Wojciech Babiański
Lech Chańko
Joanna Czarnowska
Jolanta Wesołowska

MATeMAtyka 4

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy i rozszerzony

nowa era
Twoje mocne strony

MATeMAtyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:
dr. hab. Edwarda Tutaja, dr Moniki Fabijańczyk, prof. dr hab. Anny Cegieły.

Etap edukacyjny: III
Typ szkoły: ponadpodstawowa
Rok dopuszczenia: 2022
Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 988/4/2022

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Doroty Ponczek.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na **www.legalnakultura.pl**

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiejkolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024
ISBN 978-83-267-5109-7

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Ewa Kowalik, Katarzyna Radzimińska
Współpraca redakcyjna: Urszula Cielniak, Marcin Minda
Opracowanie odpowiedzi: Ewa Kowalik, Katarzyna Radzimińska
Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak
Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska, Renata Wolniewicz
Redakcja językowa: Paulina Szulim
Korekta językowa: Marta Zuchowicz
Nadzór artystyczny: Kaia Pichler
Opieka graficzna: Maciej Galiński
Opracowanie graficzne: Klaudia Jarocka-Ciok, Ewa Kaletyn, Marcin Kołacz
Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Wojtek Urbanek
Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn
Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska
Opracowanie graficzne infografik: Klaudia Jarocka-Ciok
Ilustracje na infografikach: Laura Maziewska (diamenty, s. 104), zespół Kartografii NE (odwzorowania kartograficzne, s. 150)
Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

W pracy nad podręcznikiem wykorzystano materiały z podręcznika:
MATeMAtyka kl. 3 ZR autorstwa Wojciecha Babiańskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Jolanty Wesołowskiej

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: ArtDruk Kobyłka

Fotografia na okładce: Shutterstock/Click Bestsellers.

Fotografie: Archiwum Wydawnictwa s. 10; BE&W: Alamy Stock Photo - Classic Image s. 68, Independent Photo Agency Srl s. 193, Mary Evans Picture Library s. 181; East News: Museos Vaticanos-Estancia del Sello, Vaticano Photo: East News/Album s. 177; Getty Images: Corbis Sport/Tim Clayton – Corbis s. 66 (rzut monetą na meczu tenisa), Hulton Fine Art Collection/Mondadori Portfolio s. 43, iStock – Anton Aleksenko s. 85, dei-sin s. 9, Getty Images Plus/Wega52 s. 66 (dłoń z monetą); Panthermedia: Patrick Guenette s. 73; Shutterstock: Akkaradet Bangchun s. 104, Sergey Nivens s. 150; Thinkstock/Getty Images: iStockphoto – arnphoto s. 25, VvoeVale s. 54, Photos.com s. 39; Lech Chańko s. 11, 14, 127, 137, 154.

Rysunki merytoryczne: Marcin Adamski s. 130, 146, 147 (ćwiczenie 2, lewa strona), 148 (zadanie 1), 154 (zadanie 1), 155 (wszystkie z lewej strony), 159 (wszystkie z lewej strony), 160 (przykład 2, górny rysunek), 163 (wszystkie z lewej strony), 168 (zadania 3, 7); Andrzej Oziębło s. 144 (zadanie 9), 149, 161 (przykład 3, górny rysunek; przykład 4), 164, 165, 168 (zadania 9, 11), 170 (górny rysunek), 173 (górny rysunek); Lech Chańko – pozostałe.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Spis treści

1. Rachunek prawdopodobieństwa

1.1. Reguła mnożenia 10
1.2. Permutacje 14
Permutacje z powtórzeniami – warto wiedzieć 18
1.3. Wariacje bez powtórzeń 19
1.4. Wariacje z powtórzeniami 22
* 1.5. Kombinacje 25
1.6. Kombinatoryka – zadania 30
Dwójkowy system liczbowy – warto wiedzieć 35
1.7. Zdarzenia losowe 36
Częstość zdarzeń – warto wiedzieć 39
1.8. Prawdopodobieństwo klasyczne 40
1.9. Własności prawdopodobieństwa 44
Rozkład prawdopodobieństwa – warto wiedzieć 49
* 1.10. Prawdopodobieństwo warunkowe 50
Zdarzenia niezależne – warto wiedzieć 54
* 1.11. Prawdopodobieństwo całkowite 55
* 1.12. Wzór Bayesa 59
* 1.13. Doświadczenia wieloetapowe 62
* 1.14. Schemat Bernoulliego 67
1.15. Wartość oczekiwana zmiennej losowej 71
1.16. Zagadnienia uzupełniające 75
Zestawy powtórzeniowe 77
Sposób na zadanie 81
Zadania testowe 82
Przed obowiązkową maturą z matematyki 83
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym 84

2. Graniastosłupy i ostrosłupy

2.1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni 86
2.2. Graniastosłupy 91
2.3. Odcinki w graniastosłupach 94
2.4. Objętość graniastosłupa 97
Graniastosłupy pochyłe – warto wiedzieć 100
2.5. Ostrosłupy 101

2.6. Objętość ostrosłupa 105
*2.7. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych 109
2.8. Kąt między prostą a płaszczyzną 112
2.9. Kąt dwuścienny 115
R 2.10. Przekroje prostopadłościanów 119
Przekroje innych graniastosłupów – warto wiedzieć 123
*2.11. Przekroje ostrosłupów 124
2.12. Zagadnienia uzupełniające 127
Zestawy powtórzeniowe 131
Sposób na zadanie 133
Zadania testowe 134
Przed obowiązkową maturą z matematyki 135
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym 136

3. Bryły obrotowe

3.1. Walec 138
3.2. Stożek 141
Linie geodezyjne – warto wiedzieć 145
3.3. Kula 146
3.4. Bryły podobne 151
Zasada Cavalieriego – warto wiedzieć 154
✂*3.5. Bryły opisane na kuli 155
✂*3.6. Bryły wpisane w kulę 159
✂*3.7. Inne bryły wpisane i opisane 163
*3.8. Zagadnienia optymalizacyjne 166
3.9. Zagadnienia uzupełniające 169
Zestawy powtórzeniowe 171
Sposób na zadanie 173
Zadania testowe 174
Przed obowiązkową maturą z matematyki 175
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym 176

4. Przykłady dowodów w matematyce

4.1. Dowody w algebrze (1) 178
Dowód nie wprost – warto wiedzieć 181
4.2. Dowody w algebrze (2) 182
4.3. Dowody w geometrii (1) 185
4.4. Dowody w geometrii (2) 189
Różne dowody twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie – warto wiedzieć 192

5. Powtórzenie

5.1. Liczby, zbiory i wartość bezwzględna 194
5.2. Funkcje 201
5.3. Funkcja liniowa i układy równań liniowych 206
5.4. Funkcja kwadratowa 212
5.5. Wielomiany 221
5.6. Funkcje wymierne 227
5.7. Funkcje trygonometryczne 233
5.8. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna 241
5.9. Ciągi 246
5.10. Geometria analityczna 257
5.11. Planimetria 264
5.12. Stereometria 276
5.13. Rachunek prawdopodobieństwa 282
5.14. Statystyka 291
* 5.15. Rachunek różniczkowy 297

Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań 306
Indeks 341

Odpowiedzi do pytań i poleceń, a także rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Żółtym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

* Tematy obowiązujące w zakresie rozszerzonym oznaczono gwiazdką.

7. Zadania, których numery oznaczono kolorem niebieskim, nie należą do głównego toku lekcji, są mniej typowe lub trudniejsze.

D Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.
Oznaczenie lekcji w całości poświęconych dowodzeniu.

Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.



1 Rachunek prawdopodobieństwa

Początki rachunku prawdopodobieństwa są związane z grami losowymi, do których należy na przykład gra w kości, i chęcią poznania szansy wygranej.

W 1654 roku we Francji zapalony gracz w kości kawaler de Méré [czyt. de mere] zwrócił się do Blaise'a Pascala z prośbą o wyjaśnienie pewnych zagadnień związanych z grami hazardowymi. W celu rozwiązania tych zagadnień Pascal prowadził korespondencję z innym francuskim matematykiem – Pierre'em de Fermatem. Rok 1654 jest przyjmowany za datę narodzin rachunku prawdopodobieństwa.

1.1. Reguła mnożenia

Przykład 1

Rzucamy dwiema monetami: dwuzłotówką i pięciozłotówką. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.

Niech o oznacza otrzymanie orła, a r – reszki na monecie dwuzłotowej, natomiast O – orła, a R – reszki na monecie pięciozłotowej. Możliwe wyniki doświadczenia to:

$$oO,\ oR,\ rO,\ rR$$



Przykład 2

Rzucamy dwiema kostkami: niebieską i czerwoną. Ile jest możliwych wyników tego doświadczenia?

Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki:

1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

Kiedy piszemy o kostce, mamy na myśli sześcienną kostkę do gry.

Przyjmujemy, że wynikiem jednokrotnego rzutu kostką jest liczba otrzymanych oczek, a wynikiem rzutu dwiema kostkami – uporządkowana para liczb.

Wszystkich możliwych wyników jest 36 (zwróć uwagę, że rozróżniamy wyniki takie jak np. 23 i 32).

Ćwiczenie 1

Pewien kod składa się z jednej litery alfabetu i następującej po niej jednej cyfry. Ile różnych kodów można utworzyć, jeżeli w każdym będzie występowała jedna z 26 liter: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z oraz jedna z 10 cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

W takiej sytuacji, jak opisana w ćwiczeniu, zamiast wypisywać wszystkie możliwe pary tworzące kod, warto skorzystać z **reguły mnożenia**. Mówi ona, że jeśli zbiór A ma m elementów, a zbiór B ma n elementów, to liczba różnych par (x, y) takich, że $x \in A$ oraz $y \in B$, jest równa $m \cdot n$.

Uwaga. Liczbę elementów zbioru A będziemy oznaczać $\overline{\overline{A}}$ (lub $|A|$).

Przykład 3

Niech A będzie zbiorem wszystkich dzielników naturalnych liczby 15, a B – zbiorem wszystkich dzielników naturalnych liczby 30. Ile jest par (x, y) takich, że $x \in A$ i $y \in B$?

$A = \{1, 3, 5, 15\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, zatem $\overline{\overline{A}} = 4$, $\overline{\overline{B}} = 8$.

Liczba opisanych par jest równa $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = 4 \cdot 8 = 32$.

Ćwiczenie 2

a) Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest dzielnikiem naturalnym liczby 12, a druga – dzielnikiem naturalnym liczby 28?

b) Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest liczbą naturalną mniejszą od 20 i podzielną przez 3, a druga – liczbą naturalną mniejszą od 30 i podzielną przez 4?

Regułę mnożenia można sformułować bardziej ogólnie.

Reguła mnożenia

Jeżeli pewien wybór polega na podjęciu n decyzji, przy czym pierwszą decyzję można podjąć na k_1 sposobów, drugą – na k_2 sposobów, ..., n-tą – na k_n sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ sposobów.

Przykład 4

Ile może być numerów rejestracyjnych mających na początku dwie litery, a następnie pięć cyfr (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli w numerach tych mogą występować jedynie litery W, E oraz cyfry 1, 3, 8, 9?



Takich numerów może być: $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$.

Ćwiczenie 3

Ile może być kodów mających na początku cztery litery, a następnie trzy cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli do utworzenia kodów wykorzystujemy:

a) jedynie litery V, X, Y, Z oraz cyfry 1, 3, 5, 7, 9;

b) jedynie litery A, B, C, D, E, F, G oraz cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6;

c) 26 liter alfabetu oraz wszystkie cyfry?

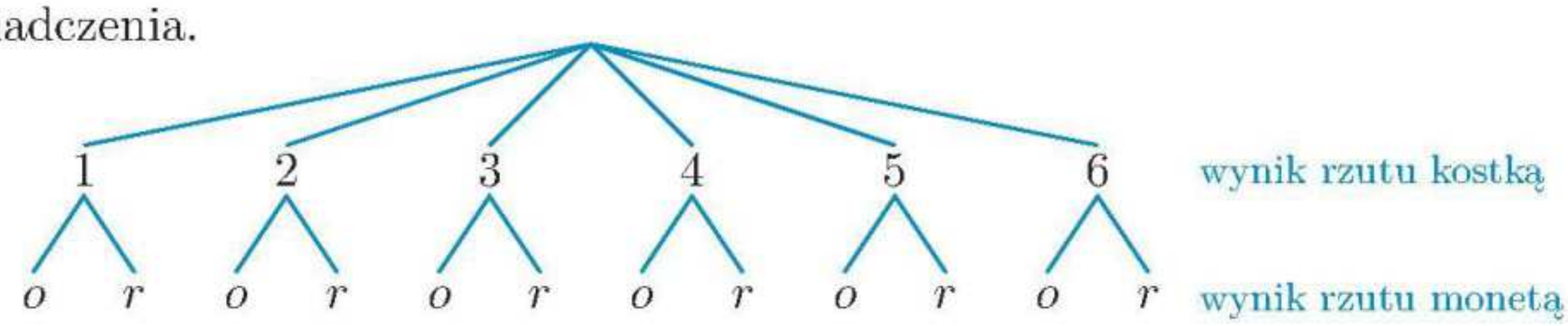
Przykład 5

Rzucono kostką i monetą. Wynikiem doświadczenia jest para (a, b), gdzie a jest liczbą oczek na kostce, a b – orłem lub reszką. Ile jest możliwych wyników takiego doświadczenia?

Zbiorem możliwych wyników rzutu kostką jest zbiór $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zbiorem możliwych wyników rzutu monetą jest zbiór $B = \{o, r\}$, gdzie o oznacza wypadnięcie orła, a r – reszki.

$A = 6$ oraz $B = 2$, więc wszystkich możliwych wyników jest $A \cdot B = 12$.

Poniżej przedstawiamy drzewo ilustrujące wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.



Wynikami tego doświadczenia są pary: $(1, o)$, $(1, r)$, $(2, o)$, $(2, r)$, $(3, o)$, $(3, r)$, $(4, o)$, $(4, r)$, $(5, o)$, $(5, r)$, $(6, o)$, $(6, r)$.

Ćwiczenie 4

Rzucono dwiema kostkami: zieloną i żółtą. Na kostce zielonej otrzymano parzystą liczbę oczek, a na kostce żółtej – liczbę oczek mniejszą od 4. Ile jest możliwych takich wyników? Zbiór wyników tego doświadczenia przedstaw w postaci drzewa.

Ćwiczenie 5

Rzucono kostką oraz dwiema monetami: dwuzłotową i pięciozłotową. Na kostce wypadła liczba oczek nie mniejsza od 5. Ile jest możliwych takich wyników? Zbiór wyników tego doświadczenia przedstaw w postaci drzewa.

Zadania

1. Ile jest możliwych kodów, w których na początku występują dwie litery, a następnie dwie cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli wykorzystujemy litery A, B, C, D, E, F, G, H oraz cyfry 1, 2, 3, 4, 5?

2. Ile jest możliwych kodów, w których na początku występują trzy litery, a następnie cztery cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli wykorzystujemy litery A, B, C, D oraz cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6?

3. Na ile sposobów może się ubrać pani, która ma trzy różne kapelusze, sześć sukni i cztery pary butów?

4. Rzucamy trzy razy kostką. Otrzymane liczby oczek zapisane kolejno tworzą liczbę trzycyfrową. Ile wśród możliwych wyników jest liczb parzystych, a ile – większych od 500?

5. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie:

a) pierwsza cyfra jest nieparzysta, a pozostałe są parzyste,

b) pierwsze dwie cyfry są parzyste, a pozostałe – nieparzyste?

6. Ile jest liczb sześciocyfrowych, w których zapisie:

a) cyfry pierwsza i ostatnia są takie same,

b) pierwsze dwie cyfry są takie same i ostatnie dwie cyfry są takie same?

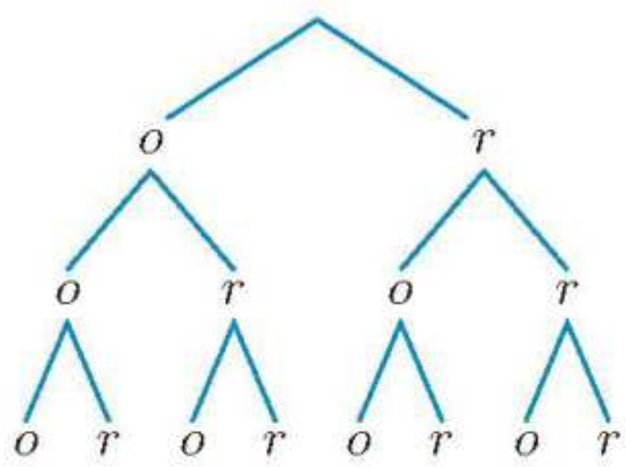
7. Ustal, ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie cyfra dziesiątek jest:

a) o 4 większa od cyfry jedności, b) o 2 mniejsza od cyfry jedności.

D **8.** a) Uzasadnij, że liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5 jest mniej niż 200.

b) Uzasadnij, że jest ponad 2000 liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 5, w których zapisie mogą występować cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5.

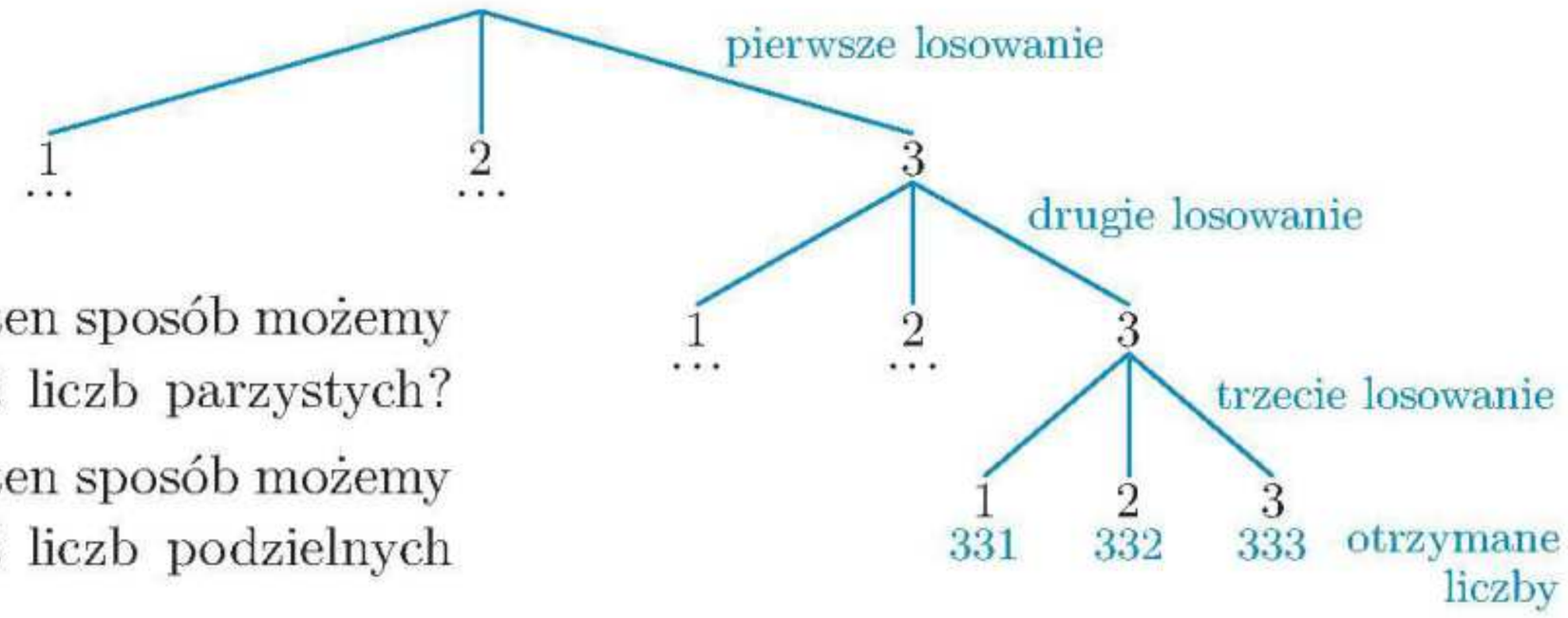
9. a) Zapisz możliwe wyniki doświadczenia polegającego na trzykrotnym rzucie monetą (drzewo przedstawione obok jest ilustracją graficzną tego doświadczenia).



b) Ile jest możliwych wyników pięciokrotnego, a ile – dziesięciokrotnego rzutu monetą?

10. W urnie znajdują się trzy kule oznaczone numerami 1, 2 i 3. Trzykrotnie wyciągamy kulę, zapisujemy jej numer i zwracamy ją do urny. Zapisane numery tworzą liczbę trzycyfrową.

a) Przerysuj poniższe drzewo do zeszytu i uzupełnij je tak, aby ilustrowało wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.



b) Ile w ten sposób możemy otrzymać liczb parzystych?

c) Ile w ten sposób możemy otrzymać liczb podzielnych przez 6?

1.2. Permutacje

Przykład 1

Na ile sposobów można ustawić na półce trzy różne książki?



Oznaczamy książki numerami 1, 2, 3 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:

123 132 213 231 312 321

Trzy książki możemy ustawić na 6 sposobów.

Przykład 2

Na ile sposobów można ustawić na półce cztery różne książki?

Oznaczamy książki numerami 1, 2, 3, 4 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Otrzymaliśmy 24 możliwe ustawienia książek.

W przykładzie 1. podaliśmy wszystkie trzywyrazowe ciągi, które można utworzyć, przestawiając liczby 1, 2, 3, a w przykładzie 2. – wszystkie czterowyrazowe ciągi, które można utworzyć, przestawiając liczby 1, 2, 3, 4. Takie ciągi nazywamy permutacjami.

Definicja

Każdy n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów n-elementowego zbioru A nazywamy **permutacją** tego zbioru.

Ćwiczenie 1

Wypisz wszystkie permutacje podanego zbioru.

a) $\{3, 5\}$ b) $\{3, 5, 7\}$ c) $\{3, 5, 7, 9\}$

Liczbę wszystkich permutacji zbioru n-elementowego oznaczamy przez P_n. Obliczamy ją, korzystając z reguły mnożenia.

Przykład 3

Na ile sposobów można ustawić na półce pięć różnych książek?

Należy odpowiedzieć na pytanie, ile jest permutacji zbioru pięcioelementowego $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Najpierw wybieramy jedną spośród pięciu książek i ustawiamy ją na pierwszym miejscu – możemy to zrobić na 5 sposobów. Następnie wybieramy jedną z czterech pozostałych książek i ustawiamy ją na drugim miejscu – możemy to zrobić na 4 sposoby, następnie wybieramy jedną z trzech pozostałych książek itd. Możliwych ustawień jest więc:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Definicja

Dla liczby naturalnej $n > 1$ symbol $n!$ [czyt. n **silnia**] oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Przyjmujemy również, że $0! = 1$ i $1! = 1$.

Ćwiczenie 2

Podaj liczbę, którą należy wstawić w miejsce ?.

a) $4! = 3! \cdot$? b) $8! = 7! \cdot$? c) $12! = 11! \cdot$?

Zauważ, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$(n+1)! = n!(n+1)$$

$0! =$	1
$1! =$	1
$2! =$	2
$3! =$	6
$4! =$	24
$5! =$	120
$6! =$	720
$7! =$	5 040
$8! =$	40 320
$9! =$	362 880
$10! =$	3 628 800
$11! =$	39 916 800
$12! =$	479 001 600

Ćwiczenie 3

Uprość ułamek.

a) $\frac{5!}{4!}$ c) $\frac{8!}{10!}$ e) $\frac{(n+1)!}{n!}$ g) $\frac{(n+2)!}{n!}$

b) $\frac{7!}{5!}$ d) $\frac{102!}{100!}$ f) $\frac{(n-1)!}{n!}$ h) $\frac{(n-2)!}{n!}$

Twierdzenie

Wszystkich permutacji zbioru n-elementowego jest $n!$.

Ćwiczenie 4

Ile jest wszystkich permutacji zbioru A, jeśli wiadomo, że:

a) $\overline{\overline{A}} = 6$, b) $\overline{\overline{A}} = 7$, c) $\overline{\overline{A}} = 10$, d) $\overline{\overline{A}} = 12$?

Zadania

1. a) Ile liczb pięciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 56 789?

b) Ile liczb sześciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 245 768?

2. a) Ile jest liczb dziewięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0 i żadna cyfra się nie powtarza?

b) Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie żadna cyfra się nie powtarza?

3. Rozważmy liczby pięciocyfrowe, w których zapisie każda z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 występuje dokładnie raz.

a) Ile jest takich liczb mniejszych od 50 000?

b) Ile jest takich liczb większych od 30 000?

4. Z cyfr 4, 5, 6, 7, 8, 9 tworzymy liczby sześciocyfrowe o niepowtarzających się cyfrach. Oblicz, ile można utworzyć takich liczb:

a) podzielnych przez 5, b) parzystych.

5. Podaj liczbę elementów zbioru A, o którym wiadomo, że wszystkich możliwych jego permutacji jest:

a) 24, b) 120, c) 40 320, d) 3 628 800.

6. a) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do n. Ile osób brało udział w zawodach, jeśli wiadomo, że numery startowe można było przydzielić na 5040 sposobów?

b) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do n. Najpierw rozdano numery parzyste, po czym okazało się, że numery nieparzyste można przydzielić na 720 sposobów. Ile osób brało udział w zawodach?

7. Na ile sposobów można zakwaterować cztery osoby:

a) w czterech jednoosobowych pokojach,

b) w pięciu jednoosobowych pokojach?

8. a) Na ile sposobów można umieścić 7 kul w 7 szufladach (kule i szuflady rozróżniamy) tak, aby każda szuflada była zajęta?

b) Na ile sposobów można umieścić 7 kul w 8 szufladach (kule i szuflady rozróżniamy) tak, aby tylko jedna szuflada była pusta?

9. a) Na ile sposobów można ustawić dziewięć osób w kolejce?

b) Na ile sposobów można ustawić czworo dziewcząt i pięciu chłopców w kolejce tak, aby dziewczęta stały na początku kolejki?

c) Na ile sposobów można ustawić troje dziewcząt i sześciu chłopców w kolejce tak, aby dziewczęta stały na końcu kolejki?

10. Oblicz.

a) $\frac{8!}{6!}$ d) $\frac{10!}{7!\cdot 3!}$ g) $\frac{5!}{4!+5!}$ j) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

b) $\frac{19!}{21!}$ e) $\frac{9!\cdot 4!}{12!}$ h) $\frac{5!+6!}{6!-5!}$ k) $\frac{(n+1)!-n!}{(n-1)!}$

c) $\frac{15!}{3!\cdot 13!}$ f) $\frac{100!\cdot 10!}{12!\cdot 98!}$ i) $\frac{(n-2)!}{(n-4)!}$ l) $\frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2}$

11. a) Liczba permutacji zbioru $(n+1)$-elementowego jest o 600 większa od liczby permutacji zbioru n-elementowego. Oblicz n.

b) Liczba permutacji zbioru $(n+3)$-elementowego jest 120 razy większa od liczby permutacji zbioru n-elementowego. Oblicz n.

12. Rozwiąż równanie.

a) $(n+2)! = 90n!$ c) $\frac{(n+2)!}{n!} = 42$ e) $\frac{(n-3)!(n+2)!}{n!(n-4)!} = 30$

b) $6!(n+1)! - 7!\cdot n! = 0$ d) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 110$ *f) $\frac{n!(2n-3)!}{(2n)!(n-1)!} = \frac{1}{12}$

D **13.** a) Uzasadnij, że nierówność $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 12$ spełniają tylko dwie liczby naturalne.

b) Uzasadnij, że nierówność $\frac{(n+1)!(n-1)!}{(n!)^2} < n$ spełniają wszystkie liczby naturalne większe od 1.

D **14.** Uzasadnij, że równość $(n+1)! - n! = n \cdot n!$ jest spełniona przez każdą liczbę naturalną n. Korzystając z udowodnionego stwierdzenia, uzasadnij równość:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

15. Ile zer na końcu ma podana liczba?

a) 15! b) 30! c) 100!

16. Grupa n przedszkolaków zostawiła rano swoje czapki w szatni. Z powodu popołudniowego zamieszania każde dziecko wróciło do domu w nie swojej czapce. Na ile sposobów jest to możliwe, jeśli:

a) $n = 3$, b) $n = 4$, *c) $n = 5$?

Warto wiedzieć

Permutacje z powtórzeniami

Przykład 1

a) Mamy do dyspozycji klocki z literami A, A, K, R. Zmieniając kolejność liter, otrzymujemy czteroliterowe słowa (mające sens lub nie). Wyznacz wszystkie możliwe słowa.

Jest 12 możliwych słów:

AAKR AKAR AKRA KAAR KARA KRAA

AARK ARAK ARKA RAAK RAKA RKAA

b) Mamy do dyspozycji klocki z literami A, A, T, T. Zmieniając kolejność liter, otrzymujemy czteroliterowe słowa (mające sens lub nie). Wypisz wszystkie możliwe słowa.

Jest 6 możliwych słów:

AATT ATAT ATTA TAAT TATA TTAA

Rozpatrzmy n-elementowy ciąg, którego wyrazy należą do zbioru:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$$

przy czym każdy z elementów $a_1, a_2, \ldots, a_k$ występuje jako wyraz ciągu odpowiednio $n_1, n_2, \ldots, n_k$ razy (czyli $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$).
Taki ciąg nazywamy n-elementową **permutacją z powtórzeniami** zbioru A.
Liczba takich permutacji jest równa $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

Przykład 2

Niech m określa, ile liczb sześciocyfrowych możemy otrzymać, przestawiając cyfry liczby x.

a) Jeśli $x = 112\,222$, to $m = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$.

b) Jeśli $x = 112\,223$, to $m = \frac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 1!} = 60$.

1. a) Ile siedmioliterowych słów (mających sens lub nie) możemy otrzymać, przestawiając litery w słowie BARBARA?

b) Ile dziewięcioliterowych słów (mających sens lub nie) możemy otrzymać, przestawiając litery w słowie KATAPULTA?

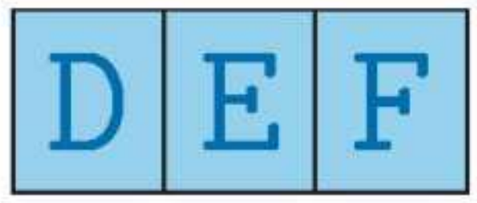
2. Ile dziesięciocyfrowych liczb możemy otrzymać, przestawiając cyfry w liczbie:

a) 1 222 333 444, b) 9 989 879 876?

1.3. Wariacje bez powtórzeń

Przykład 1

Pewien kod tworzymy z trzech liter wybranych spośród następujących: A, B, C, D, E, F, G, H, przy czym litery nie mogą się powtarzać. Ile jest takich kodów?



Na pierwszym miejscu kodu możemy wpisać jedną z ośmiu liter, na drugim – jedną z pozostałych siedmiu, a na trzecim – jedną z pozostałych sześciu. Zatem jest $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ kodów.

Przykład 2

Pewien kod tworzymy z trzech liter wybranych spośród 26 liter alfabetu, przy czym litery nie mogą się powtarzać. Ile jest takich kodów?

Takich kodów jest $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$.

Ćwiczenie 1

a) Ile można utworzyć kodów czteroliterowych, w których mogą wystąpić litery A, B, C, D, E, F i żadna litera się nie powtarza?

b) Ile można utworzyć kodów czteroliterowych, w których może wystąpić każda z 26 liter alfabetu i żadna litera się nie powtarza?

Opisane wyżej ciągi liter tworzące kody to przykłady wariacji bez powtórzeń.

Definicja

Każdy k-wyrazowy ciąg utworzony z różnych elementów n-elementowego zbioru A, gdzie $k \leqslant n$, nazywamy k-elementową **wariacją bez powtórzeń** zbioru A.

Zauważmy, że każda n-elementowa wariacja bez powtórzeń zbioru n-elementowego jest permutacją.
Aby obliczyć liczbę k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, korzystamy z reguły mnożenia.

Ćwiczenie 2

Dany jest dziesięcioelementowy zbiór A. Uzasadnij, że:

a) 4-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru A jest $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$,

b) k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru A jest:

$$10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (10 - (k-1)), \text{ gdzie } k = 1, 2, \ldots, 10$$

Twierdzenie

Jeśli $k \leqslant n$, to wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego jest:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Uwaga. Jeśli liczbę wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego oznaczymy przez V_n^k, to treść powyższego twierdzenia zapiszemy:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{dla } k \leqslant n$$

Ćwiczenie 3

Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0 i cyfry się nie powtarzają? A ile jest takich liczb czterocyfrowych?

Przykład 3

Ile jest liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 5, w których zapisie występują tylko cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i żadna z nich się nie powtarza?

Liczba jest podzielna przez 5, jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.
Niech A będzie zbiorem tych liczb spełniających warunki zadania, których ostatnią cyfrą jest 0. ? ? ? ? 0
Wówczas $\overline{\overline{A}}$ jest równa liczbie czteroelementowych wariacji bez powtórzeń zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$.
Zatem $\overline{\overline{A}} = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$.
Niech B będzie zbiorem tych liczb spełniających warunki zadania, których ostatnią cyfrą jest 5. ? ? ? ? 5
Zwróćmy uwagę, że pierwszą cyfrę liczby wybieramy ze zbioru $\{1,2,3,4,6\}$, więc $\overline{\overline{B}} = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

Zatem $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = 360 + 300 = 660$.

W powyższym przykładzie zastosowaliśmy **regułę dodawania**. Mówi ona, że jeśli zbiory A i B są rozłączne, to liczba elementów zbioru $A \cup B$ jest równa sumie liczby elementów zbioru A i liczby elementów zbioru B: $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$.
Regułę dodawania można sformułować bardziej ogólnie.

Reguła dodawania

Jeśli zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, to:

$$\overline{\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}} = \overline{\overline{A_1}} + \overline{\overline{A_2}} + \ldots + \overline{\overline{A_n}}$$

Ćwiczenie 4

Ile jest parzystych liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7 i żadna z nich się nie powtarza?

Zadania

1. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 3, 5, 7, 9 i żadna z nich się nie powtarza? A ile jest takich liczb czterocyfrowych?

2. a) Ile można utworzyć siedmiocyfrowych numerów telefonicznych rozpoczynających się od 71, w których żadna cyfra nie będzie się powtarzała i które nie będą zawierały cyfry 0?

b) Ile można utworzyć siedmiocyfrowych numerów telefonicznych rozpoczynających się od 701, w których żadna cyfra nie będzie się powtarzała?

3. Do windy zatrzymującej się na 10 piętrach wsiadły 4 osoby. Na ile sposobów osoby te mogą opuścić windę, jeśli każda z nich wysiada:

a) na innym piętrze,

b) na innym piętrze i nikt nie wysiada na trzech ostatnich piętrach?

4. Ile jest liczb pięciocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach, jeśli pierwsza cyfra jest parzysta, a pozostałe są nieparzyste?

5. Ile jest liczb parzystych sześciocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach, jeśli wiadomo, że w zapisie tych liczb występują cyfry:

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, b) 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9?

6. Oblicz, ile jest liczb siedmiocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach, jeśli wiadomo, że w zapisie tych liczb nie występuje cyfra 0. Ile spośród tych liczb jest takich, że cyfry parzyste nie sąsiadują ze sobą i cyfry nieparzyste nie sąsiadują ze sobą?

7. Oblicz, ile jest liczb siedmiocyfrowych podzielnych przez 25 o niepowtarzających się cyfrach.

8. Oblicz.

a) V_7^3 b) V_7^6 c) V_8^2 d) V_8^4 e) V_n^1 f) V_n^n

D **9.** Dany jest zbiór n-elementowy. Uzasadnij, że:

a) liczba $(n-1)$-elementowych wariacji bez powtórzeń tego zbioru jest równa liczbie jego permutacji,

b) liczba 2-elementowych wariacji bez powtórzeń tego zbioru jest parzysta.

1.4. Wariacje z powtórzeniami

Przykład 1

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2?

Każdą z trzech cyfr możemy wybrać na dwa sposoby, zatem jest $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ takich liczb.

111	121	211	221	Jest 8 liczb trzycyfrowych, w których za-
112	122	212	222	pisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2.

Przykład 2

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2, 3, 4 i 5?

Jest $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ takich liczb.

Ćwiczenie 1

a) Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2?

b) Ile jest wszystkich liczb sześciocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2, 3, 4 i 5?

Opisane wyżej ciągi cyfr tworzące liczby to przykłady wariacji z powtórzeniami.

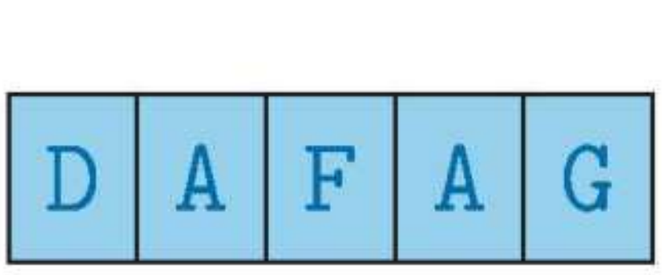
Definicja

Każdy k-wyrazowy ciąg utworzony z elementów zbioru A nazywamy k-elementową **wariacją z powtórzeniami** zbioru A.

Uwaga. W wariacji z powtórzeniami wyrazy mogą się powtarzać.

Przykład 3

Ile pięcioliterowych kodów można utworzyć z liter A, B, C, D, E, F, G, H, jeśli litery mogą się powtarzać?



Można utworzyć $8^5 = 32768$ takich kodów.

Ćwiczenie 2

Ile pięcioliterowych kodów można utworzyć z 26 liter alfabetu, jeśli litery mogą się powtarzać?

Twierdzenie

Wszystkich k-elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego jest n^k.

Uwaga. Jeśli liczbę wszystkich k-elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego oznaczymy przez W_n^k, to treść powyższego twierdzenia zapiszemy:

$$W_n^k = n^k$$

Ćwiczenie 3

a) Ile jest wszystkich dwuelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru dziesięcioelementowego?

b) Ile jest wszystkich dziesięcioelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru dwuelementowego?

Zadania

1. Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie ma:
a) cyfry 0, b) cyfr 0 i 4, c) cyfr 0, 4 i 5, d) cyfr 4 i 5?

2. Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych:
a) zaczynających się od 12, b) których ostatnią cyfrą jest 7?

3. Która z liczb jest większa:

a) liczba dwuelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru trzyelementowego czy liczba trzyelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru dwuelementowego,

b) liczba trzyelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru czteroelementowego czy liczba czteroelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru trzyelementowego?

D **4.** Z urny, w której znajdują się kule z numerami 4, 5, 6, 7, 8, 9, losujemy kolejno cztery kule. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę czterocyfrową. Uzasadnij, że przy losowaniu ze zwracaniem możliwych do otrzymania liczb jest ponad trzykrotnie więcej niż przy losowaniu bez zwracania.

Uwaga. Losowanie polega na wyciąganiu przedmiotów (np. losów, kul, żetonów) w sposób, który wyklucza wpływ osoby losującej na otrzymany wynik.

5. a) Do 3 szuflad wrzucamy 9 kul (kule i szuflady rozróżniamy). Na ile sposobów możemy rozmieścić te kule?

b) Do 9 szuflad wrzucamy 3 kule (kule i szuflady rozróżniamy). Na ile sposobów możemy rozmieścić te kule?

6. a) Na ile sposobów 6 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na dziesięciu piętrach?

b) Na ile sposobów 10 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na sześciu piętrach?

D **7.** Niech m będzie liczbą sposobów, na które 5 pasażerów może wysiąść z pociągu na czterech stacjach, a n – liczbą sposobów, na które 4 pasażerów może wysiąść z pociągu na pięciu stacjach. Uzasadnij, że $m - n < 400$.

8. Ile jest wszystkich liczb, w których zapisie występują tylko cyfry 0 i 1 i które mają co najwyżej: a) 5 cyfr, b) 11 cyfr, c) n cyfr?

9. Ile jest wszystkich liczb, które są zapisane tylko za pomocą cyfr 0, 1, 2 oraz mają: a) 5 cyfr, b) 11 cyfr, c) n cyfr?

10. Rzucamy czterokrotnie kostką. Wyrzucone liczby oczek są kolejnymi cyframi liczby czterocyfrowej. Ile spośród otrzymanych w ten sposób liczb jest:

a) większych od 6000,
b) większych od 3500,
c) podzielnych przez 25,
d) podzielnych przez 4?

11. Oblicz, ile jest liczb pięciocyfrowych:

a) mniejszych od 48 000,
b) większych od 56 700,
c) o nieparzystym iloczynie cyfr,
d) o parzystym iloczynie cyfr.

Liczby palindromiczne to liczby, które czytane od lewej do prawej i od prawej do lewej są takie same, np. 12321, 44444 lub 345543.

12. Czy liczb palindromicznych sześciocyfrowych jest więcej niż pięciocyfrowych? Odpowiedź uzasadnij.

13. Liczba sposobów rozmieszczenia 3 kul, każdej w innym kolorze, w n ponumerowanych szufladach jest o 331 mniejsza od liczby sposobów rozmieszczenia tych kul w $n + 1$ ponumerowanych szufladach. Oblicz n.

14. Ile dzielników naturalnych ma liczba x?

a) $x = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$
b) $x = 810\,000$

15. Nota za styl skoku narciarskiego wynosi od 0 do 20 punktów i może być przyznawana co pół punktu. Na ile sposobów pięciu sędziów może przyznać notę za styl?

*1.5. Kombinacje



Przykład 1

W turnieju szachowym brało udział pięcioro zawodników. Ile partii rozegrano, jeśli każdy uczestnik rozegrał jedną partię z każdym z pozostałych?

Oznaczmy uczestników numerami:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \text{ i } 5$$

Rozegranych partii jest tyle samo co dwuelementowych podzbiorów zbioru $\{1,2,3,4,5\}$. Jest dziesięć takich podzbiorów, zatem rozegrano dziesięć partii:

$$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,5\},\ \{2,3\},\ \{2,4\},\ \{2,5\},\ \{3,4\},\ \{3,5\},\ \{4,5\}$$

Każdy taki podzbiór nazywamy dwuelementową kombinacją zbioru pięcioelementowego. Zwróć uwagę, że przy podawaniu elementów kombinacji nie jest ważna kolejność, w jakiej są one wymieniane.

Definicja

Każdy k-elementowy podzbiór zbioru n-elementowego A, gdzie $0 \leqslant k \leqslant n$, nazywamy k-elementową **kombinacją** zbioru A.

Przykład 2

W tabeli podano 1-, 2-, 3- i 4-elementowe kombinacje zbioru $\{1,2,3,4\}$. Zauważmy, że kombinacją 0-elementową jest zbiór pusty.

