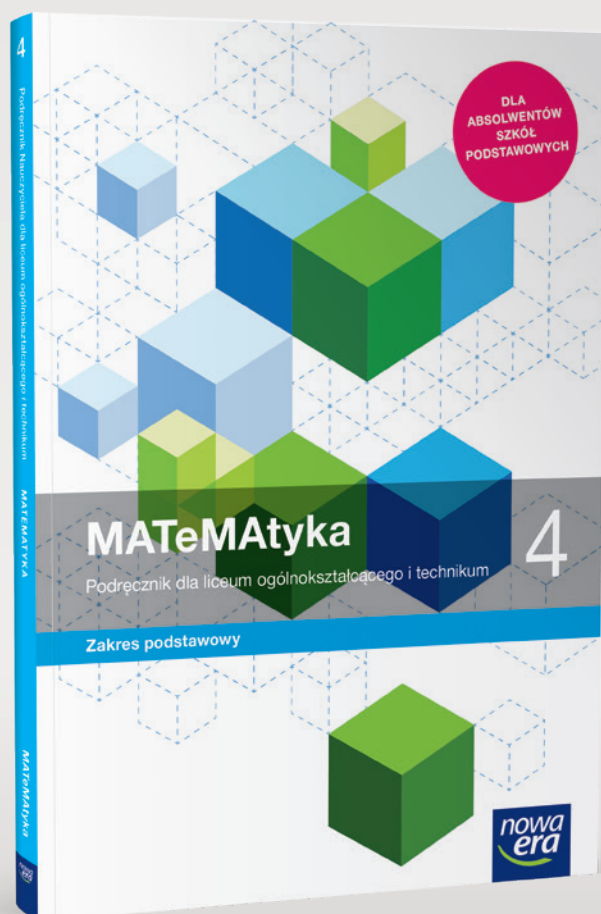


Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

4

Zakres podstawowy



Podręcznik Nauczyciela zawiera:

- podręcznik ucznia
- odpowiedzi do wszystkich ćwiczeń i zadań
- rozwiązania trudniejszych zadań
- odnośniki do Multiteki – zasobów multimedialnych do lekcji
- komentarze merytoryczne

Program nauczania i inne materiały dydaktyczne są dostępne w portalu

dlanauczyciela.pl

MATeMAtyka

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy

4



Twoje mocne strony

MATeMATyka

Podręcznik Nauczyciela 4 został przygotowany do podręcznika autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej i Jolanty Wesołowskiej *MATeMATyka 4* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym (971/4/2022).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2022
ISBN 978-83-267-4496-9

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *MATeMATyka* dla klasy 4 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2022

Autor komentarzy i rozwiązań zadań: Barbara Jedynak.

Redakcja merytoryczna: Anna Drązek, Beata Zajac.

Redakcja językowa: Paulina Szulim.

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler.

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak.

Projekt graficzny: Klaudia Jarocka-Ciok.

Projekt okładki: Maciej Galiński.

Rysunki: Lech Chańko.

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko.

Opracowanie graficzne infografik: Marcin Kołacz, Ewa Kaletyn, Klaudia Jarocka-Ciok.

Realizacja projektu okładki: Maciej Galiński.

Zdjęcie na okładce: Shutterstock/Click Bestsellers.

Zdjęcia: Archiwum Wydawnictwa s. 10; BE&W: Alamy Stock Photo - Classic Image s. 122, Independent Photo Agency Srl s. 153, Mary Evans Picture Library s. 144; East News: Museos Vaticanos-Estancia del Sello, Vaticano Photo: East News/Album s. 135; Getty Images: Corbis Sport/Tim Clayton - Corbis s. 45 (rzut monetą na meczu tenisa), Hulton Fine Art Collection/Mondadori Portfolio s. 36, iStock - Anton Aleksenko s. 61, del-sin s. 9, Getty Images Plus/Wega52 s. 45 (dłoni z monetą); Panthermedia: Janusz Gajewicz s. 51, Patrick Guenette s. 48; Shutterstock: Akkaradet Bangchun s. 82, Sergey Nivens s. 123; Thinkstock/Getty Images: iStockphoto - MikeLane45 s. 37, szczeni s. 52, Photos.com s. 31; Lech Chańko s. 11, 14, 34, 100, 109.

Rysunki merytoryczne: Marcin Adamski s. 103, 119, 120 (ćwiczenie 2, lewa strona), 121 (zadanie 1), 127 (wszystkie z lewej strony), 128 (wszystkie z lewej strony), 129 (wszystkie z lewej strony); Andrzej Dziębło s. 117 (zadanie 7); Lech Chańko - pozostałe.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w publikacji. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Wojciech Babiański
Lech Chańko
Joanna Czarnowska
Jolanta Wesołowska

MATeMATyka

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

4

Zakres podstawowy

**nowa
era** *Twoje mocne strony*

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Gustawa Trelńskiego, dr. Jacka Stańdo, mgr Teresy Kosyry-Cieślak.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2022

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 971/4/2022

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Doroty Ponczek.

Ta publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek. Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2022
ISBN 978-83-267-4398-6

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Ewa Kowalik, Katarzyna Radziwińska

Współpraca redakcyjna: Urszula Cielniak, Marcin Minda

Opracowanie odpowiedzi: Ewa Kowalik, Katarzyna Radziwińska

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska, Renata Wolniewicz

Redakcja językowa: Paulina Szulim

Korekta językowa: Marta Zuchowicz

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Maciej Galiński

Opracowanie graficzne: Klaudia Jarocka-Ciok, Ewa Kaletyn, Marcin Kołacz

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Wojtek Urbanek

Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Opracowanie graficzne infografik: Klaudia Jarocka-Ciok

Ilustracje na infografikach: Laura Maziewska (diamenty, s. 82), zespół Kartografii NE (odwzorowania kartograficzne, s. 123)

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

W pracy nad podręcznikiem wykorzystano materiały z podręczników:

MATeMATyka kl. 3 ZP i MATeMATyka kl. 3 ZR autorstwa Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Jolanty Wesółowskiej

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Quad/Graphics Europe Sp. z o.o.

Spis treści

1. Rachunek prawdopodobieństwa

1.1. Reguła mnożenia	10
Prezentacja wyników doświadczenia za pomocą drzewa – warto wiedzieć	13
1.2. Permutacje	14
Permutacje z powtórzeniami – warto wiedzieć	18
1.3. Wariacje bez powtórzeń	19
1.4. Wariacje z powtórzeniami	21
1.5. Reguła dodawania	24
1.6. Zdarzenia losowe	28
Częstość zdarzeń – warto wiedzieć	31
1.7. Prawdopodobieństwo klasyczne	32
1.8. Prawdopodobieństwo klasyczne – zadania	36
1.9. Rozkład prawdopodobieństwa	38
1.10. Własności prawdopodobieństwa	40
1.11. Wartość oczekiwana zmiennej losowej	46
1.12. Zagadnienia uzupełniające	50
Zestawy powtórzeniowe	54
Sposób na zadanie	58
Zadania testowe	59
Przed obowiązkową maturą z matematyki	60

2. Graniastosłupy i ostrosłupy

2.1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni	62
2.2. Graniastosłupy	66
Przedstawianie graniastosłupów na rysunkach – warto powtórzyć	70
2.3. Odcinki w graniastosłupach	71
2.4. Objętość graniastosłupa	74
Graniastosłupy pochyłe – warto wiedzieć	77
2.5. Ostrosłupy	78
Przedstawianie ostrosłupów na rysunkach – warto wiedzieć	81
2.6. Objętość ostrosłupa	83
2.7. Kąt między prostą a płaszczyzną	87
2.8. Kąt dwuścienny	91
2.9. Przekroje prostopadłościannów	95

2.10. Zagadnienia uzupełniające	100
Zestawy powtórzeniowe	104
Sposób na zadanie	106
Zadania testowe	107
Przed obowiązkową maturą z matematyki	108

3. Bryły obrotowe

3.1. Walec	110
3.2. Stożek	114
Linie geodezyjne – warto wiedzieć	118
3.3. Kula	119
3.4. Bryły podobne	124
3.5. Zagadnienia uzupełniające	127
Zestawy powtórzeniowe	130
Sposób na zadanie	132
Zadania testowe	133
Przed obowiązkową maturą z matematyki	134

4. Przykłady dowodów w matematyce

4.1. Dowody w algebrze (1)	136
4.2. Dowody w algebrze (2)	139
4.3. Dowody nie wprost	142
Nieskończoność zbioru liczb pierwszych – warto wiedzieć	144
4.4. Dowody w geometrii (1)	145
4.5. Dowody w geometrii (2)	149
Różne dowody twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie – warto wiedzieć	152

5. Powtórzenie

5.1. Liczby rzeczywiste	154
5.2. Zbiory, przedziały i nierówności	161
5.3. Funkcje	167
5.4. Funkcja liniowa i układy równań liniowych	176
5.5. Funkcja kwadratowa	183
5.6. Wielomiany	191
5.7. Funkcje wymierne	198
5.8. Funkcje trygonometryczne	204
5.9. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna	210

5.10. Ciągi	215
5.11. Geometria analityczna	222
5.12. Planimetria	229
5.13. Stereometria	240
5.14. Rachunek prawdopodobieństwa	247
5.15. Statystyka	253
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	259
Indeks	290
Tablice logarytmów dziesiętnych	294
Tablice wartości funkcji trygonometrycznych	296

Odpowiedzi do pytań i poleceń, a także rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

-  Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.
Oznaczenie lekcji w całości poświęconych dowodzeniu.
-  Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.





1 Rachunek prawdopodobieństwa

Początki rachunku prawdopodobieństwa są związane z grami losowymi, do których należy na przykład gra w kości, i chęcią poznania szansy wygranej.

W 1654 roku we Francji zapalony gracz w kości kawaler de Méré [czyt. de mere] zwrócił się do Blaise'a Pascala z prośbą o wyjaśnienie pewnych zagadnień związanych z grami hazardowymi. W celu rozwiązania tych zagadnień Pascal prowadził korespondencję z innym francuskim matematykiem – Pierre'em de Fermatem. Rok 1654 jest przyjmowany za datę narodzin rachunku prawdopodobieństwa.

Multiteka

- Teoria chaosu
- Fale wyjątkowe
- Ubezpieczenie Titanica
- Paradoks urodzin
- Irracjonalne lęki
- Matematyka a wyścigi konne
- Złamanie kodu Enigmy
- Dylemat więźnia

Uczeń:

- wypisuje wszystkie możliwe wyniki danego doświadczenia,
- stosuje regułę mnożenia do obliczania liczby wyników doświadczenia spełniających dany warunek,
- przedstawia drzewo ilustrujące zbiór wszystkich możliwych wyników danego doświadczenia.

1.1. Reguła mnożenia

Przykład 1

Rzucamy dwiema monetami: dwuzłotówką i pięciozłotówką. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.

Niech o oznacza otrzymanie orła, a r – reszki na monecie dwuzłotowej, natomiast O – orła, a R – reszki na monecie pięciozłotowej. Możliwe wyniki doświadczenia to:

$$oO, oR, rO, rR$$



Przykład 2

Rzucamy dwiema kostkami: niebieską i czerwoną. Ile jest możliwych wyników tego doświadczenia?

Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki:

1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1	Kiedy piszemy o kostce, mamy na myśli sześcienną kostkę do gry.
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2	
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3	
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4	
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5	
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6	
						Przyjmujemy, że wynikiem jednokrotnego rzutu kostką jest liczba otrzymanych oczek, a wynikiem rzutu dwiema kostkami – uporządkowana para liczb.

Wszystkich możliwych wyników jest 36 (zwróć uwagę, że rozróżniamy wyniki takie jak np. 23 i 32).

Ćwiczenie 1

Pewien kod składa się z jednej litery alfabetu i następującej po niej jednej cyfry. Ile różnych kodów można utworzyć, jeżeli w każdym będzie występowała jedna z 26 liter: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z oraz jedna z 10 cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

W takiej sytuacji, jak opisana w ćwiczeniu, zamiast wypisywać wszystkie możliwe pary tworzące kod, warto skorzystać z **reguły mnożenia**. Mówi ona, że jeśli zbiór A ma m elementów, a zbiór B ma n elementów, to liczba różnych par (x, y) takich, że $x \in A$ oraz $y \in B$, jest równa $m \cdot n$.

Uwaga. Liczbę elementów zbioru A będziemy oznaczać $\overline{A}$ (lub $|A|$).

Komentarz

Warto powiedzieć uczniom, że symbol $\overline{A}$ często nazywany jest *liczebnością* lub *mocą* zbioru A .

Ćwiczenie 1

$$26 \cdot 10 = 260$$

Multiteka

- Zdarzenie elementarne – rzut dwiema kostkami do gry

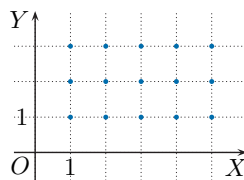
dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.1

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 3

Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest liczbą należącą do zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a druga – do zbioru $B = \{1, 2, 3\}$?

$\overline{A} = 5$ oraz $\overline{B} = 3$, więc takich punktów jest $\overline{A} \cdot \overline{B} = 15$.



Ćwiczenie 2

Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest liczbą należącą do zbioru $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, a druga – do zbioru $B = \{2, 4, 6, 8\}$?

Ćwiczenie 2

$$\overline{A} = 7, \overline{B} = 4$$

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = 7 \cdot 4 = 28$$

Ćwiczenie 3

Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest liczbą naturalną mniejszą od 20 i podzielną przez 3, a druga – liczbą naturalną mniejszą od 30 i podzielną przez 4?

Regułę mnożenia można sformułować bardziej ogólnie.

Reguła mnożenia

Jeżeli pewien wybór polega na podjęciu n decyzji, przy czym pierwszą decyzję można podjąć na k_1 sposobów, drugą – na k_2 sposobów, ..., n -tą – na k_n sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ sposobów.

Przykład 4

Ile może być numerów rejestracyjnych mających na początku dwie litery, a następnie pięć cyfr (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli w numerach tych mogą występować jedynie litery W, E oraz cyfry 1, 3, 8, 9?



Takich numerów może być: $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$.

Ćwiczenie 4

Ile może być kodów mających na początku cztery litery, a następnie trzy cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli do utworzenia kodów wykorzystujemy:

- jedynie litery V, X, Y, Z oraz cyfry 1, 3, 5, 7, 9;
- jedynie litery A, B, C, D, E, F, G oraz cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6;
- 26 liter alfabetu oraz wszystkie cyfry?

Ćwiczenie 3

$$A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}, \overline{A} = 7$$

$$B = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}, \overline{B} = 8$$

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = 7 \cdot 8 = 56$$

Ćwiczenie 4

$$\text{a) } 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 32\,000$$

$$\text{b) } 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 518\,616$$

$$\text{c) } 26^4 \cdot 10^3 = 456\,976\,000$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\overline{A} = 5, \overline{B} = 7$
 $5 \cdot 7 = 35$
b) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}, \overline{A} = 8$
 $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}, \overline{B} = 9$
 $8 \cdot 9 = 72$
2. a) $8 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 = 1600$
b) $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 67\,600$
3. a) $3^3 \cdot 4^4 = 6912$
b) $4^3 \cdot 6^4 = 82\,944$
4. a) $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$
b) Ostatnie dwie cyfry są zerami, czyli cyfrę 7 możemy umieścić na jednej z pięciu pozycji, a cyfrę 9 – na jednej z pozostałych czterech pozycji. Takich liczb jest $5 \cdot 4 = 20$.
c) $6 = 3 + 2 + 1$
Pierwszą cyfrą jest 3, cyfrę 2 możemy umieścić na jednej z siedmiu pozycji, a cyfrę 1 – na jednej z pozostałych sześciu pozycji. Takich liczb jest $7 \cdot 6 = 42$.
5. $5 \cdot 8 \cdot 6 = 240$
6. $3 \cdot 6 \cdot 4 = 72$

Zadania

1. Ile jest wszystkich par (x, y) takich, że $x \in A$ i $y \in B$?
a) $A = \{2, 4, 8, 16, 32\}, B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
b) A – zbiór naturalnych dzielników liczby 24,
 B – zbiór naturalnych dzielników liczby 100
2. Ile jest możliwych kodów, w których na początku występują dwie litery, a następnie dwie cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli wykorzystujemy:
a) litery A, B, C, D, E, F, G, H oraz cyfry 1, 2, 3, 4, 5;
b) 26 liter alfabetu oraz dowolne cyfry?
3. Ile jest możliwych kodów, w których na początku występują trzy litery, a następnie cztery cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli wykorzystujemy:
a) litery A, B, C oraz cyfry 1, 2, 3, 4;
b) litery A, B, C, D oraz cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6?
4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Ile jest liczb ośmiocyfrowych takich, że pierwszą cyfrą jest 5, występuje w nich jedna cyfra 2, jedna cyfra 4, a pozostałe cyfry są zerami?

Cyfrę 2 możemy umieścić na jednej z siedmiu pozycji, a cyfrę 4 – na jednej z pozostałych sześciu pozycji. Takich liczb jest zatem $7 \cdot 6 = 42$.

Ile jest liczb ośmiocyfrowych takich, że pierwszą cyfrą jest 3 oraz:

- a) występuje w nich jedna cyfra 4, jedna cyfra 6 i jedna cyfra 8, a pozostałe cyfry są zerami,
- b) występuje w nich jedna cyfra 7, jedna cyfra 9, a pozostałe cyfry są zerami, jeśli liczba ta jest podzielna przez 100,
- c) suma cyfr jest równa 6, a cyfry różne od zera się nie powtarzają?

Powtórzenie

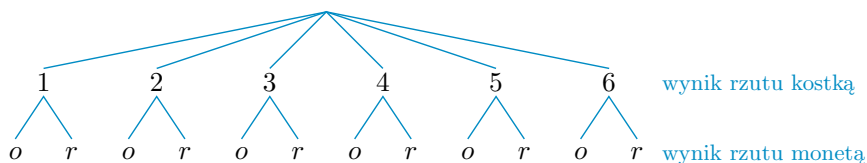
5. W restauracji serwuje się pięć różnych zup, osiem drugich dań i sześć deserów. Ile różnych zestawów obiadowych, składających się z zupy, drugiego dania i deseru, można zamówić w tej restauracji?
6. Na ile sposobów może się ubrać pani, która ma trzy różne kapelusze, sześć sukni i cztery pary butów?

Prezentacja wyników doświadczenia za pomocą drzewa

Przykład

Rzucono kostką i monetą. Wynikiem doświadczenia jest para (a, b) , gdzie a jest liczbą oczek na kostce, a b – orłem lub reszką. Ile jest możliwych wyników takiego doświadczenia?

Poniższe drzewo ilustruje wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.



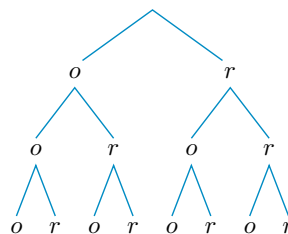
Wyników tego doświadczenia jest $6 \cdot 2 = 12$:

$(1, o), (1, r), (2, o), (2, r), (3, o), (3, r), (4, o), (4, r), (5, o), (5, r), (6, o), (6, r)$.

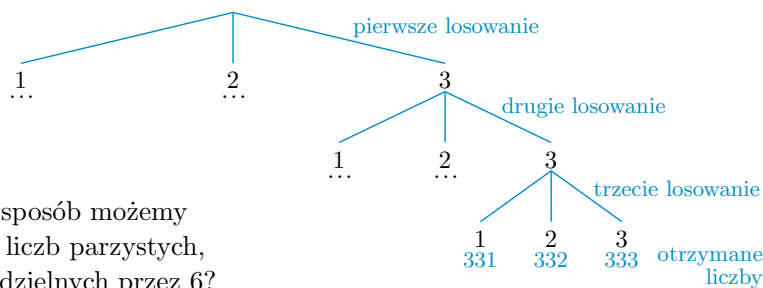
1. Rzucono dwiema kostkami: zieloną i żółtą. Na kostce zielonej otrzymano parzystą liczbę oczek, a na kostce żółtej – liczbę oczek mniejszą od 4. Ile jest możliwych takich wyników? Zbiór wyników tego doświadczenia przedstaw w postaci drzewa.

2. a) Zapisz możliwe wyniki doświadczenia polegającego na trzykrotnym rzucie monetą (drzewo przedstawione obok jest ilustracją graficzną tego doświadczenia).

b) Przedstaw w postaci drzewa zbiór wyników doświadczenia polegającego na czterokrotnym rzucie monetą.

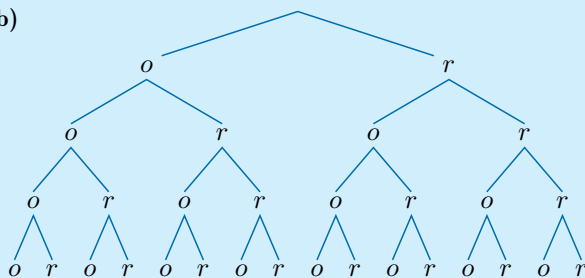


3. W urnie znajdują się trzy kule oznaczone numerami 1, 2 i 3. Trzykrotnie wyciągamy kulę, zapisujemy jej numer i zwracamy ją do urny. Zapisane numery tworzą liczbę trzycyfrową. Przerysuj poniższe drzewo do zeszytu i uzupełnij je tak, aby ilustrowało wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.



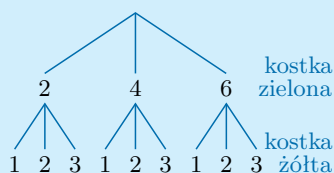
Ile w ten sposób możemy otrzymać liczb parzystych, a ile – podzielnych przez 6?

2. b)



Odpowiedzi do zadań

1.



Możliwych jest 9 wyników.

2. a) Wynikami tego doświadczenia są: $(o, o, o), (o, o, r), (o, r, o), (o, r, r), (r, o, o), (r, o, r), (r, r, o), (r, r, r)$.

3. Liczby parzyste: $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$

Liczby podzielne przez sześć: 3

Uczeń:

- wypisuje wszystkie możliwe permutacje danego zbioru,
- oblicza liczbę permutacji danego zbioru,
- wykonuje obliczenia, stosując definicję silni,
- wykorzystuje permutacje do rozwiązywania zadań.

1.2. Permutacje

Przykład 1

Na ile sposobów można ustawić na półce trzy różne książki?

Oznaczamy książki numerami 1, 2, 3 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:

123 132 213 231 312 321

Trzy książki możemy ustawić na 6 sposobów.

Przykład 2

Na ile sposobów można ustawić na półce cztery różne książki?

Oznaczamy książki numerami 1, 2, 3, 4 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Otrzymaliśmy 24 możliwe ustawienia książek.

W przykładzie 1. podaliśmy wszystkie trzywyrazowe ciągi, które można utworzyć, przestawiając liczby 1, 2, 3, a w przykładzie 2. – wszystkie czterowyrazowe ciągi, które można utworzyć, przestawiając liczby 1, 2, 3, 4. Takie ciągi nazywamy permutacjami.

Definicja

Każdy n -wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów n -elementowego zbioru A nazywamy **permutacją** tego zbioru.

Ćwiczenie 1

Wypisz wszystkie permutacje podanego zbioru.

a) $\{3, 5\}$ b) $\{3, 5, 7\}$ c) $\{3, 5, 7, 9\}$

Liczbę wszystkich permutacji zbioru n -elementowego oznaczamy przez P_n . Obliczamy ją, korzystając z reguły mnożenia.

Ćwiczenie 1

a) 35, 53
b) 357, 375, 537, 573, 735, 753
c) 3579, 3597, 3759, 3795, 3957, 3975, 5379, 5397, 5739, 5793, 5937, 5973, 7359, 7395, 7539, 7593, 7935, 7953, 9357, 9375, 9537, 9573, 9735, 9753



Przykład 3

Na ile sposobów można ustawić na półce pięć różnych książek?

Należy odpowiedzieć na pytanie, ile jest permutacji zbioru pięcioelementowego $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Najpierw wybieramy jedną spośród pięciu książek i ustawiamy ją na pierwszym miejscu – możemy to zrobić na 5 sposobów. Następnie wybieramy jedną z czterech pozostałych książek i ustawiamy ją na drugim miejscu – możemy to zrobić na 4 sposoby, następnie wybieramy jedną z trzech pozostałych książek itd. Możliwych ustawień jest więc:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Definicja

Dla liczby naturalnej $n > 1$ symbol $n!$ [czyt. n silnia] oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Przyjmujemy również, że $0! = 1$ i $1! = 1$.

Ćwiczenie 2

Podaj liczbę, którą należy wstawić w miejsce $?$.

a) $4! = 3! \cdot ?$ b) $8! = 7! \cdot ?$ c) $12! = 11! \cdot ?$

Zauważ, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość: $(n+1)! = n!(n+1)$.

Ćwiczenie 3

Uprość ułamek.

a) $\frac{5!}{4!}$ c) $\frac{8!}{10!}$ e) $\frac{(n+1)!}{n!}$ g) $\frac{(n+2)!}{n!}$
b) $\frac{7!}{5!}$ d) $\frac{102!}{100!}$ f) $\frac{(n-1)!}{n!}$ h) $\frac{(n-2)!}{n!}$

$0!$	$=$	1
$1!$	$=$	1
$2!$	$=$	2
$3!$	$=$	6
$4!$	$=$	24
$5!$	$=$	120
$6!$	$=$	720
$7!$	$=$	5 040
$8!$	$=$	40 320
$9!$	$=$	362 880
$10!$	$=$	3 628 800
$11!$	$=$	39 916 800
$12!$	$=$	479 001 600

Ćwiczenie 2

- a) 4
b) 8
c) 12

Twierdzenie

Wszystkich permutacji zbioru n -elementowego jest $n!$.

Ćwiczenie 4

Ile jest wszystkich permutacji zbioru A , jeśli wiadomo, że:

a) $\overline{\overline{A}} = 6$, b) $\overline{\overline{A}} = 7$, c) $\overline{\overline{A}} = 10$, d) $\overline{\overline{A}} = 12$?

Ćwiczenie 4

- a) $6! = 720$
b) $7! = 5040$
c) $10! = 3\,628\,800$
d) $12! = 479\,001\,600$

Ćwiczenie 3

a) $\frac{5!}{4!} = \frac{4! \cdot 5}{4!} = 5$ e) $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{n!} = n+1$
b) $\frac{7!}{5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5!} = 42$ f) $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot n} = \frac{1}{n}$
c) $\frac{8!}{10!} = \frac{8!}{8! \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{90}$ g) $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{n! \cdot (n+1)(n+2)}{n!} = (n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$
d) $\frac{102!}{100!} = \frac{100! \cdot 101 \cdot 102}{100!} = 10\,302$ h) $\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{(n-2)!}{(n-2)! \cdot (n-1)n} = \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n^2 - n}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $5! = 120$
b) $6! = 720$
2. a) $9! = 362\,880$
b) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1 = 9 \cdot 9! = 3\,265\,920$
3. a) $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$
b) $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$
4. a) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5! = 120$
b) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 5! \cdot 3 = 360$
5. a) $\overline{A} = 4$, bo $4! = 24$
b) $\overline{A} = 5$, bo $5! = 120$
c) $\overline{A} = 8$, bo $8! = 40\,320$
d) $\overline{A} = 10$, bo $10! = 3\,628\,800$
6. a) $n! = 5040$ dla $n = 7$
b) $720 = 6! - 6$ numerów nieparzystych
Zatem jest 11 lub 12 zawodników.
7. a) $4! = 24$
b) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5! = 120$
8. a) $7! = 5040$
b) $8! = 40\,320$

Zadania

1. a) Ile liczb pięciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 56789?
b) Ile liczb sześciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 245768?
2. a) Ile jest liczb dziewięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0 i żadna cyfra się nie powtarza?
b) Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie żadna cyfra się nie powtarza?
3. Rozważmy liczby pięciocyfrowe, w których zapisie każda z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 występuje dokładnie raz.
a) Ile jest takich liczb mniejszych od 50 000?
b) Ile jest takich liczb większych od 30 000?
4. Z cyfr 4, 5, 6, 7, 8, 9 tworzymy liczby sześciocyfrowe o niepowtarzających się cyfrach. Ile można utworzyć takich liczb:
a) podzielnych przez 5, b) parzystych?
5. Podaj liczbę elementów zbioru A , o którym wiadomo, że wszystkich możliwych jego permutacji jest:
a) 24, b) 120, c) 40 320, d) 3 628 800.
6. a) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do n . Ile osób brało udział w zawodach, jeśli wiadomo, że numery startowe można było przydzielić na 5040 sposobów?
b) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do n . Najpierw rozdano numery parzyste, po czym okazało się, że numery nieparzyste można przydzielić na 720 sposobów. Ile osób brało udział w zawodach?
7. Na ile sposobów można zakwaterować cztery osoby:
a) w czterech jednoosobowych pokojach,
b) w pięciu jednoosobowych pokojach?
8. a) Na ile sposobów można umieścić 7 kul w 7 szufladach (kule i szuflady rozróżniamy) tak, aby każda szuflada była zajęta?
b) Na ile sposobów można umieścić 7 kul w 8 szufladach (kule i szuflady rozróżniamy) tak, aby tylko jedna szuflada była pusta?

9. a) Na ile sposobów można ustawić dziewięć osób w kolejce?
 b) Na ile sposobów można ustawić czworo dziewcząt i pięciu chłopców w kolejce tak, aby dziewczęta stały na początku kolejki?
 c) Na ile sposobów można ustawić troje dziewcząt i sześciu chłopców w kolejce tak, aby dziewczęta stały na końcu kolejki?

10. Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{8!}{6!} & \text{d)} \frac{10!}{7! \cdot 3!} & \text{g)} \frac{5!}{4! + 5!} & \text{j)} \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \\ \text{b)} \frac{19!}{21!} & \text{e)} \frac{9! \cdot 4!}{12!} & \text{h)} \frac{5! + 6!}{6! - 5!} & \text{k)} \frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} \\ \text{c)} \frac{15!}{3! \cdot 13!} & \text{f)} \frac{100! \cdot 10!}{12! \cdot 98!} & \text{i)} \frac{(n-2)!}{(n-4)!} & \text{l)} \frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2} \end{array}$$

11. a) Liczba permutacji zbioru $(n+1)$ -elementowego jest o 600 większa od liczby permutacji zbioru n -elementowego. Oblicz n .
 b) Liczba permutacji zbioru $(n+3)$ -elementowego jest 120 razy większa od liczby permutacji zbioru n -elementowego. Oblicz n .
 12. Ile zer na końcu ma podana liczba?
 a) 15! b) 30! c) 100!

Powtórzenie

13. Ile liczb n -cyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry podanej liczby?
 a) 234 i $n = 3$ b) 4567 i $n = 4$ c) 123456 i $n = 6$
 14. Ile można utworzyć kodów mających na początku n liter, a następnie m cyfr, jeśli wykorzystujemy wszystkie podane litery i cyfry?
 a) A, B, 2, 4, 6 i $n = 2, m = 3$
 b) A, B, C, 1, 3, 5, 7 i $n = 3, m = 4$
 c) A, B, C, D, 3, 6, 9 i $n = 4, m = 3$
 15. Pięciu przyjaciół wybrało się do kina. Na ile sposobów mogą oni usiąść na pięciu miejscach?
 16. Tramwajem zatrzymującym się na 8 przystankach jedzie 7 osób. Na ile sposobów mogą one wysiąść z tramwaju, jeśli każda z nich:
 a) wysiada na innym przystanku,
 b) wysiada na innym przystanku, ale nikt nie wysiada na pierwszym przystanku?

11. a) $(n+1)! - n! = 600$
 $n!(n+1) - n! = 600$
 $n! \cdot n = 600, n = 5$
 b) $(n+3)! = 120n!$
 $n!(n+1)(n+2)(n+3) = 120n!$
 $(n+1)(n+2)(n+3) = 120$
 $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120, n = 3$
 12. Zero na końcu iloczynu otrzymamy, gdy pomnożymy liczbę zakończoną cyfrą 5 przez liczbę parzystą lub gdy czynnikiem iloczynu jest liczba zakończona zerem.
 a) 3 $(2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 15)$
 Iloczyn pozostałych liczb $(3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14)$ nie kończy się zerem.
 b) 7 $(2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 8 \cdot 25 \cdot 30)$ c) 24

9. a) $9! = 362880$
 b) $4! \cdot 5! = 2880$
 c) $6! \cdot 3! = 4320$

10. a) $\frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{6!} = 7 \cdot 8 = 56$
 b) $\frac{19!}{19! \cdot 20 \cdot 21} = \frac{1}{420}$
 c) $\frac{13! \cdot 14 \cdot 15}{3! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15}{6} = 35$
 d) $\frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$
 e) $\frac{9! \cdot 24}{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{1}{55}$
 f) $\frac{98! \cdot 99 \cdot 100 \cdot 10!}{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 98!} = 75$
 g) $\frac{4! \cdot 5}{4!(1+5)} = \frac{5}{6}$
 h) $\frac{5!(1+6)}{5!(6-1)} = \frac{7}{5}$
 i) $\frac{(n-4)! \cdot (n-3)(n-2)}{(n-4)!} =$
 $= n^2 - 5n + 6$
 j) $\frac{(n-1)! \cdot n(n+1)}{(n-1)!} = n^2 + n$
 k) $\frac{(n-1)!(n(n+1)-n)}{(n-1)!} = n^2$
 l) $\frac{(n-1)! \cdot n! \cdot (n+1)}{(n-1)! \cdot n \cdot n!} = 1 + \frac{1}{n}$

13. a) $3! = 6$
 b) $4! = 24$
 c) $6! = 720$

14. a) $2! \cdot 3! = 12$
 b) $3! \cdot 4! = 144$
 c) $4! \cdot 3! = 144$

15. $5! = 120$

16. a) $8! = 40320$
 b) $7! = 5040$

Permutacje z powtórzeniami

Przykład 1

a) Mamy do dyspozycji klocki z literami A, A, K, R. Zmieniając kolejność liter, otrzymujemy czteroliterowe słowa (mające sens lub nie). Wyznacz wszystkie możliwe słowa.

Jest 12 możliwych słów:

AAKR AKAR AKRA KAAR KARA KRAA
AARK ARAK ARKA RAAK RAKA RKA

b) Mamy do dyspozycji klocki z literami A, A, T, T. Zmieniając kolejność liter, otrzymujemy czteroliterowe słowa (mające sens lub nie). Wypisz wszystkie możliwe słowa.

Jest 6 możliwych słów:

AATT ATAT ATTA TAAT TATA TTAA

Rozpatrzmy n -elementowy ciąg, którego wyrazy należą do zbioru:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

przy czym każdy z elementów $a_1, a_2, \dots, a_k$ występuje jako wyraz ciągu odpowiednio $n_1, n_2, \dots, n_k$ razy (czyli $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$).

Taki ciąg nazywamy n -elementową **permutacją z powtórzeniami** zbioru A .

Liczba takich permutacji jest równa $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$.

Przykład 2

Niech m określa, ile liczb sześciocyfrowych możemy otrzymać, przestawiając cyfry liczby x .

a) Jeśli $x = 112222$, to $m = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$.

b) Jeśli $x = 112223$, to $m = \frac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 1!} = 60$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 210$

b) $\frac{9!}{1! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 30\,240$

2. a) $\frac{10!}{1! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!} = 16\,800$

b) $\frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} = 12\,600$

1. a) Ile siedmioliterowych słów (mających sens lub nie) możemy otrzymać, przestawiając litery w słowie BARBARA?

b) Ile dziewięcioliterowych słów (mających sens lub nie) możemy otrzymać, przestawiając litery w słowie KATAPULTA?

2. Ile dziesięciocyfrowych liczb możemy otrzymać, przestawiając cyfry w liczbie:

a) 1 222 333 444,

b) 9 989 879 876?

1.3. Wariacje bez powtórzeń

Przykład 1

Pewien kod tworzymy z trzech liter wybranych spośród następujących: A, B, C, D, E, F, G, H, przy czym litery nie mogą się powtarzać. Ile jest takich kodów?



Na pierwszym miejscu kodu możemy wpisać jedną z ośmiu liter, na drugim – jedną z pozostałych siedmiu, a na trzecim – jedną z pozostałych sześciu. Zatem jest $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ kodów.

Przykład 2

Pewien kod tworzymy z trzech liter wybranych spośród 26 liter alfabetu, przy czym litery nie mogą się powtarzać. Ile jest takich kodów?

Takich kodów jest $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15\,600$.

Ćwiczenie 1

- Ile można utworzyć kodów czteroliterowych, w których mogą wystąpić litery A, B, C, D, E, F i żadna litera się nie powtarza?
- Ile można utworzyć kodów czteroliterowych, w których może wystąpić każda z 26 liter alfabetu i żadna litera się nie powtarza?

Opisane wyżej ciągi liter tworzące kody to przykłady wariacji bez powtórzeń.

Definicja

Każdy k -wyrazowy ciąg utworzony z różnych elementów n -elementowego zbioru A , gdzie $k \leq n$, nazywamy k -elementową **wariacją bez powtórzeń** zbioru A .

Zauważmy, że każda n -elementowa wariacja bez powtórzeń zbioru n -elementowego jest permutacją.

Liczbę wariacji bez powtórzeń można obliczyć, odwołując się bezpośrednio do reguły mnożenia lub korzystając ze wzoru podanego poniżej.

Twierdzenie

Jeśli $k \leq n$, to wszystkich k -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego jest:

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Uwaga. Jeśli liczbę wszystkich k -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego oznaczmy przez V_n^k , to treść powyższego twierdzenia zapiszemy:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{dla } k \leq n$$

Uczeń:

- oblicza liczbę wariacji bez powtórzeń,
- wykorzystuje wariacje bez powtórzeń do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

- $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
- $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$
b) Trzycyfrowe: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$,
czterocyfrowe:
 $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$
2. Trzycyfrowe: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$,
czterocyfrowe:
 $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$
3. a) $9! = 362\,880$
b) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$
4. $100 \cdot 99 \cdot 98 = 970\,200$
5. a) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$
b) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Zadania

1. a) Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0 i cyfry się nie powtarzają?
b) Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 3, 5, 7, 9 i żadna z nich się nie powtarza? A ile jest takich liczb czterocyfrowych?
2. Ile jest liczb trzycyfrowych, a ile czterocyfrowych, w których zapisie cyfry się nie powtarzają?
3. a) Ile można utworzyć siedmiocyfrowych numerów telefonicznych rozpoczynających się od 71, w których żadna cyfra nie będzie się powtarzała i które nie będą zawierały cyfry 0?
b) Ile można utworzyć siedmiocyfrowych numerów telefonicznych rozpoczynających się od 701, w których żadna cyfra nie będzie się powtarzała?
4. W loterii fantowej wzięło udział 100 uczniów i każdy kupił jeden ze stu losów. Wygrane to: I nagroda – rakietka tenisowa, II nagroda – piłka do koszykówki i III nagroda – pluszowy miś. Na ile sposobów uczniowie mogą wylosować nagrody?
5. Do windy zatrzymującej się na 10 piętrach wsiadły 4 osoby. Na ile sposobów osoby te mogą opuścić windę, jeśli każda z nich wysiada:
a) na innym piętrze,
b) na innym piętrze i nikt nie wysiada na trzech ostatnich piętrach?

Powtórzenie

6. Których liczb o różnych cyfrach jest więcej: dwucyfrowych zapisanych za pomocą cyfr 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 czy trzycyfrowych zapisanych za pomocą cyfr 5, 6, 7, 8, 9?
7. Na ile sposobów dziesięcioosobowe stowarzyszenie może wybrać trzy różne osoby do zajmowania stanowisk przewodniczącego, wiceprzewodniczącego i sekretarza?
- D 8. Rozważmy wszystkie siedmiocyfrowe numery telefoniczne o niepowtarzających się cyfrach. Uzasadnij, że numerów zaczynających się od 6051 jest tyle samo co numerów zaczynających się od 605 i zawierających tylko cyfry od 0 do 7.

6. Liczby dwucyfrowe: $8 \cdot 7 = 56$
Liczby trzycyfrowe: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
Więcej jest liczb trzycyfrowych.
7. $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
8. Pozostałe trzy cyfry wybieramy spośród 2, 3, 4, 7, 8, 9.
Numery zaczynające się od 6051: $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
Pozostałe cztery cyfry wybieramy spośród 1, 2, 3, 4, 7.
Numery zaczynające się od 605: $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$
Zatem liczba numerów w obu przypadkach jest taka sama.

1.4. Wariacje z powtórzeniami

Przykład 1

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2?

Każdą z trzech cyfr możemy wybrać na dwa sposoby, zatem jest $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ takich liczb.

111	121	211	221
112	122	212	222

Jest 8 liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2.

Przykład 2

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2, 3, 4 i 5?

Jest $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ takich liczb.

Ćwiczenie 1

a) Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2?

b) Ile jest wszystkich liczb sześciocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2, 3, 4 i 5?

Opisane wyżej ciągi cyfr tworzące liczby to przykłady wariacji z powtórzeniami.

Definicja

Każdy k -wyrazowy ciąg utworzony z elementów zbioru A nazywamy k -elementową **wariacją z powtórzeniami** zbioru A .

Uwaga. W wariacji z powtórzeniami wyrazy mogą się powtarzać.

Przykład 3

Ile pięcioliterowych kodów można utworzyć z liter A, B, C, D, E, F, G, H, jeśli litery mogą się powtarzać?



Można utworzyć $8^5 = 32\,768$ takich kodów.

Ćwiczenie 2

Ile pięcioliterowych kodów można utworzyć z 26 liter alfabetu, jeśli litery mogą się powtarzać?

Ćwiczenie 2

$26^5 = 11\,881\,376$

Uczeń:

- oblicza liczbę wariacji z powtórzeniami,
- wykorzystuje wariacje z powtórzeniami do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15\,625$

Ćwiczenie 3

- a) $W_{10}^2 = 10^2 = 100$
b) $W_2^{10} = 2^{10} = 1024$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $W_9^3 = 9^3 = 729$
b) $W_8^3 = 8^3 = 512$
c) $W_7^3 = 7^3 = 343$
d) $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$
2. a) $W_{10}^3 = 10^3 = 1000$
b) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 9000$
3. a) $W_3^2 = 9$, $W_2^3 = 8$,
czyli $W_3^2 > W_2^3$
b) $W_4^3 = 64$, $W_3^4 = 81$,
czyli $W_4^3 < W_3^4$
4. Losowanie ze zwracaniem:
 $W_6^4 = 6^4$
losowanie bez zwracania:
 $\frac{6!}{(6-4)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$
 $\frac{6^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{36}{10} = 3,6 > 3$,
co należało wykazać.
5. a) $3^9 = 19\,683$
b) $9^3 = 729$

Twierdzenie

Wszystkich k -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego jest n^k .

Uwaga. Jeśli liczbę wszystkich k -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego oznaczymy przez W_n^k , to treść powyższego twierdzenia zapiszemy:

$$W_n^k = n^k$$

Ćwiczenie 3

- a) Ile jest wszystkich dwuelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru dziesięcioelementowego?
b) Ile jest wszystkich dziesięcioelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru dwuelementowego?

Zadania

1. Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie ma:
a) cyfry 0, b) cyfr 0 i 4, c) cyfr 0, 4 i 5, d) cyfr 4 i 5?
2. Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych:
a) zaczynających się od 12, b) których ostatnią cyfrą jest 7?
3. Która z liczb jest większa:
a) liczba dwuelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru trzelementowego czy liczba trzelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru dwuelementowego,
b) liczba trzelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru czteroelementowego czy liczba czteroelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru trzelementowego?
4. Z urny, w której znajdują się kule z numerami 4, 5, 6, 7, 8, 9, losujemy kolejno cztery kule. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę czterocyfrową. Uzasadnij, że przy losowaniu ze zwracaniem możliwych do otrzymania liczb jest ponad trzykrotnie więcej niż przy losowaniu bez zwracania.
Uwaga. Losowanie polega na wyciąganiu przedmiotów (np. losów, kul, żetonów) w sposób, który wyklucza wpływ osoby losującej na otrzymany wynik.
5. a) Do 3 szuflad wrzucamy 9 kul (kule i szuflady rozróżniamy). Na ile sposobów możemy rozmieścić te kule?
b) Do 9 szuflad wrzucamy 3 kule (kule i szuflady rozróżniamy). Na ile sposobów możemy rozmieścić te kule?

6. a) Na ile sposobów 6 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na dziesięciu piętrach?
b) Na ile sposobów 10 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na sześciu piętrach?
- D** 7. Niech m będzie liczbą sposobów, na które 5 pasażerów może wysiąść z pociągu na czterech stacjach, a n – liczbą sposobów, na które 4 pasażerów może wysiąść z pociągu na pięciu stacjach. Uzasadnij, że $m - n < 400$.
8. Ile jest wszystkich liczb, w których zapisie występują tylko cyfry 0 i 1 i które mają co najwyżej: a) 5 cyfr, b) 11 cyfr, c) n cyfr?
9. Ile jest wszystkich liczb, które są zapisane tylko za pomocą cyfr 0, 1, 2 oraz mają: a) 5 cyfr, b) 11 cyfr, c) n cyfr?
10. Rzucamy czterokrotnie kostką. Wyrzucone liczby oczek są kolejnymi cyframi liczby czterocyfrowej. Ile spośród otrzymanych w ten sposób liczb jest:
a) większych od 6000, c) podzielnych przez 25,
b) większych od 3500, d) podzielnych przez 4?
11. Oblicz, ile jest liczb pięciocyfrowych:
a) mniejszych od 48 000, c) o nieparzystym iloczynie cyfr,
b) większych od 56 700, d) o parzystym iloczynie cyfr.

Powtórzenie

12. Których liczb jest więcej:
a) dwucyfrowych, w których zapisie występują cyfry 3, 5, 7, czy trzycyfrowych, w których zapisie występują cyfry 3, 5,
b) trzycyfrowych, w których zapisie występują cyfry 2, 4, 6, 8, czy czterocyfrowych, w których zapisie występują cyfry 1, 2, 3?
13. Karolina zapomniała dwie ostatnie cyfry z dziewięciu cyfr numeru telefonu komórkowego kolegi. Pamięta tylko, że były to cyfry nieparzyste. Ile maksymalnie prób musi wykonać Karolina, aby dozwonić się do kolegi?
14. Do 4 szuflad wrzucamy 6 kul (kule i szuflady rozróżniamy). Na ile sposobów można rozmieścić te kule?
15. Ile razy więcej jest dziewięciocyfrowych numerów telefonicznych zaczynających się od 515 niż siedmiocyfrowych numerów zaczynających się od 77?
10. a) Na pierwszym miejscu musi być szóstka, pozostałe cyfry są dowolne.
 $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$
b) Mamy dwie możliwości:
1) w pierwszym rzucie wypadnie 3, w drugim 5 lub 6, pozostałe cyfry są dowolne;
2) w pierwszym rzucie wypadnie 4, 5 lub 6, pozostałe cyfry są dowolne.
 $1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 720$
c) Pierwsze dwie cyfry są dowolne, ostatnie dwie muszą tworzyć liczbę 25.
 $6 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 = 36$
d) Pierwsze dwie cyfry są dowolne, ostatnie dwie tworzą jedną z liczb: 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64.
 $6 \cdot 6 \cdot 9 = 324$

6. a) $10^6 = 1\,000\,000$
b) $6^{10} = 60\,466\,176$

7. $m = 4^5 = 1024$
 $n = 5^4 = 625$
 $m - n = 1024 - 625 = 399 < 400$,
co należało wykazać.

8. a) $2^5 = 32$
b) $2^{11} = 2048$
c) 2^n

9. a) $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^4 = 162$
b) $2 \cdot 3^{10} = 118\,098$
c) $2 \cdot 3^{n-1}$

11. a) $3 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 = 38\,000$
b) $4 \cdot 10^4 + 1 \cdot 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10^2 - 1 = 43\,299$
c) $5^5 = 3125$
d) $9 \cdot 10^4 - 3125 = 86\,875$

12. a) Liczby dwucyfrowe: $3^2 = 9$
Liczby trzycyfrowe: $2^3 = 8$
Więcej jest liczb dwucyfrowych.
b) Liczby trzycyfrowe:
 $4^3 = 64$
Liczby czterocyfrowe: $3^4 = 81$
Więcej jest liczb czterocyfrowych.

13. $5 \cdot 5 = 25$

14. $4^6 = 4096$

15. $\frac{10^6}{10^5} = 10$

Uczeń:

- stosuje regułę dodawania do obliczania liczby wyników doświadczenia spełniających dany warunek,
- wykorzystuje podstawowe pojęcia kombinatoryki do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

a) Suma cyfr może być równa 6 w trzech przypadkach:

I przypadek

W zapisie liczby występują: raz cyfra 4 i dwa razy cyfra 1. Są trzy takie liczby: 114, 141, 411.

II przypadek

W zapisie liczby występują cyfry 1, 2 i 3. Jest sześć takich liczb: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

III przypadek

W zapisie liczby występują trzy dwójki. Jest jedna taka liczba: 222.

Wszystkich takich liczb jest:
 $3 + 6 + 1 = 10$.

b) Iloczyn cyfr może być równy 6 w dwóch przypadkach:

I przypadek

W zapisie liczby występują: raz cyfra 6 i dwa razy cyfra 1. Są trzy takie liczby: 116, 161, 611.

II przypadek

W zapisie liczby występują: cyfry 1, 2 i 3. Jest sześć takich liczb: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Wszystkich takich liczb jest:
 $3 + 6 = 9$.

1.5. Reguła dodawania

Przykład 1

Rzucamy cztery razy kostką i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby czterocyfrowej. Ile można w ten sposób otrzymać liczb, których suma cyfr jest równa 6?

Suma cyfr może być równa 6 w dwóch przypadkach:

- w zapisie liczby występują: raz cyfra 3 i trzy razy cyfra 1; są cztery takie liczby: 1113, 1131, 1311, 3111;
- w zapisie liczby występują: dwa razy cyfra 2 i dwa razy cyfra 1; jest sześć takich liczb: 1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211.

Wszystkich takich liczb jest $4 + 6 = 10$.

Przedstawione powyżej sumowanie liczby obiektów sprzyjających dwóm różnym przypadkom to przykład zastosowania reguły dodawania. Mówi ona, że jeśli zbiory A i B są rozłączne, to liczba elementów zbioru $A \cup B$ równa się sumie liczby elementów zbioru A i liczby elementów zbioru B .

Reguła dodawania

Jeśli zbiory A i B są rozłączne, to $\overline{A \cup B} = \overline{A} + \overline{B}$.

Ćwiczenie 1

Rzucamy trzy razy kostką i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby trzycyfrowej. Ile można w ten sposób otrzymać liczb, których:

- a) suma cyfr jest równa 6, b) iloczyn cyfr jest równy 6?

Przykład 2

Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie mogą występować cyfry należące do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i co najmniej raz występuje cyfra 3?

Niech X będzie zbiorem wszystkich liczb czterocyfrowych zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6; A – zbiorem tych liczb ze zbioru X , w których zapisie co najmniej raz występuje cyfra 3; B – zbiorem tych liczb ze zbioru X , w których zapisie ani razu nie występuje cyfra 3. Wówczas $\overline{X} = 6^4$, $\overline{B} = 5^4$. Zauważmy, że $X = A \cup B$ oraz A i B są rozłączne, zatem:

$$\overline{X} = \overline{A} + \overline{B}$$

Stąd:

$$\overline{A} = \overline{X} - \overline{B} = 6^4 - 5^4 = 1296 - 625 = 671$$

Ćwiczenie 2

- a) Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których zapisie mogą występować cyfry należące do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ i co najmniej raz występuje cyfra 2?
- b) Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0, a suma cyfr jest mniejsza od 35?

Przykład 3

Ile jest liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 5, w których zapisie występują tylko cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i żadna z nich się nie powtarza?

Liczba jest podzielna przez 5, jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.

Niech A będzie zbiorem tych liczb spełniających warunki zadania, których ostatnią cyfrą jest 0.

Wówczas $\overline{A}$ jest równa liczbie czteroelementowych wariacji bez powtórzeń zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$\text{Zatem } \overline{A} = \frac{6!}{(6-4)!} = 360.$$

Niech B będzie zbiorem tych liczb spełniających warunki zadania, których ostatnią cyfrą jest 5.

Zwróćmy uwagę, że pierwszą cyfrę liczby wybieramy ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, więc $\overline{B} = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

$$\text{Zatem } \overline{A} + \overline{B} = 360 + 300 = 660.$$

Ćwiczenie 3

Ile jest parzystych liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7 i żadna z nich się nie powtarza?

Ogólnie **regułę dodawania** można sformułować następująco:

Jeśli zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \dots + \overline{A_n}$$

Ćwiczenie 4

Rozpatrujemy liczby pięciocyfrowe zapisane za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6.

- a) Ile jest takich liczb, których pierwszą cyfrą jest 5 lub 6?
- b) Ile jest takich liczb, których pierwszą cyfrą jest 4, a drugą 5 lub 6?
- c) Ile jest takich liczb, których pierwsza i druga cyfra to 4, a trzecia cyfra to 4, 5 lub 6?
- d) Ile jest takich liczb większych od 44 400?

Ćwiczenie 3

Liczba jest parzysta, jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0, 2 lub 4.

A – zbiór liczb spełniających warunki zadania, których ostatnią cyfrą jest 0.

$$\overline{A} = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$$

B – zbiór liczb spełniających warunki zadania, których ostatnią cyfrą jest 2 lub 4.

$$\overline{B} = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 200$$

$$\overline{A} + \overline{B} = 320$$

Ćwiczenie 2

a) X – zbiór liczb pięciocyfrowych,

A – zbiór tych liczb ze zbioru X , w których zapisie co najmniej raz występuje cyfra 2,

B – zbiór tych liczb ze zbioru X , w których zapisie ani razu nie występuje cyfra 2.

$$\overline{X} = 4^5, \overline{B} = 3^5,$$

$X = A \cup B$ oraz A i B są rozłączne, więc $\overline{X} = \overline{A} + \overline{B}$.

$$\text{Stąd } \overline{A} = \overline{X} - \overline{B} = 781.$$

b) X – zbiór liczb czterocyfrowych, w których nie występuje zero,

A – zbiór tych liczb ze zbioru X , których suma cyfr jest mniejsza od 35,

B – zbiór tych liczb ze zbioru X , których suma cyfr jest większa lub równa 35. Są to liczby: 9999, 9998, 9989, 9899, 8999.

$$\overline{X} = 9^4, \overline{B} = 5,$$

$X = A \cup B$ oraz A i B są rozłączne, zatem $\overline{X} = \overline{A} + \overline{B}$.

$$\text{Stąd: } \overline{A} = \overline{X} - \overline{B} = 6556.$$

Ćwiczenie 4

$$\text{a) } \overline{A} = 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 2592$$

$$\text{b) } \overline{B} = 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 432$$

$$\text{c) } \overline{C} = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 = 108$$

$$\text{d) } \overline{D} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = 3132$$

Ćwiczenie 5

$$6^3 - 2 = 216 - 2 = 214$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) Cztery asy można wybrać na jeden sposób. Kartę, która nie jest asem, wybieramy spośród 20 pozostałych kart. Jest więc 20 możliwości wyboru.
b) $1 \cdot 4 \cdot 4 + 1 \cdot 4 \cdot 4 = 32$
2. a) $15 + 6 = 21$
b) $6 + 4 + 6 = 16$
c) $10 + 3 = 13$

Talia 24 kart składa się z 6 pików ($\spadesuit$), $A\spadesuit K\spadesuit D\spadesuit W\spadesuit 10\spadesuit 9\spadesuit$
6 kierów ($\heartsuit$), 6 kar ($\diamondsuit$) i 6 trefli ($\clubsuit$). Li- $A\heartsuit K\heartsuit D\heartsuit W\heartsuit 10\heartsuit 9\heartsuit$
tery A, K, D, W oznaczają figury: odpo- $A\diamondsuit K\diamondsuit D\diamondsuit W\diamondsuit 10\diamondsuit 9\diamondsuit$
wiednio asa, króla, damę i waleta. W skład $A\clubsuit K\clubsuit D\clubsuit W\clubsuit 10\clubsuit 9\clubsuit$
talii wchodzi karty wymienione obok.

Przykład 4

Z talii 24 kart wybrano jednego pika, jednego kiera, jedno karo i jednego trefla. Wiadomo, że nie wybrano czterech asów. Ile jest możliwości takiego wyboru?

Liczba możliwych wyborów równa się $6^4 - 1 = 1296 - 1 = 1295$.

Ćwiczenie 5

Z talii 24 kart wybrano jednego pika, jednego kiera i jedno karo. Wiadomo, że nie wybrano ani trzech króli, ani trzech dam. Ile jest możliwości takiego wyboru?

Zadania

1. a) Z talii 24 kart wybrano pięć, wśród których były cztery asy. Ile jest możliwości takiego wyboru?
b) Z talii 24 kart wybrano sześć, wśród których były cztery asy. Pozostałe dwie karty to albo król i dama, albo dama i walet. Ile jest możliwości takiego wyboru?
2. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Liczbę oczek na pierwszej z nich oznaczamy przez x , a na drugiej – przez y . Ile jest możliwych wyników spełniających podany warunek?
a) $x < y$ lub $x > y + 2$ (diagram obok)
b) $x = y$ lub $x \geq y + 2$
c) $x + y \leq 5$ lub $x + y = 10$
3. Podczas sprawdzianu należało obliczyć, ile jest liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Poniżej przedstawiono rozwiązania podane przez dwóch uczniów.
uczeń I: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ uczeń II: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$
Uzasadnij podane rozwiązania.

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

3. Uczeń I: cyfrę tysięcy można wybrać na 5 sposobów (bez 0), cyfrę setek – 5 sposobów (z uwzględnieniem 0), cyfrę dziesiątek – 4 sposoby, a cyfrę jedności – 3 sposoby. Uczeń II od liczby wszystkich ciągów czterocyfrowych odjął liczbę ciągów, które zaczynały się od cyfry 0.

4. Rzucamy czterokrotnie kostką. Wyrzucone liczby oczek są kolejnymi cyframi liczby czterocyfrowej. Ile spośród otrzymanych w ten sposób liczb jest:
- a) większych od 6000, c) podzielnych przez 25,
b) większych od 3500, d) podzielnych przez 4?
5. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od k , w których zapisie nie występuje cyfra 0 oraz cyfry się nie powtarzają?
- a) $k = 99$ b) $k = 999$ c) $k = 9999$ d) $k = 99\,999$
6. Na parkingu salonu samochodowego stoi 10 samochodów tej samej marki. Cztery samochody są czarne, trzy – srebrne, a pozostałe – granatowe. Wybieramy trzy samochody. Na ile sposobów można dokonać wyboru tak, aby wszystkie wybrane samochody były:
- a) w różnych kolorach, b) w tym samym kolorze?
7. Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, jeśli wiadomo, że w zapisie tych liczb nie występuje cyfra 7? A ile jest takich liczb czterocyfrowych?
8. Ile jest liczb trzycyfrowych, których cyfry należą do zbioru $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ i nie mogą się powtarzać, a ich suma jest większa od 6?
9. Ile jest wszystkich liczb, w których zapisie występują tylko cyfry 0 oraz 1 i które mają co najwyżej:
- a) 5 cyfr, b) 7 cyfr, c) 10 cyfr?

Powtórzenie

10. Ile jest siedmiocyfrowych numerów telefonicznych zaczynających się od 66 lub od 606?
11. Ile jest kodów liczbowych składających się z co najmniej pięciu oraz co najwyżej dziewięciu cyfr?
12. Chcemy kupić kanapę i fotel. Sklep A oferuje 3 rodzaje kanap i 6 rodzajów foteli, a sklep B – 5 rodzajów kanap i 4 rodzaje foteli. Ile mamy możliwości wyboru, jeśli kupimy wszystko w jednym sklepie?
13. Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych:
- a) zaczynających się od 12, b) kończących się na 12?

8. Od liczby wszystkich wyników odejmujemy liczbę tych, które mają na początku 0, oraz liczbę permutacji cyfr 0, 2, 4, w których zero nie występuje na pierwszym miejscu.

$$5 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 44$$

9. a) $2^5 = 32$ b) $2^7 = 128$ c) $2^{10} = 1024$

10. $10^5 + 10^4 = 110\,000$

11. $10^5 + 10^6 + 10^7 + 10^8 + 10^9 = 1\,111\,100\,000$

12. $3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 38$

13. a) 1000 b) 900

4. a) Na pierwszym miejscu musi być szóstka, pozostałe cyfry są dowolne:

$$1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$$

- b) Są dwie możliwości:

1) w pierwszym rzucie wypadnie 3, w drugim 5 lub 6, pozostałe wyniki są dowolne;

2) w pierwszym rzucie wypadnie 4, 5 lub 6, pozostałe wyniki są dowolne.

$$1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 720$$

- c) Pierwsze dwie cyfry są dowolne, ostatnie dwie tworzą liczbę 25: $6 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 = 36$.

d) Pierwsze dwie cyfry są dowolne, ostatnie dwie tworzą jedną z liczb: 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64:

$$6 \cdot 6 \cdot 9 = 324.$$

5. a) $9 \cdot 8 + 9 = 81$

b) $9 \cdot 8 \cdot 7 + 81 = 585$

c) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 585 = 3609$

d) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 3609 = 18\,729$

6. a) $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

b) 3 czarne – na 4 sposoby, 3 srebrne i 3 granatowe na 1 sposób, czyli:

$$4 + 1 + 1 = 6$$

7. Liczby trzycyfrowe:

$$8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$$

Liczby czterocyfrowe:

$$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2688$$

Uczeń:

- określa przestrzeń (zbiór) zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia,
- podaje wyniki sprzyjające danemu zdarzeniu losowemu,
- określa zdarzenie niemożliwe i zdarzenie pewne,
- wyznacza sumę, iloczyn i różnicę zdarzeń losowych,
- wypisuje pary zdarzeń przeciwnych i pary zdarzeń wykluczających się.

1.6. Zdarzenia losowe

Rzut monetą czy rzut kostką to przykłady doświadczeń losowych, czyli takich doświadczeń, których wyniku nie możemy przewidzieć. W przypadku jednokrotnego rzutu monetą możliwe wyniki to orzeł lub reszka. W przypadku jednokrotnego rzutu kostką mamy sześć możliwych wyników: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek.

Poszczególne wyniki doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniami elementarnymi**, a ich zbiór – **przestrzenią zdarzeń elementarnych** lub krótko **przestrzenią**. Zgodnie z tradycją przestrzeń zdarzeń elementarnych oznaczamy grecką wielką literą omega (Ω), a pojedyncze zdarzenia elementarne – małą literą omega (ω).

Przykład 1

- a) Przestrzeń zdarzeń elementarnych rzutu monetą: $\Omega = \{o, r\}$, gdzie o oznacza otrzymanie orła, a r – reszki.
- b) Przestrzeń zdarzeń elementarnych rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- c) Przestrzenią zdarzeń elementarnych w doświadczeniu polegającym na rzucie najpierw monetą, a następnie kostką jest zbiór:
- $$\Omega = \{(r, 1), (r, 2), (r, 3), (r, 4), (r, 5), (r, 6), (o, 1), (o, 2), (o, 3), (o, 4), (o, 5), (o, 6)\}.$$

Ćwiczenie 1

Z urny zawierającej trzy kule ponumerowane 1, 2 i 3 losujemy jedną kulę, a następnie drugą. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę dwucyfrową. Podaj przestrzeń zdarzeń elementarnych, jeśli:

- a) wylosowanej kuli nie zwracamy do urny (losowanie bez zwracania),
- b) wylosowaną kulę zwracamy do urny (losowanie ze zwracaniem).

Definicja

Zdarzeniem losowym nazywamy dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω .

Zdarzenia losowe, zwane krótko zdarzeniami, będziemy oznaczać wielkimi literami: A , B , C itd.

Zbiór Ω nazywamy zdarzeniem **pewnym**, natomiast zbiór pusty nazywamy zdarzeniem **niemożliwym**. Elementy zdarzenia A nazywamy **wynikami sprzyjającymi** zdarzeniu A .

Ćwiczenie 1

- a) $\Omega = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$
- b) $\Omega = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$

Multiteka

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych
- Zdarzenie elementarne – rzut dwiema kostkami do gry
- Prawdopodobieństwo – generator losowań

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.6

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Przykład 2

Rzucamy raz kostką. Rozpatrzmy zdarzenia:

A – wypadła parzysta liczba oczek,

B – wypadła liczba oczek większa od 8,

C – wypadła liczba oczek mniejsza od 7.

Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest zbiór $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Zdarzeniu A sprzyjają wyniki 2, 4, 6, zatem $A = \{2, 4, 6\}$.

Zdarzenie B jest zdarzeniem niemożliwym, a C – zdarzeniem pewnym.

Ćwiczenie 2

Rzucamy dwa razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

A – suma otrzymanych oczek jest mniejsza od 4,

B – iloczyn otrzymanych oczek jest podzielny przez 10.

Ćwiczenie 3

Rzucamy cztery razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

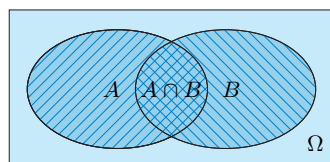
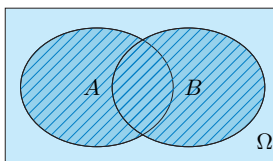
A – wypadły co najwyżej dwie reszki,

B – wypadły dokładnie dwie reszki.

Zdarzenia losowe są zbiorami, zatem możemy na nich wykonywać takie same działania jak na zbiorach.

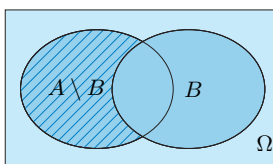
Niech $A, B \subset \Omega$.

Sumą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cup B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A lub zdarzeniu B i tylko one.



Iloczynem zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cap B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające jednocześnie zdarzeniu A i zdarzeniu B i tylko one.

Różnicą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \setminus B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A oraz niesprzyjające zdarzeniu B i tylko one.



Mówimy, że zdarzenia A i B są **rozłączne** lub **wykluczają się**, jeśli część wspólna $A \cap B$ tych zdarzeń jest zdarzeniem niemożliwym ($A \cap B = \emptyset$).

Zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy **zdarzeniem przeciwnym** do zdarzenia A . Zauważ, że $A \cap A' = \emptyset$ oraz $A \cup A' = \Omega$.

Ćwiczenie 2

$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

$B = \{(2, 5), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$

Ćwiczenie 3

$A = \{(r, r, o, o), (r, o, r, o), (r, o, o, r), (o, r, r, o), (o, r, o, r), (o, o, r, r), (r, o, o, o), (o, r, o, o), (o, o, r, o), (o, o, o, r), (o, o, o, o)\}$

$B = \{(r, r, o, o), (r, o, r, o), (r, o, o, r), (o, r, r, o), (o, r, o, r), (o, o, r, r)\}$

Ćwiczenie 4

$A = \{(r, r, r), (o, r, r), (r, o, r), (r, r, o)\}$

$B = \{(r, r, r), (o, r, r), (r, o, r), (r, r, o), (r, o, o), (o, r, o), (o, o, r)\}$

$C = \{(o, r, r), (r, o, r), (r, r, o)\}$

$D = \{(o, o, o)\}$

$E = \{(r, o, o), (o, r, o), (o, o, r), (o, o, o)\}$

Zdarzenia wykluczające się to:
 A i D , A i E , B i D , C i D ,
 C i E .

Zdarzenia przeciwne to:

A i E , B i D .

Odpowiedzi do zadań

1. $A = \{(5, 6, 6), (6, 5, 6), (6, 6, 5)\}$
 $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 4, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (4, 1, 1)\}$
 $C = \{(1, 6, 6), (2, 3, 6), (2, 6, 3), (3, 2, 6), (3, 3, 4), (3, 4, 3), (3, 6, 2), (4, 3, 3), (6, 1, 6), (6, 2, 3), (6, 3, 2), (6, 6, 1)\}$

4. $A = B = \{(o, o)\}$
 $C = \{(o, o), (o, r), (r, o), (r, r)\}$

5. $A = \{(o, o, o), (o, r, o), (r, o, o), (r, r, o)\}$
 $B = C = \{(o, o, r), (o, r, o), (r, o, o), (o, o, o)\}$

Ćwiczenie 4

Rzucamy trzy razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

A – orzeł wypadł co najwyżej raz,

D – wypadły same orły,

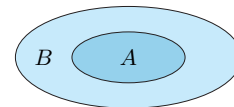
B – co najmniej raz wypadła reszka,

E – wypadło więcej orłów niż reszek.

C – reszka wypadła dokładnie dwa razy,

Wskaż pary zdarzeń wykluczających się oraz pary zdarzeń przeciwnych.

Uwaga. Jeśli wszystkie elementy zdarzenia A należą do zdarzenia B , to mówimy, że zdarzenie A **zawiera się** w zdarzeniu B , co zapisujemy $A \subset B$.



Zauważ, że jeśli $A \subset B$, to $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ i $A \setminus B = \emptyset$.

Zadania

1. Rzucamy trzy razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
 A – suma wyrzuconych oczek jest równa 17,
 B – suma wyrzuconych oczek jest nie większa niż 6,
 C – iloczyn wyrzuconych oczek jest równy 36.
2. Rzucamy dwa razy kostką. Rozpatrzmy zdarzenia:
 A – pierwsza wyrzucona liczba jest nie mniejsza od drugiej,
 B – wśród wyrzuconych liczb są liczba parzysta i liczba nieparzysta.
Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom A' i B' . Sprawdź, czy zachodzą zależności: $A \cup B = \Omega$, $A' \cup B = B$, $A \setminus B = B'$, $B' \subset A$.
3. Z urny, w której jest pięć kul ponumerowanych od 1 do 5, losujemy kolejno, bez zwracania, dwie kule.
a) Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
 A – za drugim razem wylosowano liczbę parzystą,
 B – iloczyn wylosowanych liczb jest równy 4,
 C – pierwsza wylosowana liczba jest mniejsza od drugiej.
b) Wyznacz zdarzenia: $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$ i $A \cap B \cap C$.

Powtórzenie

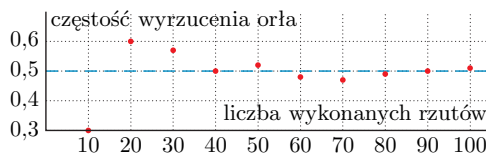
4. Rzucamy dwa razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
 A – wypadło więcej orłów niż reszek, B – wypadły co najmniej dwa orły,
 C – wypadły co najwyżej dwie reszki.
5. Rzucamy trzy razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
 A – za trzecim razem wypadł orzeł, B – wypadły co najmniej dwa orły,
 C – wypadło więcej orłów niż reszek.
2. $A = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
 $B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$
 $A' = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$
 $B' = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$
Nie zachodzi żadna z podanych zależności.
3. a) $A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (5, 2), (5, 4)\}$, $B = \{(1, 4), (4, 1)\}$,
 $C = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$
b) $A \cup B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (5, 2), (5, 4)\}$,
 $A \cap B = B \cap C = A \cap B \cap C = \{(1, 4)\}$

Częstość zdarzeń

Rzucamy n razy monetą. Jeśli k razy wypadnie orzeł, to mówimy, że **częstość** otrzymania orła wynosi $\frac{k}{n}$. W tabeli i na wykresie podano częstość wyrzucenia orła podczas pewnego eksperymentu.

Liczba wykonanych rzutów n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Liczba otrzymanych orłów k	3	12	17	20	26	29	33	39	45	51
Częstość $\frac{k}{n}$	0,3	0,6	0,57	0,5	0,52	0,48	0,47	0,49	0,5	0,51

Zwróć uwagę, że dla dużej liczby rzutów częstość otrzymania orła jest bliska $\frac{1}{2}$.



W poniższej tabeli przedstawiono wyniki eksperymentów polegających na rzucie monetą, przeprowadzonych przez Francuza Georges'a Louisa Leclerca de Buffona [czyt. żorża luisa leklerka de bufona] (1707–1788) i Anglika Karla Pearsona [czyt. pirsona] (1857–1936).

	Liczba rzutów	Liczba orłów	Częstość
G.L.L. de Buffon	4 040	2 048	0,5069
K. Pearson	12 000	6 019	0,5016
K. Pearson	24 000	12 012	0,5005

- Wykonaj 100 rzutów monetą. Podaj otrzymaną częstość wypadnięcia orła.
- Wykonaj 100 rzutów kostką. Sprawdź, czy częstość otrzymania szóstki jest bliska $\frac{1}{6}$.
- Wykonaj 30 rzutów dwiema kostkami. Za każdym razem zapisz, czy suma wyrzuconych oczek jest parzysta, czy nieparzysta. Podaj częstość, z jaką występowała parzysta liczba oczek.

W 1733 r. de Buffon sformułował problem, zwany później problemem **igły Buffona**, polegający na obliczeniu prawdopodobieństwa tego, że igła o długości l , rzucona na podłogę podzieloną liniami równoległymi odległymi o d , spadnie na linię. Rozwiązanie tego problemu, podane przez Buffona w 1777 r., pozwala wyznaczyć przybliżoną wartość liczby π metodami rachunku prawdopodobieństwa.



Uczeń:

- oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń losowych, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa,
- stosuje regułę mnożenia, regułę dodawania, permutacje i wariacje do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń.

1.7. Prawdopodobieństwo klasyczne

Gdy rzucamy kostką, możemy otrzymać jeden z wyników należących do zbioru $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Przyjmujemy, że kostka jest symetryczna (upada na każdą ściankę równie często), zatem szansa otrzymania któregośkolwiek wyniku jest równa $\frac{1}{6}$. Rozpatrzmy zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek. Zauważmy, że zdarzeniu temu sprzyjają trzy wyniki: 2, 4 i 6. Zatem szansa zajścia tego zdarzenia jest równa $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Jeżeli wszystkie wyniki doświadczenia zdarzają się równie często, mówimy, że mamy do czynienia z **prawdopodobieństwem (schematem) klasycznym**. W takiej sytuacji prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A zawartego w przestrzeni Ω określamy następująco:

Definicja

Jeżeli Ω jest zbiorem skończonym i niepustym, to **prawdopodobieństwem zdarzenia** $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}}$$

Przykład 1

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek większej od 10 w dwukrotnym rzucie symetryczną kostką.

$$\Omega = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), \\ (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), \\ (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), \\ (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4), \\ (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), \\ (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}$$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych ma 36 elementów:

$$\overline{\Omega} = 36$$

Zdarzenie, którego prawdopodobieństwo chcemy obliczyć, to zdarzenie:

$$A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}, \text{ stąd } \overline{A} = 3$$

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Ćwiczenie 1

Rzucamy dwukrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

- a) sumy oczek mniejszej od 5, b) parzystej sumy oczek.

Ćwiczenie 1

$$\overline{\Omega} = 36$$

$$\text{a) } A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$\overline{A} = 6, \quad P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{b) } B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$\overline{B} = 18, \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Multiteka

- Prawdopodobieństwo klasyczne
- Zdarzenie elementarne – rzut dwiema kostkami do gry

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.7



Przykład 2

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadnie mniej orłów niż reszek.

$$\Omega = \{(o, o, o), (o, o, r), (o, r, o), (r, o, o), (o, r, r), (r, o, r), (r, r, o), (r, r, r)\}$$

Zatem $\overline{\Omega} = 8$. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na otrzymaniu mniej szej liczby orłów niż reszek:

$$A = \{(o, r, r), (r, o, r), (r, r, o), (r, r, r)\}$$

$$\text{Zatem } \overline{A} = 4 \text{ i stąd } P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Ćwiczenie 2

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy czterokrotnym rzucie symetryczną monetą wypadnie mniej orłów niż reszek.

Ćwiczenie 3

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy pięciokrotnym rzucie symetryczną monetą przynajmniej raz wypadnie reszka.

Przykład 3

Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką i zapisujemy liczbę, której kolejnymi cyframi są otrzymane liczby oczek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wszystkie cyfry tej liczby są nieparzyste.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem wszystkich trzelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$\text{Stąd } \overline{\Omega} = 6^3 = 216.$$

Rozpatrujemy zdarzenie losowe A , którego elementami są wszystkie trzelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru $\{1, 3, 5\}$.

$$\text{Stąd } \overline{A} = 3^3 = 27.$$

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}.$$

Ćwiczenie 4

Rzucamy trzy razy symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) iloczyn liczb oczek otrzymanych w tych rzutach jest liczbą parzystą,
- b) suma liczb oczek otrzymanych w tych rzutach jest równa 5.

Ćwiczenie 5

Rzucamy czterokrotnie symetryczną kostką i zapisujemy liczbę, której kolejnymi cyframi są otrzymane liczby oczek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest podzielna przez: a) 5, b) 4.

Ćwiczenie 4

$$\overline{\Omega} = 6^3 = 216$$

a) A' – we wszystkich rzutach wypadnie nieparzysta liczba oczek

$$\overline{A'} = 3^3 = 27, \text{ stąd } \overline{A} = 189 \text{ oraz } P(A) = \frac{189}{216} = \frac{7}{8}$$

$$\text{b) } B = \{(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)\}, \overline{B} = 6, P(B) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

Ćwiczenie 5

$$\overline{\Omega} = 6^4$$

$$\text{a) } \overline{A} = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = 6^3, P(A) = \frac{6^3}{6^4} = \frac{1}{6}$$

b) B – oczka, które wypadną na trzeciej i czwartej kostce, tworzą liczbę podzielną przez 4. Jest 9 takich możliwości: 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64.

$$\overline{B} = 6 \cdot 6 \cdot 9 = 6^2 \cdot 9, P(B) = \frac{6^2 \cdot 9}{6^4} = \frac{1}{4}$$

Ćwiczenie 2

$$\overline{\Omega} = 2^4 = 16$$

$$A = \{(r, r, r, r), (o, r, r, r), (r, o, r, r), (r, r, o, r), (r, r, r, o)\}$$

$$\overline{A} = 5, \text{ czyli } P(A) = \frac{5}{16}$$

Ćwiczenie 3

$$\overline{\Omega} = 2^5 = 32, A' = \{(o, o, o, o, o)\}, \text{ czyli } \overline{A'} = 1, \text{ stąd } \overline{A} = 31.$$

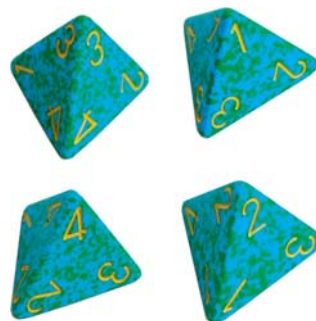
$$P(A) = \frac{31}{32}$$

Odpowiedzi do zadań

- $A = \{(o, o, o, r), (o, o, r, o), (o, r, o, o), (r, o, o, o), (o, o, o, o)\}$
 $B = \{(o, o, r, r), (o, r, o, r), (o, r, r, o), (r, o, o, r), (r, o, r, o), (r, r, o, o)\}$
 $C = \{(o, o, r, r), (o, r, o, r), (o, r, r, o), (r, o, o, r), (r, o, r, o), (r, r, o, o), (o, o, o, o), (r, r, r, r)\}$
 Najbardziej prawdopodobne jest zdarzenie C .
- $\overline{\Omega} = 2^3 = 8$
 $A = \{(o, o, r), (o, r, o), (r, o, o), (o, o, o)\}$
 $\overline{A} = 4, P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
- $\overline{\Omega} = 2^4 = 16$
 a) $A = \{(r, r, r, o), (r, r, o, r), (r, o, r, r), (o, r, r, r)\}$
 $\overline{A} = 4, P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
 b) $B = \{(r, r, r, o), (r, r, o, r), (r, o, r, r), (o, r, r, r), (r, r, r, r)\}$
 $\overline{B} = 5, P(B) = \frac{5}{16}$
- $\overline{\Omega} = 36$
 a) $A = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$
 $\overline{A} = 4, P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
 b) $B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$
 $\overline{B} = 16, P(B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$
- $\overline{\Omega} = 6^3 = 216$
 a) $A = \{(1, 2, 4), (4, 2, 1), (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)\}$
 $\overline{A} = 8, P(A) = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}$
 b) $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 2, 2), (2, 3, 4), (2, 4, 6), (3, 2, 1), (3, 3, 3), (3, 4, 5), (4, 3, 2), (4, 4, 4), (4, 5, 6), (5, 3, 1), (5, 4, 3), (5, 5, 5), (6, 4, 2), (6, 5, 4), (6, 6, 6)\}$
 $\overline{B} = 18, P(B) = \frac{18}{216} = \frac{1}{12}$

Zadania

- Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Rozpatrzmy zdarzenia:
 A – wypadły co najmniej trzy orły,
 B – liczba orłów jest równa liczbie reszek,
 C – wypadła parzysta liczba reszek.
 Które z tych zdarzeń jest najbardziej prawdopodobne?
- Rzucamy trzykrotnie symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że orzeł wypadnie co najmniej dwa razy.
- Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
 a) wypadły dokładnie trzy reszki, b) wypadły co najmniej trzy orły.
- Rzucamy dwukrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
 a) liczba oczek otrzymana w drugim rzucie jest o 2 większa od liczby oczek otrzymanej w pierwszym rzucie,
 b) liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się co najwyżej o 1.
- Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymane kolejno liczby oczek tworzą ciąg:
 a) geometryczny, b) arytmetyczny.
- Rzucamy cztery razy symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za każdym razem wypadnie taka sama liczba oczek.
- Rzucając czworościenną symetryczną kostką, możemy otrzymać jedną z liczb 1, 2, 3 lub 4 (podaną przy wierzchołku kostki).
 a) Gracz rzucający dwukrotnie taką kostką wygrywa, jeśli suma wyrzuconych liczb jest większa od 5. Wypisz wyniki sprzyjające wygranej i oblicz jej prawdopodobieństwo.
 b) Gracz rzucający trzykrotnie taką kostką wygrywa, jeśli suma wyrzuconych liczb jest nie mniejsza od 10. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej.



- $\overline{\Omega} = 6^4$
 $A = \{(1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), (5, 5, 5, 5), (6, 6, 6, 6)\}$
 $\overline{A} = 6, P(A) = \frac{6}{6^4} = \frac{1}{216}$
- a) $\overline{\Omega} = 16$
 $A = \{(2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$
 $\overline{A} = 6, P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$
 b) $\overline{\Omega} = 4^3 = 64$
 $B = \{(2, 4, 4), (4, 2, 4), (4, 4, 2), (3, 3, 4), (3, 4, 3), (4, 3, 3), (3, 4, 4), (4, 3, 4), (4, 4, 3), (4, 4, 4)\}$
 $\overline{B} = 10, P(B) = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$

8. a) Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 10\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie ona podzielna przez 3.
 b) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania ze zbioru liczb dwucyfrowych liczby podzielnej przez 3.
 c) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania ze zbioru liczb trzycyfrowych liczby podzielnej przez 5.
9. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania spośród wszystkich liczb dwucyfrowych liczby, której suma cyfr jest równa: a) 11, b) 6.
10. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania spośród wszystkich liczb trzycyfrowych liczby, której suma cyfr jest równa: a) 2, b) 3.
11. Na loterii jest 60 losów, w tym 12 wygrywających. Kupujemy 1 los.
 a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to los wygrywający.
 b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to los wygrywający, jeżeli przed nami kupiono już 4 losy i były to losy wygrywające.
12. Na pewnej loterii jest 5 losów wygrywających. Kupujemy 1 los. Ile powinno być wszystkich losów na tej loterii, aby prawdopodobieństwo tego, że kupimy los wygrywający, było większe od 0,2?
13. Windą zatrzymującą się na 6 piętrach jadą 4 osoby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
 a) każda osoba wysiadzie na innym piętrze,
 b) wszyscy wysiadą na tym samym piętrze.
14. Dziesięć kul rozmieszczamy w dziesięciu szufladach (kule i szuflady rozróżniamy). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każda szuflada będzie zajęta.

Powtórzenie

15. Student potrafi odpowiedzieć na 20 spośród 25 pytań egzaminacyjnych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie będzie umiał odpowiedzieć na wybrane losowo pytanie.
16. Wrzucamy losowo 3 piłki do 7 pojemników. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
 a) wszystkie piłki będą w tym samym pojemniku,
 b) każda piłka będzie w innym pojemniku.

14. $\bar{\Omega} = 10^{10}$, $\bar{A} = 10!$, $P(A) = \frac{10!}{10^{10}} = \frac{9!}{10^9} = 0,00036288$

15. $\bar{\Omega} = 25$, $\bar{A} = 5$, czyli $P(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

16. $\bar{\Omega} = 7^3$

a) $\bar{A} = 7$, $P(A) = \frac{7}{7^3} = \frac{1}{49}$

b) $\bar{B} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$, $P(A) = \frac{7 \cdot 30}{7^3} = \frac{30}{49}$

8. a) $\bar{\Omega} = 10$, $\bar{A} = 3$, czyli $P(A) = \frac{3}{10}$

b) $\bar{\Omega} = 90$, $\bar{B} = 30$, czyli $P(B) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$

c) $\bar{\Omega} = 900$, $\bar{C} = 180$, czyli $P(C) = \frac{180}{900} = \frac{1}{5}$

9. $\bar{\Omega} = 90$

a) $A = \{29, 92, 38, 83, 47, 74, 56, 65\}$,

$\bar{A} = 8$, $P(A) = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$

b) $B = \{15, 51, 24, 42, 33, 60\}$,
 $\bar{B} = 6$, $P(B) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$

10. $\bar{\Omega} = 900$

a) $A = \{101, 110, 200\}$,

$\bar{A} = 3$, $P(A) = \frac{3}{900} = \frac{1}{300}$

b) $B = \{111, 102, 120, 201, 210, 300\}$,
 $\bar{B} = 6$, $P(B) = \frac{6}{900} = \frac{1}{150}$

11. a) $\bar{\Omega} = 60$, $\bar{A} = 12$, czyli $P(A) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

b) $\bar{\Omega} = 56$, $\bar{B} = 8$, czyli $P(B) = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$

12. $\bar{\Omega} = n$, gdzie $n \geq 5$ i $n \in \mathbf{N}$,
 $\bar{A} = 5$, czyli $P(A) = \frac{5}{n} > \frac{1}{5}$,
 więc $n < 25$. Zatem losów powinno co najmniej 5 i mniej niż 25.

13. $\bar{\Omega} = 6^4 = 1296$

a) $\bar{A} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$,
 $P(A) = \frac{360}{1296} = \frac{5}{18}$

b) $\bar{B} = 6$, $P(B) = \frac{6}{1296} = \frac{1}{216}$

Uczeń:

- oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń losowych, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Odpowiedzi do zadań

- a) $\overline{\Omega} = 26$
 $\overline{A} = 0,25 \cdot 16 + 0,1 \cdot 10 = 5$
 $P(A) = \frac{5}{26}$
b) $\overline{\Omega} = 28$
 $\overline{B} = 0,25 \cdot 16 + 0,1 \cdot 10 + 2 = 7$
 $P(B) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$
- $\overline{\Omega} = 80$
 $\overline{A} = 0,125 \cdot 24 + 0,5 \cdot 26 + 0,2 \cdot 30 = 22$
 $P(A) = \frac{11}{40}$
- $\frac{n}{80} = 2 \cdot \frac{24}{120}$
Stąd $n = 32$.
- n – liczba losów wygrywających
 $n + 20$ – liczba losów przegrywających
 $\frac{n}{n+n+20} = 0,3$
 $n = 15$
Zatem wszystkich losów jest 50.

1.8. Prawdopodobieństwo klasyczne – zadania

- W klasie liczącej 16 dziewcząt i 10 chłopców 25% dziewcząt i 10% chłopców interesuje się wspinaczką skałkową.
a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba z tej klasy interesuje się wspinaczką.
b) Jakie będzie to prawdopodobieństwo, jeśli do klasy dojdzie dwóch chłopców interesujących się wspinaczką?
- W klasie IVa jest 24 uczniów, w IVb – 26 uczniów, a w IVc – 30 uczniów. Egzamin maturalny z języka francuskiego ma zamiar zdawać 12,5% uczniów klasy IVa, 50% uczniów klasy IVb i 20% uczniów klasy IVc. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że uczeń losowo wybrany spośród wszystkich uczęszczających do tych klas ma zamiar zdawać maturę z języka francuskiego.
- Na pierwszej loterii jest 120 losów, w tym 24 losy wygrywające. Na drugiej loterii jest 80 losów, w tym n losów wygrywających. Oblicz n , wiedząc, że prawdopodobieństwo wygranej, jeżeli kupimy 1 los, jest na drugiej loterii dwukrotnie większe niż na pierwszej.
- Liczba losów przegrywających jest na pewnej loterii o 20 większa od liczby losów wygrywających. Oblicz, ile jest wszystkich losów na tej loterii, wiedząc, że prawdopodobieństwo wygranej, jeżeli kupimy 1 los, jest równe 0,3.
- a) Do urny zawierającej 2 kule białe i 4 czarne dołożono pewną liczbę kul białych. Ile jest obecnie wszystkich kul w urnie, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe $\frac{3}{4}$?
b) W pierwszej urnie znajdowało się 6 kul białych i 8 zielonych, a w drugiej – 10 kul białych i pewna liczba kul zielonych. Po przełożeniu wszystkich kul z pierwszej urny do drugiej prawdopodobieństwo wylosowania z niej kuli zielonej było równe $\frac{5}{9}$. Ile było wszystkich kul?

Klasyczną definicję prawdopodobieństwa precyzyjnie sformułował francuski matematyk, fizyk i astronom Pierre Simon de Laplace [czyt. pier sima de laplas] (1749–1827). Zamieścił ją w dziele *Théorie analytique des probabilités* (Analityczna teoria prawdopodobieństwa), wydanym w 1812 r. Od 1785 r. Laplace był członkiem Akademii Nauk w Paryżu.



- a) n – liczba dołożonych kul białych
 $\frac{2+n}{6+n} = \frac{3}{4}$, więc $n = 10$.
Zatem wszystkich kul jest 16.
b) n – liczba kul zielonych w drugiej urnie
 $\frac{8+n}{24+n} = \frac{5}{9}$, więc $n = 12$.
Zatem wszystkich kul jest 36.

Multiteka

- Obliczanie prawdopodobieństwa – rozwiązanie zadania

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.8

Generator
testów i sprawdzianów

6. Do urny, w której znajdowały się 2 kule białe i 8 czarnych, dołożono taką samą liczbę kul białych i czarnych. Ile kul dołożono, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest teraz dwa razy większe niż na początku?
7. Z urny, w której jest 8 kul białych i 2 czarne, losujemy 9 kul. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w urnie zostanie kula biała.
8. Na 11 fotelach ustawionych w rzędzie usiadło losowo 6 kobiet i 5 mężczyzn. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- mężczyźni siedzą razem,
 - żadne dwie kobiety nie siedzą obok siebie.
9. Test dotyczący życia pingwinów składa się z 10 pytań, na które możemy odpowiedzieć „tak” lub „nie”. Oblicz prawdopodobieństwo zaliczenia testu, jeśli odpowiedzi wskazujemy losowo i aby zaliczyć test, musimy odpowiedzieć poprawnie:
- na wszystkie pytania,
 - na co najmniej 9 pytań.



Powtórzenie

10. Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom: A – za pierwszym razem wypadł orzeł, B – za drugim razem wypadł orzeł, C – wypadły co najmniej dwa orły, D – wypadły co najwyżej dwie reszki. Oblicz prawdopodobieństwa powyższych zdarzeń.
11. Rzucamy dwa razy symetryczną kostką. Niech A_n oznacza zdarzenie: suma oczek wyrzuconych na obu kostkach jest równa n . Oblicz $P(A_2)$, $P(A_3)$ i $P(A_4)$.
12. Rzucamy dwa razy symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: A – co najmniej raz wypadnie 6 oczek, B – dokładnie w jednym z rzutów wypadnie co najmniej 5 oczek, C – iloczyn oczek, które wypadną w obydwu rzutach, jest liczbą nieparzystą.
13. Na ściankach symetrycznej kostki znajdują się następujące liczby oczek: 1, 2, 3, 4, 5, 5. Rzucamy dwa razy tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek będzie równa 6.

6. n – liczba dołożonych kul w każdym z kolorów
- $$\frac{2+n}{10+2n} = 2 \cdot \frac{2}{10}$$
- $$n = 10$$
- Zatem dołożono 20 kul.

7. $\overline{\Omega} = 10$
- $\overline{A} = 8$
 $P(A) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$
8. $\overline{\Omega} = 11!$
- $\overline{A} = 7 \cdot 5! \cdot 6!$
 $P(A) = \frac{7 \cdot 5! \cdot 6!}{11!} = \frac{1}{66}$
 - $\overline{B} = 6! \cdot 5!$
 $P(B) = \frac{6! \cdot 5!}{11!} = \frac{1}{462}$
9. $\overline{\Omega} = 2^{10} = 1024$
- $\overline{A} = 1$, $P(A) = \frac{1}{1024}$
 - $\overline{B} = 10 + \overline{A} = 11$,
 $P(B) = \frac{11}{1024}$

10. $A = \{(o, o, o), (o, r, o), (o, o, r), (o, r, r)\}$
 $B = \{(o, o, o), (o, o, r), (r, o, o), (r, o, r)\}$
 $C = \{(o, o, r), (o, r, o), (r, o, o), (o, o, o)\}$
 $D = \{(o, o, o), (r, o, o), (o, r, o), (o, o, r), (r, r, o), (r, o, r), (o, r, r)\}$
 $\overline{\Omega} = 2^3 = 8$
 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
 $P(D) = \frac{7}{8}$
11. $\overline{\Omega} = 6^2 = 36$
 $A_2 = \{(1, 1)\}$, czyli
 $P(A_2) = \frac{1}{36}$
 $A_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, czyli
 $P(A_3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
 $A_4 = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$,
 czyli $P(A_4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

12. $\overline{\Omega} = 6^2 = 36$
 $\overline{A} = 11$, czyli $P(A) = \frac{11}{36}$
 $\overline{B} = 16$, czyli $P(B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$
 $\overline{C} = 9$, czyli $P(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
13. $\overline{\Omega} = 6^2 = 36$
 $A = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3), (5, 1), (1, 5)\}$
 $P(A) = \frac{7}{36}$

Uczeń:

- podaje rozkład prawdopodobieństwa dla rzutów kostką lub monetą (symetryczną i niesymetryczną).

1.9. Rozkład prawdopodobieństwa

Pewną niesymetryczną kostkę poddano testowi, wykonując długą serię rzutów. W tabeli podano w procentach częstość występowania danych liczb oczek.

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Częstość występowania	12,5%	12,5%	12,5%	25%	12,5%	25%

Zwróćmy uwagę, że częstość występowania nie jest taka sama dla wszystkich wyników. Na tej podstawie można przyjąć dla testowanej kostki następujące prawdopodobieństwa pojawienia się danych liczb oczek.

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Prawdopodobieństwo	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

W powyższej tabeli podano **rozkład prawdopodobieństwa** dla doświadczenia polegającego na jednokrotnym rzucie testowaną kostką.

Aby podać rozkład prawdopodobieństwa, należy zdarzeniom elementarnym $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ przyporządkować odpowiednio liczby $p_1, p_2, \dots, p_n$ należące do przedziału $\langle 0; 1 \rangle$ tak, aby spełniony był warunek:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A obliczamy, sumując prawdopodobieństwa wyników sprzyjających temu zdarzeniu.

Definicja

Niech $A \subset \Omega$. **Prawdopodobieństwo** $P(A)$ zdarzenia A jest sumą prawdopodobieństw zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A .

Przykład 1

W tabeli obok podano rozkład prawdopodobieństwa dla doświadczenia polegającego na jednokrotnym rzucie niesymetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek w rzucie tą kostką.

ω_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia $A = \{2, 4, 6\}$:

$$P(A) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$$

Ćwiczenie 1

W tabeli obok podano rozkład prawdopodobieństwa dla doświadczenia polegającego na jednokrotnym rzucie niesymetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia nieparzystej liczby oczek oraz prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej trzech oczek.

ω_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$

Jeśli wszystkie zdarzenia elementarne $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ mają równe prawdopodobieństwa, to mamy do czynienia ze **schematem klasycznym**. Wówczas:

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$$

Uwaga. W dalszym ciągu podręcznika dla rzutu kostką (monetą) będziemy przyjmować, że kostka (moneta) jest symetryczna, czyli że wszystkie ścianki (orzeł lub reszka) wypadają z takim samym prawdopodobieństwem, chyba że zaznaczono, że jest inaczej.

Zadania

1. W rzucie pewną niesymetryczną monetą orzeł wypada dwukrotnie częściej niż reszka. Podaj rozkład prawdopodobieństwa dla doświadczenia polegającego na rzucie tą monetą.

2. Rzucamy raz niesymetryczną kostką. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę przedstawiającą rozkład prawdopodobieństwa dla rzutu tą kostką, jeśli prawdopodobieństwo otrzymania 6 oczek jest dwa razy większe od prawdopodobieństwa otrzymania 5 oczek. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby oczek.

ω_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

3. Niech ω_i oznacza liczbę otrzymanych orłów, a p_i – prawdopodobieństwo otrzymania ω_i orłów. Podaj rozkład prawdopodobieństwa dla doświadczenia polegającego na rzucie:

- a) dwiema monetami, b) trzema monetami.

Powtórzenie

4. Na ściankach symetrycznej kostki znajdują się następujące liczby oczek: 1, 2, 3, 4, 5, 5. Podaj rozkład prawdopodobieństwa dla rzutu tą kostką.

5. W tabeli obok podano rozkład prawdopodobieństwa dla doświadczenia polegającego na jednokrotnym rzucie niesymetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w rzucie tą kostką: a) parzystej liczby oczek, b) nieparzystej liczby oczek.

ω_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0

ω_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

5. a) A – wypadła parzysta liczba oczek

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + 0 = \frac{7}{20}$$

b) B – wypadła nieparzysta liczba oczek

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{20} = \frac{13}{20}$$

Ćwiczenie 1.

$$P(\{1, 3, 5\}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{6} = \frac{13}{30}$$

$$P(\{3, 4, 5, 6\}) = \frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{15} = \frac{19}{30}$$

Odpowiedzi do zadań

1.

ω_i	o	r
p_i	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
2. $\frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{10}$
 $1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10}$
 Prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby oczek:
 $\frac{1}{30} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{29}{60}$

3. a)

ω_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

b)

ω_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Uczeń:

- oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego,
- stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie sumy zdarzeń,
- sprawdza, czy zdarzenia się wykluczają,
- stosuje własności prawdopodobieństwa w dowodach twierdzeń oraz w zadaniach wykorzystujących własności prawdopodobieństwa.

Ćwiczenie 1

a) $\overline{\Omega} = 2^4 = 16$

A – co najmniej raz wypadnie reszka

A' – nie wypadnie żadna reszka

$$A' = \{(o, o, o, o)\}, \overline{A'} = 1,$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

b) $\overline{\Omega} = 6^3 = 216$

B – co najmniej raz wypadnie szóstka

B' – nie wypadnie żadna szóstka

$$\overline{B'} = 5^3 = 125,$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

Ćwiczenie 2

$$\overline{\Omega} = 6^2 = 36$$

A' – suma oczek, które wypadną w obu rzutach, jest mniejsza od 4

$$A' = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\},$$

$$\overline{A'} = 3,$$

$$P(A') = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Zatem } P(A) = 1 - P(A') = \frac{11}{12}.$$

1.10. Własności prawdopodobieństwa

Twierdzenie

Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, na którym zostało określone prawdopodobieństwo P . Wówczas dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$:

1. $P(A) \geq 0$ oraz $P(A) \leq 1$,
2. $P(\emptyset) = 0$ oraz $P(\Omega) = 1$,
3. jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$,
4. $P(A') = 1 - P(A)$.

Przykład 1

Rzucamy trzykrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz wypadnie orzeł.

Zauważmy, że $\overline{\Omega} = 8$. Niech A oznacza zdarzenie polegające na otrzymaniu przynajmniej jednego orła w trzech rzutach. Rozpatrzmy zdarzenie A' przeciwne do zdarzenia A . Polega ono na wyrzuceniu samych reszek:

$$A' = \{(r, r, r)\}$$

Zatem $\overline{A'} = 1$, czyli:

$$P(A') = \frac{\overline{A'}}{\overline{\Omega}} = \frac{1}{8}$$

Stąd:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Ćwiczenie 1

a) Rzucamy czterokrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz wypadnie reszka.

b) Rzucamy trzykrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz otrzymamy 6 oczek.

Ćwiczenie 2

Rzucamy dwukrotnie kostką. Zdarzenie A polega na tym, że suma liczb oczek, które wypadną w obu rzutach, jest równa co najmniej 4. Podaj opis zdarzenia A' i wypisz sprzyjające mu zdarzenia elementarne. Oblicz $P(A')$ i $P(A)$.

Ćwiczenie 3

a) Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn liczb oczek, które wypadną w obu rzutach, jest mniejszy od 30.

b) Rzucamy trzykrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczb oczek, które wypadną w trzech rzutach, jest większa od 4.

Ćwiczenie 3

a) $\overline{\Omega} = 6^2 = 36$

A – iloczyn oczek, które wypadną w obu rzutach, jest mniejszy od 30

A' – iloczyn oczek, które wypadną w obu rzutach, jest nie mniejszy od 30

$$A' = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}, \overline{A'} = 3,$$

$$P(A') = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Zatem } P(A) = 1 - P(A') = \frac{11}{12}.$$

b) $\frac{53}{54}$

Multiteka

- Obliczanie prawdopodobieństwa – rozwiązanie zadania

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.10

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

Rzucamy monetą i kostką. Jest 12 możliwych wyników tego doświadczenia: $(o, 1), (o, 2), (o, 3), (o, 4), (o, 5), (o, 6), (r, 1), (r, 2), (r, 3), (r, 4), (r, 5), (r, 6)$. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że na monecie wypadł orzeł, a B – że na kostce wypadła parzysta liczba oczek. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Zdarzenie	Wyniki sprzyjające	Prawdopodobieństwo
A	$(o, 1), (o, 2), (o, 3), (o, 4), (o, 5), (o, 6)$	$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
B	$(o, 2), (o, 4), (o, 6), (r, 2), (r, 4), (r, 6)$	$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
$A \cap B$	$(o, 2), (o, 4), (o, 6)$	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
$A \cup B$	$(o, 1), (o, 2), (o, 3), (o, 4), (o, 5), (o, 6), (r, 2), (r, 4), (r, 6)$	$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Sprawdź, czy zachodzi równość: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Twierdzenie

Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, na którym zostało określone prawdopodobieństwo P . Wówczas dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ćwiczenie 5

Oblicz prawdopodobieństwo sumy zdarzeń $A, B \subset \Omega$, jeśli:

- a) $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$,
b) $P(A) = \frac{2}{9}, P(B) = \frac{5}{12}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Ćwiczenie 6

Oblicz prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń $A, B \subset \Omega$, jeśli:

- a) $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = \frac{5}{6}$,
b) $P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{11}{15}$.

Ćwiczenie 7

W pewnej grupie uczniów każdy zna język angielski lub niemiecki. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania z tej grupy ucznia znającego język angielski jest równe $\frac{7}{8}$, natomiast prawdopodobieństwo wylosowania ucznia znającego język niemiecki jest równe $\frac{4}{5}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń zna obydwa języki.

Ćwiczenie 6

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

- a) $P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{1}{12}$
b) $P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{11}{15} = 0$

Ćwiczenie 7

A – uczeń zna język angielski, $P(A) = \frac{7}{8}$

N – uczeń zna język niemiecki, $P(N) = \frac{4}{5}$

$A \cup N$ – uczeń zna język angielski lub niemiecki, $P(A \cup N) = 1$

$A \cap N$ – uczeń zna oba języki

$$P(A \cap N) = P(A) + P(N) - P(A \cup N) = \frac{27}{40}$$

Ćwiczenie 4

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4},$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}; \text{ równość zachodzi.}$$

Ćwiczenie 5

$$\text{a) } P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\text{b) } P(A \cup B) = \frac{2}{9} + \frac{5}{12} - \frac{1}{6} = \frac{17}{36}$$

Ćwiczenie 8

$P(A) = \frac{1}{216}$, $P(B) = \frac{1}{72}$ oraz A i B wykluczają się, zatem $P(A \cup B) = \frac{1}{216} + \frac{1}{72} = \frac{1}{54}$.

Ćwiczenie 9

- a) $P(A \setminus B) = 0,8 - 0,35 = 0,45$
b) $P(A \setminus B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

Odpowiedzi do zadań

1. A' – w obu rzutach otrzymamy tę samą liczbę oczek
 B' – wyrzucimy co najmniej jedną szóstkę
 $\overline{\Omega} = 6^2 = 36$
 $\overline{A'} = 6$, $P(A') = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
 $P(A) = 1 - P(A') = \frac{5}{6}$
 $\overline{B'} = 11$, $P(B') = \frac{11}{36}$
 $P(B) = 1 - P(B') = \frac{25}{36}$

Twierdzenie

Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, na którym zostało określone prawdopodobieństwo P . Wówczas jeśli zdarzenia A i $B \subset \Omega$ wykluczają się ($A \cap B = \emptyset$), to:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ćwiczenie 8

Rzucamy trzema kostkami. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 3 wynosi $\frac{1}{216}$, a prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 4 wynosi $\frac{1}{72}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma otrzymanych oczek będzie mniejsza od 5.

Twierdzenie

Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, na którym zostało określone prawdopodobieństwo P . Wówczas dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$:

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Dowód

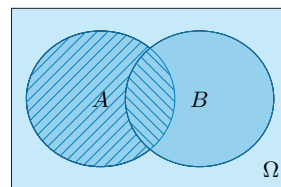
Dla dowolnych $A, B \subset \Omega$ mamy:

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

więc:

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

a stąd $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.



Zauważ, że zbiory $A \setminus B$ oraz $A \cap B$ są rozłączne.

Ćwiczenie 9

Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \setminus B)$, jeśli:

- a) $P(A) = 0,8$ i $P(A \cap B) = 0,35$, b) $P(A) = \frac{3}{4}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

Zadania

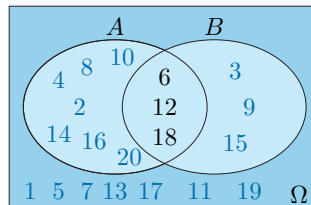
- Rzucamy dwukrotnie kostką. Zdarzenie A polega na tym, że w każdym rzucie otrzymamy inną liczbę oczek, a zdarzenie B – że ani razu nie otrzymamy szóstki. Podaj opis zdarzenia A' oraz zdarzenia B' . Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń A' , A , B' i B .
- Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
 A – suma oczek, które wypadną w obu rzutach, jest równa co najmniej 4,
 B – iloczyn oczek, które wypadną w obu rzutach, jest mniejszy od 25.
- $\overline{\Omega} = 6^2 = 36$
 A' – suma oczek, które wypadną w obydwu rzutach, jest mniejsza niż 4
 $A' = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$, $\overline{A'} = 3$, czyli $P(A') = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
Zatem $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.
 B' – iloczyn oczek, które wypadną w obydwu rzutach, jest nie mniejszy niż 25
 $B' = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$, $\overline{B'} = 4$, czyli $P(B') = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
Zatem $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

3. a) Rzucamy czterokrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że reszka wypadnie co najwyżej trzy razy.
b) Rzucamy pięciokrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że moneta nie upadnie pięć razy tą samą stroną do góry.

4. Rzucamy trzykrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) szóstka wypadnie co najwyżej dwa razy,
b) ta sama liczba oczek nie powtórzy się trzykrotnie.

5. Z liczb od 1 do 20 losowo wybieramy jedną liczbę. Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 2, a B – podzielnej przez 3. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij diagram, a następnie podaj: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$.



Sprawdź prawdziwość równości: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

6. a) Losujemy jedną liczbę spośród 1, 2, ..., 50. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba ta jest podzielna przez 2 lub przez 3.
b) Losujemy jedną liczbę spośród 1, 2, ..., 100. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba ta jest podzielna przez 2 lub przez 5.

7. Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
 A – w obu rzutach otrzymano parzystą liczbę oczek lub obie otrzymane liczby oczek są większe od 3,
 B – iloczyn liczb otrzymanych oczek jest nieparzysty lub większy od 24.

8. Z ankiety dotyczącej znajomości języka francuskiego i hiszpańskiego przeprowadzonej w pewnej grupie uczniów wynika, że $\frac{3}{5}$ z nich zna język francuski, $\frac{1}{4}$ – zna oba języki, natomiast $\frac{9}{10}$ – zna co najmniej jeden z tych języków. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że uczeń losowo wybrany z tej grupy zna język hiszpański.

9. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cup B)$ oraz $P(A \setminus B)$, jeśli:

- a) $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$,
b) $P(A) = \frac{5}{12}$, $P(B) = \frac{5}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

10. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cap B)$, jeśli:

- a) $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,6$ i $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym,
b) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ i $P(A \cap B) = \frac{4}{9}P(A \cup B)$.

8. F – uczeń zna język francuski, $P(F) = \frac{3}{5}$, H – uczeń zna język hiszpański

$F \cup H$ – uczeń zna francuski lub hiszpański, $P(F \cup H) = \frac{9}{10}$

$F \cap H$ – uczeń zna oba języki, $P(F \cap H) = \frac{1}{4}$

$P(F \cup H) = P(F) + P(H) - P(F \cap H)$

$\frac{9}{10} = \frac{3}{5} + P(H) - \frac{1}{4}$

Zatem $P(H) = \frac{11}{20}$.

9. a) $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$, $P(A \setminus B) = \frac{5}{8}$

b) $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$, $P(A \setminus B) = \frac{1}{12}$

10. a) 0,1 b) $\frac{11}{39}$

3. a) $\overline{\Omega} = 2^4 = 16$

A' – reszka wypadnie cztery razy

$\overline{A'} = 1$, czyli $P(A') = \frac{1}{16}$.

Zatem: $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

- b) $\overline{\Omega} = 2^5 = 32$

B' – wypadnie pięć orłów lub pięć reszek

$\overline{B'} = 2$, czyli

$P(B') = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$.

Zatem $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

4. $\overline{\Omega} = 6^3 = 216$

a) A' – szóstka wypadnie trzy razy

$\overline{A'} = 1$, czyli $P(A') = \frac{1}{216}$.

Zatem $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{216} = \frac{215}{216}$.

- b) $\frac{35}{36}$

5. $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P(A \cap B) = \frac{3}{20}$

$P(A \cup B) = \frac{13}{20}$

Równość jest prawdziwa.

6. a) 0,66 b) 0,6

7. $\overline{\Omega} = 6^2 = 36$

A_1 – w obu rzutach otrzymano parzystą liczbę oczek

A_2 – obie otrzymane liczby oczek są większe od 3

$A = A_1 \cup A_2$

$P(A_1) = \frac{9}{36}$, $P(A_2) = \frac{9}{36}$,

$P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{36}$

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) =$

$= \frac{9}{36} + \frac{9}{36} - \frac{4}{36} = \frac{7}{18}$

B_1 – iloczyn liczb wyrzucanych oczek jest nieparzysty

B_2 – iloczyn liczb wyrzucanych oczek jest większy od 24

$B = B_1 \cup B_2$

$P(B_1) = \frac{9}{36}$, $P(B_2) = \frac{4}{36}$,

$P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{36}$

$P(B) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) =$

$= \frac{9}{36} + \frac{4}{36} - \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

11. a) Jeśli $B \subset A \subset \Omega$, to $A \cap B = B$.

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B)$$

$$b) P(A \setminus B) = 0,95 - 0,48 = 0,47$$

12. a) $P(A \cup B) = \frac{4}{5} + \frac{1}{4} = \frac{21}{20} > 1$, czyli zdarzenia nie mogą się wykluczać.

$$b) P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15} < 1$$
, czyli zdarzenia mogą się wykluczać.

13. A – uczeń nie lubi żadnego z wymienionych przedmiotów
 $\overline{A} = 200 - (100 + 50 + 15 + 5) = 200 - 170 = 30$

$$P(A) = \frac{30}{200} = \frac{3}{20}$$

14. $\overline{\Omega} = 2^5 = 32$

A' – nie wypadnie żaden orzeł,

$$\overline{A'} = 1, \text{ czyli } P(A') = \frac{1}{32}.$$

$$\text{Zatem } P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}.$$

- D 11. a) Uzasadnij, że jeśli $B \subset A \subset \Omega$, to $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

b) Niech $B \subset A \subset \Omega$. Oblicz $P(A \setminus B)$, jeśli $P(A) = 0,95$ i $P(B) = 0,48$.

12. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Czy zdarzenia $A, B \subset \Omega$ mogą się wykluczać, jeśli $P(A) = \frac{1}{2}$ i $P(B) = \frac{3}{5}$?

Założmy, że zdarzenia A i B się wykluczają. Wówczas:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{11}{10} > 1$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem zdarzenia te nie mogą się wykluczać.

Czy zdarzenia $A, B \subset \Omega$ mogą się wykluczać?

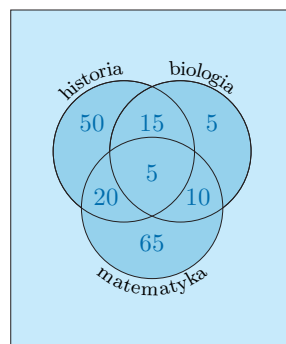
$$a) P(A) = \frac{4}{5}, P(B) = \frac{1}{4}$$

$$b) P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{5}$$

13. W ankiecie przeprowadzonej wśród 200 uczniów klas czwartych pewnego liceum otrzymano następujące wyniki:

- matematykę lubi 100 uczniów,
- historię lubi 90 uczniów,
- biologię lubi 35 uczniów,
- matematykę i historię lubi 25 uczniów,
- matematykę i biologię lubi 15 uczniów,
- historię i biologię lubi 20 uczniów,
- matematykę, historię i biologię lubi 5 uczniów.

Przerysuj do zeszytu diagram przedstawiony obok i go uzupełnij. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń nie lubi żadnego z wymienionych przedmiotów.



Powtórzenie

14. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania przynajmniej jednego orła w doświadczeniu polegającym na pięciokrotnym rzucie monetą.
15. Spośród liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba jest:
- a) parzysta lub dzieli się przez 5, b) podzielna przez 3 lub przez 4.
16. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cup B)$, jeśli:
- a) $P(A) = 0,35$, $P(B) = 0,47$ i $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym,
- b) $P(A') = 0,6$, $P(B) = 0,25$ i $P(A \cap B) = 0,1$.

15. a) A – liczba jest podzielna przez 2

B – liczba jest podzielna przez 5

$A \cup B$ – liczba jest podzielna przez 2 lub przez 5

$$P(A) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}, P(A \cap B) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5}$$

b) A – liczba jest podzielna przez 3, B – liczba jest podzielna przez 4,

$A \cup B$ – liczba jest podzielna przez 3 lub przez 4

$$P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}, P(A \cap B) = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{22}{45}$$

16. a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,35 + 0,47 = 0,82$

$$b) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,25 - 0,1 = 0,55$$

Rzut monetą

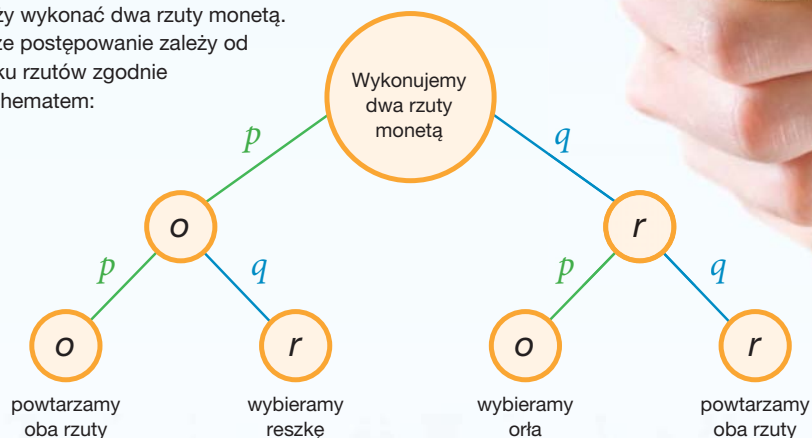
Rzut monetą to jeden z najbardziej znanych sposobów losowego podejmowania decyzji. Wykorzystuje się go w niektórych dyscyplinach sportu, na przykład aby rozstrzygnąć, która drużyna rozpocznie mecz.

Sprawiedliwa decyzja

Nawet jeśli podejrzewamy, że moneta nie jest symetryczna (prawdopodobieństwo wyrzucenia orła jest równe p , prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki jest równe q oraz $p \neq q$), możemy za jej pomocą podjąć sprawiedliwą decyzję.

Należy wykonać dwa rzuty monetą.

Dalsze postępowanie zależy od wyniku rzutów zgodnie ze schematem:



Nawet gdy moneta nie jest symetryczna, otrzymanie par orzeł–reszka oraz reszka–orzeł jest jednakowo prawdopodobne. Prawdopodobieństwo każdego z tych zdarzeń jest równe pq .

Rzut powinien być wykonany w taki sposób, aby moneta podczas lotu kilka razy się obróciła. Następnie, w zależności od zwyczaju, monetę można złapać w locie lub pozwolić jej upaść na ziemię.

Uczeń:

- przedstawia za pomocą tabeli rozkład zmiennej losowej,
- oblicza wartość oczekiwaną gry,
- rozstrzyga, czy gra jest sprawiedliwa.

1.11. Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Przykład 1

Rozpatrzmy grę polegającą na rzucie dwiema monetami. Jeśli wyrzucimy dwa orły, to wygrywamy 20 zł, jeśli jednego orła – wygrywamy 10 zł, a w przypadku, gdy wypadną dwie reszki – przegrywamy 40 zł. W tabeli podano możliwe wielkości wygranej w jednym rzucie w złotych: $x_1 = 20$, $x_2 = 10$ i $x_3 = -40$ (przegrana) oraz ich prawdopodobieństwa.

x_i	20	10	-40
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Przy omawianiu zagadnień takich jak w powyższym przykładzie będziemy używać pojęć *zmienna losowa* i *rozkład zmiennej losowej*.

Definicja

Zmienną losową nazywamy funkcję o wartościach rzeczywistych określoną na zbiorze zdarzeń elementarnych Ω .

Uwaga. Zmienne losowe zwyczajowo oznacza się dużymi literami, np. X , Y .

Przykład 2

Rzucamy raz kostką. Zmienna losowa X przyporządkowuje każdemu zdarzeniu elementarnemu kwadrat otrzymanej liczby oczek. Zmienna losowa X przyjmuje następujące wartości:

$$x_1 = X(1) = 1, x_2 = X(2) = 4, \dots, x_6 = X(6) = 36$$

Każda z tych wartości jest przyjmowana z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$.

Definicja

Zbiór par (x_i, p_i) , gdzie x_i jest wartością zmiennej losowej X , a p_i prawdopodobieństwem, z jakim zmienna losowa przyjmuje tę wartość, nazywamy **rozkładem zmiennej losowej**.

Rozkład zmiennej losowej zwykle wygodnie jest prezentować w tabeli. W tabeli obok przedstawiono rozkład zmiennej losowej z przykładu 2.

x_i	1	4	9	16	25	36
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ćwiczenie 1

Losujemy ze zwracaniem dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3\}$. Zmienna losowa X każdej parze liczb przyporządkowuje ich sumę. Uzupełnij w zeszytach tabelę przedstawiającą rozkład tej zmiennej.

x_i	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Ćwiczenie 2

Losujemy dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Zmienna losowa X każdej parze liczb przyporządkowuje ich sumę. Podaj rozkład zmiennej X , jeśli losujemy:

- a) ze zwracaniem, b) bez zwracania.

Definicja

Niech X będzie zmienną losową o wartościach $x_1, x_2, \dots, x_n$ przyjmowanych z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1, p_2, \dots, p_n$. **Wartością oczekiwaną** zmiennej X nazywamy liczbę:

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$$

Przykład 3

Rozpatrzmy grę polegającą na rzucie trzema monetami. Jeśli wyrzucimy same orły, to wygrywamy 100 zł, jeśli wyrzucimy same reszki, to wygrywamy 60 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 20 zł. W tabeli obok przedstawiono rozkład zmiennej losowej X opisującej tę grę.

x_i	100	60	-20
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{6}{8}$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej X (wartość oczekiwana gry):

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 100 \cdot \frac{1}{8} + 60 \cdot \frac{1}{8} - 20 \cdot \frac{6}{8} = \frac{40}{8} = 5 \text{ [zł]}$$

Wartość oczekiwana tej gry jest dodatnia, czyli gra jest korzystna dla gracza.

Ćwiczenie 3

Bierzemy udział w pewnej grze. Rzucamy kostką – jeśli wypadnie co najmniej 5 oczek, to wygrywamy x_1 zł, w przeciwnym wypadku przegrywamy x_2 zł.

- D** a) Uzasadnij, że jeśli $x_1 = 50$ i $x_2 = -40$, to wartość oczekiwana tej gry jest równa -10 zł (czyli gra jest dla nas niekorzystna).
b) Oblicz wartość oczekiwaną tej gry, jeśli wygrana $x_1 = 45$, a przegrana $x_2 = -15$.

Definicja

Grę nazywamy **sprawiedliwą**, jeśli jej wartość oczekiwana jest równa 0.

Ćwiczenie 2

a)

x_i	2	3	4	5	6	7	8
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

b)

x_i	3	4	5	6	7
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ćwiczenie 3

$$EX = x_1 \cdot \frac{2}{6} + x_2 \cdot \frac{4}{6} = x_1 \cdot \frac{1}{3} + x_2 \cdot \frac{2}{3}$$

- a) $EX = 50 \cdot \frac{1}{3} - 40 \cdot \frac{2}{3} = \frac{50}{3} - \frac{80}{3} = -\frac{30}{3} = -10 \text{ [zł]}$
b) $EX = 45 \cdot \frac{1}{3} - 15 \cdot \frac{2}{3} = \frac{45}{3} - \frac{30}{3} = 5 \text{ [zł]}$

Ćwiczenie 4

$$EX = x_1 \cdot \frac{1}{4} + x_2 \cdot \frac{2}{4} + x_3 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\text{a) } EX = 20 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \frac{2}{4} - 40 \cdot \frac{1}{4} = 5 + 5 - 10 = 0 \text{ [zł]}$$

$$\text{b) } 49 \cdot \frac{1}{4} + 49 \cdot \frac{2}{4} - x_3 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{1}{4}x_3 = \frac{3}{4} \cdot 49$$

$$x_3 = 147$$

Odpowiedzi do zadań

$$\text{1. a) } EX = 10 \cdot \frac{1}{2} + 120 \cdot \frac{1}{6} - 90 \cdot \frac{1}{3} = -5 \text{ [zł]}$$

$$\text{b) } 10 \cdot \frac{1}{2} + 120 \cdot \frac{1}{6} + x_3 \cdot \frac{1}{3} = 0, \text{ czyli } x_3 = -75 \text{ zł}$$

$$\text{2. } EX = x_1 \cdot \frac{15}{36} - 120 \cdot \frac{6}{36} - 60 \cdot \frac{15}{36}$$

$$\text{a) } EX = 180 \cdot \frac{15}{36} - 20 - 25 = 30 \text{ [zł]}$$

$$\text{b) } x_1 \cdot \frac{15}{36} - 45 = 0 \\ x_1 = 108$$

Ćwiczenie 4

Rzucamy dwiema monetami. Jeśli wypadną dwie reszki, to wygrywamy x_1 zł, jeśli wypadnie jedna reszka, to wygrywamy x_2 zł. Jeśli wypadną dwa orły, to przegrywamy x_3 zł.

D a) Uzasadnij, że jeśli $x_1 = 20$, $x_2 = 10$ i $x_3 = -40$, to gra jest sprawiedliwa.

b) Dla jakiej wartości x_3 gra jest sprawiedliwa, jeśli $x_1 = x_2 = 49$?

Zadania

1. Bierzemy udział w pewnej grze. Rzucamy kostką – jeśli wypadnie parzysta liczba oczek, to wygrywamy 10 zł, jeśli wypadnie 5 oczek, to wygrywamy 120 zł, a jeśli 1 oczko lub 3 oczka, to przegrywamy 90 zł.

a) Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

b) Jaka powinna być wysokość przegranej, aby gra była sprawiedliwa?

2. Rzucamy dwa razy kostką. Jeśli w drugim rzucie wypadnie więcej niż w pierwszym, to wygrywamy x_1 zł, jeśli tyle samo oczek, to przegrywamy 120 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 60 zł.

a) Oblicz wartość oczekiwaną tej gry, gdy $x_1 = 180$.

b) Dla jakiej wartości x_1 gra byłaby sprawiedliwa?

3. W pierwszej grze rzucamy trzema monetami i otrzymujemy $x = 24$ zł za każdego wyrzuconego orła. W drugiej grze rzucamy czterema monetami i otrzymujemy $y = 15$ zł za każdego wyrzuconego orła.

a) Wartość oczekiwana której gry jest większa?

b) Ile powinna być równa wygrana x , aby – bez zmiany wartości y w drugiej grze – wartości oczekiwane obu gier były równe?

Czy wiesz, że...

Zagadnieniem wartości oczekiwanej gry zajmował się holenderski matematyk, fizyk i astronom Christiaan Huygens [czyt. kristian hojchens] (1629–1695). W 1657 r. wydał pracę dotyczącą rachunku prawdopodobieństwa *De ratiociniis in ludo aleae* (*O wnioskowaniu w grach hazardowych*). Christiaan Huygens był członkiem Towarzystwa Królewskiego w Londynie i Akademii Nauk w Paryżu.



$$\text{3. a) } EX = 24 \cdot \frac{3}{8} + 48 \cdot \frac{3}{8} + 72 \cdot \frac{1}{8} = 36 \text{ [zł]}$$

$$EY = 15 \cdot \frac{4}{16} + 30 \cdot \frac{6}{16} + 45 \cdot \frac{4}{16} + 60 \cdot \frac{1}{16} = 30 \text{ [zł]}$$

$$EX > EY$$

$$\text{b) } x \cdot \frac{3}{8} + 2x \cdot \frac{3}{8} + 3x \cdot \frac{1}{8} = 30$$

$$x = 20 \text{ zł}$$

4. Romek i Tomek grają w grę losową polegającą na rzucie n monetami. Jeśli wypadną same orły, to Romek daje Tomkowi 21 żetonów. W przeciwnym wypadku Tomek daje Romkowi x żetonów. Ile powinno wynosić x , aby ta gra była sprawiedliwa, jeśli: a) $n = 2$, b) $n = 3$?

