmosu.

Zanim dotrzemy do następnego ciekawego obiektu, czeka nas długa droga. Gwiazda Proxima Centauri, choć położona najbliżej Słońca, znajduje się tak daleko, że jej światło biegnie do nas przeszło 4 lata. Mówimy, że Proxima Centauri znajduje się w odległości ponad 4 lat świetlnych od Ziemi.

Prędkość światła

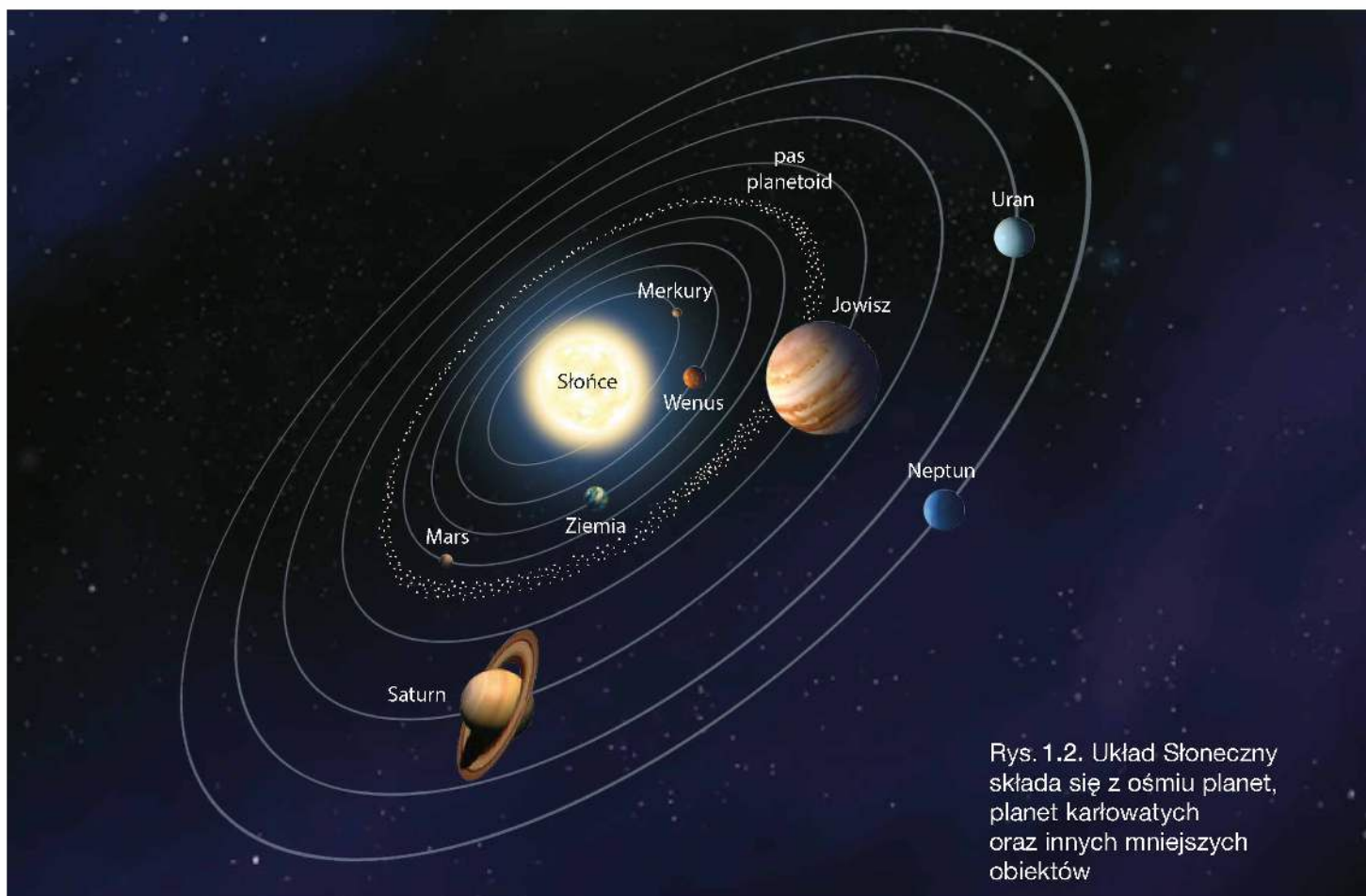
w próżni to $300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$,
czyli $3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Rok świetlny

oznaczamy ly od angielskiego *light year*.

■ Kosmiczne odległości

Nawet gwiazdy położone najbliżej Słońca znajdują się tak daleko, że odległości do nich podaje się nie w kilometrach, ale w **latach świetlnych**.



Rys. 1.2. Układ Słoneczny składa się z ośmiu planet, planet karłowatych oraz innych mniejszych obiektów

Jeden rok świetlny to odległość, jaką światło przebywa w ciągu roku.

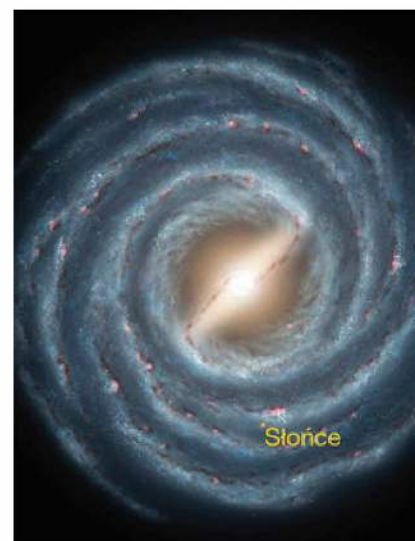
Ta odległość to 9461 mld km (prawie 10 bln km). Światło może ją przebyć w ciągu roku, ponieważ porusza się z prędkością około $300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ (około $1 \text{ mld } \frac{\text{km}}{\text{h}}$).

$$1 \text{ ly} = 9461 \text{ mld km} \approx 10^{16} \text{ m}$$

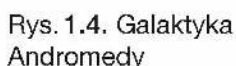
Od Syriusza – najjaśniejszej gwiazdy widocznej na polskim niebie – dzieli nas odległość niemal 9 lat świetlnych.

Galaktyka

Oddalmy się od Słońca jeszcze bardziej, aby zobaczyć cały olbrzymi układ gwiazd, w którym się ono znajduje – **Galaktykę**, czyli Drogę Mleczną. Tworzy ją ponad 200 miliardów gwiazd. Jej główna część ma kształt dysku o średnicy niemal 100 tys. lat świetlnych. Wzdłuż średnicy Galaktyki zmieściłoby się około 100 milionów Układów Słonecznych (licząc do orbity Neptuna) ustawionych jeden za drugim. Słońce leży mniej więcej w połowie odległości od centrum Drogi Mlecznej do jej krańców (patrz rys. 1.3).



Rys. 1.3. Tak wyglądałaby Galaktyka z odległości kilkuset tysięcy lat świetlnych



Zwróć uwagę na
pisownię:
Droga Mleczna to
inaczej **Galaktyka**.
We Wszechświecie
jest wiele **galaktyk**.

W pobliżu Galaktyki możemy dostrzec inne podobne do niej obiekty. Są to małe galaktyki: Wielki i Mały Obłok Magellana (leżące niecałe 200 tys lat świetlnych od Ziemi) oraz nieco większa od Drogi Mlecznej Galaktyka Andromedy (odległa o 2 mln lat świetlnych, patrz zdjęcie powyżej). Obejmijmy teraz wzrokiem obszar kilkuset milionów lat świetlnych. Widzimy, że galaktyki zwykle nie poruszają się w kosmosie samotnie, lecz tworzą grupy i gromady. W wielu miejscach pomiędzy gromadami znajdują się pojedyncze galaktyki, łączące je w gigantyczną kosmiczną pajęczynę. Światło z najdalszych obiektów, które dziś obserwujemy z Ziemi, potrzebowało około 13 mld lat, aby do niej dotrzeć.

Dodatek matematyczny

■ Zapis liczb w notacji wykładniczej

Na lekcjach fizyki spotkasz liczby bardzo duże (jak np. masa Ziemi M_Z) i bardzo małe (jak długość bakterii l):

$$M_7 = 5\,970\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,\text{kg} \quad l = 0,000002\,\text{m}$$

Podczas działań na takich liczbach bardzo łatwo pomylić się w liczeniu zer lub miejsc po przecinku. Dlatego stosujemy zapis zwany **notacją wykładniczą**. Liczbę przedstawiamy w postaci:

(liczba między 1 a 10) · (potęga dziesiątki)

Na przykład:

$$\begin{aligned} M_Z &= 5\,970\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,\text{kg} = \\ &= 5,97 \cdot 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,\text{kg} = 5,97 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \\ l &= 0,000002\,\text{m} = 2 \cdot 0,000001\,\text{m} = 2 \cdot 10^{-6}\,\text{m} \end{aligned}$$

Gdy wykonujemy działania na zapisanych tak liczbach, **stosujemy prawa działań na potęgach**.

$$10^a \cdot 10^b = 10^{a+b} \quad \frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b} \quad (10^a)^b = 10^{a \cdot b} \quad 10^{-a} = \frac{1}{10^a}$$

W tym miejscu kończy się nasza podróż ku gwiazdom. Nie mniej ciekawa okazuje się podróż w głąb zwykłej kropli wody. Przyjrzyjmy się jej bliżej. Na początek użyjmy lupy, a później coraz dokładniejszych mikroskopów.

■ W głębi kropli wody

Na pierwszy rzut oka w kropli wody ze stawu nie widać nic ciekawego. Za pomocą lupy możemy jednak dokładniej obejrzeć pływające w niej drobne owady i fragmenty roślin.

Przez mikroskop zobaczymy bakterie – rozmiary większości z nich wyraża się w mikrometrach ($1\ \mu\text{m} = 10^{-6}\ \text{m}$). Jeśli powiększymy obraz jeszcze bardziej, staną się dla nas widoczne również wirusy. Rozmiar wirusa to około $0,1\ \mu\text{m} = 10^{-7}\ \text{m}$. Do oglądania wirusów nie wystarczy już zwykły mikroskop. Potrzebny będzie precyzyjniejszy przyrząd.

■ Cząsteczki i atomy

Po kolejnym powiększeniu zobaczymy kilkaset razy mniejsze od wirusów pojedyncze atomy wodoru i tlenu, składające się na cząsteczkę wody. Każdy z tych atomów jest zbudowany z jądra i otaczających go elektronów (w atomie wodoru elektron jest tylko jeden). Jądro jest sto tysięcy razy mniejsze od całego atomu. Wyobraź sobie, że gdyby jądro atomu zostało powiększone do rozmiarów piłki futbolowej, cały atom miałby około 30 km średnicy.

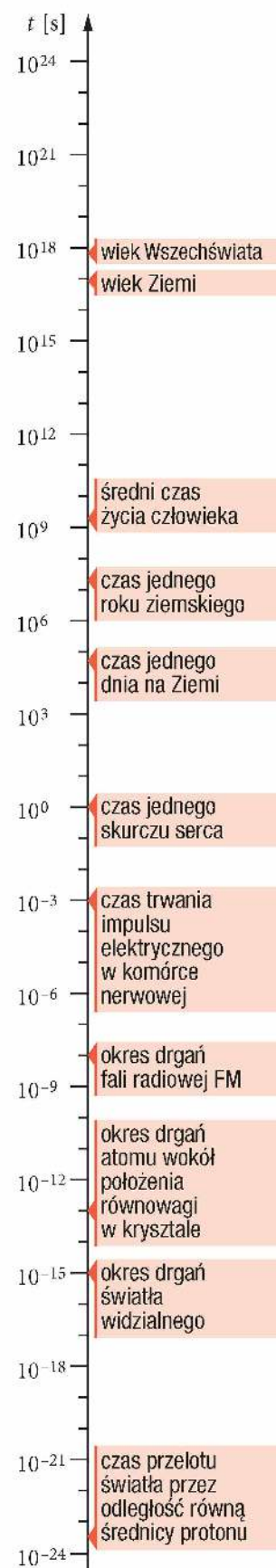
A co znajduje się w jądrach atomów składających się na cząsteczkę wody? Jądrem wodoru jest pojedyncza cząstka – proton. Jądro atomu tlenu składa się z 8 protonów i 8 neutronów. Proton jest cząstką naładowaną elektrycznie dodatnio, a neutron cząstką nienaładowaną.

W ten sposób kończy się nasza wędrówka po Wszechświecie, w czasie której zbliżyliśmy się zarówno do obiektów ogromnych i bardzo odległych, jak i do tych najmniejszych. Wszystkie one stanowią przedmiot zainteresowania fizyki i astronomii.

■ Jak fizycy badają świat

Fizyka jest nauką wyjątkową. W żadnej innej dziedzinie naukowcy nie zajmują się tak zróżnicowanymi wielkościami, zarówno jeśli chodzi o rozmiary i masy badanych obiektów (patrz s. 10–11), jak i o czasy trwania zjawisk (rys. 1.5). Na podstawie badań uczeni formułują prawa oraz przewidują wyniki doświadczeń. Na czym jednak polega to badanie?

Fizyka jest nauką ścisłą. Przez wiele wieków fizycy nie tylko odkrywali nowe prawa przyrody, lecz także doskonalili samą metodę badań. Opiera się ona na połączeniu **doświadczenia** i **modelowania matematycznego**.

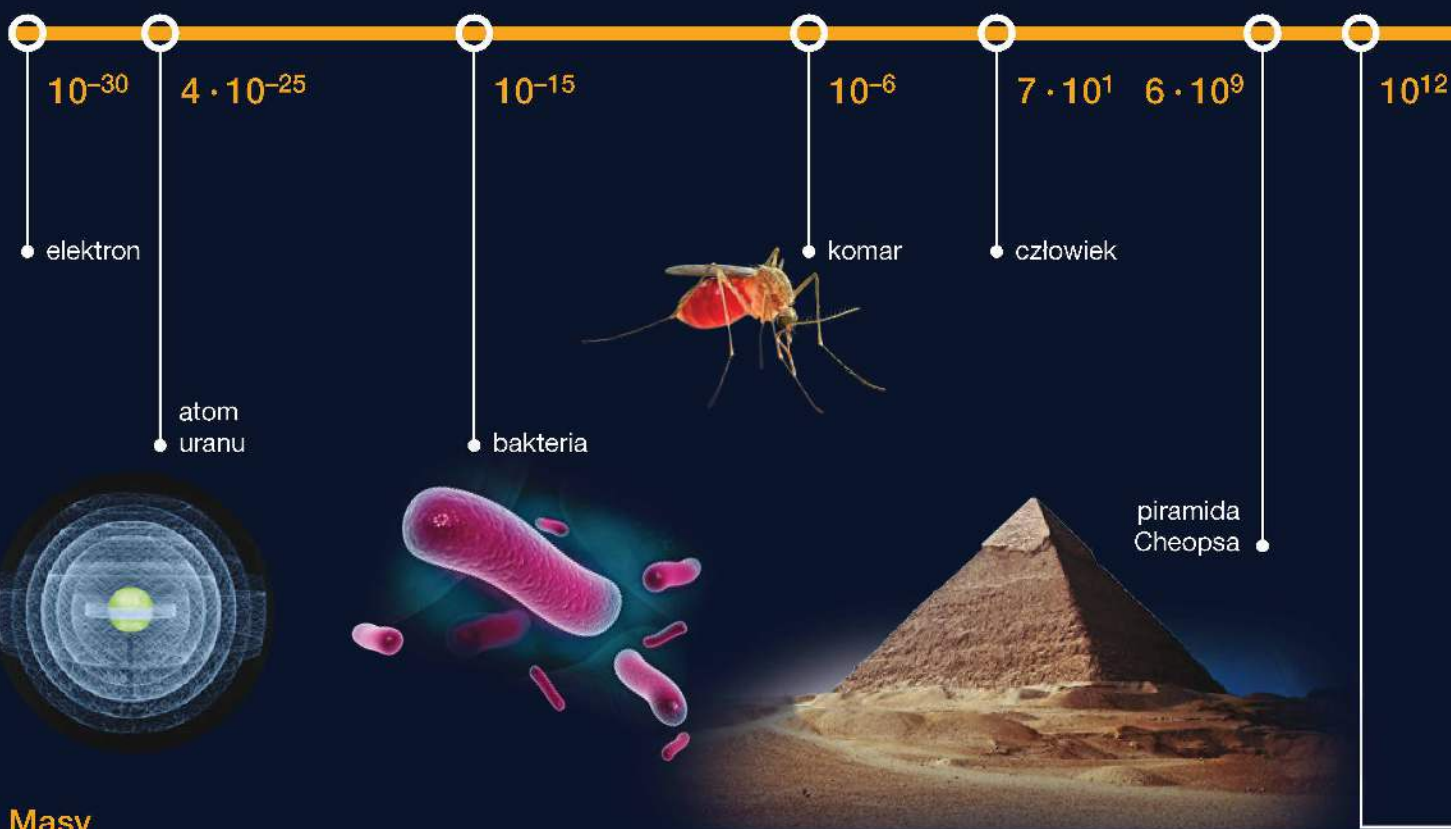
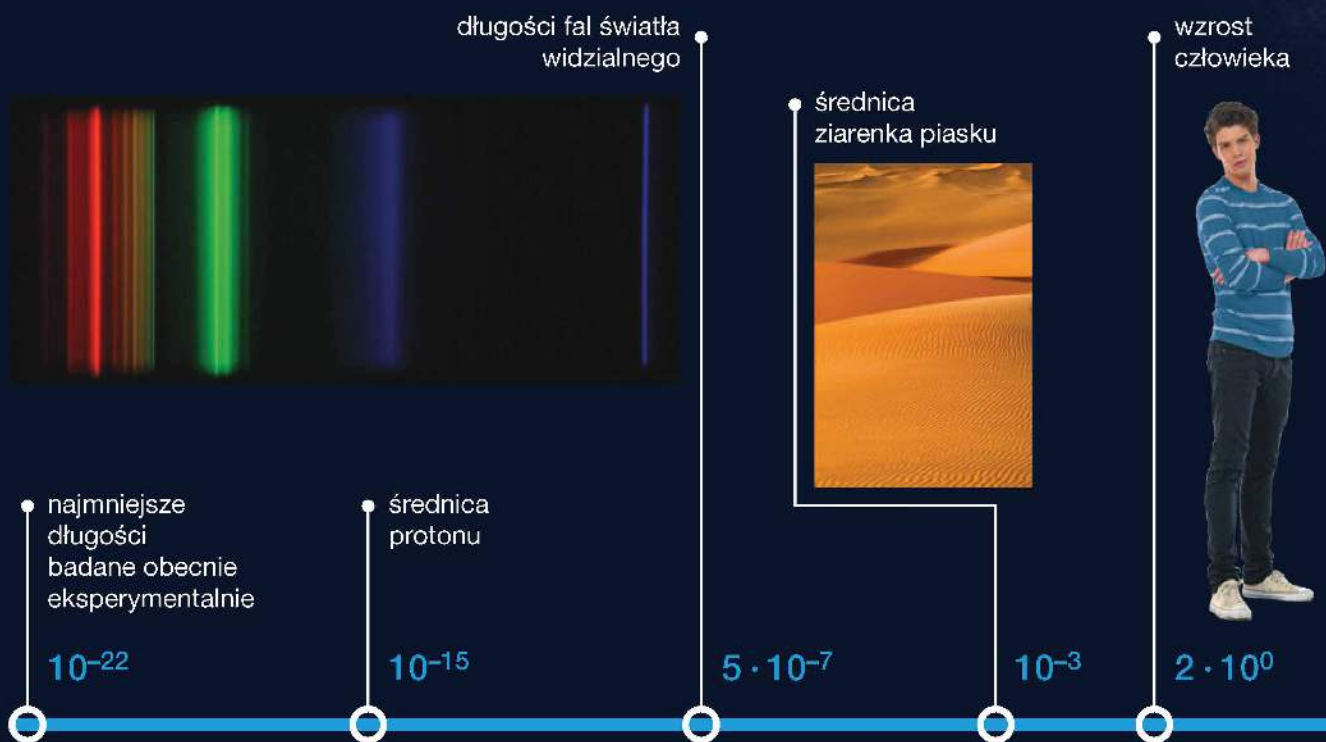


Rys. 1.5. Zestawienie czasu trwania wybranych zjawisk

Rozmiary i masy

Każdy z nas posługuje się określeniami: *wiekszy* lub *mniejszy*, *odległy* lub *bliski*. Zobaczmy, co w otaczającym nas świecie naprawdę na nie zasługuje.

Rozmiary i odległości



Masy



średnica Ziemi

$1,3 \cdot 10^7$

średnica Układu Słonecznego

10^{13}

średnica Drogi Mlecznej

10^{21}

odległość do najdalszego obserwowanego obiektu

$1,3 \cdot 10^{26}$ [m]

$6 \cdot 10^{24}$

Ziemia

$6 \cdot 10^{26}$

10^{42}

Droga Mleczna

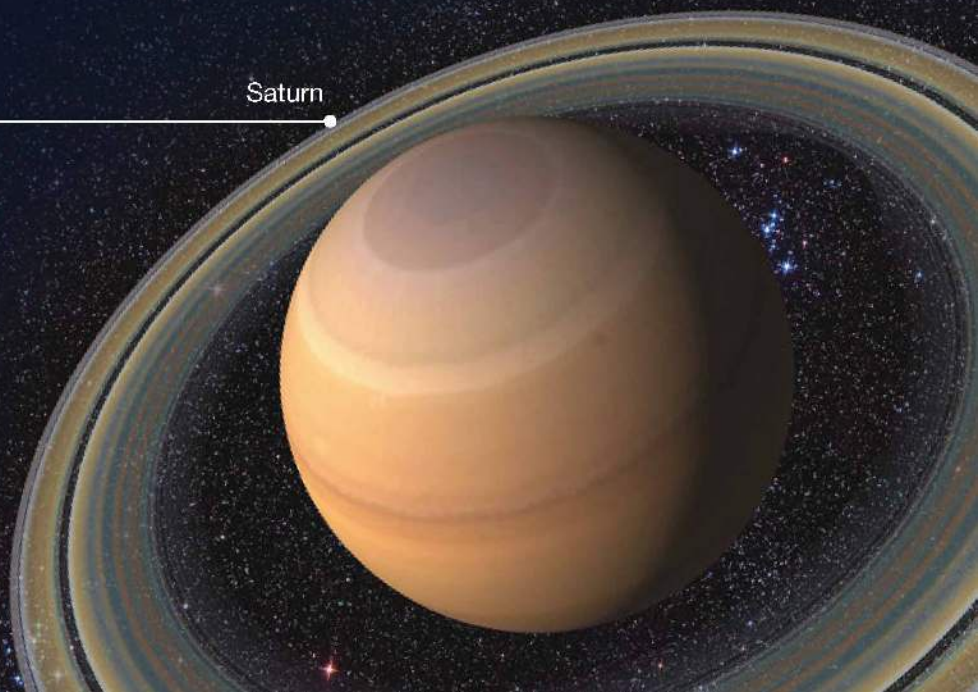
10^{53} [kg]

znany Wszechświat
(bez tzw. ciemnej materii i energii)

Saturn



duża
góra lodowa



■ Modelowanie matematyczne

Modelowanie matematyczne polega na opisywaniu rzeczywistości za pomocą pojęć i równań matematycznych.

Aby model matematyczny był czytelny i użyteczny, przeprowadzamy uproszczenia i uwzględniamy jedynie elementy najistotniejsze dla przebiegu badanych zjawisk. Na przykład, jeśli chcemy przedstawić na komputerze ruch samolotów w określonej przestrzeni powietrznej tak, aby był on czytelny dla kontrolera ruchu lotniczego, pominiemy kształt samolotów, liczbę pasażerów na pokładzie, liczbę silników itd. Dany samolot stanie się punktem na ekranie, a tor jego ruchu będzie przedstawiać linia.

Sytuacja, z którą mamy tutaj do czynienia, jest właśnie przykładem modelowania: od rzeczywistości, czyli statków powietrznych poruszających się w określonej przestrzeni powietrznej, przeszliśmy do punktów i linii zaznaczonych w określonym układzie współrzędnych. Komputer wyznacza położenia tych punktów w czasie oraz kształt linii, po których się poruszają, rozwiązując równania matematyczne. W wyniku tych obliczeń ostatecznie podaje informację, że określony punkt matematyczny w danej chwili znajduje się w określonym miejscu obranego układu współrzędnych. Ale co taki model ma wspólnego z rzeczywistym położeniem lecącego samolotu? Skąd mamy pewność, że w danej chwili położeniu punktu matematycznego odpowiada rzeczywiste położenie konkretnego samolotu w przestrzeni powietrznej?

Odpowiedź jest prosta – abyśmy mieli tę pewność, komputer musi rozwiązywać właściwe równania, do których podstawione zostaną prawdziwe informacje o początkowym położeniu i o prędkości samolotu. Dlatego też w naukach ścisłych doświadczenie jest równie ważne jak modelowanie matematyczne.

■ Fizyka a inne dziedziny nauki

Wśród nauk przyrodniczych fizyka zajmuje szczególne miejsce – inne dziedziny przyrodnicze korzystają z jej osiągnięć, podczas gdy w drugą stronę taka relacja nie zachodzi. Jako przykład rozważmy **biologa**, który chce wyjaśnić, dlaczego zdolność pocenia się pozwala na długotrwały wysiłek fizyczny. Musi on wiedzieć, że parowanie cieczy wymaga dostarczenia dużej ilości energii, dlatego parujący pot pozwala odprowadzić nadmiar ciepła powstającego podczas pracy mięśni. Natomiast fizyk prowadzący badania nad parowaniem cieczy nie musi rozważać mechanizmów funkcjonowania żywych organizmów.

Fizyka ma również duże znaczenie dla **chemii**. Do początku XX w. chemicy badali reakcje zachodzące pomiędzy substancjami, ale nie byli

w stanie wyjaśnić, dlaczego te reakcje przebiegają w taki, a nie inny sposób. Stało się to możliwe dopiero po odkryciu praw fizyki obowiązujących w mikroświecie, czyli w skali pojedynczych atomów i ich części.

Prawa fizyczne są podstawowymi prawami w naukach przyrodniczych – wykorzystujemy je we wszystkich innych dziedzinach tych nauk.

Szczególnie blisko z fizyką jest związana **astronomia**. W kosmosie obowiązują te same prawa fizyki, co na Ziemi, więc astronomowie muszą je doskonale znać. Jednocześnie kosmos stanowi niezwykle laboratorium, w którym te prawa można sprawdzać w niespotykanych na Ziemi warunkach, na przykład w bardzo wysokich temperaturach (jakie panują choćby we wnętrzu gwiazd) czy w pobliżu ogromnych mas (takich jak czarne dziury).

Fizyka jest też podstawą **techniki**. W odróżnieniu od dawnych rzemieślników, którzy nowe metody obróbki materiałów odkrywali metodą prób i błędów, a następnie przekazywali swoim potomkom, współcześni inżynierowie konstruują urządzenia i budowle, z góry wiedząc – na podstawie praw fizyki – jakie będą ich własności.

Maszynę parową można było zbudować dzięki codziennym obserwacjom, ale do jej udoskonalenia była potrzebna wiedza z fizyki. Również żadne urządzenia elektroniczne nie mogłyby powstać, gdyby wcześniej fizycy nie odkryli praw rządzących elektrycznością i magnetyzmem. Dzięki znajomości praw fizyki architekci mogą projektować pozornie niemożliwe do wzniesienia budynki (patrz rys. 1.6).



Rys. 1.6. Centrum Biznesu w Pekinie – budynek, który na pierwszy rzut oka wydaje się niemożliwy do realizacji

Warto też pamiętać, że podział nauk na fizykę, chemię, biologię itd. wynika głównie z podziału zadań pomiędzy uczonymi, a nie z jakichś fundamentalnych własności samej przyrody. Wiele ważnych badań naukowych łączy poszczególne dziedziny, a biofizyka, geofizyka czy fizyka medyczna są już odrębnymi i szybko rozwijającymi się specjalnościami.

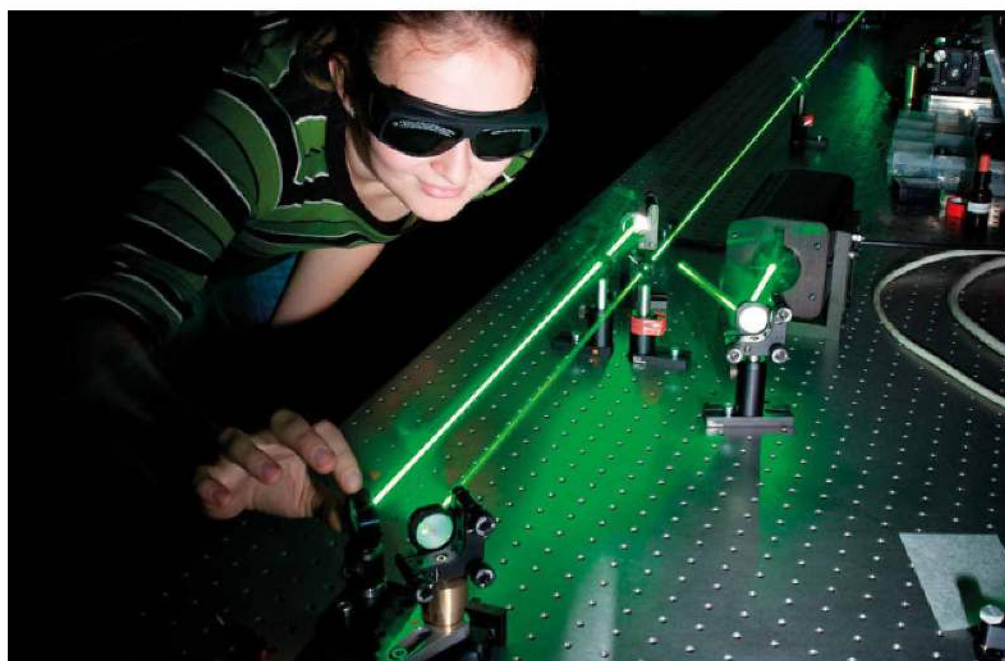
■ Rola doświadczeń i modeli w fizyce

Poprzez wielokrotne eksperymenty i obserwacje staramy się sprawdzić poprawność modeli matematycznych i określić zakres ich stosowności. Model samolotu jako punktu jest na ogół dobry, gdy interesuje nas, ile godzin będzie trwał lot, ale zupełnie zawodzi, gdy chcemy się dowiedzieć, jakie siły działają na skrzydła samolotu.

Doświadczenie i modelowanie matematyczne są fundamentem współczesnej fizyki i innych nauk ścisłych.

Stanowią one niejako dwie strony medalu, uzupełniają się. Prowadzenie doświadczeń z pominięciem modelowania matematycznego przypomina kolekcjonowanie znaczków pocztowych lub innych przedmiotów – gromadzimy fakty, z których nic nie wynika. Natomiast samo modelowanie, bez przeprowadzenia doświadczenia, jest badaniem hipotez matematycznych, które mogą być logicznie poprawne, ale nie muszą się odnosić do żadnej rzeczywistości fizycznej.

Teoria i doświadczenie w naukach ścisłych cały czas uzupełniają się i inspirują nawzajem. Żadne z tych ujęć badawczych nie odgrywa dominującej roli. Czasem doświadczenie podpowiada, jak sformułować teorię, kiedy



Rys. 1.7. Doświadczenia stanowią fundament badań fizycznych

indziej zaś to teoria uzmysławia, co i w jaki sposób eksperymentalnie zbadać, a także pozwala zrozumieć wyniki doświadczenia. Przykłady na to znajdziemy w dalszych rozdziałach tego podręcznika.

Po tej lekcji powinieneś

- orientować się w rzędach wielkości rozmiarów obiektów, którymi zajmuje się fizyka;
- rozumieć, że fizyka opiera się na prowadzeniu doświadczeń oraz modelowaniu matematycznym obserwowanych zjawisk i przedmiotów;
- wiedzieć, co to jest rok świetlny i stosować tę jednostkę.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



1. Uporządkuj wymienione obiekty w kolejności od najmniejszego do największego.

atom • bakteria • chomik • cząsteczka
 • Galaktyka • Księżyc • lotniskowiec
 • proton • słoń • Słońce • wirus
 • Układ Słoneczny • Ziemia

2. Uczni wyposażyli wysyłane na Marsa roboty Spirit i Opportunity w urządzenia, które sterowały lądowaniem sond na powierzchni planety. Po wysłaniu sond z niecierpliwością oczekiwali na sygnał radiowy, że lądowanie się powiodło. Jak myślisz, dlaczego sondy musiały radzić sobie same, a nie były sekunda po sekundzie sterowane z Ziemi?
3. Gdyby jądro atomowe miało rozmiar ziarnka maku (czyli około 1 mm), jaka byłaby wielkość całego atomu?
4. Najjaśniejsza – poza Słońcem – gwiazda na ziemskim niebie to Syriusz. Jest on położony w odległości 8,6 ly od Ziemi. Ile to kilometrów?

5. Wyobraź sobie model Układu Słonecznego w skali 1 : 1 000 000 000 i odpowiedz na pytania.

- a) Ilu kilometrom odpowiadałby w tej skali odcinek o długości 1 m, a ilu – odcinek o długości 1 cm?
- b) Jaką średnicę miałyby w tym modelu Słońce, a jaką miałyby Ziemia?
- c) Ile wynosiłyby odległości między Ziemią i Słońcem oraz Ziemią i Księżycem?

6. Wyobraź sobie model Galaktyki, w którym jej główna część ma średnicę 100 m, a następnie odpowiedz na pytania.

- a) Ile wynosiłaby rzeczywista odległość między dwiema gwiazdami, które w tym modelu dzieliłaby odległość 1 m? Wyraż ją w latach świetlnych.
- b) W jakiej odległości od środka Galaktyki znajdowałoby się w tym modelu Słońce?
- c) W jakiej odległości od Słońca znajdowałaby się Ziemia?

1.2. Pomiary i jednostki

Przypomnij sobie

- Wielkości fizyczne służą do ilościowego opisu cech ciał i zjawisk. Wielkościami fizycznymi są np. masa, długość, temperatura, czas.
- Wartości wielkości fizycznych podaje się wraz z ich jednostkami.
- Jednostkę można zapisać z przedrostkiem oznaczającym jej określoną wielokrotność lub podwielokrotność.
- Układ SI to międzynarodowy układ jednostek miar.

■ Podstawowe wielkości mierzone w badaniach ruchu

Na najbliższych lekcjach będziemy się zajmować opisem ruchów obserwowanych w przyrodzie. Warto więc odpowiedzieć sobie na pytanie, co należy zmierzyć, aby ilościowo opisać ruch ciała.

Okazuje się, że wszystkie wielkości służące do opisu ruchu można zdefiniować za pomocą dwóch wielkości fizycznych: długości i czasu. Jeżeli dodatkowo chcemy opisać przyczynę ruchu, będzie nam potrzebna również masa.



Rys. 1.8. Klepsydra to prosty wzorec czasu

Długość: Wielkość ta opisuje, jak coś jest duże, jak daleko się znajduje, jaką odległość przebyło itd. Pomiar długości polega na porównaniu odległości pomiędzy dwoma wybranymi punktami z przyjętym wzorcem długości. Choć wyjaśnienie to brzmi bardzo poważnie, metodę tę znasz i stosujesz od dawna, co najmniej od czasu, gdy nauczyłeś się posługiwać linijką z podziałką. Aby określić długość ołówka, musimy tak naprawdę odpowiedzieć na pytanie, ile razy jest ona większa od odcinka o określonej długości, np. 1 mm lub 1 cm.



Rys. 1.9. Na wadze szalkowej masę ważonego ciała porównujemy z masą wzorca – odważnika

Czas: Wielkość ta opisuje, jak długo coś się dzieje oraz ile wynoszą odstępy między kolejnymi zdarzeniami, np. jak długo spada jabłko z drzewa od chwili oderwania się z gałęzi do chwili dotknięcia ziemi. Ten pomiar także polega na porównaniu czasu przebiegu danego zjawiska ze wzorcem czasu. Wzorcem może być czas potrzebny do przesypania piasku z jednej komory klepsydry do drugiej lub czas jednego wahnięcia wahadła.

Masa: W życiu codziennym masy używamy do określania ilości substancji. W fizyce mamy do czynienia z masą w dwóch różnych sytuacjach. Po pierwsze, masa jest miarą bezwładności ciała, to znaczy określa, na ile trudno jest zmienić prędkość ciała, np. wprowadzić je w ruch lub zatrzymać. Po drugie, masa to wielkość określająca, jak silnie ciało oddziałuje grawitacyjnie z innymi ciałami, czyli między innymi – jak silnie jest przyciągane przez Ziemię. Im większa jest masa ciała, tym silniej jest ono przyciągane przez Ziemię, czyli tym większy jest jego ciężar.

■ Miary wzorcowe i jednostki wielkości mierzalnych

Z punktu widzenia samej nauki nie ma znaczenia, jakie wzorce długości, czasu czy masy przyjmujemy. Jeden naukowiec może porównywać mierzone masy z masą jajka przepiórki, drugi natomiast z masą swojego ciała. Z praktycznego punktu widzenia takie wybory wzorców są jednak bardzo niewygodne i w zasadzie bezużyteczne. Masa jajka przepiórki maleje w czasie, gdyż jajko wysycha, a masa badacza może zależeć od obfitości ostatniego obiadu. Co więcej, naukowcy nie mogliby porównać wyników swoich badań, jeśli nie wymieniliby się używanymi wzorcami. W życiu codziennym zagadnienie to jest równie ważne. Płacąc w sklepie za daną ilość towaru, np. kilogram jabłek, chcielibyśmy mieć pewność, że gdy przyniesiemy zakupy do domu, waga kuchenna wskaże kilogram. W skrajnych przypadkach od dokładności przyjętych miar i tego, czy operujemy tymi samymi wzorcami jednostek, zależeć może ludzkie życie (patrz ciekawostka poniżej).

■ Układ SI

Obecnie we wszystkich państwach, z wyjątkiem Stanów Zjednoczonych, Liberii i Birmy, oficjalnie używany jest **międzynarodowy układ jednostek miar**, nazywany w skrócie **układem SI** (od francuskiego: *Système International d'Unités*, czyt. sistem enternasjonal djunit). W niektórych krajach, jak Wielka Brytania, mimo oficjalnego przyjęcia układu SI, na co dzień często używa się tradycyjnych jednostek (np. mil, stóp, funtów). **Jednostką czasu** w układzie SI jest **sekunda**, oznaczana literą s. Sekundę definiujemy jako 9 192 631 770 okresów fali elektromagnetycznej emitowanej w określonych warunkach przez atom cezu. Ponieważ uważamy, że we Wszechświecie wszystkie atomy cezu (dokładniej: tego samego izotopu znajdującego się w tym samym stanie) są identyczne, taka definicja sekundy pozwala dokładnie odtworzyć długość jej trwania w dowolnym laboratorium.

Pomiar polega na porównaniu danej wielkości ze wzorcem.

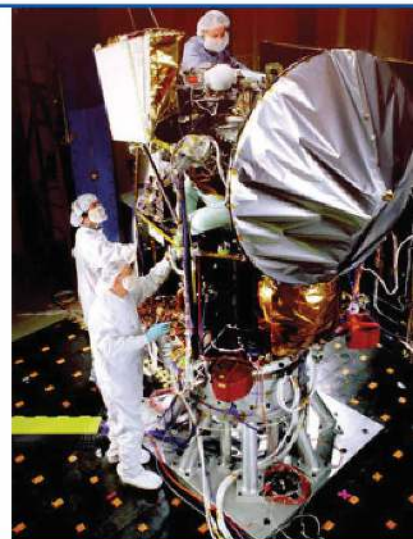


Rys. 1.10. Jednostką czasu jest sekunda

A to ciekawe

W Stanach Zjednoczonych na co dzień używa się tradycyjnych jednostek brytyjskich, ale w badaniach naukowych przyjęto układ SI. Dlatego uczniowie w USA poznają w szkole dwa systemy miar: anglosaski i metryczny (SI). Obliczenia w tym drugim systemie są znacznie prostsze: przeliczanie jednostek sprowadza się do mnożenia i dzielenia przez wielokrotność liczby 10, podczas gdy przeliczanie np. stóp na cale, to mnożenie przez 12, a stóp sześciennych na cale sześciennie – przez 1728.

Mylenie jednostek anglosaskich i metrycznych może prowadzić do poważnych wypadków. W Polsce w 2008 roku stało się ono przyczyną katastrofy samolotu wojskowego CASA. Przez podobny błąd NASA straciła sondę kosmiczną Mars Climate Orbiter (czyt. mars kłajmet orbiter, patrz zdjęcie obok), co kosztowało agencję 125 mln dolarów.





Rys. 1.11. Jednostką długości jest metr
(1 m = 100 cm)



Rys. 1.12. Jednostką masy jest kilogram
(1 kg = 1000 g)

Jednostką długości w układzie SI jest **metr**, oznaczany literą m. Jeden metr to długość, jaką przebywa światło w próżni w czasie $\frac{1}{299\,792\,458}$ sekundy. Jest to precyzyjny sposób określenia wzorca długości, ponieważ w dowolnym miejscu we Wszechświecie światło w próżni zawsze przemieszcza się z taką samą prędkością, niezależnie od tego, co jest źródłem światła (fali elektromagnetycznej) i jaka jest jego częstotliwość (barwa). Definicja metra jest równoważna stwierdzeniu, że prędkość światła w próżni wynosi dokładnie $299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Jednostką masy w układzie SI jest **kilogram**, oznaczany symbolem kg. Ścisła definicja kilograma obowiązująca od maja 2019 roku opiera się na zjawiskach dotyczących wysyłania światła przez atomy. O tych zjawiskach opowiemy dokładniej w klasie czwartej.

Do zdefiniowania na nowo kilograma wykorzystano fakt, że atomy emitują światło w ściśle określonych „porcjach”. Stwierdzenie, że ciało ma masę jednego kilograma, oznacza, że ciało o takiej masie rozpędzone do prędkości $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ma energię kinetyczną dokładnie $\frac{10^{19}}{6,626\,070\,15}$ razy większą niż energia najmniejszej „porcji” światła pomarańczowego o częstotliwości $5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Gdy dowiesz się więcej na temat emisji światła przez atomy, będziemy mogli sformułować tę definicję w sposób bardziej precyzyjny.

■ Stare i nowe definicje

Dawne definicje sekundy, metra i kilograma były znacznie łatwiejsze do zrozumienia. Sekundą nazywaliśmy $\frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60}$ średniej doby słonecznej, wzorcem metra był po prostu pręt z nacięciami, a kilograma (aż do połowy 2019 roku) pewien odważnik (patrz zdjęcie s. 19). Jednak Ziemia obraca się wokół własnej osi coraz wolniej, co oznacza zmniejszanie się długości doby słonecznej. Natomiast wzorcowa linijka i wzorcowy odważnik – mimo wielkiej dbałości o ich stan – podlegają korozji.

A to ciekawe

Nazwy dawnych jednostek długości często nawiązywały do rozmiarów części ciała człowieka. Mieliśmy np. stopę, łokieć, piędź (szerokość dłoni), cal (szerokość kciuka). Nie oznacza to jednak, że każdy kupiec mógł odmierzać towar zgodnie z własną budową ciała i twierdzić, że sprzedał odpowiednią ilość wyrobu. Jednostki zatwierdzone były przez monarchę, a ich wzorce znajdowały się w ratuszach lub innych dostępnych miejscach. Jeśli będziesz kiedyś zwiedzać Gdańsk, zwróć uwagę na zrekonstruowane wzorce jednostek miar umieszczone na fasadzie Ratusza Głównego Miasta (patrz zdjęcie obok).

Problem z jednostkami polegał na ich mnogości. Odmienne miary używano nie tylko w różnych państwach, ale często nawet w różnych częściach jednego kraju.



Współczesne definicje jednostek miar są niezależne od konkretnych ciał fizycznych (nawet tak wielkich jak Ziemia). Dzięki temu ich wartości są niezmiennie.

Nawet gdyby na całym świecie zniszczono zegary, odważniki i linijki, dałoby się je odtworzyć na podstawie definicji z układu SI.

Gdybyśmy zaś nawiązali kontakt z cywilizacją pozaziemską, moglibyśmy wyjaśnić przez radio, jakich jednostek używamy. Nie musielibyśmy do tego celu przysyłać żadnych fizycznych przedmiotów.

■ Jednostki pochodne i wielokrotności jednostek

W układzie SI łącznie mamy siedem jednostek podstawowych, czyli takich, z których można wyprowadzić wszystkie inne jednostki. Trzy z nich omówiliśmy wcześniej w tym temacie, pozostałe to kelwin, amper, mol i kandela (patrz tabela 5 s. 287).

W układzie SI ustalono również nazwy i symbole jednostek krotnych, tworzonych za pomocą przedrostków. Ich oznaczenia podaliśmy w tabeli na końcu podręcznika (s. 286).

Na koniec przypomnijmy, że **prawie wszystkie wielkości fizyczne**, które mierzymy w doświadczeniach lub wyznaczamy ze wzorów, **należy wyrażać w odpowiednich jednostkach**. Zanim więc przystąpimy do ich zapisywania, musimy się zastanowić, w jakich jednostkach opisujemy daną wielkość fizyczną i czy jednostki wynikające z przekształceń matematycznych są właściwe.



Rys. 1.13. Oryginał wzorca masy, który obowiązywał do połowy 2019 roku, jest przechowywany w Międzynarodowym Biurze Miar i Wąg w Sèvres (czyt. sewr) pod Paryżem

Przykładem wielkości fizycznej, która nie ma jednostki, jest powiększenie soczewki. Zapiszemy je np. $p = 5$.

Po tej lekcji powinieneś

- wiedzieć, po co wprowadzono międzynarodowy układ jednostek miar (układ SI);
- znać podstawowe jednostki długości, masy i czasu;
- pamiętać o poprawnym zapisywaniu wyników pomiarów i obliczeń (wraz z jednostkami).

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



1. Jakie podstawowe jednostki układu SI możesz wymienić?
2. Wyraź poniższe wielkości w podstawowych jednostkach układu SI:
a) $2,8 \cdot 10^7$ mm, **b)** 3 h, **c)** $4 \cdot 10^{-5}$ t.
3. Znajdź w dostępnych źródłach informacje o jednostkach masy stosowanych dawniej

w Polsce. Przelicz masę swojego ciała na łuty i skrupuły.

4. Przyspieszenie grawitacyjne ciał na dowolnej planecie obliczamy, korzystając ze wzoru $g = \frac{GM}{R^2}$, gdzie G – stała grawitacji, której jednostką jest $\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$, M – masa planety, R – promień planety. Sprawdź, czy przyspieszenie obliczane z tego wzoru da wynik w $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

1.3. Wstęp do analizy danych pomiarowych

Przypomnij sobie

- Każdy pomiar obarczony jest niepewnością pomiarową.
- W celu zmniejszenia wpływu przypadkowych niedokładności pomiar możemy wykonać wielokrotnie.

■ Niepewność pojedynczego pomiaru

Wykonajmy bardzo prosty pomiar i rozważmy, od czego zależy niepewność jego wyniku.

Doświadczenie 1

1. Zmierz za pomocą linijki długość ołówka. Zapisz wynik pomiaru.
2. Podaj i zapisz niepewność tego pomiaru.



Symbol Δ

to wielka grecka litera delta, odpowiednik naszego D. Używamy jej do określania zmiany i różnicy wielkości.

Być może pamiętasz ze szkoły podstawowej, że nie ma idealnie dokładnych pomiarów.

Wynik każdego pomiaru jest obarczony niepewnością pomiarową.

W przypadku jednokrotnego pomiaru długości ołówka za pomocą linijki możemy przyjąć, że niepewność pomiaru jest równa najmniejszej działce linijki, czyli wynosi 1 mm. Jeśli więc uzyskaliśmy wynik 17,6 cm, to wraz z niepewnością pomiarową zapiszemy go w postaci:

$$l \pm \Delta l = 17,6 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$$

Niepewność pomiaru długości za pomocą linijki wynosi 1 mm, a niepewność pomiaru czasu za pomocą stopera 1 s.

Nie zawsze jednak niepewność pomiarowa związana jest wyłącznie z podziałką przyrządu. Zazwyczaj nakładają się na nią inne czynniki, które niejednokrotnie odgrywają o wiele większą rolę niż sam przyrząd użyty do pomiaru. Na przykład wiele stoperów podaje wynik z dokładnością do 0,01 s, jednak człowiek nie jest w stanie tak szybko nacisnąć przycisku. W tym przypadku niepewność wynika głównie z czasu reakcji osoby prowadzącej doświadczenie. Można oszacować, że niepewność wynosi około 1 s.

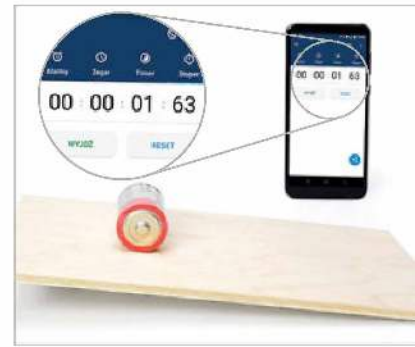
Uwaga. Ponieważ przy zjawiskach zachodzących szybko 1 sekunda to dużo, w wielu doświadczeniach będziemy filmować zjawisko, a następnie analizować film klatka po klatce. Przy 30 klatkach filmu na sekundę odpowiada to dokładności pomiaru czasu rzędu 0,03 s.

Wielokrotne pomiary

W celu zminimalizowania niepewności pomiarowej wyniku pomiary możemy wykonywać wielokrotnie.

Doświadczenie 2

1. Ustaw deskę tak, aby jeden z jej końców znajdował się wyżej niż drugi.
2. Na końcu deski znajdującym się wyżej połóż baterię w kształcie walca lub niewielką kulkę.
3. Za pomocą stopera zmierz czas, w jakim ciało pokonuje długość deski.
4. Wykonaj pomiar 25 razy. Wyniki zapisz w tabeli.



Przedstawimy teraz, jak można opracować wyniki pomiarów wielokrotnych. Posłużymy się wynikami, które uzyskaliśmy po przeprowadzeniu doświadczenia 2. (tabela 1.1). Opracuj w podobny sposób wyniki doświadczenia wykonanego samodzielnie.

Pomiary wykonane były niezależnie i dały różne wyniki. Wykorzystany do pomiaru stoper z telefonu komórkowego pokazywał czas z dokładnością do 0,1 s. Jaki jest rzeczywisty czas staczania się baterii z deski? Odpowiedź na to pytanie jest niemożliwa, bo żaden pomiar nie jest idealnie dokładny. Analiza wyników wielokrotnych pomiarów jedynie z pewnym prawdopodobieństwem pozwala nam określić wynik rzeczywisty. Poniżej przeprowadzimy przykładową analizę wyników doświadczenia. Przedstawione metody można stosować w innych doświadczeniach.

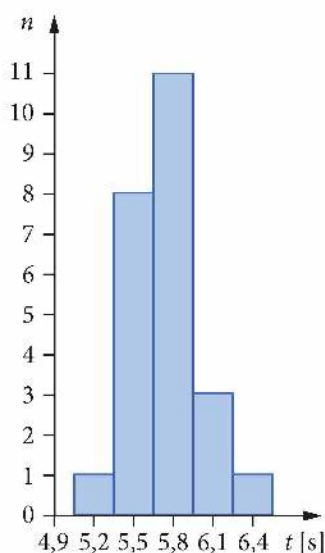
Błędy grube

Widzimy, że otrzymane wyniki mieszczą się w przedziale od 5,1 s do 8,7 s, przy czym większość pomiarów zawiera się pomiędzy 5,1 s a 6,4 s, a jeden pomiar (8,7 s) znacznie różni się od pozostałych. Najwyraźniej w czasie jego wykonywania zaszła okoliczność, która istotnie wpłynęła na wynik. Odtwarzamy przebieg doświadczenia i przypominamy sobie, że w trakcie tego pomiaru wykonująca go osoba kichnęła. W związku z tym uzyskany wówczas wynik należy uznać za obarczony **błędem grubym** i odrzucić. Innymi przyczynami błędów grubych mogą być na przykład źle ustawiony przyrząd pomiarowy czy przestawienie cyfr podczas zapisywania wyniku przez eksperymentatora.

Uwaga. Uznanie pewnych wyników pomiaru za obarczone błędem grubym i w konsekwencji ich odrzucenie z dalszej analizy to czynności wymagające zachowania dużej ostrożności i dokładnego uzasadnienia. Niedopuszczalne jest używanie argumentu, że skoro dany wynik nie pasuje do naszej hipotezy, to na pewno jest obarczony błędem grubym. Eksperymentator musi być obiektywny i przyjąć wyniki doświadczenia takimi, jakie one są, nawet jeśli nie pasują do przyjętej hipotezy. Tak dokonywano największych odkryć w fizyce.

Tabela 1.1

Numer pomiaru	t [s]
1.	6,1
2.	5,6
3.	6,4
4.	5,8
5.	5,9
6.	8,7
7.	5,7
8.	6,0
9.	5,5
10.	5,6
11.	6,0
12.	5,8
13.	5,6
14.	5,8
15.	5,1
16.	5,5
17.	5,9
18.	5,9
19.	5,6
20.	5,7
21.	5,9
22.	5,6
23.	5,7
24.	5,8
25.	5,5



Rys. 1.14. Histogram wyników pomiarów z doświadczenia 2.

Histogram

Wróćmy do analizy doświadczenia 2. Zauważamy, że po odrzuceniu złe wykonanego pomiaru wyniki mieszczą się w przedziale od 5,1 s do 6,4 s. Można więc przypuszczać, że nieznaną rzeczywistą czas zawiera się między tymi wartościami.

Na początek uporządkujemy wyniki. Zgrupujemy dane w przedziały obejmujące trzy kolejne możliwe wartości odczytu, czyli np. 5,1 s, 5,2 s, 5,3 s, następnie 5,4 s, 5,5 s, 5,6 s, itd. Po uporządkowaniu danych zapisujemy je w tabeli 1.2.

Tabela 1.2

Przedział czasu [s]	5,1–5,3	5,4–5,6	5,7–5,9	6,0–6,2	6,3–6,5
Liczba n wyników w przedziale	1	8	11	3	1

Wyniki pomiarów z tabeli 1.2 możemy przedstawić również w formie wykresu słupkowego, czyli histogramu (rys. 1.14). Na osi poziomej oznaczamy odpowiednie przedziały czasu, a na osi pionowej – liczbę naturalną wyrażającą, ile wyników znalazło się w danym przedziale.

Histogram pozwala szybko się zorientować, jakie wyniki zdarzały się najczęściej, a jakie rzadziej. Jak widzimy, w naszym przypadku najwięcej wyników przypadało na przedział 5,7–5,9 s. Można przypuszczać, że w tym przedziale mieści się prawdziwa wartość mierzonych wielkości.

Średnia arytmetyczna

Jak zauważyliśmy, większość wyników pomiarów jest zbliżona do 5,8 s. Gdy obliczymy **średnią arytmetyczną** wszystkich wyników (z wyjątkiem wyniku obciążonego błędem grubym), otrzymamy właśnie 5,8 s. Nie jest to przypadek:

Najbardziej prawdopodobny wynik pomiaru jest równy średniej arytmetycznej poszczególnych wyników.

Niektóre wyniki pomiarów są zaniżone, inne zawyżone, co jest skutkiem **błędów przypadkowych**, które czasem powodują zmniejszenie, a czasem zwiększenie wyniku. Dlatego średnia z pomiarów najlepiej przybliży rzeczywistą wartość mierzonych wielkości.

Niepewność maksymalna

Z naszych obliczeń nie wynika, że czas rzeczywisty staczania się baterii wynosił 5,8 s. Oczekujemy, że znajduje się on w pobliżu tej wartości, w pewnym przedziale. Aby się przekonać, jak szeroki jest ten przedział, obliczamy **niepewność pomiarową**.

Średnia arytmetyczna

$$t_{sr} = \frac{(t_1 + t_2 + \dots + t_{24})}{24} = 5,75 \text{ s} \approx 5,8 \text{ s}$$

Najprostszy sposób jej ustalenia opiera się na założeniu, że niepewność pomiarowa jest równa połowie różnicy między największym a najmniejszym wynikiem pomiaru. Nazywamy ją **niepewnością maksymalną pomiaru** i obliczamy ze wzoru:

$$\Delta t = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{2}$$

gdzie:

$t_{\max}$ – największy wynik pomiaru, $t_{\min}$ – najmniejszy wynik pomiaru.

W naszym przypadku najmniejszy wynik to 5,1 s, a największy 6,4 s, więc połowa różnicy między nimi wynosi 0,65 s. Tak więc $\Delta t = 0,65$ s. Jest to jednak niepewność maksymalna **pojedynczego pomiaru**. Jeśli interesuje nas **niepewność maksymalna średniej**, to obliczoną wcześniej wartość trzeba podzielić przez pierwiastek z liczby pomiarów n :

$$\Delta t_{\text{sr}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{n}} = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{2\sqrt{n}}$$

W naszym przypadku $\Delta t_{\text{sr}} = \frac{0,65 \text{ s}}{\sqrt{24}} \approx 0,133$ s. Pomiaru wykonywaliśmy z dokładnością do 0,1 s, czyli niepewność musimy podać z taką samą dokładnością (przy czym zawsze zaokrąglamy w górę). Otrzymujemy: $\Delta t_{\text{sr}} \approx 0,2$ s. Wynik naszego pomiaru możemy więc zapisać:

$$t = t_{\text{sr}} \pm \Delta t_{\text{sr}} = 5,8 \text{ s} \pm 0,2 \text{ s} \text{ (niepewność maksymalna średniej)}$$

Niepewność maksymalna jest jednak **niedoskonałym sposobem szacowania** niepewności.

■ Niepewność standardowa wartości średniej

Naukowcy wyznaczają niepewność pomiaru nieco inaczej. Przyjęli jednolity sposób określania niepewności, którą nazywa się **niepewnością standardową wartości średniej** i oznacza σ . Oblicza się ją ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} [(t_1 - t_{\text{sr}})^2 + (t_2 - t_{\text{sr}})^2 + \dots + (t_n - t_{\text{sr}})^2]}$$

gdzie:

$t_1, t_2, \dots, t_n$ – wyniki poszczególnych pomiarów, t_{sr} – średnia wszystkich wyników, n – liczba pomiarów.

W przypadku danych z naszego doświadczenia otrzymamy $\sigma \approx 0,05$ s. Gdyby pomiary były wykonywane z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku, moglibyśmy zapisać:

$$t = 5,75 \text{ s} \pm 0,05 \text{ s} \text{ (niepewność standardowa wartości średniej)}$$

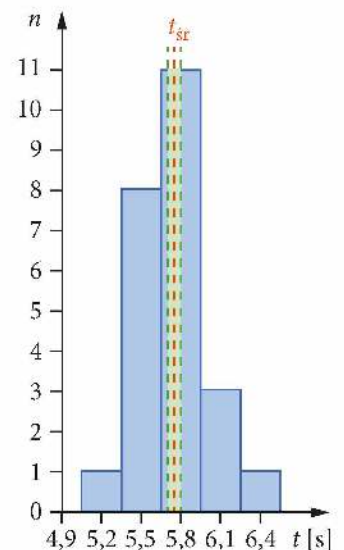
Musimy jednak pamiętać, że zarówno średnia, jak i niepewność σ nie mogą być zapisane z większą dokładnością niż dokładność pojedynczego pomiaru, a więc wynik trzeba zaokrąglić do jednego miejsca po przecinku. A zatem: $t = 5,8 \text{ s} \pm 0,1 \text{ s}$.

Wynik pomiaru

$$t_{\text{sr}} \pm \Delta t_{\text{sr}}$$

gdzie:

t_{sr} – najbardziej prawdopodobna wartość,
 Δt_{sr} – niepewność wartości średniej



Rys. 1.15. Na histogramie zaznaczono na zielono niepewność standardową wartości średniej

Symbol σ to grecka mała litera sigma, odpowiednik naszego s.

■ Błędy przypadkowe i systematyczne

Dotychczas rozważaliśmy błędy przypadkowe, które zmieniają się od pomiaru do pomiaru i czasem powodują zawyżenie, a czasem zaniżenie wyniku. W odróżnieniu od nich **błędy systematyczne** są trudne do wychwycenia gdyż występują przy każdym pomiarze i się nie zmieniają – są powtarzalne. Wynikają z niepoprawnego skalibrowania urządzenia pomiarowego lub niewłaściwej metody pomiaru. Jeśli użyjemy do pomiaru zegara „chodzącego” zbyt wolno, to zmierzony czas trwania zjawiska zawsze będzie krótszy od tego, który upłynął w rzeczywistości. Aby wykryć błąd systematyczny, należy wykonać pomiar tej samej wielkości w inny sposób lub za pomocą innych urządzeń pomiarowych. W praktyce badawczej wyniki eksperymentu fizycznego (czyli pomiary) są uznawane za wiarygodne, jeśli zostaną powtórzone przez inne grupy badawcze korzystające z innych urządzeń.



Rys. 1.16. Błąd odczytu (a) można zminimalizować np. dzięki umieszczeniu zwierciadła na tarczy miernika. Wówczas patrzymy na tarczę tak, aby wskazówka pokrywała się ze swoim odbiciem (b)

Wiele błędów systematycznych zależy od osoby wykonującej pomiar. Na przykład niepewność pomiaru czasu jest w dużym stopniu zależna od refleksu badacza. Z kolei gdy patrzymy na miernik analogowy inaczej niż pod kątem prostym do jego tarczy, odczytana wartość jest różna od wartości wskazywanej przez wskazówkę (rys. 1.16).

■ Niepewność względna

Czy niepewność 0,2 s jest duża czy mała? To zależy. Gdybyśmy z taką dokładnością zmierzili czas obiegu Ziemi wokół Słońca, to wynik byłby bardzo dokładny. Natomiast w przypadku rywalizacji olimpijskiej na 100 m taka dokładność byłaby zdecydowanie zbyt mała – okazałoby się, że złote medale trzeba przyznawać wielu zawodnikom jednocześnie. Aby ocenić, czy pomiar jest dokładny, musimy wiedzieć nie tylko, ile wynosi niepewność, lecz także, czy jest ona duża w stosunku do mierzonej wielkości. W tym celu oblicza się **niepewność względną**. Można określić ją zarówno dla pojedynczego pomiaru, jak i dla średniej wielu pomiarów.

**Niepewność
względna** $\frac{\Delta x}{x}$

gdzie:

Δx – bezwzględna
niepewność pomiaru,
 x – wyznaczona
wartość

Niepewność względna to iloraz niepewności pomiaru i wielkości wyznaczonej z pomiarów. Zwykle podajemy ją w procentach.

Obliczmy niepewność względną w omówionych wyżej przykładach.

► Dla okresu obiegu Ziemi wokół Słońca otrzymujemy:

$$\frac{0,2 \text{ s}}{365 \text{ dni}} \approx 6,3 \cdot 10^{-9} = 0,00000063\%$$

► Dla biegu na 100 m (rekord to około 10 s) otrzymujemy: $\frac{0,2 \text{ s}}{10 \text{ s}} = 0,02 = 2\%$.
Dla odróżnienia od niepewności względnej wyrażanej w procentach, niepewność pomiaru wyrażaną w jednostkach mierzonej wielkości (czyli w naszym przykładzie 0,2 s) nazywa się **niepewnością bezwzględną**.

Po tej lekcji powinieneś

- odróżniać błędy przypadkowe od systematycznych;
- obliczać średnią z wyników powtarzanego pomiaru i jej niepewność;
- posługiwać się niepewnością względną i niepewnością bezwzględną.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



1. Uczniowie wykonali pomiary masy długopisu na elektronicznej wadze kuchennej. Otrzymali następujące wyniki: 8 g, 9 g, 8 g, 9 g, 8 g. Oblicz średnią i niepewność maksymalną średniej.
2. Masę tygrysa wyznaczono na $340 \text{ kg} \pm 1 \text{ kg}$, a masę kota na $4000 \text{ g} \pm 100 \text{ g}$. Która wielkość została zmierzona dokładniej? Aby to stwierdzić, porównaj niepewności względne pomiarów.
3. Woltomierz pozwala zmierzyć napięcie z dokładnością do 2%.
 - a) Oblicz bezwzględną niepewność pomiaru, jeśli urządzenie podało wynik 235 V.
 - b) Zapisz ten wynik w zeszycie wraz z niepewnością pomiarową.
4. Zważ za pomocą wagi kuchennej jakiś niewielki przedmiot. Wykonaj pomiar pięć razy, zapisz wyniki pomiarów, a następnie oblicz ich średnią i niepewność maksymalną średniej.
5. Dwa zespoły uczniów mierzyły niezależnie czas 10 pełnych drgań wahadła o długości 1 m. Oba wykorzystywały urządzenia podające wynik pomiaru z dokładnością do 0,01 s, przy czym pierwszy zespół korzystał z włączanego i wyłączanego ręcznie stopera z telefonu komórkowego, a drugi z komputera sprzężonego z czujnikiem ruchu i specjalnym oprogramowaniem.
 - a) Na podstawie pomiarów zanotowanych przez oba zespoły (tabela 1.3 poniżej) oblicz średni czas zmierzony przez każdy z zespołów i zapisz w zeszycie wyniki obliczeń wraz z niepewnością maksymalną i standardową.
 - b) Oblicz niepewności względne pomiarów wykonanych przez oba zespoły uczniów.

Tabela 1.3

Numer pomiaru	1	2	3	4	5	6	7	8
Pomiar I zespołu t [s]	21,51	22,73	21,00	19,56	18,93	22,18	21,50	20,28
Pomiar II zespołu t [s]	20,15	20,38	20,43	19,98	20,08	19,95	20,32	20,28

1.4. Opisywanie zależności między wielkościami

Przypomnij sobie

- Między wielkościami fizycznymi istnieją zależności, które opisuje się za pomocą wzorów.
- Na wielkościach fizycznych można wykonywać działania matematyczne podobnie jak na liczbach.

Jak wiesz już ze szkoły podstawowej, prawa fizyki opisują zależności między wielkościami fizycznymi. Na przykład druga zasada dynamiki mówi, w jaki sposób przyspieszenie ciała zależy od jego masy i działającej na nie siły. Te zależności zapisujemy zwykle za pomocą wzorów. Przedstawimy teraz kilka typów zależności między wielkościami, które często spotykamy w fizyce, a nawet w życiu codziennym.

■ Proporcjonalność prosta

Jedną z zależności między wielkościami jest **proporcjonalność prosta** – pojęcie, które znasz już ze szkoły podstawowej. Można je stosować nie tylko w fizyce.

Dwie wielkości są wprost proporcjonalne, jeśli ze wzrostem jednej z nich druga rośnie tyle samo razy.

Przykłady proporcjonalności prostej

Z proporcjonalnością prostą spotykamy się nie tylko w fizyce, lecz także i w życiu codziennym.



Gdy kupujemy towar na wagę, zapłacona kwota jest wprost proporcjonalna do masy towaru, np. za towar o trzy razy większej masie zapłacimy trzy razy więcej.

Określenie „tyle samo razy” jest bardzo ważne. Na przykład pole kwadratu **nie jest** wprost proporcjonalne do jego boku, bo kwadrat o boku trzy razy większym ma aż dziewięć razy większe pole.

■ Wzór opisujący proporcjonalność prostą

Rozważmy bardzo prosty przykład z życia codziennego. Kupujemy jabłka po 3 zł za kilogram. Załóżmy, że x to masa jabłek w kilogramach, a y – kwota w złotych, jaką trzeba zapłacić za te jabłka. Jaka jest zależność między x a y ? Oczywiście:

$$y = 3x$$

kwota do zapłacenia (w złotych) = 3 · masa (w kilogramach)

Ogólniej, jeśli cenę 1 kg jabłek oznaczmy literą a , otrzymamy wzór:

$$y = ax$$

kwota do zapłacenia (w złotych) = cena za 1 kg · masa (w kilogramach)

Podobną postać mają inne wzory opisujące proporcjonalność prostą:

$$y = ax$$

gdzie x i y – wielkości wprost proporcjonalne, a – stała nazywana **współczynnikiem proporcjonalności**. Często jest to ważna wielkość fizyczna (patrz przykłady w ramce poniżej). Zauważ, że ze wzoru $y = ax$ wynika równość $\frac{y}{x} = a$. To znaczy, że iloraz wielkości wprost proporcjonalnych jest stały.

$$\frac{y}{x} = a = \text{const}$$

Energia kinetyczna ciała **nie jest** wprost proporcjonalna do jego prędkości, bo gdy prędkość ciała zwiększy się trzykrotnie, to jego energia kinetyczna wzrośnie aż dziewięciokrotnie.

Skrót **const.** od łacińskiego *constans* oznacza stały, niezmienny.

Oto kilka przykładów proporcjonalności prostej występujących w fizyce.

Masa m jest wprost proporcjonalna do **objętości V** (patrz zdjęcie A i B na stronie obok).

$$m = d V \quad d - \text{gęstość}$$

W ruchu jednostajnym **przebyta droga s** jest wprost proporcjonalna do **czasu t** .

$$s = v t \quad v - \text{prędkość}$$

Napięcie U między końcówkami opornika jest wprost proporcjonalne do **natężenia płynącego prądu I** .

$$U = R I \quad R - \text{opór}$$

współczynnik proporcjonalności

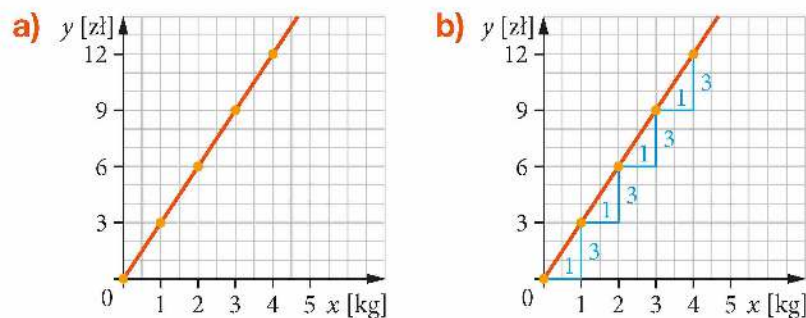
Tabela 1.4

x [kg]	y [zł]
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12

■ Wykresy proporcjonalności prostej

Jak przedstawić proporcjonalność prostą na wykresie? Przypomnijmy sobie przykład z kupowaniem jabłek po 3 zł za 1 kg. Zapiszmy w tabeli 1.4 kilka przykładów masy (oznaczonej x) i odpowiadającej jej ceny (oznaczonej y).

Gdy zaznaczymy odpowiednie punkty w układzie współrzędnych, zauważymy, że układają się one na jednej prostej (rys. 1.17a). Dlaczego tak jest?



Rys. 1.17. a) wykres zależności ceny od masy jabłek, b) wysokość schodka odpowiada współczynnikowi proporcjonalności

Wyjaśnienie stanowią schodki na wykresie 1.17b. Każdy z nich odpowiada zakupowi dodatkowego kilograma, a jego wysokość opisuje, o ile więcej musimy zapłacić. Oczywiście w każdym wypadku dopłacamy tyle samo: 3 zł. **Wysokość schodka jest więc równa współczynnikowi proporcjonalności.** Przeanalizujmy przykład bliższy fizyce.

■ Przykład

Narysuj wykres przedstawiający zależność masy oleju słonecznikowego od jego objętości. Opisz tę zależność. Potrzebne informacje odszukaj w tablicach fizycznych.

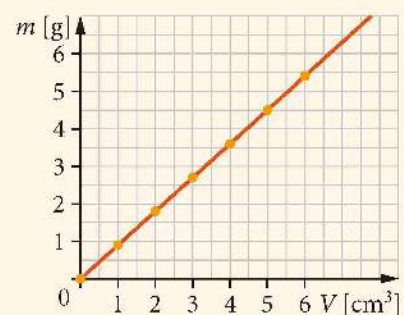
Rozwiązanie

Gęstość oleju wynosi $d = 0,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, co oznacza, że 1 cm^3 tej substancji ma masę 0,9 g. Wzór opisujący tę zależność ma więc postać: $m = d \cdot V$, czyli:

$$m = 0,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot V$$

Sporządzamy tabelę i zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych.

V [cm ³]	0	1	2	3	4	5	6
m [g]	0	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5	5,4

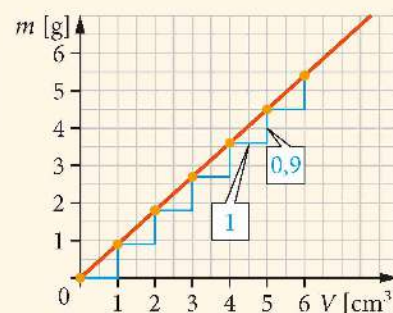


Punkty układają się na linii prostej. Dlaczego?

Gdy zwiększymy objętość oleju o 1 cm^3 – niezależnie od tego, czy jest to zmiana z 2 cm^3 do 3 cm^3 , czy z 5 cm^3 do 6 cm^3 – jego masa wzrośnie o tyle samo: o 0,9 g.

$V [\text{cm}^3]$	0	1	2	3	4	5	6
$m [\text{g}]$	0	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5	5,4

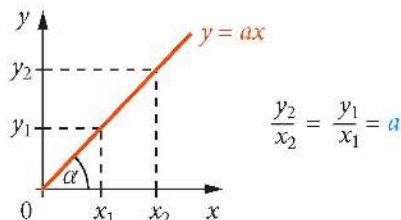
Pokazują to schodki na wykresie. Każdy z nich ma tę samą wysokość 0,9 g. A ponieważ ich wysokość jest równa, punkty układają się na jednej prostej.



Odpowiedź: Zależność masy oleju od objętości to proporcjonalność prosta. Jej wykres jest prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych.

Zastanówmy się teraz, dlaczego wykres zależności masy od objętości, w skrócie $m(V)$, przechodzi przez początek układu współrzędnych, czyli punkt $(0,0)$. Punkt $(0,0)$ był jednym z zaznaczonych punktów, ponieważ jeśli weźmiemy 0 cm^3 oleju (czyli nie weźmiemy go wcale), to jego masa także będzie równa zero.

Wykresem proporcjonalności prostej jest **linia prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych**.



Rys. 1.18. Wykres proporcjonalności prostej $y = ax$

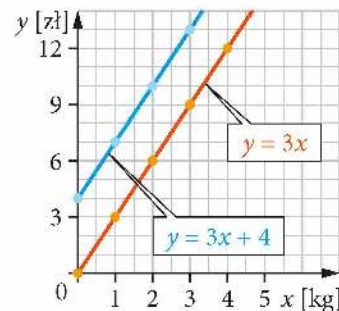
Wysokość schodka odpowiadającego zwiększeniu x o 1 jednostkę (rys. 1.17b) jest równa współczynnikowi proporcjonalności a , czyli im większy współczynnik proporcjonalności, tym większy kąt nachylenia α do osi poziomej.

■ Zależność liniowa

Wróćmy do przykładu z kupowaniem jabłek. Jeśli jedziemy po nie do sklepu samochodem, to do kosztu owoców musimy doliczyć koszt paliwa. Załóżmy, że jest to 4 zł. Wzór ilustrujący nasze wydatki, który wcześniej miał postać $y = 3x$, teraz przyjmuje postać:

$$y = 3x + 4$$

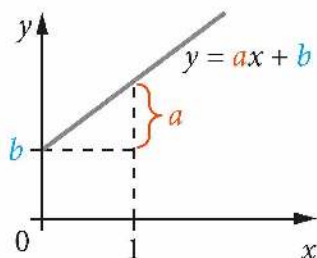
Wykresem jest linia prosta o takim samym nachyleniu jak poprzednio, ale przesunięta w górę o 4 jednostki (rys. obok).



Rys. 1.19. Wykresy $y = 3x$ i $y = 3x + 4$ są równoległe

Ogólniej, jeśli za kilogram jabłek płacimy a złotych, a za paliwo b złotych, to wzór przyjmuje postać:

$$y = ax + b$$



Rys. 1.20. Wykres zależności liniowej $y = ax + b$

Zobacz, w jaki sposób a i b można odczytać z wykresu (rys. 1.20). Widzimy, że wykres zaczyna się w punkcie b , natomiast a możemy odczytać jako wysokość schodka odpowiadającego zmianie o 1 jednostkę na osi poziomej. W naszym przykładzie oznacza to, o ile wyższą kwotę zapłacimy za 1 kg jabłek więcej.

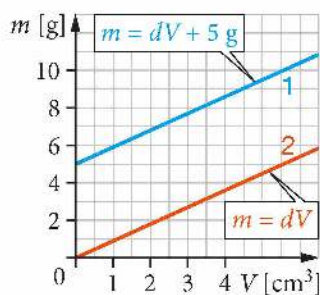
Stałą a nazywamy współczynnikiem kierunkowym. Czy wiesz dlaczego? Przypomnij sobie, co mówiliśmy o tym współczynniku: „im większy współczynnik a , tym większy kąt nachylenia”. Czyli współczynnik kierunkowy mówi nam o nachyleniu prostej w układzie współrzędnych. **Zależność** typu $y = ax + b$ nazywamy **liniową**, ponieważ jej wykres jest linią prostą. W matematyce, gdzie opis zależności nazywamy funkcją, mówimy o **funkcji liniowej**.

Zależność między wielkościami x i y , którą można opisać wzorem $y = ax + b$, gdzie a i b są stałe, nazywamy zależnością liniową. Jej wykres to prosta, której nachylenie jest określone przez współczynnik kierunkowy a , natomiast punkt przecięcia z osią pionową jest wyznaczony przez współczynnik b .

Przypomnijmy sobie przykład z masą oleju (s. 28). Jeśli olej ważymy w lekkim naczyniu, np. plastikowym cylindrze miarowym o masie 5 g, wskazanie wagi zwiększa się o masę tego naczynia $m = dV + m_{\text{cylindra}}$, czyli:

$$m = 0,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot V + 5 \text{ g}$$

Wykresem tej zależności jest linia prosta o takim samym nachyleniu jak poprzednio, ale przesunięta w górę o 5 g (na osi pionowej zaznaczamy masę, więc możemy mówić o „przesuwaniu o 5 g”). W tabeli 1.5 są dane potrzebne do wykonania wykresu (1) na rys. 1.21.



Rys. 1.21. Wykres zależności masy oleju od jego objętości z uwzględnieniem naczynia (1) lub bez naczynia (2)

Tabela 1.5

$V [\text{cm}^3]$	0	1	2	3	4	5	6
$m [\text{g}]$	5	5,9	6,8	7,7	8,6	9,5	10,4

■ Malejąca zależność liniowa

Rozważmy kolejny przykład zależności między wielkościami. Jeśli z beczki, w której początkowo było 20 l wody, woda wycieka w tempie $4 \frac{\text{l}}{\text{s}}$, to pozostałą ilość wody można zapisać za pomocą wzoru:

$$V = 20 \text{ l} - 4 \frac{\text{l}}{\text{s}} \cdot t$$

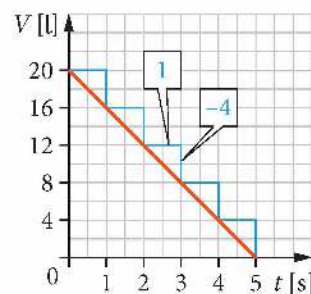
Ten wzór to także przykład funkcji liniowej, co będzie łatwiejsze do zauważenia po zamianie kolejności składników:

$$V = -4 \frac{\text{l}}{\text{s}} \cdot t + 20 \text{ l}$$

Gdy porównamy zapisaną zależność $V(t)$ ze wzorem zależności liniowej, zobaczymy, że **współczynnik a jest ujemny**, równy -4 , a współczynnik b wynosi 20 . Na wykresie pełnią one takie same funkcje co poprzednio, jedynie ujemny znak a oznacza, że objętość wody maleje w czasie.

Podobnie zależność malejącą – tym razem prędkości od czasu – otrzymamy, gdy podrzucimy ciało z prędkością początkową v_0 : jego prędkość staje się coraz mniejsza, przy czym co sekundę zmniejsza się o około $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (co odpowiada przybliżonej wartości przyspieszenia grawitacyjnego $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Tę zależność możemy opisać wzorem:

$$v = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t + v_0$$



Rys. 1.22. Wykres zależności objętości wody w beczce od czasu

■ Proporcjonalność odwrotna

Innym ważnym przykładem zależności między wielkościami fizycznymi jest **proporcjonalność odwrotna**.

Mówimy, że dwie wielkości są odwrotnie proporcjonalne, jeśli ze wzrostem jednej z nich druga maleje tyle samo razy.

Przykłady proporcjonalności odwrotnej

Z proporcjonalnością odwrotną spotykamy się nie tylko w fizyce, ale i w życiu codziennym.

Jeśli rozdzielamy ciecz o **objętości V** po równo między kilka naczyń, to **objętość cieczy przypadająca na naczynie $V_{\text{na naczynie}}$** jest odwrotnie proporcjonalna do **liczby naczyń n** .

$$V_{\text{na naczynie}} = \frac{V}{n}$$

W sytuacji pokazanej na zdjęciu $n = 3$. Objętość cieczy w każdym z małych naczyń to $\frac{1}{3}$ objętości cieczy z dużego naczynia. Jeśli naczyń będzie 4 , to w każdym z nich znajdzie się $\frac{1}{4}$ objętości dużego naczynia.



$$p = \frac{F}{S}$$

Ciśnienie p wywierane przez **siłę F** jest odwrotnie proporcjonalne do **powierzchni S** .

$$a = \frac{F}{m}$$

Przyspieszenie a nadawane przez **siłę F** jest odwrotnie proporcjonalne do **masy m** .

Jak opisać tego typu zależność za pomocą wzoru? Proporcjonalność odwrotną można opisać wzorem w postaci:

$$x \cdot y = a = \text{const}$$

$$y = \frac{a}{x}$$

gdzie: x i y – wielkości odwrotnie proporcjonalne, a – stała.

Wzory w przykładach na poprzedniej stronie mają właśnie taką postać.

Uwaga. Wielkość x występuje w mianowniku, więc jeśli zwiększy się ona kilka razy, to cały ułamek zmniejszy się tyle samo razy.

■ Interpretacja wzorów fizycznych

W czasie nauki fizyki poznasz wiele wzorów opisujących zależności między wielkościami. Ważne jest, abyś na podstawie nowego wzoru nie tylko umiał obliczyć wynik po podstawieniu wartości liczbowych, lecz także rozpoznawał zależności między wielkościami (np. proporcjonalność prostą albo odwrotną).

Oto przykład wzoru, którego prawdopodobnie **nie znasz** ze szkoły podstawowej, a mimo to możesz rozpoznać w nim typy zależności między wielkościami:

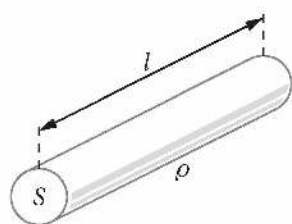
$$R = \rho \frac{l}{S}$$

gdzie: R – opór elektryczny przewodu, l – jego długość, S – pole powierzchni przekroju poprzecznego, ρ (czyt. ro) – stała zależna od tego, z jakiego metalu wykonano przewód.

Co można powiedzieć na podstawie tego wzoru? Zauważmy, że:

1. Długość l występuje w liczniku, więc jeśli l się zwiększy, to R zwiększy się tyle samo razy. Innymi słowy, R jest wprost proporcjonalne do l . Na przykład pięć razy dłuższy przewód o takiej samej grubości i z tego samego metalu ma pięć razy większy opór.

2. Pole powierzchni S występuje w mianowniku, więc jeśli S się zwiększy, to R zmniejszy się tyle samo razy. Innymi słowy, R jest odwrotnie proporcjonalne do S , a więc przewód o dwa razy większej średnicy, czyli cztery razy większym polu przekroju poprzecznego, ma cztery razy mniejszy opór.



Rys. 1.23. Opór elektryczny przewodu zależy od jego parametrów, które zostały zaznaczone na rysunku

A to ciekawe

Zależności między wielkościami badanymi w biologii bywają dużo bardziej skomplikowane niż w fizyce. Na przykład tętno f dorosłego ssaka (w uderzeniach na minutę) zależy od masy m (w kilogramach) zgodnie z przybliżonym wzorem:

$$f = \frac{240}{\sqrt[4]{m}}$$

Zgodnie z tą zależnością serce chomika o masie 0,15 kg bije prawie 400 razy na minutę, a serce słonia o masie 5000 kg – około 30 razy.



Po tej lekcji powinieneś

- posługiwać się pojęciami: proporcjonalność prosta, proporcjonalność odwrotna i zależność liniowa (funkcja liniowa);
- rozpoznawać rodzaj zależności między wielkościami na podstawie wykresu i na podstawie wzoru;
- interpretować wzory opisujące zależności wielkości fizycznych i wykresy zależności liniowych.

Pytania i zadania

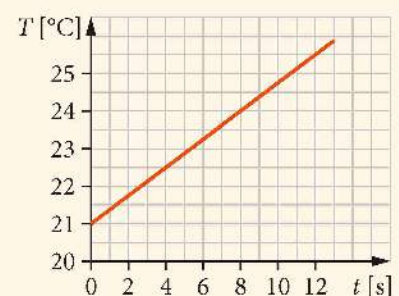
ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZCIE



■ Przykład

Na wykresie przedstawiono zależność temperatury ogrzewanej wody od czasu.

- a)** Odczytaj z niego, jaka była początkowa temperatura wody i o ile stopni ogrzewała się ona w ciągu 1 s.
- b)** Opisz za pomocą wzoru przedstawioną na wykresie zależność między temperaturą ogrzewanej wody a czasem ogrzewania.

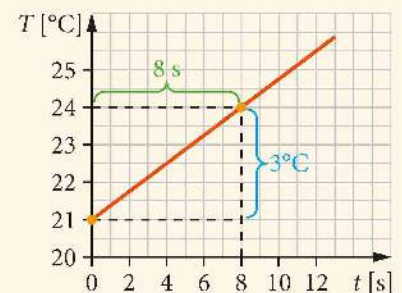


Rozwiązanie

- a)** Początkową temperaturę wody można łatwo odczytać z wykresu. Wynosi ona 21°C.

Trudniej odczytać, o ile temperatura wzrastała w ciągu 1 s, bo jest to wielkość mniejsza niż jedna podziałka na osi pionowej. Poszukajmy więc punktów, których współrzędne łatwo odczytać.

Widzimy, że w ciągu 8 s temperatura wzrosła o 3°C, więc w czasie 1 s wzrastała o $(\frac{3}{8})^{\circ}\text{C} = 0,375^{\circ}\text{C}$.



- b)** Jak zapisać wzór? Wykresem jest linia prosta, więc zależność jest liniowa. Współczynnik kierunkowy a opisuje, o ile wzrastała temperatura w ciągu 1 s, jest więc równy $0,375 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{s}}$, natomiast przecięcie z osią pionową to współczynnik b . Wzór ma więc postać:

$$T = 0,375 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{s}} \cdot t + 21^{\circ}\text{C}$$

Aby sprawdzić, czy nie popełniliśmy błędu, możemy podstawić do niego jakąś wartość czasu, np. $t = 4 \text{ s}$:

$$T = 0,375 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{s}} \cdot 4 \text{ s} + 21^{\circ}\text{C} = 1,5^{\circ}\text{C} + 21^{\circ}\text{C} = 22,5^{\circ}\text{C}$$

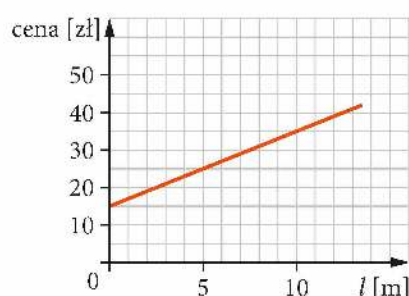
Na wykresie możemy sprawdzić, że po 4 s woda rzeczywiście miała temperaturę 22,5°C.

Odpowiedź: Początkowa temperatura wody wynosiła 21°C. W ciągu 1 s woda ogrzała się o $0,375^{\circ}\text{C}$. Między temperaturą ogrzewanej wody a czasem istnieje zależność: $T = 0,375 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{s}} \cdot t + 21^{\circ}\text{C}$.

Pytania i zadania

1. Narysuj wykres przedstawiający zależność obwodu koła l od jego promienia r zgodnie ze wzorem $l = 2\pi r$.

2. W internetowym sklepie elektrycznym kupujemy przewód do eksperymentów. Wykres przedstawia zależność kwoty, jaką trzeba zapłacić za przewód, od jego długości. Odczytaj z wykresu cenę 1 m przewodu oraz koszt wysyłki zamówienia. Opisz zależność przedstawioną na wykresie za pomocą wzoru.



3. Zainstaluj na komputerze program do tworzenia wykresów, np. darmowy program Graph ze strony <http://www.padowan.dk/download/> i poeksperymentuj z wykresami proporcjonalności prostej i odwrotnej, a także funkcji liniowej. Porównaj wykresy dla różnych wartości współczynników.



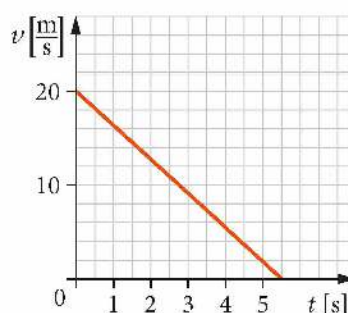
4. Jak wiesz ze szkoły podstawowej, moc P to z definicji iloraz pracy W i czasu t , w którym ta praca została wykonana: $P = \frac{W}{t}$. Czy moc jest wprost proporcjonalna czy odwrotnie proporcjonalna do pracy W ? A do czasu t ?

5. Prędkość v ciała podrzuconego pionowo w górę z prędkością początkową v_0 zależy od czasu t zgodnie ze wzorem:

$$v = -gt + v_0$$

gdzie g jest przyspieszeniem grawitacyjnym.

Dla pewnego ciała podrzuconego na pewnej planecie tę zależność przedstawia wykres.



- Z jaką prędkością podrzucono to ciało?
- Jakie jest przyspieszenie grawitacyjne na tej planecie?
- Jaka to mogła być planeta? Poszukaj informacji w wybranych przez siebie wiarygodnych źródłach. Zapisz, z jakiego źródła korzystasz.

6. Oceanografowie, badający m.in. tworzenie się osadów dennych, używają następującego wzoru pozwalającego obliczać, z jaką prędkością v ziarnko piasku o średnicy d opada na dno oceanu:

$$v = c \cdot d^2, \text{ gdzie } c = 0,655 \frac{\text{m}}{\text{s} \cdot \text{mm}^2}$$

Przedstaw tę zależność na wykresie. Czy wykres jest linią prostą?

Analiza tekstu

Komu przyda się wiedza z fizyki

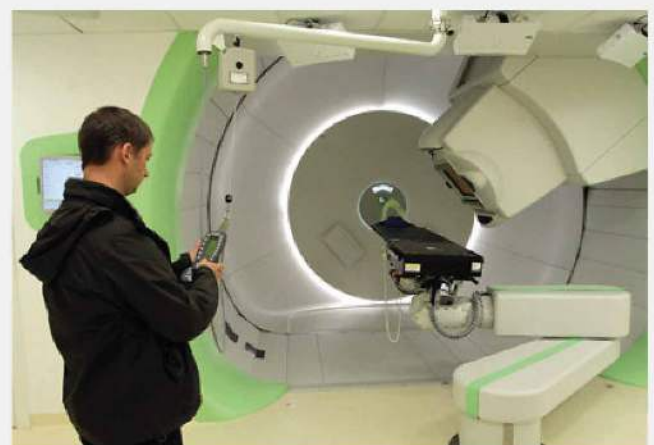
Być może zastanawiasz się nad wyborem studiów i dalszej drogi zawodowej. Zapewne masz już swoje pasje i preferencje, ale być może wydaje ci się, że nie mają one nic wspólnego z fizyką. Okazuje się jednak, że ta dziedzina jest wykorzystywana w wielu zawodach – również takich, które w pierwszej chwili zupełnie się z nią nie kojarzą. Jeżeli twoje zainteresowania dotyczą badania otaczającego cię świata lub wykorzystania nowoczesnych technologii i urządzeń, to prawdopodobnie fizyka będzie towarzyszyć ci w życiu częściej, niż myślisz. Warto się z nią zaprzyjaźnić.

Jeżeli ciekawią cię nauki medyczne, to w przyszłości fizyka pomoże ci w zrozumieniu wielu technik **diagnostycznych**, takich jak ultrasonografia (USG), elektrokardiografia (EKG), elektroencefalografia (EEG), czyli badanie bioelektrycznej czynności mózgu, prześwietlenia z wykorzystaniem aparatury rentgenowskiej (RTG) czy też badania z wykorzystaniem rezonansu magnetycznego (MRI). Lekarz, który ma poprawnie zinterpretować uzyskane wyniki i postawić właściwą diagnozę, musi wiedzieć, jakie procesy zachodzą w ciele pacjenta podczas badania – nie tylko biologiczne, lecz także fizyczne.

Bardziej zaawansowana wiedza przyda ci się, jeśli zwiążesz swoją przyszłość z **medycyną specjalistyczną**. Ortopeda, który zajmuje się narządami ruchu, musi mieć wiedzę z zakresu biomechaniki. Jest to nauka zajmująca się ciałem człowieka od strony mechanicznego działania szkieletu oraz mięśni, które można porównać do układu maszyn prostych i siłowników. W onkologii



z kolei walczy się z nowotworami dzięki fizyce jądrowej. Powszechnie do tego celu są stosowane naświetlania promieniami gamma, a w nowocześniejszych terapiach – wiązką protonów. W Polsce urządzenie wykorzystujące tę drugą metodę znajduje się w Bronowicach pod Krakowem, a leczenie prowadzone za jego pomocą wymaga ścisłej współpracy lekarzy i fizyków. Z kolei osoby, które kształcą się w dziedzinie fizyki medycznej, mogą serwisować aparaturę medyczną lub działać



Stanowisko do naświetlania wiązką protonową wytworzoną przez cyklotron (Bronowice)

w zespołach projektujących takie urządzenia i doskonalących już istniejące.

Wiele wspólnego zarówno z medycyną, jak i fizyką ma **sport**. Jeśli myślisz np. o karierze sportowca, trenera, rehabilitanta albo fizjoterapeuty sportowego, to fizyka przyda ci się w udoskonalaniu technik treningu. To właśnie dzięki niej zawodnicy są w stanie osiągać coraz lepsze wyniki we wszystkich dyscyplinach sportu. Znajomość praw fizyki pozwala także udoskonalać sprzęt, a nawet odzież sportową. Dobrym przykładem jest tu kolarstwo, w którym fizykę stosuje się do analizy ruchu i optymalnego ułożenia ciała zawodnika oraz do poprawy konstrukcji i osiągnięć rowerów. Również konserwator sprzętu sportowego powinien wykazywać się podstawową znajomością tej dziedziny nauki.



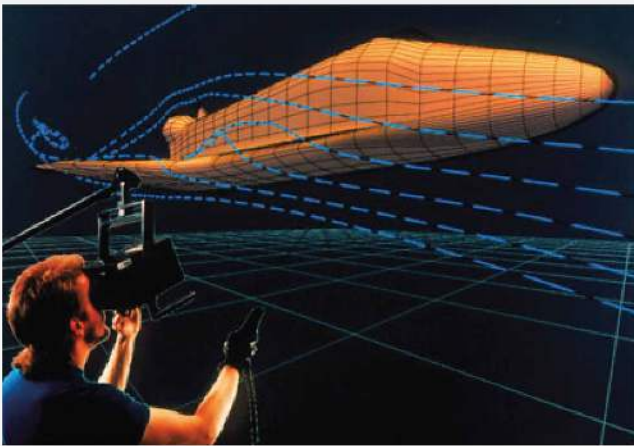
Architektura łączy walory estetyczne budynków i innych konstrukcji z użytkowymi. Projektant musi przy tym uwzględniać właściwości fizyczne wielu różnych materiałów, takich jak stal, drewno, szkło czy beton. Istotne jest to, jakie mają one właściwości mechaniczne, termiczne, a nawet optyczne. W budownictwie użytkowym szczególne znaczenie ma ich przewodnictwo cieplne, ponieważ ważne jest, by dom był energooszczędny.

Właściwości materiałów bada się również w **geologii**. Być może zechcesz zawodowo zająć się opisywaniem przeszłości Ziemi na podstawie analizy jej skał, badać procesy zachodzące w skorupie ziemskiej, np. ruchy płyt tektonicznych, prowadzić poszukiwania złóż minerałów albo badać ich warstwy, zanim zostanie nad nimi wybudowany dom lub inna konstrukcja. Jako geolog będziesz w pracy wykorzystywać m.in. sonar, czyli źródło ultradźwięków. Dobrze, jeśli będziesz wtedy rozumiał, jak się rozchodzą fale w różnych ośrodkach. Natomiast wiek badanych skał oszacujesz dzięki rozpadom promieniotwórczym, czyli skorzystasz z fizyki jądrowej.

Bardzo trudno jest dziś znaleźć sprzęt codziennego użytku bez elementów elektronicznych. Takie podzespoły znajdują się praktycznie we wszystkich większych urządzeniach gospodarstwa domowego, w samochodach, urządzeniach do komunikacji czy rozrywki. Jeśli twoja przyszłość miałaby być związana z **elektroniką**, to znajomość fizyki będzie ci niezbędna do zrozumienia działania skomplikowanych układów elektronicznych.

Podobnie rzecz ma się z **telekomunikacją**. Nikogo nie trzeba przekonywać, jak rozwinęła się ona w ostatnich czasach i jak bardzo zmieniło się w związku z tym nasze życie. Obecnie za pośrednictwem sygnału radiowego praktycznie z każdego miejsca mamy dostęp do bezprzewodowego internetu. O szybkie przesyłanie informacji do komputerów w naszych domach dbają sieci światłowodów. Zarówno projektant nowoczesnych sieci służących do przesyłania danych, jak i ich konserwator powinni mieć dużą wiedzę z zakresu właściwości i rozchodzenia się fal elektromagnetycznych.

Być może interesujesz się **informatyką**. Pomyśl, czy nie chciałbyś zająć się nową, powiązaną z fizyką i prężnie rozwijającą się dziedziną, jaką jest modelowanie fizyczne procesów. Pozwala ono badać otaczający nas świat i różne zachodzące w nim powtarzalne zjawiska dzięki wykorzystaniu symulacji komputerowych, jeśli podobne doświadczenie w warunkach laboratoryjnych jest zbyt długotrwałe, drogie lub pracochłonne. W ten sposób analizuje się np. pracę silnika czy kształt samolotu jeszcze przed ich wyprodukowaniem.



Zaawansowane modele fizyczne muszą być także coraz częściej uwzględniane podczas **projektowania gier komputerowych**. Jeśli chciałbyś to robić zawodowo, przyda ci się znajomość mechaniki, aby możliwie realistycznie odwzorować ruch obiektów, czy optyki, aby prawidłowo oddać ich oświetlenie. Programista musi też zadbać o odpowiednie efekty cząsteczkowe, czyli zachowanie się ognia, mgły, pyłu, kurzu czy falowanie gorącego powietrza. Tutaj przydadzą się także wiadomości z aerodynamiki i termodynamiki.

Również w **biologii** zrozumienie procesów zachodzących w organizmach żywych jest możliwe na drodze wyjaśnienia ich za pomocą modeli fizycznych. Jeśli twoja kariera pójdzie w tym kierunku, zapewne będziesz badać przemiany energii w organizmach,



przesyłanie impulsów nerwowych albo działanie narządów ruchu oraz słuchu i wzroku.

Jeśli lubisz wszystko, co jest związane z robotami i ich konstruowaniem, być może w przyszłości wybierzesz studia z zakresu **mechatroniki i robotyki**. Zautomatyzowane linie produkcyjne w fabrykach czy autonomiczne roboty, samochody i odkurzacze już dawno przestały nas dziwić. Specjaliści z dziedziny mechatroniki i robotyki konserwują i modyfikują istniejące urządzenia oraz projektują i budują całkiem nowe, wyspecjalizowane do określonych zadań. To kreatywne zajęcie również wymaga zawansowanej wiedzy z dziedziny fizyki. Przyszły konstruktor musi przede wszystkim znać się na mechanice, działaniu silników elektrycznych, a także elementów elektronicznych i hydraulicznych. Jeżeli konstruowane urządzenie jest zaopatrzone w kamery i czujniki pozwalające na obserwację otoczenia i unikanie kolizji, to niezbędna jest również wiedza z zakresu optyki.

Bartłomiej Piotrowski



Autonomiczny odkurzacz

Pytania i zadania do tekstu

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



1. Do każdego z zawodów dopasuj nazwę działu fizyki, z którego dany specjalista powinien mieć wiedzę.
Uwaga. Do danego zawodu można dopasować kilka różnych działów.

A. robotyk	I. mechanika
B. lekarz ortopeda	II. fizyka jądrowa
C. projektant sieci komputerowej	III. termodynamika
D. lekarz onkolog	IV. elektryczność i magnetyzm
E. projektant modeli komputerowych	V. optyka
F. architekt	
2. Do realizacji bardzo dużych projektów nie wystarczy zatrudnić specjalistów z jednej dziedziny. Spróbuj podać przykład projektu (przedsięwzięcia), przy którym muszą współpracować specjaliści z co najmniej dwóch różnych dziedzin wymienionych w tekście.
3. W medycynie ważną rolę odgrywają urządzenia do diagnostyki. Wybierz odpowiednie dokończenia zdań w tekście.
W prześwietleniach rentgenowskich wykorzystuje się **A/ B/ C/ D**, w badaniu USG wykorzystuje się **A/ B/ C/ D**, natomiast w badaniu EKG wykorzystuje się **A/ B/ C/ D**.
A. analizę impulsów elektrycznych wytwarzanych w trakcie pracy serca
B. oddziaływanie fali elektromagnetycznej z tkankami organizmu
C. zmianę temperatury ciała człowieka
D. oddziaływanie fali ultradźwiękowej z tkankami organizmu
4. Na niektórych uczelniach wyższych można podjąć studia na specjalności „akustyka i inżynieria dźwięku”. Zastanów się, w jakich dziedzinach może znaleźć zastosowanie zdobyta na takich studiach wiedza dotycząca fal dźwiękowych.
5. Po dokładnym zapoznaniu się z tekstem artykułu wskaż zdania prawdziwe.
A. Medycyna i geologia to dwie odległe od siebie dziedziny. Jednak w pewnych sytuacjach korzystają one z tego samego działu fizyki.
B. Dużo łatwiej i taniej jest zbudować model pojazdu i przetestować jego właściwości aerodynamiczne w specjalnym tunelu, niż przeprowadzić symulację komputerową tego procesu.
C. Architekt nie musi znać właściwości fizycznych różnych materiałów, ponieważ projektuje wygląd danej budowli, a jej walorami użytkowymi i normami bezpieczeństwa zajmują się przedstawiciele innych zawodów.
D. Aby skonstruować samodzielnie poruszającego się autonomicznego robota, potrzeba wiedzy z wielu różnych działów fizyki.
E. Biomechanika jest nauką, z której skorzystają zarówno lekarz, biolog, jak i trener sportowy.
6. Przemysł kosmiczny rozwija się bardzo prężnie, chociażby ze względu na konieczność wysyłania na orbitę okołozemską specjalistycznych satelitów. Wiadomości z jakich działów fizyki są potrzebne, aby zrealizować projekt polegający na wyniesieniu takiego specjalistycznego satelity na orbitę okołozemską? Uzasadnij krótko swój wybór.



2 Ruch prostoliniowy

1. Jak opisać położenie ciała
2. Opis ruchu prostoliniowego
3. Prędkość w ruchu prostoliniowym
4. Ruch jednostajny prostoliniowy
5. Ruch prostoliniowy zmienny
6. Przyspieszenie w ruchu zmiennym
7. Położenie w ruchu jednostajnie zmiennym

2.1. Jak opisać położenie ciała

Przypomnij sobie

- Położenie ciała określamy zawsze względem wybranego układu odniesienia.
- Do określenia położenia ciała stosujemy układ współrzędnych.

■ Badanie ruchu ciał

Na kilku najbliższych lekcjach zajmiemy się badaniem ruchu ciał. Bezpośrednie prowadzenie pomiarów poruszających się ciał jest utrudnione, ponieważ zanim określimy położenie ruchomego ciała, zdąży się ono już przemieścić. Dlatego w doświadczeniach pomoże nam kamera (wystarczy w telefonie komórkowym). Obserwacja filmu klatka po klatce pozwoli na wykonanie znacznie dokładniejszych pomiarów.

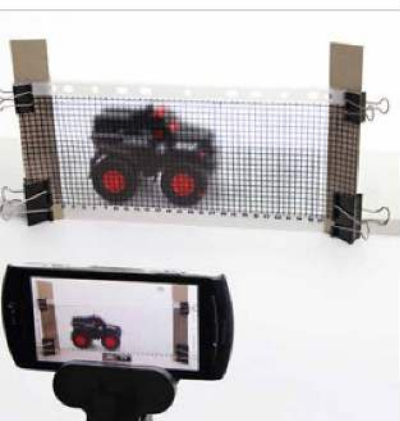
Doświadczenie 3

1. Przygotuj pojazd-zabawkę z napędem elektrycznym, najlepiej z dużymi kołami, folię, np. koszulkę do segregatora, flamaster, telefon komórkowy i komputer z programem umożliwiającym odtwarzanie filmu klatka po klatce.
2. Na brzegu jednego z kół zabawki zaznacz wyraźnie punkt. Użyj pisaka w kolorze kontrastującym z kolorem koła.
3. Na przezroczystej folii albo kalce technicznej wydrukuj lub narysuj cienkim flamastrem kratkę o boku długości 0,5 cm. Ponumeruj co drugą kratkę.
4. Umocuj folię tak, aby dolny brzeg siatki z podziałką pokrywał się z krawędzią stołu.
5. Puść zabawkę po stole wzdłuż krawędzi, do której przymocowano folię (patrz zdjęcie).
6. Sfilmuj doświadczenie za pomocą kamery np. w telefonie komórkowym.
7. Skopiuj film do komputera. Oglądając go klatka po klatce, naszkicuj, po jakiej linii poruszał się punkt zaznaczony na kole.

Wskazówka. Jednym z programów umożliwiających odtwarzanie filmów klatka po klatce jest darmowy QuickTime Player (czyt. klik tajm plejer). W tym programie do przewijania filmu klatka po klatce służą strzałki.

■ Punkt materialny

W doświadczeniu 3. zaobserwowaliśmy, że nawet gdy pojazd jedzie prosto, nie każdy jego punkt porusza się po linii prostej. Gdybyśmy mogli zobaczyć punkty na ruchomych częściach silnika prawdziwego samochodu, stwierdzilibyśmy, że mogą się one poruszać po jeszcze bardziej skomplikowanych liniach niż punkt na brzegu koła zabawki z doświadczenia. Opisując przemieszczanie się pojazdu, zazwyczaj nie zastanawiamy się nad tym, co dzieje się z jego poszczególnymi elementami – traktujemy go jako



A to ciekawe

Pojedynczej liczby do określania położenia używają m.in. kierowcy korzystający z CB-radia. Nadany przez nich komunikat „Misiaczki na trzy-pięć-dwa” oznacza, że patrol policji znajduje się na 352. kilometrze szosy, czyli w punkcie o współrzędnej 352 km. Nie jest to jednak współrzędna na osi liczbowej, gdyż drogi nie biegną wzdłuż prostych.



całość. Mówimy na przykład, że samochód porusza się po linii prostej. W języku fizyki powiemy, że traktujemy samochód jako **punkt materialny**.

Punkt materialny to model ciała, którego rozmiary pomijamy, przypisujemy mu natomiast określoną masę.

Można też powiedzieć, że jest to ciało, którego wymiary są dla nas bardzo małe (mówimy: pomijalnie małe) albo nieistotne z punktu widzenia rozpatrywanego zagadnienia. Co jednak znaczy „małe”? To zależy od zjawiska, które rozpatrujemy. Kiedy zajmujemy się ruchem Ziemi wokół Słońca, cała Ziemia staje się „bardzo mała” w stosunku do wymiarów swojej orbity.

Punkt materialny jest przybliżeniem rzeczywistego obiektu – w fizyce mówimy, że jest jego **modelem**. Fizycy formułują wiele modeli. Wybierają najprostszy spośród tych, które wystarczająco dokładnie opisują realną sytuację.

Modelowanie matematyczne s. 12

■ Położenie punktu materialnego

Punkt materialny możemy opisać, podając jego położenie za pomocą współrzędnych w odpowiednim układzie współrzędnych, tak jak w przypadku „zwykłego” punktu, znanego z lekcji geometrii. Fizyka bada jednak rzeczywiste ciała, a nie abstrakcyjne figury geometryczne, więc **współrzędne punktu materialnego zawsze będziemy wyrażać w jednostkach długości**, np. metrach, a nie za pomocą samych liczb.



Rys. 2.1. Jeśli przyjmiemy, że początek osi liczbowej znajduje się na początku toru, współrzędna środka kuli $x = 1,4$ m

Gdy ciało porusza się wzdłuż prostej, do opisu jego położenia wystarcza jedna współrzędna. W tym przypadku cały układ współrzędnych składa się z jednej prostej z odpowiednią podziałką – **osi liczbowej**. Oś możemy obrać tak, aby jej kierunek był zgodny z kierunkiem ruchu ciała, a początek tej osi (punkt zero) możemy umieścić w dogodnym dla nas miejscu, np. na początku toru (patrz zdjęcie na s. 41). Wybór zwrotu osi, jej początku oraz jednostki długości jest kwestią wygody. Na rysunku 2.2a położenie ciała jest opisane współrzędną $x = 4$ m, a na rysunku 2.2b współrzędną $x = -4$ m.

Wektor położenia $\vec{r}$
łączy początek układu współrzędnych z położeniem ciała.



Rys. 2.2. Określenie położenia ciała za pomocą wektora położenia $\vec{r}$

Jak wiesz z lekcji matematyki, do opisu punktu na płaszczyźnie potrzebne są dwie, a w przestrzeni – trzy współrzędne. Te zagadnienia omówimy szerzej w lekcji 3.1.

Należy zauważyć, że wykorzystanie układu współrzędnych do rysowania wykresów i do opisu położenia ciała to zupełnie różne zastosowania tego samego pojęcia matematycznego.

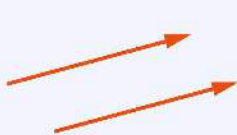
Dodatek matematyczny

■ Wektory i skalary

Wiele wielkości fizycznych (np. prędkość, siła) ma nie tylko określoną wartość, lecz także kierunek i zwrot. Takie wielkości nazywamy **wielkościami wektorowymi**.

Wielkości, do których opisanie wystarczy jedna liczba (np. masa, objętość, długość), nazywamy **wielkościami skalarnymi**.

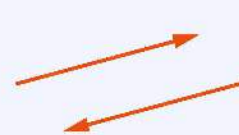
Wektor przedstawiamy na rysunku jako strzałkę łączącą dwa punkty. Wektory są **równe**, jeśli mają takie same: wartość, kierunek i zwrot (rys 2.3).



Rys. 2.3. Te wektory mają równą wartość, jednakowy kierunek i zwrot. Wektory **są równe**



Rys. 2.4. Te wektory mają równą wartość, ale różne kierunki. Wektory **nie są równe**

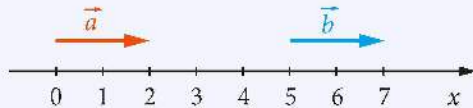


Rys. 2.5. Te wektory mają równą wartość i jednakowy kierunek, ale przeciwny zwrot. Te wektory nie są równe. Mówimy, że **są przeciwne**

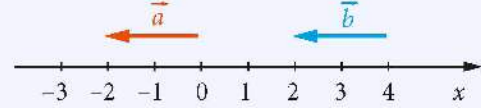
Wszystkie wektory służące do opisu położenia i ruchu ciał na linii prostej mają jednakowy kierunek (taki sam jak ta prosta). Mogą się różnić długością (wartością) lub zwrotem.

Gdy wprowadzimy jednowymiarowy układ współrzędnych (czyli oś liczbową), wektor możemy opisać współrzędną. Wartość bezwzględna współrzędnej wektora oznacza jego długość, a znak określa zwrot (znak plus – zwrot zgodny ze zwrotem osi, znak minus – zwrot przeciwny do zwrotu osi).

Gdy początek wektora znajduje się w początku układu współrzędnych, współrzędna jego końca jest równa współrzędnej wektora. Tak jest w przypadku czerwonych wektorów na rysunkach poniżej.



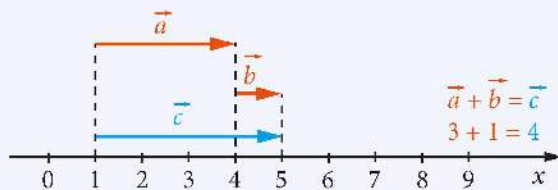
Rys. 2.6. Wektory o współrzędnej 2



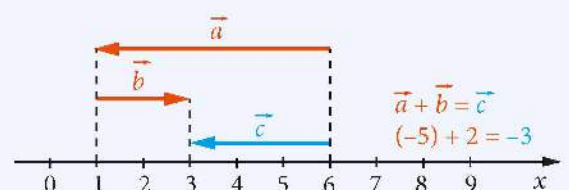
Rys. 2.7. Wektory o współrzędnej -2

■ Dodawanie i odejmowanie wektorów o jednakowych kierunkach

Wektory możemy **dodawać**, czyli znajdować **wektor wypadkowy**. W tym celu przesuwamy równolegle jeden wektor tak, aby jego początek umieścić w końcu drugiego wektora (rys. 2.8 i 2.9). Dodawaniu wektorów o jednakowych kierunkach odpowiada dodawanie ich współrzędnych.