Kombinacje jednoelementowe	$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\}$
Kombinacje dwuelementowe	$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{2,3\},\ \{2,4\},\ \{3,4\}$
Kombinacje trzyelementowe	$\{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,4\}$
Kombinacja czteroelementowa	$\{1,2,3,4\}$

Ćwiczenie 1

Dany jest zbiór $\{x,y,z\}$. Podaj wszystkie jego k-elementowe kombinacje dla $k=1,2,3$.

Ćwiczenie 2

Podaj wszystkie 2- i 5-elementowe kombinacje zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Jeżeli $k \leqslant n$, to wszystkich k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego jest:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Uwaga. Jeśli liczbę wszystkich k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego $(k \leqslant n)$ oznaczymy przez C_n^k, to treść powyższego twierdzenia zapiszemy:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dowód. Każde k wybranych elementów można ustawić w ciąg na $k!$ sposobów. Każdy taki ciąg jest k-elementową wariacją bez powtórzeń zbioru n-elementowego. Zatem:

$$C_n^k \cdot k! = V_n^k$$

czyli $C_n^k \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$, skąd otrzymujemy:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Uwaga. Liczbę wszystkich k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego oznacza się też symbolem $\binom{n}{k}$ [czytaj: n nad k], zwanym **symbolem Newtona**.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$ b) $\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}, \binom{5}{5}$

Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że:

a) $\binom{n}{0} = 1$, b) $\binom{n}{1} = n$, c) $\binom{n}{n-1} = n$, d) $\binom{n}{n} = 1$.

Ćwiczenie 5

Wykaż, że k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego jest tyle samo co $(n-k)$-elementowych kombinacji tego zbioru.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Przykład 3

Na ile sposobów można wybrać spośród 8 osób trzyosobową delegację?

Delegację składającą się z trzech osób można wybrać na:

$$C_8^3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 56 \text{ sposobów}$$

Ćwiczenie 6

Na ile sposobów można wybrać spośród 7 osób delegację trzyosobową, a na ile – delegację czteroosobową?

Wzór dwumianowy Newtona

Wyrażenie przedstawiające rozwinięcie $(a+b)^n$, dla $n = 1, 2, \ldots$, możemy znaleźć, korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona:

Twierdzenie

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Na przykład:

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 =$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Jeśli do powyższego wzoru zamiast b podstawimy $-b$, to otrzymamy:

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

D Ćwiczenie 7

Uzasadnij, że dla n:

a) parzystego: $(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots - \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$,

b) nieparzystego: $(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} - \binom{n}{n}b^n$.

Współczynniki liczbowe występujące w rozwinięciu wyrażenia $(a+b)^n$ możemy znaleźć w kolejnych wierszach trójkąta Pascala. Liczba znajdująca się w n-tym wierszu na k-tej pozycji (gdzie $k = 0, 1, \ldots, n$) jest równa $\binom{n}{k}$.

Na przykład wiersz siódmy to kolejno:

$$\binom{7}{0} = 1,\ \binom{7}{1} = 7,\ \binom{7}{2} = 21,\ \binom{7}{3} = 35,\ \binom{7}{4} = 35,\ \binom{7}{5} = 21,\ \binom{7}{6} = 7,\ \binom{7}{7} = 1$$

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1
$n=7$	1 7 21 35 35 21 7 1

Każda liczba w trójkącie Pascala (z wyjątkiem skrajnych, które są jedynkami) jest sumą dwóch liczb znajdujących się nad nią (np. dla $n = 7$ mamy: $7 = 1+6$, $21 = 6+15$, $35 = 15+20$).

D Ćwiczenie 8

Udowodnij wzór podany obok.

Dla $k < n$ mamy: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Ćwiczenie 9

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, wyznacz rozwinięcie:

a) $(a+b)^6$, b) $(a-b)^6$, c) $(a+b)^8$, d) $(a-b)^8$.

Zadania

1. Oblicz.

a) $\binom{8}{5}$ c) $\binom{10}{2}$ e) $\binom{11}{3}$ g) $\binom{12}{1}$ i) $\binom{100}{0}$ k) $\binom{101}{99}$

b) $\binom{8}{6}$ d) $\binom{10}{7}$ f) $\binom{11}{8}$ h) $\binom{12}{9}$ j) $\binom{100}{100}$ l) $\binom{102}{2}$

2. a) Wypisz wszystkie 2- i 3-elementowe kombinacje zbioru $\{a, b, c, d\}$.

b) Wypisz wszystkie 4-elementowe kombinacje zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3. W szufladzie znajduje się 12 krawatów. Na ile sposobów możemy wyciągnąć spośród nich:

a) dwa krawaty, b) cztery krawaty?

4. Klasa liczy 18 osób, w tym 10 dziewcząt. Na ile sposobów można wybrać czteroosobową delegację, w której skład wejdą:

a) dwaj chłopcy i dwoje dziewcząt, b) jeden chłopiec i troje dziewcząt?

5. a) Podczas egzaminu student losuje 4 pytania spośród 6. Na ile sposobów może to zrobić?

b) Część A egzaminu zawiera 8 pytań, część B – 10 pytań. Student losuje 6 pytań z części A i 9 z części B. Na ile sposobów może to zrobić?

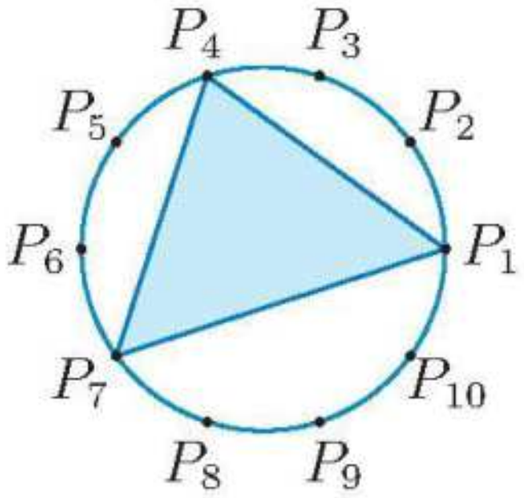
6. a) Spotkało się dziesięcioro znajomych i każdy z każdym przywitał się uściskiem dłoni. Ile było powitań?

b) W turnieju szachowym rozegrano 55 partii. Ilu było uczestników, jeśli każdy uczestnik rozegrał jedną partię z każdym z pozostałych?

7. Jeśli przez każde dwa wierzchołki n-kąta foremnego poprowadzimy prostą, to otrzymamy 66 różnych prostych. Wyznacz miarę kąta wewnętrznego tego n-kąta.

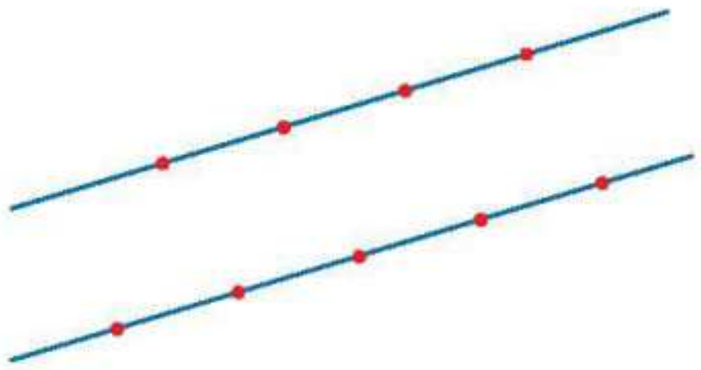
8. a) Ile trójkątów można utworzyć, łącząc trzy punkty wybrane spośród rozmieszczonych na okręgu punktów $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$ (rysunek obok)?

b) Na okręgu zaznaczono n punktów. Liczba trójkątów, które można utworzyć, łącząc dowolne trzy spośród tych punktów, jest równa 84. Oblicz n.



9. Na okręgu zaznaczono 6 punktów. Ile jest czworokątów, a ile wszystkich wielokątów, których wierzchołki leżą w tych punktach?

10. Na jednej prostej zaznaczono 4 punkty, a na drugiej prostej, równoległej do pierwszej, zaznaczono 5 punktów (rysunek obok). Ile jest trójkątów, a ile czworokątów, których wierzchołki leżą w tych punktach?



11. Wyznacz rozwinięcie podanego wzoru.

a) $(a+b)^4$ b) $(a-b)^4$ c) $(a+b)^7$ d) $(a-b)^7$

12. Wyznacz wiersze trójkąta Pascala dla $n = 9$ i $n = 10$ oraz podaj rozwinięcia wzorów $(a+b)^9$ i $(a+b)^{10}$.

13. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, oblicz:

a) $\left(\sqrt{3}+1\right)^4$, b) $\left(2-\sqrt{2}\right)^4$, c) $\left(2+\sqrt{2}\right)^5$, d) $\left(\sqrt{3}-1\right)^5$.

14. Wyznacz rozwinięcie podanego wyrażenia.

a) $(x+1)^4$ c) $(2x+1)^4$ e) $(x+2)^5$ g) $(x+1)^6$

b) $(x-2)^4$ d) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^4$ f) $(2x-1)^5$ h) $(x-2)^6$

15. Wyznacz współczynnik podanego wielomianu przy x^6.

a) $\left(\sqrt{2}x+1\right)^6$ c) $\left(2x+\sqrt{2}\right)^8$ e) $\left(4x^2+\frac{1}{2}\right)^4$ g) $\left(8x^2+\frac{1}{4}\right)^6$

b) $\left(\sqrt{2}x-1\right)^7$ d) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^9$ f) $\left(4x^2-\frac{1}{2}\right)^6$ h) $\left(8x^2-\frac{1}{4}\right)^8$

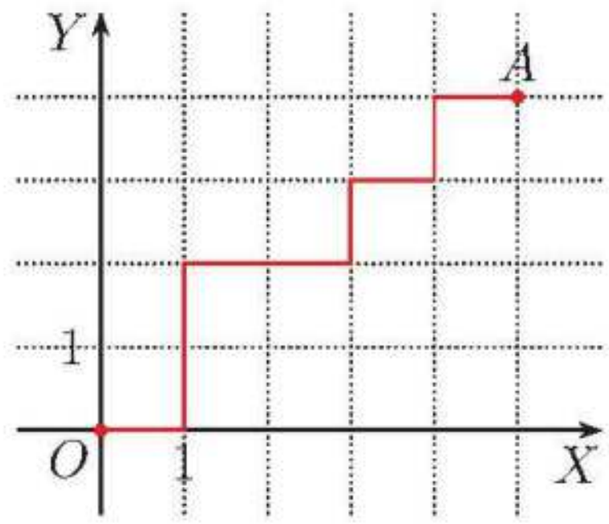
D 16. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, uzasadnij, że:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

D 17. Uzasadnij, że podana równość zachodzi dla wszystkich liczb nieparzystych n.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n}$$

18. Rozpatrujemy wszystkie łamane składające się z odcinków równoległych do osi układu współrzędnych, których końcami są punkty o obu współrzędnych całkowitych (przykładowa łamana na rysunku obok). Ile jest takich łamanych długości 9 o początku w punkcie $O(0,0)$ i końcu w punkcie $A(5,4)$?



1.6. Kombinatoryka – zadania

Aby ustalić, ile obiektów spełnia warunki zadania, czasami warto wypisać wszystkie takie obiekty i je policzyć.

Przykład 1

Rzucamy cztery razy kostką i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby czterocyfrowej. Ile można w ten sposób otrzymać liczb, których suma cyfr jest równa 6?

Suma cyfr może być równa 6 w dwóch przypadkach:

- w zapisie liczby występują raz cyfra 3 i trzy razy cyfra 1; są cztery takie liczby: 1113, 1131, 1311, 3111;
- w zapisie liczby występują dwa razy cyfra 2 i dwa razy cyfra 1; jest sześć takich liczb: 1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211.

Wszystkich takich liczb jest $4 + 6 = 10$ (korzystamy z reguły dodawania).

Ćwiczenie 1

Rzucamy trzy razy kostką i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby trzycyfrowej. Ile można w ten sposób otrzymać liczb, których:

a) suma cyfr jest równa 6, b) iloczyn cyfr jest równy 6?

W poniższym przykładzie wypisanie wszystkich liczb spełniających warunki zadania nie byłoby praktyczne, dlatego wykorzystamy wzór na liczbę wariacji z powtórzeniami.

Przykład 2

Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie mogą występować cyfry należące do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i co najmniej raz występuje cyfra 3?

Niech X będzie zbiorem wszystkich liczb czterocyfrowych zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6; A – zbiorem tych liczb ze zbioru X, w których zapisie co najmniej raz występuje cyfra 3; B – zbiorem tych liczb ze zbioru X, w których zapisie ani razu nie występuje cyfra 3.

Wówczas $\overline{\overline{X}} = 6^4$, $\overline{\overline{B}} = 5^4$.

Zauważmy, że $X = A \cup B$ oraz A i B są rozłączne, stąd $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$.

Zatem $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{X}} - \overline{\overline{B}} = 6^4 - 5^4 = 1296 - 625 = 671$.

Ćwiczenie 2

Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0, a suma cyfr jest mniejsza od 35?

Podczas rozwiązywania zadań będziemy korzystać z poniższych wzorów.

Wzór	Opis
$P_n = n!$	liczba **permutacji** zbioru n-elementowego
$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	liczba k-elementowych **wariacji bez powtórzeń** zbioru n-elementowego
$W_n^k = n^k$	liczba k-elementowych **wariacji z powtórzeniami** zbioru n-elementowego
$C_n^k = \binom{n}{k}$	liczba k-elementowych **kombinacji** zbioru n-elementowego

Przykład 3

Ile jest liczb ośmiocyfrowych, których suma cyfr jest równa 3?

Warunki zadania spełniają liczby należące do zbiorów:

A – w zapisie liczby występują jedna cyfra 3 i siedem cyfr 0.
Jedynym elementem tego zbioru jest liczba 3 000 000, zatem $\overline{\overline{A}} = 1$.

B – w zapisie liczby występują jedna cyfra 2, jedna cyfra 1 i sześć cyfr 0.
Jeśli pierwszą cyfrą tej liczby jest 2, to cyfra 1 znajduje się na jednej z pozostałych siedmiu pozycji, analogicznie jeśli pierwszą cyfrą jest 1, to cyfra 2 znajduje się na jednej z pozostałych siedmiu pozycji, zatem:

$$\overline{\overline{B}} = 2 \cdot \binom{7}{1} = 14$$

C – w zapisie liczby występują trzy cyfry 1 i pięć cyfr 0.

Pierwszą cyfrą jest 1, pozostałe cyfry 1 znajdują się na dwóch spośród pozostałych siedmiu pozycji, zatem:

$$\overline{\overline{C}} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$$

Zbiory A, B, C są parami rozłączne, zatem:

$$\overline{\overline{A \cup B \cup C}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}} = 1 + 14 + 21 = 36$$

Ćwiczenie 3

Ile jest liczb sześciocyfrowych o iloczynie cyfr równym: a) 6, b) 8?

Ćwiczenie 4

Ile jest liczb dziesięciocyfrowych o sumie cyfr równej:

a) 2, b) 4, c) 87, d) 88?

Zadania

1. Podczas sprawdzianu należało obliczyć, ile jest liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Poniżej przedstawiono rozwiązania podane przez dwóch uczniów.

uczeń I: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ uczeń II: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$

Uzasadnij podane rozwiązania.

2. Ile jest pięciocyfrowych liczb parzystych o różnych cyfrach, jeśli wiadomo, że w zapisie tych liczb nie występuje cyfra 7? Ile jest takich liczb sześciocyfrowych?

3. Ile jest liczb czterocyfrowych, których cyfry należą do zbioru $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ i nie mogą się powtarzać, a ich suma jest większa od 12?

4. Ile jest wszystkich liczb, w których zapisie występują tylko cyfry 0, 1 i 2 i które mają co najwyżej: a) 4 cyfry, b) 6 cyfr?

5. W partii 40 monitorów komputerowych 4 są uszkodzone. Wybieramy 3 monitory. Na ile sposobów można dokonać takiego wyboru, aby:

a) żaden z wybranych monitorów nie był uszkodzony,

b) co najwyżej jeden z wybranych monitorów był uszkodzony?

6. Na parkingu salonu samochodowego stoi 10 samochodów tej samej marki. Cztery samochody są czarne, trzy – srebrne, a pozostałe – granatowe. Wybieramy trzy samochody. Na ile sposobów można dokonać wyboru tak, aby wszystkie wybrane samochody były:

a) w różnych kolorach, b) w tym samym kolorze?

7. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Liczbę oczek na pierwszej z nich oznaczamy przez x, a na drugiej – przez y. Ile jest możliwych wyników spełniających podany warunek?

a) $x < y$ lub $x > y + 2$ (diagram obok)

b) $x = y$ lub $x \geqslant y + 2$

c) $x + y \leqslant 5$ lub $x + y = 10$

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Termin *kombinatoryka* pochodzi z wydanej w 1666 r. rozprawy Gottfrieda Wilhelma Leibniza *Dissertatio de arte combinatoria*.

D **8.** a) Pięciu posłów – trzech z partii X i dwóch z partii Y – zajmuje wspólną pięcioosobową ławę na sali sejmowej. Posłowie jednej partii siedzą obok siebie. Uzasadnij, że są 24 możliwe sposoby zajęcia miejsc przez posłów.

b) Siedmiu posłów – trzech z partii X i czterech z partii Y – zajmuje wspólną siedmioosobową ławę na sali sejmowej. Postanowili oni zająć miejsca w ten sposób, że żaden nie ma za sąsiada posła ze swojej partii. Na ile sposobów posłowie mogą zasiąść w ławie?

9. Grupa uczniów – czworo dziewcząt i ośmiu chłopców – zajmuje wspólny dwunastomiejscowy rząd w kinie. Na ile sposobów uczniowie mogą zająć miejsca tak, aby:

a) dziewczęta siedziały razem, b) chłopcy siedzieli razem.

10. W skład rady uczniów wchodzi po dwoje przedstawicieli klas IIIa, IIIb, IIIc, IVa i IVb. Na ile sposobów można wybrać:

a) pięcioosobową delegację tej rady,

b) pięcioosobową delegację tej rady tak, aby był w niej przedstawiciel każdej klasy,

c) pięcioosobową delegację tej rady tak, aby przynajmniej jedna klasa była reprezentowana przez dwoje uczniów?

11. Do klubu golfowego należy 20 mężczyzn i 10 kobiet. Członkowie klubu wybierają przewodniczącego, wiceprzewodniczącego i sekretarza. Na ile sposobów mogą dokonać wyboru tak, aby została wybrana przynajmniej jedna kobieta?

12. W szufladzie znajduje się 10 par rękawiczek, każda para jest innego koloru. Na ile sposobów można wyciągnąć z szuflady 4 rękawiczki, aby wśród nich nie było ani jednej pary?

D **13.** W konkursie kulinarnym wzięło udział 12 par małżeńskich. Do drugiego – indywidualnego – etapu konkursu jury wybrało 8 osób. Uzasadnij, że jeśli wśród wybranych osób:

a) jest tylko jedna para małżeńska, to takiego wyboru można dokonać na ponad 350 000 sposobów,

b) są dwie pary małżeńskie, to takiego wyboru można dokonać na ponad 220 000 sposobów.

14. W hostelu jest pięć pokojów o numerach od 1 do 5, które informują o liczbie miejsc noclegowych w danym pokoju. Na ile sposobów można rozlokować w tych pokojach 15 osób?

15. W zapisie pewnej liczby występują cyfry od 1 do 6, przy czym cyfra n występuje dokładnie n razy, gdzie $n \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Z ilu cyfr składa się ta liczba? Ile jest takich liczb?

Talia 52 kart składa się z 13 pików (♠), 13 kierów (♥), 13 kar (♦) i 13 trefli (♣). Litery A, K, D, W oznaczają figury: odpowiednio asa, króla, damę i waleta. W skład talii wchodzą karty wymienione poniżej.

$A\spadesuit$ $K\spadesuit$ $D\spadesuit$ $W\spadesuit$ $10\spadesuit$ $9\spadesuit$ $8\spadesuit$ $7\spadesuit$ $6\spadesuit$ $5\spadesuit$ $4\spadesuit$ $3\spadesuit$ $2\spadesuit$

$A\heartsuit$ $K\heartsuit$ $D\heartsuit$ $W\heartsuit$ $10\heartsuit$ $9\heartsuit$ $8\heartsuit$ $7\heartsuit$ $6\heartsuit$ $5\heartsuit$ $4\heartsuit$ $3\heartsuit$ $2\heartsuit$

$A\diamondsuit$ $K\diamondsuit$ $D\diamondsuit$ $W\diamondsuit$ $10\diamondsuit$ $9\diamondsuit$ $8\diamondsuit$ $7\diamondsuit$ $6\diamondsuit$ $5\diamondsuit$ $4\diamondsuit$ $3\diamondsuit$ $2\diamondsuit$

$A\clubsuit$ $K\clubsuit$ $D\clubsuit$ $W\clubsuit$ $10\clubsuit$ $9\clubsuit$ $8\clubsuit$ $7\clubsuit$ $6\clubsuit$ $5\clubsuit$ $4\clubsuit$ $3\clubsuit$ $2\clubsuit$

16. a) Z talii 52 kart wybrano jednego pika, jednego kiera, jedno karo oraz jednego trefla. Wiadomo, że wśród wybranych czterech kart nie ma dokładnie trzech asów. Na ile sposobów można dokonać takiego wyboru?

b) Z talii 52 kart wybrano jednego asa, jednego króla, jedną damę oraz jednego waleta. Wiadomo, że nie wybrano czterech kierów. Na ile sposobów można dokonać takiego wyboru?

17. Z talii 52 kart wybieramy 13 kart. Oblicz, na ile sposobów można dokonać wyboru tak, aby wśród wybranych kart było 5 kierów oraz:

a) 8 trefli, b) 4 trefle, 3 kara i 1 pik.

18. Z talii 52 kart wybieramy 5 kart. Oblicz, na ile sposobów można dokonać wyboru tak, aby wśród wybranych kart:

a) były dokładnie 3 karty jednego koloru, b) była co najmniej 1 figura.

19. Z talii 52 kart wybieramy 13 kart. Na ile sposobów można wybrać karty dokładnie dwóch kolorów?

20. W jednej z gier liczbowych należy skreślić 6 spośród 49 liczb. Czy liczba możliwych wyborów jest większa od 10 000 000?

21. Na ile sposobów można skreślić 6 liczb na kuponie gry liczbowej takim jak przedstawiony obok, jeśli nie można skreślić 2 liczb w tym samym wierszu?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Warto wiedzieć

Dwójkowy system liczbowy

Wszystkie operacje wykonywane przez komputery są realizowane w systemie dwójkowym (binarnym). Do zapisywania liczb w systemie dwójkowym wykorzystuje się tylko cyfry 0 i 1. Kolejne pozycje odpowiadają kolejnym potęgom liczby 2. Na przykład liczba zapisana w systemie dwójkowym jako 10111 to:

$$10111_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ = 16 + 4 + 2 + 1 = 23$$

Uwaga. Indeks (2) bywa używany, aby zaznaczyć, że liczba została zapisana w systemie dwójkowym.

Zapis liczby w systemie	
dziesiętnym	dwójkowym
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

Jeśli chcemy liczbę podaną w systemie dziesiętnym zapisać w systemie dwójkowym, to zaczynamy od przedstawienia jej jako sumy potęg liczby 2. Na przykład dla liczby 113 mamy:

$$113 = 64 + 32 + 16 + 1 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^0$$

zatem liczba 113 zapisana w systemie dwójkowym to $1110001_{(2)}$.

Działania w systemie dwójkowym wykonujemy analogicznie jak w systemie dziesiętnym. W wypadku dodawania należy pamiętać, że w systemie dwójkowym $1_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$.

1. Zapisz w systemie dziesiętnym liczbę podaną w systemie dwójkowym.

a) $1011_{(2)}$ b) $11010_{(2)}$ c) $10101011_{(2)}$ d) $10000000001_{(2)}$

2. Zapisz w systemie dwójkowym liczbę podaną w systemie dziesiętnym.

a) 31 b) 36 c) 78 d) 150

3. Wykonaj dodawanie liczb zapisanych w systemie dwójkowym. Sprawdź otrzymany wynik, przeprowadzając obliczenia w systemie dziesiętnym.

a) $101_{(2)} + 11_{(2)}$
b) $11011_{(2)} + 1011_{(2)}$
c) $11101_{(2)} + 11110_{(2)}$
d) $10101010_{(2)} + 111111_{(2)}$

4. Ile jest liczb, które w zapisie dwójkowym mają:

a) 10 cyfr,

b) 10 cyfr, a wśród nich są tylko cztery jedynki?

1.7. Zdarzenia losowe

Rzut monetą czy rzut kostką to przykłady doświadczeń losowych, czyli takich doświadczeń, których wyniku nie możemy przewidzieć. W przypadku jednokrotnego rzutu monetą możliwe wyniki to orzeł lub reszka. W przypadku jednokrotnego rzutu kostką mamy sześć możliwych wyników: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek.

Poszczególne wyniki doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniami elementarnymi**, a ich zbiór – **przestrzenią zdarzeń elementarnych** lub krótko **przestrzenią**. Zgodnie z tradycją przestrzeń zdarzeń elementarnych oznaczamy grecką wielką literą omega (Ω), a pojedyncze zdarzenia elementarne – małą literą omega (ω).

Przykład 1

a) Przestrzeń zdarzeń elementarnych rzutu monetą: $\Omega = \{o, r\}$, gdzie o oznacza otrzymanie orła, a r – reszki.

b) Przestrzeń zdarzeń elementarnych rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

c) Przestrzenią zdarzeń elementarnych w doświadczeniu polegającym na rzucie najpierw monetą, a następnie kostką jest zbiór:
$\Omega = \{(o,1), (o,2), (o,3), (o,4), (o,5), (o,6), (r,1), (r,2), (r,3), (r,4), (r,5), (r,6)\}$.

Ćwiczenie 1

Z urny zawierającej trzy kule ponumerowane 1, 2 i 3 losujemy jedną kulę, a następnie drugą. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę dwucyfrową. Podaj przestrzeń zdarzeń elementarnych, jeśli:

a) wylosowanej kuli nie zwracamy do urny (losowanie bez zwracania),

b) wylosowaną kulę zwracamy do urny (losowanie ze zwracaniem).

Definicja

Zdarzeniem losowym nazywamy dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω.

Zdarzenia losowe, zwane krótko zdarzeniami, będziemy oznaczać wielkimi literami: A, B, C itd.

Zbiór Ω nazywamy zdarzeniem **pewnym**, natomiast zbiór pusty nazywamy zdarzeniem **niemożliwym**. Elementy zdarzenia A nazywamy **wynikami sprzyjającymi** zdarzeniu A.

Przykład 2

Rzucamy raz kostką. Rozpatrzmy zdarzenia:
A – wypadła parzysta liczba oczek,
B – wypadła liczba oczek większa od 8,
C – wypadła liczba oczek mniejsza od 7.

Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest zbiór $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Zdarzeniu A sprzyjają wyniki 2, 4, 6, zatem $A = \{2, 4, 6\}$.
Zdarzenie B jest zdarzeniem niemożliwym, a C – zdarzeniem pewnym.

Ćwiczenie 2

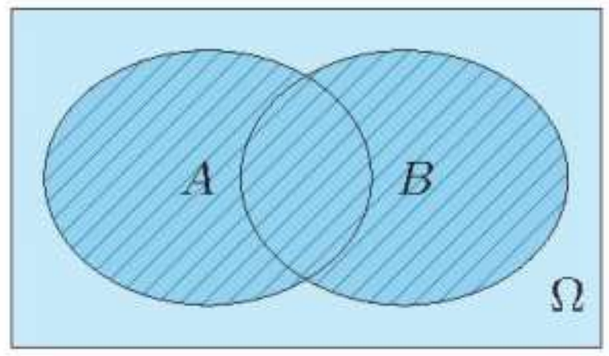
Rzucamy dwa razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
A – suma otrzymanych oczek jest mniejsza od 4,
B – iloczyn otrzymanych oczek jest podzielny przez 10.

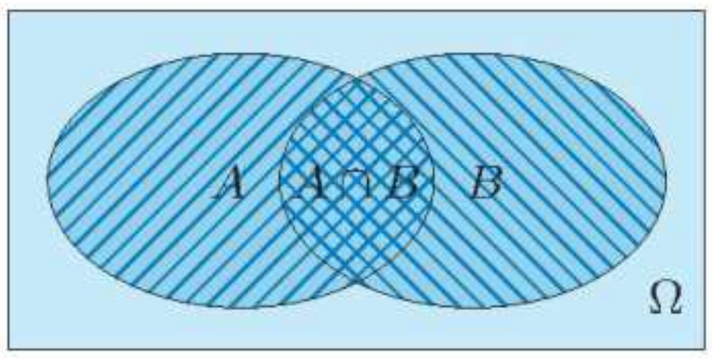
Ćwiczenie 3

Rzucamy cztery razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
A – wypadły co najwyżej dwie reszki,
B – wypadły dokładnie dwie reszki.

Zdarzenia losowe są zbiorami, zatem możemy na nich wykonywać takie same działania jak na zbiorach.
Niech $A, B \subset \Omega$.

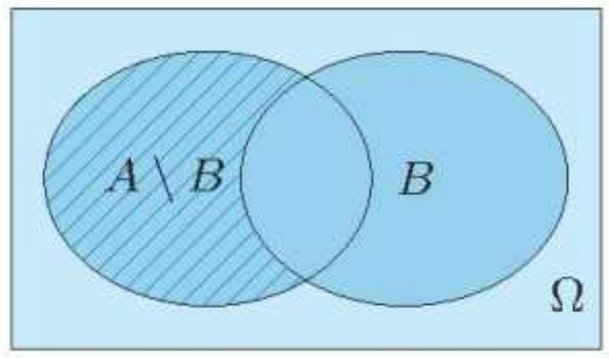
Sumą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cup B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A lub zdarzeniu B i tylko one.





Iloczynem zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cap B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające jednocześnie zdarzeniu A i zdarzeniu B i tylko one.

Różnicą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \setminus B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A oraz niesprzyjające zdarzeniu B i tylko one.



Mówimy, że zdarzenia A i B są **rozłączne** lub **wykluczają się**, jeśli część wspólna $A \cap B$ tych zdarzeń jest zdarzeniem niemożliwym ($A \cap B = \emptyset$).

Zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy **zdarzeniem przeciwnym** do zdarzenia A. Zauważ, że $A \cap A' = \emptyset$ oraz $A \cup A' = \Omega$.

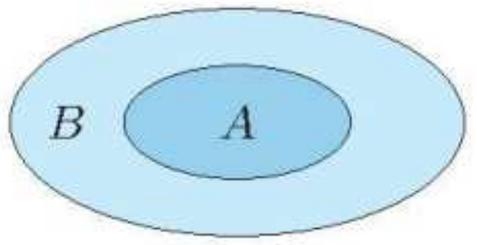
Ćwiczenie 4

Rzucamy trzy razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

A – orzeł wypadł co najwyżej raz,
B – co najmniej raz wypadła reszka,
C – reszka wypadła dokładnie dwa razy,
D – wypadły same orły,
E – wypadło więcej orłów niż reszek.

Wskaż pary zdarzeń wykluczających się oraz pary zdarzeń przeciwnych.

Uwaga. Jeśli wszystkie elementy zdarzenia A należą do zdarzenia B, to mówimy, że zdarzenie A **zawiera się** w zdarzeniu B, co zapisujemy $A \subset B$.



Zauważ, że jeśli $A \subset B$, to $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ i $A \setminus B = \emptyset$.

Zadania

1. Rzucamy trzy razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

A – suma wyrzuconych oczek jest równa 17,
B – suma wyrzuconych oczek jest nie większa niż 6,
C – iloczyn wyrzuconych oczek jest równy 36.

2. Z urny, w której są trzy kule ponumerowane 12, 13 i 14, losujemy bez zwracania dwie kule. Które z poniższych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, a które – niemożliwym?

A – obydwie wylosowane liczby są nieparzyste
B – suma wylosowanych liczb jest liczbą pierwszą
C – suma wylosowanych liczb jest równa co najwyżej 24
D – jedna z wylosowanych liczb jest parzysta

3. Rzucamy dwa razy kostką. Rozpatrzmy zdarzenia:

A – pierwsza wyrzucona liczba jest nie mniejsza od drugiej,
B – wśród wyrzuconych liczb są liczba parzysta i liczba nieparzysta.

Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom A' i B'. Sprawdź, czy zachodzą zależności: $A \cup B = \Omega$, $A' \cup B = B$, $A \setminus B = B'$, $B' \subset A$.

4. Z urny, w której jest pięć kul ponumerowanych od 1 do 5, losujemy kolejno, bez zwracania, dwie kule.

a) Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

A – za drugim razem wylosowano liczbę parzystą,
B – iloczyn wylosowanych liczb jest równy 4,
C – pierwsza wylosowana liczba jest mniejsza od drugiej.

b) Wyznacz zdarzenia: $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$ i $A \cap B \cap C$.

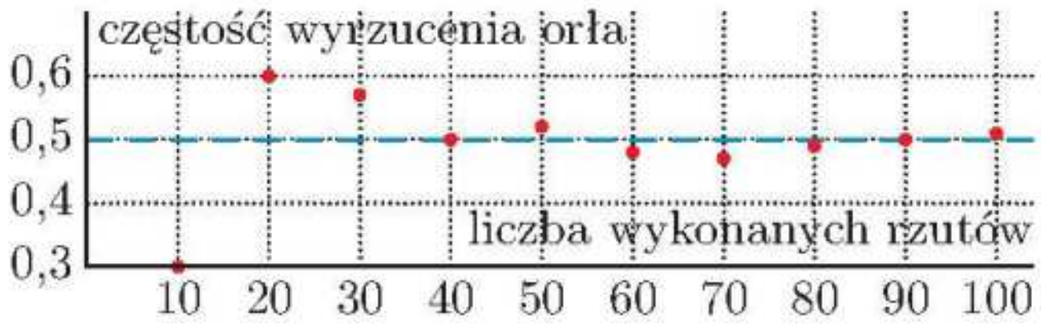
Warto wiedzieć

Częstość zdarzeń

Rzucamy n razy monetą. Jeśli k razy wypadnie orzeł, to mówimy, że **częstość** otrzymania orła wynosi $\frac{k}{n}$. W tabeli i na wykresie podano częstość wyrzucenia orła podczas pewnego eksperymentu.

Liczba wykonanych rzutów n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Liczba otrzymanych orłów k	3	12	17	20	26	29	33	39	45	51
Częstość $\frac{k}{n}$	0,3	0,6	0,57	0,5	0,52	0,48	0,47	0,49	0,5	0,51

Zwróć uwagę, że dla dużej liczby rzutów częstość otrzymania orła jest bliska $\frac{1}{2}$.



W poniższej tabeli przedstawiono wyniki eksperymentów polegających na rzucie monetą, przeprowadzonych przez Francuza Georges'a Louisa Leclerca de Buffona [czyt. żorża luisa leklerka de bufona] (1707–1788) i Anglika Karla Pearsona [czyt. pirsona] (1857–1936).

	Liczba rzutów	Liczba orłów	Częstość
G.L.L. de Buffon	4040	2048	0,5069
K. Pearson	12000	6019	0,5016
K. Pearson	24000	12012	0,5005

1. Wykonaj 100 rzutów monetą. Podaj otrzymaną częstość wypadnięcia orła.
2. Wykonaj 100 rzutów kostką. Sprawdź, czy częstość otrzymania szóstki jest bliska $\frac{1}{6}$.
3. Wykonaj 30 rzutów dwiema kostkami. Za każdym razem zapisz, czy suma wyrzuconych oczek jest parzysta, czy nieparzysta. Podaj częstość, z jaką występowała parzysta liczba oczek.

W 1733 r. de Buffon sformułował problem, zwany później problemem **igły Buffona**, polegający na obliczeniu prawdopodobieństwa tego, że igła o długości l, rzucona na podłogę podzieloną liniami równoległymi odległymi o d, spadnie na linię. Rozwiązanie tego problemu, podane przez Buffona w 1777 r., pozwala wyznaczyć przybliżoną wartość liczby π metodami rachunku prawdopodobieństwa.



1.8. Prawdopodobieństwo klasyczne

Gdy rzucamy kostką, możemy otrzymać jeden z wyników należących do zbioru $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Przyjmujemy, że kostka jest symetryczna (upada na każdą ściankę równie często), zatem szansa otrzymania któregokolwiek wyniku jest równa $\frac{1}{6}$. Rozpatrzmy zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek. Zauważmy, że zdarzeniu temu sprzyjają trzy wyniki: 2, 4 i 6. Zatem szansa zajścia tego zdarzenia jest równa $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Jeżeli wszystkie wyniki doświadczenia zdarzają się równie często, mówimy, że mamy do czynienia z **prawdopodobieństwem (schematem) klasycznym**. W takiej sytuacji prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A zawartego w przestrzeni Ω określamy następująco:

Definicja

Jeżeli Ω jest zbiorem skończonym i niepustym, to **prawdopodobieństwem zdarzenia** $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

Przykład 1

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek większej od 10 w dwukrotnym rzucie symetryczną kostką.

$$\Omega = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),$$
$$(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),$$
$$(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),$$
$$(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4),$$
$$(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),$$
$$(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}$$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych ma 36 elementów:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 36$$

Zdarzenie, którego prawdopodobieństwo chcemy obliczyć, to zdarzenie:

$$A = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}, \text{ stąd } \overline{\overline{A}} = 3$$

Zatem $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Ćwiczenie 1

Rzucamy dwukrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) sumy oczek mniejszej od 5,

b) parzystej sumy oczek.

Przykład 2

Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką i zapisujemy liczbę, której kolejnymi cyframi są otrzymane liczby oczek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wszystkie cyfry tej liczby są nieparzyste.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem wszystkich trzyelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Stąd $\overline{\overline{\Omega}} = 6^3 = 216$.

Rozpatrujemy zdarzenie losowe A, którego elementami są wszystkie trzyelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru $\{1, 3, 5\}$.

Stąd $\overline{\overline{A}} = 3^3 = 27$.

Zatem $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

Ćwiczenie 2

Rzucamy czterokrotnie symetryczną kostką i zapisujemy liczbę, której kolejnymi cyframi są otrzymane liczby oczek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest podzielna przez: a) 5, b) 4.

Przykład 3

Z urny, w której są 3 kule zielone i 5 kul niebieskich, losujemy jednocześnie 2 kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kul tego samego koloru?

Ω jest zbiorem dwuelementowych kombinacji zbioru ośmioelementowego.

Zatem $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$.

Szukamy prawdopodobieństwa zdarzenia polegającego na wylosowaniu 2 kul zielonych lub 2 kul niebieskich:

$$\overline{\overline{A}} = \binom{3}{2} + \binom{5}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} + \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 3 + 10 = 13$$

Zatem $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{13}{28}$.

Ćwiczenie 3

Z urny, w której jest 8 kul białych i 4 czarne, losujemy jednocześnie 4 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul:

a) będą kule tylko jednego koloru,
b) będą 2 kule białe i 2 czarne,
c) będą 3 kule czarne i 1 biała,
d) będą co najmniej 3 kule białe.

Zadania

1. Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Rozpatrzmy zdarzenia:
A – wypadły co najmniej trzy orły,
B – liczba orłów jest równa liczbie reszek,
C – wypadła parzysta liczba reszek.
Które z tych zdarzeń jest najbardziej prawdopodobne?

2. Rzucamy dwukrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) liczba oczek otrzymana w drugim rzucie jest o 2 większa od liczby oczek otrzymanej w pierwszym rzucie,

b) liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się co najwyżej o 1.

3. Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymane kolejno liczby oczek tworzą ciąg:

a) geometryczny, b) arytmetyczny.

4. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania spośród wszystkich liczb dwucyfrowych liczby, której suma cyfr jest równa: a) 11, b) 6.

5. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania spośród wszystkich liczb trzycyfrowych liczby, której suma cyfr jest równa: a) 2, b) 3.

6. Windą zatrzymującą się na 6 piętrach jadą 4 osoby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) każda osoba wysiądzie na innym piętrze,
b) wszyscy wysiądą na tym samym piętrze.

7. Dziesięć kul rozmieszczamy w dziesięciu szufladach (kule i szuflady rozróżniamy). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każda szuflada będzie zajęta.

8. Z urny, w której jest 6 kul białych i 4 czarne, losujemy jednocześnie 8 kul. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w urnie zostaną:

a) tylko kule białe, b) kule różnych kolorów.

9. Z urny, w której znajduje się 7 kul białych i 5 czarnych, losujemy jednocześnie 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul:

a) będą 2 kule czarne i 1 biała, c) będą tylko kule białe,

b) będą 2 kule białe i 1 czarna, d) będą kule biała i czarna.

10. a) Na loterii jest 40 losów, w tym 4 wygrywające. Kupujemy 2 losy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród nich będzie dokładnie 1 los wygrywający.

b) Na pierwszej loterii jest 10 losów, w tym 1 wygrywający, a na drugiej – 20 losów, w tym 2 wygrywające. Na której loterii szanse wygrania są większe, jeśli kupujemy 2 losy?

11. W dwudziestoosobowej klasie, w której jest 8 dziewcząt, rozlosowano 6 biletów do kina. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że bilety otrzyma:

a) dokładnie troje dziewcząt, b) co najmniej troje dziewcząt.

12. Z worka, w którym jest 5 par butów, wyjmujemy losowo 2 buty. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia butów tworzących parę. Ile razy zwiększy się prawdopodobieństwo wyciągnięcia pary, jeśli będziemy losować 3 buty?

13. Egzamin składa się z 10 pytań, na które możemy odpowiedzieć „tak" lub „nie". Oblicz prawdopodobieństwo zdania egzaminu, jeśli odpowiedzi podajemy losowo i aby zdać, musimy odpowiedzieć poprawnie na co najmniej:

a) 9 pytań, b) 7 pytań.

14. Z talii 52 kart losujemy bez zwracania trzy karty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania: a) samych asów, b) dwóch asów i króla.

15. Z talii 52 kart losujemy bez zwracania cztery karty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

a) dwóch kierów, pika i trefla,

b) co najmniej trzech króli,

c) co najwyżej jednego asa,

d) co najmniej jednej damy.

16. W urnie jest 6 kul białych i pewna liczba kul czarnych. Losujemy dwa razy bez zwracania po jednej kuli. Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych jest równe $\frac{1}{3}$. Ile kul czarnych znajduje się w tej urnie?

Klasyczną definicję prawdopodobieństwa precyzyjnie sformułował francuski matematyk, fizyk i astronom Pierre Simon de Laplace [czyt. pier simą de laplas] (1749–1827). Zamieścił ją w dziele *Théorie analytique des probabilités* (*Analityczna teoria prawdopodobieństwa*), wydanym w 1812 r. Od 1785 r. Laplace był członkiem Akademii Nauk w Paryżu.