5. Rzucamy pewną liczbą monet. Jeśli w rzucie wypadło n orłów i k reszek, to wygrana (lub przegrana) jest równa $(2^n - 3k)$ zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry, jeśli rzucamy:

- a) czterema monetami, b) pięcioma monetami.

-  6. W tabeli podano prawdopodobieństwa trafienia trójki, czwórki, piątki i szóstki w grze liczbowej, w której skreślamy 6 spośród 49 liczb.

trójka	około 0,017 650 404
czwórka	około 0,000 968 620
piątka	około 0,000 018 450
szóstka	około 0,000 000 072

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

a) Przyjmijmy, że wygrywamy jedynie wtedy, gdy trafimy szóstkę, i że cena jednego zakładu jest równa 1 zł. Jaka powinna być wysokość wygranej, aby była to gra sprawiedliwa?

b) Przyjmijmy, że jeśli trafimy trójkę, wygramy 10 zł, czwórkę – 100 zł, piątkę – 1000 zł, i że cena jednego zakładu jest równa 1 zł. Jaka powinna być wysokość wygranej w przypadku trafienia szóstki, aby gra była sprawiedliwa?

c) Przyjmijmy, że jeśli trafimy trójkę, wygramy 100 zł, czwórkę – 1000 zł, piątkę – 10 000 zł, a szóstkę – 10 000 000 zł. Jaka powinna być cena jednego zakładu, aby gra była sprawiedliwa?

Powtórzenie

7. W tabeli obok przedstawiono rozkład pewnej zmiennej losowej. Wyznacz x , jeśli wartość oczekiwana tej zmiennej jest równa:

x_i	20	30	x	-60
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- a) 0, b) 10, c) -10.

8. Romek i Tomek grają w grę losową polegającą na rzucie kostką. Jeśli wypadnie co najmniej n oczek, to Romek daje Tomkowi 10 żetonów. W przeciwnym wypadku Tomek daje Romkowi x żetonów. Oblicz x , jeśli wiadomo, że gra jest sprawiedliwa oraz: a) $n = 6$, b) $n = 5$.

6. a) $x_1 \cdot 0,000\,000\,072 - 1 \cdot 0,999\,999\,928 = 0$, czyli $x_1 \approx 13\,888\,889$ zł
b) $10 \cdot 0,017\,650\,404 + 100 \cdot 0,000\,968\,620 + 1000 \cdot 0,000\,018\,450 + x \cdot 0,000\,000\,072 - 1 \cdot 0,981\,361\,806 = 0$, czyli $x \approx 9\,835\,888$ zł
c) $100 \cdot 0,017\,650\,404 + 1000 \cdot 0,000\,968\,620 + 10\,000 \cdot 0,000\,018\,450 + 10\,000\,000 \cdot 0,000\,000\,072 - c \cdot 0,981\,361\,806 = 0$, czyli $c \approx 3,64$ zł

7. $EX = 20 \cdot \frac{1}{2} + 30 \cdot \frac{1}{6} + x \cdot \frac{1}{6} - 60 \cdot \frac{1}{6} = \frac{x}{6} + 5$

- a) $\frac{x}{6} + 5 = 0$, czyli $x = -30$
b) $\frac{x}{6} + 5 = 10$, czyli $x = 30$
c) $\frac{x}{6} + 5 = -10$, czyli $x = -90$

8. a) $10 \cdot \frac{1}{6} - x \cdot \frac{5}{6} = 0$, czyli $x = 2$
b) $10 \cdot \frac{1}{3} - x \cdot \frac{2}{3} = 0$, czyli $x = 5$

4. a) $21 \cdot \frac{1}{4} - x \cdot \frac{3}{4} = 0$, czyli $x = 7$
b) $21 \cdot \frac{1}{8} - x \cdot \frac{7}{8} = 0$, czyli $x = 3$

5. a) $(2^0 - 3 \cdot 4) \cdot \frac{1}{16} + (2^1 - 3 \cdot 3) \cdot \frac{4}{16} + (2^2 - 3 \cdot 2) \cdot \frac{6}{16} + (2^3 - 3 \cdot 1) \cdot \frac{4}{16} + (2^4 - 3 \cdot 0) \cdot \frac{1}{16} = -\frac{15}{16}$ [zł]
b) $(2^0 - 3 \cdot 5) \cdot \frac{1}{32} + (2^1 - 3 \cdot 4) \cdot \frac{5}{32} + (2^2 - 3 \cdot 3) \cdot \frac{10}{32} + (2^3 - 3 \cdot 2) \cdot \frac{10}{32} + (2^4 - 3 \cdot 1) \cdot \frac{5}{32} + (2^5 - 3 \cdot 0) \cdot \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$ [zł]

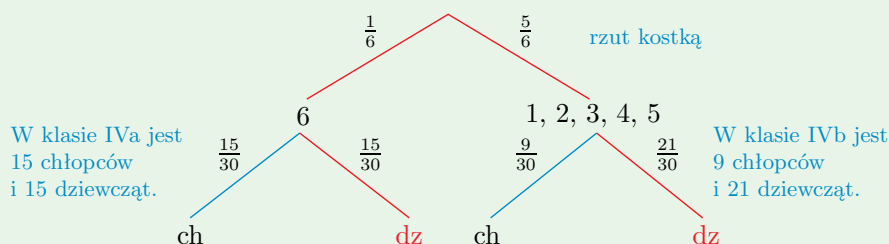
1.12. Zagadnienia uzupełniające

■ Doświadczenia wieloetapowe

Przykład 1

W klasie IVa jest 15 chłopców i 15 dziewcząt, w klasie IVb jest 9 chłopców i 21 dziewcząt. Rzucamy kostką: jeśli wypadnie szóstka, to losujemy jedną osobę z klasy IVa, w przeciwnym razie losujemy jedną osobę z klasy IVb. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowaną osobą będzie dziewczyna.

Przedstawiamy na drzewie ilustrację tego doświadczenia.



Zdarzeniu A polegającemu na wylosowaniu dziewczyny sprzyja wyrzucenie 6 oczek i wylosowanie dziewczyny z klasy IVa oraz wyrzucenie liczby oczek mniejszej od 6 i wylosowanie dziewczyny z klasy IVb. Zatem:

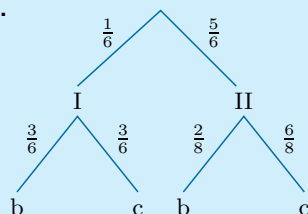
$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{30} + \frac{5}{6} \cdot \frac{21}{30} = \frac{1}{12} + \frac{7}{12} = \frac{2}{3}$$

Odpowiedzi do zadań

1. A – bilet otrzyma dziewczyna

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{30} = \frac{7}{15}$$

2.



A – wylosowano kulę czarną

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{8} = \frac{17}{24}$$

3. A – wylosowano kulę białą

$$P(A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{13}{36}$$

- Jedna z osób uczących się w klasie IVa lub IVb ma otrzymać darmowy bilet do cyrku. W klasie IVa jest 20 chłopców i 10 dziewcząt, w klasie IVb – 12 chłopców i 18 dziewcząt. Rzucamy monetą: jeśli wypadnie orzeł, to losujemy osobę z klasy IVa, jeśli reszka – to z IVb. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że bilet otrzyma dziewczyna.
- Mamy dwie urny z kulami: w pierwszej są 3 kule białe i 3 czarne, w drugiej – 2 białe i 6 czarnych. Rzucamy kostką: jeśli wypadnie jedno oczko, to losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie – z drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.
- Mamy dwie urny z kulami: w pierwszej są 2 kule białe, 2 czarne i 2 zielone, w drugiej – 3 białe, 4 czarne i 1 zielona. Rzucamy kostką: jeśli liczba oczek jest podzielna przez 3, to losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie – z drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

Multiteka

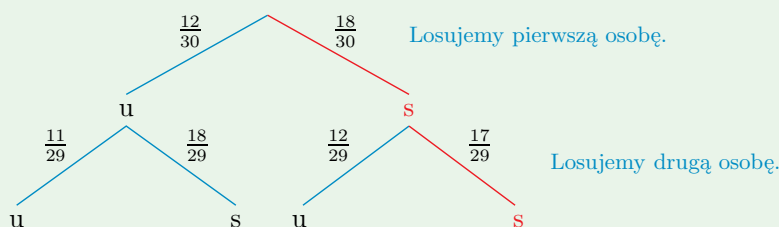
• Drzewo prawdopodobieństwa

4. Mamy dwie urny z kulami: w pierwszej są 4 kule białe i 6 niebieskich, w drugiej – 3 białe, 5 żółtych i 2 niebieskie. Rzucamy monetą: jeśli wypadnie orzeł, to losujemy kulę z pierwszej urny, jeśli reszka – to z drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli:
- a) białej, b) żółtej, c) niebieskiej.

Przykład 2

Wśród 30 uczestników wycieczki jest 12 uczniów i 18 studentów. Biuro turystyczne postanowiło zwrócić połowę kosztów wycieczki dwóm losowo wybranym osobom. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zwrot otrzyma przynajmniej jeden uczeń.

Przebieg losowania ilustrujemy za pomocą drzewa.



Niech zdarzenie A oznacza, że wśród wylosowanych dwóch osób jest przynajmniej jeden uczeń. Rozpatrzmy zdarzenie A' – wśród wylosowanych nie ma ani jednego ucznia (na drzewie oznaczone kolorem czerwonym):

$$P(A') = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{51}{145}.$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{51}{145} = \frac{94}{145} \approx 0,65$$

5. W pewnej firmie pracuje 36 mężczyzn i 12 kobiet. W ramach nagrody postanowiono ufundować wycieczkę do Świnoujścia dwóm losowo wybranym pracownikom. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wycieczkę wygra co najmniej jedna kobieta.

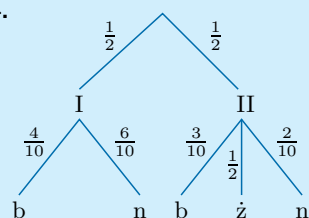


6. Mamy trzy urny z kulami: w urnie U_1 są 3 kule białe, w urnie U_2 – 3 kule czarne, a w urnie U_3 – 3 białe i 1 czarna. Rzucamy dwa razy monetą: jeśli wypadną dwa orły, to losujemy kulę z urny U_1 , jeśli dwie reszki – to z urny U_2 . W pozostałych przypadkach losujemy kulę z urny U_3 . Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.

6. A – wylosowano kulę czarną

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

4.



- a) A – wylosowano kulę białą

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{20}$$

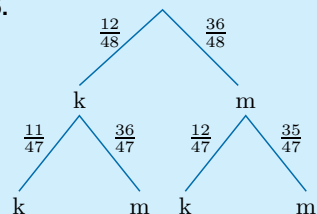
- b) B – wylosowano kulę żółtą

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- c) C – wylosowano kulę niebieską

$$P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{5}$$

5.



- A – wycieczkę wygra co najmniej jedna kobieta

- A' – ani jedna kobieta nie wygra wycieczki

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{36}{48} \cdot \frac{35}{47} = 1 - \frac{105}{188} = \frac{83}{188}$$

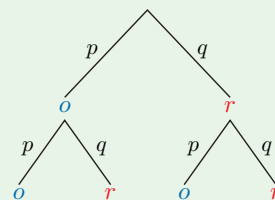
Przykład 3

Dla pewnej niesymetrycznej monety prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi p , a prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki – q . Oblicz p i q , jeśli prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wyrzuceniu co najmniej jednej reszki przy dwukrotnym rzucie tą monetą jest równe $\frac{8}{9}$.

Rozpatrzmy zdarzenie A' polegające na wyrzuceniu dwóch orłów. Mamy $P(A') = p^2$ oraz:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

Zatem $p^2 = \frac{1}{9}$ i stąd $p = \frac{1}{3}$ oraz $q = \frac{2}{3}$.



7. a) A – zdarzenie polegające na wyrzuceniu orła w pierwszym rzucie i reszki w drugim
 B – zdarzenie polegające na wyrzuceniu reszki w pierwszym rzucie i orła w drugim
 $P(A) = p \cdot q$, $P(B) = q \cdot p$
 Zatem $P(A) = P(B)$.

b) B – otrzymano co najmniej jednego orła

B' – otrzymano trzy reszki

$$P(B') = 1 - P(B)$$

$$q^3 = 1 - \frac{37}{64}$$

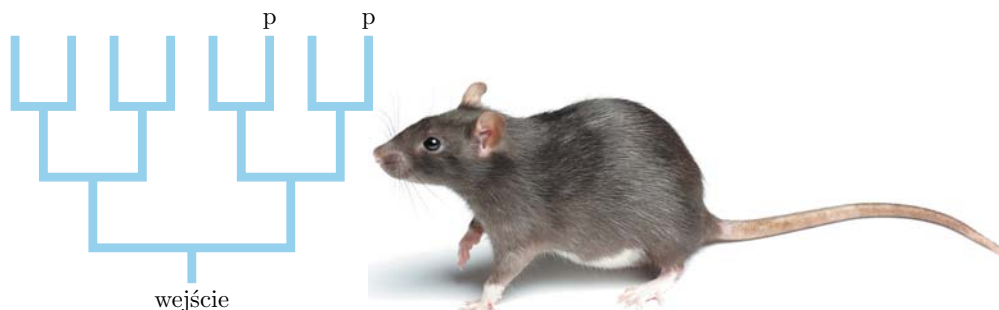
$$q = \frac{3}{4}, \text{ czyli } p = 1 - q = \frac{1}{4}$$

7. Dla pewnej niesymetrycznej monety prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi p , a prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki – q .

D a) Rzucamy dwukrotnie tą monetą. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w pierwszym rzucie i reszki w drugim rzucie jest takie samo jak prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki w pierwszym rzucie i orła w drugim rzucie.

b) Rzucamy trzykrotnie tą monetą. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej jednego orła jest równe $\frac{37}{64}$. Oblicz p i q .

8. a) Pewien szczur wpuszczony do labiryntu na rozwidleniu dróg dwa razy częściej skręca w lewo niż w prawo. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że szczur dotrze do pokarmu (oznaczonego na rysunku literą p).



b) Inny szczur wpuszczony do tego samego labiryntu na rozwidleniu dróg skręca w prawo w $x\%$ przypadków. Oblicz x , jeśli prawdopodobieństwo tego, że szczur dotrze do pokarmu, jest równe $\frac{9}{16}$.

8. A – szczur dotrze do pokarmu

a) Prawdopodobieństwo skrótu w lewo jest równe $\frac{2}{3}$, a w prawo $\frac{1}{3}$.

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

b) Prawdopodobieństwo skrótu w prawo jest równe $\frac{x}{100}$, a w lewo $\frac{100-x}{100}$.

$$P(A) = \frac{x}{100} \cdot \frac{100-x}{100} \cdot \frac{x}{100} + \left(\frac{x}{100}\right)^3 = \left(\frac{x}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{100-x}{100} + \frac{x}{100}\right) = \left(\frac{x}{100}\right)^2$$

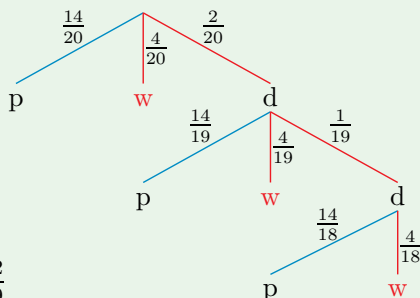
$$\left(\frac{x}{100}\right)^2 = \frac{9}{16}, \text{ czyli } x = 75$$

Przykład 4

Na loterii jest 20 losów, w tym 4 wygrywające (oznaczone literą w) i 2 uprawniające do dalszego losowania (oznaczone literą d). Pozostałe losy są przegrywające (oznaczone literą p). Zakupiono jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej.

Na drzewie przedstawiamy ilustrację możliwych wyników. Niech A oznacza zdarzenie polegające na kupieniu losu wygrywającego. Wówczas:

$$P(A) = \frac{4}{20} + \frac{2}{20} \cdot \frac{4}{19} + \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

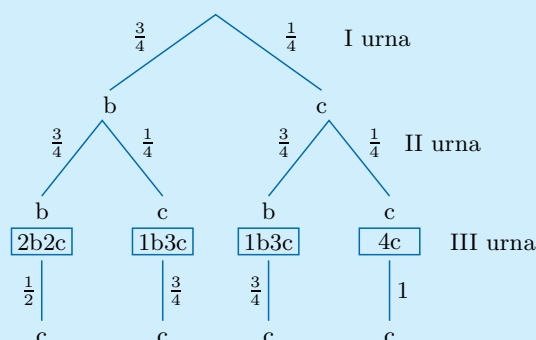


9. Wśród 20 losów loterii fantowej są 4 losy uprawniające do odebrania jednej z nagród (jest 1 nagroda główna i są 3 nagrody pocieszenia) oraz 2 losy uprawniające do dalszego losowania. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania nagrody pocieszenia, jeśli kupimy 1 los.
10. W pewnej klasie jest 10 chłopców i 20 dziewcząt. Liczba biletów do kina, które będą rozlosowane w tej klasie, jest równa liczbie orłów otrzymanych w rzucie dwiema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że bilet otrzyma przynajmniej jeden chłopiec.
11. W dwóch urnach są po 3 kule białe i po 1 kuli czarnej, a trzecia zawiera n kul czarnych. Z pierwszych dwóch urn losujemy po jednej kuli i wkładamy je do trzeciej urny. Następnie losujemy z tej urny jedną kulę.
 - a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kula wylosowana z trzeciej urny będzie czarna, jeśli $n = 2$.
 - b) Dla jakiego n wyciągnięcie z trzeciej urny czarnej kuli i wyciągnięcie z trzeciej urny białej kuli są zdarzeniami jednakowo prawdopodobnymi?
12. Rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie orzeł, rzucamy kostką symetryczną. W przeciwnym razie rzucamy kostką niesymetryczną. Rozkład prawdopodobieństwa wyników rzutu tą kostką podano w tabeli.

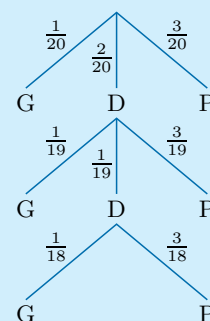
Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Prawdopodobieństwo	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby oczek.

11. a) $P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{5}{8}$
- b) B – wyciągnięcie białej kuli z trzeciej urny
 C – wyciągnięcie czarnej kuli z trzeciej urny
 $P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{2+n} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2+n} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2+n} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{0}{2+n} = \frac{3}{2(2+n)}$
 $P(C) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{n}{2+n} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1+n}{2+n} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1+n}{2+n} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{2n+1}{2(2+n)}$
 $\frac{3}{2(2+n)} = \frac{2n+1}{2(2+n)}$, czyli $n = 1$



9. A – wygranie nagrody pocieszenia



$$P(A) = \frac{3}{20} + \frac{2}{20} \cdot \frac{3}{19} + \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{3}{18} = \frac{171+18+1}{10 \cdot 19 \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

10. A – bilet otrzyma przynajmniej jeden chłopiec
 A' – biletu nie otrzyma ani jeden chłopiec

$$P(A') = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{20}{30} + \frac{1}{4} \cdot \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} = \frac{241}{348} \approx 0,6925$$

$$P(A) = 1 - P(A') = \frac{107}{348} \approx 0,3075$$

12. $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} \right) = \frac{7}{16}$



Zestawy powtórzeniowe

Odpowiedzi do zadań

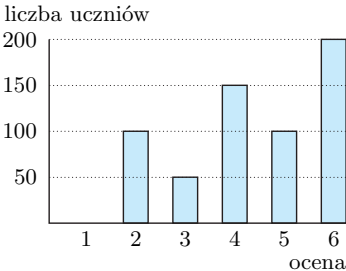
1. a) $5! = 120$
b) $6! = 720$
c) $8! = 40\,320$
2. a) $1 \cdot 7! = 5040$
b) $2! \cdot 6! = 1440$
c) KMKMM
KMMKM
KMMMM
MKMKM
MKMMK
MMKMK
 $6 \cdot 2! \cdot 3! = 72$
3. a) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
b) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
4. a) $3^4 = 81$
b) $4^3 \cdot 2 = 128$
5. Liczby parzyste:
 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 +$
 $+ 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 60$
(do liczb z 0 na końcu dodano
liczby z 2 lub 4 na końcu).
Liczby nieparzyste:
 $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 36$
7. W trzech szufladach: $3^4 = 81$
W pięciu szufladach: $5^4 = 625$
8. Numery od 45: $10^5 = 100\,000$
Numery od 345: $10^4 = 10\,000$
9. $A = \{(r, r, o), (r, o, r),$
 $(o, r, r), (r, r, r)\}$
 $B = \{(r, r, o), (r, o, r),$
 $(o, r, r), (r, o, o), (o, r, o),$
 $(o, o, r), (o, o, o)\}$
 $C = \{(r, r, r)\}$
a) Nie, bo $A \cap B \neq \emptyset$
b) Tak, bo $C = B'$
c) Tak, bo $A \cup B = \Omega$

Zestaw I

1. Na ile sposobów można ustawić w kolejce:
a) 5 osób, b) 6 osób, c) 8 osób?
2. Na ile sposobów można ustawić w kolejce:
a) 1 kobietę i 7 mężczyzn tak, aby kobieta stała na początku kolejki,
b) 2 kobiety i 6 mężczyzn tak, aby kobiety stały na początku kolejki,
c) 2 kobiety i 3 mężczyzn tak, aby kobiety nie stały obok siebie?
3. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 2, 3, 8, 9 oraz:
a) żadna cyfra się nie powtarza, b) cyfry mogą się powtarzać?
4. Ile jest liczb czterocyfrowych:
a) w których zapisie mogą wystąpić tylko cyfry 5, 6 i 7,
b) nieparzystych, w których zapisie mogą wystąpić tylko cyfry 4, 5, 6 i 7?
5. Ile jest liczb pięciocyfrowych parzystych o różnych cyfrach, jeśli w zapisie tych liczb użyto tylko cyfr 0, 1, 2, 3 i 4? Ile jest takich liczb nieparzystych?
6. Ile jest liczb czterocyfrowych nieparzystych, w których zapisie:
a) występują tylko cyfry 4 i 5,
b) występuje dokładnie jedna cyfra 4 i dokładnie jedna cyfra 5?
7. Na ile sposobów cztery kule o numerach 1, 2, 3 i 4 można rozmieścić w trzech rozróżnialnych szufladach, a na ile – w pięciu?
8. Ile jest siedmiocyfrowych numerów telefonicznych zaczynających się od 45, a ile – zaczynających się od 345?
9. Rzucamy trzy razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
 A – wypadły co najmniej dwie reszki,
 B – wypadły co najwyżej dwie reszki,
 C – wypadły trzy reszki.
a) Czy zdarzenia A i B się wykluczają?
b) Czy zdarzenia B i C są zdarzeniami przeciwnymi?
c) Czy zdarzenie $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym?

6. a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8$
b) Cyfrą jedności jest 5:
– cyfrą tysięcy jest 4: $1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1 = 64$,
– cyfrą tysięcy jest jedna z 7 cyfr (bez 0, 4 i 5) cyfrą setek lub dziesiątek jest cyfra 4, pozostałą cyfrę wybieramy na 8 sposobów: $7 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 1 = 112$.
Cyfrą jedności jest 1, 3, 7 lub 9:
– cyfry 4 i 5 zajmują miejsce tysięcy i jedno z miejsc setek lub dziesiątek, ostatnią cyfrę wybieramy na 8 sposobów: $2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 4 = 128$,
– cyfrą tysięcy jest jedna z 7 cyfr (bez 0, 4 i 5) cyfra setek i dziesiątek jest permutacją cyfr 4 i 5: $7 \cdot 2! \cdot 4 = 56$.
Ostatecznie: $64 + 112 + 128 + 56 = 360$.



10. Rzucamy cztery razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
 A – orzeł wypadł co najwyżej raz,
 B – orzeł wypadł nie więcej razy niż reszka.
 Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń A , B , $A \setminus B$, $B \setminus A$.
11. W urnie jest osiem kul ponumerowanych od 1 do 8. Losujemy siedem razy po jednej kuli bez zwracania. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę siedmiocyfrową.
- Ile jest takich liczb?
 - Ile jest takich liczb podzielnych przez 6?
12. Pewna pani ma cztery kapelusze: biały, zielony, czerwony i niebieski, pięć torebek: białą, zieloną, czerwoną, brązową i czarną oraz trzy szale: biały, zielony i czarny. Na ile sposobów ta pani może wybrać zestaw: kapelusz, torebka i szal tak, aby wszystkie trzy elementy zestawu nie były tego samego koloru?
13. W pewnej szkole zebrano dane dotyczące ocen semestralnych z wychowania fizycznego i przedstawiono je na diagramie słupkowym. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń otrzymał z tego przedmiotu:
- 
- ocenę celującą,
 - ocenę wyższą niż dostateczną.
14. Autobusem, który zatrzyma się jeszcze na 10 przystankach, jedzie 6 pasażerów. Pasażerowie opuszczają autobus na losowo wybranych przystankach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- każdy z nich wysiadzie na innym przystanku,
 - wszyscy wysiadą na tym samym przystanku.
15. Rzucamy dwa razy kostką, której dwie ścianki są zielone, a cztery czerwone. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia:
- co najmniej raz ścianki zielonej,
 - co najwyżej raz ścianki czerwonej.
16. Drużyna koszykówki składa się z pięciu zawodników, w tym kapitana drużyny. Do kontroli antydopingowej wybiera się losowo dwóch zawodników. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kapitan drużyny nie zostanie poddany kontroli. Ile wynosiłoby to prawdopodobieństwo, gdyby kontrolowanych było trzech zawodników?

15. a) A – wyrzucono co najmniej raz ściankę zieloną
 A' – wyrzucono dwa razy ściankę czerwoną
 $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{16}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$
- b) B – wyrzucono co najwyżej raz ściankę czerwoną
 B' – wyrzucono dwa razy ściankę czerwoną
 $P(B') = P(A')$, $P(B) = P(A) = \frac{5}{9}$
16. Losowanie dwóch zawodników: $\overline{\Omega} = 5 \cdot 4 = 20$ oraz $\overline{A} = 4 \cdot 3 = 12$
 $P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$
- Losowanie trzech zawodników: $\overline{\Omega} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ oraz $\overline{B} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
 $P(B) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

10. $A = \{(o, r, r, r), (r, o, r, r), (r, r, o, r), (r, r, r, o), (r, r, r, r)\}$
 $B = \{(o, o, r, r), (o, r, o, r), (o, r, r, o), (r, o, o, r), (r, o, r, o), (r, r, o, o), (o, r, r, r), (r, o, r, r), (r, r, o, r), (r, r, r, o), (r, r, r, r)\}$
 $\overline{\Omega} = 2^4 = 16$
 $P(A) = \frac{5}{16}$, $P(B) = \frac{11}{16}$,
 $P(A \setminus B) = 0$,
 $P(B \setminus A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$
11. a) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40\,320$
 b) Szukana liczba jest parzysta, a suma jej cyfr jest podzielna przez 3.
 $1 + 2 + 3 + \dots + 8 = 36$,
 co oznacza, że w urnie musi pozostać kula z numerem 3 lub 6.
 W urnie pozostała kula z numerem 3: $4 \cdot 6! = 2880$.
 Cyfra jedności jest parzysta (2, 4, 6 lub 8), pozostałe miejsca to permutacja 6 cyfr.
 W urnie pozostała kula z numerem 6: $3 \cdot 6! = 2160$.
 Cyfra jedności jest parzysta (2, 4 lub 8), pozostałe miejsca to permutacja 6 cyfr.
 $2880 + 2160 = 5040$
12. A – wszystkie elementy są różnego koloru
 A' – wszystkie elementy są tego samego koloru
 $\overline{\Omega} = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$
 $\overline{A'} = 2$, stąd $\overline{A} = 58$
13. $\overline{\Omega} = 600$
 a) $P(A) = \frac{200}{600} = \frac{1}{3}$
 b) $P(B) = \frac{450}{600} = \frac{3}{4}$
14. $\overline{\Omega} = 10^6$
 a) $\overline{A} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$
 $P(A) = 0,1512$
 b) $\overline{B} = 10$, $P(B) = 10^{-5}$



1. $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$
 $B = \{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\}$

$$\overline{\Omega} = 6^2 = 36$$

$$P(A) = \frac{5}{36},$$

$$P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},$$

$$P(A') = \frac{31}{36}, P(B') = \frac{8}{9},$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(B \cup A) = \frac{7}{36}$$

2. $\overline{\Omega} = 6^2 = 36$

- a) $A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$,
czyli $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

- b) Przynajmniej jedna z liczb musi być parzysta,
 $\overline{B} = 27$, czyli $P(B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.

- c) $C = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$,
czyli $P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

- d) $D = \{(3, 1), (6, 2)\}$,
czyli $P(D) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

3. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$

4. $\overline{\Omega} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$

- a) A – liczba nie dzieli się przez 10

- A' – liczba dzieli się przez 10

$$\overline{A'} = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6, \text{ czyli}$$

$$P(A') = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Zatem } P(A) = 1 - P(A') = \frac{2}{3}.$$

$$\text{b) } \frac{11}{18}$$

6. $\overline{\Omega} = 15 + 9 = 24$

$$\text{a) } \overline{A} = 7 + 4 = 11, P(A) = \frac{11}{24}$$

$$\text{b) } \overline{B} = 8 + 5 = 13, P(B) = \frac{13}{24}$$

$$\text{c) } \overline{C} = 5 + 3 = 8, P(C) = \frac{1}{3}$$

■ Zestaw II

1. Rzucamy dwa razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom: A – suma oczek jest równa 8, B – iloczyn oczek jest równy 12. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń A , B , A' , B' , $A \cap B$ oraz $A \cup B$.

2. Rzucamy dwa razy kostką. Niech x oznacza liczbę oczek uzyskanych w pierwszym rzucie, a y – liczbę oczek uzyskanych w drugim rzucie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) suma $x + y$ jest liczbą większą od 10, c) iloraz $\frac{y}{x}$ jest równy 2,
b) iloczyn $x \cdot y$ jest liczbą parzystą, d) iloraz $\frac{y}{x}$ jest równy 3.

3. Spośród wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie użyto tylko cyfr 2, 3, 5 i 6, losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba:

- a) nie dzieli się przez 5,
b) jest nieparzysta lub dzieli się przez 5,
c) jest parzysta lub dzieli się przez 5.

4. Spośród wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie użyto tylko cyfr 0, 1 i 2, losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba:

- a) nie dzieli się przez 10, b) jest nieparzysta lub większa od 200.

5. Łucznik, strzelając do tarczy, uzyskuje co najmniej 10 punktów z prawdopodobieństwem 0,4, a co najwyżej 10 punktów z prawdopodobieństwem 0,8. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że łucznik uzyska dokładnie 10 punktów.

6. W urnie jest 15 kul żółtych ponumerowanych od 1 do 15 oraz 9 kul zielonych ponumerowanych od 1 do 9. Losujemy 1 kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to kula o numerze:

- a) parzystym, b) nieparzystym, c) podzielnym przez 3.

7. W urnie jest 5 kul białych, 5 zielonych i 5 czarnych. Kule każdego koloru zostały ponumerowane od 1 do 5. Losujemy 1 kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to:

- a) kula biała lub czarna, mająca numer nieparzysty,
b) kula zielona lub kula o numerze parzystym.

5. Zdobyć co najmniej 10 punktów: $P(A) = 0,4$,
zdobyć co najwyżej 10 punktów: $P(B) = 0,8$,
zdobyć co najmniej lub co najwyżej 10 punktów: $P(A \cup B) = 1$,
zdobyć dokładnie 10 punktów: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,2$.

7. a) $P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

- b) Kula zielona: $P(A) = \frac{5}{15}$,

$$\text{kula o numerze parzystym: } P(B) = \frac{6}{15},$$

$$\text{kula zielona o numerze parzystym: } P(A \cap B) = \frac{2}{15},$$

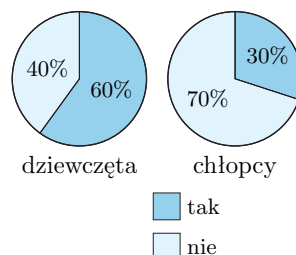
$$\text{kula zielona lub o kula numerze parzystym:}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$



8. Na pewnej loterii jest 100 losów, w tym 10 wygrywających 20 zł, 5 wygrywających 40 zł oraz 5 wygrywających 60 zł. W pierwszym losowaniu wyciągnęliśmy los wygrywający 60 zł. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia w drugim losowaniu takiego losu, że z obu losowań razem uzyskamy wygraną nie mniejszą niż 100 zł.

9. W pewnej klasie jest 15 dziewcząt i 10 chłopców. Uczniom tej klasy zadano pytanie: „Czy lubisz matematykę?”. Na diagramach przedstawiono wyniki ankiety. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba z tej klasy:



- a) jest dziewczyną i lubi matematykę,
b) nie lubi matematyki.

10. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cup B)$, jeśli:

- a) $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ i $P(A \cap B) = 0,2$,
b) $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ i $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym.

11. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cap B)$, jeśli:

- a) $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,8$ i $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym,
b) $P(A') = \frac{2}{3}$, $P(B') = \frac{1}{6}$ i $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

12. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \setminus B)$, jeśli:

- a) $P(A) = 0,9$ i $P(A \cap B) = 0,5$, b) $P(B) = \frac{1}{2}$ i $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$.

13. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej, której rozkład podano w tabeli.

a)

x_i	30	20	-40	-60
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

b)

x_i	36	28	-48
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$

14. Podczas gry rzucamy trzema monetami. Jeśli wypadną same orły, to wygrywamy 80 zł, jeśli wypadną dokładnie dwa orły, to wygrywamy x zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 50 zł. Wyznacz x tak, aby gra była sprawiedliwa.

15. Podczas gry rzucamy dwiema kostkami. Jeśli na obu kostkach wypadnie parzysta liczba oczek, to wygrywamy 16 zł. Jeśli suma wyrzuconych oczek będzie nieparzysta, to wygrywamy 24 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 60 zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

8. W drugim losowaniu zostało 99 losów, w tym 5 wygrywających 40 zł i 4 wygrywające 60 zł.

$$\frac{5}{99} + \frac{4}{99} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

9. a) Dziewczeta lubiące matematykę: $\overline{A} = 0,6 \cdot 15 = 9$, czyli $P(A) = \frac{9}{25}$.

b) Osoby nie lubiące matematyki:

$$\overline{B} = 0,4 \cdot 15 + 0,7 \cdot 10 = 13, \text{ czyli } P(A) = \frac{13}{25}.$$

14. $80 \cdot \frac{1}{8} + x \cdot \frac{3}{8} - 50 \cdot \frac{4}{8} = 0$, czyli $x = 40$

15. $16 \cdot \frac{9}{36} + 24 \cdot \frac{18}{36} - 60 \cdot \frac{9}{36} = 1$ [zł]

10. a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,4 - 0,2 = 0,5$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

11. a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $A \cup B = \Omega$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,7 + 0,8 - 1 = 0,5$$

b) $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

12. a) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, czyli $P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(B)$.
Zatem $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(B) = \frac{1}{4}$.

13. a) $30 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{1}{4} - 40 \cdot \frac{1}{8} - 60 \cdot \frac{1}{8} = 7,5$

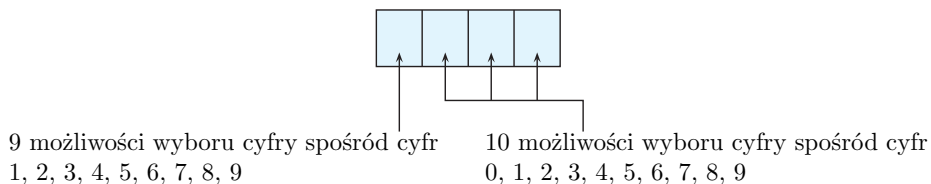
b) $36 \cdot \frac{1}{3} + 28 \cdot \frac{1}{4} - 48 \cdot \frac{5}{12} = -1$

**Przykład**

Losujemy jedną liczbę spośród wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba będzie nieparzysta i w jej zapisie dokładnie dwa razy wystąpi cyfra 4 i jeden raz cyfra 5.

Oznaczmy przez Ω zbiór zdarzeń elementarnych polegających na wylosowaniu liczby naturalnej czterocyfrowej.

Aby obliczyć moc zbioru Ω , rozpatrzmy następujący diagram.



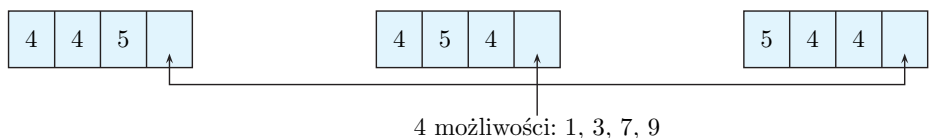
Zatem korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy:

$$\overline{\Omega} = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$$

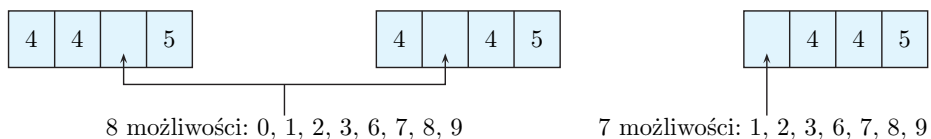
Niech A oznacza wylosowanie czterocyfrowej liczby nieparzystej, w której zapisie występują dwie cyfry 4 i jedna cyfra 5.

Zauważmy, że liczba jest nieparzysta, gdy jej ostatnia cyfra jest jedną spośród cyfr 1, 3, 5, 7, 9.

Rozpatrzmy sytuacje, gdy dwie cyfry 4 i jedna cyfra 5 występują na pierwszych trzech pozycjach. Oto możliwe przypadki:



Jeśli cyfra 5 znajduje się na ostatniej pozycji, to mamy następujące przypadki:



Korzystamy z reguły mnożenia oraz reguły dodawania i otrzymujemy:

$$\overline{A} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 7 = 35$$

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{35}{9000} = \frac{7}{1800}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo podanego zdarzenia jest równe $\frac{7}{1800}$.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

- Liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie mogą wystąpić jedynie cyfry 2 i 3, jest:
A. $7 \cdot 8^2$, B. 58, C. 1000, **D. 1024.**
- Liczb pięciocyfrowych, w których zapisie pierwsza i ostatnia cyfra są takie same, jest:
A. 10^4 , **B. $9 \cdot 10^3$,** C. $9^2 \cdot 10^2$, D. $9^2 \cdot 10^3$.
- Rozpatrzmy czterocyfrowe kody, w których cyfry się nie powtarzają. Ile jest takich kodów, jeśli występują w nich jedynie cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6?
A. 360 B. 720 C. 6^4 D. 4^6
- Z cyfr 1, 2, 3 i 4 utworzono takie czterocyfrowe kody, że suma pierwszych dwóch cyfr jest parzysta, a suma ostatnich dwóch jest nieparzysta (cyfry mogą się powtarzać). Takich kodów jest:
A. 2^4 , B. 2^5 , C. 3^4 , **D. 4^3 .**
- Rzucamy trzykrotnie monetą. Zdarzenie A polega na wyrzuceniu nieparzystej liczby orłów, a zdarzenie B – na wyrzuceniu większej liczby orłów niż reszek. Wtedy:
A. $P(A) > P(B)$, **C. $P(A) \leq P(A')$,**
B. $P(A) < P(B)$, **D. $P(B) > P(B')$.**
- Rzucamy dwukrotnie kostką. Zdarzenie A polega na tym, że iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą. Wtedy:
A. $P(A) = \frac{1}{2}$, B. $P(A) = \frac{1}{4}$, C. $P(A') = \frac{1}{2}$, **D. $P(A') = \frac{1}{4}$.**
- Niech $A, B \subset \Omega$. Jeśli $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ oraz $A \subset B$, to:
A. $P(A \cap B) = 0$, C. $P(A \cup B) = \frac{1}{12}$,
B. $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$, **D. $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$.**
- Rzucamy dwa razy kostką, na której ściankach znajdują się następujące liczby oczek: 1, 2, 3, 4, 6, 6. Prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek jest większa od 10, jest równe:
A. $\frac{1}{4}$, B. $\frac{1}{6}$, **C. $\frac{1}{9}$,** D. $\frac{1}{12}$.
- Przestawiamy w sposób losowy cyfry liczby 24689. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że cyfra 4 zostanie na swoim miejscu?
A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{4}$

Odpowiedzi do zadań

- $2^{10} = 1024$
- $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 9 \cdot 10^3$
- $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
- $4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 4^3$
- $A = \{(o, r, r), (r, o, r), (r, r, o), (o, o, o)\}$
 $B = \{(o, o, r), (r, o, o), (o, r, o), (o, o, o)\}$
 $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = P(A')$
 $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = P(B')$
- A' – iloczyn liczb jest nieparzysty (obie liczby są nieparzyste)
 $P(A') = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
 $P(A) = \frac{3}{4}$
- $P(A \cap B) = P(A) = \frac{2}{3}$
 $P(A \cup B) = P(B) = \frac{3}{4}$
- $\overline{\Omega} = 6^2 = 36$
 A – suma oczek jest większa od 10
 $\overline{A} = 2^2 = 4$
 $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- $\overline{\Omega} = 5!, \overline{A} = 4!$
 $P(A) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$

**Odpowiedzi do zadań**

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,7 - 0,4 = 0,9$
- $n \cdot n \cdot (n - 1) = 100, n \in \mathbb{N}_+$
 $n = 5$
- $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$
- A – wylosowane kule mają numery nieparzyste
 $\overline{\Omega} = 5^4, \overline{A} = 3^4,$
 $P(A) = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$
- $\overline{\Omega} = 6^2 = 36$
 A – dokładnie w jednym z rzutów wypadły 3 lub 4 oczka
 $\overline{A} = \binom{2}{1} \cdot 2 \cdot 4 = 16$
 $P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$
- $\overline{\Omega} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
 $\overline{A} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
 $P(A) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

Zadania krótkiej odpowiedzi**Zadanie 1 (2 pkt)**

Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A i B , jeśli $P(A) = 0,6$, $P(B') = 0,3$ oraz $P(A \cap B) = 0,4$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Z cyfr $0, 1, 2, \dots, n$ tworzymy liczby trzycyfrowe, w których zapisie cyfry się powtarzają. Wyznacz n , jeśli wiadomo, że wszystkich takich liczb jest 100.

Zadanie 3 (2 pkt)

Ustal, ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry $0, 5, 7, 9$.

Zadanie 4 (2 pkt)

W urnie jest pięć kul o numerach $1, 2, 3, 4$ i 5 . Losujemy kolejno cztery kule i zwracamy za każdym razem wylosowaną kulę do urny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wszystkie wylosowane kule mają numery nieparzyste.

Zadanie 5 (2 pkt)

Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dokładnie w jednym z rzutów wypadną 3 lub 4 oczka.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi**Zadanie 6 (4 pkt)**

Oblicz, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb naturalnych, w których zapisie dokładnie dwa razy występuje cyfra 6.

Zadanie 7 (4 pkt)

W urnie jest pięć kul o numerach $1, 2, 3, 4$ i 5 . Losujemy trzy kule bez zwracania. Numery wylosowanych kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podzielna przez 2.

Zadanie 8 (4 pkt)

Spośród liczb sześciocyfrowych losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podzielna przez 4 lub 5.

Zadanie 9 (4 pkt)

Na loterii jest 200 losów, z tego 2 wygrywające po 450 zł i 4 wygrywające po 250 zł. Kupujemy jeden los za 10 zł. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej na tej loterii. Uwzględnij cenę zakupu losu.

- Cyfra 6 jest na miejscu jedności i tysięcy: $1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 81$
Cyfra 6 jest na miejscu jedności i na miejscu setek lub dziesiątek: $8 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 1 = 144$
Cyfra 6 jest na miejscu tysięcy i na miejscu setek lub dziesiątek: $1 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 4 = 72$
Cyfra 6 jest na miejscu setek i dziesiątek: $8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = 32$
Ostatecznie: $81 + 144 + 72 + 32 = 329$
- $\overline{\Omega} = 900\,000$
 A – liczby podzielne przez 4, $P(A) = \frac{225\,000}{900\,000}$
 B – liczby podzielne przez 5, $P(B) = \frac{180\,000}{900\,000}$
 $A \cap B$ – liczby podzielne przez 4 i 5, $P(A \cap B) = \frac{45\,000}{900\,000}$
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5}$
- $EX = 440 \cdot \frac{2}{200} + 240 \cdot \frac{4}{200} - 10 \cdot \frac{194}{200} = -0,50$ [zł]



2 Graniastopy i ostropy

Piramidy w Gizie zbudowano na przełomie XXVI i XXV w. p.n.e. Największa z nich – piramida Cheopsa (po lewej na zdjęciu) – miała około 146 m wysokości, a jej podstawą był kwadrat o boku 230 m. Aby obliczyć objętość piramidy, korzystamy ze wzoru na objętość ostrosłupa $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$, gdzie P_p jest polem podstawy ostrosłupa, a H – jego wysokością. Objętość piramidy Cheopsa wynosiła około 2 600 000 m³. Obecnie jej wymiary są nieco mniejsze.

Uczeń:

- przedstawia graniastosłupy na rysunkach,
- wskazuje w wielościanie proste prostopadłe, równoległe i skośne,
- wskazuje w wielościanie rzut prostokątny danego odcinka na daną płaszczyznę,
- przeprowadza wnioskowania dotyczące położenia prostych w przestrzeni.

Ćwiczenie 1

a) BCC_1B_1 b) ABB_1A_1

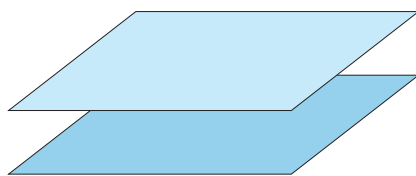
Ćwiczenie 2

Wzdłuż prostej l przecinają się płaszczyzny $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_4$.

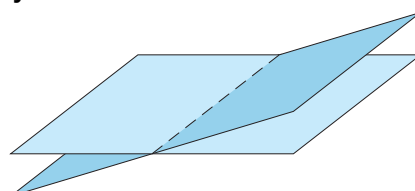
Wzdłuż prostej k przecinają się płaszczyzny $\mathcal{P}_2$ i $\mathcal{P}_3$.

2.1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni

■ Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn



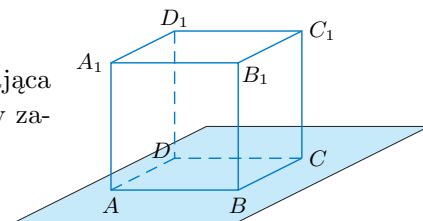
Płaszczyzny **równoległe** – nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.



Płaszczyzny **przecinające się** – ich częścią wspólną jest prosta.

Przykład 1

W sześcianie (rysunek obok) płaszczyzna zawierająca podstawę $ABCD$ jest równoległa do płaszczyzny zawierającej podstawę $A_1B_1C_1D_1$.



Ćwiczenie 1

Wskaż ścianę sześcianu (rysunek powyżej) zawartą w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny zawierającej ścianę:

a) ADD_1A_1 ,

b) DCC_1D_1 .

Zauważmy, że aby opisać płaszczyznę, wystarczy podać trzy niewspółliniowe punkty należące do niej, gdyż przez każde trzy punkty nieleżące na jednej prostej przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.

Ćwiczenie 2

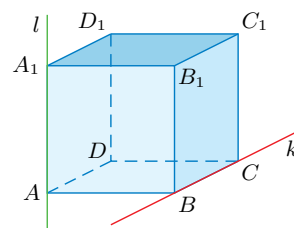
Do płaszczyzn $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$ należą wymienione wierzchołki sześcianu (rysunek poniżej).

$\mathcal{P}_1: A, D, D_1$

$\mathcal{P}_2: A, B, D$

$\mathcal{P}_3: B, B_1, C_1$

$\mathcal{P}_4: B, B_1, A_1$



Które z tych płaszczyzn przecinają się wzdłuż prostej l , a które – wzdłuż prostej k ?

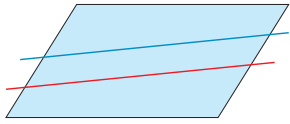
Ćwiczenie 3

Ściany sześcianu są zawarte w sześciu różnych płaszczyznach. Wskaż dowolne trzy wierzchołki sześcianu (rysunek powyżej) należące do płaszczyzny przecinającej te sześć płaszczyzn.

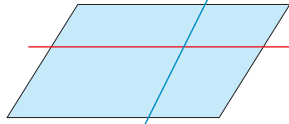
Ćwiczenie 3

Przykładowa odpowiedź: A, B_1, C_1

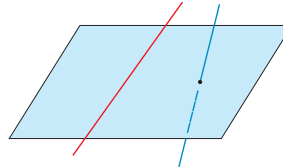
Wzajemne położenie dwóch prostych



Proste **równoległe** leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.



Proste **przecinające się** leżą w jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny.

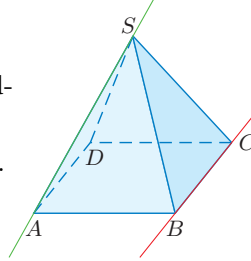


Proste **skośne** nie leżą w jednej płaszczyźnie, zatem nie mają punktów wspólnych.

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat.

- Proste zawierające krawędzie AB i DC są równoległe.
- Proste zawierające krawędzie AS i BC są skośne.

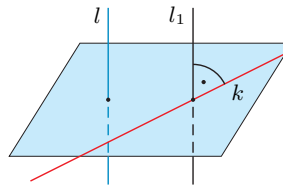


Ćwiczenie 4

Które krawędzie ostrosłupa (rysunek powyżej) zawierają się w prostych skośnych do prostej zawierającej krawędź AB ?

Mówimy, że prosta l , skośna do prostej k , jest do prostej k **prostopadła**, gdy istnieje prosta l_1 równoległa do prostej l i przecinająca prostą k pod kątem prostym.

Zauważmy, że każda prosta równoległa do prostej l_1 jest prostopadła do prostej k .

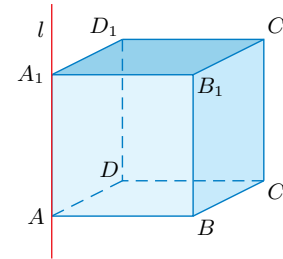


Uwaga. Proste prostopadłe są skośne lub się przecinają (gdy leżą w jednej płaszczyźnie).

Ćwiczenie 5

Prosta l zawiera krawędź AA_1 sześcianu (rysunek obok). Wskaż proste zawierające pozostałe krawędzie tego sześcianu, które są:

- równoległe do prostej l ,
- prostopadłe do prostej l .



Ćwiczenie 6

W sześcianie (rysunek powyżej) wskaż pary wierzchołków, które wyznaczają proste skośne nieprostopadłe do prostej l .

Ćwiczenie 6

B i C_1 , B i D_1 , C i B_1 , C i D_1 , D i B_1 , D i C_1

Ćwiczenie 4

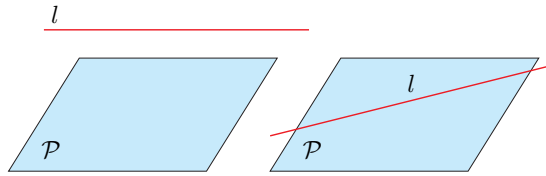
SC , SD

Ćwiczenie 5

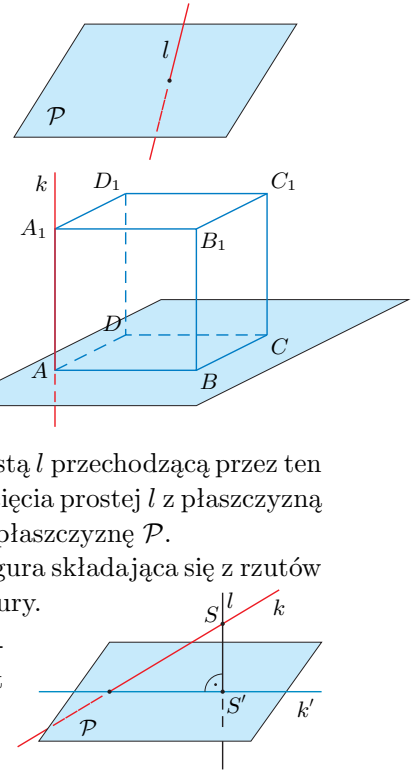
- BB_1 , CC_1 , DD_1
- AB , BC , CD , AD , A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 , A_1D_1

Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny

Prostą l nazywamy **równoległą** do płaszczyzny $\mathcal{P}$, jeśli nie ma ona punktów wspólnych z tą płaszczyzną lub jest w niej zawarta.



Jeśli prosta l ma z płaszczyzną $\mathcal{P}$ dokładnie jeden punkt wspólny, to mówimy, że prosta l **przecina** płaszczyznę $\mathcal{P}$.



Mówimy, że prosta l jest **prostopadła** do płaszczyzny $\mathcal{P}$, jeśli jest ona prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie $\mathcal{P}$.

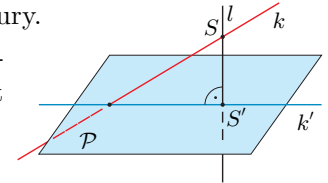
Przykład 3

W sześciacie (rysunek obok) prosta k zawierająca krawędź AA_1 jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej podstawę $ABCD$.

Dla dowolnego punktu S możemy poprowadzić prostą l przechodzącą przez ten punkt i prostopadłą do płaszczyzny $\mathcal{P}$. Punkt przecięcia prostej l z płaszczyzną $\mathcal{P}$ nazywamy **rzutem prostokątnym** punktu S na płaszczyznę $\mathcal{P}$.

Rzutem prostokątnym figury na płaszczyznę jest figura składająca się z rzutów prostokątnych wszystkich punktów rzutowanej figury.

Na rysunku obok punkt S' jest rzutem prostokątnym punktu S na płaszczyznę $\mathcal{P}$, a prosta k' jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę.

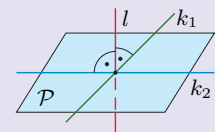


Ćwiczenie 7

Odcinek R_1S_1 jest rzutem prostokątnym odcinka RS na płaszczyznę $\mathcal{P}$. Czy odcinek R_1S_1 może być dłuższy od odcinka RS ? Sformułuj i udowodnij odpowiednie twierdzenie.

Aby wykazać, że prosta jest prostopadła do płaszczyzny, nie musimy wykazywać, że jest ona prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie. Mówi o tym **twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny**.

Jeśli prosta l jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych zawartych w płaszczyźnie $\mathcal{P}$, to jest ona prostopadła do płaszczyzny $\mathcal{P}$.



Ćwiczenie 7

Nie, ponieważ w trójkącie prostokątnym R_1PR , gdzie P jest punktem przecięcia prostej RS z płaszczyzną, odcinek R_1P jest przyprostokątną, a odcinek RP – przeciwprostokątną trójkąta, zatem $|RP| > |R_1P|$ i stąd $|RS| > |R_1S_1|$.

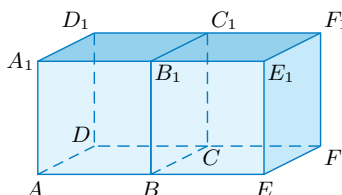
Jeśli odcinek RS jest równoległy do płaszczyzny $\mathcal{P}$, to odcinki RS i R_1S_1 pokrywają się lub są przeciwległymi bokami prostokąta, więc $|RS| = |R_1S_1|$.

Zatem odcinek R_1S_1 , który jest rzutem prostokątnym odcinka RS na płaszczyznę $\mathcal{P}$, nie może być dłuższy od odcinka RS .

Zadania

1. Dwa sześciany mają wspólną ścianę BCC_1B_1 (rysunek obok). Wskaż pary wierzchołków tych sześcianów wyznaczające proste równoległe oraz pary wierzchołków wyznaczające proste prostopadłe do prostej:

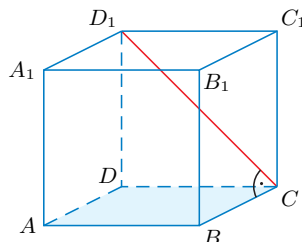
a) EF_1 , b) A_1C_1 .



2. a) Które krawędzie sześcianu przedstawionego na rysunku obok są prostopadłe do płaszczyzny zawierającej podstawę $ABCD$?

D

b) Odcinek CD_1 tworzy kąt prosty z krawędzią podstawy BC . Czy odcinek CD_1 jest prostopadły do podstawy $ABCD$? Odpowiedź uzasadnij.



3. Wskaż proste zawierające krawędzie sześcianu (rysunek powyżej) i prostopadłe do prostej DB . Które z tych prostych przecinają prostą DB , a które są do niej skośne?

4. Przyjmijmy, że krawędź sześcianu (rysunek powyżej) ma długość 2. Wskaż przykładowy odcinek, którego końce należą do krawędzi sześcianu, a długości jego rzutów prostokątnych na ściany sześcianu przyjmują wartości:

a) $\sqrt{5}$ i $2\sqrt{2}$, b) 2 i $2\sqrt{2}$, c) 1, 2 i $\sqrt{5}$, d) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{5}$.

D

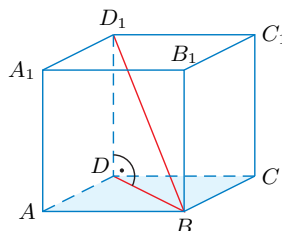
5. Dla prostych k, l, m leżących w tej samej płaszczyźnie zachodzi własność: jeśli $k \perp l$ i $l \perp m$, to $k \parallel m$. Uzasadnij, że analogiczna własność nie zachodzi dla prostych w przestrzeni.

Powtórzenie

6. Prosta k zawiera jedną z krawędzi sześcianu. Ile różnych płaszczyzn przechodzących przez dowolne cztery wierzchołki tego sześcianu przecina się wzdłuż prostej k ?

7. Rzutem prostokątnym odcinka D_1B na ścianę $ABCD$ sześcianu jest odcinek DB (rysunek obok). Wskaż odcinek będący rzutem prostokątnym odcinka D_1B na ścianę:

a) $A_1B_1C_1D_1$, b) ADD_1A_1 , c) BCC_1B_1 .

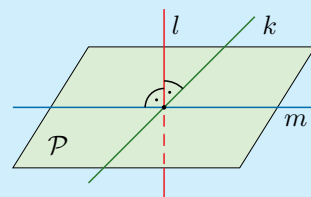


6. Trzy płaszczyzny. Na przykład płaszczyzny $ABCD$, ABB_1A_1 , ABC_1D_1 przecinają się wzdłuż prostej k , która zawiera krawędź AB .

7. a) D_1B_1 b) AD_1 c) C_1B

Odpowiedzi do zadań

1. a) Proste równoległe: BC_1 , AD_1
Proste prostopadłe: BE , AB , AE , CF , DC , DF , B_1E_1 , A_1B_1 , A_1E_1 , C_1F_1 , D_1C_1 , D_1F_1 , E_1F , B_1C , A_1D
b) Proste równoległe: B_1F_1 , AC , BF
Proste prostopadłe: D_1B_1 , C_1E_1 , DB , CE , AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 , EE_1 , FF_1 , D_1B , B_1D , C_1E , E_1C
2. a) AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1
b) Nie, ponieważ odcinek CD_1 nie jest prostopadły do krawędzi CD (tworzy z nią kąt 45°).
3. Proste prostopadłe przecinające prostą DB : BB_1 , DD_1
Proste prostopadłe skośne do prostej DB : AA_1 , CC_1
4. M , P i Q – środki krawędzi sześcianu odpowiednio A_1B_1 , CC_1 i CD
a) np. MC
b) np. MQ
c) np. MA
d) np. MP
5. Poniższy przykład pokazuje, że własność ta nie zachodzi w przestrzeni.



Zauważmy, że $k \perp l$ i $l \perp m$, ale proste k i m nie są równoległe.

Uczeń:

- przedstawia graniastosłupy na rysunkach,
- określa liczbę ścian, wierzchołków i krawędzi graniastosłupa,
- sprawdza, czy istnieje graniastosłup o danej liczbie krawędzi,
- wskazuje elementy charakteryzujące graniastosłup,
- oblicza pole powierzchni bocznej i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego,
- rysuje siatkę graniastosłupa prostego,
- stosuje wzory na pole powierzchni bocznej i pole powierzchni całkowitej do rozwiązywania zadań.

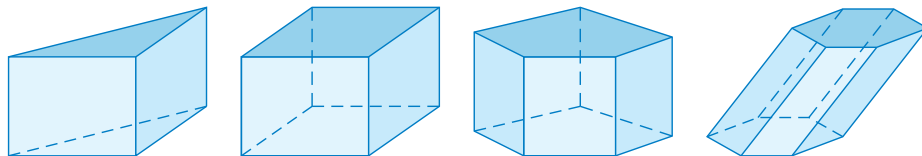
Ćwiczenie 1

Podstawą graniastosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm.

$$P_c = 2 \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} + (6 + 8 + 10) \cdot 30 = 768 \text{ [cm}^2\text{]}$$

2.2. Graniastosłupy

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany, zwane **podstawami**, są przystającymi wielokątami zawartymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany, zwane **ścianami bocznymi**, są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.



Jeśli krawędzie boczne graniastosłupa są prostopadłe do podstaw, to graniastosłup nazywamy **prostym**, w przeciwnym razie graniastosłup nazywamy **pochyłym**. Ściany boczne dowolnego graniastosłupa prostego są prostokątami. Dowolny odcinek, który łączy płaszczyzny zawierające podstawy graniastosłupa i jest do nich prostopadły, nazywamy **wysokością** graniastosłupa.

Powierznię boczna graniastosłupa stanowią wszystkie jego ściany boczne.

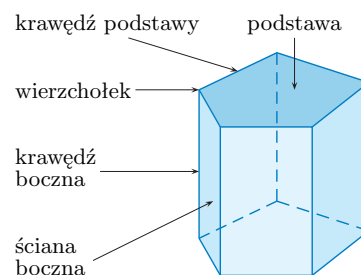
Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe sumie pól jego podstaw i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

Ćwiczenie 1

Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego, którego wysokość jest równa 30 cm, a podstawą jest trójkąt o bokach 6 cm, 8 cm i 10 cm.

W zależności od tego, jakim wielokątem jest podstawa graniastosłupa, mówimy o graniastosłupie trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym itd. Graniastosłup pięciokątny przedstawiony na rysunku obok ma 7 ścian (2 podstawy i 5 ścian bocznych), 15 krawędzi (10 krawędzi podstawy i 5 krawędzi bocznych) oraz 10 wierzchołków.



Ćwiczenie 2

Podaj liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków graniastosłupa:

- a) trójkątnego, b) czworokątnego, c) sześciokątnego.

Ćwiczenie 3

Czy istnieje graniastosłup, którego liczba krawędzi jest równa: a) 21 b) 25?

Ćwiczenie 2

- a) 5 ścian, 9 krawędzi, 6 wierzchołków;
b) 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków;
c) 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków

Ćwiczenie 3

- a) tak – graniastosłup siedmiokątny
b) nie – liczba krawędzi graniastosłupa musi być podzielna przez 3

Multiteka

- Siatki graniastosłupów prostych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.2

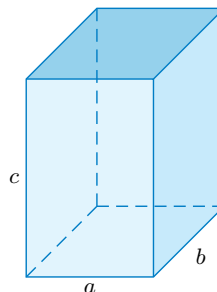
Generator
testów i sprawdzianów

Graniastosłup prosty, którego podstawą jest prostokąt, nazywamy **prostopadłościanem**.

Uwaga. Za podstawę prostopadłościanu możemy przyjąć jego dowolną ścianę.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach a , b , c opisuje wzór:

$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc$$



Ćwiczenie 4

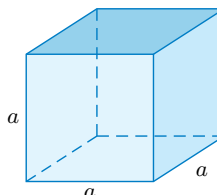
Długości krawędzi podstawy prostopadłościanu są równe 4 cm i 6 cm. Oblicz wysokość tego prostopadłościanu, jeśli wiadomo, że jego:

- pole powierzchni całkowitej wynosi 100 cm^2 ,
- pole powierzchni bocznej stanowi 60% pola powierzchni całkowitej.

Prostopadłościan o wszystkich krawędziach równych nazywamy **sześcianem**. Pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi a jest równe $6a^2$.

Ćwiczenie 5

Do wykonania modelu sześcianu zużyto 1620 cm^2 kartonu, z czego 20% stanowiły zakładki. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.



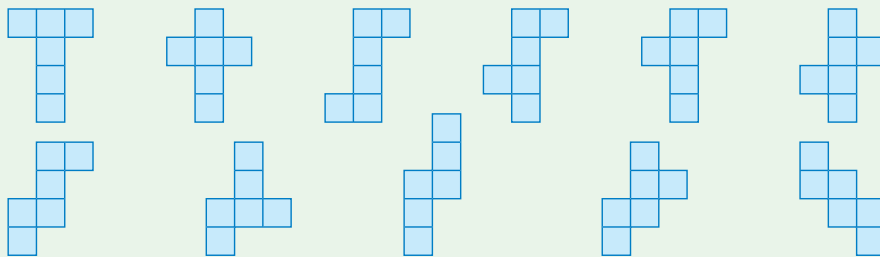
Ćwiczenie 6

Suma oczek znajdujących się na przeciwległych ścianach sześcienniej kostki do gry jest równa 7. Czy przedstawiona siatka może być siatką tej kostki?



Czy wiesz, że...

Istnieje 11 różnych siatek, z których można złożyć model sześcianu.



Ćwiczenie 4

H – wysokość prostopadłościanu

$$P_p = 24$$

$$P_b = 2 \cdot 4H + 2 \cdot 6H = 20H$$

$$\text{a) } 2 \cdot 24 + 20H = 100$$

$$H = 2,6 \text{ cm}$$

$$\text{b) } 20H = 0,6(48 + 20H)$$

$$H = 3,6 \text{ cm}$$

Ćwiczenie 5

a – długość krawędzi sześcianu

$$6a^2 = 0,8 \cdot 1620$$

$$a^2 = 216$$

$$a = 6\sqrt{6} \text{ cm}$$

Ćwiczenie 6

a) tak

b) tak

c) nie – na przeciwległych ścianach leżą 1 i 5

d) tak

Ćwiczenie 7

Gnaniastosłup trójkątny:

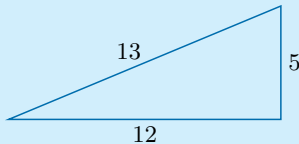
$$P_T = 2 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4 \cdot 10 = (8\sqrt{3} + 120) \text{ [cm}^2\text{]}$$

Gnaniastosłup sześciokątny:

$$P_S = 2 \cdot 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 2 \cdot 15 = 12\sqrt{3} + 180 = \frac{3}{2}(8\sqrt{3} + 120) = 1,5P_T$$

Odpowiedzi do zadań

1.



Obwód i pole podstawy:

$$Ob = 30 \text{ cm}, P_p = 30 \text{ cm}^2$$

h – wysokość gnaniastoslupa

S – suma długości krawędzi

$$S = 2 \cdot Ob + 3h = 60 + 3h = 78, \text{ skąd } h = 6 \text{ [cm]}$$

$$P_c = 2P_p + P_b =$$

$$= 2 \cdot 30 + 6 \cdot 30 = 240 \text{ [cm}^2\text{]}$$

2. H – wysokość gnaniastoslupa i długość przeciwprostokątnej podstawy

a, b – długości przyprostokątnych podstawy

$$P_c = 2 \cdot \frac{1}{2}ab + H(a + b + H)$$

Pole największej ściany bocznej: $H^2 = 100$, czyli $H = 10$

Stąd:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10^2 \\ a + b = 14 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$ab = 48$$

$$P_c = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 48 + 10(14 + 10) = 288 \text{ [cm}^2\text{]}$$

3. a) $P_c = 2P_p + P_b =$

$$= 2 \cdot 12^2 \cdot \sin 30^\circ + 4 \cdot 12 \cdot 8 = 144 + 384 = 528 \text{ [cm}^2\text{]}$$

b) Krawędź podstawy:

$$a = \sqrt{10^2 + 7,5^2} = 12,5 \text{ [cm]}$$

$$P_c = 2 \cdot \frac{15 \cdot 20}{2} + 4 \cdot 12,5 \cdot 8 = 700 \text{ [cm}^2\text{]}$$

4. H – wysokość gnaniastoslupa

$$a) P_b = (12 + 5 + 6 + 5)H =$$

$$= 28H = 560, \text{ czyli}$$

$$H = 20 \text{ cm}$$

b) Wysokość podstawy:

$$h = 4 \text{ cm}$$

$$P_c = 2P_p + P_b =$$

$$= 2 \cdot \frac{(6+12) \cdot 4}{2} + 28H =$$

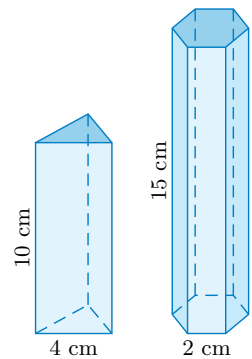
$$= 72 + 28H = 492,$$

$$\text{czyli } H = 15 \text{ cm}$$

Gnaniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny, nazywamy **prawidłowym**.

D Ćwiczenie 7

Wymiary dwóch gnaniastoslupów prawidłowych, trójkątnego i sześciokątnego, podano na rysunku obok. Uzasadnij, że pole powierzchni całkowitej jednego z tych gnaniastoslupów jest o 50% większe od pola powierzchni całkowitej drugiego.



Zadania

1. Suma długości wszystkich krawędzi gnaniastoslupa prostego jest równa 78 cm. Jego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 cm i 12 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego gnaniastoslupa.

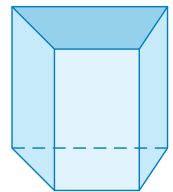
2. Podstawą gnaniastoslupa prostego jest trójkąt prostokątny o obwodzie 24 cm. Wysokość gnaniastoslupa jest równa przeciwprostokątnej podstawy, a pole największej ściany bocznej jest równe 100 cm². Oblicz pole powierzchni całkowitej tego wielościanu.

3. Oblicz pole powierzchni całkowitej gnaniastoslupa prostego o wysokości 8 cm, którego podstawą jest:

- romb o kącie ostrym 30° i boku długości 12 cm,
- romb o przekątnych długości 15 cm i 20 cm.

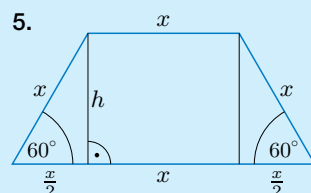
4. Podstawą gnaniastoslupa prostego jest trapez równoramienny o bokach długości 12 cm, 5 cm, 6 cm i 5 cm. Oblicz wysokość tego gnaniastoslupa, jeśli wiadomo, że:

- jego pole powierzchni bocznej jest równe 560 cm²,
- jego pole powierzchni całkowitej jest równe 492 cm².



5. Wysokość gnaniastoslupa prostego jest równa 5 cm, a jego pole powierzchni bocznej wynosi 100 cm². Oblicz pole powierzchni całkowitej tego gnaniastoslupa, jeśli jego podstawą jest trapez równoramienny o kącie ostrym 60° i podstawach, których długości są w stosunku 2 : 1.

6. Wszystkie krawędzie gnaniastoslupa prawidłowego sześciokątnego mają równe długości, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe 96 + 48√3. Oblicz wysokość tego gnaniastoslupa.



Obwód podstawy: $20 = 5x$, czyli $x = 4 \text{ cm}$

$$h = \frac{x}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}, P_p = \frac{(8+4) \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_c = 2P_p + P_b = 4(6\sqrt{3} + 25) \text{ cm}^2$$

6. x – długość krawędzi gnaniastoslupa

$$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot 6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot x^2 = 3x^2(\sqrt{3} + 2)$$

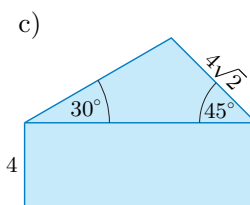
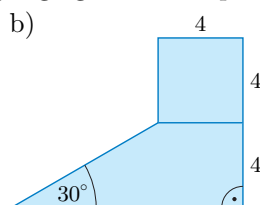
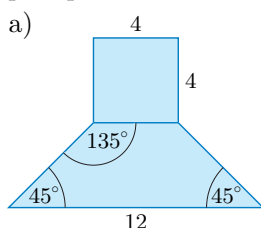
$$3x^2(\sqrt{3} + 2) = 48(\sqrt{3} + 2), \text{ stąd } x = 4$$

Wysokość gnaniastoslupa jest równa 4.

7. Prostokąt o bokach długości 2 cm i 4 cm jest jedną ze ścian bocznych graniastoslupa prawidłowego trójkątnego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa oraz narysuj jego siatkę (rozpatrz dwie możliwości).

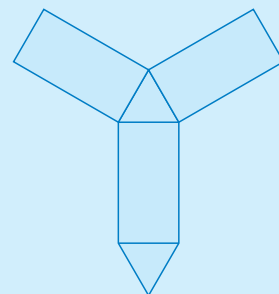
8. Ściana boczna graniastoslupa prawidłowego czworokątnego to prostokąt o bokach długości x cm i $(x + 1)$ cm oraz przekątnej długości $(x + 2)$ cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa oraz narysuj jego siatkę (rozpatrz dwie możliwości).

9. Na rysunku przedstawiono fragment siatki graniastoslupa prostego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa.



7. Rysunki w skali 2:5

I przypadek

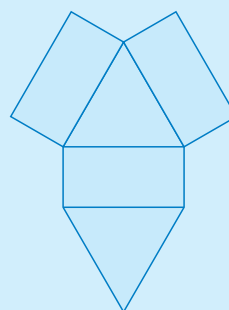


$$P_p = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_b = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 48 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_c = 2P_p + P_b = 2(\sqrt{3} + 12) \text{ [cm}^2\text{]}$$

II przypadek



$$P_p = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_b = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 48 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_c = 2P_p + P_b = 8(\sqrt{3} + 3) \text{ [cm}^2\text{]}$$

8. 66 cm^2 lub 80 cm^2

9. a) $32(4 + \sqrt{2})$

b) $16(7 + 2\sqrt{3})$

c) $16(4 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3})$

10. $S = 70$, $P_c = 175$

11. $88(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

12. a) $18(10 + \sqrt{3})$

b) $16(7 + 3\sqrt{2})$ c) 180

13. a) $2(6 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

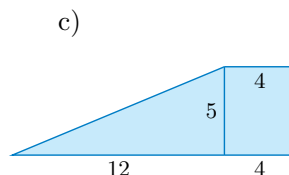
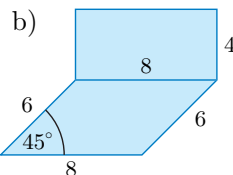
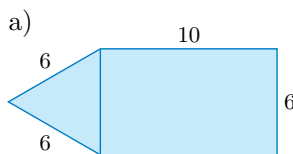
b) 24 cm^2

c) $12(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

Powtórzenie

11. Podstawą graniastoslupa prostego o wysokości 11 cm jest trójkąt równoramienny o jednym z kątów 120° i ramionach długości 8 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastoslupa.

12. Na rysunku poniżej przedstawiono fragment siatki graniastoslupa prostego. Narysuj całą siatkę tego graniastoslupa i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.



13. Narysuj siatkę graniastoslupa prawidłowego n -kątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 2 cm, i oblicz jego pole powierzchni całkowitej:

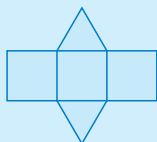
a) dla $n = 3$,

b) dla $n = 4$,

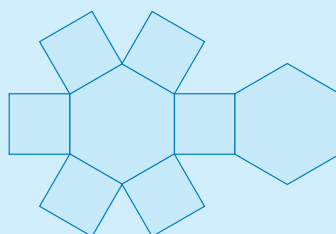
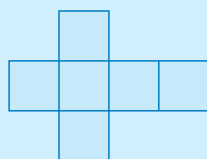
c) dla $n = 6$.

13. a) $P_c = 2 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 2^2 = 2(\sqrt{3} + 6) \text{ [cm}^2\text{]}$

c) $P_c = 2 \cdot 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 2^2 = 12(\sqrt{3} + 2) \text{ [cm}^2\text{]}$



b) $P_c = 6 \cdot 2^2 = 24 \text{ [cm}^2\text{]}$



Przedstawianie graniastosłupów na rysunkach

Podstawową zasadą przy rysowaniu graniastosłupów jest zachowanie równoległości odcinków odpowiadających równoległym krawędziom graniastosłupa.

■ Prostopadłościan

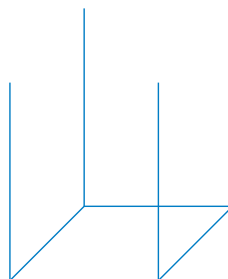
Krok 1.

Rysujemy dolną podstawę prostopadłościanu – w rzeczywistości jest ona prostokątem, ale na rysunku ma kształt równoległoboku.



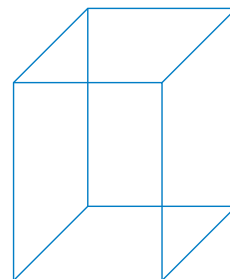
Krok 2.

Rysujemy krawędzie boczne w postaci czterech odcinków równoległych i równej długości.



Krok 3.

Łączymy wolne końce odcinków reprezentujących krawędzie boczne i otrzymujemy górną podstawę prostopadłościanu.

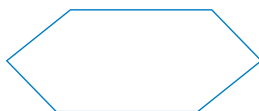


■ Graniastosłup sześciokątny

Na rysunkach poniżej pokazano, jak narysować graniastosłup prawidłowy sześciokątny.

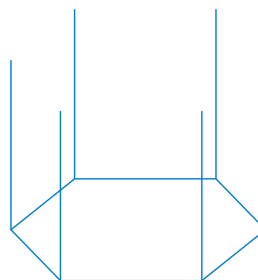
Krok 1.

Rysujemy dolną podstawę graniastosłupa – w rzeczywistości jest ona sześciokątem foremnym, ale na rysunku ma kształt sześciokąta o trzech parach boków równoległych różnej długości.



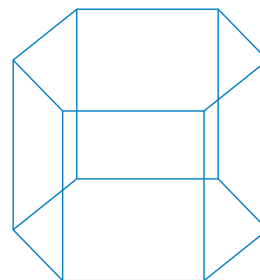
Krok 2.

Rysujemy krawędzie boczne w postaci sześciu odcinków równoległych i równej długości.



Krok 3.

Łączymy wolne końce odcinków reprezentujących krawędzie boczne i otrzymujemy górną podstawę graniastosłupa.



1. Przedstaw na rysunku graniastosłup trójkątny.
2. Przedstaw na rysunku graniastosłup pięciokątny.

2.3. Odcinki w graniastoslupach

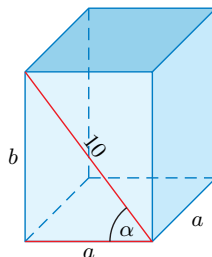
Przykład 1

Przekątna ściany bocznej graniastoslupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10 cm i tworzy z krawędzią podstawy kąt α taki, że $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastoslupa.

Zauważmy, że $\cos \alpha = \frac{a}{10}$, więc $a = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$ [cm].

$$b = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ [cm]}$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej: $P_b = 4ab = 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$ [cm²].



Ćwiczenie 1

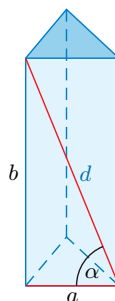
Przekątna ściany bocznej graniastoslupa prawidłowego czworokątnego ma długość 25 cm i tworzy z krawędzią boczną kąt α taki, że $\sin \alpha = 0,28$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa.

Ćwiczenie 2

Przekątna ściany bocznej graniastoslupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią podstawy kąt α taki, że $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa, jeśli wiadomo, że:

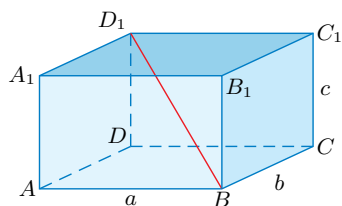
a) $a = 6$ cm,

b) $b = 6$ cm.



Ćwiczenie 3

Przekątne AD_1 i CD_1 ścian bocznych graniastoslupa prawidłowego czworokątnego (rysunek obok) mają długości równe 8 cm. Tworzą one z przekątną podstawy kąt α taki, że $\cos \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastoslupa.



Przekątną graniastoslupa nazywamy taki odcinek łączący dwa jego wierzchołki, który nie jest zawarty w żadnej ścianie graniastoslupa.

Prostopadłościan ma cztery przekątne.

Na rysunku obok są to odcinki:

$$BD_1, AC_1, CA_1 \text{ i } DB_1$$

Zwróć uwagę na to, że przekątna ściany bocznej graniastoslupa nie jest przekątną graniastoslupa oraz że graniastoslup trójkątny nie ma przekątnych.

Ćwiczenie 3

a – krawędź podstawy, b – krawędź boczna

$$\frac{\frac{1}{2}|AC|}{8} = \frac{1}{4}, \text{ czyli } |AC| = 4 \text{ cm}$$

$$a\sqrt{2} = 4, \text{ czyli } a = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$b = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{14} \text{ [cm]}$$

$$P_b = 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{14} = 32\sqrt{7} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Uczeń:

- oblicza długości przekątnych graniastoslupa prostego (również z wykorzystaniem trygonometrii),
- stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania pola powierzchni graniastoslupa,
- uzasadnia prawdziwość wzorów dotyczących przekątnych prostopadłościanów.

Ćwiczenie 1

a – krawędź podstawy

b – krawędź boczna

$$\frac{a}{25} = 0,28, \text{ czyli } a = 7 \text{ cm}$$

$$b = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24 \text{ [cm]}$$

$$P_c = 2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 \cdot 24 = 770 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Ćwiczenie 2

d – przekątna ściany bocznej

a) $a = 6$ cm

$$\frac{6}{d} = \frac{1}{3}, \text{ czyli } d = 18 \text{ cm}$$

$$b = \sqrt{18^2 - 6^2} = \sqrt{288} =$$

$$= 12\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

$$P_c = 2 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 6 \cdot 12\sqrt{2} =$$

$$= 18(\sqrt{3} + 12\sqrt{2}) \text{ [cm}^2\text{]}$$

b) $b = 6$ cm

$$\frac{a}{d} = \frac{1}{3}, \text{ czyli } d = 3a$$

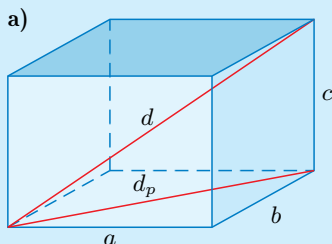
$$6^2 + a^2 = (3a)^2, \text{ czyli}$$

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

$$P_c = 2 \cdot \frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 6 =$$

$$= 9 \left(\frac{1}{4}\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \right) \text{ [cm}^2\text{]}$$

Ćwiczenie 4



Dwukrotnie stosujemy twierdzenie Pitagorasa:

$$d_p^2 = a^2 + b^2$$

$$d^2 = d_p^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{Zatem } d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

b) Przekątna graniastosłupa wyraża się wzorem:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

W sześcianie $a = b = c$, zatem

$$d = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

Ćwiczenie 5

a) Przekątne ścian: $\sqrt{106}$, 13, 15; przekątna prostopadłościanu: $5\sqrt{10}$

b) Przekątne ścian: 10, $3\sqrt{29}$, 17; przekątna prostopadłościanu: $5\sqrt{13}$

Ćwiczenie 6

a – krawędź podstawy

$$|AC| = a\sqrt{2}, |A_1C| = a\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{|AC|}{|A_1C|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \alpha \approx 35^\circ$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $50(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

b) $50(1 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

c) $50(1 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$

3. a) 8 cm b) $8\sqrt{2}$ cm c) 8 cm

4. $a = b$ oraz $c = 8$

$$4\sqrt{6} = \sqrt{a^2 + a^2 + 8^2}$$

$$96 = 2a^2 + 64$$

$$a = 4$$

$$P_c = 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot 8 = 160$$

Ćwiczenie 4

a) Uzasadnij twierdzenie podane obok.

b) Uzasadnij, że przekątna sześcianu o krawędzi a ma długość równą $a\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 5

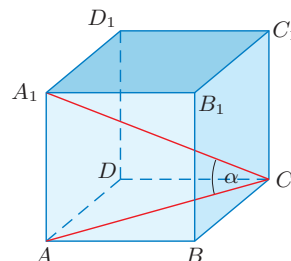
Oblicz długości przekątnych wszystkich ścian oraz długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach:

a) 5, 9, 12,

b) 6, 8, 15.

Ćwiczenie 6

W sześcianie z tego samego wierzchołka poprowadzono jego przekątną i przekątną podstawy (rysunek obok). Tworzą one kąt α . Oblicz cosinus tego kąta oraz jego przybliżoną miarę z dokładnością do 1° .



Zadania

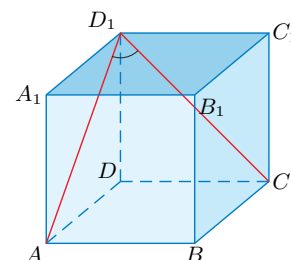
1. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 5 cm, a przekątna jego ściany bocznej tworzy:

a) z krawędzią podstawy kąt 30° ,

b) z krawędzią boczną kąt 30° ,

c) z przekątną graniastosłupa kąt 30° .

2. Kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równy 60° (rysunek obok). Wykaż, że graniastosłup ten jest sześcianem.



3. Oblicz długość przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 cm, a przekątna ta tworzy:

a) z przekątną podstawy kąt 45° ,

b) z jedną z krawędzi bocznych kąt 30° ,

c) z przekątną jednej ze ścian bocznych kąt 30° .

4. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $4\sqrt{6}$, a jego wysokość jest równa 8. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

2. $|AD| = |CD| = a$, $|DD_1| = b$, $|AD_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = |CD_1|$, $\angle AD_1C = 60^\circ$, więc trójkąt AD_1C jest równoboczny, co oznacza, że

$$|AC| = |CD_1|, \text{ czyli}$$

$$a\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ gdzie } a, b > 0$$

$$2a^2 = a^2 + b^2$$

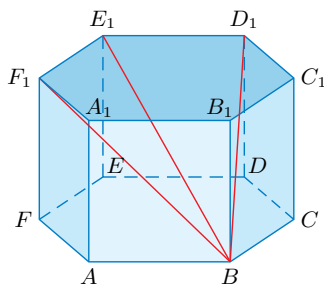
$$a^2 = b^2, a = b$$

Zatem graniastosłup ten jest sześcianem.

Przekątna prostopadłościanu o krawędziach a, b, c ma długość równą:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

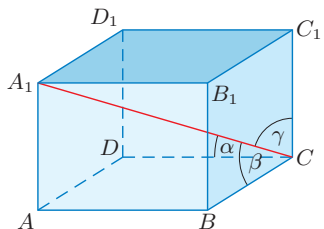
5. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego wszystkie krawędzie mają długość 4 cm. Oblicz długości przekątnych tego graniastosłupa (rysunek obok).



6. Dłuższa przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 10 cm, a jego wysokość jest równa 5 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

7. Różnica długości przekątnych graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wszystkie krawędzie są równe, wynosi 2 cm. Oblicz długość krawędzi tego graniastosłupa.

D 8. Przekątna A_1C prostopadłościanu (rysunek obok) tworzy z krawędziami wychodzącymi z wierzchołka C kąty α , β i γ . Wykaż, że:



- a) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$,
b) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

9. Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest trzy razy większe od jego pola powierzchni bocznej. Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątną tego graniastosłupa a jego krawędzią boczną.

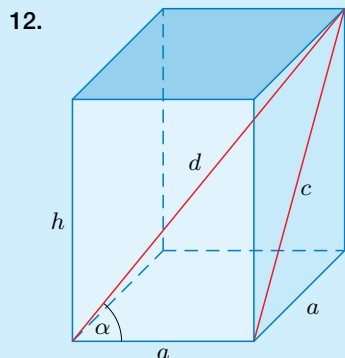
10. Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6 cm, a dłuższa przekątna jest trzy razy dłuższa od krótszej przekątnej podstawy.

11. Liczba przekątnych graniastosłupa prawidłowego n -kątnego jest o 24 większa od liczby przekątnych jego wszystkich ścian bocznych. Oblicz n .

Powtórzenie

12. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 26 cm i tworzy z krawędzią podstawy kąt α taki, że $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

13. Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 3 cm jest dwa razy większe od jego pola powierzchni bocznej. Oblicz długość przekątnej tego graniastosłupa i cosinus kąta, który ta przekątna tworzy z krawędzią boczną.



$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{a}{d} \\ a &= d \cos \alpha = 26 \cdot \frac{5}{13} = 10 \text{ [cm]} \\ d^2 &= a^2 + a^2 + h^2 \\ h^2 &= d^2 - 2a^2 = 26^2 - 2 \cdot 10^2 = 476 \\ h &= 2\sqrt{119} \text{ cm} \\ P_b &= 4ah = 4 \cdot 10 \cdot 2\sqrt{119} = 80\sqrt{119} \text{ [cm}^2\text{]}\end{aligned}$$

5. Trójkąt BEE_1 jest prostokątny oraz

$$|BE| = 2 \cdot 4 = 8 \text{ [cm]},$$

zatem

$$|BE_1|^2 = 8^2 + 4^2 = 80,$$

$$\text{czyli } |BE_1| = 4\sqrt{5} \text{ cm.}$$

Trójkąt BDD_1 jest prostokątny oraz

$$|BD| = 2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ [cm]},$$

zatem

$$|BD_1|^2 = (4\sqrt{3})^2 + 4^2 =$$

$$= 64, \text{ czyli } |BD_1| = 8 \text{ cm.}$$

$$|BF_1| = |BD_1| = 8 \text{ cm}$$

6. a – długość krawędzi podstawy

$$(2a)^2 + 5^2 = 10^2,$$

$$\text{czyli } a = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}P_c &= 2 \cdot 6 \cdot \frac{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} + \\ &+ 6 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = \frac{525}{4} \sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}\end{aligned}$$

7. $2(\sqrt{5} + 2) \text{ cm}$

8. a, b – krawędzie podstawy
 H – wysokość prostopadłościanu

$$|A_1C|^2 = a^2 + b^2 + H^2$$

$$\text{a) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{b^2 + H^2}}{|A_1C|}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{a^2 + H^2}}{|A_1C|}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|A_1C|}$$

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma &= \\ &= \frac{b^2 + H^2}{|A_1C|^2} + \frac{a^2 + H^2}{|A_1C|^2} + \frac{a^2 + b^2}{|A_1C|^2} = \\ &= \frac{2(a^2 + b^2 + H^2)}{|A_1C|^2} = \frac{2|A_1C|^2}{|A_1C|^2} = 2\end{aligned}$$

$$\text{b) } \cos \alpha = \frac{a}{|A_1C|},$$

$$\cos \beta = \frac{b}{|A_1C|}, \cos \gamma = \frac{H}{|A_1C|}$$

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \\ &= \frac{a^2}{|A_1C|^2} + \frac{b^2}{|A_1C|^2} + \frac{H^2}{|A_1C|^2} = \\ &= \frac{a^2 + b^2 + H^2}{|A_1C|^2} = \frac{|A_1C|^2}{|A_1C|^2} = 1\end{aligned}$$

$$9. \frac{\sqrt{33}}{33}$$

$$10. 216\sqrt{23} \text{ cm}^2$$

$$11. n = 8$$

$$13. d = 9 \text{ cm}, \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

Uczeń:

- oblicza objętość graniastosłupa prostego,
- rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące graniastosłupów.

Ćwiczenie 1

$$V_1 = 15 \cdot 20 \cdot 10 = 3000 \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$V_2 = 12 \cdot 12 \cdot 22 = 3168 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Większą objętość ma prostopadłościan P_2 .

Ćwiczenie 2

a – długość krawędzi sześcianu

$$P_c = 6a^2 = 1,5,$$

czyli $a = 0,5 \text{ dm}$

$$V = a^3 = 0,125 \text{ dm}^3$$

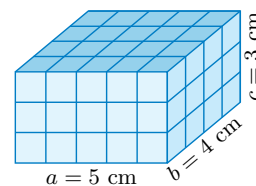
Ćwiczenie 3

$$V_A = 5 \cdot 6 = 30 \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$V_B = 5 \cdot 10 = 50 \text{ [cm}^3\text{]}$$

2.4. Objętość graniastosłupa

Objętość prostopadłościanu o wymiarach a , b , c wyraża się za pomocą wzoru: $V = abc$.

**Przykład 1**

Przedstawiony na rysunku powyżej prostopadłościan ma objętość równą $5 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^3$. Zauważ, że można go podzielić na 60 sześciątów o objętości 1 cm^3 każdy.

Ćwiczenie 1

Dane są prostopadłościany P_1 i P_2 o wymiarach:

$$P_1: 15 \text{ cm} \times 2 \text{ dm} \times 10 \text{ cm}, \quad P_2: 0,12 \text{ m} \times 1,2 \text{ dm} \times 22 \text{ cm}$$

Który z nich ma większą objętość?

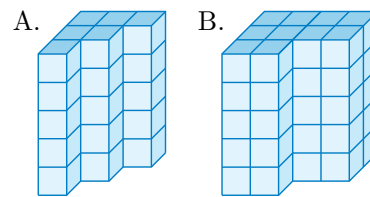
Ćwiczenie 2

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe $1,5 \text{ dm}^2$. Oblicz objętość tego sześcianu.

Objętość sześcianu o krawędzi a wyraża się za pomocą wzoru: $V = a^3$.

Ćwiczenie 3

Na rysunkach przedstawiono graniastosłupy ułożone z sześciennych kostek o objętości 1 cm^3 każda. Oblicz objętości tych graniastosłupów.



Objętość dowolnego graniastosłupa wyraża się za pomocą wzoru:

$$V = P_p \cdot H$$

gdzie P_p jest polem podstawy graniastosłupa, a H – jego wysokością.

Przykład 2

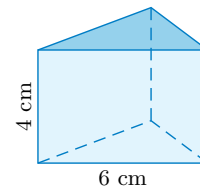
Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości 4 cm .

Obliczamy pole podstawy:

$$P_p = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Zatem objętość:

$$V = P_p \cdot H = 9\sqrt{3} \cdot 4 = 36\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$



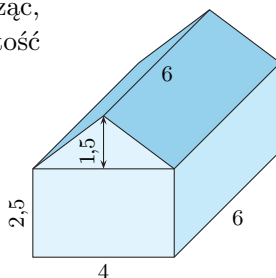
Ćwiczenie 4

Wyznacz wzór na objętość graniastoslupa prawidłowego:

- a) trójkątnego, b) sześciokątnego,
którego wszystkie krawędzie są równe i mają długość a .

Ćwiczenie 5

- a) Oblicz objętość graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 4 cm, którego pole powierzchni bocznej jest równe 180 cm^2 .
b) Pole powierzchni bocznej graniastoslupa prawidłowego trójkątnego jest równe sumie pól jego podstaw. Wiedząc, że krawędź podstawy ma długość 5 cm, oblicz objętość tego graniastoslupa.



Ćwiczenie 6

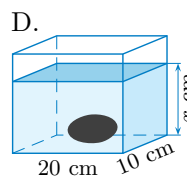
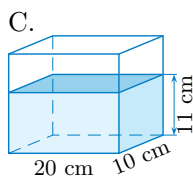
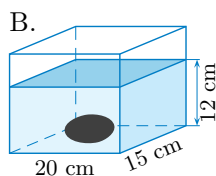
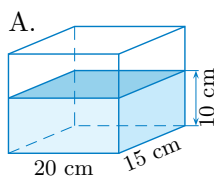
Oblicz kubaturę (objętość) budynku przedstawionego obok na schematycznym rysunku. Wymiary tego budynku podano w metrach.

Zadania

- a) Wysokość graniastoslupa prostego jest równa 7 cm, a jego podstawą jest trapez o bokach długości 4 cm, 4 cm, 4 cm i 8 cm. Oblicz objętość tego graniastoslupa.

b) Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 6 cm i 12 cm, a jego kąt ostry ma miarę 45° . Oblicz objętość graniastoslupa prostego o wysokości 18 cm, którego podstawą jest ten trapez.
- a) Przekątna graniastoslupa prawidłowego czworokątnego ma długość 9 cm, a pole jego podstawy jest równe 16 cm^2 . Oblicz objętość tego graniastoslupa.

b) Oblicz objętość graniastoslupa prawidłowego czworokątnego, którego przekątna o długości 10 cm tworzy z krawędzią podstawy kąt 60° .
- Do dwóch akwariów (rysunki A i C) wrzucono kolejno ten sam kamień (rysunki B i D). Za każdym razem kamień był całkowicie zanurzony w wodzie. Oblicz x .



- a) Długość krawędzi podstawy: $a = 4 \text{ cm}$
Wysokość graniastoslupa: $H = \sqrt{81 - 32} = 7 \text{ [cm]}$
 $V = 16 \cdot 7 = 112 \text{ [cm}^3\text{]}$

b) a – długość krawędzi podstawy
 H – wysokość krawędzi podstawy
 d – przekątna ścian bocznej
 $\frac{a}{10} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, czyli $a = 5 \text{ cm}$
 $\frac{d}{10} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli $d = 5\sqrt{3} \text{ cm}$
 $H = \sqrt{d^2 - a^2} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$
 $V = 25 \cdot 5\sqrt{2} = 125\sqrt{2} \text{ [cm}^3\text{]}$

Ćwiczenie 4

- a) $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^3$
b) $V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^3$

Ćwiczenie 5

H – wysokość graniastoslupa

- a) $P_b = 6 \cdot 4 \cdot H = 180$,
czyli $H = 7,5 \text{ cm}$
 $V = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot 7,5 = 180\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$
b) $3 \cdot 5 \cdot H = 2 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{4}$,
czyli $H = \frac{5\sqrt{3}}{6} \text{ cm}$
 $V = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{125}{8} \text{ [cm}^3\text{]}$

Ćwiczenie 6

Pole podstawy:

$$P_p = 4 \cdot 2,5 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,5 = 13 \text{ [m}^2\text{]}$$

Objętość graniastoslupa:

$$V = 13 \cdot 6 = 78 \text{ [m}^3\text{]}$$

Odpowiedzi do zadań

- a) Wysokość podstawy:
 $h_p = 2\sqrt{3} \text{ cm}$
 $V = \frac{(4+8) \cdot 2\sqrt{3}}{2} \cdot 7 = 84\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$

b) Wysokość podstawy:
 $h_p = 6 \text{ cm}$
 $V = \frac{(6+12) \cdot 6}{2} \cdot 18 = 972 \text{ [cm}^3\text{]}$
- Objętość kamienia:
 $20 \cdot 15 \cdot (12 - 10) = 600 \text{ [cm}^3\text{]}$
Zatem $20 \cdot 10 \cdot (x - 11) = 600$,
czyli $x = 14 \text{ cm}$.

4. H – wysokość graniastoslupa
 x – nieznaną bok podstawy
 Korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$\begin{aligned}x^2 &= 6^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 12 \\x &= 2\sqrt{3} \\P_p &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} \sin 30^\circ = 3\sqrt{3} \\2 \cdot 3\sqrt{3} + H(6 + 4\sqrt{3}) &= \\&= 2H(6 + 4\sqrt{3}) \\H &= 6 - 3\sqrt{3} \\V &= 3\sqrt{3} \cdot (6 - 3\sqrt{3}) = \\&= 9(2\sqrt{3} - 3)\end{aligned}$$

5. A – nie, B – tak, $V = 96\sqrt{3}$

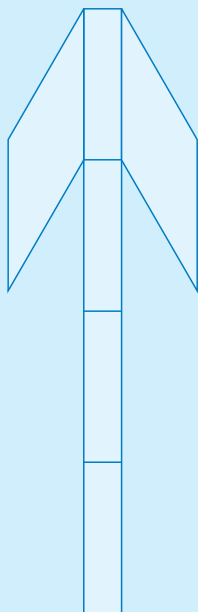
6. a – krawędź podstawy
 H – wysokość graniastoslupa

$$P_p = a^2 \sin 30^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$V = \frac{a^2}{2} H = 27$$

$$P_b = 4aH = 36$$

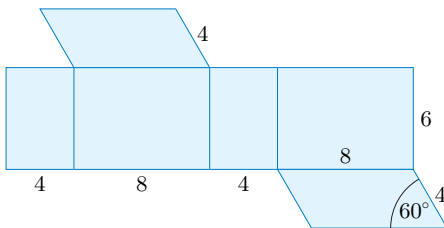
Zatem $a = 6$ cm, $H = 1,5$ cm.



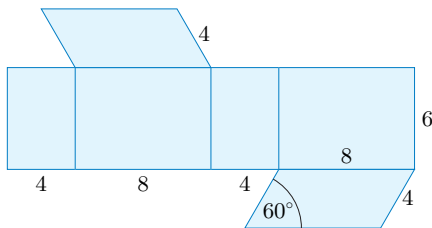
4. Podstawą graniastoslupa prostego jest trójkąt, którego dwa boki mają długości 6 i $2\sqrt{3}$, a miara kąta między nimi wynosi 30° . Oblicz objętość tego graniastoslupa, jeśli wiadomo, że jego pole powierzchni całkowitej jest dwa razy większe niż pole powierzchni bocznej.

5. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono siatkę graniastoslupa? Oblicz objętość tego graniastoslupa.

A.



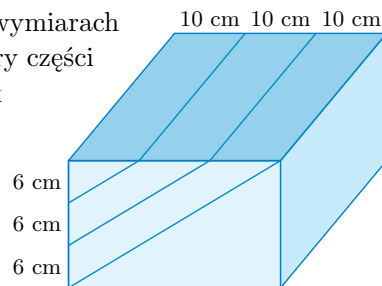
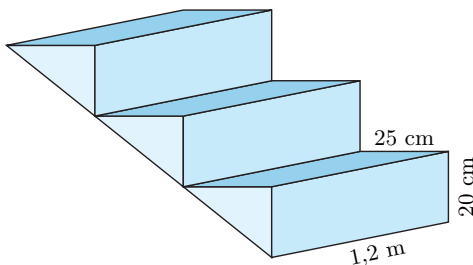
B.



6. Objętość graniastoslupa prostego, którego podstawą jest romb o kącie ostrym 30° , jest równa 27 cm^3 , a jego pole powierzchni bocznej jest równe 36 cm^2 . Narysuj siatkę tego graniastoslupa.

Powtórzenie

7. a) Oblicz objętość graniastoslupa prawidłowego trójkątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 4 cm.
 b) Oblicz objętość graniastoslupa prawidłowego czworokątnego, którego pole powierzchni bocznej jest równe 144 cm^2 , a pole powierzchni całkowitej jest równe 306 cm^2 .
8. Prostopadłościenny drewniany klocek o wymiarach $18 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ przecięto na cztery części mające kształty graniastoslupów tak, jak przedstawiono na rysunku obok. Oblicz objętość każdej z otrzymanych części.



9. Schody składają się z 15 jednokowych betonowych stopni o wymiarach podanych na rysunku obok. Oblicz objętość betonu zużytego na ich wykonanie.

7. a) $V = \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 16\sqrt{3} [\text{cm}^3]$

b) Pole podstawy:

$$2P_p = P_c - P_b = 162 = 2a^2, \text{ skąd } a = 9 \text{ cm}$$

$$P_b = 4 \cdot 9 \cdot H = 144, \text{ czyli wysokość graniastoslupa } H = 4 \text{ cm}$$

$$V = 9^2 \cdot 4 = 324 [\text{cm}^3]$$

8. Obliczamy objętości brył, zaczynając od górnego lewego rogu:

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot 50 = 1500 [\text{cm}^3]$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 20 \cdot 50 = 1500 [\text{cm}^3]$$

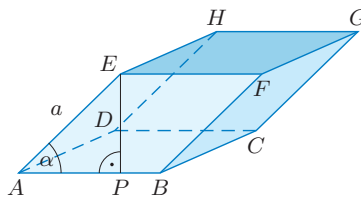
$$V_3 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 30 \cdot 50 = 13500 [\text{cm}^3]$$

$$V_4 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 30 \cdot 50 = 13500 [\text{cm}^3]$$

9. $V = 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 0,2 \cdot 1,2 = 0,45 [\text{m}^3]$

Graniastosłupy pochyle

Ściany boczne $ABFE$ i $DCGH$ graniastosłupa pochylego przedstawionego na rysunku obok są rombami o boku a i kącie ostrym α . Podstawy oraz pozostałe ściany boczne tego graniastosłupa są kwadratami. Odcinek EP jest jego wysokością.



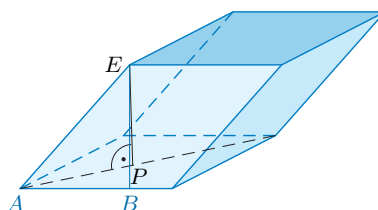
$|EP| = a \sin \alpha$, zatem objętość tego graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot h = a^2 \cdot a \sin \alpha = a^3 \sin \alpha$$

Zauważ, że objętość tego graniastosłupa możemy również wyznaczyć, przyjmując, że jego podstawami są romby $ABFE$ i $DCGH$. Wówczas otrzymujemy:

$$V = P'_p \cdot h' = a^2 \sin \alpha \cdot a = a^3 \sin \alpha$$

Innym przykładem graniastosłupa pochylego jest **romboedr**, czyli graniastosłup, którego wszystkie ściany są przystającymi rombami. Na rysunku obok przedstawiono romboedr, którego wysokością jest odcinek EP .



Zauważ, że wysokość ściany bocznej nie jest wysokością romboedru.

Twierdzenie

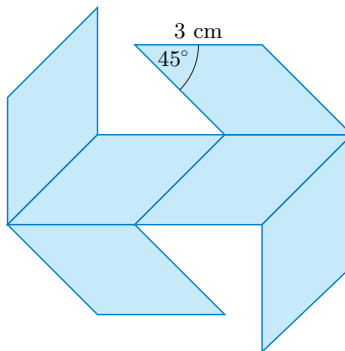
Objętość romboedru, którego każda ściana jest rombem o kącie ostrym α i boku a , dana jest wzorem:

$$V = a^3(1 - \cos \alpha)\sqrt{1 + 2 \cos \alpha}$$

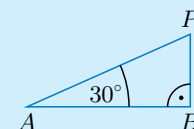
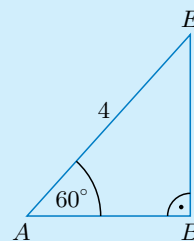
1. Oblicz wysokość romboedru, którego każda ściana jest rombem o boku 4 i kącie ostrym 60° .

2. Na rysunku obok przedstawiono siatkę romboedru, którego ścianami są romby o boku długości 3 cm i kącie ostrym 45° .
 - a) Oblicz pole powierzchni całkowitej tego romboedru.

- b) Oblicz objętość tego romboedru z dokładnością do 0,01 cm^3 .



1.



$$\begin{aligned} \frac{|EB|}{4} &= \sin 60^\circ, \\ \text{czyli } |EB| &= 2\sqrt{3} \\ \frac{|AB|}{4} &= \cos 60^\circ, \text{ czyli } |AB| = 2 \\ \frac{|BP|}{2} &= \tan 30^\circ, \\ \text{czyli } |BP| &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \text{Wysokość romboedru:} \\ |EP| &= \sqrt{|EB|^2 - |BP|^2} = \\ &= \sqrt{\frac{96}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

2. a) $P_c = 6 \cdot 3^2 \cdot \sin 45^\circ = 27\sqrt{2} [\text{cm}^2]$
b) 12,29 cm^3

Uczeń:

- przedstawia ostrosłupy na rysunkach,
- wskazuje elementy charakteryzujące ostrosłup,
- oblicza pole powierzchni ostrosłupa, mając daną jego siatkę,
- rysuje siatkę ostrosłupa prostego, mając dany jej fragment,
- oblicza pole powierzchni bocznej i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa,
- stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania pola powierzchni ostrosłupa.

Ćwiczenie 1

Niech S będzie wierzchołkiem ostrosłupa, O – spodem jego wysokości, a n -kątem $A_1A_2 \dots A_n$ – jego podstawą.

Jeżeli ostrosłup jest prosty, to $|SA_1| = |SA_2| = \dots = |SA_n|$.

Stąd trójkąty

$SOA_1, SOA_2, \dots, SOA_n$

są przystające.

Zatem

$|OA_1| = |OA_2| = \dots = |OA_n|$.

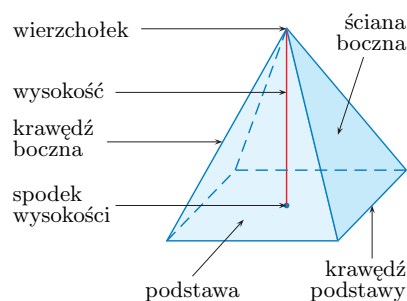
Oznacza to, że punkt O jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków n -kąta

$A_1A_2 \dots A_n$, czyli jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

2.5. Ostrosłupy

Ostrosłup to wielościan, którego jedna ściana, zwana **podstawą**, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, nazywane **ścianami bocznymi**, są trójkątami o wspólnym wierzchołku, zwanym **wierzchołkiem ostrosłupa**.

Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa, a drugim – rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy, zwany **spodem wysokości**.



Ostrosłup nazywamy trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym itd. – w zależności od tego, jakim wielokątem jest jego podstawa. Na rysunku przedstawiono ostrosłup czworokątny.

Definicja

Ostrosłup nazywamy **prostym**, jeśli wszystkie jego krawędzie boczne mają tę samą długość.

Jeśli podstawą ostrosłupa prostego jest wielokąt foremny, to taki ostrosłup nazywamy **prawidłowym**.

Ćwiczenie 1

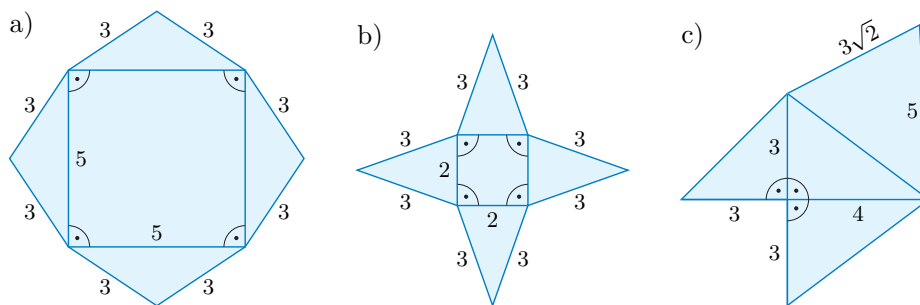
Uzasadnij, że w ostrosłupie prostym spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe sumie pola jego podstawy i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = P_p + P_b$$

Ćwiczenie 2

Czy na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa prostego? Jeśli tak, to oblicz jego pole powierzchni całkowitej.



Ćwiczenie 2

a) nie – wysokość ściany bocznej: $\sqrt{3^2 - 2,5^2} = \sqrt{2,75}$ nie może być mniejsza od połowy krawędzi podstawy: 2,5

b) tak, $P_c = 2^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4(1 + 2\sqrt{2})$, wysokość ściany bocznej: $h_b = 2\sqrt{2}$

c) nie – krawędzie boczne muszą mieć równe długości

Multiteka

- Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.5

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego ściany boczne są trójkątami prostokątnymi, a krawędź podstawy ma długość 4 cm.

Ćwiczenie 4

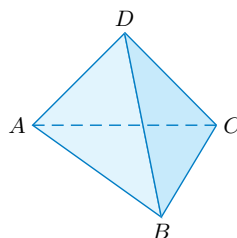
Podstawa ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma pole równe $25\sqrt{3}$. Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa, jeśli jego pole powierzchni całkowitej jest siedmiokrotnie większe od pola podstawy.

Kątem płaskim przy wierzchołku ostrosłupa prawidłowego nazywamy kąt między ramionami trójkąta równoramiennego będącego ścianą boczną tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 5

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6 cm, a kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 60° .

Ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**.

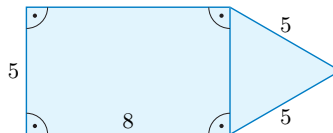


Ćwiczenie 6

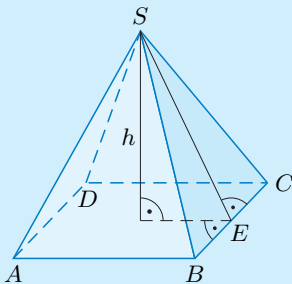
- Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego, którego krawędź ma długość 5 cm.
- Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi czworościanu foremnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $49\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Zadania

- Na rysunku obok przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prostego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
- Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt o bokach długości 6 cm i 8 cm. Dwie spośród jego ścian bocznych są trójkątami równobocznymi. Oblicz wysokość tego ostrosłupa (rozpatrz dwa przypadki).



2.



Trójkąty BCS i ADS są równoboczne.

I przypadek

$$|AB| = |CD| = 8 \text{ cm oraz } |BC| = |AD| = 6 \text{ cm}$$

$$|SE| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

$$h^2 = (3\sqrt{3})^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 8\right)^2 = 11$$

$$\text{Zatem } h = \sqrt{11} \text{ cm.}$$

II przypadek

$$|AB| = |CD| = 6 \text{ cm oraz } |BC| = |AD| = 8 \text{ cm}$$

$$|SE| = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

$$h^2 = (4\sqrt{3})^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 6\right)^2 = 39$$

$$\text{Zatem } h = \sqrt{39} \text{ cm.}$$

Ćwiczenie 3

x – długość krawędzi ściany bocznej

$$\begin{aligned} x\sqrt{2} &= 4, \text{ czyli } x = 2\sqrt{2} \text{ cm} \\ P_c &= \frac{4^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 = \\ &= 4(3 + \sqrt{3}) \text{ [cm}^2\text{]} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

a – długość krawędzi podstawy

h_b – wysokość ściany bocznej

$$\begin{aligned} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} &= 25\sqrt{3}, \text{ czyli } a = 10 \\ P_c &= 25\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h_b = \\ &= 7 \cdot 25\sqrt{3} \\ 15h_b &= 6 \cdot 25\sqrt{3} \\ h_b &= 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

Ściany boczne są trójkątami równobocznymi.

$$\begin{aligned} P_c &= 6^2 + 4 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \\ &= 36(1 + \sqrt{3}) \text{ [cm}^2\text{]} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6

$$\text{a) } P_c = 4 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

b) a – długość krawędzi

$$P_c = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 49\sqrt{3},$$

czyli $a = 7 \text{ cm}$

Suma długości wszystkich krawędzi: $6 \cdot 7 = 42 \text{ [cm]}$

Odpowiedzi do zadań

$$\begin{aligned} 1. \quad P_c &= 40 + 2 \cdot \frac{5^2}{4}\sqrt{3} + \\ &+ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 64 + \frac{25}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

3. 360 cm^2

4. a – długość krawędzi podstawy

b – długość krawędzi ściany bocznej

Z twierdzenia cosinusów:

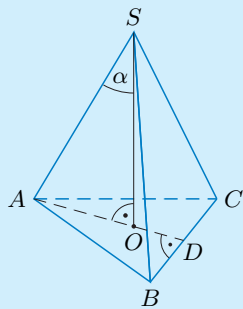
$$a^2 = b^2 + b^2 - 2 \cdot b^2 \cos 30^\circ$$

$$8 = 2b^2 - b^2 \sqrt{3}$$

$$b^2 = 8(2 + \sqrt{3})$$

$$P_c = 8 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8(2 + \sqrt{3}) \cdot \sin 30^\circ = 8(3 + \sqrt{3}) \text{ [cm}^2\text{]}$$

5.



$$|AO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ [cm]}$$

$$\frac{|OS|}{|AS|} = 0,8,$$

$$\text{czyli } |OS| = \frac{4}{5}|AS|$$

$$\left(\frac{4}{5}|AS|\right)^2 + (\sqrt{3})^2 = |AS|^2$$

$$|AS| = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$|OS| = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$|DS| = \sqrt{\frac{25}{3} - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{73}{12}} = \frac{\sqrt{73}}{2\sqrt{3}} \text{ [cm]}$$

$$P_c = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{73}}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(3 + \sqrt{73}) \text{ [cm}^2\text{]}$$

6. a – długość krawędzi podstawy

Z twierdzenia cosinusów:

$$a^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2^2 \cos 30^\circ$$

$$a^2 = 8 - 4\sqrt{3}$$

$$P_c = \frac{(8-4\sqrt{3})\sqrt{3}}{4} +$$

$$+ 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

7. $12(4\sqrt{3} + 9\sqrt{2}) \text{ cm}^2$

3. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 12 cm. Tworzy ona z wysokością ściany bocznej kąt α taki, że $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

4. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 8 cm^2 , a jego ściany boczne są trójkątami równoramiennymi o kącie między ramionami 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

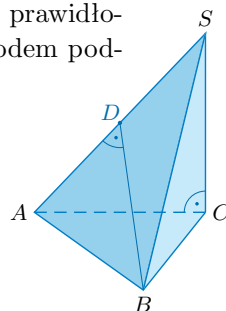
5. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią boczną tego ostrosłupa kąt α taki, że $\cos \alpha = 0,8$. Krawędź podstawy ma długość 3 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

6. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest trójkątem równoramiennym, w którym ramiona mają długość 2 cm, a kąt między nimi jest równy 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

7. Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny, w którym wysokość ściany bocznej jest równa 9 cm. Różnica między polem koła opisanego na podstawie tego ostrosłupa a polem koła wpisanego w tę podstawę wynosi $8\pi \text{ cm}^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

- D** 8. Uzasadnij, że pole powierzchni bocznej P_b ostrosłupa prawidłowego wyraża się wzorem $P_b = \frac{1}{2}Lh$, gdzie L jest obwodem podstawy, a h – wysokością ściany bocznej.

9. Dany jest ostrosłup trójkątny, w którym krawędź SC jest prostopadła do podstawy ABC (rysunek obok) oraz $|AB| = 5$, $|BC| = 3$, $|AC| = |SC| = 4$. Oblicz cosinusy kątów trójkąta ABS . Wyznacz miary kątów tego trójkąta z dokładnością do 1° .

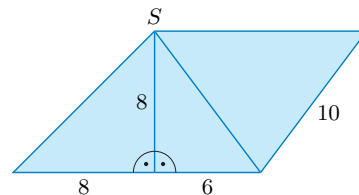


Powtórzenie

10. Krawędzie podstawy ostrosłupa prawidłowego mają długość 10 cm, a krawędzie boczne – 13 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że jego podstawą jest:

a) kwadrat, b) trójkąt, c) sześciokąt.

11. Na rysunku przedstawiono fragment siatki ostrosłupa trójkątnego o wierzchołku S . Narysuj całą siatkę tego ostrosłupa i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.



8. Niech a oznacza długość krawędzi podstawy.

Obwód podstawy, która jest n -kątem foremnym wynosi $L = n \cdot a$.

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego składa się z n pól trójkątów o podstawie długości a i wysokości h , czyli $P_b = n \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot n \cdot h = \frac{1}{2}Lh$.

9. Trójkąty ACS i BCS są prostokątne, więc $|BS| = 5$ i $|AS| = 4\sqrt{2}$.

$$|AD| = |DS| = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \sphericalangle ASB = \cos \sphericalangle SAB = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$\sphericalangle SAB = \sphericalangle ASB \approx 56^\circ \text{ stąd } \sphericalangle ABS = 180^\circ - \sphericalangle SAB - \sphericalangle ASB \approx 68^\circ$$

$$\cos \sphericalangle ABS = 1 - 2\sin^2 \sphericalangle ABD = 1 - 2\cos^2 \sphericalangle SAB = 1 - 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

10. a) 340 cm^2 b) $(25\sqrt{3} + 180) \text{ cm}^2$ c) $(150\sqrt{3} + 360) \text{ cm}^2$

11. $8(\sqrt{34} + 10)$

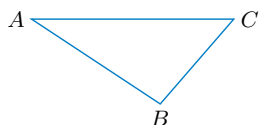
Przedstawianie ostrosłupów na rysunkach

Podczas rysowania ostrosłupa szczególną uwagę należy zwrócić na położenie jego spodka wysokości.

■ Ostrosłup prawidłowy trójkątny

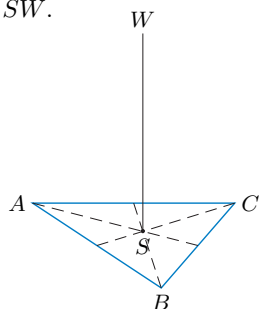
Krok 1.

Rysujemy podstawę ostrosłupa – w rzeczywistości jest ona trójkątem równobocznym, ale na rysunku długości boków trójkąta są różne.



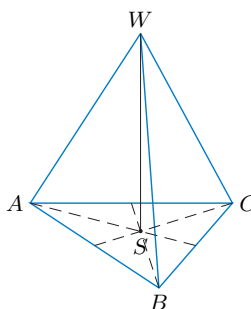
Krok 2.

Wyznaczamy spodek wysokości S – punkt przecięcia środkowych trójkąta ABC . Następnie rysujemy wysokość ostrosłupa – odcinek SW .



Krok 3.

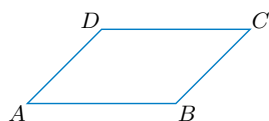
Łączymy wierzchołek ostrosłupa z wierzchołkami jego podstawy i otrzymujemy krawędzie boczne ostrosłupa.



■ Ostrosłup prawidłowy czworokątny

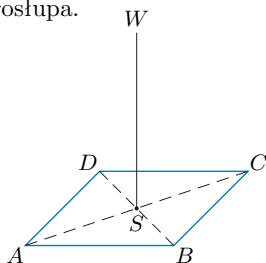
Krok 1.

Rysujemy podstawę ostrosłupa – w rzeczywistości jest ona prostokątem, ale na rysunku ma kształt równoległoboku $ABCD$.



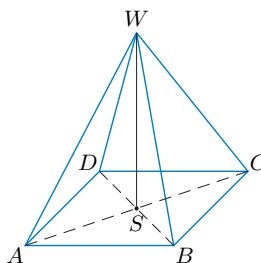
Krok 2.

Wyznaczamy spodek wysokości S – jest to punkt przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Następnie rysujemy wysokość SW ostrosłupa.



Krok 3.

Łączymy wierzchołek ostrosłupa z wierzchołkami jego podstawy i otrzymujemy krawędzie boczne ostrosłupa.



1. Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy sześciokątny.
2. Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy pięciokątny.
3. Przedstaw na rysunku ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat $ABCD$, a spodkiem wysokości jest punkt A .

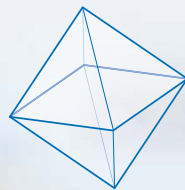
Szlify diamentów

Diamenty po oszlifowaniu często mają kształt wielościanu wypukłego.

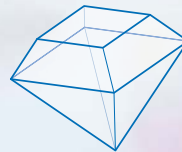
Wielościan nazywamy wypukłym, jeśli każdy odcinek, którego końce są punktami tego wielościanu, jest cały w nim zawarty.

Na szkicach poniżej pokazano najwcześniejsze szlify diamentów w Europie.

Pierwsze szlify diamentów polegały na wygładzaniu naturalnych ścianek kryształów. Dopiero wynalezienie tarczy szlifierskiej pozwoliło na skośne ścinanie krawędzi diamentów i tworzenie tzw. fasetek, czyli symetrycznie rozmieszczonych ścianek.



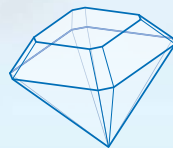
szpiczasty kamień
XIV w.



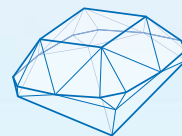
gruby kamień
XIV w.



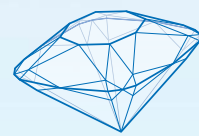
cienki kamień
XIV w.



pojedyncze dobro
XV w.



szlif Mazarina
XVII w.



szlif Peruzziego
XVIII w.

Wzór Eulera

Dla dowolnego wielościanu wypukłego zachodzi zależność opisana tzw. wzorem Eulera:

$$s - k + w = 2$$

gdzie s oznacza liczbę ścian, k – liczbę krawędzi, w – liczbę wierzchołków.

1 Sprawdź prawdziwość wzoru Eulera dla wielościanów, których kształt mają pierwsze trzy szlify diamentów przedstawione na ilustracji.

1. Szpiczasty kamień: $s = 8, k = 12, w = 6$. Wzór Eulera: $8 - 12 + 6 = 2$
Gruby kamień: $s = 9, k = 16, w = 9$. Wzór Eulera: $9 - 16 + 9 = 2$
Cienki kamień: $s = 10, k = 20, w = 12$. Wzór Eulera: $10 - 20 + 12 = 2$



2.6. Objętość ostrosłupa

Objętość dowolnego ostrosłupa wyraża się za pomocą wzoru:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

gdzie P_p jest polem podstawy ostrosłupa, a H – jego wysokością.

Przykład 1

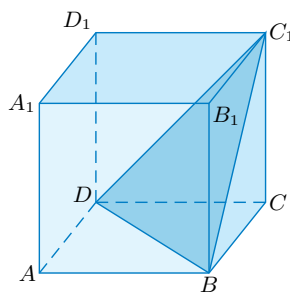
Sześcian o krawędzi długości 6 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki B , D i C_1 (rysunek obok). Oblicz objętości wielościanów otrzymanych w ten sposób.

Jednym z wielościanów jest ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt BDC o polu:

$$P_p = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ [cm}^2\text{]}$$

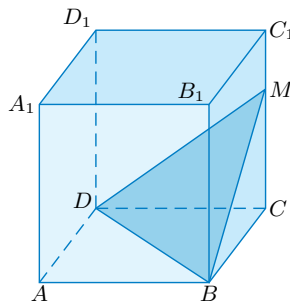
Wysokość tego ostrosłupa $H = 6$ cm, zatem jego objętość $V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36 \text{ [cm}^3\text{]}$.

Natomiast objętość drugiego wielościanu jest równa $6^3 - 36 = 180 \text{ [cm}^3\text{]}$.