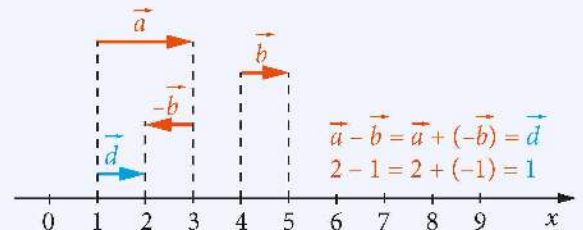


Rys. 2.8. Dodawanie dwóch wektorów o zgodnych zwrotach



Rys. 2.9. Dodawanie dwóch wektorów o przeciwnych zwrotach

Podobnie jak w przypadku liczb, działaniem odwrotnym do dodawania wektorów jest ich **odejmowanie**. Aby graficznie odjąć wektory, do pierwszego z nich dodajemy wektor przeciwny do drugiego (rys. 2.10). Odejmowaniu wektorów odpowiada odejmowanie ich współrzędnych.



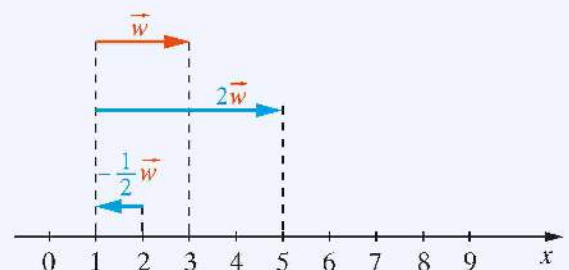
Rys. 2.10. Odejmowanie dwóch wektorów

■ Mnożenie i dzielenie wektora przez liczbę

Gdy mnożymy wektor $\vec{w}$ przez liczbę a :

- jego kierunek się nie zmienia,
- mnożymy wartość wektora przez $|a|$,
- jeżeli $a > 0$, zwrot pozostaje bez zmian,
- jeżeli $a < 0$, zwrot zmienia się na przeciwny.

Mnożeniu (dzieleniu) wektora przez liczbę odpowiada mnożenie (dzielenie) jego współrzędnej przez tę liczbę (rys. 2.11).



Rys. 2.11. Wektor $2\vec{w}$ jest dwa razy dłuższy od $\vec{w}$, ale kierunek i zwrot ma takie same. Wektor $-\frac{1}{2}\vec{w}$ jest dwa razy krótszy od $\vec{w}$ i ma do niego przeciwny zwrot

Po tej lekcji powinieneś

- znać pojęcie punktu materialnego i wiedzieć, kiedy można je stosować;
- umieć określać położenie ciała za pomocą współrzędnej;
- potrafić zaznaczyć wektor położenia ciała;
- analizować ruch ciała na podstawie filmu.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



1. Dane są dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, przedstawione na rysunku, których długości wynoszą odpowiednio $|\vec{a}| = 1 \text{ cm}$ i $|\vec{b}| = 3 \text{ cm}$.



Przerysuj wektory do zeszytu i wyznacz graficznie wektory:

a) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, c) $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}$,

b) $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a}$, d) $\vec{f} = \vec{b} - \vec{a}$.

Jakie wnioski wypływają z dodawania i odejmowania tych wektorów?

Uwaga. Wektory warto umieścić na osi liczbowej tak, aby początek pierwszego z nich znalazł się w punkcie zero tej osi.

2. Dane są dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, przedstawione na rysunku, których długości wynoszą odpowiednio $|\vec{a}| = 3 \text{ cm}$ i $|\vec{b}| = 3 \text{ cm}$.



Przerysuj wektory do zeszytu i wyznacz graficznie wektory:

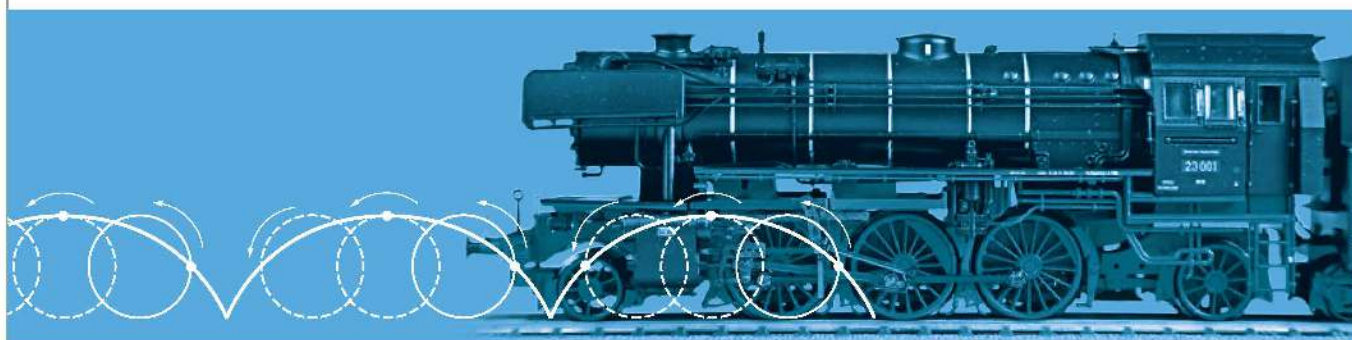
a) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, c) $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}$,

b) $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a}$, d) $\vec{f} = \vec{b} - \vec{a}$.

3. Wieś została wybudowana wzdłuż prostej szosy. Przyjmijmy, że prowadzimy wzdłuż tej

szosy oś liczbową, a punkt zero znajduje się przy domu sołtysa.

- a) Ania mieszka w domu o współrzędnej $x = 1 \text{ km}$. Ile wynosi odległość od domu Ani do domu sołtysa?
- b) Bartek mieszka w domu o współrzędnej $x = -1 \text{ km}$. Ile wynosi odległość od domu Bartka do domu sołtysa?
- c) Celina mieszka 2 km od domu sołtysa. Podaj współrzędną jej domu. Uwzględnij wszystkie możliwe odpowiedzi.
- d) Darek mieszka 2 km od domu Ani. Podaj współrzędną jego domu. Wymień wszystkie możliwe odpowiedzi.
4. Przeczytaj opis i odpowiedz, czy w danym przypadku można traktować poruszające się ciało jako punkt materialny. Podaj krótkie uzasadnienie.
- a) Samolot leciał z Gdańska do Aten.
- b) Podczas zawodów akrobatycznych samolot wykonał figurę zwaną korkociągiem.
5. Poszukaj w dostępnych źródłach informacji na temat cykloidy. Z tą krzywą już zetknęliśmy się na tej lekcji (choć nie używaliśmy tej nazwy). Wskaż, w którym miejscu.



2.2. Opis ruchu prostoliniowego

Przypomnij sobie

- Położenie ciała określamy zawsze względem wybranego układu odniesienia.
- Wektor położenia łączy początek układu współrzędnych z położeniem ciała.
- Drogę mierzymy wzdłuż toru, czyli linii, po której porusza się ciało.

■ Ruch i jego względność

Ruch jest powszechnym zjawiskiem w przyrodzie. Aby zrozumieć zachowanie tak wielkich obiektów jak galaktyki albo tak małych jak cząsteczki powietrza, należy nauczyć się definiować i opisywać ruch w najprostszych przypadkach.

Doświadczenie 4

1. Stań na ruchomej pochylni lub schodach ruchomych.
Jak możesz uzasadnić, że się:
 - poruszasz?
 - nie poruszasz?
2. Czy zauważasz w tym sprzeczność? Jak to wyjaśnisz?

Jak wiesz, ruch ciała to zmiana jego położenia względem innych ciał. Czasami jednak takie sformułowanie może budzić wątpliwości. Na przykład, gdy pasażer jadącego samochodu siedzi bez ruchu, możemy powiedzieć, że się nie porusza. Z drugiej jednak strony się porusza, i to szybko, razem z całym samochodem. Nie ma w tym żadnej sprzeczności: pasażer nie porusza się względem samochodu, ale porusza się względem ziemi.

Ruch jest pojęciem względnym. Dlatego, mówiąc o ruchu danego ciała, należy zawsze podać, względem jakiego **układu odniesienia** go rozpatrujemy. Gdy rozważamy ruch pasażera samochodu, układem odniesienia może być np. samochód lub ziemia.

Bywa i tak, że ciało porusza się względem dwóch układów odniesienia, ale jego ruch wygląda zupełnie inaczej w każdym z nich. Tak było w doświadczeniu 3. na poprzedniej lekcji (s. 40). Punkt na obwodzie koła pojazdu-zabawki poruszał się względem folii (i stołu) po skomplikowanej krzywej, gdy tymczasem względem pojazdu poruszał się po okręgu. Podsumowując, możemy powiedzieć, że:

Ruch ciała to zmiana jego położenia względem wybranego układu odniesienia.



Rys. 2.12. Opis ruchu wygląda zupełnie inaczej z punktu widzenia osoby siedzącej w jadącym wagonie niż z perspektywy osoby idącej po peronie



A to ciekawe

Zdjęcie przedstawione obok zostało wykonane w układzie odniesienia motocyklisty. W tym układzie kierownica motocykla jest nieruchoma, a porusza się jej otoczenie. Dlatego na zdjęciu kierownica jest wyraźna, a tło rozmyte. Gdyby zdjęcie tego motocykla wykonano za pomocą aparatu ustawionego nieruchomo na poboczu (w układzie odniesienia drogi), tło byłoby wyraźne, a pojazd rozmyty.

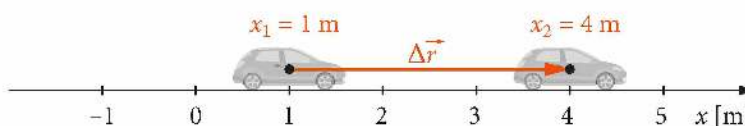
■ Przeszyczenie ciała

Wiesz już, że położenie ciała w ruchu prostoliniowym można opisać jedną liczbą – współrzędną położenia. Teraz wyjaśnimy, jak opisywać zmianę położenia ciała.

Popatrz na rysunek 2.13. Samochód znajdował się najpierw w punkcie o współrzędnej $x_1 = 1$ m, a po jakimś czasie znalazł się w punkcie o współrzędnej $x_2 = 4$ m (przez położenie samochodu rozumiemy tu położenie jego wybranego punktu). Na czerwono narysowaliśmy wektor od początkowego do końcowego położenia samochodu. Nazywamy go **wektorem przeszczenia** i oznaczamy $\Delta \vec{r}$.

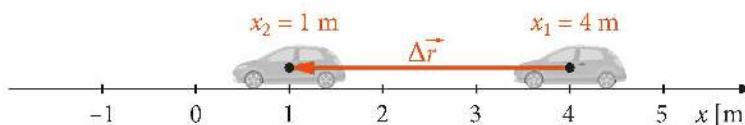
Wektor przeszczenia $\Delta \vec{r}$

prowadzi od początkowego do końcowego położenia ciała.



Rys. 2.13. Wektor przeszczenia $\Delta \vec{r}$

A oto inny przykład ruchu samochodu (rys. 2.14). Przeszczenie nastąpiło teraz z punktu $x_1 = 4$ m do punktu $x_2 = 1$ m. Zwrot wektora przeszczenia jest przeciwny niż poprzednio, tzn. wektor ten jest skierowany przeciwnie do zwrotu osi układu współrzędnych.

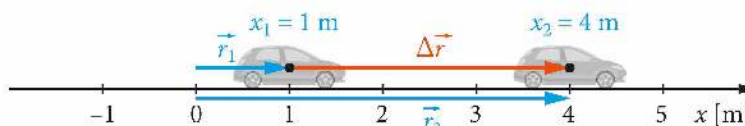


Rys. 2.14. Na tym rysunku wektor przeszczenia $\Delta \vec{r}$ jest skierowany przeciwnie do zwrotu osi układu współrzędnych

■ Wektor przeszczenia a wektory położenia ciała

Na rysunku 2.15 widzisz wektory położenia samochodu: na początku ($\vec{r}_1$) i na końcu ruchu ($\vec{r}_2$).

Współrzędna położenia dla $\vec{r}_1$ wynosi $x_1 = 1$ m, a dla $\vec{r}_2$ wynosi $x_2 = 4$ m.



Rys. 2.15. Wektory położenia początkowego $\vec{r}_1$ i końcowego $\vec{r}_2$ oraz wektor przeszczenia $\Delta \vec{r}$

Zauważ, że gdy do wektora położenia początkowego dodamy wektor przemieszczenia $\Delta \vec{r}$, otrzymamy wektor położenia końcowego:

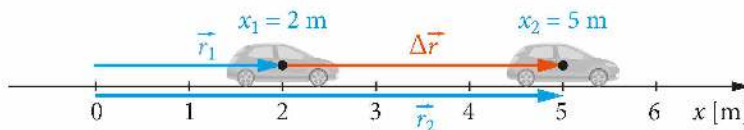
$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta \vec{r}$$

W takim razie:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Możemy powiedzieć, że wektor przemieszczenia opisuje zmianę wektora położenia w wyniku ruchu ciała.

Przyjrzyj się teraz rysunkowi 2.16 przedstawiającemu ten sam ruch pojazdu. Inny jest jednak początek układu współrzędnych.



Rys. 2.16. Wektor przemieszczenia nie zależy od wyboru początku układu współrzędnych

Zwróć uwagę, że choć wektory położenia zależą od wyboru początku układu współrzędnych, to wektor przemieszczenia już od niego nie zależy. Dlatego równanie matematyczne opisujące wektor przemieszczenia ma taką samą postać niezależnie od wyboru początku układu współrzędnych.

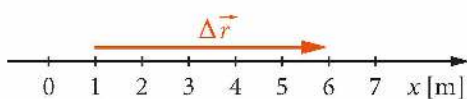
■ Współrzędna wektora przemieszczenia

Jak każdy wektor położony na osi liczbowej, również wektor przemieszczenia wzdłuż wybranej osi można opisać za pomocą współrzędnej. Jeśli współrzędną wektora położenia oznaczamy literą x , to współrzędną wektora przemieszczenia oznaczamy Δx .

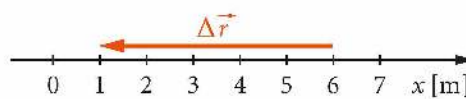
Wiesz już, że odejmowaniu wektorów odpowiada odejmowanie ich współrzędnych. Z zależności $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ wynika, że:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Obliczmy teraz współrzędne wektora przemieszczenia przedstawionego na rysunkach 2.15 i 2.16, które różnią się tylko położeniem początku układu współrzędnych. Na rysunku 2.15 mamy: $\Delta x = 4 \text{ m} - 1 \text{ m} = 3 \text{ m}$, a na rysunku 2.16 mamy: $\Delta x = 5 \text{ m} - 2 \text{ m} = 3 \text{ m}$. Widzimy, że położenie początku układu współrzędnych nie ma wpływu na współrzędną przemieszczenia. Dla uproszczenia zamiast „przemieszczenie o współrzędnej -5 m ” będziemy mówić „przemieszczenie -5 m ” (rys. 2.18).



Rys. 2.17. Przemieszczenie 5 m



Rys. 2.18. Przemieszczenie -5 m

Zwróć uwagę, że współrzędna wektora przemieszczenia jest czym innym niż jego wartość (długość). Wartość wektora zawsze jest dodatnia

$\Delta \vec{r}$ – wektor przemieszczenia,
 $\vec{r}_1$ – wektor położenia początkowego,
 $\vec{r}_2$ – wektor położenia końcowego

Wektor położenia zawsze zaczyna się w początku układu współrzędnych.

► **Dodatek matematyczny**
s. 43

– mówi nam, jak daleko przemieściło się dane ciało. **Współrzędna zawiera więcej informacji niż wartość:** oprócz tego, jak daleko, mówi też, w którą stronę odbył się ruch.

■ Przeszyczenie a droga

Ze szkoły podstawowej znasz pojęcie drogi. Trzeba ją odróżniać od przeszczenia ciała, i to z kilku powodów:

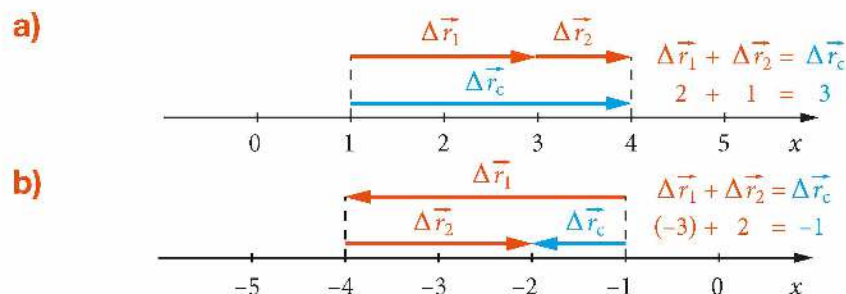
1. Jeżeli ciało się poruszało, droga jest zawsze dodatnia, niezależnie od tego, w którą stronę odbywał się ruch.
2. Przeszczenie informuje nas wyłącznie o różnicy między początkowym a końcowym położeniem ciała. W podróży dookoła świata przeszczenie jest zerowe, ale droga wynosi kilkadziesiąt tysięcy kilometrów.
3. Przeszczenie jest **wektorem**, natomiast droga jest **skalarem** (określa się ją za pomocą jednej liczby).

Dodatek matematyczny
s. 42

Wektor całkowitego przeszczenia otrzymujemy, dodając wektory kolejnych przeszczeń.

■ Przeszczenia można dodawać

Jeśli ciało przeszcza się kilkakrotnie, to wektor całkowitego przeszczenia uzyskamy, dodając wektory jego kolejnych przeszczeń. Przykłady widzisz na rysunkach poniżej.



Rys. 2.19. Dodawanie dwóch wektorów przeszczeń: a) o zwrotach zgodnych, b) o zwrotach przeciwnych

Przy kilkakrotnym przeszczeniu, jeśli zwroty przeszczeń nie były zgodne, całkowita droga będzie większa niż wartość całkowitego przeszczenia.

Po tej lekcji powinieneś

- rozumieć, co to znaczy, że ruch jest pojęciem względnym, i podawać przykłady względności ruchu;
- posługiwać się pojęciem układu odniesienia przy opisie ruchu;
- posługiwać się wektorem przeszczenia podczas opisu ruchu ciała po prostej, określać współrzędną wektora przeszczenia i odróżniać przeszczenie od drogi;
- dodawać wektory przeszczenia leżące na jednej prostej.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



■ Przykład

Winda wjechała z pierwszego piętra na czwarte, a następnie zjechała na poziom -1 (pod ziemią). Określ jej całkowite przemieszczenie oraz przebytą drogę. Przyjmij, że piętro razem ze stropem ma 3 m wysokości.

Rozwiązanie

Wjeżdżając na górę, winda pokonała 3 piętra, czyli 9 m, a zjeżdżając w dół, przejechała 5 pięter, czyli 15 m. Jej łączna droga wyniosła:

$$s = 9 \text{ m} + 15 \text{ m} = 24 \text{ m}$$

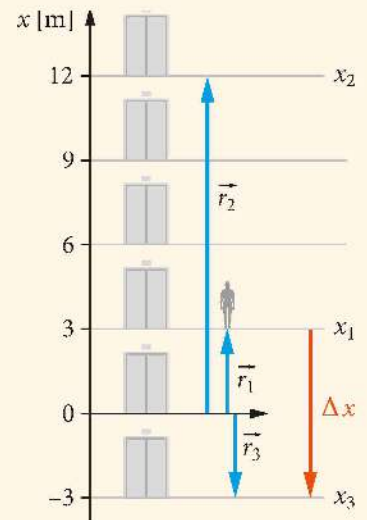
Aby określić przemieszczenie windy, przyjmijmy układ współrzędnych, w którym oś x skierowana jest w górę, a punkt zero znajduje się na podłodze parteru. Winda początkowo przemieściła się z punktu $x_1 = 1 \cdot 3 \text{ m} = 3 \text{ m}$ do punktu $x_2 = 4 \cdot 3 \text{ m} = 12 \text{ m}$, a następnie do punktu $x_3 = -1 \cdot 3 \text{ m} = -3 \text{ m}$. Współrzędne x_1 , x_2 i x_3 odnoszą się do wektorów położenia. Z rysunku wynika, że całkowite przemieszczenie wyniosło:

$$\Delta x = x_3 - x_1 = -3 \text{ m} - 3 \text{ m} = -6 \text{ m}$$

Odpowiedź: Droga przebyta przez windę wyniosła 24 m, a jej przemieszczenie było równe -6 m (tj. miało wartość 6 m i zwrot w dół).

Uwagi. Gdybyśmy, zamiast obliczyć od razu całkowite przemieszczenie, dodali kolejne przemieszczenia windy, wynik byłby taki sam: $\Delta x = 9 \text{ m} + (-15 \text{ m}) = -6 \text{ m}$.

Wynik nie zależy od konkretnego wybranego układu odniesienia.



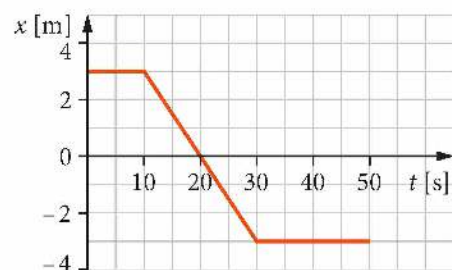
1. Winda wjechała dwa piętra w górę, a następnie zjechała cztery piętra w dół.

Podaj współrzędne jej kolejnych przemieszczeń, a następnie współrzędną całkowitego przemieszczenia. Sprawdź, czy wynik zależy od tego, gdzie znajduje się początek układu współrzędnych. Przyjmij, że jedno piętro razem ze stropem ma wysokość 3 m.

2. Dźwig budowlany może się poruszać po prostych szynach. Na wykresie przedstawiono jego położenie w zależności od czasu. Jako punkt zero przyjęto środek toru, a jako zwrot osi x – kierunek północny.

a) Opisz wektor przemieszczenia dźwigu pomiędzy chwilą $t = 10 \text{ s}$ a chwilą $t = 20 \text{ s}$ (podaj jego współrzędną, zwrot i wartość).

- b) Ten sam dźwig poruszył się najpierw o 4 m na północ, a potem o 2 m na południe. Zapisz w zeszycie kolejne przemieszczenia i ich sumę.



3. Stań na chodniku i spróbuj wykonać zdjęcie poruszającego się pojazdu tak, aby pojazd był ostry, a tło rozmyte (podobnie jak w ciekawostce na s. 46). Wyjaśnij, jak wykonać takie zdjęcie.

Uwaga. Jeśli używasz aparatu ze stabilizacją obrazu, musisz ją wyłączyć.

2.3. Prędkość w ruchu prostoliniowym

Przypomnij sobie

- Tor ruchu to linia, po której porusza się ciało. Droga to długość tego toru.
- Ruch prostoliniowy to ruch, którego torem jest linia prosta.
- W ruchu jednostajnym prostoliniowym prędkość to iloraz drogi i czasu.



Rys. 2.20. Prędkość jest wielkością wektorową

■ Wektor prędkości i jego współrzędna

W szkole podstawowej prędkość opisywaliśmy za pomocą liczby z jednostką. Jednak prędkość jest wielkością wektorową. **Wektor prędkości** jest skierowany w stronę, w którą porusza się ciało (rys. 2.20), a jego wartość to znana nam już wielkość wyrażona w $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ lub $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Na najbliższych lekcjach będziemy opisywać ruch ciał wzdłuż prostej, dlatego do opisu prędkości wystarczy jedna liczba – jej współrzędna. Dodatnia współrzędna prędkości oznacza, że ciało porusza się zgodnie ze zwrotem osi liczbowej, ujemna – że porusza się w przeciwną stronę. Podobnie jak w przypadku przemieszczenia, podczas omawiania ruchu prostoliniowego zamiast „współrzędna prędkości ciała wynosi $-10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ” będziemy mówili w skrócie „prędkość ciała wynosi $-10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ”.

Zauważ, że w odróżnieniu od współrzędnej wektora prędkości, wartość wektora prędkości nigdy nie jest ujemna.

■ Prędkość średnia

W jaki sposób wyznaczyć wektor prędkości? Zaczniemy od **prędkości średniej**.

Prędkość średnia ciała to iloraz jego całkowitego przemieszczenia i czasu, w którym to przemieszczenie nastąpiło:

$$\vec{v}_{\text{sr}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

gdzie: $\Delta \vec{r}$ – całkowite przemieszczenie ciała,
 Δt – czas, w którym nastąpiło przemieszczenie.

Analogiczny związek zachodzi dla współrzędnych wektorów prędkości i przemieszczenia w ruchu wzdłuż prostej:

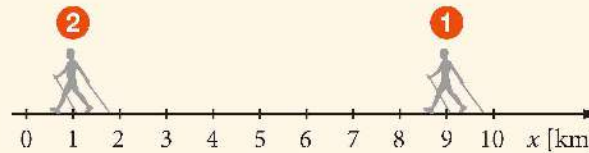
$$v_{\text{sr}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

gdzie: v_{sr} – współrzędna wektora prędkości średniej,
 Δx – współrzędna wektora całkowitego przemieszczenia ciała.

Prędkość średnia może wynosić zero, nawet jeżeli ciało się poruszało – wystarczy, że ciało wróci do miejsca, z którego wyruszyło.

■ Przykład

Turysta szedł prostą szosą i mijał słupki kilometrowe. O godzinie 13:00 minął słupek z napisem „9 km”, a o godzinie 15:00 słupek z napisem „1 km”. Oblicz przemieszczenie i prędkość średnią turysty między 13:00 a 15:00.



Rozwiązanie

Oznaczmy położenie słupków mijanych przez turystę: x_1 – słupek „9 km” i x_2 – słupek „1 km”. Przemieszczenie turysty wyniosło:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 1 \text{ km} - 9 \text{ km} = -8 \text{ km}$$

Łatwo obliczyć, że między położeniami turysty oznaczonymi na rysunku „1” i „2” upłynęły 2 godziny ($\Delta t = 2 \text{ h}$).

Na podstawie tych danych możemy obliczyć prędkość średnią turysty:

$$v_{\text{sr}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

W naszym przypadku jest ona równa:

$$v_{\text{sr}} = \frac{-8 \text{ km}}{2 \text{ h}} = -4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Odpowiedź: Przemieszczenie turysty wynosiło -8 km , a prędkość średnia, z jaką się poruszał, była równa $-4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Uwaga. Co oznacza znak minus w powyższym zapisie? Podobnie jak w przypadku przemieszczenia wskazuje on, w którą stronę porusza się ciało. Jak wynika z rysunku, turysta poruszał się w lewo, czyli w przeciwną stronę niż wskazuje grot osi układu współrzędnych.

■ Prędkość chwilowa

Czy z powyższego przykładu możemy wysnuć wniosek, że turysta przez cały czas poruszał się z prędkością o wartości $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? Oczywiście, że nie. Mógł przyspieszać i zwalniać, zatrzymywać się, a nawet przez jakiś czas iść w przeciwną stronę. Obliczona wartość to tylko **prędkość średnia**. Trzeba odróżnić ją od **prędkości chwilowej**, z którą ciało porusza się w danej chwili. Intuicyjnie rozumiemy, co to jest prędkość chwilowa. Jak możemy ją zdefiniować?

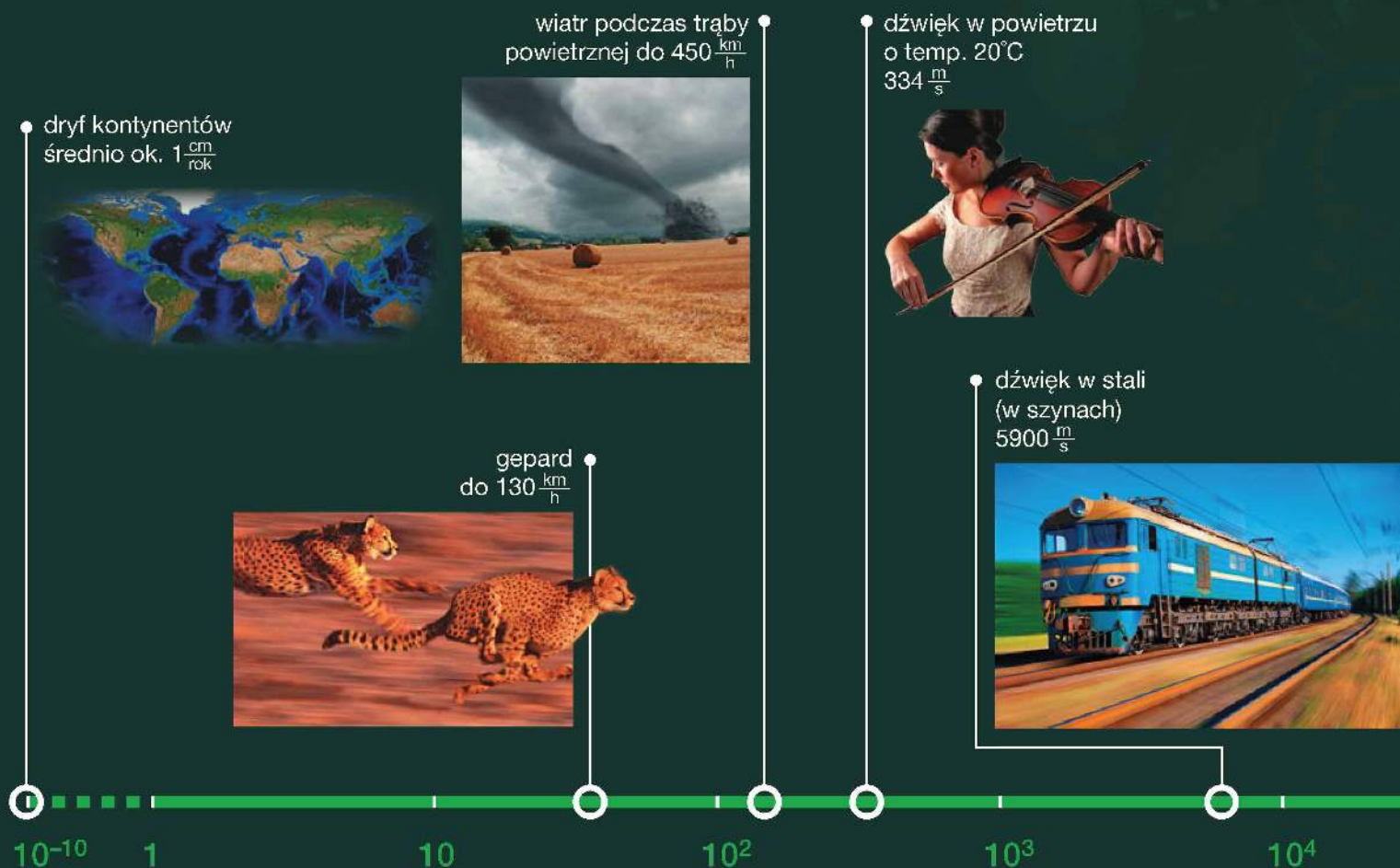
Obliczamy prędkość średnią dla coraz krótszych przedziałów czasu. **Im krótszy czas, z tym większą dokładnością prędkość średnia odpowiada prędkości chwilowej.** Prędkości średnie dla coraz krótszych czasów zbliżają się do pewnego wektora. To właśnie ten wektor jest **prędkością chwilową**.



Rys. 2.21. Prędkość średnia turysty na szlaku jest różna od prędkości chwilowej

Prędkości w przyrodzie

Codziennie poruszamy się z różnymi prędkościami: idąc do szkoły, jadąc samochodem, spacerując. Przyjrzyjmy się prędkościom występującym w przyrodzie.



Aby wyznaczona prędkość była jak najbliższa prędkości chwilowej ciała, obliczamy iloraz jego przemieszczenia i czasu, w którym nastąpiło to przemieszczenie, dla jak najkrótszego przedziału czasu:

Gdy mówimy krótko – prędkość, chodzi nam o prędkość chwilową.

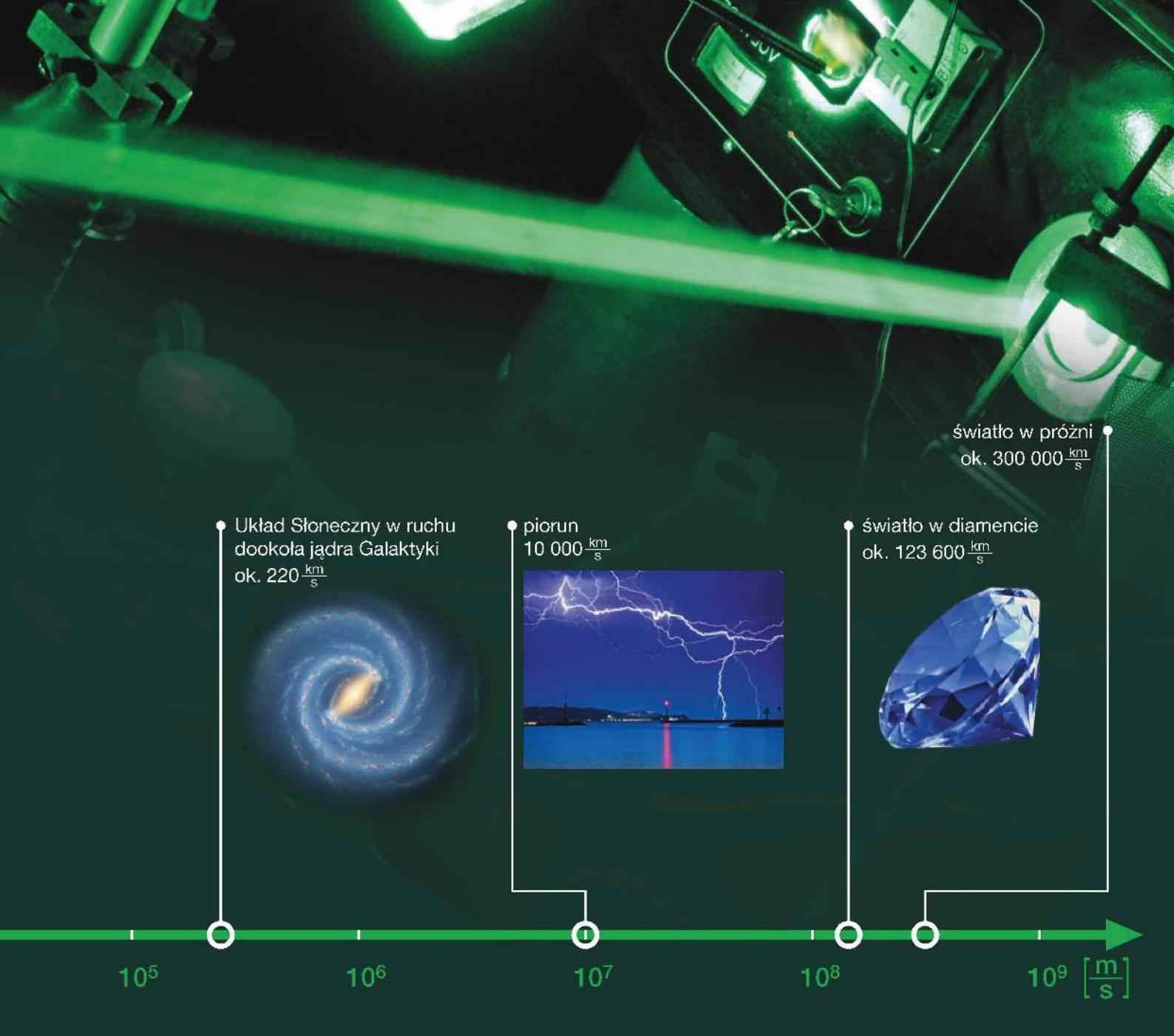
$$\vec{v}_{\text{ch}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{dla } \Delta t \rightarrow 0$$

Wybór dostatecznie krótkiego czasu Δt zależy od konkretnego zjawiska. Dla ścigającego się samochodu sportowego będzie to ułamek sekundy, a dla ruchu kontynentów – nawet rok.

Analogiczny związek zachodzi dla współrzędnych wektorów prędkości i przemieszczenia w ruchu wzdłuż prostej:

$$v_{\text{ch}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{dla } \Delta t \rightarrow 0$$

gdzie: v_{ch} – współrzędna wektora prędkości chwilowej,
 Δx – zmiana współrzędnej położenia w ruchu prostoliniowym.



■ Jednostka prędkości

Jednostka prędkości zawsze jest ilorazem jednostki długości i jednostki czasu. W układzie SI jednostką prędkości jest metr na sekundę ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$). Często używamy też kilometrów na godzinę ($\frac{\text{km}}{\text{h}}$).

W szczególnych przypadkach stosujemy także inne jednostki prędkości, np. $\frac{\text{cm}}{\text{rok}}$ do opisu dryfu kontynentów lub $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ do opisu ruchu ciał niebieskich – patrz ilustracja *Prędkości w przyrodzie* powyżej.

Po tej lekcji powinieneś

- posługiwać się pojęciem wektora prędkości i jego współrzędną;
- umieć wyjaśnić pojęcia prędkości średniej i prędkości chwilowej w ruchu prostoliniowym;
- obliczać te wielkości i odróżniać je od siebie.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



■ Przykład

Zapoznaj się z danymi dotyczącymi ruchu pewnego samochodu. Oblicz prędkość średnią w każdym z opisanych przedziałów i oszacuj prędkość chwilową o godzinie 12:00.

Między 11:00:00 a 13:00:00 samochód przebył 134 km.

Między 11:30:00 a 12:30:00 przebył 59 km.

Między 11:59:00 a 12:01:00 przebył 2,1 km.

Między 11:59:59 a 12:00:01 przebył 33,2 m.

Rozwiązanie

Dla każdego z opisanych przedziałów czasowych można obliczyć prędkość średnią.

Dla pierwszego przedziału $\Delta x = 134$ km, $\Delta t = 2$ h, stąd:

$$v_{\text{sr}} = 67 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Dla kolejnych przedziałów otrzymamy odpowiednio: $59 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $63 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $59,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Możemy więc powiedzieć, że prędkość chwilowa samochodu o godzinie 12:00 wynosiła około $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Odpowiedź: Prędkości średnie w kolejnych przedziałach czasu wynoszą odpowiednio: $67 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $59 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $63 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $59,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Prędkość chwilowa o godzinie 12:00 była równa w przybliżeniu $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1. Czy radar używany przez policję drogową pozwala zmierzyć prędkość chwilową, czy średnią? Odpowiedź uzasadnij.

2. Winda przebywa drogę 1 m w czasie 2 s. Ile wynosi współrzędna jej prędkości, gdy jedzie w górę, a ile – gdy jedzie w dół? Pamiętaj, by wstawić znak „+” lub „–”, opisujący zwrot.

Przyjmij, że oś układu współrzędnych jest skierowana w górę.

3. Biologowie odkryli, że kłen w czasie jednego machnięcia ogonem przepływa połowę

długości swojego ciała. Z jaką prędkością płynie 40-centymetrowy kłen machający ogonem 5 razy na sekundę?



2.4. Ruch jednostajny prostoliniowy

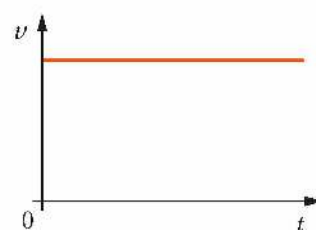
Przypomnij sobie

- Ruchy możemy podzielić na jednostajne i niejednostajne.
- Zależność drogi i prędkości od czasu można przedstawić na wykresie.

Najprostszym przykładem ruchu jest **ruch jednostajny prostoliniowy**. Jak pewnie pamiętasz ze szkoły podstawowej, ruch jednostajny prostoliniowy to ruch po torze prostoliniowym ze stałą prędkością:

$$\vec{v} = \text{const}$$

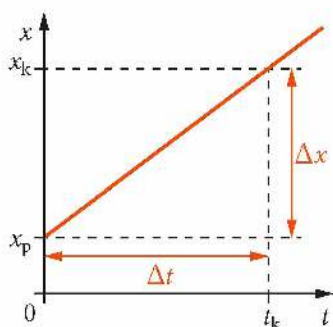
Przypomnijmy, że prędkość jest wielkością wektorową, więc „stała prędkość” oznacza, że stała jest nie tylko wartość, lecz także kierunek i zwrot. Co prawda w ruchu prostoliniowym jej kierunek i tak się nigdy nie zmienia, ważne jest jednak, aby pamiętać, że w ruchu jednostajnym prostoliniowym nie zmienia się również zwrot prędkości, co oznacza, że ciało nie zawraca. Na rysunku 2.22 przedstawiono wykres zależności prędkości od czasu dla ciała poruszającego się ruchem jednostajnym prostoliniowym.



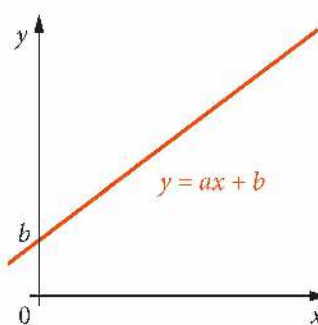
Rys. 2.22. Wykres zależności prędkości od czasu dla ruchu jednostajnego prostoliniowego

■ Równanie ruchu jednostajnego prostoliniowego

Jak wygląda wykres zależności położenia do czasu $x(t)$ w ruchu jednostajnym prostoliniowym? Okazuje się, że jest to linia prosta. Przekonamy się o tym, gdy przekształcimy wzór definiujący prędkość: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.



Rys. 2.23. Wykres zależności położenia od czasu dla ruchu jednostajnego prostoliniowego



Rys. 2.24. Wykres funkcji liniowej $y = ax + b$

Pewne ciało od chwili $t_p = 0$ do chwili $t_k = t$ przemieściło się z punktu $x_p = x_0$ do punktu $x_k = x$. Z definicji prędkości wiemy, że:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - 0} = \frac{x - x_0}{t}$$

◀ Zależność liniowa s. 29

◀ Prędkość średnia s. 50

Po wyznaczeniu x z równania zapisanego na s. 55 otrzymamy:

$$x = x_0 + vt$$

gdzie:

t – czas, x_0 – współrzędna położenia początkowego,

v – prędkość ciała.

Powyższa zależność jest **równaniem ruchu jednostajnego prostoliniowego**. Porównajmy ją z ogólnym wzorem funkcji liniowej $y = ax + b$.

Ruch jednostajny: $x = v t + x_0$

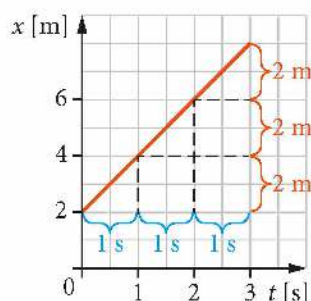
Ogólny wzór: $y = a x + b$

współczynnik kierunkowy

wyraz wolny

Wykresy 2.23 i 2.24 s. 55

Gdy ruch przedstawiamy na wykresie, na osi poziomej zaznaczamy czas t , a na osi pionowej – położenie x . Widzimy, że x_0 odpowiada współczynnikowi b (patrz rys. 1.20 s. 30), który określa punkt przecięcia prostej z osią pionową. Innymi słowy, x_0 to początkowe położenie ciała.



Rys. 2.25. Wykres ruchu dla $x_0 = 2 \text{ m}$ i $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

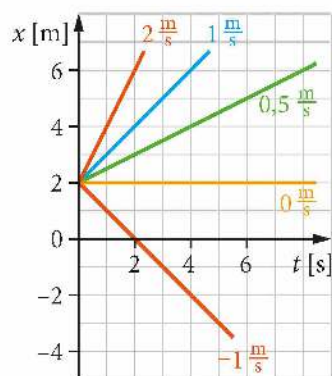
■ Prędkość a nachylenie wykresu

Wreszcie widzimy rzecz najważniejszą: prędkość v pełni funkcję współczynnika kierunkowego, określającego nachylenie prostej do osi czasu. Gdy czas mierzymy w sekundach, a położenie w metrach, współczynnik ten mówi nam, o ile metrów zmienia się położenie ciała w czasie 1 s.

Z wykresu obok (rys. 2.25) możemy odczytać, że w każdej sekundzie położenie ciała zwiększa się o 2 m. Oznacza to, że porusza się ono z prędkością $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Z wykresu odczytujemy $x_0 = 2 \text{ m}$, zatem ogólne równanie $x = vt + x_0$ przyjmuje postać:

$$x = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 2 \text{ m}$$

W zależności położenia od czasu w ruchu jednostajnym prostoliniowym, opisanej wzorem $x = vt + x_0$, prędkość v jest współczynnikiem kierunkowym.



Rys. 2.26. Od prędkości v zależy nachylenie prostej $x(t)$ do osi czasu

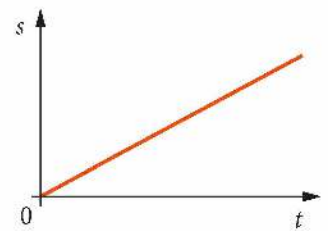
Im większa wartość bezwzględna prędkości, tym większy jest kąt nachylenia prostej do osi poziomej (rys. 2.26). Gdy ciało się nie porusza ($v = 0$), prosta jest pozioma, natomiast gdy porusza się z ujemną prędkością (czyli w przeciwną stronę niż wskazuje strzałka osi x), wykres przedstawia funkcję malejącą.

■ Droga w ruchu jednostajnym prostoliniowym

Zwrot prędkości (znak jej współrzędnej) nie ma wpływu na przebytą drogę. Aby pozbyć się ewentualnego minusa, obliczamy wartość bezwzględną prędkości. Dlatego zależność drogi od czasu opisujemy wzorem:

$$s = |v|t$$

Dlaczego w szkole podstawowej w tym wzorze nie zapisywaliśmy znaku wartości bezwzględnej? Ponieważ rozważaliśmy wyłącznie ruch w jedną stronę, przyjętą za dodatnią. W takim przypadku prędkość była dodatnia, a dla liczb dodatnich oznaczenie wartości bezwzględnej można pominąć. Wykres funkcji $s(t)$ jest linią prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych i zawsze jest funkcją rosnącą (patrz 2.27 oraz przykład poniżej).



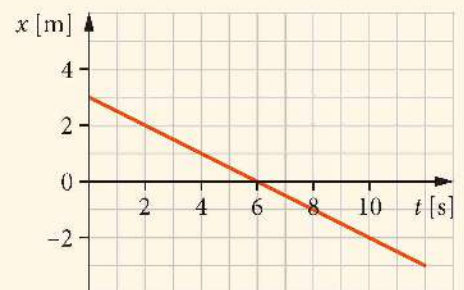
Rys. 2.27. Wykres zależności drogi od czasu dla ruchu jednostajnego prostoliniowego

Droga przebyta przez ciało ruchem jednostajnym jest wprost proporcjonalna do czasu (rys. 2.27).

Przeanalizuj przykład, w którym zapoznamy się z wykresami ilustrującymi ruch prostoliniowy.

■ Przykład

Na wykresie przedstawiono zależność położenia ciała od czasu. Oblicz prędkość tego ciała. Opisz wzorem zależność $x(t)$. Narysuj wykres drogi przebytej od chwili $t = 0$ s do $t = 10$ s w funkcji czasu.



Rozwiązanie

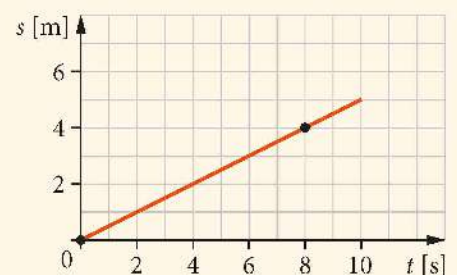
W chwili $t = 0$ ciało znajdowało się w punkcie $x = 3$ m. W ciągu każdych kolejnych 2 s jego współrzędna położenia zmniejszała się o 1 m, więc prędkość tego ciała wynosiła:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{1 \text{ m}}{2 \text{ s}} = -0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

dlatego też ruch opiszemy wzorem: $x = -0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 3 \text{ m}$. Wartość bezwzględna prędkości ciała wynosiła $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, więc zależność drogi od czasu zapisujemy następująco:

$$s = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$$

Aby narysować wykres funkcji, wystarczy zaznaczyć dwa punkty, np. $(0, 0)$ i $(8, 4)$, i poprowadzić przez nie prostą.



Odpowiedź: Prędkość ciała wynosi $-0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Zależność położenia od czasu dla tego ruchu opisujemy wzorem $x = -0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 3 \text{ m}$.

■ Badanie ruchu jednostajnego prostoliniowego

Wykonaj doświadczenie mające na celu zbadanie ruchu jednostajnego prostoliniowego i przeanalizuj jego wyniki.



Doświadczenie 5

1. Przygotuj „układ współrzędnych”, układając linijkę lub papierową miarkę, i puść wzdłuż niej zabawkę o napędzie elektrycznym (zdjęcie obok). Sfilmuj jej ruch (podobnie jak w doświadczeniu 3. na s. 40).
2. Wybierz charakterystyczny punkt zabawki, który podczas ruchu pozostaje nieruchomy względem niej, np. środek koła lub koniec zderzaka.
3. Przewiń film klatka po klatce i zapisz w tabeli położenia wybranego punktu w danych chwilach.
4. Przedstaw wyniki pomiaru na wykresie zależności położenia od czasu i na ich podstawie oblicz prędkość zabawki.

Wskazówki:

1. Aby zmierzyć czas, najpierw policz klatki przypadające na jedną sekundę filmu. Możesz na przykład sprawdzić, ile kliknięć klawisza strzałki potrzeba, aby licznik czasu wskazał zmianę o 1 s.
2. Zapoznaj się z przedstawioną poniżej propozycją, jak opracować uzyskane wyniki pomiarów. W podobny sposób możesz przedstawić wyniki eksperymentu przeprowadzonego samodzielnie.

Tabela 2.1

t [s]	x [cm]
3,0	2,4
3,2	4,2
3,4	6,3
3,6	8,3
3,8	10,3
4,0	12,3
4,2	14,2
4,4	16,3
4,6	18,2
4,8	20,4
5,0	22,1
5,2	24,3

Analiza wyników

Najpierw ustaliliśmy, że na jedną sekundę filmu przypada 30 klatek. Przyjeliśmy, że wystarczająco dokładne i wygodne w opracowaniu będzie wykonanie pomiarów co 0,2 sekundy, czyli w co szóstą klatkę filmu.

Uzyskane wyniki pomiarów zapisaliśmy w tabeli 2.1. Pomiary położenia środka przedniego koła (taki punkt na zabawce obraliśmy) rozpoczęliśmy od chwili $t = 3$ s, w której środek koła był już dobrze widoczny w kadrze.

Ile wynosi niepewność pomiarowa

Skoro na 1 sekundę przypada 30 klatek filmu, czas mierzymy z niepewnością $\Delta t = \frac{1}{30} \text{ s} \approx 0,033 \text{ s}$.

Co prawda linijka wyskalowana jest w milimetrach, ale nie możemy odczytać położenia środka koła tak dokładnie, gdyż zaznaczona kropka ma swoją wielkość, a w dodatku jest nieco rozmyta w czasie ruchu. Możemy przyjąć, że niepewność pomiaru położenia Δx wynosi w tym przypadku 2 mm. Jest to jedynie wartość szacunkowa, została jednak dobrana tak, abyśmy mieli pewność, że rzeczywista wartość pomiaru x zawrze się w przedziale określonym przez niepewność pomiarową ($x \pm \Delta x$).

Sporządzanie wykresu

Na podstawie wyników pomiarów zapisanych w tabeli 2.1 sporządzamy wykres zależności położenia od czasu $x(t)$. Na ilustracjach na s. 59 pokazano kolejne etapy wykonywania wykresu $x(t)$ z zaznaczonymi

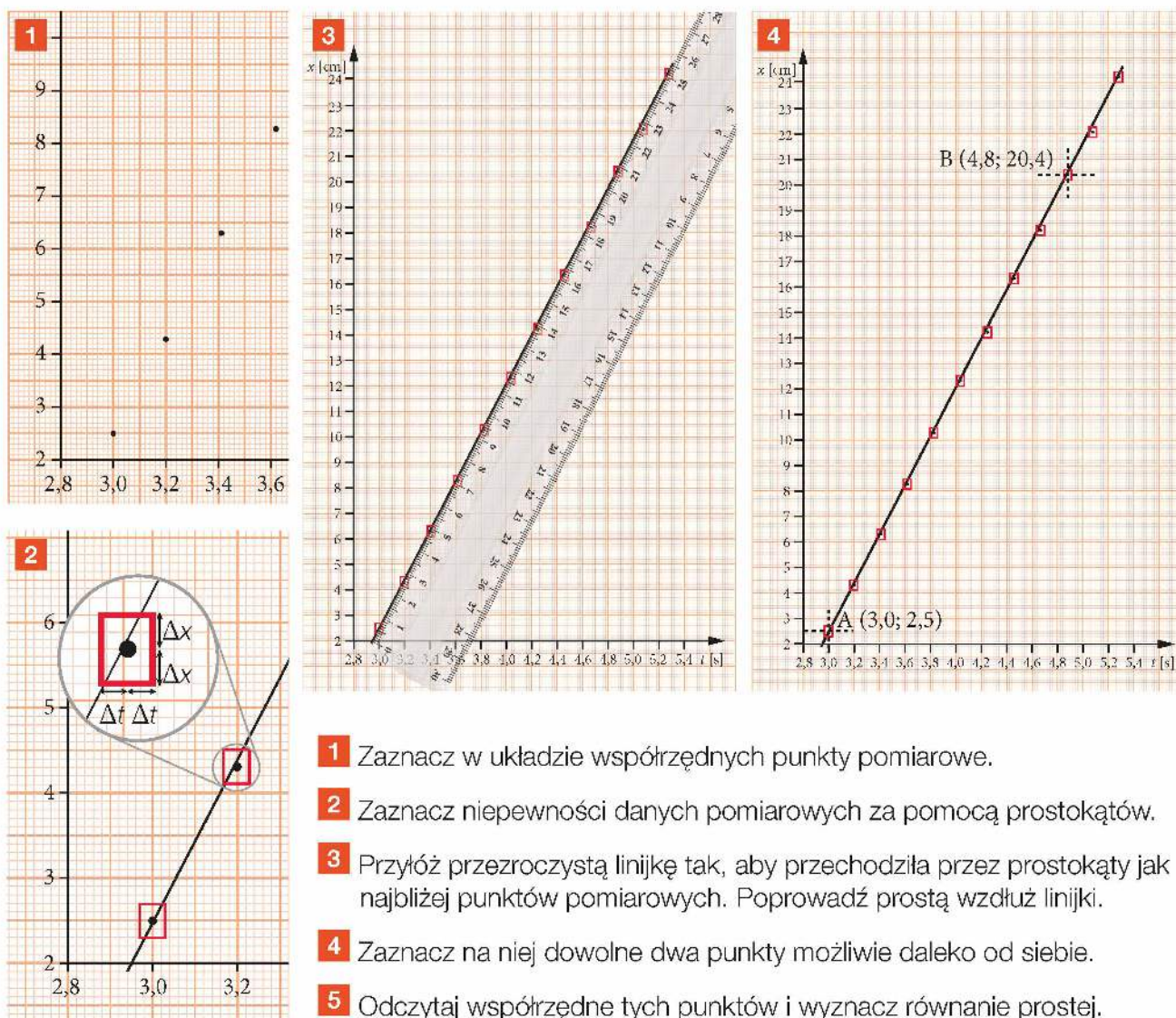
niepewnościami pomiarowymi oraz dopasowywanie prostej do punktów pomiarowych za pomocą przezroczystej linijki.

Uwaga. Do dokładniejszego zaznaczenia punktów pomiarowych w układzie współrzędnych użyj papieru milimetrowego.

Na wykresie oprócz punktu o współrzędnych (t, x) rysujemy prostokąt, którego poziomy bok przedstawia niepewność czasu, a pionowy – położenia.

Przeanalizuj poszczególne etapy dopasowywania prostej do wykresu (ramka poniżej). Zauważ, że po zaznaczeniu niepewności pomiarowych Δt i Δx otrzymujemy prostokąt o wymiarach $2\Delta x \times 2\Delta t$.

Dopasowanie prostej do wykresu



Analiza wykresu

Przeanalizujmy otrzymany wykres zależności $x(t)$ (rys 4. s. 59). Wyniki pomiarów (zaznaczone jako kropki) układają się na prostej tylko w przybliżeniu. Widzimy jednak, że gdy zaznaczymy niepewności (prostokąty wokół punktów), możemy poprowadzić prostą przez wszystkie prostokąty jednocześnie. Wynika stąd, że ruch zabawki możemy traktować jako jednostajny. Najprostszą metodą jest przyłożenie przezroczystej linijki i dopasowanie prostej „na oko”.

Otrzymana prosta przedstawia zależność położenia od czasu. Aby wyznaczyć jej współczynnik kierunkowy, wystarczy wybrać na niej możliwie daleko od siebie dwa dowolne punkty, których współrzędne łatwo odczytać (patrz s. 59). W naszym przypadku ten współczynnik jest równy prędkości samochodziku wyrażonej (obliczenia obok) w jednostkach przyjętych na początku doświadczenia, czyli w centymetrach na sekundę:

$$v = 9,94 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \approx 10 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Wykonaj te same obliczenia w odniesieniu do danych z wykresu uzyskanego na podstawie samodzielnie wykonanego doświadczenia.

Z wykresu na s. 59 (rys. 4.) odczytujemy:
 A (3,0; 2,5),
 B (4,8; 20,4).
 W czasie
 $t = 4,8 \text{ s} - 3,0 \text{ s} =$
 $= 1,8 \text{ s}$
 pojazd przebył
 $s = 20,4 \text{ cm} - 2,5 \text{ cm} =$
 $= 17,9 \text{ cm}$, więc
 $v = \frac{17,9 \text{ cm}}{1,8 \text{ s}} = 9,94 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

■ Wyznaczanie niepewności pomiaru prędkości

Jeśli chcesz oszacować dokładność wyznaczonej tą metodą prędkości, możesz znaleźć największe i najmniejsze nachylenia prostej $x(t)$. Stopniowo obracaj i przesuwaj linijkę, aby linia przechodziła przez wszystkie zaznaczone prostokąty.

W naszym przypadku współczynnik kierunkowy dla minimalnego nachylenia wyniósł 9,7, a dla maksymalnego 10,2. Średnia tych liczb to 9,95, a każda z nich różni się od średniej o 0,25. Można więc zapisać ostateczny wynik doświadczenia:

$$v \pm \Delta v = 9,95 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \pm 0,25 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Zauważ, że jest to duża dokładność: niepewność względna to 2,5%. Pomiar prędkości w doświadczeniu 5. był **pomiarem pośrednim**, to znaczy prędkość wyznaczaliśmy na podstawie pomiarów innych wielkości.

$$\begin{aligned} v_{\min} &= 9,7 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\ v_{\max} &= 10,2 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\ v &= \frac{9,7 \frac{\text{cm}}{\text{s}} + 10,2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{2} = \\ &= 9,95 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Po tej lekcji powinieneś

- zapisywać i interpretować wzory opisujące zależność położenia i drogi od czasu w ruchu jednostajnym prostoliniowym;
- rysować i interpretować wykresy zależności położenia i drogi od czasu w ruchu jednostajnym prostoliniowym;
- opisywać ruch ciała za pomocą tabeli i wykresu na podstawie pomiarów z bezpośredniej obserwacji lub z filmu;
- dopasowywać za pomocą linijki prostą do punktów na wykresie zależności $x(t)$ i na podstawie jej nachylenia obliczać prędkość ciała.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE

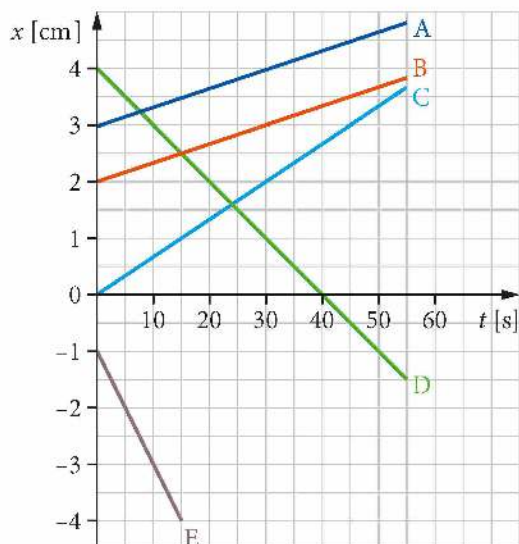


1. Pociąg jechał ze stałą prędkością i pokonał odległość 10 km w czasie 8 min. Oblicz wartość prędkości pociągu.
2. Ile wyniesie droga przebyta od godziny 12:00 do 13:45 przez jacht poruszający się ze stałą prędkością 8 węzłów? Odpowiedź podaj w milach morskich i w kilometrach.



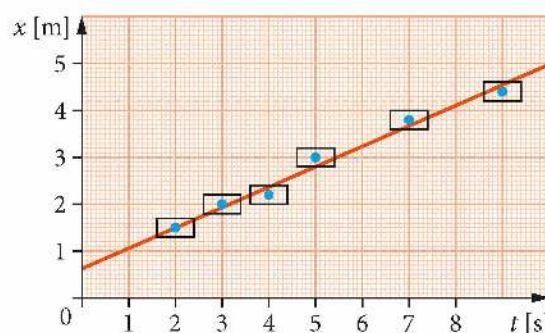
Wskazówka. 1 węzeł (kn) to 1 mila morska na godzinę, 1 mila morska to 1852 m.

3. W jednym układzie współrzędnych narysowano wykresy funkcji $x(t)$ dla pięciu poruszających się ciał. Oblicz ich prędkości, zapisz równania ruchu poszczególnych ciał i narysuj w zeszycie wykres $s(t)$ dla każdego z nich. Jak rozpoznać na wykresie, że dwa ciała poruszają się z jednakową prędkością?



4. Na wykresie zależności położenia od czasu zaznaczono wyniki pomiarów wykonanych podczas badania ruchu ciała. Zaznaczono również niepewności pomiarowe i dopasowano prostą do punktów pomiarowych. Oblicz prędkość ciała.

Wskazówka. Najłatwiej odczytać położenie ciała w chwilach $t = 1$ s oraz $t = 10$ s. Ile czasu upłynęło między tymi chwilami? Jak zmieniło się w tym czasie położenie ciała?



5. Wykonaj doświadczenie.

a) Sfilmuj z boku jadący samochód.

Uwaga. Trzymaj komórkę nieruchomo. Najlepiej, jeżeli udałoby się sfilmować pojazd, którego model jesteś w stanie zidentyfikować. Filmuj samochód z pewnej odległości, tak aby szerokość kadru była 4–5 razy większa niż długość samochodu w kadrze.

b) Znajdź w dostępnych źródłach, np. w internecie, dane techniczne sfilmowanego samochodu i sprawdź jego długość.

c) Oglądając film klatka po klatce, zmierz czas, w którym samochód przebył drogę równą swojej długości.

d) Wyznacz prędkość samochodu. Przelicz ją na kilometry na godzinę.

e) Powtórz czynności opisane w punktach c) i d) dla drogi równej dwóm, trzem i czterem długościom samochodu. Oblicz średnią prędkość i niepewność pomiarową.

2.5. Ruch prostoliniowy zmienny

Przypomnij sobie

- Ruchy możemy podzielić na jednostajne i zmienne.
- W ruchu jednostajnym prostoliniowym prędkość jest wielkością stałą.
- W ruchu zmiennym rozróżniamy prędkość chwilową i prędkość średnią.

■ Średnia wartość prędkości

Po omówieniu ruchu jednostajnego zajmijmy się ruchem zmiennym (niejednostajnym). Zakładamy, że ruch nadal odbywa się po prostej. Jedną z wielkości wykorzystywanych do opisu ruchu zmiennego jest **średnia wartość prędkości**.

Średnia wartość prędkości to iloraz całkowitej drogi i całkowitego czasu trwania ruchu:

$$v_{\text{śrw}} = \frac{s_c}{t_c}$$

gdzie: s_c – całkowita przebyta droga, t_c – całkowity czas trwania ruchu.

Jeśli ciało przebyło drogę 50 m w ciągu 2 s, to jeżeli nawet wielokrotnie zmieniał prędkość, a przez jakiś czas spoczywało – poruszało się z prędkością o średniej wartości $25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

■ „Prędkość średnia” w języku potocznym

Gdy w codziennym życiu opisujemy prędkość jazdy, najczęściej używamy określenia „prędkość średnia”. Jednak dla ścisłości będziemy używali dłuższego, ale precyzyjniejszego określenia „średnia wartość prędkości”. Pozwoli to nam uniknąć mylenia pojęcia średniej wartości prędkości z wartością wektora prędkości średniej.

Różnicę między tymi wielkościami wyjaśnimy na przykładzie.

Człowiek, który przeszedł 100 m wzdłuż ulicy w jedną stronę, zawrócił i przeszedł ponownie 100 m, przy czym cały opisany ruch zajął mu 200 s, poruszał się z prędkością o średniej wartości $v = \frac{200 \text{ m}}{200 \text{ s}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Jego całkowite przemieszczenie w tym przypadku wyniosło zero, co oznacza, że także wektor prędkości średniej był równy zero. Dlatego też wartość wektora prędkości średniej była równa zero.

Wynika z tego, że w opisanym wyżej przykładzie średnia wartość prędkości wyniosła $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a wartość prędkości średniej – zero. Widzimy więc, jak ważne jest, aby odróżniać te pojęcia i ich nie mylić.



Rys. 2.28. Choć znaczną część drogi pociąg Express InterCity z Gliwic do Warszawy pokonuje z prędkością $160 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, to średnia wartość jego prędkości wynosi zaledwie $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Nie należy mylić

pojęć: wartość wektora prędkości średniej i średnia wartość prędkości.

Ruch ze zmianą zwrotu prędkości

Rozważmy ruch, podczas którego kierunek prędkości pozostaje bez zmian, a zmienia się zwrot prędkości i jej wartość.

Przykładem takiego ruchu może być ruch windy w górę i w dół. Wykresy obok (rys. 2.29 i 2.30) przedstawiają taki przykładowy ruch. Przyjeliśmy, że oś, na której zaznaczamy współrzędną położenia, jest zwrócona w górę, a zero na osi oznacza położenie windy na parterze. Wysokość jednego piętra to 3 m.

Analizując wykresy, widzimy, że winda kolejno:

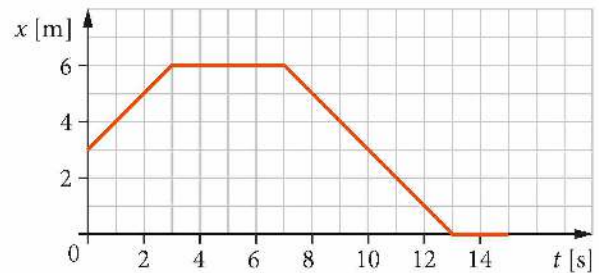
- ▶ znajdowała się na wysokości 3 m nad parterem (na 1. piętrze),
- ▶ przez 3 s jechała w górę z prędkością $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i wjechała na wysokość 6 m (na 2. piętro),
- ▶ przez 4 s stała,
- ▶ przez 6 s poruszała się z prędkością $-1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, czyli zjechała w dół na poziom 0 (parter),
- ▶ przez 2 s stała.

Zgodnie z wykresem zmiany prędkości odbywały się natychmiastowo, w zerowym czasie. Oczywiście jest to niemożliwe. Wykres jest więc przybliżeniem rzeczywistej sytuacji, a czas przyspieszania lub zwalniania windy jest na tyle krótki, że go pomijamy.

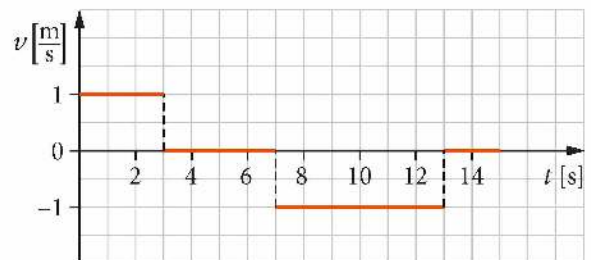
Jeśli chcemy przedstawić na wykresie przebytą drogę zamiast przemieszczenia, musimy pamiętać, że droga nigdy nie maleje, niezależnie od zwrotu prędkości (rys. 2.31).

Po odczytaniu z wykresu potrzebnych danych łatwo obliczyć średnią wartość prędkości windy od chwili $t = 0$ do $t = 15$ s:

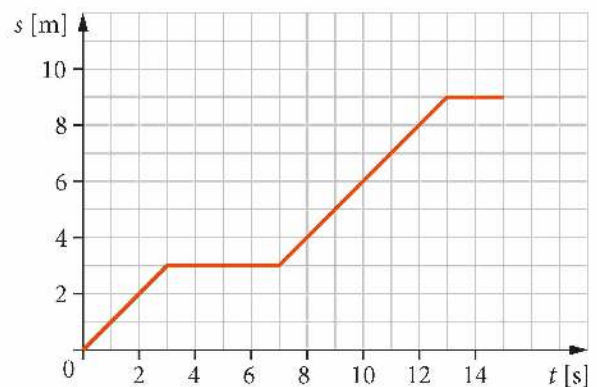
$$v_{\text{śrw}} = \frac{9\text{m}}{15\text{s}} = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Rys. 2.29. Wykres zależności położenia od czasu dla ruchu windy



Rys. 2.30. Wykres zależności prędkości od czasu dla ruchu windy



Rys. 2.31. Wykres zależności drogi od czasu dla ruchu windy

A to ciekawe

Jak sądzisz – czy jeżeli zerwie się lina windy, to kabina runie w dół, jak jest to pokazywane w wielu filmach?

To niemożliwe. Już od połowy XIX wieku w szybach windowych montuje się systemy bezpieczeństwa, które uniemożliwiają nagły zjazd windy w dół. Pierwszy taki system zaprojektował i zaprezentował w 1854 roku w Nowym Jorku konstruktor Elisha Graves Otis (czyt. elisza grejwz otis). Zasada działania systemu opiera się na wprowadzeniu tzw. ogranicznika prędkości. W momencie gdy lina się zrywa i kabina zaczyna spadać, zostaje także zerwana lina bezpieczeństwa, a to uruchamia ogranicznik prędkości. Kabina zakleszcza się w prowadnicach (szynach) i jest mechanicznie wyhamowywana aż do zatrzymania.



Po tej lekcji powinieneś

- znać i stosować pojęcie średniej wartości prędkości;
- rozróżniać pojęcia: średnia wartość prędkości i wartość wektora prędkości średniej;
- rysować i interpretować wykresy ruchu przy skokowych zmianach prędkości oraz przy zmianach zwrotu prędkości.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



■ Przykład

Tomek szedł do szkoły z prędkością o średniej wartości $v_1 = 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kiedy dotarł na miejsce, okazało się, że z powodu awarii wodociągu lekcje odwołano. Ile powinna wynieść średnia wartość prędkości, z jaką poruszał się w drodze powrotnej, aby na całej trasie wyniosła ona $v = 4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia: s – droga z domu do szkoły, t_1 – czas marszu z domu do szkoły, t_2 – czas marszu ze szkoły do domu, v_2 – szukana średnia wartość prędkości.

Z definicji średniej wartości prędkości wiemy, że:

$$v_1 = \frac{s}{t_1} \quad v_2 = \frac{s}{t_2} \quad v = \frac{2s}{t_1 + t_2}$$

Wyznamy t_1 i t_2 z dwóch pierwszych wzorów, a trzeci przekształcimy tak, aby łatwo było do niego podstawić wyznaczone wartości:

$$t_1 = \frac{s}{v_1} \quad t_2 = \frac{s}{v_2} \quad t_1 + t_2 = \frac{2s}{v}$$

stąd:

$$\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} = \frac{2s}{v}$$

Powyższe równanie można podzielić stronami przez s , co oznacza, że rozwiązanie zadania nie zależy od drogi:

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} = \frac{2}{v}$$

Następnie wyznaczamy v_2 :

$$v_2 = \frac{1}{\frac{2}{v} - \frac{1}{v_1}} = \frac{v \cdot v_1}{2v_1 - v}$$

Po podstawieniu danych liczbowych i wykonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$v_2 = 6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

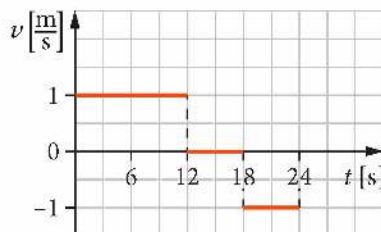
Odpowiedź: Tomek powinien wracać z prędkością o średniej wartości $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Zwróć uwagę, że 4 **nie jest** średnią arytmetyczną liczb 3 i 6. Średniej wartości prędkości nie należy mylić ze średnią arytmetyczną.

1. Odpowiedz, w którym przypadku w opisie ruchu możemy pominąć czas rozpędzania się pojazdu równy 10 s.

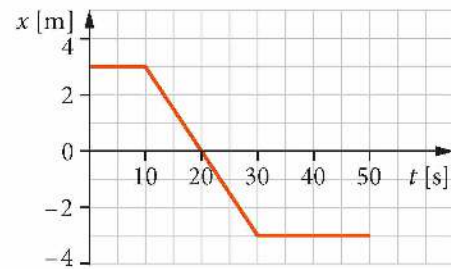
- A. Samochód jechał przez godzinę z prędkością $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a potem przez kolejną godzinę z prędkością $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- B. Samochód jechał przez 2 s z prędkością $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a potem przez 3 s z prędkością $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

2. Samochód jechał przez 20 min z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a następnie przebył 10 km z prędkością $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile wyniosła średnia wartość jego prędkości?
3. Samolot przeleciał 200 km z prędkością $250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a następnie w krótkim czasie zwiększył prędkość do $300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Całą trasę przebył z prędkością o średniej wartości $280 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jak długą trasę pokonał?
4. Wykres przedstawia zależność współrzędnej wektora prędkości od czasu dla ruchu pewnej windy. W chwili $t = 0$ s winda znajdowała się w najniższym położeniu ($x = 0$ m). Narysuj wykres $x(t)$ w tym ruchu.



5. Wykres ilustruje zależność położenia suwnicy (zdjęcie) od czasu, punkt $x = 0$ m odpowiada jej położeniu na środku hali.

Narysuj wykres zależności prędkości od czasu $v(t)$ dla tego ruchu.



6. Wagonik kolejki linowo-torowej na Gubałówkę porusza się po prostym torze o długości 1298 m. Czas przejazdu z dolnej stacji do górnej wynosi 3,5 min, jazda w dół trwa tyle samo.
- a) Sporządź w zeszycie wykresy zależności $v(t)$, $x(t)$, $s(t)$ w przypadku, gdy wagonik stał przez 30 s, wjechał na górę i po 45 s postoju zjechał na dół. Pomiń czas rozpędzania i hamowania.
- b) Oblicz średnią wartość prędkości wagonika i opisz wektor prędkości średniej w ruchu opisanym w punkcie a).

2.6. Przyspieszenie w ruchu zmiennym

Przypomnij sobie

- W ruchu prostoliniowym tor ruchu ciała jest linią prostą.
- W ruchu jednostajnie zmiennym przyspieszenie jest stałe.
- Spadanie swobodne to ruch ciała pod wpływem siły grawitacji (ciężkości) bez oporów ruchu.

Dotychczas zajmowaliśmy się ruchem, w którym prędkość się nie zmienia, albo pomijaliśmy czas, w którym zachodziła zmiana prędkości.

■ Przyspieszenie

Istnieje jednak wiele sytuacji, w których badamy właśnie proces zmian prędkości. Jak być może pamiętasz ze szkoły podstawowej, do opisu tych zmian wykorzystujemy przyspieszenie, które oznaczamy symbolem a . Podobnie jak prędkość, **przyspieszenie jest wielkością wektorową**.

Zmiana prędkości

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_k - \vec{v}_p$$

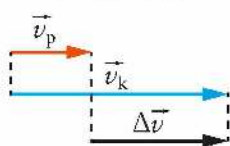
gdzie:

$\vec{v}_k$ – prędkość końcowa,

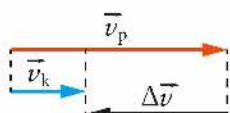
$\vec{v}_p$ – prędkość początkowa.

Możemy wyróżnić trzy przypadki:

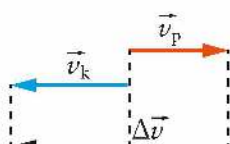
I. Wzrost wartości



II. Zmniejszenie wartości



III. Zmiana zwrotu



Przyspieszenie to iloraz zmiany prędkości i czasu, w którym nastąpiła ta zmiana:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Na lekcji 2.3 nauczyliśmy się rozróżniać prędkości średnią i chwilową. Podobnie rozróżnia się przyspieszenia średnie i chwilowe.

Przyspieszenie średnie jest ilorazem całkowitej zmiany prędkości i całkowitego czasu trwania ruchu:

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}_c}{\Delta t_c}$$

Gdy zmiana prędkości będzie mierzona w coraz krótszym czasie, otrzymamy z coraz większą dokładnością **przyspieszenie chwilowe**:

$$\vec{a}_{ch} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{dla } \Delta t \rightarrow 0$$

W ruchu prostoliniowym kierunek przyspieszenia jest taki sam jak kierunek prostej, po której porusza się ciało. Najczęściej się przyjmuje, że ta prosta pokrywa się z jedną z osi przyjętego układu współrzędnych, np. osią x . Możemy wtedy zamiast powyższych wzorów na wektorach zapisać wzory z wykorzystaniem współrzędnych wzdłuż wybranej osi, np. a_{chx} , Δv_x .

A to ciekawe

W świecie przyrody rekord przyspieszenia najprawdopodobniej należy do krewetki modliszkowej. Jej przednie odnóża podczas ataku przez ułamek milisekundy poruszają się z przyspieszeniem $150 \text{ tys. } \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ i osiągają prędkość $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Przyspieszenie średnie: $a_{\text{sr}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Przyspieszenie chwilowe: $a_{\text{ch}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ dla $\Delta t \rightarrow 0$

Podobnie jak w przypadku położenia czy prędkości będziemy mówili w skrócie: „przyspieszenie wynosi $-3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ”, zamiast: „współrzędna wektora przyspieszenia wynosi $-3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ”.

Z definicji przyspieszenia wynika, że jego jednostką jest $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$:

$$\frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}} : \text{s} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

We wzorach podajemy współrzędne przyspieszenia i zmiany prędkości, a nie wektory, dlatego piszemy je bez strzałek nad symbolami. Jeśli założymy, że wszystkie wektory są położone wzdłuż jednej prostej, możemy przy symbolach pominąć indeksy, np. x .

■ Ruch jednostajnie zmienny

Zajmiemy się teraz szczególnym przypadkiem ruchu zmiennego.

Ruchem prostoliniowym jednostajnie zmiennym nazywamy taki ruch prostoliniowy, w którym przyspieszenie (jako wektor) jest stałe.

Pojęcie to obejmuje ruch, w którym prędkość jednostajnie rośnie lub maleje. Zobaczysz, że przy stałym przyspieszeniu może się także zmieniać zwrot prędkości.



Rys. 2.32. Wykres zależności przyspieszenia od czasu w ruchu jednostajnie zmiennym

■ Prędkość w ruchu jednostajnie zmiennym

W ruchu jednostajnie przyspieszonym przyspieszenia chwilowe i średnie są równe. Wzór $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ można przekształcić do postaci:

$$\Delta v = a \Delta t$$

czyli:

$$v_k - v_p = a(t_k - t_p)$$

gdzie: a – przyspieszenie, $\Delta v = v_k - v_p$ – różnica prędkości końcowej i początkowej (zmiana prędkości), $\Delta t = t_k - t_p$ – przedział czasu, w którym nastąpiła zmiana prędkości.

Z powyższego równania wynika, że w ruchu jednostajnie zmiennym **przyrost prędkości jest wprost proporcjonalny do czasu**, w którym ta zmiana nastąpiła.

Obliczmy przyrost prędkości od chwili $t_p = 0$ do chwili $t_k = t$ (przyjęcie $t_p = 0$ upraszcza obliczenia). Prędkość w chwili t oznaczmy symbolem v , a prędkość w chwili $t_p = 0$ symbolem v_0 .

Otrzymujemy:

$$v - v_0 = a(t - 0)$$

czyli:

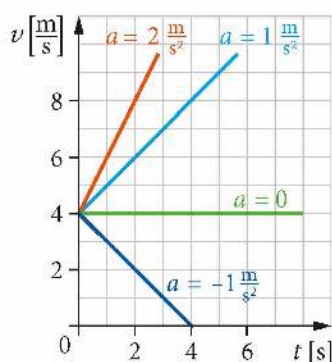
Funkcja liniowa s. 30

$$v = v_0 + at$$

gdzie:

v – prędkość w chwili t , v_0 – prędkość początkowa, a – przyspieszenie.

Prędkość jest liniową funkcją czasu. Wykres takiej funkcji umiemy narysować. Nie zawsze jest to proporcjonalność prosta, ponieważ nie zawsze $v_0 = 0$. Na rysunku 2.33 pokazano kilka wykresów dla prędkości początkowej $v_0 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i różnych przyspieszeń.



Rys. 2.33. Zależność $v(t)$ dla kilku ruchów jednostajnie zmiennych

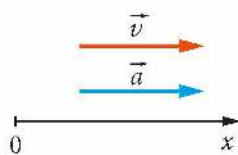
Współczynnikiem kierunkowym każdej z prostych na wykresie **jest przyspieszenie**. Jak widać, im większa jest wartość bezwzględna przyspieszenia, tym większy jest kąt nachylenia prostej do osi poziomej. Dla $a < 0$ otrzymujemy wykres funkcji malejącej. Odpowiada to sytuacji, kiedy prędkość (jej współrzędna) się zmniejsza. Natomiast gdy $a = 0$, prędkość się nie zmienia, czyli ruch jest jednostajny. Wykres $v(t)$ jest linią prostą.

Zwrot przyspieszenia

Zwrot przyspieszenia, czyli znak jego współrzędnej, nie pozwala od razu stwierdzić, czy ciało porusza się coraz szybciej, czy coraz wolniej. Zależy to także od zwrotu prędkości (znaku jej współrzędnej).

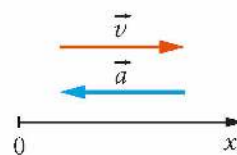
Możemy rozważyć cztery przypadki:

I



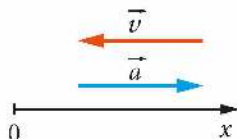
Prędkość dodatnia, przyspieszenie dodatnie.
Ciało przyspiesza.

II



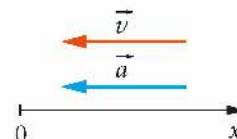
Prędkość dodatnia, przyspieszenie ujemne.
Ciało zwalnia.

III



Prędkość ujemna, przyspieszenie dodatnie.
Ciało zwalnia, np. jego prędkość wynosi najpierw $-5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a później $-3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

IV



Prędkość ujemna, przyspieszenie ujemne.
Ciało przyspiesza, np. prędkość wynosi najpierw $-3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a później $-5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Wyznaczanie przyspieszenia

Wykonaj doświadczenie mające na celu wyznaczenie przyspieszenia.

Doświadczenie 6

1. Do przeprowadzenia doświadczenia potrzebne są dwie osoby. Przygotujcie rower z prędkościomierzem i przerzutkami oraz stoper.
2. Jedna osoba wsiada na rower na prostej, bezpiecznej drodze, np. na ścieżce rowerowej, i na znak dany przez drugą osobę rusza, jak najmocniej naciskając pedały. Druga osoba daje ponownie znak po 5 s. Osoba jadąca na rowerze zapamiętuje wskazanie prędkościomierza w tym momencie.
3. Na podstawie wyniku pomiaru obliczcie przyspieszenie średnie w ciągu pierwszych 5 s jazdy rowerem.
4. Powtórzcie opisane czynności kilkakrotnie, np. 4 razy.
5. Obliczcie średnią poszczególnych wyników i niepewność pomiarową.
6. Zbadajcie, jak przyspieszenie zależy od wybranego biegu przerzutki.



Przedstawimy teraz analizę przykładowych wyników pomiaru. W ten sam sposób opracuj wyniki doświadczenia przeprowadzonego samodzielnie. W naszym doświadczeniu dla jednego z biegów przerzutki otrzymaliśmy następujące wyniki: $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $23 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Uzyskane wyniki prędkości końcowych przeliczyliśmy na jednostki układu SI. Dla każdego z pomiarów obliczyliśmy przyspieszenie ze wzoru $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Przyjęliśmy, że prędkość początkowa była równa zero, co oznacza, że $\Delta v = v_k$. Przykładowe obliczenia dla pierwszego pomiaru:

$$\Delta v = v_k = 24 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{24\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \approx 6,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ s}} \approx 1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Tabela 2.2. Pomiary i wyniki obliczeń dla doświadczenia 6.

Numer pomiaru	1	2	3	4
Prędkość końcowa $[\frac{\text{km}}{\text{h}}]$	24	25	25	23
Prędkość końcowa $[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$	6,7	6,9	6,9	6,4
Przyspieszenie $[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$	1,3	1,4	1,4	1,3

Średnia arytmetyczna czterech wyników przyspieszenia wynosi $1,35 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Niepewność maksymalną pojedynczego pomiaru możemy oszacować jako połowę różnicy między skrajnymi wynikami. Te wyniki to $1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ oraz $1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, czyli niepewność wynosi $0,05 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wobec tego niepewność maksymalna średniej wynosi $\frac{0,05 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\sqrt{4}} \approx 0,025 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Jednak prędkość mierzyliśmy z dokładnością do $1 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 0,28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, co odpowiada pomiarowi przyspieszenia z dokładnością $\frac{0,28 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ s}} \approx 0,05 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wynik zapisujemy więc w postaci:

$$a = 1,35 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \pm 0,05 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Analogicznie postępujemy dla pozostałych biegów przerzutki.

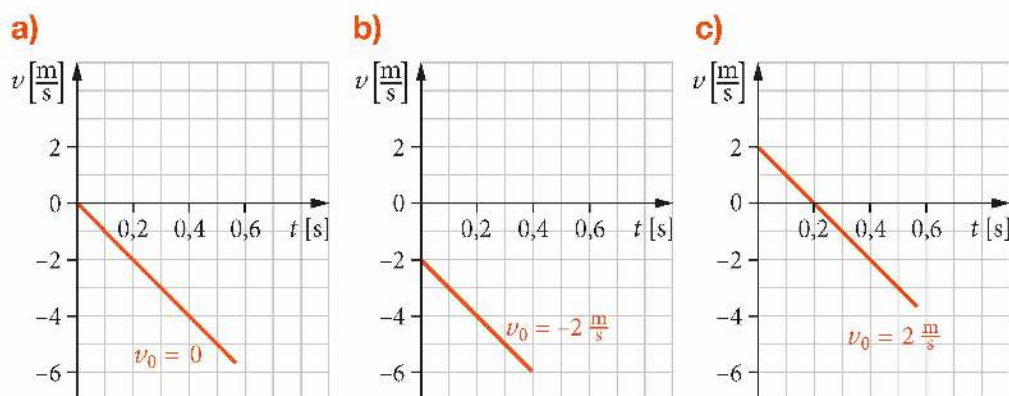
Szacowanie niepewności pomiarowej dla średniej wielokrotnie powtarzanego pomiaru s. 23



Rys. 2.34. Ilustracja przedstawia spadek swobodny. Zobrazowano go, nakładając na siebie kolejne klatki filmu

■ Spadek swobodny i rzut pionowy

Jak być może pamiętasz, przykładem ruchu jednostajnie przyspieszonego jest spadek ciał **bez oporu powietrza** (rys. 2.34). Przyspieszenie w tym ruchu ma stałą wartość $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ i jest skierowane w dół. Jeśli więc przyjmiemy (jak zawsze do tej pory) zwrot osi współrzędnych w górę, to ciało upuszczone lub rzucone (w dół lub w górę) porusza się z przyspieszeniem o współrzędnej $a = -9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Przed współrzędną stawiamy znak minus, ponieważ wektor przyspieszenia skierowany jest w dół, a za dodatni przyjęliśmy zwrot w górę.



Rys. 2.35. Zależność $v(t)$ dla kulki: a) upuszczonej z prędkością $v_0 = 0$, b) rzuconej w dół z prędkością $v_0 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, c) rzuconej w górę z prędkością $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Wykresy powyżej przedstawiają zmiany prędkości stałowej kulki:

- a) upuszczonej ($v_0 = 0$),
 - b) rzuconej w dół z prędkością początkową o współrzędnej $v_0 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
 - c) rzuconej w górę z prędkością początkową o współrzędnej $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- Dla uproszczenia przyjęto $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Zwróć szczególną uwagę na trzeci przypadek. Ciało poruszało się początkowo w górę, z każdą chwilą wolniej. Gdy jego prędkość zmniejszyła się do zera, zaczęło się poruszać coraz szybciej w dół, tak jakby w chwili $t = 0,2 \text{ s}$ zostało upuszczone bez prędkości początkowej.

Ruch, w którym maleje wartość bezwzględna prędkości, bywa nazywany **ruchem opóźnionym**. Takim ruchem porusza się na przykład hamujący samochód. Wartość wektora przyspieszenia w ruchu opóźnionym czasami jest nazywana opóźnieniem.

A to ciekawe

W 2009 roku Amerykanin Tyler Bradt (czyt. tajler bradt), skacząc w kajaku z wodospadu Palouse Falls o wysokości 57 m, pobił rekord tego typu skoków. Spadał około 4 s i na skutek upadku z dużej wysokości jedynie nadwyrężył sobie nadgarstek.

Ustanowiony przez Bradta rekord wysokości, prawie dwa razy większy od poprzedniego, nie został pobity aż do dzisiaj (2018 rok). Film ze skoku możesz zobaczyć na stronie <https://www.youtube.com/watch?v=hyb3As78YfM>



Po tej lekcji powinieneś

- znać pojęcia: przyspieszenie średnie i przyspieszenie chwilowe;
- znać i stosować wzór na przyspieszenie w ruchu jednostajnie zmiennym;
- sporządzać i interpretować wykresy zależności $v(t)$ w ruchu jednostajnie zmiennym;
- interpretować spadek swobodny i rzut pionowy jako ruch jednostajnie zmienny.

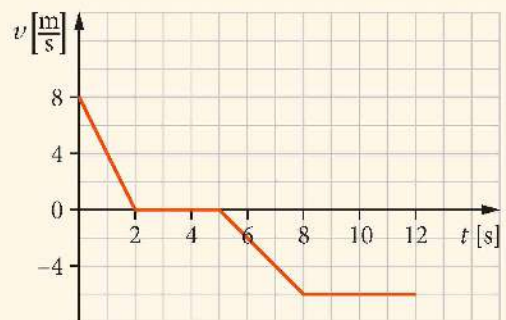
Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



■ Przykład

Na wykresie pokazano zależność prędkości od czasu dla samochodu, który zahamował, a po chwili ruszył do tyłu.



- Oblicz przyspieszenie samochodu w czasie hamowania.
- Jak długo samochód się nie poruszał?
- Z jakim przyspieszeniem pojazd rozpędzał się do tyłu?

Rozwiązanie

a) Podczas hamowania samochód w czasie $\Delta t = 2$ s zmienił prędkość od $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, czyli $\Delta v = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Przyspieszenie auta wyniosło zatem:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{-8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ s}} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Otrzymaliśmy przyspieszenie z przeciwnym znakiem niż prędkość, czyli takie jak w czasie hamowania. Jest to zgodne z treścią zadania.

b) Z wykresu odczytujemy, że samochód nie poruszał się od chwili $t = 2$ s do chwili $t = 5$ s, czyli przez 3 s.

c) W czasie rozpędzania do tyłu samochód w czasie $\Delta t = 3$ s zmienił prędkość od $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do $-6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, co oznacza, że jego przyspieszenie wyniosło:

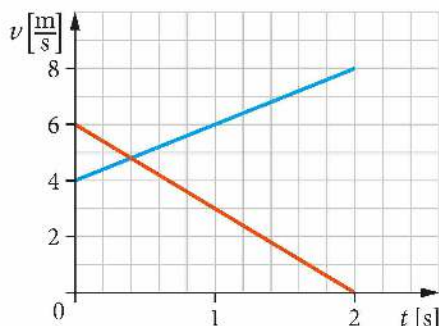
$$a = \frac{-6 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \text{ s}} = -\frac{6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \text{ s}} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Odpowiedź: Przyspieszenie samochodu podczas hamowania wyniosło $-4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Samochód nie poruszał się przez 3 s, a potem rozpędził się do tyłu z przyspieszeniem $-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

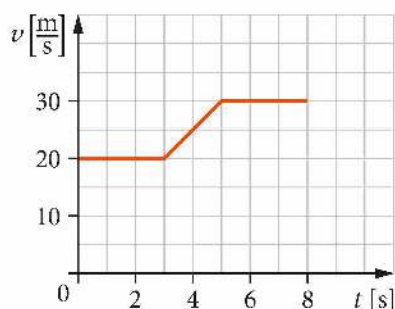
Uwaga. Ujemna współrzędna przyspieszenia niekoniecznie oznacza hamowanie ciała. Gdy samochód rozpędzał się do tyłu, wartość jego prędkości była wyrażona **coraz mniejszą** liczbą ujemną (najpierw $-1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, potem $-2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ itd.), choć jej wartość bezwzględna **rosła**.

Pytania i zadania

1. Zmiany prędkości dwóch ciał w czasie przedstawiono na wykresach. Odczytaj z nich prędkości początkowe i przyspieszenia.

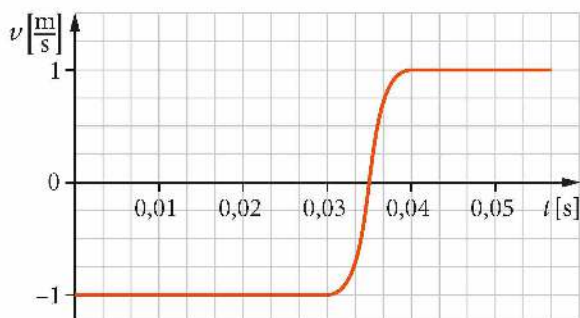


2. Na wykresie poniżej przedstawiono zmiany prędkości podczas ruchu motocykla.

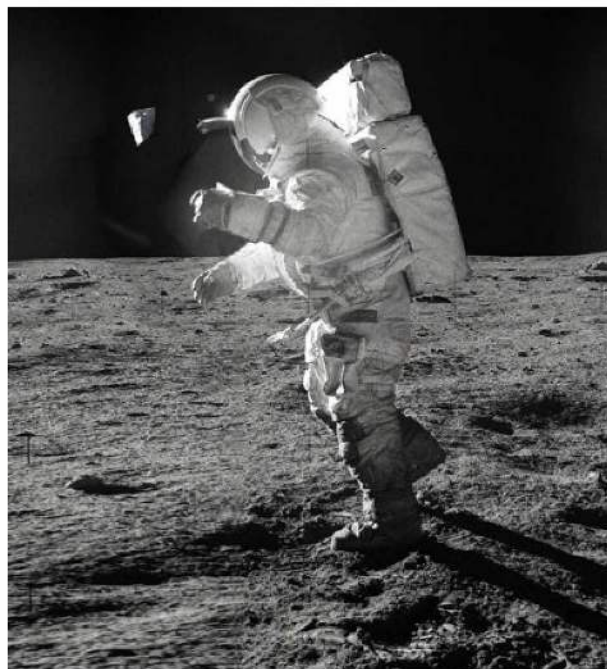


Oblicz:

- przyspieszenie średnie w czasie trwania tego ruchu,
 - przyspieszenie chwilowe w chwili $t = 4$ s,
 - prędkość początkową i końcową wyrażoną w kilometrach na godzinę.
3. Krążek hokejowy odbił się od bandy i zawrócił. Zmianę jego prędkości przedstawiono na wykresie.



- Odczytaj z wykresu początkową prędkość krążka.
 - Czy podczas hamowania ruch krążka był jednostajnie przyspieszony? A podczas przyspieszania?
 - Oblicz średnie przyspieszenie krążka podczas hamowania i przyspieszania. Przyjmij, że oba procesy trwały łącznie 0,008 s.
 - Czy początkowo krążek poruszał się zgodnie ze zwrotem przyjętym za dodatni czy w przeciwną stronę?
4. Znajdź w danych technicznych wybranego modelu samochodu, ile czasu zajmuje mu rozpędzanie się od zera do $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz średnie przyspieszenie samochodu w tym czasie.
5. Na Księżycu ciała spadają z przyspieszeniem około 6 razy mniejszym niż na Ziemi. Narysuj wykres zależności $v(t)$ dla ciała podrzuconego na Księżycu pionowo w górę z prędkością początkową $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



2.7. Położenie w ruchu jednostajnie zmiennym

Przypomnij sobie

- Przyspieszenie to iloraz zmiany prędkości i czasu, w którym ta zmiana nastąpiła.
- Przyspieszenie w ruchu jednostajnie zmiennym jest stałe.

■ Dalsze rozważania o ruchu zmiennym

Wiemy, jak zmienia się prędkość w ruchu jednostajnie zmiennym: w każdej sekundzie o tyle samo.

A jak w tym ruchu zmienia się położenie ciała? Aby to zbadać, najpierw opiszemy sposób obliczania zmian położenia ciała w dowolnym ruchu na podstawie wykresu zależności prędkości od czasu $v(t)$. Ten ogólny sposób zastosujemy następnie do opisu ruchu jednostajnie zmiennego.

■ Pole pod wykresem zależności $v(t)$

Przeanalizujmy wykres zależności prędkości od czasu $v(t)$ zilustrowany na rysunku 2.36. Ciało, którego ruch badano, najpierw poruszało się z prędkością $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ przez 4 s, potem z prędkością $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ przez 5 s, a na koniec z prędkością $-1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ przez 2 s.

W **pierwszym etapie** ruchu położenie ciała zmieniło się o:

$$\Delta x_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4 \text{ s} = 8 \text{ m}$$

Zwróćmy uwagę, że wielkości, które mnożymy, $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ oraz 4 s, na wykresie odpowiadają bokom pierwszego (różowego) prostokąta. Ich iloczyn jest więc liczbowo równy polu tego prostokąta.

Podobnie było w **drugim etapie** ruchu. Zmiana położenia ciała była równa:

$$\Delta x_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} = 15 \text{ m}$$

co odpowiada polu drugiego (niebieskiego) prostokąta.

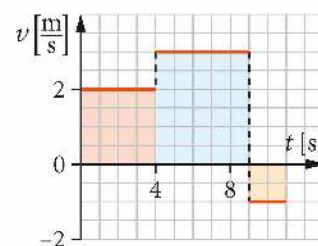
Nieco inaczej jest z **trzecim etapem**, gdzie prędkość ciała była ujemna:

$$\Delta x_3 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2 \text{ s} = -2 \text{ m}$$

Co prawda wyszła nam ujemna wartość przemieszczenia, a pole prostokąta ma zawsze wartość dodatnią, jednak nawet w tym przypadku zachodzi równość wartości bezwzględnych: $|\Delta x_3| = 2 \text{ m}$, czyli ciało przebyło 2 m, ale w przeciwną stronę niż wskazuje oś x .

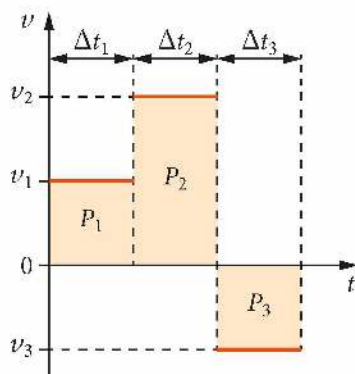
Łączne przemieszczenie wynosiło:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 8 \text{ m} + 15 \text{ m} + (-2 \text{ m}) = 21 \text{ m}$$



Rys. 2.36. Przykładowa zależność $v(t)$

Zgodnie z naszą umową określenie: „prędkość jest ujemna” oznacza, że współrzędna prędkości jest ujemna, czyli że ciało porusza się w przeciwną stronę niż zwrot osi x .



Rys. 2.37. Pole pod wykresem zależności $v(t)$ jest liczbowo równe zmianie położenia ciała

■ Pole pod wykresem $v(t)$ – przypadek ogólny

Powtórzmy teraz nasze rozważania dla ogólniejszego przypadku: zamieńmy konkretne wartości prędkości na poszczególnych etapach ruchu oraz czas trwania tych etapów na symbole literowe. Przyjrzyj się wykresowi zależności $v(t)$ dla pewnego ciała, które dwukrotnie zmieniało prędkość (rys. 2.37). Pole prostokąta P_1 można wyrazić jako:

$$P_1 = v_1 \Delta t_1$$

Jest to jednocześnie wzór na zmianę położenia ciała:

$$\Delta x_1 = v_1 \Delta t_1$$

Oznacza to, że

Pole pod wykresem liczbowo jest równe zmianie położenia ciała.

Zwróć uwagę, że jeśli pomnożymy bok prostokąta wyrażony w jednostkach prędkości przez bok wyrażony w jednostkach czasu, otrzymamy wynik w jednostkach drogi. Jeżeli na przykład czas wyrazimy w sekundach, a prędkość w metrach na sekundę, otrzymamy wynik wyrażony w metrach:

$$\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s} = \text{m}$$

W taki sam sposób możemy interpretować pole P_2 pod drugim fragmentem wykresu. Inaczej dzieje się w przypadku ostatniego fragmentu wykresu, który obrazuje sytuację, gdy prędkość jest ujemna, tzn. kiedy zmienił się zwrot wektora prędkości.

Pole prostokąta P_3 jest oczywiście dodatnie, ale zmiana położenia ciała $\Delta x_3 = v_3 \Delta t_3$ jest ujemna (bo prędkość jest ujemna). Dlatego też przy obliczaniu całkowitego przemieszczenia na podstawie pola powierzchni pod wykresem musimy uwzględnić zwrot (znak) prędkości: $\Delta x_3 = -P_3$.

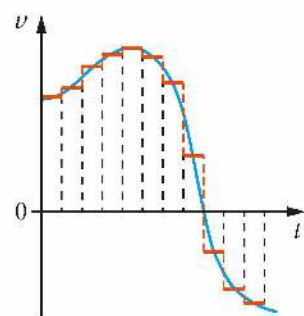
Całkowite przemieszczenie w naszym przypadku wynosi:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$$

a po uwzględnieniu ujemnego znaku prędkości v_3 :

$$\Delta x = P_1 + P_2 - P_3$$

Tak samo możemy rozumować w przypadku wykresu o dowolnej liczbie schodków. Co ważne, każdy wykres – nawet krzywoliniowy – można dowolnie dokładnie przybliżyć za pomocą wykresu schodkowego (rys. 2.38). Dlatego można przyjąć, że opisana powyżej zależność dotyczy wszystkich wykresów zależności $v(t)$.



Rys. 2.38. Czerwony wykres schodkowy jest przybliżeniem niebieskiej krzywej

Zmiana położenia ciała w ruchu prostoliniowym jest równa polu pod wykresem zależności $v(t)$, przy czym dla fragmentów wykresu znajdujących się pod osią t odpowiadające im pola uwzględniamy ze znakiem minus.

Dodatek matematyczny

■ Parabola

Zaznaczmy w układzie współrzędnych kilka punktów, których współrzędne x i y spełniają równanie $y = x^2$. Są to na przykład punkty:

$$(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), \text{ bo } 0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9$$

Możemy także zaznaczyć punkty $(-1, 1), (-2, 4), (-3, 9)$, bo $(-1)^2 = 1, (-2)^2 = 4, (-3)^2 = 9$. Współrzędne nie muszą być liczbami całkowitymi, możemy więc zaznaczyć punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, bo $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Widzimy, że zaznaczone punkty układają się na jednej krzywej. Okazuje się, że także wszystkie pozostałe punkty spełniające równanie $y = x^2$ leżą na tej samej krzywej. Nazywamy ją parabolą. Ogólniej, **parabola** jest wykresem każdej zależności między wielkościami, której wzór ma postać:

$$\text{druga wielkość} = \text{stała}_1 \cdot (\text{pierwsza wielkość})^2 + \text{stała}_2 \cdot (\text{pierwsza wielkość}) + \text{stała}_3$$

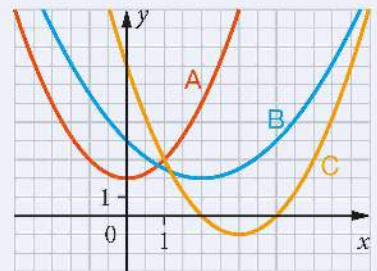
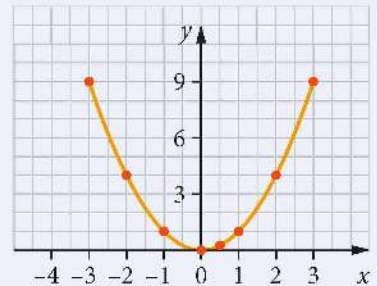
Tak właśnie jest w przypadku zależności położenia x od czasu t w ruchu jednostajnie zmiennym:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

Uwaga. Wykres jest fragmentem paraboli. Cała parabola jest linią nieskończoną, lecz wielkości fizyczne mają swoje najmniejsze i największe wartości.

Oto kilka przykładów parabol (patrz wykres obok).

$$\text{A: } y = x^2 + 2 \quad \text{B: } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \quad \text{C: } y = x^2 - 6x + 8$$



■ Położenie i droga w ruchu jednostajnie zmiennym

Zależność między zmianą położenia a polem pod wykresem $v(t)$ możemy zastosować w przypadku ruchu jednostajnie zmiennego. Wykres $v(t)$ dla tego ruchu przedstawia rys. 2.39.

Pole pod tym wykresem najłatwiej obliczyć jako sumę pól prostokąta i trójkąta. Jak wiemy, pole to jest liczbowo równe zmianie położenia ciała:

$$\Delta x = v_0 \cdot t_k + \frac{1}{2} \cdot at_k \cdot t_k$$

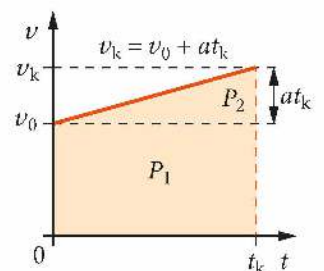
Jeśli w chwili $t = 0$ ciało znajdowało się w punkcie x_0 , to w chwili $t_k = t$ znajdzie się w punkcie:

$$x = x_0 + \Delta x$$

Stąd:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

gdzie: x_0 – położenie początkowe ciała, v_0 – prędkość początkowa, a – przyspieszenie, t – czas trwania ruchu.



Rys. 2.39. Wykres zależności $v(t)$ dla ruchu jednostajnie przyspieszonego

Pamiętaj, że w tym wzorze występują **współrzędne** położenia, prędkości i przyspieszenia, które mogą być dodatnie lub ujemne. **Wartości** wielkości opisanych za pomocą tych współrzędnych zawsze są dodatnie. Możesz sprawdzić, że taką samą postać wzoru otrzymamy, gdy prędkość będzie się zmniejszała, a także – gdy jej współrzędna będzie ujemna w całym rozważanym czasie ruchu lub w jego części.

Wzór na s. 75 pokazuje, że **zależność położenia od czasu w ruchu jednostajnie zmiennym jest opisana funkcją kwadratową**, to znaczy, że w jej wzorze występuje kwadrat czasu. Wykresem takiej zależności jest krzywa zwana **parabolą** (patrz dodatek matematyczny na s. 75).

Jeżeli ciało nie zawraca:

$$s = |\Delta x|.$$

Suma przemieszczeń w różne strony:

$$s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2|.$$

Jeśli interesuje nas nie położenie ciała, ale przebyta przez nie droga, musimy pamiętać, że jeśli ciało nie zawraca, jest ona równa wartości bezwzględnej zmiany położenia. Z kolei gdy ciało zawraca, należy osobno obliczyć drogi odpowiadające przemieszczeniom przebytym w różne strony (patrz przykład s. 78).

■ Badanie ruchu jednostajnie zmiennego

Doświadczenie 7

1. Przygotuj równię pochyłą, np. podeprzyj stół z jednej strony tak, aby był lekko nachylony. Sprawdź, czy nachylenie jest wystarczające, aby ciało w kształcie walca (np. bateria D, czyli dawna R20) staczało się z niego bez konieczności popychania.
2. Przygotuj miarkę i umocuj ją wzdłuż równi tak, aby punkt 0 skali znalazł się na górze.
3. Umieść baterię na wysokości punktu 0 miarki i puść ją. Sfilmuj ruch baterii.
4. Przedstaw na wykresie zależność drogi przebytej przez baterię od kwadratu czasu (przyjmij, że $t = 0$ to moment puszczenia baterii).

Analiza wyników

Wyniki tego doświadczenia zostały zebrane w tabeli 2.3 i na wykresie 2.40a (s. 77). Przyjęliśmy, że niepewność pomiaru czasu to odstęp czasowy między kolejnymi klatkami filmu ($\frac{1}{30}$ s $\approx$ 0,033 s), a niepewność pomiaru położenia wynosi 0,2 cm.

Zauważmy, że punkty na wykresie nie układają się na prostej. To nic dziwnego, bo wykresem zależności $s(t)$ dla ruchu jednostajnie przyspieszonego jest nie prosta, ale parabola. Dopasowanie paraboli do punktów pomiarowych nie jest jednak tak łatwe jak dopasowanie prostej. Dlatego zastosujemy sprytny sposób: **na poziomej osi zaznaczymy nie czas, ale jego kwadrat**. Wówczas otrzymamy zależność $s(t^2)$, która jest już liniowa, a nie kwadratowa.

Podobnie postępuje się podczas analizy wielu doświadczeń, aby w prosty sposób wyznaczyć szukaną wielkość i jej niepewność pomiarową.

Tabela 2.3

t [s]	s [cm]
0	0
0,20	0,6
0,40	1,5
0,60	2,9
0,80	4,6
1,00	7
1,20	9,9
1,40	13,2
1,60	16,8
1,80	20,9



Kwadrat czasu łatwo obliczyć, musimy jednak znać także jego niepewność pomiarową. W tym celu dla każdego pomiaru obliczamy minimalną i maksymalną wartość czasu i podnosimy je do kwadratu. Na przykład dla trzeciego pomiaru $t = 0,400 \text{ s} \pm 0,033 \text{ s}$, więc minimalna wartość pomiaru wynosi:

$$0,400 \text{ s} - 0,033 \text{ s} = 0,367 \text{ s}$$

a maksymalna:

$$0,400 \text{ s} + 0,033 \text{ s} = 0,433 \text{ s}$$

Kwadrat czasu wynosi więc:

$$\text{od } (0,367 \text{ s})^2 \approx 0,13 \text{ s}^2 \text{ do } (0,433 \text{ s})^2 \approx 0,19 \text{ s}^2$$

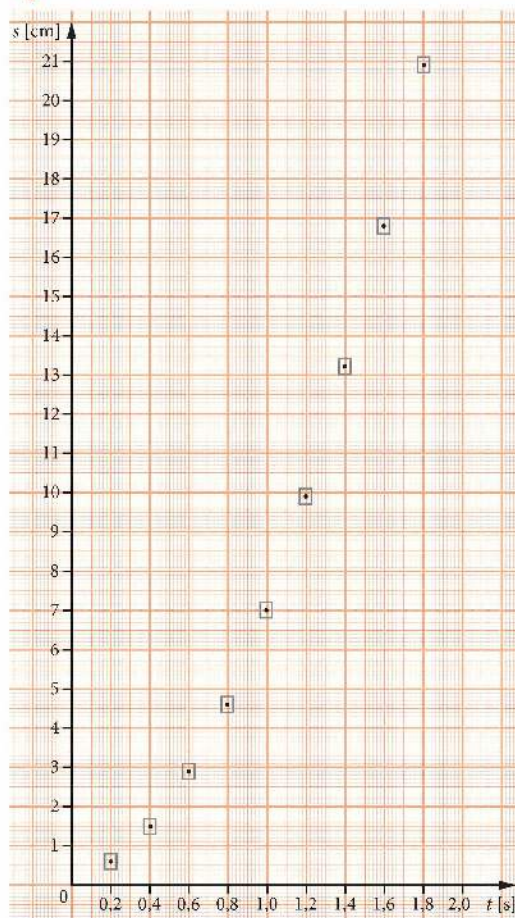
Przypominamy, że wynik pomiaru i jego niepewność zapisujemy z taką samą dokładnością.

Wartości te wpisujemy do tabeli (patrz tabela 2.4). Na ich podstawie zaznaczamy w układzie współrzędnych prostokąty uwzględniające niepewności pomiarowe.