1.9. Własności prawdopodobieństwa

Sformułujemy teraz definicję prawdopodobieństwa pozwalającą również opisywać sytuacje, w których zdarzenia elementarne nie są jednakowo prawdopodobne.

Definicja

Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję P określoną na skończonym zbiorze zdarzeń elementarnych Ω o wartościach rzeczywistych spełniającą następujące warunki:

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ dla dowolnego $A \subset \Omega$,
2. $P(\emptyset) = 0$ i $P(\Omega) = 1$,
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dla dowolnych zdarzeń rozłącznych $A, B \subset \Omega$.

Liczbę $P(A)$ nazywamy **prawdopodobieństwem zdarzenia** A.

Przykład 1

Pewną niesymetryczną kostkę poddano testowi, wykonując długą serię rzutów. W tabeli podano w procentach częstość występowania danych liczb oczek.

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Częstość występowania	12,5%	12,5%	12,5%	25%	12,5%	25%

Zwróćmy uwagę, że częstość występowania nie jest taka sama dla wszystkich wyników. Na tej podstawie można przyjąć dla testowanej kostki następujące prawdopodobieństwa pojawienia się danych liczb oczek.

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Prawdopodobieństwo	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Niech A oznacza wyrzucenie parzystej liczby oczek, a B – liczby oczek większej od 2. Wówczas: $P(A) = P(\{2,4,6\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$,

$$P(B) = P(\{3,4,5,6\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Prawdopodobieństwo na skończonym zbiorze $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ czasami określa się, podając prawdopodobieństwo każdego ze zdarzeń elementarnych. Dla każdego ze zdarzeń ω_i, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$, podaje się liczbę nieujemną p_i tak, aby spełniony był warunek: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ (jak w przykładzie 1). Mówimy wtedy, że na zbiorze Ω został określony **rozkład prawdopodobieństwa**. Wówczas prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ jest sumą prawdopodobieństw zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A.

Twierdzenie

Niech P będzie prawdopodobieństwem określonym na zbiorze Ω.
Wówczas dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$, jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$.

Dowód
Jeśli $A \subset B$, to $B = A \cup (B \setminus A)$. Zbiory A i $B \setminus A$ są rozłączne, więc:

$$P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$$

Stąd $P(A) \leqslant P(B)$, ponieważ $P(B \setminus A) \geqslant 0$.

Twierdzenie

Niech P będzie prawdopodobieństwem określonym na zbiorze Ω.
Wówczas dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$: $P(A') = 1 - P(A)$.

Uwaga. Prawdopodobieństwo klasyczne spełnia warunki prawdopodobieństwa zdefiniowanego w tym temacie.

D Ćwiczenie 1

Udowodnij powyższe twierdzenie.

Uwaga. W dalszym ciągu podręcznika dla rzutu kostką (monetą) będziemy przyjmować, że kostka (moneta) jest symetryczna, czyli że wszystkie ścianki (orzeł lub reszka) wypadają z takim samym prawdopodobieństwem, chyba że zaznaczono, że jest inaczej.

Przykład 2

Rzucamy trzykrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz wypadnie orzeł.

Zauważmy, że $\overline{\overline{\Omega}} = 8$. Niech A oznacza zdarzenie polegające na otrzymaniu przynajmniej jednego orła w trzech rzutach. Rozpatrzmy zdarzenie A' przeciwne do zdarzenia A. Polega ono na wyrzuceniu samych reszek: $A' = \{(r, r, r)\}$. Zatem $\overline{\overline{A'}} = 1$, czyli $P(A') = \frac{\overline{\overline{A'}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{1}{8}$. Stąd $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Ćwiczenie 2

a) Rzucamy czterokrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz wypadnie reszka.

b) Rzucamy trzykrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz otrzymamy 6 oczek.

Ćwiczenie 3

Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
A – suma oczek, które wypadną w obydwu rzutach, jest równa co najmniej 4,
B – iloczyn oczek, które wypadną w obydwu rzutach, jest mniejszy od 25.

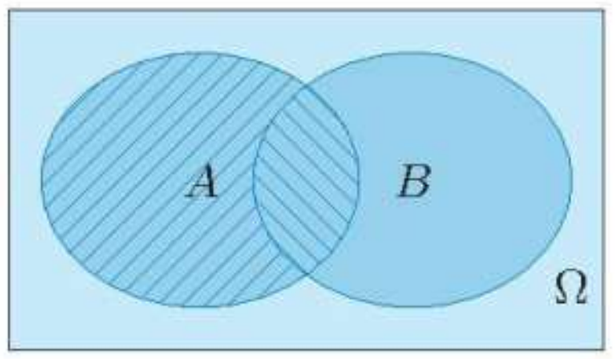
Twierdzenie

Niech P będzie prawdopodobieństwem określonym na zbiorze Ω. Wówczas dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$:

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Dowód

Dla dowolnych $A, B \subset \Omega$ mamy:
$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, więc:
$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$,
a stąd $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.



Zauważ, że zbiory $A \setminus B$ oraz $A \cap B$ są rozłączne.

Ćwiczenie 4

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A \setminus B$, jeśli:

a) $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{5}{9}$,

b) $B \subset A$, $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{6}$.

Ćwiczenie 5

Spośród wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych wybieramy losowo jedną.
Rozpatrzmy zdarzenia:
A – wylosowana liczba jest podzielna przez 3,
B – wylosowana liczba jest podzielna przez 4.
Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Twierdzenie

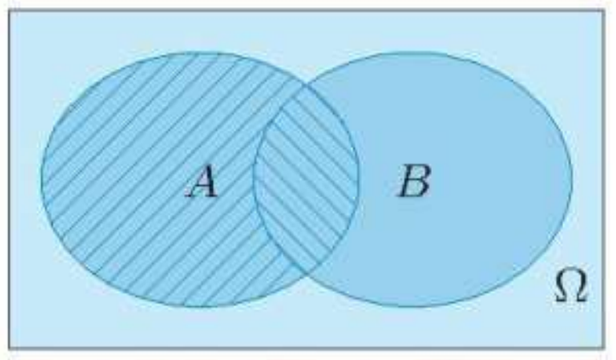
Niech P będzie prawdopodobieństwem określonym na zbiorze Ω. Wówczas dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dowód

Dla dowolnych $A, B \subset \Omega$ mamy:
$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, więc:

$$P(A \cup B) = P((A \setminus B) \cup B) = P(A \setminus B) + P(B) = \\ = P(A) - P(A \cap B) + P(B).$$



Zauważ, że zbiory $A \setminus B$ oraz B są rozłączne.

Ćwiczenie 6

Oblicz prawdopodobieństwo sumy zdarzeń $A, B \subset \Omega$, jeśli:

a) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$,

b) $P(A) = \frac{2}{9}$, $P(B) = \frac{5}{12}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$,

c) $P(A) = \frac{7}{8}$, $P(B') = \frac{5}{8}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Zadania

1. Oblicz prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń $A, B \subset \Omega$, jeśli:

a) $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$,

b) $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{11}{15}$.

2. Oblicz prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń $A, B \subset \Omega$, jeśli:

a) $P(A') = 0{,}4$, $P(B') = 0{,}85$, $P(A \cup B) = 0{,}7$,

b) $P(A \setminus B) = 0{,}4$, $P(B \setminus A) = 0{,}1$, $P((A \cup B)') = 0{,}25$.

D **3.** Uzasadnij, że jeśli $B \subset A \subset \Omega$, to $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

4. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń $A \setminus B$, jeśli:

a) $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ i $P(A) = \frac{3}{8}$, b) $P(A \cup B) = \frac{9}{10}$ i $P(B) = \frac{7}{10}$.

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Czy zdarzenia $A, B \subset \Omega$ mogą się wykluczać, jeśli $P(A) = \frac{1}{2}$ i $P(B) = \frac{3}{5}$?

Załóżmy, że zdarzenia A i B się wykluczają. Wówczas:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{11}{10} > 1$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem zdarzenia te nie mogą się wykluczać.

Czy zdarzenia $A, B \subset \Omega$ mogą się wykluczać?

a) $P(A) = \frac{4}{5}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ b) $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{5}$

6. Czy zdarzenia A i B mogą się wykluczać, jeśli wiadomo, że $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$, $P(A \setminus B) = \frac{3}{8}$, $P(B \setminus A) = \frac{1}{4}$?

D **7.** a) Wykaż, że jeśli $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{8}$, to $P(A \cup B) \leqslant \frac{7}{8}$.

b) Wykaż, że jeśli $P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$, to $P(A \cap B) \geqslant \frac{1}{3}$.

8. Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
A – w obu rzutach otrzymano parzystą liczbę oczek lub obie otrzymane liczby oczek są większe od 3,
B – iloczyn liczb otrzymanych oczek jest nieparzysty lub większy od 24.

9. Losujemy jedną liczbę spośród liczb $1, 2, 3, \ldots, 100$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba ta jest podzielna przez: a) 2 lub 3, b) 3 lub 7.

10. Losujemy jedną liczbę spośród liczb $1, 2, 3, \ldots, 200$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba ta nie jest podzielna ani przez 2, ani przez 5.

11. Korzystając z podanych w ramce równości, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) $A' \cap B'$, jeśli $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{1}{6}$,

b) $A' \cup B'$, jeśli $A \subset B$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(B \setminus A) = \frac{1}{3}$.

Prawa de Morgana

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

12. Niech $A, B \subset \Omega$. Korzystając z praw de Morgana, oblicz $P(A' \cup B')$ oraz $P(A' \cap B')$, jeśli $P(A') = \frac{3}{4}$, $P(B') = \frac{7}{12}$ oraz $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$.

D 13. Niech $A, B \subset \Omega$. Uzasadnij, że jeśli $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, to:

$$P(A \cap B) = P(A' \cap B')$$

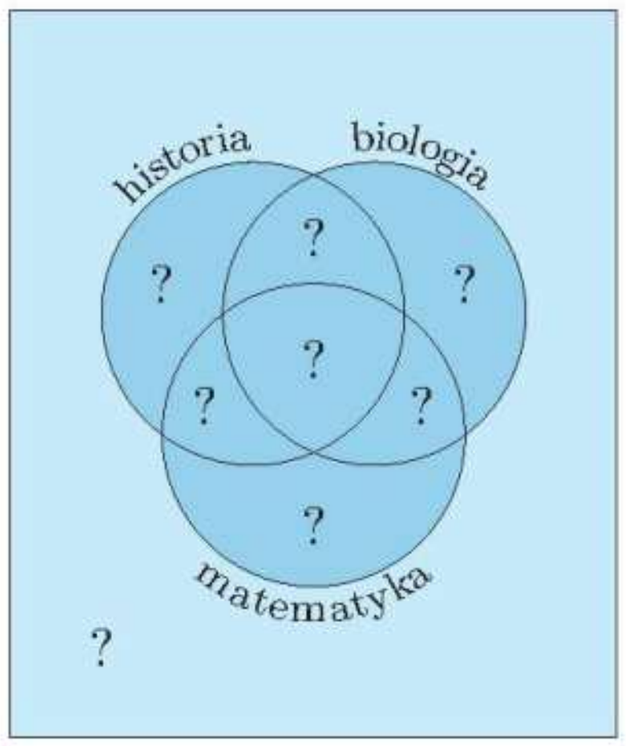
14. Rzucamy dwukrotnie kostką. Zdarzenie A polega na tym, że w każdym rzucie otrzymamy inną liczbę oczek, a zdarzenie B – że ani razu nie otrzymamy szóstki. Oblicz $P(A' \cup B')$ i $P(A' \cap B')$.

15. W pewnej grupie uczniów każdy zna język angielski lub niemiecki. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania z tej grupy ucznia znającego język angielski jest równe $\frac{7}{8}$, natomiast prawdopodobieństwo wylosowania ucznia znającego język niemiecki jest równe $\frac{4}{5}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń zna obydwa języki.

16. W ankiecie przeprowadzonej wśród 200 uczniów klas czwartych pewnego liceum otrzymano następujące wyniki:

- matematykę lubi 100 uczniów,
- historię lubi 90 uczniów,
- biologię lubi 35 uczniów,
- matematykę i historię lubi 25 uczniów,
- matematykę i biologię lubi 15 uczniów,
- historię i biologię lubi 20 uczniów,
- matematykę, historię i biologię lubi 5 uczniów.

Przerysuj do zeszytu diagram przedstawiony obok i go uzupełnij. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń nie lubi żadnego z wymienionych przedmiotów.



17. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ liczby podzielnej przez 3, 4 lub 7. Skorzystaj z poniższego wzoru na prawdopodobieństwo sumy trzech zdarzeń:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) + \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Warto wiedzieć

Rozkład prawdopodobieństwa

W tabeli obok przedstawiono rozkład prawdopodobieństwa dla rzutu symetryczną kostką. Zwróć uwagę, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

ω_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1. W tabeli obok przedstawiono rozkład prawdopodobieństwa dla doświadczenia polegającego na jednokrotnym rzucie niesymetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia nieparzystej liczby oczek w tym doświadczeniu.

ω_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$

2. Na ściankach symetrycznej kostki znajdują się następujące liczby oczek: 1, 2, 3, 4, 5, 5. Podaj rozkład prawdopodobieństwa dla rzutu tą kostką.

3. Rzucamy raz niesymetryczną kostką. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę przedstawiającą rozkład prawdopodobieństwa dla rzutu tą kostką, jeśli prawdopodobieństwo otrzymania 6 oczek jest dwa razy większe od prawdopodobieństwa otrzymania 5 oczek. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby oczek.

ω_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	?	?

4. Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami. Uczniowie A i B, opisując doświadczenie polegające na badaniu sumy wyrzuconych oczek, określili przestrzeń Ω jako zbiór wszystkich możliwych sum:

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Uczniowie podali następujące rozkłady prawdopodobieństwa.

Rozkład podany przez ucznia A:

ω_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Rozkład podany przez ucznia B:

ω_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$

Który z podanych rozkładów należałoby wziąć pod uwagę przy szacowaniu wyników powyższego doświadczenia wykonanego wiele razy?

*1.10. Prawdopodobieństwo warunkowe

Przykład 1

Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma otrzymanych oczek:

a) jest równa 11, b) jest równa 11, jeśli w pierwszym rzucie wypadło 5 oczek.

a) $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,6)\}$, zatem $\overline{\overline{\Omega}} = 36$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wyrzuceniu sumy oczek równej 11. Zdarzeniu A sprzyjają dwa wyniki: $(5,6)$ i $(6,5)$, zatem $P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

b) Niech B będzie zdarzeniem polegającym na wyrzuceniu 5 oczek w pierwszym rzucie: $B = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$. Spośród tych zdarzeń elementarnych jedynie wynik $(5,6)$ daje sumę oczek równą 11. Możemy to zapisać następująco: $A \cap B = \{(5,6)\}$. Zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe:

$$\frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}} = \frac{1}{6}$$

Wyrzucenie 5 oczek w pierwszym rzucie zwiększa więc szansę uzyskania sumy 11 oczek w obydwu rzutach kostką.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A, gdy wiemy, że zaszło zdarzenie B, nazywamy **prawdopodobieństwem warunkowym** i oznaczamy $P(A|B)$. Zauważmy, że w schemacie klasycznym mamy $P(A|B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}}$.

Zatem:

$$P(A|B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}} = \frac{\frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}}{\frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definicja

Niech $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwo zdarzenia A **pod warunkiem**, że zaszło zdarzenie B, określamy wzorem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ćwiczenie 1

Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek:

a) jest mniejsza od 10,

b) jest mniejsza od 10, jeśli w pierwszym rzucie wypadło 5 oczek,

c) jest mniejsza od 10, jeśli w pierwszym rzucie wypadło 1 oczko.

Ćwiczenie 2

Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek:

a) jest parzysta,

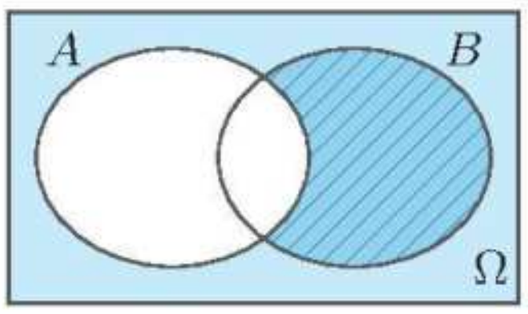
b) jest parzysta, jeśli w pierwszym rzucie wypadły 3 oczka,

c) jest parzysta, jeśli w pierwszym rzucie wypadły 4 oczka.

Przykład 2

Niech $A, B \subset \Omega$. Wykaż, że jeśli $P(B) > 0$, to $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$.

Zauważmy, że $A' \cap B = B \setminus (A \cap B)$.



Zatem:

$$1 - P(A|B) = 1 - \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)} =$$
$$= \frac{P(B\setminus(A\cap B))}{P(B)} = \frac{P(A'\cap B)}{P(B)} = P(A'|B).$$

Ćwiczenie 3

Rzucamy trzema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadnie:

a) co najmniej jedna szóstka,

b) co najmniej jedna szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek,

c) co najmniej jedna szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła taka sama liczba oczek.

Ćwiczenie 4

Niech $A, B \subset \Omega$ i $0 < P(B) < 1$. Wykaż, że jeśli $P(A|B) = P(A|B')$, to $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

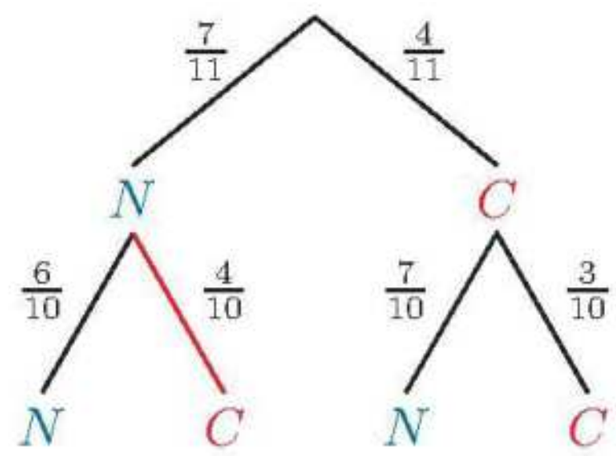
Przykład 3

W urnie jest 7 kul niebieskich i 4 czerwone. Losujemy z niej kolejno dwie kule bez zwracania. Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu za drugim razem kuli czerwonej, a B – na wylosowaniu za pierwszym razem kuli niebieskiej. Oblicz $P(A|B)$.

Drzewo obok jest ilustracją tego doświadczenia. Jeśli za pierwszym razem wyciągnęliśmy kulę niebieską, to w urnie pozostało 6 kul niebieskich i 4 czerwone. Zatem:

$$P(A|B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Gałąź zaznaczona kolorem czerwonym przedstawia ten etap doświadczenia, który nas interesuje.



Ćwiczenie 5

Z urny, w której jest 5 kul białych i 7 czarnych, losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu za drugim razem kuli czarnej, B_1 – na wylosowaniu za pierwszym razem kuli białej, B_2 – na wylosowaniu za pierwszym razem kuli czarnej. Oblicz $P(A|B_1)$ i $P(A|B_2)$. Umieść obliczone prawdopodobieństwa na odpowiednim drzewie.

Zadania

1. W urnie są cztery kule białe oznaczone numerami 1, 2, 3, 4, trzy kule czarne oznaczone numerami 1, 2, 3 oraz jest sześć kul niebieskich oznaczonych numerami 1, 2, 3, 4, 5, 6. Losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) jest to kula o numerze parzystym, jeśli wiemy, że wylosowaliśmy kulę białą,

b) jest to kula biała, jeśli wiemy, że wylosowaliśmy kulę o numerze parzystym.

2. Rzucamy trzy razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) suma oczek jest równa 13, jeśli w drugim rzucie wypadły 3 oczka,

b) zarówno w drugim, jak i w trzecim rzucie wypadła nieparzysta liczba oczek, jeśli suma oczek w trzech rzutach była równa 6.

3. Z urny, w której są kule ponumerowane od 1 do 9, losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Numery wylosowanych kul, zapisane w kolejności losowania, tworzą liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podzielna:

a) przez 3,

b) przez 3, jeśli pierwszą z wylosowanych liczb jest 1,

c) przez 3, jeśli pierwszą z wylosowanych liczb jest 6.

4. Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadła co najmniej raz szóstka, jeśli wiadomo, że:

a) suma oczek, które wypadły w obydwu rzutach, była nieparzysta,

b) w pierwszym rzucie wypadło więcej oczek niż w drugim.

5. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz:

a) $P(A|B)$, jeśli $P(A') = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ i $P(B|A) = \frac{1}{2}$,

b) $P(A|B)$, jeśli $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ i $P(B|A) = \frac{1}{2}$,

c) $P(B|A)$, jeśli $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, $P(A) = \frac{1}{3}$ i $P(B) = \frac{3}{4}$.

6. Z urny, w której jest 6 kul białych i 8 czarnych, losujemy kolejno trzy kule bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za trzecim razem wylosujemy:

a) kulę białą, jeśli pierwsze dwie wylosowane kule były białe,

b) kulę czarną, jeśli pierwsze dwie wylosowane kule były różnego koloru.

7. Jedną kulę białą i sześć czarnych wrzucamy losowo do dwóch ponumerowanych szuflad. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że biała kula znajdzie się w pierwszej szufladzie, jeśli do drugiej wrzuciliśmy pięć kul.

8. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ losujemy bez zwracania trzy liczby. Oznaczmy zdarzenia:
A – suma wylosowanych liczb jest nieparzysta,
B – iloczyn wylosowanych liczb jest parzysty.
Które z prawdopodobieństw jest większe: $P(A|B)$ czy $P(B|A)$?

9. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz:

a) $P(B)$, jeśli $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{6}$ i $P(B|A) = \frac{1}{4}$,

b) $P(A)$, jeśli $P(B) = 2P(B')$, $P(A|B) = \frac{1}{5}$ oraz $P(A|B') = \frac{3}{5}$.

10. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz:

a) $P(A \cup B)$, jeśli $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A') = \frac{1}{4}$ oraz $P(A|B) = \frac{3}{5}$,

b) $P(A \cup B)$, jeśli $P(A) = 2P(A')$ oraz $P(A|B) = P(B|A) = \frac{1}{2}$,

c) $P(A \cap B)$, jeśli $P(B) = P(B')$ oraz $P(A|B) = \frac{1}{7}$,

d) $P(A \setminus B)$, jeśli $P(A) = \frac{7}{8}$ oraz $P(B|A) = \frac{3}{7}$.

D **11.** Niech $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$. Wykaż, że $P(A|B) \geqslant 1 - \frac{P(A')}{P(B)}$.

12. W pewnej klasie każdy uczeń umie pływać lub jeździć na nartach. Uczniowie umiejący pływać stanowią 80% wszystkich uczniów, a jeżdżący na nartach – 50%. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń z tej klasy:

a) umie pływać i jeździć na nartach,

b) umie jeździć na nartach, jeśli umie pływać,

c) umie jeździć na nartach, jeśli nie umie pływać,

d) umie pływać, jeśli umie jeździć na nartach.

Warto wiedzieć

Zdarzenia niezależne

Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ nazywamy **niezależnymi**, jeśli $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Intuicyjnie zdarzenia określamy jako niezależne, jeśli nie mają wzajemnie na siebie wpływu. O zdarzeniach, które nie są niezależne, mówimy, że są **zależne**.

Przykład

Na jednym z 64 pól szachownicy ustawiamy losowo wieżę. Rozpatrzmy zdarzenia:

A – wieża została ustawiona w wierszu:

1, 2 lub 3

B – wieża została ustawiona w kolumnie:

G lub H

Zatem $P(A) = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$.

Zdarzeniu $A \cap B$ sprzyja sześć zdarzeń elementarnych: G1, G2, G3, H1, H2, H3, czyli:

$$P(A \cap B) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$



Zauważmy, że $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$, zatem $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, co oznacza, że zdarzenia A i B są niezależne.

D **1.** Wykonujemy doświadczenie opisane w powyższym przykładzie. Rozpatrzmy zdarzenie C polegające na tym, że wieża została ustawiona w wierszu o numerze nieparzystym. Uzasadnij, że zdarzenia B i C są niezależne, a zdarzenia A i C są zależne.

D **2.** Rzucamy raz kostką. Uzasadnij, że zdarzenia: A – wypadła nieparzysta liczba oczek i B – wypadła liczba oczek większa od 4, są niezależne.

D **3.** Rzucamy dwa razy kostką. Rozpatrzmy zdarzenia: A – za pierwszym razem wypadła szóstka, B – za drugim razem wypadła szóstka, C – suma oczek w obydwu rzutach jest większa od 10. Uzasadnij, że zdarzenia:

a) A i B są niezależne, b) A i C są zależne.

4. Losujemy jedną liczbę spośród liczb $1, 2, \ldots, 100$. Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby parzystej, B – liczby podzielnej przez 5, C – liczby podzielnej przez 6. Czy podana para zdarzeń to zdarzenia niezależne?

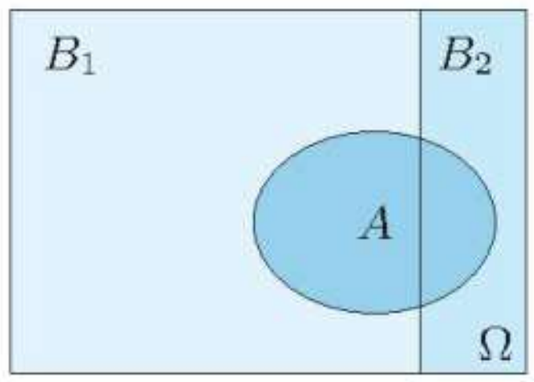
a) A i B b) A i C c) B i C

D **5.** Niech $A, B \subset \Omega$. Uzasadnij, że jeśli zdarzenia A i B są niezależne oraz $P(B) > 0$, to $P(A|B) = P(A)$.

*1.11. Prawdopodobieństwo całkowite

Przykład 1

Wydawnictwo wydrukowało 80% nakładu pewnej książki w drukarni I, a pozostałe 20% – w drukarni II. Wady ma 0,1% książek z drukarni I i 0,6% książek z drukarni II. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana książka jest wadliwa.



Oznaczmy przez A zdarzenie, że wybrana książka jest wadliwa, przez B_1, że pochodzi z drukarni I, a przez B_2, że pochodzi z drukarni II. Mamy wówczas:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$$

Zdarzenia $(A \cap B_1)$ i $(A \cap B_2)$ się wykluczają, zatem:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$$

Stąd:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

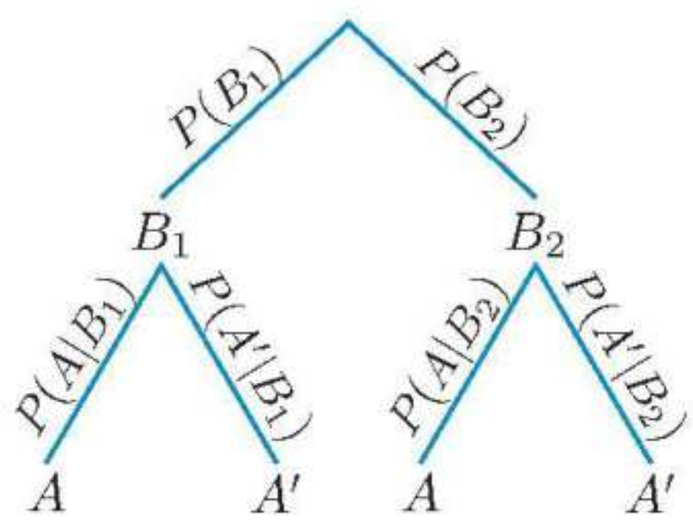
Podstawiamy $P(B_1) = 0{,}8$, $P(A|B_1) = 0{,}001$, $P(B_2) = 0{,}2$, $P(A|B_2) = 0{,}006$ i otrzymujemy:

$$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}001 + 0{,}2 \cdot 0{,}006 = 0{,}002$$

W powyższym przykładzie mieliśmy $B_1 \cup B_2 = \Omega$ oraz $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Zastosowany przy tych założeniach wzór:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

nosi nazwę **wzoru na prawdopodobieństwo całkowite**. Drzewo obok jest ilustracją graficzną tego wzoru.



Wzór na prawdopodobieństwo całkowite można sformułować bardziej ogólnie.

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Niech Ω będzie zbiorem wszystkich wyników pewnego doświadczenia. Jeśli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ spełniają następujące warunki:

- zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich $(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega)$,
- prawdopodobieństwo każdego z nich jest dodatnie,
- zdarzenia te parami się wykluczają,

to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ opisuje wzór:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

Przykład 2

W urnie U_1 znajduje się 6 kul białych i 10 zielonych, a w urnie U_2 – 12 kul białych i 4 zielone. Rzucamy dwukrotnie monetą. Jeśli wypadną dwa orły, to losujemy kulę z urny U_1, w przeciwnym wypadku – z urny U_2. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej.

Rozpatrzmy zdarzenia:

A – wylosowana kula jest zielona,

B – wypadły dwa orły.

Zauważmy, że $P(A|B) = \frac{10}{16}$, $P(A|B') = \frac{4}{16}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(B') = \frac{3}{4}$.

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(B') \cdot P(A|B')$$

Zatem:

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{16} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{16} = \frac{10}{64} + \frac{12}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

Ćwiczenie 1

Wśród 10 monet są 3 monety niesymetryczne, na których orzeł wypada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, a pozostałe monety są symetryczne. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w rzucie losowo wybraną monetą wypadnie orzeł.

Ćwiczenie 2

a) W pierwszej urnie są 3 kule białe i 4 czarne, a w drugiej – 2 kule białe i 5 czarnych. Wybieramy losowo urnę, a z niej jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

b) W pierwszej urnie jest 6 kul białych i 4 czarne, w drugiej – po 8 kul białych i czarnych, a w trzeciej – 5 kul białych i 3 czarne. Wybieramy losowo urnę, a z niej jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.

Ćwiczenie 3

a) Fabryka kupuje 40% potrzebnych części od kooperanta A, 35% – od kooperanta B i 25% – od kooperanta C. Wady ma 1% części dostarczonych przez kooperanta A, 2% – dostarczonych przez kooperanta B i 4% – dostarczonych przez kooperanta C. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrana losowo część jest wadliwa.

b) Wydawnictwo wydrukowało 60% nakładu pewnej książki w drukarni I, 30% – w drukarni II, a pozostałe 10% – w drukarni III. Egzemplarze wadliwe stanowią odpowiednio 0,3%, 0,4%, 1% książek wydrukowanych w wymienionych drukarniach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana książka nie jest wadliwa.

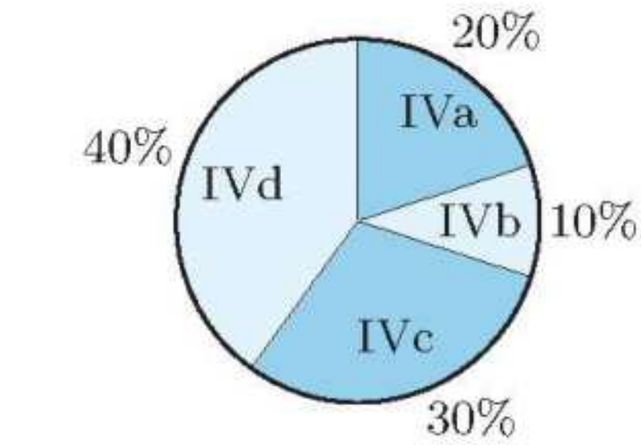
Zadania

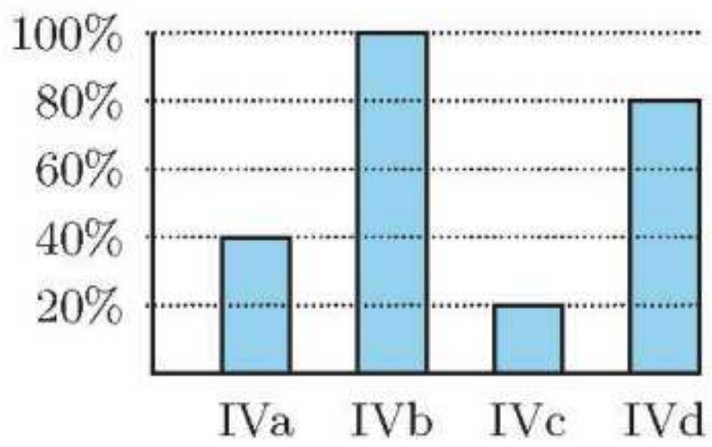
1. Brygady B_1, B_2 i B_3 produkują deski do prasowania. Wśród desek wyprodukowanych przez brygadę B_1 jest 6% wadliwych, a wśród wyprodukowanych przez brygady B_2 i B_3 – po 3% wadliwych. Połowa desek znajdujących się w magazynie została wytworzona przez brygadę B_3, a pozostałe (w tej samej liczbie) przez brygady B_1 i B_2. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że deska wybrana losowo z magazynu jest wadliwa.

2. Mamy 10 urn. Do czterech wrzucono po 4 kule białe, 4 czarne i 1 niebieskiej, a do sześciu pozostałych – po 2 kule białe, 3 czarne i 4 niebieskie. Z losowo wybranej urny losujemy jednocześnie dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kul różnych kolorów.

3. Maszyny M_1, M_2, M_3 i M_4 produkują żarówki. Maszyny M_1, M_2 i M_3 wyprodukowały taką samą liczbę żarówek, a maszyna M_4 – dwa razy więcej niż każda z pozostałych. Maszyny M_1 i M_2 produkują po 2% wadliwych żarówek, a maszyny M_3 i M_4 – po 4%. Wszystkie wytworzone żarówki znajdują się w magazynie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że żarówka wybrana losowo z magazynu jest wadliwa.

4. Grupa uczniów klas czwartych ma przystąpić do egzaminu maturalnego z języka niemieckiego. Na diagramie kołowym przedstawiono procentowy udział w tej grupie uczniów z każdej klasy. Uczniom przed egzaminem zadano pytanie: „Czy czujesz się dobrze przygotowany do egzaminu?”. Na diagramie słupkowym przedstawiono procentowy rozkład odpowiedzi twierdzących. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń odpowiedział na pytanie twierdząco.





5. W pierwszej szkatułce jest 10 monet złotych i 5 srebrnych, a w drugiej – 5 monet złotych i 10 srebrnych. Możemy losować trzema sposobami:

- losujemy po jednej monecie z każdej szkatułki,
- przekładamy monety do jednej szkatułki i losujemy z niej dwie monety,
- losowo wybieramy szkatułkę, a z niej losujemy dwie monety.

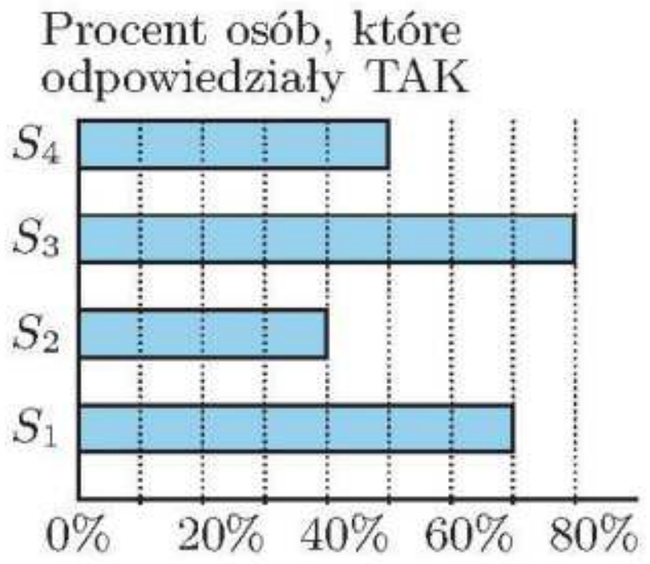
Przy którym sposobie losowania prawdopodobieństwo wylosowania dwóch złotych monet jest największe?

6. W pewnej grupie, liczącej m dziewcząt i n chłopców, 25% dziewcząt i 60% chłopców interesuje się hokejem. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba z tej grupy interesuje się hokejem, wynosi $\frac{3}{7}$. Oblicz stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców w tej grupie.

7. W pierwszej urnie jest 6 kul białych i 2 czarne, a w drugiej jest n kul białych i 4 czarne. Z losowo wybranej urny losujemy jednocześnie trzy kule. Oblicz n, jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo wyciągnięcia trzech białych kul jest równe $\frac{3}{14}$.

8. Na loterii jest 100 losów, w tym 2 losy wygrywające. Wszystkie losy podzielono na dwie części i wrzucono do dwóch urn, przy czym do każdej urny trafiły co najmniej dwa losy. Wybieramy losowo urnę i wyciągamy z niej jeden los. Przy jakim rozmieszczeniu losów prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego jest największe?

9. W pewnym mieście są cztery salony fryzjerskie. Z usług salonu S_1 korzysta $\frac{1}{4}$ mieszkańców, z usług salonu S_2 – $\frac{1}{5}$, z usług salonu S_3 – $\frac{3}{10}$, a z usług S_4 – $\frac{1}{20}$. Każda z tych osób odwiedza tylko jeden wybrany salon. Pozostali mieszkańcy nie korzystają z usług tych salonów. Mieszkańcom zadano pytanie: „Czy jesteś zadowolony z usług swojego fryzjera?”. Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany mieszkaniec tego miasta korzysta z usług salonu fryzjerskiego i jest z niego zadowolony.



10. Zbiór zadań z matematyki jest podzielony na 6 rozdziałów. Na diagramie A przedstawiono liczbę zadań w poszczególnych rozdziałach, a na diagramie B – liczbę zadań w poszczególnych rozdziałach, które należy rozwiązać, korzystając z kalkulatora. Rzucamy kostką i wybieramy rozdział, którego numer jest równy liczbie wyrzuconych oczek, a następnie losujemy jedno zadanie z tego rozdziału. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowane zadanie należy rozwiązać bez użycia kalkulatora.

Diagram A

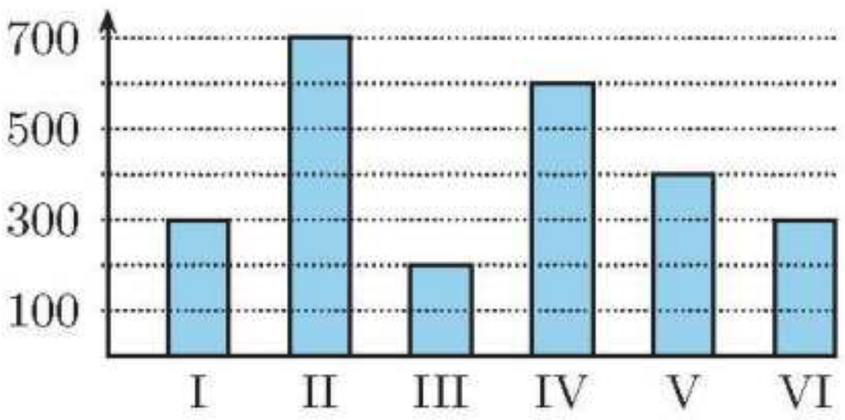
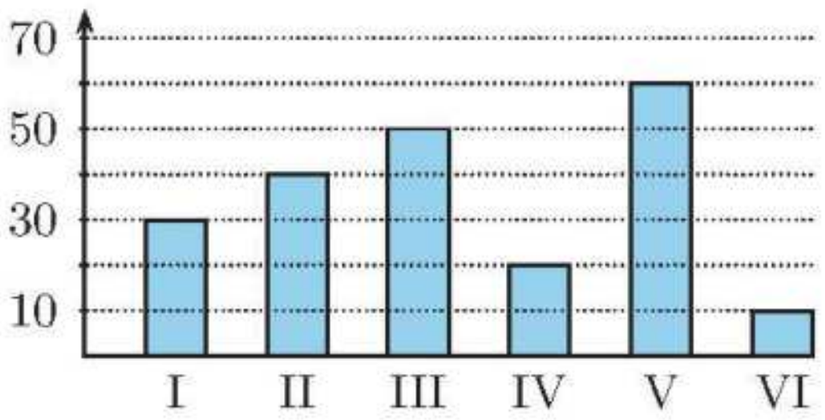


Diagram B



*1.12. Wzór Bayesa

Wzór Bayesa

Niech Ω będzie zbiorem wszystkich wyników pewnego doświadczenia. Jeśli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ spełniają następujące warunki:

- zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich ($B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$),
- prawdopodobieństwo każdego z nich jest dodatnie,
- zdarzenia te parami się wykluczają,

to dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ o dodatnim prawdopodobieństwie prawdziwy jest wzór:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)}$$

Uwaga. Powyższy wzór jest też nazywany wzorem na prawdopodobieństwo przyczyny.

D Ćwiczenie 1

Udowodnij wzór Bayesa (skorzystaj ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite).

Przykład 1

W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 kule czarne, a w drugiej urnie – 4 kule białe i 1 kula czarna. Wybieramy losowo urnę, a z niej jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula pochodzi z pierwszej urny, jeśli wiadomo, że jest to kula biała.

Niech B_1 oznacza zdarzenie polegające na wybraniu pierwszej urny, a B_2 – na wybraniu drugiej urny. Zauważmy, że $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej.

Wówczas $P(A|B_1) = \frac{3}{5}$ i $P(A|B_2) = \frac{4}{5}$.

Prawdopodobieństwo tego, że wylosowana biała kula pochodzi z pierwszej urny, jest równe:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{3}{7}$$

Ćwiczenie 2

W pierwszej urnie jest 1 kula biała i 3 kule czarne. W drugiej urnie są 2 kule białe i 4 kule czarne. Z losowo wybranej urny wyjęto jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula pochodzi z pierwszej urny, jeśli wiadomo, że jest ona: a) czarna, b) biała.

Ćwiczenie 3

W I urnie są 2 kule zielone i 4 kule niebieskie. W II urnie jest 6 kul zielonych i 3 kule niebieskie. Rzucamy dwukrotnie monetą. Jeśli wypadną dwa orły, to losujemy kulę z I urny. W pozostałych przypadkach losujemy kulę z II urny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula pochodzi z II urny, jeśli wiadomo, że jest to kula: a) zielona, b) niebieska.

Przykład 2

W sakwie znajduje się 20 monet:

- 6 pierwszego rodzaju – mających po obu stronach orła,
- 4 drugiego rodzaju – mających po obu stronach reszkę,
- 10 trzeciego rodzaju (typowych) – mających po jednej stronie orła, a po drugiej reszkę.

Wykonano dwa rzuty monetą losowo wybraną z sakwy i otrzymano dwa orły. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucano monetą typową.