Ćwiczenie 1

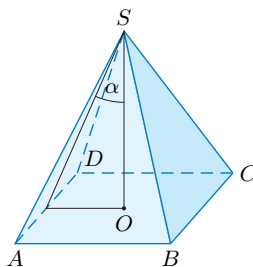
Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6 cm, a przekątna podstawy ma długość 8 cm. Oblicz objętości wielościanów powstałych z przecięcia graniastosłupa płaszczyzną BDM (rysunek obok), jeśli punkt M należy do krawędzi CC_1 i odcinek CM jest dwa razy dłuższy od odcinka MC_1 .



Ćwiczenie 2

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości równej 9, jeśli cosinus kąta między:

- wysokością tego ostrosłupa a wysokością jego ściany bocznej jest równy 0,9 (rysunek obok),
- wysokością tego ostrosłupa a jego krawędzią boczną jest równy 0,6.



Ćwiczenie 3

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 16 cm^2 , a wysokość jego ściany bocznej jest równa 6 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 3

Długość krawędzi podstawy: $a = 4$ cm

H – wysokość ostrosłupa

$$H = \sqrt{6^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 4\right)^2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$P_c = 16 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 64 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 4\sqrt{2} = \frac{64\sqrt{2}}{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

Uczeń:

- oblicza objętość ostrosłupa prawidłowego,
- stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania objętości ostrosłupa,
- rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące ostrosłupów.

Ćwiczenie 1

Długość krawędzi podstawy:

$$a = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$|CM| = \frac{2}{3}|CC_1| = 4 \text{ cm}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot 4 = \frac{64}{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$V_2 = (4\sqrt{2})^2 \cdot 6 - \frac{64}{3} = \frac{512}{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

Ćwiczenie 2

a – długość krawędzi podstawy

b – długość krawędzi ściany bocznej

$$\text{a) } \frac{9}{h_b} = 0,9, \text{ czyli } h_b = 10$$

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 9^2 = 10^2,$$

$$\text{czyli } a^2 = 76$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 76 \cdot 9 = 228$$

$$\text{b) } \frac{9}{b} = 0,6, \text{ czyli } b = 15$$

$$\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 + 9^2 = 15^2,$$

$$\text{zatem } a^2 = 288$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 288 \cdot 9 = 864$$

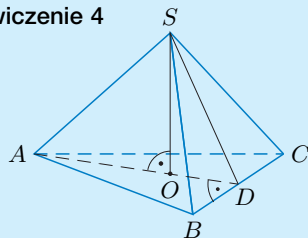
Multiteka

- Objętość ostrosłupa

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.6

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4



a – długość krawędzi podstawy

$|OS| = 12$ cm, $|SD| = 15$ cm

$$|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$|OD| = \frac{1}{3}|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$12^2 + |OD|^2 = 15^2,$$

czyli $|OD| = 9$ cm

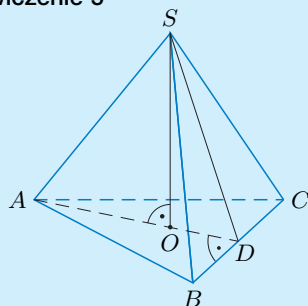
$$|OD| = 9 = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

czyli $a = 18\sqrt{3}$ cm

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(18\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 12 =$$

$$= 972\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

Ćwiczenie 5



a – długość krawędzi podstawy

$|OS| = 16$ cm

a) $\frac{|AO|}{16} = 0,5,$

czyli $|AO| = 8$ cm

$$|AO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 8,$$

czyli $a = 8\sqrt{3}$ cm

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(8\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 16 =$$

$$= 256\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

b) $\frac{16}{|DS|} = 0,8,$

czyli $|DS| = 20$ cm

$$16^2 + |OD|^2 = 20^2,$$

czyli $|OD| = 12$ cm

$$|OD| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 12,$$

czyli $a = 24\sqrt{3}$ cm

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(24\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 16 =$$

$$= 2304\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

Przykład 2

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 8 cm, a krawędź boczna – 10 cm.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok oraz długość krawędzi podstawy oznaczmy przez a .

Wówczas:

$$|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Spodek wysokości ostrosłupa – punkt O – jest środkiem okręgu opisanego na podstawie, zatem:

$$|AO| = \frac{2}{3}|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \text{Środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym dzieli jego wysokość w stosunku 1:2.}$$

Rozpatrzmy trójkąt AOS . Na podstawie twierdzenia

Pitagorasa mamy:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 8^2 = 10^2$$

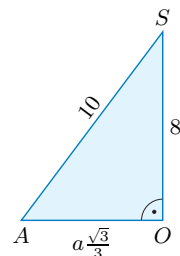
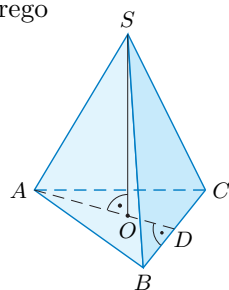
$$\frac{a^2}{3} = 100 - 64$$

$$a^2 = 36 \cdot 3$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa:

$$P_p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Zatem objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 27\sqrt{3} \cdot 8 = 72\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$.



Ćwiczenie 4

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 12 cm, a wysokość ściany bocznej – 15 cm.

Ćwiczenie 5

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 16 cm i tworzy:

a) z krawędzią boczną kąt α taki, że $\text{tg } \alpha = 0,5$,

b) z wysokością ściany bocznej kąt α taki, że $\cos \alpha = 0,8$.

Ćwiczenie 6

a) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 60° , a pole podstawy jest równe 16 cm^2 . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

b) W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 90° , a krawędź podstawy ma długość 6 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 6

H – wysokość ostrosłupa, h – wysokość ściany bocznej

a) Krawędź podstawy: $a = 4$ cm

$$\frac{2}{h} = \text{tg } 30^\circ, \text{ czyli } h = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$H = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 4\right)^2} = 2\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{32\sqrt{2}}{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

b) $h = 3$ cm, wysokość podstawy: $h_p = 3\sqrt{3}$ cm

$$H = \sqrt{3^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6} \text{ [cm]}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{6} = 9\sqrt{2} \text{ [cm}^3\text{]}$$

Wysokość czworościanu foremnego o krawędzi a wyraża się za pomocą wzoru:

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

a jego objętość – za pomocą wzoru:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Dowód

Na rysunku poniżej przedstawiono czworościan foremny o krawędzi a .

Niech punkt O będzie spodkiem wysokości czworo-

ścianu. Rozpatrzmy trójkąt prostokątny AOS .

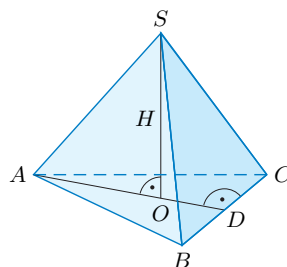
Zauważmy, że $|AO| = \frac{2}{3}|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ oraz $|AS| = a$.

Zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa:

$$H^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2$$

Stąd $H = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ oraz objętość czworościanu:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$



Ćwiczenie 7

a) Oblicz objętość czworościanu foremnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

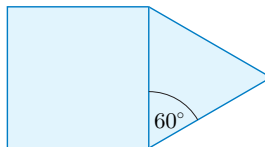
b) Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o objętości równej $18\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

Zadania

1. Wysokość ostrosłupa prawidłowego jest równa 15 cm, a obwód jego podstawy jest równy 24 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeżeli jest on:

- a) czworokątny, b) trójkątny, c) sześciokątny.

2. Na rysunku obok przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $36(1+\sqrt{3}) \text{ cm}^2$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



3. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest trójkątem równoramiennym, w którym ramiona mają długość 13 cm i tworzą kąt α taki, że $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{12}{13}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

4. Oblicz objętość ostrosłupa prostego, którego wysokość tworzy z krawędzią boczną kąt 30° , a podstawą jest prostokąt o bokach 4 cm i 8 cm.

3. a – długość krawędzi podstawy

h_b – wysokość ściany bocznej

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{h_b}{13} = \frac{12}{13}, \text{ czyli } h_b = 12 \text{ cm}$$

$$h_b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 13^2, \text{ czyli } a = 10 \text{ cm}$$

$$H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_b^2, \text{ czyli } H = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{119} \text{ [cm]}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \sqrt{119} = \frac{100\sqrt{119}}{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

4. d – przekątna podstawy, H – wysokość ostrosłupa

$$d = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5}}{H} = \tan 30^\circ, \text{ czyli } H = 2\sqrt{15} \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 2\sqrt{15} = \frac{64\sqrt{15}}{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

Ćwiczenie 7

$$\text{a) } 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3},$$

stąd $a = 6 \text{ [cm]}$

$$V = \frac{6^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2} \text{ [cm}^3\text{]}$$

b) $V = 18\sqrt{2}$, zatem z podpunktu a) $P_c = 36\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$

Odpowiedzi do zadań

$$1. \text{ a) } V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 15 = 180 \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$\text{b) } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 15 = 80\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$\text{c) } V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot 15 = 120\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

2. a – długość każdej krawędzi ostrosłupa

$$P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2(1 + \sqrt{3}) = 36(1 + \sqrt{3}),$$

czyli $a = 6 \text{ cm}$

$$H = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}a, \text{ czyli } H = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2} =$$

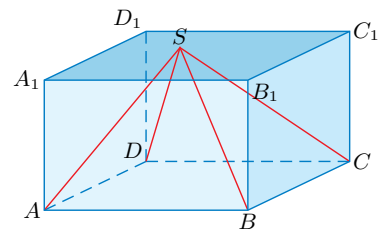
$$= 36\sqrt{2} \text{ [cm}^3\text{]}$$

5. a – krawędź podstawy
 h – wysokość ściany bocznej
 H – wysokość ostrosłupa
 $\frac{a}{h} = \tan 30^\circ$, czyli $a = \frac{2\sqrt{3}h}{3}$
 $\frac{1}{2}ah = \frac{\sqrt{3}h^2}{3} = 24$,
 czyli $h^2 = 24\sqrt{3}$
 $H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^2} =$
 $= \sqrt{\frac{2}{3}h^2} = \sqrt{16\sqrt{3}} = 4\sqrt[4]{3}$
 $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}h}{3}\right)^2 \cdot H =$
 $= \frac{1}{3} \cdot 32\sqrt{3} \cdot 4\sqrt[4]{3} =$
 $= \frac{128\sqrt[4]{27}}{3} [\text{cm}^3]$
6. a – długość krawędzi podstawy
 a) $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 24 = 50\sqrt{3}$,
 czyli $a = 5$ cm
 b) H – wysokość ostrosłupa
 $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$,
 czyli $a = 6$ cm
 $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{36\sqrt{3}}{4} \cdot H = 21\sqrt{3}$,
 czyli $H = 7$ cm
7. a – krawędź podstawy
 b – krawędź boczna
 H – wysokość ostrosłupa
 $3a + 3b = 21$, czyli $b = 7 - a$,
 gdzie $a \in (0; 7)$
 $H^2 = b^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$
 $13 = 49 - 14a + a^2 - \frac{a^2}{3}$
 $a^2 - 21a + 54 = 0$
 $a = 3$ lub $a = 18 \notin (0; 7)$
 $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{13} = \frac{3\sqrt{39}}{4}$
8. $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3 =$
 $= 54\sqrt{3} [\text{cm}^3]$
9. a – krawędź podstawy
 H – wysokość czworoscianu
 a) $H = \frac{a\sqrt{6}}{3} = 2$, czyli $a = \sqrt{6}$
 $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \sqrt{3} [\text{cm}^3]$
 b) $H = \frac{a\sqrt{3}}{2} - 1$
 $\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - 1$, czyli
 $a = \frac{6}{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}} = 2(3\sqrt{3} + 2\sqrt{6})$
 $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} =$
 $= 2\sqrt{3}(140 + 99\sqrt{2}) [\text{cm}^3]$
10. $\frac{8\sqrt{17}}{3} \text{ cm}^3$
11. $36\sqrt{2} \text{ cm}^3$
12. a) 4 b) 8

5. Pole ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 24 cm^2 , a kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.
6. a) Oblicz długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość ma 24 cm, a objętość jest równa $50\sqrt{3} \text{ cm}^3$.
 b) Oblicz wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego objętość jest równa $21\sqrt{3} \text{ cm}^3$, a promień okręgu opisanego na podstawie jest równy $2\sqrt{3}$ cm.
7. Suma długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 21 , a jego wysokość jest równa $\sqrt{13}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
8. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wysokość jest dwa razy krótsza od wysokości jego ściany bocznej, a krawędź podstawy ma długość 6 cm.
9. Oblicz objętość czworoscianu foremnego, którego wysokość:
 a) jest równa 2 cm,
 b) jest o 1 cm krótsza od wysokości jego ściany.
10. Dany jest czworoscian, w którym dwie skośne krawędzie mają długość 4 cm każda, a pozostałe krawędzie mają po 5 cm. Oblicz objętość tego czworoscianu.

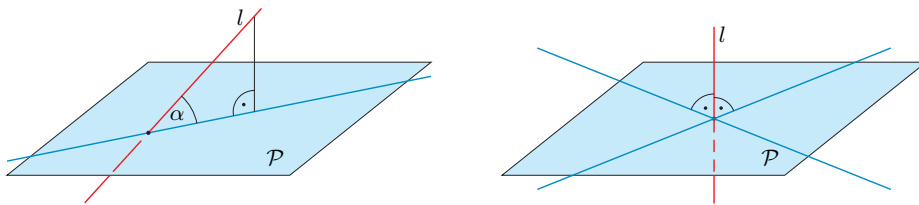
Powtórzenie

11. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z krawędzią boczną kąt 45° . Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli jego podstawa ma pole równe 36 cm^2 .
12. Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości: $|AB| = 4$, $|BC| = 3$, $|BB_1| = 2$ (rysunek obok). Oblicz objętość ostrosłupa:
 a) $ABDD_1$,
 b) $ABCD S$, gdzie S jest dowolnym punktem należącym do ściany $A_1B_1C_1D_1$.
13. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego ściany boczne są trójkątami prostokątnymi o przeciwprostokątnej równej 20 cm.
14. Oblicz objętość czworoscianu foremnego, którego ściana boczna ma pole równe $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.



13. Kąt prosty jest kątem płaskim przy wierzchołku, stąd długość krawędzi podstawy: $a = 20$ cm, wysokość ściany bocznej: $h = 10$ cm.
 Wysokość ostrosłupa:
 $\sqrt{10^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{10\sqrt{6}}{3} [\text{cm}]$
 $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{1000\sqrt{2}}{3} [\text{cm}^3]$
14. a – krawędź podstawy
 $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$, czyli $a = 10$ cm
 $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{250\sqrt{2}}{3} [\text{cm}^3]$

2.7. Kąt między prostą a płaszczyzną



Kątem między prostą a płaszczyzną nazywamy kąt ostry, który ta prosta tworzy ze swoim rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę. Jeśli rzutem prostej jest punkt, to przyjmujemy, że płaszczyzna i prosta tworzą kąt prosty. Jeśli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to tworzy z nią kąt 0° .

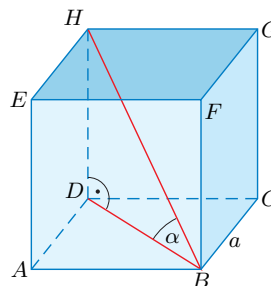
Przykład 1

Wyznacz miarę kąta między przekątną sześcianu a jego podstawą.

Rozpatrzmy przekątną sześcianu BH (rysunek obok) i jej rzut prostokątny na płaszczyznę podstawy – odcinek BD .

Jeśli $|DH| = a$, to $|BD| = a\sqrt{2}$, zatem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071, \text{ stąd } \alpha \approx 35^\circ$$



Ćwiczenie 1

Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego wszystkie krawędzie mają tę samą długość. Wyznacz miary kątów, które jego przekątne tworzą z podstawą.

Ćwiczenie 2

Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 5 cm jest prostokąt o bokach długości 3 cm i 4 cm. Oblicz sinusy kątów, które przekątna tego graniastosłupa tworzy z jego ścianami bocznymi.

Ćwiczenie 3

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 8 cm, a jego przekątna tworzy z podstawą kąt 60° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Ćwiczenie 4

Podstawa graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma pole równe 49 cm^2 , a jego przekątna tworzy ze ścianą boczną kąt α taki, że $\sin \alpha = 0,28$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

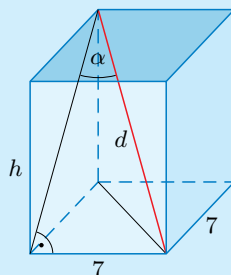
Ćwiczenie 3

a – długość krawędzi podstawy

$$\frac{8}{a\sqrt{2}} = \operatorname{tg} 60^\circ, \quad a = \frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$

$$V = \left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot 8 = \frac{256}{3} [\text{cm}^3]$$

Ćwiczenie 4



$$\frac{7}{d} = \sin \alpha = 0,28,$$

$$\text{skąd } d = 25 \text{ cm}$$

$$h^2 = 25^2 - (7\sqrt{2})^2 = 527$$

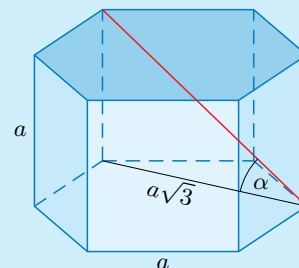
$$h = \sqrt{527} \text{ cm}$$

$$V = 49\sqrt{527} \text{ cm}^3$$

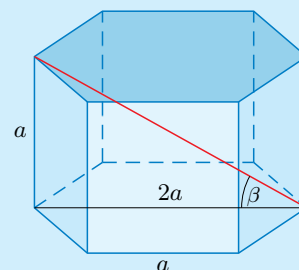
Uczeń:

- wskazuje i wyznacza kąty między odcinkami w graniastosłupie a płaszczyzną jego podstawy lub ścianą boczną,
- wskazuje i wyznacza kąty między odcinkami w ostrosłupie a płaszczyzną jego podstawy,
- rozwiązuje zadania dotyczące miary kąta między prostą a płaszczyzną (również z wykorzystaniem trygonometrii).

Ćwiczenie 1

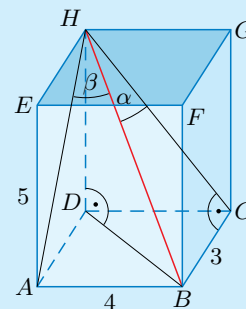


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ czyli } \alpha = 30^\circ$$



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \text{ czyli } \beta \approx 27^\circ$$

Ćwiczenie 2



$$|BD| = 5 \text{ cm}, \quad |BH| = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

$$\sin \beta = \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Ćwiczenie 5

a – długość krawędzi sześcianu

$$\text{a) } |AS|^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{3}{2}a^2, \text{ czyli } |AS| = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{\frac{\sqrt{6}}{2}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{b) } h_b^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{5}{4}a^2,$$

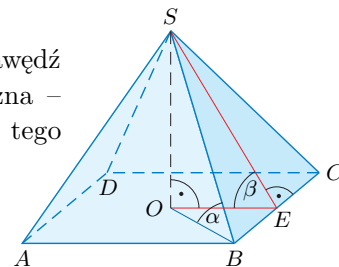
$$\text{czyli } h_b = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$\sin \beta = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Przykład 2

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 10 cm, a krawędź boczna – 13 cm. Oblicz cosinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy:

- jego krawędź boczna,
- wysokość jego ściany bocznej.



a) Kąt między krawędzią boczną SB ostrosłupa a jej rzutem prostokątnym na podstawę (odcinek OB) oznaczono na rysunku przez α . Odcinek OB jest połową przekątnej kwadratu o boku 10 cm, więc $|OB| = 5\sqrt{2}$ cm.

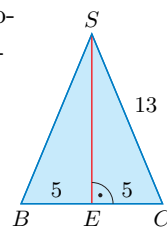
Rozpatrzmy trójkąt OBS :

$$\cos \alpha = \frac{|OB|}{|BS|} = \frac{5\sqrt{2}}{13}$$

b) Kąt między wysokością SE ściany bocznej ostrosłupa a jej rzutem prostokątnym na podstawę (odcinek OE) oznaczono przez β . Na rysunku poniżej przedstawiono ścianę boczną ostrosłupa – jest to trójkąt równoramienny o wysokości SE . Na podstawie twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $|SE|^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, skąd $|SE| = 12$ cm.

Rozpatrzmy trójkąt OES :

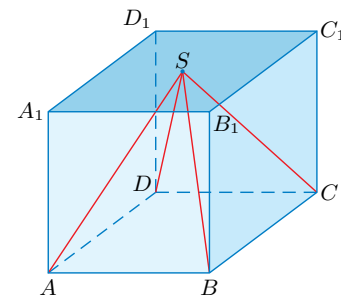
$$\cos \beta = \frac{|OE|}{|SE|} = \frac{5}{12}$$



Ćwiczenie 5

Dolną podstawą sześcianu jest kwadrat $ABCD$. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ będącego górną podstawą sześcianu. Rozpatrzmy ostrosłup o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S . Oblicz sinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy:

- jego krawędź boczna,
- wysokość jego ściany bocznej.



Ćwiczenie 6

a) Oblicz sinus kąta, który krawędź boczna czworoszczanu foremnego tworzy z jego podstawą.

b) Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego pole powierzchni bocznej jest sześć razy większe od pola podstawy. Oblicz sinus kąta, który krawędź boczna tego ostrosłupa tworzy z jego podstawą.

Ćwiczenie 6

a) a – długość krawędzi czworoszczanu

Wysokość czworoszczanu foremnego o krawędzi a : $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

b) a – długość krawędzi podstawy

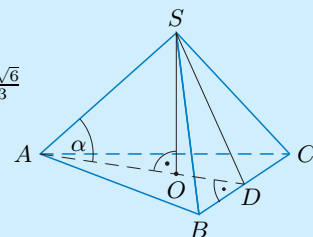
b – długość krawędzi bocznej

h_b – wysokość ściany bocznej, H – wysokość ostrosłupa

$$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a h_b = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ czyli } h_b = a\sqrt{3}$$

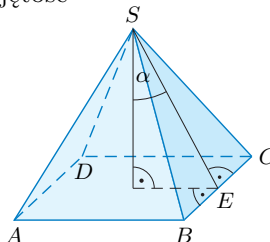
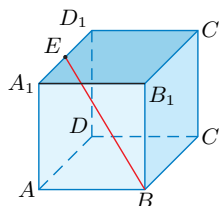
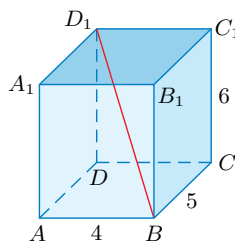
$$H^2 = h_b^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{35a^2}{12}, \text{ czyli } H = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{35}{3}}$$

$$b^2 = H^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{39a^2}{12}, \text{ czyli } b = \frac{a}{2} \sqrt{13}, \sin \alpha = \frac{H}{b} = \frac{\frac{a}{2} \sqrt{\frac{35}{3}}}{\frac{a}{2} \sqrt{13}} = \sqrt{\frac{35}{39}} = \frac{\sqrt{1365}}{39}$$



Zadania

- Dany jest prostopadłościan o wymiarach podanych na rysunku obok. Oblicz sinus kąta zawartego między przekątną BD_1 a płaszczyzną:
 - podstawy $ABCD$,
 - ściany bocznej BCC_1B_1 ,
 - ściany bocznej DCC_1D_1 .
- Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości 2 cm, 3 cm i $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątną tego prostopadłościanu a jego ścianą o największym polu.
- W sześcianie (rysunek obok) punkt E jest środkiem krawędzi A_1D_1 . Oblicz sinus kąta, który odcinek BE tworzy:
 - ze ścianą ABB_1A_1 ,
 - z podstawą $ABCD$.
- Pole podstawy graniastoslupa prawidłowego czworokątnego jest równe 64 cm^2 , a jego przekątna tworzy z podstawą kąt 45° . Oblicz objętość tego graniastoslupa.
 - Przekątna graniastoslupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10 cm i tworzy z podstawą kąt 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa.
- Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $4\sqrt{3}$ cm, a kąt zawarty między wysokością ściany bocznej a podstawą ma miarę 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa.
- W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest równa 6 cm, a kąt między tą wysokością a ścianą boczną ma miarę α (rysunek obok). Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że:
 - $\alpha = 45^\circ$,
 - $\alpha = 30^\circ$.
- Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z podstawą kąt 60° . Oblicz sinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy jego krawędź boczna.
 - Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z podstawą kąt 60° . Oblicz cosinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy wysokość jego ściany bocznej.

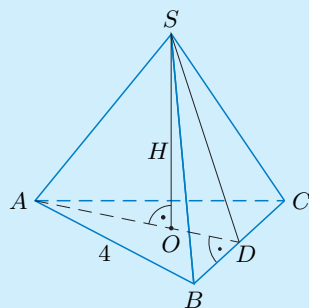


Odpowiedzi do zadań

- $|BD| = \sqrt{41}$, $|BD_1| = \sqrt{77}$
 - $\sin \alpha = \frac{|DD_1|}{|BD_1|} = \frac{6\sqrt{77}}{77}$
 - $\sin \beta = \frac{|C_1D_1|}{|BD_1|} = \frac{4\sqrt{77}}{77}$
 - $\sin \gamma = \frac{|BC|}{|BD_1|} = \frac{5\sqrt{77}}{77}$
- $2 < 3 < 2\sqrt{3}$
 d – długość przekątnej prostopadłościanu
 $d^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2^2 + 3^2) = 25$, czyli $d = 5$ cm
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3^2 + (2\sqrt{3})^2}}{d} = \frac{\sqrt{21}}{5}$
- a – długość krawędzi sześcianu
 $|BE|^2 = |A_1B|^2 + |A_1E|^2$
 $|BE|^2 = (a\sqrt{2})^2 + (\frac{a}{2})^2 = \frac{9a^2}{4}$, czyli $|BE| = \frac{3a}{2}$
 - $\sin \alpha = \frac{|EA_1|}{|EB|} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{3}{2}a} = \frac{1}{3}$
 - E' – środek odcinka AD
 $\sin \alpha = \frac{|EE'|}{|EB|} = \frac{a}{\frac{3}{2}a} = \frac{2}{3}$
- a – długość krawędzi podstawy, H – wysokość graniastoslupa
 - $a = 8$ cm
 $a\sqrt{2} = 8\sqrt{2} = H$
 $V = 64 \cdot 8\sqrt{2} = 512\sqrt{2} \text{ [cm}^3\text{]}$
 - $H = 5$ cm
 $a\sqrt{2} = 5\sqrt{3}$ cm
 $a = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ cm
 $P_c = 2 \cdot \left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot 5 = 25(3 + 2\sqrt{6}) \text{ [cm}^2\text{]}$
- H – wysokość ostrosłupa
 h – wysokość ściany bocznej
 $\frac{H}{2\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$, czyli $H = 2$ cm
 $\frac{2\sqrt{3}}{h} = \cos 30^\circ$, czyli $h = 4$ cm
 $P_c = 16(3 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$
 $V = 32 \text{ cm}^3$
- a – długość krawędzi podstawy
 $\frac{1}{2}a = \tan \alpha$, czyli $a = 12 \tan \alpha$
 - $a = 12 \tan 45^\circ = 12 \text{ [cm]}$
 $V = 288 \text{ [cm}^3\text{]}$
 - $a = 12 \tan 30^\circ = 4\sqrt{3} \text{ [cm]}$
 $V = 96 \text{ [cm}^3\text{]}$

- a – długość krawędzi podstawy
 b – długość krawędzi bocznej
 H – wysokość ostrosłupa
 - $H = \frac{a}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
 $b = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$
 $\sin \alpha = \frac{H}{b} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$
 - $\frac{H}{\frac{1}{2}a\sqrt{2}} = \tan 60^\circ$, czyli $H = \frac{a\sqrt{6}}{2}$
 Wysokość ściany bocznej: $h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$
 $\sin \beta = \frac{\frac{1}{2}a}{h} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

8.



$$|OD| = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ [cm]}$$

$$\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{H} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$H = 2 \text{ cm}$$

$$\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{|SD|} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

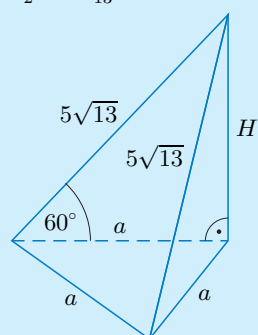
$$|SD| = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$P_c = \frac{16\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

9. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{13}}{13}$

10.



$$\frac{H}{5\sqrt{3}} = \sin 60^\circ,$$

$$\text{czyli } H = \frac{15}{2} \text{ cm}$$

$$\frac{a}{5\sqrt{3}} = \cos 60^\circ,$$

$$\text{czyli } a = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{375\sqrt{3}}{32} \text{ [cm}^3\text{]}$$

14. a) $\frac{3\sqrt{34}}{34}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ 15. a) $P_c = \frac{16(3+2\sqrt{3})}{3}$, $V = \frac{32\sqrt{3}}{9}$ b) $P_c = 18(1+\sqrt{2})$, $V = 9\sqrt{2}$ c) $P_c = 108$, $V = 36\sqrt{3}$

8. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o krawędzi podstawy 4 cm kąt między wysokością ostrosłupa a jego ścianą boczną ma miarę 30° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

9. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy 6 cm i objętości równej $18\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Oblicz cosinus kąta, który z podstawą ostrosłupa tworzy:

a) krawędź boczna,

b) wysokość ściany bocznej.

10. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny. Jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy, a dwie pozostałe krawędzie są do podstawy nachylone pod kątem 60° i mają długość $5\sqrt{3} \text{ cm}$ każda. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

11. Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość d i tworzy z sąsiednią ścianą boczną kąt α . Wyznacz wysokość tego graniastosłupa. Uzasadnij, że zadanie ma rozwiązanie dla $\alpha < 60^\circ$.

Powtórzenie

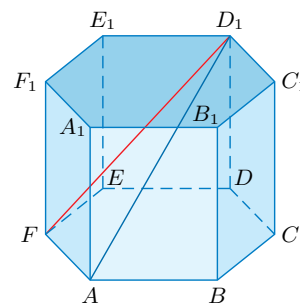
12. Przedstaw na rysunku graniastosłup prawidłowy czworokątny i zaznacz: kąt α między przekątną ściany bocznej a podstawą, kąt β między przekątną graniastosłupa a podstawą, kąt γ między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną.

13. Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy czworokątny i zaznacz: kąt α między krawędzią boczną a podstawą, kąt β między wysokością ostrosłupa a ścianą boczną, kąt γ między wysokością ściany bocznej a podstawą.

14. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy równej 5 i wysokości 6 (rysunek obok).

a) Oblicz sinus kąta, który przekątna AD_1 tworzy z podstawą tego graniastosłupa.

b) Oblicz tangens kąta, który przekątna FD_1 tworzy z podstawą tego graniastosłupa.



15. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym kąt między wysokością ściany bocznej a podstawą ma miarę α , a pole podstawy jest równe P .

a) $\alpha = 30^\circ$, $P = 16$ b) $\alpha = 45^\circ$, $P = 18$ c) $\alpha = 60^\circ$, $P = 36$

11. a – długość krawędzi podstawy

$$\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{d} = \sin \alpha, \text{ czyli } a = \frac{2\sqrt{3}d \sin \alpha}{3}$$

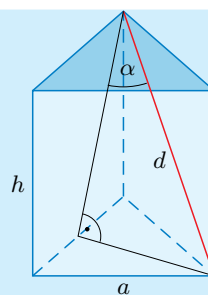
$$h^2 = d^2 - a^2 = d^2 \left(1 - \frac{4\sin^2 \alpha}{3}\right)$$

$$h = d\sqrt{1 - \frac{4\sin^2 \alpha}{3}}$$

$$h > 0, \text{ gdy } 1 - \frac{4}{3}\sin^2 \alpha > 0$$

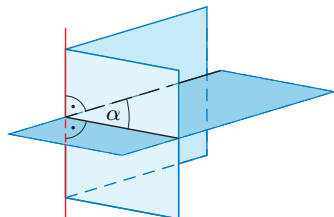
$$\sin^2 \alpha < \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ i } \sin \alpha > -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ oraz } \alpha \in (0^\circ; 90^\circ), \text{ czyli } \alpha \in (0^\circ; 60^\circ)$$



2.8. Kąt dwuścienny

Dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z tych części, łącznie z półpłaszczyznami, nazywamy **kątem dwuściennym**, półpłaszczyzny – **ścianami** tego kąta, a wspólną krawędź półpłaszczyzn – jego **krawędzią**.



Miarą kąta dwuściennego nazywamy miarę kąta płaskiego otrzymanego jako przekrój kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi.

W dalszym ciągu, kiedy będziemy mówić o kącie dwuściennym, będziemy rozważać ten z kątów między półpłaszczyznami, który ma mniejszą miarę.

Przykład 1

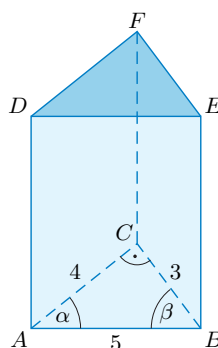
Dany jest graniastosłup prosty trójkątny, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4 i 5. Podaj miary kątów, które tworzą ze sobą ściany boczne tego graniastosłupa.

Ściany $BCFE$ i $ACFD$ tworzą kąt prosty.

Ściany $ABED$ i $ACFD$ tworzą kąt α taki, że:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \text{ więc } \alpha \approx 37^\circ$$

Ściany $ABED$ i $BCFE$ tworzą kąt $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 53^\circ$.



Ćwiczenie 1

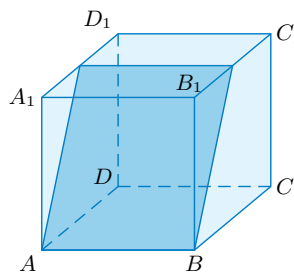
Podaj miarę kąta utworzonego przez dwie sąsiednie ściany boczne graniastosłupa prawidłowego:

- a) trójkątnego, b) pięciokątnego, c) sześciokątnego.

Ćwiczenie 2

Oblicz cosinus kąta, który z podstawą $ABCD$ sześcianu tworzy płaszczyzna przechodząca przez wierzchołki A i B oraz:

- a) środki krawędzi A_1D_1 i B_1C_1 (rysunek obok),
b) środki krawędzi DD_1 i CC_1 .



Uczeń:

- wskazuje kąt między sąsiednimi ścianami wielościanów,
- wyznacza kąt między sąsiednimi ścianami wielościanów,
- rozwiązuje zadania dotyczące miary kąta dwuściennego.

Ćwiczenie 1

- a) 60° b) 108° c) 120°

Ćwiczenie 2

- a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Ćwiczenie 3

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

czyli $\alpha = 30^\circ$

b) $|AB| \cdot \sqrt{2} = 6$,

czyli $|AB| = 3\sqrt{2}$ cm

$\alpha = 45^\circ$, zatem

$|OS| = |OE| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$ [cm³]

Przykład 2

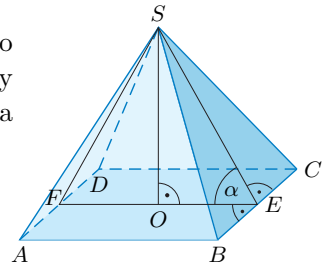
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego wysokość jest równa $5\sqrt{3}$, a krawędź podstawy ma długość 10. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.

Zauważmy, że proste FE i SE są prostopadłe do BC – krawędzi kąta dwuściennego zawartego między ścianą boczną a podstawą ostrosłupa, czyli miara tego kąta jest miarą kąta płaskiego FES .

Zatem szukamy miary kąta α w trójkącie OES :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|OS|}{|OE|} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}, \text{ czyli } \alpha = 60^\circ$$



Ćwiczenie 3

a) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 12 cm, a jego wysokość jest równa $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

b) Przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 cm. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do jego podstawy pod kątem 45° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Przykład 3

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego są trójkątami równobocznymi. Oblicz cosinus kąta, który tworzą dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa.

Szukamy cosinusa kąta BED , gdzie E jest wierzchołkiem kąta płaskiego otrzymanego przez przekrój płaszczyzną prostopadłą do krawędzi kąta dwuściennego zawartego między sąsiednimi ścianami ostrosłupa.

Oznaczmy długość krawędzi ostrosłupa przez a .

Wówczas przekątna podstawy $|DB| = a\sqrt{2}$.

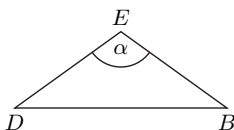
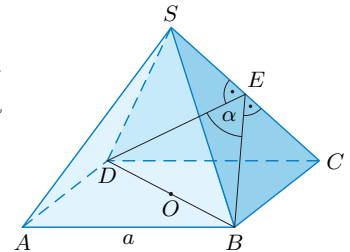
Odcinek EB jest wysokością trójkąta równobocznego BCS o boku a , zatem $|EB| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Podobnie $|ED| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta DBE :

$$(a\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \quad / : a^2$$

$$2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{3} \quad \text{Zauważ, że } \cos \alpha < 0, \text{ więc } \alpha \text{ jest kątem rozwartym.}$$



Ćwiczenie 4

Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od jego krawędzi podstawy. Oblicz cosinus kąta, który tworzą dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa.

Przykład 4

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z jego podstawą kąt 60° (rysunek poniżej). Krawędź podstawy ma długość 6. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym, a punkt O jest środkiem opisanego na nim okręgu, zatem:

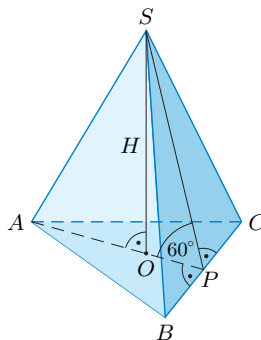
$$|AP| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \quad \text{oraz} \quad |OP| = \frac{1}{3}|AP| = \sqrt{3}$$

Obliczamy wysokość ostrosłupa:

$$H = |OP| \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

Zatem objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = 9\sqrt{3}$$



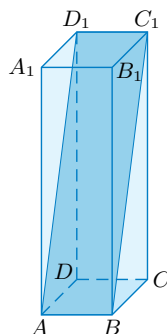
Ćwiczenie 5

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z podstawą kąt 45° . Pole podstawy jest równe $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadania

- Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 7 cm i 24 cm. Oblicz miary kątów zawartych między sąsiednimi ścianami bocznymi tego graniastosłupa.

- Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, którego pole powierzchni bocznej jest równe 480 cm^2 , a pole powierzchni całkowitej – 530 cm^2 . Oblicz sinus kąta, który tworzy płaszczyzna zawierająca krawędzie AB i C_1D_1 tego graniastosłupa (rysunek obok) z jego podstawą.



- a) Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $72\sqrt{3} \text{ cm}^3$, a jego wysokość jest równa 2 cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

- Oblicz cosinus kąta zawartego między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 10 cm, a krawędź boczna – 13 cm.

Ćwiczenie 4

$$h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (2a)^2, \text{ czyli } h_1 = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

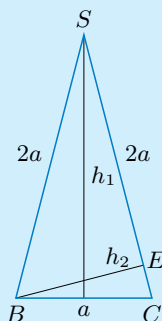
$$\text{Dla trójkąta } BCS: \frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2} \cdot 2ah_2, \text{ czyli } h_2 = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta DBE:

$$(a\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a\sqrt{15}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{15}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{15}}{4}\right)^2 \cdot \cos \alpha$$

$$2 = \frac{15}{8}(1 - \cos \alpha)$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{15}$$



Ćwiczenie 5

a – krawędź podstawy

H – wysokość ostrosłupa

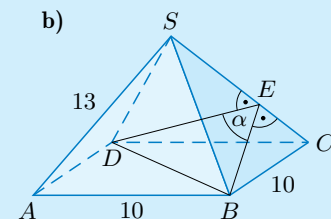
$$a = 4\sqrt[4]{3} \text{ cm}$$

$$\frac{H}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg} 45^\circ, \text{ czyli } H = 2\sqrt[4]{3} \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{32\sqrt[4]{27}}{3} \text{ cm}^3$$

Odpowiedzi do zadań

- 90° , około 74° , około 16°
- $|BC| = 5 \text{ cm}$, $|CC_1| = 24 \text{ cm}$
 $\sin \alpha = \frac{24}{\sqrt{601}} = \frac{24\sqrt{601}}{601}$
- a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa
 a) $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = 72\sqrt{3}$,
 czyli $a = \sqrt{432} = 12\sqrt{3} \text{ [cm]}$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{1}{3}$,
 więc $\alpha \approx 18^\circ$



$$|BD| = 10\sqrt{2}$$

Wysokość ściany bocznej:

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

Z pola ściany bocznej:

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot |BE|,$$

$$\text{czyli } |BE| = \frac{120}{13} = |DE|$$

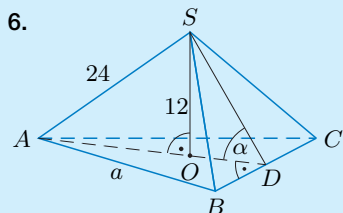
Z twierdzenia cosinusów:

$$(10\sqrt{2})^2 = \left(\frac{120}{13}\right)^2 + \left(\frac{120}{13}\right)^2 +$$

$$- 2 \cdot \frac{120}{13} \cdot \frac{120}{13} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{25}{144}$$

4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
5. $\frac{\sqrt{7}}{7}$



$$\begin{aligned} |AO|^2 &= 24^2 - 12^2 = 432, \\ \text{czyli } |AO| &= 12\sqrt{3} \text{ cm} \\ |AO| &= 12\sqrt{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, \\ \text{skąd } a &= 36 \text{ cm} \\ |OD| &= \frac{1}{3} \cdot \frac{36\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ [cm]} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{12}{6\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,1547 \\ \text{Zatem } \alpha &\approx 49^\circ. \end{aligned}$$

7. a – długość krawędzi czworokątnika

$$|BD| = |CE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Dla trójkąta EDB :

$$\begin{aligned} |DE| &= \sqrt{|BD|^2 - |BE|^2} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \end{aligned}$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta CED :

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \\ &- 2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} - \frac{a^2\sqrt{6}}{2} \cos \alpha$$

$$\frac{a^2\sqrt{6}}{2} \cos \alpha = a^2$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

8. a – krawędź podstawy
 H – wysokość ostrosłupa
 R – promień okręgu opisanego na podstawie

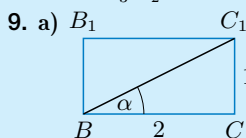
$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 4,$$

$$\text{czyli } a = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(4\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = 20\sqrt{3},$$

$$\text{czyli } H = 5 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{2}$$

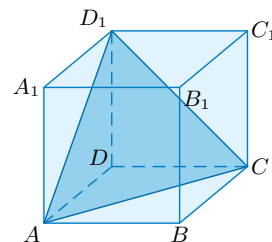


$$|BC_1| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ [cm]}$$

$$\cos \alpha = \frac{|BC|}{|BC_1|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

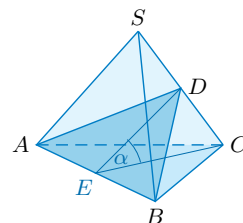
4. Oblicz cosinus kąta, który z podstawą $ABCD$ sześciennu tworzy płaszczyzna zawierająca trójkąt ACD_1 (rysunek obok).



5. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między ścianą boczną a podstawą ma miarę 30° . Oblicz sinus kąta, który tworzy krawędź boczna tego ostrosłupa z jego podstawą.

6. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 24 cm, a jego wysokość jest równa 12 cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

7. Dany jest czworoscian foremny $ABCS$ (rysunek obok). Punkt D jest środkiem krawędzi CS . Oblicz cosinus kąta zawartego między płaszczyzną ABD a płaszczyzną zawierającą podstawę ABC tego ostrosłupa.



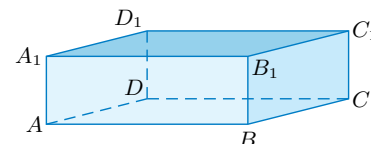
8. Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $20\sqrt{3} \text{ cm}^3$, a koło opisane na jego podstawie ma pole równe $16\pi \text{ cm}^2$. Oblicz tangens kąta zawartego między ścianą boczną tego ostrosłupa a jego podstawą.

Powtórzenie

9. Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości: $|AB| = 3 \text{ cm}$, $|AD| = 2 \text{ cm}$, $|AA_1| = 1 \text{ cm}$ (rysunek obok).

Oblicz cosinus kąta, który z podstawą tego prostopadłościanu tworzy płaszczyzna:

- a) ABC_1D_1 , b) BCD_1A_1 .



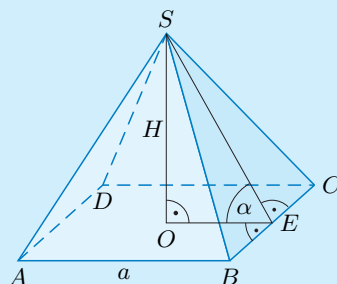
10. Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy czworokątny i zaznacz: kąt α między ścianą boczną a podstawą, kąt β między sąsiednimi ścianami bocznymi, kąt γ między przeciwległymi ścianami bocznymi.

11. Przedstaw na rysunku ostrosłup prawidłowy trójkątny i zaznacz: kąt α między ścianą boczną a podstawą, kąt β między sąsiednimi ścianami bocznymi.

12. Oblicz sinus kąta, który ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z jego podstawą, jeśli wiadomo, że:

- a) krawędź podstawy ma długość 18 cm, a wysokość jest równa 12 cm,
b) wszystkie krawędzie ostrosłupa mają długość 10 cm.

- 12.



a) $|OE| = 9 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} |SE| &= \sqrt{|OS|^2 + |DE|^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \\ &= \sqrt{225} = 15 \text{ [cm]} \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{|OS|}{|SE|} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

b) $|OE| = 5 \text{ cm}$, $|SE| = |AB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ [cm]}$

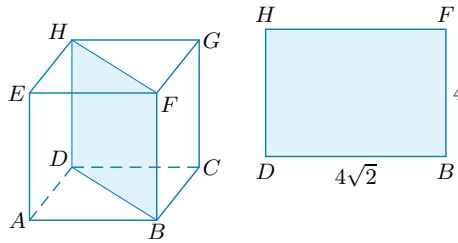
$$\cos \alpha = \frac{|OE|}{|SE|} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

2.9. Przekroje prostopadłościanów

Przykład 1

Sześcian o krawędzi 4 cm przecięto płaszczyzną wyznaczoną przez równoległe przekątne jego podstaw (rysunek obok). Oblicz pole otrzymanego przekroju.

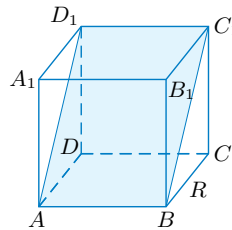


Dany przekrój jest częścią wspólną sześcianu i płaszczyzny przechodzącej przez wierzchołki D , B , F i H – jest to prostokąt o polu:

$$P = 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Ćwiczenie 1

Dany jest sześcian o krawędzi 5 cm (rysunek obok). Oblicz pole przekroju tego sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez punkty A , B i C_1 (rysunek obok).



Przykład 2

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości 8 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i tworzącą z tą podstawą kąt α taki, że $\sin \alpha = \frac{8}{9}$. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Zauważmy, że płaszczyzna przechodząca przez krawędzie AB i C_1D_1 graniastosłupa tworzy z podstawą kąt β (rysunek obok), którego tangens jest równy $\frac{4}{3}$. Zatem $\beta \approx 53^\circ$. Natomiast $\sin \alpha = \frac{8}{9}$, więc $\alpha \approx 62^\circ$. Ponieważ $\alpha > \beta$, przekrój $ABEF$ jest prostokątem, którego jeden bok (EF) jest zawarty w górnej podstawie graniastosłupa.

$|EG| = 8$ cm oraz $\frac{|EG|}{|BE|} = \sin \alpha$, stąd:

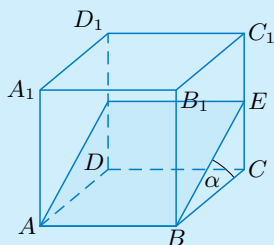
$$|BE| = \frac{|EG|}{\sin \alpha} = \frac{8}{\frac{8}{9}} = 9 \text{ [cm]}$$

Obliczamy pole przekroju: $P_{ABEF} = |AB| \cdot |BE| = 6 \cdot 9 = 54 \text{ [cm}^2\text{]}$.

Ćwiczenie 2

Sześcian o krawędzi 8 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i tworzącą z tą podstawą kąt α . Oblicz pole otrzymanego przekroju, jeśli wiadomo, że: a) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, b) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$, c) $\tan \alpha = \frac{1}{2}$.

c) $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, czyli $\alpha \approx 27^\circ$



$\tan \alpha = \frac{|CE|}{8} = \frac{1}{2}$, czyli $|CE| = 4$ cm

$$|BE| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$P = 32\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

Uczeń:

- wskazuje przekroje prostopadłościanu,
- oblicza pole danego przekroju (również z wykorzystaniem trygonometrii),
- rozwiązuje zadania dotyczące przekrojów prostopadłościanu (również z wykorzystaniem trygonometrii).

Ćwiczenie 1

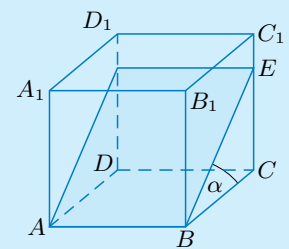
$$|AD_1| = |BC_1| = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$|AB| = |C_1D_1| = 5 \text{ cm}$$

$$P = 25\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

Ćwiczenie 2

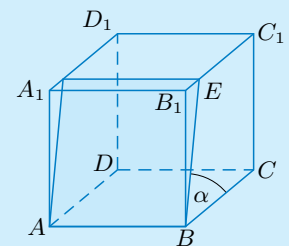
a) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, czyli $\alpha \approx 37^\circ$



$$\cos \alpha = \frac{8}{|BE|} = \frac{4}{5}, \text{ czyli}$$

$$|BE| = 10 \text{ cm}, P = 80 \text{ cm}^2$$

b) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$, czyli $\alpha \approx 78^\circ$



$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{24}{25},$$

$$\text{czyli } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{8}{|BE|} = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

$$\text{czyli } |BE| = \frac{10\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$

$$P = \frac{80\sqrt{6}}{3} \text{ cm}^2$$

Ćwiczenie 3

$$|CC_1| = 8 \text{ cm}, |PC| = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|CC_1|}{|PC|} = \frac{8}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Ćwiczenie 4

$$|DB| = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$|PC| = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\frac{|PC|}{|PQ|} = \cos \alpha,$$

czyli $|PQ| = \frac{5\sqrt{2}}{\cos \alpha}$

a) $|PQ| = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10\sqrt{6}}{3} \text{ [cm]}$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{100\sqrt{3}}{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

b) $|PQ| = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10 \text{ [cm]}$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10 = 50\sqrt{2} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Przykład 3

Oblicz pole przekroju sześcianu o krawędzi 8 cm płaszczyzną BDC_1 (rysunek obok).

Oznaczmy przez P punkt przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$. Wówczas:

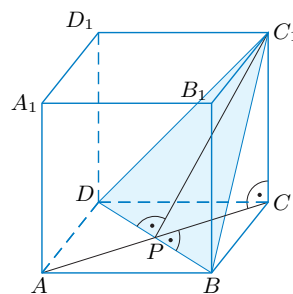
$$|PC| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PCC_1 :

$$|PC_1|^2 = (4\sqrt{2})^2 + 8^2 = 96, \text{ skąd } |PC_1| = 4\sqrt{6} \text{ cm.}$$

Zatem pole przekroju:

$$P_{DBC_1} = \frac{1}{2}|DB| \cdot |PC_1| = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{6} = 32\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$



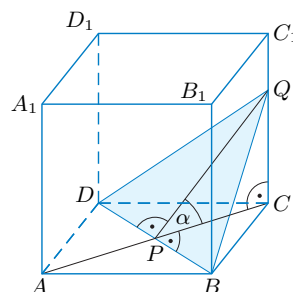
D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że płaszczyzna BC_1D w przykładzie 3 tworzy z podstawą sześcianu kąt α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 4

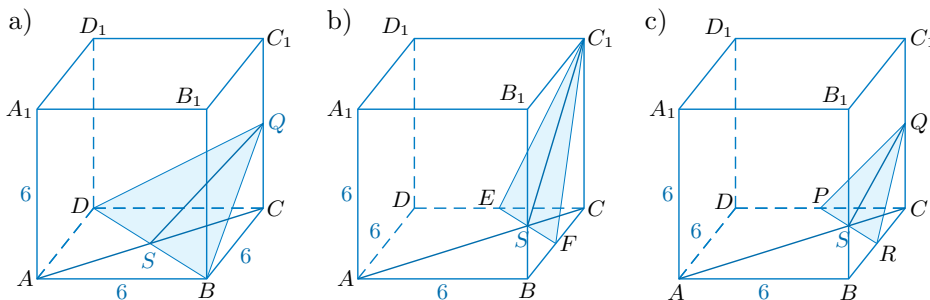
Sześcian o krawędzi 10 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną BD dolnej podstawy oraz punkt Q należący do krawędzi CC_1 (rysunek obok). Płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą kąt α . Oblicz pole otrzymanego przekroju.

- a) $\alpha = 30^\circ$ b) $\alpha = 45^\circ$



Ćwiczenie 5

Oblicz pole przekroju sześcianu przedstawionego na rysunku poniżej, jeżeli wiadomo, że krawędź sześcianu ma długość 6 cm.



Płaszczyzna przekroju przechodzi przez przekątną podstawy DB oraz środek krawędzi CC_1 .

Płaszczyzna przekroju przechodzi przez środki sąsiednich krawędzi CD i BC (odpowiednio punkty E i F) oraz wierzchołek C_1 .

Płaszczyzna przekroju przechodzi przez środki krawędzi CD , BC i CC_1 .

Ćwiczenie 5

a) $|SC| = \frac{1}{2}|AC| = 3\sqrt{2} \text{ cm}$

$$|SQ| = \sqrt{|SC|^2 + |CQ|^2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$|DB| = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2} = 9\sqrt{6} \text{ [cm}^2\text{]}$$

b) $|SC| = \frac{1}{4}|AC| = \frac{3}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$

$$|SC_1| = \sqrt{|SC|^2 + |CC_1|^2} = \sqrt{40,5} \text{ cm}$$

$$|EF| = \frac{1}{2}|DB| = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{40,5} \cdot 3\sqrt{2} = 13,5 \text{ [cm}^2\text{]}$$

c) $|SC| = \frac{1}{4}|AC| = \frac{3}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$

$$|SQ| = \sqrt{|SC|^2 + |CQ|^2} = \frac{3}{2}\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$|PR| = \frac{1}{2}|DB| = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{9}{2}\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

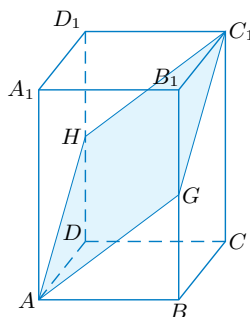
Przykład 4

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 4 cm i wysokości 6 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki A i C_1 oraz punkty G i H będące odpowiednio środkami krawędzi BB_1 i DD_1 (rysunek obok). Oblicz obwód otrzymanego przekroju.

Otrzymany w przekroju czworokąt AGC_1H jest rombem (uzasadnij). Obliczamy długość boku tego rombu:

$$|AG| = \sqrt{|AB|^2 + |BG|^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ [cm]}$$

Zatem obwód przekroju jest równy 20 cm.

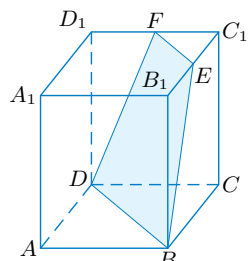


Ćwiczenie 6

Sześcian $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ o krawędzi 4 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki A i C_1 oraz środki krawędzi BB_1 i DD_1 . Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Przykład 5

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 10 cm i wysokości 12 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i środki dwóch krawędzi górnej podstawy (rysunek obok). Otrzymany przekrój jest trapezem. Oblicz jego obwód.



Długości podstaw tego trapezu:

$$|DB| = 10\sqrt{2} \text{ cm}, |EF| = \frac{1}{2}|DB| = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

Długości ramion: $|BE| = |DF| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ [cm]}$.

Obwód trapezu: $Ob = 10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 2 \cdot 13 = 26 + 15\sqrt{2} \text{ [cm]}$.

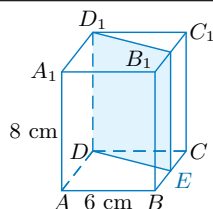
Ćwiczenie 7

Sześcian o krawędzi 8 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i środki dwóch krawędzi górnej podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Zadania

- Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny (rysunek obok). Oblicz pole przekroju tego graniastosłupa płaszczyzną przechodzącą przez:

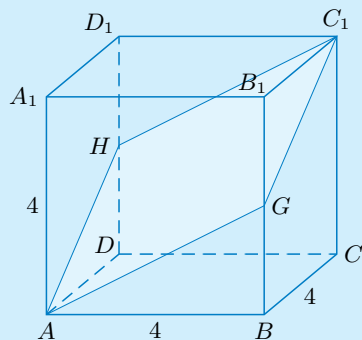
- krawędź DD_1 i środek krawędzi BC ,
- środki krawędzi wychodzących z wierzchołka A .



Odpowiedzi do zadań

- Dla trójkąta CDE : $|DE|^2 = 6^2 + 3^2 = 45$, czyli $|DE| = 3\sqrt{5} \text{ cm}$.
 $P = 3\sqrt{5} \cdot 8 = 24\sqrt{5} \text{ [cm}^2\text{]}$
 - Przekrojem jest trójkąt o bokach: $3\sqrt{2} \text{ cm}$, 5 cm, 5 cm. Zatem:
 $P = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{41}}{2} \text{ [cm}^2\text{]}$

Ćwiczenie 6



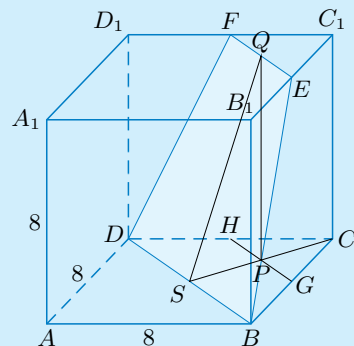
Otrzymany przekrój jest rombem.

$$|HG| = |DB| = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$|AC_1| = \sqrt{|AC|^2 + |CC_1|^2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$P = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{6} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Ćwiczenie 7



$$|BD| = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$|EF| = \frac{1}{2}|BD| = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$|SP| = \frac{1}{4}|AC| = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$|SQ| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 8^2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$P = \frac{(4\sqrt{2} + 8\sqrt{2}) \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 72 \text{ [cm}^2\text{]}$$

2. Suma pól jest najmniejsza dla cięcia przechodzącego przez przekątną ściany o wymiarach $4 \text{ dm} \times 5 \text{ dm}$, a największa – dla cięcia przechodzącego przez przekątną ściany o wymiarach $3 \text{ dm} \times 4 \text{ dm}$.
3. $V_{DEFG_1} =$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |DE| \cdot |DF| \cdot |DG| =$
 $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} |DA| \cdot \frac{1}{2} |DC| \cdot \frac{1}{2} |DD_1| =$
 $= \frac{1}{48} |DA| \cdot |DC| \cdot |DD_1| = \frac{1}{48} V$
 Objętość większej części:
 $V - \frac{1}{48} V = \frac{47}{48} V$
 Szukany stosunek: $\frac{\frac{47}{48} V}{\frac{1}{48} V} = 47$
4. a) Przekrojem jest romb.
 $Ob = 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \text{ [cm]}$
 Trójkąt ACC_1 :
 $|AC_1|^2 = (4\sqrt{2})^2 + 8^2 = 96$
 $|AC_1| = 4\sqrt{6} \text{ cm}$
 $P = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{2} =$
 $= 16\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$
 b) $Ob = 20 \text{ cm}$,
 $P = 4\sqrt{34} \text{ cm}^2$
5. a) $|BE| = |DF| =$
 $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$
 $|BD| = 6\sqrt{2} \text{ cm}$
 $|EF| = \frac{1}{2} |BD| = 3\sqrt{2} \text{ cm}$
 $Ob = (10 + 9\sqrt{2}) \text{ cm}$
 b) $|SP| = \frac{1}{4} |AC| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$
 $\text{tg } \alpha = \frac{|PQ|}{|SP|} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$
6. Trójkąty P_1BP_2 , P_2CP_3 , P_3GP_4 , P_4HP_5 , P_5EP_6 , P_6AP_1 są prostokątne równoramienne o ramionach długości $\frac{a}{2}$, zatem:
 $|P_1P_2| = |P_2P_3| = |P_3P_4| =$
 $= |P_4P_5| = |P_5P_6| = |P_6P_1|$,
 czyli jest to sześciokąt foremny.
 $|P_1P_2|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$
 $P = 6 \cdot \frac{\frac{a^2}{2} \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$

2. Kłosek o wymiarach $3 \text{ dm} \times 4 \text{ dm} \times 5 \text{ dm}$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątne jego przeciwległych ścian i otrzymano dwie części, każda o kształcie graniastosłupa trójkątnego. Dla jakiego cięcia suma pól powierzchni całkowitych tych graniastosłupów jest najmniejsza, a dla jakiego – największa?

3. Płaszczyzna przechodząca przez środki krawędzi wychodzących z wierzchołka D dzieli prostopadłościan (rysunek obok) na dwa wielościany. Oblicz stosunek objętości większego z tych wielościanów do objętości mniejszego wielościanu.

4. Prostopadłościan (rysunek obok) przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi BB_1 i DD_1 . Oblicz obwód i pole otrzymanego przekroju, jeśli wiadomo, że należą do niego również punkty:

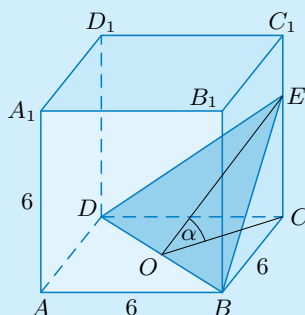
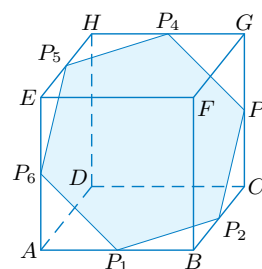
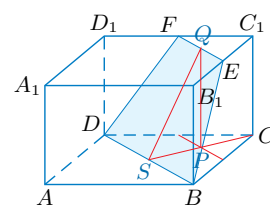
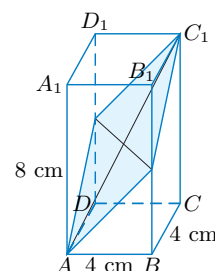
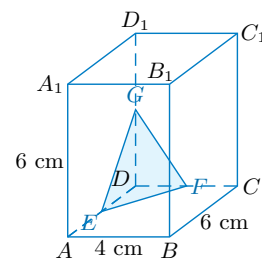
- a) A i C_1 ,
 b) P i Q , gdzie P jest takim punktem krawędzi AA_1 , że $|PA| = \frac{1}{8} |AA_1|$, a Q – takim punktem krawędzi CC_1 , że $|QC| = \frac{7}{8} |CC_1|$.

5. Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości 4 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki B i D oraz środki krawędzi B_1C_1 i D_1C_1 (rysunek obok). Oblicz:

- a) obwód otrzymanego przekroju,
 b) tangens kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą tego graniastosłupa.

6. Przekrojem sześcianu o krawędzi a jest sześciokąt $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, którego wierzchołki są środkami odpowiednich krawędzi sześcianu (rysunek obok). Uzasadnij, że otrzymany sześciokąt jest foremny. Wyznacz jego pole.

7. Sześcian o krawędzi 6 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i tworzącą z tą podstawą kąt α taki, że $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

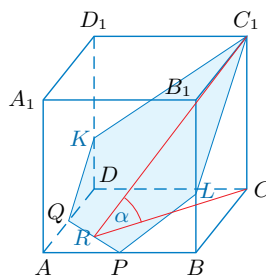


$$|BD| = 6\sqrt{2}, |OC| = \frac{1}{2} |AC| = 3\sqrt{2}$$

$$\frac{|OC|}{|OE|} = \cos \alpha = \frac{2}{3}, \text{ czyli } |OE| = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

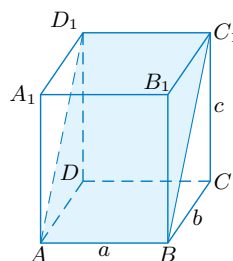
$$P = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} = 27$$

8. Sześcian o krawędzi 4 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy (punkty P i Q na rysunku obok) oraz wierzchołek C_1 . Płaszczyzna ta tworzy z podstawą kąt α . Oblicz cosinus kąta α .



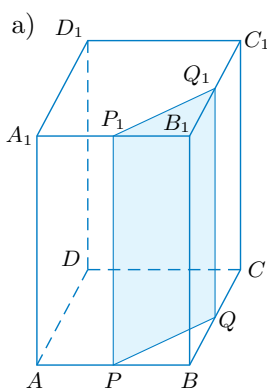
Powtórzenie

9. Prostopadłościan o wymiarach $a \times b \times c$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędzie AB i C_1D_1 (rysunek obok). Oblicz pole otrzymanego przekroju oraz sinus kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą.

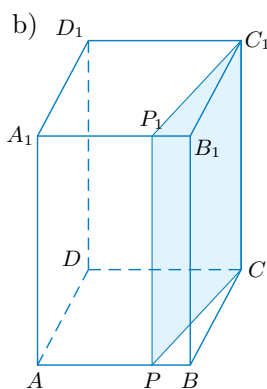


- a) $a = 3$ cm, $b = 2$ cm, $c = 4$ cm
b) $a = 7$ cm, $b = 10$ cm, $c = 24$ cm

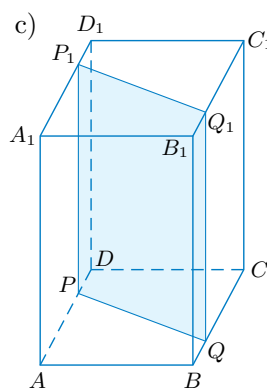
10. Na poniższym rysunku przedstawiono przekrój graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 4 cm i wysokości 6 cm płaszczyzną równoległą do krawędzi bocznych. Oblicz pole tego przekroju.



$$|PB| = |QB| = 2 \text{ cm}$$



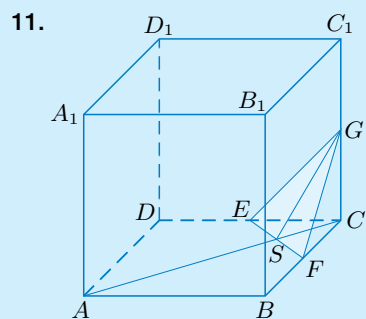
$$|PB| = 1 \text{ cm}$$



$$|PD| = |BQ| = 1 \text{ cm}$$

11. Sześcian o krawędzi 4 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Oblicz pola powierzchni całkowitych i objętości otrzymanych w ten sposób wielościanów.

12. Przekrojem prostopadłościanu o wymiarach 4 cm $\times$ 4 cm $\times$ 6 cm jest trójkąt, którego wierzchołkami są trzy spośród wierzchołków prostopadłościanu. Oblicz pole tego trójkąta.

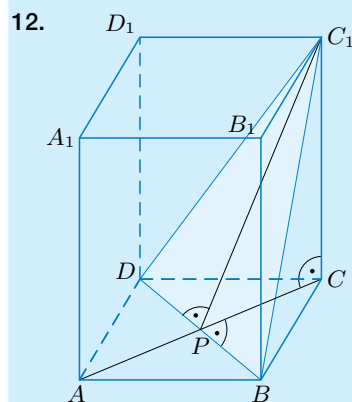


$$\begin{aligned} V_{CEFG} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1\frac{1}{3} [\text{cm}^3] \\ V_2 &= 4^3 - V_{CEFG} = 62\frac{2}{3} [\text{cm}^3] \\ |EF| &= \frac{1}{2}|BD| = 2\sqrt{2} \text{ cm} \\ |SC| &= \frac{1}{4}|AC| = \sqrt{2} \text{ cm} \\ |GS| &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6} \text{ cm} \\ P_{CEFG} &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + 3 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) = 2(3 + \sqrt{3}) [\text{cm}^2] \\ P_{BFGC_1B_1} &= P_{DEGC_1D_1} = P_{ABFED} = \\ &= 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 14 [\text{cm}^2] \\ P_2 &= 3(4 \cdot 4) + 3 \cdot 14 + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \\ &= 2(45 + \sqrt{3}) [\text{cm}^2] \end{aligned}$$

8. $|CR| = \frac{3}{4}|AC| = 3\sqrt{2}$
 $|RC_1| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 4^2} = \sqrt{34}$
 $\cos \alpha = \frac{|CR|}{|RC_1|} = \frac{3\sqrt{17}}{17}$

9. a) $|BC_1| = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} [\text{cm}]$
 $P_{ABC_1D_1} = |AB| \cdot |BC_1| = 3 \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5} [\text{cm}^2]$
 $\sin \angle C_1BC = \frac{|CC_1|}{|BC_1|} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
b) $|BC_1| = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{676} = 26 [\text{cm}]$
 $P_{ABC_1D_1} = |AB| \cdot |BC_1| = 7 \cdot 26 = 182 [\text{cm}^2]$
 $\sin \angle C_1BC = \frac{|CC_1|}{|BC_1|} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$

10. a) $|PQ| = 2\sqrt{2} \text{ cm}$
 $P = 2\sqrt{2} \cdot 6 = 12\sqrt{2} [\text{cm}^2]$
b) $|PC| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} [\text{cm}]$
 $P = \sqrt{17} \cdot 6 = 6\sqrt{17} [\text{cm}^2]$
c) $|QR| = 2 \text{ cm}$
 $|PQ| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} [\text{cm}]$
 $P = 2\sqrt{5} \cdot 6 = 12\sqrt{5} [\text{cm}^2]$



$$\begin{aligned} |PC| &= \frac{1}{2}|AC| = 2\sqrt{2} \text{ cm} \\ |PC_1| &= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 6^2} = 2\sqrt{11} \\ |BD| &= 4\sqrt{2} \text{ cm} \\ P &= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{11} = 4\sqrt{22} [\text{cm}^2] \end{aligned}$$

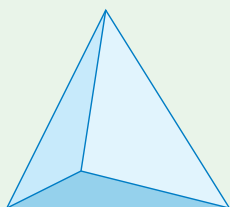
2.10. Zagadnienia uzupełniające

■ Wielościany foremne

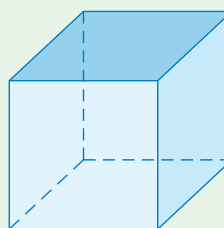


Wielościanem foremnym (bryłą platońską) nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i w każdym wierzchołku zbiega się jednakowa liczba ścian.

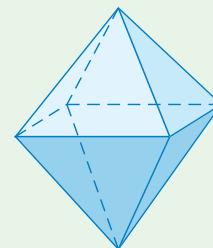
Istnieje pięć wielościanów foremnych. Wszystkie znane były już w starożytności (nazwy greckie podane w nawiasach pochodzą od greckich nazw liczb 4, 6, 8, 12 i 20).



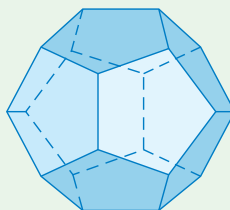
Czworościan foremny (tetraedr) ma cztery ściany będące trójkątami równobocznymi.



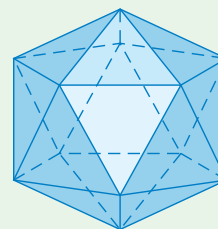
Sześcian (heksaedr) ma sześć ścian będących kwadratami.



Ośmiościan foremny (oktaedr) ma osiem ścian będących trójkątami równobocznymi.

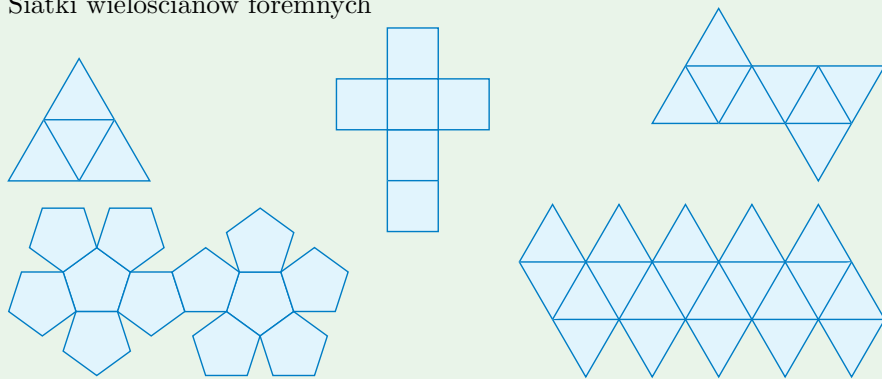


Dwunastościan foremny (dodekaedr) ma dwanaście ścian będących pięciokątami foremnymi.



Dwudziestościan foremny (ikosaedr) ma dwadzieścia ścian będących trójkątami równobocznymi.

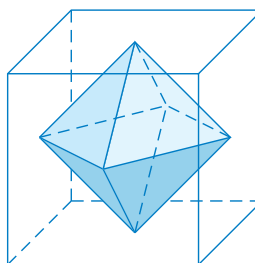
Siatki wielościanów foremnych



1. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i uzupełnij dane dotyczące wielościanów foremnych. Sprawdź, czy dla każdego z tych wielościanów spełniony jest wzór Eulera: $s - k + w = 2$, gdzie s oznacza liczbę ścian, k – liczbę krawędzi, w – liczbę wierzchołków.

Wielościan foremny	Liczba ścian	Liczba krawędzi	Liczba wierzchołków
czworościan	4	6	4
sześcian	6	12	8
ośmiościan	8	12	6
dwunastościan	12	30	20
dwudziestościan	20	30	12

2. Oblicz pole powierzchni i objętość ośmiościanu foremnego, którego krawędź ma długość 4 cm.
3. Łączymy odpowiednio środki ścian sześcianu i otrzymujemy ośmiościan foremnny (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni i objętość tego ośmiościanu, jeśli wiadomo, że krawędź sześcianu ma długość 8 cm.



4. Przekrój ośmiościanu foremnego o krawędzi 6 cm płaszczyzną, która przechodzi przez jego dwa przeciwległe wierzchołki oraz środki dwóch przeciwnych krawędzi, jest rombem. Oblicz pole tego rombu.

Odpowiedzi do zadań

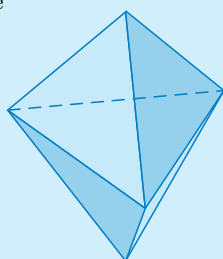
2. $P_c = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $V = \frac{64}{3}\sqrt{2} \text{ cm}^3$
3. $P_c = 64\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $V = 85\frac{1}{3} \text{ cm}^3$
4. $18\sqrt{2} \text{ cm}^2$

5. 2:1

6. $\frac{128}{27}\sqrt{2} \text{ cm}^3$

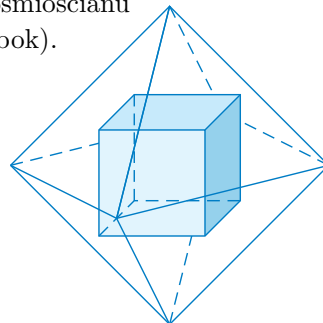
7. a) 4 b) 3 c) 2

8. nie



5. Pole powierzchni czworościanu foremnego jest dwa razy większe od pola powierzchni ośmiościanu foremnego. Oblicz stosunek objętości tych wielościanów.

6. Łączymy odpowiednio środki ciężkości ścian ośmiościanu foremnego i otrzymujemy sześciian (rysunek obok). Oblicz objętość tego sześcianu, jeśli wiadomo, że krawędź ośmiościanu ma długość 4 cm.



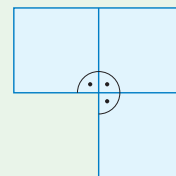
7. Ściany wielościanu foremnego malujemy w ten sposób, aby żadne dwie ściany mające wspólną krawędź nie były tego samego koloru. Jakiej najmniejszej liczby kolorów należy użyć do pomalowania:

a) czworościanu, b) sześcianu, c) ośmiościanu?

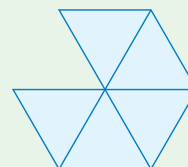
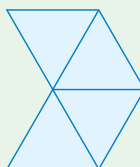
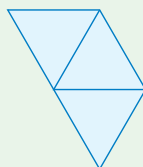
8. Dwa czworościany foremne tej samej wielkości złączono podstawami i w ten sposób otrzymano wielościan o sześciu ścianach. Narysuj otrzymany wielościan. Czy jest on foremny?

■ Dlaczego istnieje tylko pięć wielościanów foremnych?

W każdym wierzchołku wielościanu spotykają się co najmniej jego trzy ściany. Na przykład w sześcianie są to trzy kwadraty – fragment siatki przedstawiający ściany mające wspólny wierzchołek przedstawiono na rysunku obok.

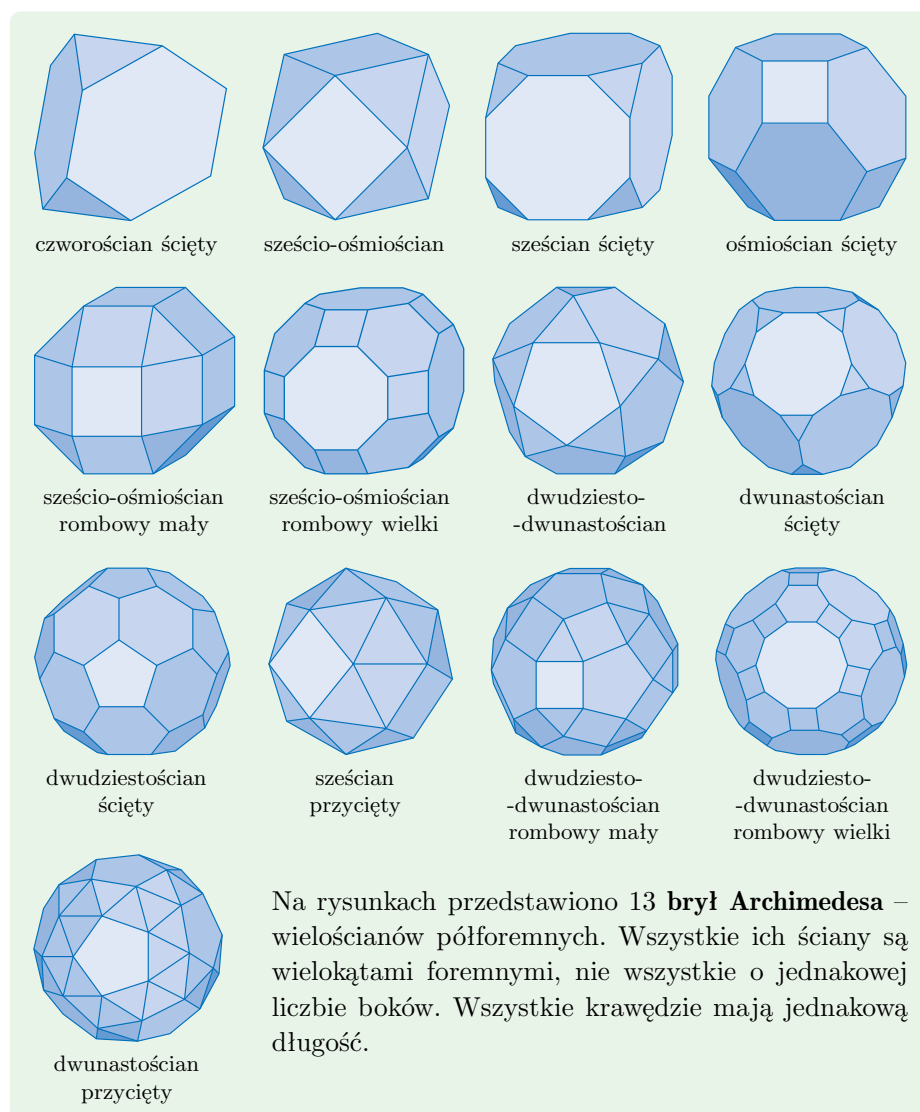


W każdym fragmencie siatki wielościanu, zawierającym ściany mające wspólny wierzchołek, suma kątów przy tym wierzchołku musi być mniejsza od 360° . Zatem jeśli ścianą wielościanu jest trójkąt równoboczny, to przy jednym wierzchołku mogą się znajdować trzy trójkąty (czworościan foremny), cztery trójkąty (ośmiościan foremny) lub pięć trójkątów (dwudziestościan foremny). W przypadku sześciu trójkątów otrzymalibyśmy 360° .



Istnieje tylko jeden wielościan foremny, którego ścianami są pięciokąty i nie istnieją wielościany foremne, których ścianami są n -kąty dla $n > 5$ (uzasadnij). Zatem istnieje tylko pięć wielościanów foremnych.

■ Bryły Archimedesesa



9. Oblicz objętość sześciianu ściętego, którego krawędź ma długość 1 cm.
10. Z sześciianu o krawędzi 3 cm odcięto narożniki i otrzymano sześciian ścięty. Oblicz długość jego krawędzi.

9. $7(1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}) \text{ cm}^3$

10. $3(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 2 b) $4 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $2 - \sqrt{3}$

2. a – długość krawędzi sześcianu

$$a\sqrt{3} = a + 2$$

$$a = \sqrt{3} + 1$$

$$P_c = 12(\sqrt{3} + 2)$$

$$V = 2(5 + 3\sqrt{3})$$

3. a – długość krawędzi podstawy, h – wysokość graniastosłupa

$$\frac{a\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{4}, \text{ czyli } a = \sqrt{2}$$

$$h^2 = 8^2 - (a\sqrt{2})^2 = 60$$

$$h = 2\sqrt{15}, V = 4\sqrt{15}$$

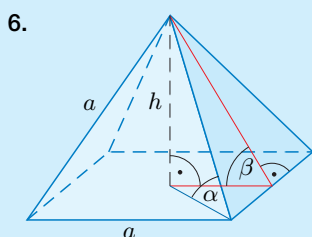
5. a, b – długości krawędzi podstawy, H – wysokość prostopadłościanu

$$P_1 = aH, P_2 = bH \text{ oraz}$$

$$P_3 = ab, \text{ gdzie } a, b, H > 0$$

$$\sqrt{P_1 P_2 P_3} = \sqrt{a^2 b^2 H^2} =$$

$$= abH = V$$



a) $\cos \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos \beta = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

7. a) $P_c = 12(3 + 2\sqrt{3})$

$$V = 12\sqrt{3}$$

b) $P_c = 9(2 + \sqrt{3}), V = 3\sqrt{3}$

c) $P_c = 54(2 + \sqrt{3})$

$$V = 54\sqrt{3}$$

8. $|SA| = |SC| = 5$

$$|SB|^2 = 4^2 + \left(\frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 43$$

$$|SB| = \sqrt{43}$$

Suma długości krawędzi:

$$2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \sqrt{43} =$$

$$= 28 + \sqrt{43}$$

9. $\cos \alpha = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$$\text{czyli } \alpha = 30^\circ$$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego ma długość 2, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe 24. Oblicz wysokość tego graniastosłupa, jeżeli jego podstawą jest:

a) czworokąt, b) trójkąt, c) sześciokąt.

2. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość sześcianu, którego przekątna jest o 2 dłuższa od jego krawędzi.

3. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 i jest nachylona do podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{1}{4}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

4. Spośród wszystkich prostopadłościanów, których suma długości krawędzi wynosi 488 cm, a stosunek długości krawędzi podstawy jest równy 5:4, wybieramy ten o największym polu powierzchni całkowitej. Oblicz pole podstawy tego prostopadłościanu.

- D** 5. Wykaż, że objętość prostopadłościanu wyraża się wzorem $V = \sqrt{P_1 P_2 P_3}$, gdzie P_1, P_2, P_3 są polami jego ścian o wspólnym wierzchołku.

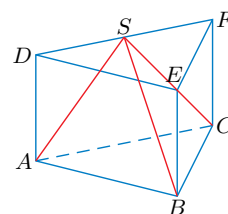
6. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają taką samą długość. Oblicz cosinus kąta nachylenia:

a) krawędzi bocznej do podstawy, b) ściany bocznej do podstawy.

7. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego jest nachylona do podstawy pod kątem 30° , a krawędź podstawy ma długość 6. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa, jeżeli jego podstawą jest:

a) czworokąt, b) trójkąt, c) sześciokąt.

8. Podstawą graniastosłupa prawidłowego jest trójkąt ABC o boku 6 (rysunek obok). Wysokość graniastosłupa jest równa 4. Środek S krawędzi DF połączono odcinkami z wierzchołkami A, B i C . Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa $ABCS$.



9. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6 cm, a wysokość jego ściany bocznej jest równa 2 cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

4. x, y – długości krawędzi podstawy, H – wysokość prostopadłościanu

$$\frac{y}{x} = \frac{5}{4}, \text{ stąd } y = \frac{5}{4}x$$

$$4x + 4y + 4H = 9x + 4H = 488, \text{ stąd } H = 122 - \frac{9}{4}x, \text{ gdzie } x \in (0; 54\frac{2}{9})$$

$$P_c = 2xy + 2xH + 2yH$$

$$P_c(x) = 2x \cdot \frac{5}{4}x + 2x(122 - \frac{9}{4}x) + 2 \cdot \frac{5}{4}x(122 - \frac{9}{4}x) = -\frac{61}{8}x^2 + 549x$$

$$\text{Wartość największa dla } x_w = -\frac{549}{2 \cdot (-\frac{61}{8})} = 36 \text{ [cm].}$$

$$\text{Zatem } x = 36 \text{ cm, } y = 45 \text{ cm, } H = 41 \text{ cm.}$$

$$P_p = 36 \cdot 45 = 1620 \text{ [cm}^2\text{]}$$

■ Zestaw II

1. Ściany boczne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego są kwadratami, każdy o polu równym 3. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa oraz długości jego przekątnych.

2. Wysokość prostopadłościennu jest równa 4, a jego podstawą jest kwadrat o boku 3 (rysunek obok).

D

- a) Uzasadnij, że trójkąt BD_1A_1 jest prostokątny.
b) Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka.

3. W sześcianie o objętości 64 środek S jednej z krawędzi bocznych połączono z wierzchołkami A, B, C, D podstawy. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa $ABCD S$ oraz jego pole powierzchni bocznej.

4. Sześcian o krawędzi długości 1 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki C i D_1 oraz środek krawędzi AD (rysunek obok). Oblicz długości boków trójkąta CD_1E oraz cosinus kąta położonego naprzeciwko najdłuższego boku tego trójkąta.

5. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym pole ściany bocznej jest cztery razy większe od pola podstawy. Oblicz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

6. Wysokość ostrosłupa prawidłowego wynosi 6, a promień okręgu opisanego na jego podstawie jest równy 4. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeżeli jego podstawą jest: a) czworokąt, b) trójkąt, c) sześciokąt.

7. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy większe od jego pola podstawy. Oblicz tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

8. Sześcian o polu powierzchni całkowitej równym 150 cm^2 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy. Płaszczyzna ta tworzy z podstawą kąt α . Oblicz pole otrzymanego przekroju, jeśli:

- a) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Wysokość ostrosłupa: $H = 6$

Promień okręgu opisanego na podstawie: $R = 4$

a – długość krawędzi podstawy

a) $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $a = R\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$, $P_p = a^2 = 32$, $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = 64$

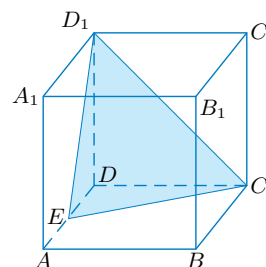
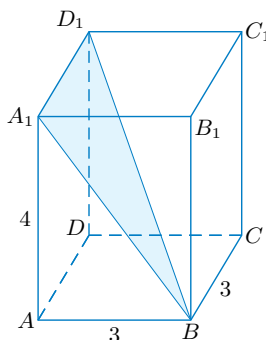
b) $V = 24\sqrt{3}$ c) $V = 48\sqrt{3}$

7. H – wysokość ostrosłupa, h – wysokość ściany bocznej,
 a – długość krawędzi podstawy

$$2a^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ah, \text{ stąd } a = h$$

$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



Odpowiedzi do zadań

1. Krawędź podstawy i wysokość mają długość $\sqrt{3}$.

$$V = 6 \cdot \frac{(\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{27}{2}$$

$$P_c = 2 \cdot 6 \cdot \frac{(\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9(\sqrt{3} + 2)$$

$$d_1^2 = (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 15, \text{ czyli } d_1 = \sqrt{15}$$

$$d_2^2 = 3^2 + (\sqrt{3})^2 = 12, \text{ czyli } d_2 = 2\sqrt{3}$$

2. a) $|A_1B| = 5$

$$|D_1B|^2 = 4^2 + (3\sqrt{2})^2 = 34$$

$$|A_1B|^2 + |A_1D_1|^2 = 5^2 + 3^2 = 34 = |D_1B|^2$$

Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt BD_1A_1 jest prostokątny.

b) $\frac{16}{25}$

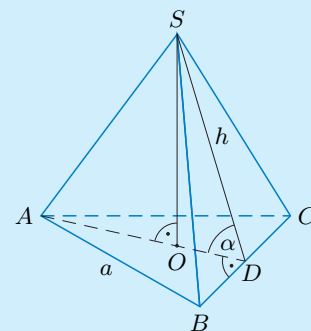
3. $S = 4(6 + \sqrt{5})$, $P_b = 8(1 + \sqrt{5})$

4. $|CD_1| = \sqrt{2}$

$$|CE| = |ED_1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{5}$$

- 5.



$$\frac{1}{2}ah = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, h = 2\sqrt{3}a$$

$$|OD| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{2\sqrt{3}a} = \frac{1}{12}$$

8. a) $\frac{75\sqrt{2}}{4} \text{ cm}^2$ b) $25\sqrt{2} \text{ cm}^2$

c) $\frac{50\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$

**Przykład**

Punkt P jest środkiem krawędzi BC podstawy prostopadłościanu (rysunek obok). Oblicz objętość tego prostopadłościanu, jeżeli wiadomo, że $|PD_1| = 5\sqrt{13}$, $|PC_1| = 3\sqrt{29}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}$.

Niech $x = |PC|$, wówczas $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|CC_1|}{x}$, czyli $|CC_1| = \frac{5}{2}x$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PCC_1 i otrzymujemy:

$$x^2 + \left(\frac{5}{2}x\right)^2 = (3\sqrt{29})^2$$

Stąd $\frac{29}{4}x^2 = 9 \cdot 29$, zatem $x^2 = 36$, czyli $x = 6$.

Obliczamy długości krawędzi prostopadłościanu:

$$|BC| = 2|PC| = 2x = 12$$

$$|CC_1| = \frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \cdot 6 = 15$$

Zauważmy, że prosta D_1C_1 jest prostopadła do ściany BCC_1B_1 , jest więc prostopadła do prostej PC_1 . Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PC_1D_1 :

$$|D_1C_1|^2 + |PC_1|^2 = |PD_1|^2$$

$$|D_1C_1|^2 + (3\sqrt{29})^2 = (5\sqrt{13})^2$$

$$|D_1C_1|^2 + 261 = 325$$

$$|D_1C_1|^2 = 64$$

$$|D_1C_1| = 8$$

Obliczamy objętość prostopadłościanu:

$$V = |BC| \cdot |CC_1| \cdot |D_1C_1| = 12 \cdot 15 \cdot 8 = 1440$$

Odpowiedź: Objętość prostopadłościanu jest równa 1440.

W rozwiązaniu tego zadania można też skorzystać z tożsamości trygonometrycznej $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

Podstawiamy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}$ i otrzymujemy:

Zauważmy, że:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

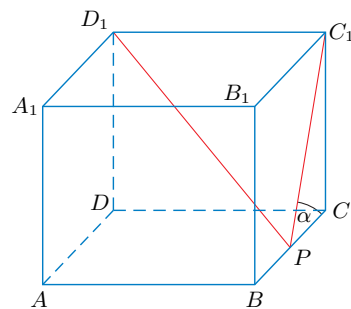
$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{29}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

W trójkącie prostokątnym PCC_1 : $\frac{|PC|}{|PC_1|} = \cos \alpha$, stąd:

$$|PC| = |PC_1| \cdot \cos \alpha = 3\sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = 6$$

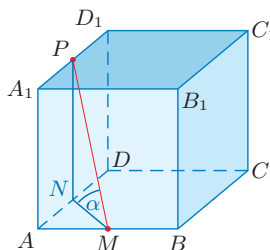
Dalszy ciąg rozwiązania jak wyżej.



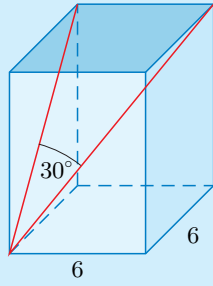
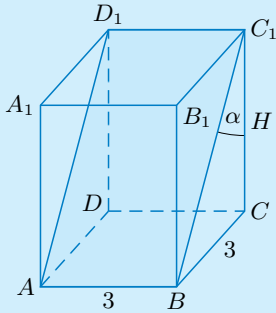


Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszytce. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

- Przekątna graniastoslupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm i jest nachylona do podstawy pod kątem 45° . Pole podstawy tego graniastoslupa jest równe:
A. 32 cm^2 , B. 16 cm^2 , C. 8 cm^2 , D. 4 cm^2 .
- Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku 6 cm, a kąt nachylenia przekątnej prostopadłościanu do ściany bocznej ma miarę 30° . Przekątna ta ma długość:
A. $3\sqrt{2} \text{ cm}$, B. $3\sqrt{3} \text{ cm}$, C. $6\sqrt{3} \text{ cm}$, D. 12 cm .
- Podstawą graniastoslupa prostego jest romb o przekątnych długości 3 i 4. Jeśli przekątna ściany bocznej tego graniastoslupa ma długość $\sqrt{7}$, to jego pole powierzchni całkowitej jest równe:
A. $12\sqrt{3}$, B. $12 + 5\sqrt{3}$, C. $10 + 4\sqrt{3}$, D. 13.
- Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6, a krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 45° . Objętość tego ostrosłupa jest równa:
A. $36\sqrt{2}$, B. $48\sqrt{2}$, C. $72\sqrt{2}$, D. $108\sqrt{2}$.
- Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 3 cm przecięto płaszczyzną zawierającą przeciwległe krawędzie jego podstaw. Otrzymany przekrój tworzy z jedną ze ścian bocznych kąt α taki, że $\cos \alpha = 0,8$. Pole tego przekroju jest równe:
A. 8 cm^2 , B. 9 cm^2 , C. 12 cm^2 , D. 15 cm^2 .
- W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy 2 cm pole podstawy jest dwa razy mniejsze od pola powierzchni bocznej. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe:
A. 12 cm^2 , B. 18 cm^2 , C. $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$, D. $36\sqrt{2} \text{ cm}^2$.
- Punkty M i P są środkami krawędzi sześcianu przedstawionego na rysunku obok. Sinus kąta, który odcinek MP tworzy z podstawą, jest równy:
A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$, B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$, C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$, D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



Odpowiedzi do zadań

- a – długość krawędzi podstawy
 $\frac{a\sqrt{2}}{8} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
zatem $a = 4 \text{ cm}$
 $P_p = 4^2 = 16 [\text{cm}^2]$
- 
- $a = 2,5$, $H = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $P = 2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + 4 \cdot 2,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 + 5\sqrt{3}$
- $H = 3\sqrt{2}$
 $V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$
- 

 $|BC_1| = \sqrt{3^2 + H^2}$
 $\cos \alpha = \frac{H}{\sqrt{3^2 + H^2}} = \frac{4}{5}$,
 czyli $H = 4 \text{ cm}$,
 stąd $|BC_1| = 5 \text{ cm}$
 $P = 3 \cdot 5 = 15 [\text{cm}^2]$

- $P_p = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} [\text{cm}^2]$
 $P_c = P_p + P_b = P_p + 2P_p = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- $|NM| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|PM| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$
 $\sin \alpha = \frac{|PN|}{|PM|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

**Odpowiedzi do zadań**

1. H – wysokość graniastopuła
 d_p – długość przekątnej podstawy graniastopuła
 d – długość przekątnej graniastopuła
 $4^3 = (2\sqrt{2})^2 \cdot H$, $H = 8$ cm
 $d_p = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$ [cm]
 $d^2 = 4^2 + 8^2 = 80$
 Zatem $d = 4\sqrt{5}$ cm.

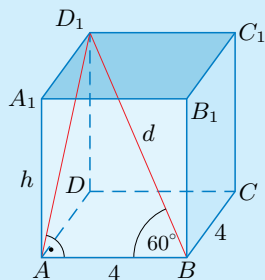
2. 4

3. Długość krawędzi podstawy:
 $2\sqrt{2}$ cm

$$P_c = \frac{(2\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2(\sqrt{3} + 3) \text{ [cm}^2\text{]}$$

4. Długość krawędzi podstawy:
 9 cm
 $V = 9^2 \sin 60^\circ \cdot 12 = 486\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$

5.



$$\frac{|AD_1|}{4} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$|AD_1| = 4\sqrt{3}$$

Dla trójkąta AD_1D :

$$h^2 = (4\sqrt{3})^2 - 4^2 = 32$$

$$h = 4\sqrt{2}$$

$$V = 4^2 \cdot 4\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$$

6. h – wysokość ściany bocznej
 H – wysokość ostrosłupa

$$4 \cdot 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6h,$$

$$\text{czyli } h = 12\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$H = \sqrt{(12\sqrt{3})^2 - \left(\frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 9\sqrt{5} \text{ [cm]}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 9\sqrt{5} = 162\sqrt{15} \text{ [cm}^3\text{]}$$

Zadania krótkiej odpowiedzi**Zadanie 1 (2 pkt)**

Sześcian o krawędzi 4 cm i graniastopuł prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy $2\sqrt{2}$ cm mają taką samą objętość. Oblicz długość przekątnej graniastopuła.

Zadanie 2 (2 pkt)

Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi jego podstawy. Oblicz tangens kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

Zadanie 3 (2 pkt)

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkątami prostokątnymi o przyprostokątnych długości 2 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi**Zadanie 4 (4 pkt)**

Wysokość graniastopuła prostego jest równa 12 cm, a przekątna ściany bocznej ma długość 15 cm. Jego podstawą jest romb o kącie ostrym 60° . Oblicz objętość tego graniastopuła.

Zadanie 5 (4 pkt)

W graniastopu prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy równej 4 przekątna tworzy z tą krawędzią kąt 60° . Oblicz objętość tego graniastopuła.

Zadanie 6 (4 pkt)

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 6 cm, a pole podstawy jest cztery razy mniejsze od pola powierzchni bocznej. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 7 (4 pkt)

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, w którym wysokość ściany bocznej jest równa 10 cm i tworzy z podstawą kąt 45° .

Zadanie 8 (4 pkt)

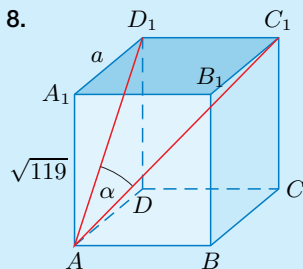
Wysokość graniastopuła prawidłowego czworokątnego jest równa $\sqrt{119}$. Przekątna tego graniastopuła i przekątna jego ściany bocznej, wychodzące z jednego wierzchołka, tworzą kąt, którego tangens jest równy $\frac{5}{12}$. Oblicz objętość tego graniastopuła.

7. a – krawędź podstawy, H – wysokość ostrosłupa, $H = 5\sqrt{2}$ cm

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{2}, \text{ czyli } a = 10\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(10\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{4} \cdot 5\sqrt{2} = 250\sqrt{6} \text{ [cm}^3\text{]}$$

8.



$$|AD_1| = \sqrt{a^2 + 119}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 119}} = \frac{5}{12}, \text{ czyli } a = 5$$

$$V = 25\sqrt{119}$$



3

Bryły obrotowe

W celu zapewnienia bezpiecznego ruchu statków przy podejściach do portów tor wodny jest oznakowany czerwonymi bojami w kształcie walca i zielonymi w kształcie stożka. Stosuje się też boje o innych kształtach i kolorach. Boje malowane w biało-czerwone pasy to znaki bezpiecznej wody – wskazują, że wokół nich woda jest żeglowna. Zwykle boje takie są kuliste, walcowe lub drążkowe. Na zdjęciu boja podejściowa do portu w Gdyni.

Multiteka

- Moc Słońca
- Matematyka w sklepie modelarskim
- Zatankować rakietę
- Lot nad Pacyfikiem
- Gdzie jest najbliższa kawiarnia?

Uczeń:

- wskazuje elementy charakteryzujące walec,
- zaznacza przekrój osiowy walca,
- oblicza pole powierzchni całkowitej walca,
- oblicza objętość walca,
- rozwiązuje zadania dotyczące rozwinięcia powierzchni bocznej walca,
- stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania pola powierzchni i objętości walca,
- rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące walca.

Ćwiczenie 1

a) Podstawa walca jest kołem o promieniu r , więc $P_p = \pi r^2$.

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyźnie jest prostokątem o wymiarach $2\pi r$ i h , więc $P_b = 2\pi rh$.

$$\begin{aligned} \text{Zatem } P_c &= 2P_p + P_b = \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h). \end{aligned}$$

b) $P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 10 = 40\pi$,
gdzie $r > 0$

$$r^2 + 10r - 20 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 6\sqrt{5}$$

$$r_1 = \frac{-10+6\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5} - 5$$

$$r_2 = \frac{-10-6\sqrt{5}}{2} < 0$$

$$r = (3\sqrt{5} - 5) \text{ cm}$$

$$P_p = \pi (3\sqrt{5} - 5)^2 =$$

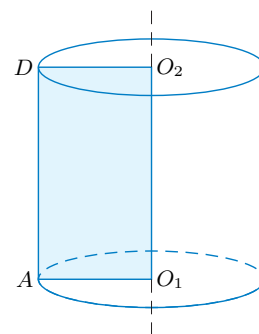
$$= 10\pi (7 - 3\sqrt{5}) [\text{cm}^2]$$

3.1. Walec

Walec to bryła obrotowa otrzymana przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jeden z jego boków. Prostą tę nazywamy **osią** walca.

Dwa koła otrzymane przez obrót dwóch boków prostokąta prostopadłych do osi obrotu nazywamy **podstawami** walca. Dowolny odcinek łączący podstawy walca i do nich prostopadły nazywamy **wysokością** walca. W szczególności odcinki O_1O_2 oraz AD (rysunek obok) są wysokościami walca.

Dowolny odcinek, który łączy dwa punkty z brzegów podstaw walca i jest prostopadły do tych podstaw, nazywamy **tworzącą** walca (np. odcinek AD na rysunku powyżej).

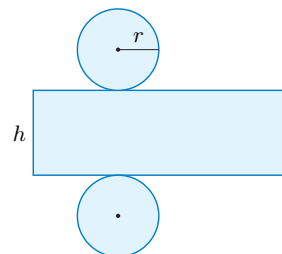


Pole powierzchni całkowitej walca o promieniu podstawy r i wysokości h wyraża się wzorem:

$$P_c = 2P_p + P_b = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

gdzie P_p jest polem podstawy walca,

a P_b – polem jego powierzchni bocznej.



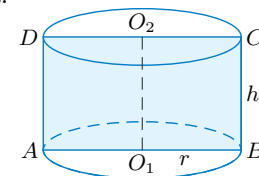
Siatka walca o promieniu podstawy r i wysokości h

Ćwiczenie 1

D a) Uzasadnij wzór na pole powierzchni całkowitej walca.

b) Pole powierzchni całkowitej walca jest równe $40\pi \text{ cm}^2$, a jego wysokość ma 10 cm. Oblicz pole koła będącego podstawą tego walca.

Przekrojem osiowym walca nazywamy przekrój walca płaszczyzną zawierającą jego oś (rysunek obok) – jest to prostokąt o bokach h i $2r$.

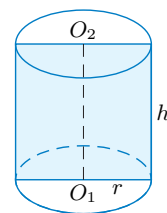


Przykład 1

Oblicz pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o polu równym 36.

Bok kwadratu będącego przekrojem osiowym tego walca ma długość 6, zatem wysokość walca $h = 6$, a promień podstawy $r = 3$, stąd:

$$P_c = 2P_p + P_b = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6 = 54\pi$$



Multiteka

- Walec – konstrukcja, elementy i siatka
- Pole powierzchni całkowitej walca
- Objętość walca – praktyczne zastosowanie
- Przekroje brył obrotowych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.1

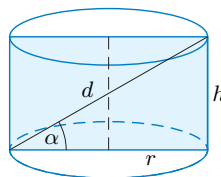
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

- a) Oblicz pole powierzchni całkowitej walca otrzymanego przez obrót prostokąta o bokach 4 cm i 8 cm wokół krótszego boku.
- b) Pole przekroju osiowego walca jest równe 40 cm^2 , a promień jego podstawy ma 4 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

Ćwiczenie 3

a) Przekątna d prostokąta będącego przekrojem osiowym walca ma długość 12 cm i tworzy z jego podstawą kąt $\alpha = 30^\circ$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.



b) Przekątna d prostokąta będącego przekrojem osiowym walca ma długość 26 cm i tworzy z jego podstawą kąt α taki, że $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca.

Objętość walca o promieniu podstawy r i wysokości h wyraża się wzorem:

$$V = P_p \cdot h = \pi r^2 h$$

gdzie P_p jest polem podstawy walca.

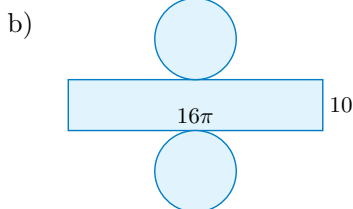
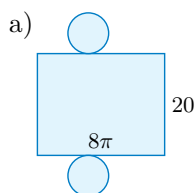
Ćwiczenie 4

Oblicz objętość walca, którego przekrój osiowy jest:

- a) kwadratem o polu 64 cm^2 ,
- b) prostokątem o bokach 6 cm i 8 cm (rozpatrz dwa przypadki).

Ćwiczenie 5

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca, którego siatkę przedstawiono poniżej.



Ćwiczenie 6

- a) Średnica podstawy walca ma 8 cm, a pole jego powierzchni bocznej jest czterokrotnie większe od pola podstawy. Oblicz objętość tego walca.
- b) Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 15 cm i tworzy z jego podstawą kąt α taki, że $\cos \alpha = 0,6$. Oblicz objętość tego walca.

Ćwiczenie 6

- a) $r = 4 \text{ cm}$
 $P_b = 4P_p$
 $2\pi \cdot 4 \cdot h = 4 \cdot \pi \cdot 4^2$
 $h = 8 \text{ cm}$
 $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi \text{ [cm}^3\text{]}$
- b) $\frac{2r}{15} = \cos \alpha = 0,6$
 $r = 4,5 \text{ cm}$
 $h = 12 \text{ cm}$
 $V = \pi \cdot 4,5^2 \cdot 12 = 243\pi \text{ [cm}^3\text{]}$

Ćwiczenie 2

- a) $r = 8 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$
 $P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 192\pi$
- b) $2 \cdot 4h = 40$, $h = 5 \text{ cm}$
 $P_c = 2\pi \cdot 4 \cdot (4 + 5) = 72\pi \text{ [cm}^2\text{]}$

Ćwiczenie 3

- a) $h = 6 \text{ cm}$
 $2r = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$,
czyli $r = 3\sqrt{3} \text{ cm}$
 $P_c = 2\pi \cdot 3\sqrt{3} \cdot (3\sqrt{3} + 6) =$
 $= 18\pi (3 + 2\sqrt{3}) \text{ [cm}^2\text{]}$
- b) $\frac{h}{26} = \sin \alpha = \frac{5}{13}$,
czyli $h = 10 \text{ cm}$
 $2r = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$,
czyli $r = 12 \text{ cm}$
 $P_b = 2\pi \cdot 12 \cdot 10 = 240\pi \text{ [cm}^2\text{]}$

Ćwiczenie 4

- a) $r = 4 \text{ cm}$, $h = 8 \text{ cm}$
 $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi \text{ [cm}^3\text{]}$
- b) I przypadek
 $r = 3 \text{ cm}$, $h = 8 \text{ cm}$
 $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi \text{ [cm}^3\text{]}$

II przypadek

- $r = 4 \text{ cm}$, $h = 6 \text{ cm}$
 $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 96\pi \text{ [cm}^3\text{]}$

Ćwiczenie 5

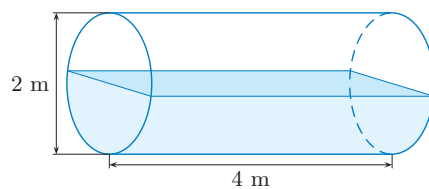
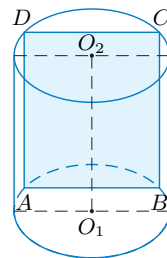
- a) $2\pi r = 8\pi$, czyli $r = 4$
 $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 20 = 320\pi$
 $P_c = 2\pi \cdot 4^2 + 8\pi \cdot 20 = 192\pi$
- b) $2\pi r = 16\pi$, czyli $r = 8$
 $V = \pi \cdot 8^2 \cdot 10 = 640\pi$
 $P_c = 2\pi \cdot 8^2 + 16\pi \cdot 10 = 288\pi$

Odpowiedzi do zadań

- $P_c = 9\pi(\frac{3}{2} + \sqrt{3})$, $V = \frac{81}{4}\pi$
 - $P_c = 8\pi(1 + 2\sqrt{3})$
 $V = 16\sqrt{3}\pi$
 - $P_c = 108\pi$, $V = 108\sqrt{2}\pi$
- $P_c = 320\pi \text{ cm}^2$
 $h = \frac{8}{5}r$
 $4r^2 + \frac{64}{25}r^2 = 20^2$
 $r = \frac{50\sqrt{41}}{41} \text{ cm}$, $h = \frac{80\sqrt{41}}{41} \text{ cm}$
 $P_c = 2\pi \cdot \frac{2500}{41} + 2\pi \cdot \frac{50\sqrt{41}}{41} \cdot \frac{80\sqrt{41}}{41} = \frac{13000}{41}\pi \text{ [cm}^2\text{]}$
 - $P_c = 2\pi \cdot 4\sqrt{6} \cdot (4\sqrt{6} + 4) = 32\pi(6 + \sqrt{6}) \text{ [cm}^2\text{]}$
- $r = h = 14$
 $P_p = 196\pi$, $V = 2744\pi$
- I przypadek**
 $\begin{cases} 2r \cdot h = 144 \\ \frac{h}{2r} = \frac{9}{4} \end{cases}$
 $r = 4$, $h = 18$
 $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 18 = 288\pi \text{ [cm}^3\text{]}$
 $P_c = 2\pi \cdot 4^2 + 2\pi \cdot 4 \cdot 18 = 176\pi \text{ [cm}^2\text{]}$
II przypadek
 $\begin{cases} 2r \cdot h = 144 \\ \frac{2r}{h} = \frac{9}{4} \end{cases}$
 $r = 9$, $h = 8$
 $V = \pi \cdot 9^2 \cdot 8 = 648\pi \text{ [cm}^3\text{]}$
 $P_c = 2\pi \cdot 9^2 + 2\pi \cdot 9 \cdot 8 = 306\pi \text{ [cm}^2\text{]}$
- h – wysokość walca
 r – promień podstawy
Pole powierzchni bocznej:
 $P_b = 2\pi rh$
Pole przekroju osiowego:
 $P = 2rh$
 $\frac{P_b}{P} = \frac{2\pi rh}{2rh} = \pi$
- Walec otrzymany w wyniku obrotu wokół boku a : $r = a$, $h = a$, stąd $V_a = \pi a^2 a$
Walec otrzymany w wyniku obrotu wokół boku b : $r = a$, $h = b$, stąd $V_b = \pi a^2 b$
 $\frac{V_a}{V_b} = \frac{\pi a^3}{\pi a^2 b} = \frac{a}{b} > \frac{a}{a} = 1$, czyli $\frac{V_a}{V_b} > 1$. Zatem $V_a > V_b$.

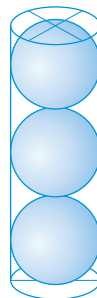
Zadania

- Przekątna przekroju osiowego walca ma długość d i tworzy z jego podstawą kąt α . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego walca.
 - $d = 6$, $\alpha = 30^\circ$
 - $d = 8$, $\alpha = 60^\circ$
 - $d = 12$, $\alpha = 45^\circ$
- Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 20 cm i tworzy z jego podstawą kąt α . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.
 - $\cos \alpha = 0,8$
 - $\tan \alpha = \frac{4}{5}$
 - $\sin \alpha = \frac{1}{5}$
- Pole powierzchni bocznej walca wynosi 392π , a promień jego podstawy i wysokość są równe. Oblicz pole podstawy i objętość tego walca.
- Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest prostokąt o polu 144 cm^2 , jeżeli wiadomo, że stosunek długości boków tego prostokąta jest równy 9:4 (rozpatrz dwa przypadki).
- Uzasadnij, że w każdym walcu stosunek pola powierzchni bocznej do pola przekroju osiowego jest równy π .
- Dany jest prostokąt o bokach a i b , przy czym $a < b$. Wykaż, że walec otrzymany w wyniku obrotu tego prostokąta wokół krótszego boku ma większą objętość od walca otrzymanego w wyniku obrotu wokół dłuższego boku.
- Walec przecięto płaszczyzną równoległą do jego przekroju osiowego i otrzymano prostokąt $ABCD$ (rysunek obok) o polu $20\sqrt{2} \text{ cm}^2$. Trójkąt AO_1B (gdzie O_1 jest środkiem podstawy walca) jest prostokątny. Oblicz pole przekroju osiowego tego walca.
- Odcinek łączący środek dolnej podstawy walca z punktem na brzegu górnej podstawy tworzy z tymi podstawami kąt 60° . Oblicz objętość tego walca, jeśli wiadomo, że:
 - pole jego przekroju osiowego jest równe $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$,
 - przekątna jego przekroju osiowego ma długość 7 cm.
- Zbiornik w kształcie walca o wymiarach przedstawionych na rysunku obok jest w połowie wypełniony wodą. Ile jeszcze litrów wody trzeba wlać do tego zbiornika, aby wypełnić go całkowicie?



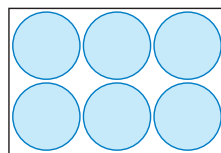
- $|AO_1| = |BO_1| = r$, $\triangle AO_1B$ jest prostokątny, więc $|AB| = r\sqrt{2}$.
 $P_{ABCD} = r\sqrt{2} \cdot h = 20\sqrt{2}$, stąd $rh = 20$
 Pole przekroju osiowego: $P = 2rh = 40 \text{ [cm}^2\text{]}$
- $\frac{h}{r} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, stąd $h = r\sqrt{3}$
 - $2rh = 2\sqrt{3}r^2 = 18\sqrt{3}$, czyli $r = 3 \text{ cm}$, stąd $h = 3\sqrt{3} \text{ cm}$
 $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$
 - $(2r)^2 + h^2 = 7^2$
 $4r^2 + 3r^2 = 49$, czyli $r = \sqrt{7} \text{ cm}$, stąd $h = \sqrt{21} \text{ cm}$
 $V = \pi \cdot (\sqrt{7})^2 \cdot \sqrt{21} = 7\sqrt{21}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$
- $r = 10 \text{ dm}$, $h = 40 \text{ dm}$
 $V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 40 = 2000\pi \approx 6283 \text{ [l]}$

10. W pudełku mającym kształt walca można zmieścić trzy piłki tenisowe o średnicy 6,4 cm każda (rysunek obok). Czy pole powierzchni bocznej tego pudełka jest większe od 3 dm^2 ?
11. Przekrojem osiowym walca jest prostokąt $ABCD$. Długości boków AB i BC oraz przekątnej AC są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz stosunek pola powierzchni bocznej tego walca do pola jego podstawy (rozpatrz dwa przypadki).



12. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem o przekątnej długości 6 tworzącej z jednym z boków prostokąta kąt 60° . Oblicz objętość tego walca.

- D** 13. W prostopadłościennym kartonie umieszczono sześć puszek w kształcie walca o objętości 1 litra i wysokości 10 cm każda (rysunek obok). Wykaż, że pole podstawy kartonu jest większe od 750 cm^2 .



14. Kubek mający kształt walca o średnicy podstawy 8 cm i wysokości 10 cm jest w 90% wypełniony wodą. Wkładamy do niego cztery sześciennie metalowe kostki o krawędzi 2 cm każda. Czy woda z kubka się wyleje (pomiń grubość ścianek kubka)?

Powtórzenie

15. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o polu równym 49 cm^2 . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.
16. Oblicz miarę kąta, który przekątna przekroju osiowego walca tworzy z jego podstawą, jeśli wiadomo, że:
- pole tej podstawy jest równe $9\pi \text{ cm}^2$, a pole powierzchni bocznej jest równe $12\pi\sqrt{3} \text{ cm}^2$,
 - odcinek łączący środek dolnej podstawy z punktem należącym do brzoju górnej podstawy tworzy z podstawą kąt, którego tangens jest równy 2.
17. Pole powierzchni całkowitej walca jest pięć razy większe od pola jego powierzchni bocznej, a przekątna przekroju osiowego ma długość $5\sqrt{13} \text{ cm}$. Oblicz objętość tego walca.

14. Objętość pustej części kubka:
 $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 \cdot 0,1 = 16\pi > 48 [\text{cm}^3]$
 Objętość czterech kostek: $V = 4 \cdot 2^3 = 32 [\text{cm}^3]$
 Woda nie wyleje się z kubka.

15. $h = 7 \text{ cm}$, $r = 3,5 \text{ cm}$
 $V = \pi \cdot 3,5^2 \cdot 7 = 85,75\pi [\text{cm}^3]$
 $P_c = 2\pi \cdot 3,5^2 + 2\pi \cdot 3,5 \cdot 7 = 73,5\pi [\text{cm}^2]$

16. a) $r = 3 \text{ cm}$, $h = 2\sqrt{3} \text{ cm}$
 $\tan \alpha = \frac{h}{2r} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $\alpha = 30^\circ$
 b) $h = 2r$
 $\tan \alpha = \frac{h}{2r} = \frac{2r}{2r} = 1$, czyli $\alpha = 45^\circ$

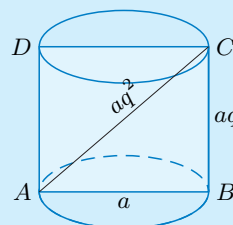
17.
$$\begin{cases} 2\pi r^2 + 2\pi rh = 5 \cdot 2\pi rh \\ (2r)^2 + h^2 = (5\sqrt{13})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 4h \\ (2r)^2 + h^2 = (5\sqrt{13})^2 \end{cases}$$

 $h = \sqrt{5} \text{ cm}$, $r = 4\sqrt{5} \text{ cm}$
 $V = 80\pi\sqrt{5} \text{ cm}^3$

10. tak, $h \geq 3 \cdot 6,4 = 19,2 [\text{cm}]$
 $3 \text{ dm}^2 = 300 \text{ cm}^2$
 $P_b = 2\pi r \cdot h \geq \pi \cdot 6,4 \cdot 19,2 = 122,88\pi > 300 [\text{cm}^2]$
 11. $\frac{P_b}{P_p} = \frac{2\pi rh}{\pi r^2} = \frac{2h}{r}$

I przypadek



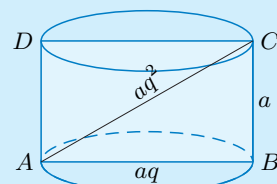
$$a^2 + a^2 q^2 = a^2 q^4, a > 0, q > 0$$

$$q^4 - q^2 - 1 = 0,$$

$$\text{czyli } q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

$$\frac{P_b}{P_p} = \frac{2aq}{\frac{1}{2}a} = 4q = 4\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

II przypadek



$$a^2 + a^2 q^2 = a^2 q^4, a > 0, q > 0,$$

$$\text{czyli } q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

$$\frac{P_b}{P_p} = \frac{2a}{\frac{1}{2}aq} = \frac{4}{q} = \frac{4}{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}$$

$$= \frac{4\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \cdot \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \cdot \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{4} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

12. I przypadek

$$\frac{2\pi r}{6} = \sin 60^\circ, \text{ czyli } r = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$\frac{h}{6} = \cos 60^\circ, \text{ czyli } h = 3$$

$$V = \frac{81}{4\pi}$$

II przypadek

$$\frac{h}{6} = \sin 60^\circ, \text{ czyli } h = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{2\pi r}{6} = \cos 60^\circ, \text{ czyli } r = \frac{3}{2\pi}$$

$$V = \frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$$

13. 1 litr = $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

Objętość jednej puszkki:

$$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot 10 = 1000,$$

$$\text{czyli } r^2 = \frac{100}{\pi}$$

$$P_p \geq 4r \cdot 6r = 24r^2 =$$

$$= \frac{2400}{\pi} > \frac{2400}{3,2} = 750 [\text{cm}^2]$$

Uczeń:

- wskazuje elementy charakteryzujące stożek,
- zaznacza przekrój osiowy stożka i kąt rozwarcia stożka,
- oblicza pole powierzchni całkowitej stożka,
- oblicza objętość stożka,
- rozwiązuje zadania dotyczące rozwinięcia powierzchni bocznej stożka,
- stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania pola powierzchni i objętości stożka,
- rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące stożka.

Ćwiczenie 1

a) Ze wzoru na wycinek koła mamy: $P_b = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi l^2$.

Zauważmy, że $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{2\pi l}$,

czyli $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r}{l}$.

Zatem $P_b = \frac{r}{l} \cdot \pi l^2 = \pi r l$.

b) $r = 9$ cm

$P_b = \pi \cdot 9 \cdot 12 = 108\pi$ [cm²]

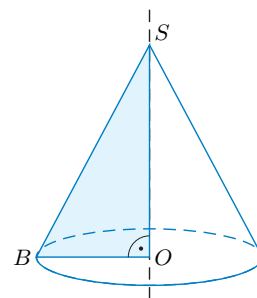
3.2. Stożek

Stożek to bryła obrotowa otrzymana przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych tego trójkąta. Prosta tę nazywamy **osią** stożka.

Koło otrzymane przez obrót drugiej przyprostokątnej nazywamy **podstawą** stożka, a wierzchołek trójkąta nienależący do podstawy – **wierzchołkiem** stożka.

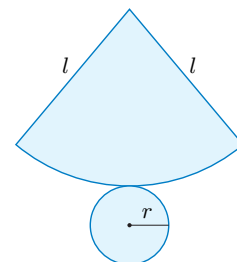
Odcinek łączący wierzchołek stożka ze środkiem podstawy (punkt O na rysunku) nazywamy **wysokością** stożka. Środek podstawy zwany jest też **spodkiem** wysokości stożka. Dowolny odcinek łączący wierzchołek stożka z brzeżem podstawy nazywamy **tworzącą** stożka (np. odcinek SB na rysunku).

Powierzchnią boczną stożka po rozwinięciu jest wycinek koła o promieniu równym tworzącej stożka.



Pole powierzchni bocznej stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l wyraża się wzorem:

$$P_b = \pi r l$$



Siatka stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l

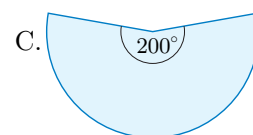
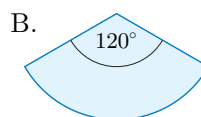
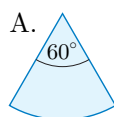
Ćwiczenie 1

- D** a) Uzasadnij wzór na pole powierzchni bocznej stożka.
b) Oblicz pole powierzchni bocznej stożka, którego pole podstawy jest równe 81π cm², a tworząca ma długość 12 cm.

Ćwiczenie 2

Na poniższych rysunkach przedstawiono wycinki kół będące po zwinięciu powierzchniami bocznymi stożków o takiej samej tworzącej.

Który z tych stożków ma najdłuższą wysokość?



Pole powierzchni całkowitej stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l wyraża się wzorem:

$$P_c = P_p + P_b = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$$

gdzie P_p jest polem podstawy stożka.

Ćwiczenie 2

$h = \sqrt{l^2 - r^2}$, tworząca l jest taka sama we wszystkich przypadkach, więc najdłuższa wysokość będzie dla najkrótszego promienia. Zatem najdłuższą wysokość ma stożek A.

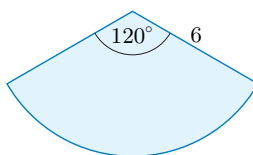
Multiteka

- Stożek – konstrukcja, elementy i siatka
- Pole powierzchni bocznej stożka
- Objętość stożka
- Przekroje brył obrotowych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.2

Ćwiczenie 3

a) Na rysunku obok przedstawiono wycinek koła, który po zwinieniu jest powierzchnią boczną stożka. Oblicz pole podstawy i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

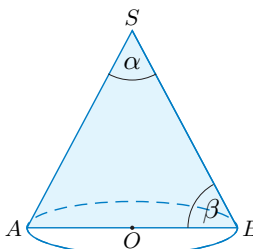


b) Promień podstawy stożka jest równy 4 cm, a jego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest wycinkiem koła wyznaczonym przez kąt środkowy 150° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Ćwiczenie 4

Podstawą stożka jest koło o polu równym $36\pi \text{ cm}^2$, a powierzchnia boczna tego stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu 9 cm wyznaczonym przez kąt środkowy α . Oblicz miarę tego kąta.

Przekrojem osiowym stożka nazywamy przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś. Przekrojem tym jest trójkąt równoramienny. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia** stożka (kąt α na rysunku obok). Kąt między tworzącą stożka a jego podstawą oznaczono na rysunku przez β .



Ćwiczenie 5

Oblicz miarę kąta rozwarcia stożka, którego tworząca ma długość 10 cm, a pole podstawy jest równe $50\pi \text{ cm}^2$.

Objętość stożka o promieniu podstawy r i wysokości h wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie P_p jest polem podstawy stożka.

Objętość stożka jest równa $\frac{1}{3}$ objętości walca o takiej samej podstawie i wysokości.

Ćwiczenie 3

a) $\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{r}{6}$, czyli $r = 2$

$$P_p = \pi r^2 = 4\pi$$

$$P_c = \pi r(r + l) = 16\pi$$

b) $\frac{150^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi l = 2\pi \cdot 4$,

czyli $l = 9,6 \text{ cm}$

$$P_c = \pi r(r + l) = 54,4\pi \text{ cm}^2$$

Ćwiczenie 4

$$r = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi l = 2\pi r$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{6}{9}$$

$$\alpha = 240^\circ$$

Ćwiczenie 5

$$\pi r^2 = 50\pi, \text{ czyli } r = 5\sqrt{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{l} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{czyli } \frac{\alpha}{2} = 45^\circ, \text{ skąd } \alpha = 90^\circ$$

Ćwiczenie 6

a) Oblicz objętość stożka o średnicy podstawy równej 24 cm i wysokości 8 cm.