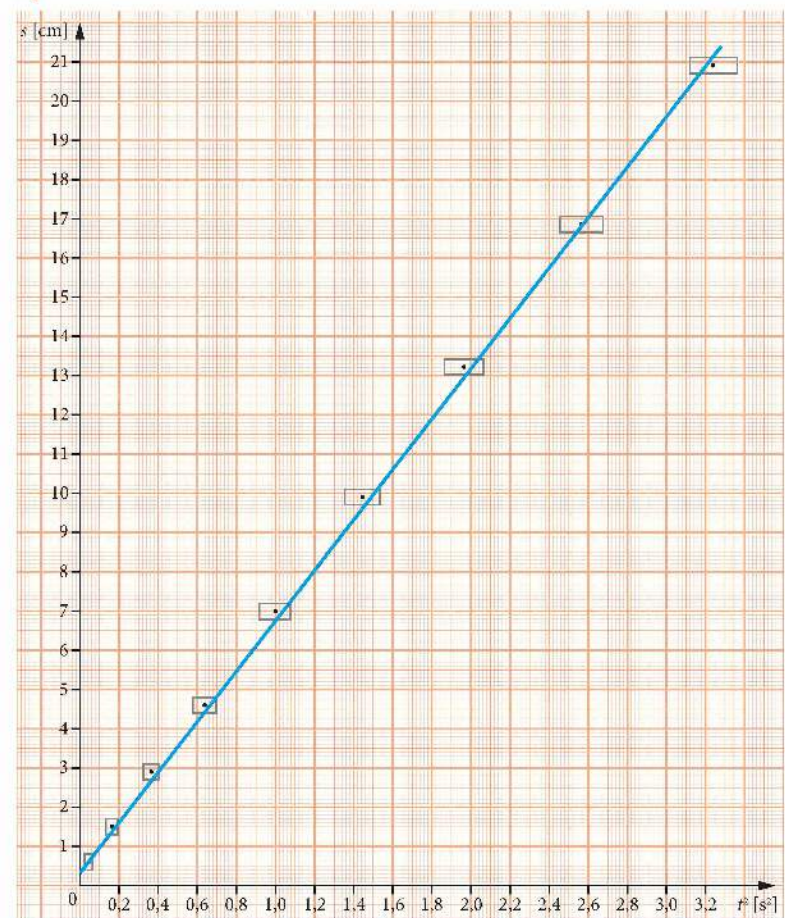
Tabela 2.4

$t \text{ [s]}$	0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80
$t^2 \text{ [s}^2\text{]}$	od	0	0,03	0,13	0,32	0,59	0,93	1,36	1,87	2,45
	do	0	0,05	0,19	0,40	0,69	1,07	1,52	2,05	2,67
$s \text{ [cm]}$	0	0,6	1,5	2,9	4,6	7,0	9,9	13,2	16,8	20,9

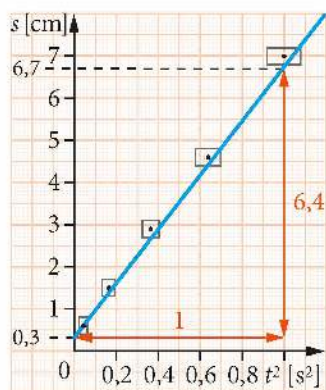
a)



b)



Rys. 2.40. Wykres zależności dla ruchu jednostajnie zmiennego badanego w doświadczeniu:
a) drogi od czasu $s(t)$, b) drogi od kwadratu czasu $s(t^2)$



Rys. 2.41. Współczynnik kierunkowy naszej funkcji wynosi 6,4

Dzięki temu, że na osi poziomej mamy kwadrat czasu, a nie po prostu czas, punkty pomiarowe układają się prawie na linii prostej. Podobnie jak w doświadczeniu z ruchem jednostajnym (s. 58) możemy dopasować prostą do tych punktów za pomocą przezroczystej linijki, a następnie wyznaczyć jej współczynnik kierunkowy.

Z równania $s(t^2) = \frac{1}{2}at^2$ odczytujemy współczynnik kierunkowy, który wynosi $\frac{1}{2}a$. W naszym przypadku współczynnik kierunkowy wynosi 6,4, więc przyspieszenie wynosiło:

$$a = 2 \cdot 6,4 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 12,8 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

(w doświadczeniu drogę mierzyliśmy w centymetrach, a czas w sekundach).

Po tej lekcji powinieneś

- opisywać ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny za pomocą wzorów i wykresów;
- badać doświadczalnie ruch jednostajnie zmienny i wyznaczać przyspieszenie ciała na podstawie wyników pomiarów.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



■ Przykład

Uczeń stojący na balkonie wystawił rękę poza balkon i podrzucił piłeczkę pionowo w górę z prędkością $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. W chwili rzucenia piłeczka znajdowała się na wysokości $y_0 = 15 \text{ m}$ nad ziemią. Przyjmij $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, pominiń opór powietrza. Naszkicuj wykres zależności wysokości piłeczki nad ziemią od czasu. Odczytaj z wykresu:

- a) po jakim czasie piłeczka wzniesie się na maksymalną wysokość,
- b) na jaką maksymalną wysokość wzniesie się piłeczka,
- c) po jakim czasie od rzucenia piłeczka spadnie na ziemię.

Naszkicuj wykres przebytej drogi od czasu dla ruchu piłeczki.

Rozwiązanie

Ciało spadające swobodnie porusza się ruchem jednostajnie zmiennym z przyspieszeniem skierowanym w dół. Jeśli współrzędną pionową oznaczmy przez y , to położenie ciała w tym ruchu jest opisane przez zależność:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

gdzie: $v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $y_0 = 15 \text{ m}$.

Dla uproszczenia zapiszmy ten wzór bez jednostek, z założeniem że wszystkie wielkości wyrażamy w jednostkach podstawowych układu SI:

$$y = -5t^2 + 10t + 15$$

Aby narysować wykres, najpierw sporządzamy tabelę, w której będziemy zapisywać wysokość y w poszczególnych chwilach t .

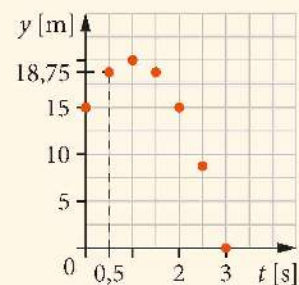
Do tabeli wpisujemy wartość y obliczoną z powyższego wzoru.

t [s]	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y [m]	15	18,75	20	18,75	15	8,75	0		

Zauważ, że wynik $y = 0$ oznacza, że piłeczka spadła na ziemię, dlatego nie wpisujemy dalszych wartości w tabeli powyżej.

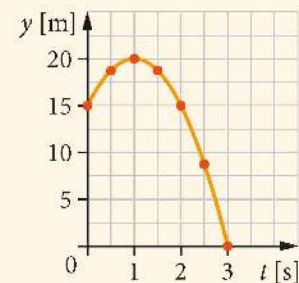
Uwaga. Gdyby w zadaniu powiedziano, że piłka spadła do głębokiego dołu, moglibyśmy obliczać także ujemne wartości y , odpowiadające położeniu poniżej poziomu gruntu.

Rysujemy układ współrzędnych. W doborze skali pomoże nam sporządzona tabela. Następnie zaznaczamy w nim punkty odpowiadające wynikom obliczeń (jak to pokazują przerywane linie).



Uwaga. W praktyce do rysowania wykresów używamy zwykle komputera. Tworzy on wykres w taki sam sposób jak my, tyle że oblicza współrzędne nie kilku punktów, ale setek lub nawet tysięcy.

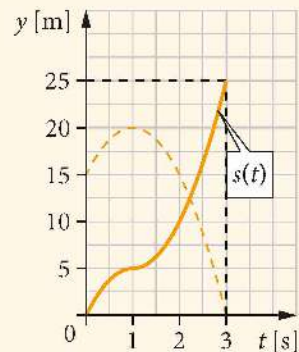
Szkicujemy linię krzywą przechodzącą przez otrzymane punkty – jest to fragment paraboli. Z wykresu możemy odczytać odpowiedzi na pytania z treści zadania:



- a) Piłeczka wzniesie się na maksymalną wysokość po 1 s.
- b) Ta maksymalna wysokość wynosi 20 m.
- c) Na ziemię piłeczka spadnie po 3 s.

Pozostało nam naszkicowanie wykresu.

Dopóki piłeczka się wznosiła, przebyta przez nią droga rośnie tak samo, jak wysokość, tylko że od zera. Wykres zależności $s(t)$ powstaje więc z fragmentu paraboli $y(t)$ (przerywanej) przez jej przesunięcie w dół.



Później wysokość maleje, ale droga nadal rośnie. Teraz przyrost drogi równy jest nie zmianie wysokości, ale jej wartości bezwzględnej, dlatego odpowiedni fragment paraboli trzeba nie tylko przesunąć, ale i odbić symetrycznie.

Odpowiedź: Piłeczka wzniesie się na maksymalną wysokość wynoszącą 20 m po 1 s, a spadnie na ziemię po 3 s.

Pytania i zadania

1. Przepisy wymagają, aby hamulce samochodu osobowego pozwalały hamować na suchej nawierzchni z przyspieszeniem $-5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (jako dodatni przyjmujemy zwrot prędkości).
 - a) Ile czasu zajmuje zatrzymanie samochodu na suchej nawierzchni od prędkości $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, jeśli porusza się on z przyspieszeniem określonym w przepisach?
 - b) Ile wyniesie droga przebyta przez samochód w tym czasie?
 - c) Narysuj w zeszycie wykresy zależności $v(t)$ i $s(t)$ dla czasu hamowania samochodu.
2. Łabędź wzbija się z jeziora w powietrze w ten sposób, że macha energicznie skrzydłami i rozpędza się, biegnąc po powierzchni wody. Wiemy, że aby wznieść się w powietrze, musi osiągnąć prędkość $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, oraz że rozpędza się od prędkości początkowej równej zero z przyspieszeniem $0,35 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Jak długo trwa jego start? Ile wyniesie przebyta przez niego droga, zanim wzbije się nad powierzchnię wody?



3. Kamień rzucony pionowo w dół do studni o głębokości 24 m spadał przez 2 s. Oblicz prędkość, z jaką został wrzucony.
4. Gdy pojazd ruszył i przejechał ruchem jednostajnie przyspieszonym pierwsze 100 m swojej trasy, jego prędkość chwilowa wynosiła $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz jego przyspieszenie. Jak

sądziysz, jaki to mógł być pojazd: pociąg, samochód osobowy czy motocykl? Załóż, że pojazd poruszał się z maksymalnym przyspieszeniem, jakie może osiągnąć.

5. Uzasadnij, że średnia wartość prędkości w ruchu jednostajnie zmiennym jest średnią arytmetyczną prędkości początkowej i końcowej. Jak wiesz, w innych rodzajach ruchu nie zawsze jest to prawda.
6. Dobierzcie się w pary i wykonajcie doświadczenie.
 - a) Przygotujcie linijkę – im dłuższą, tym lepiej.
 - b) Stańcie obok siebie. Jedna osoba trzyma górny koniec linijki ustawionej pionowo (zerem w dół), a druga ustawia palce z dwóch stron linijki na wysokości kreśki 0, nie dotykając jej (patrz zdjęcie).
 - c) Gdy pierwsza osoba bez uprzedzenia puszcza linijkę, druga stara się złapać ją jak najszybciej. Ponieważ czas reakcji nie jest zerowy, linijka przebędzie w tym czasie pewną drogę, którą łatwo odczytać z jej podziałki.
 - d) Po kilkakrotnym powtórzeniu doświadczenia możecie obliczyć czas reakcji drugiej osoby. Potem zamieńcie się rolami i powtórzcie doświadczenie.



Przyspieszenie pojazdów

Każdy pojazd najpierw rozpędza się do pewnej prędkości. W końcu musi także wyhamować. Dlatego samochody, motocykle, pociągi czy kolejki górskie zmieniają prędkość, czyli poruszają się ruchem przyspieszonym bądź opóźnionym.

Jakie przyspieszenie osiągają samochody? Dla typowego samochodu wynosi ono $2\text{--}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Warto podkreślić, że nawet dla pojedynczego egzemplarza nie jest ono stałe i zależy od użytego biegu oraz początkowej prędkości. Okazuje się, że podczas hamowania samochodu rozbieżność ta nie jest już tak duża jak w przypadku rozpędzania się. Za przyspieszenie odpowiada przede wszystkim moc silnika, natomiast przy hamowaniu kluczową rolę odgrywa tarcie między oponami a podłożem. Ponieważ w nowoczesnych samochodach jakość opon i układów hamulcowych są bardzo podobne, więc również podczas ostrego hamowania przyspieszenia mają zbliżone wartości. Typowy samochód osobowy jest w stanie wyhamować z prędkości $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ do zera na dystansie 35–45 m. Oznacza to, że przyspieszenie (oczywiście o zwrocie przeciwnym do kierunku ruchu) mieści się w przedziale $9\text{--}11 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Zupełnie inaczej jest z przyspieszeniem motocykli. Dzięki niewielkiej masie są one w stanie osiągać nieporównywalnie większe przyspieszenia przy takiej samej mocy silnika co samochód. Motocykle z silnikiem o mocy typowego auta osobowego rozpędzają się do $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w czasie 3–4 s. Maksymalne przyspieszenie i czas rozpędzania typowych motocykli na danym biegu

podano w tabeli 1., a przyspieszenie średnie dla tych motocykli w tabeli 2.

Tabela 1.*

Pozycja skrzyni biegów	Przyspieszenie $a_{\text{max}} [\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$		Czas rozpędzania $t_r [\text{s}]$	
	motocykl 1	motocykl 2	motocykl 1	motocykl 2
I ($20\text{--}80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$)	8,2	8,0	2,2	2,3
II ($20\text{--}80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$)	8,0	4,6	2,5	3,9
III ($30\text{--}90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$)	6,4	4,5	2,7	3,8

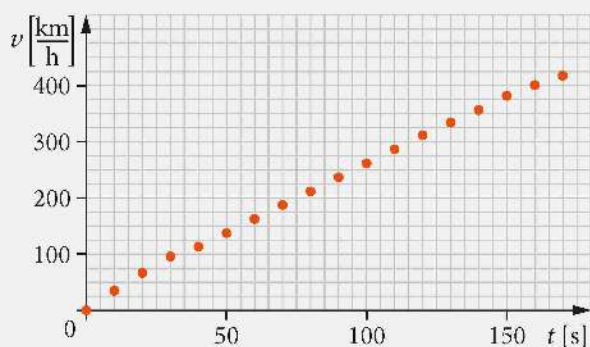
Tabela 2.*

Pozycja skrzyni biegów	Przyspieszenie $a_{\text{sr}} [\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$	
	motocykl 1	motocykl 2
I ($20\text{--}80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$)	7,6	7,2
II ($20\text{--}80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$)	6,7	4,3
III ($30\text{--}90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$)	6,2	4,4

Pojazdy szynowe – w przeciwieństwie do motocykli i samochodów – mają ogromną masę, dlatego ich przyspieszenie jest niewielkie, mimo silników o dużej mocy. Na przykład przyspieszenie tramwaju to około $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, natomiast typowego pociągu $0,1\text{--}0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

* Za: S. Tarkowski, *Przyspieszenie współczesnych motocykli i jego wpływ na bezpieczeństwo ruchu drogowego*, „Logistyka” 2015, nr 6.





Zależność $v(t)$ dla pociągu magnetycznego Trasrapid (Szanghaj). Rozpędza się on od zera do $400 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w 3 min. Wykres sporządzony na podstawie filmu: <https://www.youtube.com/watch?v=x-NXyPPaf3Q>



Wyjątkami są ultraszybkie pociągi – zarówno jeżdżące po tradycyjnych szynach, jak i te, które poruszają się na poduszce magnetycznej.

Przyspieszenie takich pociągów jest zbliżone do przyspieszenia samochodu osobowego. Pociągi magnetyczne, które nie dotykają torów, mogą osiągać prędkości powyżej $400 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, ale żeby się rozpędzić, potrzebują kilku kilometrów. Są przewidziane przede wszystkim do przewozu pasażerów i to ich komfort i bezpieczeństwo są tu najważniejsze.

Pojazdami lądowymi, które uzyskują niewyobrażalne wartości przyspieszenia, są dragstery. To pojazdy wyścigowe, konstruowane jedynie w celu osiągnięcia jak największej prędkości na prostoliniowym odcinku.

Najszybsze z nich, z kategorii Top Fuel, rozpędzają się do 100 mph (100 mil na godzinę, czyli $160 \frac{\text{km}}{\text{h}}$) w 1 s, a na całym krótkim odcinku wyścigu 305 m (co jest podyktowane względami bezpieczeństwa) do prędkości około $500 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w czasie poniżej 4 s. Łatwo zatem obliczyć, że w początkowej fazie przyspieszenie takiego bolidu wynosi około $40 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, czyli ponad cztery razy więcej niż przyspieszenie grawitacyjne.

Dragstery są tak ekstremalnymi pojazdami, że często już po jednym wyścigu ich silniki wymagają remontu. Zasilane są paliwem z dodatkiem nitrometanu*, a ich moc jest kilkadziesiąt razy większa od mocy silnika przeciętnego samochodu

Bartłomiej Piotrowski

* składnik paliw, który powoduje spadek temperatury zapłonu, a w konsekwencji wzrost mocy silnika



Pytania i zadania do tekstu

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



1. W podanych zdaniach wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F, jeśli jest fałszywe.

1.	Istnieją na świecie pociągi osiągające prędkość $300 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w czasie poniżej 2 min.	P	F
2.	Motocykle bez problemu osiągają przyspieszenie w kierunku poziomym porównywalne z wartością przyspieszenia grawitacyjnego.	P	F
3.	Przeciętnie tramwaj na rozpędzenie się do prędkości $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ potrzebuje około 10 s.	P	F
4.	Najszybsze pojazdy wyścigowe osiągają maksymalne prędkości ok. $400 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.	P	F

2. Dopasuj charakterystyczne wartości przyspieszeń do danych obiektów.

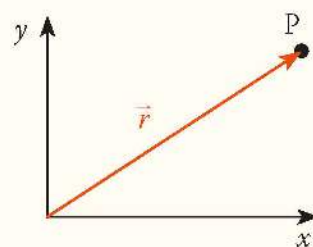
- | | |
|--|--------------------------------------|
| I. pociąg towarowy podczas ruszania | A. $0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| II. samochód osobowy podczas przyspieszania | B. $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| III. motocykl podczas przyspieszania | C. $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| IV. samochód podczas uderzenia w przeszkodę z prędkością $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ | D. $8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| V. tramwaj podczas przyspieszania | E. $40 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| VI. ekstremalny samochód wyścigowy podczas ruszania | F. $400 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |

3. Przeanalizuj wykres zależności prędkości od czasu dla pociągu Transrapid i odpowiedz na poniższe pytania.

- Kiedy przyspieszenie pociągu było największe, a kiedy najmniejsze?
- Uzasadnij, że poprawne jest stwierdzenie: W drugiej minucie ruchu pociąg z dobrym przybliżeniem poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym.
- Jaką drogę przebyłby pociąg do momentu osiągnięcia prędkości $430 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, gdyby stałe poruszał się z przyspieszeniem takim jak w drugiej minucie ruchu? Porównaj to z długością linii kolejowej 30,5 km, na której kursuje pociąg.

Podsumowanie Ruch prostoliniowy

- **Punkt materialny** to model ciała, którego rozmiary pomijamy, a przypisujemy mu określoną masę.
 - ▶ Położenie punktu materialnego w wybranym układzie współrzędnych określamy, posługując się **wektorem położenia** $\vec{r}$.
- Aby opisać ruch ciała, musimy określić **układ odniesienia**, względem którego przeprowadzamy ten opis. W różnych układach odniesienia ruch ciała może być opisany w różny sposób.
- **Wektor przemieszczenia** $\Delta\vec{r}$ prowadzi od początkowego do końcowego położenia ciała.
- **Droga** s jest wielkością skalarną, która określa długość toru przebytego przez ciało.



- **Prędkość średnia:**
$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

gdzie:

$\vec{v}_{sr}$ – prędkość średnia, $\Delta\vec{r}$ – zmiana położenia, Δt – czas, w którym ta zmiana nastąpiła.

▶ **Prędkość chwilową** obliczamy tak samo jak średnią, ale dla bardzo krótkiego czasu.

- **Ruch jednostajny prostoliniowy** to ruch ze stałą prędkością po linii prostej.

▶ **Równanie ruchu:** $x(t) = x_0 + vt$

gdzie:

x – położenie w chwili t , x_0 – położenie początkowe, v – prędkość ciała.

▶ **Droga:** $s = |v|t$

gdzie:

v – prędkość ciała, t – czas trwania ruchu.

▶ **Średnia wartość prędkości:** $v_{srw} = \frac{s_c}{t_c}$

gdzie:

s_c – cała przebyta droga, t_c – całkowity czas trwania ruchu.

▶ **Przyspieszenie średnie** a_{sr} w ruchu zmiennym: $\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

gdzie:

$\Delta\vec{v} = \vec{v}_k - \vec{v}_0$ – różnica między prędkością końcową i początkową, Δt – czas trwania ruchu.

▶ **Przyspieszenie chwilowe** obliczamy tak samo jak średnie, ale dla bardzo krótkiego czasu.

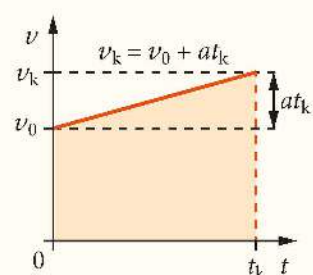
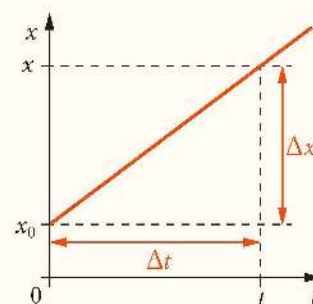
- **Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny** to ruch ze stałym przyspieszeniem po linii prostej.

▶ **Równanie ruchu:** $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

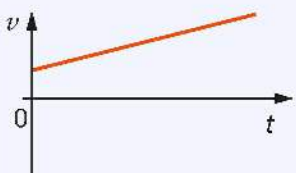
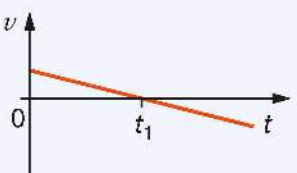
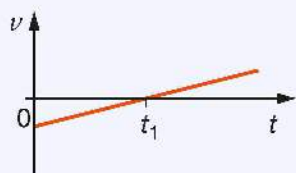
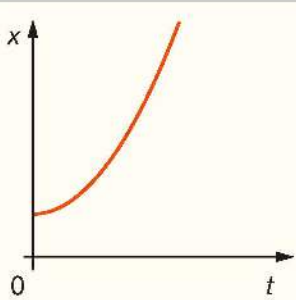
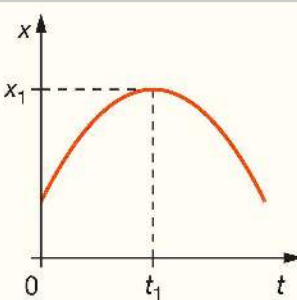
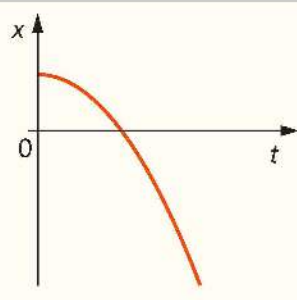
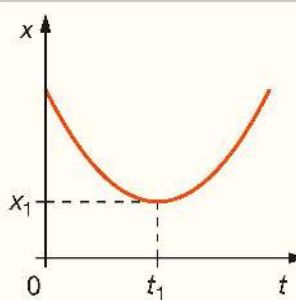
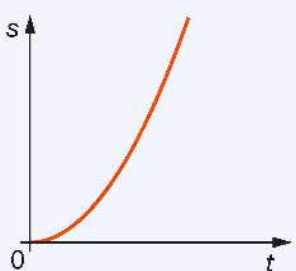
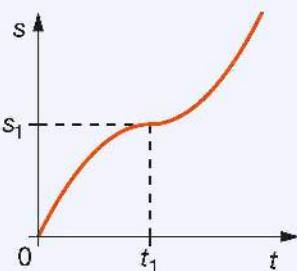
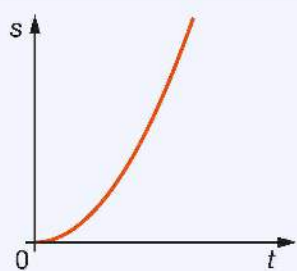
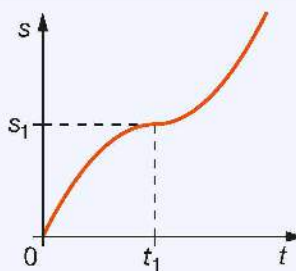
gdzie:

x – położenie ciała w chwili t , x_0 – początkowe położenie ciała,

v_0 – prędkość początkowa ciała, a – przyspieszenie.



- ▶ Jeżeli ciało nie zawraca, to $s = |\Delta x|$. Jeśli ciało zawraca, to należy osobno obliczyć odcinki przebyte w różne strony.
- ▶ **Prędkość** w ruchu jednostajnie zmiennym: $\Delta \vec{v} = \vec{a} \Delta t$
gdzie:
 $\Delta \vec{v} = \vec{v}_k - \vec{v}_0$ – różnica prędkości końcowej i początkowej, $\vec{a}$ – przyspieszenie,
 $\Delta t = t_k - t_0$ – przedział czasu, w którym nastąpiła zmiana prędkości.
- Aby się dowiedzieć, czy wartość prędkości w ruchu prostoliniowym zwiększa się czy zmniejsza, musimy porównać zwrot przyspieszenia ze zwrotem prędkości. Jeśli są zgodne – ciało przyspiesza, jeśli są przeciwne – zwalnia.

Ciało porusza się coraz szybciej w stronę zgodną ze zwrotem osi x	Ciało porusza się coraz wolniej, zgodnie ze zwrotem osi x. Zatrzymuje się w chwili t_1 , po czym porusza się coraz szybciej, przeciwnie do zwrotu osi x	Ciało porusza się coraz szybciej w stronę przeciwną do zwrotu osi x	Ciało porusza się coraz wolniej, przeciwnie do zwrotu osi x. Zatrzymuje się w chwili t_1 , po czym porusza się coraz szybciej, zgodnie ze zwrotem osi x
			
			
			
			



Sposób na zadanie

Wykorzystanie i przetwarzanie informacji zapisanych w postaci wykresu

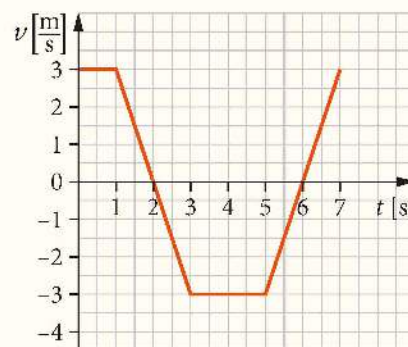
Zadanie 1. Punkt materialny porusza się wzdłuż osi x . Na wykresie przedstawiono zależność jego prędkości od czasu $v(t)$.

Zadanie 1.1. (0–3)

Wykonaj dla tego punktu materialnego wykres zależności przyspieszenia od czasu w przedziale od $t = 0$ s do $t = 7$ s.

Zadanie 1.2. (0–2)

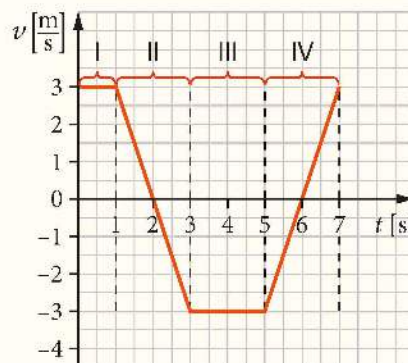
Oblicz drogę przebytą przez punkt materialny od $t = 0$ s do $t = 7$ s.



Rozwiązanie:

Wskazówka 1. Zanim sporządzisz wykres przyspieszenia od czasu, dokładnie przeanalizuj wykres z treści zadania. Zastanów się, jakim ruchem porusza się punkt materialny, gdy wykres prędkości od czasu jest linią równoległą do osi t , a jakim ruchem – gdy wykres wznosi się lub opada.

Ad 1.1. Dzielimy wykres $v(t)$ na cztery etapy i dla każdego z nich obliczamy przyspieszenie. Na tej podstawie określamy rodzaj ruchu.



Wskazówka 2. Nie myl prędkości v ze zmianą prędkości Δv . Ujemne v oznacza, że ciało porusza się przeciwnie do zwrotu osi x , a ujemne Δv oznacza, że prędkość się zmniejsza.

1. etap – od $t = 0$ s do $t = 1$ s: prędkość się nie zmienia, a więc

$$a_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

2. etap – od $t = 1$ s do $t = 3$ s: współrzędna prędkości maleje od $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do $-3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w czasie $\Delta t = 2$ s,

$$\text{a więc } a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-3 - 3}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

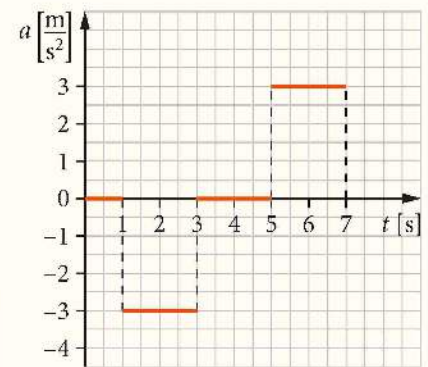
3. etap – od $t = 3$ s do $t = 5$ s: prędkość się nie zmienia, a więc $a_3 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

4. etap – od $t = 5$ s do $t = 7$ s: współrzędna prędkości rośnie od $-3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w czasie $\Delta t = 2$ s,

$$\text{ruch odbywa się podobnie jak w etapie 2., a więc } a_4 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3 - (-3)}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Wskazówka 3. Aby obliczyć przyspieszenie, musimy wiedzieć, o ile zmieniła się współrzędna prędkości i w jakim czasie ta zmiana nastąpiła.

Następnie sporządzamy wykres zależności przyspieszenia a od czasu t . Oś czasu powinna być wyskalowana tak jak wcześniej (nadal interesuje nas ten sam przedział czasowy). Oś pionowa powinna obejmować zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne (zgodnie z otrzymanymi wynikami przyspieszenia). Przy strzałkach osi zapisujemy odpowiednią wielkość wraz z jednostką, np. $a \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$.



Wskazówka 4. Pamiętaj o właściwym dobraniu skali na osiach wykresu.

Ad 1.2.

Wskazówka 5. Pole pod wykresem zależności prędkości od czasu dla danego przedziału czasu jest liczbowo równe drodze przebytej przez ciało w tym czasie.

Droga s przebyta przez punkt materialny w czasie od $t = 0$ s do $t = 7$ s jest liczbowo równa polu powierzchni pod wykresem $v(t)$ w tym przedziale czasu. Pole pod wykresem podzieliliśmy na sześć figur, dla których potrafimy obliczyć pola. Całkowita droga pokonana przez punkt materialny to suma ich pól:

$$s = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6$$

$P_1 = 3 \cdot 1 = 3$ – pole prostokąta o bokach 3 i 1

$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 1,5$ – pole trójkąta o podstawie 1 i wysokości 3

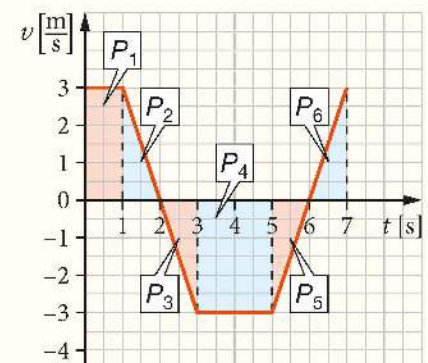
$P_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 1,5$ – pole trójkąta o podstawie 1 i wysokości 3

$P_4 = 3 \cdot 2 = 6$ – pole prostokąta o bokach 3 i 2

$P_5 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 1,5$ – pole trójkąta o podstawie 1 i wysokości 3

$P_6 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 1,5$ – pole trójkąta o podstawie 1 i wysokości 3

$$s = 3 + 1,5 + 1,5 + 6 + 1,5 + 1,5 = 15 \text{ m}$$



Uwaga. Droga jest wyrażona w metrach, ponieważ każde pole zostało obliczone jako iloczyn prędkości i czasu: $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s} = \text{m} \right]$.

Warto zapamiętać!

- Podczas sporządzania wykresu zwróć uwagę na poprawne opisanie i wyskalowanie osi.
- Właściwie interpretuj uzyskane wyniki obliczeń. Ujemna współrzędna przyspieszenia oznacza, że jego zwrot jest przeciwny do zwrotu osi przyjętego układu współrzędnych (opisującego ruch ciała): ciało może wówczas zwalniać (jeśli porusza się zgodnie ze zwrotem osi) lub przyspieszać (jeśli porusza się w przeciwną stronę).
- Pole pod wykresem zależności $v(t)$ jest liczbowo równe drodze przebytej przez ciało w danym przedziale czasowym.



Zadania powtórzeniowe



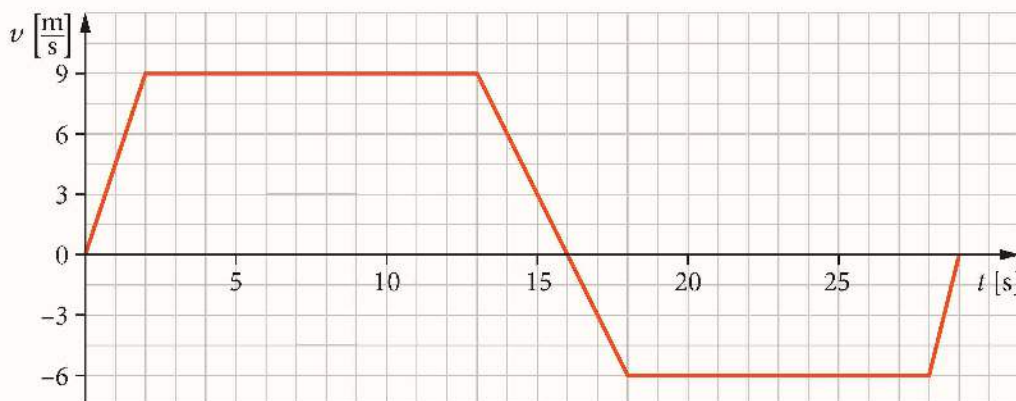
Zadanie 1. Samochody ciężarowe

Kierowca wywrotki widział na wysokości bocznej szyby przez $t_1 = 0,36$ s samochód ciężarowy z naczepą o łącznej długości $l = 12$ m, który mijał go, jadąc z naprzeciwka po równoległym pasie. Po kilku minutach tego samego kierowcę wyprzedzał inny samochód ciężarowy z naczepą, który jechał z taką samą prędkością i miał taką samą długość jak poprzedni. Kierowca wywrotki widział przez boczną szybę wyprzedzający go pojazd przez $t_2 = 1,08$ s. Wszystkie opisane pojazdy poruszają się ruchem jednostajnym.

- 1.1.** Oblicz prędkość każdego z samochodów ciężarowych względem wywrotki w kilometrach na godzinę.
- 1.2.** Oblicz prędkość (w kilometrach na godzinę) pojazdów względem jezdni w opisanych sytuacjach.
- 1.3.** Kierowca samochodu ciężarowego z naczepą widział wyprzedzaną przez siebie wywrotkę przez $t_3 = 0,72$ s. Oblicz długość wywrotki.
- 1.4.** Oblicz całkowity czas mijania i całkowity czas wyprzedzania w opisanych sytuacjach.
- 1.5.** Oblicz drogę pokonaną przez ciężarówkę podczas wyprzedzania.

Zadanie 2. Trening sportowca

Na wykresie przedstawiono zależność współrzędnej prędkości od czasu sportowca podczas treningu na bieżni.



- 2.1.** Oblicz drogę pokonaną przez sportowca podczas treningu.

Wskazówka. Zauważ, że zgodnie z wykresem prędkość zmieniała znak. Pamiętaj, że oznacza to zmianę zwrotu prędkości.

- 2.2.** Ustal, w jakiej odległości od miejsca startu znajdował się sportowiec po zakończeniu treningu na bieżni.
- 2.3.** Oblicz średnią wartość prędkości sportowca i wartość prędkości średniej.
- 2.4.** Sporządź wykres zależności $a(t)$ w czasie całego treningu.

Zadanie 3. Pociąg

Maszynista pociągu pasażerskiego uruchomił hamulec 1500 m przed wjazdem na stację, na której się nie zatrzymywał. W ciągu 1 minuty i 40 sekund skład zwolnił do $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, poruszając się ruchem jednostajnie zmiennym, a następnie minął perony stacji o długości 600 m ze stałą prędkością.

3.1. Oblicz prędkość, przy której uruchomiono hamulce.

3.2. Pasażer twierdzi, że pociąg przejeżdżał przez stację 2 minuty, natomiast dróżnik uważa, że przejazd trwał 2 minuty i 20 sekund. Oblicz długość pociągu.

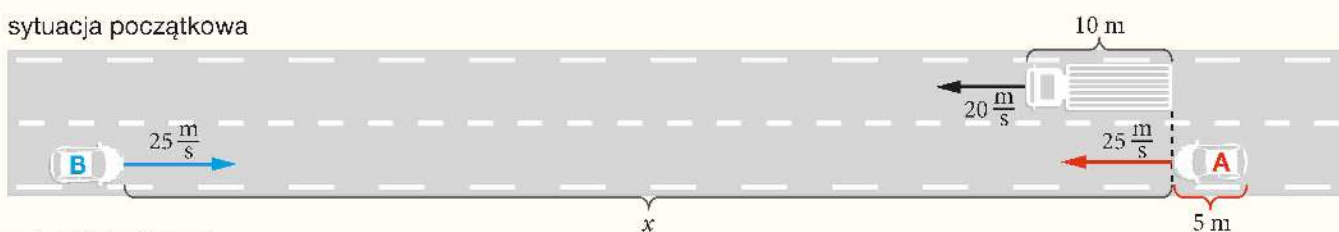
Wskazówka. Czasy podane przez pasażera i dróżnika są różne, ponieważ każdy z nich coś innego rozumiał przez „przejazd pociągu przez stację”.

3.3. Sporządź wykres zależności prędkości lokomotywy od czasu: od momentu rozpoczęcia hamowania do momentu opuszczenia peronu przez lokomotywę.

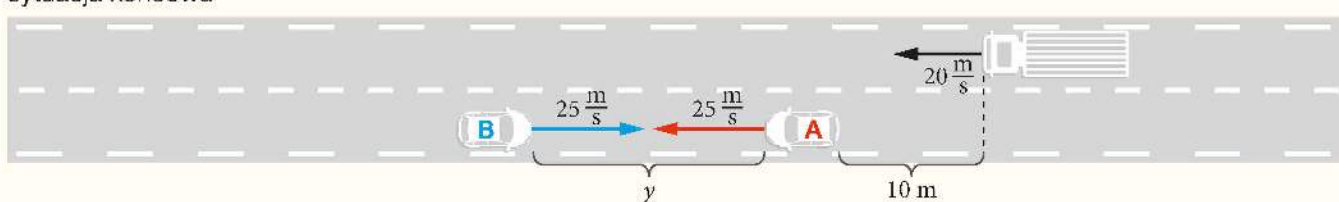
Zadanie 4. Bezpieczne wyprzedzanie

Rozważmy sytuację przedstawioną na rysunkach: pojazd A zaczyna wyprzedzać ciężarówkę, a z naprzeciwka nadjeżdża pojazd B. Oba pojazdy poruszają się z taką samą prędkością $25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, natomiast ciężarówka – z prędkością $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Długość ciężarówki to 10 m, a długość samochodu A to 5 m.

sytuacja początkowa



sytuacja końcowa



Uwaga. Na rysunkach nie są zachowane proporcje odległości.

4.1. Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

1.	Samochód A zmieni położenie z widocznego na górnym rysunku do przedstawionego na dolnym rysunku w czasie 4 s.	P	F
2.	Ciężarówka przejedzie 100 m w czasie przemieszczenia się pojazdu A z położenia widocznego na górnym rysunku do przedstawionego na dolnym rysunku.	P	F
3.	W czasie gdy samochód A przemieści się z położenia widocznego na górnym rysunku do przedstawionego na dolnym rysunku, pojazd B przebędzie 125 m.	P	F

4.2. Wyprzedzanie jest bezpieczne, gdy pojazd A znajduje się w odległości 10 m przed wyprzedzaną ciężarówką, a pojazd B jest wtedy w takiej odległości od A, że do ich spotkania pozostanie co najmniej 5 s.

Oblicz minimalną początkową odległość x między pojazdami, aby wyprzedzanie ciężarówki było bezpieczne.

4.3. W Polsce spotyka się tzw. odcinkowy pomiar prędkości. Polega on na pomiarze czasu przejazdu pojazdu na określonym odcinku drogi. System rejestruje wykroczenie, jeżeli czas ten jest krótszy niż:

$$t_{\min} = \frac{\text{długość odcinka drogi}}{\text{maksymalna dozwolona prędkość}}$$

Pan Michał wjechał na obszar odcinkowej kontroli prędkości o długości 3 km. Maksymalna dozwolona prędkość na tym odcinku drogi to $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Dopiero po przejechaniu 300 m ze stałą prędkością $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zorientował się, że znajduje się na obszarze kontroli prędkości. Z jaką maksymalną stałą prędkością pan Michał może pokonać pozostałą część drogi, aby system nie zarejestrował wykroczenia?

Uwaga. Ściślej mówiąc, urządzenie pomiarowe rejestruje wykroczenie, gdy średnia prędkość przejazdu jest nieco większa niż dozwolona, a prędkościomierz samochodu zawsze nieco zawyża rzeczywistą prędkość, jednak te dwa fakty pomijamy w rozwiązaniu.



3 Ruch krzywoliniowy

1. Ruch krzywoliniowy
2. Rzut poziomy
3. Prędkość w różnych układach odniesienia
4. Ruch po okręgu
5. Przyspieszenie dośrodkowe

3.1. Ruch krzywoliniowy

Przypomnij sobie

- Punkt materialny to model ciała, którego rozmiary pomijamy, ale przypisujemy mu określoną masę.
- Wektor położenia łączy początek układu współrzędnych z ciałem.
- Przebytą drogę mierzymy wzdłuż toru – linii, po której porusza się ciało.
- Długość toru ruchu to droga. Jednostką drogi w układzie SI jest metr.

■ Tor ruchu i przebyta droga

Za lecącym samolotem często można zobaczyć smugi kondensacyjne. Mają one pewną szerokość. Gdybyśmy ten obraz obserwowali z wystarczająco dużej odległości, wyraźnie dostrzeglibyśmy jego podobieństwo do linii, jaką widzą na monitorach pracownicy w wieży kontroli lotów. Samolot na niebie moglibyśmy uznać za punkt materialny, a smugę, którą za sobą zostawia, za linię obrazującą tor jego ruchu. Tor ten tworzą punkty będące końcami wektora położenia ciała w kolejnych, następujących po sobie chwilach.

Na poprzednich lekcjach zajmowaliśmy się ruchem **prostoliniowym**, w którym tor jest linią prostą. Zwrot wektora prędkości w tym ruchu wskazuje, w którą stronę porusza się ciało. Jednak w wielu sytuacjach ciała poruszają się po liniach krzywych, np. samochód na zakręcie, fotelik karuzeli, Księżyc obiegający Ziemię. Taki ruch nazywamy **krzywoliniowym**.

Ruch krzywoliniowy to taki ruch, którego torem nie jest linia prosta.

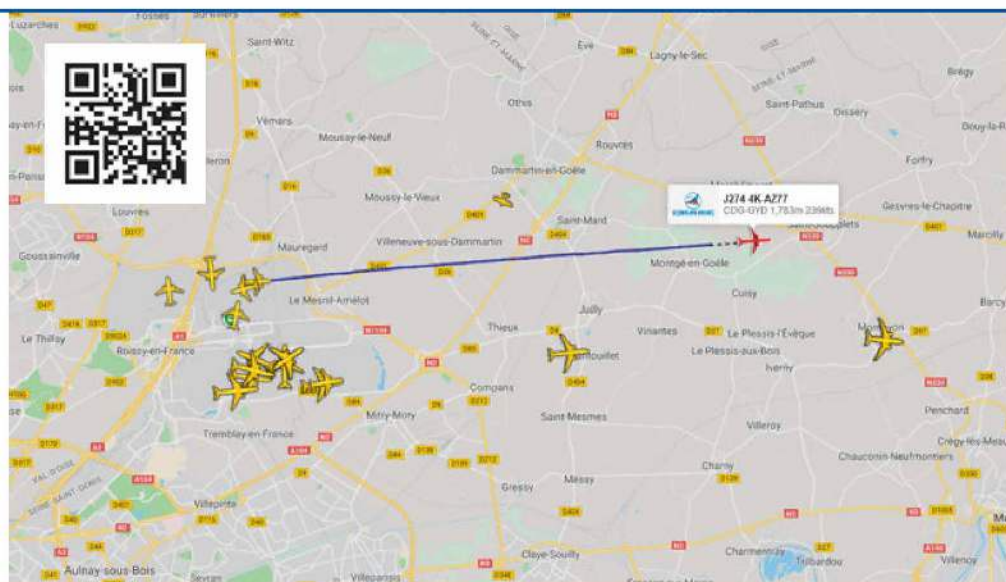
Szczególnym przypadkiem ruchu krzywoliniowego jest ruch po okręgu (omówimy go później bardziej szczegółowo).



Rys. 3.1. Smugi kondensacyjne za samolotem obrazują tor prostoliniowy

A to ciekawe

Na stronie:
<http://planefinder.net/>
możesz samodzielnie sprawdzić położenie wszystkich samolotów pasażerskich na całej kuli ziemskiej. Obok – zrzut ekranu pokazujący położenia samolotów wokół Paryża 7.12.2018 r. o godzinie 11.17.



Układy współrzędnych

Do opisu położenia i ruchu ciała posługujemy się układem współrzędnych. W zależności od tego, czy rozpatrujemy ruch jedno-, dwu-, czy trójwymiarowy, wybieramy odpowiedni układ współrzędnych.



Do określenia położenia sprinterki podczas biegu wystarczy jedna współrzędna. Korzystamy więc z jednowymiarowego układu współrzędnych



Określenie położenia i scharakteryzowanie ruchu ciał na płaszczyźnie wymaga zastosowania dwuwymiarowego układu współrzędnych



Lotu drona nie da się opisać ani w jedno-, ani w dwuwymiarowym układzie współrzędnych. Do opisu położenia i ruchu obiektów w przestrzeni stosujemy układy trójwymiarowe.

Dodatek matematyczny

Wektory na płaszczyźnie i w przestrzeni

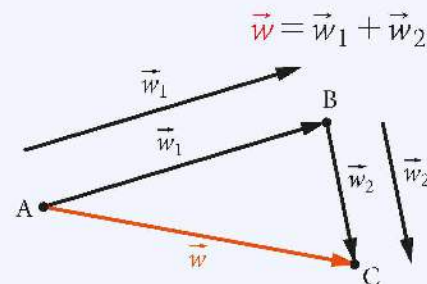
Podczas badania położenia i ruchu ciał na płaszczyźnie lub w przestrzeni będziemy posługiwać się wektorami. Mogą one mieć dowolny kierunek.

■ Dodawanie i odejmowanie wektorów o różnych kierunkach

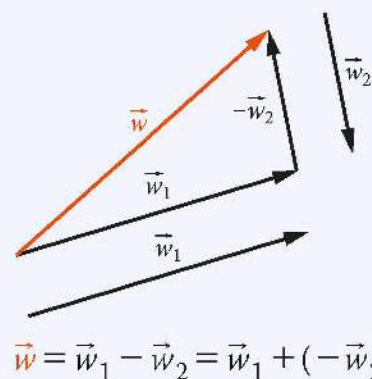
Aby dodać dwa dowolne wektory, przesuwamy je równolegle tak, aby początek drugiego pokrywał się z końcem pierwszego. Następnie łączymy początek pierwszego wektora z końcem drugiego (rys. 3.2). Zauważ, że długość wektora $\vec{w}$ nie jest sumą długości wektorów $\vec{w}_1$ i $\vec{w}_2$.

Taki sposób dodawania wektorów nazywamy **metodą trójkąta**.

Odejmowanie wektorów jest działaniem przeciwnym do ich dodawania. Geometrycznie można wykonać je następująco: zwrot wektora odejmowanego zamieniamy na przeciwny, a następnie wykonujemy dodawanie wektorów (rys. 3.3).



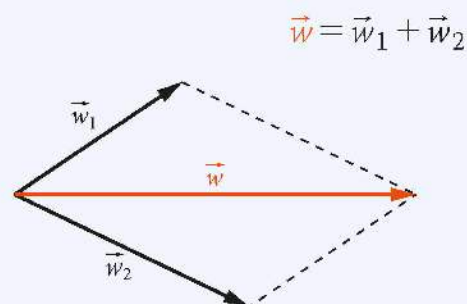
Rys. 3.2. Dodawanie dwóch wektorów o różnych kierunkach metodą trójkąta



Rys. 3.3. Odejmowanie dwóch wektorów o różnych kierunkach

■ Metoda równoległoboku

Często dodajemy wektory, które mają wspólny początek. Wówczas, aby nie przesuwać jednego z nich, korzystamy z **reguły równoległoboku**: rysujemy równoległobok, którego bokami są dodawane wektory. Przekątna tego równoległoboku stanowi sumę wektorów (rys. 3.4). Metoda ta daje oczywiście taki sam wynik, jak pokazana poprzednio.



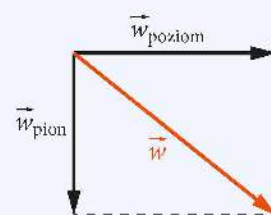
Rys. 3.4. Dodawanie dwóch wektorów metodą równoległoboku

■ Rozkładanie wektora na składowe

Czasami musimy przedstawić wektor jako sumę dwóch innych wektorów. Mówimy wówczas, że **rozkładamy go na składowe**. Zwykle chodzi nam o składowe w określonych kierunkach, np. pionową i poziomą.

Na rysunku 3.5 wektor $\vec{w}$ został rozłożony na składowe $\vec{w}_{\text{pion}}$ i $\vec{w}_{\text{poziom}}$:

$$\vec{w} = \vec{w}_{\text{pion}} + \vec{w}_{\text{poziom}}$$

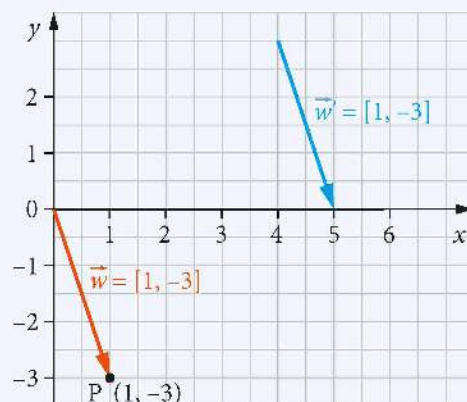


Rys. 3.5. Rozkładanie wektora $\vec{w}$ na składowe $\vec{w}_{\text{pion}}$ i $\vec{w}_{\text{poziom}}$

■ Współrzędne wektora na płaszczyźnie

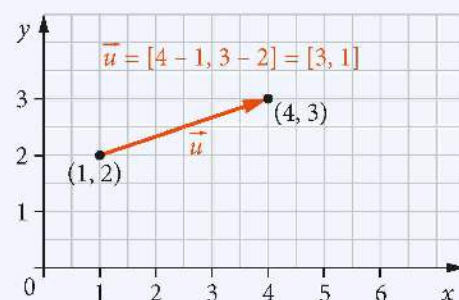
Gdy na płaszczyźnie wprowadzimy układ współrzędnych, także wektory możemy opisywać za pomocą współrzędnych. Dla odróżnienia od współrzędnych punktów zapisujemy je w nawiasach kwadratowych. Gdy wektor ma początek w początku układu współrzędnych, współrzędne wektora są równe współrzędnym jego końca (rys. 3.6). Jeżeli przesuniemy równolegle wektor $\vec{w}$, to jego współrzędne nie ulegną zmianie.

Rys. 3.6. Zarówno wektor $\vec{w}$, jak i $\vec{w}'$ mają współrzędne $[1, -3]$



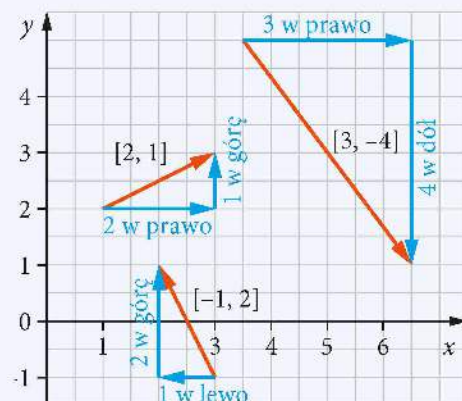
Współrzędne dowolnego wektora można obliczyć, odejmując od współrzędnych końca odpowiednie współrzędne początku (rys. 3.7).

Rys. 3.7. Wektor od punktu $(1, 2)$ do punktu $(4, 3)$ ma współrzędne $[3, 1]$



Zwróć uwagę, że współrzędne wektora możemy interpretować intuicyjnie. Wartość bezwzględna współrzędnej wskazuje, o ile jednostek mamy się poruszyć wzdłuż danej osi, a znak – w którą stronę (znak plus to ruch zgodnie ze zwrotem osi, znak minus to ruch przeciwny do zwrotu osi).

Rys. 3.8. Interpretacja współrzędnych wektora



■ Działania na wektorach a działania na ich współrzędnych

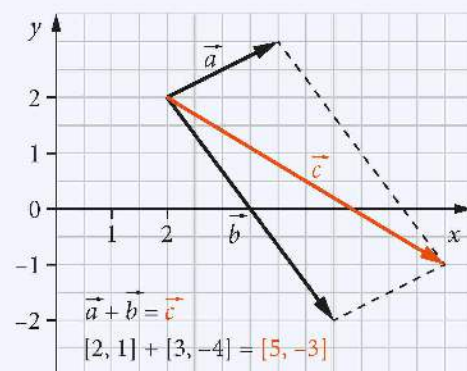
Dodawaniu i odejmowaniu wektorów oraz ich mnożeniu przez liczbę odpowiadają analogiczne działania na ich współrzędnych:

$$[x, y] + [x', y'] = [x + x', y + y']$$

$$[x, y] - [x', y'] = [x - x', y - y']$$

$$a[x, y] = [ax, ay]$$

Na rysunku 3.9 widzisz, że wektor $\vec{c}$, będący sumą wektorów $\vec{a} = [2, 1]$ i $\vec{b} = [3, -4]$, wyznaczony za pomocą reguły równoległoboku, rzeczywiście ma współrzędne $\vec{c} = [5, -3]$.

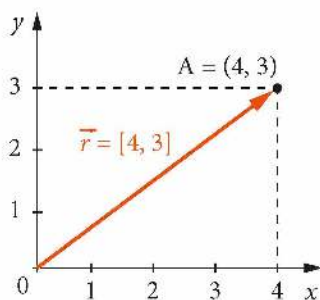


Rys. 3.9. Wektor $\vec{c}$, wyznaczony za pomocą reguły równoległoboku, jest sumą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$



A to ciekawe

Pod wodą GPS nie działa, dlatego nurkowie do określania swojego położenia stosują tradycyjne metody – wykorzystują mapy akwenów i kompasy. Niejednokrotnie pomocne okazuje się obserwowanie kąta padania promieni słonecznych. Do wyznaczenia głębokości służy nurkom głębokościomierz, który do pomiaru głębokości może wykorzystywać pomiar ciśnienia wody.



Rys. 3.10. Wektor położenia $\vec{r}$ w dwuwymiarowym układzie współrzędnych

Wektor położenia

Zamiast opisywać położenie ciała za pomocą współrzędnych, możemy podać wektor $\vec{r}$ położenia tego ciała. Jest to wektor, który łączy początek wybranego układu współrzędnych z danym ciałem.

Definicja jest więc identyczna jak w przypadku wektora położenia na prostej. Teraz jednak wektor nie musi być skierowany wzdłuż osi.

Tak wyznaczony wektor położenia posłuży nam do zdefiniowania przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia w ruchu krzywoliniowym.

Wektor przemieszczenia

W ruchu po linii prostej mogliśmy przedstawić przemieszczenie za pomocą wektora zaczynającego się w początkowym położeniu ciała i kończącego się w jego położeniu końcowym.

Wektor przemieszczenia $\Delta\vec{r}$ łączy początkowe i końcowe położenie ciała.

Wektor przemieszczenia

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

gdzie:

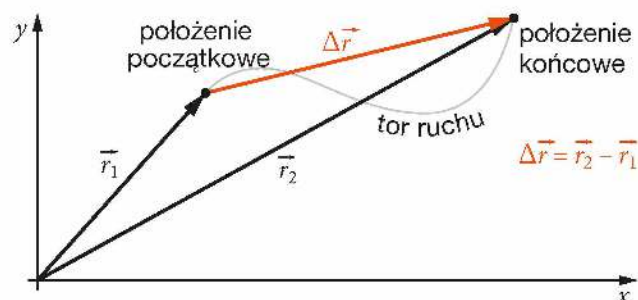
$\vec{r}_2$ – wektor położenia końcowego,

$\vec{r}_1$ – wektor położenia początkowego.

Jak zapewne pamiętasz, w ruchu prostoliniowym przemieszczenie ciała obliczaliśmy jako różnicę współrzędnych jego położenia końcowego i początkowego. W przypadku ruchu krzywoliniowego postępujemy tak samo (rys. 3.11).

Wektor przemieszczenia jest różnicą wektorów położenia końcowego i początkowego:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



Rys. 3.11. Wektor przemieszczenia $\Delta\vec{r}$ w dwuwymiarowym układzie współrzędnych

■ Prędkość w ruchu krzywoliniowym

Prędkość w ruchu krzywoliniowym określamy bardzo podobnie jak w przypadku ruchu prostoliniowego: dzielimy przemieszczenie przez czas. Różnica polega na tym, że **wektor przemieszczenia w tym ruchu nie musi być skierowany wzdłuż osi** przyjętego układu współrzędnych, więc do jego opisu nie wystarczy jedna współrzędna.

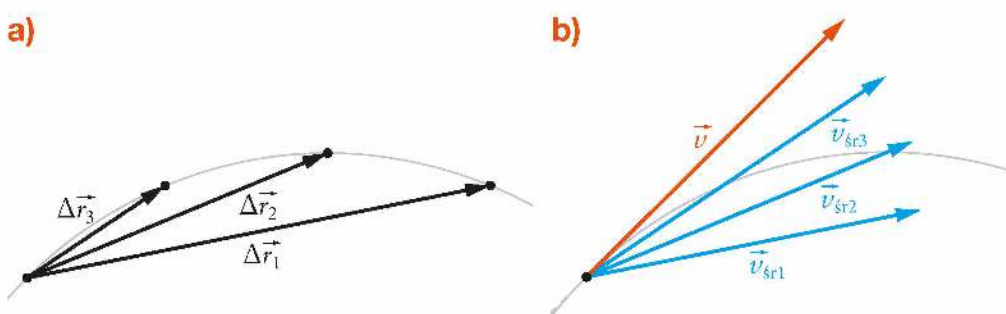
Prędkość średnia ciała to iloraz przemieszczenia $\Delta \vec{r}$ tego ciała i czasu Δt , w którym to przemieszczenie nastąpiło:

$$\vec{v}_{\text{sr}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Tak jak w ruchu prostoliniowym, obliczając prędkość średnią dla coraz krótszych przedziałów czasu, przybliżamy się do **prędkości chwilowej**.

■ Jak skierowany jest wektor prędkości

Na rysunku 3.12a widzisz wektory przemieszczenia $\Delta \vec{r}_1$, $\Delta \vec{r}_2$, $\Delta \vec{r}_3$ dla pewnego ciała poruszającego się po torze krzywoliniowym. Odpowiadają one coraz krótszym przedziałom czasu: $\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$.

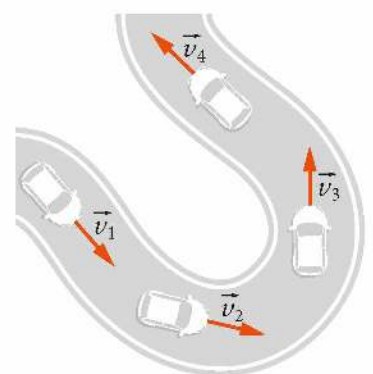


Rys. 3.12. Wektory przemieszczenia $\Delta \vec{r}$ (a) odpowiadają coraz krótszym przedziałom czasu, a wektory prędkości średniej $\vec{v}_{\text{sr}}$ (b) są skierowane tak samo jak odpowiadające im wektory przemieszczenia

Na rysunku 3.12b pokazano **wektory prędkości średniej** $\vec{v}_{\text{sr}1}$, $\vec{v}_{\text{sr}2}$, $\vec{v}_{\text{sr}3}$, odpowiadające tym samym przedziałom czasu Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 jak na rys. 3.12a. Są one skierowane tak samo jak odpowiednie wektory przemieszczenia. Widzimy, że im krótszy czas Δt , tym bardziej kierunek wektora prędkości średniej jest zbliżony do kierunku stycznej do toru.

W ruchu krzywoliniowym wektor prędkości chwilowej skierowany jest wzdłuż prostej stycznej do toru ruchu ciała (rys. 3.13).

Zwróćmy uwagę, że choć wektory przemieszczenia $\Delta \vec{r}_1$, $\Delta \vec{r}_2$, $\Delta \vec{r}_3$ są coraz krótsze, to długość wektorów $\vec{v}_{\text{sr}1}$, $\vec{v}_{\text{sr}2}$, $\vec{v}_{\text{sr}3}$ jest niemal stała. Dzieje się tak dlatego, że obliczając kolejne wektory $\vec{v}_{\text{sr}}$, dzielimy coraz krótsze wektory $\Delta \vec{r}$ przez coraz krótszy czas Δt . Na przykład jeśli zmniejszymy

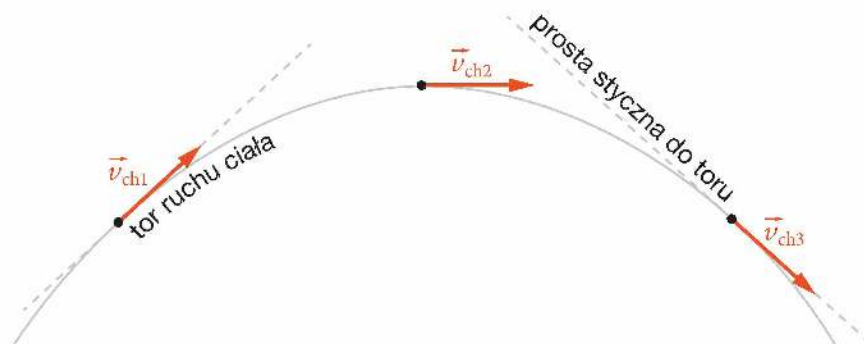


Rys. 3.13. Wektor prędkości chwilowej skierowany jest wzdłuż stycznej do toru



Rys. 3.14. Wektor prędkości skierowany jest wzdłuż stycznej do toru

czas Δt dwukrotnie, to wartość przemieszczenia także zmniejszy się w przybliżeniu dwa razy, więc ich iloraz pozostanie praktycznie bez zmian. Strzała wystrzelona z łuku dobrze ilustruje zmiany kierunku wektora prędkości w ruchu krzywoliniowym (rys. 3.14 i 3.15).



Rys. 3.15. W ruchu krzywoliniowym wektor prędkości chwilowej $\vec{v}_{ch}$ skierowany jest wzdłuż stycznej do toru ruchu ciała

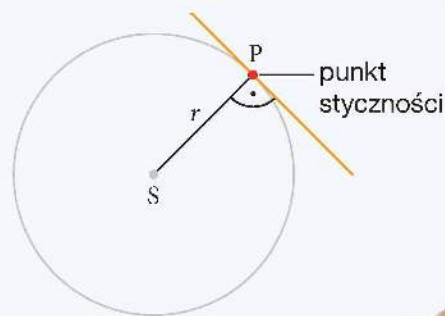
Po tej lekcji powinieneś

- opisywać położenie punktu materialnego za pomocą współrzędnych i wektora położenia;
- stosować pojęcie wektora przemieszczenia i wyznaczać go jako różnicę wektorów położenia końcowego i początkowego;
- stosować pojęcie wektora prędkości do opisu ruchu krzywoliniowego;
- obliczać i rozróżniać prędkość średnią i prędkość chwilową w ruchu krzywoliniowym.

Dodatek matematyczny

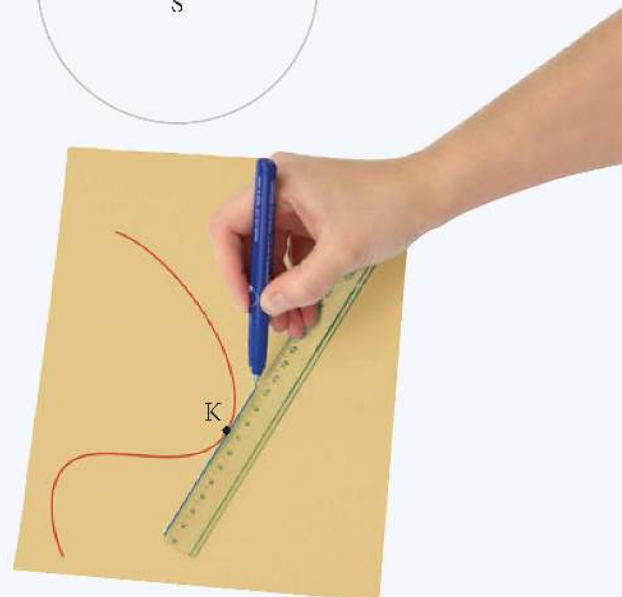
■ Styczna do okręgu

Prostą, która ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny, nazywamy styczną. Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia łączącego punkt styczności ze środkiem okręgu (patrz rys. obok).



■ Styczna do krzywej

Styczne możemy prowadzić także do innych krzywych. Aby wyznaczyć styczną do krzywej w punkcie K, korzystamy z przezroczystej linijki (patrz zdjęcie obok).



Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



1. Boisko piłkarskie jest prostokątem o bokach długości 70 m i 110 m. Kuba przebiegł po najkrótszej drodze między jego przeciwległymi narożnikami. Robert pokonał trasę między tymi samymi punktami, biegnąc najpierw wzdłuż linii końcowej boiska, a następnie wzdłuż linii bocznej.

a) Narysuj wektory przemieszczenia piłkarzy.

Wskazówka. Pamiętaj, aby boisko narysować w skali.

- b) O ile procent droga pokonana przez Roberta jest dłuższa od drogi pokonanej przez Kubę?
2. Kierowca szukający w Łodzi domu znajomych przejechał 2 km na południe, a następnie 2 km na wschód i 2 km na północ.

a) Ile wyniosła droga, jaką przebył?

b) Określ wartość, kierunek i zwrot wektora przemieszczenia tego kierowcy.

3. W układzie współrzędnych, którego początek leży w Kołobrzegu, położenie pewnego statku ma współrzędne $(-12 \text{ km}, 20 \text{ km})$. W jakim kierunku geograficznym należy szukać tego statku? Przyjmij, że oś x jest zwrócona na wschód, a oś y na północ oraz że rozpatrywany fragment powierzchni kuli ziemskiej z dobrym przybliżeniem możemy uznać za płaski.
4. Na rysunku przedstawiono orbitę komety poruszającej się wokół Słońca. Przerysuj

ją do zeszytu, zaznacz kilka położzeń komety i naszkicuj jej wektor prędkości. **Wskazówka.** Gdy kometa znajduje się bliżej Słońca, porusza się szybciej.



5. Samochód przejechał 3 km w kierunku wschodnim z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a potem wjechał w boczną drogę i przebył 4 km na północ z prędkością $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Oblicz średnią wartość prędkości samochodu (patrz s. 62).

b) Zapisz w zeszycie współrzędne wektora całkowitego przemieszczenia samochodu w układzie współrzędnych, w którym oś x poprowadzono w kierunku wschodnim, a początek układu znajduje się tam, gdzie samochód rozpoczął swój ruch. Oblicz długość $\Delta \vec{r}$, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

c) Zapisz w zeszycie współrzędne wektora prędkości średniej samochodu. Oblicz wartość tego wektora.

d) Porównaj wyniki obliczeń, o których mowa w punktach a) i c).

3.2. Rzut poziomy

Przypomnij sobie

- W ruchu jednostajnie zmiennym przyspieszenie jest wielkością stałą.
- Spadek swobodny i rzut pionowy to ruchy jednostajnie zmienne.

Badaliśmy już ruch ciał upuszczonych lub rzuconych z pewną prędkością początkową skierowaną w dół lub w górę. Teraz zajmiemy się przypadkiem, gdy spadające ciało miało na początku pewną prędkość skierowaną poziomo. Takie zjawisko nazywamy **rzutem poziomym**.

■ Niezależność ruchów

Zasadę niezależności ruchów zaobserwujemy w prostym doświadczeniu.

Doświadczenie 8

1. Ułóż dwie takie same monety w jednakowej odległości od brzegu stołu (patrz zdjęcie).
2. Ustaw kawałek tektury prostopadłe do stołu na wysokości jednej z monet, w niewielkiej odległości od blatu. Rozpocznij filmowanie.
3. Popchnij obie monety równocześnie, np. linijką.
Która z monet spada na podłogę pierwsza?



Opisane wyżej doświadczenie odbywa się bardzo szybko, dlatego możemy jedynie zaobserwować, że monety upadły na podłogę w tej samej chwili. Na tej podstawie można przypuszczać, że ruch w pionie zachodzi jednakowo dla obu monet. Aby się o tym upewnić, można obejrzeć rzut poziomy w zwolnionym tempie, np. na wykonanym przez siebie filmie. Można też zastosować sprytną metodę, którą do badania spadku ciał stosował Galileusz w czasach, gdy nikomu nie śniły się jeszcze kamery filmowe.

Doświadczenie 9

1. Przygotuj równię pochyłą, np. podeprzyj dwie nogi od stołu tak, aby był on lekko nachylony.
2. Z wyższego końca stołu puść dwa ciała w kształcie kuli (np. piłeczki).
3. W trakcie staczania się piłeczek jedną z nich lekko popchnij w stronę drugiej i obserwuj ich ruch.
4. Czy piłeczki się zderzą? O czym to świadczy?



Doświadczenie pokazuje, że ruch ciała w każdym z kierunków wzajemnie prostopadłych można rozpatrywać niezależnie od siebie.

Ruch w kierunku poziomym odbywa się niezależnie od ruchu w kierunku pionowym.

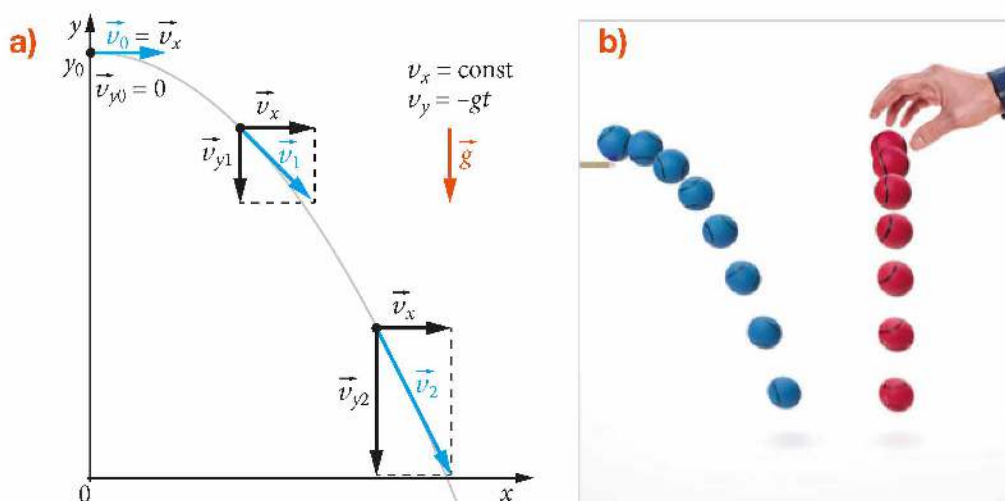
■ Składowe prędkości w rzucie poziomym

Wektor prędkości w rzucie poziomym, podobnie jak w każdym ruchu krzywoliniowym, skierowany jest stycznie do toru ruchu ciała. Można go rozłożyć na składowe: poziomą i pionową. Składowa pozioma jest stała (mamy tu do czynienia z ruchem jednostajnym), natomiast składowa pionowa zwiększa swoją wartość tak samo jak przy spadku swobodnym bez prędkości początkowej:

$$v_x = v_{x0} = \text{const}$$

$$v_y = -gt$$

Na rysunku 3.16a przedstawiono tor ruchu spadającego ciała i jego położenie w trzech różnych chwilach. Składowa pozioma jego prędkości się nie zmienia, a wartość składowej pionowej stale wzrasta. Dlatego wartość prędkości jest coraz większa, a jej kierunek coraz bardziej zbliżony do pionowego.



W rzucie poziomym **składowa pozioma prędkości** jest stała (ruch jednostajny), a **składowa pionowa prędkości** zwiększa swoją wartość (ruch przyspieszony bez prędkości początkowej).

Rys. 3.16. a) rozkładanie na składowe wektora prędkości w rzucie poziomym, b) ilustracja rzutu poziomego i spadku swobodnego

Ruch w pionie odbywa się niezależnie od ruchu w poziomie. Pozwala to zapisać wzory na współrzędne x i y położenia ciała w dowolnej chwili. Do wyznaczenia współrzędnej pionowej y wykorzystujemy równanie dla ruchu jednostajnie zmiennego, a do wyznaczenia współrzędnej poziomej x – równanie dla ruchu jednostajnego:

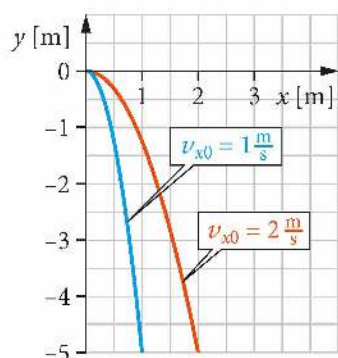
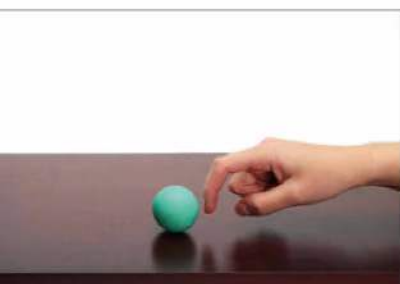
$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{x0}t \\ y &= y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

gdzie:

v_{x0} – początkowa prędkość pozioma, t – czas trwania ruchu,

(x_0, y_0) – współrzędne początkowego położenia ciała.

Zauważmy, że przyspieszenie w opisywanym ruchu skierowane jest cały czas w dół, podobnie jak np. w rzucie pionowym. Gdyby przyspieszenie miało składową poziomą, zmieniałaby się pozioma składowa prędkości, a tak się nie dzieje – ruch w poziomie jest jednostajny.



Rys. 3.17. Zależność $y(x)$ dla rzutu poziomego przy $v_{x0} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i przy $v_{x0} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Patrz dodatek matematyczny s. 75

Tor rzutu poziomego

Wykonaj doświadczenie, które pozwoli ci zbadać zależność toru ruchu ciała w rzucie poziomym od prędkości początkowej.

Doświadczenie 10

1. Na stole umieść piłeczkę i popchnij ją tak, aby dotarła do krawędzi stołu i spadła. Obserwuj jej ruch.
2. Wykonaj doświadczenie kilka razy. Za każdym razem nadawaj piłeczce inną prędkość.
3. Naskicuj tor ruchu piłki dla każdego przypadku.
4. Jakie wnioski możesz wysnuć z doświadczenia?

Powyższe doświadczenie ilustruje, po jakiej krzywej porusza się ciało w rzucie poziomym. Aby opisać tę krzywą matematycznie, skorzystajmy ze wzorów na współrzędne ciała w zależności od czasu. Przyjmijmy dla uproszczenia, że $x_0 = y_0 = 0$ (tzn. wybierzmy układ współrzędnych o początku w punkcie, z którego zostało rzucone ciało). Wówczas wzory na poszczególne współrzędne przyjmują postać:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}gt^2 \\ x &= v_{x0}t \end{aligned}$$

Gdy z drugiego wzoru wyznaczymy t i podstawimy do pierwszego, to po uproszczeniu otrzymamy:

$$y = -\frac{g}{2v_{x0}^2}x^2$$

Współczynnik $-\frac{g}{2v_{x0}^2}$ jest stały, jest to więc równanie paraboli. Im większa prędkość początkowa, tym mniejsza wartość bezwzględna tego współczynnika, czyli tym łagodniej opadają ramiona paraboli (rys. 3.17).

Rzut ukośny

Umiemy już opisać ruch ciała rzuconego poziomo lub pionowo. Jak się okazuje, te wiadomości można wykorzystać także wtedy, gdy ciało rzucone jest pod dowolnym kątem do poziomu, czyli w **rzucie ukośnym**. Przykład takiego rzutu przedstawia rysunek 3.20a (s. 104), na którym dziewczyna rzuca piłkę z prędkością $\vec{v}_0$. Wektor prędkości jest nachylny pod kątem α do poziomu. Piłka najpierw się wznosi, później opada, jednocześnie cały czas poruszając się w poziomie.

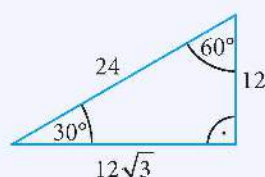
W przypadku rzutu ukośnego ruch w pionie odbywa się niezależnie od ruchu w poziomie, tak jak w rzucie poziomym.

Mamy więc do czynienia z rzutem pionowym połączonym z ruchem jednostajnym w kierunku poziomym.

Dodatek matematyczny

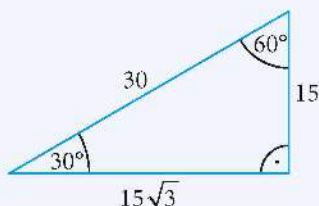
■ Sinus i cosinus kąta ostrego

Trójkąty na rysunkach poniżej mają jednakowe kąty. Choć długości ich boków są różne, to w każdym z trójkątów takie same są stosunki tych długości: najkrótszy bok stanowi połowę najdłuższego, średni jest $\sqrt{3}$ razy dłuższy od najkrótszego itd. Podobnie jest w innych trójkątach prostokątnych: gdy znamy kąty, możemy jednoznacznie określić stosunki boków.



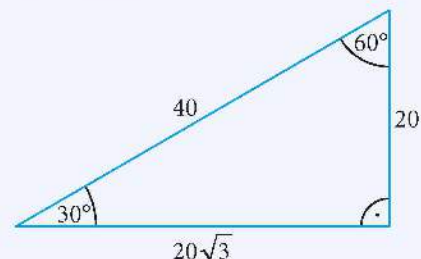
$$\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{12\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{15\sqrt{3}}{30} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{20\sqrt{3}}{40} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Te stosunki boków nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi**. Wprowadzimy teraz dwie z nich:

► Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przeciwprostokątnej to **sinus** (czyt. s-inus) kąta α , co zapiszemy:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

► Stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej to **cosinus** (czyt. kos-inus) kąta α , co zapiszemy:

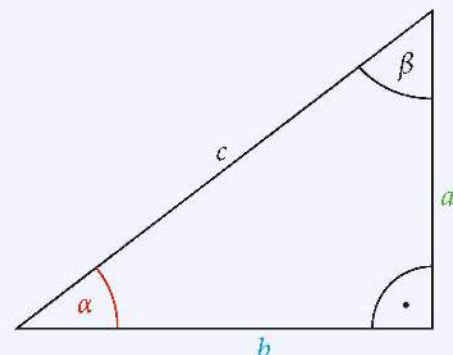
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Analogicznie możemy wyznaczyć funkcje trygonometryczne kąta β :

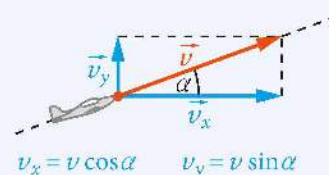
$$\sin \beta = \frac{b}{c} \quad \cos \beta = \frac{a}{c}$$

Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych wszystkich kątów możemy odczytać z tablic matematycznych lub obliczyć za pomocą kalkulatora wyposażonego w odpowiednie funkcje. Z kolei znając wartość funkcji trygonometrycznej, możesz odszukać w tablicach albo obliczyć na kalkulatorze wartość kąta. Zwróć uwagę, aby wybrać miarę kątów w stopniach (DEG lub D).

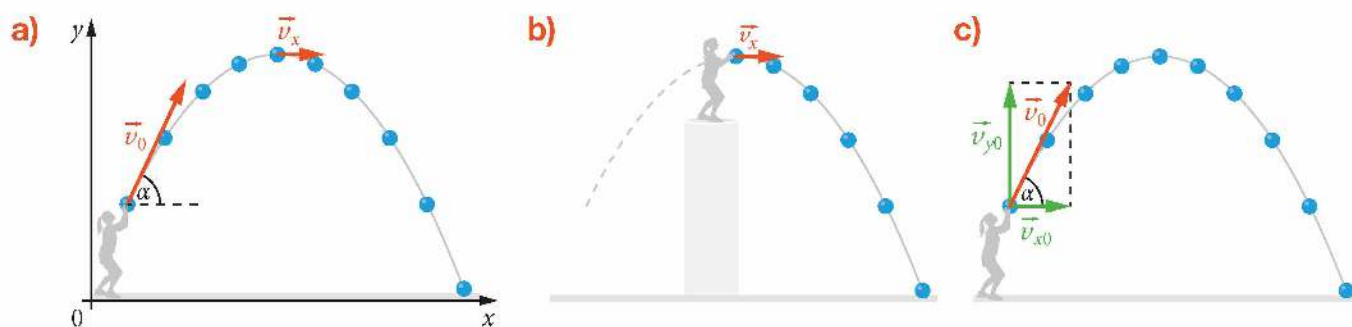
Poznane pojęcia przydają się m.in. do **obliczania składowych prostopadłych wektora** (patrz rysunek obok).



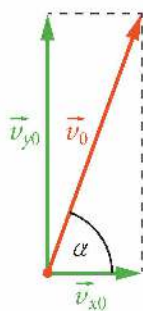
Rys. 3.18. W trójkącie prostokątnym można wyznaczyć funkcje trygonometryczne kątów α i β



Rys. 3.19. Jeżeli samolot porusza się pod kątem α do poziomu, rozkładamy jego prędkość na składową pionową i poziomą



Rys. 3.20. Porównanie rzutu ukośnego (a) i rzutu poziomego (b), rozkład wektora prędkości początkowej na składowe (c)



Rys. 3.21. Rozkład wektora $\vec{v}_0$ na składowe

Aby dokładniej opisać każdy z tych ruchów, **wektor prędkości** początkowej musimy **rozłożyć na składowe**: pionową $\vec{v}_{y0}$ i poziomą $\vec{v}_{x0}$ (rys. 3.20c). Rozkładu możemy dokonać graficznie, na rysunku. Sposób rachunkowy wymaga znajomości funkcji trygonometrycznych (patrz dodatek matematyczny na poprzedniej stronie):

$$v_{y0} = v_0 \sin \alpha$$

$$v_{x0} = v_0 \cos \alpha$$

Gdy znamy te składowe, możemy osobno opisać położenie ciała w pionie i w poziomie w trakcie ruchu. Postępujemy podobnie jak w przypadku rzutu poziomego, musimy jednak uwzględnić prędkość początkową w pionie:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x &= x_0 + v_{x0}t \end{aligned}$$

Podobnie jak w rzucie poziomym (choć za pomocą bardziej skomplikowanych rachunków) możemy się przekonać, że **torem ruchu** w rzucie ukośnym **jest fragment paraboli** (rys. 3.20a).

W najwyższym punkcie toru prędkość ciała rzuconego ukośnie ma kierunek poziomy (rys. 3.20a). Dalszy ruch ciała odbywa się więc tak, jakby ciało zostało rzucone poziomo, ale z tego najwyższego punktu (rys. 3.20b). Możemy zatem powiedzieć, że tor rzutu poziomego jest fragmentem toru rzutu ukośnego.

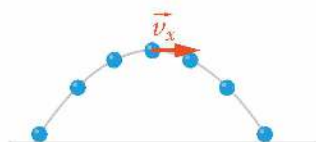
■ Zasięg rzutu ukośnego

Wyobraźmy sobie, że wyrzucamy ciało ukośnie z poziomu ziemi (rys. 3.22). Jak daleko od nas ono spadnie? Rozważmy osobno ruch w pionie i w poziomie. Skorzystamy z faktu, że ruch w pionie i w poziomie trwa tyle samo.

W pionie ciało zostało wyrzucone w górę z prędkością v_{y0} . Zatrzyma się ono po czasie $\frac{v_{y0}}{g}$. Lot w dół będzie trwał tyle samo, więc łącznie cały ruch będzie trwał:

$$t_{\text{całk}} = \frac{2v_{y0}}{g}$$

Oczywiście jest to jednocześnie czas trwania ruchu w poziomie.



Rys. 3.22. Rzut ukośny ciała z poziomu ziemi

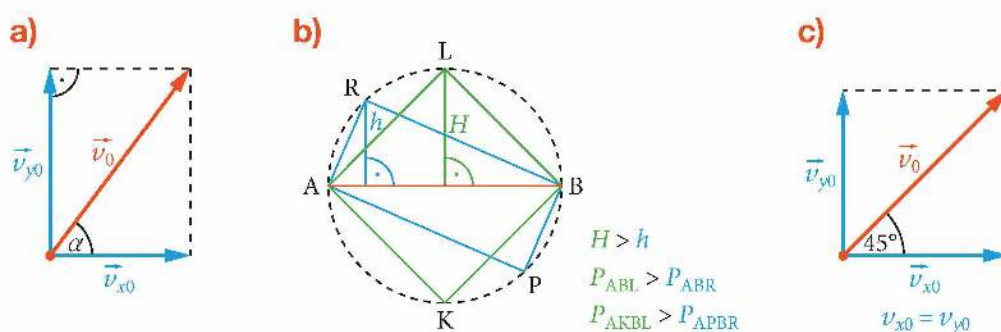
W **poziomie** ciało porusza się ruchem jednostajnym z prędkością v_{x0} . Przemieści się więc ono w poziomie o:

$$\Delta x = v_{x0}t = v_{x0} \cdot \frac{2v_{y0}}{g} = \frac{2}{g} v_{x0}v_{y0}$$

Jeśli wartości prędkości poziomą v_{x0} i pionową v_{y0} wyrazimy za pomocą prędkości początkowej i funkcji trygonometrycznych $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$ i $v_{x0} = v_0 \cos \alpha$, to otrzymamy wzór na zasięg rzutu w postaci:

$$\Delta x = \frac{2}{g} v_{x0}v_{y0} = \frac{2}{g} v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Wyznaczyliśmy wzór na **zasięg rzutu ukośnego**. Na podstawie tego samego wzoru możemy stwierdzić, pod jakim kątem należy wyrzucić ciało, aby przy danej wartości prędkości początkowej zasięg był największy.



Rys. 3.23. Graficzne uzasadnienie, że zasięg rzutu jest największy, gdy $v_{x0} = v_{y0}$, czyli dla rzutu pod kątem 45° do poziomu

Przypomnijmy, że v_{x0} i v_{y0} otrzymujemy na rysunku jako boki prostokąta, którego przekątną jest prędkość v_0 (rys. 3.23a). Należy się więc zastanowić, który z prostokątów o danej przekątnej ma największe pole (iloczyn v_{x0} i v_{y0} będzie największy). Rozwiązanie przedstawiono na rys. 3.23b: takim prostokątem jest kwadrat. Ponieważ zaś w kwadracie kąt między bokiem a przekątną wynosi 45° (rys. 3.23c), pod takim właśnie kątem należy wyrzucić ciało, aby doleciało jak najdalej.



A to ciekawe

Ruch kropeł wody z fontanny to także przykład rzutu ukośnego. Podświetlenie fontanny pozwala łatwo rozpoznać kształt paraboli.

Po tej lekcji powinieneś

- opisywać rzut poziomy jako dwa niezależne ruchy: spadek swobodny i ruch jednostajny w poziomie;
- wykazywać niezależność ruchów na podstawie doświadczenia;
- rozwiązywać zadania dotyczące rzutu poziomego.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



■ Przykład

Kamień został rzucony poziomo z prędkością $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Po jakim czasie wektor jego prędkości będzie odchylony od pionu o 45° ? Ile wyniesie wówczas wartość prędkości kamienia?

Rozwiązanie

Na początku sporządzimy schematyczny rysunek opisanej w zadaniu sytuacji. Możemy z niego odczytać, że kiedy kąt nachylenia do poziomu wynosi 45° , prostokąt utworzony przez wektory $\vec{v}_x$ i $\vec{v}_y$ jest kwadratem, więc $v_y = v_x = v_{x0}$. Ruch w pionie odbywa się tak jak spadek swobodny, więc przyspieszenie wynosi $-g = -9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a prędkość początkowa jest równa zero. Mamy więc:

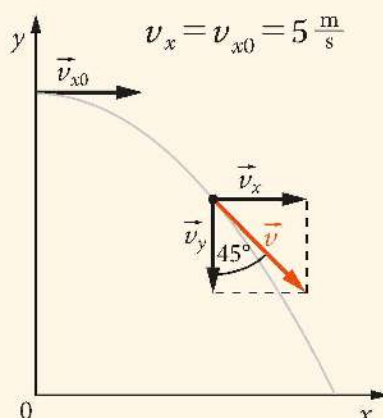
$$g = \frac{|v_y|}{t}, \text{ skąd } t = \frac{|v_y|}{g}, \text{ więc } t = \frac{v_x}{g} = \frac{v_{x0}}{g}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy: $t = 0,5 \text{ s}$.

Z twierdzenia Pitagorasa (lub ze wzoru na długość przekątnej kwadratu, która w kwadracie o boku a wynosi $a\sqrt{2}$), otrzymujemy wartość prędkości:

$$v = \sqrt{2} v_{x0} = 5\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 7,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Wektor prędkości będzie odchylony od pionu o 45° po czasie $0,5 \text{ s}$, prędkość będzie wówczas miała wartość $7,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



1. Z ustawionego poziomo karabinu znajdującego się na wysokości $1,5 \text{ m}$ nad ziemią wystrzelono pocisk z prędkością $900 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Pomijamy opór powietrza.
 - a) Jak długo pocisk będzie się poruszał po linii prostej, zanim zacznie spadać?
 - b) Jak długo potrwa lot pocisku, nim uderzy on w ziemię?
2. Kamień został rzucony poziomo z prędkością $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jaką wartość uzyska wektor jego prędkości po $1,2 \text{ s}$ lotu?
3. Z doświadczeń wiadomo, że pocisk karabinowy typu SS109 wystrzelony poziomo z prędkością $910 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ z wysokości 10 m opada na ziemię po przebyciu 850 m . Oblicz zasięg tego pocisku z pominięciem oporów powietrza. O ile byłby większy?
4. Wyprowadź wzór na zasięg rzutu poziomego w zależności od początkowej prędkości i wysokości, z której zrzucano ciało.
5. Siatkarz odbija piłkę znajdującą się na wysokości $2,5 \text{ m}$, nadając jej prędkość $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ pod kątem 60° do poziomu. Na jaką maksymalną wysokość wzniesie się piłka? Po jakim czasie od odbicia to nastąpi?

3.3. Prędkość w różnych układach odniesienia

Przypomnij sobie

- Ruch jest względny, jego opis zależy od układu odniesienia.
- Wektory można dodawać i odejmować.

■ Ruch wzdłuż jednej prostej

Mówiliśmy już o tym, że ruch jest względny. Na przykład pilot może być w spoczynku względem samolotu, a poruszać się względem morza. Pomyślmy teraz o samolocie, który porusza się zarówno względem wody, jak i względem lotniskowca (rys. 3.24).

Rozważmy następującą sytuację. Samolot leci z prędkością $v_1 = 70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ względem lotniskowca. Okręt płynie w tym samym kierunku z prędkością $u = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ względem wody. Oznacza to, że samolot w ciągu sekundy przemieści się o 70 m względem lotniskowca, ale względem morza w ciągu tej samej sekundy przemieści się o 80 m (rys. 3.25). Prędkość samolotu względem morza jest sumą jego prędkości względem okrętu i prędkości okrętu względem wody.

Te rozważania można uogólnić. Mamy dwa układy odniesienia (oznaczymy je I – lotniskowiec i II – woda) oraz poruszające się ciało (samolot).

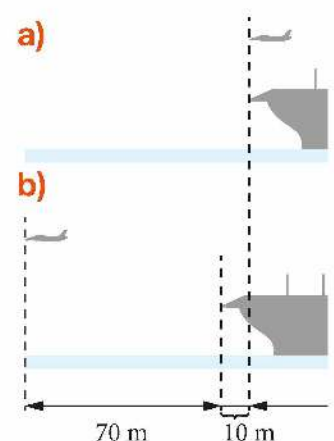
Jeśli ciało porusza się z prędkością $\vec{v}_1$ względem układu I, a układ I porusza się z prędkością $\vec{u}$ względem układu II, to prędkość $\vec{v}_2$ ciała względem układu II obliczamy jako sumę wektorów $\vec{v}_1$ i $\vec{u}$:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u}$$

$\vec{u}$ – prędkość lotniskowca względem morza,
 $\vec{v}_1$ – prędkość samolotu względem lotniskowca,
 $\vec{v}_2$ – prędkość samolotu względem morza



Rys. 3.24. Prędkość samolotu względem okrętu jest inna niż względem wody



Rys. 3.25. Położenie okrętu i samolotu:
a) w pewnej chwili,
b) sekundę później

Pamiętaj, że nie mówimy tu tylko o wartości prędkości, ale o wektorze prędkości, który może być dowolnie skierowany. Gdyby więc samolot poruszał się przeciwnie do kierunku ruchu lotniskowca, współrzędna jego prędkości względem lotniskowca wynosiłaby $v_1 = -70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a współrzędna prędkości względem wody byłaby równa:

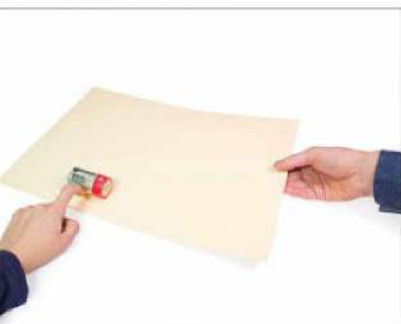
$$v_2 = -70 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

■ Ruch na płaszczyźnie

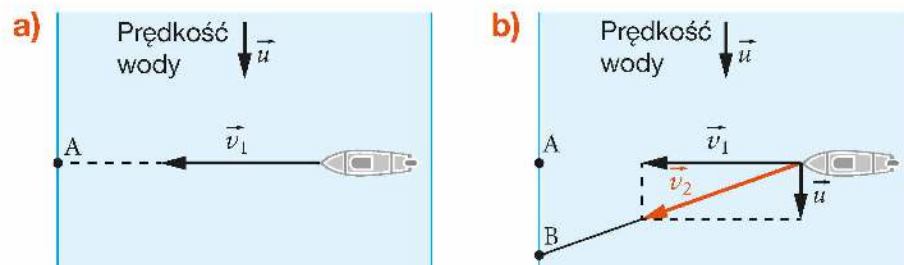
Zajmijmy się teraz dodawaniem prędkości o różnych kierunkach. Z taką sytuacją mamy do czynienia w poniższym doświadczeniu.

Doświadczenie 11

1. Przygotuj baterię w kształcie walca, np. typu D (R20), oraz duży arkusz papieru (co najmniej formatu A3). Poproś drugą osobę o pomoc.
2. Połóż arkusz na stole i przesuwaj go ruchem jednostajnym.
3. Niech druga osoba pchnie baterię po arkuszu prostopadłe do kierunku jego ruchu.
4. Wykonaj w zeszycie schematyczny rysunek obrazujący tę sytuację. Naskicuj wektory: prędkości arkusza względem stołu, prędkości baterii względem arkusza oraz prędkości baterii względem stołu.



Aby zauważyć związek między wektorami naskicowanymi w doświadczeniu, przeanalizuj poniższy opis.



Rys. 3.26. Motorówka ustawiona prostopadłe do koryta rzeki: a) próbuje dopłynąć do punktu A, b) prąd rzeki znosi ją w dół do punktu B

Na rysunku 3.26a pokazano schematycznie ruch motorówki, która płynie ustawiona prostopadłe do koryta rzeki. Jej dziób wskazuje punkt A wyznaczony na brzegu rzeki. Czy motorówka dopłynie do tego punktu? Nie, ponieważ prąd wody znosi ją w dół rzeki. Wektor $\vec{v}_1$ na rysunku powyżej oznacza prędkość motorówki w układzie odniesienia wody (układ I).

Aby wyznaczyć prędkość łódki w układzie odniesienia brzegu (układ II), trzeba uwzględnić prędkość wody względem brzegu $\vec{u}$. Przy wyznaczaniu prędkości łódki względem brzegu obowiązuje **ta sama zasada** dodawania wektorów jak dla wektorów o tych samych kierunkach:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u}$$

Zależność tę przedstawiono na rysunku 3.26b. Rysując prostą wzdłuż wektora $\vec{v}_2$, znajdziemy na brzegu punkt B, do którego dopłynie łódź.

$\vec{v}_1$ – prędkość ciała w I układzie odniesienia,
 $\vec{u}$ – prędkość I układu odniesienia względem II,
 $\vec{v}_2$ – prędkość ciała w II układzie odniesienia

Po tej lekcji powinieneś

- obliczać prędkość ciała w ruchu prostoliniowym względem różnych układów odniesienia;
- wiedzieć, jak prędkość ciała w różnych układach odniesienia zależy od wzajemnej prędkości tych układów.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



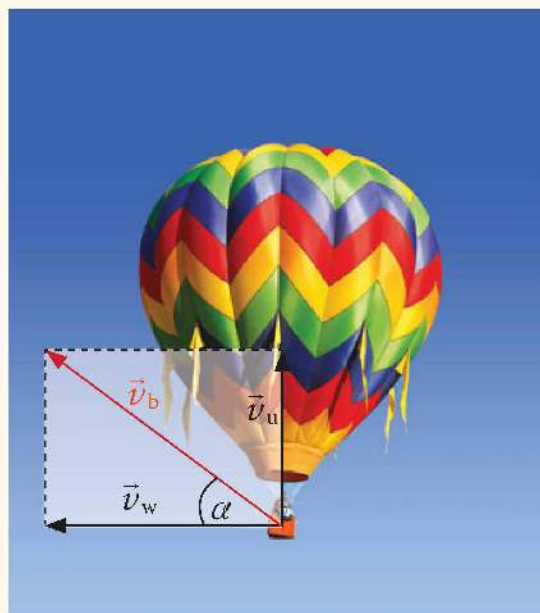
■ Przykład

W czasie bezwietrznej pogody balon unosi się względem powietrza z prędkością $v_u = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Z jaką wartością prędkości względem ziemi i w jakim kierunku względem niej będzie poruszał się przy wietrze wiejącym w kierunku poziomym z prędkością $v_w = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Rozwiązanie

W czasie bezwietrznej pogody balon porusza się pionowo w górę z prędkością v_u .

Gdy wieje wiatr, balon dodatkowo przemieszcza się w kierunku poziomym z prędkością v_w , w wyniku czego tor jego ruchu nie jest prostopadły do ziemi. Obie te prędkości mają wpływ na ruch balonu.



Aby wyznaczyć prędkość balonu względem ziemi $\vec{v}_b$, należy dodać składowe poziomą i pionową prędkości, korzystając z metody równoległoboku.

Wektory prędkości składowych są do siebie prostopadłe, więc nasz równoległobok jest prostokątem (patrz rysunek). Długość wektora $\vec{v}_b$ możemy więc obliczyć za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$v_b^2 = v_u^2 + v_w^2$$

$$v_b = \sqrt{v_u^2 + v_w^2} = \sqrt{\left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aby ustalić, w jakim kierunku przemieszcza się balon, musimy wiedzieć, ile wynosi kąt α między prędkością balonu a kierunkiem poziomym. Skorzystamy z funkcji trygonometrycznej sinus (patrz dodatek matematyczny s. 103). Z rysunku odczytujemy, że:

$$v_u = v_b \sin \alpha, \quad \text{czyli} \quad \sin \alpha = \frac{v_u}{v_b}, \quad \text{więc} \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

Miarę kąta o takiej wartości funkcji sinus możemy odczytać z tablic matematycznych lub obliczyć na kalkulatorze.

$$\alpha \approx 36^\circ$$

Odpowiedź: Balon będzie się poruszał względem ziemi z prędkością $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, kąt nachylenia wektora prędkości względem poziomu wyniesie około 36° .



Pytania i zadania

1. Dwa samochody jadą po tym samym prostym odcinku szosy, jeden z prędkością $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a drugi z prędkością $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- a) Ile wynosi wartość ich prędkości względnej? Rozważ dwa przypadki.
b) Na podstawie wyników zadania wyjaśnij, dlaczego czołowe zderzenie pojazdów jest tak groźne w skutkach.

Uwaga. Prędkość względna samochodów to prędkość jednego z nich w układzie odniesienia drugiego.

2. Płynąc z prądem rzeki, motorówka pokonuje pewną drogę w czasie 2 h. Pod prąd pokonanie tego samego odcinka zajmuje jej aż 4 h. W jakim czasie motorówka przebyłaby tę samą drogę po jeziorze?



3. Joanna chciała przepłynąć łódką na drugi brzeg rzeki i dotrzeć do pomostu znajdującego się dokładnie naprzeciwko niej. Gdy płynęła, jej łódka była cały czas ustawiona prostopadłe do rzeki. W rezultacie Joanna osiągnęła drugi brzeg dokładnie 35 m w dół rzeki od pomostu. W jaki sposób powinna skierować dziób łodzi w drodze powrotnej do pomostu, aby przebyć jak najkrótszą drogę?



4. Z dziurawej rynny co 0,5 s spada kropla wody. Czy dwie kolejne krople poruszają się względem siebie ruchem jednostajnym czy jednostajnie przyspieszonym? Pomiń opór powietrza. Odpowiedź uzasadnij.
5. Przeczytaj zadanie z książki *Algebra dla szkół narodowych*, (patrz poniżej) wydanej w Wilnie w 1804 roku.

Zadanie 10.

Złodziey uciekający ubiega na dzień mil 5. Pogoń w 8 dni po ucieczce za nim wysłana, ujeżdża na dzień mil 7, za ileż dni dogoni złodzieja Pogoń, i jak wielę mil uydzie złodziey, nim będzie dogoniony?

- a) Rozwiąż zadanie. Dobierz taki układ odniesienia, aby uzyskać wynik w jak najprostszy sposób.
b) Dowiedz się, ile wynosiła mila polska i oszacuj prędkość złodzieja oraz pogoń. Przyjmij, że wszyscy poruszali się wyłącznie w dzień oraz że dzień to 12 godzin.
6. Wiatr zachodni wieje z prędkością 2 węzłów. Jacht płynie na północ z prędkością 7 węzłów. Znajdź w odpowiednich źródłach wyjaśnienia pojęć występujących w poleceniach i je wykonaj.
a) Określ kierunek i prędkość wiatru pozornego.
b) Opisz zmianę kierunku wiatru pozornego, gdy jacht płynący półwiatrem zaczyna przyspieszać.
c) Wyjaśnij, dlaczego wiatr wydaje się silniejszy, gdy jacht płynie bajdewindem.

3.4. Ruch po okręgu

Przypomnij sobie

- W ruchu krzywoliniowym wektor prędkości chwilowej jest styczny do toru ruchu ciała.
- Częstotliwość określa, ile razy jakieś zjawisko powtarza się w ciągu 1 s. Na przykład 5 Hz (5 herców) oznacza 5 razy na sekundę.

■ Ruch jednostajny po okręgu

Zajmiemy się teraz dokładniejszym opisem jednego z najprostszych przypadków ruchu krzywoliniowego – **ruchem jednostajnym po okręgu**.

Ruch jednostajny po okręgu to taki ruch, w którym tor ma kształt okręgu, a wartość prędkości jest stała.

Przykładem takiego ruchu jest ruch końca wskazówki minutowej zegara lub ruch krzeselka karuzeli (po rozpedzeniu się i przed hamowaniem). Również Ziemia okrąża Słońce po orbicie, która jest zbliżona do okręgu.



Rys. 3.27. Gondole diabelskiego młyna poruszają się po okręgu

Dodatek matematyczny

■ Miara łukowa kąta – radian

Radian to jednostka miary łukowej kąta, zaliczana do jednostek pomocniczych układu SI.

Aby określić miarę łukową kąta, rysujemy okrąg o środku w wierzchołku tego kąta i porównujemy długość l łuku wewnątrz kąta z długością promienia R okręgu. Jeden radian to kąt, dla którego łuk ma taką samą długość, jak promień (rys. 3.28).

Obwód okręgu wynosi $2\pi R$, zatem kąt pełny (360°) ma 2π radianów, a kąt półpełny (180°) ma π radianów. Kąt prosty (90°) ma $\frac{\pi}{2}$ radianów.

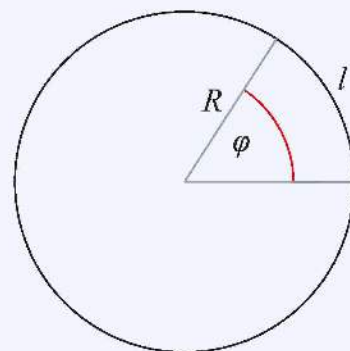
$$1 \text{ radian} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57,3^\circ$$

Radian oznacza się skrótem rad. Długość łuku okręgu l wiąże się z miarą łukową kąta φ (czyt. fi) w następujący sposób:

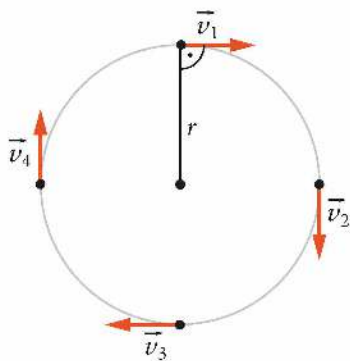
$$l = \varphi R, \quad \text{czyli } \varphi = \frac{l}{R}$$

gdzie R jest promieniem okręgu.

Gdy korzystamy ze wzoru $\varphi = \frac{l}{R}$, jednostki się skracają i otrzymujemy kąt jako wielkość bezwymiarową. Dlatego zamiast „kąt o mierze 0,2 rad” możemy napisać po prostu „kąt o mierze 0,2”. Jednostkę rad dopisujemy, jeżeli chcemy podkreślić, że mamy do czynienia z kątem.



Rys. 3.28. Dla łuku $l = R$ kąt $\varphi = 1 \text{ rad}$



$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4$$

Rys. 3.29. Wektor prędkości w ruchu po okręgu jest styczny do okręgu

$$\begin{aligned} T & - \text{okres} \\ f & - \text{częstotliwość} \\ f & = \frac{1}{T} \end{aligned}$$



Rys. 3.30. Częstotliwość obrotów karuzeli wynosi 0,33 Hz, a okres obiegu to 3 s

Wektor prędkości

W ruchu po okręgu wektor prędkości jest w każdej chwili skierowany wzdłuż stycznej do toru (rys. 3.29). Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia, więc także wektor prędkości jest do niego prostopadły. Kierunek prędkości ulega zatem zmianie. Dlatego mówimy, że prędkość (jako wektor) się zmienia, choć jej wartość pozostaje stała.

Okres i częstotliwość w ruchu jednostajnym po okręgu

W szkole podstawowej omawialiśmy ruch drgający. Do jego opisu służą pojęcia: **okres** i **częstotliwość**. Będziemy ich używać także w przypadku ruchu po okręgu.

Okres w ruchu po okręgu to czas jednokrotnego obiegu okręgu. Częstotliwość to liczba okrążeń wykonanych przez ciało w jednostce czasu. Częstotliwość jest równa odwrotności okresu.

Jednostką częstotliwości jest $\frac{1}{s}$, czyli **herc** ($1 \text{ Hz} = \frac{1}{s}$). Na przykład, jeśli punkt wykonuje jeden obieg w ciągu 10 s, to $T = 10 \text{ s}$, natomiast $f = \frac{1}{10} \text{ Hz}$. Gdy punkt wykonuje 10 obiegów w ciągu 1 s, to $T = \frac{1}{10} \text{ s}$, natomiast $f = 10 \text{ Hz}$.

Jeśli 30 obiegów przypada na 5 s, to na 1 s przypada 6 obiegów, czyli $f = 6 \text{ Hz}$. Zatem częstotliwość można obliczyć, dzieląc liczbę obiegów przez ich łączny czas trwania:

$$f = \frac{n}{t}$$

gdzie: n – liczba obiegów, t – łączny czas trwania.

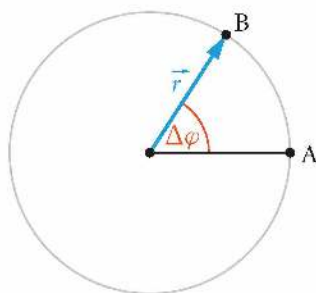
Prędkość kątowna i prędkość liniowa

Nietrudno obliczyć, że z powodu obrotu Ziemi wokół własnej osi poruszasz się w tej chwili z prędkością około $1000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Trudno jednak powiedzieć, że Ziemia „kręci się bardzo szybko”, skoro wykonuje zaledwie jeden obrót na dobę. Dlatego też w przypadku opisu ruchu po okręgu często bardziej przydatna od zwykłej prędkości (zwanej też **prędkością liniową**) jest **prędkość kątowna**.

Jeśli w ciągu czasu Δt ciało przebyło po okręgu drogę z punktu A do punktu B, której odpowiada kąt $\Delta \varphi$ (patrz rys. 3.31), to prędkością kątową nazywamy iloraz $\Delta \varphi$ i Δt :

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

Jednostką prędkości kątowej ω (czyt. omega) jest $\frac{1}{s}$. Przykładowo $\omega = \frac{2}{s}$ oznacza, że kąt φ zwiększa się o 2 radiany w ciągu 1 s. Dlatego jednostkę prędkości kątowej zapisujemy także jako $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.



Rys. 3.31. Promień wodzący $\vec{r}$ zakreśla w czasie Δt kąt $\Delta \varphi$

Dla Ziemi:

$$\begin{aligned} \omega & = \frac{2\pi \text{ rad}}{24 \text{ h}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{86400 \text{ s}} \\ \omega & \approx 7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

■ Ruch niejednostajny po okręgu

W ruchu jednostajnym po okręgu nie musimy rozróżniać średniej i chwilowej prędkości kątowej. Dla ruchów niejednostajnych takie rozróżnienie można wprowadzić, podobnie jak dla prędkości liniowej.

Chwilową prędkość kątową otrzymujemy, gdy $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\omega_{\text{ch}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{dla } \Delta t \rightarrow 0$$

Podobnie jak w przypadku ruchu prostoliniowego może nas interesować, jak szybko zmienia się prędkość kątowa. Opisuje to wielkość zwana **przyspieszeniem kątowym** ε (czyt. epsilon).

Przyspieszenie kątowe to iloraz zmiany prędkości kątowej i czasu, w którym nastąpiła ta zmiana:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Jednostką przyspieszenia kątowego jest $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.

Symbol ε to mała grecka litera epsilon.

Symbol ω to mała grecka litera omega, a φ to mała grecka litera fi.

Kąt $\Delta\varphi$ wyrażamy w radianach.

■ Zależności opisujące ruch jednostajny po okręgu

W ciągu jednego okresu T punkt przebywa drogę równą długości okręgu, czyli $2\pi r$, gdzie r – promień okręgu. Wobec tego **prędkość liniowa**:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Promień wodzący zakreśla w tym wypadku kąt pełny, czyli 2π , więc:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{lub} \quad \omega = 2\pi f$$

gdzie: ω – prędkość kątowa w ruchu jednostajnym po okręgu, T – okres obiegu w tym ruchu, f – częstotliwość.

Na podstawie powyższych wzorów można zapisać również związek między prędkością liniową a prędkością kątową:

$$v = \omega r$$

Zauważ, że tych wzorów nie musisz się uczyć na pamięć. Jeśli rozumiesz występujące w nich pojęcia, szybko je odtworzysz.

Po tej lekcji powinieneś

- opisywać ruch jednostajny po okręgu z zastosowaniem pojęć: prędkość liniowa, prędkość kątowa, okres i częstotliwość;
- wykorzystywać zależności między wielkościami opisującymi ruch po okręgu do rozwiązywania zadań.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZCIE



■ Przykład

Oblicz prędkość kątową oraz liniową końca wskazówki minutowej zegara na Zamku Królewskim w Warszawie. Przyjmij, że odległość od osi obrotu do czubka wskazówki minutowej wynosi 140 cm.

Rozwiązanie

Prędkość kątowna wskazówki minutowej jest taka sama dla każdego zegara, gdyż jej koniec zawsze obiega tarczę w czasie $T = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$, tak więc:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{3600 \text{ s}} \approx 0,0017 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Aby obliczyć prędkość liniową końca wskazówki, należy skorzystać ze wzoru: $v = \omega r$.

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$v \approx 0,0017 \frac{1}{\text{s}} \cdot 1,4 \text{ m} \approx 0,0024 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,4 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość kątowna minutowej wskazówki zegara wynosi około $0,0017 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Prędkość liniowa końca wskazówki – około $2,4 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$.