Wprowadźmy oznaczenia zdarzeń:

A – wyrzucono dwa orły,

B_1 – wylosowano monetę pierwszego rodzaju, $P(B_1) = \frac{6}{20}$,

B_2 – wylosowano monetę drugiego rodzaju, $P(B_2) = \frac{4}{20}$,

B_3 – wylosowano monetę trzeciego rodzaju, $P(B_3) = \frac{10}{20}$.

Zauważmy, że $P(A|B_1) = 1$, $P(A|B_2) = 0$, $P(A|B_3) = \frac{1}{4}$.

Korzystamy ze wzoru Bayesa i otrzymujemy:

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)\cdot P(A|B_3)}{P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+P(B_3)\cdot P(A|B_3)} =$$

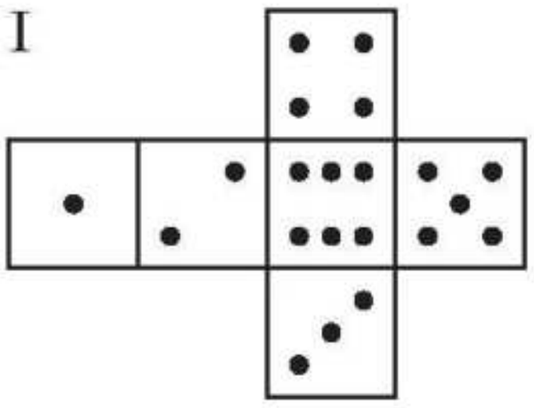
$$= \frac{\frac{10}{20}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{6}{20}\cdot 1+\frac{4}{20}\cdot 0+\frac{10}{20}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{40}}{\frac{12}{40}+\frac{5}{40}} = \frac{5}{17}$$

Prawdopodobieństwo tego, że rzucano monetą typową, jest równe $\frac{5}{17}$.

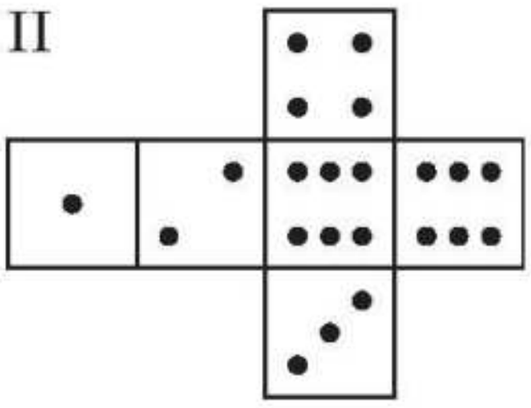
Ćwiczenie 4

Wybrano jedną z trzech kostek, których siatki przedstawiono poniżej.

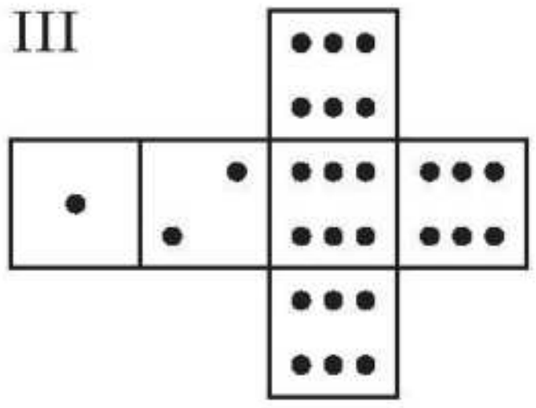
I



II



III



Rzucono tą kostką dwukrotnie i otrzymano dwie szóstki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że była to kostka: a) I, b) II, c) III.

Zadania

1. W szkatułce znajduje się 20 monet, z których 15 to monety typowe (mają orła i reszkę), a pozostałe mają po obu stronach reszki. Rzucono trzykrotnie losowo wybraną monetą i otrzymano trzy reszki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucono monetą typową.

2. Z dwóch kostek jedna jest symetryczna, a dla drugiej prawdopodobieństwo otrzymania szóstki jest równe $\frac{1}{5}$. Rzucono dwukrotnie losowo wybraną kostką i wypadły dwie szóstki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucono kostką niesymetryczną.

3. Mamy dwie symetryczne kostki. Jedna jest klasyczna (z liczbami oczek 1, 2, 3, 4, 5, 6), natomiast na ściankach drugiej są następujące liczby oczek: 1, 3, 5, 5, 6, 6. Rzucamy dwukrotnie wybraną losowo kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucono klasyczną kostką, jeśli suma wyrzuconych oczek była równa: a) 4, b) 11.

4. Statystycznie wśród 10 000 mężczyzn jest 500 daltonistów, a wśród 10 000 kobiet jest 50 daltonistek. Z grupy 100 mężczyzn i 400 kobiet wybieramy losowo jedną osobę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrana osoba jest kobietą, jeśli ma problemy z rozpoznawaniem kolorów.

5. W tabeli obok zebrano dane dotyczące znaków zodiaku uczniów w trzech trzydziestoosobowych klasach czwartych. Rzucamy monetą: jeśli wypadnie orzeł, to losujemy osobę z klasy IVa, jeśli wypadnie reszka, to rzucamy ponownie. Jeśli w drugim rzucie wypadnie orzeł, to losujemy osobę z klasy IVb, a jeśli reszka – z IVc.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana osoba jest spod znaku Bliźniąt.

b) Stosując opisaną wyżej procedurę, wylosowaliśmy osobę, której znakiem zodiaku jest Wodnik. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to uczeń klasy IVa.

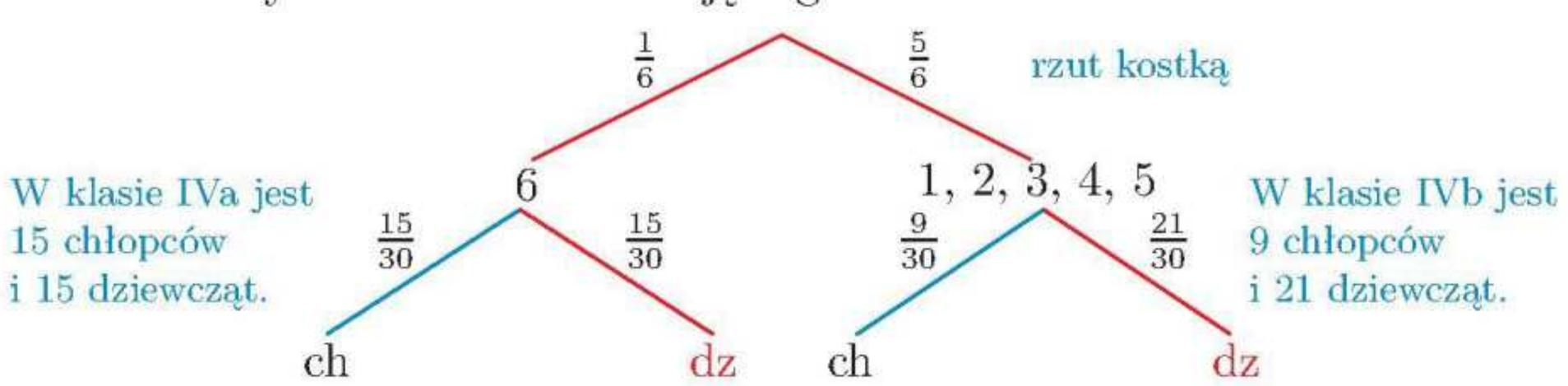
Znak zodiaku	IVa	IVb	IVc
Baran	4	4	2
Byk	3	2	3
Bliźnięta	1	6	0
Rak	2	1	5
Lew	3	2	4
Panna	5	0	2
Waga	1	3	4
Skorpion	1	3	2
Strzelec	1	2	0
Koziorożec	4	3	2
Wodnik	3	1	2
Ryby	2	3	4

*1.13. Doświadczenia wieloetapowe

Przykład 1

W klasie IVa jest 15 chłopców i 15 dziewcząt, w klasie IVb jest 9 chłopców i 21 dziewcząt. Rzucamy kostką: jeśli wypadnie szóstka, to losujemy jedną osobę z klasy IVa, w przeciwnym razie losujemy jedną osobę z klasy IVb. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowaną osobą będzie dziewczyna.

Przedstawiamy na drzewie ilustrację tego doświadczenia.



Zdarzeniu A polegającemu na wylosowaniu dziewczyny sprzyja wyrzucenie 6 oczek i wylosowanie dziewczyny z klasy IVa oraz wyrzucenie liczby oczek mniejszej od 6 i wylosowanie dziewczyny z klasy IVb. Zatem:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{30} + \frac{5}{6} \cdot \frac{21}{30} = \frac{1}{12} + \frac{7}{12} = \frac{2}{3}$$

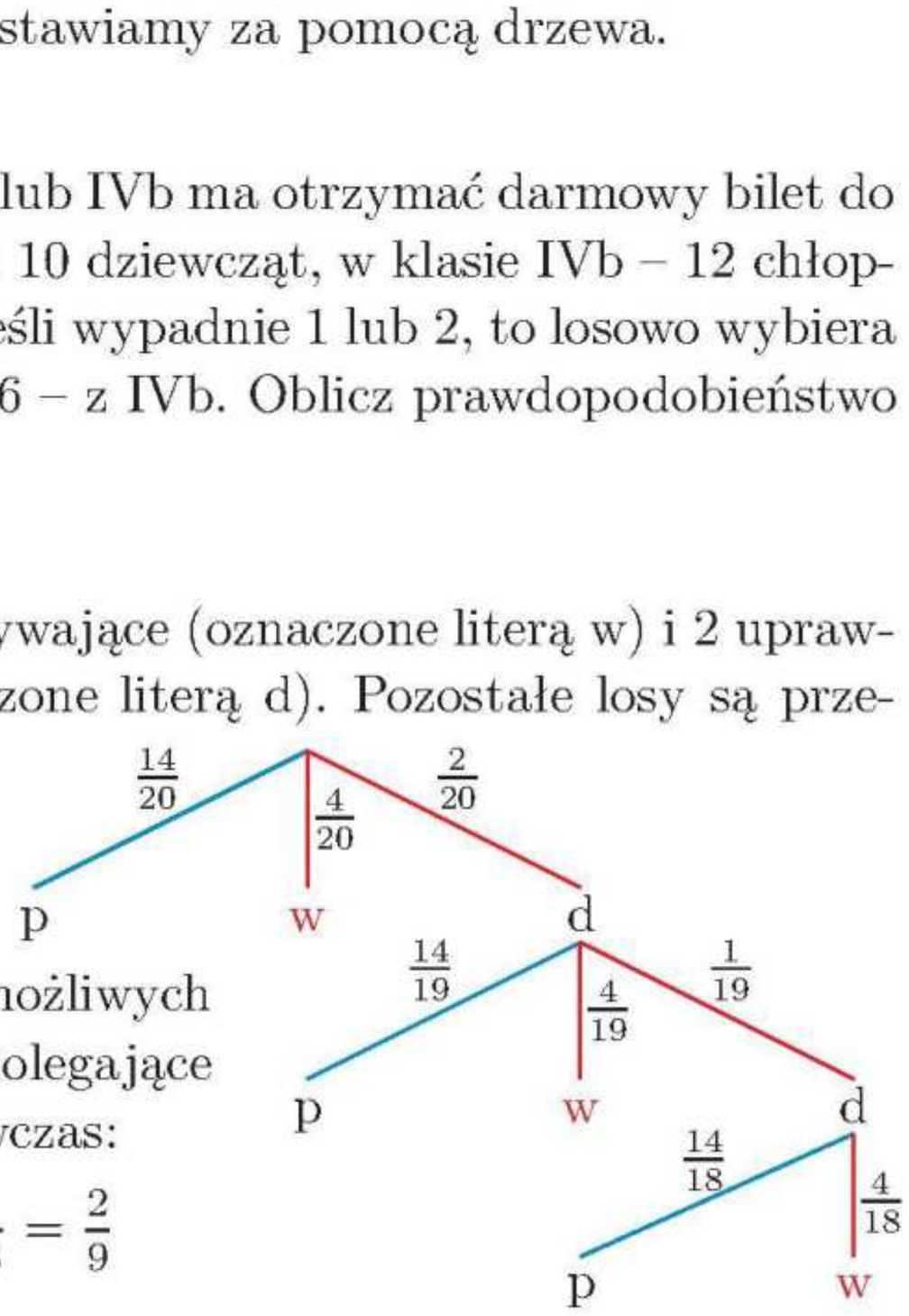
W rozwiązaniu wykorzystujemy wzór na prawdopodobieństwo całkowite. Ilustrację przebiegu doświadczenia przedstawiamy za pomocą drzewa.

Ćwiczenie 1

Jedna z osób uczących się w klasie IVa lub IVb ma otrzymać darmowy bilet do cyrku. W klasie IVa jest 20 chłopców i 10 dziewcząt, w klasie IVb – 12 chłopców i 18 dziewcząt. Rzucamy kostką: jeśli wypadnie 1 lub 2, to losowo wybiera się osobę z klasy IVa, jeśli 3, 4, 5 lub 6 – z IVb. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że bilet otrzyma dziewczyna.

Przykład 2

Na loterii jest 20 losów, w tym 4 wygrywające (oznaczone literą w) i 2 uprawniające do dalszego losowania (oznaczone literą d). Pozostałe losy są przegrywające (oznaczone literą p). Zakupiono jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej.



Na drzewie przedstawiamy ilustrację możliwych wyników. Niech A oznacza zdarzenie polegające na kupieniu losu wygrywającego. Wówczas:

$$P(A) = \frac{4}{20} + \frac{2}{20} \cdot \frac{4}{19} + \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

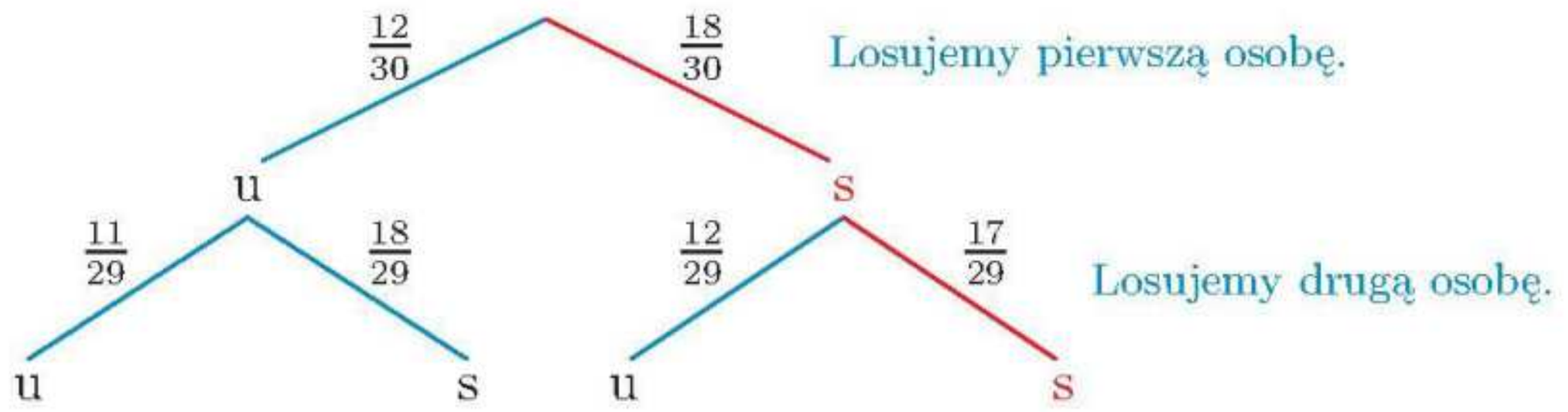
Ćwiczenie 2

Wśród 20 losów loterii fantowej są 4 losy uprawniające do odebrania jednej z nagród (jest 1 nagroda główna i są 3 nagrody pocieszenia) oraz 2 losy uprawniające do dalszego losowania. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania nagrody pocieszenia, jeśli kupimy 1 los.

Przykład 3

Wśród 30 uczestników wycieczki do Szczecina jest 12 uczniów i 18 studentów. Biuro turystyczne postanowiło zwrócić połowę kosztów wycieczki dwóm losowo wybranym osobom. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zwrot połowy kosztów otrzyma przynajmniej jeden uczeń.

Przebieg losowania ilustrujemy za pomocą drzewa.



Niech zdarzenie A oznacza, że wśród wylosowanych dwóch osób jest przynajmniej jeden uczeń. Rozpatrzmy zdarzenie A' – wśród wylosowanych nie ma ani jednego ucznia:

$$P(A') = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{51}{145}$$

Zatem:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{51}{145} = \frac{94}{145} \approx 0{,}65$$

Ćwiczenie 3

W pewnej firmie pracuje 36 mężczyzn i 12 kobiet. W ramach nagrody postanowiono ufundować wycieczkę do Świnoujścia trzem losowo wybranym osobom. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wycieczkę wygra co najmniej jedna kobieta.

Zadania

1. W urnie są 3 kule białe, 4 czarne i 5 zielonych. Losujemy bez zwracania 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul:

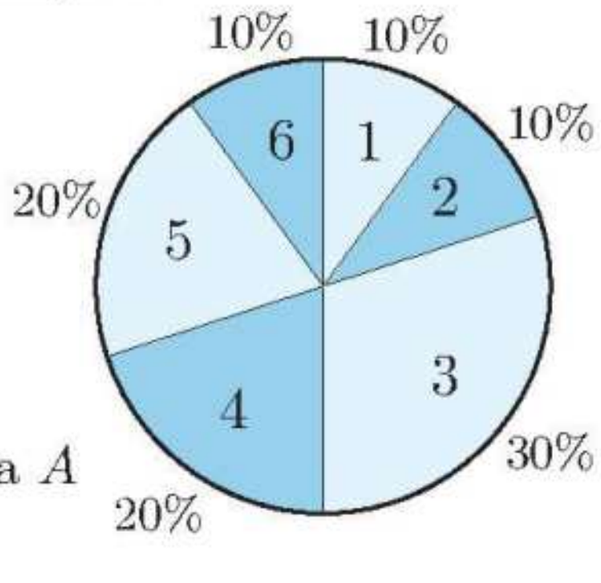
a) nie będzie kuli czarnej, b) będzie kula czarna lub zielona.

2. Z urny zawierającej 6 kul białych, 3 czarne i 5 niebieskich losujemy bez zwracania jedną kulę. Następnie dokładamy do urny dwie kule w kolorze wylosowanej kuli i ponownie losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kula wylosowana za drugim razem będzie niebieska.

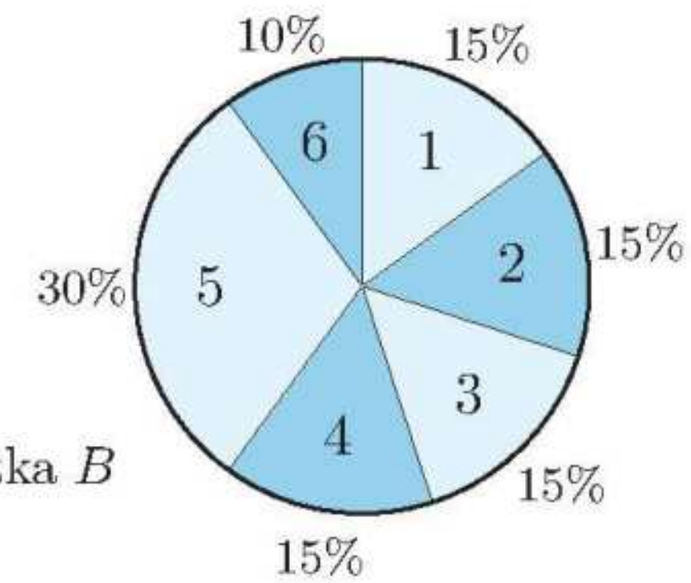
3. W pewnej klasie jest 10 chłopców i 20 dziewcząt. Liczba biletów do kina, które będą rozlosowane w tej klasie, jest równa liczbie orłów otrzymanych w rzucie dwiema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że biletu nie otrzyma żaden chłopiec.

4. Z urny, w której jest dwa razy więcej kul białych niż czarnych, losujemy kulę i przekładamy ją do drugiej urny, w której są 2 kule białe i 6 kul czarnych. Następnie losujemy kulę z drugiej urny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obie wylosowane kule będą tego samego koloru.

5. Poddane testowi kostki A i B okazały się niesymetryczne. Na diagramach kołowych przedstawiono rezultaty testu (w procentach podano częstość pojawiania się poszczególnych wyników). Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek większej od 10, jeśli rzucamy jednocześnie kostką A i kostką B.



kostka A



kostka B

6. W urnie jest n kul, w tym 3 białe, a pozostałe są czarne. Losujemy kolejno 2 kule bez zwracania. Prawdopodobieństwo tego, że obie wylosowane kule są białe, jest równe $\frac{1}{15}$. Ile kul czarnych jest w urnie?

7. W urnie jest n kul, w tym 4 czarne, a pozostałe są białe. Losujemy kolejno 2 kule bez zwracania. Prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy kule różnego koloru, jest równe $\frac{4}{7}$. Ile kul białych jest w urnie?

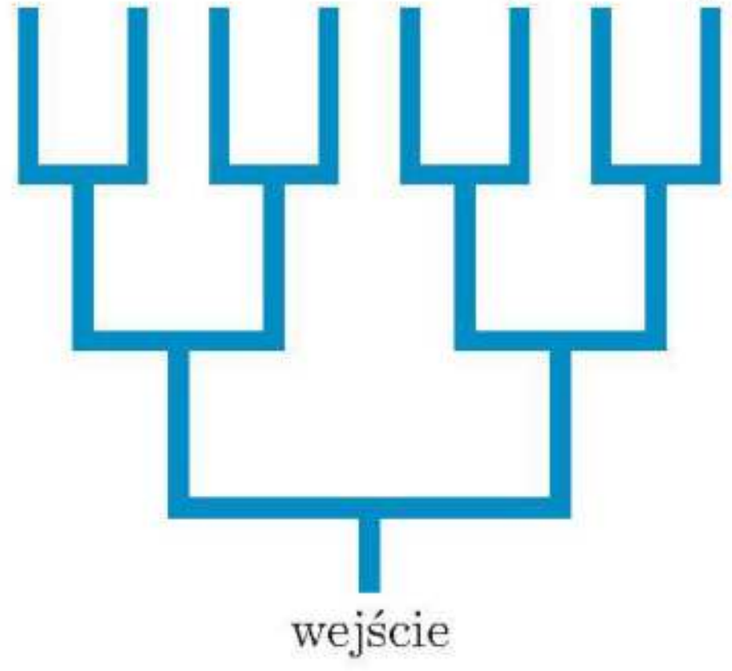
8. Z urny, w której jest 1 kula czarna i pewna liczba kul białych, losujemy 2 kule bez zwracania. Ile kul białych jest w urnie, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych jest równe $\frac{2}{3}$?

9. Spośród liczb $1, 2, 3, \ldots, 99$ losujemy jedną liczbę, a następnie z pozostałych – drugą. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
A – za pierwszym razem wylosowano liczbę parzystą,
B – za drugim razem wylosowano liczbę parzystą,
C – obie wylosowane liczby są parzyste,
D – suma wylosowanych liczb jest równa 100.

10. W magazynie zainstalowano trzy czujniki, z których każdy niezależnie od pozostałych może uruchomić alarm w wypadku pożaru. Prawdopodobieństwo wykrycia pożaru przez pojedynczy czujnik jest równe 0,6. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w wypadku pożaru alarm zostanie uruchomiony.

11. a) Pewien szczur wpuszczony do labiryntu na rozwidleniu dróg dwa razy częściej skręca w lewo niż w prawo. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że szczur dotrze do pokarmu (oznaczonego na rysunku literą p).

b) Inny szczur wpuszczony do tego samego labiryntu na rozwidleniu dróg skręca w prawo w $x\%$ przypadków. Oblicz x, jeśli prawdopodobieństwo tego, że szczur dotrze do pokarmu, jest równe $\frac{9}{16}$.



12. W urnie znajdują się kule zielone i białe – razem 9 kul. Losujemy dwukrotnie po jednej kuli bez zwracania. Ile jest kul białych, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru jest równe prawdopodobieństwu wylosowania dwóch kul o różnych kolorach?

13. Z urny, w której są 3 kule białe i n kul czarnych ($n > 0$), losujemy 2 kule. Ile może być kul w urnie, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania przynajmniej jednej kuli białej jest większe od 0,5?

14. Wśród n losów na loterii jest 6 losów wygrywających. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo tego, że:

a) zakupione dwa losy będą wygrywające, jest większe od $\frac{1}{5}$,

b) wśród zakupionych dwóch losów przynajmniej jeden wygrywa, jest większe od $\frac{1}{3}$?

15. Na loterii jest 50 losów, w tym 15 wygrywających. Nagrody to: jedna w wysokości 100 zł, cztery po 10 zł i dziesięć po 5 zł. Jeden los kosztuje 5 zł. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wygrana będzie nie mniejsza od poniesionych kosztów, jeśli kupimy:

a) jeden los, b) dwa losy.

D **16.** Na loterii jest n losów, z których jeden wygrywa. Wykaż, że jeśli dorzucimy do puli los, którego wyciągnięcie pozwala na powtórne losowanie, to prawdopodobieństwo wygranej przy zakupie jednego losu się nie zmieni.

Rzut monetą

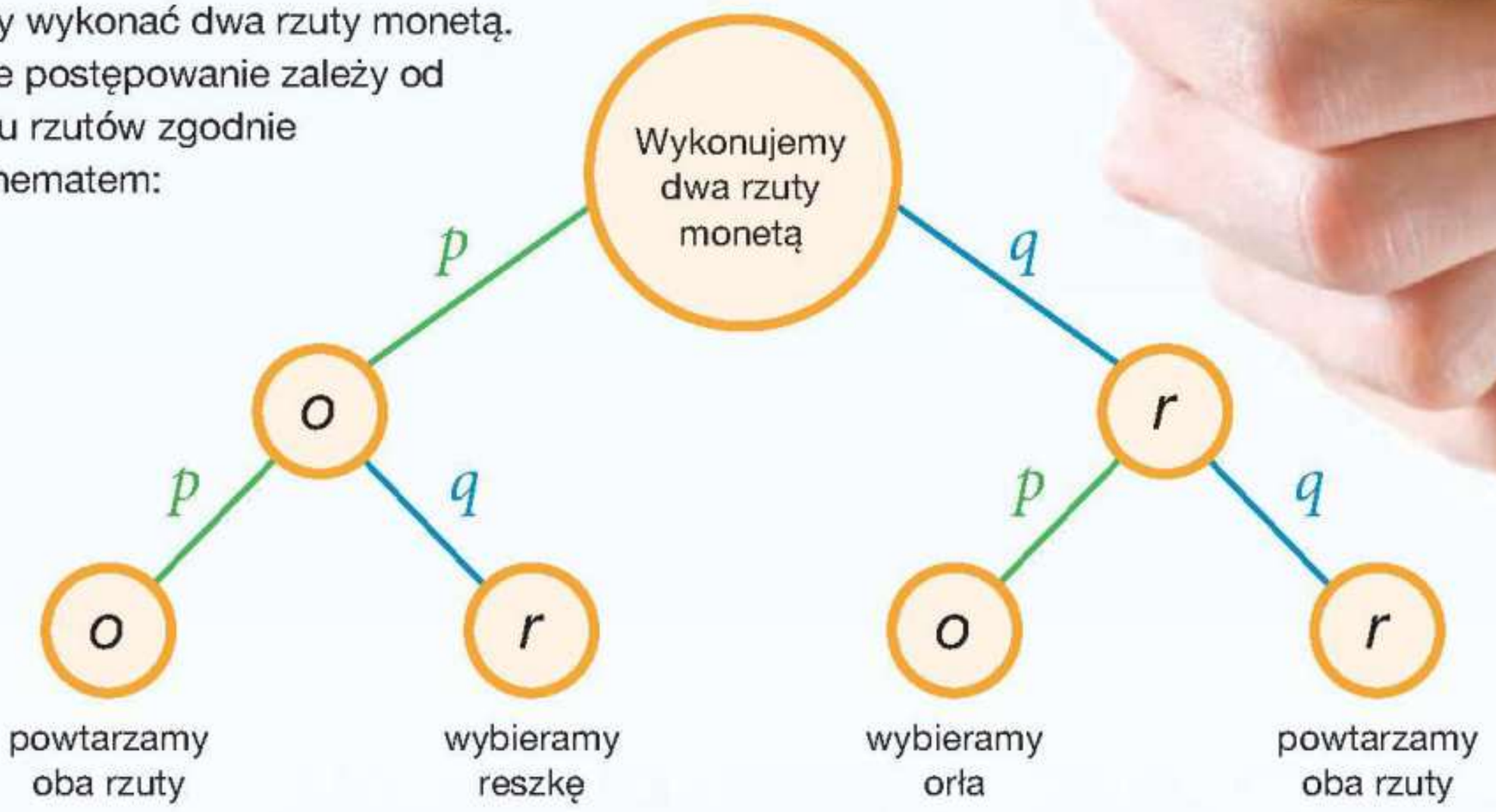
Rzut monetą to jeden z najbardziej znanych sposobów losowego podejmowania decyzji. Wykorzystuje się go w niektórych dyscyplinach sportu, na przykład aby rozstrzygnąć, która drużyna rozpocznie mecz.



Sprawiedliwa decyzja

Nawet jeśli podejrzewamy, że moneta nie jest symetryczna (prawdopodobieństwo wyrzucenia orła jest równe p, prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki jest równe q oraz $p \neq q$), możemy za jej pomocą podjąć sprawiedliwą decyzję.

Należy wykonać dwa rzuty monetą. Dalsze postępowanie zależy od wyniku rzutów zgodnie ze schematem:



Nawet gdy moneta nie jest symetryczna, otrzymanie par orzeł–reszka oraz reszka–orzeł jest jednakowo prawdopodobne. Prawdopodobieństwo każdego z tych zdarzeń jest równe pq.



Rzut powinien być wykonany w taki sposób, aby moneta podczas lotu kilka razy się obróciła. Następnie, w zależności od zwyczaju, monetę można złapać w locie lub pozwolić jej upaść na ziemię.

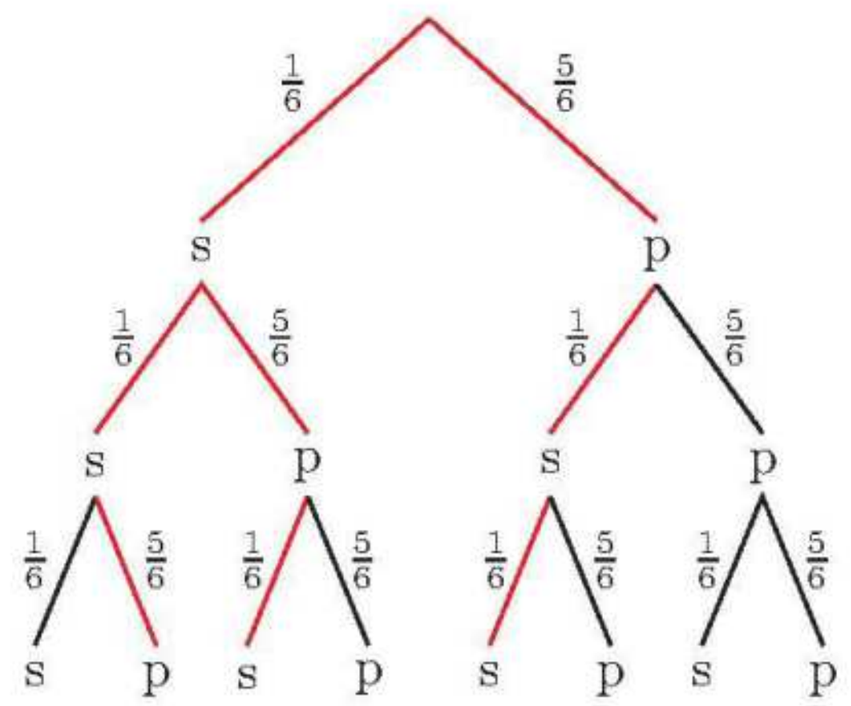
*1.14. Schemat Bernoulliego

Schemat Bernoulliego polega na wielokrotnym powtórzeniu tego samego doświadczenia losowego mającego dwa możliwe wyniki o dodatnich prawdopodobieństwach. Każde powtórzenie doświadczenia nazywamy **próbą Bernoulliego** (lub krótko – próbą), jeden z wyników nazywamy **sukcesem**, drugi – **porażką**. Na przykład, jeśli próba polega na rzucie monetą, za sukces możemy przyjąć wyrzucenie orła, a za porażkę – wyrzucenie reszki. Wymagamy, aby próby były niezależne, to znaczy, by pojawienie się jakiegokolwiek wyniku w dowolnej próbie nie miało wpływu na wyniki w następnych próbach.

Przykład 1

Rzucamy trzy razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że 6 oczek wypadnie dokładnie dwa razy.

Trzykrotny rzut kostką jest schematem Bernoulliego, w którym prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie (wyrzucenie szóstki – oznaczone literą s na rysunku obok) jest równe $\frac{1}{6}$. Prawdopodobieństwo porażki w pojedynczej próbie (oznaczone literą p) jest równe $\frac{5}{6}$. Gałęzie drzewa ilustrujące otrzymanie dokładnie dwóch szóstek zaznaczono kolorem czerwonym.



Prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch szóstek jest równe:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{72}$$

Oznaczmy przez S_n liczbę sukcesów w n próbach Bernoulliego. Prawdziwy jest następujący wzór.

Wzór Bernoulliego

W schemacie n prób Bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania k sukcesów wyraża się wzorem:

$$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \text{ dla } k=0,1,\ldots,n$$

gdzie p oznacza prawdopodobieństwo sukcesu, a q – prawdopodobieństwo porażki w pojedynczej próbie ($q=1-p$).

Przykład 2

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dwóch orłów w pięciokrotnym rzucie monetą.

Pięciokrotny rzut monetą to schemat Bernoulliego, w którym prawdopodobieństwo sukcesu (wyrzucenie orła) w pojedynczej próbie $p = \frac{1}{2}$, a prawdopodobieństwo porażki $q = \frac{1}{2}$. Zatem prawdopodobieństwo otrzymania dwóch orłów w pięciokrotnym rzucie monetą jest równe:

$$P_5(2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$$

Ćwiczenie 1

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania trzech orłów:
a) w czterokrotnym rzucie monetą,
b) w sześciokrotnym rzucie monetą.

Przykład 3

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w czterech rzutach kostką szóstka wypadnie co najmniej trzy razy.

Za sukces przyjmujemy otrzymanie szóstki w rzucie kostką, a za porażkę – jakiejkolwiek innej liczby oczek. Prawdopodobieństwo sukcesu $p = \frac{1}{6}$, a prawdopodobieństwo porażki $q = \frac{5}{6}$.

Prawdopodobieństwo otrzymania trzech szóstek jest równe:

$$P_4(3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = 4 \cdot \frac{5}{6^4} = \frac{20}{1296}$$

Prawdopodobieństwo otrzymania czterech szóstek jest równe:

$$P_4(4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1 \cdot \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$$

Zatem prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej trzech szóstek wynosi:

$$P_4(3) + P_4(4) = \frac{20}{1296} + \frac{1}{1296} = \frac{21}{1296} = \frac{7}{432}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy pięciokrotnym rzucie kostką otrzymamy: a) co najmniej cztery szóstki, b) co najwyżej trzy jedynki.

Czy wiesz, że...

Jakob Bernoulli (1654–1705) był wybitnym szwajcarskim matematykiem. Jest uznawany za jednego z twórców rachunku prawdopodobieństwa. Podany w tym rozdziale wzór Bernoulliego jest jego autorstwa.



Przykład 4

Gramy z równorzędnym przeciwnikiem w szachy. Co jest bardziej prawdopodobne: wygranie dwóch partii z czterech czy trzech partii z sześciu?

Zakładamy, że wyniki kolejnych partii są niezależne. Prawdopodobieństwo wygranej w jednej partii $p = \frac{1}{2}$, a prawdopodobieństwo porażki $q = \frac{1}{2}$. Zatem prawdopodobieństwo uzyskania 2 sukcesów w 4 próbach jest równe:

$$P_4(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{2^4} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Prawdopodobieństwo uzyskania 3 sukcesów w 6 próbach jest równe:

$$P_6(3) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{2^6} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$$

Bardziej prawdopodobne jest więc wygranie dwóch partii z czterech.

Ćwiczenie 3

Gramy z równorzędnym przeciwnikiem w szachy. Co jest bardziej prawdopodobne: wygranie trzech partii z pięciu czy czterech partii z siedmiu?

Zadania

1. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dwóch orłów w czterokrotnym rzucie monetą:

a) korzystając ze wzoru Bernoulliego, b) sporządzając drzewo.

2. Rzucamy sześć razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) czterech orłów, b) co najmniej czterech orłów.

3. Rzucamy n razy monetą. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła jest większe od:

a) 0,9, b) 0,99, c) 0,999, d) 0,9999?

4. Rzucamy cztery razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) dwóch szóstek, b) co najwyżej dwóch szóstek.

5. Rzucamy pięć razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) trzy razy wypadnie 6 oczek,

b) co najmniej dwa razy wypadnie liczba oczek większa od 4.

6. Rzucamy trzy razy dwiema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwa razy suma oczek będzie:

a) większa od 10, b) równa 6.

7. W pewnej partii piłek 4% piłek jest wadliwych. Losujemy pięć razy ze zwracaniem jedną piłkę i badamy jej jakość. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) za każdym razem wylosujemy piłkę jakościowo dobrą,

b) co najmniej raz wylosujemy piłkę wadliwą.

8. Pewien test składa się z dziesięciu pytań. Do każdego pytania podane są trzy odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Uczeń zakreśla odpowiedzi losowo. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
A – uczeń nie zakreśli żadnej poprawnej odpowiedzi,
B – uczeń zakreśli co najmniej jedną poprawną odpowiedź,
C – uczeń zakreśli co najwyżej jedną poprawną odpowiedź.

9. Pewien test składa się z sześciu pytań. Dla każdego pytania podane są cztery odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Aby zaliczyć test, należy dobrze odpowiedzieć na co najmniej pięć pytań. Odpowiedzi wybieramy losowo. Czy szansa zaliczenia testu jest większa od 0,5%?

10. a) W schemacie 5 prób Bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania samych sukcesów jest równe $\frac{32}{243}$. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu w pojedynczej próbie.

b) W schemacie 4 prób Bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego sukcesu jest równe $\frac{15}{16}$. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu w pojedynczej próbie.

11. Jedna z koszykarek, wykonując rzuty osobiste, trafia do kosza średnio pięć razy na dziesięć, a druga – osiem razy na dziesięć. Obie koszykarki wykonują po pięć rzutów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każda z nich trafi do kosza:

a) trzy razy, b) cztery razy, c) co najmniej raz.

12. Wykonano serię rzutów niesymetryczną kostką. Wyniki testu przedstawiono na diagramie obok.

a) Zaproponuj wartości prawdopodobieństw dla każdego z wyników 1, 2, 3, 4, 5, 6.

b) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania w sześciokrotnym rzucie tą kostką za każdym razem liczby oczek większej od 3?



1.15. Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Przykład 1

Rozpatrzmy grę polegającą na rzucie dwiema monetami. Jeśli wyrzucimy dwa orły, to wygrywamy 20 zł, jeśli jednego orła – wygrywamy 10 zł, a w przypadku, gdy wypadną dwie reszki – przegrywamy 40 zł. W tabeli podano możliwe wielkości wygranej w jednym rzucie w złotych: $x_1 = 20$, $x_2 = 10$ i $x_3 = -40$ (przegrana) oraz ich prawdopodobieństwa.

x_i	20	10	-40
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Przy omawianiu zagadnień takich jak w powyższym przykładzie będziemy używać pojęć *zmienna losowa* i *rozkład zmiennej losowej*.

Definicja

Zmienną losową nazywamy funkcję o wartościach rzeczywistych określoną na zbiorze zdarzeń elementarnych Ω.

Uwaga. Zmienne losowe zwyczajowo oznacza się dużymi literami, np. X, Y.

Przykład 2

Rzucamy raz kostką. Zmienna losowa X przyporządkowuje każdemu zdarzeniu elementarnemu kwadrat otrzymanej liczby oczek. Zmienna losowa X przyjmuje następujące wartości:

$$x_1 = X(1) = 1,\ x_2 = X(2) = 4,\ \ldots,\ x_6 = X(6) = 36$$

Każda z tych wartości jest przyjmowana z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$.

Definicja

Zbiór par (x_i, p_i), gdzie x_i jest wartością zmiennej losowej X, a p_i prawdopodobieństwem, z jakim zmienna losowa przyjmuje tę wartość, nazywamy **rozkładem zmiennej losowej**.

Rozkład zmiennej losowej zwykle wygodnie jest prezentować w tabeli. W tabeli obok przedstawiono rozkład zmiennej losowej z przykładu 2.

x_i	1	4	9	16	25	36
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ćwiczenie 1

Losujemy ze zwracaniem dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3\}$. Zmienna losowa X każdej parze liczb przyporządkowuje ich sumę. Uzupełnij w zeszycie tabelę przedstawiającą rozkład tej zmiennej.

x_i	2	3	4	5	?
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	?	?	?

Ćwiczenie 2

Losujemy dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Zmienna losowa X każdej parze liczb przyporządkowuje ich sumę. Podaj rozkład zmiennej X, jeśli losujemy:

a) ze zwracaniem,

b) bez zwracania.

Definicja

Niech X będzie zmienną losową o wartościach x_1, x_2, ..., x_n przyjmowanych z prawdopodobieństwami odpowiednio p_1, p_2, ..., p_n. **Wartością oczekiwaną** zmiennej X nazywamy liczbę:

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$$

Przykład 3

Rozpatrzmy grę polegającą na rzucie trzema monetami. Jeśli wyrzucimy same orły, to wygrywamy 100 zł, jeśli wyrzucimy same reszki, to wygrywamy 60 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 20 zł. W tabeli obok przedstawiono rozkład zmiennej losowej X opisującej tę grę.

x_i	100	60	-20
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{6}{8}$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej X (wartość oczekiwana gry):

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 100 \cdot \tfrac{1}{8} + 60 \cdot \tfrac{1}{8} - 20 \cdot \tfrac{6}{8} = \tfrac{40}{8} = 5 \text{ [zł]}$$

Wartość oczekiwana tej gry jest dodatnia, czyli gra jest korzystna dla gracza.

Ćwiczenie 3

Bierzemy udział w pewnej grze. Rzucamy kostką – jeśli wypadnie co najmniej 5 oczek, to wygrywamy x_1 zł, w przeciwnym wypadku przegrywamy x_2 zł.

