

WYDANIE
AKTUALNE

FIZYKA

PODRĘCZNIK • LICEUM I TECHNIKUM • ZAKRES ROZSZERZONY

NOWA
EDYCJA

1

 WSiP

Drogi WSiP,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby być zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regulame książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę, w której papier nie jest beczelnie marnowany dla pieniędzy.

Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

Spis treści

Wstęp	5
Jak korzystać z podręcznika	6

Opis ruchu postępowego

1. Elementy działań na wektorach	8
2. Pojęcia i wielkości fizyczne opisujące ruch (I)	14
3. Pojęcia i wielkości fizyczne opisujące ruch (II)	24
4. Ruch jednostajny prostoliniowy	31
5. Ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy	38
6. Przykłady opisu ruchów zmiennych	46
7. Względność ruchu	53
8. Opis ruchu w dwóch wymiarach (I)	60
9. Opis ruchu w dwóch wymiarach (II)	70
Powtórzenie działu	75
Zadania powtórzeniowe	83
Tekst popularnonaukowy	88

Siła jako przyczyna zmian ruchu

10. Zasady dynamiki Newtona	90
11. Siła a zmiana pędu ciała	108
12. Zasada zachowania pędu dla układu ciał	113
13. Tarcie	122
14. Siły w ruchu po okręgu	130
15. Opis ruchu w układach nieinercjalnych	138
Powtórzenie działu	147
Zadania powtórzeniowe	152
Tekst popularnonaukowy	156

Praca, moc, energia mechaniczna

16. Praca i moc	160
17. Rodzaje energii mechanicznej	166
18. Zasada zachowania energii mechanicznej	171
19. Zderzenia ciał	185
20. Sprawność urządzeń mechanicznych	191
Powtórzenie działu	195
Zadania powtórzeniowe	201
Tekst popularnonaukowy	205

Zjawiska hydrostatyczne	
21. Ciśnienie hydrostatyczne.....	210
22. Prawo Pascala	215
23. Prawo naczyń połączonych.....	219
24. Prawo Archimedesesa	223
25. Zastosowanie prawa Archimedesesa do wyznaczania gęstości	231
Powtórzenie działu	235
Zadania powtórzeniowe	239
Tekst popularnonaukowy	242
 Niepewności pomiarowe	
1. Pomiar bezpośredni (proste)	244
2. Niepewności pomiarów bezpośrednich (prostych)	246
3. Niepewności pomiarów pośrednich (złożonych) i ich szacowanie	251
4. Graficzne przedstawianie wyników pomiarów wraz z ich niepewnościami	256
5. Dopasowanie prostej do wyników pomiarów	257
 Doświadczenia	
1. Wyznaczamy wartość przyspieszenia w ruchu jednostajnie przyspieszonym	260
2. Badamy spadanie swobodne; wyznaczamy wartość przyspieszenia ziemskiego	262
3. Wyznaczamy współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego	263
4. Badamy ruch po okręgu	265
5. Badamy zderzenia dwóch ciał oraz wyznaczamy masę jednego z nich	266
 Niezbędnik matematyczny	
1. Powtórzenie ze szkoły podstawowej	272
2. Funkcje liniowa i kwadratowa	273
3. Elementy trygonometrii	282
4. Wybrane pojęcia geometryczne	285
 Odpowiedzi do zadań	288
 Stałe fizyczne	298
 Wartości funkcji trygonometrycznych	300
 Indeks rzeczowy polsko-angielski	301

Wstęp

Uczenie się fizyki to wielka, intelektualna przygoda. Dzięki fizyce możesz nie tylko dostrzegać, obserwować i podziwiać harmonię Wszechświata, lecz także zgłębiać tajemnice przyrody, poznawać i rozumieć prawa rządzące światem oraz rozważać możliwości i ograniczenia nauki zajmującej się jego badaniem. Nie musimy Cię o tym przekonywać, skoro Twoim wyborem jest fizyka w zakresie rozszerzonym. To mądry i rozsądny wybór.

GRATULUJEMY!

Mamy nadzieję, że ten podręcznik będzie dla Ciebie prawdziwym wsparciem w solidnym przygotowaniu do egzaminu maturalnego.

Zachęcamy Cię do wytrwałej, systematycznej pracy z podręcznikiem, uważnego analizowania licznych przykładów oraz samodzielnego rozwiązywania zadań i utrwalania wiadomości. Rzetelna wiedza i umiejętności zdobyte na lekcjach fizyki pomogą Ci odnieść sukces na studiach o kierunkach ścisłych lub technicznych, a w przyszłości ułatwią zdobyć ciekawej, satysfakcjonującej pracy.

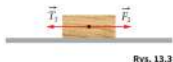
Życzymy powodzenia

Autorki

JAK KORZYSTAĆ Z PODRĘCZNIKA

Przeczytaj, zrozum, dowiedz się więcej

Jeśli zwiększymy siłę działającą na klocek do F_3 (rys. 13.3), a klocek nadal nie ruszy z miejsca, oznacza to, że siła tarcia wzrosła do T_2 i równoważy siłę F_3 .



Rys. 13.3

Przy ustalonym rodzaju powierzchni i ustalonej sile nacisku **siła tarcia statycznego** może przyjmować różne wartości od zera do $T_{\max}$.

$$f_s = \frac{T_{\max}}{F_N}$$

ważne wnioski, prawa oraz definicje sformułowane słownie lub za pomocą wzorów

zasadnicza część wykładu



WIEDZIEĆ WIĘCEJ

ciekawostki i treści uzupełniające

Ćwicz i rozwiązuj zadania

PRZYKŁAD 14.2

Karuzela łańcuchowa

Wyjaśnijmy, dlaczego łańcuch, na którym wisi krzeselko obracającej się karuzeli, odchyła się od pionu, oraz znajdziemy związek między kątem odchylenia α i okresem obrotu T .

W układzie odniesienia związanym z Ziemią na krzeselko działają dwie siły: ciężar i siła sprężystości łańcucha.

ZADANIA

1. Z równi pochyłej o wysokości $h = 1$ m zsuwa się klocek ze stałą prędkością o wartości $v = 1$ m/s i przebywa całą długość równi w czasie $t = 2$ s. Oblicz współczynnik tarcia kinetycznego klocka o równię.

szczegółowo rozwiązane zadania

zadania na zakończenie rozdziału

Uporządkuj swoją wiedzę i sprawdź umiejętności

POWTÓRZENIE DZIAŁU

powtórzenie wiadomości – teoria



ZADANIA POWTÓRZENIOWE

ćwiczenie umiejętności – zadania

TEKST POPULARNONAUKOWY

teksty popularnonaukowe

Zwróć uwagę na oznaczenia kolorystyczne

NM s. 252

odniesienia do stron
Niezbędnika matematycznego

s. 55

odniesienia do stron z Niezbędnika
matematycznego

DOŚWIADCZENIA

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ

NIEZBĘDNIK MATEMATYCZNY

STAŁE FIZYCZNE



treści usunięte wg podstawy
programowej 2024

Pamiętaj:

Odpowiedź do wszystkich zadań zamieszczonych w podręczniku zapisuj w zeszyte przedmiotowym.



OPIS RUCHU POSTĘPOWEGO

- Podstawowe pojęcia i wielkości fizyczne opisujące ruch
- Opis ruchu w jednowymiarowym układzie współrzędnych
- Opis ruchu w dwuwymiarowym układzie współrzędnych
- Względność ruchu



1. Elementy działań na wektorach

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

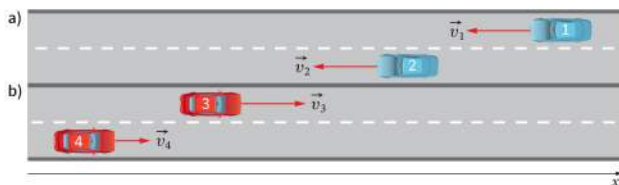
- rozróżniać wielkości wektorowe i skalarne,
- wykonywać graficznie działania na wektorach,
- rozróżniać składowe i współrzędne wektora.

→ **Przypomnij sobie**, jakie znasz wielkości fizyczne skalarne, a jakie wektorowe.

Wielkości fizyczne, które poznasz w rozszerzonym kursie fizyki, można podzielić na dwie grupy: **wielkości skalarne** i **wielkości wektorowe**. Wielkościami skalarnymi są np. masa, gęstość, droga, czas, ładunek elektryczny, temperatura. Wielkościami wektorowymi to np. przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie, siła.

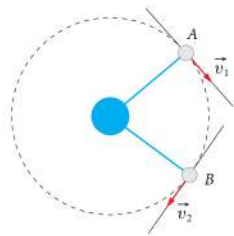
Wielkość skalarną podajemy w postaci liczby z odpowiednią jednostką, np. $m = 5 \text{ kg}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $q = 2 \text{ C}$, $t = -10 \text{ }^\circ\text{C}$. Wielkości te mogą być dodatnie, ujemne lub równe zero. Są też wielkości bezwymiarowe, wyrażone tylko liczbą, np. współczynnik tarcia. Wielkości wektorowe mają wartość (zawsze dodatnią, wyrażoną w odpowiednich jednostkach), kierunek (wyznaczony przez prostą, na której leży wektor) i zwrot. Dla dobrze znanej ci już wielkości wektorowej, siły, podajemy też zazwyczaj punkt przyłożenia. Jak wiesz, symbolem graficznym wektora jest strzałka. Jej długość odpowiada wartości wektora. Jeśli umownie przyjmiemy, że strzałka o długości 1 cm odpowiada wektorowi o wartości 1 N, to w tej skali wektor o wartości 5 N zobrazujemy strzałką o długości 5 cm. Dwa wektory są **jednakowe** tylko wtedy, gdy mają **takie same wartości, takie same kierunki i takie same zwroty**. Jeśli wektory różnią się chociaż jedną z tych cech, są różnymi wektorami.

Wartości, kierunki i zwroty wektorów prędkości samochodów 1 i 2 (rys. 1.1a) są jednakowe, więc wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ są jednakowe: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$. Wektory prędkości samochodów 3 i 4 (rys. 1.1b) mają takie same kierunki i zwroty, ale wartości ich są różne $v_3 \neq v_4$, więc wektory $\vec{v}_3$ i $\vec{v}_4$ są różne: $\vec{v}_3 \neq \vec{v}_4$.



Rys. 1.1 Prędkości samochodów są: jednakowe (a); różne (b)

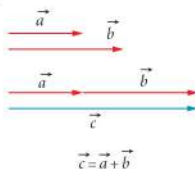
Prędkości dziecka na karuzeli (widzianej z góry) w punktach A i B jego toru (rys. 1.2) mają takie same wartości, ale różne kierunki, więc $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$.



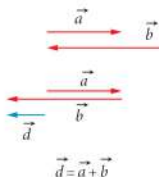
Rys. 1.2 Prędkości dziecka w punktach A i B są różne

Dodawanie i odejmowanie wektorów

Wektory możemy dodawać, czyli znajdować **wektor wypadkowy**. Jeśli dodawane wektory mają jednakowe kierunki i zgodne zwroty, to wartość wektora wypadkowego jest sumą wartości tych wektorów. Kierunek i zwrot wektora wypadkowego jest taki jak dodawanych wektorów (rys. 1.3). Jeśli dodawane wektory mają jednakowy kierunek, ale przeciwny zwrot, wartość ich sumy obliczamy, odejmując od wartości wektora zobrazonego dłuższą strzałką wartość wektora przedstawionego za pomocą krótszej strzałki (oba symbole wektorów mają być narysowane w tej samej skali). Kierunek wypadkowej jest taki sam jak kierunek dodawanych wektorów, a zwrot wypadkowej jest zgodny ze zwrotem wektora o większej wartości (rys. 1.4).

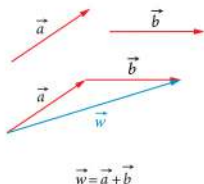


Rys. 1.3 Dodawanie wektorów o jednakowych kierunkach i zwrotach

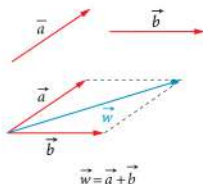


Rys. 1.4 Dodawanie wektorów o jednakowych kierunkach i przeciwnych zwrotach

Dla dowolnych dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ich sumę znajdujemy następująco (rys. 1.5): rysujemy wektor $\vec{a}$, a następnie przesuujemy równolegle wektor $\vec{b}$ tak, by koniec wektora $\vec{a}$ był początkiem wektora $\vec{b}$. Suma to wektor o początku w początku wektora $\vec{a}$ i końcu w końcu wektora $\vec{b}$.

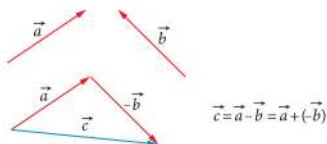


Rys. 1.5 Dodawanie wektorów o różnych kierunkach metodą wieloboku



Rys. 1.6 Dodawanie wektorów o różnych kierunkach metodą równoległoboku

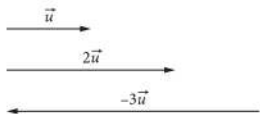
Przy dodawaniu wektorów o różnych kierunkach można stosować także tzw. regułę równoległoboku (rys. 1.6), jednak w przypadku dodawania większej liczby wektorów pierwsza z tych metod (nazywana często metodą wieloboku) jest wygodniejsza. Zauważ, że w żadnym przypadku kolejność, w której rysujemy dodawane wektory, nie wpływa na wynik. Wektory odejmujemy przez dodanie do wektora $\vec{a}$, od którego odejmujemy, wektora przeciwnego do odejmowanego wektora $\vec{b}$ (rys. 1.7).



Rys. 1.7 Odejmowanie wektorów

Mnożenie wektora przez liczbę

Wektor można pomnożyć lub podzielić przez liczbę. Jeśli wektor $\vec{u}$ pomnożymy przez dodatnią liczbę k , to kierunek i zwrot wektora pozostają bez zmiany, a wartość jest równa ku . Jeśli liczba k jest ujemna, zwrot wektora $k\vec{u}$ jest przeciwny do zwrotu wektora $\vec{u}$. Na rysunku 1.8 przedstawiono wektory: $\vec{u}$, $2\vec{u}$ oraz $-3\vec{u}$.

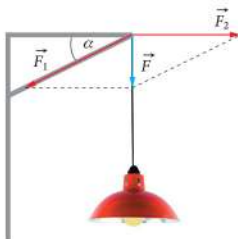


Rys. 1.8 Mnożenie wektora przez liczbę

Rozkładanie wektora na składowe

Każdy wektor można traktować jako sumę dwóch lub większej liczby wektorów. Można go zatem rozłożyć na składowe wzdłuż określonych kierunków. W problemach fizycznych wybór tych kierunków jest zwykle w jakiś sposób uzasadniony.

Rysunek 1.9 przedstawia lampę wiszącą na wysięgniku wykonanym z metalowych prętów przymocowanych do ściany.

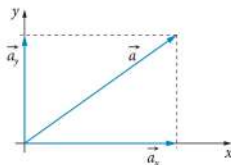


Rys. 1.9 Rozkładanie wektora na składowe

Siły działają wzdłuż metalowych prętów. Pręt poziomy jest rozciągany siłą $\vec{F}_2$, a ukośny – zginatany siłą $\vec{F}_1$. Rozkładana siła jest sumą swoich składowych:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Rozważmy wektor $\vec{a}$ w dwuwymiarowym, kartezjańskim układzie współrzędnych x, y i rozłóżmy go na **wektory składowe** wzdłuż osi x i y (rys. 1.10).



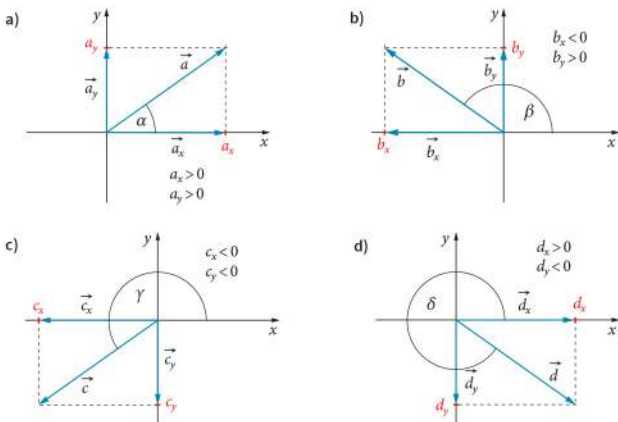
Rys. 1.10 Składowe wektora w kartezjańskim układzie współrzędnych

Składowe wektora w danym układzie współrzędnych to jego rzuty na osie tego układu. Wektor $\vec{a}$ można więc zapisać jako sumę $\vec{a}_x$ i $\vec{a}_y$.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Współrzędne wektora

W fizyce bardzo ważnym pojęciem związanym z wektorem i jego składowymi są **współrzędne wektora**. **Współrzędna wektora jest liczbą**. Współrzędną wektora $\vec{a}$ na osi x , czyli tzw. iksową współrzędną wektora, oznaczamy symbolem a_x , a współrzędną wektora na osi y , czyli tzw. igrekową współrzędną wektora – symbolem a_y . Na rysunku 1.11 przedstawiono cztery różne przypadki położenia wektora w układzie współrzędnych. Na osiach układu zaznaczono **składowe wektorów** (też wektory!) kolorem **niebieskim**, a **współrzędne wektorów** (liczby!) kolorem **czerwonym**.



Rys. 1.11 Składowe i współrzędne wektora

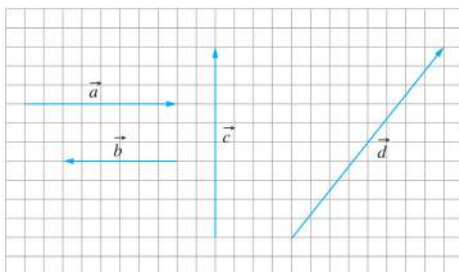
Zauważ (rys. 1.11), że:

- jeśli zwrot składowej wektora jest zgodny ze zwrotem osi układu współrzędnych, to odpowiednia współrzędna wektora jest dodatnia (a_x i a_y , b_y oraz d_x) i równa wartości składowej wektora;
- jeśli zwrot składowej wektora jest przeciwny do zwrotu osi układu współrzędnych (b_x , c_x i c_y oraz d_y), to odpowiednia współrzędna wektora jest ujemna i równa wartości składowej wektora ze znakiem minus.

Spójrz na rysunek 1.1. Wszystkie wektory prędkości mają taki sam kierunek, więc do znalezienia ich współrzędnych wybieramy jako oś x prostą równoległą do wektorów prędkości. **Zwrot osi ustalamy dowolnie**. Zwroty wektorów $\vec{v}_3$ i $\vec{v}_4$ są zgodne ze zwrotem osi x , więc $v_{3x} = v_3$ i $v_{4x} = v_4$, a zwroty wektorów $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ są przeciwny do zwrotu osi x , więc ich współrzędne $v_{1x} = -v_1$ i $v_{2x} = -v_2$. Jeśli oś x zwrócimy przeciwnie (zależy to wyłącznie od naszego wyboru), to $v_{1x} = v_1$ i $v_{2x} = v_2$, $v_{3x} = -v_3$ i $v_{4x} = -v_4$.

ZADANIA

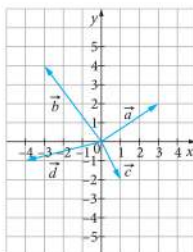
1. Dane są wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (rys. 1.12).



Rys. 1.12

Narysuj w zeszyście wektory:

- $\vec{e} = 2\vec{a} - \vec{b}$
 - $\vec{f} = \frac{1}{4}\vec{c} + \vec{b}$
 - $\vec{g} = \vec{d} + \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
 - $\vec{h} = \vec{c} + \vec{a} - \vec{d}$
2. W układzie współrzędnych (rys. 1.13) przedstawiono cztery wektory. Narysuj w zeszyście składowe każdego wektora (różnymi kolorami), zapisz ich współrzędne oraz (za pomocą twierdzenia Pitagorasa) oblicz wartości wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.



Rys. 1.13



2. Pojęcia i wielkości fizyczne opisujące ruch (I)

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

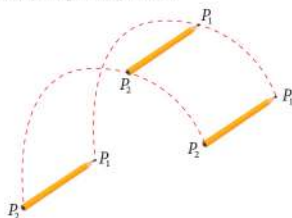
- rozróżniać drogę i przemieszczenie,
- obliczać szybkość średnią i szybkość chwilową,
- obliczać prędkość średnią i prędkość chwilową.

→ **Przypomnij sobie** wiadomości o ruchu i jego rodzajach oraz o wielkościach fizycznych, które stosujemy do opisu ruchu.

Ruch, droga, szybkość średnia i chwilowa

Ruchem nazywamy zmianę położenia ciała względem innego, dowolnie wybranego ciała, zwanego **układem odniesienia**. Jeśli położenie ciała względem wybranego układu odniesienia się nie zmienia, mówimy, że ciało spoczywa w tym układzie odniesienia. W tej samej chwili ciało może być w spoczynku względem jednego układu odniesienia i w ruchu względem innego. Tę właściwość ruchu nazywamy jego **względnością**.

Podczas dotychczasowego kursu fizyki opisywano ruchy ciał, które są traktowane jak **punkty materialne**, czyli obiekty o pomijalnie małych rozmiarach i objętości, a o masie równej masie ciała. Takie uproszczenie można stosować tylko wtedy, gdy rozważamy **ruch postępowy**, w którym wszystkie punkty ciała poruszają się po torach o identycznym kształcie i takiej samej długości (rys. 2.1).

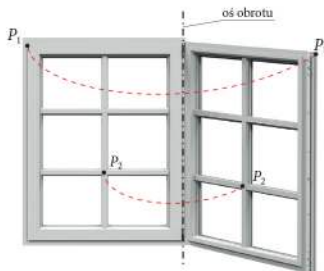


Rys. 2.1 Przykład ruchu postępowego

Innym rodzajem ruchu jest **ruch obrotowy**. Do opisu tego ruchu wprowadza się w fizyce pojęcie **bryły sztywnej** – ciała, w którym odległości między poszczególnymi jego częściami (elementami) nie zmieniają się mimo sił działających na nie podczas ruchu. Zarówno punkt materialny, jak i bryła sztywna to **modele**, za pomocą których przedstawiamy ciała rzeczywiste. Przykładem ruchu obrotowego może być ruch otwieranego okna (rys. 2.2) lub obracającej się karuzeli krzesłkowej. W ruchu obrotowym tor

zakreślane przez poszczególne punkty ciała są łukami okręgów lub okręgami o środkach leżących na jednej prostej, zwanej osią obrotu.

O ruchu obrotowym i ruchach złożonych będziemy mówić dokładniej w podręczniku do klasy drugiej.



Rys. 2.2 Przykład ruchu obrotowego

Na rysunku 2.3 przedstawiono fragment mapy fizycznej Polski.



Rys. 2.3 Tor ruchu

Na mapie wyróżniono popularną trasę z Krakowa do Zakopanego. Dla samochodu jadącego tą trasą zaznaczona linia stanowi **tor** ruchu. Długość toru (lub jego części) nazywamy **drogą** i oznaczamy zwykle literą s . Zauważ, że tak zdefiniowana droga jest **zawsze nieujemną (dodatnią lub równą zero)**, skalarną wielkością fizyczną. Podczas ruchu ciała **zawsze rośnie** (jest rosnącą funkcją czasu).

Jeżeli samochód przebył drogę z Krakowa do Zakopanego w czasie t , to jego szybkość średnią na tej trasie obliczamy, dzieląc drogę przez czas.

Uwaga: Do całkowitego czasu t , w którym samochód przebył drogę s , wliczamy również czas ewentualnych postojów.

Szybkością średnią ciała nazywamy stosunek drogi przebytej przez ciało do czasu, w którym ta droga została przebyta.

$$v_{\text{sr}} = \frac{s}{t}$$

(2.1)

Wzór ten stosujemy bez względu na rodzaj ruchu, którym porusza się ciało.

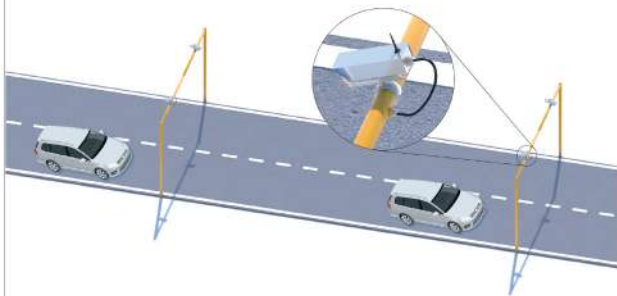


WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Odcinkowy pomiar prędkości

Obliczanie szybkości średniej jest wykorzystywane przy tzw. odcinkowym pomiarze prędkości pojazdów. Kamera umieszczona na bramce wjazdowej rejestruje przejeżdżający pod nią pojazd wraz z numerem rejestracyjnym. Podczas przejazdu pod bramką wyjazdową pojazd zostaje ponownie zarejestrowany przez identyczną kamerę.

Odległość między bramkami wynosi zazwyczaj od kilku do kilkunastu kilometrów.



System komputerowy wyznacza czas przejazdu danego pojazdu, a identyfikuje go na podstawie numeru rejestracyjnego. Następnie oblicza szybkość średnią pojazdu według wzoru:

$$\text{szybkość średnia} = \frac{\text{długość odcinka toru, na którym jest dokonywany pomiar}}{\text{czas przejazdu}}$$

Jeżeli szybkość średnia pojazdu jest większa od dopuszczalnej na danym odcinku, kierowca otrzymuje mandat. Zwróć uwagę na fakt, że kierowca, który chwilowo przekroczył dozwoloną szybkość, może zmieścić się w obowiązującym limicie, jeżeli na pozostałym odcinku drogi będzie jechał odpowiednio wolniej.

PRZYKŁAD 2.1

Szybkość średnia

Obliczymy szybkość średnią samochodu na trasie Kraków–Zakopane, jeśli wiadomo, że: zegarek kierowcy wskazywał w chwili rozpoczęcia podróży godzinę ósmą, a w chwili zakończenia – godzinę dziesiątą; wskazania licznika samochodu przed wyruszeniem w podróż i po jej zakończeniu były odpowiednio równe 15 320 km i 15 440 km.

Oznaczamy: $t_1 = 8 \text{ h}$, $t_2 = 10 \text{ h}$, $s_1 = 15\,320 \text{ km}$, $s_2 = 15\,440 \text{ km}$.

Przebyta droga $\Delta s = s_2 - s_1$, a czas jej przebycia $\Delta t = t_2 - t_1$.

W tym przypadku wygodniej jest zapisać wzór na szybkość średnią w postaci:

$$v_{\text{sr}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{120 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Jeśli obliczylibyśmy szybkość średnią na krótszym odcinku, np. na odcinku Myślenice–Rabka, otrzymalibyśmy zapewne inny wynik. Gdybyśmy powtórzyli obliczenia dla coraz krótszych odcinków drogi (w każdym przypadku rozpoczynających się we wcześniej wybranym miejscu w Myślenicach), przebytych w coraz krótszych odstępach czasu, otrzymalibyśmy wyniki coraz bardziej zbliżone do wskazania szybkościomierza samochodu w danym miejscu:

$$v = \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0}$$

(zapis $\Delta t \rightarrow 0$ oznacza, że odstęp czasu, w którym ciało przebyło drogę Δs , jest bliski zera). Ta wielkość nosi nazwę **szybkości chwilowej** w wybranym miejscu i ją właśnie pokazuje szybkościomierz samochodu.

W praktyce interesuje nas nie tylko to, z jaką szybkością samochód się porusza, ale również to, w jakim kierunku jedzie (np. na odcinku Kraków–Zakopane) i w którą stronę (np. w stronę Zakopanego, a nie Krakowa). Dlatego też, aby w pełni opisać ruch, należy posłużyć się wielkością wektorową. Taką wielkością jest **prędkość**, którą zdefiniujemy w dalszej części tego rozdziału.

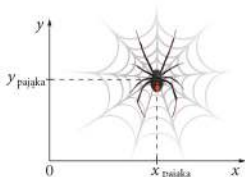
Przemieszczenie, prędkość średnia i chwilowa

Przy opisywaniu ruchu ciała wygodnie jest obrać układ współrzędnych związany z układem odniesienia, względem którego badamy ruch tego ciała. Jeśli opisujemy ruch odbywający się po prostej (czyli **ruch w jednym wymiarze**), wygodnym układem współrzędnych jest oś x równoległa do kierunku ruchu (rys. 2.4).



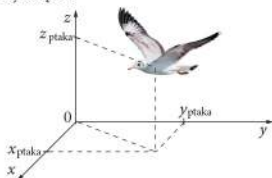
Rys. 2.4 Jednowymiarowy układ współrzędnych

Do opisu ruchu na płaszczyźnie, czyli **ruchu w dwóch wymiarach**, wybieramy dwuwymiarowy układ współrzędnych, np. układ kartezjański x, y (rys. 2.5).



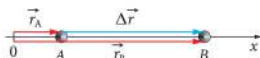
Rys. 2.5 Dwuwymiarowy układ współrzędnych

Łatwo się domyślić, że ruch, który odbywa się w przestrzeni i nie ogranicza do płaszczyzny (czyli **ruch w trzech wymiarach**), opisuje się w trójwymiarowym układzie współrzędnych, np. układzie kartezjańskim x, y, z (rys. 2.6). Takimi ruchami nie będziemy się jednak zajmowali w tej książce.

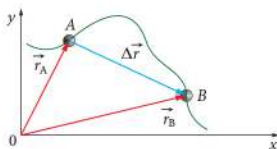


Rys. 2.6 Trójwymiarowy układ współrzędnych

Przypomnijmy teraz wielkości fizyczne opisujące ruch ciała traktowanego jak punkt materialny. **Wektorem położenia** ciała (inaczej **wektorem wodzącym**) w wybranym układzie współrzędnych jest wektor, którego początek znajduje się w początku układu współrzędnych, a koniec w punkcie, w którym rozważane ciało znajduje się w danej chwili. Niech $\vec{r}_A$ przedstawia **położenie początkowe** ciała (czyli położenie w chwili, w której zaczynamy badać ruch), a $\vec{r}_B$ położenie tego ciała po upływie czasu Δt . Na rysunku 2.7 przedstawiono te wektory dla ruchu po prostej, a na rysunku 2.8 – dla ruchu na płaszczyźnie.

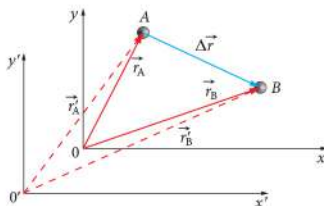


Rys. 2.7 Przemieszczenie w ruchu po prostej



Rys. 2.8 Przemieszczenie w ruchu na płaszczyźnie

Zmianę położenia ciała opisuje wektor $\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$, zwany **wektorem przemieszczenia** (lub krócej **przemieszczeniem**). Zwróć uwagę na to, że wektor przemieszczenia nie zależy od wyboru początku układu współrzędnych (rys. 2.9).



Rys. 2.9 Przemieszczenie w układach współrzędnych o różnych początkach

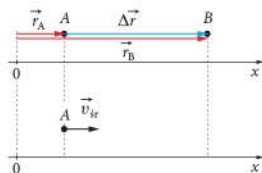
Kolejną istotną informację o ruchu podaje **wektor prędkości średniej**.

Prędkością średnią ciała nazywamy iloraz wektora przemieszczenia i czasu, w którym to przemieszczenie nastąpiło.

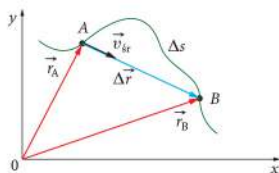
$$\vec{v}_{\text{sr}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.2)$$

Z powyższej definicji wynika, że kierunek i zwrot prędkości średniej jest zgodny z kierunkiem i zwrotem przemieszczenia (rys. 2.10, 2.11), a wartość prędkości średniej to:

$$|\vec{v}_{\text{sr}}| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

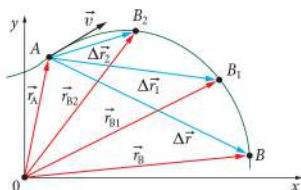


Rys. 2.10 Przemieszczenie i prędkość średnia w ruchu po prostej



Rys. 2.11 Przemieszczenie i prędkość średnia w ruchu po krzywej

Na rysunku 2.12 przedstawiono sytuację, w której prędkość średnia jest wyznaczana dla coraz krótszych przedziałów czasu.



Rys. 2.12 Prędkość chwilowa

Wówczas:

- wartość wektora przemieszczenia będzie coraz mniejsza.
- kierunek przemieszczenia będzie coraz bliższy kierunkowi stycznej do toru ruchu w punkcie A,
- długość tego wektora – coraz bliższa przebytej drodze,
- a iloraz $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ coraz bliższy **wektorowi prędkości chwilowej**, zwanej zwykle krótko **prędkością** (rys. 2.12).

Mówimy, że **prędkość chwilowa** jest granicą prędkości średniej, gdy Δt dąży do zera, a zapisujemy to w następujący sposób:

$$\vec{v} = \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0}$$

Prędkość chwilowa jest w każdej chwili styczna do toru w punkcie, w którym w tej chwili znajduje się ciało.

Prędkość średnia i chwilowa są wielkościami wektorowymi, a szybkość średnia i chwilowa – skalarnymi.

Wartość prędkości chwilowej jest równa szybkości chwilowej ciała w tym punkcie:

$$v = \left(\frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0} = \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0}$$

Czy analogiczny związek istnieje między wartością prędkości średniej a szybkością średnią?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, przyjrzyjmy się odpowiednim wzorom:

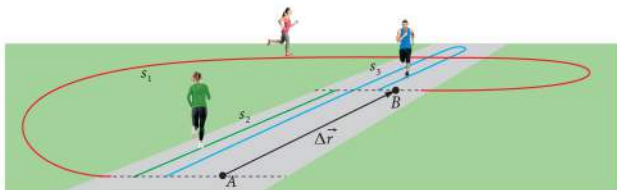
$$|\vec{v}_{sr}| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{lub} \quad v_{sr} = \frac{s}{t}$$

Widzimy, że $\frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ **tylko wtedy**, gdy $|\Delta \vec{r}| = \Delta s$ (lub $|\Delta \vec{r}| = s$), czyli wtedy, gdy wartość wektora przemieszczenia, które nastąpiło w czasie Δt , jest równa drodze przebytej przez ciało w tym czasie, a więc gdy **ruch ciała odbywa się po linii prostej bez za-**

wracania. W ruchach, które odbywają się po prostej „tam i z powrotem”, lub w ruchach krzywoliniowych $|\Delta \vec{r}| < \Delta s$, więc $|\vec{v}_{sr}| < v_{sr}$.

Na rysunku 2.13 przedstawiono tory, po których poruszali się trzej sportowcy trzema różnymi trasami. Drogi przebyte przez każdego z nich były różne, ale ich przemieszczenia ($\Delta \vec{r}$) – jednakowe.



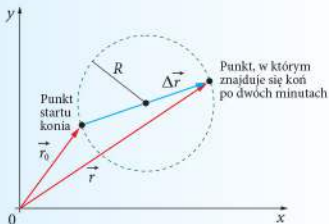
Rys. 2.13 Jednakowe przemieszczenia ciał, które przebyły różne drogi

Uwaga: W niektórych podręcznikach fizyki iloraz $\frac{s}{t}$ jest nazywany **średnią wartością prędkości**. Nazwy „wartość prędkości średniej” i „średnia wartość prędkości” są do siebie podobne, więc aby uniknąć pomyłek, będziemy konsekwentnie używać terminu „szybkość średnia” zamiast „średnia wartość prędkości”.

PRZYKŁAD 2.2

Szybkość średnia a wartość prędkości średniej w ruchu po okręgu

Obliczmy szybkość średnią i wartość prędkości średniej konia, który wykonał 4,5 okrążenia wokół kolistej areny cyrkowej w czasie $t = 2$ min. Promień areny wynosi $R = 12$ m (rys. 2.14).



Rys. 2.14

Droga przebyta przez konia w ciągu 2 min to 4,5 obwodu areny, czyli:

$$s = 4,5 \cdot 2\pi R$$

Szybkość średnia konia:

$$v_{\text{sr}} = \frac{s}{t} = \frac{4,5 \cdot 2\pi R}{t}$$

$$v_{\text{sr}} = \frac{4,5 \cdot 2\pi \cdot 12 \text{ m}}{120 \text{ s}} \approx 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aby obliczyć wartość prędkości średniej w tym czasie, należy zauważyć, że długość wektora przemieszczenia to:

$$|\Delta \vec{r}| = 2R$$

zatem:

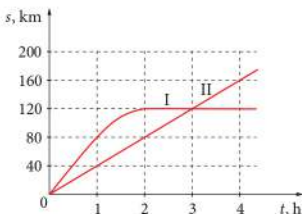
$$|\vec{v}_{\text{sr}}| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{2R}{t}$$

$$|\vec{v}_{\text{sr}}| = \frac{24 \text{ m}}{120 \text{ s}} = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zauważ, że zgodnie z oczekiwaniem $v_{\text{sr}} > |\vec{v}_{\text{sr}}|$.

ZADANIA

- Podczas treningu na basenie o długości $l = 50 \text{ m}$ zawodnik przeptynał 100 m w czasie $t = 50 \text{ s}$. Oblicz:
 - szybkość średnią pływaka w tym ruchu,
 - wartość prędkości średniej pływaka w tym ruchu.
- Na rysunku 2.15 przedstawiono wykresy zależności $s(t)$ dla dwóch ciał poruszających się po linii prostej.



Rys. 2.15

Oblicz dla każdego ciała jego szybkość średnią:

- w czasie dwóch pierwszych godzin ruchu,
- w czasie trzech pierwszych godzin ruchu,
- w czasie czterech godzin ruchu.

Porównaj otrzymane wyniki.

3. W samochodzie jadącym prostoliniowym odcinkiem szosy z szybkością średnią $v_{sr} = 60 \text{ km/h}$ zabrakło benzyny po 15 minutach jazdy. Kierowca wyruszył więc pieszo z szybkością $v = 6 \text{ km/h}$ do stacji benzynowej, którą minął 3 minuty wcześniej. Oblicz (w km/h) szybkość średnią kierowcy w czasie, który upłynął od początku podróży do chwili przyścia na stację benzynową.
4. Marek biegnie z szybkością $3,5 \text{ m/s}$, a Adam idzie z szybkością $1,5 \text{ m/s}$. Oblicz czas, po którym Marek dogoni Adama, jeśli w chwili rozpoczęcia biegu Adam znajdował się 100 m przed Markiem, oraz drogę, którą Adam przebędzie w tym czasie. Chłopcy poruszają się po tej samej prostej.
5. Pierwszą połowę drogi samochód poruszał się z szybkością 40 km/h , a drugą połowę z szybkością 60 km/h . Oblicz szybkość średnią samochodu na całej trasie.
6. Na trasie, na której obowiązuje ograniczenie szybkości do 70 km/h , prowadzony jest odcinkowy pomiar prędkości pojazdów. Przez połowę kontrolowanego odcinka kierowca jedzie z prędkością o wartości 90 km/h . Oblicz szybkość, z jaką kierowca powinien przebyć drugą połowę tego odcinka, aby nie przekroczyć obowiązującego limitu.





3. Pojęcia i wielkości fizyczne opisujące ruch (II)

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- posługiwać się pojęciami przyspieszenie średnie i chwilowe,
- konstruować schematyczne rysunki przedstawiające prędkości i ich zmiany w ruchach prostoliniowych i krzywoliniowych,
- wyprowadzić wzór na wartość przyspieszenia w ruchu krzywoliniowym.

→ **Przypomnij sobie**, co wiesz o przyspieszeniu.

Przyspieszenie średnie i chwilowe

Ruch tramwaju odjeżdżającego z przystanku, jabłka spadającego z drzewa, samochodu hamującego przed skrzyżowaniem ulic, sanek pchniętych pod górkę i ześlizgujących się z niej czy też motocykla na torze wyścigowym – to ruch, w którym zmienia się prędkość ciała. W pierwszych trzech wymienionych wyżej przypadkach zmienia się wartość prędkości, w czwartym – jej wartość i zwrot, a w ostatnim – jej kierunek i zwrot lub kierunek, zwrot i wartość.

We wszystkich tych przykładach następuje (w czasie $\Delta t = t - t_0$) zmiana prędkości równa różnicy między prędkością $\vec{v}$ ciała w chwili t i prędkością $\vec{v}_0$ w chwili t_0 .

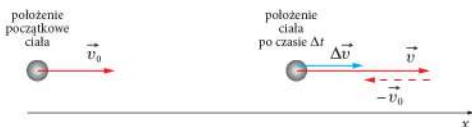
$$\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$$

Aby narysować wektor $\Delta \vec{v}$, należy wykonać odejmowanie wektorów, czyli do wektora $\vec{v}$ dodać wektor przeciwny do $\vec{v}_0$:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v} + (-\vec{v}_0)$$

Skonstruujemy teraz wektor $\Delta \vec{v}$ w trzech różnych przypadkach.

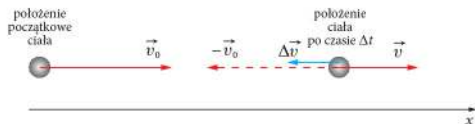
1. Ruch odbywa się po prostej stale w tę samą stronę i ciało przyspiesza, czyli $v > v_0$ (rys. 3.1).



Rys. 3.1 Zmiana prędkości w ruchu po prostej

Wartość wektora przyrostu prędkości $\Delta \vec{v}$ jest w tym przypadku równa różnicy wartości wektorów $\vec{v}$ i $\vec{v}_0$ ($\Delta v = v - v_0$), kierunek jest taki sam jak kierunek wektorów $\vec{v}$ i $\vec{v}_0$, a **zwrot jest zgodny** ze zwrotami $\vec{v}$ i $\vec{v}_0$.

2. Ruch odbywa się po prostej stale w tę samą stronę i ciało zwalnia, czyli $v < v_0$ (rys. 3.2).

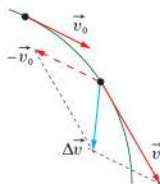


Rys. 3.2 Zmiana prędkości w ruchu po prostej

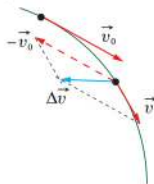
Wartość wektora przyrostu prędkości $\Delta \vec{v}$ jest w tym przypadku równa różnicy wartości wektorów $\vec{v}_0$ i $\vec{v}$, kierunek jest taki sam jak kierunek wektorów $\vec{v}$ i $\vec{v}_0$, a **zwrot jest przeciwny** do zwrotu wektorów $\vec{v}$ i $\vec{v}_0$.

3. Ruch odbywa się po krzywej (rys. 3.3).

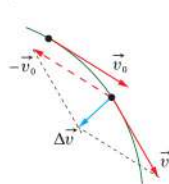
a) $v > v_0$



b) $v < v_0$



c) $v = v_0$



Rys. 3.3 Zmiana prędkości w ruchu po krzywej

W ruchu krzywoliniowym wartość wektora $\Delta \vec{v}$ **na ogół nie jest równa** różnicy wartości wektorów $\vec{v}$ i $\vec{v}_0$, a kierunek wektora $\Delta \vec{v}$ na ogół **jest inny** niż kierunek wektora prędkości chwilowej ciała w którejkolwiek z chwil rozważanego ruchu.

Uwaga: W ruchu prostoliniowym, w którym wartość prędkości nie ulega zmianie, wektor $\Delta \vec{v}$ ma wartość równą zero. Natomiast w ruchu krzywoliniowym, w którym wartość prędkości się nie zmienia (rys. 3.3c), wektor $\Delta \vec{v}$ ma wartość różną od zera.

Wielkością fizyczną opisującą ruch zmienny, związaną ze zmianą prędkości, jest **przyspieszenie** (średnie i chwilowe).

Przyspieszenie średnie jest to iloraz przyrostu prędkości ($\Delta \vec{v}$) i czasu (Δt), w którym ten przyrost nastąpił.

$$\vec{a}_s = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Z definicji przyspieszenia średniego wynika, że jego wartość to $a_{sr} = \frac{|\Delta v|}{\Delta t}$. Kierunek i zwrot przyspieszenia średniego jest zgodny z kierunkiem i zwrotem przyrostu prędkości $\Delta \vec{v}$, który nastąpił w czasie Δt .

O czym informuje nas przyspieszenie średnie?

Założmy, że w sytuacji przedstawionej na rysunku 3.1 przyrost prędkości $\Delta \vec{v}$ nastąpił w czasie $\Delta t = 2$ s. Jeśli np. $v_0 = 2$ m/s, a $v = 6$ m/s, to wartość przyspieszenia średniego jest równa:

$$a_{sr} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t} = \frac{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Otrzymany wynik oznacza, że podczas całego ruchu przyrost prędkości wynosił średnio 2 m/s w ciągu sekundy.

Przyspieszenie średnie informuje o tym, jaki przyrost prędkości nastąpił (średnio) w jednostce czasu.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Ile do „setki”?

Jednym z interesujących nas parametrów związanych z tzw. osiąganiami technicznymi samochodu jest czas, który upływa od chwili startu do uzyskania szybkości 100 km/h. Aktualnym rekordzistą w tej dziedzinie jest Bugatti Chiron (na rysunku) wyposażony w szesnastocylindrowy silnik o pojemności 8 litrów i mocy 1500 koni mechanicznych (czyli ok. 1,1 MW).



Osiąga on szybkość 100 km/h (czyli ok. 27,8 m/s) w czasie zaledwie 2,4 s od startu.

Przyspieszenie średnie samochodu jest równe:

$$a_{sr} = \frac{27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,4 \text{ s}} \approx 11,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Przyspieszenie to jest większe od przyspieszenia ziemskiego czyli przyspieszenia, z jakim na Ziemi spadają przedmioty, (które w naszej szerokości geograficznej ma wartość $9,81 \text{ m/s}^2$) o ponad 18 %. Dla porównania: popularna w Polsce Toyota Yaris w wersji o największej mocy potrzebuje 10,7 s, aby rozpędzić się do 100 km/h, więc jej przyspieszenie średnie ma wartość:

$$a_{sr} = \frac{27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10,7 \text{ s}} \approx 2,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Jeśli odstępy czasu, w których będziemy obliczać przyspieszenie średnie, będą coraz krótsze ($\Delta t \rightarrow 0$), to wyrażenie $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ będzie coraz bliższe chwilowemu przyspieszeniu ciała. Wobec tego przyspieszenie:

$$\vec{a} = \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0}$$

to **przyspieszenie chwilowe** ciała.

Z rysunków 3.1 i 3.2 wynika, że:

W ruchu prostoliniowym, w którym wartość prędkości wzrasta, wektory przyspieszenia i prędkości są zwrócone zgodnie. W ruchu prostoliniowym, w którym wartość prędkości maleje, wektor przyspieszenia jest zwrócony przeciwnie do wektora prędkości.

Z rysunku 3.3 wynika, że:

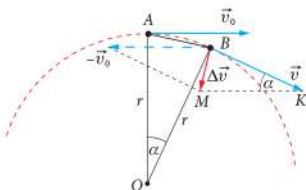
W ruchu krzywoliniowym wektory przyspieszenia i prędkości nie mają na ogół takich samych kierunków, tzn. przyspieszenie chwilowe na ogół nie jest styczne do toru.

Przyspieszenie w ruchu krzywoliniowym

W każdym ruchu krzywoliniowym wektor prędkości zmienia się, gdyż (co najmniej) zmienia się jego kierunek. Wartość prędkości może się zmieniać, lecz nie musi – zmiana wartości prędkości nie jest warunkiem koniecznym istnienia niezerowego przyspieszenia w ruchu krzywoliniowym.

Przykładem ruchu krzywoliniowego jest **ruch po okręgu z prędkością o stałej wartości**, zwany skrótowo¹ **ruchem jednostajnym po okręgu**. Wyprowadzimy teraz wzór na wartość przyspieszenia chwilowego w tym ruchu. Oznaczmy ją symbolem a_r .

Na rysunku 3.4 skonstruowano wektor przyrostu prędkości $\Delta \vec{v}$. Ten przyrost prędkości nastąpił w czasie Δt , w którym ciało poruszające się po okręgu o promieniu r przemieściło się z punktu A do punktu B .



Rys. 3.4 Konstrukcja wektora zmiany prędkości w ruchu jednostajnym po okręgu

$$a_r = \left(\frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0}$$

¹ Gdy używasz tej nazwy, pamiętaj, że tylko wartość prędkości w tym ruchu nie ulega zmianie.

Aby obliczyć a_r , musimy znaleźć długość $|\Delta \vec{v}|$ wektora zmiany prędkości $\Delta \vec{v}$. Korzystamy z podobieństwa trójkąta ABO (rys. 3.4) o bokach długości r , r , $|AB|$ do trójkąta BMK o bokach długości $|\vec{v}_0|$, $|\vec{v}|$, $|\Delta \vec{v}|$, przy czym $|\vec{v}_0| = |\vec{v}| = v$. Oba te trójkąty są równoramienne i mają równe kąty przy wierzchołkach O i K , ponieważ są to kąty o ramionach odpowiednio prostopadłych.

Odpowiednie boki trójkątów podobnych są proporcjonalne, więc:

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v} = \frac{|AB|}{r} \Rightarrow |\Delta \vec{v}| = \frac{v \cdot |AB|}{r}$$

$$a_r = \left(\frac{\frac{v \cdot |AB|}{r}}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0} = \left(\frac{v \cdot |AB|}{r \cdot \Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0} = \frac{v}{r} \left(\frac{|AB|}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0}$$

Gdy $\Delta t \rightarrow 0$, to:

- punkt B zbliża się do punktu A , a długość cięciwy AB dąży do długości łuku AB , czyli do drogi Δs przebytej przez ciało w czasie, w którym jego prędkość zmieniła się od $\vec{v}_0$ do $\vec{v}$;
- wektor $\Delta \vec{v}$ zwraca się coraz bardziej w stronę środka okręgu (kąt α jest coraz mniejszy).

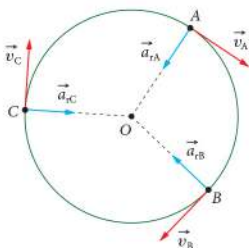
Korzystamy z definicji szybkości chwilowej:

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0} = v$$

co pozwala wyrazić wartość przyspieszenia wzorem:

$$a_r = \frac{v^2}{r} \quad (3.1)$$

Przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu ma w każdym punkcie toru **kierunek zgodny z kierunkiem promienia okręgu** (łączącego środek okręgu z tym punktem) i **zwrot do środka okręgu** (rys. 3.5). Przyspieszenie takie nazywamy **dośrodkowym** lub **normalnym**, a jego wartość wyrażamy wzorem (3.1).

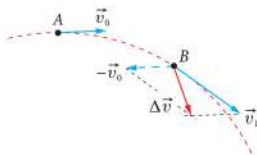


$$|\vec{v}_A| = |\vec{v}_B| = |\vec{v}_C|$$

$$|\vec{a}_{rA}| = |\vec{a}_{rB}| = |\vec{a}_{rC}|$$

Rys. 3.5 Przyspieszenie dośrodkowe w ruchu jednostajnym po okręgu

Skonstruujemy teraz wektor przyrostu prędkości $\Delta \vec{v}$ w ruchu krzywoliniowym, w którym zmienia się nie tylko kierunek prędkości, ale także jej wartość (rys. 3.6).



Rys. 3.6 Konstrukcja wektora zmiany prędkości w ruchu krzywoliniowym

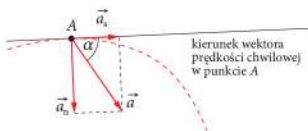
W tym przypadku wektor $\Delta \vec{v}$ na ogół nie jest prostopadły do wektora prędkości (ani w punkcie A, ani w punkcie B, ani w żadnym z punktów między A i B).

Jeśli będziemy rozumować podobnie jak przy wyprowadzaniu wzoru na wartość przyspieszenia dośrodkowego, możemy stwierdzić, że gdy odstęp czasu Δt , w którym nastąpił przyrost prędkości $\Delta \vec{v}$, dąży do zera, kierunek $\Delta \vec{v}$, a zatem i kierunek $\vec{a}_{sr}$ staje się coraz bliższy kierunkowi przyspieszenia chwilowego.

NM s. 285

Przyspieszenie chwilowe w ruchu krzywoliniowym, w którym wartość prędkości ulega zmianie, ma dwie składowe (rys. 3.7): składową $\vec{a}_n$ prostopadłą do prędkości chwilowej i składową $\vec{a}_s$ styczną do tej prędkości:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_s$$



Rys. 3.7 Składowe przyspieszenia chwilowego

Przyspieszenie $\vec{a}_n$ to **przyspieszenie normalne**, a $\vec{a}_s$ to **przyspieszenie styczne**.

- Przyspieszenie normalne związane ze **zmianą kierunku** prędkości występuje w **każdym ruchu krzywoliniowym**.
- Przyspieszenie styczne związane ze **zmianą wartości** prędkości występuje **tylko w takich ruchach krzywoliniowych**, w których **wartość prędkości ulega zmianie**.

W ruchu, w którym wartość prędkości rośnie jednostajnie:

$$a_s = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

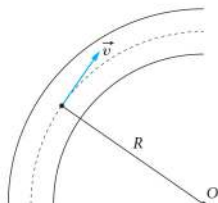
Aby obliczyć wartość przyspieszenia chwilowego $\vec{a}$, należy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_s^2}$$

W ruchu krzywoliniowym, w którym wartość prędkości wzrasta, kąt między wektorami prędkości chwilowej i przyspieszenia jest kątem ostrym ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), a w ruchu, w którym wartość prędkości maleje, jest on kątem rozwartym ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Sprawdź to samodzielnie: znajdź konstrukcyjnie $\Delta \vec{v}$, gdy $v < v_0$.

ZADANIA

- Autobus jechał ze stałą szybkością 72 km/h prawym pasem prostoliniowego odcinka autostrady. Motocyklista, poruszający się lewym pasem z szybkością 90 km/h, w trakcie wyprzedzania autobusu zwiększył szybkość do 126 km/h. Droga przebyta przez motocyklistę podczas przyspieszania była równa 75 m, a autobus przejechał w tym czasie 50 m. Oblicz średnią wartość przyspieszenia motocyklisty i jego szybkość średnią podczas wyprzedzania.
- Oblicz wartość przyspieszenia motocyklisty (patrz zadanie 1) w chwili, w której jego szybkość była równa $v = 108$ km/h, przy założeniu, że wyprzedzanie autobusu odbywało się na łuku poziomego, kołowego zakrętu o promieniu $R = 100$ m (patrz rysunek), a wartość przyspieszenia stycznego motocyklisty była stała i równa $a_s = 4$ m/s².
 - Przerysuj do zeszytu poniższy rysunek.
 - Narysuj i oznacz wektory przyspieszenia normalnego i stycznego, zachowując proporcję między ich długościami.
 - Następnie wykonaj konstrukcję geometryczną wektora przyspieszenia motocyklisty zgodnie z odpowiednią regułą dodawania wektorów.
- Bęben palniki ma kształt walca o promieniu podstawy $r = 0,24$ m. Przed rozpoczęciem wirowania obracał się on jednostajnie wokół poziomej osi obrotu, która jest osią symetrii bębna. Punkty leżące na powierzchni bocznej walca miały wówczas szybkość $v_0 = 2$ m/s. Następnie, w początkowej fazie wirowania, ich szybkość wzrosła jednostajnie od v_0 w chwili początkowej ($t_0 = 0$) do $v_1 = 6$ m/s w chwili $t_1 = 1$ s. Oblicz:
 - wartość przyspieszenia stycznego,
 - wartość przyspieszenia normalnego w chwili $t_1 = 1$ s,
 - wartość całkowitego przyspieszenia w chwili $t_1 = 1$ s rozważanych punktów bębna palniki.



4. Ruch jednostajny prostoliniowy

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- opisywać ruch jednostajny,
- określać położenie ciała,
- obliczać szybkość i drogę,
- sporządzać i interpretować wykresy $v(t)$, $v_x(t)$, $x(t)$ i $s(t)$.

→ **Przypomnij sobie** wiadomości o prostoliniowym ruchu jednostajnym, prędkości i drożdzie tym ruchu.

Ruch po prostej to tzw. ruch w jednym wymiarze. Do opisu takiego ruchu wybieramy jednowymiarowy układ współrzędnych (np. oś x) i wiążemy go zazwyczaj z układem odniesienia tak, by kierunek osi był zgodny z kierunkiem ruchu, a zwrot zgodny ze zwrotem prędkości początkowej ciała.

Przy opisywaniu ruchu należy określić, czy i jak zmieniają się w czasie jego trwania położenie, prędkość i przyspieszenie ciała, a także jak z upływem czasu wzrasta droga. Zależność wymienionych wyżej wielkości fizycznych od czasu zapisujemy w języku matematyki w postaci odpowiednich funkcji.

NM s. 275

Najprostszym przypadkiem ruchu po prostej jest **ruch jednostajny**.

Ruch ten odbywa się ze **stałą**, czyli niezmienną w czasie **prędkością**. Prędkość chwilowa jest więc w tym ruchu równa prędkości średniej ($\vec{v} = \vec{v}_s$), a szybkość chwilowa (wartość prędkości chwilowej) – szybkości średniej ($v = v_s$). Na rysunku 4.1 przedstawiono wykres $v(t)$.



Rys. 4.1 Wykres $v(t)$ w ruchu jednostajnym prostoliniowym

Rozważmy ruch jednostajny samochodu w układzie współrzędnych przedstawionym na rysunku 4.2.



Rys. 4.2 Ilustracja do wyprowadzenia wzoru 4.1

Do obliczenia drogi s przebytej przez ciało w czasie $\Delta t = t$ ($t_0 = 0$) stosujemy definicję szybkości średniej (wzór 2.1). Oznaczamy $v_{\text{sr}} = v$ i zapisujemy:

$$s = vt$$

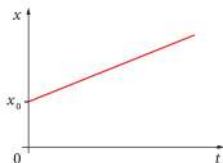
Ponadto $s = x - x_0$, więc:

$$x - x_0 = vt$$

Współrzędna położenia ciała w chwili t (czyli po czasie t od chwili $t_0 = 0$) wyraża się wobec tego wzorem:

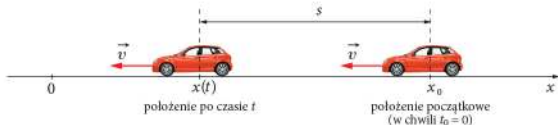
$$x = x_0 + vt \quad (4.1)$$

Ze wzoru (4.1) wynika, że funkcja $x(t)$ jest liniowa i rosnąca. Wykres zależności $x(t)$ pokazano na rysunku 4.3.



Rys. 4.3 Wykres $x(t)$ w ruchu jednostajnym prostoliniowym, gdy zwrot prędkości jest zgodny ze zwrotem osi x

Załóżmy, że w układzie współrzędnych wybranym do opisu ruchu samochodu (rys. 4.2) chcemy opisać ruch innego pojazdu poruszającego się w przeciwną stronę, czyli z prędkością zwróconą przeciwnie do osi x (rys. 4.4).



Rys. 4.4 Ilustracja do wyprowadzenia wzoru 4.2

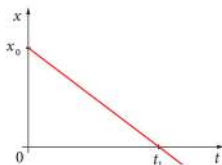
W sytuacji przedstawionej powyżej:

$$s = x_0 - x = vt$$

więc:

$$x = x_0 - vt \quad (4.2)$$

Funkcja $x(t)$ jest w tym przypadku liniową, malejącą funkcją czasu, a jej wykres przedstawiono na rysunku 4.5.



Rys. 4.5 Wykres $x(t)$ w ruchu jednostajnym prostoliniowym, w którym zwrot prędkości jest przeciwny do zwrotu osi x

Zwróć uwagę, że w miarę upływu czasu iloczyn vt rośnie i w pewnej chwili t_1 osiąga wartość vt_1 równą x_0 (ciało znajduje się wtedy w początku układu, tj. w punkcie o współrzędnej $x = 0$). Dla wszystkich późniejszych chwil współrzędna położenia jest w tym przypadku ujemna.

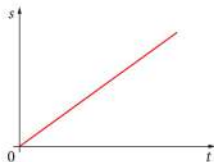
Wobec tego **położenie ciała, w wybranym układzie współrzędnych, może być opisane przez współrzędną dodatnią lub ujemną, natomiast droga przebyta przez ciało ruchem jednostajnym, wyrażona wzorem:**

$$s = vt$$

NM 4.272

jest wprost proporcjonalna do czasu i zawsze nieujemna (dodatnia dla $t > 0$ lub równa zero dla $t = 0$).

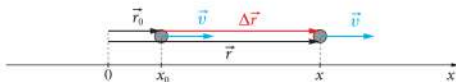
Wykres zależności $s(t)$ przedstawiono na rysunku 4.6.



Rys. 4.6 Wykres $s(t)$ w ruchu jednostajnym prostoliniowym

Wektorowy opis ruchu jednostajnego

Opiszemy teraz wektorowo ruch jednostajny w takim samym układzie współrzędnych jak poprzednio.



Rys. 4.7 Ilustracja do wyprowadzenia wzoru 4.3

Na rysunku 4.7:

$\vec{r}_0$ jest wektorem położenia ciała w chwili t_0 , $\vec{r}$ – wektorem położenia ciała w chwili t , a $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ jest wektorem przemieszczenia w czasie $\Delta t = t - t_0$.

Z definicji prędkości średniej (2.2) $\Delta\vec{r} = \vec{v}_{\text{sr}}\Delta t$. W ruchu jednostajnym po prostej prędkość średnia jest równa stałej prędkości (chwilowej) $\vec{v}$ w tym ruchu, zatem:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}\Delta t$$

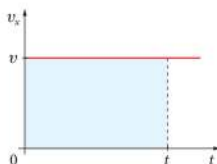
Jeśli dodatkowo założymy, że czas trwania ruchu mierzymy od chwili, w której ciało zajmuje położenie opisane wektorem $\vec{r}_0$ ($t_0 = 0$), powyższy wzór przyjmie postać:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t \quad (4.3)$$

Wszystkie wektory w równaniu (4.3) leżą na osi x , więc gdy zastąpimy je ich współrzędnymi na tej osi, otrzymamy:

$$r_x = r_{0x} + v_x t$$

W sytuacji przedstawionej na rysunku 4.7 zwrot $\vec{v}$ jest zgodny ze zwrotem osi x , zatem współrzędna v_x wektora $\vec{v}$ jest dodatnia (rys. 4.8).



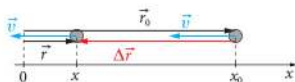
Rys. 4.8 Wykres $v_x(t)$ w ruchu jednostajnym prostoliniowym, w którym zwrot prędkości jest zgodny ze zwrotem osi

Po podstawieniu $r_x = x$, $r_{0x} = x_0$, $v_x = v$ zgodnie z oznaczeniami na rysunku 4.7 otrzymamy:

$$x = x_0 + vt \quad (4.4)$$

Jeśli zwrot wektora prędkości ciała jest przeciwny do zwrotu osi x (jak w sytuacji przedstawionej na rysunku 4.9), to współrzędna prędkości $\vec{v}$ jest ujemna, $v_x = -v$ (rys. 4.10), więc:

$$x = x_0 - vt \quad (4.5)$$



Rys. 4.9 Ilustracja do wyprowadzenia wzoru 4.5



Rys. 4.10 Wykres $v_x(t)$ w ruchu jednostajnym prostoliniowym, w którym zwrot prędkości jest przeciwny do zwrotu osi x

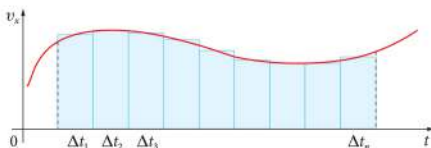
Gdy porównamy wzory (4.1) z (4.4) oraz (4.2) z (4.5), stwierdzimy, że są identyczne. Wobec tego **równanie wektorowe można przedstawić w postaci równania liczbowego, zastępując wektory ich współzrędnymi w wybranym układzie współrzędnych.** Równania (4.4) i (4.5) nazywamy **kinematycznymi równaniami ruchu jednostajnego.**

Obliczanie drogi na podstawie wykresu $v_x(t)$

Wróćmy do wykresów $v_x(t)$ (rys. 4.8 i 4.10) i zastanówmy się, jak można zinterpretować pola prostokątów zaznaczonych na tych wykresach kolorem niebieskim. Boki każdego z tych prostokątów mają długości równe odpowiednio wartości prędkości v i czasowi t , który upłynął od chwili $t_0 = 0$ do chwili zaznaczonej na osi czasu. Zatem pola tych prostokątów **obrazują graficznie drogę** przebytą w czasie t przez ciało poruszające się z szybkością v . Na podstawie tego faktu można obliczyć drogę w **dowolnym ruchu prostoliniowym** wzdłuż osi x , jeśli znamy zależność $v_x(t)$ w tym ruchu.

Tę metodę zastosowano dla ruchu jednostajnego i ruchów jednostajnie zmiennych w przykładach 4.1 oraz 6.1–6.3.

Rozważmy ruch, w którym współrzędna wektora prędkości zmienia się w czasie, tak jak na rysunku 4.11.



Rys. 4.11 Graficzne przedstawienie drogi i sposobu jej odczytywania z wykresu $v_x(t)$

Jeśli czas trwania ruchu podzielimy na tak krótkie odstępy $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots, \Delta t_n$, by w każdym z nich wartość prędkości można było uważać za stałą, otrzymamy szereg prostokątów, których pola będą równe liczbowo zmianom położenia ciała $|\Delta x_1|, |\Delta x_2|, |\Delta x_3|, \dots, |\Delta x_n|$ w tych odstępach czasu. Droga s przebyta w czasie:

$$t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \dots + \Delta t_n$$

jest równa liczbowo sumie pól wszystkich prostokątów, które dokładnie pokrywają powierzchnię zawartą pomiędzy wykresem współrzędnej prędkości² a osią czasu, gdy każdy z przedziałów czasu będzie dążył do zera (a liczba przedziałów do nieskończoności). Wynika stąd, że:

Drogę w dowolnym ruchu wzdłuż osi x można obliczyć jako pole figury zawartej między wykresem współrzędnej prędkości a osią czasu.

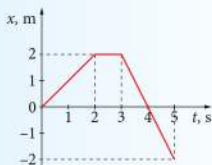
² W niektórych podręcznikach mówi się o wykresie $v_x(t)$ jako o wykresie prędkości od czasu.

W taki sam sposób na podstawie wykresu $v_x(t)$ można obliczyć zmianę położenia Δx , ale jeśli chcemy obliczyć położenie, które osiągnie ciało po czasie t , musimy dodatkowo znać jego położenie początkowe x_0 .

PRZYKŁAD 4.1

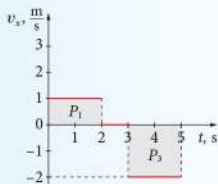
Droga i przemieszczenie w ruchu jednostajnym

Na podstawie wykresu $x(t)$ przedstawionego na rysunku 4.12 opiszemy ruch ciała, narysujemy wykres $v_x(t)$ i skorzystamy z niego, aby obliczyć drogę przebytą przez ciało oraz wartość przemieszczenia w czasie $t = 5$ s.



Rys. 4.12

Zależność $x(t)$ jest przedziałami liniowa – ciało poruszało się ruchem jednostajnym (w pierwszym i trzecim przedziale czasu), a w drugim spoczywało. Podczas dwóch pierwszych sekund ruchu ciało poruszało się z prędkością o wartości $v_1 = 1$ m/s zwróconą zgodnie z osią x , więc $v_{1x} = 1$ m/s. Przez kolejną sekundę pozostawało w spoczynku ($v_{2x} = 0$), a następnie poruszało się z prędkością o wartości 2 m/s, zwróconą przeciwnie do zwrotu osi x , więc $v_{3x} = -2$ m/s.



Rys. 4.13

Droga s przebyta przez ciało w czasie całego ruchu jest sumą pól prostokątów zaznaczonych na rysunku 4.13, a wartość przemieszczenia $|\Delta \vec{x}|$ jest równa wartości bezwzględnej różnicy tych pól.

$$s = P_1 + P_3 = 6 \text{ m}$$

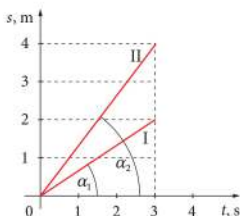
$$|\Delta \vec{x}| = |P_1 - P_3| = 2 \text{ m}$$

Zauważ, że drogę przebytą przez ciało w czasie 5 sekund można obliczyć na podstawie wykresu $x(t)$ na rysunku 4.12: najpierw ciało przebyło drogę 2 m zgodnie ze zwrotem osi x , a następnie 4 m w przeciwną stronę.

ZADANIA

NM 4.276

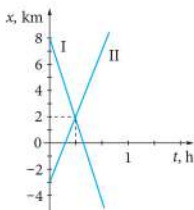
1. Na wykresach (rys. 4.14) przedstawiono zależność drogi od czasu dla dwóch ruchów jednostajnych prostoliniowych.



Rys. 4.14

Oblicz szybkość ciała w każdym ruchu. Porównaj otrzymane wyniki i sformułuj wnioski na temat kątów nachylenia wykresów.

- Przez pierwsze 10 minut ruchu samochód poruszał się ze stałą szybkością 54 km/h, a przez następne 20 minut – ze stałą szybkością 72 km/h. Narysuj wykres $s(t)$ dla tego samochodu. Oblicz jego szybkość średnią w czasie całego ruchu.
- Na jednym rysunku przedstaw wykresy zależności $x(t)$ dla Marka i Adama (o których mowa w zadaniu 4 na s. 23), przy założeniu, że w chwili $t_0 = 0$ Marek znajdował się w punkcie o współrzędnej $x_0 = 0$.
- Wykresy (rys. 4.15) przedstawiają zależność współrzędnej położenia od czasu dla dwóch rowerzystów poruszających się równolegle do osi x .



Rys. 4.15

- Na podstawie wykresów odpowiedz na poniższe pytania.
 - Po jakim czasie od rozpoczęcia ruchu rowerzyści minęli się na szosie?
 - Jaką drogę przebył każdy z rowerzystów do chwili spotkania?
 - Z jaką szybkością poruszał się każdy z rowerzystów?
- Napisz kinematyczne równanie ruchu $x(t)$ dla każdego z rowerzystów.
- Na jednym rysunku przedstaw wykresy współrzędnych wektorów prędkości obu rowerzystów $v_x(t)$ w przedziale od 0 h do 1 h.
- Oblicz odległość d między rowerzystami po czasie $t = \frac{4}{3}$ h od chwili spotkania.



5. Ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- definiować ruch jednostajnie zmienny,
- wyprowadzać wzory na szybkość i drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym i jednostajnie opóźnionym,
- sporządzać i interpretować wykresy wprowadzonych wielkości w zależności od czasu,
- doświadczalnie wyznaczyć wartość przyspieszenia w ruchu prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym.

➔ **Przypomnij sobie** wiadomości o prostoliniowym ruchu jednostajnie zmiennym, przyspieszeniu i prędkości w tym ruchu.

Ruchy, z którymi mamy na co dzień do czynienia, rzadko są ruchami jednostajnymi. Najczęściej są to ruchy zmienne, przyspieszone i opóźnione niejednostajnie. Matematyczny opis takich ruchów jest na ogół dość skomplikowany. O wiele łatwiej można opisać ruch **jednostajnie zmienny**, w którym **przyspieszenie jest stałe**, czyli nie zmienia się z upływem czasu.

Z faktu, że $\vec{a} = \text{const}$, wynika, że przyspieszenie chwilowe w każdej chwili ruchu jednostajnie zmiennego jest równe przyspieszeniu średniemu:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (5.1)$$

Po pomnożeniu obu stron wzoru (5.1) przez Δt otrzymamy:

$$\Delta \vec{v} = \vec{a} \Delta t$$

ale ponieważ

$$\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$$

gdzie $\vec{v}_0$ to prędkość początkowa ciała, a $\vec{v}$ to prędkość po czasie Δt , to:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \Delta t \quad (5.2)$$

Jeśli opis ruchu rozpoczynamy w chwili $t_0 = 0$, to $\Delta t = t - t_0 = t$, więc:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t \quad (5.3)$$

Prędkość w ruchu jednostajnie zmiennym jest **liniową** funkcją czasu.

Opiszemy teraz kolejno:

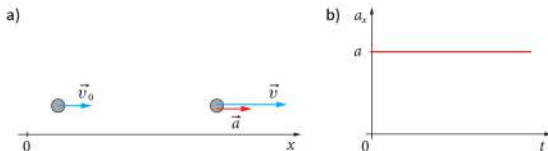
- ruch jednostajnie przyspieszony,
- ruch jednostajnie opóźniony.

Ruch jednostajnie przyspieszony

Ruch, w którym **przyspieszenie jest stałe** i jego **zwrot jest zgodny ze zwrotem prędkości** ciała, nazywamy ruchem **jednostajnie przyspieszonym**.

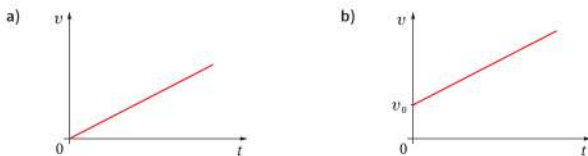
Jeśli do opisu ruchu wybierzemy oś x zwróconą tak, jak na rysunku 5.1a, to współrzędne wektorów będą dodatnie: $v_x = v$, $v_{0x} = v_0$, $a_x = a$, więc:

$$v = v_0 + a\Delta t \quad \text{lub} \quad v = v_0 + at \quad (\text{jeśli } t_0 = 0)$$



Rys. 5.1 Ciało w ruchu jednostajnie przyspieszonym (a); wykres $a_x(t)$ w ruchu jednostajnie przyspieszonym (b), w którym zwrot przyspieszenia jest zgodny ze zwrotem osi x

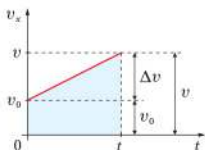
Zauważ, że wykres $a_x(t)$ byłby taki sam, gdyby zwrot prędkości był przeciwny do zwrotu osi x . Wartość prędkości początkowej v_0 może być równa zero (rys. 5.2a) lub różna od zera (rys. 5.2b).



Rys. 5.2 Wykres $v(t)$ w ruchu jednostajnie przyspieszonym: $v_0 = 0$ (a); $v_0 \neq 0$ (b)

Widzimy, że w ruchu jednostajnie przyspieszonym **szybkość rośnie liniowo z czasem**, czyli jest **liniową, rosnącą funkcją czasu**.

Na podstawie wykresu zależności współrzędnej prędkości od czasu obliczymy teraz drogę przebytą w czasie t przez ciało poruszające się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Rozważymy przypadek, gdy $v_0 \neq 0$. Pole trapezu pod wykresem $v_x(t)$ (rys. 5.3) podzielimy na pole prostokąta o bokach v_0 i t oraz pole trójkąta prostokątnego o podstawie t i wysokości Δv .



Rys. 5.3 Wykres $v_x(t)$ w ruchu jednostajnie przyspieszonym (zwrot prędkości zgodny ze zwrotem osi x)

Wówczas:

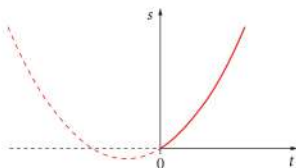
$$s = v_0 t + \frac{1}{2} \Delta v t$$

ale $\Delta v = at$, więc:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (5.4)$$

NM s. 279

Droga przebyta ruchem jednostajnie przyspieszonym jest kwadratową funkcją czasu. Jej wykres (rys. 5.4) to część jednego ramienia paraboli (bo $t \geq 0$).

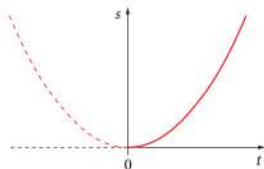


Rys. 5.4 Wykres $s(t)$ w ruchu jednostajnie przyspieszonym ($v_0 > 0$)

Jeśli $v_0 = 0$, to:

$$s = \frac{at^2}{2}$$

a wykres zależności $s(t)$ w tym przypadku pokazano na rysunku 5.5.



Rys. 5.5 Wykres $s(t)$ w ruchu jednostajnie przyspieszonym ($v_0 = 0$)

Drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym możemy też łatwo obliczyć z innego wzoru. Jeśli pole figury pod wykresem $v_x(t)$ (rys. 5.3) obliczymy za pomocą wzoru na pole trapezu o podstawach v_0 i v oraz wysokości t , to otrzymamy:

$$s = \frac{1}{2} (v_0 + v) t$$

Z porównania powyższego wzoru ze wzorem na drogę wyrażoną przez szybkość średnią $s = v_{sr}t$ (patrz wzór 2.1) wynika, że szybkość średnia w ruchu jednostajnie przyspieszonym jest średnią arytmetyczną szybkości początkowej v_0 i szybkości v uzyskanej przez ciało po upływie czasu t od początku ruchu:

$$v_{sr} = \frac{1}{2}(v_0 + v) \quad (5.5)$$

Zależność położenia x ciała od czasu dla ruchu jednostajnie przyspieszonego można znaleźć w podobny sposób jak dla ruchu jednostajnego.

Skoro znamy wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym i wiemy, że w rozważanym ruchu $s = |\Delta \vec{r}|$, możemy napisać:

$$|\Delta \vec{r}| = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (5.6)$$

lub wektorowo (ponieważ kierunki i zwroty wektorów $\Delta \vec{r}$, $\vec{v}_0$ i $\vec{a}$ są w tym przypadku zgodne):

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \quad (5.7)$$

Wzór (5.7) jest słuszny w każdym jednostajnie zmiennym ruchu prostoliniowym bez względu na zwroty wektorów prędkości początkowej i przyspieszenia.

Zapiszemy go teraz za pomocą współrzędnych wektorów. W ruchu jednostajnie zmiennym prostoliniowym wzdłuż osi x będzie on miał postać:

$$\Delta x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \quad \text{lub} \quad x - x_0 = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

A zatem kinematyczne równanie ruchu jednostajnie zmiennego ma postać:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (5.8)$$

Jest to równanie **paraboli**. Współczynniki x_0 , v_{0x} i a_x są współrzędnymi wektorów. Po wstawieniu ich wartości z odpowiednim znakiem otrzymamy równania przedstawiające zależność współrzędnej położenia od czasu $x(t)$ dla różnych szczególnych przypadków.

Ruch jednostajnie opóźniony

W ruchu jednostajnie opóźnionym przyspieszenie jest **stałe** i **zwrócone przeciwnie do wektora prędkości**. W równaniu wektorowym:

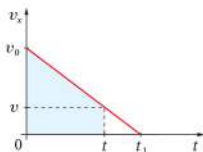
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

zastępujemy wektory ich współrzędnymi. Gdy oś x jest zwrócona zgodnie ze zwrotem prędkości ciała, to: $v_x = v$, $v_{0x} = v_0$, $a_x = -a$. Otrzymujemy wówczas:

$$v = v_0 - at$$

W ruchu jednostajnie opóźnionym szybkość jest liniową, malejącą funkcją czasu (rys. 5.6). Wraz z upływem czasu iloczyn at rośnie i w chwili t_1 osiąga wartość $at_1 = v_0$, tzn. ciało zatrzymuje się ($v = 0$).

Aby obliczyć drogę w ruchu jednostajnie opóźnionym przebytą przez ciało w czasie $t < t_1$, obliczamy pole trapezu zaznaczonego na wykresie kolorem niebieskim (rys. 5.6), tak jak to robiliśmy dla ruchu jednostajnie przyspieszonego.

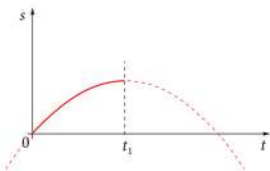


Rys. 5.6 Wykres $v_x(t)$ w ruchu jednostajnie opóźnionym

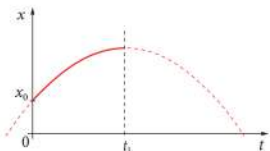
NM s. 281 Otrzymujemy:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2$$

gdzie a jest wartością wektora przyspieszenia³. Wykresem drogi jest część ramienia paraboli zwróconej wierzchołkiem do góry (rys. 5.7). W chwili t_1 ciało się zatrzymało.



Rys. 5.7 Wykres $s(t)$ w ruchu jednostajnie opóźnionym



Rys. 5.8 Wykres $x(t)$ w ruchu jednostajnie opóźnionym

³ W ruchu, w którym wartość prędkości maleje, przyspieszenie bywa nazywane opóźnieniem i jego wartość jest obliczana ze wzoru $a = \frac{|\Delta v|}{t}$.

Współrzedną położenia $x(t)$ ciała poruszającego się ruchem jednostajnie opóźnionym znajdujemy po wstawieniu do równania (5.8) odpowiednich współrzędnych wektorów. W ruchu, w którym $v_{0x} = v_0$, $a_x = -a$ (oś x jest zwrócona zgodnie z $\vec{v}$):

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2} \quad (5.9)$$

Wykres tej zależności od $t = 0$ do chwili, w której ciało się zatrzyma, przedstawiono linią ciągłą na rysunku 5.8.

W powyższych rozważaniach rozróżnialiśmy ruch jednostajnie przyspieszony i opóźniony jako szczególne przypadki ruchu jednostajnie zmiennego. Rozróżnienie to ma oczywisty sens fizyczny i znaczenie praktyczne. Podczas rozwiązywania zadań, w których chcemy obliczyć szybkość i drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym, korzystamy ze wzorów:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad v = v_0 + at$$

a w ruchu jednostajnie opóźnionym – ze wzorów:

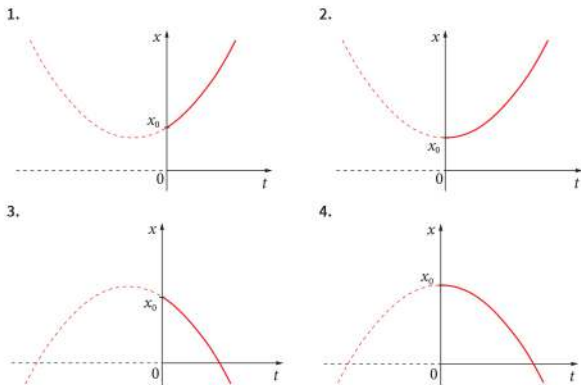
$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2} \quad v = v_0 - at$$

Należy jednak pamiętać, że stwierdzenie, czy dane ciało się porusza, a jeśli tak, to jakim rodzajem ruchu, zależy od wyboru układu odniesienia (patrz zadanie 7 na s. 45).

ZADANIA



1. Na rysunku 5.9 przedstawiono wykresy zależności $x(t)$ dla czterech różnych ruchów.



Rys. 5.9

a) Każdemu wykresowi przyporządkuj jedno z poniższych równań.

A. $x = x_0 - v_0 t - \frac{at^2}{2}$

B. $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$

C. $x = x_0 - \frac{at^2}{2}$

D. $x = x_0 + \frac{at^2}{2}$

b) Ułóż zadanie, którego rozwiązaniem będzie jedna z zależności $x(t)$, wybrana spośród podanych powyżej.