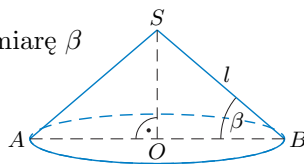
b) Oblicz objętość stożka o tworzącej równej 13 cm i wysokości 12 cm.

Ćwiczenie 7

Kąt między tworzącą l stożka a jego podstawą ma miarę β (rysunek obok). Oblicz objętość tego stożka, jeśli:

a) $\sin \beta = 0,6$, $l = 15 \text{ cm}$,

b) $\text{tg } \beta = 2,4$, $l = 13 \text{ cm}$.



Ćwiczenie 6

a) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 8 = 384\pi \text{ [cm}^3\text{]}$

b) $r = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ [cm]}$, $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi \text{ [cm}^3\text{]}$

Ćwiczenie 7

a) $\sin \beta = \frac{h}{l} = \frac{h}{15} = 0,6$, czyli $h = 9 \text{ cm}$

$$r^2 = l^2 - h^2 = 144$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 144 \cdot 9 = 432\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

b) $\text{tg } \beta = \frac{h}{r} = 2,4$, czyli $h = 2,4r$

$$r^2 + (2,4r)^2 = 13^2, \text{ czyli } r = 5 \text{ cm oraz } h = 12 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

Ćwiczenie 8

a) $l = 2r$

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}, \text{ czyli } l = 8 \text{ cm}$$

Zatem $h = 4\sqrt{3}$ cm i $r = 4$ cm.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{3}}{3}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

b) $r = 3\sqrt{3}$ cm

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 27 \cdot h = 27\pi,$$

czyli $h = 3$ cm

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{r} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Ćwiczenie 9

a) $\frac{1}{2}l^2 = 8$, czyli $l = 4$ cm

$$r = h = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{32\sqrt{2}}{3}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

b) $r = 4, h_1 = 3, h_2 = 2\sqrt{5}$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 + \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{5} = 16\pi\left(\frac{2\sqrt{5}}{3} + 1\right)$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $P_p = 4\pi \text{ cm}^2$

$$V = \frac{8}{3}\pi\sqrt{35} \text{ cm}^3$$

b) $P_p = 36\pi \text{ cm}^2$

$$V = 72\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

c) $P_p = 64\pi \text{ cm}^2$

$$V = \frac{256}{3}\pi\sqrt{5} \text{ cm}^3$$

d) $P_p = 81\pi \text{ cm}^2$

$$V = 81\pi\sqrt{7} \text{ cm}^3$$

Ćwiczenie 8

a) Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu równym $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz objętość tego stożka.

b) Pole podstawy stożka jest równe $27\pi \text{ cm}^2$, a jego objętość jest równa $27\pi \text{ cm}^3$. Oblicz miarę kąta między tworzącą stożka a jego podstawą.

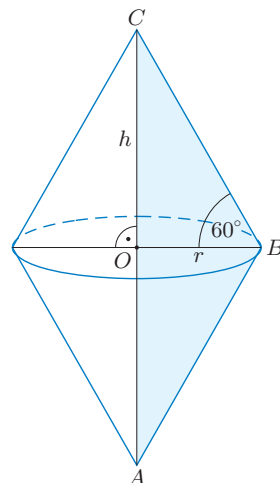
Przykład 1

W trójkącie równoramiennym ABC kąt przy wierzchołku B ma miarę 120° oraz $|AB| = |BC| = 6$ cm. Bryła, która powstała przez obrót tego trójkąta wokół najdłuższego boku, to dwa stożki połączone podstawami (rysunek obok). Oblicz objętość tej bryły.

$$r = |OB| = 3 \text{ cm oraz } h = |OC| = 3\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Obliczamy objętość otrzymanej bryły:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

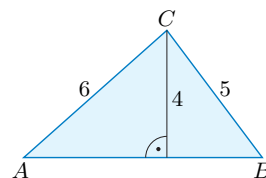


Ćwiczenie 9

Oblicz objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu:

a) trójkąta prostokątnego równoramiennego o polu równym 8 cm^2 wokół jego przeciwprostokątnej,

b) trójkąta ABC (rysunek obok) wokół jego najdłuższego boku.



Zadania

1. Powierzchnią boczną stożka po rozwinięciu jest wycinek koła o promieniu 12 cm wyznaczony przez kąt środkowy α . Oblicz pole podstawy i objętość tego stożka.

a) $\alpha = 60^\circ$ b) $\alpha = 180^\circ$ c) $\alpha = 240^\circ$ d) $\alpha = 270^\circ$

2. a) Powierzchnią boczną stożka po rozwinięciu jest wycinek koła o promieniu 15 cm wyznaczony przez kąt środkowy α . Podstawę tego stożka można wyciąć z kwadratu o boku 6 cm. Wyznacz największą możliwą miarę kąta α .

b) Oblicz pole przekroju osiowego stożka, którego podstawą jest koło opisane na kwadracie o boku 5 cm, a sinus kąta między tworzącą a wysokością stożka jest równy $\frac{2}{3}$.

2. a) $\frac{\alpha}{360^\circ}\pi \cdot 15^2 = \pi r \cdot 15$

$$\alpha = \frac{r}{15} \cdot 360^\circ$$

Kąt α jest największy, gdy promień r jest największy, czyli dla $r = 3$ cm. Zatem $\alpha = 72^\circ$.

$$\text{b) } r = \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\frac{\frac{5}{2}\sqrt{2}}{l} = \frac{2}{3}, \text{ czyli } l = \frac{15}{4}\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{5}{4}\sqrt{10} \text{ [cm]}$$

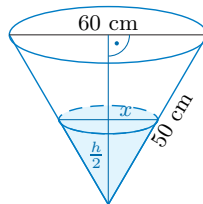
$$P = \frac{1}{2} \cdot 2rh = \frac{25\sqrt{5}}{4} \text{ [cm}^2\text{]}$$

3. a) Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt prostokątny o polu 18 cm^2 . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego stożka.
 b) Pole powierzchni bocznej stożka jest dwukrotnie większe od pola jego podstawy. Oblicz miarę kąta rozwarcia tego stożka.
 c) Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120° , a pole jego podstawy jest równe $108\pi \text{ cm}^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

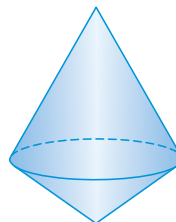
4. a) Kąt rozwarcia stożka ma miarę 60° , a pole jego powierzchni bocznej jest równe $8\pi \text{ cm}^2$. Oblicz objętość tego stożka.
 b) Kąt rozwarcia stożka ma miarę 30° , a jego podstawa ma pole równe $(18 - 9\sqrt{3})\pi \text{ cm}^2$. Oblicz pole przekroju osiowego i objętość tego stożka.

5. Dany jest stożek o polu powierzchni bocznej $2\pi\sqrt{2} \text{ cm}^2$ i polu powierzchni całkowitej $\frac{2\pi}{\sqrt{2}-1} \text{ cm}^2$. Oblicz miarę kąta między tworzącą tego stożka a jego podstawą.

6. Poziom wody w zbiorniku w kształcie stożka sięga połowy jego wysokości (rysunek obok). Ile litrów wody znajduje się w zbiorniku? Na jaką wysokość sięgałaby woda, gdyby zajmowała połowę objętości zbiornika?



7. Dwa stożki mają identyczne podstawy o polu $16\pi \text{ cm}^2$. Stożki te złączone podstawami i otrzymano bryłę przedstawioną na rysunku. Jej przekrojem osiowym jest deltoid o polu 60 cm^2 .

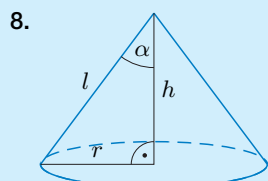


- a) Oblicz objętość tej bryły.
 b) Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły, jeśli wiadomo, że wysokość jednego stożka jest dwukrotnie dłuższa od wysokości drugiego.

- D** 8. Wykaż, że stosunek pola podstawy stożka do pola jego powierzchni bocznej jest równy sinusowi kąta między tworzącą a wysokością tego stożka.

Powtórzenie

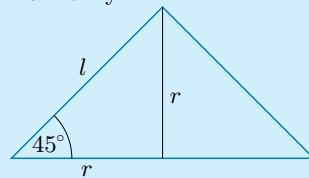
9. Oblicz różnicę objętości stożka o średnicy podstawy 12 cm i wysokości 6 cm oraz stożka o średnicy podstawy 6 cm i wysokości 12 cm.
 10. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka o kącie rozwarcia 60° i wysokości równej $4\sqrt{3} \text{ cm}$.
 11. Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe $96\pi \text{ cm}^2$, a średnica jego podstawy ma 12 cm. Oblicz objętość tego stożka.



$$\frac{P_p}{P_b} = \frac{\pi r^2}{\pi r l} = \frac{r}{l} = \sin \alpha$$

9. $V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 6 - \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 36\pi [\text{cm}^3]$
 10. $r = 4 \text{ cm}$ oraz $l = 8 \text{ cm}$, zatem $P = \pi \cdot 4(4 + 8) = 48\pi [\text{cm}^2]$
 11. $r = 6 \text{ cm}$, $P_c = \pi \cdot 6(6 + l) = 96\pi$, czyli $l = 10 \text{ cm}$, stąd $h = 8 \text{ cm}$
 $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi [\text{cm}^3]$

3. a) Przekrojem osiowym jest trójkąt prostokątny równoramienny.



$$h = r \text{ oraz } l = r\sqrt{2}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = 18,$$

czyli $r = 3\sqrt{2} \text{ cm}$, stąd

$$h = 3\sqrt{2} \text{ cm oraz } l = 6 \text{ cm}$$

$$P_c = 3\sqrt{2}\pi (3\sqrt{2} + 6) =$$

$$= 18\pi (1 + \sqrt{2}) [\text{cm}^2]$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot 3\sqrt{2} =$$

$$= 18\sqrt{2}\pi [\text{cm}^3]$$

- b) $\pi r l = 2\pi r^2$, czyli $l = 2r$
 Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym, zatem kąt rozwarcia ma miarę 60° .

$$c) P_p = \pi r^2 = 108\pi$$

więc $r = 6\sqrt{3} \text{ cm}$

$$\sin 60^\circ = \frac{r}{l}, \text{ skąd } l = 12 \text{ cm}$$

$$P_b = \pi r l = 72\pi\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$P_c = 36\pi(3 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

4. a) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} =$
 $= \frac{8\sqrt{3}\pi}{3} [\text{cm}^3]$

$$b) r^2 = 9(2 - \sqrt{3})$$

Z twierdzenia cosinusów:

$$(2r)^2 = l^2 + l^2 - 2l^2 \cos 30^\circ$$

$$l^2 = \frac{4r^2}{2 - \sqrt{3}} = 36$$

Pole przekroju:

$$P = \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot \sin 30^\circ = 9 \text{ cm}^2$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}$$

$$V = \frac{9}{2}\pi(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ cm}^3$$

5. 45°

6. $h = 4 \text{ dm}$, $x = 1,5 \text{ dm}$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 1,5^2 \cdot 2 = 1,5\pi [l]$$

Objętość całego zbiornika:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi [l]$$

H – szukana wysokość wody

R – promień zbiornika przy wysokości H

$$\frac{R}{H} = \frac{3}{4}, \text{ stąd } R = \frac{3}{4}H$$

$$\frac{1}{2}V = 6\pi = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{3}{4}H\right)^2 \cdot H,$$

$$\text{czyli } H = 2\sqrt[3]{4} \text{ dm}$$

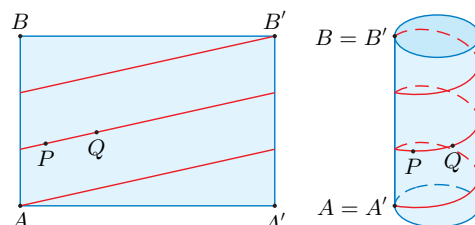
7. a) $80\pi \text{ cm}^3$

$$b) 4\pi(2\sqrt{29} + \sqrt{41}) \text{ cm}^2$$

Linie geodezyjne

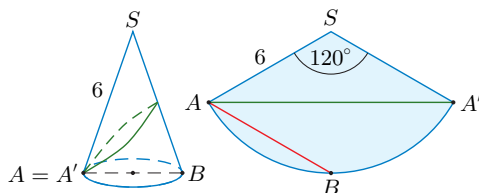
Najkrótsza linia na powierzchni bryły łącząca dwa punkty nazywa się **linią geodezyjną**.

Po zwinieciu prostokąta przedstawionego na rysunku obok w powierzchnię boczną walca otrzymujemy na powierzchni tego walca tzw. **linię śrubową** (zaznaczoną kolorem czerwonym). Nazwa tej krzywej pochodzi stąd, że wzdłuż linii śrubowej nacinany jest gwint śruby. Zauważmy, że dla punktów P i Q położonych na powierzchni walca tak jak na powyższym rysunku najkrótsza droga między tymi punktami prowadzi wzdłuż linii śrubowej.



Przykład 1

Przekrojem osiowym stożka o tworzącej równej 6 jest trójkąt ABS (rysunek obok). Powierzchnią boczną tego stożka po rozwinięciu jest wycinek koła wyznaczony przez kąt środkowy 120° . Najkrótsza droga z punktu A do punktu B poprowadzona po powierzchni bocznej stożka (kolor czerwony) ma długość 6. Długość najkrótszej pętli poprowadzonej po powierzchni bocznej stożka, zaczynającej się i kończącej w punkcie A (kolor zielony), jest równa $6\sqrt{3}$.

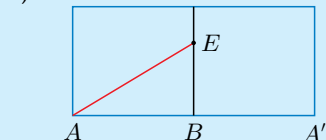


Odpowiedzi do zadań

1. $|BE| = 8$, $|CE| = 4$,
 $|AD| = 12$

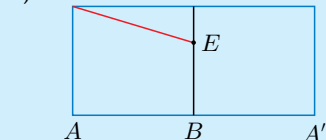
Długość półokręgu AB : 6π

a)



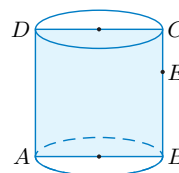
$$\begin{aligned} |AE| &= \sqrt{|AB|^2 + |BE|^2} = \\ &= \sqrt{(6\pi)^2 + 8^2} = \\ &= 2\sqrt{9\pi^2 + 16} \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} |DE| &= \sqrt{|DC|^2 + |CE|^2} = \\ &= \sqrt{(6\pi)^2 + 4^2} = 2\sqrt{9\pi^2 + 4} \end{aligned}$$

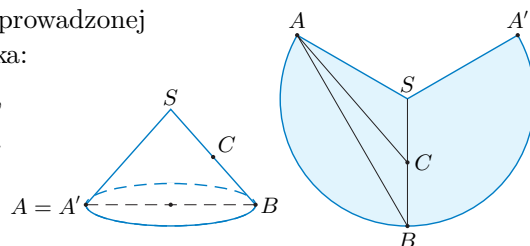
1. Przekrój osiowy walca jest kwadratem $ABCD$ o boku 12. Na boku BC wybrano punkt E taki, że $|BE| = 2|CE|$ (rysunek obok). Oblicz długość najkrótszej drogi poprowadzonej po powierzchni bocznej walca z punktu E do punktu: a) A , b) D .



2. Przekrojem osiowym stożka o promieniu podstawy 8 i wysokości $4\sqrt{5}$ jest trójkąt ABS . Punkt C jest środkiem odcinka BS (rysunek poniżej). Oblicz długość najkrótszej drogi poprowadzonej po powierzchni bocznej stożka:

a) z punktu A do punktu B ,

b) z punktu A do punktu C .



2. $|AS| = |BS| = \sqrt{8^2 + (4\sqrt{5})^2} = 12$,

Długość łuku $|ASA'|$: $\frac{8}{12} \cdot 360^\circ = 240^\circ$

a) Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla $\triangle ABS$:

$$|AB|^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cos 240^\circ = 432$$

$$|AB| = 12\sqrt{3}$$

b) $|SC| = \frac{1}{2}|BS| = 6$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla $\triangle ACS$:

$$|AC|^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cos 240^\circ = 252$$

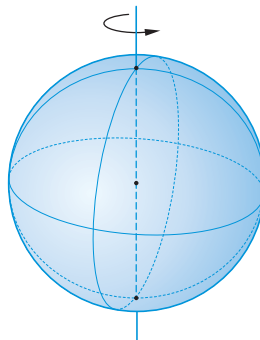
$$|AC| = 6\sqrt{7}$$

3.3. Kula

Kula to bryła obrotowa otrzymana przez obrót koła wokół prostej zawierającej jego średnicę.

Kula o środku w punkcie O i promieniu $r > 0$ jest zbiorem punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r .

Sfera o środku w punkcie O i promieniu $r > 0$ jest zbiorem punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest równa r (sfera jest powierzchnią kuli).

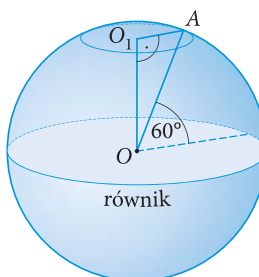


Każdy przekrój kuli płaszczyzną, która ma więcej niż jeden punkt wspólny z tą kulą, jest kołem. Jeśli płaszczyzna ta przechodzi przez środek kuli, to przekrój ten nazywamy **kołem wielkim**.

Przykład 1

Przyjmując, że Ziemia jest kulą, oblicz stosunek długości równoleżnika przechodzącego przez punkty o szerokości geograficznej 60° do długości równika.

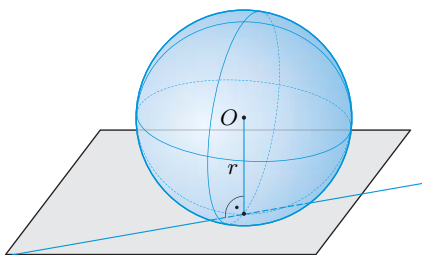
W trójkącie OO_1A mamy $|OA| = 2|O_1A|$ (rysunek obok). Stosunek długości okręgów jest równy stosunkowi długości ich promieni, więc szukany stosunek długości równoleżnika 60° do długości równika jest równy $1:2$.



Ćwiczenie 1

- Kulę o promieniu 10 cm przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest kołem o środku oddalonym od środka kuli o 7 cm. Oblicz pole tego koła.
- Kulę o promieniu 5 cm przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest kołem o polu równym $16\pi \text{ cm}^2$. Oblicz odległość środka tego koła od środka kuli.

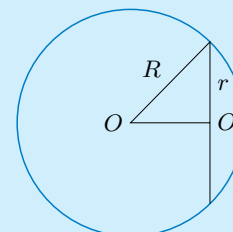
Jeśli płaszczyzna ma z kulą dokładnie jeden punkt wspólny, to mówimy, że ta płaszczyzna jest **styczna** do kuli. Promień poprowadzony ze środka kuli do punktu styczności jest prostopadły do płaszczyzny stycznej.



Uczeń:

- wskazuje elementy charakteryzujące kulę i sferę,
- zaznacza przekroje kuli,
- oblicza pole powierzchni kuli i jej objętość,
- stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania pola powierzchni i objętości kuli,
- rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące kuli.

Ćwiczenie 1



- $R = 10 \text{ cm}$, $|OO_1| = 7 \text{ cm}$
 $r^2 = 10^2 - 7^2 = 51$
 $P = 51\pi \text{ cm}^2$
- $R = 5 \text{ cm}$, $r = 4 \text{ cm}$
 $|OO_1|^2 = 5^2 - 4^2 = 9$,
 czyli $|OO_1| = 3 \text{ cm}$

Multiteka

- Pole powierzchni kuli
- Przekroje brył obrotowych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 3.3

Generator
testów i sprawdzianów

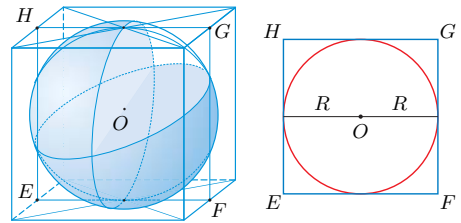
Ćwiczenie 2

- a) $R = \frac{a}{2}$
 b) Promień sfery jest równy połowie długości przekątnej sześcianu, czyli $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ćwiczenie 2

Punkt O jest środkiem sześcianu (punktem przecięcia przekątnych sześcianu) o krawędzi a . Oblicz promień sfery o środku w punkcie O :

- a) stycznej do wszystkich ścian tego sześcianu (rysunek obok),
 b) zawierającej wszystkie wierzchołki tego sześcianu.



Przykład 2

Pole powierzchni kuli jest równe $144\pi \text{ cm}^2$.
 Oblicz objętość tej kuli.

Obliczamy promień kuli:

$$P = 4\pi r^2 = 144\pi$$

stąd $r^2 = 36$, czyli $r = 6 \text{ cm}$.

Zatem objętość kuli:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi [\text{cm}^3]$$

Pole powierzchni kuli o promieniu r wyraża się wzorem:

$$P = 4\pi r^2$$

Objętość kuli o promieniu r wyraża się wzorem:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ćwiczenie 3

- a) $P = 9\pi \text{ cm}^2$, $V = \frac{9}{2}\pi \text{ cm}^3$
 b) $P = 12\pi \text{ cm}^2$, $V = 4\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$
 c) $P = 32\pi \text{ cm}^2$, $V = \frac{64\sqrt{2}}{3}\pi \text{ cm}^3$

Ćwiczenie 3

Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o promieniu r .

- a) $r = \frac{3}{2} \text{ cm}$ b) $r = \sqrt{3} \text{ cm}$ c) $r = 2\sqrt{2} \text{ cm}$

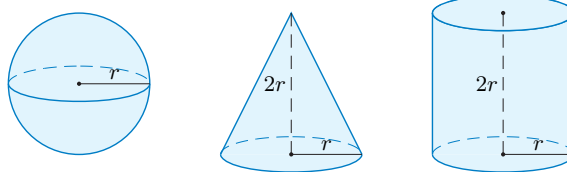
Ćwiczenie 4

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Promień kuli	6	3	8	2	0,9
Pole powierzchni kuli	144π	36π	256π	16π	$3,24\pi$
Objętość kuli	288π	36π	$\frac{2048}{3}\pi$	$\frac{32}{3}\pi$	$0,972\pi$

D Ćwiczenie 5

Dane są kula, stożek i walec o wymiarach takich jak na rysunku poniżej. Uzasadnij, że suma objętości kuli i stożka jest równa objętości walca.



Ćwiczenie 5

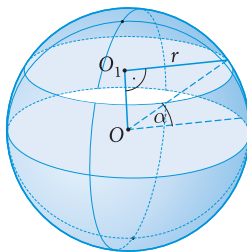
$$V_K + V_S = \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r = \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right)\pi r^3 = 2\pi r^3$$

$$V_W = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$$

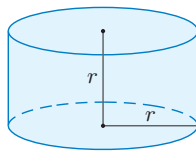
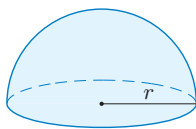
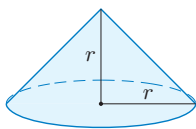
$$V_K + V_S = V_W$$

Zadania

- Kulę o środku O przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkt O_1 (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni i objętość tej kuli, jeśli:
 - $\sin \alpha = 0,5$ i $|OO_1| = 2\sqrt{3}$ cm,
 - $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$ i $|OO_1| = 6$ cm,
 - $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ i $|OO_1| = 2\sqrt{5}$ cm.
- Kulę o promieniu 8 cm przecięto dwiema równoległymi płaszczyznami i otrzymano w przekrojach koła o promieniach 3 cm i 4 cm. Oblicz odległość między tymi płaszczyznami (rozpatrz dwa przypadki).
- Kulę o środku O przecięto płaszczyzną i otrzymano w przekroju koło o środku S . Oblicz:
 - objętość kuli, jeśli $|OS| = \sqrt{2}$, a pole przekroju jest równe 25π ,
 - pole przekroju, jeśli $|OS| = 2\sqrt{3}$, a objętość kuli jest równa $108\sqrt{3}\pi$.
- Dane są dwie kule o promieniach 3 cm i 5 cm oraz wspólnym środku. Oblicz pole przekroju utworzonego przez przecięcie większej kuli płaszczyzną styczną do mniejszej kuli.
 - Dane są dwie kule o promieniach 6 cm i r cm oraz wspólnym środku. Pole przekroju utworzonego przez przecięcie większej kuli płaszczyzną styczną do mniejszej kuli jest równe 9π cm². Oblicz r (rozpatrz dwa przypadki).
- Do powierzchni kuli należą wszystkie wierzchołki pewnego sześcianu. Oblicz pole powierzchni tej kuli, jeśli wiadomo, że:
 - pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 96 cm²,
 - przekątna sześcianu ma długość 12 cm,
 - objętość sześcianu jest równa 125 cm³.

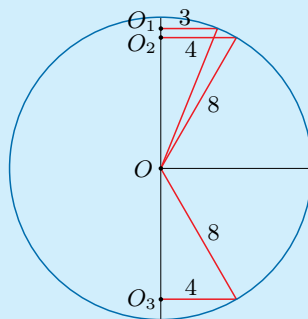


- D** 6. Na rysunku poniżej przedstawiono stożek, półkulę i walec. Wszystkie bryły mają taką samą podstawę, a wysokości stożka i walca są równe promieniowi półkuli. Uzasadnij, że objętości tych brył są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.



- $|OO_1| = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55}$ [cm]
 $|OO_2| = |OO_3| = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ [cm]
 $|O_1O_2| = |OO_1| - |OO_2| = (\sqrt{55} - 4\sqrt{3})$ cm
 lub
 $|O_1O_3| = |OO_1| + |OO_3| = (\sqrt{55} + 4\sqrt{3})$ cm

- Objętość stożka: $V_S = \frac{1}{3}\pi r^3$
 Objętość półkuli: $V_P = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$
 Objętość walca: $V_W = \pi r^3$
 $V_W - V_P = V_P - V_S = \frac{1}{3}\pi r^3$, zatem jest to ciąg arytmetyczny o różnicy $\frac{1}{3}\pi r^3$.



Odpowiedzi do zadań

- $R = 4\sqrt{3}$ cm
 $P = 192\pi$ cm²
 $V = 256\pi\sqrt{3}$ cm³
 - $r = 8$ cm
 $R = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ [cm]
 $P = 400\pi$ cm²
 $V = \frac{4000}{3}\pi$ cm³
 - $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
 $\sin \alpha = \frac{|OO_1|}{R}$
 $R = 6$ cm
 $P = 144\pi$ cm², $V = 288\pi$ cm³
- r – promień kuli
 R – promień przekroju
 - $\pi R^2 = 25\pi$, czyli $R = 5$
 $r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 5^2} = 3\sqrt{3}$
 $V = \frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3})^3 = 108\sqrt{3}\pi$
 - $\frac{4}{3}\pi r^3 = 108\sqrt{3}\pi$,
 czyli $r = 3\sqrt{3}$
 $R^2 = (3\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 15$
 $P = 15\pi$
- $r = 4$ cm, $P = 16\pi$ cm²
 b) Promień przekroju: 3 cm
I przypadek – większa kula ma promień 6 cm
 $r = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ [cm]
II przypadek – większa kula ma promień r cm
 $r = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ [cm]
- 48π cm²
 - 144π cm²
 - 75π cm²

7. r – promień kuli

- a) a – długość krawędzi sześciangu

Objętości brył są równe, czyli objętość kuli:

$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3 = a^3,$$

$$\text{stad } r^3 = \frac{3}{4\pi}a^3$$

$$\text{Zatem } r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}a}.$$

Pole kuli:

$$P_K = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2}a^2} =$$

$$= \sqrt[3]{64\pi^3 \cdot \frac{9}{16\pi^2}a^2} = \sqrt[3]{36\pi}a^2$$

Stosunek pól:

$$\frac{P_K}{P_S} = \frac{\sqrt[3]{36\pi}a^2}{6a^2} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$$

- b) R – promień podstawy walca, H – wysokość walca

$$H = 2R$$

Objętość walca:

$$V_W = \pi R^2 \cdot H = 2\pi R^3$$

Objętości brył są równe, czyli objętość kuli:

$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi R^3,$$

$$\text{stad } r^3 = \frac{3}{2}R^3.$$

$$\text{Zatem } r = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}R.$$

8. a) Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym, czyli wysokość i promień stożka są równe.

$$\frac{V_K}{V_S} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r} = 4$$

- b) Promień rozwarcia stożka jest równy 120° , czyli:

$$\frac{r}{h} = \tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\text{stad } h = \frac{\sqrt{3}}{3}r.$$

$$\frac{V_K}{V_S} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}r} = 4\sqrt{3}$$

9. R – promień kuli
 h – wysokość stożka
 l – tworząca stożka

$$\frac{\pi r l}{\pi r^2} = \frac{l}{r} = 2,6, \text{ czyli } l = 2,6r$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = 2,4r$$

Objętość stożka:

$$V_S = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2,4r = \frac{4}{5}\pi r^3$$

Objętość kuli:

$$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{5}\pi r^3,$$

$$\text{czyli } R = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}r$$

- D** 7. a) Sześciang z brązu przetopiono na kulę. Wykaż, że stosunek pola powierzchni tej kuli do pola powierzchni sześciangu jest równy $\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$.

- b) Metalowy walec, którego przekrój osiowy jest kwadratem, przetopiono na kulę. Wykaż, że promień tej kuli jest równy $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ promienia podstawy walca.

8. Promień kuli jest równy promieniowi podstawy stożka. Oblicz stosunek objętości kuli do objętości stożka, którego:

- a) przekrojem osiowym jest trójkąt prostokątny,

- b) kąt rozwarcia ma miarę 120° .

9. Kula i stożek mają równe objętości. Promień podstawy stożka jest równy r , a stosunek jego pola powierzchni bocznej do pola podstawy wynosi 2,6. Wyznacz promień kuli.

10. Środek sfery o promieniu r_1 należy do sfery o promieniu r_2 . Oblicz długość okręgu będącego częścią wspólną obu tych sfer.

- a) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 3$ cm

- b) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 2\sqrt{3}$ cm

Archimedes (ok. 287–ok. 212 r. p.n.e.) jest uważany za jednego z najwybitniejszych matematyków i fizyków starożytnej Grecji. Sformułował między innymi wzory na pole powierzchni i objętość walca oraz kuli. Podał również przybliżoną wartość liczby π :

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$



Powtórzenie

11. Oblicz pole powierzchni i objętość kuli, jeśli wiadomo, że:

- a) jej średnica jest równa $6\sqrt{2}$ cm,

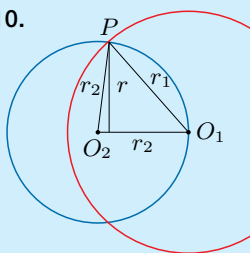
- b) pole koła wielkiego tej kuli jest równe 81π cm²,

- c) obwód koła wielkiego tej kuli jest równy $\sqrt{2}\pi$ cm.

12. a) Kulisty balon ma promień równy 20 cm. Po dopompowaniu powietrza promień balonu zwiększył się o 25%. O ile wzrosło jego pole powierzchni?

- b) Z kulistego balonu o promieniu równym 20 cm spuszczało częściowo powietrze. Promień balonu zmniejszył się o 25%. O ile zmalało jego pole powierzchni?

- 10.



- a) $|O_1O_2| = 3$ cm

Trójkąt O_1O_2P jest równoramienny o wysokości $h = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ [cm].

Pole tego trójkąta: $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot r$

Zatem $r = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ cm.

Długość okręgu: $2\pi \cdot \frac{4\sqrt{5}}{3} = \frac{8\sqrt{5}\pi}{3}$ [cm]

- b) $2\pi \cdot 3 = 6\pi$ [cm]

11. a) $r = 3\sqrt{2}$ cm, $P = 72\pi$ cm², $V = 72\sqrt{2}\pi$ cm³

- b) $r = 9$ cm, $P = 324\pi$ cm², $V = 972\pi$ cm³

- c) $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm, $P = 2\pi$ cm², $V = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ cm³

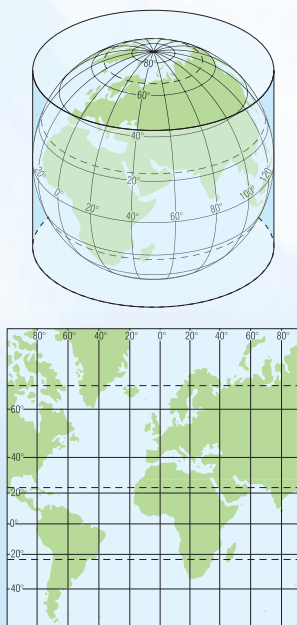
12. a) o 900π cm² b) o 700π cm²

Odwzorowania kartograficzne

Odwzorowanie powierzchni Ziemi na płaszczyźnie, jaką jest płaska mapa, pociąga za sobą różne zniekształcenia. Mogą to być zniekształcenia pól powierzchni, długości bądź kątów. Oto przykłady dwóch odwzorowań wiernokątnych, czyli zachowujących zależności kątowe między południkami a równoleżnikami.

Odwzorowanie walcowe

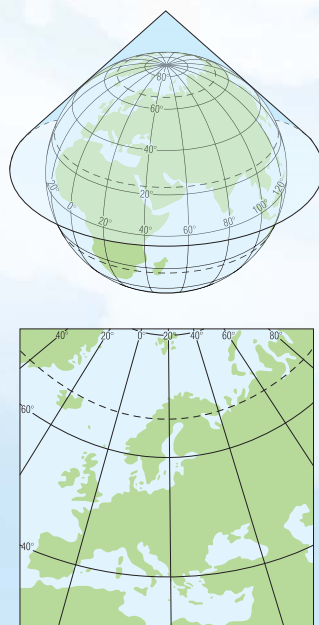
Powierzchnia modelu Ziemi jest odwzorowana na powierzchni bocznej walca stycznego do powierzchni modelu wzdłuż równika. Obrazami południków są proste prostopadłe do równika.



Takie odwzorowanie nazywamy odwzorowaniem Merkatora, od nazwiska flamandzkiego matematyka i kartografa (1512–1594). Zauważ, że w tym odwzorowaniu szczególnie zniekształcone są obszary okołobiegunowe.

Odwzorowanie stożkowe

Powierzchnia modelu Ziemi jest odwzorowana na powierzchni bocznej stożka stycznego do powierzchni modelu wzdłuż jednego z równoleżników.



Za pomocą takich siatek przedstawia się na przykład obszary między zwrotnikami a kołami podbiegunowymi.

1 Znajdź informacje o odwzorowaniu powierzchni Ziemi za pomocą siatki azymutalnej.

Uczeń:

- wyznacza skalę podobieństwa brył podobnych,
- wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

a) $\frac{x}{6} = \frac{3,6}{9}$, czyli $x = 2,4$

Skala podobieństwa: $k = \frac{2}{5}$

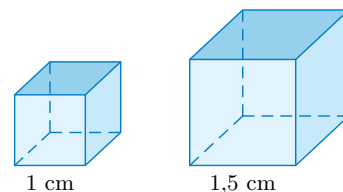
b) $\frac{x}{9} = \frac{6}{10}$, czyli $x = 5,4$

Skala podobieństwa: $k = \frac{3}{5}$

3.4. Bryły podobne

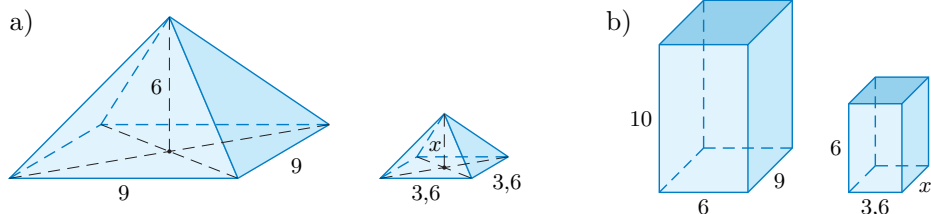
Dwie bryły są **podobne**, jeśli odległości między punktami jednej bryły są proporcjonalne do odległości między odpowiadającymi im punktami drugiej bryły. Stosunek odległości między odpowiednimi punktami brył podobnych nazywamy **skalą podobieństwa**.

Na przykład dowolne dwie kule czy dowolne dwa sześciany są podobne. Na rysunku powyżej skala podobieństwa większego sześcianu do mniejszego jest równa $\frac{3}{2}$, co możemy też zapisać 3:2.



Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiono wielościany podobne. Oblicz x oraz podaj skalę podobieństwa mniejszego wielościanu do większego.



Przykład 1

Pole powierzchni kuli K_1 jest dwa razy większe od pola powierzchni kuli K_2 . Oblicz stosunek objętości tych kul.

Niech r_1 i r_2 będą odpowiednio promieniami kul K_1 i K_2 . Stosunek pól powierzchni tych kul:

$$\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 2$$

zatem $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2}$ – zauważmy, że jest to skala podobieństwa kuli K_1 do kuli K_2 . Obliczamy stosunek objętości:

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$$

Jeśli skala podobieństwa brył podobnych jest równa $a:b$, to:

- stosunek pól powierzchni tych brył jest równy $a^2:b^2$,
- stosunek objętości tych brył jest równy $a^3:b^3$.

Ćwiczenie 2

Dane są dwa sześciany. Pole powierzchni pierwszego jest czterokrotnie większe od pola powierzchni drugiego. Oblicz stosunek objętości tych sześcianów.

Ćwiczenie 2

a) $\frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{1} = k^2$, czyli $k = 2$

Zatem $\frac{V_1}{V_2} = k^3 = \frac{8}{1}$.

Ćwiczenie 3

Dane są dwie kule. Objętość pierwszej jest równa $36\pi \text{ cm}^3$, a jej promień jest dwa razy krótszy od promienia drugiej kuli. Oblicz objętość drugiej kuli. Jaki jest stosunek pól powierzchni tych kul?

Przykład 2

Stożek o promieniu podstawy 8 cm i wysokości 12 cm przecięto płaszczyzną prostopadłą do tej wysokości w odległości 3 cm od wierzchołka S (rysunek obok). Oblicz objętości brył, na które płaszczyzna podzieliła stożek.

Obliczamy objętość dużego (wyjściowego) stożka:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 12 = 256\pi [\text{cm}^3]$$

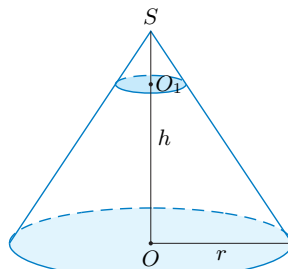
Skala podobieństwa małego stożka do dużego:

$$\frac{|SO_1|}{|SO|} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Zatem objętość małego stożka:

$$V_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot V = \frac{256}{64}\pi = 4\pi [\text{cm}^3]$$

Obliczamy objętość stożka ściętego: $V_2 = V - V_1 = 256\pi - 4\pi = 252\pi [\text{cm}^3]$.



W wyniku przecięcia stożka płaszczyzną równoległą do jego podstawy otrzymujemy dwie bryły: stożek i stożek ścięty.

Ćwiczenie 4

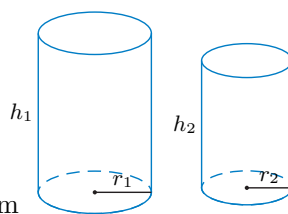
Stożek o objętości $27\pi \text{ cm}^3$ przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta podzieliła wysokość stożka w stosunku 2:1, gdy liczymy od podstawy. Oblicz objętości brył powstałych w wyniku tego podziału.

Zadania

- Promienie podstaw dwóch walców oraz ich wysokości są równe r_1, h_1 i r_2, h_2 (rysunek obok). Sprawdź, czy te walce są podobne.

- $r_1 = 20 \text{ cm}, h_1 = 24 \text{ cm},$
 $r_2 = 12 \text{ cm}, h_2 = 15 \text{ cm}$

- $r_1 = 12 \text{ cm}, h_1 = 16 \text{ cm}, r_2 = 9 \text{ cm}, h_2 = 12 \text{ cm}$



- a) Dane są dwa stożki podobne. Wysokość mniejszego stożka jest równa 6 cm, a pole powierzchni całkowitej większego jest o 125% większe od pola powierzchni całkowitej mniejszego. Oblicz wysokość większego stożka.

- D** b) Uzasadnij, że stożek o wysokości 4 i polu powierzchni całkowitej 24π nie jest podobny do stożka o tworzącej 20 i objętości 1024π .

- a) $\frac{P_1}{P_2} = 2,25 = k^2, \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_1}{6} = k = 1,5$, czyli $h_1 = 9 \text{ cm}$

- $h_1 = 4$

$$P_1 = \pi r_1^2 + \pi r_1 l_1 = 24\pi, \text{ czyli } l_1 = \frac{24 - r_1^2}{r_1}$$

$$l_1^2 = r_1^2 + h_1^2$$

$$\frac{576 - 48r_1^2 + r_1^4}{r_1^2} = r_1^2 + 16$$

$$576 = 64r_1^2$$

$$r_1 = 3, l_1 = 5$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{12\pi}{1024\pi} = \frac{3}{256} \neq \left(\frac{1}{4}\right)^3, \text{ zatem bryły nie są podobne.}$$

Ćwiczenie 3

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2} = k$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{36\pi}{V_2} = k^3 = \frac{1}{8},$$

$$\text{czyli } V_2 = 288\pi \text{ cm}^3$$

$$\frac{P_1}{P_2} = k^2 = \frac{1}{4}$$

Ćwiczenie 4

$$V_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 27\pi = \pi [\text{cm}^3]$$

$$V_2 = V - V_1 = 27\pi - \pi = 26\pi [\text{cm}^3]$$

Odpowiedzi do zadań

- a) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} \neq \frac{5}{3}$$

Bryły nie są podobne.

- $\frac{r_1}{r_2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Bryły są podobne.

3. a) 2:3 b) 1:2 c) 3:4 d) 4:1

4. V – objętość całej bryły
 V_1 – objętość górnej bryły
 V_2 – objętość dolnej bryły
 k – skala podobieństwa całej bryły do górnej bryły

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1}$$

a) $k = \frac{4}{3}$, stąd $\frac{V}{V_1} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$,

czyli $V = \frac{64}{27} V_1$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{\frac{64}{27} V_1 - V_1} = \frac{1}{\frac{64}{27} - 1} = \frac{27}{37}$$

b) $k = \frac{5}{2}$, stąd $\frac{V}{V_1} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$,

czyli $V = \frac{125}{8} V_1$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{\frac{125}{8} V_1 - V_1} = \frac{1}{\frac{125}{8} - 1} = \frac{8}{117}$$

c) $k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, stąd

$$\frac{V}{V_1} = \left(\frac{3}{2}\right)^3, \text{ czyli } V = \frac{27}{8} V_1$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{\frac{27}{8} V_1 - V_1} = \frac{1}{\frac{27}{8} - 1} = \frac{8}{19}$$

5. V, h – objętość i wysokość całej bryły
 V_1, h_1 – objętość i wysokość górnej bryły

V_2, h_2 – objętość i wysokość dolnej bryły

$$\frac{V}{V_1} = 2, \text{ czyli } \frac{h}{h_1} = \sqrt[3]{2},$$

stąd $h = h_1 \sqrt[3]{2}$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_1}{h - h_1} = \frac{h_1}{h_1 \sqrt[3]{2} - h_1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$$

6. a) $k^3 = \frac{1}{216}$, czyli $k = \frac{1}{6}$,

stąd $\frac{P_1}{P_2} = k^2 = \frac{1}{36}$

b) $k^3 = \frac{125}{27}$, czyli $k = \frac{5}{3}$,

stąd $\frac{P_1}{P_2} = k^2 = \frac{25}{9}$

c) $k^3 = \frac{27}{125}$, czyli $k = \frac{3}{5}$,

stąd $\frac{P_1}{P_2} = k^2 = 0,36$

d) $k^3 = \frac{8}{125}$, czyli $k = \frac{2}{5}$,

stąd $\frac{P_1}{P_2} = k^2 = 0,16$

7. $\frac{P_{p1}}{P_{p2}} = k^2 = 1,44$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_1}{10} = k = 1,2$$

Zatem $h_1 = 12$ cm.

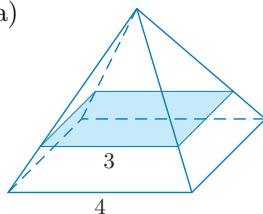
3. Ostrosłupy prawidłowe O_1, O_2, O_3 i O_4 są podobne. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Podaj skalę podobieństwa ostrosłupów:

a) O_1 i O_2 , b) O_1 i O_3 , c) O_2 i O_3 , d) O_3 i O_4 .

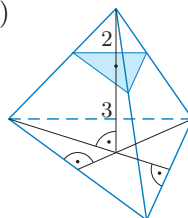
Ostrosłup	Wysokość	Krawędź podstawy	Pole podstawy	Objętość
O_1	8 cm	6 cm	36 cm ²	96 cm ³
O_2	12 cm	9 cm	81 cm ²	324 cm ³
O_3	16 cm	12 cm	144 cm ²	768 cm ³
O_4	4 cm	3 cm	9 cm ²	12 cm ³

4. Na rysunku przedstawiono ostrosłup i jego przekrój płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta podzieliła ostrosłup na dwie części. Oblicz stosunek objętości mniejszej części do objętości większej części.

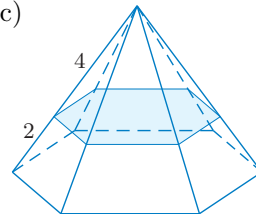
a)



b)



c)



5. Stożek został podzielony płaszczyzną równoległą do podstawy na dwie bryły o równych objętościach. W jakim stosunku płaszczyzna ta podzieliła wysokość stożka?

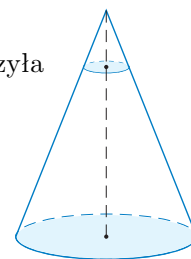
Powtórzenie

6. Oblicz stosunek pól powierzchni dwóch kul, których stosunek objętości jest równy: a) $\frac{1}{216}$, b) $\frac{125}{27}$, c) 0,216, d) 0,064.

7. Dane są dwa podobne stożki. Pole podstawy większego jest o 44% większe od pola podstawy mniejszego. Oblicz wysokość większego stożka, jeśli wiadomo, że wysokość mniejszego jest równa 10 cm.

8. Powierzchnia kulistego balonu po dopompowaniu zwiększyła się o 44%. O ile procent wzrosła objętość balonu?

9. Stożek o objętości 128π cm³ przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna podzieliła wysokość stożka w stosunku 3:1 (rysunek obok). Oblicz objętości brył powstałych w wyniku tego podziału.



8. $\frac{P_2}{P_1} = 1,44 = k^2$

$$\frac{V_2}{V_1} = k^3 = 1,728$$

Objętość balonu zwiększyła się o 72,8%.

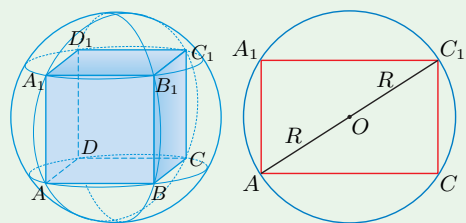
9. $V_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 128\pi = 2\pi$ [cm³]

$$V_2 = V - V_1 = 128\pi - 2\pi = 126\pi$$
 [cm³]

3.5. Zagadnienia uzupełniające

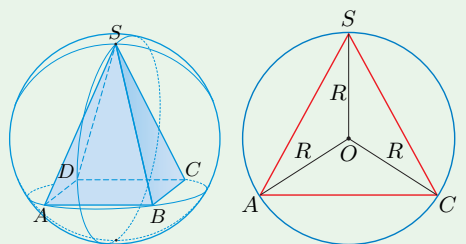
■ Bryły wpisane w kulę

Prostopadłościan wpisany w kulę (kula opisana na prostopadłościanie)



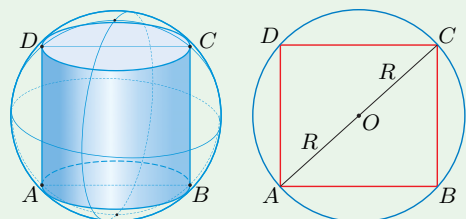
Wszystkie wierzchołki prostopadłościanu leżą na powierzchni kuli. Prostokąt ACC_1A_1 jest przekrojem prostopadłościanu przechodzącym przez przekątne jego podstaw – przekątna prostopadłościanu jest średnicą kuli.

Ostrosłup czworokątny wpisany w kulę (kula opisana na ostrosłupie)



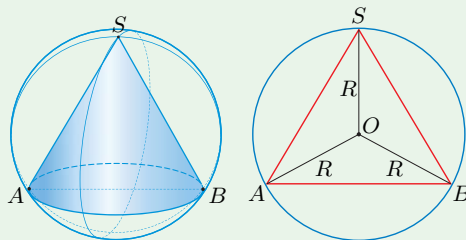
Wszystkie wierzchołki ostrosłupa leżą na powierzchni kuli. Trójkąt ACS jest przekrojem ostrosłupa poprowadzonym przez jego wierzchołek i przekątną podstawy. Jeżeli wysokość ostrosłupa jest dłuższa od promienia kuli, to środek kuli leży wewnątrz ostrosłupa.

Walec wpisany w kulę (kula opisana na walcu)



Okręgi ograniczające podstawy walca zawierają się w powierzchni kuli. Prostokąt $ABCD$ jest przekrojem osiowym walca – jego przekątna jest średnicą kuli.

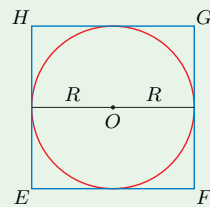
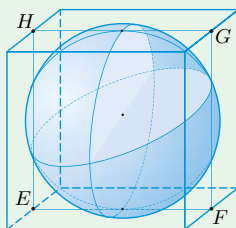
Stożek wpisany w kulę (kula opisana na stożku)



Okrąg ograniczający podstawę stożka zawiera się w powierzchni kuli, a wierzchołek stożka leży na powierzchni kuli. Trójkąt ABS jest przekrojem osiowym stożka. Jeśli wysokość stożka jest dłuższa od promienia kuli, to środek kuli leży wewnątrz stożka.

■ Bryły opisane na kuli

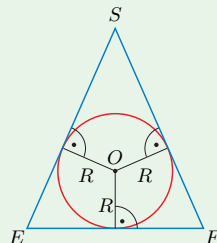
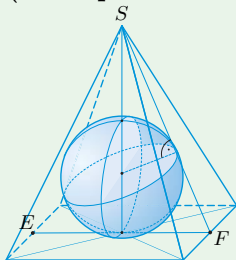
Sześcián opisany na kuli (kula wpisana w sześcián)



Kula jest styczna do każdej ściany sześciánu. Kwadrat $EFGH$ jest przekrojem sześciánu przechodzącym przez środki odpowiednich krawędzi. Jeśli sześcián jest opisany na kuli o promieniu R , to jego krawędź ma długość $2R$.

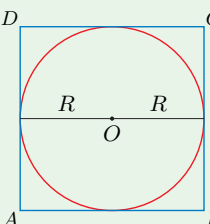
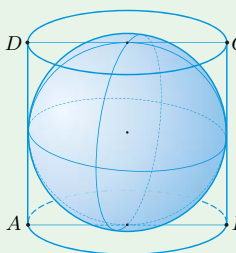
Uwaga. Jeśli prostopadłościan jest opisany na kuli, to jest sześciánem (uzasadnij).

Ostrosłup prawidłowy czworokątny opisany na kuli (kula wpisana w ostrosłup)



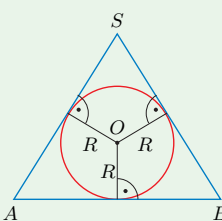
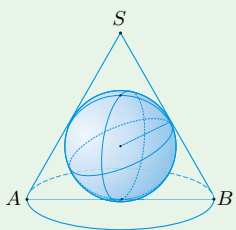
Kula jest styczna do podstawy oraz wszystkich ścian bocznych ostrosłupa. Trójkąt EFS jest przekrojem ostrosłupa przechodzącym przez jego wysokość oraz środki dwóch przeciwległych krawędzi podstawy. Jeśli ostrosłup jest opisany na kuli o promieniu R , to trójkąt ten jest opisany na okręgu o promieniu R .

Walec opisany na kuli (kula wpisana w walec)



Kula jest styczna do obu podstaw walca i do każdej jego tworzącej. Kwadrat $ABCD$ jest przekrojem osiowym walca. Jeśli walec jest opisany na kuli o promieniu R , to jego przekrój osiowy jest kwadratem o boku $2R$.

Stożek opisany na kuli (kula wpisana w stożek)

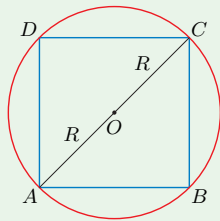
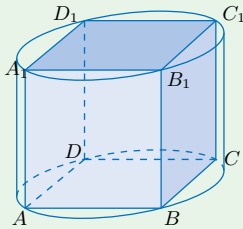


Kula jest styczna do podstawy stożka i do każdej jego tworzącej. Trójkąt ABS jest przekrojem osiowym stożka. Jeśli stożek jest opisany na kuli o promieniu R , to jego przekrój osiowy jest trójkątem opisanym na okręgu o promieniu R .

■ Inne bryły wpisane i opisane

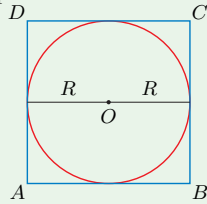
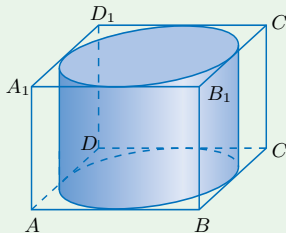
Poniżej przedstawiono przykłady brył i wielościanów wpisanych i opisanych.

Walec opisany na graniastosłupie (graniastosłup wpisany w walec)



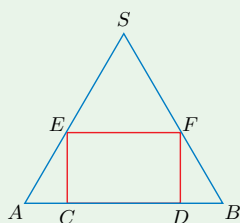
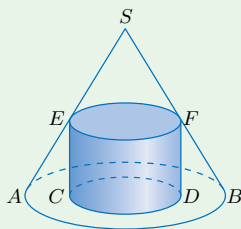
Podstawy graniastosłupa są wpisane w podstawy walca. Na rysunkach przedstawiono walec opisany na graniastosłupie prawidłowym czworokątnym oraz podstawę walca z wpisaną w nią podstawą graniastosłupa.

Walec wpisany w graniastosłup (graniastosłup opisany na walcu)



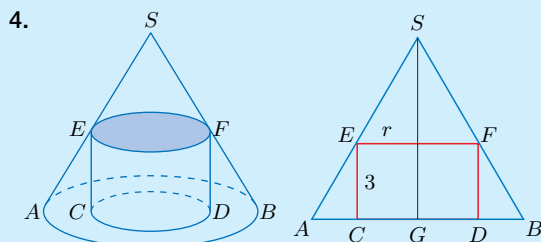
Podstawy walca są wpisane w podstawy graniastosłupa. Na rysunkach przedstawiono walec wpisany w graniastosłup prawidłowy czworokątny oraz podstawę walca z opisaną na niej podstawą graniastosłupa.

Walec wpisany w stożek (stożek opisany na walcu)



Okrąg ograniczający jedną podstawę walca zawiera się w powierzchni bocznej stożka, a druga podstawa walca zawiera się w podstawie stożka. Na rysunku po prawej przedstawiono wspólny przekrój osiowy tych brył.

1. Oblicz objętość kuli opisanej na graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości 8 cm.
2. Oblicz objętość walca opisanego na kuli o objętości $36\pi \text{ cm}^3$.
3. Oblicz objętość kuli wpisanej w stożek, którego przekrojem osiowym jest trójkąt równoboczny o boku 6 cm.
4. W stożek o promieniu podstawy 4 cm i wysokości 6 cm wpisano walec, którego wysokość jest równa 3 cm. Oblicz objętość tego walca.



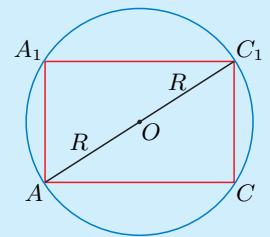
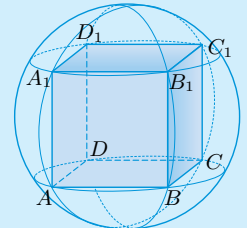
$$|AG| = 4 \text{ cm}, |SG| = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{r}{4} = \frac{3}{6}, \text{ czyli } r = 2 \text{ cm}$$

$$V = \pi r^2 h = 12\pi \text{ cm}^3$$

Odpowiedzi do zadań

1.



$$|AC| = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$|CC_1| = 8 \text{ cm}$$

$$|AC_1| = \sqrt{|AC|^2 + |CC_1|^2} = 2\sqrt{34} \text{ cm}$$

$$R = \frac{1}{2}|AC_1|,$$

$$\text{czyli } R = \sqrt{34} \text{ cm}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (\sqrt{34})^3 = \frac{136\sqrt{34}}{3}\pi [\text{cm}^3]$$

2. $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$, czyli $R = 3 \text{ cm}$
Promień walca: $r = R = 3 \text{ cm}$
Wysokość walca: $h = 2R = 6 \text{ cm}$
 $V = \pi r^2 h = 54\pi \text{ cm}^3$
3. Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta opisanego na okręgu:
 $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$
 $\frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{18}{2} \cdot r$, czyli $r = \sqrt{3} \text{ cm}$
 $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$

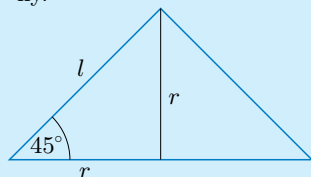
Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

Odpowiedzi do zadań

- $P_c = 40\pi$, $V = 24\pi\sqrt{2}$
 - $P_c = 24\pi(1+\sqrt{3})$, $V = 72\pi$
 - $P_c = 8\pi(3+2\sqrt{3})$, $V = 48\pi$

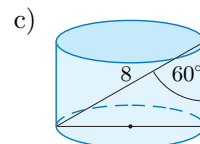
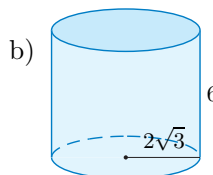
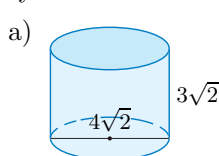
- $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi(1,5r)^2 h}{\pi r^2 h} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
- $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 200 - \pi \cdot 2^2 \cdot 200 = 200\pi(9 - 4) = 1000\pi \text{ [cm}^3\text{]}$
- Przekrojem osiowym jest trójkąt prostokątny równoramienny.



$$\begin{aligned} h &= r \text{ oraz } l = r\sqrt{2} \\ 2r + 2l &= 2r + 2\sqrt{2}r = 8 + 4\sqrt{2}, \\ \text{czyli } r &= 2\sqrt{2} \text{ cm,} \\ \text{stąd } l &= 4 \text{ cm} \\ P_c &= \pi r^2 + \pi r l = 8\pi + 8\sqrt{2}\pi = \\ &= 8\pi(1 + \sqrt{2}) \text{ [cm}^2\text{]} \end{aligned}$$

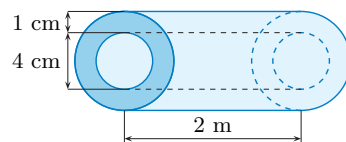
- $P_c = 9\pi(\sqrt{2} + 1)$, $V = 9\pi$
 - $P_c = 27\pi$, $V = 9\pi\sqrt{3}$
 - $P_c = 16\pi(2\sqrt{3} + 3)$
 $V = 64\pi$
- r – promień podstawy stożka
 h – wysokość stożka
 $\frac{225^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 12 = 2\pi r$
 $r = 7,5 \text{ cm}$
 $h = \sqrt{12^2 - 7,5^2} = \frac{3\sqrt{39}}{2} \text{ [cm]}$
 $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 7,5^2 \cdot \frac{3\sqrt{39}}{2} =$
 $= \frac{225\sqrt{39}}{8}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$
- r – promień podstawy stożka
 $\frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2\pi r$
 $r = \frac{1}{2}$
 $P_c = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{5}{4}\pi$

- Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca przedstawionego na rysunku.

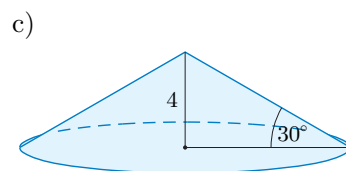
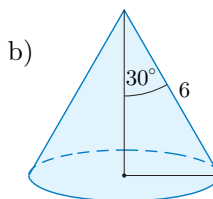
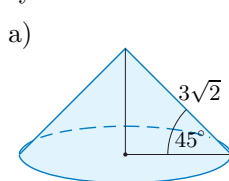


- Dwa walce mają taką samą wysokość. Promień podstawy jednego z nich jest o 50% dłuższy od promienia podstawy drugiego. Oblicz stosunek objętości tych walców.

- Oblicz objętość metalu użytego do wykonania metalowej rury o wymiarach podanych na rysunku (skala nie jest zachowana).



- Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt prostokątny, którego obwód jest równy $(8 + 4\sqrt{2}) \text{ cm}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.
- Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość stożka przedstawionego na rysunku.

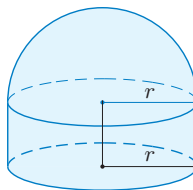


- Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu 12 cm wyznaczonym przez kąt środkowy 225° . Oblicz objętość tego stożka.
- Wycinek koła o promieniu 2 wyznaczony przez kąt środkowy 90° zwinięto w powierzchnię boczną stożka. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.
- Oblicz objętość kuli o polu powierzchni równym:
 - $1024\pi \text{ cm}^2$,
 - $2500\pi \text{ cm}^2$,
 - $72\pi \text{ cm}^2$.
- Oblicz pole powierzchni kuli o objętości równej:
 - $4,5\pi \text{ cm}^3$,
 - $2304\pi \text{ cm}^3$,
 - $144\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$.

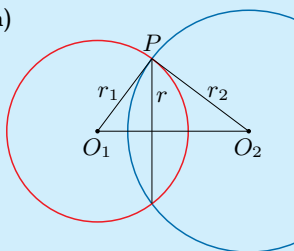
- $r = 16 \text{ cm}$, $V = \frac{16384}{3}\pi \text{ cm}^3$
 - $r = 25 \text{ cm}$, $V = \frac{62500}{3}\pi \text{ cm}^3$
 - $r = 3\sqrt{2} \text{ cm}$, $V = 72\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$
- $r = \frac{3}{2} \text{ cm}$, $P = 9\pi \text{ cm}^2$
 - $r = 12 \text{ cm}$, $P = 576\pi \text{ cm}^2$
 - $r^2 = 18\sqrt[3]{4} \text{ cm}^2$, $P = 72\pi\sqrt[3]{4} \text{ cm}^2$

■ Zestaw II

- Oblicz pole przekroju osiowego walca, którego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest prostokątem o wymiarach $7 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$.
 - Przekrojem osiowym walca jest prostokąt $ABCD$. Długości jego boków AB i BC oraz przekątnej AC są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 4. Oblicz objętość tego walca (rozpatrz dwa przypadki).
 - Pole podstawy walca jest równe 64, a pole jego przekroju osiowego jest równe $32\sqrt{\pi}$. Oblicz objętość tego walca.
 - Stosunek długości boków prostokąta jest równy 3:1. Wyznacz stosunek objętości brył otrzymanych w wyniku obrotów tego prostokąta wokół każdego z dwóch sąsiednich boków.
 - Stożek i walec mają równe pola powierzchni bocznych, równe tworzące i takie same objętości. Oblicz tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy.
 - Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 4 i 5. Oblicz objętość bryły otrzymanej przez obrót tego trójkąta wokół jego:
 - dłuższej przyprostokątnej,
 - krótszej przyprostokątnej.
 - Półkulę o promieniu r i walec o promieniu podstawy r oraz wysokości $\frac{2}{3}r$ połączono tak jak na rysunku obok. W ten sposób otrzymano bryłę o polu powierzchni całkowitej 156π . Oblicz objętość tej bryły.
 - Kulę o środku O przecięto płaszczyzną i otrzymano w przekroju koło o środku S . Oblicz długość odcinka OS , jeśli wiadomo, że pole powierzchni kuli jest równe 20π , a obwód przekroju jest równy 2π .
 - Środki dwóch sfer są oddalone od siebie o 10 cm, a ich promienie są równe r_1 i r_2 . Oblicz długość okręgu będącego częścią wspólną obu tych sfer.
 - $r_1 = 6 \text{ cm}$, $r_2 = 8 \text{ cm}$
 - $r_1 = 6 \text{ cm}$, $r_2 = 14 \text{ cm}$
- D** 10. Wykaż, że jeżeli przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym, to pole powierzchni bocznej tego stożka jest dwa razy większe od pola jego podstawy.



9. a)



b) $6\pi\sqrt{3} \text{ cm}$

10. $l = 2r$, $P_b = \pi r l = 2\pi r^2 = 2P_p$

$|O_1O_2| = 10 \text{ cm}$, $|O_1P| = 6 \text{ cm}$, $|O_2P| = 8 \text{ cm}$
 $|O_1P|^2 + |O_2P|^2 = |O_1O_2|^2$, zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa $\triangle O_1O_2P$ jest prostokątny.
 Pole $\triangle O_1O_2P$: $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = \frac{1}{2} |O_1O_2| \cdot r$,
 czyli $r = 4,8 \text{ cm}$
 Długość okręgu: $2\pi \cdot 4,8 = 9,6\pi \text{ [cm]}$

- $\frac{35}{\pi} \text{ cm}^2$
- $a^2 + (a + 4)^2 = (a + 8)^2$,
gdzie $a > 0$
 $a = 12$

I przypadek

$$|AB| = a = 2r = 12, \text{ czyli } r = 6$$

$$|BC| = a + 4 = h = 16$$

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 16 = 576\pi$$

II przypadek

$$|AB| = a = h = 12$$

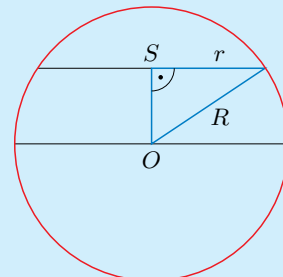
$$|BC| = a + 4 = 2r = 16, \text{ czyli } r = 8$$

$$V = \pi \cdot 8^2 \cdot 12 = 768\pi$$

- 128π
- 3:1
- Z warunków zadania $h_w = l_s$ oraz:
 $2\pi r_w h_w = \pi r_s l_s$
 $\pi r_w^2 h_w = \frac{1}{3} \pi r_s^2 h_s$
 Stąd:
 $r_s = \frac{2r_w h_w}{l_s} = \frac{2r_w h_w}{h_w} = 2r_w$
 $h_s = \frac{3r_w^2 h_w}{r_s^2} = \frac{3r_w^2 h_w}{4r_w^2} = \frac{3}{4} h_w$
 $l_s^2 = r_s^2 + h_s^2$
 $h_w^2 = 4r_w^2 + \frac{9}{16} h_w^2$,
 stąd $r_w = \frac{\sqrt{7}}{8} h_w$
 $\text{tg } \alpha = \frac{h_s}{r_s} = \frac{\frac{3}{4} h_w}{2r_w} =$
 $= \frac{\frac{3}{4} h_w}{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{8} h_w} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

- a) Wysokość i promień stożka:
 $h = 5$, $r = 4$
 $V = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 5 = \frac{80}{3} \pi$
 b) Wysokość i promień stożka:
 $h = 4$, $r = 5$
 $V = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 4 = \frac{100}{3} \pi$
- $P_c = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{2}{3} r =$
 $= \frac{13}{3} \pi r^2 = 156\pi$, czyli $r = 6$
 $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 + \pi r^2 \cdot \frac{2}{3} r =$
 $= \frac{4}{3} \pi r^3 = 288\pi$

8.



$$4\pi R^2 = 20\pi, \text{ czyli } R = \sqrt{5}$$

$$2\pi r = 2\pi, \text{ czyli } r = 1$$

$$|OS| = \sqrt{R^2 - r^2} = 2$$

**Przykład 1**

Oblicz objętość bryły otrzymanej przez obrót trójkąta prostokątnego ABC o bokach długości 3, 4 i 5 (rysunek obok) wokół jego przeciwprostokątnej.

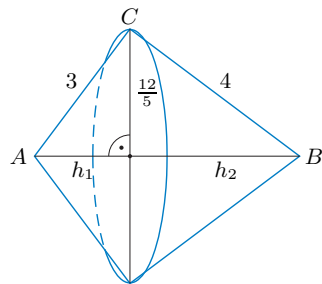
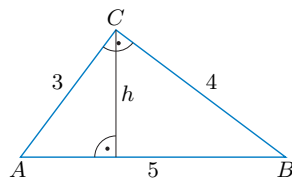
Obliczamy wysokość h trójkąta ABC . W tym celu zapisujemy jego pole na dwa sposoby:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

Zatem $h = \frac{12}{5}$.

Bryła otrzymana przez obrót trójkąta ABC wokół jego przeciwprostokątnej składa się z dwóch stożków połączonych podstawami o promieniu $\frac{12}{5}$. Jej objętość jest równa sumie objętości tych stożków:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3}\pi \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot h_2 = \\ &= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{12}{5}\right)^2 (h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot 5 = \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{144}{25} \cdot 5 = \frac{48}{5}\pi \end{aligned}$$



Zauważ, że skorzystaliśmy z tego, że $h_1 + h_2 = 5$ (nie obliczaliśmy h_1 i h_2).

Odpowiedź: Objętość bryły jest równa $\frac{48}{5}\pi$.

Przykład 2

Oblicz objętość bryły otrzymanej przez obrót trójkąta ABC wokół prostej AB (rysunek obok).

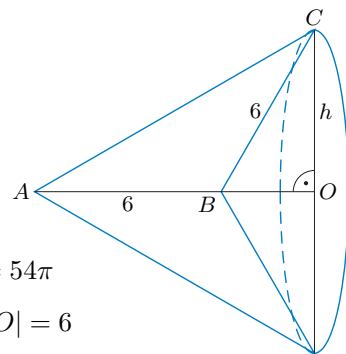
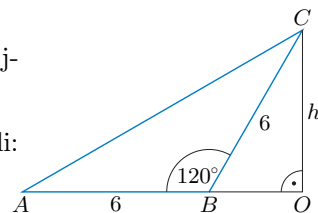
Obliczamy wysokość trójkąta: $\frac{h}{|BC|} = \sin 60^\circ$, czyli:

$$h = 6 \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Objętość bryły otrzymanej przez obrót trójkąta ABC wokół prostej AB jest różnicą objętości stożka o wysokości AO oraz stożka o wysokości BO i wspólnej podstawie:

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \\ &= \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{3})^2 \cdot |AO| - \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{3})^2 \cdot |BO| = \\ &= \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{3})^2 \cdot (|AO| - |BO|) = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 3 \cdot 6 = 54\pi \end{aligned}$$

Zauważ, że skorzystaliśmy z tego, że $|AO| - |BO| = 6$ (nie obliczaliśmy $|AO|$ i $|BO|$).



Odpowiedź: Objętość bryły jest równa 54π .



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Różnica objętości brył powstałych przez obrót prostokąta o bokach 4 cm i 6 cm wokół krótszego i wokół dłuższego boku jest równa:

A. $48\pi \text{ cm}^3$, B. $42\pi \text{ cm}^3$, C. $36\pi \text{ cm}^3$, D. $30\pi \text{ cm}^3$.

2. Pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku a , jest równe:

A. πa^2 , B. $\frac{3}{2}\pi a^2$, C. $2\pi a^2$, D. $\frac{5}{2}\pi a^2$.

3. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku 12. Pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe:

A. 144π , B. 72π , C. 36π , D. 24π .

4. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest półkolem. Kąt rozwarcia tego stożka ma miarę:

A. 120° , B. 90° , C. 60° , D. 45° .

5. Trójkąt o bokach długości 15, 20 i 25 obracamy wokół najdłuższego boku i otrzymujemy bryłę złożoną z dwóch stożków o wspólnej podstawie. Objętość tej bryły jest równa:

A. 1600π , B. 1200π , C. 1000π , D. 750π .

6. Koło o polu 36π obracamy wokół średnicy. Otrzymujemy wówczas bryłę o objętości:

A. 288π , B. 240π , C. 144π , D. 120π .

7. Suma promieni dwóch kul jest równa 12. Wynika stąd, że suma pól powierzchni tych kul może być dowolną liczbą z przedziału:

A. $(0; 240\pi)$, B. $(240\pi; 288\pi)$, C. $(288\pi; 576\pi)$, D. $(296\pi; 684\pi)$.

8. Dane są dwa stożki podobne. Przekrój osiowy pierwszego z nich jest trójkątem równobocznym o obwodzie 12, a przekrój osiowy drugiego ma pole $16\sqrt{3}$. Wynika stąd, że skala podobieństwa większego stożka do mniejszego jest równa:

A. 2, B. $2\sqrt{3}$, C. 4, D. $4\sqrt{3}$.

9. Pola powierzchni bocznych dwóch stożków podobnych mają się do siebie jak 4:9. Stosunek objętości tych stożków jest równy:

A. 2:3, B. 4:9, C. 8:27, D. 64:729.

8. Długość boku pierwszego przekroju: $a = \frac{12}{3} = 4$

Długość boku drugiego przekroju: $\frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$, czyli $b = 8$

Skala podobieństwa: $k = \frac{b}{a} = 2$

9. $\frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{9} = k^2$, czyli $k = \frac{2}{3}$

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3 = \frac{8}{27}$$

Odpowiedzi do zadań

1. $V_1 = \pi 6^2 \cdot 4 = 144\pi$

$$V_2 = \pi 4^2 \cdot 6 = 96\pi$$

$$V_1 - V_2 = 48\pi$$

2. $r = \frac{a}{2}$, $h = a$

$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h = \frac{3}{2}\pi a^2$$

3. $r = 6$ oraz $l = 12$

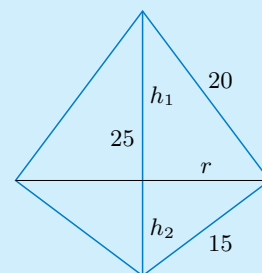
$$P_b = \pi \cdot 6 \cdot 12 = 72\pi$$

4. $2\pi r = \frac{1}{2}\pi r l$

$$r = \frac{1}{2}l$$

Zatem przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym, więc kąt rozwarcia stożka wynosi 60° .

5.



Trójkąt jest prostokątny, czyli $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot r$.

Zatem $r = 12$.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 25 = 1200\pi$$

6. $r = 6$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 288\pi$

7. $R + r = 12$, stąd $R = 12 - r$

P – suma pól

$$P = 4\pi R^2 + 4\pi r^2 =$$

$$= 4\pi(R^2 + r^2)$$

$$P(r) = 8\pi(r^2 - 12r + 72) =$$

$$= 8\pi((r-6)^2 + 36)$$

Dla $r \in (0; 12)$ funkcja

$$f(r) = (r-6)^2$$

przyjmuje dowolną wartość

z przedziału $\langle 0; 36 \rangle$, więc

funkcja $P(r)$ przyjmuje do-

wolną wartość z przedziału

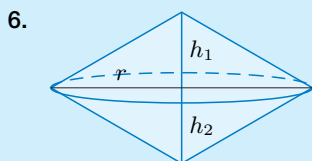
$\langle 8\pi \cdot 36; 8\pi \cdot 72 \rangle$.

Zatem $P \in (288\pi; 576\pi)$.



Odpowiedzi do zadań

- $h = 2r$
 $\frac{P_c}{P_b} = \frac{2\pi r^2 + 2\pi r h}{2\pi r h} = \frac{6\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{3}{2}$
- $l = 4r$
 $h = \sqrt{l^2 - r^2} = r\sqrt{15}$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{r} = \frac{r\sqrt{15}}{r} = \sqrt{15}$
- $l = 2r = a$
 $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, czyli $a = 6$,
 stąd $l = 6$ oraz $r = 3$
 $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 3\sqrt{3}$ [cm]
 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 9\sqrt{3}\pi$ [cm³]
- $P = 4\pi \cdot 3^2 + 4\pi \cdot 6^2 = 4\pi \cdot 45 = 4\pi r^2$, czyli $r = 3\sqrt{5}$
 $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 180\sqrt{5}\pi$ [cm³]
- Objętość szklanki:
 $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi$
 ≈ 226 [cm³]
 Objętość soku:
 $V_S = 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 15 = 2400$ [cm³]
 $\frac{2400}{226} \approx 10,6$, czyli można
 napęlić 10 szklanek.



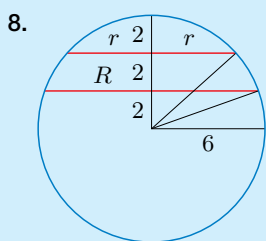
$$r = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$h_1 + h_2 = 12$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) =$$

$$= 432\pi$$
 [cm³]



$$R^2 = 6^2 - 2^2 = 32$$

$$r^2 = 6^2 - 4^2 = 20$$

$$P = \pi R^2 + \pi r^2 = 32\pi + 20\pi =$$

$$= 52\pi$$
 [cm²]

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Przekrój osiowy walca jest kwadratem. Oblicz stosunek pola powierzchni całkowitej tego walca do pola jego powierzchni bocznej.

Zadanie 2 (2 pkt)

Średnica podstawy stożka jest dwa razy krótsza od jego tworzącej. Oblicz tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy.

Zadanie 3 (2 pkt)

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu $9\sqrt{3}$ cm². Oblicz objętość tego stożka.

Zadanie 4 (2 pkt)

Oblicz objętość kuli, której pole powierzchni jest równe sumie pól powierzchni dwóch kul o promieniach 3 cm i 6 cm.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (3 pkt)

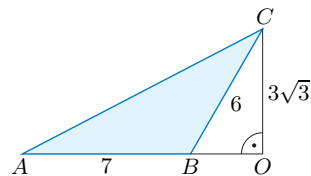
Wnętrze szklanki ma kształt walca o średnicy podstawy 6 cm i wysokości 8 cm. Oblicz, ile takich szklanek można napęlić po brzegi sokiem przechowywanym w dwóch prostopadłościennych kartonach o wymiarach 10 cm × 8 cm × 15 cm.

Zadanie 6 (3 pkt)

Oblicz objętość bryły, która powstała przez obrót trójkąta równobocznego o boku 12 cm wokół jednego z boków.

Zadanie 7 (4 pkt)

Oblicz objętość i pole powierzchni bryły, która powstała przez obrót trójkąta ABC wokół prostej AB (rysunek obok).



Zadanie 8 (3 pkt)

Kulę o promieniu 6 cm przecięto dwoma równoległymi płaszczyznami dzielącymi promień kuli na trzy równe odcinki. Oblicz sumę pól otrzymanych w ten sposób dwóch przekrojów.

Zadanie 9 (3 pkt)

Ostrosłup o wysokości 8 cm przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy i otrzymano dwa wielościany o równych objętościach. Oblicz, w jakiej odległości od wierzchołka ostrosłupa leży ta płaszczyzna.

$$7. V = \frac{1}{3}\pi (3\sqrt{3})^2 \cdot |AO| - \frac{1}{3}\pi (3\sqrt{3})^2 \cdot |BO| =$$

$$= \frac{1}{3}\pi (3\sqrt{3})^2 (|AO| - |BO|) = \frac{1}{3}\pi (3\sqrt{3})^2 \cdot 7 = 63\pi$$

$$|BO| = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{3})^2} = 3$$

$$|AC| = \sqrt{10^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{127}$$

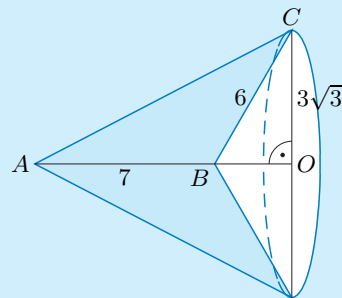
$$P_c = \pi \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{127} + \pi \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6 = 3\sqrt{3}(\sqrt{127} + 6)\pi$$

9. V_1, h_1 – objętość i wysokość stożka nad płaszczyzną

V – objętość całego stożka

$$V_1 = \frac{1}{2}V, \text{ czyli } \frac{V}{V_1} = 2 = k^3, \text{ stąd skala podobieństwa stożków } k = \sqrt[3]{2}.$$

$$\text{Zatem } h_1 = \frac{8}{\sqrt[3]{2}} = 4\sqrt[3]{4} \text{ [cm].}$$





4 Przykłady dowodów w matematyce

Pitagorasowi (VI/V w. p.n.e.) przypisuje się autorstwo pierwszego dowodu twierdzenia nazwanego jego imieniem. Uczony nie pozostawił jednak po sobie żadnych pism. Dowód twierdzenia Pitagorasa przedstawił Euklides (IV/III w. p.n.e.) w *Elementach* – dziele podsumowującym stan wiedzy matematycznej starożytnej Grecji. Składa się ono z trzynastu ksiąg. Księgi I–IV i VI poświęcone są geometrii płaszczyzny, księgi V i VII–X – arytmetyce, a księgi XI–XIII – geometrii przestrzeni. W księdze IX znajduje się dowód istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych. W tym podręczniku przedstawiono go na str. 144. Powyżej pokazano fragment fresku Rafaela Santi *Szkola ateńska* przedstawiający Pitagorasa.

Multiteka

• Dowód za milion dolarów

Uczeń:

- dowodzi własności liczb całkowitych, zapisanych za pomocą potęg lub wyrażeń algebraicznych, np. podzielności.

Ćwiczenie 1

Założmy, że n_1, n_2 są liczbami nieparzystymi oraz n_3 jest liczbą parzystą. Wówczas dla pewnych $k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{N}$:

$$n_1 = 2k_1 + 1, n_2 = 2k_2 + 1$$

$$\text{oraz } n_3 = 2k_3$$

Zatem:

$$n_1 + n_2 + n_3 =$$

$$= 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 + 2k_3 =$$

$$= 2(k_1 + k_2 + k_3 + 1),$$

$$\text{gdzie } k_1 + k_2 + k_3 + 1 \in \mathbf{N}$$

Oznacza to, że suma ta jest liczbą parzystą.

D 4.1. Dowody w algebrze (1)

Przykład 1

Wykaż, że jeśli suma dwóch liczb naturalnych jest nieparzysta, to iloczyn tych liczb jest parzysty.

Założmy, że n_1 i n_2 są liczbami naturalnymi takimi, że suma $n_1 + n_2$ jest liczbą nieparzystą. Wówczas jedna z liczb (możemy przyjąć, że n_1) jest liczbą parzystą, a druga – nieparzystą (uzasadnij).

Zatem dla pewnych $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$: $n_1 = 2k_1$ oraz $n_2 = 2k_2 + 1$. Czyli:

$$n_1 \cdot n_2 = 2k_1 \cdot (2k_2 + 1) = 2(2k_1k_2 + k_1), \text{ gdzie } 2k_1k_2 + k_1 \in \mathbf{N}$$

Oznacza to, że iloczyn $n_1 \cdot n_2$ jest liczbą parzystą.

Zdanie postaci „jeśli p , to q ” nazywamy **implikacją**, p – **poprzednikiem** implikacji, a q – **następnikiem** implikacji.

Twierdzenia w matematyce często można sformułować w postaci implikacji. Poprzednik implikacji nazywamy założeniem, a następnik – tezą twierdzenia. Wykazanie prawdziwości takiego twierdzenia polega na wykazaniu prawdziwości tezy przy założeniu prawdziwości założenia.

Ćwiczenie 1

Wykaż, że jeśli dwie liczby są nieparzyste, a trzecia jest parzysta, to suma tych trzech liczb jest parzysta.

Ćwiczenie 2

Wykaż, że jeśli:

- dwie liczby są nieparzyste, to suma ich kwadratów jest parzysta,
- trzy liczby są nieparzyste, to suma ich kwadratów jest nieparzysta.

Przykład 2

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2(n^2 - 1)$ jest podzielna przez 12.

Zauważmy, że $n^2(n^2 - 1) = n(n - 1)n(n + 1)$. Wśród dowolnych dwóch kolejnych liczb całkowitych znajduje się liczba podzielna przez 2, a wśród trzech – liczba podzielna przez 3. Oznacza to, że liczba:

- $n(n - 1)$ jest podzielna przez 2,
- $n(n + 1)$ jest podzielna przez 2,
- $(n - 1)n(n + 1)$ jest podzielna przez 3.

Zatem liczba $n^2(n^2 - 1)$ jest podzielna przez 4 oraz przez 3, jest więc podzielna przez 12.

Ćwiczenie 2

a) Jeśli n_1, n_2 są liczbami nieparzystymi, to istnieją $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ takie, że $n_1 = 2k_1 + 1$ oraz $n_2 = 2k_2 + 1$. Wówczas:

$$n_1^2 + n_2^2 = (2k_1 + 1)^2 + (2k_2 + 1)^2 = 4k_1^2 + 4k_2^2 + 4k_1 + 4k_2 + 2 = 2(2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_1 + 2k_2 + 1),$$

$$\text{gdzie } 2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_1 + 2k_2 + 1 \in \mathbf{N}$$

Oznacza to, że suma $n_1^2 + n_2^2$ jest liczbą parzystą.

b) Jeśli n_1, n_2, n_3 są liczbami nieparzystymi, to istnieją $k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{N}$ takie, że $n_1 = 2k_1 + 1$, $n_2 = 2k_2 + 1$ oraz $n_3 = 2k_3 + 1$. Wówczas:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = (2k_1 + 1)^2 + (2k_2 + 1)^2 + (2k_3 + 1)^2 = 4k_1^2 + 4k_2^2 + 4k_3^2 + 4k_1 + 4k_2 + 4k_3 + 3 =$$

$$= 2(2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 1) + 1,$$

$$\text{gdzie } 2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 1 \in \mathbf{N}$$

Oznacza to, że suma $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ jest liczbą nieparzystą.

Ćwiczenie 3

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba:

- a) $n(n^4 - 1)$ jest podzielna przez 6,
- b) $n^6 - 2n^4 + n^2$ jest podzielna przez 36.

Ćwiczenie 4

- a) Udowodnij, że iloczyn pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 120.
- b) Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

Przykład 3

Wykaż, że liczba $17^8 - 6^8$ jest podzielna przez 11 i przez 23.

Korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 17^8 - 6^8 &= (17^4 - 6^4)(17^4 + 6^4) = (17^2 - 6^2)(17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) = \\ &= (17 - 6)(17 + 6)(17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) = \\ &= 11 \cdot 23 \cdot (17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) \end{aligned} \quad (17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) \in \mathbb{N}$$

Zatem liczba $17^8 - 6^8$ jest podzielna przez 11 i przez 23.

Ćwiczenie 5

- a) Udowodnij, że liczba $10\,007^4 - 10\,003^4$ jest podzielna przez 80 040.
- b) Udowodnij, że liczba $7^{77} - 6 \cdot 7^{76} + 12 \cdot 7^{75}$ jest podzielna przez 19.
- c) Udowodnij, że liczba $32^{32} - 5^{64}$ jest podzielna przez 7.

Przykład 4

Reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 5 jest równa 4. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby n^2 przez 5 jest równa 1.

Liczbę naturalną n można zapisać w postaci $n = 5k + 4$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wówczas $n^2 = (5k + 4)^2 = 25k^2 + 40k + 16 = 5(5k^2 + 8k + 3) + 1$, zatem reszta z dzielenia liczby n^2 przez 5 jest równa 1.

Ćwiczenie 6

Reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 6 jest równa 5. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby n^2 przez 6 jest równa 1.

Ćwiczenie 7

Reszta z dzielenia każdej z liczb naturalnych n_1 , n_2 i n_3 przez 6 jest równa 4. Wykaż, że suma kwadratów tych liczb jest podzielna przez 12.

Ćwiczenie 6

Liczbę n można zapisać w postaci $n = 6k + 5$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

$$n^2 = (6k + 5)^2 = 36k^2 + 60k + 25 = 6(6k^2 + 10k + 4) + 1, \text{ gdzie } 6k^2 + 10k + 4 \in \mathbb{N}$$

Zatem reszta z dzielenia n^2 przez 6 jest równa 1.

Ćwiczenie 7

Liczy n_1, n_2, n_3 można zapisać w postaci $n_1 = 6k_1 + 4$, $n_2 = 6k_2 + 4$, $n_3 = 6k_3 + 4$ dla pewnych $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$. Wówczas:

$$\begin{aligned} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= (6k_1 + 4)^2 + (6k_2 + 4)^2 + (6k_3 + 4)^2 = \\ &= 36k_1^2 + 36k_2^2 + 36k_3^2 + 48k_1 + 48k_2 + 48k_3 + 48 = \\ &= 12(3k_1^2 + 3k_2^2 + 3k_3^2 + 4k_1 + 4k_2 + 4k_3 + 4), \text{ gdzie } 3k_1^2 + 3k_2^2 + 3k_3^2 + 4k_1 + 4k_2 + 4k_3 + 4 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Zatem liczba $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ jest podzielna przez 12.

Ćwiczenie 3

a) Zauważmy, że:

$$n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$$

Wśród dowolnych dwóch kolejnych liczb całkowitych znajduje się liczba podzielna przez 2, a wśród trzech – liczba podzielna przez 3. Zatem liczba $n(n^4 - 1)$ jest podzielna przez 2 oraz przez 3, jest więc podzielna przez 6.

Ćwiczenie 4

a) Wśród dowolnych pięciu kolejnych liczb naturalnych znajduje się jedna liczba podzielna przez 5, co najmniej jedna liczba podzielna przez 4, co najmniej jedna liczba podzielna przez 3 i co najmniej jedna liczba podzielna przez 2, która nie dzieli się przez 4. Zatem iloczyn tych liczb jest podzielny przez $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

b) Niech $n - 1$, n , $n + 1$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi. Wówczas:

$$\begin{aligned} (n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 &= \\ &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + \\ &+ 3n^2 + 3n + 1 = 3n^3 + 6n = \\ &= 3(n^3 + 2n), \text{ gdzie } n^3 + 2n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Oznacza to, że liczba $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3$ jest podzielna przez 3.

Ćwiczenie 5

$$\begin{aligned} \text{a) } 10\,007^4 - 10\,003^4 &= \\ &= (10\,007^2 - 10\,003^2) \cdot \\ &\cdot (10\,007^2 + 10\,003^2) = \\ &= (10\,007 - 10\,003) \cdot \\ &\cdot (10\,007 + 10\,003) \cdot \\ &\cdot (10\,007^2 + 10\,003^2) = \\ &= 4 \cdot 20\,010 \cdot \\ &\cdot (10\,007^2 + 10\,003^2) = \\ &= 80\,040 (10\,007^2 + 10\,003^2) \end{aligned}$$

Zatem liczba $10\,007^4 - 10\,003^4$ jest podzielna przez 80 040.

b) Korzystamy z własności potęg i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 7^{77} - 6 \cdot 7^{76} + 12 \cdot 7^{75} &= \\ &= 7^{75} (7^2 - 6 \cdot 7 + 12) = \\ &= 7^{75} (49 - 42 + 12) = 7^{75} \cdot 19 \end{aligned}$$

Zatem liczba

$$7^{77} - 6 \cdot 7^{76} + 12 \cdot 7^{75}$$

jest podzielna przez 19.

Odpowiedzi do zadań

2. Wśród trzech kolejnych liczb naturalnych znajduje się jedna liczba podzielna przez 3. Z założenia pierwsza liczba jest parzysta, więc trzecia liczba jest również parzysta, ponadto jedna z tych liczb jest podzielna przez 2 i nie jest podzielna przez 4, a druga jest podzielna przez 4. Zatem iloczyn tych trzech liczb jest podzielny przez $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

3. a) Liczby n_1, n_2, n_3 można zapisać w postaci:

$$n_1 = 3k_1 + 2$$

$$n_2 = 3k_2 + 2$$

$$n_3 = 3k_3 + 2$$

dla pewnych $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$.

Wówczas:

$$n_1 + n_2 + n_3 = (3k_1 + 2) +$$

$$+ (3k_2 + 2) + (3k_3 + 2) =$$

$$= 3k_1 + 3k_2 + 3k_3 + 6 =$$

$$= 3(k_1 + k_2 + k_3 + 2)$$

Zatem $n_1 + n_2 + n_3$ jest liczbą podzielną przez 3.

4. $n_1 = 3k + 1$ i $n_2 = 3k + 2$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

a) $n_1 + n_2 =$

$$= 3k + 1 + 3k + 2 = 3(2k + 1),$$

czyli $3 | (n_1 + n_2)$

b) $n_2^2 - n_1^2 =$

$$= (3k + 2)^2 - (3k + 1)^2 =$$

$$= 6k + 3 = 3(2k + 1),$$

czyli $3 | (n_2^2 - n_1^2)$

5. a) $n = 5k + 4, k \in \mathbb{N}$

$$n^2 - 1 = (5k + 4)^2 - 1 =$$

$$= 25k^2 + 40k + 16 - 1 =$$

$$= 5(5k^2 + 8k + 3)$$

Zatem liczba ta jest podzielna przez 5.

6. a) Liczba naturalna n nie jest podzielna przez 3, więc dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ jest postaci $3k + 1$ lub $3k + 2$.

I przypadek

$$n^2 = (3k + 1)^2 =$$

$$= 3(3k^2 + 2k) + 1$$

Zatem reszta z dzielenia n^2 przez 3 jest równa 1.

II przypadek

$$n^2 = (3k + 2)^2 =$$

$$= 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

Zatem reszta z dzielenia n^2 przez 3 jest równa 1.

Zadania

1. Dane są dwie liczby naturalne, obie podzielne przez 3. Wykaż, że różnica kwadratów tych liczb jest podzielna przez 9.

2. Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych, z których pierwsza jest parzysta, jest podzielny przez 24.

3. a) Dane są trzy liczby naturalne takie, że reszta z dzielenia każdej z nich przez 3 jest równa 2. Wykaż, że suma tych liczb jest podzielna przez 3.

b) Dane są trzy liczby naturalne takie, że reszta z dzielenia każdej z nich przez 6 jest równa 4. Wykaż, że suma tych liczb jest podzielna przez 6.

4. Dane są dwie kolejne liczby naturalne, z których żadna nie jest podzielna przez 3. Wykaż, że:

a) suma tych liczb jest podzielna przez 3,

b) różnica kwadratów tych liczb jest podzielna przez 3.

5. a) Wykaż, że jeśli reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 5 jest równa 4, to liczba $n^2 - 1$ jest podzielna przez 5.

b) Wykaż, że jeśli liczba naturalna n nie jest podzielna przez 5, to jedna z liczb $n^2 - 1$ lub $n^2 + 1$ jest podzielna przez 5.

6. a) Wykaż, że jeśli liczba naturalna n nie jest podzielna przez 3, to reszta z dzielenia liczby n^2 przez 3 jest równa 1.

b) Wykaż, że suma kwadratów trzech liczb naturalnych niepodzielnych przez 3 jest podzielna przez 3.

7. a) Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$ jest naturalna.

b) Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n liczba $\frac{n^3}{8} - \frac{n}{8}$ jest naturalna.

Powtórzenie

8. a) Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

b) Wykaż, że iloczyn kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 36.

9. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n reszta z dzielenia liczby m przez 4 jest równa 3.

a) $m = 24n^2 + 56n + 7$

b) $m = 144n^3 + 256n^2 - 96n + 51$

7. a) $\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$

Liczba $n(n+1)$ jest parzysta, więc $[n(n+1)]^2$ jest liczbą podzielną przez 4, co oznacza, że iloraz $\frac{[n(n+1)]^2}{4}$ jest liczbą naturalną.

b) $\frac{n^3}{8} - \frac{n}{8} = \frac{1}{8}(n-1)n(n+1)$

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to liczby $n-1$ i $n+1$ są parzyste, przy czym jedna z nich jest podzielna przez 4. Zatem iloczyn $(n-1)(n+1)$ jest podzielny przez 8.

Oznacza to, że różnica $\frac{n^3}{8} - \frac{n}{8}$ jest liczbą całkowitą.

4.2. Dowody w algebrze (2)

Przykład 1

Wykaż, że nierówność $a^2 + b^2 \geq 2ab$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b .

Przekształcamy nierówności równoważnie:

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &\geq 2ab \\a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\(a - b)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}$, zatem również nierówność $a^2 + b^2 \geq 2ab$ zachodzi dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}$.

Przykład 2

Wykaż, że dla dowolnych liczb nieujemnych a i b prawdziwa jest nierówność $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (czyli że średnia arytmetyczna liczb nieujemnych jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej).

Założmy, że a i b są liczbami nieujemnymi. Przekształcamy nierówności równoważnie:

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\geq ab \\ a^2 + 2ab + b^2 &\geq 4ab \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\ (a - b)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Dla dowolnych nieujemnych α i β nierówności $\alpha \geq \beta$ i $\alpha^2 \geq \beta^2$ są równoważne.

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb nieujemnych a i b , zatem także nierówność $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ zachodzi dla dowolnych liczb nieujemnych a i b .

Ćwiczenie 1

a) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $ab > 0$, prawdziwa jest nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

b) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $ab < 0$, prawdziwa jest nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

Ćwiczenie 2

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność:

$$\text{a) } a^2 \geq 4b(a - b), \quad \text{b) } a(6b - 7a) \leq 2(b - a)(b + a).$$

Ćwiczenie 3

Wykaż, że dla dowolnych liczb $a, b \geq 0$ zachodzi nierówność $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$.

Ćwiczenie 3

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a+b}{2}} &\geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \\ \frac{a+b}{2} &\geq \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4} \\ 2a+2b &\geq a+2\sqrt{ab}+b \\ a-2\sqrt{ab}+b &\geq 0 \\ (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych, zatem wyjściowa nierówność zachodzi dla dowolnych $a \geq 0, b \geq 0$.

Uczeń:

- stosuje metodę równoważnego przekształcania tezy do uzasadnienia własności wyrażeń algebraicznych,
- dowodzi prawdziwości nierówności, wykorzystując zależność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.

Ćwiczenie 1

a) Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $ab > 0$.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad / \cdot ab$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych, zatem nierówność:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

zachodzi dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}$ takich, że $ab > 0$.

Ćwiczenie 2

b) Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

$$a(6b - 7a) \leq 2(b - a)(b + a)$$

$$6ab - 7a^2 \leq 2b^2 - 2a^2$$

$$5a^2 - 6ab + 2b^2 \geq 0$$

$$(2a - b)^2 + (a - b)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych, zatem nierówność:

$$a(6b - 7a) \leq 2(b - a)(b + a)$$

zachodzi dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}$.

Przykład 3

Wykaż, że równanie $x^4 - 3x^2 - 4x + 8 = 0$ nie ma pierwiastków.

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$\begin{aligned}x^4 - 3x^2 - 4x + 8 &= 0 \\x^4 - 4x^2 + 4 + x^2 - 4x + 4 &= 0 \\(x^2 - 2)^2 + (x - 2)^2 &= 0\end{aligned}$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

Rozpatrzmy składniki otrzymanej sumy: $(x^2 - 2)^2$ i $(x - 2)^2$. Zauważmy, że:

- $(x^2 - 2)^2 \geq 0$ i $(x - 2)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$,
- nie istnieje takie x , dla którego jednocześnie $(x^2 - 2)^2 = 0$ i $(x - 2)^2 = 0$ (pierwszy składnik przyjmuje wartość 0 dla $x = -\sqrt{2}$ oraz dla $x = \sqrt{2}$, a drugi składnik – dla $x = 2$).

Zatem równanie $x^4 - 3x^2 - 4x + 8 = 0$ nie ma pierwiastków.

Ćwiczenie 4

a) $x^4 - 2x + 2 > x^2 + 4x - 8$
 $x^4 - x^2 - 6x + 10 > 0$
 $x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 6x + 9 > 0$
 $(x^2 - 1)^2 + (x - 3)^2 > 0$
 $(x^2 - 1)^2 \geq 0$ i $(x - 3)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$, ponadto nie istnieje takie x , dla którego jednocześnie
 $(x^2 - 1)^2 = 0$ i $(x - 3)^2 = 0$.
Zatem $(x^2 - 1)^2 + (x - 3)^2 > 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$, czyli nierówność:

$x^4 - 2x + 2 > x^2 + 4x - 8$
jest prawdziwa dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.
b) $x^4 - 4x^2 + 5 > 4x - 12$
 $x^4 - 8x^2 + 16 + 4x^2 - 4x + 1 > 0$
 $(x^2 - 4)^2 + (2x - 1)^2 > 0$
 $(x^2 - 4)^2 \geq 0$ i $(2x - 1)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$ oraz nie istnieje takie x , dla którego jednocześnie
 $(x^2 - 4)^2 = 0$ i $(2x - 1)^2 = 0$.
Zatem nierówność:
 $x^4 - 4x^2 + 5 > 4x - 12$
jest prawdziwa dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$.

Ćwiczenie 4

Wykaż, że podana nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby $x \in \mathbf{R}$.

- a) $x^4 - 2x + 2 > x^2 + 4x - 8$ b) $x^4 - 4x^2 + 5 > 4x - 12$

Przykład 4

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność:

$$5x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 1 \geq 0$$

Przekształcamy wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$$5x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 1 = x^2 + 2xy + y^2 + 4x^2 - 4x + 1 = (x + y)^2 + (2x - 1)^2$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzą nierówności $(x + y)^2 \geq 0$ oraz $(2x - 1)^2 \geq 0$, więc nierówność jest zawsze prawdziwa.

Ćwiczenie 5

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność:

- a) $x^2 + 10y^2 + 9 \geq 6y(x + 1)$, b) $3x^2 + y^2 - 2xy \geq 2x - \frac{1}{2}$.

Przykład 5

Wykaż, że jeśli liczby $a \neq 0$ i $b \neq 0$ spełniają warunek $(a + 2b)^3 = a^3 + 8b^3$, to wartość wyrażenia $\frac{a}{b}$ jest równa -2 .

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia:

$$(a + 2b)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot 2b + 3a(2b)^2 + (2b)^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$$

Z równości $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 = a^3 + 8b^3$ otrzymujemy:

$$6a^2b + 12ab^2 = 0$$

Stąd $6a^2b = -12ab^2$, czyli $\frac{a}{b} = -2$.

Ćwiczenie 5

a) Rozpatrzmy nierówność równoważną: $x^2 + 10y^2 + 9 - 6y(x + 1) \geq 0$.

$$x^2 + 10y^2 + 9 - 6y(x + 1) = x^2 - 6xy + 9y^2 + y^2 - 6y + 9 = (x - 3y)^2 + (y - 3)^2$$

$(x - 3y)^2 \geq 0$ i $(y - 3)^2 \geq 0$ dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$, więc nierówność jest zawsze prawdziwa.

b) Rozpatrzmy nierówność równoważną: $3x^2 + y^2 - 2xy - 2x + \frac{1}{2} \geq 0$.

$$3x^2 + y^2 - 2xy - 2x + \frac{1}{2} = x^2 - 2xy + y^2 + \frac{1}{2}(4x^2 - 4x + 1) = (x - y)^2 + \frac{1}{2}(2x - 1)^2$$

$(x - y)^2 \geq 0$ i $(2x - 1)^2 \geq 0$ dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$, więc nierówność jest zawsze prawdziwa.

Ćwiczenie 6

Wykaż, że jeśli liczby $a \neq 0$ i $b \neq 0$ spełniają warunek:

a) $(3a + b)^3 = 27a^3 + b^3$, to $\frac{b}{a} = -3$, b) $(a - 2b)^3 = a^3 - 8b^3$, to $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$.

Zadania

- Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest podana nierówność.
a) $9a^2 + 4b^2 \geq 12ab$ b) $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2 \geq \frac{1}{3}ab$ c) $a(\sqrt{6}b - a) \leq \frac{3}{2}b^2$
- Wykaż, że dla dowolnych liczb $a \geq 0$ i $b \geq 0$ prawdziwa jest nierówność:
a) $a + 4b \geq 4\sqrt{ab}$, b) $a + \frac{b}{2} \geq \sqrt{2ab}$, c) $\sqrt{a} \left(\frac{1}{2}\sqrt{b} - \sqrt{a} \right) \leq \frac{b}{16}$.
- Przeczytaj podany w ramce przykład.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że $ab = 4$, prawdziwa jest nierówność $a + b \geq 4$.

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} && \text{Korzystamy z zależności między} \\ a+b &\geq 2\sqrt{ab} && \text{średnią arytmetyczną i średnią} \\ (a+b)^2 &\geq 4ab && \text{geometryczną liczb.} \end{aligned}$$

Z założenia $ab = 4$, więc $(a+b)^2 \geq 16$ i stąd $a+b \geq 4$.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że:

- $ab = 16$, prawdziwa jest nierówność $(1+a)(1+b) \geq 25$,
 - $ab = \frac{1}{4}$, prawdziwa jest nierówność $4(1+a)(1+b) \geq 9$.
- Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że:
a) $a+b = \frac{1}{2}$, prawdziwa jest nierówność $ab \leq \frac{1}{16}$,
b) $a+b = 5$, prawdziwa jest nierówność $ab \leq 6,25$.
 - Udowodnij, że jeśli liczba całkowita a nie jest podzielna przez 3, to liczba $\frac{a^3}{9}$ nie jest całkowita.

Powtórzenie

- Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}$ prawdziwa jest nierówność:
a) $2b(2a-b) \leq (2a-b)(2a+b)$, b) $\sqrt{3}b(a-\sqrt{3}b) \leq a(a-\sqrt{3}b)$.
- Udowodnij, że dla dowolnych liczb a i b takich, że $a \geq b > 0$, prawdziwa jest nierówność $b^2(a+1) \leq a^2(b+1)$.

6. a) $(2a-b)(2a+b) - 2b(2a-b) = 4a^2 - b^2 - 4ab + 2b^2 = 4a^2 - 4ab + b^2 = (2a-b)^2 \geq 0$
dla $a, b \in \mathbf{R}$, więc $2b(2a-b) \leq (2a-b)(2a+b)$ dla $a, b \in \mathbf{R}$

7. $b^2(a+1) \leq a^2(b+1)$

$$a^2 - b^2 + a^2b - b^2a \geq 0$$

$$(a-b)(a+b) + ab(a-b) \geq 0$$

$$(a-b)(a+b+ab) \geq 0$$

Z założenia $a \geq b$, czyli $a-b \geq 0$. Ponadto $a > 0$ i $b > 0$, więc $a+b+ab \geq 0$.

Zatem ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb a i b takich, że $a \geq b > 0$, co oznacza, że prawdziwa jest również nierówność $b^2(a+1) \leq a^2(b+1)$.

Ćwiczenie 6

b) $(a-2b)^3 =$
 $= a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3 =$
 $a^3 - 8b^3$, czyli $-6a^2b + 12ab^2 = 0$,
stąd $12ab^2 = 6a^2b$, czyli $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$

Odpowiedzi do zadań

1. b) $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2 \geq \frac{1}{3}ab$

$$9a^2 + 4b^2 \geq 12ab$$

$$9a^2 - 12ab + 4b^2 \geq 0$$

$$(3a-2b)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych, zatem dana nierówność zachodzi dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}$.

2. a) $a + 4b - 4\sqrt{ab} =$
 $= (\sqrt{a})^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot 2\sqrt{b} +$
 $+ (2\sqrt{b})^2 =$

$$= (\sqrt{a} - 2\sqrt{b})^2 \geq 0$$

dla $a, b \geq 0$, więc

$$a + 4b \geq 4\sqrt{ab} \text{ dla } a, b \geq 0$$

c) $\sqrt{a} \left(\frac{1}{2}\sqrt{b} - \sqrt{a} \right) \leq \frac{b}{16}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{ab} - a \leq \frac{b}{16}$$

$$8\sqrt{ab} - 16a \leq b$$

$$16a - 8\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$(4\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla $a, b \geq 0$, zatem dana nierówność zachodzi dla $a, b \geq 0$.

4. a) $a+b = \frac{1}{2}$, więc $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{4}$
Obie strony nierówności są liczbami dodatnimi, zatem $ab \leq \frac{1}{16}$.

5. $a = 3k+1$ lub $a = 3k+2$,
gdzie $k \in \mathbf{Z}$
 $(3k+1)^3 =$
 $= 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 =$
 $= 9(3k^3 + 3k^2 + k) + 1$
 $(3k+2)^3 =$

$$= 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 =$$

$$= 9(3k^3 + 6k^2 + 4k) + 8$$

Stąd a^3 nie jest podzielne przez 9, zatem $\frac{a^3}{9}$ nie jest liczbą całkowitą.

Uczeń:

- uzasadnia niewymierność liczby, stosując dowód nie wprost.

Ćwiczenie 1

a) Załóżmy przeciwnie, że $\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną, czyli istnieją liczby całkowite względnie pierwsze m i n takie, że:

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}$$

Podnosimy obie strony równości do kwadratu i otrzymujemy:

$$3 = \frac{m^2}{n^2} \\ 3n^2 = m^2$$

Zatem m^2 jest liczbą podzielną przez 3, czyli również m jest liczbą podzielną przez 3. Czyli istnieje $k \in \mathbf{Z}$ takie, że $m = 3k$. Stąd:

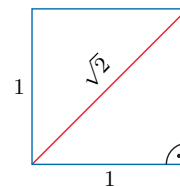
$$3n^2 = (3k)^2 \\ n^2 = 3k^2$$

Zatem n^2 , a więc również n , są liczbami podzielnymi przez 3. Oznacza to, że 3 jest wspólnym dzielnikiem liczb m i n , co jest sprzeczne z założeniem, że są względnie pierwsze.

Otrzymaliśmy sprzeczność, więc przypuszczenie, że $\sqrt{3}$ można wyrazić jako ułamek $\frac{m}{n}$, było fałszywe. Zatem $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną.

D 4.3. Dowody nie wprost

Starożytni Grecy udowodnili, że $\sqrt{2}$ (czyli długość przekątnej kwadratu o boku 1) jest liczbą niewymierną.



Twierdzenie

$\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód

Założmy przeciwnie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, czyli istnieją liczby całkowite względnie pierwsze m i n , takie, że:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \text{Założyliśmy, że liczby } m \text{ i } n \text{ nie mają wspólnych dzielników większych od 1.}$$

Podnosimy obie strony równości do kwadratu i otrzymujemy:

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \\ 2n^2 = m^2$$

Zatem m^2 jest liczbą parzystą, czyli również m jest liczbą parzystą (kwadrat liczby parzystej jest liczbą parzystą, a kwadrat liczby nieparzystej jest liczbą nieparzystą). Czyli $m = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej k . Stąd:

$$2n^2 = (2k)^2 \\ n^2 = 2k^2$$

Zatem n^2 , a więc również n , są liczbami parzystymi. Oznacza to, że 2 jest wspólnym dzielnikiem liczb m i n , co jest sprzeczne z założeniem, że są względnie pierwsze.

Otrzymaliśmy sprzeczność, a więc przypuszczenie, że $\sqrt{2}$ można wyrazić jako ułamek $\frac{m}{n}$, było fałszywe (z prawdy nie może wynikać fałsz). Zatem $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód niewymierności $\sqrt{2}$ jest **dowodem przez sprowadzenie do sprzeczności** (*reductio ad absurdum*), zwany też **dowodem nie wprost**. Ten sposób rozumowania polega na wykazaniu, że przyjęcie prawdziwości jakiegoś zdania prowadzi do sprzeczności. Zatem musi być prawdziwe zdanie przeciwne.

Ćwiczenie 1

Udowodnij, że liczba x jest niewymierna. Przeprowadź rozumowanie analogiczne do dowodu niewymierności liczby $\sqrt{2}$.

a) $x = \sqrt{3}$

b) $x = \sqrt{5}$

c) $x = \sqrt{6}$

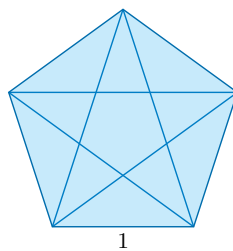
Przykład 1

Udowodnij, że liczba $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (długość przekątnej pięciokąta foremnego o boku 1) jest niewymierna.

Założmy przeciwnie, że $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ jest liczbą wymierną, czyli istnieją takie liczby całkowite m i n , że:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}+1}{2} &= \frac{m}{n} \\ \sqrt{5}+1 &= \frac{2m}{n} \\ \sqrt{5} &= \frac{2m}{n} - 1 = \frac{2m-n}{n}\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną, a $\frac{2m-n}{n}$ – liczbą wymierną. Zatem $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ jest liczbą niewymierną.



Ćwiczenie 2

Udowodnij, że podana liczba jest niewymierna.

a) $\frac{3\sqrt{2}-1}{2}$

b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

c) $3\sqrt{2} - \sqrt{5}$

Wskazówka do podpunktu b). Obie strony równości $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbf{N}$, podnieś do kwadratu.

Zadania

1. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Iloczyn dowolnej liczby niewymiernej x i liczby całkowitej $k \neq 0$ jest liczbą niewymierną.

Dowód. Załóżmy – przeciwnie – że istnieją liczba niewymierna x oraz liczba całkowita $k \neq 0$ takie, że iloczyn $k \cdot x$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją liczby całkowite m i n takie, że $k \cdot x = \frac{m}{n}$. Wówczas $x = \frac{m}{k \cdot n}$, z czego wynika, że x jest liczbą wymierną. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem iloczyn $k \cdot x$ jest liczbą niewymierną.

Udowodnij, że:

- iloczyn dowolnej liczby niewymiernej x i liczby wymiernej $w \neq 0$ jest liczbą niewymierną,
- suma dowolnej liczby niewymiernej x i liczby wymiernej w jest liczbą niewymierną.

2. Wykaż, że wysokość trójkąta równobocznego o boku 1 ma długość, która wyraża się liczbą niewymierną.

2. Wysokość trójkąta równobocznego o boku 1 jest równa $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Założmy przeciwnie, że $\frac{\sqrt{3}}{4}$ jest liczbą wymierną, czyli istnieją liczby całkowite względnie pierwsze m i n takie, że $\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{m}{n}$. Podnosimy obie strony równości do kwadratu i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{3}{16} &= \frac{m^2}{n^2} \\ 3n^2 &= 16m^2\end{aligned}$$

Zatem m^2 , a więc również m są liczbami podzielnymi przez 3, czyli $m = 3k$ dla pewnego $k \in \mathbf{Z}$. Stąd:

$$\begin{aligned}3n^2 &= 16(3k)^2 \\ n^2 &= 3 \cdot 16k^2\end{aligned}$$

Zatem n^2 , a więc również n , są liczbami podzielnymi przez 3, czyli 3 jest wspólnym dzielnikiem liczb m i n , co jest sprzeczne z założeniem. Oznacza to, że $\frac{\sqrt{3}}{4}$ jest liczbą niewymierną.

Ćwiczenie 2

b) Załóżmy przeciwnie, że $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest liczbą wymierną, czyli istnieją takie liczby całkowite m i n , że:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{m}{n}$$

Podnosimy obie strony równości do kwadratu i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}5 + 2\sqrt{6} &= \frac{m^2}{n^2} \\ \sqrt{6} &= \frac{m^2}{2n^2} - \frac{5}{2} = \frac{m^2 - 5n^2}{2n^2}\end{aligned}$$

Otrzymujemy sprzeczność, gdyż $\sqrt{6}$ jest liczbą niewymierną, a $\frac{m^2 - 5n^2}{2n^2}$ – liczbą wymierną.

Zatem $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną.

Odpowiedzi do zadań

1. a) Załóżmy przeciwnie, że istnieją liczba niewymierna x oraz liczba wymierna $w = \frac{a}{b} \neq 0$ ($a, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$) takie, że iloczyn $w \cdot x$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją liczby całkowite m i n takie, że:

$$w \cdot x = \frac{m}{n}, n \neq 0$$

Wówczas:

$$x = \frac{m \cdot b}{n \cdot a}$$

skąd wynika, że x jest liczbą wymierną. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem iloczyn $w \cdot x$ jest liczbą niewymierną.

- b) Załóżmy przeciwnie, że istnieją liczba niewymierna x oraz liczba wymierna $w = \frac{a}{b} \neq 0$ ($a, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$) takie, że suma $w + x$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją liczby całkowite m i n takie, że:

$$w + x = \frac{m}{n}, n \neq 0$$

Wówczas:

$$x = \frac{m}{n} - \frac{a}{b} = \frac{mb - na}{nb}$$

skąd wynika, że x jest liczbą wymierną. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem suma $w + x$ jest liczbą niewymierną.

Nieskończoność zbioru liczb pierwszych

Twierdzenie

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Dowód

Założmy, że liczb pierwszych jest skończenie wiele. Niech $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi ustawionymi w kolejności rosnącej (czyli $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ itd.). Rozpatrzmy liczbę:

$$M = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

Liczba M jest większa od każdej z liczb $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ oraz jest albo liczbą pierwszą, albo złożoną.

Jeżeli M jest liczbą pierwszą, to liczby $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ nie są wszystkimi liczbami pierwszymi.

Jeżeli M jest liczbą złożoną, to można ją przedstawić jako iloczyn czynników będących liczbami pierwszymi. Zauważmy, że w rozkładzie liczby M na czynniki nie może wystąpić żadna spośród liczb $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, gdyż przy dzieleniu przez p_k ($k \leq n$) otrzymujemy resztę równą 1. Zatem liczba M ma dzielnik pierwszy różny od każdej z liczb:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$$

Oznacza to, że zarówno wtedy, gdy liczba M jest pierwsza, jak i wtedy, gdy jest złożona, istnieje liczba pierwsza większa od każdej z liczb:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$$

Zatem nie jest prawdą, że liczb pierwszych jest skończenie wiele.

Powyższe twierdzenie podał i udowodnił Euklides (ok. 365 – ok. 300 r. p.n.e.).

1. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 3$ istnieje liczba pierwsza p taka, że:

$$n < p < n!$$

Wskazówka. Rozpatrz liczbę $n! - 1$.

- *2. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ do przedziału $\langle n! + 2; n! + n \rangle$ nie należy żadna liczba pierwsza.



Odpowiedzi do zadań

1. Niech n będzie liczbą naturalną większą lub równą 3. Założmy, że p jest liczbą pierwszą mniejszą lub równą n , która jest dzielnikiem liczby $n! - 1$ (co spełnia założone warunki: $n \geq p$ i $p < n!$). Liczby $n! - 1$ oraz $n!$ są względnie pierwsze, co oznacza, że nie mają żadnych wspólnych dzielników naturalnych poza liczbą 1. Zatem liczba p nie może być dzielnikiem liczby $n!$, czyli nie może być mniejsza lub równa n , ponieważ każda liczba naturalna mniejsza lub równa n jest dzielnikiem liczby $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Prowadzi to do sprzeczności, zatem dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 3$ istnieje liczba pierwsza p taka, że: $n < p < n!$

2. Dla $n \in \{0, 1\}$ twierdzenie jest prawdziwe. Rozważmy $n \geq 2$. Niech m będzie dowolną liczbą naturalną należącą do przedziału $\langle n! + 2; n! + n \rangle$. Wówczas $m = n! + k$ dla pewnego $k \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$. Ponieważ:

$$n! = (k-1)! \cdot k \cdot (k+1) \cdot \dots \cdot n$$

więc:

$$m = n! + k = k((k-1)! \cdot (k+1) \cdot \dots \cdot n + 1)$$

Liczba m jest podzielna przez k , gdzie $1 < k < m$, nie jest więc liczbą pierwszą.

4.4. Dowody w geometrii (1)

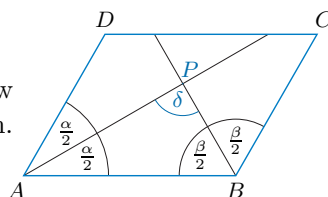
Ćwiczenie 1

Udowodnij, że suma miar kątów trójkąta jest równa 180° .

Gdy przedstawiamy dowód twierdzenia, często korzystamy z twierdzeń już udowodnionych. W dowodach twierdzeń w ćwiczeniach 2. i 3. można skorzystać z twierdzenia udowodnionego w ćwiczeniu 1.

Ćwiczenie 2

Udowodnij, że dwusieczne dwóch sąsiednich kątów równoległoboku przecinają się pod kątem prostym.



Ćwiczenie 3

Udowodnij, że jeśli środek okręgu opisanego na trójkącie jest środkiem jednego z jego boków, to trójkąt ten jest prostokątny.

W dowodzie przedstawionym w poniższym przykładzie korzystamy z twierdzeń nazywanych cechami przystawiania trójkątów (przypomnij ich treść).

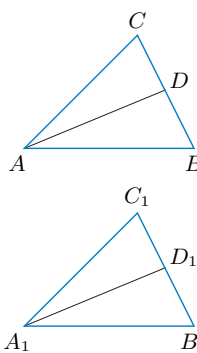
Przykład 1

W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ (rysunek obok) poprowadzono dwusieczne odpowiednio AD i A_1D_1 . Wykaż, że jeśli $|AB| = |A_1B_1|$, $|AD| = |A_1D_1|$ oraz $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C_1A_1B_1$, to $|AC| = |A_1C_1|$.

$|AB| = |A_1B_1|$, $|AD| = |A_1D_1|$ oraz $\sphericalangle BAD = \sphericalangle B_1A_1D_1$, więc na podstawie cechy BKB trójkąty ABD i $A_1B_1D_1$ są przystające ($\triangle ABD \equiv \triangle A_1B_1D_1$).

Stąd $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$.

Z powyższego wniosku i założeń $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C_1A_1B_1$ oraz $|AB| = |A_1B_1|$, na podstawie cechy KBK, otrzymujemy: $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$. Zatem $|AC| = |A_1C_1|$.



Ćwiczenie 4

Środkowe AD i A_1D_1 poprowadzone odpowiednio w trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ mają równe długości. Wykaż, że jeśli:

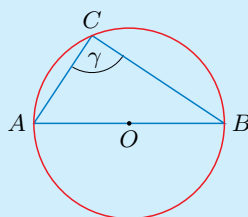
- $|AB| = |A_1B_1|$ oraz $|BC| = |B_1C_1|$, to $|AC| = |A_1C_1|$,
- $\sphericalangle CAD = \sphericalangle C_1A_1D_1$ oraz $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A_1D_1B_1$, to $|AB| = |A_1B_1|$.

Ćwiczenie 3

Niech punkt O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , czyli środkiem boku AB . Wówczas kąt γ jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy AOB :

$$\gamma = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

Zatem trójkąt ABC jest prostokątny.



Ćwiczenie 4

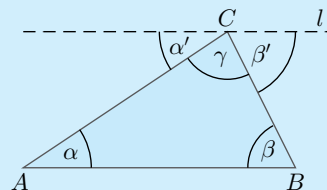
Patrz str. 146.

Uczeń:

- podaje założenie i tezę twierdzenia geometrycznego,
- wykorzystuje przystawianie trójkątów do dowodzenia twierdzeń.

Ćwiczenie 1

Rysujemy pomocniczą prostą l równoległą do boku AB i przechodzącą przez wierzchołek C .



Kąty α i α' są równe (są to kąty naprzemianległe). Również kąty β i β' są równe (jako kąty naprzemianległe). Zatem:

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma$$

$\alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$, więc również: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Ćwiczenie 2

W równoległoboku suma miar kątów leżących przy tym samym boku wynosi 180° , czyli:

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$$

Niech P będzie punktem przecięcia dwusiecznych równoległoboku $ABCD$. Suma miar kątów trójkąta ABP jest równa 180° , więc:

$$\begin{aligned} \delta &= 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \\ &= 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

Uzasadnienie przystawiania trójkątów FDE i GAE

Zauważmy, że:

$$\sphericalangle FDE = \sphericalangle GAE = 90^\circ$$

oraz:

$$\sphericalangle FED = \sphericalangle GEA$$

ponieważ są to kąty wierzchołkowe.

Ponadto $|DE| = |EA|$, więc na podstawie cechy KBK trójkąty FDE i GAE są przystające.

Ćwiczenie 5

Na podstawie cechy BBB trójkąty ACD i CAB są przystające, więc ich pola są równe:

$$\frac{1}{2}|AC| \cdot |DM| = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BN|$$

Stąd $|DM| = |BN|$ oraz:

$$P_{ADP} = \frac{1}{2}|AP| \cdot |DM| = \frac{1}{2}|AP| \cdot |BN| = P_{ABP},$$

co należało wykazać.

Przykład 2

Środkowa CD trójkąta ABC zawiera się w dwusiecznej kąta ACB (rysunek obok). Wykaż, że trójkąty ADC i BDC są przystające.

Trójkąty ADC i BDC mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka C i równe podstawy, zatem:

$$P_{\triangle ADC} = P_{\triangle BDC}$$

Wyznaczamy te pola:

$$P_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CD| \cdot \sin \alpha$$

$$P_{\triangle BDC} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |CD| \cdot \sin \alpha$$

i otrzymujemy $|AC| = |BC|$. Trójkąty ADC i BDC mają odpowiednie boki tej samej długości, zatem na podstawie cechy BBB są przystające.

Zwróćmy uwagę, że z udowodnionego w przykładzie 2. twierdzenia wynika, że jeśli środkowa trójkąta zawiera się w dwusiecznej jednego z jego kątów, to jest ona wysokością tego trójkąta.

W niektórych dowodach geometrycznych potrzebne jest poprowadzenie dodatkowych prostych lub odcinków.

Przykład 3

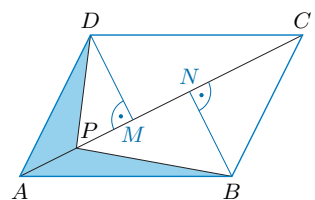
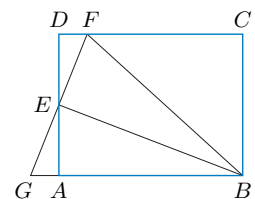
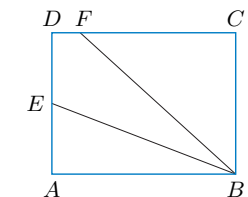
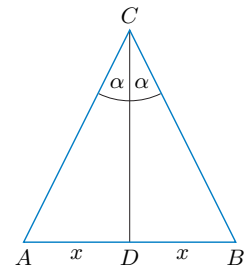
Punkt E jest środkiem boku AD prostokąta $ABCD$. Na boku DC obrano taki punkt F , że $\sphericalangle ABE = \sphericalangle FBE$. Wykaż, że kąt FEB jest prosty.