D a) Uzasadnij, że jeśli $x_1 = 50$ i $x_2 = -40$, to wartość oczekiwana tej gry jest równa -10 zł (czyli gra jest dla nas niekorzystna).

b) Oblicz wartość oczekiwaną tej gry, jeśli wygrana $x_1 = 45$, a przegrana $x_2 = -15$.

Definicja

Grę nazywamy **sprawiedliwą**, jeśli jej wartość oczekiwana jest równa 0.

Ćwiczenie 4

Rzucamy dwiema monetami. Jeśli wypadną dwie reszki, to wygrywamy x_1 zł, jeśli wypadnie jedna reszka, to wygrywamy x_2 zł. Jeśli wypadną dwa orły, to przegrywamy x_3 zł.

D a) Uzasadnij, że jeśli $x_1 = 20$, $x_2 = 10$ i $x_3 = -40$, to gra jest sprawiedliwa.

b) Dla jakiej wartości x_3 gra jest sprawiedliwa, jeśli $x_1 = x_2 = 49$?

Zadania

1. Bierzemy udział w pewnej grze. Rzucamy kostką – jeśli wypadnie parzysta liczba oczek, to wygrywamy 10 zł, jeśli wypadnie 5 oczek, to wygrywamy 120 zł, a jeśli 1 oczko lub 3 oczka, to przegrywamy 90 zł.

a) Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

b) Jaka powinna być wysokość przegranej, aby gra była sprawiedliwa?

2. Rzucamy dwa razy kostką. Jeśli w drugim rzucie wypadnie więcej oczek niż w pierwszym, to wygrywamy x_1 zł, jeśli tyle samo, to przegrywamy 120 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 60 zł.

a) Oblicz wartość oczekiwaną tej gry, gdy $x_1 = 180$.

b) Dla jakiej wartości x_1 gra byłaby sprawiedliwa?

3. W pierwszej grze rzucamy trzema monetami i otrzymujemy $x = 24$ zł za każdego wyrzuconego orła. W drugiej grze rzucamy czterema monetami i otrzymujemy $y = 15$ zł za każdego wyrzuconego orła.

a) Wartość oczekiwana której gry jest większa?

b) Ile powinna być równa wygrana x, aby – bez zmiany wartości y w drugiej grze – wartości oczekiwane obu gier były równe?

Czy wiesz, że...

Zagadnieniem wartości oczekiwanej gry zajmował się holenderski matematyk, fizyk i astronom Christiaan Huygens [czyt. kristian hojchens] (1629–1695). W 1657 r. wydał pracę dotyczącą rachunku prawdopodobieństwa *De ratiociniis in ludo aleae* (*O wnioskowaniu w grach hazardowych*). Christiaan Huygens był członkiem Towarzystwa Królewskiego w Londynie i Akademii Nauk w Paryżu.

4. Rzucamy pewną liczbą monet. Jeśli w rzucie wypadło n orłów i k reszek, to wygrana (lub przegrana) jest równa $(2^n - 3k)$ zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry, jeśli rzucamy:

a) czterema monetami, b) pięcioma monetami.

5. W tabeli podano prawdopodobieństwa trafienia trójki, czwórki, piątki i szóstki w grze liczbowej, w której skreślamy 6 spośród 49 liczb.

trójka	$\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} : \binom{49}{6} \approx 0{,}017\,650\,404$
czwórka	$\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} : \binom{49}{6} \approx 0{,}000\,968\,620$
piątka	$\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} : \binom{49}{6} \approx 0{,}000\,018\,450$
szóstka	$1 : \binom{49}{6} \approx 0{,}000\,000\,072$

a) Przyjmijmy, że wygrywamy jedynie wtedy, gdy trafimy szóstkę, i że cena jednego zakładu jest równa 1 zł. Jaka powinna być wysokość wygranej, aby była to gra sprawiedliwa?

b) Przyjmijmy, że jeśli trafimy trójkę, wygramy 10 zł, czwórkę – 100 zł, piątkę – 1000 zł, i że cena jednego zakładu jest równa 1 zł. Jaka powinna być wysokość wygranej w przypadku trafienia szóstki, aby gra była sprawiedliwa?

c) Przyjmijmy, że jeśli trafimy trójkę, wygramy 100 zł, czwórkę – 1000 zł, piątkę – 10 000 zł, a szóstkę – 10 000 000 zł. Jaka powinna być cena jednego zakładu, aby gra była sprawiedliwa?

6. Dane są trzy odcinki o długości 4 cm i dwa o długości 6 cm. Wybieramy losowo trzy spośród tych odcinków i budujemy z nich trójkąt. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej, która każdemu otrzymanemu w ten sposób trójkątowi przyporządkowuje:

a) jego obwód, b) jego pole.

7. Dany jest sześcian o krawędzi 1 cm.

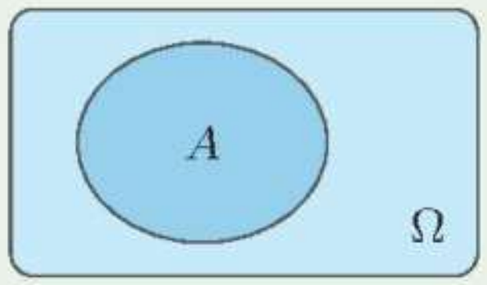
a) Wybieramy losowo dwa wierzchołki sześcianu. Zmienna losowa przyporządkowuje wybranym dwóm punktom odległość między nimi. Oblicz wartość oczekiwaną tej zmiennej.

b) Wybieramy losowo trzy wierzchołki sześcianu. Zmienna losowa przyporządkowuje wybranym trzem punktom pole trójkąta, którego są wierzchołkami. Oblicz wartość oczekiwaną tej zmiennej.

1.16. Zagadnienia uzupełniające

Prawdopodobieństwo geometryczne

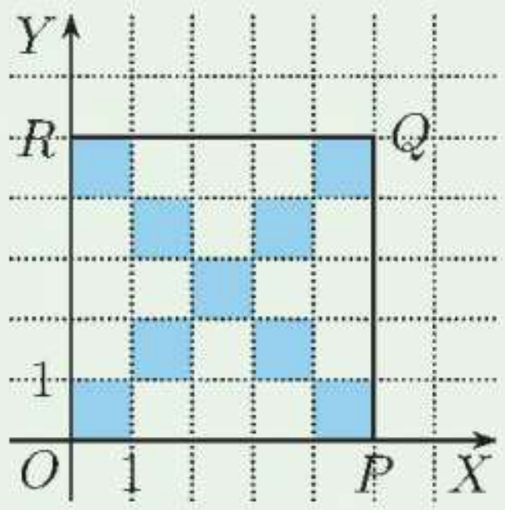
Na płaszczyźnie dane są figury A i Ω takie, że $A \subset \Omega$. Niech P_Ω będzie polem figury Ω, a P_A – polem figury A. Przyjmujemy, że prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany punkt figury Ω należy do figury A, jest równe:



$$p = \frac{P_A}{P_\Omega}$$

Przykład 1

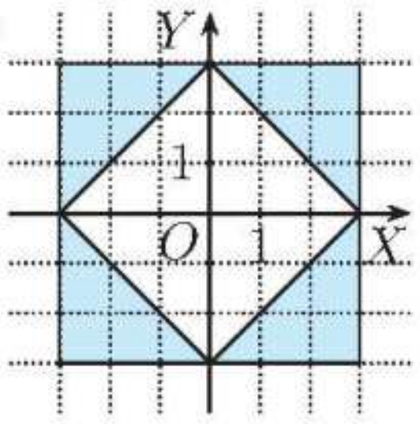
Niech Ω będzie kwadratem $OPQR$, a A – zbiorem zaznaczonym na niebiesko (rysunek obok). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany punkt kwadratu Ω należy do zbioru A?

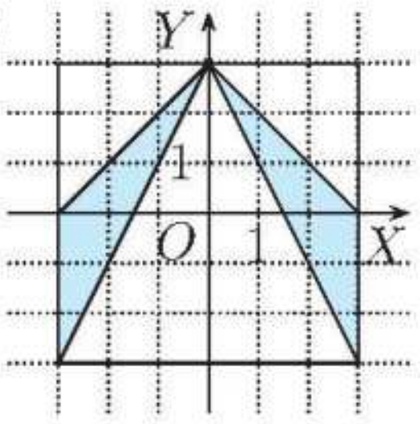


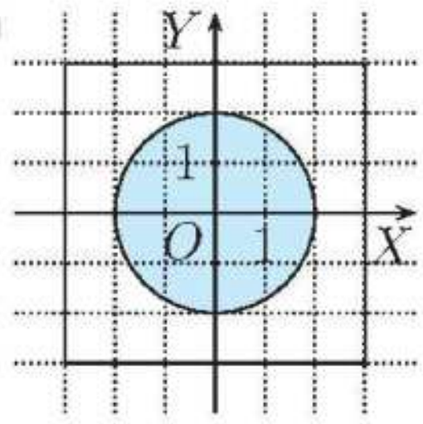
Zauważmy, że $P_\Omega = 25$ oraz $P(A) = 9$, zatem:

$$p = \frac{P_A}{P_\Omega} = \frac{9}{25}$$

1. Niech $\Omega = \{(x, y)\colon x \in \langle -3; 3\rangle \text{ i } y \in \langle -3; 3\rangle\}$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany punkt ze zbioru Ω należy do zbioru zaznaczonego na niebiesko?

a)


b)


c)


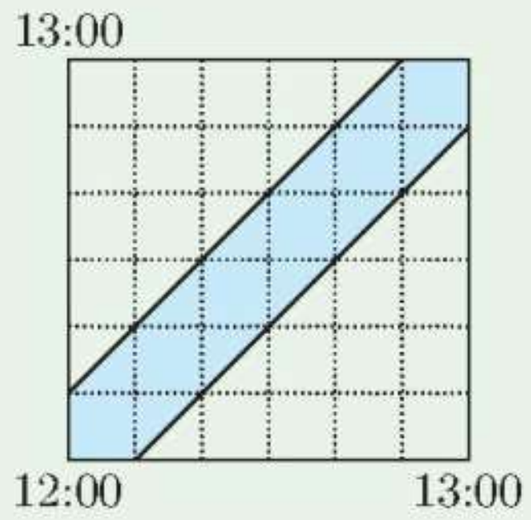
2. Niech $\Omega = \{(x, y)\colon x \in \langle 0; 6\rangle \text{ i } y \in \langle 0; 4\rangle\}$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że współrzędne losowo wybranego punktu ze zbioru Ω spełniają warunek: a) $x + y - 4 \leqslant 0$, b) $|x - 2| \geqslant 1$, c) $|x - y| \leqslant 1$?

Joseph Bertrand (1822–1900) sformułował następujący problem (znany jako **paradoks Bertranda**). Rozpatrujemy trójkąt równoboczny wpisany w okrąg. Wybieramy losowo cięciwę tego okręgu. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest ona dłuższa od boku trójkąta? Bertrand przedstawił trzy metody rozwiązania tego problemu – każda z nich daje inny wynik. Sprzeczność tę wyjaśniono dopiero po wprowadzeniu aksjomatyki rachunku prawdopodobieństwa w 1933 r. przez Andrieja Kołmogorowa.

Przykład 2

Ania i Zosia umówiły się, że każda z nich przyjdzie do parku pod fontannę między godziną 12:00 a 13:00 i będzie czekać tam przez 10 minut. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że koleżanki się spotkają?

Oznaczmy czasy przybycia Ani i Zosi pod fontannę odpowiednio przez x i y. Rozpatrzmy punkty należące do kwadratu Ω przedstawionego na rysunku obok. Ania i Zosia się spotkają, gdy punkt (x, y) należy do zbioru A zaznaczonego na rysunku na niebiesko. Pole zbioru A jest równe 11 (sprawdź). Prawdopodobieństwo spotkania jest więc równe:



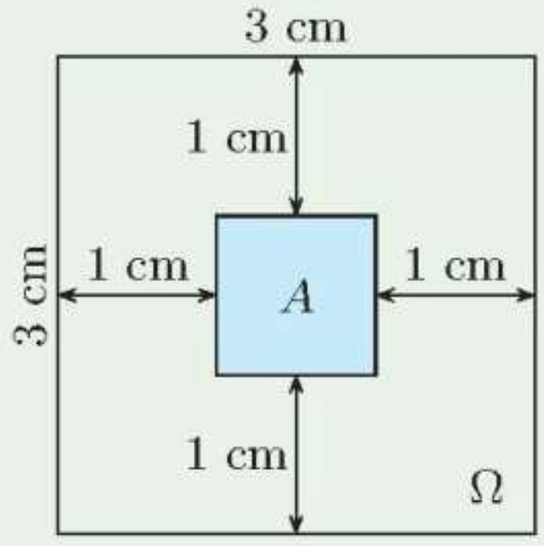
$$p = \frac{P_A}{P_\Omega} = \frac{11}{36} \approx 0{,}31$$

3. Jakie byłoby prawdopodobieństwo spotkania Ani i Zosi przy fontannie (patrz przykład 2), gdyby każda z nich czekała 20 minut?

Przykład 3

Monetę o średnicy 2 cm rzucamy na szachownicę utworzoną z kwadratów o boku 3 cm. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że moneta w całości znajdzie się wewnątrz któregoś z kwadratów?

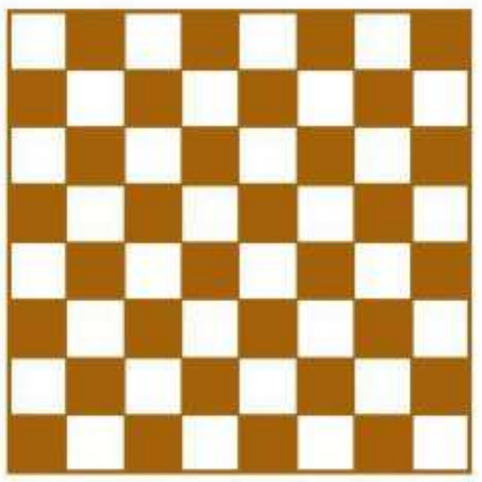
Rozpatrzmy kwadrat Ω, na który upadł środek rzuconej monety (rysunek obok). Aby cała moneta znajdowała się wewnątrz tego kwadratu, jej środek musi należeć do kwadratu A zaznaczonego na rysunku na niebiesko. Ponieważ $P_A = 1\text{ cm}^2$ oraz $P_\Omega = 9\text{ cm}^2$:



$$p = \frac{P_A}{P_\Omega} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11$$

4. Monetę o średnicy 3 cm rzucamy na szachownicę utworzoną z kwadratów o boku 6 cm. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że moneta w całości upadnie wewnątrz któregoś z kwadratów?

5. Monetę o średnicy 2 cm rzucamy na szachownicę utworzoną z kwadratów o boku 4 cm w taki sposób, aby cała moneta znalazła się na szachownicy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że moneta w całości upadnie wewnątrz białego kwadratu?



Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Ile jest liczb czterocyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi: a) 8, b) 10?

2. Ile jest liczb czterocyfrowych parzystych, w których zapisie:
a) mogą wystąpić tylko cyfry 0, 1, 2, 3 i 4,
b) występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 3?

3. Ile jest liczb czterocyfrowych nieparzystych, w których zapisie:
a) występują tylko cyfry 4 i 5,
b) występuje dokładnie jedna cyfra 4 i dokładnie jedna cyfra 5?

4. Na ile sposobów można ustawić w kolejce:
a) 2 kobiety i 6 mężczyzn tak, aby kobiety stały obok siebie,
b) 4 kobiety i 4 mężczyzn tak, aby kobieta nie stała za kobietą?

5. Rzucamy dwa razy kostką. Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne:
A – dokładnie w jednym z rzutów wypadnie co najmniej 5 oczek,
B – suma oczek, które wypadną w obydwu rzutach, jest nie mniejsza od 8?

6. Rzucamy dwa razy kostką, której dwie ścianki są zielone, a cztery czerwone. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia:
a) co najmniej raz ścianki zielonej,
b) co najwyżej raz ścianki czerwonej.

7. Student zna odpowiedzi na 6 spośród 15 pytań egzaminacyjnych. Na egzaminie losuje 4 pytania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zna odpowiedź na co najmniej jedno z nich.

8. Rzucamy cztery razy niesymetryczną monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła jest równe $\frac{1}{3}$, a reszki – $\frac{2}{3}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadną:
a) cztery reszki, b) co najmniej trzy reszki.

9. W urnie jest jedna kula czarna o numerze 1 oraz dwie kule białe o numerach 1 i 2. Losujemy kolejno dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwsza z wylosowanych kul jest biała, a druga ma numer nieparzysty, jeśli losujemy:
a) ze zwracaniem, b) bez zwracania.

10. W sześciu urnach $U_1, U_2, \ldots, U_6$ znajdują się kule białe i czarne. Urna U_n zawiera jedną kulę białą i n kul czarnych, $n \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Rzucamy kostką i losujemy jedną kulę z urny U_n, gdzie n jest liczbą wyrzuconych oczek. Czy prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej jest większe od $\frac{1}{4}$?

11. W urnie jest 12 kul: 8 białych i 4 czarne. Z urny losujemy bez zwracania 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy:

a) tylko kule białe,

b) 2 kule białe i 1 czarną.

12. a) W urnie U_1 mamy 3 kule białe i 7 czarnych, w urnie U_2 – 6 kul białych i 4 czarne. Z losowo wybranej urny wyciągamy 3 kule bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia 3 kul czarnych.

b) W urnie U_1 mamy 3 kule czarne i 2 białe, w urnie U_2 – 4 kule czarne i 1 białą. Z losowo wybranej urny wyciągamy 2 kule bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będą to kule o różnych kolorach.

13. Mamy 10 kul białych i 10 kul czarnych oraz dwie urny. Do każdej z urn wrzucamy po 10 kul. Jak należy rozmieścić kule w urnach, aby:

a) prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli, gdy losujemy jedną kulę z losowo wybranej urny, było największe,

b) prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych, gdy losujemy bez zwracania dwie kule z losowo wybranej urny, było największe?

14. W rzucie pewną monetą orzeł wypada dwa razy częściej niż reszka. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej dwóch orłów w trzykrotnym rzucie tą monetą.

15. W urnie są kule białe, niebieskie i zielone. Prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula będzie biała lub niebieska, jest równe $\frac{3}{4}$. Prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula będzie niebieska lub zielona, jest równe $\frac{4}{5}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula będzie niebieska.

16. W urnie są dwie kule białe z numerami 1 i 2 oraz cztery kule czarne z numerami 3, 4, 5 i 6. Z urny losujemy dwie kule. Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch kul czarnych, a B – dwóch kul o numerach nieparzystych. Oblicz prawdopodobieństwa $P(A|B)$ i $P(B|A)$.

D **17.** Stwierdzono, że po spryskaniu drzew owocowych pewnym środkiem ochronnym ginie 80% szkodników, natomiast te, które przeżyją, zyskują częściową odporność i po ponownym spryskaniu ginie ich tylko 30%. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany szkodnik zginie po pierwszym lub drugim spryskaniu, jest mniejsze od 0,9.

Zestaw II

1. Z grupy sześciu chłopców i czworga dziewcząt wybieramy losowo trzy osoby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych osób będzie:
a) co najmniej jeden chłopiec, b) co najwyżej jedna dziewczyna.

2. Partia towaru składa się ze 100 elementów, wśród których 2 są wadliwe. Poddajemy kontroli 50 losowo wybranych elementów. Partię przyjmujemy, jeśli wśród kontrolowanych elementów jest nie więcej niż 1 element wadliwy. Oblicz prawdopodobieństwo przyjęcia partii.

3. Ze zbioru liczb sześciocyfrowych, w których zapisie wykorzystano tylko cyfry 2, 3 i 4, losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: A – wylosowano liczbę, której wszystkie cyfry są identyczne, B – wylosowano liczbę, w której zapisie przynajmniej dwa razy występuje cyfra 4, C – wylosowano liczbę, w której zapisie każda z cyfr 2, 3, 4 występuje dwukrotnie.

4. Spośród liczb $1, 2, 3, \ldots, 15$ wylosowano dwie różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
a) suma wylosowanych liczb jest mniejsza od 5,
b) obie wylosowane liczby są mniejsze od 7,
c) iloczyn wylosowanych liczb jest parzysty.

5. Na egzamin przygotowano 20 pytań. Student zna odpowiedzi na 12 spośród nich, a przystępując do egzaminu, losuje 3 pytania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że student zna odpowiedzi na wszystkie wylosowane pytania.

6. Basia kupiła po jednym losie na dwóch różnych loteriach. Prawdopodobieństwo wygranej na pierwszej loterii jest równe $\frac{1}{3}$, a na drugiej wynosi $\frac{1}{4}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Basia kupiła:
a) dwa losy wygrywające, b) jeden los wygrywający.

7. W urnie są kule białe i czarne. Czarnych kul jest dwa razy więcej niż białych. Wyciągamy z urny 2 kule. Jaka jest najmniejsza liczba kul w urnie, dla której prawdopodobieństwo wylosowania 2 kul czarnych jest większe od $\frac{2}{5}$?

8. Losujemy liczbę n ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$, a następnie rzucamy n razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
a) wypadną same szóstki, b) nie wypadnie ani jedna szóstka.

9. Mamy dwie urny z kulami. W pierwszej jest 10 kul: 4 białe i 6 niebieskich, w drugiej – też 10 kul: 3 białe, 5 żółtych i 2 niebieskie. Rzucamy dwa razy monetą: jeśli przynajmniej raz wypadnie orzeł, to losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie – z drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli:

a) białej, b) niebieskiej.

10. Wśród pięciu kostek mamy cztery kostki klasyczne i jedną nietypową, która ma po sześć oczek na czterech ściankach. Rzucamy losowo wybraną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy sześć oczek.

11. Student zna odpowiedzi na 8 spośród 10 pytań w części I egzaminu i na 10 spośród 12 pytań w części II egzaminu. Na egzaminie losuje po 2 pytania z każdej jego części. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że student zda egzamin, jeśli musi odpowiedzieć poprawnie na wszystkie wylosowane pytania.

12. Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ są jednakowo prawdopodobne oraz zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich. Oblicz:

a) $P(A|B)$ i $P(A|B')$, jeśli $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, b) $P(A \cap B)$, jeśli $P(A|B) = \frac{1}{5}$.

13. Wykonano dwa rzuty kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w drugim rzucie wypadła dwójka, jeśli:

a) suma otrzymanych oczek jest równa 6,

b) iloczyn otrzymanych oczek jest równy 6.

14. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy dziesięciokrotnym rzucie monetą otrzymamy co najwyżej:

a) jedną reszkę, b) trzy reszki.

15. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy dziesięciokrotnym rzucie kostką za pierwszym razem wypadła szóstka, jeśli wiadomo, że wyrzucono:

a) dwie szóstki, b) trzy szóstki.

16. Rzucamy dwa razy kostką. Za każdą wyrzuconą piątkę dostajemy 10 zł, a za każdą wyrzuconą szóstkę – 20 zł. Jeśli obie wyrzucone liczby oczek są mniejsze od 5, to przegrywamy x zł. Dla jakiej wartości x gra jest sprawiedliwa?

17. Rzucamy monetą tak długo, aż otrzymamy cztery orły z rzędu lub pierwszą reszkę. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.

Sposób na zadanie

Przykład

Ile jest wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 8, jeśli wiadomo, że w zapisie tych liczb występują tylko cyfry 0, 2, 4, 6?

Zauważmy, że liczby spełniające warunki zadania możemy podzielić na cztery grupy.

1. Liczby, w których zapisie występuje jedna cyfra 6, jedna cyfra 2 i 98 cyfr 0.
   - Jeśli na pierwszym miejscu znajduje się cyfra 6, to pozycję cyfry 2 możemy wybrać na 99 sposobów.
   - Jeśli na pierwszym miejscu znajduje się cyfra 2, to pozycję cyfry 6 możemy wybrać na 99 sposobów.

   Zatem jest $99 + 99 = 198$ takich liczb.

2. Liczby, w których zapisie występują dwie cyfry 4 i 98 cyfr 0.
   Na pierwszym miejscu takiej liczby znajduje się cyfra 4. Pozycję drugiej cyfry 4 możemy wybrać na 99 sposobów.
   Zatem jest 99 takich liczb.

3. Liczby, w których zapisie występują jedna cyfra 4, dwie cyfry 2 i 97 cyfr 0.
   - Jeśli na pierwszym miejscu znajduje się cyfra 4, to pozycje dla dwóch cyfr 2 możemy wybrać na:
   $$\binom{99}{2} = \frac{99 \cdot 98}{2} = 4851$$
   sposobów.
   - Jeśli na pierwszym miejscu znajduje się cyfra 2, to pozycję drugiej cyfry 2 i pozycję cyfry 4 możemy wybrać na $99 \cdot 98 = 9702$ sposobów.

   Zatem jest $4851 + 9702 = 14\,553$ takich liczb.

4. Liczby, w których zapisie występują cztery cyfry 2 i 96 cyfr 0.
   Na pierwszym miejscu takiej liczby znajduje się cyfra 2. Pozycje dla trzech pozostałych cyfr 2 możemy wybrać na:
   $$\binom{99}{3} = \frac{99!}{96! \cdot 3!} = \frac{99 \cdot 98 \cdot 97}{6} = 156\,849$$
   sposobów.
   Zatem jest 156 849 takich liczb.

Korzystamy z reguły dodawania i stwierdzamy, że wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest:

$$198 + 99 + 14\,553 + 156\,849 = 171\,699$$

Odpowiedź: Liczb stucyfrowych spełniających warunki zadania jest 171 699.

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Liczb pięciocyfrowych, w których zapisie pierwsza i ostatnia cyfra są takie same, jest:

A. 10^5, **B.** 10^4, **C.** $9 \cdot 10^3$, **D.** $9^2 \cdot 10^3$.

2. Z cyfr 1, 2, 3 i 4 utworzono takie czterocyfrowe kody, że suma pierwszych dwóch cyfr jest parzysta, a suma ostatnich dwóch jest nieparzysta (cyfry mogą się powtarzać). Takich kodów jest:

A. 2^4, **B.** 2^5, **C.** 3^4, **D.** 4^3.

3. Rzucamy dwukrotnie kostką. Zdarzenie A polega na tym, że iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą. Wtedy:

A. $P(A) = \frac{1}{2}$, **B.** $P(A) = \frac{1}{4}$, **C.** $P(A') = \frac{1}{2}$, **D.** $P(A') = \frac{1}{4}$.

4. Rzucamy trzykrotnie monetą. Zdarzenie A polega na wyrzuceniu nieparzystej liczby orłów, a zdarzenie B – na wyrzuceniu większej liczby orłów niż reszek. Wtedy:

A. $P(A) > P(B)$, **C.** $P(A) \leqslant P(A')$,
B. $P(A) < P(B)$, **D.** $P(B) > P(B')$.

5. Niech $A, B \subset \Omega$. Jeśli $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ oraz $A \subset B$, to:

A. $P(A \cup B) = \frac{1}{12}$, **C.** $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$,
B. $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, **D.** $P(A \cap B) = 0$.

6. W urnie jest pięć kul o numerach 1, 2, 3, 4 i 5. Losujemy bez zwracania trzy kule. Numery wylosowanych kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę trzycyfrową. Prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podzielna przez n, jest równe $\frac{1}{5}$ dla n równego:

A. 2, **B.** 6, **C.** 9, **D.** 25.

7. Z szuflady zawierającej 5 par rękawiczek wyjmujemy losowo dwie rękawiczki. Prawdopodobieństwo tego, że obie rękawiczki są na lewą rękę, jest równe:

A. $\frac{2}{9}$, **B.** $\frac{2}{5}$, **C.** $\frac{1}{5}$, **D.** $\frac{1}{2}$.

8. Prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej trzech reszek przy dwunastokrotnym rzucie monetą jest równe:

A. $\frac{4017}{4096}$, **B.** $\frac{4035}{4096}$, **C.** $\frac{4067}{4096}$, **D.** $\frac{4083}{4096}$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Z cyfr $0, 1, 2, \ldots, n$ tworzymy liczby trzycyfrowe, w których zapisie cyfry się nie powtarzają. Wyznacz n, jeśli wiadomo, że wszystkich takich liczb jest 100.

Zadanie 2 (2 pkt)

Ustal, ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 0, 5, 7, 9.

Zadanie 3 (2 pkt)

W urnie jest pięć kul o numerach 1, 2, 3, 4 i 5. Losujemy kolejno cztery kule i zwracamy za każdym razem wylosowaną kulę do urny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wszystkie wylosowane kule mają numery nieparzyste.

Zadanie 4 (2 pkt)

Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dokładnie w jednym z rzutów wypadną 3 lub 4 oczka.

Zadanie 5 (3 pkt)

Rzucamy sześć razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najwyżej cztery razy wypadnie reszka.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 6 (4 pkt)

Oblicz, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb naturalnych, w których zapisie dokładnie dwa razy występuje cyfra 6.

Zadanie 7 (4 pkt)

W urnie jest pięć kul o numerach 1, 2, 3, 4 i 5. Losujemy bez zwracania trzy kule. Numery wylosowanych kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podzielna przez 2.

Zadanie 8 (4 pkt)

Spośród liczb sześciocyfrowych losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podzielna przez 4 lub przez 5.

Zadanie 9 (4 pkt)

Na loterii jest 200 losów, z tego 2 wygrywające po 450 zł i 4 wygrywające po 250 zł. Kupujemy jeden los za 10 zł. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej na tej loterii. Uwzględnij cenę zakupu losu.

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

Zadanie 1 (2 pkt)
Ile jest permutacji cyfr liczby 324 516 prowadzących do otrzymania liczby większej od wyjściowej liczby?

Zadanie 2 (2 pkt)
Niech $A, B \subset \Omega$ oraz $P(A) = 0{,}6$, $P(B') = 0{,}3$, $P(A \cup B) = 0{,}9$. Oblicz $P(A|B)$.

Zadanie 3 (4 pkt)
Na egzaminie należy wylosować 3 pytania z 10. Student potrafi odpowiedzieć na 7 pytań. Zda egzamin, jeśli odpowie na co najmniej 2 pytania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że student zda egzamin, jeśli potrafi odpowiedzieć na pierwsze z wylosowanych pytań.

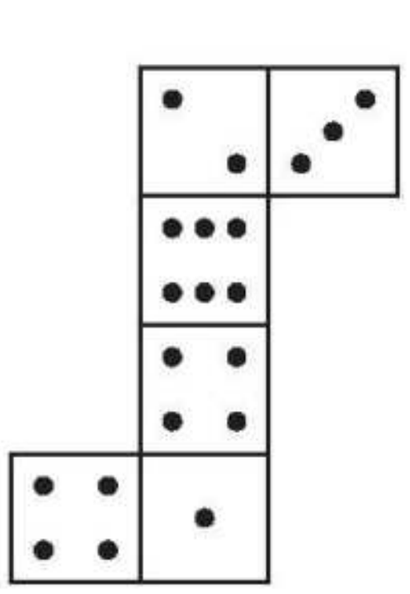
D **Zadanie 4 (4 pkt)**
Spośród liczb $1, 2, \ldots, 10$ wybrano kolejno cztery bez zwracania i ustawiono je w ciąg. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo tego, że jest to ciąg monotoniczny, równa się $\frac{1}{12}$.

Zadanie 5 (4 pkt)
Łucznik trafia w tarczę z prawdopodobieństwem równym p. Prawdopodobieństwo tego, że strzała, która trafiła w tarczę, trafiła w dziesiątkę, jest równe $1 - \frac{2}{3}p$. Oblicz p, jeśli prawdopodobieństwo tego, że łucznik trafi w dziesiątkę, gdy strzela raz, jest równe 0,36.

Zadanie 6 (4 pkt)
Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania przynajmniej raz dwóch szóstek w 24 rzutach dwiema kostkami.

Zadanie 7 (4 pkt)
Spośród liczb sześciocyfrowych losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba ma tyle samo cyfr parzystych co nieparzystych.

Zadanie 8 (4 pkt)
Mamy pięć klasycznych kostek do gry oraz jedną nietypową, której siatkę przedstawiono na rysunku obok. Wykonano dwa rzuty losowo wybraną kostką i otrzymano dwie czwórki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucano kostką nietypową.



Zadanie 9 (6 pkt)
Oblicz, ile jest wszystkich nieparzystych liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5.

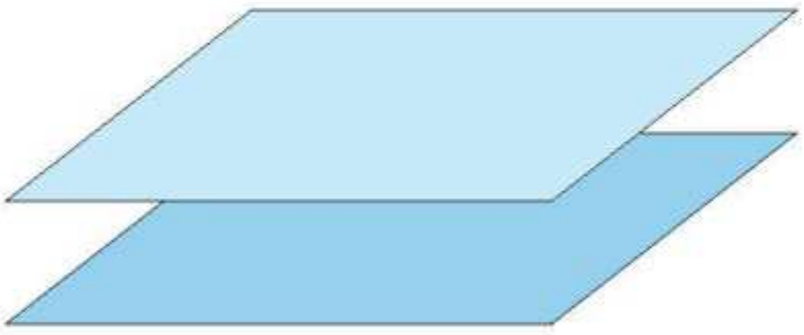


2 Graniastosłupy i ostrosłupy

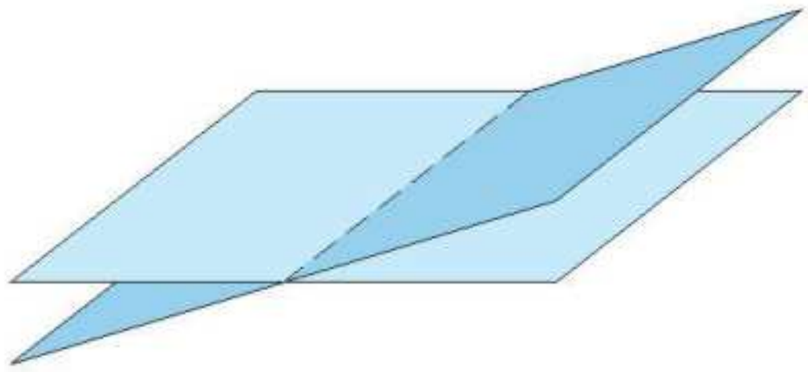
Piramidy w Gizie zbudowano na przełomie XXVI i XXV w. p.n.e. Największa z nich – piramida Cheopsa (po lewej na zdjęciu) – miała około 146 m wysokości, a jej podstawą był kwadrat o boku 230 m. Aby obliczyć objętość piramidy, korzystamy ze wzoru na objętość ostrosłupa $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$, gdzie P_p jest polem podstawy ostrosłupa, a H – jego wysokością. Objętość piramidy Cheopsa wynosiła około $2\,600\,000\ \mathrm{m}^3$. Obecnie jej wymiary są nieco mniejsze.

2.1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni

Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn



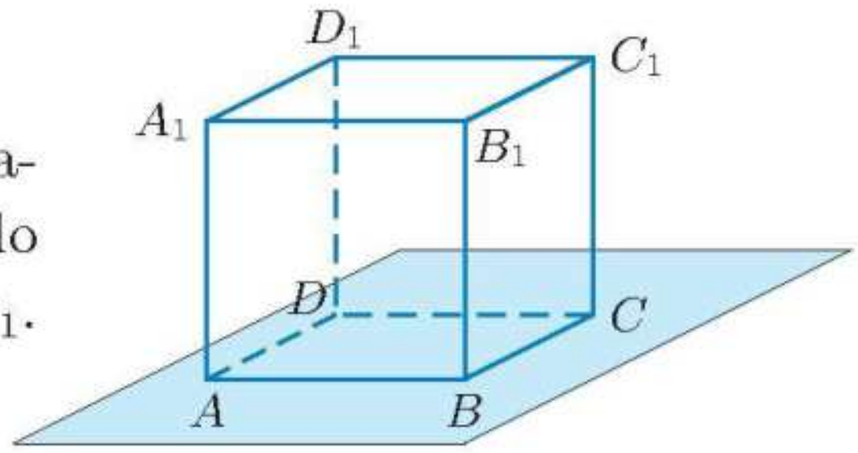
Płaszczyzny **równoległe** – nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.



Płaszczyzny **przecinające się** – ich częścią wspólną jest prosta.

Przykład 1

W sześcianie (rysunek obok) płaszczyzna zawierająca podstawę $ABCD$ jest równoległa do płaszczyzny zawierającej podstawę $A_1B_1C_1D_1$.



Ćwiczenie 1

Wskaż ścianę sześcianu (rysunek powyżej) zawartą w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny zawierającej ścianę: a) ADD_1A_1, b) DCC_1D_1.

Zauważmy, że aby opisać płaszczyznę, wystarczy podać trzy niewspółliniowe punkty należące do niej, gdyż przez każde trzy punkty nieleżące na jednej prostej przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.

Ćwiczenie 2

Do płaszczyzn $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ należą wymienione wierzchołki sześcianu (rysunek poniżej).

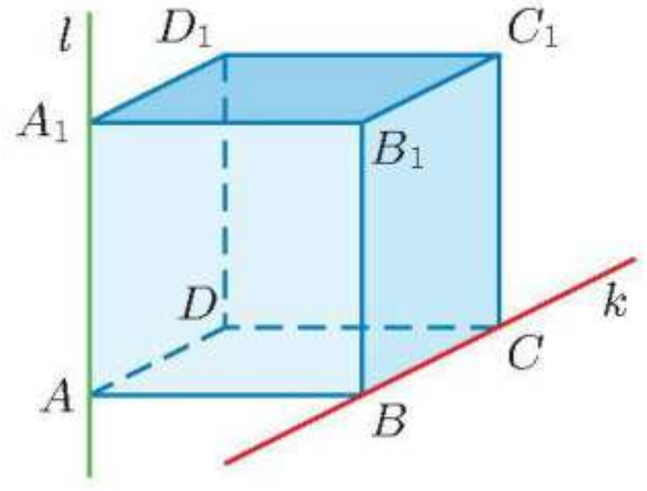
$\mathcal{P}_1$: A, D, D_1

$\mathcal{P}_2$: A, B, D

$\mathcal{P}_3$: B, B_1, C_1

$\mathcal{P}_4$: B, B_1, A_1

Które z tych płaszczyzn przecinają się wzdłuż prostej l, a które – wzdłuż prostej k?

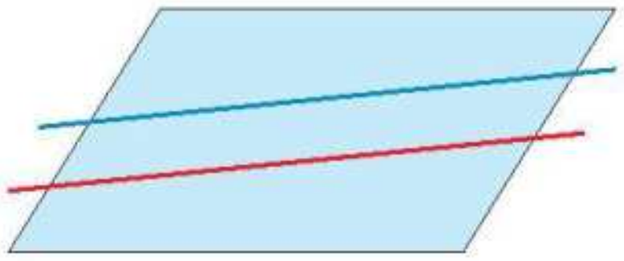


Ćwiczenie 3

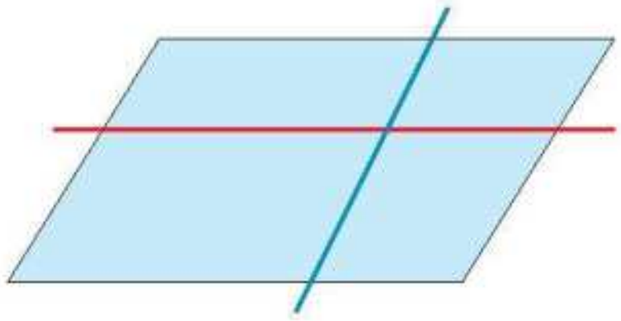
Ściany sześcianu są zawarte w sześciu różnych płaszczyznach. Wskaż dowolne trzy wierzchołki sześcianu (rysunek powyżej) należące do płaszczyzny przecinającej te sześć płaszczyzn.

Uwaga. Dla figur na płaszczyźnie w przestrzeni prawdziwe są wszystkie twierdzenia przyjęte w planimetrii.

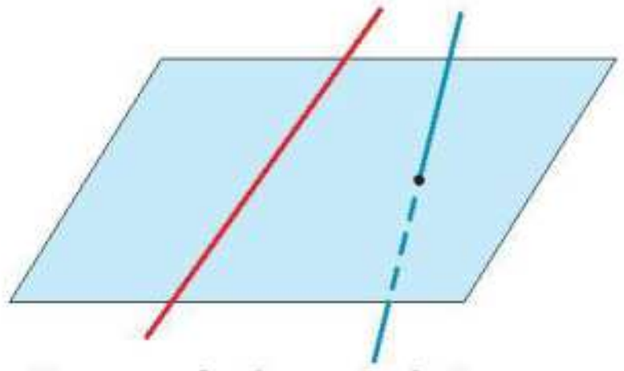
Wzajemne położenie dwóch prostych



Proste **równoległe** leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.



Proste **przecinające się** leżą w jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny.

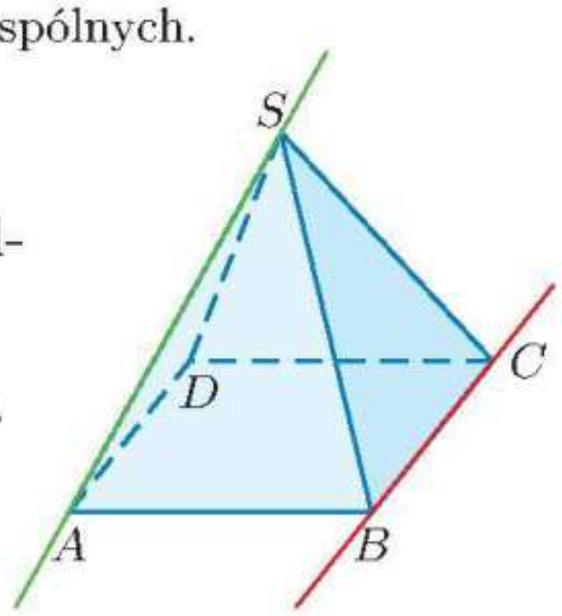


Proste **skośne** nie leżą w jednej płaszczyźnie, zatem nie mają punktów wspólnych.

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat.

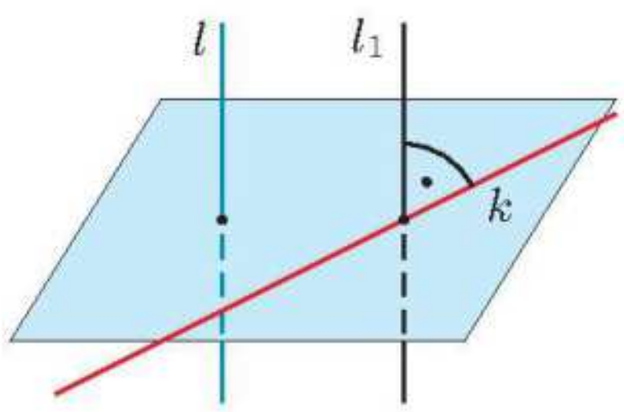
- Proste zawierające krawędzie AB i DC są równoległe.
- Proste zawierające krawędzie AS i BC są skośne.