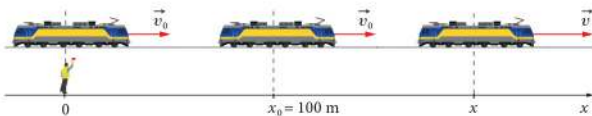
2. Zastosuj wzór (5.5) do obliczenia szybkości średniej ciała (dla którego $v_0 = 0$), poruszającego się z przyspieszeniem o wartości $a = 2 \text{ m/s}^2$:

a) w czasie pierwszych pięciu sekund ruchu,

b) w czasie trzeciej i czwartej sekundy ruchu łącznie.

Uwaga: Szybkość na początku trzeciej sekundy jest równocześnie szybkością w końcu drugiej sekundy ruchu.

3. Pociąg jadący ruchem jednostajnym z szybkością 10 m/s po prostoliniowym torze minął pracownika kolei i w odległości 100 m od niego zaczął zwiększać szybkość, poruszając się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem o wartości $0,5 \text{ m/s}^2$ (rys. 5.10).



Rys. 5.10

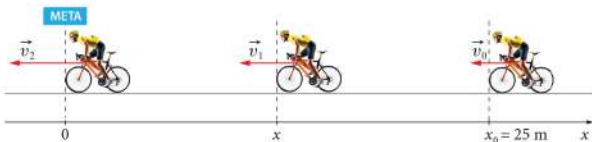
Oblicz:

a) szybkość pociągu,

b) odległość pociągu od pracownika kolei

po upływie 10 s od chwili, w której pociąg zaczął przyspieszać.

4. Lider wyścigu kolarskiego rozpoczął „ostry finisz” 25 m przed metą w chwili, gdy jego szybkość była równa 10 m/s , i minął linię mety z szybkością 15 m/s . Ten ostatni fragment trasy przebył ruchem jednostajnie przyspieszonym.



Rys. 5.11

a) Napisz funkcję czasu przedstawiającą zależność współrzędnej położenia finiszującego kolarza od czasu w układzie współrzędnych przedstawionym na rysunku 5.11.

b) Oblicz szybkość kolarza i jego odległość od mety po upływie 1 s od rozpoczęcia finiszu.

5. Kierowca samochodu jadącego ruchem jednostajnym prostoliniowym z szybkością 20 m/s minął znak ograniczenia szybkości i w odległości 5 m od znaku rozpoczął hamowanie z przyspieszeniem o wartości 3 m/s^2 . Dozwołoną szybkość uzyskał po upływie 2 s od rozpoczęcia hamowania.



Rys. 5.12

- Napisz funkcję przedstawiającą zależność współrzędnej położenia hamującego samochodu od czasu w układzie współrzędnych przedstawionym na rysunku 5.12.
 - Oblicz odległość samochodu od znaku drogowego w chwili, w której samochód uzyskał dozwoloną szybkość.
 - Oblicz wartość prędkości dozwolonej na odcinku szosy, którą jechał samochód.
6. Samolot pasażerski Boeing 747 lądujący na lotnisku Balice pod Krakowem przy bezwietrznej pogodzie miał szybkość 270 km/h w chwili zetknięcia kół podwozia z płytą lotniska. Znajdował się wówczas w odległości $2,4 \text{ km}$ od końca pasa przeznaczanego do lądowania (rys. 5.13) i rozpoczynał trwające 50 s hamowanie ze stałym przyspieszeniem aż do zatrzymania.



Rys. 5.13

- Napisz funkcję przedstawiającą zależność współrzędnej położenia hamującego samolotu od czasu w układzie współrzędnych przedstawionym na rysunku 5.13.
 - Oblicz średnią szybkość Boeinga 747 podczas hamowania oraz odległość od końca pasa lotniska do miejsca, w którym samolot się zatrzymał.
7. Człowiek znajdujący się w koszu balonu wznoszącego się pionowo w górę ze stałą szybkością v upuszcza kamień w chwili, gdy balon znajduje się na wysokości H nad podłożem.
- Opisz ruch kamienia w układzie odniesienia związanym z obserwatorem:
 - na powierzchni Ziemi,
 - w balonie.
 - W obu układach odniesienia wyprowadź wzór na czas upływający od chwili upuszczenia kamienia do chwili jego uderzenia o podłoże. Porównaj wyniki.
8. Wykaż, korzystając z definicji szybkości średniej i wzorów opisujących ruch jednostajnie opóźniony, że szybkość średnia ciała będącego w ruchu jednostajnie opóźnionym wyraża się wzorem (5.5).



6. Przykłady opisu ruchów zmiennych

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

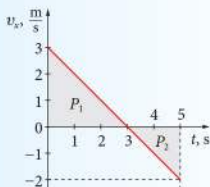
- analizować przykłady ruchów zmiennych,
- wykorzystywać przedstawione rozumowania w rozwiązywaniu zadań dotyczących opisu ruchów.

→ **Przypomnij sobie** wiadomości o swobodnym spadaniu ciał.

PRZYKŁAD 6.1

Droga i przemieszczenie w ruchu jednostajnie zmiennym

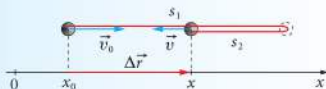
Obliczymy drogę i wartość przemieszczenia w czasie 5 sekund ruchu prostoliniowego, dla którego wykres zależności $v_x(t)$ przedstawiono na rysunku 6.1.



Rys. 6.1

Z wykresu wynika, że w ciągu pierwszych 3 sekund ciało poruszało się ruchem jednostajnie opóźnionym, w chwili $t = 3$ s zatrzymało się ($v_x = 0$), „zawróciło” (o zmianie zwrotu prędkości informuje nas zmiana znaku współrzędnej) i w ciągu następnych 2 sekund poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym z takim samym przyspieszeniem, jak w pierwszej fazie ruchu. Wartość przyspieszenia $a = 1 \text{ m/s}^2$.

Drogę $s = s_1 + s_2$ (rys. 6.2) przebytą przez ciało łatwo obliczyć na podstawie wykresu $v_x(t)$ – jako sumę pól trójkątów P_1 i P_2 (rys. 6.1): $s = 4,5 \text{ m} + 2 \text{ m} = 6,5 \text{ m}$.



Rys. 6.2

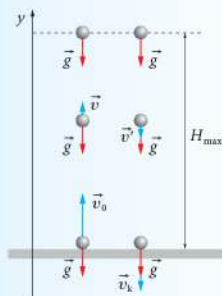
Z kolei wartość wektora przemieszczenia $|\Delta \vec{r}| = |s_1 - s_2|$ jest równa wartości bezwzględnej różnicy pól trójkątów P_1 i P_2 .

$$|\Delta \vec{r}| = 2,5 \text{ m}$$

PRZYKŁAD 6.2

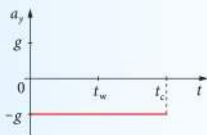
Rzut pionowy w górę

Przeanalizujemy ruch ciała rzuconego pionowo do góry z prędkością początkową $\vec{v}_0$ (rys. 6.3).



Rys. 6.3

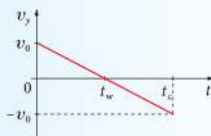
Przyjmijmy, że oś y jest zwrócona zgodnie ze zwrotem $\vec{v}_0$. Przyspieszenie ziemskie $\vec{g}$, z którym porusza się ciało, zwrócone jest stale w dół (przeciwnie do zwrotu osi y), a więc jego współrzędna jest ujemna: $a_y = -g$ (rys. 6.4). Ciało wznosi się ruchem jednostajnie opóźnionym.



Rys. 6.4

Współrzędna prędkości (rys. 6.5) zmienia się w czasie zgodnie z równaniem:

$$v_y = v_0 - gt \quad (6.1)$$



Rys. 6.5

Podczas ruchu w górę współrzędna v_y jest dodatnia, a wartość prędkości maleje i osiąga w najwyższym punkcie toru wartość $v = 0$. Podczas ruchu w dół współrzędna v_y jest ujemna, a wartość prędkości rośnie i tuż przed zderzeniem z podłożem jest równa v_0 .

Czas wznoszenia obliczamy przez podstawienie $v_y = 0$ do wzoru (6.1).

$$0 = v_0 - gt_w$$

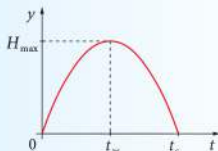
skąd:

$$t_w = \frac{v_0}{g}$$

Współrzedną położenia ciała w dowolnej chwili można obliczyć z równania:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (6.2)$$

Wykres zależności $y(t)$ przedstawiono na rysunku 6.6.



Rys. 6.6

W chwili t_w współrzędna y jest równa maksymalnej wysokości $H_{\max}$, którą ciało osiąga w tym ruchu.

$$H_{\max} = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g}$$

$$H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Po jej osiągnięciu ciało zaczyna spadać ruchem jednostajnie przyspieszonym. Jego prędkość ma teraz zwrot przeciwny do zwrotu osi y . Współrzędna prędkości jest ujemna (rys. 6.5), a wartość prędkości rośnie. W chwili t_c ciało spadnie na poziom, z którego zostało wyrzucone. Współrzędna y położenia ciała podczas spadania maleje i w chwili t_c wynosi zero ($y = 0$) – tak samo jak w chwili rozpoczęcia ruchu (rys. 6.6). Po podstawieniu $y = 0$ do wzoru (6.2) otrzymujemy:

$$0 = v_0 t_c - \frac{1}{2} g t_c^2$$

skąd:

$$t_c = \frac{2v_0}{g}$$

Czas spadania jest równy: $t_s = t_c - t_w = \frac{v_0}{g}$.

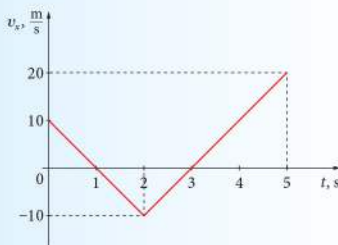
Czas wznoszenia t_w i spadania t_s są jednakowe:

$$t_s = t_w = \frac{v_0}{g}$$

PRZYKŁAD 6.3

Ruch jednostajnie zmienny „tam i z powrotem”

Przeanalizujemy i opiszemy ruch wzdłuż osi x , w którym współrzędna prędkości v_x zmienia się z czasem tak jak na wykresie (rys. 6.7).



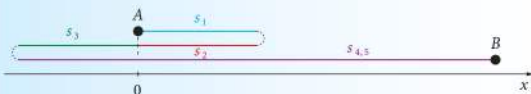
Rys. 6.7

- W chwili rozpoczęcia obserwacji ($t = 0$) ciało poruszało się zgodnie ze zwrotem osi x ($v_x > 0$), a jego prędkość początkowa miała wartość 10 m/s.
- W pierwszej sekundzie ciało poruszało się zgodnie ze zwrotem osi x ($v_x > 0$) ruchem jednostajnie opóźnionym (v liniowo malała) aż do chwili, w której $v_x = 0$.
- W drugiej sekundzie ciało poruszało się w przeciwną stronę ($v_x < 0$) ruchem jednostajnie przyspieszonym (v liniowo wzrastała).
- W trzeciej sekundzie ciało nadal poruszało się przeciwnie do zwrotu osi x ($v_x < 0$), ale ruchem jednostajnie opóźnionym (v liniowo malała). W końcu trzeciej sekundy chwilowa szybkość ciała była równa zero.
- W czwartej i piątej sekundzie ciało poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym, zgodnie ze zwrotem osi x .

Obliczamy pola figur ograniczonych kolejnymi częściami wykresu oraz osią t i otrzymujemy drogi przebyte przez ciało w kolejnych odstępach czasu:

$$s_1 = s_2 = s_3 = 5 \text{ m} \quad s_{4,5} = 20 \text{ m}$$

Jeśli obserwację rozpoczęto w chwili, gdy ciało znajdowało się w punkcie A (rys. 6.8), to po pięciu sekundach znalazło się w punkcie B.



Rys. 6.8

W czasie pięciu sekund ruchu ciało przebyło drogę 35 m, a jego przemieszczenie miało wartość 15 m.

W ciągu dwóch pierwszych sekund ciało poruszało się ze stałym przyspieszeniem, zwróconym przeciwnie do osi x ($a_x < 0$), przy czym w pierwszej sekundzie ruchu zwrot przyspieszenia był przeciwny do zwrotu prędkości, a w drugiej sekundzie – zgodny, bo zwrot prędkości ciała zmienił się w chwili $t = 1$ s. Wartość przyspieszenia obliczamy za pomocą wzoru:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

po podstawieniu w miejsce wektorów ich współrzędnych na osi x w chwili $t = 2$ s.

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$-10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + a_x \cdot 2 \text{ s}$$

$$a_x \cdot 2 \text{ s} = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

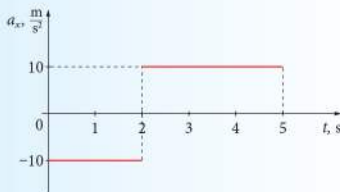
$$a_x = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad a = |a_x| = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Podobnie obliczamy wartość przyspieszenia w następnych trzech sekundach ruchu; podstawiamy odpowiednio: $v_x = 20 \text{ m/s}$, $v_{0x} = -10 \text{ m/s}$, $t = 3 \text{ s}$.

$$20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + a_x \cdot 3 \text{ s}$$

$$a_x \cdot 3 \text{ s} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_x = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad a = |a_x| = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Rys. 6.9

Wartość przyspieszenia jest taka sama w całym ruchu i wynosi 10 m/s^2 , ale w chwili $t = 2$ s zmienił się zwrot wektora przyspieszenia.

Zauważ (rys. 6.9), że w rozważanym przypadku:

- współrzędna przyspieszenia jest **ujemna** zarówno dla ruchu **jednostajnie opóźnionego** (w pierwszej sekundzie), jak i **jednostajnie przyspieszonego** (w drugiej sekundzie);
- współrzędna przyspieszenia jest **dodatnia** zarówno dla ruchu **jednostajnie opóźnionego** (w trzeciej sekundzie), jak i **jednostajnie przyspieszonego** (w czwartej i piątej sekundzie).

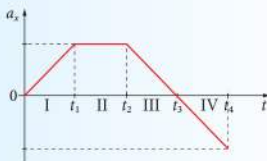
Z omówionego przykładu wynika, że:

- znak współrzędnej przyspieszenia informuje **wyłącznie** o tym, czy **zwrot** przyspieszenia był **zgodny** (współrzędna dodatnia) ze zwrotem wybranej osi x czy **przeciwny** (współrzędna ujemna) do tego zwrotu;
- jeśli ruch odbywałby się **stałe w tę samą stronę**, to zmiana znaku współrzędnej przyspieszenia oznaczałaby **zmiannę ruchu** z przyspieszonego na opóźniony lub odwrotnie;
- jeśli zwrot prędkości zmienia się podczas ruchu, to ze **znaku współrzędnej przyspieszenia nie można wnioskować** o tym, czy ruch był **przyspieszony** czy **opóźniony**.

PRZYKŁAD 6.4

Ruch niejednostajnie zmienny

Na podstawie wykresu zależności $a_x(t)$ (rys. 6.10) przeanalizujemy prostoliniowy ruch ciała wzdłuż osi x zwróconej zgodnie ze zwrotem jego prędkości.



Rys. 6.10

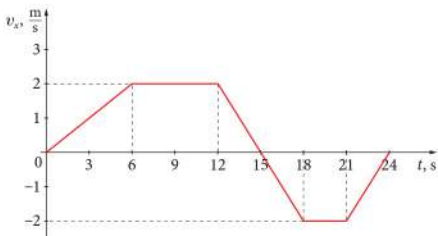
W przedziale czasu $(0, t_3)$ współrzędna przyspieszenia jest dodatnia ($a_x = |\vec{a}|$), więc wektor przyspieszenia jest zwrócony zgodnie z wektorem prędkości.

- Podczas pierwszego etapu ruchu (I) wartość przyspieszenia wzrasta – ciało porusza się ruchem **niejednostajnie przyspieszonym**, w którym wartość prędkości rośnie coraz szybciej.
- Podczas drugiego etapu ruchu (II) wartość przyspieszenia jest stała – ciało porusza się ruchem **jednostajnie przyspieszonym**.
- Podczas trzeciego etapu ruchu (III) wartość przyspieszenia maleje – ciało porusza się ruchem **niejednostajnie przyspieszonym**, w którym wartość prędkości wzrasta coraz wolniej.
- Podczas czwartego etapu ruchu (IV) współrzędna przyspieszenia jest ujemna, co oznacza, że przyspieszenie jest zwrócone przeciwnie do prędkości ciała, a jego wartość bezwzględna $|a_x|$ wzrasta. Ciało porusza się więc ruchem **niejednostajnie opóźnionym** z przyspieszeniem o coraz większej wartości; wartość prędkości ciała maleje coraz szybciej.

Odpowiedz na pytanie: W której chwili ruchu szybkość ciała jest maksymalna?

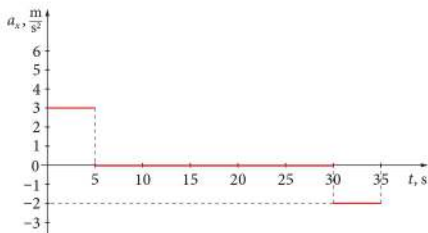
ZADANIA

- Wyjaśnij, dlaczego stwierdzenie „w ruchu przyspieszonym przyspieszenie jest dodatnie, a w ruchu opóźnionym – ujemne” nie jest poprawne. Skorzystaj z informacji o współrzędnej wektora.
- Na rysunku 6.11 przedstawiono wykres zależności współrzędnej prędkości od czasu dla ciała poruszającego się wzdłuż osi x .



Rys. 6.11

- Podaj nazwy ruchów, którymi poruszało się ciało w poszczególnych przedziałach czasu.
 - Narysuj wykres zależności współrzędnej przyspieszenia od czasu dla tego ciała.
 - Oblicz drogę przebytą przez ciało podczas całego ruchu.
 - Oblicz współrzędną położenia ciała w chwili $t = 24$ s, przy założeniu, że ruch rozpoczął się w punkcie o współrzędnej $x_0 = 0$.
3. Motocyklista, po zatrzymaniu się przed przejściem dla pieszych, ruszył i jechał ruchem prostoliniowym. Do opisu ruchu wybrano oś x równoległą do toru motocyklisty i zwróconą zgodnie z jego prędkością.



Rys. 6.12

- Na podstawie wykresu $a_x(t)$ przedstawionego na rysunku 6.12 narysuj wykres $v_x(t)$ w przedziale czasu 0–35 s.
- Oblicz drogę przebytą przez motocyklistę w czasie 35 s ruchu.
- Oblicz szybkość średnią motocyklisty w rozważanym ruchu.



7. Względność ruchu

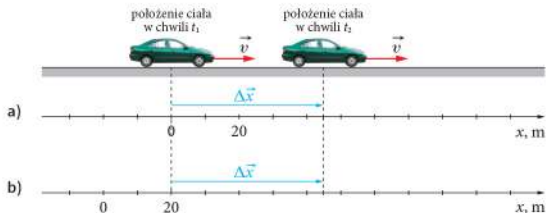
Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- opisać ruch w układach poruszających się względem siebie ruchem jednostajnym prostoliniowym,
- korzystać z zasady względności Galileusza,
- składać ruchy.

→ **Przypomnij sobie**, co to znaczy, że ruch jest względny.

Zazwyczaj, mówiąc o ruchu w życiu codziennym, mamy na myśli zmianę położenia ciała względem układu odniesienia związanego z Ziemią, którą **umownie** uważamy za nieruchomą. Takie postępowanie jest dopuszczalne tylko wtedy, gdy można pominąć ruch obrotowy Ziemi, ponieważ nie ma on istotnego wpływu na opisywane zjawisko (np. ruch piechura, rowerzysty czy rzuconej piłki). W tym rozdziale będziemy rozważać zjawiska w takich układach odniesienia, które poruszają się względem „nieruchomej” Ziemi ruchem prostoliniowym jednostajnym. O takich układach dowiesz się więcej w dziale 2 tego podręcznika.

Z układem odniesienia wybranym do opisu ruchu wiążemy odpowiedni układ współrzędnych; do opisu ruchu prostoliniowego odpowiedni będzie układ jednowymiarowy, np. oś x równoległa do kierunku ruchu. Punkt $x = 0$ wybieramy dowolnie, zazwyczaj w miejscu najwygodniejszym do omówienia zjawiska, np. w miejscu, w którym rozpoczyna się opisywany ruch. Zauważ, że od wyboru początku układu współrzędnych zależy wartość położenia ciała w wybranej chwili t (rys. 7.1), a nie zależą wartości przemieszczenia $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$, które nastąpiło w czasie $\Delta t = t_2 - t_1$, oraz wartość prędkości $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.



Rys. 7.1 Przemieszczenie nie zależy od wyboru początku układu współrzędnych

Zarówno Δx , jak i v w dwóch **spoczywających względem siebie** układach współrzędnych o równoległych osiach i niepokrywających się początkach są **jednakowe**.

A jeśli te układy będą poruszać się względem siebie ruchem jednostajnym?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, rozważymy prosty przykład.

PRZYKŁAD 7.1

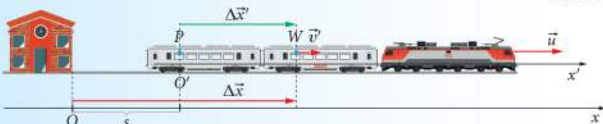
Opis ruchu pasażera przemieszczającego się w jadącym pociągu

Pasażer pociągu jadącego z prędkością u względem Ziemi zmierza z prędkością v' względem pociągu do wagonu restauracyjnego (rys. 7.2). Obliczymy wartość przemieszczenia pasażera (w czasie Δt potrzebnym na dojście od miejsca P w przedziale do miejsca W w wagonie restauracyjnym) w dwóch różnych układach odniesienia:

- w układzie U związanym z budynkiem stacji, czyli z Ziemią (przemieszczenie Δx),
- w układzie U' związanym z pociągiem (przemieszczenie $\Delta x'$).



Rys. 7.2



Rys. 7.3

Na rysunku 7.2 przedstawiono położenie pasażera i pociągu w chwili początkowej t_0 (w której pasażer mija punkt P), a na rysunku 7.3 – położenie obu ciał w chwili t , w której pasażer dotarł do punktu W . Na rysunku 7.3 zaznaczono też wektory przemieszczeń pasażera w każdym z układów:

- kolorem czerwonym – przemieszczenie Δx względem budynku stacji,
- kolorem zielonym – przemieszczenie $\Delta x'$ względem pociągu,

a także drogę s przebytą przez pociąg w czasie $\Delta t = t - t_0$ z szybkością u .

Z rysunku wynika, że $\Delta x = \Delta x' + s$. Droga $s = u\Delta t$, więc:

$$\Delta x = \Delta x' + u\Delta t$$

W chwili początkowej $t_0 = 0$ początki O i O' układów współrzędnych pokrywały się oraz $x_0 = 0$ i $x'_0 = 0$, zatem:

$$\Delta x = x - x_0 = x \quad \text{i} \quad \Delta x' = x' - x'_0 = x'$$

Ponadto $\Delta t = t - t_0 = t$, więc:

$$x = x' + ut \quad \text{lub} \quad x' = x - ut$$

Jeśli układy poruszają się względem siebie tak, jak w rozważanym przypadku, to wartości przemieszczeń ciała (a ściślej mówiąc, ich współrzędne „iksowe”) w tych układach są różne.

Uwaga: Ruch ciała (pasażera) i ruch układu związanego z pociągiem odbywały się wzdłuż osi x i x' , więc pozostałe dwie współrzędne położenia (które należałoby narysować, jeśli rozważalibyśmy zjawisko w trójwymiarowych układach współrzędnych) nie zmieniły się, czyli $y' = y$ oraz $z' = z$.

Znajdziemy teraz związek między stałymi prędkościami ciała (np. pasażera w przykładzie 7.1) w układach U i U' . W układzie U' prędkość ciała $\vec{v}' = \frac{\Delta \vec{x}'}{\Delta t'}$, a w układzie U ta prędkość to $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$.

Po podstawieniu $\Delta \vec{x} = \Delta \vec{x}' + \vec{u} \Delta t$ otrzymujemy:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}' + \vec{u} \Delta t}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{x}'}{\Delta t} + \frac{\vec{u} \Delta t}{\Delta t} = \vec{v}' + \vec{u}$$

Prędkość $\vec{v}$ ciała względem tzw. układu nieruchomego U jest sumą prędkości $\vec{v}'$ ciała względem układu ruchomego i prędkości $\vec{u}$, z którą układ U' porusza się względem układu U .

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

(7.1)

Jeśli zwroty $\vec{v}'$ i $\vec{u}$ są zgodne, to $v = v' + u$, a jeśli są przeciwne, to $v = v' - u$ (dla $u < v'$) lub $v = u - v'$ (dla $u > v'$).

Dotychczas rozważaliśmy ruch ciała poruszającego się w układzie U ze stałą prędkością. Załóżmy teraz, że ciało w układzie U' porusza się wzdłuż osi x' ruchem jednostajnie przyspieszonym. Przyspieszenie ciała w tym układzie jest równe $\vec{a}' = \frac{\Delta \vec{v}'}{\Delta t'}$, a w układzie U wynosi $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$. Korzystamy ze związku $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ oraz z równości $\Delta t = \Delta t'$ i otrzymujemy:

$$\vec{a} = \frac{\Delta(\vec{v}' + \vec{u})}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}'}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}'}{\Delta t} = \vec{a}'$$

(ponieważ: $\vec{u} = \text{const} \Rightarrow \Delta \vec{u} = \vec{0}$).

Przyspieszenia ciała w układach U i U' są jednakowe.

Uwaga: Przy omawianiu ruchu pasażera pociągu przyjęliśmy, zgodnie z naszymi codziennymi doświadczeniami, że czas, który upłynął od chwili wyruszenia pasażera z punktu P do chwili dotarcia do punktu W , mierzony w układach U i U' , był taki sam, czyli ruch układów U i U' nie miał wpływu na bieg czasu. Przyjęliśmy więc, że zdarzenia równoczesne (zachodzące w tej samej chwili) w jednym z tych układów są także równoczesne w drugim układzie⁴.

⁴ Do zagadnienia równoczesności zdarzeń powrócimy w klasie 4.

Galileo Galilei (1564–1642) i zasada względności ruchu

Zagadnieniami ruchu zajmował się włoski uczony Galileusz, wybitny astronom, fizyk, matematyk i filozof, uważany za ojca fizyki doświadczalnej, ponieważ jako pierwszy docenił istotną rolę eksperymentów w badaniu zjawisk przyrody. Na podstawie wyników doświadczeń oraz obserwacji (przeprowadzonych niejednokrotnie z użyciem własnoręcznie skonstruowanych przyrządów) sformułował m.in. prawo swobodnego spadania ciał, znalazł doświadczalnie zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym, wykazał niezależność okresu drgań wahadła od amplitudy dla małych wychyleń (izochronizm wahadła) oraz odkrył cztery księżycy Jowisza.



Rys. 7.4 Portret Galileusza, fragment jednego z jego dzieł i teleskop Galileusza

Z rozważań Galileusza na temat ruchu wynikało, że: czas jest absolutny, czyli „płyne tak samo” dla obserwatorów we wszystkich układach inercjalnych, a **położenie i prędkość są względne**, zależne od układu odniesienia.

Na początku XVII wieku Galileusz sformułował **zasadę względności ruchu**:

Prawa dynamiki są jednakowe we wszystkich układach odniesienia, które poruszają się względem siebie prostoliniowym ruchem jednostajnym. Żaden z tych układów nie jest wyróżniony.

Zasadę tę stosujemy do dziś, gdy rozważamy ruchy odbywające się z niewielkimi prędkościami (w porównaniu z prędkością światła). Proste doświadczenia przekonują nas o tym, że np. czasy spadania przedmiotu w windzie poruszającej się ruchem jednostajnym, zmierzone przez obserwatora w windzie i obserwatora na korytarzu budynku, są jednakowe, otwarcie wszystkich drzwi w wagonie pociągu mijającego peron ruchem jednostajnym (podczas jazdy próbnej) jest równoczesne zarówno dla mechanika w pociągu, jak i dla

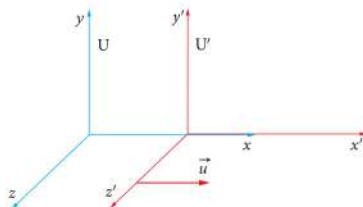
ludzi stojących na peronie, czas zagotowania wody w elektrycznym czajniku w przyczepie samochodu jadącego prostoliniowym odcinkiem autostrady jest taki sam jak podczas postoju przyczepy na parkingu.



WIEDZIEĆ WIĘCEJ

O względności ruchu

Związki między współrzędnymi położenia mierzonymi w tej samej chwili w dwóch układach odniesienia poruszających się względem siebie ze znaną prędkością nazywamy transformacją Galileusza.



Rys. 7.5

Dla układów przedstawionych na rysunku 7.5 transformacja Galileusza ma postać:

$$\begin{aligned}x' &= x - ut & y' &= y & z' &= z \\ \text{oraz} & & t' &= t\end{aligned}$$

Transformacja Galileusza i pojęcie czasu absolutnego obowiązywały w fizyce (zwanej **fizyką klasyczną**) prawie trzysta lat, do 1905 roku, w którym Albert Einstein, jeden z najwybitniejszych fizyków wszech czasów, ogłosił nową teorię czasu i przestrzeni, czyli **szczególną teorię względności** (STW), jedną z podstaw **fizyki relatywistycznej**.

W tej teorii (potwierdzonej później doświadczalnie) **czas jest względny**, zależny od układu odniesienia; inaczej mówiąc, zdarzenia jednoczesne w jednym inercjalnym układzie odniesienia nie są jednoczesne w innym układzie.

Związki między współrzędnymi położenia i czasem oraz między prędkościami mają w STW inną matematyczną postać. Transformacja Galileusza została zastąpiona przez inną transformację (transformację Lorentza) i jest jej przybliżeniem, słusznym dla ruchów odbywających się z prędkościami znacznie mniejszymi od prędkości światła. Będziemy o tym mówić w klasie czwartej.

Składanie ruchów

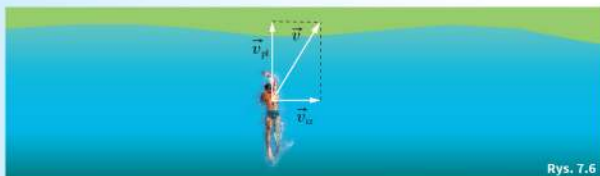
Każde ciało może uczestniczyć **równocześnie** w kilku ruchach względem tego samego układu odniesienia. Człowiek zmierzający do wagonu restauracyjnego w jadącym pociągu (przykład 7.1) równocześnie wykonuje względem torów dwa ruchy: przemieszcza się wzdłuż wagonu i razem z wagonem porusza się tak jak pociąg, a kierunki tych ruchów są jednakowe.

Omówimy teraz dwa przykłady, w których kierunki ruchów składowych są różne.

PRZYKŁAD 7.2

Pływak

Obliczymy wartość prędkości pływaka względem brzegu rzeki w sytuacji przedstawionej na rysunku 7.6. Prędkość względem wody, którą pływak nadaje swojemu ciału, wykonując ruchy ramionami i nogami, oraz prędkość prądu rzeki względem brzegów są równe odpowiednio $\vec{v}_{pt}$ i $\vec{v}_{rz}$.



Rys. 7.6

Kierunek prędkości pływaka względem wody był prostopadły do brzegu rzeki, lecz pływak doплыł do niego w pewnej odległości od zamierzonego celu, ponieważ miał względem brzegu równocześnie dwie prędkości: prędkość „własną” $\vec{v}_{pt}$ i prędkość $\vec{v}_{rz}$ unoszącego go prądu rzeki.

Suma tych dwóch prędkości to prędkość wypadkowa $\vec{v}$ pływaka względem brzegu. Jej wartość v obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

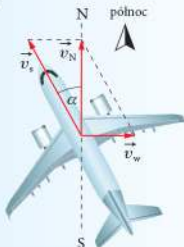
$$v = \sqrt{v_{pt}^2 + v_{rz}^2}$$

Samodzielnie oblicz odległość, na jaką prąd rzeki zniósł pływaka, jeżeli przepłynął on rzekę o szerokości d .

PRZYKŁAD 7.3

Samolot

Obliczymy kąt, który musi tworzyć z prostą S–N prędkość $\vec{v}_s$ samolotu unoszonego przez wiatr wiejący z zachodu z prędkością $\vec{v}_w$, aby samolot leciał zgodnie z kursem dokładnie na północ (rys. 7.7).



Rys. 7.7

Samolot ma względem Ziemi równocześnie dwie prędkości: prędkość $\vec{v}_s$, którą nadaje mu silnik względem powietrza, oraz prędkość $\vec{v}_w$ unoszącego go wiatru. W celu utrzymania kursu północnego wypadkowa prędkości $\vec{v}_s$ i $\vec{v}_w$ musi mieć kierunek S–N, zatem kierunek prędkości $\vec{v}_s$ musi tworzyć z kierunkiem $\vec{v}_N$ kąt α taki, że:

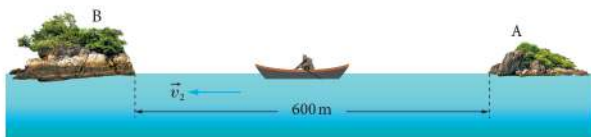
$$\sin \alpha = \frac{v_w}{v_s}$$

Prędkość względem powietrza, którą nadaje samolotowi jego silnik, powinna być zwrócona na północny zachód.

Omówione przykłady świadczą o tym, że ciało może poruszać się równocześnie różnymi rodzajami ruchu w różnych kierunkach z różnymi prędkościami.

ZADANIA

1. Na rzece znajdują się dwie wyspy: A i B odległe od siebie o $s = 600$ m (rys. 7.8).



Rys. 7.8

- Prędkość łódki względem stojącej wody ma wartość $v_1 = 3$ m/s, a prędkość rzeki względem brzegów ma wartość $v_2 = 1$ m/s. Oblicz czas, w którym łódka przepłyynie z wyspy B do wyspy A i z powrotem.
2. Motorówka płynie rzeką pod prąd ze stałą szybkością. W pewnej chwili wypada z niej koło ratunkowe. Załoga zauważyła to po czasie t_0 od chwili wypadnięcia koła. Wtedy motorówka zawraca i po czasie t (od chwili zawrócenia) dociera do koła unoszonego prądem rzeki. Analizując ruch motorówki w układzie odniesienia związanym z brzegiem, udowodnij, że $t = t_0$.
 3. Dwa pojazdy wyruszają równocześnie z tego samego miejsca. Jeden jedzie na północ z prędkością o wartości $v_1 = 54$ km/h, a drugi na wschód z prędkością o wartości $v_2 = 72$ km/h. Oblicz wartość prędkości, z którą drugi pojazd oddala się od pierwszego. W tym celu wykonaj konstrukcję geometryczną szukanej prędkości zgodnie z zasadami działań na wektorach.
 4. Załóżmy, że naprzeciw samochodu pierwszego z zadania 3 jedzie na południe inny samochód z prędkością o wartości v_3 . Wykaż, wykonując odpowiednie działania na wektorach, że wartość prędkości względnej, z jaką oba samochody będą się mijały, wynosi $v' = v_1 + v_3$.



8. Opis ruchu w dwóch wymiarach (I)

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- opisać rzut poziomy jako ruch złożony,
- wyprowadzić równanie toru rzutu poziomego i sporządzić jego wykres,
- obliczać zasięg i prędkość chwilową w rzucie poziomym,
- opisać ruch po okręgu ze stałą szybkością i obliczać wielkości opisujące ten ruch.

→ **Przypomnij sobie** wiadomości o ruchu krzywoliniowym oraz powtórz zasady dynamiki Newtona.

Omówiony w poprzednich rozdziałach ruch w jednym wymiarze jest zjawiskiem dość rzadko występującym w przyrodzie i technice. Znacznie częściej mamy do czynienia z ruchami odbywającymi się (ściśle lub w przybliżeniu) na płaszczyźnie, czyli w dwóch wymiarach. Za takie ruchy można uważać ruch wszelkich pojazdów po powierzchni Ziemi (jeśli pominiemy nierówności terenu i krzywiznę powierzchni) czy też ruchy planet w Układzie Słonecznym.

Rzuty ciał w pobliżu powierzchni Ziemi (oczywiście z wyjątkiem rzutów pionowych w górę i w dół) są ruchami w dwóch wymiarach.

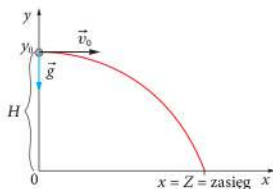
Ruch na płaszczyźnie można rozłożyć na dwa ruchy odbywające się w różnych kierunkach, np. prostopadłych. W takim przypadku najwygodniej jest wybrać do opisu kartezjański układ współrzędnych o osiach równoległych do kierunków ruchów składowych.

Rzut poziomy

Omówimy teraz dokładniej tzw. rzut poziomy, czyli ruch, który następuje po nadaniu ciału prędkości początkowej $\vec{v}_0$ o kierunku poziomym (rys. 8.1). Dla uproszczenia opisu pominiemy opór powietrza.



Rys. 8.1 Przykład rzutu poziomego

Rys. 8.2 Wykres $y(x)$ w rzucie poziomym

Układ współrzędnych wybierzemy tak, by pozioma oś x była równoległa do wektora prędkości początkowej $\vec{v}_0$ i miała zwrot zgodny ze zwrotem tej prędkości, a oś y była równoległa do wektora przyspieszenia ziemskiego $\vec{g}$ i zwrócona w górę (rys. 8.2).

Wektor położenia początkowego ma współrzędne $x_0 = 0$ i $y_0 = H$.

W ruchu wzdłuż osi x na ciało nie działa żadna siła, a więc (zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki) porusza się ono ruchem jednostajnym z prędkością $\vec{v}_0$. Współrzędna położenia jest liniową funkcją czasu. Wobec tego:

$$x = v_{0x}t = v_0t \quad (8.1)$$

Wzdłuż osi y na ciało działa (jeśli wysokość H jest mała w porównaniu z promieniem Ziemi R_Z : $H \ll R_Z$) stała siła ciężkości, nadająca mu (zgodnie z drugą zasadą dynamiki) stałe przyspieszenie $\vec{g}$. Ruch wzdłuż osi y jest więc ruchem jednostajnie przyspieszonym. Zależność współrzędnej położenia od czasu – zgodnie ze wzorem (5.8) – ma postać:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$$

Ponieważ $v_{0y} = 0$, $a_y = -g$, więc:

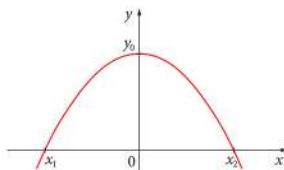
$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2} \quad (8.2)$$

Z obserwacji rzutu poziomego wiesz zapewne, że torem tego ruchu jest krzywa. Aby napisać **równanie toru**, czyli **zależność $y(x)$** , wyznaczamy czas ze wzoru (8.1) i podstawiamy do wzoru (8.2). Otrzymujemy:

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \quad (8.3)$$

NIE s. 279

Jest to równanie paraboli o wierzchołku w punkcie $(0, y_0)$ i ramionach zwróconych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny). Funkcja ta ma dwa miejsca zerowe (rys. 8.3), które znajdziemy z równania (8.2) po wstawieniu $y = 0$.



Rys. 8.3 Wykres funkcji opisanej równaniem (8.3)

$$y_0 = \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

$$x^2 = \frac{2v_0^2 y_0}{g} \quad x = \pm v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

Wartość bezwzględna współrzędnej $x = \pm v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ to **zasięg** rozważanego rzutu poziomego. (Jeśli zwrot prędkości w chwili początkowej byłby przeciwny, czyli $v_{0x} = -v_0$, ciało upadłoby na podłoże w punkcie o współrzędnych $x = -v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ i $y = 0$).

Na rysunku 8.2 oznaczyliśmy zasięg literą Z . Ponieważ $y_0 = H$, wzór na zasięg w rzucie poziomym ma postać:

$$Z = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (8.4)$$

Czas trwania ruchu do chwili uderzenia o podłoże obliczymy ze wzoru (8.2) po wstawieniu $y = 0$ i $y_0 = H$:

$$H = \frac{gt^2}{2}$$

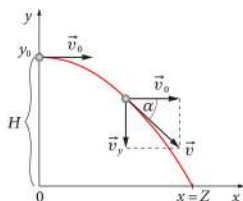
skąd:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Czas ten jest równy czasowi swobodnego spadania z wysokości H .

Nie ma w tym nic niezwykłego. Ciało rzucone poziomo porusza się przecież ruchem złożonym z ruchu jednostajnego wzdłuż osi x oraz ruchu jednostajnie przyspieszonego z prędkością początkową o współrzędnej $v_{0y} = 0$ i przyspieszeniem o wartości g , czyli spadania swobodnego wzdłuż osi y . Czas trwania obu ruchów składowych jest oczywiście taki sam i równy czasowi trwania ruchu złożonego.

Prędkość ciała w każdej chwili jest styczna do toru ruchu (rys. 8.4) i ma dwie składowe, których współrzędne są odpowiednio równe $v_x = v_0$ i $v_y = -gt$ (zwrot osi y jest przeciwny do zwrotu przyspieszenia $\vec{g}$, więc $a_y = -g$).



Rys. 8.4 Prędkość w rzucie poziomym

Wartość wektora $\vec{v}$ w chwili t obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

czyli:

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

Kierunek wektora $\vec{v}$ w chwili t określamy przez podanie kąta (lub wartości jego funkcji trygonometrycznej), który wektor $\vec{v}$ tworzy np. z poziomem (rys. 8.4).

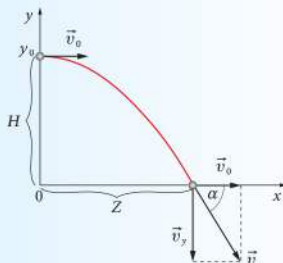
Po wstawieniu do powyższego wzoru $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ otrzymamy wartość prędkości w chwili uderzenia ciała o podłoże:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2Hg}$$

PRZYKŁAD 8.1

Rzut poziomy

Metalową kulkę wystrzelono poziomo z pręcy z szybkością 5 m/s na wysokości 6 m nad podłożem. Obliczmy zasięg rzutu kulki, skonstruujemy prędkość $\vec{v}$ kulki w chwili uderzenia o podłoże, obliczmy wartość tej prędkości i kąt, który tworzy wektor $\vec{v}$ z poziomem. Pomińmy opór powietrza, przyjmijmy $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Rys. 8.5

Zasięg obliczamy ze wzoru:

$$Z = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$Z = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 5,5 \text{ m}$$

Po skonstruowaniu prędkości $\vec{v}$ (rys. 8.5) obliczamy jej wartość.

Szukana wartość prędkości kulki wyraża się wzorem:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2Hg}$$

$$v = \sqrt{25 + 120} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

NM s. 382

W celu określenia kierunku prędkości obliczamy kąt, który tworzy wektor $\vec{v}$ z poziomem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|v_y|}{v_0} = \frac{\sqrt{2Hg}}{v_0}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx 2,2$$

skąd (po odczytaniu z tablic funkcji trygonometrycznych):

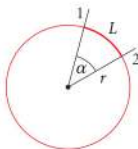
$$\alpha \approx 66^\circ$$

Zastanów się, czy pominięcie oporu powietrza było w tym przypadku uzasadnione. Czy byłoby równie uzasadnione przy opisie ruchu piłeczki pingpongowej wystrzelonej z procy?

Miara łukowa kąta

Kąty można mierzyć nie tylko w stopniach. Naturalną miarą kątów jest **miara łukowa**. Dwa promienie (rys. 8.6) tworzą kąt środkowy α i wycinają z okręgu łuk o długości L . Miarą łukową kąta α nazywamy stosunek długości łuku L do promienia r okręgu:

$$\alpha = \frac{L}{r}$$



Rys. 8.6 Ilustracja do definicji miary łukowej kąta

Jednostką kąta w mierze łukowej jest 1 radian. Jest to kąt środkowy, dla którego $L = r$. Kątowi 360° odpowiada 2π radianów, bowiem długość łuku L jest w tym przypadku równa długości okręgu:

$$360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radianów}$$

Odpowiednio kąt 180° to π radianów, a 90° to $\frac{\pi}{2}$ radianów.

Ruch po okręgu

Ruch po okręgu jest szczególnym przypadkiem ruchu krzywoliniowego. Omówimy teraz tzw. **ruch jednostajny po okręgu**. W tym ruchu **wartość prędkości** (szybkość) **jest stała**, a **zmienia się jej kierunek** (wyznaczony przez styczną do toru w punkcie, w którym w danej chwili ruchu znajduje się ciało). Do opisu ruchu po okręgu używamy pojęcia **okresu** T lub **częstotliwości** ν^5 . Jeśli t oznacza czas, w którym ciało n razy zakreśliło okrąg, czyli przebyło drogę $s = n \cdot 2\pi r$, to:

$$T = \frac{t}{n} \quad \text{oraz} \quad v = \frac{n}{t} \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \quad \text{lub} \quad \nu = \frac{1}{T}$$

Okres T informuje, w jakim czasie ciało przebędzie drogę s równą długości okręgu.

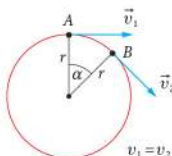
Skoro $s = 2\pi r$, to szybkość w ruchu po okręgu można wyrazić wzorem:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (8.5)$$

Częstotliwość informuje, ile okrążeń wykonało ciało w jednostce czasu. Jednostką częstotliwości w SI jest **herc** (1 Hz): $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$. Po wstawieniu $T = \frac{1}{\nu}$ do wzoru (8.5) otrzymujemy:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r \nu \quad (8.6)$$

W czasie, w którym ciało przemieściło się z punktu A do punktu B (rys. 8.7), promień r – poprowadzony od środka okręgu do chwilowego położenia ciała (tzw. promień wodzący) – zakreślił kąt α .



Rys. 8.7 Kąt zakreślany przez promień wodzący

Szybkość kątowna w ruchu jednostajnym po okręgu to stosunek kąta zakreślonego przez promień wodzący punktu poruszającego się po okręgu do czasu, w którym ten kąt został zakreślony.

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

Jednostką szybkości kątownej w SI jest $1 \frac{\text{radian}}{\text{s}} = 1 \frac{1}{\text{s}}$.

⁵ W szkole podstawowej częstotliwość oznacza się literą f . Jednakże ze względu na to, że w większości podręczników akademickich częstotliwość oznacza się grecką literą ν (czytaj: ni), w podręczniku będziemy używać takiego symbolu.

Szybkość kątowna jest w omawianym ruchu stała, gdyż w jednakowych odstępach czasu ciało przebywa jednakowe drogi (długości łuku), a jego promień wodzący zakreśla jednakowe kąty. W czasie $t = T$ zakreślony kąt $\alpha = 360^\circ = 2\pi$ (radianów), więc:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Z powyższego wzoru i wzoru 8.6 wyprowadzamy użyteczny związek między szybkością v (nazywaną liniową) i szybkością kątową ω :

$$v = \omega r$$

Jak wiesz, w ruchu jednostajnym po okręgu istnieje tylko przyspieszenie dośrodkowe $\vec{a}_r$, którego wartość wyraża się wzorem:

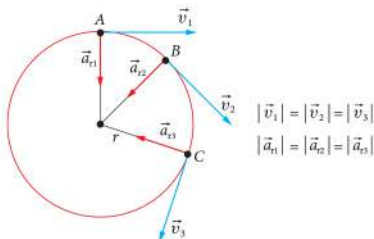
$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Wartość przyspieszenia dośrodkowego można także obliczyć za pomocą jednego z poniższych wzorów:

$$\begin{aligned} a_r &= \omega^2 r, & \text{bo} & & v &= \omega r \\ a_r &= \frac{4\pi^2 r}{T^2}, & \text{bo} & & \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ a_r &= 4\pi^2 \nu^2 r, & \text{bo} & & T &= \frac{1}{\nu} \end{aligned}$$

Wyprowadź samodzielnie te związki.

Pamiętaj, że przyspieszenie dośrodkowe w omawianym ruchu ma stałą wartość, a jego kierunek zmienia się i jest w każdej chwili prostopadły do prędkości (rys. 8.8).



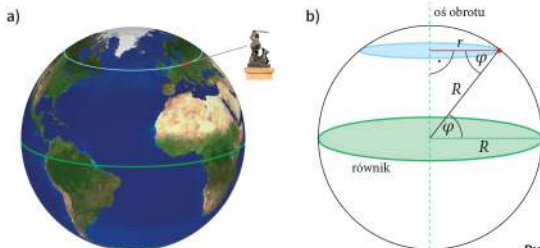
Rys. 8.8 Przyspieszenie dośrodkowe w ruchu jednostajnym po okręgu

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Przyspieszenie dośrodkowe warszawskiej Syrenki

Ziemia obraca się wokół własnej osi, a pełny obrót wykonuje w czasie 24 godzin. Każdy punkt na powierzchni Ziemi porusza się ruchem jednostajnym po okręgu z przyspieszeniem dośrodkowym zwróconym do (leżącego na osi Ziemi) środka okręgu. Obliczymy przybliżoną wartość przyspieszenia dla pomnika warszawskiej Syrenki (rys. 8.9a) według wzoru:

$$a_r = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$



Rys. 8.9

Podczas ruchu obrotowego Ziemi punkty znajdujące się na różnych szerokościach geograficznych (z wyjątkiem biegunów) poruszają się po okręgach o innych promieniach. Aby obliczyć promień okręgu, po którym porusza się interesujący nas punkt, korzystamy z funkcji trygonometrycznej (rys. 8.9b):

$$r = R \cos \varphi$$

gdzie: $R = 6370$ km to promień Ziemi, a $\varphi = 52^\circ$ to szerokość geograficzna Warszawy.

Po podstawieniu wartości liczbowych do wzoru na a_r otrzymujemy:

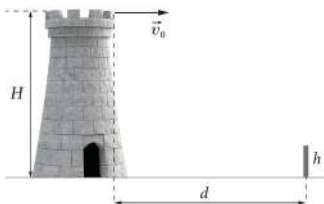
$$a_r = \frac{4\pi^2}{(24 \text{ h})^2} \cdot 6370 \text{ km} \cdot \cos 52^\circ \approx \frac{4\pi^2}{(86400 \text{ s})^2} \cdot 3\,920\,000 \text{ m} \approx 0,0207 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Wartość tego przyspieszenia jest około 470 razy mniejsza od wartości przyspieszenia ziemskiego w Warszawie ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

ZADANIA

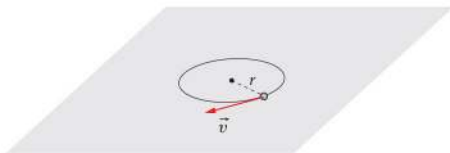
1. Oblicz wartość prędkości, z którą rzucono poziomo kulę z wysokości 10 m nad podłożem, jeśli wiadomo, że zasięg rzutu był równy połowie tej wysokości. Nie uwzględniaj oporu powietrza. Przyjmij, że $g = 10 \text{ m/s}^2$.

2. Oblicz wartość minimalnej prędkości, z którą trzeba wystrzelić poziomo pocisk z wieży o wysokości $H = 25$ m, aby przeleciał nad bardzo wąską, pionową ścianą o wysokości $h = 5$ m ustawioną w odległości $d = 30$ m od wieży (rys. 8.10). Załóż, że opór powietrza jest znikomy, a $g = 10 \text{ m/s}^2$.



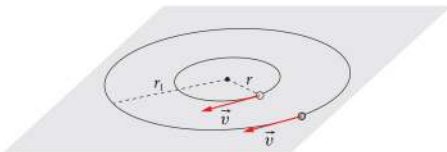
Rys. 8.10

3. Pasażer pociągu jadącego ze stałą prędkością upuścił jabłko. Opisz ruch jabłka w układzie odniesienia związanym:
- z pociągiem,
 - z obserwatorem stojącym przy torach.
4. Oblicz wartość przyspieszenia dośrodkowego ciała poruszającego się ze stałą szybkością po okręgu o promieniu $r = 0,5$ m. Okres ruchu $T = 2$ s.
5. Wskazówka minutowa zegara jest 1,5 raza dłuższa od wskazówki godzinowej. Porównaj okresy, szybkości kątowne i szybkości liniowe końców tych wskazówek. W tym celu oblicz ilorazy porównywanych wielkości. Zapisz komentarze do otrzymanych wyników.
6. Kołowa tarcza szlifierska o promieniu $r = 0,1$ m wykonuje w czasie jednej minuty 3000 obrotów wokół osi prostopadłej do tarczy i przechodzącej przez jej środek. Oblicz:
- szybkość liniową,
 - szybkość kątową,
 - wartość przyspieszenia dośrodkowego punktów znajdujących się na obwodzie tarczy oraz punktów odległych o $0,5r$ od osi obrotu.
7. Satelita krąży wokół Ziemi po orbicie kołowej ze stałą szybkością $v = 7,6 \text{ km/s}$ na wysokości $h = 520 \text{ km}$ nad Ziemią. Oblicz okres ruchu i wartość przyspieszenia dośrodkowego satelity. Promień Ziemi $R = 6370 \text{ km}$.
8. Ciało porusza się po okręgu o promieniu r ze stałą szybkością (rys. 8.11).



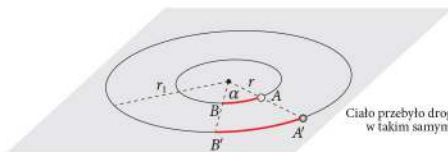
Rys. 8.11

- a) Ustal, jak zmieni się wartość przyspieszenia dośrodkowego, gdy ciało będzie się poruszało po okręgu o większym promieniu z taką samą jak poprzednio:
- stałą szybkością liniową (rys. 8.12),



Rys. 8.12

- stałą szybkością kątową (rys. 8.13).

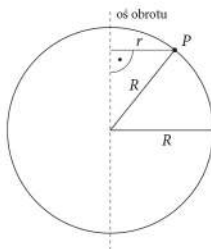


Rys. 8.13

- b) Narysuj wykres zależności $a_r(r)$ w obu przypadkach.



9. Na rysunku przedstawiono przekrój Ziemi płaszczyzną, w której leży oś jej obrotu. Punkt P znajduje się na powierzchni Ziemi w odległości r od osi obrotu. Zakładamy, że Ziemia jest kulą o promieniu R i wiruje z okresem T (doba ziemską).



- a) Narysuj wektor przyspieszenia dośrodkowego $\vec{a}_r$ punktu P .
 b) Wyprowadź i zapisz wzór pozwalający wyznaczyć wartość przyspieszenia dośrodkowego $\vec{a}_r$ punktu P tylko za pomocą wielkości opisanych w zadaniu.



9. Opis ruchu w dwóch wymiarach (II)

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- opisać rzut ukośny jako ruch złożony,
- wyprowadzić równanie toru, wzory na zasięg, wysokość i wartość prędkości chwilowej ciała wykonującego rzut ukośny.

→ **Przypomnij sobie**, jak opisujemy ruch ciała rzuconego poziomo.

Rzut ukośny

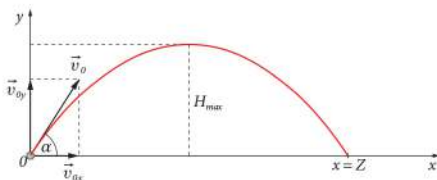
Omówimy rzut ukośny, czyli ruch, który obserwujemy po nadaniu ciału prędkości początkowej $\vec{v}_0$, tworzącej z poziomem kąt ostry α (rys. 9.1). Pomińmy opór powietrza.



Rys. 9.1 Rzut ukośny

W tym przypadku postępujemy tak samo jak podczas analizy rzutu poziomego. Układ współrzędnych wybieramy tak, by oś x była pozioma, a oś y – pionowa (równoległa do przyspieszenia ziemskiego $\vec{g}$) i zwrócona w górę (rys. 9.2).

NM s. 279



Rys. 9.2 Składowe prędkości początkowej w rzucie ukośnym

NM s. 282

Wektor prędkości początkowej $\vec{v}_0$ ma w tym układzie dwie składowe o współrzędnych:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad \text{ i } \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

Ruch ciała rozkładamy więc na dwa ruchy składowe. W kierunku osi x ciało porusza się ze stałą prędkością o wartości $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$. Ruch ciała wzdłuż osi y to rzut pionowy do góry z prędkością początkową v_{0y} , czyli ruch jednostajnie zmienny (patrz przykład 6.2) z przyspieszeniem $\vec{g}$; podczas wznoszenia się ciała – jednostajnie opóźniony, podczas spadania – jednostajnie przyspieszony (spadanie swobodne). Równania przedstawiające zależność współrzędnych położenia od czasu mają postać:

$$\begin{aligned}x &= v_{0x}t \\y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}\end{aligned}$$

Skoro $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, $a_y = -g$, to:

$$x = (v_0 \cos \alpha) \cdot t \quad (9.1)$$

$$y = (v_0 \sin \alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (9.2)$$

Tor ruchu i zasięg w rzucie ukośnym

Równanie toru $y(x)$ w tym ruchu znajdujemy przez wyeliminowanie czasu z powyższego układu równań.

$$\begin{aligned}t &= \frac{x}{v_0 \cos \alpha} & y &= \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 \\y &= (\tan \alpha) \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2\end{aligned} \quad (9.3)$$

Wprowadzamy oznaczenia: $\tan \alpha = B$ oraz $\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = A$ i otrzymujemy:

$$y = Bx - Ax^2$$

Tor ruchu jest zatem parabolą przedstawioną na rysunku 9.2.

W przykładzie 6.2 wykazaliśmy, że czas wznoszenia ciała wyrzuconego pionowo do góry jest równy czasowi spadania:

$$t_w = t_s = \frac{v_{0y}}{g}$$

więc całkowity czas trwania ruchu wyraża się wzorem:

$$t_c = \frac{2v_{0y}}{g}$$

Maksymalna wysokość, na którą wzniesie się ciało w rzucie ukośnym, jest równa współrzędnej położenia y w chwili

$$t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Podstawiamy ten czas do wzoru (9.2) i otrzymujemy:

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (9.4)$$

Zauważ, że gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$, to $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, więc:

$$H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Otrzymaliśmy taki sam wzór jak w rzucie pionowym do góry (przykład 6.2).

Zasięg Z rzutu ukośnego jest równy współrzędnej x położenia ciała w chwili uderzenia o podłoże, czyli po upływie czasu $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ od początku ruchu.

Korzystamy z równania (9.1) i otrzymujemy:

$$Z = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

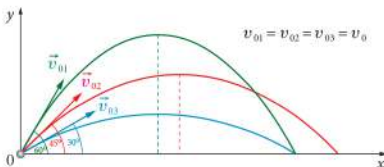
Po zastosowaniu znanego z trygonometrii wzoru $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ otrzymujemy:

$$Z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (9.5)$$

Ze wzorów (9.4) i (9.5) wynika, że dla danego kąta, który wektor prędkości początkowej tworzy z poziomem, zarówno maksymalna wysokość, jak i zasięg w rzucie ukośnym są wprost proporcjonalne do kwadratu szybkości początkowej.

Zastanówmy się, pod jakim kątem do poziomu należy wyrzucić ciało z zadaną szybkością v_0 , aby zasięg rzutu był maksymalny. Ze wzoru (9.5) wynika, że maksymalny zasięg będzie osiągnięty po wyrzuceniu ciała pod takim kątem, dla którego $\sin 2\alpha = 1$, czyli $2\alpha = 90^\circ$, więc $\alpha = 45^\circ$.

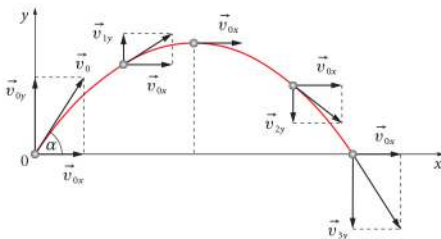
Na rysunku 9.3 przedstawiono tory ruchu ciała wyrzuconego z taką samą szybkością v_0 pod różnymi kątami.



Rys. 9.3 Wysokości maksymalne i zasięgi rzutów ukośnych dla wybranych kątów

Z wykresu wynika, że zasięgi rzutów dla kątów 30° i 60° są jednakowe. Możesz to wykazać – skorzystaj ze związku $\sin 2\alpha = \sin(180^\circ - 2\alpha)$.

Aby znaleźć wartość wektora prędkości i jego kierunek w dowolnej chwili rzutu ukośnego, postępujemy tak, jak w przypadku rzutu poziomego (rys. 9.4).



Rys. 9.4 Prędkość chwilowa i jej składowe w różnych punktach toru

Wartość prędkości w dowolnej chwili ruchu obliczamy za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_y^2}$$

a jej kierunek określamy przez podanie kąta, który w danej chwili tworzy prędkość np. z poziomem.

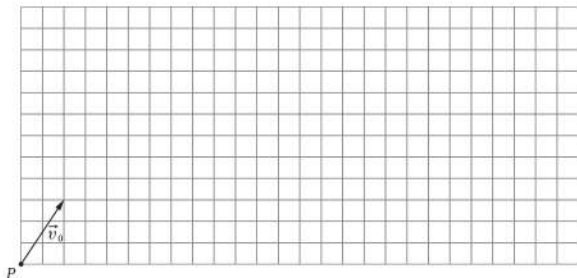
ZADANIA

- Małą stalową kulkę wyrzucano ukośnie pod kątem 30° do poziomu z szybkością 5 m/s. Oblicz:
 - wartość prędkości kulki po $\frac{1}{4}$ sekundy od chwili wyrzucenia,
 - zasięg ruchu kulki,
 - maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się ta kulka ponad poziom, z którego ją wyrzucano.

Założ, że opór powietrza był pomijalnie mały, a $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- Oblicz kąt, pod którym należałoby wyrzucić ukośnie pocisk (gdyby poruszał się bez oporu), aby zasięg rzutu był równy maksymalnej wysokości.
- Wykaż, że wartość prędkości ciała w chwili uderzenia o podłoże jest równa wartości prędkości początkowej, którą nadano ciału podczas wyrzucania go ukośnie pod kątem α . Założ, że opór powietrza jest pomijalnie mały.

4. Piłkarz kopnął spoczywającą w punkcie P piłkę, nadając jej prędkość $\vec{v}_0$ (patrz rysunek). W dalszych rozważaniach pomijamy rozmiary piłki oraz opory powietrza podczas jej ruchu.
- Przerysuj rysunek do zeszytu, a następnie naszkicuj na nim tor ruchu piłki aż do punktu pierwszego jej upadku na murawę. Przyjmij dowolną wartość zasięgu.
 - W najwyższym punkcie toru narysuj i oznacz prędkość piłki $\vec{v}$ i jej przyspieszenie $\vec{a}$. Wartość wektora $\vec{v}$ musi zachować proporcję względem długości wektora prędkości początkowej $\vec{v}_0$ (patrz rysunek), a wektor $\vec{a}$ powinien mieć prawidłowy kierunek i zwrot.



POJĘCIA I WIELKOŚCI opisujące ruch

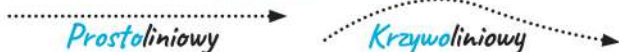
Ruchem nazywamy zmianę położenia ciała względem dowolnie wybranego układu odniesienia.

Ruch klasyfikujemy na podstawie różnych kryteriów.

Ze względu na **SPOSÓB PORUSZANIA SIĘ POSZCZEGÓLNYCH PUNKTÓW CIAŁA** dzielimy ruchy na:



Ze względu na **KSZTAŁT TORU** ruch postępowy dzielimy na:



Ze względu na **PRĘDKOŚĆ** ruch postępowy dzielimy na



WIELKOŚCI FIZYCZNE opisujące ruch



W ruchu po okręgu

POŁOŻENIE

Położenie $\vec{r}$ ciała w danej chwili w wybranym układzie współrzędnych to wektor, którego początek znajduje się w początku układu współrzędnych, a koniec w punkcie, w którym poruszające się ciało znajduje się w tej chwili.

PRZEMIESZCZENIE

czyli zmiana położenia ciała, $\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

PRĘDKOŚĆ ŚREDNIA

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

PRĘDKOŚĆ CHWILOWA

$$\vec{v} = \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0}$$

PRZYSPIESZENIE ŚREDNIE

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

PRZYSPIESZENIE CHWILOWE

$$\vec{a} = \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0}$$

SZYBKOŚĆ ŚREDNIA

$$v_{sr} = \frac{s}{t} \quad \text{lub} \quad v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

SZYBKOŚĆ CHWILOWA

$$v = \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0}$$

OKRES CZĘSTOTLIWOŚĆ

$$T = \frac{t}{n} \quad v = \frac{n}{t}$$

t oznacza czas, w którym ciało przebyło drogę
 $s = n \cdot 2\pi r$

SZYBKOŚĆ KĄTOWA

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

PRZYSPIESZENIE $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_s$

składowa normalna $\vec{a}_n$ przyspieszenia $\vec{a}$ to przyspieszenie dośrodkowe o wartości

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

(związane ze zmianą kierunku prędkości),
a składowa $\vec{a}_s$ to przyspieszenie styczne
(związane ze zmianą wartości prędkości)

Droga s przebyta w pewnym czasie przez poruszające się ciało (lub kąt α zakreślony przez promień wodzący punktu w ruchu po okręgu) nie charakteryzuje ruchu, ale dostarcza o nim praktycznych informacji, więc wzory pozwalające obliczyć drogę i jej zależność od czasu w różnych rodzajach ruchu są bardzo istotne.

OPIS RUCHU w jednowymiarowym układzie współrzędnych

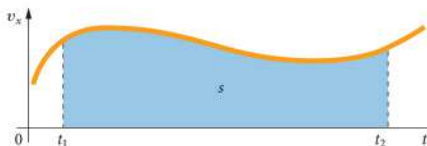
Do opisu ruchu po prostej wybieramy jednowymiarowy układ współrzędnych zazwyczaj tak, by kierunek osi był zgodny z kierunkiem ruchu, a zwrot zgodny ze zwrotem prędkości początkowej ciała.



Matematyczny opis ruchu
– równania przedstawiające zależności od czasu



Równania wektorowe możemy przedstawić w postaci równań liczbowych, w których zastępujemy **wektory** ich **współzrędnymi** w wybranym układzie współrzędnych. **Współrzędna** wektora jest **dodatnia**, gdy **zwrot** wektora **jest zgodny** ze zwrotem osi, a **ujemna** – gdy zwroty wektora i osi są **przeciwne**.



Droge przebytą przez ciało dowolnym prostoliniowym ruchem można obliczyć jako pole figury zawartej między wykresem $v_x(t)$ w tym ruchu a osią czasu.

Szybkość średnia (średnia wartość prędkości) w czasie t w każdym ruchu wyraża się wzorem

$$v_{\text{sr}} = \frac{s}{t}$$

wieć jeśli znamy v_{sr} , możemy obliczyć drogę przebytą w czasie t dowolnym ruchem:

$$s = v_{\text{sr}} t$$

Ruch JEDNOSTAJNY PROSTOLINIOWY

W RUCHU JEDNOSTAJNYM PO LINII PROSTEJ

prędkość nie zmienia się w czasie:

$$\vec{v} = \vec{v}_{sr} = \text{const}$$

Droga $s = vt$ DLA CIAŁA W RUCHU JEST LINIOWA, ZAWSZE ROSNĄCĄ FUNKCJĄ CZASU.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

POŁOŻENIE

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}t$$

PRZEMIESZCZENIE

$$x = x_0 + v_x t$$

WSPÓŁRZĘDNA POŁOŻENIA

są liniowymi funkcjami czasu.

JEŚLI

$$v_x > 0$$

$v_x = v$
i funkcja
 $x(t) = x_0 + vt$
jest rosnąca

JEŚLI

$$v_x < 0$$

$v_x = -v$
i funkcja
 $x(t) = x_0 - vt$
jest malejąca

Na podstawie wykresu $x(t)$ można prześledzić ruch ciała i w prostych przypadkach narysować wykres $v_x(t)$, a na podstawie wykresu $v_x(t)$ – obliczyć wartość zmiany położenia (wartość przemieszczenia) ciała oraz przebytą przez nie drogę.

Ruch JEDNOSTAJNIE ZMIENNY PROSTOLINIOWY

W RUCHU JEDNOSTAJNIE ZMIENNYM **przyspieszenie nie zmienia się w czasie:**

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \text{const}$$

JEŚLI $t_0 = 0$, TO

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$$

WEKTOROWY
OPIS RUCHU

- POŁOŻENIE $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$
- PRĘDKOŚĆ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t$

OPIS RUCHU
ZA POMOCĄ
WSPÓŁRZĘDNYCH

- POŁOŻENIA $x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$
- PRĘDKOŚCI $v_x = v_{0x} + a_x t$

Współrzędne położenia, prędkości i przyspieszenia mogą być dodatnie, ujemne lub równe zeru, w zależności od wartości i zwrotów wektorów $\vec{r}_0, \vec{r}, \vec{v}_0, \vec{v}, \vec{a}$ w stosunku do zwrotu osi x .

jeśli zwroty $\vec{a}$ i $\vec{v}$ są zgodne
(ruch jednostajnie przyspieszony)
i zgodne ze zwrotem osi x
($v_{0x} = v_0, a_x = a$), to

$$v = v_0 + at \quad s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

jeśli zwroty $\vec{a}$ i $\vec{v}$ są przeciwne
(ruch jednostajnie opóźniony)
i zwrot $\vec{v}$ zgodny ze zwrotem
osi x ($v_{0x} = v_0, a_x = -a$), to

$$v = v_0 - at \quad s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2$$

**DROGĘ W RUCHU JEDNOSTAJNIE ZMIENNYM
MOŻNA RÓWNIEŻ WYRAZIĆ WZOREM**

$$s = v_{sr} t = \frac{v_0 + v}{2} t$$

WZGLĘDNOŚĆ RUCHU

Cechą każdego ruchu jest **względność**;

to samo ciało w tej samej chwili może być względem jednego układu odniesienia w spoczynku, a względem innego w ruchu lub względem obu układów w ruchu z różnymi szybkościami.

POŁOŻENIE JEST WZGLĘDNE.

Związek między współrzędnymi położenia ciała i czasem ruchu w dwóch jednowymiarowych układach odniesienia U i U' , których osie x i x' są równoległe, a układ U' porusza się względem układu U ze stałą prędkością $\vec{u}$, ma postać:

$$x' = x - ut \quad \text{lub} \quad x = x' + ut$$

PRĘDKOŚĆ JEST WZGLĘDNA.

Związek między stałymi prędkościami $\vec{v}'$ w układzie U' i $\vec{v}$ w układzie U przedstawiają równania:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

Prędkość $\vec{v}$ ciała względem układu U jest sumą prędkości $\vec{v}'$ ciała względem układu U' i prędkości $\vec{u}$, z którą układ U' porusza się względem układu U .

Położenie i prędkość są względne, zależne od układu odniesienia.

PRZYSPIESZENIA CIAŁA W UKŁADACH U I U' SĄ JEDNAKOWE.

Ponadto w przypadku ruchów z prędkościami $\vec{v}$, $\vec{v}'$, $\vec{u}$ znacznie mniejszymi od prędkości światła:

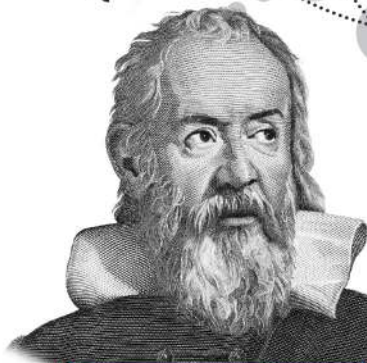
CZAS JEST ABSOLUTNY.

Galileusz uważał, że czas „płynie tak samo” we wszystkich układach poruszających się względem siebie prostoliniowym ruchem jednostajnym.



CZAS JEST WZGLĘDNY.

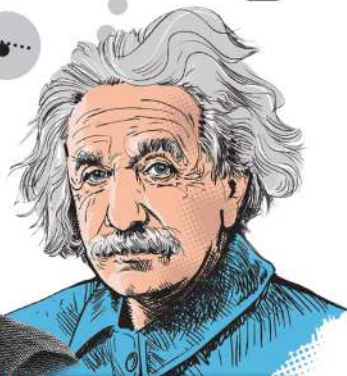
Czas upływający między tymi samymi dwoma zdarzeniami zmierzony w różnych układach jest różny.



Zasada względności Galileusza

Prawa dynamiki są jednakowe we wszystkich układach poruszających się względem siebie prostoliniowym ruchem jednostajnym.

Wnioski wynikające z tej zasady są słuszne tylko dla ciał i układów poruszających się z prędkościami o wartościach znacznie mniejszych od szybkości światła $c \approx 300\,000\,000\text{ m/s}$



Szczególna teoria względności (STW) Einsteina

Dla ciał poruszających się z szybkościami porównywalnymi z szybkością światła obowiązuje szczególna teoria względności (STW) Einsteina.

OPIS RUCHU w dwóch wymiarach

Rzut poziomy

Rzut poziomy następuje po nadaniu ciału prędkości początkowej $\vec{v}_0$ w kierunku poziomym. Jest to ruch krzywoliniowy o równaniu toru podanym poniżej.

Ruch ten opisujemy (w próżni) jako złożenie dwóch ruchów prostoliniowych odbywających się wzdłuż osi x i osi y . W kierunku osi x jest to ruch jednostajny z prędkością $\vec{v}_0$, a w kierunku osi y – spadanie swobodne (czyli ruch jednostajnie przyspieszony z przyspieszeniem ziemskim, z prędkością początkową równą zero).

$$x = v_{0x}t = v_0t$$

$$y = y_0 + \frac{a_y t^2}{2} = y_0 - \frac{gt^2}{2}$$

Po wyeliminowaniu czasu z równań ruchu otrzymujemy **równanie toru**:

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

Jest to równanie paraboli.

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

czas ruchu

$$Z = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

zasięg rzutu

PRĘDKOŚĆ $\vec{v}$ CIAŁA, styczna do toru w każdej chwili ruchu, ma dwie składowe o współrzędnych równych odpowiednio:

$$v_x = v_0 \text{ i } v_y = -gt$$

Wartość prędkości (w chwili t) jest równa

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

a jej kierunek jest określony przez kąt, który wektor $\vec{v}$ tworzy z poziomem lub pionem.

Ruch po okręgu

W tzw. **ruchu jednostajnym po okręgu** wartość prędkości jest stała, a zmienia się jej kierunek.

Wielkości fizyczne stosowane do opisu tego ruchu to: okres T , częstotliwość ν , szybkość liniowa v , szybkość kątowna ω . Dla ruchu po okręgu o promieniu r :

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}$$

szybkość

$$\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T}$$

szybkość kątowna

$$\nu = \frac{1}{T}$$

częstotliwość

Z podanych definicji wynikają związki:

$$v = \omega r \quad \omega = 2\pi\nu$$

Ze zmianą kierunku prędkości w ruchu jednostajnym po okręgu związane jest przyspieszenie, zwrócone w każdej chwili do środka okręgu (przyspieszenie dośrodkowe $\vec{a}_r$) o stałej wartości

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

wartość przyspieszenia dośrodkowego

Rzut ukośny

Rzut ukośny to ruch, który następuje po nadaniu ciału prędkości $\vec{v}_0$, tworzącej z poziomem kąt $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Ruch ten opisujemy w próżni. Jest to ruch krzywoliniowy (poniżej napisano równanie toru), który rozkładamy na dwa ruchy prostoliniowe, odbywające się wzdłuż osi x i y :

wzdłuż osi x – ruch jednostajny,

wzdłuż osi y – rzut pionowy w górę (w pierwszej połowie ruch jednostajnie opóźniony, a w drugiej jednostajnie przyspieszony).

W rzucie ukośnym zależności współrzędnych położenia od czasu mają postać:

$$x = v_{0x}t \quad y = y_{0y} - \frac{gt^2}{2}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

Jeśli wyeliminujemy czas z równań ruchu, otrzymamy **równanie toru**:

$$y = \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

Jest to równanie paraboli.

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

całkowity czas ruchu

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

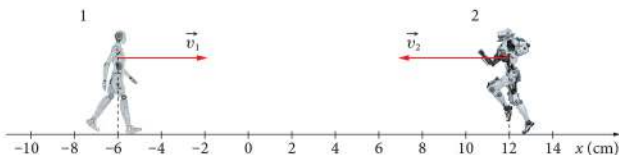
maksymalna wysokość

$$Z = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

zasięg rzutu

Zasięg rzutu jest taki sam dla kątów α oraz $90^\circ - \alpha$.

1. Dwa humanoidalne roboty (1 i 2) poruszają się ruchem jednostajnym wzdłuż osi x , pierwszy z szybkością $0,8 \text{ cm/s}$, drugi z szybkością $1,0 \text{ cm/s}$. Rysunek przedstawia sytuację w chwili $t_0 = 0 \text{ s}$.



Rys. P1.1

1.1. Napisz kinematyczne równania ruchu $x_1(t)$ i $x_2(t)$ dla obu robotów.

W równaniach powinny wystąpić współczynniki liczbowe wyrażone w odpowiednich jednostkach.

1.2. Skorzystaj z napisanych w zadaniu 1.1 równań i oblicz czas t_s , który upływał od chwili t_0 do chwili spotkania robotów, oraz współrzędną x_s miejsca spotkania.

1.3. Narysuj, w jednym układzie współrzędnych, wykresy $x(t)$ dla obu robotów w przedziale od 0 s do 12 s.

1.4. Napisz kinematyczne równania ruchu dla pierwszego robota w układzie odniesienia związanym z drugim i dla drugiego robota w układzie odniesienia związanym z pierwszym.

Przyjmij, że każdy robot znajduje się w punkcie o współrzędnej równej 0 cm swojego układu i osie x są w obu przypadkach zwrócone „w prawo”.

2. Współrzędna położenia pewnego ciała poruszającego się wzdłuż osi x jest następującą funkcją czasu:

$$x(t) = 12 - 8t + t^2$$

(wszystkie współczynniki liczbowe wyrażone są za pomocą podstawowych jednostek SI).

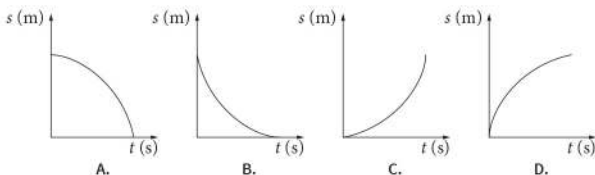
2.1. Uzupełnij zdanie. Wybierz stwierdzenie A albo B oraz jego uzasadnienie 1, 2 albo 3.

Analizując powyższy wzór przedstawiający zależność położenia ciała od czasu, można stwierdzić, że ciało porusza się ruchem jednostajnie

A.	opóźnionym,	ponieważ	1.	zwroty przyspieszenia i prędkości są przeciwne.
			2.	zwroty przyspieszenia i prędkości są zgodne.
B.	przyspieszonym,		3.	współrzędna przyspieszenia jest dodatnia.

2.2. Oblicz czas ruchu ciała aż do zatrzymania i współrzędną położenia, w którym nastąpi zatrzymanie.

2.3. Zaznacz rysunek, na którym poprawnie przedstawiono wykres zależności drogi s przebytej przez ciało od czasu t .



2.4. Zapisz wzór przedstawiający współrzędną wektora prędkości ciała jako funkcję czasu $v_x(t)$.

2.5. Przerysuj do zeszytu i wypełnij poniższą tabelę, korzystając ze wzoru na $x(t)$ podanego w treści zadania oraz wzoru na $v_x(t)$ otrzymanego w zadaniu 2.4.

t, s	0	1	2	3	4
x, m					
$v_x, m/s$					

Na jej podstawie narysuj wykresy $x(t)$ i $v_x(t)$ w przedziale od 0 s do 4 s.

3. Przeanalizuj ruch, o którym jest mowa w poprzednim zadaniu, przy założeniu, że zwrot osi x jest zgodny ze zwrotem prędkości początkowej, a ciało rusza z położenia o współrzędnej $x_0 = 0$.

3.1. Zapisz wzory przedstawiające współrzędną położenia i współrzędną wektora prędkości ciała jako funkcje czasu.

3.2. Oblicz czas ruchu ciała aż do zatrzymania i współrzędną położenia, w którym nastąpi zatrzymanie.

3.3. Narysuj wykresy przebytej drogi $s(t)$ i szybkości $v(t)$ dla tego ruchu w przedziale od 0 s do 4 s.

4. Ciało, któremu nadano szybkość początkową v_0 , przebyło w czasie t drogę s ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem o wartości a .

Na podstawie wzorów:

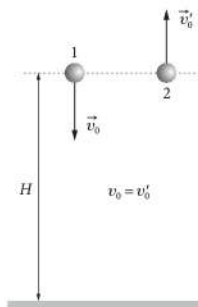
$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$v = v_0 + at$$

wykaż, że szybkość końcową ciała można wyrazić wzorem:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$$

5. Z tej samej wysokości H wyrzucono dwa ciała: pierwsze z szybkością początkową v_0 w dół, a drugie z szybkością początkową v_0 w górę, tak jak pokazuje rysunek P1.2. W dalszych rozważaniach pominiemy opory powietrza podczas ruchu ciał.



Rys. P1.2

5.1. Udowodnij, wykonując odpowiednie przekształcenia wzorów opisujących ruchy tych ciał, że szybkości obu ciał tuż przed zderzeniem z podłożem są takie same i wyrażają się wzorem:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$$

5.2. W obu przypadkach narysuj w zeszyte wektory zmiany prędkości, czyli odpowiednio wektory:

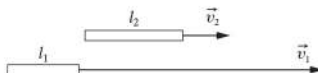
$$\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$$

$$\Delta \vec{v}' = \vec{v}' - \vec{v}'_0$$

Następnie wyraż wartości tych wektorów $|\Delta \vec{v}|$, $|\Delta \vec{v}'|$ przez v i v_0 . Symbol v oznacza szybkość tuż przed zderzeniem z podłożem.

5.3. Oblicz czas ruchu każdego ciała, korzystając z definicji przyspieszenia (np. dla pierwszego ciała skorzystaj ze wzoru: $g = \frac{|\Delta \vec{v}|}{t}$).

- 6.** Pociąg ekspresowy o długości $l_1 = 150$ m, jadący z szybkością $v_1 = 250$ km/h, wyprzedza pociąg towarowy o długości $l_2 = 200$ m, którego szybkość $v_2 = 50$ km/h. Na rysunku przedstawiono schematycznie opisaną sytuację w układzie odniesienia związanym z podłożem (prostokąty symbolizują odpowiednie pociągi).

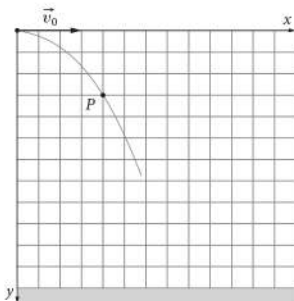


6.1. Przerysuj rysunek do zeszytu, a następnie wykonaj konstrukcję geometryczną prędkości względnej, przyjmując za układ odniesienia pociąg towarowy.