1. W czasie wirowania bęben pralki wykonuje 1200 obrotów na minutę. Średnica bębna wynosi 40 cm. Rozważmy ruch skarpetki znajdującej się tuż przy ścianie bębna.

a) Ile wynosi okres jej ruchu, a ile częstotliwość?

b) Jaką drogę przebywa skarpetka w czasie jednego obrotu bębna?

c) Oblicz prędkość liniową i kątową skarpetki.

2. Na wskazówce minutowej zegara były dwie mrówki: jedna na końcu wskazówki, a druga w połowie jej długości. Porównaj: okres, częstotliwość, prędkość liniową i prędkość kątową ich ruchu.

3. Rowerzysta jedzie z prędkością $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ po kołowym torze o średnicy 200 m.

a) W jakim czasie pokona jedno okrążenie?

b) Z jaką prędkością kątową się porusza?

4. W czasie jazdy po polu przednie koło traktora (patrz zdjęcie) wykonało 180 obrotów.

a) Oszacuj, ile obrotów wykonało w tym czasie jego tylne koło.

b) Oszacuj długość przebytej drogi oraz czas, w jakim pokonał ją traktor, jeśli poruszał się z prędkością $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



5. Dziecko kręcące się na karuzeli wykonywało 1 obrót w czasie 3 s. Następnie jego tata w ciągu 0,5 s rozpędził karuzelę. Potem wykonała ona 1 obrót w czasie 2 s. Oblicz przyspieszenie kątowne karuzeli w czasie rozpędzania.

3.5. Przyspieszenie dośrodkowe

Przypomnij sobie

- W ruchu jednostajnym po okręgu następuje zmiana wektora prędkości, (wartość tego wektora jest stała, ale zmienia się jego kierunek).
- Wektor przyspieszenia opisuje zmiany wektora prędkości, a nie tylko zmiany wartości tego wektora.

■ Wektor przyspieszenia w ruchu po okręgu

Dotychczas mówiliśmy o przyspieszeniu w ruchu prostoliniowym. W ruchu krzywoliniowym definicja przyspieszenia jest taka sama.

Przyspieszeniem średnim $\vec{a}$ nazywamy iloraz wektora zmiany prędkości $\Delta\vec{v}$ i czasu Δt , w którym ta zmiana nastąpiła:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

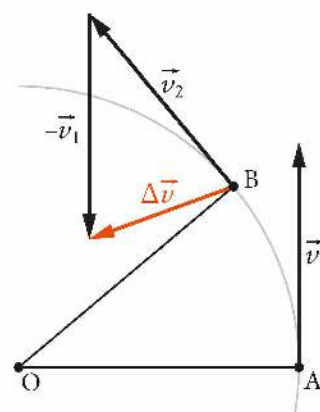
Jeśli $\Delta t \rightarrow 0$, z powyższej definicji otrzymujemy **przyspieszenie chwilowe**. Pomiedzy przyspieszeniem w ruchu prostoliniowym i krzywoliniowym zachodzi jednak zasadnicza różnica. W ruchu prostoliniowym przyspieszenie ma ten sam kierunek co prędkość. Za pomocą przyspieszenia opisywaliśmy zmiany jej wartości. W ruchu krzywoliniowym może ono opisywać zarówno zmiany wartości prędkości, jak i jej kierunku. W szkole średniej będziemy rozważać **przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu**. Opisuje ono wyłącznie zmianę kierunku prędkości, gdyż w tym ruchu wartość prędkości pozostaje stała.

■ Przyspieszenie dośrodkowe

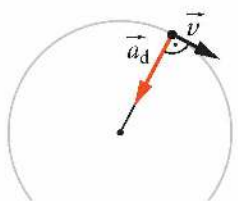
Na rysunku 3.32 przedstawiono schematycznie dwa położenia ciała poruszającego się jednostajnie po okręgu (A i B) oraz odpowiadające im wektory prędkości $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$. Aby wyznaczyć różnicę wektorów tych prędkości $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$, rysujemy wektor $-\vec{v}_1$ tak, żeby jego początek znalazł się w końcu wektora $\vec{v}_2$. Możemy teraz narysować wektor $\Delta\vec{v}$. Jak widać, jest on skierowany w przybliżeniu w stronę środka okręgu – tym dokładniej, im krótszy jest czas Δt . Ponieważ przyspieszenie chwilowe obliczamy dla bardzo krótkiego czasu Δt , wektor przyspieszenia chwilowego skierowany jest dokładnie w stronę środka okręgu.

W ruchu jednostajnym po okręgu przyspieszenie chwilowe jest skierowane w stronę środka okręgu. Nazywamy je przyspieszeniem dośrodkowym i oznaczamy $\vec{a}_d$.

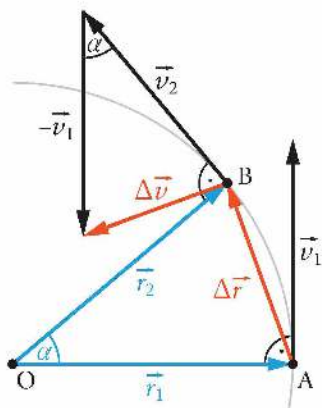
$\Delta\vec{v} = \vec{v}_k - \vec{v}_p$
– wektor zmiany prędkości (prędkość końcowa minus początkowa),
 Δt – czas, w którym nastąpiła ta zmiana



Rys. 3.32. Wektor przyspieszenia średniego skierowany jest zgodnie ze zwrotem wektora $\Delta\vec{v}$



Rys. 3.33. Przyspieszenie dośrodkowe jest prostopadłe do prędkości



Rys. 3.34. Ilustracja sytuacji opisanej w tekście

W tym przypadku przyspieszenie nie wiąże się ze zmianą wartości prędkości, ale ze zmianą jej kierunku. Zauważ, że skoro przyspieszenie jest skierowane do środka okręgu, jest prostopadłe do prędkości (rys.3.33).

Wartość przyspieszenia dośrodkowego

Rozważmy przypadek, gdy ciało porusza się po okręgu o promieniu r z prędkością o wartości v . Na rys. 3.34 pokazano położenie i prędkość tego ciała w chwili t_0 oraz po upływie krótkiego czasu Δt . Na ilustracji poniżej możesz prześledzić dokładnie, jak powstał ten rysunek.

W czasie Δt promień okręgu poprowadzony do ciała zatoczył kąt α . Stanowi on taką część kąta pełnego (360° , czyli 2π radianów), jaką część okresu T stanowi czas Δt :

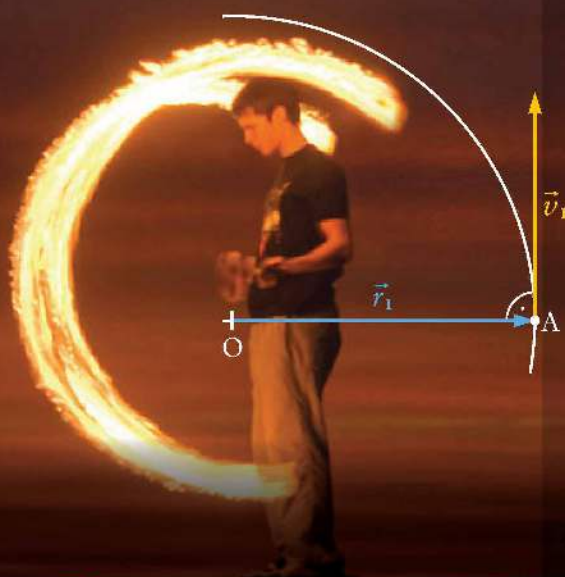
$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$$

Gdy przesuniemy wektor $-\vec{v}_1$ tak, aby miał wspólny początek z wektorem $\vec{v}_2$, zauważymy, że kąt pomiędzy tymi wektorami równy jest α . Wektory $-\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\Delta \vec{v}$ tworzą więc trójkąt równoramienny o kącie między ramionami równym α .

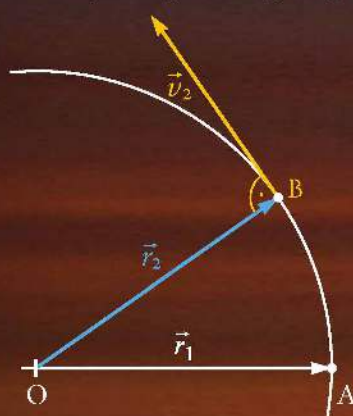
Zauważmy, że również trójkąt OAB jest trójkątem równoramiennym o kącie między ramionami równym α (ramiona trójkąta mają długość r).

Zmiana prędkości w ruchu po okręgu

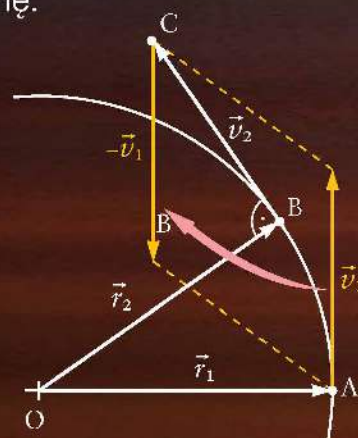
Każdy ruch po okręgu wiąże się ze zmianą prędkości liniowej ciała, które go wykonuje. Prześledźmy krok po kroku, jak wyznaczyć tę zmianę.



- 1 W pewnej chwili ciało znajduje się w punkcie A i porusza się z prędkością $\vec{v}_1$.



- 2 Po czasie Δt przemieszcza się do punktu B, a jego prędkość równa jest $\vec{v}_2$. Ma ona taką samą wartość jak $\vec{v}_1$, ale inny kierunek.



- 3 Zmieniamy zwrot wektora $\vec{v}_1$ i otrzymujemy wektor $-\vec{v}_1$, który przesuwamy równolegle tak, aby jego początek znalazł się w punkcie C.

Te dwa trójkąty mają zatem taki sam kształt i w każdym z nich ramię jest tyle samo razy dłuższe od podstawy:

$$\frac{v_1}{\Delta v} = \frac{r_1}{\Delta r}, \quad \text{czyli} \quad \frac{v}{\Delta v} = \frac{r}{\Delta r}, \quad \text{więc} \quad \Delta v = \frac{\Delta r}{r} v$$

Stąd oraz z definicji przyspieszenia:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \frac{v}{r}$$

Przy $\Delta t \rightarrow 0$ iloraz $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ równy jest wartości prędkości chwilowej v . Otrzymujemy więc wzór:

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$

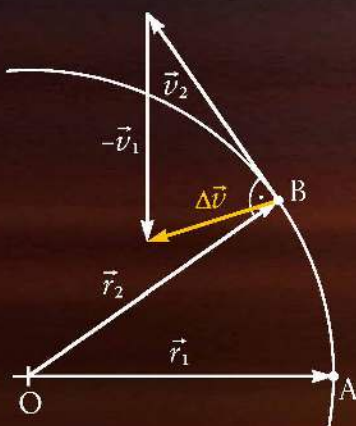
gdzie:

v – wartość prędkości liniowej, r – promień okręgu.

Ponieważ $v = \omega r$, powyższy wzór można przekształcić do postaci:

$$a_d = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r$$

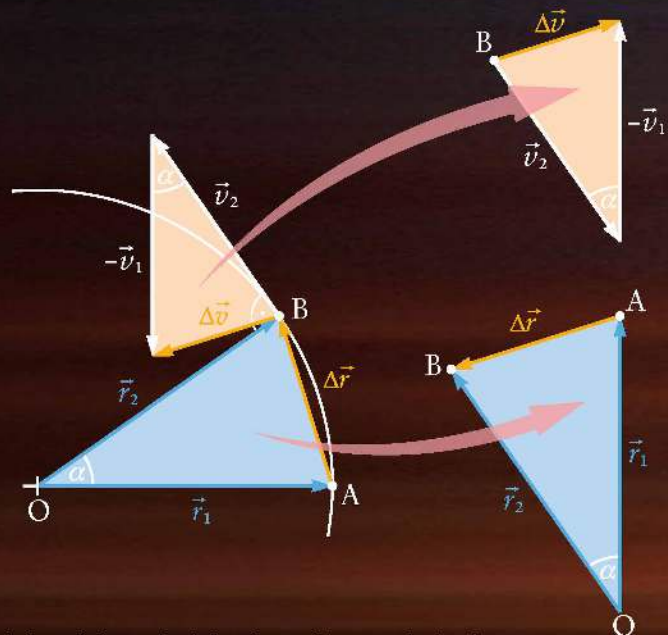
Zauważ, że przy określonym promieniu przyspieszenie dośrodkowe jest tym większe, im większa jest prędkość (liniowa lub kątowa).



- 4** Teraz możemy łatwo narysować wektor zmiany prędkości $\Delta \vec{v}$:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1).$$

Im krótszy jest czas Δt , tym bardziej do środka okręgu skierowany jest wektor $\Delta \vec{v}$.



- 5** Widzimy, jak zmieniały się wektory położenia i prędkości. Gdy obrócimy trójkąt równoramienny OAB, zobaczymy, że ma on taki sam kąt między ramionami, jak trójkąt równoramienny utworzony przez wektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\Delta \vec{v}$. Te trójkąty mają ten sam kształt, więc w każdym z nich ramię jest tyle samo razy dłuższe od podstawy:

$$\frac{v_1}{\Delta v} = \frac{r_1}{\Delta r}, \quad \text{czyli} \quad \frac{v}{\Delta v} = \frac{r}{\Delta r}$$

Ze wzoru $a = \frac{v^2}{r}$ wynika, że **przy określonej prędkości liniowej** przyspieszenie jest odwrotnie proporcjonalne do promienia. Ze wzoru $a = \omega^2 r$ wynika, że **przy określonej prędkości kątowej** przyspieszenie jest wprost proporcjonalne do promienia.

■ Przyspieszenie dośrodkowe a przyspieszenie kątowe

Przyspieszenie kątowe
s. 113

Opisane w tej lekcji przyspieszenie dośrodkowe a_d **trzeba odróżniać** od przyspieszenia kątowego ε .

Przyspieszenie dośrodkowe powoduje zmianę **kierunku** prędkości liniowej i występuje zawsze w ruchu po okręgu, także w ruchu jednostajnym. Natomiast przyspieszenie kątowe opisuje zmiany prędkości kątowej (a pośrednio także zmiany **wartości** prędkości liniowej) i w ruchu jednostajnym po okręgu jest równe zero.

Warto zauważyć, że te dwie wielkości mają też różne jednostki:

$$[\varepsilon] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad [a_d] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Po tej lekcji powinieneś

- wiedzieć, że przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu związane jest ze zmianą kierunku prędkości, a nie jej wartości;
- znać i wykorzystywać w zadaniach kierunek, zwrot i wartość przyspieszenia dośrodkowego;
- wiedzieć, że przyspieszenie dośrodkowe jest prostopadłe do prędkości liniowej i skierowane wzdłuż promienia do środka okręgu.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



1. Oblicz wartość przyspieszenia dośrodkowego, z jakim porusza się ciało na równiku Ziemi. Przyjmij, że promień równikowy Ziemi wynosi 6378 km.
2. Bęben pralki automatycznej w czasie wirowania wykonuje 1200 obrotów na minutę. Promień bębna wynosi 30 cm. Ile wynosi maksymalna wartość przyspieszenia dośrodkowego ubrania w pralce? W którym

miejscu pralki przyspieszenie dośrodkowe uzyskuje tę maksymalną wartość?

3. Oblicz prędkość, z jaką samochód powinien się poruszać po zakręcie o promieniu krzywizny 200 m, aby przyspieszenie dośrodkowe wynosiło $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
4. Ciało porusza się po okręgu o promieniu 2 m. Narysuj w zeszycie wykres zależności przyspieszenia dośrodkowego od prędkości ciała $a_d(v)$.

Cel projektu

Nauczysz się wykorzystywać telefon i komputer do badania ruchu ciał. Te umiejętności możesz wykorzystać do badania interesujących cię zjawisk.

Wprowadzenie

Do tej pory wszystkie wykresy rysowaliśmy ręcznie, żeby lepiej zrozumieć, w jaki sposób linia w układzie współrzędnych odpowiada wynikom doświadczenia. Skoro już to rozumiesz, możesz poznać program komputerowy, który pozwoli ci wykonywać wykresy znacznie szybciej. Przyda się to przy doświadczeniach z następnych działów podręcznika.

Przebieg doświadczenia

1. Pobierz program ze strony <http://physlets.org/tracker/> i zainstaluj go na swoim komputerze.

2. Zapoznaj się z opisem polskiej wersji programu na stronie: <https://warsztatpracynauczycieli.blogspot.com/2017/02/tracker.html>

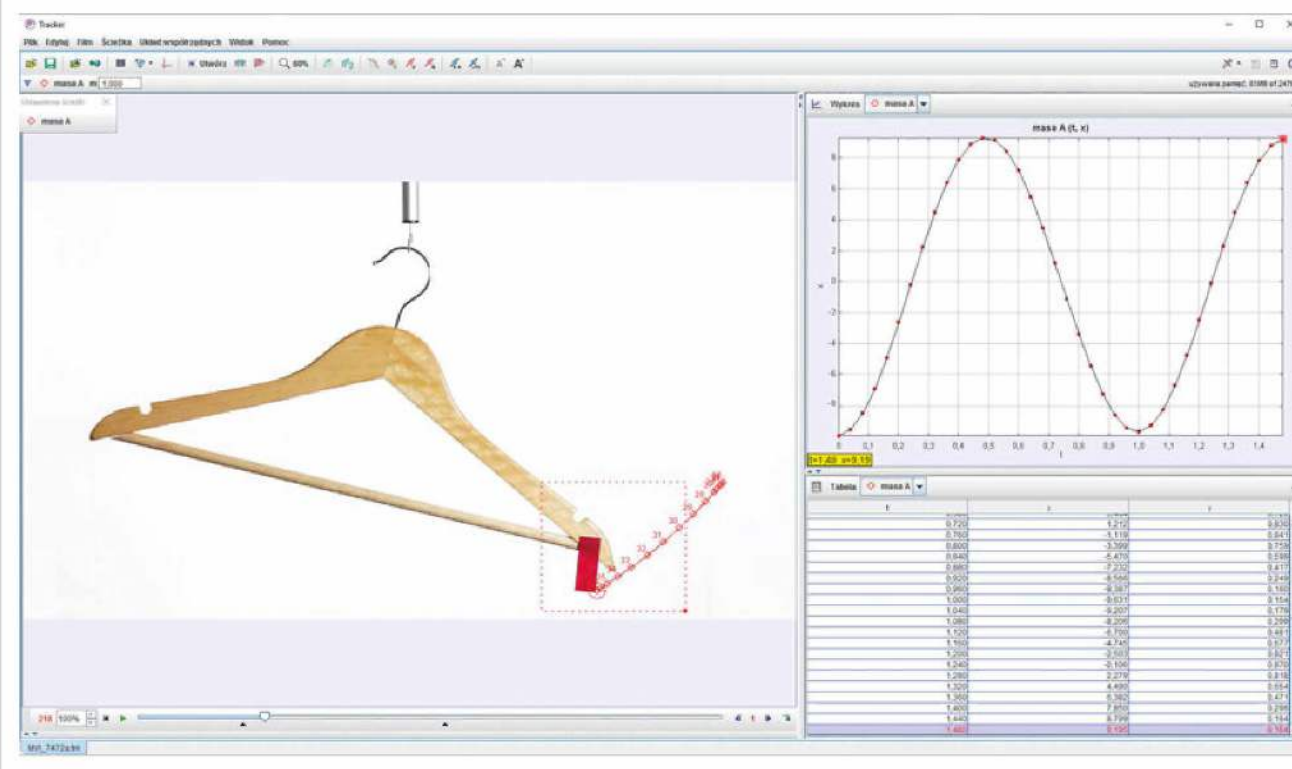


3. Podczas wykonywania doświadczeń z tego działu nagrywałeś wiele filmów dokumentujących ruch ciał. Przeanalizuj wybrane z nich za pomocą programu Tracker. Porównaj wykresy tworzone przez program z tymi, które rysowałeś ręcznie.

4. Sfilmuj inne poruszające się ciała, np. pojazdy, i przeanalizuj ich ruch za pomocą programu Tracker. Zastanów się, co zrobić, aby twoje pomiary były jak najdokładniejsze.

5. Spróbuj zbadać ruch w dwóch wymiarach, np. rzut poziomy albo ruch po okręgu. Możesz np. wykonać i porównać wykresy $v_x(t)$ i $v_y(t)$.

Na ilustracji poniżej przedstawiono analizę ruchu drgającego wykonaną przez program Tracker.



Podsumowanie Ruch krzywoliniowy

- W **ruchu krzywoliniowym** (m.in. w ruchu po okręgu) wektor prędkości skierowany jest wzdłuż stycznej do toru.
- Jeżeli mamy dwa układy odniesienia (I, II) i ciało porusza się względem układu I z prędkością $\vec{v}_1$, a układ I porusza się względem układu II z prędkością $\vec{u}$, to prędkość ciała względem układu II wynosi:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u}$$

Rzut poziomy

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x0} = \text{const} & x &= x_0 + v_{x0}t \\ v_y &= -gt & y &= y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

gdzie:

v_{x0} – współrzędna pozioma prędkości początkowej,
 v_y – współrzędna pionowa prędkości w chwili t ,
 (x, y) – współrzędne położenia ciała w chwili t ,
 (x_0, y_0) – początkowe współrzędne położenia ciała,
 g – przyspieszenie grawitacyjne.

- ▶ Tor rzutu poziomego jest fragmentem paraboli.
- ▶ Ruch w kierunku poziomym odbywa się niezależnie od ruchu w kierunku pionowym.
- **Ruch jednostajny po okręgu** to taki ruch, w którym tor ma kształt okręgu, a wartość prędkości jest stała.

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4$$

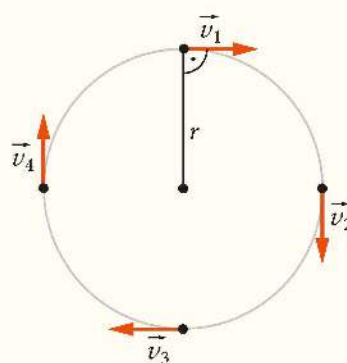
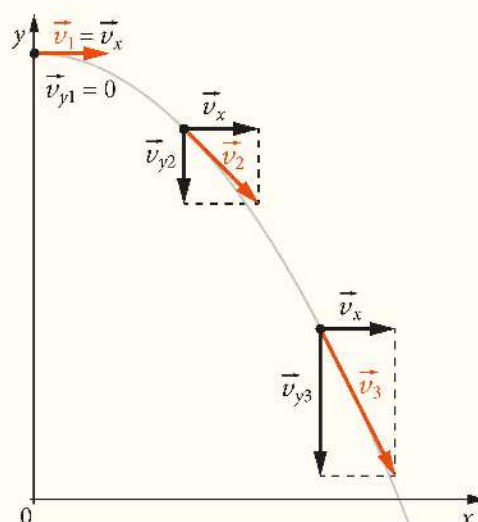
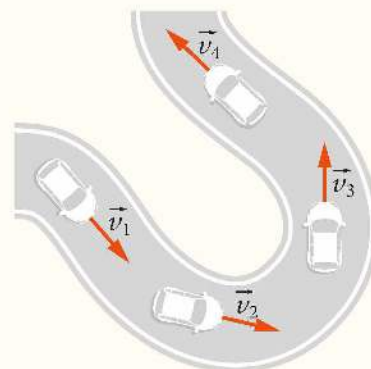
- ▶ **Okres** T w ruchu po okręgu to czas jednego obiegu okręgu.
- ▶ **Częstotliwość** f w ruchu po okręgu to liczba okrążeń wykonanych przez ciało w jednostce czasu. Częstotliwość jest równa odwrotności okresu.

$$f = \frac{1}{T}$$

- ▶ Częstotliwość można też obliczyć, dzieląc liczbę obiegów n przez ich łączny czas trwania t .

$$f = \frac{n}{t}$$

- ▶ Jednostką częstotliwości jest **herc**: $1 \text{ Hz} = \frac{1}{s}$.



■ **Prędkość liniowa:** $v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$

gdzie:

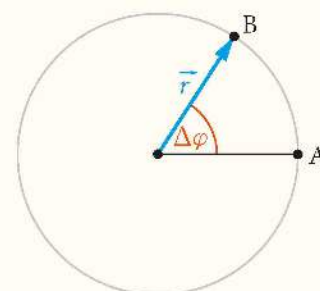
r – promień okręgu, T – okres, f – częstotliwość.

■ **Prędkość kątowna:** $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

gdzie:

$\Delta\varphi$ – kąt, który zakreślił w czasie ruchu promień poprowadzony do ciała (patrz rys. obok), Δt – czas trwania ruchu.

► Jednostką prędkości kątowej jest $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, czyli $\frac{1}{\text{s}}$.



■ Związek między prędkością kątowną a liniową: $v = \omega r$.

■ W ruchu jednostajnym po okręgu nie zmienia się wartość wektora prędkości liniowej, ale zmieniają się jego kierunek i zwrot.

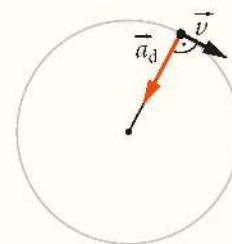
■ Wartość **przyspieszenia dośrodkowego** obliczamy ze wzoru:

$$a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

gdzie:

v – prędkość liniowa, r – promień okręgu, ω – prędkość kątowna.

► Wektor przyspieszenia $\vec{a}_d$ jest skierowany w stronę środka okręgu, czyli jest prostopadły do wektora prędkości liniowej.



■ Przyspieszenie kątowe: $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

gdzie:

$\Delta\omega$ – zmiana prędkości kątowej, Δt – czas, w którym ta zmiana nastąpiła.

► Jednostką przyspieszenia kątowego jest: $\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$, czyli $\frac{1}{\text{s}^2}$.

■ Zestawienie wielkości opisujących ruch po okręgu.

Wielkość liniowa	Wielkość kątowa	Związek między wielkością liniową i kątowną
Przyrost drogi Δs	Przyrost kąta $\Delta\varphi$	$\Delta s = \Delta\varphi \cdot r$
Prędkość $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ w ruchu jednostajnym po okręgu: $v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$	Prędkość kątowna $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ w ruchu jednostajnym: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$	$v = \omega r$



Sposób na zadanie

Korzystanie z praw fizyki i analiza informacji

Zadanie 1. Rowerzysta porusza się bez poślizgu po poziomym odcinku jezdni ze stałą prędkością o wartości $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Koła roweru mają średnicę 70 cm, a wentyl znajduje się w odległości 31 cm od osi obrotu koła. Wykonaj poniższe polecenia w układzie związanym z rowerem.

Zadanie 1.1. (0–1)

Oblicz różnicę dróg przebytych przez wentyl i punkt na obwodzie koła podczas jednego pełnego obrotu koła.

Zadanie 1.2. (0–2)

Oblicz wartość przyspieszenia dośrodkowego wentyla.

Zadanie 1.3. (0–1)

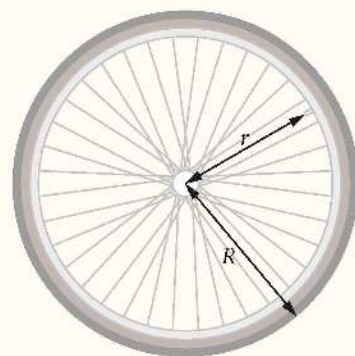
Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wskaż właściwą odpowiedź. Przemieszczenie wentyla tylnego koła względem ramy roweru po czasie równym jednemu okresowi ma wartość:

- A. 0 cm. B. 30 cm. C. 70 cm. D. 188 cm.

Rozwiązanie:

Ad 1.1. Wykonajmy rysunek. Zaznaczmy na nim promień koła $R = 35$ cm (połowa średnicy) oraz odległość środka wentyla od osi koła $r = 31$ cm.

W układzie odniesienia związanym z ziemią zarówno ruch wentyla, jak i punktu na obwodzie koła to złożenie ruchu po okręgu wokół osi koła z ruchem prostoliniowym całego roweru. W tym zadaniu wykonamy jednak obliczenia w układzie odniesienia roweru, w którym cały rower spoczywa, a tylko koło się obraca (tak jakbyśmy koło unieśli nad ziemię i kręcili nim swobodnie).



Wskazówka 1. Zawsze pamiętaj, w jakim układzie odniesienia rozwiązujesz zadanie.

W czasie jednego obrotu koła zarówno punkt na obwodzie, jak i wentyl przebywają drogę równą długości okręgu, po którym się poruszają.

Dla punktu na obwodzie koła: $s_p = 2\pi R$, a dla wentyla: $s_w = 2\pi r$.

Możemy teraz obliczyć każdą z tych dróg, a następnie ich różnicę. Obliczenia będą prostsze, jeśli zapiszemy i uprościmy wzór na różnicę tych dróg:

$$\Delta s = s_p - s_w = 2\pi R - 2\pi r = 2\pi(R - r) \rightarrow \Delta s = 2\pi \cdot 4 \text{ cm} \approx 25 \text{ cm}$$

Wskazówka 2. Dzięki przekształcaniu wzorów możemy uprościć rachunki na liczbach.

Ad 1.2. Do tej pory nie miało znaczenia, jak szybko porusza się rower. Teraz będziemy musieli skorzystać z tej informacji – przecież im szybciej jedzie rower, tym szybciej kręci się koło i tym większe jest przyspieszenie dośrodkowe.

Wskazówka 3. Jeśli nie wiesz, jak wykonywać obliczenia, poszukaj w treści zadania danych, z których jeszcze nie korzystałeś.

W czasie jednego obrotu koła, gdy punkt na obwodzie przebywa drogę $2\pi R$, wentyl przebywa drogę $2\pi r$. Prędkość wentyla stanowi więc ułamek $\frac{r}{R}$ prędkości roweru: $v_w = \frac{r}{R} v_r$.

Po podstawieniu danych liczbowych: $v_w = \frac{31}{35} \cdot 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{31}{35} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8,86 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Stąd możemy obliczyć przyspieszenie dośrodkowe:

$$a_d = \frac{v_w^2}{r} \rightarrow a_d = \frac{(8,86 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{0,31 \text{ m}} \approx 250 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ad 1.3.

Poprawna jest odpowiedź A.

Po pełnym okresie obrotu koła wentyl wraca na początkowe miejsce (względem ramy, bo rower mógł tymczasem przebyć pewną drogę względem ziemi), więc przemieszczenie jest zerowe.

Wskazówka 4. Nie myl wektora przemieszczenia z drogą przebytą przez ciało.

Warto zapamiętać!

- Zanim rozpoczniesz rozwiązywanie zadania, zdecyduj i zapisz, w jakim układzie odniesienia opisujesz ruch.
- Droga jest skalarem, a przemieszczenie wektorem. Droga jest zawsze nieujemna i mierzymy ją wzdłuż linii, po której porusza się ciało, a przemieszczenie to wektor łączący początkowe i końcowe położenie ciała.

Zadanie 2. (0–2)

Kostka lodu ześlizguje się po równi pochyłej, a następnie, po przebyciu krótkiego poziomego odcinka, spada z wysokości 20 cm z poziomą prędkością o wartości $2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz, jak daleko od miejsca opuszczenia poziomego odcinka kostka spadła na ziemię.

Wskazówka 5. Rzut poziomy to złożenie dwóch ruchów. Określ, który ruch należy wziąć pod uwagę przy obliczaniu szukanej wielkości.

Rozwiązanie:

Mamy obliczyć zasięg rzutu, czyli zmianę współrzędnej x kostki lodu. W kierunku poziomym, czyli zgodnie z kierunkiem osi x , kostka porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością $v_x = 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Zatem: $\Delta x = v_x t$, gdzie t to czas ruchu kostki. Czas ruchu kostki to także czas spadania kostki z wysokości $h = 20 \text{ cm}$. Możemy więc go obliczyć ze wzoru na wysokość spadku swobodnym:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

Zanim podstawimy dane, sprawdźmy jednostkę: $[t] = \sqrt{\frac{\text{m}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{\frac{\text{m} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}} = \sqrt{\text{s}^2} = \text{s}$.

Obliczamy czas $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2}{9,81}} \approx 0,2 \text{ s}$.

Teraz możemy obliczyć szukaną odległość: $\Delta x = v_x t = 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,2 \text{ s} = 0,56 \text{ m}$.

Warto zapamiętać!

- Rzut poziomy to złożenie ruchów: jednostajnego prostoliniowego w kierunku poziomym i spadku swobodnego.



Zadania powtórzeniowe



Zadanie 1. Karuzela w wesołym miasteczku

Karuzela po rozpędzeniu się obraca się jednostajnie przez $t = 3$ min tak, że pasażerowie poruszają się ze stałą prędkością liniową $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ po okręgu o średnicy $d = 3$ m.

1.1. Oblicz częstotliwość obrotów karuzeli i jej prędkość kątową.

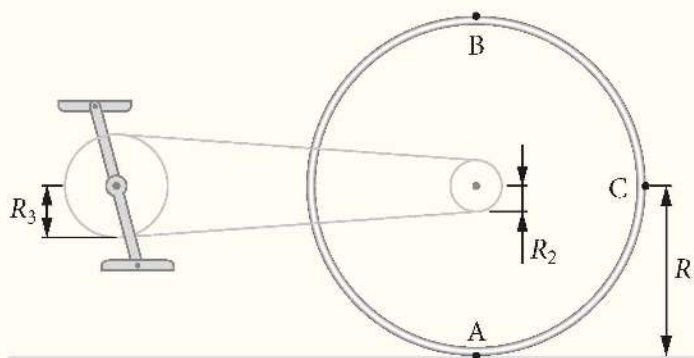
Wskazówka. Zwróć uwagę, że w treści zadania podana jest średnica, a nie promień.

1.2. Karuzela od chwili startu przyspiesza jednostajnie do prędkości liniowej $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w ciągu $t_2 = 15$ s i wyhamowuje również jednostajnie w takim samym czasie. Oblicz drogę, jaką przebędzie pasażer karuzeli w czasie całego pobytu na karuzeli.

1.3. Oblicz przyspieszenie dośrodkowe pasażerów karuzeli, gdy ta obraca się ze stałą prędkością kątową.

Zadanie 2. Napęd roweru

Kolarz jedzie ze stałą prędkością $27 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, bez przerwy jednostajnie pedałuując. Na rysunku przedstawiono schematycznie układ napędowy roweru. Promień tylnego koła $R_1 = 0,33$ m, promień tylnej tarczy zębatej $R_2 = 0,05$ m, promień przedniej tarczy zębatej połączonej z pedałami $R_3 = 0,1$ m.



2.1. Oblicz prędkość, z jaką porusza się ogniwo łańcucha rowerowego względem roweru.

2.2. Wykaż, że pedał roweru wykonuje jeden obrót w czasie 0,55 s.

Wskazówka. W poleceniu jest podana liczba, czyli mimo że jest napisane „wykaż”, tak naprawdę należy wykonać odpowiednie obliczenia.

2.3. Porównaj prędkości kątowe tylnego koła roweru i przedniej tarczy zębatej połączonej z pedałami.

2.4. Oblicz wartość prędkości względem ziemi skrawka papieru, który przykleił się do opony, gdy znajduje się on w punktach A, B, C.

Zadanie 3. Ruch pociągu

W pociągu jadącym ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ pasażerowi podczas otwierania walizki wypadła na podłogę książka. Książka spadła z wysokości 2 m. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

3.1. Opisz ruch książki w układzie I, związanym z pasażerem stojącym w wagonie, oraz w układzie II – względem osoby, która nie porusza się względem torów. Wpisz do ramek odpowiednie litery. Rozwiązanie zapisz w zeszycie.

Uwaga. Nie wszystkie litery trzeba wykorzystać, a niektóre mogą się powtarzać.

I. W układzie związanym z wagonem		II. W układzie związanym z torami	
-----------------------------------	--	-----------------------------------	--

- A. Tor ruchu jest linią prostą prostopadłą do podłoża.
- B. Tor ruchu jest linią prostą nachyloną pod pewnym kątem (różnym od prostego) do podłoża.
- C. Czas spadania książki wynosi około 0,63 s.
- D. Czas spadania książki wynosi około 2,1 s.
- E. Tor ruchu książki jest parabolą.
- F. Początkowa prędkość książki wynosi $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- G. Początkowa prędkość książki wynosi $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3.2. Wykonaj odpowiednie obliczenia dla ruchu książki i uzupełnij tabelę. Zapisz wyniki z dokładnością do jednego miejsca po przecinku. Rozwiązanie zapisz w zeszycie.

	Układ związany z wagonem	Układ związany z torami
Wartość przemieszczenia w pionie do momentu zetknięcia z podłogą wagonu [m]		
Wartość przemieszczenia w poziomie do momentu zetknięcia z podłogą wagonu [m]		
Wartość całkowitego przemieszczenia [m]		

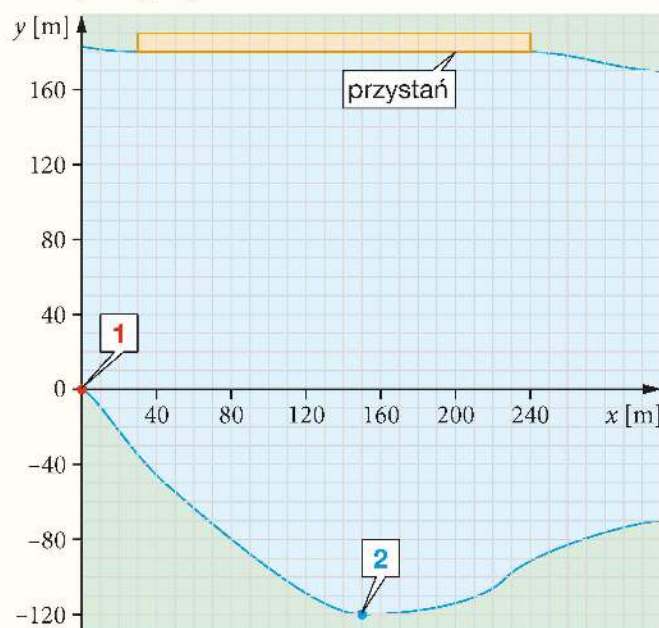
3.3. Wskaż właściwe uzupełnienia zdania.

Prędkość, jaką książka uzyskuje tuż przed uderzeniem w podłogę wagonu, w układzie związanym z torami **A/ B/ C** w układzie związanym z wagonem. W układzie związanym z torami jest ona skierowana **D/ E** do podłogi wagonu.

- A. jest większa niż
- B. jest taka sama jak
- C. jest mniejsza niż
- D. prostopadle
- E. pod pewnym (różnym od prostego) kątem

Zadanie 4. Motorówki

Na rysunku przedstawiono początkowe położenia dwóch motorówek. Pierwszą z nich oznaczono czerwoną, a drugą – niebieską kropką.



Zależność współrzędnych x i y położenia od czasu dla obu motorówek przedstawiają poniższe równania (współczynniki liczbowe wyrażone są w jednostkach układu SI).

Dla motorówki 1:

$$x_1(t) = 2t \quad y_1(t) = 3t$$

Dla motorówki 2:

$$x_2(t) = 150 - t \quad y_2(t) = -120 + 5t$$

4.1. Udowodnij, że motorówki dotrą jednocześnie do przystani, ale w dwóch różnych miejscach (jeżeli założymy, że mogą minąć się po drodze bezkolizyjnie).

4.2. Wybierz zdanie spośród 1–3, które wraz z uzasadnieniem spośród A–D utworzy zdanie prawdziwe.

1.	Tory ruchu obu motorówek się przecinają, ale nie dojdzie do ich kolizji,	ponieważ	A.	w momencie gdy $x_1 = x_2$, to $y_1 < y_2$, a gdy motorówki docierają do przystani, to $x_2 < x_1$.
2.	Tory ruchu obu motorówek przecinają się i dojdzie do ich kolizji,		B.	w momencie gdy $x_1 = x_2$, to $y_1 > y_2$, a gdy motorówki docierają do przystani, to $x_2 < x_1$.
3.	Tory ruchu obu motorówek się nie przecinają,		C.	w momencie gdy $x_1 = x_2$, to $y_1 > y_2$, a gdy motorówki docierają do przystani, to $x_2 > x_1$.
			D.	w momencie gdy $x_1 = x_2$, to $y_1 = y_2$.



4 Ruch i siły

1. Oddziaływania
2. Dodawanie sił i rozkładanie ich na składowe
3. Pierwsza i druga zasada dynamiki
4. Trzecia zasada dynamiki
5. Siła tarcia
6. Siła dośrodkowa
7. Siły bezwładności

4.1. Oddziaływania

Przypomnij sobie

- Wszystkie ciała we Wszechświecie podlegają oddziaływaniom.
- Wielkością fizyczną opisującą oddziaływanie jest siła.
- Siła jest wielkością wektorową.
- Jednostką siły jest niuton: $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Dotychczas opisywaliśmy ruch ciał. W tym rozdziale zajmiemy się wyjaśnieniem i opisem jego przyczyn.



Doświadczenie 12

1. Wykonaj kolejno trzy proste doświadczenia:
 - ▶ Upuść lekki przedmiot na podłogę.
 - ▶ Zbliz magnes do drobnych żelaznych przedmiotów, np. gwoździków.
 - ▶ Potrzyj nadmuchany balon o ubranie i zbliż go do drobnych skrawków papieru.
2. Zastanów się i wyjaśnij, co wspólnego mają wszystkie zaobserwowane wyżej zjawiska.

Zapewne przewidziałeś, jak zakończą się doświadczenia, zanim je wykonałeś. Co jednak łączy ich wyniki? Dlaczego przedmiot spadł na podłogę, gwoździki przyczepiły się do magnesu, a papierki do balonu? Wszystko, co się dzieje wokół nas, jest skutkiem **oddziaływań** między ciałami.

■ Oddziaływania fundamentalne

Obserwacja oddziaływań może dać mylne wrażenie, że istnieją tysiące ich typów. Okazuje się jednak, że wszystkie oddziaływania da się sprowadzić do czterech podstawowych rodzajów, zwanych **oddziaływaniami fundamentalnymi**.

▶ **Oddziaływanie grawitacyjne** Ziemi na nasze ciało obserwujemy na co dzień. Odgrywa ono zasadniczą rolę w ruchu ciał niebieskich. Wszystkie ciała mające masę oddziałują grawitacyjnie, choć między ciałami o małej masie oddziaływanie to jest bardzo słabe. Więcej o oddziaływaniu grawitacyjnym powiemy w trzeciej części podręcznika.

▶ Gdy słyszymy o **oddziaływaniach elektromagnetycznych**, w pierwszej kolejności myślimy o prądzie elektrycznym w otaczających nas urządzeniach, o kompasie, bądź też o elektryzowaniu się ciał. To dobre skojarzenia, ponieważ oddziaływania elektromagnetyczne zachodzą między ciałami obdarzonymi ładunkiem elektrycznym lub namagnesowanymi. Właśnie oddziaływanie elektromagnetyczne między jądrem atomowym a elektronami sprawia, że atom się nie rozpada.

Rodzaje oddziaływań fundamentalnych:

- ▶ grawitacyjne,
- ▶ elektromagnetyczne,
- ▶ jądrowe silne,
- ▶ jądrowe słabe.

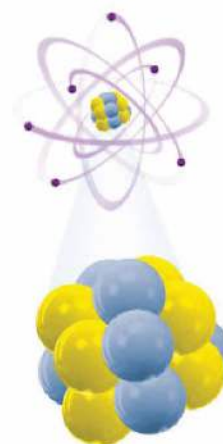
Siła grawitacji, którą Ziemia przyciąga ciało o masie m , to inaczej ciężar ciała: $F_g = mg$, gdzie $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ jest przyspieszeniem ziemskim.

Warto jednak pamiętać, że do tego rodzaju oddziaływań zaliczamy również poznane w szkole podstawowej oddziaływania międzycząsteczkowe, odpowiedzialne m.in. za występowanie sił spójności.

Spójrz na zdjęcie piłkarza. Niemal wszystkie opisane tam oddziaływania, z wyjątkiem grawitacyjnego, to oddziaływania pomiędzy elektronami lub pomiędzy elektronami a protonami znajdującymi się w cząsteczkach ciał – są to więc oddziaływania elektromagnetyczne. Podobnie dzięki oddziaływaniu elektromagnetycznemu między elektronami znajdującymi się w twoich stopach a elektronami znajdującymi się w cząsteczkach podłoża nie zapadasz się w głąb Ziemi.

► Jądra atomowe istnieją dzięki **silnym oddziaływaniom jądrowym**. Oddziaływania te występują między nukleonami w jądrze atomowym. Siły jądrowe działają na bardzo małą odległość – między sąsiednimi nukleonami i równoważą ich oddziaływania elektrostatyczne.

► Oprócz nich istnieją także **słabe oddziaływania jądrowe**, odpowiadające za rozpad niektórych izotopów promieniotwórczych.



Rys. 4.1. Oddziaływania między nukleonami w jądrze atomowym to oddziaływania jądrowe silne. Nukleony to wspólna nazwa protonów i neutronów

Fizyka wokół nas

Przykłady oddziaływań

Piłka jest złożona z cząsteczek. Jak to się dzieje, że zachowuje kształt kuli i nie rozpada się na pojedyncze cząsteczki? W całości utrzymują ją oddziaływania międzycząsteczkowe. Uważna obserwacja naszego otoczenia pozwoliłaby wskazać wiele przykładów oddziaływań tego rodzaju. Tak naprawdę wszystko, co istnieje i dzieje się wokół nas, jest skutkiem oddziaływań.

Oddziaływania między cząsteczkami powietrza wewnątrz piłki a jej powierzchnią utrzymują jej kulisty kształt.

Piłka kopnięta wysoko w górę prędzej czy później spada na powierzchnię Ziemi dzięki oddziaływaniu grawitacyjnemu między Ziemią a piłką.

Oddziaływanie między nogą piłkarza a piłką powoduje zmianę wartości i kierunku prędkości piłki.

Specjalna podeszwa z korkami sprawia, że oddziaływanie między butami zawodnika a Ziemią jest silniejsze i piłkarz nie ślizga się po trawie.





Rys. 4.2. Piłka oddziałuje na siatkę – powoduje zmianę jej kształtu, a siatka oddziałuje na piłkę – zatrzymuje ją

■ Oddziaływania są wzajemne

Kiedy opisujemy oddziaływania, zawsze mówimy o oddziaływaniach między ciałami, np. o oddziaływaniu między piłką a piłkarzem, a nie tylko o oddziaływaniu jednego ciała na drugie. Oddziaływania zawsze są **wzajemne**: gdy piłkarz uderzy nogą piłkę, piłka uderza piłkarza w nogę. Jeśli piłkarz kopnie piłkę mocno, może poczuć ból taki sam jak w sytuacji, gdy ktoś go uderzy.

Warto pamiętać, że aby ciała oddziaływały ze sobą, nie muszą wchodzić w bezpośredni kontakt (stykać się). Dzieje się tak na przykład, gdy magnes przyciąga stalowy przedmiot znajdujący się kilka centymetrów od niego.

Fizyka wokół nas

Silacze

Siła w świecie zwierząt pełni bardzo ważną funkcję. Jeżeli będziemy porównywać ją w wartościach bezwzględnych, zauważymy, że większe zwierzęta z reguły są w stanie unieść większą masę. Jeśli jednak siłę zwierzęcia odniesiemy do jego masy, ranking siłaczy zmienia się diametralnie. W ramce obok wyjaśniamy, dlaczego tak jest.

• Słoń może podnieść 9 ton, czyli około 1,5-krotnie więcej niż sam waży.



1,5



• Wojownik wspaniały potrafi unieść w locie około 16 kg, podczas gdy jego masa to niecałe 4 kg.

• Człowiek jest w stanie udźwignąć około 2,5-krotnie więcej niż sam waży. Rekord świata mężczyzn w podnoszeniu ciężarów (w podrzucie w wadze open) wynosi 263 kg.

2,5

4

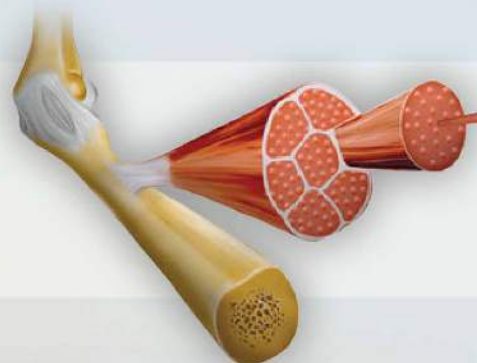
■ Wielkością opisującą oddziaływanie jest siła

Wielkością, której używamy do opisu oddziaływań między ciałami, jest **siła**. Oddziaływania są wzajemne, więc każdemu oddziaływaniu odpowiadają dwie siły. Gdy naciskasz palcem na stół, oddziaływanie opisują dwie siły: siła nacisku palca na stół i siła nacisku stołu na palec.

Siła jest wielkością wektorową. Ma wartość, kierunek i zwrot oraz punkt przyłożenia. O ile w przypadku wektora prędkości lub przyspieszenia wystarczyło wiedzieć, z którym ciałem jest związany dany wektor, o tyle w przypadku wektora siły **punkt przyłożenia jest bardzo istotny**. Aby się o tym przekonać, wykonaj doświadczenie opisane na następnej stronie.

Siła, którą może działać mięsień zwierzęcia, jest proporcjonalna do pola przekroju poprzecznego tego mięśnia.

Natomiast masa jest proporcjonalna do objętości zwierzęcia. Dwukrotnie większe zwierzę będzie więc miało czterokrotnie większą siłę, ale ośmiokrotnie większą masę.



Mrówka może unieść ogryzek o masie 50 razy większej od własnej masy.

Goryl o masie 200 kg jest w stanie udźwignąć 10-krotność własnej masy, czyli ok. 2 ton.

Rekordzistą jest żuk gnojowy z gatunku *Onthophagus*, który potrafi podnieść masę ponad 1100-krotnie większą od swojej masy.



10

50

1100

-krotność
masy ciała



Doświadczenie 13

1. Porusz drzwi, popychając je jednym palcem przyłożonym blisko klamki.
2. Następnie spróbuj poruszyć je ponownie. Użyj takiej samej siły jak poprzednio, ale tym razem przyłóż palec blisko zawiasów.
3. Zastanów się, jak wybór punktu przyłożenia siły wpłynął na wynik tego doświadczenia.

Jak widzisz, siły równe co do wartości, kierunku i zwrotu mogą mieć różne skutki, jeśli przyłożone są w różnych punktach, czyli kiedy wektory tych sił różnią się wyłącznie punktem przyłożenia.

Przypomnijmy, że jednostką siły jest **niuton**:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Po tej lekcji powinieneś

- dostrzegać przykłady oddziaływań w otaczającym świecie;
- wiedzieć, że oddziaływania są wzajemne;
- znać oddziaływania fundamentalne i wyjaśniać, z którym z nich mamy do czynienia w danej sytuacji;
- stosować pojęcie siły do opisu oddziaływań.

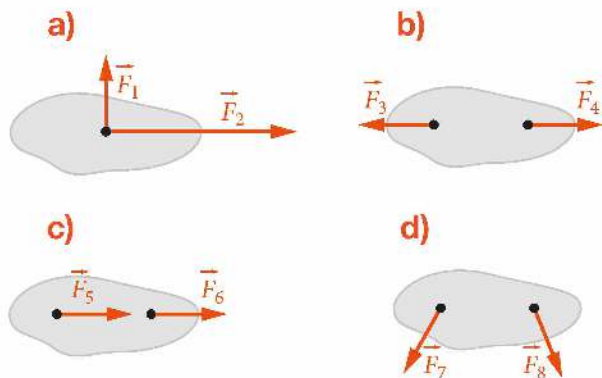
Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



1. Sklejone kawałki tektury trudno rozerwać. Z którym rodzajem oddziaływań fundamentalnych mamy do czynienia w tym przypadku?

2. Wyjaśnij, czym się różnią i co mają wspólnego siły przedstawione na każdym z poniższych rysunków.



3. Gdy siedzący w kajaku człowiek wiosłuje, jego wiosło działa siłą na wodę, a nie na kajak. Dlaczego więc powoduje ruch kajaka?

4. Wykonaj doświadczenie.

- a) Włącz elektroniczną wagę kuchenną. Naciśnij na szalkę mocno jednym palcem. Jakie jest wskazanie wagi? Na jego podstawie oblicz siłę naciskającą na szalkę.



- b) Postaw na szalce butelkę wody mineralnej z nitką przywiązaną pod zakrętką. Ciągnij ze stałą siłą nitkę do góry, ale tak, aby nie podnieść butelki. Oblicz wartość siły, którą ciągniesz za nitkę. Jeśli nitka szybko się zrywa, oblicz maksymalną siłę jej naciągu.

4.2. Dodawanie sił i rozkładanie ich na składowe

Przypomnij sobie

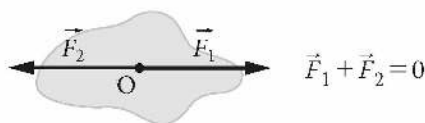
- Siła wypadkowa dwóch lub więcej sił to siła, która przyłożona do ciała, wywołałaby taki sam skutek jak wszystkie te siły łącznie.
- Wektory dodajemy metodą równoległoboku lub metodą trójkąta.

Często się zdarza, że na ciało działa jednocześnie wiele sił. W takiej sytuacji szukamy **siły wypadkowej**. Wiemy już, że siła jest wektorem, a to znaczy, że aby wyznaczyć siłę wypadkową, należy dodać do siebie wszystkie wektory sił.

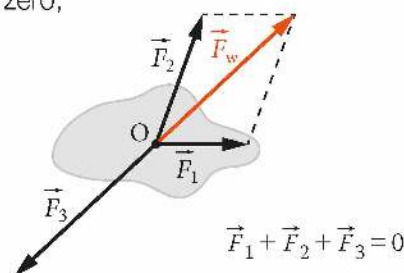
Dodatek matematyczny
s. 43 i 94

Równoważenie się sił

Kiedy suma dwóch lub więcej sił działających na ciało jest równa zero, mówimy, że siły się równoważą (rys. 4.3, 4.4).



Rys. 4.3. Wypadkowa dwóch sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, które działają wzdłuż tej samej prostej i mają jednakowe wartości, a przeciwny zwrot, jest równa zero

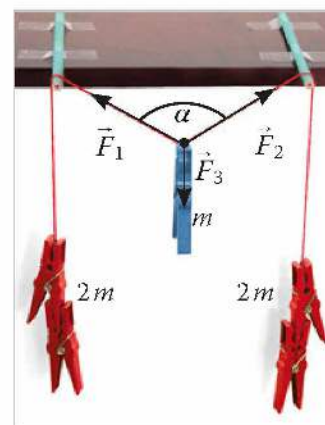


Rys. 4.4. Wypadkowa trzech różnych sił: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ jest równa zero (wypadkową $\vec{F}_w$ sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ wyznaczono metodą równoległoboku)

Aby siły się równoważyły, muszą działać na to samo ciało. Na przykład nacisk człowieka na podłogę i nacisk podłogi na stopy człowieka są równe co do wartości i przeciwnie skierowane, ale się nie równoważą, bo są przyłożone do różnych ciał.

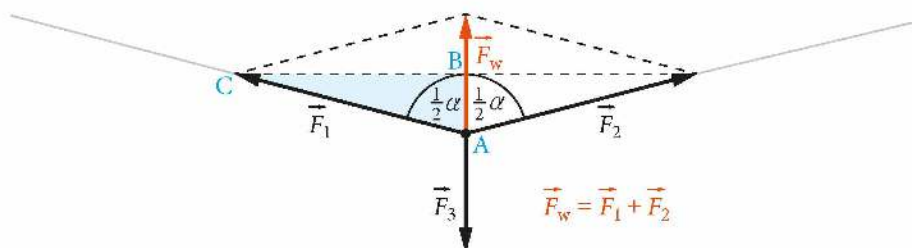
Doświadczenie 14

1. Za pomocą taśmy klejącej przyklej do brzegu stołu dwa okrągłe ołówki lub długopisy i przewieś przez nie nitkę lub żyłkę z klamerkami do bielizny.
2. Przytrzymaj środkową klamerkę tak, aby odcinek nitki między ołówkami był poziomy, i puść. Klamerka opadnie do położenia, w którym siły będą się równoważyć. Kątomierzem zmierz kąt między nitkami (na zdjęciu α).
3. Pociągnij środkową klamerkę w dół i puść. Klamerka podniesie się do położenia równowagi. Ponownie zmierz kąt między nitkami.
4. Wyniki pomiarów w punktach 2. i 3. mogą się różnić ze względu na siłę tarcia. Pozwoli ci to określić średnią i niepewność pomiaru.
5. Wykonaj doświadczenie jeszcze w dwóch wersjach. Za pierwszym razem zawieś pośrodku dwie klamerki, a za drugim – trzy.



Dlaczego w doświadczeniu 14. jedna klamerka zawieszona pośrodku równoważy pozostałe klamerki?

Zajmijmy się przypadkiem, gdy pośrodku znajduje się jedna klamerka, a po bokach są po dwie klamerki. Na środek sznurka (w miejscu przywieszenia niebieskiej klamerki) działają trzy siły: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$.



Rys. 4.5. Rozkład sił w układzie z doświadczenia 14. Wypadkowa sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ równoważy siłę $\vec{F}_3$

Zauważ, że wypadkowa sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ ma taki sam kierunek jak siła $\vec{F}_3$, ale przeciwny zwrot. Aby wszystkie trzy siły się równoważyły, wypadkowa sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ musi więc mieć taką samą wartość jak siła $\vec{F}_3$.

Siła $\vec{F}_3$ jest równa ciężarowi jednej klamerki ($F_3 = mg$), natomiast siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ są równe ciężarowi dwóch klamerki ($F_1 = F_2 = 2mg$), więc:

$$F_1 = F_2 = 2F_3$$

Dodatek matematyczny
s. 103

Na rysunku 4.5 widzimy, że trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym. Jeżeli poznamy długości dwóch jego boków, będziemy mogli za pomocą funkcji trygonometrycznych wyznaczyć kąt $\frac{1}{2}\alpha$. Powiążmy więc długości boków tego trójkąta z naszymi wektorami. Widzimy, że $AC = F_1$, a $AB = \frac{1}{2}F_w = \frac{1}{2}F_3$ (jest to połowa przekątnej rombu), możemy zatem zapisać zależność:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{1}{2}F_3}{F_1} = \frac{\frac{1}{2}F_3}{2F_3} = \frac{1}{4}$$

Za pomocą kalkulatora lub tablic znajdujemy kąt, którego cosinus wynosi $\frac{1}{4}$. Ma on miarę:

$$\frac{\alpha}{2} = 76^\circ$$

stąd:

$$\alpha = 152^\circ$$

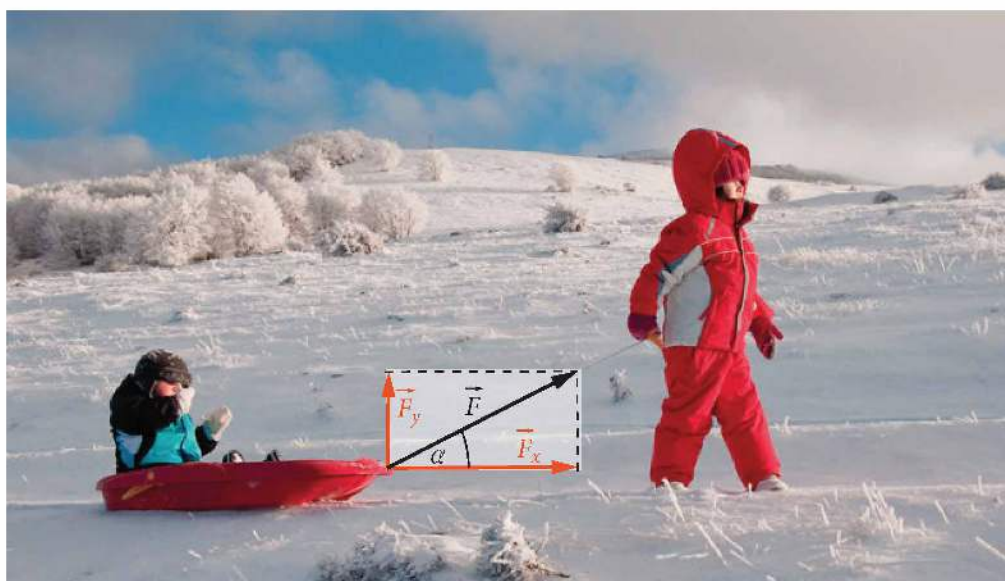
Porównaj wynik swojego doświadczenia z wartością uzyskaną w obliczeniach. Czy mieści się ona w granicach niepewności twojego pomiaru?

Wykonaj analogiczne obliczenia dla pozostałych zbadanych w doświadczeniu przypadków i porównaj je z wynikami pomiarów.

■ Rozkładanie sił na składowe

Dodatek matematyczny
s. 94

Operacją odwrotną do dodawania wektorów jest rozkład wektora na składowe. Przykład takiego działania przedstawiono na ilustracji zamieszczonej na stronie obok (rys. 4.6).



Rys. 4.6. Siłę $\vec{F}$ rozkładamy na składowe: $\vec{F}_x$ powodującą ruch i $\vec{F}_y$ zmniejszającą nacisk sanek na podłoże

$$\sin \alpha = \frac{F_y}{F}$$

zatem $F_y = F \sin \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}$$

zatem $F_x = F \cos \alpha$

Sznurek przymocowany do sanek jest ciągnięty przez dziecko pod pewnym kątem α do podłoża, a sanki poruszają się poziomo. Siłę $\vec{F}$, którą dziecko działa na sanki, możemy przedstawić jako sumę dwóch sił: pionowej $\vec{F}_y$ i poziomej $\vec{F}_x$. Te siły nazywamy składowymi siły $\vec{F}$.

Każda ze składowych ma znaczenie dla ruchu sanek. Składowa pozioma je napędza, a pionowa powoduje zmniejszenie nacisku na śnieg, czyli również zmniejszenie siły tarcia.

■ Składowe siły ciężkości na równi pochyłej

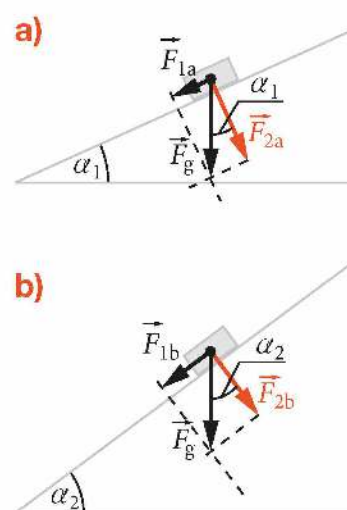
Na ilustracjach na kolejnych stronach przedstawiono narciarza na stoku. Stok ten jest przykładem równi pochyłej. Siłę ciężkości $\vec{F}_g$ działającą na narciarza rozłożyliśmy na składową $\vec{F}_1$ (równoległą do stoku) i składową $\vec{F}_2$ (prostopadłą do stoku). Siła $\vec{F}_1$ powoduje ruch narciarza, natomiast siła $\vec{F}_2$ – jego nacisk na śnieg. Na rysunku 4.7 pokazano, że im bardziej stromy stok, tym słabiej narciarz naciska na śnieg. Z tego powodu jego narty mniej się zapadają i mniejsze są opory ruchu. Obie składowe mają więc znaczenie dla ruchu narciarza. Aby obliczyć wartości sił składowych, możemy skorzystać z funkcji trygonometrycznych. Na ilustracji na stronie 137 (rys. 4.) trójkąty ABC i BCD są prostokątne, więc:

$$\sin \alpha = \frac{F_1}{F_g} \quad \text{i} \quad \cos \alpha = \frac{F_2}{F_g}$$

Wyznaczamy wartości sił F_1 i F_2 :

$$F_1 = F_g \sin \alpha \quad \text{i} \quad F_2 = F_g \cos \alpha$$

Jeśli znamy kąt nachylenia równi i masę ciała, możemy obliczyć wartości składowych siły ciężkości.



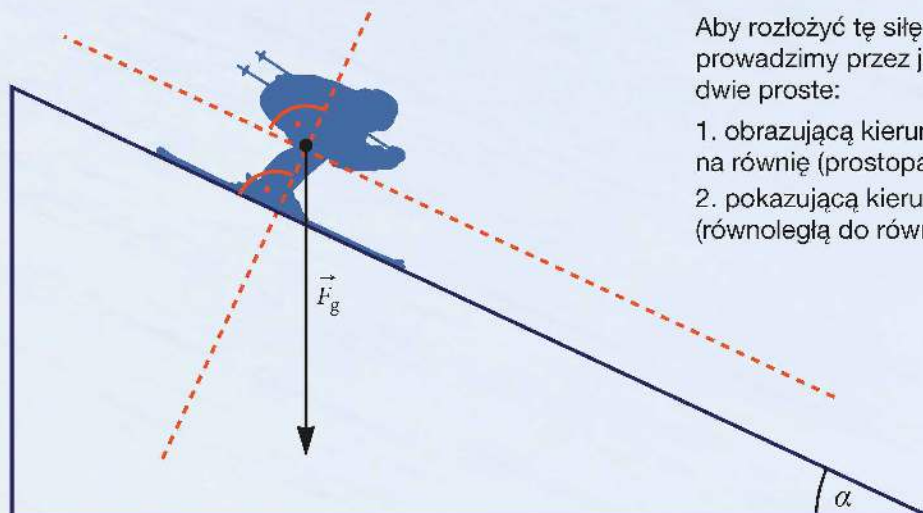
Rys. 4.7. Im bardziej stromy stok, tym mniejsza wartość składowej prostopadłej do stoku ($F_{2b} < F_{2a}$)

Rozkład siły ciężkości na równi pochyłej

Siłę ciężkości działającą na narciarza można rozłożyć na składowe: prostopadłą i równoległą do zbocza góry. Składowa prostopadła powoduje nacisk na śnieg, a równoległa – ruch narciarza.



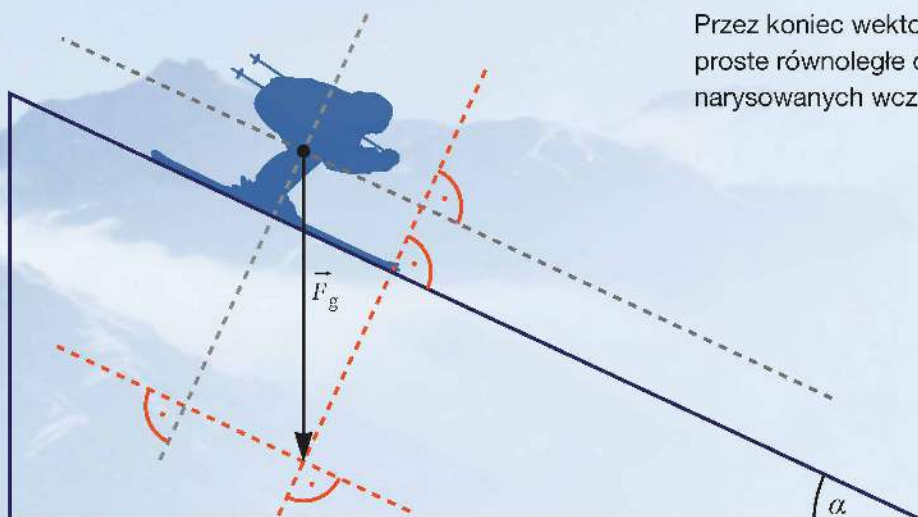
1



Aby rozłożyć tę siłę na składowe, prowadzimy przez jej punkt przyłożenia dwie proste:

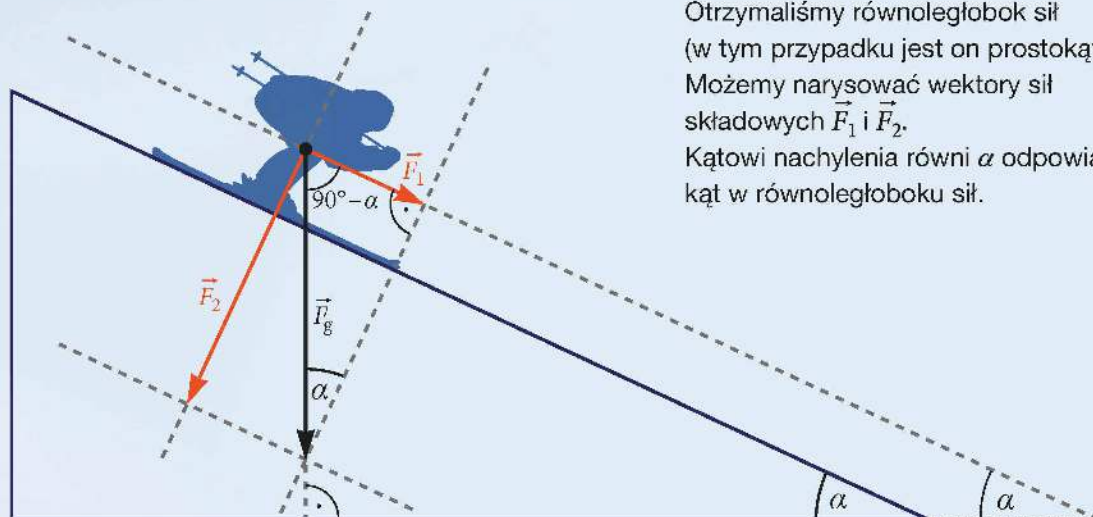
1. obrazującą kierunek działania ciała na równię (prostopadłą do niej),
2. pokazującą kierunek poruszania się ciała (równoległą do równi).

2



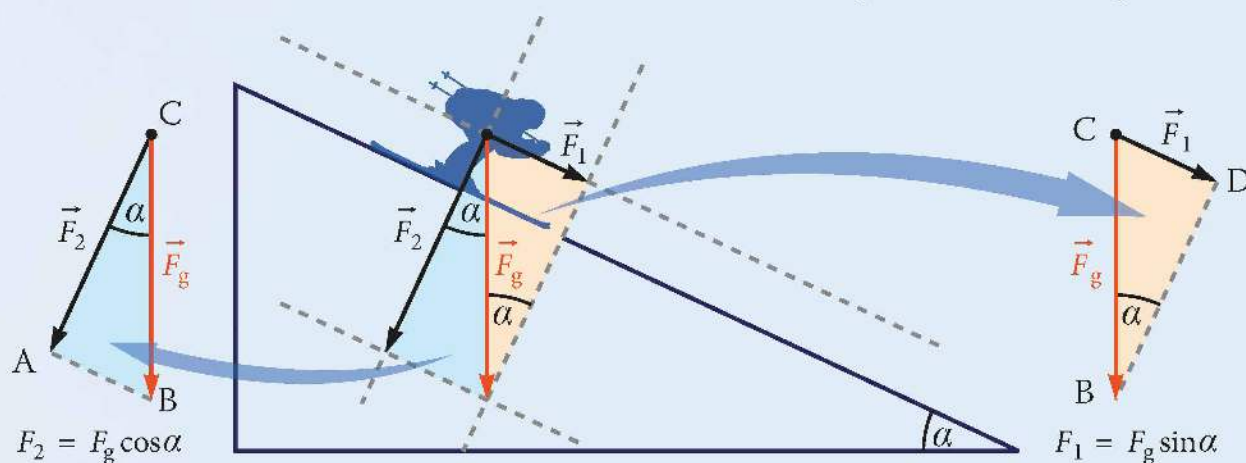
Przez koniec wektora $\vec{F}_g$ prowadzimy proste równoległe do prostych narysowanych wcześniej.

3



Otrzymaliśmy równoległobok sił (w tym przypadku jest on prostokątem). Możemy narysować wektory sił składowych $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Kątowi nachylenia równi α odpowiada kąt w równoległoboku sił.

4



Po tej lekcji powinieneś

- wyznaczać wypadkową sił i wiedzieć, kiedy siły się równoważą;
- rozkładać siłę na składowe;
- wyznaczać składowe siły ciężkości na równi pochyłej.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZCIE



■ Przykład

Samochód ma masę 1000 kg. Aby go poruszyć na luzie (biegu neutralnym) i bez zaciągniętego hamulca ręcznego, potrzebna jest siła 350 N. Jak mocno nachylona może być droga, aby samochód nie stoczył się z niej samorzutnie, gdy zostawimy go na luzie bez zaciągniętego hamulca ręcznego? O ile zmniejszy się nacisk samochodu na drogę w przypadku takiej pochyłości w stosunku do drogi poziomej?

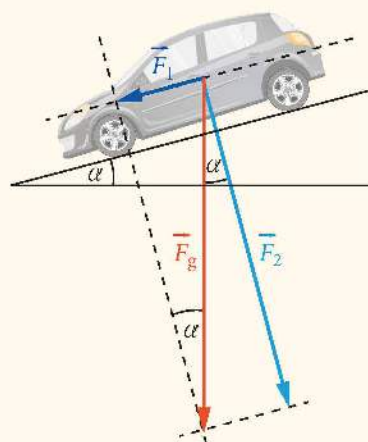
Rozwiązanie

Nachylona droga to przykład równi pochyłej. Szukany kąt nachylenia oznaczmy α . Ciężar samochodu $F_g = mg$ rozkładamy na siłę równoległą do drogi o wartości F_1 i prostopadłą do drogi o wartości F_2 , tak jak na rysunku.

Siły te mają wartości (patrz infografika s. 136–137):

$$F_1 = F_g \sin \alpha = mg \sin \alpha$$

$$F_2 = F_g \cos \alpha = mg \cos \alpha$$



Dla pewnego kąta α_{tocz} siła F_1 osiąga wartość $F_{1 \text{ tocz}} = 350 \text{ N}$, a wówczas samochód zaczyna się toczyć. Dla tego kąta możemy zapisać:

$$F_{1 \text{ tocz}} = mg \sin \alpha_{\text{tocz}} \rightarrow \sin \alpha_{\text{tocz}} = \frac{F_{1 \text{ tocz}}}{mg}$$

W naszym przypadku:

$$\sin \alpha_{\text{tocz}} = \frac{350 \text{ N}}{1000 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 0,035$$

Za pomocą tablic albo kalkulatora znajdujemy kąt, którego sinus wynosi około 0,035:

$$\alpha_{\text{tocz}} \approx 2^\circ$$

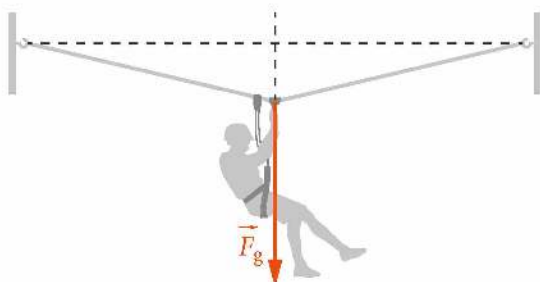
W tej sytuacji nacisk samochodu na drogę będzie stanowił następujący ułamek jego nacisku na poziomą drogę (czyli ciężaru samochodu):

$$\frac{F_2}{F_g} = \frac{mg \cos \alpha_{\text{tocz}}}{mg} = \cos \alpha_{\text{tocz}} = \cos 2^\circ \approx 0,9994 = 99,94\%$$

Odpowiedź: Samochód nie będzie się staczał, gdy nachylenie drogi nie przekroczy 2° . Nacisk samochodu na drogę będzie o 0,06% mniejszy niż na poziomej drodze.

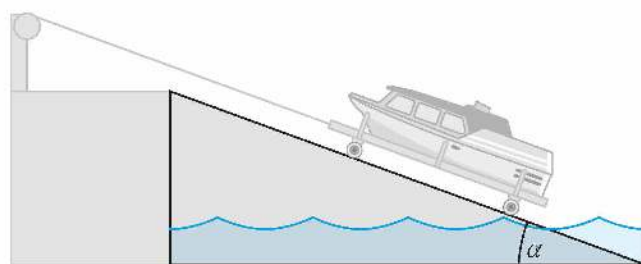
Uwaga. Aby popchnąć samochód, musimy pokonać opory ruchu, z których część to opory mechanizmu, a część – opory wynikające z toczenia opon po szosie. Te drugie zależą od nacisku samochodu na szosę, ale jak widać z drugiej części odpowiedzi, zmniejszenie nacisku jest tak niewielkie, że mogliśmy go nie brać pod uwagę podczas rozwiązywania zadania.

1. Oblicz wartość siły wypadkowej dwóch prostopadłych sił o wartościach 40 N i 60 N. Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa. Zmierz na starannie wykonanym w zeszycie rysunku miarę kąta, jaki tworzy ta wypadkowa z siłą o wartości 60 N.
2. Aby samochód o masie 1100 kg ruszył na poziomej drodze, musi na niego działać siła 500 N. Jaką minimalną siłą trzeba działać, aby poruszyć ten sam samochód pod górę na drodze o kącie nachylenia 5° ? Przyjmij, że na obu drogach są takie same opory ruchu.
3. W parku linowym linę rozpięto pomiędzy dwoma drzewami. Jej końce przywiązano do haków, które z kolei przymocowano do pni drzew. Odległość między hakami wynosi 4 m, a długość liny 5 m. Na środku liny, na



uprzęży, wisi dziewczyna o masie 54 kg. Ile wynosi siła działająca na każdy z haków?

4. Do wodowania łodzi lub wyciągania ich na brzeg wykorzystuje się układ złożony z pochylni schodzącej z lądu do wody, wózka kołowego i wciągarki. Łódź wraz z wózkiem mają masę 250 kg. Pochylnia to równia pochyła o kącie nachylenia do poziomu 20° . Wykonaj polecenia, pominię siłę tarcia.
 - a) Rozłóż siłę ciężkości wózka z łodzią na składowe działające równoległe i prostopadle do powierzchni równi.
 - b) Oblicz naprężenie liny, gdy łódź z wózkiem pozostaje nieruchoma na pochylni.
 - c) Oblicz łączną siłę nacisku kółek wózka na platformę.



4.3. Pierwsza i druga zasada dynamiki

Przypomnij sobie

- Jeśli wypadkowa sił działających na ciało jest równa zero, to ciało pozostaje w stanie spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym (pierwsza zasada dynamiki).
- Bezwładność jest cechą każdego ciała.
- Jeśli wypadkowa F_w sił działających na ciało o masie m nie jest równa zero, to ciało porusza się z przyspieszeniem $a = \frac{F_w}{m}$ (druga zasada dynamiki).

Opory ruchu

Doświadczenie 15

1. Mocno zmrożoną kostkę lodu pchnij po szybie leżącej na stole.
2. Obserwuj ruch kostki lodu.
3. Opisz siły działające na kostkę lodu.



Powyższe doświadczenie pozwala zaobserwować sytuację, w której siła wypadkowa działająca na ciało jest bardzo mała.

Czy ciało może się poruszać, gdy nie działa na nie żadna siła? Codzienne obserwacje mogą nie wystarczyć do odpowiedzi na to pytanie. Popchnięta szafa zatrzymuje się natychmiast, gdy przestaniemy ją pchać. Samochód na prostej, poziomej drodze jedzie jeszcze przez jakiś czas po wyłączeniu silnika, ale w końcu się zatrzymuje. Z kolei krążek hokejowy może przemieścić się na drugi koniec lodowiska, ale popchnięty po asfalcie zatrzyma się znacznie szybciej.

W rzeczywistości w każdej z opisanych sytuacji na ciało działają siły, które nazywamy **siłami oporów ruchu**: siła tarcia i siła oporu powietrza. Im mniejsze są te siły, tym dłuższą drogę pokonuje ciało bez zatrzymania. W doświadczeniu mieliśmy sytuację bardzo zbliżoną do ujętej w pierwszej zasadzie dynamiki, choć precyzyjne pomiary wykazałyby zmniejszanie się prędkości nawet przy tak minimalnych oporach ruchu.

Siły oporów ruchu:

- ▶ tarcie,
- ▶ opór ośrodka, np. powietrza.

Pierwsza zasada dynamiki

Gdyby usunąć wszystkie siły działające na ciało, w tym opory ruchu, to ciało, któremu została nadana pewna prędkość początkowa, poruszałoby się z tą prędkością ruchem prostoliniowym tak długo, aż jakaś siła nie zmieniłaby tego stanu.

Na ogół nie da się zlikwidować oporów ruchu, można jedynie zrównoważyć je za pomocą innej siły. Na przykład, gdy samochód porusza się

ruchem jednostajnym prostoliniowym, to opory ruchu $\vec{F}_o$ są zrównoważone przez siłę $\vec{F}$ działającą do przodu (rys. 4.8). Jest to przykład zastosowania **pierwszej zasady dynamiki**, która brzmi:

Jeśli na ciało nie działa żadna siła albo działające na nie siły się równoważą, ciało spoczywające będzie nadal spoczywać, a ciało poruszające się wciąż będzie się poruszać z tą samą prędkością po linii prostej.



Rys. 4.8. Podczas jazdy ze stałą prędkością siły działające na pojazd się równoważą ($F_o = F$)

Właściwość ciał polegającą na tym, że zmiana ich prędkości wymaga działania siły, nazywamy **bezwładnością**. Na podstawie pierwszej zasady dynamiki można stwierdzić, że bezwładność jest cechą wszystkich ciał. Dlatego też pierwszą zasadę dynamiki nazywamy często **zasadą bezwładności**.

■ Od Arystotelesa do Newtona

Przez niemal dwa tysiące lat w nauce panował pogląd sformułowany przez **Arystotelesa**, że do utrzymania ciała w ruchu jednostajnym prostoliniowym konieczna jest siła. Arystoteles nie traktował oporów ruchu, np. tarcia, jako jednej z sił działających na ciało. Dopiero **Galileusz** na podstawie własnych doświadczeń wyraził pogląd, że do podtrzymania ruchu nie jest potrzebna żadna siła. On pierwszy zrozumiał, że jeżeli usuniemy przeszkody ruchu, to zniknie potrzeba podtrzymywania go przez siłę wypadkową. Galileusz nie potrafił jednak podać zasady bezwładności. Nie znał pojęcia siły ciężkości i dlatego przyjął, że gdyby ciało puszczane po powierzchni Ziemi miało poruszać się po prostej, to byłaby ona styczna do powierzchni Ziemi, więc po odpowiednio długim czasie ciało znalazłoby się na dużej wysokości, co – jak słusznie uznał – nie powinno się zdarzyć w sytuacji, gdy nie działa na nie żadna siła.

Zasadę bezwładności sformułował ostatecznie **Izaak Newton** w 1687 r. W dziele *Matematyczne podstawy filozofii przyrody* ujął ją następująco:

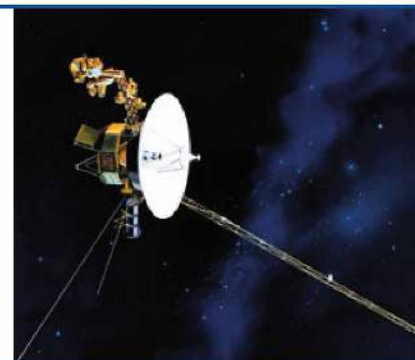
„Każde ciało pozostaje w stanie spoczynku lub w ruchu jednostajnym o stałym kierunku, dopóki nie zostanie zmuszone do zmiany tego stanu przez działające na nie siły”.



Rys. 4.9. Izaak Newton

A to ciekawe

Przykładem ciała, na które działają minimalne siły, jest sonda kosmiczna przebywająca z dala od ciał niebieskich, np. Voyager 1 (czyt. wojadżer), która w roku 2012 opuściła Układ Słoneczny i jako pierwszy pojazd zbudowany na naszej planecie rozpoczęła podróż międzygwiazdową. W odległości ponad 18 mld km od Słońca nasza gwiazda działa na nią siłą grawitacji o wartości około 25 mln razy mniejszej niż ciężar sondy na Ziemi. Jej prędkość (około $15 \frac{\text{km}}{\text{s}}$) pozostaje w tej sytuacji niemalże stała.

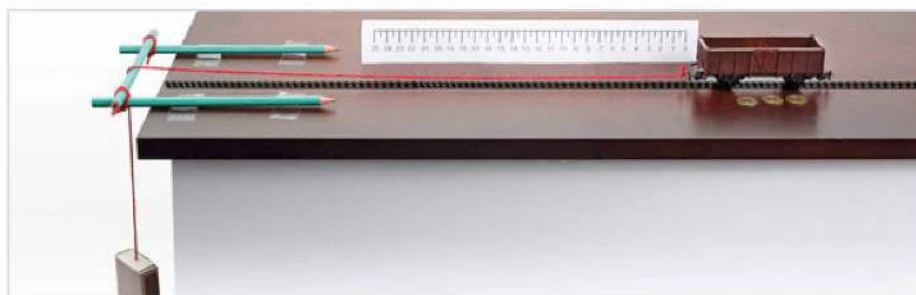


■ Druga zasada dynamiki

Gdy działające na ciało siły się nie równoważą, jego prędkość się zmienia, co oznacza, że porusza się ono z pewnym przyspieszeniem. Zbadamy, jak to przyspieszenie zależy od działającej siły.

Doświadczenie 16

1. Przygotuj mały, zabawkowy wagonik lub samochodzik. Od strony podwozia lub zderzaka przyczep nitkę długości ok. 70 cm tak, aby można było za nią ciągnąć pojazd. Drugi koniec nitki przyklej, np. taśmą klejącą, do wewnętrznej części pudełka od zapalek, i nasuń na nią zewnętrzną część tego pudełka.
2. Postaw pojazd na stole, równoległe do jego dłuższej krawędzi. Za nim (patrzac od strony dłuższego boku stołu) umieść podziałkę centymetrową. Wykonaj bloczek z ołówków i taśmy klejącej (patrz zdjęcie). Przewieś przez niego nitkę przyczepioną do pojazdu.
3. Umieść z boku układu kamerę tak, aby mogła filmować ruch pojazdu wzdłuż podziałki.
4. Do wagonika lub pudełka na samochodziku włóż trzy monety jednogroszowe, a do pudełka wiszącego na sznurku – jedną. Puść pojazd od punktu 0 podziałki, a pudełko na nitce pociągnie go i wprawi w ruch przyspieszony. Sfilmuj ten ruch.
5. Powtórz doświadczenie jeszcze 3 razy – za każdym razem przekładaj po jednej monecie z pojazdu do wiszącego pudełka.
6. Na podstawie filmu wyznacz przyspieszenie układu w każdym przypadku. Możesz skorzystać z programu Tracker (patrz projekt s. 119).
7. Oblicz siłę działającą w każdym z przedstawionych przypadków. Zaznacz wartości przyspieszenia i siły w układzie współrzędnych. Narysuj wykres przedstawiający zależność przyspieszenia pojazdu (i całego układu) od działającej siły. Jaki kształt ma ten wykres?
8. Zastanów się nad rolą oporów ruchu w tym doświadczeniu i pomyśl, jak można je zminimalizować.



Zauważ, że w kolejnych etapach doświadczenia masa m całego układu jest stała, równa sumie mas pojazdu, pudełka i monet. Chociaż pudełko porusza się w pionie, a wagonik w poziomie, przyspieszenie układu jest co do wartości takie samo jak w przypadku ciała o masie m poruszającego się po prostej.

Na podstawie tego doświadczenia możemy stwierdzić, że przy stałej masie układu przyspieszenie nie tylko rośnie wraz z działającą siłą, lecz także jest do niej wprost proporcjonalne.

Jeżeli używasz samochodzika, przymocuj do niego od góry wewnętrzną część pustego pudełka od zapalek.

Wyznaczanie przyspieszenia na podstawie filmu s. 76–78

masa pudełka od zapalek = 4 g
masa jednogroszowej monety = 1,64 g

Jeśli $m = \text{const}$, przyspieszenie jest wprost proporcjonalne do działającej siły $a \sim F$.

Zbadajmy, jak przyspieszenie ciała zależy od jego masy. W tym celu wykorzystajmy układ z poprzedniego doświadczenia.

Doświadczenie 17

1. Do wiszącego pudełka włóż monetę jednogroszową, a do wagonika lub pudełka na samochodziku monetę jednozłotową. Puść pojazd i sfilmuj jego ruch.
2. Zważ wagonik lub samochodzik (wraz z zamocowaną na nim wewnętrzną częścią pudełka), nitkę z wiszącym pudełkiem i użytymi monetami.
3. Powtórz doświadczenie kilkakrotnie i za każdym razem zwiększaj liczbę monet włożonych do wagonika. Możesz dokładać od razu po kilka monet, aby w kolejnych pomiarach masa układu znacznie się różniła.
4. Sporządź wykresy zależności przyspieszenia od masy $a(m)$ i przyspieszenia od odwrotności masy $a(\frac{1}{m})$. Pamiętaj, że masa całego układu obejmuje także wiszące pudełko i jego zawartość. Który z narysowanych wykresów ma kształt prostej?

Z doświadczenia wnioskujemy, że przyspieszenie wywołane przez stałą siłę jest odwrotnie proporcjonalne do masy ciała – wykres zależności $a(\frac{1}{m})$ jest linią prostą. Zgadza się to z codziennymi obserwacjami. Na przykład mocno obciążony samochód rozpędza się wolniej niż pusty. Gdy połączymy wyniki obu ostatnich doświadczeń, możemy sformułować **drugą zasadę dynamiki**:

Przyspieszenie, z którym porusza się ciało o masie m , jest wprost proporcjonalne do siły wypadkowej $\vec{F}$ działającej na to ciało i odwrotnie proporcjonalne do jego masy. Kierunek i zwrot przyspieszenia są takie same jak kierunek i zwrot siły:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Wzór ten możemy zapisać również w przekształconej postaci:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Na podstawie tego wzoru definiujemy jednostkę siły: 1 N jest to siła, która ciału o masie 1 kg nadaje przyspieszenie $1 \frac{m}{s^2}$.

■ Ruch przyspieszony – różne możliwości

Poruszanie się z przyspieszeniem nie zawsze oznacza zwiększanie się wartości prędkości. Gdy siła wypadkowa (a więc i przyspieszenie) jest skierowana zgodnie z wektorem prędkości, wartość prędkości rośnie. Kiedy siła skierowana jest przeciwnie do prędkości – wartość prędkości maleje. Siła prostopadła do wektora prędkości powoduje zmianę jego kierunku – jest tak zawsze w ruchu jednostajnym po okręgu (więcej w lekcji 4.6). Jeśli siła nie jest ani równoległa, ani prostopadła do kierunku ruchu, możemy ją rozłożyć na składowe: równoległą i prostopadłą do tego kierunku.

Jeśli nie masz wagi, do wyznaczenia masy możesz wykorzystać dźwignię (patrz s. 244).



Jeśli $F = \text{const}$, przyspieszenie jest wprost proporcjonalne do odwrotności masy ciała: $a \sim \frac{1}{m}$.

Wartość przyspieszenia ciała jest tym większa, im większą siłę przyłożymy.

Jednostka siły – **niuton**
 $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s^2}$



Rys. 4.10. Siłę wypadkową $\vec{F}$ działającą na samochód możemy rozłożyć na składowe:

- ▶ $\vec{F}_1$ powodującą zwiększenie wartości prędkości,
- ▶ $\vec{F}_2$ powodującą zmianę kierunku ruchu

Składowa równoległa powoduje zmianę wartości prędkości, a składowa prostopadła – zmianę kierunku ruchu (rys. 4.10).

Niezależność ruchów

Możemy postąpić także inaczej – rozłożyć zarówno prędkość, jak i siłę na składowe zgodnie z kierunkami wybranego przez nas układu współrzędnych, np. składową poziomą i pionową. Każda ze składowych siły powoduje zmianę odpowiedniej składowej prędkości.

W ten właśnie sposób można wyjaśnić niezależność ruchów, o której mówiliśmy podczas omawiania rzutu poziomego, w którym siła ma kierunek pionowy. Jej pozioma składowa jest więc równa zero, dlatego ruch w kierunku poziomym jest jednostajny. Składowa pionowa tej siły jest równa ciężarowi ciała, dlatego ruch w pionie zachodzi tak jak spadek swobodny.

Masa jako miara bezwładności

Wiesz już, że bezwładność jest cechą ciała, z której powodu zmiana jego prędkości wymaga działania siły. Z drugiej zasady dynamiki wynika, że im większa jest masa ciała, tym trudniej zmienić jego prędkość. Bezwładność ciała jest więc tym większa, im większa jest jego masa.

Masa jest miarą bezwładności ciała.

Po tej lekcji powinieneś

- umieć zbadać doświadczalnie zależność przyspieszenia ciała od jego masy i działającej na nie siły;
- stosować pierwszą i drugą zasadę dynamiki do opisu zjawisk i rozwiązywania zadań.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYTE



■ Przykład

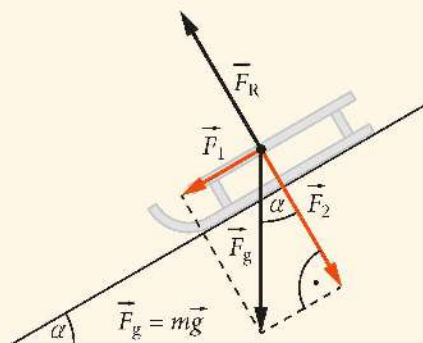
Sanki pozostawione na oblodzonym stoku zaczęły zjeżdżać i w ciągu pierwszych 2 s przebyły drogę 8 m. Ile wynosił kąt nachylenia stoku do poziomu? Pomiń tarcie.

Rozwiązanie

Najpierw obliczymy przyspieszenie sanek. Wyznamy je ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$s = \frac{1}{2} at^2 \rightarrow a = \frac{2s}{t^2}$$

Po podstawieniu danych liczbowych uzyskujemy: $a = \frac{2 \cdot 8 \text{ m}}{(2 \text{ s})^2} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



Przyspieszenie to było wywołane działaniem składowej siły ciężkości $\vec{F}_1$ równoległej do stoku, więc zgodnie z drugą zasadą dynamiki: $F_1 = ma$. Z rozłożenia siły ciężkości na składowe (patrz rys.) $F_1 = F_g \sin \alpha$, czyli $F_1 = mg \sin \alpha$. Przyrównujemy wzory na siłę F_1 i otrzymujemy:

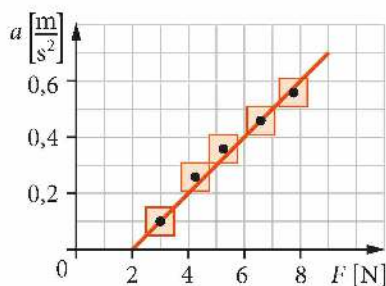
$$ma = mg \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{g}$$

Podstawiamy dane i uzyskujemy: $\sin \alpha = \frac{4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,41$.

Miarę kąta, którego sinus wynosi 0,41, możemy obliczyć za pomocą kalkulatora lub odczytać z tablic. Otrzymujemy wynik: $\alpha \approx 24^\circ$.

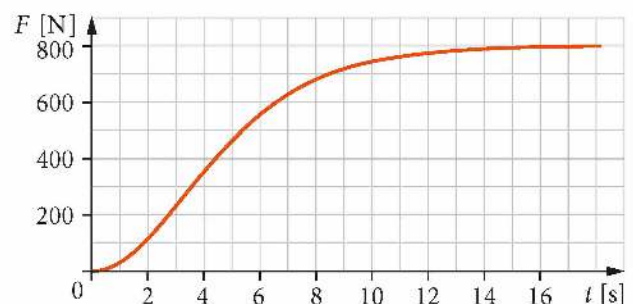
Odpowiedź: Stok był nachylony pod kątem około 24° .

1. Samochód jechał z prędkością $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a następnie w czasie 4 s rozprędził się do $18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Masa samochodu wynosiła 1500 kg. Oblicz siłę wypadkową, która spowodowała jego rozprędzenie.
2. Uczniowie badali zależność przyspieszenia pudełka przesuwającego się po stole od siły, którą jest ono ciągnięte. Wyniki pomiarów wraz z niepewnościami pomiarowymi zaznaczyli w układzie współrzędnych i dopasowali do nich prostą (rys. poniżej).



- a) Dlaczego dopasowana prosta nie przechodzi przez początek układu współrzędnych?
 - b) Wyznacz masę pudełka.
3. Na wykresie przedstawiono siłę oporu powietrza działającego na spadochroniarza przed otwarciem spadochronu w zależności od czasu. Naszkicuj w zeszycie wykres zależności przyspieszenia tego spadochroniarza od czasu. Przyjmij, że $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Wskazówka. Spadochroniarz przyspiesza do prędkości, przy której opór powietrza równoważy jego ciężar.



4. Wykonaj doświadczenie.
 - a) W dnie plastikowej butelki wykonaj otwór i przewlecz przez niego od zewnątrz nić przywiązaną do gwoździka lub zapalki.
 - b) Zatkaj palcem otwór w dnie butelki. Nalej do niej tyle wody, aby ją obciążyć, lecz jednocześnie nie nadwyrężyć nici, tzn. tyle, aby nić nie była zbyt mocno naciągnięta i nie urwała się pod ciężarem butelki. Zakręć butelkę.
 - c) Powieś butelkę na nici. Uważaj, aby poniżej nie znalazły się inne przedmioty, które mogłyby zostać uszkodzone.
 - d) Do końca butelki z nakrętką przymocuj taką samą nitkę.
 - e) Ciągnij w dół wolny koniec nitki: za pierwszym razem – stopniowo zwiększając siłę, za drugim – szarpnięciem.
 - f) Urywa się dolna czy górna nitka? Od czego to zależy?
 - g) Wyjaśnij wyniki doświadczenia.



4.4. Trzecia zasada dynamiki

Przypomnij sobie

- Oddziaływania ciał są zawsze wzajemne.
- Jeżeli ciało A działa na ciało B pewną siłą, to ciało B oddziałuje na ciało A siłą równą co do wartości, mającą ten sam kierunek, ale przeciwny zwrot i inny punkt przyłożenia.

Trzecia zasada dynamiki

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

$$F_{AB} = F_{BA}$$

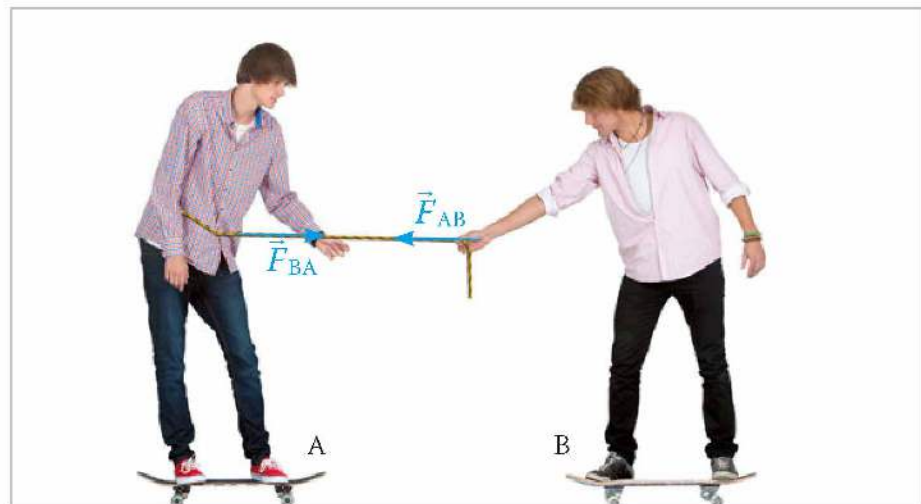
Siły te mają jednakową wartość, ten sam kierunek, ale przeciwne zwroty i różne punkty przyłożenia.

Wzajemność oddziaływań

Wykonajmy proste doświadczenie, aby przekonać się o wzajemności oddziaływań.

Doświadczenie 18

1. Dwie osoby stoją naprzeciw siebie na jednakowych deskorolkach. Powinny przyjąć taką pozycję, aby po ewentualnym zadziałaniu siły przesuwały się z niewielkimi oporami w przód lub w tył.
2. Jedna z osób obwiązuje się w pasie liną tak, aby pętla na niej się nie ciągała.
3. Druga osoba chwytą wolny koniec liny i ciągnie. Co obserwujecie?



W doświadczeniu obserwujemy, że poruszają się obie osoby. Zauważmy, że ruch odbywa się wzdłuż tej samej prostej, ale w przeciwne strony. Osoba A porusza się w prawo, a osoba B w lewo.

Fakt, że porusza się osoba obwiązana liną w pasie, nas nie dziwi. Ale kto ciągnie drugą z osób uczestniczących w doświadczeniu?

Ruch ten nie powinien jednak stanowić zaskoczenia, jeżeli przypomniemy sobie o wzajemności oddziaływań, o której mówiliśmy podczas omawiania lekcji 4.1.

Trzecia zasada dynamiki

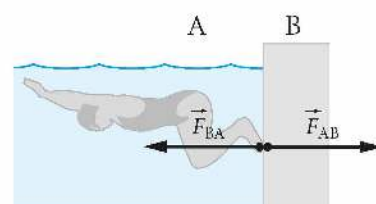
Wnioski z tego i innych doświadczeń prowadzą do **trzeciej zasady dynamiki** Newtona, która brzmi:

Gdy ciało A działa na ciało B siłą $\vec{F}_{AB}$, to ciało B działa na ciało A siłą $\vec{F}_{BA}$. Siły te mają jednakową wartość i jednakowy kierunek, ale przeciwne zwroty i różne punkty przyłożenia.

Warto zauważyć, że **działanie sił $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$ jest równoczesne** oraz że **ich natura jest jednakowa**: albo są to dwie siły grawitacyjne, albo dwie siły magnetyczne itd. Gdy szafa stoi na podłodze i działa na nią pewną siłą nacisku, wtedy podłoga także działa na szafę pewną siłą nacisku. Drugą z opisanych sił nazywamy czasami *siłą reakcji*, ale nazwa ta nie powinna sugerować, że chodzi o jakiś inny rodzaj siły.

Często skutków działania jednej z sił wzajemnego oddziaływania nie możemy bezpośrednio zaobserwować. Na przykład, gdy pływak odpycha się od ściany basenu przy zmianie kierunku ruchu, nie widzimy, że odpycha ją do tyłu. Ruchu ściany basenu nie obserwujemy, gdyż razem z nią pływak pcha cały budynek i całą Ziemię, a jak wiemy z poprzedniej lekcji, ogromna masa i bezwładność Ziemi sprawiają, że działaniem na nią siłą mięśni nie spowodujemy zauważalnej zmiany jej ruchu.

Trzecia zasada dynamiki zawsze towarzyszy nam, gdy chcemy wprowadzić w ruch własne ciało albo pojazd, w którym się znajdujemy. Aby poruszać się w określoną stronę, musimy zadziałać na jakieś inne ciało siłą skierowaną w stronę przeciwną. Zwróć uwagę na pływaka (rys. 4.11): chce on popłynąć w lewo, a siła, jaką działa na ścianę basenu, ma zwrot w prawo. Jeżeli płyniesz kajakiem, to wiosłami odpychasz wodę „do tyłu”, aby przemieszczać się „do przodu”. Podobnie opona samochodu działa na nawierzchnię szosy pewną siłą, a szosa popycha samochód do przodu.



Rys. 4.11. Pływak pcha ścianę siłą $\vec{F}_{AB}$, a ściana pcha pływaka siłą $\vec{F}_{BA}$. To ta druga siła powoduje ruch pływaka

Siły wzajemnego oddziaływania

Pamiętajmy, że **siły wzajemnego oddziaływania się nie równoważą**. Wiemy, że dwie siły równoważą się, jeśli mają jednakową wartość, jednakowy kierunek i przeciwne zwroty, działają wzdłuż jednej prostej oraz działają na to samo ciało. Siły wzajemnego oddziaływania spełniają pierwsze cztery spośród wymienionych warunków, ale nie spełniają ostatniego, gdyż są przyłożone do różnych ciał. Dlatego nigdy się nie równoważą.

Równoważenie się sił
s. 133

Po tej lekcji powinieneś

- stosować третią zasadę dynamiki do opisu zjawisk;
- wskazywać siły wzajemnego oddziaływania;
- wiedzieć, kiedy siły się równoważą.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZCIE



■ Przykład

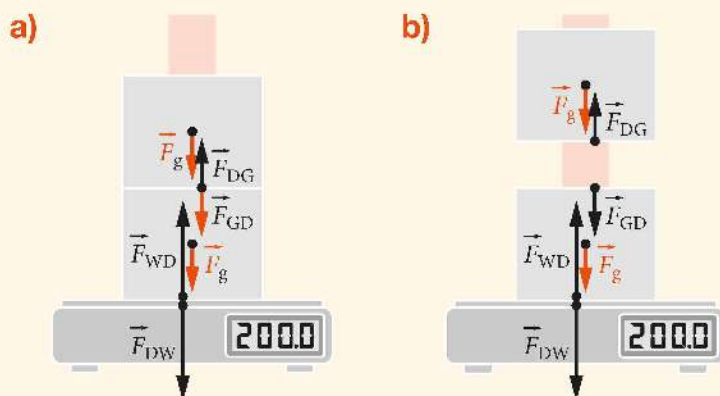
Na szalce wagi stawiamy naczynie w kształcie walca wykonane z materiału innego niż żelazo. Nakładamy na nie dwa magnesy w kształcie pierścieni ustawione do siebie różnymi biegunami (złączone – patrz rys. a). Odczytujemy wskazanie wagi. Następnie rozdzielamy magnesy i ponownie umieszczamy na walcu: dolny tak jak poprzednio, a górny odwrócony. Górny magnes unosi się w powietrzu, gdyż jego ciężar został zrównoważony przez odpychanie magnetyczne (patrz zdjęcie i rys. b). Czy (i jak) zmieni się wskazanie wagi?



Rozwiązanie

Waga służy do pomiaru masy, który w rzeczywistości odbywa się poprzez mierzenie nacisku ważonego ciała na szalkę.

Narysujmy wektory sił działających między opisanymi ciałami w obu częściach doświadczenia. Pominiemy walec, gdyż zawsze naciska on na wagę taką samą siłą, nie wpływa więc na ewentualną zmianę wskazań wagi.



Oznaczenia:

$\vec{F}_g$ – siła ciężkości działająca na

każdy z magnesów,

$\vec{F}_{GD}$ – siła, którą górny magnes

działa na dolny,

$\vec{F}_{DG}$ – siła, którą dolny magnes

działa na górny,

$\vec{F}_{DW}$ – siła oddziaływania dol-

nego magnesu na wagę,

$\vec{F}_{WD}$ – siła oddziaływania wagi

na dolny magnes

Uwaga. Wszystkie zaznaczone na rysunkach siły w rzeczywistości działają wzdłuż jednej prostej.

Odpowiadające sobie siły na rysunkach a) i b) mają takie same: wartość, kierunek i zwrot. Różna jest tylko przyczyna działania sił $\vec{F}_{GD}$ i $\vec{F}_{DG}$. W pierwszym przypadku każda z nich stanowi wypadkową siły przyciągania magnetycznego oraz siły nacisku jednego magnesu na drugi. W drugim jest to po prostu siła odpychania magnetycznego. Zauważ, że w obu przypadkach siła $\vec{F}_{DG}$ równoważy ciężar górnego magnesu. Wobec tego siła działająca na wagę jest w obu przypadkach taka sama, więc wskazanie wagi się nie zmienia.

Odpowiedź: Wskazanie wagi się nie zmienia.

1. Wśród poniższych przykładów A–G znajdź wszystkie pary:

- a) sił równoważących się,
- b) sił wzajemnego oddziaływania.

- A. Na stole leży książka. Ziemia przyciąga ją siłą grawitacji.
- B. Od dołu na książkę naciska stół.
- C. Ziemia przyciąga stół siłą grawitacji.
- D. Z góry na stół naciska książka.
- E. Z dołu na stół naciska podłoga.
- F. Stół naciska na podłogę.
- G. Na Ziemię działają siły grawitacji książki i stołu.

2. Po ustawieniu naczynia z wodą na szalce wagi jej wskazanie wyniosło 650 g. Następnie do naczynia z wodą włożono przywiązany do nitki przedmiot tonący w wodzie. Nitkę trzymano w ręku tak, że przedmiot po zanurzeniu nie dotykał dna ani ścianek naczynia, a woda nie wylała się z naczynia. Waga wskazała 750 g.

- a) Dlaczego zmieniło się wskazanie wagi, skoro przedmiot nie dotykał dna ani ścianek naczynia?
- b) Czy na podstawie danych zawartych w treści zadania można wyznaczyć masę przedmiotu zanurzonego w naczyniu? A jego objętość? Jeśli tak – wyznacz wskazane wielkości, jeśli nie – uzasadnij dlaczego.

Wskazówka. Przypomnij sobie ze szkoły podstawowej prawo Archimedesesa.

3. Wóz ciągnie konia do tyłu taką samą siłą, jaką koń ciągnie wóz do przodu. Dlaczego więc to wóz jedzie do przodu, a nie koń przesuwają się do tyłu?

Jest to stare zadanie. Jeśli chcesz, możesz je unowocześnić, zamieniając konia i wóz na traktor z przyczepą, ale problem fizyczny pozostanie bez zmian. Rozwiąż go.

4. Wykonaj doświadczenie.

- a) Weź siłomierz. Jeśli go nie masz, użyj gumki recepturki (w takim wypadku zmierz jej długość).
- b) Do końców siłomierza przywiąż nitki. Przewieś je przez dwa krańce stołu (patrz zdjęcie) albo przez bloczki. Na nitkach powieś dwa jednakowe przedmioty. Odczytaj wskazania siłomierza albo zmierz, o ile rozciągnęła się gumka.
- c) Zastanów się, jakie będzie wskazanie siłomierza, jeśli zdejmiesz jeden z przedmiotów i przymocujesz koniec nitki do statywu lub krzesła.
- d) Wykonaj czynności opisane w punkcie c) i odczytaj wskazanie siłomierza. Czy twoje przypuszczenia się potwierdziły?

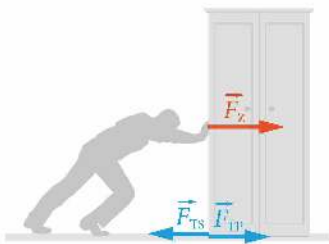


4.5. Siła tarcia

Przypomnij sobie

- Tarcie to siła oporu ruchu, która utrudnia przemieszczanie się względem siebie dwóch stykających się ciał.
- Zwrot wektora siły tarcia jest przeciwny do zwrotu wektora prędkości ciała. Jeśli ciało spoczywa, to zwrot wektora siły tarcia jest przeciwny do zwrotu wektora siły działającej na ciało.

Poznanie i badanie oporów ruchu jest ważne zarówno ze względów naukowych, jak i technicznych. Nieprawidłowe wnioski Arystotelesa (patrz s. 141) dotyczące wpływu oporu ośrodka na ruch stanowiły przyczynę naukowych nieporozumień przez kilkanaście wieków. Techniczne problemy związane z oporami ruchu to ścieranie się stykających się powierzchni oraz zużywanie dodatkowej energii. Jednak w wielu sytuacjach zwiększenie tarcia jest użyteczne. Bez niego przecież nie moglibyśmy się poruszać.



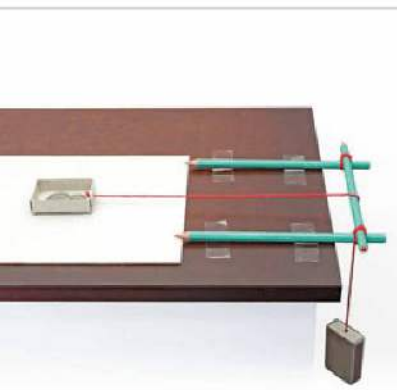
Rys. 4.12. Podłoga działa na szafę siłą tarcia $\vec{F}_{TS}$, która równoważy przyłożoną do szafy siłę zewnętrzną $\vec{F}_z$. Szafa także działa na podłogę siłą tarcia $\vec{F}_{TP}$.

■ Tarcie statyczne i kinetyczne

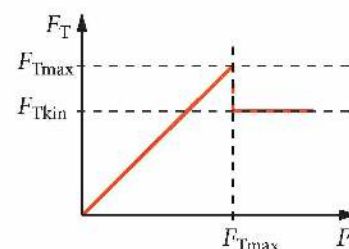
Gdy chcemy wprowadzić w ruch ciało stykające się z innym ciałem, np. skrzynkę stojącą na asfaltowej jezdni, między nimi pojawiają się siły tarcia. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki na każde z tych ciał działa siła tarcia o takiej samej wartości.

Doświadczenie 19

1. Przygotuj układ doświadczalny podobny do wykorzystywanego w doświadczeniu na s. 142. Tym razem jednak zamiast wagonika do sznurka przymocuj wewnętrzną część pudełka od zapalek.
2. Połóż pojemnik z wewnętrznej części pudełka od zapalek na szorstkim podłożu, np. tekturze. Włóż do niego dwie monety jednozłotowe (patrz zdjęcie).
3. Do wiszącego pudełka włóż monetę jednogroszową i przytrzymaj pojemnik. Puść go dopiero, gdy wiszące pudełko przestanie się kołysać.
4. Dodawaj do wiszącego pojemnika kolejne monety, aż pojemnik leżący na tekturze zacznie się przesuwac (pamiętaj, aby za każdym razem ostrożnie puszczać pojemnik dopiero wtedy, gdy wiszące pudełko przestanie się poruszać).
5. Ostrożnie (tak, aby nie wprowadzić w ruch pojemnika leżącego na stole) wyjmij jedną z monet z wiszącego pudełka. Co obserwujesz?
6. Przesuń delikatnie pojemnik po tekturze. Co widzisz?
7. Powtórz doświadczenie, ale zamiast tektury użyj książki z lakierowaną okładką. Jak zmieniły się wyniki?