Odcinek FE przedłużamy do przecięcia z prostą AB w punkcie G . Trójkąty FDE i GAE są przystające (uzasadnij), stąd $|EF| = |EG|$. Odcinek EB jest więc środkową trójkąta FBG , a ponieważ zawiera się w dwusiecznej kąta FBG , jest też wysokością tego trójkąta. Zatem kąt FEB jest prosty.

Ćwiczenie 5

Punkt P należy do przekątnej AC równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok). Wykaż, że pola trójkątów ADP i ABP są równe.

Wskazówka. Narysuj wysokość trójkąta ACD opuszczoną z wierzchołka D oraz wysokość trójkąta ACB opuszczoną z wierzchołka B i wykaż, że wysokości te są równe.



Ćwiczenie 4 (ze str. 145)

a) $|AB| = |A_1B_1|$, $|AD| = |A_1D_1|$ oraz $|BC| = |B_1C_1|$, czyli $\frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}|B_1C_1|$, co oznacza, że $|BD| = |DC| = |B_1D_1| = |D_1C_1|$, więc na podstawie cechy BBB trójkąty ABD i $A_1B_1D_1$ są przystające.

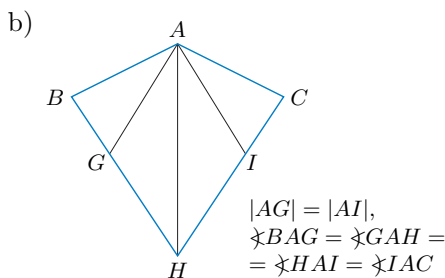
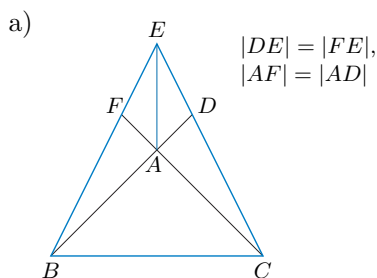
Stąd $\sphericalangle ABD = \sphericalangle A_1B_1D_1$, zatem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$.

Z powyższego wniosku i założeń $|AB| = |A_1B_1|$ oraz $|BC| = |B_1C_1|$, na podstawie cechy BKB, wynika, że trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ są przystające.

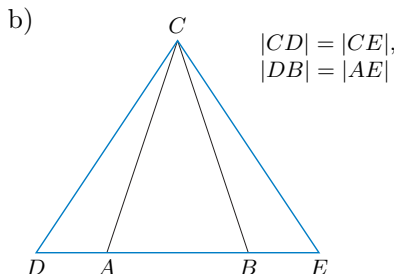
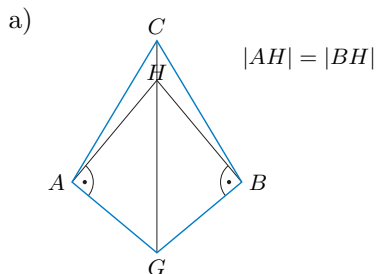
Zatem $|AC| = |A_1C_1|$.

Zadania

1. Korzystając z podanych informacji, wykaż, że $|AB| = |AC|$.



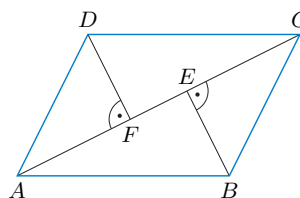
2. Korzystając z podanych informacji, wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny.



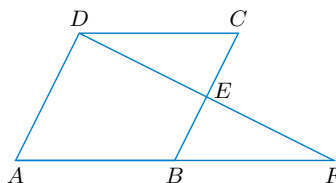
3. Dany jest czworokąt $ABCD$ (rysunek obok).

a) Wykaż, że $|AB| = |DC|$, jeśli wiadomo, że $|AF| = |CE|$ oraz $\sphericalangle FAD = \sphericalangle ECB$.

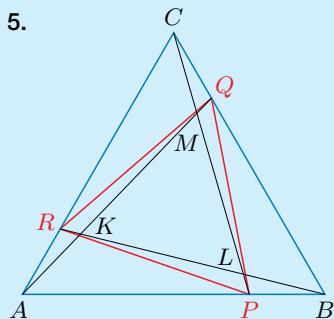
b) Wykaż, że $|AD| = |BC|$, jeśli wiadomo, że $|BE| = |DF|$ oraz $AB \parallel CD$.



4. Dany jest równoległobok $ABCD$ (rysunek obok). Punkt E jest środkiem boku BC , a punkt F – punktem przecięcia prostych AB i DE . Wykaż, że pola trójkąta AFD i równoległoboku $ABCD$ są równe.



5. Na bokach AB , BC i AC trójkąta równobocznego ABC obrano odpowiednio punkty P , Q i R tak, że $|AP| = |BQ| = |CR|$. Wykaż, że trójkąt PQR jest równoboczny oraz że punkty przecięcia odcinków AQ , BR i CP są wierzchołkami trójkąta równobocznego.



Na podstawie cechy BKB:

$$\triangle APR \equiv \triangle BQP \equiv \triangle CRQ$$

Zatem $|RP| = |PQ| = |QR|$, czyli trójkąt PQR jest równoboczny.

Na podstawie cechy BKB:

$$\triangle APC \equiv \triangle BQA \equiv \triangle CRB$$

więc $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BAQ = \sphericalangle CBR$ oraz:

$$\sphericalangle APC = \sphericalangle BQA = \sphericalangle CRB$$

Zatem $\sphericalangle AMP = \sphericalangle BQK = \sphericalangle CLR$. Z równości odpowiednich kątów wierzchołkowych otrzymujemy:

$\sphericalangle KML = \sphericalangle MKL = \sphericalangle KLM$, czyli trójkąt KLM jest równoboczny.

Odpowiedzi do zadań

1. a) Trójkąty AFE i ADE są przystające na podstawie cechy BBB. Zatem:

$$\sphericalangle AFE = \sphericalangle ADE$$

Na podstawie cechy KBK:

$$\triangle CEF \equiv \triangle BED,$$

$$\text{czyli } |DB| = |FC|$$

Zatem $|AB| = |AC|$.

- b) Trójkąty GAH i IAH mają wspólny bok AH , a także $\sphericalangle GAH = \sphericalangle HAI$ oraz $|AG| = |AI|$, więc na podstawie cechy BKB trójkąty te są przystające. Zatem:

$$\sphericalangle AHG = \sphericalangle AHI$$

Ponadto:

$$\sphericalangle BAG = \sphericalangle IAC = \sphericalangle GAH},$$

$$\text{czyli } \sphericalangle BAH = \sphericalangle HAC$$

Na podstawie cechy KBK trójkąty BAH i CAH są przystające i stąd:

$$|AB| = |AC|$$

2. a) Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|AG| = |BG|$.

Na podstawie cechy BBB:

$$\triangle GAH \equiv \triangle GBH$$

Zatem $\sphericalangle AGH = \sphericalangle BGH$. Na podstawie cechy BKB:

$$\triangle AGC \equiv \triangle BGC$$

Zatem $|AC| = |BC|$, co oznacza, że trójkąt ABC jest równoramienny.

- b) Trójkąt DEC jest równoramienny, więc:

$$\sphericalangle CDB = \sphericalangle CEA$$

Zatem na podstawie cechy BKB: $\triangle CDB \equiv \triangle CEA$.

Stąd $|BC| = |AC|$, co oznacza, że trójkąt ABC jest równoramienny.

3. b) Kąty BAC i DCA są równe, gdyż są naprzemianległe. Ponadto:

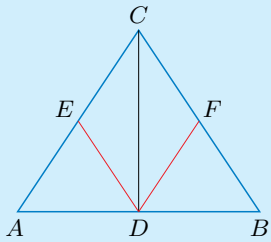
$$\sphericalangle BEA = \sphericalangle DFC = 90^\circ,$$

$$\text{czyli } \sphericalangle EBA = \sphericalangle FDC$$

Zatem na podstawie cechy KBK: $\triangle ABE \equiv \triangle CDF$.

Stąd $|AB| = |CD|$. Trójkąty ABC i CDA mają wspólny bok oraz $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$, więc trójkąty te są przystające (cecha BKB). Zatem $|AD| = |BC|$.

6.



Na podstawie cechy BKB:

$$\triangle DAE \sim \triangle BAC$$

więc $|DE| = \frac{1}{2}|BC|$

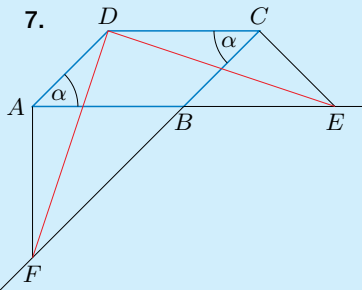
Na podstawie cechy BKB:

$$\triangle DBF \sim \triangle ABC$$

więc $|DF| = \frac{1}{2}|AC|$

Z założenia $|DE| = |DF|$,
więc $|BC| = |AC|$. Zatem
 $\triangle ABC$ jest równoramienny.

7.



$\sphericalangle CBE = \sphericalangle BCD = \alpha$ (kąty naprzemianległe)

$\sphericalangle ABF = \sphericalangle CBE = \alpha$ (kąty wierzchołkowe)

Trójkąty BCE i FAB są równoramienne, zatem

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle ABF = \sphericalangle CBE = \sphericalangle CEB = \alpha.$$

Stąd $\sphericalangle FAD = \sphericalangle DCE$.

$$|AD| = |BC| = |CE|$$

$$|DC| = |AB| = |FA|$$

Zatem trójkąty DAF i ECD są przystające (na podstawie cechy BKB).

12. a) Na podstawie cechy BKB:

$\triangle BDH \equiv \triangle CDG$, więc

$\sphericalangle HBD = \sphericalangle GCD$. Zatem

$\triangle BAC$ jest równoramienny:

$$|BA| = |CA|.$$

Ponadto

$$|BD| = |CD|,$$

więc na podstawie cechy BKB:

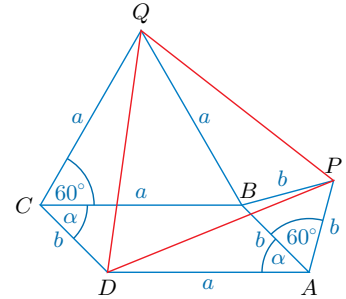
$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

Zatem $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$, co oznacza, że prosta AD jest dwusieczną kąta BAC.

6. W trójkącie ABC poprowadzono środkową CD, a z punktu D poprowadzono środkowe trójkątów ADC i CDB: odpowiednio DE i DF. Wykaż, że jeśli $|DE| = |DF|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

7. Dany jest równoległobok ABCD o kącie ostrym przy wierzchołku A. Na półprostych AB i CB obrano odpowiednio punkty E i F takie, że $|CB| = |CE|$ oraz $|AB| = |AF|$. Wykaż, że $\triangle DAF \equiv \triangle ECD$.

8. Na zewnątrz równoległoboku ABCD (rysunek obok) obrano punkty P i Q tak, że trójkąty BAP i CBQ są równoboczne. Wykaż, że trójkąt PQD jest równoboczny.

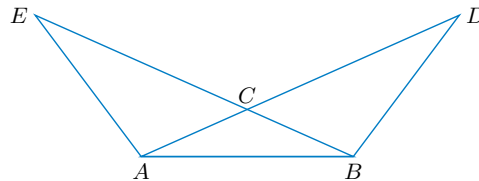


9. Dany jest trapez ABCD. Punkt P jest środkiem ramienia AD. Udowodnij, że pole trójkąta BPC jest dwa razy mniejsze od pola trapezu ABCD.

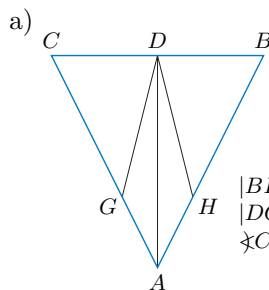
10. Punkty P, Q, R i S są środkami boków trapezu równoramiennego. Wykaż, że czworokąt PQRS jest rombem.

Powtórzenie

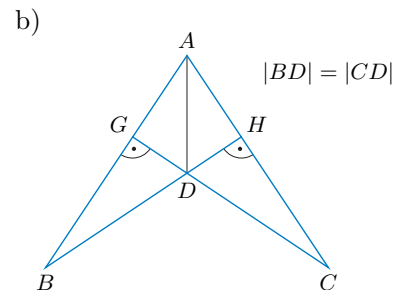
11. Udowodnij, że jeśli $\sphericalangle EAB = \sphericalangle DBA$ oraz $|EA| = |DB|$ (rysunek poniżej), to trójkąt ABC jest równoramienny.



12. Korzystając z podanych informacji, wykaż, że odcinek AD zawiera się w dwusiecznej kąta BAC.

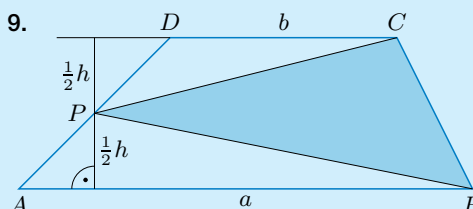


$$\begin{aligned} |BD| &= |CD|, \\ |DG| &= |DH|, \\ \sphericalangle CDG &= \sphericalangle BDH \end{aligned}$$



8. $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \alpha$ oraz $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CBQ = 60^\circ$,
stąd $\sphericalangle PBQ = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ + \alpha = \sphericalangle DCQ$
Zatem na podstawie cechy BKB: $\triangle PBQ \equiv \triangle DCQ \equiv \triangle PAD$,
stąd $|PQ| = |QD| = |DP|$, czyli $\triangle PQD$ jest równoboczny.

9.

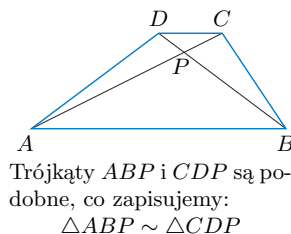


$$\begin{aligned} P_{BPC} &= P_{ABCD} - P_{ABP} - P_{CDP} = \\ &= \frac{(a+b)h}{2} - \frac{a \cdot \frac{1}{2}h}{2} - \frac{b \cdot \frac{1}{2}h}{2} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b)h}{2} = \frac{1}{2}P_{ABCD} \end{aligned}$$

4.5. Dowody w geometrii (2)

Ćwiczenie 1

- a) Przypomnij cechy podobieństwa trójkątów.
 b) Dany jest trapez $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie P (rysunek obok). Podaj cechę, na podstawie której można uzasadnić podobieństwo trójkątów ABP i CDP .

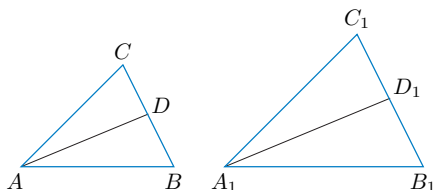


Przykład 1

W trójkątach podobnych ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono środkowe AD i A_1D_1 . Wykaż, że długości tych środkowych są proporcjonalne do długości boków trójkątów.

Korzystamy z podobieństwa trójkątów ABC i $A_1B_1C_1$:

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{\frac{1}{2}|BC|}{\frac{1}{2}|B_1C_1|} = \frac{|BD|}{|B_1D_1|}$$



Ponadto kąty ABD i $A_1B_1D_1$ są równe, więc na podstawie cechy BKB trójkąty ABD i $A_1B_1D_1$ są podobne. Zatem:

$$\frac{|AD|}{|A_1D_1|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|}$$

Ćwiczenie 2

Boki AB , BC i AC trójkąta ABC są proporcjonalne odpowiednio do boków A_1B_1 , B_1C_1 i A_1C_1 trójkąta $A_1B_1C_1$.

- a) W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono dwusieczne kątów BAC i $B_1A_1C_1$. Przecięły one boki BC i B_1C_1 odpowiednio w punktach D i D_1 . Wykaż, że długości odcinków AD i A_1D_1 są proporcjonalne do długości boków trójkątów.

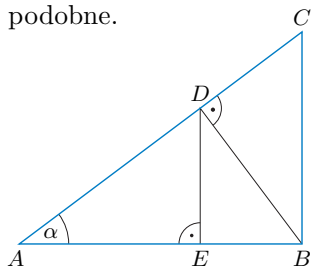
- b) Symetralna boku AB przecina boki trójkąta ABC w punktach P i Q , a symetralna boku A_1B_1 przecina boki trójkąta $A_1B_1C_1$ odpowiednio w punktach P_1 i Q_1 . Wykaż, że trójkąty APQ i $A_1P_1Q_1$ są podobne.

Ćwiczenie 3

Dany jest trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok).

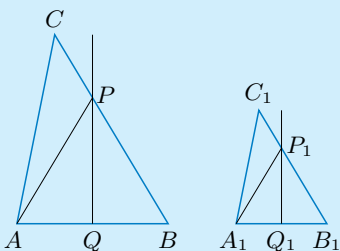
Wykaż, że stosunek pól trójkątów:

- a) BDC i ABC jest równy $\sin^2 \alpha$,
 b) AED i ABC jest równy $\cos^4 \alpha$.



II przypadek

Punkt P leży na boku BC .



$\angle BQP = \angle B_1Q_1P_1 = 90^\circ$ oraz z założenia $\angle CBA = \angle C_1B_1A_1$, więc $\angle BPQ = \angle B_1P_1Q_1$.

Stąd na podstawie cechy KKK:

$$\triangle BPQ \sim \triangle B_1P_1Q_1$$

$$\text{Zatem } \frac{|PQ|}{|P_1Q_1|} = \frac{|QB|}{|Q_1B_1|}.$$

Z założenia $|QB| = |AQ|$ oraz $|Q_1B_1| = |A_1Q_1|$, więc:

$$\frac{|PQ|}{|P_1Q_1|} = \frac{|AQ|}{|A_1Q_1|}$$

Zatem na podstawie cechy BKB:

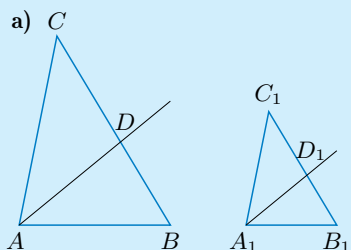
$$\triangle APQ \sim \triangle A_1P_1Q_1$$

Uczeń:

- wykorzystuje podobieństwo trójkątów do dowodzenia twierdzeń,
- dowodzi własności odcinków w trójkącie prostokątnym,
- wykorzystuje związki miarowe w trójkątach do dowodzenia twierdzeń.

Ćwiczenie 2

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|}, \text{ czyli } \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

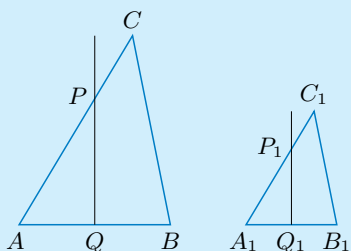


$\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \angle B_1A_1C_1 = \angle B_1A_1D_1$,
 więc na podstawie cechy KKK trójkąty ABD i $A_1B_1D_1$ są podobne. Zatem:

$$\frac{|AD|}{|A_1D_1|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|}$$

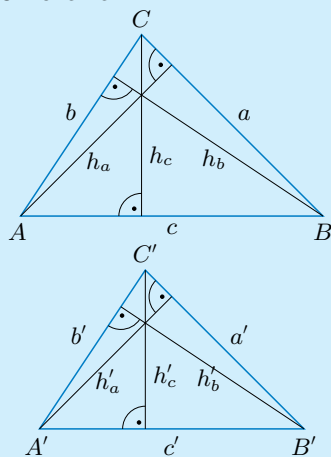
b) I przypadek

Punkt P leży na boku AC .



$\angle AQP = \angle A_1Q_1P_1 = 90^\circ$
 oraz $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$,
 więc $\angle APQ = \angle A_1P_1Q_1$.
 Zatem na podstawie cechy KKK:
 $\triangle APQ \sim \triangle A_1P_1Q_1$

Ćwiczenie 4



Z założenia $\frac{h_a}{h'_a} = \frac{h_b}{h'_b} = \frac{h_c}{h'_c}$.

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

$$P' = \frac{1}{2} a' \cdot h'_a$$

Stąd:

$$\frac{a}{a'} = \frac{2P}{h_a} : \frac{2P'}{h'_a} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{h'_a}{h_a} =$$

$$= \frac{P}{P'} \cdot \frac{h'_b}{h_b} = \frac{b'}{b},$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{2P}{h_a} : \frac{2P'}{h'_a} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{h'_a}{h_a} =$$

$$= \frac{P}{P'} \cdot \frac{h'_c}{h_c} = \frac{c'}{c},$$

$$\frac{b}{b'} = \frac{2P}{h_b} : \frac{2P'}{h'_b} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{h'_b}{h_b} =$$

$$= \frac{P}{P'} \cdot \frac{h'_c}{h_c} = \frac{c'}{c}$$

Zatem na podstawie cechy BBB trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne.

Ćwiczenie 5

a) $P_{ABC} = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} (x+y)h$,

stąd $h = \frac{ab}{x+y}$

b) $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ (cecha KKK), stąd:

$$\frac{h}{x} = \frac{y}{h}, \text{ czyli } h^2 = xy,$$

zatem $h = \sqrt{xy}$

c) $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ (cecha KKK), stąd:

$$\frac{a}{x+y} = \frac{x}{a}, \text{ czyli } a^2 = x(x+y),$$

zatem $a = \sqrt{x(x+y)}$

d) $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (cecha KKK), stąd:

$$\frac{b}{x+y} = \frac{y}{b}, \text{ czyli } b^2 = y(x+y),$$

zatem $b = \sqrt{y(x+y)}$

Przykład 2

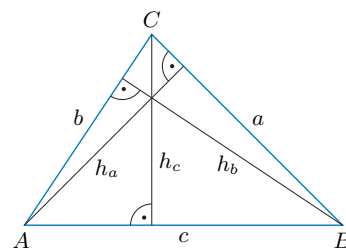
Udowodnij, że wysokości trójkąta są odwrotnie proporcjonalne do długości boków, na które je opuszczono.

Rozpatrzmy trójkąt o bokach a, b i c oraz wysokościach h_a, h_b i h_c (rysunek obok). Wówczas pole trójkąta ABC :

$$P = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b$$

Stąd $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$.

Analogicznie $\frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a}$ oraz $\frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b}$.



Ćwiczenie 4

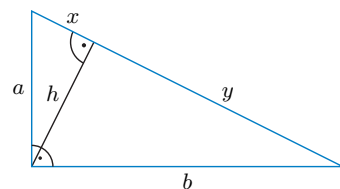
Udowodnij, że jeśli wysokości jednego trójkąta są proporcjonalne do wysokości drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Ćwiczenie 5

Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a, b i przeciwprostokątnej długości $x+y$, gdzie x i y są długościami odcinków, na które wysokość h podzieliła przeciwprostokątną. Udowodnij, że:

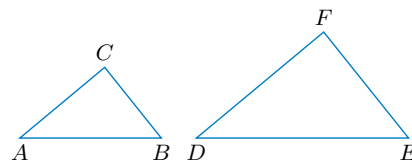
a) $h = \frac{ab}{x+y},$ c) $a = \sqrt{x(x+y)},$

b) $h = \sqrt{xy},$ d) $b = \sqrt{y(x+y)}.$

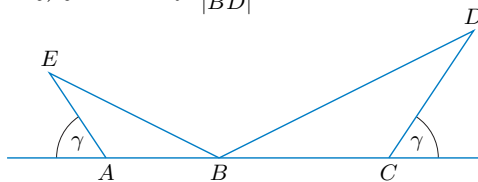


Zadania

1. Boki trójkąta ABC są równoległe do odpowiednich boków trójkąta DEF (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty te są podobne.



2. Wykaż, że jeśli $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CB|}$, to stosunek obwodów trójkątów ABE i CBD (rysunek poniżej) jest równy $\frac{|BE|}{|BD|}$.



Odpowiedzi do zadań

1. Z równoległości odpowiednich boków wynika, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FDE$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DFE$.

Zatem na podstawie cechy KKK: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

2. $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CB|}$, skąd $\frac{|AE|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|CB|}$

Ponadto $\sphericalangle EAB = \sphericalangle DCB$, więc na podstawie cechy BKB:

$$\triangle ABE \sim \triangle CBD$$

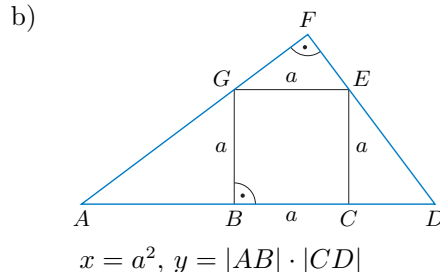
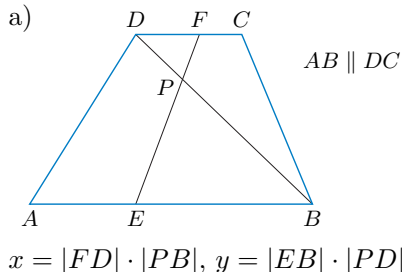
$$\frac{|AE|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|BE|}{|BD|} = k,$$

gdzie k jest skalą podobieństwa trójkątów.

$$\frac{Ob_{ABE}}{Ob_{CBD}} = \frac{|AB|+|BE|+|AE|}{|CB|+|BD|+|DC|} = \frac{k|CB|+k|BD|+k|DC|}{|CB|+|BD|+|DC|} = \frac{k(|CB|+|BD|+|DC|)}{|CB|+|BD|+|DC|} = k = \frac{|BE|}{|BD|}$$

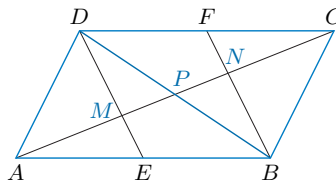
3. Wewnątrz trójkąta ABC obrano punkt P tak, że $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CBP$. Wykaż, że $\triangle APL \sim \triangle BPK$ oraz $\triangle APB \sim \triangle KLP$, gdzie punkty K i L są punktami przecięcia prostych AP i BP odpowiednio z bokami BC i AC .

4. Korzystając z podanych informacji, wykaż, że $x = y$.



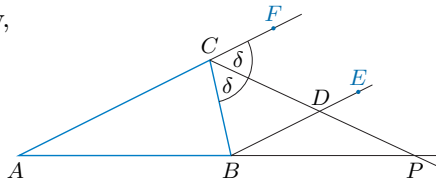
5. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC oraz $\sphericalangle ACM = \sphericalangle ABC$. Wykaż, że $|AB| = \sqrt{2} \cdot |AC|$.

6. Punkty E i F są środkami boków AB i DC równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że odcinki DE i FB dzielą przekątną AC na trzy odcinki równej długości.



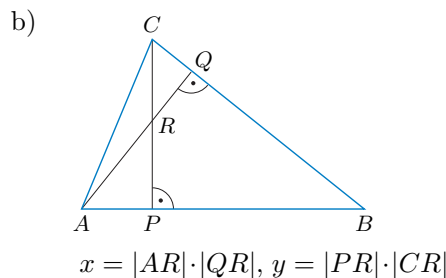
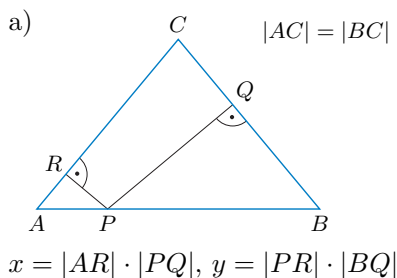
7. Dany jest trójkąt ABC . Punkt P jest punktem przecięcia prostej będącej przedłużeniem boku AB i dwusiecznej kąta zewnętrznego trójkąta (rysunek poniżej). Odcinek BD jest równoległy do odcinka AC . Wykaż, że:

- a) trójkąt BCD jest równoramienny,
b) $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$.



Powtórzenie

8. Korzystając z podanych informacji, wykaż, że $x = y$.



6. Przekątne w równoległoboku przecinają się w połowie, stąd $|BP| = |PD|$ i $|AP| = |PC| = \frac{1}{2}|AC|$.

AP i DE są środkowymi w $\triangle ABD$, więc dzielą się w stosunku 2:1, czyli:

$$|AM| = \frac{2}{3}|AP| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{3}|AC|$$

Analogicznie w $\triangle CDB$ środkowe BF i CP dzielą się w stosunku 2:1, czyli:

$$|NC| = \frac{2}{3}|PC| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{3}|AC|$$

$$|MN| = |AC| - |AM| - |NC| = |AC| - \frac{1}{3}|AC| - \frac{1}{3}|AC| = \frac{1}{3}|AC| = |AM| = |NC|$$

7. a) $\sphericalangle EDP = \sphericalangle FCD = \delta$ (kąty odpowiadające), $\sphericalangle BDC = \sphericalangle PDE = \delta$ (kąty wierzchołkowe). Stąd $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BCD$, zatem $\triangle BDC$ jest równoramienny oraz $|BD| = |BC|$.

b) $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BDP$ (kąty odpowiadające), $\sphericalangle CAP = \sphericalangle DBP$ (kąty odpowiadające), $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPD$ (ten sam kąt). Zatem $\triangle APC \sim \triangle BPD$, stąd $\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$.

4. a) $\sphericalangle EBP = \sphericalangle FDP$,
 $\sphericalangle BEP = \sphericalangle DFP$ (kąty naprzemianległe) oraz
 $\sphericalangle EPB = \sphericalangle FPD$ (kąty wierzchołkowe)
 $\triangle EPB \sim \triangle FPD$ (cecha KKK)
Zatem $\frac{|FD|}{|EB|} = \frac{|PD|}{|PB|}$, więc
 $|FD| \cdot |PB| = |EB| \cdot |PD|$,
czyli $x = y$.
b) $\sphericalangle ABG = \sphericalangle ECD = 90^\circ$,
 $\sphericalangle AGB = \sphericalangle ADF = \sphericalangle CDE$
Trójkąty ABG i ECD są podobne (na podstawie cechy KKK).
Zatem $\frac{|AB|}{a} = \frac{a}{|CD|}$, więc
 $a^2 = |AB| \cdot |CD|$, czyli $x = y$.

5. $|AM| = \frac{1}{2}|AB|$
Niech $\sphericalangle BAC = \alpha$,
 $\sphericalangle ACM = \sphericalangle ABC = \beta$.
Wówczas:
 $\sphericalangle AMC = 180^\circ - \alpha - \beta$, stąd
 $\sphericalangle BMC = \alpha + \beta$, czyli
 $\sphericalangle BCM = 180^\circ - \alpha - 2\beta$.
Stąd:
 $\sphericalangle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta = \sphericalangle AMC$
Zatem trójkąty ABC , ACM są podobne (na podstawie cechy KKK). Wówczas:
 $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AM|}$,
stąd $|AC|^2 = |AB| \cdot |AM| = \frac{1}{2}|AB|^2$,
czyli $|AB|^2 = 2|AC|^2$,
zatem $|AB| = \sqrt{2}|AC|$.

8. a) Trójkąt ABC jest równoramienny.
 $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$
 $\sphericalangle ARP = \sphericalangle BQP = 90^\circ$,
więc $\sphericalangle RPA = \sphericalangle QPB$
Zatem na podstawie cechy KKK: $\triangle APR \sim \triangle BPQ$.
Stąd:
 $\frac{|AR|}{|BQ|} = \frac{|PR|}{|PQ|}$
 $|AR| \cdot |PQ| = |PR| \cdot |BQ|$
czyli $x = y$.

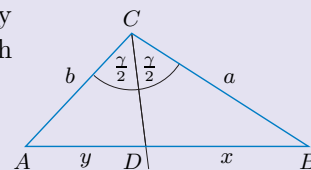
Różne dowody twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie

Poniższe twierdzenie zostało przedstawione w klasie pierwszej.

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Dowód 1

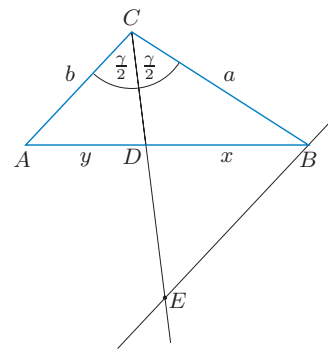
Prowadzimy prostą równoległą do boku AC trójkąta ABC i przechodzącą przez wierzchołek B aż do przecięcia z dwusieczną CD kąta ACB . Punkt przecięcia oznaczamy przez E .

Kąty ACE i CEB są naprzemianległe, zatem $\sphericalangle CEB = \sphericalangle ACE$.

$\sphericalangle CEB = \sphericalangle ECB$, więc trójkąt BCE jest równoramienny, zatem $|EB| = |BC| = a$.

Na podstawie cechy KKK trójkąty ADC i BDE są podobne, zatem:

$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BE|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Dowód 2

Niech $\delta = \sphericalangle ADC$.

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ADC otrzymujemy:

$$\frac{y}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\sin \delta}$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta BDC otrzymujemy:

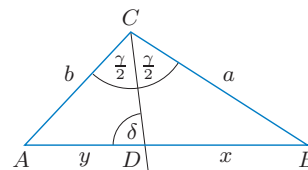
$$\frac{x}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{\sin(180^\circ - \delta)}$$

Zauważmy, że $\sin(180^\circ - \delta) = \sin \delta$, zatem:

$$\frac{y}{b} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \delta} = \frac{x}{a}$$

skąd otrzymujemy:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$





5 Powtórzenie

5.1. Liczby rzeczywiste

Zbiór **liczb rzeczywistych** oznaczamy literą **R**.

Liczby naturalne to liczby: 0, 1, 2, 3, ... Zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą **N**. Liczbę naturalną, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy **liczbą pierwszą**.

Początkowe liczby pierwsze: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: 1, 2, 3, 4, ..., liczby do nich przeciwne: -1, -2, -3, -4, ... oraz liczba 0. Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą **Z**.

Liczby wymierne to liczby, które można zapisać w postaci $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbf{Z}$ oraz $n \neq 0$. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą **Q**.

Liczby niewymierne to liczby rzeczywiste, które nie są wymierne. Zbiór liczb niewymiernych oznaczamy jako $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Potęga o wykładniku całkowitym

$$a^0 = 1 \quad \text{dla } a \neq 0$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{dla } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{dla } a \neq 0, n \in \mathbf{N}$$

Potęga o wykładniku wymiernym

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{dla } a \geq 0, n \in \mathbf{N}, n > 1$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{dla } a > 0, n \in \mathbf{N}, n > 1, m \in \mathbf{Z}$$

Działania na potęgach

Dla dowolnych liczb $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbf{R}$:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

Działania na pierwiastkach

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{dla } a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{dla } a \geq 0, b > 0$$

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \quad \text{dla } a, b \in \mathbf{R}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad \text{dla } a \in \mathbf{R}, b \neq 0$$

Wzory skróconego mnożenia

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

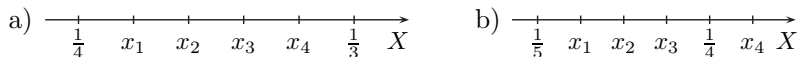
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

■ Zestaw I – wprowadzający

1. Wyznacz liczby x_1, x_2, x_3, x_4 , które zaznaczono na osi liczbowej (odległości między sąsiednimi punktami są jednakowe).



2. Przedstaw liczbę w postaci a^m , gdzie $m \in \mathbf{Z}$.

a) $0,125^3 \cdot 32^{-2}$ c) $0,4^7 \cdot 2,5^{-4} : \left(\frac{2}{5}\right)^5$ e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} : \sqrt{8}$
 b) $\left(\frac{1}{27}\right)^5 : 81^{3,25}$ d) $0,64^5 : \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$ f) $9^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{27^2}$

3. Oblicz.

a) $(7^3 \cdot 7^{-4}) : 7^{-2}$ d) $(125^3 \cdot 5^{-4}) : (25^2 \cdot 0,2^{-3})$
 b) $\left(3^{-4} : \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ e) $[1,42^3 : (-0,71)^3] \cdot 0,5^3$
 c) $0,6^{-14} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-16}$ f) $(27 \cdot 0,008)^{\frac{1}{3}} + (16 \cdot 0,09)^{\frac{1}{2}} : 36^{\frac{1}{2}}$

4. Oblicz. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

a) $\frac{5^6 + 20 \cdot 5^4}{2 \cdot 5^6 - 100 \cdot 5^3}$ d) $\frac{1,75 + 0,5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{3\frac{1}{12} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2}$
 b) $\frac{6 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4^3}{2 \cdot 8^2 - 5 \cdot 2^6}$ e) $\frac{2,2 \cdot \frac{10}{11} + 0,6 \cdot (0,9)^{-1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(2\frac{1}{4} - 1,75\right)}$
 c) $\frac{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} + 3,5}{4^{-1} \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{17}{19}\right)^0\right]}$ f) $\frac{\left(3\frac{1}{3}\right)^{-7} \cdot (0,3)^{-5}}{2^{-2} \cdot \left(10 + 2^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3\right)}$

5. Oblicz. Wynik przedstaw w notacji wykładniczej.

a) $(6 \cdot 10^8) \cdot (5,5 \cdot 10^7)$ c) $0,000\,012\,5 \cdot 0,000\,04$ e) $(0,81 \cdot 0,0004)^{0,5}$
 b) $(4 \cdot 10^5) : (8 \cdot 10^{-6})$ d) $0,000\,002\,7 : 0,000\,09$ f) $(245 : 0,0005)^{0,5}$



6. Podaj rozwinięcie dziesiętne ułamka zwykłego. Zaokrąglaj je do trzeciego miejsca po przecinku. Czy jest to przybliżenie z nadmiarem, czy z niedomiarem?

a) $\frac{85}{6}$ b) $\frac{85}{8}$ c) $\frac{62}{33}$ d) $\frac{11}{111}$

7. Liczba 17,7828 jest przybliżeniem liczby $10^{1,25}$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Wiedząc o tym, wyznacz przybliżenie liczby:

a) $10^{0,25}$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku,
 b) $10^{\frac{13}{4}}$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku,
 c) $10^{-\frac{7}{4}}$ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku.

7. a) $10^{1,25} : 10 = 1,7783$
 b) $10^{3,25} = 10^{1,25} \cdot 10^2 = 1778,28$
 c) $10^{1,25} : 10^3 = 0,01778$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x_1 = \frac{4}{15}, x_2 = \frac{17}{60}, x_3 = \frac{3}{10}, x_4 = \frac{19}{60}$
 b) $x_1 = \frac{17}{80}, x_2 = \frac{9}{40}, x_3 = \frac{19}{80}, x_4 = \frac{21}{80}$
 2. a) $0,125^3 \cdot 32^{-2} = 2^{-9} \cdot 2^{-10} = 2^{-19}$
 b) $\left(\frac{1}{27}\right)^5 : 81^{3,25} = 3^{-15} : 3^{13} = 3^{-28}$
 c) $0,4^7 \cdot 2,5^{-4} : \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \left(\frac{2}{5}\right)^6$
 d) $\left(\frac{4}{5}\right)^{10} : \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^{12}$
 e) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}} = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{-2}$
 f) $3^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{6}{4}} = 3^{\frac{17}{6}} = \left(3^{\frac{1}{6}}\right)^{17} = \left(\sqrt[6]{3}\right)^{17}$
 3. a) 7 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{9}{25}$ d) $\frac{1}{25}$
 e) -1 f) 0,8
 4. a) $\frac{5^6 + 4 \cdot 5^5}{2 \cdot 5^6 - 4 \cdot 5^5} = \frac{5^5 \cdot (5 + 4)}{5^5 \cdot (2 \cdot 5 - 4)} = \frac{9}{6}$
 b) $\frac{3 \cdot 2^5 - 2^9}{2^7 - 5 \cdot 2^6} = \frac{2^5 \cdot (3 - 4)}{2^6 \cdot (2 - 5 \cdot 2)} = \frac{13}{6}$
 c) $\frac{8,5}{\frac{1}{4} - 8} = \frac{17}{4} = 4,25$
 d) $\frac{2,5}{\frac{7}{4}} = \frac{10}{7}$
 e) $\frac{2\frac{2}{3}}{\frac{4}{9} - \frac{1}{2}} = \frac{12}{1}$
 f) $\frac{\frac{9}{100}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{25}$
 5. a) $3,3 \cdot 10^{16}$ b) $5 \cdot 10^{10}$
 c) $5 \cdot 10^{-10}$ d) $3 \cdot 10^{-2}$
 e) $1,8 \cdot 10^{-2}$ f) $7 \cdot 10^2$
 6. a) 14,167, z nadmiarem
 b) 10,625, wartość dokładna
 c) 1,879, z nadmiarem
 d) 0,099, z niedomiarem

8. a) $6\sqrt{2}$ b) $7\sqrt{2}$ c) $5\sqrt[3]{4}$
d) $4\sqrt[3]{2}$ e) $5\sqrt[3]{5}$

9. a) 15 b) 24 c) -3 d) 1
e) $\frac{13}{3}$ f) $\frac{5}{2}$ g) $\frac{5}{3}$ h) $\frac{9}{4}$

10. a) $3\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = 0$,
tak
b) $\sqrt{48} + \sqrt{12} =$
 $= 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} =$
 $= \sqrt{108} \neq \sqrt{50}$, nie
c) $\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = 0$, tak
d) $5\sqrt{12} \cdot \sqrt{75} = 150$, tak
e) $(2\sqrt{6} - 5\sqrt{6} + 3\sqrt{6}) :$
 $: 2\sqrt{3} = 0$, tak
f) $\sqrt[3]{\frac{49}{6} \cdot \frac{7}{36}} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$, tak

11. a) 2 b) -11 c) 1
d) 49 e) $12\sqrt{7}$ f) 25

12. a) 4 b) 140 c) 40 d) 26

13. x – początkowa cena
towarów
a) $A: 0,8 \cdot 0,8x = 0,64x$,
 $B: 0,6x$; B
b) $A: 1,2 \cdot 1,2x = 1,44x$,
 $B: 1,4x$; B
c) $A: 0,8 \cdot 1,2x = 0,96x$,
 $B: x$; A

14. a) $1,2a \cdot 0,8b = 0,96ab$
Pole zmaleje o 4%.
b) $0,8a \cdot 1,25b = ab$
Pole się nie zmieni.

8. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{72}$ b) $\sqrt{98}$ c) $\sqrt[3]{500}$ d) $\sqrt[3]{128}$ e) $\sqrt[3]{625}$

9. Oblicz.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$ c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{-9}$ e) $\sqrt{18\frac{7}{9}}$ g) $\sqrt{11\frac{2}{3}} : \sqrt{4\frac{1}{5}}$
b) $\sqrt{48} \cdot \sqrt{12}$ d) $\sqrt[3]{0,04} \cdot \sqrt[3]{25}$ f) $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$ h) $\sqrt[3]{1\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[3]{10\frac{1}{8}}$

10. Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa.

a) $\sqrt{27} + 3\sqrt{48} - 3\sqrt{75} = 0$ d) $(7\sqrt{12} - \sqrt{48}) \cdot \sqrt{75} = 150$
b) $\sqrt{48} + \sqrt{12} = \sqrt{50}$ e) $(\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{54}) : \sqrt{12} = 0$
c) $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{-81} = 0$ f) $\sqrt[3]{-8\frac{1}{6}} : \sqrt[3]{-5\frac{1}{7}} = 1\frac{1}{6}$

11. Oblicz.

a) $(3\sqrt{2} - 4)(3\sqrt{2} + 4)$ d) $(1 - 2\sqrt{2})^2(9 + 4\sqrt{2})$
b) $(3 + 2\sqrt{5})(3 - 2\sqrt{5})$ e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$
c) $(2 + \sqrt{3})^2(7 - 4\sqrt{3})$ f) $(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

12. Wyznacz:

a) 2,5% liczby 160, c) liczbę, której 45% jest równe 18,
b) 112% liczby 125, d) liczbę o 225% większą od 8.

13. Towary A i B miały jednakową cenę. Który z nich jest obecnie tańszy, jeżeli:

a) cenę towaru A obniżano dwukrotnie, za każdym razem o 20%, a cenę towaru B obniżono jednokrotnie o 40%,
b) cenę towaru A zwiększano dwukrotnie, za każdym razem o 20%, a cenę towaru B zwiększono jednokrotnie o 40%,
c) cenę towaru A obniżono o 20%, następnie zwiększono o 20%, natomiast cena towaru B nie uległa zmianie?

14. Dany jest prostokąt o bokach długości a i b . Jak i o ile zmieni się jego pole, jeżeli:

a) a wzrośnie o 20% i b zmaleje o 20%,
b) a zmaleje o 20% i b wzrośnie o 25%?

15. W prostokącie jeden bok wydłużono o 20%, a drugi o $p\%$ i otrzymano prostokąt, którego pole jest o 50% większe od wyjściowego. Oblicz p .

15. a, b – długości boków

$$(1 + \frac{p}{100})a \cdot 1,2b = 1,5ab$$

$$p = 25$$

■ Zestaw II – ćwiczeniowy

16. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}-2}$ b) $\frac{\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ d) $\frac{5-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

17. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = 2 - \sqrt{5}$ i $y = 1 + 3\sqrt{5}$. Wynik zapisz w postaci $a + b\sqrt{5}$, gdzie $a, b \in \mathbf{Q}$.

a) $3x + y$ b) $x \cdot y$ c) $y : x$ d) $\frac{2y-x}{2x+y}$

18. Oblicz wartość wyrażenia dla $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ i $b = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

a) $a \cdot b$ b) $(a-b)^2$ c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ d) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

19. Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa.

a) $3 - \sqrt{3} = \sqrt{12 - 3\sqrt{12}}$ b) $\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

20. Sprawdź, czy podana liczba jest niewymierna.

a) $\left[(3 + 5^{0,5})^{0,5} - (3 - 5^{0,5})^{0,5}\right]^2$ c) $\left[(\sqrt{7} + \sqrt{3})^{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})^{\sqrt{2}}\right]^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$
 b) $\left[\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^{\frac{2}{3}} + 25^{-0,25}\right] \cdot \left[\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^{\frac{2}{3}} - 25^{-0,25}\right]$

21. Oblicz wartość wyrażenia dla $a = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ i $b = \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

a) $a \cdot b$ c) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ e) $(a-b)^2$ g) $\frac{1}{a^2} + b^2$
 b) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ d) $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$ f) $(a+b)^2$ h) $\frac{1}{a^2} - b^2$

22. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) $(x + \sqrt{3})^3 + 2x(x+3)(x-3) + (x - \sqrt{3})^3$
 b) $(2\sqrt{3} - x)^2 - 2(2\sqrt{3} - x)(2\sqrt{3} + x) + (2\sqrt{3} + x)^2$
 c) $(x - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}x + 3) + (x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)$

23. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = \sqrt{2} - 1$ i $y = 1 - 2\sqrt{2}$.

a) $(\sqrt{6}x - y)(\sqrt{6}x + y) - (3x + y)^2 + 3x(2y + x)$
 b) $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - (x + 2y)^3 + 6xy(x + 2y)$

D 24. a) Wykaż, że liczba $9 - 4\sqrt{5}$ jest liczbą odwrotną do $9 + 4\sqrt{5}$.

b) Wykaż, że liczba $\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ jest liczbą przeciwną do $1 - \sqrt{2}$.

D 25. Wykaż, że liczba $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ jest wymierna.

21. a) $ab = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \sqrt{3 - 2} = 1$

b) $\frac{a^2+b^2}{(ab)^2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1^2} = 2\sqrt{3}$ c) $\frac{a^2+b^2}{ab} = 2\sqrt{3}$

d) $\frac{a^2-b^2}{(ab)^2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{1^2} = -2\sqrt{2}$

e) $a^2 - 2ab + b^2 = \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2 \cdot 1 + \sqrt{3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{3} - 2$

f) $a^2 + 2ab + b^2 = 2\sqrt{3} + 2$

g) $\frac{1+(ab)^2}{a^2} = \frac{1+1^2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

h) $\frac{1-(ab)^2}{a^2} = \frac{1-1^2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 0$

24. a) $(9 - 4\sqrt{5}) \cdot (9 + 4\sqrt{5}) = 81 - 80 = 1$, więc $9 - 4\sqrt{5} = \frac{1}{9+4\sqrt{5}}$

b) $-\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = -\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = -|1 - \sqrt{2}| = -(\sqrt{2} - 1) = 1 - \sqrt{2}$

16. a) $2\sqrt{5} + 4$ b) $\frac{3\sqrt{7}-7}{2}$
 c) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3} - 4$

17. a) 7 b) $-13 + 5\sqrt{5}$

c) $-17 - 7\sqrt{5}$

d) $\frac{7\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{35\sqrt{5}-35}{20} = -\frac{7}{4} + \frac{7}{4}\sqrt{5}$

18. a) 1 b) 8

c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{3}$

d) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b^2+a^2}{ab} = \frac{3+2\sqrt{6}+2+3-2\sqrt{6}+2}{1} = 10$

19. a) $3 - \sqrt{3} > 0$ oraz

$12 - 3\sqrt{12} > 0$

Obie strony równości podnosimy do kwadratu i otrzymujemy:

$12 - 3\sqrt{12} = 12 - 3\sqrt{12}$

Zatem równość jest prawdziwa.

b) $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$ oraz

$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} > 0$

Zatem równość nie jest prawdziwa.

20. a), c) 2, wymierna

b) $-\frac{4}{25}$, wymierna

22. a) $4x^3, \frac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $4x^2, 3$

c) $2x^3, \frac{3\sqrt{3}}{4}$

23. a) $-2y^2, 2(-9 + 4\sqrt{2})$

b) 0

25. $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} =$

$= \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{6}{1} =$

$= 6 -$ liczba wymierna

26. $0,21a = 0,12b$, $a, b > 0$

$b = \frac{21}{12}a = 1,75a$

Liczba b jest większa od liczby a o 75%.

27. a) $x = \frac{1}{4} : \frac{1}{16} = 4$

$y = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{6}} = 3$

$\frac{y}{x} \cdot 100\% = \frac{3}{4} \cdot 100\% = 75\%$

b) $x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{5}$

$y = \frac{27}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3}{4}$

$\frac{y}{x} \cdot 100\% = \frac{3}{4} \cdot 5 \cdot 100\% = 375\%$

28. $176,55 = 1,07N$

$N = 165$ zł

$B = 1,22 \cdot 165 = 201,30$ [zł]

29. K – kwota wpłacona do banku

$0,035K \cdot 0,2 = 14$

$K = 2000$ zł

30. a) $\frac{0,062 - 0,05}{0,05} \cdot 100\% = 24\%$

b) $0,8 \cdot 5\% = 4\%$

Oprocentowanie zmniejszyło się o 1 punkt procentowy.

31. a) $(11 - 7x)(11 + 7x)$

b) $(\frac{2}{3}x - \frac{5}{4}y)(\frac{2}{3}x + \frac{5}{4}y)$

c) $(2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 1)$

d) $(3x - \frac{1}{2}y)(3x + \frac{1}{2}y) \cdot (9x^2 + \frac{1}{4}y^2)$

e) $3(3x - 1)(x + 1)$

f) $4(x - 2)(2x - 1)$

g) $(x - 2)^2(x + 2)^2$

h) $(3x - 1)^2(3x + 1)^2$

i) $(2x - 3)^2(2x + 3)^2$

32. $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$

a) $a^4 + b^4 = 3^2 - 2 \cdot 1^2 = 7$

b) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1 - 2ab = 9$, czyli $ab = -4$

$a^4 + b^4 = 9^2 - 2 \cdot (-4)^2 = 49$

33. a) $(x + y)^2 - 4xy \geq 0$

$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$(x - y)^2 \geq 0$

Nierówność jest prawdziwa dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$.

b) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 8xy \geq 0$

$x^2 + 4xy + 4y^2 \geq 0$

$(x + 2y)^2 \geq 0$

Nierówność jest prawdziwa dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$.

c) $x^2 + 4xy - y(6x - y) \geq 0$

$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$(x - y)^2 \geq 0$

Nierówność jest prawdziwa dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$.

26. Wiadomo, że 21% dodatniej liczby a jest równe 12% liczby b . Która z tych liczb jest większa i o ile procent?

27. Oblicz, jaki procent liczby x stanowi liczba y .

a) $x = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{12}\right) : \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right)$, $y = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$

b) $x = 3^{-1} \cdot 5^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{81^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[3]{25}}$, $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{4}}{3}\right)^2$

28. Na cenę brutto pewnego towaru wynoszącą 176,55 zł składa się cena netto oraz 7% podatku VAT od ceny netto. Oblicz, jaka będzie cena brutto tego towaru po podwyższeniu podatku do 22% przy niezmiennym cenie netto.

29. Pewną kwotę wpłacono do banku na lokatę roczną oprocentowaną 3,5% w skali roku. Od odsetek dopisanych po roku bank odprowadził podatek w wysokości 14 zł. Jaką kwotę umieszczono na lokacie, jeżeli wiadomo, że podatek od odsetek wynosił 20%?

30. a) Oprocentowanie lokat w pewnym banku, równe początkowo 5% w skali roku, wzrosło o 1,2 punktu procentowego. O ile procent wzrosło to oprocentowanie?

b) Oprocentowanie lokat w pewnym banku, równe początkowo 5% w skali roku, zmniejszyło się o 20%. O ile punktów procentowych zmniejszyło się to oprocentowanie?

31. Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, zapisz wyrażenie w postaci iloczynu.

a) $121 - 49x^2$

d) $81x^4 - \frac{1}{16}y^4$

g) $x^4 - 8x^2 + 16$

b) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{25}{16}y^2$

e) $(3x + 1)^2 - 4$

h) $81x^4 - 18x^2 + 1$

c) $16x^4 - 1$

f) $9(1 - x)^2 - (1 + x)^2$

i) $16x^4 - 72x^2 + 81$

32. Oblicz $a^4 + b^4$, wiedząc, że:

a) $ab = 1$ oraz $a^2 + b^2 = 3$,

b) $a^2 + b^2 = 9$ oraz $a + b = 1$.

33. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność.



a) $(x + y)^2 \geq 4xy$

c) $x^2 + 4xy \geq y(6x - y)$

b) $(x - 2y)^2 + 8xy \geq 0$

d) $4x(x - 2y) \geq y(4x - 9y)$

34. Wykaż, że nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .



a) $(2x + 1)^2 \geq 8x$

b) $x(x + 12) \geq 9(2x - 1)$

c) $\frac{4}{x^2 + 1} \geq 3 - x^2$

34. a) $(2x + 1)^2 \geq 8x$

$4x^2 + 4x + 1 - 8x \geq 0$

$(2x - 1)^2 \geq 0$, nierówność prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

b) $x(x + 12) \geq 9(2x - 1)$

$x^2 + 12x - 18x + 9 \geq 0$

$(x - 3)^2 \geq 0$, nierówność prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

c) $\frac{4}{x^2 + 1} \geq 3 - x^2$

$4 \geq 3x^2 - x^4 + 3 - x^2$

$x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0$

$(x^2 - 1)^2 \geq 0$, nierówność prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

■ Zestaw III – podsumowujący

35. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x+2)^3$ c) $(2x-3y)^3$ e) $(\frac{1}{2}x+2)^3$
 b) $(3x-1)^3$ d) $(5x+2)^3$ f) $(x-\frac{1}{3})^3$

36. Oblicz.

- a) $(\sqrt{3}+1)^3$ c) $(3-2\sqrt{3})^3$ e) $(\frac{\sqrt{2}}{3}+1)^3$
 b) $(1-\sqrt{5})^3$ d) $(4+\sqrt{5})^3$ f) $(2-\frac{\sqrt{5}}{2})^3$

37. Oblicz.

- a) $(2\sqrt{2}-3)^3 - (2\sqrt{2}+3)^3$ b) $(3+\sqrt{2})^3 - (2+\sqrt{2})^3$

38. Uprość wyrażenie.

- a) $(x-3)(x^2+3x+9)$ c) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$
 b) $(2x+3)(4x^2-6x+9)$ d) $(x^2-2x+1)(x^2+x+1)$

39. Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

- a) x^3+64 c) x^3+8y^3 e) x^6+125
 b) $8x^3-1$ d) $8x^3-27y^3$ f) $27x^3-64y^6$

Dla $n \geq 2$ różnica n -tych potęg dowolnych liczb rzeczywistych a i b wyraża się wzorem:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

D 40. Udowodnij powyższy wzór dla:

- a) $n=4$, b) $n=6$.

D 41. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest podana nierówność.

- a) $a^2+b^2 \geq 2(a-b-1)$ b) $a^2+b^2 \geq 4(a+b-2)$ c) $a^2+ab+b^2 \geq 0$

D 42. Udowodnij, że dla dodatnich liczb a i b prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{2}{a+b} \geq \frac{a+b}{a^2+b^2}$$

D 43. Udowodnij, że suma dwóch kolejnych potęg liczby 2 o wykładnikach całkowitych dodatnich jest podzielna przez 6, a suma trzech kolejnych potęg jest podzielna przez 14.

42. $\frac{2}{a+b} \geq \frac{a+b}{a^2+b^2} \iff (a+b)(a^2+b^2) \geq 2(a+b)^2, a, b > 0$

$$2a^2+2b^2 \geq a^2+2ab+b^2 \iff a^2-2ab+b^2 \geq 0 \iff (a-b)^2 \geq 0$$

43. $n \in \mathbb{Z}_+$, liczba $2^n + 2^{n+1} = 2^n(1+2) = 2^n \cdot 3$ jest podzielna przez 2 i przez 3, więc jest podzielna przez 6.

Liczba $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n(1+2+2^2) = 2^n \cdot 7$ jest podzielna przez 2 i przez 7, więc jest podzielna przez 14.

35. a) $x^3+6x^2+12x+8$

b) $27x^3-27x^2+9x-1$

c) $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

d) $125x^3+150x^2+60x+8$

e) $\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{2}x^2+6x+8$

f) $x^3-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}$

36. a) $10+6\sqrt{3}$ b) $16-8\sqrt{5}$

c) $135-78\sqrt{3}$ d) $124+53\sqrt{5}$

e) $\frac{45+29\sqrt{2}}{27}$ f) $\frac{124-53\sqrt{5}}{8}$

37. a) -198 b) $25+15\sqrt{2}$

38. a) x^3-27 b) $8x^3+27$

c) x^3-8y^3 d) x^4-x^3-x+1

39. a) $(x+4)(x^2-4x+16)$

b) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

c) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

d) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

e) $(x^2+5)(x^4-5x^2+25)$

f) $(3x-4y^2) \cdot$

$\cdot (9x^2+12xy^2+16y^4)$

40. a) $a^4-b^4 =$

$= (a^2-b^2)(a^2+b^2) =$

$= (a-b)(a+b)(a^2+b^2) =$

$= (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

41. a) $a^2+b^2-2a+2b+2 =$

$= (a-1)^2 + (b+1)^2 \geq 0$

dla $a, b \in \mathbb{R}$

b) $a^2+b^2-4a-4b+8 =$

$= (a-2)^2 + (b-2)^2 \geq 0$

dla $a, b \in \mathbb{R}$

c) $a^2+ab+b^2 = (a+\frac{1}{2}b)^2 +$

$+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$ dla $a, b \in \mathbb{R}$

44. a) $n, n+1, n+2$ – kolejne liczby naturalne

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

b) Jeśli suma dwóch liczb naturalnych jest liczbą parzystą, to obie liczby są parzyste lub obie liczby są nieparzyste, więc ich różnica jest liczbą parzystą.

45. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wówczas:

$$\begin{aligned} n^4 - (n-2)^4 &= (n^2 - (n-2)^2) \cdot (n^2 + (n-2)^2) = \\ &= (4n-4)(2n^2-4n+4) = 8(n-1)(n^2-2n+2) \end{aligned}$$

jest liczbą podzielną przez 8.

46. $2k+1, 2k+3, 2k+5$ – kolejne liczby nieparzyste ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} (2k+1)^2 + (2k+3)^2 + (2k+5)^2 + 1 &= 4k^2 + 4k + 1 + 4k^2 + 12k + 9 + 4k^2 + \\ &+ 20k + 25 + 1 = 12k^2 + 36k + 36 = 12(k^2 + 3k + 3) \end{aligned}$$

– liczba podzielna przez 12

47. Niech $n, n+1, n+2$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi. Wówczas:

$$\begin{aligned} (n + n + 1 + n + 2)^3 &= (3n + 3)^3 = [3(n + 1)]^3 = \\ &= 27(n + 1)^3 \end{aligned}$$

49. $a = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) + \sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{6}{2} = 3$

1. P, 2. F

50. $\frac{(x-2)^3}{(x-2)^2} = x-2$

1. F, 2. P

51. C. 2

44. a) Udowodnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

b) Udowodnij, że jeśli suma dwóch liczb naturalnych jest liczbą parzystą, to ich różnica też jest liczbą parzystą.

45. Udowodnij, że różnica czwartych potęg dowolnej liczby naturalnej i liczby o 2 od niej mniejszej jest podzielna przez 8.

46. Udowodnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych powiększona o 1 jest podzielna przez 12.

47. Udowodnij, że sześciąt sumy trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 27.

48. Udowodnij, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ podana liczba jest podzielna przez 6.

a) $2n(4n^2 - 1)$ b) $n(n^2 - 7)$ c) $n^9 - n$

49. Dana jest liczba $a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Prawdziwa jest nierówność $a \leq 2\sqrt{3}$.	P	F
2.	Liczba a jest liczbą niewymierną.	P	F

50. Dane jest wyrażenie $\frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4x + 4}$, gdzie $x \neq 2$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Istnieje liczba niewymierna x , dla której wartość wyrażenia jest liczbą wymierną.	P	F
2.	Dla każdego $x \neq 2$ wyrażenie jest równe $x - 2$.	P	F

51. Dana jest liczba $p = 405\,070\,203\,030\,168$.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Liczba p jest podzielna przez:

A.	36,	ponieważ	1.	jej dzielnikami są liczby 2 i 6.
B.	18,		2.	jej dzielnikami są liczby 3 i 4.
C.	12,		3.	jej dzielnikami są liczby 4 i 9.

48. a) $2n(4n^2 - 1) = (2n - 1)(2n + 1) = (2n - 1)2n(2n + 1)$

Jest to iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, czyli jedna z tych liczb jest podzielna przez 3 oraz $2n$ jest podzielne przez 2. Zatem iloczyn jest podzielny przez 6.

b) $n(n^2 - 7) = n(n^2 - 1 - 6) = n((n - 1)(n + 1) - 6) = (n - 1)n(n + 1) - 6n$
 $(n - 1)n(n + 1)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych, czyli przynajmniej jedna z tych liczb jest podzielna przez 2 oraz jedna – przez 3. Zatem iloczyn jest podzielny przez 6, czyli istnieje $m \in \mathbb{Z}$ takie, że $(n - 1)n(n + 1) = 6m$.

Ostatecznie $n(n^2 - 7) = 6m - 6n = 6(m - n)$, gdzie $m - n \in \mathbb{Z}$.

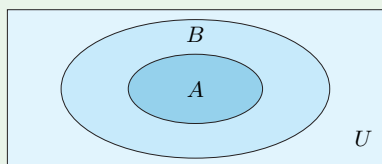
Zatem $n(n^2 - 7)$ jest podzielne przez 6.

c) Korzystamy z podpunktu b): $(n - 1)n(n + 1) = 6m$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} n^9 - n &= n(n^8 - 1) = n(n^4 - 1)(n^4 + 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)(n^4 + 1) = \\ &= (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)(n^4 + 1) = 6m(n^2 + 1)(n^4 + 1) \end{aligned}$$

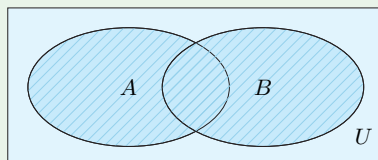
Zatem $n^9 - n$ jest podzielne przez 6.

5.2. Zbiory, przedziały i nierówności

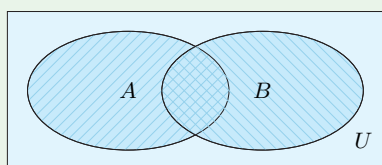


$A \subset B$ – zbiór A jest zawarty w zbiorze B

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów A lub B . Zbiór ten oznaczamy: $A \cup B$.

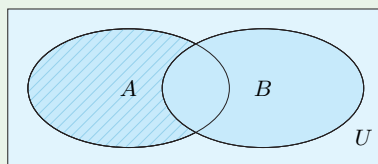


$A \cup B$ – suma zbiorów A i B (obszar zakresowany)



$A \cap B$ – iloczyn zbiorów A i B (obszar zakresowany podwójnie)

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B . Zbiór ten oznaczamy: $A \setminus B$.



$A \setminus B$ – różnica zbiorów A i B (obszar zakresowany)

Wartość bezwzględna

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Zauważ, że $\sqrt{a^2} = |a|$ dla $a \in \mathbf{R}$.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \text{ dla } a, b \in \mathbf{R}$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ dla } a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

Dla dowolnego $a > 0$:

- $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -a$ lub $x = a$,
- $|x| < a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-a < x < a$,
- $|x| > a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < -a$ lub $x > a$.

■ Zestaw I – wprowadzający

1. $A = \{-1, 0, 2, 4, 5, 7\}$,
 $B = \{-2, -1, 0, 1, 3, 4\}$,
 $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$,
 $A \cap B = \{-1, 0, 4\}$,
 $A \setminus B = \{2, 5, 7\}$,
 $B \setminus A = \{-2, 1, 3\}$

2. a) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
 $A \cap B = \{0\}$, $A \setminus B = \{1, 2\}$,
 $B \setminus A = \{-2, -1\}$

- b) $A \cup B = \{-1, 0, 1\}$,
 $A \cap B = \{0, 1\}$, $A \setminus B = \{-1\}$,
 $B \setminus A = \emptyset$

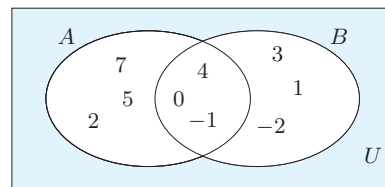
- c) $A \cup B = A$, $A \cap B = B$,
 $A \setminus B = \{2, 6\}$, $B \setminus A = \emptyset$

- d) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
 $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = A$,
 $B \setminus A = B$

3. a) $A \cup B = (-7; 5)$,
 $A \cap B = (-3; 2)$,
 $A \setminus B = (-7; -3)$,
 $B \setminus A = (2; 5)$
b) $A \cup B = A = (-\infty; 3)$,
 $A \cap B = B = (-1; 1)$,
 $A \setminus B = (-\infty; -1) \cup (1; 3)$,
 $B \setminus A = \emptyset$
c) $A \cup B = \mathbf{R}$,
 $A \cap B = (-3; -2) \cup (2; 3)$,
 $A \setminus B = (-2; 2)$,
 $B \setminus A = (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$

4. a) $A = (-\infty; 2)$, $B = (0; \infty)$,
 $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = (0; 2)$,
 $A \setminus B = (-\infty; 0)$,
 $B \setminus A = (2; \infty)$
b) $A = (-\infty; 9)$, $B = (0; \infty)$,
 $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = (0; 9)$,
 $A \setminus B = (-\infty; 0)$,
 $B \setminus A = (9; \infty)$

1. Na podstawie diagramu wyznacz zbiory A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.



2. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

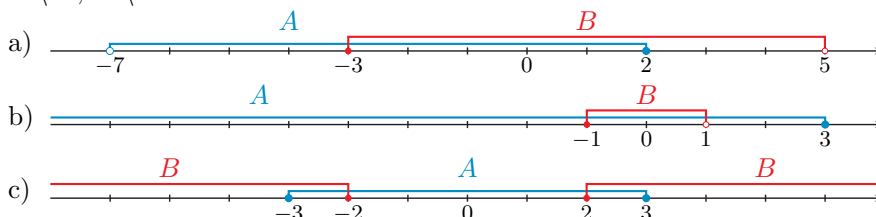
a) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-2, -1, 0\}$

b) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$

c) $A = \{2, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5\}$

d) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$

3. Na osi liczbowej zaznaczono zbiory A i B . Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.



4. Zapisz zbiory A i B w postaci przedziałów. Wyznacz i zaznacz na osi liczbowej zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

- a) A – zbiór liczb rzeczywistych mniejszych od 2, B – zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych

- b) A – zbiór liczb rzeczywistych nie większych od 9, B – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich

5. Zaznacz zbiór $A \cap B$ na osi liczbowej. Wypisz wszystkie liczby całkowite, które do niego należą.

a) $A = \langle -3; 2 \rangle$, $B = \langle 0; 4 \rangle$

d) $A = \{0\} \cup (2; 5)$, $B = \langle 0; 4 \rangle$

b) $A = \langle \frac{1}{2}; 6 \rangle$, $B = \langle 2; 8 \rangle$

e) $A = \mathbf{R} \setminus (-1; 4)$, $B = \langle -2; 6 \rangle$

c) $A = (-\infty; 1) \cup \langle 4; \infty \rangle$, $B = (0; 8)$

f) $A = \mathbf{R} \setminus \langle 2; \infty \rangle$, $B = \langle -3; 3 \rangle$

6. Zapisz zbiory A i B w postaci przedziałów. Wyznacz zbiory $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.

a) $A = \{x \in \mathbf{R}: 3x - 5 < 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}: 1 - 2x \leq 3\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{R}: 2 - 5x < 1 - 2x\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}: \frac{1}{2}x + 0,75 < 1\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{R}: -4 < 2x \leq 6\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}: 1 \leq 3x + 1 < 7\}$

d) $A = \{x \in \mathbf{R}: -3 \leq 2 - x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}: 0 < 1 - 2x \leq 5\}$

5. a) $A \cap B = \langle 0; 2 \rangle$; 0, 1, 2

b) $A \cap B = \langle 2; 6 \rangle$; 2, 3, 4, 5, 6

c) $A \cap B = (0; 1) \cup \langle 4; 8 \rangle$; 1, 4, 5, 6, 7

d) $A \cap B = \{0\} \cup (2; 4)$; 0, 3, 4

e) $A \cap B = \langle -2; -1 \rangle \cup \langle 4; 6 \rangle$; -2, -1, 5

f) $A \cap B = \langle -3; 2 \rangle$; -3, -2, -1, 0, 1

6. a) $A = (-\infty; 2)$, $B = \langle -1; \infty \rangle$, $A \cap B = \langle -1; 2 \rangle$, $A \setminus B = (-\infty; -1)$

b) $A = (\frac{1}{3}; \infty)$, $B = (-\infty; \frac{1}{2})$, $A \cap B = (\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$, $A \setminus B = \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$

c) $A = (-2; 3)$, $B = \langle 0; 2 \rangle$, $A \cap B = \langle 0; 2 \rangle$, $A \setminus B = (-2; 0) \cup \langle 2; 3 \rangle$

d) $A = \langle -1; 5 \rangle$, $B = \langle -2; \frac{1}{2} \rangle$,

$A \cap B = \langle -1; \frac{1}{2} \rangle$, $A \setminus B = \langle \frac{1}{2}; 5 \rangle$

$$2 \cdot 4 \cdot 4 - 16 + 8x \geq 2,75 + \frac{x+1}{4}$$

$$4x - 16 \geq 2,75 + \frac{x+1}{4}$$

7. Rozwiąż nierówność. Zbiór rozwiązań zaznacz na osi liczbowej.
- a) $-3(4 - 2x) \geq 2x + 4$ e) $(x - 2)(x + 2) \leq (x - 2)^2$
b) $-\frac{3}{4}(2x - 6) \leq 2 - x$ f) $(2x + 4)^2 > (2x - 4)^2$
c) $\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-2}{4} \geq 0$ g) $(x - 2)^2 - (4 - x)^2 \geq 2,75 + \frac{x+1}{4}$
d) $\frac{x-6}{2} + \frac{5-3x}{4} < 0$ h) $\frac{(2x-4)^2}{4} + 7 > \frac{(3x+1)^2}{9}$
8. Zapisz zbiór rozwiązań układu nierówności w postaci przedziału. Zaznacz go na osi liczbowej i podaj wszystkie liczby całkowite, które do niego należą.
- a) $\begin{cases} 2x - 5 \leq 11 \\ 1 - 4x < 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x + 4 > 10 \\ -4 + 2x \leq 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x < 0 \\ 3x + 7 > 4 \end{cases}$
9. Oblicz.
- a) $|7 - 8|$ c) $|\sqrt{3} - 2|$ e) $2\sqrt{3} - |3 - 2\sqrt{3}|$
b) $|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}|$ d) $|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}|$ f) $|\sqrt{3} - 2| + |1 - \sqrt{3}|$
10. Wypisz wszystkie elementy zbioru A .
- a) $A = \{x \in \mathbf{Z} : |x| < 5\}$ d) $A = \{x \in \mathbf{Z} : |x| \geq 2 \text{ i } |x| \leq 4\}$
b) $A = \{x \in \mathbf{Z} : |x| \leq 3\}$ e) $A = \{x \in \mathbf{Z} : |x| > 3 \text{ i } |x| < 7\}$
c) $A = \{x \in \mathbf{Z} : |x| \leq \sqrt{8}\}$ f) $A = \{x \in \mathbf{Z} : |x| \geq \sqrt{2} \text{ i } |x| \leq \sqrt{10}\}$

■ Zestaw II – ćwiczeniowy

11. Wyznacz zbiory A i B , jeżeli $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oraz:
- a) $A \cap B = \{2, 3, 4\}$, $A \setminus B = \{5\}$, c) $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$, $B \setminus A = \{2, 4, 6\}$,
b) $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{3, 4\}$, d) $A \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
12. Podaj liczbę elementów zbioru $A \cup B$, jeżeli:
- a) zbiór $A \setminus B$ ma 7 elementów, $B - 8$ elementów,
b) zbiór A ma 7 elementów, $B - 8$ elementów, $A \setminus B - 3$ elementy,
c) zbiór A ma 7 elementów, $B - 8$ elementów, $A \cap B - 3$ elementy,
d) A jest zbiorem trzycyfrowych liczb naturalnych parzystych, B jest zbiorem trzycyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 7.
13. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$. Do których z nich należy liczba 5?
- a) $A = \langle 4; 8 \rangle$, $B = \langle 5; 6 \rangle$ c) $A = \langle -1; 4 \rangle \cup \langle 5; \infty \rangle$, $B = \langle 0; 5 \rangle$
b) $A = \langle 5; 7 \rangle$, $B = \langle 5; 6 \rangle$ d) $A = \langle -\infty; 5 \rangle \cup \langle 6; 8 \rangle$, $B = \langle 5; 7 \rangle$
13. a) $A \cup B = A$, $A \cap B = B$, $A \setminus B = \langle 4; 5 \rangle \cup \langle 6; 8 \rangle$, $B \setminus A = \emptyset$,
 $5 \in A \cup B$ i $5 \in A \cap B$
b) $A \cup B = A$, $A \cap B = B$, $A \setminus B = \{5\} \cup \langle 6; 7 \rangle$, $B \setminus A = \emptyset$,
 $5 \in A \cup B$ i $5 \in A \setminus B$
c) $A \cup B = \langle -1; \infty \rangle$, $A \cap B = \langle 0; 4 \rangle$, $A \setminus B = \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 5; \infty \rangle$,
 $B \setminus A = \langle 4; 5 \rangle$,
 $5 \in A \cup B$ i $5 \in B \setminus A$
d) $A \cup B = \langle -\infty; 8 \rangle$, $A \cap B = \{5\} \cup \langle 6; 7 \rangle$, $A \setminus B = \langle -\infty; 5 \rangle \cup \langle 7; 8 \rangle$,
 $B \setminus A = \langle 5; 6 \rangle$,
 $5 \in A \cup B$ i $5 \in A \cap B$

7. a) $x \in \langle 4; \infty \rangle$
b) $x \in \langle 5; \infty \rangle$
c) $x \in \langle -\infty; 10 \rangle$
d) $x \in \langle -7; \infty \rangle$
e) $x \in \langle -\infty; 2 \rangle$
f) $x \in \langle 0; \infty \rangle$
g) $x \in \langle 4; \infty \rangle$
h) $x \in \langle -\infty; \frac{7}{3} \rangle$
8. a) $x \in \langle -1; 8 \rangle$; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
b) $x \in \langle 1; 6 \rangle$; 2, 3, 4, 5, 6
c) $x \in \langle -1; 0 \rangle$; brak liczb całkowitych
9. a) 1 b) $\frac{1}{6}$ c) $2 - \sqrt{3}$
d) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ e) 3 f) 1
10. a) -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4
b) -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3
c) -2, -1, 0, 1, 2
d) -4, -3, -2, 2, 3, 4
e) -6, -5, -4, 4, 5, 6
f) -3, -2, 2, 3
11. a) $A = \{2, 3, 4, 5\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
b) $A = \{1, 2, 5, 6\}$,
 $B = \{3, 4, 5, 6\}$
c) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$
d) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \emptyset$
12. a) $7 + 8 = 15$
b) $3 + 8 = 11$
c) $7 + 8 - 3 = 12$
d) Parzyste liczby trzycyfrowe: 450
Liczby trzycyfrowe podzielne przez 7: 128
Parzyste liczby trzycyfrowe podzielne przez 7: 64
 $450 + 128 - 64 = 514$

14. a) $A \cup B$ b) $A \cup B, A \setminus B$
c) $A \cup B, A \cap B$ d) $A \cup B$
15. a) $A = (-1; \infty)$,
 $B = (-\infty; 2)$,
 $A \cap B = (-1; 2)$
b) $A = \langle -6; \infty)$,
 $B = (-\infty; -5)$,
 $A \cap B = \langle -6; -5)$
16. a) $x \in (2; 9)$; 3
b) $x \in \langle \frac{14}{3}; \infty)$; 5
c) $x \in (-1; 6)$; 0
d) $x \in (-\frac{7}{5}; \infty)$; -1
17. a) prawdziwa dla $x \in \mathbf{R}$
i $y \in \mathbf{R}$
b) fałszywa dla $x = 2$
i $y = -3$
c) fałszywa dla $x = 2$
i $y = -3$
18. a) $2\sqrt{2} + 1 - 2(2 - \sqrt{2}) =$
 $= 4\sqrt{2} - 3$
b) $(2\sqrt{3} - \sqrt{11})(2\sqrt{3} + \sqrt{11}) =$
 $= 12 - 11 = 1$
c) $|1 - \sqrt{3}| - (\sqrt{3} - \frac{3}{2}) =$
 $= \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$
d) $|8 - 3\sqrt{7}| + 3\sqrt{7} - 7 =$
 $= 8 - 3\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 7 = 1$
19. a) $x = -9, x = 9$
b) $x = -1,6, x = 1,6$
c) sprzeczne d) $x = 0$
e) $x = -\sqrt{3} - 1, x = \sqrt{3} + 1$
f) sprzeczne
20. a) $x = -1, x = 5$
b) $x = -5, x = 7$
c) $x = -3$ d) $x = -4, x = 2$
e) $x = 0, x = 8$
f) $x = \frac{1}{4}, x = \frac{3}{4}$
21. a) $|2 - x| = 2$
 $x = 0, x = 4$
b) $|1 - x| = 3$
 $x = -2, x = 4$
c) $2|2 - x| = 6$, czyli $|2 - x| = 3$
 $x = -1, x = 5$

14. Które ze zbiorów $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ zawierają przedział $\langle -2; 5 \rangle$?
a) $A = (-\infty; 3), B = (2; 7)$ c) $A = \langle -4; \infty), B = (-3; 5)$
b) $A = \langle -2; \infty), B = \langle 5; 7)$ d) $A = (-\infty; 5), B = (-2; \infty)$
15. Zaznacz na osi liczbowej zbiór $A \cap B$, jeżeli A i B są zbiorami rozwiązań podanych nierówności.
a) $A: 4(2 - x)^2 - (3 + 2x)^2 < 35, B: 6 - (3 - x)^2 \leq (3 - x)(3 + x)$
b) $A: 3 - \frac{2+x}{4} \geq \frac{6-x}{3}, B: \frac{3-2x}{3} - 6 > \frac{x-5}{6}$
16. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność podwójną.
a) $2x - 11 \leq 7 < 4x - 1$ c) $2x - 4 < 2 + x < 3x + 4$
b) $3 - 5x \leq 8 \leq 3x - 6$ d) $-9 < 5x - 2 \leq 5x + 3$
17. Sprawdź, czy podana równość zachodzi dla $x = 2$ i $y = -3$. Czy równość ta jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych?
a) $|x - y| = |y - x|$ b) $|x + y| = |x| + |y|$ c) $|x - y| = |x| - |y|$
18. Oblicz.
a) $|2\sqrt{2} + 1| - 2|\sqrt{2} - 2|$ c) $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - |\frac{3}{2} - \sqrt{3}|$
b) $|\sqrt{11} - 2\sqrt{3}| \cdot (\sqrt{11} + 2\sqrt{3})$ d) $\sqrt{(8 - 3\sqrt{7})^2} + |3\sqrt{7} - 7|$
19. Rozwiąż równanie.
a) $|x| = 9$ c) $|x| = -2$ e) $|x| = \sqrt{3} + 1$
b) $|x| = 1,6$ d) $|x| = 0$ f) $|x| = 1 - \sqrt{2}$
20. Rozwiąż równanie.
a) $|x - 2| = 3$ c) $|x + 3| = 0$ e) $|4 - x| = 4$
b) $|x - 1| = 6$ d) $|x + 1| = 3$ f) $|\frac{1}{2} - x| = \frac{1}{4}$
21. Rozwiąż równanie.
a) $2|2 - x| = 4$ b) $3|1 - x| = 9$ c) $|2 - x| + |x - 2| = 6$
22. Rozwiąż równanie.
a) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3$ c) $\sqrt{x^2 + 10x + 25} = 1$
b) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = \frac{9}{2}$ d) $\sqrt{36 - 12x + x^2} = 2$

22. a) $|x - 3| = 3$
 $x = 0, x = 6$
b) $|x - 4| = \frac{9}{2}$
 $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{17}{2}$
c) $|x + 5| = 1$
 $x = -6, x = -4$
d) $|6 - x| = 2$
 $x = 4, x = 8$

■ Zestaw III – podsumowujący

- 23.** Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.
- a) $A = \langle 1; 4 \rangle$, $B = \langle 2; 5 \rangle$ d) $A = (2; \infty)$, $B = \langle -5; 0 \rangle \cup (4; \infty)$
b) $A = (-2; 1)$, $B = (1; 5)$ e) $A = (1; 3)$, $B = \{-2, 0, 3, 4\}$
c) $A = (-\infty; 6)$, $B = (0; 2) \cup \langle 6; \infty \rangle$ f) $A = \{-2, 0, 1, 3, 5\}$, $B = (3; 7)$
- 24.** Wyznacz zbiory $A \cup (B \cap C)$, $A \cap (B \cup C)$, $(A \setminus B) \cap C$.
- a) $A = \langle 1; 3 \rangle$, $B = \langle 2; 5 \rangle$, $C = \langle 3; 8 \rangle$
b) $A = (0; 6)$, $B = (1; 6)$, $C = (4; 6)$
c) $A = \langle 2; 7 \rangle$, $B = (-1; 7)$, $C = \langle 2; \infty \rangle$
d) $A = \langle 3; 6 \rangle$, $B = \{3, 5, 6\}$, $C = \{6, 7\}$
- 25.** Rozwiąż nierówność.
- a) $|x - 5| \leq 4$ c) $|x - 3| \geq 2$ e) $|6 - x| < 4$
b) $|x + 4| < 5$ d) $|x + 2| > 3$ f) $|2 - x| > 3$
- 26.** Rozwiąż układ nierówności. Rozwiązanie zaznacz na osi liczbowej.
- a) $\begin{cases} |x| \leq 4 \\ |x + 2| > 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x - 3| \leq 6 \\ |x - 2| > 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} |x + 1| > 4 \\ |x - 1| \geq 7 \end{cases}$
- 27.** Rozwiąż równanie.
- a) $|5x + 10| = 20$ d) $|4x - 12| = 5 - |3 - x|$
b) $|7 - 14x| = 7$ e) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} + |9x - 3| = 12$
c) $|3x + 6| + |7x + 14| = 10$ f) $\sqrt{25 - 10x + x^2} = 8 - 3|x - 5|$
- 28.** Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb, które spełniają podany warunek.
- a) $1 \leq |x| < 4$ c) $0 \leq |x + 3| < 8$
b) $2 < |x - 1| \leq 7$ d) $1 \leq |x - 3| \leq 5$
- 29.** Rozwiąż nierówność.
- a) $|2x + 4| \leq 6$ e) $|4x - 8| + |5x - 10| \leq 18$
b) $|2x + 3| > 1$ f) $|5 - 10x| \geq 4 + 2|x - \frac{1}{2}|$
c) $|3x - 6| < 12$ g) $|5x + 25| - |3x + 15| > 6$
d) $|4 - 2x| < 3$ h) $|3x - 3| - |1 - x| \leq 8$
- 23. a)** $A \cup B = \langle 1; 5 \rangle$,
 $A \cap B = \langle 2; 4 \rangle$,
 $A \setminus B = \langle 1; 2 \rangle$, $B \setminus A = \langle 4; 5 \rangle$
b) $A \cup B = (-2; 5)$, $A \cap B = \emptyset$,
 $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$
c) $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = (0; 2)$,
 $A \setminus B = (-\infty; 0] \cup \langle 2; 6 \rangle$,
 $B \setminus A = \langle 6; \infty \rangle$
d) $A \cup B = \langle -5; 0 \rangle \cup (2; \infty)$,
 $A \cap B = (4; \infty)$,
 $A \setminus B = (2; 4)$, $B \setminus A = \langle -5; 0 \rangle$
e) $A \cup B = \{-2, 0, 4\} \cup (1; 3)$,
 $A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = (1; 3)$,
 $B \setminus A = \{-2, 0, 4\}$
f) $A \cup B = \{-2, 0, 1\} \cup \langle 3; 7 \rangle$,
 $A \cap B = \{5\}$,
 $A \setminus B = \{-2, 0, 1, 3\}$,
 $B \setminus A = (3; 5) \cup (5; 7)$
- 24. a)** $A \cup (B \cap C) = \langle 1; 5 \rangle$,
 $A \cap (B \cup C) = \langle 2; 3 \rangle$,
 $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$
b) $A \cup (B \cap C) = A$,
 $A \cap (B \cup C) = B$,
 $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$
c) $A \cup (B \cap C) = \langle 2; 7 \rangle$,
 $A \cap (B \cup C) = A$,
 $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$
d) $A \cup (B \cap C) = \langle 3; 6 \rangle$,
 $A \cap (B \cup C) = \{3, 5\}$,
 $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$
- 25. a)** $x \in \langle 1; 9 \rangle$ **b)** $x \in (-9; 1)$
c) $x \in (-\infty; 1) \cup \langle 5; \infty \rangle$
d) $x \in (-\infty; -5) \cup (1; \infty)$
e) $x \in (2; 10)$
f) $x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$
- 26. a)** $x \in \langle -4; -3 \rangle \cup (-1; 4)$
b) $x \in \langle -3; 0 \rangle \cup (4; 9)$
c) $x \in (-\infty; -6) \cup \langle 8; \infty \rangle$
- 27. a)** $|x + 2| = 4$
 $x = -6$, $x = 2$
b) $|1 - 2x| = 1$
 $x = 0$, $x = 1$
c) $|x + 2| = 1$
 $x = -3$, $x = -1$
d) $|x - 3| = 1$
 $x = 2$, $x = 4$
e) $|3x - 1| = 3$
 $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{4}{3}$
f) $|x - 5| = 2$
 $x = 3$, $x = 7$
- 28. a)** $x \in (-4; -1) \cup \langle 1; 4 \rangle$
b) $x \in \langle -6; -1 \rangle \cup (3; 8)$
c) $x \in (-11; 5)$
d) $x \in \langle -2; 2 \rangle \cup \langle 4; 8 \rangle$
- 29. a)** $x \in \langle -5; 1 \rangle$
b) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; \infty)$
c) $x \in (-2; 6)$
d) $x \in (\frac{1}{2}; \frac{7}{2})$
e) $x \in \langle 0; 4 \rangle$
f) $x \in (-\infty; 0] \cup \langle 1; \infty \rangle$
g) $x \in (-\infty; -8) \cup (-2; \infty)$
h) $x \in \langle -3; 5 \rangle$

30. a) $-x - (-x) - (2x) = -2x$
 b) $2x - x - (x - 1) = 1$
 c) $-(x + 3) + x = -3$
 d) $x + 2 - (x - 2) + (3 - x) = -x + 7$

31. $A = \langle -4; \infty \rangle$, $B = (-\infty; 3]$,
 $C = (-\infty; 2]$
 a), b) nie należy
 c) należy

32. a) $6|x| - 2|x| > 0$
 $|x| > 0$
 $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
 b) $|x| + \sqrt{2}|x| \leq 1$
 $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$
 $x \in \langle 1 - \sqrt{2}; \sqrt{2} - 1 \rangle$
 c) $|x - 1| + 3|x - 1| \leq 1$
 $|x - 1| \leq \frac{1}{4}$
 $x \in \langle \frac{3}{4}; \frac{5}{4} \rangle$
 d) $3|x - \frac{1}{3}| - |x - \frac{1}{3}| > 2$
 $|x - \frac{1}{3}| > 1$
 $x \in (-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (\frac{4}{3}; \infty)$

33. B. 1

34. 1. F, 2. P

35. 1. F, 2. P

30. Uprość wyrażenie.

- a) $|x| - |-x| + |2x|$ dla $x \leq 0$
 b) $|2x| - \sqrt{x^2} - |x - 1|$ dla $x \geq 1$
 c) $|x + 3| - |x|$ dla $x \leq -3$
 d) $|x + 2| + |x - 2| + \sqrt{9 - 6x + x^2}$ dla $-2 \leq x \leq 2$

31. Niech $A = \{x \in \mathbf{R}: |x + 4| = x + 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}: |x - 3| = 3 - x\}$,
 $C = \{x \in \mathbf{R}: |4 - 2x| = 4 - 2x\}$. Zapisz zbiory A , B i C w postaci przedziałów, a następnie sprawdź, czy liczba 0 należy do podanego zbioru.

- a) $\mathbf{R} \setminus A$ b) $\mathbf{R} \setminus (A \cap B)$ c) $\mathbf{R} \setminus (B \setminus C)$

32. Rozwiąż nierówność.

- a) $|6x| - \sqrt{4x^2} > 0$ c) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + |3x - 3| \leq 1$
 b) $|x| + \sqrt{2x^2} \leq 1$ d) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} - |x - \frac{1}{3}| > 2$

33. Dane są zbiory $X = (-\infty; -3) \cup \langle 4; \infty \rangle$ i $Y = (-\infty; -5) \cup \langle 9; \infty \rangle$. Ile jest liczb całkowitych należących do zbioru $X \setminus Y$?

Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

A.	6,	ponieważ	1.	$X \setminus Y = (-5; -3) \cup \langle 4; 9 \rangle$
B.	7,		2.	$X \setminus Y = (-5; -3) \cup \langle 4; 9 \rangle$
C.	8,		3.	$X \setminus Y = \langle -5; -3 \rangle \cup \langle 4; 9 \rangle$

34. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Nierówność $ x > 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.	P	F
2.	Nierówność $ x \leq \pi$ jest spełniona przez siedem liczb całkowitych.	P	F

35. Rozpatrzmy równanie $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x - 2| = 4 - 2x$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Równanie to jest spełnione przez nieskończenie wiele liczb naturalnych.	P	F
2.	Równanie to jest spełnione przez każdą liczbę ujemną.	P	F

5.3. Funkcje

Funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi $x \in X$ odpowiada dokładnie jeden element $y \in Y$.

Wykresem funkcji $f: X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór wszystkich takich punktów (x, y) , że $x \in X$ oraz $y = f(x)$.

Zbiór X nazywamy **dziedzina** funkcji, a jego elementy – **argumentami**.

Zbiór wartości funkcji $f: X \rightarrow Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$.

Miejsce zerowe funkcji f nazywamy taki argument x , dla którego:

$$f(x) = 0$$

Monotoniczność funkcji $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $X \subset \mathbf{R}$

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest równość:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

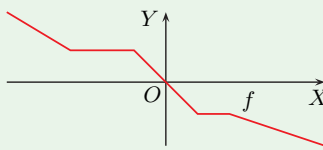
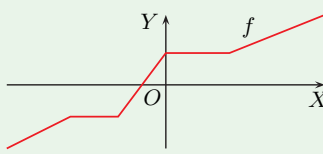
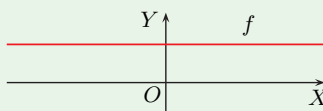
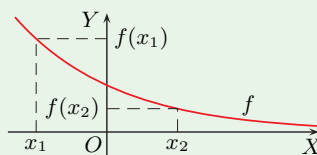
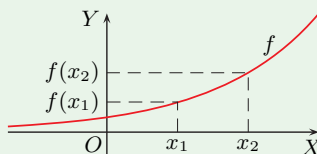
Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **niemalejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \leq f(x_2)$$

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **nierosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

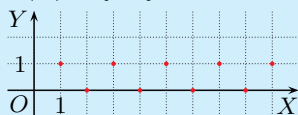
$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \geq f(x_2)$$

Funkcję, która jest rosnąca, malejąca, nierosnąca, niemalejąca lub stała, nazywamy **funkcją monotoniczną**.



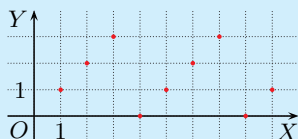
1. a), d) Nie jest funkcją.
 b) Jest funkcją, zbiór wartości: $\{0\}$.
 c) Jest funkcją, zbiór wartości: $\{-1, 0, 2\}$.

2. a) $f(D) = \{0, 1\}$



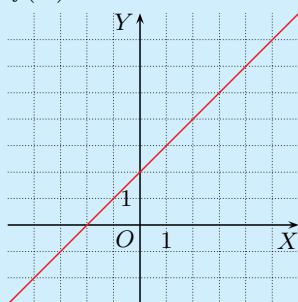
wartość najmniejsza: 0,
 wartość największa: 1

b) $f(D) = \{0, 1, 2, 3\}$



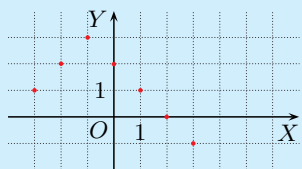
wartość najmniejsza: 0,
 wartość największa: 3

c) $f(D) = \mathbf{R}$



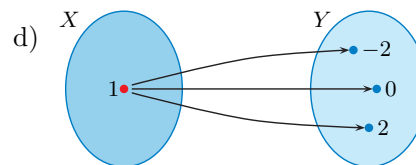
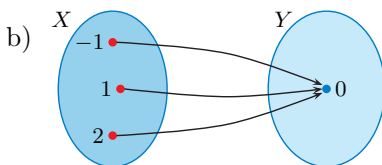
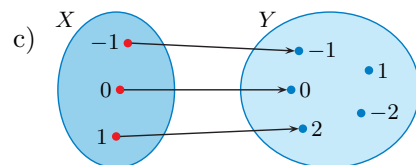
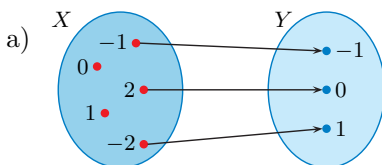
nie przyjmuje wartości największej ani najmniejszej

3. a) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
 $f(D) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$,
 miejsca zerowe: 2,
 wartość najmniejsza: -1,
 wartość największa: 3



■ Zestaw I – wprowadzający

1. Odczytaj z grafu, którą liczbę przyporządkowano liczbie 1 oraz której liczbie przyporządkowano liczbę 0. Czy przyporządkowanie przedstawione za pomocą tego grafu jest funkcją? Jeśli tak, to narysuj wykres tej funkcji oraz podaj jej zbiór wartości.



2. Narysuj wykres funkcji $f: X \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj jej zbiór wartości oraz wartości najmniejszą i największą (jeśli istnieją).

- a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą parzystą} \\ 1, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$
 b) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $f(x)$ jest resztą z dzielenia x przez 4
 c) $X = \mathbf{R}$, $f(x)$ jest liczbą o 2 większą od x

3. Funkcję f przedstawiono za pomocą tabeli. Podaj jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, wartości najmniejszą i największą. Narysuj wykres funkcji f .

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	3	2	1	0	-1

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	0	5	0	-5	0	3

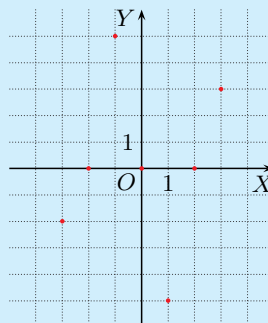
4. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę wartości funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Oblicz $f(\pi - 2)$ i $f(\sqrt{2} + 1)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \leq 2 \\ x - 1 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	1	1	1	2	3

3. b) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
 $f(D) = \{-5, -2, 0, 3, 5\}$,
 miejsca zerowe: -2, 0, 2,
 wartość najmniejsza: -5,
 wartość największa: 5

4. $f(\pi - 2) = 1$, $f(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}$



5. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x}{6-x}$

c) $f(x) = \frac{4x^2-1}{x-2}$

e) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

b) $f(x) = \frac{x+3}{x}$

d) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

f) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

6. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

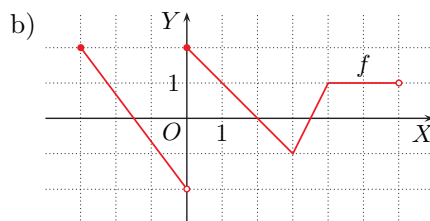
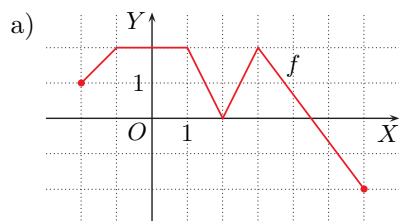
a) $f(x) = \sqrt{2x+8}$

c) $f(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-4}$

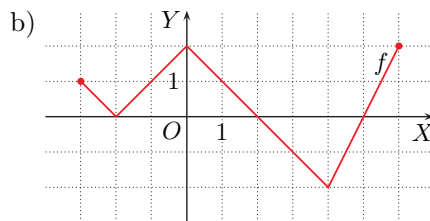
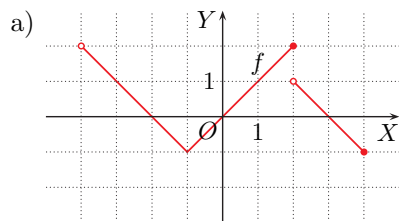
b) $f(x) = \sqrt{3-x}$

d) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+1)}$

7. Odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności funkcji f .

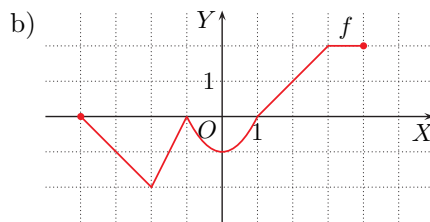
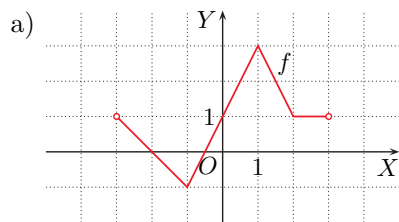


8. Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę i zbiór wartości. Podaj rozwiązania równania $f(x) = 1$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$.



9. Odczytaj z wykresu funkcji f :

- jej dziedzinę i zbiór wartości,
- przedziały monotoniczności,
- argumenty, dla których przyjmuje ona wartości nieujemne,
- argumenty, dla których przyjmuje ona wartości większe od 1.



9. a) $D = (-3; 3)$, $f(D) = \langle -1; 3 \rangle$,

f rośnie w $\langle -1; 1 \rangle$,

maleje w $\langle -3; -1 \rangle$ i w $\langle 1; 2 \rangle$,

jest stała w $\langle 2; 3 \rangle$,

$f(x) \geq 0$ dla $x \in (-3; -2) \cup \langle -\frac{1}{2}; 3 \rangle$,

$f(x) > 1$ dla $x \in (0; 2)$

b) $D = \langle -4; 4 \rangle$, $f(D) = \langle -2; 2 \rangle$,

f rośnie w $\langle -2; -1 \rangle$ i w $\langle 0; 3 \rangle$,

maleje w $\langle -4; -2 \rangle$ i w $\langle -1; 0 \rangle$,

jest stała w $\langle 3; 4 \rangle$,

$f(x) \geq 0$ dla $x \in \{-4, -1\} \cup \langle 1; 4 \rangle$,

$f(x) > 1$ dla $x \in (2; 4)$

5. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{6\}$, $f(0) = 0$

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(-3) = 0$

c) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,

$f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = 0$

d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(2) = 0$

e) $D = \mathbf{R}$, $f(-1) = f(1) = 0$

f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, brak miejsc zerowych

6. a) $D = \langle -4; \infty \rangle$

b) $D = (-\infty; 3)$

c) $D = \langle 4; \infty \rangle$

d) $D = (-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle$

7. a) rośnie w $\langle -2; -1 \rangle$ i w $\langle 2; 3 \rangle$,

maleje w $\langle 1; 2 \rangle$ i w $\langle 3; 6 \rangle$,

jest stała w $\langle -1; 1 \rangle$

b) rośnie w $\langle 3; 4 \rangle$,

maleje w $\langle -3; 0 \rangle$ i w $\langle 0; 3 \rangle$,

jest stała w $\langle 4; 6 \rangle$

8. a) $D = (-4; 4)$,

$f(D) = \langle -1; 2 \rangle$,

$f(x) = 1$ dla $x = -3$, $x = 1$,

$f(x) > 0$ dla

$x \in (-4; -2) \cup (0; 3)$

b) $D = \langle -3; 6 \rangle$,

$f(D) = \langle -2; 2 \rangle$,

$f(x) = 1$ dla $x = -3$, $x = -1$,

$x = 1$, $x = 5\frac{1}{2}$,

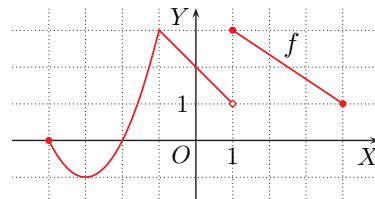
$f(x) > 0$ dla

$x \in \langle -3; -2 \rangle \cup (-2; 2) \cup (5; 6)$

10. a) $f_{\min}(-3) = -1$,
 $f_{\max}(-1) = 3$
 b) $f_{\min}(4) = 1$, $f_{\max}(1) = 3$
 c) $f_{\min}(-3) = -1$,
 $f_{\max}(-1) = f_{\max}(1) = 3$

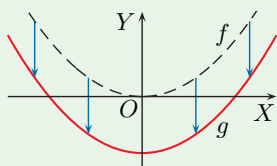
10. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Odczytaj z wykresu wartość największą i wartość najmniejszą funkcji f w przedziale:

- a) $\langle -3; 0 \rangle$, b) $\langle 1; 4 \rangle$, c) $\langle -4; 4 \rangle$.

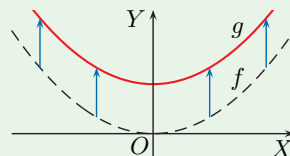


Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych

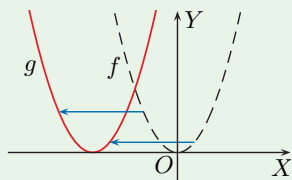
Wykres funkcji $g(x) = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o q jednostek **w górę** wzdłuż osi OY .



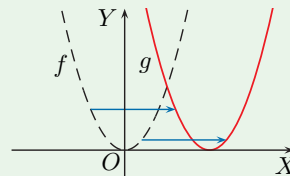
Wykres funkcji $g(x) = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o q jednostek **w dół** wzdłuż osi OY .



Wykres funkcji $g(x) = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o p jednostek **w prawo** wzdłuż osi OX .

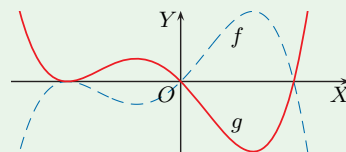
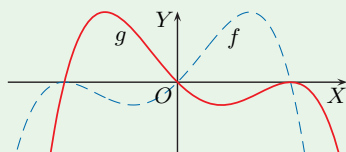


Wykres funkcji $g(x) = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o p jednostek **w lewo** wzdłuż osi OX .



Przekształcanie wykresu funkcji przez symetrię względem osi układu współrzędnych

Wykres funkcji $g(x) = -f(x)$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne wykresu funkcji f względem osi OX .



Wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne wykresu funkcji f względem osi OY .

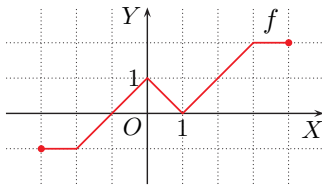
■ Zestaw II – ćwiczeniowy

11. Wyznacz wzór funkcji g , której wykres otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$:

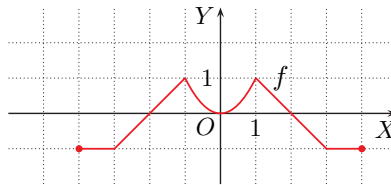
- a) o 3 jednostki w górę, c) o 2 jednostki w prawo,
b) o 4 jednostki w dół, d) o 1 jednostkę w lewo.

12. Dany jest wykres funkcji f . Naskicuj wykres, wyznacz dziedziny i zbiory wartości funkcji $f_1(x) = f(x) + 1$, $f_2(x) = f(x) - 2$, $f_3(x) = f(x + 4)$, $f_4(x) = f(x - 3)$.

a) $f: \langle -3; 4 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

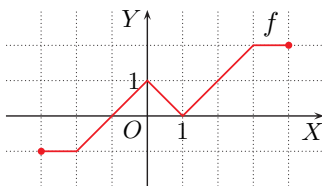


b) $f: \langle -4; 4 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

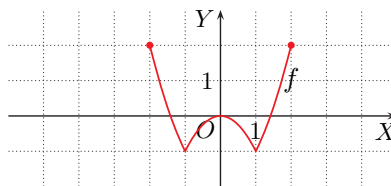


13. Dany jest wykres funkcji f . Naskicuj wykresy, wyznacz dziedziny i zbiory wartości funkcji $f_1(x) = f(x + 4) + 1$ oraz $f_2(x) = f(x - 4) - 1$.

a) $f: \langle -3; 4 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$



b) $f: \langle -2; 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

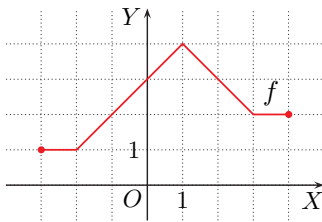


14. Wyznacz wzory funkcji g i h , a następnie naskicuj ich wykresy.

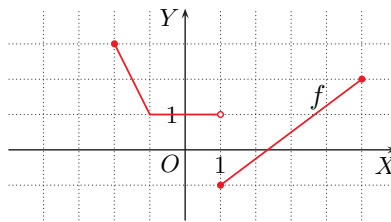
- a) $f(x) = x^2$, $g(x) = f(x - 3)$, $h(x) = f(x) - 2$
b) $f(x) = |x|$, $g(x) = f(x + 4)$, $h(x) = f(x) + 2$

15. Naskicuj wykresy funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz $h(x) = -f(x)$.

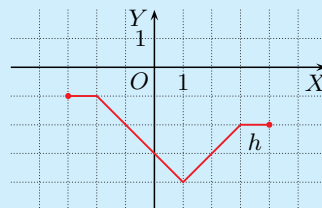
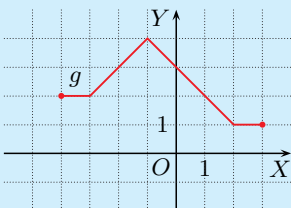
a) $f: \langle -3; 4 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$



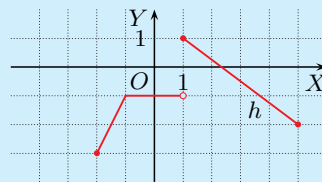
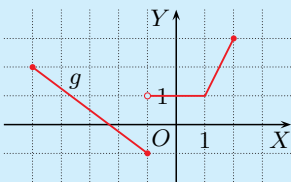
b) $f: \langle -2; 5 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$



15. a)



- b)



11. a) $g(x) = 2x^2 + 3x + 4$

b) $g(x) = 2x^2 + 3x - 3$

c) $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$

d) $g(x) = 2x^2 + 7x + 6$

12. a) $D_1 = \langle -3; 4 \rangle$,

$f_1(D_1) = \langle 0; 3 \rangle$,

$D_2 = \langle -3; 4 \rangle$,

$f_2(D_2) = \langle -3; 0 \rangle$,

$D_3 = \langle -7; 0 \rangle$,

$f_3(D_3) = \langle -1; 2 \rangle$,

$D_4 = \langle 0; 7 \rangle$, $f_4(D_4) = \langle -1; 2 \rangle$

b) $D_1 = \langle -4; 4 \rangle$,

$f_1(D_1) = \langle 0; 2 \rangle$,

$D_2 = \langle -4; 4 \rangle$,

$f_2(D_2) = \langle -3; -1 \rangle$,

$D_3 = \langle -8; 0 \rangle$,

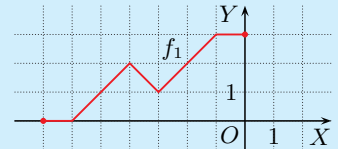
$f_3(D_3) = \langle -1; 1 \rangle$,

$D_4 = \langle -1; 7 \rangle$,

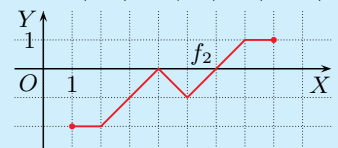
$f_4(D_4) = \langle -1; 1 \rangle$

13. a) $D_1 = \langle -7; 0 \rangle$,

$f_1(D_1) = \langle 0; 3 \rangle$

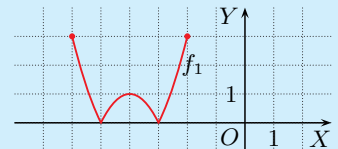


$D_2 = \langle 1; 8 \rangle$, $f_2(D_2) = \langle -2; 1 \rangle$

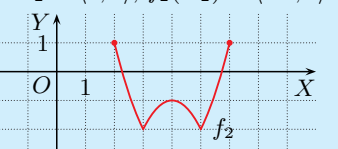


b) $D_1 = \langle -6; -2 \rangle$,

$f_1(D_1) = \langle 0; 3 \rangle$



$D_2 = \langle 2; 6 \rangle$, $f_2(D_2) = \langle -2; 1 \rangle$



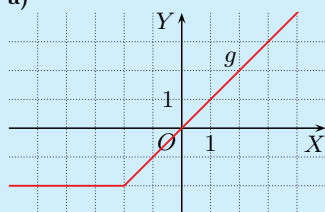
14. a) $g(x) = (x - 3)^2$,

$h(x) = x^2 - 2$

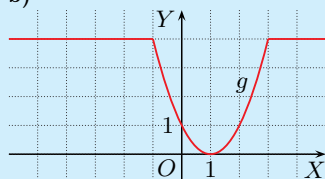
b) $g(x) = |x + 4|$,

$h(x) = |x| + 2$

16. a)



b)



17. a) przesunąć o 4 jednostki w prawo

b) przesunąć o 2 jednostki w lewo

c) przesunąć o 6 jednostek w górę

18. a) $g(x) = f(x + 3)$

b) $g(x) = f(x - 4)$

c) $g(x) = f(x + 1) - 2$

d) $g(x) = -f(x + 2) + 1$

e) $g(x) = f(x - 3) + 3$

f) $g(x) = -f(x + 4) - 1$

19. a) $D = \langle -5; 3 \rangle$,

$g(D) = \langle -1; 3 \rangle$,

miejsce zerowe: 2

b) $D = \langle -3; 5 \rangle$,

$g(D) = \langle -1; 3 \rangle$,

miejsce zerowe: -2

c) $D = \langle -6; 2 \rangle$,

$g(D) = \langle -5; -1 \rangle$,

brak miejsc zerowych

21. a) $f(x) = g(x)$ dla

$x \in \{-1, 1, 3\}$,

$f(x) \leq g(x)$ dla

$x \in \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$

b) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \langle 0; 2 \rangle$,

$f(x) \leq g(x)$ dla $x \in \langle 0; \infty \rangle$

c) $f(x) = g(x)$ dla

$x \in \{-1, 0, 1\}$,

$f(x) \leq g(x)$ dla

$x \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup \langle 1; \infty \rangle$

d) $f(x) = g(x)$ dla

$x \in \{-1, 1\}$,

$f(x) \leq g(x)$ dla $x \in \langle -1; 1 \rangle$

16. Naskicuj wykres funkcji g .

a) $g(x) = f(x + 2)$, gdzie $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \leq 0 \\ x - 2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

b) $g(x) = f(x - 1)$, gdzie $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in \langle -2; 2 \rangle \\ 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \end{cases}$

17. Jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 2|x|$, aby otrzymać wykres funkcji g ?

a) $g(x) = 2|x - 4|$

b) $g(x) = 2|x + 2|$

c) $g(x) = 2(|x| + 3)$

18. Naskicuj wykres funkcji g , przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = 2|x|$.

a) $g(x) = 2|x + 3|$

c) $g(x) = 2(|x + 1| - 1)$

e) $g(x) = |2x - 6| + 3$

b) $g(x) = 2|4 - x|$

d) $g(x) = -2|x + 2| + 1$

f) $g(x) = -|2x + 8| - 1$

19. Zbiorem wartości funkcji $f: \langle -5; 3 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ jest przedział $\langle -3; 1 \rangle$, a miejscem zerowym - liczba 2. Wyznacz dziedzinę, zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji g .

a) $g(x) = -f(x)$

b) $g(x) = -f(-x)$

c) $g(x) = f(x + 1) - 2$

20. Naskicuj wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Z wykresu odczytaj miejsca zerowe funkcji f , jej przedziały monotoniczności oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq -3$.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -x + 1 & \text{dla } x \in (-1; 4) \\ -3 & \text{dla } x \in (4; \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ x^2 - 4 & \text{dla } x \in (-1; 2) \\ -x + 4 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

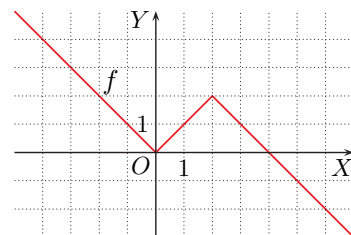
21. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. W tym samym układzie współrzędnych naskicuj wykresy funkcji f i g , a następnie odczytaj, dla jakich argumentów funkcje f i g przyjmują te same wartości, oraz podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq g(x)$.

a) $g(x) = 1$

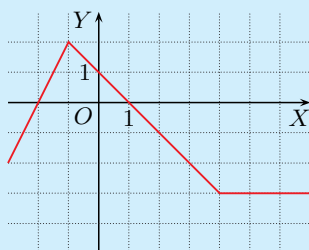
b) $g(x) = x$

c) $g(x) = x^2$

d) $g(x) = 2 - x^2$



20. a)



$f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 1\}$,

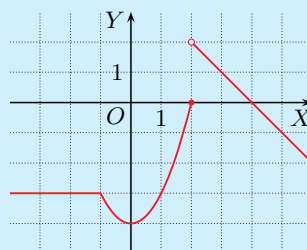
f rośnie w $(-\infty; -1)$,

maleje w $\langle -1; 4 \rangle$,

jest stała w $\langle 4; \infty \rangle$,

$f(x) \geq -3$ dla $x \in \langle -3\frac{1}{2}; \infty \rangle$

b)



$f(x) = 0$ dla $x \in \{2, 4\}$,

f rośnie w $\langle 0; 2 \rangle$,

maleje w $\langle -1; 0 \rangle$ i w $\langle 2; \infty \rangle$,

jest stała w $(-\infty; -1)$,

$f(x) \geq -3$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; 7 \rangle$

■ Zestaw III – podsumowujący

22. Podaj liczbę miejsc zerowych funkcji, która każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje:
a) liczbę jej parzystych dzielników, b) kwadrat różnicy jej cyfr.
23. Funkcja f przyporządkowuje każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej jej najmniejszy dzielnik różny od 1. Podaj liczbę argumentów, dla których wartość funkcji jest równa: a) 2, b) 5, c) 7.

24. Naskicuj wykres funkcji f , a następnie odczytaj z niego rozwiązania równania $f(x) = -1$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq -1$.

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -x+4 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 2x+1 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$

25. Wyznacz dziedzinę, uprość wzór, a następnie naskicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x+1}{x+1}$

c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x}$

d) $f(x) = \frac{x^2+x}{x}$

26. Oblicz wartości funkcji f dla argumentów $-1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2$.

a) $f(x) = \frac{x}{2x+1}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty) \\ x^2-1 & \text{dla } x \in (1; 2) \end{cases}$

27. Miejscami zerowymi funkcji f są liczby -2 i 5 . Wyznacz miejsca zerowe funkcji g .

a) $g(x) = f(-x)$

b) $g(x) = f(x+4)$

c) $g(x) = f(4-x)$

28. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -3; 5 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$.

- a) Podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

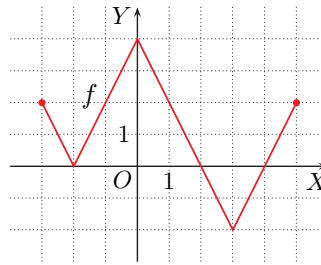
- b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

$$g(x) = f(-x)$$

- c) Wyznacz zbiór wartości funkcji:

$$h(x) = 3 - f(x)$$

- d) Podaj wartości $m \in \{-2, 3, 5\}$, dla których równanie $f(x) = m$ ma rozwiązanie.



28. a) $x \in \langle -3; -2 \rangle \cup (-2; 2) \cup (4; 5)$
b) $-4, -2, 2$
c) $\langle -1; 5 \rangle$
d) $m \in \{-2, 3\}$

22. a) Miejscami zerowymi są liczby dwucyfrowe nieparzyste (mają tylko nieparzyste dzielniki). Jest 45 takich liczb.

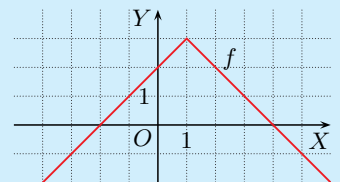
b) Miejsca zerowe: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 – jest ich 9.

23. a) Argumentami są liczby dwucyfrowe parzyste – jest ich 45.

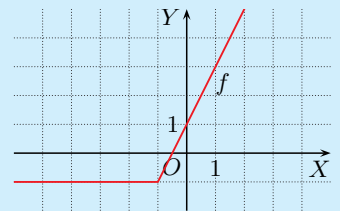
b) Argumentami są liczby: 25, 35, 55, 65, 85, 95 – jest ich 6.

c) Argumentami są trzy liczby: 49, 77, 91.

24. a) $f(x) = -1$ dla $x \in \{-3, 5\}$,
 $f(x) \geq -1$ dla $x \in \langle -3; 5 \rangle$



- b) $f(x) = -1$ dla $x \in (-\infty; -1)$,
 $f(x) \geq -1$ dla $x \in \mathbf{R}$

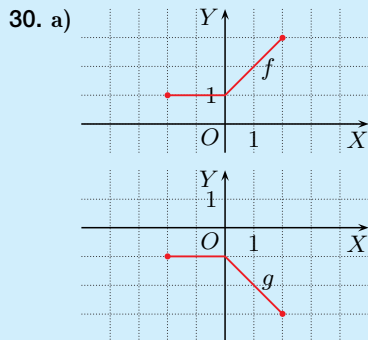


25. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = 1$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = x$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = x-2$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = x+1$

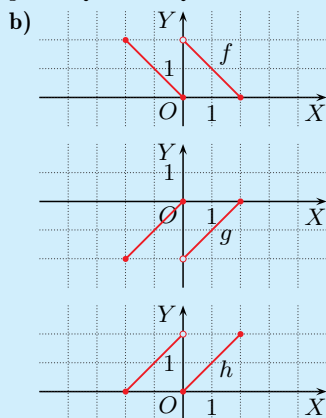
26. a) $1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{4-\sqrt{2}}{7}, \frac{2}{5}$
b) $0, 0, 0, 0, 1, 3$

27. a) $-5, 2$ b) $-6, 1$ c) $-1, 6$

29. a) $g(x) = f(x-2) - 1$
 b) $g(x) = f(x+1) + 2$
 c) $g(x) = -f(x)$
 d) $g(x) = f(-x)$

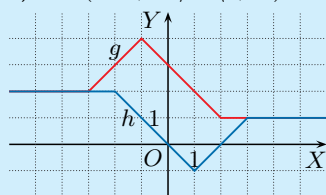


$f(D) = h(D) = \langle 1; 3 \rangle$,
 $g(D) = \langle -3; -1 \rangle$,
 f jest niemalejąca,
 g i h są nierosnące

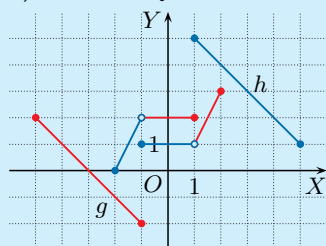


$f(D) = h(D) = \langle 0; 2 \rangle$,
 $g(D) = \langle -2; 0 \rangle$,
 f, g i h są niemonotoniczne

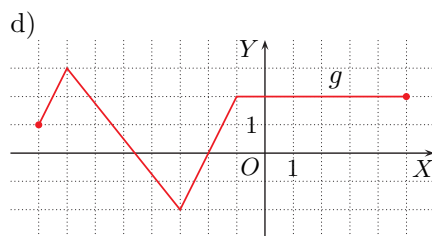
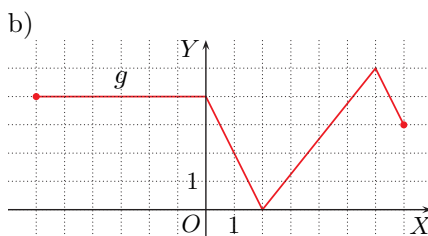
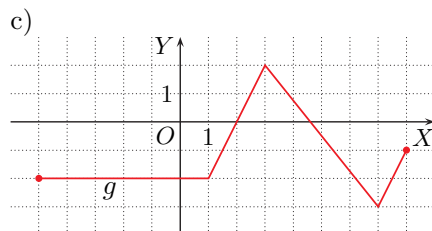
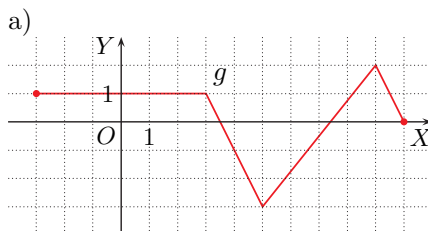
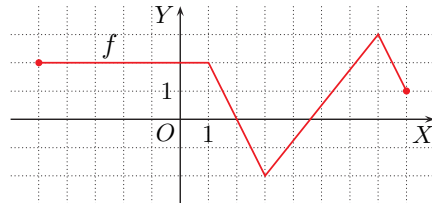
31. a) $x \in (-\infty; -3) \cup \langle 3; \infty \rangle$



b) brak rozwiązania



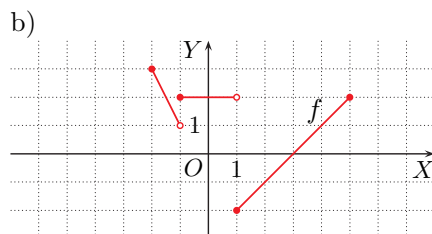
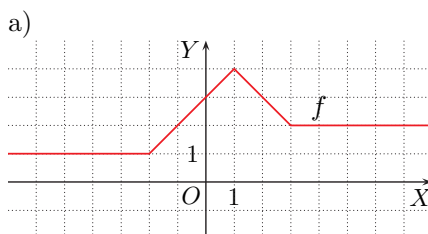
29. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -5; 8 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Jak należy go przekształcić, aby otrzymać wykres funkcji g ? Zapisz to przekształcenie za pomocą wzoru.



30. Naskicuj wykresy funkcji $f, g(x) = -f(x)$ oraz $h(x) = f(-x)$, a następnie odczytaj ich zbiory wartości. Czy funkcje f, g i h są monotoniczne?

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \langle -2; 0 \rangle \\ x+1 & \text{dla } x \in (0; 2) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in \langle -2; 0 \rangle \\ -x+2 & \text{dla } x \in (0; 2) \end{cases}$

31. Naskicuj wykresy funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz $h(x) = 3 - f(x)$ i na ich podstawie podaj rozwiązanie równania $f(-x) = 3 - f(x)$.



32. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj wzory funkcji $g(x) = f(x+1) - 4$, $h(x) = 1 - f(x-2)$, $k(x) = f(2-x) - 2$ i naskicuj ich wykresy.

a) $f(x) = 2x - 2$ b) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = -|2x|$

32. a) $g(x) = 2x - 4$, $h(x) = -2x + 7$, $k(x) = -2x$

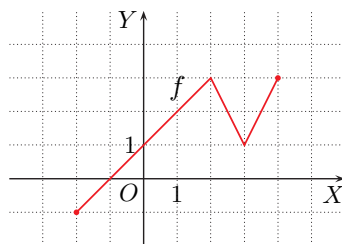
b) $g(x) = |x+1| - 4$, $h(x) = 1 - |x-2|$, $k(x) = |x-2| - 2$

c) $g(x) = -2|x+1| - 4$, $h(x) = 2|x-2| + 1$, $k(x) = -2|x-2| - 2$

33. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -2; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Funkcje g oraz h są określone za pomocą funkcji f :

$$g(x) = -f(x) + 2 \text{ oraz } h(x) = f(-x) - 2.$$

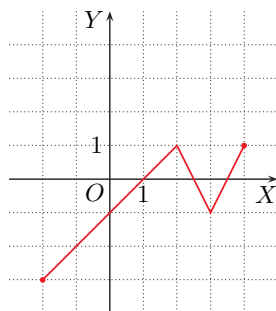
Na rysunkach A–F przedstawiono wykresy różnych funkcji, w tym wykresy funkcji g oraz h .



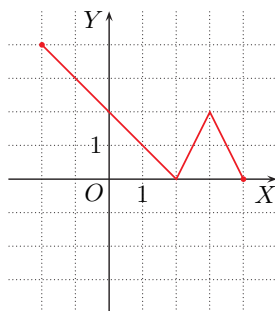
Każdej z funkcji g oraz h przyporządkuj jej wykres. Przerysuj do zeszytu tabelę i uzupełnij ją właściwymi odpowiedziami wybranymi spośród A–F.

Funkcja	Rysunek
g	D
h	C

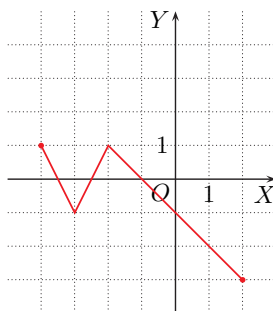
A.