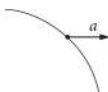
6.2. Oblicz szybkość względną pociągów i czas wyprzedzania.

6.3. Oblicz, jak długo trwałoby mijanie się tych pociągów, gdyby nadjeżdżały z przeciwnych stron.

7. Na środku rzeki znajdują się dwie wyspy. Odległość wzajemna wysp oraz odległości wysp od brzegów rzeki są jednakowe i wynoszą 400 m każda. Szybkość łodzi względem wody $v_1 = 5$ m/s, a szybkość prądu rzeki względem brzegów $v_p = 3$ m/s.
- 7.1.** Oblicz kąt, pod którym należy skierować łódź w stosunku do brzegu, aby dopłynąć do przeciwnego brzegu prostopadłe do kierunku prądu. W tym celu wykonaj konstrukcję geometryczną prędkości łodzi względem brzegu.
- 7.2.** Oblicz czas przepływu łodzi z jednej wyspy do drugiej i z powrotem.
- 7.3.** Oblicz czas przepływu łodzi z wyspy do brzegu i z powrotem.
8. Z wysokości 20 m wyrzucono poziomo kamień z szybkością $v_0 = 6$ m/s. Na rysunku naszkicowano fragment toru kamienia oraz jego położenie po 1 s od chwili wyrzucenia (punkt P). Analizując ruch kamienia, pomierz opory ruchu oraz przyjmij do obliczeń, że przyspieszenie ziemskie ma wartość $g = 9,8$ m/s².
- 8.1.** Przerysuj rysunek do zeszytu, a następnie narysuj w punkcie P wektor prędkości kamienia, zachowując proporcję względem długości wektora prędkości początkowej $\vec{v}_0$ (patrz rysunek).



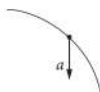
- 8.2.** Oblicz szybkość kamienia w punkcie P i jego wysokość nad podłożem.
- 8.3.** Oblicz kąt, który tworzy prędkość kamienia w punkcie P z pionem.
- 8.4.** Zaznacz rysunek, na którym poprawnie przedstawiono wektor przyspieszenia $\vec{a}$ kamienia w danym punkcie toru.



A.



B.



C.



D.

- 8.5.** W układzie współrzędnych, przedstawionym na rysunku, oś y zwrócona jest w dół.

Wyprowadź wzory przedstawiające współrzędne położenia kamienia x i y (wyrażone w metrach) jako funkcje czasu t (wyrażone w sekundach).

We wzorach powinny wystąpić współczynniki liczbowe wyrażone za pomocą podstawowych jednostek SI.

9. Przyjmij, że okres obrotu Ziemi wokół własnej osi wynosi 24 h, a promień Ziemi $R = 6,37 \cdot 10^6$ m.
- 9.1. Oszacuj szybkość kątową Ziemi w tym ruchu; wynik podaj w stopniach na minutę i w radianach na godzinę z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.
- 9.2. Oszacuj w m/s, z dokładnością do dwóch cyfr znaczących, szybkość liniową mieszkańców równika.
- 9.3. Oszacuj, ile razy wartość przyspieszenia dośrodkowego mieszkańców równika jest mniejsza od wartości przyspieszenia ziemskiego.
10. Dziecko siedzi na koniku obracającej się karuzeli w odległości 3 m od osi obrotu. Szybkość liniowa dziecka jest równa 1,60 m/s. W pewnej chwili karuzela zaczyna zwalniać. W tabeli zapisano chwilowe szybkości dziecka podczas hamowania.

t , s	0	1	2	3	4	5
v , m/s	1,60	1,28	0,96	0,64	0,32	0,00

- 10.1. Ustal i zapisz nazwę ruchu, którym porusza się dziecko podczas ostatnich pięciu sekund ruchu.
- 10.2. Wyprowadź wzór opisujący zależność szybkości dziecka od czasu podczas hamowania karuzeli (wzór powinien zawierać odpowiednie współczynniki liczbowe wraz z jednostkami), czyli wzór przedstawiający funkcję $v(t)$.
- 10.3. Narysuj wykres $v(t)$ w przedziale od 0 s do 5 s.
- 10.4. Oblicz drogę przebytą przez dziecko w czasie hamowania.
- 10.5. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Podczas hamowania karuzela wykonała mniej niż $\frac{1}{4}$ pełnego obrotu.	P	F
2.	Podczas hamowania wartość całkowitego przyspieszenia chwilowego dziecka była stała.	P	F
3.	Całkowite przyspieszenie chwilowe dziecka nie jest skierowane do środka okręgu.	P	F

JĘZYK FIZYKI A JĘZYK POTOCZNY

Język fizyki często różni się od języka potocznego. W języku fizyki droga to wielkość fizyczna wyrażająca długość odcinka toru, po którym porusza się ciało. W języku potocznym mamy drogę polną, asfaltową, ale także np. drogę do sukcesu lub szczęścia.

W języku fizyki szybkość wiążemy ze zmianą czegośkolwiek w jednostce czasu (szybkość wypływu, szybkość budowy, szybkość wiatru, szybkość biegu, szybkość jazdy wskaziwana przez szybkościomierz itp.). W nauce o ruchu to skalarna wielkość $\frac{s}{t}$ obowiązująca w każdym ruchu. W ruchach zmiennych jest to szybkość średnia. Prędkość to wielkość wektorowa, iloraz przemieszczenia i czasu, w którym to przemieszczenie nastąpiło.

W języku potocznym pojęć szybkości i prędkości używa się zamiennie.

Gdy kupujący samochód zadaje sprzedawcy pytanie o przyspieszenie, otrzymuje odpowiedź np. „10 s do setki”, co oznacza, że w ciągu 10 s samochód ze stanu spoczynku osiąga szybkość 100 km/h.

Trener przygotowujący biegacza do zawodów, na pytanie „jaką miałem szybkość”, odpowiada np. „15 s na 100 m”. To także przykłady różnic w języku potocznym i fizycznym.

Powszechne jest nieprawidłowe posługiwanie się w języku potocznym pojęciem ciężaru. Często słyszymy polecenie: „podaj swój wzrost i ciężar”, podczas gdy chodzi o masę ciała wyrażoną w kilogramach, a nie ciężar wyrażony w niutonach. Czasami to polecenie brzmi: „podaj swoją wagę”. Waga to w fizyce przyrząd do ważenia. Może mieć skalę w kilogramach lub, jak siłomierze, w kilogramach i niutonach.

Czy w komunikacji codziennej powinniśmy koniecznie posługiwać się językiem fizyki?

Oczywiście nie. Byłoby to sztuczne. Na lekcjach fizyki należy jednak pamiętać o tych różnicach.

ZADANIA

1. Znajdź inny niż podany wyżej przykład nieprawidłowego używania języka fizyki w życiu codziennym.
2. Jedną z cech wektora jest jego kierunek. Czy w języku potocznym posługujemy się tym pojęciem zgodnie z jego znaczeniem fizycznym?
3. Oblicz wartość przyspieszenia samochodu, o którym wspomniano w tekście.
4. Oblicz szybkość średnią biegacza, o którym wspomniano w tekście.



SIŁA JAKO PRZYCZYNA ZMIAN RUCHU

- Zasady dynamiki
- Zasada zachowania pędu
- Tarcie
- Siły w ruchu po okręgu
- Opis ruchu w układzie nieinercyjnym



10. Zasady dynamiki Newtona

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- klasyfikować oddziaływania występujące w przyrodzie,
- używać pojęcia siły jako miary oddziaływań,
- stosować zasady dynamiki w układach inercjalnych,
- rozwiązywać zadania, posługując się zasadami dynamiki.

→ **Przypomnij sobie**, co wiesz o oddziaływaniach.

Oddziaływania otaczających nas ciał omawiane w szkole podstawowej podzielono na oddziaływania, w których niezbędny jest bezpośredni kontakt ciał, oraz oddziaływania „na odległość”, niewymagające bezpośredniego kontaktu ciał (grawitacyjne, elektrostatyczne i magnetyczne).

Obserwowanymi skutkami tych oddziaływań są odkształcenia ciał, takie jak np. zgniecenia, rozciągnięcia, ugięcia (tzw. skutki statyczne), oraz zmiany wartości, kierunku lub zwrotu prędkości ciał (tzw. skutki dynamiczne).

Fizycy opisują nie tylko oddziaływania **makroskopowe**, obserwowane na co dzień między otaczającymi nas ciałami, ale także oddziaływania **mikroskopowe** między najmniejszymi znanymi cząstkami materii.

Zastanawiasz się zapewne, jaki jest związek obserwowanych skutków oddziaływań ciał makroskopowych z oddziaływaniami między cząstkami materii tworzącymi te ciała. Czy oddziaływania makroskopowe po prostu „odtwarzają” oddziaływania mikroskopowe, czy też opisy oddziaływań w makro- i mikroświecie istotnie się różnią?

Będziemy mówić o tym dokładniej w podręcznikach do kolejnych klas. Teraz wspomnimy tylko, że przykładem oddziaływań, które opisujemy matematycznie tak samo w odniesieniu do ciał mikroskopowych i makroskopowych, są oddziaływania grawitacyjne. Wszystkie pozostałe obserwowane w przyrodzie efekty oddziaływań makroskopowych (np. tarcie, sprężystość ciał, parcie cieczy i gazów) są wynikiem elementarnych oddziaływań elektrycznych i magnetycznych (ściślej mówiąc – elektromagnetycznych) między cząstkami materii.

Siła – ilościowa miara oddziaływań

O ruchu ciała decydują (zwykle wspólnie) różne, zawsze wzajemne oddziaływania. Jeśli podczas opisu oddziaływań i ich skutków posługujemy się tylko słowami, opisujemy oddziaływania jakościowo. Natomiast w celu ilościowego opisu oddziaływań posługujemy się pojęciem **siły**, wektorowej wielkości fizycznej, która jest **miarą oddziaływań**.

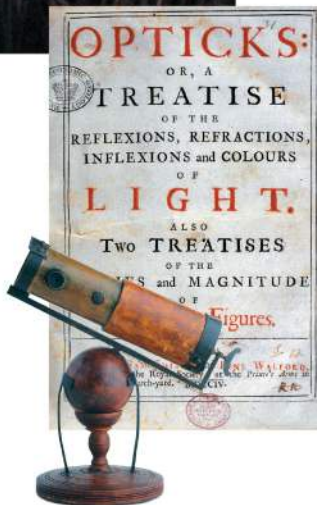
O ruchu ciała w wyniku oddziaływań z innymi ciałami będą decydować wszystkie działające na to ciało siły, które zazwyczaj zastępujemy jedną siłą powodującą takie same skutki – **siłą wypadkową**.

Co dzieje się z ciałem, jeśli działająca na nie siła wypadkowa ma wartość zero (czyli na ciało nie działa żadna siła lub wszystkie działające siły się równoważą), a co, gdy siła wypadkowa jest różna od zera (czyli działające siły się nie równoważą)? Mówią o tym znane ci już zasady dynamiki, sformułowane przez Isaaca Newtona.

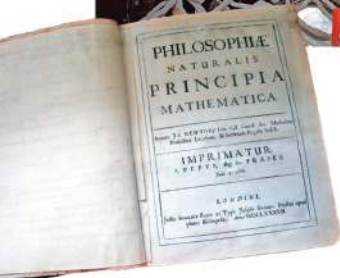
Isaac Newton (1643–1727)

Genialny angielski fizyk i matematyk Isaac Newton urodził się 4 stycznia 1643 roku w Woolsthorpe Manor w środkowo-wschodniej Anglii. Od najmłodszych lat ujawniał wszechstronne zdolności (konstruował mechaniczne zabawki, malował, pisał wiersze) i wykazywał ogromne zainteresowanie nauką. Mimo przeszkód związanych ze skomplikowaną sytuacją rodzinną w 1661 roku rozpoczął naukę w Trinity College w Cambridge, gdzie najpierw studiował etykę, logikę, retorykę oraz grekę, a później zainteresował się też astronomią i matematyką. Poznał dzieła Arystotelesa, Kopernika, Galileusza, Keplera i Kartezjusza. Po trzech latach uzyskał tytuł bakałareata, co dało mu możliwość prowadzenia na uczelni samodzielnych badań naukowych.

Ponieważ uniwersytet zamknięto na prawie dwa lata z powodu epidemii dżumy, Isaac wyjechał do domu, gdzie narodziły się jego genialne pomysły. Rok 1666 zwany jest „rokiem cudów” (*annus mirabilis*) nie tylko z powodu wydarzeń ważnych dla historii Anglii, lecz także z powodu odkryć Newtona, które zrewolucjonizowały spojrzenie na świat przyrody i rządzące nim prawa. To w tym czasie Newton prowadził doświadczenia z optyki (rozszerzył światło białe i wykazał, że jest mieszaniną barw, oraz skonstruował zwierciadlany teleskop) i udowodnił założenia Keplera dotyczące eliptycznych orbit planet. Wtedy też (jak głosi legenda o spadającym jabłku) narodziła się idea teorii powszechnej grawitacji.



W 1672 roku Newton opublikował dzieło *New Theory about Lights and Colours* (Nowa teoria o świetle i kolorach) i w uznaniu osiągnięć w dziedzinie optyki w tym samym roku został członkiem Towarzystwa Królewskiego (Royal Society) w Londynie, a potem jego prezesem.



Rozważania na temat siły grawitacji oraz prawa ruchu ciał, które znamy dzisiaj jako zasady dynamiki, Newton przedstawił w 1687 roku w dziele *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, czyli *Matematyczne zasady filozofii przyrody* (na fotografii strona tytułowa pierwszego wydania dzieła oraz astronauta w Międzynarodowej Stacji Kosmicznej oddany lekturze jednego z wielu kolejnych wydań). Prawa mechaniki newtonowskiej (tzw. klasycznej) są szczególnym przypadkiem (dla ruchów odbywających się z prędkością znacznie mniejszą od prędkości światła) mechaniki relatywistycznej.

Newton był znakomitym matematykiem; niezależnie od Gottfrieda Leibniza stworzył na potrzeby fizyki rachunek różniczkowy i całkowy.

W 1705 roku królowa Anna Stuart nadała mu tytuł szlachecki. Sir Isaac Newton zmarł w 1727 roku i został pochowany w opactwie westminsterskim. Podziw dla jego geniuszu wyraził w epitafium poeta Alexander Pope:

*Nature and Nature's laws lay hid in night.
God said, Let Newton be! and all was light.*

Przyrody wszelkie dzieło w pomroce leżało.

Bóg rzekł: „Niech będzie Newton!” i jasno się stało!
(w tłumaczeniu Juliana Tuwima)

Zasady dynamiki Newtona

Treść pierwszej zasady dynamiki informuje nas, jakie warunki muszą być spełnione, aby ciało pozostawało w spoczynku lub poruszało się ruchem jednostajnym prostoliniowym (w jakim układzie odniesienia – dowiesz się niebawem). W drugiej zasadzie dynamiki sformułowane są przyczyny zmiennego ruchu ciała. Znajdujemy tu również odpowiedź na pytanie, od czego zależy przyspieszenie ciała w ruchu zmiennym. Treść trzeciej zasady dynamiki mówi nam, jakie cechy mają siły wzajemnego oddziaływania ciał.

Przypomnijmy teraz znane ci już sformułowania zasad dynamiki Newtona.

Pierwsza zasada dynamiki

Jeśli siły działające na ciało się równoważą (czyli siła wypadkowa ma wartość zero), ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Druga zasada dynamiki

NM 8. 272

Jeśli siły działające na ciało się nie równoważą (czyli siła wypadkowa $\vec{F}_w$ jest różna od zera), to ciało porusza się ruchem zmiennym z przyspieszeniem wprost proporcjonalnym⁶ do siły wypadkowej $\vec{F}_w$.

$$\vec{a} \sim \vec{F}_w$$

Współczynnik proporcjonalności jest równy odwrotności masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m}$$

(10.1)

Trzecia zasada dynamiki

Oddziaływania ciał są zawsze wzajemne. Siły wzajemnego oddziaływania dwóch ciał mają takie same wartości, taki sam kierunek, przeciwne zwroty i różne punkty przyłożenia (każda działa na inne ciało).

Czy zasady dynamiki są spełnione w każdym układzie odniesienia? Rozważania na temat ruchu ciała nieoddziałującego z żadnym innym ciałem (czyli tzw. ciała odosobnionego) doprowadziły Newtona do sformułowania **postulatu istnienia takiego układu odniesienia, w którym ciało nieoddziałujące z żadnym innym ciałem pozostaje w spoczynku lub w ruchu jednostajnym prostoliniowym**. Taki układ (jak dziś już wiemy – jeden z nieskończenie wielu równoważnych) nazywamy współcześnie **układem inercjalnym**.

⁶ Proporcjonalność wektorów oznacza, że ich wartości są proporcjonalne, kierunki są takie same, a zwroty zgodne (jeśli współczynnik proporcjonalności jest dodatni).

Pierwszą zasadę dynamiki (zwaną też **zasadą bezwładności**) formułujemy dzisiaj następująco:

Istnieją takie układy odniesienia, zwane inercjalnymi, w których ciało, jeśli nie działają na nie żadne siły (lub wypadkowa wszystkich działających na to ciało sił jest równa zeru), pozostaje w spoczynku lub porusza się prostoliniowym ruchem jednostajnym.

Uwaga: Jeśli istnieje jeden układ inercjalny, to każdy układ poruszający się względem niego prostoliniowym ruchem jednostajnym też jest układem inercjalnym.

Zasady dynamiki można stosować tylko w układach inercjalnych i wszystkie rozważania będziemy (na razie) przeprowadzać tylko w takich układach. Dla znacznej liczby zjawisk, które obserwujemy na Ziemi i opisujemy, układ związany z powoli obracającą się Ziemią można uważać za inercjalny. W innych układach, zwanych nieinercjalnymi, zasady dynamiki nie są spełnione. O układach nieinercjalnych będzie mowa w rozdziale 15.

W pierwszej kolejności zajmiemy się ruchami prostoliniowymi.

O tym, czy ciało, którego zachowanie chcemy opisać, porusza się w wybranym układzie odniesienia ruchem **prostoliniowym** jednostajnym (lub pozostaje w spoczynku), czy też porusza się ruchem zmiennym, decyduje (zgodnie z zasadami dynamiki) siła wypadkowa wszystkich sił działających na ciało.

$$\vec{F}_w = m\vec{a}$$

1. Z faktu, że wszystkie siły działające na poruszające się ciało się równoważą (lub zrównoważą w pewnej chwili ruchu), wynika, że ciało porusza się (lub od tej chwili zacznie się poruszać) ruchem jednostajnym prostoliniowym.

$$\vec{F}_w = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \Delta\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{const}$$

2. Jeśli siła wypadkowa jest różna od zera i **stała**, a jej kierunek jest zgodny z kierunkiem prędkości, to ciało porusza się ruchem prostoliniowym jednostajnie zmiennym.

Jeśli ponadto:

- zwrot siły wypadkowej (a więc i zwrot przyspieszenia) jest **zgodny ze zwrotem prędkości** ciała, to ruch ciała jest ruchem jednostajnie **przyspieszonym**;
- zwrot siły wypadkowej (a więc i zwrot przyspieszenia) jest **przeciwny do zwrotu prędkości** ciała, to ruch ciała jest ruchem jednostajnie **opóźnionym**.

3. Jeśli siła wypadkowa jest różna od zera, jej kierunek jest zgodny z kierunkiem prędkości, a zmienia się tylko jej wartość, to ruch ten jest ruchem **niejednostajnie zmiennym**:

- **przyspieszonym**, gdy zwrot siły wypadkowej jest zgodny ze zwrotem prędkości ciała;
- **opóźnionym**, gdy zwroty wektorów siły wypadkowej i prędkości ciała są przeciwne.

4. Jeśli siła wypadkowa ma inny kierunek niż prędkość, to ciało porusza się ruchem **krzywoliniowym**.

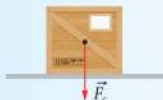
Przykłady zastosowania zasad dynamiki

PRZYKŁAD 10.1

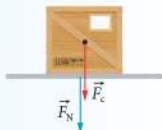
Spoczywająca skrzynia

Skorzystamy z pierwszej i trzeciej zasady dynamiki, by wykazać, że wartość siły nacisku (na poziome podłoże) ciała znajdującego się w spoczynku względem inercyjnego układu odniesienia związanego z tym podłożem jest równa wartości siły ciężkości (ciężaru) ciała.

Najpierw zastanowimy się, z którymi ciałami skrzynia oddziałuje, i narysujemy siły obrazujące oddziaływania tych ciał na skrzynię. Na pewno skrzynia oddziałuje z Ziemią (oddziaływania grawitacyjne). Narysujmy więc siłę $\vec{F}_c$, którą Ziemia działa na skrzynię (rys. 10.1).



Rys. 10.1

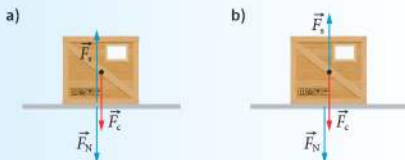


Rys. 10.2

Skrzynia oddziałuje również z podłożem, na którym stoi, ponieważ wywiera na nie nacisk, czyli działa siłą nacisku $\vec{F}_N$ (rys. 10.2).

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki podłoże oddziałuje na skrzynię, naciskając na nią siłą $\vec{F}_s$ (siłą sprężystości)⁷. Wartość tej siły jest równa wartości siły nacisku, kierunki obu sił są zgodne, a zwroty przeciwne. Siła $\vec{F}_N$ jest przyłożona do podłoża, a siła $\vec{F}_s$ do skrzyni (rys. 10.3a).

Na skrzynię działają więc dwie siły: ciężar będący miarą jej oddziaływania z Ziemią i siła sprężystości będąca miarą jej oddziaływania z podłożem (rys. 10.3a i 10.3b⁸).



Rys. 10.3

Obie te siły są przyłożone do tego samego ciała (skrzyni). Z faktu, że skrzynia spoczywa w wybranym przez nas (inercyjnym) układzie odniesienia, wnioskujemy, że siły te równoważą się, czyli mają taką samą wartość ($F_s = F_c$), zgodny kierunek i przeciwne zwroty. Wypadkowa siła $\vec{F}_w = \vec{F}_c + \vec{F}_s$ ma więc wartość równą zeru. Skoro $F_s = F_c$ (pierwsza zasada dynamiki) i $F_s = F_N$ (trzecia zasada dynamiki), to $F_N = F_c$, zatem wartość siły nacisku jest w tym przypadku równa wartości ciężaru. **Nie są to jednak te same siły;** różnią się przedmiotami działania (są przyłożone do różnych ciał) i źródłami (pochodzą od różnych ciał).

⁷ Siłę tę nazywa się niekiedy siłą reakcji podłoża.

⁸ Dla przejrzystości rysunku siłę sprężystości będziemy zaznaczać w środku ciała.

PRZYKŁAD 10.2

Jednostajny ruch samochodu

Przeanalizujemy ruch samochodu jadącego po poziomej szosie ze stałą prędkością. Z doświadczenia wiemy, że po wyłączeniu silnika samochód zwalnia i się zatrzymuje. W takim razie oprócz tych samych sił, o których mówiliśmy w poprzednim przykładzie (siła ciężkości $\vec{F}_c$ i siła sprężystości podłoża $\vec{F}_s$), na samochód działają jeszcze siły w kierunku poziomym: siła napędu $\vec{F}$ (tzw. siła ciągu silnika) zwrócona zgodnie z prędkością samochodu i siła oporu $\vec{F}_{op}$ (powietrza, tarcia kół) zwrócona przeciwnie (rys. 10.4).



Rys. 10.4

Jeśli samochód jedzie ruchem jednostajnym, to zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki siła wypadkowa jest równa zero.

$$\vec{F}_w = \vec{F}_c + \vec{F}_s + \vec{F} + \vec{F}_{op} = \vec{0}$$

A zatem zarówno siły działające w kierunku pionowym, jak i siły działające w kierunku poziomym muszą być wektorami przeciwnymi, więc:

$$F_s = F_c \quad \text{ i } \quad F = F_{op}$$

Wobec tego samochód ruszający z miejsca będzie się poruszał najpierw ruchem przyspieszonym, a ruchem jednostajnym dopiero od chwili, w której siła oporu zrównoważy siłę ciągu silnika.

Zwróć uwagę, że gdyby koła nie stykały się z podłożem, to silnik nie spowodowałby ruchu samochodu. Obracane przez silnik koła działają na podłożu siłą zwróconą do tyłu, zatem zgodnie z trzecią zasadą dynamiki podłoże działa na koła siłą zwróconą do przodu i dzięki temu samochód się porusza.

PRZYKŁAD 10.3

Swobodne spadanie piłki

Przedyskutujemy tzw. spadanie swobodne. Nazwa „swobodne” oznacza, że jedyną siłą działającą na spadające ciało jest siła ciężkości. Taka sytuacja ma miejsce w próżni, gdy $F_{op} = 0$ (rys. 10.5).



Rys. 10.5

Zastosujemy w tym przypadku drugą zasadę dynamiki:

$$\vec{F}_w = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} = m\vec{a}$$

zatem:

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Każde ciało spada w próżni ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $\vec{g}$.

Na Ziemi spадanie odbywa się zwykle w powietrzu, które stawia opór. Jeśli jednak spadające ciało ma dużą gęstość, niezbyt duże wymiary i spada z niewielkiej wysokości, to wartość siły oporu powietrza jest znacznie mniejsza od wartości siły ciężkości i można ją pominąć.

PRZYKŁAD 10.4

Spadanie kropli deszczu

Omówimy spadanie ciała, które ma niewielką gęstość i spada z dużej wysokości, jak np. kropla deszczu. W takich przypadkach nie można pominąć siły oporu powietrza. Siła ta⁹ jest zwrócona przeciwnie do zwrotu prędkości ciała, a jej wartość (dla niezbyt dużych szybkości) rośnie wprost proporcjonalnie do wartości prędkości ciała.

$$F_{\text{op}} \sim v \Rightarrow F_{\text{op}} = bv$$

gdzie b jest współczynnikiem proporcjonalności zależnym od kształtu i rozmiarów ciała oraz od właściwości ośrodka (w tym przypadku powietrza).

W każdej chwili ruchu na ciało działają więc dwie siły¹⁰: siła ciężkości $\vec{F}_c$ (którą dla wysokości znacznie mniejszych od promienia Ziemi można uważać za stałą) i siła oporu $\vec{F}_{\text{op}}$.

Na rysunku 10.6 przedstawiono siły działające na kroplę w czterech kolejnych chwilach jej ruchu. Kolorem czerwonym narysowano siłę wypadkową. Jej zwrot jest zgodny ze zwrotem prędkości ciała, a wartość maleje. Z drugiej zasady dynamiki wynika, że w tej sytuacji kropla porusza się ruchem niejednostajnie przyspieszonym, z malejącym przyspieszeniem (rys. 10.6a, b, c). Coraz mniejsze przyspieszenie to coraz mniejsze **przyrosty** prędkości ciała w jednostce czasu, co oznacza, że **prędkość rośnie coraz wolniej**.

W sytuacji przedstawionej na rysunku 10.6d siła oporu równoważy siłę ciężkości ($F_{\text{op}} = F_c$, $F_w = 0$) i kropla porusza się od tej chwili ruchem jednostajnym (pierwsza zasada dynamiki) z prędkością o wartości, którą osiągnęła w chwili zrównoważenia się sił (większą od szybkości w każdej chwili ruchu przyspieszonego). Prędkość kropli jest teraz maksymalna (v_{max}).

Aby obliczyć jej wartość, korzystamy z drugiej zasady dynamiki. Zapisujemy ją najpierw wektorowo, a następnie za pomocą współrzędnych w układzie odniesienia związanym z osią zwróconą w dół:

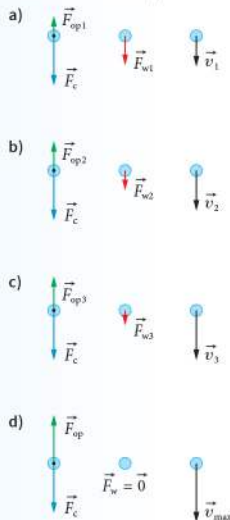
$$\vec{F}_w = \vec{F}_c + \vec{F}_{\text{op}} \quad F_{w2} = mg - bv_2$$

(dla sytuacji przedstawionej np. na rysunku 10.6b).

Gdy $F_w = 0$, to:

$$0 = mg - bv_{\text{max}} \quad v_{\text{max}} = \frac{mg}{b}$$

Jak wiemy z doświadczenia, wartość prędkości granicznej kropli deszczu nie jest zbyt wielka¹¹ i uderzenie taką kroplą nie jest bolesne. Jednak dla nieco większych bryłek gradu wartość prędkości jest wyraźnie większa, a sztywność lodu powoduje, że grad może wyrządzić znaczne szkody.



Rys. 10.6

⁹ Opisuje ją prawo Stokesa (F_{oporu} dla kuli o promieniu $r = 6\pi\eta rv$, η – współczynnik lepkości powietrza).

¹⁰ W rozważaniach pominięto siłę wyporu (także działającą na kroplę w powietrzu) ze względu na jej znikomo małą wartość (stanowi ona około 0,13 % siły ciężkości).

¹¹ Kropla deszczu o średnicy 1,5 mm spadająca w powietrzu o gęstości $1,3 \text{ kg/m}^3$ osiąga szybkość $v_{\text{max}} = 7 \text{ m/s}$.



WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Skok Felixa Baumgartnera

Austriak Felix Baumgartner w październiku 2012 roku wykonał rekordowy skok spadochronowy z wysokości 38 969 m nad Ziemią. Tabela pokazuje przybliżone szybkości, które osiągnął na poszczególnych wysokościach i w określonych sekundach ruchu.



t, s	h, m	$v, m/s$
0	38 969	0
34	33 466	310
50	27 833	377 (szybkość maksymalna)
64	22 961	290
180	7 619	80
260	2 567	53 (otwarcie spadochronu)

W niskiej temperaturze panującej na tak dużych wysokościach szybkość dźwięku to około 300 m/s. Felix Baumgartner ją przekroczył. Oszacuj na podstawie tabeli, jak długo poruszał się szybciej niż dźwięk.

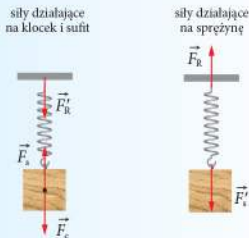
Wyjaśnij, dlaczego szybkość skoczka po osiągnięciu pewnej wartości zaczęła maleć przed otwarciem spadochronu.

PRZYKŁAD 10.5

Waga sprężynowa

Omówimy zasadę działania wagi sprężynowej.

Na przymocowanej do sufitu bardzo lekkiej sprężynie (której ciężar pomijamy) wisi klocek (rys. 10.7).



Rys. 10.7

W układzie odniesienia związanym z sufitem sprężyna i klocek spoczywają, co oznacza, że siły działające na każde z tych ciał się równoważą. Na klocek działa do góry siła $\vec{F}_s$ pochodząca od napiętej sprężyny, a w dół siła $\vec{F}_c$ (ciężar klocka – siła, której źródłem jest Ziemia). Z pierwszej zasady dynamiki wynika, że:

$$\vec{F}_s + \vec{F}_c = \vec{0}$$

więc wartości tych sił są równe: $F_s = F_c$. Sprężyna działa na klocek siłą $\vec{F}_s$, klocek działa na sprężynę siłą $\vec{F}_s' = -\vec{F}_s$ czyli o takiej samej wartości (zgodnie z trzecią zasadą dynamiki). Ponadto na sprężynę działa siła $\vec{F}_R$, której źródłem jest sufit. Sprężyna jest w spoczynku, zatem zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki:

$$\vec{F}_R + \vec{F}_s' = \vec{0} \quad \text{czyli} \quad F_R = F_s'$$

(siłę $\vec{F}_s'$ nazywamy często siłą naciągu sprężyny).

Sprężyna działa na sufit siłą $\vec{F}_R$ (zgodnie z trzecią zasadą dynamiki $F_R' = F_R$).

Pogrupujmy teraz siły wzajemnego oddziaływania ciał. Są to: siła $\vec{F}_s'$, którą klocek działa na sprężynę, i siła $\vec{F}_s$, którą sprężyna działa na klocek, oraz siła $\vec{F}_R$ działająca ze strony sufitu na sprężynę i siła $\vec{F}_R'$, którą sprężyna działa na sufit. A co z siłą $\vec{F}_c$? Czy ona nie ma „pary” wynikającej z trzeciej zasady dynamiki? Oczywiście, że ma. Reakcją na siłę $\vec{F}_c$ pochodzącą od Ziemi i działającą na klocek jest siła $\vec{F}_c'$, którą klocek działa na Ziemię, ale tej siły nie ma na rysunku, gdyż nie narysowaliśmy Ziemi.

Skoro $F_c = F_s$ oraz $F_s = F_s'$ to $F_c = F_s'$

Fakt, że $F_c = F_s'$, pozwala na mierzenie ciężaru ciała za pomocą wagi sprężynowej po wychowaniu sprężyny. (Wydłużenie sprężyny jest wprost proporcjonalne do wartości rozciągającej ją siły). Waga sprężynowa wskaże więc wartość siły $\vec{F}_s'$ równą co do wartości ciężarowi zawieszonoego na niej ciała, ale tylko wtedy, gdy klocek i sprężyna spoczywają w układzie inercyjnym lub poruszają się w nim ruchem jednostajnym.

PRZYKŁAD 10.6

Przeciążenie, niedociążenie i nieważkość

Wykażemy, że wskazania wagi sprężynowej w windzie poruszającej się z przyspieszeniem będą inne niż wtedy, gdy winda spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym.

Założmy, że sprężynę z klockiem o masie m zawiesiliśmy u sufitu windy (rys. 10.8), która porusza się ze stałym przyspieszeniem $\vec{a}$ zwróconym w górę, czyli porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym w górę lub jednostajnie opóźnionym w dół względem inercjalnego układu odniesienia, związanego np. z budynkiem.



Rys. 10.8

Rozpatrzmy siły działające na klocek w takiej sytuacji. Są to, jak poprzednio, ciężar $\vec{F}_c$ i siła $\vec{F}_s$ pochodząca od sprężyny, ale teraz te siły się nie równoważą, gdyż klocek wraz z windą porusza się z przyspieszeniem $\vec{a}$. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki:

$$\vec{F}_s + \vec{F}_c = m\vec{a}$$

Z budynkiem wiążemy oś y układu współrzędnych, zwróconą w górę (rys. 10.8), zastępujemy wektory ich współrzędnymi i otrzymujemy:

$$F_s - F_c = ma$$

lub:

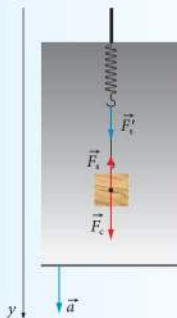
$$F_s = F_c + ma = mg + ma = m(g + a)$$

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki klocek działa na sprężynę siłą $\vec{F}'_s$,

$$F'_s = F_s = m(g + a), \quad \text{więc} \quad F'_s > mg.$$

Waga sprężynowa wskaże wartość siły $\vec{F}'_s$, którą sprężyna wagi jest rozciągana przez klocek. W tym przypadku ta siła ma wartość większą od wartości ciężaru klocka, więc klocek jest w **stanie przeciążenia**.

Rozważmy teraz przypadek, gdy winda porusza się ze stałym przyspieszeniem $\vec{a}$ ($a < g$) zwróconym w dół (ruch jednostajnie przyspieszony w dół lub jednostajnie opóźniony w górę). Takim samym ruchem porusza się klocek (względem inercjalnego układu odniesienia), więc działająca na niego wypadkowa siła jest zwrócona w dół (rys. 10.9).



Rys. 10.9

$$\vec{F}_c + \vec{F}_s' = m\vec{a}$$

Jeśli oś y układu współrzędnych zwrócimy tym razem w dół, otrzymamy:

$$mg - F_s = ma, \quad \text{skąd} \quad F_s = m(g - a)$$

Sprężyna działa na klocek zwróconą w górę siłą o takiej wartości, a klocek działa na sprężynę zwróconą w dół siłą $\vec{F}_s'$ o takiej samej wartości.

$$F_s' = F_s = m(g - a)$$

Z powyższego równania wynika, że:

$$F_s' < mg$$

Klocek jest więc w stanie **niedociążenia**.

Zwróć uwagę, że gdyby winda spadała z przyspieszeniem o wartości $a = g$, to $F_s' = 0$, czyli klocek nie działałby na sprężynę żadną siłą. Stan, w którym znalazłby się wtedy klocek, nazywamy **stanem nieważkości**. Będzie o tym mowa w podręczniku dla klasy drugiej.

Sprawdź, czy np. dwa metalowe krążki leżące jeden na drugim podczas spadania znajdują się w stanie nieważkości. W tym celu pomiędzy dwoma metalowymi krążkami umieść pasek papieru i spróbuj go wysunąć, gdy:

- krążki leżą na stole,
- krążki spadają swobodnie.

Okazuje się, że w drugim przypadku, gdy krążki spadają, pasek papieru sam wysuwa się spod nich.

PRZYKŁAD 10.7

Dźwig

Obliczmy wartość siły napięcia liny dźwigu, który w początkowej fazie ruchu podnosi ciało o masie 50 kg z przyspieszeniem o wartości 1 m/s^2 (rys. 10.10).



Rys. 10.10

Na ciało działają dwie siły: zwrócona w dół siła ciężkości $\vec{F}_c$, której źródłem jest Ziemia, oraz łączna siła $\vec{F}$ pochodząca od obu lin i zwrócona w górę. Wypadkowa $\vec{F}_w$ tych sił nadaje ciału przyspieszenie $\vec{a}$. Druga zasada dynamiki w tym przypadku ma postać:

$$\vec{F} + \vec{F}_c = m\vec{a}$$

Jeśli oś y wybierzemy tak jak na rysunku 10.10, a wektory zastąpimy ich współrzędnymi, otrzymamy:

$$F - F_c = ma$$

skąd:

$$F = m(a + g)$$

$$F = 50 \text{ kg} \cdot \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \approx 541 \text{ N}$$

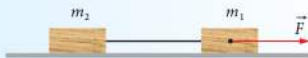
Wartość siły napięcia lin $\vec{F}_N$, tzn. siły, którą ciało działa na liny (zgodnie z trzecią zasadą dynamiki), jest równa wartości siły $\vec{F}$, którą liny działają na ciało. W takim razie wartość siły napięcia lin $F_N \approx 541 \text{ N}$.

Gdyby dźwig unosił ciało ruchem jednostajnym, siła napięcia lin miałaby wartość $F_N \approx 491 \text{ N}$.

PRZYKŁAD 10.8

Układ klocków połączonych linką

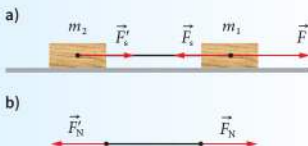
Obliczymy wartość przyspieszenia układu klocków przedstawionego na rysunku 10.11 i wartość siły napinającej linkę łączącą klocki, przy założeniu, że masa linki jest znikomo mała, a tarcie klocków o podłoże można pominąć.



Rys. 10.11

Na klocek o masie m_1 działamy stałą siłą o wartości F .

Na rysunku 10.12a zaznaczono siły działające na klocki, a na rysunku 10.12b – siły działające na linkę.



Rys. 10.12

Na każdy klocek działają jeszcze dwie równoważące się siły: siła ciężkości i siła sprężystości podłoża.

Na klocek o masie m_1 działają dwie siły: siła $\vec{F}$, którą ciągniemy klocek, i siła $\vec{F}_s$ pochodząca od linki. Wartość siły $\vec{F}_s$ jest na pewno mniejsza od wartości siły $\vec{F}$, gdyż z doświadczenia wiemy, że jeśli powierzchnia jest bardzo gładka, taki układ klocków porusza się względem podłoża ruchem przyspieszonym. Jeśli linka działa na klocek siłą $\vec{F}_s$, to klocek (zgodnie z trzecią zasadą dynamiki) działa na linkę siłą $\vec{F}_N$ o takiej samej wartości $F_N = F_s$. Jeśli na linkę działa w prawo siła $\vec{F}_N$, to taką samą siłą linka działa na drugi klocek. Jeśli linka działa na drugi klocek siłą $\vec{F}_s$ o wartości równej F_N , to klocek działa na linkę w lewo siłą o takiej samej wartości ($F_N' = F_N$).

Dla każdego klocka z osobna piszemy dynamiczne **równanie ruchu**, czyli **drugą zasadę dynamiki Newtona**. Uwzględniamy fakt, że siła ciężkości i siła sprężystości podłoża działające odpowiednio na każdy klocek się równoważą.

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F}_s = m_1 \vec{a} \\ \vec{F}_s' = m_2 \vec{a} \end{cases}$$

Wektory zastępujemy ich współrzędnymi (na poziomej osi x zwróconej zgodnie ze zwrotem siły $\vec{F}$) i po uwzględnieniu, że $F_N' = F_N$ i $F_s = F_N$, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} F - F_N = m_1 a \\ F_N = m_2 a \end{cases}$$

A zatem:

$$F - m_2 a = m_1 a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

$$F_N = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$$

Uwaga: Zadanie można rozwiązać innym sposobem.

Siła $\vec{F}$ działająca na układ klocków to siła zewnętrzna¹². Jej źródłem jest ciało, które nie należy do układu. Siła ta nadaje układowi o masie $m_1 + m_2$ przyspieszenie o wartości:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} \quad (10.2)$$

Z przyspieszeniem o takiej wartości porusza się cały układ, w tym oczywiście każdy z klocków. Możemy więc obliczyć wartość siły napięcia linki dzięki zastosowaniu drugiej zasady dynamiki do klocka o masie m_2 , któremu przyspieszenie nadaje siła $\vec{F}'_s$ ($F'_s = F_s = F_N$):

$$F_N = m_2 a = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$$

lub do klocka o masie m_1 , na który działają siły $\vec{F}$ i $\vec{F}'_s$ ($F_s = F_N$):

$$\begin{aligned} F - F_N &= m_1 a \\ F_N &= F - m_1 \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 10.9

Ruch po równi pochyłej (bez tarcia)

Omówimy ruch sanek zsuwających się z góry nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha = 30^\circ$ z pomijalnie małym tarciem (rys. 10.13) jako przykład ruchu ciała po gładkiej równi pochyłej (bez tarcia). Jakim ruchem poruszają się sanki?



Rys. 10.13

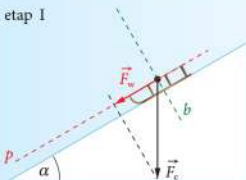
Na sanki działają dwie siły: siła ciężkości $\vec{F}_c$ i siła $\vec{F}'_s$, którą równia naciska na sanki (siła sprężystości). Wypadkowa tych sił jest równoległa do powierzchni równi (bo taki kierunek i zwrot ma przyspieszenie sanek), a siła sprężystości – prostopadła. (Jak zapewne pamiętasz, kierunek siły sprężystości podłoża jest, zgodnie z trzecią zasadą dynamiki, taki sam jak kierunek siły nacisku sanek na równię).

Jeśli znamy siłę ciężkości działającą na sanki oraz kierunki siły wypadkowej i siły sprężystości, możemy **konstrukcyjnie** znaleźć siłę wypadkową $\vec{F}_w$ i siłę sprężystości $\vec{F}'_s$. Poszczególne etapy konstrukcji przedstawiono na kolejnych rysunkach.

¹² Więcej informacji na temat sił zewnętrznych i sił wewnętrznych w układzie znajdziesz w rozdziale 12.

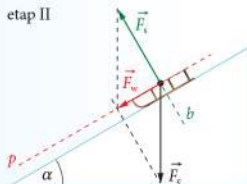
Najpierw rysujemy siłę ciężkości (rys. 10.14), a następnie kierunek siły wypadkowej (prosta p) i kierunek siły sprężystości (prosta b). Przez koniec wektora $\vec{F}_c$ prowadzimy prostą równoległą do prostej b i rysujemy siłę wypadkową $\vec{F}_w$ (rys. 10.14).

etap I



Rys. 10.14

etap II

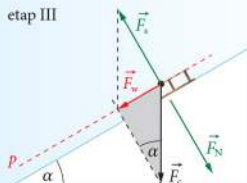


Rys. 10.15

Przez koniec wektora $\vec{F}_w$ prowadzimy prostą równoległą do wektora $\vec{F}_c$ i rysujemy siłę sprężystości $\vec{F}_s$ (rys. 10.15).

Skorzystamy teraz z funkcji trygonometrycznych kąta α w trójkącie prostokątnym zaznaczonym na rysunku 10.16 kolorem szarym i obliczymy wartość siły wypadkowej (kąt α jest równy kątowi nachylenia równi do poziomu, ponieważ ramiona obu tych kątów są odpowiednio prostopadłe).

etap III



Rys. 10.16

$$\frac{F_w}{F_c} = \sin \alpha \quad F_c = mg \quad F_w = mg \sin \alpha$$

Przyspieszenie sanek ma więc wartość wyrażoną wzorem:

$$a = \frac{F_w}{m} = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha$$

Po podstawieniu wartości liczbowych (dla $g = 10 \text{ m/s}^2$) otrzymujemy:

$$a = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 30^\circ = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Sanki poruszają się ruchem jednostajnie przyspieszonym.

Znajdziemy jeszcze wartość siły sprężystości działającej na sanki (z trójkąta na rysunku 10.16).

$$\frac{F_s}{F_c} = \cos \alpha \quad F_s = mg \cos \alpha$$

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki taką samą wartość będzie miała siła nacisku sanek na równię.

$$F_N = mg \cos \alpha$$

NM s. 286

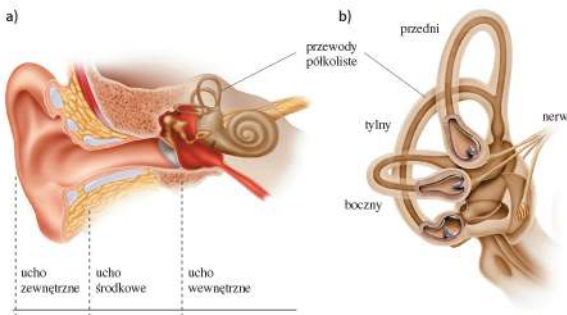
NM s. 282



WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Zmysł równowagi a zasada bezwładności

Jedną z funkcji zmysłu równowagi jest wykrywanie ruchu głowy. Odpowiedzialne za to są trzy przewody półkoliste, będące częścią ucha wewnętrznego (rys. 10.17a). Leżą one (w przybliżeniu) w trzech prostopadłych płaszczyznach (rys. 10.17b). Wewnątrz przewodów znajduje się płyn zwany śródchlanką.



Rys. 10.17

Na końcu każdego przewodu znajduje się zespół komórek nerwowych wyposażonych w rzęski, których odchylenie powoduje powstawanie sygnału nerwowego. Podczas ruchu głowy śródchlanka ze względu na swoją bezwładność porusza się względem przewodu półkolistego, co powoduje odchylenie rzęsek komórek znajdujących się na jego końcu. Sygnał nerwowy jest następnie przekazywany do mózgu, gdzie zostaje odpowiednio zinterpretowany. Każdy przewód półkolisty jest odpowiedzialny za wykrywanie ruchu w swojej płaszczyźnie (rys. 10.18).

Ruchy głowy w przód i w tył są wykrywane przez przewód półkolisty przedni.



Obrotowe ruchy głowy są wykrywane przez przewód półkolisty boczny.



Ruchy głowy na boki są wykrywane przez przewód półkolisty tylny.



Rys. 10.18

ZADANIA

1. Jeśli masz w domu kilka stalowych kulek (np. ze starego łożyska) i drewnianą, metalową lub plastikową listwę z rowkiem o szerokości porównywalnej ze średnicą kulek, możesz wykonać następujące doświadczenie.

- W rowku, na poziomo ustawionej listwie, umieść trzy stalowe kulki oddalone od siebie mniej więcej o 10 cm. Czwartą kulkę mocno pchnij wzdłuż rowka w stronę spoczywających kulek.
- Ponownie umieść kulki w tych samych miejscach, a następnie unieś jeden koniec listwy o kilka centymetrów, tworząc w ten sposób równie pochyłą nachyloną do poziomu pod niewielkim kątem.

Obserwuj zachowanie się kulek w doświadczeniu. Jaki rodzaj oddziaływania powoduje ruch kulek w każdym z tych przypadków?

2. Na odwróconą do góry dnem probówkę nałożono dwa okrągłe magnesy o masie 0,4 kg każdy, zwrócone do siebie biegunami jednoimiennymi (rys. 10.19). Górny magnes zawisł nad dolnym magneselem. Przyjmij, że $g = 10 \text{ m/s}^2$, i oblicz:

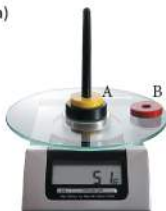
- wartość magnetycznej siły odpychania magnesów,
- wartość siły nacisku dolnego magnesu na podłoże.



Rys. 10.19

3. Podstawkę z drewnianym prętem postawiono na szalce wagi kuchennej (rys. 10.20a). Na pręt nałożono magnes A. Obok na szalce położono identyczny magnes B. Waga wskazała 51 g. Jaką wartość wskaże waga, gdy magnes B nałożymy na pręt w taki sposób, by magnesy A i B się odpychały (rys. 10.20b)? Odpowiedź uzasadnij.

a)



b)



Rys. 10.20

4. Z balonu opadającego ruchem jednostajnym wyrzucano część balastu i stwierdzono, że balon (rys. 10.21) porusza się w górę z prędkością o stałej wartości – takiej samej jak podczas spadania. Narysuj w zeszyte wszystkie siły działające na balon w obu przypadkach.



Rys. 10.21



11. Siła a zmiana pędu ciała

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- i w jakim celu wprowadza się pojęcia pędu ciała i popędu siły,
- w inny sposób zapisać drugą zasadę dynamiki i jak ten zapis stosować w rozwiązywaniu zadań.



→ **Przypomnij sobie**, o czym informuje szybkość zmiany dowolnej wielkości fizycznej.

Drugą zasadę dynamiki:

$$\vec{a} \sim \vec{F}_w \Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}_w$$

zapiszemy teraz w innej postaci. W tym celu porównamy definicję przyspieszenia:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

z przyspieszeniem obliczonym na podstawie drugiej zasady dynamiki (podającej przyczynę istnienia przyspieszenia):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m}$$

Otrzymujemy:

$$\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{F}_w}{m}$$

Po pomnożeniu obu stron powyższego równania przez $m\Delta t$ uzyskujemy:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}_w\Delta t \quad (11.1)$$

Iloczyn masy m ciała i jego prędkości $\vec{v}$ nazywamy **pędem** ciała i oznaczamy symbolem $\vec{p}$.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Zwróć uwagę, że wyrażenie po lewej stronie równania (11.1) to przyrost pędu ciała, który nastąpił w czasie zmiany prędkości od $\vec{v}_1$ do $\vec{v}_2$, czyli w czasie Δt . A zatem:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F}_w\Delta t \quad (11.2)$$

Iloczyn siły wypadkowej i czasu jej działania nazywamy często **popędem siły**.

Wzór 11.2 odczytujemy następująco:

Przyrost pędu ciała jest równy iloczynowi działającej na ciało siły wypadkowej i czasu jej działania, czyli tzw. popędowi siły.

Jak widać, **zmiana pędu** ciała zależy nie tylko od siły wypadkowej, ale również od czasu jej działania, i **następuje tylko wtedy, gdy na ciało działa siła wypadkowa różna od zera**.

Z równania (11.2) wynika, że:

Jeśli siła wypadkowa wszystkich sił działających na ciało jest równa zeru, to pęd ciała nie ulega zmianie.

Równanie (11.2) możemy zapisać także w postaci:

$$\vec{F}_w = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Jest to **inna postać drugiej zasady dynamiki**.

Wyrażenie $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$ informuje nas, jaki przyrost pędu następuje w jednostce czasu, czyli jaka jest **szybkość zmiany pędu**.

Wobec tego drugą zasadę dynamiki możemy sformułować następująco:

Siła wypadkowa wszystkich sił działających na ciało jest równa szybkości zmiany jego pędu.

Szybkość zmiany pędu ciała jest tym większa, im większa jest siła wypadkowa działająca na ciało.

Kiedy obie postaci drugiej zasady dynamiki są równoważne? Aby odpowiedzieć na to pytanie, porównamy wzory na siłę w obu postaciach drugiej zasady dynamiki:

$$\vec{F}_w = m\vec{a} \quad \text{ i } \quad \vec{F}_w = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Do pierwszego wzoru podstawiamy $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$, a do drugiego $\vec{p} = m\vec{v}$.

Otrzymujemy:

$$\vec{F}_w = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{ i } \quad \vec{F}_w = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t}$$

Widać, że te równania są równoważne tylko wtedy, gdy:

$$m\Delta \vec{v} = \Delta(m\vec{v})$$

a więc wówczas, gdy iloczyn stałej masy ciała i zmiany jego prędkości jest równy zmianie iloczynu masy ciała i jego prędkości. Zwróć uwagę, że milczące założenie o stałości masy ciała, na które działa siła $\vec{F}$, zostało dokonane już podczas zapisywania wzoru (11.1). Możemy rozważać przypadki, w których masa rozprzężonego obiektu zmienia się przez dołożenie dodatkowego ciała, np. zrzucenie na jadący wózek worka z towarami lub dosypywanie piasku na pas poruszającego się transportera. Wówczas stosujemy drugą zasadę dynamiki w postaci $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$ (przykład 11.2).

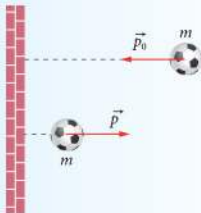
Z drugiej zasady dynamiki w postaci $\vec{F}_w = m\vec{a}$ korzystamy tylko w przypadkach, w których masa ciała nie zmienia się podczas ruchu.

Zastosowanie postaci $\vec{F}_w = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ przedstawiono w przykładach 11.1 i 11.2.

PRZYKŁAD 11.1

Odbicie piłki od ściany

Obliczymy wartość zmiany pędu piłki w przypadku przedstawionym na rysunku 11.1.



Rys. 11.1

Piłka o masie m i prędkości $\vec{v}$ uderza w ścianę, tak jak pokazuje rysunek, przy czym wartość jej prędkości nie ulega zmianie podczas odbicia.

Oznaczamy przez $\vec{p}_0$ pęd piłki przed zderzeniem. Jego wartość $p_0 = mv$. Pęd $\vec{p}$ po odbiciu ma taką samą wartość i kierunek jak $\vec{p}_0$, ale przeciwny zwrot. Wektory $\vec{p}$ i $\vec{p}_0$ są wektorami przeciwnymi, więc można zapisać, że $\vec{p}_0 = -\vec{p}$ (lub $\vec{p} = -\vec{p}_0$).

Obliczamy zmianę pędu podczas odbicia:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{p} - (-\vec{p}) = 2\vec{p}$$

Wartość zmiany pędu piłki:

$$|\Delta\vec{p}| = 2p = 2mv$$

Sprawdź, czy gdy podstawisz $\vec{p} = -\vec{p}_0$ do równania $\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0$, również otrzymasz $|\Delta\vec{p}| = 2mv$.

Zmiana pędu piłki $\Delta\vec{p}$ jest zwrócona tak jak $\vec{p}$, czyli w prawo, zatem siła działająca na piłkę ma taki sam zwrot. Jest to siła, którą ściana działa na piłkę podczas zderzenia. Piłka działa na ścianę siłą o takiej samej wartości i kierunku, zwróconą w lewo (trzecia zasada dynamiki).

Obliczymy teraz wartość średniej siły wzajemnego oddziaływania piłki i ściany podczas zderzenia trwającego $\Delta t = 0,01$ s. Przyjmijmy, że masa piłki $m = 0,4$ kg, a wartość jej prędkości $v = 10$ m/s.

$$F_{sr} = \frac{|\Delta\vec{p}|}{\Delta t} = \frac{2p}{\Delta t} = \frac{2mv}{\Delta t}$$

$$F_{sr} = \frac{8 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,01 \text{ s}} = 800 \text{ N} = 0,8 \text{ kN}$$

Zauważ, że wartość siły, którą piłka działa na ścianę (a więc i ściana na piłkę), jest 200 razy większa od wartości ciężaru piłki!

PRZYKŁAD 11.2

Transporter

Obliczmy siłę, którą trzeba działać na poziomy pas przenoszącego piasek transportera, aby poruszał się on ze stałą prędkością $\vec{v}$, gdy na pas sypie się pionowo piasek z umieszczonego nad nim nieruchomego lejka. Masa piasku spadającego na pas w jednostce czasu $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ jest stała. Siła potrzebna do utrzymania taśmociągu w ruchu jednostajnym jest różna od zera, bo kolejnym porcjom piasku (Δm) transporter musi nadać w kierunku poziomym prędkość $\vec{v}$ (a ściślej mówiąc, w czasie Δt musi zwiększyć prędkość tej porcji od zera do $\vec{v}$). Siła ta wyraża się wzorem:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \vec{v}$$

i jest stała (oba czynniki iloczynu są stałe) oraz zwrócona zgodnie z prędkością pasa, bo $\frac{\Delta m}{\Delta t} > 0$.

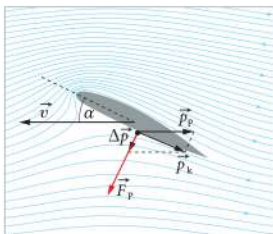


WIEDZIEĆ WIĘCEJ

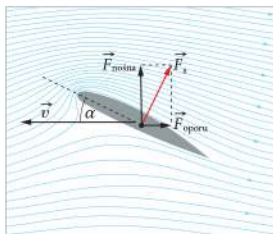
Samolot, cz. 1

Start samolotów o olbrzymiej masie to widowisko zapierające dech w piersiach. Jak to się dzieje, że samolot leci? Odpowiedź brzmi prosto – dzięki sile nośnej. Fenomen powstawania siły nośnej jest jednak skomplikowany. Tu omówimy tylko jedną z przyczyn powstawania tej siły. Do tego zjawiska powrócimy w ostatnim rozdziale podręcznika.

Poniższe rysunki przedstawiają skrzydło samolotu poruszającego się z prędkością $\vec{v}$.



Rys. 11.2



Rys. 11.3

W układzie odniesienia związanym ze skrzydłem powietrze porusza się w prawo i opływa skrzydło, które jest nachylone do poziomu pod kątem α , zwanym kątem natarcia. W miejscu zetknięcia z dolną powierzchnią skrzydła początkowy pęd powietrza $\vec{p}_p$ ulega zmianie na $\vec{p}_k$ (rys. 11.2). Zmiana pędu jest spowodowana działaniem siły $\vec{F}_p$, którą skrzydło naciska na powietrze. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki powietrze działa na skrzydło siłą $\vec{F}_s$, prostopadłą do jego powierzchni, o wartości równej F_p i zwrocie przeciwnym do $\vec{F}_p$ (rys. 11.3). Siłę $\vec{F}_s$ rozkładamy na pionową siłę nośną i siłę oporu powietrza.

Wartość siły nośnej zależy od wielu parametrów, m.in. od szybkości samolotu, kąta natarcia i wielkości powierzchni skrzydła.

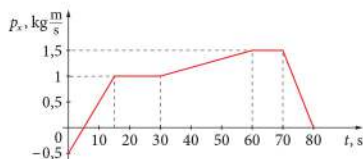
ZADANIA

1. Wyjaśnij, dlaczego szklanka wypełniona wodą (rys. 11.4) pozostaje na stole podczas gwałtownego pociągnięcia kartki w dół, a podczas powolnego ciągnięcia przesuwa się wraz z kartką. Zapisz i uzasadnij odpowiedź.



Rys. 11.4

2. Dla ciała o masie równej 0,1 kg, poruszającego się ruchem prostoliniowym wzdłuż osi x , sporządzono wykres zależności współrzędnej pędu od czasu (rys. 11.5).



Rys. 11.5

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	W przedziale czasu (0 s, 15 s) ciało przez cały czas poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym.	P	F
2.	W chwili $t = 5$ s zwrot prędkości ciała zmienił się na przeciwny.	P	F
3.	W chwili $t = 5$ s zwrot siły wypadkowej działającej na ciało zmienił się na przeciwny.	P	F
4.	Wartość siły działającej na ciało w przedziale czasu (5 s, 15 s) była 6 razy większa od wartości siły działającej na ciało w przedziale czasu (30 s, 60 s).	P	F
5.	Współrzędna przyspieszenia ciała w przedziale czasu (70 s, 80 s) była równa $-1,5 \text{ m/s}^2$.	P	F
6.	Wartość popędu siły w przedziale czasu (30 s, 60 s) była równa $15 \text{ N} \cdot \text{s}$.	P	F

3. Zależność wartości siły działającej na ciało poruszające się ruchem prostoliniowym od czasu przedstawiono na wykresie (rys. 11.6). Oblicz wartość zmiany pędu tego ciała w przedziałach czasu:

a) (0 s, 3 s),

b) (3 s, 5 s).



Rys. 11.6



12. Zasada zachowania pędu dla układu ciał

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- definiować pęd układu ciał, środek masy układu i środek ciężkości,
- rozróżniać siły wewnętrzne i zewnętrzne w układzie,
- sformułować zasadę zachowania pędu dla układu ciał i stosować ją w zadaniach.

→ **Przypomnij sobie**, co wiesz o siłach zewnętrznych i wewnętrznych w układzie ciał.

Jeśli siła wypadkowa działająca na pojedyncze ciało $\vec{F}_{\text{wypadkowa}} = \vec{0}$, to pęd ciała nie ulega zmianie. To stwierdzenie, które możemy nazwać **zasadą zachowania pędu** dla pojedynczego ciała, w istocie jest równoważne pierwszej zasadzie dynamiki.

Zdefiniujemy teraz pęd układu ciał.

Pędem układu ciał nazywamy sumę pędów ciał tworzących ten układ.

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

Teraz zastanowimy się, jakie warunki muszą być spełnione, by pęd układu ciał nie ulegał zmianie.

Weźmy pod uwagę układ złożony z dwóch ciał, np. dwóch kulek, które przyciągają się wzajemnie (rys. 12.1). $\vec{F}_{1,2}$ to siła, którą ciało pierwsze działa na ciało drugie, a $\vec{F}_{2,1}$ to siła, którą drugie ciało działa na pierwsze. Wymienione siły są siłami wewnętrznymi w układzie tych ciał, bo działają między ciałami układu.

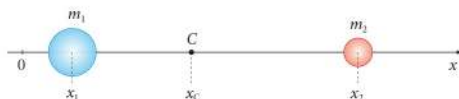
Z trzeciej zasady dynamiki wynika, że: $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$.



Rys. 12.1 Siły wewnętrzne w układzie dwóch ciał

Dotąd wielokrotnie zwracaliśmy uwagę, że na rysunkach wektor siły zawsze przyczepiamy do ciała, na które ta siła działa. Teraz pojawia się problem: gdzie znajduje się punkt zaczepienia wektora pędu układu ciał, czyli sumy pędów poszczególnych ciał układu?

Dla każdego układu ciał można zdefiniować w przestrzeni punkt zwany **środkiem masy**, posiadający własności pojedynczego ciała o masie równej sumie mas ciał tworzących układ.



Rys. 12.2 Środek masy układu dwóch ciał

Dla wspomnianych kulek przyjmiemy oś x przechodzącą przez ich środki (rys. 12.2). Jeśli x_1 jest współrzędną położenia pierwszej kulki, a x_2 – drugiej kulki, to współrzędna położenia środka masy układu x_C (od angielskiego *centre of mass*) wyraża się wzorem:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

NM s. 272

Środek masy dzieli odcinek łączący ciała na dwie części o długościach odwrotnie proporcjonalnych do mas tych ciał.

Wzór na x_C można uogólnić dla wielu (n) punktów materialnych:

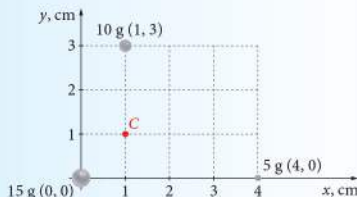
$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Analogicznymi wzorami wyrażone są współrzędne y_C , jeśli nie wszystkie punkty leżą na osi x (a także z_C , jeśli punkty rozmieszczone są przestrzennie).

PRZYKŁAD 12.1

Środek masy układu trzech kulek

Obliczmy współrzędne x_C i y_C środka masy C układu trzech kulek leżących w płaszczyźnie x, y . Masy kulek i ich współrzędne są podane na rysunku 12.3.



Rys. 12.3

$$x_C = \frac{15 \text{ g} \cdot 0 + 5 \text{ g} \cdot 4 \text{ cm} + 10 \text{ g} \cdot 1 \text{ cm}}{30 \text{ g}} = 1 \text{ cm}$$

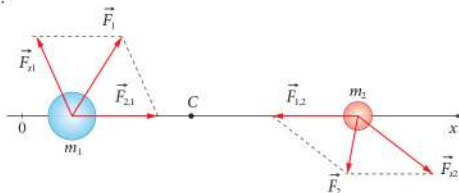
$$y_C = \frac{15 \text{ g} \cdot 0 + 5 \text{ g} \cdot 0 + 10 \text{ g} \cdot 3 \text{ cm}}{30 \text{ g}} = 1 \text{ cm}$$

Położenie środka masy C tego układu zaznaczono na rysunku.

Zauważ, że gdy oberzemy inny układ współrzędnych x', y' , o początku np. w punkcie $C = (1, 1)$, to współrzędne środka masy w tym nowym układzie współrzędnych będą inne, ale środek masy będzie tak samo usytuowany w układzie kulek.

Bryła o dowolnej objętości składa się z wielu niewielkich elementów; im są one mniejsze, tym bardziej są zbliżone do punktów materialnych. Dla każdej bryły można obliczyć położenie jej środka masy. Położenie środka masy figur płaskich można wyznaczyć doświadczalnie (patrz zadanie 4 na s. 119), jeśli wiadomo, że środek masy każdego ciała jest równocześnie jego **środkiem ciężkości**, tj. punktem, w którym przyłożona jest jego siła ciężkości¹³.

Załóżmy teraz, że na kulki z rysunku 12.1 (stanowiące układ złożony z dwóch ciał) dodatkowo działają w dowolnych kierunkach siły zewnętrzne, na przykład siły $\vec{F}_{z1}$ i $\vec{F}_{z2}$ (rys. 12.4).



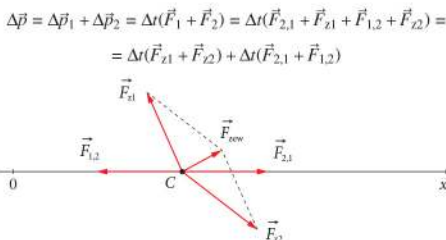
Rys. 12.4 Siły zewnętrzne i wewnętrzne w układzie ciał

Druga zasada dynamiki (11.2) zapisana dla każdego z tych ciał z osobna przybierze postać:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{F}_1 \Delta t$$

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{F}_2 \Delta t$$

gdzie $\vec{F}_1$ to siła wypadkowa działająca na kulkę o masie m_1 , równa $\vec{F}_1 = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{z1}$, natomiast $\vec{F}_2$ to siła wypadkowa działająca na kulkę o masie m_2 , równa $\vec{F}_2 = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{z2}$. Zmiana pędu układu $\Delta \vec{p}$ jest równa sumie zmian pędów ciał tworzących układ. Siły działające na kulki oraz wektory zmian pędów kulek zaczepiamy w środku masy C układu.



Rys. 12.5 Wypadkowa sił działających na układ

¹³ Ścisłe mówiąc, środek masy nie należy jednak zawsze utożsamiać ze środkiem ciężkości.

Siły wewnętrzne $\vec{F}_{2,1}$ i $\vec{F}_{1,2}$, przyłożone do wspólnego środka masy, równoważą się wzajemnie (rys. 12.5), więc siła wypadkowa wszystkich sił jest wypadkową sił zewnętrznych ($\vec{F}_{zew}$) i:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F}_{zew} \Delta t \quad \text{czyli} \quad \vec{F}_{zew} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Jest to **inna postać drugiej zasady dynamiki dla układu ciał**.

Wynika z niej, że jeśli działająca na układ wypadkowa siła zewnętrzna:

- nie jest równa zero, $\vec{F}_{zew} \neq \vec{0}$, to środek masy układu porusza się ruchem zmiennym tak, jakby była w nim skupiona cała masa układu;
- jest równa zero, $\vec{F}_{zew} = \vec{0}$, to pęd układu nie ulega zmianie (jest zachowany).

Jeśli na układ ciał nie działają siły zewnętrzne (tzn. pochodzące od ciał spoza układu) lub te siły się równoważą, to pęd układu pozostaje stały. Siły wewnętrzne (tzn. działające pomiędzy ciałami układu) mogą zmienić pędy poszczególnych ciał, nie zmieniając pędu układu.

Jest to **zasada zachowania pędu dla układu ciał**. Jeśli $\vec{F}_{zew} = \vec{0}$, to środek masy układu pozostaje w spoczynku lub porusza się ze stałą prędkością niezależnie od tego, jak poruszają się poszczególne ciała wchodzące w skład układu.

PRZYKŁAD 12.2

Wózek

Przeanalizujemy zachowanie wózka, na którym znajdują się tzw. naczynia połączone, przezielone zaworem (rys. 12.6). Do lewego naczynia nalano wodę, prawe naczynie jest puste. Czy wózek poruszy się, gdy otworzymy zawór?



Rys. 12.6

Siły wewnętrzne działające na układ równoważą się wzajemnie, więc pęd początkowy układu: naczynia + woda + wózek względem podłoża jest równy zero.

$$\vec{p}_u = m_u \vec{v}_C = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_C = \vec{0}$$

Wiemy, że $v_C = \frac{\Delta x_C}{\Delta t}$, zatem $\frac{\Delta x_C}{\Delta t} = 0$, więc:

$$\Delta x_C = 0 \quad \text{czyli} \quad x_C = \text{const}$$

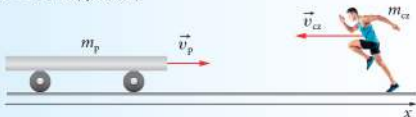
Po otwarciu zaworu woda będzie przelewać się do prawego naczynia, więc wózek musi się przemieszczać w lewo, tak by współrzędna środka masy układu (x_C) pozostała niezmienną. Gdyby woda przelewała się do prawego naczynia, a wózek nie przesuwał się, to położenie środka masy przesuwałoby się w prawo.

PRZYKŁAD 12.3

Skok na jadącą platformę

Podczas analizy tego przypadku sprawdzimy, że wektory zmian pędów ciał układu, którego pęd się nie zmienia, są wektorami przeciwnymi ($\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$).

Po prostoliniowym torze jazdy platforma o masie $m_p = 500 \text{ kg}$ z prędkością o wartości $v_p = 0,86 \text{ m/s}$. Naprzeciw platformy biegnie człowiek o masie $m_{cz} = 60 \text{ kg}$ z prędkością o wartości $v_{cz} = 2,5 \text{ m/s}$ (rys. 12.7).



Rys. 12.7

W pewnej chwili człowiek wskakuje na platformę, zatrzymuje się na niej i porusza się razem z nią. Obliczymy wartość prędkości platformy z człowiekiem (pominiemy opory ruchu).

Zgodnie z zasadą zachowania pędu suma pędów obu ciał przed skokiem człowieka na platformę jest równa pędowi układu po wskoczeniu:

$$m_p \vec{v}_p + m_{cz} \vec{v}_{cz} = (m_p + m_{cz}) \vec{v}$$

Wzdłuż prostoliniowego toru ruchu kierujemy zwróconą w prawo oś x układu współrzędnych. Równanie wektorowe przepisujemy, podstawiając w miejsce wektorów ich współrzędne na osi x : $v_{px} = v_p$ i $v_{czx} = -v_{cz}$.

$$m_p v_p - m_{cz} v_{cz} = (m_p + m_{cz}) v_x$$

$$v_x = \frac{m_p v_p - m_{cz} v_{cz}}{m_p + m_{cz}} \quad v_x = \frac{500 \text{ kg} \cdot 0,86 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 60 \text{ kg} \cdot 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{560 \text{ kg}} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zwróć uwagę, że obliczona współrzędna prędkości v_x to wartość prędkości środka masy układu, która nie uległa zmianie po wskoczeniu człowieka na platformę.

Otrzymaliśmy $v_x > 0$, co oznacza, że platforma z człowiekiem porusza się zgodnie ze zwrotem osi x z prędkością o wartości v . Jeśli otrzymalibyśmy $v_x < 0$, oznaczałoby to, że platforma wraz z człowiekiem porusza się przeciwnie do zwrotu osi x .

Na skutek wzajemnego oddziaływania człowieka i platformy podczas wskakiwania zmieniły się ich pędy. Zmiana pędu platformy:

$$\Delta \vec{p}_p = m_p \vec{v} - m_p \vec{v}_p$$

$$\Delta p_{px} = m_p (v - v_p) \quad \Delta p_{px} = 500 \text{ kg} \left(-0,36 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = -180 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zmiana pędu człowieka:

$$\Delta \vec{p}_{cz} = m_{cz} \vec{v} - m_{cz} \vec{v}_{cz}$$

$$\Delta p_{czx} = m_{cz} v - (-m_{cz} v_{cz}) = m_{cz} (v + v_{cz}) \quad \Delta p_{czx} = 60 \text{ kg} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 180 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zmiany pędów platformy i człowieka są wektorami przeciwnymi (wektor $\Delta \vec{p}_p$ jest zwrócony w lewo, a $\Delta \vec{p}_{cz}$ w prawo i $|\Delta \vec{p}_p| = |\Delta \vec{p}_{cz}|$), więc ich suma jest równa zeru:

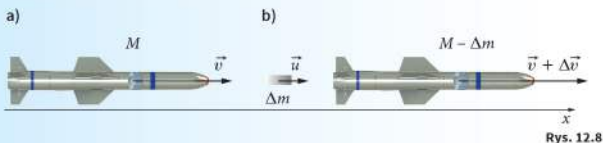
$$\Delta \vec{p}_p + \Delta \vec{p}_{cz} = \vec{0}$$

PRZYKŁAD 12.4

Rakieta

Rozpatrzmy ruch rakiety, której silnik odrzutowy jest zasilany paliwem ciekłym. Główną częścią silnika jest tzw. komora spalania. Doprowadzane są do niej substancje łączące się chemicznie, np. nafta i tlen. Komora spalania kończy się dyszą, przez którą wypływają gazy spalinowe. Podczas spalania się zmieszanych substancji w komorze spalania powstają gazy o wysokiej temperaturze i dużym ciśnieniu. Na skutek różnicy ciśnień w komorze spalania i na zewnątrz następuje wypływ gazów przez dyszę z szybkością przewyższającą nawet 3000 m/s. Wyprowadzimy wzór na przyspieszenie rakiety na podstawie zasady zachowania pędu.

W chwili początkowej, w której zaczynamy obserwację, wprawiona już w ruch rakieta ma masę M i prędkość $\vec{v}$ względem wyrzutni (rys.12.8a). Po niedługim czasie Δt sytuacja w układzie inercyjnym jest taka jak na rysunku 12.8b. Wyrzucone produkty spalania o masie Δm mają prędkość $\vec{u}$ ($u < v$), masa rakiety zmalała o $\Delta m > 0$, a jej prędkość wzrosła do $\vec{v} + \Delta \vec{v}$.



Rys. 12.8

Jeśli rakieta porusza się w przestrzeni kosmicznej (z dala od innych ciał), to nie działają na nią żadne siły zewnętrzne. Zapisujemy zasadę zachowania pędu:

$$M\vec{v} = \Delta m\vec{u} + (M - \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) \quad (12.1)$$

Ze względu na prostotę końcowego wzoru wygodnie jest wyrazić prędkość $\vec{u}$ produktów spalania przez ich prędkość względną (względem rakiety). Wiadomo, że:

$$\vec{u}_{\text{wzgl}} = \vec{u} - (\vec{v} + \Delta \vec{v}) \quad \text{więc} \quad \vec{u} = \vec{u}_{\text{wzgl}} + \vec{v} + \Delta \vec{v}$$

(zauważ, że prędkość $\vec{u}_{\text{wzgl}}$ jest zwrócona przeciwnie do zwrotu osi x).

Podstawiamy ostatnie wyrażenie do wzoru (12.1). Po wymnożeniu i redukcji wyrazów podobnych (wykonaj przekształcenia) otrzymujemy:

$$M\Delta \vec{v} = -\vec{u}_{\text{wzgl}}\Delta m$$

Dzielimy obydwie strony równania przez Δt :

$$M \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = -\vec{u}_{\text{wzgl}} \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (12.2)$$

$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ to (gdy $\Delta t \rightarrow 0$) przyspieszenie chwilowe rakiety, a $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ to szybkość spalania paliwa.

Prawa strona wzoru (12.2) to tzw. siła ciągu rakiety, nadająca jej przyspieszenie.

$$\vec{a} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{\vec{u}_{\text{wzgl}}}{M}$$

Z powyższego wzoru wynika, że przy stałej szybkości wypływu gazów oraz stałej szybkości spalania paliwa wartość przyspieszenia rakiety będzie coraz większa w miarę zmniejszania się jej masy M .

ZADANIA

1. Oblicz współrzędną położenia środka masy układu Ziemia–Księżyc (rys. 12.9). Przyjmij, że $M_K = \frac{1}{81}M_Z$, a odległość d między środkami Ziemi i Księżycy jest równa 384 000 km. Punkt 0 osi x umieść w środku Ziemi.



Rys. 12.9

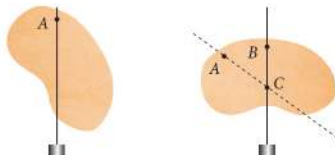
2. Pocisk o masie m lecący poziomo z prędkością $\vec{v}$ na skutek wybuchu wewnętrznego rozerwał się na dwie części o równych masach (rys. 12.10) tak, że jedna z nich:
a) zatrzymała się i spadła swobodnie, b) uzyskała prędkość $-\vec{v}$.



Rys. 12.10

W każdym przypadku:

- oblicz wartość prędkości, którą uzyskała druga część pocisku;
 - oblicz zmianę pędu każdej części pocisku.
3. Silnik modelu rakiety wyrzuca w czasie $t = 5$ s gazy o masie $m = 0,5$ kg z prędkością o wartości $v = 2000$ m/s względem rakiety. Oblicz wartość siły ciągu tego silnika.
4. Wyciętą z tektury figurę o nieregularnym kształcie zawieś na nitce zaczepionej w dowolnym punkcie A blisko brzegu (rys. 12.11). W położeniu równowagi siłę ciężkości figury równoważy siła sprężystości nitki, zatem siła ciężkości musi być zaczepiona na prostej stanowiącej przedłużenie nitki. Zaznacz ołówkiem tę prostą – dla ułatwienia zawieś w punkcie A pion (ciężarek uwiązany na nitce). Powtórz te czynności, lecz teraz zawieś figurę w innym punkcie B .



Rys. 12.11

Skoro punkt zaczepienia C siły ciężkości figury znajduje się zarówno na jednej, jak i na drugiej prostej, to musi się znaleźć w punkcie ich przecięcia.



Rakieta Saturn V

Największą jak dotąd rakieta był Saturn V zbudowany przez NASA. Dzięki niej w roku 1969 załoga misji Apollo 11 mogła odbyć podróż na Księżyc, gdzie wylądowała 20 lipca.

Wysokość rakiety była równa 111 m, a jej masa z pełnymi zbiornikami paliwa to 2800 t. Rakieta miała konstrukcję wielostopniową. Poszczególne stopnie połączone były specjalnymi pierścieniami.

Pierwszy i największy stopień rakiety składał się z pięciu silników ułożonych na kształt krzyża i napędzanych mieszanką nafty oraz ciekłego tlenu. Generowały one w chwili startu łączną siłę ciągu równą 34,5 MN. Gdy rakieta osiągnęła pułap I, pierwszy stopień rakiety został odłączony dzięki detonacji niewielkich ładunków wybuchowych znajdujących się w pierścieniu.

Niemal w tej samej chwili nastąpił zapłon pięciu silników drugiego stopnia, napędzanych ciekłym wodorem i ciekłym tlenem. Po osiągnięciu pułapu II został odłączony drugi stopień rakiety i nastąpił zapłon pojedynczego silnika trzeciego stopnia. Jego praca trwała do osiągnięcia przez rakieta tzw. ziemskiej orbity parkowania (EPO – Earth Parking Orbit).

Ostatni stopień rakiety pozostawał na orbicie okołoziemskiej, poruszając się z szybkością 7800 m/s, do chwili ponownego uruchomienia silnika i dalszego lotu w kierunku Księżyca.

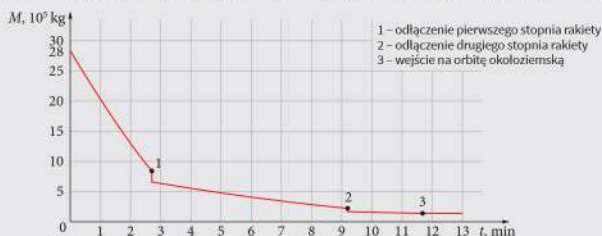
Dane liczbowe dla kolejnych etapów lotu rakiety Saturn V podczas historycznej misji Apollo 11

Etap lotu	Wysokość nad powierzchnią Ziemi	Szybkość względem Ziemi	Czas od chwili startu
odłączenie pierwszego stopnia rakiety	67 km – pułap I	2774 m/s	2 min 42 s
odłączenie drugiego stopnia rakiety	187 km – pułap II	6919 m/s	9 min 9 s
wejście na orbitę okołoziemską	191 km – EPO	7793 m/s	11 min 49 s



W przykładzie 12.4 stwierdziliśmy, że przy stałej szybkości wypływu gazów oraz stałej szybkości spalania paliwa wartość przyspieszenia rakiety jest coraz większa w miarę zmniejszania się jej masy M . Przeanalizuj wykresy – zaobserwuj, jak zmieniła się wartość przyspieszenia rakiety Saturn V wraz ze zmianą jej masy oraz po kolejnych wyłączeniach lub włączeniach silników.

Wykres 1. Zależność masy rakiety od czasu (od chwili startu do chwili wejścia na orbitę okołozemską)



Wykres 2. Zależność od czasu tzw. przyspieszenia wzdłużnego (czyli przyspieszenia, które uzyskalaby rakieta, gdyby działała na nią tylko siła ciągu silników), wyrażonego wzorem $\vec{a} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{\vec{v}_{wzgl}}{M}$





13. Tarcie

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- rozróżnić tarcie statyczne i kinetyczne,
- zademonstrować maksymalne tarcie statyczne,
- zdefiniować współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego,
- doświadczalnie wyznaczyć współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego.

→ **Przypomnij sobie** wiadomości o siłach oporu i ich wpływie na ruch ciał.

Niezależnie od tego, jak gładkie wydają nam się powierzchnie ciał, w rzeczywistości zawsze są one chropowate. Gdy dwa ciała położymy jedno na drugim i na jedno z nich zadziałamy siłą równoległą do powierzchni ich zetknięcia, nierówności „zaczepią o siebie”. Jest to jedna z przyczyn powstawania **tarcia**¹⁴.