W doświadczeniu zaobserwowaliśmy, że początkowo pudełko pozostawało w spoczynku, mimo że działała na nie coraz większa siła. Działo się tak dlatego, że gdy na spoczywające ciało działała coraz większa siła zewnętrzna, zwiększała się także siła tarcia, która ją równoważyła (rys. 4.13). Trwało to do momentu osiągnięcia przez przykładaną siłę wartości równej wartości $F_{T\max}$, której siła tarcia nie może przekroczyć. Gdy siła zewnętrzna F_z jest większa od $F_{T\max}$, ciało zaczyna się poruszać. Z naszego doświadczenia wiemy, że wartość siły, jaką trzeba przyłożyć, aby utrzymać ciało w ruchu jednostajnym, jest mniejsza niż $F_{T\max}$. Dlatego musimy wyróżnić dwa rodzaje tarcia: statyczne i kinetyczne.



Rys. 4.13. Wykres zależności siły tarcia $\vec{F}_T$ od przyłożonej siły zewnętrznej F

Siła tarcia statycznego może przyjmować różne wartości wynoszące od zera do $F_{T\max}$. **Siła tarcia kinetycznego** F_{Tkin} jest mniejsza niż maksymalna wartość tarcia statycznego $F_{T\max}$.

Najprostszym przykładem tarcia statycznego jest tarcie pomiędzy podłożem a stojącym na nim przedmiotem, do którego przyłożyliśmy zewnętrzną siłę, gdy chcieliśmy przesunąć przedmiot po podłożu. Na przykład kiedy człowiek próbuje lekko przesunąć but po podłodze, między podeszwą a podłogą zaczynają działać siły tarcia. Kiedy człowiek zacznie iść, tarcie statyczne nie zniknie – podeszwa i podłoga nie poruszają się przecież względem siebie.

Tarcie między butami idącego człowieka a podłogą jest więc przykładem tarcia statycznego (rys. 4.14). Fakt, że człowiek się porusza, nie ma znaczenia. Ważne jest to, że stykające się ciała (podeszwa i podłoga) nie poruszają się względem siebie.

Podobnie jest z oponą samochodu i asfaltem. Jeśli tylko auto nie wpadnie w poślizg, działa między nimi siła tarcia statycznego, dzięki której pojazd może się poruszać. Dlatego właśnie na śliskiej nawierzchni trudno jest ruszyć.

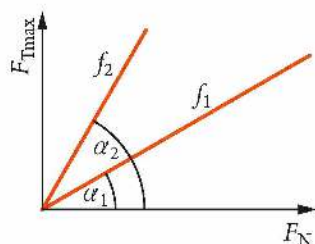


Rys. 4.14. Dzięki sile tarcia statycznego działającej na nogę $\vec{F}_{TN}$ możliwy jest ruch człowieka. Łatwo zaobserwować skutki braku siły tarcia, gdy próbujemy chodzić po lodzie

Współczynniki tarcia

Doświadczenie 20

1. Wykorzystaj układ z poprzedniego doświadczenia.
2. Do wiszącego pudełka wkładaj monety jednogroszowe do chwili, aż układ zacznie się poruszać.
3. Ciężar leżącego na stole pojemnika z monetami jest równy sile F_N nacisku pojemnika na podłoże. Przyjmijmy, że ciężar wiszącego pudełka z monetami jest w przybliżeniu równy maksymalnej wartości tarcia statycznego $F_{T\max}$. Oszacuj niepewność wyznaczenia F_N i $F_{T\max}$. Zapisz wartości F_N i $F_{T\max}$.
4. Powtórz doświadczenie kilka razy, za każdym razem dokładając do pojemnika na stole po dwie monety.
5. Sporządź wykres zależności $F_{T\max}(F_N)$. Wyznacz jego współczynnik kierunkowy.



Rys. 4.15. Wykres zależności maksymalnej wartości tarcia statycznego od siły nacisku dla $f_1 = 0,4$ i $f_2 = 3$

Tabela 4.1

Powierzchnie	f_s	f_k
Stal po lodzie	0,03	0,014
Stal po stali	0,2	0,1
Lina po drewnie	0,5	0,3
Buty po lodzie	0,1	0,05
Opony po suchym asfalcie	1,0	0,75
Opony po mokrym asfalcie	0,7	0,5
Opony po zaśnieżonym asfalcie	0,3	0,02
Drewno po drewnie	0,5	0,3
Lód po lodzie	0,1	0,02
Szkło po szkłe	0,9	0,4
Narta po śniegu	0,14	0,1

Na podstawie analizy wyników doświadczenia możemy stwierdzić, że wykres $F_{T\max}(F_N)$ jest linią prostą (rys. 4.15). Oznacza to, że maksymalna siła tarcia statycznego jest wprost proporcjonalna do siły nacisku:

$$F_{T\max} = f_s \cdot F_N$$

gdzie f_s nazywamy **współczynnikiem tarcia statycznego**. Jest on równy współczynnikowi kierunkowemu prostej $F_{T\max}(F_N)$ (patrz rys. 4.15). Współczynnik tarcia zależy od rodzaju trących powierzchni, na przykład dla gumy na papierze ściernym jest wielokrotnie większy niż dla stali na lodzie. Zwróć uwagę, że wyrażenie $f_s \cdot F_N$ pozwala obliczyć tylko maksymalną wartość siły tarcia statycznego. Jeśli zewnętrzna siła F_z jest mniejsza od $F_{T\max} = f_s \cdot F_N$, to tarcie statyczne jest równe F_z .

Jeśli zbada się siłę potrzebną do utrzymania ciała w ruchu jednostajnym, okaże się, że w przypadku tarcia kinetycznego zachodzi podobna zależność:

$$F_T = f_k \cdot F_N$$

gdzie f_k to współczynnik tarcia kinetycznego.

Współczynnik ten można wyznaczyć na podstawie doświadczenia podobnego do opisanego na poprzedniej stronie. W tym celu należy ustalić, jakie obciążenie jest potrzebne, aby lekko poruszone pudełko się nie zatrzymywało, ale poruszało jednostajnie.

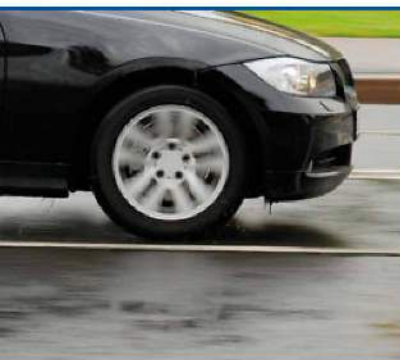
Jak już wiesz, tarcie kinetyczne jest mniejsze od maksymalnej wartości tarcia statycznego, co oznacza, że $f_k < f_s$.

Mówiliśmy, że współczynniki tarcia zależą od rodzaju trących o siebie powierzchni. W tabeli 4.1 podano przybliżone wartości przykładowych współczynników tarcia.

We wzorach na wartość tarcia kinetycznego i maksymalną wartość tarcia statycznego nie występuje powierzchnia styku ciał. I rzeczywiście, tarcie od niej nie zależy. W praktyce mogą jednak występować bardziej złożone sytuacje. Na przykład dużą skrzynię łatwiej ciągnąć po śniegu, gdy leży na boku o największej powierzchni. Wtedy w mniejszym stopniu zapada się ona w podłoże i łatwiej ją przesuwać.

A to ciekawe

Gdy samochód jedzie bez poślizgu, między oponą a asfaltem występuje tarcie statyczne. Jeśli natomiast pojazd wpadnie w poślizg – mamy do czynienia z tarcie kinetycznym. Maksymalne tarcie statyczne jest większe od kinetycznego, więc szybciej można zatrzymać samochód, który jedzie bez poślizgu. Fakt ten wykorzystano w układach hamulcowych ABS, które zapobiegają blokowaniu się kół poprzez krótkotrwałe zmniejszenie siły, z jaką klocki hamulcowe działają na tarcze koła.



Prawa fizyki mają różny zakres stosowalności. Na przykład zasada zachowania energii obowiązuje ściśle we wszystkich znanych zjawiskach. Natomiast wzory pozwalające obliczyć siłę tarcia to reguły przybliżone, oparte na modelu nieuwzględniającym dodatkowych czynników, na przykład zapadania się przesuwanej skrzyni w śniegu.

■ Wyznaczanie współczynnika tarcia za pomocą równi pochyłej

W doświadczeniu 20. wyznaczaliśmy współczynnik tarcia statycznego. Wiemy, że współczynnik ten jest równy współczynnikowi kierunkowemu prostej opisującej zależność $F_{T\max}(F_N)$. Wartość tego współczynnika możemy też wyznaczyć w prosty sposób za pomocą równi pochyłej.



Doświadczenie 21 – obowiązkowe

Wyznaczanie wartości współczynnika tarcia

1. Przygotuj przedmiot, który posłuży za równię pochyłą, np. sztywną tekturę, oraz kątomierz i niewielki klocek.
2. Ustaw kątomierz obok równi tak, aby można było odczytywać jej kąt nachylenia.
3. Na równi umieść klocek.
4. Powoli zwiększaj kąt nachylenia równi.
5. W chwili, gdy klocek zacznie się zsuwać, odczytaj kąt nachylenia równi.



Siłę $\vec{F}_g$ działającą na ciało na równi pochyłej rozkładamy na równoległą do równi składową $\vec{F}_1$, która powoduje zsuwanie się ciała po równi, i prostopadłą do powierzchni równi składową $\vec{F}_2$, która jest równa sile nacisku na równię $\vec{F}_N$.

Obliczmy współczynnik tarcia statycznego, korzystając ze wzoru:

$$f_s = \frac{F_{T\max}}{F_N}$$

Jeśli przeprowadziliśmy doświadczenie starannie, to z bardzo dobrym przybliżeniem możemy przyjąć, że:

$$F_{T\max} = F_1$$

Składowa równoległa do równi F_1 wynosi:

$$F_1 = F_g \sin \alpha$$

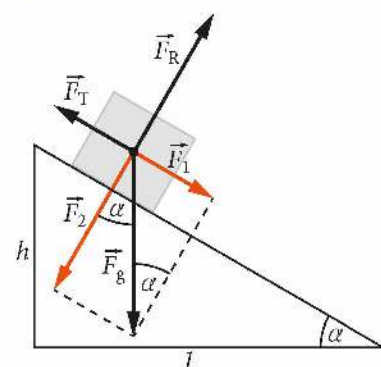
Składowa prostopadła do równi F_2 jest równa:

$$F_2 = F_N = F_g \cos \alpha$$

Po podstawieniu $F_{T\max}$ i F_N do wzoru na współczynnik tarcia statycznego otrzymujemy:

$$f_s = \frac{F_g \sin \alpha}{F_g \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Rozkład sił na równi s. 136–137



Rys. 4.16. Rozkład sił na równi pochyłej dla zsuwającego się klocka

Dodatek matematyczny s. 154

W doświadczeniu zmierzaliśmy kąt nachylenia równi, a jego tangens możemy odczytać z tablic lub obliczyć na kalkulatorze. Gdybyśmy nie znali miary kąta α , tangens kąta α moglibyśmy również obliczyć – po dokonaniu dodatkowych pomiarów – jako stosunek wysokości równi h do długości l jej podstawy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l} = f_s$$

Podobnie możemy wyznaczyć współczynnik tarcia kinetycznego. W tym wypadku należy doświadczalnie wyznaczyć kąt, przy którym pchnięte ciało będzie zsuwać się ruchem jednostajnym, i wykonać obliczenia dla tego kąta.

Dodatek matematyczny

■ Funkcja trygonometryczna tangens

W lekcji 3.2 przedstawiliśmy funkcje trygonometryczne sinus i cosinus (patrz s. 103). Kolejną funkcją trygonometryczną jest tangens. Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym jest równy ilorazowi przyprostokątnej przeciwległej danemu kątowi i przyprostokątnej przyległej do tego kąta. Dla kąta α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Na stronie 103 powiedzieliśmy, że:

$$a = c \sin \alpha$$

$$b = c \cos \alpha$$

Można zatem zapisać:

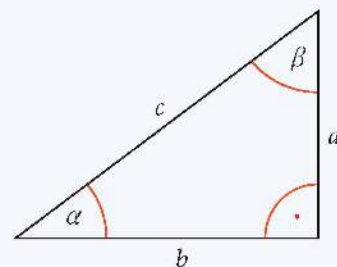
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{c \sin \alpha}{c \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Analogicznie dla kąta β zapisujemy:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

Tangensa używamy także, gdy podajemy nachylenie drogi. Na rysunku obok widzisz znak drogowy ostrzegający o stromym podejździe. Umieszczona pod nim tabliczka „13%” oznacza, że tangens kąta nachylenia zbocza do poziomu wynosi 13% (czyli 0,13).

Podobnie współczynnik kierunkowy funkcji liniowej jest miarą nachylenia jej wykresu względem osi x . Mierzy się go tak, jak na znakach drogowych. Na przykład funkcja $y = 3x + 5$ jest prostą nachyloną względem osi x pod kątem, którego tangens wynosi 3.



Rys. 4.17. W trójkącie prostokątnym można wyznaczyć funkcje trygonometryczne kątów α i β



■ Tarcie poślizgowe i tarcie toczone

Mówi się czasem, że najważniejszym wynalazkiem ludzkości jest koło. Nie chodzi tutaj jednak o figurę geometryczną, ale o odkrycie, że siła tarcia zależy od tego, czy ciała się po sobie ślizgają czy toczą. Z codziennego doświadczenia wiemy, że gdy jedno ciało toczy się po drugim, to siła tarcia jest wielokrotnie mniejsza. Z tego powodu mówimy o tarcu tocznym.

W urządzeniach mechanicznych stosuje się łożyska, czyli układy kulek lub walców toczących się w odpowiedniej obudowie. Pozwala to zminimalizować straty energii związane z występowaniem sił tarcia. W największych łożyskach znajdują się walce o metrowej średnicy. Na takich łożyskach zamocowane są przęsła największych mostów, umożliwiające ich poruszanie się względem filarów. Najmniejsze łożyska, np. te w nanosilniczkach, mają rozmiary rzędu mikrometrów.



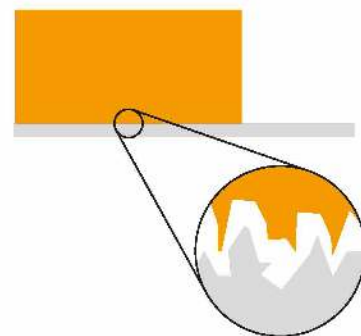
Rys. 4.18. Łożyska pozwalają zamienić tarcie poślizgowe na toczne

■ Mikroskopowa przyczyna występowania sił tarcia

Zbadaliśmy, **jak** działają siły tarcia. Aby wyjaśnić, **dlaczego** działają, musimy przyjrzeć się trącym powierzchniom w dużym powiększeniu. Zauważymy wówczas nierówność nawet na pozornie gładkich powierzchniach. Domyślamy się, że im bardziej chropowate będą dwie powierzchnie, tym siła tarcia między nimi będzie większa (rys. 4.19). Tarcie zależy od nierówności występujących na trących o siebie powierzchniach. Wydawałoby się, że łatwo je zlikwidować – wystarczy wypolerować powierzchnie tak dokładnie, aby były idealnie gładkie. Rzeczywiście, w miarę polerowania współczynnik tarcia będzie malał, ale tylko do pewnego momentu.

Gdy powierzchnie staną się bardzo gładkie, współczynnik tarcia, a więc i siła tarcia, ponownie staną się bardzo duże. Za taki efekt, sprzeczny z intuicją, odpowiedzialne są siły oddziaływań między atomami i cząsteczkami.

W rzeczywistości powierzchnie, które wydają nam się gładkie, w skali mikroskopowej są bardzo nierówne, a powierzchnia styku jest niewielka. Stosunkowo łatwo można więc zrywać wiązania powstające między atomami obu powierzchni. Gdyby dwie powierzchnie były idealnie gładkie i idealnie przylegały do siebie, to oddziaływania międzyatomowe byłyby bardzo duże, a siła tarcia pomiędzy dwiema takimi powierzchniami – ogromna.



Rys. 4.19. Przyczyną tarcia są nierówności na stykających się powierzchniach (powiększenie ok. 10 tys. razy)

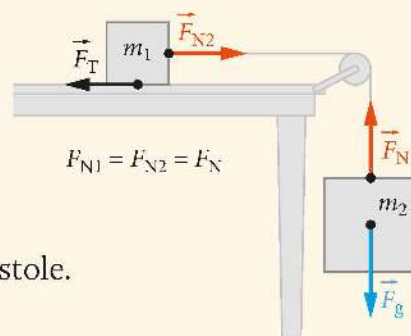
Po tej lekcji powinieneś

- wiedzieć, czym są: tarcie statyczne, tarcie kinetyczne, tarcie poślizgowe, tarcie toczone;
- posługiwać się współczynnikami tarcia i wyznaczać go doświadczalnie.



■ Przykład

Na stole leży drewniany klocek o masie $m_1 = 1$ kg. Współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a stołem jest równy $f_k = 0,6$. Do klocka jest przymocowana nić, którą przerzucono przez bleczek. Na drugim końcu nici jest zawieszony ciężarek o masie $m_2 = 2$ kg.



- Oblicz przyspieszenie, z jakim będzie się poruszał klocek na stole.
- Oblicz siłę naciągu nitki.

Pomiń masę nitki i blecza oraz tarcie nitki o bleczek.

Rozwiązanie

Na klocek poruszający się po stole działają dwie pary sił: jedna para w kierunku poziomym, a druga – w pionowym. Siły działające pionowo, tj. siłę ciężkości i siłę reakcji podłoża, możemy pominąć, ponieważ siły te się równoważą. Z kolei w kierunku poziomym na klocek działają siła tarcia kinetycznego o wartości $F_T = f_k m_1 g$ oraz siła naciągu nitki o wartości F_N , które się nie równoważą, przez co klocek porusza się z przyspieszeniem. Oznaczmy to przyspieszenie jako a i zapiszmy drugą zasadę dynamiki dla klocka:

$$m_1 a = F_N - F_T$$

Na ciężarek zawieszony na nici działają dwie siły: siła ciężkości o wartości $F_g = m_2 g$ oraz siła naciągu nitki o wartości F_N , co zgodnie z drugą zasadą dynamiki możemy zapisać:

$$m_2 a = F_g - F_N$$

- Po zestawieniu powyższych równań otrzymujemy układ dwóch równań:

$$\begin{cases} m_1 a = F_N - F_T \\ m_2 a = F_g - F_N \end{cases}$$

(przyspieszenia obu klocków mają taką samą wartość).

Gdy podstawimy wzory na siłę tarcia i siłę ciężkości, uzyskamy zapis:

$$\begin{cases} m_1 a = F_N - f_k m_1 g \\ m_2 a = m_2 g - F_N \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami:

$$(m_1 + m_2)a = m_2 g - f_k m_1 g \rightarrow a = \frac{(m_2 - f_k m_1)g}{m_1 + m_2}$$

Po podstawieniu danych i wykonaniu obliczeń otrzymujemy przyspieszenie klocka:

$$a = 4,58 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- Do wyznaczenia siły naciągu nici wykorzystamy równanie $m_2 a = m_2 g - F_N$.

Przekształcamy je i otrzymujemy:

$$F_N = m_2 g - m_2 a = m_2 (g - a)$$

Po podstawieniu danych z zadania i wykonaniu obliczeń mamy:

$$F_N \approx 10,5 \text{ N}$$

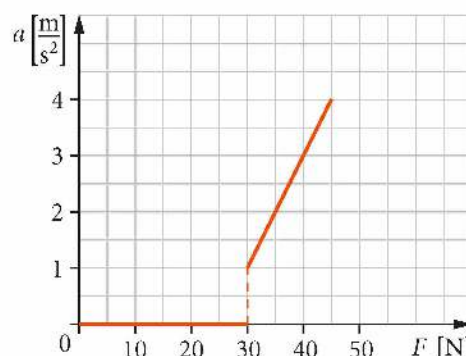
Odpowiedź: Klocek będzie się przesuwiał z przyspieszeniem $4,58 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a siła naciągu nici wyniesie $10,5 \text{ N}$.

1. Czy lokomotywa ciągnąca pociąg mogłaby mieć stukrotnie mniejszą masę i nadal spełniać swoje zadanie? Uzasadnij swoją odpowiedź.
2. Na drewnianym stole leży drewniany klocek o masie 2 kg.
 - a) Jaką siłą trzeba go pchać, aby się poruszył?
 - b) Jaką siłą trzeba go pchać, aby utrzymać go w ruchu?
3. Współczynnik tarcia statycznego opony o suchy asfalt wynosi 1,0. Oblicz, jakie może być maksymalne przyspieszenie samochodu na suchej poziomej drodze, jeśli jego silnik ma dostatecznie dużą moc.

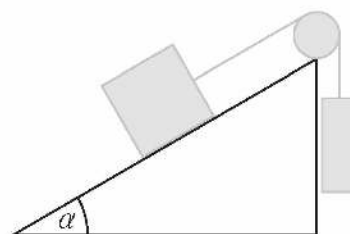
Wskazówki:

- ▶ To nieprawda, że przyspieszenie samochodu może być dowolnie duże, jeśli silnik jest odpowiednio mocny. Zastanów się dlaczego.
 - ▶ Przyjmij, że nacisk samochodu na szosę jest równy jego ciężarowi. Pomijamy działanie np. spojlerów w samochodach wyścigowych, dociskających pojazd do podłoża.
 - ▶ Możesz założyć, że samochód ma napęd na cztery koła.
4. Ze stoku o kącie nachylenia 20° szusuje (czyli zjeżdża prosto w dół) narciarz. Jego masa wraz z ekwipunkiem to 75 kg. Ile wyniesie jego przyspieszenie, jeśli pominiemy tarcie? Ile będzie równe przyspieszenie, jeśli przyjmiemy, że siła tarcia wynosi 35 N? Ile wyniesie w takim przypadku współczynnik tarcia kinetycznego?
 5. Do pudełka z książkami stojącego na podłożu przyłożono poziomo siłę, której wartość rośnie w czasie. Na wykresie przedstawiono

przyspieszenie pudełka w zależności od przyłożonej siły.



- a) Dlaczego przyspieszenie rośnie skokowo dla siły o wartości 30 N?
 - b) Wyznacz na podstawie wykresu masę pudełka, współczynnik tarcia statycznego i współczynnik tarcia kinetycznego. Przyjmij $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
6. Na równi pochyłej o kącie nachylenia 30° leży klocek o masie 400 g. Współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a równią wynosi 0,2. Do klocka przyczepiono nić, która przechodzi przez bloczek znajdujący się na szczycie równi i ślizga się po bloczku bez tarcia. Drugi koniec nici obciążono ciężarkiem o masie 350 g.
 - a) Oblicz przyspieszenie, z jakim będzie się poruszał klocek.
 - b) Oblicz przyspieszenie, z jakim poruszałby się klocek, gdyby przemieszczał się po równi bez tarcia.



4.6. Siła dośrodkowa

Przypomnij sobie

- Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona przyczyną zmiany prędkości jest niezrównoważona siła.
- Wartość przyspieszenia ciała poruszającego się po okręgu o promieniu r z prędkością o stałej wartości v wyraża się wzorem $a = \frac{v^2}{r}$.

Ruch po okręgu s. 111

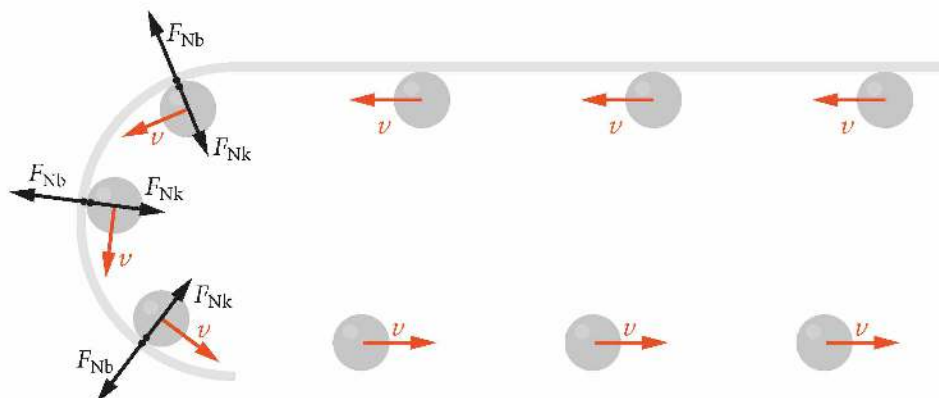
W rozdziale 3.4 powiedzieliśmy, że ruch po okręgu jest szczególnym rodzajem ruchu, ponieważ nawet jeśli wartość wektora prędkości liniowej ciała jest stała, to zmianie ulega jego kierunek i zwrot. Zastanówmy się, jaka siła sprawia, że ciało może się poruszać po okręgu.

Doświadczenie 22

1. Kawalek podłużnej blaszki o długości około 1 m zwiń na jednym końcu w pętlę w kształcie łuku okręgu i połóż na stole. Jeśli blaszka jest lekka, przymocuj ją do stołu plasteliną.
2. Wzdłuż prostego odcinka blaszki puść kulkę w stronę zakrzywionego końca. Obserwuj jej ruch.



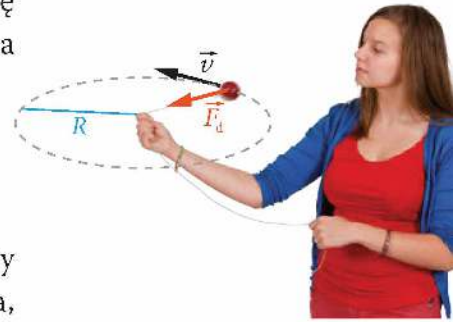
Opory ruchu są niewielkie, dlatego możemy przyjąć, że wartość prędkości kulki w trakcie doświadczenia jest stała. Obserwujemy, że kulka najpierw porusza się ruchem prostoliniowym, a gdy kończy się prosty odcinek blaszki, zaczyna się poruszać po okręgu. Jaka siła zmusza ją do zmiany kierunku prędkości? Kulka naciska na blaszkę siłą $\vec{F}_{Nb}$, więc zgodnie z trzecią zasadą dynamiki blaszka naciska na kulkę siłą $\vec{F}_{Nk}$ (patrz rys. poniżej).



Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki $F_{Nb} = F_{Nk}$, siły mają ten sam kierunek, przeciwne zwroty i są przyłożone do różnych ciał.

Rys. 4.20. Siła, jaką blaszka naciska na kulkę, powoduje zmianę kierunku jej ruchu

To właśnie siła $\vec{F}_{Nk}$ powoduje zmianę kierunku ruchu kulki. Gdy kończy się blaszka, kulka znowu porusza się ruchem prostoliniowym, gdyż nie ma już ciała, którego oddziaływanie zakrzywiałoby tor jej ruchu.



Rys. 4.21. Siła dośrodkowa to siła powodująca ruch jednostajny po okręgu. Zawsze działa w kierunku środka okręgu

■ Siła dośrodkowa i przyspieszenie dośrodkowe

Analizując doświadczenie 22., zauważyliśmy, że w wyniku działania siły $\vec{F}_{Nk}$ kulka porusza się po okręgu, ale wartość prędkości się nie zmienia, ponieważ działająca siła jest prostopadła do kierunku ruchu. Siła ta – podobnie jak siła sprężystości sznurka działająca na wirujący ciężarek (patrz rys. 4.21) – jest zwrócona do środka okręgu, dlatego nazywamy ją **siłą dośrodkową**. To określenie oznacza tylko **skutek** działania siły (ruch po okręgu), ale nie mówi nam nic o jej naturze. Rolę siły dośrodkowej może odgrywać siła grawitacji, siła naciągu nici itd.

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki kierunek i zwrot przyspieszenia wywołanego przez siłę są zgodne z kierunkiem i zwrotem tej siły. Dotyczy to nie tylko ruchu prostoliniowego, lecz także krzywoliniowego. Skorzystamy z tej zasady i wyprowadzimy wzór na siłę dośrodkową. W lekcji 3.5 pokazaliśmy, że wartość **przyspieszenia dośrodkowego** ciała poruszającego się z prędkością liniową o stałej wartości v po okręgu o promieniu r wyraża się wzorem:

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$

Jeśli to wyrażenie podstawimy do wzoru $F = ma$, wynikającego z drugiej zasady dynamiki, otrzymamy wyrażenie na wartość siły dośrodkowej:

$$F_d = \frac{mv^2}{r}$$

Wzór ten pozwala obliczyć siłę dośrodkową F_d , która jest potrzebna do tego, aby ciało poruszało się z określoną prędkością po danym okręgu.

Ponieważ wiemy, że $v = \omega r$ (patrz s. 113), możemy zapisać wzory na przyspieszenie dośrodkowe i siłę dośrodkową w zależności od prędkości kątowej:

$$a_d = \omega^2 r,$$

$$F_d = m\omega^2 r.$$

■ Od czego zależy siła dośrodkowa

Z wyprowadzonego wyżej wzoru na siłę dośrodkową wynika, że zależy ona od promienia okręgu, wartości prędkości liniowej i masy ciała. Sprawdźmy teraz, czy te zależności zgadzają się z naszą intuicją.

Jednym z przykładów siły dośrodkowej jest siła tarcia między oponami skręcającego samochodu a szosą.

Często przed zakrętem kierowca musi zwolnić, gdyż przy dużej prędkości do zmiany kierunku ruchu na zakręcie potrzebna jest duża siła dośrodkowa. W tym przypadku jest nią siła tarcia, która może osiągnąć jedynie pewną maksymalną wartość. Jeśli maksymalna wartość siły tarcia jest za mała, to samochód nie pokona zakrętu o danym promieniu i wypadnie z drogi.

Im większa prędkość v , tym większa musi być siła F_d , aby pokonać zakręt, przy $r = \text{const}$.

Im mniejszy promień r ,
tym większa musi być
siła F_d , aby pokonać
zakręt, przy $v = \text{const.}$

Kolejny czynnik, od którego zależy siła dośrodkowa, to promień okręgu. Przypatrz się zdjęciom. Zakręt na tym po lewej stronie jest łukiem o dużym promieniu. Na zdjęciu po prawej zakręty są ostrzejsze – ich łuki mają znacznie mniejszy promień. Zakręt na zdjęciu po lewej można bezpiecznie pokonać z dość dużą prędkością, ale próba pokonania w ten sam sposób ostrych zakrętów na zdjęciu po prawej najpewniej skończyłaby się wypadkiem. Stałoby się tak dlatego, że do pokonania ostrego zakrętu z dużą prędkością potrzebna jest większa siła dośrodkowa niż w przypadku łagodnego zakrętu. A jak już powiedzieliśmy, siła tarcia – pełniąca tutaj funkcję siły dośrodkowej – może osiągnąć tylko pewną określoną wartość maksymalną.



Rys. 4.22. Łagodny zakręt o dużym promieniu okręgu i ostry – o małym promieniu

Ostatnim czynnikiem, od którego zależy siła dośrodkowa, jest masa. Zgodnie ze wzorem: im większa jest masa, tym większa musi być siła dośrodkowa. Samochód nie będzie dla nas najlepszym przykładem, bo zwiększenie jego masy powoduje również zwiększenie maksymalnej siły tarcia między oponami a jezdnią. Wyobraźmy sobie zatem piłkę i kulę do kręgli toczące się z jednakową prędkością liniową. Jeśli mielibyśmy przyłożyć do każdej z nich dłoń i wywierać pewien stały nacisk w taki sposób, by kula skręcała po łuku o określonym promieniu, intuicja podpowiada nam, że w przypadku kuli do kręgli będziemy potrzebować większej siły.

prędkość liniowa

$$v = \frac{s}{t}$$

► drogą s jest obwód
okręgu $s = 2\pi r$

► czas, w którym ciało
zatacza okrąg, jest
równy okresowi $t = T$

► okres jest równy
odwrotności
częstotliwości $T = \frac{1}{f}$

► zatem:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$

■ Badanie siły dośrodkowej

Intuicyjnie rozumiemy zależności między siłą dośrodkową a prędkością liniową, promieniem okręgu i masą. Teraz sprawdzimy te zależności doświadczalnie. Bezpośredni pomiar prędkości liniowej w ruchu po okręgu jest trudny, zatem w doświadczeniu będziemy mierzyć częstotliwość, z jaką ciało wykonuje obroty. Znając częstotliwość, możemy obliczyć wartość prędkości liniowej ze wzoru: $v = 2\pi r f$.



Doświadczenie 23 – obowiązkowe

Badanie siły dośrodkowej

1. Przygotuj: półlitrową plastikową butelkę z wodą, elektroniczną wagę kuchenną, pół metra żyłki wędkarskiej albo śliskiej nitki, rurkę ze starego długopisu, kilkucentymetrowy kawałek kolorowej nitki, linijkę, klipsy biurowe lub inne podobne przedmioty o masie kilku gramów każdy, dające się łatwo przywiązywać i łączyć, metronom, np. online albo w telefonie komórkowym.
2. Schemat doświadczenia przedstawiono na fotografii. Wystarczą nieznaczne ruchy dłoni, aby wprawić klips na żyłce w szybki ruch po okręgu. Zawieszana kolorowa nitka pozwala utrzymać stały promień okręgu, a na podstawie wskazań wagi można wyznaczyć siłę, z jaką żyłka jest ciągnięta przez klips (jak w zadaniu 4b s. 132). Zgodnie z III zasadą dynamiki siła ta jest co do wartości równa sile dośrodkowej, z jaką żyłka ciągnie klips.
3. Poruszaj dłonią tak, aby częstotliwość ruchu klipsa na żyłce była równa częstotliwości kliknięć metronomu (po kilku próbach powinienś nabrać wprawy). Wyznacz siłę dośrodkową dla trzech różnych częstotliwości.
4. Zbadaj, jak zmienia się siła przy zmianie masy ciała (możesz dołączać kolejne klipsy). Pomiary należy wykonać dla takiej samej częstotliwości i przy takim samym promieniu okręgu (możesz przyjąć promień i jedną z częstotliwości zastosowanych w punkcie 3.).
5. Wyznacz zależność siły dośrodkowej od promienia okręgu. Ta część doświadczenia jest o tyle trudna, że musimy zmieniać promień, ale zachowywać tę samą wartość prędkości liniowej. Ze wzoru $v = 2\pi r f$ wynika, że jeśli ma być ona zachowana, to zwiększenie promienia okręgu n razy musi pociągać za sobą zmniejszenie częstotliwości – również n razy. Dla trzech wybranych promieni ustal takie częstotliwości, aby prędkość pozostawała taka sama, i wprowadź ich wartości do metronomu (wskazówka 1.).

Wskazówki:

1. Przykładowo, jeśli promień dla pierwszego pomiaru ustalimy na $r_1 = 16$ cm, a częstotliwość f_1 na 3 obroty na sekundę (czyli 3 Hz), to dla promienia $r_2 = 20$ cm częstotliwość f_2 powinna wynosić 2,4 Hz ($r_2 = r_1 \cdot 1,25$, więc $f_2 = \frac{f_1}{1,25}$). Tak samo możemy określić częstotliwości dla kolejnych promieni, np. dla $r_3 = 24$ cm otrzymujemy $f_3 = 2$ Hz.
2. Promień okręgu mierzymy między wylotem rurki a środkiem klipsa przy napiętej żyłce.
3. Siła ciężkości powoduje opadanie klipsa. Ruch powinien być na tyle szybki, aby było to niezauważalne.



Analiza wyników

W doświadczeniu badamy zależność siły dośrodkowej od trzech wielkości fizycznych: prędkości liniowej, masy i promienia. Przedstawimy tylko analizę zależności siły od prędkości liniowej, gdyż ta zależność jest najbardziej skomplikowana.

Zależność od prędkości liniowej

Jako badanego ciała użyliśmy dwóch klipsów biurowych o łącznej masie 8 g. Promień okręgu wynosił 16 cm, a częstotliwość zmieniała się od 120 do 200 obrotów na minutę (czyli od 2 do 3,33 Hz). Dla mniejszych i większych częstotliwości doświadczenia nie dało się przeprowadzić.

Zależność F_d od masy ma postać proporcjonalności prostej, a zależność od promienia – proporcjonalności odwrotnej.

Ponieważ najbardziej niedokładny był pomiar siły (wskazania wagi zmieniły się dość szybko), dla każdej częstotliwości zapisaliśmy maksymalny i minimalny wynik wskazań wagi. Niepewności pomiarów pozostałych wielkości fizycznych w porównaniu z niepewnością pomiaru siły były na tyle małe, że mogliśmy je pominąć.

Wyniki pomiarów

Wyniki pomiarów przedstawia tabela 4.2. Zapisaliśmy w niej częstotliwość w jednostce odczytanej z metronomu $\left[\frac{1}{\text{min}}\right]$ i przeliczoną na herce. W dalszej kolejności w tabeli zostały zanotowane: prędkość liniowa obliczona ze wzoru $v = 2\pi r f$, kwadrat prędkości liniowej (ponieważ w takiej postaci ta wielkość występuje we wzorze na siłę dośrodkową), minimalne i maksymalne wskazania wagi oraz odpowiadające im wartości sił dośrodkowych, a następnie średnią z tych wartości sił (minimalnej i maksymalnej).

Tabela 4.2

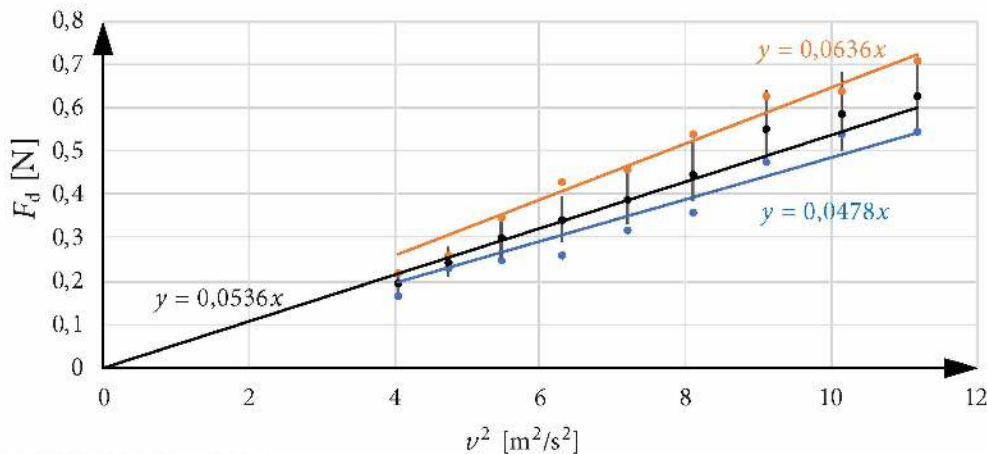
$f \left[\frac{1}{\text{min}}\right]$	$f \text{ [Hz]}$	$v \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$	$v^2 \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$	$m_{\text{min}} \text{ [g]}$	$F_{\text{min}} \text{ [N]}$	$m_{\text{max}} \text{ [g]}$	$F_{\text{max}} \text{ [N]}$	$F_{\text{sr}} \text{ [N]}$
120	2,00	2,01	4,04	17	0,17	22	0,22	0,195
130	2,17	2,18	4,75	23	0,23	27	0,26	0,245
140	2,33	2,34	5,48	25	0,25	36	0,35	0,300
150	2,50	2,51	6,31	27	0,26	44	0,43	0,345
160	2,67	2,68	7,20	33	0,32	47	0,46	0,390
170	2,83	2,84	8,09	37	0,36	55	0,54	0,450
180	3,00	3,01	9,09	49	0,48	64	0,63	0,555
190	3,17	3,19	10,15	55	0,54	65	0,64	0,590
200	3,33	3,35	11,20	56	0,55	72	0,71	0,630

Badamy zależność
 $F_d \sim v^2$

Wykonanie wykresu

Tabelę taką jak tabela 4.2 najwygodniej zapisać w arkuszu kalkulacyjnym. Wówczas nie trzeba wykonywać ręcznie wszystkich obliczeń. Także wykres możemy otrzymać automatycznie i nie musimy przenosić danych na papier milimetrowy.

Siła dośrodkowa jest wprost proporcjonalna do kwadratu prędkości liniowej, zatem na poziomej osi wykresu zaznaczyliśmy nie prędkość liniową, a jej kwadrat. Czerwone znaczniki wskazują maksymalne wartości siły dośrodkowej, niebieskie – wartości minimalne, a czarne – wartości średnie. Za pomocą arkusza kalkulacyjnego zostały poprowadzone proste (tzw. linie trendu) dla średnich, maksymalnych i minimalnych wartości siły dośrodkowej oraz wyznaczone współczynniki kierunkowe tych prostych.



Rys. 4.23. Zależność siły dośrodkowej od kwadratu prędkości liniowej

Interpretacja wykresu

Czarna linia trendu jest najlepiej dopasowana do średnich wartości siły. Jej nachylenie to: $0,054 \frac{\text{N}}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}$. Uprościmy tę niezwykłą jednostkę:

$$\frac{\frac{\text{N}}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Linia czerwona i linia niebieska to najbardziej i najmniej nachylona linia przechodząca przez punkty doświadczalne (z uwzględnieniem niepewności pomiarowych). Tak więc prosta przebiegająca przez punkty pomiarowe może mieć nachylenie:

$$\text{co najmniej } 0,048 \frac{\text{N}}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 0,048 \frac{\text{kg}}{\text{m}}, \text{ a co najwyżej } 0,064 \frac{\text{N}}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 0,064 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Ponieważ badamy zależność siły dośrodkowej od kwadratu prędkości liniowej, we wzorze $F_d = \frac{mv^2}{r}$ współczynnik kierunkowy jest równy stałemu w tej części doświadczenia czynnikowi $\frac{m}{r}$.

Jeśli podstawimy dane z naszego doświadczenia, czyli masę wykorzystanych klipsów $m = 8 \text{ g} = 0,008 \text{ kg}$ oraz promień $r = 16 \text{ cm} = 0,16 \text{ m}$, to współczynnik wyniesie $\frac{m}{r} = 0,05 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$. Mieści się on więc między maksymalną a minimalną wartością współczynnika kierunkowego obliczonego na podstawie danych uzyskanych w doświadczeniu.

$$0,048 \frac{\text{kg}}{\text{m}} < 0,05 \frac{\text{kg}}{\text{m}} < 0,064 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Zatem nie tylko ustaliliśmy, że siła dośrodkowa jest proporcjonalna do kwadratu prędkości liniowej (przy stałym promieniu okręgu i stałej masie ciała), lecz także potwierdziliśmy, że stały w tej części doświadczenia czynnik $\frac{m}{r}$ odpowiada w granicach niepewności pomiarowej współczynnikowi proporcjonalności prostej wyznaczonemu na podstawie danych pomiarowych.

Prosta przechodząca przez środek układu współrzędnych ma postać $y = ax$, gdzie a – współczynnik kierunkowy.

Porównajmy wzór ogólny prostej i naszą zależność:

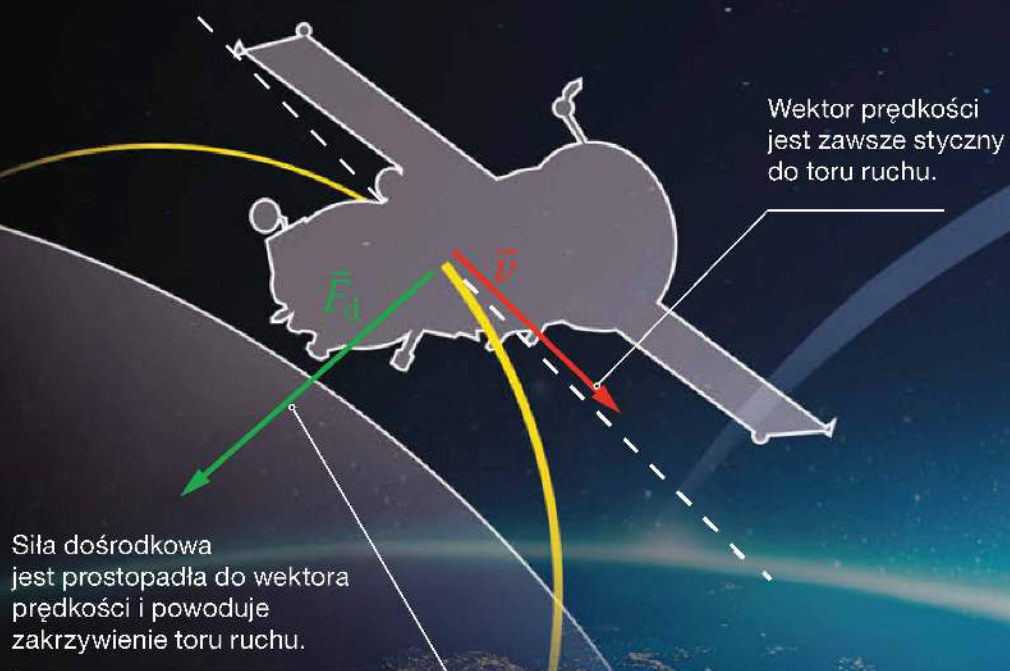
$$y = ax \\ F_d = \frac{m}{r} v^2$$

Po tej lekcji powinieneś

- znać pojęcie siły dośrodkowej i stosować je do wyjaśniania zjawisk;
- umieć obliczać wartość siły dośrodkowej i przyspieszenia dośrodkowego;
- umieć badać doświadczalnie zależność siły dośrodkowej od prędkości liniowej, masy ciała i promienia okręgu.

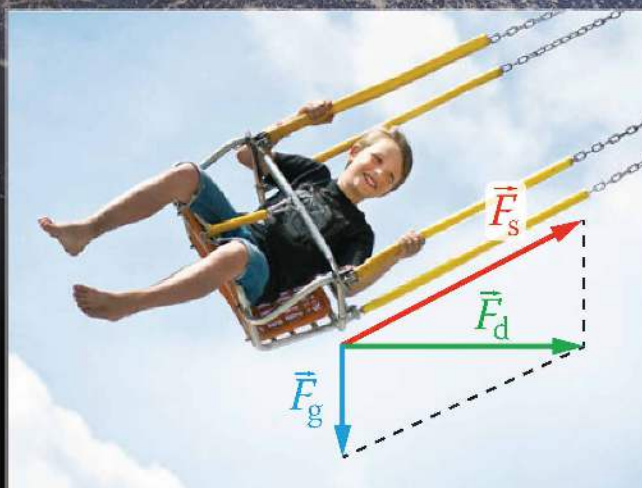
Siła dośrodkowa

Określenie *siła dośrodkowa* odnosi się do skutku działania siły. Nie oznacza rodzaju siły jak w przypadku określeń *siła grawitacji* czy *siła magnetyczna*.



■ Przykłady siły dośrodkowej

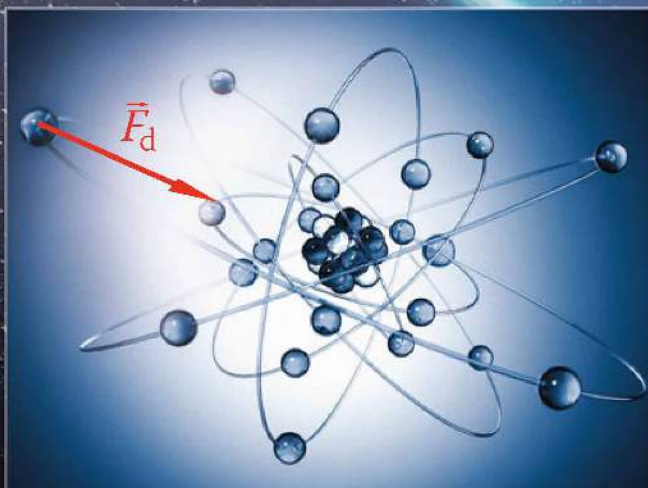
Funkcję siły dośrodkowej mogą pełnić różnego rodzaju siły, takie jak siła grawitacji, siła tarcia czy siła elektrostatyczna.



Na krzeselko karuzeli działa siła sprężystości łańcucha i siła grawitacji. Ich wypadkowa jest siłą dośrodkową.



Siłą dośrodkową działającą na satelitę jest siła grawitacji.



W klasycznym modelu atomu siłą dośrodkową, utrzymującą elektrony na orbitach, jest siła elektrostatyczna.



Podczas pokonywania takiego zakrętu funkcję siły dośrodkowej pełni siła tarcia.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



■ Przykład

Wytrzymałość nici jest równa 70 N, co oznacza, że zerwie się ona, gdy działająca na nią siła przekroczy tę wartość. Do końca nitki przywiązano kulkę o masie $m = 2 \text{ kg}$ i całość wprowadzono w ruch obrotowy po poziomym okręgu o promieniu $l = 1 \text{ m}$. Przy jakiej częstotliwości obrotów nieć się zerwie? Pomiń siłę grawitacji.

Rozwiązanie

Rolę siły dośrodkowej odgrywa siła sprężystości nici, która może przyjąć maksymalną wartość 70 N.

Wzór na siłę dośrodkową ma postać:

$$F_d = \frac{mv^2}{r}, \quad \text{gdzie } r = l$$

Prędkość liniowa v w ruchu po okręgu jest z częstotliwością związana wzorem: $v = 2\pi r f$.

Po podstawieniu tego wyrażenia do wzoru na siłę dośrodkową otrzymujemy:

$$F_d = \frac{m(2\pi r f)^2}{r} = \frac{m4\pi^2 f^2 r}{1} = 4\pi^2 m r f^2$$

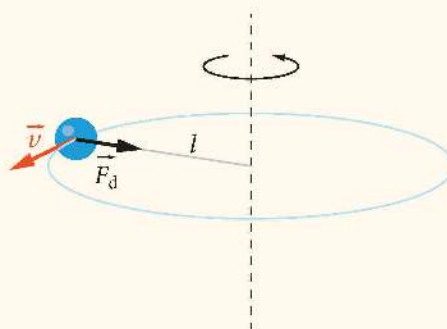
Po przekształceniu dostajemy wzór na częstotliwość i możemy przeliczyć jednostki:

$$f = \sqrt{\frac{F_d}{4\pi^2 m r}}$$

$$[f] = \sqrt{\frac{\text{N}}{\text{kg} \cdot \text{m}}} = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{kg} \cdot \text{m}}} = \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}}} = \sqrt{\frac{1}{\text{s}^2}} = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$$

Podstawiamy dane liczbowe i otrzymujemy: $f \approx 0,94 \text{ Hz}$.

Odpowiedź: Nieć zerwie się, gdy częstotliwość obrotów przekroczy 0,94 Hz.



1. Samochód o masie 850 kg jedzie z prędkością $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Przyjmij, że współczynnik tarcia $f_s = 0,7$, i oblicz najmniejszy dopuszczalny promień okręgu, po którym może poruszać się ten pojazd. Czy szukany promień zależy od masy pojazdu? Uzasadnij swoją odpowiedź. Przyjmij, że samochód porusza się po poziomej drodze.

2. Oblicz wartość siły dośrodkowej działającej na Księżyc w ruchu wokół Ziemi. Porównaj

ją z siłą dośrodkową działającą na Ziemię w ruchu wokół Słońca oraz z siłą działającą między Słońcem a Księżycem. Potrzebne dane znajdź w tablicach fizycznych.

3. Wyobraź sobie, że Ziemia obraca się coraz szybciej. Przy jakim okresie obrotu siła przyciągania grawitacyjnego na równiku byłaby zbyt mała, aby ciała mogły się utrzymać na powierzchni planety (ich ciężar wynosiłby zero)? Przyjmij $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

4.7. Siły bezwładności

Przypomnij sobie

- Położenie ciała określamy zawsze względem wybranego układu odniesienia.
- Jeśli wypadkowa sił działających na ciało jest równa zero, to ciało pozostaje w stanie spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym (I zasada dynamiki).
- Jeśli wypadkowa F_w sił działających na ciało o masie m nie jest równa zero, to ciało porusza się z przyspieszeniem $a = \frac{F_w}{m}$ (II zasada dynamiki).

■ Układy inercjalne i nieinercjalne

Zapewne spotkałeś się z sytuacją, gdy pasażerowie przewracają się przy gwałtownym hamowaniu autobusu. Aby wyjaśnić to zjawisko, przeprowadzimy proste doświadczenie.



Doświadczenie 24 – obowiązkowe

Demonstrowanie działania siły bezwładności

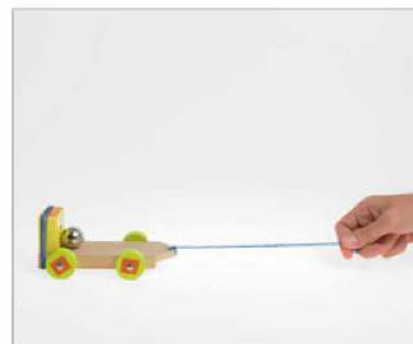
1. Na wózku umieść kulkę.
2. Rozpędź wózek tak, aby kulka poruszała się razem z nim.
3. Zatrzymaj gwałtownie wózek i zaobserwuj, co dzieje się z kulką.
4. Sfilmuj to samo doświadczenie kamerą telefonu umocowanego na wózku.
5. Jaką analogię zauważasz między wynikiem doświadczenia a tym, co dzieje się z pasażerami hamującego pojazdu?

Obserwator zewnętrzny

Wyjaśnienie tego doświadczenia z punktu widzenia zewnętrznego obserwatora jest proste. Kulka porusza się wraz z wózkiem ruchem jednostajnym, który – jeśli nie działają niezerównoważone zewnętrzne siły – może trwać nieskończenie długo. W pewnym momencie na wózek zaczyna działać siła, w wyniku czego zmniejsza on swoją prędkość i wreszcie się zatrzymuje. Na kulkę, jeśli pominiemy tarcie, nie działają niezerównoważone siły zewnętrzne, więc pozostaje ona w ruchu jednostajnym prostoliniowym, zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki. Podobnie sytuację w hamującym autobusie opisze osoba stojąca na przystanku.

Obserwator w pojeździe

Inaczej wygląda opis tego samego zjawiska z punktu widzenia osoby znajdującej się w pojeździe. Gdyby na podłodze hamującego autobusu leżała kulka, zaczęłaby się ona toczyć do przodu ruchem przyspieszonym. Do wywołania takiego ruchu potrzebna jest siła, więc obserwator w pojeździe wyciągnąłby wniosek, że na kulkę zadziałała pewna siła. Podobna siła powoduje przewracanie się pasażerów. Siła ta istnieje tylko pozornie – nie pochodzi z żadnych oddziaływań. Nazywamy ją **siłą bezwładności**.



Rys. 4.24. Ponieważ przyspieszenie samochodu podczas wypadku ma bardzo dużą wartość, na jego pasażerów działają ogromne siły bezwładności

Działanie siły bezwładności obserwujemy tylko dlatego, że układ odniesienia (pojazd) porusza się ruchem zmiennym. Taki układ nazywamy **układem nieinercyjnym**. W przeciwieństwie do niego układ związany z zewnętrznym obserwatorem nazywamy **układem inercyjnym**.

W układzie inercyjnym działają wyłącznie rzeczywiste siły, związane z oddziaływaniem ciał. W układzie nieinercyjnym działają także siły pozorne, wynikające ze zmiany prędkości tego układu.

Działanie sił bezwładności jest związane z ruchem **zmiennym** układu odniesienia, dlatego np. łatwo zauważamy hamowanie i przyspieszanie autobusu, nawet gdy nie patrzymy przez okno.

■ Zasada względności

Ruchu jednostajnego nie możemy wykryć w podobny sposób, gdyż **w każdym układzie inercyjnym wszystkie zjawiska fizyczne przebiegają jednakowo**. Ten fakt nazywamy zasadą względności Galileusza. Oznacza ona, że np. jeżeli zamkniemy oczy w lecącym ze stałą prędkością samolocie odrzutowym, będziemy mieli wrażenie, jakbyśmy byli w spoczynku. Z zasady względności wynika, że nie ma takich doświadczeń fizycznych, które moglibyśmy przeprowadzić wewnątrz samolotu odrzutowego, aby wyznaczyć jego prędkość. Określenie „wewnątrz samolotu” oznacza w tym przypadku całkowity brak kontaktu ze światem zewnętrznym, czyli gdy nie możemy np. wyrzucić przez okno.

■ Wartość siły bezwładności

Wyobraźmy sobie ciało mogące przemieszczać się bez tarcia po podłodze autobusu. Jeśli autobus rusza z przyspieszeniem $\vec{a}$ względem ziemi, to ciało pozostaje względem niej nieruchomo, lecz względem autobusu porusza się z przyspieszeniem o wartości a , ale przeciwnie skierowanym. Podobnie jest przy hamowaniu – tym razem przyspieszenie ciała względem autobusu skierowane jest do przodu, czyli także przeciwnie do przyspieszenia autobusu względem ziemi.

A to ciekawe

Mierząc siłę bezwładności działającą na ciało o znanej masie, możemy wyznaczyć przyspieszenie układu. Na tej zasadzie działa akcelerometr, czyli przyrząd do bezpośredniego pomiaru przyspieszenia. Sercem tego urządzenia jest mały ciężarek, którego ruchy pod wpływem sił bezwładności są odczytywane przez odpowiednie czujniki. W akcelerometr wyposażona jest większość smartfonów. Aby skorzystać z przyrządu, należy zainstalować odpowiednią aplikację.



Skoro w układzie nieinercyjnym ciało o masie m porusza się z przyspieszeniem o wartości a , to obserwator w tym układzie stwierdzi, że zadziałała na nie siła o wartości $F_b = ma$. Siła bezwładności jest skierowana przeciwnie do przyspieszenia układu, więc w zapisie wektorowym otrzymamy zależność:

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}$$

Oczywiście w układzie nieinercyjnym oprócz sił bezwładności na ciało działają także siły rzeczywiste, będące skutkiem oddziaływania z innymi ciałami.

■ Przeciążenie, niedociążenie, nieważkość

Wyobraź sobie człowieka stojącego na wadze sprężynowej w windzie poruszającej się z przyspieszeniem $\vec{a}$ skierowanym w górę (czyli w windzie ruszającej w górę lub hamującej przy jeździe w dół, rys. 4.25).

Jeśli opisujemy jego ruch w układzie inercyjnym związanym z budynkiem, stwierdzamy, że winda naciska na jego stopy nie tylko siłą równoważącą ciężar, lecz także dodatkową siłą nadającą mu takie samo przyspieszenie, jakie ma winda. Łączny nacisk człowieka na wagę jest więc równy:

$$F_N = mg + ma$$

Taką wartość wskaże też waga sprężynowa (założmy dla uproszczenia, że jest wyskalowana w niutonach).

Zauważmy, że w rozpatrywanym układzie odniesienia siła wypadkowa działająca na pasażera windy jest różna od zera.

W układzie nieinercyjnym opis tego zjawiska jest inny, ale wniosek taki sam. Oprócz siły ciężkości mg na człowieka jadącego windą działa siła bezwładności o wartości ma , także skierowana w dół. Łączny nacisk na wagę będzie więc równy:

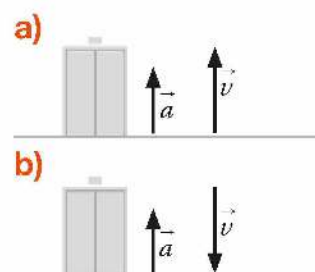
$$F_N = mg + ma$$

Osoba stojąca na wadze zauważy, że jej wskazanie wzrosło do $mg + ma$. Taki stan nazywamy **przeciążeniem**.

Zauważmy, że pasażer nie porusza się względem windy, kiedy więc rozpatrujemy jego ruch względem windy, działająca na niego siła wypadkowa jest równa zero.

Przeanalizujmy sytuację, gdy przyspieszenie skierowane jest w dół (kiedy winda przyspiesza, jadąc w dół, lub hamuje, poruszając się do góry, rys. 4.27). W układzie nieinercyjnym siła bezwładności działa w górę i częściowo równoważy siłę ziemskiej grawitacji. Waga wskaże wypadkową tych sił równą:

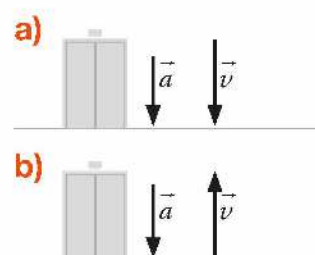
$$F_N = mg - ma$$



Rys. 4.25. Winda ruszająca (przyspieszająca) w górę (a) i hamująca przy jeździe w dół (b)



Rys. 4.26. Do pomiaru ciężaru w windzie najlepiej użyć wagi sprężynowej – pomiar w większości wag elektronicznych trwa zbyt długo, aby wykorzystać je w windzie



Rys. 4.27. Winda ruszająca (przyspieszająca) w dół (a) i hamująca przy jeździe w górę (b)

Z punktu widzenia układu inercjalnego wypadkowa siła działająca na pasażera windy i nadająca mu przyspieszenie równe przyspieszeniu windy jest równa różnicy siły grawitacji i reakcji podłoża. Wynika z tego, że wskazania wagi zmniejszą się do wartości:

$$F_N = mg - ma$$

Taki stan nazywamy **niedociążeniem**.

Gdy winda spada swobodnie, czyli gdy porusza się z przyspieszeniem $a = g$, wskazania wagi są zerowe. Stan ten nazywamy **nieważkością**. Aby zaobserwować stan nieważkości, nie musimy mieć do dyspozycji spadającej windy, wystarczy plastikowa butelka.



Doświadczenie 25

1. W dnie plastikowej butelki zrób mały otwór i napełnij butelkę wodą.
2. Gdy trzymasz butelkę pionowo, woda wylewa się przez otwór.
3. Zatkaj palcem otwór, przez który wylewa się woda, a potem równocześnie puść butelkę i odkryj otwór.
4. Butelka spada swobodnie (np. do wanny). Obserwuj, co się dzieje podczas jej lotu.

Możemy sobie wyobrazić sytuację, w której winda porusza się w dół z przyspieszeniem $a > g$. Wtedy pasażer mógłby stanąć na suficie, a nie na podłodze.

Z rozważań o wskazaniach wagi możemy wyciągnąć wniosek, że ciężar F_g należy mierzyć, gdy waga spoczywa względem ziemi, ewentualnie porusza się ruchem jednostajnym. Wszystkie zmiany wskazań wagi zachodzą dlatego, że winda porusza się ruchem zmiennym.

Ruch po okręgu
s. 111



Siła odśrodkowa

Siły bezwładności występują w każdym układzie poruszającym się ruchem z przyspieszeniem. Zjawisko to dotyczy zarówno ruchu prostoliniowego, jak i ruchu po okręgu, który także jest ruchem z przyspieszeniem – nawet jeśli w jego trakcie wartość prędkości jest stała, to jej kierunek się zmienia, a więc występuje przyspieszenie dośrodkowe.

Doświadczenie 26

1. Napełnij małe wiaderko (np. po serku) do połowy wodą.
2. Przywiąż do rączki wiaderka linkę, a następnie wpraw całość w szybki ruch po okręgu w płaszczyźnie pionowej.
3. Dlaczego woda się nie wylewa, gdy wiaderko jest odwrócone do góry dnem?

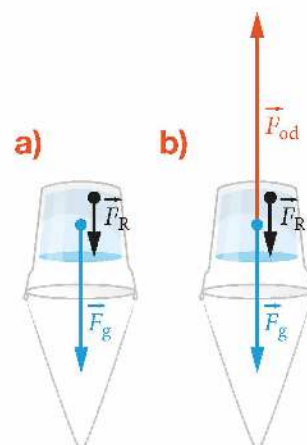
Zjawisko zaobserwowane w tym doświadczeniu wyjaśnimy z punktu widzenia dwóch układów odniesienia.

Układ inercjalny

W układzie inercjalnym, czyli np. w układzie osoby wykonującej doświadczenie, możemy rozumować następująco: pod wpływem siły ciężkości i siły reakcji dna wiaderka (rys. 4.28a) woda w odwróconym wiaderku rzeczywiście porusza się z przyspieszeniem skierowanym w dół. Ale także wiaderko porusza się z przyspieszeniem skierowanym w dół – mowa o przyspieszeniu dośrodkowym, bo przecież gdy wiaderko znajduje się w najwyższym położeniu, zwrot „do środka” oznacza to samo, co „w dół”. Woda i wiaderko poruszają się względem ziemi z takim samym przyspieszeniem, ale względem siebie są w spoczynku.

Układ nieinercjalny

Zdecydowanie łatwiej wyjaśnić to samo zjawisko z punktu widzenia układu nieinercyjnego, czyli np. z punktu widzenia mrówki siedzącej na wiaderku. W tym układzie działa siła bezwładności skierowana w górę. Może ona zrównoważyć ciężar wody, a jeśli jest od niego większa – dopycha wodę do dna, co powoduje powstanie siły reakcji dna. Siła bezwładności równoważy więc wypadkową ciężaru i siły reakcji dna (rys. 4.28b). W układzie związanym z wiaderkiem woda się nie porusza.



Rys. 4.28. Siły działające na wiaderko z wodą w układzie inercjalnym (a) i układzie nieinercyjnym (b)

Siła bezwładności jest zawsze skierowana przeciwnie do przyspieszenia układu nieinercyjnego. W ruchu po okręgu przyspieszenie jest skierowane do środka okręgu, a wraz z nim również i siła związana z tym przyspieszeniem. Zatem siła bezwładności jest skierowana wzdłuż promienia na zewnątrz. Dlatego nazywamy ją **siłą odśrodkową**.

Siłę odśrodkową można łatwo odczuć np. na karuzeli czy podczas pokonywania samochodem ostrego zakrętu z dość dużą prędkością. Wykorzystujemy ją także w pralce automatycznej. Na kropelki wody i ubrania w czasie wirowania działa siła odśrodkowa, więc są one odrzucane na zewnątrz bębna. Przez otworki w bębnie wydostają się na zewnątrz jedynie kropelki wody.

Wartość siły bezwładności zawsze wynosi ma , a przyspieszenie w ruchu po okręgu wyraża się wzorem $\frac{v^2}{r}$, zatem wartość siły odśrodkowej:

$$F_{od} = \frac{mv^2}{r}$$

Siła dośrodkowa
s. 158

Wzór można też zapisać: $F_{od} = m\omega^2 r$, gdzie ω to prędkość kątowa.

A to ciekawe

Wirówki są wykorzystywane podczas badań laboratoryjnych. Pozwalają rozdzielać składniki substancji o różnej gęstości.

Wirówki laboratoryjne służące do odseparowywania składników krwi mogą wykonywać około 20 tys. obrotów na minutę. Przy promieniu wirówki 10 cm oznacza to, że siła odśrodkowa jest ponad 40 000 razy większa od siły grawitacji.



Układ nieinercyjny

– układ odniesienia, w którym pasażer samochodu spoczywa względem fotela.

Układ inercyjny

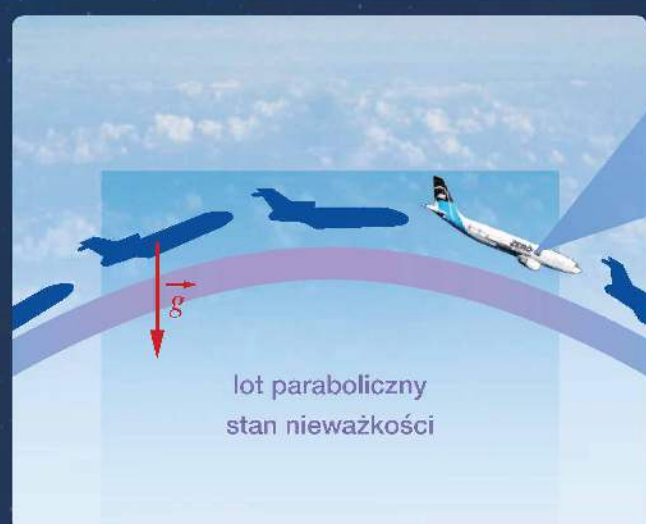
– układ związany z osobą stojącą obok na drodze.

Pamiętaj, że siła odśrodkowa, jak wszystkie siły bezwładności, jest siłą pozorną. Te zjawiska, które w układzie nieinercyjnym wyjaśniamy za jej pomocą, w układzie inercyjnym można wyjaśnić bez niej. Na przykład człowiek w skręcającym samochodzie odczuwa działanie siły odśrodkowej, którą równoważy siła, jaką działa na niego fotel. Z punktu widzenia obserwatora stojącego z boku, przy drodze, siły odśrodkowej nie ma, a siły, którą fotel działa na pasażera, nic nie równoważy – siła ta powoduje zakrzywienie toru jego ruchu. Z tego powodu wzory na wartość siły odśrodkowej i dośrodkowej są identyczne – siły te mają równe wartości ($F_d = F_{od}$).

Siła odśrodkowa występuje tylko w układzie nieinercyjnym.

Nieważkość

Stan nieważkości może wystąpić w różnych warunkach i wcale nie oznacza, że nie działają wtedy żadne siły. Oczywiście można sobie wyobrazić głęboki kosmos, gdzie wszystkie ciała niebieskie są tak odległe, że siły grawitacji można pominąć. Jednak nie jest to jedyna możliwość.



W stanie nieważkości znaleźlibyśmy się, będąc w swobodnie spadającej kabinie windy. W podobnych warunkach trenują astronauty, ale stan nieważkości osiągają w specjalnych samolotach. Samolot co prawda nie spada pionowo, ale w pewnej fazie lotu redukuje moc silników i porusza się torem parabolicznym jak rzucony kamień, a astronauty wewnątrz przez około pół minuty znajdują się w stanie nieważkości.



Siła Coriolisa

Doświadczenie 27

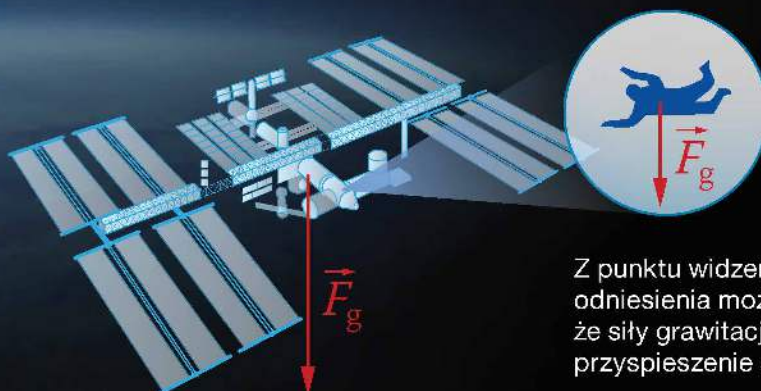
1. To doświadczenie najlepiej wykonać na placu zabaw, na którym jest karuzela podobna do przedstawionej na zdjęciu. Jeśli w pobliżu nie ma takiej karuzeli, przejdź do punktu 4.
2. Wpraw karuzelę w ruch i wejdź na nią.
3. Połóż piłeczkę na płycie karuzeli i potocz ją od brzegu płyty w stronę środka. Obserwuj ruch piłeczki.
4. Mniej efektowna, ale łatwiejsza do wykonania wersja tego doświadczenia wymaga okrągłego talerza, ciężkiej piłeczki i odrobiny mąki. Pokrywamy talerz mąką, jedna osoba obraca talerzem, a druga puszcza kulkę wzdłuż jego promienia. Ślad kulki w mące pozwoli obserwować jej tor w układzie odniesienia talerza.



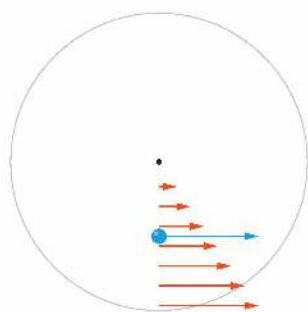
W ciągłym stanie nieważkości znajdują się również astronauta na stacji kosmicznej, a przecież na stację na orbicie, jak i na astronautów, działa siła grawitacji Ziemi.



Z punktu widzenia nieinercyjnego układu odniesienia związanego ze stacją można powiedzieć, że siły grawitacji są równoważone przez siły bezwładności wynikające z ruchu przyspieszonego statku.



Z punktu widzenia inercyjnego układu odniesienia możemy powiedzieć, że siły grawitacji nadają takie samo przyspieszenie stacji i astronautom.

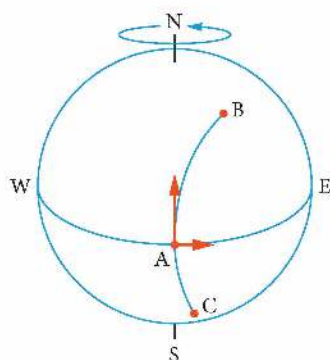


Rys. 4.29. Prędkości liniowe punktów obracającej się płyty karuzeli

Wiemy, że w układzie odniesienia płyty karuzeli na piłeczkę działa siła odśrodkowa. Siła ta działa wzdłuż promienia, mogłaby więc najwyżej spowodować, że piłeczka będzie się coraz wolniej zbliżać do środka, a potem zatrzyma się i wróci do brzegu płyty po tym samym torze. Piłeczka porusza się jednak po linii krzywej. Najwyraźniej działa na nią jeszcze dodatkowo siła prostopadła do promienia. Nazywamy ją **siłą Coriolisa** (czyt. koriolisa). Jest to siła pozorna.

Przyczynę działania siły Coriolisa najłatwiej wyjaśnić z punktu widzenia układu inercjalnego. Gdy karuzela się obraca, wszystkie jej punkty wykonują jeden obieg wokół środka w tym samym czasie. Jednak punkty znajdujące się dalej od środka mają w tym czasie do przebycia dłuższą drogę, dlatego ich prędkości liniowe są większe (rys. 4.29).

Piłeczka początkowo znajdowała się na brzegu, miała więc taką prędkość prostopadłą do promienia jak punkty na brzegu płyty. Gdy znalazła się bliżej środka, zachowała ją, a ponieważ punkty płyty w tym miejscu poruszają się wolniej, piłeczka je wyprzedziła. Z punktu widzenia obserwatora w układzie nieinercjalnym wyglądało to tak, jakby na piłeczkę zadziałała jakaś siła. Tę właśnie siłę nazywamy siłą Coriolisa.



Rys. 4.30. Ciało poruszające się od równika w stronę bieguna ma tendencję do skręcania na wschód

■ Siła Coriolisa na Ziemi

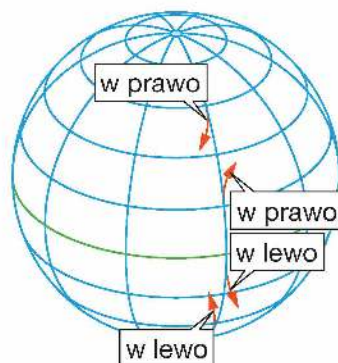
Siłę Coriolisa obserwujemy także w przypadku ruchu obrotowego Ziemi. Jest ona spowodowana tym, że na równiku prędkość liniowa Ziemi jest większa niż na innej szerokości geograficznej. Punkt na równiku pokonuje około 40 000 km w ciągu 24 godzin, czyli jego prędkość liniowa wynosi około $1700 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a np. punkt na szerokości geograficznej 60° w ciągu doby pokonuje już tylko około 20 000 km, czyli jego prędkość liniowa jest o połowę mniejsza.

Zatem ciało spoczywające na równiku obraca się razem z Ziemią z prędkością około $1700 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w kierunku wschodnim. Jeśli zacznie się przemieszczać w stronę bieguna (czyli dokładnie na północ lub na południe), to dla obserwatora na Ziemi jego tor ruchu nie pokryje się z ziemskim południkiem, jak byśmy oczekiwali, ale zakrzywi w kierunku wschodnim (rys. 4.30). Ciało zachowa bowiem swoją pierwotną prędkość $1700 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, z jaką przesunęło się na wschód, ale podczas **oddalania się od równika** będzie miało coraz wolniej poruszające się punkty na powierzchni Ziemi. Będzie więc je coraz szybciej wyprzedzać.

Z kolei ciało poruszające się w przeciwną stronę – **do równika** – pozostanie spóźnione w stosunku do obrotu Ziemi, a jego tor odchyli się na zachód.

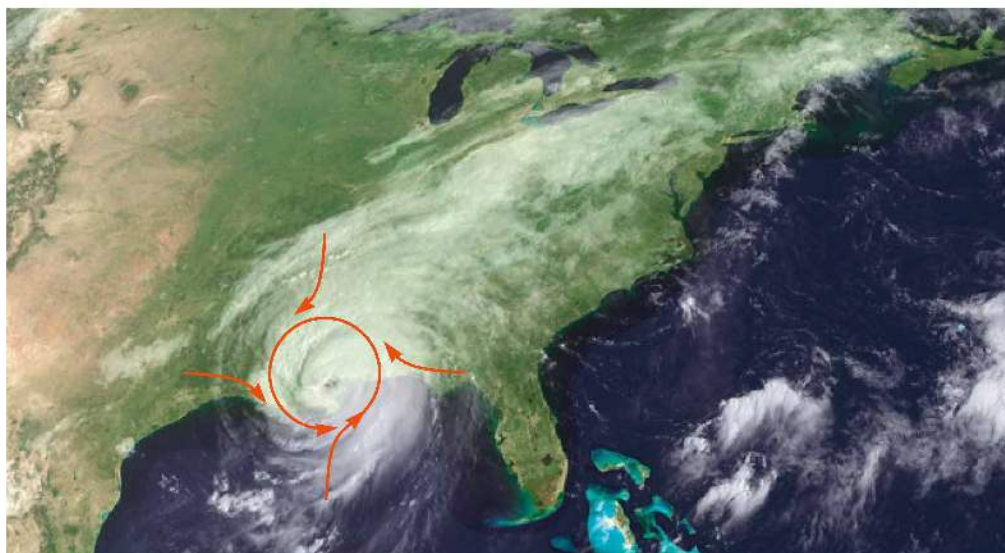
Jeśli zamiast kierunków geograficznych użyjemy określeń „w prawo” i „w lewo”, zauważymy, że na półkuli północnej tor ruchu ciała zawsze odchyła się w prawo, a na południowej – w lewo (patrz rys. 4.31).

Natomiast z punktu widzenia obserwatora pozaziemskiego ciało przemieszczające się na północ lub na południe porusza się zawsze prostoliniowo.



Rys. 4.31. Odchylenie się toru ciała pod wpływem siły Coriolisa

Siła Coriolisa wpływa na cyrkulację powietrza w atmosferze i przebieg prądów morskich. W wyniku jej działania na półkuli północnej wiatry mają tendencję do skręcania w prawo, a prawe brzegi rzek są mocniej podmywane. Odwrotnie dzieje się na półkuli południowej – wiatry mają tam tendencję do skręcania w lewo, a rzeki mocniej podmywają lewe brzegi.



Rys. 4.32. W wyniku działania siły Coriolisa cyklony na półkuli północnej wirują w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a na półkuli południowej – zgodnym z tym ruchem. Na zdjęciu narysowano schemat powstawania cyklonu na półkuli północnej. Zwróć uwagę, że zmiana kierunku wiatru w prawo powoduje ruch cyklonu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara

■ Czy Ziemia jest układem inercyjnym

Ziemia obraca się wokół własnej osi. Na jej powierzchni na wszystkie ciała (poza znajdującymi się na biegunach geograficznych) działa siła odśrodkowa. Na niektóre ciała działa także siła Coriolisa. Wynika z tego, że Ziemia nie jest układem inercyjnym. Wcześniej, kiedy rozważaliśmy na przykład ruch ciał w hamującym autobusie, mówiliśmy jednak, że Ziemia jest układem inercyjnym. Jak wyjaśnić tę rozbieżność?

Układ inercjalny to pewien model fizyczny, podobnie jak np. punkt materialny. Wiemy, że to samo ciało (np. samochód) podczas opisywania niektórych zjawisk (np. jazdy ze Szczecina do Wrocławia) możemy traktować jak punkt materialny, a podczas opisywania innych (np. parkowania w wąskiej uliczce) – już nie.

Podobnie rzecz się ma z układem inercyjnym. W olbrzymiej większości zjawisk powierzchnię Ziemi możemy traktować jako układ inercjalny. Oczywiście istnieją zjawiska, w których nie jest to wystarczająco dobre przybliżenie i wtedy stosujemy inny model.

Modelowanie zjawisk
s. 12

Po tej lekcji powinieneś

- stosować pojęcie sił bezwładności do opisu ruchu ciał w układach nieinercyjnych;
- opisywać to samo zjawisko zarówno w układzie inercyjnym, jak i nieinercyjnym (odróżniać siłę dośrodkową od odśrodkowej).



■ Przykład

Wyobraź sobie stację kosmiczną w kształcie torusa („obwarzanka”) o zewnętrznej średnicy 200 m, poruszającą się z wyłączonymi silnikami w dużej odległości od ciał niebieskich (tak daleko, że oddziaływanie grawitacyjne między stacją a dowolnym ciałem niebieskim jest pomijalnie małe). Torus obraca się z pewną prędkością kątową ω . Astronauci odczuwają siłę odśrodkową jako sztuczną grawitację.

a) Z jaką prędkością kątową powinna się obracać stacja, aby siła odśrodkowa astronauty była równa jego ciężarowi na Ziemi? Ile powinien wynosić okres obrotu stacji?

b) Które ściany byłyby dla astronautów podłogą, a które sufitem?

Rozwiązanie

a) Z treści zadania wynika, że siła odśrodkowa $F_{od} = m\omega^2 r$ działająca na astronautę powinna być równa sile ciężkości $F_g = mg$ działającej na człowieka na Ziemi. Możemy więc zapisać:

$$m\omega^2 r = mg$$

gdzie: m – masa człowieka, g – przyspieszenie ziemskie, ω – prędkość kątowa stacji, r – promień okręgu, po którym porusza się astronauta.

Z powyższego równania wyznaczamy szukaną prędkość kątową:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$\omega = \sqrt{\frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{100 \text{ m}}} \approx 0,31 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ze wzoru $\omega = \frac{2\pi}{T}$ wyznaczamy okres obrotu stacji:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

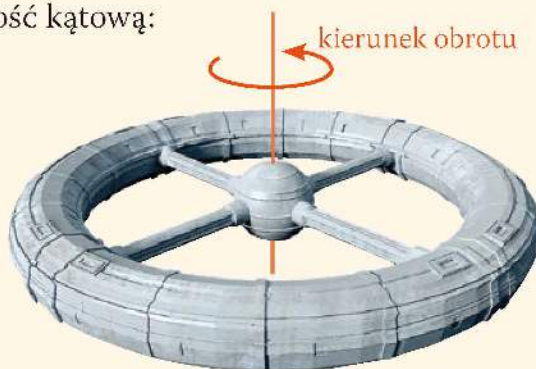
Podstawiamy dane liczbowe:

$$T \approx \frac{2 \cdot 3,14}{0,31 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \approx 20 \text{ s}$$

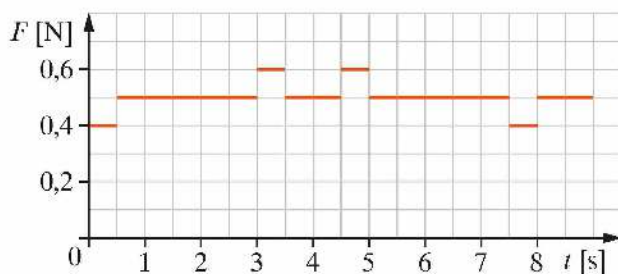
b) Siła odśrodkowa działa zawsze prostopadle do osi obrotu w kierunku zewnętrznym. Z treści zadania wiemy, że astronauta odczuwają ją jako siłę ciężkości. Oznacza to, że ściana znajdująca się bliżej osi obrotu będzie dla nich sufitem, a przeciwległa do niej – podłogą.

Odpowiedź: Siła odśrodkowa będzie równa ciężarowi astronauty na Ziemi przy prędkości kątowej stacji $0,31 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Przy takiej prędkości okres obrotu stacji będzie wynosił 20 s. Sufitem będzie dla astronautów ściana od strony osi obrotu.

Uwaga. Gdybyśmy umieli zbudować tak wielką stację kosmiczną, bardzo prawdopodobne jest, że sztuczną grawitację zawdzięczałaby ona obrotowi wokół własnej osi. Raz wprowadzona w ruch obrotowy stacja mogłaby kręcić się bez końca, bo w przestrzeni kosmicznej nie ma oporu powietrza.



1. Podczas wypadku samochodowego pojazd jadący z prędkością $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zatrzymał się w czasie 0,5 s. Przyjmij, że poruszał się ruchem jednostajnie zmiennym.
 - a) Oblicz siłę bezwładności działającą na kierowcę o masie 70 kg. Ile razy ta siła była większa od siły grawitacji?
 - b) Oblicz drogę przebytą przez samochód w 0,5 s.
2. Dwóch uczniów miało za zadanie zarejestrować wskazania siłomierza podczas przemieszczania się windy między kolejnymi piętrami. Na siłomierzu wisiał ciężarek o masie 50 g. Jeden z uczniów uruchomił kamerę telefonu komórkowego skierowaną na siłomierz, gdy winda ruszała z trzeciego piętra. Uczniowie odczytali potrzebne dane z filmu i sporządzili wykres, który widzisz poniżej. Sporządź na jego podstawie wykresy zależności $a(t)$, $v(t)$ i $x(t)$ dla windy. Przyjmij zwrot w górę za dodatni.



3. Oszacuj prędkość kątową karuzeli przedstawionej na zdjęciu.



4. Wykonaj doświadczenia.
 - a) Stań w windzie na wadze łazienkowej. Możesz użyć wagi kuchennej, na której

postawisz niewielki przedmiot. Zanotuj wskazania wagi w spoczynku, gdy rusza w dół, rusza w górę, jedzie ze stałą prędkością, hamuje podczas jazdy w dół i hamuje podczas jazdy w górę.

- b) Na podstawie wyników tych pomiarów wyznacz przyspieszenie windy w każdym z opisanych przypadków.
- c) Zmierz przyspieszenie windy w opisanych wyżej przypadkach za pomocą akcelerometru w telefonie komórkowym.
- d) Porównaj wyniki pomiarów oboma sposobami.

5. Wykonaj doświadczenie.

- a) Weź butelkę po wodzie mineralnej. W nakrętce wytnij otwór o średnicy ok. 2 mm. Obetnij denko, zrób otwory i przywiąż do nich sznurek.
- b) Znajdź na placu zabaw karuzelę podobną do tej ze zdjęcia do doświadczenia na s. 173. Nasyp do butelki piasku (jeśli nie będzie się wysypywał przez otwór w nakrętce, powiększ otwór). Powieś butelkę na poprzeczce karuzeli i wpraw w ruch drgający.
- c) Zaczynaj powoli obracać karuzelę. Obserwuj, czy płaszczyzna wahań butelki się zmienia:
 - obserwowana z zewnątrz (w układzie inercyjnym),
 - obserwowana z karuzeli (tutaj pomoże ci ślad piasku na płycie karuzeli).
- d) Dowiedz się, co to jest i jak działa wahadło Foucaulta (czyt. fukota). Gdzie można obejrzeć je w okolicy twojego miejsca zamieszkania? Jaki związek ma wahadło Foucaulta z opisanym doświadczeniem?



Czy można biegać po wodzie

Jedną z ulubionych zabaw dzieci jest bieganie po kałużach. Rozbryzgiwanie wody i błota w ciepły letni dzień może sprawić немало frajdy [...]. W bieganiu po wodzie chodzi jednak o wykonanie przynajmniej kilku kroków po wodzie przed wpadnięciem do niej. Czy jest to możliwe? [...] W celu udzielenia odpowiedzi powołamy eksperta [...]. Będzie nim bazyliszek zwyczajny *Basiliscus basiliscus*. Jaszczurka ta, jak większość innych bazyliiszków, występuje w Ameryce Południowej i jest największym stworzeniem, o którym wiadomo, że biegać po wodzie potrafi. [...]



Bieg po wodzie różni się od biegu po lądzie między innymi tym, że środek masy zwierzęcia znajduje się praktycznie cały czas na tej samej wysokości. W takim razie przebieganie nogami musi wytwarzać prawie stałą siłę równoważącą grawitację. Jest ona sumą siły reakcji F_R na rozpędzanie wody przez na przemian wciskane w wodę nogi jaszczurki, siły parcia F_P wody na stopę oraz siły F_{NP} związanej z napięciem powierzchniowym odkształconej powierzchni wody. Bilans ten zakłada, że jaszczurka wyciąga nogę, zanim zamknie się bąbel powietrza tworzony w fazie wciskania kończyny w wodę. Jest tak w przypadku biegu bazyliisza. Gdyby bąbel się zamknął, to siły F_P i F_{NP} zostałyby zastąpione siłą oporu o przeciwnym znaku, związaną z koniecznością wyciągnięcia uwięzionej w wodzie nogi.

Sila F_{NP} jest proporcjonalna do obwodu stopy, czyli rozmiaru zwierzęcia w pierwszej potęgze, więc jej wkład do kompensowania ciężaru (proporcjonalnego do sześcianu rozmiaru) pominiemy (jest on zauważalny tylko dla najmniejszych bazyliiszątek).

Siła parcia F_P jest proporcjonalna do objętości bąbla, a jej znaczenie w bilansie sił zależy od efektywnej powierzchni stopy. Nawet dla obdarzonego pod tym względem szczerze przez naturę bazyliisza wkład jest niewielki. Dlatego najistotniejsza jest siła F_R .

Średnią siłę reakcji można oszacować, wykorzystując równość:

$$F_R \cdot \Delta t = \Delta p$$

Z analizy wymiarowej wynika, że zmiana pędu (Δp) jest proporcjonalna do iloczynu masy bąbla $m = dV^*$ i średniej prędkości nogi u , natomiast czas jest stosunkiem głębokości zanurzenia nogi (w przypadku bazyliisza maksymalnie jest ona równa długości nogi, proporcjonalnej do rozmiaru zwierzęcia r) do prędkości u . Ostatecznie uzyskujemy:

$$F_R \propto dV \cdot u \cdot \frac{u}{r} \propto d \cdot r^2 \cdot u^2$$

Symbol $\propto$ oznacza, że wielkości są do siebie proporcjonalne.

* gdzie d to gęstość bąbla, a V to jego objętość

Prędkość u okazuje się słabo zależeć od rozmiaru zwierzęcia. Powoduje to, że o ile młode, ważące kilka gramów, osobniki mogą generować siłę przekraczającą ich ciężar ponad dwukrotnie, to największe jaszczurki (o masie około 200 g) generują siłę ledwie pozwalającą na bieganie po wodzie. Z tego względu młode mogą uciekać kilkanaście i więcej metrów, a najstarszym (jaszczurki rosną całe życie) udaje się przebiec zaledwie kilka metrów. Zajmijmy się teraz ludźmi.

Zeby móc biegać po wodzie jak bazyli-
szek, trzeba by mieć stopy w proporcji do wzrostu jak bazyliżek, zwinność i długość

nóg jak bazyliżek oraz przebierać nimi tak szybko, żeby kwadrat prędkości był tyle razy większy, ile razy jesteśmy od bazyliżka więksi, przy czym ważna jest tylko średnia pionowej składowej prędkości zanurzanej nogi. [...]

Krótko mówiąc, w taki sposób biegać po wodzie się nie da. A co by się stało, gdyby założyć pletwy? Nic nie stoi na przeszkodzie, żeby spróbować. Jeden krok na pewno da się zrobić.

Piotr Zalewski, *Czy można biegać po wodzie?*, „Delta” 2010, nr 07

Pytania i zadania do tekstu

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



1. Średnia prędkość bazyliżka, kiedy biegnie po wodzie, to $8,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oszacuj, jaką ty musiałbyś rozwinąć prędkość, gdybyś chciał biegać w butach po wodzie. Czy potrafisz biec tak szybko?
2. Czy człowiek może przejść po wodzie bez zamoczenia nóg? Jeśli uważasz że tak, zaproponuj sposób.
3. Której z wielkości fizycznych wymienionych w tekście jeszcze nie znasz?
4. Bazyliżek biega po wodzie, aby uciec drapieżnikom. Jak inne zwierzęta poruszają się po wodzie i do czego wykorzystują tę zdolność?

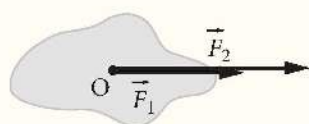
Pełny tekst artykułu dostępny jest pod adresem:

<http://delta.mimuw.edu.pl/artykuly/delta2010-07/2010-07-aktualnosci.pdf>

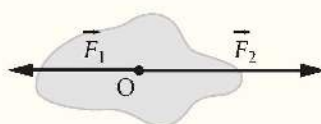


Podsumowanie Ruch i siły

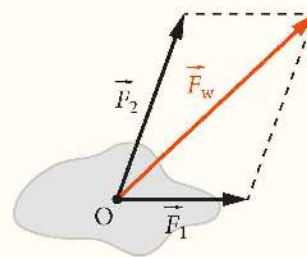
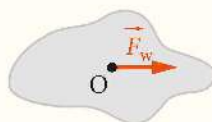
- Wielkością opisującą oddziaływanie jest **siła**. Siła jest wektorem o określonych cechach: wartości, kierunku, zwrocie i punkcie przyłożenia.
 - ▶ Jednostką siły jest **niuton**: $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
 - ▶ Aby siły się równoważyły, muszą działać na to samo ciało.
 - ▶ Dodawanie dwóch sił o wspólnym punkcie przyłożenia oraz:



jednakowych kierunkach
i zwrotach $F_w = F_1 + F_2$



jednakowych kierunkach
i przeciwnych zwrotach
 $F_w = |F_1 - F_2|$

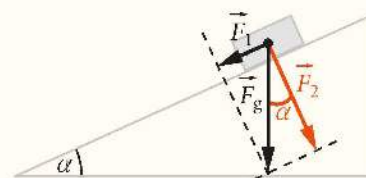


różnych kierunkach –
metoda równoległoboku
 $\vec{F}_w = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

▶ Rozkładanie siły na składowe

$$F_1 = F_g \sin \alpha$$

$$F_2 = F_g \cos \alpha$$



■ Zasady dynamiki Newtona

▶ Pierwsza zasada dynamiki

Jeśli na ciało nie działa żadna siła albo działające na nie siły się równoważą, to ciało spoczywające będzie nadal spoczywać, a ciało poruszające się będzie poruszać się z tą samą prędkością po linii prostej.

▶ Druga zasada dynamiki

Przyspieszenie, z którym porusza się ciało o masie m , jest wprost proporcjonalne do siły wypadkowej $\vec{F}$ działającej na to ciało i odwrotnie proporcjonalne do jego masy:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Kierunek i zwrot przyspieszenia są takie jak kierunek i zwrot siły.

▶ Trzecia zasada dynamiki

Gdy ciało A działa na ciało B siłą $\vec{F}_{AB}$, to ciało B działa na ciało A siłą $\vec{F}_{BA}$. Siły te mają jednakową wartość i ten sam kierunek, ale przeciwne zwroty i różne punkty przyłożenia.

► Rodzaje tarcia



- **Siła tarcia statycznego** może przyjmować różne wartości wynoszące od zera do $F_{T\max}$:

$$F_{T\max} = f_s \cdot F_N$$

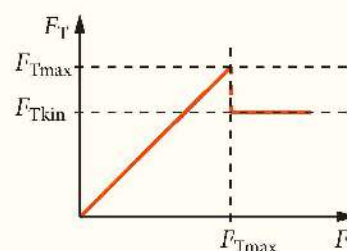
gdzie: f_s – współczynnik tarcia statycznego, F_N – siła nacisku.

- **Siła tarcia kinetycznego** $F_{T\text{kin}}$ jest mniejsza niż maksymalna wartość tarcia statycznego. Zależność siły $F_{T\text{kin}}$ od siły nacisku F_N przedstawia wzór:

$$F_{T\text{kin}} = f_k \cdot F_N$$

gdzie: f_k – współczynnik tarcia kinetycznego, F_N – siła nacisku.

- Zależność między współczynnikami tarcia: $f_s > f_k$.



- Siłę powodującą ruch po okręgu nazywamy **siłą dośrodkową**:

$$F_d = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

gdzie: m – masa ciała poruszającego się po okręgu, v – prędkość liniowa, r – promień okręgu, ω – prędkość kątowa.

- **Siły bezwładności** $\vec{F}_b$ to siły pozorne, które nie wynikają z żadnych oddziaływań. Ich działanie obserwujemy tylko wtedy, gdy układ odniesienia porusza się ruchem przyspieszonym:

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}$$

- W **układzie inercyjnym** działają wyłącznie rzeczywiste siły, wynikające z oddziaływania ciał.

- W **układzie nieinercyjnym** oprócz sił rzeczywistych działają siły pozorne, związane ze zmianą prędkości układu.

- Gdy siła bezwładności działa w tym samym kierunku co siła grawitacji, jej działanie odczuwamy jako pozorne zwiększenie ciężaru ciała – **przeciążenie**, jego pozorne zmniejszenie – **niedociążenie** lub pozorny brak ciężaru – **nieważkość**. Przeciążenie występuje np. w windzie ruszającej w górę, a niedociążenie – w windzie ruszającej w dół. Nieważkość natomiast występuje m.in. na stacji kosmicznej na orbicie Ziemi.

- Obracający się układ odniesienia jest układem nieinercyjnym. Działa w nim siła bezwładności zwana **siłą odśrodkową**:

$$F_{od} = \frac{mv^2}{r} = F_d$$

Siła ta jest skierowana wzdłuż promienia na zewnątrz okręgu.



Sposób na zadanie

Stosowanie praw fizyki i modelowanie zjawisk

Zadanie 1. (0–1)

Wskaż właściwe dokończenie poniższego zdania.

Jeśli na spoczywający kamyczek działają tylko trzy siły: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ oraz $\vec{F}_3$, których wartości są równe: $F_1 = 3 \text{ N}$, $F_2 = 4 \text{ N}$ oraz $F_3 = 5 \text{ N}$, to siła będąca wypadkową $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$, czyli suma $\vec{F}_2 + \vec{F}_3$, ma wartość

- A. 1 N. B. 3 N. C. $\sqrt{41}$ N. D. 9 N.

Rozwiązanie:

Poprawna jest odpowiedź B.

Jeżeli ciało spoczywa, oznacza to, że wypadkowa działających na nie sił wynosi zero.

Skoro wiemy, że na ciało działają trzy siły, to aby ich wypadkowa wynosiła zero, suma dwóch z nich musi być co do wartości równa trzeciej sile i mieć przeciwny zwrot:

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -\vec{F}_1$$

Oznacza to, że szukana wartość to 3 N. Zauważ, że nie musimy znać kątów między kierunkami sił, aby odpowiedzieć na to pytanie. Wartości sił F_1 i F_2 również nie są nam potrzebne.

Warto zapamiętać!

- Jeżeli ciało spoczywa, to siła wypadkowa działająca na to ciało wynosi zero. Ale nie jest odwrotnie: jeśli siła wypadkowa wynosi zero, ciało może się poruszać (ruchem jednostajnym).

Zadanie 2. (0–1)

Kostka lodu ześlizguje się bez tarcia po równi pochyłej.

Wybierz właściwe dokończenie zdania spośród A–C oraz jego poprawne uzasadnienie spośród 1–3. Pomiń opory powietrza.

Kostka lodu, ślizgając się po równi, cały czas się topi, a jej przyspieszenie

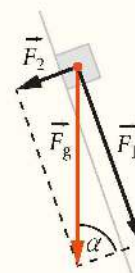
A.	wzrasta,	ponieważ	1.	maleje masa kostki.
B.	maleje,		2.	nie zależy od masy kostki.
C.	nie zmienia się,		3.	maleje siła wypadkowa działająca na kostkę.

Rozwiązanie:

Poprawna jest odpowiedź C–2.

Wskazówka 1. Przyspieszenie zawsze jest związane z siłą działającą na ciało. Wskaż odpowiednią siłę.

Jeżeli ciało zsuwa się z równi bez tarcia, to działa na nie tylko siła ciężkości: $F_g = mg$. Siłę tę rozkładamy na składowe: siłę prostopadłą do równi i siłę równoległą do równi (patrz rysunek).



Za zsuwanie się ciała z równi odpowiada składowa równoległa:

$$F_1 = mg \sin \alpha$$

Zgodnie z II zasadą dynamiki $F_1 = ma$, gdzie a to przyspieszenie ciała. Możemy przyrównać te dwa wzory na siłę F_1 i wyznaczyć z nich a :

$$ma = mg \sin \alpha \rightarrow a = g \sin \alpha$$

Przyspieszenie ciała zsuwającego się bez tarcia po równi pochyłej nie zależy więc od masy ciała.

Warto zapamiętać!

- Siła ściąająca ciało z równi, czyli składowa siły ciężkości równoległa do równi, jest proporcjonalna do masy ciała. Dlatego przyspieszenie ciała jest niezależne od masy.

Zadanie 3. (0–2)

Książka o masie $m = 0,5 \text{ kg}$ położona na płaskim stole lekko uniesionym z jednej strony pozostaje w spoczynku. Kąt nachylenia blatu stołu do poziomu wynosi α . Co można powiedzieć o współczynniku tarcia statycznego między książką a stołem?

Rozwiązanie:

Ważne jest poprawne sporządzenie rysunku.

Siłę ciężkości $\vec{F}_g$, działającą na książkę, rozkładamy na składowe jak na rysunku:

$$F_1 = F_g \sin \alpha \quad \text{ i } \quad F_2 = F_g \cos \alpha$$

Skoro książka spoczywa, to działająca na nią siła wypadkowa wynosi zero.

Składową $\vec{F}_1$ równoważy równa jej co do wartości siła tarcia $\vec{F}_T$, a składową $\vec{F}_2$ – siła sprężystości $\vec{F}_S$.

Wiemy, że siła tarcia statycznego nie może przekroczyć wartości $f_s \cdot F_2$, a więc:

$$F_1 = F_T \leq f_s \cdot F_2$$

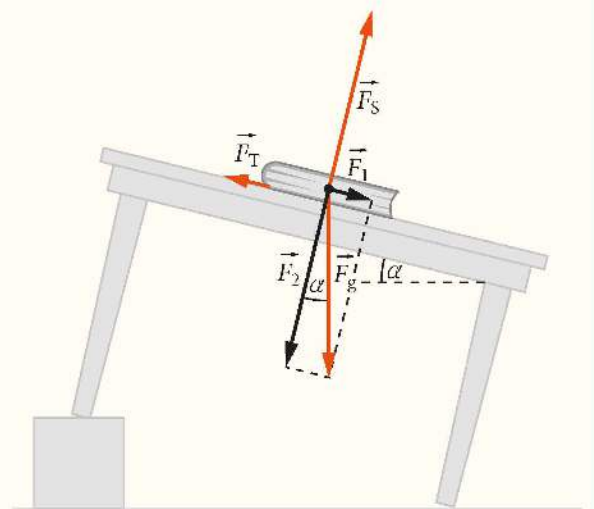
czyli

$$F_g \sin \alpha \leq f_s \cdot F_g \cos \alpha \rightarrow f_s \geq \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Odpowiedź: Współczynnik tarcia statycznego jest równy lub większy od $\tan \alpha$.

Warto zapamiętać!

- Współczynnik tarcia statycznego pozwala obliczyć tylko **maksymalną** wartość siły tarcia. Jeśli siła zewnętrzna próbująca poruszyć ciało jest mniejsza, to tak samo jest z siłą tarcia, której wartość jest tylko taka, jakiej potrzeba do zrównoważenia siły zewnętrznej.



Zadania powtórzeniowe

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



Zadanie 1. Rakieta Proton

Rosyjska rakieta klasy Proton jest przeznaczona m.in. do wynoszenia satelitów na niską orbitę okołozemską. Proton jest rakieta trójczłonową. Po zakończeniu odliczania uruchamiane są silniki pierwszego członu, które pracują przez 120 s i wytwarzają w tym czasie siłę ciągu o stałej wartości 9500 kN. Po wyczerpaniu się paliwa i odrzuceniu pierwszego członu rakiety uruchamiane są silniki drugiego członu, pracujące przez 206 s i nadające maszynie siłę ciągu 2300 kN, a następnie silniki trzeciego członu, działające przez 238 sekund i wytwarzające siłę ciągu 707 kN.



Człon rakiety	Masa członu [t]	
	z paliwem	bez paliwa
I	451	31
II	168	12
III	51	4

1.1. Oblicz:

- masę startującej rakiety,
- wartość siły wypadkowej działającej na raketę w chwili startu,
- wartość przyspieszenia rakiety w chwili startu.

1.2. Sporządź wykres zależności przyspieszenia rakiety względem Ziemi od czasu w ciągu pierwszych 120 s lotu. Przyjmij, że wartość przyspieszenia ziemskiego jest stała. Pomiń opory powietrza.

Wskazówka. Zauważ, że przy korzystaniu z drugiej zasady dynamiki należy wziąć pod uwagę masę rakiety w danej chwili. Jej masa się zmienia, możesz założyć, że jest to zmiana jednostajna.

1.3. Oszacuj wartość prędkości rakiety pod koniec pierwszej minuty lotu. Pomiń opory powietrza.

Wskazówka. Przyrost prędkości rakiety jest równy polu pod wykresem zależności przyspieszenia od czasu.

1.4. Oblicz prędkość względem rakiety, z jaką gazy spalinowe są wyrzucane przez drugi człon rakiety. Skorzystaj ze wzoru:

$$F_c = u \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

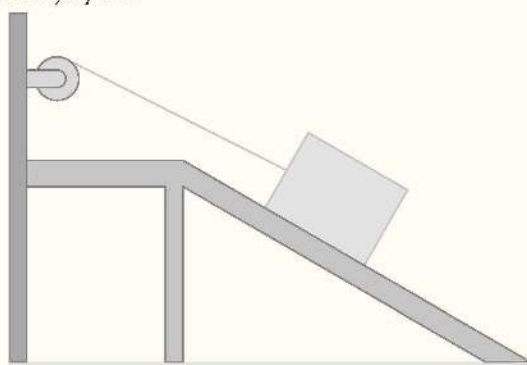
gdzie:

F_c – siła ciągu rakiety, u – prędkość gazów spalinowych względem rakiety, $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ – szybkość zużycia paliwa, Δm – masa wyrzuconego paliwa, Δt – czas pracy silnika.

Zadanie 2. Transport po pochylni

W magazynie na rampie o wysokości 1,5 m zamontowana jest wciągarka, która za pomocą liny transportuje po pochylni długości 3 m skrzynię o masie 500 kg i długości 1 m. Wytrzymałość liny jest równa 10 000 N, a współczynnik tarcia kinetycznego skrzyni o pochylnię wynosi 0,8.

2.1. Przerysuj poniższy rysunek do zeszytu. Na rysunku z zachowaniem odpowiednich proporcji narysuj i podpisz wektory sił działających na transportowaną skrzynię, przy założeniu, że porusza się ona ruchem jednostajnym.



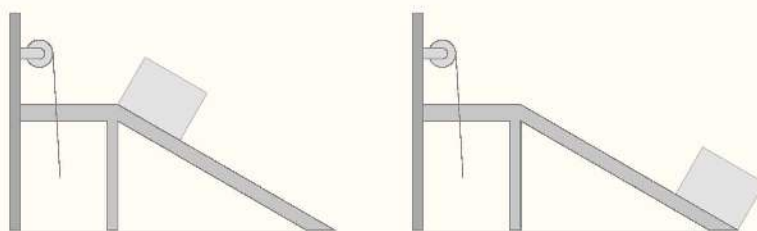
2.2. Wykaż, że po odcięciu liny skrzynia pozostawiona na pochylni się nie zsunie.

Wskazówka. Nie znamy dokładnej wartości współczynnika tarcia statycznego skrzyni o pochylnię. Możemy jednak coś o nim powiedzieć. Co mianowicie?

2.3. Oblicz naprężenie liny, gdy skrzynia jest wciągana ruchem jednostajnym.

2.4. Oblicz maksymalne przyspieszenie, z jakim może być wciągana skrzynia.

2.5. W zimowy dzień w wyniku oblodzenia współczynnik tarcia zmniejszył się do 0,1. Po odcięciu liny na szczycie pochylni skrzynia zaczęła się zsuwać. Oblicz prędkość, jaką uzyska na dole pochylni (patrz rysunek).



Wskazówka. Skorzystaj z wiadomości o ruchu jednostajnym przyspieszonym lub o przemianach energii omawianych w szkole podstawowej. W tym drugim wypadku pamiętaj także o pracy przeciwko siłom tarcia.

Zadanie 3. Scena obrotowa

Aktor o masie 90 kg, stojący początkowo na środku obrotowej sceny o promieniu 5 m, która porusza się ze stałą prędkością kątową $0,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, zaczyna powoli iść w kierunku krańca sceny. Na nogach ma obuwie o współczynniku tarcia statycznego o podłoże 0,8. Środek sceny pokrywa się z osią obrotu.

3.1. Oblicz maksymalną odległość od osi obrotu, w jakiej siła odśrodkowa nie wyrzuci aktora ze sceny.

3.2. Na potrzeby przedstawienia na brzegu sceny zbudowano pionową ścianę, o którą w trakcie spektaklu aktor opiera się, stojąc prosto. Oblicz wartość siły nacisku działającej wówczas na ścianę.

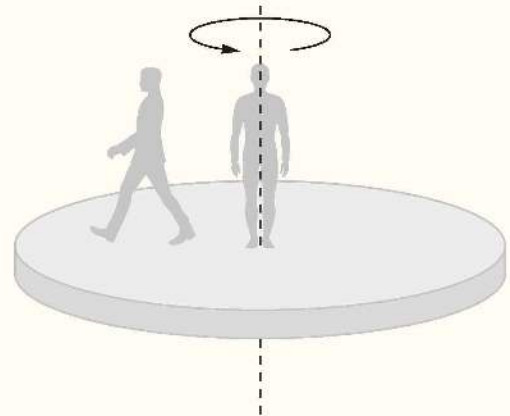
3.3. Oblicz częstotliwość obrotów sceny, przy jakiej aktor może utrzymać się na jej brzegu bez podpierania się.

Informacja do punktów 3.4. i 3.5.

Aktor, aby zachować równowagę na brzegu sceny, odchyła się od pionu w stronę jej osi obrotu.

3.4. Narysuj w zeszycie i podpisz wektory sił działających na aktora w układzie odniesienia związanym z ziemią. Zachowaj proporcje długości wektorów.

3.5. Oblicz kąt, o jaki odchylone jest od pionu ciało aktora.





5 Energia i pęd

1. Praca i moc jako wielkości fizyczne
2. Pojęcie energii. Energia potencjalna grawitacji
3. Energia kinetyczna. Zasada zachowania energii
4. Energia potencjalna sprężystości
5. Pęd. Zasada zachowania pędu
6. Zderzenia sprężyste i niesprężyste

5.1. Praca i moc jako wielkości fizyczne

Przypomnij sobie

- Jeśli na ciało działa siła, a ciało przemieszcza się w kierunku zgodnym z kierunkiem działającej siły, to praca wykonana nad ciałem jest równa iloczynowi siły i drogi.
- Praca jest wielkością skalarną, a jej jednostką jest džul: $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- Moc określa, jak szybko wykonywana jest praca: $P = \frac{W}{t}$.
- Jednostką mocy jest wat: $1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}$.

Na początku rozdziału piątego omówimy pojęcia pracy i mocy. Kolejne tematy poświęcone będą dwóm bardzo ważnym wielkościami fizycznym: energii i pędowi.

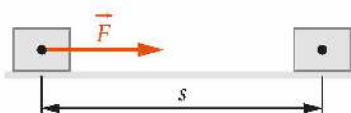
■ Praca

Pojęcie pracy ma w fizyce inne znaczenie niż w życiu codziennym. Ze szkoły podstawowej wiesz, że gdy na ciało działa stała siła i przemieszcza się ono w kierunku zgodnym z kierunkiem działania tej siły (rys. 5.1), to pracę obliczamy ze wzoru:

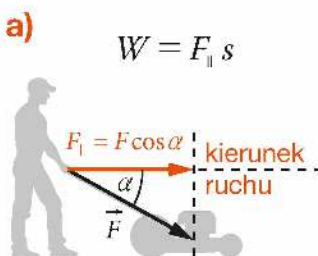
$$W = F s$$

gdzie: W – praca, F – wartość siły, s – pokonana droga.

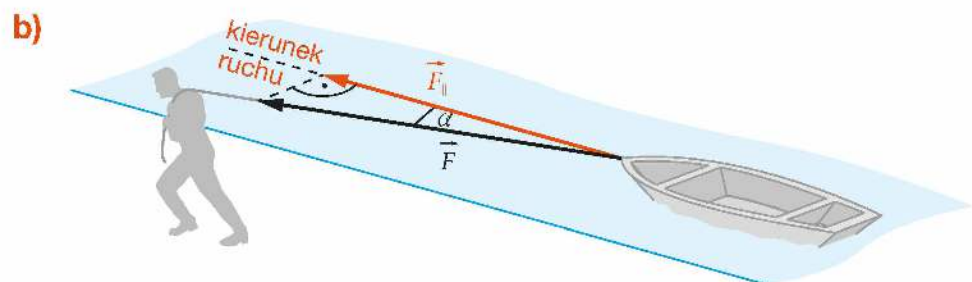
Jak jednak obliczyć pracę, gdy siła nie działa zgodnie z kierunkiem ruchu ciała, np. tak jak na rysunkach 5.2a i 5.2b?