Ćwiczenie 4

Które krawędzie ostrosłupa (rysunek powyżej) zawierają się w prostych skośnych do prostej zawierającej krawędź AB?

Mówimy, że prosta l, skośna do prostej k, jest do prostej k **prostopadła**, gdy istnieje prosta l_1 równoległa do prostej l i przecinająca prostą k pod kątem prostym.
Zauważmy, że każda prosta równoległa do prostej l_1 jest prostopadła do prostej k.



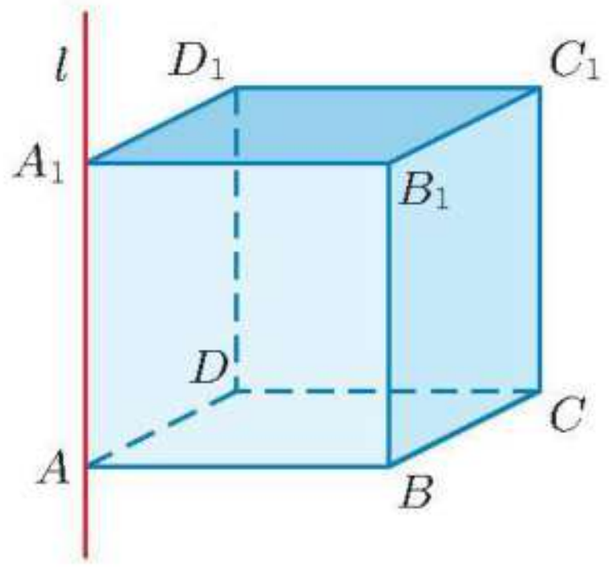
Uwaga. Proste prostopadłe są skośne lub się przecinają (gdy leżą w jednej płaszczyźnie).

Ćwiczenie 5

Prosta l zawiera krawędź AA_1 sześcianu (rysunek obok). Wskaż proste zawierające pozostałe krawędzie tego sześcianu, które są:

a) równoległe do prostej l,

b) prostopadłe do prostej l.

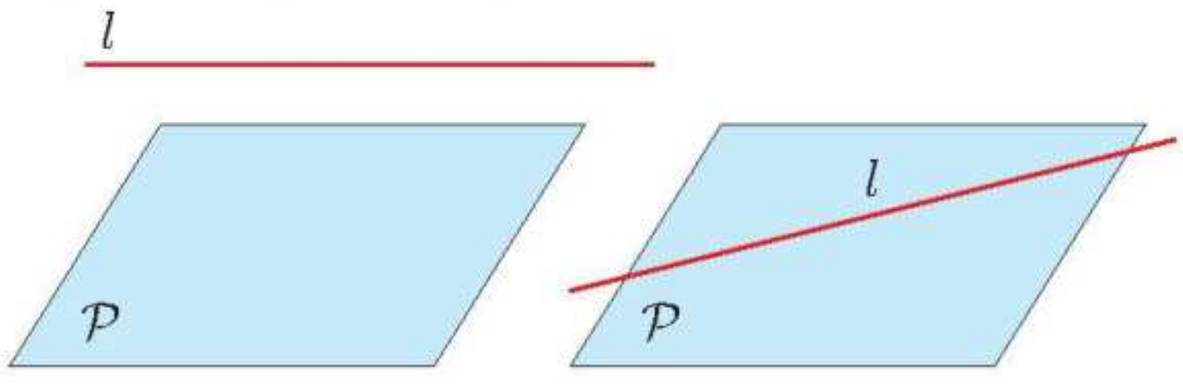


Ćwiczenie 6

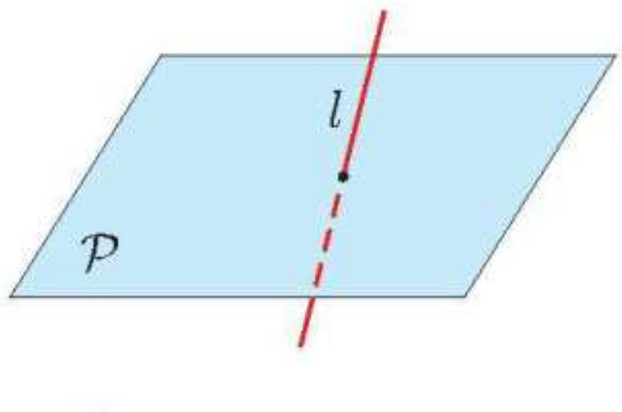
W sześcianie (rysunek powyżej) wskaż pary wierzchołków, które wyznaczają proste skośne nieprostopadłe do prostej l.

Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny

Prostą l nazywamy **równoległą** do płaszczyzny $\mathcal{P}$, jeśli nie ma ona punktów wspólnych z tą płaszczyzną lub jest w niej zawarta.



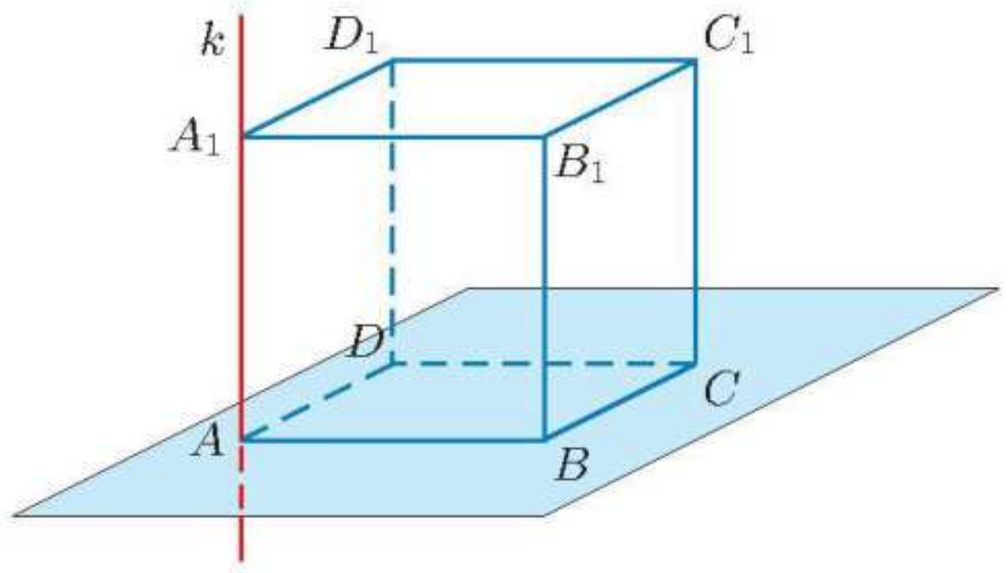
Jeśli prosta l ma z płaszczyzną $\mathcal{P}$ dokładnie jeden punkt wspólny, to mówimy, że prosta l **przecina** płaszczyznę $\mathcal{P}$.



Mówimy, że prosta l jest **prostopadła** do płaszczyzny $\mathcal{P}$, jeśli jest ona prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie $\mathcal{P}$.

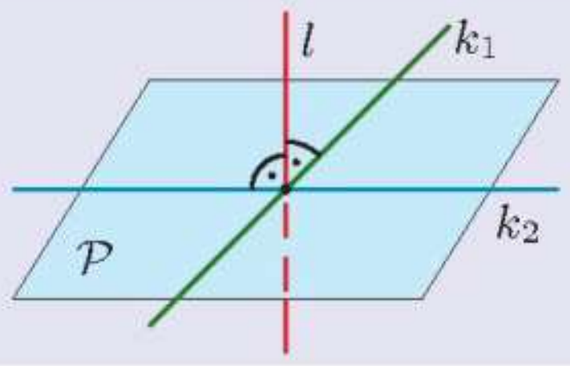
Przykład 3

W sześcianie (rysunek obok) prosta k zawierająca krawędź AA_1 jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej podstawę $ABCD$.



Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny

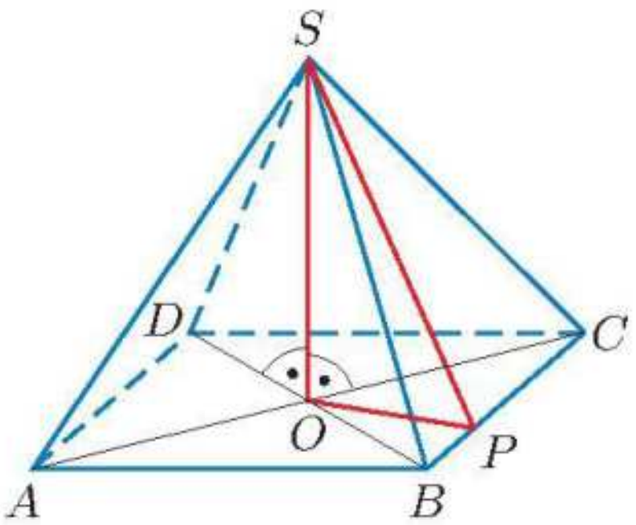
Jeśli prosta l jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych zawartych w płaszczyźnie $\mathcal{P}$, to jest ona prostopadła do płaszczyzny $\mathcal{P}$.



Dowód – patrz zadanie 6 na stronie 90.

Przykład 4

Podstawą ostrosłupa (rysunek obok) jest kwadrat $ABCD$. Jeśli odcinek SO jest prostopadły do przekątnych podstawy ostrosłupa, to jest on prostopadły do płaszczyzny zawierającej tę podstawę. Zatem np. dla dowolnego punktu P należącego do krawędzi podstawy ostrosłupa trójkąt SOP jest prostokątny.

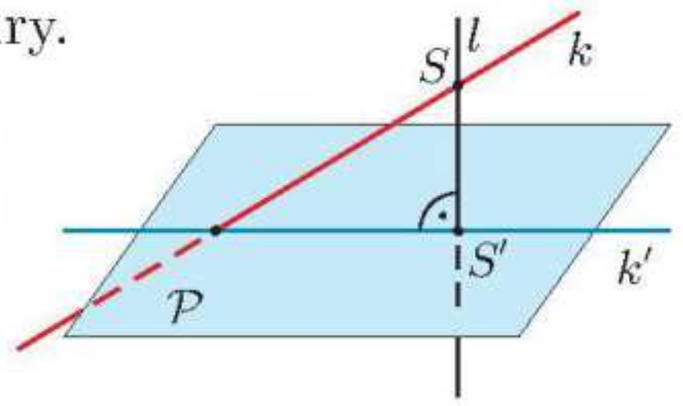


Ćwiczenie 7

Dany jest sześcian o podstawach $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ (jak na rysunku w przykładzie 3.). Odcinek CD_1 jest przekątną ściany bocznej tego sześcianu. Wskaż krawędzie podstaw zawarte w prostych prostopadłych do prostej CD_1. Czy prosta CD_1 jest prostopadła do płaszczyzn zawierających te podstawy?

Dla dowolnego punktu S możemy poprowadzić prostą l przechodzącą przez ten punkt i prostopadłą do płaszczyzny $\mathcal{P}$. Punkt przecięcia prostej l z płaszczyzną $\mathcal{P}$ nazywamy **rzutem prostokątnym** punktu S na płaszczyznę $\mathcal{P}$.
Rzutem prostokątnym figury na płaszczyznę jest figura składająca się z rzutów prostokątnych wszystkich punktów rzutowanej figury.

Na rysunku obok punkt S' jest rzutem prostokątnym punktu S na płaszczyznę $\mathcal{P}$, a prosta k' jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę.



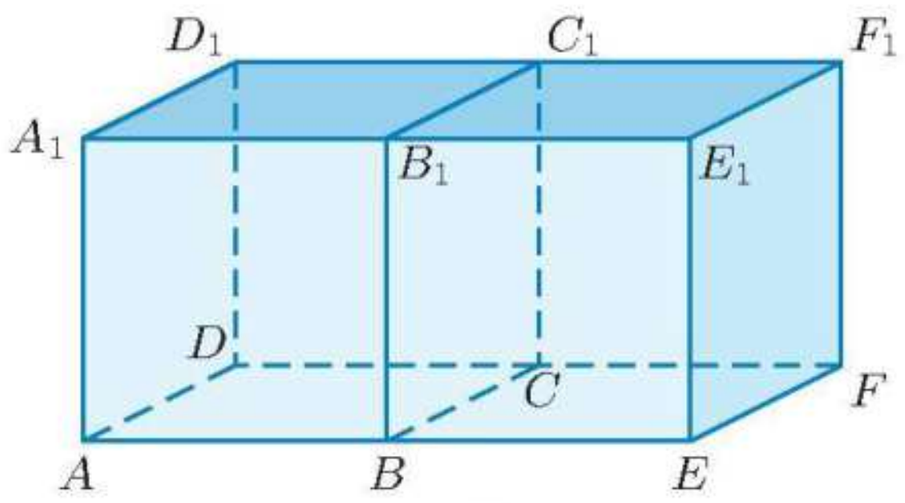
D Ćwiczenie 8

Odcinek R_1S_1 jest rzutem prostokątnym odcinka RS na płaszczyznę $\mathcal{P}$. Czy odcinek R_1S_1 może być dłuższy od odcinka RS? Sformułuj i udowodnij odpowiednie twierdzenie.

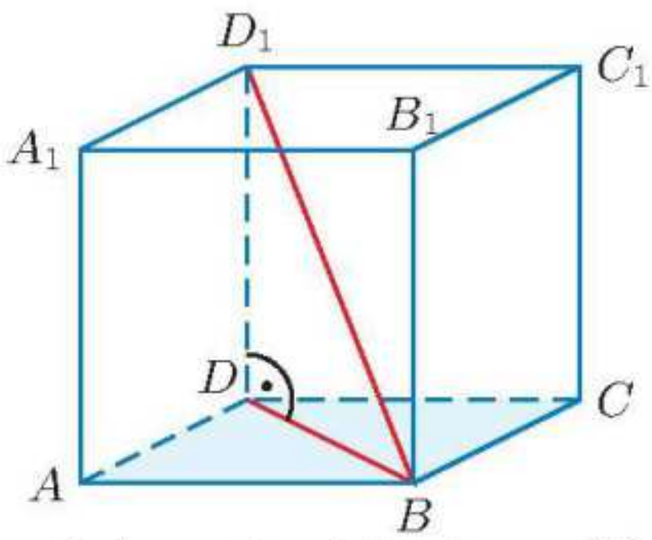
Kiedy stosujemy twierdzenia planimetrii, musimy mieć pewność, że rozpatrywane punkty leżą w jednej płaszczyźnie. Pamiętajmy, że płaszczyznę wyznaczają jednoznacznie:
- trzy punkty nieleżące na jednej prostej,
- dwie przecinające się proste,
- prosta i punkt nieleżący na tej prostej,
- dwie różne proste równoległe.

Zadania

1. Dwa sześciany mają wspólną ścianę BCC_1B_1 (rysunek obok). Wskaż pary wierzchołków tych sześcianów wyznaczające proste równoległe oraz pary wierzchołków wyznaczające proste prostopadłe do prostej:
a) EF_1, b) A_1C_1.



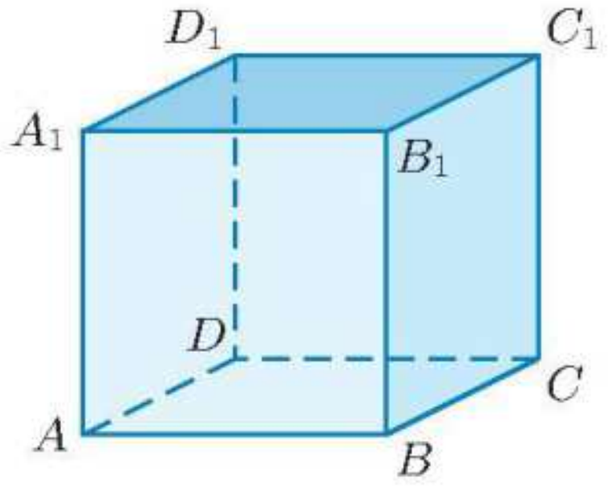
2. Rzutem prostokątnym odcinka D_1B na ścianę $ABCD$ sześcianu jest odcinek DB (rysunek obok). Wskaż odcinek będący rzutem prostokątnym odcinka D_1B na ścianę:
a) $A_1B_1C_1D_1$,
b) ADD_1A_1,
c) BCC_1B_1,
d) ABB_1A_1.



D 3. Dla prostych k, l, m leżących w tej samej płaszczyźnie zachodzi własność: jeśli $k \perp l$ i $l \perp m$, to $k \parallel m$. Uzasadnij, że analogiczna własność nie zachodzi dla prostych w przestrzeni.

4. Dany jest sześcian o krawędzi długości 2 (rysunek obok). Wskaż przykładowy odcinek, którego końce należą do krawędzi sześcianu, a długości jego rzutów prostokątnych na ściany sześcianu przyjmują wartości:

a) $\sqrt{5}$ i $2\sqrt{2}$, b) 2 i $2\sqrt{2}$, c) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{5}$.



5. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest rzutem prostokątnym trójkąta ABC na płaszczyznę $\mathcal{P}$. Ustal, czy:

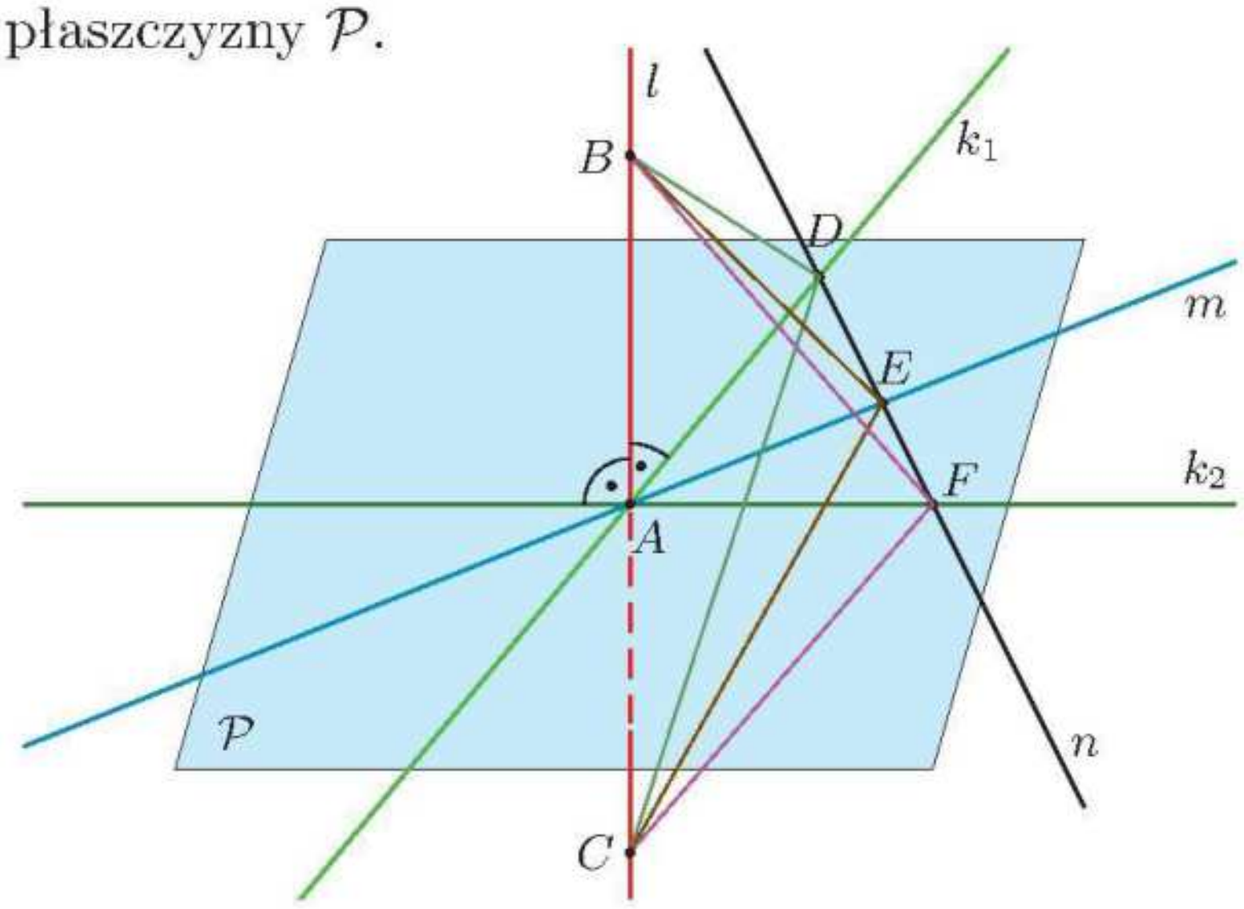
a) obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ może być większy od obwodu trójkąta ABC,

b) pole trójkąta $A_1B_1C_1$ może być większe od pola trójkąta ABC,

c) miara kąta $A_1B_1C_1$ może być większa od miary kąta ABC.

D **6.** Przeczytaj dowód twierdzenia o prostej prostopadłej do płaszczyzny i podaj brakujące uzasadnienia.

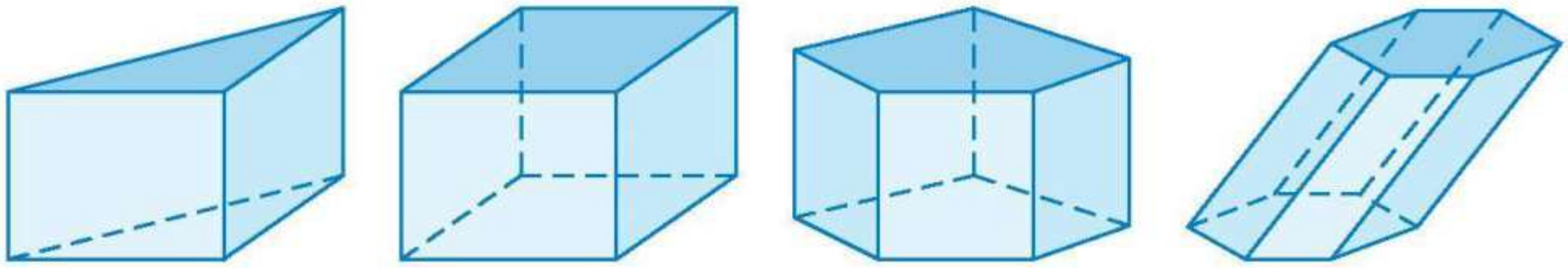
Rozpatrzmy prostą l prostopadłą do dwóch nierównoległych prostych k_1 i k_2 zawartych w płaszczyźnie $\mathcal{P}$. Niech A będzie punktem wspólnym prostej l i płaszczyzny $\mathcal{P}$.



Niech m będzie dowolną prostą przechodzącą przez punkt A i zawartą w płaszczyźnie $\mathcal{P}$. Na prostej l wybieramy punkty B i C takie, że $|AB| = |AC|$. Na płaszczyźnie $\mathcal{P}$ prowadzimy prostą n przecinającą proste k_1, m i k_2 odpowiednio w punktach D, E i F.
Wówczas $|BD| = |CD|$ oraz $|BF| = |CF|$ (uzasadnij).
Zatem $\triangle BDF \equiv \triangle CDF$ (uzasadnij), skąd otrzymujemy $|CE| = |BE|$ (uzasadnij). Oznacza to, że $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAE = 90^\circ$ (uzasadnij). Zatem prosta l jest prostopadła do prostej m, a skoro prosta m była dowolnie wybraną prostą zawartą w $\mathcal{P}$, to $l \perp \mathcal{P}$.

2.2. Graniastosłupy

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany, zwane **podstawami**, są przystającymi wielokątami zawartymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany, zwane **ścianami bocznymi**, są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.



Jeśli krawędzie boczne graniastosłupa są prostopadłe do podstaw, to graniastosłup nazywamy **prostym**, w przeciwnym razie graniastosłup nazywamy **pochyłym**. Ściany boczne dowolnego graniastosłupa prostego są prostokątami.

Dowolny odcinek, który łączy płaszczyzny zawierające podstawy graniastosłupa i jest do nich prostopadły, nazywamy **wysokością** graniastosłupa.
Powierzchnię boczną graniastosłupa stanowią wszystkie jego ściany boczne.

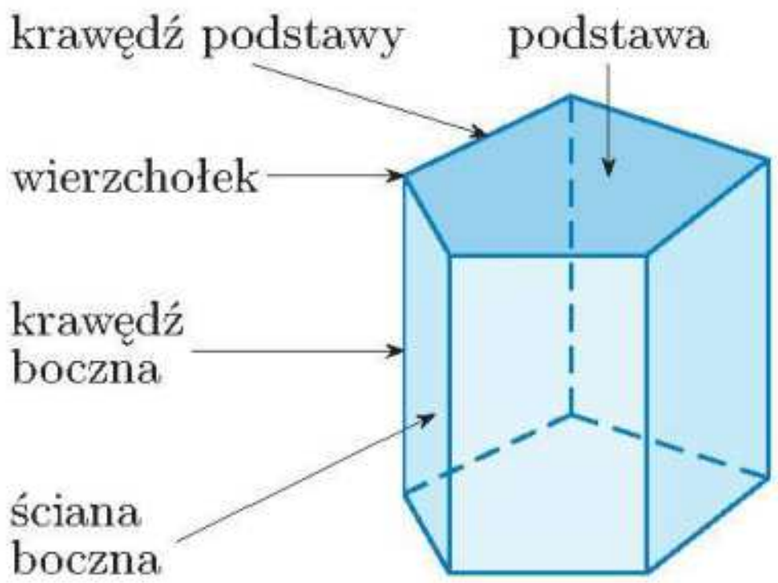
Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe sumie pól jego podstaw i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

Ćwiczenie 1

Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego, którego wysokość jest równa 30 cm, a podstawą jest trójkąt o bokach 6 cm, 8 cm i 10 cm.

W zależności od tego, jakim wielokątem jest podstawa graniastosłupa, mówimy o graniastosłupie trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym itd. Graniastosłup pięciokątny przedstawiony na rysunku obok ma 7 ścian (2 podstawy i 5 ścian bocznych), 15 krawędzi (10 krawędzi podstawy i 5 krawędzi bocznych) oraz 10 wierzchołków.



Ćwiczenie 2

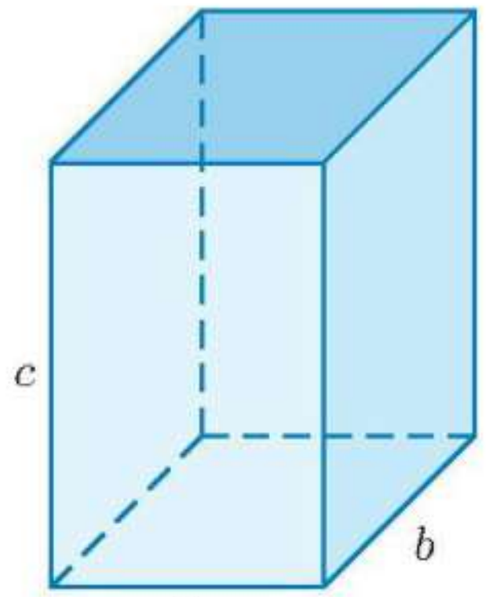
Podaj liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków graniastosłupa:
a) trójkątnego, b) czworokątnego, c) sześciokątnego.

Ćwiczenie 3

Czy istnieje graniastosłup, którego liczba krawędzi jest równa: a) 21 b) 25?

Graniastosłup prosty, którego podstawą jest prostokąt, nazywamy **prostopadłościanem**.

Uwaga. Za podstawę prostopadłościanu możemy przyjąć jego dowolną ścianę.



Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach a, b, c opisuje wzór:

$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc$$

Ćwiczenie 4

Długości krawędzi podstawy prostopadłościanu są równe 4 cm i 6 cm. Oblicz wysokość tego prostopadłościanu, jeśli wiadomo, że jego:

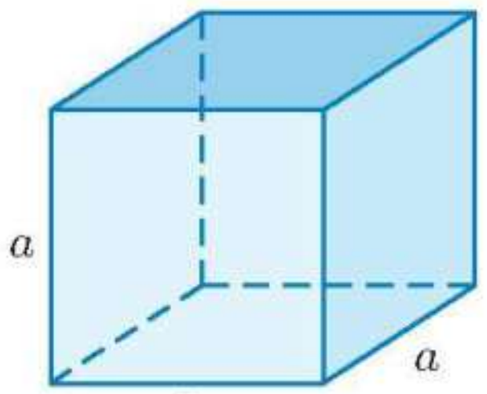
a) pole powierzchni całkowitej wynosi 100 cm^2,

b) pole powierzchni bocznej stanowi 60% pola powierzchni całkowitej.

Prostopadłościan o wszystkich krawędziach równych nazywamy **sześcianem**. Pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi a jest równe $6a^2$.

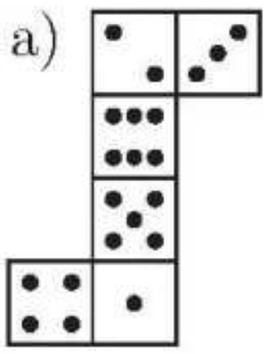
Ćwiczenie 5

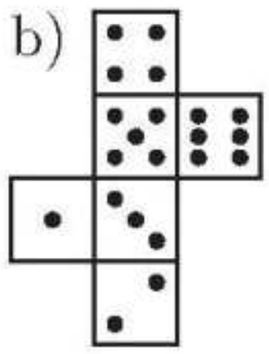
Do wykonania modelu sześcianu zużyto 1620 cm^2 kartonu, z czego 20% stanowiły zakładki. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

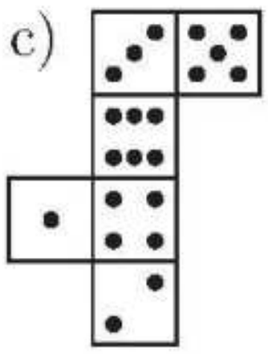


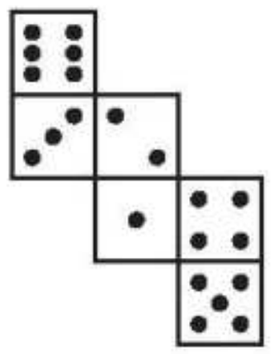
Ćwiczenie 6

Suma oczek znajdujących się na przeciwległych ścianach sześciennej kostki do gry jest równa 7. Czy przedstawiona siatka może być siatką tej kostki?

a) 

b) 

c) 

d) 

Graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny, nazywamy **prawidłowym**.

D Ćwiczenie 7

Wymiary dwóch graniastosłupów prawidłowych, trójkątnego i sześciokątnego, podano na rysunku obok. Uzasadnij, że pole powierzchni całkowitej jednego z tych graniastosłupów jest o 50% większe od pola powierzchni całkowitej drugiego.

Zadania

1. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego o wysokości 8 cm, którego podstawą jest:

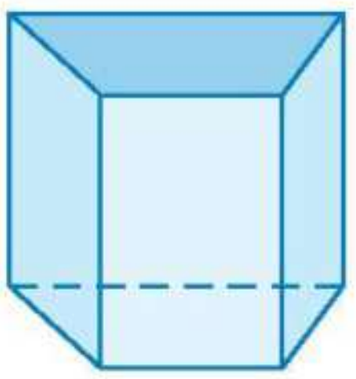
a) romb o kącie ostrym 30° i boku długości 12 cm,

b) trójkąt równoramienny o kącie 120° i ramionach długości 6 cm.

2. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny o bokach długości 12 cm, 5 cm, 6 cm i 5 cm. Oblicz wysokość tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że:

a) jego pole powierzchni bocznej jest równe $560\ \text{cm}^2$,

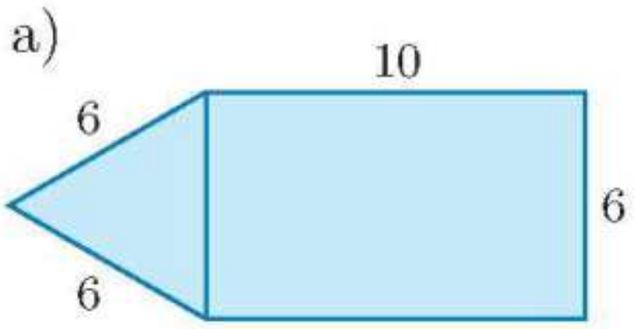
b) jego pole powierzchni całkowitej jest równe $492\ \text{cm}^2$.



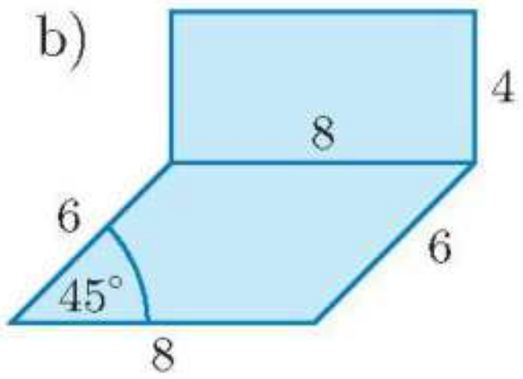
3. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o obwodzie 24 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa przeciwprostokątnej podstawy, a pole największej ściany bocznej jest równe $100\ \text{cm}^2$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego wielościanu.

4. Na rysunku poniżej przedstawiono fragment siatki graniastosłupa prostego. Narysuj całą siatkę tego graniastosłupa i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.

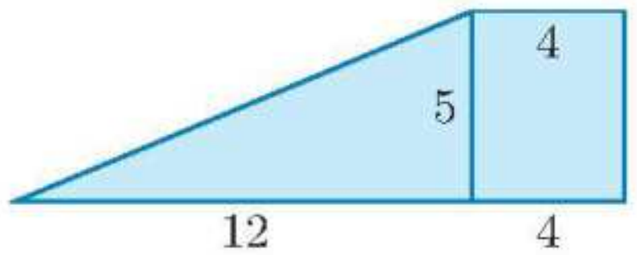
a)



b)



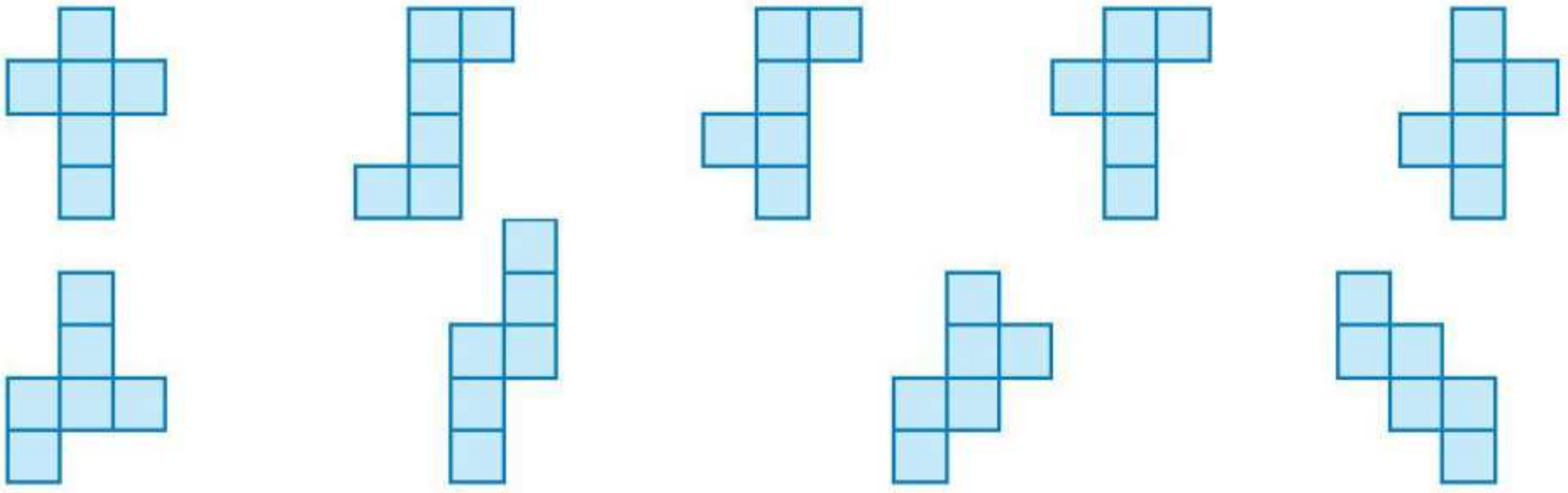
c)



5. Narysuj siatkę graniastosłupa prawidłowego n-kątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 2 cm, i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.

a) $n = 3$ b) $n = 4$ c) $n = 6$

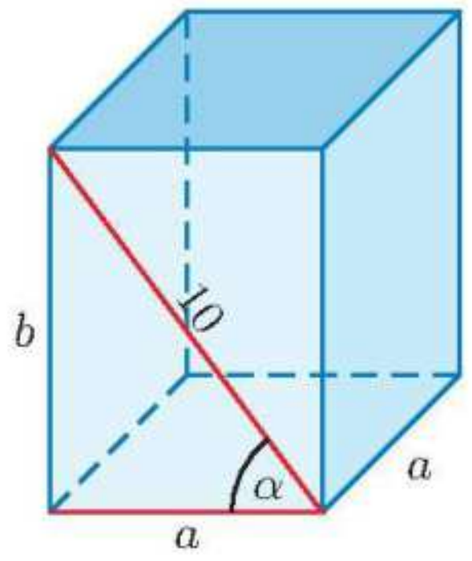
6. Istnieje 11 różnych siatek, z których można złożyć model sześcianu. Poniżej przedstawiono 9 z nich. Narysuj dwie brakujące siatki sześcianu.



2.3. Odcinki w graniastosłupach

Przykład 1

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10 cm i tworzy z krawędzią podstawy kąt α taki, że $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.



Zauważmy, że $\cos\alpha = \frac{a}{10}$, więc $a = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$ [cm].

$$b = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ [cm]}$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej: $P_b = 4ab = 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$ [cm^2].

Ćwiczenie 1

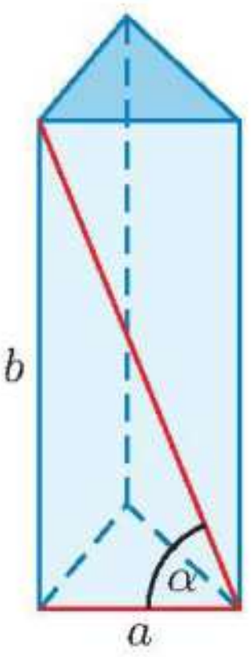
Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 25 cm i tworzy z krawędzią boczną kąt α taki, że $\sin\alpha = 0{,}28$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Ćwiczenie 2

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią podstawy kąt α taki, że $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że:

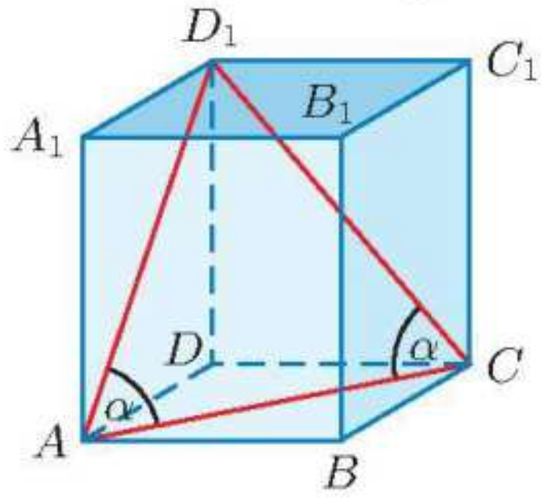
a) $a = 6$ cm,

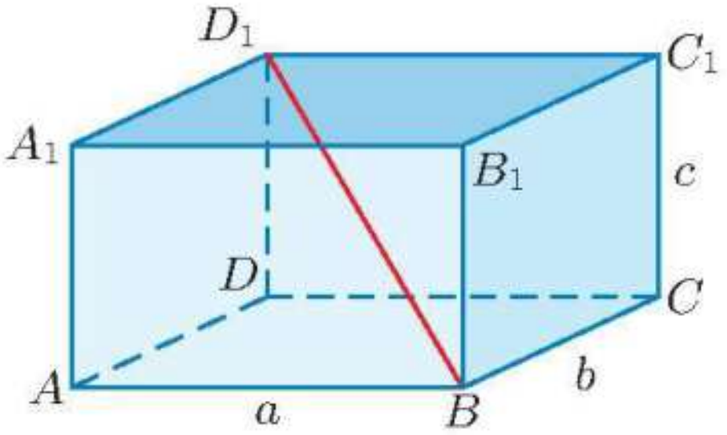
b) $b = 6$ cm.



Ćwiczenie 3

Przekątne AD_1 i CD_1 ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego czworokątnego (rysunek obok) mają długości równe 8 cm. Tworzą one z przekątną podstawy kąt α taki, że $\cos\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.





Przekątną graniastosłupa nazywamy taki odcinek łączący dwa jego wierzchołki, który nie jest zawarty w żadnej ścianie graniastosłupa.

Prostopadłościan ma cztery przekątne.
Na rysunku obok są to odcinki:

$$BD_1,\ AC_1,\ CA_1 \text{ i } DB_1$$

Zwróć uwagę na to, że przekątna ściany bocznej graniastosłupa nie jest przekątną graniastosłupa oraz że graniastosłup trójkątny nie ma przekątnych.

Ćwiczenie 4

a) Uzasadnij twierdzenie podane obok.

b) Uzasadnij, że przekątna sześcianu o krawędzi a ma długość równą $a\sqrt{3}$.

> Przekątna prostopadłościanu o krawędziach a, b, c ma długość równą:
> $$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Ćwiczenie 5

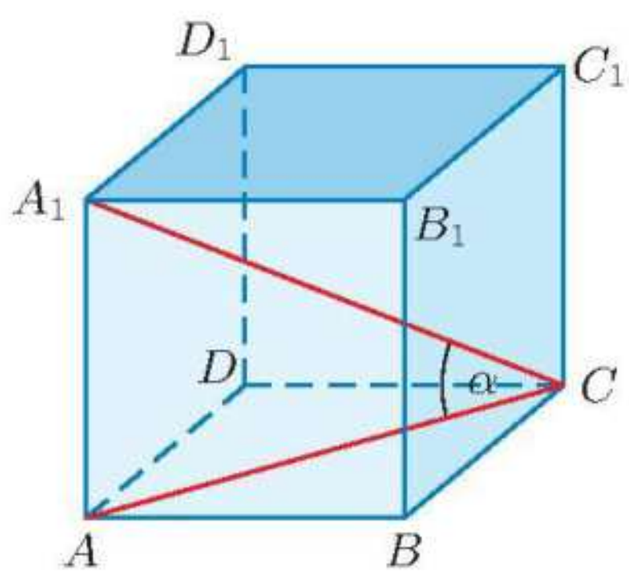
Oblicz długości przekątnych wszystkich ścian oraz długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach:

a) 5, 9, 12,

b) 6, 8, 15.