Jeśli na poziomej powierzchni leży klocek (rys. 13.1), a jedynymi działającymi na niego siłami są: siła ciężkości i siła sprężystości podłoża, które równoważą się wzajemnie, to tarcie nie występuje.

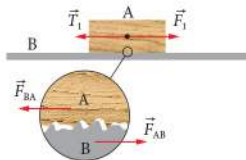
Jeśli na klocek zadziałamy małą siłą $\vec{F}_1$ równoległą do powierzchni zetknięcia klocka z podłożem (rys. 13.2), to klocek pozostanie on w spoczynku. Zaczepiające o siebie nierówności oddziałują wzajemnie zgodnie z trzecią zasadą dynamiki. Klocek działa na podłoże siłą $\vec{F}_{AB} = \vec{F}_1$, a podłoże działa na klocek siłą $\vec{F}_{BA} = \vec{T}_1$. Na klocek działają więc (równoległe do powierzchni zetknięcia) dwie równoważące się siły: $\vec{F}_1$ i $\vec{T}_1$.

Jeśli zwiększymy siłę działającą na klocek do $\vec{F}_2$ (rys. 13.3), a klocek nadal nie ruszy z miejsca, oznacza to, że siła tarcia wzrosła do $\vec{T}_2$ i równoważy siłę $\vec{F}_2$.

Siła tarcia działająca na ciało spoczywające nazywa się **siłą tarcia spoczynkowego** lub **statycznego**.



Rys. 13.1 Między klockiem a podłożem nie ma tarcia



Rys. 13.2 Na klocek działa siła tarcia statycznego



Rys. 13.3 Na klocek działa siła tarcia statycznego

¹⁴ O tym, jakie oddziaływania między cząsteczkami ciał są powodem występowania sił tarcia, będziemy mówić w podręczniku do klasy drugiej.

Wartość siły tarcia spoczynkowego może wzrosnąć tylko do pewnej wartości maksymalnej $T_{\max}$ (rys. 13.4).

Jeśli na klocek działamy odpowiednio dużą siłą $\vec{F}_4$ (rys. 13.5), siła tarcia statycznego o wartości maksymalnej nie jest w stanie jej zrównoważyć i ciało rusza.



Rys. 13.4 Na klocek działa maksymalna siła tarcia statycznego



Rys. 13.5 Klocek porusza się ruchem przyspieszonym

Przy ustalonym rodzaju powierzchni i ustalonej sile nacisku **siła tarcia statycznego** może przyjmować różne wartości od zera do $T_{\max}$.

Doświadczenia pokazują, że maksymalna wartość siły tarcia statycznego $T_{\max}$ jest wprost proporcjonalna do wartości F_N siły wzajemnego nacisku stykających się ciał. Stały iloraz wartości tych sił, zależny tylko od rodzaju ciał i stopnia wygładzenia powierzchni, nazywamy **współczynnikiem tarcia statycznego** i oznaczamy symbolem f_s .

$$f_s = \frac{T_{\max}}{F_N}$$

Gdy ciało ruszy, siła tarcia gwałtownie zmaleje i przy niewielkiej szybkości przyjmie stałą wartość z dobrym przybliżeniem niezależną od szybkości. Nazywamy ją **siłą tarcia kinetycznego** T_k . Zgodnie z wynikami doświadczeń wartość T_k jest także wprost proporcjonalna do wartości F_N siły nacisku. Stały stosunek wartości tych sił jest nazywany **współczynnikiem tarcia kinetycznego** i oznaczany symbolem f_k .

$$f_k = \frac{T_k}{F_N}$$

Podobnie jak współczynnik tarcia statycznego, współczynnik tarcia kinetycznego jest stały dla danego rodzaju stykających się powierzchni i jest mniejszy od współczynnika tarcia statycznego:

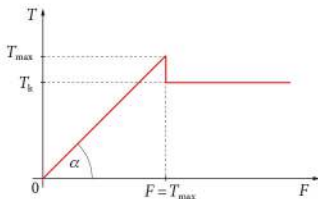
$$f_k < f_s$$

Zauważmy, że wzory:

$$T_{\max} = f_s F_N \quad \text{ i } \quad T_k = f_k F_N$$

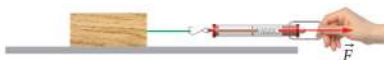
nie mogą być zapisane wektorowo, ponieważ siła tarcia ma inny kierunek niż siła nacisku. Siła wzajemnego nacisku stykających się ciał jest zawsze prostopadła do ich powierzchni styku, a siła tarcia działa równoległe do tych powierzchni. Siły tarcia i nacisku są do siebie prostopadłe.

Omówiona wcześniej zależność wartości siły tarcia od wartości siły działającej równoległe do stykających się powierzchni dwóch ciał przedstawiono na wykresie (rys. 13.6)¹⁵.



Rys. 13.6 Zależność wartości siły tarcia od wartości siły ciągnącej

Zależność zilustrowaną na powyższym wykresie można łatwo sprawdzić doświadczalnie.



Rys. 13.7 Sprawdzanie zależności wartości siły tarcia od wartości siły ciągnącej

W tym celu kładziemy klocek lub inny przedmiot na poziomej, niezbyt gładkiej powierzchni i ciągniemy go poziomo za pomocą siłomierza (rys. 13.7). Obserwujemy wartości sił wskazywane przez siłomierz, gdy:

- klocek spoczywa,
- klocek rusza z miejsca,
- klocek porusza się z niewielką szybkością.

W praktyce nie ma powierzchni, która w każdym miejscu miałaby jednakowe własności, więc różne fragmenty powierzchni mogą mieć różne współczynniki tarcia. To dlatego w doświadczeniu zwykle nie otrzymujemy prostoliniowego poziomego odcinka wykresu.

Zastanów się, jakie dodatkowe pomiary należałoby wykonać, aby na podstawie tego doświadczenia oszacować wartości współczynnika tarcia statycznego i kinetycznego dla tych dwóch rodzajów powierzchni trących o siebie.

Zmniejszenie współczynnika tarcia można uzyskać nie tylko przez wygładzenie powierzchni. Jeszcze skuteczniejsze jest pokrycie powierzchni styku ciał warstwą smaru (cieczy lub zawiesiny zmniejszającej tarcie). Smar wypłnia wgłębienia w nierównych powierzchniach obu ciał i powoduje, że przesuwanie wymaga tylko przemieszczania cząsteczek smaru, a nie odrywania fragmentów powierzchni granicznych obu ciał, co oznacza istotnie mniejszy opór.

¹⁵ Jeśli skale przyjęte na osiach układu współrzędnych są jednakowe, to $\alpha = 45^\circ$.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Pożyteczne tarcie. Jak działa sprzęgło samochodowe?

Tarcie może być w technice bardzo pożądane, ponieważ umożliwia kontrolowanie ruchu oraz przekazywanie energii między różnymi elementami maszyny.

Jednym z wielu elementów wykorzystujących tarcie jest sprzęgło samochodowe w pojazdach z ręczną skrzynią biegów. Umożliwia ono płynne rozłączanie i łączenie układu napędowego ze skrzynią biegów podczas zmiany biegu.

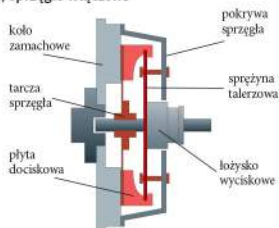
Najważniejszym elementem sprzęgła jest tarcza (rys. 13.8), na której z obu stron umieszczone są specjalne płytki cierne. Gdy tarcza sprzęgła jest dociskana odpowiednią siłą do koła zamachowego, połączonego z silnikiem, siła tarcia występująca między tą tarczą i kołem zamachowym powoduje jej obrót. Wraz z tarczą obraca się wał sprzęgła, połączony ze skrzynią biegów. Gdy odśuniemy tarczę sprzęgła od koła zamachowego, jego ruch nie jest przenoszony na sprzęgło.



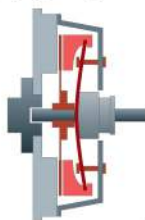
Rys. 13.8

Mechanizm dociskowy składa się z pokrywy sprzęgła i płyty dociskowej połączonych tzw. sprężyną talerzową oraz łożyska wyciskowego osadzonego na wałe sprzęgła (rys. 13.9a).

a) sprzęgło włączone



b) sprzęgło rozłączone



Rys. 13.9

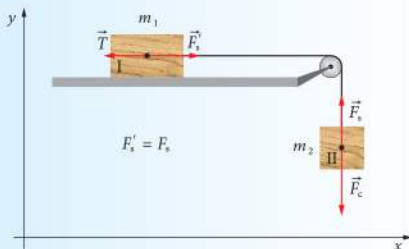
Mechanizm dociskowy jest umocowany na kole zamachowym i obraca się razem z nim. Tarcza sprzęgła obraca się wraz z całym tym układem, gdy z obu stron działa na nią odpowiednia siła tarcia. W chwili naciśnięcia pedału sprzęgła łożysko wyciskowe przesuwa się w stronę koła zamachowego i naciska na sprężynę talerzową, której brzeg wychyla się w przeciwną stronę (rys. 13.9b). Powoduje to zmniejszenie nacisku na tarczę sprzęgła i jego rozłączenie.

Wielu młodych kierowców popełnia błąd polegający na jeździe z częściowo wciśniętym pedałem sprzęgła. W takiej sytuacji siła nacisku tarczy sprzęgła na koło zamachowe jest zbyt mała, aby uzyskać wymaganą siłę tarcia. W efekcie następuje względny ruch tarczy i koła zamachowego, przez co jej powierzchnia wyciera się szybciej niż w przypadku prawidłowego użytkowania.

PRZYKŁAD 13.1

Ruch układu klocków z uwzględnieniem tarcia

Obliczmy wartość przyspieszenia, z którym porusza się układ klocków (rys. 13.10), i wartość siły napięcia nici łączącej klocki. Kłódek I o masie $m_1 = 0,4 \text{ kg}$ jest połączony z klockiem II o masie $m_2 = 0,1 \text{ kg}$ nieważką nicią, przerzuconą przez nieruchomy, bardzo lekki błódek. Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o stół $f_k = 0,2$.



Rys. 13.10

Równania ruchu dla obu klocków (druga zasada dynamiki) zapisane za pomocą współrzędnych sił mają postać:

$$-m_2g + F_s = -m_2a \quad (13.1)$$

$$F'_s - T = m_1a$$

ale:

$$F'_s = F_s \quad T = m_1gf_k$$

więc:

$$F_s - m_1gf_k = m_1a \quad (13.2)$$

Po pomnożeniu równania (13.1) przez -1 i dodaniu stronami równań (13.1) i (13.2) otrzymamy:

$$m_2g - m_1gf_k = (m_2 + m_1)a$$

skąd:

$$a = \frac{g(m_2 - m_1f_k)}{m_2 + m_1} \quad a = \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (0,1 \text{ kg} - 0,4 \text{ kg} \cdot 0,2)}{0,1 \text{ kg} + 0,4 \text{ kg}} \approx 0,39 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Do równania (13.1) wstawiamy teraz dane oraz obliczoną wartość przyspieszenia i otrzymujemy:

$$F_s = m_2g - m_2a \quad F_s \approx 0,94 \text{ N}$$

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki wartość siły napięcia nici $F_N = F_s$, więc:

$$F_N \approx 0,94 \text{ N}$$

Uwaga: Dla $f_k > \frac{m_2}{m_1}$ wartość przyspieszenia $a = \frac{g(m_2 - m_1f_k)}{m_2 + m_1}$ jest mniejsza od zera. Interpretujemy to następująco: jeśli klocek o masie m_1 zostałby pchnięty, to układ klocków poruszałby się ruchem jednostajnie opóźnionym z przyspieszeniem o wartości a .

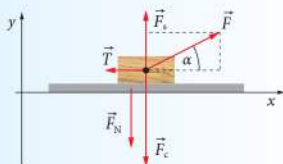
Podczas obliczania wartości siły tarcia należy zwrócić uwagę, czy wartość siły nacisku jest równa wartości ciężaru ciała. Kolejne przykłady pokazują, że wcale tak być nie musi.

PRZYKŁAD 13.2

Ruch skrzyni po poziomym podłożu

Obliczymy wartość przyspieszenia, z którym porusza się po poziomej powierzchni skrzynia o masie $m = 40 \text{ kg}$, gdy działa na nią siła $\vec{F}$ o wartości 100 N , pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Współczynnik tarcia kinetycznego $f_k = 0,2$.

Na skrzynię działają cztery siły: $\vec{F}$, siła ciężkości $\vec{F}_c = m\vec{g}$, siła tarcia $\vec{T}$ i siła sprężystości podłoża $\vec{F}_s$ (rys. 13.11).



Rys. 13.11

Druga zasada dynamiki $\vec{F}_w = m\vec{a}$ przyjmuje postać:

$$\vec{F}_s + \vec{F} + m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Jeśli wektory zastąpimy ich współrzędnymi, to dla współrzędnych na osi x otrzymamy:

$$F \cos \alpha - T = ma \quad (13.3)$$

(„iksowe” współrzędne ciężaru i siły sprężystości są równe zero).

Na osi y :

$$F \sin \alpha + F_s - mg = m \cdot 0 \quad (13.4)$$

(„igrekowa” współrzędna siły tarcia jest równa zero, klocek nie ma przyspieszenia w tym kierunku).

Wartość siły tarcia:

$$T = f_k F_N$$

ale $F_N = F_s$ (z trzeciej zasady dynamiki), więc:

$$T = f_k F_s$$

Z równania (13.4) obliczamy F_s :

$$F_s = mg - F \sin \alpha \quad (13.5)$$

zatem:

$$T = f_k (mg - F \sin \alpha)$$

Wstawiamy obliczoną wartość siły tarcia do wzoru (13.3) i znajdujemy wartość przyspieszenia:

$$a = \frac{F \cos \alpha - f_k (mg - F \sin \alpha)}{m}$$

Po podstawieniu do powyższego wzoru danych liczbowych otrzymujemy: $a \approx 0,4 \text{ m/s}^2$.

Zwróćmy uwagę na fakt, że w tym przypadku wartość siły nacisku wywieranego przez skrzynię na podłoże nie równa się wartości ciężaru skrzyni. Jest od niej mniejsza, co wyraża wzór (13.5).

PRZYKŁAD 13.3

Ruch po równi z uwzględnieniem tarcia

Przeanalizujemy ruch klocka zsuwającego się z równi pochyłej – uwzględnimy siłę tarcia klocka o równię.

Wypadkowa sił ciężkości i sprężystości, działających na ciało na równi pochyłej, ma wartość:

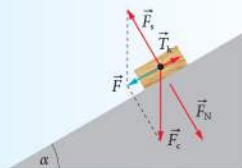
$$F = mg \sin \alpha$$

a siła nacisku:

$$F_N = mg \cos \alpha$$

Wartość siły tarcia kinetycznego działającej na zsuwające się ciało wyraża się wzorem:

$$T_k = f_k F_N = f_k mg \cos \alpha$$



Rys. 13.12

Jeśli ciało zsuwa się z równi ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem, które nadaje mu wypadkowa sił, to $F > T_k$ (rys. 13.12).

Wartość przyspieszenia ciała można obliczyć z drugiej zasady dynamiki:

$$\vec{F} + \vec{T}_k = m\vec{a}$$

$$F - T_k = ma \quad mg \sin \alpha - mg f_k \cos \alpha = ma$$

$$a = g(\sin \alpha - f_k \cos \alpha)$$

Z powyższego wzoru wynika, że można tak dobrać kąt α_0 nachylenia równi, by siła zsuwająca $\vec{F}$ równoważyła siłę tarcia $\vec{T}_k$ i ciało zsuwało się z równi ruchem jednostajnym.

Wówczas:

$$F = T_k$$

$$mg \sin \alpha_0 = mg f_k \cos \alpha_0$$

$$f_k = \tan \alpha_0$$

Skorzystanie z tego związku pozwala doświadczalnie wyznaczyć współczynnik tarcia f_k .

PRZYKŁAD 13.4

Kłódek na desce

W tym przypadku pokażemy, że siła tarcia statycznego może wprawić ciało w ruch i nadać mu przyspieszenie.

Na deskę, na której leży klocek, działamy stałą siłą $\vec{F}$ (rys. 13.13).



Rys. 13.13

Obliczymy maksymalną wartość, którą może mieć przyspieszenie deski, by klocek spoczywał względem niej.

Jeśli klocek spoczywa względem deski, to w układzie (inercyjnym) podłoża klocek ma takie samo przyspieszenie jak deska. Siłą, która nadaje klockowi przyspieszenie, jest siła tarcia statycznego. Jej źródłem jest deska. Maksymalna wartość tej siły:

$$T_{\max} = f_s mg = ma_{\max}$$

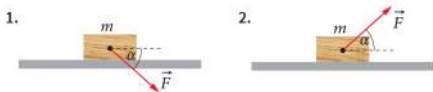
gdzie m jest masą klocka, więc:

$$a_{\max} = f_s g$$

Jeśli deska będzie się poruszać z większym przyspieszeniem, siła tarcia statycznego nie zdoła go nadać klockowi, bo nie może mieć wartości większej od $T_{\max}$. Deska będzie się spod klocka wysuwać w stronę, w którą zwrócona jest siła $\vec{F}$.

ZADANIA

1. Z równi pochyłej o wysokości $h = 1$ m zsuwa się klocek ze stałą prędkością o wartości $v = 1$ m/s i przebywa całą długość równi w czasie $t = 2$ s. Oblicz współczynnik tarcia kinetycznego klocka o równię.
2. Oblicz wartość przyspieszenia klocka zsuwającego się z równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem 30° . Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o równię jest równy 0,2.
3. Oblicz przyspieszenie klocka poruszającego się w górę po równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem 30° . Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o równię wynosi 0,2.
4. Na skrzynkę spoczywającą na poziomym podłożu (układ inercyjny) działa siła $\vec{F}$ o stałej wartości $F = mg$, tworząca z podłożem kąt α – tak jak na rysunku 13.14.



Rys. 13.14

Odpowiedz na pytania i uzasadnij odpowiedzi. Gdy kąt α wzrasta do 90° , to jak zmienia się w przypadkach 1 i 2:

- a) wartość siły nacisku skrzynki na podłoże?
- b) wartość siły tarcia skrzynki o podłoże?



14. Siły w ruchu po okręgu

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- stosując drugą zasadę dynamiki, otrzymać wyrażenie na wartość siły dośrodkowej w ruchu jednostajnym po okręgu,
- skonstruować odpowiedni przyrząd i wyznaczyć wartość siły dośrodkowej,
- analizować przykłady graficznego konstruowania siły dośrodkowej.

→ **Przypomnij sobie** wielkości fizyczne opisujące ruch.

W ruchu jednostajnym po okręgu (omawianym w rozdziale 8) zmienia się kierunek prędkości; w związku z tą zmianą występuje przyspieszenie dośrodkowe o wartości $a_r = \frac{v^2}{r}$. Jaka jest przyczyna zmiany prędkości w tym ruchu?

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki przyspieszenie ciała jest skutkiem działania siły wypadkowej $\vec{F}_w = m\vec{a}$. Stąd wniosek, że względem obserwatora w układzie inercyjnym:

Jeśli ciało porusza się po okręgu z prędkością o stałej wartości, to oznacza, że na to ciało działa wypadkowa siła o stałej wartości zwrócona do środka okręgu.

Siłę wypadkową działającą na ciało poruszające się po okręgu z prędkością o stałej wartości nazywamy **siłą dośrodkową** i oznaczamy jako $\vec{F}_r$. Jej wartość wyrażamy wzorem:

$$F_r = \frac{mv^2}{r}$$

Jeśli uwzględnimy związki: $v = \omega r$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ i $T = \frac{1}{\nu}$, możemy także wyrazić wartość siły dośrodkowej wzorami:

$$F_r = m\omega^2 r \qquad F_r = \frac{4\pi^2 m r}{T^2} \qquad F_r = 4\pi^2 m \nu^2 r$$

Siła dośrodkowa może mieć różną naturę. Inaczej mówiąc, funkcję siły dośrodkowej mogą pełnić różne siły rzeczywiste.

Tor, po którym Księżyc krąży wokół Ziemi, możemy w przybliżeniu uważać za okrąg. Siłą dośrodkową utrzymującą Księżyc w ruchu po okręgu jest siła grawitacji. W tym przypadku mówimy o grawitacyjnej naturze siły dośrodkowej.

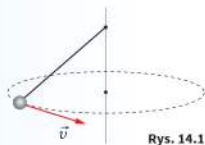
Atomy wszystkich pierwiastków są zbudowane z jądra o ładunku dodatnim i poruszających się wokół niego elektronów. Jednym z pierwszych modeli jądrowych był model atomu wodoru (składającego się z jednego protonu i jednego elektronu),

zaproponowany przez duńskiego fizyka Nielsa Bohra. Zgodnie z tym, dzisiaj już historycznym, modelem elektron porusza się ruchem jednostajnym po okręgu wokół jądra – protonu. Rolę siły dośrodkowej odgrywa w tym przypadku siła elektrostatyczna (siła Coulomba), którą elektron jest przyciągany przez proton. Jest to przykład siły dośrodkowej o naturze elektrycznej.

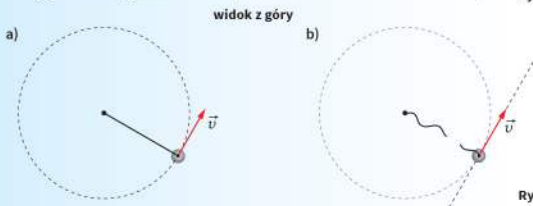
PRZYKŁAD 14.1

Ruch kulki po okręgu w płaszczyźnie poziomej. Wahadło stożkowe

Małą kulkę zawieszoną na nitce możesz wprawić w ruch po okręgu w płaszczyźnie poziomej – jak na rysunku 14.1. Jeśli jednak wypuścisz nitkę z ręki lub nastąpi zerwanie nitki, to bezpośrednio po tym kulka będzie poruszała się tak, jakby była rzucona poziomo z prędkością $\vec{v}$ w tym miejscu, w którym znajdowała się w chwili wypuszczenia nitki lub jej zerwania (rys. 14.2a i 14.2b).

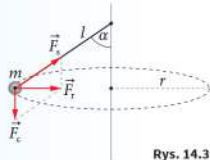


Rys. 14.1



Rys. 14.2

O ruchu ciała decyduje siła wypadkowa wszystkich sił działających na to ciało. Na kulkę działają dwie siły: siła ciężkości $\vec{F}_c$ i siła sprężystości $\vec{F}_s$ pochodząca od nitki. To właśnie ich wypadkowa działająca wzdłuż promienia okręgu i zwrócona do jego środka „zmusza” kulkę do zmiany kierunku prędkości (rys. 14.3). Gdyby siła ta przestała działać, kulka nie mogłaby kontynuować ruchu po okręgu.



Rys. 14.3

Wypadkowa sił $\vec{F}_c$ i $\vec{F}_s$ jest siłą dośrodkową.

Kulka o masie m zawieszona na nitce o długości l tworzącej z pionem kąt α i zakreślająca pełny okrąg w czasie T to tzw. **wahadło stożkowe**. Wyprowadzimy wzór na wartość siły dośrodkowej działającej na kulkę wahadła stożkowego.

Z rysunku 14.3 wynika, że wypadkowa sił $\vec{F}_c$ i $\vec{F}_s$ będzie siłą dośrodkową o wartości potrzebnej do utrzymania kulki w ruchu jednostajnym po okręgu, gdy kąt α osiągnie odpowiednią wartość:

$$\frac{r}{l} = \sin \alpha$$

Jeśli znamy okres T ruchu, możemy następująco wyrazić wartość siły dośrodkowej:

$$F_r = \frac{mv^2}{r} = \frac{m}{r} \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} = \frac{4\pi^2 ml \sin \alpha}{T^2}$$

PRZYKŁAD 14.2

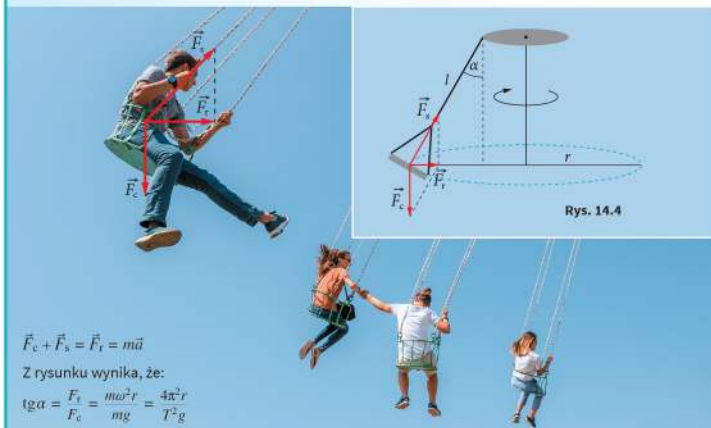
Karuzela łańcuchowa

Wyjaśnimy, dlaczego łańcuch, na którym wisi krzeselko obracającej się karuzeli, odchyła się od pionu, oraz znajdziemy związek między kątem odchylenia α i okresem obrotu T .

W układzie odniesienia związanym z Ziemią na krzeselko działają dwie siły: ciężar i siła sprężystości łańcucha.

Gdy karuzela jest w spoczynku, siły te się równoważą.

Aby ich wypadkowa stała się różną od zera siłą dośrodkową potrzebną w ruchu po okręgu, łańcuch musi odchylić się od pionu (rys. 14.4).



$$\vec{F}_c + \vec{F}_s = \vec{F}_c = m\vec{a}$$

Z rysunku wynika, że:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_t}{F_c} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{4\pi^2 r}{T^2 g}$$

Otrzymany wzór pokazuje, że gdy karuzela obraca się szybko (T jest małe), to kąt odchylenia łańcucha od pionu jest duży.

Zwróćmy uwagę, że kąt ten nie zależy od masy krzeselka (pustego lub obciążonego), więc wszystkie krzeselka, niezależnie od tego, czy są puste, czy ktoś na nich siedzi, odchylają się tak samo.

PRZYKŁAD 14.3

Akrobacje samolotowe

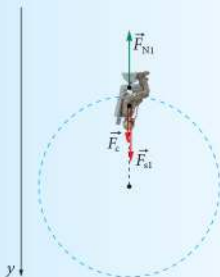
Obliczymy wartość siły, którą pilot o masie $m = 70$ kg działa w najwyższym i najniższym punkcie toru na fotel samolotu, zakreślającego pętlę w płaszczyźnie pionowej. Przyjmijmy uproszczony model ruchu samolotu: założymy, że pętla jest okręgiem o promieniu $r = 400$ m, a stała szybkość samolotu $v = 360$ km/h. Do obliczeń przyjmijmy, że $g = 10$ m/s².

Podczas ruchu po okręgu w najwyższym i najniższym punkcie na pilota działają dwie siły: siła ciężkości $\vec{F}_c$ i siła sprężystości fotela $\vec{F}_s$. Wypadkowa tych sił stanowi siłę dośrodkową, potrzebną do utrzymania pilota w ruchu po okręgu:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_c + \vec{F}_s$$

Powyższe równanie zapisane dla współrzędnych sił (oś y zwrócona jest tak jak na rysunkach) ma postać:

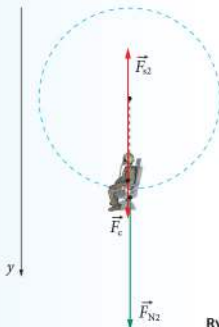
w najwyższym punkcie toru (rys. 14.5):



Rys. 14.5

$$\begin{aligned} F_r &= F_c + F_{s1} \\ \frac{mv^2}{r} &= mg + F_{s1} \\ \text{skąd } F_{s1} &= m\left(\frac{v^2}{r} - g\right) \end{aligned}$$

w najniższym punkcie toru (rys. 14.6):



Rys. 14.6

$$\begin{aligned} -F_r &= -F_{s2} + F_c \\ -\frac{mv^2}{r} &= -F_{s2} + mg \\ \text{skąd } F_{s2} &= m\left(\frac{v^2}{r} + g\right) \end{aligned}$$

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki wartości sił nacisku lotnika na fotel w górnym i dolnym punkcie toru są równe odpowiednio:

$$F_{N1} = F_{s1} = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right) \quad F_{N2} = F_{s2} = m\left(\frac{v^2}{r} + g\right)$$

Po wstawieniu danych liczbowych otrzymamy:

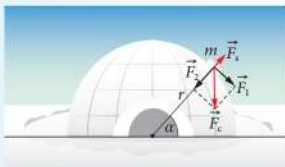
$$F_{N1} = 1050 \text{ N} \quad F_{N2} = 2450 \text{ N}$$

W rozważanym przypadku lotnik jest w stanie przeciążenia w obu punktach toru, czyli wartość siły, którą pilot naciska na fotel, jest większa od wartości jego ciężaru. W dolnym punkcie toru przeciążenie jest większe niż w górnym.

PRZYKŁAD 14.4

Ruch przyspieszony po krzywej

Rozważymy przykład ruchu po łuku okręgu – przeanalizujemy siły działające na mały, płaski kawałek lodu o masie m ześlizgujący się z wierzchołka igloo (rys. 14.7).



Rys. 14.7

Na kawałek lodu działają dwie siły: ciężar $\vec{F}_c = m\vec{g}$ i siła sprężystości $\vec{F}_s$. Rozłożmy siłę $\vec{F}_c$ na dwie składowe: $\vec{F}_1$ styczną do powierzchni igloo i prostopadłą do niej siłę $\vec{F}_2$. Ich wartości są równe odpowiednio:

$$F_1 = mg \cos \alpha \quad F_2 = mg \sin \alpha$$

Siła sprężystości podłoża $\vec{F}_s$ ma mniejszą wartość od wartości siły $\vec{F}_2$, bo wypadkowa tych dwóch sił stanowi konieczną do utrzymania ciała na okręgu siłę dośrodkową $\vec{F}_r$.

$$\begin{aligned}\vec{F}_r &= \vec{F}_2 + \vec{F}_s \\ F_r &= F_2 - F_s \\ \frac{mv^2}{r} &= mg \sin \alpha - F_s\end{aligned}$$

zatem:

$$F_s = m \left(g \sin \alpha - \frac{v^2}{r} \right)$$

Na początku ruchu, gdy kąt α jest duży, a szybkość mała, $g \sin \alpha > \frac{v^2}{r}$. W miarę zsuwania się kawałka lodu kąt α maleje, więc wartość siły $\vec{F}_1$ rośnie – ruch po łuku okręgu jest niejednostajnie przyspieszony, szybkość v gwałtownie wzrasta. W pewnym położeniu wyrażenia $g \sin \alpha$ oraz $\frac{v^2}{r}$ się zrównają. Oznacza to, że na pewnej wysokości siła sprężystości staje się równa zero i lód odrywa się od śnieżowego domku.

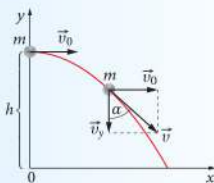
W następnym dziale wrócimy do tego przykładu, aby na podstawie zasady zachowania energii obliczyć tę wysokość.

Najłatwiejszym do opisania ruchem krzywoliniowym jest ruch jednostajny po okręgu, ponieważ wypadkowa wszystkich sił działających na ciało w tym ruchu jest siłą normalną, skierowaną wzdłuż promienia okręgu. Dalej przeanalizujemy ruch po krzywej niebędącej okręgiem jako przykład ruchu przyspieszonego, w którym na ciało działają dwie siły: styczna i normalna.

PRZYKŁAD 14.5

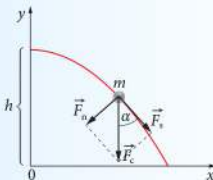
Ruch po paraboli

Torem ruchu ciała rzuconego poziomo jest fragment paraboli, jeśli siły oporu działające na ciało są pomijalnie małe. Rzut poziomy opisano w rozdziale 8 jako ruch złożony z dwóch ruchów prostoliniowych: poziomego jednostajnego i pionowego jednostajnie przyspieszonego (spadanie swobodne), w którym prędkość jest równa $\vec{v}_y = \vec{g}t$ (rys. 14.8).



Rys. 14.8

Prędkość wypadkowa, styczna do toru, ma w chwili t wartość $v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$ dla $t < \sqrt{\frac{2h}{g}}$ i tworzy z pionem kąt α , dla którego $\cos \alpha = \frac{gt}{v}$.



Rys. 14.9

Jeśli pominiemy opór powietrza, to jedyną siłą działającą na ciało jest jego ciężar $\vec{F}_c = m\vec{g}$, który rozkładamy na dwie składowe: styczną do toru $\vec{F}_s$ i normalną $\vec{F}_n$ (rys. 14.9).

$$F_s = mg \cos \alpha \qquad F_n = mg \sin \alpha$$

Siła styczna do toru nadaje ciało przyspieszenie styczne. Na podstawie drugiej zasady dynamiki możemy wyprowadzić wzór na jego wartość:

$$a_s = g \cos \alpha = g \cdot \frac{gt}{v} \qquad a_s = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

Na podstawie otrzymanego wzoru widzimy, że przyspieszenie styczne jest w tym ruchu dość skomplikowaną, rosnącą funkcją czasu.

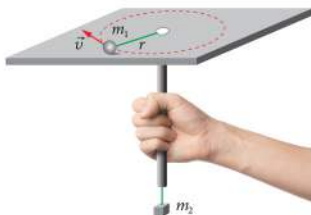
Siła prostopadła do toru nadaje ciało przyspieszenie normalne:

$$a_n = g \sin \alpha = g \frac{v_0}{v} \qquad a_n = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

Oczywiście $\vec{a}_s + \vec{a}_n = \vec{g}$.

ZADANIA

1. Na końcach nitki (przeciągniętej przez rurkę i otworek w śliskiej płytce) zaczepiono małe przedmioty o masach m_1 i m_2 . Poruszając odpowiednio rurkę, wprowadzono ciało o masie m_1 w ruch po okręgu o promieniu r z szybkością v (rys. 14.10).



Rys. 14.10

- Narysuj w zeszycie wszystkie siły działające na ciało poruszające się po okręgu i wskaż, która z nich odgrywa rolę siły dośrodkowej.
 - Gdy intensywniej poruszamy rurką, sprawiamy, że ciało o masie m_1 porusza się z większą szybkością po okręgu o odpowiednim promieniu. Czy wartość siły dośrodkowej działającej na to ciało jest inna niż na początku doświadczenia? Uzasadnij odpowiedź.
 - Ciało o masie m_2 oblepiono plasteliną. Następnie tak dobrano wartość prędkości ciała o masie m_1 , że wprowadzono je w ruch po okręgu o promieniu r takim samym jak na początku doświadczenia. Czy szybkość tego ciała jest równa v (jak na początku doświadczenia)? Uzasadnij odpowiedź.
 - Masę ciała wiszącego na nitce zwiększamy do m_3 . Ciało o masie m_1 wprowadzamy w ruch po okręgu o promieniu r (takim samym jak na początku doświadczenia). Wyprowadź wzór pozwalający wyrazić szybkość tego ciała v_1 za pomocą jego masy m_1 , promienia okręgu r , po którym się porusza, i masy m_3 ciała wiszącego na nitce.
2. Wykonaj następujące doświadczenie. Małą kulkę położy na stole i przykryj szklanką – jak na rysunku 14.11. Poruszaj szklanką, by wprowadzić kulkę w ruch po okręgu – po wewnętrznym obwodzie szklanki. Po chwili podnieś szklankę szybkim ruchem i obserwuj uważnie ruch kulki. W dalszych rozważaniach zakładamy, że kulka cały czas ślizga się bez tarcia.
- Narysuj w zeszycie wszystkie siły działające na kulkę podczas jej ruchu po okręgu i podaj ich nazwy.
 - Opisz ruch środka kulki po podniesieniu szklanki.



Rys. 14.11

3. Podczas jazdy na zakręcie rowerzysta pochyla się oraz balansuje rowerem i ciałem, odpowiednio zginając ręce i układając nogi. Podczas zakrętu w prawo (rys. 14.12) prawa ręka rowerzysty jest wyprostowana, lewa zgięta, a wyprostowana lewa noga dociska rower do podłoża. Rowerzysta zbliża też lewe kolano do ramy, dzięki czemu środek ciężkości nie zmienia położenia.



Rys. 14.12



Rys. 14.13

- Narysuj w zeszyte szkice rysunków 14.12 i 14.13, zwracając uwagę na dokładne przerysowanie wszystkich wektorów. Oznacz wszystkie siły narysowane na tych rysunkach i zapisz ich nazwy.
- Oblicz kąt α (patrz rysunek 14.13), o który odchyła się od pionu rowerzysta, pokonując kołowy zakręt o promieniu 50 m z szybkością 36 km/h.
- Wyprowadź związek kąta odchylenia od pionu rowerzysty $\alpha_{\max}$ ze współczynnikiem tarcia statycznego f opon roweru o podłoże w sytuacji, w której pokonuje on bezpiecznie zakręt z możliwie maksymalną szybkością.



15. Opis ruchu w układach nieinercjalnych

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- opisać i objaśnić przykłady niestosowalności zasad dynamiki,
- zdefiniować siłę bezwładności i opisać jej cechy,
- rozwiązywać zagadnienia dynamiczne w układach inercjalnych i nieinercjalnych.

→ **Przypomnij sobie** wiadomości o zjawisku bezwładności i o sile dośrodkowej w ruchu jednostajnym po okręgu.

Podczas omawiania **zasad dynamiki** powiedzieliśmy, że w **nieinercjalnych układach odniesienia** te zasady **nie są spełnione**. W tych układach możemy zaobserwować, że:

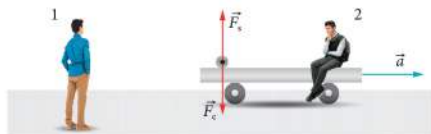
- siły działające na ciało równoważą się, a ono porusza się ruchem zmiennym, lub
- siły działające na ciało nie równoważą się, a ono spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym po prostej.

Jak to możliwe? W celu wyjaśnienia tego problemu posłużymy się przykładem. Rozważmy wózek i leżącą na nim kulkę o masie m (rys. 15.1).



Rys. 15.1 W układzie inercyjnym wózek spoczywa

Załóżmy, że między kulką i wózkiem nie ma tarcia. Przyjmijmy, że pierwszy obserwator (1) stoi na nieruchomym podłożu, a drugi (2) siedzi na wózku. Wprawmy wózek w ruch z przyspieszeniem $\vec{a}$, jak na rysunku 15.2.



Rys. 15.2 Obserwator 1: Kulka spoczywa; obserwator 2: kulka porusza się z przyspieszeniem

Obaj obserwatorzy są zgodni, że na kulkę działają dwie równoważące się siły: siła ciężkości i siła sprężystości podłoża. Jednak zdaniem pierwszego kulka pozostaje względem niego w spoczynku (zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki), drugi zaś obserwator

twierdzi, że kulka oddala się od niego ruchem przyspieszonym, tak jakby działała na nią jakaś siła zwrócona przeciwnie do $\vec{a}$.



Rys. 15.3 Kulka przyczepiona do sprężyny w układzie inercyjnym spoczywa

Tę samą kulkę przyczepmy do sprężyny zamocowanej drugim końcem na stałe do wózka (rys. 15.3) i ponownie wprawmy wózek w ruch z przyspieszeniem $\vec{a}$ (rys. 15.4) w taki sposób, aby kulka spoczywała względem wózka.



Rys. 15.4 Obserwator 1: Kulka porusza się z przyspieszeniem; obserwator 2: Kulka spoczywa

Obaj obserwatorzy twierdzą, że podczas startu sprężyna ulega rozciągnięciu i w czasie ruchu wózka działa na kulkę niezrównoważoną siłą $\vec{F}$. Zdaniem pierwszego z nich pod działaniem tej siły kulka porusza się wraz z wózkiem z przyspieszeniem $\vec{a}$, gdyż $\vec{F} = m\vec{a}$. Drugi obserwator twierdzi, że względem niego kulka spoczywa, tak jakby działała jeszcze jakaś siła równoważąca siłę $\vec{F}$!

Jak widać, w obu doświadczeniach obserwator siedzący na wózku wyraża poglądy niezgodne z poznanymi przez nas zasadami dynamiki. Dlaczego?

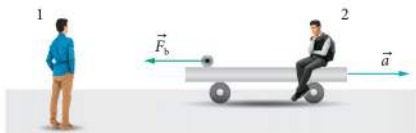
Ponieważ ten obserwator nie ma prawa stosować zasad dynamiki, bo wraz z wózkiem porusza się ruchem zmiennym. Jest więc obserwatorem w układzie nieinercyjnym, a zasady dynamiki wolno stosować tylko w układach inercjalnych.

Taki pogląd panował do połowy XVIII wieku, kiedy to francuski matematyk d'Alembert podał sposób pozwalający stosować zasady dynamiki Newtona także w układach nieinercjalnych. W takich układach do sumy rzeczywistych sił działających na ciało, którego ruch badamy, należy dodać nową siłę:

$$\vec{F}_b = m(-\vec{a}_{\text{układu nieinercyjnego}}) \quad (15.1)$$

równą iloczynowi masy ciała i przyspieszenia układu nieinercyjnego ze znakiem „minus”. Siła ta nosi nazwę **siły bezwładności**.

Obserwator siedzący na wózku powinien więc uwzględnić działającą na kulkę siłę bezwładności (rys. 15.5) zwróconą przeciwnie do przyspieszenia wózka.



Rys. 15.5 Obserwator 2: Na kulkę działa siła bezwładności

To właśnie siła bezwładności nadaje kulce przyspieszenie w układzie nieinercyjnym związanym z wózkiem. Zwróć uwagę, że **nie można wskazać źródła tej siły** (tj. ciała, które działa tą siłą na kulkę); w tym sensie mówimy, że nie jest to siła rzeczywista.

$$\vec{F}_b = m(-\vec{a}) = -m\vec{a}$$

W sytuacji przedstawionej na rysunku 15.4 należy do kulki „zaczepić” siłę bezwładności (rys. 15.6).



Rys. 15.6 Obserwator 2: Siłę $\vec{F}$ równoważy siła bezwładności

Obserwator stwierdza, że kulka spoczywa, więc:

$$\vec{F} + \vec{F}_b = \vec{0} \quad \text{lub} \quad \vec{F} - m\vec{a} = \vec{0} \quad \text{lub} \quad \vec{F} = m\vec{a}$$

Jak widać, w obu układach odniesienia otrzymaliśmy taki sam wynik.

Odczuwanie siły bezwładności

Podczas gwałtownego przyspieszania autobusu pasażerowie odczuwają szarpnięcie w tył, a przy gwałtownym hamowaniu – do przodu. Osoby nietrzymające się uchwytów i stojące w niezbyt stabilnej pozycji (np. ze złączonymi stopami) przewracają się. Obserwator w układzie inercyjnym stwierdza, że efekty te są spowodowane **wyłącznie przyspieszeniem autobusu** (układu). W pierwszym przypadku działająca na stopy pasażera siła tarcia statycznego nie jest w stanie nadać całemu ciału człowieka przyspieszenia równego przyspieszeniu autobusu, więc stopy „uciekają do przodu”, a ciało porusza się wciąż tak jak przed rozpoczęciem przyspieszania i w efekcie pasażer przewraca się do tyłu. Gdy autobus hamuje, ciało człowieka „nie wie”, że powinno także hamować i nadal porusza się do przodu. Aby zminimalizować przykre skutki gwałtownej zmiany prędkości autobusu, pasażerowie instynktownie ustawiają stopy w pewnej odległości tak, by łączący je odcinek był mniej więcej równoległy do przyspieszenia pojazdu.

W układzie poruszającym się z przyspieszeniem pasażer czuje działanie siły bezwładności zwróconej przeciwnie do przyspieszenia układu, lecz zapytany o źródło tej siły nie potrafi go wskazać.

PRZYKŁAD 15.1

Zjawisko przeciężenia w windzie

Obliczymy wartość siły nacisku pasażera o masie $m = 80 \text{ kg}$ na podłogę windy poruszającej się z przyspieszeniem o wartości $a = 1 \text{ m/s}^2$, zwróconym w górę. Przyjmijmy, że $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Zadanie to rozwiążemy w dwóch układach odniesienia, aby zilustrować typowy sposób postępowania w tych przypadkach.

Układ inercjalny związany z klatką schodową (rys. 15.7)

Obserwator w tym układzie stwierdza, że pasażer (wraz z windą) ma przyspieszenie $\vec{a}$. Na podstawie drugiej zasady dynamiki wnioskuję, że na pasażera działa siła wypadkowa $\vec{F} = m\vec{a}$, zwrócona w górę. Siła wypadkowa jest sumą dwóch sił: ciężkości $\vec{F}_c$ i sprężystości podłogi windy $\vec{F}_s$.

$$\vec{F}_w = \vec{F}_c + \vec{F}_s \quad F_w = F_s - F_c$$

$$\text{stad } F_s = F_w + F_c$$

$$F_s = ma + mg = m(a + g) = 880 \text{ N}$$

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki siła nacisku pasażera na podłogę ma taką samą wartość $F_N = 880 \text{ N}$, tylko przeciwny zwrot (i inny punkt zaczepienia).

Zwróć uwagę, że gdyby winda spoczywała lub poruszała się ruchem jednostajnym, siła nacisku na podłogę miałaby wartość $F_s = mg = 800 \text{ N}$.

Układ nieinercjalny związany z windą (rys. 15.8)

Tym razem obserwator znajduje się w windzie. W jego układzie pasażer spoczywa, zatem (zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki) wypadkowa wszystkich sił działających na pasażera jest równa zero. Są to siły: ciężkości, sprężystości podłogi (a więc te same siły rzeczywiste, które wymienił obserwator w układzie inercjalnym) i siła bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}$.

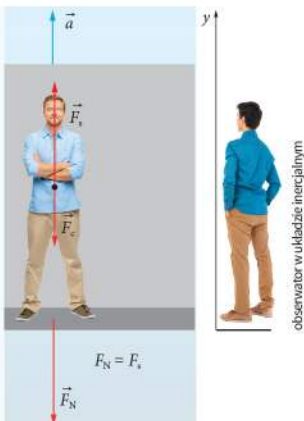
$$\vec{F}_c + \vec{F}_s + \vec{F}_b = \vec{0} \quad \text{lub} \quad \vec{F}_c + \vec{F}_s - m\vec{a} = \vec{0}$$

$$F_s - F_b - F_c = 0$$

$$F_s = F_b + F_c = ma + mg = m(a + g) = 880 \text{ N}$$

W obu przypadkach wynik jest taki sam, mimo że każdy z obserwatorów powoływał się na inną zasadę dynamiki, gdy pisał równanie ruchu.

Zauważ, że jeśli przyspieszenie windy jest zwrócone w górę, to niezależnie od tego, czy winda porusza się ruchem przyspieszonym w górę czy opóźnionym w dół, pasażer windy jest w stanie przeciężenia.



Rys. 15.7



Rys. 15.8

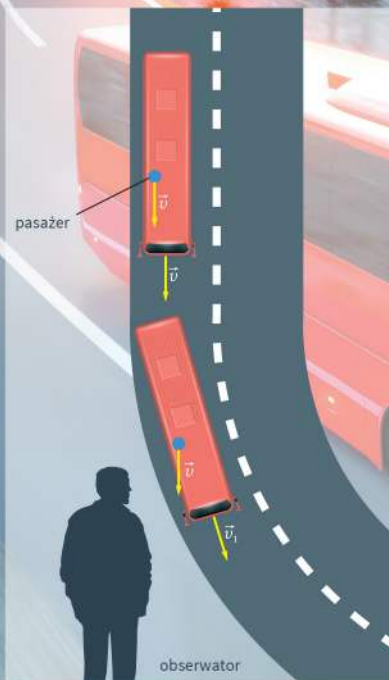
Autobus na zakręcie

Działanie siły bezwładności czujemy także, poruszając się po łuku (czyli fragmencie okręgu) lub po okręgu.

Początkowo autobus jedzie po prostoliniowym odcinku toru z prędkością $\vec{v}$ względem obserwatora w układzie inercyjnym związanym np. z poboczem. Taką samą prędkość ma pasażer. Na rysunku schematycznie przedstawiono osobę opartą o boczną ścianę jadącego autobusu.

Jeśli autobus w pewnej chwili skręca w lewo, ciało pasażera „chce” się nadal poruszać z prędkością $\vec{v}$. Dopiero ściana skręcającego autobusu, działająca na człowieka siłą nacisku, zmienia kierunek jego prędkości. Pasażer (obserwator w układzie nieinercyjnym) czuje, że zostaje przyciśnięty do ściany autobusu, i twierdzi, że działa na niego siła bezwładności, która (że względu na jej zwrot) jest **siłą odśrodkową**.

Rozważmy szczegółowo siły działające w tym przypadku.



W układzie inercyjnym

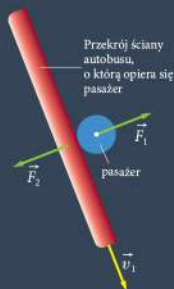
$\vec{F}_1$ – siła, którą na zakręcie ściana autobusu działa na pasażera;

$\vec{F}_2$ – siła, którą pasażer (zgodnie z trzecią zasadą dynamiki) działa na ścianę.

Siła $\vec{F}_1$ jest stale zwrócona do środka krzywizny zakrętu, jest więc siłą dośrodkową. Z drugiej zasady dynamiki wynika, że:

$$\vec{F}_1 = m\vec{a}_r$$

gdzie $\vec{a}_r$ jest przyspieszeniem dośrodkowym.





jazda na wprost



na zakręcie

W nieinercyjnym układzie autobusu skręcającego w lewo siła bezwładności wychyla kierownicę na zewnątrz zakrętu. Balonik wypełniony helem zachowuje się inaczej. Dlaczego?

Wyjaśnienie tego zjawiska znajdziesz w rozdziale 24.

W układzie nieinercyjnym

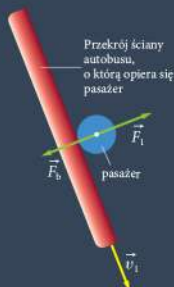
Oprócz rzeczywistej siły $\vec{F}_1$ na pasażera działa siła bezwładności $\vec{F}_b$, zwrócona przeciwnie do przyspieszenia dośrodkowego autobusu.

Pasażer spoczywa względem autobusu, a zatem:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_b = \vec{0}$$

$$\vec{F}_1 - m\vec{a}_c = \vec{0}$$

$$\vec{F}_1 = m\vec{a}_c$$





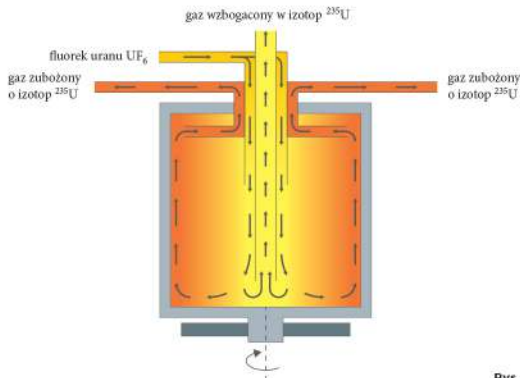
WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Codzienne i niecodzienne zastosowania siły odśrodkowej bezwładności

Ostatnim etapem prania w pralce automatycznej jest wirowanie. W wyniku szybkich obrotów bębna pralki (około 1200 obrotów na minutę) siła odśrodkowa bezwładności powoduje przemieszczanie się wody do ścianek bębna, skąd zostaje ona odprowadzona poprzez znajdujące się w nim otwory.

Na podobnej zasadzie działają wirówki, w których uzyskuje się tzw. wzbogacony uran. Zarówno w energetyce jądrowej, jak i do zastosowań militarnych (np. do produkcji bomby atomowej) potrzebny jest izotop uranu ^{235}U . Stanowi on zaledwie 0,7 % naturalnie występującego uranu – reszta to cięższy izotop ^{238}U . Uran o podwyższonej zawartości izotopu ^{235}U nazywamy wzbogaconym. Zawartość tego izotopu w całości próbki używanej w energetyce jądrowej powinna być nieco większa niż 3 %, a w próbkach wykorzystywanych do celów militarnych musi wynosić aż 90 %.

Na początku procesu uran zostaje połączony z fluorem. W postaci fluorku uranu (UF_6) w stanie gazowym zostaje następnie wprowadzony do wnętrza wirówki (rys. 15.9), wykonującej od 50 000 do 70 000 obrotów na minutę, gdzie uzyskuje niemal identyczną częstotliwość ruchu obrotowego. Cząsteczki, które zawierają izotop ^{238}U , mają o 0,86 % większą masę od cząsteczek zawierających ^{235}U , więc działa na nie większa siła odśrodkowa bezwładności. To powoduje gromadzenie się cząsteczek zawierających izotop ^{238}U przy ściankach bębna wirówki. Bliżej osi wirówki gromadzą się cząsteczki zawierające izotop ^{235}U .



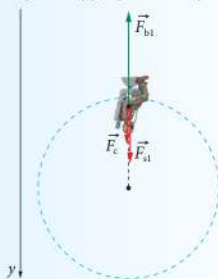
Rys. 15.9

Część gazu wzbogacona w izotop ^{235}U oraz część zubożona o ten izotop zostają odprowadzone z wnętrza wirnika różnymi drogami. Wzbogacony uran poddaje się kolejnym procesom odwirowania w wirówkach połączonych w kaskadę, aż do otrzymania wymaganego składu procentowego ^{235}U .

PRZYKŁAD 15.2

Akrobacje samolotowe

Gdyby rozważyć przykład 14.3 z rozdziału 14 w układzie związanym z pilotem (byłby to układ nieinercjalny, mający w każdej chwili przyspieszenie dośrodkowe), do pilota w każdym jego położeniu należałoby dorysować siłę odśrodkową bezwładności, zwróconą przeciwnie do przyspieszenia dośrodkowego (rys. 15.10). Pilot we własnym układzie odniesienia spoczywa, więc wszystkie siły, które na niego działają, się równoważą.



Rys. 15.10

W górnym położeniu:

$$\vec{F}_c + \vec{F}_{s1} + \vec{F}_{b1} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_c + \vec{F}_{s1} - m\vec{a}_{r1} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_c + \vec{F}_{s1} = m\vec{a}_{r1}$$

Sprawdź, że w dolnym położeniu:

$$\vec{F}_c + \vec{F}_{s2} + \vec{F}_{b2} = \vec{0}$$

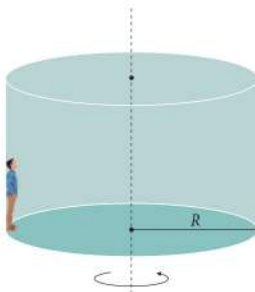
$$\vec{F}_c + \vec{F}_{s2} = m\vec{a}_{r2}$$

Dalszy ciąg rozważań jest taki sam, jak w układzie inercjalnym.

ZADANIA

1. Rozwiąż przykład 10.6 (Przeciążenie, niedociążenie i nieważkość) z rozdziału 10 z punktu widzenia obserwatora w układzie nieinercjalnym.
2. Przedstaw na rysunku wszystkie siły, które działają na klocek zsuwający się bez tarcia z równi pochyłej, w układzie odniesienia związanym z klockiem.
3. Przykład 13.4 (Klocek na desce) z rozdziału 13 rozwiąż w układzie odniesienia związanym z deską.
4. Wymień siły działające na dziecko, które siedzi na krześle wirującej karuzeli tańcuchowej, w układzie odniesienia związanym z krzesłem. Czy te siły się równoważą? Uzasadnij odpowiedź.

5. Wyjaśnij, dlaczego:
- w przedziale pociągu bezpieczniej jest umieszczać walizkę na półce od strony lokomotywy;
 - podczas jazdy samochodem na tylnym podsztybiu nie powinny leżeć żadne niezabezpieczone przedmioty;
 - pod fotelem kierowcy nie wolno zostawiać żadnych przedmiotów, np. butelek lub puszek.
6. Jedną z atrakcji lunaparku jest „wirujący pokój” z ruchomą podłogą w kształcie koła o promieniu $R = 2,25$ m. Amatorzy mocnych wrażeń ustawiają się pod ścianą pokoju, który zaczyna się obracać wokół osi (rys. 15.11), a jego szybkość kątowa wzrasta do $\omega = \frac{10}{3}$ rad/s.



Rys. 15.11

W pewnej chwili podłoga opada, a osoby obecne w pokoju wirują przyciśnięte do ściany. Po kilku minutach podłoga powraca do początkowego położenia. Oblicz najmniejszy współczynnik tarcia statycznego ubrania o ścianę zapewniający bezpieczne korzystanie z wirującego pokoju. Przyjmij, że $g = 10$ m/s². Rozwiąż zadanie w układzie inercyjnym i w układzie nieinercyjnym.



7. Załóżmy, że na wadze łazienkowej umieszczonej w windzie stoi człowiek o masie 80 kg. Podczas ruchu windy waga wskazuje 68 kg. Przyjmij do obliczeń wartość przyspieszenia ziemskiego równą $g = 10$ m/s².
- Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1, 2 albo 3. Wskazania wagi świadczą o tym, że przyspieszenie windy $\vec{a}$ jest zwrócone

A.	w dół,	a winda	1.	na pewno porusza się w górę.
			2.	na pewno porusza się w dół.
B.	w górę,		3.	może poruszać się w górę albo w dół.

- Oblicz wartość przyspieszenia windy. Zadanie rozwiąż w nieinercyjnym układzie odniesienia związanym z windą.

ZASADY DYNAMIKI NEWTONA

Oddziaływania makroskopowe

to oddziaływania, jakie widzimy na co dzień między otaczającymi nas ciałami.

Oddziaływania mikroskopowe

to oddziaływania między najmniejszymi cząstkami materii.

Obserwowane skutki oddziaływań ciał makroskopowych są efektem oddziaływań między cząstkami materii tworzącymi te ciała. Wszystkie obserwowane w przyrodzie efekty oddziaływań makroskopowych, niebędących oddziaływaniami grawitacyjnymi, są wynikiem elementarnych oddziaływań elektromagnetycznych między cząstkami materii.

O ruchu decydują wspólnie różne, zawsze wzajemne oddziaływania, których ilościową miarą są siły. Inaczej mówiąc, o tym, czy ciało spoczywa, czy się porusza (i jakim ruchem), decyduje siła wypadkowa wszystkich sił, którymi działają na nie inne ciała.

I Pierwsza zasada dynamiki

Ta zasada została sformułowana przez Newtona w postaci **postulatu istnienia układu inercyjnego**.

Istnieją takie układy odniesienia, w których ciało, jeśli nie działają na nie żadne siły (lub wypadkowa wszystkich sił jest równa zero), pozostaje w spoczynku lub porusza się prostoliniowym ruchem jednostajnym. Takie układy noszą nazwę układów inercyjnych.



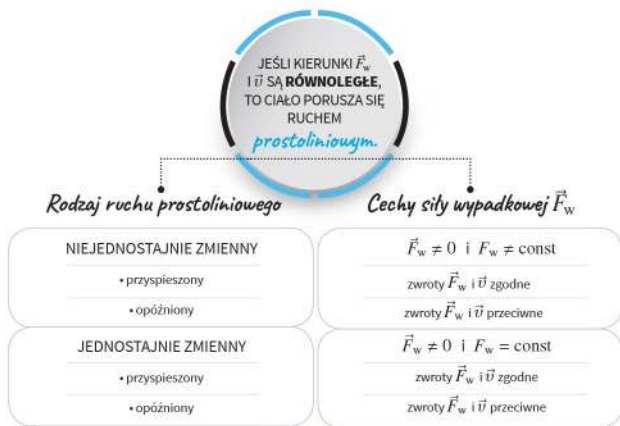
Uwaga: Jeśli znaleźliśmy jeden układ inercyjny, to każdy układ poruszający się względem niego prostoliniowym ruchem jednostajnym też jest układem inercyjnym.

II Druga zasada dynamiki

Jeśli w inercyjnym układzie odniesienia siły działające na ciało nie równoważą się (czyli wypadkowa $\vec{F}_w$ jest różna od zera), to względem tego układu ciało porusza się ruchem zmiennym z przyspieszeniem wprost proporcjonalnym do siły wypadkowej $\vec{F}_w$. Współczynnik proporcjonalności jest równy odwrotności masy ciała.



$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m}$$



III

Trzecia zasada dynamiki

Oddziaływania są zawsze wzajemne.

Siły wzajemnego oddziaływania dwóch ciał mają takie same wartości, taki sam kierunek, przeciwne zwroty i różne punkty przyłożenia (działają na różne ciała).

Zasady dynamiki można stosować jedynie w inercjalnych układach odniesienia.

Dla większości zjawisk obserwowanych na Ziemi układ związany z Ziemią można z dobrym przybliżeniem uważać za inercjalny.

SIŁA A ZMIANA PĘDU CIAŁA

ILOCZYN masy m ciała i jego prędkości $\vec{v}$ nazywamy **pędem** ciała.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Działająca na ciało siła wypadkowa jest równa szybkości zmiany jego pędu:

$$\vec{F}_w = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Jest to zapisana w innej postaci druga zasada dynamiki Newtona.

ZASADA ZACHOWANIA PĘDU DLA UKŁADU CIAŁ

Pędem układu nazywamy sumę pędów ciał tworzących ten układ.

Aby zsumować pędy poszczególnych ciał, zaczepiamy je w jednym punkcie zwanym **środkiem masy układu**.

Wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ jest równa szybkości zmiany pędu układu:

$$\vec{F}_{w \text{ zew}} = \frac{\Delta \vec{p}_0}{\Delta t}$$

z czego wynika zasada zachowania pędu dla układu ciał.

Zasada zachowania pędu dla układu ciał

Jeśli na układ ciał nie działają siły zewnętrzne lub takie siły działają, ale ich wypadkowa jest równa zero, to pęd układu pozostaje stały.

Siły wewnętrzne mogą zmienić pędy poszczególnych ciał, ale tak, aby pęd całego układu nie uległ zmianie.

Jeśli układ składa się z kilku (co najmniej dwóch) ciał, których środek masy jest w spoczynku, i na skutek sił wewnętrznych nastąpi przegrupowanie ciał w układzie (czyli zmiana ich współrzędnych), to położenie środka masy nie ulegnie zmianie.

Gdyby środek masy poruszał się ruchem jednostajnym po linii prostej, to mimo zmiany pędów poszczególnych ciał w układzie prędkość środka masy nie zmieni się.

TARCIE

Jeśli na ciało leżące na poziomej powierzchni zadziałamy niewielką siłą $\vec{F}$ równoległą do tej powierzchni, to ciało pozostaje w spoczynku – siła $\vec{F}$ i **siła tarcia statycznego (spoczynkowego)** $\vec{T}$ się równoważą.

Wartość tarcia statycznego może rosnąć tylko do pewnej wartości $T_{\max}$.

Gdy F przekroczy $T_{\max}$ – ciało rusza.

Maksymalna wartość siły tarcia statycznego $T_{\max}$ jest wprost proporcjonalna do wartości F_N siły wzajemnego nacisku ciała i podłoża.

Dla danych dwóch powierzchni iloraz $\frac{T_{\max}}{F_N} = \text{const}$ i nazywamy go

współczynnikiem tarcia statycznego f_s .

$$f_s = \frac{T_{\max}}{F_N}$$

Gdy ciało ruszy, siła tarcia gwałtownie zmaleje; nazywamy ją

siłą tarcia kinetycznego $\vec{T}_k$.

Dla danych dwóch powierzchni iloraz $\frac{T_k}{F_N} = \text{const}$ i nazywamy go

współczynnikiem tarcia kinetycznego f_k .

$$f_k = \frac{T_k}{F_N}$$

Wzorów: $T_{\max} = f_s F_N$ i $T_k = f_k F_N$ nie można zapisać wektorowo, bo siły tarcia i nacisku są do siebie prostopadłe.

Zmniejszenie współczynników tarcia uzyskuje się przez wygładzenie powierzchni oraz smarowanie (smar wypełnia wgłębienia w chropowatych powierzchniach, co znacznie zmniejsza siłę oporu).

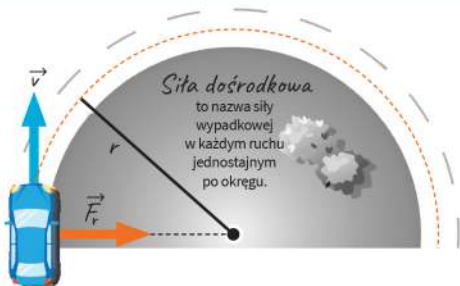
SIŁY W RUCHU PO OKRĘGU

W ruchu jednostajnym po okręgu o promieniu r (tj. ruchu z prędkością o stałej wartości v) zmienia się kierunek prędkości i występuje przyspieszenie zwrócone do środka okręgu, zwane **przyspieszeniem dośrodkowym**, o wartości:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = v\omega$$

Jest ono skutkiem działania siły dośrodkowej $\vec{F}_r$.





Według obserwatora w układzie inercyjnym ciało porusza się po okręgu z prędkością o stałej wartości, gdy wypadkowa wszystkich sił działających na to ciało jest zwrócona do środka okręgu i ma stałą wartość:

$$F_r = ma_r = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} = 4\pi^2 mv^2 r$$

(ω – szybkość kątowna, T – okres, v – częstotliwość).

Siłę dośrodkową mogą stanowić różne siły, np. siła grawitacji, siła sprężystości, siła tarcia statycznego, siła elektrostatyczna Coulomba, wypadkowa siły ciężkości i siły sprężystości.

OPIS RUCHU W UKŁADACH NIEINERCJALNYCH

Wszystkie układy odniesienia, które względem układów inercyjnych poruszają się z przyspieszeniem, są **układami nieinercyjnymi**. Przyspieszenie układu nieinercyjnego w układzie inercyjnym oznaczamy symbolem $\vec{a}_u$.

Obserwator związany z układem nieinercyjnym może zaobserwować, że ciało, na które nie działa żadna siła (lub działające siły równoważą się), porusza się ruchem zmiennym, a ciało, na które działają siły o wypadkowej różnej od zera, porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostaje w spoczynku. Dlatego mówimy, że **w układach nieinercyjnych nie mają zastosowania zasady dynamiki Newtona.**

Niekiedy jednak łatwiej jest analizować ruch ciała w układzie nieinercyjnym. Wówczas stosujemy następujący sposób: obserwator związany z układem nieinercyjnym, konstruuje siłę wypadkową działającą na dane ciało, do sumy sił rzeczywistych dodaje dodatkową siłę zwaną **siłą bezwładności**. Siła ta jest opisana wzorem:

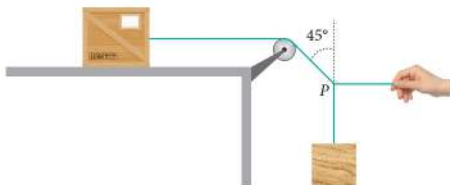
$$\vec{F}_b = -m\vec{a}_u$$

gdzie $\vec{a}_u$ jest przyspieszeniem układu względem dowolnego układu inercyjnego.

Siła bezwładności ma więc zawsze zwrot przeciwny do przyspieszenia układu nieinercyjnego, a jej wartość jest wprost proporcjonalna do wartości tego przyspieszenia oraz do masy ciała, na które działa.

Siłę bezwładności w odróżnieniu od wszystkich poznanych sił nazywamy niekiedy pseudosiłą, bo nie można wskazać źródła, które działa tą siłą. Wszystkie siły, których źródła można wskazać, nazywamy siłami rzeczywistymi.

1. W układzie przedstawionym na rysunku P2.1 ciężar kloka wiszącego na linie ma wartość 20 N, masa skrzyni leżącej na poziomym podłożu jest równa 20 kg, a współczynnik tarcia statycznego skrzyni o podłoże wynosi 0,25.



Rys. P2.1

1.1. Wykaż, analizując siły działające na klocek, siły działające w kierunku poziomym na skrzynię oraz siły działające na węzeł w punkcie P, że układ jest w równowadze. W tym celu

- a) przerysuj rysunek do zeszytu, a następnie dorysuj i oznacz wektory analizowanych sił;
- b) powołaj się na odpowiednie prawa lub związki między wielkościami fizycznymi i wykonaj niezbędne obliczenia, uzasadniające równowagę układu.

Założmy, że rękę odsuwamy w prawo i równocześnie nieco ją unosimy, tak aby prawy odcinek liny stale pozostawał poziomy.

1.2. Oblicz minimalny kąt, który musi utworzyć z pionem środkowy odcinek liny, aby równowaga układu została zachwiana.

2. Na drewniane spoczywające początkowo pudełko o masie 1 kg działamy równolegle do poziomego podłoża stałą siłą o wartości 5 N. Współczynnik tarcia kinetycznego pudełka o podłoże jest równy 0,1. Przyjmij do obliczeń wartość przyspieszenia ziemskiego równą $g = 10 \text{ m/s}^2$.

2.1. Oblicz wartość przyspieszenia, z którym porusza się pudełko.

2.2. Ustal i zapisz, co będzie się działo z pudełkiem, jeśli będziemy je pchać równolegle do podłoża siłą o wartości 0,8 N.

Powołaj się na odpowiednie prawa lub związki między wielkościami fizycznymi i wykonaj niezbędne obliczenia, uzasadniające twoje stwierdzenie.

3. Z gładkiej równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha = 30^\circ$, zsuwał się klocek o masie $m_1 = 1 \text{ kg}$. W chwili, gdy klocek miał prędkość o wartości $v = 3,3 \text{ m/s}$, uderzył w niego lecący ku górze, równolegle do równi, pocisk o masie $m_2 = 0,1 \text{ kg}$. Pocisk utknął w kloku. W wyniku zderzenia klocek przesunął się ku górze wzdłuż równi i do chwili zatrzymania przebył drogę $s = 0,9 \text{ m}$. **Oblicz wartość prędkości pocisku przed zderzeniem.** Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.
4. Pocisk o masie m poruszający się z prędkością o zwrocie zgodnym ze zwrotem osi x i wartości 100 m/s wybuchł i rozpadł się na dwie części. Jedna część o masie $\frac{1}{3}m$ użyła prędkość o zwrocie przeciwnym do zwrotu osi x i wartości 100 m/s .

- 4.1.** Oblicz wartość prędkości drugiej części pocisku i określ jej zwrot względem zwrotu osi x .
- 4.2.** Oblicz wartość zmiany pędu każdej części pocisku, jeśli $m = 0,9 \text{ kg}$.
- 4.3.** Określ zwrot zmiany pędu każdej części pocisku względem zwrotu osi x .
- 5.** Platforma o masie $m_1 = 80 \text{ kg}$ i długości $l = 2 \text{ m}$, mogąca poruszać się bez tarcia, stoi na torze. Na jednym jej końcu znajduje się chłopiec o masie $m_2 = 35 \text{ kg}$.
- 5.1.** Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Gdy chłopiec zaczął poruszać się, pęd układu platforma–chłopiec zwiększył swoją wartość.	P	F
2.	Środek masy układu przesunął się w stronę platformy.	P	F
3.	Pęd chłopca względem podłoża w każdej chwili miał tę samą wartość co pęd platformy.	P	F

- 5.2.** Oblicz drogę przebytą przez platformę, gdy chłopiec przejdzie na jej drugi koniec.
- 5.3.** Oblicz szybkość chłopca względem toru, jeśli jego ruch trwał 2 s.
- 6.** Analizując ruch rowerzysty, który jedzie po poziomym podłożu i wjeżdża w zakręt, oprócz promienia zakrętu R i szybkości rowerzysty v potrzebujemy również współczynnika tarcia statycznego opon o podłożu f_s .
Wyjaśnij, dlaczego potrzebujemy informacji o tarciu statycznym, skoro rowerzysta jest w ruchu. Powołaj się na odpowiednie prawa lub związki między wielkościami fizycznymi uzasadniające twoje wyjaśnienie.
- 7.** Dziecko usiłuje przesunąć po podłodze skrzynkę z zabawkami o łącznej masie 12 kg . W tym celu ciągnie za sznurek przyczepiony do skrzynki pod kątem 20° do poziomu siłą o wartości 30 N (patrz rysunek). Współczynnik tarcia statycznego skrzynki o podłogę jest równy $0,3$, a kinetycznego $0,2$.
Przyjmij do obliczeń wartość przyspieszenia ziemskiego równą $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- 7.1.** Wykaż, analizując siły działające na skrzynkę, że nie zostanie ona wprowadzona w ruch. W tym celu:

- a) przerysuj rysunek do zeszytu, a następnie dorysuj i oznacz siły działające na skrzynkę;
 - b) powołaj się na odpowiednie prawa lub związki między wielkościami fizycznymi i wykonaj niezbędne obliczenia, uzasadniające spoczynek skrzynki.
- 7.2. Ustal i zapisz, co będzie się działo ze skrzynką, gdy dziecko zwiększy wartość siły ciągnącej do 40 N. Powołaj się na odpowiednie prawa lub związki między wielkościami fizycznymi i wykonaj niezbędne obliczenia, uzasadniające twoje stwierdzenie.**
8. Sprawdź doświadczalnie (w sposób opisany w zadaniu 4 w rozdziale 12), że środek ciężkości (a więc i środek masy) trójkąta leży na przecięciu środkowych jego boków, a równoległoboku – w punkcie przecięcia jego przekątnych.
 9. W wesołym miasteczku tzw. diabelskie koło o promieniu $R = 20$ m obraca się z prędkością o stałej wartości, a okres obrotu wynosi $T = 5$ min. Wszystkie siedziska są poziome podczas ruchu. Przyjmij, że $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- 9.1. Oblicz różnicę wartości sił wzajemnego nacisku pasażera i siedziska w najniższym i w najwyższym położeniu, jeśli ciężar pasażera ma wartość 500 N.
- 9.2. Oblicz, jaki musiałby być okres ruchu koła, aby w najwyższym punkcie toru siła wzajemnego nacisku pasażera i siedziska była dwa razy mniejsza od ciężaru pasażera.
- 9.3. Oblicz wartość prędkości liniowej pasażera w przypadku sytuacji opisanej w zadaniu 9.2.

10. Jeden z uczniów klasy pierwszej, zapytany o warunki występowania stanu przeciążenia i niedociążenia w poruszającej się windzie, odpowiedział: „Przeciążenie występuje tylko wtedy, gdy winda porusza się w górę ruchem przyspieszonym, a niedociążenie, gdy winda porusza się w dół ruchem przyspieszonym”.

Ustal, czy odpowiedź ucznia jest wyczerpująca. Zapisz i uzasadnij swoją opinię na temat tej odpowiedzi. Powołaj się na odpowiednie prawa lub związki między wielkościami fizycznymi.

11. Kłosek o masie m może się zsuwać bez tarcia z równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem α . Jeśli równia będzie się poruszała z przyspieszeniem $\vec{a}_u$ skierowanym poziomo i mającym odpowiednią wartość oraz odpowiedni zwrot, to klocek będzie spoczywał względem niej.

11.1. Narysuj, zachowując relacje między długościami wektorów, oznacz i zapisz nazwy sił, które działają wówczas na klocek:

- a) w układzie nieinercyjnym, związanym z równią,
b) w układzie inercyjnym podłoża.

Na obu rysunkach narysuj wektor przyspieszenia $\vec{a}_u$.

11.2. W przypadku obu układów odniesienia wyprowadź wzór na wartość przyspieszenia $\vec{a}_u$.

11.3. W układzie nieinercyjnym, związanym z równią, wyprowadź wzór na wartość siły wzajemnego nacisku klocka i równi.

12. Skorzystaj z danych zamieszczonych na infografice na s. 120–121 i oblicz wartość przyspieszenia, które ma względem Ziemi startująca pionowo rakieta Saturn V. Porównaj obliczony wynik z wykresem 2.

13. Na podstawie wykresów przedstawionych na infografice na s. 120–121 oszacuj siłę ciągu silników pierwszego stopnia rakiety Saturn V tuż przed ich wyłączeniem. Przyjmij, że wyłączenie silników i odłączenie pierwszego stopnia rakiety zachodzi w tej samej chwili.

14. Małpka o masie 2 kg wchodzi po pionowej linie ruchem jednostajnie przyspieszonym. Po 2 sekundach wspinaczki małpka znalazła się na wysokości 4 m. Przyjmij do obliczeń wartość przyspieszenia ziemskiego równą $g = 10 \text{ m/s}^2$.

14.1. Przerysuj rysunek do zeszytu, a następnie dorysuj, zachowując relacje między długościami wektorów, siły działające na małpkę. Oznacz te siły i podaj ich nazwy.

14.2. Oblicz wartość przyspieszenia małpki.

14.3. Oblicz wartość siły, którą lina działa na małpkę podczas wspinaczki, wiedząc, że przyspieszenie ma wartość 2 m/s^2 .

14.4. Zaznacz poprawne dokończenie zdania.

Prędkość małpki po 2 sekundach ruchu miała wartość

- A. 10 m/s B. 8 m/s C. 4 m/s D. 2 m/s



DROGA HAMOWANIA SAMOCHODU

Klasyczna definicja tarcia $T = f F_N$ mówi, że siła tarcia zależy wyłącznie od współczynnika tarcia f pomiędzy współpracującymi powierzchniami i od nacisku pionowego F_N , nie zależy natomiast od wielkości powierzchni trących. Oznacza to, że do przesunięcia po betonowym podłożu cegły leżącej płasko trzeba użyć dokładnie takiej samej siły jak do przesunięcia jej, gdyby stała pionowo. Wielkość powierzchni nie odgrywa tu żadnej roli. Podobnie z kołami samochodu: samochód powinien zahamować na utwardzonej powierzchni w takim samym czasie i na takiej samej drodze niezależnie od tego, czy ma opony szerokie czy wąskie. Okazuje się jednak, że w przypadku tworzyw elastycznych, z których jest zbudowana opona, sprawa nie jest tak prosta. Dlatego dla odróżnienia, teoria ruchu samochodu wprowadziła pojęcie współczynnika przyczepności μ , który zależy w pierwszym rzędzie od chropowatości powierzchni trących (...), co uwarunkowane jest z kolei konstrukcją opony, składem mieszanki gumowej, z której wykonano oponę, kształtem rzeźby bieżnika, wielkością i kształtem stykających się powierzchni, szybkością, temperaturą, ciśnieniem, własnościami adhezyjnymi (adhezja – przyleganie, przyklejanie, przyp. red.) itp. (...)

W typowych obliczeniach rozpędzania, hamowania czy szybkości granicznej na łuku, jakie przeprowadzane są choćby przy rekonstrukcji wypadku drogowego, z wystarczającą dla takiej analizy dokładnością, przyjmuje się uproszczony model opony (...) który pomija zjawiska związane z własnościami sprężystymi i tłumiącymi opony. Najczęściej występujące zakresy współczynnika przyczepności wg różnych danych literaturowych oraz własnych badań Instytutu Ekspertyz Sądowych w Krakowie podane zostały w tabeli.

Rodzaj i stan nawierzchni		Współczynnik przyczepności
beton	suchy	0,8 – 1,08
	mokry	0,25 – 0,75
asfalt	suchy	0,7 – 1,08
	mokry	0,4 – 0,6
kostka kamienna czysta	sucha	0,7 – 0,8
	mokra	0,4 – 0,5
kostka kamienna zakurzona	sucha	0,6 – 0,7
	mokra	0,25 – 0,35
klinkier	suchy	0,7 – 0,8
	mokry	0,4 – 0,5
droga gruntowa twarda	sucha	0,5 – 0,6
	mokra	0,3 – 0,4
żwir		0,45
droga pokryta śniegiem		0,1 – 0,4
droga oblodzona		0,05 – 0,15

W samochodach wyścigowych stosowane są niekiedy opony o zwiększonych właściwościach adhezyjnych. Przyklejanie się takich opon do jezdni powoduje znaczne zwiększenie współczynnika przyczepności, kosztem oczywiście zwiększenia poboru mocy z silnika, a więc zużycia paliwa. Przykładowo, o ile maksymalne opóźnienie hamowania normalnego użytkowego samochodu w najbardziej sprzyjających warunkach może dojść do 0,8–1,0 g (tzn. około 8–10 m/s²), o tyle samochód Formuły 1 osiąga opóźnienia rzędu 1,9 g (19 m/s²). Oznacza to, że droga hamowania samochodu użytkowego ze 100 km/h do 0 wynosi minimum 38–48 m, a samochodu F1 około 20 m.



Po oszacowaniu w konkretnym przypadku współczynnika przyczepności, na podstawie długości śladów hamowania, np. zmierzonych przez policję podczas wypadku drogowego, można określić szybkość samochodu przed rozpoczęciem hamowania. Przykłady podano w poniższej tabeli.

Współczynnik przyczepności	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
Droga hamowania, m	Szybkość, km/h				
53,3	90	93	98	101	104
54,9	92	95	98	103	106
56,4	93	97	100	104	108
57,9	93	98	101	105	109
59,4	95	100	103	106	109

Nawet najlepszy refleks i umiejętności kierowcy nie skrócą drogi hamowania. Pamiętaj o tym, gdy otrzymasz prawo jazdy!

Każdy pieszy przekraczający jezdnię powinien ponadto pamiętać, że hamowanie rozpoczyna się dopiero po około 1 s od chwili spostrzeżenia przez kierowcę niebezpieczeństwa. W tym czasie samochód także przebywa pewną drogę.

Opracowano na podstawie materiałów Instytutu Ekspertyz Sądowych w Krakowie

ZADANIA

- Wykorzystując podane wyżej informacje, oblicz całkowitą drogę hamowania samochodu od chwili spostrzeżenia przez kierowcę niebezpieczeństwa do zatrzymania się:
 - na suchym asfalcie przy szybkości początkowej 101 km/h (przyjmij $\mu = 0,75$),
 - na mokrym asfalcie przy szybkości początkowej 90 km/h (przyjmij $\mu = 0,6$).
- Znając długość swoich kroków, odmierz na pobliskiej ulicy uzyskane odległości. Przyjrzyj się im dokładnie. Pamiętaj, że jeśli wejdiesz na jezdnię, gdy samochód jest blisko, nie dasz kierowcy żadnych szans wyhamowania.



PRACA, MOC, ENERGIA MECHANICZNA

- Praca, moc, energia mechaniczna
- Rodzaje energii mechanicznej
- Zasada zachowania energii mechanicznej
- Opis zderzeń
- Sprawność urządzeń mechanicznych



16. Praca i moc

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

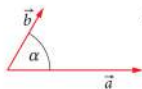
- definiuje się iloczyn skalarny dwóch wektorów,
- obliczyć pracę wykonywaną przez stałą i zmienną siłę,
- obliczyć moc średnią i chwilową,
- obliczyć pracę na podstawie wykresu $P(t)$.

→ **Przypomnij sobie** wiadomości o pracy i mocy oraz jednostkach tych wielkości.