Rys. 5.1. Jeżeli ciało przemieszcza się w kierunku zgodnym z kierunkiem działania siły $\vec{F}$, to praca $W = F s$



F – wartość siły,
 $F_{||}$ – wartość składowej równoległej do kierunku ruchu,
 s – droga,
 α – kąt między wektorem siły a kierunkiem ruchu ciała



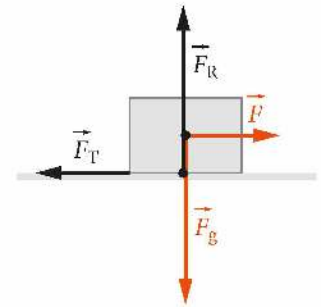
Rys. 5.2. a) wyrażenie $F \cos \alpha$ jest równe wartości składowej siły $\vec{F}$ równoległej do kierunku ruchu ($F_{||}$), możemy więc powiedzieć, że praca jest równa iloczynowi tej składowej i drogi, b) ciągnąc łódź wzdłuż brzozy, człowiek działa siłą $\vec{F}$ – tylko jedna z jej składowych, oznaczona $\vec{F}_{||}$, jest zgodna z kierunkiem ruchu łodzi

Gdy siła o stałej wartości nie działa zgodnie z kierunkiem ruchu, a ciało porusza się po linii prostej, pracę obliczamy ze wzoru:

$$W = F_{||} s = F s \cos \alpha$$

Gdy siła działa zgodnie z kierunkiem ruchu ciała, kąt α jest równy zero, a ponieważ $\cos 0^\circ = 1$, otrzymujemy przytoczony wcześniej wzór $W = Fs$. Siła o kierunku prostopadłym do kierunku ruchu nie wykonuje pracy. W tym przypadku $\alpha = 90^\circ$, a $\cos 90^\circ = 0$.

Na przykład, gdy przesuwamy skrzynię po poziomym podłożu, jak na rysunku 5.3, to oprócz przyłożonej przez nas siły $\vec{F}$ oraz siły tarcia $\vec{F}_T$, na skrzynię działają również siła ciężkości $\vec{F}_g$ i siła reakcji podłoża $\vec{F}_R$. Dwie ostatnie z wymienionych sił nie wykonują pracy – są prostopadłe do podłoża. Podobnie jest z siłą dośrodkową, która zawsze jest prostopadła do kierunku wektora prędkości i także nie wykonuje pracy.

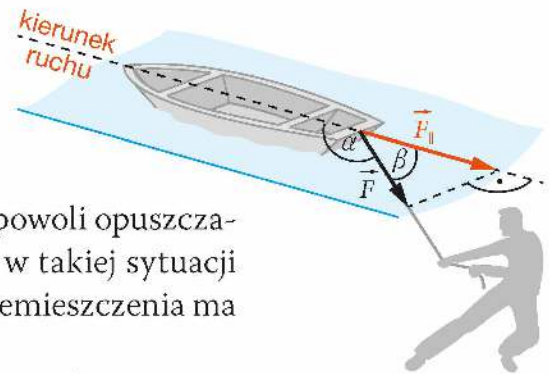


Rys. 5.3. Rozkład sił podczas przesuwania skrzyni w poziomie

Praca ujemna

Gdy kąt α jest rozwarty, a więc składowa $\vec{F}_\parallel$ ma zwrot przeciwny do wektora przemieszczenia, praca jest ujemna. Przykładem takiej sytuacji jest siła, którą próbujemy zatrzymać rozpędzony wózek albo siła tarcia powodująca hamowanie ciała. Również gdy powoli opuszczamy przedmiot, wykonujemy pracę ujemną: siła, którą w takiej sytuacji podtrzymujemy przedmiot, działa w górę, a wektor przemieszczenia ma zwrot w dół.

Ze wzoru $W = Fs \cos \alpha$ możemy korzystać także wtedy, kiedy praca jest ujemna, gdyż cosinus może przyjmować wartości ujemne – dla kąta rozwartego. W takim przypadku korzystamy z zależności: $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$ (rys. 5.4).



Rys. 5.4. Człowiek ciągnący za linę, aby zatrzymać łódź, wykonuje pracę ujemną

Zmienna siła

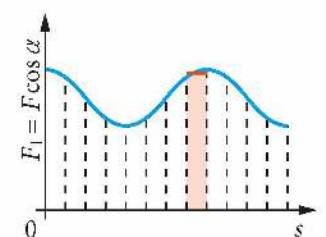
Pojęcie pracy można uogólnić jeszcze bardziej. W tym celu należy uwzględnić sytuację, gdy siła działająca na ciało się zmienia, a jego ruch niekoniecznie jest ruchem prostoliniowym.

Jeżeli sporządzimy wykres zależności siły $F_\parallel = F \cos \alpha$, powodującej przemieszczenie ciała, od drogi s , to praca będzie równa polu pod tym wykresem.

Dlaczego? Każdą dostatecznie gładką krzywą można przybliżyć za pomocą bardzo wielu schodków. Każdy ze schodków jest prostokątem, który odpowiada krótkiemu czasowi ruchu. Można założyć, że na tym odcinku czasu ruch jest praktycznie prostoliniowy, a siła i kąt α są stałe. Dla każdego prostokąta można więc zastosować przytaczany już wcześniej wzór $W = Fs \cos \alpha$. Suma pól wszystkich prostokątów jest równa pracy wykonanej przez siłę $\vec{F}$ (rys. 5.5).

Jeśli kąt między siłą a kierunkiem ruchu jest stały, a zmienia się tylko wartość siły, możemy skorzystać z wykresu $F(s)$, a otrzymane pole pomnożyć przez $\cos \alpha$.

Wykorzystanie pola pod wykresem s. 73



Rys. 5.5. Praca jest równa polu pod wykresem zależności $F \cos \alpha(s)$

■ Jednostka pracy

Na cześć angielskiego fizyka Jamesa Prescottta Joule'a (czyt. dżejmsa preskota dżula, 1818–1889), zajmującego się m.in. zagadnieniami pracy, energii i ciepła, jednostka pracy (a zarazem energii) została nazwana **dżulem**: $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$.

Dżul to praca, którą wykonujemy, gdy działamy siłą 1 N zgodną ze zwrotem przemieszczenia na drodze 1 m.

Praca 1 J to praca wykonana na przykład podczas podnoszenia 100 g czekolady (o ciężarze 1 N) z ziemi na wysokość 1 m.

■ Moc

W wielu sytuacjach interesuje nas nie tylko to, jak duża praca została wykonana, lecz także w jakim czasie ją wykonano. Moc jest wielkością określającą, jak szybko wykonywana jest praca – liczbowo równa jest pracy wykonanej w czasie 1 s:

$$P = \frac{W}{t}$$

Urządzenie wykonujące pracę 1 dżula w czasie 1 sekundy ma moc **1 wata**.
 $1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}$

Jednostką mocy jest **wat**, $1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}$. Nazwa jednostki mocy pochodzi od nazwiska Jamesa Watta (czyt. dżejmsa łota, 1736–1819). Moc równa 1 W jest stosunkowo niewielka, dlatego też często wielkość tę wyrażamy w większych jednostkach, np. kW czy MW. W ogólniejszym znaczeniu moc oznacza także tempo przemian energii, a więc jest ona liczbowo równa energii, która uległa przemianie w czasie 1 s.

Zauważ, że gdy stała siła działa w tę samą stronę, w którą porusza się ciało, do wzoru na moc można podstawić zależność $W = Fs$:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = F \frac{s}{t} = Fv$$

W opisanym przypadku moc można więc także obliczać jako iloczyn siły i prędkości. Gdy siła działa w innym kierunku niż porusza się ciało, bierzemy pod uwagę tylko jej składową równoległą do prędkości:

$$P = F_{\parallel} v = Fv \cos \alpha$$

A to ciekawe

Moc silników samochodowych często wyrażana jest w koniach mechanicznych: $1 \text{ KM} = 735,5 \text{ W}$. Ta tradycyjna jednostka mocy wywodzi się z XVIII wieku, kiedy to powstawały pierwsze maszyny parowe. James Watt, który ulepszył wynalazek Thomasa Newcomena (czyt. tomasa njukomena), z czasem zajął się także produkcją i sprzedażą maszyn parowych. Jego klientów interesowało, ile koni może być zastąpionych przez silnik, dlatego moc silnika maszyny parowej przeliczano na liczbę koni. Na zdjęciu obok – bolid Formuły 1 o mocy ok. 750 KM, czyli ok. 550 kW.



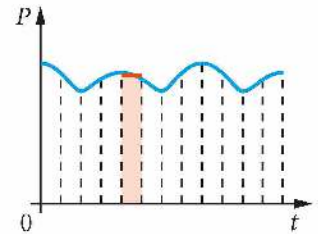
■ Obliczanie pracy na podstawie mocy

Wzór definiujący moc łatwo przekształcić do postaci: $W = P \cdot t$.

Otrzymany wzór na pracę jest bardzo prosty. Ale jak z niego skorzystać, kiedy moc się zmienia?

Jeśli zmian jest niewiele, możemy obliczyć pracę wykonaną na każdym etapie i dodać wyniki. Gdy natomiast zmiana mocy następuje w sposób ciągły, możemy ponownie skorzystać z metody obliczania pola pod wykresem, tym razem $P(t)$.

Każdy ciągły wykres możemy przybliżyć wąskimi schodkami. Wysokość schodka jest w przybliżeniu stała, co odpowiada stwierdzeniu, że w krótkim czasie moc zmienia się bardzo nieznacznie. To pozwala skorzystać ze wzoru $W = Pt$, tak jakby moc była stała. Suma pól schodków jest równa polu pod wykresem i co do wartości – równa całkowitej pracy wykonanej w danym przedziale czasu.



Rys. 5.6. Praca jest równa polu pod wykresem zależności $P(t)$

Po tej lekcji powinieneś

- znać pojęcie pracy i umieć zastosować wzór na pracę;
- znać pojęcie mocy i umieć obliczyć moc;
- umieć interpretować wykresy zależności siły od drogi i mocy od czasu.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZCIE



■ Przykład

Kabina windy o dopuszczalnej ładowności $m_l = 600$ kg ma masę $m_k = 800$ kg. Została zawieszona na linie przewleczonej przez bęben napędzany silnikiem, na której drugim końcu przymocowano przeciwwagę. Zgodnie z obowiązującymi normami ciężar przeciwwagi powinien być równy sumie ciężaru kabiny i połowy ciężaru dopuszczalnej ładowności. Silnik windy działa w ten sposób, że niezależnie od obciążenia kabiny winda porusza się z prędkością $v = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz maksymalną moc, z jaką pracuje silnik windy w czasie ruchu ze stałą prędkością. Pomiń opory ruchu. Przyjmij $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Rozwiązanie

Z największym obciążeniem silnika windy mamy do czynienia w dwóch sytuacjach: gdy w pełni obciążona winda jedzie w górę (rys. a) bądź gdy pusta jedzie w dół (rys. b).

Ciężar pustej kabiny windy:

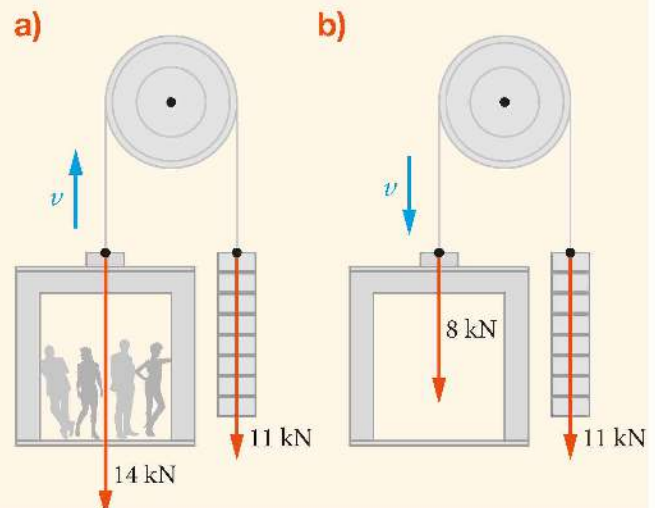
$$F_{gk} = m_k g = 800 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 8 \text{ kN}$$

Ciężar dopuszczalnego ładunku:

$$F_{gl} = m_l g = 600 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6 \text{ kN}$$

Ciężar przeciwwagi:

$$F_{gp} = F_{gk} + \frac{1}{2} F_{gl} = 8 \text{ kN} + 3 \text{ kN} = 11 \text{ kN}$$



W każdej z opisanych sytuacji silnik wykonuje pracę odpowiadającą wciąganiu w górę ciała o ciężarze $F = 3 \text{ kN}$:

$$\text{a)} F = F_{gk} + F_{gt} - F_{gp} = 3 \text{ kN}$$

$$\text{b)} F = F_{gp} - F_{gk} = 3 \text{ kN}$$

Jeżeli winda porusza się z prędkością $v = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, to w czasie t pokonuje drogę $s = vt$, co oznacza, że wykonuje pracę:

$$W = Fs = Fvt$$

Wynika z tego, że moc windy można wyrazić następująco: $P = \frac{Fvt}{t} = Fv$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy: $P = 3 \text{ kN} \cdot 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,4 \text{ kW}$.

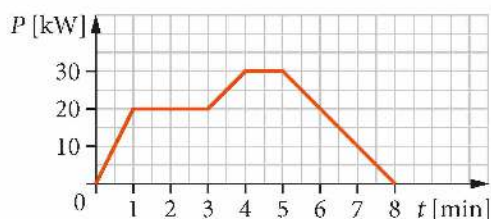
Odpowiedź: W czasie ruchu ze stałą prędkością silnik windy pracuje z mocą wynoszącą maksymalnie $2,4 \text{ kW}$.

Uwaga. Gdy winda rusza, jej moc może być większa niż $2,4 \text{ kW}$. Nie możemy jej dokładnie obliczyć, ponieważ w zadaniu nie podano przyspieszenia ruszającej windy.

1. Wojtek przesunął o 2 m szafę o masie 80 kg . Współczynnik tarcia kinetycznego między podstawą szafy i podłogą wynosi $0,4$. Oblicz pracę, jaką wykonał Wojtek.

2. Silnik pracował ze zmienną mocą, co przedstawiono na wykresie. Jaką pracę wykonał silnik w ciągu 8 minut ?

Wskazówka. Zwróć uwagę na jednostki zapisane przy osiach.



3. Chłopiec ciągnie sanki, na których siedzi jego siostra, po poziomej drodze długości 30 m . Działa on siłą 60 N , która tworzy z poziomem kąt 45° . Oblicz pracę wykonaną przez chłopca.

4. Siła oporów ruchu działająca na samochód o masie 1200 kg jadący po poziomym terenie z prędkością $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ wynosi 600 N .

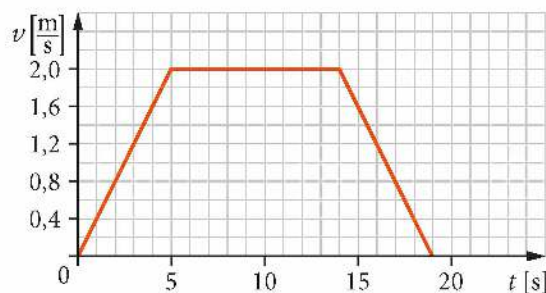
a) Oblicz moc silnika samochodu w opisanej sytuacji.

b) Oblicz moc silnika tego samego samochodu wjeżdżającego ze stałą prędkością

$90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ na wzniesienie o nachyleniu 5% (co oznacza, że tangens kąta nachylenia stoku do poziomu wynosi $0,05$). Ponieważ głównym składnikiem siły oporu jest opór powietrza, przyjmij, że jest ona jednakowa na poziomej i na pochyłej drodze.

c) W dowodzie rejestracyjnym samochodu jego moc jest określana za pomocą jednej konkretnej liczby. Z treści tego zadania wynika jednak, że moc zależy od sytuacji. Jak to wyjaśnić?

5. Wyciągarka podnosi materiał budowlany o łącznej masie 500 kg . Zależność wartości jej prędkości od czasu trwania ruchu przedstawiono na wykresie. Narysuj w zeszycie wykres przedstawiający zależność mocy silnika wyciągarki od czasu. Pomiń opory ruchu. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Na podstawie otrzymanego wykresu oblicz pracę wykonaną przez wyciągarkę.



5.2. Pojęcie energii. Energia potencjalna grawitacji

Przypomnij sobie

- Energię związaną z położeniem ciała względem Ziemi nazywamy energią potencjalną grawitacji (albo energią potencjalną ciężkości).
- Energię potencjalną grawitacji w pobliżu powierzchni Ziemi możemy wyrazić wzorem $E_p = mgh$.

■ Praca, jaką może wykonać ciało

Gdy jakieś ciało spada swobodnie lub zsuwa się z równi pochyłej, może wykonać pracę. Na przykład:

- ▶ spadający katar (rys. 5.7) może wbić pal w ziemię (co wymaga wykonania pracy),
- ▶ samochodzik po zjechaniu z równi pochyłej przejedzie pewną drogę.



Rys. 5.7. Katar (rodzaj młota) wykorzystuje pracę wykonaną przez spadające masywne obciążenie do wbijania pali w ziemię

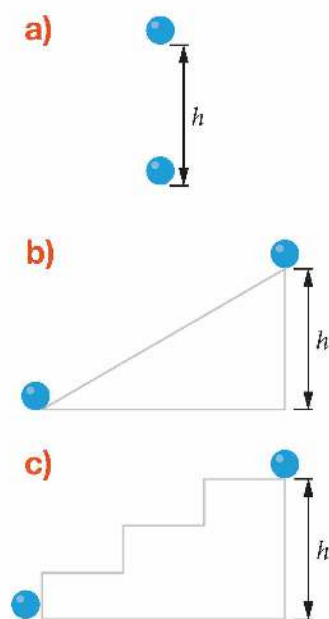
Doświadczenie 28

1. Zbuduj na podłodze równię pochyłą. Możesz użyć dużego kawałka twardej tektury i klocków lub książki z lakierowaną okładką podpartej z jednej strony innymi książkami (im większy format książki, tym lepiej).
2. Obok równi ustaw pionowo pudełko od zapalek. Umieść je w miejscu, w którym równia ma wysokość tego pudełka.
3. Puść samochodzik z wyznaczonego w ten sposób miejsca tak, aby zjechał prosto w dół. Zmierz drogę pokonaną przez niego po opuszczeniu równi. Powtórz pomiar pięć razy, oblicz średnią i niepewność pomiaru.
4. Zmień nachylenie równi, a następnie przestaw pudełko od zapalek tak, aby ponownie wskazywało miejsce, w którym wysokość równi odpowiada jego wysokości. Puść samochodzik z miejsca na równi wyznaczonego przez pudełko. Zmierz drogę pokonaną przez samochodzik po powierzchni poziomej. Powtórz opisane czynności kilkakrotnie.
5. Czy długość drogi pokonanej przez samochodzik po podłodze zależy od nachylenia równi?



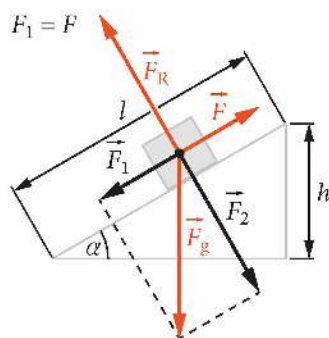
Średnia i niepewność pomiaru s. 22

Na początku zwróćmy uwagę, jak ważne jest w tym doświadczeniu wyznaczenie niepewności pomiarowej. Długość drogi przebytej przez samochodzik po kolejnych zjazdach nie była jednakowa. Dzięki wyznaczeniu niepewności pomiarowej możemy jednak stwierdzić, że z dokładnością



Rys. 5.8. Niezależnie od sposobu przemieszczenia kulki na wysokość h wykonywana jest taka sama praca

Rozkład siły ciężkości na równi pochyłej
s. 136–137



Rys. 5.9. Rozkład sił podczas wciągania ciała na równię ruchem jednostajnym

do tej niepewności droga nie zależała od nachylenia równi. Siła tarcia kinetycznego $\vec{F}_T$ właściwie się nie zmieniała. Na tej podstawie możemy wywnioskować, że wartość bezwzględna pracy wykonanej przez siłę tarcia kinetycznego nad samochodziem nie zależała od nachylenia równi.

Praca potrzebna do podniesienia ciała

Doświadczalnie można także wykazać, że praca potrzebna do podniesienia ciała na określoną wysokość jest stała, niezależnie od tego, w jaki sposób następuje zmiana jego położenia. Nieważne, czy podnosimy ciało pionowo w górę, czy wciągamy je po równi pochyłej (oczywiście, pomijając tarcie), czy też wnosimy je po schodach – wykonujemy taką samą pracę (rys. 5.8). Aby to udowodnić, posłużymy się obliczeniami matematycznymi. Najpierw rozważmy pionowe podnoszenie ciała ze stałą prędkością. W tym przypadku musimy działać na ciało siłą równoważącą jego ciężar, czyli siłą o wartości równej jego ciężarowi: $F_g = mg$. Siłą tą musimy działać na drodze równej wysokości, na jaką podnosimy ciało, $s = h$. Wobec tego wykonana praca jest równa:

$$W = F_g s = mgh$$

Przejdźmy do równi pochyłej (rys. 5.9). Aby wciągnąć ciało na równię, musimy pokonać siłę $\vec{F}_1$, której wartość obliczamy ze wzoru:

$$F_1 = F_g \sin \alpha = mg \sin \alpha = mg \frac{h}{l}$$

Działamy siłą równą co do wartości F_1 na drodze l , praca zatem wynosi:

$$W = F_1 l$$

Po podstawieniu do wzoru wyznaczonej siły F_1 , otrzymujemy wzór:

$$W = mgh$$

Praca nie zależy od sposobu przemieszczenia. Zatem długość odcinka toru **nie ma wpływu na pracę** wykonywaną podczas przemieszczania się ciała na określoną wysokość w obecności sił grawitacji. Taka sama praca zostaje wykonana zarówno przy pionowym podnoszeniu ciała, jak i przy jego wciąganiu po mniej lub bardziej nachylonej równi. Jest ona także równa pracy, jaką później ciało może wykonać podczas spadku z danej wysokości.

Pojęcie energii

Praca związana ze zmianą energii potencjalnej ciała zależy tylko od masy i zmiany wysokości. Możemy więc powiedzieć, że ciało podniesione do góry „magazynuje pracę”, zyskuje zdolność do jej wykonania. W takich sytuacjach mówimy, że ciało ma pewną energię.

Jeśli ciało może wykonać pracę, to mówimy, że ma energię.

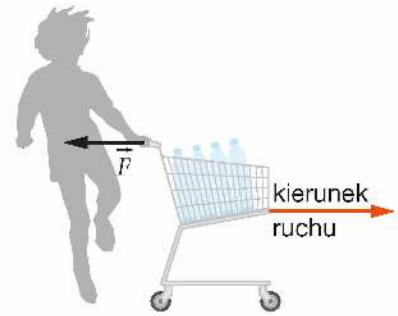
Gdy wykonujemy pracę nad ciałem, np. podnosząc je na pewną wysokość, zwiększamy jego energię. Z kolei gdy ciało wykonuje pracę, jego energia się zmniejsza.

Zmiana energii wynikająca z wykonania pracy jest równa tej pracy:

$$\Delta E = W$$

Gdy wykonujemy nad ciałem **pracę dodatnią**, np. rozpędzamy wózek, pchając go w stronę, w którą się porusza, zwiększamy jego energię ($\Delta E > 0$). Jak wiesz, możemy także wykonywać **pracę ujemną**, np. gdy zatrzymujemy rozpędzony wózek (rys. 5.10), ciągnąc go w stronę przeciwną do kierunku ruchu. Wówczas energia wózka się zmniejsza ($\Delta E < 0$). Kąt α między siłą $\vec{F}$ a kierunkiem ruchu ciała wynosi 180° , $\cos 180^\circ = -1$, dlatego:

$$W = F s \cos \alpha = F s \cos 180^\circ = -F s$$



Rys. 5.10. Podczas zatrzymywania rozpędzonego wózka wykonujemy pracę ujemną

■ Energia potencjalna grawitacji

Z dotychczasowych rozważań wynika, że gdy przemieszczamy ciało na wysokość h , musimy wykonać pracę $W = mgh$. Jego energia potencjalna wzrośnie więc o tę samą wartość:

$$\Delta E_p = mgh$$

Energię związaną z wysokością, na której znajduje się ciało, nazywamy **energją potencjalną grawitacji**.

W trakcie dalszej nauki poznasz inne rodzaje energii potencjalnej. W sytuacjach, gdy nie ma wątpliwości, że chodzi o energię potencjalną grawitacji, energię tę nazywamy w skrócie energią potencjalną.

Z powyższego wzoru możemy odczytać, że wraz ze zmianą wysokości zmienia się energia potencjalna grawitacji. Jeśli chcemy się dowiedzieć, ile konkretnie wynosi energia potencjalna danego ciała, **musimy** najpierw **ustalić poziom odniesienia, względem którego określimy zmianę jego wysokości**. Dopiero wtedy wzór na energię potencjalną możemy zapisać w postaci: $E_p = mgh$.

Na przykład kubek stojący na stoliku na piętrze schroniska na Kalatówkach będzie mieć inną energię potencjalną względem stolika, inną względem podłogi, jeszcze inną względem powierzchni Ziemi w tym miejscu, a zupełnie inną – zdecydowanie większą – względem poziomu morza.

■ Energia potencjalna grawitacji jako energia układu ciał

Na ogół mówimy, że ciało ma energię potencjalną grawitacji. Warto jednak pamiętać, że w tym przypadku chodzi właściwie nie o energię ciała, ale o energię układu złożonego z ciała i Ziemi. Jak się przekonasz, ma to znaczenie dla dobrego zrozumienia zasady zachowania energii.

Energia potencjalna

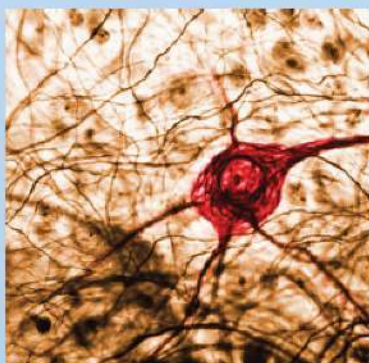
– energia zależna tylko od wzajemnego położenia ciał.



Rys. 5.11. Energia potencjalna turysty poruszającego się po szlaku jest mniejsza, niż kiedy nocuje on na piętrze schroniska

Formy energii

Energia występuje w wielu postaciach i może się przekształcać z jednej formy w inną. Oto różne formy energii, których przemiany obserwujemy na co dzień.



Energia elektryczna

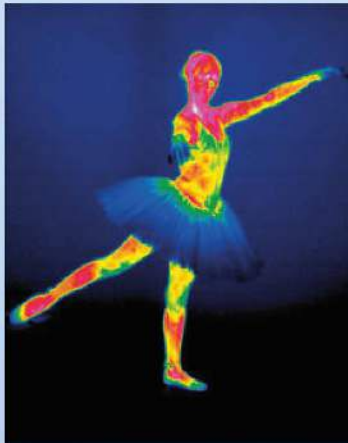
Neurony, tworzące układ nerwowy człowieka, przekazują ją sobie w postaci impulsów, które z kolei są przenoszone dzięki jonom sodu (Na^+), potasu (K^+), chloru (Cl^-) oraz wapnia (Ca^{2+}).



Energia potencjalna sprężystości

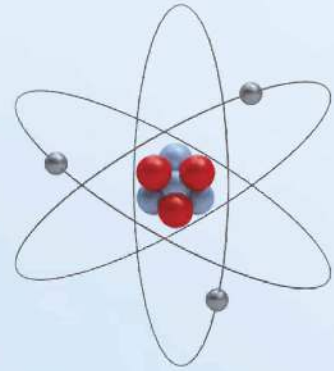
Dzięki elastyczności ścięgien człowiek nie tylko chroni kości przed złamaniem, ale także odzyskuje część energii mechanicznej zgromadzonej w nich podczas ruchu.





Energia promieniowania

Każde ciało emituje promieniowanie cieplne. Dla większości otaczających nas ciał należy ono do podczerwieni. Możemy je zaobserwować za pomocą termowizora.



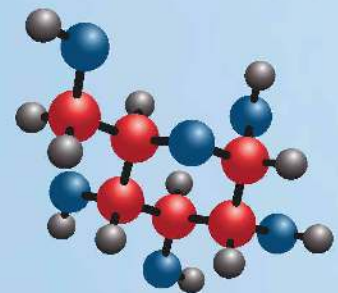
Energia jądrowa

Jest uwalniana w przemianach jądrowych, np. w procesie rozszczepienia atomu lub syntezy termojądrowej. Synteza termojądrowa zachodzi w Słońcu, a uwolniona w tym procesie energia podtrzymuje życie na Ziemi.



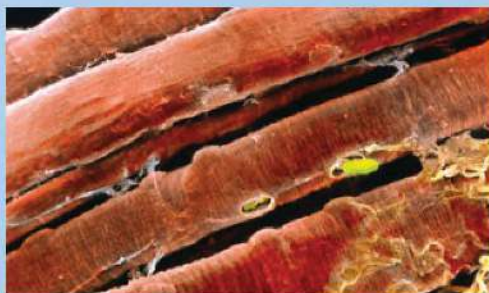
Energia wewnętrzna

Jest to energia kinetyczna cząsteczek ciała oraz energia potencjalna oddziaływań między tymi cząsteczkami. Energia wewnętrzna rośnie, gdy zwiększa się temperatura ciała.



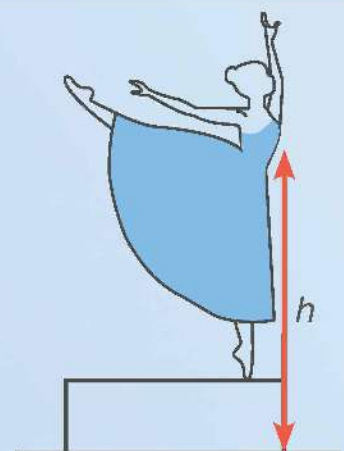
Energia chemiczna

Obecna w pożywieniu uwalnia się w procesie utleniania, który zachodzi w komórkach organizmu. Jest wykorzystywana m.in. do utrzymywania stałej temperatury ciała.



Energia kinetyczna

Człowiek zyskuje ją dzięki pracy mięśni, które wprawiają jego ciało w ruch. Praca, jaka zostaje przy tym wykonana, jest równa jego energii kinetycznej.



Energia potencjalna grawitacji

Jest tym większa, im wyżej od wybranego poziomu odniesienia znajduje się człowiek.

Po tej lekcji powinieneś

- posługiwać się pojęciem energii i wymieniać różne jej formy;
- obliczać energię potencjalną ciała;
- wiedzieć, że energia potencjalna ciała zależy od poziomu odniesienia.

Pytania i zadania

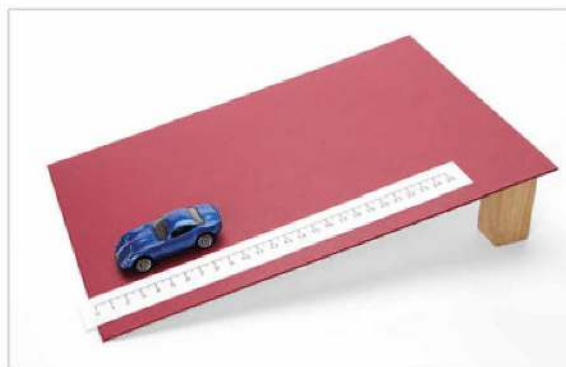
ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



1. Taternik o masie 80 kg wraz z ekwipunkiem o masie 40 kg wspiął się na szczyt o wysokości 2068 m n.p.m. Wspinaczkę rozpoczął z wysokości 1868 m n.p.m. O ile zwiększyła się jego energia potencjalna?
2. Samochodzik o masie 50 g, puszczony z równi pochyłej z wysokości 20 cm, jedzie z rozpędu po podłodze, hamowany siłą tarcia o wartości 0,02 N. Jaką drogę pokona po podłodze? Pomiń straty energii podczas zjazdu z równi.
3. Na jaką wysokość trzeba by podnieść kawałek masła o masie m , żeby jego energia potencjalna grawitacji była równa energii chemicznej zgromadzonej w tym kawałku? Samodzielnie znajdź potrzebne informacje.
4. Udowodnij, że chociaż energia potencjalna zależy od tego, względem jakiego poziomu odniesienia mierzymy wysokość, to różnica energii potencjalnej ciała między dwoma wybranymi punktami już od tego nie zależy.
5. Zależność energii potencjalnej od wysokości wyprowadziliśmy za pomocą obliczeń. Można ją również wyznaczyć doświadczalnie. W tym celu należy przeprowadzić doświadczenie podobne do opisanego na s. 193. Wymaga ono opracowania wyników wielu pomiarów, dlatego możecie wykonać je w kilka osób i podzielić się pracą.
 - a) Zbuduj równię pochyłą taką jak w doświadczeniu ze s. 193.
 - b) Odmierz 6 cm wzdłuż równi od jej dolnej krawędzi i postaw w tym miejscu

samochodzik (będziemy brać pod uwagę położenie środka samochodzika).

- c) Puść samochodzik prosto w dół. Zmierz łączną drogę pokonaną przez niego od momentu wypuszczenia do jego zatrzymania się. Powtórz pomiary pięć razy, oblicz średnią i niepewność pomiaru.
- d) Wykonaj pomiary ponownie, lecz tym razem odmierz 12 cm, a w kolejnych etapach doświadczenia 18 cm i 24 cm od dolnej krawędzi równi.
- e) Sporządź w zeszycie wykres zależności drogi pokonanej przez samochodzik od wysokości, z jakiej zjeżdżał, i sprawdź, czy punkty pomiarowe wraz z niepewnościami układają się na prostej.



Uwaga. Wysokość, z jakiej puszczamy samochodzik, nie jest równa odległości od dolnej krawędzi, ale jest do niej wprost proporcjonalna. Podobnie praca potrzebna do zatrzymania samochodziku jest z dobrym przybliżeniem wprost proporcjonalna do przebytej drogi, można bowiem założyć, że siły oporu się nie zmieniają.

5.3. Energia kinetyczna. Zasada zachowania energii

Przypomnij sobie

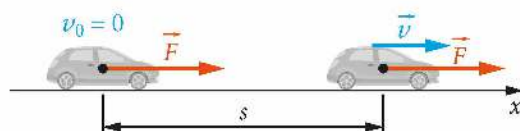
- Energia kinetyczna jest związana z ruchem ciała. Jest równa pracy, jaką należy wykonać, aby rozpędzić ciało od stanu spoczynku do danej prędkości.
- Energię kinetyczną ciała o masie m poruszającego się z prędkością v można obliczyć ze wzoru $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.

Aby wprowadzić ciało w ruch, musimy wykonać pewną pracę. Rozpędzone ciało samo może wykonać pracę, w wyniku czego zmniejsza się jego prędkość. Stąd wniosek, że ciało będące w ruchu ma pewną energię. Jak wiesz ze szkoły podstawowej, nazywamy ją **energiją kinetyczną** i wyrażamy następująco:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

■ Wyprowadzenie wzoru na energię kinetyczną

Znamy już wzór na tę formę energii, zajmijmy się jego uzasadnieniem. Aby rozpędzić ciało (np. samochód) o masie m od stanu spoczynku do danej prędkości v , musimy działać na nie przez pewien czas t siłą o wartości F (rys. 5.12). Siła ta nada ciału przyspieszenie $a = \frac{F}{m}$.



Rys. 5.12. Praca siły F powoduje zwiększenie energii kinetycznej samochodu

Ponieważ prędkość początkowa samochodu jest równa zero ($v_0 = 0$), a przyspieszenie jest stałe, więc przebędzie on drogę:

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

Obliczmy pracę, jaka zostanie wykonana przez stałą siłę F działającą w trakcie rozpędzania ciała od stanu spoczynku do danej prędkości v na drodze s .

$$W = Fs$$

wobec tego

$$W = Fs = ma \cdot \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}m(at)^2$$

Ciało rozpędzamy od stanu spoczynku do prędkości v , więc:

$$\Delta v = v = at$$

m – masa ciała,
 v – prędkość ciała,
 E_k – energia kinetyczna ciała
 $[E_k] = \text{J} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$

Druga zasada dynamiki
s. 143

Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym:
 $s = v_0t + \frac{at^2}{2}$
gdzie
 v_0 – prędkość początkowa

$\Delta v = v_k - v_0$
gdzie: v_k – prędkość końcowa,
 v_0 – prędkość początkowa



Rys. 5.13. W każdej chwili ruchu piłeczki $E_k + E_p = \text{const}$

Dlatego też pracę możemy wyrazić następująco:

$$W = \frac{1}{2}mv^2$$

Skoro stwierdziliśmy, że energia kinetyczna ciała jest równa pracy potrzebnej do jego rozpędzenia, to możemy tę energię wyrazić za pomocą wyprowadzonego powyżej wzoru na pracę:

$$E_k = W = \frac{1}{2}mv^2$$

■ Przemiany energii w spadku swobodnym

Zastanówmy się, jakie przemiany energii zachodzą, gdy ciało spada z pewnej wysokości h (rys. 5.13). W czasie t od chwili upuszczenia przebywa ono drogę:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

Wysokość, na której znajduje się ciało, zmniejsza się o wartość tej drogi:

$$\Delta h = -\frac{1}{2}gt^2$$

Wiemy, że energia potencjalna zależy od wysokości oraz maleje wraz z jej zmniejszaniem się. Zmiana tej energii jest więc równa:

$$\Delta E_p = mg\Delta h = mg\left(-\frac{1}{2}gt^2\right) = -\frac{1}{2}m(gt)^2$$

Ciało rozpędza się od stanu spoczynku, a jego prędkość po czasie t wynosi $v = gt$, zatem otrzymujemy:

$$\Delta E_p = -\frac{1}{2}mv^2$$

Z kolei energia kinetyczna ciała wzrasta w tym samym czasie od zera do wartości $\frac{1}{2}mv^2$, jej przyrost wyraża się więc wzorem:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Widzimy, że **energia kinetyczna wzrosła o tyle, o ile zmniejszyła się energia potencjalna** (pomijamy opór powietrza). W takich sytuacjach mówimy, że energia potencjalna zmieniła się w kinetyczną.

■ Energia mechaniczna

Jeśli dodamy do siebie energię potencjalną i kinetyczną, okaże się, że ich suma w czasie spadku nie uległa zmianie.

Sumę energii kinetycznej i potencjalnej nazywamy energią mechaniczną ciała:

$$E_{\text{mech}} = E_k + E_p$$

Widzimy, że przy spadku swobodnym energia mechaniczna nie ulega zmianie, czyli jest zachowana.

■ Zasada zachowania energii

Przemiany energii w trakcie spadku swobodnego nie są wyjątkowe, ale obrazują ogólną zasadę, zwaną **zasadą zachowania energii**.

W układzie izolowanym całkowita energia wszystkich ciał nie ulega zmianie, może zmieniać się jedynie jej forma:

$$E_c = \text{const}$$

Przez **układ izolowany** rozumiemy układ, w którym ciała mogą oddziaływać między sobą, ale nie oddziałują z ciałami spoza tego układu. Za taki układ z dobrym przybliżeniem możemy uznać układ Ziemia – spadające ciało. Siła grawitacji Słońca i innych ciał niebieskich nie wpływa bowiem znacząco na spadanie ciał na Ziemi. Dlatego też w przypadku tego układu możemy skorzystać z zasady zachowania energii.

Jak wiesz, energia przybiera wiele różnych form (patrz s. 196–197). Uwzględnienie wyłącznie energii mechanicznej ciała jest w wielu przypadkach niewystarczające. Na przykład gdy ciało zsuwa się ze stałą prędkością z równi pochyłej, jego energia mechaniczna się zmniejsza. Jednak całkowita energia układu ciało–równia pochyła pozostaje bez zmian, ponieważ wzrasta energia wewnętrzna ciała i równi (na skutek tarcia zwiększa się temperatura ciał). Jedne formy energii mogą zatem przechodzić w inne, ale całkowita energia układu pozostaje stała.

Energia wewnętrzna

– energia chaotycznego ruchu cząsteczek ciała i oddziaływań pomiędzy nimi. Rośnie wraz ze wzrostem temperatury i zmienia się przy zmianie stanu skupienia.

■ Zastosowania zasady zachowania energii

Na rysunku 5.14 przedstawiono uproszczony schemat toru kolejki górskiej (widok z boku). Obliczymy prędkość na mecie wagonika, który rozpoczął jazdę z zerową prędkością. Pomijamy opory ruchu.



Rys. 5.14. Tor kolejki górskiej w skali 1 : 200

Z rysunku odczytujemy, że meta kolejki znajduje się 3 metry niżej niż start. Na mecie energia potencjalna wagonika jest zatem mniejsza niż na starcie. Wiemy, że energia ta zamieniła się w energię kinetyczną, co możemy zapisać następująco:

$$|\Delta E_p| = |\Delta E_k|$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

Stąd prędkość wagonika na mecie obliczamy ze wzoru: $v = \sqrt{2gh}$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ m}} = \sqrt{60 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 7,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Prędkość końcowa wagonika wynosiła zatem około $7,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (czyli $28 \frac{\text{km}}{\text{h}}$). Powyższy przykład pokazuje, że zasada zachowania energii jest bardzo przydatna. Moglibyśmy rozwiązać to zadanie, korzystając z praw mechaniki i rozważając zmiany prędkości na każdym z czterech odcinków toru z osobna, jednak byłoby to bardzo żmudne.

■ Sprawność

Chociaż energia nigdy nie znika, w przemianach energii tylko jej część zmienia się w formy, które są dla nas użyteczne.

Jeśli na przykład dźwig pobiera 1000 J energii elektrycznej, której 800 J zmienia się w energię potencjalną podnoszonego ładunku, a pozostałe 200 J zmienia się w energię wewnętrzną, mówimy, że jego sprawność wynosi 80%.

η – sprawność,
 E_u – energia
 użyteczna,
 E_d – energia
 dostarczona

Sprawność to stosunek uzyskanej energii użytecznej do energii dostarczonej:

$$\eta = \frac{E_u}{E_d}$$

Po tej lekcji powinieneś

- posługiwać się pojęciem energii kinetycznej;
- wykorzystywać zasadę zachowania energii do analizy ruchu ciał;
- umieć obliczyć sprawność.

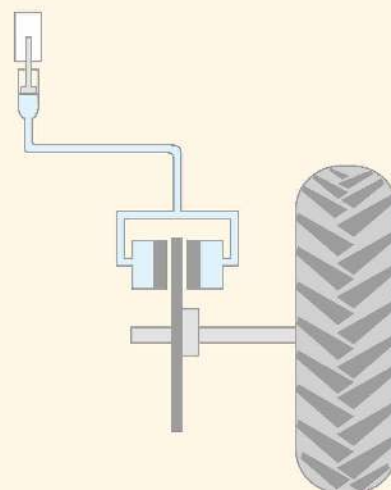
Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZCIE



■ Przykład

Samochód sportowy o masie 1600 kg jest wyposażony w hamulce tarczowe na wszystkich czterech kołach. Podczas hamowania o każdą tarczę z dwóch stron trą kločki hamulcowe. Oblicz siłę, którą każdy z klozków powinien naciskać na tarczę, aby samochód zatrzymał się na drodze 120 m, jeśli jego początkowa prędkość wynosi $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Przyjmij, że promień koła wynosi 30 cm, kločki trą o tarczę w odległości 10 cm od jej środka, a współczynnik tarcia kločka o tarczę wynosi 0,5. Zakładamy, że tarcie między oponą a szosą jest wystarczające, aby samochód nie wpadł w poślizg.



W tym zadaniu jest dużo danych, więc zanim przystąpimy do jego rozwiązania, najlepiej je wypisać.

Dane:

$$m = 1600 \text{ kg}$$

$$r = 10 \text{ cm}$$

$$R = 30 \text{ cm}$$

$$s = 120 \text{ m}$$

$$v = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$f = 0,5$$

Szukane:

$$F_N - \text{siła nacisku klocka na tarczę}$$

Rozwiązanie

Przeliczmy prędkość na jednostkę układu SI:

$$v = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{90\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Możemy teraz obliczyć początkową energię kinetyczną samochodu:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Po podstawieniu danych i wykonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 1600 \text{ kg} \cdot (25 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 500 \text{ kJ}$$

Aby zatrzymać samochód, musimy zmniejszyć jego energię kinetyczną od wartości 500 kJ do zera. Zmianę energii samochodu możemy zapisać następująco:

$$\Delta E_k = -500 \text{ kJ}$$

Zapis ten oznacza, że samochód (a konkretnie 8 klocków hamulcowych) musi wykonać pracę o wartości 500 kJ. Przy założeniu, że praca ta jest rozłożona równomiernie na poszczególne klocki hamulcowe, każdy z nich musi wykonać pracę o wartości:

$$|W| = \frac{1}{8} \cdot 500 \text{ kJ} = 62,5 \text{ kJ}$$

Z treści zadania wynika, że klocek dociska tarczę w odległości 3 razy mniejszej niż promień koła. Wobec tego punkt na tarczy na wysokości klocka hamulcowego przebędzie trzy razy krótszą drogę niż punkt na obwodzie koła, czyli pokona w tym samym czasie trzy razy krótszą drogę niż samochód.

Aby samochód zahamował na odcinku 120 m, praca klocka hamulcowego o wartości 62,5 kJ musi zostać wykonana na drodze równej:

$$s_k = 40 \text{ m}$$

Wartość siły tarcia potrzebnej do wykonania takiej pracy obliczymy ze wzoru:

$$F_T = \frac{|W|}{s_k}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$F_T = 1562,5 \text{ N}$$

Aby obliczyć siłę nacisku F_N klocka na tarczę przy takiej sile tarcia, skorzystamy z zależności:

$$F_T = f \cdot F_N$$

Przekształćmy ją do postaci:

$$F_N = \frac{F_T}{f}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$F_N = \frac{1562,5 \text{ N}}{0,5} \approx 3100 \text{ N}$$

Odpowiedź: Każdy z klocków hamulcowych powinien w opisanej sytuacji naciskać na tarczę siłą około 3100 N. Odpowiada to ciężarowi ciała o masie około 310 kg.

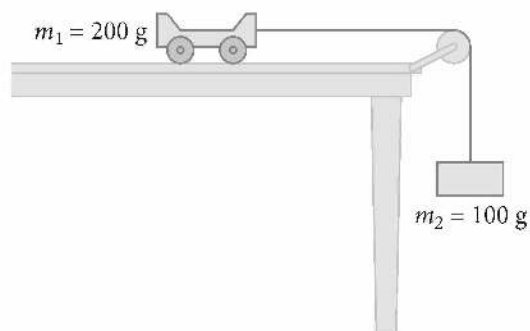
1. Stalowa kulka została zawieszona na nierozciągliwej nitce o długości 1 m. Nitkę odchyłono od pionu o kąt 30° i puszczono swobodnie. Z jaką prędkością będzie się poruszać kulka w swoim najniższym położeniu? Pomiń masę nitki i opory ruchu.
2. Na jaką wysokość wzniesie się kamień podrzucony pionowo w górę z prędkością $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$? Pomijamy opór powietrza. Rozwiąż to zadanie, korzystając z:
 - a) zasad dynamiki,
 - b) zasady zachowania energii.
3. Uzasadnij, że droga przebyta przez pudełko popchnięte po podłodze jest w przybliżeniu proporcjonalna do kwadratu jego prędkości początkowej, ale nie zależy od jego masy.
4. Silnik o sprawności 80% napędza wózek o masie 150 kg. Do jakiej prędkości zostanie przez ten silnik rozpędzony wózek

pozostający początkowo w stanie spoczynku, jeśli silnik zużyje energię 10 kJ?

5. Na stole stoi unieruchomiony wózek o masie $m_1 = 200 \text{ g}$, połączony przełożoną przez bloczek nicią z ciężarkiem o masie $m_2 = 100 \text{ g}$. Puszczony wózek zaczyna się poruszać. Jaką prędkość rozwinie po przejechaniu 10 cm? Pomiń masę bloczka i nici oraz opory ruchu.

Rozwiąż to zadanie, korzystając z:

- a) zasad dynamiki,
- b) zasady zachowania energii.



5.4. Energia potencjalna sprężystości

Przypomnij sobie

- Energię związaną z elastycznym odkształceniem ciała nazywamy energią potencjalną sprężystości.
- Jeżeli ciało może wykonać pracę, to mówimy, że ma energię.

Gdy rozciągamy sprężynę, musimy wykonać pracę. Następnie, gdy sprężyna się kurczy, sama może wykonać identyczną pracę, jaką na początku wykonano nad nią podczas jej rozciągania (pomijamy tutaj straty energii). Oznacza to, że w rozciągniętej sprężynie jest zgromadzona pewna energia. Nazywamy ją **energią potencjalną sprężystości**.

Pojęcie to stosujemy do opisu energii zgromadzonej we wszystkich ciałach sprężystych, np. w wygiętym łuku strzeleckim, rozciągniętej gumce recepturce, zgiętym przez wiatr drzewie albo odkształconej w czasie serwu piłce tenisowej. Rekordowy zasięg strzału z łuku sportowego przekracza 1000 m, chociaż tarcze na zawodach ustawia się w odległości do 90 m.



Rys. 5.15. Wygięty łuk gromadzi energię potencjalną sprężystości

■ Siła odkształcająca sprężynę

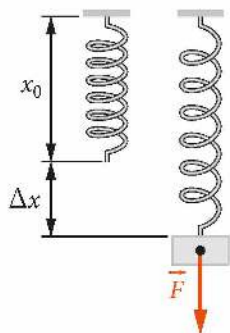
Jeśli spróbujesz rozciągnąć sprężynę, z łatwością zauważysz, że im bardziej ją rozciągasz, tym większej siły musisz użyć. Zbadamy tę zależność dokładniej.

Doświadczenie 29

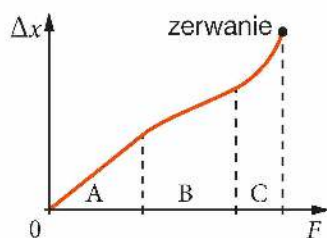
1. Na statywie zawieś sprężynę. Obok zamocuj linijkę. Odczytaj położenie dolnego końca sprężyny.
2. Sprężynę obciąż ciężarkiem i ponownie odczytaj położenie jej końca.
3. Dokładaj kolejne ciężarki o takiej samej masie i notuj w zeszycie położenie końca sprężyny.
4. Przedstaw w tabeli i na wykresie zależność wydłużenia sprężyny (zmiany jej długości) w zależności od liczby ciężarków.

Uwaga. Jeśli nie masz długiej sprężyny, statywu ani ciężarków, możesz wykorzystać gumkę pasmanteryjną o długości ok. 50 cm, dwa takie same krzesła, kij od szczotki i plastikową butelkę. Jeden z końców gumki przywiąż do kija od szczotki. Ustaw krzesła w niewielkiej odległości od siebie. Na oparciach krzeseł połóż kij. Do drugiego końca gumki przywiąż małą, pustą plastikową butelkę. Zmierz długość gumki, a następnie wlewaj do butelki jednakowe małe porcje wody. Za każdym razem mierz długość gumki. Pamiętaj, aby wydłużenie gumki było niewielkie w stosunku do jej długości. W przeciwnym razie możesz nie otrzymać zależności liniowej.

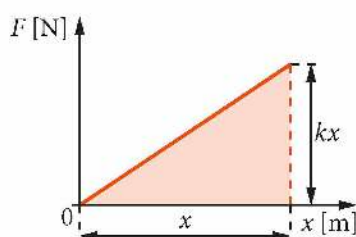




Rys. 5.16. Początkowa długość sprężyny x_0 pod wpływem siły odkształcającej $\vec{F}$ wzrosła o Δx



Rys. 5.17. Zmiana wydłużenia ciała stałego w zależności od przyłożonej siły: A – obszar stosowania prawa Hooke’a, A, B – obszary sprężyste, C – trwałe zniekształcenie



Rys. 5.18. Zależność siły sprężystości od wydłużenia sprężyny $F(x)$

Okazuje się, że wydłużenie sprężyny Δx jest wprost proporcjonalne do wartości siły $\vec{F}$ odkształcającej sprężynę – inaczej mówiąc, siła potrzebna do odkształcenia sprężyny jest wprost proporcjonalna do jej wydłużenia:

$$F = k\Delta x$$

gdzie k – współczynnik charakteryzujący daną sprężynę, zwany **współczynnikiem sprężystości**, $[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Powyższa zależność nosi nazwę **prawa Hooke’a** (czyt. huka). Prawo to obowiązuje do momentu, aż ciało wydłuży się do określonej wartości granicznej. Po przekroczeniu tej wartości siła przestaje być proporcjonalna do Δx , aż w końcu ciało, na przykład sprężyna, odkształca się trwale i zrywa (patrz rys. 5.17).

Dla gumki pasmanteryjnej prawo Hooke’a obowiązuje tylko w przybliżeniu i dla niewielkich rozciągnięć.

■ Wyprowadzenie wzoru na energię sprężystości

Gdy rozciągamy sprężynę w taki sposób, że jej wydłużenie rośnie od zera do pewnej wartości x (czyli $\Delta x = x$), musimy działać z coraz większą, rosnącą siłą F . Zależność $F(x)$ przedstawiono na wykresie (rys. 5.18). Jak wiesz z rozważań na s. 189, pole pod wykresem liczbowo jest równe wykonanej pracy. Można je łatwo obliczyć:

$$W = \frac{1}{2}x \cdot kx = \frac{1}{2}kx^2$$

Możemy teraz skorzystać z zależności:

$$\Delta E = W$$

Energia potencjalna sprężystości nienapiętej sprężyny wynosi zero, więc po napięciu sprężyny jej energia potencjalna sprężystości $E_{\text{ps}} = \Delta E$:

$$E_{\text{ps}} = \frac{1}{2}kx^2$$

Z powyższego wzoru wynika, że **energia potencjalna sprężystości** jest wprost proporcjonalna do kwadratu odkształcenia. Oznacza to na przykład, że 3 razy większemu odkształceniu odpowiada aż 9 razy większa energia. Dzieje się tak dlatego, że większe odkształcenie wpływa na wykonaną pracę dwójako: większa jest zarówno droga pokonywana przy rozciąganiu sprężyny, jak i średnia siła, którą trzeba działać.

Po tej lekcji powinieneś

- wiedzieć, od czego zależy siła sprężystości;
- posługiwać się pojęciem współczynnika sprężystości;
- obliczać energię potencjalną sprężystości.



■ Przykład

Dziewczyna o masie $m = 50$ kg wykonała skok na bungee z wieży o wysokości $h_1 = 90$ m. Lina, na której skoczyła, miała długość $l = 50$ m (nierozciągnięta) i była zaczepiona w miejscu, z którego był wykonywany skok. Gdy po pewnym czasie lina przestała wznosić się i opadać, jej koniec zawisł na wysokości $h_2 = 35$ m nad ziemią. Oblicz minimalną wysokość nad ziemią, na jakiej znalazł się koniec liny w czasie skoku. Pomiń opory ruchu i masę liny oraz załóż, że rozciągana lina spełnia prawo Hooke'a. Przyjmij $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Rozwiązanie

Na wysokości $h_2 = 35$ m nad ziemią, czyli przy wydłużeniu liny o 5 m, siła sprężystości liny równoważyła ciężar dziewczyny wynoszący 500 N. Wynika z tego, że współczynnik sprężystości liny wynosił:

$$k = \frac{500 \text{ N}}{5 \text{ m}} = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Oznaczmy maksymalne wydłużenie liny w czasie skoku przez x . Zarówno tuż przed skokiem, jak i w chwili maksymalnego wydłużenia liny prędkość dziewczyny była równa zero, więc nie zmieniła się jej energia kinetyczna ($\Delta E_k = 0$). Natomiast jej energia potencjalna grawitacji zmniejszyła się o $\Delta E_p = mg(l + x)$ (ponieważ zmniejszyła się o $l + x$ wysokość, na której znajdowała się dziewczyna). Zmieniła się także energia potencjalna sprężystości, która wzrosła od zera do $\frac{1}{2}kx^2$, zatem $\Delta E_{ps} = \frac{1}{2}kx^2$. Z zasady zachowania energii:

$$\begin{aligned}\Delta E_p &= \Delta E_{ps} \\ mg(l + x) &= \frac{1}{2}kx^2\end{aligned}$$

Zależność tę sprowadzamy do postaci:

$$\frac{1}{2}kx^2 - mgx - mgl = 0$$

Powyższe równanie najłatwiej rozwiązać przez podstawienie do niego od razu danych liczbowych (wyrażonych w jednostkach układu SI):

$$50x^2 - 500x - 25000 = 0 \quad | : 50$$

$$x^2 - 10x - 500 = 0$$

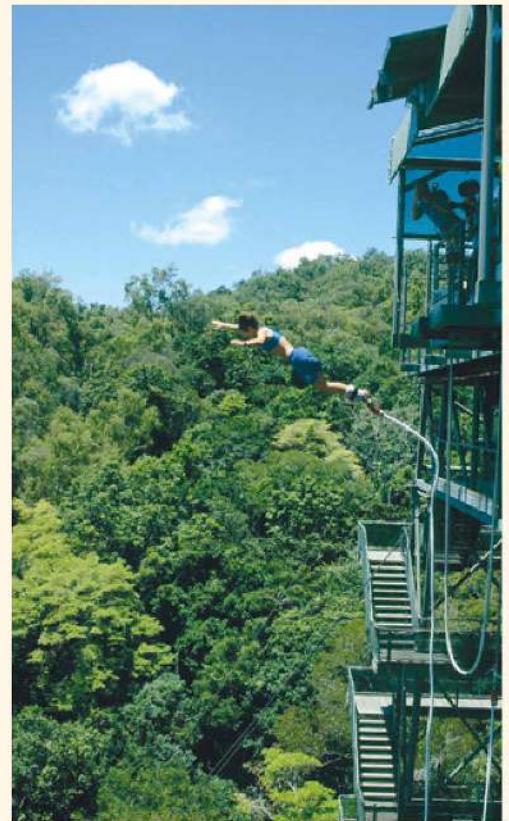
Otrzymane w ten sposób równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania (patrz s. 220):

$$x_1 \approx 27,9 \text{ oraz } x_2 \approx -17,9$$

Ujemne rozwiązanie odrzucamy, co oznacza, że $x \approx 27,9$.

W chwili największego wydłużenia liny jej całkowita długość była więc równa 77,9 m, co oznacza, że jej koniec znajdował się 12,1 m nad ziemią.

Odpowiedź: Minimalna wysokość, na jakiej znalazł się koniec liny w trakcie skoku, wynosiła około 12 m nad ziemią.

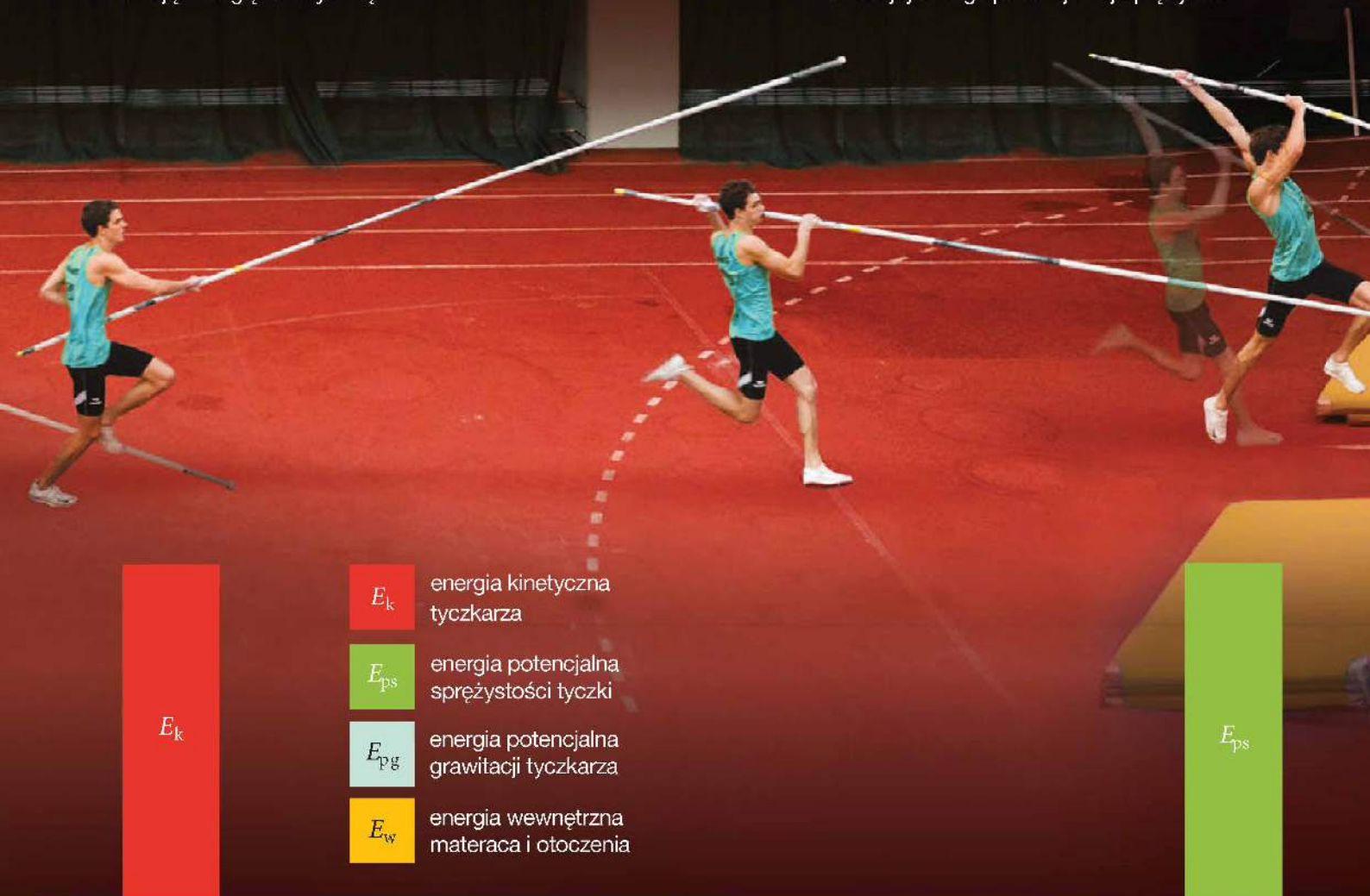


Przemiany energii

Codziennie mamy do czynienia z przemianami jednej formy energii w inną, np. dzięki zjedzeniu posiłku możemy się poruszać (energia chemiczna zmienia się w kinetyczną). Prześledźmy przemiany energii w czasie wykonywania przez zawodnika skoku o tyczce.

- 1** Podczas rozbiegu tyczkarz dzięki pracy mięśni zwiększa swoją energię kinetyczną.

- 2** Tyczkarz przekazuje energię kinetyczną tyczce, która odkształca się, co powoduje wzrost jej energii potencjalnej sprężystości.



E_k

E_k

energia kinetyczna
tyczkarza

E_{ps}

energia potencjalna
sprężystości tyczki

E_{pg}

energia potencjalna
grawitacji tyczkarza

E_w

energia wewnętrzna
materaca i otoczenia

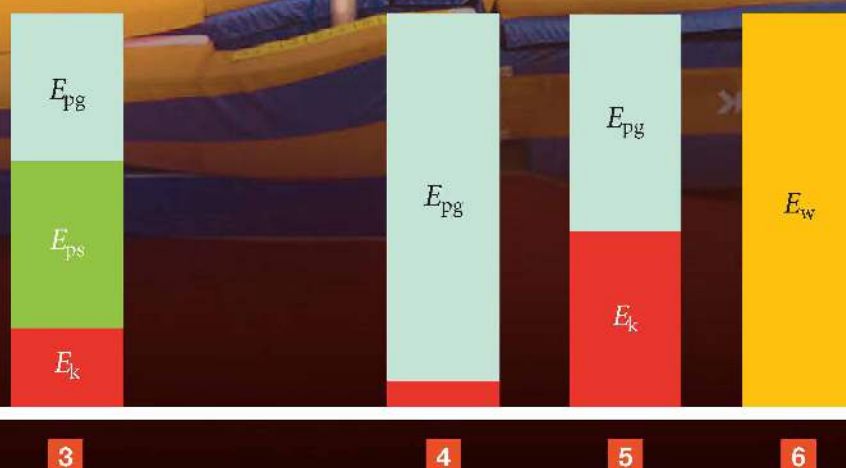
E_{ps}

4 Tyczkarz puszcza tyczkę i przelatuje nad poprzeczką. W tym momencie lekkoatleta osiąga maksymalną energię potencjalną grawitacji, a energia potencjalna sprężystości tyczki jest równa zero.

3 Tyczka się prostuje, unosząc tyczkarza – energia potencjalna sprężystości tyczki zamienia się w energię potencjalną grawitacji tyczkarza.

5 Podczas opadania na materac energia kinetyczna tyczkarza rośnie, a jego energia potencjalna grawitacji maleje, by w momencie zetknięcia tyczkarza z matercem osiągnąć zero.

6 Kiedy tyczkarz opada na materac, ten się odkształca – energia kinetyczna tyczkarza zamienia się w energię sprężystą materaca, a następnie w energię wewnętrzną.

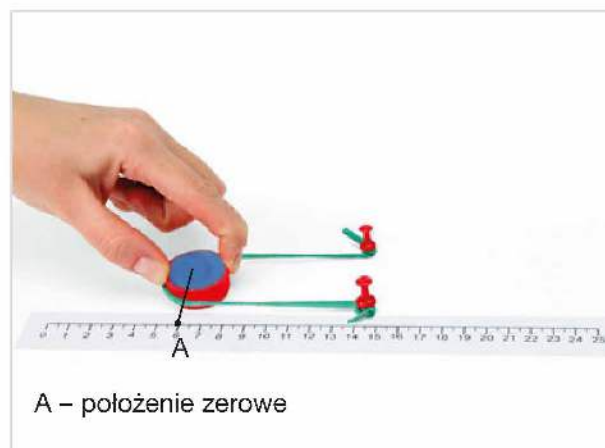


Pytania i zadania

1. Sprężyna miała długość 25 cm. Gdy powieszono na niej ciężarek o masie 50 g, rozciągnęła się do 28 cm. Jaką długość osiągnie, gdy zamiast tego ciężarka powiesimy inny, o masie 75 g?
2. Aby rozciągnąć sprężynę o długości 10 cm do długości 11 cm, trzeba na nią zadziałać siłą 10 N.
 - a) Jaką pracę trzeba wykonać, aby rozciągnąć tę sprężynę do długości 12 cm?
 - b) Jaka energia zostanie zmagazynowana w sprężynie przy rozciągnięciu do 12 cm?
 - c) Jaką pracę będzie mogła wykonać sprężyna podczas powrotu od długości 12 cm do pierwotnej długości?
3. Podczas naciągania cięciwy strzała o masie 40 g została przesunięta o 60 cm względem łuku. Siła potrzebna do utrzymania tak napiętego łuku była równa 180 N. Załóż, że łuk spełnia prawo Hooke'a (czyt. huka), a cała energia sprężystości zamienia się w energię kinetyczną. Pomiń opory.
 - a) Na jaką wysokość wzbije się strzała, jeśli wystrzelimy ją pionowo w górę?
 - b) Jak daleko doleci, jeśli wystrzelimy ją poziomo z wysokości 120 cm?
4. Na sprężynie długości 40 cm zawieszono ciężarek. Gdy powoli opuszczono go do położenia równowagi, długość sprężyny wynosiła 50 cm. Następnie podniesiono ciężarek tak, że sprężyna skróciła się do pierwotnej długości 40 cm, i puszczono go swobodnie.
 - a) Oblicz maksymalne wydłużenie sprężyny po swobodnym puszczeniu ciężarka.
 - b) Opisz jakościowo dalszy ruch ciężarka.
5. Wzór na energię potencjalną sprężystości podaliśmy na podstawie wyników doświadczenia, w którym badaliśmy zależność

wydłużenia sprężyny od siły powodującej to wydłużenie. Z zachowaniem zasad bezpieczeństwa wykonaj doświadczenie pozwalające bezpośrednio sprawdzić, że energia potencjalna sprężystości jest wprost proporcjonalna do kwadratu wydłużenia.

- a) Przygotuj dużą deskę oraz rozciętą gumkę recepturkę, dwie pinezki, plastikową nakrętkę od butelki i linijkę. Nakrętkę wypełnij plasteliną.
- b) Przywiąż końce gumki do pinezek i wbij pinezki w deskę tak, aby gumka była luźna.
- c) Narysuj na desce podziałkę co 5 mm prostopadłą do linii pinezek.
- d) Napnij gumkę i włóż do niej – jak do procy – nakrętkę ustawioną plasteliną do góry (patrz zdjęcie).
- e) Zmierz drogę s przebytą przez wystrzeloną nakrętkę w zależności od wychYLENIA ŚRODKA GUMKI x (wychylenie odczytaj z narysowanej podziałki, za zerowe przyjmij takie położenie nakrętki, przy którym gumka nie jest ani luźna, ani rozciągnięta). Dla każdego wychylenia powtórz pomiar kilka razy i podaj średni wynik wraz z niepewnością pomiarową.
- f) Narysuj w zeszycie wykresy zależności $s(x)$ i $s(x^2)$. Wyciągnij wnioski z doświadczenia.



A – położenie zerowe

5.5. Pęd. Zasada zachowania pędu

Przypomnij sobie

- Zgodnie z drugą zasadą dynamiki ciało o masie m , na które działa siła wypadkowa F_w , porusza się z przyspieszeniem $a = \frac{F_w}{m}$.
- Trzecia zasada dynamiki mówi, że jeśli ciało A działa na ciało B pewną siłą, to ciało B działa na ciało A siłą o takiej samej wartości i tym samym kierunku, ale przeciwnym zwrocie.

Wprowadzimy teraz ważną wielkość fizyczną: **pęd**. Łączy ona dwie wielkości stosowane do opisu ruchu ciał: masę i prędkość. Pęd – podobnie jak energia – podlega zasadzie zachowania, dzięki czemu łatwiej jest przewidywać wyniki wielu zjawisk mechanicznych, m.in. zderzeń ciał.

Pędem ciała nazywamy iloczyn jego masy i prędkości: $\vec{p} = m\vec{v}$.

Zwróć uwagę, że zgodnie z zasadami mnożenia wektora przez liczbę **pęd jest wektorem** o kierunku i zwrocie zgodnym z kierunkiem i zwrotem wektora prędkości, a wartości pędu i prędkości spełniają warunek: $p = mv$. **Jednostką pędu** jest $1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

◀ Mnożenie wektora przez liczbę s. 43

■ Pęd ciała a druga zasada dynamiki

Znasz już drugą zasadę dynamiki, zgodnie z którą możemy zapisać:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Otrzymaliśmy proporcję, którą możemy przekształcić do postaci:

$$m\Delta \vec{v} = \vec{F}\Delta t$$

Jeśli masa ciała się nie zmienia, zapisujemy:

$$m\Delta \vec{v} = m(\vec{v}_k - \vec{v}_p) = m\vec{v}_k - m\vec{v}_p = \vec{p}_k - \vec{p}_p = \Delta \vec{p}$$

stąd:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F}\Delta t$$

gdzie $\vec{F}$ – siła stała w czasie Δt .

Powyższa zależność to inna postać **drugiej zasady dynamiki**. Warto wiedzieć, że w tej właśnie postaci sformułował ją oryginalnie Izaak Newton.

Także pierwszą zasadę dynamiki można sformułować z wykorzystaniem pojęcia pędu: „Jeśli na ciało nie działa żadna siła albo działające na nie siły się równoważą, to pęd tego ciała nie ulega zmianie”.

◀ II zasada dynamiki Newtona s. 143

$\vec{v}_p$ – prędkość początkowa,
 $\vec{v}_k$ – prędkość końcowa,
 $\vec{p}_p$ – pęd początkowy,
 $\vec{p}_k$ – pęd końcowy,
 $\Delta \vec{p}$ – zmiana pędu

◀ I zasada dynamiki Newtona s. 141

Iloczyn $F\Delta t$ nazywamy popędem siły.

Postać drugiej zasady dynamiki przedstawioną na wcześniejszej stronie uzasadniliśmy dla przypadku, gdy siła i przyspieszenie pozostają stałe. Jednak obowiązuje ona również wtedy, gdy wielkości te ulegają zmianie. Na przykład, gdy odbijamy piłeczkę tenisową, to siła, którą rakietą działa na piłeczkę, zmienia się w czasie. Co prawda zależność $a = \frac{F}{m}$ jest spełniona w każdej chwili z osobna, ale trudno byłoby z niej korzystać w obliczeniach, skoro siła się zmienia. Wzór $\Delta p = F\Delta t$ pozwala natomiast łatwo obliczyć średnią wartość siły działającej na piłeczkę.

■ Zasada zachowania pędu

Aby sformułować zasadę zachowania pędu, wykonamy dwa doświadczenia. Sprawdzimy, co dzieje się z pędem, gdy badamy nie jedno ciało, ale układ ciał.

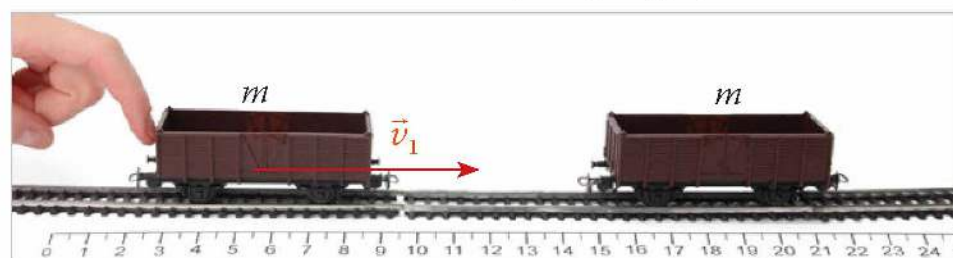


Doświadczenie 30 – obowiązkowe

Badanie zderzeń ciał i wyznaczanie prędkości

1. Przygotuj dwa jednakowe wagoniki i prosty odcinek torów.
2. Jeden z wagoników postaw na końcu toru, a drugi pośrodku. Obok toru połóż miarkę.
3. Ustaw kamerę tak, aby filmowała cały odcinek torów, i ją włącz.
4. Puść wagonik stojący na końcu toru w kierunku drugiego z taką siłą, aby po zderzeniu złączyły się i dalej poruszały razem. Jeśli wagoniki nie łączą się automatycznie, możesz przykleić do nich w odpowiednich miejscach kawałki dwustronnej taśmy klejącej.
5. Wyznacz prędkość wagonika przed zderzeniem i prędkość, z jaką poruszały się połączone ze sobą wagoniki. Co zauważasz?

Wskazówka. Jeśli nie masz kolejki, możesz użyć dwóch jednakowych samochodzików puszcanych na gładkim stole. Nie zapomnij o przyklejeniu do zderzaków samochodzików dwustronnej taśmy klejącej.



Powyższe doświadczenie pokazuje, że szybki ruch ciała o mniejszej masie (pojedynczego wagonika) może się zmienić w wolniejszy ruch ciała o większej masie (dwóch połączonych wagoników).

Na podstawie naszego doświadczenia ustaliliśmy, że wagonik przed zderzeniem poruszał się z prędkością $v_1 \approx 30 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Natomiast połączone wagoniki przemieszczały się z prędkością $v_2 \approx 15 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Możemy stwierdzić, że prędkość połączonych ze sobą wagoników jest dwukrotnie mniejsza niż prędkość wagonika przed zderzeniem $v_2 = \frac{1}{2} v_1$.

Wynika stąd, że po połączeniu wagoników pęd był taki sam jak przed ich połączeniem, ponieważ:

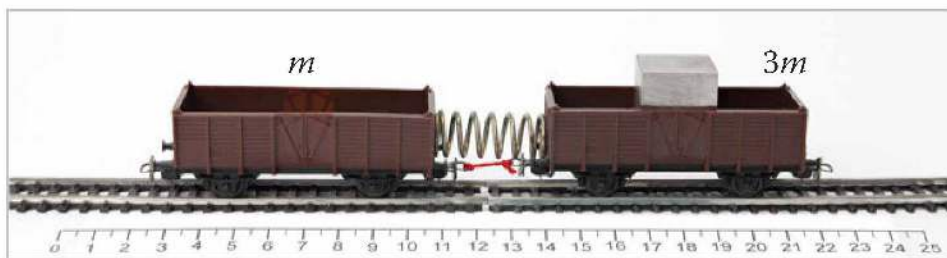
$$mv_1 = (2m) \cdot \left(\frac{1}{2}v_1\right)$$

Wykonajmy następne doświadczenie. Zaobserwujemy w nim zjawisko zwane **odrzutem**. Do jego przeprowadzenia wykorzystamy wagoniki i tory z doświadczenia 30.

Doświadczenie 31

1. Zważ osobno każdy z wagoników.
2. Jeden z wagoników tak dodatkowo obciąż, np. klockami, monetami lub plasteliną, aby jego masa po obciążeniu była trzykrotnie większa od masy pustego wagonika.
3. Zwiąż wagoniki nitką tak, aby móc umieścić między nimi ściśniętą sprężynę. Włóż sprężynę między wagoniki (patrz zdjęcie).
4. Ostrożnie (z zachowaniem zasad bezpieczeństwa) przepal nitkę i obserwuj, który wagonik porusza się z większą prędkością.
5. Jeśli chcesz, możesz sfilmować to doświadczenie i wyznaczyć prędkości wagoników. Porównaj iloraz prędkości wagoników z ilorazem ich mas.

Wskazówka. Zamiast wagoników możesz użyć dwóch jednakowych samochodzików. Pamiętaj, aby stół, po którym będą się poruszać, był jak najgładszy.



W doświadczeniu łatwo zaobserwować, że wagonik o większej masie porusza się z mniejszą prędkością. Jeśli wykonałeś wystarczająco dokładne pomiary, mogłeś stwierdzić, że porusza się on z tyle razy mniejszą prędkością, ile razy większą ma masę. Oznacza to, że **pędy wagoników po odrzucie miały jednakową wartość**. Ich zwroty były jednak przeciwne, więc suma pędów była równa zero, podobnie jak przed zwolnieniem sprężyny.

W obu przeprowadzonych doświadczeniach zaobserwowaliśmy, że choć między wagonikami działały siły, ich całkowity pęd się nie zmienił. Okazuje się, że ta zasada, zwana **zasadą zachowania pędu**, dotyczy wszystkich zjawisk zachodzących w układach izolowanych.

Jeśli na układ ciał nie działają siły zewnętrzne lub działające siły się równoważą, to suma pędów ciał w tym układzie nie ulega zmianie.

Zwróć uwagę, że w opisanym układzie ciała mogą oddziaływać na siebie wzajemnie (np. wagoniki w drugim z opisanych doświadczeń

Odrzut to zjawisko, w którym dwa ciała, początkowo nieruchome, na skutek wzajemnego oddziaływania zaczynają się poruszać w przeciwne strony.



Rys. 5.19. Tory ruchu i prędkości racy po eksplozji zależą od pędu tej racy przed eksplozją

oddziaływały na siebie za pośrednictwem sprężyny). Może się też zmieniać pęd poszczególnych ciał, jednak suma ich pędów zawsze pozostaje stała.

■ Zasada zachowania pędu a zasady dynamiki

III zasada dynamiki
Newtona s. 147

Zasadę zachowania pędu można uzasadnić, korzystając z zależności $\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t$ oraz trzeciej zasady dynamiki. Gdy dwa ciała oddziałują ze sobą przez jakiś czas, siły oddziaływania mają równe wartości i przeciwne zwroty:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Dlatego też zmiana pędu w przypadku układu tych ciał ma taką samą wartość, ale przeciwny zwrot:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{F}_1 \Delta t \quad \text{ i } \quad \Delta \vec{p}_2 = \vec{F}_2 \Delta t$$

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$$

czyli:

$$\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0$$

Skoro zatem **całkowita zmiana pędu wynosi zero**, to całkowity pęd się nie zmienia. Jeśli układ tworzą więcej niż dwa ciała, rozważamy każdą parę ciał z osobna.

Okazuje się jednak, że zasada zachowania pędu nie stanowi wyłącznie wniosku płynącego z zasad dynamiki. Podobnie jak zasada zachowania energii jest to jedno z najważniejszych praw przyrody. Ma zastosowanie nawet podczas opisywania zjawisk zachodzących w mikroświecie, do których nie można stosować zasad mechaniki Newtona.

Zasada zachowania pędu jest przydatna także w badaniu zjawisk, w których zmienia się masa ciała, np. ruchu rakiety, której masa zmniejsza się wraz ze spalaniem paliwa.



Rys. 5.20. Masa startującej rakiety bardzo szybko się zmienia

Po tej lekcji powinieneś

- znać pojęcie pędu;
- posługiwać się drugą zasadą dynamiki w postaci $\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t$;
- posługiwać się zasadą zachowania pędu do opisu zjawisk.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



■ Przykład

Pingwin cesarski o masie $m_p = 40$ kg stanął na brzegu kry lodowej, której masa wynosi $m_k = 660$ kg, a długość $s = 3,5$ m. O ile przesunie się kra lodowa w czasie, gdy pingwin przejdzie z jednego końca kry na drugi? Pomiń opory ruchu między wodą i krą.

Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy w inercjalnym układzie odniesienia związanym z Ziemią. W tym układzie kiedy pingwin się porusza, porusza się również kra.

Gdy pingwin zaczyna iść z prędkością v_p , wartość jego pędu zwiększa się od zera do $p_p = mv_p$. W tym czasie odpychana przez pingwina kra zaczyna się poruszać z prędkością o wartości v_k i przeciwnym zwrocie. Z zasady zachowania pędu wynika, że:

$$m_p v_p = m_k v_k \rightarrow v_p = v_k \frac{m_k}{m_p}$$

Względem kry pingwin porusza się z prędkością $v_p + v_k$. Wobec tego drogę $s = 3,5$ m pokona w czasie:

$$t = \frac{s}{v_p + v_k}$$

W tym czasie kra, poruszająca się z prędkością v_k , pokona drogę:

$$s_k = v_k t = \frac{v_k s}{v_p + v_k} = \frac{v_k s}{v_k \frac{m_k}{m_p} + v_k} = \frac{s}{\frac{m_k}{m_p} + 1} = s \frac{m_p}{m_k + m_p}$$

Kiedy pingwin się zatrzyma, zatrzyma się również kra. Podstawiamy dane liczbowe:

$$s_k = 3,5 \text{ m} \frac{40 \text{ kg}}{660 \text{ kg} + 40 \text{ kg}} = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

Zauważ, że odpowiedź nie zależy od tego, z jaką prędkością pingwin poruszał się po krze, ale od pokonanej przez niego drogi.

Odpowiedź: W czasie, gdy pingwin pokona 3,5 m, kra przesunie się o 20 cm.



1. Wagon o masie 8 t, toczący się z prędkością $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, zderzył się z wagonem o masie 20 t, poruszającym się w przeciwnym kierunku po tym samym prostym torze z prędkością $1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wagony złączyły się i potoczyły dalej wspólnie. W którą stronę i z jaką prędkością poruszały się po zderzeniu?
2. Pocisk o masie 5 g, lecący poziomo z prędkością $900 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, wbił się w drewniany klocek o masie 2 kg zawieszony na długim sznurku.
 - a) Na jaką wysokość względem pierwotnego położenia odchylił się klocek?
 - b) Wyjaśnij, dlaczego energia mechaniczna nie jest zachowana w czasie wbijania pocisku w klocek, a jest zachowana w czasie ruchu klocka na sznurku.
3. Rakieta kosmiczna Ariane 1 ma tuż po starcie masę 200 t, a jej siła ciągu wynosi 2500 kN. Podczas startu tego statku kosmicznego uruchamiają się cztery silniki, z których każdy zużywa 275 kg paliwa na sekundę. Oblicz prędkość gazów spalinowych.
4. Pocisk został wystrzelony ze strzelby o masie n razy większej od masy tego pocisku. Podaj iloraz:
 - a) wartości pędów strzelby i pocisku,
 - b) wartości prędkości strzelby i pocisku,
 - c) energii kinetycznych strzelby i pocisku.
5. Dowiedz się, co to była hakownica. Uzasadnij, że oparcie haka o mur (drzewo) nie tylko było wygodne dla żołnierzy, lecz także pozwalało uzyskać większą prędkość kuli.

Wskazówka. Skorzystaj z wyników poprzedniego zadania.

5.6. Zderzenia sprężyste i niesprężyste

Przypomnij sobie

- Energia kinetyczna może się zmieniać w inne formy energii, m.in. w energię wewnętrzną ciał.
- Jeśli na układ nie działają siły zewnętrzne lub działające na niego siły się równoważą, to suma pędów ciał w tym układzie nie zmienia się (zasada zachowania pędu).

■ Zderzenia niesprężyste

Na poprzedniej lekcji rozważaliśmy zjawiska, w których dochodziło do zderzenia dwóch ciał, w wyniku czego ciała te zaczynały się poruszać wspólnie. Jest to przykład **zderzenia niesprężystego**.

Łatwo sprawdzić, że podczas zjawisk tego rodzaju nie jest zachowywana energia kinetyczna. Przeanalizujmy jeszcze raz doświadczenie 30. z poprzedniej lekcji. Gdy pojedynczy wagonik o masie m poruszał się z prędkością v , jego energia kinetyczna wynosiła:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Drugi wagonik znajdował się wówczas w spoczynku, więc jego energia kinetyczna była równa 0. Po zderzeniu oba wagoniki poruszały się razem z prędkością $\frac{1}{2}v$, a ich łączna energia kinetyczna E_{kc} była równa:

$$E_{kc} = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \left(\frac{1}{2}v\right)^2 = \frac{1}{4}mv^2$$

Zatem energia kinetyczna wagoników po zderzeniu była dwukrotnie mniejsza niż przed zderzeniem. Pozostała część energii kinetycznej zamieniła się w energię wewnętrzną wagoników i powietrza – wagoniki i powietrze nieco się ogrzały.

Istnieją także zderzenia niesprężyste, w których ciała się nie łączą, ale energia kinetyczna także nie zostaje zachowana. Przykładem takich zderzeń są zderzenia samochodów (patrz ciekawostka poniżej).

Energia
kinetyczna s. 199

A to ciekawe

Znaczna część energii kinetycznej pojazdów uczestniczących w zderzeniach służy do wykonania pracy nad wyginaniem metalu i w efekcie zmienia się w energię wewnętrzną. Konstruktorzy samochodów wykorzystują tę zależność i w celu zwiększenia bezpieczeństwa jazdy projektują nadwozia w taki sposób, aby jak najwięcej energii kinetycznej pojazdu w momencie zderzenia było absorbowane podczas kontrolowanych odkształceń. Sprawdzenie, jak zachowuje się pojazd podczas zderzenia, najpierw symuluje się jedynie na komputerze, ale potem zawsze przeprowadza się testy zderzeniowe (patrz zdjęcie).



■ Zderzenia a pomiar dużych prędkości

Zasadę zachowania pędu możemy wykorzystać do wyznaczenia masy albo prędkości ciała, jeśli bezpośredni pomiar jest niemożliwy albo bardzo trudny. Najczęściej trudności dotyczą pomiaru prędkości, jeśli jest ona bardzo duża.

Gdy sfilmujemy ruch kuli karabinowej, nawet szybka kamera zarejestruje tylko rozmytą smugę. Eksperci w policji i wojsku mają specjalne kamery do rejestracji ruchu pocisku, ale są to urządzenia bardzo kosztowne. Znacznie łatwiej jest strzelić w drewniany klocek o odpowiednio dużej masie, zmierzyć prędkość jego ruchu, a prędkość pocisku obliczyć na podstawie zasady zachowania pędu.

W szkole nie będziemy oczywiście wykonywać doświadczeń z bronią palną, jednak nawet bezpośredni pomiar prędkości rzutki do gry w darta jest na tyle trudny, że warto skorzystać z zasady zachowania pędu.

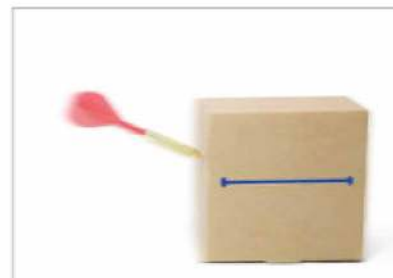


Doświadczenie 32 – obowiązkowe

Badanie zderzeń ciał i wyznaczanie prędkości

1. Na stole postaw kartonowe pudełko.
2. Poproś drugą osobę, aby filmowała przebieg doświadczenia, lub umocuj kamerę na statywie. Analizować film będzie łatwiej, jeśli zaznaczysz na pudełku odcinek znanej długości.
3. Rzuć energicznie rzutką tak, aby wbiła się w pudełko.
4. Na podstawie filmu wyznacz prędkość pudełka z wbitą rzutką, a następnie oblicz prędkość rzutki przed zderzeniem. Zastanów się, jakie jeszcze pomiary trzeba w tym celu wykonać.

Wskazówka. Ze względu na tarcie między pudełkiem a stołem prędkość pudełka wyznacz za pomocą kilku pierwszych klatek filmu po wbiciu się rzutki.



Uwaga!

Rzutki są ostro zakończone. Nie wolno nimi rzucać w stronę ludzi, zwierząt ani przedmiotów, które mogłyby zostać uszkodzone.

W naszym doświadczeniu pudełko z wbitą rzutką poruszało się z prędkością $15 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Ponieważ masa pudełka wraz z rzutką była 17,7 razy większa niż masa samej rzutki, przed zderzeniem rzutka poruszała się 17,7 razy szybciej, czyli z prędkością około $2,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Uwaga. Jak widać na zdjęciu, pod koniec ruchu rzutka nie była ustawiona poziomo. Pamiętajmy jednak o zasadzie niezależności ruchów. Wynika z niej, że również zasada zachowania pędu może być stosowana do każdego kierunku z osobna. Spadanie rzutki wywołane siłą ciężkości nie zmienia jej poziomej składowej prędkości, czyli również poziomej składowej pędu.

Zamiana jednostek

$$15 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0,15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zderzenia sprężyste



Doświadczenie 33 – obowiązkowe

Badanie zderzeń ciał

1. Na poziomym, gładkim stole połóż dwie monety jednozłotowe.
2. Uderz w jedną z nich linijką tak, aby wprowadzona w ruch poruszała się po linii łączącej środki obu monet.
3. Obserwuj, co się stanie po ich zderzeniu.



Oprócz zderzeń niesprężystych wyróżniamy **zderzenia sprężyste**.

W zderzeniach sprężystych suma energii kinetycznych ciał po zderzeniu jest taka sama jak przed zderzeniem.

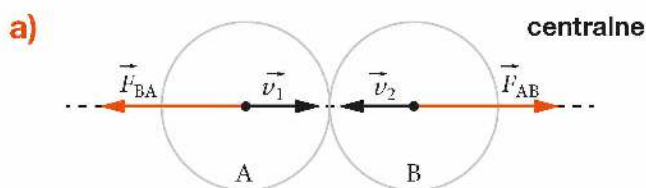
Jest to sytuacja idealna – w rzeczywistości zawsze pewna część energii kinetycznej zmienia się w energię innego rodzaju: wewnętrzną, fal dźwiękowych (słyszymy przecież odgłos uderzenia) itd. W wielu przypadkach straty energii są jednak na tyle małe, że możemy je pominąć i przyjąć, że zderzenie jest sprężyste. Zderzeniami sprężystymi są na przykład zderzenia cząsteczek gazu czy kul bilardowych.

Również w doświadczeniu 33 obserwowaliśmy zderzenie sprężyste. Pierwsza moneta uderzyła w drugą z pewną prędkością v , po czym zatrzymała się, a druga moneta zaczęła się poruszać z prędkością v . Druga moneta przejęła więc energię pierwszej (masy monet są jednakowe). Dlaczego monety nie podzieliły się energią np. po połowie? Okazuje się, że byłoby to sprzeczne z zasadą zachowania pędu. Przekonasz się o tym, rozwiązując zad. 1 s. 222.

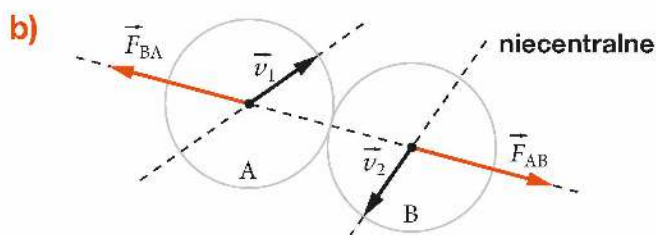
Na ilustracji poniżej przedstawiono **zderzenia centralne i niecentralne** na przykładzie zderzenia kul.

Zderzenia kul

Wyróżniamy dwa rodzaje zderzeń: **centralne** (rys. a) i **niecentralne** (rys. b). W obu przypadkach wektory sił wzajemnego oddziaływania kul leżą na prostej przechodzącej przez ich środki.



Wektory prędkości $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ kul przed zderzeniem **leżą** na prostej przechodzącej przez ich środki.



Wektory prędkości $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ kul przed zderzeniem **nie leżą** na prostej przechodzącej przez ich środki.

Jeżeli dwie kule poruszają się względem siebie tak, że wektory ich prędkości leżą na prostej przechodzącej przez środki kul, mówimy o zderzeniu centralnym.

Przytoczoną definicję można zastosować także do ciał w kształcie walca, np. monet. W przypadku ciał mniej regularnych za „środek ciała” należy przyjąć środek masy, który zdefiniujemy w następnym rozdziale.

■ Zderzenia sprężyste ciał o różnej masie

Doświadczenie 34

1. Doświadczenie należy przeprowadzić nad twardym podłożem. Aby wykonać je w pomieszczeniu, trzeba wybrać miejsce, w którym pod sufitem nie będzie żadnych delikatnych elementów, np. szklanych.
2. Weź w jedną dłoń piłeczkę pingpongową, a w drugą – podobnej wielkości piłeczkę kauczukową.
3. Trzymaj piłeczki około metra nad ziemią, jedną w jednej, a drugą w drugiej ręce, w odległości kilku centymetrów. Ustaw je jedna nad drugą tak, aby środek piłeczki pingpongowej znajdował się dokładnie nad środkiem piłeczki kauczukowej.
4. Upuść piłeczki jednocześnie i obserwuj, co się wydarzy, gdy po odbiciu od ziemi piłeczka kauczukowa poruszająca się w górę zderzy się ze spadającą piłeczką pingpongową.



Aby wyjaśnić zjawisko pokazane w doświadczeniu, przyjmijmy, że masa piłeczki pingpongowej wynosi m , a masa piłeczki kauczukowej jest 20 razy większa (wynosi $20m$).

Wysokość, z której spada piłeczka kauczukowa, oznaczmy h_1 (rys. 5.21 na następnej stronie). W celu uproszczenia analizy zagadnienia założymy, że piłeczka pingpongowa spada z tej samej wysokości.

Gdy piłeczki się zderzają, znajdują się na wysokości h_2 . Każda z nich podczas spadku z wysokości h_1 na wysokość h_2 rozpędza się do tej samej prędkości v . Jeśli pominiemy straty energii przy odbiciu piłeczki kauczukowej od podłogi, możemy przyjąć, że piłeczki zderzyły się z prędkościami o jednakowej wartości v i przeciwnych zwrotach.

Przyjmijmy, że oś układu współrzędnych jest zwrócona do góry. Prędkości piłeczek tuż po zderzeniu oznaczmy odpowiednio: pingpongowej v_p , a kauczukowej v_k .

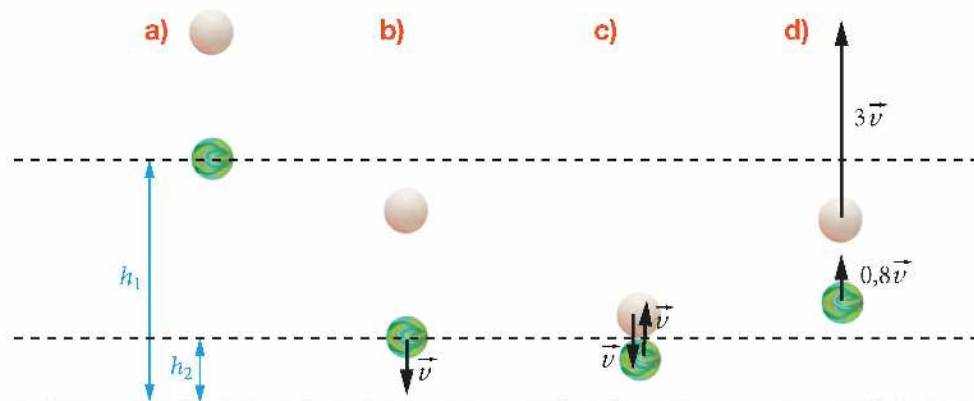
Zapiszmy zasadę zachowania pędu, a ściślej mówiąc: zasadę zachowania pędu dla współrzędnej pionowej. Początkową współrzędną prędkości piłeczki pingpongowej zapisujemy jako $-v$, gdyż prędkość ta ma wartość v i jest skierowana w dół. Zatem:

$$m(-v) + 20mv = mv_p + 20mv_k$$

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie z dwiema niewiadomymi v_p i v_k :

$$19v = v_p + 20v_k \quad (1)$$

h_1 – początkowa wysokość, na której znajdowała się piłeczka kauczukowa,
 h_2 – końcowa wysokość, na której zderzyły się piłeczki



Rys. 5.21. a) piłeczki spadają ze zbliżonej wysokości, b) gdy piłeczka kauczukowa znajduje się na wysokości h_2 , porusza się z prędkością v , c) pomijamy straty energii, więc gdy piłeczka kauczukowa po odbiciu od ziemi znajduje się na wysokości h_2 , znowu ma prędkość v , i taką samą prędkość ma piłeczka pingpongowa, d) w wyniku zderzenia zmienia się prędkość obu piłeczek, ale pingpongowej – w znacznie większym stopniu

To założenie w rzeczywistości spełnione jest tylko w przybliżeniu, dlatego również wynik obliczeń jest przybliżony.

Do obliczenia niewiadomych potrzebne jest drugie równanie, które możemy zapisać dzięki przyjętemu założeniu, że w chwili zderzenia łączna energia kinetyczna piłeczek się nie zmienia:

$$\frac{1}{2} m(-v)^2 + \frac{1}{2} \cdot 20mv^2 = \frac{1}{2} mv_p^2 + \frac{1}{2} \cdot 20mv_k^2$$

Po uproszczeniu równanie to wygląda następująco:

$$21v^2 = v_p^2 + 20v_k^2 \quad (2)$$

Zstawiamy równania (1) i (2) i otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 19v = v_p + 20v_k \\ 21v^2 = v_p^2 + 20v_k^2 \end{cases}$$

Gdy z pierwszego z nich wyznaczymy $v_p = 19v - 20v_k$ i podstawimy do drugiego z równań, otrzymamy:

$$21v^2 = (19v - 20v_k)^2 + 20v_k^2$$

Po uproszczeniu:

$$21v_k^2 - 38v \cdot v_k + 17v^2 = 0$$

Przypomnijmy, że niewiadomą jest tutaj v_k , a v jest dane. W ten sposób otrzymujemy równanie kwadratowe, które możemy rozwiązać za pomocą wyróżnika Δ :

$$\Delta = (38v)^2 - 4 \cdot 21 \cdot 17v^2 = 16v^2$$

Równanie to ma dwa rozwiązania:

$$v_{k1} \approx 0,8v \quad \text{oraz} \quad v_{k2} = v$$

Dla każdego z nich możemy znaleźć odpowiednią wartość v_p :

$$v_{p1} = 19v - 20v_{k1} \approx 19v - 16v = 3v$$

$$v_{p2} = 19v - 20v_{k2} = 19v - 20v = -v$$

Równanie kwadratowe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Drugie z rozwiązań odpowiada sytuacji, w której po zderzeniu piłeczki nadal się poruszają: pingpongowa – w dół, a kauczukowa – w górę. To nie jest możliwe, bo piłeczki musiałyby przez siebie przeniknąć. Pozostaje więc jedno rozwiązanie:

$$v_k = 0,8v \text{ i } v_p = 3v$$

Widzimy, że prędkość piłeczki kauczukowej zmieniła się nieznacznie, podczas gdy pingpongowej wzrosła aż trzykrotnie i dodatkowo zmieniła zwrot. Zauważmy też, że piłeczka kauczukowa przekazała część swojej energii kinetycznej piłeczce pingpongowej.

Z podobnymi sytuacjami mamy do czynienia m.in. w różnych dyscyplinach sportu, na przykład gdy kij hokejowy uderza w krążek (patrz zdjęcie obok). Podobnie jest z rakiętą i piłką tenisową albo z ciałem koszykarza i piłką.



Rys. 5.22. Uderzenie kijem hokejowym w krążek powoduje znaczną zmianę prędkości krążka, ale kij zmienia swoją prędkość nieznacznie

Po tej lekcji powinieneś

- rozróżniać zderzenia sprężyste i niesprężyste;
- posługiwać się zasadą zachowania pędu i zasadą zachowania energii do opisu zderzeń sprężystych.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZCIE

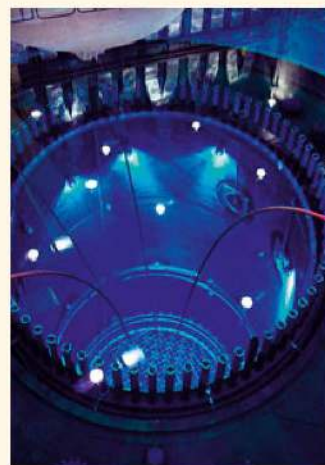


■ Przykład

W reaktorze jądrowym neutrony powstające w reakcji rozpadu uranu lub plutonu uderzają w jądra kolejnych atomów i powodują ich rozpad, który pociąga za sobą powstanie następnych neutronów i kolejne rozpady. Reakcję tę nazywamy reakcją łańcuchową.

Okazuje się jednak, że do rozbicia jąder potrzebne są neutrony poruszające się stosunkowo wolno, podczas gdy w wyniku samej reakcji powstają bardzo szybkie neutrony. Dlatego w reaktorze stosuje się moderator – substancję spowalniającą neutrony. Jako moderator wykorzystywany jest m.in. grafit, czyli jedna z postaci węgla.

Oblicz, o ile procent zmniejsza się prędkość neutronu, gdy uderza on w spoczywające jądro węgla, a dalej obie cząstki poruszają się wzdłuż tej samej prostej.



Rozwiązanie

Oznaczamy: masę neutronu przez m , jego początkową prędkość przez v_{n1} , a końcową przez v_{n2} . Początkowa prędkość jądra jest równa zero ($v_{j1} = 0$), a końcową oznaczmy v_{j2} .

Olbrzymia część jąder węgla należy do izotopu $^{12}_6\text{C}$. Jądro takie składa się z 6 protonów i 6 neutronów. Niewielką różnicę między masą protonu a neutronu, podobnie jak deficyt masy (różnicę między masą jądra a sumą mas poszczególnych nukleonów w jądrze), możemy pominąć. Przyjmujemy, że masa jądra wynosi $12m$.

Zapiszmy równania wynikające z zasady zachowania pędu i zasady zachowania energii:

$$\begin{cases} mv_{n1} = mv_{n2} + 12mv_{j2} & | : m \\ \frac{1}{2}mv_{n1}^2 = \frac{1}{2}mv_{n2}^2 + \frac{1}{2} \cdot 12mv_{j2}^2 & | : \frac{1}{2}m \end{cases}$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$\begin{cases} v_{n1} = v_{n2} + 12v_{j2} \\ v_{n1}^2 = v_{n2}^2 + 12v_{j2}^2 \end{cases}$$

Gdy z pierwszego równania wyznaczymy v_{n2} , otrzymamy:

$$v_{n2} = v_{n1} - 12v_{j2} \quad (1)$$

Podstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{aligned} v_{n1}^2 &= (v_{n1} - 12v_{j2})^2 + 12v_{j2}^2 \\ v_{n1}^2 &= v_{n1}^2 - 24v_{j2}v_{n1} + 144v_{j2}^2 + 12v_{j2}^2 \end{aligned}$$

stąd:

$$\begin{aligned} 0 &= -24v_{j2}v_{n1} + 156v_{j2}^2 & | : 12v_{j2} \\ 0 &= -2v_{n1} + 13v_{j2} & \rightarrow v_{j2} \approx 0,154v_{n1} \end{aligned}$$

Podstawiamy wyznaczone v_{j2} do równania (1) i otrzymujemy:

$$v_{n2} = v_{n1} - 12 \cdot 0,154v_{n1} = v_{n1} - 1,848v_{n1} = -0,848v_{n1} \approx -0,85v_{n1}$$

Odpowiedź: Gdy neutron uderza centralnie w spoczywające jądro węgla, wartość jego prędkości maleje o 15% (ponadto prędkość zmienia zwrot na przeciwny).

1. Mamy dwa identyczne ciała. Jedno ciało uderza z pewną prędkością w drugie, spoczywające ciało.

a) Zderzenie jest niesprężyste. Oblicz prędkość końcową ciał po złączeniu.

b) Zderzenie jest niesprężyste, ale ciała się nie łączą. Podaj trzy różne możliwe przykłady prędkości ciał po zderzeniu.

c) Zderzenie jest sprężyste. Udowodnij, że przebiega ono zawsze tak, jak zaobserwowaliśmy w doświadczeniu 33.

2. Wyobraź sobie samochody wykonane z metalu tak twardego, że ich zderzenie byłoby zderzeniem sprężystym. Czy jazda takim pojazdem byłaby bezpieczniejsza?

3. Na stole leżą dwie monety: jednogroszowa (o masie $1,64 \text{ g} \approx \frac{5}{3} \text{ g}$) i jednorzłotowa (o masie 5 g). Jedna uderza w drugą z prędkością v . Oblicz i zapisz w zeszycie prędkości, z jakimi będą się poruszać monety po zderzeniu, jeśli:

a) lżejsza moneta uderzyła w cięższą,

b) cięższa moneta uderzyła w lżejszą.

Zwróć uwagę na zwrot (znak) prędkości.

Następnie wykonaj odpowiednie doświadczenie i sprawdź, czy wyniki twoich obliczeń zgadzają się z rzeczywistością. Możesz ograniczyć się do sprawdzenia zgodności jakościowej (czy prędkość się zmniejsza czy zwiększa oraz jaki jest jej zwrot).



Fizyk ogląda TV

Rzeczywistość w reklamówkach telewizyjnych i w filmach sensacyjnych ma niewiele wspólnego z realnym światem i prawami fizyki. Graficy zniekształcają rzeczywistość, aby uzyskać zamierzone efekty. Moją uwagę zwróciły niegdyś w zapowiedzi reklam pięknie zderzające się wahadélka. Ostatnia kulka odbija się majestatycznie od całego układu po uderzeniu weń pierwszą kulką. W prawdziwym doświadczeniu odskakuje niemal natychmiast.

Przypomniałem sobie o przenoszeniu zderzenia w kulkach, oglądając film „Liberator 2” ze Stevenem Seagalem w roli głównej, superagentem, który w Kolorado odbija z rąk terrorystów pociąg pasażerski.

CO MOŻE SUPERAGENT

Gdy już cały diaboliczny plan terrorystów zbliża się do finału, pędzący superpociąg ma się zderzyć ze zwykłym pociągiem. Kiedy lokomotywy obu pociągów już wpadają na siebie, nasz dzielny Steven Seagal pędzi na tył pociągu i dociera do ostatnich drzwi wagonu.

Może zainteresowało pytanie, jak szybko musiałby biec Seagal, aby dotrzeć do tych drzwi przed niszczącą falą. Spróbujmy zbudować uproszczony model opisujący zarówno kulki z reklamówki, jak i wagony pociągu. Oto mamy układ obiektów (kulek, wagoników, będę je nazywał kulwagami), każdy o wymiarze liniowym D , umieszczonych bardzo blisko siebie, tak aby pomiędzy każdymi dwoma kulwagami pozostawała przerwa Z . Dla wagoników to mniej więcej odległość pomiędzy zderzakami, dla kulek to mikroskopijna odległość wynikająca np. z odpychania elektrostatycznego.



Wyobraźmy sobie dalej, że z lewej strony zbliża się do naszego pociągu kulwag o tej samej masie, co pozostałe wagony, i poruszający się ruchem jednostajnym z prędkością V . Następuje zderzenie. Pytamy: jak szybko zaburzenie wywołane tym zderzeniem dotrze do ostatniego (n -tego) kulwagu? Dla uproszczenia zakładamy, że zderzenia są sprężyste i nie ma tarcia.

Po zderzeniu elastycznym kulwagu „atakującego” z pierwszym kulwagiem z pociągu, czas potrzebny, aby pierwszy kulwag uderzył drugi, wynosi $t = Z/V$. Podobnie tyle czasu potrzeba, aby drugi kulwag uderzył w trzeci itd. W ten sposób n -ty kulwag zostanie „puknięty” po czasie $t_n = nZ/V$. Skutek zderzenia zostanie przeniesiony w tym czasie na odległość równą długości wszystkich przerw plus długości kulwagów, a więc na odległość $L_n = n(D + Z)$. Prędkość przenoszenia się zaburzenia wywołanego zderzeniem jest więc równa

$$U = L_n/t_n = V(1+D/Z)$$

Wynik ten jest dość zaskakujący. Po pierwsze, nie zależy od n , a więc jest własnością pojedynczego elementu układu. Po drugie, prędkość U jest zawsze większa niż V .

Dla $D = 20$ m oraz $Z = 10$ cm mamy $U/V = 201$. Jeżeli $V = 100$ km/h, to $U = 20\,100$ km/h. Trochę za dużo nawet jak na Stevena Seagala.

Uzyskany wynik jest nie tylko zaskakujący, jest też błędny. Zastanówmy się teraz, gdzie tkwi błąd. Podstawowy błąd naszego rozumowania polegał na założeniu, że kulwag można traktować jak ciało idealnie sztywne. Umożliwiło to nam napisanie wzoru na t_n . W rzeczywistości bowiem uderzenie nadjeżdżającego kulwagu wywołuje deformację uderzanego materiału. W ten sposób w materiale powstaje fala akustyczna. Oczywiście nadal w niczym nie pomogliśmy biednemu superagentowi. Nadal musiałby biec przez pociąg z prędkością dźwięku w stali.

Seagal nie miałby żadnych szans, chyba że... Właśnie. Wagony pociągu odkształcały się bowiem nieelastycznie! Dodatkowo rozlatujące się wagony nie spełniają zasady zachowania energii.

Te wszystkie nieelastyczne i niezachowujące energii procesy spowalniają prędkość przemieszczania się zaburzenia w zderzającym się pociągu. Nie sądzę jednak, by mogły ją zwolnić do około 5 m/s, która to prędkość wydaje mi się wyczynem ponad możliwości nawet superagenta.

Na podstawie artykułu:
Łukasz A. Turski, *Fizyk ogląda TV*,
„Wiedza i Życie” 2000, nr 2.

Pytania i zadania do tekstu

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



1. Dlaczego model zderzających się kulek nie odzwierciedla dobrze zderzeń wagonów?
2. Czy są jeszcze jakieś założenia, których odrzucenie jeszcze bardziej urealniłoby opis zderzenia pociągów?
3. Jak sądzisz, z jaką maksymalną prędkością mogłoby się przemieszczać zaburzenie w zderzającym się pociągu, aby superagent miał szansę dotrzeć do ostatnich drzwi? Czy taka prędkość jest według ciebie możliwa? Odpowiedź uzasadnij.
4. Przeanalizuj, jak prędkość przenoszenia się zaburzenia w układzie zderzających się kulek zależy od materiału, z którego są zbudowane. Jakie własności materiałów wzięłeś pod uwagę?
5. W jakich jeszcze sytuacjach spotkałeś się z przenoszeniem zaburzeń w ciałach stałych?

Pełny tekst artykułu dostępny jest pod adresem: <http://archiwum.wiz.pl/2000/00024500.asp>



Podsumowanie Energia i pęd

■ **Praca:** $W = Fs \cos \alpha = F_{||} \cdot s$

gdzie:

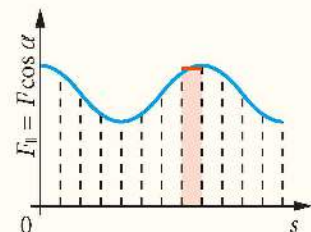
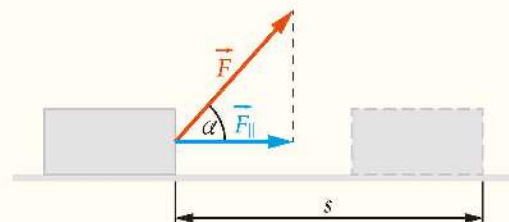
F – wartość działającej stałej siły, s – droga, α – kąt między wektorem siły a kierunkiem ruchu ciała.

▶ Jednostką pracy jest **dżul**: $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}$.

▶ W zależności od kąta między wektorem siły a kierunkiem ruchu ciała wartość pracy:

- jest maksymalna, gdy $\alpha = 0^\circ$,
- wynosi zero, gdy $\alpha = 90^\circ$,
- jest ujemna, gdy $\alpha < 90^\circ$ i $\alpha \geq 180^\circ$.