Ćwiczenie 6

W sześcianie z tego samego wierzchołka poprowadzono jego przekątną i przekątną podstawy (rysunek obok). Tworzą one kąt α. Oblicz cosinus tego kąta oraz jego przybliżoną miarę z dokładnością do 1°.



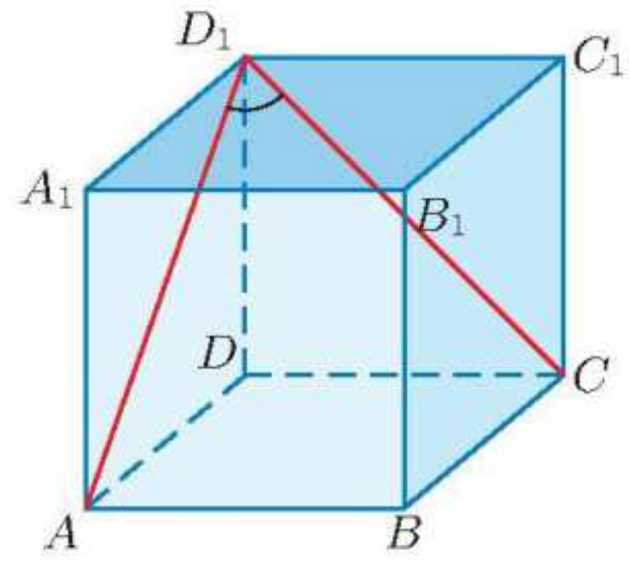
Zadania

1. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 5 cm, a przekątna jego ściany bocznej tworzy:

a) z krawędzią podstawy kąt 30°,

b) z krawędzią boczną kąt 30°,

c) z przekątną graniastosłupa kąt 30°.



2. Kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równy 60° (rysunek obok). Wykaż, że graniastosłup ten jest sześcianem.

3. Oblicz długość przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 cm, a przekątna ta tworzy:

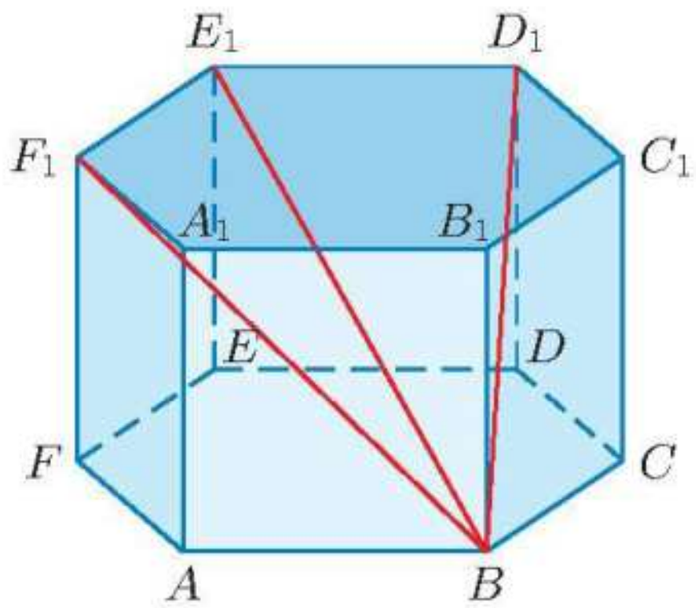
a) z przekątną podstawy kąt 45°,

b) z jedną z krawędzi bocznych kąt 30°,

c) z przekątną jednej ze ścian bocznych kąt 30°.

4. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $4\sqrt{6}$, a jego wysokość jest równa 8. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

5. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego wszystkie krawędzie mają długość 4 cm. Oblicz długości przekątnych tego graniastosłupa (rysunek obok).



6. Dłuższa przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 10 cm, a jego wysokość jest równa 5 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

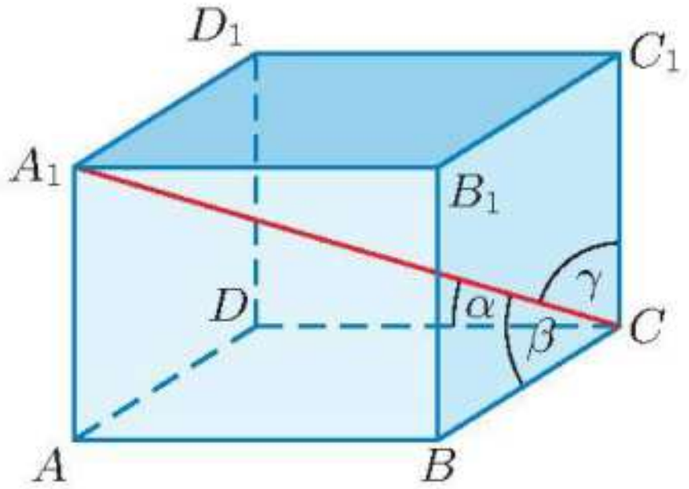
7. Różnica długości przekątnych graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wszystkie krawędzie są równe, wynosi 2 cm. Oblicz długość krawędzi tego graniastosłupa.

8. Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu, którego przekątne ścian mają długości 10 cm, 17 cm, $3\sqrt{29}$ cm.

D **9.** Przekątna A_1C prostopadłościanu (rysunek obok) tworzy z krawędziami wychodzącymi z wierzchołka C kąty α, β i γ. Wykaż, że:

a) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$,

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.



10. Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest trzy razy większe od jego pola powierzchni bocznej. Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątną tego graniastosłupa a jego krawędzią boczną.

11. Wyznacz pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość a, a dłuższa przekątna jest trzy razy dłuższa od krótszej przekątnej podstawy.

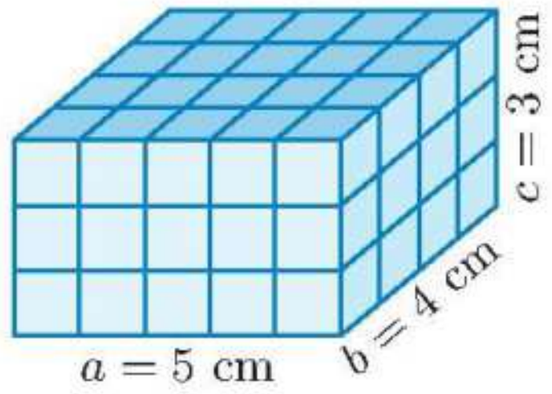
D **12.** Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym α. Wszystkie krawędzie tego graniastosłupa mają długość a. Uzasadnij, że jego krótsza przekątna ma długość równą $a\sqrt{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

D **13.** Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość d i tworzy z krawędzią podstawy kąt α. Uzasadnij, że pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa jest równe $4d^2\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

14. Liczba przekątnych graniastosłupa prawidłowego n-kątnego jest o 24 większa od liczby przekątnych jego wszystkich ścian bocznych. Oblicz n.

2.4. Objętość graniastosłupa

Objętość prostopadłościanu o wymiarach a, b, c wyraża się za pomocą wzoru: $V = abc$.



Przykład 1

Przedstawiony na rysunku powyżej prostopadłościan ma objętość równą $5\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 60\text{ cm}^3$. Zauważ, że można go podzielić na 60 sześcianów o objętości 1 cm^3 każdy.

Ćwiczenie 1

Dane są prostopadłościany P_1 i P_2 o wymiarach:

P_1: $15\text{ cm} \times 2\text{ dm} \times 10\text{ cm}$, P_2: $0{,}12\text{ m} \times 1{,}2\text{ dm} \times 22\text{ cm}$

Który z nich ma większą objętość?

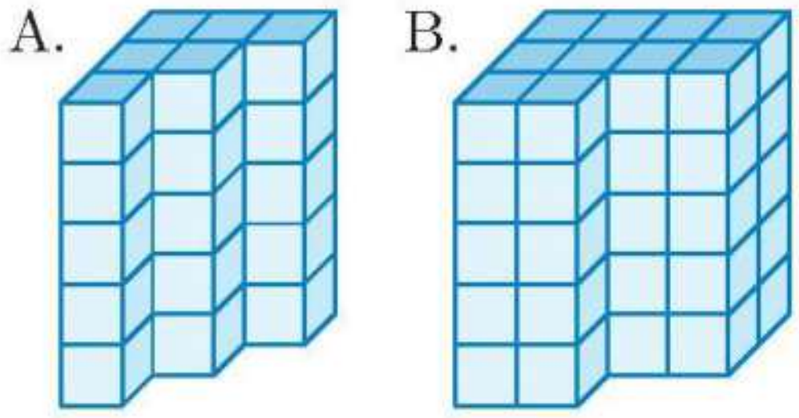
Ćwiczenie 2

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe $1{,}5\text{ dm}^2$. Oblicz objętość tego sześcianu.

Objętość sześcianu o krawędzi a wyraża się za pomocą wzoru: $V = a^3$.

Ćwiczenie 3

Na rysunkach przedstawiono graniastosłupy ułożone z sześciennych kostek o objętości 1 cm^3 każda. Oblicz objętości tych graniastosłupów.



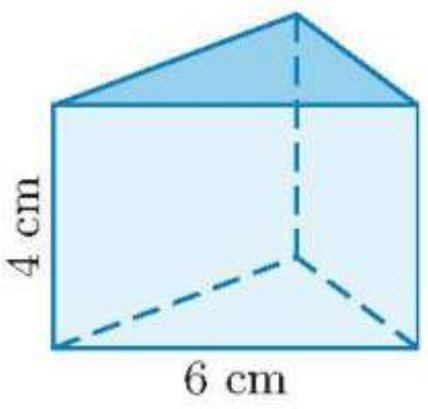
Objętość dowolnego graniastosłupa wyraża się za pomocą wzoru:

$$V = P_p \cdot H$$

gdzie P_p jest polem podstawy graniastosłupa, a H – jego wysokością.

Przykład 2

Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości 4 cm.



Obliczamy pole podstawy:

$$P_p = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ [\text{cm}^2]$$

Zatem objętość:

$$V = P_p \cdot H = 9\sqrt{3} \cdot 4 = 36\sqrt{3}\ [\text{cm}^3]$$

Ćwiczenie 4

Wyznacz wzór na objętość graniastosłupa prawidłowego:
a) trójkątnego, b) sześciokątnego,
którego wszystkie krawędzie są równe i mają długość a.

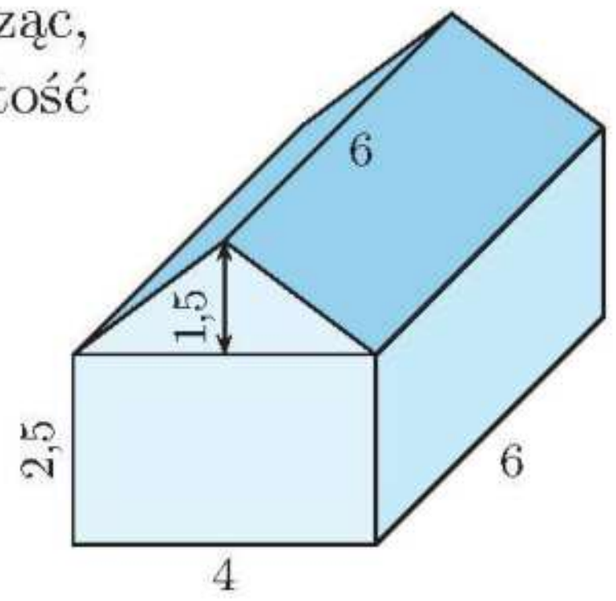
Ćwiczenie 5

a) Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 4 cm, którego pole powierzchni bocznej jest równe 180 cm^2.

b) Pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe sumie pól jego podstaw. Wiedząc, że krawędź podstawy ma długość 5 cm, oblicz objętość tego graniastosłupa.

Ćwiczenie 6

Oblicz kubaturę (objętość) budynku przedstawionego obok na schematycznym rysunku. Wymiary tego budynku podano w metrach.



Zadania

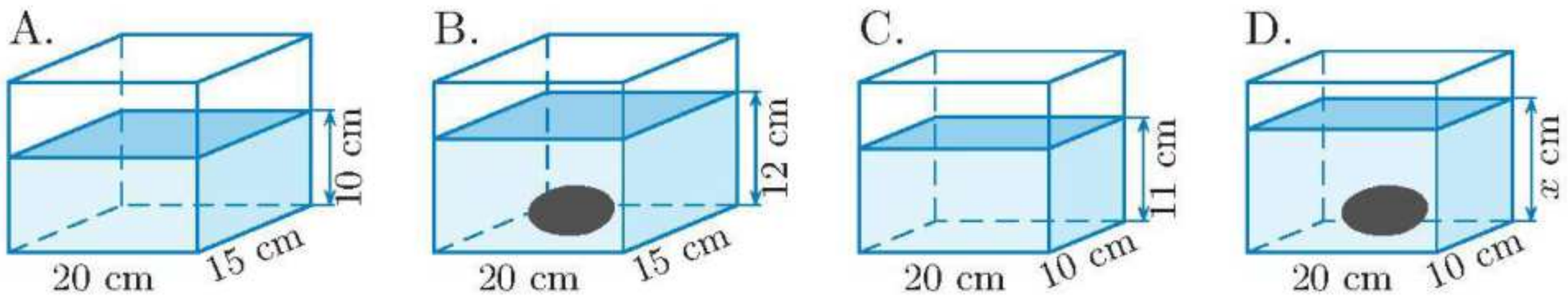
1. a) Wysokość graniastosłupa prostego jest równa 7 cm, a jego podstawą jest trapez o bokach długości 4 cm, 4 cm, 4 cm i 8 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

b) Podstawy trapezu prostokątnego mają długości a i $2a$, a jego kąt ostry jest równy α. Wyznacz objętość graniastosłupa prostego o wysokości $3a$, którego podstawą jest ten trapez.

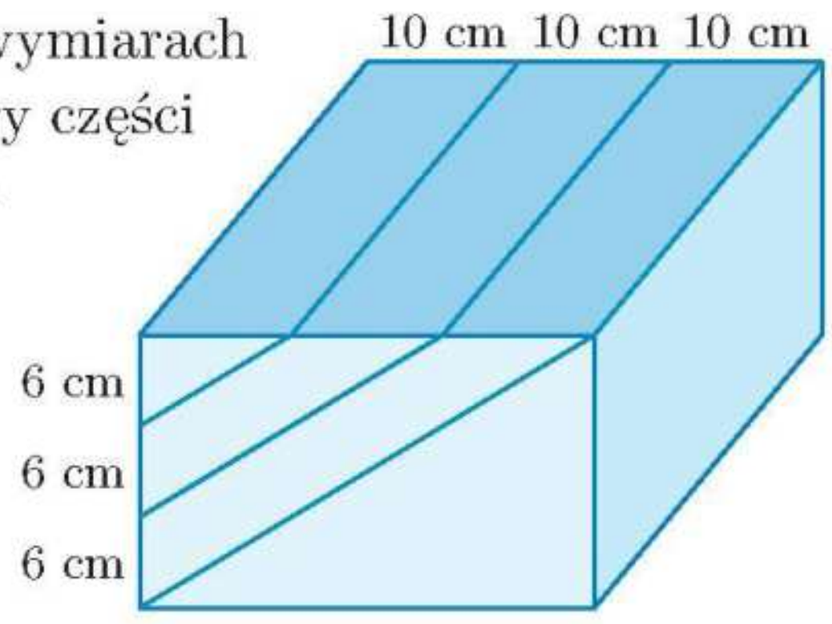
2. a) Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 9 cm, a pole jego podstawy jest równe 16 cm^2. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

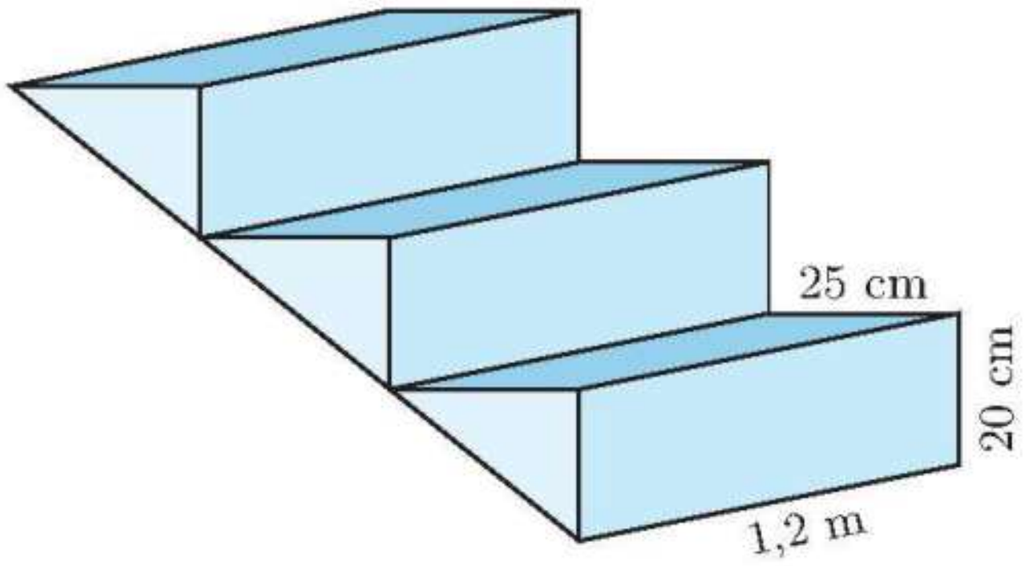
b) Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość d i tworzy z krawędzią podstawy kąt α. Wyznacz objętość tego graniastosłupa. Jakie wartości może przyjmować α?

3. Do dwóch akwariów (rysunki A i C) wrzucono kolejno ten sam kamień (rysunki B i D). Za każdym razem kamień był całkowicie zanurzony w wodzie. Oblicz x.



4. Prostopadłościenny drewniany klocek o wymiarach $18\text{ cm} \times 30\text{ cm} \times 50\text{ cm}$ przecięto na cztery części mające kształty graniastosłupów tak, jak przedstawiono na rysunku obok. Oblicz objętość każdej z otrzymanych części.





5. Schody składają się z 15 jednakowych betonowych stopni o wymiarach podanych na rysunku obok. Oblicz objętość betonu zużytego na ich wykonanie.

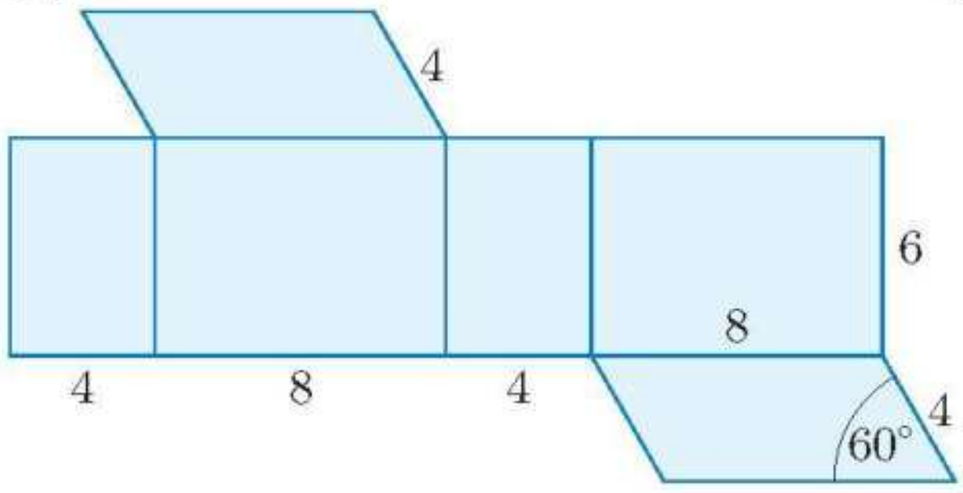
6. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt, którego dwa boki mają długości $3a$ i $a\sqrt{3}$, a miara kąta między nimi wynosi 30°. Wyznacz objętość tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że jego pole powierzchni całkowitej jest dwa razy większe niż pole powierzchni bocznej.

7. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość b, a przekątne jego sąsiednich ścian bocznych poprowadzone z jednego wierzchołka tworzą kąt 45°. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

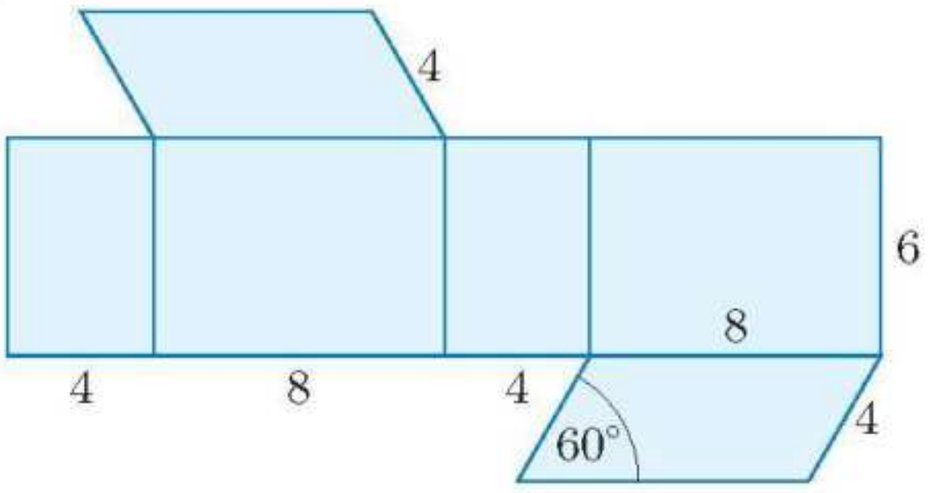
8. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym α. Przekątna ściany bocznej ma długość d i tworzy z krawędzią podstawy kąt β. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

9. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono siatkę graniastosłupa? Oblicz objętość tego graniastosłupa.

A.



B.

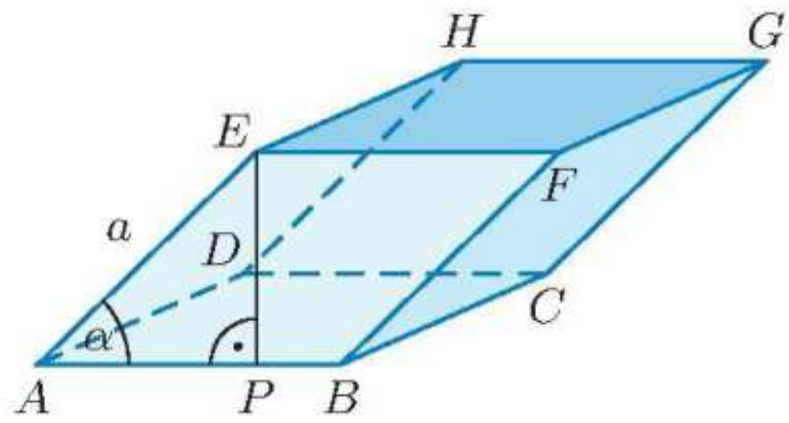


10. Objętość graniastosłupa prostego, którego podstawą jest romb o kącie ostrym 30°, jest równa 27 cm^3, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 36 cm^2. Narysuj siatkę tego graniastosłupa.

Warto wiedzieć

Graniastosłupy pochyłe

Ściany boczne $ABFE$ i $DCGH$ graniastosłupa pochyłego przedstawionego na rysunku obok są rombami o boku a i kącie ostrym α. Podstawy oraz pozostałe ściany boczne tego graniastosłupa są kwadratami. Odcinek EP jest jego wysokością.



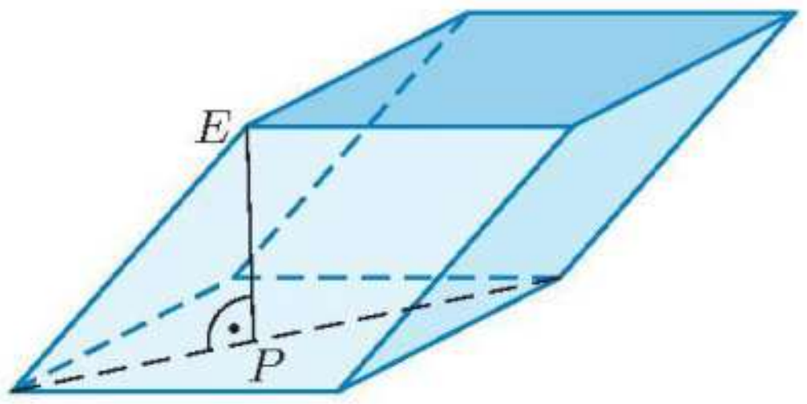
$|EP| = a\sin\alpha$, zatem objętość tego graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot h = a^2 \cdot a\sin\alpha = a^3\sin\alpha$$

Zauważ, że objętość tego graniastosłupa możemy również wyznaczyć, przyjmując, że jego podstawami są romby $ABFE$ i $DCGH$. Wówczas otrzymujemy:

$$V = P'_p \cdot h' = a^2\sin\alpha \cdot a = a^3\sin\alpha$$

Innym przykładem graniastosłupa pochyłego jest **romboedr**, czyli graniastosłup, którego wszystkie ściany są przystającymi rombami. Na rysunku obok przedstawiono romboedr, którego wysokością jest odcinek EP.



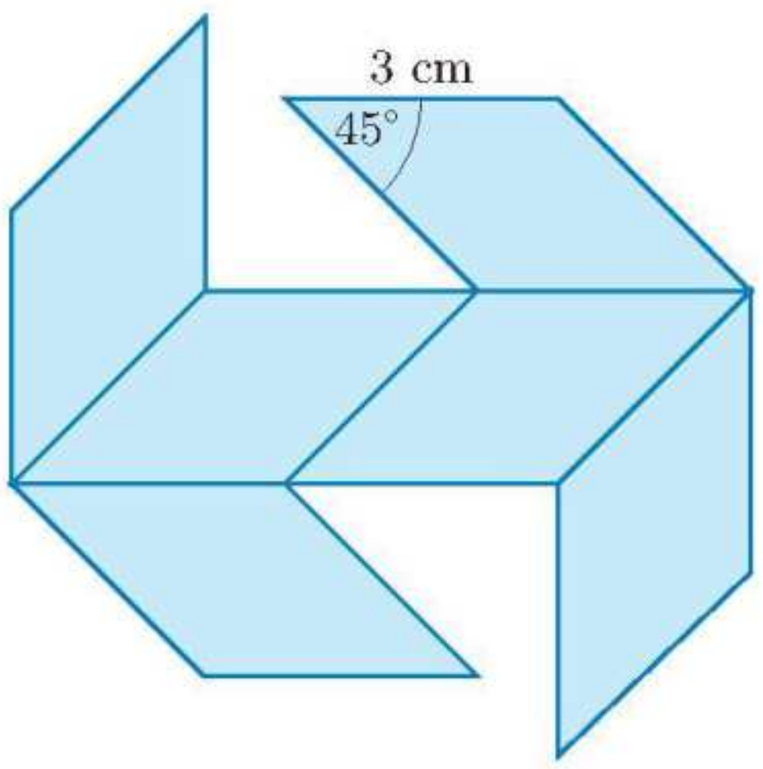
Zauważ, że wysokość ściany bocznej nie jest wysokością romboedru.

***1.** a) Oblicz wysokość romboedru, którego każda ściana jest rombem o boku 4 i kącie ostrym $60°$.

D b) Wyznacz wysokość romboedru, którego każda ściana jest rombem o boku a i kącie ostrym α. Uzasadnij, że objętość tego romboedru dana jest wzorem:

$$V = a^3(1-\cos\alpha)\sqrt{1+2\cos\alpha}$$

2. Na rysunku obok przedstawiono siatkę romboedru, którego ścianami są romby o boku długości 3 cm i kącie ostrym $45°$.



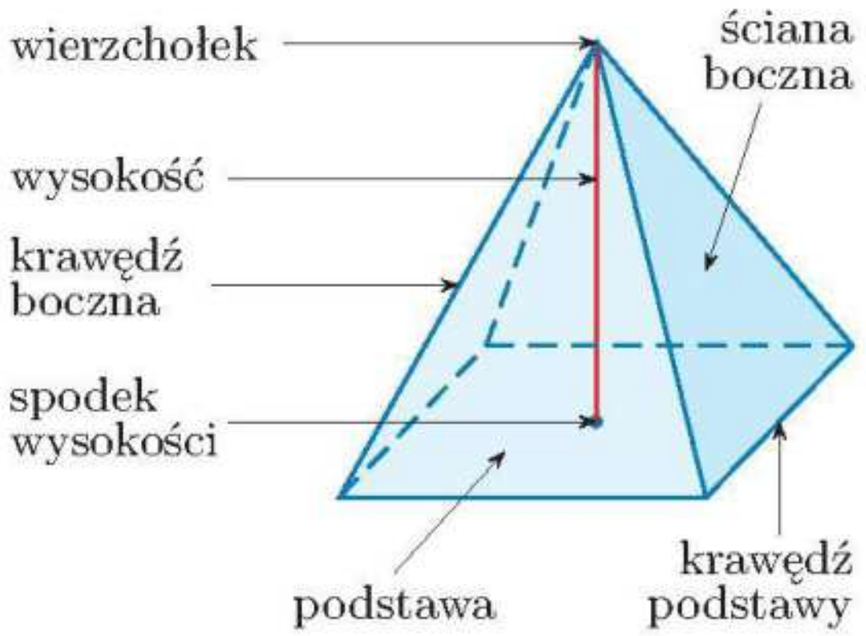
a) Oblicz pole powierzchni całkowitej tego romboedru.

b) Korzystając ze wzoru podanego w zadaniu 1, oblicz objętość tego romboedru z dokładnością do 0,01 cm^3.

2.5. Ostrosłupy

Ostrosłup to wielościan, którego jedna ściana, zwana **podstawą**, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, nazywane **ścianami bocznymi**, są trójkątami o wspólnym wierzchołku, zwanym **wierzchołkiem ostrosłupa**.

Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa, a drugim – rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy, zwany **spodkiem wysokości**.



Ostrosłup nazywamy trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym itd. – w zależności od tego, jakim wielokątem jest jego podstawa. Na rysunku przedstawiono ostrosłup czworokątny.

Definicja

Ostrosłup nazywamy **prostym**, jeśli wszystkie jego krawędzie boczne mają tę samą długość.
Jeśli podstawą ostrosłupa prostego jest wielokąt foremny, to taki ostrosłup nazywamy **prawidłowym**.

Ćwiczenie 1

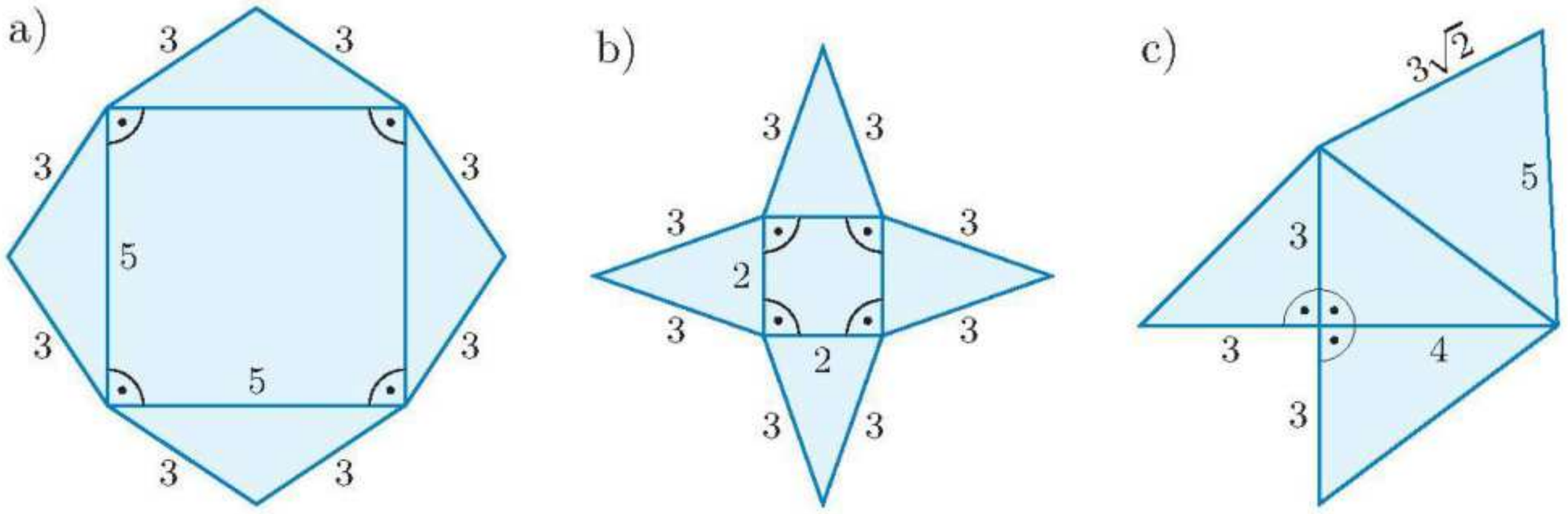
Uzasadnij, że w ostrosłupie prostym spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe sumie pola jego podstawy i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = P_p + P_b$$

Ćwiczenie 2

Czy na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa prostego? Jeśli tak, to oblicz jego pole powierzchni całkowitej.



Ćwiczenie 3

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego ściany boczne są trójkątami prostokątnymi, a krawędź podstawy ma długość 4 cm.

Ćwiczenie 4

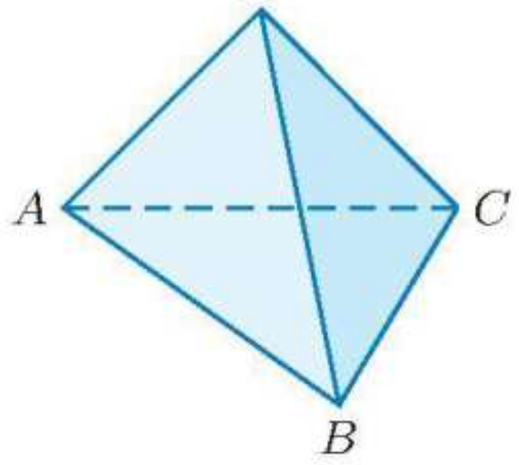
Podstawa ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma pole równe $25\sqrt{3}$. Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa, jeśli jego pole powierzchni całkowitej jest siedmiokrotnie większe od pola podstawy.

Kątem płaskim przy wierzchołku ostrosłupa prawidłowego nazywamy kąt między ramionami trójkąta równoramiennego będącego ścianą boczną tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 5

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6 cm, a kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 60°.

Ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**.



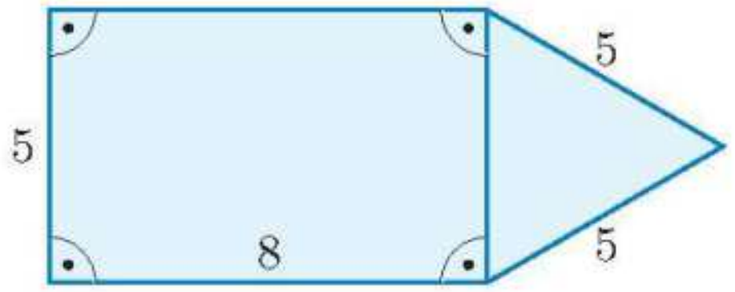
Ćwiczenie 6

a) Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego, którego krawędź ma długość 5 cm.

b) Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi czworościanu foremnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $49\sqrt{3}$ cm^2.

Zadania

1. Na rysunku obok przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prostego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.



2. Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt o bokach długości 6 cm i 8 cm. Dwie spośród jego ścian bocznych są trójkątami równobocznymi. Oblicz wysokość tego ostrosłupa (rozpatrz dwa przypadki).

3. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 12 cm. Tworzy ona z wysokością ściany bocznej kąt α taki, że $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

4. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 8 cm^2, a jego ściany boczne są trójkątami równoramiennymi o kącie między ramionami 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

5. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią boczną tego ostrosłupa kąt α taki, że $\cos\alpha = 0{,}8$. Krawędź podstawy ma długość 3 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

6. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest trójkątem równoramiennym, w którym ramiona mają długość 2 cm, a kąt między nimi jest równy 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

7. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym suma długości jednej krawędzi podstawy i wysokości ściany bocznej jest równa s, a kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy ma miarę α. Wyznacz pole powierzchni bocznej tego wielościanu.

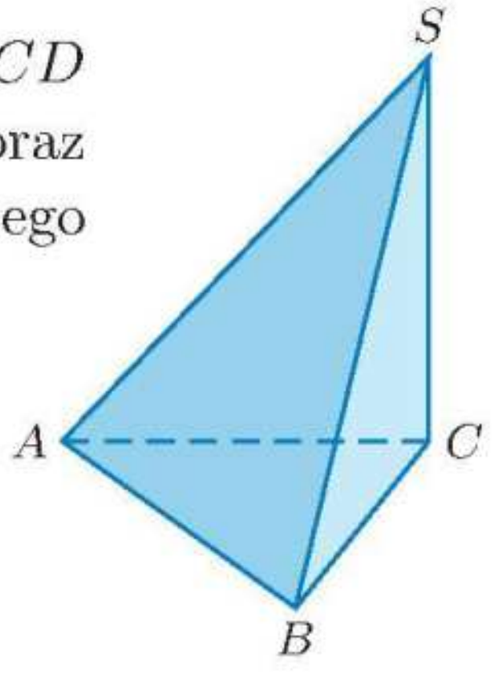
8. Wyznacz pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wysokość jest równa h, a kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 2α.

9. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość 8, a kąt między wysokościami sąsiednich ścian bocznych ma miarę 30°. Oblicz wysokość tego ostrosłupa oraz jego pole powierzchni całkowitej.

10. Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny, w którym wysokość ściany bocznej jest równa 9 cm. Różnica między polem koła opisanego na podstawie tego ostrosłupa a polem koła wpisanego w tę podstawę wynosi 8π cm^2. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

11. Podstawą ostrosłupa o wierzchołku S jest kwadrat $ABCD$ o boku a. Krawędź SA jest prostopadła do podstawy oraz $|SA| = a$. Wyznacz długości pozostałych krawędzi tego ostrosłupa oraz jego pole powierzchni całkowitej.

12. Dany jest ostrosłup trójkątny, w którym krawędź SC jest prostopadła do podstawy ABC (rysunek obok) oraz $|AB| = 5$, $|BC| = 3$, $|AC| = |SC| = 4$. Oblicz cosinusy kątów trójkąta ABS.



Szlify diamentów

Diamenty po oszlifowaniu często mają kształt wielościanu wypukłego.

Wielościan nazywamy wypukłym, jeśli każdy odcinek, którego końce są punktami tego wielościanu, jest cały w nim zawarty.

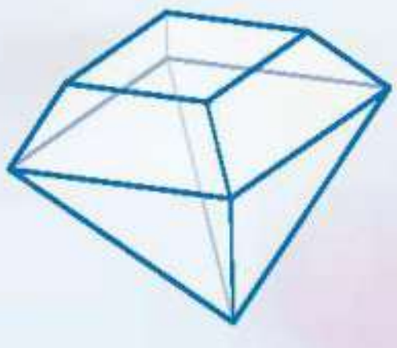


Na szkicach poniżej pokazano najwcześniejsze szlify diamentów w Europie.

Pierwsze szlify diamentów polegały na wygładzaniu naturalnych ścianek kryształów. Dopiero wynalezienie tarczy szlifierskiej pozwoliło na skośne ścinanie krawędzi diamentów i tworzenie tzw. fasetek, czyli symetrycznie rozmieszczonych ścianek.



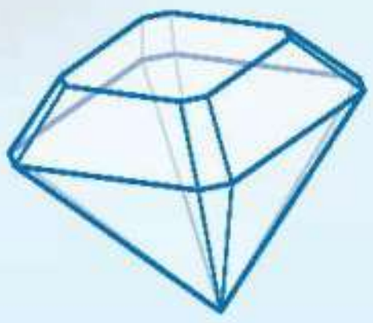
szpiczasty kamień
XIV w.



gruby kamień
XIV w.



cienki kamień
XIV w.



pojedyncze dobro
XV w.



szlif Mazarina
XVII w.



szlif Peruzziego
XVIII w.

Wzór Eulera

Dla dowolnego wielościanu wypukłego zachodzi zależność opisana tzw. wzorem Eulera:

$$s - k + w = 2$$

gdzie s oznacza liczbę ścian, k – liczbę krawędzi, w – liczbę wierzchołków.

1 Sprawdź prawdziwość wzoru Eulera dla wielościanów, których kształt mają pierwsze trzy szlify diamentów przedstawione na ilustracji.

2.6. Objętość ostrosłupa

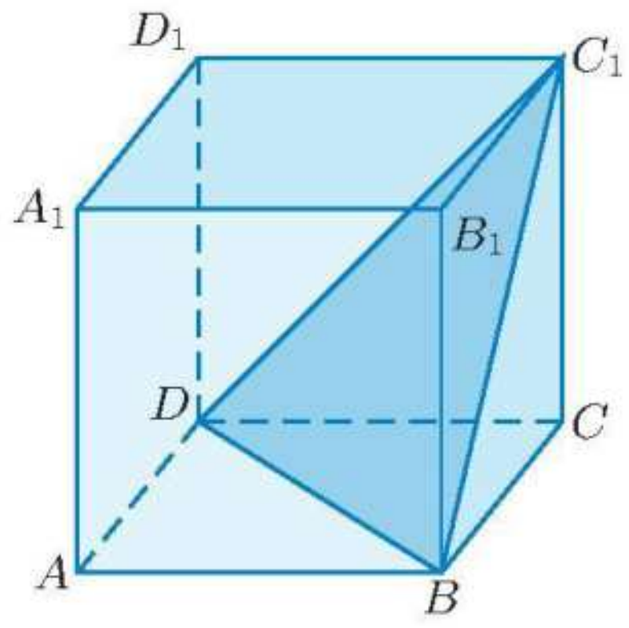
Objętość dowolnego ostrosłupa wyraża się za pomocą wzoru:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

gdzie P_p jest polem podstawy ostrosłupa, a H – jego wysokością.

Przykład 1

Sześcian o krawędzi długości 6 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki B, D i C_1 (rysunek obok). Oblicz objętości wielościanów otrzymanych w ten sposób.