Iloczyn skalarny dwóch wektorów

NM s. 282

Iloczyn skalarny zapisujemy $\vec{a} \cdot \vec{b}$ i czytamy „ $\vec{a}$ punkt $\vec{b}$ ”. W wyniku skalarnego pomnożenia dwóch wektorów otrzymujemy skalar. Iloczyn skalarny dwóch wektorów (rys. 16.1) jest równy iloczynowi wartości tych wektorów i cosinusa kąta zawartego między nimi.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \quad (16.1)$$

Rys. 16.1 Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mnożymy skalarnie

Z definicji wynika, że:

- iloczyn skalarny jest przemienny:

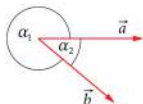
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos \angle(\vec{b}, \vec{a})$$

- iloczyn skalarny dwóch wektorów prostokątnych jest równy zeru (bo $\cos 90^\circ = 0$);
- jeśli kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest ostry, to iloczyn skalarny jest liczbą dodatnią;
- jeśli kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest rozwarty lub równy 180° , to iloczyn skalarny jest liczbą ujemną;
- iloczyn skalarny dwóch takich samych wektorów jest równy kwadratowi wartości wektora:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = a^2$$

Zwróć uwagę na to (rys. 16.2), że z przemienności iloczynu skalarnego wynika, iż:



$$ab \cos \alpha_1 = ab \cos \alpha_2$$

Rys. 16.2 Ilustracja przemienności iloczynu skalarnego

Praca

Pojęcie pracy jest ci już znane. Potrafisz obliczyć pracę W , wykonaną przez stałą siłę $\vec{F}$ zwróconą w tę samą stronę, w którą ciało się porusza, za pomocą wzoru poznanego w szkole podstawowej:

$$W = F s \quad s = |\Delta \vec{r}|$$

Teraz poszerzymy pojęcie pracy. W przypadku prostoliniowego ruchu ciała przedstawionego na rysunku 16.3 działająca na ciało **stała siła** $\vec{F}$ tworzy **stały kąt** α z wektorem przemieszczenia $\Delta \vec{r}$.



Rys. 16.3 Siła tworząca kąt α z przemieszczeniem

Pracę takiej siły definiuje się jako iloczyn skalarny siły $\vec{F}$ i przemieszczenia $\Delta \vec{r}$.

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

$$W = |\vec{F}| |\Delta \vec{r}| \cos \angle(\vec{F}, \Delta \vec{r}) = F \Delta r \cos \alpha \quad (16.2)$$

- Jeśli $\angle(\vec{F}, \Delta \vec{r}) = 0^\circ$ (kierunki i zwroty wektorów siły i przemieszczenia są zgodne), to:

$$W = F \Delta r \cos 0^\circ = F \Delta r$$

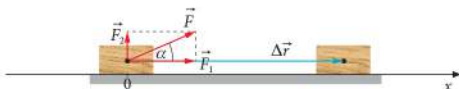
- Jeśli $\angle(\vec{F}, \Delta \vec{r}) = 180^\circ$ (kierunki wektorów siły i przemieszczenia są zgodne, a zwroty przeciwne), to:

$$W = F \Delta r \cos 180^\circ = F \Delta r (-1) = -F \Delta r$$

- Jeśli $\angle(\vec{F}, \Delta \vec{r}) = 90^\circ$ (kierunek wektora siły jest prostopadły do kierunku przemieszczenia), to:

$$W = F \Delta r \cos 90^\circ = 0$$

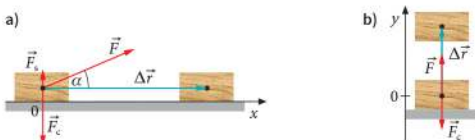
Rozłóżmy siłę $\vec{F}$ (rys. 16.4) na składowe, tak by jedna z nich ($\vec{F}_1$) była równoległa do kierunku przemieszczenia (do osi x), a druga ($\vec{F}_2$) prostopadła do osi x . Zauważ, że iloczyn $|\vec{F}| \cos \angle(\vec{F}, \vec{r})$ jest wartością składową siły $\vec{F}$ równoległej do przemieszczenia z odpowiednim znakiem („+”, gdy siła tworzy z przemieszczeniem kąt ostry, albo „-”, gdy siła tworzy z przemieszczeniem kąt rozwarty).



Rys. 16.4 Praca danej siły jest równa sumie prac jej składowych

Sprawdź, że praca siły $\vec{F}$ jest równa sumie prac sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.

Obliczymy teraz prace różnych (stałych) sił działających na ciało poruszające się ruchem prostoliniowym (rys. 16.5a, b). W przypadku a) oprócz siły $\vec{F}$, którą działamy, działają także: siła ciężkości $\vec{F}_c$ oraz siła sprężystości stołu $\vec{F}_s$. W przypadku b) na ciało działają siła $\vec{F}$ i siła ciężkości $\vec{F}_c$.



Rys. 16.5 Na poruszający się klocek działają trzy siły (a) i dwie siły (b)

NM s. 284 Korzystamy ze wzoru (16.2) oraz informacji, że:

$$\cos 0^\circ = 1 \quad \cos 90^\circ = 0 \quad \cos 180^\circ = -1$$

i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \text{a) } W_F &= \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos \alpha & \text{b) } W_F &= \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos 0^\circ = F \Delta r \\ W_{F_c} &= \vec{F}_c \cdot \Delta \vec{r} = F_c \Delta r \cos 90^\circ = 0 & W_{F_c} &= \vec{F}_c \cdot \Delta \vec{r} = F_c \Delta r \cos 180^\circ = -F_c \Delta r \\ W_{F_s} &= \vec{F}_s \cdot \Delta \vec{r} = F_s \Delta r \cos 90^\circ = 0 \end{aligned}$$

Zwróć uwagę na to, że praca siły zwróconej przeciwnie do przemieszczenia jest ujemna. W tym przypadku przemieszczenie nie jest skutkiem działającej siły.

Jednostką pracy jest **dżul** (1 J). Jest to praca, którą wykona siła o wartości 1 N, działająca na ciało podczas jego przemieszczenia o 1 m, gdy zwroty siły i przemieszczenia są zgodne.

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

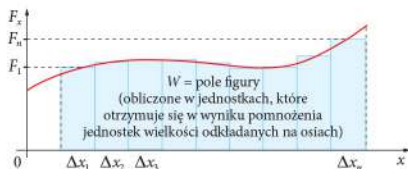
Pamiętaj, że wzór (16.2) możemy stosować tylko wówczas, gdy siła ma stałą wartość i tworzy stały kąt z kierunkiem przemieszczenia.

Praca wykonana przez zmienną siłę

Jak obliczyć pracę, jeśli siła nie jest stała wzdłuż całego prostoliniowego toru, po którym porusza się ciało? Ograniczmy się do przypadku, gdy siła tworzy z przemieszczeniem kąt 0° . Rozważmy pracę wykonaną przez siłę, której współrzędna F_x zmienia się w trakcie ruchu ciała w sposób pokazany na rysunku 16.6.

Uważny czytelnik tego podręcznika powinien już wiedzieć, że w takiej sytuacji należy całą drogę podzielić na tak małe odcinki, aby siłę działającą na każdym z nich można było w przybliżeniu uważać za stałą, i obliczyć prace wykonane przez stałe siły na tych odcinkach – za pomocą wzoru (16.2). Po zsumowaniu tych prac otrzymamy pracę wykonaną na całej drodze:

$$W = F_1 \Delta x_1 + F_2 \Delta x_2 + \dots + F_n \Delta x_n$$



Rys. 16.6 Odczytywanie pracy z wykresu funkcji $F_x(x)$

Obrazem graficznym pracy jest pole figury zawartej między wykresem zależności $F_x(x)$ a osią x (rys. 16.6). Obliczona praca zmiennej siły będzie tym dokładniej równa liczbowo polu powierzchni zawartej między wykresem $F_x(x)$ a osią x , im mniejsze będą odcinki $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.

Dokładne obliczenie pracy zmiennej siły wymaga korzystania z rachunku całkowego.

Moc

Informacja o wykonanej pracy nie jest wystarczająca do oceny urządzeń, które wykonały tę pracę, ponieważ mogły one wykonać jednakową pracę w różnym czasie. Zazwyczaj wygodniej jest używać tego urządzenia, które wykonuje ją w krótszym czasie. Potrzebna jest więc informacja, jaką pracę wykonuje dane urządzenie w jednostce czasu.

Stosunek pracy W do czasu t , w którym ta praca została wykonana, nazywamy mocą średnią P_{sr} .

$$P_{sr} = \frac{W}{t} \quad (16.3)$$

Jeśli odstęp czasu, w którym praca została wykonana, był bardzo krótki (dążył do zera), to moc obliczona ze wzoru (16.3) jest mocą chwilową.

Jednostką mocy w SI jest **wat** (1 W). Urządzenie pracuje z mocą 1 W, jeśli w czasie 1 s wykonuje pracę 1 J.

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$$

Powszechnie używa się też wielokrotności jednostki mocy: 1 kW = 10^3 W oraz 1 MW = 10^6 W.

Gdy do wzoru definiującego moc podstawimy $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$, to otrzymamy:

$$P_{sr} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{sr}$$

Tak wyrażamy moc średnią urządzenia, które działa stałą siłą $\vec{F}$ na poruszające się ciało. Jeśli siłę $\vec{F}$ działającą na ciało w danej chwili pomnożymy skalarnie przez prędkość chwilową $\vec{v}$ ciała, to otrzymamy moc chwilową tego urządzenia.

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Powyższy wzór pozwala obliczyć chwilową moc urządzenia działającego zmienną siłą.

PRZYKŁAD 16.1

Moc chwilowa silnika dźwigu

Dźwig podnosi pionowo ładunek o masie $m = 500 \text{ kg}$ (rys. 16.7). W pierwszej fazie ruchu (do uzyskania stałej prędkości $\vec{v}$), która trwa $t = 5 \text{ s}$, ładunek porusza się ze stałym przyspieszeniem o wartości $a = 0,2 \text{ m/s}^2$.



Rys. 16.7

Obliczmy chwilową moc silnika dźwigu po upływie 5 s od rozpoczęcia podnoszenia ładunku.

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos 0^\circ = Fv$$

Z drugiej zasady dynamiki: $F - mg = ma$, więc wartość siły wynosi: $F = m(g + a)$.

Wobec tego:

$$P = m(g + a) \cdot v$$

Po czasie t od rozpoczęcia ruchu:

$$v = at$$

zatem:

$$P = m(g + a)at$$

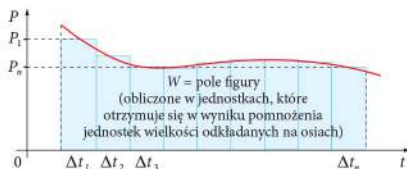
Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$P \approx 5,0 \text{ kW}$$

Taką moc miał silnik dźwigu w chwili $t = 5 \text{ s}$.

Odszukaj informacje na temat średniej i chwilowej mocy człowieka, konia pociągowego i różnych urządzeń mechanicznych.

Gdy chcemy obliczyć pracę urządzenia, którego moc zmienia się wraz z upływem czasu, sporządzamy wykres $P(t)$ i postępujemy tak samo jak w przypadku obliczania pracy wykonanej przez siłę o zmieniającej się wartości (s. 162).



Rys. 16.8 Odczytywanie pracy z wykresu funkcji $P(t)$

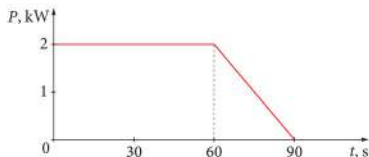
Na podstawie wykresu $P(t)$ z rysunku 16.8 przedstaw odpowiednie rozumowanie i wyjaśnij, kiedy obliczona praca:

$$W = P_1 \Delta t_1 + P_2 \Delta t_2 + \dots + P_n \Delta t_n$$

będzie z lepszym przybliżeniem (niż w przypadku przedstawionym na powyższym rysunku) równa polu powierzchni zawartej między wykresem $P(t)$ a osią czasu.

ZADANIA

1. Oblicz pracę stałej siły wypadkowej wykonaną podczas rozpędzania, spoczywającego na początku, ciała o masie $m = 2 \text{ kg}$ do szybkości $v = 2 \text{ m/s}$.
2. Oblicz pracę, którą trzeba wykonać, aby podnieść ciało o masie 20 kg na wysokość 10 m (przyjmij, że $g = 10 \text{ m/s}^2$):
 - a) ruchem jednostajnym,
 - b) z przyspieszeniem o wartości 5 m/s^2 .
3. Skorzystaj z przedstawionej na wykresie (rys. 16.9) zależności $P(t)$ dla pewnego urządzenia i oblicz pracę wykonaną przez to urządzenie w czasie $1,5$ minuty.



Rys. 16.9

4. Kulka o masie m zawieszona na nitce o długości l wiruje po okręgu w płaszczyźnie pionowej. Oblicz pracę wykonaną przez siłę dośrodkową w ciągu jednego okresu i w dowolnym czasie t .
5. Zapisz funkcję $P(t)$ dla silnika dźwigu z przykładu 16.1. Podaj wartość współczynnika proporcjonalności. Narysuj wykres tej funkcji w przedziale $(0 \text{ s}, 5 \text{ s})$ i na podstawie wykresu oblicz pracę wykonaną przez silnik w czasie 5 sekund. Oblicz średnią moc silnika w tym czasie.
6. Oblicz moc silnika samochodu o masie 800 kg wjeżdżającego na wzniesienie nachylone do poziomu pod kątem 15° ze stałą szybkością 30 km/h . Wypadkowa sił oporu ma wartość $5,5 \text{ kN}$ ($g = 10 \text{ m/s}^2$).



17. Rodzaje energii mechanicznej

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- definiuje się energię mechaniczną układu ciał,
- definiuje się i oblicza energię potencjalną grawitacyjną i energię kinetyczną.

→ **Przypomnij sobie** wiadomości o energii mechanicznej oraz o energii wewnętrznej.

Co najmniej dwa oddziałujące wzajemnie ciała nazywamy **układem ciał**. Siły wzajemnego oddziaływania na siebie ciał tworzących układ są **siłami wewnętrznymi w tym układzie**. Siły, które pochodzą spoza układu, to **siły zewnętrzne**.

Jeśli np. trzymamy w ręce książkę na pewnej wysokości h nad Ziemią, to w układzie Ziemia–książka siła, którą nasza ręka działa na tę książkę, jest siłą zewnętrzną, a siła przyciągania ziemskiego jest siłą wewnętrzną.

Jeśli układem ciał są dwa klocki i ściśnięta między nimi sprężyna (rys. 17.1), to siły, którymi sprężyna działa na klocki, są siłami wewnętrznymi w układzie, a siły, którymi nasze ręce działają na klocki, a także siła przyciągania ziemskiego, są siłami zewnętrznymi.



Rys. 17.1 Układ złożony z klocków i sprężyny

Energia mechaniczna

Rozważania w kilku najbliższych rozdziałach będą dotyczyły ruchu postępowego ciał oddziałujących siłami zależnymi tylko od położenia. Dotychczas omawialiśmy dwa rodzaje takich sił: siłę grawitacji i siłę sprężystości.

Klocek podniesiony na wysokość h może wykonać pracę podczas spadania, np. stłuc leżące na stole jajko, a odepchnięty przez rozprężającą się sprężynę klocek może wprowadzić w ruch inne, leżące w pobliżu przedmioty. Mówimy, że podniesiony klocek i ściśnięta sprężyna mają energię mechaniczną.

Aby układ uzyskał taką energię, należało wcześniej, działając siłą zewnętrzną (czyli siłą pochodzącą spoza układu), wykonać pracę, np. podnieść klocek na wysokość h lub ściśnąć sprężynę.

W pierwszym przypadku zmieniliśmy **energię potencjalną grawitacji** (ciężkości) klocka, w drugim – **energię potencjalną sprężystości**¹⁶ sprężyny. Zmiana obu tych rodzajów energii mechanicznej wiąże się ze **zmianą wzajemnych położenia ciał tworzących układ**.

Energia mechaniczna może się zmieniać także wtedy, gdy zmienia się wartość prędkości ciała. Gdy wprawiamy ciało w ruch lub zmieniamy wartość jego prędkości, wykonujemy pracę, więc zmieniamy **energię kinetyczną** ciała.

Zmiana energii mechanicznej układu ciał jest równa pracy siły zewnętrznej $\vec{F}_z$ wykonanej nad układem.

$$\Delta E_{\text{mech}} = W_z$$

(17.1)

Z powyższego wzoru wynika, że jednostką energii w SI jest 1 J.

Jeśli w danej chwili znamy położenia i prędkości ciał tworzących układ, mówimy, że znamy **stan układu ciał**. Jeśli zmieni się położenie lub wartość prędkości choćby jednego ciała wchodzącego w skład układu, zmieni się stan tego układu.

Zmiany energii mechanicznej wiążą się ze zmianą stanu układu ciał. Jeśli zmieniła się energia mechaniczna, to musiał się zmienić stan układu.

Energia potencjalna grawitacji

Zmiana wzajemnego położenia ciał, które oddziałują siłami grawitacji lub sprężystości, prowadzi zwykle do zmiany **energii potencjalnej**. W przypadku oddziaływania grawitacyjnego zmiana odległości ciała od Ziemi powoduje zmianę energii potencjalnej grawitacji układu Ziemia–ciało, a w przypadku oddziaływania sprężystego zmiana kształtu, czyli odkształcenie np. sprężyny, jest przyczyną zmiany energii potencjalnej sprężystości układu ciał połączonych sprężyną.

Jeśli podnosimy ciało na pewną wysokość ruchem jednostajnym, stan układu Ziemia–ciało zmienia się tylko przez zmianę wzajemnego położenia ciał tworzących układ. Prędkość jest wówczas stała. Siła zewnętrzna, którą w takim przypadku działamy na ciało, równoważy siłę wzajemnego oddziaływania ciała i Ziemi (siłę ciężkości). Wobec tego:

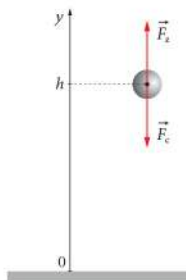
Zmiana energii potencjalnej układu ciał jest równa pracy siły zewnętrznej równoważącej w każdym punkcie siłę wzajemnego oddziaływania ciał (siłę wewnętrzną).

$$\Delta E_p = W_{\text{siły zewnętrznej równoważącej siłę wewnętrzną}} = W_{z,r}$$

(17.2)

Obliczmy pracę wykonaną przy podnoszeniu ciała ruchem jednostajnym na niewielką wysokość h (rys. 17.2).

¹⁶ O energii potencjalnej sprężystości (poznanej w szkole podstawowej) dowiesz się więcej w klasie drugiej.



Rys. 17.2 Podczas podnoszenia ciała wykonujemy pracę

$$W_{z,s} = F_z h \cos 0^\circ = mgh$$

Praca ta jest równa przyrostowi energii potencjalnej układu Ziemia–ciało lub, inaczej mówiąc, energii potencjalnej ciała oddziałującego z Ziemią. Zwykle przyjmuje się, że w położeniu początkowym (dolnym) jego energia potencjalna wynosi zero, więc energia końcowa (na wysokości h) jest równa:

$$\Delta E_p = W_z = E_p - 0 = mgh$$

skąd:

$$E_p = mgh$$

(17.3)

Poziom „zerowy”, na którym $E_p = 0$, możemy wybrać dowolnie. Człowiek podnoszący kamień z powierzchni Ziemi przyjmuje, że energia potencjalna kamienia na powierzchni Ziemi jest równa zero. Człowiek mieszkający na drugim piętrze i podnoszący teczkę z podłogi przyjmie, że energia potencjalna teczki jest równa zero na podłodze. Sprawdź, czy zmiana energii potencjalnej teczki podniesionej z podłogi na wysokość h nie zależy od wyboru poziomu „zerowego”.

Gdy opuszczamy ciało z pewnej wysokości na poziom „zerowy” praca wykonana przez siłę $\vec{F}_{z,s}$ jest ujemna (siła ma zwrot w górę, a przemieszczenie $\Delta \vec{r}$ w dół):

$$W_{z,s} = F_{z,s} h \cos 180^\circ = -mgh$$

zatem energia potencjalna maleje.

Obliczmy dla takiego przypadku pracę W_c siły ciężkości, a więc pracę W_w siły wewnętrznej w układzie Ziemia–ciało.

$$W_w = W_c = mgh \cos 0^\circ = mgh$$

Wobec tego:

$$W_{z,r} = -W_w \quad (17.4)$$

Otrzymany związek między pracą siły zewnętrznej równoważącej siłę wewnętrzną $W_{z,r}$ i pracą siły wewnętrznej W_w jest bardzo ważny. Bywają bowiem przypadki, gdy na ciało nie działają siły zewnętrzne, a energia potencjalna układu ulega zmianie. Tak jest np. podczas swobodnego spadania, gdy na spadające ciało działa tylko siła ciężkości, a więc siła wewnętrzna w układzie Ziemia-ciało. W celu obliczenia zmiany energii potencjalnej w takim przypadku korzystamy ze wzoru (17.2) i związku (17.4).

Zmiana energii potencjalnej układu dwóch ciał jest równa pracy siły wewnętrznej ze znakiem minus.

$$\Delta E_p = -W_w \quad (17.5)$$

Energia kinetyczna

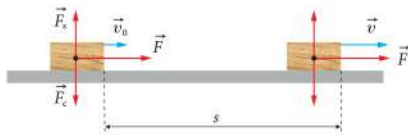
Tak jak ze zmianą położenia ciała wiąże się zmiana jego energii potencjalnej względem innego ciała, z którym tworzy ono układ, tak ze zmianą szybkości ciała jest związana zmiana energii kinetycznej.

Energia kinetyczna ciała zmienia się wówczas, gdy siły działające na ciało nie równoważą się wzajemnie, a ich wypadkowa nadaje ciału przyspieszenie, a więc zmienia wartość jego prędkości.

Zmiana energii kinetycznej ciała jest zawsze równa pracy siły wypadkowej (sumy sił: wewnętrznej i zewnętrznej) działającej na to ciało.

$$\Delta E_k = W_{\text{wyp}} \quad (17.6)$$

Załóżmy, że na poruszające się ciało działa stała siła $\vec{F}$, a prędkość początkowa ciała jest równa $\vec{v}_0$ (rys. 17.3). Ponieważ $\vec{F}$ jest wypadkową sił działających na ciało, więc porusza się ono ruchem jednostajnie przyspieszonym.



Rys. 17.3 Ilustracja do wyprowadzenia wzoru

$$W_{\text{wyp}} = F s \cos 0^\circ = m a \left(v_0 t + \frac{a t^2}{2} \right)$$

Po wstawieniu $a = \frac{v - v_0}{t}$ i wykonaniu przekształceń otrzymujemy:

$$\Delta E_k = W_{\text{wyp}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = E_{\text{kinetyczna w stanie końcowym}} - E_{\text{kinetyczna w stanie początkowym}}$$

Wobec tego energia kinetyczna ciała poruszającego się z prędkością o wartości v wyraża się wzorem:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

ZADANIA

- Kulka o masie 0,1 kg spada swobodnie z wysokości 20 m. Przyjmij do obliczeń wartość przyspieszenia ziemskiego równą 10 m/s^2 .
 - Wyprowadź wzory opisujące odpowiednio zależność energii kinetycznej $E_k(t)$ i energii potencjalnej $E_p(t)$ kulki od czasu jej spadania t .
 - W układzie współrzędnych t, E narysuj wykresy powyższych zależności.
- Pocisk o masie $m = 50 \text{ g}$ uderza w deskę o grubości $d = 6 \text{ cm}$ z prędkością o wartości $v_1 = 400 \text{ m/s}$ i wylatuje z niej z prędkością o wartości $v_2 = 200 \text{ m/s}$. Oblicz wartość średniej siły oporu deski.
- Z działa o masie $M = 1000 \text{ kg}$ wystrzelono pocisk o masie $m = 1 \text{ kg}$. Oblicz energię kinetyczną działa uzyskaną po wystrzale, jeśli wiadomo, że pocisk opuszcza lufę z prędkością o wartości $v = 400 \text{ m/s}$, a działło może swobodnie toczyć się do tyłu.
-  Kłosek zsuwa się ruchem przyspieszonym z równi pochyłej. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Zmiana energii potencjalnej klocka zsuwającego się z równi z tarciem i bez tarcia jest taka sama.	P	F
2.	Zmiana energii kinetycznej klocka w przypadku ruchu z tarciem jest równa sumie pracy siły tarcia i zmiany energii kinetycznej klocka zsuwającego się z równi bez tarcia.	P	F
3.	Zmiana całkowitej energii mechanicznej klocka zsuwającego się z równi bez tarcia jest równa zeru.	P	F
4.	Zmiana całkowitej energii mechanicznej klocka w przypadku ruchu po równi z tarciem jest ujemna.	P	F



18. Zasada zachowania energii mechanicznej

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- przeprowadzić rozumowanie doprowadzające do sformułowania zasady zachowania energii mechanicznej,
- sformułować zasadę zachowania energii mechanicznej, i kiedy energia mechaniczna układu ciał ulega zmianie,
- wykorzystywać zasadę zachowania energii w rozwiązywaniu zagadnień dynamicznych.

→ **Przypomnij sobie** wiadomości o przemianach energii mechanicznej i warunkach, w których nie zmienia się całkowita energia ciała.

Rozważmy następujący problem. W pewnej odległości od Ziemi znajduje się ciało o masie m (rys. 18.1).



Rys. 18.1 Siły wewnętrzna i zewnętrzna działająca na ciało

Siła przyciągania ziemskiego $\vec{F}_{gr}$ to siła wewnętrzna w układzie Ziemia–ciało. Załóżmy, że na ciało działa także dowolna siła zewnętrzna $\vec{F}_z$. Po zsumowaniu obu sił otrzymujemy siłę wypadkową $\vec{F}_{wyp}$.

Praca siły wypadkowej przy niewielkim przemieszczeniu $\Delta \vec{r}$ jest równa:

$$W_{wyp} = \vec{F}_{wyp} \cdot \Delta \vec{r} = (\vec{F}_z + \vec{F}_w) \cdot \Delta \vec{r} = \vec{F}_z \cdot \Delta \vec{r} + \vec{F}_w \cdot \Delta \vec{r}$$

Zmiana energii kinetycznej ciała jest równa tej pracy (wzór 17.6):

$$\Delta E_k = W_{wyp}$$

Praca siły zewnętrznej jest równa zmianie całkowitej energii mechanicznej układu (wzór 17.1):

$$\vec{F}_z \cdot \Delta \vec{r} = \Delta E_{mech}$$

Z kolei praca siły wewnętrznej jest równa zmianie energii potencjalnej ze znakiem minus (wzór 17.5):

$$\vec{F}_w \cdot \Delta \vec{r} = -\Delta E_p$$

Wobec tego:

$$\Delta E_k = \Delta E_{\text{mech}} - \Delta E_p$$

i stąd:

$$\Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_p + \Delta E_k \quad (18.1)$$

Zmiana energii mechanicznej jest równa sumie zmian energii kinetycznej i potencjalnej, a energia mechaniczna jest sumą obu tych energii.

Zauważ, że jeśli $\Delta E_p = 0$, to $\Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_k$, a jeśli $\Delta E_k = 0$, to $\Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_p$.

Zadamy pytanie bardzo ważne dla naszych rozważań:

Kiedy energia mechaniczna układu ciał jest zachowana (nie zmienia się)?

Powyższe pytanie można sformułować inaczej: Kiedy zmiana energii mechanicznej układu ciał jest równa zeru ($\Delta E_{\text{mech}} = 0$)? Odpowiedź jest nam znana:

Energia mechaniczna układu ciał nie zmienia się, gdy siły zewnętrzne nie wykonują pracy nad tym układem.

$$W_z = 0$$

Wówczas:

$$\left(E_{\text{kinetyczna}} \text{ w stanie końcowym} - E_{\text{kinetyczna}} \text{ w stanie początkowym} \right) + \left(E_{\text{potencjalna}} \text{ w stanie końcowym} - E_{\text{potencjalna}} \text{ w stanie początkowym} \right) = 0$$

lub

$$E_{\text{kinetyczna}} \text{ w stanie końcowym} + E_{\text{potencjalna}} \text{ w stanie końcowym} = E_{\text{kinetyczna}} \text{ w stanie początkowym} + E_{\text{potencjalna}} \text{ w stanie początkowym} \quad (18.2)$$



WIEDZIEĆ WIĘCEJ

O prawach fizyki

Prawa fizyki są odzwierciedleniem prawidłowości występujących w przyrodzie. Zapisujemy je w języku matematyki w postaci równań (lub nierówności) będących związkami między wielkościami fizycznymi.

Jak powstają prawa fizyki?

W fizyce, podobnie jak w innych dyscyplinach nauki, stosuje się odpowiednie metody badawcze. Polegają one na prowadzeniu obserwacji zjawisk, planowaniu i wykonywaniu eksperymentów, formułowaniu wynikających z nich wniosków w postaci praw lub teorii oraz ich dalszej doświadczalnej lub teoretycznej weryfikacji. Prawo (lub teoria) obowiązują do czasu odkrycia zjawisk, które im przeczą, lub sformułowania ogólniejszego prawa (lub teorii). Wśród praw fizyki można wyróżnić prawa znajdujące się najwyżej w hierarchii, szczególnie ważne, fundamentalne (ponieważ wynikają z nich inne prawa) i uniwersalne (czyli spełnione zawsze i wszędzie), zwane **zasadami**. Zasady są sformułowane jako zdania złożone z dwóch członów; pierwszy z nich jest założeniem, a drugi tezą.

Przykłady poznanych już przez ciebie fundamentalnych praw fizyki to: zasady dynamiki Newtona, zasada zachowania pędu i zasada zachowania energii.

Jeśli skorzystamy z definicji pracy stałej siły (16.2), możemy zauważyć, że praca siły zewnętrznej działającej na rozważane ciało jest równa 0, gdy zachodzi jeden z przypadków:

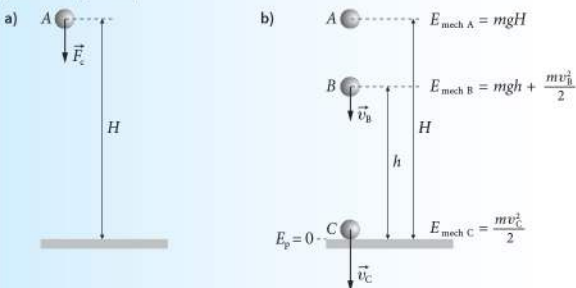
- $\vec{F}_z = \vec{0}$, czyli gdy nie działa siła zewnętrzna;
- $\Delta \vec{r} = \vec{0}$, czyli gdy ciało nie ulega przemieszczeniu;
- $\cos \alpha = 0$, czyli gdy siła zewnętrzna działa, ale jest prostopadła do przemieszczenia.

Pierwszą z wymienionych możliwości zilustrujemy na poniższym przykładzie.

PRZYKŁAD 18.1

Układ kulka–Ziemia; spadanie swobodne

Przeanalizujemy ruch kulki spadającej swobodnie (bez oporu) z niewielkiej wysokości nad podłożem (rys. 18.2).



Rys. 18.2

Kulka i Ziemia tworzą układ ciał oddziałujących grawitacyjnie, w którym **siła ciężkości $\vec{F}_g$ jest siłą wewnętrzną**. A zatem na spadającą swobodnie kulkę nie działają siły zewnętrzne, czyli energia mechaniczna kulki się nie zmienia. Jej całkowita energia mechaniczna (suma grawitacyjnej energii potencjalnej i energii kinetycznej) jest stała podczas ruchu.

$$F_z = 0 \Rightarrow W_z = 0 \Rightarrow \Delta E_{\text{mech}} = 0 \Rightarrow E_{\text{mech}} = \text{const} \Rightarrow E_{\text{mech A}} = E_{\text{mech B}} = E_{\text{mech C}}$$

Za pomocą zasady zachowania energii można (znacznie prościej niż na podstawie kinematycznych równań ruchu) wyprowadzić wzór na szybkość kulki w dowolnych punktach jej toru, np. w punktach B i C.

Możemy porównać energię kulki w punktach A i B (rys. 18.2b) i zapisać równanie:

$$mgH = mgh + \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(H-h)}$$

Wzór na szybkość v_C kulki tuż przed uderzeniem w podłoże znajdziemy po podstawieniu do powyższego wzoru $h = 0$ lub w wyniku rozwiązania równania:

$$mgH = \frac{mv_C^2}{2}$$

Szybkość kulki tuż przed uderzeniem w podłoże jest równa $v_C = \sqrt{2gH}$.

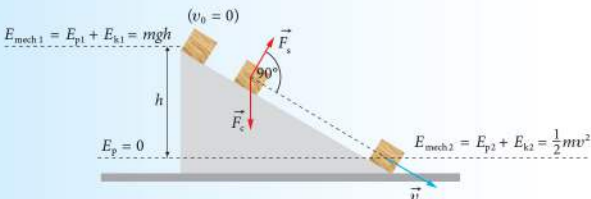
Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla wszystkich rodzajów ruchu, w których na ciało działa jedynie siła ciężkości, np. rzutów, o których mówiliśmy w rozdziałach 6, 8 i 9.

Trzeci z wymienionych wcześniej przypadków, w których siła zewnętrzna nie wykonuje pracy ($\cos \alpha = 0$), zilustrujemy na dwóch przykładach.

PRZYKŁAD 18.2

Układ klocek–Ziemia; ruch klocka po gładkiej równi

Przeanalizujemy zsuwanie się klocka o masie m z bardzo gładkiej¹⁷ równi pochyłej (rys. 18.3).



Rys. 18.3

Przyjmijmy, że układ ciał tworzą tylko Ziemia i klocek oddziałujące wzajemnie siłami grawitacji. W tym układzie ciężar ciała $\vec{F}_c$ jest siłą wewnętrzną, a siła sprężystości równi $\vec{F}_s$ siłą zewnętrzną (jej źródłem jest równia nienależąca do układu). Ruch klocka odbywa się wzdłuż równi, więc kąt między siłą zewnętrzną i przemieszczeniem wynosi 90° , a $\cos 90^\circ = 0$. Praca siły zewnętrznej jest równa zero.

Energia mechaniczna układu Ziemia–klocek jest zachowana:

$$E_{\text{mech } 1} = E_{\text{mech } 2}$$

czyli:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

Otrzymany wynik wskazuje, że wszystkie ciała zsuwające się (z pomijalnie małym tarcie) z równi pochyłych o takich samych wysokościach (niezależnie od kąta nachylenia do poziomu) uzyskują u podstawy taką samą szybkość, równą szybkości, którą uzyskają podczas spadania swobodnego z wysokości h .

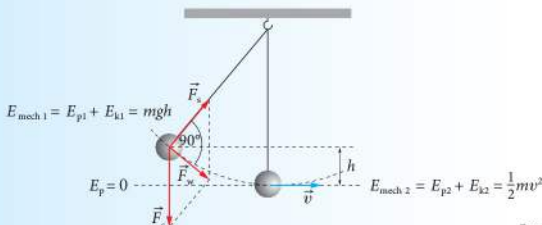
Zauważ, że od kąta nachylenia równi do poziomu zależy czas ruchu ciała po równi. Ruch ten jest ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem o wartości $a = g \sin \alpha$. Prędkość początkowa ciała jest równa zero, więc $v = gt \sin \alpha$, skąd $t = \frac{v}{g \sin \alpha}$.

¹⁷ Stwierdzenie, że równia jest bardzo gładka, oznacza, że można pominąć tarcie między równią i ciałem zsuwającym się z tej równi.

PRZYKŁAD 18.3

Układ kulka-wahadła-Ziemia; ruch kulki wahadła

Przeanalizujemy ruch kulki zawieszonej na nitce i wychylonej tak, że znajduje się na wysokości h nad najniższym możliwym położeniem, czyli położeniem równowagi (rys. 18.4).



Rys. 18.4

W układzie kulka-Ziemia siła ciężkości kulki $\vec{F}_c$ jest siłą wewnętrzną, a siła sprężystości nitki $\vec{F}_s$ jest siłą zewnętrzną. W każdym punkcie toru przemieszczenie $\Delta \vec{r}$ jest prostopadłe do siły $\vec{F}_s$, więc praca siły sprężystości jest równa zero.

Energia mechaniczna układu kulka-Ziemia nie zmienia się, czyli całkowita energia mechaniczna w położeniu początkowym jest równa całkowitej energii mechanicznej kulki przy przechodzeniu przez położenie równowagi:

$$E_{\text{mech } 1} = E_{\text{mech } 2}$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

Także i w tym przypadku wartość prędkości kulki przy przechodzeniu przez położenie równowagi jest równa wartości prędkości, którą uzyskałaby kulka spadająca swobodnie z wysokości h .

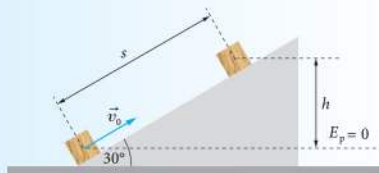
Wszystkie nasze rozważania dotyczyły układów ciał oddziałujących **siłami zależnymi tylko od położenia** tych ciał, a nie na przykład od ich prędkości. Takie siły nazywamy **siłami zachowawczymi**.

Ostatecznie **zasadę zachowania energii** sformułujemy więc następująco:

Jeśli na układ ciał oddziałujących wzajemnie siłami zachowawczymi nie działają siły zewnętrzne lub działają takie siły, ale nie wykonują pracy, to energia mechaniczna układu jest zachowana.

PRZYKŁAD 18.4**Ruch w górę równi (bez tarcia)**

Obliczmy wartość prędkości, którą nadano klockowi znajdującemu się u podnóża gładkiej równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem 30° (rys. 18.5), jeśli do chwili zatrzymania klocek przebył wzdłuż równi drogę $1,6\text{ m}$.

**Rys. 18.5**

W chwili początkowej całkowita energia mechaniczna ciała była równa tylko energii kinetycznej ($E_p = 0$). Na wysokości h ciało zatrzymało się, więc $E_k = 0$, a $E_p = mgh$. Podczas ruchu energia mechaniczna układu Ziemia–ciało była zachowana ($T = 0$, bo założyliśmy, że równia jest gładka), więc:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh$$

Z rysunku 18.5 wynika, że:

$$\frac{h}{s} = \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad h = s \cdot \sin \alpha$$

Po zastosowaniu powyższej zależności równanie wyrażające zasadę zachowania energii przyjmuje postać:

$$\frac{1}{2} v_0^2 = gs \cdot \sin \alpha$$

skąd

$$v_0 = \sqrt{2gs \cdot \sin \alpha}$$

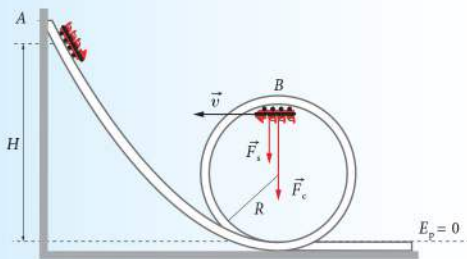
Po podstawieniu danych liczbowych i przyjęciu, że $g = 10\text{ m/s}^2$, otrzymujemy:

$$v_0 = 4\text{ m/s}$$

PRZYKŁAD 18.5**„Diabelska pętla”**

Wyprowadzimy wzór na minimalną wysokość H , którą musi mieć zjeżdżalnia dla wagoników w wesołym miasteczku (rys. 18.6), aby wagoniki¹⁸ wraz z pasażerami mijały bezpiecznie najwyższy punkt pętli o promieniu R . Opory ruchu pominiemy.

¹⁸ Rozmiary wagonika są pomijalnie małe w porównaniu z promieniem pętli i wysokością zjeżdżalni. Dla przejrzystości rysunku proporcje nie zostały uwzględnione.



Rys. 18.6

W najwyższym punkcie pętli wagonik ma (względem podłoża) energię potencjalną:

$$E_p = mg \cdot 2R$$

i energię kinetyczną:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Możemy skorzystać z zasady zachowania energii i napisać równanie:

$$\begin{aligned} E_{\text{mech A}} &= E_{\text{mech B}} \\ mgH &= 2mgR + \frac{mv^2}{2} \end{aligned} \quad (18.3)$$

Należy jeszcze obliczyć minimalną szybkość $v_{\min}$, którą musi mieć wagonik w najwyższym punkcie pętli, aby minąć bezpiecznie ten punkt. W tym punkcie na wagonik działają dwie siły: siła ciężkości $\vec{F}_g = m\vec{g}$ i siła sprężystości $\vec{F}_s$, której źródłem są szyny. Wypadkowa tych sił stanowi siłę dośrodkową potrzebną do utrzymania wagonika w ruchu po okręgu. Minimalna prędkość w najwyższym punkcie musi mieć taką wartość, aby siła dośrodkowa też była minimalna, tzn. równa tylko mg ($F_s = 0$), co oznacza, że wagonik i szyny stykają się, ale siła ich wzajemnego nacisku jest równa zero).

$$mg = \frac{mv_{\min}^2}{R} \quad (18.4)$$

skąd:

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} = \frac{mgR}{2} \quad (18.5)$$

Korzystamy ze wzorów (18.3) oraz (18.5) i obliczamy szukaną wysokość.

$$H = 2R + \frac{1}{2}R = \frac{5}{2}R$$

Minimalna wysokość, z której zjeżdża wagonik, musi wynosić $\frac{5}{2}R$.

Z równania (18.4) możemy wyprowadzić wzór na wartość minimalnej prędkości umożliwiającej bezpieczne minięcie najwyższego punktu pętli (czyli „utrzymanie się” w ruchu po okręgu).

$$v_{\min} = \sqrt{gR}$$

Przykładowo dla $R = 5 \text{ m}$: $H = 12,5 \text{ m}$ i $v_{\min} \approx 7,0 \text{ m/s}$.

**WIEDZIEĆ WIĘCEJ****Najwyższa i najszybsza kolejka górska w Europie**

Nazywa się Hyperion i znajduje się w Polsce, w ekstremalnej strefie rodzinnego parku rozrywki Energylandia w miejscowości Zator w pobliżu Krakowa.

Na trasie 1450 metrów wagoniki jadą z maksymalną szybkością 142 km/h i „spadają” przy tym z wysokości 80 metrów pod kątem 84°. Ekstremalną kolejką może podróżować łącznie 28 osób. Podczas jazdy pasażerowie mają okazję poczuć się jak astronauta – znaleźć się w stanie przeciążenia, niedociążenia i nieważkości.

Omówimy teraz przykłady, w których występuje tarcie kinetyczne, a więc siła tarcia wykonuje pracę. Ograniczymy się do przypadków, w których ciało przesuwa się po linii prostej. Praca siły tarcia (i innych oporów) jest zawsze ujemna, bo zwrot tej siły jest przeciwny do zwrotu prędkości ciała, a więc także do zwrotu przemieszczenia.

PRZYKŁAD 18.6**łyżwiarz**

Wyprowadzimy wzór na drogę, którą przebędzie łyżwiarz do chwili zatrzymania się, jeśli jego prędkość początkowa ma wartość v_0 , a współczynnik tarcia łyżew o lód jest równy f .

Układ ciał, który rozważamy, tworzą łyżwiarz i Ziemia.

Jeśli łyżwiarz porusza się po torze poziomym (równoległe do powierzchni Ziemi), nie zmienia się jego energia potencjalna: $\Delta E_p = 0$.

W tym przypadku:

$$\Delta E_k = W_{\text{wyp}}$$

Siłą wypadkową działającą na łyżwiarza i wykonującą pracę jest siła $\vec{T}$ tarcia kinetycznego, zwrócona przeciwnie do prędkości (a więc i do przemieszczenia).

Praca siły tarcia jest równa:

$$W_{\text{wyp}} = Ts \cos 180^\circ = mgs(-1)$$

czyli:

$$\Delta E_k = -mgs$$

Wobec tego:

$$E_{\text{kinetyczna w stanie końcowym}} - E_{\text{kinetyczna w stanie początkowym}} = -mgs$$

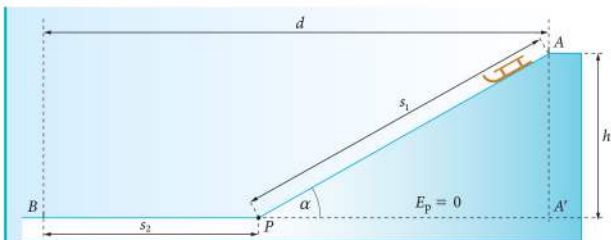
$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = -mgs$$

skąd:

$$s = \frac{v_0^2}{2gf}$$

PRZYKŁAD 18.7**Tarcie sanek o śnieg**

Obliczmy współczynnik tarcia sanek o śnieg. Sanki ześlizgujące się z góry o wysokości h zatrzymały się w odległości d , mierzonej od punktu A' będącego rzutem wierzchołka góry A na płaszczyznę poziomą (rys. 18.7). Założymy, że sanki mijają „płynnie” punkt P , nie tracąc energii.



Rys. 18.7

W punkcie A energia kinetyczna sanek jest równa zero, a ich energia potencjalna względem poziomej płaszczyzny, na której leżą punkty A' i B, wynosi $E_p = mgh$. W punkcie B sanki nie mają ani energii potencjalnej względem tej płaszczyzny, ani energii kinetycznej (bo się zatrzymały). Wobec tego całkowita energia mechaniczna jest równa zero. Siłą zewnętrzną, która wykonała pracę, jest siła tarcia; jej wartość na równi wyraża się wzorem $T_1 = mgf \cos \alpha$, a na poziomej powierzchni – wzorem $T_2 = mgf$. Wobec tego:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{mech}} &= W_z = T_1 s_1 \cos 180^\circ + T_2 s_2 \cos 180^\circ \\ 0 - mgh &= -mgf s_1 \cos \alpha - mgf s_2 \\ h &= fs_1 \cos \alpha + fs_2\end{aligned}$$

skąd:

$$f = \frac{h}{s_1 \cos \alpha + s_2}$$

Z rysunku wynika, że $d = s_2 + s_1 \cos \alpha$, więc:

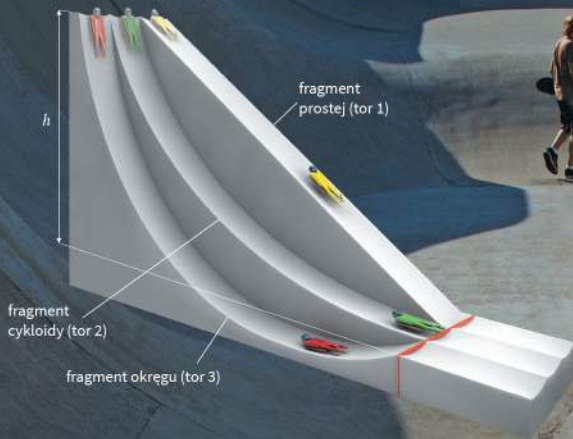
$$f = \frac{h}{d}$$

Układ ciał można rozszerzyć, włączając do niego (prócz poruszającego się ciała i Ziemi) także podłoże, po którym ciało się porusza. Wówczas siły tarcia kinetycznego będą stanowiły niezachowawcze siły wewnętrzne w układzie. Energia mechaniczna takiego układu maleje. Jeśli jednak cały układ izolujemy od otoczenia, to całkowita jego energia nie powinna się zmieniać. Gdzie zatem podziwia się stracona część energii mechanicznej? Wiesz z klasy ósmej, że podczas pokonywania tarcia wzrasta energia chaotycznego ruchu cząsteczek ciała, czyli jego energia wewnętrzna. Objawia się to wzrostem temperatury ciał, bo (jak wiadomo) temperatura ciała jest związana z ruchem chaotycznym jego cząsteczek (często mówimy: z ich ruchem termicznym). W omówionych przykładach wzrasta energia wewnętrzna zarówno poruszających się ciał, jak i podłoża.

Przyrost energii wewnętrznej układu zawsze jest równy pracy wykonanej przy pokonywaniu tarcia, czyli wartości bezwzględnej pracy wykonanej przez siłę tarcia. W układzie całkowicie izolowanym energetycznie od otoczenia suma zmian energii mechanicznej i wewnętrznej jest równa zero:

$$\Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{\text{wewn}} = 0$$

czyli całkowita energia (mechaniczna i wewnętrzna) zostaje zachowana.



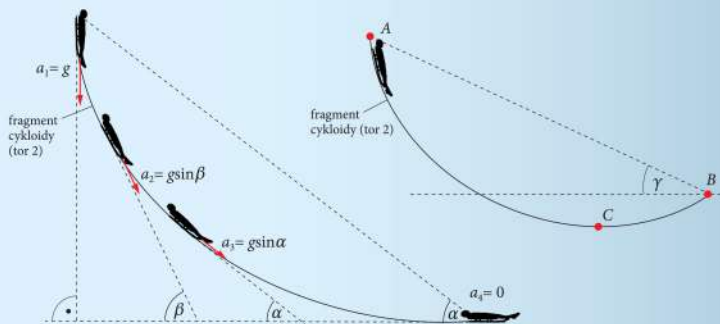
Rozważmy różne tory, po których z wysokości h ciała zsuwają się bez tarcia.

Z zasady zachowania energii wynika, że wszystkie ciała osiągną taką samą szybkość końcową $v = \sqrt{2gh}$ niezależnie od toru ruchu. Różne będą jednak czasy ruchu.

Ciało zsuwające się po torze prostoliniowym ma wprowadzić do przebycia najkrótszą drogę, ale porusza się ze stałym przyspieszeniem. Wzdłuż torów 2 i 3 ruch odbywa się szybciej niż po prostej ze względu na większe przyspieszenie początkowe ciała.

Przyspieszenie styczne do fragmentu cykloidy (tor 2) zmienia się od wartości początkowej g do zera. Ruch po tym torze trwa najkrócej.

Jeżeli część cykloidy łączącej punkty A i B znajdować się będzie poniżej poziomu końcowego B , to zgodnie z zasadą zachowania energii ciało będzie miało większą energię kinetyczną i szybkość w punkcie C toru niż w punkcie B . Wobec tego z punktu C do B ciało musi poruszać się ruchem opóźnionym. Mimo to cykloida nadal pozostaje torem, po którym ciało najszybciej dotrze z punktu A do B .



Brachistochrona

Tor, po którym ciało przemieszcza się pomiędzy dwoma punktami w najkrótszym czasie, nazywamy brachistochroną (od greckich słów: *brachistos* - najkrótszy oraz *chronos* - czas).

Dla ciał zsuwających się bez tarcia torem takim jest fragment cycloidy.

Gdy w ruchu ciała istotną rolę odgrywają siły oporu, brachistochrona będzie odbiegać kształtem od cycloidy.

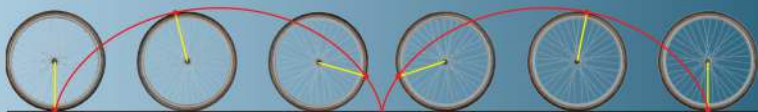
Ciała startujące równocześnie z różnych wysokości i zsuwające się po jednakowych torach o kształcie cycloidy równocześnie mijają linię mety.



Jak narysować cycloidę?

Cycloidę możemy zilustrować jako tor ruchu punktu położonego na kole toczącym się bez poślizgu.

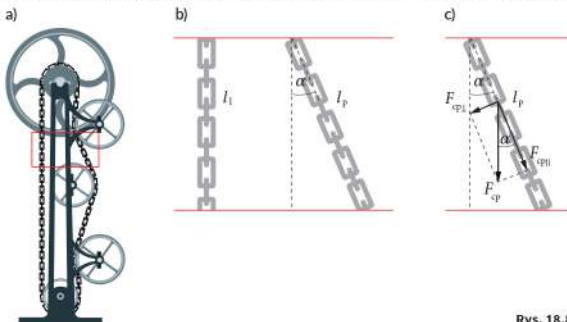
Cycloidą jest przekrój poprzeczny najszybszego toru skateboardowego lub snowboardowego, tzw. half-pipe'u. Rampa o profilu cycloidy oprócz tego, że jest najszybsza, nie ma fragmentu płaskiego, a jej szerokość jest π razy większa od wysokości.



WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Perpetuum mobile

Od wieków wynalazcy zastanawiali się, czy jest możliwe skonstruowanie perpetuum mobile, czyli samonapędzającego się mechanizmu, którego ruch trwałby wiecznie. Autorem takich projektów był między innymi Leonardo da Vinci. Z punktu widzenia fizyki wiemy, że całkowita energia w przyrodzie jest stała, nie powstaje ani nie znika, więc mechanizm, który sam stwarzałby energię powodującą jego ruch, łamałby zasadę zachowania energii.



Rys. 18.8

Rozważmy projekt perpetuum mobile przedstawiający łańcuch rozwieszony na układzie bloczków (rys. 18.8a). Części łańcucha znajdujące się po lewej i po prawej stronie mają różne długości i różne masy, więc działają na nie siły ciężkości o różnych wartościach. „Nadwyżka ciężaru” łańcucha z prawej strony miałaby stanowić siłę wypadkową potrzebną do napędzania układu. Dlaczego takie urządzenie nie działa?

Mamy dwie części łańcucha: po prawej i po lewej stronie (rys. 18.8b).

Pomiędzy długościami rozważanych części możemy zapisać związek:

$$\cos \alpha = \frac{l_l}{l_p} \Rightarrow l_p = \frac{l_l}{\cos \alpha}$$

Masa jednorodnego łańcucha jest wprost proporcjonalna do jego długości: $m \sim l$, więc $m_p = \frac{m_l}{\cos \alpha}$ i wartość siły ciężkości działającej na prawą część łańcucha $F_{cp} = \frac{F_{cl}}{\cos \alpha}$. Obliczmy teraz składową tej siły równoległą do łańcucha, odpowiedzialną za jego ruch (rys. 18.8c).

Z rysunku wynika, że:

$$\cos \alpha = \frac{F_{cp||}}{F_{cp}} \Rightarrow F_{cp||} = F_{cp} \cos \alpha$$

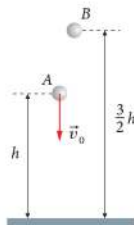
Po podstawieniu obliczonej wcześniej wartości siły ciężkości działającej na prawą część łańcucha otrzymujemy:

$$F_{cp||} = \frac{F_{cl}}{\cos \alpha} \cos \alpha = F_{cl}$$

Równoległa do łańcucha składowa siły ciężkości działającej na prawą jego część jest równa sile ciężkości działającej na jego lewą część. Siły te równoważą się i na łańcuch nie działa wypadkowa siła, która mogłaby nadać mu przyspieszenie.

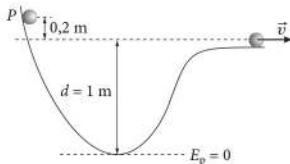
ZADANIA

1. Oblicz drogę przebytą przez łyżwiarza, który wjechał z prędkością o wartości $v_0 = 10 \text{ m/s}$ na oblodzoną górkę i zatrzymał się na wysokości $h = 4 \text{ m}$ (mierzonej od podnóża góry). Współczynnik tarcia łyżew o lód $f = 0,1$. Przyjmij, że $g = 10 \text{ m/s}^2$.
2. Piłkę rzucono na podłogę z wysokości h (rys. 18.9). Wyprowadź wzór na wartość prędkości, którą nadano piłce, jeśli po odbiciu od podłogi podskoczyła na wysokość $1,5h$. Pomiń opory ruchu, a uderzenie o podłogę potraktuj jako doskonale sprężyste (tzn. załóż, że piłka nie straciła energii w tym zderzeniu).



Rys. 18.9

3. Skorzystaj z zasady zachowania energii oraz z teorii rzutu ukośnego i wyprowadź wzór na maksymalną wysokość ciała wyrzuconego z prędkością początkową $\vec{v}_0$ pod kątem α do poziomu. Pomiń opór powietrza.
4. Mała kulka zsuwa się bez tarcia z punktu P ($v_0 = 0$) po torze krzywoliniowym w płaszczyźnie pionowej (rys. 18.10). Przyjmij, że poziom, na którym energia potencjalna wynosi zero, przechodzi przez najniższy punkt toru. Oblicz szybkość kulki na poziomym odcinku toru. Czy szybkość ta zależy od d ? Uzasadnij odpowiedź.



Rys. 18.10

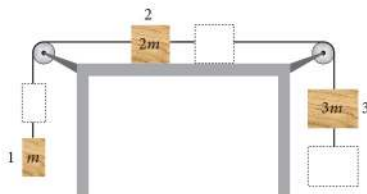
5. W przykładzie 14.4 ustaliliśmy, że kawałek lodu oderwie się w pewnym punkcie od kulistej powierzchni igloo, bo wartość siły wzajemnego nacisku stanie się równa zero.
 - a) Przerysuj do zeszytu rysunek 14.7, a następnie, analizując siły działające na kawałek lodu, wyprowadź wzór na szybkość, którą osiągnie kawałek lodu w chwili odrywania się od powierzchni igloo.
 - b) Wykaż, że wysokość, na której kawałek lodu oderwie się od powierzchni igloo, wyraża się wzorem:

$$h = \frac{2}{3} \cdot r$$

gdzie r jest promieniem igloo.

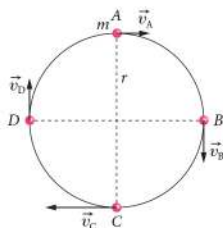
Powołaj się na odpowiednie zależności lub prawa fizyczne, niezbędne do wyprowadzenia tego wzoru.

6. Energia potencjalna klocka 3 (rys. 18.11) zmalała w pewnym czasie o 2,7 J. Oblicz:
- przyrost energii potencjalnej klocka 1,
 - przyrost energii kinetycznej każdego z klocków,
 - zmianę całkowitej energii każdego z klocków w tym czasie.
- Przedstaw rozumowanie prowadzące do rozwiązania zadania. Pomiń opory.



Rys. 18.11

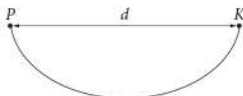
7. Koralik o masie m , przywiązany do końca nitki, wiruje po okręgu o promieniu r w płaszczyźnie pionowej (rys. 18.12). W punkcie A koralik ma minimalną szybkość konieczną do utrzymania się na okręgu.



Rys. 18.12

Wyprowadź i zapisz wzory pozwalające wyznaczyć odpowiednio:

- szybkości koralika w punktach A, B, C i D tylko za pomocą promienia okręgu r i przyspieszenia ziemskiego g ;
 - wartości sił sprężystości nitki w punktach A, B, C i D tylko za pomocą ciężaru koralika $m \cdot g$.
8. Dwa punkty: P i K (rys. 18.13) leżące na tym samym poziomie są oddalone od siebie o $d = 12,56$ m. Punkty te połączono cykloidą (patrz infografika s. 181), po której puszczone swobodnie ciało porusza się bez tarcia. Oblicz maksymalną energię kinetyczną, jaką podczas tego ruchu osiągnie ciało o masie $m = 0,2$ kg.



Rys. 18.13

19. Zderzenia ciał

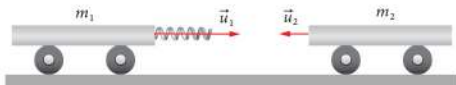
Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- stosować zasady zachowania pędu i energii mechanicznej do opisu zderzeń doskonale sprężystych,
- stosować zasadę zachowania pędu do opisu zderzeń niesprężystych,
- doświadczalnie badać zderzenia sprężyste i niesprężyste.

→ **Przypomnij sobie** zasady zachowania pędu i energii mechanicznej układu ciał.

Zderzenia doskonale sprężyste

Rysunek 19.1 przedstawia dwa wózki zbliżające się do siebie po gładkiej powierzchni, przy czym do jednego z nich jest przyczepiona sprężyna.

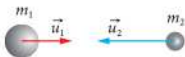


Rys. 19.1 Wózki zderzają się doskonale sprężysto

Podczas zderzenia wózków sprężyna zostaje ściśnięta i część ich energii kinetycznej zostaje zamieniona w energię potencjalną sprężystości. Natychmiast jednak sprężyna rozpręża się z powrotem, wózki oddalają się od siebie, a energia potencjalna sprężystości znów zamienia się **w całości** w energię kinetyczną wózków.

Przedstawiony wyżej **model** zderzenia ciał to **zderzenie doskonale sprężyste**. Zderzenia szklanych lub stalowych kul, a także wykonanych z kości słoniowej kul bilardowych możemy uważać za zderzenia doskonale sprężyste. Podczas zderzenia kule odkształcają się (patrz rys. 19.2) i tracą część energii kinetycznej; ta część zostaje na krótki czas zderzenia zamieniona na energię „chwilowego” odkształcenia sprężystego (rys. 19.2b).

a) przed zderzeniem



b) podczas zderzenia



c) po zderzeniu



Rys. 19.2 Zderzenie doskonale sprężyste kul

Jest to odkształcenie nietrwałe i po zderzeniu znika (rys. 19.2c), a energia z nim związana z powrotem przekształca się w energię kinetyczną układu kul (na rysunku przedstawiono przypadek, w którym całkowity pęd układu zderzających się kul jest równy zeru).

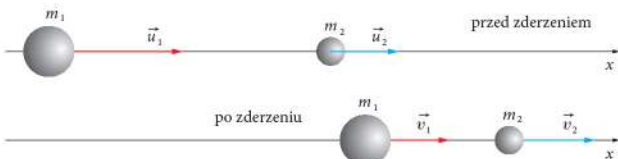
W takich zderzeniach są zachowane pęd i energia kinetyczna układu.

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

Jako m_1 i m_2 oznaczono masy zderzających się ciał, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ to prędkości ciał przed zderzeniem, a $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ – prędkości ciał po zderzeniu.

Rozważmy modelowy przypadek zderzenia kul o masach m_1 i m_2 oraz prędkościach $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$, poruszających się w tę samą stronę (rys. 19.3).



Rys. 19.3 ilustracja do wyprowadzenia wzoru

Dodatkowo założymy, że kule poruszają się wzdłuż prostej, na której leżą ich środki. Takie zderzenie nazywamy **centralnym** i kule po zderzeniu będą się toczyć po tej samej prostej.

W przypadku przedstawionym na rysunku 19.3 współrzędne wektorów są równe ich wartościom. Współrzędne prędkości kul po zderzeniu obliczymy dzięki rozwiązaniu układu równań:

$$\begin{aligned} 1. \quad m_1 u_1 + m_2 u_2 &= m_1 v_1 + m_2 v_2 && \text{(zasada zachowania pędu)} \\ 2. \quad \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} && \text{(zasada zachowania energii mechanicznej)} \\ m_1(u_1 - v_1) &= m_2(v_2 - u_2) && (19.1) \\ m_1(u_1^2 - v_1^2) &= m_2(v_2^2 - u_2^2) \end{aligned}$$

$$m_1(u_1 + v_1)(u_1 - v_1) = m_2(v_2 + u_2)(v_2 - u_2) \quad (19.2)$$

Równanie (19.2) dzielimy stronami przez równanie (19.1), przy założeniu, że $v_1 \neq u_1$ i $v_2 \neq u_2$, co jest oczywiste, bo szybkości nie uległyby zmianie tylko wtedy, gdyby nie było zderzenia. Otrzymujemy:

$$u_1 + v_1 = v_2 + u_2$$

$$v_2 = u_1 - u_2 + v_1$$

$$m_1 u_1 - m_1 v_1 = m_2(u_1 - 2u_2) + m_2 v_1$$

$$v_1 = \frac{m_1 u_1 - m_2 u_1 + 2m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \quad (19.3)$$

$$v_2 = u_1 - u_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 \quad (19.4)$$

Zastosujmy wyprowadzone wzory ogólne dla przypadku, gdy $m_1 = m_2 = m$. Wówczas:

$$v_1 = \frac{2m}{2m} u_2 \quad \text{czyli} \quad v_1 = u_2$$

$$v_2 = \frac{2m}{2m} u_1 \quad \text{czyli} \quad v_2 = u_1$$

Doszliśmy do wniosku, że kule o jednakowych masach podczas centralnego zderzenia sprężystego „wymieniają się” prędkościami (i pędami). W najprostszym przypadku, gdy tocząca się kula zderza się ze spoczywającą kulą, zatrzymuje się, a cały pęd przekazuje tej, która poprzednio spoczywała.

Bardzo interesujące jest centralne zderzenie ciał istotnie różniących się masą, poruszających się z prędkościami o przeciwnych zwrotach.

Jeśli $m_1 \gg m_2$, to możemy przyjąć, że $\frac{m_2}{m_1} \approx 0$.

Wówczas po uwzględnieniu we wzorach (19.3) i (19.4) faktu, że współrzędna prędkości $\vec{u}_1$ jest dodatnia, a prędkości $\vec{u}_2$ jest ujemna, oraz po podzieleniu licznika i mianownika każdego z ułamków w tych wzorach przez m_1 otrzymujemy:

$$v_1 = \frac{\frac{m_1}{m_1} - \frac{m_2}{m_1}}{\frac{m_1}{m_1} + \frac{m_2}{m_1}} u_1 - \frac{2 \frac{m_2}{m_1}}{\frac{m_1}{m_1} + \frac{m_2}{m_1}} u_2 \approx u_1$$

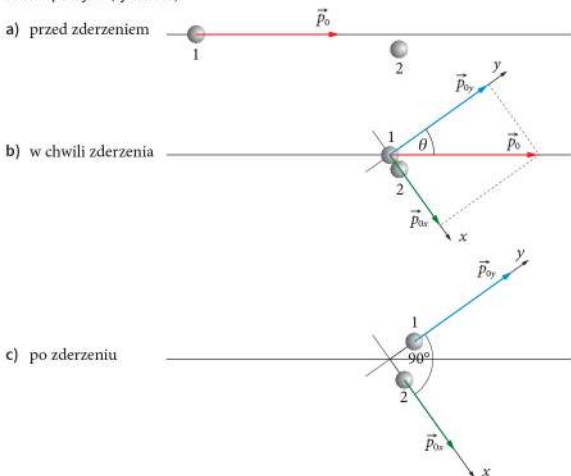
$$v_2 = \frac{2 \frac{m_1}{m_1}}{\frac{m_1}{m_1} + \frac{m_2}{m_1}} u_1 - \frac{\frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1}{m_1}}{\frac{m_1}{m_1} + \frac{m_2}{m_1}} u_2 \approx 2u_1 + u_2$$

Wobec tego np. w wyniku idealnie sprężystego, centralnego zderzenia samochodu o masie 1000 kg jadącego z szybkością 20 m/s i sprężystej piłeczki o masie 0,2 kg lecącej z szybkością 5 m/s w jego stronę szybkość samochodu prawie się nie zmieni (sprawdź, czy zmaleje mniej więcej o 0,01 m/s), a szybkość piłeczki wzrośnie ok. 9 razy.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Niecentralne zderzenie kul bilardowych

Rozważmy teraz przykład doskonale sprężystego zderzenia niecentralnego (skośnego) dwóch kul; jest to takie zderzenie, w którym prędkość przynajmniej jednej kuli nie leży na prostej przechodzącej przez ich środki. Załóżmy, że kule bilardowe mają jednakowe masy m i jedna z nich spoczywa (rys. 19.4a).



Rys. 19.4

Obieramy układ współrzędnych tak, aby oś x przechodziła przez środki kul w chwili zderzenia, a oś y była prostopadła do osi x (rys. 19.4b). Rozkładamy pęd początkowy $\vec{p}_0$ kuli 1 na dwie składowe wzdłuż tych osi ($\vec{p}_{0x}$ i $\vec{p}_{0y}$). Podczas zderzenia kule oddziałują wzajemnie siłami nacisku skierowanymi prostopadle do stycznej do ich powierzchni w punkcie zetknięcia, czyli wzdłuż osi x . Taka siła działająca na kulę 1 nie może zmienić składowej jej pędu $\vec{p}_{0y}$. Natomiast składowa $\vec{p}_{0x}$ kuli 1 jest w całości przekazywana kuli 2 (zderzenie centralne z kulą spoczywającą o takiej samej masie). Wobec tego po odbiciu pęd kuli 1 jest zwrócony wzdłuż osi y i wynosi $\vec{p}_1 = \vec{p}_{0y}$, a pęd kuli 2 jest równy $\vec{p}_2 = \vec{p}_{0x}$. Kule te rozbiegają się pod kątem 90° (rys. 19.4c). Wartości pędów kul po zderzeniu wynoszą:

$$p_1 = p_0 \cos \theta \quad p_2 = p_0 \sin \theta$$

gdzie θ jest kątem odchylenia pędu poruszającej się kuli od kierunku jej pędu początkowego. W tym rozumowaniu założyliśmy, że kule są idealnie gładkie, tzn. nie działają na siebie wzajemnie siłami tarcia, które spowodowałyby także ich obrót.

Zderzenia doskonale niesprężyste

Przeciwnieństwem zderzeń doskonale sprężystych są **zderzenia doskonale niesprężyste**, w których zderzające się ciała „sklejają się”, a ich ruch po zderzeniu traktujemy jako ruch jednego ciała. Jeśli sprężynę na rysunku 19.1 zastąpimy warstwą kleju lub plasteliny, wózki po zderzeniu będą poruszać się razem. Zasada zachowania pędu w takim zderzeniu ma postać:

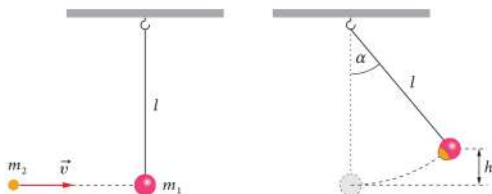
$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}$$

a energia kinetyczna nie jest zachowana, bo jej część zostaje zużyta na trwałe odkształcenie ciał i zmienia się w energię wewnętrzną.

Zasada zachowania pędu jest spełniona zarówno w zderzeniach sprężystych, jak i niesprężystych, bo w obu tych rodzajach zderzeń występują tylko siły wewnętrzne w układzie zderzających się ciał.

ZADANIA

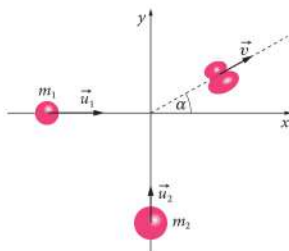
- Wyraż odpowiednimi wzorami współrzędne prędkości kul po zderzeniu doskonale sprężystym w następujących przypadkach:
 - $u_1 > 0, u_2 = 0, m_2 \rightarrow \infty$ (zderzenie z nieruchomą ścianą, prędkość prostopadła do ściany);
 - $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2, m_1 = m_2$ (zderzenie kul o jednakowych masach poruszających się na przeciw siebie z tymi samymi szybkościami).
- Kula poruszająca się z szybkością u zderza się centralnie i doskonale sprężysto z nieruchomą kulką o masie 2 razy większej. Wyprowadź wzory na współrzędne prędkości kul po zderzeniu. Powołaj się na odpowiednie prawa fizyczne niezbędne do wyprowadzenia tych wzorów.
- Na nici o długości $l = 1$ m zawieszono kulkę z plasteliny o masie $m_1 = 0,05$ kg. Z tą kulką zderza się niesprężysto druga plastelinowa kulka, o masie $m_2 = 0,01$ kg, poruszająca się z szybkością $v = 3$ m/s, jak pokazano na rysunku 19.5.



Rys. 19.5

- Ustal, w którym zjawisku spełniona jest zasada zachowania energii mechanicznej.
- Skorzystaj z zasad zachowania pędu i energii i oblicz kąt, o który odchyliła się nić po sklejeniu się kulek.
- Oblicz stratę energii mechanicznej w tym zjawisku.

4. Na torze powietrznym zderzają się dwa wózki. Wózek o masie m , poruszający się z prędkością o wartości $0,90 \text{ m/s}$, uderza w spoczywający wózek o masie $2m$ i uzyskuje po zderzeniu prędkość o wartości $0,20 \text{ m/s}$ i o zwrocie przeciwnym do zwrotu swojej prędkości początkowej. Ustal i zapisz, czy zderzenie było doskonale sprężyste. Powołaj się na odpowiednie prawa lub zależności fizyczne i wykonaj niezbędne obliczenia, uzasadniające twoje stwierdzenie.
5. Kula o masie $m_1 = 0,20 \text{ kg}$, poruszająca się wzdłuż osi x z prędkością o wartości $u_1 = 0,60 \text{ m/s}$, zderza się doskonale niesprężysto z kulą o masie $m_2 = 0,30 \text{ kg}$, poruszającą się wzdłuż osi y z prędkością o wartości $u_2 = 0,40 \text{ m/s}$, tak jak na rysunku 19.6. Zderzenie następuje w początku układu współrzędnych.



Rys. 19.6

- a) Wyprowadź wzory na:
- prędkość $\vec{v}$ połączonych kul po zderzeniu;
 - szybkość v kul po zderzeniu;
 - tangens kąta α , który prędkość $\vec{v}$ tworzy z osią x ;
 - ubytek energii kinetycznej układu.
- b) Podstaw wartości liczbowe do wyprowadzonych wzorów i oblicz v , $\tan \alpha$ oraz $|\Delta E_k|$.
- c)* Napisz równanie prostej, po której porusza się środek masy układu kul zarówno przed zderzeniem, jak i po zderzeniu.



20. Sprawność urządzeń mechanicznych

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- powstają straty energii w działających urządzeniach mechanicznych,
- definiuje się sprawność urządzenia,
- obliczyć sprawność, na przykładzie równi pochytej,
- obliczyć sprawność układu.

→ **Przypomnij sobie** zjawiska, w których następuje strata energii mechanicznej.

W różnych urządzeniach mechanicznych zachodzą przemiany energii z jednej postaci w inną. Z zasady zachowania energii wynika, że podczas takich przemian nigdy nie można uzyskać energii większej od włożonej. Żadna maszyna nie może wykonać pracy większej od energii, którą pobiera. W idealnym przypadku zakładamy, że doprowadzona energia jest równa pracy wykonanej przez dane urządzenie; jest tak tylko wówczas, gdy podczas przemian energii nie zachodzą w nim żadne straty.

Równia pochyła

Równia pochyła (podobnie jak dźwignia, o której będzie mowa w podręczniku do klasy drugiej) należy do tzw. **maszyn prostych**; służą one do ułatwiania pracy.

PRZYKŁAD 20.1

Równia pochyła jako maszyna prosta

Zamiast podnosić pionowo ciało o masie m na wysokość h , co wiązałoby się z wykonaniem pracy $W_1 = mgh$, przesuwamy je po powierzchni nachylonej pod kątem $\alpha < 90^\circ$ (równia pochyła). Wówczas – jak wiadomo – równoważymy siłę wypadkową ciężaru i siły sprężystości.

Ta wypadkowa ma wartość $mg \sin \alpha < mg$, ale ciało przebywa dłuższą drogę: $s = \frac{h}{\sin \alpha}$.

Wykonana wtedy praca wynosi $W_2 = mg \sin \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = mgh$, czyli jest równa pracy, którą wykonalibyśmy podczas podnoszenia ciała bez użycia równi. Równia pochyła ułatwia nam tę pracę, bo wykonujemy ją, działając siłą o mniejszej wartości.

Należy jednak pamiętać, że tak byłoby tylko w przypadku równi o idealnie gładkiej powierzchni. W rzeczywistości zawsze występuje tarcie. Dodatkowa praca, którą musimy wtedy wykonać, to praca związana z pokonywaniem siły tarcia. Ta praca stanowi stratę energii mechanicznej.

$$W_{\text{str}} = F_T \cdot s$$

gdzie F_T jest wartością siły równoważącej siłę tarcia.

$$W_{\text{str}} = fmg \cos \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{fmg h}{\tan \alpha}$$

Ostatni wzór pokazuje, że ta strata jest tym większa, im większy jest współczynnik tarcia i im mniejszy jest kąt α .

Każde urządzenie przetwarzające energię lub wykonujące pracę można scharakteryzować przez podanie informacji, na ile skutecznie wykorzystuje ono dostarczoną energię do wykonania pracy użytecznej. Wielkość fizyczna zawierająca taką informację nosi nazwę **sprawności**.

Sprawnością maszyny nazywamy stosunek uzyskanej energii lub wykonanej przez maszynę pracy użytecznej do energii pobranej z zewnątrz. Praca użyteczna to praca, do której wykonania przeznaczone jest dane urządzenie.

$$\eta = \frac{E_{\text{uzysk}}}{E_{\text{pobr}}} \Rightarrow \eta = \frac{W_{\text{użyty}}}{E_{\text{pobr}}}$$

Wskutek strat zawsze $\eta < 1$; wielkość tę zwykle wyrażamy w procentach.

Przyczyny strat energii mogą być różne; zależą one od budowy i zasady działania urządzenia. Jednym z istotnych zadań techniki jest zmniejszenie tych strat.

PRZYKŁAD 20.2

Wzór na sprawność równi pochyłej

Wyprowadzimy wzór na sprawność równi pochyłej (jako maszyny prostej), nachylonej do poziomu pod kątem α , jeśli współczynnik tarcia kinetycznego ciała o powierzchnię równi wynosi f .

Dostarczona (pobrana) energia jest równa pracy potrzebnej na wyniesienie ciała o masie m na wysokość h wzdłuż równi. W przypadku ruchu jednostajnego (energia kinetyczna ciała nie ulega zmianie) równoważymy wtedy sumę sił zsuwającej i tarcia. Praca wykonana przez siłę równoważącą (o wartości $mg \sin \alpha + fmg \cos \alpha$) to złożona energia.

$$E_{\text{pobr}} = (mg \sin \alpha + fmg \cos \alpha) \frac{h}{\sin \alpha} = mgh \cdot \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Energia uzyskana:

$$E_{\text{uzysk}} = mgh$$

Sprawność równi:

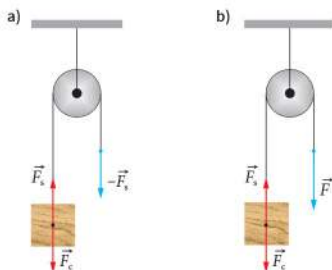
$$\eta = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + f \cos \alpha} \quad \text{lub} \quad \eta = \frac{1}{1 + \frac{f}{\tan \alpha}}$$

Wnioski wynikające z wyprowadzonego wzoru są zgodne z wnioskami, które sformułowaliśmy w przykładzie 20.1. Warto zaznaczyć, że sprawność nie zależy ani od masy podnoszonego ciała, ani od wysokości h .

Sprawdź, czy taki sam wzór na sprawność równi otrzymasz, gdy skorzystasz z poprzednio wyprowadzonego wyrażenia na stratę energii na równi.

Blok nieruchomy

Jednym z urządzeń mechanicznych (zaliczamy także do maszyn prostych) jest znany ci już z wielu zadań tzw. blok nieruchomy. Jest to krążek osadzony na nieruchomej osi i mający na obwodzie rowek, przez który jest przerzucona lina. Blok ułatwia pracę w tym sensie, że pozwala podnieść ciało w górę przez ściąganie liny w dół.



Rys. 20.1 Obracanie krążka wymaga wykonania pracy

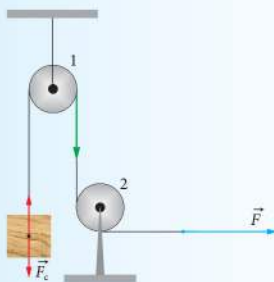
Jeśli pominiemy masę krążka i wszystkie opory (głównie tarcie w łożysku), to praca wykonana przy podnoszeniu ciała na wysokość h (ruchem jednostajnym) jest równa pracy wykonanej przez siłę ciągnącą linę w dół (rys. 20.1a). Jednak w rzeczywistości zawsze występuje tarcie, a na obracanie się krążka potrzebna jest pewna energia, więc włożona praca jest większa od osiągniętego przyrostu energii potencjalnej mgh ; linę musimy ciągnąć siłą o wartości F większej od F_c (rys. 20.1b). Wynika z tego, że sprawność urządzenia $\eta < 1$.

Często mamy do czynienia z układem składającym się z kilku elementów, z których każdy ma określoną sprawność. Wówczas pojawia się konieczność obliczenia sprawności η_u całego układu.

PRZYKŁAD 20.3

Sprawność układu dwóch bloków

Obliczmy sprawność układu dwóch bloków: 1 i 2 (rys. 20.2), jeśli ich sprawności są równe odpowiednio η_1 i η_2 – mogą one być różne lub jednakowe, np. $\eta_1 = \eta_2 = 0,8$.



Rys. 20.2

Sprawność układu η_u to iloraz przyrostu energii potencjalnej mgh podnoszonego ciała i dostarczonej energii, czyli pracy wykonanej przez siłę $\vec{F}$. Oznaczamy tę pracę symbolem $W_{\vec{F}}$.

$$\eta_u = \frac{mgh}{W_{\vec{F}}}$$

$$\eta_1 = \frac{mgh}{W} \quad \eta_2 = \frac{W}{W_{\vec{F}}}$$

gdzie W jest pracą wykonaną przez siłę napinającą środkową część liny podczas jej przesuwania w dół. Po obliczeniu iloczynu $\eta_1 \cdot \eta_2$ stwierdzamy, że jest on równy sprawności układu:

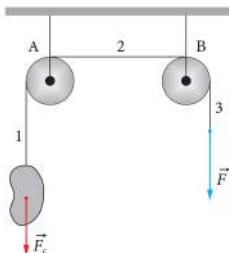
$$\eta_u = \eta_1 \cdot \eta_2$$

Tak jest zawsze w przypadku urządzenia złożonego z poszczególnych elementów.

Sprawność układu krążków dla przyjętych danych liczbowych jest równa 64 %.

ZADANIA

1. W celu podniesienia ze stałą prędkością ciała o masie 20 kg (zawieszonego na nierozciągliwej linie o pomijalnie małej masie) zastosowano układ bloków nieruchomych A i B przedstawiony na rysunku 20.3.



Rys. 20.3

Na skutek tarcia w łożyskach bloków odcinek 2 liny jest napięty siłą o wartości 218 N, a koniec odcinka 3 liny ciągniemy siłą o wartości 244 N. Oblicz sprawność każdego bloku i sprawność całego układu.

2. Ciało wciągamy ruchem jednostajnym na pewną wysokość po równi pochyłej. Współczynnik tarcia kinetycznego ciała o powierzchnię równi wynosi 0,2.
 - a) Oblicz sprawność równi dla kątów nachylenia: 5° , 10° , 20° , 30° , ..., 80° (patrz przykład 20.2).
 - b) Wyniki obliczeń przedstaw w tabeli i sporządź wykres zależności $\eta_r(\alpha)$.
 - c) Na podstawie wykresu zapisz odpowiedni wniosek.

PRACA I MOCDefinicja iloczynu skalarnego dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Z DEFINICJI WYNIKA, ŻE ILOCZYN SKALARNY:



Iloczyn skalarny wektora przez ten sam wektor (kwadrat wektora)
jest równy kwadratowi wartości tego wektora

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = a^2$$

Definicja pracy wykonanej przez siłę $\vec{F}$

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\Delta \vec{r}| \cdot \cos \angle(\vec{F}, \Delta \vec{r})$$

Ta definicja jest słuszna wtedy, gdy

wykonująca pracę siła $\vec{F}$
jest stała i tworzy stały kąt
z wektorem przemieszczenia $\Delta \vec{r}$, a torem
ruchu jest odcinek prostej.

Iloczyn $|\vec{F}| \cdot \cos \angle(\vec{F}, \Delta \vec{r})$ jest wartością
równoległą do przemieszczenia składowej
siły $\vec{F}$ z odpowiednim znakiem
(„+”, gdy siła tworzy z wektorem przemieszczenia
kąt ostry, albo „-”, gdy siła tworzy
z wektorem przemieszczenia kąt rozwarty).