▶ Praca jest równa polu pod wykresem zależności $F \cos \alpha (s)$.



■ **Moc:** $P = \frac{W}{t}$

gdzie:

W – wykonana praca, t – czas wykonywania pracy.

▶ Jednostką mocy jest **wat**: $1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}$.

▶ Jeżeli stała siła działa w tę samą stronę, w którą porusza się ciało, to:

$$P = Fv$$

gdzie: F – stała siła działająca na ciało, v – prędkość, z jaką porusza się ciało.

▶ Ze wzoru na moc można wyznaczyć pracę: $W = Pt$, a jeżeli zmiana mocy następuje w sposób ciągły, to praca jest równa polu pod wykresem $P(t)$.

■ Jeżeli ciało może wykonać pracę, to mówimy, że ma **energię**. Gdy ciało A wykonuje pracę W nad ciałem B, to:

▶ ciało A traci energię równą tej pracy: $\Delta E_A = -W$.

▶ ciało B zyskuje energię równą tej pracy: $\Delta E_B = W$.

Innymi słowy ciało A przekazuje ciału B energię równą wykonanej pracy.

■ Energię związaną z wysokością, na jakiej znajduje się ciało, nazywamy **energią potencjalną grawitacji**:

$$E_p = mgh$$

gdzie: m – masa ciała, h – wysokość ciała względem ustalonego poziomu odniesienia, g – przyspieszenie ziemskie.

■ Energię związaną z ruchem ciała nazywamy **energią kinetyczną**:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

gdzie: m – masa ciała, v – prędkość ciała.

- Sumę energii kinetycznej i potencjalnej nazywamy **energią mechaniczną ciała**:

$$E_m = E_k + E_p$$

- **Zasada zachowania energii.** W układzie izolowanym całkowita energia wszystkich ciał nie ulega zmianie, może zmieniać się jedynie jej forma:

$$E_c = \text{const}$$

- **Sprawność:**

$$\eta = \frac{E_u}{E_d}$$

gdzie:

E_u – energia użyteczna (np. przekształcona w pracę), E_d – energia dostarczona.

- Siła $\vec{F}$ odkształcająca sprężynę jest wprost proporcjonalna do zmiany długości sprężyny:

$$F = k\Delta x$$

gdzie:

Δx – zmiana długości sprężyny, k – współczynnik sprężystości, charakterystyczny dla danej sprężyny, $[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

- Energię zgromadzoną w ciałach sprężystych nazywamy **energią potencjalną sprężystości** (gdzie $\Delta x = x$):

$$E_{ps} = \frac{1}{2}kx^2$$

- Poznane formy energii i ich interpretacja.

Forma energii	Wzór	Jest równa zero, gdy...	Rośnie, gdy...	Maleje, gdy...
kinetyczna	$E = \frac{1}{2}mv^2$	ciało spoczywa	rozpędzamy ciało	ciało zwalnia
potencjalna grawitacji	$E = mgh$	ciało znajduje się na poziomie umownie przyjętym za zerowy	ciało przemieszcza się w górę	ciało przemieszcza się w dół
potencjalna sprężystości	$E = \frac{1}{2}kx^2$	sprężyna nie jest napięta	rozciągamy lub ściskamy sprężynę	sprężyna powraca do pierwotnej długości

- **Pędem** ciała nazywamy iloczyn jego masy m i prędkości $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- **Druga zasada dynamiki** zapisana z wykorzystaniem pojęcia pędu:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$$

gdzie: $\Delta\vec{p}$ – zmiana pędu, $\vec{F}$ – działająca siła, Δt – czas działania siły.

- **Zasada zachowania pędu.** Jeśli na układ ciał nie działają siły zewnętrzne lub działające na niego siły się równoważą, to suma pędów ciał w układzie izolowanym nie ulega zmianie:

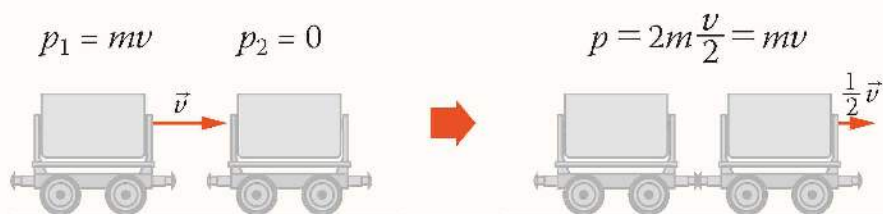
$$\vec{p}_c = \text{const}$$

► Inaczej można powiedzieć, że suma pędów początkowych układu ciał jest równa sumie pędów końcowych układu ciał.

- **Zderzenia niesprężyste** nie zachowują energii kinetycznej, jej część zamienia się w energię wewnętrzną zderzających się ciał, jest natomiast spełniona zasada zachowania pędu.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const}$$

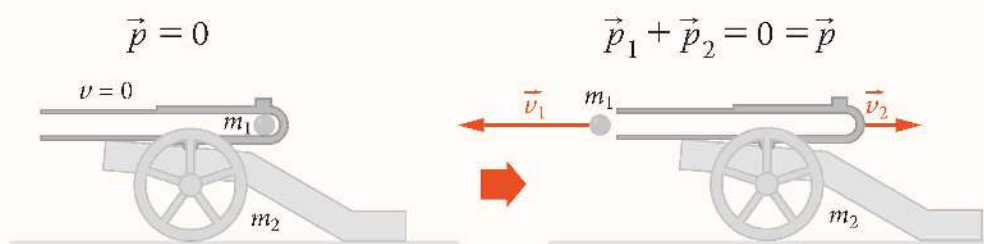
Przykładem jest zderzenie, w którym ciała zaczynają poruszać się wspólnie.



- **Zderzenia sprężyste** zachowują energię kinetyczną, tzn. energia przed zderzeniem i po nim jest taka sama. W zderzeniach tych jest też spełniona zasada zachowania pędu.



- Jeżeli przed zderzeniem dwie kule poruszają się względem siebie tak, że ich wektory prędkości leżą na prostej przechodzącej przez środki kul, mówimy o **zderzeniu centralnym**.
- **Odrzut** to zjawisko, w którym dwa ciała, początkowo nieruchome, na skutek wzajemnego oddziaływania zaczynają się poruszać w przeciwnie strony.



Sposób na zadanie

Korzystanie z praw fizyki i budowanie modeli fizycznych

Zadanie 1. Kostka lodu ześlizguje się po równi pochyłej z wysokości $H = 60$ cm, a następnie po przebyciu krótkiego poziomego odcinka spada z wysokości $h = 20$ cm.

Zadanie 1.1. (0–1)

Przerysuj ilustrację do zeszytu. Dorysuj wektor prędkości kostki $\vec{v}_A$ i składowe wektora prędkości – poziomą i pionową, gdy kostka znajduje się w punkcie A.

Zadanie 1.2. (0–3)

Oblicz wartość prędkości $\vec{v}_A$ oraz składowych prędkości $\vec{v}_x$ i $\vec{v}_y$ w punkcie A. Przyjmij, że punkt A znajduje się 15 cm nad podłożem.

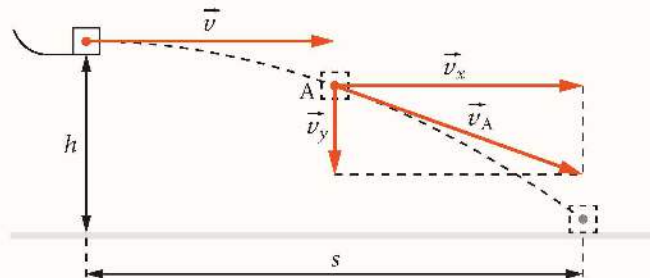
Rozwiązanie:

Wskazówka 1. Przeanalizuj treść zadania i określ zjawisko, z którym masz do czynienia.

Kostka rozpędza się, zsuwając się z równi. Ponieważ ostatni odcinek równi jest poziomy, w chwili oderwania się od równi kostka ma prędkość skierowaną poziomo. Dalszy jej ruch to rzut poziomy. Tarcie kostki lodu o równię możemy pominąć, a ponieważ porusza się ona stosunkowo powoli, pomijamy opór powietrza. Wobec tego energia mechaniczna kostki jest zachowana.

Ad 1.1. Zaznaczamy na rysunku wektor prędkości i jego składowe.

Wektor prędkości powinien być styczny do toru ruchu, a jego składowa pozioma mieć taką samą długość jak początkowa prędkość kostki.



Ad 1.2. Wartość prędkości v kostki w chwili oderwania się jej od równi obliczymy, stosując zasadę zachowania energii mechanicznej dla kostki, która zsunęła się bez tarcia z wysokości $(H - h) = 0,4$ m.

Ubytek energii potencjalnej: $|\Delta E_p| = mgH - mgh = mg(H - h)$ zmienia się w energię kinetyczną:

$$mg(H - h) = \frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{2g(H - h)} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,4 \text{ m}} = 2\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2,83 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Wartość prędkości kostki w punkcie A obliczamy z zasady zachowania energii mechanicznej dla kostki, która przebyła w pionie odległość $(H - h_A) = 0,45$ m.

$$mg(H - h_A) = \frac{mv_A^2}{2}$$

Kształt równi nie ma znaczenia – skoro nie ma oporów ruchu, energia jest zachowana.

Cała energia kinetyczna w punkcie A pochodzi z energii potencjalnej na szczycie równi, dlatego we wzorze występuje wartość prędkości v_A , a nie tylko jedna z jej składowych.

$$v_A = \sqrt{2g(H - h_A)} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,45 \text{ m}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

W rzucie poziomym nie zmienia się pozioma składowa prędkości, więc w punkcie A jest ona taka sama jak w chwili opuszczenia równi:

$$v_x = v = 2\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2,83 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Wartość składowej pionowej w punkcie A obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$v_x^2 + v_y^2 = v_A^2 \rightarrow v_y = \sqrt{v_A^2 - v_x^2} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

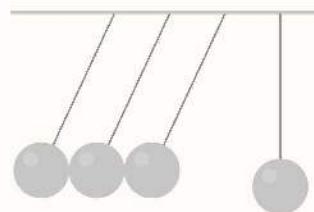
Składowe $\vec{v}_x$ i $\vec{v}_y$ są prostopadłe.

Warto zapamiętać!

- W rzucie poziomym składowa pozioma prędkości jest stała (ruch jednostajny), a składowa pionowa prędkości zwiększa swoją wartość (ruch jednostajnie przyspieszony bez prędkości początkowej).
- Wektor prędkości ciała w każdym ruchu krzywoliniowym jest styczny do toru ruchu ciała.
- Zasada zachowania energii pozwala porównać sytuację na początku i na końcu zjawiska, bez potrzeby analizowania wszystkich pośrednich etapów.

Zadanie 2. (0–2)

Kołyska Newtona to prosty przyrząd, który pozwala zademonstrować prawa zachowania w mechanice (patrz rysunek). Puszczone trzy odchylone kule, które uderzają w czwartą kulę z prędkością v . Zderzenie jest doskonale sprężyste. Jeden z uczniów postawił hipotezę, że po zderzeniu czwarta kula odskoczy z prędkością $3v$, a trzy pierwsze kule się zatrzymają. Odwołaj się do odpowiednich zasad zachowania w mechanice i sprawdź, czy hipoteza jest prawdziwa.



Rozwiązanie:

Wskazówka 2. W zadaniu mamy sprawdzić hipotezę, więc rozwiązanie musi zawierać pełne uzasadnienie naszej odpowiedzi oraz prawa, na które się powołujemy.

Z treści zadania wiemy, że mamy do czynienia ze zderzeniem sprężystym. Oznacza to, że musi być spełniona zasada zachowania pędu oraz zasada zachowania energii kinetycznej.

Sprawdzamy, czy po przyjęciu hipotezy ucznia te zasady są spełnione.

Zasada zachowania pędu: $3m \cdot v = m \cdot 3v$ – mamy równość, więc zasada jest spełniona.

Zasada zachowania energii: $\frac{3m \cdot v^2}{2} \neq \frac{m \cdot (3v)^2}{2}$ – nie ma równości, więc zasada nie jest spełniona.

Widzimy, że energia kinetyczna jest inna przed i po zderzeniu. Oznacza to, że hipoteza ucznia nie jest prawdziwa.

Warto zapamiętać!

- W zderzeniach sprężystych zachowane są energia kinetyczna oraz pęd.

Zadania powtórzeniowe

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



Zadanie 1. Elektrownia wodna

Elektrownia szczytowo-pompowa Solina składa się z dwóch zbiorników wodnych, znajdujących się na różnych poziomach. Różnica wysokości tych zbiorników wynosi 60 m.

Górny zbiornik Solina, o objętości 500 mln m³, jest połączony z dolnym zbiornikiem Myczkowce o objętości 5,4 mln m³ systemem rur, na który składają się w sumie cztery rurociągi. Dwa z nich, o średnicy 6 m każdy, doprowadzają wodę do dwóch turbin Francisa (czyt. frensisa), a dwa kolejne, o średnicy 4 m każdy, są podłączone do dwóch turbin rewersyjnych. Turbiny rewersyjne w dzień wytwarzają prąd, a nocą pompują wodę ze zbiornika Myczkowce do zbiornika Solina.



Przyjmij przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ oraz gęstość wody $d = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

1.1. Oblicz moc jednej turbiny Francisa, która wytwarza energię elektryczną równą 85% energii spadającej wody. Szybkość przepływu wody w tej turbinie wynosi $139 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

1.2. Przez każdą z rur doprowadzających wodę do turbin Francisa w ciągu sekundy przepływa 139 m^3 wody. Oblicz prędkość wody w takiej rurze.

1.3. Oblicz siłę parcia działającą na dno rurociągu, którym doprowadzana jest woda do turbiny Francisa, gdy turbina jest wyłączona. Pomiń głębokość zbiornika Solina.

Wskazówka. Siła parcia to siła nacisku wody. Przypomnij sobie ogólny wzór na ciśnienie oraz wzór na ciśnienie hydrostatyczne. Z matematyki potrzebujesz wzoru na pole koła.

1.4. Podczas pracy turbina Francisa wykonuje 136 obrotów na minutę. Oblicz prędkość liniową końców łopatek jej wirnika, którego promień jest równy 2,05 m.

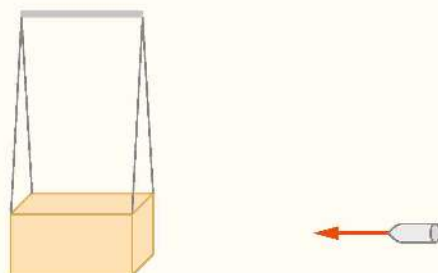
Wskazówka. Przypomnij sobie wiadomości z rozdziału 3. o ruchu po okręgu.

Zadanie 2. Wahadło balistyczne

Wahadło balistyczne służy do pomiaru prędkości pocisków wystrzeliwanych z broni palnej. Jego głównym elementem jest zawieszony na linach klocek, w którym grzęzną wystrzeliwane pociski. Gdy pocisk trafia w wahadło, wychyla się ono z położenia równowagi. Przeprowadza się wówczas pomiar kąta wychylenia lub wysokości, na jaką wzniosło się wahadło.

Wykonaj polecenia dla następujących danych: długość wahadła liczona od środka masy do punktu zawieszenia $l = 1,6$ m, masa wahadła $m_w = 4$ kg, masa pocisku użytego do pomiarów $m_p = 8$ g. Przyjmij przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

2.1. Oblicz wartość prędkości pocisku przed uderzeniem w klocek, jeśli wiadomo, że po jego ugrzęgnięciu w klocku układ odchylił się od pionu o kąt 60° .



Wskazówka. Przypomnij sobie funkcje trygonometryczne z dodatku matematycznego s. 103. Możesz też skorzystać z własności trójkąta równobocznego.

2.2. Oblicz energię kinetyczną pocisku przed uderzeniem w klocek i porównaj ją z energią kinetyczną układu w momencie, gdy pocisk grzęźnie w klocku.

2.3. Wyjaśnij, z czego wynikają straty energii kinetycznej przy zderzeniu pocisku z wahadłem.

2.4. Wahadło (bez pocisku) wychylono z położenia równowagi i puszczono swobodnie. Pocisk wystrzelony poziomo z prędkością $800 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ trafił w wahadło w chwili, gdy przechodziło ono przez położenie równowagi, i ugrzązł w nim. W efekcie spowodował zatrzymanie układu. Oblicz wysokość, z jakiej puszczono swobodnie wahadło.

Wskazówka. Skorzystaj z zasady zachowania energii dla opadającego wahadła oraz zasady zachowania pędu dla zderzenia pocisku z wahadłem.

Zadanie 3. Grupa turystów

Grupa turystów uprawiających skitouring wędrowała po górach na nartach, na które nałożono specjalne pasy zapobiegające zsuwaniu się nart podczas wchodzenia pod górę, tzw. foki. Po dojściu na miejsce, z którego planowali rozpocząć zjazd, turyści zdjęli foki z nart i ruszyli w dół stoku.

Trasa, którą przemierzali narciarze, wiodła najpierw 300 m pod górę równoległe do stoku o nachyleniu 10° , potem 100 m po poziomej drodze, a na koniec w dół stoku o nachyleniu 15° i różnicy wysokości 100 m, zakończonego krótkim wypłaszczeniem. Średnia masa narciarza z ekwipunkiem wynosiła 80 kg.

3.1. Oblicz minimalną wartość współczynnika tarcia statycznego nart o śnieg gwarantującą, że gdy narciarz idący w górę zatrzyma się na stoku równoległym do niego, nie zacznie zsuwać się w dół.

3.2. Oblicz pracę włożoną przez jednego narciarza o średniej masie w pokonanie pierwszego odcinka trasy ruchem jednostajnym. Wartość współczynnika tarcia kinetycznego nart z fokami przy ruchu do przodu wynosi 0,04.

3.3. Oblicz pracę narciarza na poziomym odcinku trasy. Przyjmij, że współczynnik tarcia kinetycznego nart z fokami przy ruchu do przodu wynosi 0,04.





6 Bryła sztywna

1. Ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej
2. Moment siły
3. Środek ciężkości i energia potencjalna bryły sztywnej
4. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym
5. Druga zasada dynamiki w ruchu obrotowym
6. Moment pędu

6.1. Ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej

Przypomnij sobie

- Punkt materialny to model ciała, którego rozmiary pomijamy, ale przypisujemy mu określoną masę.
- Średnią prędkość kątową w ruchu po okręgu definiujemy jako iloraz kąta φ , zakreślonego przez promień okręgu, i czasu t , w jakim ten kąt został zakreślony: $\omega = \frac{\varphi}{t}$.
- Przyspieszeniem kątowym nazywamy iloraz zmiany prędkości kątowej $\Delta\omega$ i czasu Δt , w jakim ta zmiana nastąpiła: $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.
- Między prędkością kątową ω i prędkością liniową v zachodzi związek: $\omega = \frac{v}{r}$, gdzie r jest promieniem okręgu, po którym porusza się ciało.



Rys. 6.1. Zapalone świece dymne obrazują tor ruchu skrzydeł samolotu

■ Modele ciała fizycznego

Do opisu ruchu ciał fizycznych stosowaliśmy dotychczas przybliżenie (model) – posługiwaliśmy się punktem materialnym. Jednak to przybliżenie w wielu przypadkach się nie sprawdza. Przeanalizujmy ruch samolotu akrobacyjnego wykonującego w powietrzu korkociąg. Samolot obraca się wokół własnej osi podczas lotu pionowo w dół. Zastosowanie w tej sytuacji modelu punktu materialnego pozwoliłoby zbadać jedynie ruch samolotu w dół z pominięciem obrotu. Dlatego przyjmujemy model uwzględniający rozmiary i kształt ciała. Model taki nazywamy **bryłą sztywną**.

Bryła sztywna to model ciała fizycznego, w którym odległości poszczególnych punktów względem siebie nie zmieniają się nawet wtedy, gdy działają siły zewnętrzne.

Zauważmy, że gdybyśmy chcieli badać drgania skrzydeł samolotu względem kadłuba podczas wykonywania korkociągu, model bryły sztywnej okazałby się nieprzydatny, podobnie jak model punktu materialnego. Aby poprawnie opisać dany ruch, musimy wybrać odpowiedni dla niego model. Jeżeli na przykład badamy tor ruchu Ziemi wokół Słońca, możemy przyjąć, że Ziemia to punkt materialny. Chcąc jednak zrozumieć następstwo pór roku, lepiej przyjąć założenie, że Ziemia jest bryłą sztywną. Z kolei gdybyśmy badali trzęsienia Ziemi, w których skorupa ziemską wykonuje ruchy drgające, lub ruch fal podczas przypływów i odpływów oceanów, zarówno model bryły sztywnej, jak i model punktu materialnego okazałyby się nieprzydatne.

Każdy model ma swój zakres stosowalności i określone ograniczenia. Aby wybrany model pozwolił nam zapoznać się z badanym zjawiskiem, nie może być ani zbyt uproszczony, ani zbyt rozbudowany.

■ Bryła sztywna jako zbiór punktów materialnych

Bryłę sztywną będziemy traktować jako zbiór punktów materialnych. Każdy z nich ma określoną masę, oznaczamy je zatem $m_1, m_2, \dots, m_n$. Na ogół bryła sztywna będzie dla nas rozciągłym ciałem o określonym kształcie, np. walca, kuli, sześcianu lub innej, mniej foremnej bryły. Materii nie można dzielić w nieskończoność, co pozwala przyjąć, że np. żelazna kulka składa się ze skończonej liczby punktów materialnych – atomów żelaza. Podczas wyprowadzania wzorów będziemy mówili ogólnie o n punktach materialnych, nie będzie nam więc przeszkadzało, że n jest liczbą bardzo dużą i na ogół nieznaną.

Przypomnijmy, że bryła sztywna nie zmienia kształtu. Oznacza to, że odległości r_{ij} pomiędzy częściami i oraz j nie zmieniają się.

■ Ruch postępowy bryły sztywnej

Ruch postępowy bryły sztywnej jest to taki ruch, w którym ustawienie bryły w przestrzeni nie ulega zmianie.

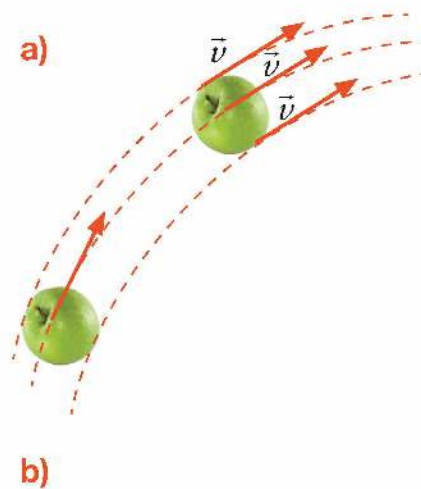
Na przykład jeśli rzucone jabłko się nie obraca, to porusza się ruchem postępowym. W każdej wybranej chwili wektory prędkości chwilowych poszczególnych punktów jabłka są jednakowe (rys. 6.2a). Badanie ruchu postępowego bryły sztywnej można więc w tym przypadku sprowadzić do badania ruchu pojedynczego punktu tej bryły, na przykład końca ogonka jabłka. Zauważ, że ruch postępowy **nie oznacza**, że ciało porusza się po linii prostej. Na rys. 6.2a widać, że jabłko porusza się po łuku.

■ Ruch obrotowy bryły sztywnej

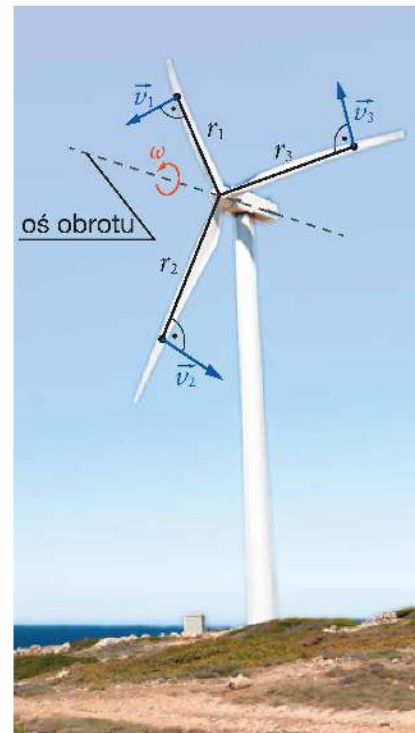
Gdy bryła wykonuje ruch obrotowy, obraca się wokół pewnej prostej, zwanej **osią obrotu**. Jeśli oś obrotu jest swobodna, to stabilny ruch obrotowy bryły możliwy jest tylko wokół jednej z osi zwanych osiami głównymi.

Ruch obrotowy bryły sztywnej względem określonej osi obrotu, np. osi głównej, to taki ruch, w którym punkty materialne tworzące tę bryłę poruszają się po okręgach o środkach leżących na tej osi.

Zauważ, że dla różnych punktów bryły promień okręgu i prędkość liniowa mogą być różne (rys. 6.2b). Wraz ze wzrostem odległości punktu od osi obrotu rośnie jego prędkość liniowa. Bryła sztywna obraca się jednak jako całość, więc **wszystkie punkty tworzące bryłę nieleżące na osi obiegają oś w takim samym czasie**, innymi słowy – okres obiegu tych punktów wokół osi jest jednakowy. Nazywamy go okresem obrotu bryły i oznaczamy T .



b)



Rys. 6.2. Ruch bryły sztywnej: a) postępowy, b) obrotowy

Prędkość kątowna
s. 112

Z tego powodu także **prędkość kątowna dla ruchu obrotowego wszystkich punktów bryły** (nieleżących na osi obrotu) **jest jednakowa**. Nazywamy ją prędkością kątową obrotu bryły i oznaczamy ω . Dla dowolnego punktu nieleżącego na osi obrotu możemy więc zapisać zależności:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{oraz} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Prędkość kątowna jest jednakowa dla wszystkich punktów bryły, dlatego zależność między prędkościami i promieniami (odległościami od osi obrotu) możemy ująć następująco:

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \dots = \frac{v_n}{r_n}$$

Przyspieszenie kątowne
s. 113

Ponieważ w każdej chwili prędkość kątowna jest jednakowa dla wszystkich punktów bryły, to zmiany tej prędkości w czasie także są jednakowe. Dlatego możemy mówić o **przyspieszeniu kątowym** bryły:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

f – częstotliwość obrotu bryły,
 T – okres obrotu,
 ω – prędkość kątowna,
 v – prędkość liniowa,
 ε – przyspieszenie kątowne

Aby zbadać wielkości opisujące ruch obrotowy bryły sztywnej (np. $T, f, \omega, \varepsilon$), wystarczy ograniczyć się do wybranego punktu tej bryły nieleżącego na jej osi obrotu.

■ Ruch wokół ruchomej i nieruchomej osi

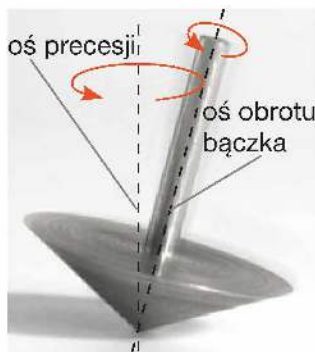
Ruch bączka jest przykładem obrotu wokół osi, która sama zmienia swoje położenie – obraca się, choć znacznie wolniej niż sam bączek (rys. 6.3). Taki ruch nazywamy **precesją**.

Ze zjawiskiem precesji mamy do czynienia także w ruchu obrotowym Ziemi. Jak wiesz, Ziemia obraca się wokół osi przechodzącej przez jej bieguny. Jeden obrót trwa około 24 h.

Okazuje się, że oś Ziemi obraca się podobnie jak oś bączka. Jeden taki obrót osi ziemskiej trwa aż 26 000 lat.

Zjawisko precesji jest przyczyną powolnej zmiany położenia ciał niebieskich względem osi Ziemi. Gwiazda Polarna nie zawsze znajdowała się nad biegunem północnym (czyli na przedłużeniu osi Ziemi) i nie zawsze będzie się tam znajdować. Za 11 000 lat nasza planeta ustawi się biegunem północnym w stronę Węgi i właśnie tę gwiazdę będzie można wykorzystywać do wyznaczania północy przez kolejne kilka tysięcy lat.

Gdy obracające się ciała podlegają precesji, matematyczny opis ich ruchu jest bardzo skomplikowany. Dlatego skupimy się na opisie ruchu obracających się ciał, dla których można przyjąć, że oś obrotu jest nieruchoma. Należy jednak mieć świadomość, że w niektórych przypadkach założenie to będzie pewnym uproszczeniem.



Rys. 6.3. Oś bączka obraca się powoli wokół pionu

Ruch złożony bryły sztywnej

Dowolny ruch bryły sztywnej, nawet najbardziej skomplikowany, można złożyć z ruchów prostych, czyli z ruchu postępowego i ruchu obrotowego

Ruch postępowy bryły sztywnej jest to taki ruch, w którym ustawienie bryły w przestrzeni nie ulega zmianie.

Ruch obrotowy bryły sztywnej jest to taki ruch, w którym punkty materialne tworzące tę bryłę poruszają się po okręgach o środkach leżących na jednej prostej – osi obrotu.

Oś obrotu

Każdy ruch bryły sztywnej można opisać, określając jej ruch postępowy w każdym z trzech kierunków przestrzeni i ruch obrotowy wokół trzech prostopadłych osi.



■ Środek masy bryły

Zobaczmy, jak poruszają się różne punkty bryły sztywnej w rzucie poziomym.

Doświadczenie 35

1. Podłużny przedmiot, np. flamaster, chwyć za jeden z końców.
2. Rzuć flamastrem w kierunku poziomym przed siebie, jednocześnie wprawiając go w ruch obrotowy. Obserwuj ruch przedmiotu.
3. Przyklej do flamastra skrawek papieru w kontrastowym kolorze i rzuć flamaster w opisany wyżej sposób.
4. Naszkicuj tor ruchu punktu zaznaczonego papierkiem na flamastrze.
5. Przeklej skrawek papieru w inne miejsce na flamastrze. Rzuć flamastrem w sposób opisany w punkcie 2.
6. Kilkakrotnie powtórz czynności opisane w punktach 3–5.
7. Porównaj szkice przedstawiające tory ruchu punktu zaznaczonego na flamastrze.
8. Odpowiedz, w którym wypadku tor ruchu był najmniej skomplikowany.

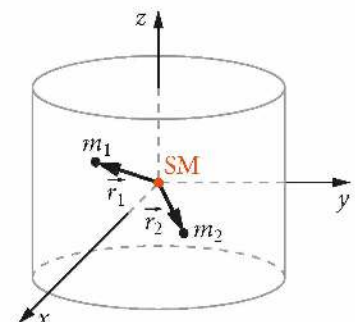
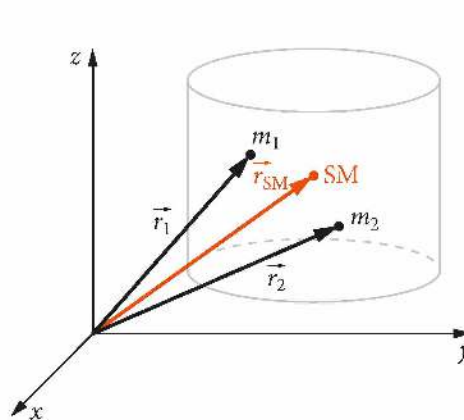
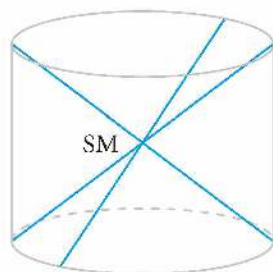


Tor ciała w rzucie poziomym s. 102

W rozdziale trzecim zajmowaliśmy się rzutem poziomym punktu materialnego. Tor ruchu ciała w tym rzucie ma kształt fragmentu paraboli. Wykonane przez nas doświadczenie pokazuje, że w przypadku rzutu poziomego bryły sztywnej różne punkty bryły poruszają się po różnych torach. Można jednak wskazać jeden punkt, którego tor ruchu w czasie rzutu zawsze przyjmie kształt paraboli. Punkt ten nazywamy **środkiem masy**.

Środek masy to punkt poruszający się tak, jak poruszałby się punkt materialny skupiający całą masę bryły.

Środek masy i wektor jego położenia



Jeśli jednorodna bryła ma środek symetrii, to znajduje się on w tym samym punkcie co środek masy.

Układ współrzędnych, względem którego opisujemy wektory położenia, możemy wybrać dowolnie. Jeśli umieścimy jego początek w środku masy, wektor $\vec{r}_{SM} = 0$.

W przypadku ciała złożonego ze skończonej liczby n punktów materialnych **wektor położenia środka masy** możemy obliczyć ze wzoru:

$$\vec{r}_{SM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

gdzie: $m_1, m_2, \dots, m_n$ – masy punktów materialnych, z których zbudowana jest bryła, $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ – wektory ich położenia. Wektory $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ oraz wektor $\vec{r}_{SM}$ muszą być określone w tym samym układzie odniesienia.

W przypadku wielu brył, np. stożka, wyznaczanie środka masy metodami matematycznymi jest trudne. Można jednak udowodnić, że **jeśli jednorodna bryła ma środek symetrii, jest on jednocześnie jej środkiem masy**.

Środek masy kuli, walca czy prostopadłościanu to zatem po prostu środek symetrii tej bryły. Środek masy bryły może się też znajdować poza bryłą. Tak właśnie jest w przypadku bumerangu (rys. 6.4).

■ Środek masy układu ciał

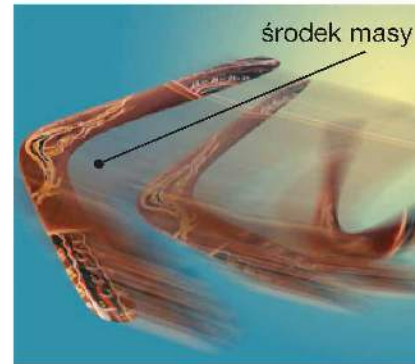
Środek masy można zdefiniować także dla układu ciał nietworzących bryły sztywnej. Na przykład gdy Ziemia i Księżyc krążą wokół Słońca, w rzeczywistości wokół naszej gwiazdy krąży środek masy układu Ziemia–Księżyc (znajduje się on wewnątrz Ziemi).

Jeszcze lepszym przykładem takiego układu ciał są Pluton i jego księżyc Charon (rys. 6.5). Pluton ma masę niecałe 8 razy większą od Charona (dla porównania: stosunek mas Ziemi i Księżyca wynosi 81:1). Dlatego środek masy układu, który tworzą te ciała niebieskie, znajduje się poza powierzchnią Plutona. Wokół Słońca krąży więc środek masy układu Pluton–Charon, a wokół tego środka masy krążą planeta karłowata i jej księżyc.

Z definicji środka masy wypływa ważny wniosek. **Jeśli na układ ciał nie działają siły zewnętrzne, jego środek masy porusza się tak jak punkt materialny, na który nie działają siły zewnętrzne**, tzn. spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym. Innymi słowy:

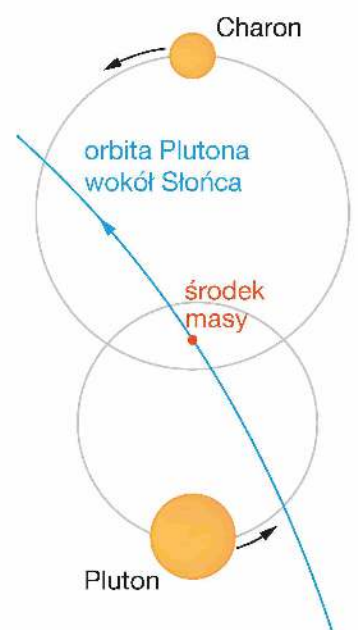
Aby poruszyć środek masy układu ciał lub zmienić jego prędkość, potrzebna jest siła zewnętrzna.

Powyższe sformułowanie brzmi jak znane nam zasady dynamiki. Szczegółowo zajmiemy się tym zagadnieniem później. Na razie podamy przykład. Astronauta spoczywający w przestrzeni kosmicznej nie może sam się rozpędzić. Gdyby jednak rzucił ciężki przedmiot, sam uzyskałby prędkość o przeciwnym zwrocie. Środek masy układu astronauta–przedmiot pozostałby w spoczynku.



Rys. 6.4. Bumerang – przykład bryły, której środek masy znajduje się poza nią

Jednorodna bryła – bryła wykonana z substancji o stałej gęstości.



Rys. 6.5. Środek masy układu Pluton–Charon



A to ciekawe

Powieść Rudolfa Ericha Raspego *Niezwykłe przygody Barona Münchhausena* (czyt. minchalżena) z 1785 roku zawiera opisy mnóstwa nieprawdopodobnych zdarzeń, między innymi historię, jak tytułowy bohater utknął w bagnie i sam siebie wyciągnął za warkocz, który nosił zgodnie z ówczesną męską modą. Intuicja nam podpowiada, że taka przygoda nie mogła mieć miejsca, jednak aby to uzasadnić, musimy powołać się na omówione w tej lekcji prawo. Siła wewnętrzna układu ciał, nawet o ogromnej wartości, nie spowoduje ruchu środka masy układu ani nie zmieni jego prędkości.

Definicja środka masy a wzór na jego położenie

Przejście od definicji środka masy do wzoru na jego położenie byłoby skomplikowane. Dlatego postąpimy inaczej. Dopóki nie uzasadnimy wzoru:

$$\vec{r}_{SM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

nie możemy być pewni, czy określa on położenie środka masy. Możemy jedynie przyjąć, że określa położenie jakiegoś punktu. Oznaczmy go symbolem SM. Uzasadnijmy, że punkt SM spełnia podaną przez nas definicję środka masy.

Wzór na wektor położenia tego punktu można zapisać w postaci:

$$\vec{r}_{SM} = \frac{1}{m_c} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n)$$

gdzie m_c to masa układu, czyli suma mas wszystkich ciał wchodzących w jego skład. Na podstawie tego wzoru można zapisać wzór na zmianę wektora położenia punktu SM:

$$\Delta \vec{r}_{SM} = \frac{1}{m_c} (m_1 \Delta \vec{r}_1 + m_2 \Delta \vec{r}_2 + \dots + m_n \Delta \vec{r}_n)$$

Dzielimy obie strony równania przez Δt – czas przemieszczeń cząstek bryły:

$$\frac{\Delta \vec{r}_{SM}}{\Delta t} = \frac{1}{m_c} \left(m_1 \frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta \vec{r}_2}{\Delta t} + \dots + m_n \frac{\Delta \vec{r}_n}{\Delta t} \right)$$

Przyjmijmy, że zmianę wektora położenia opisujemy dla $\Delta t \rightarrow 0$. Otrzymamy w ten sposób wzór na prędkość chwilową punktu SM:

$$\vec{v}_{SM} = \frac{1}{m_c} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n)$$

Gdy pomnożymy go stronami przez m_c , a iloczyny masy i prędkości zapiszemy jako pęd, wzór ten przyjmuje postać:

$$m_c \vec{v}_{SM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n$$

Po prawej stronie równania mamy sumę pędów, więc wyrażenie $m_c \vec{v}_{SM}$ przedstawia całkowity pęd układu ciał. Skoro m_c jest całkowitą masą układu, prędkość punktu SM możemy traktować jako prędkość całej bryły. Ruch punktu SM przebiega więc tak, jak przebiegałby ruch punktu materialnego o masie m_c . Oznacza to, że punkt SM jest środkiem masy, co należało uzasadnić.

Masa układu

$$m_c = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

Prędkość chwilowa punktu SM

$$\frac{\Delta \vec{r}_{SM}}{\Delta t} = \vec{v}_{SM} \text{ dla } t \rightarrow 0$$

Po tej lekcji powinieneś

- wiedzieć, co to jest bryła sztywna i na czym polega jej ruch postępowy;
- wiedzieć, na czym polega ruch obrotowy bryły sztywnej;
- znać pojęcie środka masy i znajdować jego położenie dla układu skończonej liczby punktów materialnych.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZCIE



■ Przykład

Słońce i Ziemia krążą wokół wspólnego środka masy. Wyznacz jego położenie za pomocą obliczeń. Przyjmij masę Słońca $m_1 = 2 \cdot 10^{30}$ kg, masę Ziemi $m_2 = 6 \cdot 10^{24}$ kg, a odległość między tymi ciałami 150 mln km.

Rozwiązanie

Aby rozwiązać to zadanie, najwygodniej przyjąć układ współrzędnych, którego początek znajduje się w środku Słońca, a oś x jest skierowana w stronę Ziemi (na rysunku nie zachowano proporcji).

Interesujący nas układ składa się z dwóch ciał, które traktujemy jako punkty materialne (ich rozmiary są bowiem znacznie mniejsze niż dzieląca je odległość, a ruch obrotowy nie odgrywa znaczącej roli w omawianym zagadnieniu). Wzór na wektor położenia środka masy przyjmuje więc postać:

$$\vec{r}_{SM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Oba ciała znajdują się na osi x , więc także środek masy znajdzie się na tej osi. Zapisanej wyżej zależności między wektorami położenia odpowiada zależność między ich współrzędnymi:

$$x_{SM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Szukaną współrzędną dla Ziemi (przy założonym układzie współrzędnych) oraz masy ciał odczytujemy z treści zadania:

dla Słońca: $x_1 = 0$, $m_1 = 2 \cdot 10^{30}$ kg

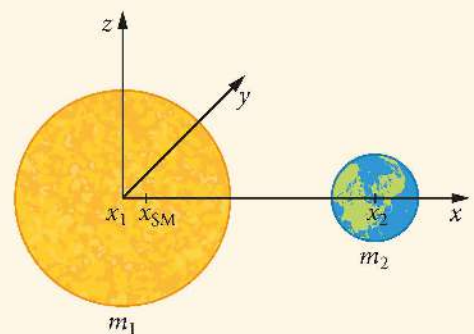
dla Ziemi: $x_2 = 1,5 \cdot 10^8$ km, $m_2 = 6 \cdot 10^{24}$ kg

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$x_{SM} = \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}}{2 \cdot 10^{30} \text{ kg} + 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}} = 450 \text{ km}$$

Odpowiedź: Środek masy układu Ziemia–Słońce znajduje się 450 km od środka Słońca.

Uwaga. Promień Słońca wynosi około 700 000 km, więc środek masy układu Ziemia–Słońce znajduje się we wnętrzu naszej gwiazdy i to bardzo blisko jej środka. Dlatego możemy mówić, że to Ziemia krąży wokół Słońca.



Pytania i zadania

1. Po przejechaniu 280 km samochód wpadł na zakręcie drogi w poślizg, dwukrotnie obrócił się wokół pionowej osi, uderzył w barierkę i uległ zniszczeniu. Ekipa dochodzeniowa musi sporządzić raport ze zdarzenia. Kiedy można modelować samochód jako punkt materialny, a kiedy należy przyjąć, że jest bryłą sztywną? W jakiej sytuacji w odniesieniu do samochodu przy opisie ruchu nie można zastosować żadnego z wymienionych modeli?



2. Ruch toczącego się walca jest złożeniem ruchu postępowego i obrotowego (wokół osi symetrii walca). Jaki warunek muszą spełniać prędkość ruchu postępowego i okres obrotu, aby ruch zachodził bez poślizgu?
3. Odszukaj w tablicach astronomicznych potrzebne dane i za pomocą obliczeń wyznacz położenie środka masy układu Pluton–Charon.

Wskazówka. Patrz przykład na s. 241.

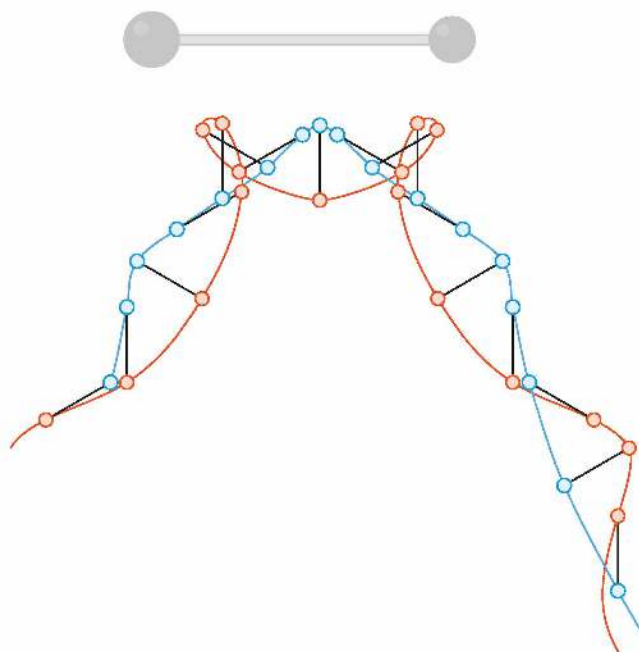
4. Bolas to broń myśliwska używana m.in. przez południowoamerykańskich pasterzy bydła (*gauchos*) do łapania zwierząt. Wyrzucana, zaplątuje się o nogi zwierzęcia, czym uniemożliwia mu ruch. Składa się z dwóch większych kul przymocowanych

do dwóch dłuższych rzemieni i lżejszej kuli zamocowanej do krótszego rzemienia.



Bolas chwytą się za mniejszą kulę i kręci nim w płaszczyźnie poziomej wokół głowy, aby nadać kulom rozpęd, a następnie puszcza. Ruch tej broni wirującej w powietrzu jest bardzo skomplikowany. Na rysunku poniżej przedstawiono go na przykładzie prostego modelu, tj. dla dwóch kul o różnych masach na sztywno połączonych metalowym prętem.

Która linia – niebieska czy czerwona – obrazuje tor cięższej kuli?



6.2. Moment siły

Przypomnij sobie

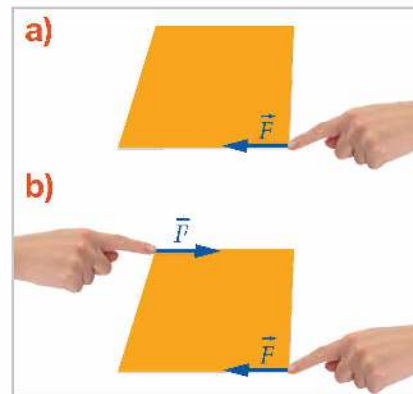
- Jeśli siła wypadkowa działająca na ciało jest równa zero, to pozostaje ono w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej (pierwsza zasada dynamiki).
- Jeśli siła wypadkowa działająca na ciało nie jest równa zero, to porusza się ono z przyspieszeniem skierowanym tak jak ta siła (druga zasada dynamiki).

■ Siła wywołująca ruch obrotowy

Wiesz już z lekcji dotyczących dynamiki, że niezrównoważona siła powoduje ruch postępowy ciała. Odpowiedzmy sobie na pytanie, kiedy może ona powodować ruch obrotowy.

Doświadczenie 36

1. Połóż grubą tekturę na gładkim stole.
2. Popchnij palcem bok tektury (patrz zdjęcie a) i obserwuj, jakim ruchem się porusza. Powtórz tę czynność kilkakrotnie, za każdym razem przykładając palec w innym punkcie wzdłuż tego samego boku tektury.
3. Kiedy tektura porusza się ruchem obrotowym? Kiedy jej środek masy się porusza?
4. Następnie popchnij tekturę z dwóch stron (patrz zdjęcie b) tak, aby się obracała, ale nie poruszała ruchem postępowym. Co możesz powiedzieć o siłach, którymi działają palce?

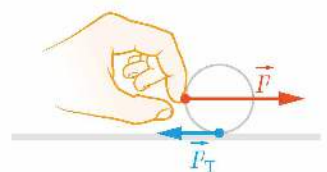


W rozdziale 4. powiedzieliśmy, że siła przyłożona do punktu materialnego powoduje jego ruch przyspieszony (druga zasada dynamiki). W przypadku bryły sztywnej siła powoduje przyspieszony ruch postępowy środka masy, niezależnie od tego, w którym miejscu bryły przyłożona została siła. Jej punkt przyłożenia ma natomiast znaczenie dla wprawiania bryły w ruch obrotowy.

Przyłożona siła nie powoduje ruchu obrotowego ciała, jeśli jej wektor leży na prostej przechodzącej przez środek masy tego ciała.

Jeśli pchniemy piłkę leżącą na stole poziomą siłą $\vec{F}$ na wysokości jej środka, to zauważymy, że zacznie się ona toczyć, czyli poruszać zarówno ruchem postępowym, jak i obrotowym. Jej obrotu nie powoduje siła $\vec{F}$, której wektor przechodzi przez środek masy piłki, ale siła tarcia statycznego $\vec{F}_T$ piłki o stół (rys. 6.6). Gdyby nie tarcie między piłką a stołem, piłka przesuwalaby się po nim, nie obracając się.

Jak wprawić ciało w ruch obrotowy tak, aby jednocześnie nie wykonywało ruchu postępowego? Nie wystarczy działać na ciało jedną siłą.



Rys. 6.6. Siła tarcia statycznego $\vec{F}_T$ powoduje obrót piłki



Rys. 6.7. Uderzenie piłki prostopadle do kierunku, jaki chcemy nadać jej ruchowi, nie spowoduje jej ruchu obrotowego. Aby podkręcić piłkę, należy dodatkowo w trakcie uderzenia poruszyć raketę stycznie do piłki

Trzeba do niego przyłożyć w różnych punktach dwie siły o jednakowych wartościach, przeciwnych zwrotach, działające nie wzdłuż jednej prostej, ale wzdłuż prostych równoległych. Ich suma równa jest wtedy zero i nie powoduje ruchu postępowego ciała. Wprawia je natomiast w ruch obrotowy. Z taką sytuacją mieliśmy do czynienia w punkcie 4. doświadczenia 36.

■ Dźwignie

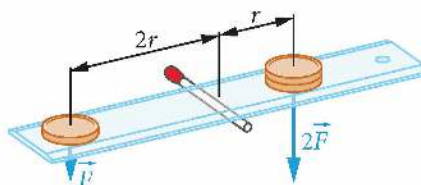
Jedną z sytuacji, w których zasadnicze znaczenie ma punkt przyłożenia siły, jest działanie **dźwigni**. Dźwignia to podłużne ciało, które może się obracać wokół osi do siebie prostopadłej (patrz infografika s. 246–247). Wykonamy teraz doświadczenie, w którym dźwignią będzie linijka oparta o zapalniczkę. Linijka może się obracać wokół osi wyznaczonej przez zapalniczkę tylko o niewielki kąt.

Doświadczenie 37

1. Przygotuj 20-centymetrową linijkę, zapalniczkę i kilka monet 1 zł. Połóż linijkę na zapalniczce tak, jak to przedstawiono na zdjęciu. Gdy podeprzesz linijkę w połowie jej długości, nie powinna przechylać się w żadną stronę. Jeśli się przechyla, możesz obciążyć ją kawałkiem plasteliny lub taśmy klejącej.
2. Połóż dwie monety jedna na drugiej w odległości 3 cm od środka linijki (tzn. tak, aby środek masy monet znajdował się w podanej odległości).
3. Jak sądzisz, gdzie należy położyć jedną monetę, aby zrównoważyła tamte dwie? Spróbuj to przewidzieć, a następnie sprawdź doświadczalnie.
4. Poeksperymentuj z innymi liczbami monet, np. w jakich odległościach powinny się znajdować stosiki po 2 i 3 monety, aby linijka była w równowadze, w jaki sposób jedna moneta może zrównoważyć trzy itp. Spróbuj sformułować ogólny wniosek.

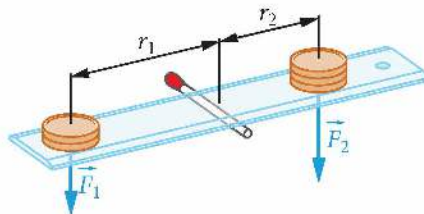


Niezależnie od tego, jak układamy monety, linijka nie wykonuje ruchu postępowego, bo nacisk monet na linijkę oraz ciężar samej linijki równoważone są przez nacisk zapalniczki od dołu na linijkę (czyli reakcję podłoża). Jednak z ruchem obrotowym sprawa jest bardziej skomplikowana. Na przykład ciężar dwóch monet może zrównoważyć jedna moneta położona dwa razy dalej po drugiej stronie zapalniczki (osi obrotu).



Rys. 6.8. Przykład równowagi dźwigni

Dwie monety w odległości 3 cm od zapalki mogą zostać zrównoważone przez trzy monety w odległości 2 cm od zapalki po jej drugiej stronie. We wszystkich tych przypadkach zachodzi pewna prawidłowość: iloczyn siły i odległości jej punktu przyłożenia od osi dźwigni jest stały (np. dla rys. 6.8 zachodzi równość: $2F \cdot r = F \cdot 2r$).



Rys. 6.9. Warunek równowagi dźwigni

Warunek równowagi dźwigni można więc zapisać w postaci:

$$F_1 r_1 = F_2 r_2$$

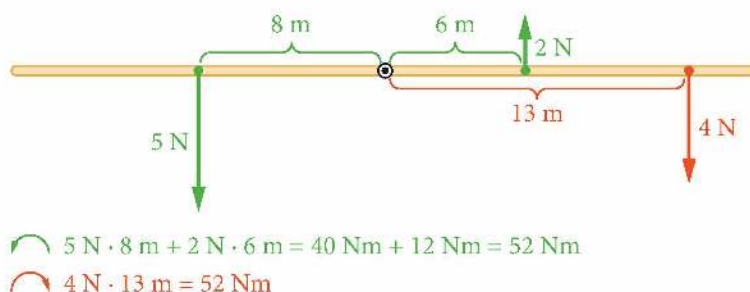
■ Moment siły działającej na dźwignię

Iloczyn $F \cdot r$ ma swoją nazwę: **moment siły** (a ściślej: wartość momentu siły). Na razie definiujemy go tylko dla dźwigni i tylko w przypadku, gdy działające siły są prostopadłe do dźwigni.

Moment siły działającej na dźwignię prostopadłe do jej kierunku ma wartość $M = F \cdot r$, gdzie F jest wartością siły, a r odległością punktu przyłożenia siły od osi obrotu.

Jak widać ze wzoru, jednostką momentu siły jest $1 \text{ N} \cdot \text{m}$.

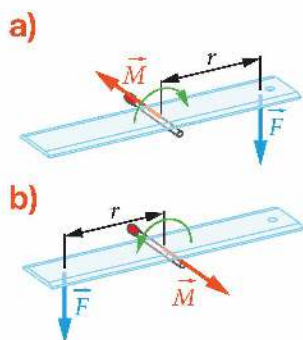
Moment siły jest wielkością wektorową. Zanim jednak omówimy pozostałe cechy tego wektora, rozważymy kwestie związane z jego wartością. Możemy powiedzieć, że dźwignia nie obraca się, gdy siły działają na nią tak, aby obrócić ją w przeciwnie strony, a moment tych sił ma jednakową wartość. Podobnie jest, gdy na dźwignię działa kilka sił (rys. 6.10).



Rys. 6.10. Momenty większej liczby sił także mogą się równoważyć

Siły zaznaczone na zielono chcą obrócić dźwignię w lewo, a siła zaznaczona na czerwono – w prawo. Obliczone momenty sił dla obu tych przypadków są sobie równe, więc dźwignia pozostanie w równowadze.

Także dżul, jednostka energii, to $1 \text{ N} \cdot \text{m}$, ale gdy mowa o momencie siły, to nie używamy nazwy „dżul”, bo **błędnie** sugerowałoby to związek momentu siły z energią.



Rys. 6.11. Kierunek i zwrot wektora momentu siły działającej na dźwignię

■ Kierunek i zwrot momentu siły działającej na dźwignię

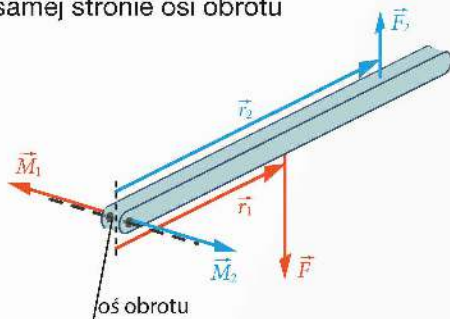
Wiemy, że moment siły wywołujący obrót zgodnie z ruchem wskazówek zegara i moment siły wywołujący obrót w przeciwną stronę mogą się równoważyć. Momenty sił moglibyśmy symbolicznie przedstawiać w postaci zakrzywionych strzałek (patrz zielone strzałki na rys. 6.11). Takie strzałki nie są jednak wektorami. Zamiast tego używamy zwykłego wektora, ale o umownie wybranym kierunku i zwrocie. W przypadku sił działających na dźwignię kierunek wektora momentu siły to kierunek prostej poprowadzonej wzdłuż osi obrotu. Jeden ze zwrotów przyjmujemy umownie za odpowiadający obrotowi zgodnie z ruchem wskazówek zegara (rys. 6.11a), a drugi – za odpowiadający ruchowi przeciwnemu (rys. 6.11b).

Dźwignie wokół nas i w nas

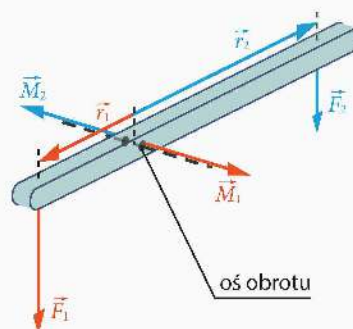
Zasada działania dźwigni jest wykorzystywana w wielu przedmiotach codziennego użytku. Dzięki dźwigniom można wykonywać różne czynności, działając większą siłą niż siła naszych mięśni. Okazuje się, że dźwignie znajdują się również w naszych ciałach.

Wyróżniamy dwa rodzaje dźwigni:

jednostronne, w których siły przyłożone są po tej samej stronie osi obrotu



dwustronne, w których siły są przyłożone po dwóch stronach osi obrotu.



Warunek równowagi dla wszystkich rodzajów dźwigni jest taki sam – suma momentów działających sił musi wynosić zero.

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$

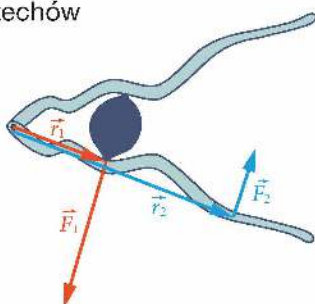
$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$$

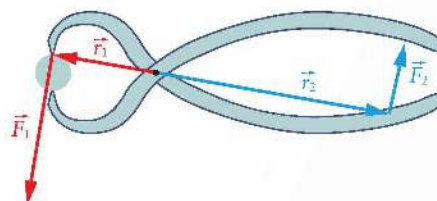
◀ Iloczyn wektorowy s. 249

Przykładami dźwigni jednostronnej i dwustronnej są odpowiednio:

► dziadek do orzechów



► obcęgi



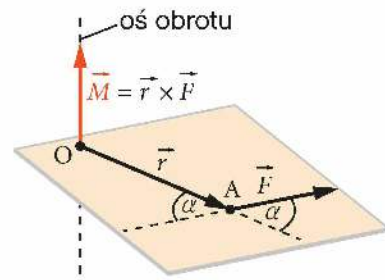
W rzeczywistości każde z tych narzędzi to dwie dźwignie o wspólnej osi obrotu.

■ Moment siły – przypadek ogólny

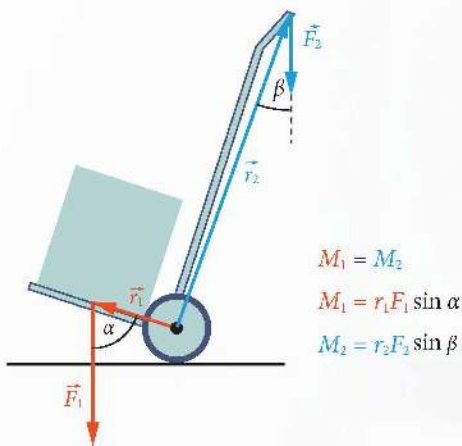
Przejdźmy teraz do ogólnej definicji momentu siły. Rozważmy bryłę, na którą w pewnym punkcie A działa siła $\vec{F}$ mogąca spowodować jej obrót względem osi obrotu przechodzącej przez punkt O (patrz rys. 6.12). Wektor o początku w punkcie O i końcu w punkcie A oznaczamy przez $\vec{r}$ i nazywamy promieniem wodzącym. **Momentem siły** $\vec{M}$ nazywamy wektor będący iloczynem wektorowym $\vec{r}$ i $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Wartość momentu siły: $M = rF \sin \alpha$, gdzie α – kąt między wektorem $\vec{r}$ i $\vec{F}$ (rys. 6.12 i 6.14). O iloczynie wektorowym piszemy więcej na s. 249.



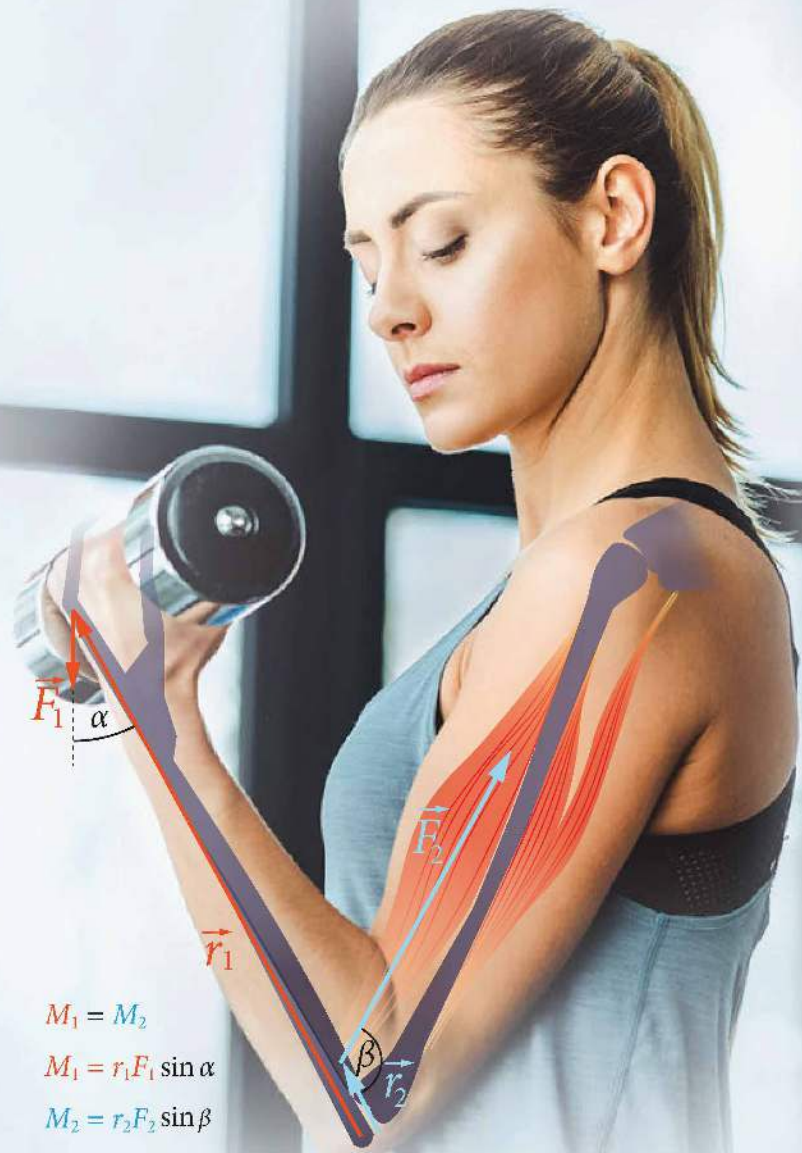
Rys. 6.12. Wektor momentu siły jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory $\vec{r}$ i $\vec{F}$



$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 \\ M_1 &= r_1 F_1 \sin \alpha \\ M_2 &= r_2 F_2 \sin \beta \end{aligned}$$

W wielu przypadkach ramiona dźwigni nie leżą wzdłuż jednej prostej. Nie ma to jednak wpływu na warunek równowagi dźwigni. Należy tylko pamiętać, że gdy ramię dźwigni i siła nie są do siebie prostopadłe, we wzorze na moment siły trzeba uwzględnić czynnik „sin α ”

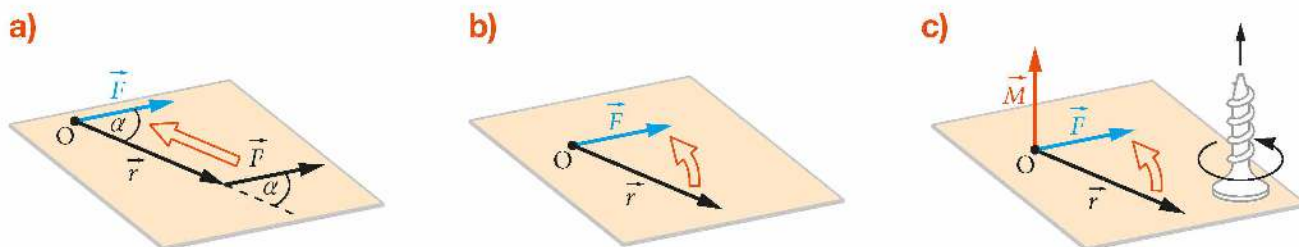
Gdy podnosimy ciężki przedmiot w wyciągniętej dłoni, mięsień zginający rękę w łokciu musi działać wielokrotnie większą siłą. Jednak dzięki temu, gdy mięsień kurczy się o 1 cm, dłoń przebywa dużo dłuższą drogę. Zatem dzięki tej dźwigni nasze kończyny poruszają się szybciej.



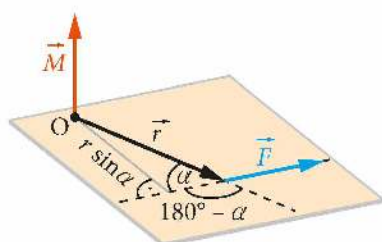
$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 \\ M_1 &= r_1 F_1 \sin \alpha \\ M_2 &= r_2 F_2 \sin \beta \end{aligned}$$

* Kąty α i β na grafice nie mogą posłużyć do wyznaczenia zwrotu momentu siły, a jedynie do obliczenia jego wartości (patrz rys. 6.14 i wyjaśnienie obok).

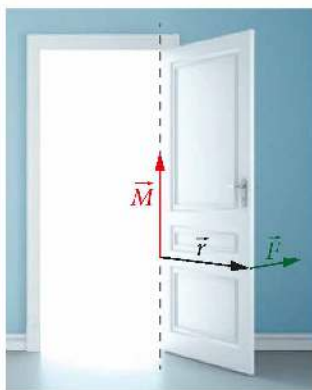
Wektor $\vec{M}$ jest prostopadły do płaszczyzny, na której leżą wektory $\vec{r}$ i $\vec{F}$, więc jego kierunek jest zgodny z kierunkiem osi obrotu. Zwrot momentu siły możemy wyznaczyć za pomocą reguły śruby prawoskrętnej. Zostało to pokazane na rysunkach poniżej.



Rys. 6.13. Kolejne etapy wyznaczania zwrotu wektora momentu siły



Rys. 6.14. Ramię siły $r \sin \alpha$ to odległość punktu O od prostej, na której leży wektor $\vec{F}$



Rys. 6.15. Przykładem bryły, która może się obracać wyłącznie wokół jednej osi, są drzwi

Zauważ, że wyrażenie $r \sin \alpha$ oznacza odległość punktu O od prostej, na której leży wektor siły. Odległość tę nazywamy **ramieniem siły**.

Ponieważ dla dowolnego kąta α zachodzi równość: $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$, wartość momentu siły możemy obliczyć poprzez wstawienie do wzoru któregośkolwiek z kątów między kierunkami wektorów $\vec{F}$ i $\vec{r}$ (rys. 6.14).

■ Szczególne przypadki

Moment siły można zdefiniować względem dowolnego punktu. Jednak w praktyce najczęściej rozważamy moment siły względem:

- 1) środka masy (jak w doświadczeniu 36.),
- 2) punktu przecięcia osi obrotu z płaszczyzną prostopadłą do tej osi obrotu i zawierającą wektor $\vec{F}$. Mówimy wtedy w skrócie: moment siły względem osi obrotu. Metodę tę stosujemy, gdy ciało ma jedną oś, względem której może się obracać, a wektor siły leży w płaszczyźnie prostopadłej do tej osi. Przykładami są drzwi zamocowane na zawiasach (rys. 6.15), a także dźwignia (rys. 6.9).

■ Wypadkowy moment siły

Jeśli na ciało działają różne siły, to ich momenty względem ustalonego punktu możemy dodawać zgodnie z zasadami dodawania wektorów. Przykładem zastosowania dodawania momentów sił jest dźwignia.

Moment siły obracającej dźwignię zgodnie z ruchem wskazówek zegara i moment siły obracającej dźwignię w drugą stronę mają przeciwne zwroty. Jeśli więc mają jednakowe wartości, ich suma jest równa zero. Pamiętaj jednak, że możemy badać dowolną liczbę momentów sił, a także rozpatrywać siły działające pod dowolnym kątem (patrz przykład na s. 250).

Dodatek matematyczny

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

Iloczynem wektorowym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest wektor:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Wektor $\vec{c}$ jest prostopadły do płaszczyzny, na której leżą wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rys. 6.16a), a jego zwrot określa **reguła śruby prawoskrętnej**.

Wyobraźmy sobie, że prostopadle do płaszczyzny, na której leżą wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ustawiamy śrubę. Zaczynamy ją obracać tak, aby zgodnie z ruchem śruby wektor $\vec{a}$ obracał się w kierunku wektora $\vec{b}$. Tak obracana śruba będzie się przesuwać w stronę, w którą zwrócony jest wektor $\vec{c}$ (rys. 6.16a).

Wartość wektora $\vec{c}$ obliczymy ze wzoru:

$$c = ab \sin \alpha$$

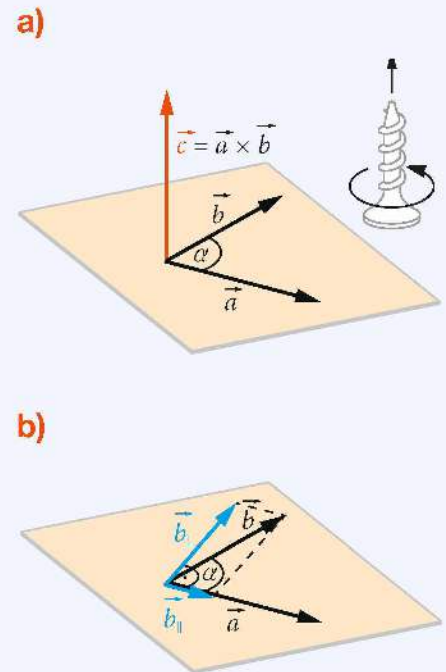
gdzie α – kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Ten wzór można zapisać w postaci:

$$c = a \cdot (b \sin \alpha) = a \cdot b_{\perp}$$

gdzie $b_{\perp}$ to wartość składowej wektora $\vec{b}$ prostopadłej do wektora $\vec{a}$ (rys. 6.16b).

Gdy w iloczynie wektorowym zamienimy wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ miejscami, zwrot iloczynu wektorowego zmieni się na przeciwny. Zachodzi więc zależność: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.



Rys. 6.16. a) iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, b) rozkład wektora $\vec{b}$ na składowe (prostopadłą i równoległą do wektora $\vec{a}$)

Pierwsza zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

Podczas omawiania ruchu postępowego przedstawiliśmy zasady dynamiki, które opisywały, co dzieje się z ciałem pod wpływem działającej siły lub w przypadku jej braku. Dla ruchu obrotowego także sformułujemy zasady dynamiki, ale zamiast siły będziemy brali pod uwagę wypadkowy moment siły. **Pierwsza zasada dynamiki dla ruchu obrotowego** bryły sztywnej ma następującą postać:

Jeśli na bryłę sztywną, która może się obracać wyłącznie wokół określonej osi, działają siły, których wypadkowy moment względem tej osi jest równy zero, to bryła nie obraca się albo obraca ze stałą prędkością kątową.

Z tą zasadą jest związany **warunek równowagi bryły sztywnej**, który brzmi:

Aby bryła sztywna pozostawała w spoczynku (nie poruszała się ani ruchem obrotowym, ani postępowym), muszą się równoważyć zarówno działające na nią siły, jak i momenty sił.

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_k &= 0 \\ \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_k &= 0\end{aligned}$$

Po tej lekcji powinieneś

- badać i opisywać warunki równowagi dźwigni;
- wyznaczać iloczyn wektorowy;
- posługiwać się pojęciem momentu siły;
- znać i stosować pierwszą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



■ Przykład

Dźwignia może się obracać wokół osi przechodzącej przez jej środek O. Z prawej strony dźwigni w odległości r_1 od osi obrotu zawieszono obciążnik A, natomiast w odległości r_2 od osi obrotu zaczepiono linkę. Linka przerzucona jest przez błocek (obracający się krążek), a na jej drugim końcu znajduje się obciążnik B, taki sam jak A. Jaką miarę ma kąt między linką zawieszoną na błočku a dźwignią, jeśli ta pozostanie w równowadze, w pozycji poziomej? Tarcie pomijamy.

Rozwiązanie

Zacznijmy od przedstawienia opisanej sytuacji na rysunku. Aby to zrobić, musimy wyznaczyć odległości r_1 i r_2 . Z treści zadania nie wynika, ile dokładnie one wynoszą, musimy więc na początek przyjąć pewne założenie, np. że $r_2 \geq r_1$, pamiętając jednak, że należy rozważyć także drugą możliwość.

Obciążniki są takie same, więc działa na nie taka sama siła ciężkości. Siła ta poprzez linki jest przenoszona na dźwignię (patrz rysunek).

Na dźwignię działają zatem dwie siły o takiej samej wartości. Obciążnik A działa na dźwignię siłą, której moment względem osi obrotu ma wartość:

$$M_1 = r_1 F$$

Obciążnik B działa zaś na dźwignię siłą, której moment ma wartość:

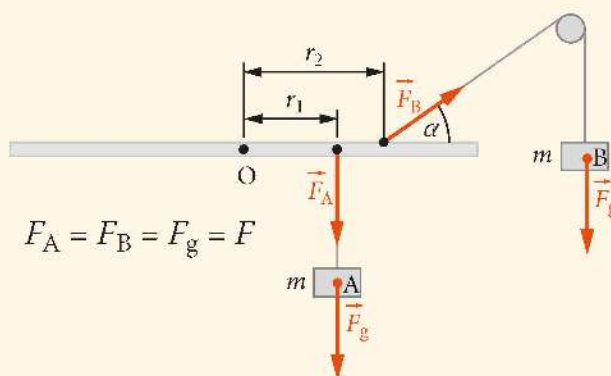
$$M_2 = r_2 F \sin \alpha$$

Momenty te mają przeciwne zwroty (pierwsza siła powoduje obrót zgodnie z ruchem wskazówek zegara, druga – przeciwnie), więc będą się równoważyć, gdy ich wartości będą jednakowe:

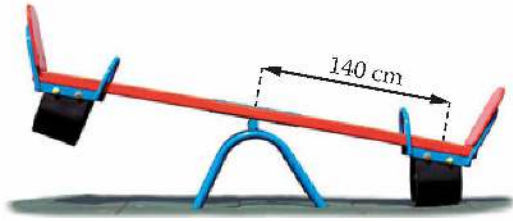
$$r_1 F = r_2 F \sin \alpha \quad \rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{r_1}{r_2}$$

Zauważ, że dla $r_1 \leq r_2$ iloraz $\frac{r_1}{r_2} \leq 1$, a dla $r_1 > r_2$ iloraz $\frac{r_1}{r_2} > 1$.

Odpowiedź: Dla $r_1 \leq r_2$ kąt α ma taką miarę, że $\sin \alpha = \frac{r_1}{r_2}$. Dla $r_1 > r_2$ zadanie nie ma rozwiązania, ponieważ $\sin \alpha$ nie może być większy od 1.

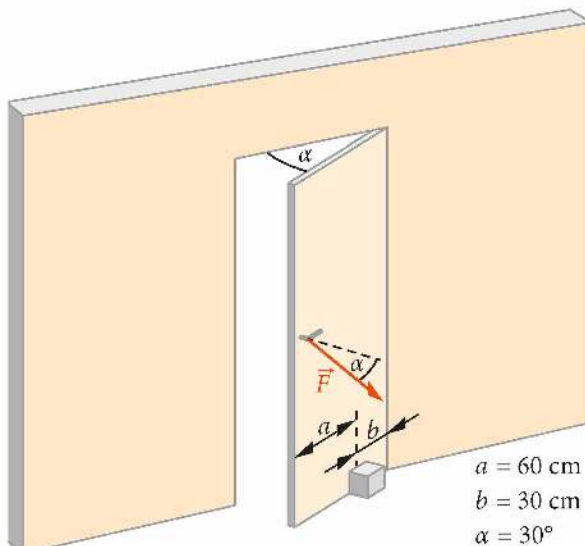


1. Wojtek waży 32 kg, a jego młodszy brat Paweł 20 kg. Paweł usiadł na siodełku huśtawki podobnej do tej na zdjęciu. W jakiej odległości od osi obrotu powinien usiąść Wojtek, aby huśtawka była w równowadze?

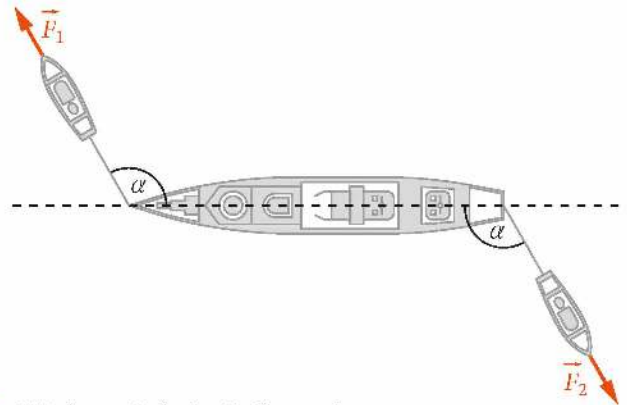


2. Zgodnie z instrukcją obsługi pewnego samochodu śruby mocujące koła powinny być przykręcone siłą, której moment wynosi $110 \text{ N} \cdot \text{m}$.

- a) Dlaczego w instrukcji podano moment siły, a nie siłę?
- b) Jaką wartość powinna mieć siła, którą trzeba działać prostopadłe na koniec klucza do kół o długości 30 cm, aby odpowiednio dokręcić śruby?
3. Pracownik, który remontował mieszkanie nie mógł otworzyć drzwi, ponieważ jego kolega postawił przy nich skrzynkę z narzędziami. Oblicz siłę, z jaką należy działać na drzwi prostopadłe do płaszczyzny ściany (a nie do drzwi!), aby je poruszyć. Masa skrzynki wynosi 4 kg, a jej współczynnik tarcia statycznego o podłogę jest równy 0,4. Pozostałe potrzebne dane odczytaj z rysunku.



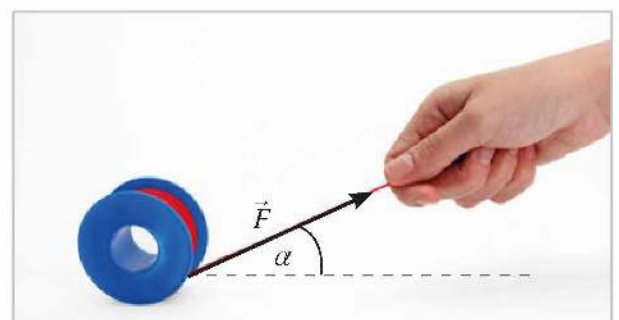
4. Dwa holowniki obracają okręt o długości 100 m wokół osi pionowej przechodzącej dokładnie przez jego środek. Siły, z jakimi działają holowniki, są równe co do wartości $5 \cdot 10^5 \text{ N}$ każda i są skierowane pod kątem $\alpha = 120^\circ$ do osi podłużnej okrętu, tak jak to przedstawiono na rysunku poniżej. Wyznacz wypadkowy moment siły działający na okręt.



5. Wykonaj doświadczenie.

- a) Przygotuj szpulkę (np. po plastrze) przypominającą kształtem tę ze zdjęcia. Jeśli nie możesz znaleźć takiej szpulki, wykonaj ją samodzielnie.
- b) Szpulkę z nawiniętą nitką ustaw tak jak na zdjęciu (nitka powinna wychodzić z dołu szpulki).
- c) Spróbuj przewidzieć, w którą stronę poruszy się szpulka, gdy będziesz ciągnąć nitkę poziomo ($\alpha = 0$), i czy kierunek ruchu zmieni się przy większych wartościach α .
- d) Następnie sprawdź swoje przewidywania doświadczalnie.

Uwaga. Nitkę ciągnij ostrożnie, aby szpulka się nie ślizgała.



6.3. Środek ciężkości i energia potencjalna bryły sztywnej

Przypomnij sobie

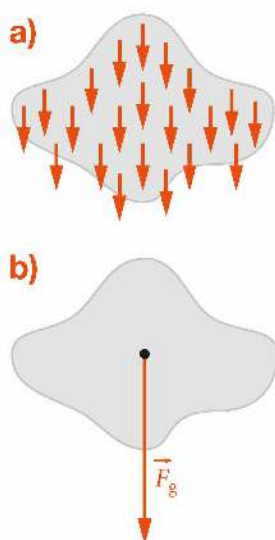
- Środek masy to punkt, który porusza się tak, jakby cała masa bryły sztywnej była skupiona właśnie w tym punkcie.
- Ramię siły $\vec{F}$ to odległość punktu O (punktu, względem którego odbywa się obrót) od prostej, na której leży wektor siły.
- Energia potencjalna grawitacji zależy od tego, na jakiej wysokości nad poziomem odniesienia znajduje się ciało.

■ Środek ciężkości

Aby zrozumieć, co to jest środek ciężkości, najlepiej wykonać proste doświadczenie.

Doświadczenie 38

1. Weź prostokątny kawałek tektury i połóż go na wyciągniętym w górę palcu tak, aby nie spadł.
2. Zaznacz miejsce, w którym podpierałeś tekturę.
3. Obetnij jeden z rogów prostokąta i ponownie połóż tekturę na wyciągniętym w górę palcu tak, aby nie spadała.
4. Zaznacz miejsce, w którym tym razem podpierasz tekturę. Porównaj to miejsce z zaznaczonym poprzednio.



Rys. 6.17. a) siła ciężkości działa na cząsteczki ciała, b) siły te można zastąpić jedną siłą przyłożoną w środku ciężkości

Miejsca, które zaznaczyłeś, to środki ciężkości tektury przed obcięciem jednego z jej rogów i po obcięciu tego rogu.

Zauważ, że zaznaczone punkty nie są położone w tym samym miejscu. Oznacza to, że wraz ze zmianą kształtu tektury zmienił się również jej środek ciężkości.

Siła przyciągania ziemskiego (ciężkości) działa na wszystkie cząsteczki ciała (rys. 6.17a). Okazuje się jednak, że siła ciężkości wywiera taki skutek, jakby cała była przyłożona w pewnym określonym punkcie ciała (rys. 6.17b). Punkt ten nazywamy **środkiem ciężkości**.

Środek ciężkości to punkt przyłożenia całkowitej siły ciężkości.

Jeśli rozmiary ciała są na tyle małe, że możemy pominąć kulisty kształt Ziemi i zmniejszanie się siły ciężkości wraz z wysokością, to środek ciężkości pokrywa się ze środkiem masy tego ciała.

Gdybyśmy wyobrazili sobie wieżowiec o wysokości 3000 km, jego górną połowę Ziemia przyciągałaby już wyraźnie słabiej niż dolną, dlatego środek ciężkości znalazłby się poniżej połowy wysokości budynku.

Jeśli jednak uprzytomnimy sobie, że taki wieżowiec musiałby mieć około miliona pięter (a więc jego budowa jest nierealna), zrozumiemy, że w codziennych sytuacjach różnicę między środkiem ciężkości a środkiem masy możemy pominąć.

■ Środek ciężkości a energia potencjalna

Z poprzedniego rozdziału wiesz, że energia potencjalna grawitacji punktu materialnego o masie m znajdującego się na wysokości h ponad poziomem odniesienia wyraża się wzorem:

$$E_p = mgh$$

W przypadku ciał, których rozmiarów nie możemy pominąć, wzór ten nie daje jednoznacznego wyniku, ponieważ różne punkty ciała mogą znajdować się na różnej wysokości. Okazuje się jednak, że z powyższego wzoru możemy korzystać do wyliczenia energii potencjalnej całego ciała, jeśli weźmiemy pod uwagę **wysokość, na której znajduje się środek ciężkości ciała**.

■ Środek ciężkości zawieszonego ciała

Poznajmy inny niż w doświadczeniu 38 sposób wyznaczania środka ciężkości płaskiego ciała.

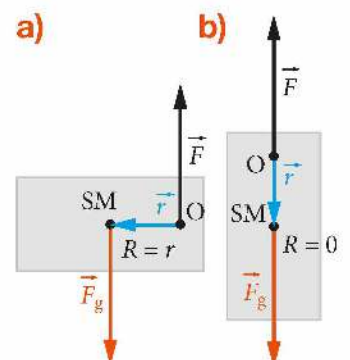
Doświadczenie 39

1. Weź nitkę i na jednym z jej końców przymocuj ciężarek (np. spinacz biurowy, nakrętkę od śruby, kulkę plasteliny), a drugi przywiąż do szpilki.
2. Wbij szpilkę w kawałek tektury o nieregularnym kształcie tak, aby mógł się obracać z niewielkim tarciem.
3. Poczekaj, aż tektura i nitka z ciężarkiem się ustabilizują, i odrysuj nitkę na tekturze.
4. Powtórz doświadczenie kilka razy, wbijając szpilkę za każdym razem w inne miejsce. Co zauważasz?

Na tekturę zawieszoną na szpilce działają: siła ciężkości $\vec{F}_g$ i siła $\vec{F}$, którą działa na nią szpilka (rys. 6.19a). Siła $\vec{F}$ przyłożona w punkcie O nie wpływa na obrót ciała. Na rysunku 6.19b pokazano, że w stanie równowagi środek ciężkości zawieszonego ciała (w doświadczeniu: kawałek tektury) znajduje się poniżej punktu zawieszenia (szpilki). Pionowa nitka opuszczona ze szpilki przechodzi więc przez środek ciężkości tektury. Ta obserwacja pozwala wyznaczyć środek ciężkości płaskiego ciała, np. tektury z doświadczenia 39. Jeśli za każdym razem odrysowałeś nitkę starannie, narysowane na tekturze linie przecięły się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem ciężkości użytego kawałka tektury. Postępując w opisany w doświadczeniu sposób z dowolnym płaskim ciałem, możemy wyznaczyć jego środek ciężkości.

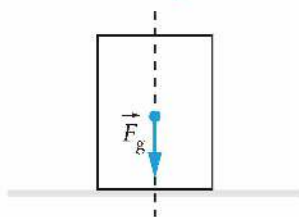


Rys. 6.18. Nad poprzeczką przemieszcza się ciało lekkoatletki skaczącej o tyczce, a nie jej środek ciężkości (przerywana linia to tor środka ciężkości)

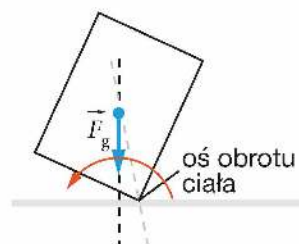


Rys. 6.19. Obrót ciała powoduje siła $\vec{F}_g$ (rys. a) do momentu, aż ramię siły zmaleje do zera (rys. b)

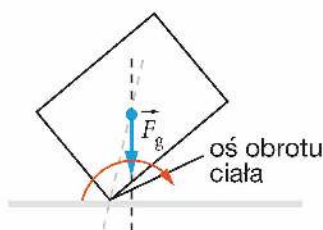
Środek ciężkości ciała stojącego na podłożu



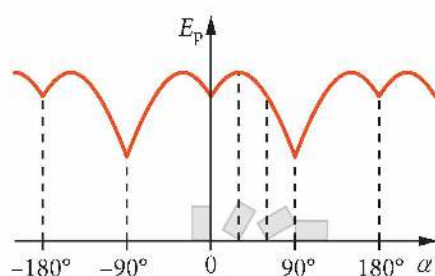
Zastanówmy się, jak bardzo można odchylić od pionu klocek, aby się nie przewrócił na drugi bok.



Klocek został nieco odchylony od pionu. Krawędź, na której stoi, jest teraz osią, względem której ciało może się obracać. Środek ciężkości nie wychylił się poza podstawę bryły. Moment siły ciężkości obraca klocek w stronę, którą pokazuje czerwona strzałka, czyli do początkowego położenia równowagi.



Klocek został wychylony mocniej. Środek ciężkości wychylił się poza podstawę bryły. Moment siły ciężkości sprawia, że bryła się przewraca.



Klocek będzie pozostawał w równowadze trwałej tylko do pewnego kąta wychylenia. Bardziej wychylony przewróci się i znajdzie nowe położenie równowagi. Obok zamieszczono wykres zależności energii potencjalnej klocka od kąta wychylenia. Energia potencjalna ma maksymalną wartość, gdy środek ciężkości klocka jest w najwyższym położeniu.

■ Obniżanie środka ciężkości

Na podstawie informacji z powyższej ramki można wyciągnąć wniosek, że im niżej znajduje się środek ciężkości, tym trudniej jest przechylić ciało tak, aby znalazł się on poza jego podstawą. Co za tym idzie – tym trudniej je przewrócić. Dlatego też w wielu sytuacjach, gdy zależy nam, aby ciało zachowało równowagę jak najdłużej, staramy się przenieść jego środek ciężkości jak najniżej. Z tego powodu na przykład lampy stołowe mają ciężkie podstawy.

W przypadku dźwigu także chcemy, aby nie przewrócił się on podczas podnoszenia ładunku, czyli aby jego środek ciężkości nie wysunął się poza podstawę dźwigu. Dlatego dolna część urządzenia jest bardzo mocno obciążona i dodatkowo powierzchnia podstawy jest powiększona dzięki bocznym podporom (patrz zdjęcie obok).

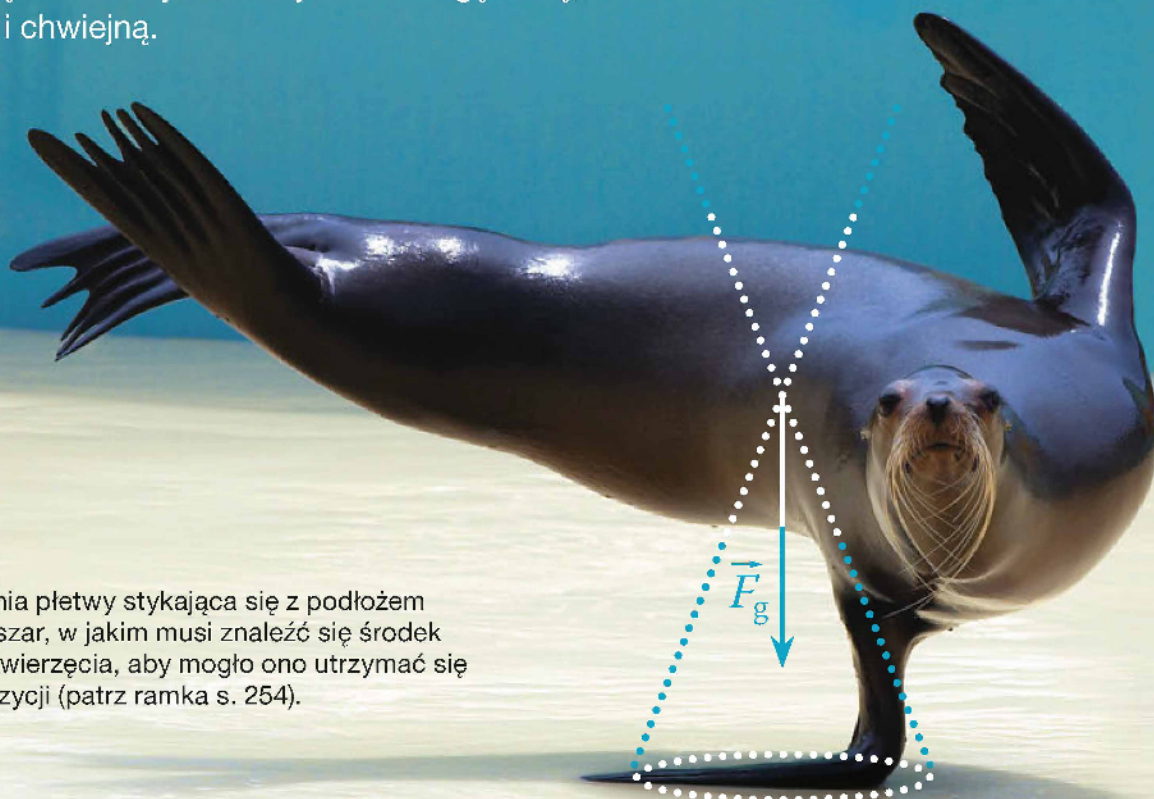


Rys. 6.20. Aby obniżyć środek ciężkości, dolna część dźwigu jest mocno obciążana

Równowaga bryły sztywnej

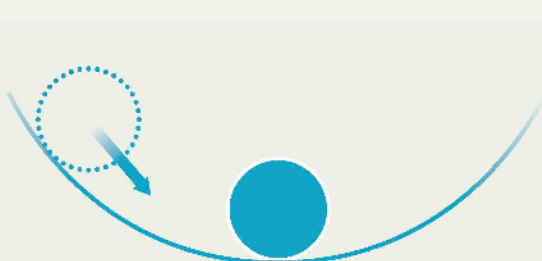
Stan równowagi bryły sztywnej zależy od położenia środka ciężkości. Wyróżniamy równowagę stałą, obojętną i chwiejną.

Powierzchnia płetwy stykająca się z podłożem określa obszar, w jakim musi znaleźć się środek ciężkości zwierzęcia, aby mogło ono utrzymać się w takiej pozycji (patrz ramka s. 254).



Równowaga obojętna

– ma miejsce wtedy, gdy po wychyleniu ciała jego środek ciężkości znajduje się na tej samej wysokości co przed wychyleniem.



Równowaga trwała (stabilna)

– ma miejsce wtedy, gdy ciało wychylone z położenia równowagi samoczynnie do niego wraca. Równowaga trwała ma miejsce wtedy, gdy środek ciężkości jest położony w najniższym punkcie.



Równowaga chwiejna (niestabilna)

– ma miejsce wtedy, gdy ciało wychylone z położenia równowagi nie wraca do niego, ale znajduje inne położenie równowagi. Taki stan występuje, gdy środek ciężkości znajduje się w najwyższym punkcie.

Po tej lekcji powinieneś

- wiedzieć, co to jest środek ciężkości i kiedy znajduje się w tym samym punkcie co środek masy;
- umieć wyznaczyć środek ciężkości zawieszonego płaskiego ciała;
- rozumieć, jak położenie środka ciężkości wpływa na stabilność ciała;
- wiedzieć, że aby obliczyć energię potencjalną grawitacji dla bryły, bierzemy pod uwagę położenie środka ciężkości.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZCIE

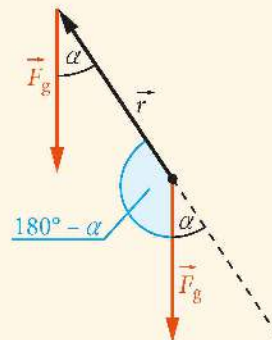
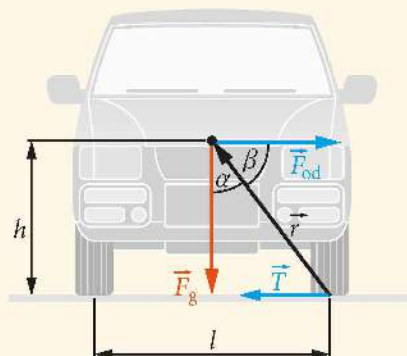


■ Przykład

Rozstaw kół samochodu wynosi $l = 170$ cm, a jego środek ciężkości znajduje się na wysokości $h = 100$ cm nad powierzchnią poziomej drogi. Samochód ten skręca na niewyprofilowanym zakręcie o promieniu krzywizny $R = 50$ m. Przy jakiej prędkości samochód przewróci się na bok? Przyjmij, że pojazd nie wpadnie w poślizg.

Rozwiązanie

Wykonajmy schematyczny rysunek.



Rozwiążmy zadanie w nieinercyjnym układzie odniesienia (związany z samochodem). W takim układzie na samochód działają dwa momenty sił względem osi biegnącej wzdłuż kół znajdujących się po zewnętrznej stronie zakrętu (gdyż moment siły tarcia względem tej osi jest równy zero). Są to: moment siły ciężkości i moment siły odśrodkowej.

W chwili, gdy moment siły odśrodkowej będzie większy od momentu siły ciężkości, auto przewróci się na bok, wykonując obrót względem rozważanej osi.

Założmy, że obie siły są przyłożone w środku ciężkości samochodu, więc dla obu wektor $\vec{r}$ jest taki sam. Dla sytuacji granicznej możemy zatem zapisać:

$$\vec{r} \times \vec{F}_{od} = -\vec{r} \times \vec{F}_g$$

z czego wynika, że momenty sił są sobie równe co do wartości:

$$rF_{od}\sin(180^\circ - \beta) = rF_g\sin(180^\circ - \alpha)$$

Możemy skorzystać z własności $\sin(180^\circ - x) = \sin x$ i zapisać:

$$rF_{od}\sin\beta = rF_g\sin\alpha$$

Zatem:

$$\cancel{F_{\text{od}}} \frac{h}{\cancel{R}} = \cancel{F_g} \frac{\frac{1}{2}l}{\cancel{R}} \rightarrow F_{\text{od}} h = F_g \frac{1}{2}l$$

Podstawiamy wzory na wartość siły ciężkości $F_g = mg$ i siły odśrodkowej $F_{\text{od}} = \frac{mv^2}{R}$ i wyznaczamy prędkość:

$$\frac{\cancel{m}v^2}{R} h = \cancel{m} g \frac{1}{2}l \cdot \frac{R}{h} \rightarrow v^2 = \frac{gR}{2} \cdot \frac{l}{h} \rightarrow v = \sqrt{\frac{gR}{2} \cdot \frac{l}{h}}$$

Z powyższego zapisu wynika, że graniczna prędkość jest tym większa, im łagodniejszy jest zakręt (większe R), im szerszy jest samochód (większe l) i im niżej znajduje się jego środek ciężkości (mniejsze h). Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$v = \sqrt{\frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50 \text{ m} \cdot 1,7 \text{ m}}{2 \cdot 1 \text{ m}}} = 20,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 74 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Odpowiedź: Samochód przewróci się, jeśli jego prędkość przekroczy $74 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- Dwóch turystów przechodziło po kładce przez potok. Obaj byli tego samego wzrostu, mieli takie same plecaki i spakowali do nich taki sam bagaż. Jednak jeden z nich ciężkie przedmioty spakował na dnie plecaka, a drugi w klapie na górze. Któremu będzie łatwiej zachować równowagę? Dlaczego?
- Szerokość czołgu wynosi 4 m. Jego środek ciężkości znajduje się 0,8 m nad podłożem. Przy jakim maksymalnym kącie nachylenia góry czołg może bezpiecznie jechać po jej zboczu w poprzek stoku?
- Pozioma belka o masie 4 kg jest podparta wspornikiem w odległości $\frac{1}{8}$ długości od lewego końca. Na lewym końcu belki zawieszono ciężarek o masie 10 kg. Oblicz wartość siły działającej w górę, którą należy przyłożyć do drugiego końca belki, aby znalazła się ona w równowadze.
- Zaprojektuj i przeprowadź doświadczenie pozwalające na wyznaczenie masy linijki z wykorzystaniem stołu i monety jednozłotowej (masa takiej monety to 5 g).
- Puste pudełko od zapalek leżało na największej ścianie. Następnie postawiono je na najmniejszej ścianie. Wykonaj odpowiednie pomiary i oblicz pracę, jaką wykonano podczas przestawiania pudełka.
- Szybkie motocykle, tzw. ścigacze, rozwijają na prostych odcinkach prędkość do $250 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Podczas wchodzenia motocyklisty w zakręt prędkość pojazdu powinna być znacznie mniejsza.
 - Oblicz maksymalną możliwą wartość prędkości, z jaką może jechać motocyklista na zakręcie toru wyścigowego po łuku o promieniu 23 m, jeśli współczynnik tarcia statycznego kół o nawierzchnię wynosi 0,9.
 - Oblicz kąt nachylenia motocykla względem pionu, gdy jedzie on po opisanym łuku z prędkością $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Czy wynik zależy od położenia środka ciężkości?



6.4. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Przypomnij sobie

- Energię kinetyczną ciała o masie m poruszającego się z prędkością v można obliczyć ze wzoru $E_k = \frac{1}{2} mv^2$.
- Pomiędzy prędkością liniową v a prędkością kątową ω w ruchu po okręgu zachodzi zależność $v = \omega r$.

■ Bezwładność bryły

Wiemy, że w ruchu postępowym jedyną wielkością opisującą bezwładność ciała jest jego masa. Wykonajmy proste doświadczenie i sprawdźmy, czy tak samo jest w przypadku ruchu obrotowego.



Doświadczenie 40 – obowiązkowe

Badanie ruchu ciał o różnych momentach bezwładności

1. Przygotuj dwie takie same nici o długości ok. 30 cm.
2. Do jednego z końców każdej z nich przywiąż zapalniczkę tak, aby węzeł znajdował się w połowie długości zapalniczki.
3. Przymocuj wolne końce nitki do drążka lub krawędzi stołu, np. taśmą klejącą tak, aby zapalniczki znalazły się na takiej samej wysokości.
4. Do każdej z zapalniczek przyczep po dwie klamerki do bielizny. Do jednej z zapalniczek przypnij klamerki pionowo, a do drugiej – poziomo.
5. Obróć każdą z zapalniczek z klamerkami 10 razy wokół osi wyznaczonej przez nitkę.
6. Puść jednocześnie obie zapalniczki i obserwuj ruch klamerki.



Wiemy, że każdy z układów (zapalniczka i klamerki) miał taką samą masę. Przeprowadzone doświadczenie pokazuje, że pod wpływem tego samego momentu siły (pochodzącego od identycznie skręconej nici) wirowały one w innym tempie.

Widzimy więc, że znajomość masy ciała nie wystarczy do określenia jego bezwładności w ruchu obrotowym. Aby to zrobić, musimy także znać położenie masy względem osi obrotu.

Wielkością uwzględniającą rozkład masy bryły jest **moment bezwładności**. Aby go zdefiniować, wyznaczmy najpierw energię kinetyczną wirującego ciała.

■ Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Na początek zajmijmy się pojedynczym punktem materialnym o masie m poruszającym się z prędkością v po okręgu o promieniu r . Jak wiemy, jego energia kinetyczna wyraża się wzorem: $E_k = \frac{1}{2} mv^2$.

Możemy skorzystać z zależności między prędkością liniową a kątową: $v = \omega r$ i przekształcić ten wzór do postaci:

$$E_k = \frac{1}{2} m (\omega r)^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

Jak wiemy, dowolną bryłę sztywną możemy traktować jako zbiór n punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \dots, m_n$, położonych odpowiednio w odległościach $r_1, r_2, \dots, r_n$ od osi obrotu. Energię każdego z tych punktów materialnych obliczamy z wyprowadzonego wcześniej wzoru. Po zsumowaniu energii wszystkich punktów otrzymamy całkowitą energię kinetyczną bryły:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n r_n^2 \omega^2$$

Prędkość kątowa jest jednakowa dla wszystkich punktów bryły, możemy więc zapisać:

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2) \omega^2$$

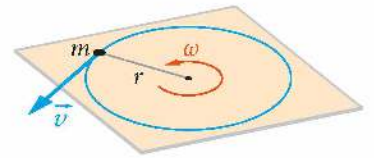
Wyrażenie w nawiasie nazywamy **momentem bezwładności bryły** i oznaczamy symbolem I :

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$$

Jednostką momentu bezwładności jest $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Moment bezwładności jest więc tym większy, im większa jest całkowita masa ciała i im dalej od osi jest położona. Wzór na **energię kinetyczną ruchu obrotowego** bryły otrzymuje postać:

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$



Rys. 6.21. Punkt materialny o masie m poruszający się po okręgu o promieniu r z prędkością kątową ω ma energię kinetyczną $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$

I – moment bezwładności bryły,
 $m_1, m_2, \dots, m_n$ – masy punktów materialnych,
 $r_1, r_2, \dots, r_n$ – odległości tych punktów od osi obrotu,
 ω – prędkość kątowa bryły

■ Interpretacja momentu bezwładności

Zwróć uwagę, że o bezwładności ciała w ruchu postępowym należy mówić nie tylko w kontekście drugiej zasady dynamiki Newtona, ale także w odniesieniu do energii kinetycznej ciała. Z zależności $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ wynika, że im większa masa ciała, tym większą pracę należy wykonać, aby rozpędzić to ciało do danej prędkości. Innymi słowy, większa masa oznacza większą bezwładność.

Podobnie możemy zinterpretować wzór na energię kinetyczną ruchu obrotowego. Ze wzoru $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$ wynika, że **im większy moment bezwładności bryły, tym większą pracę trzeba wykonać, aby wprowadzić ją w ruch obrotowy** o danej prędkości kątowej.

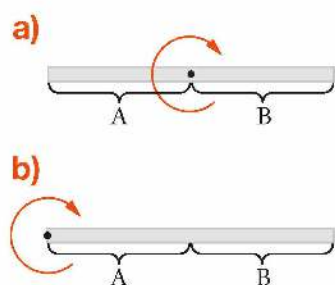
W ruchu obrotowym miarą bezwładności ciała jest moment bezwładności.

Wzory na energię kinetyczną w ruchu postępowym i w ruchu obrotowym mają podobną postać. Z tego rodzaju analogiami w tym rozdziale jeszcze będziemy mieć do czynienia.

Ruch postępowy: $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

Ruch obrotowy: $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$

wielkość opisująca ω prędkość
bezwładność (liniowa v lub kąтова ω)



Rys. 6.22. Jednorodny stalowy pręt obracający się względem osi prostopadłej przechodzącej przez jego: a) środek, b) koniec

■ Moment bezwładności jednorodnego pręta

Wiemy, że masa określonego ciała jest wielkością stałą. A co z momentem bezwładności? Rozważmy moment bezwładności jednorodnego stalowego pręta obracającego się wokół dwóch różnych prostopadłych do niego osi: przechodzącej przez środek pręta i przechodzącej przez jego koniec.

Na rysunkach 6.22a i 6.22b przedstawiono schematycznie obie opisane powyżej sytuacje. Każdy z prętów podzielono na dwie części, A i B, równej długości. Część A jest w obu wypadkach tak samo położona względem osi obrotu, ma więc taki sam moment bezwładności. Natomiast część B na rysunku 6.22b jest położona dalej od osi obrotu, co oznacza, że ma większy moment bezwładności. W drugiej sytuacji moment bezwładności jest zatem większy. Czyli moment bezwładności dla danego ciała może być różny i zależeć od położenia osi obrotu.

■ Moment bezwładności różnych brył

Wyznaczanie momentu bezwładności brył o różnych kształtach za pomocą obliczeń wykracza poza zakres matematyki omawiany w szkole średniej. W tabeli 6.1 podajemy kilka przykładowych wzorów na moment bezwładności dla brył o jednorodnej gęstości i wybranych kształtach. W następnym temacie omówimy sposób doświadczalnego wyznaczania momentu bezwładności.

Gdy przyjrzymy się wzorom zapisanym w tabeli 6.1, zauważymy zależności dotyczące momentów bezwładności poszczególnych brył:

1. Pierwszy wzór wynika wprost z definicji momentu bezwładności: wszystkie punkty rury są w takiej samej odległości od jej osi.

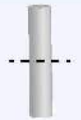


A to ciekawe

Wirujące koło o dużym momencie bezwładności, tzw. koło zamachowe, może przez pewien czas magazynować energię mechaniczną. Właściwość tę wykorzystywano już w czasach prehistorycznych. Masywne wirujące koła były używane przez garncarzy do wyrobu ceramiki. Obecnie koła zamachowe stosuje się między innymi w silnikach spalinowych do zapewnienia ich równomiernej pracy.

2. Dla kuli wartość I jest mniejsza niż dla walca o takiej samej masie i takim samym promieniu, gdyż w przypadku kuli większa część masy znajduje się bliżej osi obrotu.
3. Dwa ostatnie wzory są zgodne z rozważaniami ze s. 260. Stwierdziliśmy, że w drugim przypadku (rys. 6.22b) moment bezwładności jest większy, teraz dodatkowo widzimy – ile razy.

Tabela 6.1

Rodzaj bryły	Oś obrotu	Moment bezwładności	Rysunek
Obręcz lub rura o cienkiej ściance, o promieniu r	oś symetrii prostopadła do podstawy	mr^2	
Kula o promieniu r	oś symetrii	$\frac{2}{5}mr^2$	
Pełny walec o promieniu r	oś walca	$\frac{1}{2}mr^2$	
Cienki pręt o długości l	prostopadła do pręta przechodząca przez jego środek	$\frac{1}{12}ml^2$	
Cienki pręt o długości l	prostopadła do pręta przechodząca przez jego koniec	$\frac{1}{3}ml^2$	

■ Energia kinetyczna w ruchu złożonym

Gdy ciało porusza się ruchem złożonym, czyli jednocześnie ruchem postępowym i obrotowym, jego całkowita energia kinetyczna jest równa sumie energii kinetycznej ruchu postępowego i obrotowego:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

gdzie:

m – masa ciała, v – wartość prędkości środka masy, I – moment bezwładności ciała względem osi obrotu, ω – prędkość kątowna ciała.

Po tej lekcji powinieneś

- znać pojęcie momentu bezwładności i umieć je interpretować;
- posługiwać się pojęciem momentu bezwładności;
- stosować wzór na energię kinetyczną ruchu obrotowego bryły;
- obliczać całkowitą energię kinetyczną ciała.



Rys. 6.23. Energia kinetyczna ruchu obrotowego Ziemi wynosi około $2 \cdot 10^{29}$ J, a jej ruchu postępowego wokół Słońca $2,7 \cdot 10^{33}$ J, zatem energia ruchu postępowego to praktycznie cała energia kinetyczna naszej planety



■ Przykład

Walec stacza się bez poślizgu z równi pochyłej o wysokości $h = 20$ cm. Do jakiej prędkości się rozpędzi? Pomiń tarcie toczne. Porównaj uzyskany wynik z prędkością, jaką uzyskałby ten sam walec, zsuwając się z takiej samej równi bez tarcia.

Rozwiązanie

Do rozwiązania zadania wykorzystamy zasadę zachowania energii.

Wyznamy prędkość walca w pierwszej sytuacji. Zgodnie z założeniami zadania pomijamy tarcie toczne, które powodowałoby straty energii. Musimy jednak pamiętać, że w punkcie styczności walca z równią działa tarcie statyczne, dzięki któremu walec się toczy, a nie zsuwa z równi. Tarcie to nie powoduje strat energii. Możemy więc przyjąć, że początkowa energia potencjalna walca $E_p = mgh$ zmienia się w jego energię kinetyczną (ruchu postępowego i obrotowego):

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1)$$

Jaka jest zależność między prędkością liniową v środka walca oraz prędkością kątową ω jego obrotu?

Zauważmy, że gdy walec wykona jeden obrót, pokona drogę $2\pi r$, równą swojemu obwodowi. Zatem $v = \frac{2\pi r}{T}$, gdzie T jest okresem obrotu walca. Stąd:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi}{T} \cdot r = \omega r$$

Wobec tego można do równania (1) za ω podstawić $\frac{v}{r}$:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I \frac{v^2}{r^2} \quad | \cdot 2 \rightarrow 2mgh = mv^2 + I \frac{v^2}{r^2}$$

Moment bezwładności dla walca odczytujemy z tabeli 6.1 ze s. 261 i podstawiamy do wzoru:

$$2mgh = mv^2 + \frac{1}{2}m \cancel{r^2} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r^2}} \quad | : m \rightarrow 2gh = v^2 + \frac{1}{2}v^2$$

Wyznamy v i otrzymujemy: $v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$, co po podstawieniu danych daje $v \approx 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Dla walca zsuwającego się z tej samej równi pomijamy w obliczeniach energię ruchu obrotowego.

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2$$

Po dokonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy: $v_1 = \sqrt{2gh}$.

Stąd po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $v_1 \approx 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Odpowiedź: Walec rozpędzi się do prędkości $1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Prędkość ta jest w przybliżeniu o 20% mniejsza od tej, z jaką poruszałby się walec, zsuwając się z tej samej równi bez tarcia.

Uwaga. Odpowiedź nie zależy ani od masy, ani od wymiarów walca. Różnica prędkości przy staczaniu i przy ześlizgiwaniu jest spowodowana tym, że w przypadku ześlizgiwania cała energia potencjalna zamienia się w energię kinetyczną ruchu postępowego, a w przypadku staczania – tylko $\frac{2}{3}$, podczas gdy $\frac{1}{3}$ zamienia się w energię kinetyczną ruchu obrotowego.