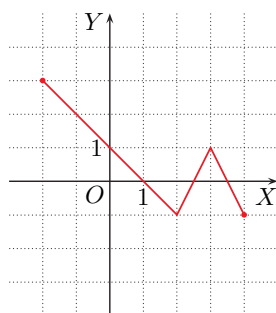
B.



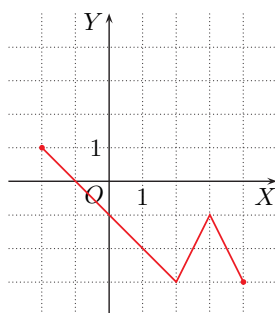
C.



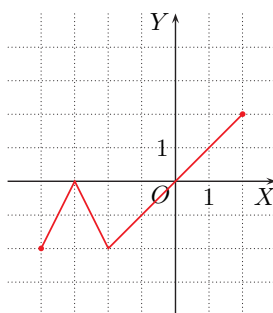
D.



E.



F.

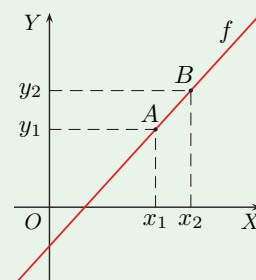


5.4. Funkcja liniowa i układy równań liniowych

Funkcją liniową nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a i b są stałymi.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej, a równanie $y = ax + b$ – **równaniem kierunkowym**.

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$, przechodzącej przez dwa różne punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, jest równy $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = ax + b$ jest:

- **rosnąca** dla $a > 0$, ■ **malejąca** dla $a < 0$, ■ **stała** dla $a = 0$.

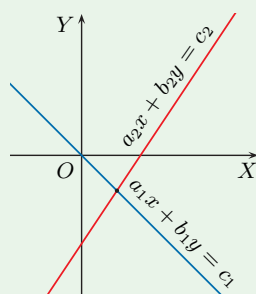
Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:

- **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$,
- **prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

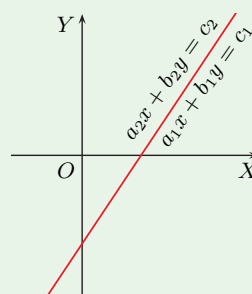
Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym** prostej.

Układ równań liniowych $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ nazywamy:

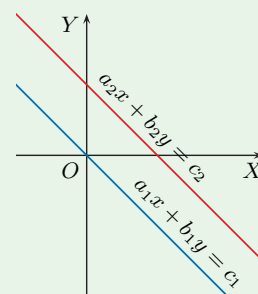
- **oznaczonym**, gdy ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- **nieoznaczonym**, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- **sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązań.



Układ oznaczony – proste opisane równaniami tego układu przecinają się w jednym punkcie.



Układ nieoznaczony – oba równania tego układu opisują tę samą prostą.



Układ spreczny – proste opisane równaniami tego układu są równoległe i się nie pokrywają.

■ Zestaw I – wprowadzający

1. Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych i naszkicuj ten wykres. Określ monotoniczność funkcji f .

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ b) $f(x) = -2x + 2$ c) $f(x) = 4x - 2$

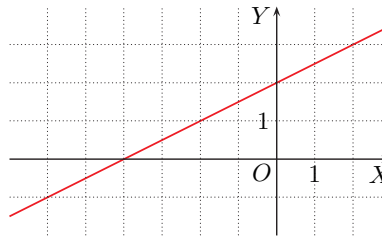
2. Określ monotoniczność funkcji f .

a) $f(x) = 2 - 3x - 3(4 - 2x)$ c) $f(x) = (2 - x)(2 + x) + (2 + x)^2$

b) $f(x) = \frac{3x+2}{2} - \frac{x+3}{4} - \frac{4x-1}{3}$ d) $f(x) = (1 - 2x)^2 - (2 - x)^2 - 3x^2$

3. Prosta (rysunek obok) jest wykresem pewnej funkcji liniowej.

- a) Podaj argumenty, dla których funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie.
b) Podaj argumenty, dla których funkcja ta przyjmuje wartości nieujemne.
c) Wyznacz wzór tej funkcji.



4. Dana jest funkcja liniowa $f(x) = 2x + b$. Wyznacz b , jeżeli wiadomo, że:
a) funkcja f przyjmuje wartości dodatnie tylko dla argumentów większych od 8,
b) funkcja f przyjmuje wartości większe od 3 tylko dla argumentów większych od 5.

5. Wyznacz wzór funkcji liniowej f , która spełnia podane warunki.

a) $f(2) = 0$ i $f(0) = 4$ b) $f(\frac{5}{2}) = \frac{1}{4}$ i $f(2) = -1$

6. Do wykresu funkcji liniowej należą punkty A i B . Oblicz współczynnik kierunkowy prostej będącej wykresem tej funkcji. Wyznacz równanie tej prostej.

a) $A(-3, 0)$, $B(1, 4)$ b) $A(2, 0)$, $B(-1, 3\sqrt{3})$ c) $A(-2, 7)$, $B(6, 7)$

7. Sprawdź, czy punkty A , B i C należą do wykresu tej samej funkcji liniowej.

a) $A(0, 2)$, $B(5, -\frac{1}{2})$, $C(-2, 3)$ b) $A(\frac{1}{3}, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(2, 3)$

8. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt P .

a) $f(x) = 3x$, $P(0, 2)$ c) $f(x) = \sqrt{2}x - 1$, $P(\sqrt{2}, -2)$

b) $f(x) = -2x + 1$, $P(1, 3)$ d) $f(x) = 5$, $P(3, 8)$

1. a) $(0, 1)$, $(-3, 0)$, rosnąca
b) $(0, 2)$, $(1, 0)$, malejąca
c) $(0, -2)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, rosnąca

2. a), c) rosnąca
b) malejąca
d) stała

3. a) $x \in (-4; \infty)$
b) $x \in \langle -4; \infty)$
c) $y = \frac{1}{2}x + 2$

4. a) $b = -16$ b) $b = -7$

5. a) $b = 4$,
czyli $f(x) = ax + 4$
 $f(2) = 0$, więc $a = -2$
Zatem $f(x) = -2x + 4$.

$$\begin{cases} \frac{1}{4} = \frac{5}{2}a + b \\ -1 = 2a + b \\ a = \frac{5}{2} \\ b = -6 \end{cases}$$

Zatem $f(x) = \frac{5}{2}x - 6$.

6. a) $a = 1$, $y = x + 3$

b) $a = -\sqrt{3}$,
 $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

c) $a = 0$, $y = 7$

7. a) tak, do prostej
 $y = -\frac{1}{2}x + 2$

b) nie

8. a) $y = 3x + 2$

b) $y = -2x + 5$

c) $y = \sqrt{2}x - 4$

d) $y = 8$

9. a) $y = -\frac{1}{2}x$ b) $y = \frac{1}{4}x + 2$
 c) $y = -3x + 2$
 d) $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x - 2$
10. $AB: y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$
 $BC: y = -\frac{1}{7}x + \frac{27}{7}$
 $CD: y = \frac{3}{4}x + \frac{19}{4}$
 $AD: y = -\frac{4}{3}x - \frac{17}{3}$
 Trapez jest prostokątny.
11. a) $\sqrt{2}x = \sqrt{2} + 1$
 $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
 b) $(\sqrt{3} - 1)t = 2 - \sqrt{3}$
 $t = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$
 c) $(\sqrt{15} - \sqrt{5})x = 3\sqrt{5}$
 $x = \frac{3}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{3\sqrt{3} + 3}{2}$
 d) $(\sqrt{6} + \sqrt{3})z = 3\sqrt{3}$
 $z = \frac{3}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 3(\sqrt{2} - 1)$
12. a) $2x + 10 > 20x - 5$
 $18x < 15$
 $x < \frac{5}{6}$
 b) $x - 1 \geq 2x$
 $x \leq -1$
 c) $25x - 50 \leq 8x - 16$
 $17x \leq 34$
 $x \leq 2$
 d) $3 - x^2 < 4 - 3 + 2\sqrt{3}x - x^2$
 $2\sqrt{3}x > 2$
 $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$
13. a) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -x + 5 \end{cases}$
 $x = 2, y = 3$
 b) $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x + 3 \end{cases}$
 brak rozwiązań
 c) $\begin{cases} y = -3x + 7 \\ y = 4x - 14 \end{cases}$
 $x = 3, y = -2$
15. a) $x \in (-\infty; -6) \cup (4; \infty)$
 b) $x \in (-\infty; 2)$

9. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do prostej k i przechodzi przez punkt P .

- a) $k: y = 2x, P(2, -1)$ c) $k: x - 3y - 3 = 0, P(1, -1)$
 b) $k: y = -4x + 1, P(8, 4)$ d) $k: \sqrt{5}x - y + 3 = 0, P(\sqrt{5}, -3)$

10. Wyznacz równania prostych, w których zawierają się boki trapezu o wierzchołkach $A(-2, -3), B(6, 3), C(-1, 4), D(-5, 1)$. Czy jest to trapez prostokątny?

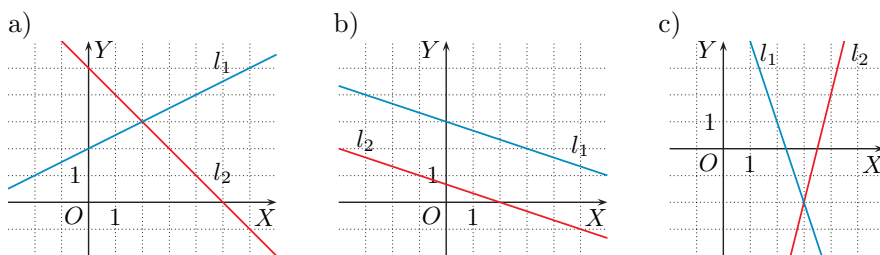
11. Rozwiąż równanie (wynik zapisz w najprostszej postaci).

- a) $\sqrt{2}x - 2 = \sqrt{2} - 1$ c) $\sqrt{15}x - \sqrt{5} = \sqrt{5}x + \sqrt{20}$
 b) $\sqrt{3}t - 2 = t - \sqrt{3}$ d) $\sqrt{6}z - \sqrt{3} = \sqrt{12} - \sqrt{3}z$

12. Rozwiąż nierówność.

- a) $\frac{x+5}{5} > \frac{4x-1}{2}$ c) $10(3x-6) - 5(x-2) \leq 2(4x-8)$
 b) $\sqrt{3}(x-1) \geq \sqrt{12}x$ d) $(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x) < 4 - (\sqrt{3}-x)^2$

13. Zapisz układ równań liniowych, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku. Jeśli układ ma rozwiązanie, to je podaj.

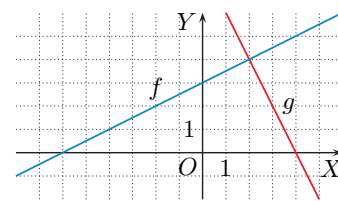


14. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

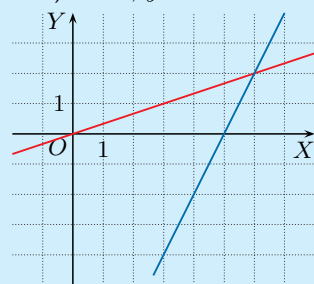
- a) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -4x + 2y = 10 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -0,1x + 0,2y = 1 \\ 2y = x + 1 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x - 2y = -2 \\ 3y - 9x = 6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 0,5y = 1 \\ 0,5x + 0,25y = 0,5 \end{cases}$

15. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji liniowych f i g . Odczytaj, dla jakich argumentów:

- a) wartości funkcji f i g mają różne znaki,
 b) spełniona jest nierówność $f(x) \leq g(x)$.

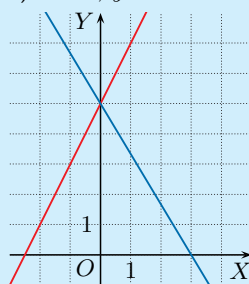


14. a) $x = 6, y = 2$



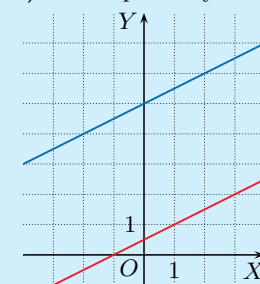
b) $x = 1, y = 1$

c) $x = 0, y = 5$



d) układ sprzeczny

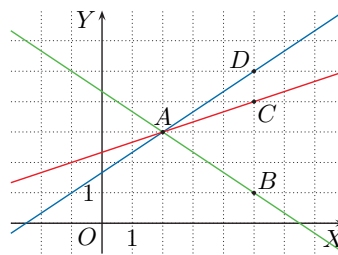
e) układ sprzeczny



f) układ nieoznaczony:
 $x \in \mathbb{R}, y = -2x + 2$

■ Zestaw II – ćwiczeniowy

16. Dla jakich wartości m funkcja f jest stała?
 a) $f(x) = (m+2)x + 7$ b) $f(x) = (2 + \frac{2}{m})x + 4$
17. Dla jakich wartości m funkcja f jest malejąca?
 a) $f(x) = (m+3)x - 7$ c) $f(x) = (m^2 - 4)x + 7$
 b) $f(x) = (\frac{2}{3}m - 4)x + 2$ d) $f(x) = (36 - m^2)x - 3$
18. Punkty A , B i C należą do wykresu tej samej funkcji liniowej. Oblicz współrzędną a .
 a) $A(0, -2)$, $B(-2, 2)$, $C(0, a)$ c) $A(\frac{1}{2}, 7)$, $B(-6, 7)$, $C(\sqrt{3}, a)$
 b) $A(1, 3)$, $B(5, 5)$, $C(a, 0)$ d) $A(3, 2)$, $B(a, 6)$, $C(-1, \frac{14}{3})$
19. Dla jakiej wartości a miejscem zerowym funkcji f jest liczba p ?
 a) $f(x) = (3-a)x + 4$, $p = 2$ b) $f(x) = (2a+1)x + 7 - a$, $p = -2$
20. Wyznacz miejsce zerowe funkcji f .
 a) $f(x) = \frac{3x-1}{2} - \frac{x+4}{3} - \frac{5x-11}{4}$ c) $f(x) = 11x - 2(2(3x-1) - 3x) - 1$
 b) $f(x) = 6(2x+2) - 2(5x+5)$ d) $f(x) = x - (x-1)^2 - (x+1)(1-x)$
21. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej będącej wykresem funkcji f , jeżeli wiadomo, że ma ona wspólne miejsce zerowe z funkcją g oraz $f(0) = 3$.
 a) $g(x) = \frac{x-3}{3} + \frac{x+3}{4}$ b) $g(x) = 1 - \frac{2x-1}{6} + \frac{x-1}{2}$
22. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nie mniejsze niż funkcja g .
 a) $f(x) = \frac{x+5}{5}$, $g(x) = \frac{4x-1}{2}$
 b) $f(x) = \sqrt{3}(x-1)$, $g(x) = \sqrt{12}x$
 c) $f(x) = 2(4x-8)$, $g(x) = 10(3x-6) - 5(x-2)$
23. Dane są punkty $A(2, 3)$, $B(5, 1)$, $C(5, 4)$ i $D(5, 5)$ (rysunek poniżej).
 a) Wyznacz współczynniki kierunkowe prostych AB , AC i AD .
 b) Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i prostą AB .
 c) Dla jakich argumentów funkcja, której wykresem jest prosta AC , przyjmuje wartości ujemne?



22. a) $\frac{x+5}{5} \geq \frac{4x-1}{2} \Leftrightarrow 2x+10 \geq 20x-5 \Leftrightarrow 18x \leq 15 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{6}$
 b) $\sqrt{3}(x-1) \geq \sqrt{12}x \Leftrightarrow x-1 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq -1$
 c) $2(4x-8) \geq 10(3x-6) - 5(x-2) \Leftrightarrow 8x-16 \geq 25x-50 \Leftrightarrow 17x \leq 34 \Leftrightarrow x \leq 2$
23. a) $AB: -\frac{2}{3}$, $AC: \frac{1}{3}$, $AD: \frac{2}{3}$
 b) Prosta $AB: y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$
 Punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych: $(\frac{13}{2}, 0)$ i $(0, \frac{13}{3})$
 Pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{13}{3} = \frac{169}{12}$
 c) Prosta $AC: y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
 $\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} < 0$ dla $x < -7$

16. a) $m+2=0$, czyli $m=-2$
 b) $2 + \frac{2}{m} = 0$, czyli $m=-1$
17. a) $m+3 < 0$, czyli $m < -3$
 b) $\frac{2}{3}m - 4 < 0$, czyli $m < 6$
 c) $m^2 - 4 < 0$,
 czyli $m \in (-2; 2)$
 d) $36 - m^2 < 0$, czyli
 $m \in (-\infty; -6) \cup (6; \infty)$
18. a) $a = -2$ b) $a = -5$
 c) $a = 7$ d) $a = -3$
19. a) $f(x) = 0$ dla $x = \frac{4}{a-3} = 2$,
 czyli $a = 5$
 b) $f(x) = 0$ dla
 $x = \frac{a-7}{2a+1} = -2$, czyli $a = 1$
20. a) 11 b) -1 c) $-\frac{3}{5}$ d) $\frac{2}{3}$
21. a) $g(x) = 0$ dla $x = \frac{3}{7}$,
 czyli $f(\frac{3}{7}) = 0$

I sposób

$f(0) = 3$, stąd:

$$f(x) = ax + 3$$

Podstawiamy współrzędne

punktu $(\frac{3}{7}, 0)$ do wzoru

funkcji f :

$$\frac{3}{7}a + 3 = 0, \text{ stąd } a = -7$$

II sposób

Punkty, przez które prze-

chodzi wykres funkcji f :

$$(0, 3), (\frac{3}{7}, 0)$$

Współczynnik kierunkowy:

$$a = \frac{3-0}{0-\frac{3}{7}} = -7$$

$$\text{b) } g(x) = 0 \text{ dla } x = -4,$$

$$\text{czyli } f(-4) = 0$$

$$f(0) = 3, \text{ stąd:}$$

$$f(x) = ax + 3$$

Podstawiamy współrzędne

punktu $(-4, 0)$ do wzoru

funkcji f :

$$-4a + 3 = 0, \text{ stąd } a = \frac{3}{4}$$

24. $4x - 3y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + 2$,
czyli $a_1 = \frac{4}{3}$
 $3x + 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow$
 $y = -\frac{3}{4}x + 2$, czyli $a_2 = -\frac{3}{4}$
 $a_1 \cdot a_2 = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1$,
czyli proste, w których zawarte są boki trójkąta są prostopadłe. Zatem trójkąt ten jest prostokątny. Współrzędne wierzchołków: $(0, 2)$, $(3, 6)$, $(4, -1)$.

25. a) $x = -1$, $y = -3$

b) $x = \frac{4}{3}$, $y = 0$

26. a) $x = 4$, $y = -1$

b) $x = -1$, $y = -2$

27. x – cyfra dziesiątek
 y – cyfra jedności

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10y + x = 27 + 10x + y \end{cases}$$

$x = 3$, $y = 6$

Szukana liczba to 36.

28. n – wiek ojca

k – wiek syna

$$\begin{cases} n = 3k \\ n - 12 = 9(k - 12) \end{cases}$$

$n = 48$, $k = 16$

Ojciec ma 48 lat, syn ma 16 lat.

29. 140 zł

30. $f(x) = 100 + 0,2x$, 1000 km

31. x – liczba kilometrów od miasta A do punktu spotkania
 v_A, v_B – średnie prędkości samochodów

$$\begin{cases} \frac{x}{v_A} = \frac{(300-x)}{v_B} \\ v_A = \frac{300-x}{3} \\ v_B = \frac{x}{1\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\frac{3x}{300-x} = \frac{\frac{4}{3}(300-x)}{x}$$

$x = 120$ km

Zatem $v_A = 60$ km/h,

$v_B = 90$ km/h.

24. Boki trójkąta są zawarte w prostych $4x - 3y + 6 = 0$, $3x + 4y - 8 = 0$ oraz $7x + y - 27 = 0$. Uzasadnij, że trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz współrzędne jego wierzchołków.

25. Rozwiąż algebraicznie układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x-y-2}{2} - \frac{x+y}{4} = 1 \\ \frac{2x+y-1}{3} - \frac{x+y}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{y+6}{3} + \frac{x}{4} = 5 - 2x \\ \frac{2y-3x}{4} = \frac{2}{3}y - 1 \end{cases}$$

26. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} 0,2y = 0,4 - 0,15x \\ 0,4y = 0,1x - 0,8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 0,25y = x + 0,5 \\ 0,2y = -0,2x - 0,6 \end{cases}$$

27. W pewnej liczbie dwucyfrowej suma cyfr wynosi 9. Jeżeli przestawimy cyfry, to otrzymamy liczbę o 27 większą. Jaka to liczba?

28. Ojciec jest trzy razy starszy od syna. Przed dwunastu laty ojciec był dziewięć razy starszy od syna. Ile lat ma ojciec, a ile syn?

29. Koszt (w złotych) wypożyczenia samochodu na jeden dzień opisuje funkcja $f(x) = 40 + 0,2x$, gdzie 40 zł jest opłatą stałą, 0,2 zł – opłatą za każdy przejechany kilometr, a x – liczbą przejechanych kilometrów. Oblicz koszt wypożyczenia samochodu, zakładając, że przejechał on 500 km.

30. Koszt wypożyczenia samochodu na 3 dni składa się z opłaty stałej 100 zł oraz opłaty 0,2 zł za każdy przejechany kilometr. Podaj wzór funkcji opisującej koszt wypożyczenia samochodu w zależności od liczby przejechanych kilometrów. Naskicuj wykres tej funkcji. Ile maksymalnie kilometrów można przejechać, aby koszt wypożyczenia samochodu na 3 dni nie przekroczył 300 zł?

31. Z miast A i B , oddalonych od siebie o 300 km, wyjechały równocześnie naprzeciw siebie dwa samochody. Pierwszy z nich dotarł do miasta B po 3 godzinach od momentu, kiedy się minęły, natomiast drugi dotarł do miasta A po godzinie i 20 minutach od tego momentu. Oblicz średnie prędkości obu samochodów.

32. Inwestor za kwotę K złotych zakupił akcje dwóch firm: A i B . Po roku zysk ze sprzedaży akcji wyniósł 7%, w tym zysk ze sprzedaży akcji firmy A – 4%, a firmy B – 8%. Jaki procent zainwestowanej kwoty wydał inwestor na akcje firmy A , a jaki – na akcje firmy B ?

32. x – kwota wydana na akcje firmy A

y – kwota wydana na akcje firmy B

$$\begin{cases} x + y = K \\ 1,04x + 1,08y = 1,07K \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0,25K \\ y = 0,75K \end{cases}$$

Zatem wydano 25% kwoty na akcje firmy A i 75% kwoty na akcje firmy B .

■ Zestaw III – podsumowujący

33. Wykresem funkcji liniowej f jest prosta przechodząca przez punkt $A(-2, 3)$. Funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów mniejszych od 2 oraz ujemne dla argumentów większych od 2. Wyznacz wzór tej funkcji.
34. Funkcja liniowa f przyjmuje wartości ujemne dla argumentów większych od -2 oraz dodatnie dla argumentów mniejszych od -2 . Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 0; 3 \rangle$ jest równa -12 . Wyznacz wzór tej funkcji.
35. Funkcja $f(x) = m(m-3)x + 8m - 8$ przyjmuje wartości dodatnie tylko dla argumentów większych od 4. Oblicz m .
36. Wykresy funkcji $f(x) = -ax + b$ oraz $g(x) = (b-2)x + a$ przecinają się w punkcie $P(1, 4)$. Wyznacz miejsce zerowe tej spośród tych dwóch funkcji, która jest rosnąca.

Proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są:

- równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$,
- prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

37. Dla jakich wartości m proste p_1 i p_2 są równoległe, a dla jakich – prostopadłe?

- a) $p_1: mx + 4y - 3 = 0$, $p_2: 2x - 3y - 11 = 0$
 b) $p_1: (1-m)x - 3y - 4 = 0$, $p_2: 4x + 2y - 21 = 0$
 c) $p_1: mx - 2y - 5 = 0$, $p_2: 2x + (m-4)y - 3 = 0$

38. Rozwiąż układ równań.

- a) $\begin{cases} 2(x+y) - 3(x-y) = 27 \\ 3(x+y) + (x-y) = -20 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{3(y-x)}{4} - \frac{2x-y}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{2x-y}{2} - \frac{y-x}{3} = \frac{1}{6} \end{cases}$
 b) $\begin{cases} (2x+y) - 6(x+2y) = 3 \\ (x+2y) + 2(2x+y) = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{3x-y}{2} - \frac{1-y}{3} = 0 \\ \frac{x-y}{2} + \frac{3x+y}{4} = 5 \end{cases}$

39. Rozwiąż układ równań.

- a) $\begin{cases} (2x-1)^2 + 3(x-3y) = (2x-1)(2x+1) \\ 15x - 5y = 16 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} (x+4)^2 - (y-1)^2 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) + (4-y)(4+y) \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

38. a) $x = -7$, $y = 4$
 b) $x = 2$, $y = -1$
 c) $x = 2$, $y = 3$
 d) $x = -4\frac{1}{2}$, $y = -42\frac{1}{2}$
 39. a) $x = 1,1$, $y = 0,1$
 b) $x = -3$, $y = 11$

33. Punkty, przez które przechodzi wykres funkcji:

$(-2, 3)$ oraz $(2, 0)$

Współczynnik kierunkowy:

$$a = \frac{3-0}{-2-2} = -\frac{3}{4},$$

czyli $y = -\frac{3}{4}x + b$

Podstawiamy współrzędne punktu $(2, 0)$:

$$0 = -\frac{3}{4} \cdot 2 + b, \text{ stąd } b = \frac{3}{2}$$

Zatem $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$.

34. Funkcja jest malejąca, więc jej wykres przechodzi przez punkty $(-2, 0)$ oraz $(0, -12)$.

Współczynnik kierunkowy:

$$a = \frac{0+12}{-2-0} = -6,$$

czyli $y = -6x + b$

Podstawiamy współrzędne punktu $(-2, 0)$:

$$0 = -6 \cdot (-2) + b,$$

stąd $b = -12$

Zatem $y = -6x - 12$.

35. $m(m-3) \cdot 4 + 8m - 8 = 0$,

czyli $m = -1$ lub $m = 2$

Funkcja f jest rosnąca.

Dla $m = -1$:

$$a = -1(-1-3) = 4$$

Dla $m = 2$:

$$a = 2(2-3) = -2$$

Zatem $m = -1$.

36. $\begin{cases} 4 = -a + b \\ 4 = b - 2 + a \end{cases}$

czyli $a = 1$, $b = 5$

Rosnąca jest funkcja

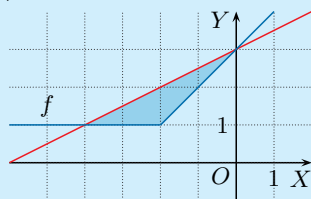
$g(x) = 3x + 1$, jej miejsce zerowe: $x = -\frac{1}{3}$.

37. a) równoległe dla $m = -\frac{8}{3}$,
 prostopadłe dla $m = 6$

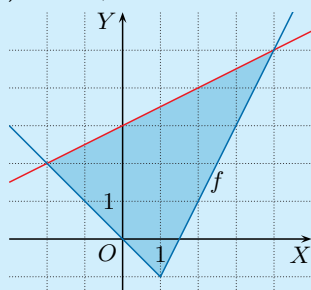
b) równoległe dla $m = 7$,
 prostopadłe dla $m = -\frac{1}{2}$

c) równoległe dla $m = 2$,
 nie ma m , dla którego są prostopadłe

40. a) $P = 2$



b) $P = 13,5$



41. a) $p = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$4m + 1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$m = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Funkcja jest rosnąca.

$$b) p = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$$

$$4m + 1 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{3}{8} < 0$$

Funkcja jest malejąca.

$$c) p = 4(\sqrt{2} - 1)$$

$$4m + 1 = 4(\sqrt{2} - 1)$$

$$m = \sqrt{2} - \frac{5}{4} > 0$$

Funkcja jest rosnąca.

$$d) p = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$4m + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{3}{8} < 0$$

Funkcja jest malejąca.

42. a) Przecinają się.

$$f(x) \geq g(x) \text{ dla } x \geq 6$$

b) Przecinają się.

$$f(x) \geq g(x) \text{ dla } x \geq -10,2$$

40. Oblicz pole trójkąta ograniczonego prostą $y = \frac{1}{2}x + 3$ i wykresem funkcji f .

$$a) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x + 3 & \text{dla } x \in (-2; \infty) \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 2x - 3 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$$

41. Wykres funkcji liniowej $f(x) = mx + 4m + 1$ przecina oś OY w punkcie $P(0, p)$. Określ monotoniczność funkcji f , jeżeli wiadomo, że współrzędna p spełnia podany warunek.

$$a) \sqrt{2}p - 2 = \sqrt{2} - 1$$

$$c) \sqrt{2}p + p = 4$$

$$b) 2 - 2\sqrt{3}p = \sqrt{3}$$

$$d) \sqrt{3}p - 2 = p - \sqrt{3}$$

42. Zbadaj wzajemne położenie wykresów funkcji f i g . Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nie mniejsze niż funkcja g ?

$$a) f(x) = \frac{3}{2}x - 7, \quad g(x) = -\frac{7}{6}x + 9$$

$$b) f(x) = \frac{x+2}{3} - \frac{x-3}{4}, \quad g(x) = \frac{x+6}{9} - \frac{x+4}{6}$$

43. Dla jakich wartości a miejscem zerowym funkcji f jest liczba większa od 0?

$$a) f(x) = 2(x+1) - (3+ax)$$

$$b) f(x) = (a+1)x - a(x-2) + 4$$

44. Dana jest funkcja liniowa $f(x) = (m^2 - 9)x + 4$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Funkcja f jest funkcją malejącą dla siedmiu różnych wartości całkowitych m .	P	F
2.	Funkcja f jest funkcją stałą jedynie dla $m = 3$.	P	F

45. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = ax + b$ oraz $g(x) = cx + d$. Wskaż dwa zdania prawdziwe.

$$A. a \cdot b < 0$$

$$E. f(0) \cdot g(0) > 0$$

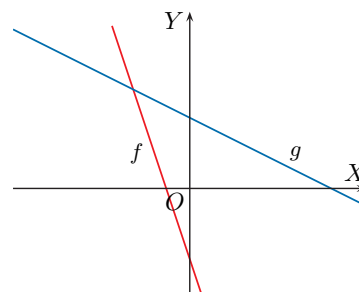
$$B. a > c$$

$$F. f(13) < b$$

$$C. c \cdot d < 0$$

$$G. g(-2) < c$$

$$D. b - d > 0$$



43. a) $f(x) = 0$ dla $x = \frac{1}{2-a}$

$$\frac{1}{2-a} > 0, \text{ czyli } a < 2$$

b) $f(x) = 0$ dla $x = -2a - 4$

$$-2a - 4 > 0, \text{ czyli } a < -2$$

44. 1. F, 2. F

45. C, F

5.5. Funkcja kwadratowa

Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$ określoną dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$ oraz $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową** lub **trójmianem kwadratowym**.

Wykres funkcji kwadratowej nazywamy **parabolą**.

Znak współczynnika a decyduje o tym, czy ramiona paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$ są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$).

Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego nazywamy liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$.

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$

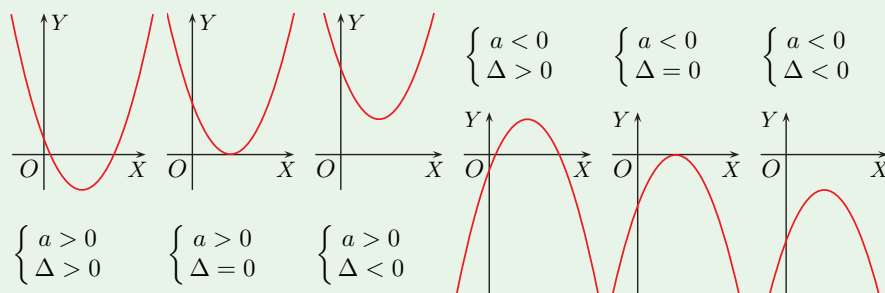
- Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa różne miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = \frac{-b}{2a}$ (nazywamy je pierwiastkiem podwójnym).

- Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych.

Położenie wykresu funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ względem osi OX



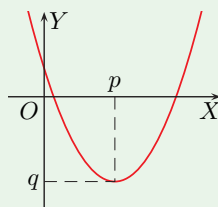
Wzór funkcji kwadratowej

- Postać **ogólna**: $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$

- Postać **kanoniczna**: $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$

Punkt o współrzędnych (p, q) jest wierzchołkiem paraboli oraz:

$$p = -\frac{b}{2a} \quad \text{ i } \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

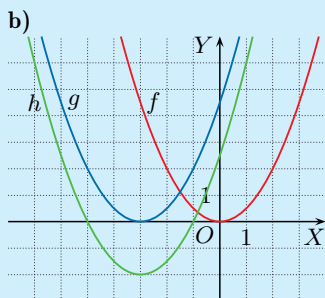
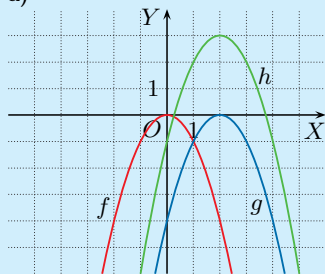


- Postać **iloczynowa**:

- jeśli $\Delta > 0$, to $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1 i x_2 są miejscami zerowymi;
- jeśli $\Delta = 0$, to $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest miejscem zerowym;
- jeśli $\Delta < 0$, to nie istnieje postać iloczynowa.

1. a) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$
 b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$
 c) $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$
2. a) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$
 b) $g(x) = -2x^2 + 2x + 2$
 c) $g(x) = 0,4x^2 + 1,2x + 0,7$

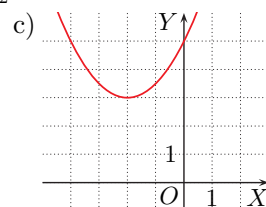
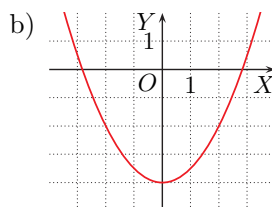
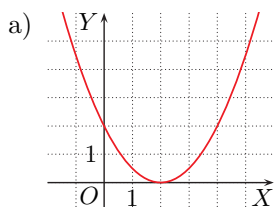
3. a)



4. a) $f(x) = (x+4)^2$, $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$
 b) $f(x) = (x-2)^2 - 4$, $f(D) = \langle -4; \infty \rangle$
 c) $f(x) = -(x+3)^2 + 4$, $f(D) = (-\infty; 4]$
 d) $f(x) = -2(x-1)^2$, $f(D) = (-\infty; 0]$
5. a) $b = c = 0$, $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$
 b) $b = 2$, $c = 1$, $f(D) = \langle 0; \infty \rangle$
 c) $b = 0$, $c = -1$, $f(D) = \langle -1; \infty \rangle$
 d) $b = -2$, $c = 5$, $f(D) = \langle 4; \infty \rangle$
 e) $b = -4$, $c = 7$, $f(D) = \langle 3; \infty \rangle$
 f) $b = 2$, $c = 5$, $f(D) = \langle 4; \infty \rangle$
 g) $b = -8$, $c = 17$, $f(D) = \langle 1; \infty \rangle$
 h) $b = 2$, $c = 0$, $f(D) = \langle -1; \infty \rangle$

■ Zestaw I – wprowadzający

1. Podaj równanie paraboli przedstawionej na rysunku, jeżeli wiadomo, że powstała ona w wyniku przesunięcia paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$.



2. Zapisz wzór funkcji g , której wykres otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji:

- a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ o 4 jednostki w prawo,
- b) $f(x) = -2x^2$ o 0,5 jednostki w prawo i 2,5 jednostki w górę,
- c) $f(x) = 0,4x^2$ o 1,5 jednostki w lewo i 0,2 jednostki w dół.

3. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f , g i h .

- a) $f(x) = -x^2$, $g(x) = -(x-2)^2$, $h(x) = -(x-2)^2 + 3$
- b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$, $h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$

4. Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Naszkicuj wykres tej funkcji i odczytaj z niego jej zbiór wartości.

- a) $f(x) = x^2 + 8x + 16$
- b) $f(x) = x^2 - 4x$
- c) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$
- d) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$

5. Wykresem funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie W . Oblicz współczynniki b i c oraz podaj zbiór wartości funkcji f .

- a) $W(0,0)$
- b) $W(-1,0)$
- c) $W(0,-1)$
- d) $W(1,4)$
- e) $W(2,3)$
- f) $W(-1,4)$
- g) $W(4,1)$
- h) $W(-1,-1)$

6. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

- a) $f(x) = x^2 + 4\sqrt{2}x - 2$
- b) $f(x) = -10x^2 + 200x + 3000$

7. Podany przedział jest zbiorem wartości funkcji $f(x) = x^2 + bx + 1$. Oblicz współczynnik b .

- a) $\langle -3; \infty \rangle$
- b) $\langle 0; \infty \rangle$
- c) $\langle -8; \infty \rangle$

8. Sprawdź, czy równanie ma rozwiązanie.

- a) $x^2 - 3x + \sqrt{5} = 0$
- b) $x^2 + 4x + 3\sqrt{2} = 0$
- c) $2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 0$

6. a) maleje w $(-\infty; -2\sqrt{2})$, rośnie w $\langle -2\sqrt{2}; \infty \rangle$
 b) maleje w $(10; \infty)$, rośnie w $(-\infty; 10)$

7. $y_w = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

a) $-\frac{b^2 - 4}{4} = -3$, czyli $b = -4$ lub $b = 4$

b) $-\frac{b^2 - 4}{4} = 0$, czyli $b = -2$ lub $b = 2$

c) $-\frac{b^2 - 4}{4} = -8$, czyli $b = -6$ lub $b = 6$

8. a) ma b) nie ma c) ma

9. Rozwiąż równanie.

- a) $x(2x + 1) = 0$ c) $25x^2 - 1 = 0$ e) $x^2 - 6x + 9 = 0$
b) $3x^2 - 6x = 0$ d) $x^2 - 3 = 0$ f) $16x^2 + 8x + 1 = 0$

10. Rozwiąż równanie.

- a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ e) $6x^2 + 4x - 2 = 3x^2 + 3$
b) $3x^2 - 3x - 1 = 0$ f) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$
c) $(x - 4)^2 = 36$ g) $(x - 3)(x - 2) = (3 - x)(x + 2)$
d) $(2x + 1)^2 = 16x^2$ h) $1 - 6x + 9x^2 = (1 - 3x)(1 + 3x)$

11. Wyznacz pierwiastki trójkianu i przedstaw go w postaci iloczynowej.

- a) $y = 6x^2 + x - 1$ c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{7}{2}$ e) $y = -9x^2 + 1$
b) $y = 2x^2 - 5x + 2$ d) $y = x^2 + \sqrt{2}x - 4$ f) $y = 4x^2 + 9$

12. Przedstaw trójkian w postaci iloczynowej.

- a) $y = -x^2 + 14x - 49$ c) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$
b) $y = -4x^2 - 12x - 9$ d) $y = \frac{4}{3}x^2 - 4x + 3$

13. Przedstaw trójkian w postaci iloczynowej. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych i wyznacz jej wierzchołek. Naskicuj tę parabolę.

- a) $y = x^2 - 6x + 5$ c) $y = 2x^2 + 2x$
b) $y = -x^2 - 4x - 3$ d) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{2}$

14. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f i zapisz jej wzór w postaci iloczynowej (o ile jest to możliwe). Naskicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego, dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie, a dla jakich – ujemne.

- a) $f(x) = x^2 + 2x - 24$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$
b) $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ e) $f(x) = x^2 - 6x + 9$
c) $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$ f) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$

15. Rozwiąż nierówność.

- a) $2x^2 + x \leq 0$ d) $x^2 - x + 8 > 2$ g) $\frac{3}{2}x + 2 \geq x^2$
b) $(x + 7)^2 > 0$ e) $(x + 2)(x - 3) < 6$ h) $3x^2 + 1 > 2x$
c) $(2x + 3)^2 \leq 0$ f) $(3 - 2x)(3 + 2x) \geq 1$ i) $3x - 5x^2 > 4$

16. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające podaną nierówność.

- a) $x^2 \leq 16$ b) $9 - x^2 > 0$ c) $x^2 < 4x$ d) $16 + x^2 \leq 8x$

14. a) $f(x) = (x - 4)(x + 6)$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -6) \cup (4; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-6; 4)$
b) $f(x) = -(x - 4)(x + 1)$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-1; 4)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (4; \infty)$
c) $f(x) = 3(x - 1)(x - 3)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (1; 3)$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$
d) $f(x) = \frac{1}{2}x(x + 4)$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-4; 0)$

- e) $f(x) = (x - 3)^2$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
wartości ujemnych nie przyjmuje
f) $f(x) = -2(x - 1)^2$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,
wartości dodatnich nie przyjmuje
16. a) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$
b) $-2, -1, 0, 1, 2$
c) $1, 2, 3$ d) 4

9. a) $x = -\frac{1}{2}, x = 0$

b) $x = 0, x = 2$

c) $x = -\frac{1}{5}, x = \frac{1}{5}$

d) $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$

e) $x = 3$ f) $x = -\frac{1}{4}$

10. a) $x = \frac{1}{2}, x = 1$

b) $x = \frac{3-\sqrt{21}}{6}, x = \frac{3+\sqrt{21}}{6}$

c) $x = -2, x = 10$

d) $x = -\frac{1}{6}, x = \frac{1}{2}$

e) $x = \frac{-2-\sqrt{19}}{3}, x = \frac{-2+\sqrt{19}}{3}$

f) $x = \frac{1-\sqrt{21}}{10}, x = \frac{1+\sqrt{21}}{10}$

g) $x = 0, x = 3$

h) $x = 0, x = \frac{1}{3}$

11. a) $y = 6(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$

b) $y = 2(x - 2)(x - \frac{1}{2})$

c) $y = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 7)$

d) $y = (x + 2\sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

e) $y = -9(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})$

f) nie ma postaci iloczynowej

12. a) $y = -(x - 7)^2$

b) $y = -4(x + \frac{3}{2})^2$

c) $y = \frac{1}{4}(x + 4)^2$

d) $y = \frac{4}{3}(x - \frac{3}{2})^2$

13. a) $y = (x - 1)(x - 5)$,

$P_1(1, 0), P_2(5, 0), P_3(0, 5),$
 $W(3, -4)$

b) $y = -(x + 3)(x + 1)$,

$P_1(-3, 0), P_2(-1, 0),$

$P_3(0, -3), W(-2, 1)$

c) $y = 2x(x + 1), P_1(-1, 0),$

$P_2(0, 0), W(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

d) $y = -\frac{1}{2}(x + 5)(x + 1),$

$P_1(-5, 0), P_2(-1, 0),$

$P_3(0, -\frac{5}{2}), W(-3, 2)$

15. a) $x \in \langle -\frac{1}{2}; 0 \rangle$

b) $x \in (-\infty; -7) \cup (7; \infty)$

c) $x = -\frac{3}{2}$ d) $x \in \mathbf{R}$

e) $x \in (-3; 4)$

f) $x \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$

g) $x \in \langle \frac{3-\sqrt{41}}{4}; \frac{3+\sqrt{41}}{4} \rangle$

h) $x \in \mathbf{R}$ i) sprzeczna

17. a) $g(x) = (x+1-2)^2 + 1 - 1 = (x-1)^2$
 Zbiór wartości: $g(D) = \langle 0; \infty \rangle$
 Oś symetrii: $x = 1$
 b) $g(x) = 1 - (x-2)^2 - 1 = -(x-2)^2$
 Zbiór wartości:
 $g(D) = (-\infty; 0]$
 Oś symetrii: $x = 2$
 c) $g(x) = 1 - (2-x-2)^2 + -1 = -x^2$
 Zbiór wartości:
 $g(D) = (-\infty; 0]$
 Oś symetrii: $x = 0$
18. a) $-5, 1$ b) $-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$
19. a) $y = -(x+1)(x-2) = -x^2 + x + 2$
 b) $y = (-x+1)(-x-2) = x^2 + x - 2$
20. a) $y = a(x-1)^2 + q$

$$\begin{cases} 0 = a(-1-1)^2 + q \\ 6 = a(0-1)^2 + q \\ a = -2 \\ q = 8 \end{cases}$$

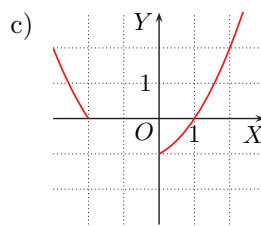
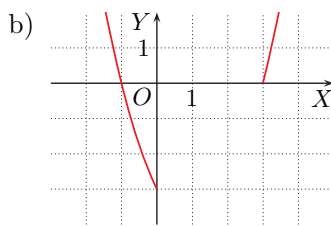
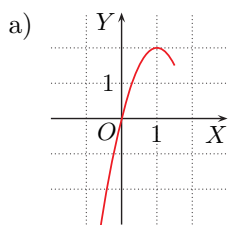
 $f(x) = -2(x-1)^2 + 8,$
 $W(1, 8)$
 b) $f(x) = 2(x-1)^2 - 2,$
 $W(1, -2)$
21. a) $(-2, -1), (1, 2)$
 b) $(-1, 2), (2, -1)$
 c) $(-3, -6), (1, 2)$
 d) $(-2, -1), (0, 3)$
 e) $(-2, -1), (3, -6)$
 f) $(2, -1), (1, 2)$
22. a) $(2\frac{1}{2}, -14), (-\frac{1}{3}, 3)$
 b) brak punktów wspólnych
23. a) $x \in \langle -1; 2 \rangle$
 b) $x = -1$ c) $x \in \mathbf{R}$
24. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$
 b) $D = \langle -\frac{3}{2}; \frac{2}{3} \rangle$
 c) $D = (-\infty; 3) \cup (5; \infty)$

■ Zestaw II – ćwiczeniowy

17. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = (x-2)^2 + 1$. Wyznacz zbiór wartości funkcji g oraz równanie osi symetrii jej wykresu.
 a) $g(x) = f(x+1) - 1$ b) $g(x) = 1 - f(x)$ c) $g(x) = 1 - f(2-x)$
18. Wykres funkcji f jest symetryczny do wykresu funkcji g względem osi OY . Wyznacz miejsca zerowe funkcji f .
 a) $g(x) = 2(x-2)^2 - 18$ b) $g(x) = (3x-1)^2 - (x+2)^2$
19. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia paraboli o równaniu $y = (x+1)(x-2)$ przez:
 a) symetrię względem osi OX , b) symetrię względem osi OY .
20. Wykres funkcji kwadratowej f , do którego należą punkty A i B , jest osiowo-symetryczny względem prostej $x = 1$. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej oraz podaj współrzędne wierzchołka jej wykresu.
 a) $A(-1, 0), B(0, 6)$ b) $A(0, 0), B(3, 6)$
21. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych parabolę $y = -x^2 + 3$ oraz prostą k . Odczytaj współrzędne punktów przecięcia paraboli i prostej k .
 a) $k: y = x + 1$ c) $k: y = 2x$ e) $k: y = -x - 3$
 b) $k: y = -x + 1$ d) $k: y = 2x + 3$ f) $k: y = -3x + 5$
22. Wyznacz punkty wspólne paraboli i prostej.
 a) $y = -6x^2 + 7x + 6, y = 1 - 6x$ b) $y = 3x^2 - 2x + 7, y = 4x - 4$
23. Dane są funkcje $f(x) = 2x^2 - x + 3$ i $g(x) = x + 7$. Rozwiąż nierówność.
 a) $f(x) \leq g(x)$ b) $f(x) + x \cdot g(x) \leq 0$ c) $f(x) + g(x) > 0$
24. Wyznacz dziedzinę funkcji f .
 a) $f(x) = \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}$ b) $f(x) = \sqrt{6-5x-6x^2}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-8x+15}}$
25. Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.
 a) $A = \{x \in \mathbf{R}: x^2 - 4x + 1 \leq 0\}, B = \{x \in \mathbf{R}: 3x - x^2 \geq 0\}$
 b) $A = \{x \in \mathbf{R}: x^2 + 3x + 1 > 0\}, B = \{x \in \mathbf{R}: x^2 - 5x + 4 < 0\}$
26. Naszkicuj wykres funkcji f . Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.
 a) $f(x) = x^2 - 2x, \langle -1; 3 \rangle$ c) $f(x) = x^2 + 4x + 4, \langle -4; -3 \rangle$
 b) $f(x) = -x^2 - 2x, \langle 0; 2 \rangle$ d) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6, \langle 0; 3 \rangle$

25. a) $A = \langle 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3} \rangle, B = \langle 0; 3 \rangle$
 $A \cap B = \langle 2 - \sqrt{3}; 3 \rangle, A \setminus B = (3; 2 + \sqrt{3})$
 b) $A = \left(-\infty; -\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}; \infty\right), B = (1; 4)$
 $A \cap B = (1; 4), A \setminus B = \left(-\infty; -\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}; 1\right) \cup \langle 4; \infty \rangle$
26. a) $f_{\min} = -1, f_{\max} = 3$
 b) $f_{\min} = -8, f_{\max} = 0$
 c) $f_{\min} = 1, f_{\max} = 4$
 d) $f_{\min} = 0, f_{\max} = 8$

27. Dana jest funkcja $f(x) = a(x-7)(x+1)$, której najmniejsza wartość jest równa -4 . Oblicz współczynnik a oraz wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .
28. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, jeżeli wiadomo, że jej wykresem jest parabola o wierzchołku $W(1, 2)$ oraz:
- a) jednym z miejsc zerowych jest 0 , b) należy do niej punkt $A(3, 4)$.
29. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 5x + c$. Oblicz współczynnik c , jeśli:
- a) do wykresu funkcji f należy punkt $P(-2, 1)$,
b) funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe,
c) najmniejsza wartość funkcji f jest równa $-\frac{5}{4}$.
30. Oblicz współczynniki b i c trójkianu $y = x^2 + bx + c$, jeśli:
- a) trójkian ten ma dwa pierwiastki 2 i -5 ,
b) trójkian ten osiąga najmniejszą wartość równą 7 dla $x = -1$,
c) trójkian ten przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (-1; 4)$,
d) wykres tego trójkianu jest symetryczny względem prostej $x = 3$ i przecina oś OY w punkcie $(0, 5)$.
31. Wyznacz wszystkie wartości współczynnika c , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe.
- a) $f(x) = 2x^2 - 4x + c$ c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x - c$
b) $f(x) = -x^2 + 5x + c$ d) $f(x) = x^2 - x - c$
32. Wyznacz wszystkie wartości współczynnika b , dla których funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.
- a) $f(x) = x^2 + bx + 3$ b) $f(x) = x^2 + bx - 4$ c) $f(x) = 2x^2 + bx$
33. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f . Podaj jej miejsca zerowe oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 0$. Wyznacz zbiór wartości funkcji f , przedziały monotoniczności oraz zapisz jej wzór w postaci iloczynowej i kanonicznej.



33. a) $f(x) = -2x(x-2) = -2(x-1)^2 + 2$,
 $f(D) = (-\infty; 2)$, $f(0) = f(2) = 0$,
 f maleje w $\langle 1; \infty \rangle$, rośnie w $(-\infty; 1)$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 2; \infty \rangle$
- b) $f(x) = (x+1)(x-3) = (x-1)^2 - 4$,
 $f(D) = \langle -4; \infty \rangle$, $f(-1) = f(3) = 0$,
 f maleje w $(-\infty; 1)$, rośnie w $\langle 1; \infty \rangle$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -1; 3 \rangle$
- c) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1) = \frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{8}$,
 $f(D) = \langle -\frac{9}{8}; \infty \rangle$, $f(-2) = f(1) = 0$,
 f maleje w $(-\infty; -\frac{1}{2})$, rośnie w $\langle -\frac{1}{2}; \infty \rangle$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -2; 1 \rangle$

27. $x_w = \frac{7-1}{2} = 3$, czyli wierzchołek ma współrzędne $(3, -4)$
 $-4 = a(3-7)(3+1)$, czyli
 $a = \frac{1}{4}$
28. $y = a(x-1)^2 + 2$
a) $0 = a + 2$, czyli $a = -2$
 $y = -2(x-1)^2 + 2 = -2x^2 + 4x$
b) $4 = 4a + 2$, czyli $a = \frac{1}{2}$
 $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2 = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$
29. a) $1 = 4 - 10 + c$, czyli $c = 7$
b) $\Delta = 25 - 4c = 0$,
czyli $c = \frac{25}{4}$
c) $y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{25-4c}{4} = -\frac{5}{4}$, czyli $c = 5$
30. a) $y = (x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10$
 $b = 3$, $c = -10$
b) $y = (x+1)^2 + 7 = x^2 + 2x + 8$
 $b = 2$, $c = 8$
c) $y = (x+1)(x-4) = x^2 - 3x - 4$
 $b = -3$, $c = -4$
d) $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = 3$
 $b = -6$, $c = 5$
31. a) $c < 2$ b) $c > -\frac{25}{4}$
c) $c > -36$ d) $c > -\frac{1}{4}$
32. a) $b = -2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$
b) Nie ma takich wartości.
c) $b = 0$

34. Prosta $y = m$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą, gdy $y_w = m$.

a) $m = -4$ b) $m = 4$

c) $m = -\frac{53}{4}$

35. a) 2 b) 0 c) 2 d) 1

36. a) $(-4, 0), (-1, 3)$

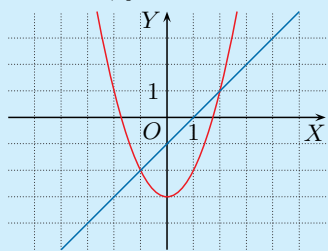
b) $(0, -3), (3, 0)$

37. a) $(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}), (4, 0)$

b) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (4; \infty)$

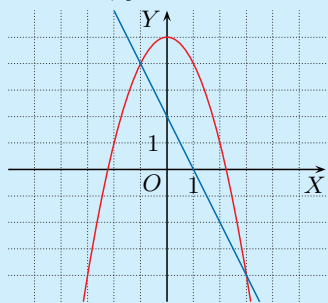
38. a) $x = -1, y = -2$

lub $x = 2, y = 1$



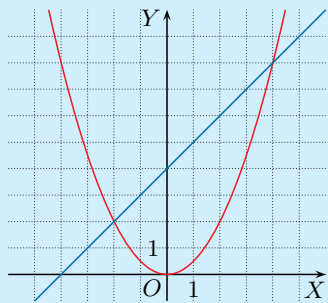
b) $x = -1, y = 4$

lub $x = 3, y = -4$



c) $x = 4, y = 8$

lub $x = -2, y = 2$



39. a) $x = -4, y = -3$
lub $x = -1, y = -6$

b) $x = 1, y = 3$
lub $x = 4, y = 0$

c) $x = 4, y = -1$
lub $x = 6, y = 1$

■ Zestaw III – podsumowujący

34. Prosta o równaniu $y = m$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z podaną parabolą. Oblicz m .

a) $y = x^2 - 4$

b) $y = -x^2 + 4x$

c) $y = x^2 + 5x - 7$

35. Określ liczbę punktów wspólnych prostej l i paraboli będącej wykresem funkcji f .

a) $l: y = 3, f(x) = -x^2 + 4$

c) $l: y = -5, f(x) = x^2 - 6x + 2$

b) $l: y = 4, f(x) = 2x^2 + 6$

d) $l: y = -20, f(x) = x^2 + 8x - 4$

36. Naskicuj prostą l i parabolę będącą wykresem funkcji f . Odczytaj współrzędne punktów wspólnych prostej i paraboli.

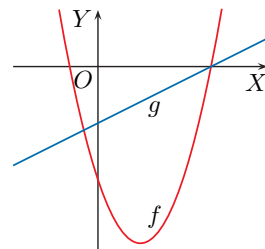
a) $l: y = x + 4, f(x) = -x^2 - 4x$

b) $l: y = x - 3, f(x) = x^2 - 2x - 3$

37. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 3x - 4$ i $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

- a) Wyznacz punkty wspólne tych wykresów.

- b) Dla jakich argumentów x funkcja f przyjmuje wartości większe niż funkcja g ?



38. Rozwiąż graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = x - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -x^2 + 5 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = x + 4 \end{cases}$

39. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 4x - 3 \\ x + y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ x + y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$

40. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

c) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$

e) $x^4 + 20 = 9x^2$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

d) $2x^4 + 7x^2 - 4 = 0$

f) $x^4 + x^2 = 12$

41. Rozwiąż równanie.

a) $(x - 1)^4 - 8(x - 1)^2 + 15 = 0$

c) $(x + 2)^4 - 6(x + 2)^2 + 8 = 0$

b) $(x - 3)^4 - 3(x - 3)^2 - 18 = 0$

d) $(x + 5)^4 + 5(x + 5)^2 - 6 = 0$

42. Kwadratowy trawnik o powierzchni 144 m^2 powiększono w ten sposób, że jeden bok wydłużono o $x \text{ m}$, a drugi – o $2x \text{ m}$ i otrzymano trawnik o powierzchni $202,5 \text{ m}^2$. Oblicz x .

40. a) $x = -2, x = 2$

b) $x = -3, x = 3$

c) $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$

d) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $x = -\sqrt{5}, x = -2, x = 2, x = \sqrt{5}$

f) $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$

41. a) $x = 1 - \sqrt{5}, x = 1 - \sqrt{3}, x = 1 + \sqrt{3}, x = 1 + \sqrt{5}$

b) $x = 3 - \sqrt{6}, x = 3 + \sqrt{6}$

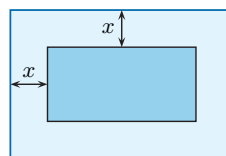
c) $x = -4, x = -2 - \sqrt{2}, x = -2 + \sqrt{2}, x = 0$

d) $x = -6, x = -4$

42. $(12 + x)(12 + 2x) = 202,5$, gdzie $x > 0$
 $x = 1,5$

43. Znajdź dwie liczby, których suma jest równa 3 oraz:

- a) suma ich kwadratów jest równa 65,
b) różnica ich kwadratów jest równa 33.



44. Wokół basenu o wymiarach $9 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ wyłożono kafelkami pas szerokości x . Jaka jest szerokość tego pasa, jeśli wiadomo, że zużyto 68 m^2 kafelków?

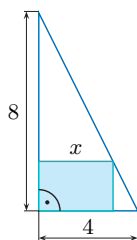
45. Wyznacz najmniejszą wartość sumy kwadratów liczb x i y , jeśli:

- a) $x + y = 3$, b) $x - y = 6$, c) $2x - y = 0$.

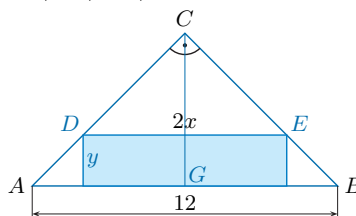
46. Drut o długości 68 cm dzielimy na dwie części – z jednej tworzymy ramkę kwadratową, a z drugiej – prostokątną. Stosunek długości boków ramki prostokątnej wynosi $3:1$. Na części jakiej długości należy rozciąć drut, aby suma pól powierzchni ograniczonych przez ramki była najmniejsza?

47. Przedstaw pole P prostokąta (rysunek poniżej) jako funkcję zmiennej x . Podaj dziedzinę tej funkcji i naszkicuj jej wykres. Dla jakiego argumentu pole jest największe? Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu.

a)



b) $|AC'| = |BC'|$



48. Obwód prostokąta jest równy 24 cm . Jakie powinny być długości jego boków, aby walec, który powstanie przez obrót tego prostokąta wokół jednego z boków, miał jak największe pole powierzchni bocznej?

49. Punkt porusza się wzdłuż osi OX , a jego położenie w chwili t dane jest wzorem $x(t) = 4t^2 + t$, gdzie x wyrażone jest w metrach, a t – w sekundach. Oblicz średnią prędkość punktu od chwili t_1 do chwili t_2 .

- a) $t_1 = 0 \text{ s}$, $t_2 = 1 \text{ s}$ b) $t_1 = 1 \text{ s}$, $t_2 = 2 \text{ s}$ c) $t_1 = 0 \text{ s}$, $t_2 = 2 \text{ s}$

50. Rowerzysta przejechał z miasta A do miasta B odległego od A o 54 km . Wzór $s(t) = 36t - 6t^2$ opisuje długość s (w kilometrach) drogi pokonanej przez rowerzystę po t godzinach jazdy.

- a) Oblicz, ile czasu jechał rowerzysta.
b) Oblicz średnie prędkości rowerzysty w pierwszej i w drugiej godzinie jazdy oraz na całej trasie (w km/h).

47. a) $P(x) = 2x(4 - x)$, $D_P = (0; 4)$, największe pole dla $x = 2$, wymiary prostokąta: 2×4

b) $|AC'| = |BC'| = 6\sqrt{2}$ oraz $|CG| = 6$

Z podobieństwa trójkątów ABC i DEC : $\frac{2x}{12} = \frac{6-y}{6}$, czyli $y = 6 - x$, gdzie $x \in (0; 6)$

Zatem pole prostokąta opisuje funkcja $P(x) = 2x \cdot (6 - x) = -2x^2 + 12x$.

Funkcja P przyjmuje największą wartość dla $x_w = \frac{-12}{-4} = 3$. Wtedy $y = 6 - 3 = 3$.

Zatem prostokąt o największym polu ma wymiary 6×3 .

43. a) $x^2 + (3 - x)^2 = 65$

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

$$(x + 4)(x - 7) = 0$$

Szukane liczby to -4 i 7 .

b) $x^2 - (3 - x)^2 = 33$

$$6x = 42$$

$$x = 7$$

Szukane liczby to 7 i -4 .

44. $(4 + 2x)(9 + 2x) - 4 \cdot 9 = 68$,
gdzie $x > 0$

$$4x^2 + 26x - 68 = 0$$

$$x = -8,5 < 0 \text{ lub } x = 2$$

Zatem $x = 2 \text{ m}$.

45. a) $4,5$ b) 18 c) 0

46. Drut należy rozciąć na części długości $29\frac{1}{2} \text{ cm}$ i $38\frac{6}{7} \text{ cm}$, z krótszej części robimy ramkę kwadratową.

48. kwadrat o boku 6 cm

$$49. v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

$$x(0) = 0, x(1) = 5, x(2) = 18$$

$$a) v = \frac{5 - 0}{1 - 0} = 5 \text{ [m/s]}$$

$$b) v = \frac{18 - 5}{2 - 1} = 13 \text{ [m/s]}$$

$$c) v = \frac{18 - 0}{2 - 0} = 9 \text{ [m/s]}$$

50. a) $36t - 6t^2 = 54$, gdzie $t > 0$
 $t = 3 \text{ h}$

$$b) s(1) = 30, s(2) = 48,$$

$$s(3) = 54$$

Średnia prędkość w pierwszej godzinie:

$$v = \frac{30 - 0}{1 - 0} = 30 \text{ [km/h]}$$

Średnia prędkość w drugiej godzinie:

$$v = \frac{48 - 30}{2 - 1} = 18 \text{ [km/h]}$$

Średnia prędkość na całej trasie:

$$v = \frac{54 - 0}{3 - 0} = 18 \text{ [km/h]}$$

51. a) $5 + 50t - 5t^2 \geq 0$,
gdzie $t > 0$, $D = \langle 0; 5 + \sqrt{26} \rangle$
c) $5 + 50t - 5t^2 = 5$,
gdzie $t > 0$
 $t = 10$ s
d) $x_w = \frac{-50}{2(-5)} = 5$ s
e) $h(5) = 130$ m

51. Z wysokości 5 m wypuszczono z łuku pionowo do góry strzałę z prędkością początkową 50 m/s. Wysokość strzały nad ziemią (w metrach) można przybliżyć wzorem:

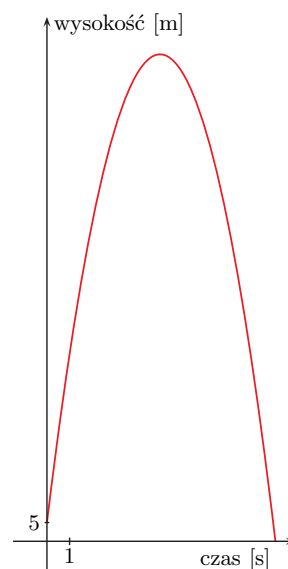
$$h(t) = 5 + 50t - 5t^2$$

gdzie t jest czasem lotu strzały (w sekundach).

- a) Określ dziedzinę funkcji h .
b) Przerysuj tabelę wartości funkcji h do zeszytu i ją uzupełnij.

t [s]	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h [m]	50	85	110	125	130	125	110	85	50

- c) Po ilu sekundach od momentu wypuszczenia z łuku strzała osiągnie wysokość, z której ją wypuszczono?
d) Po ilu sekundach od momentu wypuszczenia z łuku strzała osiągnie największą wysokość?
e) Na jaką największą wysokość doleci strzała?



52. C. 1

52. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = -2x^2 - bx + \frac{1}{4}$ dla każdej liczby rzeczywistej.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Funkcja f :

A.	nie ma miejsc zerowych,	ponieważ	1.	$b^2 + 2 > 0$.
B.	ma jedno miejsce zerowe,		2.	$b^2 + 2 = 0$.
C.	ma dwa miejsca zerowe,		3.	$b^2 + 2 < 0$.

53. 1. F, 2. P

53. Dane są funkcje $f(x) = 2x^2 - x + 3$ i $g(x) = x - 7$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Równanie $f(x) + g(x) = 0$ jest spełnione przez dwie liczby całkowite.	P	F
2.	Nierówność $f(x) + g(x) < 0$ jest spełniona przez trzy liczby całkowite.	P	F

5.6. Wielomiany

Funkcję zmiennej rzeczywistej x daną wzorem:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, nazywamy **wielomianem** stopnia n .

Funkcję w stałe równą zero nazywamy **wielomianem zerowym** ($w \equiv 0$) i jego stopnia nie określamy.

Liczby $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu, a współczynnik a_0 – **wyrazem wolnym**.

Każdy niezerowy wielomian można przedstawić jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.

Liczbę a nazywamy **pierwiastkiem** wielomianu w , jeśli $w(a) = 0$.

Twierdzenie o reszcie

Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$, to $r = w(a)$.

Twierdzenie Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

■ Zestaw I – wprowadzający

- Oblicz wartości wielomianu w dla $x = -2$, $x = 0$ i $x = 2$.
 - $w(x) = 3x^3 + 2x^2 - x - 6$
 - $w(x) = -2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{4}x + 2$
 - $w(x) = 0,25x^4 - 0,5x^2 + 2x - 1$
 - $w(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + x + 2$
- Które z punktów P , Q i R należą do wykresu wielomianu w ?
 - $w(x) = -4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, $P(1, -4)$, $Q(-1, 6)$, $R(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
 - $w(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6$, $P(-2, 8)$, $Q(\sqrt{2}, 9 - 4\sqrt{2})$, $R(-\sqrt{2}, 7 + 4\sqrt{2})$
- Oblicz $w(x_0, y_0)$.
 - $w(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^3 + 3x^2y - 4xy^2$, $x_0 = 2$, $y_0 = -3$
 - $w(x, y) = -2x^3y^3 - 2xy^3 + 2xy - 2$, $x_0 = -2$, $y_0 = \frac{1}{2}$
 - $w(x, y) = 16x^4y^2 - 8x^3y + 4y^3 + 1$, $x_0 = -\frac{1}{2}$, $y_0 = -\frac{1}{2}$

- $w(-2) = -20$, $w(0) = -6$, $w(2) = 24$
 - $w(-2) = 5\frac{1}{2}$, $w(0) = 2$, $w(2) = -25\frac{1}{2}$
 - $w(-2) = -3$, $w(0) = -1$, $w(2) = 5$
 - $w(-2) = -4$, $w(0) = 2$, $w(2) = 4$
- P , R
 - Q
- -162
 - $-\frac{3}{2}$
 - $\frac{1}{4}$

4. a) $a = 1$
 b) $a = -2$
 c) $a = -\frac{1}{4}$
5. a) $a = -9, b = 5$
 b) $a = \frac{1}{3}, b = -3$
 c) $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$
6. $a = 10, b = -2$
7. a) $a = -\frac{3}{2}$
 b) $a = 6, b = -4$
8. a) $k(x) = 3x^3 + x^2 - 1, \text{ st}(k) = 3$
 b) $k(x) = 3x^3 - 3x^2 + 1, \text{ st}(k) = 3$
 c) $k(x) = 6x^3 - 1, \text{ st}(k) = 3$
 d) $k(x) = 2x^2 - 3x, \text{ st}(k) = 2$
9. a) $a = -1, b = 6$
 b) $a = -3, b = 0$
 c) $a = -3, b = 1$
4. Oblicz współczynnik a wielomianu w .
 a) $w(x) = x^2 - ax + 2, w(2) = 4$
 b) $w(x) = x^3 - 2x^2 + a, w(0) = -2$
 c) $w(x) = ax^3 - 5x^2 + x, w(1) - w(-1) = \frac{3}{2}$
5. Oblicz współczynniki a i b wielomianu w .
 a) $w(x) = -2x^3 + 3x^2 + ax + b, w(0) = 5, w(1) = -3$
 b) $w(x) = ax^3 + x^2 + bx + 2, w(-3) = 11, w(2) = \frac{8}{3}$
 c) $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 10, w(2) = -w(1), w(-2) = 16$
6. Oblicz współczynniki a i b wielomianu $w(x) = ax^{100} + 5x^{50} - 10x^{25} + b$, jeżeli wiadomo, że $w(1) = 3$ i $w(0) = -2$.
7. a) Wyznacz współczynnik a wielomianu $w(x) = \sqrt{2}x^4 + ax^2 + 1 - \sqrt{2}$, jeżeli wiadomo, że $w(\sqrt{2}) - 4w(1) = 3\sqrt{2}$.
 a) Wielomian $w(x) = -2x^4 + ax^2 + 2x + b$ spełnia warunki $w(1) = -w(-1)$ oraz $w(\sqrt{2}) = -w(-\sqrt{2})$. Wyznacz współczynniki a i b .
8. Dane są wielomiany $w(x) = 2x^2 - 1$ i $u(x) = 3x^3 - x^2$. Wyznacz wielomian k i podaj jego stopień.
 a) $k(x) = u(x) + w(x)$ c) $k(x) = w(x) + 2u(x)$
 b) $k(x) = u(x) - w(x)$ d) $k(x) = 3x \cdot w(x) - 2u(x)$
9. Dla jakich wartości a i b wielomiany u i w mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach?
 a) $u(x) = 8x^3 - a, w(x) = (b + 2)x^3 + 1$
 b) $u(x) = x(x + a)^2 + b, w(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
 c) $u(x) = x(ax - b)^2 + b, w(x) = 9x^3 + 6x^2 + x + 1$
10. Dane są wielomiany $f(x) = x^2 - 2x, g(x) = x^2 - 3x + 1$ oraz $h(x) = 3 - x^3$. Wyznacz wielomian w i podaj jego stopień.
 a) $w(x) = f(x) \cdot g(x) + g(x) \cdot h(x)$
 b) $w(x) = [h(x)]^2 - f(x)$
 c) $w(x) = [f(x) - g(x)]^2 - h(x)$
11. Wyznacz wielomiany $f(x) = u(x) \cdot w(x)$ oraz $g(x) = 2w(x) - [u(x)]^2$.
 a) $u(x) = x^2 - 5x, w(x) = x^3 + x^2 + 2$
 b) $u(x) = 2x^3 - x^2 + 2, w(x) = -5x^4 + x^2 - 3$
 c) $u(x) = -2x^3 + 2x^2 - x + 1, w(x) = 4x^2 - x + 2$
10. a) $w(x) = -x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 11x + 3, \text{ st}(w) = 5$
 b) $w(x) = x^6 - 6x^3 - x^2 + 2x + 9, \text{ st}(w) = 6$
 c) $w(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2, \text{ st}(w) = 3$
11. a) $f(x) = x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 10x, g(x) = -x^4 + 12x^3 - 23x^2 + 4$
 b) $f(x) = -10x^7 + 5x^6 + 2x^5 - 11x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 6, g(x) = -4x^6 + 4x^5 - 11x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 10$
 c) $f(x) = -8x^5 + 10x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 3x + 2, g(x) = -4x^6 + 8x^5 - 8x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 3$

■ Zestaw II – ćwiczeniowy

12. Wyznacz wielomian $v(x, y) = u(x, y) - [w(x, y)]^2$. Oblicz wartość wielomianu v dla $x = 2$ i $y = \sqrt{2}$.

a) $u(x, y) = x^2y^2 - 3x^2y + 4$, $w(x, y) = xy^2 + 2xy$

b) $u(x, y) = \frac{1}{2}x^3y^2 + 2x^2y^2 - 4xy^3$, $w(x, y) = 2x - y^2 + xy$

13. Dla jakich wartości m i n wielomiany u i w mają takie same współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x ?

a) $u(x) = (x^2 + 5x - 1)(x^2 - x)$, $w(x) = mx^4 + nx^3 - 6x^2 + x$

b) $u(x) = (1 + x - x^3)(5x^3 + x + 5)$, $w(x) = 6x + 5 - x^2(mx^4 + nx^2 - 1)$

c) $u(x) = (x^4 - m + 1)(2x^3 - x)$, $w(x) = (mx^2 - n)(x^5 - x)$

14. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 9x^3 - x$ c) $w(x) = 12x^3 - 27x^5$ e) $w(x) = 5x^5 - 20x^3$

b) $w(x) = 50x^4 - 8x^2$ d) $w(x) = \frac{1}{8}x^6 - x^4$ f) $w(x) = x^5 - 125x^2$

15. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 10x^3 + 25x^2$ d) $w(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

b) $w(x) = 9x^4 + 6x^3 + x^2$ e) $w(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3$

c) $w(x) = 2x^5 + 4x^4 - 6x^3$ f) $w(x) = -5x^5 + 30x^4 - 45x^3$

16. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = (x^2 + x + 4)(x^2 + 6x - 7)$ c) $w(x) = (x^2 + 1)^2 - (x - 3)^2$

b) $w(x) = (3x^2 + 5x - 2)(3x^2 + 2x - 1)$ d) $w(x) = (2x^2 - x)^2 - (x - 4x^3)^2$

17. Rozłóż wielomian na czynniki. Skorzystaj z podanego wzoru.

a) $w(x) = x^5 - 1$

b) $w(x) = 32x^5 - 1$

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1)$$

18. Rozłóż wielomian w na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $w(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

d) $w(x) = 6x^3 - 9x^2 + 4x - 6$

b) $w(x) = x^5 + x^4 - x - 1$

e) $w(x) = 27x^3 - 9x^2 - 3x + 1$

c) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 5$

f) $w(x) = 4x^6 - 9x^4 - 16x^2 + 36$

19. Rozłóż wielomian w na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $w(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

d) $w(x) = 3x^4 - 10x^3 + 10x - 3$

b) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

e) $w(x) = x^4 + 3x^3 - 6x - 4$

c) $w(x) = 27x^3 - 6x^2 - 2x + 1$

f) $w(x) = 4x^4 + 2x^3 + x - 1$

18. a) $w(x) = (x + 1)(x - 1)^2$

b) $w(x) = (x^2 + 1)(x + 1)^2(x - 1)$

c) $w(x) = 2(x + 1)(x - 1)(x - \frac{5}{2})$

d) $w(x) = 6(x^2 + \frac{2}{3})(x - \frac{3}{2})$

e) $w(x) = 27(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})^2$

f) $w(x) = 4(x^2 + 2)(x + \frac{3}{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - \frac{3}{2})$

19. a) $w(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x - 1)(x - 2)$

b) $w(x) = 2(x + 1)(x - \frac{1}{2})(x - 2)$

c) $w(x) = 3(9x^2 - 5x + 1)(x + \frac{1}{3})$

d) $w(x) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})(x - 1)(x - 3)$

e) $w(x) = (x + 2)(x + \sqrt{2})(x + 1)(x - \sqrt{2})$

f) $w(x) = 2(2x^2 + 1)(x + 1)(x - \frac{1}{2})$

12. a) $v(x, y) = -x^2y^4 - 4x^2y^3 + -3x^2y^2 - 3x^2y + 4$,

$v(2, \sqrt{2}) = -4(11\sqrt{2} + 9)$

b) $v(x, y) = \frac{1}{2}x^3y^2 + x^2y^2 + -4x^2y - 4x^2 - 2xy^3 + 4xy^2 - y^4$,

$v(2, \sqrt{2}) = 12(1 - 2\sqrt{2})$

13. a) $m = 1$, $n = 4$

b) $m = 5$, $n = -4$

c) $m = 2$, $n = 1$

14. a) $w(x) = 9x(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})$

b) $w(x) = 50x^2(x + \frac{2}{5})(x - \frac{2}{5})$

c) $w(x) = -27x^3(x + \frac{2}{3}) \cdot$

$\cdot (x - \frac{2}{3})$

d) $w(x) = \frac{1}{8}x^4(x + 2\sqrt{2}) \cdot$

$\cdot (x - 2\sqrt{2})$

e) $w(x) = 5x^3(x + 2)(x - 2)$

f) $w(x) = x^2(x - 5) \cdot$

$\cdot (x^2 + 5x + 25)$

15. a) $w(x) = x^2(x - 5)^2$

b) $w(x) = 9x^2(x + \frac{1}{3})^2$

c) $w(x) = 2x^3(x + 3)(x - 1)$

d) $w(x) = x(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2$

e) $w(x) = x^3(x - 1 - \sqrt{3}) \cdot$

$\cdot (x - 1 + \sqrt{3})$

f) $w(x) = -5x^3(x - 3)^2$

16. a) $w(x) = (x^2 + x + 4) \cdot$

$\cdot (x + 7)(x - 1)$

b) $w(x) = 9(x + 2)(x + 1) \cdot$

$\cdot (x - \frac{1}{3})^2$

c) $w(x) = (x^2 - x + 4) \cdot$

$\cdot (x + 2)(x - 1)$

d) $w(x) = -16x^3(x + 1) \cdot$

$\cdot (x - \frac{1}{2})^2$

17. a) $w(x) = (x - 1) \cdot$

$\cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

b) $w(x) = 32(x - \frac{1}{2}) \cdot$

$\cdot (x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16})$

20. a) $x = -2, x = 0, x = 2$
 b) $x = -\sqrt{2}, x = 0, x = \sqrt{2}$
 c) $x = 0, x = 2$
 d) $x = -\frac{2}{3}, x = 0$
 e) $x = 0, x = 4$
 f) $x = 0, x = \frac{\sqrt[6]{32}}{2}$
21. a) $x = 0, x = 2$
 b) $x = -3, x = 0, x = \frac{1}{2}$
 c) $x = -1, x = 0, x = 7$
 d) $x = -2, x = 0, x = \frac{1}{8}$
 e) $x = 2 - \sqrt{2}, x = 0, x = 2 + \sqrt{2}$
 f) $x = \sqrt{5} - 2, x = 0, x = \sqrt{5} + 2$
22. a) $x = -2, x = -1, x = 1$
 b) $x = -5$
 c) $x = -2, x = 2, x = 3$
 d) $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, x = 2$
 e) $x = \frac{1}{4}$
 f) $x = -\sqrt{2}, x = \frac{1}{5}, x = \sqrt{2}$
23. a) $x = -2, x = \frac{1}{2}$
 b) $x = -1, x = 3$
 c) $x = 1, x = 2$
 d) $x = \frac{1}{3}$
24. a) $x = -1, x = 1, x = 2\sqrt{3}$
 b) $x = -3\sqrt{2}, x = -2, x = 2$
 c) $x = -\sqrt{2}, x = \frac{\sqrt{3}}{9}, x = \sqrt{2}$
 d) $x = -\sqrt{2}, x = -\sqrt[4]{2}, x = \sqrt[4]{2}$

20. Rozwiąż równanie.

- a) $3x^5 = 12x^3$ c) $x^6 = (2x)^3$ e) $\frac{1}{2}x^5 = 32x^2$
 b) $5x^5 = 20x$ d) $27x^7 = -8x^4$ f) $x^2 = \sqrt{2}x^5$

21. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$ c) $x^5 - 6x^4 = 7x^3$ e) $x^4 + 2x^2 = 4x^3$
 b) $2x^4 + 5x^3 - 3x^2 = 0$ d) $8x^6 + 15x^5 = 2x^4$ f) $x^5 + x^3 = 2\sqrt{5}x^4$

22. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ d) $4x^3 - 8x^2 = x - 2$
 b) $x^3 + 5x^2 + 3x + 15 = 0$ e) $12x^3 - 2 = 3x^2 - 8x$
 c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ f) $5x^3 + 2 = x^2 + 10x$

23. Rozwiąż równanie.

- a) $2x^4 - x^3 + 16x - 8 = 0$ c) $x^4 - x^3 = 8x - 8$
 b) $x^4 - 3x^3 = 3 - x$ d) $27x^4 - x = 9x^3 - \frac{1}{3}$

24. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 - 2\sqrt{3}x^2 - x + 2\sqrt{3} = 0$ c) $3\sqrt{3}x^3 - x^2 - 6\sqrt{3}x + 2 = 0$
 b) $x^3 + 3\sqrt{2}x^2 - 4x - 12\sqrt{2} = 0$ d) $x^3 + \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x - 2 = 0$

■ Zestaw III – podsumowujący

25. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?

- a) $w(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5, q(x) = x - 1$
 b) $w(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 6, q(x) = x - 2$
 c) $w(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3x + 1, q(x) = x + 3$
 d) $w(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x - 4, q(x) = x + 4$
 e) $w(x) = -x^4 + 4x^3 - x^2 - 9x + 9, q(x) = x - 3$

26. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

- a) $w(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 5, q(x) = x - 5$
 b) $w(x) = -x^3 + 2x - 5, q(x) = x + 2$
 c) $w(x) = 2x^3 - 8x^2 + 3x, q(x) = x - 4$
 d) $w(x) = 5x^4 + x, q(x) = x + 1$
 e) $w(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x - 5, q(x) = x - \frac{1}{2}$

25. a) $x^2 - x$, reszta -5 , nie jest

b) $3x^2 + x + 3$, jest

c) $-2x^2 + 12x - 39$, reszta 118 , nie jest

d) $x^3 - 8x^2 + 33x - 135$, reszta 536 , nie jest

e) $-x^3 + x^2 + 2x - 3$, jest

26. a) $w(x) = (x^2 + x - 2)(x - 5) - 5$

b) $w(x) = (-x^2 + 2x - 2)(x + 2) - 1$

c) $w(x) = (2x^2 + 3)(x - 4) + 12$

d) $w(x) = (5x^3 - 5x^2 + 5x - 4)(x + 1) + 4$

e) $w(x) = (4x^2 + 6)(x - \frac{1}{2}) - 2$

27. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 2$, $q(x) = 2x - 1$

b) $w(x) = 16x^4 - x^2 + 2x$, $q(x) = 4x + 3$

c) $w(x) = 3x^3 + 4x^2 - x - 2$, $q(x) = 3x - 2$

d) $w(x) = x^4 - 4x^2 + 3x + 5$, $q(x) = \frac{1}{2}x + 1$

28. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ przez dwumian q .

a) $q(x) = x - 2$

b) $q(x) = x + 2$

c) $q(x) = x - \sqrt{2}$

29. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q , nie wykonując dzielenia.

a) $w(x) = x^4 - 5x^2 + 7$, $q(x) = x + 2$

b) $w(x) = -2x^3 + 6x^2 + 2x - 8$, $q(x) = x - 3$

c) $w(x) = 8x^4 - 10x^3 + x - 3$, $q(x) = x + \frac{1}{2}$

d) $w(x) = 27x^3 - 3x^2 + 4$, $q(x) = 3x - 1$

30. Nie wykonując dzielenia, sprawdź, czy wielomian:

$$w(x) = x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30$$

jest podzielny przez dwumian q .

a) $q(x) = x + 1$

c) $q(x) = x + 3$

e) $q(x) = x + 5$

b) $q(x) = x + 2$

d) $q(x) = x - 4$

f) $q(x) = x - 6$

31. Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q .

a) $w(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 2$, $q(x) = x - 1$

b) $w(x) = 3x^4 + x^3 - 4x^2 - 7x - 5$, $q(x) = x + 1$

c) $w(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 3$, $q(x) = x - 2$

d) $w(x) = -x^3 - 4x^2 + 4x - 5$, $q(x) = x + 5$

32. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, $a = -1$

b) $w(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$, $a = 7$

c) $w(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$, $a = 2$

d) $w(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 6x + 20$, $a = -5$

32. a) $w(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$

b) $w(x) = (x - 1)^2(x - 7)$

c) $w(x) = (x^2 + 1)(x - 2)(x - 3)$

d) $w(x) = (x + 5)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - 2)$

27. a) $w(x) = (x^2 - x - 1) \cdot$

$\cdot (2x - 1) + 1$

b) $w(x) = (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \cdot$

$\cdot (4x + 3) + 3$

c) $w(x) = (x^2 + 2x + 1)(3x - 2)$

d) $w(x) = (2x^3 - 4x^2 + 6) \cdot$

$\cdot (\frac{1}{2}x + 1) - 1$

28. a) 31 b) 11 c) $3\sqrt{2} + 7$

29. a) 3 b) -2 c) $-\frac{7}{4}$ d) $\frac{14}{3}$

30. a) $w(-1) = 32 \neq 0$, nie

b) $w(-2) = 0$, tak

c) $w(-3) = -48 \neq 0$, nie

d) $w(4) = 162 \neq 0$, nie

e) $w(-5) = 0$, tak

f) $w(6) = 1320 \neq 0$, nie

31. a) $w(1) = 0$, tak

b) $w(-1) = 0$, tak

c) $w(2) = 1 \neq 0$, nie

d) $w(-5) = 0$, tak

33. a) $w(1) = 1 + m = 0$,
czyli $m = -1$
b) $w(-2) = -4m^2 - 8m + 12 = 0$, czyli $m = -3$
lub $m = 1$
c) $w(3) = m^2 + 9m + 8 = 0$,
czyli $m = -8$ lub $m = -1$
34. a) $-3, 0, 5$ b) $0, 5$ c) $0, 2$

35. a) $x = 1$
b) $x = -2 - \sqrt{2}, x = -1,$
 $x = -2 + \sqrt{2}$
c) $x = 1, x = 2, x = 3$
d) $x = -3, x = \frac{1}{2}$
e) $x = -5$
f) $x = -3, x = -\frac{4}{3}, x = 1$
g) $x = -1, x = \frac{2}{3}, x = 2$
h) $x = -2, x = \frac{4}{5}, x = 5$
36. a) $w(x) = (x^2 + 1)(x - 1)^2$
b) $w(x) = (2x^2 - 5x + 4) \cdot$
 $\cdot (x + 2)(x - 1)$
c) $w(x) = (x^2 + x + 1) \cdot$
 $\cdot (x + 5)(x - 3)$
d) $w(x) = \left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(x-1) \cdot$
 $\cdot \left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(x-2)$

33. Dla jakich wartości m wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?

- a) $w(x) = 2x^3 + mx^2 - 4x + 3, q(x) = x - 1$
b) $w(x) = mx^3 - x^2 + 2m^2x + 16, q(x) = x + 2$
c) $w(x) = -x^3 + mx^2 + 4x + m^2 + 23, q(x) = x - 3$

34. Współczynniki wielomianu $w(x) = x^5 + a_4x^4 + \dots + a_1x + a_0$ są liczbami całkowitymi. Które z liczb $-3, 0, 1, 2, 5$ nie mogą być pierwiastkami wielomianu w , jeżeli:

- a) $a_0 = 4,$ b) $a_0 = 6,$ c) $a_0 = 15?$

35. Rozwiąż równanie.

- a) $2x^3 + x^2 - 3 = 0$ e) $x^3 + 6x^2 = -6x - 5$
b) $x^3 + 5x^2 + 6x + 2 = 0$ f) $3x^3 - x = 12 - 10x^2$
c) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ g) $3x^3 + 4 = 5x^2 + 4x$
d) $2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0$ h) $5x^3 - 19x^2 = 38x - 40$

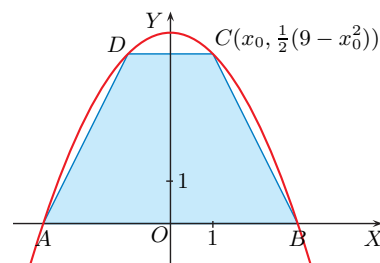
36. Wyznacz pierwiastki wielomianu w i rozłóż go na czynniki.

- a) $w(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$
b) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 14x - 8$
c) $w(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$
d) $w(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2$

37. a) Wielomian $w(x) = 2x^3 + mx^2 + 2x - 3$ można zapisać w postaci $w(x) = (x + 1)p(x)$, gdzie p jest trójmianem kwadratowym. Wyznacz współczynnik m oraz wszystkie pierwiastki wielomianu w .

- b) Wielomian $w(x) = 3x^3 - 4x^2 + mx + 6$ można zapisać w postaci $w(x) = (x - 3)p(x)$, gdzie p jest trójmianem kwadratowym. Wyznacz współczynnik m oraz wszystkie pierwiastki wielomianu w .

38. Wierzchołki trapezu $ABCD$ należą do paraboli $y = \frac{1}{2}(9 - x^2)$. Punkty A i B są punktami przecięcia paraboli z osią OX , a punkty C i D leżą powyżej osi OX . Wyznacz wielomian opisujący pole trapezu w zależności od x_0 (rysunek obok). Podaj dziedzinę tej funkcji. Dla jakiej wartości x_0 pole trapezu jest równe 16?



37. a) $w(-1) = m - 7 = 0$, czyli $m = 7$
 $w(x) = (x + 1)(2x^2 + 5x - 3)$
 $x = -3, x = -1, x = \frac{1}{2}$
b) $w(3) = 3m + 51 = 0$, czyli $m = -17$
 $w(x) = (x - 3)(3x^2 + 5x - 2)$
 $x = -2, x = \frac{1}{3}, x = 3$

38. $A(-3, 0), B(3, 0), |AB| = 6, |CD| = 2x_0$

Wysokość trapezu: $h = \frac{1}{2}(9 - x_0^2), x_0 \in (0; 3)$

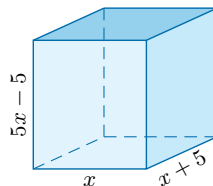
$$P(x_0) = \frac{1}{2}(6 + 2x_0) \cdot \frac{1}{2}(9 - x_0^2) = \frac{1}{2}(3 + x_0)^2(3 - x_0), D = (0; 3)$$

$$\frac{1}{2}(3 + x_0)^2(3 - x_0) = 16$$

$$(x_0 - 1)^2(x_0 + 5) = 0$$

$$P(x_0) = 16 \text{ dla } x_0 = 1$$

39. Dany jest prostopadłościan (rysunek obok).



- Wyznacz wielomian opisujący objętość tego prostopadłościanu w zależności od x . Podaj dziedzinę tej funkcji.
- Oblicz objętość tego prostopadłościanu dla $x = 5$.
- Wyznacz wielomian opisujący pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu. Podaj dziedzinę tej funkcji.

40. Krawędzie prostopadłościanu mają długości $2x$, $x-2$, $x-1$. Wyznacz wielomian opisujący objętość tego prostopadłościanu w zależności od x . Podaj dziedzinę tej funkcji. Dla jakiej wartości x objętość prostopadłościanu jest równa 12?

41. Krawędzie prostopadłościanu mają długości 1, 2 i 3. Po wydłużeniu każdej z nich o ten sam odcinek równy x otrzymano drugi prostopadłościan.

- Wyznacz wielomian w zmiennej x opisujący różnicę objętości większego i mniejszego prostopadłościanu. Podaj dziedzinę tej funkcji.
- Dla jakiej wartości x różnica objętości tych prostopadłościanów jest równa 54?

42. Krawędzie prostopadłościanu mają długości 3, 5 i 7. Po wydłużeniu każdej z nich o ten sam odcinek równy x otrzymano drugi prostopadłościan.

- Wyznacz wielomian w zmiennej x opisujący objętość powstałego prostopadłościanu. Podaj dziedzinę tej funkcji.
- Oblicz x , jeśli wiadomo, że objętość drugiego prostopadłościanu jest trzykrotnie większa od objętości pierwszego.

43. Dany jest wielomian $w(x) = (1 - \sqrt{2}x)^3$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	$w(\sqrt{18})$ jest liczbą wymierną.	P	F
2.	$w(\sqrt{2} - 1) = 5\sqrt{2} - 7$	P	F

44. Miejscem zerowym wielomianu $w(x) = x^3 - m - 6\sqrt{3}$ jest liczba $\sqrt{3} + 1$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik m jest równy:

- A. $6 - \sqrt{3}$, B. $2\sqrt{3} - 9$, C. 6, D. 10.

39. a) $V(x) = 5x^3 + 20x^2 - 25x$,
 $x > 1$

b) $V(5) = 1000$

c) $P(x) = 22x^2 + 40x - 50$,
 $x > 1$

40. $V(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$, $x > 2$,
 $V(3) = 12$

43. 1. P, 2. P

44. D

41. $V(x) = (1+x)(2+x)(3+x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $x > 0$

a) $w(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 - 6 = x^3 + 6x^2 + 11x$

b) $x^3 + 6x^2 + 11x = 54$

$x = 2$

42. a) $V(x) = (3+x)(5+x)(7+x) = x^3 + 15x^2 + 71x + 105$, $x > 0$

b) $x^3 + 15x^2 + 71x + 105 = 315$

$x = 2$

2. $f(x) = \frac{120}{x}$

a) $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$

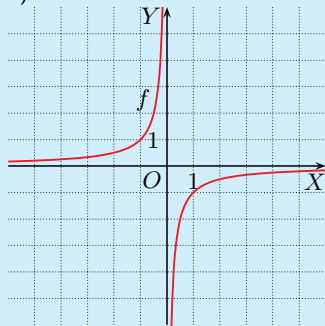
b) $f(6) = 20, f(24) = 5$

c) $x = 15$ d) nie

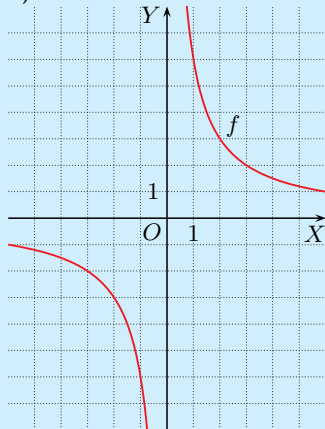
3. a) $y = -\frac{5}{x}$ b) $y = \frac{6}{x}$

c) $y = -\frac{2}{x}$ d) $y = \frac{2\sqrt{3}}{x}$

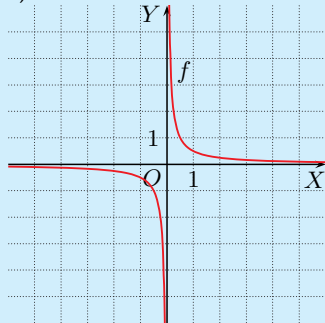
4. a)



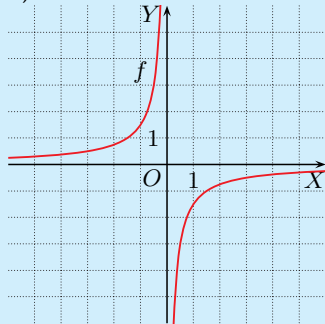
b)



c)



d)

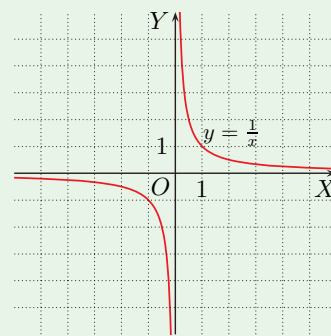


5.7. Funkcje wymierne

Funkcję postaci $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R}_+$ oraz a jest stałą dodatnią, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**, wielkości x i y – **odwrotnie proporcjonalnymi**, a stałą a – **współczynnikiem proporcjonalności**.

Wykresem funkcji $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \neq 0$, jest **hiperbola**.

Prosta $y = 0$ jest jej **asymptotą poziomą**, a prosta $x = 0$ – jej **asymptotą pionową**.



Funkcję postaci $f(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$, gdzie v i w są wielomianami oraz w nie jest wielomianem zerowym, nazywamy **funkcją wymierną**. Dziedziną takiej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których $w(x) \neq 0$.

■ Zestaw I – wprowadzający

1. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę, wiedząc, że wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$2\sqrt{3}$	4	24
y	48	36	24	12	6	4	$2\sqrt{3}$	3	$\frac{1}{2}$

2. W szafce ustawiono 120 słoików w taki sposób, że na każdej półce stoi tyle samo słoików. Wyznacz wzór funkcji $y = f(x)$ opisującej zależność liczby półek y od liczby słoików x stojących na jednej półce.

a) Podaj dziedzinę funkcji f .

b) Oblicz $f(6)$ i $f(24)$.

c) Dla jakiego argumentu funkcja f przyjmuje wartość 8?

d) Czy można ustawić po 9 słoików na każdej półce?

3. Do wykresu proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$ należy punkt A . Wyznacz jej wzór.

a) $A(-1, 5)$

b) $A(3, 2)$

c) $A(-\frac{1}{2}, 4)$

d) $A(\sqrt{2}, \sqrt{6})$

4. Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = -\frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{6}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{2x}$

d) $f(x) = -\frac{3}{2x}$

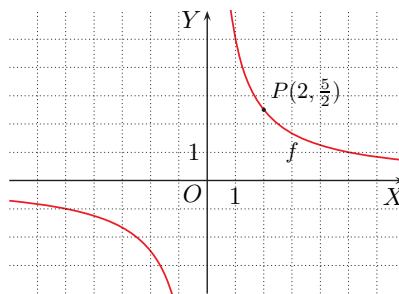
5. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą w przedziale $\langle 1; 2 \rangle$.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = -\frac{2}{x}$ c) $f(x) = \frac{4}{x}$ d) $f(x) = -\frac{3}{x}$

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a .

a) Które spośród punktów $A(-5, 2)$, $B(\sqrt{5}, \sqrt{5})$ i $C(\frac{1}{4}, -20)$ nie należą do wykresu funkcji f ?

b) Podaj zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od 1.



7. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{6}{x}$ b) $f(x) = -\frac{8}{x}$

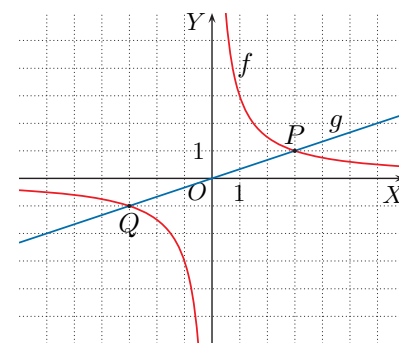
8. Dziedzina funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ jest przedział $\langle 1; 6 \rangle$. Wyznacz a , jeżeli wiadomo, że:

- a) największa wartość funkcji f jest równa 5,
b) najmniejsza wartość funkcji f jest równa $\frac{1}{4}$,
c) najmniejsza wartość funkcji f jest równa -4 .

9. Wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ i $g(x) = bx$ przecinają się w punktach $P(3, 1)$ i Q (rysunek obok).

a) Wyznacz a i b .

b) Odczytaj z rysunku rozwiązania równania $f(x) = g(x)$ oraz nierówności $f(x) \leq g(x)$.



10. Naskicuj wykresy funkcji f i g . Podaj ich punkty wspólne.

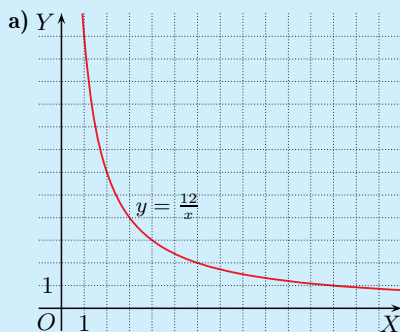
a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = x + 1$ b) $f(x) = -\frac{3}{x}$, $g(x) = x - 4$

11. Prostopadłościan o podstawie kwadratowej ma pole powierzchni bocznej równe 48 dm^2 . Podaj wzór opisujący zależność między wysokością y tego prostopadłościanu a krawędzią x jego podstawy.

a) Sporządź odpowiednią tabelę i naskicuj wykres tej zależności.

b) Jakie są wymiary tego prostopadłościanu, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest o 200% dłuższa od długości krawędzi podstawy?

11. $y = \frac{12}{x}$, $x > 0$



b) $x = 2 \text{ dm}$, $y = 6 \text{ dm}$

5. a) najmniejsza wartość: 1, największa wartość: 2
b) najmniejsza wartość: -2 , największa wartość: -1
c) najmniejsza wartość: 2, największa wartość: 4
d) najmniejsza wartość: -3 , największa wartość: $-\frac{3}{2}$

6. $a = 5$ a) A, C

b) $x \in (-\infty; 0) \cup (5; \infty)$

7. a) maleje w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \infty)$

b) rośnie w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \infty)$

8. a) wykres przechodzi przez punkt $P(1, 5)$, stąd $a = 5$

b) $P(6, \frac{1}{4})$, stąd $a = \frac{3}{2}$

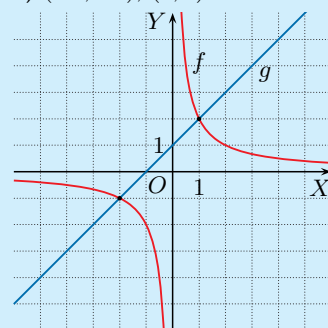
c) $P(1, -4)$, stąd $a = -4$

9. a) $a = 3$, $b = \frac{1}{3}$

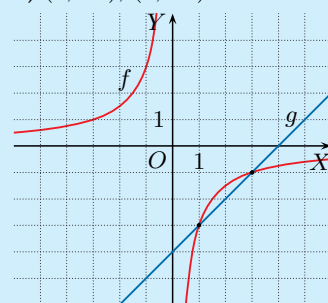
b) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-3, 3\}$,

$f(x) \leq g(x)$ dla $x \in \langle -3; 0 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$

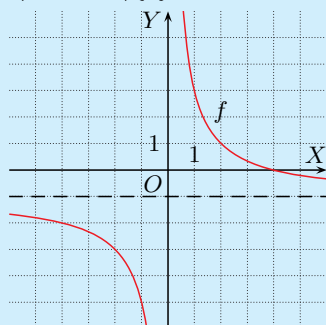
10. a) $(-2, -1)$, $(1, 2)$



- b) $(1, -3)$, $(3, -1)$

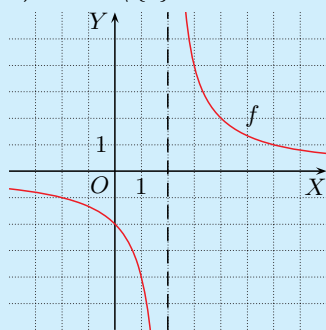


12. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$



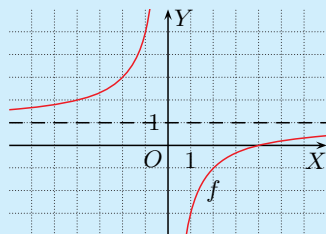
$f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
maleje w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \infty)$

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$



$f(D) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$

c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$



$f(D) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$,
rośnie w $(-\infty; 0)$ i w $(0; \infty)$

13. a) $a = -4$ b) $a = -5$

14. a) $f(x) = \frac{3}{x} - 2$,
 $f(x) > 1$ dla $x \in (0; 1)$

b) $f(x) = \frac{3}{x+3}$,
 $f(x) > 1$ dla $x \in (-3; 0)$

■ Zestaw II – ćwiczeniowy

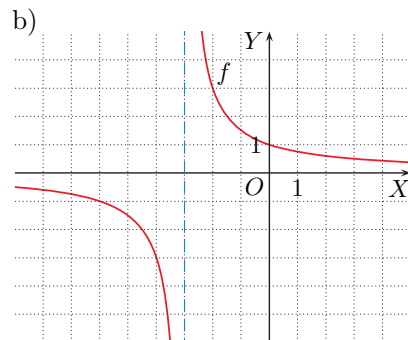
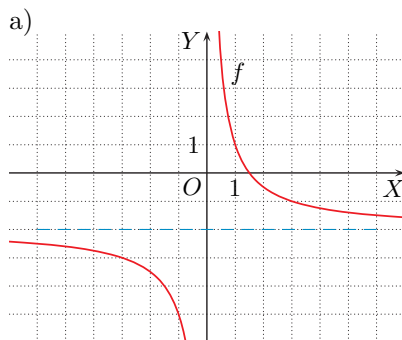
12. Naskicuj wykres funkcji f . Wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości oraz odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności tej funkcji.

a) $f(x) = \frac{4}{x} - 1$ b) $f(x) = \frac{4}{x-2}$ c) $f(x) = 1 - \frac{4}{x}$

13. Dla jakiej wartości współczynnika a punkt P należy do wykresu funkcji f ?

a) $f(x) = \frac{a}{x+1}$, $P(-2, 4)$ b) $f(x) = \frac{a}{x-5}$, $P(2\frac{1}{2}, 2)$

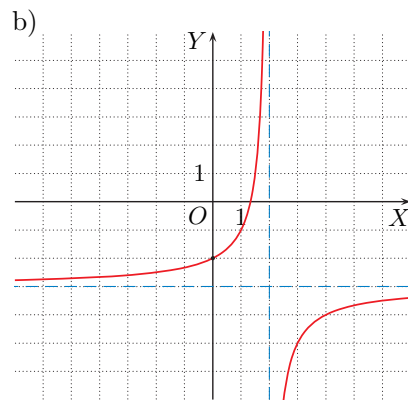
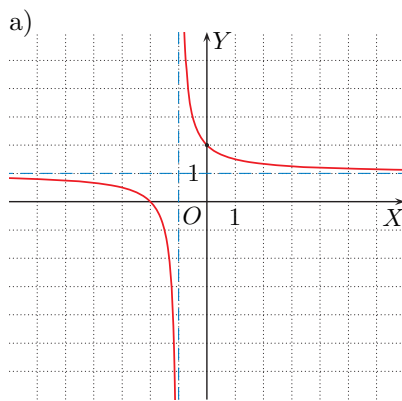
14. Wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{3}{x}$ wzdłuż osi układu współrzędnych. Podaj wzór funkcji f . Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 1.



15. Naskicuj wykres funkcji f . Z wykresu odczytaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich – ujemne.

a) $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ b) $f(x) = \frac{2}{x-3} + 2$ c) $f(x) = \frac{-3}{x-1} + 3$

16. Podaj wzór funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku. Dla jakiej wartości współrzędnej m punkt $P(m, 3)$ należy do tego wykresu?



15. a) $f(x) > 0$ dla $x \in (-1; 0)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$

b) $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (2; 3)$

c) $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (1; 2)$

16. a) $f(x) = \frac{1}{x+1} + 1$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $m = -\frac{1}{2}$

b) $f(x) = \frac{-2}{x-2} - 3$, $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $m = 1\frac{2}{3}$

17. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej przedziały monotoniczności.
- a) $f(x) = \frac{4}{x-2} + 3$ b) $f(x) = \frac{2}{x+2} - 4$ c) $f(x) = 3 - \frac{1}{x+1}$
18. Wyznacz dziedzinę wyrażenia.
- a) $\frac{x^2-x}{x-1}$ b) $\frac{x}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2+x}{x^2}$ d) $\frac{x^2-1}{x^2+x}$ e) $\frac{x-1}{x^2-x}$ f) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$
19. Oblicz wartość wyrażenia dla tych spośród liczb $-\sqrt{2}, 0, 1, \sqrt{2}$, dla których jest to możliwe.
- a) $\frac{2x+1}{x-1}$ b) $\frac{x-2}{x+2}$ c) $\frac{x^2}{(x+2)(x-3)}$
20. Wyznacz dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz jego wartość dla $x = -2$.
- a) $\frac{x^2-9}{x^3-3x^2}$ b) $\frac{x^5-81x}{x^2+9}$ c) $\frac{x^2+9x+8}{2x+16}$ d) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ e) $\frac{x^2+10x+25}{x^2+4x-5}$ f) $\frac{4x^2-1}{2x^3+x^2-6x-3}$
21. Podaj odpowiednie założenia i wykonaj działania. Odpowiedź zapisz w najprostszej postaci.
- a) $\frac{x+3}{3x} \cdot \frac{x^2}{x^2-9}$ b) $\frac{1}{x+7} \cdot \frac{x^2-49}{7x}$ c) $\frac{x}{x^2+5x} \cdot \frac{x^2-25}{x+2}$ d) $\frac{4x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x}{2x^2+x}$ e) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{(x-2)^2}{x+1}$ f) $\frac{9+6x+x^2}{9-6x+x^2} \cdot \frac{3-x}{3+x}$
22. Podaj odpowiednie założenia i wykonaj działania. Odpowiedź zapisz w najprostszej postaci.
- a) $\frac{x^2-6x}{x-6} : \frac{x}{x+2}$ b) $\frac{x}{x-6} : \frac{x^2+x}{x^2-36}$ c) $\frac{x^2-1}{x^2+x} : \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ d) $\frac{x}{x-4} : \frac{x^2}{x^2-16}$ e) $\frac{x+5}{x-5} : (x^2-25)$ f) $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x^2+x}{3x-3}$
23. Podaj odpowiednie założenia i wykonaj działania. Odpowiedź zapisz w najprostszej postaci.
- a) $\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-3}{1-x}$ b) $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}$ c) $\frac{3x+1}{x+1} + \frac{4x}{x+2}$ d) $\frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{3x}{x+1}$ e) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2x-3}{x^2-1}$ f) $\frac{2}{x} + \frac{4}{x-3} + \frac{2x-1}{x^2-3x}$
24. Rozwiąż równanie.
- a) $\frac{4}{x} = 3$ b) $\frac{3}{x} = 2$ c) $-\frac{6}{x} = \frac{1}{3}$
25. Rozwiąż równanie.
- a) $\frac{6x-3}{x+3} = 3$ b) $\frac{x+5}{2x-1} = -3$ c) $\frac{-x-4}{x+2} = 2$
23. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \frac{1}{x-1}$
b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, -\frac{3x+1}{x^2-1}$
c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}, \frac{7x^2+11x+2}{x^2+3x+2}$
d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{3x^2+3x+1}{x^2+2x+1}$
e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{5x-4}{x^2-1}$
f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}, \frac{8x-7}{x^2-3x}$
24. a) $x = \frac{4}{3}$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $x = -18$
25. a) $x = 4$ b) $x = -\frac{2}{7}$ c) $x = -\frac{8}{3}$

17. a) maleje w $(-\infty; 2)$
i w $(2; \infty)$
b) maleje w $(-\infty; -2)$
i w $(-2; \infty)$
c) rośnie w $(-\infty; -1)$
i w $(-1; \infty)$
18. a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ d) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$
e) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
19. a) $-\sqrt{2}: 5-3\sqrt{2}, 0: -1, \sqrt{2}: 3\sqrt{2}+5$
b) $-\sqrt{2}: -3-2\sqrt{2}, 0: -1, 1: -\frac{1}{3}, \sqrt{2}: 2\sqrt{2}-3$
c) $-\sqrt{2}: -\frac{4+\sqrt{2}}{7}, 0: 0, 1: -\frac{1}{6}, \sqrt{2}: \frac{\sqrt{2}-4}{7}$
20. a) $\frac{x+3}{x^2}, D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}, \frac{1}{4}$
b) $x(x^2-9), D = \mathbb{R}, 10$
c) $\frac{x+1}{2}, D = \mathbb{R} \setminus \{-8\}, -\frac{1}{2}$
d) $\frac{x+3}{x+1}, D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, -1$
e) $\frac{x+5}{x-1}, D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}, -1$
f) $\frac{2x-1}{x^2-3}, D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}\}, -5$
21. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}, \frac{x}{3(x-3)}$
b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 0\}, \frac{x-7}{7x}$
c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, 0\}, \frac{x-5}{x+2}$
d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}, \frac{2x-1}{x^2}$
e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, x+1$
f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, \frac{x+3}{3-x}$
22. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 6\}, x+2$
b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, -1, 0, 6\}, \frac{x+6}{x+1}$
c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \frac{x^2+1}{x^2-x}$
d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}, \frac{x+4}{x}$
e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}, \frac{1}{x^2-10x+25}$
f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \frac{3}{x}$

$$26. a) \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{16 - x^4} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1} =$$

$$= \frac{(x-1)^3}{-(x^2+4)(x^2-4)} \cdot \frac{x^2-4}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)}{-(x^2+4)} = -\frac{x-1}{x^2+4},$$

$$D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1, 2\}, \frac{8}{53}$$

$$b) (x^3 - 8) \cdot \frac{x+2}{x^2+2x+4} =$$

$$= (x-2)(x^2+2x+4) \cdot$$

$$\cdot \frac{x+2}{x^2+2x+4} = x^2 - 4,$$

$$D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}, 45$$

$$27. a) x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\},$$

$$\frac{4(x-1)+3(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{7x+2}{(x-1)(x+2)},$$

$$b) x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -1\},$$

$$\frac{(3x+1)(x+2)+x(x+1)}{(x+1)(x+2)} =$$

$$= \frac{4x^2+8x+2}{(x+1)(x+2)}, \frac{17}{6}$$

$$c) x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\},$$

$$\frac{1-3x(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-3x^2-3x+1}{(x+1)^2}, -\frac{17}{9}$$

$$d) x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\},$$

$$\frac{5x(x+1)+3x(x-1)-8(x^2-1)}{x^2-1} =$$

$$= \frac{2x+8}{x^2-1}, 4$$

$$e) x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\},$$

$$\frac{(x+3)^2+(x-3)^2-(x^2+9)}{x^2-9} =$$

$$= \frac{x^2+9}{x^2-9}, -\frac{13}{5}$$

$$f) x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\},$$

$$\frac{3x-2+3x-1+3}{(3x-1)(3x-2)} =$$

$$= \frac{6x}{(3x-1)(3x-2)}, \frac{3}{5}$$

$$28. a) x = \frac{1}{4} \quad b) x = -\frac{1}{40}$$

$$c) x = -\frac{7}{6}, x = \frac{7}{6}$$

$$d) x = \frac{1}{3}, x = 1$$

$$e) x = -\frac{5}{6}, x = 1$$

$$f) x = -1, x = 2$$

$$g) x = \frac{2}{5} \quad h) x = 0, x = 1$$

$$i) x = -\frac{1+3\sqrt{29}}{10}, x = \frac{-1+3\sqrt{29}}{10}$$

$$29. a) x = 2, x = 3 \quad b) x = 5$$

$$c) x = -1 \quad d) x = -3$$

$$e) x = -8 \quad f) x = 8$$

$$30. a) x = -1, x = 2, x = 6$$

$$b) x = -4 \quad c) x = -1$$

$$d) x = -1, x = 0, x = \frac{1}{2}$$

$$e) x = 0, x = \frac{1}{2}$$

$$f) x = 2, x = 3$$

■ Zestaw III – podsumowujący

26. Wyznacz dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz jego wartość dla $x = -7$.

$$a) \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{16 - x^4} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1} \quad b) (x^3 - 8) : \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$$

27. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci. Oblicz wartość otrzymanego wyrażenia dla $x = 2$.

$$a) \frac{4}{x+2} + \frac{3}{x-1} \quad d) \frac{5x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} - 8$$

$$b) \frac{3x+1}{x+1} + \frac{x}{x+2} \quad e) \frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} - \frac{x^2+9}{x^2-9}$$

$$c) \frac{1}{x^2+2x+1} - \frac{3x}{x+1} \quad f) \frac{1}{3x-1} + \frac{1}{3x-2} + \frac{3}{9x^2-9x+2}$$

28. Rozwiąż równanie.

$$a) \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = 6 \quad d) \frac{4x-1}{x} = 3x \quad g) \frac{2x-1}{x} = \frac{2x}{x-2}$$

$$b) \frac{1}{5x} - \frac{1}{2x} = 12 \quad e) \frac{x+5}{3x} = 2x \quad h) \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x-2}{x+2}$$

$$c) \frac{5}{4x} + \frac{1}{9x} = x \quad f) \frac{x}{x+2} = \frac{1}{x} \quad i) \frac{x+4}{2x+1} = \frac{2x-1}{3-x}$$

29. Rozwiąż równanie.

$$a) \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)} = 0 \quad c) \frac{(x+3)(x+1)}{x^2-9} = 0 \quad e) \frac{x(x-3)(x+8)}{x^2-3x} = 0$$

$$b) \frac{(x-5)(x+4)}{(x+4)(x+5)} = 0 \quad d) \frac{(x+2)(2x+6)}{x^2-4} = 0 \quad f) \frac{x(x+6)(x-8)}{x^2+6x} = 0$$

30. Rozwiąż równanie.

$$a) \frac{(x+1)(x-2)(x-6)}{(x+2)(x-1)} = 0 \quad d) \frac{x(6x-2)(2x-1)(x+1)}{(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})} = 0$$

$$b) \frac{(x+4)(x-3)(x+8)}{(x+8)(x-3)} = 0 \quad e) \frac{x(6x-3)(3x+6)}{x^2-4} = 0$$

$$c) \frac{(2x+6)(4-2x)(x+1)}{(x-2)(x+3)} = 0 \quad f) \frac{(x-3)^2(2x-4)^2}{(x+1,5)(x^2+9)} = 0$$

31. Wyznacz dziedzinę wyrażenia, uprość je i określ, dla jakich x przyjmuje ono wartość 0.

$$a) \frac{x^2-6x}{x^2-9x} \quad b) \frac{4x^2-1}{x-2x^2} \quad c) \frac{x^2+6x+9}{x^2+3x} \quad d) \frac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}$$

32. Dwa samochody wyjechały jednocześnie z miasta A do miasta B , oddalonego od A o 560 km. Średnia prędkość pierwszego samochodu była o 10 km/h większa od średniej prędkości drugiego, więc przybył on na miejsce o godzinę wcześniej. Oblicz średnie prędkości obu samochodów.

$$31. a) D = \mathbf{R} \setminus \{0, 9\}, \frac{x-6}{x-9}, x = 6$$

$$b) D = \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}, -\frac{2x+1}{x}, -\frac{1}{2}$$

$$c) D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}, \frac{x+3}{x}, \text{nie przyjmuje wartości } 0$$

$$d) D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}, \frac{x+2}{x-1}, \text{nie przyjmuje wartości } 0$$

32. $v + 10$ – średnia prędkość pierwszego samochodu

v – średnia prędkość drugiego samochodu

$$\frac{560}{v+10} = \frac{560}{v} - 1, v > 0$$

$$v = 70$$

Średnie prędkości samochodów: 80 km/h i 70 km/h

33. Z dwóch miejscowości oddalonych od siebie o 126 km wyjechali naprzeciw siebie dwaj rowerzyści. Jeden z nich wyjechał godzinę później i jechał o 4 km/h szybciej. Rowerzyści spotkali się w połowie drogi. Oblicz średnią prędkość każdego z nich.
34. Odległość między dwiema przystaniami liczona wzdłuż rzeki wynosi 8 km. Łódka przepływa z jednej przystani do drugiej i z powrotem w czasie 1 h i 40 min, a prędkość prądu rzeki wynosi 2 km/h. Oblicz średnią prędkość łódki na wodzie stojącej.
35. Motorówka pokonuje drogę w górę rzeki z punktu A do punktu B w czasie o 15 minut dłuższym niż drogę powrotną. Prędkość motorówki na wodzie stojącej jest równa 21 km/h, a odległość między punktami A i B wynosi 18 km. Oblicz prędkość prądu rzeki.
36. Dane jest wyrażenie $\frac{x}{2-x} - \frac{x}{2+x}$.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Podane wyrażenie jest określone dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 2$.	P	F
2.	Podane wyrażenie można przekształcić do postaci równoważnej $\frac{4+2x}{4-x^2}$.	P	F

37. Na rysunku obok przedstawiono wykresy dwóch proporcjonalności odwrotnych: $f(x) = \frac{2}{x}$ i $g(x) = \frac{4}{x}$.

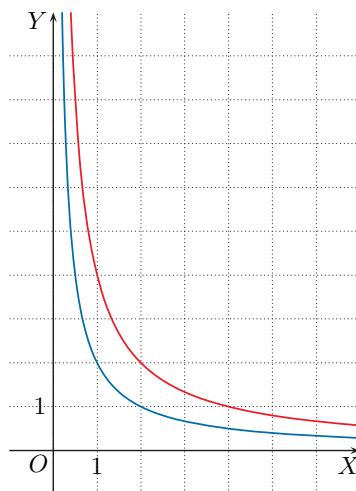
Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

Do wykresu funkcji f należy punkt:

- A. $(\frac{3}{2}, 3)$, C. $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$,
B. $(6, \frac{2}{3})$, D. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Do wykresu funkcji g należy punkt:

- E. $(\frac{3}{2}, 4)$, G. $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$,
F. $(\frac{5}{2}, \frac{8}{4})$, H. $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.



36. $\frac{x}{2-x} - \frac{x}{x+2} = \frac{2x^2}{4-x^2}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$

1. F, 2. F

37. D, G

33. $v + 4$ – średnia prędkość pierwszego rowerzysty
 v – średnia prędkość drugiego rowerzysty

$$\frac{63}{v+4} = \frac{63}{v} - 1, v > 10$$

$$v = 14$$

Średnie prędkości samochodów: 18 km/h i 14 km/h

34. v – średnia prędkość łódki na wodzie stojącej

$$1 \text{ h } 40 \text{ min to } 1\frac{2}{3} \text{ h}$$

$$\frac{8}{v+2} + \frac{8}{v-2} = 1\frac{2}{3}, v > 2$$

$$v = 10 \text{ km/h}$$

35. v – średnia prędkość prądu rzeki

$$15 \text{ min to } \frac{1}{4} \text{ h}$$

$$\frac{18}{21-v} = \frac{18}{21+v} + \frac{1}{4}, 0 < v < 21$$

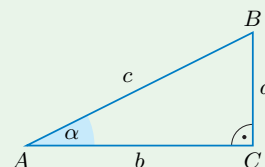
$$v = 3 \text{ km/h}$$

5.8. Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Rozwiązaniem trójkąta nazywamy obliczenie długości wszystkich jego boków i miar wszystkich jego kątów.

Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

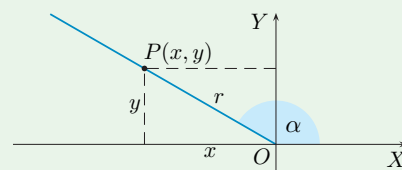
Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$.

Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\text{gdzie } r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0, \text{ czyli } \alpha \neq 90^\circ)$$



Dla dowolnego kąta $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$ prawdziwe są zależności:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ gdzie } \alpha \neq 90^\circ$$

1. a) $\sin \alpha = \frac{5}{13}, \cos \alpha = \frac{12}{13},$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}, \sin \beta = \frac{12}{13},$
 $\cos \beta = \frac{5}{13}, \operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$
 b) $\sin \alpha = \frac{1}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2},$
 $\cos \beta = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \beta = \sqrt{3}$
 c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5},$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{5},$
 $\cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{5}, \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$
 d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$
 $\operatorname{tg} \alpha = 2 - \sqrt{3}, \sin \beta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$
 $\cos \beta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \operatorname{tg} \beta = 2 + \sqrt{3}$

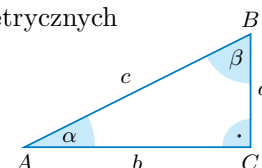
Zestaw I – wprowadzający

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, mając dane długości jego przyprostokątnych.

a) 5, 12 b) $\sqrt{2}, \sqrt{6}$ c) 2, $\sqrt{6}$ d) $\sqrt{6} + \sqrt{2}, \sqrt{6} - \sqrt{2}$

2. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta prostokątnego ABC (rysunek obok) oraz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeśli wiadomo, że:

a) $a = 6, \operatorname{tg} \alpha = 2,$ c) $a = 6, \cos \alpha = \frac{1}{5},$
 b) $a = 2, \sin \alpha = \frac{4}{5},$ d) $c = \sqrt{5}, \operatorname{tg} \alpha = 3.$

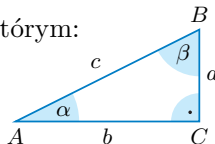


2. a) $b = 3, c = 3\sqrt{5}, \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$
 b) $b = \frac{3}{2}, c = \frac{5}{2}, \cos \alpha = \frac{3}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
 c) $b = \frac{\sqrt{6}}{2}, c = \frac{5\sqrt{6}}{2}, \sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{6}$
 d) $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$



3. Rozwiąż trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok), w którym:

- a) $a = 2$, $\alpha = 12^\circ$, c) $a = 5$, $\sin \alpha = 0,342$,
b) $c = 20$, $\beta = 75^\circ$, d) $c = 15$, $\cos \alpha = 0,7071$.



4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych większego kąta ostrego trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna jest trzy razy krótsza od przeciwprostokątnej.

5. Który z symboli: $<$, $>$, $=$ należy wpisać w miejsce $?$, aby otrzymać zdanie prawdziwe?

- a) Jeżeli $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, to $\alpha ? 30^\circ$. c) Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = 2$, to $\alpha ? 60^\circ$.
b) Jeżeli $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, to $\alpha ? 45^\circ$. d) Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, to $\alpha ? 30^\circ$.

6. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli:

- a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{12}{13}$, b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{4}$, c) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{7}{24}$.

7. Oblicz, nie korzystając z tablic ani kalkulatora.

- a) $4 \sin 30^\circ + \sin 20^\circ - \cos 70^\circ$ c) $\cos 20^\circ \sin 70^\circ + \sin 20^\circ \cos 70^\circ$
b) $\cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$ d) $\cos 40^\circ \cos 50^\circ - \sin 40^\circ \sin 50^\circ$

8. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .

- a) $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ b) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{6}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$

9. Oblicz wartość wyrażenia, jeżeli $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ i α jest kątem ostrym.

- a) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ c) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$
b) $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \operatorname{tg} \alpha$ d) $\frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}$

10. Oblicz miarę kąta ostrego α , jeśli wiadomo, że:

- a) $\frac{3 - \sin \alpha}{5} = \frac{1}{2}$, d) $\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} = 0$,
b) $\sin \alpha = \sqrt{3} \cos \alpha$, e) $\frac{1 - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{3}{2}$,
c) $\sqrt{2} \sin \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$, f) $\frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$.