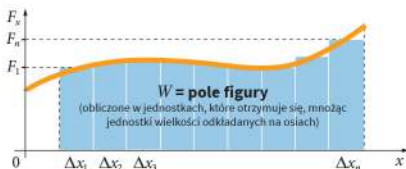
Jednostka pracyJednostką pracy w SI jest **dżul (J)**:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

W celu obliczenia pracy, gdy siła $\vec{F}$ na całej drodze tworzy z wektorem przemieszczenia kąt 0° , ale jej wartość się zmienia, to drogę **dzielimy na tak małe odcinki** Δx , aby siłę na tych odcinkach można było uważać za stałą, obliczamy prace wykonane na tych odcinkach i je sumujemy:

$$W = F_1 \cdot \Delta x_1 + F_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + F_n \cdot \Delta x_n$$

Obrazem graficznym pracy jest **pole figury zawartej między wykresem funkcji $F_x(x)$ a osią x** .



Definicja mocy

Mocą P urządzenia wykonującego pracę jest iloraz pracy W i czasu t , w którym ta praca została wykonana:

$$P = \frac{W}{t}$$

Jednostka mocy

Jednostką mocy w SI jest **wat (W)**:

$$1 \text{ W} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ s}} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$$

Ze wzoru $P = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{sr}$ możemy obliczyć moc średnią. Gdy odstęp czasu Δt dąży do zera, to prędkość średnia zbliża się do prędkości chwilowej $\vec{v}$. Moc chwilową możemy wyrazić wzorem $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Obrazem graficznym pracy jest **pole figury zawartej między wykresem funkcji $P(t)$ a osią czasu**.



RODZAJE ENERGII MECHANICZNEJ

Mówimy, że układ ma energię mechaniczną, jeśli może wykonać pracę.

Układ zyskuje energię na skutek wykonania nad nim pracy.

Zmiana energii potencjalnej ciężkości i energii potencjalnej sprężystości układu ciał zawsze wiąże się ze zmianą wzajemnych położenia ciał tworzących układ.

Zmiana energii kinetycznej wiąże się ze zmianą wartości prędkości ciał układu.

Zmiana energii mechanicznej układu, w którym między ciałami działają tylko siły zachowawcze, jest równa pracy siły zewnętrznej $\vec{F}_z$ wykonanej nad układem.

$$\Delta E_{\text{mech}} = W_{\text{zewn}}$$

Zmiana energii potencjalnej układu ciał

jest równa pracy siły zewnętrznej równoważącej w każdym punkcie toru siłę wzajemnego oddziaływania ciał (siłę wewnętrzną) lub pracy siły wewnętrznej ze znakiem minus.

$$\Delta E_p = W_{\text{zewn}, r}$$

lub

$$\Delta E_p = -W_{\text{wewn}}$$

Stan układu ciał określają położenia i prędkości wszystkich ciał układu. Jeśli zmieniła się energia mechaniczna układu, to musiał się zmienić jego stan, natomiast zmiana stanu układu niekoniecznie musi oznaczać zmiany jego całkowitej energii mechanicznej.

Zmiana energii kinetycznej ciała w ruchu postępowym

jest równa pracy siły wypadkowej (sumy sił: wewnętrznej i zewnętrznej) działającej na to ciało.

$$\Delta E_k = W_{\text{wyp}}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

(gdy $v = 0$, ciało nie ma energii kinetycznej)

Aby obliczyć energię potencjalną E_p układu, przyjmujemy umownie, w jakim stanie jego energię potencjalną uznajemy za zerową.

Energia kinetyczna układu ciał

jest sumą energii kinetycznych wszystkich ciał tego układu.

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII MECHANICZNEJ

Zmiana całkowitej energii mechanicznej układu

jest równa sumie zmian jego energii kinetycznej i potencjalnej.

$$\Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_k + \Delta E_p$$

$$E_{\text{mech}} = E_k + E_p$$

Całkowita energia mechaniczna układu ciał (oddziałujących ze sobą siłami zachowawczymi) jest stała, gdy siły zewnętrzne nie wykonują nad tym układem pracy.

Ponieważ

$\Delta E_{\text{mech}} = W_{\text{zewn}}$
mogą wystąpić
trzy przypadki:

1.

$W_{\text{zewn}} = 0 \Rightarrow E_{\text{mech}} = \text{const}$
zasada zachowania energii mechanicznej

2.

$W_{\text{zewn}} < 0 \Rightarrow \Delta E_{\text{mech}} < 0$
czyli energia mechaniczna układu maleje

3.

$W_{\text{zewn}} > 0 \Rightarrow \Delta E_{\text{mech}} > 0$
czyli energia mechaniczna układu rośnie



UWAGA: Niewykonywanie pracy przez siłę zewnętrzną (warunek stałości energii mechanicznej) nie musi oznaczać, że siła zewnętrzna nie działa; siła ta może działać i nie wykonywać pracy. Oczywiście dzieje się tak wtedy, gdy siła zewnętrzna jest prostopadła do przemieszczenia.

Przykłady zjawisk, w których zachowana jest całkowita energia mechaniczna układu.

Spadanie
ciała w próżni

Rzut poziomy
(gdy pomijamy
opór
powietrza)

Rzut ukośny
(gdy pomijamy
opór powietrza)

Ruch ciała
po równi
pochyłej bez
uwzględnienia
tarcia

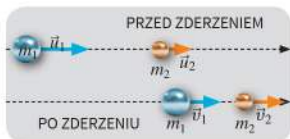
Ruch wahadła
(gdy pomijamy
wszystkie
opory)

ZDERZENIA CIAŁ

Zderzenia doskonale sprężyste kul to takie **zderzenia, podczas których nie następuje ich trwałe odkształcenie**. W takich zderzeniach zachowane są pęd i energia kinetyczna układu.

ZDERZENIA SPRĘŻYSTE CENTRALNE

Kule poruszają się wzdłuż prostej, na której leżą ich środki.



Zastosowanie zasad zachowania pędu i energii kinetycznej do przedstawionego układu ciał pozwala wyprowadzić wzory na współrzędne prędkości końcowych:

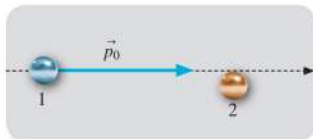
$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2$$

Z tych wzorów wynika, że gdy kula zderza się centralnie z kulą spoczywającą o takiej samej masie, to przekazuje jej cały swój pęd, czyli sama się zatrzymuje.

ZDERZENIA SPRĘŻYSTE NIECENTRALNE (SKOŚNE)

Przynajmniej jedna kula nie porusza się wzdłuż prostej przechodzącej przez środki kul.



Dzięki zastosowaniu zasady zachowania pędu można wykazać, że gdy kule mają jednakowe masy i jedna z nich spoczywa, to po zderzeniu rozbiegają się z prędkościami, które tworzą ze sobą kąt 90° .

Zasada zachowania pędu ma zastosowanie zarówno w zderzeniach sprężystych, jak i niesprężystych.

W obu rodzajach zderzeń występują tylko siły wewnętrzne w układzie zderzających się ciał.

SPRAWNOŚĆ URZĄDZEŃ MECHANICZNYCH

Sprawnością η urządzenia mechanicznego

nazywamy stosunek uzyskanej energii lub wykonanej przez urządzenie pracy do energii pobranej z zewnątrz.

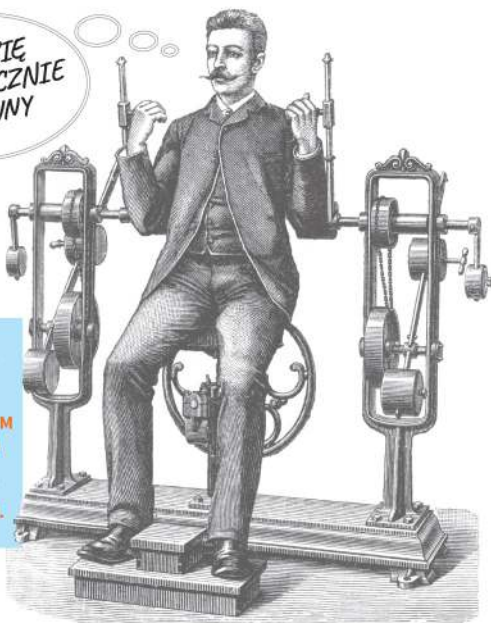
$$\eta = \frac{E_{\text{uzysk}}}{E_{\text{pobr}}}$$

Wskutek strat energii zawsze $\eta < 1$

Żadna maszyna nie może wykonać pracy większej od energii, którą pobiera.

CZUJĘ SIĘ
MECHANICZNIE
SPRAWNY

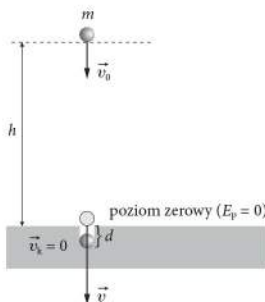
SPRAWNOŚĆ
UKŁADU
ZŁOŻONEGO
JEST IŁOCZYNNEM
SPRAWNOŚCI
WSZYSTKICH
ELEMENTÓW
SKŁADOWYCH.



1. Dziecko w zadaniu 7 s. 153 (podpunkt 7.2.) przesunęło skrzynkę z zabawkami o 1 m.
 - 1.1. Oblicz pracę wykonaną przez dziecko.
 - 1.2. Oblicz, jaka część pracy dziecka była związana z koniecznością pokonania siły tarcia, a jaka ze zwiększeniem energii kinetycznej skrzynki.
2. Łyżwiarz stojący na lodzie za sankami pchnął je przed siebie, nadając im szybkość 2 m/s, i wskutek odrzutu przejechał aż do zatrzymania drogę 0,5 m. Masa łyżwiarza wynosi 40 kg, a masa sanek 8 kg. Układ łyżwiarz-sanki podczas pchnięcia traktujemy jako układ izolowany, tzn. pomijamy działanie sił zewnętrznych działających na ciała w układzie.
 - 2.1. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Energia kinetyczna $E_{\text{łyżwiarza}}$ i energia kinetyczna sanek E_{sanek} spełniają zależność: $E_{\text{łyżwiarza}} - E_{\text{sanek}} = 0 \text{ J}$	P	F
2.	Podczas pchnięcia zmiana pędu układu łyżwiarz-sanki równa się zero: $\Delta p_u = 0$	P	F
3.	Środek masy układu łyżwiarz-sanki podczas pchnięcia przemieścił się w stronę łyżwiarza.	P	F

- 2.2. Oblicz pracę, którą wykonał łyżwiarz podczas pchnięcia.
 - 2.3. Skorzystaj ze związku między energią a pracą i oblicz współczynnik tarcia kinetycznego łyżew o lód.
Pchnięte sanki też zatrzymały się na lodzie.
 - 2.4. Wyjaśnij, dlaczego końcowa energia kinetyczna łyżwiarza i sanek jest równa zeru. Zapisz i uzasadnij odpowiedź.
3. Kulkę o masie $m = 10 \text{ g}$ wyrzuciono z procy pionowo w dół z wysokości $h = 3,8 \text{ m}$ z szybkością $v_0 = 18 \text{ m/s}$. Kulka zaryta się w piasku na głębokość $d = 2,5 \text{ cm}$ (rys. P3.1).



Rys. P3.1

3.1. Wymień siły działające na kulkę podczas jej ruchu nad podłożem oraz siły działające na kulkę w piasku (pomiń opór powietrza).

3.2. Oblicz ubytek energii mechanicznej $|\Delta E|$ kulki od chwili wystrzelenia do chwili zatrzymania się w piasku.

Dodatkowa informacja do zadań 3.3–3.5.

Wiadomo, że zmiana całkowitej energii mechanicznej układu Ziemia–kulka jest równa pracy siły zewnętrznej, a zmiana jego energii kinetycznej jest równa pracy siły wypadkowej.

3.3. Na podstawie tych stwierdzeń napisz dwa odpowiednie równania opisujące związek między zmianą całkowitej energii mechanicznej kulki a pracą wykonaną nad kulką w piasku. Użyj symboli takich jak na rysunku oraz symbolu v do oznaczenia szybkości kulki tuż przed uderzeniem w podłoże i F_{op} do oznaczenia wartości siły oporu piasku (zakładamy dla uproszczenia, że jest ona stała). Porównaj te równania i sformułuj wniosek.

3.4. Oblicz szybkość kulki v tuż przed uderzeniem w podłoże.

3.5. Oblicz wartość siły oporu F_{op} .

- 4.** Dwie kulki (rys. P3.2) zderzają się centralnie i sprężyście. Wszystkie dane można odczytać na rysunku.



Rys. P3.2

4.1. Zastosuj wzory (19.3) i (19.4) na s. 187 i oblicz szybkości v_1 i v_2 kulek po zderzeniu.

4.2. Oblicz energię kinetyczną układu.

4.3. Zastosuj wzory (19.3) i (19.4) na s. 187 i wyprowadź relację pomiędzy masami kulek m_1 i m_2 , dla której po zderzeniu współrzędna prędkości kulki 1 będzie ujemna, jeśli prędkości kulek przed zderzeniem są takie jak na rysunku P3.2 (oś x jest zwrócona w prawo).

4.4. Dobierz tak masę kulki 2, aby spełniała relację otrzymaną w zadaniu 4.3, i oblicz szybkości v_1 i v_2 kulek po zderzeniu w takim układzie.

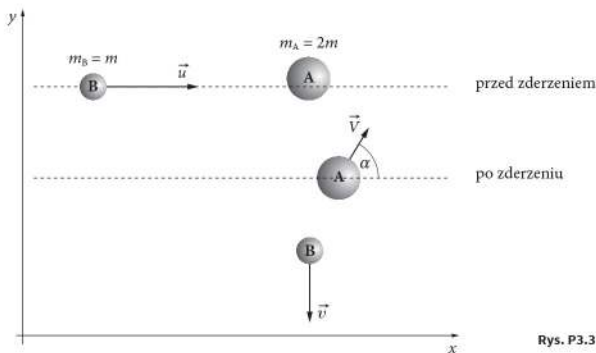
4.5. Oblicz energię kinetyczną układu opisanego w zadaniu 4.4.

- 5.** Wartość siły oporu wody działającej na łódź płynącą po stojącej wodzie jest wprost proporcjonalna do szybkości łodzi. Urządzenie holujące łódź z szybkością 2,5 km/h rozwija moc 5 kW.

5.1. Oblicz moc potrzebną do holowania tej łodzi z szybkością 7,5 km/h.

5.2. Oblicz współczynnik proporcjonalności we wzorze opisującym zależność $F_{\text{op}}(v)$ wartości siły oporu wody od szybkości łodzi v . Wynik podaj w jednostkach podstawowych SI w zaokrągleniu do jednej cyfry znaczącej.

6. Dwie kule: A i B o masach $m_A = 2m$ i $m_B = m$ zderzają się niecentralnie, ale sprężysto. Przed zderzeniem kula A jest w spoczynku, a kula B porusza się z prędkością $\vec{u}$ o wartości 3 m/s i zwrocie zgodnym ze zwrotem osi x . Po zderzeniu kula A porusza się z prędkością $\vec{V}$, a prędkość $\vec{v}$ kuli B jest prostopadła do kierunku $\vec{u}$ (rys. P3.3).



Rys. P3.3

6.1. Oblicz szybkości v i V kul po zderzeniu.

6.2. Oblicz kąt α , który prędkość $\vec{V}$ kuli A po zderzeniu tworzy z kierunkiem prędkości $\vec{u}$ (rys. P3.3).

Wskazówka: Korzystając z zasady zachowania pędu, zapisanej jako układ równań dla współrzędnych x i y wektorów pędu kul, wyprowadź wzory na odpowiednie funkcje trygonometryczne kąta α , a następnie skorzystaj ze wzoru $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Skorzystaj również z zasady zachowania energii.

7. Elektrowóz o masie m po włączeniu silnika zostaje wprowadzony w ruch. Jego moc P podczas ruchu pozostaje stała. Wypadkowa siła oporów jest stała i ma wartość F_{op} .

7.1. Narysuj w zeszyte, zaczepione w środku masy elektrowozu, wszystkie siły działające na elektrowóz. Zachowaj relacje między długościami wektorów sił. Oznacz siły i podaj ich nazwy.

Dodatkowa informacja do zadań 7.2–7.4.

Moc elektrowozu P można powiązać z wartością siły ciągu silnika F i szybkością chwilową elektrowozu v za pomocą wzoru:

$$P = F \cdot v$$

7.2. Ustal i zapisz, jakim ruchem porusza się elektrowóz w pierwszej fazie ruchu. Powołaj się na powyższy wzór oraz inne zależności fizyczne uzasadniające twoje stwierdzenie.

7.3. Wyprowadź wzór opisujący zależność $a(v)$ wartości przyspieszenia elektrowozu od jego szybkości chwilowej v , w którym m, P, F_{op} są stałymi współczynnikami. Powołaj się na odpowiednie zależności lub prawa fizyczne, niezbędne do wyprowadzenia tego wzoru.

7.4. Wykaż, że maksymalna szybkość elektrowozu wyraża się wzorem:

$$v_{\text{max}} = \frac{P}{F_{\text{op}}}$$

- 8.** Silnik umieszczony na szczycie wzniesienia ciągnie za pomocą liny narciarzy, których łączny ciężar ma wartość $F_c = 1,8 \cdot 10^4 \text{ N}$ i jest znacznie większy od ciężaru liny. Szybkość narciarzy względem wzniesienia jest równa $v = 2 \text{ m/s}$. Zbocze wzniesienia jest nachylone do poziomu pod kątem $\alpha = 30^\circ$. Współczynnik tarcia kinetycznego nart o zaśnieżone zbocze wynosi $f_k = 0,1$. Zbocze taktujemy jak równię pochyłą, której sprawność η_t (jako maszyny prostej) wyraża się wzorem:

$$\eta_t = \frac{1}{1 + \frac{f_k}{\lg \alpha}}$$

- 8.1.** Oblicz moc traconą na pokonanie siły tarcia.
8.2. Oblicz sprawność układu, jeśli pobór mocy przez silnik jest równy 28 kW.
8.3. Oblicz sprawność silnika, zakładając, że sprawność układu wynosi ok. 64 %.

ELEKTROWNIE WIATROWE

Od kilku dekad wiadomo, że wytwarzanie energii ze spalania tzw. paliw kopalnych: ropy, gazu ziemnego i węgla niszczy naszą planetę i jest groźne dla naszego zdrowia. Żyjemy w coraz bardziej zatrutym środowisku naturalnym i chcemy się przed tym bronić. Równocześnie ze względu na wzrost liczby ludności na kuli ziemskiej, zwiększające się uprzemysłowienie krajów rozwijających się, a także wzrost gospodarczy krajów już rozwiniętych zapotrzebowanie na energię rośnie. Dlatego w niezwykłym tempie rozwijają się odnawialne źródła energii.



Przedstawimy możliwość wytwarzania energii elektrycznej kosztem energii kinetycznej wiatru. Oto zasada działania elektrowni wiatrowej:

Załóżmy, że wiatr wiejący z szybkością v uderza w łopatki turbiny (wiatraka) i przekazuje im w całości swoją energię kinetyczną. W czasie t łopatki wiatraka uzyskują energię wiatru skupioną w objętości walca zaznaczonego na rysunku kolorem niebieskim; wysokość tego walca wynosi $v \cdot t$ (droga przebyta w czasie t przez wiatr), a pole jego podstawy S wynosi πr^2 , gdzie r to długość łopatki.

Energia kinetyczna wiatru skupiona w tym walcu jest równa

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

gdzie m to masa powietrza zawartego w walcu. Masa ta jest równa iloczynowi objętości walca V i gęstości powietrza ρ (gęstość powietrza wynosi około $1,3 \text{ kg/m}^3$):

$$m = V \cdot \rho = \pi r^2 vt \cdot \rho$$

zatem

$$E_k = \frac{1}{2}\pi r^2 vt \rho \cdot v^2 = \frac{1}{2}\pi r^2 \rho t \cdot v^3$$

Jeśli założymy, że cała energia kinetyczna wiatru zostaje przetworzona w pracę potrzebną na obrót łopatek wiatraka (wówczas jego sprawność byłaby 100 %!), a ta z kolei w energię elektryczną, to moc wiatraka wynosi

$$P = \frac{W}{t} = \frac{E_k}{t}$$

$$P = \frac{1}{2} \pi r^2 \rho v^3$$

Otrzymany wzór pokazuje, że tzw. moc wyjściowa elektrowni wiatrowej jest wprost proporcjonalna do trzeciej potęgi szybkości wiatru. Nasze szacowanie mocy jest czysto teoretyczne, wiesz przecież, że sprawność żadnego urządzenia nie wynosi 100 %.

W Polsce obecnie pracuje około 50 elektrowni wiatrowych, sprzedających wytworzoną energię zakładom energetycznym. Największa z nich, o mocy 120 MW uruchomiona w roku 2010 w Margoninie (największa ekologiczna inwestycja w Polsce), składa się z 60 wiatraków o średnicy wirników równej 90 m. Może ona zasilać 90 000 gospodarstw domowych.

Wadą elektrowni wiatrowych są dość wysokie koszty budowy i utrzymania. Oczywiście trzeba się także liczyć z faktem, że nie zawsze wieje dostatecznie silny wiatr, a czasem go w ogóle nie ma.

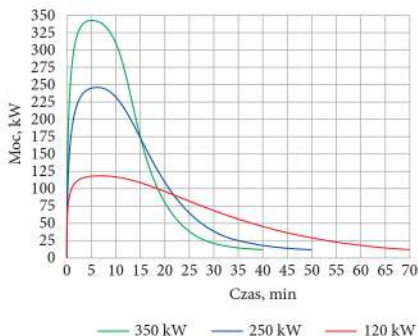
Opracowano na podstawie: S. Pople, *Repetitorium, fizyka dla maturzystów*, Oxford University Press, Delta W-Z, Warszawa 1996 i materiałów internetowych

ZADANIA

1. Długość łopat turbiny elektrowni wiatrowej w Margoninie wynosi 45 m. Oszacuj na podstawie wyprowadzonego wzoru teoretyczną moc wyjściową tej elektrowni przy szybkości wiatru 15 m/s. Jak myślisz, dlaczego jest taka duża różnica między szacowaną teoretycznie mocą wyjściową, a mocą faktyczną?
2. Odszukaj informacje na temat rozwoju energetyki wiatrowej w ostatnich latach w Polsce. Podaj aktualną moc wszystkich elektrowni wiatrowych. Jaki to procent całkowitej energii produkowanej w Polsce?
3. Wymień inne, alternatywne źródła energii (poza paliwami kopalnymi). Zestaw wady i zalety każdego z nich.



W motoryzacji coraz większym zainteresowaniem cieszą się pojazdy z napędem elektrycznym. Jednym z nich jest samochód klasy B marki Tesla z baterią o pojemności 75 kWh. Podstawową zaletą tego typu pojazdu jest brak emisji spalin do atmosfery. Ponadto samochody elektryczne są bardzo ciche i dynamiczne. Przyspieszenie od 0 do 100 km/h opisywanego modelu następuje w czasie około 4,4 sekundy. Maksymalna prędkość pojazdu to 233 km/h, a w pełni naładowany akumulator wystarczy na przebieżenie około 450 km. Średnie zużycie energii wynosi około 190 Wh/km. Na poniższym rysunku przedstawiono wykresy zależności mocy ładowania akumulatora od czasu dla trzech ładowarek o maksymalnej mocy ładowania odpowiednio 120 kW, 250 kW, 350 kW.



ZADANIA

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Czas ładowania akumulatora o pojemności 75 kWh przez ładowarkę o maksymalnej mocy 350 kW jest najdłuższy.	P	F
2.	Ilość energii przekazywana przez ładowarkę do akumulatora podczas ładowania jest stała w całym czasie ładowania.	P	F
3.	Ilość energii przekazana przez ładowarkę o mocy 120 kW w czasie pierwszych 20 minut ładowania jest ponad dwa razy mniejsza od energii przekazanej w tym samym czasie przez ładowarkę o maksymalnej mocy ładowania 350 kW.	P	F

2. Korzystając z wykresu, oszacuj energię, która zostanie przekazana do akumulatora w czasie pierwszych 20 minut przez ładowarkę o maksymalnej mocy ładowania 250 kW.
3. Oszacuj dystans, jaki można pokonać po ładowaniu akumulatora ładowarką 350 kW przez 10 minut. Przyjmij założenie, że akumulator jest ładowany od zera (a tak naprawdę od stanu dopuszczalnego minimalnego naładowania).



ZJAWISKA HYDROSTATYCZNE

- Ciśnienie hydrostatyczne
- Prawo Pascala
- Prawo naczyń połączonych
- Prawo Archimedesesa
- Wyznaczanie gęstości ciał



21. Ciśnienie hydrostatyczne

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- definiuje się ciśnienie,
- opisuje się ciśnienie atmosferyczne i hydrostatyczne,
- wyjaśnić paradoks hydrostatyczny.

→ **Przypomnij sobie** wiadomości o sile parcia i ciśnieniu cieczy.



Rys. 21.1 Ciecz wypełnia dolną część naczynia

Hydrostatyka to dział fizyki zajmujący się badaniem cieczy w stanie spoczynku. Właściwości cieczy badamy zwykle w polu grawitacyjnym, więc uwzględniamy działającą na nie siłę przyciągania ziemskiego, która ma istotny wpływ na ich zachowanie.

Ciecze w odróżnieniu od ciał stałych nie mają sprężystości postaci, w związku z czym przyjmują kształt naczynia, w którym się znajdują. Działająca na ciecz siła ciężkości powoduje, że wypełniają dolną część naczynia, a ich powierzchnia swobodna jest pozioma i płaska – z wyjątkiem menisku¹⁹ przy ściankach (rys. 21.1).

Po ustaniu ruchu związanego z przepływem cieczy (np. podczas nalewania do naczynia) pozostaje ona w równowadze. W tym stanie ciecz o danej objętości ma najmniejszą energię potencjalną.

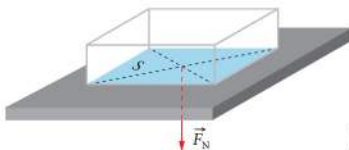
W szerokim zakresie temperatur i ciśnień ciecze zachowują w przybliżeniu stałą objętość, ponieważ są mało ścisłe.

Jedną z pierwszych wielkości fizycznych, które poznajemy podczas nauki fizyki, jest ciśnienie. Przypomnijmy, że:

Ciśnieniem nazywamy stosunek wartości siły nacisku do pola powierzchni, na którą ta siła działa (rys. 21.2).

$$p = \frac{F_N}{S}$$

¹⁹ Menisk to zakrzywienie powierzchni cieczy przy ściankach naczynia, spowodowane różnicą między wartościami sił wzajemnego przyciągania cząsteczek cieczy i wzajemnego oddziaływania cząsteczek cieczy z cząsteczkami substancji, z której zbudowane jest naczynie.



Rys. 21.2 Siła nacisku cieczy na podstawę

Ciśnienie informuje nas, jaka jest wartość siły nacisku działającej na jednostkę powierzchni. Jednostką ciśnienia jest **paskal** (1 Pa).

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

W codziennym życiu często posługujemy się pojęciem **ciśnienia atmosferycznego**, omówionym już w klasie 7. Ciśnienie atmosferyczne na poziomie morza waha się wokół wartości $1013 \text{ hPa} = 101\,300 \text{ Pa}$.

Siłę nacisku, którą ciecz działa na dno i ścianki naczynia oraz powierzchnie ciał w niej zanurzonych, nazywamy siłą **parcia hydrostatycznego** $\vec{P}$, a ciśnienie cieczy – **ciśnieniem hydrostatycznym** p .

$$p = \frac{P}{S} \quad (21.1)$$

Aby wyprowadzić wzór pozwalający obliczyć ciśnienie słupa cieczy o wysokości h (rys. 21.3), należy skorzystać z definicji ciśnienia i definicji gęstości ($\rho = \frac{m}{V}$) oraz uwzględnić fakt, że wartość siły parcia, którą ciecz działa w tym przypadku na dno naczynia, jest równa wartości ciężaru tej cieczy.

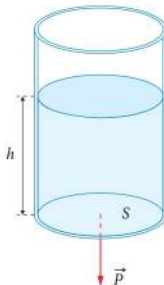
$$p = \frac{P}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho_c Vg}{S} \quad (21.2)$$

$$p = \rho_c gh$$

gdzie:

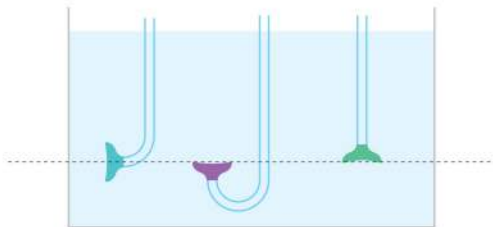
h – wysokość słupa cieczy nad poziomem, na którym mierzymy ciśnienie,

ρ_c – gęstość cieczy.



Rys. 21.3 Siła parcia słupa cieczy na dno naczynia

Fakt, iż na określonej głębokości siły parcia cieczy na powierzchnię zanurzonego w niej ciała działają ze wszystkich kierunków jednakowo, można sprawdzić dzięki zanurzeniu na tę samą głębokość np. odpowiednio umocowanego lejka, na który nałożono gumową membranę z balonika lub rękawiczki (rys. 21.4). W każdym położeniu membrana jest wygięta jednakowo.



Rys. 21.4 Wartości sił parcia cieczy na tej samej głębokości są jednakowe

Wniosek z opisanego wyżej doświadczenia stosuje się także do płaskich przedmiotów w powietrzu, np. działająca w górę siła parcia powietrza na dolną powierzchnię blatu stołu ma taką samą wartość jak działająca w dół siła parcia powietrza na górną powierzchnię tego blatu.

Gdyby gęstość powietrza atmosferycznego była jednakowa w każdej odległości od powierzchni Ziemi, to na podstawie wzoru (21.2) można byłoby obliczyć także ciśnienie atmosferyczne na dowolnej wysokości nad Ziemią. Wiemy jednak, że gęstość powietrza maleje wraz z wysokością, więc za pomocą tego wzoru można obliczyć w przybliżeniu zmianę ciśnienia atmosferycznego Δp , która zachodzi przy niewielkiej zmianie wysokości Δh . Za gęstość ρ należy podstawić średnią gęstość powietrza. Przy zmianie wysokości o niewielkie Δh (tak niewielkie, że ρ można uważać za stałe) ciśnienie gazu zmienia się o:

$$\Delta p = -\rho g \Delta h \quad (21.3)$$

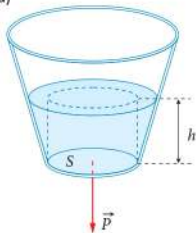
Znak „-” oznacza, że ciśnienie maleje wraz ze wzrostem wysokości. Jeśli rozważamy wysokości małe w porównaniu z promieniem Ziemi, to wartość g możemy uważać za równą $9,81 \text{ m/s}^2$.

Do obliczenia ciśnienia hydrostatycznego wybraliśmy naczynie w kształcie walca (rys. 21.3), ponieważ w takim przypadku wartości siły parcia cieczy na dno naczynia i ciężaru cieczy są jednakowe. Wartość siły parcia na płaskie dno naczynia o dowolnym kształcie obliczamy, korzystając z przekształconego wzoru (21.1):

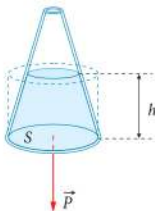
$$P = p \cdot S = \rho g h S$$

Jeśli ściany boczne naczynia nie są prostopadłe do jego dna (rys. 21.5), to wartość siły parcia cieczy na dno nie jest równa wartości ciężaru tej cieczy.

a)



b)



Rys. 21.5 Wartość parcia na dno jest różna od wartości ciężaru cieczy

W naczyniu rozszerzającym się ku górze (rys. 21.5a) parcie cieczy na dno ma wartość równą:

$$P = pS = \rho ghS = \rho gV'$$

gdzie $V' = hS$ jest objętością walcowatego słupa cieczy, mniejszą od objętości V cieczy w naczyniu.

Ciężar cieczy ma wartość $mg = \rho gV$, a $V' < V$, więc:

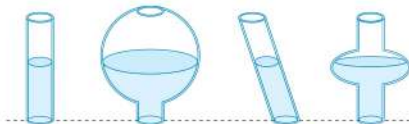
$$P < mg$$

Przeprowadź analogiczne rozumowanie i sprawdź, czy w naczyniach zwężających się ku górze (rys. 21.5b):

$$P > mg$$

Różnica siły parcia i ciężaru cieczy związana jest z działaniem ścianek naczynia na znajdującą się w nim ciecz.

Parcia słupów cieczy o gęstości ρ i takiej samej wysokości h , wywierane w naczyniach na ich dna o takiej samej powierzchni S (rys. 21.6), są jednakowe niezależnie od kształtu tych naczyń.



Rys. 21.6 Parcie cieczy na dno jest jednakowe we wszystkich naczyniach

Zjawisko to nazywamy **paradoksem hydrostatycznym** (choć jest zgodne z prawami fizyki), ponieważ **mylnie** można byłoby sądzić, że parcie cieczy na dno będzie większe w tym naczyniu, które zawiera więcej cieczy.

ZADANIA

1. W dolnej części plastikowej butelki po wodzie mineralnej wykonaj mały otworek. Zatkaj go palcem i napełnij butelkę wodą. Następnie usuń palec i obserwuj wodę w dwóch przypadkach: gdy butelka jest otwarta i gdy jej wylot zamknięto zakrętką. Wyjaśnij obserwowane zjawisko.
2. W piwnicach wysokich budynków znajdują się urządzenia zwane hydroforami, których zadaniem jest doprowadzenie wody do górnych kondygnacji. Oszacuj, jakie ciśnienie musi wytwarzać pompa hydroforu znajdująca się w piwnicy piętnastokondygnacyjnego budynku. Przyjmij, że wysokość jednej kondygnacji wynosi 3 m, a gęstość wody to 1000 kg/m^3 .
3. Telewizory mają ekrany w kształcie prostokąta. Wielkość ekranów określa się przez podanie długości przekątnej tego prostokąta w calach: $1 \text{ cal} = 2,54 \text{ cm}$. Ekran telewizora 40-calowego ma kształt prostokąta o bokach 50 cm i 89 cm. Oszacuj wartość siły parcia wywieranego przez powietrze na ekran takiego telewizora. Porównaj ją z wartością ciężaru przeciętnego samochodu osobowego.
4. Uprawianie niektórych sportów, np. nurkowanie na dużych głębokościach lub wspinanie się w Himalajach, wiąże się z istotnymi zmianami zewnętrznego ciśnienia. Wyszukaj informacje:
 - a) o wpływie zmian ciśnienia na organizm człowieka;
 - b) o sposobach przygotowywania sportowców do wysiłku w ekstremalnych warunkach.



22. Prawo Pascala

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- rozkłada się ciśnienie cieczy w naczyniu na skutek wywierania nacisku na tę ciecz, czyli jak brzmi prawo Pascala,
- wykorzystać prawo Pascala w konstruowaniu urządzeń mechanicznych.

→ **Przypomnij sobie** prawo Pascala i jego zastosowania.

Podstawowym prawem hydrostatyki jest **prawo Pascala**, słuszne także dla gazów:

Wzrost ciśnienia spowodowany wywieraniem na ciecz nacisku o dowolnym kierunku jest w każdym miejscu cieczy jednakowy.

To dodatkowe, jednakowe w każdym punkcie cieczy ciśnienie dodaje się do odpowiedniego ciśnienia hydrostatycznego.

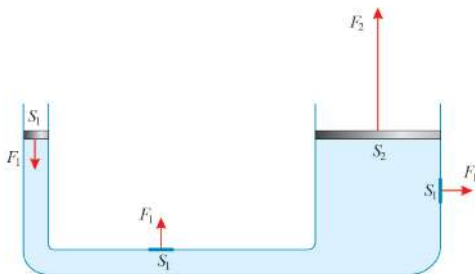
Słuszność prawa Pascala można sprawdzić za pomocą kolby szklanej z małymi otworami (rys. 22.1). Po nalanu do niej wody obserwujemy, że woda wycieka przez otworki. Po naciśnięciu tłoczka zauważymy, że woda będzie wylewać się ze wszystkich otworków tym silniejszym strumieniem (prostopadłym do powierzchni kolby w miejscu, w którym znajduje się otworek), im większa będzie siła, którą zadziałamy na ciecz za pośrednictwem tłoczka.



Rys. 22.1 Obserwacja słuszności prawa Pascala

Z prawa Pascala korzystamy przy budowaniu pras hydraulicznych, podnośników, a także hamulców. Wszystkie te urządzenia działają na tej samej zasadzie.

Przeanalizujmy rysunek 22.2. Naczynie wypełnione cieczą zamknięte jest dwoma tłokami o różnych powierzchniach, przy czym $S_1 < S_2$. Gdy działamy siłą $\vec{F}_1$ na tłoczek o powierzchni S_1 , wytwarzamy w cieczy dodatkowe ciśnienie $p = \frac{F_1}{S_1}$.

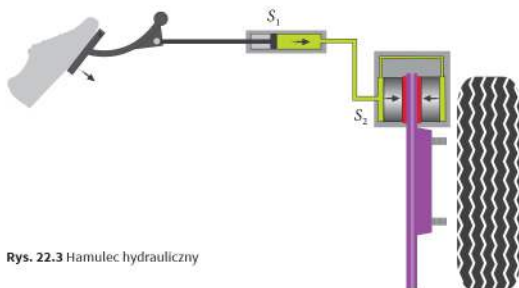


Rys. 22.2 Podnośnik hydrauliczny

Na wybraną w dowolnym miejscu naczynia powierzchnię S_1 (przy pominięciu siły przyciągania ziemskiego) będzie działać ze strony cieczy (zgodnie z prawem Pascala) siła o wartości F_1 . Na powierzchnię S_2 (n razy większą od S_1) będzie działać siła o wartości $F_2 = n \cdot F_1$, bo:

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{nF_1}{S_2} = \frac{F_2}{S_2} \quad \text{zatem} \quad \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

Kierowca samochodu naciskający na pedał hamulca sprzężony z niewielką powierzchnią tłoka S_1 sprawia, że na klocki hamulcowe działa za pośrednictwem układu hamulcowego odpowiednio większa siła, co powoduje hamowanie samochodu (rys. 22.3).



Rys. 22.3 Hamulec hydrauliczny

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

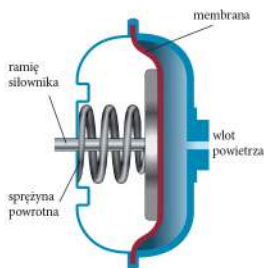
Hamulec pneumatyczny

W samochodach ciężarowych stosuje się hamulce pneumatyczne, w których substancją roboczą jest sprężone powietrze. Podstawowymi elementami takiego hamulca są: sprężarka, zbiornik główny, regulator ciśnienia, zawór połączony z pedałem hamulca oraz siłownik (rys. 22.4a).

a)



b)



Rys. 22.4

Sprężarka, sterowana za pomocą regulatora, napędza zbiornik główny powietrzem o ciśnieniu około 0,8 MPa. Naciśnięcie pedału hamulca powoduje otwarcie zaworu i dopływ sprężonego powietrza do komory siłownika. Siła parcia działająca na membranę powoduje jej wygięcie i wysunięcie ramienia siłownika (rys. 22.4b). Poprzez system dźwigni ramie siłownika powoduje docisk elementów ciernych hamulca i zatrzymanie pojazdu. Zaletą hamulców pneumatycznych jest możliwość sprawnego działania nawet przy pewnej niezupełności układu, gdyż sprężarka na bieżąco uzupełnia straty powietrza.

ZADANIA

1. Cylindry podnośnika hydraulicznego mają średnice równe odpowiednio 2 cm i 6 cm. Załóżmy, że podnośnik podnosi ciało o ciężarze 180 N. Oblicz wartość siły, która działa wtedy na tłok o mniejszej średnicy.
2. Prasa hydrauliczna i podnośnik hydrauliczny, działające na tej samej zasadzie, są rodzajami maszyny prostej (patrz rozdział 20). Udowodnij, że praca wykonana przez siłę zewnętrzną $\vec{F}_1$ działającą na tłok podnośnika o powierzchni S_1 (rys. 22.2) podczas przesuwania go w dół jest równa pracy, którą siła przesuwająca tłok o powierzchni S_2 (podnoszący umieszczone na nim ciało) wykonała w tym samym czasie. Nie uwzględniaj oporów ruchu.
3. Gdy mały tłok prasy hydraulicznej przesuwana się w dół o $h = 0,2$ m, duży tłok podnosi się o $H = 0,01$ m. Oblicz wartość siły, którą prasa działa na ściskane w niej ciało, jeśli wiadomo, że na mały tłok działa siła o wartości $F_1 = 500$ N.
4. Ludzi od najdawniejszych czasów fascynowały głębiny morskie. Najgłębszym miejscem na Ziemi jest Rów Mariański położony w zachodniej części Oceanu Spokojnego. Jego największa głębokość wynosi około 11 000 m. Dnia 23 stycznia 1960 roku do dna Rowu Mariańskiego dotarł batyskaf Trieste (jego model przedstawiono na rysunku 22.5), na którego pokładzie znajdowali się Amerykanin Don Walsh oraz Francuz Jacques Piccard, sławny badacz morskich głębin. Oblicz ciśnienie przy powierzchni ich batyskafu.



Rys. 22.5



23. Prawo naczyń połączonych

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- skonstruować naczynia połączone,
- formułujemy prawo naczyń połączonych,
- w praktyce wykorzystywać naczynia połączone.

→ **Przypomnij sobie**, co wiesz o ciśnieniu słupa cieczy.

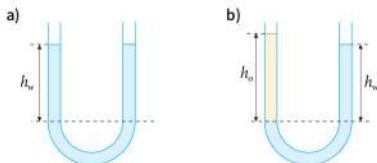
Naczynia połączone to kilka naczyń, między którymi ciecz może swobodnie przepływać. Mogą to być połączone naczynia różnych kształtów (rys. 23.1).



Rys. 23.1 Naczynia połączone o różnych kształtach

Po wlaniu cieczy do naczyń połączonych i ustaleniu się równowagi stwierdzamy, że poziom cieczy we wszystkich ramionach jest jednakowy. Dzieje się tak dlatego, że ciśnienia hydrostatyczne przy dnie muszą być jednakowe, a jak wiesz, zależą one od wysokości słupów cieczy.

Najprostszym przykładem naczyń połączonych jest rurka zgięta w kształcie litery U, tzw. U-rurka, przedstawiona na rysunku 23.2.



Rys. 23.2 Równość ciśnień hydrostatycznych: słupów wody (a), słupa wody i oleju (b)

Warunkiem równowagi cieczy w naczyniach połączonych jest równość ciśnień (mierzonych na wybranym, jednakowym poziomie) we wszystkich naczyniach.

Wyobraźmy sobie, że z lewego ramienia U-rurki (rys. 23.2a) usunęliśmy słup wody o pewnej wysokości h_w i zastąpiliśmy go słupem cieczy (niemieszającej się z wodą) o innej gęstości, np. oleju, tak aby wysokość słupa wody w prawym ramieniu nie uległa zmianie (rys. 23.2b).

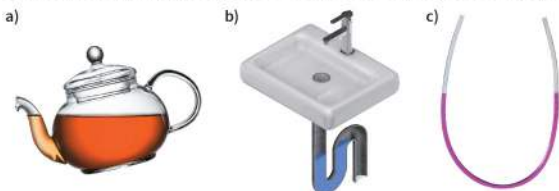
Skoro równowaga została zachowana, to oznacza, że ciśnienie słupa oleju o wysokości h_o jest równe ciśnieniu słupa wody o wysokości h_w :

$$\rho_o h_o g = \rho_w h_w g \quad \text{lub} \quad \frac{\rho_o}{\rho_w} = \frac{h_w}{h_o}$$

Na podstawie tego wzoru możemy (o ile znamy gęstość wody) wyznaczyć nieznaną gęstość innej cieczy.

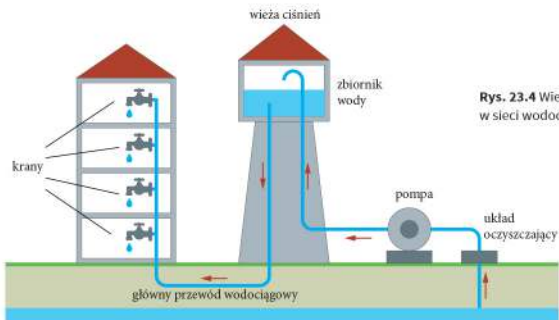
Naczynia połączone znalazły wiele praktycznych zastosowań. Są nimi np. czajniczek do zaparzania herbaty (rys. 23.3a), konewka do podlewania ogródka oraz wodowskaz w czajniku elektrycznym. U-rurka pod zlewozmywakiem, tzw. syfon (rys. 23.3b), chroni nas przed przykrymi zapachami z rur kanalizacyjnych.

Plastikowa rurka, wygięta i napełniona wodą, może służyć za poziomice (rys. 23.3c).



Rys. 23.3 Naczynia połączone: czajnik (a), syfon (b), poziomica hydrauliczna (c)

Jeszcze w XX wieku prawo naczyń połączonych wykorzystywano przy tworzeniu sieci wodociągowej (rys. 23.4), w której najważniejszym elementem była wieża ciśnień.



Rys. 23.4 Wieża ciśnień w sieci wodociągowej

Wodę do wieży ciśnień pompowano za pomocą kół wodnych, wiatraków i pomp parowych. Na fotografii (rys. 23.5) przedstawiono zabytkową wieżę ciśnień w Kwidzynie-Miłosznie.

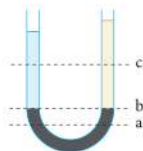
Obecnie sieci wodociągowe są nadal sieciami naczyń połączonych, ale wieże ciśnień zostały zastąpione przez nowoczesne hydrofory i układy pomp zasilanych elektrycznie. W Polsce zużywają one kilkanaście procent wytwarzanej energii elektrycznej. Oszczędzanie wody pozwala więc oszczędzać także energię elektryczną.



Rys. 23.5 Wiatrak na szczycie wieży napędzał stację pomp i dodatkowo generator prądu

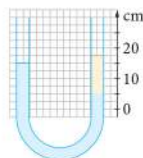
ZADANIA

1. W U-rurce znajdują się w równowadze trzy różne ciecze. Na rysunku 23.6 zaznaczono trzy różne poziomy: a, b i c. Czy na każdym z tych poziomów ciśnienia w obu ramionach są jednakowe? Uzasadnij odpowiedź.



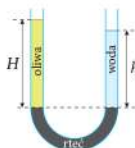
Rys. 23.6

2. Do jednego ramienia naczynia w kształcie litery U, zawierającego wodę o gęstości 1000 kg/m^3 , dolano pewnego oleju, tak że osiągnięta równowaga cieczy wyglądała tak, jak pokazano na rysunku 23.7. Po odczytaniu odpowiednich wysokości oraz korzystając z prawa naczyń połączonych, oblicz gęstość tego oleju.



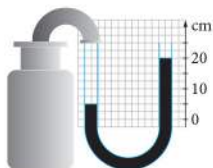
Rys. 23.7

3. Do naczyń połączonych w kształcie litery U wiano rtęć (rys. 23.8). Następnie do jednego ramienia rurki nalano oliwy, której słupek miał wysokość $H = 20 \text{ cm}$. Do drugiego ramienia naczynia wlało wodę. Powierzchnia styku rtęci z oliwą i wodą w obu ramionach znajduje się na jednakowym poziomie, gdy wysokość słupa wody wynosi $h = 18 \text{ cm}$. Oblicz gęstość oliwy ($\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$).



Rys. 23.8

4. Na początku XII wieku w regionie Artois we Francji wywiercono w gruncie otwór prowadzący do głęboko położonych warstw wodonośnych, w których znajduje się woda pod dużym ciśnieniem hydrostatycznym. Utworzono w ten sposób studnię zwaną artezyjską. Na podstawie samodzielnie zebranych informacji narysuj schemat takiej studni i wyjaśnij zasadę jej działania.
5. Manometr rtęciowy, który jest naczyniem w kształcie litery U, zawierającym rtęć o gęstości $13\,600\text{ kg/m}^3$, podłączono pod butlę z pewnym gazem. Osiągnięta równowaga cieczy wygląda tak, jak pokazano to na rysunku 23.9. Korzystając z prawa naczyni połączonych, oblicz ciśnienie gazu w butli.



Rys. 23.9



24. Prawo Archimedesesa

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- doświadczalnie wprowadzić prawo Archimedesesa,
- wyprowadzić prawo Archimedesesa na drodze rozumowania,
- formułujemy prawo Archimedesesa,
- wyjaśnić zjawiska tonięcia i pływania ciał.

→ **Przypomnij sobie** wiadomości o sile wyporu.

W klasie 7 prawo Archimedesesa zostało wprowadzone na podstawie doświadczenia, które przypominamy na fotografii poniżej (rys. 24.1).

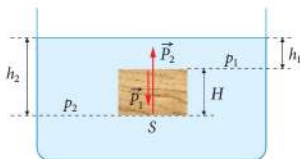


Rys. 24.1 Pokaz słuszności prawa Archimedesesa

Cienki, bardzo lekki plastikowy woreczek napełniono wodą i zważono. Siłomierz wskazywał wartość F_c . Następnie wiszący na haczyku siłomierza woreczek całkowicie zanurzono w naczyniu z wodą. Siłomierz wskazywał zero. Taki sam wynik uzyskalibyśmy, gdybyśmy wypełnili woreczek inną cieczą i zanurzyli go w tej cieczy.

Obecnie prawo Archimedesesa wyprowadzimy na drodze rozumowania.

Założmy, że w cieczy o gęstości ρ_c zanurzyliśmy ciało; dla uproszczenia przyjmijmy, że ma ono kształt prostopadłościanu (rys. 24.2). Nie będziemy chwilowo rozpatrywać wszystkich sił działających na to ciało, a jedynie te, których źródłem jest ciecz.



Rys. 24.2 Ilustracja do wyprowadzenia prawa Archimedeasa

Górna podstawa prostopadłościanu znajduje się na głębokości h_1 . Ciśnienie hydrostatyczne cieczy na tej głębokości jest równe:

$$p_1 = h_1 \rho_c g$$

gdzie ρ_c to gęstość cieczy.

Na górną podstawę prostopadłościanu działa więc siła parcia cieczy $\vec{P}_1$ o wartości:

$$P_1 = p_1 S = h_1 \rho_c g S$$

zwrócona w dół.

Dolna podstawa znajduje się na głębokości h_2 , gdzie panuje ciśnienie p_2 . Na tę podstawę działa siła parcia cieczy $\vec{P}_2$ o wartości:

$$P_2 = p_2 S = h_2 \rho_c g S$$

zwrócona w górę. Ponieważ $P_2 > P_1$, więc ich wypadkowa $\vec{F}_A$ („A” na cześć Archimedeasa) o kierunku pionowym i zwrocie w górę ma wartość:

$$F_A = P_2 - P_1 = h_2 \rho_c g S - h_1 \rho_c g S = \rho_c g S (h_2 - h_1)$$

Zauważ (rys. 24.2), że $h_2 - h_1 = H$ jest wysokością prostopadłościanu. Wobec tego:

$$F_A = \rho_c g S H$$

czyli:

$$F_A = \rho_c g V$$

gdzie:

V – objętość ciała zanurzonego w cieczy,

ρ_c – gęstość cieczy.

Iloczyn $\rho_c g V$ pozornie nie ma żadnego sensu fizycznego. Zauważmy jednak, że objętość V ciała zanurzonego w cieczy jest równa objętości wypartej cieczy. Iloczyn $\rho_c g V$ jest więc równy wartości ciężaru cieczy wypartej przez to ciało.

Wypadkowa sił działających na cztery ściany boczne prostopadłościanu jest równa zeru, ponieważ każdemu elementowi powierzchni znajdującemu się na pewnej głębokości odpowiada identyczny element po przeciwnej stronie prostopadłościanu.

Siłę $\vec{F}_A$, czyli wypadkową sił parcia, którą ciecz działa na zanurzone w niej ciało, nazywamy **siłą wyporu**.

Na podstawie powyższego rozumowania możemy sformułować **prawo Archimedeasa**:

Na każde ciało zanurzone w cieczy (lub gazie) działa siła wyporu o kierunku pionowym, zwrocie w górę i wartości

$$F_A = V_z \rho_c g$$

gdzie:

V_z – objętość zanurzonego ciała lub jego zanurzonej części,

ρ_c – gęstość cieczy (gazu), w której zanurzone ciało.

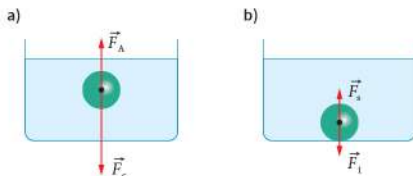
Wartość siły wyporu jest równa wartości ciężaru wypartej cieczy:

$$\rho_c g V_z = \rho_c g V_{\text{wypartej cieczy}} = g m_{\text{wypartej cieczy}}$$

Niżej opiszemy trzy przypadki zachowania się ciała zanurzonego w cieczy.

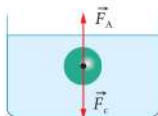
Do naczynia wypełnionego cieczą wkładamy kulki o różnej gęstości: (1) większej od gęstości cieczy, (2) równej gęstości cieczy i (3) mniejszej od gęstości cieczy. Niech V oznacza objętość kulki, ρ – jej gęstość, a ρ_c – gęstość cieczy. Gdy kulka znajduje się pod powierzchnią cieczy, puszczamy ją wolno. Na kulkę działają dwie siły: $\vec{F}_c$ – siła ciężkości o wartości F_c i $\vec{F}_A$ – siła wyporu o wartości F_A (siłę oporu cieczy pomijamy).

1. Jeśli $\rho > \rho_c$, to $F_c > F_A$, a więc wypadkowa sił $\vec{F}_c$ i $\vec{F}_A$ jest zwrócona w dół i kulka opada na dno naczynia (rys. 24.3a). Tam siła $\vec{F}_l$ (wypadkowa sił $\vec{F}_c$ i $\vec{F}_A$) o wartości $F_c - F_A$ jest równoważona przez siłę $\vec{F}_s$ (siłę sprężystości dna) i kulka spoczywa (rys. 24.3b).



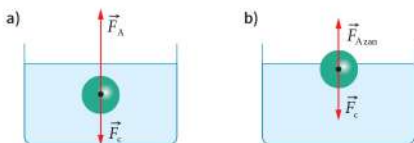
Rys. 24.3 Siły działające na kulkę o gęstości $\rho > \rho_c$

2. Jeśli $\rho = \rho_c$, to $F_c = F_A$, a więc wypadkowa sił działających na kulkę jest równa zeru i kulka pozostaje w miejscu, w którym została umieszczona, czyli pływa całkowicie zanurzona (rys. 24.4). Zauważ, że siła wyporu nie zależy od głębokości zanurzenia, więc miejsce to może być dowolne.



Rys. 24.4 Siły działające na kulkę o gęstości $\rho = \rho_c$

3. Jeśli $\rho < \rho_c$, to $F_c < F_A$, więc wypadkowa sił działających na kulkę jest zwrócona w górę i kulka porusza się w stronę powierzchni cieczy (rys. 24.5a). W chwili dotarcia do niej kulka zaczyna się wynurzać. Wówczas objętość jej zanurzonej części zmniejsza się (maleje także objętość wypartej cieczy), a zatem siła wyporu maleje. Dzieje się tak do chwili, w której wartości sił wyporu i ciężaru kulki się zrównają. Wówczas kulka pływa swobodnie w cieczy, częściowo w niej zanurzona (rys. 24.5b).

Rys. 24.5 Siły działające na kulkę o gęstości $\rho < \rho_c$

$$F_{A \text{ zan}} = F_c$$

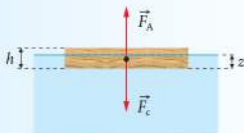
$$\rho_c g V_{\text{zanurzonej części ciała}} = \rho g V \quad \rho_c V_{\text{zanurzonej części ciała}} = \rho V \quad (24.1)$$

Związek (24.1) jest **warunkiem pływania** ciała częściowo zanurzonego w cieczy o gęstości ρ_c .

PRZYKŁAD 24.1

Tratwa

Obliczmy głębokość zanurzenia tratwy wykonanej z jednakowych bali o gęstości $\rho_d = 600 \text{ kg/m}^3$ i grubości $h = 0,2 \text{ m}$, pływającej w wodzie o gęstości $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ (rys. 24.6).



Rys. 24.6

Korzystamy z warunku pływania ciała częściowo zanurzonego w cieczy (24.1).

$$\vec{F}_A + \vec{F}_c = \vec{0} \Rightarrow F_A = F_c$$

$$\rho_w g V_{\text{zanurzonej części tratwy}} = \rho_d g V_{\text{tratwy}}$$

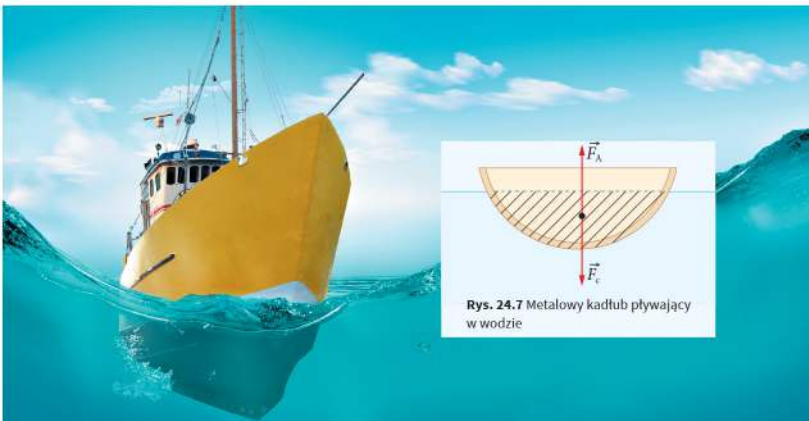
$$\frac{V_{\text{zanurzonej części tratwy}}}{V_{\text{tratwy}}} = \frac{\rho_d}{\rho_w}$$

Ponieważ $V_{\text{zanurzonej części tratwy}} = zS$, a $V_{\text{tratwy}} = hS$ (gdzie S jest powierzchnią tratwy), to:

$$\frac{z}{h} = \frac{\rho_d}{\rho_w} \quad z = \frac{\rho_d}{\rho_w} h \quad z = \frac{3}{5} \cdot 0,2 \text{ m} = 0,12 \text{ m}$$

Zauważ, że głębokość zanurzenia ciała pływającego w cieczy zależy od ilorazu gęstości ciała i cieczy.

Wyjaśnimy teraz, dlaczego statki zbudowane w dużej części z metalu nie toną, mimo iż gęstość metalu jest większa od gęstości wody. W tym celu wyobraźmy sobie, że w wodzie pływa metalowy kadłub, tak jak pokazano na rysunku 24.7.



Rys. 24.7 Metalowy kadłub pływający w wodzie

Na kadłub działają dwie siły:

- ciężar o wartości $F_c = \rho_m g V_m$,
- siła wyporu o wartości $F_A = \rho_w g V_z$,

gdzie:

V_m – objętość metalowej blachy, z której zbudowano kadłub,

ρ_m – gęstość tego metalu,

V_z – objętość (zakreskowanej na rysunku) zanurzonej części kadłuba, równa objętości wypartej przez nią wody,

ρ_w – gęstość wody.

Skoro kadłub ani nie tonie, ani nie wypływa, działające na niego siły równoważą się wzajemnie:

$$\rho_w g V_z = \rho_m g V_m$$

Objętość V_z jest wielokrotnie większa od objętości metalu, z którego zbudowano kadłub, $V_z \gg V_m$, więc równanie (warunek równowagi) jest spełnione, chociaż $\rho_w \ll \rho_m$. Statek nie tonie, mimo że materiał, z którego jest zbudowany, ma gęstość dużo większą od gęstości wody.



WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Zagadkowe zachowanie balonika

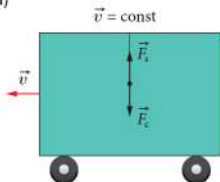
W przykładzie 10.6 wykazaliśmy, że w windzie poruszającej się z przyspieszeniem $\vec{a}$ zwróconym w górę występuje zjawisko przeciążenia – wynik ważenia ciała w windzie jest o ma większy od wartości ciężaru ciała. Gdyby ciało to znalazło się na planecie, na której przyspieszenie grawitacyjne ma wartość $g' = g + a$, albo Ziemia (z jakiegoś tajemniczego powodu) zaczęłaby przyciągać to ciało odpowiednio większą siłą, to ciężar ciała byłby równy $m\vec{g}'$. Można wyobrazić sobie sytuację, w której nagle znika grawitacja, a winda porusza się z przyspieszeniem o wartości $g' = g + a$ w górę. Wskazania wagi byłyby takie same jak poprzednio – obserwator w windzie nie dostrzegłby żadnej różnicy.

Oznacza to, że siła bezwładności (której wartość, tak jak wartość siły ciężkości, jest proporcjonalna do masy ciała) może zastąpić grawitację jako tzw. sztuczna grawitacja²⁰! Czy jej kierunek musi być pionowy?

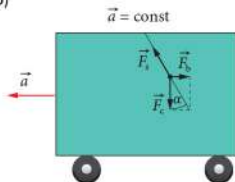
Załóżmy, że w wagonie pociągu wisi u sufitu kulka na cienkiej lince. Gdy wagon jedzie ruchem jednostajnym po prostoliniowym torze, linka jest pionowa (rys. 24.8a), a podczas jednostajnie przyspieszonego ruchu wagonu linka tworzy z pionem kąt α (rys. 24.8b). W pierwszej sytuacji na kulkę działają dwie równoważące się siły: siła ciężkości i siła sprężystości linki. Podczas przyspieszania wagonu na kulkę (w nieinercyjnym układzie związanym z wagonem) działa dodatkowo stała siła bezwładności, więc linka ustawia się wzdłuż wypadkowej siły ciężkości i bezwładności, a wypadkowa sił ciężkości, bezwładności i sprężystości linki jest równa zeru. Gdyby kulka wisała na sprężynie siłomierza, wskazałby on tzw. efektywny ciężar kulki o wartości $F'_c = \sqrt{F_c^2 + F_b^2}$.



a)



b)



Rys. 24.8.

²⁰ O sztucznej grawitacji będziemy mówić więcej w podręczniku do klasy drugiej, w dziale *Pole grawitacyjne*.

Wyjaśnimy teraz zagadkowe „zachowanie” balonika wypełnionego helem w autobusie pokonującym zakręt – przedstawione na rysunku na s. 143.

Podczas jednostajnego prostoliniowego ruchu autobusu na balonik działają równoważące się siły: ciężkości $\vec{F}_c$, wyporu $\vec{F}_A$ i sprężystości linki $\vec{F}_s$ (rys. 24.9a).

Uwaga: Aby oszacować proporcje wartości siły wyporu i siły ciężkości, przyjęto, że masa powłoki balonika jest równa połowie masy helu. A zatem:

$$\frac{F_A}{F_c} = \frac{\rho_{\text{powietrza}} g V}{\rho_{\text{helu}} g V + \frac{1}{2} \rho_{\text{powietrza}} g V} = \frac{\rho_{\text{powietrza}}}{\frac{3}{2} \rho_{\text{helu}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{0,18 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \approx 4,8$$

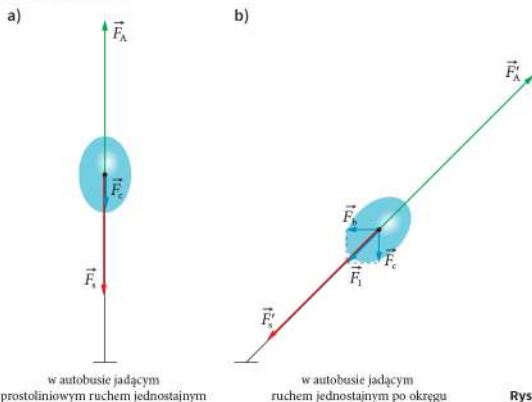
W nieinercyjnym układzie autobusu, poruszającego się z przyspieszeniem dośrodkowym o wartości $a = \frac{v^2}{r}$, na balonik działają równoważące się siły: ciężkości $\vec{F}_c$, bezwładności $\vec{F}_b$, wyporu $\vec{F}'_A$ i sprężystości linki $\vec{F}'_s$ (rys. 24.9b).

$$\vec{F}_c + \vec{F}_b + \vec{F}'_A + \vec{F}'_s = \vec{0}$$

Przyjmijmy dla ułatwienia, że wartość przyspieszenia dośrodkowego jest równa wartości przyspieszenia ziemskiego (tak będzie np. w przypadku ruchu autobusu z prędkością o wartości $v \approx 50 \text{ km/h}$ po łuku zakrętu o promieniu $r \approx 20 \text{ m}$).

Wypadkowa sił ciężkości i bezwładności $\vec{F}_1 = \vec{F}_c + \vec{F}_b$ to „efektywny” ciężar balonika o wartości $F_1 = \sqrt{2} F_c = F_c \sqrt{2}$. Siła wyporu działająca na balonik ma więc kierunek siły $\vec{F}_1$. Wartość siły wyporu $F'_A = \rho_{\text{powietrza}} g' V$, a $g' = g \sqrt{2}$ to „efektywne” przyspieszenie. Iloraz wartości sił wyporu F'_A i „efektywnego” ciężaru F_1 oczywiście nie uległ zmianie (rys. 24.9).

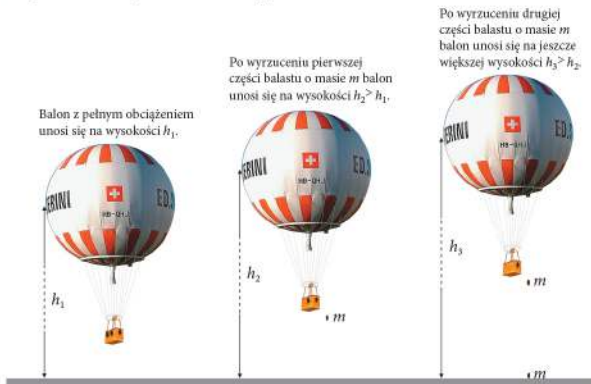
Linka z balonikiem wypełnionym helem wychylił się w stronę środka okręgu, po którym porusza się autobus.



Rys. 24.9

ZADANIA

1. Jednorodny sześcian pływa w rtęci, przy czym $\frac{1}{5}$ jego objętości jest zanurzona. Jeśli postawimy na nim drugi sześcian o takich samych wymiarach, to sześcian dolny zanurzy się do połowy swojej objętości. Oblicz gęstość drugiego sześcianu. Gęstość rtęci jest równa $\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Naczynie z rtęcią uniemożliwia przewrócenie się sześcianów.
2. Oblicz, jaka część objętości kry lodowej jest wynurzona nad powierzchnię wody. Gęstość lodu $\rho_l = 900 \text{ kg/m}^3$, a gęstość wody $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$.
3. Określ, jak zmieni się głębokość zanurzenia statku (zwiększy się / nie zmieni się / zmniejszy się) wypływającego z Amazonki na wody Atlantyku. Zapisz i uzasadnij odpowiedź.
4. Piłka o masie 2 kg pływa w wodzie zanurzona do połowy. Oblicz wartość najmniejszej siły, którą trzeba nacisnąć piłkę, aby całkowicie zanurzyć ją w wodzie ($g \approx 10 \text{ m/s}^2$).
5. Probówka o masie $0,015 \text{ kg}$ ze śrutem o masie $0,035 \text{ kg}$ zanurza się w wodzie o gęstości 1000 kg/m^3 do pewnej głębokości. Po wrzuceniu do pustej probówki śrutu o masie $0,05 \text{ kg}$ zanurza się ona do tej samej głębokości w innej cieczy. Oblicz gęstość tej cieczy.
6. Do wewnętrznej, pionowej i płaskiej ścianki naczynia przyklejono klocek. Naczynie wypełniono wodą tak, że klocek jest całkowicie zanurzony. Ustal kierunek i zwrot wypadkowej siły parcia wody na klocek. Zapisz i uzasadnij odpowiedź.
7. Na rysunku 24.10 przedstawiono trzy położenia balonu.



Rys. 24.10

- a) Wyjaśnij zjawisko przedstawione na rysunku.
- b) Masa balonu z pełnym obciążeniem była równa $M = 1300 \text{ kg}$, jego objętość to $V = 1000 \text{ m}^3$, a masa każdej części balastu wynosi $m = 100 \text{ kg}$. Oblicz gęstości powietrza na wysokościach h_1 , h_2 i h_3 ; przyjmij upraszczające założenie, że objętość balonu nie ulegała zmianie.



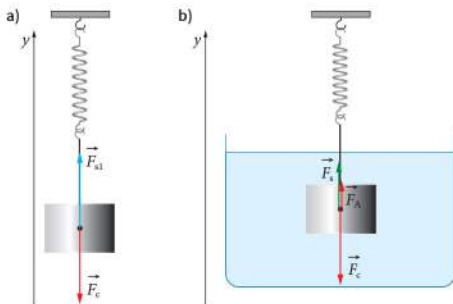
25. Zastosowanie prawa Archimedesa do wyznaczania gęstości

Z tego rozdziału dowiesz się, jak

- wykorzystując prawo Archimedesa, wyznaczyć doświadczalnie gęstość ciała stałego i cieczy,
- działa areometr.

→ **Przypomnij sobie** doświadczalne metody wyznaczania gęstości substancji.

Za pomocą prawa Archimedesa możemy wyznaczyć gęstość ciała stałego lub cieczy. Ciało stałe zawieszamy na siłomierzu i mierzymy wartość ciężaru $\vec{F}_c$ tego ciała (rys. 25.1a).



Rys. 25.1 Obciążnik na sprężynie: w powietrzu (a); zanurzony w cieczy (b)

Następnie zanurzamy je w cieczy²¹ o znanej gęstości ρ (np. w wodzie) i odczytujemy wskazanie F_s siłomierza (rys. 25.1b). Na ciało zanurzone w cieczy działają trzy siły:

- $\vec{F}_c$ – ciężar ciała;
- $\vec{F}_A$ – siła wyporu;
- $\vec{F}_s$ – siła sprężystości, którą sprężyna siłomierza działa na ciało zanurzone w cieczy.

$$\vec{F}_s + \vec{F}_A + \vec{F}_c = \vec{0} \quad F_s + F_A - F_c = 0$$

$$F_s = F_c - F_A \quad \text{czyli} \quad F_s = F_c - \rho g V$$

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki wartość siły, którą ciało działa na sprężynę siłomierza, jest także równa F_s – i tę wartość odczytaliśmy w pomiarze.

²¹ Ciecz musi mieć gęstość mniejszą od gęstości ciała.

Na podstawie danych uzyskanych w doświadczeniu możemy obliczyć objętość V wypartej cieczy, równą objętości zanurzonego w niej ciała:

$$V = \frac{F_c - F_s}{\rho g}$$

Gęstość ciała ρ_x obliczamy z definicji gęstości:

$$\rho_x = \frac{m}{V} = \frac{mg}{F_c - F_s} = \frac{F_c \rho}{F_c - F_s}$$

Wyznaczanie gęstości cieczy

Podobnie można wyznaczyć nieznaną gęstość cieczy (ρ_c). Ciało pomocnicze, które tonie zarówno w wodzie, jak i w badanej cieczy, ważymy trzykrotnie i notujemy wyniki tych pomiarów:

- F_c – wskazanie siłomierza, gdy ciało jestważone w powietrzu;
- $F_{s1} = F_c - \rho_w g V$ – wskazanie siłomierza, gdyważone ciało jest zanurzone w wodzie;
- $F_{s2} = F_c - \rho_c g V$ – wskazanie siłomierza, gdyważone ciało jest zanurzone w badanej cieczy.

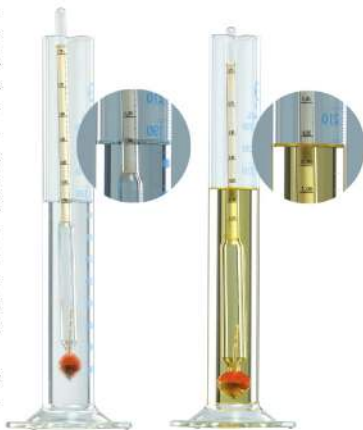
Z każdego z powyższych równań obliczamy objętość ciała pomocniczego V i wyniki przyrównujemy:

$$\frac{F_c - F_{s1}}{\rho_w g} = \frac{F_c - F_{s2}}{\rho_c g} \quad \text{skąd} \quad \rho_c = \frac{F_c - F_{s2}}{F_c - F_{s1}} \rho_w$$

Zwróć uwagę, że w przypadku, gdy objętość ciała pomocniczego jest niewielka, to wynik pomiaru gęstości cieczy wyznaczonej tą metodą jest bardzo niedokładny.

Gęstość cieczy można mierzyć bezpośrednio za pomocą przyrządu zwanego **areometrem**. Areometr to zasklepiiona z obu stron rurka szklana, obciążona w dolnej części substancją o dużej gęstości. W celu dokonania pomiaru zanurzamy przyrząd w badanej cieczy; pływa on w niej w pozycji pionowej. Gęstość cieczy odczytujemy na skali areometru (rys. 25.2). Zgodnie z prawem Archimidesa głębokość zanurzenia tego samego areometru (o niezmiennym ciężarze) w różnych cieczach jest odwrotnie proporcjonalna do ich gęstości.

Wynalezienie areometru przypisuje się Hypatii, filozofce i matematyce greckiej żyjącej w IV wieku naszej ery.

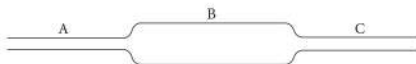


Rys. 25.2 Areometr

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Tętniak

Rysunek 25.3 przedstawia model rurki, której pole przekroju poprzecznego nie jest w każdym miejscu takie samo.



Rys. 25.3

Jeśli przez rurkę przepływa wtłaczana do niej ciecz, to w tym samym czasie t przez dowolnie wybrany przekrój poprzeczny, np. w części A, B i C rurki, musi przepłynąć taka sama objętość cieczy. Oznacza to, że przez wąskie części A i C rurki ciecz płynie z większą szybkością niż w części B.

Informację o ciśnieniu cieczy w kolejnych fragmentach rurki możemy uzyskać na podstawie prawa Bernoulliego. Dla przedstawionej na rysunku 25.3 poziomej rurki prawo to wyraża się wzorem:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const}$$

gdzie:

p – ciśnienie cieczy,

v – szybkość przepływu cieczy,

ρ – gęstość cieczy.

Prawo Bernoulliego można zastosować do układu krwionośnego człowieka. Narządem pompującym krew do naczyń krwionośnych jest serce. Zdarza się, że osłabienie ścianki tętnicy w jakimś miejscu powoduje jej rozdzęcie w tym miejscu i utworzenie się tzw. tętniaka (rys. 25.4).



Rys. 25.4

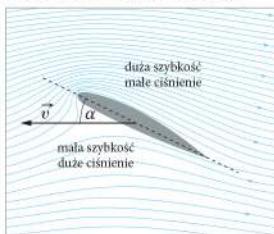
W obszarze tętniaka, czyli w obszarze o dużym przekroju poprzecznym tętnicy, krew płynie wolno. Zgodnie z prawem Bernoulliego ciśnienie krwi na ściany naczynia jest w tym obszarze duże, co może powodować dalsze „puchnięcie” tętniaka i doprowadzić do pęknięcia ścianki tętnicy. To bardzo niebezpieczna sytuacja.



WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Samolot, cz. 2

W wielu podręcznikach i książkach popularnonaukowych powstawanie siły nośnej tłumaczy się za pomocą prawa Bernoulliego.

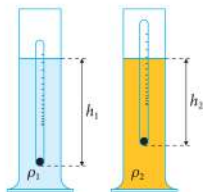


Rys. 25.5

Kształt skrzydła i kąt natarcia powodują, że powietrze nad skrzydłem ma większą szybkość niż pod nim. Zgodnie z prawem Bernoulliego ciśnienie powietrza nad skrzydłem jest mniejsze od ciśnienia powietrza pod skrzydłem (rys. 25.5). Różnica ciśnień jest przyczyną powstawania siły nośnej.

ZADANIA

- Aby wyznaczyć gęstość kości słoniowej, włożono wykonaną z niej kulę bilardową do lekkiej siateczki (której ciężar pomijamy) umożliwiającej zawieszenie kuli na haczyku siłomierza o zakresie do 2,5 N i o dokładności 0,05 N. Kulę zważono w powietrzu oraz w wodzie ($\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$). Zanotowano następujące wskazania siłomierza: $F_c = 2,20 \text{ N}$ i $F_s = 1,10 \text{ N}$.
 - Oblicz gęstość kości słoniowej.
 - Oszacuj bezwzględną i względną niepewność pomiaru gęstości kości słoniowej.
- Ten sam areometr zanurzamy kolejno w cieczach o różnych gęstościach: ρ_1 i ρ_2 (rys. 25.6). Co można powiedzieć:
 - o wartościach sił wyporu, jakimi te ciecze działają na areometr?
 - o gęstościach cieczy?
- W windzie poruszającej się ruchem jednostajnie przyspieszonym w górę zmierzono areometrem gęstość cieczy. Ustal, czy wskazania aerometru będą takie same jak w windzie poruszającej się ruchem jednostajnym. Zapisz i uzasadnij odpowiedź.



Rys. 25.6

CIŚNIENIE HYDROSTATYCZNE

Działanie siły ciężkości

powoduje, że ciecz wypełniającą dolną część naczynia, a ich powierzchnia swobodna jest pozioma i płaska (z wyjątkiem tzw. menisku przy ściankach).

Ciśnienie

Ciśnieniem nazywamy stosunek wartości siły nacisku do pola powierzchni, na którą ta siła działa

$$p = \frac{F_{\text{nacisku}}}{S}$$

Jednostka ciśnienia

Jednostką ciśnienia w SI jest 1 **paskal (Pa)**

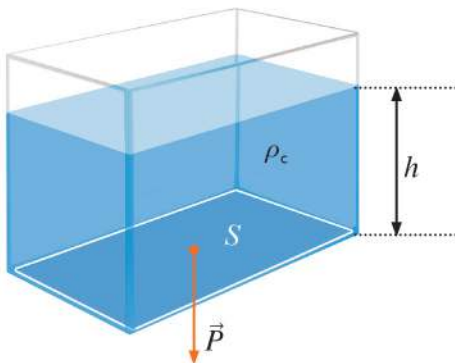
$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$$

Ciśnienie hydrostatyczne

Siłę nacisku, którą ciecz działa na dno i ścianki naczynia oraz na powierzchnie ciał w niej zanurzonych, nazywamy siłą parcia hydrostatycznego $\vec{P}$, a ciśnienie cieczy – CIŚNIENIEM HYDROSTATYCZNYM p .

Ciśnienie hydrostatyczne w danym punkcie jest zależne od wysokości h słupa cieczy, wznoszącego się nad tym punktem, i od gęstości ρ_c cieczy.

$$p = \rho_c h g$$



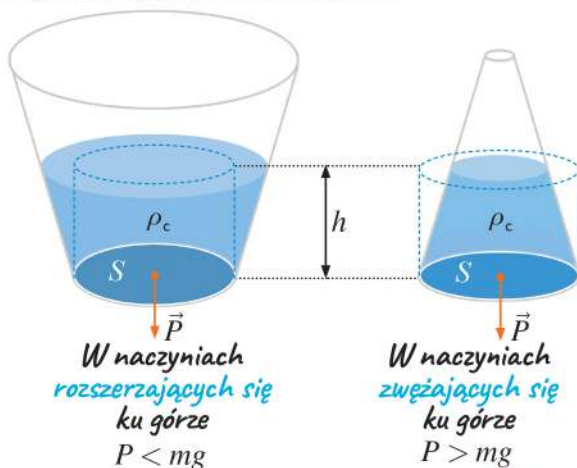
PARCIE HYDROSTATYCZNE

Wartość parcia hydrostatycznego $\vec{P}$ na płaskie dno naczynia o dowolnym kształcie jest równa:

$$P = p \cdot S = \rho_c h g S$$

gdzie S jest polem powierzchni dna.

Jeśli ściany boczne naczynia nie są prostopadłe do jego dna, to wartość siły parcia cieczy na dno (na ogół) nie jest równa wartości jej ciężaru.



Różnica siły parcia i ciężaru cieczy związana jest z działaniem ścianek naczynia na znajdującą się w nim cieczę.

Zjawisko to nazywamy **paradoksem hydrostatycznym**, ponieważ mylnie można byłoby sądzić, że parcie cieczy na dno będzie większe w tym naczyniu, które zawiera więcej cieczy.

PRAWO PASCALA

**Wzrost ciśnienia
spowodowany wywieraniem
na ciecz nacisku
w dowolnym kierunku jest
w każdym miejscu jednakowy.**

Z prawa Pascala
korzystamy w prasach
hydraulicznych,
hamulcach, podnośnikach
hydraulicznych.

PRAWO NACZYŃ POŁĄCZONYCH

**Warunkiem równowagi cieczy
w naczyniach połączonych
jest równość ciśnień hydrostatycznych
(mierzonych na wybranym,
jednakowym poziomie)
we wszystkich naczyniach.**

Z warunku tego wynika, że jeśli
w U-rurce h_1 i h_2 oznaczają wyso-
kości słupów różnych, niemieszają-
cych się cieczy, mierzone od wspól-
nego poziomu ich zetknięcia, to:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

gdzie ρ_1 i ρ_2 są gęstościami tych cieczy.

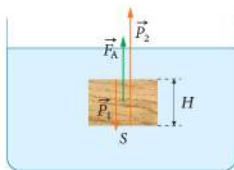
PRAWO ARCHIMEDESA

Wypadkową siłę parcia, którą ciecz działa na ciało w niej zanurzone, nazywamy siłą wyporu.

Na każde ciało zanurzone w cieczy
(lub gazie) działa siła wyporu
o kierunku pionowym, zwrocie
w górę i wartości:

$$F_A = V_{zan} \cdot \rho_c \cdot g$$

gdzie V_{zan} jest objętością zanurzonego
ciała lub jego zanurzonej części.
Ze wzoru wynika, że wartość siły wyporu
jest równa wartości ciężaru wypartej
cieczy.



UWAGA: Siła wyporu
jest zwrócona w górę
tylko wtedy, gdy ciecz
lub gaz otacza ciało lub
jego zanurzoną część ze
wszystkich stron.

WARUNKI PŁYWANIA CIAŁ

Gdy gęstość ciała jest większa od gęstości cieczy – **ciało tonie**.

Gdy gęstość ciała jest równa gęstości cieczy – **ciało pływa**
w cieczy **całkowicie zanurzone**.