1. Ile razy większa jest energia kinetyczna ruchu postępowego od energii kinetycznej ruchu obrotowego jednorodnej kuli toczącej się bez poślizgu?
2. Dwie kulki mają taką samą masę i taki sam promień, jednak jedna jest jednorodną kulą ze stali, a druga to kula ołowiana pusta w środku. Która z nich ma większy moment bezwładności? Uzasadnij swoją odpowiedź.
3. Każde z kół poruszającego się samochodu o masie 1400 kg ma masę 14 kg. Przyjmijmy dla uproszczenia, że moment bezwładności koła samochodowego można obliczyć ze wzoru $I = \frac{1}{2}mr^2$. Oblicz stosunek energii kinetycznej ruchu obrotowego kół do energii kinetycznej ruchu postępowego pojazdu.
4. Jo-jo składa się z wewnętrznego walca o średnicy 1 cm, dwóch walców o średnicy 6 cm umieszczonych po bokach i sznurka o długości 50 cm.



Przyjmij dla ułatwienia, że wszystkie trzy walce mają jednakową wysokość i są wykonane z tego samego jednorodnego

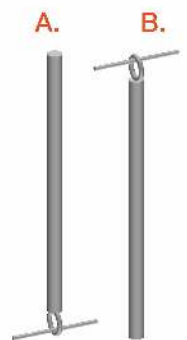
materiału. Grubość i masę sznurka pomijamy.

Nawijamy cały sznurek na wewnętrzny walec i puszczaemy jo-jo w dół, nie ruszając ręką. Oblicz, jakie wartości przyjmują w chwili, gdy zostanie rozwinięte 40 cm sznurka:

- a) prędkość ruchu postępowego i prędkość kątową,
- b) częstotliwość obrotu,
- c) stosunek energii kinetycznej ruchu obrotowego do energii kinetycznej ruchu postępowego.

Wskazówka. Jeśli bryłę możemy podzielić na kilka części, to moment bezwładności całości jest równy sumie momentów bezwładności części względem tej samej osi obrotu.

5. Stalowy pręt o długości l zawieszono na innym poziomym pręcie w taki sposób, że może się wokół niego swobodnie obracać. Następnie ustawiono ten pręt tak, jak pokazano na rysunku A, i puszczaono. Oblicz prędkość kątową pręta po osiągnięciu przez niego pozycji pokazanej na rysunku B.



6.5. Druga zasada dynamiki w ruchu obrotowym

Przypomnij sobie

- Moment siły to wektor będący iloczynem wektorowym promienia wodzącego i siły.
- Wielkością opisującą bezwładność ciała w ruchu obrotowym jest moment bezwładności.
- Przyspieszenie kątowe ε definiujemy jako iloraz zmiany prędkości kątowej i czasu, w jakim ta zmiana nastąpiła: $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Wiemy już, że do wprowadzenia bryły sztywnej w ruch obrotowy potrzebny jest moment siły. W tej lekcji zajmiemy się omówieniem tego zagadnienia dokładniej.

■ Od czego zależy przyspieszenie kątowe

Druga zasada dynamiki s. 143

Jak wiesz, zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ruchu postępowego przyspieszenie ciała jest wprost proporcjonalne do działającej siły, a odwrotnie proporcjonalne do masy:

$$a = \frac{F}{m}$$

Z naszych dotychczasowych rozważań wynika, że rolę analogiczną do siły w ruchu postępowym odgrywa w ruchu obrotowym moment siły, a analogiczną do masy – moment bezwładności. Okazuje się, że **druga zasada dynamiki** również ma swój odpowiednik **w ruchu obrotowym**:

Analogia między ruchem postępowym a ruchem obrotowym s. 260

Jeśli na bryłę sztywną działa wypadkowy moment siły M równoległy do osi obrotu, to bryła porusza się z przyspieszeniem kątowym ε wprost proporcjonalnym do wartości działającego na nią momentu siły i odwrotnie proporcjonalnym do momentu bezwładności I tej bryły:

$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

Należy przy tym pamiętać, że rozważamy wyłącznie ruch obrotowy wokół stałej osi i przy założeniu, że działająca siła leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu.

Przypomnijmy doświadczenie 40. z poprzedniej lekcji (s. 258). Na oba układy złożone z zapalki i klamerek działała siła o takim samym momencie, jednak układ z klamerkami przyczepionymi równolegle do nitki miał mniejszy moment bezwładności i dlatego też uzyskał większe przyspieszenie kątowe ε (obracał się szybciej).

Jednostka przyspieszenia kątowego

$$[\varepsilon] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2} = \frac{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}$$
$$[\varepsilon] = \frac{1}{\text{s}^2}$$

■ Uzasadnienie drugiej zasady dynamiki w ruchu obrotowym

Rozważmy sytuację, w której bryła obraca się wokół ustalonej osi obrotu i na bryłę działa siła $\vec{F}$ leżąca w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu i prostopadła do wektora $\vec{r}$ łączącego oś obrotu z początkiem wektora $\vec{F}$ (rys. 6.24a). Punkt przyłożenia siły obraca się zatem razem z bryłą (rys. 6.24b), a wartość momentu siły wynosi $M = Fr$.

Założmy, że moment siły jest skierowany w taką stronę, że siła powoduje przyspieszanie obrotu bryły.

W czasie Δt wartość prędkości kątowej bryły zmieni się od ω_1 do ω_2 . Przyjmujemy, że Δt jest na tyle małe, że ruch można traktować jako jednostajnie zmienny, czyli że średnia prędkość kątowa jest równa średniej arytmetycznej prędkości na początku i końcu. Punkt przyłożenia siły przebędzie więc drogę:

$$s = v \Delta t = \omega_{sr} \cdot r \cdot \Delta t = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} r \Delta t$$

gdzie skorzystaliśmy z zależności między prędkością liniową i kątową $v = \omega r$. Wobec tego siła F wykona pracę:

$$W = Fs = F \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} r \Delta t$$

Praca ta jest równa przyrostowi energii kinetycznej bryły:

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2 = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

stąd:

$$\begin{aligned} F \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} r \Delta t &= \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2) \\ F \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} r \Delta t &= \frac{1}{2} I (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1) \quad | : \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ Fr \Delta t &= I (\omega_2 - \omega_1) \end{aligned}$$

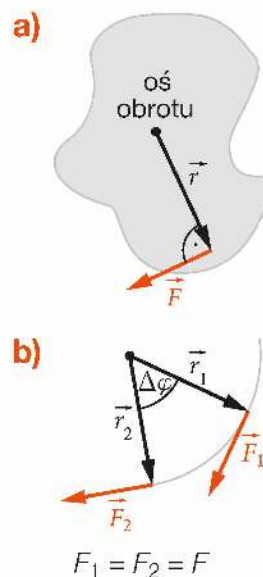
ponieważ Fr jest równe momentowi siły M , a różnica $\omega_2 - \omega_1$ odpowiada przyrostowi prędkości kątowej $\Delta\omega$, więc możemy zapisać:

$$\begin{aligned} M \Delta t &= I \Delta \omega \\ \frac{\Delta \omega}{\Delta t} &= \frac{M}{I} \end{aligned}$$

czyli

$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

Z powyższych przekształceń otrzymaliśmy drugą zasadę dynamiki w ruchu obrotowym.



Rys. 6.24. Bryła obracająca się pod wpływem siły $\vec{F}$ (widok w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu)

Do ω_2 i ω_1 stosujemy wzór skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= \\ &= a^2 + ab - ab - b^2 \end{aligned}$$

więc:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Przyspieszenie kątowe $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

■ Doświadczalne wyznaczanie momentu bezwładności

Z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego możemy skorzystać, aby dla niektórych ciał wyznaczyć moment bezwładności. W tym celu wykonamy doświadczenie, w którym ciało toczy się po równi pochyłej.



Doświadczenie 41 – obowiązkowe

Badanie ruchu ciał o różnych momentach bezwładności

1. Przygotuj twardą (np. stalową) kulkę i twardą równię pochyłą o kącie nachylenia na tyle małym, aby kulka staczała się bez poślizgu (patrz zdjęcie).
2. Zmierz wysokość i długość równi, oblicz sinus jej kąta nachylenia.
3. Sfilmuj ruch kulki staczającej się z równi. Analizując nagranie, wyznacz przyspieszenie, z jakim kulka toczy się po równi (jak w doświadczeniu na s. 76).
4. Na podstawie przyspieszenia oblicz moment bezwładności kulki.

Na początek sporządźmy schematyczny rysunek sytuacji z doświadczenia (rys. 6.25). Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami na ruch kulki w kierunku równoległym do równi wpływają dwie siły: $\vec{F}_1$ – składowa siły ciężkości o wartości $F_1 = mg \sin \alpha$ oraz $\vec{F}_T$ – siła tarcia statycznego kulki o równię w punkcie ich styczności. Wypadkowa wymienionych sił o wartości $F_1 - F_T$ powoduje ruch postępowy środka masy kulki z przyspieszeniem a . Zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ruchu postępowego:

$$F_1 - F_T = ma$$

czyli

$$mg \sin \alpha - F_T = ma$$

Wiemy, że kulka porusza się również ruchem obrotowym. Podczas tego ruchu jedyną siłą, której moment względem osi obrotu przechodzącej przez środek kulki nie jest zerowy, jest siła tarcia F_T (ramię siły dla $\vec{F}_1$ wynosi zero). Siła ta działa prostopadle do promienia, jej moment wynosi więc $M = F_T r$. Powoduje on obrót kulki z przyspieszeniem kątowym ε , przy czym zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{F_T r}{I} \rightarrow F_T r = I \varepsilon$$

Toczenie się kulki zachodzi bez poślizgu. Wiesz, że w takiej sytuacji $\omega = \frac{v}{r}$. Prędkość liniowa i kątowa się zmieniają, jest więc spełniony warunek $\Delta \omega = \frac{\Delta v}{r}$. Po podzieleniu równania stronami przez Δt mamy:

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \frac{1}{r}$$

Widzimy, że z lewej strony równania otrzymaliśmy iloraz określający przyspieszenie kątowe, a z prawej – przyspieszenie liniowe. W ruchu bez poślizgu spełniona jest więc zależność: $\varepsilon = \frac{a}{r}$.

Jeśli z niej skorzystamy, z zależności $F_T r = I \varepsilon$ otrzymamy:

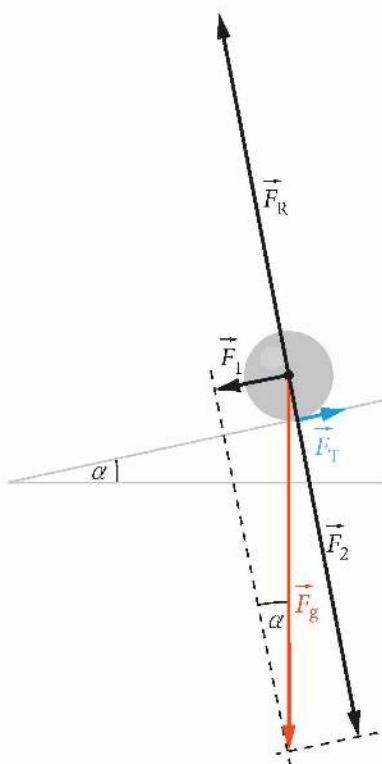
$$F_T r = I \frac{a}{r} \rightarrow F_T = \frac{I a}{r^2}$$

Wstawiamy tę zależność do równania z drugiej zasady dynamiki i wyznaczamy moment bezwładności:

$$mg \sin \alpha - \frac{I a}{r^2} = ma \rightarrow \frac{I a}{r^2} = (g \sin \alpha - a) m \cdot \frac{r^2}{a}$$

stąd:

$$I = \left(\frac{g \sin \alpha}{a} - 1 \right) m r^2$$



Rys. 6.25. Rozkład sił na równi w sytuacji opisanej w doświadczeniu

Przyspieszenie

kątowe $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$

Przyspieszenie

liniowe $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Wzór na I można przekształcić do postaci:

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{m r^2}}$$

Widzimy, że im większe I , tym mniejsze a .

Można udowodnić, że wzór na moment bezwładności kuli ma postać $I = kmr^2$, gdzie k jest pewną liczbą. Teraz widzimy, że:

$$k = \frac{g \sin \alpha}{a} - 1$$

Liczbę tę możemy wyznaczyć na podstawie pomiaru przyspieszenia a , z jakim kula stacza się z równi o kącie nachylenia α (doświadczenie 41.). W doświadczeniu wykonanym przez autorów tej książki kulka staczała się z równi, dla której $\sin \alpha = 0,0243$, z przyspieszeniem $a = 0,162 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Stąd wniosek, że moment bezwładności kulki wynosił $0,47mr^2$, czyli nieco więcej niż podana w tablicach wartość $0,4 mr^2$.

■ Niepewność pomiaru

Aby się przekonać, czy wynik uzyskany na podstawie przeprowadzonego przez nas doświadczenia zgadza się z wartością z tablic, musimy uwzględnić niepewność pomiarową. Gdy wyznaczaliśmy przyspieszenie, otrzymaliśmy wynik: $a = 0,162 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \pm 0,018 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Innymi słowy, przyspieszenie mieściło się między wartością $a_{\min} = 0,144 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ i $a_{\max} = 0,18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a wartość wyrażenia $\frac{g \sin \alpha}{a}$ między 1,32 a 1,65.

Współczynnik k obliczony dla tych skrajnych wartości wynosi odpowiednio 0,65 i 0,32. Tablicowa wartość $k = 0,4$ zawiera się między tymi wartościami.

Zwróć uwagę, że gdy od $\frac{g \sin \alpha}{a}$ odejmujemy 1, znacznie wzrasta niepewność względna.

■ Niepewność względna
s. 24

Po tej lekcji powinieneś

- wiedzieć, od czego zależy przyspieszenie kątowe w ruchu obrotowym bryły sztywnej;
- znać i stosować drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego;
- umieć wyznaczyć doświadczalnie moment bezwładności.

Pytania i zadania

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI ZAPISZ W ZESZYCIE



■ Przykład

Zapisz warunek, jaki musi spełniać współczynnik tarcia statycznego f_s , aby jednorodna kula o promieniu r mogła staczać się bez poślizgu po równi pochyłej o kącie nachylenia 30° .

Rozwiązanie

Siły i momenty sił działające na ciało w przypadku staczania się bez poślizgu z równi pochyłej przeanalizowaliśmy na s. 266, gdy omawialiśmy doświadczalne wyznaczanie momentu bezwładności. Skorzystamy z wyprowadzonego wtedy wzoru:

$$mg \sin \alpha - \frac{Ia}{r^2} = ma$$

Wzór na moment bezwładności kuli (tabela 6.1 s. 261) ma postać: $I = \frac{2}{5}mr^2$, stąd:

$$mgsin\alpha - \frac{2}{5}ma = ma \quad |:m \rightarrow a + \frac{2}{5}a = gsin\alpha \rightarrow \frac{7}{5}a = gsin\alpha$$

czyli

$$a = \frac{5}{7}gsin\alpha$$

Wyrażenie to podstawiamy do wyprowadzonej na s. 266 zależności z drugiej zasady dynamiki $mgsin\alpha - F_T = ma$ i wyznaczamy F_T :

$$mgsin\alpha - F_T = m\frac{5}{7}gsin\alpha \rightarrow F_T = \frac{2}{7}mgsin\alpha$$

Wiemy, że aby ruch mógł zachodzić bez poślizgu, musi być spełniony warunek:

$$F_T \leq f_s mgcos\alpha$$

gdzie f_s jest szukany współczynnikiem tarcia statycznego, a $mgcos\alpha$ jest równe sile nacisku kuli na równię. Stąd:

$$\frac{2}{7}mg sin\alpha \leq f_s mg cos\alpha \quad |:mgcos\alpha \rightarrow \frac{2 sin\alpha}{7 cos\alpha} \leq f_s$$

$$f_s \geq \frac{2}{7} \tan\alpha$$

W naszym przypadku $\alpha = 30^\circ$, $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$, więc $f_s \geq 0,16$.

Odpowiedź: Współczynnik tarcia powinien być nie mniejszy niż 0,16.

1. Drewniane koło o promieniu 50 cm i momencie bezwładności $2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ może obracać się na osi bez tarcia. Ile czasu zajmie jego rozpędzanie od spoczynku do ruchu z częstotliwością jednego obrotu na sekundę, jeśli moment siły rozpędzającej koło wynosi $0,5 \text{ N} \cdot \text{m}$?

2. Sztywny pręt o długości $l = 24 \text{ cm}$, zamocowany w ten sposób, że może się swobodnie obracać wokół osi poziomej przechodzącej przez jego koniec, ustawiono poziomo.



a) Oblicz przyspieszenie kątowe, z jakim będzie się poruszał pręt w chwili, gdy puścimy jego swobodny koniec.

b) Oceń, czy przyspieszenie to będzie rosło czy malało w trakcie ruchu pręta.

3. Dwa stalowe walce o jednakowych wymiarach, jeden pusty w środku, a drugi pełny, staczają się z równi. Który walec stoczy się szybciej?

4. Linia kolejowa biegnie wzdłuż równika. Pociąg o masie 500 ton rusza na zachód z przyspieszeniem $0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz:

a) przyspieszenie kątowe, jakie pociąg nada Ziemi,

b) zmianę prędkości kątowej Ziemi w czasie, kiedy pociąg będzie rozpędzać się do prędkości $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$,

c) zmianę długości doby na Ziemi z powodu tej zmiany prędkości.

Uwaga. Przyjmij, że Ziemia jest jednorodną sztywną kulą. Pamiętaj, że jest to dość duże przybliżenie.

5. Wyznacz moment bezwładności koła rowerowego. Samodzielnie zaprojektuj przebieg doświadczenia z wykorzystaniem dostępnych przyrządów.

6.6. Moment pędu

Przypomnij sobie

- Pęd to iloczyn masy i prędkości: $\vec{p} = m\vec{v}$.
- Jeśli wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ ciał jest równa zero, to całkowity pęd układu, czyli suma pędów wszystkich ciał wchodzących w jego skład, nie zmienia się (zasada zachowania pędu).
- Moment bezwładności jest wielkością opisującą bezwładność ciała w ruchu obrotowym.

Dlaczego łyżwiarz wykonujący piruet może zwiększyć lub zmniejszyć szybkość wirowania, odpowiednio układając ręce? Dlaczego wszystkie planety w Układzie Słonecznym okrążają Słońce w tym samym kierunku? Dlaczego Słońce też obraca się w tę samą stronę?

Podczas omawiania tego tematu poznamy pojęcie momentu pędu oraz zasadę jego zachowania, które są kluczem do odpowiedzi na te pytania.

■ Moment pędu w ruchu po okręgu

Pokazywaliśmy już analogie pomiędzy wielkościami opisującymi ruch postępowy i ruch obrotowy, np. masą i momentem bezwładności (s. 260). Pęd również ma swój odpowiednik w ruchu obrotowym. Jest nim **moment pędu**. Z najprostszą sytuacją mamy do czynienia w przypadku ruchu punktu materialnego po okręgu.

Jeśli punkt materialny o masie m porusza się po okręgu o promieniu r z prędkością liniową v , to jego moment pędu względem środka okręgu ma wartość:

$$L = r \cdot p = mrv$$

Jednostką momentu pędu jest więc $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$.

W powyższy sposób zdefiniowaliśmy tylko **wartość** momentu pędu. A co z jego kierunkiem i zwrotem?

■ Kierunek i zwrot wektora momentu pędu

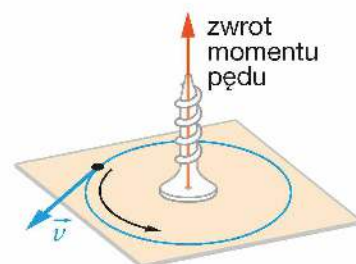
Kierunek wektora momentu pędu jest taki jak kierunek osi obrotu, a zwrot można wyznaczyć za pomocą reguły śruby prawoskrętnej.

Reguła ta występuje w różnych wariantach, które oczywiście zawsze dają taki sam wynik. W każdym przypadku można postępować podobnie jak przy momencie siły (patrz s. 248), ale w ruchu po okręgu łatwiejsze może być wyobrażenie sobie czubka śruby wkręcanej w tę samą stronę, w którą następuje ruch po okręgu (rys. 6.27).

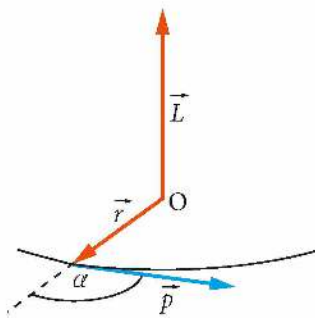


Rys. 6.26. Łyżwiarka wykonująca piruet

Moment pędu jest czasami oznaczany literą J .



Rys. 6.27. Zwrot momentu pędu w ruchu po okręgu wskazuje czubek śruby wkręcanej w tę samą stronę, w którą następuje ruch ciała



Rys. 6.28. Moment pędu punktu materialnego względem punktu O

■ Moment pędu – przypadek ogólny

Przejdźmy teraz do bardziej ogólnej definicji momentu pędu.

Moment pędu punktu materialnego o masie m , którego położenie względem wybranego punktu O opisuje wektor położenia $\vec{r}$, a prędkość w danej chwili wynosi $\vec{v}$, wyrażamy jako iloczyn wektorowy wektora położenia i pędu tego punktu materialnego:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{lub} \quad \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Wartość momentu pędu obliczamy ze wzoru:

$$L = r p \sin \alpha = m r v \sin \alpha$$

gdzie α – kąt między wektorem położenia $\vec{r}$ a wektorem pędu $\vec{p}$.

■ Moment pędu bryły i układu ciał

Na moment pędu bryły sztywnej składają się momenty pędu poszczególnych punktów materialnych tej bryły względem jej osi obrotu. Inaczej mówiąc, **suma momentów pędu punktów materialnych bryły sztywnej jest równa momentowi pędu tej bryły względem osi obrotu**.

W podobny sposób można zdefiniować moment pędu dowolnego układu ciał – stanowi on sumę momentów pędu poszczególnych ciał wchodzących w skład układu.

Gdy elementami układu są ciała poruszające się wokół różnych osi, wyznaczenie jego całkowitego momentu pędu może być skomplikowane. My jednak zajmiemy się momentem pędu bryły sztywnej, która obraca się wokół jednej ustalonej osi.

W rozważanej sytuacji momenty pędu poszczególnych punktów materialnych mają jednakowy kierunek (są skierowane wzdłuż osi obrotu) i zwrot, różnią się co najwyżej wartością. Dodawaniu takich wektorów odpowiada dodawanie ich wartości, co oznacza, że **wartość momentu pędu całej bryły** wynosi:

$$L = m_1 r_1 v_1 + m_2 r_2 v_2 + \dots + m_n r_n v_n$$

Stąd z zależności między prędkością liniową i kątową mamy:

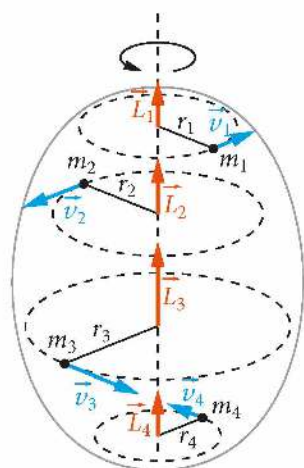
$$L = m_1 r_1 \omega r_1 + m_2 r_2 \omega r_2 + \dots + m_n r_n \omega r_n$$

$$L = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2) \omega$$

Suma w nawiasie to moment bezwładności bryły, więc mamy:

$$L = I \omega$$

Jak widać ze wzoru, jednostką momentu pędu jest $1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$.



Rys. 6.29. Moment pędu bryły sztywnej zależy od rozkładu masy względem osi obrotu

Jeżeli zestawimy ze sobą wzory na wartość pędu w ruchu postępowym i wartość momentu pędu w ruchu obrotowym, zobaczymy, że mają analogiczną postać.

Ruch postępowy: $p = m v$

Ruch obrotowy: $L = I \omega$

wielkość opisująca
bezwładność prędkość
(liniowa v lub kątowa ω)

Ruch postępowy a ruch
obrotowy s. 260

Zauważ, że podczas wyprowadzania wzoru na moment pędu w ruchu obrotowym nie korzystaliśmy z faktu, że bryła jest sztywna, ale opieraliśmy się na tym, że wszystkie części układu poruszają się wokół ustalonej osi z jednakową prędkością kątową. Dlatego moment pędu można zastosować także do wyjaśnienia doświadczenia, które za chwilę opiszemy.

■ Zasada zachowania momentu pędu

Wykonajmy proste doświadczenie. Będziemy mogli w nim zaobserwować kolejną zasadę zachowania – tym razem momentu pędu.

Zasada zachowania
pędu s. 213



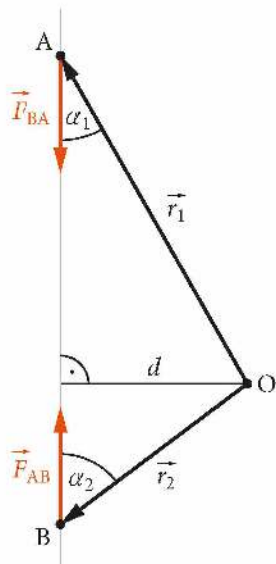
Doświadczenie 42 – obowiązkowe

Demonstrowanie zasady zachowania momentu pędu

1. Weź w dłonie hantle (można je zastąpić dużymi butelkami pełnymi wody).
2. Usiądź na krześle obrotowym (patrz zdjęcie) i zacznij się obracać.
3. Bez dotykania nogami podłogi wyciągnij ręce, a potem z powrotem przyciągnij je do ciała.
4. Zaobserwuj, jak zmienia się prędkość kątowa twojego ruchu. Opisz zmianę momentu bezwładności układu złożonego z ciebie, hantli i krzesła.



Zauważ, że w tym doświadczeniu występowała zmiana momentu bezwładności układu ciał złożonego z ciebie, hantli i krzesła. Im dalej od osi obrotu znajdowały się hantle, tym większy był moment bezwładności układu. Obserwowaliśmy wówczas zmniejszanie się prędkości kątowej. Dokładniejsze pomiary pokazałyby, że prędkość kątowa zmniejszała się tyle samo razy, ile razy wzrastał moment bezwładności. Iloczyn prędkości kątowej i momentu bezwładności, czyli moment pędu $L = I\omega$,



$$F_{AB} = F_{BA} = F$$

$$M_1 = F_{BA} r_1 \sin \alpha_1 = Fd$$

$$M_2 = -F_{AB} r_2 \sin \alpha_2 = -Fd$$

Rys. 6.30. Łączny moment sił oddziałujących na układ ciał wynosi zero

nie zmieniał się. Sytuacja przedstawiona w doświadczeniu obrazuje **zasadę zachowania momentu pędu**, która brzmi następująco:

Jeśli na układ fizyczny nie działa wypadkowy moment siły, to całkowity moment pędu układu się nie zmienia.

Wyjaśnijmy, z czego wynika ta zasada. Jeśli ciała A i B oddziałują między sobą, siły oddziaływania $\vec{F}_{AB}$ i $\vec{F}_{BA}$ nie tylko mają równe wartości i przeciwne zwroty, ale także **działają wzdłuż jednej prostej** (patrz rys. 6.30). Wynika stąd trzecia zasada dynamiki dla ruchu obrotowego:

Momenty sił wzajemnego oddziaływania ciał są równe co do wartości, ale mają przeciwne zwroty.

Założmy, że na układ nie działa zewnętrzny moment siły. Ciała w obrębie układu mogą jednak oddziaływać ze sobą (np. siła mięśni przesuwająca hantle, silnik helikoptera obraca jego wirnik). Momenty tych sił są jednak przeciwne i ich łączny wpływ na obrót układu jest zerowy.

Zjawisko odrzutu
s. 213

Obrotowy odpowiednik odrzutu

Jednym z przykładów obrazujących zasadę zachowania pędu jest zjawisko odrzutu, które zachodzi, kiedy dwa początkowo nieruchome ciała dzięki wzajemnemu oddziaływaniu zaczynają się poruszać w przeciwnych kierunkach. Gdy już się poruszają, suma ich pędów jest nadal równa zero, ponieważ pędy te są przeciwnie skierowane. Wykonajmy teraz doświadczenie związane z podobnym zjawiskiem w ruchu obrotowym.

Doświadczenie 43

1. Przygotuj pojemnik w kształcie walca z pokrywką. Pośrodku denka i pokrywki zrób po dwa otwory położone blisko siebie.
2. Przetnij gumkę recepturkę w jednym miejscu i przymocuj do jej końców dość ciężki stalowy przedmiot, np. nakrętkę śruby, wielkości nie większej niż wieczko pojemnika. Przetnij gumkę tak, aby po obu stronach przywiązanego do niej przedmiotu zostało tyle samo gumki (patrz zdjęcie a).
3. Przewlec przez otwory w denku jeden z końców gumki i zawiąż ją od środka. Drugi koniec gumki przewlec przez otwory w pokrywce i zawiąż tak, aby po zamknięciu pudełka gumka była lekko napięta (patrz zdjęcie b).
4. Unieruchom pojemnik i pokrywkę, a następnie obróć nakrętkę kilkadziesiąt razy wokół osi wyznaczonej przez gumkę. Przyłóż od zewnątrz pojemnika silny magnes tak, aby nakrętka ze skróconą gumką nie mogła się poruszać. Zamknij pojemnik (patrz zdjęcie c).
5. Połóż pojemnik na podłodze magnesem do góry. Przytrzymuj go ręką, aby nie zaczął się obracać. Równocześnie odczep magnes i puść pojemnik.
6. Obserwuj ruch pojemnika. Wyjaśnij, co się dzieje w jego wnętrzu.



A to ciekawe

Układ Słoneczny powstał z ogromnego wirującego powoli obłoku gazowo-pyłowego. Pod wpływem grawitacji jego materia zaczęła się zbierać w pobliżu środka. Obłok stawał się coraz mniejszy, więc zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu zwiększała się jego prędkość kątowna. Z większej części masy obłoku powstało Słońce. Pozostała materia utworzyła dysk wirujący wokół gwiazdy. Drobin pyłu w wyniku zderzeń łączyły się ze sobą i tworzyły coraz większe bryły. Im masywniejsze się one stawały, tym łatwiej przyciągały do siebie pozostałą materię. Powstały planety, księżyce oraz inne ciała niebieskie. Przedstawioną powyżej teorię potwierdza m.in. fakt, że wszystkie planety obiegają Słońce w tę samą stronę, w którą ono wiruje.



Gdy dwa ciała, początkowo nieruchome, zaczynają na siebie oddziaływać siłami o niezerowym momencie siły względem osi obrotu, powoduje to ich obracanie się w przeciwne strony. Momenty pędu tych ciał są skierowane przeciwnie, a suma tych momentów pędów nadal jest równa zero. Z taką sytuacją mieliśmy do czynienia w doświadczeniu: przedmiot wewnątrz pojemnika zaczął się obracać w jedną stronę, a cały pojemnik – w drugą.

■ Efekt żyroskopowy

Doświadczenie 44

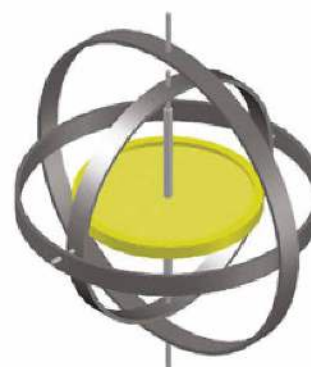
1. Usiądź na obrotowym krześle tak, aby nogami nie dotykać podłogi.
2. W rękach wyciągniętych przed siebie trzymaj koło rowerowe w taki sposób, żeby jego oś obrotu była ułożona poziomo (jak na zdjęciu). Aby ułatwić sobie zadanie, do osi koła można zamocować dodatkowe uchwyty.
3. Poproś kogoś, aby mocno rozkręcił trzymane przez ciebie koło.
4. Gdy koło będzie wirować, spróbuj obrócić jego oś.
5. Co możesz zaobserwować w tym doświadczeniu?

Uwaga. Doświadczenie wykonuj z zachowaniem środków ostrożności.



Wektorowy charakter momentu pędu ma duże znaczenie praktyczne. Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu stałe pozostają nie tylko wartość, lecz także kierunek i zwrot momentu pędu, a zatem – oś obrotu bryły. Właśnie dlatego trudno jest zmienić oś obrotu szybko kręcącego się koła. Z tego samego powodu wirujący bąk utrzymuje swoje pionowe położenie, ewentualnie podlegając precesji, natomiast gdy się go zatrzyma – natychmiast się przewraca.

Tendencję ciała do zachowywania osi obrotu nazywamy **efektem żyroskopowym**, a przyrząd, w którym to zjawisko wykorzystujemy – żyroskopem. W żyroskopie znajduje się ciało, które szybko się obraca i jest zawieszone w sposób umożliwiający zachowanie osi obrotu.



Rys. 6.31. Żyroskop

Zasada zachowania momentu pędu

Wartość momentu pędu zależy od momentu bezwładności oraz prędkości kątowej:

$$L = I\omega$$

Moment bezwładności z kolei zależy od masy i jej rozmieszczenia względem osi obrotu. Masa akrobaty w trakcie skoku się nie zmienia, ale w wyniku skupienia jej bliżej osi obrotu maleje moment bezwładności sportowca. Aby moment pędu pozostał stały, musi wzrastać prędkość kątowa.

Początkowo obrót sportowca jest powolny.

oś obrotu

Sportowiec zwija ciało bliżej środka masy. Jego moment bezwładności maleje, a prędkość kątowa rośnie.

oś obrotu

Odbijając się, sportowiec zyskuje nie tylko pęd skierowany w górę, lecz także moment pędu – jego ciało zaczyna się obracać.



oś obrotu

W najwyższym punkcie lotu moment bezwładności jest najmniejszy, a prędkość kątowa największa.



Jeśli łyżwiarka rozłoży ręce, będzie się obracać wolniej. Jeżeli przyciągnie je do osi obrotu, ponownie zwiększy prędkość wirowania.



Śmigło na ogonie helikoptera zapobiega niekontrolowanemu obracaniu się kadłuba.



Ogromne prędkości kątowe pulsarów to efekt zasady zachowania momentu pędu: gdy zmniejszały się rozmiary gwiazdy, wzrastała prędkość obrotu.



Gwałtowny obrót ogona sprawia, że tułów kota przekręca się w przeciwną stronę, dzięki czemu zwierzę może bezpiecznie spaść na ziemię. Całkowita zmiana momentu pędu kota wynosi zero.

oś obrotu

Rozprostowanie ciała przed wylądowaniem spowalnia ruch obrotowy i umożliwia stabilne lądowanie.

Zastosowania żyroskopu

Żyroskop jest przyrządem, w którym wykorzystuje się tendencję ciała do zachowania osi obrotu. Jego działanie opiera się więc na zasadzie zachowania momentu pędu.

Ważnym zastosowaniem żyroskopu jest **sztuczny horyzont** – urządzenie wskazujące pilotowi położenie samolotu względem poziomu, niezbędne w czasie lotu przy słabej widoczności (zdjęcie a).

a)



Żyrokompas, czyli kompas wykorzystujący właściwości żyroskopu, wskazuje północ geograficzną (zdjęcie b). Stalowe elementy okrętu nie zakłócają jego działania.

b)



Czujniki ruchu wykorzystywane w konsolach do gier oraz niektórych telefonach komórkowych także są nazywane żyroskopami (zdjęcie c), jednak działają na innej zasadzie: dzięki zachowaniu przez ciało płaszczyzny ruchu drgającego, a nie obrotowego.

c)



Żyroskop dostarcza telefonowi informacji o jego ustawieniu względem powierzchni Ziemi, a odbiornik GPS – o położeniu geograficznym. Dzięki temu urządzenie może wyświetlać obraz nieba widocznego za telefonem (zdjęcie d). Aby się dowiedzieć, jaką gwiazdę się widzi, wystarczy po zainstalowaniu odpowiedniego oprogramowania wyciągnąć rękę z telefonem w jej stronę.

d)



Po tej lekcji powinieneś

- znać pojęcie momentu pędu punktu materialnego i bryły sztywnej;
- znać zasadę zachowania momentu pędu;
- demonstrować zasadę zachowania momentu pędu doświadczalnie i stosować ją do wyjaśniania zjawisk.



■ Przykład

Drewniane koło o promieniu $R = 50$ cm i masie 10 kg jest zamocowane w taki sposób, że może się swobodnie obracać wokół osi symetrii prostopadłej do płaszczyzny koła. Na początku koło obracało się, wykonując 1 obrót w czasie $T_1 = 10$ s. Następnie w koło strzelono z pistoletu ustawionego tak jak na rysunku obok (widok z góry). Pocisk o masie $m_p = 5$ g wbił się w koło, które zaczęło kręcić się w przeciwną stronę, wykonując jeden obrót w czasie $T_2 = 15$ s. Odległość środka koła od prostej, wzdłuż której leciał pocisk, wynosi $d = 30$ cm. Z jaką prędkością pocisk uderzył w koło? Pomiń głębokość, na jaką wbił się pocisk.



Rozwiązanie

Obliczmy najpierw moment bezwładności drewnianego koła, które z geometrycznego punktu widzenia ma kształt walca. Wzór na moment bezwładności walca sprawdzamy w tablicy na s. 261 (zakładamy, że nie zmienia się on po wbiciu bardzo lekkiego pocisku):

$$I = \frac{1}{2} mR^2, \text{ czyli } I = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ kg} \cdot (0,5 \text{ m})^2 = 1,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Początkowo w czasie 1 s koło wykonywało $\frac{1}{10}$ obrotu, jego prędkość kątowna wynosiła więc:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{10} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Po strzale koło w czasie 1 s wykonuje $\frac{1}{15}$ obrotu, jego prędkość kątowna wynosi więc:

$$\omega_2 = -2\pi f_2 = -\frac{2\pi}{15} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Użyliśmy znaku minus, gdyż obrót jest w przeciwną stronę niż początkowo.

Z treści zadania wiemy, że po strzale zmienia się kierunek obrotu koła, zmianie ulega więc również zwrot momentu pędu. Przyjmijmy początkowy zwrot za dodatni. Początkowy moment pędu koła miał więc wartość:

$$L_1 = I\omega_1, \text{ czyli } L_1 = 1,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{2\pi}{10} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 0,785 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

W podobny sposób obliczamy moment pędu koła z wbitym pociskiem (przypominamy, że pomijamy zmianę momentu bezwładności).

$$L_2 = I\omega_2, \text{ czyli } L_2 = -0,524 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

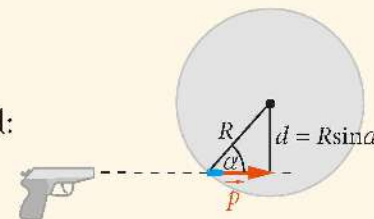
Wynik jest ujemny, ponieważ koło obracało się w przeciwną stronę.

Pocisk miał moment pędu L , którego jeszcze nie znamy. Możemy go jednak obliczyć ze wzoru na moment pędu punktu materialnego:

$$L = m_p v R \sin \alpha = m_p v d \text{ (patrz rys.)}$$

Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że: $L_1 + L = L_2$. Stąd:

$$L_1 + m_p v d = L_2 \rightarrow v = \frac{L_2 - L_1}{m_p d}, \text{ czyli } v = -873 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Odpowiedź: Pocisk poruszał się z prędkością o wartości około $870 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Uwaga. Znak minus w rozwiązaniu wynika stąd, że prędkość pocisku była przeciwnie skierowana do początkowej prędkości liniowej dolnej części koła.

Pytania i zadania

1. Witkowi chce zmielić ziarna ciecierzycy za pomocą blendera (na zdjęciu). W ręczce tego urządzenia znajduje się silnik elektryczny, napędzający ostrza ukryte za osłonką. Chłopak zaobserwował, że po uruchomieniu sprzętu czuje wyraźne szarpnięcie – gdyby nie trzymał mocno blendera, maszyna zaczęłaby się obracać wokół własnej osi (jak pokazuje strzałka).

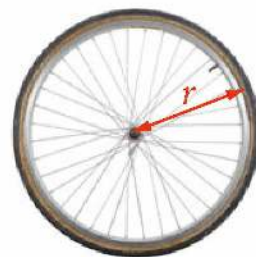


- Wyjaśnij zaobserwowane zjawisko.
 - W którą stronę obracają się ostrza: tak jak pokazuje strzałka czy przeciwnie?
 - Jeśli masz w domu blender, sprawdź, czy potwierdzisz obserwację Witka. Pamiętaj o zasadach bezpieczeństwa – ostrza blendera mogą poważnie zranić.
2. Płyta analogowa ma średnicę 2,5 razy większą niż płyta kompaktowa (CD) i 9 razy większą od niej masę. Za to CD obraca się ze średnio 10 razy większą prędkością kątową. Wykonaj obliczenia i odpowiedz na pytania. Możesz pominąć fakt, że każda z płyt ma otwór pośrodku.
- Która z płyt ma podczas obrotu większy moment pędu? Ile razy większy?
 - Która z płyt ma podczas obrotu większą energię kinetyczną ruchu obrotowego? Ile razy większą?
3. Oszacuj moment pędu Ziemi związany:
- z jej obrotem wokół własnej osi,
 - z jej ruchem wokół Słońca.

Wskazówka. Przy obliczaniu momentu bezwładności Ziemi możesz przyjąć, że jest ona jednorodną kulą. Nie jest to dokładny model, bo jądro Ziemi ma większą gęstość niż warstwy położone bliżej powierzchni,

jednak wystarczy on do szacunkowych obliczeń. Zastanów się, czy obliczony przez Ciebie moment bezwładności jest większy czy mniejszy od wartości rzeczywistej.

4. Koło rowerowe ma masę $m = 2 \text{ kg}$. Odległość od osi obrotu do połowy wysokości opony wynosi $r = 33 \text{ cm}$ (patrz rysunek). Oszacuj moment bezwładności koła, a następnie oblicz jego moment pędu względem środka koła podczas jazdy z prędkością $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



Wskazówki:

- W szacunkowych obliczeniach możemy przyjąć, że cała masa koła znajduje się w odległości r od osi obrotu.
 - Opona zawsze lekko się ugina, można więc przyjąć, że promień koła podczas jazdy wynosi r .
5. Wykonaj doświadczenie.
- Weź nitkę i nawlec na nią nakrętkę śruby, pierścionelek bądź inny podobny przedmiot.
 - Trzymaj dwa końce luźnej nitki w dłoniach i wpraw ją w ruch tak, jak pokazano na zdjęciu.



- Pociągnij nitkę dłońmi, aby się wyprostowała.
- Jak zachowuje się pierścionek?
- Wyjaśnij zaobserwowane zjawisko.

Zadania

1. Przygotuj krótką prezentację na temat zastosowania koła zamachowego w silniku spalinowym.
2. Podaj przykłady urządzeń technicznych, w których działaniu znaczenie ma moment bezwładności elementów.
3. Wykonaj wahadło Oberbecka (czyt. oberbeka) według zamieszczonej niżej instrukcji.

Instrukcja wykonania wahadła Oberbecka

Przygotuj: cztery jednakowe, długie, grube śruby, osiem nakrętek pasujących do przygotowanych śrub, cztery masywne podkładki z otworami na tyle dużymi, aby można je było nałożyć na śruby, sześcienny drewniany klocek o boku 3–4 razy dłuższym niż średnica pojedynczej śruby użytej do wykonania wahadła, szpulkę o dość dużej średnicy, np. po plastrze opatrunkowym, długą, mocną nić, ciężarek, statyw z poziomym prętem, np. laboratoryjny (dobrze, jeżeli średnica pręta statywu będzie zbliżona do średnicy użytych śrub), ołówek.

- ▶ Zaznacz ołówkiem środki wszystkich ścianek klocka.
- ▶ Przewierć przez środek jednej ze ścian klocka, prostopadle do niej, otwór o średnicy odpowiadającej średnicy pręta statywu. Pośrodku każdej z czterech pozostałych ścianek klocka wywierć prostopadle do niej otwór o średnicy umożliwiającej wkręcenie śrub.
- ▶ **Wskazówka.** Użyj wiertła o średnicy nieco mniejszej od średnicy śrub. Najwygodniej jest najpierw wywiercić otwory na pożądaną głębokość, a potem ostrożnie je rozwiercić, zataczając wiertłem kształt stożka. W ten sposób śruby przy wkręcaniu będą się coraz bardziej klinować.
- ▶ Na każdą ze śrub nakręć jedną nakrętkę, następnie nałóż podkładkę i unieruchom ją na śrubie, dokręcając drugą nakrętkę.
- ▶ Śruby z nakrętkami i podkładkami wkręć w otwory w klocku na taką samą głębokość. Pamiętaj, aby śruby po wkręceniu nie były widoczne w otworze, który posłuży do zawieszenia klocka ze śrubami na statywie.
- ▶ Do ścianki z otworem przymocuj szpulkę, np. za pomocą kleju bądź dwustronnej taśmy klejącej. Zawiaż na szpulce jeden z końców nici i nawiń ją na szpulkę.
- ▶ Klocek ze śrubami i szpulką nałóż na poziomy pręt statywu.
- ▶ Do wolnego końca nici przywiąż ciężarek.

Opis doświadczenia

1. Przykręć nakrętki i podkładki jak najbliżej główek śrub.
2. Nawiń nić na szpulkę, przytrzymując ciężarek.
3. Przygotuj stoper. Jednocześnie włącz stoper i puść ciężarek.
4. Zmierz czas, w jakim wahadło się rozpędziło.
5. Przy zachowaniu tego samego układu nakrętek i podkładek na śrubach powtórz kilkakrotnie próbę i pomiar czasu. Wyznacz przyspieszenie kątowe podczas każdej z prób. Oblicz niepewność pomiarową.
6. Na śrubach zmień położenie nakrętek z podkładkami i wykonaj czynności opisane w punktach 2–5.
7. Powtórz kilkakrotnie opisane wyżej czynności.
8. Opracuj wyniki uzyskane w doświadczeniu i na ich podstawie wyznacz zależność między momentem bezwładności a rozmieszczeniem masy względem osi obrotu.



Podsumowanie Bryła sztywna

- **Bryła sztywna** to model ciała fizycznego, w którym mimo działania sił zewnętrznych nie zmieniają się odległości między punktami bryły.
- Bryła może wykonywać ruch **postępowy** i **obrotowy**.
 - ▶ W ruchu **postępowym** nie zmienia się ustawienie bryły w przestrzeni.
 - ▶ W ruchu **obrotowym** punkty bryły poruszają się po okręgach o środkach leżących na jednej prostej, zwanej osią obrotu, dlatego ich prędkość kątowa jest jednakowa.
 - ▶ Jeśli oś obrotu jest swobodna, to stabilny ruch obrotowy bryły możliwy jest tylko wokół jednej z osi zwanych osiami głównymi.
- Obrót osi obrotu ciała nazywamy **precesją**.

- Ruch postępowy bryły odpowiada ruchowi punktu materialnego o masie równej masie bryły położonego w **środku masy** bryły. Położenie środka masy można obliczyć ze wzoru:

$$\vec{r}_{SM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

gdzie: $m_1, m_2, \dots, m_n$ – masy punktów materialnych, z których zbudowana jest bryła, $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ – wektory położenia tych mas.

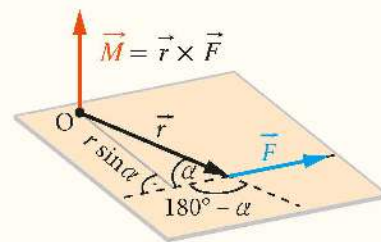
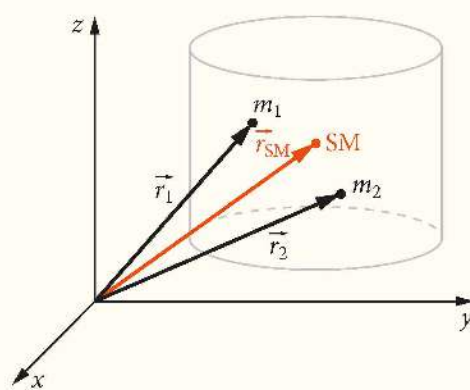
- ▶ Jeśli jednorodna (tj. wykonana z materiału o stałej gęstości) bryła ma środek symetrii, to jest on środkiem masy bryły.
- ▶ Aby poruszyć środek masy lub zmienić jego prędkość, potrzebna jest siła zewnętrzna.
- ▶ Przyłożona siła nie powoduje ruchu obrotowego ciała, jeśli prosta, na której leży jej wektor, przechodzi przez jego środek masy.
- **Środek ciężkości** to punkt przyłożenia całkowitej siły ciężkości. Można przyjmować, że znajduje się on w środku masy ciała.
 - ▶ Gdy badamy siły działające na bryłę, siłę ciężkości przykładamy w środku ciężkości.
 - ▶ Energia potencjalna grawitacji bryły sztywnej zależy od położenia środka ciężkości bryły ponad wybranym poziomem odniesienia.
 - ▶ Od położenia środka ciężkości zależy **równowaga bryły sztywnej**.

- **Moment siły** $\vec{F}$ względem wybranego punktu O przedstawiono na rysunku.

- ▶ Wartość momentu siły można obliczyć ze wzoru:

$$M = Fr \sin \alpha \text{ (wg oznaczeń na rysunku)}$$

- ▶ Iloczyn $r \sin \alpha$ nazywamy **ramieniem siły** $\vec{F}$ – jest to odległość punktu O od prostej, na której leży wektor siły (patrz rysunek obok).

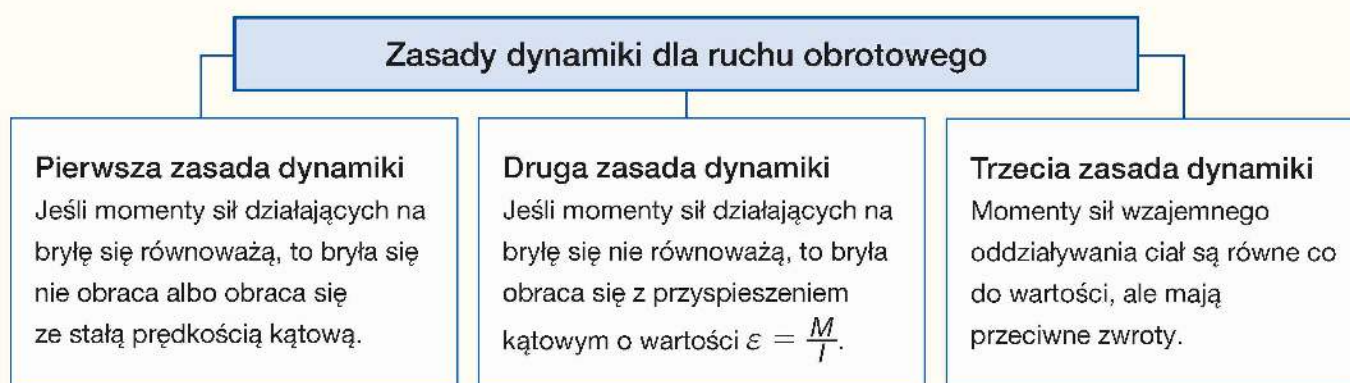


- Porównanie wielkości opisujących ruch postępowy oraz ruch obrotowy wokół ustalonej osi.

Ruch			
postępowy		obrotowy wokół ustalonej osi	
przemieszczenie	$\vec{r}$	kąt, o który obróciło się ciało	φ
prędkość liniowa	$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$	prędkość kątowna	$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$
przyspieszenie liniowe	$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$	przyspieszenie kątowe	$\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$
siła	$\vec{F}$	moment siły	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
masa	m	moment bezwładności	$I = m_1 r_1^2 + \dots + m_n r_n^2$
pęd	$\vec{p} = m\vec{v}$	moment pędu	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $L = I\omega$
energia kinetyczna	$E = \frac{1}{2}mv^2$	energia kinetyczna	$E = \frac{1}{2}I\omega^2$

- Jeżeli ciało porusza się **ruchem złożonym**, czyli jednocześnie ruchem postępowym i ruchem obrotowym wokół środka masy, to **energia kinetyczna** tego ciała wynosi:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$



■ Zasada zachowania momentu pędu

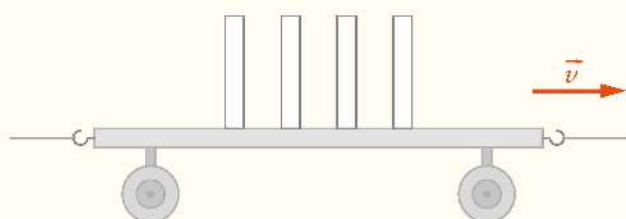
Jeśli momenty sił zewnętrznych działających na układ ciał się równoważą, to całkowity moment pędu układu nie ulega zmianie.

- ▶ Jeśli ciało obraca się swobodnie wokół ustalonej osi, to gdy maleje moment bezwładności ciała, rośnie jego prędkość kątowna i na odwrót.
- ▶ Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu stałe pozostają nie tylko wartości, lecz także kierunek i zwrot wektora momentu pędu – czyli oś obrotu bryły. Tendencję ciała do zachowania osi obrotu nazywamy **efektem żyroskopowym**.

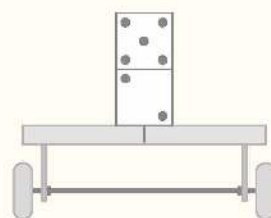
Sposób na zadanie

Planowanie i przeprowadzanie doświadczeń oraz wnioskowanie na podstawie ich wyników

Zadanie 1. Na niewielkim wózku zabawce ustawiono cztery kostki domina (kamienie) w taki sposób jak na rysunku. Wózek można wprowadzić w ruch, pociągając za jedną z przymocowanych do niego linek, a zatrzymać – ciągnąc za linkę przymocowaną z drugiej strony.



Widok wózka z boku



Widok wózka z przodu

Zadanie 1.1. (0–1)

W jaki sposób możesz przeprowadzić doświadczenie, którego celem byłoby zademonstrowanie działania sił bezwładności wyłącznie w czasie gwałtownego hamowania?

Wskaż poprawną odpowiedź.

- A. Ciągnąc za linkę bardzo powoli, wprowadzę wózek w ruch i równie powoli go wyhamuję.
- B. Ciągnąc za linkę bardzo gwałtownie, wprowadzę wózek w ruch i równie gwałtownie go wyhamuję.
- C. Ciągnąc za linkę bardzo gwałtownie, wprowadzę wózek w ruch i bardzo powoli go wyhamuję.
- D. Ciągnąc za linkę bardzo powoli, wprowadzę wózek w ruch i bardzo gwałtownie go wyhamuję.

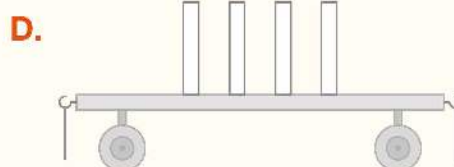
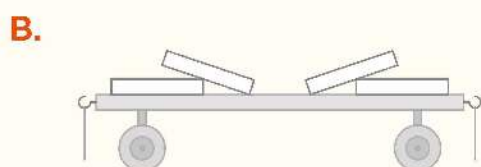
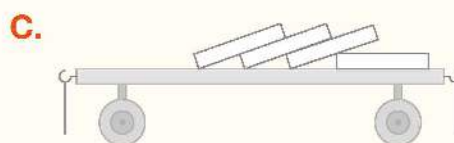
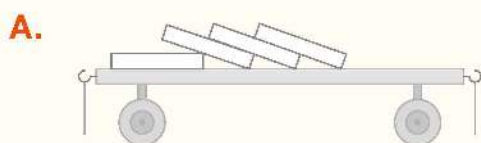
Zadanie 1.2. (0–1)

Wybierz właściwe uzupełnienia zdania spośród możliwości 1. i 2. oraz A i B.

W trakcie gwałtownego hamowania wózka siła bezwładności działa na kostki domina	1.	zgodnie ze zwrotem	przyspieszenia wózka, czyli	A.	zgodnie ze zwrotem	prędkości wózka.
	2.	przeciwnie do zwrotu		B.	przeciwnie do zwrotu	

Zadanie 1.3. (0–1)

Wskaż rysunek przedstawiający skutek działania siły bezwładności na ustawione na wózku kostki domina w przypadku gwałtownego hamowania. Przed hamowaniem wózek poruszał się w prawo.



Rozwiązanie:

Wskazówka 1. Demonstrowanie sił bezwładności na przykładzie pojazdów gwałtownie hamujących jest doświadczeniem obowiązkowym. Warto je wykonać i przeanalizować.

Ad 1.1.

Poprawną odpowiedzią jest opis D.

Siła bezwładności działa zarówno przy rozpędzaniu, jak i przy hamowaniu wózka. Jeśli jednak przyspieszenie jest bardzo małe, również wartość tej siły jest niewielka i nie spowoduje ona przewrócenia kostek domina. Należy więc rozpędzać wózek delikatnie, a zahamować gwałtownie.

Ad 2.2.

Poprawne uzupełnienia zdania to 2 i A.

Wskazówka 2. Siły bezwładności obserwujemy np. w rozpędzających się i hamujących pojazdach. Porównując klocki do pasażerów hamującego autobusu, łatwo domyślimy się, w którą stronę się przewrócą.

W rozważanym przez nas przypadku łatwo wywnioskujemy, jaki jest zwrot siły bezwładności, jeśli opiszemy zjawisko z punktu widzenia układu inercjalnego. Naszym układem inercjalnym jest stół, po którym porusza się wózek. Gdy wózek hamuje, klocki zachowują swoją prędkość (zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki), co kończy się ich przewróceniem, jakby jakaś siła ciągnęła je zgodnie z kierunkiem ruchu wózka (odpowiedź A).

Ponieważ w czasie hamowania przyspieszenie jest skierowane przeciwnie do kierunku ruchu wózka, wybieramy odpowiedź 2.

Do tego samego wniosku dojdziemy, jeśli przypomnimy sobie, że siły bezwładności **zawsze** działają przeciwnie do przyspieszenia układu.

Wskazówka 3. Siła bezwładności zawsze jest zwrócona przeciwnie do przyspieszenia układu nieinercjalnego.

Ad 1.3.

Skutek działania siły bezwładności podczas gwałtownego hamowania widać na rysunku C.

Z treści zadania wiadomo, że przed hamowaniem wózek poruszał się w prawo. Jak wiemy z wcześniejszych rozważań, siła bezwładności przy hamowaniu działa zgodnie z kierunkiem ruchu (tj. ze zwrotem wektora prędkości).

Warto zapamiętać!

- Wszystkie zjawiska związane z siłami bezwładności można wyjaśnić w układzie inercjalnym bez użycia tych sił.
- Siła bezwładności zawsze działa przeciwnie do zwrotu przyspieszenia.



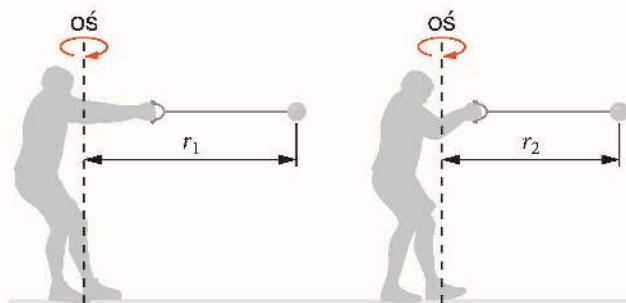
Zadania powtórzeniowe



Zadanie 1. Rzut młotem

Rzut młotem polega na wyrzuceniu metalowej kuli przymocowanej do stalowej linki z uchwytem. W fazie poprzedzającej wyrzut młota zawodnik z wyprostowanymi w łokciach ramionami wykonuje wraz z młotem trzy lub cztery obroty ciała wokół ustalonej osi pionowej.

1.1. Na treningu miotacz doskonalił technikę krążenia wraz z młotem w płaszczyźnie poziomej oraz technikę zwiększania prędkości kuli przed wyrzutem. Używał kuli o masie $m = 4 \text{ kg}$ i linki o długości $l = 0,7 \text{ m}$. W początkowej fazie prędkość kątowa kuli wynosiła $\omega_1 = 2,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, a odległość od osi obrotu $r_1 = 1 \text{ m}$. Zmniejszenie odległości kuli od osi obrotu w sposób pokazany na rysunku powoduje zwiększenie prędkości kątowej. Przyjmij, że moment bezwładności miotacza nie zmienia się w czasie przyciągania kuli i wynosi $I_m = 6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Pomiń siłę ciężkości oraz opory ruchu wynikające z oddziaływania stóp miotacza z ziemią w czasie przyciągania kuli.



a) Zastosowana przez zawodnika technika zwiększenia prędkości kątowej podlega pewnej fizycznej zasadzie zachowania. Podaj jej nazwę.

b) Kula przyciągnięta przez zawodnika krąży po okręgu o promieniu $r_2 = r_1 - x$. Literą x oznaczono odległość, o jaką krążąca kula zbliżyła się do osi obrotu.

Wyznacz zależność prędkości kątowej kuli od promienia okręgu, który zatacza. Przerysuj tabelkę do zeszytu i uzupełnij ją o brakujące wartości.

x – zmiana odległości [m]	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$r_2 = r_1 - x$ [m]						
ω [$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]						

c) Na podstawie danych z uzupełnionej tabeli sporządź w zeszycie wykres zależności $\omega(r_2)$.

1.2. Zawodnik wykonuje pracę, przyciągając krążącą po okręgu kulę młota do osi obrotu z odległości r_1 na odległość r_2 .

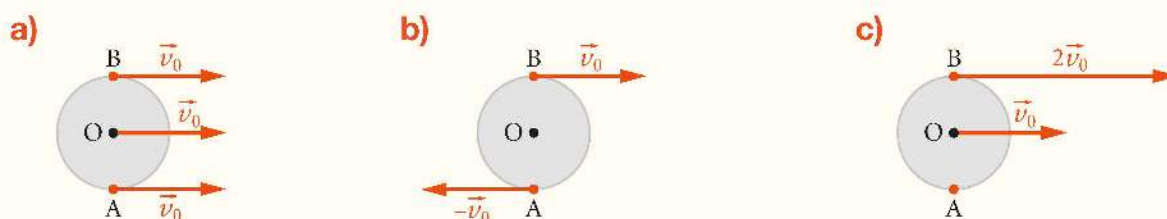
Oblicz tę pracę dla $r_1 = 1 \text{ m}$ i $r_2 = 0,5 \text{ m}$. Pomiń siłę ciężkości oraz opory ruchu wynikające z oddziaływania stóp miotacza z ziemią w czasie przyciągania kuli.

Zadanie 2. Beczki

Podczas święta soli w Wieliczce prezentowane są dawne metody warzenia soli, nabijania nią beczek oraz ładowania ich na XVII-wieczny wóz konny.

Nabijanie beczki sprawia, że sól ściśle wypełnia jej wnętrze i nie przemieszcza się podczas toczenia. Masa beczki wraz z solą wynosi 150 kg. Przyjmij, że beczka jest walcem o średnicy podstawy 40 cm i momencie bezwładności $I = \frac{1}{2}mR^2$.

2.1. Na rysunkach a–c) przedstawiono ruch beczki dla ruchów: postępowo-obrotowego, postępowego oraz obrotowego. Ustal, w którym przypadku mamy do czynienia z danym rodzajem ruchu. Scharakteryzuj każdy z nich.



2.2. Oblicz pracę, jaką musi wykonać człowiek, aby tocząc bez poślizgu beczkę z solą po poziomym podłożu, rozpędził ją do prędkości $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (jest to prędkość środka masy).

2.3. Rozładowanie beczek z wozu odbywa się za pomocą pochylni, która tworzy równię pochyłą. Gdy bez poślizgu stacza się po niej beczka, działają na nią siły: siła ciężkości, siła reakcji podłoża i siła tarcia statycznego, wprawiająca beczkę w ruch obrotowy. Narysuj w zeszycie tę sytuację i wymienione siły z zachowaniem odpowiednich proporcji długości wektorów.

2.4. Oblicz wartość przyspieszenia ruchu postępowego, z jakim porusza się beczka po pochylni tworzącej z poziomem kąt 30° .

2.5. Oblicz wartość prędkości liniowej środka masy beczki po stoczeniu się z równi pochyłej o wysokości 1,2 m.

Tabele

Tabela 1. Wielokrotności i podwielokrotności jednostek

Przedrostek		Mnożnik
E	eksa	10^{18}
P	peta	10^{15}
T	tera	10^{12}
G	giga	10^9
M	mega	10^6
k	kilo	10^3
h	hekto	10^2
da	deka	10^1
d	decy	10^{-1}
c	centy	10^{-2}
m	mili	10^{-3}
n	mikro	10^{-6}
n	nano	10^{-9}
p	piko	10^{-12}
f	femto	10^{-15}
a	atto	10^{-18}

Tabela 2. Współczynniki tarcia

Powierzchnie	f_s	f_k
Stal po lodzie	0,03	0,014
Stal po stali	0,2	0,1
Lina po drewnie	0,5	0,3
Buty po lodzie	0,1	0,05
Opony po suchym asfalcie	1,0	0,75
Opony po mokrym asfalcie	0,7	0,5
Opony po zaśnieżonym asfalcie	0,3	0,02
Drewno po drewnie	0,5	0,3
Lód po lodzie	0,1	0,02
Szkło po szkłe	0,9	0,4
Narta po śniegu	0,14	0,1

Tabela 3. Wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000
5°	0,0872	0,9962	0,0875
10°	0,1736	0,9848	0,1763
15°	0,2588	0,9659	0,2679
20°	0,3420	0,9397	0,3640
25°	0,4226	0,9063	0,4663
30°	0,5000	0,8660	0,5774
35°	0,5736	0,8192	0,7002
40°	0,6428	0,7660	0,8391
45°	0,7071	0,7071	1,0000
50°	0,7660	0,6428	1,1918
55°	0,8192	0,5736	1,4281
60°	0,8660	0,5000	1,7321
65°	0,9063	0,4226	2,1445
70°	0,9397	0,3420	2,7475
75°	0,9659	0,2588	3,7321
80°	0,9848	0,1736	5,6713
85°	0,9962	0,0872	11,4301
90°	1,0000	0,0000	–

Tabela 4. Momenty bezwładności brył

Rodzaj bryły	Oś obrotu	Moment bezwładności	Rysunek
Obręcz lub rura o cienkiej ściance, o promieniu r	oś symetrii prostopadła do podstawy	mr^2	
Kula o promieniu r	oś symetrii	$\frac{2}{5}mr^2$	
Pełny walec o promieniu r	oś walca	$\frac{1}{2}mr^2$	
Cienki pręt o długości l	prostopadła do pręta przechodząca przez jego środek	$\frac{1}{12}ml^2$	
Cienki pręt o długości l	prostopadła do pręta przechodząca przez jego koniec	$\frac{1}{3}ml^2$	

Tabela 5. Międzynarodowy układ jednostek SI

Lp.	Jednostka	Nazwa i symbol
Jednostki podstawowe		
1.	długości	metr (m)
2.	masy	kilogram (kg)
3.	czasu	sekunda (s)
4.	natężenia prądu elektrycznego	amper (A)
5.	temperatury termodynamicznej	kelwin (K)
6.	światłości	kandela (cd)
7.	ilości materii	mol
Jednostki podstawowe uzupełniają dwie jednostki miary kątów		
1.	kąta płaskiego	radian (rad)
2.	kąta bryłowego	steradian (sr)

Na podstawie powyższych jednostek zdefiniowane zostały inne, tzw. jednostki pochodne.

Spis dodatków matematycznych

Zapis liczb w notacji wykładniczej	8
Wektory i skalary	42
Dodawanie i odejmowanie wektorów o jednakowych kierunkach	43
Mnożenie i dzielenie wektora przez liczbę	43
Parabola	75
Dodawanie i odejmowanie wektorów o różnych kierunkach	94
Metoda równoległoboku	94
Rozkładanie wektora na składowe	94
Współrzędna wektora na płaszczyźnie	95
Działania na wektorach a działania na ich współrzędnych	95
Styczna do okręgu	98
Styczna do krzywej	98
Sinus i cosinus kąta ostrego	103
Miara łukowa kąta – radian	111
Funkcja trygonometryczna tangens	154
Iloczyn wektorowy dwóch wektorów	249

Spis doświadczeń obowiązkowych

Doświadczenia	Numer doświadczenia	Strona
Wyznaczanie wartości współczynnika tarcia na podstawie analizy ruchu ciała na równi	21	153
Badanie związku między siłą dośrodkową a masą, prędkością liniową i promieniem w ruchu jednostajnym po okręgu	23	161
Demonstrowanie działa siły bezwładności, m.in. na przykładzie pojazdów gwałtownie hamujących	24	167
Badanie zderzeń ciał i wyznaczenie prędkości jednego z ciał z wykorzystaniem zasady zachowania pędu	30	212
	32	217
Badanie zderzeń ciał	33	218
Badanie ruchu ciał o różnych momentach bezwładności	40	258
	41	266
Demonstrowanie zasady zachowania momentu pędu	42	271

Spis infografik

Rozmiary i masy	10–11
Prędkość w przyrodzie	52–53
Układy współrzędnych	93
Zmiana prędkości w ruchu po okręgu	116–117
Przykłady oddziaływań	129
Siłacze	130–131
Rozkład siły ciężkości na równi pochyłej	136–137
Siła dośrodkowa	164–165
Nieważkość	172–173
Formy energii	196–197
Przemiany energii	208–209
Ruch złożony bryły sztywnej	237
Dźwignie wokół nas i w nas	246–247
Równowaga bryły sztywnej	255
Zasada zachowania momentu pędu	274–275

Odpowiedzi i wskazówki do wybranych zadań

Uwaga. O ile w treści zadania nie napisano inaczej, przyjęto $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Rozdział 1. Wprowadzenie

1.1. Przedmiot i metody badań fizyki

Zadanie 3. $\approx 100 \text{ m}$

Zadanie 4. $\approx 8,1 \cdot 10^{13} \text{ km}$

Zadanie 5. a) 10^6 km , 10^4 km ,

b) 140 cm , $1,3 \text{ cm}$, c) 150 m , $38,4 \text{ cm}$

Zadanie 6. a) 1000 ly , b) 25 m ,

c) $0,000016 \text{ mm}$

1.2. Pomiary i jednostki

Zadanie 2. a) $28\,000 \text{ m}$, b) $10\,800 \text{ s}$, c) $0,04 \text{ kg}$

1.3. Wstęp do analizy danych pomiarowych

Zadanie 1. $8,4 \text{ g}$, $0,3 \text{ g}$

Zadanie 2. $0,3\%$ i $2,5\%$

Zadanie 3. a) 5 V , b) $235 \text{ V} \pm 5 \text{ V}$

Zadanie 5. a) I : $21,0 \text{ s}$, $0,7 \text{ s}$, $0,5 \text{ s}$; II : $20,20 \text{ s}$, $0,09 \text{ s}$, $0,06 \text{ s}$, b) dla niepewności standardowych: 2% , $0,3\%$

1.4. Opisywanie zależności między wielkościami

Zadanie 2. $c(l) = 2 \frac{\text{zł}}{\text{m}} \cdot l + 15 \text{ zł}$, $1 \text{ m} - 2 \text{ zł}$,
przesyłka - 15 zł

Zadanie 5. a) $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, b) około $3,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Rozdział 2. Ruch prostoliniowy

2.1. Jak opisać położenie ciała

Zadanie 3. **Wskazówka.** Zadanie najłatwiej rozwiązać na rysunku.

a) 1 km , b) 1 km , c) -2 km lub $+2 \text{ km}$,

d) -1 km lub $+3 \text{ km}$

2.2. Opis ruchu prostoliniowego

Zadanie 1. $+6 \text{ m}$, -12 m , -6 m

Zadanie 2. a) -3 m , na południe, 3 m ,

b) $+4 \text{ m}$, -2 m , $+2 \text{ m}$

2.3. Prędkość w ruchu prostoliniowym

Zadanie 2. $+0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $-0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Zadanie 3. $100 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

2.4. Ruch jednostajny prostoliniowy

Zadanie 1. $v = \frac{s}{t} = 75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Zadanie 2. $s = vt = 14 \text{ mil} \approx 25,9 \text{ km}$

Zadanie 3. $v_A = \frac{1}{30} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, $v_B = \frac{1}{30} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$,

$v_C = \frac{1}{15} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, $v_D = -0,1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, $v_E = -0,2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$,

$s_A(t) = \frac{1}{30} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot t + 3 \text{ cm}$,

$s_B(t) = \frac{1}{30} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot t + 2 \text{ cm}$,

$s_C(t) = \frac{1}{15} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot t$,

$s_D(t) = -0,1 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot t + 4 \text{ cm}$,

$s_E(t) = -0,2 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot t - 1 \text{ cm}$

Zadanie 4. $v = \frac{5,0 \text{ m} - 1,1 \text{ m}}{10 \text{ s} - 1 \text{ s}} \approx 0,43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

2.5. Ruch prostoliniowy zmienny

Zadanie 2. $v \approx 65,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Zadanie 3. $s_c = s_1 \frac{v_{\text{srw}}(v_2 - v_1)}{v_1(v_2 - v_{\text{srw}})} = 560 \text{ km}$

Zadanie 6. b) $v_{\text{srw}} = \frac{2 \cdot 1298 \text{ m}}{495 \text{ s}} \approx 5,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\vec{v}_{\text{sr}} = 0$

2.6. Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny

Zadanie 1. niebieski: $v_0 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

czerwony: $v_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Zadanie 2. a) $a_{\text{sr}} = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, b) $a_{\text{ch}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

c) $v_0 = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_k = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Zadanie 3. a) $v_0 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, c) $a_{\text{sr}} = 250 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Zadanie 4. Dla samochodu rozpędzającego się

w $8,7 \text{ s}$: $a_{\text{sr}} \approx \frac{27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{8,7 \text{ s}} \approx 3,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

2.7. Położenie w ruchu jednostajnie zmiennym

Zadanie 1. a) $t = \frac{\Delta v}{a} = 5 \text{ s}$, b) $s = \frac{v_0^2}{2|a|} = 62,5 \text{ m}$

Zadanie 2. $t = \frac{v_k}{a} \approx 17 \text{ s}$, $s = \frac{1}{2}at^2 \approx 51 \text{ m}$

Zadanie 3. $v_0 = \frac{h}{t} - \frac{gt}{2} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Zadanie 4. $a = \frac{v_k^2}{2s} \approx 0,35 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Zadanie 5. **Wskazówka.** Naszkicuj wykres $v(t)$ i wyznacz pole pod wykresem, korzystając ze wzoru na pole trapezu.

Zadania powtórzeniowe

Zadanie 1.

$$1.1. v_1 = \frac{l}{t_1} = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}, v_2 = \frac{l}{t_2} = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$1.2. \text{wywrotka: } v_w = \frac{v_1 - v_2}{2} = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$\text{ciężarówka: } v_c = \frac{v_1 + v_2}{2} = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$1.3. l_w = v_2 \cdot t_3 = 8 \text{ m}$$

$$1.4. t_m = \frac{l + l_w}{v_1} = 0,6 \text{ s}, t_w = \frac{l + l_w}{v_2} = 1,8 \text{ s}$$

$$1.5. s_c = v_c \cdot t_w = 40 \text{ m}$$

Zadanie 2.

$$2.1. s = 190,5 \text{ m}$$

$$2.2. d = 52,5 \text{ m}$$

$$2.3. v_1 = 6,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_2 = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zadanie 3.

$$3.1. v_0 = \frac{2s}{t} - v_k = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$3.2. l_p = v_k \cdot t_d - 600 \text{ m} = 100 \text{ m}$$

Zadanie 4.

$$4.2. x = 500 \text{ m}$$

$$4.3. v_2 = \frac{\frac{s - s_1}{s} - \frac{s_1}{v_1}}{\frac{s}{v_{\max}} - \frac{s_1}{v_1}} \approx 48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Rozdział 3. Ruch krzywoliniowy

3.1. Ruch krzywoliniowy

Zadanie 1. b) o około 38%

Zadanie 2. a) $s = 6 \text{ km}$, b) 2 km , na wschód

Zadanie 3. NW (dokładniej: NNW)

Zadanie 5.

$$a) v_{\text{sr}} = \frac{\frac{s_1 + s_2}{s_3 + s_2}}{\frac{v_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} \approx 47 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$b) r = [3 \text{ km}; 4 \text{ km}], \Delta r = 5 \text{ km},$$

$$c) v = [20 \frac{\text{km}}{\text{h}}; 26,7 \frac{\text{km}}{\text{h}}]$$

3.2. Rzut poziomy

Zadanie 1. a) $t = 0 \text{ s}$ (pocisk zaczyna się poruszać ruchem przyspieszonym w dół, gdy tylko opuści lufę, chociaż początkowo jego pionowa prędkość jest znikoma w stosunku do poziomej, a zakrzywienie toru – minimalne),

$$b) t_r = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0,55 \text{ s}$$

$$\text{Zadanie 2. } v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} = 13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Zadanie 3. } z = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1300 \text{ m},$$

o około 450 m

Zadanie 4. **Wskazówka.** Aby wyznaczyć czas trwania ruchu, skorzystaj ze wzoru: $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$. Ile wynosi y , gdy ciało uderza w ziemię?

$$\text{Zadanie 5. } h_{\max} = h_0 + \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g} \approx 2,84 \text{ m},$$

$$t_w = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \approx 0,26 \text{ s}$$

3.3. Prędkość w różnych układach odniesienia

Zadanie 1. a) $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (taki sam zwrot prędkości) lub $155 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (zwrot przeciwny)

$$\text{Zadanie 2. } t = \frac{2}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = 2 \text{ h } 40 \text{ min}$$

Zadanie 5. a) 20 dni, 140 mil, b) 1 mila = 7,146 km, $v_z \approx 3,0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_p \approx 4,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Zadanie 6. a) $v = \sqrt{2^2 + 7^2} \text{ kn} \approx 7,3 \text{ kn}$ wieje z kierunku o azymucie 286°

3.4. Ruch po okręgu

$$\text{Zadanie 1. a) } f = \frac{1200}{60 \text{ s}} = 20 \text{ Hz}, T = \frac{1}{f} = 0,05 \text{ s},$$

b) $s = \pi d \approx 1,26 \text{ m}$, gdzie d to średnica bębna,

$$c) v = \frac{s}{T} \approx 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \omega = 2\pi f \approx 126 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{Zadanie 2. } T_1 = T_2, f_1 = f_2, v_1 = 2v_2, \omega_1 = \omega_2$$

$$\text{Zadanie 3. a) } T = \frac{\pi d}{v} \approx 113 \text{ s}, b) \omega = \frac{2\pi}{T} \approx 0,056 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Zadanie 4. **Wskazówka.** Potrzebne pomiary wykonaj na rysunku.

$$a) n \approx 90, b) d_p = 0,7 \text{ m}, s = 180 \pi d_p \approx 400 \text{ m},$$

$$t = \frac{s}{v} \approx 0,8 \text{ min}$$

$$\text{Zadanie 5. } \varepsilon = \frac{2\pi \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)}{\Delta t} \approx 2,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

3.5. Przyspieszenie dośrodkowe

$$\text{Zadanie 1. } a_d = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \approx 0,034 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{Zadanie 2. } a_d = \frac{4\pi^2 n^2 r}{t^2} \approx 4700 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{Zadanie 3. } v = \sqrt{a_d r} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Zadanie 4. **Wskazówka.** Oblicz a_d dla kilku wartości v . Zaznacz odpowiednie punkty w układzie współrzędnych, a następnie poprowadź przez nie gładką linię (nie łamaną!).

Zadania powtórzeniowe

Zadanie 1.

$$1.1. f = \frac{v}{\pi d} \approx 0,21 \text{ Hz}, \omega = \frac{2v}{d} \approx 1,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$1.2. s = v(t + t_2) = 390 \text{ m}$$

$$1.3. a_d = \frac{2v^2}{d} \approx 2,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Zadanie 2.

$$2.1. v_o = v \frac{R_2}{R_1} \approx 1,14 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 4,1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$2.2. T_p = \frac{2\pi R_3}{v_o} \approx 0,55 \text{ s}$$

2.3. Prędkość kątowna tylnego koła jest taka sama, jak tylnej zębatki, więc $\frac{\omega_t}{\omega_p} = \frac{R_3}{R_2} = 2$.

$$2.4. v_A = 0, v_B = 2v = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}, v_C = \sqrt{2}v \approx 38 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Zadanie 3.

3.2. pierwszy wiersz: 2 m, 2 m,

drugi wiersz: 0 m, $v\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 12,6 \text{ m}$,

trzeci wiersz: 2 m, $\sqrt{(2 \text{ m})^2 + (12,6 \text{ m})^2} \approx 12,8 \text{ m}$

4. Ruch i siły

4.2. Dodawanie sił i rozkładanie ich na składowe

Zadanie 1. $F \approx 72 \text{ N}$, $\alpha \approx 34^\circ$

Zadanie 2. $F = F_0 + mg \sin \alpha \approx 1460 \text{ N}$

Zadanie 3. $F = \frac{mg}{2\sqrt{1 - (\frac{d}{l})^2}} = 450 \text{ N}$

($d = 4 \text{ m}$, $l = 5 \text{ m}$)

Zadanie 4. b) $F_s = mg \sin \alpha \approx 860 \text{ N}$,

c) $F_n = mg \cos \alpha \approx 2350 \text{ N}$

4.3. Pierwsza i druga zasada dynamiki

Zadanie 1. $F_w = m \frac{v_k - v_0}{\Delta t} = 3000 \text{ N}$

Zadanie 2. **Wskazówki.** a) Dlaczego pod wpływem małej siły pudełko się nie poruszyło? b) Jaka siła wypadkowa działała na pudełko, gdy uczniowie ciągnęli je siłą 8 N?

b) $m = 10 \text{ kg}$ ($\frac{1}{m}$ jest współczynnikiem kierunkowym prostej)

Zadanie 3. **Wskazówka.** Najpierw naszkicuj (albo przynajmniej wyobraź sobie) wykres zależności siły wypadkowej działającej na spadochroniarza od czasu. Jaki był jego ciężar?

4.4. Trzecia zasada dynamiki

Zadanie 2. b) $V = \frac{m_2 - m_1}{d_w} = 100 \text{ cm}^3$

4.5. Siła tarcia

Zadanie 2. a) $F = mgf_s = 10 \text{ N}$, b) $F = mgf_k = 6 \text{ N}$

Zadanie 3. $a = gf = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Zadanie 4. $a_1 = g \sin \alpha \approx 3,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $a_2 = g \sin \alpha - \frac{F_T}{m} \approx 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$$f_k = \frac{F_T}{mg \cos \alpha} \approx 0,05$$

Zadanie 5. b) $m = 5 \text{ kg}$ ($\frac{1}{m}$ jest współczynnikiem

kierunkowym prostej), $f_s = \frac{F_{T \max}}{mg} = 0,6$,

$f_k = 0,5$ (dla $F = 40 \text{ N}$ siła wypadkowa wynosi $3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ kg} = 15 \text{ N}$, a więc tarcie wynosi 25 N, co stanowi 0,5 ciężaru pudełka)

Zadanie 6.

$$a) a = \frac{m_c - m_k \sin \alpha - f_k m_k \cos \alpha}{m_k + m_c} \cdot g \approx 1,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$b) a = \frac{m_c - m_k \sin \alpha}{m_k + m_c} \cdot g = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

4.6. Siła dośrodkowa

Zadanie 1. $r_{\min} = \frac{v^2}{gf_s} \approx 90 \text{ m}$

Zadanie 2. Księżyc wokół Ziemi: $F_d = \frac{4\pi^2 M_K r}{T^2} \approx 2 \cdot 10^{20} \text{ N}$

Zadanie 3. $T = 2\pi \sqrt{\frac{R_Z}{g}} \approx 5000 \text{ s} \approx 84 \text{ min}$

4.7. Siły bezwładności

Zadanie 1. a) $F_b = \frac{mv_0}{t} = 3500 \text{ N}$, $\frac{F_b}{F_g} = \frac{F_b}{mg} = 5$,

b) $s = \frac{v_0 t}{2} = 6,25 \text{ m}$

Zadanie 3. **Wskazówka.** Potrzebne rozmiary oszacuj, porównując je ze wzrostem osób przedstawionych na zdjęciu. Kąty zmierz na zdjęciu.

$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{R}} \approx 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (\alpha \approx 45^\circ - \text{kąt między}$$

łańcuchem i pionem, $R \approx 8 \text{ m}$ – odległość krzeselka od osi obrotu)

Zadania powtórzeniowe

Zadanie 1.

1.1. a) $M = 670 \text{ t}$, b) $F_{\text{wyp}} = F_l - Mg = 2800 \text{ kN}$,

$$c) a = \frac{F_{\text{wyp}}}{M} \approx 4,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$1.3. v_k \approx 425 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ (pole pod wykresem } a(t))$$

$$1.4. u = \frac{2300 \text{ kN} \cdot 206 \text{ s}}{168 \text{ t} - 12 \text{ t}} \approx 3000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zadanie 2.

$$2.3. F_n = mg(\sin \alpha + f_k \cos \alpha) \approx 6000 \text{ N} \quad (\alpha = 30^\circ)$$

$$2.4. a_{\max} = \frac{F_{\text{wyt}}}{m} - g(\sin \alpha + f_k \cos \alpha) \approx 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$2.5. v = \sqrt{2sg(\sin \alpha - f_{kl} \cos \alpha)} \approx 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (s = 3 \text{ m} - 1 \text{ m})$$

Zadanie 3.

$$3.1. r = \frac{g f_s}{\omega^2} = 200 \text{ m}$$

$$3.2. F = m\omega^2 r = 18 \text{ N}$$

$$3.3. f < f_{\max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g f_s}{r}} = 0,2 \text{ Hz}$$

$$3.5. \tan \alpha = \frac{\omega^2 r}{g}, \alpha \approx 1,1^\circ$$

5. Energia i pęd

5.1. Praca i moc jako wielkości fizyczne

$$\text{Zadanie 1. } W = mgf_s s = 640 \text{ J}$$

$$\text{Zadanie 2. } W = 9000 \text{ kJ} \text{ (pole pod wykresem)}$$

$$\text{Zadanie 3. } W = Fs \cos \alpha \approx 1300 \text{ J}$$

$$\text{Zadanie 4. a) } P = F_{\text{op}} v = 15 \text{ kW},$$

$$\text{b) } P = (F_{\text{op}} + mg \sin \alpha) v \approx 30 \text{ kW}$$

Zadanie 5. **Wskazówka.** Zwróć uwagę na to, że siła potrzebna do podniesienia ładunku ruchem przyspieszonym jest inna niż przy podnoszeniu ruchem jednostajnym, a w przypadku ruchu opóźnionego – ma jeszcze inną wartość.

$$W = 140 \text{ kJ}$$

5.2. Pojęcie energii. Energia potencjalna grawitacji

$$\text{Zadanie 1. } \Delta E_p = (M + m)g \Delta h = 240 \text{ kJ}$$

$$\text{Zadanie 2. } s = \frac{mgh}{F_T} = 5 \text{ m}$$

5.3. Energia kinetyczna. Zasada zachowania energii

$$\text{Zadanie 1. } v = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} \approx 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Zadanie 2. } h = \frac{v_0^2}{2g} = 1,25 \text{ m}$$

$$\text{Zadanie 4. } v = \sqrt{\frac{2\eta E}{m}} \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Zadanie 5. } v = \sqrt{\frac{2m_2gs}{m_1 + m_2}} \approx 0,82 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5.4. Energia potencjalna sprężystości

$$\text{Zadanie 1. } l_2 = 29,5 \text{ cm}$$

$$\text{Zadanie 2. a) } W = 0,2 \text{ J, b) } E = 0,2 \text{ J, c) } W = 0,2 \text{ J}$$

$$\text{Zadanie 3. a) } h_{\max} = \frac{F\Delta x}{2mg} = 135 \text{ m},$$

$$\text{b) } z = \sqrt{\frac{2hF\Delta x}{mg}} \approx 25 \text{ m}$$

$$\text{Zadanie 4. a) } \Delta x = 2(l_1 - l_0) = 20 \text{ cm}$$

5.5. Pęd. Zasada zachowania pędu

$$\text{Zadanie 1. } v \approx 0,14 \frac{\text{km}}{\text{h}}, \text{ zgodnie ze zwrotem prędkości początkowej drugiego wagonu}$$

$$\text{Zadanie 2. a) } h = \frac{(mv)^2}{2g(M+m)^2} \approx 0,25 \text{ m}$$

$$\text{Zadanie 3. } v \approx 2300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Zadanie 4. a) } \frac{p_s}{p_p} = 1, \text{ b) } \frac{v_s}{v_p} = \frac{1}{n}, \text{ c) } \frac{E_{ks}}{E_{kp}} = \frac{1}{n}$$

5.6. Zderzenia sprężyste i niesprężyste

$$\text{Zadanie 1. a) } v_1 = v_2 = \frac{v_0}{2},$$

$$\text{b) na przykład } \left(v_1 = \frac{v_0}{3}, v_2 = \frac{2v_0}{3} \right)$$

$$\text{lub } \left(v_1 = \frac{v_0}{4}, v_2 = \frac{3v_0}{4} \right) \text{ lub } \left(v_1 = \frac{v_0}{10}, v_2 = \frac{9v_0}{10} \right)$$

Zadanie 2. **Wskazówka.** Jedną z głównych przyczyn obrażeń jest występowanie sił bezwładności.

Zadania powtórzeniowe

Zadanie 1.

$$1.1. P_F = \eta d V_p g h \approx 69,5 \text{ MW}, \text{ gdzie } V_p = 139 \text{ m}^3$$

$$1.3. F_p = \frac{\pi d g h D_F^2}{4} \approx 16,7 \cdot 10^6 \text{ N}, \text{ gdzie } D_F = 6 \text{ m}$$

$$1.4. v = \frac{2\pi r n}{t} \approx 29,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ gdzie: } n = 136, t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

Zadanie 2.

$$2.1. v = \frac{m_p + m_w}{m_p} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} \approx 2000 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$2.2. E_{k1} = \frac{m_p v^2}{2} \approx 16\,000 \text{ J},$$

$$E_{k2} = \frac{m_p^2 v^2}{2(m_p + m_w)} \approx 31 \text{ J} \approx \frac{E_{k1}}{500}$$

$$2.4. h = \frac{m_p^2 v^2}{2g m_w^2} \approx 13 \text{ cm}$$

Zadanie 3.

$$3.1. f_s = \tan \alpha_1 \approx 0,18$$

$$3.2. W = mgs_1(\sin \alpha_1 + f_k \cos \alpha_1) \approx 50 \text{ kJ}$$

$$3.3. W = mgf_k s_2 = 3,1 \text{ kJ}$$

6. Bryła sztywna

6.1. Ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej

$$\text{Zadanie 3. } x_{CM} = \frac{M_{Ch}}{M_{Pl} + M_{Ch}} d \approx 0,11 d \approx 2200 \text{ km}$$

(0,11 odległości Pluton–Charon od środka Plutona)

6.2. Moment siły

$$\text{Zadanie 1. } r_W = \frac{m_P}{m_W} r_P \approx 88 \text{ cm}$$

$$\text{Zadanie 2. b) } F = \frac{M}{r} \approx 370 \text{ N}$$

$$\text{Zadanie 3. } F = \frac{bmgf_s}{(a+b)\sin 60^\circ} \approx 6 \text{ N}$$

$$\text{Zadanie 4. } M = l F \sin \alpha = l F \sin 60^\circ \approx 4,3 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

6.3. Środek ciężkości i energia potencjalna bryły sztywnej

$$\text{Zadanie 2. } \tan \alpha = \frac{2}{0,8}, \alpha \approx 68^\circ$$

$$\text{Zadanie 3. } F = \frac{3m_b - m_c}{7} g \approx 2,8 \text{ N}$$

Zadanie 5. Dla pudełka o wymiarach $53 \times 35 \times 16 \text{ mm}$ i masie 10 g : $W \approx 2 \text{ mJ}$.

$$\text{Zadanie 6. a) } v_{\max} = \sqrt{g f_s r} \approx 14 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 52 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$\text{b) } \tan \alpha = \frac{v^2}{rg}, \alpha \approx 40^\circ$$

6.4. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

$$\text{Zadanie 1. } \frac{E_{\text{post}}}{E_{\text{obr}}} = \frac{5}{2}$$

Zadanie 2. Ołowiana, ponieważ ta sama masa znajduje się dalej od osi obrotu.

$$\text{Zadanie 3. } \frac{E_o}{E_p} = \frac{2m_k}{m_s} = 0,02$$

$$\text{Zadanie 4. a) } v = \sqrt{\frac{(2D^2 + d^2)gh}{D^2 + \frac{3d^2}{4} + \frac{D^4}{2d^2}}} \approx 0,65 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

gdzie: $D = 6 \text{ cm}$, $d = 1 \text{ cm}$, $h = 40 \text{ cm}$,

$$\omega = \frac{2v}{d} \approx 131 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \text{ b) } f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 21 \text{ Hz}$$

$$\text{c) } \frac{E_o}{E_p} = \frac{D^4 + \frac{d^4}{2}}{2D^2 d^2 + d^4} \approx 17,8$$

$$\text{Zadanie 5. } \omega = \sqrt{\frac{6g}{l}}$$

6.5. Druga zasada dynamiki w ruchu obrotowym

$$\text{Zadanie 1. } t = \frac{2\pi f l}{M} \approx 25 \text{ s}$$

$$\text{Zadanie 2. a) } \varepsilon = \frac{3g}{2l} \approx 61 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\text{Zadanie 4. a) } \varepsilon = \frac{5m_p a}{2M_Z R_Z} \approx 1,3 \cdot 10^{-26} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2},$$

$$\text{b) } \Delta\omega = \frac{5m_p v}{2M_Z R_Z} \approx 8,2 \cdot 10^{-25} \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\text{c) } \Delta T = -\frac{\Delta\omega T_Z^2}{2\pi} \approx -10^{-15} \text{ s}$$

6.6. Moment pędu

$$\text{Zadanie 2. a) } \frac{L_{an}}{L_{CD}} = \frac{m_{an}}{m_{CD}} \cdot \left(\frac{d_{an}}{d_{CD}}\right)^2 \cdot \frac{\omega_{an}}{\omega_{CD}} = 5,6,$$

$$\text{b) } \frac{E_{an}}{E_{CD}} = \frac{m_{an}}{m_{CD}} \cdot \left(\frac{d_{an}}{d_{CD}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega_{an}}{\omega_{CD}}\right)^2 = 0,56$$

$$\text{Zadanie 3. a) } L_{obr} = \frac{4\pi M_Z R_Z^2}{5 T_{obr}} \approx 7,1 \cdot 10^{33} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}},$$

gdzie $T_{obr} = 1 \text{ doba}$,

$$\text{b) } L_{obieg} = \frac{2\pi M_Z r_{obieg}^2}{T_{obieg}} \approx 2,7 \cdot 10^{40} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}},$$

gdzie: $r_{obieg} = 150 \text{ mln km}$, $T_{obieg} = 1 \text{ rok}$

$$\text{Zadanie 4. } I = mr^2 \approx 0,22 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, L = I \frac{v}{r} \approx 3,3 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

Zadania powtórzeniowe

Zadanie 1.

$$1.1. \text{ b) } \omega_2 = \omega_1 \frac{I_m + mr_1^2}{I_m + m(r_1 - x)^2}$$

$$1.2. W = \frac{\omega_1^2 (I_m + mr_1^2)}{2} \left(\frac{I_m + mr_1^2}{I_m + mr_2^2} - 1 \right) \approx 9,5 \text{ J}$$

Zadanie 2.

$$2.2. W = \frac{3mv^2}{4} \approx 1000 \text{ J}$$

$$2.4. a = \frac{2}{3} g \sin \alpha \approx 3,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$2.5. v = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Indeks

A

Arystoteles 141

B

bezwładność 141

błędy grube 21

–przypadkowe 24

–systematyczne 24

bryła jednorodna 239

–sztywna 234, 280

C

czas 16

częstotliwość 112

D

długość 16

dopasowanie prostej do wykresu 59

droga 84

druga zasada dynamiki 143, 180, 211, 226

–, w ruchu obrotowym 264, 281

dźwul 190

dźwignie 244, 246–247

E

efekt żyroskopowy 273, 281

energia 194

–chemiczna 197

–elektryczna 196

–jądrowa 197

–kinetyczna 197, 199, 225

–, ruchu obrotowego bryły 259

–, w ruchu złożonym 261

–mechaniczna 200, 225

–potencjalna grawitacji 195, 197, 225

–, sprężystości 196, 205, 206, 226

–promieniowania 197

–wewnętrzna 197, 201

F

funkcje trygonometryczne 103, 154

G

Galaktyka 7

Galileusz 141

H

histogram (wykres słupkowy) 22

J

jednostka prędkości 53

K

kilogram 18

M

masa 16, 144

metr 18

miara łukowa kąta 111

międzynarodowy układ jednostek miar (układ SI) 17, 19

moc 190, 225

modelowanie matematyczne 12
moment bezwładności 258–260

–pędu 269, 270

–siły 245–247, 280

N

neutron 9, 129

Newton, Izaak 141

niedociążenie 170, 181

niepewność bezwzględna 25

–pomiaru 20

–maksymalna 23

–standardowa wartości średniej 23

–względna 24

nieważkość 170, 172–173, 181

niezależność ruchów 100

niuton 132, 143, 180

nukleony 129

O

oddziaływania fundamentalne 128

oddziaływanie elektromagnetyczne 128

–grawitacyjne 128

–jądrowe silne 129

–jądrowe słabe 129

odrzut 213

okres 112

opory ruchu 140

P

parabola 75

pęd 211, 226

–jednostka 211

pierwsza zasada dynamiki 141, 180, 211

–, dla ruchu obrotowego 249, 281

pomiar 17

–pośredni 60

praca 188, 225

prawo Hooke'a 206

proporcjonalność odwrotna 31, 32

–prosta 26–29

proton 9, 129

precesja 236

prędkość chwilowa 51, 52, 84

–kątowna 112–114

–, chwilowa 113

–liniowa 112–114

–średnia 50, 54, 62, 84

–światła 6

–w różnych układach odniesienia 107

przeciążenie 169, 181

przemiany energii 208–209

przemieszczenie 46–49

przyspieszenie chwilowe 66, 84, 115

–dośrodkowe 115–118, 159

–kątowne 113, 118

–, bryły sztywnej 236

–średnie 66, 84, 115

–, zwrot 68

punkt materialny 40, 41

punkt przyłożenia 131

R

ramię siły 248, 280

rok świetlny 6, 7

rozkładanie wektora na składowe 134–137, 180

równanie kwadratowe 220

równowaga sił 133

–bryły sztywnej 255, 280

ruch jednostajny prostoliniowy 55–61, 84

---, droga 57, 84
 ---, równanie ruchu 55, 56, 84
 ruch jednostajnie zmienny, droga 75
 ---, położenie 73–80
 ruch jednostajny po okręgu 111, 112
 ruch krzywoliniowy 92
 ---, prędkość 97
 ruch postępowy bryły sztywnej 235, 280
 ---obrotowy bryły sztywnej 235, 280
 ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny 66–72, 84
 ---, prędkość 67, 68, 85
 ---, równanie ruchu 75, 84
 ruch prostoliniowy zmienny 62–65
 rzut pionowy 70
 ---poziomy 100–102
 ---, tor 102
 ---ukośny 102–105

S

sekunda 17
 siła 131, 180
 ---bezwładności 167, 181
 ---Coriolisa 174
 ---dośrodkowa 159–163, 181

---odśrodkowa 171, 181
 spadek swobodny 70, 200
 sprawność 202, 226

Ś

średnia arytmetyczna 22
 ---wartość prędkości 62, 64, 84
 środek ciężkości 252, 280
 ---masy 238, 239, 280

T

tarcie kinetyczne 151, 152, 181
 ---statyczne 151, 152, 181
 ---toczne 155
 tor ruchu 92
 ---rzutu poziomego 102
 trzecia zasada dynamiki 147, 180
 --- dla ruchu obrotowego 272, 281

U

układ odniesienia 84, 107
 układy inercjalne 167, 168, 181
 ---nieinercjalne 167, 168, 181

W

warunek równowagi bryły sztywnej 249
 wat 190
 wektor położenia 42, 84, 96
 ---premieszczenia 84, 96
 współczynnik sprężystości 206

współczynniki tarcia 152–154
 wykres słupkowy → histogram
 wzajemność oddziaływań 130
 względność ruchu 45

Z

zależność liniowa 29–31
 zasada bezwładności 141
 zasada dynamiki, druga 143, 180, 211, 226
 --- dla ruchu obrotowego 264, 281
 ---, pierwsza 141, 180, 211
 --- dla ruchu obrotowego 249, 281
 ---, trzecia 147, 180
 --- dla ruchu obrotowego 272, 281
 zasada względności 168
 zasada zachowania energii 201, 226
 ---momentu pędu 272, 274–275, 281
 ---pędu 213, 214, 226
 zasięg rzutu ukośnego 104
 zderzenia centralne 218
 ---niecentralne 218
 ---niesprężyste 216
 ---sprężyste 218
 zwrot przyspieszenia 68

Spis działów w pozostałych częściach

Część 2

7. Hydrostatyka i wstęp do zjawisk cieplnych
8. Termodynamika
9. Ruch drgający
10. Fale mechaniczne

Część 3

11. Grawitacja i elementy astronomii
12. Pole elektryczne
13. Prąd stały

14. Pole magnetyczne

15. Indukcja elektromagnetyczna i prąd przemieniczny

Część 4

16. Fale elektromagnetyczne i optyka
17. Fizyka atomowa i kwanty promieniowania elektromagnetycznego
18. Fizyka jądrowa
19. Elementy fizyki relatywistycznej

Zdjęcie na okładce: Getty Images/Moment/Andrew Airey;

Rysunki: Elżbieta Buczkowska s. 154d, Rafał Buczkowski s. 129, Rafał Buczkowski, Joanna Ptak s. 7, Zuzanna Dudzic, Andrzej Dukata s. 104g, 104d, Andrzej Dukata, Joanna Ptak s. 107, 189s, 251l, Klaudia Jarocka s. 10, 11, 52, 53, 130, 131, 164, 165, 172, 173, Adam Pocziwiek s. 9, 22, 23, 42g, 59, 66, 77, 96, 109, 135g, 151, 152, 169, 235g, 270g, Joanna Ptak s. 97d, 99, 120g, 138, 141, 150, 171, 241, 243d, 246, 249d, Ewa Sowulewska s. 186, 284, ULTRA s. 246d, 247d, Andrzej Dukata: pozostałe rysunki.

Zdjęcia: BE&W: AISA/IBERFOTO, Archivo De La Imagen, SL s. 141 (Izaak Newton), Alamy Stock Photo - All Canada Photos s. 70 (spływ kajakiem), Charles Stirling s. 98 (lucznicy), John Powell Photographer s. 116, NASA Photo s. 173 (astronauta), Science History Images s. 19, Tony Watson s. 82 (dragster), Animals Animals s. 178, BSIP RM/Chassenet s. 171, Danita Delmont RM/David R. Frazier s. 114 (traktor), Lebrecht Music & Arts s. 240, LOOK GmbH/Karl Johaentges s. 46, Science Source s. 10 (uran), s. 196 (neuron), Universal History Archive/Universal Images Group s. 242 (bolas - broń myśliwska), Universal Images Group/Encyclopaedia Britannica/UIG s. 172 (astronauta); Diomedia: SuperStock RM s. 107; East News: AFP/STR/Garbage s. 184, Associated Press/NASA/LA107/Garbage s. 141 (sonda kosmiczna), REPORTER/Lukasz Jozwiak s. 62; Forum: Grzegorz Kozakiewicz s. 35 (Cyklotron w Bronowicach); Getty Images: Corbis - Christopher Morris s. 275 (łyżwiarka), Wolfgang Deuter s. 127, Cultura/Lost Horizon Images s. 130-131 (słoń), DigitalVision/Blackstation s. 91, E+/ispyfriend s. 13, E+/Nnehring s. 237, E+/RoBeDeRo s. 41 (rzut kulą do kręgli), E+/scibak s. 172-173 (stacja kosmiczna), Gallo Images/Roger de la Harpe s. 130 (wojownik wspaniały), iStock/Getty Images Plus - BlackJack3D s. 165 (model atomu), jacoblund s. 93 (sprinterka), MileA s. 37 (odkurzacz), Jeff Vanuga s. 52 (gepard), robertharding/James Hager s. 131 (żuk), Velo/Tim de Waele s. 36; Indigo: age fotostock/Paul Bernard s. 213 (firewerki), Prisma/Thompson Paul s. 207, Science Photo Library - s. 196 (ścięgno ludzkie), s. 197 (obraz termowizyjny), s. 72, NASA s. 37 (symulacja tunelu wiatrowego), CDC s. 10 (komar), NASA s. 172 (chmury), Novespace/CNES/DLR/ESA s. 172 (samolot ZERO-G), P.M. MOTTA, P.M. ANDR s. 197 (mięśnie), spacephotos.com s. 17 (Mars Climate Orbiter); NASA: s. 7, 8, 53 (nasza galaktyka), Earth Observatory s. 175, JPL s. 275 (pulsar); Panthermedia: Carl-Jürgen Bautsch s. 10 (widmo), Janus Josef Plewniak s. 195, keng po leung s. 223, Maximilian Boschi s. 205 (lucznik), Thorsten Kempe s. 221 (reaktor jądrowy); Shutterstock: 3Dsculptor s. 165 (satelita wokół Ziemi), Agnieszka Guzowska s. 235 (wiatrak - turbina), Alessio Ponti s. 53 (brylant), Alexander Yakovlev s. 196 (baletnica), Andrea Danti s. 37 (DNA), Andrey Yurlov s. 129 (piłkarz), Anettphoto s. 53 (błyskawica), Anton Gvozdkov s. 16 (waga szalkowa), Apurva Madia s. 260, argus s. 6, 11, Bacsica s. 197 (glukoza), Beautiful landscape s. 164-165 (niebo), Beczynski s. 233, belka_35 s. 32, Bilanol s. 251 (huśtawka), Chiran Vlad s. 37 (kobieta), CyberEak s. 257, cyo bo s. 82 (pociąg magnetyczny Trasrapid), Cyril Hou s. 50, Denis Belitsky s. 39, Denis Burdin s. 10 (pustynia), Denys Prykhodov s. 276 (smartfon), Diana Grytsku s. 93 (człowiek z dronem), Diego Barbieri s. 269, Dmitriy Eremenkov s. 273 (Słońce i Ziemia), Dudarev Mikhail s. 10 (Piramida Cheopsa), Elena Elisseeva s. 61, Eric Isselee s. 131 (mrówka), Eugene Sergeev s. 276 (żyroskopas), fotosutra.com s. 276 (krajobraz w nocy), Geoffrey Kuchera s. 16 (klepsydra), Georgy Shafeev s. 52-53 (laser), goir s. 18 (miara krawiecka), hareluya s. 130 (piłka w siatce), Helmut Spoonwood s. 92, iliuta goean s. 80 (startujący łabędź), Ivan Krawchuk s. 54, Jan Martin Will s. 215, jittykerd s. 93 (pustynia), Jose AS Reyes s. 144, Kamenetskiy Konstantin s. 151, kvsan s. 65 (suwnica), I i g h t p o e t s. 14, lafoto s. 52 (trąba powietrzna), Li Wa s. 255, LightField Studios s. 247, Lu Mikhaylova s. 136-137, Malyguin s. 35 (kobieta), Marcin-linfernum s. 114 (Zamek Królewski w Warszawie), Maresol s. 135, mathagraphics s. 10 (bakteria), McCarthy's PhotoWorks s. 234, Milos Lizanin s. 263, Mino Surkala s. 81, mironov s. 218 (kule bilardowe), My Good Images s. 51, Natursports s. 190, New Africa s. 169, new vave s. 10 (człowiek), Ocean Image Photography s. 96, Oleksiy Mark s. 52 (kolej), Olygsha s. 67, Ollyy s. 52 (skrzypaczka), Paolo Costa s. 105, Peshkova s. 248, Peter Gudella s. 278 (koło rowerowe), PHOTOCREO Michal Bednarek s. 69, Pixachi s. 160 (serpenty), popovartem.com s. 112, ProstoSvet s. 278 (blender), QQ7 s. 45, rangizzz s. 164-165 (Ziemia), Richard Hoffart s. 235 (jabłko), Richard Thornton s. 193 (kafar), Ronnie Chua s. 274-275 (drewniana podłoga), Salliza Salleh s. 110, Scott A. Frangos s. 239, Sebastian Duda s. 44, Sergieiev s. 129 (piłka), Shalith s. 5, Stefan Ataman s. 216, Tony Campbell s. 275 (kot), topseller s. 109, tuulijumala s. 17 (stoper), Uroš Medved s. 160 (łagodny zakręt), VanHart s. 52 (dryf kontynentów), vichni s. 164 (krzeselko karuzeli), Vitaliy Urazov s. 152, Vladimir Mulder s. 214, Vladimir Wrangel s. 253 (skok o tyczce), yousang s. 165 (samochód na zakręcie), zentradyi3ell s. 197 (termometr), zhaoliang70 s. 187; Sony Komputer Entertainment: s. 276 (kontroler ruchu); Thinkstock/Getty Images: Eyecandy Images s. 63, Hemera/Gunter Hofer s. 11 (Saturn), Ingram Publishing s. 155, iStockphoto - s. 261, AndrewHalsall s. 11 (góra lodowa), Bertl123 s. 276 (sztuczny horyzont), Boris25 s. 197 (atom), Dyashkin s. 244 (rakietka i piłeczka tenisowa), KarenMower s. 167 (rozbity samochód), lbtunek s. 111, s. 177 (karuzela), Stephen Meese s. 275 (helikopter), TT s. 242 (samochód na zakręcie), Vadim_Orlov s. 254, Viktor s. 10-11 (Droga Mleczna), Photodisc/Karl Weatherly s. 232, Stockbyte/Comstock s. 41 (CB radio), zentradyi3ell Photodisc s. 221 (hokeista); Wikimedia: Joymaster s. 18 (Gdańsk, wzorce miar); Marcin Braun: s. 173 (karuzela); Miłosz Budzyński: s. 18 (waga), 21, 24, 26, 31, 70 (spadająca piłeczka), 101, 108, 132 (waga), 143, 161, 168, 200, 217; Maciej Wróbel: s. 146, 159, 170 (wiaderko z wodą), 208-209, 274-275 (skok do tyłu); Agnieszka Żak: s. 20, 40, 58, 76, 80 (linijka), 98 (styczna do krzywej), 100, 102, 128, 132 (drzwi), 133, 140, 142, 145, 148, 149, 150, 153, 158, 167 (wózek), 170 (butelka z wodą), 177 (butelka z piaskiem), 193 (równia pochyła), 198, 205 (sprężyna i ciężarek), 210, 212, 213 (wagoniki kolejki elektrycznej), 218 (linijka i monety), 219, 222, 236, 238, 243, 244 (monety na linijce), 251 (szpulka), 252, 253 (ręka i papier), 258, 266, 271, 272, 273 (koło rowerowe), 278 (ręce i gumka), 279.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Podręcznik *Zrozumieć fizykę 1* do zakresu rozszerzonego zawiera przystępnie opracowane treści, począwszy od zagadnień związanych z ruchem, które zostały poprzedzone działem wprowadzającym. Szczególny nacisk położono na ułatwienie zrozumienia kolejno omawianych tematów, a także kształcenie umiejętności związanych z rozwiązywaniem różnych typów zadań oraz wykonywania, opisu i analizowania doświadczeń. Podręcznik zawiera elementy wspierające uczniów w nauce, m.in. w zakresie umiejętności matematycznych.

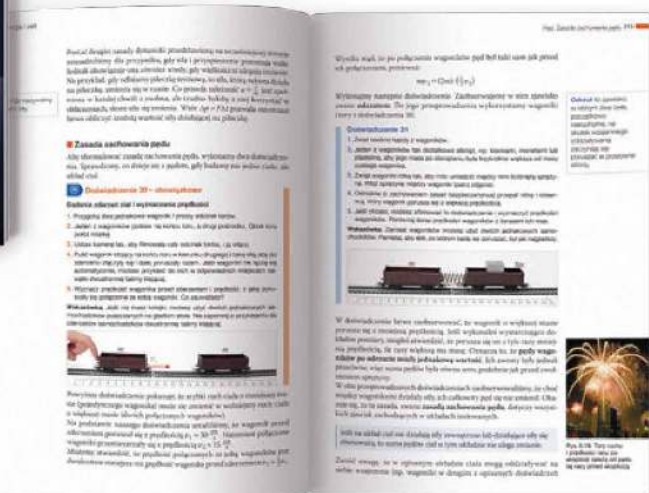


Czytelne infografiki i ilustracje

W podręczniku znajdują się liczne ilustracje i infografiki ułatwiające uczniom zrozumienie trudnych i ważnych zagadnień.

Doświadczenia

Wszystkie doświadczenia, w tym obowiązkowe, są zilustrowane, rozpisane kroku po kroku, opatrzone wskazówkami i komentarzem, tak aby łatwiej było zrozumieć ich przebieg.



WIESZ, UMIESZ, ZDASZ

W podręczniku *Zrozumieć fizykę 1* znajduje się szereg rozwiązań umożliwiających wykształcenie kluczowych umiejętności zawartych w podstawie programowej. Jednym z nich jest blok *Wiesz, umiesz, zdasz*, porządkujący wiadomości i kształtujący umiejętności z danego działu. Zawiera *Podsumowanie*, *Sposób na zadania* oraz *Zadania powtórzeniowe*.