11. Czy istnieje kąt α , dla którego:

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{3}$,
b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{5}$,
c) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$ i $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$?

11. a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \frac{2}{3}$
 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \neq 1$, nie istnieje

b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$
 $\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 = \frac{5}{25} \neq 1$, nie istnieje

c) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, istnieje

3. a) $\beta = 78^\circ$, $b \approx 9,41$, $c \approx 9,62$

b) $\alpha = 15^\circ$, $a \approx 5,18$,
 $b \approx 19,32$

c) $\alpha \approx 20^\circ$, $\beta \approx 70^\circ$,
 $b \approx 13,74$, $c \approx 14,62$

d) $\alpha \approx 45^\circ$, $\beta \approx 45^\circ$,
 $a \approx 10,61$, $b \approx 10,61$

4. $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$

5. a) $<$ b) $<$ c) $>$ d) $<$

6. a) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$

b) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

c) $\sin \alpha = \frac{24}{25}$, $\cos \alpha = \frac{7}{25}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$

7. a) 2 b) 1 c) 1 d) 0

8. a) $\sin \alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$

b) $\cos \alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$

c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$

d) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

9. a) $\frac{161}{289}$ b) $\frac{161}{120}$ c) $\frac{2}{17}$ d) $\frac{15}{8}$

10. a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, czyli $\alpha = 30^\circ$

b) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$,
czyli $\alpha = 60^\circ$

c) $\sqrt{2} \sin \alpha =$
 $= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli $\alpha = 45^\circ$

d) $\sin \alpha = \cos \alpha$, czyli $\alpha = 45^\circ$

e) $\frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \sin^2 \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha} =$
 $= 1 + \sin^2 \alpha = \frac{3}{2}$

oraz $\sin \alpha > 0$

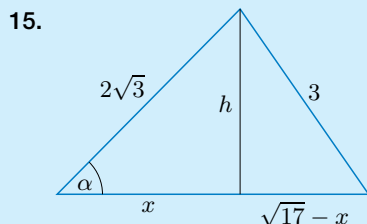
$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli $\alpha = 45^\circ$

f) $\frac{\sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} =$
 $= \frac{1}{\cos \alpha} = 2$, skąd $\cos \alpha = \frac{1}{2}$,
czyli $\alpha = 60^\circ$

12. a) $b = 40\sqrt{3}$, $c = 80$, $\beta = 60^\circ$
 b) $a = 6\sqrt{3}$, $c = 12$, $\beta = 30^\circ$
 c) $c = 2(\sqrt{2} - 1)$, $\alpha = 30^\circ$,
 $\beta = 60^\circ$

13. a) $x = 1 + 3\sqrt{3}$
 b) $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
 c) $x = 3\sqrt{3} - 2$

14. a) $\alpha \approx 37^\circ$, $\beta \approx 53^\circ$
 oraz $a = 10$, $b = \frac{40}{3}$, $c = \frac{50}{3}$
 lub $a = \frac{15}{2}$, $b = 10$, $c = \frac{25}{2}$
 b) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$,
 $a = b = 10$, $c = 10\sqrt{2}$



Trójkąt nie jest prostokątny.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{x}$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$h^2 = (2\sqrt{3})^2 - x^2$$

$$h^2 = 9 - (\sqrt{17} - x)^2$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{17}}, h = \frac{2\sqrt{26}}{\sqrt{17}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

16. a) $\left(\frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ} + \frac{\sin 65^\circ}{\cos 65^\circ} \right) \cdot$

$$\begin{aligned} & \cdot \cos 65^\circ \cos 25^\circ = \\ & = \sin 25^\circ \cos 65^\circ + \\ & + \sin 65^\circ \cos 25^\circ = \\ & = \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = 1 \end{aligned}$$

b) 1

$$\begin{aligned} & \text{c) } (\cos 50^\circ + \cos 50^\circ)^2 + \\ & + (\sin 50^\circ + \sin 50^\circ)^2 = \\ & = 4 \cos^2 50^\circ + 4 \sin^2 50^\circ = \\ & = 4(\cos^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ) = 4 \end{aligned}$$

d) 2

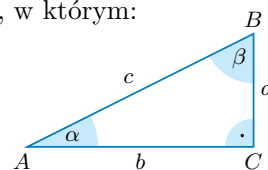
20. a) $L = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 =$
 $= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = P$

b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

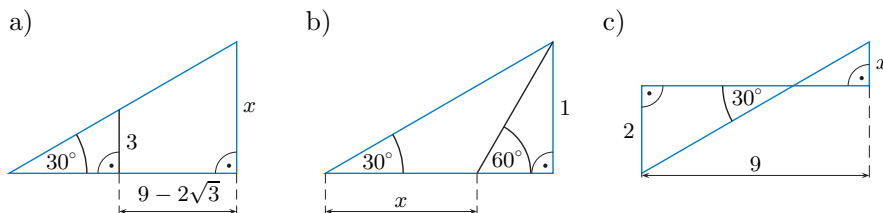
■ Zestaw II – ćwiczeniowy

12. Rozwiąż trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok), w którym:

- a) $a = 40$, $\alpha = 30^\circ$,
 b) $b = 6$, $\alpha = 60^\circ$,
 c) $a = \sqrt{2} - 1$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{3}$.



13. Oblicz x .



14. Rozwiąż trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości 10 oraz kątach ostrych α i β spełniających warunek:

- a) $\sin \alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = 1,2$, b) $5 \cos \alpha - 3 \sin(90^\circ - \alpha) = \sqrt{2}$.

15. Oblicz tangens najmniejszego z kątów trójkąta o bokach długości $2\sqrt{3}$, 3, $\sqrt{17}$.

16. Oblicz, nie korzystając z tablic ani kalkulatora.

- a) $(\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 65^\circ) \sin 25^\circ \sin 65^\circ$
 b) $\cos^2 15^\circ \operatorname{tg}^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ$
 c) $(\sin 40^\circ + \cos 50^\circ)^2 + (\sin 50^\circ + \cos 40^\circ)^2$
 d) $(\sin 40^\circ + \cos 40^\circ)^2 + (\sin 50^\circ - \cos 50^\circ)^2$

17. a) Kąt α jest ostry oraz $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sqrt{9 \operatorname{tg}^2 \alpha - 6}$.

- b) Kąt α jest ostry oraz $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$.

18. Kąt α jest ostry oraz $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha) = \frac{1}{3}$. Oblicz $\cos \alpha$.

19. Kąt α jest ostry oraz $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Nie wyznaczając wartości $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, oblicz wartość wyrażenia:

- a) $\frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha}$, b) $\frac{4 \sin^2 \alpha + 5 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$, c) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}$.

20. a) Uzasadnij tożsamość $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

- D b) Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = 4$.

17. a) $\sqrt{9 \operatorname{tg}^2 \alpha - 6} = \sqrt{9 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 6} = \sqrt{9 \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 6} =$
 $= \sqrt{9 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) - 6} = \sqrt{9 \left(\frac{16}{9} - 1 \right) - 6} = 1$

b) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{12}{5}$ oraz $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, więc $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$
 $\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \frac{5}{13}}{1 - \frac{12}{13}} = 18$

18. $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$
 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$ oraz $\cos \alpha > 0$, więc $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

19. a) $\frac{3 \sin \alpha}{5 \cos \alpha} - \frac{2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha} = \frac{3}{5} \operatorname{tg} \alpha - \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1 \frac{2}{5}$
 b) $\frac{4 \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{5 \cos \alpha}{\sin \alpha} = 4 \operatorname{tg} \alpha + \frac{5}{\operatorname{tg} \alpha} = 13 \frac{2}{3}$
 c) $\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = (\operatorname{tg} \alpha + 1)^2 = 16$

21. Uprość wyrażenie tak, aby występowała w nim jedynie funkcja cosinus. Oblicz jego wartość dla $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, jeżeli α jest kątem ostrym.

a) $\left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2$ b) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ c) $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$

22. Oblicz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, jeżeli α jest kątem ostrym oraz:

$$\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha} = 0$$

23. Oblicz $\sin \alpha + \cos \alpha$, jeżeli α jest kątem ostrym oraz $\frac{2 \cos \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{2 \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = 5$.

24. Kąt α jest ostry oraz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$, b) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$, c) $\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha$.

25. Dla kątów ostrych α i β pewnego trójkąta prostokątnego zachodzi równość $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{7}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\cos \alpha + \cos \beta$, b) $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, c) $\cos \alpha \cdot \cos \beta$.

26. Iloczyn sinusów kątów ostrych pewnego trójkąta prostokątnego jest równy $\frac{3}{4}$. Oblicz sumę cosinusów tych kątów.

27. Wyznacz miarę kąta ostrego α spełniającego podane równanie.

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sqrt{3}(1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

28. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli wiadomo, że do ramienia końcowego tego kąta należy punkt P .

a) $P(-3, 3)$ b) $P(-3, 4)$ c) $P(-3, 9)$ d) $P(-2\frac{2}{3}, 2)$

29. Oblicz.

a) $\cos 120^\circ + \sin 150^\circ$ c) $\operatorname{tg} 120^\circ \cdot \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ$
b) $\sin 135^\circ + \cos 135^\circ$ d) $\operatorname{tg} 150^\circ \cdot \sin 60^\circ - \sin 150^\circ$

30. Oblicz.

a) $\frac{\cos^2 180^\circ - \sin 120^\circ \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 135^\circ}$ b) $\frac{\sin^4 135^\circ + \sin^2 135^\circ \cos^2 45^\circ}{\cos^2 135^\circ \operatorname{tg} 135^\circ}$

31. Oblicz sinus i cosinus kąta, który z osią OX tworzy prosta o danym równaniu.

a) $y = 3x$ b) $x + y = 0$ c) $\sqrt{3}x + y = 0$ d) $12x - 5y = 0$

32. Sprawdź, czy istnieje kąt $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$, dla którego:

a) $\sin \alpha = 0,6$ i $\cos \alpha = 0,8$, c) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$,
b) $\sin \alpha = 0,5$ i $\cos \alpha = -0,5$, d) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ i $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$.

25. $\sin \alpha = \cos \beta$ oraz $\sin \beta = \cos \alpha$

a) $\cos \alpha + \cos \beta = \sin \beta + \sin \alpha = \frac{7}{5}$
b) $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 $(\frac{7}{5})^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$, czyli $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{12}{25}$
Zatem $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{12}{25}$.
c) $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{12}{25}$

28. a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -1$

b) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$

c) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = -3$

d) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$

21. a) $(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha})^2 =$
 $= (\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha})^2 =$
 $= (\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha})^2 =$
 $= \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} =$
 $= \frac{1}{(1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha}, \quad 5\frac{1}{3}$

b) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} =$
 $= \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} =$
 $= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$
 $= 2 \cos^2 \alpha - 1, \quad -\frac{1}{2}$
c) $1 - \cos^2 \alpha, \quad \frac{3}{4}$

22. $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha} =$
 $= \frac{\cos \alpha \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} +$
 $+ \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} =$
 $= \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha \sin \alpha} =$
 $= 2 - \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha} = 0$
 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$

23. $\frac{7}{5}$

24. a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 =$
 $= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha +$
 $+ 2 \sin \alpha \cos \alpha =$
 $= 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$
b) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 =$
 $= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha +$
 $- 2 \sin \alpha \cos \alpha =$
 $= 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
c) $\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha =$
 $= \sin^2 \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) =$
 $= \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{9}$

26. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

27. 60°

29. a) 0 b) 0 c) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ d) -1

30. a) $\frac{7}{8}$ b) -1

31. a) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$

d) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$

32. a) tak b) nie c) nie d) tak

33. a) $\frac{3+\sqrt{7}}{4}$ b) $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$

34. a) $\frac{11\sqrt{2}}{12}$ b) $-\frac{11\sqrt{2}}{12}$

35. a) $\frac{2}{5}$ b) $-\frac{2}{5}$

36. a) $3\alpha = 30^\circ$, czyli $\alpha = 10^\circ$

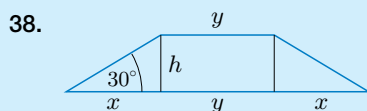
b) $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2\alpha = 30^\circ$, czyli $\alpha = 15^\circ$

c) $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$

$2\alpha = 45^\circ$, czyli $\alpha = 22,5^\circ$

37. $30^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 150^\circ$



$\frac{h}{10} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,

czyli $h = 5$ cm

$\frac{x}{10} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

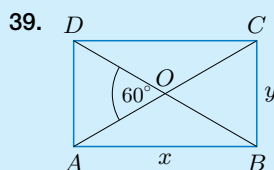
czyli $x = 5\sqrt{3}$ cm

$P = \frac{(10\sqrt{3}+2y) \cdot 5}{2} = 55\sqrt{3}$,

czyli $y = 6\sqrt{3}$ cm

Długości podstaw:

$6\sqrt{3}$ cm, $16\sqrt{3}$ cm



Trójkąty AOD i BOC są równoboczne, zatem przekątne prostokąta mają długość $2y$. Z twierdzenia Pitagorasa:

$x^2 = (2y)^2 - y^2 = 3y^2$, czyli

$\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{3}$. Zatem $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

40. Przekątne: 13, $13\sqrt{3}$

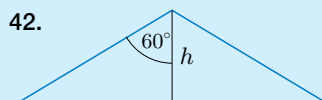
Wysokość: $\frac{13\sqrt{3}}{2}$

41. a) $3\sqrt{3}$

b) $|AB| = 6\sqrt{3}$

$\sphericalangle CAB = 30^\circ$

$\sphericalangle ABC = 90^\circ$



$\frac{4}{h} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$,

czyli $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

■ Zestaw III – podsumowujący

33. Dany jest kąt α taki, że $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha + \cos \alpha$, jeśli wiadomo, że:

a) α jest kątem ostrym,

b) α jest kątem rozwartym.

34. Dany jest kąt α taki, że $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha$, jeśli wiadomo, że:

a) α jest kątem ostrym,

b) α jest kątem rozwartym.

35. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, jeśli wiadomo, że:

a) α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg} \alpha = 2$,

b) α jest kątem rozwartym i $\operatorname{tg} \alpha = -0,5$.

36. Kąt 3α jest ostry. Wyznacz miarę kąta α , jeśli wiadomo, że:

a) $\sin 3\alpha = \frac{1}{2}$,

b) $4 \cos^2 2\alpha = 3$,

c) $\operatorname{tg}^2 2\alpha = 1$.

37. Ramiona trapezu mają długości $6\sqrt{2}$ i $2\sqrt{6}$ oraz tworzą z dłuższą podstawą kąty ostre. Oblicz miary wszystkich kątów tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest równa $3\sqrt{2}$.

38. Pole trapezu równoramiennego, który nie jest równoległobokiem, jest równe $55\sqrt{3}$ cm². Oblicz długości podstaw tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego ramię ma długość 10 cm i tworzy z podstawą kąt 30° .

39. Przekątne prostokąta przecinają się pod kątem 60° . Oblicz stosunek długości krótszego boku tego prostokąta do długości jego dłuższego boku.

40. Kąt ostry rombu o boku długości 13 ma miarę 60° . Oblicz długości przekątnych oraz wysokość tego rombu.

41. W trójkącie ABC kąt ACB ma miarę 60° oraz $|AC| = 12$ i $|BC| = 6$.

a) Oblicz wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka B .

b) Oblicz długość trzeciego boku i pozostałe kąty tego trójkąta.

42. Oblicz wysokość trójkąta równoramiennego o podstawie długości 8 i kącie między ramionami 120° .

43. Jedna z przyprostokątnych trójkąta jest o 2 krótsza od przeciwprostokątnej. Środkowa poprowadzona do tej przyprostokątnej ma długość $2\sqrt{6}$. Oblicz miary kątów ostrych tego trójkąta z dokładnością do 1° oraz długości jego pozostałych środkowych.

43. Niech $|BC| = x$, $|AB| = x - 2$.

Wówczas $|CD| = 2\sqrt{6}$ oraz

$|AC| = \sqrt{x^2 - (x-2)^2} = 2\sqrt{x-1}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla $\triangle ADC$:

$(2\sqrt{x-1})^2 + \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 = (2\sqrt{6})^2$, czyli $x = 6$

Zatem $|AB| = 4$, $|BC| = 6$ oraz $|CA| = 2\sqrt{5}$.

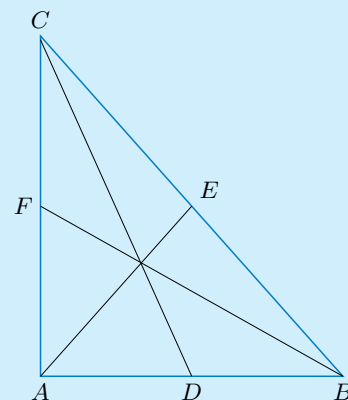
$|AE| = |BE| = |CE| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

Z twierdzenia Pitagorasa dla $\triangle ABF$:

$|BF| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$

$\sin \sphericalangle ACB = \frac{4}{6}$, czyli $\sphericalangle ACB \approx 42^\circ$,

stąd $\sphericalangle ABC \approx 48^\circ$



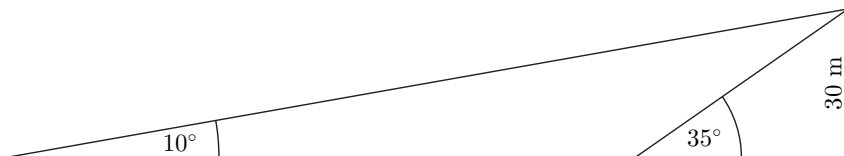
44. Ramię trapezu równoramiennego ma długość 10 cm, przekątna jest równa 15 cm, a kąt ostry ma miarę 50° . Oblicz pole tego trapezu z dokładnością do 1 cm^2 .

45. Podstawy trapezu równoramiennego $ABCD$ mają długości $|AB| = 9 \text{ cm}$ i $|CD| = 5 \text{ cm}$. Przekątna tego trapezu jest prostopadła do ramienia i ma długość $3\sqrt{7} \text{ cm}$. Rozwiąż trójkąt BDC .

46. Oblicz miarę kąta ostrego w rombie o boku długości 10 i krótszej przekątnej długości 8.

47. Oblicz wysokość drzewa, które rzuca cień długości 20 m w momencie, gdy promienie słoneczne padają pod kątem 53° do powierzchni ziemi.

48. Wierchołek latarni morskiej znajduje się 30 m nad poziomem morza. W kierunku latarni płynął ponton, z którego było widać jej wierchołek pod kątem 10° . Po pewnym czasie ponton zbliżył się do latarni tak, że jej wierchołek było widać pod kątem 35° . Jaką odległość przebył ponton w tym czasie?



49. Z jednego okna latarni morskiej widać kuter pod kątem 10° , a z drugiego, położonego 4 m wyżej – pod kątem 11° . Oblicz odległość kutra od latarni.

50. Dany jest kąt rozwarty α taki, że $\text{tg } \alpha = -\frac{5}{12}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Dla kąta α spełnione jest równanie $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$.	P	F
2.	Dla kąta α spełnione jest równanie $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$.	P	F

51. Dany jest romb o przekątnych 6 cm i 8 cm. Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

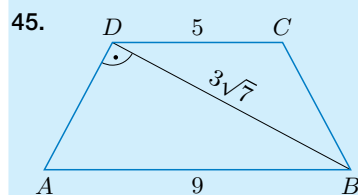
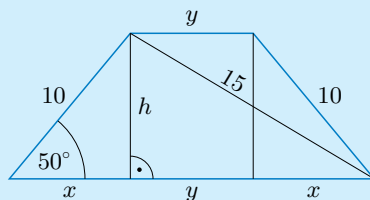
1. Miara kąta ostrego tego rombu z dokładnością do 1° jest równa:

A. 37° , B. 54° , C. 64° , D. 74° .

2. Wysokość tego rombu jest równa:

E. 3 cm, F. 3,2 cm, G. 4,8 cm, H. 5 cm.

44. $\frac{h}{10} = \sin 50^\circ$, czyli $h \approx 7,7 \text{ cm}$
 $\frac{x}{10} = \cos 50^\circ$, czyli $x \approx 6,4 \text{ cm}$
 $(y + 6,4)^2 + 7,7^2 = 15^2$, czyli $y \approx 6,5 \text{ cm}$
 $P \approx \frac{(2 \cdot 6,4 + 2 \cdot 6,5) \cdot 7,7}{2} = 99,3 \approx 99 \text{ [cm}^2\text{]}$



$$|BC| = \sqrt{9^2 - (3\sqrt{7})^2} = 3\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

Z twierdzenia cosinusów:

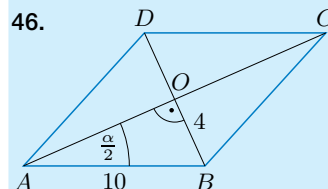
$$(3\sqrt{7})^2 = 5^2 + (3\sqrt{2})^2 + -2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos \angle BCD$$

$$\cos \angle BCD = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \text{ czyli } \angle BCD \approx 118^\circ$$

$$5^2 = (3\sqrt{7})^2 + (3\sqrt{2})^2 + -2 \cdot 3\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos \angle CBD$$

$$\cos \angle CBD = \frac{2\sqrt{14}}{9}, \text{ czyli } \angle CBD \approx 34^\circ$$

$$\text{Stąd } \angle BDC \approx 180^\circ - 118^\circ - 34^\circ = 28^\circ.$$



$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{10}, \text{ czyli } \alpha \approx 48^\circ$$

47. H – wysokość drzewa

$$\frac{H}{20} = \text{tg } 53^\circ \approx 1,327$$

$$H \approx 26,54 \text{ m}$$

48. $\frac{30}{\text{tg } 10^\circ} - \frac{30}{\text{tg } 35^\circ} \approx 30(5,6713 - 1,4281) = 127,296$

Ponton przebył około 127,3 m.

49. około 221,5 m

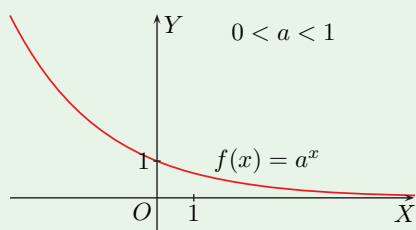
50. 1. F, 2. P

51. 1. D, 2. G

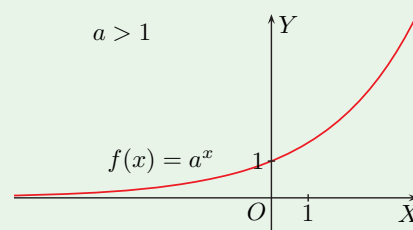
5.9. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Funkcja wykładnicza

Funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją wykładniczą**.



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca.

Logarytm

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, wówczas:

$$\log_a b = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^x = b$$

Jeżeli a , b , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

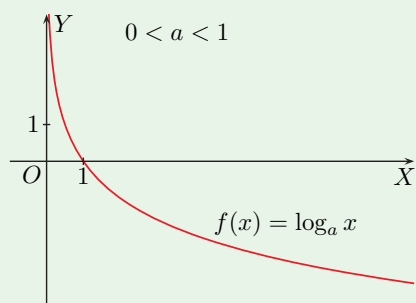
$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

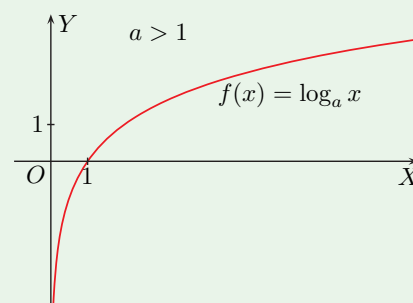
$$\log_a x^p = p \log_a x, \text{ gdzie } p \in \mathbf{R}$$

Funkcja logarytmiczna

Funkcję postaci $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, określoną dla $x \in (0; \infty)$, nazywamy **funkcją logarytmiczną**.



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca.

■ Zestaw I – wprowadzający

1. Oblicz.

a) $27^{\frac{4}{3}} - 0,01^{-0,5} \cdot 16^{\frac{3}{4}}$

b) $5 \cdot \left(\frac{25}{81}\right)^{-0,5} - (\sqrt[4]{3})^8$

c) $0,125^{-\frac{2}{3}} + 32^{\frac{4}{5}} : (\sqrt[6]{4})^3$

d) $\left((3\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[6]{64^2} + 4 \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[6]{16}\right)^{0,5}$

2. Przedstaw liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

a) $81\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[9]{27}$

c) $27\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{3}}$

3. Przedstaw liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{Q}$.

a) $3^{\frac{7}{4}} \cdot 9^{-\frac{3}{8}}$

c) $32^{\frac{7}{5}} \cdot \sqrt[3]{2^4}$

e) $\sqrt[4]{27^3} \cdot (\sqrt[3]{9})^{-2}$

b) $25^{\frac{3}{4}} : 125^{-\frac{5}{2}}$

d) $\sqrt[5]{64} : (0,5)^{\frac{3}{5}}$

f) $(0,04)^{-\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[4]{5^3}$

4. Które z liczb x, y, z są równe liczbie a ? Iloczyn xyz przedstaw w postaci p^r , gdzie $p \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbf{Q}$.

a) $a = 2^{\frac{7}{3}}$, $x = 2^7 \cdot \sqrt[3]{2}$, $y = 4 \cdot \sqrt[3]{2}$, $z = 2^7 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

b) $a = 3^{-\frac{4}{3}}$, $x = 3^{\frac{3}{4}}$, $y = \frac{1}{3^{\frac{3}{3}}}$, $z = \sqrt[3]{3^{-4}}$

c) $a = 2^{\frac{10}{3}} : \sqrt[3]{4}$, $x = 4\sqrt[3]{4}$, $y = (\frac{1}{2})^3$, $z = 2^3 \cdot 2^{-\frac{1}{3}}$

d) $a = 12^{\frac{2}{3}} : \sqrt[4]{36}$, $x = 2\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$, $y = \left(\frac{12^4}{6^3}\right)^{\frac{1}{6}}$, $z = 2^{\frac{5}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$

5. Oblicz.

a) $7^{4-\sqrt{3}} \cdot 7^{\sqrt{3}-2}$

c) $3^{\sqrt{5}-1} : 9^{\frac{\sqrt{5}}{2}+1}$

e) $\left(2^{\sqrt{7}} \cdot 0,5^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

b) $6^{\sqrt{2}+1,25} : 6^{\sqrt{2}-0,75}$

d) $(\sqrt{5})^{\sqrt{5}-1} : 5^{0,5\sqrt{5}}$

f) $\left(3^{1+\sqrt{2}} : 3^{1-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

6. Oblicz.

a) $\left[4 \cdot (0,5)^{\sqrt{3}}\right]^{2+\sqrt{3}}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}} \cdot 2^{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{5}^{\sqrt{5}} \cdot 5^{\sqrt{5}+1} \cdot 125^{1-\frac{\sqrt{5}}{2}}$

d) $(2 - \sqrt{3})^{\sqrt{2}}(2 + \sqrt{3})^{\sqrt{2}}$

7. Oblicz.

a) $\log_2 16$

c) $\log_2 \frac{1}{8}$

e) $\log_{0,5} 32$

g) $\log_{\sqrt{2}} 16$

b) $\log_{16} 2$

d) $\log_{\frac{1}{16}} 2$

f) $\log_8 \sqrt{2}$

h) $\log_{32} 2\sqrt{2}$

8. Oblicz.

a) $\log_{0,4} \frac{5}{3} + \log_{0,4} 3 - \log_{0,4} 2$

c) $3 \log 2 - \log 0,2 + \log 25$

b) $\log_9 15 - \log_9 \frac{20}{3} + 2 \log_9 6$

d) $\log_{\sqrt{2}} 6 + 2 \log_{\sqrt{2}} 2 - \log_{\sqrt{2}} 3$

7. a) 4 b) $\frac{1}{4}$ c) -3 d) $-\frac{1}{4}$ e) -5 f) $\frac{1}{6}$

8. a) $\log_{0,4} \left(\frac{\frac{5}{3} \cdot 3}{2}\right) = \log_{\frac{2}{5}} \frac{5}{2} = -1$

b) $\log_9 \left(\frac{15}{\frac{20}{3}} \cdot 6^2\right) = \log_9 81 = 2$

c) $\log \left(\frac{2^3}{0,2} \cdot 25\right) = \log 1000 = 3$

d) $\log_{\sqrt{2}} \left(\frac{6 \cdot 2^2}{3}\right) = \log_{\sqrt{2}} 8 = 6$

1. a) $3^4 - 100^{0,5} \cdot 2^3 = 1$

b) $5 \cdot \frac{9}{5} - 3^2 = 0$

c) $2^2 + 2^4 : 4^{\frac{1}{2}} = 12$

d) $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{6}}\right)^{0,5} = (9 + 4 \cdot 2^2)^{0,5} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$

2. a) $3^4 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{13}{3}}$

b) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{3}{2}}$

c) $3^3 \cdot \left(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^3 \cdot 3^{\frac{5}{6}} = 3^{\frac{23}{6}}$

3. a) $3^{\frac{7}{4}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} = 3^1$

b) $5^{\frac{3}{2}} : 5^{-\frac{15}{2}} = 5^9$

c) $2^7 \cdot 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{25}{3}}$

d) $2^{\frac{6}{5}} : 2^{-\frac{3}{5}} = 2^{\frac{9}{5}}$

e) $3^{\frac{9}{4}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}} = 3^{\frac{11}{12}}$

f) $5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 5^1$

4. a) $a = y$

$xyz = 2^{\frac{22}{3}} \cdot 2^{\frac{7}{3}} \cdot 2^{\frac{22}{3}} = 2^{17}$

b) $a = y = z$

$xyz = 3^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}} = 3^{-\frac{23}{12}}$

c) $a = 2^{\frac{10}{3}} : 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{8}{3}} = x = z$

$xyz = 2^{\frac{8}{3}} \cdot 2^{-3} \cdot 2^{\frac{8}{3}} = 2^{\frac{7}{3}}$

d) $a = \frac{2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{2}{4}}} = 2^{\frac{5}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = x = y = z$

$xyz = \left(2^{\frac{5}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}\right)^3 = 2^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 32^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 96^{\frac{1}{2}}$

5. a) 49 b) 36 c) $\frac{1}{27}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ e) 4 f) 81

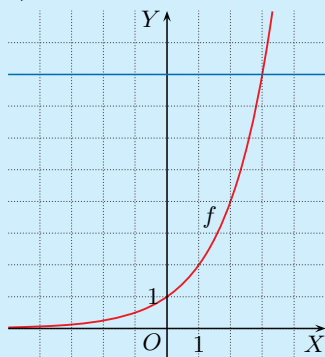
6. a) $(2^2 \cdot 2^{-\sqrt{3}})^{2+\sqrt{3}} = 2^{4-3} = 2$

b) $\frac{5^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot 5^{\sqrt{5}+1}}{5^{\frac{3\sqrt{5}}{2}-3}} = \frac{5^{\frac{3\sqrt{5}}{2}+1}}{5^{\frac{3\sqrt{5}}{2}-3}} = 5^4 = 625$

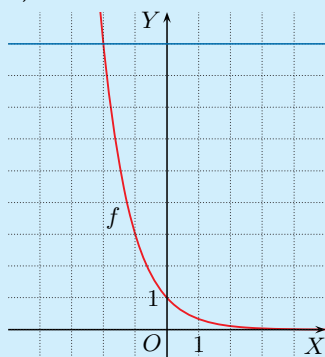
c) $2^{-\sqrt{5}} \cdot 2^{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} \cdot 2^{-2\sqrt{2}} = 2^0 = 1$

d) $((2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}))^{\sqrt{2}} = 1^{\sqrt{2}} = 1$

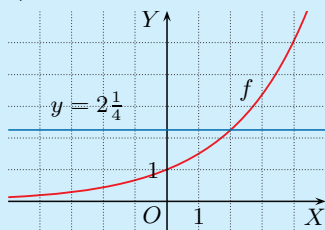
9. a) $0,5^{\sqrt{5}} \cdot 2^{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} \cdot 0,25^{\sqrt{2}} = 2^{-\sqrt{5}} \cdot 2^{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} \cdot 2^{-2\sqrt{2}} = 2^0 = 1$
 b) $(2 - \sqrt{3})^{\sqrt{2}} \cdot (2 + \sqrt{3})^{\sqrt{2}} = [(2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})]^{\sqrt{2}} = 1^{\sqrt{2}} = 1$
10. a) $x = 5$ b) $x = 2$ c) $x = 13$
 d) $x = 3$ e) $x = 5$ f) $x = 4$
 g) $x = 0$ h) $x = 2$ i) $x = -2$, $x = 2$
11. a) $a = \frac{1}{4}$, $b = -3$, $c = \frac{2}{3}$
 b) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = -1$, $c = 0$
12. a) $x > 3$



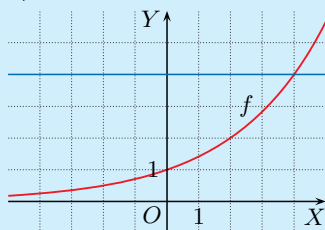
b) $x < -2$



c) $x > 2$



d) $x > 4$



■ Zestaw II – ćwiczeniowy

D 9. Uzasadnij, że podana liczba jest równa 1.

a) $0,5^{\sqrt{5}} \cdot 2^{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} \cdot 0,25^{\sqrt{2}}$ b) $(2 - \sqrt{3})^{\sqrt{2}}(2 + \sqrt{3})^{\sqrt{2}}$

10. Dla jakich wartości x zachodzi podana równość?

a) $3^x = 243$ d) $5 \cdot 5^x = 625$ g) $4^x = 2^x$
 b) $4^{x+1} = 64$ e) $0,25 \cdot 4^x = 256$ h) $3^{x+1} + 3^x = 36$
 c) $2^{x-3} = 1024$ f) $\frac{2}{3} \cdot 3^x = 54$ i) $2^{x^2} = 16$

11. Punkty A , B i C należą do wykresu funkcji f . Oblicz a , b i c .

a) $f(x) = 2^x$, $A(-2, a)$, $B(b, \frac{1}{8})$, $C(c, \sqrt[3]{4})$
 b) $f(x) = (\frac{3}{4})^x$, $A(\frac{1}{2}, a)$, $B(b, \frac{4}{3})$, $C(c, 1)$

12. Naskicuj wykres funkcji f . Z wykresu odczytaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od p .

a) $f(x) = 2^x$, $p = 8$ c) $f(x) = (\frac{3}{2})^x$, $p = 2\frac{1}{4}$
 b) $f(x) = 3^{-x}$, $p = 9$ d) $f(x) = (\sqrt{2})^x$, $p = 4$

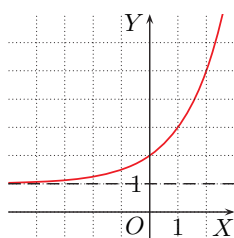
13. Dopasuj wzór funkcji do wykresu.

A. $f(x) = 2 \cdot 2^x$

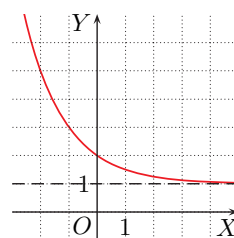
B. $g(x) = 2^x + 1$

C. $h(x) = 2^{-x} + 1$

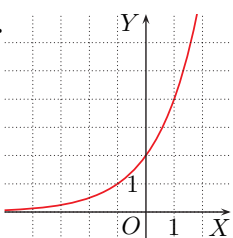
I.



II.



III.



14. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej zbiór wartości i określ monotoniczność tej funkcji.

a) $f(x) = 2^x - 8$ c) $f(x) = 3 + 2^{-x}$ e) $f(x) = 3^{x-1}$
 b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x - 4$ d) $f(x) = -4^{-x}$ f) $f(x) = 3^{2-x}$

15. Dla jakich wartości m funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x) = (2m - 3)^x$ b) $f(x) = (1 - 4m)^{-x}$ c) $f(x) = (2 - m^2)^x$

16. Określ, do którego z przedziałów: $(0; 1)$ czy $(1; \infty)$ należy liczba a , jeżeli:

a) $a^{\sqrt{2}} < a^{\sqrt{3}}$, b) $a^{\frac{1}{\sqrt{2}}} < a^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$, c) $a^{-2} < a^{-3}$, d) $a^3 > \frac{1}{a^2}$.

13. I – B, II – C, III – A

14. a) $f(D) = (-8; \infty)$, rosnąca
 b) $f(D) = (-4; \infty)$, malejąca
 c) $f(D) = (3; \infty)$, malejąca
 d) $f(D) = (-\infty; 0)$, rosnąca
 e) $f(D) = (0; \infty)$, rosnąca
 f) $f(D) = (0; \infty)$, malejąca

15. a) $2m - 3 > 1$, czyli $m \in (2; \infty)$
 b) $0 < 1 - 4m < 1$, czyli $m \in (0; \frac{1}{4})$
 c) $2 - m^2 > 1$, czyli $m \in (-1; 1)$

16. a), d) $a \in (1; \infty)$ b), c) $a \in (0; 1)$

17. Porównaj liczby. Wpisz odpowiedni symbol: $<$, $>$ lub $=$ w miejsce $?$.

a) $(\frac{1}{2})^{\sqrt{2}} ? \sqrt{2}^{0,5}$ b) $0,6^{-3} ? (\frac{5}{3})^2$ c) $2,5^{2,5} ? 0,4^{-2,5}$

18. Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $9\sqrt{3}$, $27^{\frac{3}{2}}$, $3^{\sqrt{3}}$, $9^{2,1}$ b) $0,8^{\sqrt{2}}$, $(\frac{16}{25})^{1,5}$, $(\frac{5}{4})^{-1,8}$, $(\frac{4}{5})^{\sqrt{5}}$

19. Naskicuj wykres funkcji f . Z wykresu odczytaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 1.

a) $f(x) = 2 - 2^{-x}$ b) $f(x) = 27 \cdot 3^x - 2$ c) $f(x) = -2^{x+1} + 3$

20. Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = 4 \cdot 2^x - 1$, $g(x) = 3^{x+1}$ b) $f(x) = 2^{2x-4}$, $g(x) = \frac{9}{3^x}$

21. Punkt A należy do wykresu funkcji f . Oblicz a .

a) $f(x) = 4^x$, $A(\log_2 6, a)$ b) $f(x) = 9^x$, $A(a, 5)$

■ Zestaw III – podsumowujący

D 22. Na podstawie definicji logarytmu uzasadnij, że $a^{\log_a b} = b$, a następnie oblicz:

a) $4^{\log_4 12}$, c) $3^{3 \log_3 10}$, e) $25^{\log_5 4}$, g) $4^{2 \log_2 3 + \log_2 5}$,
b) $10^{\log 13}$, d) $(\frac{1}{2})^{\log_2 5}$, f) $32^{\log_2 3}$, h) $9^{\log_3 6 - \log_4 16}$.

23. Oblicz podstawę logarytmu.

a) $\log_a 81 = 4$ c) $\log_a 9 = -2$ e) $\log_a \frac{8}{125} = 3$
b) $\log_a 81 = -4$ d) $\log_a 9 = \frac{1}{2}$ f) $\log_a \frac{8}{125} = -1$

24. Oblicz x .

a) $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$ b) $\log_{\sqrt{3}} x = 3$ c) $\log_{(x+2)} 27 = 3$

25. Oblicz x .

a) $\log_4 x = 2 \log_4 6 - \log_4 \frac{9}{4}$ c) $\log x = -2 + 3 \log 5 - \log 0,25$
b) $\log_{0,5} x = 1 + 2 \log_{0,5} 3$ d) $\log_3 x = 2 \log_3 4 - \log_3 12 - 1$

26. Oblicz $\sqrt{abc}$.

a) $a = \log_4 16$, $b = \log_2 64$, $c = \log_{0,5} \frac{1}{8}$
b) $a = \log_2 32$, $\log_b 10 = 1$, $\log_2 c = 3$

27. Naskicuj wykres funkcji f i podaj jej miejsce zerowe.

a) $f(x) = \log_2 x - 1$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 2$ c) $f(x) = \log_2 x + 2$

22. Z definicji logarytmu: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, stąd $a^x = a^{\log_a b} = b$

a) 12 b) 13 c) 1000 d) $\frac{1}{5}$ e) 16

f) $2^{5 \cdot \log_2 3} = 2^{\log_2 3^5} = 243$

g) $4^{\log_2 (3^2 \cdot 5)} = 2^{2 \cdot \log_2 45} = 2^{\log_2 45^2} = 2025$

h) $9^{\log_3 6 - 2} = \frac{3^{\log_3 6^2}}{9^2} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$

23. a) $a = 3$ b) $a = \frac{1}{3}$ c) $a = \frac{1}{3}$ d) $a = 81$

e) $a = \frac{2}{5}$ f) $a = \frac{125}{8}$

24. a) $x = 27$ b) $x = 3\sqrt{3}$ c) $x = 1$

25. a) $x = 16$ b) $x = 4,5$ c) $x = 5$ d) $x = \frac{4}{9}$

26. a) 6 b) 20

27. a) 2 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{4}$

17. a) $(\frac{1}{2})^{\sqrt{2}} = 2^{-\sqrt{2}} < 2^{\frac{1}{4}} = (\sqrt{2})^{0,5}$

b) $0,6^{-3} = (\frac{5}{3})^3 > (\frac{5}{3})^2$

c) $2,5^{2,5} = (\frac{5}{2})^{2,5} = 0,4^{-2,5}$

18. a) $9\sqrt{3} = 3^{2,5}$

$27^{\frac{3}{2}} = 3^{4,5}$

$3^{\sqrt{3}} \approx 3^{1,73}$

$9^{2,1} = 3^{4,2}$

Zatem:

$3^{\sqrt{3}} < 9\sqrt{3} < 9^{2,1} < 27^{\frac{3}{2}}$

b) $0,8^{\sqrt{2}} = (\frac{4}{5})^{\sqrt{2}}$

$(\frac{16}{25})^{1,5} = (\frac{4}{5})^3$

$(\frac{5}{4})^{-1,8} = (\frac{4}{5})^{1,8}$

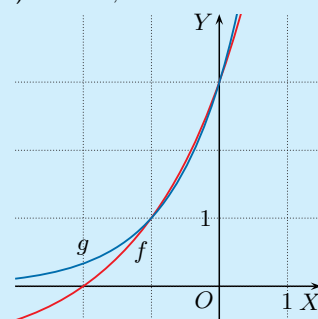
Zatem:

$(\frac{16}{25})^{1,5} < (\frac{4}{5})^{\sqrt{2}} < (\frac{5}{4})^{-1,8} < 0,8^{\sqrt{2}}$

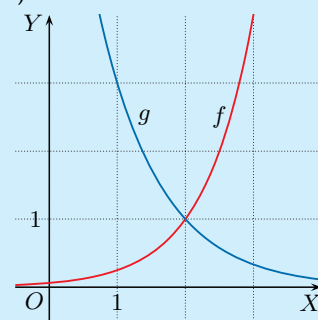
19. a) $x \in (0; \infty)$ b) $x \in (-2; \infty)$

c) $x \in (-\infty; 0)$

20. a) $x = -1$, $x = 0$

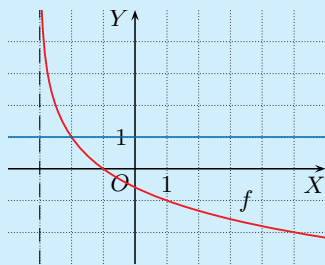


b) $x = 2$

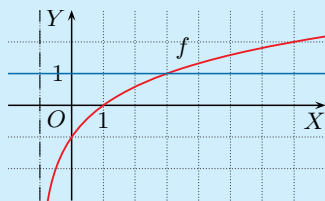


21. a) $a = 36$ b) $a = \log_9 5$

28. a) $f(x) \leq 1$ dla $x \in (0; 2)$,
 $g(x) \leq 1$ dla $x \in (1; 3)$
 b) $f(x) \leq 1$ dla $x \in \langle \frac{1}{2}; \infty \rangle$,
 $g(x) \leq 1$ dla $x \in \langle -\frac{3}{2}; \infty \rangle$
 c) $f(x) \leq 1$ dla $x \in (0; 3)$,
 $g(x) \leq 1$ dla $x \in (2; 5)$
 d) $f(x) \leq 1$ dla $x \in \langle \frac{1}{3}; \infty \rangle$,
 $g(x) \leq 1$ dla $x \in \langle -\frac{2}{3}; \infty \rangle$
29. a) $f(x) = 1$ dla $x = 3$,
 $g(x) = 1$ dla $x = \frac{1}{3}$
 b) $f(x) = 1$ dla $x = 4$,
 $g(x) = 1$ dla $x = -4$
 c) $f(x) = 1$ dla $x = \frac{1}{3}$,
 $g(x) = 1$ dla $x = 3$
 d) $f(x) = 1$ dla $x = \frac{1}{4}$,
 $g(x) = 1$ dla $x = -\frac{1}{4}$
30. a) $x \in (-3; -2)$



b) $x \in (3; \infty)$



28. Naskicuj wykresy funkcji f i g . Odczytaj z wykresu rozwiązania nierówności $f(x) \leq 1$ oraz $g(x) \leq 1$.
- a) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2(x-1)$ c) $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \log_3(x-2)$
 b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$
29. Naskicuj wykresy funkcji f i g . Odczytaj z wykresu rozwiązania równań $f(x) = 1$ oraz $g(x) - 1 = 0$.
- a) $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = -\log_3 x$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $g(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$
 b) $f(x) = \log_4 x$, $g(x) = \log_4(-x)$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{4}}(-x)$
30. Naskicuj wykres funkcji f . Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości większe od 1.
- a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+3) + 1$ b) $f(x) = \log_2(x+1) - 1$

Okres połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego to czas T , po którym masa próbki tego izotopu zmniejszy się o połowę. Jeśli m_0 jest początkową masą próbki, to masa próbki po upływie czasu t jest równa:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

31. Okres połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego pewnego pierwiastka wynosi 16 godzin. Po jakim czasie próbka tego izotopu straci:
- a) 75% swojej masy, b) 87,5% swojej masy?
32. Okres połowicznego rozpadu izotopu węgla ^{14}C wynosi około 5730 lat. Jaką masę będzie miała próbka tego izotopu o masie początkowej 96 g po upływie: a) 17 190 lat, b) 22 920 lat?
33. Masa próbki izotopu promieniotwórczego pewnego pierwiastka wynosiła 48 g, a po 24 dniach zmniejszyła się do 6 g. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu.
34. Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości a cm, b cm i c cm, gdzie $\log_5 a = 2$, $\log b = 2$, $\log_{0,5} c = -2$.
 Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Objętość tego prostopadłościanu jest równa 106 cm^3 .	P	F
2.	Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu wynosi 6000 cm^2 .	P	F

31. a) $0,25m_0 = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{16}}$
 $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{16}}$, stąd $\frac{t}{16} = 2$, czyli $t = 32$ h
 b) $0,125m_0 = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{16}}$
 $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{16}}$, stąd $\frac{t}{16} = 3$, czyli $t = 48$ h
32. a) $m = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{17190}{5730}} = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 12$ [g]
 b) $m = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{22920}{5730}} = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 6$ [g]
33. $6 = 48\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{T}}$
 $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{T}}$, stąd $\frac{24}{T} = 3$, czyli $t = 8$ dni
34. $a = 25$ cm, $b = 100$ cm, $c = 4$ cm, $V = 10\,000 \text{ cm}^3$, $P = 6000 \text{ cm}^2$
 1. F, 2. P

5.10. Ciągi

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich. Ciąg $a: \mathbf{N}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ oznaczamy (a_n) , a kolejne jego wartości nazywamy **wyrazami** i oznaczamy $a_1, a_2, a_3, \dots$

Ciągiem skończonym k -wyrazowym nazywamy funkcję, której dziedziną jest skończony zbiór liczb $\{1, 2, 3, \dots, k\}$.

Ciągi monotoniczne

Ciąg (a_n) nazywamy:

- **rosnącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} > a_n$,
- **malejącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} < a_n$,
- **nierosnącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} \leq a_n$,
- **niemalejącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} \geq a_n$,
- **stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy ciągu są równe.

Ciąg arytmetyczny

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągami arytmetycznym**, jeżeli istnieje taka liczba r , że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ zachodzi równość:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu (a_n) .

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r :

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Ciąg geometryczny

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągami geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q , że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ zachodzi równość:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu (a_n) .

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- a) 40 b) $6(1+8\sqrt{2})$
c) -8 d) 9
- a) a_7 b) a_2, a_{10}
- a) $a_n < 0$ dla $n \in \{1, 2, 3\}$,
3 wyrazy, $a_1 = -11$, $a_3 = -3$
b) $a_n < 0$ dla
 $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$,
5 wyrazów, $a_3 = -5$, $a_7 = -5$
c) $3 a_n < 0$ dla $n \in \{2, 3, 4\}$,
3 wyrazy, $a_2 = -5$, $a_4 = -5$
- a) $a_n = n^2$ b) $a_n = \frac{1}{2n-1}$
c) $a_n = \frac{n}{n+1}$
d) $a_n = (-1)^{n+1}2n$
e) $a_n = \frac{1}{3^n}$
f) $a_n = 2$ dla n nieparzystych
oraz $a_n = 2 + \frac{2}{n+2}$ dla n parzystych
- a) $a_{n+1} = \frac{1}{n+2}$
 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} =$
 $= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$
Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.
b) $a_{n+1} = 2 + \frac{4}{n+1}$
 $a_{n+1} - a_n = 2 + \frac{4}{n+1} +$
 $-2 - \frac{4}{n} = \frac{-4}{n(n+1)} < 0$
dla $n \in \mathbf{N}_+$
Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.
c) $a_{n+1} = \frac{5}{2n+3}$
 $a_{n+1} - a_n = \frac{5}{2n+3} - \frac{5}{2n+1} =$
 $= \frac{-10}{(2n+3)(2n+1)} < 0$
dla $n \in \mathbf{N}_+$
Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.
- a), c), e) rosnący
b), f) niemonotoniczny
d) malejący
- a) $a_n = 2n - 1$, $a_5 = 9$,
 $a_8 = 15$
b) $a_n = -5n + 13$, $a_5 = -12$,
 $a_8 = -27$
c) $a_n = \frac{1}{2}n - 1\frac{1}{2}$, $a_5 = 1$,
 $a_8 = 2\frac{1}{2}$

■ Zestaw I – wprowadzający

- Oblicz $3a_9 + b_{12}$.
a) $a_n = 2n - 6$, $b_n = \frac{1}{4}n + 1$
b) $a_n = 2^{\frac{n}{2}}$, $b_n = \frac{n^2+6}{2n+1}$
c) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-6}{n}$, $b_n = (-1)^{n+1}\sqrt{4n+1}$
d) $a_n = \log_3 n$, $b_n = \log_4(5n+4)$
- Dany jest ciąg (a_n) . Które wyrazy tego ciągu są równe 20?
a) $a_n = 3n - 1$ b) $a_n = 12n - n^2$
- Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) ? Oblicz pierwszy i ostatni z tych wyrazów.
a) $a_n = 4n - 15$ b) $a_n = n^2 - 10n + 16$ c) $a_n = (2n-3)(2n-9)$
- Zaproponuj wzór ogólny ciągu.
a) 1, 4, 9, 16, 25, ... c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ e) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \dots$
b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$ d) 2, -4, 6, -8, 10, ... f) $2, 2\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{3}, 2, \dots$
- Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący.
a) $a_n = \frac{1}{n+1}$ b) $a_n = 2 + \frac{4}{n}$ c) $a_n = \frac{5}{2n+1}$
- Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
a) $a_n = n^2 + n + 1$ c) $a_n = \frac{4n+1}{2n+1}$ e) $a_n = n^3 - n$
b) $a_n = n^2 - 6n + 8$ d) $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$ f) $a_n = (-1)^{n+1}$
- Dane są pierwsze trzy wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) . Podaj wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy a_5 i a_8 .
a) 1, 3, 5, ... b) 8, 3, -2, ... c) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \dots$
- Oblicz n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
a) $a_1 = -4$, $r = 2$, $n = 7$ c) $a_2 = 3$, $r = -2$, $n = 15$
b) $a_1 = 3$, $r = -5$, $n = 10$ d) $a_2 = 2$, $r = -\frac{1}{2}$, $n = 20$
- Dane są ciągi arytmetyczne: $a_n = n + 5$, $b_n = 5n + 3$, $c_n = 2n - 5$,
 $d_n = 5n + \frac{1}{2}$, $e_n = \frac{n}{5}$. Które z tych ciągów mają różnicę równą 5?
- Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
a) $a_n = \frac{2n+1}{4}$ b) $a_n = n^2 - 1$ c) $a_n = \sqrt{3}n - 1$ d) $a_n = \frac{n}{n+1}$
- a) $a_7 = 8$ b) $a_{10} = -42$
c) $a_{15} = -23$ d) $a_{20} = -7$
- (b_n) , (d_n)
- a) tak b) nie
c) $a_{n+1} = \sqrt{3}n + \sqrt{3} - 1$
 $a_{n+1} - a_n = \sqrt{3}$
Zatem jest to ciąg arytmetyczny o różnicy $\sqrt{3}$.
d) $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$
 $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$
Różnica $a_{n+1} - a_n$ nie jest stała dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

11. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) . Określ monotoniczność tego ciągu.
 a) $a_1 = 1, a_5 = 9$ b) $a_4 = -6, a_{10} = 12$ c) $a_3 = 0, a_6 = 2$
12. Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego podane warunki.
 a) $\begin{cases} a_1 + a_2 = -6 \\ a_2 + a_4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 + a_3 = 2 \\ a_2 \cdot a_4 = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_3 \cdot a_5 = -8 \\ a_3 + a_7 = -2 \end{cases}$
13. Dla jakich wartości x podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego? Podaj te wyrazy.
 a) $2x - 1, 2x + 5, 3x + 4$ b) $(x + 1)^2, (2x + 1)^2, (3x - 1)^2$
14. a) Wyznacz takie liczby a, b, c , aby liczby $3, a, b, c, 63$ tworzyły ciąg arytmetyczny.
 b) Między liczby $12 + \sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ wstaw pięć takich liczb, aby wszystkie razem tworzyły ciąg arytmetyczny.
15. a) W ciągu arytmetycznym suma wyrazów drugiego i trzeciego jest równa -4 , natomiast różnica wyrazów szóstego i dziesiątego jest równa 8 . Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.
 b) W ciągu arytmetycznym suma wyrazów drugiego i szóstego jest równa 4 , natomiast iloczyn wyrazów czwartego i siódmego jest równy 22 . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.
16. Dane są trzy początkowe wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) . Podaj wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy a_6 i a_{10} .
 a) $2, 4, 8, \dots$ b) $9, 3, 1, \dots$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \sqrt{2}, \dots$
17. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) . Oblicz wyrazy a_4 i a_7 .
 a) $a_1 = -3, q = 2$ c) $a_1 = 3, q = -\sqrt{2}$ e) $a_3 = 3, a_6 = -81$
 b) $a_1 = 4, q = -1$ d) $a_2 = 2, a_3 = 1$ f) $a_1 = 2\sqrt{3}, \frac{a_5}{a_2} = 3\sqrt{3}$
18. Dane są ciągi geometryczne: $a_n = 5 \cdot 2^n, b_n = 5^{n+1}, c_n = 2 \cdot (\frac{1}{5})^n, d_n = 3 \cdot 5^n, e_n = (-5)^{n-1}$. Które z tych ciągów mają iloraz równy 5 ?
19. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) . Określ jego monotoniczność.
 a) $a_3 = 8, a_4 = 16$ b) $a_2 = 18, a_5 = \frac{16}{3}$ c) $a_2 = \frac{1}{2}, a_7 = -2\sqrt{2}$
20. Oblicz iloraz rosnącego ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli $a_1 = 3$ i $a_4 = 24$. Który wyraz tego ciągu jest równy 48 ?
17. a) $a_n = -3 \cdot 2^{n-1}, a_4 = -24, a_7 = -192$
 b) $a_n = 4 \cdot (-1)^{n-1}, a_4 = -4, a_7 = 4$
 c) $a_n = 3 \cdot (-\sqrt{2})^{n-1}, a_4 = -6\sqrt{2}, a_7 = 24$
 d) $a_n = \frac{1}{2^{n-3}}, a_4 = \frac{1}{2}, a_7 = \frac{1}{16}$
 e) $a_n = \frac{(-3)^{n-1}}{3}, a_4 = -9, a_7 = 243$
 f) $a_n = 2 \cdot (\sqrt{3})^n, a_4 = 18, a_7 = 54\sqrt{3}$
18. $(b_n), (d_n)$
19. a) $a_n = 2^n$, rosnący
 b) $a_n = 27 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$, malejący
 c) $a_n = \frac{1}{4} \cdot (-\sqrt{2})^n$, niemonotoniczny
20. $q = 2, a_5 = 48$

11. a) $a_n = 2n - 1$, rosnący
 b) $a_n = 3n - 18$, rosnący
 c) $a_n = \frac{2}{3}n - 2$, rosnący
12. a) $a_n = 2n - 6, a_1 = -4, r = 2$
 b) $a_n = \frac{1}{2}n, a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}$
 c) $\begin{cases} (a_1 + 2r)(a_1 + 4r) = -8 \\ a_1 + 2r + a_1 + 6r = -2 \end{cases}$
 $a_1 = 17, r = -4,5$
 Zatem $a_n = -4,5n + 21,5$.
13. a) $(3x + 4) - (2x + 5) = (2x + 5) - (2x - 1)$
 $x - 1 = 6$, czyli $x = 7$
 Wyrazy ciągu: $13, 19, 25$
 b) $(x + 1)^2 + (3x - 1)^2 = 2(2x + 1)^2$
 $2x^2 - 12x = 0$
 $x = 0$ lub $x = 6$
 Wyrazy ciągu: $1, 1, 1$ lub $49, 169, 289$
14. a) $a = 18, b = 33, c = 48$
 b) $a_7 = a_1 + 6r$
 $\sqrt{2} = 12 + \sqrt{2} + 6r$,
 czyli $r = -2$
 Szukane liczby: $10 + \sqrt{2}, 8 + \sqrt{2}, 6 + \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$
15. a) $\begin{cases} (a_1 + r) + (a_1 + 2r) = -4 \\ (a_1 + 5r) - (a_1 + 9r) = 8 \end{cases}$
 $\begin{cases} 2a_1 + 3r = -4 \\ -4r = 8 \end{cases}$
 $a_1 = 1, r = -2$
 b) $\begin{cases} (a_1 + r) + (a_1 + 5r) = 4 \\ (a_1 + 3r)(a_1 + 6r) = 22 \end{cases}$
 $\begin{cases} a_1 = 2 - 3r \\ 2(2 + 3r) = 22 \end{cases}$
 $a_n = 3n - 10$
16. a) $a_n = 2^n, a_6 = 64, a_{10} = 1024$
 b) $a_n = \frac{27}{3^n}, a_6 = \frac{1}{27}, a_{10} = \frac{1}{2187}$
 c) $a_n = (\sqrt{2})^{n-2}, a_6 = 4, a_{10} = 16$

21. a) tak b) tak c) nie d) tak

22. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ dla $n \in \mathbb{N}_+$

a) tak, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = 4$

b) tak, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$

c) nie, $\frac{b_2}{b_1} = \frac{-11}{-5} \neq \frac{b_3}{b_2} = \frac{-23}{-11}$

23. a) 21, 63 b) 12, 24, 48

c) $a_1^3 q^3 = 1$, czyli $q = \frac{1}{a_1}$

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{13}{3}$$

$$a_1 + 1 + \frac{1}{a_1} = \frac{13}{3}$$

$$a_1^2 - \frac{10}{3}a_1 + 1 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{3}, q = 3$$

$$\text{lub } a_1 = 3, q = \frac{1}{3}$$

Szukane liczby: $\frac{1}{3}, 1, 3$ lub $3, 1, \frac{1}{3}$

24. a) $S_{12} = 51$

b) $S_9 = 9(1 + 3\sqrt{2})$

c) $S_{15} = 270$ d) $S_7 = 84$

26. $a_2 = a_1 + r = 0$, czyli $a_1 = -r$

$$S_{11} = \frac{(2a_1 + 10r) \cdot 11}{2} = \frac{8r \cdot 11}{2} = 44r = 220$$

$$\text{Stąd } r = 5 \text{ oraz } a_1 = -5.$$

$$a_n = -5 + (n-1) \cdot 5 = 25$$

$$\text{Zatem } n = 7, \text{ czyli } a_7 = 25.$$

27. $a_4 = a_1 + 3r = 6$

$$S_7 = \frac{(2a_1 + 6r) \cdot 7}{2} = \frac{2 \cdot (a_1 + 3r) \cdot 7}{2} = 42$$

28. a) $\frac{2+x}{2} \cdot \frac{x}{2} = 110$

$$x = 20$$

b) $\frac{5-x}{2} \cdot \frac{x+9}{4} = -72$

$$x^2 + 4x - 621 = 0$$

$$(x+27)(x-23) = 0$$

$$x = 23$$

c) $\frac{1+(4x-3)}{2} \cdot x = 120$

$$2x^2 - x - 120 = 0$$

$$(2x+15)(x-8) = 0$$

$$x = 8$$

d) $\frac{-4+3x+2}{2} \cdot (x+3) = 72$

$$3x^2 + 7x - 150 = 0$$

$$(3x+25)(x-6) = 0$$

$$x = 6$$

21. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

a) $a_n = \frac{2^n}{3}$ b) $a_n = 4 \cdot 5^{n+2}$ c) $a_n = 1 + 2^n$ d) $a_n = 3^n \cdot 5^{n-1}$

22. Wykaż, że ciąg $a_n = 3 \cdot 2^n$ jest ciągiem geometrycznym. Czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym?

a) $b_n = (a_n)^2$ b) $b_n = 5 \cdot a_n$ c) $b_n = 1 - a_n$

23. a) Między liczby 7 i 189 wstaw dwie takie liczby, aby wszystkie razem tworzyły ciąg geometryczny.

b) Między liczby 6 i 96 wstaw trzy takie liczby, aby wszystkie razem tworzyły ciąg geometryczny rosnący.

c) Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa $4\frac{1}{3}$, a ich iloczyn jest równy 1. Znajdź te liczby.

■ Zestaw II – ćwiczeniowy

24. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) .

a) $a_1 = \frac{3}{2}, r = \frac{1}{2}, n = 12$ c) $a_1 = -3, a_3 + a_4 = 9, n = 15$

b) $a_1 = 1 - \sqrt{2}, r = \sqrt{2}, n = 9$ d) $a_2 = 2, a_{12} - a_9 = 15, n = 7$

25. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych dodatnich, które:

a) przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2,

b) są podzielne przez 4 lub są podzielne przez 6.

26. Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0, a suma jedenastu początkowych wyrazów jest równa 220. Który wyraz tego ciągu jest równy 25?

27. Czwarty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 6. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

28. Lewa strona równania jest sumą kilku początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Oblicz x .

a) $2 + 4 + 6 + \dots + x = 110$ c) $1 + 5 + 9 + \dots + (4x-3) = 120$

b) $5 + 1 - 3 - \dots - x = -72$ d) $-4 - 1 + 2 + \dots + (3x+2) = 72$

29. Ile początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r należy dodać, aby otrzymana suma była równa 8?

a) $a_1 = -7, r = 1$ b) $a_1 = \frac{4}{5}, r = \frac{2}{5}$

30. Liczby $-1, 8, 17$ są początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu należących do przedziału $(100; 200)$.

25. a) $a_1 = 12, a_n = 97, r = 5, n = 18$, zatem $S_{18} = 981$

b) S_1 – suma liczb dwucyfrowych podzielnych przez 4

S_2 – suma liczb dwucyfrowych podzielnych przez 6

S_3 – suma liczb dwucyfrowych podzielnych przez 12

$$S_1 = \frac{(12+96) \cdot 22}{2} = 1188, S_2 = \frac{(12+96) \cdot 15}{2} = 810, S_3 = \frac{(12+96) \cdot 8}{2} = 432$$

$$\text{Szukana suma: } S = S_1 + S_2 - S_3 = 1566$$

29. a) 16 b) 5

30. $a_n = 9n - 10$

$$100 < 9n - 10 < 200, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N}, \text{ stąd } n \in \{13, 14, \dots, 23\}$$

$$a_{13} = 107, a_{23} = 197$$

$$S = \frac{(107+197) \cdot 11}{2} = 1672$$

31. W skończonym ciągu arytmetycznym ostatni wyraz jest równy 17, a suma wszystkich wyrazów $S_n = 35$. Wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu, jeśli wiadomo, że jego różnica jest równa 3.
32. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) .
- a) $a_1 = 5, q = \frac{3}{2}, n = 5$ c) $a_3 = -1, a_6 = \frac{1}{8}, n = 6$
b) $a_1 = \sqrt{2}, q = -1, n = 45$ d) $a_1 \cdot a_4 = \sqrt{5}, a_2 = 1, n = 7$
33. a) Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 2. Suma wyrazów drugiego i ósmego jest o 6 większa od sumy wyrazów trzeciego i dziewiątego. Podaj wzór ogólny tego ciągu i wyznacz jego dwunasty wyraz.
b) Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 8. Suma wyrazów piątego i siódmego jest o 10 większa od wyrazu dziewiątego. Podaj wzór ogólny tego ciągu i wyznacz jego piętnasty wyraz.
34. Długości krawędzi czterech sześciennych pudełek tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{2}{3}$. Pudełka te ustawiono jedno na drugim i otrzymano wieżę o wysokości 65 cm. Sprawdź, czy najmniejsze pudełko ma objętość większą od $0,5 \text{ dm}^3$.
35. a) Suma wszystkich wyrazów skończonego ciągu geometrycznego jest równa $121\frac{1}{3}$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{3}$, a jego iloraz wynosi 3. Wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu.
b) Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa $\frac{77}{8}$. Iloraz tego ciągu wynosi $-\frac{1}{2}$. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.
36. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 3, a jego iloraz wynosi -2 . Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu:
a) o numerach nieparzystych, b) o numerach parzystych.
37. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie. Wypisz pięć początkowych wyrazów tego ciągu. Zbadaj, czy jest to ciąg monotoniczny.
- a) $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1, n \geq 1$ c) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n - n^2, n \geq 1$
b) $a_1 = -4, a_{n+1} = a_n + n, n \geq 1$ d) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n, n \geq 1$
38. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie. Czy jest to ciąg arytmetyczny lub geometryczny?
- a) $a_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n, n \geq 1$ c) $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n - 1, n \geq 1$
b) $a_1 = -2, a_{n+1} = a_n - 6, n \geq 1$ d) $a_1 = -5, a_{n+1} = 3^n a_n, n \geq 1$
38. a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 5$, ciąg geometryczny o ilorazie 5
b) $a_{n+1} - a_n = -6$, ciąg arytmetyczny o różnicy -6
c) $a_1 = 3, a_2 = 8, a_3 = 23$
 $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ oraz $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$
Ciąg nie jest ani arytmetyczny, ani geometryczny.
d) $a_1 = -5, a_2 = -15, a_3 = -135$
 $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ oraz $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$
Ciąg nie jest ani arytmetyczny, ani geometryczny.

31.
$$\begin{cases} a_1 + (n-1) \cdot 3 = 17 \\ \frac{(a_1 + 17) \cdot n}{2} = 35 \\ n = 10 \end{cases}$$
32. a) $S_5 = \frac{1055}{16}$ b) $S_{45} = \sqrt{2}$
c) $S_6 = -\frac{21}{8}$
d) $S_7 = 31 + \frac{156\sqrt{5}}{5}$
33. a) $(2+r) + (2+7r) - 6 = (2+2r) + (2+8r)$,
czyli $r = -3$
 $a_n = -3n + 5, a_{12} = -31$
b) $(8+3r) + (8+5r) - 10 = 8 + 7r$, czyli $r = 2$
 $a_1 = 8 - 2 = 6, a_n = 2n + 4$
 $a_{15} = 34$
34. $S_4 = a_1 \cdot \frac{1 - (\frac{2}{3})^4}{1 - \frac{2}{3}} = 65$,
czyli $a_1 = 27 \text{ cm}$
 $a_4 = a_1 \cdot (\frac{2}{3})^3 = 8 \text{ [cm]}$
 $V = 0,8^3 = 0,512 \text{ [dm}^3\text{]}$
Zatem $V > 0,5 \text{ dm}^3$.
35. a) 6 b) 14
36. a) $q = (-2)^2 = 4, a_1 = 3$
 $S_{10} = 3 \cdot \frac{1-4^{10}}{1-4} = 1\,048\,575$
b) $q = (-2)^2 = 4$,
 $b_1 = a_2 = -6$
 $S_{10} = -6 \cdot \frac{1-4^{10}}{1-4} = -2\,097\,150$
37. a) $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 2$,
 $a_4 = 2, a_5 = 2$, ciąg stały
b) $a_1 = -4, a_2 = -3$,
 $a_3 = -1, a_4 = 2, a_5 = 6$
 $a_{n+1} - a_n = n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$
Zatem ciąg jest rosnący.
c) $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = -2$,
 $a_4 = -11, a_5 = -27$
 $a_{n+1} - a_n = -n^2 < 0$
dla $n \in \mathbb{N}_+$
Zatem ciąg jest malejący.
d) $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}$,
 $a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}$
 $a_n > 0$ i $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$
dla $n \in \mathbb{N}_+$
Zatem ciąg jest malejący.

39. a) $b_1 = 4, b_2 = 16$
 $S_{10} = \frac{(2 \cdot 4 + 9 \cdot 12) \cdot 10}{2} = 580$

b)

$$\begin{cases} \frac{(2a_1 + 7 \cdot 2r) \cdot 8}{2} = 240 \\ \frac{(2(a_1 + r) + 7 \cdot 2r) \cdot 8}{2} = 256 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 16 \\ r = 2 \end{cases}$$

Zatem $a_1 = 16$ i $a_{16} = 46$.

40. $a_1 = -6, n = 25$

41.

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 28 \\ a_1 + 9r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 36 \\ r = -4 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{(2 \cdot 36 + (n-1)(-4))n}{2} = -40$$

$$(19 - n)n = -20, n \in \mathbb{N}_+$$

Zatem $n = 20$.

42. $S_k = \frac{(6+48)k}{2} = 405$
 $k = 15$
 $a_{15} = 6 + 14r = 48$
 $r = 3$

43. $\frac{(2a_1 + (n-1) \cdot 5)n}{2} + 500 =$
 $= \frac{(2(a_1 + n \cdot 5) + (n-1) \cdot 5)n}{2}$
Zatem $n = 10$.

44. $\frac{(2+42)n}{2} =$
 $= 242 + \frac{((2+r) + (42-r)) \cdot \frac{n-1}{2}}{2}$
Zatem $n = 21$.
 $a_{21} = 2 + 20r = 42$
 $r = 2$

45. I przypadek

Niech $6, 6 + r, 6 + 2r$ będą długościami boków trójkąta.
 $6^2 + (6 + r)^2 = (6 + 2r)^2$
oraz $r > 0$, czyli $r = 2$

Druga przyprostokątna: 8,
przeciwprostokątna: 10

II przypadek

Niech $6 - r, 6, 6 + r$ będą długościami boków trójkąta.
 $(6 - r)^2 + 6^2 = (6 + r)^2$
oraz $r > 0$, czyli $r = 1,5$

Druga przyprostokątna: 4,5,
przeciwprostokątna: 7,5

46. a) 3, 4 b) 6, 8

■ Zestaw III – podsumowujący

39. a) Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 4, a czwarty jest równy 16. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych.

b) Ciąg arytmetyczny składa się z szesnastu wyrazów. Suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 256, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 240. Oblicz pierwszy i ostatni wyraz tego ciągu.

40. W skończonym ciągu arytmetycznym wyrazy drugi, piąty i ostatni są równe odpowiednio $-4, 2$ i 42 . Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu oraz liczbę jego wyrazów.

41. W skończonym ciągu arytmetycznym trzeci wyraz jest równy 28, a dziesiąty -0 . Suma wszystkich wyrazów jest równa -40 . Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu oraz liczbę jego wyrazów.

42. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 6. Dla pewnej liczby k mamy $a_k = 48$, a suma k początkowych wyrazów ciągu $S_k = 405$. Oblicz różnicę tego ciągu oraz k .

43. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy 5 jest o 500 mniejsza od sumy następnych n wyrazów tego ciągu. Oblicz n .

44. Skończony ciąg arytmetyczny ma nieparzystą liczbę wyrazów. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 2, a ostatni jest równy 42. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest o 242 większa od sumy wyrazów o numerach parzystych. Oblicz różnicę tego ciągu oraz liczbę jego wyrazów.

45. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Jedna z przyprostokątnych ma długość 6. Oblicz długości drugiej przyprostokątnej oraz przeciwprostokątnej (rozważ dwie możliwości).

46. Oblicz długości boków prostokąta, jeżeli długości dwóch z nich razem z długością przekątnej tworzą ciąg arytmetyczny oraz:

a) obwód prostokąta jest równy 14, b) pole prostokąta jest równe 48.

47. Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny, a ich suma jest równa 36. Jeśli od pierwszej i drugiej liczby odejmiemy 7, a do trzeciej dodamy 9, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

48. Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny, a ich suma jest równa 114. Jeśli pierwszą i drugą liczbę pozostawimy bez zmian, a od trzeciej odejmiemy 6, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

47. $a - r, a, a + r$ – ciąg arytmetyczny
 $a - r - 7, a - 7, a + r + 9$ – ciąg geometryczny
 $3a = 36$, czyli $a = 12$, zatem liczby $5 - r, 5, r + 21$ tworzą ciąg geometryczny.
 $\frac{r+21}{5} = \frac{5}{5-r}$, skąd $(r+21)(5-r) = 25$,
 $r^2 + 16r - 80 = 0, r_1 = 4, r_2 = -20$
Szukane liczby: 8, 12, 16 lub 32, 12, -8

48. a, b, c – ciąg geometryczny
 $a, b, c - 6$ – ciąg arytmetyczny

$$\begin{cases} a + b + c = 11 \\ \frac{c}{b} = \frac{b}{a} \\ (c-6) - b = b - a \end{cases}$$

$a = 24, b = 36, c = 54$ lub $a = 54, b = 36, c = 24$

49. Kapitał w wysokości 1000 zł złożono w banku na procent składany. Jaka będzie wielkość kapitału po n latach przy oprocentowaniu rocznym r ?
- a) $n = 2, r = 4\%$ b) $n = 6, r = 5\%$ c) $n = 10, r = 4\%$

50. Bank przyjął kwotę 10 000 zł na 3% rocznie i pożyczyl ją na 8% rocznie. Ile zyska bank w ciągu czterech lat, a ile – w ciągu ośmiu lat?

51. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał 500 zł złożony w banku na pięć lat, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 4%, a odsetki są kapitalizowane:
- a) co pół roku, b) co dwa miesiące, c) co miesiąc?

52. W bankach A, B, C lokaty terminowe są oprocentowane 2% w skali roku. W banku A odsetki są kapitalizowane co rok, w banku B – co kwartał, a w banku C – co miesiąc. Do każdego z tych banków wpłacono 2000 zł. W którym banku odsetki od tej kwoty po roku będą największe? O jaki procent wzrośnie kapitał w każdym z tych banków po roku?

53. Banki A, B, C i D oferują następujące warunki oprocentowania lokat:
- bank A – 5,6% rocznie, odsetki kapitalizowane co miesiąc,
 bank B – 5,65% rocznie, odsetki kapitalizowane co kwartał,
 bank C – 5,75% rocznie, odsetki kapitalizowane co pół roku,
 bank D – 5,8% rocznie, odsetki kapitalizowane co rok.
 Który z tych banków oferuje najkorzystniejsze warunki?

54. Dany jest ciąg $a_n = (-1)^{n+1} + \frac{2}{n}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Liczby $a_1, a_2, 3$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.	P	F
2.	Trzeci wyraz ciągu a_n jest równy $\frac{5}{3}$.	P	F

55. Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciąg $a_n = 3n - n^2$ jest:

A.	nierosnący,	ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ różnica $a_{n+1} - a_n$ jest	1.	nieujemna.
B.	niemalejący,		2.	równa zero.
C.	stały,		3.	niedodatnia.

52. $K = 2000$ zł

Bank A : $K(1 + 0,02) = 1,02K$ o 2%

Bank B : $K(1 + \frac{0,02}{4})^4 \approx 1,02015K$ o około 2,015%

Bank C : $K(1 + \frac{0,02}{12})^{12} \approx 1,02018K$ o około 2,018%

Największe odsetki będą w banku C .

53. K – wpłacony kapitał

Bank A : $K \cdot (1 + \frac{0,056}{12})^{12} \approx 1,0575K$

Bank B : $K \cdot (1 + \frac{0,0565}{4})^4 \approx 1,0577K$

Bank C : $K \cdot (1 + \frac{0,0575}{2})^2 \approx 1,0583K$

Bank D : $K \cdot (1 + 0,058) \approx 1,058K$

Najkorzystniejsze warunki oferuje bank C .

49. a) 1081,60 zł
 b) 1340,10 zł
 c) 1480,24 zł

50. Po 4 latach: 2349,80 zł,
 po 8 latach: 5841,60 zł

51. a) 609,50 zł
 b) 610,30 zł
 c) 610,50 zł

54. $a_1 = 3, a_2 = 0, a_3 = \frac{5}{3}$
 1. F, 2. P

55. $a_{n+1} = -n^2 + n + 2$
 $a_{n+1} - a_n = -2n + 2$
 A. 3

5.11. Geometria analityczna

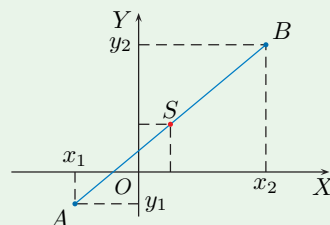
Dane są punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$.

Środek odcinka AB ma współrzędne:

$$S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Długość odcinka AB wyraża się wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej l o równaniu $Ax + By + C = 0$ wyraża się wzorem:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

■ Zestaw I – wprowadzający

- $(1, -2)$
 - $(2, -\frac{1}{2})$
 - $(0, -4)$
 - $(3, -\frac{7}{2})$
- $B(-7, 3)$
 - $B(1 - \sqrt{2}, 5\sqrt{3})$
- $a = \frac{3}{2}, b = 1$
 - $a = 8, b = 3$
 - $a = 4, b = -6$
 - $\begin{cases} \frac{a+2a}{2} = b \\ \frac{2+b}{2} = a \end{cases}$
 $a = 4, b = 6$
- 5
 - $3\sqrt{2}$
- $10 + 4\sqrt{5}$
 - $6\sqrt{5} + 2\sqrt{13}$
- Wyznacz współrzędne środka odcinka AB .
 - $A(-3, 2), B(5, -6)$
 - $A(4, -3), B(0, 2)$
 - $A(-4, 0), B(4, -8)$
 - $A(6 - \sqrt{2}, 1), B(\sqrt{2}, -8)$
 - Punkt S jest środkiem odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu B .
 - $A(5, -1), S(-1, 1)$
 - $A(\sqrt{2}, \sqrt{3}), S(\frac{1}{2}, 3\sqrt{3})$
 - Punkt S jest środkiem odcinka AB . Oblicz a i b .
 - $A(1, -3), B(2, 5), S(a, b)$
 - $A(-3, a), B(b, 2), S(0, 5)$
 - $A(0, 4), B(a, b), S(2, -1)$
 - $A(a, 2), B(2a, b), S(b, a)$
 - Oblicz odległość punktu $A(3, 2)$ od środka odcinka BC .
 - $B(-5, -2), C(3, 0)$
 - $B(7\frac{1}{2}, 2), C(4\frac{1}{2}, -4)$
 - Dany jest punkt $A(-4, 1)$. Oblicz długość odcinka AB , jeśli wiadomo, że:
 - jego środkiem jest punkt $(1, -4)$,
 - jego środek leży na osi OY , a rzędna punktu B jest równa -5 .
 - Oblicz obwód trójkąta ABC .
 - $A(2, -1), B(6, 7), C(2, 4)$
 - $A(0, 3), B(2, -1), C(6, 7)$
 - Oblicz długości środkowych trójkąta ABC .
 - $A(2, 1), B(16, 7), C(6, 11)$
 - $A(-2, -9), B(2, -10), C(3, 11)$
- $|AB| = 10\sqrt{2}$
 - $S_{AB}(0, y), B(x, -5)$

$$\begin{cases} \frac{-4+x}{2} = 0 \\ \frac{1-5}{2} = y \end{cases}$$

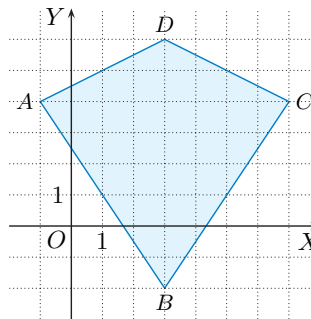
 $x = 4, y = -2$
 $|AB| = \sqrt{(4+4)^2 + (-5-1)^2} = 10$
- $|AB|^2 = 232, |AC|^2 = |BC|^2 = 116$, trójkąt jest równoramienny i prostokątny.
Długości środkowych: $\sqrt{145}, \sqrt{145}, \sqrt{58}$
 - $|AB|^2 = 17, |AC|^2 = 425, |BC|^2 = 442$, trójkąt jest prostokątny.
Długości środkowych: $\frac{\sqrt{442}}{2}, \frac{\sqrt{493}}{2}, \frac{\sqrt{1717}}{2}$

8. a) Oblicz obwód deltoidu przedstawionego na rysunku.

b) Oblicz obwód prostokąta, którego wierzchołkami są środki boków tego deltoidu.

9. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest równoramienny. Czy jest to trójkąt prostokątny?

- a) $A(-2, -2)$, $B(7, 1)$, $C(1, 4)$
b) $A(4, 2)$, $B(-2, 6)$, $C(8, -3)$



- D** 10. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach:

- a) $A(-3, 2)$, $B(0, 1)$ i $C(2, 7)$ jest prostokątny, oraz oblicz jego pole,
b) $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$ i $C(3, -4)$ jest równoramienny, oraz oblicz jego pole.

11. Wyznacz równania ogólne i kierunkowe (jeśli jest to możliwe) prostej AB .

- a) $A(2, 0)$, $B(-1, 6)$ d) $A(0, 4)$, $B(2, 0)$
b) $A(-10, 3)$, $B(10, 3)$ e) $A(-4, 5)$, $B(10, 5)$
c) $A(-4, -2)$, $B(5, 4)$ f) $A(\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

12. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(-1, 1)$ i równoległej do prostej l .

- a) $l: 6x - y = 0$ b) $l: 3x - 3 = 0$ c) $l: x + 6y = 0$

13. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(1, 1)$ i prostopadłej do prostej l .

- a) $l: 2x - 6 = 0$ b) $l: 2x + y + 3 = 0$ c) $l: \sqrt{2}x - y + 5 = 0$

14. Wyznacz równanie osi symetrii odcinka AB .

- a) $A(4, -14)$, $B(4, 25)$ b) $A(-2, -2)$, $B(2, 10)$ c) $A(-1, 7)$, $B(5, -2)$

15. Oblicz wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C , a następnie pole tego trójkąta.

- a) $A(-3, 1)$, $B(2, -4)$, $C(3, 3)$ b) $A(-2, 2)$, $B(6, 6)$, $C(3, -3)$

16. Oblicz pole rombu $ABCD$.

- a) $A(2, 1)$, $B(5, 2)$, $C(6, 5)$, $D(3, 4)$ b) $A(0, 1)$, $B(5, 3)$, $C(7, 8)$, $D(2, 6)$

17. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, którego bok CD jest zawarty w prostej k .

- a) $A(0, 3)$, $B(4, 1)$, $k: y = -\frac{1}{2}x + 5$ b) $A(-1, -3)$, $B(5, -1)$, $k: x = 3y - 5$

16. a) Prosta $AB: x - 3y + 1 = 0$

Wysokość opuszczona z wierzchołka $D: h = \frac{|1 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$

$$|AB| = \sqrt{10}, \text{ stąd } P = \sqrt{10} \cdot \frac{4\sqrt{10}}{5} = 8$$

- b) Prosta $AB: 2x - 5y + 5 = 0$

$$h = \frac{|2 \cdot 2 - 5 \cdot 6 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{21\sqrt{29}}{29}$$

$$|AB| = \sqrt{29}, P = 21$$

17. a) $k: x + 2y - 10 = 0$

Wysokość opuszczona z wierzchołka $A: h = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

$$|AB| = 2\sqrt{5}, \text{ stąd } P = 2\sqrt{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = 8$$

- b) 26

8. a) $4(\sqrt{5} + \sqrt{13})$ b) 16

9. a) równoramienny i prostokątny

b) nierównoramienny i nieprostokątny

10. a) $|AB| = \sqrt{10}$,

$$|AC| = 5\sqrt{2}, |BC| = 2\sqrt{10}$$

$$|AB|^2 + |BC|^2 = 10 + 40 = 50 = |AC|^2$$

Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt ABC jest prostokątny.

$$P = \frac{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10}}{2} = 10$$

- b) $|AB| = 2\sqrt{5}$,

$$|AC| = 5\sqrt{2}, |BC| = 5\sqrt{2}$$

$|AC| = |BC|$, czyli trójkąt jest równoramienny.

Wysokość trójkąta:

$$h^2 = (5\sqrt{2})^2 - (5\sqrt{5})^2 = 45,$$

czyli $h = 3\sqrt{5}$

$$P = \frac{2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}}{2} = 15$$

11. a) $2x + y - 4 = 0$, $y = -2x + 4$

$$b) y - 3 = 0, y = 3$$

$$c) 2x - 3y + 2 = 0, y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$d) 2x + y - 4 = 0, y = -2x + 4$$

$$e) y - 5 = 0, y = 5$$

$$f) x - \sqrt{2} = 0$$

12. a) $y = 6x + 7$ b) $x = -1$

$$c) y = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$$

13. a) $y = 1$ b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$$c) y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

14. a) $y = \frac{11}{2}$ b) $y = -\frac{1}{3}x + 4$

$$c) y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{6}$$

15. a) Prosta $AB: x + y + 2 = 0$

$$h = \frac{|1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 4\sqrt{2}$$

$$|AB| = 5\sqrt{2}, P = 20$$

- b) Prosta $AB:$

$$x - 2y + 6 = 0$$

$$h = \frac{|1 \cdot 3 - 2 \cdot (-3) + 6|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = 3\sqrt{5}$$

$$|AB| = 4\sqrt{5}, P = 30$$

■ Zestaw II – ćwiczeniowy

18. a) $A'(1, 3)$, $A''(-1, -3)$,
 $|A'A''| = 2\sqrt{10}$
 b) $A'(-\sqrt{2}, -4)$, $A''(\sqrt{2}, 4)$,
 $|A'A''| = 6\sqrt{2}$
 c) $A'(7, 0)$, $A''(-7, 0)$,
 $|A'A''| = 14$
19. a) $A'(1, 2)$, $B'(-3, 2)$,
 $C'(-3, -1)$, $D'(1, -1)$, $P = 4$
 b) $A'(0, 2)$, $B'(-5, -3)$,
 $C'(-2, -6)$, $D'(3, -1)$, $P = 8$
20. $A_1(2, 3)$, $B_1(-2, -7)$
 $y = \frac{5}{2}x - 2$
21. a) $p + 1 = -5$, czyli $p = -6$
 $2q - 1 = 3$, czyli $q = 2$
 b) $p + 1 = 5$, czyli $p = 4$
 $2q - 1 = -3$, czyli $q = -1$
 c) $p + 1 = -5$, czyli $p = -6$
 $2q - 1 = -3$, czyli $q = -1$

18. Punkty A' i A'' są obrazami punktu A odpowiednio w symetrii względem osi OX i osi OY . Wyznacz ich współrzędne i oblicz długość odcinka $A'A''$.
 a) $A(1, -3)$ b) $A(-\sqrt{2}, 4)$ c) $A(7, 0)$
19. Wyznacz współrzędne wierzchołków prostokąta $A'B'C'D'$ będącego obrazem prostokąta $ABCD$ w symetrii względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole ich części wspólnej.
 a) $A(-1, -2)$, $B(3, -2)$, $C(3, 1)$, $D(-1, 1)$
 b) $A(0, -2)$, $B(5, 3)$, $C(2, 6)$, $D(-3, 1)$
20. Punkty A_1 i B_1 są odpowiednio obrazami punktów $A(-2, -3)$ i $B(2, 7)$ w symetrii względem początku układu współrzędnych. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty A_1 i B_1 .
21. Wyznacz p i q , wiedząc, że punkty $A(3, p+1)$ i $B(2q-1, 5)$ są symetryczne względem: a) osi OX , b) osi OY , c) punktu $O(0, 0)$.
22. Trójkąt $A'B'C'$ jest symetryczny do trójkąta ABC względem początku układu współrzędnych. Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$. Oblicz pole części wspólnej tych trójkątów.
 a) $A(-1, -3)$, $B(3, 1)$, $C(-9, 5)$ b) $A(-3, -2)$, $B(3, -2)$, $C(0, 4)$

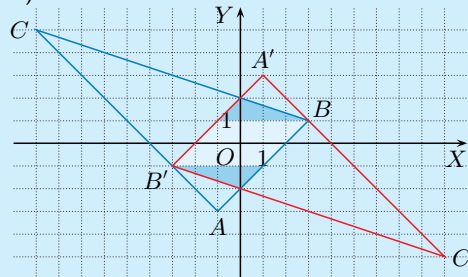
Okrąg o środku w punkcie $S(a, b)$ i promieniu r jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r .
 Punkt (x, y) należy do tego okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

23. a) $S(1, 3)$, $r = 6$
 b) $S(-2, 6)$, $r = 12$
 c) $S(-3, -\frac{1}{4})$, $r = \sqrt{3}$
 d) $S(4, -8)$, $r = 2\sqrt{2}$
24. a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$
 b) $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = \frac{4}{9}$
 c) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 18$
25. a) $(x - 2)^2 + y^2 = 10$
 b) $(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 8$
 c) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 65$

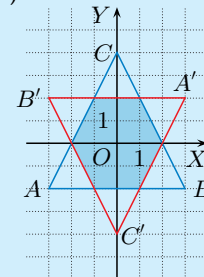
23. Wyznacz środek i promień okręgu określonego podanym równaniem.
 a) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 36$ c) $(x + 3)^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = 3$
 b) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 144$ d) $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 8$
24. Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r .
 a) $S(3, 4)$, $r = 3$ b) $S(-5, 3)$, $r = \frac{2}{3}$ c) $S(-3, -2)$, $r = 3\sqrt{2}$
25. Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie S przechodzącego przez punkt P .
 a) $S(2, 0)$, $P(1, 3)$ b) $S(3, -6)$, $P(5, -4)$ c) $S(2, 1)$, $P(-5, -3)$

22. a)



$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 12$$

b)



$$P = 2 \cdot \frac{2+4}{2} \cdot 2 = 12$$

26. Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek CD .
 a) $C(3, 5), D(7, 7)$ b) $C(-5, 4), D(1, 0)$ c) $C(2, -1), D(9, 6)$
27. Sprawdź, czy okrąg o średnicy AB jest symetryczny do okręgu o średnicy CD względem osi OX , osi OY lub początku układu współrzędnych.
 a) $A(1, 0), B(3, -6), C(-5, -4), D(1, -2)$
 b) $A(-3, -1), B(5, 5), C(-4, 2), D(2, -6)$
28. Wyznacz równanie okręgu o środku $S(-1, 4)$, który jest styczny do:
 a) osi OX , b) osi OY , c) prostej $4x - 3y = 9$.
29. Punkt A należy do okręgu stycznego do osi OY w punkcie $B(0, 2)$. Wyznacz równanie tego okręgu, jeśli: a) $A(6, 2)$, b) $A(-2, -2)$.
30. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty A i B , którego środek należy do prostej l .
 a) $A(3, -2), B(5, 0), l: y = x + 1$ b) $A(-1, 4), B(2, 1), l: y = 2x + 6$
31. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez wszystkie wierzchołki prostokąta $ABCD$.
 a) $A(-2, 1), B(-2, -3), C(6, -3), D(6, 1)$
 b) $A(-5, -2), B(2, -3), C(3, 4), D(-4, 5)$
32. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABC .
 a) $A(-1, 2), B(6, -2), C(3, 4)$ b) $A(2, 3), B(5, -1), C(-3, -7)$
33. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .
 a) $A(-9, 0), B(-1, -4), C(3, 4)$ b) $A(-1, 1), B(3, -1), C(3, 5)$
34. Dany jest okrąg o środku $S(1, 2)$ i promieniu 2. Określ wzajemne położenie tego okręgu oraz okręgu danego równaniem:
 a) $x^2 + (y - 2)^2 = 1$, c) $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 25$,
 b) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$, d) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$.
35. Określ, ile punktów wspólnych ma podana prosta z okręgiem o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.
 a) $x - 2y + 18 = 0$ b) $2x - y - 6 = 0$ c) $4x - 3y - 8 = 0$
36. Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia podanej prostej i okręgu $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$.
 a) $y = x + 3$ b) $y = x - 7$ c) $y = -x + 5$
32. a) $|AB| = \sqrt{65}, |BC| = \sqrt{45}, |AC| = \sqrt{20}$, czyli bok AB jest przeciwprostokątną, stąd:
 $S = S_{AB} \left(\frac{-1+6}{2}, \frac{2-2}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, 0 \right), r = \frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$
 $\left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{65}{4}$
 b) $\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{125}{4}$
33. a) $|AB| = \sqrt{80}, |BC| = \sqrt{80}, |AC| = \sqrt{160}$, czyli trójkąt jest prostokątny, a jego przeciwprostokątną jest bok AC , stąd:
 $S = S_{AC} \left(\frac{-9+3}{2}, \frac{0+4}{2} \right) = (-3, 2), r = \frac{|AC|}{2} = \frac{4\sqrt{10}}{2} = 2\sqrt{10}$
 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 40$
 b) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$
26. a) $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 5$
 b) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 13$
 c) $\left(x - \frac{11}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{5}{2} \right)^2 = \frac{49}{2}$
27. a) względem osi OY
 b) względem początku układu współrzędnych
28. a) $r = 4$
 $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$
 b) $r = 1$
 $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 1$
 c) $r = \frac{|4 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 - 9|}{5} = 5$
 $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$
29. a) $r = 3, S = (3, 2)$
 $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$
 b) $S = (x_0, 2), r = |x_0|, |BS| = |AS|$
 $x_0^2 = (x_0 + 2)^2 + (2 + 2)^2$
 $x_0 = -5$
 $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$
30. a) $S(x, x + 1)$
 $r = |AS| = |BS|$
 $\sqrt{(x - 3)^2 + (x + 1 + 2)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + (x + 1)^2}$,
 czyli $x = 1$, stąd $S(1, 2)$ oraz $r = 2\sqrt{5}$
 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$
 b) $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 45$
31. a) $S = S_{AC} \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{1-3}{2} \right) = (2, -1)$
 $r = \frac{|AC|}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$
 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$
 b) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$
34. a) styczne wewnętrznie
 b) rozłączne zewnętrznie
 c) przecinają się
 d) rozłączne wewnętrznie
35. a) 2 b) 0 c) 1
36. a) $A(-2, 1), B(3, 6), |AB| = 5\sqrt{2}$
 b) $A(3, -4), B(8, 1), |AB| = 5\sqrt{2}$
 c) $A(0, 5), B(7, -2), |AB| = 7\sqrt{2}$

■ Zestaw III – podsumowujący

37. $12\sqrt{5}$

38. $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 2\sqrt{13}$

Współczynniki kierunkowe:

$$a_{AB} = a_{CD} = \frac{2}{3}$$

$$a_{BC} = a_{AD} = \frac{3}{2}$$

Zatem $AB \parallel CD$ oraz

$BC \parallel AD$.

Czworokąt $ABCD$ jest więc rombem.

Długości przekątnych:

$$|AC| = 10\sqrt{2}, |BD| = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Pole: } P = 20$$

39. $|AB| = 6\sqrt{5}, |BC| = 3\sqrt{2},$

$$|AC| = 9\sqrt{2}, |PR| = \sqrt{2},$$

$$|RS| = 2\sqrt{5}, |PS| = 3\sqrt{2}$$

$$\frac{|AB|}{|RS|} = \frac{|BC|}{|PR|} = \frac{|AC|}{|PS|} = 3$$

Zatem trójkąty ABC i SRP są podobne – ich skala podobieństwa wynosi 3.

40. $C(2, 5), D(-4, 2)$

$$|AB| = |CD| = 3\sqrt{5}$$

$$|AD| = |BC| = 4\sqrt{2}$$

$$Ob = 6\sqrt{5} + 8\sqrt{2}$$

41. Przekątna kwadratu:

$$|AC| = 5\sqrt{10}$$

$$\text{Długość boku: } a = 5\sqrt{5}$$

Promień okręgu wpisanego:

$$r = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

42. $S_{AB}(x, 2x), A(x_A, 0)$

$$\frac{-4+0}{2} = 2x, \text{ skąd } x = -1$$

$$\frac{-5+x_A}{2} = -1, \text{ więc } x_A = 3$$

$$|AB| = 4\sqrt{5}$$

43. $y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}, y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{6}, (3, \frac{5}{3})$

44. $C(0, -4)$ lub $C(0, 4)$ lub

$$C(-2, -4) \text{ lub } C(-2, 4) \text{ lub}$$

$$C(2, -4) \text{ lub } C(2, 4)$$

45. $B(-5, 3)$ lub $B(5, 3)$

37. Punkty $A(-4, 3)$ i $B(-12, -1)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC . Oblicz obwód tego trójkąta.

38. Wykaż, że czworokąt o wierzchołkach $A(-2, -3), B(4, 1), C(8, 7)$ i $D(2, 3)$ jest rombem. Oblicz długości przekątnych i pole tego rombu.

39. Dane są punkty $A(-3, -5), B(9, 1), C(6, 4)$ i $P(2, -1), R(3, 0), S(-1, 2)$. Wykaż, że trójkąty ABC i PRS są podobne. Podaj skalę podobieństwa.

40. Punkty $A(0, -2)$ i $B(6, 1)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie $S(1, \frac{3}{2})$. Oblicz obwód tego równoległoboku.

41. Punkty $A(2, -9)$ i $C(-7, 4)$ są końcami przekątnej kwadratu $ABCD$. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten kwadrat.

42. Punkt A leży na osi OX , a punkt B ma współrzędne $(-5, -4)$. Środek odcinka AB leży na prostej $y = 2x$. Oblicz długość tego odcinka.

43. Dane są punkty $A(-1, 1), B(3, -1)$ i $C(7, 5)$. Wyznacz równania prostych zawierających środkowe trójkąta ABC oraz współrzędne punktu ich przecięcia.

44. Punkty $A(-2, 0)$ i $B(2, 0)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC o polu 8. Wyznacz współrzędne punktu C .

45. Punkty $A(0, 1)$ i $C(0, 3)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Wyznacz współrzędne punktu B , jeśli wiadomo, że pole trójkąta jest równe 5.

46. Punkty $A(0, 0)$ i $B(10, 0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego o kącie prostym przy wierzchołku C . Przyprostokątna AC jest zawarta w prostej $y = 3x$. Wyznacz współrzędne punktu C oraz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie.

47. Dane są dwa wierzchołki trójkąta ABC : $A(-3, 1)$ i $B(3, -2)$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Jedna z jego wysokości jest zawarta w prostej $y = 2x + 2$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C .

48. Prosta o równaniu $y = -x + 3$ jest symetralną odcinka AB . Wyznacz równanie prostej AB i współrzędne punktu B , jeśli $A(-1, -2)$.

46. Oznaczmy $C(x, 3x)$. Z twierdzenia Pitagorasa: $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$

$$(\sqrt{x^2 + 9x^2})^2 + (\sqrt{(x-10)^2 + 9x^2})^2 = 10^2$$

$$10x^2 + 10x^2 - 20x + 100 = 100, \text{ skąd } x = 1, \text{ czyli } C(1, 3)$$

Środek okręgu opisanego na trójkącie: $S(5, 0)$

47. Prosta AB : $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ jest prostopadła do prostej $y = 2x + 2$. Punktem wspólnym tych prostych jest $D(-1, 0)$.

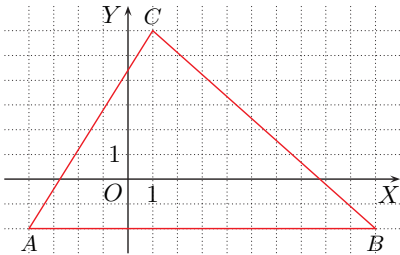
$$|AB| = 3\sqrt{5}, P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD|$$

$$15 = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot |CD|, \text{ czyli } |CD| = 2\sqrt{5}$$

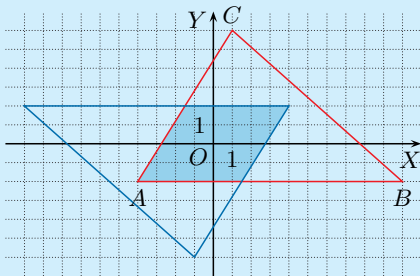
$$C(x, 2x + 2), \text{ więc } |CD| = \sqrt{(1+x)^2 + (2x+2)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0, \text{ skąd } x = -3 \text{ lub } x = 1, \text{ czyli } C(-3, -4) \text{ lub } C(1, 4)$$

48. $y = x - 1, B(5, 4)$

49. Dany jest trapez o wierzchołkach $A(-2, 1)$, $B(3, -4)$, $C(2, 3)$ i $D(1, 4)$.
- a) Wyznacz równania prostych zawierających boki AB , CD i AD .
- D b) Uzasadnij, że trapez ten jest prostokątny, i oblicz jego pole.
50. Dane są punkty $A(0, 0)$, $B(10, 10)$ i $C(4, 13)$. Z wierzchołka A trójkąta ABC poprowadzono wysokość AD . Wyznacz współrzędne punktu D i oblicz pole trójkąta ABC .
51. Wyznacz równania prostych zawierających boki trójkąta ABC , jeśli dane są równania dwóch prostych zawierających jego wysokości oraz współrzędne wierzchołka A .
- a) $x + y = 0$, $y = 3x$, $A(7, -1)$ b) $y = 2x + 7$, $x = -7$, $A(3, -2)$
52. Punkty P , R , S są środkami boków pewnego trójkąta. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.
- a) $P(-3, 1)$, $R(-2, -6)$, $S(0, 0)$ b) $P(-4, -2)$, $R(0, -4)$, $S(2, 2)$
53. Punkty $A(2, -3)$, $B(4, 3)$ i $C(-2, 5)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Wyznacz równanie osi symetrii tego trójkąta.
54. Trójkąt $A'B'C'$ jest symetryczny do trójkąta ABC (rysunek obok) względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$. Oblicz pole części wspólnej tych trójkątów.
- 
55. Odcięta punktu A jest równa 5, a rzędna punktu C jest równa 8. Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi OX , a punkt C – do punktu B względem osi OY . Podaj współrzędne punktów A , B i C .
56. Odcinek $A'B'$ jest obrazem odcinka AB w symetrii względem początku układu współrzędnych. Oblicz długość odcinka AB , mając dany środek $S'(7, -8)$ odcinka $A'B'$ oraz punkt $A(-6, 4)$.
57. Oblicz a i b , jeśli wiadomo, że punkty $A(a, 3)$ i $B(4a + 1, 2 - b)$ są symetryczne względem: a) osi OX , b) osi OY , c) punktu $(0, 0)$.
58. Punkty $A(-3, -2)$, $B(5, 2)$, $C(1, 6)$ i D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wyznacz współrzędne punktu D .

54. $A'(4, 2)$, $B'(-10, 2)$, $C'(-1, -6)$, $P = 22$



55. $A(5, -8)$, $B(5, 8)$, $C(-5, 8)$

56. $S(-7, 8)$

$$|AB| = 2|AS| = 2\sqrt{(-7+6)^2 + (8-4)^2} = 2\sqrt{17}$$

57. a) $a = -\frac{1}{3}$, $b = 5$

b) $a = -\frac{1}{5}$, $b = -1$

c) $a = -\frac{1}{5}$, $b = 5$

58. $D(-7, 2)$

49. a) $AB: y = -x - 1$,

$$CD: y = -x + 5,$$

$$AD: y = x + 3$$

b) Prosta AD jest prostopadła do prostych AB i CD , zatem trapez $ABCD$ jest prostokątny.

$$|AB| = 5\sqrt{2}, |CD| = \sqrt{2},$$

$$|AD| = 3\sqrt{2}$$

$$P = \frac{(5\sqrt{2} + \sqrt{2}) \cdot 3\sqrt{2}}{2} = 18$$

50. Prosta $BC: y = -\frac{1}{2}x + 15$

$$\text{Prosta } AD: y = 2x$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 15 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \end{cases}$$

Zatem $D(6, 12)$.

$$|BC| = 3\sqrt{5}, |AD| = 6\sqrt{5}$$

$$P_{ABC} = \frac{3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}}{2} = 45$$

51. a) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, $y = x - 8$,
 $y = 7x + 16$

b) Prosta AB prostopadła do prostej $y = 2x + 7$ i przechodząca przez punkt A :

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Prosta AC prostopadła do prostej $x = -7$ i przechodząca przez punkt A :

$$y = -2$$

$$\begin{cases} x = -7 \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Zatem $B(-7, 3)$.

$$\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = -2 \end{cases}$$

Stąd $C(-\frac{9}{2}, -2)$.

Zatem prosta BC ma równanie $y = -2x - 11$.

52. a) $(-1, 7)$, $(1, -7)$, $(-5, -5)$

b) $(-2, 4)$, $(6, 0)$, $(-6, -8)$

53. $y = \frac{1}{2}x + 1$

59. a) $(0, 0)$, $(0, 8)$, $(6, 0)$
 b) $(0, 2 - \sqrt{7})$, $(0, 2 + \sqrt{7})$,
 $(-3 - 2\sqrt{3}, 0)$, $(-3 + 2\sqrt{3}, 0)$

60. a) $r = \frac{|3 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \sqrt{10}$

Równanie okręgu:

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 10 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Punkt styczności: $(1, -2)$

b) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$,
 $(0, 6)$

c) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$, $(4, 0)$

d) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$,
 $(-6, -1)$

61. Punkt $(0, 4)$ należy do prostej
 $y = 2x + 4$.

Odległość między prostymi
 (średnicę okręgu) wyznaczamy,
 obliczając odległość
 punktu $(0, 4)$ od prostej
 $2x - y - 6 = 0$.

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$r = \frac{1}{2}d = \sqrt{5}$$

Szukana prosta ma postać
 $y = 2x + b$, gdzie $b \in (-6; 4)$.

$P(0, b)$ leży na tej prostej,
 stąd:

$$\frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot b - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5},$$

czyli $b = -1$

Szukana prosta: $y = 2x - 1$

62. Współczynnik kierunkowy
 prostej AB : $a_{AB} = 1$
 Prosta CD jest równoległa do
 prostej AB i przechodzi przez
 punkt C , ma więc równanie
 $y = x + 7$.

Prosta AD jest prostopadła
 do prostej AB i przechodzi
 przez punkt A , ma więc
 równanie $y = -x + 1$.

$$\begin{cases} y = x + 7 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

$D(-3, 4)$

Środek okręgu: $S = S_{AC}(1, 3)$

Współczynnik kierunkowy
 prostej DS : $a_{DS} = -\frac{1}{4}$

Styczna w punkcie D jest
 prostopadła do prostej DS
 i przechodzi przez D , zatem
 ma równanie $y = 4x + 16$.

59. Wyznacz punkty przecięcia okręgu z osiami układu współrzędnych.

a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

b) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$

60. Okrąg o środku w punkcie S jest styczny do prostej l . Wyznacz równanie okręgu oraz współrzędne punktu styczności.

a) $S(4, -1)$, $l: 3x + y - 1 = 0$

c) $S(3, 2)$, $l: y = \frac{1}{2}x - 2$

b) $S(-4, 3)$, $l: 4x + 3y - 18 = 0$

d) $S(-4, 2)$, $l: y = -\frac{2}{3}x - 5$

61. Proste $y = 2x + 4$ i $y = 2x - 6$ są styczne do pewnego okręgu. Oblicz promień tego okręgu. Wyznacz równanie prostej równoległej do danych prostych, jeśli wiadomo, że należy do niej środek tego okręgu.

62. Punkty $A(2, -1)$, $B(5, 2)$ i $C(0, 7)$ są trzema wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Wyznacz równanie stycznej do okręgu, do którego należą wszystkie wierzchołki tego prostokąta, jeśli punktem styczności jest punkt D .

63. Punkty $A(-5, 2)$ i $B(-1, -2)$ należą do okręgu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Wyznacz współrzędne punktu C należącego do tego okręgu tak, aby trójkąt ABC o podstawie AB był równoramienny.

64. Punkty $A(-1, -3)$ i $B(6, -2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$, którego osią symetrii jest prosta $y = 3x$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Jednym z wierzchołków tego rombu jest punkt $(-6, 2)$.	P	F
2.	Drugą osią symetrii tego rombu jest prosta $y = -3x$.	P	F

65. Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi tak, aby dla każdej z nich zdanie było prawdziwe.

Prostą styczną do okręgu $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$ jest prosta:

A. $x = -7$, C. $x = -3$, E. $y = -1$, G. $y = 3$.

B. $x = -6$, D. $x = -2$, F. $y = 2$,

66. Dany jest okrąg $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Środek tego okręgu leży w I ćwiartce układu współrzędnych.	P	F
2.	Okrąg ten przecina oś OY w punktach $(0, 0)$ i $(0, -2)$.	P	F

63. Współczynnik kierunkowy prostej AB : $a_{AB} = -1$

Środek odcinka AB : $S_{AB}(-3, 0)$

Prosta prostopadła do prostej AB i przechodząca przez S_{AB} : $y = x + 3$

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

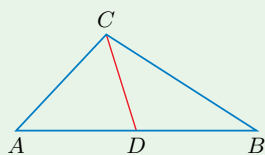
$$C(-2\sqrt{2} - 1, -2\sqrt{2} + 2) \text{ lub } C(2\sqrt{2} - 1, 2\sqrt{2} + 2)$$

64. 1. P, 2. F

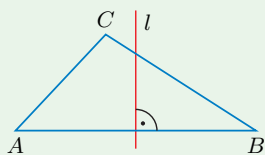
65. A, E

66. 1. F, 2. P

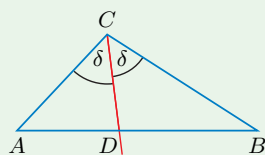
5.12. Planimetria



Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku (np. odcinek CD).

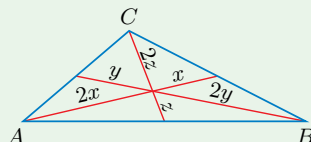


Symetralna boku trójkąta to prosta prostopadła do tego boku i przechodząca przez jego środek (np. prosta l).

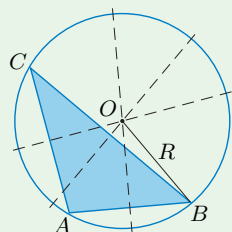
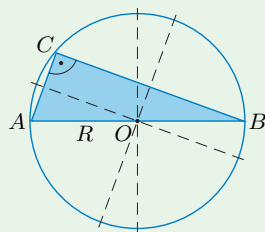
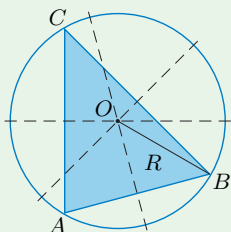


Dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta to półprosta o początku w wierzchołku tego kąta, dzieląca go na dwa kąty przystające (np. półprosta CD).

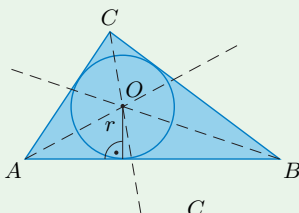
W dowolnym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie, zwanym **środkiem ciężkości** trójkąta. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2:1, gdy liczymy od wierzchołka.



Symetralne boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem okręgu opisanego** na tym trójkącie.



Dwusieczne kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem okręgu wpisanego** w ten trójkąt.



Wzory na pole trójkąta

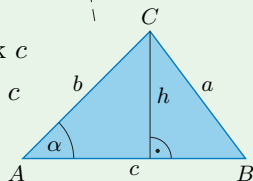
$P = \frac{1}{2}ch$, gdzie h jest wysokością opuszczoną na bok c

$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$, gdzie α jest kątem między bokami b i c

$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt

$P = \frac{abc}{4R}$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie

$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$



1. a) $\delta = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$
 b) $\delta = 32^\circ 30'$, $\varphi = 57^\circ 30'$
 c) $\delta = 50^\circ$, $\varphi = 40^\circ$

2. x – druga przyprostokątna
 y – przeciwprostokątna
 $x, y > 0$

a) $\frac{3x}{2} = \frac{\sqrt{5}y}{2}$, więc $y = \frac{3x}{\sqrt{5}}$

$3^2 + x^2 = \left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right)^2$

$x = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $y = \frac{9}{2}$

b) $y = 2 \cdot 2,5 = 5$, $x = 4$

c) $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ +$
 $+\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot x \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3x$
 $x = 6$, $y = 3\sqrt{5}$

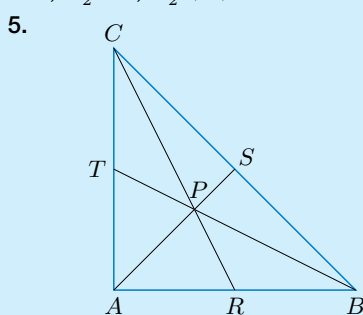
3. a) $\frac{5}{2}$ cm, $\sqrt{13}$ cm, $\frac{\sqrt{73}}{2}$ cm

b) $\frac{12}{5}$ cm

c) $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |AD| \cdot \sin 45^\circ +$
 $+\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ =$
 $= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$

$|AD| = \frac{12\sqrt{2}}{7}$ cm

4. a) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 3, $3\sqrt{3}$



$|AB| = |AC| = 9\sqrt{2}$ cm

$|CR| = |BT| = \frac{9\sqrt{10}}{2}$ cm

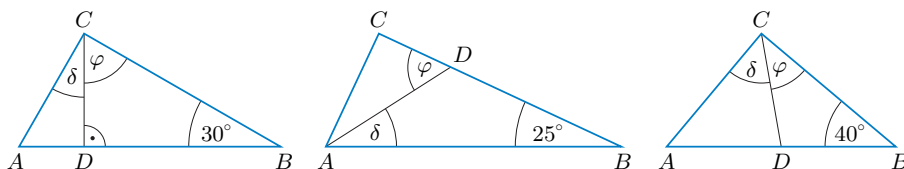
$|AS| = 9$ cm

$\frac{2}{3} \left(2 \cdot \frac{9\sqrt{10}}{2} + 9 \right) =$
 $= 6(\sqrt{10} + 1)$ [cm]

■ Zestaw I – wprowadzający

1. Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku C . Oblicz miary kątów δ i φ , jeśli wiadomo, że odcinek:

- a) CD jest wysokością, b) AD jest zawarty c) CD jest środkową.
w dwusiecznej,



Wskazówka do podpunktu c). W trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

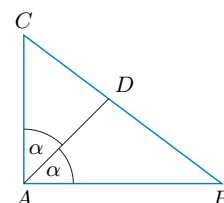
2. Długość jednej z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 3. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że:

- a) wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa $\sqrt{5}$,
 b) środkowa wychodząca z wierzchołka kąta prostego jest równa 2,5,
 c) odcinek dwusiecznej kąta prostego zawarty w trójkącie jest równy $2\sqrt{2}$.

Wskazówka do podpunktu c). Zapisz pole trójkąta jako sumę pól trójkątów, na które podzieliła go dwusieczna.

3. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 3 cm i 4 cm. Oblicz:

- a) długości środkowych tego trójkąta,
 b) wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną,
 c) długość odcinka AD (rysunek obok).

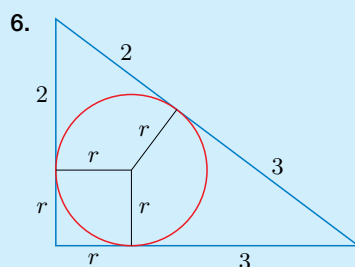


4. Dwa boki trójkąta mają długości $3\sqrt{3}$ i 6, a kąt między nimi zawarty ma miarę 30° . Oblicz:

- a) pole tego trójkąta, b) wszystkie wysokości tego trójkąta.

5. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej długości 18 cm. Środki tego trójkąta przecinają się w punkcie P . Oblicz sumę odległości punktu P od wierzchołków tego trójkąta.

6. W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Przeciwprostokątna została podzielona przez punkt styczności z okręgiem na odcinki o długościach 2 cm i 3 cm. Oblicz długości przyprostokątnych oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

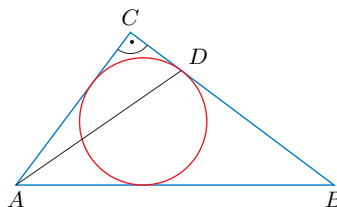


$(2+r)^2 + (3+r)^2 = 5^2$, $r > 0$

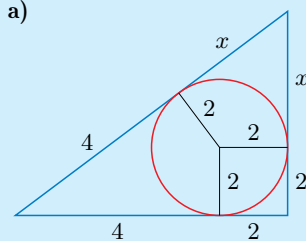
$r^2 + 5r - 6 = 0$

Zatem $r = 1$ cm, $a = 3$ cm, $b = 4$ cm.

7. Oblicz pole trójkąta prostokątnego o jednej z przyprostokątnych długości 6 cm, jeśli wiadomo, że:
- promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2 cm,
 - promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 4 cm.
8. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy 12,5, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3. Oblicz pole tego trójkąta.
9. Dane są długości boków trójkąta prostokątnego ABC (rysunek obok): $|AB| = 10$, $|BC| = 8$ i $|AC| = 6$. D jest punktem styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt z bokiem BC . Oblicz długość odcinka AD .
10. Podstawa w trójkącie równoramiennym ma długość 8 cm, a wysokość na nią opuszczona jest równa 4 cm. W trójkąt ten wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków, na które ramię trójkąta zostało podzielone przez punkt styczności z okręgiem.
11. W okrąg o promieniu 5 cm wpisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami 120° . Oblicz długości boków tego trójkąta.
12. Na okręgu o promieniu 6 cm opisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami 120° . Oblicz długość podstawy tego trójkąta.



7. a)



$$6^2 + (2+x)^2 = (4+x)^2$$

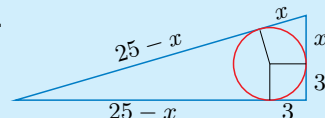
$$x = 6 \text{ cm}, 2 \text{ cm} + x = 8 \text{ cm}$$

$$P = 24 \text{ cm}^2$$

$$\text{b) } c = 8 \text{ cm}, b = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

$$P = 6\sqrt{7} \text{ cm}^2$$

8.



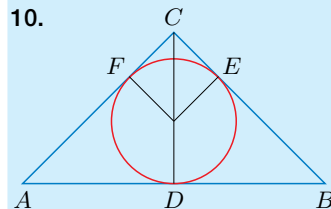
$$(x+3)^2 + (3+25-x)^2 = 25^2$$

$$x = 4 \text{ lub } x = 21$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24 = 84$$

9. $|CD| = r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC
- $$\frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{6+8+10}{2} \cdot r$$
- $$r = 2$$
- $$|AD| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$

10.



$$|AC| = |BC| = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$|AF| = |AD| = 4 \text{ cm}$$

Punkt styczności dzieli ramię trójkąta na odcinki o długościach: $4(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}$, 4 cm .

11. $2x, 2x, 2\sqrt{3}x$ – długości boków trójkąta
 x – wysokość trójkąta
 Korzystamy ze wzoru:
- $$P = \frac{abc}{4R}$$
- $$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot x = \frac{2x \cdot 2x \cdot 2\sqrt{3}x}{4 \cdot 5}$$
- czyli $2x = 5$
 Długości boków trójkąta:
 $5 \text{ cm}, 5 \text{ cm}, 5\sqrt{3} \text{ cm}$

Cechy podobieństwa trójkątów

Cecha BBB: jeśli długości trzech boków jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do długości trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

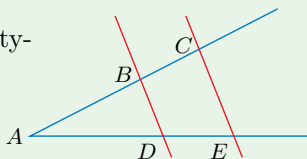
Cecha BKB: jeśli długości dwóch boków jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do długości dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

Cecha KKK: jeśli kąty jednego trójkąta są równe kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

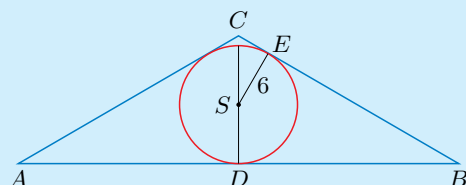
Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta A przetniemy dwiema prostymi równoległymi BD i CE (rysunek obok), to:

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}, \quad \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AE|}$$



12.



$$|SE| = 6 \text{ cm}$$

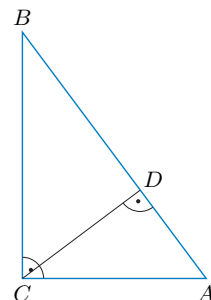
$$\frac{|SE|}{|SC|} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ czyli } |SC| = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|DB|}{6+4\sqrt{3}} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \text{ czyli } |DB| = 6(\sqrt{3} + 2) \text{ cm}$$

$$|AB| = 12(\sqrt{3} + 2) \text{ cm}$$

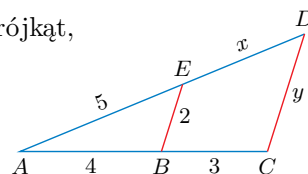
13. $|CA| = 5$
 $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$
 (z cechy KKK), stąd:
 $\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|CA|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|BD|} = \frac{3}{4}$,
 czyli $|BC| = \frac{20}{3}$ i $|BD| = \frac{16}{3}$
 Obliczamy wysokości, korzystając ze wzoru:
 $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$
 Szukane wysokości:
 $h_{ABC} = \frac{5}{3}$, $h_{ACD} = 1$,
 $h_{CBD} = \frac{4}{3}$
14. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunek w zadaniu 13, wówczas:
 $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (z cechy KKK), stąd:
 $\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|BD|}$, czyli
 $|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |BD|} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ [cm]
 $P = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39$ [cm²]
 $|CA| = 2\sqrt{13}$ cm
 $|BC| = 3\sqrt{13}$ cm
 $Ob = (13 + 5\sqrt{13})$ cm
15. a) 1:4 b) 1:2
16. $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ (z cechy KKK), stąd:
 $\frac{4}{7} = \frac{5}{5+x}$, więc $x = \frac{15}{4}$
 $\frac{4}{7} = \frac{2}{y}$, więc $y = \frac{7}{2}$

13. W trójkącie prostokątnym ABC z wierzchołka kąta prostego opuszczono wysokość CD (rysunek obok). Oblicz promienie okręgów wpisanych w trójkąty ABC , ADC i BCD , jeśli wiadomo, że $|AD| = 3$ oraz $|CD| = 4$.



14. W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją na odcinki o długościach 4 cm i 9 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

15. W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją w stosunku 1:4. Oblicz stosunek:
 a) pól trójkątów, na które wysokość dzieli ten trójkąt,
 b) długości przyprostokątnych tego trójkąta.

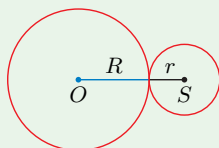


16. Odcinki BE i CD są równoległe (rysunek obok). Oblicz x i y .

17. W trójkącie ABC poprowadzono dwie proste równoległe do boku AB . Podzieliły one trójkąt na trzy figury o równych polach. Oblicz długości odcinków, na które te proste podzieliły bok AC , jeśli ma on długość $3\sqrt{3}$.

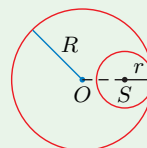
Określi styczne (mają jeden punkt wspólny)

styczne zewnętrznie



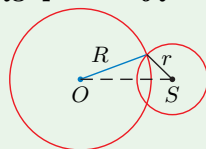
$$|OS| = R + r$$

styczne wewnętrznie



$$|OS| = |R - r|$$

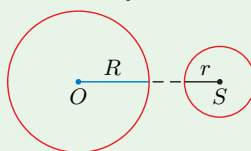
Określi przecinające się (mają dwa punkty wspólne)



$$|R - r| < |OS| < R + r$$

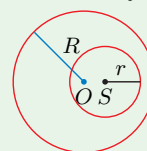
Określi rozłączne (nie mają punktów wspólnych)

rozłączne zewnętrznie



$$|OS| > R + r$$

rozłączne wewnętrznie



$$|OS| < |R - r|$$

17. $\triangle ABC \sim \triangle DEC \sim \triangle FGD$ (z cechy KKK), stąd:

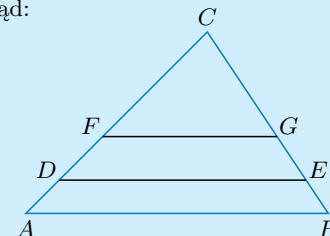
$$\frac{P_{FGC}}{P_{ABC}} = \frac{1}{3}, \text{ więc skala podobieństwa } k_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Zatem } \frac{|FC|}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ czyli } |FC| = 3.$$

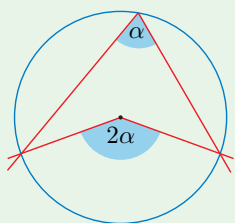
$$\frac{P_{DEC}}{P_{ABC}} = \frac{2}{3}, \text{ więc skala podobieństwa } k_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Zatem } \frac{|DF|+3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \text{ czyli } |DF| = 3\sqrt{2} - 3.$$

$$|AD| = 3\sqrt{3} - |FC| - |DF| = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

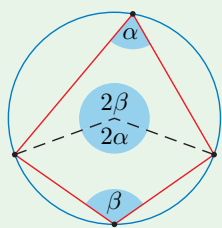


18. Dane są dwa okręgi o promieniach r i R . Określ wzajemne położenie tych okręgów, jeśli wiadomo, że odległość między ich środkami wynosi $2\sqrt{5}$ oraz:
- a) $r = \sqrt{5}$, $R = 3$, c) $r = 2$, $R = 2(\sqrt{5} - 1)$,
b) $r = 1$, $R = 2$, d) $r = 1,5$, $R = 3,5$.
19. Promienie dwóch okręgów są równe 2 i $x + 3$, a odległość między ich środkami jest równa 6. Dla jakiej wartości x okręgi te są:
- a) styczne zewnętrznie, b) styczne wewnętrznie?
20. Dane są dwa okręgi o promieniach r i R , a odległość między ich środkami jest równa x . Określ liczbę punktów wspólnych tych okręgów w zależności od x .
- a) $r = 1$, $R = 5$ b) $r = \sqrt{3}$, $R = 2 - \sqrt{3}$
21. W trójkącie prostokątnym ABC odcinek CD jest wysokością, a przyprostokątne mają długości $|AC| = 5$ i $|BC| = 2\sqrt{5}$. Dane są również dwa okręgi: pierwszy o środku w wierzchołku C i promieniu 1, drugi o środku w punkcie D i promieniu r . Podaj liczbę punktów wspólnych tych okręgów w zależności od r .
22. Dwa okręgi styczne zewnętrznie wpisano w kąt o wierzchołku P . Oblicz promienie tych okręgów, jeśli wiadomo, że odległość punktu P od jednego ze środków okręgów wynosi 6 cm, a od drugiego – 14 cm.