Gdy gęstość ciała jest mniejsza od gęstości cieczy – **ciało pływa częściowo zanurzone**, a ciężar ciała o objętości V jest równoważony przez siłę wyporu działającą na zanurzoną część ciała.

$$mg = V_{\text{zan}} \rho_c g$$

$$V \rho = V_{\text{zan}} \rho_c \quad \text{lub} \quad \frac{V_{\text{zan}}}{V} = \frac{\rho}{\rho_c}$$



1. Siły działające
na kulkę
o gęstości
 $\rho > \rho_c$

2. Siły działające
na kulkę
o gęstości
 $\rho = \rho_c$

3. Siły działające
na kulkę
o gęstości
 $\rho < \rho_c$

ZASTOSOWANIE PRAWA ARCHIMEDESA DO WYZNACZANIA GĘSTOŚCI

Za pomocą prawa Archimedeasa możemy wyznaczyć gęstość ciała stałego i cieczy, jeśli znamy ciężar ciała oraz wskazanie siłomierza, gdy ciało jest całkowicie zanurzone w wodzie i w cieczy o nieznannej gęstości.

Bezpośrednio (na podstawie prawa Archimedeasa) można zmierzyć gęstość cieczy za pomocą areometru. Głębokość zanurzenia areometru (o niezmiennym ciężarze) jest odwrotnie proporcjonalna do gęstości cieczy.

1. Dotychczas podczas nauki fizyki poznałeś trzy sposoby wyznaczania gęstości cieczy. **Wymień i opisz każdy z tych sposobów.**

2. Dwa identyczne naczynia są wypełnione po brzegi wodą; w jednym z nich pływa kawałek drewna.

Odpowiedz na pytania sformułowane w częściach 2.1, 2.2 oraz 2.3. Powołaj się na odpowiednie prawa lub zasady fizyczne oraz przedstaw logiczny tok rozumowania uzasadniający twoje odpowiedzi.

2.1. Ustal i zapisz, czy ciężary tych naczyń są różne.

Z naczynia, w którym pływa drewno, odlano trochę wody, po czym szczelnie je zamknięto i częściowo wypompowano z niego powietrze.

2.2. Ustal i zapisz, jak zmieniła się głębokość zanurzenia kawałka drewna.

Naczynie z pływającym drewnem (część 2.2 zadania) ustawiono w spoczywającej windzie.

2.3. Ustal i zapisz, jak zmieni się głębokość zanurzenia drewna, gdy winda będzie się poruszała z przyspieszeniem zwróconym:

- w górę,
- w dół.

3. Ryciny przedstawiają trzy historyczne doświadczenia. Pierwsze wykonał Otto von Guericke (rys. P4.1), drugie – Evangelista Torricelli (rys. P4.2), trzecie – Blaise Pascal (rys. P4.3).



Rys. P4.1



Rys. P4.2



Rys. P4.3

Poniżej wypisano nazwiska wspomnianych trzech uczonych.

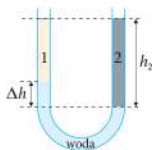
Zapisz w zeszycie przy każdym nazwisku, czego dotyczyło ich odkrycie (krótko opisz odpowiednie doświadczenie oraz zapisz wynikające z niego wnioski).

von Guericke –

Torricelli –

Pascal –

4. Do jednego ramienia U-rurki, w której znajdowało się trochę wody, wlało olej słonecznikowy o gęstości $0,92 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, a do drugiego oliwę o gęstości $0,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, tak że górne poziomy oleju i oliwy się wyrównały (rys. P4.4). Wysokość $h_2 = 15 \text{ cm}$.


Rys. P4.4

- 4.1.** Ustal i zapisz, która ciecz (1 czy 2) jest olejem słonecznikowym, a która oliwą. Powołaj się na odpowiednie zależności fizyczne i określ niezbędne relacje, uzasadniające twoje stwierdzenie.
- 4.2.** Oblicz różnicę Δh poziomów wody.
- 5.** Do końców ramion wagi szalkowej przymocowano nitki, na których powieszono kulki stalową i szklaną o takich samych masach 6,8 g. Obydwie kulki zanurzono całkowicie w naczyniach z wodą tak, by nie dotykały ścianek. Gęstość stali jest równa $7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, a gęstość szkła to $2,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.
- 5.1.** Ustal, która nitka napięta jest siłą o większej wartości. Zapisz i uzasadnij odpowiedź.
- 5.2.** Oblicz różnicę wartości sił, o których mowa w zadaniu 5.1.
- 5.3.** Oblicz, ile razy mniejsza będzie ta różnica, gdy kulki zanurzymy całkowicie w oliwie o gęstości $0,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.
- 5.4.** Ustal i zapisz, czy po zanurzeniu kulek w cieczach zmienia się wartości sił nacisku na dna naczyń. Powołaj się na odpowiednie prawa lub zasady fizyczne uzasadniające twoje stwierdzenie.
- 6.** Fragment marmurowej rzeźby o masie 70 kg transportowano przez jezioro łódką (rys. P4.5).


Rys. P4.5

W przypadku 1 rzeźbę umieszczono w łódce, a w 2 podwieszono ją pod łódką. Rysunek 3 przedstawia łódkę z przewoźnikiem po wyładowaniu rzeźby. Oznaczmy kolejno symbolami V_1 , V_2 , V_3 objętość zanurzonej części łódki w tych przypadkach. Gęstość marmuru to $2,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

- 6.1.** Oblicz, o ile zmaleje głębokość zanurzenia łodzi po zawieszeniu pod nią rzeźby, czyli oblicz różnicę $V_1 - V_2$.
- 6.2.** Oblicz, o ile następnie zmaleje głębokość zanurzenia łodzi po wyładowaniu rzeźby, czyli oblicz różnicę $V_2 - V_3$.

W dotychczasowych rozważaniach pominęliśmy zmiany poziomu wody w jeziorze. Załóżmy, że rzeźba, która do tej pory znajdowała się w łódce, została wrzucona do wody i utonęła.

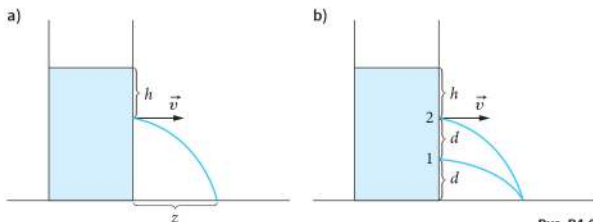
6.3. Określ, jak zmieni się poziom wody w jeziorze (podniesie się / nie zmieni się / obniży się) po zatonięciu wyrzuconej rzeźby. Zapisz i uzasadnij odpowiedź. Powołaj się na odpowiednie prawa lub zależności fizyczne i określ niezbędne relacje, uzasadniające twoje stwierdzenie.

7. Ciężar naszyjnika wykonanego ze stopu srebra i miedzi ma wartość 1,00 N. Po całkowitym zanurzeniu naszyjnika w wodzie siłomierz wskazuje 0,90 N. Gęstość srebra to $\rho_{Ag} = 10,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, a gęstość miedzi $\rho_{Cu} = 8,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Przyjmij do obliczeń wartość przyspieszenia ziemskiego równą 10 m/s^2 .

7.1. Oblicz masę i objętość naszyjnika oraz gęstość stopu ρ użytego do jego wykonania (objętość stopu jest sumą objętości srebra i miedzi).

7.2. Wyprowadź wzory, na podstawie których, znając gęstości ρ_{Ag} , ρ_{Cu} oraz ρ , można uzyskać odpowiedź na pytanie, jaką część masy naszyjnika stanowi masa zawartego w nim srebra, a jaką część – masa miedzi. Oblicz te części i wyraż je w ułamkach dziesiętnych oraz w procentach w zaokrągleniu do dwóch cyfr znaczących.

8. Można wykazać, że szybkość wypływu cieczy z naczynia przez otwór, nad którym wznosi się słup cieczy o wysokości h , jest równa $\sqrt{2 \cdot g \cdot h}$. Jeśli otwór znajduje się w pionowej ścianie bocznej naczynia, to strumień cieczy jest taki jak na rysunku P4.6a.



Rys. P4.6

W pionowej bocznej ścianie naczynia na rysunku P4.6b znajdują się dwa otwory, pierwszy w odległości d , a drugi w odległości $2 \cdot d$ od podstawy.

8.1. Oblicz, jaka musiałaby być wysokość h poziomu wody w naczyniu nad drugim otworem, aby zasięgi strumieni wypływających z obu otworów były jednakowe.

8.2. Ustal i zapisz, jak zmieniają się te zasięgi, gdy wysokość h maleje. Powołaj się na odpowiednie zależności i określ niezbędne relacje, uzasadniające twoje stwierdzenie.

8.3. Ustal i zapisz, który zasięg byłby większy i ile razy, gdyby wysokość h była równa $2 \cdot d$. Wykonaj niezbędne obliczenia, uzasadniające twoje stwierdzenie.

ELEKTROWNIA ŻAR



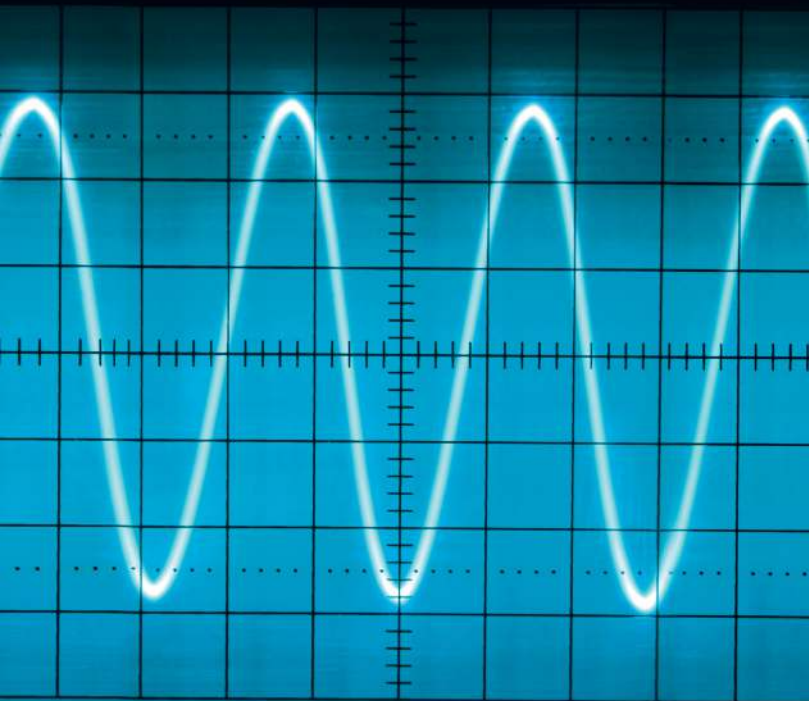
Elektrownia szczytowo-pompowa Porąbka-Żar zlokalizowana jest w Beskidzie Małym. Główną funkcją elektrowni jest „magazynowanie energii” pochodzącej z jej nadprodukcji w mało dynamicznych elektrowniach konwencjonalnych. Nadmiar wyprodukowanej przez te elektrownie energii elektrycznej służy do pompowania wody z Jeziora Międzybrodzkiego do zbiornika na górze Żar. Podczas zwiększonego zapotrzebowania na energię elektryczną woda jest spuszczana przez sztolnie upadowe, pokonuje 432-metrową różnicę poziomów i jest przepuszczana przez cztery generatory prądu elektrycznego o mocy 127 MW każdy. Przed każdym generatorem zamontowano zawór o średnicy 1,65 metra, który jest otwierany w odpowiedniej chwili. Pojemność zbiornika na szczycie góry Żar pozwala na produkcję energii elektrycznej przez cztery godziny. Sprawność cyklu (wypompowywania i generowania energii) sięga 75 %.

ZADANIA

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	W elektrowni szczytowo-pompowej energię magazynuje się przez przetwarzanie energii elektrycznej w energię potencjalną wody	P	F
2.	W elektrowni szczytowo-pompowej 75 % energii jest rozpraszane.	P	F
3.	Ciśnienie hydrostatyczne wywierane na zawór przez słup cieczy jest tym większe, im większa jest średnica zaworu.	P	F

2. Oblicz ciśnienie hydrostatyczne i wartość siły parcia wody na zawór generatora.
3. Oblicz minimalną objętość zbiornika wody na górze Żar, przy założeniu, że zmagazynowana energia pozwala na pracę generatorów przez cztery godziny.
4. Oblicz minimalną ilość przepływu wody w czasie przez jeden z generatorów podczas pracy z pełną mocą. Wielkość tę wyraż w m^3/s .



NIEPEWNOŚCI POMIAROWE
DOŚWIADCZENIA
NIEZBĘDNIK MATEMATYCZNY

1. Pomiary bezpośrednie (proste)

Fizycy opisują otaczający nas świat za pomocą formułowanych praw fizycznych, którym podlegają obserwowane zjawiska i procesy. Do słownego lub matematycznego zapisu tych praw stosuje się wielkości fizyczne. Wielkości fizyczne to cechy lub właściwości (obiektów, zjawisk, procesów), które można mierzyć i wyrażać ilościowo. Należą do nich: masa, czas, temperatura, natężenie prądu, współczynnik załamania światła, przyspieszenie grawitacyjne itp. Do pomiaru niektórych z tych wielkości skonstruowano odpowiednie przyrządy. Na przykład masę mierzymy za pomocą wagi, czas mierzymy zegarkiem lub stoperem, temperaturę – termometrem, natężenie prądu – amperomierzem. Są to tzw. **pomiary proste, bezpośrednie**.

Pomiar bezpośredni polega na porównaniu wielkości mierzonej ze wzorcem przyjętym jako jednostka. Wzorce wielu wielkości fizycznych zmieniają się w miarę rozwoju nauki. Przykładem mogą być zmiany wzorców długości. W odległych czasach jednostki długości wywodzono od przeciętnych rozmiarów ciała ludzkiego (cał był długością ostatniej kości kciuka, stopa – długością stopy, jard – długością ręki dorosłego mężczyzny, łokieć – długością przedramienia dorosłego człowieka). Nie były one ze sobą porównywalne (łokieć łokciowi nierówny). Ustalono zatem uniwersalną miarę długości – metr ($\frac{1}{10\,000\,000}$ część długości ćwiartki południka zerowego). Długość wzorcowa została zaznaczona na modelu (wykonanym ze stopu platyny i irydu), który przechowywany jest w Sèvres (czytaj: Sewr) pod Paryżem. Obecnie stosuje się inny wzorec metra – jest to droga przebyta w próżni przez światło w czasie $\frac{1}{299\,792\,458}$ sekundy. Podobnym udoskonaleniom podlegał również np. wzorec czasu.

Wynikiem porównania mierzonej wielkości ze wzorcem jest liczba wyrażona w odpowiednich jednostkach, np. 3 mm, 2,8 kg.

Błędy grube i błędy systematyczne

Podczas wykonywania pomiaru eksperymentator może popełnić pomyłkę, np. źle zapisać wynik (zamiast 1,1 mm zapisać 11 mm) czy źle odczytać zakres mierników elektrycznych. Mówimy wtedy, że popełnił **błąd gruby**. Wynik pomiaru obarczony błędem grubym należy odrzucić.

PRZYKŁAD 1

Błąd gruby

Pięciu uczniów odczytywało natężenie prądu elektrycznego płynącego przez żarówkę. Do pomiaru wykorzystywali amperomierz wskazówkowy o dwóch zakresach pomiarowych: 150 mA i 300 mA. Otrzymali następujące wyniki:

uczeń I	$I_1 = 50$ mA
uczeń II	$I_1 = 50$ mA
uczeń III	$I_1 = 55$ mA
uczeń IV	$I_1 = 100$ mA
uczeń V	$I_1 = 55$ mA

Wynik uzyskany przez ucznia IV mocno odbiegał od pozostałych. W dyskusji o otrzymanych wynikach okazało się, że uczeń ten do odczytu wyniku użył skali odpowiadającej zakresowi miernika 300 mA, podczas gdy pozostali uczniowie poprawnie (zgodnie ze sposobem podłączenia miernika) korzystali ze skali odpowiadającej zakresowi 150 mA. Wynik pomiaru wykonanego przez ucznia IV jest zatem obciążony błędem grubym i należy go odrzucić, a pomiar ewentualnie powtórzyć i do odczytu użyć skali odpowiadającej zakresowi 150 mA.

Innym rodzajem błędu jest niewielkie, ale systematyczne zawyżanie lub zaniżanie wyników pomiarów, którego źródłem mogą być: przyrządy pomiarowe (np. „rozciągnięta” taśma miernicza, przesunięta skala termometru), warunki, w których przeprowadzamy pomiar (np. zbyt wysoka temperatura), metoda pomiarowa (np. pomijanie masy naczynia podczas ważenia cieczy), nieuwzględnienie czynników wpływających na wynik (np. wilgotności, ciśnienia atmosferycznego) lub eksperymentator (np. systematyczne zbyt późne zatrzymywanie stopera). Takie błędy nazywamy **błędami systematycznymi**. Identyfikowanie (rozpoznawanie) wyników obciążonych błędami systematycznymi nie jest jednak łatwe.

PRZYKŁAD 2

Błąd systematyczny

Uczniowie wyznaczyli gęstość substancji ρ , z której wykonano plastikową kulkę. Korzystali z definicji gęstości $\rho = \frac{m}{V}$ oraz ze wzoru na objętość kuli $V = \frac{1}{6}\pi d^3$. Średnicę d kulki mierzyli za pomocą suwmiarki. Otrzymali następujące wyniki:

Średnica d kulki, mm		
Uczeń I	Uczeń II	Uczeń III
30,1	29,0	30,0
30,0	29,1	29,9
30,1	29,0	30,0

Podczas dyskusji o otrzymanych wynikach okazało się, że uczeń II systematycznie znacznie mocniej dociskał ramiona suwmiarki do kulki niż pozostali uczniowie, co powodowało jej deformację. Jego wyniki są obciążone błędem systematycznym.

Jak rozpoznawać błędy grube i systematyczne? Podstawowe rady są następujące:

- eksperyment powinno wykonywać kilku niezależnych eksperymentatorów;
- do wykonywania pomiarów należy używać kilku przyrządów danego rodzaju;
- jeśli to możliwe, do wyznaczania danej wielkości zaleca się stosowanie różnych metod pomiarowych (np. wartość przyspieszenia ziemskiego można wyznaczyć na podstawie pomiaru czasu swobodnego spadania ciała ze znanej wysokości lub na podstawie pomiaru okresu drgań i długości wahadła matematycznego).

Wyniki pomiarów obarczone błędem grubym należy odrzucić. Wyniki pomiarów obarczone rozpoznany błędem systematycznym możemy również odrzucić lub wprowadzić do nich poprawkę (kompensującą błąd systematyczny), jeśli wartość błędu znamy.

2. Niepewności pomiarów bezpośrednich (prostych)

Wynik każdego pomiaru jest uzależniony od bardzo wielu czynników. Prawidłowo wykonany pomiar powinien uwzględniać najważniejsze z nich. Przede wszystkim należy wyeliminować lub kontrolować te czynniki, które mogą prowadzić do błędów grubych lub systematycznych, np. zmienność temperatury otoczenia przy pomiarze długości metalową taśmą mierniczą (zmiana temperatury powoduje zmianę długości taśmy) lub przy pomiarze oporu przewodnika (opór przewodnika zależy od jego temperatury).

Wśród czynników wpływających na wynik pomiaru zazwyczaj są takie, których wyeliminowanie jest bardzo trudne lub wręcz niemożliwe. Wpływ tych czynników możemy jedynie minimalizować. Z istnienia wielu czynników wpływających na wynik pomiaru eksperymentator może sobie nawet nie zdawać sprawy.

Wpływające na wynik pomiaru czynniki można podzielić na związane:

- z mierzonym obiektem – np. statystyczny charakter rozpadu promieniotwórczego wpływa na wynik pomiaru liczby cząstek emitowanych w kolejnych, jednakowych odstępach czasu z preparatu promieniotwórczego;
- z przyrządem pomiarowym – np. tarcie w łożyskach wskazówek mierników elektrycznych wpływa na wynik pomiaru wielkości elektrycznych, a temperatura otoczenia może mieć wpływ na działanie miernika cyfrowego i w konsekwencji na wynik pomiaru wykonanego takim miernikiem;
- z eksperymentatorem wykonującym pomiar – np. wynik pomiaru czasu (za pomocą stopera) trwania zjawiska zależy od czasu reakcji eksperymentatora (włączenie i zatrzymanie stopera).

Czynniki te mogą powodować przypadkowe zwiększenie lub zmniejszenie wartości otrzymanej w wyniku pomiaru (nazywane czasem błędem przypadkowym). W takiej sytuacji wyniki kolejnych pomiarów danej wielkości fizycznej są przypadkowo zaniżone lub zawyżone. Właśnie z tego powodu żadnej wielkości fizycznej nie możemy zmierzyć dokładnie. Możemy wyznaczyć jedynie przedziały, w których wartości mierzonych wielkości fizycznych są najprawdopodobniej zawarte. Mówimy, że **wynik pomiaru jest zawsze obarczony niepewnością pomiarową**.

Wyniki pomiarów zapisujemy w postaci $x \pm \Delta x$, gdzie:

x – najbardziej prawdopodobna wartość wielkości mierzonej,

Δx – niepewność pomiaru.

Zapis taki oznacza, że wartość mierzonej wielkości fizycznej jest najprawdopodobniej²² zawarta w przedziale $\langle x - \Delta x, x + \Delta x \rangle$.

²² O powiązaniu sposobu obliczania niepewności z prawdopodobieństwem, z jakim wyniki pomiarów zawarte są w przedziale $\langle x - \Delta x, x + \Delta x \rangle$, będziemy mówili w klasie trzeciej.

PRZYKŁAD 3

Zapis wyniku pomiaru

Po pomiarze długości L korytarza szkolnego podano wynik $L = (15,35 \pm 0,05)$ m. Oznacza to, że długość L jest najprawdopodobniej większa lub równa 15,3 m, a mniejsza lub równa 15,4 m.

Odstępstwa wyników pomiarów od wartości najbardziej prawdopodobnych nie wynikają z błędnego postępowania osób wykonujących pomiary. Ich źródłem (a w konsekwencji źródłem niepewności pomiarowej) są:

- naturalna niedoskonałość zmysłów człowieka;
- niedoskonałość przyrządów pomiarowych, którymi posługujemy się w trakcie wykonywania pomiarów;
- naturalna zmienność mierzonych obiektów;
- niemożność uwzględnienia wszystkich czynników wpływających na wynik pomiaru.

Niepewności pomiarowe są naturalnym elementem procesu wykonywania pomiarów; nie ma możliwości ich wyeliminowania. Możemy jedynie dążyć do ich minimalizacji.

Jeśli w wyniku kilkakrotnie powtórzonego pomiaru uzyskujemy takie same wartości lub wartości różniące się nie więcej niż o rozdzielczość przyrządu (**rozdzielczością przyrządu** nazywamy różnicę między dwiema najbliższymi wartościami skali pomiarowej, tzn. działkę elementarną dla przyrządów wskazówkowych lub „przeskok” ostatniej cyfry na skali dla przyrządów cyfrowych), to przypadkowy wpływ wszystkich nieuwzględnionych czynników na wynik pomiaru jest mniejszy niż wartość rozdzielczości użytego przyrządu pomiarowego. Niepewność pomiaru zdeterminowana jest w takiej sytuacji rozdzielczością przyrządu.

Za miarę niepewności pomiarów prostych możemy przyjąć w takiej sytuacji **rozdzielczość przyrządu pomiarowego** (niepewność taka jest nazywana czasem niepewnością systematyczną). Na przykład niepewność pomiaru wykonanego linijką wynosi zazwyczaj 1 mm. Za wartość wielkości mierzonej przyjmujemy wartość średniej arytmetycznej x_{sr} wyników x_i wykonanych pomiarów (po zaokrągleniu):

$$x_{\text{sr}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Wynik pomiaru wielkości fizycznej X zapiszemy w takim przypadku następująco:

$$x_{\text{sr}} \pm \Delta x$$

Niepewność Δx jest **niepewnością graniczną** – wszystkie uzyskane wyniki pomiarów należą do przedziału $(x_{\text{sr}} - \Delta x, x_{\text{sr}} + \Delta x)$.

PRZYKŁAD 4

Zapis wyniku serii pomiarów

Podczas lekcji uczniowie wyznaczali pewną wielkość fizyczną. Potrzebna im była do tego wartość ciśnienia atmosferycznego. Kilku uczniów odczytało ją na znajdującym się w klasie barometrze, którego działka elementarna wynosiła 1 hPa. Uzyskali następujące wyniki:

p , hPa	1021	1021	1022	1021	1022
-----------	------	------	------	------	------

Wszystkie uzyskane wyniki różnią się od siebie nie więcej niż o wartość działki elementarnej barometru. W tej serii pomiarowej przypadkowy wpływ różnych czynników na wynik pomiaru jest mniejszy niż działka elementarna przyrządu. Za wartość niepewności przyjmujemy więc działkę elementarną barometru.

Wartość średnia otrzymanych wyników wynosi $p_{\text{sr}} = 1021,4$ hPa. Wynik wykonanego przez uczniów pomiaru ciśnienia atmosferycznego wynosi zatem (po zaokrągleniu) $p = (1021 \pm 1)$ hPa.

Warto wiedzieć i pamiętać, że dla wielu przyrządów pomiarowych zarówno analogowych, jak i cyfrowych przyjęcie rozdzielczości jako miary niepewności granicznej pomiarów wykonywanych tymi przyrządami powoduje otrzymanie zaniżonych wartości niepewności. Więcej dowiesz się o tym w podręczniku do klasy trzeciej.

Jeśli w wyniku kolejnych pomiarów danej wielkości fizycznej otrzymujemy takie same wyniki, to możemy dążyć do polepszenia jakości pomiaru dzięki zmniejszeniu wartości niepewności poprzez zastosowanie bardziej precyzyjnych (o lepszej rozdzielczości) przyrządów pomiarowych, np. suwmiarki zamiast linijki.

W przypadku zastosowania dostatecznie precyzyjnych (o dostatecznie małej działce elementarnej) przyrządów pomiarowych wielokrotne pomiary danej wielkości fizycznej dają wyniki o różnych wartościach. Ujawnia się w ten sposób przypadkowy wpływ na wyniki pomiarów różnych omawianych powyżej czynników, którego już nie można pominąć. Uzyskujemy rozrzut wyników.

Za najbardziej prawdopodobną wartość wielkości mierzonej w takim przypadku można przyjąć, co pokażemy w podręczniku do klasy trzeciej, wartość średniej arytmetycznej x_{sr} wyników x_i wykonanych pomiarów:

$$x_{\text{sr}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Do wyznaczenia jej niepewności jako miary rozrzutu otrzymanych wyników stosuje się metody statystyczne. Prowadzą one do często żmudnych i czasochłonnych obliczeń. Dlatego proponujemy, by na obecnym etapie w warunkach szkolnych za niepewność wartości średniej arytmetycznej przyjąć (szacunkowo) połowę różnicy między największą i najmniejszą z otrzymanych wartości mierzonej wielkości fizycznej:

$$\Delta x_{\text{sr}} = \frac{1}{2} (x_{\text{max}} - x_{\text{min}})$$

Ostatecznie:

$$x = x_{\text{sr}} \pm \Delta x_{\text{sr}}$$

Należy pamiętać, że:

- niepewności pomiarowe zaokrąglamy zawsze „w górę”;
- w niepewności zachowujemy tylko jedną cyfrę znaczącą (przy dużej liczbie pomiarów – dwie), a w wyniku pomiaru pozostawiamy tyle cyfr znaczących, by pozycja ostatniej cyfry znaczącej była zgodna z pozycją cyfry znaczącej w niepewności pomiarowej;
- w wyniku pomiaru pozostawiamy tyle cyfr znaczących po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym, ile jest ich w niepewności.

PRZYKŁAD 5a

Zaokrąglanie wyniku pomiaru

W tabeli zapisano wyniki pomiarów pewnych wielkości fizycznych (bez podania ich jednostek). W pierwszej kolumnie podano wartość średnią serii wyników, w drugiej kolumnie – oszacowaną niepewność pomiaru wynikającą z rozrzutu wyników, a w trzeciej kolumnie – końcową wartość mierzonej wielkości fizycznej. Sprawdź, czy końcowy wynik pomiaru został zapisany zgodnie z powyższymi regułami.

Wartość x_{sr}	Niepewność Δx_{sr}	Zapis wyniku pomiaru $x \pm \Delta x$
12,3643	0,02	12,36 $\pm$ 0,02
1859	0,28	1859,0 $\pm$ 0,3
2232	10	2230 $\pm$ 10
0,000279	0,000026	0,00028 $\pm$ 0,00003

PRZYKŁAD 5b

Zaokrąglanie wyniku pomiaru

Uczniowie wyznaczają masę jednego z substratów reakcji chemicznej za pomocą wagi laboratoryjnej. Najmniejszy odważnik w zestawie ma masę 0,01 g. Jest to więc miara niepewności systematycznej wykonywanego przez uczniów pomiaru masy. Uczniowie wykonali dziesięć pomiarów (powtórzyli ważenie dziesięciokrotnie) i wyniki zapisali w tabeli.

Nr pomiaru	Masa, g	Nr pomiaru	Masa, g
1	10,10	6	10,14
2	10,13	7	10,13
3	10,12	8	10,10
4	10,11	9	10,12
5	10,12	10	10,14

Uzyskane w pomiarach wyniki różnią się od siebie o więcej niż wartość działki elementarnej, którą dla tej wagi jest masa najmniejszego odważnika. Najlepszym przybliżeniem najbardziej prawdopodobnego wyniku jest więc średnia arytmetyczna uzyskanych przez uczniów wartości, która wynosi $m_{\text{śr}} = 10,121 \text{ g}$.

Niepewność wyznaczenia masy możemy oszacować za pomocą wzoru:

$$\Delta x_{\text{śr}} = \frac{1}{2}(x_{\text{max}} - x_{\text{min}})$$

W tym przypadku jest to:

$$\Delta m_{\text{śr}} = \frac{1}{2}(m_{\text{max}} - m_{\text{min}}) = \frac{1}{2}(10,14 \text{ g} - 10,10 \text{ g}) = 0,02 \text{ g}$$

Niepewność jest więc większa od wartości działki elementarnej przyrządu.

Po zaokrągleniu zapisujemy wynik pomiaru:

$$m = (10,12 \pm 0,02) \text{ g}$$

Często wykonywanym w praktyce szkolnej pomiarem jest pomiar czasu za pomocą ręcznego stopera. Wartość działki elementarnej szkolnych stoperów wynosi zazwyczaj 0,01 s. Stoper włącza i wyłącza eksperymentator, a czas reakcji eksperymentatora na bodziec zależy od wielu różnych czynników i jest znacznie większy od 0,01 s. Czas reakcji eksperymentatora wpływa więc istotnie na wynik pomiaru wykonywanego za pomocą stopera ręcznego. Do celów szacunkowych możemy przyjąć, że niepewność pomiaru za pomocą stopera ręcznego jest równa czasowi reakcji eksperymentatora, który zazwyczaj wynosi 0,2 s.

Omawiane powyżej niepewności są **niepewnościami bezwzględnymi**. Niepewność bezwzględna umożliwia określenie przedziału, w którym zawiera się wartość wyznaczanej wielkości fizycznej, nie charakteryzuje jednak jakości pomiaru. Na przykład niepewność 1 mm dla wyniku pomiaru długości 10 mm wskazuje na gorszą jakość pomiaru niż w przypadku niepewności 1 mm dla wyniku 1000 mm.

Aby określić jakość pomiaru, posługujemy się często **niepewnością względną** zdefiniowaną jako:

$$w = \frac{\Delta x}{|x|}$$

lub **niepewnością względną procentową**:

$$w = \frac{\Delta x}{|x|} \cdot 100 \%$$

PRZYKŁAD 6

Niepewność względna

W wyniku pomiaru wydłużenia x sprężyny otrzymano wartość $x = (50 \pm 2) \text{ mm}$.

Niepewność względna w tego pomiaru wynosi: $w = \frac{2}{50} = 0,04$

Niepewność względna procentowa: $w = \frac{2}{50} \cdot 100 \% = 4 \%$

Jak w praktyce wykonywać pomiary i szacować niepewności wielkości mierzonych bezpośrednio?

1. Zastanów się, jaki wpływ na wynik planowanego pomiaru i jego dokładność mają warunki zewnętrzne, metoda pomiarowa i użyte przyrządy pomiarowe. Wybierz warunki optymalne, tzn. takie, dla których wykonane pomiary są obciążone najmniejszymi niepewnościami. Wybierz najlepszą metodę pomiarową i przyrządy pomiarowe.
2. Wykonaj kilkakrotnie pomiar mierzonej wielkości.
3. Sprawdź, czy wśród uzyskanych wyników pomiarów znajdują się takie, których wartości bardzo różnią się od innych. Zastanów się, czy może to być wynikiem popełnionego błędu, np. złego odczytu skali miernika lub nieuwzględnienia istotnych dla pomiaru warunków, jak choćby nagłego wzrostu temperatury otoczenia itp. Jeśli tak, to uznaj, że wyniki te są obciążone błędem grubym i odrzuć je lub powtórz serię pomiarową.

Wyniki pomiarów odrzucamy tylko wtedy, gdy jesteśmy całkowicie pewni, że podczas pomiaru popełniliśmy błąd.

4. Sprawdź, czy uzyskane wyniki różnią się od siebie o więcej niż wartość działki elementarnej przyrządu użytego do pomiaru. Jeśli nie, to jako wartość x wielkości mierzonej X przyjmij wartość średniej arytmetycznej x_{sr} uzyskanych wyników, a jako miarę niepewności Δx wartości wielkości mierzonej przyjmij działkę elementarną stosowanego przyrządu pomiarowego.
5. Jeśli uzyskasz statystyczny rozrzut wyników (wyniki różniące się o więcej niż rozdzielczość użytego przyrządu pomiarowego), to jako wartość x wielkości mierzonej X przyjmij wartość średniej arytmetycznej x_{sr} uzyskanych wyników, a jako miarę (oszacowanie) jej niepewności przyjmij Δx_{sr} – połowę różnicy między największą i najmniejszą z otrzymanych wartości mierzonej wielkości fizycznej.
6. Ostatecznie wynik pomiaru przedstaw w postaci (należy pamiętać o zaokrągleniu wartości wielkości mierzonej i jej niepewności oraz o pozostawieniu odpowiedniej liczby cyfr znaczących):

$$x \pm \Delta x$$

7. Aby określić jakość pomiaru, można podać niepewność względną lub niepewność względną procentową.

3. Niepewności pomiarów pośrednich (złożonych) i ich szacowanie

Powyżej omówione zostały sposoby szacowania niepewności wielkości mierzonych bezpośrednio. Jednakże jest wiele wielkości fizycznych, których nie można wyznaczyć w pomiarze bezpośrednim (prostym), gdyż nie istnieją odpowiednie przyrządy pomiarowe (lub ich nie mamy). Wielkości te wyznaczamy pośrednio, dzięki wykorzystaniu ich związku z innymi wielkościami fizycznymi, które można zmierzyć bezpośrednio.

Na przykład, aby wyznaczyć wartość przyspieszenia ziemskiego g , możemy zmierzyć długość l i okres drgań T wahadła matematycznego, a następnie obliczyć wartość g z zależności okresu drgań T wahadła od jego długości l i przyspieszenia ziemskiego g :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Opór R przewodnika możemy wyznaczyć na podstawie pomiaru napięcia U między jego końcami oraz natężenia I prądu płynącego przez ten przewodnik, jeśli skorzystamy z prawa Ohma: $I = \frac{U}{R}$.

Taki sposób pomiaru wielkości fizycznej nazywamy **pomiarem złożonym** lub **pośrednim** .

Wartość wyznaczonej pośrednio wielkości fizycznej $Z = f(X, Y, \dots)$ jest funkcją wartości wyników pomiarów bezpośrednich.

$$z = f(x, y, \dots)$$

Niepewność wielkości wyznaczonej pośrednio jest zależna od niepewności wielkości mierzonych bezpośrednio. Obliczanie wartości oraz ich niepewności dla wielkości Z mierzonych pośrednio omówimy w podręcznikach do kolejnych klas. Teraz zajmijmy się przydatną w praktyce prostą metodą ich oszacowania.

Oszacujemy niepewność maksymalną pomiaru pośredniego na przykładzie wyznaczenia pola powierzchni prostokątnego stołu.

PRZYKŁAD 7

Szacowanie niepewności pomiaru pośredniego (złożonego)

Dysponujemy przmiarem krawieckim, za pomocą którego mierzymy długość a i szerokość b stołu. Otrzymujemy wyniki:

długość $a = (101,0 \pm 0,5)$ cm

szerokość $b = (60,0 \pm 0,5)$ cm

Obliczamy pole P powierzchni stołu: $P = a \cdot b = 101 \text{ cm} \cdot 60 \text{ cm} = 6060 \text{ cm}^2$ i wartość możliwie największą $P_{\max}$ oraz możliwie najmniejszą $P_{\min}$, jaka wynika z pomiaru a i b :

$$P_{\max} = (a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) \quad P_{\min} = (a - \Delta a) \cdot (b - \Delta b)$$

Pole powierzchni P zawiera się w przedziale $\langle P_{\min}, P_{\max} \rangle$, gdzie:

$$P_{\max} = 101,5 \text{ cm} \cdot 60,5 \text{ cm} = 6140,75 \text{ cm}^2$$

$$P_{\min} = 100,5 \text{ cm} \cdot 59,5 \text{ cm} = 5979,75 \text{ cm}^2$$

Wynik $P_{\max}$ odbiega od P o $80,75 \text{ cm}^2$.

Wynik $P_{\min}$ odbiega od P o $80,25 \text{ cm}^2$.

Jako miarę niepewności przyjmujemy większą z wartości różnic $P_{\max} - P$ oraz $P - P_{\min}$.

Wynik zapisujemy w postaci:

$$P = (6060 \pm 90) \text{ cm}^2$$

(niepewność zaokrąglamy „w górę”).

Zastosowana w powyższym przykładzie **metoda szacowania niepewności pomiarowych pomiaru złożonego** jest nazywana **metodą najmniej korzystnego przypadku** (NKP). Umożliwia ona znalezienie takiego Δz , że w przedziale $\langle z - \Delta z, z + \Delta z \rangle$ znajdują się wszystkie możliwe wartości z , gdy x jest z przedziału $\langle x - \Delta x, x + \Delta x \rangle$, y z przedziału $\langle y - \Delta y, y + \Delta y \rangle$ itd. Symbolami: $x \pm \Delta x$, $y \pm \Delta y$, ... oznaczamy tu, a także w dalszej części tego rozdziału, wyniki pomiarów bezpośrednich wraz z niepewnościami.

Poniżej przedstawimy zastosowanie metody NKP dla wybranych typów zależności między wielkością $Z = f(X, Y)$, wyznaczaną w wyniku pomiaru złożonego, a wielkościami X, Y mierzonymi bezpośrednio:

$$Z = aX \quad Z = X + Y \quad Z = X - Y \quad Z = XY \quad Z = \frac{Y}{X}$$

gdzie: $a > 0$, $a = \text{const}$.

Rozważymy następujące przypadki:

1. Zależność typu $Z = aX$

$$z_{\max} = a(x + \Delta x) = ax + a\Delta x$$

$$z_{\min} = a(x - \Delta x) = ax - a\Delta x$$

więc:

$$z = ax \quad \Delta z = \frac{1}{2}(z_{\max} - z_{\min}) = a\Delta x \quad (1)$$

2. Zależność typu $Z = X + Y$

$$z_{\max} = (x + \Delta x) + (y + \Delta y) = (x + y) + (\Delta x + \Delta y)$$

$$z_{\min} = (x - \Delta x) + (y - \Delta y) = (x + y) - (\Delta x + \Delta y)$$

więc:

$$z = x + y \quad \Delta z = \Delta x + \Delta y \quad (2)$$

3. Zależność typu $Z = X - Y$

$$z_{\max} = (x + \Delta x) - (y - \Delta y) = (x - y) + (\Delta x + \Delta y)$$

$$z_{\min} = (x - \Delta x) - (y + \Delta y) = (x - y) - (\Delta x + \Delta y)$$

więc:

$$z = x - y \quad \Delta z = \Delta x + \Delta y \quad (3)$$

4. Zależność typu $Z = XY$, dla $x > 0$ i $y > 0$

$$z_{\max} = (x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

$$z_{\min} = (x - \Delta x)(y - \Delta y) = xy - y\Delta x - x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

więc:

$$z = xy \quad \Delta z = x\Delta y + y\Delta x$$

lub po podzieleniu obu stron równości przez xy :

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \quad (4)$$

5. Zależność typu $Z = \frac{Y}{X}$, dla $x > 0$ i $y > 0$

$$z_{\max} = \frac{y + \Delta y}{x - \Delta x}$$

$$z_{\min} = \frac{y - \Delta y}{x + \Delta x}$$

więc:

$$z = \frac{y}{x} \quad \Delta z = \frac{1}{2} \left(\frac{y + \Delta y}{x - \Delta x} - \frac{y - \Delta y}{x + \Delta x} \right) = \frac{x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot y}{x^2 - (\Delta x)^2}$$

Jeśli pominiemy $(\Delta x)^2$ jako bardzo małe w porównaniu z x^2 , to możemy zapisać, że:

$$\Delta z = \frac{\Delta y}{x} + \frac{y \Delta x}{x^2}$$

lub po podzieleniu obu stron równości przez $\frac{y}{x}$:

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \quad (5)$$

Ogólnie dla zależności typu $Z = \beta X^{\alpha_x} \cdot Y^{\alpha_y} \cdot \dots$ niepewność względna w wynosi:

$$w = \frac{\Delta z}{|z|} = |\alpha_x| \frac{\Delta x}{|x|} + |\alpha_y| \frac{\Delta y}{|y|} + \dots \quad (6)$$

Możemy to przeczytać następująco: **niepewność względna iloczynu lub ilorazu dowolnej liczby wielkości fizycznych jest równa sumie niepewności względnych tych wielkości pomnożonych przez wartości bezwzględne wykładników potęg, w jakich występują te wielkości.**

PRZYKŁAD 8

Szacowanie niepewności pomiaru pośredniego (złożonego)

Wartość g przyspieszenia ziemskiego możemy wyznaczyć na podstawie wyniku pomiaru długości $l \pm \Delta l$ i okresu drgań $T \pm \Delta T$ wahadła oraz związku:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

czyli:

$$g = 4\pi^2 l T^{-2}$$

Niepewność względna wartości g wyznaczanej tą metodą wynosi:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T}{T}$$

Jest to zależność typu $Z = X^{\alpha_x} \cdot Y^{\alpha_y}$, więc niepewność Δz wartości wielkości fizycznej Z wyznaczonej w pomiarze pośrednim zależy od niepewności Δx , Δy wartości wielkości X , Y , z którymi jest ona związana, mierzonych w pomiarze bezpośrednim. Niepewności Δx , Δy wartości x , y wnoszą, zazwyczaj różny, wkład do niepewności Δz wartości z .

Omówione wcześniej metody szacowania niepewności wielkości mierzonych w pomiarze pośrednim pozwalają na wskazanie tej spośród wielkości $X, Y, \dots$, której niepewność wnosi największy wkład do niepewności wyznaczonej pośrednio wielkości Z . Niepewność Δz wartości wielkości Z będącej sumą lub różnicą wartości wielkości X i Y jest sumą niepewności $\Delta z = \Delta x + \Delta y$, więc widać bezpośrednio, niepewność której wielkości ma największy wkład do niepewności Δz . W przypadku, gdy wartość z jest iloczynem lub ilorazem wartości $x^a, y^b, \dots$ niepewność względna jest sumą niepewności względnych $\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}, \dots$ pomnożonych przez wartości bezwzględne odpowiednich wykładników. Do niepewności względnej wielkości Z największy wkład wnosi więc niepewność tej wielkości, dla której niepewność względna pomnożona przez wartość bezwzględną wykładnika jest największa.

PRZYKŁAD 9

Szacowanie niepewności względnej pomiaru pośredniego (złożonego)

Do wyznaczenia wartości g przyspieszenia ziemskiego metodą opisaną w przykładzie 8 uczniowie użyli wahadła (kulka metalowa zawieszona na nici) o długości $l = (1,000 \pm 0,002) \text{ m}$. Mierzyli okres drgań wahadła i otrzymali wynik $T = (2,0 \pm 0,1) \text{ s}$.

Niepewność względna g wynosi więc:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T}{T} = \frac{0,002 \text{ m}}{1 \text{ m}} + 2 \frac{0,1 \text{ s}}{2 \text{ s}} = 0,002 + 0,1$$

W wykonanym przez uczniów doświadczeniu niepewność, z którą zmierzony został okres drgań wahadła, wnosi znacznie większy wkład do niepewności Δg niż niepewność, z jaką zmierzona była długość wahadła, dlatego możemy przyjąć, że $\frac{\Delta g}{g} = 0,1$.

Porównywanie wyników pomiarów

Aby móc porównać dwie wartości x_1 i x_2 wielkości fizycznej X , musimy znać ich niepewności.

Dwie, otrzymane w wyniku pomiaru, wartości x_1 i x_2 wielkości fizycznej X uważamy za zgodne, jeśli różnią się nie więcej, niż wynosi suma niepewności pomiarowych Δx_1 i Δx_2 tych wielkości: $|x_1 - x_2| \leq \Delta x_1 + \Delta x_2$.

PRZYKŁAD 10

Porównanie wyników pomiarów

Trzech uczniów wyznaczyło w pomiarze współczynnik tarcia. Otrzymali oni wyniki: $0,45 \pm 0,06$, $0,39 \pm 0,04$, $0,33 \pm 0,01$.

Dwa pierwsze wyniki możemy uznać za zgodne, gdyż:

$$|0,45 - 0,39| \leq 0,06 + 0,04$$

Wynik trzeci jest od nich istotnie różny.

Jak w praktyce przeprowadzać pomiary i szacować niepewności pomiarowe wielkości wyznaczanych pośrednio?

Planowanie pomiarów

1. Ustal, jakie zależności wiązą wielkość, której wartość chcesz wyznaczyć, z innymi wielkościami możliwymi do wyznaczenia w pomiarze bezpośrednim.
Zależność tę przedstaw w matematycznej postaci typu: $z = f(x, y, \dots)$.
2. Zastanów się, z jakich praw ta zależność wynika i w jakich warunkach jest spełniona (czy warunki te będą spełnione podczas pomiaru).
3. Ustal, za pomocą jakich przyrządów pomiarowych należy wykonać pomiary wielkości $X, Y, \dots$, by na ich podstawie obliczyć wartość poszukiwanej wielkości Z .
4. Zastanów się, jaki wpływ na wynik pomiaru i jego dokładność mają warunki zewnętrzne, metoda pomiarowa i użyte przyrządy.
Wybierz metodę pomiarową oraz przyrządy pomiarowe i dobierz warunki zewnętrzne tak, by wykonane pomiary były obciążone najmniejszymi niepewnościami.

Wykonanie pomiarów

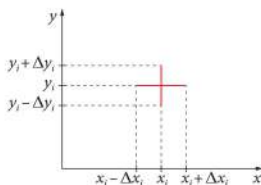
5. Wykonaj pomiary bezpośrednie wielkości fizycznych $X, Y, \dots$ i wyznacz wartości $x, y, \dots$ wraz z oszacowaniem ich niepewności.

Szacowanie niepewności pomiarowych

6. Oblicz szukaną wielkość: $z = f(x, y, \dots)$.
7. Oszacuj niepewność pomiarową Δz pomiaru złożonego.
8. Ostateczny wynik pomiaru zapisz w postaci: $z \pm \Delta z$.
Oblicz niepewność względną wyznaczonej wartości wielkości fizycznej.
9. Jeśli jest taka możliwość, porównaj otrzymaną wartość z wartością podaną w tablicach fizycznych.
Uwaga: Wartość tablicowa jest również wynikiem pomiaru, a więc zazwyczaj również jest obciążona niepewnością pomiarową.
10. Ocen otrzymaną wartość mierzonej wielkości z punktu widzenia założonych celów.

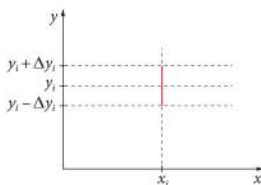
4. Graficzne przedstawianie wyników pomiarów wraz z ich niepewnościami

Często zależność pomiędzy mierzonymi wielkościami przedstawia się graficznie w układzie x, y . Jeśli w wyniku pomiaru wielkości X i Y otrzymaliśmy wartości $x_i \pm \Delta x_i$ oraz odpowiadające im wartości $y_i \pm \Delta y_i$ (np. y_i to natężenie prądu płynącego przez przewodnik, gdy napięcie między jego końcami wynosi x_i), to możemy je przedstawić na wykresie jako punkty o współrzędnych (x_i, y_i) . Niepewności pomiarowe zaznaczamy, rysując wokół punktów (x_i, y_i) odcinki o długości odpowiednio $2\Delta x_i$ oraz $2\Delta y_i$ (rys. 1).



Rys. 1

Jeśli wartości wielkości X znane są dokładnie (x_i nie jest wynikiem pomiaru, a oznacza np. numer pomiaru, liczbę połączonych szeregowo oporników itp.), niepewności zaznaczamy w postaci pionowych odcinków o długości $2\Delta y_i$ (rys. 2).



Rys. 2

NM 4. 277

5. Dopasowanie prostej do wyników pomiarów

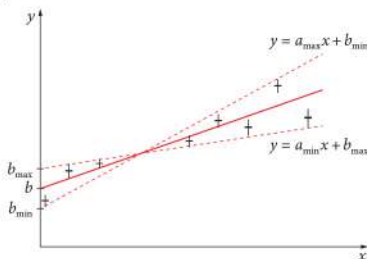
W praktyce laboratoryjnej często spotykamy się z koniecznością dopasowania krzywej do punktów pomiarowych w celu wyznaczenia parametrów funkcji opisującej zależność między dwiema wielkościami fizycznymi. Najprostszą z nich jest zależność liniowa typu: $y(x) = ax$ (np. $I = \frac{1}{R}U$, gdzie I to natężenie prądu płynącego przez przewodnik, U to napięcie między końcami przewodnika, $\frac{1}{R}$ – czyli współczynnik kierunkowy a prostej – to odwrotność oporu przewodnika) lub dowolna zależność liniowa: $y(x) = ax + b$ (np. $s = s_0 + vt$, gdzie: s – droga w ruchu jednostajnym, s_0 – droga przebyta do rozpoczęcia pomiaru czasu, v – wartość prędkości, t – czas).

Zajmiemy się więc dopasowaniem prostej do punktów pomiarowych, czyli wyznaczeniem parametrów a i b prostej.

W wyniku pomiarów uzyskujemy zbiór punktów o współrzędnych $x_i \pm \Delta x_i$, $y_i \pm \Delta y_i$. Punkty nanosimy w układzie współrzędnych tak, jak opisano powyżej. Za prostą najlepiej dopasowaną do zbioru punktów doświadczalnych (x_i, y_i) uważamy taką prostą $y(x) = ax + b$, która przechodzi możliwie „najbliżej” wszystkich punktów pomiarowych.

Istnieją metody matematyczne obliczania współczynników a i b takiej prostej wraz z ich niepewnościami (metoda najmniejszych kwadratów). My ograniczymy się jednak tylko do szacowania tych wartości. Zastosujemy metodę najprostszą – graficzną.

Aby oszacować wartości współczynników a i b , rysujemy prostą przechodzącą przez możliwie największą liczbę punktów pomiarowych (odcinków niepewności) i odczytujemy z wykresu wartości a ($a = \tan \alpha$, α – kąt nachylenia prostej do osi odciętych) oraz b , czyli współrzędnej przecięcia prostej z osią rzędnych (rys. 3). Wielkości a i b są wielkościami mianowanymi. Niepewności Δa i Δb wielkości a i b możemy oszacować przez narysowanie prostych o maksymalnym ($a_{\max}$) i minimalnym ($a_{\min}$) nachyleniu, mieszczących się w granicach odcinków niepewności pomiarowych, jak przedstawiono przykładowo na rysunku 3.



Rys. 3

$$\Delta a = \frac{1}{2}(a_{\max} - a_{\min}) \quad \Delta b = \frac{1}{2}(b_{\max} - b_{\min})$$

(7)

ZADANIA

- Zadaniem tokarza było wykonanie stalowego walca o średnicy d równej około 17,5 mm. Po jego wykonaniu tokarz zmierzył kilkanaście razy średnicę d . Otrzymał następujące wyniki: 17,49; 17,53; 17,50; 17,51; 17,48; 17,53; 17,49; 17,50; 17,50; 17,47; 17,53; 17,49 (mm). Skorzystaj z wyników wykonanych pomiarów i oblicz średnicę walca oraz oszacuj jej niepewność. Wynik zapisz w postaci $d \pm \Delta d$.
- Do przeprowadzenia pewnego doświadczenia potrzebny był sześcian wykonany z materiału o znanej gęstości. Dysponowano odpowiednim sześcianem, ale nie znano gęstości materiału, z którego był wykonany. Zmierzono więc masę m sześcianu i długość a jego krawędzi. Otrzymano następujące wyniki: $m = (25,0 \pm 0,1)$ g, $a = (25,0 \pm 0,1)$ mm. Następnie obliczono gęstość $d \pm \Delta d$ materiału. Okazało się jednak, że do przeprowadzenia doświadczenia należy znać gęstość z mniejszą niepewnością.
 - Oblicz, ile wynosi gęstość d , i oszacuj jej niepewność Δd .
 - Zastanów się, czy osobom wykonującym doświadczenie należy zalecić powtórzenie z lepszą precyzją (mniejszą niepewnością) przede wszystkim pomiaru masy m sześcianu czy pomiaru długości a jego krawędzi. Odpowiedź uzasadnij.

Wskazówka: Oblicz niepewność względną $\frac{\Delta d}{d}$.

3. Uczeń postanowił sprawdzić działanie zakupionego szybkościomierza rowerowego. W tym celu na pewnym odcinku trasy utrzymywał stałą szybkość 20 km/h. Z instrukcji użycia szybkościomierza dowiedział się, że za jego pomocą można mierzyć szybkość z niepewnością względną 5 %. Za pomocą aplikacji w smartfonie (która korzystała z systemu GPS) zmierzył przebytą odległość i czas jazdy; otrzymał odpowiednio 6550 m i 20 min. Niepewność pomiaru przebytej odległości wynosi 40 m, a niepewność pomiaru czasu to 1 s. Uczeń założył, że aplikacja działa dobrze, ponieważ została już wielokrotnie przetestowana. Czy może przyjąć, że jego nowy szybkościomierz poprawnie wskazuje szybkość, z jaką porusza się rower?
4. W celu wyznaczenia współczynnika sprężystości sprężyny zawieszano na jej końcu odważniki o masie m i mierzono jej wydłużenie x . Otrzymane wyniki zapisano w poniższej tabeli.

x , cm	2,9	6,0	9,0	11,8
m , kg	0,05	0,10	0,15	0,20

Niepewność pomiaru wydłużenia x wynosiła 0,2 cm. Przyjmujemy, że niepewność znajomości masy odważników wykonanych fabrycznie jest bardzo mała i możemy ją pominąć.

Wyznacz współczynnik sprężystości k sprężyny oraz oszacuj niepewność wyznaczonej wartości; skorzystaj z zależności $F = kx$, gdzie F – wartość siły działającej na sprężynę, x – wydłużenie sprężyny.

Wskazówka: Oblicz wartości sił, którymi odważniki działały kolejno na sprężynę (przyjmij wartość $g = 10 \text{ m/s}^2$), a następnie przedstaw wyniki w układzie współrzędnych x , F . Dopasuj do nich prostą przechodzącą przez punkt $(0, 0)$ układu współrzędnych (wydłużenie sprężyny, gdy nie wisi na niej żaden odważnik, wynosi 0).

Doświadczenie 1. Wyznaczamy wartość przyspieszenia w ruchu jednostajnie przyspieszonym

W doświadczeniu wyznaczamy wartość przyspieszenia, z jakim poruszają się środki jednorodnych kulek toczących się po równi pochyłej.

Ruch jednostajnie przyspieszony opisano w rozdziale 5.

Spis przyrządów i materiałów: równia pochyła (np. ceownik) i kilka metalowych kulek, komputer z kartą dźwiękową i mikrofonem, program, który uruchomiony na komputerze z kartą dźwiękową przekształca go w prosty oscyloskop cyfrowy (np. Soundcard Oscilloscope pobrany ze strony internetowej scope.software.informer.com).

Kolejne etapy doświadczenia

- ▶ Szynę ceownika podpieramy na jednym końcu np. klockiem lub książką i tworzymy w ten sposób równię pochyłą (rys. 1).



Rys. 1

- ▶ U dołu równi, w zerowym punkcie skali, przypinamy klips-spinacz.
- ▶ Mikrofon ustawiamy w pobliżu spinacza.
- ▶ Uruchamiamy program Soundcard Oscilloscope.
- ▶ W odległości 20 cm od początku skali ustawiamy 4 kulki.
- ▶ Puszczamy pierwszą kulkę. Gdy uderzy ona w spinacz, puścimy drugą i tak po kolei trzecią i czwartą.
- ▶ Uderzenia kulek są rejestrowane przez komputer-oscyloskop jako „piki” na wykresie. Korzystamy ze znaczników, by odczytać odstępy czasu pomiędzy uderzeniami kolejnych kulek o spinacz. Są one równe czasom toczenia się poszczególnych kulek. Szacujemy niepewności pomiaru czasu toczenia się kulek po drodze s : Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 . Za niepewność pomiaru czasu przyjmujemy niepewność wyznaczenia (za pomocą znaczników czasu) położenia na osi czasu pików, które odpowiadają dźwiękom wywołanym zderzeniami kulek.

Uwaga: Ustawienie mikrofonu dobieramy tak, aby uderzenia kulek były wyraźnie rejestrowane przez komputer-oscyloskop jako ostre „piki” na wykresie zależności natężenia dźwięku od czasu. Do odczytu odstępu czasu pomiędzy kolejnymi uderzeniami kulek korzystamy z dwóch znaczników czasowych (ustawienie *Cursor time*). Myszka przesuwamy znaczniki w ten sposób, by pokrywały się z dwoma kolejnymi „pikami” natężenia dźwięku, pochodzącymi od uderzeń kulek. W okienku ΔT odczytujemy odstęp czasu między uderzeniami. W naszym doświadczeniu odstęp czasu między uderzeniami jest równy czasowi toczenia się kulki.

Jeśli wartość sygnału na wykresie jest zbyt duża lub zbyt mała, odczytanie położenia „piku” wymaga oddalenia lub zbliżenia mikrofonu od szyny; można też zmienić ustawienie *Amplitude* oscyloskopu.

- ▶ Wyniki zapisujemy w tabeli.
- ▶ Obliczamy wartość średnią t_{sr} czasu toczenia się kulek. Szacujemy niepewność Δt_{sr} . Do celów szacunkowych jako Δt_{sr} możemy przyjąć największą spośród wartości: Δt_i czyli $|t_i - t_{sr}|$, gdzie $i = 1, 2, 3$.
- ▶ Pomiar powtarzamy dla dróg równych 40 cm, 60 cm i 80 cm.
- ▶ W doświadczeniu kulki poruszają się ruchem jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową równą zeru. W ruchu takim droga s jest funkcją t^2 (bo $s = \frac{at^2}{2}$), a jej wykresem w układzie współrzędnych s, t jest część jednego ramienia paraboli. Po podstawieniu do powyższego wzoru zapisanego w nawiasie $d = \sqrt{s}$ oraz $\alpha = \sqrt{\frac{a}{2}}$ otrzymujemy: $d = \alpha t$. Wielkość d jest więc liniową funkcją czasu t , w układzie d, t jej wykresem jest część półprostej. Możemy więc wyniki pomiarów (po obliczeniu wartości d odpowiadających zmierzonym wartościom drogi s) przedstawić w układzie d, t , dopasować prostą do punktów pomiarowych, wyznaczyć jej współczynnik kierunkowy α i następnie obliczyć wartość przyspieszenia $a = 2\alpha^2$.
- ▶ Obliczamy $d = \sqrt{s}$ oraz niepewność $\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{2} \frac{\Delta s}{s}$ (wzór 6 na s. 254). Za niepewność Δs przyjmujemy najmniejszą działkę skali zaznaczonej na ceowniku.
- ▶ Uzyskane wyniki wraz z niepewnościami zaznaczamy na wykresie w układzie d, t_{sr} .
- ▶ Dopasowujemy graficznie prostą przechodzącą przez punkt (0, 0) i punkty pomiarowe zaznaczone na wykresie.
- ▶ Współczynnik kierunkowy α odczytujemy z dopasowania graficznego, a niepewność $\Delta \alpha$ szacujemy według wzoru (7) na s. 258.
- ▶ Obliczamy przyspieszenie, z jakim poruszały się kulki, ze wzoru $a = 2\alpha^2$, oraz niepewność $\frac{\Delta a}{a} = 2 \frac{\Delta \alpha}{\alpha}$ (wzór 6 na s. 254).

s , cm	Δs , cm	d , cm	Δd , cm	t_1 , s	Δt_1 , s	t_2 , s	Δt_2 , s	t_3 , s	Δt_3 , s	t_{sr} , s	Δt_{sr} , s
20											
40											
60											
80											

Uwaga:

1. Doświadczenie można wykonać w wersji uproszczonej, w której pomiar czasu z użyciem komputera zastępuje się pomiarem czasu za pomocą stopera.
2. W doświadczeniu mierzymy czas pomiędzy uderzeniami dwóch kolejnych kulek i zakładamy, że jest to czas toczenia się kulki po drodze s . W rzeczywistości jest to suma czasu toczenia się kulki i czasu reakcji eksperymentatora (wykonujący doświadczenie puszcza kolejną kulkę po usłyszeniu uderzenia poprzedniej o spinacz). Zmierzony czas jest więc dłuższy niż czas toczenia się kulki, co jest źródłem błędu systematycznego tej metody pomiarowej.

3. Czy wpływ błędu systematycznego metody na wynik pomiaru zależy od:
 - długości drogi, po której toczy się kulka,
 - kąta nachylenia równi?
4. Dopasuj do punktów pomiarowych prostą nieprzechodzącą przez punkt $(0, 0)$. Zastanów się, jaki wpływ na przebieg tak dopasowanej prostej ma systematyczne zawyżanie wyników pomiaru czasu. Jak taki błąd systematyczny można skompensować? Czy wpływa on na nachylenie dopasowanej prostej, a więc na otrzymaną wartość przyspieszenia? Jak różnice w czasie reakcji eksperymentatora podczas kolejnych pomiarów wpływają na wartość niepewności pomiaru czasu toczenia się kulek? Zaproponuj sposób oszacowania tych różnic.

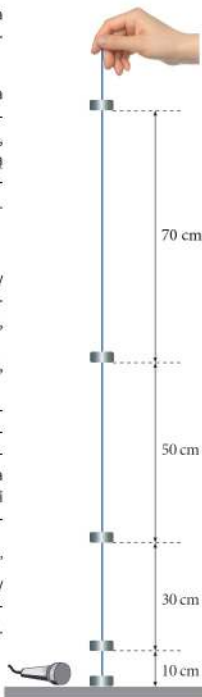
Doświadczenie 2. Badamy spadanie swobodne; wyznaczamy wartość przyspieszenia ziemskiego

W doświadczeniu wyznaczamy wartość przyspieszenia ziemskiego za pomocą pomiaru czasu swobodnego spadania ciał z odpowiednio dobranych wysokości.

Spis przyrządów i materiałów: cienki sznurek lub mocna nitka o długości około 2 m, 5 nakrętek do śrub lub plastelina, komputer z kartą dźwiękową i mikrofonem, program, który uruchomiony na komputerze z kartą dźwiękową przekształca go w prosty oscyloskop cyfrowy, np. Soundcard Oscilloscope, pobrany ze strony internetowej scope.software.informer.com.

Kolejne etapy doświadczenia

- ▶ Na sznurku przywiązujemy nakrętki (lub przyklepamy kulki z plasteliny) kolejno w odległościach od siebie pozostających w stosunku $1 : 3 : 5 : 7$, np. 10 cm, 30 cm, 50 cm, 70 cm (rys. 2).
- ▶ Chwytny sznurek za koniec tak, by swobodnie zwisał, a pierwsza nakrętka (kulka) dotykała podłogi.
- ▶ Puszcza sznurek i rejestrujemy za pomocą komputera (z dołączonym mikrofonem i z uruchomionym programem Soundcard Oscilloscope) stuknięcia upadających na podłogę nakrętek lub plastelinowych kulek; dla wzmocnienia dźwięku można pod upadające nakrętki lub kulki postawić kartonowe pudełko. Mierzmy odstępy czasu między kolejnymi stuknięciami. (Stuknięcia rejestrowane są przez komputer jako „piki” na wykresie. Za pomocą znaczników czasu odczytujemy odstępy czasu – odległości na osi czasu – między „pikami” odpowiadającymi uderzeniom kolejnych nakrętek).



Rys. 2

Nakrętki uderzają w podłogę w równych odstępach czasu, gdyż poruszają się ruchem jednostajnie przyspieszonym, a drogi przebyte przez ciało w ruchu jednostajnie przyspieszonym w kolejnych, jednakowych odstępach czasu mają się do siebie jak $1 : 3 : 5 : 7$ (wykaż to za pomocą odpowiednich obliczeń).

- ▶ Znamy odstępy czasu między uderzeniami w podłogę kolejnych nakrętek oraz odległości między nakrętkami na sznurku, możemy więc obliczyć wartość przyspieszenia, z którym poruszały się nakrętki (wartość przyspieszenia ziemskiego), wraz z niepewnością.
- ▶ Opracuj metodę wyznaczenia (obliczenia) wartości przyspieszenia ziemskiego i wykonaj odpowiednie obliczenia.

Doświadczenie 3. Wyznaczamy współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego

W doświadczeniu wyznaczamy współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego dla materiałów, z których wykonane są równia pochyła i klocek zsuwający się po równi.

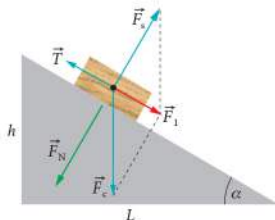
Tarcie opisano w rozdziale 13, a ruch klocka po równi pochyłej przeanalizowano w przykładzie 13.3.

Spis przyrządów i materiałów: równia pochyła o regulowanym kącie nachylenia lub deska albo duża książka, taśma miernicza, drewniany prostokątny klocek lub pudełko po zapalkach odpowiednio obciążone, materiały do oklejenia jednej ze ścian pudełka, np. skóra, metal.

Pomiar współczynnika tarcia statycznego

Kolejne etapy doświadczenia

- ▶ Rysujemy siły działające na ciało spoczywające na równi pochyłej i siłę nacisku ciała na równię (rys. 3).



Rys. 3

- ▶ Jak zmieniają się siły działające na klocek, gdy zwiększamy kąt nachylenia równi?
- ▶ Na szczycie równi nachylonej pod niewielkim kątem do poziomu umieszczamy klocek.
- ▶ Zwiększamy kąt nachylenia równi i obserwujemy, kiedy klocek zacznie się zsuwać. Wyznaczamy największy kąt (nazwijmy go kątem granicznym), dla którego klocek nie zsuwa się po równi (zaproponuj metodę wyznaczenia kąta granicznego lub przedziału wartości kątów, w którym jest zawarty).
- ▶ Wysokość równi h i długość jej podstawy L dla kąta granicznego wpisujemy do tabeli.
- ▶ Szacujemy niepewności Δh i ΔL (przy szacowaniu niepewności Δh i ΔL uwzględnij wpływ zastosowanej metody wyznaczenia kąta granicznego).

- ▶ Obliczamy współczynnik tarcia statycznego:

$$f_s = \frac{T_{\max}}{F_N} = \frac{mg \sin \alpha}{mg \cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{h}{L}$$

gdzie:

$T_{\max}$ – wartość siły tarcia działającej na klocek na równi nachylonej pod kątem granicznym,

F_N – wartość siły nacisku klocka na równię nachyloną pod kątem granicznym.

- ▶ Szacujemy niepewność Δf_s .

$$\frac{\Delta f_s}{f_s} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta L}{L}$$

- ▶ Kilkakrotnie powtarzamy wyznaczanie kąta granicznego wraz z pomiarem h i L , obliczeniem f_s oraz oszacowaniem niepewności Δf_s .
- ▶ Obliczamy $f_{s\text{śr}}$ i szacujemy $\Delta f_{s\text{śr}}$. Jako $\Delta f_{s\text{śr}}$ możemy przyjąć największą z otrzymanych wartości $\Delta f_{s i}$ czyli $|f_{s i} - f_{s\text{śr}}|$, gdzie $i = 1, 2, 3, \dots$ jest numerem pomiaru.
- ▶ Doświadczenie powtarzamy dla innych trących powierzchni.

Rodzaj materiałów	Nr	h, m	$\Delta h, \text{m}$	L, m	$\Delta L, \text{m}$	$\frac{h}{L} = f_s$	Δf_s
drewno po drewnie	1						
	2						
	3						
	śr.						
metal po drewnie	1						
	2						
	3						
	śr.						

- ▶ Zastanów się, czy zastosowana metoda wyznaczenia kąta granicznego może być źródłem błędów systematycznego.
- ▶ Na co należy zwrócić szczególną uwagę, aby uniknąć błędów systematycznych w powyższym doświadczeniu?

Pomiar współczynnika tarcia kinetycznego

- ▶ Całe doświadczenie powtarzamy – tym razem tak dobieramy kąt nachylenia równi, by klocek zsuwał się z niej ruchem w przybliżeniu jednostajnym (patrz przykład 13.3). Zaproponuj metodę, która pozwoli ocenić, czy ruch klocka po równi jest ruchem jednostajnym.
- ▶ Na co należy zwrócić szczególną uwagę, aby uniknąć błędów systematycznych w powyższym doświadczeniu?
- ▶ Porównaj wartości zmierzonych współczynników tarcia statycznego i kinetycznego z uwzględnieniem ich niepewności pomiarowych (jak opisano w rozdziale *Niepewności pomiarowe* na s. 255). Na podstawie tego porównania sformułuj wniosek o relacji między wartościami współczynnika tarcia statycznego i współczynnika tarcia kinetycznego dla tych samych powierzchni.

Doświadczenie 4. Badamy ruch po okręgu

W doświadczeniu porównujemy wyniki pomiarów wartości siły dośrodkowej z wartościami otrzymanymi na drodze rozważań teoretycznych.

Ruch po okręgu opisano w rozdziale 14.

Spis przyrządów i materiałów: szklana, metalowa lub plastikowa rurka o długości 20–30 cm (np. obudowa długopisu), kawałek cienkiego, mocnego sznurka o długości około 70 cm, kulka plasteliny o średnicy 3–4 cm, spinacz biurowy, siłomierz o zakresach 0–3 N i 0–10 N, linijka, stoper.

Kolejne etapy doświadczenia

- ▶ Na jednym końcu sznurka przywiązujemy spinacz i wokół niego formujemy kulkę z plasteliny. Za pomocą siłomierza mierzymy ciężar F_c kulki i obliczamy jej masę $m = \frac{F_c}{g}$ oraz szacujemy niepewność Δm .
- ▶ Przewlekamy sznurek przez rurkę. Na końcu sznurka robimy pętlę do zaczepiania siłomierza.
- ▶ Ustalamy promień okręgu r_1 , po którym będzie poruszała się kulka (na sznurku przy dolnym końcu rurki można zawiązać wstążeczkę lub wbić w sznurek poziomo szpilkę w celu ustalenia promienia), do dolnej pętli sznurka zaczepiamy siłomierz i trzymając jedną ręką siłomierz, a drugą rurkę, wprawiamy kulkę w ruch po okręgu ze stałą szybkością tak, aby kulka poruszała się praktycznie w płaszczyźnie poziomej zawierającej górny koniec rurki (rys. 4).
- ▶ Odczytujemy wartość siły dośrodkowej $F_{r\text{zmierz}}$ wskazywaną przez siłomierz. Mierzmy stoperem czas t trwania 10 obiegów (tu potrzebna jest pomoc drugiej osoby), wyznaczamy okres $T_{1,1} = \frac{t}{10}$.
- ▶ Nie zmieniamy promienia okręgu, ale zmieniamy częstotliwość i powtarzamy pomiar wartości siły dośrodkowej oraz okresu ($T_{1,2}$).
- ▶ Zmieniamy promień okręgu (r_2) i powtarzamy obie serie pomiarów. Staramy się, by okresy ruchów $T_{2,1}$ i $T_{2,2}$ były takie same jak w przypadku pierwszym (nie jest to jednak nieodzowne).



Rys. 4

r , m	Δr , m	T , s	ΔT , s	$F_{r\text{zmierz}}$, N	$\Delta F_{r\text{zmierz}}$, N	m , kg	Δm , kg	$F_{r\text{obb}}$, N	$\Delta F_{r\text{obb}}$, N
$r_1 =$		$T_{1,1} =$							
		$T_{1,2} =$							
$r_2 =$		$T_{2,1} =$							
		$T_{2,2} =$							

- ▶ Obliczamy wartość F_{robl} siły dośrodkowej działającej na kulkę o masie $m \pm \Delta m$, poruszającą się po okręgu o promieniu $r \pm \Delta r$ z okresem $T \pm \Delta T$.

$$F_{\text{robl}} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

$$\frac{\Delta F_{\text{robl}}}{F_{\text{robl}}} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta r}{r} + 2 \frac{\Delta T}{T}$$

- ▶ Obliczenia wykonujemy dla kolejnych wartości okresu ($T_{1,1}$, $T_{1,2}$, $T_{2,1}$, $T_{2,2}$) oraz promieni (r_1 , r_2). Porównujemy obliczone wartości siły dośrodkowej z wartościami zmierzonymi.
- ▶ Sprawdzamy, czy w granicach niepewności pomiarowych wyniki obliczeń i pomiarów są zgodne.
- ▶ Rysujemy wektory sił działających na kulkę w przypadku dużej szybkości (ruch praktycznie w płaszczyźnie zawierającej górny koniec rurki) oraz w przypadku mniejszej szybkości (ruch w płaszczyźnie poniżej górnego końca rurki). Analizujemy wpływ pominięcia oddziaływania grawitacyjnego na wartość obliczanej oraz mierzonej wprost siły dośrodkowej. W którym przypadku takie przybliżenie nie powoduje dużego błędu systematycznego (patrz przykład 14.1)?
- ▶ Jakie są inne przyczyny ewentualnych błędów systematycznych?

Doświadczenie 5. Badamy zderzenia dwóch ciał oraz wyznaczamy masę jednego z nich

W doświadczeniu badamy zderzenia sprężyste lub niesprężyste dwóch zawieszonych na nitkach kulek oraz wyznaczamy masę jednej z nich.

Zderzenia dwóch ciał opisano w rozdziale 19.

Spis przyrządów i materiałów: dwie stalowe kulki o średnicy 15–20 mm (masę jednej kulki znamy lub mierzymy za pomocą wagi) z haczykami, cienki sznurek lub mocna nitka, statyw laboratoryjny, drewniana listewka o długości około 1 m i przekroju prostokątnym lub kwadratowym, kawałek samoprzylepnej taśmy dwustronnej, kawałek taśmy typu „rzep”, pinezki, aparat fotograficzny (lub smartfon albo kamera podłączona do komputera) mogący rejestrować filmy, statyw fotograficzny, linijka lub kartka z narysowaną podziałką, program umożliwiający odtwarzanie filmu w zwolnionym tempie i wyodrębnianie wybranych klatek filmu (np. darmowe programy: VLC media player, XnView).

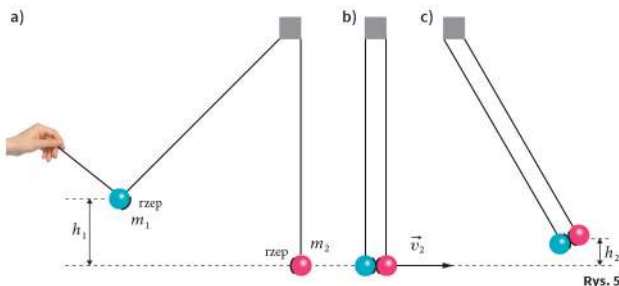
Uwaga:

1. Kulki nie muszą mieć jednakowej średnicy, można także użyć kulek drewnianych lub jednej stalowej i jednej drewnianej. Zamiast kulek można użyć kulistych uchwytych do mebli, które mają wewnętrzny gwint, w który wkręcamy śrubę pełniącą rolę haczyka.
2. Jeden z boków przekroju listewki powinien być w przybliżeniu równy sumie promieni użytych kulek.

Badamy zderzenia doskonale niesprężyste

Przebieg doświadczenia

Do każdej z dwóch zawieszonych na nitkach kulek przyklejamy połowę kawałka taśmy typu „rzep”. Jedną z kulek (o znanej masie m_1) odchylamy od pionu na wysokość h_1 (rys. 5a) i puszczamy. Uderza ona z szybkością v_1 w drugą, wiszącą pionowo kulkę o nieznanej masie m_2 . Zderzenie jest niesprężyste – „rzep” łączy obie kulki, które dalej poruszają się razem. Ich szybkość po zderzeniu wynosi v_2 (rys. 5b). Kulki poruszają się coraz wolniej i odchylają od pionu na wysokość h_2 (rys. 5c).



Które wielkości mierzymy, aby wyznaczyć masę drugiej kulki?

Zapisujemy zasadę zachowania energii mechanicznej:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{2} = (m_1 + m_2) g h_2$$

skąd:

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} \quad v_2 = \sqrt{2gh_2} \quad (1)$$

Zapisujemy zasadę zachowania pędu dla zderzających się kulek:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

więc:

$$m_2 = m_1 \frac{v_1 - v_2}{v_2} \quad (2)$$

Po podstawieniu (1) do (2) otrzymujemy:

$$m_2 = m_1 \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{\sqrt{h_2}} \quad (3)$$

Aby obliczyć masę drugiej kulki m_2 , musimy zmierzyć wysokość h_1 , na której znajduje się początkowo kulka pierwsza, oraz maksymalną wysokość h_2 , jaką osiągną kulki połączone po zderzeniu.

Kolejne etapy doświadczenia

- ▶ W statywie laboratoryjnym mocujemy poziomo drewnianą listewkę.
- ▶ Na listewce zawieszamy dwie kulki, na nitkach o długości około 0,5 m. Aby kulki poruszały się w jednej płaszczyźnie, każdą z nich zawieszamy na dwóch jednakowej długości nitkach tworzących literę „V” o rozwarości około 25 cm (rys. 6).

- ▶ Kulki zawieszamy po obu „bokach” listewki tak, by wisząc swobodnie, dotykały się lub aby odległość między nimi była nie większa niż 2 mm. Nitki z boku listewki przypinamy pinezkami. Do haczyka jednej z kulek przywiązujemy krótką (około 10 cm) nitkę, która będzie służyła do odchyłania kulki od pionu (rys. 5a).



Rys. 6

- ▶ Na wysokości kulek umieszczamy na statywie (lub na odpowiednio ustawionym stole) aparat fotograficzny, smartfon lub kamerę tak, aby oś obiektywu „trafiła” w wiszące swobodnie kulki prostopadle do płaszczyzny, w której mogą się poruszać. Odległość aparatu od kulek dobieramy tak, by pole widzenia obiektywu obejmowało skrajne położenia kulek podczas ich ruchu (aby zminimalizować zniekształcenia obrazu, unikamy ustawiania krótkiej ogniskowej w przypadku obiektywu zmiennoogniskowego).
- ▶ Za kulkami mocujemy do statywu pionowo linijkę (wersja 1) lub arkusz papieru milimetrowego (wersja 2) z narysowanym układem współrzędnych x, y (tak, by oś x była pozioma).
- ▶ Do każdej z kulek, w miejscu zderzenia z drugą kulką, przyklejamy za pomocą taśmy klejącej dwustronnej kawałek taśmy typu „rzep”, aby kulki w wyniku zderzenia „się skleily”.
- ▶ Włączamy rejestrację filmu.
- ▶ Za pomocą krótkiego kawałka nitki przywiązanego do cięższej kulki odchylamy ją od pionu o kąt około 45° i gdy wisząca swobodnie kulka nie rusza się, delikatnie puszczamy odchyloną kulkę.
- ▶ Kulki zderzają się i połączone „rzepem” poruszają się dalej. Gdy miną punkt największego odchylenia od pionu, wyłączamy rejestrację filmu.
- ▶ Film z zarejestrowanym zderzeniem kulek kopiujemy do komputera.

Pomiar wysokości h_1 i h_2

Wersja 1

Oglądamy w zwolnionym tempie przebieg zderzenia i wydobywamy klatkę filmu, która przedstawia moment rozpoczęcia ruchu przez pierwszą kulkę oraz klatkę pokazującą punkt zwrotny w ruchu kulek po zderzeniu. Za pomocą kursora mierzymy wysokość

$h_1 \pm \Delta h_1$ początkowego położenia pierwszej kulki (jej środka masy) względem punktu zderzenia oraz wysokość $h_2 \pm \Delta h_2$ punktu, do którego wzniosły się kulki (środek masy połączonych kulek) po zderzeniu.

Wskazówka

Obraz zarejestrowany kamerą cyfrową (aparatem cyfrowym) składa się z punktów zwanych pikselami, ułożonych w kolumny (pionowe) i rzędy (poziome). Wiele programów (np. wymienione w spisie przyrządów i materiałów) wyświetla na ekranie numery kolumny i rzędu, na przecięciu których znajduje się kursor. Liczby te możemy traktować jako współrzędne (x, y) kursora na obrazie. Aby zmierzyć wysokość h_1 , odczytujemy współrzędne (x_1, y_1) kursora wskazującego środek pierwszej kulki oraz współrzędne (x_0, y_0) kursora wskazującego punkt zderzenia i obliczamy: $h_1 = y_1 - y_0$ (np. w programie VLC wybieramy odpowiednią klatkę filmu, zapisujemy ją w pliku, który otwieramy za pomocą programu XnView, i odczytujemy współrzędne kursora wskazującego położenie kulki lub punktu zderzenia). Analogicznie mierzymy wysokość h_2 .

Szacujemy niepewności Δy_0 , Δy_1 i Δy_2 , a następnie Δh_1 i Δh_2 . Otrzymamy wartości: $h_1 \pm \Delta h_1$ i $h_2 \pm \Delta h_2$ w jednostkach „piksel”. Po pomnożeniu otrzymanych wartości przez współczynnik α (oznaczający, ile milimetrów w rzeczywistym doświadczeniu przypada na jeden piksel na obrazie – obliczamy go na podstawie skali linijki zarejestrowanej na filmie) możemy obliczyć, jakie były wartości h_1 i h_2 podczas doświadczenia. Ze względu na postać wzoru (3) nie jest to jednak konieczne – uzasadnij dlaczego.

Wersja 2

Oglądamy w zwolnionym tempie przebieg zderzenia. Korzystamy z zarejestrowanego na filmie układu współrzędnych, na którego tle poruszały się kulki, i odczytujemy współrzędne: y_1 położenia pierwszej kulki (jej środka masy) w chwili rozpoczęcia ruchu, y_0 punktu zderzenia i y_2 punktu zwrotnego ruchu kulek (środek masy połączonych kulek) po zderzeniu oraz szacujemy niepewności Δy_0 , Δy_1 i Δy_2 .