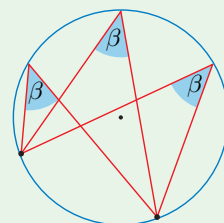


Kąt środkowy w okręgu ma miarę dwukrotnie większą od miary kąta wpisanego w ten okrąg opartego na tym samym łuku.

Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku mają równe miary.



Suma miar kątów α i β wpisanych w okrąg, jak na rysunku po lewej, jest równa 180° .



18. a) $3 - \sqrt{5} < 2\sqrt{5} < 3 + \sqrt{5}$

Okręgi przecinają się.

b) $2\sqrt{5} > 1 + 2$

Okręgi są rozłączne zewnętrznie.

c) $2\sqrt{5} = 2(\sqrt{5} - 1) + 2$

Okręgi są styczne zewnętrznie.

d) $3,5 - 1,5 < 2\sqrt{5} < 3,5 + 1,5$

Okręgi przecinają się.

19. a) $|x + 3 + 2| = 6$,

gdzie $x > -3$

$x = 1$

b) $|x + 3 - 2| = 6$,

gdzie $x > -3$

$x = 5$

20. a) 0 punktów dla

$x \in \langle 0; 4 \rangle \cup (6; \infty)$,

1 punkt dla $x \in \{4, 6\}$,

2 punkty dla $x \in (4; 6)$

b) 0 punktów dla

$x \in \langle 0; 2\sqrt{3} - 2 \rangle \cup (2; \infty)$,

1 punkt dla $x \in \{2\sqrt{3} - 2, 2\}$,

2 punkty dla $x \in (2\sqrt{3} - 2; 2)$

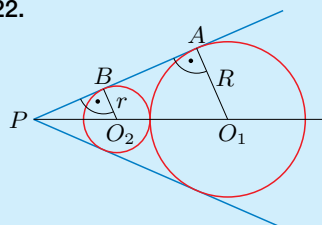
21. 0 punktów dla

$r \in (0; 2\frac{1}{3}) \cup (4\frac{1}{3}; \infty)$,

1 punkt dla $r \in \{2\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3}\}$,

2 punkty dla $r \in (2\frac{1}{3}; 4\frac{1}{3})$

22.



Trójkąty PBO_2 i PAO_1 są podobne (KKK).

$$\frac{R}{r} = \frac{14}{6}$$

$$R + r = |PO_1| - |PO_2| = 8$$

$$r = 2,4 \text{ cm}, R = 5,6 \text{ cm}$$

23. a) $\alpha = \beta = \gamma = 40^\circ$
 b) $\alpha = 30^\circ, \beta = 120^\circ, \gamma = 90^\circ$
 c) $\alpha = 50^\circ, \beta = 100^\circ, \gamma = 40^\circ$

24. $\angle PAB = 90^\circ - \angle OAB =$
 $= 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) =$
 $= \frac{1}{2} \angle AOB = \angle ACB$

25. $\angle A = \angle B = 32^\circ, \angle O = 116^\circ$

26. a) 62° b) 120° c) 54°

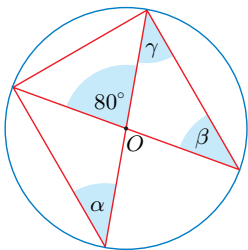
27. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku w zadaniu 24, wówczas:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\angle AOB}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 3,$$

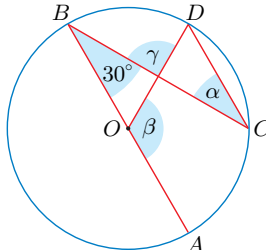
czyli $\angle AOB = 30^\circ$
 $\angle PAB = \angle ACB =$
 $= \frac{1}{2} \angle AOB = 15^\circ$

23. Wyznacz miary kątów α, β i γ .

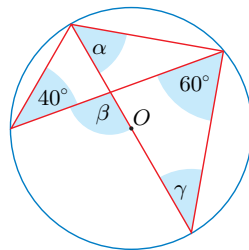
a)



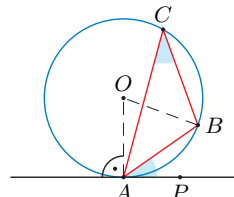
b) $AB \parallel CD$



c)



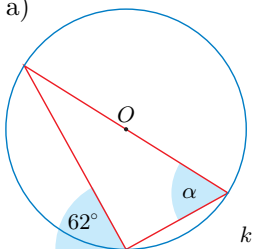
24. Uzasadnij, że kąt PAB między styczną do okręgu a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu ACB opartemu na łuku wyznaczonym przez końce tej cięciwy (rysunek obok).



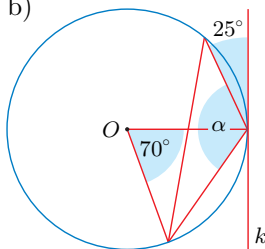
25. W okręgu o środku O poprowadzono cięciwę AB . Miara kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie B wynosi 58° . Wyznacz miary kątów trójkąta AOB .

26. Prosta k jest styczna do okręgu o środku O . Wyznacz miarę kąta α .

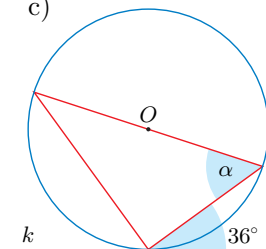
a)



b)



c)



27. W okręgu o promieniu 3 cm cięciwa AB wyznacza łuk o długości $\frac{\pi}{2}$ cm. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie A .

28. a) Podaj miary kątów wewnętrznych dziesięciokąta i dwunastokąta foremnego.

Wielokąt nazywamy **foremny**, jeśli ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty wewnętrzne przystające.

b) Wykaż, że kąty wewnętrzne n -kąta foremnego mają miarę $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

29. Oblicz długość boku wielokąta foremnego o obwodzie równym 20, jeśli suma miar kątów wewnętrznych tego wielokąta jest równa: a) 540° , b) 1440° .

28. a) Dziesięciokąt foremny: 144°

Dwunastokąt foremny: 150°

b) Suma miar kątów wewnętrznych n -kąta foremnego jest równa $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Zatem miara kąta wewnętrznego n -kąta foremnego jest równa $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

29. a) $(n-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$, więc $n = 5$, $a = 20 : 5 = 4$

b) $(n-2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$, więc $n = 10$, $a = 20 : 10 = 2$

■ Zestaw II – ćwiczeniowy

30. Różnica między długością przekątnej kwadratu a długością jego boku jest równa d . Wyznacz pole i obwód tego kwadratu.
31. a) Bok sześciokąta foremnego ma długość 1. Oblicz różnicę pola koła opisanego na tym sześciokącie i pola koła w niego wpisanego.
- D** b) Wykaż, że dla dowolnego wielokąta foremnego o boku długości a różnica pola koła opisanego na tym wielokącie i pola koła w niego wpisanego jest równa $\frac{\pi}{4}a^2$.
32. Kąt ostry rombu ma miarę 70° . Oblicz miarę kąta zawartego między wysokościami poprowadzonymi z wierzchołka kąta rozwartego.
33. Przekątne równoległoboku mają długości 16 i 8, a kąt zawarty między nimi ma miarę 60° . Oblicz obwód tego równoległoboku.
34. Dłuższa podstawa trapezu ma długość 9 cm, a punkt przecięcia jego przekątnych dzieli je w stosunku 2:3. Oblicz długość krótszej podstawy.
35. W trapezie równoramiennym przekątna ma długość $8\sqrt{5}$ cm, wysokość jest równa 8 cm, a stosunek długości podstaw wynosi 1:3. Oblicz pole i obwód tego trapezu.
- D** 36. a) Wykaż, że długość odcinka łączącego środki ramion trapezu jest średnią arytmetyczną długości jego podstaw.
- b) Wysokość trapezu jest równa 5 cm, a odcinek łączący środki jego ramion ma długość 10 cm. Oblicz pole tego trapezu.

Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są równe średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

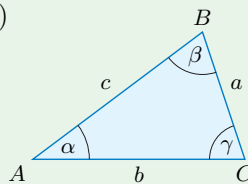
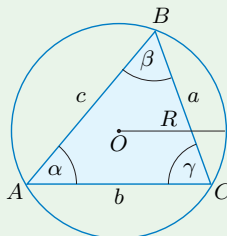
Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta (oznaczenia jak na rysunku) prawdziwe są następujące zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

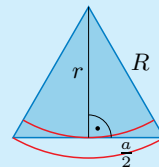
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



30. a – długość boku kwadratu
 $a\sqrt{2} - a = d$,
 czyli $a = d(\sqrt{2} + 1)$
 $Ob = 4d(\sqrt{2} + 1)$
 $P = d^2(3 + 2\sqrt{2})$

31. a) $\frac{\pi}{4}$

b)



Z twierdzenia Pitagorasa:

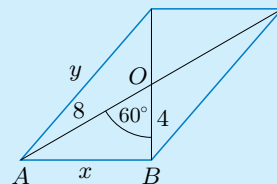
$$R^2 - r^2 = \frac{a^2}{4}$$

Zatem:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi \frac{a^2}{4}$$

32. 70°

- 33.



$$x = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

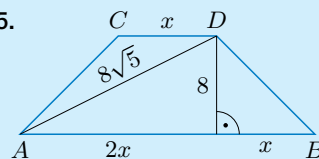
$$y^2 = (4\sqrt{3})^2 + 8^2,$$

$$\text{czyli } y = 4\sqrt{7}$$

$$\text{Zatem } Ob = 8(\sqrt{3} + \sqrt{7}).$$

34. 6 cm

- 35.



$$(2x)^2 + 8^2 = (8\sqrt{5})^2,$$

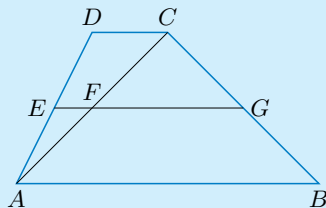
$$\text{skąd } x = 8 \text{ cm. Zatem:}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 32 = 128 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$|AC| = |BD| = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$Ob = 16(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}$$

36. a)



Punkty E, F, G są odpowiednio środkami odcinków AD, AC, BC .

$\triangle EAF \sim \triangle DAC$ (BKB), więc $\frac{|EF|}{|CD|} = \frac{1}{2}$ i $EF \parallel CD$

$\triangle FCG \sim \triangle ACB$ (BKB), więc $\frac{|FG|}{|AB|} = \frac{1}{2}$ i $FG \parallel AB$

Zatem $|EG| = |EF| + |FG| = \frac{1}{2}|CD| + \frac{1}{2}|AB| = \frac{|AB| + |CD|}{2}$.

b) $P = 10 \cdot 5 = 50 \text{ [cm}^2\text{]}$

37. a) $a \approx 3,1$, $b \approx 2,5$, $\gamma = 75^\circ$
 b) $a \approx 16,4$, $c \approx 20,1$,
 $\gamma = 120^\circ$
38. a) $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 90^\circ$
 b) $\alpha = 105^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
 c) $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ$
 lub $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
 d) $\alpha = 105^\circ$, $\gamma = 45^\circ$
 lub $\alpha = 15^\circ$, $\gamma = 135^\circ$
39. a) $\frac{12}{\sin 135^\circ} = 2R$
 $\sin 135^\circ = \sin (90^\circ + 45^\circ) =$
 $= \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $R = 6\sqrt{2}$
 b) $\frac{x}{\sin 120^\circ} = 10$
 $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $x = 5\sqrt{3}$
40. a) $3\sqrt{3}$ b) 7
41. x , $2x$ – długości pozostałych boków trójkąta
 $9^2 = x^2 + (2x)^2 +$
 $-2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos 60^\circ$
 $81 = 3x^2$
 $x = 3\sqrt{3}$
 Pozostałe boki mają długości $3\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$.
42. a) $9^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$
 $\cos \alpha = \frac{1}{10} > 0$, więc trójkąt nie jest rozwartokątny.
 b) $10^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cos \alpha$
 $\cos \alpha = -0,625 < 0$, więc trójkąt jest rozwartokątny.
43. $d_1^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 +$
 $-2 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ$
 $d_1 = 4$
 $d_2^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 +$
 $-2 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos 150^\circ$
 $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $d_2 = 4\sqrt{7}$
44. $7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$
 $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$
 $\alpha = 120^\circ$
 $x^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$
 $x = \sqrt{19}$

37. Rozwiąż trójkąt o danych kątach i boku.



- a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $c = 2\sqrt{3}$ b) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $b = 6$

38. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta, w którym:

- a) $a = 4\sqrt{3}$, $b = 4$, $\alpha = 60^\circ$, c) $a = 3\sqrt{3}$, $b = 9$, $\alpha = 30^\circ$,
 b) $b = 8$, $c = 4\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$, d) $b = 2\sqrt{2}$, $c = 4$, $\beta = 30^\circ$.

39. a) Najdłuższy bok trójkąta ma długość 12, a jeden z kątów ma miarę 135° . Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
 b) Kąt rozwarty trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 5 ma miarę 120° . Oblicz długość najdłuższego boku tego trójkąta.

40. Oblicz długość boku c trójkąta, w którym:

- a) $a = 3$, $b = 6$, $\gamma = 60^\circ$, b) $a = 3\sqrt{3}$, $b = 2$, $\gamma = 150^\circ$.

41. Jeden z kątów trójkąta ma miarę 60° , a bok położony naprzeciwko tego kąta ma długość 9. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta, jeśli wiadomo, że jeden z nich jest dwa razy dłuższy od drugiego.

42. Sprawdź, czy trójkąt o podanych bokach jest rozwartokątny.

- a) $a = 5$, $b = 8$, $c = 9$ b) $a = 10$, $b = 4$, $c = 7$

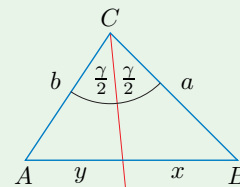
43. Długości boków równoległoboku są równe 4 i $4\sqrt{3}$, a jeden z kątów ma miarę 30° . Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.

44. Jeden z boków równoległoboku ma długość 7, a przekątne mają długości 6 i 10. Oblicz miarę kąta rozwartego zawartego między przekątnymi tego równoległoboku oraz długość jego drugiego boku.

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok tego trójkąta na odcinki proporcjonalne do jego pozostałych boków.

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$



45. W trójkącie ABC kąt ACB ma miarę 60° . Dwusieczna tego kąta przecina bok AB w punkcie D . Oblicz długości boków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że $|AD| = 2$ i $|BD| = 6$.

46. W trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej równej 12 cm dwusieczna jednego z kątów ostrych dzieli przeciwległy bok w stosunku 1:3. Oblicz pole tego trójkąta.

45. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku wyżej.

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{2}, \text{ czyli } a = 3b$$

Z twierdzenia cosinusów:

$$8^2 = (3b)^2 + b^2 +$$

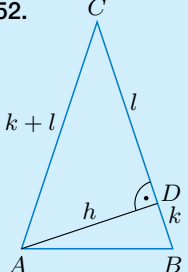
$$-2 \cdot 3b \cdot b \cdot \cos 60^\circ$$

$$b = \frac{8\sqrt{7}}{7}, a = \frac{24\sqrt{7}}{7}, c = 8$$

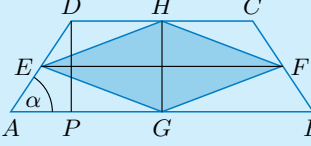
46. $16\sqrt{2} \text{ cm}^2$

■ Zestaw III – podsumowujący

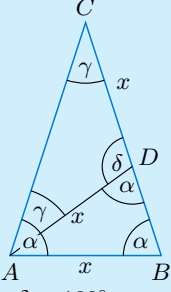
47. Podstawą trójkąta równoramiennego ABC jest odcinek AB . Na boku BC istnieje punkt D taki, że $|AB| = |AD| = |CD|$. Oblicz miary kątów trójkąta ABC .
48. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 4 cm i 6 cm. Oblicz promień okręgu stycznego do obu przyprostokątnych, którego środek należy do przeciwprostokątnej.
49. Na boku AD prostokąta $ABCD$ obrano taki punkt E , że trójkąty ABE , DEC i EBC są podobne. Wyznacz skale podobieństwa $\triangle ABE$ do $\triangle DEC$, $\triangle DEC$ do $\triangle EBC$, $\triangle ABE$ do $\triangle EBC$ i oblicz pole trójkąta BEC , jeśli wiadomo, że $\angle ECD = 60^\circ$ i $|DC| = 6$.
50. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 cm. Wysokość CD równa jest długości odcinka DE łączącego środek podstawy ze środkiem ramienia. Oblicz długość ramienia oraz pole tego trójkąta.
51. Dany jest trójkąt ABC o bokach $|AC| = 4$ i $|BC| = 6$. Na bokach tego trójkąta obrano punkty D , E i F takie, że czworokąt $DECF$ jest rombem (rysunek obok). Oblicz długość boku tego rombu.
52. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB wysokość AD podzieliła bok BC na odcinki długości $|BD| = k$ i $|CD| = l$. Wykaż, że $|AB| = \sqrt{2k(k+l)}$.
53. W trapezie równoramiennym kąty przy krótszej podstawie mają miarę dwa razy większą niż kąty przy dłuższej podstawie. Dłuższa podstawa ma długość 16 cm, a odcinek łączący środki ramion – 10 cm. Oblicz pole i obwód tego trapezu.
54. Długości podstaw trapezu prostokątnego są równe 7 cm i 3 cm, a ramię prostopadłe do podstaw ma długość 5 cm. Oblicz odległości punktu przecięcia się przekątnych tego trapezu od dłuższej podstawy i ramienia prostopadłego do podstaw.
55. Długości podstaw trapezu równoramiennego są równe a i b ($a > b$), a kąt ostry ma miarę α . Wyznacz pole czworokąta, który powstał przez połączenie odcinkami środków sąsiednich boków tego trapezu.

52. 

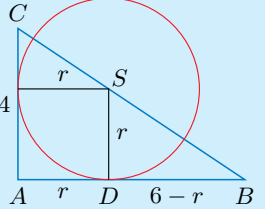
Z twierdzenia Pitagorasa dla $\triangle ADC$:
 $h^2 + l^2 = (k+l)^2$,
 czyli $h^2 = k^2 + 2kl$
 Z twierdzenia Pitagorasa dla $\triangle ADB$:
 $|AB|^2 = k^2 + h^2 =$
 $= k^2 + 2kl + k^2 = 2k(k+l)$
 Zatem $|AB| = \sqrt{2k(k+l)}$.

55. 

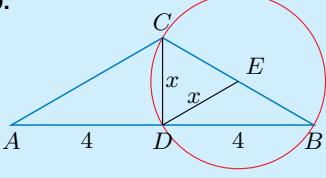
$|AB| = a$, $|DC| = b$, $|EF| = \frac{a+b}{2}$,
 $|AP| = \frac{a-b}{2}$,
 $|HG| = |DP| = \frac{a-b}{2} \cdot \tan \alpha$
 $P = \frac{|EF| \cdot |HG|}{2}$
 $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \cdot \tan \alpha =$
 $= \frac{1}{8}(a^2 - b^2) \tan \alpha$

47. 

$\delta = 180^\circ - \alpha$
 $2\gamma + (180 - \alpha) = 180^\circ$,
 skąd $\alpha = 2\gamma$. Ponadto:
 $2\alpha + \gamma = 180^\circ$,
 czyli $5\gamma = 180^\circ$, skąd
 $\gamma = 36^\circ$ oraz $\alpha = 72^\circ$.

48. 

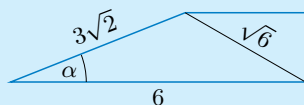
Trójkąty ABC i DBS są podobne (KKK):
 $\frac{4}{r} = \frac{6}{6-r}$, stąd $r = 2,4$ cm.
 49. $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $k_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_3 = \frac{1}{2}$,
 $P = 24\sqrt{3}$

50. 

Trójkąt DBC jest prostokątny, więc środkowa DE jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.
 Zatem $|CE| = |DE| = x$.
 Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DCB :
 $x^2 + 4^2 = (2x)^2$
 Stąd $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm oraz
 $|BC| = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm.
 $P_{ABC} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm²

51. 2,4
 53. $P = 60\sqrt{3}$ cm², $Ob = 44$ cm
 54. od podstawy: 3,5 cm,
 od ramienia: 2,1 cm

56.



$$(\sqrt{6})^2 = (3\sqrt{2})^2 + 6^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9},$$

$$\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}), \text{ więc } \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$Ob = 6 + 3\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 4(2 + \sqrt{2})$$

57. S_{AC}, S_{BC} – punkty przecięcia środkowych odpowiednio z bokami AC i BC

Środkowe trójkąta przecinają się w stosunku 2:1, stąd

$$|PS_{AC}| = |PS_{BC}| = 3.$$

$$|AB| = 6\sqrt{2},$$

$$|AS_{AC}| = |S_{AC}C| =$$

$$|BS_{BC}| = |S_{BC}C| =$$

$$= \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$

Wysokość trójkąta:

$$h = \sqrt{(6\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 9\sqrt{2}$$

Korzystamy ze wzoru:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 9\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}}{4R},$$

$$\text{czyli } R = 5\sqrt{2}$$

58. $\frac{15}{2}(3 - \sqrt{3})$

59. $d\sqrt{13}$

60. $-\frac{7}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}$

61. Zauważmy, że następujące pary trójkątów mają parami te same wysokości i równe podstawy:

$$\triangle ABC \text{ i } \triangle BB'C,$$

$$\triangle CAB \text{ i } \triangle AA'B,$$

$$\triangle BCA \text{ i } \triangle CC'A.$$

$$\text{Zatem } P_{ABC} = P_{BB'C} = P_{AA'B} = P_{CC'A} = S.$$

$$\text{Analogicznie } P_{CB'C'} = S,$$

$$P_{BA'B'} = S, P_{AC'A'} = S.$$

$$\text{Zatem } P_{A'B'C'} = P_{ABC} + P_{BB'C} + P_{AA'B} + P_{CC'A} + P_{CB'C'} + P_{BA'B'} + P_{AC'A'} = 7S.$$

62. 4 : 9

56. Dany jest trapez prostokątny, którego dłuższa podstawa ma długość 6, ramię ma długość $3\sqrt{2}$ i tworzy z podstawą kąt ostry α , a krótsza przekątna ma długość $\sqrt{6}$. Oblicz $\sin \alpha$ i obwód tego trapezu.

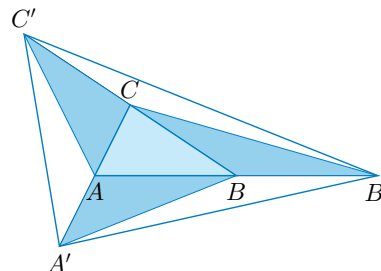
57. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB środkowe poprowadzone z wierzchołków A i B przecinają się pod kątem prostym w punkcie P oraz $|AP| = 6$. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.

58. W trapezie kąty przy podstawie mają miary 60° i 45° , a różnica kwadratów długości podstaw jest równa 30. Oblicz pole tego trapezu.

59. W równoległoboku $ABCD$ krótsza przekątna BD ma długość d i jest prostopadła do boków AD i BC , a kąt ostry ma miarę 30° . Wyznacz długość przekątnej AC .

60. Długości podstaw trapezu są równe 6 i 9, a ramiona mają długości 2 i 4. Oblicz cosinusy kątów tego trapezu.

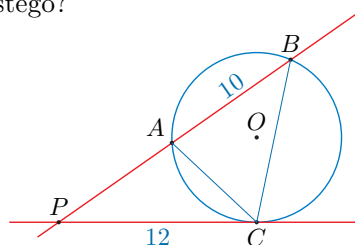
61. Dane są trójkąty ABC i $A'B'C'$ takie, że punkty C i A' są symetryczne względem punktu A , punkty A i B' – względem punktu B , a punkty B i C' – względem punktu C . Pole trójkąta ABC jest równe S . Wykaż, że pole trójkąta $A'B'C'$ jest równe $7S$.



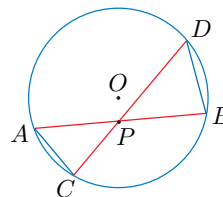
62. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną w stosunku 2:3. W jakim stosunku dzieli przeciwprostokątną wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego?

63. Z punktu P poprowadzono sieczną przecinającą dany okrąg w punktach A i B oraz styczną do okręgu w punkcie C (rysunek obok). Wykaż, że trójkąty PCA i PCB są podobne. Oblicz długości odcinków PA i PB , jeśli $|PC| = 12$ i $|AB| = 10$.

Wskazówka. Wykaż, że $\angle PBC = \angle PCA$ oraz $\triangle PCA \sim \triangle PBC$.



64. Wykaż, że trójkąty ACP i BDP (rysunek obok) są podobne, oraz uzasadnij, że $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$. Oblicz promień okręgu, jeśli $|AP| = 5$, $|PB| = 2$, $|CP| = 1$ i $\angle CBD = 150^\circ$.



63. Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że $\angle PCA = \angle PBC$. Ponadto $\angle CPA = \angle BPC$, zatem trójkąty PCA i PBC są podobne (KKK).

$$\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|PB|}{|PC|}, \text{ czyli } |PC|^2 = |PA| \cdot |PB|. \text{ Zatem } 12^2 = |PA| \cdot (|PA| + 10), \text{ skąd } |PA| = 8, |PB| = 18.$$

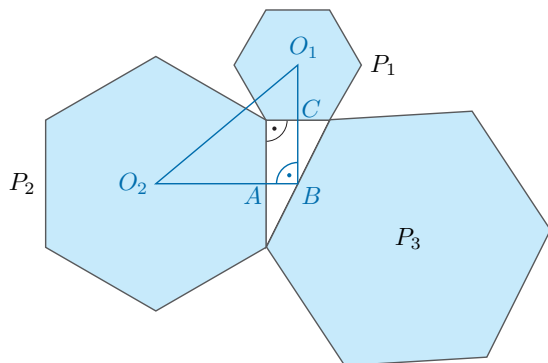
64. $\angle APC = \angle DPB$ (kąty wierzchołkowe), $\angle CAB = \angle BDC$ oraz $\angle ACD = \angle DBA$ (kąty wpisane oparte na tych samych łukach). Zatem trójkąty CAP i BDP są podobne (KKK).

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|}, \text{ czyli } |PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

$$5 \cdot 2 = 1 \cdot |PD|, \text{ skąd } |PD| = 10$$

Kąt wpisany CBD oparty jest na tym samym łuku co kąt środkowy COD , czyli $\angle COD = 300^\circ$, więc kąt ostry $\angle COD = 60^\circ$. Ponadto $|CO| = |DO| = r$. Zatem trójkąt COD jest równoboczny i $r = |CD| = 11$.

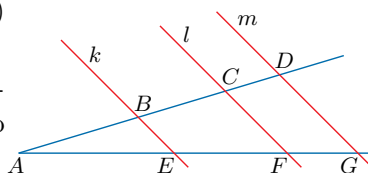
65. Na bokach trójkąta prostokątnego zbudowano sześciokąty foremne o polach P_1, P_2, P_3 (rysunek poniżej).



- D** a) Wykaż, że $P_3 = P_1 + P_2$.
b) Przyprostokątne trójkąta mają długości 1 cm i 2 cm. Oblicz długość odcinka łączącego środki symetrii sześciokątów zbudowanych na tych przyprostokątnych.

66. W trójkącie równobocznym ABC o obwodzie 6 na boku AC wybrano punkt P taki, że $\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{1}{5}$. Oblicz pole koła opisanego na trójkącie APB .
67. Dany jest trójkąt ABC o kątach $\angle ABC = 45^\circ$ i $\angle ACB = 75^\circ$ oraz bokach $|AC| = 4\sqrt{3}$ i $|AB| = 6 + 2\sqrt{3}$. Oblicz długości środkowych tego trójkąta.
68. Pole trójkąta ABC jest równe 60 cm^2 . Punkt P należy do boku AB tego trójkąta, a punkt Q – do boku AC . Oblicz pole trójkąta APQ .
a) $|AP| = \frac{2}{3}|AB|$ i $|AQ| = \frac{1}{2}|AC|$ b) $|AP| = \frac{1}{4}|AB|$ i $|AQ| = \frac{3}{4}|AC|$
69. Dany jest trójkąt o bokach a, b i c . Oblicz pole tego trójkąta oraz promień wpisanego w niego okręgu.
a) $a = 4, b = 5, c = 7$ b) $a = 4, b = 6, c = 8$

70. Proste k, l, m są równoległe (rysunek obok) oraz $|EF| = 8, |FG| = 5, |CD| = 4$.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



1.	$ BC = 6,5$	P	F
2.	Jeśli $ AG = 24$, to $ AB = 8$.	P	F

67. Z twierdzenia sinusów: $\frac{|BC|}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 45^\circ}$, czyli $|BC| = 6\sqrt{2}$

Z twierdzenia cosinusów:

$$|AA_1|^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2}\right)^2 + (6 + 2\sqrt{3})^2 - 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2}\right) (6 + 2\sqrt{3}) \cos 45^\circ = 6(2\sqrt{3} + 5)$$

$$|AA_1| = \sqrt{6(2\sqrt{3} + 5)}$$

$$|BB_1|^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3}\right)^2 + (6 + 2\sqrt{3})^2 - 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3}\right) (6 + 2\sqrt{3}) \cos 60^\circ = 4(3\sqrt{3} + 6)$$

$$|BB_1| = 2\sqrt{3(\sqrt{3} + 4)}$$

$$|CC_1|^2 = \left(\frac{1}{2}(6 + 2\sqrt{3})\right)^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(6 + 2\sqrt{3}) \cdot 4\sqrt{3} \cos 60^\circ = 6(8 - \sqrt{3})$$

$$|CC_1| = \sqrt{6(8 - \sqrt{3})}$$

65. a) Niech a i b będą długościami przyprostokątnych trójkąta, a c będzie długością przeciwprostokątnej. Pola sześciokątów wyrażają się wzorami:

$$P_1 = 6 \cdot a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$$

$$P_2 = 6 \cdot b^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}b^2\sqrt{3}$$

$$P_3 = 6 \cdot c^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}c^2\sqrt{3}$$

$$P_1 + P_2 = \frac{3}{2}\sqrt{3}(a^2 + b^2) = \frac{3}{2}\sqrt{3}c^2 = P_3$$

- b) Niech O_1, O_2 będą środkami okręgów opisanych odpowiednio na sześciokątach o polach P_1, P_2 . Punkty O_1, O_2 są zatem punktami przecięcia dłuższych przekątnych odpowiednich sześciokątów. Niech A, C będą środkami przyprostokątnych trójkąta, a B będzie środkiem przeciwprostokątnej, wówczas:

$$|AB| = 1 \text{ cm}, |BC| = \frac{1}{2} \text{ cm}$$

O_1A – wysokość trójkąta równobocznego o boku 1 cm, czyli $|O_1A| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$

O_2C – wysokość trójkąta równobocznego o boku 2 cm, czyli $|O_2C| = \sqrt{3} \text{ cm}$

$$|O_1O_2|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2 + \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{3}$$

$$|O_1O_2| = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} \text{ cm}$$

66. $|AP| = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$

Z twierdzenia cosinusów:

$$|BP|^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cos 60^\circ = \frac{31}{9},$$

czyli $|BP| = \frac{\sqrt{31}}{3}$

Korzystamy ze wzorów:

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha \text{ i } P = \frac{abc}{4R}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \sin 60^\circ = \frac{\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{31}}{3}}{4R}, \text{ czyli } R = \frac{\sqrt{93}}{9}.$$

$$\text{Pole koła: } P = \frac{31}{27}\pi$$

68. a) 20 cm^2 b) $11,25 \text{ cm}^2$

69. a) $P = 4\sqrt{6}, r = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\text{b) } P = 3\sqrt{15}, r = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

70. 1. F, 2. F

5.13. Stereometria

Oznaczenia

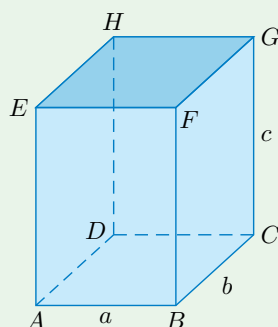
P_c – pole powierzchni całkowitej

P_p – pole powierzchni podstawy

P_b – pole powierzchni bocznej

V – objętość

Prostopadłościan

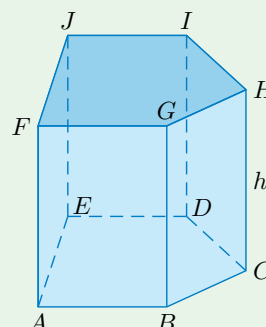


$$P_c = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = abc$$

gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu

Graniastosłup prosty

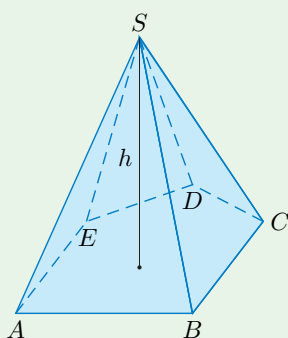


$$P_b = p \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

gdzie p jest obwodem podstawy graniastosłupa, a h – jego wysokością

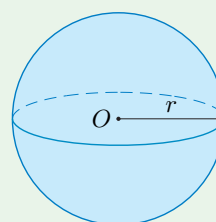
Ostrosłup



$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa

Kula

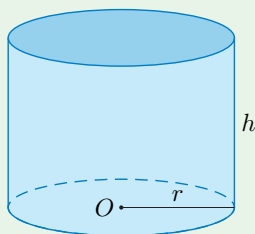


$$P = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

gdzie r jest promieniem kuli

Walec



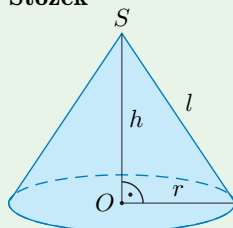
$$P_b = 2\pi rh$$

$$P_c = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy walca, a h – jego wysokością

Stożek



$$P_b = \pi r l$$

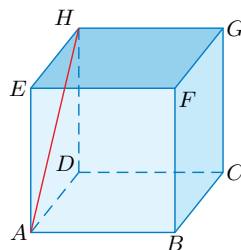
$$P_c = \pi r(r + l)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy stożka, h – jego wysokością, a l – długością tworzącej

■ Zestaw I – wprowadzający

1. Dany jest graniastosłup prosty, którego wysokość jest równa 10. Jego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 i 12. Oblicz pole powierzchni całkowitej oraz objętość tego graniastosłupa.
2. Wszystkie krawędzie graniastosłupa prostego są równe i mają po 12 cm. Jego podstawą jest romb o kącie ostrym 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.
3. Dany jest graniastosłup prawidłowy o wysokości 10. Promień okręgu opisanego na jego podstawie jest równy 6. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeżeli wiadomo, że jest on:
a) trójkątny, b) czworokątny, c) sześciokątny.
4. Przerysuj do zeszytu sześcian przedstawiony poniżej i wskaż kąt, który przekątna AH ściany bocznej tego sześcianu tworzy:
a) z przekątną podstawy wychodzącą z wierzchołka A ,
b) z krawędzią AB ,
c) z podstawą $ABCD$,
d) z krawędzią GH ,
e) ze ścianą $ABFE$.
Który z tych kątów jest kątem prostym?



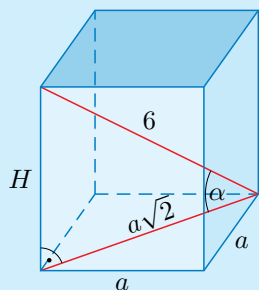
3. a) $a = 6\sqrt{3}$, $P_c = 2 \cdot \frac{(6\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 10 = 234\sqrt{3}$
b) $a = 6\sqrt{2}$, $P_c = 2 \cdot (6\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 10 = 48(3 + 5\sqrt{2})$
c) $a = 6$, $P_c = 2 \cdot 6 \cdot \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 6 \cdot 10 = 36(3\sqrt{3} + 10)$
4. Przekątna AH tworzy kąt prosty z krawędziami AB oraz GH .

1. $P_c = 360$, $V = 300$

2. $P_c = 2 \cdot 12^2 \sin 30^\circ + 4 \cdot 12 \cdot 12 = 720 \text{ [cm}^2\text{]}$

5. $4\sqrt{3}$

6.



$$\frac{H}{a\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, \text{ więc } H = 4a$$

$$(a\sqrt{2})^2 + H^2 = 6^2$$

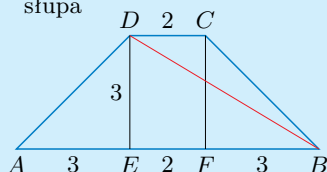
$$2a^2 + 16a^2 = 6^2$$

$$a = \sqrt{2}, H = 4\sqrt{2}$$

$$V = (\sqrt{2})^2 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

7. $24(5 + 2\sqrt{61})$

8. H – wysokość graniastoslupa



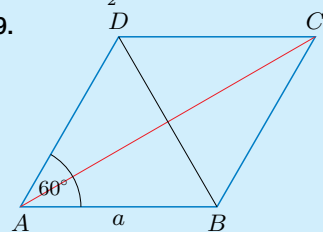
$$|DB|^2 = 3^2 + 5^2 = 34,$$

$$\text{czyli } |DB| = \sqrt{34}$$

$$H^2 = (5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{34})^2 = 16, \text{ więc } H = 4$$

$$V = \frac{(2+8) \cdot 3}{2} \cdot 4 = 60$$

9.



$$|BD| = a, |AC| = a\sqrt{3}$$

$$P_p = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot a\sqrt{3} = 12$$

$$\text{Zatem } a = 2.$$

10. a) $\frac{2}{3}\sqrt{69}$ b) $2\sqrt{7}$ c) $2\sqrt{5}$

11. $6(13 + \sqrt{13})$

13. $V = 486\sqrt{3}, \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}$

5. Miara kąta zawartego między przekątnymi ścian bocznych graniastoslupa prawidłowego czworokątnego, wychodzącymi z tego samego wierzchołka, jest równa 60° , a krawędź podstawy ma długość 4. Oblicz długość przekątnej tego graniastoslupa.

6. Przekątna graniastoslupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 i tworzy z podstawą kąt, którego tangens jest równy $2\sqrt{2}$. Oblicz objętość tego graniastoslupa.

7. Podstawą graniastoslupa prostego jest romb o przekątnych długości 10 i 12. Dłuższa przekątna graniastoslupa jest nachylona do podstawy pod kątem 45° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa.

8. Podstawą graniastoslupa prostego jest trapez równoramienny o podstawach długości 8 i 2 oraz wysokości równej 3. Oblicz objętość tego graniastoslupa, jeśli wiadomo, że jego przekątna ma długość $5\sqrt{2}$.

9. Podstawą graniastoslupa prostego o objętości równej 12 jest romb o kącie ostrym 60° . Wysokość tego graniastoslupa jest równa dłuższej przekątnej jego podstawy. Oblicz długość krawędzi tej podstawy.

10. Dany jest ostrosłup prawidłowy o krawędzi podstawy 4 i krawędzi bocznej 6. Oblicz wysokość tego ostrosłupa, jeżeli wiadomo, że jest on:

- a) trójkątny, b) czworokątny, c) sześciokątny.

11. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 6. Ściana boczna ABS jest prostopadła do podstawy oraz $|AS| = |BS| = 5$. Narysuj siatkę tego ostrosłupa i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.

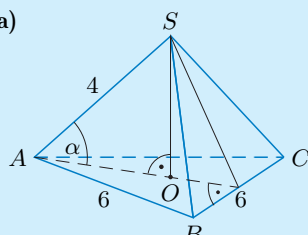
12. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6, a krawędź boczna ma długość 4.

- a) Oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.
b) Oblicz objętość tego ostrosłupa.

13. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość $12\sqrt{3}$ i jest nachylona do podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa oraz tangens kąta nachylenia ściany bocznej do jego podstawy.

14. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $\sqrt{3}$, a kąt nachylenia ściany bocznej do jego podstawy ma miarę 30° . Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

12. a)

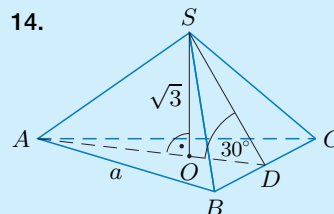


$$|AO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{|AO|}{|AS|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ więc } \alpha = 30^\circ$$

$$\text{b) } H = 2, V = 6\sqrt{3}$$

14.



$$|OD| = 3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{czyli } a = 6\sqrt{3}$$

$$|SD| = 2\sqrt{3}$$

$$V = 27, P_b = 54$$

■ Zestaw II – ćwiczeniowy



15. Wysokość prostopadłościanu jest równa 12 cm, a jego podstawą jest prostokąt o bokach 3 cm i 4 cm. Oblicz z dokładnością do 1° miary kątów, które przekątna tego prostopadłościanu tworzy z jego podstawą oraz ścianami bocznymi.
16. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 i tworzy ze ścianą boczną kąt 30° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.
17. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 3, a krawędź podstawy ma długość $4\sqrt{2}$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
18. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny ABC o boku 12 cm. Ściana boczna ABS jest prostopadła do podstawy oraz $|AS| = |BS| = 3\sqrt{13}$ cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
19. Pole ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe polu jego podstawy. Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do podstawy tego ostrosłupa.
20. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do podstawy pod kątem 30° , a wysokość tej ściany jest równa $3\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
21. Podstawą ostrosłupa o wierzchołku S jest trójkąt ABC o bokach długości $|AB| = 6$, $|AC| = |BC| = 5$. Wysokość ostrosłupa jest równa 2, a jej spodek jest środkiem okręgu opisanego na podstawie. Oblicz tangens kąta nachylenia ściany ABS do podstawy ostrosłupa.
22. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem o wymiarach 8 cm $\times$ 10 cm. Oblicz objętość tego walca (rozważ dwie możliwości).
23. Objętość walca jest równa V , a jego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest kwadratem. Wyznacz wysokość tego walca.
24. Stosunek pola powierzchni bocznej stożka do jego pola podstawy jest równy $\sqrt{2} : 1$. Objętość stożka jest równa objętości kuli o średnicy 6. Oblicz wysokość tego stożka oraz miarę kąta nachylenia tworzącej do podstawy.
25. Oblicz objętość stożka, którego:
 - a) pole podstawy jest równe 16, a pole powierzchni bocznej jest równe 20,
 - b) tworząca ma długość 16 i tworzy z wysokością stożka kąt 30° .

21. R – promień okręgu opisanego na podstawie:

$$|OA| = |OB| = |OC| = R$$

Korzystamy ze wzoru $P_{ABC} = \frac{abc}{4R}$.

$$|DC| = 4, \text{ więc } \frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 6}{4R}, \text{ czyli } R = \frac{25}{8}$$

$$|OD| = 4 - \frac{25}{8} = \frac{7}{8}$$

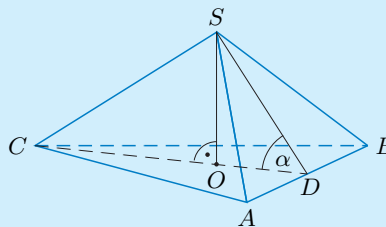
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{2}{8}} = 2\frac{2}{7}$$

22. $\frac{160}{\pi} \text{ cm}^3$ lub $\frac{200}{\pi} \text{ cm}^3$

23. Powierzchnia boczna walca jest kwadratem, więc $2\pi r = h$.

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 h = \frac{h^3}{4\pi}$$

$$h = \sqrt[3]{4\pi V}$$



15. Przekątna prostopadłościanu:

$$d = 13 \text{ cm}$$

$$\sin \alpha = \frac{12}{13} \approx 0,9231,$$

$$\text{czyli } \alpha \approx 67^\circ$$

$$\sin \beta = \frac{4}{13} \approx 0,3077,$$

$$\text{czyli } \beta \approx 18^\circ$$

$$\sin \gamma = \frac{3}{13} \approx 0,2308,$$

$$\text{czyli } \gamma \approx 13^\circ$$

16. Krawędź podstawy graniastosłupa: $a = 3$

Wysokość graniastosłupa:

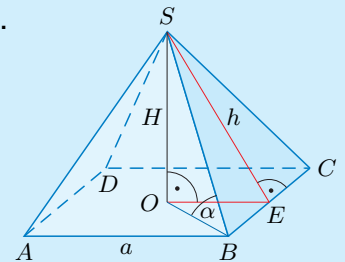
$$H = 3\sqrt{2}$$

$$V = 27\sqrt{2}$$

17. $V = 32$, $P_c = 8(4 + \sqrt{34})$

18. $108\sqrt{3} \text{ cm}^3$

- 19.



$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot h = a^2, \text{ czyli } h = 2a$$

$$H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{15a^2}{4},$$

$$\text{czyli } H = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$|BS|^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{17a^2}{4},$$

$$\text{czyli } |BS| = \frac{a\sqrt{17}}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{H}{|BS|} =$$

$$= \frac{\frac{a\sqrt{15}}{2}}{\frac{a\sqrt{17}}{2}} = \frac{\sqrt{255}}{17}$$

20. $60\frac{3}{4}$

24. $\frac{\pi r l}{\pi r^2} = \sqrt{2}$, stąd $l = \sqrt{2}r$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = r,$$

$$\text{stąd } \alpha = 45^\circ$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi 3^3,$$

$$\text{stąd } h = 3\sqrt[3]{4}$$

25. $\pi r^2 = 16$, więc $r^2 = \frac{16}{\pi}$

$$\pi r l = 20, \text{ więc } l^2 = \frac{25}{\pi}$$

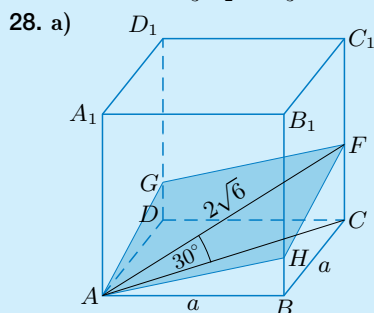
$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{\frac{9}{\pi}} = \frac{3}{\pi}\sqrt{\pi}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{16}{\pi} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{\pi} = \frac{16\sqrt{\pi}}{\pi}$$

- b) $\frac{512\sqrt{3}}{3}\pi$

26. $\frac{h}{r} = \frac{3}{2}$, stąd $h = \frac{3}{2}r$
 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{2}\pi r^3 = 32\pi$,
 czyli $r = 4$ oraz $h = 6$
 $l = \sqrt{r^2 + h^2} = 2\sqrt{13}$
 $P_b = \pi r l = 8\pi\sqrt{13}$
27. $V = 2^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 6\frac{2}{3}$

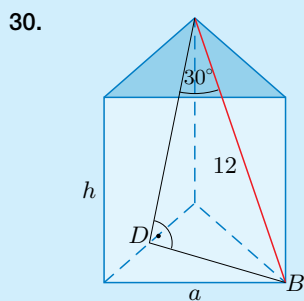


$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

więc $a = 3$ cm

b) $V = 54$ cm³

29. $P_{A_1BC} = \frac{2|A_1B|}{2} = 4$, czyli $|A_1B| = 4$ oraz $|AC| = |AA_1|$
 $\begin{cases} |AA_1|^2 + |AB|^2 = 4^2 \\ |AB|^2 + 2^2 = |AA_1|^2 \end{cases}$
 $|AB| = \sqrt{6}$, $|AA_1| = \sqrt{10}$
 $V = \sqrt{6} \cdot 2 \cdot \sqrt{10} = 4\sqrt{15}$



$$|DB| = 6 = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

czyli $a = 4\sqrt{3}$ cm

$$h = \sqrt{12^2 - (4\sqrt{3})^2} =$$

$$= 4\sqrt{6} \text{ [cm]}$$

$$V = \frac{(4\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{6} =$$

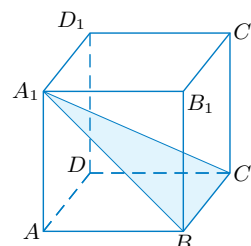
$$= 144\sqrt{2} \text{ [cm}^3\text{]}$$

26. Tworząca stożka jest nachylona do jego podstawy pod kątem α takim, że $\tan \alpha = \frac{3}{2}$. Objętość tego stożka jest równa 32π . Oblicz jego pole powierzchni bocznej.
27. Od sześcianu, którego krawędź ma długość 2, odcięto naroża, zawierające po jednym wierzchołku, płaszczyznami przechodzącymi przez środki krawędzi wychodzących z tych wierzchołków. Oblicz objętość wielościanu otrzymanego w ten sposób.

28. Prostopadłościan o wysokości 6 cm, którego podstawą jest kwadrat, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków podstawy i nachyloną do niej pod kątem 30° . W przekroju otrzymano romb, którego dłuższa przekątna jest równa $2\sqrt{6}$ cm.

a) Oblicz długość krawędzi podstawy tego prostopadłościanu.

b) Oblicz objętość tego prostopadłościanu.



29. Długość krawędzi BC prostopadłościanu jest równa 2, a pole trójkąta BCA_1 jest równe 4 (rysunek obok). Oblicz objętość tego prostopadłościanu, jeśli wiadomo, że jego przekątna tworzy z podstawą kąt o mierze 45° .

30. Przekątna ściany bocznej graniastoslupa prawidłowego trójkątnego ma długość 12 cm i tworzy z sąsiednią ścianą boczną kąt 30° . Oblicz objętość tego graniastoslupa.

31. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 60° , a krawędź boczna ma długość 6. Oblicz objętość tego ostrosłupa i miarę kąta zawartego między jego przeciwległymi krawędziami bocznymi.

32. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest kwadrat $ABCD$. Ściana boczna ADS jest trójkątem równobocznym leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do podstawy. Pole tej ściany jest równe $81\sqrt{3}$.

a) Oblicz objętość tego ostrosłupa.

b) Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

33. Sześcián o krawędzi 10 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i nachyloną do podstawy pod kątem α , którego cosinus jest równy $\frac{4}{5}$. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

34. Wysokość ostrosłupa jest równa $\sqrt{3}$. Dwie jego sąsiednie ściany boczne są prostopadłe do podstawy będącej prostokątem, a dwie pozostałe są nachylone do podstawy pod kątami 30° i 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

31. Ściany boczne są trójkątami równobocznymi, czyli krawędź podstawy $a = 6$.

$$\text{Przekątna podstawy ostrosłupa: } d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Wysokość ostrosłupa: } H = \sqrt{6^2 - \left(\frac{1}{2}d\right)^2} = 3\sqrt{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$$

Rozważmy trójkąt, który tworzą przeciwległe krawędzie boczne (a) z przekątną podstawy ostrosłupa.

$$a^2 + a^2 = 72 = 6\sqrt{2} = d^2$$

Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt ten jest prostokątny, zatem szukany kąt ma miarę 90° .

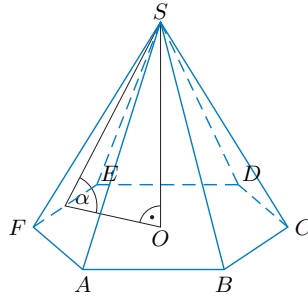
32. a) $972\sqrt{3}$ b) $36(3 + \sqrt{2})$

33. $62,5$ cm²

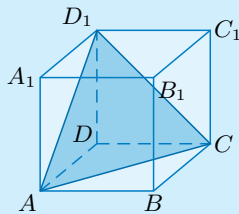
34. $\sqrt{3}$

■ Zestaw III – podsumowujący

35. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu $9\sqrt{3}$. Dwie jego sąsiednie ściany boczne są prostopadłe do podstawy, a pozostałe dwie tworzą z podstawą kąty 45° i 60° . Oblicz długość najdłuższej krawędzi tego ostrosłupa.
36. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 8 cm, a jego ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.
37. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do podstawy pod kątem 30° , a jej długość wynosi $2\sqrt{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
38. Krawędź sześcianu ma długość 6. Środek symetrii P jednej z jego ścian bocznych połączono odcinkami z wierzchołkami A, B, C, D podstawy. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa $ABCDP$.
39. Powierzchnia boczna stożka jest wycinkiem koła wyznaczonym przez kąt środkowy o mierze 150° i ma pole równe $60\pi \text{ cm}^2$. Oblicz objętość tego stożka.
40. Dane są dwie bryły: walec i stożek, których podstawy są przystające, a wysokości równe. Stosunek pola powierzchni bocznej walca do pola powierzchni bocznej stożka wynosi $3:2$. Oblicz miarę kąta rozwarcia stożka.
41. Sześcian o krawędzi 12 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy. W przekroju otrzymano prostokąt o polu $96\sqrt{3}$. Oblicz objętości wielościanów, na które płaszczyzna przekroju podzieliła ten sześcian.
42. Płaszczyzna przechodząca przez przekątną dolnej podstawy sześcianu i jeden wierzchołek górnej podstawy podzieliła ten sześcian na dwa wielościany o objętościach 36 i V , gdzie $V > 36$. Oblicz objętość tego sześcianu.
43. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy jest równy α (rysunek obok).
- Wyznacz stosunek pola podstawy tego ostrosłupa do jego pola powierzchni bocznej.
 - Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że krótsza przekątna jego podstawy ma długość $2\sqrt{3}$, a $\alpha = 60^\circ$.



42. $V_{ACDD_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = 36$, czyli $a = 6$
 Objętość sześcianu: $V_S = a^3 = 216$

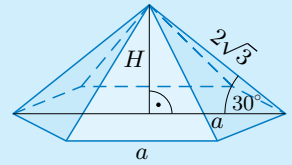


43. a – krawędź podstawy
 h – wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- $\cos \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{h}$, czyli $a = \frac{2\sqrt{3}h \cos \alpha}{3}$
 $P_p : P_b = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} : \frac{6ah}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2h} = \frac{2\sqrt{3}h \cos \alpha \cdot \sqrt{3}}{2h \cdot 3} = \cos \alpha$
 - Najkrótsza przekątna podstawy ma długość $a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, zatem $a = 2$.
 $\frac{H}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, czyli $H = 3$
 $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = 6\sqrt{3}$

35. $3\sqrt{7}$

36. $\frac{1536\sqrt{7}}{49} \text{ cm}^3$

37.



$$\frac{H}{2\sqrt{3}} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

wiec $H = \sqrt{3}$ oraz $a = 3$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = 13,5$$

$$P_b = \frac{9\sqrt{39}}{2}$$

38. $9(5 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5})$

39. $\frac{150^\circ}{360^\circ} \cdot \pi l^2 = 60\pi$,

czyli $l = 12 \text{ cm}$

$$\frac{150^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi l = 2\pi r,$$

czyli $r = \frac{5}{12}l = 5 \text{ [cm]}$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{119} \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot \sqrt{119} =$$

$$= \frac{25}{3}\pi\sqrt{119} \text{ [cm}^3\text{]}$$

40. H – wysokość brył

r – promień brył

l – tworząca stożka

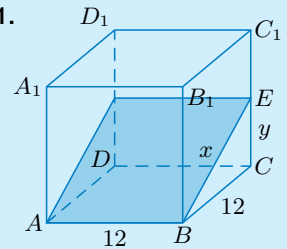
α – kąt rozwarcia stożka

$$\frac{2\pi r H}{\pi r l} = \frac{2H}{l} = \frac{3}{2},$$

czyli $\frac{H}{l} = \frac{3}{4} = \cos \frac{\alpha}{2}$

Zatem $\alpha \approx 83^\circ$.

41.



$$12x = 96\sqrt{3}, \text{ czyli } x = 8\sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - 12^2} = 4\sqrt{3}$$

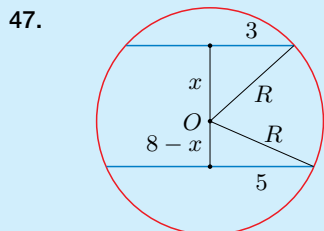
$$V_1 = \frac{4\sqrt{3} \cdot 12}{2} \cdot 12 = 288\sqrt{3}$$

$$V_2 = V - V_1 = 12^3 - 288\sqrt{3} = 288(6 - \sqrt{3})$$

45. $ay = 8\sqrt{13}$, stąd $y = \frac{8\sqrt{13}}{a}$
 $ax = 20$, stąd $y = \frac{20}{a}$

$$\begin{cases} h^2 = y^2 - a^2 = \frac{832}{a^2} - a^2 \\ \frac{1}{4}h^2 = x^2 - a^2 = \frac{400}{a^2} - a^2 \end{cases}$$

 $a = 4, h = 6$
 Zatem $V = 96$.
46. $3(9 + \sqrt{29})$



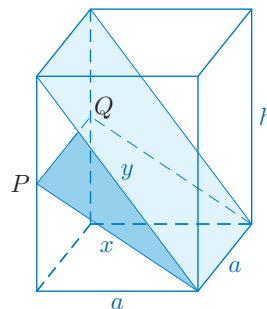
$$\begin{cases} x^2 + 9 = R^2 \\ (8-x)^2 + 25 = R^2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań i otrzymujemy $x = 5$ oraz $R = \sqrt{34}$.

48. $V_s = a^3, V_w = \pi a^3$,
 czyli $V_s < V_w$
 Pola podstaw: $P_s = a^2$,
 $P_w = \pi a^2$, czyli $P_s < P_w$
 B. 2
49. $V_K = 288\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$,
 czyli $R = 6$ cm
 $V_W = 320\pi = \pi \cdot 8^2 \cdot h$,
 czyli $h = 5$ cm
 B. 3

44. Podstawą graniastoslupa prostego jest trójkąt prostokątny o kącie ostrym 30° . Przekątna ściany bocznej o najmniejszej powierzchni ma długość 4 cm i tworzy ze ścianą boczną o największej powierzchni kąt 20° . Oblicz wysokość tego graniastoslupa. Wynik zaokrąglaj do liczby całkowitej.

45. Graniastoslup prawidłowy czworokątny przecięto dwiema płaszczyznami i otrzymano przekroje o polach 20 i $8\sqrt{13}$ (rysunek obok). Oblicz objętość tego graniastoslupa, wiedząc, że punkty P i Q są środkami jego krawędzi bocznych.



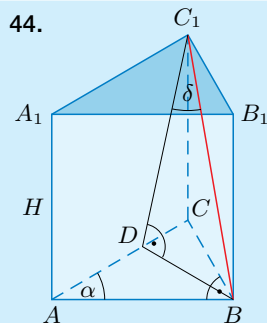
46. Prostopadłościan o wymiarach $6 \times 8 \times 15$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jego trzy wierzchołki i otrzymano w przekroju trójkąt. Oblicz obwód tego trójkąta.
47. Kulę przecięto dwiema równoległymi płaszczyznami odległymi od siebie o 8 w ten sposób, że środek kuli leży między nimi. Pola otrzymanych przekrojów są równe 9π i 25π . Oblicz promień tej kuli.

48. Dwa naczynia, jedno w kształcie sześcianu, drugie w kształcie walca, mają jednakowe wysokości. Krawędź sześcianu jest równa promieniowi podstawy walca. Niech V_s będzie objętością sześcianu, a V_w – objętością walca. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

A.	$V_s > V_w$,	ponieważ	1.	wysokości obu naczyń są równe.
B.	$V_s < V_w$,		2.	pole ściany sześcianu jest mniejsze od pola podstawy walca.
C.	$V_s = V_w$,		3.	podstawy obu naczyń mają równe pola.

49. Dane są kula o objętości 288π cm³ oraz zamykane pudełko w kształcie walca o objętości 320π cm³ i promieniu podstawy 8 cm. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

A.	Kula zmieści się w pudełku,	ponieważ	1.	objętość pudełka jest większa od objętości kuli.
B.	Kula nie zmieści się w pudełku,		2.	promień kuli jest dłuższy od promienia podstawy pudełka.
			3.	promień kuli jest dłuższy od wysokości pudełka.



$$\alpha = 30^\circ, \delta = 20^\circ, |BC| = a, |BC_1| = 4 \text{ cm}, \angle ACB = 60^\circ$$

$$\frac{|DB|}{a} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ czyli } |DB| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{|DB|}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{8} = \sin 20^\circ, \text{ czyli } a = \frac{8\sqrt{3}\sin 20^\circ}{3} \text{ cm}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CC_1B :

$$H^2 = 4^2 - a^2 = 16 - \frac{64\sin^2 20^\circ}{3} = 16 \left(1 - \frac{4\sin^2 20^\circ}{3}\right)$$

$$H = 4\sqrt{1 - \frac{4\sin^2 20^\circ}{3}} \approx 4 \text{ [cm]}$$

5.14. Rachunek prawdopodobieństwa

Permutacje

Liczba sposobów, na które n różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa n^k .

Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg składający się z k różnych wyrazów ($1 \leq k \leq n$), jest równa:

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Prawdopodobieństwo klasyczne

Jeżeli Ω jest zbiorem skończonym i niepustym, to **prawdopodobieństwem zdarzenia** $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|}$$

Własności prawdopodobieństwa

- $0 \leq P(A) \leq 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$
- $P(\emptyset) = 0$ ($\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe), $P(\Omega) = 1$ (Ω – zdarzenie pewne)
- $P(A) \leq P(B)$ dla $A \subset B \subset \Omega$
- $P(A') = 1 - P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

■ Zestaw I – wprowadzający

1. Dane są zbiory $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ i $C = \{6, 7, 9\}$. Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych takich, że pierwsza cyfra należy do zbioru A , druga – do zbioru B , a trzecia – do zbioru C ?
2. Dane są zbiory $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ i $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych takich, że pierwsza cyfra należy do zbioru A , druga – do zbioru B , a trzecia – do zbioru C ? Ile wśród nich jest liczb nieparzystych?
3. Na ile sposobów można ustawić w kolejce 4 osoby, a na ile – 6 osób?

1. $6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$

2. Liczby trzycyfrowe:
 $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$
Liczby nieparzyste:
 $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

3. 4 osoby: $4! = 24$
6 osób: $6! = 720$

4. $4 \cdot 2 \cdot 5 = 40$
5. a) $5! \cdot 3! = 720$
b) $4! \cdot 3! = 144$
6. $4! \cdot 5! = 2880$
7. a) $9! = 362\,880$
b) $5! \cdot 4! = 2880$
8. a) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 9 = 2160$
b) $4^3 \cdot 10^2 = 6400$
9. a) $6! = 720$
b) $6^6 = 46\,656$
10. a) $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$
b) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$
c) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$
11. a) $3^5 = 243$
b) $9^4 = 6561$
c) $7 \cdot 8 \cdot 5 = 280$
4. Z miasta A do miasta B prowadzą cztery drogi, z miasta B do miasta C – dwie drogi, a z miasta C do miasta D prowadzi pięć dróg. Na ile sposobów można przebyć drogę z miasta A przez miasto B , a następnie C do miasta D , jeśli przez każde miasto można przejechać tylko raz?
5. Na ile sposobów można ustawić w kolejce:
a) pięcioro dziewcząt i trzech chłopców tak, aby dziewczęta stały przed chłopcami,
b) czworo dziewcząt i trzech chłopców tak, aby żadne dwie dziewczyny nie stały jedna za drugą?
6. Tworzymy kody, w których na początku występują cztery litery, a następnie pięć cyfr (cyfry i litery nie mogą się powtarzać). Ile jest takich kodów, jeżeli wykorzystujemy tylko litery i cyfry kodu ABCD12345?
7. Dziewięciorgu zawodnikom, wśród których jest pięć dziewcząt, przydzielono kolejne numery od 1 do 9.
a) Ile jest wszystkich sposobów przydzielenia numerów?
b) Ile jest takich sposobów przydzielenia numerów, aby dziewczęta dostały numery nieparzyste, a chłopcy dostali parzyste?
8. Pewien kod składa się z trzech liter na początku oraz z dwóch dowolnych cyfr na końcu. Litery należą do zbioru $\{A, B, C, D\}$. Ile można utworzyć takich kodów, jeżeli:
a) cyfry i litery się nie powtarzają, b) cyfry i litery mogą się powtarzać?
9. Ile liczb sześciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując tylko cyfry:
a) liczby 134 657, jeśli cyfry nie mogą się powtarzać,
b) liczby 425 971, jeśli cyfry mogą się powtarzać?
10. Ile jest wszystkich liczb:
a) trzycyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 0 i 1 oraz żadna cyfra się nie powtarza,
b) czterocyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 0, 1 i 2 oraz żadna cyfra się nie powtarza,
c) pięciocyfrowych, w których zapisie żadna cyfra się nie powtarza?
11. Ile jest wszystkich liczb:
a) pięciocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2 i 4,
b) czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0,
c) parzystych trzycyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 7 i 9?

■ Zestaw II – ćwiczeniowy

12. Rzucamy trzy razy monetą. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że co najwyżej raz wypadła reszka, B – że co najwyżej dwa razy wypadła reszka, C – że trzy razy wypadła reszka.
 - a) Podaj pary zdarzeń wykluczających się i pary zdarzeń przeciwnych.
 - b) Które ze zdarzeń $B \cup C$, $A' \cap B$, $A \cap C$ jest zdarzeniem niemożliwym, a które – zdarzeniem pewnym?
13. Z urny zawierającej cztery kule ponumerowane od 1 do 4 losujemy dwie kule. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że dwie wylosowane kule mają numery nieparzyste. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω tego doświadczenia, wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom A i A' oraz oblicz prawdopodobieństwa tych zdarzeń, jeśli losujemy:
 - a) bez zwracania,
 - b) ze zwracaniem.
14. Rzucamy dwa razy kostką. Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na tym, że w pierwszym rzucie wypadnie większa liczba oczek niż w drugim, a przez B – że przynajmniej raz wypadnie jedynka. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom $A \cap B$, $A \cup B$ oraz oblicz prawdopodobieństwa tych zdarzeń.
15. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to liczba podzielna:
 - a) przez 2,
 - b) przez 3,
 - c) przez 2 lub 3.
16. Ze zbioru liczb dwucyfrowych wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to liczba podzielna:
 - a) przez 10 i niepodzielna przez 3,
 - b) przez 5 lub 8.
17. Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
 - a) suma oczek, które wypadną w obydwu rzutach, będzie mniejsza od 4,
 - b) iloczyn oczek, które wypadną w obydwu rzutach, będzie równy 6,
 - c) w każdym rzucie liczba oczek będzie większa od numeru rzutu.
18. W urnie są cztery kule oznaczone numerami 1, 2, 3 i 4. Losujemy kolejno cztery kule bez zwracania. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę czterocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba będzie: a) parzysta, b) większa od 1234.
19. Winda, w której są 3 osoby, zatrzymuje się na 5 piętrach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każda osoba wysiadzie na innym piętrze.

17. $\overline{\Omega} = 36$
- $A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$, czyli $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
 - $A = \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$, czyli $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
 - $P(B) = \frac{5 \cdot 4}{36} = \frac{5}{9}$
18. $\overline{\Omega} = 4! = 24$
- $\overline{A} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$, $P(A) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$
 - $\overline{B'} = 1$, $\overline{B} = 23$, $P(B) = \frac{23}{24}$
19. $\overline{\Omega} = 5^3 = 125$
- $$\overline{A} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60, \text{ czyli } P(A) = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}$$

12. a) Pary zdarzeń wykluczających się: A i C oraz B i C
Para zdarzeń przeciwnych: B i C
b) Zdarzenie niemożliwe: $A \cap C$
Zdarzenie pewne: $B \cup C$
13. a) $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(A') = \frac{5}{6}$
b) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A') = \frac{3}{4}$
14. $\overline{\Omega} = 36$
 $A \cap B = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$,
czyli $P(A \cap B) = \frac{5}{36}$
 $A \cup B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (5, 4), (6, 4), (6, 5)\}$,
czyli $P(A \cup B) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$
15. a) $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
b) $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
c) $P(C) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
16. $\overline{\Omega} = 90$
a) $A = \{10, 20, 40, 50, 70, 80\}$
 $\overline{A} = 6$, $P(A) = \frac{1}{15}$
b) A – zbiór liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5
 B – zbiór liczb dwucyfrowych podzielnych przez 8
 $A \cup B$ – zbiór liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5 lub przez 8
 $A \cap B$ – zbiór liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5 i przez 8
 $\overline{A} = 18$, $\overline{B} = 11$,
 $P(A) = \frac{18}{90}$, $P(B) = \frac{11}{90}$
 $\overline{A \cap B} = 2$
 $P(A \cup B) = \frac{18}{90} + \frac{11}{90} - \frac{2}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}$

20. $\overline{\Omega} = 15!$

a) $\overline{A} = 8! \cdot 7!$, czyli
 $P(A) = \frac{8! \cdot 7!}{15!} = \frac{1}{6435}$

b) $\overline{B} = 9 \cdot 7! \cdot 8! = 9! \cdot 7!$, czyli
 $P(B) = \frac{9! \cdot 7!}{15!} = \frac{1}{715}$

21. $\overline{\Omega} = 10!$, $\overline{A} = 2 \cdot 9!$
 $P(A) = 1 - \frac{9! \cdot 2}{10!} = \frac{4}{5}$

22. $\overline{\Omega} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
 $\overline{A}$ – liczba permutacji trójek
 cyfr: (4, 5, 9), (4, 6, 8), (5, 6, 7)
 $\overline{A} = 3 \cdot 3! = 18$
 $P(A) = \frac{18}{120} = \frac{3}{20}$

23. $\overline{\Omega} = 10!$
 a) $\overline{A} = 9 \cdot 8! = 9!$,
 czyli $P(A) = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$
 b) $P(B) = \frac{1}{2}$

24. $\overline{\Omega} = 45$
 Chłopcy:
 $\overline{C} = 0,4 \cdot 25 + 0,55 \cdot 20 = 21$
 Dziewczęta:
 $\overline{D} = 0,6 \cdot 25 + 0,45 \cdot 20 = 24$
 a) $P(A) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$
 b) $P(B) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

20. Losowo ustawiamy w rzędzie 7 dziewcząt i 8 chłopców. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) żaden chłopiec nie stoi obok chłopca,
 b) wszystkie dziewczęta stoją obok siebie.

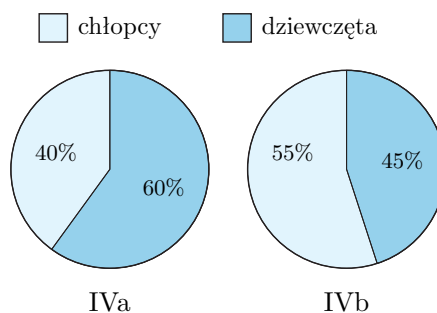
21. Na egzaminie posadzono losowo w jednym rzędzie 10 osób, w tym dwie z jednej szkoły. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie siedzą one obok siebie.

22. Spośród liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują cyfry 4, 5, 6, 7, 8, 9 (przy czym cyfry się nie powtarzają), losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to liczba podzielna przez 9.

23. Liczby 1, 2, 3, ..., 10 uporządkowano w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo wystąpienia w tym uporządkowaniu:

- a) dwójki bezpośrednio przed ósemką,
 b) dwójki przed ósemką.

24. W klasie IVa jest 25 uczniów, a w klasie IVb – 20 uczniów. Na diagramach przedstawiono, jaki procent uczniów każdej klasy stanowią dziewczęta, a jaki – chłopcy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że osoba losowo wybrana spośród uczniów obu klas będzie:



- a) chłopcem, b) dziewczyną.

25. W urnie jest siedem kul ponumerowanych od 1 do 7. Losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że numer drugiej kuli będzie większy od numeru pierwszej.

26. W pierwszej urnie są kule o numerach 1, 2, 3, 4, 5, 6, a w drugiej – o numerach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Z każdej urny losujemy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma numerów wylosowanych kul będzie podzielna przez 3.

27. W pierwszej urnie są 3 kule białe, 3 kule czarne i 2 kule niebieskie, a w drugiej – 1 kula biała, 4 kule czarne i 5 kul niebieskich. Losujemy po jednej kuli z każdej urny. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru.

25. $\overline{\Omega} = 7 \cdot 6 = 42$
 $A = \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 27, 34, 35, 36, 37, 45, 46, 47, 56, 57, 67\}$
 $\overline{A} = 21$, czyli $P(A) = \frac{21}{42} = \frac{1}{2}$

26. $\overline{\Omega} = 6 \cdot 7 = 42$
 $A = \{12, 15, 21, 24, 27, 33, 36, 42, 45, 51, 54, 57, 63, 66\}$
 $\overline{A} = 14$, czyli $P(A) = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$

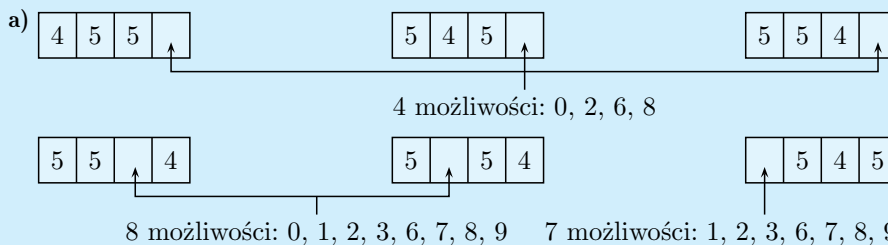
27. $P(A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} + \frac{2}{8} \cdot \frac{5}{10} = \frac{5}{16}$

■ Zestaw III – podsumowujący

28. Dwie drużyny rozgrywają ze sobą mecz piłki nożnej. Ile jest możliwych wyników, jeśli wiadomo, że każda z drużyn strzeliła:
- a) nie więcej niż 3 bramki, b) nie więcej niż 4 bramki?
29. Na ile sposobów można rozdzielić pięć różnych przedmiotów między dwie osoby tak, aby każda osoba dostała co najmniej jeden przedmiot?
30. Dwie siostry kupiły wspólnie 6 długopisów, każdy w innym kolorze. Oblicz, na ile sposobów mogą się nimi podzielić, jeśli każda ma dostać przynajmniej jeden długopis.
31. W rzędzie jest sześć krzeseł. Na ile sposobów mogą na nich usiąść dwie osoby tak, aby między nimi było tylko jedno wolne krzesło?
32. W partii 25 żarówek 16% jest uszkodzonych. Losujemy dwie żarówki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obie żarówki będą dobre.
33. Z urny, w której znajduje się 5 kul białych i 3 czarne, losujemy kolejno 3 kule. Czy bardziej prawdopodobne jest wylosowanie trzech kul białych w wypadku losowania bez zwracania, czy ze zwracaniem?
34. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ losujemy kolejno dwie różne liczby bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwsza liczba będzie parzysta, a iloczyn wylosowanych liczb będzie podzielny przez 6.
35. Dziecko dostało trzy klocki w kształcie sześcianu – czerwony, zielony i niebieski, trzy klocki w kształcie walca – czerwony, zielony i niebieski, oraz cztery klocki w kształcie stożka – czerwony, zielony, niebieski i biały. Dziecko wybiera trzy klocki, każdy innego kształtu. Na ile sposobów może to zrobić tak, aby:
- a) nie wszystkie były tego samego koloru, b) każdy był innego koloru?
36. Losujemy jedną liczbę spośród liczb naturalnych czterocyfrowych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba będzie parzysta, a w jej zapisie wystąpią:
- a) dokładnie dwie cyfry 5 i dokładnie jedna cyfra 4,
a) dokładnie dwie cyfry 4 i dokładnie jedna cyfra 5.
37. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cup B)$, jeśli wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ oraz: a) $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, b) $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym.

36. $\overline{\Omega} = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$

Liczba jest parzysta, gdy jej ostatnia cyfra jest jedną spośród cyfr 0, 2, 4, 6, 8.



$\overline{A} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 7 = 35$, $P(A) = \frac{35}{9000} = \frac{7}{1800}$

b) $\frac{29}{4500}$

28. a) $4 \cdot 4 = 16$

b) $5 \cdot 5 = 25$

29. Od wszystkich możliwości odejmujemy przypadki, gdy wszystkie przedmioty otrzyma jedna osoba.

$2^5 - 2 = 30$

30. $2^6 - 2 = 62$

31. Warunki zadania spełniają 4 pary krzeseł, na każdym krześle może usiąść jedna z 2 osób. Zatem $4 \cdot 2 = 8$.

32. $\overline{\Omega} = 25 \cdot 24 = 600$

$0,16 \cdot 25 = 4$, czyli w partii jest 21 dobrych żarówek

$\overline{A} = 21 \cdot 20 = 420$, czyli:

$P(A) = \frac{420}{600} = 0,7$

33. Losowanie bez zwracania:

$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28} \approx 0,18$

Losowanie ze zwracaniem:

$P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \approx 0,24$

Bardziej prawdopodobne jest przy losowaniu ze zwracaniem.

34. $\overline{\Omega} = 12 \cdot 11 = 132$

$A = \{(2, 3), (2, 6), (2, 9), (2, 12), (4, 3), (4, 6), (4, 9), (4, 12), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 7), (6, 8), (6, 9), (6, 10), (6, 11), (6, 12), (8, 3), (8, 6), (8, 9), (8, 12), (10, 3), (10, 6), (10, 9), (10, 12), (12, 1), (12, 2), (12, 3), (12, 4), (12, 5), (12, 6), (12, 7), (12, 8), (12, 9), (12, 10), (12, 11)\}$

$\overline{A} = 38$, czyli

$P(A) = \frac{38}{132} = \frac{19}{66}$

35. a) $3 \cdot 3 \cdot 4 - 3 = 33$

b) $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

37. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}$

Niech X będzie zmienną losową o wartościach $x_1, x_2, \dots, x_n$ przyjmowanych z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1, p_2, \dots, p_n$. **Wartością oczekiwaną** zmiennej X nazywamy liczbę:

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$$

Gry nazywamy **sprawiedliwą**, jeśli jej wartość oczekiwana jest równa 0.

38. $EX = 60 \cdot \frac{1}{4} + 30 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot 36 = 4,50$ [zł]

39. $12 \cdot \frac{27}{36} - p \cdot \frac{9}{36} = 0$
 $p = 36$

40. a) $EX = 80 \cdot \frac{1}{4} + 40 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot 50 = 5$ [zł]
 b) $80 \cdot \frac{1}{4} + 40 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot p = 0$
 $p = 60$

41. $x \cdot \frac{6}{36} + 2x \cdot \frac{6}{36} - 36 \cdot \frac{24}{36} = 0$
 $x = 48$

42. a) $EX = 7 \cdot \frac{2}{6} + 8 \cdot \frac{2}{6} + 9 \cdot \frac{2}{6} = 8$
 b) $EX = 6 \cdot \frac{1}{9} + 7 \cdot \frac{2}{9} + 8 \cdot \frac{3}{9} + 9 \cdot \frac{2}{9} + 10 \cdot \frac{1}{9} = 8$

43. 1. P, 2. P

38. Pewna gra polega na dwóch rzutach monetą. Jeśli wypadną dwa orły, to wygrywamy 60 zł, jeśli dwie reszki – wygrywamy 30 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 36 zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

39. Pewna gra polega na dwóch rzutach kostką. Jeśli iloczyn liczby oczek otrzymanych na kostkach jest parzysty, to wygrywamy 12 zł, w przeciwnym przypadku przegrywamy p zł. Dla jakiej wartości p gra jest sprawiedliwa?

40. Pewna gra polega na dwóch rzutach monetą. Jeśli wypadną dwa orły, to wygrywamy 80 zł, jeśli dwie reszki – wygrywamy 40 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy p zł.

a) Oblicz wartość oczekiwaną tej gry dla $p = 50$.

b) Dla jakiej wartości p gra jest sprawiedliwa?

41. Pewna gra polega na rzucie dwiema kostkami i dodaniu liczby wyrzuconych oczek. Jeśli otrzymamy co najmniej 10 oczek, to wygrywamy x zł, jeśli otrzymamy 7 oczek, to wygrywamy $2x$ zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 36 zł. Dla jakiej wartości x gra jest sprawiedliwa?

42. Spośród liczb 3, 4 i 5 losujemy dwie. Zmienna losowa X przyporządkowuje każdej parze liczb jej sumę. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej X , jeśli losujemy: a) bez zwracania, b) ze zwracaniem.

43. W pewnej grze należy skreślić dowolną liczbę cyfr na kuponie, który przedstawiono na rysunku.

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Opisane skreślenia można wykonać na ponad 1000 sposobów.	P	F
2.	Skreślenie dokładnie dziewięciu cyfr można wykonać na 10 sposobów.	P	F

5.15. Statystyka

Średnią arytmetyczną n liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Średnia ważona n liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$, którym przypisano odpowiednio wagi $w_1, w_2, \dots, w_n$, będące liczbami dodatnimi, jest równa:

$$\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n liczb $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$ jest:

- dla n nieparzystych: $x_{\frac{n+1}{2}}$ – wartość środkowa,
- dla n parzystych: $\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$ – średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wartości środkowych.

Dominanta (wartość modalna, moda) jest wartością, która występuje wśród danych najczęściej.

Wariancją n liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{x}$ jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

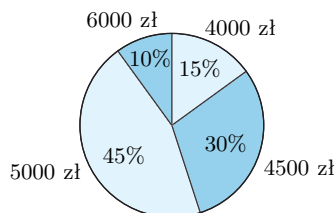
Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

■ Zestaw I – wprowadzający

1. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę danych liczb.

- a) 4, 3, 1, 10, 10, 13, 8, 10, 4 c) 3, 2, 3, 9, 4, 10, 14, 3
b) 2, 2, 4, 4, 2, 6, 6, 4, 2, 2, 10 d) 16, 8, 8, 0, 8, 8, 14, 2

2. Pewna firma ma cztery oddziały. Na diagramie przedstawiono, jaki procent osób pracuje w poszczególnych oddziałach i jakie są w nich średnie zarobki. Oblicz średnią zarobków w tej firmie.



3. W pewnej szkole są trzy klasy drugie liczące kolejno 21, 23 i 23 uczniów. Średni wzrost uczniów w pierwszej z nich jest równy 172 cm, w drugiej – 174 cm, w trzeciej – 170 cm. Oblicz średni wzrost wszystkich uczniów klas drugich.

1. a) $\bar{x} = 7$, $M = 8$, $D = 10$
b) $\bar{x} = 4$, $M = 4$, $D = 2$
c) $\bar{x} = 6$, $M = 3,5$, $D = 3$
d) $\bar{x} = 8$, $M = 8$, $D = 8$

2. $\bar{x} = 0,1 \cdot 6000 + 0,15 \cdot 4000 + 0,3 \cdot 4500 + 0,45 \cdot 5000 = 4800$ [zł]

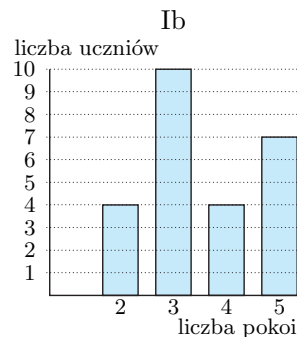
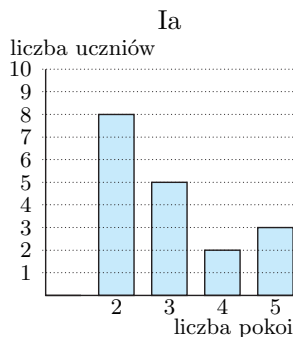
3. $\bar{x} = \frac{21 \cdot 172 + 23 \cdot 174 + 23 \cdot 170}{21 + 23 + 23} = \frac{11524}{67} = 172$ [cm]

4. a) $\bar{x} = 3$, $M = 3$, $D = 2$
 b) $\bar{x} = 3,56$, $M = 3$, $D = 3$
 c) $\bar{x} \approx 3,33$, $M = 3$, $D = 3$

5. x – ocena Ani
 $\frac{25+x}{8} \geq 3,5$
 $x \geq 3$
 Ania musi dostać co najmniej 3.
6. x – liczba wyrzuconych 2
 y – liczba wyrzuconych 3
 $\frac{64+2x+3y}{15+x+y} = 4$,
 skąd $2x + y = 4$
 Ponieważ x i y są liczbami parzystymi, $x = 2$, $y = 0$ lub $x = 0$, $y = 4$.
 Zatem wykonano 17 lub 19 rzutów.
7. a) 4 b) 6,1

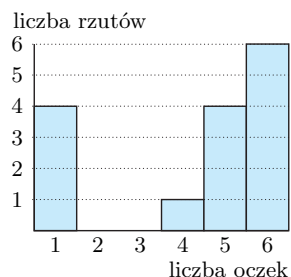
4. Uczniom klas Ia i Ib zadano pytanie: „Ile pokoi ma twoje mieszkanie?”. Wyniki ankiety przedstawiono na poniższych diagramach. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zebranych danych dla:

a) klasy Ia, b) klasy Ib, c) obu klas razem.



5. Pewien nauczyciel, aby wystawić oceny na półrocze, oblicza średnią arytmetyczną wszystkich ocen, a następnie zaokrągla wynik do liczby całkowitej. Ocenę Ani to 5, 3, 4, 4, 4, 2 i 3. Jaką najniższą ocenę musi dostać Ania z ostatniego sprawdzianu, żeby na koniec semestru mieć ocenę dobrą?

6. Wykonano serię rzutów kostką – średnia liczba otrzymanych oczek jest równa 4. Na diagramie przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek, ale pominięto informację, ile razy wypadły 2 oraz 3 oczka – wiadomo, że każdy z tych wyników wyrzucono parzystą liczbę razy. Ile rzutów wykonano podczas tej serii?



7. W tabeli podane są liczby i odpowiadające im wagi. Oblicz średnią ważoną tych liczb.

a)

Liczba	2	3	5	10
Waga	4	5	1	2

b)

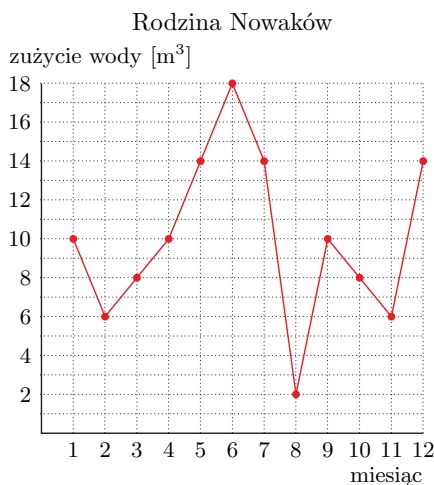
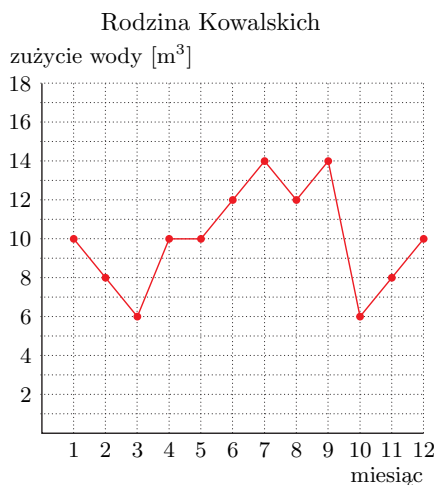
Liczba	9	2	6	8	16
Waga	0,2	0,4	0,25	0,05	0,1

8. Ocena wystawiana na półrocze przez pewnego nauczyciela jest średnią ważoną (zaokrągloną do liczby całkowitej) ze średnich arytmetycznych ocen z prac klasowych, sprawdzianów i pracy na lekcji – z wagami odpowiednio 0,5, 0,3 i 0,2. Ocenę Kuby z prac klasowych to 5, 4, 2, ze sprawdzianów – 4, 3, 3, 5, 2 i za pracę na lekcji – 4, 3. Jaką ocenę otrzyma Kuba na półrocze?

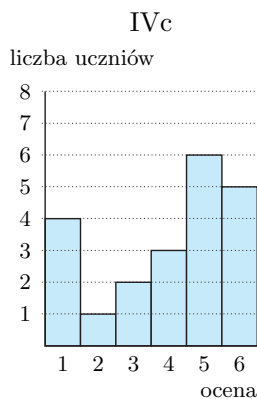
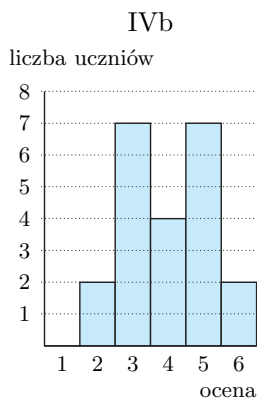
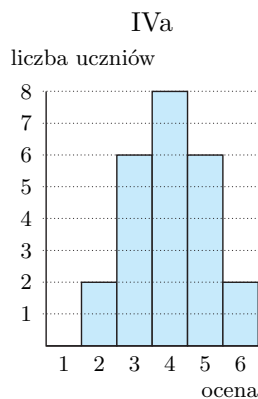
$$8. \frac{0,5 \cdot \frac{5+4+2}{3} + 0,3 \cdot \frac{4+3+3+5+2}{5} + 0,2 \cdot \frac{4+3}{2}}{0,5+0,3+0,2} = 3,55$$

Kuba otrzyma 4.

9. a) Średnia arytmetyczna liczb 14, 2, 4, 15, 14, x , $6x$ jest równa 12. Oblicz x oraz wyznacz medianę i dominantę tych liczb.
 b) Średnia arytmetyczna liczb 3, 1, 2, 5, 6, x , y jest równa 4. Oblicz x i y , jeśli wiadomo, że dominanta tych liczb jest równa 1 oraz $x > y$.
10. Na wykresach poniżej podano zużycie wody w kolejnych miesiącach przez rodziny Kowalskich i Nowaków. Sprawdź, czy średnie miesięczne zużycie wody w obu rodzinach jest takie samo. Oblicz odchylenie standardowe miesięcznego zużycia wody dla:
 a) rodziny Kowalskich, b) rodziny Nowaków, c) obu rodzin razem.



11. Na diagramach podano wyniki sprawdzianu w trzech klasach w pewnym liceum. Oblicz średnią ocen ze sprawdzianu w każdej klasie. W której z nich odchylenie standardowe ocen jest największe?

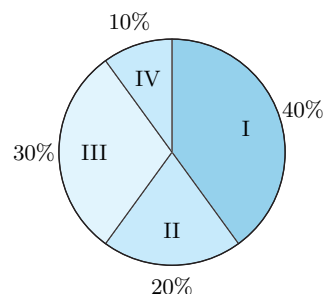


9. a) $\frac{49+7x}{7} = 12$, czyli $x = 5$
 2, 4, 5, 14, 14, 15, 30
 $M = 14$, $D = 14$
 b) $\frac{17+x+y}{7} = 4$,
 czyli $x + y = 11$
 $y = 1$, $x = 10$
10. a) $\bar{x}_K = \frac{120}{12} = 10 \text{ [m}^3\text{]}$
 $\sigma_K = \sqrt{\frac{80}{12}} \approx 2,58 \text{ [m}^3\text{]}$
 b) $\bar{x}_N = \frac{120}{12} = 10 \text{ [m}^3\text{]}$
 $\sigma_N = \sqrt{\frac{216}{12}} = \sqrt{18} \approx 4,24 \text{ [m}^3\text{]}$
 c) $\sigma = \sqrt{\frac{37}{3}} \approx 3,51 \text{ [m}^3\text{]}$

11. $\bar{x}_a = 4$, $\sigma_a \approx 1,08$, $\bar{x}_b = 4$,
 $\sigma_b \approx 1,17$, $\bar{x}_c = 4$, $\sigma_c \approx 1,8$

■ Zestaw II – ćwiczeniowy

12. Pewna firma zatrudnia 120 osób w czterech oddziałach znajdujących się w różnych miastach. Średnie miesięczne wynagrodzenie w I oddziale wynosi 4400 zł, w II – 4800 zł, w III – 4200 zł, w IV – 6000 zł. Na diagramie poniżej został podany procentowy rozkład zatrudnienia w poszczególnych oddziałach.



- a) Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie.
 b) Jak zmieni się średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie, jeśli w I oddziale zatrudnienie zmniejszy się o 25%, a średnia zarobków w tym oddziale nie ulegnie zmianie?

13. W pewnej firmie 20% pracowników zarabia średnio miesięcznie 7 tysięcy złotych. Średnia płaca pozostałych pracowników tej firmy wynosi 4,5 tysiąca złotych. Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie.

14. a) Para I:
 technika: 5,2,
 prezentacja: 5,0,
 nota końcowa: 5,1
 Para II:
 technika: 5,8,
 prezentacja: 5,7,
 nota końcowa: 5,75

b) Para I:

$$\bar{x} = \frac{0,6 \cdot 5,2 + 0,4 \cdot 5,0}{0,6 + 0,4} = 5,12$$

Para II:

$$\bar{x} = \frac{0,6 \cdot 5,8 + 0,4 \cdot 5,7}{0,6 + 0,4} = 5,76$$

14. Podczas międzyszkolnych zawodów w łyżwiarstwie figurowym dziewięciu sędziów przyznawało noty za technikę i prezentację programu w skali od 0,0 do 6,0 punktów. Nota zarówno za technikę, jak i za prezentację programu była średnią arytmetyczną uzyskanych punktów. Jakie były końcowe noty dwóch par, których punktacja została podana w tabeli, jeśli końcowa nota była:

- a) średnią arytmetyczną noty za technikę i noty za prezentację,
 b) średnią ważoną, przy czym nota za technikę miała wagę 0,6, a nota za prezentację – wagę 0,4?

Para I	technika	5,0	5,1	5,0	5,2	5,5	5,0	5,3	5,1	5,6
	prezentacja	4,9	5,0	4,8	5,2	5,4	4,9	5,0	4,8	5,0
Para II	technika	6,0	5,8	5,9	6,0	5,7	5,8	5,7	5,9	5,4
	prezentacja	5,5	5,8	5,5	5,9	5,6	5,8	5,9	5,4	5,9

15. W pewnej firmie średnia płaca wynosi 4800 zł, przy czym średnia płaca pracowników ze stażem nie dłuższym niż 5 lat wynosi 4000 zł, natomiast tych ze stażem dłuższym – 4900 zł. Oblicz, jaki procent wszystkich pracowników stanowią pracownicy z krótszym stażem.

12. a) $\bar{x} = 0,4 \cdot 4400 + 0,2 \cdot 4800 + 0,3 \cdot 4200 + 0,1 \cdot 6000 = 4580$ [zł]

b) Liczba zatrudnionych osób po zmniejszeniu zatrudnienia:

I – 36, II – 24, III – 36, IV – 12

$$\bar{x} = \frac{36 \cdot 4400 + 24 \cdot 4800 + 36 \cdot 4200 + 12 \cdot 6000}{108} = 4600$$

Średnie wynagrodzenie w firmie zwiększy się o 20 zł.

13. $\bar{x} = 0,2 \cdot 7000 + 0,8 \cdot 4500 = 5000$ [zł]

15. x – liczba pracowników ze stażem do 5 lat, y – liczba pracowników ze stażem ponad 5 lat

$$\frac{4000x + 4900y}{x + y} = 4800, \text{ stąd } y = 8x$$

$$x + y = 9x, \text{ czyli } x = \frac{1}{9}(x + y) \approx 0,111(x + y)$$

Pracownicy z krótszym stażem stanowią około 11,1% wszystkich pracowników.

16. Oblicz średnią arytmetyczną $\bar{x}$, średnią arytmetyczną kwadratów $\overline{x^2}$ oraz wariancję poniższych danych.

- a) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 c) 10, 20, 30, 40, 50
b) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5 d) -2, -2, -1, -1, 0, 5, 5

- D** 17. Wykaż, że jeżeli $\overline{x^2}$ jest średnią arytmetyczną kwadratów liczb $x_1, \dots, x_k$, a $\overline{y^2}$ jest średnią arytmetyczną kwadratów liczb $y_1, \dots, y_l$, to średnia arytmetyczna kwadratów wszystkich tych liczb jest równa:

$$\frac{k \cdot \overline{x^2} + l \cdot \overline{y^2}}{k + l}$$

18. W pewnej klasie jest 12 dziewcząt i 8 chłopców. W tabeli podano średnie ocen z klasówki ze statystyki w tej klasie oraz odchylenia standardowe (z podziałem na dziewczęta i chłopców).

	Dziewczęta	Chłopcy
Średnia ocen	4	4,2
Odchylenie standardowe	0,9	1,5

Oblicz średnią ocen z tej klasówki i odchylenie standardowe dla całej klasy. Wynik zaokrąglaj do dwóch miejsc po przecinku.

19. W firmie A pracuje 10 osób, a w firmie B – 20 osób. Średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie A wynosi 4000 zł, a odchylenie standardowe – 500 zł, natomiast w firmie B średnie miesięczne wynagrodzenie wynosi 5000 zł, a odchylenie standardowe – 1000 zł. Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie oraz odchylenie standardowe dla obu firm łącznie. Wynik zaokrąglaj do dwóch miejsc po przecinku.
20. Średnie zarobki w pewnej firmie wynoszą 6000 zł, a odchylenie standardowe wynosi 500 zł. Oblicz, jak zmieni się średnie wynagrodzenie i odchylenie standardowe, jeżeli każdy z pracowników dostanie:
- a) 5% podwyżki, b) 200 zł podwyżki.
21. Średnia arytmetyczna liczb $x, y, 2, 6, 6, 4, 3, 4$ jest równa 4, a odchylenie standardowe jest równe 1,5. Oblicz x i y , jeśli wiadomo, że $x < y$.
22. Wśród 10 ocen z matematyki pewnego ucznia są tylko trójki i czwórki. Oblicz, ile jest czwórek, jeśli wiadomo, że wariancja ocen wynosi 0,16 oraz czwórek jest więcej niż trójek.

20. a) średnia i odchylenie – wzrost o 5%: odpowiednio 6300 zł i 525 zł
b) średnia – wzrost o 200 zł: 6200 zł, odchylenie bez zmian: 500 zł

21. $\frac{25+x+y}{8} = 4$, czyli $y = 7 - x$
 $117 + x^2 + y^2 = 8(1,5^2 + 4^2)$, czyli $x^2 + y^2 = 29$
 $x^2 + (7 - x)^2 = 29$
 $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x = 2$, $y = 5$

22. x – liczba 4, $10 - x$ – liczba 3, $x > 5$
 $(10 - x) \cdot 3^2 + x \cdot 4^2 = 10 \left(0,16 + \left(\frac{(10-x) \cdot 3 + x \cdot 4}{10} \right)^2 \right)$
 $9(10 - x) + 16x = 1,6 + \frac{(x+30)^2}{10}$
 $x^2 - 10x + 16 = 0$, $x = 8$, czyli jest 8 czwórek.

16. a) $\bar{x} = 2$, $\overline{x^2} = 4\frac{2}{3}$, $\sigma^2 = \frac{2}{3}$
b) $\bar{x} = 3$, $\overline{x^2} = 11$, $\sigma^2 = 2$
c) $\bar{x} = 30$, $\overline{x^2} = 1100$, $\sigma^2 = 200$
d) $\bar{x} = \frac{4}{7}$, $\overline{x^2} = 8\frac{4}{7}$, $\sigma^2 = 8\frac{12}{49}$

17. $\overline{x^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}{k}$,
więc $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = k \cdot \overline{x^2}$
 $\overline{y^2} = \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_l^2}{l}$,
więc $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_l^2 = l \cdot \overline{y^2}$
Zatem:
 $\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_l^2}{k + l} = \frac{k \cdot \overline{x^2} + l \cdot \overline{y^2}}{k + l}$

Komentarz

W zadaniach 18–22 można wykorzystać wzór z zadania 17 lub następujący wzór:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2,$$

czyli $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = n(\sigma^2 + (\bar{x})^2)$

18. Średnia klasy:
 $\bar{x} = \frac{12 \cdot 4 + 8 \cdot 4,2}{20} = 4,08$
 $\overline{x_D^2} = \sigma_D^2 + (\bar{x_D})^2 = 0,9^2 + 4^2 = 16,81$
 $\overline{x_C^2} = \sigma_C^2 + (\bar{x_C})^2 = 1,5^2 + 4,2^2 = 19,89$
 $\sigma^2 = \frac{12 \cdot \overline{x_D^2} + 8 \cdot \overline{x_C^2}}{12 + 8} - (\bar{x})^2 = \frac{12 \cdot 16,81 + 8 \cdot 19,89}{12 + 8} - 4,08^2 = 1,3956$
 $\sigma \approx 1,18$

19. $\bar{x} = \frac{10 \cdot 4000 + 20 \cdot 5000}{30} \approx 4666,67$ [zł]
Firma A: $x_1^2 + \dots + x_{10}^2 = 10(500^2 + 4000^2) = 162\,500\,000$
Firma B: $y_1^2 + \dots + y_{20}^2 = 20(1000^2 + 5000^2) = 520\,000\,000$
 $\sigma^2 = \frac{162\,500\,000 + 520\,000\,000}{30} - (\bar{x})^2 \approx 972\,222,22$
 $\sigma \approx 986,01$ [zł]

$$23. \frac{12 \cdot 140 + 2 \cdot 10}{12} = 140 + \frac{5}{3} = 141\frac{2}{3} \approx 142 \text{ [cm]}$$

24. x – liczba pracowników w II oddziale

$$a) \frac{4600 \cdot 2x + 5800 \cdot x}{3x} = \frac{15000x}{3x} = 5000 \text{ [zł]}$$

$$b) \frac{4600 \cdot 0,6x + 5800 \cdot x}{1,6x} = \frac{8560x}{1,6x} = 5350 \text{ [zł]}$$

25. Mediana: 3500 zł

$$P(A) = \frac{7}{25}$$

■ Zestaw III – podsumowujący

23. Średnia wyników w skoku wzwyż 12 uczniów wyniosła 140 cm. Dwóch uczniów skoczyło na wysokość 150 cm. Ile wynosiłaby średnia, gdyby skoczyli oni o 10 cm wyżej?

24. Pewna firma ma dwa oddziały. Średnie miesięczne wynagrodzenie w I oddziale wynosi 4600 zł, a w II – 5800 zł. Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie w obu oddziałach razem, jeżeli wiadomo, że:

a) I oddział zatrudnia dwa razy więcej pracowników niż II oddział,

b) I oddział zatrudnia o 40% pracowników mniej niż II oddział.

25. W tabeli podano miesięczne wynagrodzenia pracowników pewnej firmy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany pracownik z tej firmy zarabia powyżej mediany.

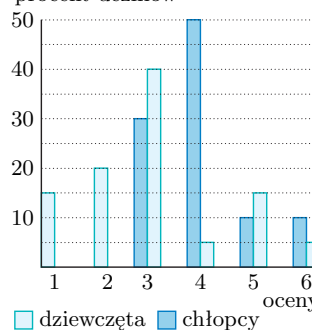
Liczba pracowników	12	6	2	2	3
Wynagrodzenie [zł]	3000	3500	4000	5000	7000

26. W klasach drugich pewnej szkoły przeprowadzono test sprawdzający z matematyki, w którym wzięło udział 60 uczniów, w tym 20 dziewcząt. Na diagramie podano oceny oddzielnie w grupie dziewcząt i w grupie chłopców.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ocena losowo wybranej dziewczyny będzie się różniła od średniej w grupie dziewcząt o więcej niż odchylenie standardowe. Ile wynosi to samo prawdopodobieństwo w grupie chłopców?

b) Wybieramy losowo dziewczynę i chłopca. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ocena dziewczyny będzie nie mniejsza od średniej w grupie dziewcząt, a ocena chłopca – nie mniejsza od średniej w grupie chłopców.

procent uczniów



27. Niech m będzie średnią arytmetyczną liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, a n – średnią arytmetyczną liczb 11, 21, 31, 41, 51, 61.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Średnia arytmetyczna liczb 12, 23, 34, 45, 56, 67 jest równa $m + n$.	P	F
2.	Zachodzi równość $n = 11m$.	P	F

$$26. a) \bar{x}_D = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{20} = 3$$

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2^2 + 8 \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 6^2}{20} - 3^2} \approx 1,38$$

$$P(A) = \frac{3+3+1}{20} = \frac{7}{20}$$

$$\bar{x}_C = \frac{12 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6}{40} = 4$$

$$\sigma_C = \sqrt{\frac{12 \cdot 3^2 + 20 \cdot 4^2 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 6^2}{40} - 4^2} \approx 0,89$$

$$P(B) = \frac{12+4+4}{40} = \frac{1}{2}$$

$$b) \bar{\Omega} = 20 \cdot 40 = 800, \bar{A} = 13 \cdot 28 = 364, P(A) = \frac{364}{800} = 0,455$$

$$27. m = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5, n = \frac{11+21+31+41+51+61}{6} = 36$$

$$1. \frac{12+23+34+45+56+67}{6} = 39,5 = m + n$$

$$2. 11m = 38,5 \neq n$$

Indeks

- argument funkcji 167
- asymptota
 - pionowa hiperboli 198
 - pozioma hiperboli 198
- bryła platońska 100
- bryły
 - Archimedesesa 103
 - podobne 124
- cechy podobieństwa trójkątów 231
- ciąg
 - arytmetyczny 215
 - geometryczny 215
 - malejący 215
 - monotoniczny 215
 - niemalejący 215
 - nierosnący 215
 - nieskończony 215
 - rosnący 215
 - skończony 215
 - stały 215
- częstość zdarzeń 31
- czworościan foremny 79, 100, 101
- długość odcinka 222
- dominanta 253
- doświadczenie wieloetapowe 50
- dowód nie wprost 142
- dwudziestokąt foremny 100, 101
- dwunastokąt foremny 100, 101
- dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta 229
- działania
 - na pierwiastkach 154
 - na potęgach 154
- dziedzina funkcji 167
- funkcja 167
 - kwadratowa 183
 - liniowa 176
 - logarytmiczna 210
 - malejąca 167
 - monotoniczna 167
 - niemalejąca 167
 - nierosnąca 167
 - rosnąca 167
 - stała 167
 - wykładnicza 210
 - wymierna 198
- funkcje trygonometryczne
 - kąta ostrego 204
 - kąta wypukłego 204
- gra sprawiedliwa 47, 252
- graniastosłup 66
 - pochyły 66, 77
 - prawidłowy 68
 - prosty 66, 240
- hiperbola 198
- igła Buffona 31
- iloczyn
 - zbiorów 161
 - zdarzeń 29
- iloraz ciągu geometrycznego 215
- implikacja 136
- kąt
 - dwusieczny 91
 - między prostą a płaszczyzną 87
 - płaski przy wierzchołku ostrosłupa prawidłowego 79
 - rozwarcia stożka 115
 - środkowy w okręgu 233
 - wpisany w okrąg 233
- koło wielkie kuli 119
- krawędź
 - boczna graniastosłupa 66
 - boczna ostrosłupa 78
 - podstawy graniastosłupa 66
 - podstawy ostrosłupa 78
- kula 119, 240
- liczby
 - całkowite 154
 - naturalne 154
 - niewymierne 154
 - pierwsze 154
 - wymierne 154
- linia
 - geodezyjna 118
 - śrubowa 118
- logarytm 210
- mediana 253
- miara kąta dwusiecznego 91
- miejsca zerowe funkcji kwadratowej 183
- miejsce zerowe funkcji 167
- monotoniczność funkcji liniowej 176
- następnik implikacji 136
- objętość
 - czworościanu foremnego 85
 - graniastosłupa 74, 240
 - kuli 120, 240

- objętość
 - ostrosłupa 83, 240
 - prostopadłościanu 74, 240
 - stożka 115, 241
 - sześcianu 74
 - walca 111, 241
- odchylenie standardowe 253
- odległość punktu od prostej 222
- okrąg 224
- okres połowicznego rozpadu 214
- okręgi
 - przecinające się 232
 - rozłączne wewnętrznie 232
 - rozłączne zewnętrznie 232
 - styczne wewnętrznie 232
 - styczne zewnętrznie 232
- ostrosłup 78, 240
 - prawidłowy 78
 - prosty 78
- oś
 - stożka 114
 - walca 110
- ośmiościan foremny 100, 101
- parabola 183
- permutacje 14, 15, 247
 - z powtórzeniami 18
- pierwiastek wielomianu 191
- płaszczyzna styczna do kuli 119
- płaszczyzny
 - przecinające się 62
 - równoległe 62
- podstawa
 - graniastosłupa 66
 - ostrosłupa 78
 - stożka 114
 - walca 110
- podzbiór 161
- pole powierzchni
 - bocznej graniastosłupa 240
 - bocznej stożka 114, 241
 - bocznej walca 110, 241
 - całkowitej graniastosłupa 66
 - całkowitej ostrosłupa 78
 - całkowitej stożka 114, 241
 - całkowitej walca 110, 241
 - kuli 120, 240
- poprzednik implikacji 136
- postać
 - iloczynowa funkcji kwadratowej 183
 - kanoniczna funkcji kwadratowej 183
 - ogólna funkcji kwadratowej 183
- potęga o wykładniku
 - całkowitym 154
 - wymiernym 154
- powierzchnia boczna graniastosłupa 66
- prawdopodobieństwo
 - klasyczne 32
 - różnicy zdarzeń 42
 - sumy zdarzeń 41, 42
 - zdarzenia 32, 40
- proporcjonalność odwrotna 198
- prosta
 - prostopadła do płaszczyzny 64
 - przecinająca płaszczyznę 64
 - równoległa do płaszczyzny 64
- proste
 - prostopadłe 63, 176
 - przecinające się 63
 - równoległe 63, 176
 - skośne 63
- prostopadłościan 67, 240
- przekątna
 - graniastosłupa 71
 - prostopadłościanu 71, 72
- przekrój osiowy
 - stożka 115
 - walca 110
- przekształcenia wykresu funkcji 170
- przestrzeń zdarzeń elementarnych 28
- przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych 170
- reguła
 - dodawania 25
 - mnożenia 10, 11
- romboedr 77
- rozkład
 - prawdopodobieństwa 38
 - zmiennej losowej 46
- równanie
 - kierunkowe prostej 176
 - ogólne prostej 176
 - okręgu 224
- różnica
 - ciągu arytmetycznego 215
 - zbiorów 161
 - zdarzeń 29
- rzut prostokątny
 - figury na płaszczyznę 64
 - punktu na płaszczyznę 64
- schemat klasyczny
 - prawdopodobieństwa 32
- sfera 119
- silnia 15

skala podobieństwa brył 124
 spodek wysokości
 ostrosłupa 78
 stożka 114
 stożek 114, 241
 suma
 n początkowych wyrazów ciągu
 arytmetycznego 215
 n początkowych wyrazów ciągu
 geometrycznego 215
 zbiorów 161
 zdarzeń 29
 symetralna boku trójkąta 229
 sześcián 67, 100, 101
 ściana boczna
 graniastosłupa 66
 ostrosłupa 78
 średnia
 arytmetyczna 253
 ważona 253
 środek
 ciężkości trójkąta 229
 odcinka 222
 okręgu opisanego na trójkącie 229
 okręgu wpisanego w trójkąt 229
 środkowa trójkąta 229
 talia kart 26
 tożsamości trygonometryczne 204
 trójmian kwadratowy 183
 twierdzenie
 Bézouta 191
 cosinusów 235
 o dwusiecznej kąta w trójkącie 152, 236
 o pierwiastkach całkowitych wielomianu 191
 o prostej prostopadłej do płaszczyzny 64
 o reszcie 191
 sinusów 235
 Talesa 231
 tworząca
 stożka 114
 walca 110
 układ równań
 nieoznaczony 176
 oznaczony 176
 sprzeczny 176
 walec 110, 241
 wariacje bez powtórzeń 19, 247
 wariacje z powtórzeniami 21, 22, 247
 wariancja 253
 wartość
 bezwzględna 161
 oczekiwana 47, 252
 wielkości odwrotnie proporcjonalne 198
 wielokąt foremny 234
 wielomian 191
 zerowy 191
 wielościán foremny 100
 wierzchołek
 graniastosłupa 66
 ostrosłupa 78
 stożka 114
 własności logarytmów 210
 własności prawdopodobieństwa 40, 247
 współczynnik
 kierunkowy prostej 176
 proporcjonalności odwrotnej 198
 wielomianu 191
 współrzędne
 środką odcinka 222
 wierzchołka paraboli 183
 wykres funkcji liniowej 176
 wynik sprzyjający zdarzeniu 28
 wyraz wolny wielomianu 191
 wyróżnik trójmianu kwadratowego 183
 wysokość
 czworosiánu foremnego 85
 graniastosłupa 66
 ostrosłupa 78
 stożka 114
 walca 110
 wzory
 na pole trójkąta 229
 skróconego mnożenia 154, 159
 wzór ogólny ciągu
 arytmetycznego 215
 geometrycznego 215
 zbiory rozłączne 25
 zbiór wartości funkcji 167
 zdarzenia rozłączne 29
 zdarzenie
 elementarne 28
 losowe 28
 niemożliwe 28
 pewne 28
 przeciwnie 29
 zmienna losowa 46

Tablice logarytmów dziesiętnych

b	$b + 0,00$	$b + 0,01$	$b + 0,02$	$b + 0,03$	$b + 0,04$	$b + 0,05$	$b + 0,06$	$b + 0,07$	$b + 0,08$	$b + 0,09$
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784
2,4	0,3802	0,3820	0,3838	0,3856	0,3874	0,3892	0,3909	0,3927	0,3944	0,3962
2,5	0,3979	0,3997	0,4014	0,4031	0,4048	0,4065	0,4082	0,4099	0,4116	0,4133
2,6	0,4150	0,4166	0,4183	0,4200	0,4216	0,4232	0,4249	0,4265	0,4281	0,4298
2,7	0,4314	0,4330	0,4346	0,4362	0,4378	0,4393	0,4409	0,4425	0,4440	0,4456
2,8	0,4472	0,4487	0,4502	0,4518	0,4533	0,4548	0,4564	0,4579	0,4594	0,4609
2,9	0,4624	0,4639	0,4654	0,4669	0,4683	0,4698	0,4713	0,4728	0,4742	0,4757
3,0	0,4771	0,4786	0,4800	0,4814	0,4829	0,4843	0,4857	0,4871	0,4886	0,4900
3,1	0,4914	0,4928	0,4942	0,4955	0,4969	0,4983	0,4997	0,5011	0,5024	0,5038
3,2	0,5051	0,5065	0,5079	0,5092	0,5105	0,5119	0,5132	0,5145	0,5159	0,5172
3,3	0,5185	0,5198	0,5211	0,5224	0,5237	0,5250	0,5263	0,5276	0,5289	0,5302
3,4	0,5315	0,5328	0,5340	0,5353	0,5366	0,5378	0,5391	0,5403	0,5416	0,5428
3,5	0,5441	0,5453	0,5465	0,5478	0,5490	0,5502	0,5514	0,5527	0,5539	0,5551
3,6	0,5563	0,5575	0,5587	0,5599	0,5611	0,5623	0,5635	0,5647	0,5658	0,5670
3,7	0,5682	0,5694	0,5705	0,5717	0,5729	0,5740	0,5752	0,5763	0,5775	0,5786
3,8	0,5798	0,5809	0,5821	0,5832	0,5843	0,5855	0,5866	0,5877	0,5888	0,5899
3,9	0,5911	0,5922	0,5933	0,5944	0,5955	0,5966	0,5977	0,5988	0,5999	0,6010
4,0	0,6021	0,6031	0,6042	0,6053	0,6064	0,6075	0,6085	0,6096	0,6107	0,6117
4,1	0,6128	0,6138	0,6149	0,6160	0,6170	0,6180	0,6191	0,6201	0,6212	0,6222
4,2	0,6232	0,6243	0,6253	0,6263	0,6274	0,6284	0,6294	0,6304	0,6314	0,6325
4,3	0,6335	0,6345	0,6355	0,6365	0,6375	0,6385	0,6395	0,6405	0,6415	0,6425
4,4	0,6435	0,6444	0,6454	0,6464	0,6474	0,6484	0,6493	0,6503	0,6513	0,6522
4,5	0,6532	0,6542	0,6551	0,6561	0,6571	0,6580	0,6590	0,6599	0,6609	0,6618
4,6	0,6628	0,6637	0,6646	0,6656	0,6665	0,6675	0,6684	0,6693	0,6702	0,6712
4,7	0,6721	0,6730	0,6739	0,6749	0,6758	0,6767	0,6776	0,6785	0,6794	0,6803
4,8	0,6812	0,6821	0,6830	0,6839	0,6848	0,6857	0,6866	0,6875	0,6884	0,6893
4,9	0,6902	0,6911	0,6920	0,6928	0,6937	0,6946	0,6955	0,6964	0,6972	0,6981
5,0	0,6990	0,6998	0,7007	0,7016	0,7024	0,7033	0,7042	0,7050	0,7059	0,7067
5,1	0,7076	0,7084	0,7093	0,7101	0,7110	0,7118	0,7126	0,7135	0,7143	0,7152
5,2	0,7160	0,7168	0,7177	0,7185	0,7193	0,7202	0,7210	0,7218	0,7226	0,7235
5,3	0,7243	0,7251	0,7259	0,7267	0,7275	0,7284	0,7292	0,7300	0,7308	0,7316

b	$b + 0,00$	$b + 0,01$	$b + 0,02$	$b + 0,03$	$b + 0,04$	$b + 0,05$	$b + 0,06$	$b + 0,07$	$b + 0,08$	$b + 0,09$
5,4	0,7324	0,7332	0,7340	0,7348	0,7356	0,7364	0,7372	0,7380	0,7388	0,7396
5,5	0,7404	0,7412	0,7419	0,7427	0,7435	0,7443	0,7451	0,7459	0,7466	0,7474
5,6	0,7482	0,7490	0,7497	0,7505	0,7513	0,7520	0,7528	0,7536	0,7543	0,7551
5,7	0,7559	0,7566	0,7574	0,7582	0,7589	0,7597	0,7604	0,7612	0,7619	0,7627
5,8	0,7634	0,7642	0,7649	0,7657	0,7664	0,7672	0,7679	0,7686	0,7694	0,7701
5,9	0,7709	0,7716	0,7723	0,7731	0,7738	0,7745	0,7752	0,7760	0,7767	0,7774
6,0	0,7782	0,7789	0,7796	0,7803	0,7810	0,7818	0,7825	0,7832	0,7839	0,7846
6,1	0,7853	0,7860	0,7868	0,7875	0,7882	0,7889	0,7896	0,7903	0,7910	0,7917
6,2	0,7924	0,7931	0,7938	0,7945	0,7952	0,7959	0,7966	0,7973	0,7980	0,7987
6,3	0,7993	0,8000	0,8007	0,8014	0,8021	0,8028	0,8035	0,8041	0,8048	0,8055
6,4	0,8062	0,8069	0,8075	0,8082	0,8089	0,8096	0,8102	0,8109	0,8116	0,8122
6,5	0,8129	0,8136	0,8142	0,8149	0,8156	0,8162	0,8169	0,8176	0,8182	0,8189
6,6	0,8195	0,8202	0,8209	0,8215	0,8222	0,8228	0,8235	0,8241	0,8248	0,8254
6,7	0,8261	0,8267	0,8274	0,8280	0,8287	0,8293	0,8299	0,8306	0,8312	0,8319
6,8	0,8325	0,8331	0,8338	0,8344	0,8351	0,8357	0,8363	0,8370	0,8376	0,8382
6,9	0,8388	0,8395	0,8401	0,8407	0,8414	0,8420	0,8426	0,8432	0,8439	0,8445
7,0	0,8451	0,8457	0,8463	0,8470	0,8476	0,8482	0,8488	0,8494	0,8500	0,8506
7,1	0,8513	0,8519	0,8525	0,8531	0,8537	0,8543	0,8549	0,8555	0,8561	0,8567
7,2	0,8573	0,8579	0,8585	0,8591	0,8597	0,8603	0,8609	0,8615	0,8621	0,8627
7,3	0,8633	0,8639	0,8645	0,8651	0,8657	0,8663	0,8669	0,8675	0,8681	0,8686
7,4	0,8692	0,8698	0,8704	0,8710	0,8716	0,8722	0,8727	0,8733	0,8739	0,8745
7,5	0,8751	0,8756	0,8762	0,8768	0,8774	0,8779	0,8785	0,8791	0,8797	0,8802
7,6	0,8808	0,8814	0,8820	0,8825	0,8831	0,8837	0,8842	0,8848	0,8854	0,8859
7,7	0,8865	0,8871	0,8876	0,8882	0,8887	0,8893	0,8899	0,8904	0,8910	0,8915
7,8	0,8921	0,8927	0,8932	0,8938	0,8943	0,8949	0,8954	0,8960	0,8965	0,8971
7,9	0,8976	0,8982	0,8987	0,8993	0,8998	0,9004	0,9009	0,9015	0,9020	0,9025
8,0	0,9031	0,9036	0,9042	0,9047	0,9053	0,9058	0,9063	0,9069	0,9074	0,9079
8,1	0,9085	0,9090	0,9096	0,9101	0,9106	0,9112	0,9117	0,9122	0,9128	0,9133
8,2	0,9138	0,9143	0,9149	0,9154	0,9159	0,9165	0,9170	0,9175	0,9180	0,9186
8,3	0,9191	0,9196	0,9201	0,9206	0,9212	0,9217	0,9222	0,9227	0,9232	0,9238
8,4	0,9243	0,9248	0,9253	0,9258	0,9263	0,9269	0,9274	0,9279	0,9284	0,9289
8,5	0,9294	0,9299	0,9304	0,9309	0,9315	0,9320	0,9325	0,9330	0,9335	0,9340
8,6	0,9345	0,9350	0,9355	0,9360	0,9365	0,9370	0,9375	0,9380	0,9385	0,9390
8,7	0,9395	0,9400	0,9405	0,9410	0,9415	0,9420	0,9425	0,9430	0,9435	0,9440
8,8	0,9445	0,9450	0,9455	0,9460	0,9465	0,9469	0,9474	0,9479	0,9484	0,9489
8,9	0,9494	0,9499	0,9504	0,9509	0,9513	0,9518	0,9523	0,9528	0,9533	0,9538
9,0	0,9542	0,9547	0,9552	0,9557	0,9562	0,9566	0,9571	0,9576	0,9581	0,9586
9,1	0,9590	0,9595	0,9600	0,9605	0,9609	0,9614	0,9619	0,9624	0,9628	0,9633
9,2	0,9638	0,9643	0,9647	0,9652	0,9657	0,9661	0,9666	0,9671	0,9675	0,9680
9,3	0,9685	0,9689	0,9694	0,9699	0,9703	0,9708	0,9713	0,9717	0,9722	0,9727
9,4	0,9731	0,9736	0,9741	0,9745	0,9750	0,9754	0,9759	0,9763	0,9768	0,9773
9,5	0,9777	0,9782	0,9786	0,9791	0,9795	0,9800	0,9805	0,9809	0,9814	0,9818
9,6	0,9823	0,9827	0,9832	0,9836	0,9841	0,9845	0,9850	0,9854	0,9859	0,9863
9,7	0,9868	0,9872	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	0,9908
9,8	0,9912	0,9917	0,9921	0,9926	0,9930	0,9934	0,9939	0,9943	0,9948	0,9952
9,9	0,9956	0,9961	0,9965	0,9969	0,9974	0,9978	0,9983	0,9987	0,9991	0,9996

Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	—	45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	46°	0,7193	0,6947	1,0355	0,9657
2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	47°	0,7314	0,6820	1,0724	0,9325
3°	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	48°	0,7431	0,6691	1,1106	0,9004
4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	49°	0,7547	0,6561	1,1504	0,8693
5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	50°	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
6°	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	51°	0,7771	0,6293	1,2349	0,8098
7°	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	52°	0,7880	0,6157	1,2799	0,7813
8°	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	53°	0,7986	0,6018	1,3270	0,7536
9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	54°	0,8090	0,5878	1,3764	0,7265
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	55°	0,8192	0,5736	1,4281	0,7002
11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	56°	0,8290	0,5592	1,4826	0,6745
12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	57°	0,8387	0,5446	1,5399	0,6494
13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	58°	0,8480	0,5299	1,6003	0,6249
14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	59°	0,8572	0,5150	1,6643	0,6009
15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	60°	0,8660	0,5000	1,7321	0,5774
16°	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	61°	0,8746	0,4848	1,8040	0,5543
17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	62°	0,8829	0,4695	1,8807	0,5317
18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	63°	0,8910	0,4540	1,9626	0,5095
19°	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	64°	0,8988	0,4384	2,0503	0,4877
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	65°	0,9063	0,4226	2,1445	0,4663
21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	66°	0,9135	0,4067	2,2460	0,4452
22°	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	67°	0,9205	0,3907	2,3559	0,4245
23°	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	68°	0,9272	0,3746	2,4751	0,4040
24°	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	69°	0,9336	0,3584	2,6051	0,3839
25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	70°	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	71°	0,9455	0,3256	2,9042	0,3443
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	72°	0,9511	0,3090	3,0777	0,3249
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	73°	0,9563	0,2924	3,2709	0,3057
29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	74°	0,9613	0,2756	3,4874	0,2867
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	75°	0,9659	0,2588	3,7321	0,2679
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	76°	0,9703	0,2419	4,0108	0,2493
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	77°	0,9744	0,2250	4,3315	0,2309
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	78°	0,9781	0,2079	4,7046	0,2126
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	79°	0,9816	0,1908	5,1446	0,1944
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	80°	0,9848	0,1736	5,6713	0,1763
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	81°	0,9877	0,1564	6,3138	0,1584
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	82°	0,9903	0,1392	7,1154	0,1405
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	83°	0,9925	0,1219	8,1443	0,1228
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	84°	0,9945	0,1045	9,5144	0,1051
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	85°	0,9962	0,0872	11,430	0,0875
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	86°	0,9976	0,0698	14,301	0,0699
42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	87°	0,9986	0,0523	19,081	0,0524
43°	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	88°	0,9994	0,0349	28,636	0,0349
44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	89°	0,9998	0,0175	57,290	0,0175