Następnie obliczamy wysokość położenia początkowego pierwszej kulki względem punktu zderzenia ($h_1 = y_1 - y_0$) oraz punktu, do którego wzniosły się kulki po zderzeniu ($h_2 = y_2 - y_0$). Szacujemy niepewność Δh_1 i Δh_2 .

Obliczenie masy drugiej kulki

Korzystamy ze wzoru (3) i obliczamy masę m_2 drugiej kulki. Szacujemy (np. metodą NKP) niepewność Δm_2 wyznaczonej wartości masy m_2 .

Doświadczenie możemy powtórzyć kilkakrotnie (np. przez kilka grup uczniowskich). Wyniki zapisujemy w tabeli.

Nr	h_1	Δh_1	h_2	Δh_2	m_2	Δm_2	$ m_2 - m_{2\text{te}} $
1							
2							

Obliczamy $m_{2\text{śr}}$ jako średnią arytmetyczną z otrzymanych wartości m_2 .

$$m_{2\text{śr}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_{2i}$$

gdzie:

n – liczba wykonanych pomiarów,

m_{2i} – wartość m_2 otrzymana w i -tym pomiarze.

Szacujemy niepewność $\Delta m_{2\text{śr}}$ wartości średniej $m_{2\text{śr}}$: do celów szacunkowych jako $\Delta m_{2\text{śr}}$ możemy przyjąć największą z otrzymanych wartości Δm_2 i $|m_2 - m_{2\text{śr}}|$.

Podajemy końcowy wynik: masa drugiej kulki wynosi $m_{2\text{śr}} \pm \Delta m_{2\text{śr}}$.

Badamy zderzenia sprężyste

Przebieg doświadczenia

Jedną z dwóch zawieszonych na nitkach kulek (o znanej masie m_1) odchylamy od pionu na wysokość h_{1p} i puszczamy. Uderza ona z szybkością v_{1p} w drugą, wiszącą pionowo kulkę o nieznanej (mniejszej od m_1) masie m_2 . Zderzenie jest sprężyste. Po zderzeniu szybkość pierwszej kulki wynosi v_{1k} , a drugiej v_{2k} . Kulki poruszają się coraz wolniej i odchylają od pionu na wysokość odpowiednio h_{1k} i h_{2k} .

Które wielkości mierzymy, aby wyznaczyć masę drugiej kulki?

Zapisujemy zasadę zachowania energii mechanicznej:

$$m_1 g h_{1p} = \frac{m_1 v_{1p}^2}{2} \quad \frac{m_1 v_{1k}^2}{2} = m_1 g h_{1k} \quad \frac{m_2 v_{2k}^2}{2} = m_2 g h_{2k} \quad (4a)$$

skąd:

$$v_{1p} = \sqrt{2gh_{1p}} \quad v_{1k} = \sqrt{2gh_{1k}} \quad v_{2k} = \sqrt{2gh_{2k}} \quad (4b)$$

Zapisujemy zasadę zachowania pędu dla zderzających się kulek:

$$m_1 v_{1p} = m_1 v_{1k} + m_2 v_{2k} \quad (5)$$

Podstawiamy (4b) do (5) i wyznaczamy m_2 :

$$m_2 = m_1 \frac{\sqrt{h_{1p}} - \sqrt{h_{1k}}}{\sqrt{h_{2k}}} \quad (6)$$

Aby obliczyć masę drugiej kulki (m_2), musimy zmierzyć wysokość h_{1p} , na której znajduje się początkowo kulka pierwsza, oraz maksymalne wysokości h_{1k} i h_{2k} , które osiągną kulki po zderzeniu.

Kolejne etapy doświadczenia

- ▶ W statywie laboratoryjnym mocujemy poziomo drewnianą listewkę.
- ▶ Zawieszamy na nitkach kulki oraz ustawiamy aparat fotograficzny (smartfon lub kamerę) analogicznie jak do badania zderzenia niesprężystego.
- ▶ Za kulkami mocujemy do statywu pionowo linijkę (wersja 1) lub arkusz papieru milimetrowego (wersja 2) z narysowanym układem współrzędnych x, y (tak, by oś x była pozioma).
- ▶ Włączamy rejestrację filmu.

- ▶ Za pomocą krótkiego kawałka nitki przywiązanego do cięższej kulki odchylamy ją od pionu o kąt około 45° .
- ▶ Gdy wisząca swobodnie kulka nie rusza się, delikatnie puszczaamy odchyloną kulkę.
- ▶ Poruszająca się kulka uderza w kulkę wiszącą nieruchomo. Po zderzeniu obie kulki się poruszają. Gdy każda z kulek minie swój punkt największego odchylenia od pionu, wylączyamy rejestrację filmu.
- ▶ Film z zarejestrowanym zderzeniem kulek kopiujemy do komputera.

Pomiar wysokości h_{1p} , h_{1k} i h_{2k}

Pomiary wysokości $h_{1p} \pm \Delta h_{1p}$, $h_{1k} \pm \Delta h_{1k}$ i $h_{2k} \pm \Delta h_{2k}$ wykonujemy analogicznie, jak opisano w części dotyczącej badania zderzenia niesprężystego.

Obliczenie masy drugiej kulki

Korzystamy ze wzoru (6) i obliczamy masę m_2 drugiej kulki. Szacujemy (np. metodą NKP) niepewność Δm_2 wyznaczonej wartości masy m_2 .

Doświadczenie możemy powtórzyć kilkakrotnie (np. przez kilka grup uczniowskich). Wyniki zapisujemy w tabeli.

Nr	h_{1p}	Δh_{1p}	h_{1k}	Δh_{1k}	h_{2k}	Δh_{2k}	m_2	Δm_2	$ m_2 - m_{2sr} $
1									
2									

Obliczamy m_{2sr} jako średnią arytmetyczną z otrzymanych wartości m_2 .

$$m_{2sr} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_{2i}$$

gdzie:

n – liczba wykonanych pomiarów,

m_{2i} – wartość m_2 otrzymana w i -tym pomiarze.

Szacujemy niepewność Δm_{2sr} wartości średniej m_{2sr} : do celów szacunkowych jako Δm_{2sr} możemy przyjąć największą z otrzymanych wartości Δm_2 i $|m_2 - m_{2sr}|$.

Podajemy końcowy wynik: masa drugiej kulki wynosi $m_{2sr} \pm \Delta m_{2sr}$.

Sprawdzenie, czy zderzenie było (doskonale) sprężyste

Zderzenia doskonale sprężyste to pewien model opisu zderzeń, w którym energia kinetyczna zderzających się ciał jest zachowana. Zderzenia rzeczywiste odbiegają od tego modelu tym bardziej, im suma energii kinetycznych ciał (w naszym doświadczeniu kulek) po zderzeniu jest mniejsza od sumy energii kinetycznych tych ciał przed zderzeniem. Sprawdzamy, czy zderzenie doskonale sprężyste jest dobrym modelem zderzenia badanego w naszym doświadczeniu.

Wskazówka: Skorzystaj z wyników pomiarów oraz równań (4a) i oblicz (wraz z oszacowaniem niepewności) energię kinetyczną układu przed zderzeniem i po zderzeniu. Czy możemy powiedzieć, że była ona w zderzeniu zachowana? Czy badane zderzenie możemy nazwać doskonale sprężystym?

1. POWTÓRZENIE ZE SZKOŁY PODSTAWOWEJ

Proporcjonalność prosta i odwrotna

s. 33 Dwie wielkości a i b są do siebie wprost proporcjonalne, jeśli ich iloraz jest stały, czyli

$$\frac{a}{b} = \text{const}$$

s. 93

PRZYKŁAD 1

Gęstość substancji wyraża się wzorem $d = \frac{m}{V}$, gdzie m jest masą substancji, a V jej objętością.

Dwukrotnie większa objętość tej samej substancji ma dwukrotnie większą masę. Trzykrotnie większa objętość ma trzykrotnie większą masę. Dla danej substancji $d = \text{const}$.

s. 114 Dwie wielkości a i b są do siebie odwrotnie proporcjonalne, jeśli ich iloczyn jest stały, czyli

$$a \cdot b = \text{const}$$

PRZYKŁAD 2

Gdy na ciało o masie m działa siła wypadkowa o wartości F , ciało porusza się z przyspieszeniem o wartości a . Jeśli siła wypadkowa o tej samej wartości działa na ciało o dwukrotnie większej masie, ciało porusza się z przyspieszeniem o wartości $\frac{a}{2}$. Jeśli siła wypadkowa o tej

samej wartości działa na ciało o masie $\frac{m}{2}$, porusza się ono z przyspieszeniem $2a$. Iloczyn $m \cdot a = \text{const} = F$.

Potęgowanie i pierwiastkowanie

Potęgowanie	Pierwiastkowanie
$a^{n+1} = a^n \cdot a$	$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}$
$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$(\sqrt[n]{a})^n = a$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	

Wzory skróconego mnożenia

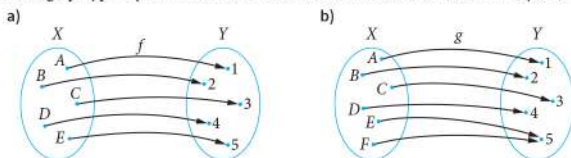
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

2. FUNKCJE LINIOWA I KWADRATOWA

Pojęcie funkcji

Jednym z podstawowych pojęć matematycznych niezbędnych w fizyce jest pojęcie funkcji.

Aby je zdefiniować, wybieramy dwa zbiory: zbiór X oraz zbiór Y i dokonujemy odpowiedniego przyporządkowania elementom zbioru X elementów zbioru Y (rys. 1).



Rys. 1

Jeżeli każdemu elementowi zbioru X przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru Y , to takie przyporządkowanie nazywamy funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y .

Zbiór $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ nazywamy **dziedzina funkcji** (D), a elementy $x_1, x_2, \dots, x_n$ dziedziny – argumentami funkcji.

Zbiór Y to **zbiór wartości funkcji** lub **przeciwdziedzina funkcji**.

Dla każdego argumentu x funkcja przyjmuje dokładnie jedną wartość y .

Uwaga: Różnym argumentom x może być przypisana ta sama wartość funkcji y (rys. 1b).

Argumenty x nazywamy też **zmiennymi niezależnymi**, a wartości funkcji y – **zmiennymi zależnymi**.

Funkcje oznaczamy małymi literami: f, g, h itd., zatem **wartość funkcji** dla argumentu x możemy też oznaczać odpowiednio symbolami $f(x), g(x), h(x)$.

Funkcja f przedstawiona za pomocą grafu na rysunku 1a każdej literze ze zbioru $X = \{A, B, C, D, E\}$ przyporządkowuje liczbę ze zbioru $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, co zapisujemy jako:

- $f(A) = 1$ i czytamy: „ f od A równa się 1” lub „wartość funkcji f dla argumentu A równa się 1”;
- $f(B) = 2$ i czytamy: „ f od B równa się 2” lub „wartość funkcji f dla argumentu B równa się 2”;
- itd.

W przypadku funkcji, którymi będziemy się zajmować, zbiory X i Y są zbiorami liczb. Takie funkcje nazywamy **funkcjami liczbowymi**.

Sposoby przedstawiania funkcji

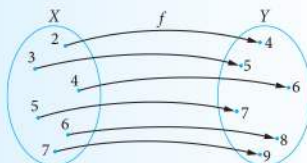
Funkcje można przedstawiać za pomocą opisu słownego, grafu, tabelki, wzoru lub wykresu.

PRZYKŁAD 3

1. Opis słowny

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej większej od 1 i mniejszej od 8 liczbę o 2 większą.

2. Graf



Rys. 2

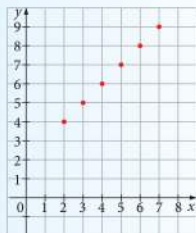
3. Tabelka

x	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	4	5	6	7	8	9

4. Wzór

$$f(x) = x + 2 \text{ (lub } y = x + 2) \text{ dla } x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

5. Wykres



Rys. 3

Funkcja liniowa i jej własności

s. 31

Funkcją liniową nazywamy funkcję opisaną wzorem $f(x) = ax + b$ (lub $y = ax + b$), gdzie a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi; liczba a to współczynnik kierunkowy prostej będącej wykresem tej funkcji, a liczba b – wyraz wolny.

s. 38

Dziedziną funkcji liniowych, z którymi zetknijemy się w szkole, jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Wykresem funkcji liniowej jest **prosta**.

Aby narysować wykres funkcji liniowej, wystarczy znaleźć współrzędne dwóch różnych punktów należących do jej wykresu, zaznaczyć te punkty w układzie współrzędnych i poprowadzić przez nie prostą, ponieważ **przez dwa różne punkty płaszczyzny przechodzi tylko jedna prosta**.

Zauważ, że funkcja $f(x) = ax + b$:

- dla argumentu $x = 0$ ma wartość b , bo $f(0) = a \cdot 0 + b = b$;
- dla argumentu $x = 1$ przyjmuje wartość $a + b$, ponieważ $f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$.

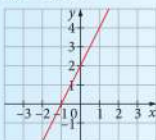
Wobec tego prosta będąca wykresem funkcji liniowej zawsze przechodzi przez punkt o współrzędnych $(0, b)$.

Współczynnik b we wzorze funkcji liniowej oznacza więc **współrzedną y** punktu, w którym **wykres funkcji przecina oś y** układu współrzędnych.

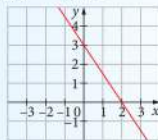
PRZYKŁAD 4

Narysujemy wykresy trzech funkcji liniowych: $y = 2x + 2$, $y = -1,5x + 3$, $y = 2,5$.

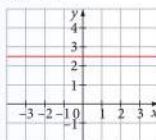
a) $y = 2x + 2$



b) $y = -1,5x + 3$



c) $y = 2,5$



Rys. 4

Wyjaśnimy teraz, dlaczego współczynnik a nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej.

Niech x_1 i y_1 oraz x_2 i y_2 będą współrzędnymi dwóch dowolnych punktów należących do wykresu funkcji $y = ax + b$. Współrzędne tych punktów spełniają odpowiednio równania:

$$y_1 = ax_1 + b \quad (1) \quad \text{ i } \quad y_2 = ax_2 + b \quad (2)$$

Po odjęciu stronami równania 1 od równania 2 otrzymujemy:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

Oznaczamy $y_2 - y_1 = \Delta y$, $x_2 - x_1 = \Delta x$ i zapisujemy powyższy wzór w postaci:

$$\Delta y = a \Delta x$$

Wobec tego:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Jak wynika z powyższego wzoru, **współczynnik a informuje, o ile zmienia się (wzrasta lub maleje) współrzędna y , gdy współrzędna x wzrasta o 1.**

s. 37

Współczynnik kierunkowy a we wzorze funkcji liniowej $y = ax + b$ opisuje nachylenie prostej będącej wykresem tej funkcji do osi x . Dla dodatnich współczynników a prawdziwe jest zdanie: Im **większe** a , tym **większy kąt** nachylenia wykresu funkcji do osi x . Uwaga: Związek między tym kątem a współczynnikiem a poznasz w dalszej części tego rozdziału, po rozwiązaniu zadania 1 na s. 287.

Na rysunku 5 zaznaczono Δy i Δx dla funkcji przedstawionych wcześniej na rysunku 4.

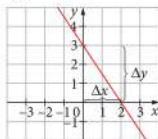
a) $y = 2x + 2$



$$\Delta y = 2, \Delta x = 1$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

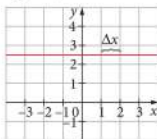
b) $y = -1,5x + 3$



$$\Delta y = -3, \Delta x = 2$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1,5$$

c) $y = 2,5$



$$\Delta y = 0, \Delta x = 1$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Rys. 5

- Jeśli $a > 0$, to funkcja jest **rosnąca**, czyli dla każdego $x_1, x_2 \in D$ zachodzi relacja $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Jeśli $a < 0$, to funkcja jest **malejąca**, czyli dla każdego $x_1, x_2 \in D$ zachodzi relacja $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- Jeśli $a = 0$, to funkcja jest **stała**, czyli dla każdego $x \in D$ zachodzi równość $f(x) = b$.

Miejsce zerowe funkcji

Argument x funkcji, dla którego wartość funkcji jest równa zero, nazywamy **miejscem zerowym** funkcji. **Miejsce zerowe** funkcji to współrzędna x punktu, w którym **wykreś funkcji przecina oś x** .

Aby znaleźć miejsce zerowe funkcji liniowej, rozwiązujemy równanie $ax + b = 0$ (gdzie $a \neq 0$), skąd $x = -\frac{b}{a}$.

PRZYKŁAD 5

Na podstawie wykresu funkcji liniowej (rys. 6) znajdziemy wzór tej funkcji $f(x) = ax + b$.

Sposób I

Punkt przecięcia wykresu z osią y ma współrzędne $(0, 2)$, więc $b = 2$. Aby znaleźć współczynnik a , rozwiązujemy równanie $f(x_1) = ax_1 + 2$ po podstawieniu za x_1 i $f(x_1)$ współrzędnych dowolnego punktu należącego do wykresu. Zazwyczaj wybieramy punkt, którego współrzędne najłatwiej odczytać. W rozważanym przypadku może to być np. punkt o współrzędnych $(2, 5)$. A zatem:

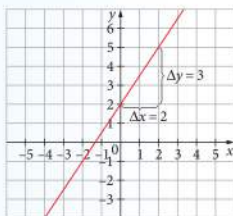
$$5 = 2a + 2 \Rightarrow a = 1,5$$

Sposób II

Możemy zastosować wyprowadzony wcześniej wzór $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Po podstawieniu na przykład: $\Delta x = 2$, $\Delta y = 3$ otrzymujemy:

$$a = \frac{3}{2} = 1,5$$

Funkcja, której wykres przedstawiono na rysunku 6, wyraża się wzorem $f(x) = 1,5x + 2$.



Rys. 6

PRZYKŁAD 6

Dopasowanie prostej do wyników pomiarów

W poniższym przykładzie pomijamy sposób wykonywania doświadczenia oraz opisanie użytych przyrządów. Interesuje nas tylko prawidłowe sporządzenie wykresu na podstawie wyników pomiaru oraz wykonanie obliczeń.

Linkę przerzuconą przez błoczek jednym końcem przyczepiono do wózka, a na drugim końcu zawieszono odważnik. Wózek poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Przebytą drogę mierzono co 0,5 sekundy z dokładnością do 0,04 m, a czas z dokładnością do 0,01 s.

Na podstawie doświadczenia wyznaczamy przyspieszenie wózka.



Niepewności czasu są tak małe, że je pomijamy.

t, s	t^2, s^2	s, m
1,0	1,00	$0,21 \pm 0,04$
1,5	2,25	$0,48 \pm 0,04$
2,0	4,00	$0,72 \pm 0,04$
2,5	6,25	$1,16 \pm 0,04$
3,0	9,00	$1,80 \pm 0,04$

Do obliczenia wartości przyspieszenia wykorzystamy wzór:

$$s = \frac{a}{2} t^2$$

$$s = A t^2$$

Wykresem zależności $s(t^2)$, jest półprosta wychodząca z początku układu.

Jeśli jest dopasowana prawidłowo, to tyle samo punktów pomiarowych leży „nad”, co i „pod” nią. Obrazuje ją linia ciągła na wykresie.

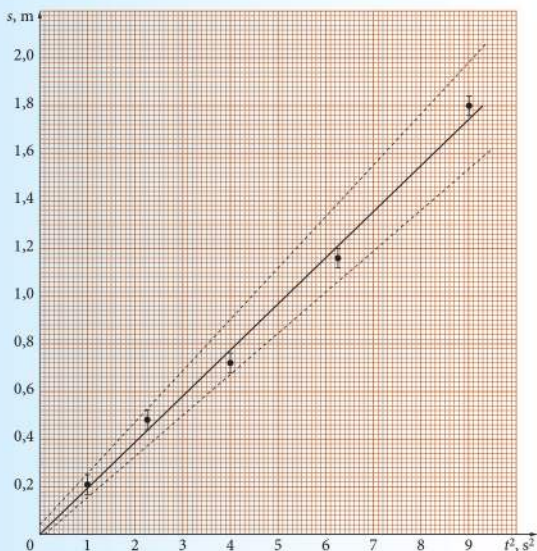
Współczynnik A to tangens kąta nachylenia półprostej do osi t^2 .

$$A = \frac{1,74 \text{ m}}{9 \text{ s}^2} \approx 0,193 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Wartość przyspieszenia a

$$a = 2A = 2 \cdot 0,193 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,387 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0,39 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Aby oszacować niepewność wartości przyspieszenia, rysujemy półproste pomocnicze, między którymi zawarte są punkty pomiarowe wraz z niepewnościami (półproste narysowano linią przerywaną).



$$A_{\max} = \frac{1,98 \text{ m}}{9 \text{ s}^2} = 0,22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$A_{\min} = \frac{1,53 \text{ m}}{9 \text{ s}^2} = 0,17 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Delta A = \frac{1}{2}(A_{\max} - A_{\min})$$

$$\Delta A = \frac{1}{2}(0,22 - 0,17) = 0,025 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Delta a = 2\Delta A = 0,05 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = (0,39 \pm 0,05) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Niepewność względna

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{0,05}{0,39} \approx 0,13 = 13 \%$$

Funkcja kwadratowa i jej własności

s. 40

Funkcją kwadratową nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$. Liczby a, b i c nazywamy współczynnikami funkcji kwadratowej.

s. 61

s. 70

Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Wzór $y = ax^2 + bx + c$ to wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej.

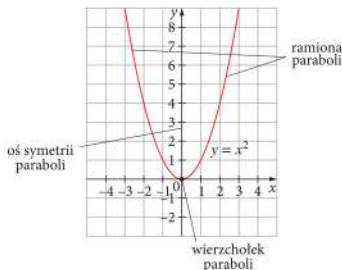
Wzór funkcji kwadratowej może przyjąć postać:

1. $y = ax^2$ dla $b = 0$ i $c = 0$

2. $y = ax^2 + c$ dla $b = 0$

3. $y = ax^2 + bx$ dla $c = 0$

Wykresem każdej funkcji kwadratowej jest **parabola** (rys. 7).



Rys. 7

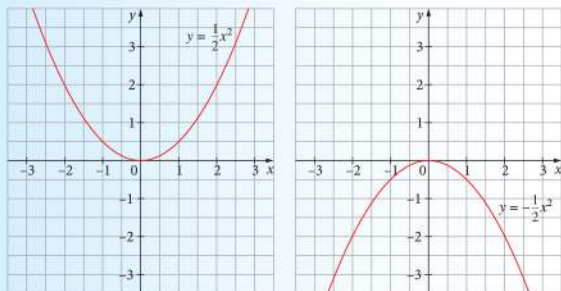
Usytuowanie paraboli w układzie współrzędnych oraz jej kształt **zależą od wartości liczbowych współczynników a , b i c .**

PRZYKŁAD 7

Aby narysować wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2$, sporządzamy tabelkę.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$16a$	$9a$	$4a$	a	0	a	$4a$	$9a$	$16a$

Na rysunku 8 przedstawiono przykładowe wykresy funkcji dla $a = \frac{1}{2}$ i dla $a = -\frac{1}{2}$.



Rys. 8

Zauważ, że ramiona paraboli są zwrócone w górę, gdy $a > 0$, i w dół, gdy $a < 0$.

Funkcja $y = ax^2$ ma jedno miejsce zerowe $x = 0$.

Przyjrzyjmy się teraz funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ w postaci ogólnej, w której wszystkie współczynniki są różne od zera. Aby narysować wykres takiej funkcji kwadratowej, można oczywiście posłużyć się tabelką. Jednak w wielu przypadkach potrzebne jest znalezienie miejsc zerowych, jako współrzędnych punktów przecięcia wykresu z osią x . W takich sytuacjach korzystamy ze wzorów, których wyprowadzenie poznasz na lekcjach matematyki. We wzorach tych występuje **wyróżnik funkcji kwadratowej (Δ)** $\Delta = b^2 - 4ac$. Obliczamy wartość liczbową tego wyrażenia.

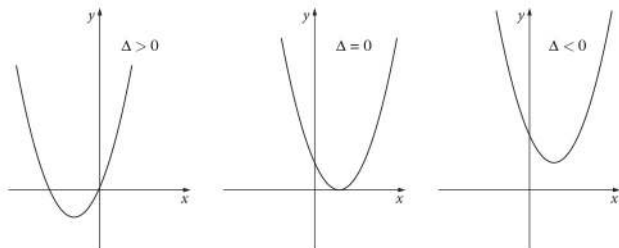
- Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa różne miejsca zerowe: x_1 i x_2 , które obliczamy za pomocą wzorów:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ i } \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Jeśli $\Delta = 0$, to $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$, czyli funkcja ma jedno (tzw. podwójne) miejsce zerowe.
- Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych.

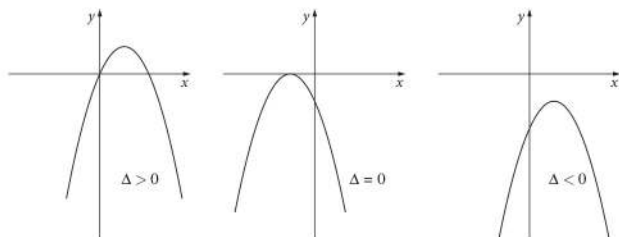
Na poniższych rysunkach przedstawiono **przykładowe** wykresy funkcji kwadratowych.

Dla $a > 0$



Rys. 9

Dla $a < 0$

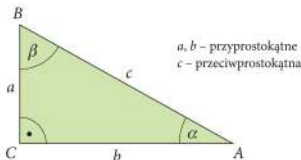


Rys. 10

3. ELEMENTY TRYGNOMETRII

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Między kątami i bokami w trójkącie prostokątnym (rys. 11) zachodzą związki, które nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego**.



Rys. 11

s. 58

Sinusem kąta α , oznaczanym symbolem $\sin \alpha$, nazywamy liczbę równą ilorazowi długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α i długości przeciwprostokątnej.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

s. 64

s. 70

s. 105

Cosinusem (czytaj: kosinusem) kąta α , oznaczanym symbolem $\cos \alpha$, nazywamy liczbę równą ilorazowi długości przyprostokątnej przyległej do kąta α i długości przeciwprostokątnej.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

s. 127

s. 131

s. 160

Tangensem kąta α , oznaczanym symbolem $\operatorname{tg} \alpha$, nazywamy liczbę równą ilorazowi długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α i długości przyprostokątnej przyległej do kąta α .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

W trójkącie prostokątnym na rysunku 11 zachodzi zależność $\frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$. Iloraz $\frac{b}{a}$ jest nazywany cotangensem (czytaj: kotangensem) kąta α i oznaczany symbolem $\operatorname{ctg} \alpha$.

Omawiane ilorazy przyporządkowują liczby rzeczywiste kątowi ostremu α , którego miara jest wyrażona w stopniach lub w radianach. Takie przyporządkowania nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi kąta α** .

Zapiszemy teraz wzory funkcji trygonometrycznych kąta β w trójkącie ABC (rys. 11) i znajdziemy ich związki z funkcjami trygonometrycznymi kąta α .

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

Skorzystamy z definicji funkcji trygonometrycznych kąta α i wyprowadzimy związek między nimi.

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

Ponadto, na podstawie twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy (przydatny w wielu zadaniach) związek zwany „jedynką trygonometryczną”:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

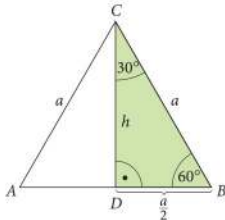
Wyrażenia $(\sin \alpha)^2$ i $(\cos \alpha)^2$ zapisujemy zwyczajowo w postaci $\sin^2 \alpha$ i $\cos^2 \alpha$, czyli:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Funkcje trygonometryczne kątów: 30° , 60° i 45°

Obliczymy kolejno wartości liczbowe $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kątów 30° i 60° oraz 45° .

W trójkącie równobocznym ABC o boku długości a (rys. 12) wysokość h zawiera się zarówno w dwusiecznej kąta przy wierzchołku, z którego poprowadzona jest wysokość, jak i w symetralnej podstawy, która dzieli podstawę na dwa równe odcinki o długościach $\frac{a}{2}$.



Rys. 12

Każdy kąt w trójkącie równobocznym ma miarę równą 60° , więc kąty ostre w trójkącie prostokątnym DBC mają miary 30° i 60° . Wysokość h trójkąta znajdujemy z twierdzenia Pitagorasa:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$\frac{a^2}{4} + h^2 = a^2$$

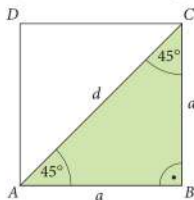
$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Z definicji funkcji trygonometrycznych otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} & \sin 60^\circ &= \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\frac{h}{a}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 60^\circ &= \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\frac{a}{2}}{\frac{h}{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} & \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{\frac{h}{a}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta 45° , rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC , który jest połową kwadratu o boku długości a (rys. 13).



Rys. 13

Przekątna kwadratu zawiera się w dwusiecznej kąta prostego, więc w trójkącie ABC oba kąty ostre mają miarę równą 45° .

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$\begin{aligned}a^2 + a^2 &= d^2 \\ d &= \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}\end{aligned}$$

Przyprostokątne w trójkącie ABC mają jednakowe długości, więc:

$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &= \cos 45^\circ = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} 45^\circ &= \frac{a}{a} = 1\end{aligned}$$

W tabeli zestawiono wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 0° , 20° , 30° , 45° , 60° , 90° i 180° .

α	0°	20°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	0,3420	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	0,9397	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	0,3640	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0

s. 162

s. 168

4. WYBRANE POJĘCIA GEOMETRYCZNE

Styczna do okręgu

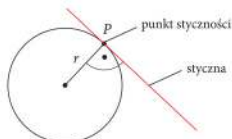
s. 20

Styczna do okręgu to prosta, która ma tylko jeden punkt wspólny z okręgiem (rys. 14).

s. 29

Punkt ten nazywamy **punktem styczności**. Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia okręgu łączącego środek okręgu z punktem styczności.

s. 134

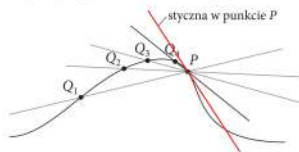


Rys. 14

Styczna do krzywej

Gdy chcemy wyznaczyć styczną do krzywej w punkcie P (rys. 15), zaznaczamy na niej inny punkt Q_1 i rysujemy prostą PQ_1 (tę prostą nazywamy sieczną). Czynność tę powtarzamy dla kolejnych punktów $Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ leżących coraz bliżej punktu P . Im bliżej punktu P znajduje się punkt Q_n , tym prosta PQ_n jest lepszym przybliżeniem stycznej do krzywej w punkcie P . W pewnym małym otoczeniu punktu styczności jest on jedynym punktem wspólnym krzywej i jej stycznej.

Zauważ, że styczna do krzywej w punkcie P może być jednocześnie sieczną tej krzywej.

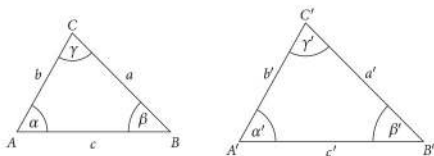


Rys. 15

Podobieństwo trójkątów

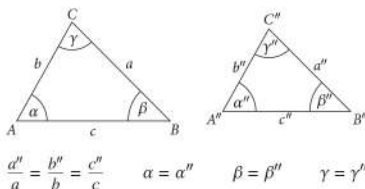
s. 28

Na rysunku 16 przedstawiono trójkąty podobne: $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, a na rysunku 17 – trójkąty podobne: $\triangle ABC$ i $\triangle A''B''C''$. Podobieństwo trójkątów oznaczamy symbolem $\sim$ i zapisujemy: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ oraz $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.



Rys. 16

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \quad \alpha = \alpha' \quad \beta = \beta' \quad \gamma = \gamma'$$



Rys. 17

Kąty w trójkątach podobnych są równe, a odpowiednie boki – proporcjonalne. Ilość długości odpowiednich boków nazywamy skalą podobieństwa k (np. $\frac{a'}{a} = k$). $\Delta A'B'C'$ jest podobny do ΔABC (rys. 16) w skali $k > 1$, a $\Delta A''B''C''$ jest podobny do ΔABC (rys. 17) w skali $k < 1$.

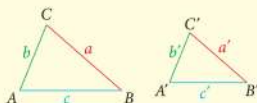
Podobieństwo trójkątów stwierdzamy na podstawie jednej z trzech cech podobieństwa. **Cechy podobieństwa trójkątów** są warunkami koniecznymi i wystarczającymi, aby dwa trójkąty były podobne.

s. 105

Pierwsza cecha podobieństwa trójkątów (bbb)

Jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.

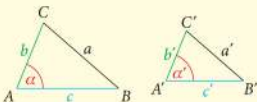
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$



Druga cecha podobieństwa trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty zawarte między tymi bokami mają jednakowe miary, to te trójkąty są podobne.

$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \text{ i } \alpha = \alpha' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$



Trzecia cecha podobieństwa trójkątów (kkk)

Jeżeli miary kątów jednego trójkąta są równe miarom odpowiednich kątów drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.

$$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$



ZADANIA

1. Znajdź związek między kątem nachylenia wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$ (dla $a > 0$ i $b > 0$) a współczynnikiem kierunkowym a .
2. Podaj miary kątów nachylenia wykresów funkcji $f(x) = \sqrt{3}x + 1$ i $g(x) = x - 2$ do osi x układu współrzędnych.
3. Dla podanych niżej funkcji kwadratowych:
 $f(x) = x^2 - 2x - 3$
 $g(x) = 0,5x^2 - x + 0,5$
 $h(x) = -2x^2 + x - 1$
 - a) oblicz wyróżnik;
 - b) wskaż funkcje, które mają miejsca zerowe, i oblicz te miejsca zerowe;
 - c) narysuj wykresy.
4. Wektor $\vec{a}$ o wartości równej 5 cm jest nachylony do osi x układu współrzędnych pod kątem $\alpha = 30^\circ$. Oblicz wartości składowych wektora wzdłuż osi x i y oraz zapisz jego współrzędne.
5. W jednym układzie współrzędnych narysuj wykresy czterech funkcji:
 $f(x) = -x$, $g(x) = 2x$, $h(x) = 4$, $j(x) = -2$.
Punkty przecięcia wykresów funkcji $f(x)$ i $g(x)$ z wykresem funkcji $h(x)$ oznacz odpowiednio literami A i B , punkty przecięcia wykresów funkcji $f(x)$ i $g(x)$ z wykresem funkcji $j(x)$ – literami C i D , a punkt przecięcia osi układu współrzędnych – literą O .
 - a) Wykaż, że trójkąty AOB i COD są podobne.
 - b) Oblicz skalę k podobieństwa trójkąta AOB do trójkąta COD .
 - c) Odszukaj na rysunku inne pary trójkątów podobnych.

Opis ruchu postępowego

Strona	Zadanie	Odpowiedź
1. Elementy działań na wektorach		
13	2	$a = \sqrt{13}$, $b = 5$, $c = \sqrt{5}$, $d = \sqrt{17}$
2. Pojęcia i wielkości fizyczne opisujące ruch (I)		
22	1	a) $v_{gr} = \frac{2l}{t} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ b) $ \vec{v}_{gr} = 0$
22	2	a) $v_{gr1} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_{gr2} = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ b) $v_{gr1} = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_{gr2} = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ c) $v_{gr1} = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_{gr2} = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
23	3	$v_{gr \text{ kierowcy}} = \frac{v_{gr} \cdot v(t_1 + t_2)}{vt_1 + vt_2} = 24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, gdzie: $t_1 = 15 \text{ min}$, $t_2 = 3 \text{ min}$
23	4	$t = \frac{d}{v_M - v_A} = 50 \text{ s}$, $s_A = v_A \frac{d}{v_M - v_A} = 75 \text{ m}$
23	5	$v = 48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
23	6	Szybkość kierowcy powinna być nie większa niż v_2 . $v_2 = \frac{v_1 v_{ogr}}{2v_1 - v_{ogr}} \approx 57 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
3. Pojęcia i wielkości fizyczne opisujące ruch (II)		
30	1	$a_{m \&} = \frac{(v_{m2} - v_{m1})v_a}{s_a} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $v_{m \&} = \frac{s_m}{s_a} v_a = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
30	2	$a_m = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + a_s^2} \approx 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
30	3	a) $a_s = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ b) $a_n = \frac{v_1^2}{r} = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ c) $a = \sqrt{a_s^2 + a_n^2} \approx 150 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
4. Ruch jednostajny prostoliniowy		
37	1	$v_1 = \frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\text{tg } \alpha_1 = \frac{2}{3}$ $v_2 = \frac{4}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\text{tg } \alpha_2 = \frac{4}{3}$
37	2	$v_{gr} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = 66 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, gdzie: $t_1 = 10 \text{ min}$, $t_2 = 20 \text{ min}$
37	4	a) $t = \frac{1}{3} \text{ h}$, $s_1 = 6 \text{ km}$, $s_{II} = 5 \text{ km}$, $v_1 = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_{II} = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ d) $d = 44 \text{ km}$

Strona	Zadanie	Odpowiedź
5. Ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy		
43	1	a) 1B, 2D, 3A, 4C
44	2	a) $v_{\text{sr}} = \frac{at}{2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ b) $v_{\text{sr}} = \frac{a(t_1+t_2)}{2} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, gdzie: $t_1 = 2 \text{ s}$, $t_2 = 4 \text{ s}$
44	3	a) $v = v_0 + at = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ b) $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = 225 \text{ m}$
44	4	b) $v = v_0 + \frac{v_2^2 - v_0^2}{2x_0} t = 12,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $x = 13,75 \text{ m}$
45	5	b) $x = 39 \text{ m}$ c) $v = v_0 - at = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
45	6	b) $v_{\text{sr}} = \frac{v_0}{2} = 135 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $x = 525 \text{ m}$
45	7	b) $t_Z = t_B = \frac{v + \sqrt{v^2 + 2gH}}{g}$
6. Przykłady opisu ruchów zmiennych		
52	2	a) 0–6 s ruch jednostajnie przyspieszony 6–12 s ruch jednostajny 12–15 s ruch jednostajnie opóźniony 15–18 s ruch jednostajnie przyspieszony 18–21 s ruch jednostajny 21–24 s ruch jednostajnie opóźniony c) $s = 33 \text{ m}$ d) $x = 9 \text{ m}$
52	3	b) $s = 462,5 \text{ m}$ c) $v_{\text{sr}} \approx 13,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
7. Względność ruchu		
59	1	$t = \frac{2sv_1}{v_1^2 - v_2^2} = 7,5 \text{ min}$
59	3	$\vec{v}_{\text{wzgl}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, $ \vec{v}_{\text{wzgl}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
8. Opis ruchu w dwóch wymiarach (I)		
67	1	$v_0 = \sqrt{\frac{gh}{8}} \approx 3,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
68	2	$v_{0 \text{ min}} = d \sqrt{\frac{g}{2(H-h)}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
68	4	$a_r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \approx 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Strona	Zadanie	Odpowiedź
68	5	$\frac{T_{\min}}{T_{\text{godz}}} = \frac{1}{12}, \quad \frac{\omega_{\min}}{\omega_{\text{godz}}} = 12, \quad \frac{v_{\min}}{v_{\text{godz}}} = 18$
68	6	a) $v_1 = 2\pi\nu r \approx 31,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_2 = \pi\nu r \approx 15,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ b) $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi\nu \approx 314 \frac{1}{\text{s}}$ c) $a_{t1} = 4\pi^2\nu^2 r \approx 9900 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad a_{t2} = 2\pi^2\nu^2 r \approx 4900 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
68	7	$T = \frac{2\pi(R+h)}{v} \approx 1,6 \text{ h}, \quad a_r = \frac{v^2}{R+h} \approx 8,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
68	8	a) dla $v = \text{const}$: $\frac{a_{t1}}{a_t} = \frac{r}{r_1}$ dla $\omega = \text{const}$: $\frac{a_{t1}}{a_t} = \frac{r_1}{r}$
*9. Opis ruchu w dwóch wymiarach (II)		
73	1	a) $v = v_0 \cos \alpha \approx 4,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ b) $Z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 2,2 \text{ m}$ c) $H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \approx 0,31 \text{ m}$
73	2	$\tan \alpha = 4, \quad \alpha \approx 76^\circ$
Zadania powtórzeniowe		
83	1	1.2. $t_s = 10 \text{ s}, \quad x_s = 2 \text{ cm}$
83	2	2.2. $t_z = 4 \text{ s}, \quad x_z = -4 \text{ m}$
84	3	3.2. $t_z = 4 \text{ s}, \quad x_z = 16 \text{ m}$
84	5	5.2. 1: $ \Delta \vec{v} = v - v_0, \quad 2: \Delta \vec{v}' = v + v_0$ 5.3. $t_1 = \frac{v - v_0}{g}, \quad t_2 = \frac{v + v_0}{g}$
85	6	6.2. $v_{wzgl} = v_1 - v_2 = 200 \frac{\text{km}}{\text{h}}, \quad t_w = \frac{l_1 + l_2}{v_1 - v_2} = 6,3 \text{ s}$ 6.3. $t_m = \frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2} = 4,2 \text{ s}$
86	7	7.1. $\cos \alpha = \frac{v_p}{v_l} = 0,6, \quad \alpha \approx 53^\circ$ 7.2. $t_l = \frac{2dv_l}{v_l^2 - v_p^2} = 250 \text{ s} \approx 4,2 \text{ min}$ 7.3. $t_\perp = \frac{2d}{\sqrt{v_l^2 - v_p^2}} = 200 \text{ s} \approx 3,3 \text{ min}$
86	8	8.2. $v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} \approx 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad h = H - \frac{gt^2}{2} \approx 15 \text{ m}$ 8.3. $\tan \alpha = \frac{v_0}{gt} \approx 0,61, \quad \alpha \approx 31^\circ$

Strona	Zadanie	Odpowiedź
87	9	$9.1. \omega = 0,25 \frac{\text{stopni}}{\text{min}} \approx 0,26 \frac{\text{rad}}{\text{h}}$ $9.2. v = \frac{2\pi R}{T} \approx 1667 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 460 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $9.3. a_t = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \approx 0,034 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \frac{g}{a_t} \approx 300$
87	10	$10.2. v(t) = 1,60 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,32 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t$ $10.4. s = 4 \text{ m}$ $10.5. 1P, 2F, 3P$

Siła jako przyczyna zmian ruchu

Strona	Zadanie	Odpowiedź
10. Zasady dynamiki Newtona		
107	2	a) $F_m = mg = 4 \text{ N}$ b) $F_N = 2mg = 8 \text{ N}$
107	3	51 g
11. Siła a zmiana pędu ciała		
112	2	1F, 2P, 3F, 4P, 5P, 6F
112	3	a) $\Delta p = 6 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ b) $\Delta p = 2 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$
12. Zasada zachowania pędu dla układu ciał		
119	1	$x_C = \frac{dM_K}{M_K + M_Z} \approx 4700 \text{ km}$
119	2	a) $v_x = 2v, \Delta \vec{p}_1 = -\frac{1}{2}m\vec{v}, \Delta \vec{p}_2 = \frac{1}{2}m\vec{v}$ b) $v_x = 3v, \Delta \vec{p}_1 = -m\vec{v}, \Delta \vec{p}_2 = m\vec{v}$
119	3	$F_s = \frac{m}{t} \cdot v = 200 \text{ N}$
13. Tarcie		
129	1	$f_k = \frac{h}{\sqrt{(vr)^2 - h^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,6$
129	2	$a = g(\sin \alpha - f_k \cos \alpha) \approx 3,21 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
129	3	$a \approx 6,6 \text{ m/s}^2$
129	4	a) 1: rośnie do $2mg$, 2: maleje do zera b) 1: maleje do zera, 2: maleje do zera

Strona	Zadanie	Odpowiedź
14. Siły w ruchu po okręgu		
136	1	b) Wartość siły dośrodkowej nie zmienia się, ale zmienia się promień okręgu. c) Szybkość ciała będzie większa od v . d) $v_1 = \sqrt{\frac{m_3 g r}{m_1}}$
137	3	b) $\tan \alpha = \frac{v^2}{rg} \approx 0,20$, $\alpha \approx 11^\circ$ c) $\tan \alpha = f$
15. Opis ruchu w układach nieinercjalnych		
146	6	$f_s \min = \frac{g}{\omega^2 R} = 0,4$
146	7	b) $a = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Zadania powtórzeniowe		
152	1	1.2. około 66°
152	2	2.1. $a = \frac{F - f_k mg}{m} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
152	3	$v_{p0} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \sqrt{2gs \cdot \sin \alpha} + \frac{m_1}{m_2} v = 66 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
152	4	4.1. $v_2 = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, zwrot prędkości jest zgodny ze zwrotem osi x 4.2. Oznaczmy jako $\Delta \vec{p}_m$ zmianę pędu mniejszej części pocisku, a $\Delta \vec{p}_w$ – większej jego części. $ \Delta \vec{p}_m = \Delta \vec{p}_w = 60 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ 4.3. $\Delta \vec{p}_m$ jest zwrócony przeciwnie do zwrotu osi x , $\Delta \vec{p}_w$ – zgodnie.
153	5	5.2. $d = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \approx 0,6 \text{ m}$ 5.3. $v_{pl} = \frac{d}{\Delta t} \approx 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ szybkość chłopca względem platformy: $v_{ch, pl} = \frac{l}{\Delta t} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ szybkość chłopca względem toru: $v_{ch} = v_{ch, pl} - v_{pl} \approx 0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
153	7	7.2. Skrzynka zostanie wprowadzona w ruch i uzyska przyspieszenie o wartości $a = \frac{F \cos \alpha - f_k (mg - F \sin \alpha)}{m} \approx 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
154	9	9.1. $F_{N1} - F_{N2} = \frac{8\pi^2 R}{g T^2} F_c \approx 0,88 \text{ N}$ 9.2. $T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}} \approx 13 \text{ s}$ 9.3. $v = \sqrt{\frac{gR}{2}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
155	11	11.2. $a_u = g \cdot \tan \alpha$ 11.3. $F_N = ma_u \sin \alpha + mg \cos \alpha$

Strona	Zadanie	Odpowiedź
155	12	$a = \frac{F_s}{M} - g \approx 2,51 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
155	13	$F_s = Ma \approx 30 \text{ MN}$
155	14	14.2. $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ 14.3. $F = 24 \text{ N}$ 14.4. C

Praca, moc, energia mechaniczna

Strona	Zadanie	Odpowiedź
16. Praca i moc		
165	1	$W_{\text{wyp}} = 4 \text{ J}$
165	2	a) $W = mgh = 2 \text{ kJ}$ b) $W = m(g+a)h = 3 \text{ kJ}$
165	3	$W = 150 \text{ kJ}$
165	4	$W_1 = 0, W_2 = 0$
165	5	$P(t) \approx 1000 \frac{\text{W}}{\text{s}} \cdot t, W = 12,5 \text{ kJ}, P_{\text{sr}} = 2,5 \text{ kW}$
165	6	$P = (mg \sin \alpha + F_{\text{op}})v \approx 63 \text{ kW}$
17. Rodzaje energii mechanicznej		
170	2	$F_{\text{op sz}} = \frac{m(v_1^2 - v_2^2)}{2d} = 50 \text{ kN}$
170	3	$E_k = \frac{m^2 v^2}{2M} = 80 \text{ J}$
170	4	1P, 2P, 3P, 4P
18. Zasada zachowania energii mechanicznej		
183	1	$s = \sqrt{h^2 + \frac{1}{f^2} \left(\frac{v_0^2}{2g} - h \right)^2} \approx 10,8 \text{ m}$
183	2	$v_0 = \sqrt{gh}$
183	3	$h_{\text{max}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$
183	4	$v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, szybkość ta nie zależy od d
184	6	a) $\Delta E_{p1} = 0,9 \text{ J}$ b) $\Delta E_{k1} = 0,3 \text{ J}, \Delta E_{k2} = 0,6 \text{ J}, \Delta E_{k3} = 0,9 \text{ J}$ c) $\Delta E_1 = 1,2 \text{ J}, \Delta E_2 = 0,6 \text{ J}, \Delta E_3 = -1,8 \text{ J}$

Strona	Zadanie	Odpowiedź
184	7	a) $v_A = \sqrt{gr}$; $v_B = v_D = \sqrt{3gr}$; $v_C = \sqrt{5gr}$ b) $F_A = 0$; $F_B = F_D = 3mg$; $F_C = 6mg$
184	8	$E_{k \max} = mg \frac{d}{\pi} \approx 7,8 \text{ J}$
19. Zderzenia ciał		
189	1	a) $v_1 = -u_1$, $v_2 = 0$ b) $v_1 = u_2 = -u_1$, $v_2 = u_1 = -u_2$
189	3	b) $\cos \alpha = 1 - \frac{(m_2 v)^2}{2gl(m_1 + m_2)^2} \approx \frac{79}{80}$, $\alpha \approx 9^\circ$ c) $ \Delta E_m = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} \approx 0,04 \text{ J}$
190	4	Nie.
190	5	a) $\vec{v} = \frac{m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2}{m_1 + m_2}$, $v = \frac{\sqrt{m_1^2 u_1^2 + m_2^2 u_2^2}}{m_1 + m_2}$, $\tan \alpha = \frac{m_2 u_2}{m_1 u_1}$ $ \Delta E_k = \frac{m_1 m_2 (u_1^2 + u_2^2)}{2(m_1 + m_2)}$ b) $v \approx 0,34 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\tan \alpha = 1$, $ \Delta E_k \approx 0,031 \text{ J}$ c) $y = x$
20. Sprawność urządzeń mechanicznych		
194	1	$\eta_A = \frac{mg}{F_2} = 0,90$, $\eta_B = \frac{F_2}{F} \approx 0,89$, $\eta_u = \frac{mg}{F} \approx 0,80$
Zadania powtórzeniowe		
201	1	1.1. $W \approx 37,6 \text{ J}$ 1.2. $W_T \approx 0,57 \text{ W}$, $W_E \approx 0,43 \text{ W}$
201	2	2.2. $W = \frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \approx 19 \text{ J}$ 2.3. $f = \frac{m^2 v^2}{2M^2 g s} = 0,016$
201	3	3.2. $ \Delta E = mg(h + d) + \frac{mv_0^2}{2} \approx 2,0 \text{ J}$ 3.4. $v = \sqrt{v_0^2 + 2hg} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ 3.5. $F_{\text{op}} = \frac{m}{d} \left[g(h + d) + \frac{v_0^2}{2} \right] = 8,1 \text{ N}$
202	4	4.1. $v_1 = 0$, $v_2 = 2u = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ 4.2. $E_{ku} = 6mu^2 = 0,3 \text{ J}$ 4.3. $m_2 > 3m_1$ 4.4. np. dla $m_2 = 4m$: $v_1 = \left -\frac{1}{5}u \right = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = \frac{9}{5}u = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ 4.5. $E_{ku} = \frac{13}{2}mu^2 = 0,325 \text{ J}$

Strona	Zadanie	Odpowiedź
202	5	5.1. $P_2 = P_1 \frac{v_2^2}{v_1^2} = 45 \text{ kW}$ 5.2. $C \approx 1 \cdot 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$
203	6	6.1. $v = V = \frac{\sqrt{3}}{3} u \approx 1,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ 6.2. $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \alpha = 30^\circ$
203	7	7.2. Ruch niejednostajnie przyspieszony z przyspieszeniem malejącym do zera. 7.3. $a(v) = \frac{P}{mv} - \frac{F_{\text{op}}}{m}$
204	8	8.1. $P_{\text{st}} = f_k F_c v \cdot \cos \alpha \approx 3,1 \text{ kW}$ 8.2. $\eta_a = \frac{F_c v \sin \alpha}{P_{\text{pole}}} \approx 0,64$ 8.3. $\eta_s = \frac{\eta_a}{\eta_c} \approx 0,75$

■ Zjawiska hydrostatyczne

Strona	Zadanie	Odpowiedź
21. Ciśnienie hydrostatyczne		
214	2	$p = \rho gh \approx 4500 \text{ hPa}$, gdzie $h \approx 45 \text{ m}$
214	3	$P = p_a ab \approx 45 \text{ kN}$
22. Prawo Pascala		
218	1	$F_1 = \frac{F_2}{9} = 20 \text{ N}$
218	3	$F_2 = F_1 \frac{h}{H} = 10 \text{ kN}$
218	4	$p = \rho gh + p_{\text{at}} \approx 110 \text{ MPa}$
23. Prawo naczyni połączonych		
221	2	$\rho_{\text{ol}} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
221	3	$\rho_{\text{ol}} = \frac{h}{H} \rho_w = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
24. Prawo Archimedesesa		
230	1	$\rho = 0,3 \rho_{\text{Hg}} \approx 4,1 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
230	2	$\frac{V_{\text{wyn}}}{V} = \frac{\rho_w - \rho}{\rho_w} = 0,1$

Strona	Zadanie	Odpowiedź
230	4	$F_{\min} = mg = 20 \text{ N}$
230	5	$\rho_c = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \cdot \rho_w = 1300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, gdzie: m_1 – masa próbówki, m_2 – masa śrutu, gdy próbówkę zanurzamy w wodzie, m_3 – masa śrutu, gdy próbówkę zanurzamy w innej cieczy
230	7	b) $\rho_1 = \frac{M}{V} = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\rho_2 = \frac{M-m}{V} = 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\rho_3 = \frac{M-2m}{V} = 1,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
25. Zastosowanie prawa Archimedesasa do wyznaczania gęstości		
234	1	a) $\rho_{\text{kości st}} = \frac{1}{1 - \frac{F_s}{F_c}} \cdot \rho_w = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ b) bezwzględna niepewność pomiaru: $\Delta \rho_{\text{kości st}} \approx 140 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ względna niepewność pomiaru: $\frac{\Delta \rho_{\text{kości st}}}{\rho_{\text{kości st}}} \cdot 100 \% \approx 7 \%$
234	3	Wynik jest taki sam.
Zadania powtórzeniowe		
239	2	2.1. Nie. 2.2. Głębokość zanurzenia drewna nie uległa zmianie. 2.3. Głębokość zanurzenia nie zmienia się.
239	4	4.2. $\Delta h = h_2 \frac{\rho_{\text{st}} - \rho_{\text{ol}}}{\rho_w - \rho_{\text{ol}}} = 9 \text{ cm}$
240	5	5.2. $\Delta F_N = mg \rho_w \cdot \frac{\rho_{\text{st}} - \rho_{\text{ol}}}{\rho_{\text{st}} \cdot \rho_{\text{ol}}} \approx 18,5 \text{ mN}$ 5.3. $\frac{\Delta F_{N \text{ w}}}{\Delta F_{N \text{ ol}}} = \frac{\rho_w}{\rho_{\text{ol}}} = 1,25$ 5.4. Tak, wzrosną.
240	6	6.1. $V_1 - V_2 = \frac{m}{\rho_m} = 25 \text{ dm}^3$ 6.2. $V_2 - V_3 = \frac{m}{\rho_w} - \frac{m}{\rho_m} = 45 \text{ dm}^3$
241	7	7.1. $m = \frac{F_1}{g} = 0,1 \text{ kg}$, $V = \frac{F_1 - F_2}{\rho_w g} = 10 \text{ cm}^3$ $\rho = \frac{F_1}{F_1 - F_2} \cdot \rho_w = 10 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ 7.2. $\frac{m_{\text{Ag}}}{m} = \frac{\rho_{\text{Ag}}}{\rho} \cdot \frac{\rho - \rho_{\text{Cu}}}{\rho_{\text{Ag}} - \rho_{\text{Cu}}} \approx 74 \%$ $\frac{m_{\text{Cu}}}{m} = \frac{\rho_{\text{Cu}}}{\rho} \cdot \frac{\rho_{\text{Ag}} - \rho}{\rho_{\text{Ag}} - \rho_{\text{Cu}}} \approx 26 \%$
241	8	8.1. $h = d$ 8.2. Obydwa zasięgi maleją, z_2 będzie mniejszy od z_1 . 8.3. $z_2 = z_1 \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15 z_1$

Strona	Zadanie	Odpowiedź
Tekst popularnonaukowy		
242	2	$p = 4,32 \text{ MPa}, P = 9,24 \text{ MN}$
242	3	$V \approx 2,26 \cdot 10^6 \text{ m}^3$
242	4	ok. $39,2 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

■ Niepewności pomiarowe

Strona	Zadanie	Odpowiedź
258	1	$d = (17,50 \pm 0,03) \text{ mm}$
258	2	a) $d = (1,60 \pm 0,03) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ b) Z większą precyzją należy powtórzyć pomiar długości krawędzi sześcianu.
259	3	Tak.
259	4	$k = (0,17 \pm 0,02) \frac{\text{N}}{\text{cm}} = (17 \pm 2) \frac{\text{N}}{\text{m}}$

■ Niezbędnik matematyczny

Strona	Zadanie	Odpowiedź
287	1	$\text{tg } \alpha = a$
287	2	$f: \alpha = 60^\circ, g: a = 45^\circ$
287	3	a) $\Delta_f = 16, \Delta_g = 0, \Delta_h = -7$ b) $f(-1) = f(3) = 0, g(1) = 0, h$ – brak miejsc zerowych
287	4	$a_x = 5 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}, a_y = 2,5 \text{ cm}$
287	5	b) $k = 2$

W tabeli podano wartości przybliżone.

Stała	Wartość
Wartość przyspieszenia ziemskiego	$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Stała grawitacji	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$
Promień Ziemi	$R_Z = 6370 \text{ km}$
Masa Ziemi	$M_Z = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Średnia odległość Ziemia-Księżyc	$d = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$
Masa Słońca	$M_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Promień Słońca	$R_S = 7,0 \cdot 10^5 \text{ km}$
Jednostka astronomiczna	$1 \text{ j.a.} = 1 \text{ au} = 1,50 \cdot 10^8 \text{ km}$
Wartość pierwszej prędkości kosmicznej dla Ziemi	$v_I = 7,91 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
Wartość drugiej prędkości kosmicznej dla Ziemi	$v_{II} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
Liczba Avogadra	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$
Objętość molowa gazu doskonałego w warunkach normalnych	$V = 22,4 \text{ dm}^3$
Stała gazowa	$R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
Stała Boltzmanna	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$
Ciśnienie atmosferyczne normalne	$p_0 = 101\,300 \text{ Pa}$
Temperatura zera absolutnego	$T_0 = 0 \text{ K} = -273 \text{ }^\circ\text{C}$
Współczynnik w prawie Coulomba	$k_0 = 9,0 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$
Ładunek elementarny	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masa protonu	$m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masa neutronu	$m_n = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Stała	Wartość
Masa elektronu	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Wartość prędkości światła w próżni	$c = 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Przenikalność elektryczna próżni	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$
Przenikalność magnetyczna próżni	$\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$
Stała Plancka	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Stała Rydberga	$R = 10^7 \frac{1}{\text{m}}$

Wartości funkcji trygonometrycznych

kąt α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1,0000

kąt α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
45°	0,7071	0,7071	1,0000
46°	0,7193	0,6947	1,0355
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,4301
86°	0,9976	0,0698	14,3007
87°	0,9986	0,0523	19,0811
88°	0,9994	0,0349	28,6363
89°	0,9998	0,0175	57,2900
90°	1,0000	0,0000	nie istnieje

A

areometr [areometer, hydrometer] 232

B

błąd grubý [gross error] 244

błąd systematyczny [systematic error] 245

bryła sztywna [rigid body] 14

C

ciśnienie [pressure] 210

ciśnienie hydrostatyczne [hydrostatic pressure] 211

D

droga [distance] 15

E

energia kinetyczna [kinetic energy] 169

energia potencjalna [potential energy] 167

I

iloczyn skalarny [scalar (dot) product] 160

M

metoda najmniej korzystnego przypadku [elementary method of assessing measurement uncertainty (min-max method)] 253

moc [power] 163

model [model] 14

N

naczynia połączone [communicating vessels] 219

niedociężenie [g-force] 101

niepewność bezwzględna [absolute uncertainty] 250

niepewność pomiaru [measurement uncertainty] 246

niepewność względna [relative uncertainty] 250

nieważkość [weightlessness] 101

P

paradoks hydrostatyczny [hydrostatic paradox] 213

parcie hydrostatyczne [hydrostatic pressure] 211

pęd [momentum] 108

położenie [position] 18

pomiar prosty (bezpośredni) [direct measurement] 244

pomiar złożony (pośredni) [indirect measurement] 252

popęd siły [impulse] 108

praca [work] 161

prawo Archimidesa [Archimedes' Law] 224

prawo Pascala [Pascal's Law] 215

prędkość chwilowa [instantaneous velocity] 20

prędkość średnia [average velocity] 19

przeciążenie [g-force] 100

przemieszczenie [displacement] 19

przyspieszenie chwilowe [instantaneous acceleration] 27

przyspieszenie dośrodkowe [centripetal acceleration] 28

przyspieszenie normalne [normal acceleration] 29

przyspieszenie styczne [tangential acceleration] 29

przyspieszenie średnie [mean acceleration] 25

przyspieszenie w ruchu krzywoliniowym [curvilinear acceleration] 27

punkt materialny [point mass] 14

R

ruch [motion] 14

ruch jednostajnie opóźniony [uniformly retarded motion] 41

ruch jednostajnie przyspieszony [uniformly accelerated motion] 39

ruch jednostajnie zmienny [uniform acceleration motion] 38

ruch jednostajny [uniform motion] 31

ruch obrotowy [rotational motion] 14

ruch po okręgu [circular motion] 65, 130

ruch postępowy [translational motion] 14

rzut pionowy w górę [vertical projectile motion] 47

rzut poziomy [horizontal projectile motion] 60

rzut ukośny [projectile motion] 70

S

- siła bezwładności [*force of inertia*] 139
- siła dośrodkowa [*centripetal force*] 130
- siła tarcia kinetycznego [*dynamic (kinetic) friction force*] 123
- siła tarcia spoczynkowego (statycznego) [*static friction force*] 122
- siła zachowawcza [*conservative force*] 175
- stan nieważkości [*weightlessness*] 101
- szybkość chwilowa [*instantaneous speed*] 17
- szybkość średnia [*average speed*] 16

Ś

- środek masy [*centre of mass*] 113

T

- tor [*trajectory*] 15

U

- układ inercjalny [*inertial frame of reference*] 56, 93
- układ nieinercjalny [*non-inertial frame of reference*] 138
- układ odniesienia [*frame of reference*] 14

W

- współczynnik tarcia kinetycznego [*coefficient of kinetic friction*] 123
- współczynnik tarcia statycznego [*coefficient of static friction*] 123
- współrzędna wektora [*vector coordinate*] 12
- względność ruchu [*relativity of motion*] 14

Z

- zasada względności [*principle of relativity*] 56
- zasada zachowania energii [*principle of conservation of energy*] 172, 175
- zasada zachowania pędu [*law of conservation of momentum*] 113, 116
- zasięg rzutu [*range*] 62, 72
- zderzenie centralne [*central collision*] 186
- zderzenie doskonale niesprężyste [*perfectly inelastic collision*] 189
- zderzenie doskonale sprężyste [*perfectly elastic collision*] 185
- zderzenie niecentralne [*peripheral collision*] 188

Źródła ilustracji i fotografii

Okladka: (biegaczka) Anton Vierietin/Shutterstock.com

Tekst główny: s. 7 (tor motorówki) Anastasia Gubernatorova/Shutterstock.com; s. 8 (tyrolka) Signature Message/Shutterstock.com; s. 11 (lampa) PH PHOTO STUDIO/Shutterstock.com; s. 14 (ścieżka na śniegu) patronestaff/Shutterstock.com, (ołówek) Helena-K/Shutterstock.com; s. 15 (okno) Nerthuz/Shutterstock.com, (mapa) Adrian Bergiel/WSiP; s. 16 (samochód) Golden Sikorka/Shutterstock.com; s. 17 (ślimak) Aleksandar Dickov/Shutterstock.com; s. 18 (pająk) iSKYDANCER/Shutterstock.com, (ptak) nuruddean/Shutterstock.com; s. 21 (dziewczyna – widok z boku) ArtFamily/Shutterstock.com, (dziewczyna – widok z tyłu) PanicAttack/Shutterstock.com, (chłopak – widok z przodu) ESB Professional/Shutterstock.com; s. 22 (plywak) pio3/Shutterstock.com; s. 23 (znak drogowy) Thomas Wie/Shutterstock.com; s. 24 (skoczek narciarski) Simon Bruty/Getty Images; s. 26 (Bugatti Chiron) www.bugatti.com; s. 31 (samolot) Photo_works/Shutterstock.com, (samochód) PHOTOCREO Michal Bednarek/Shutterstock.com; s. 32 (samochód) Rawpixel.com/Shutterstock.com; s. 38 (sprinter) Jacob Lund/Shutterstock.com; s. 44 (lokomotywa) auto-vector/Shutterstock.com, (kolarz) Eugene Onischenko/Shutterstock.com; s. 45 (samochód) Rawpixel.com/Shutterstock.com, (Boeing 747) aapsk/Shutterstock.com; s. 46 (rakietka) 3Dsculptor/Shutterstock.com; s. 53 (na peronie) Ditty_about_summer/Shutterstock.com; s. 54 (budynek stacji) Rvector/Shutterstock.com, (pociąg) autovector/Shutterstock.com; s. 56 (portret Galileusza) Wikipedia [Public domain], (dzieło Galileusza) Science & Society Picture Library/Getty Images, (teleskop Galileusza) A&G-Images/BE&W; s. 58 (woda) Svetlana Turchenik/Shutterstock.com, (pływak) LightField/Shutterstock.com, (samolot) klerik78/Shutterstock.com; s. 59 (wyspy) Stepnex/Shutterstock.com, (łódka) Pogorelova Olga/Shutterstock.com, (wiosłarz) gdcvcom/Shutterstock.com; s. 60 (stoper) cobalt88/Shutterstock.com, (miotacz) JoeSAPhotos/Shutterstock.com; s. 67 (pomnik Syrenki) Artur Bogacki/Shutterstock.com; s. 68 (wieża) NikolayN/Shutterstock.com; s. 70 (rzut do kosza) MaszaS/Shutterstock.com, (pilkarz) wavebreakmedia/Shutterstock.com; s. 80 (Galileusz) vkilikov/Shutterstock.com, (Einstein) Naci Yavuz/Shutterstock.com; s. 83 (robot 1) Phonlamai Photo/Shutterstock.com, (robot 2) tsuneomp/Shutterstock.com; s. 89 (motoparalotnia) Alexander Mazurkevich/Shutterstock.com; s. 90 (saneczkarz) Dainis Dericis/Shutterstock.com; s. 91 (portret Newtona) Public Domain, (dzieło Newtona) Science & Society Picture Library/Getty Images, (teleskop Newtona) Science & Society Picture Library/Getty Images; s. 92 (astronauta) NASA Photo/Alamy Stock Photo/BE&W, (dzieło Newtona) The Bridgeman Art Library/PhotoPower; s. 95 (drewniana skrzynia) Heavypong/Shutterstock.com; s. 96 (samochód) Tatiana Popova/Shutterstock.com; s. 98 (skok Feliksa Baumgartnera) RED BULL STRATOS/RED BULL/SIPA/East News; s. 100 (winda) View Pictures/UiG/Getty Images; s. 102 (dźwig) zentilia/Shutterstock.com, (drewniana skrzynia) Heavypong/Shutterstock.com; s. 106 (budowa ucha) Brian Evans/Getty Images, (przewody półkolisty) QAI Publishing/Getty Images, (ruch głowy x3) Natalia Marszałek/WSiP; s. 107 (magnesy na wadze x2) Zamkor/WSiP, (balon) Steve Snowden/Getty Images; s. 108 (odbicie piłki) GONZALO FUENTES/Forum; s. 110 (piłka) irin-k/Shutterstock.com; s. 112 (doświadczenie) Natalia Marszałek/WSiP; s. 113 (próba zderzeniowa) Benoist/Shutterstock.com; s. 117 (sprinter) Elena Kharichkina/Shutterstock.com; s. 118 (pociąg rakietowy) Andrii_M/Shutterstock.com; s. 119 (rozpad pociśku) shineast/Shutterstock.com; s. 120–121 (start rakiet Saturn V) NASA, (III stopień rakiety na orbicie) NASA; s. 122 (wyciąg samochodowy) ssuaphotos/Shutterstock.com; s. 124 (dłoni) rvlsoft/Shutterstock.com; s. 125 (elementy składowe sprzęgła) Stason4ik/Shutterstock.com; s. 130 (diabeł-ski młyn) mashurov/Shutterstock.com; s. 132 (na karuzeli) isa_ozdere/Shutterstock.com; s. 133 (pilot) Ivonne Wierink/Shutterstock.com; s. 136 (ręka zaciśnięta na rurce) Evgeny Dubinchuk/Shutterstock.com, (doświadczenie z kulką) Natalia Marszałek/WSiP; s. 137 (kolarz) TORWAISTUDIO/Shutterstock.com; s. 138 (rollercoaster) Jacob Lund/Shutterstock.com; s. 138–141 (stojący mężczyzna) Viorel Sima/Shutterstock.com, (siedzący mężczyzna) Ljupco Smokovski/Shutterstock.com; s. 141 (mężczyzna ze skrzyżowanymi rękami) Aila Images/Shutterstock.com, (mężczyzna z rękami w kieszeniach) Viorel Sima/Shutterstock.com; s. 142–143 (jadący autobus) Pavel Chagochkin/Shutterstock.com, (autobus widziany z gó-ry) Yuri Schmidt/Shutterstock.com, (sylwetka mężczyzny) Robert F. Balazik/Shutterstock.com, (autobus widziany z przodu) Yuri Schmidt/Shutterstock.com, (kierowca autobusu) Aila Images/Shutterstock.com, (balon) rangizz/Shutterstock.com; s. 145 (pilot) Ivonne Wierink/Shutterstock.com; s. 146 (mężczyzna) Viorel Sima/Shutterstock.com; s. 147 (Newton) GeorgiosArt/iStockphoto/Getty Images; s. 149 (kule bilardowe) selensergen/iStockphoto/Getty Images; s. 150 (rycerze) andrewgenn/iStockphoto/

Getty Images; s. 152 (drewniana skrzynia) Heavypng/Shutterstock.com, (dłoń) rvlsoft/Shutterstock.com; s. 153 (chłopiec) Sergei Kolesnikov/Shutterstock.com, (zabawki w pudełku) Veja/Shutterstock.com; s. 154 (diabelski młyn) mashurov/Shutterstock.com; s. 155 (malpa) HappyPictures/Shutterstock.com; s. 157 (bolid F1) Digital Storm/Shutterstock.com; s. 159 (skok o tyczce) mbolina/iStockphoto/Getty Images; s. 160 (strongman) Syda Productions/Shutterstock.com; s. 164 (drewniana skrzynia) Heavypng/Shutterstock.com, (dźwig) zentilia/Shutterstock.com; s. 166 (huczniczka) Stokkete/Shutterstock.com, (dłonie) varuna/Shutterstock.com; s. 171 (winda) iurii/Shutterstock.com, (kula ziemiska) Lightspring/Shutterstock.com; s. 178 (Hyperion Coaster) Anadolu Agency/Getty Images; s. 180–181 (rampa skateboardowa) Beau Lark/Corbis/VCG/Getty Images, (koło rowerowe) Peter Gudella/Shutterstock.com; s. 185 (kule bilaradowe) Suwan Wanawattanawong/Shutterstock.com; s. 191 (błoczek) monti/Shutterstock.com; s. 195 (wbijanie gwoźdź) CSA-Printstock/DigitalVision Vectors/Getty Images; s. 200 (XIX-wieczna siłownia) ivan-96/Digital Vision Vectors/Getty Images; s. 205 (wiatrak) pedrosala/Shutterstock.com; s. 207 (samochód elektryczny) Tramino/iStock Unreleased/Getty Images; s. 209 (batyskaf) Jeff Rotman/Alamy Stock Photo/BE&W; s. 210 (pletwonurek) fenkieandreas/Shutterstock.com, (menisk wkłęsły i wypukły) Science Photo Library/East News; s. 215 (fontanna) Osama Ahmed Mansour/Shutterstock.com, (dłoń) Room's Studio/Shutterstock.com; s. 216 (samochód) Rawpixel.com/Shutterstock.com, (układ hamulca hydrostatycznego) pattarawit/Shutterstock.com; s. 218 (batyskaf Trieste) Science Society Picture Library/Getty Images; s. 219 (słuzu) EWW Media/Shutterstock.com, (naczynia połączone) Kateryna Kon/Shutterstock.com; s. 220 (czajniczek) Ruslan Semichev/Shutterstock.com, (syfon) Zern Liew/Shutterstock.com, (U-rurka) Zamkor/WSiP; s. 221 (wieża ciśnienia) Małgorzata Łoś/www.wiezecisnien.eu; s. 223 (boja) Craig Sigston/EyeEm/Getty Images, (doświadczenie) Zamkor/WSiP; s. 227 (statek) silvae/Shutterstock.com; s. 228 (autobus widziany z przodu) Yuri Schmidt/Shutterstock.com, (kierowca autobusu) Aila Images/Shutterstock.com, (balon) rangizz/Shutterstock.com; s. 230 (balony) Steve Snowden/Getty Images; s. 231 (alkoholometr) Science & Society Picture Library/Getty Images; s. 232 (areometr w wodzie, areometr w oleju) Piotr Kubat/WSiP; s. 233 (tętniak) The Science Picture Company 2011/Getty Images; s. 234 (samoloty) TSGT Jeffrey Allen/USAF/U.S. DoD; s. 239 (półkule magdeburskie) Wikipedia [Public domain], (Ewangelista Toricelli) Stefano Bianchetti/Corbis/Getty Images, (eksperyment Pascala) Wikipedia [Public domain]; s. 240 (rzeźba) Kozlik/Shutterstock.com, (wiosłarz) gdvcom/Shutterstock.com; s. 242 (zbiornik na górze Zar) Sebastian Gora Photo/Shutterstock.com; s. 243 (ekran oscyloskopu) MARTYN F. CHILLMAID/SCIENCE PHOTO LIBRARY/East News; s. 260 (dłoń) rvlsoft/Shutterstock.com; s. 262 (dłoń) rvlsoft/Shutterstock.com; s. 265 (ręce) Evgeny Dubinchuk/Shutterstock.com; s. 267 (dłoń) rvlsoft/Shutterstock.com

s. 99–101, 103, 122–124, 126–129, 152, 161–162, 166, 169, 174, 176, 184, 193, 224, 226, 263, (drewniany klocek)

Autor: valzan/Shutterstock.com

s. 16 (schemat odcinkowego pomiaru prędkości), s. 125 (sprzęgło włączone, sprzęgło wyłączone), s. 144 (wiorówka), s. 180–181 (tory saneczkowe), s. 182 (perpetuum mobile), s. 217 (schemat budowy hamulca pneumatycznego), s. 220 (umywalka, schemat sieci wodociągowej), s. 268 (kulki na statywie)

Autor: Paweł Domownik

pozostałe ilustracje

Autorzy: Katarzyna Mentel, Hanna Michalska-Baran, MathMaster Studio

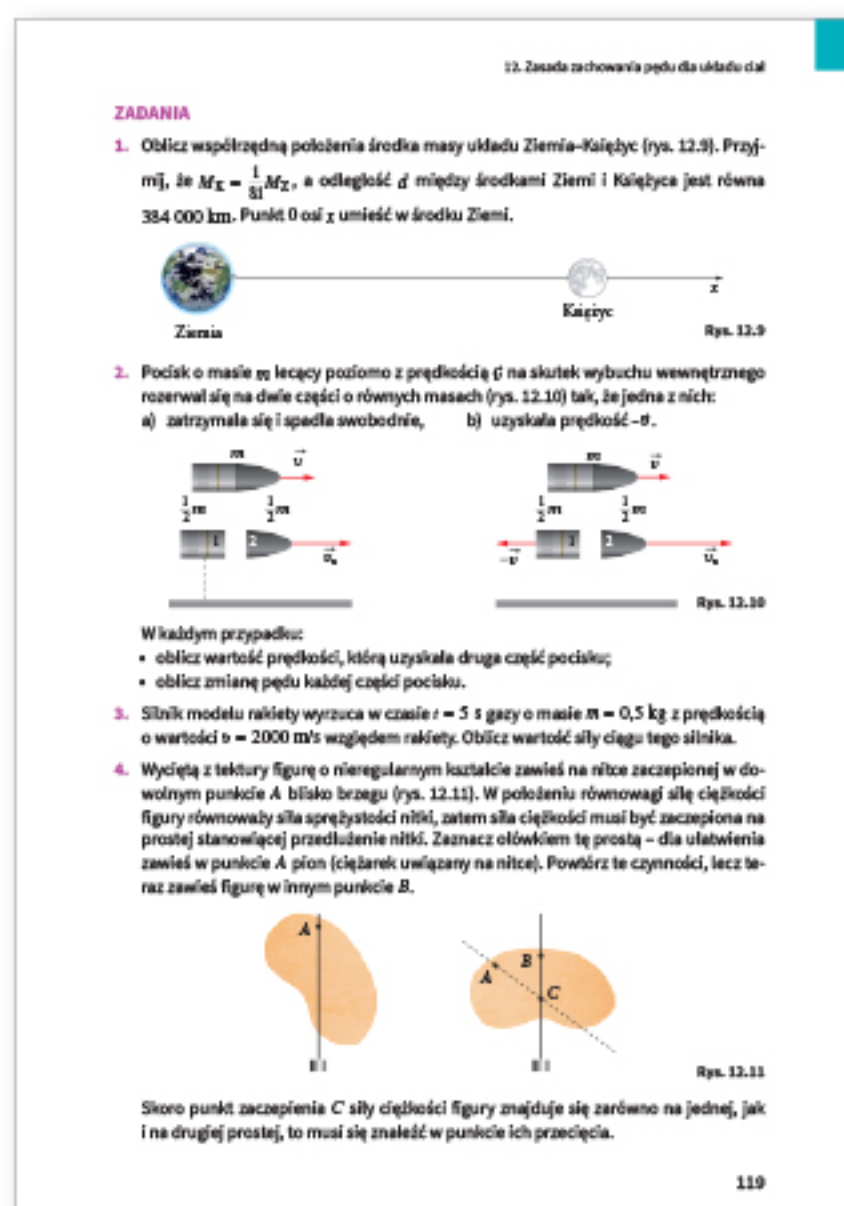
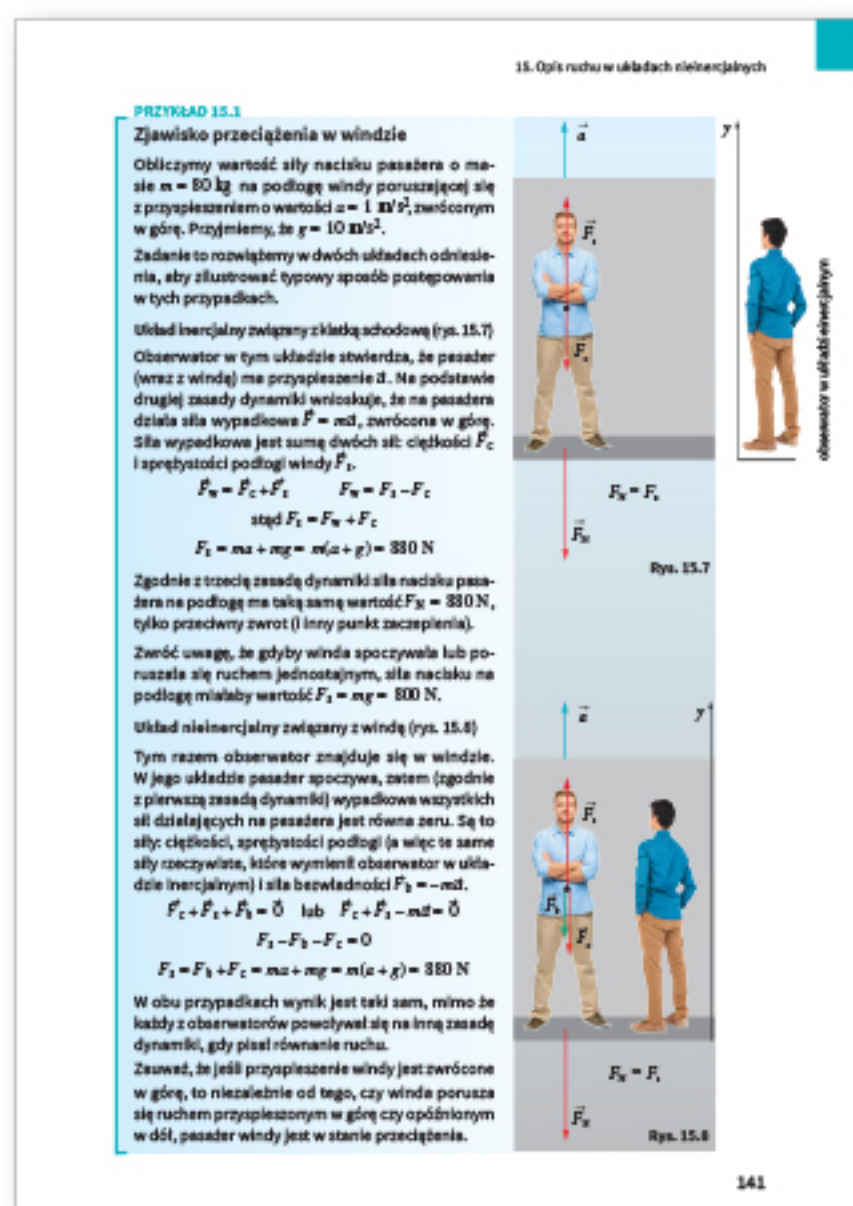
Aktualność linków, które występują w tym podręczniku i odsyłają do zewnętrznych stron internetowych, została sprawdzona przed ich opublikowaniem (dostęp z dnia 24.03.2025 r.). Wydawnictwo nie ponosi odpowiedzialności za aktualność oraz zawartość tych stron lub stron, do których linki tam się znajdują.

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że podjęły starania mające na celu dotarcie do właścicieli i dysponentów praw autorskich wszystkich zamieszczonych utworów. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, przytaczając w celach dydaktycznych utwory lub fragmenty, postępują zgodnie z art. 27¹ ustawy o prawie autorskim. Jednocześnie Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że są jedynym podmiotem właściwym do kontaktu autorów tych utworów lub innych podmiotów uprawnionych w wypadkach, w których twórcy przysługuje prawo do wynagrodzenia.

ZAKRES ROZSZERZONY

NOWA EDYCJA

PODREČZNIK • LICEUM I TECHNIKUM



Przykłady rozwiązane krok po kroku przygotowują do samodzielnego rozwiązywania zadań.

Bogaty wybór różnorodnych **zadań** i ich systematyczne **rozwiązywanie** pomaga w przygotowaniu do powtórzeń i sprawdzianów.

Powtórzenie materiału
w atrakcyjnej formie graficznej
ułatwia utrwalenie oraz
uporządkowanie wiedzy.

Zeskanuj kod



Aktywuj E-book

(cyfrowe odzwierciedlenie
podręcznika) na



WSiP

wsip.pl
sklep.wsip.pl
infolinia: 801 220 555



orke.pl