Jednym z wielościanów jest ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt BDC o polu:

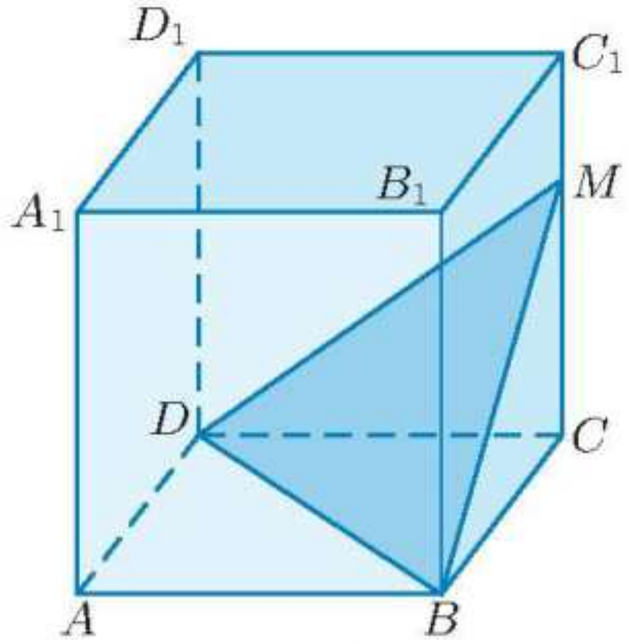
$$P_p = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Wysokość tego ostrosłupa $H = 6$ cm, zatem jego objętość $V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36$ [cm^3].

Natomiast objętość drugiego wielościanu jest równa $6^3 - 36 = 180$ [cm^3].

Ćwiczenie 1

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6 cm, a przekątna podstawy ma długość 8 cm. Oblicz objętości wielościanów powstałych z przecięcia graniastosłupa płaszczyzną BDM (rysunek obok), jeśli punkt M należy do krawędzi CC_1 i odcinek CM jest dwa razy dłuższy od odcinka MC_1.

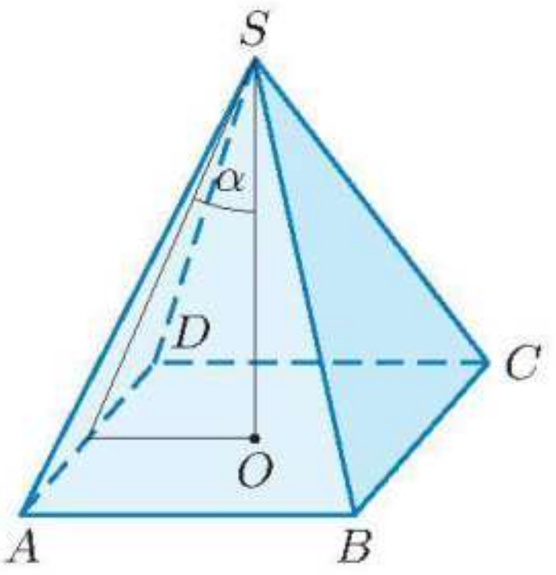


Ćwiczenie 2

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości równej 9, jeśli cosinus kąta między:

a) wysokością tego ostrosłupa a wysokością jego ściany bocznej jest równy 0,9 (rysunek obok),

b) wysokością tego ostrosłupa a jego krawędzią boczną jest równy 0,6.

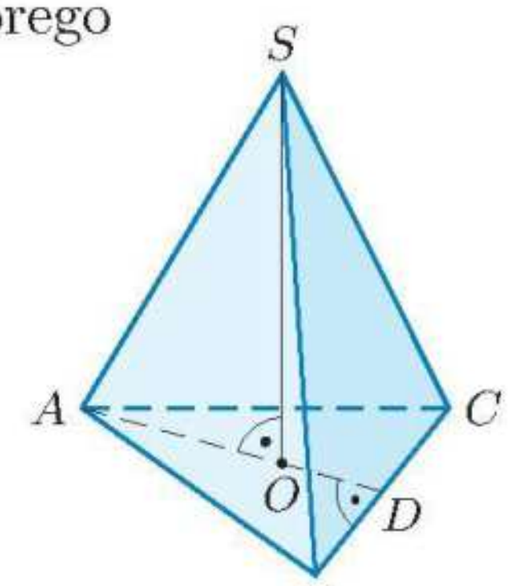


Ćwiczenie 3

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe P, a wysokość jego ściany bocznej jest równa h. Wyznacz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa.

Przykład 2

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 8 cm, a krawędź boczna – 10 cm.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok oraz długość krawędzi podstawy oznaczmy przez a.
Wówczas:

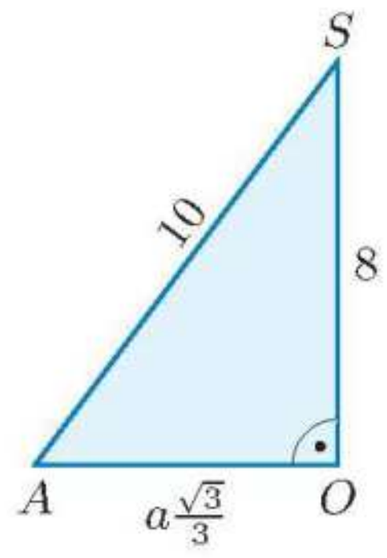
$$|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Spodek wysokości ostrosłupa – punkt O – jest środkiem okręgu opisanego na podstawie, zatem:

$$|AO| = \frac{2}{3}|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym dzieli jego wysokość w stosunku 1:2.

Rozpatrzmy trójkąt AOS. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy:



$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 8^2 = 10^2$$

$$\frac{a^2}{3} = 100 - 64$$

$$a^2 = 36 \cdot 3$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa:

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}\ [\text{cm}^2]$$

Zatem objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 27\sqrt{3} \cdot 8 = 72\sqrt{3}\ [\text{cm}^3]$.

Ćwiczenie 4

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 12 cm, a wysokość ściany bocznej – 15 cm.

Ćwiczenie 5

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 16 cm i tworzy:

a) z krawędzią boczną kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$,

b) z wysokością ściany bocznej kąt α taki, że $\cos\alpha = 0{,}8$.

Ćwiczenie 6

W ostrosłupie prawidłowym kąt płaski przy wierzchołku ma miarę α, a krawędź podstawy ma długość a. Wyznacz objętość takiego ostrosłupa o podstawie:

a) kwadratu,

b) trójkąta.

Wysokość czworościanu foremnego o krawędzi a wyraża się za pomocą wzoru:

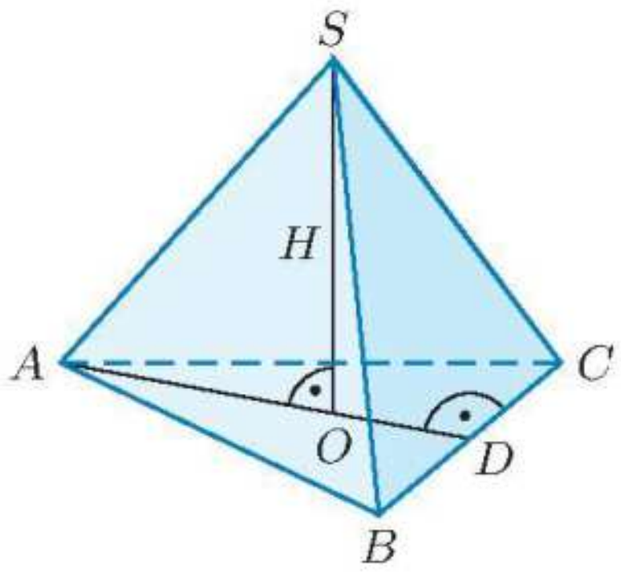
$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

a jego objętość – za pomocą wzoru:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Dowód

Na rysunku poniżej przedstawiono czworościan foremny o krawędzi a.



Niech punkt O będzie spodkiem wysokości czworościanu. Rozpatrzmy trójkąt prostokątny AOS.

Zauważmy, że $|AO| = \frac{2}{3}|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ oraz $|AS| = a$.

Zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa:

$$H^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2$$

Stąd $H = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ oraz objętość czworościanu:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Ćwiczenie 7

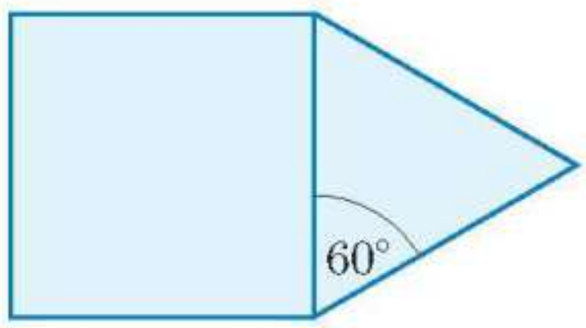
a) Oblicz objętość czworościanu foremnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $36\sqrt{3}$ cm^2.

b) Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o objętości równej $18\sqrt{2}$ cm^3.

Zadania

1. Wysokość ostrosłupa prawidłowego jest równa 15 cm, a obwód jego podstawy jest równy 24 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeżeli jest on:
a) czworokątny, b) trójkątny, c) sześciokątny.

2. Na rysunku obok przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $36(1+\sqrt{3})$ cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



3. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest trójkątem równoramiennym, w którym ramiona mają długość 13 cm i tworzą kąt α taki, że $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{12}{13}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

4. Wyznacz objętość ostrosłupa prostego, którego wysokość tworzy z krawędzią boczną kąt α, a podstawą jest prostokąt o bokach a i $2a$.

5. Pole ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe S, a kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 2α. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

6. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego ściany boczne są trójkątami prostokątnymi o przeciwprostokątnej równej 20 cm.

7. Suma długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 21, a jego wysokość jest równa $\sqrt{13}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

8. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wysokość jest dwa razy krótsza od wysokości jego ściany bocznej, a krawędź podstawy ma długość 6 cm.

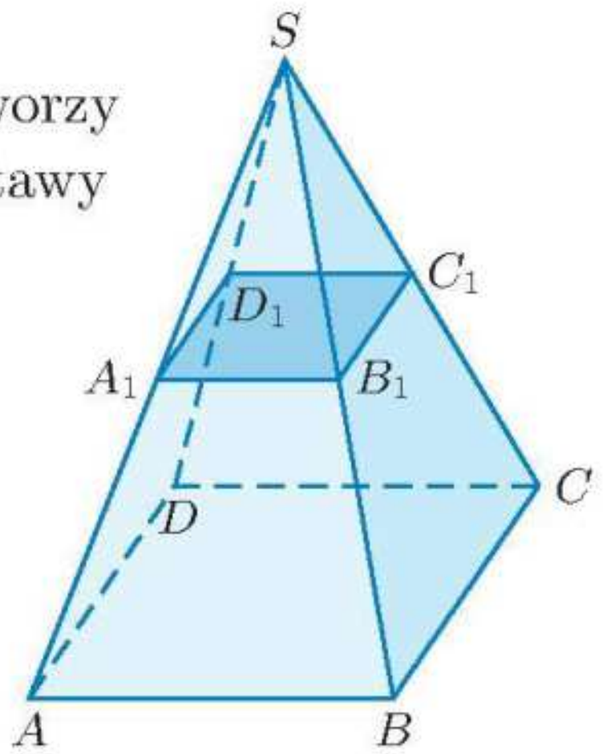
9. Oblicz objętość czworościanu foremnego, którego wysokość:
a) jest równa 2 cm,
b) jest o 1 cm krótsza od wysokości jego ściany.

10. Dany jest czworościan, w którym dwie skośne krawędzie mają długość 4 cm każda, a pozostałe krawędzie mają po 5 cm. Oblicz objętość tego czworościanu.

11. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest siedem razy większe od pola jego podstawy, a krawędź podstawy ma długość a. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

12. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z wysokością ściany bocznej kąt α. Krawędź podstawy ma długość a. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

D 13. Ostrosłup prawidłowy czworokątny o objętości V przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi bocznych (rysunek obok). Wykaż, że otrzymany ostrosłup ścięty $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ma objętość $\frac{7}{8}V$.

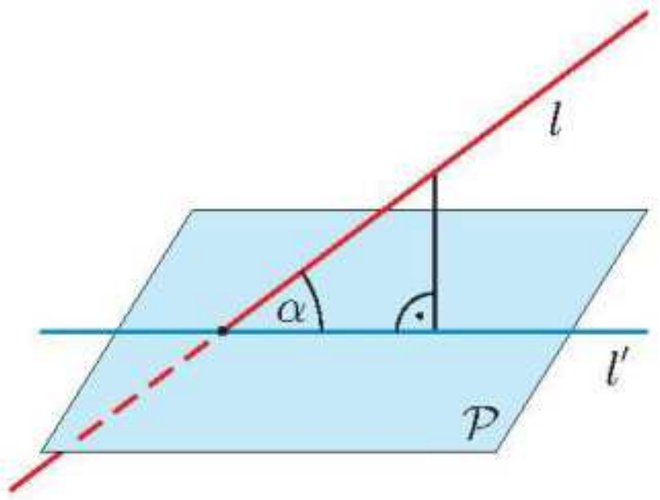


14. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 18 cm^2, a jego krawędź boczna ma długość 10 cm. Ostrosłup przecięto płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podstawy. Punkty, w których płaszczyzna przecięła krawędzie boczne ostrosłupa, są wierzchołkami kwadratu o polu 4 cm^2. Oblicz objętości wielościanów, na które płaszczyzna ta podzieliła ostrosłup.

*2.7. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

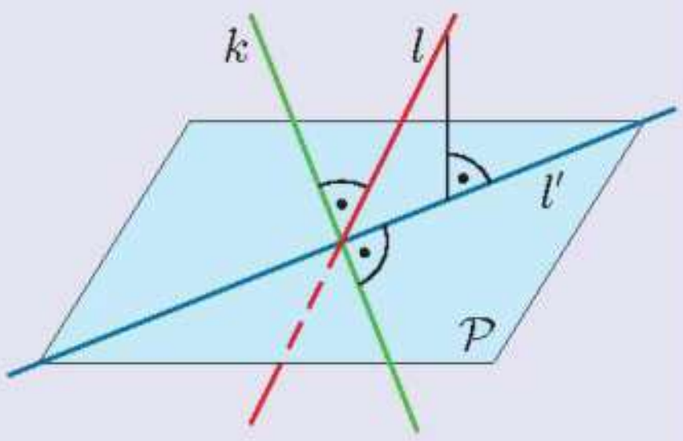
Prostą l, która ma z płaszczyzną $\mathcal{P}$ jeden punkt wspólny i nie jest do tej płaszczyzny prostopadła, nazywamy prostą **pochyłą** do płaszczyzny $\mathcal{P}$.

Prosta l, pochyła do płaszczyzny $\mathcal{P}$, tworzy z prostą l' będącą jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę $\mathcal{P}$ kąt $\alpha \in (0°; 90°)$ (rysunek obok).



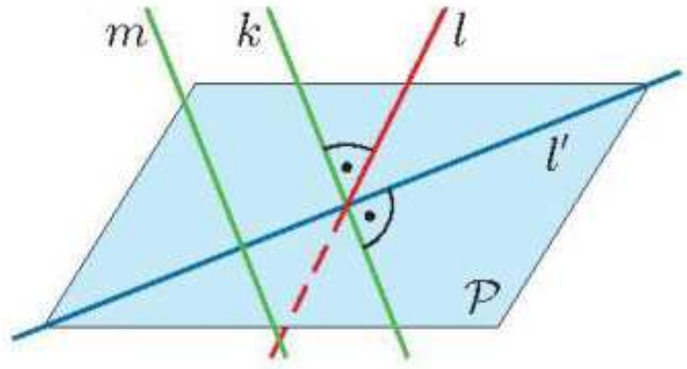
Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Prosta k zawarta w płaszczyźnie $\mathcal{P}$ jest prostopadła do prostej l pochyłej do płaszczyzny $\mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l' będącej rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę $\mathcal{P}$.



Dowód – patrz zadanie 9 na stronie 111.

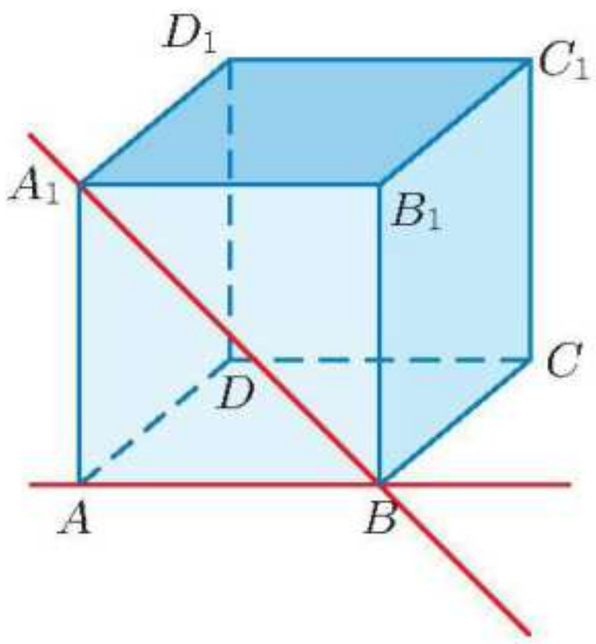
Zauważmy, że jeśli prosta k (rysunek obok) jest prostopadła do prostej l, to każda prosta równoległa do prostej k jest również prostopadła do prostej l.



Ćwiczenie 1

D a) Prosta AB jest rzutem prostokątnym prostej A_1B na płaszczyznę zawierającą podstawę $ABCD$ sześcianu (rysunek obok). Które proste przechodzące przez dwa wierzchołki tej podstawy są prostopadłe do prostej A_1B? Odpowiedź uzasadnij.

b) Które proste przechodzące przez dwa wierzchołki tego sześcianu są prostopadłe do prostej BD_1?



D Ćwiczenie 2

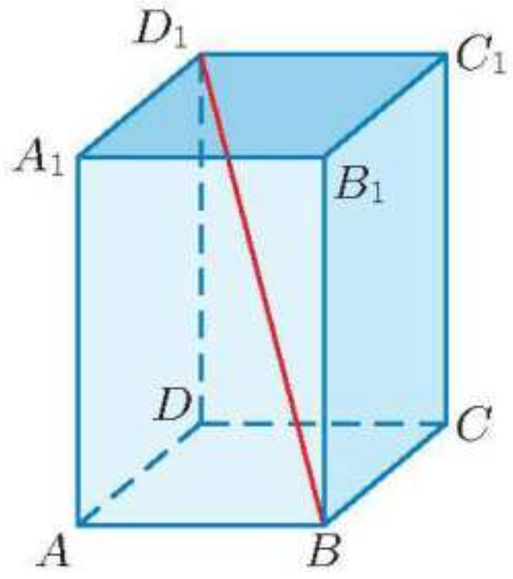
Uzasadnij, że prosta zawierająca krawędź boczną ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest prostopadła do prostej zawierającej jedną z przekątnych podstawy tego ostrosłupa.

Zadania

D **1.** Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny niebędący sześcianem (rysunek obok). Uzasadnij, że jego przekątna BD_1:

a) jest prostopadła do prostej AC,

b) nie jest prostopadła do prostej B_1C.



D **2.** Uzasadnij, że proste zawierające skośne krawędzie ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są prostopadłe.

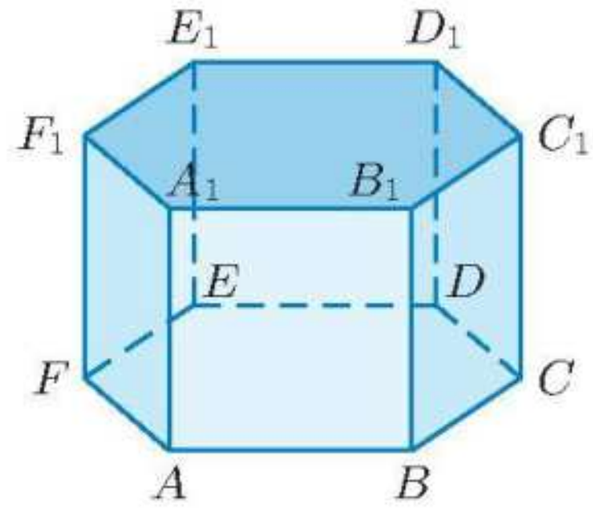
3. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$, a krawędź boczna AS jest jego wysokością.

D a) Wykaż, że wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami prostokątnymi.

b) Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest równa 3, a krawędź podstawy ma długość 4.

4. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny (rysunek obok). Rozpatrzmy proste wyznaczone przez dwa punkty wybrane spośród punktów A, B, C, D, E, F. Które z tych prostych są prostopadłe do prostej:

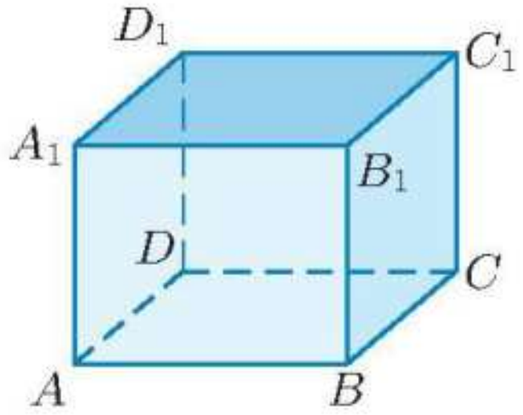
a) BF_1, b) BE_1, c) BC_1, d) BB_1?



5. Dany jest graniastosłup prawidłowy ośmiokątny. Ile jest prostych wyznaczonych przez dwa wierzchołki dolnej podstawy tego graniastosłupa oraz prostopadłych do jego najdłuższej przekątnej?

D **6.** Dany jest graniastosłup prawidłowy pięciokątny. Uzasadnij, że przekątna tego graniastosłupa nie jest prostopadła do żadnej prostej wyznaczonej przez dwa wierzchołki jego podstawy.

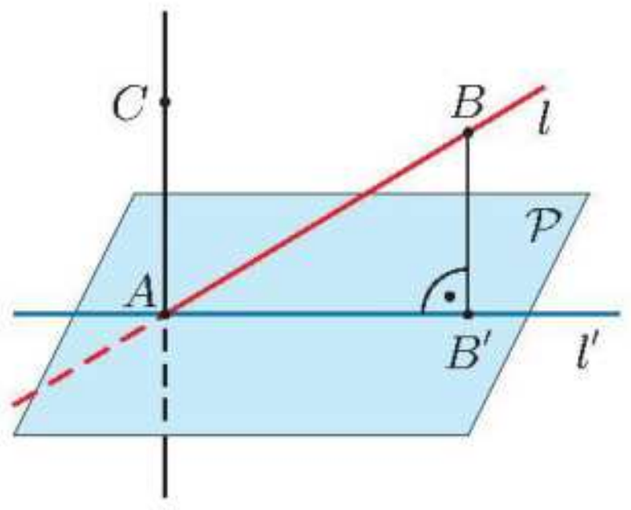
7. Dany jest prostopadłościan o krawędziach podstawy $|AB| = 5$ cm i $|BC| = 3$ cm oraz wysokości 4 cm (rysunek obok). Czy któreś dwie spośród przekątnych tego prostopadłościanu są do siebie prostopadłe?



8. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny o wysokości $\sqrt{3}$ cm i kącie ostrym 60°. Przekątna tego graniastosłupa jest prostopadła do jednej z krawędzi. Oblicz pole jego podstawy.

D **9.** Przeczytaj dowód twierdzenia o trzech prostych prostopadłych. Podaj, z jakiego twierdzenia korzystamy w miejscach oznaczonych ?.

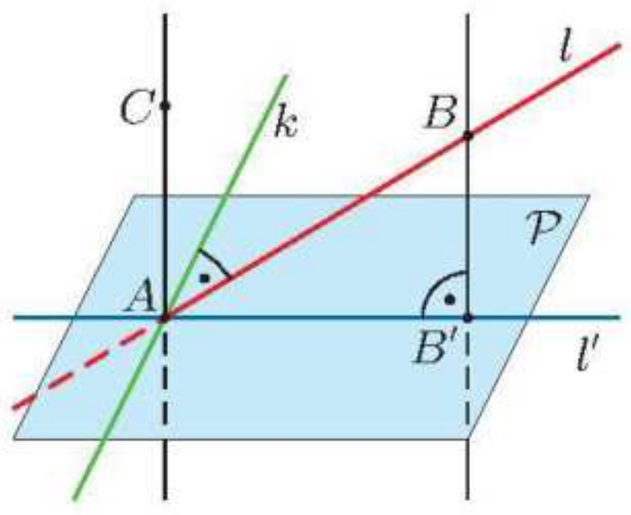
Rozpatrzmy prostą l pochyłą do płaszczyzny $\mathcal{P}$ i przecinającą ją w punkcie A oraz prostą l' będącą rzutem prostokątnym prostej l na tę płaszczyznę (rysunek obok).
Na prostej l wybieramy punkt B różny od punktu A. Niech B' będzie rzutem prostokątnym punktu B na płaszczyznę $\mathcal{P}$.



Przez punkt A prowadzimy prostą AC prostopadłą do płaszczyzny $\mathcal{P}$ (zauważmy, że proste AC i BB' są równoległe).

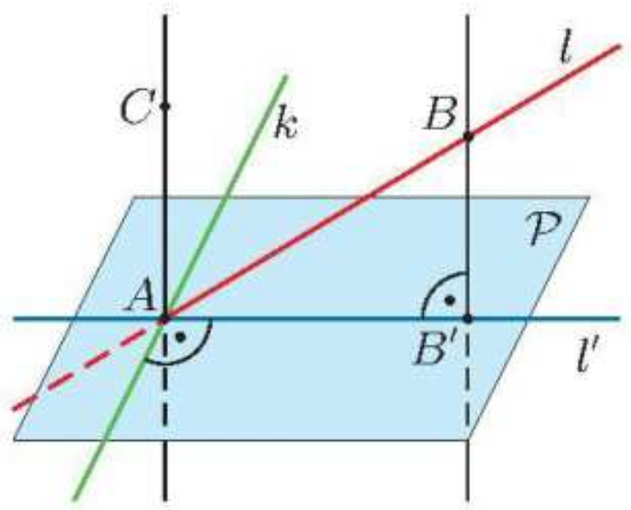
- Zakładamy, że prosta k zawarta w płaszczyźnie $\mathcal{P}$ jest prostopadła do prostej l (rysunek poniżej) i pokażemy, że jest wtedy prostopadła do prostej l'.

Prosta k jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych zawartych w płaszczyźnie, do której należą punkty A, B, B' i C – są to proste AB i AC. Zatem na podstawie twierdzenia ?, prosta k jest prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie, w szczególności do prostej l'.

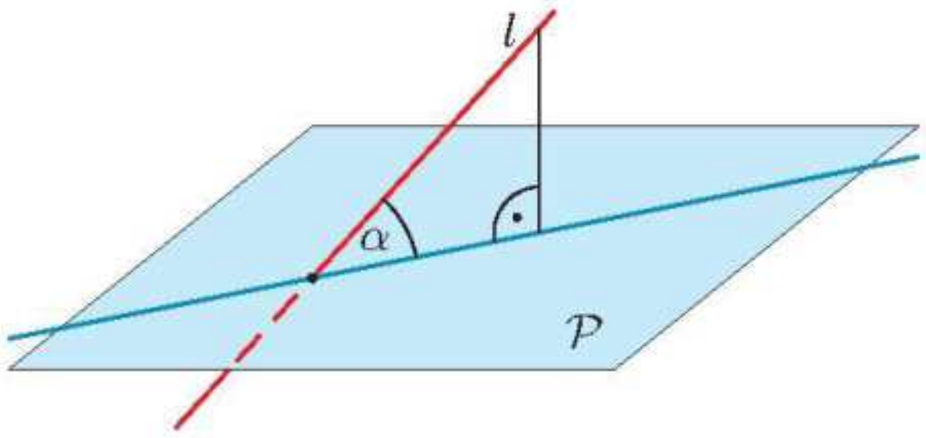


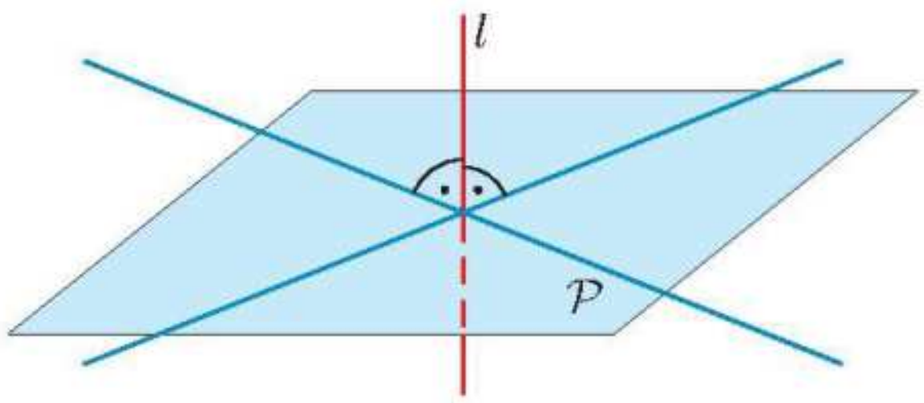
- Zakładamy, że prosta k zawarta w płaszczyźnie $\mathcal{P}$ jest prostopadła do prostej l' (rysunek poniżej) i pokażemy, że jest wtedy prostopadła do prostej l.

Prosta k jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych zawartych w płaszczyźnie, do której należą punkty A, B', B i C – są to proste AB' i AC. Zatem na podstawie twierdzenia ?, prosta k jest prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie, w szczególności do prostej l.



2.8. Kąt między prostą a płaszczyzną

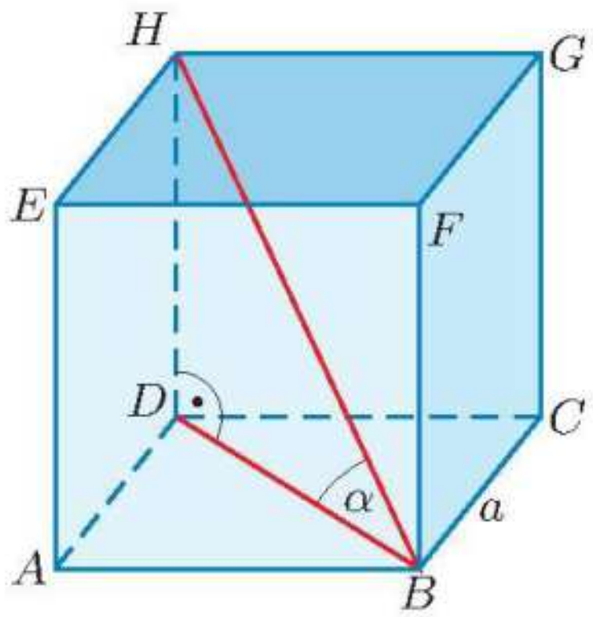




Kątem między prostą a płaszczyzną nazywamy kąt ostry, który ta prosta tworzy ze swoim rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę. Jeśli rzutem prostej jest punkt, to przyjmujemy, że płaszczyzna i prosta tworzą kąt prosty. Jeśli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to tworzy z nią kąt $0°$.

Przykład 1

Wyznacz miarę kąta między przekątną sześcianu a jego podstawą.



Rozpatrzmy przekątną sześcianu BH (rysunek obok) i jej rzut prostokątny na płaszczyznę podstawy – odcinek BD.
Jeśli $|DH| = a$, to $|BD| = a\sqrt{2}$, zatem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071, \text{ stąd } \alpha \approx 35°$$

Ćwiczenie 1

Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego wszystkie krawędzie mają tę samą długość. Wyznacz miary kątów, które jego przekątne tworzą z podstawą.

Ćwiczenie 2

Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 5 cm jest prostokąt o bokach długości 3 cm i 4 cm. Oblicz sinusy kątów, które przekątna tego graniastosłupa tworzy z jego ścianami bocznymi.

D Ćwiczenie 3

Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy ze ścianą boczną kąt α, a krawędź podstawy ma długość a. Wyznacz objętość tego graniastosłupa. Uzasadnij, że zadanie ma rowiązanie dla $\alpha < 45°$.

D Ćwiczenie 4

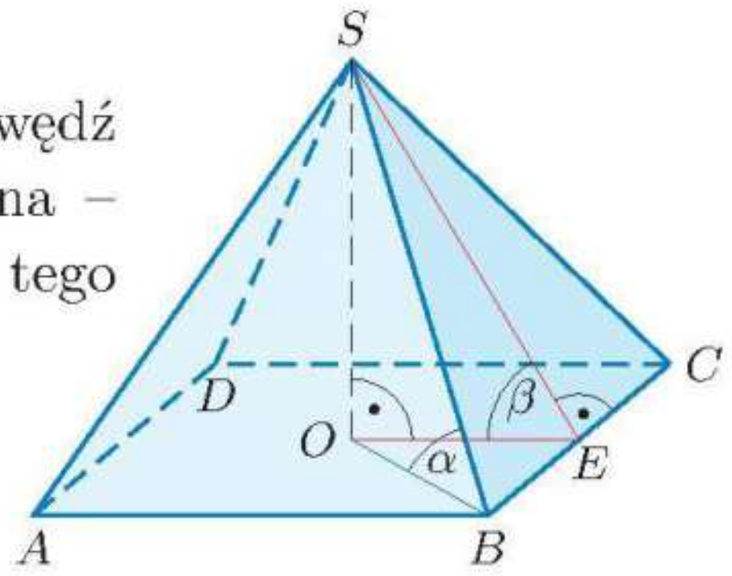
Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość d i tworzy z sąsiednią ścianą boczną kąt α. Wyznacz wysokość tego graniastosłupa. Uzasadnij, że zadanie ma rowiązanie dla $\alpha < 60°$.

Przykład 2

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 10 cm, a krawędź boczna – 13 cm. Oblicz cosinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy:

a) jego krawędź boczna,

b) wysokość jego ściany bocznej.

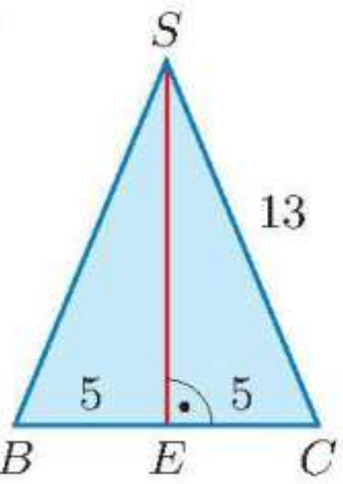


a) Kąt między krawędzią boczną SB ostrosłupa a jej rzutem prostokątnym na podstawę (odcinek OB) oznaczono na rysunku przez α. Odcinek OB jest połową przekątnej kwadratu o boku 10 cm, więc $|OB| = 5\sqrt{2}$ cm.
Rozpatrzmy trójkąt OBS:

$$\cos\alpha = \frac{|OB|}{|BS|} = \frac{5\sqrt{2}}{13}$$

b) Kąt między wysokością SE ściany bocznej ostrosłupa a jej rzutem prostokątnym na podstawę (odcinek OE) oznaczono przez β. Na rysunku poniżej przedstawiono ścianę boczną ostrosłupa – jest to trójkąt równoramienny o wysokości SE. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $|SE|^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, skąd $|SE| = 12$ cm.
Rozpatrzmy trójkąt OES:

$$\cos\beta = \frac{|OE|}{|SE|} = \frac{5}{12}$$

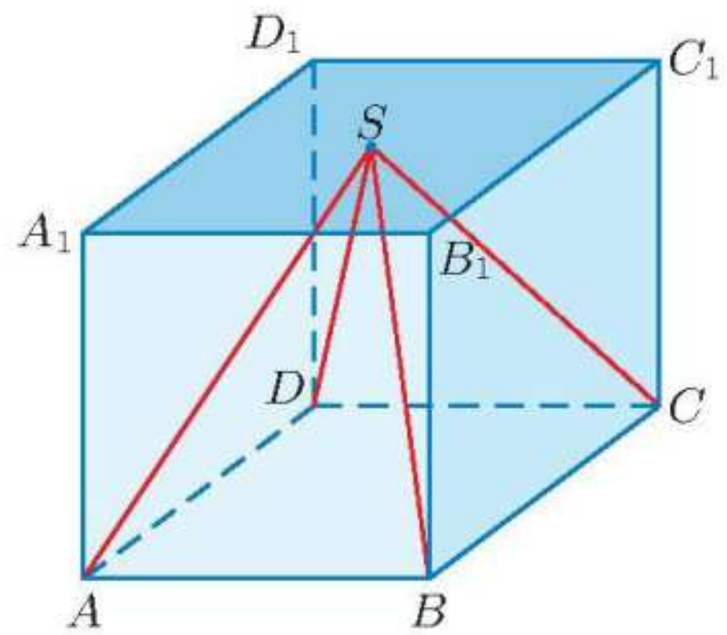


Ćwiczenie 5

Dolną podstawą sześcianu jest kwadrat $ABCD$. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ będącego górną podstawą sześcianu. Rozpatrzmy ostrosłup o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S. Oblicz sinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy:

a) jego krawędź boczna,

b) wysokość jego ściany bocznej.



Ćwiczenie 6

a) Oblicz sinus kąta, który krawędź boczna czworościanu foremnego tworzy z jego podstawą.

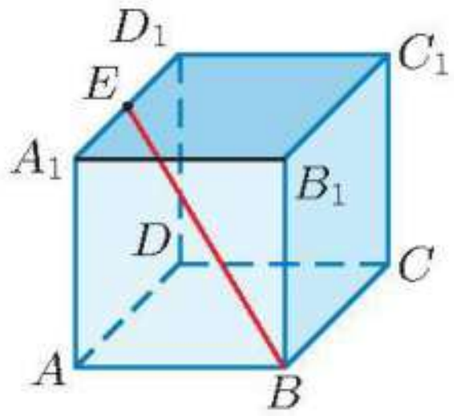
b) Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego pole powierzchni bocznej jest sześć razy większe od pola podstawy. Oblicz sinus kąta, który krawędź boczna tego ostrosłupa tworzy z jego podstawą.

Zadania

1. Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości 2 cm, 3 cm i $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątną tego prostopadłościanu a jego ścianą o największym polu.

2. W sześcianie (rysunek obok) punkt E jest środkiem krawędzi A_1D_1. Oblicz sinus kąta, który odcinek BE tworzy:

a) ze ścianą ABB_1A_1, b) z podstawą $ABCD$.



D **3.** Przekątna prostopadłościanu tworzy z jego ścianami mającymi wspólny wierzchołek kąty α, β i γ. Wykaż, że $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

4. a) Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z podstawą kąt 60°. Oblicz sinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy jego krawędź boczna.

b) Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z podstawą kąt 60°. Oblicz cosinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy wysokość jego ściany bocznej.

5. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe P, a kąt między wysokością ściany bocznej a podstawą ma miarę α. Wyznacz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa.

6. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy a i objętości równej $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. Oblicz cosinus kąta, który z podstawą ostrosłupa tworzy:

a) krawędź boczna, b) wysokość ściany bocznej.

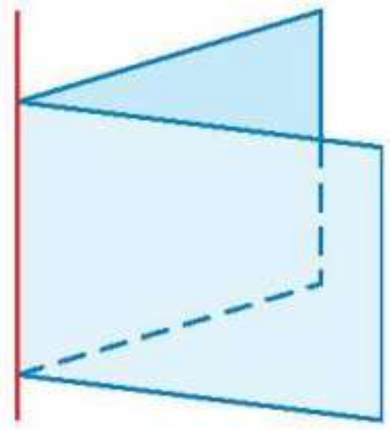
7. Uzasadnij, że jeżeli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do podstawy pod takim samym kątem, to spodek wysokości tego ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na jego podstawie.

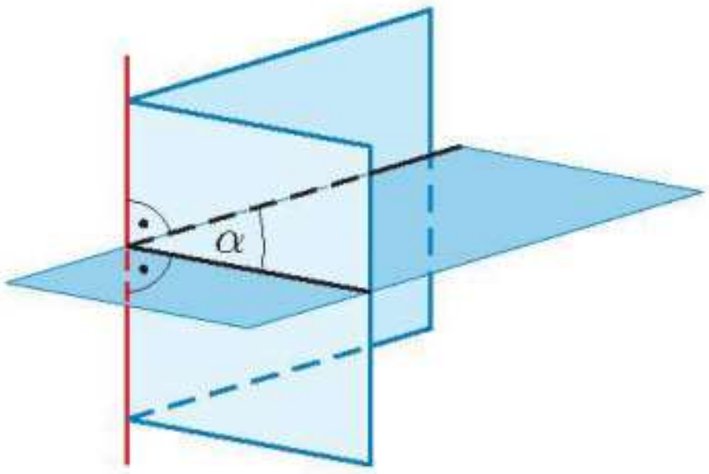
8. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt o bokach 6, 8 i 10, a wszystkie krawędzie boczne mają długość 13. Oblicz cosinusy kątów, które z podstawą tego ostrosłupa tworzą jego krawędzie boczne.

9. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, którego ramiona mają długość a, a miara kąta między ramionami jest równa α. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa są nachylone do podstawy pod kątem β. Wyznacz jego objętość.

2.9. Kąt dwuścienny

Dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z tych części, łącznie z półpłaszczyznami, nazywamy **kątem dwuściennym**, półpłaszczyzny – **ścianami** tego kąta, a wspólną krawędź półpłaszczyzn – jego **krawędzią**.



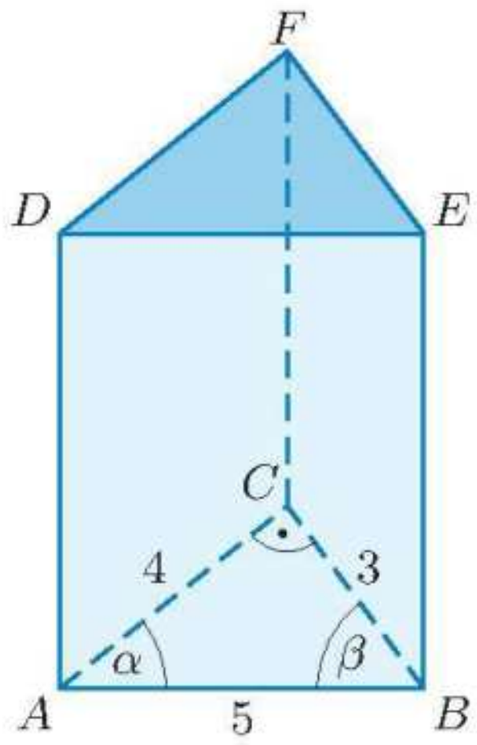


Miarą kąta dwuściennego nazywamy miarę kąta płaskiego otrzymanego jako przekrój kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi.

W dalszym ciągu, kiedy będziemy mówić o kącie dwuściennym, będziemy rozważać ten z kątów między półpłaszczyznami, który ma mniejszą miarę.

Przykład 1

Dany jest graniastosłup prosty trójkątny, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4 i 5. Podaj miary kątów, które tworzą ze sobą ściany boczne tego graniastosłupa.



Ściany $BCFE$ i $ACFD$ tworzą kąt prosty.

Ściany $ABED$ i $ACFD$ tworzą kąt α taki, że:

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \text{ więc } \alpha \approx 37^\circ$$

Ściany $ABED$ i $BCFE$ tworzą kąt $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 53^\circ$.

Ćwiczenie 1

Podaj miarę kąta utworzonego przez dwie sąsiednie ściany boczne graniastosłupa prawidłowego:

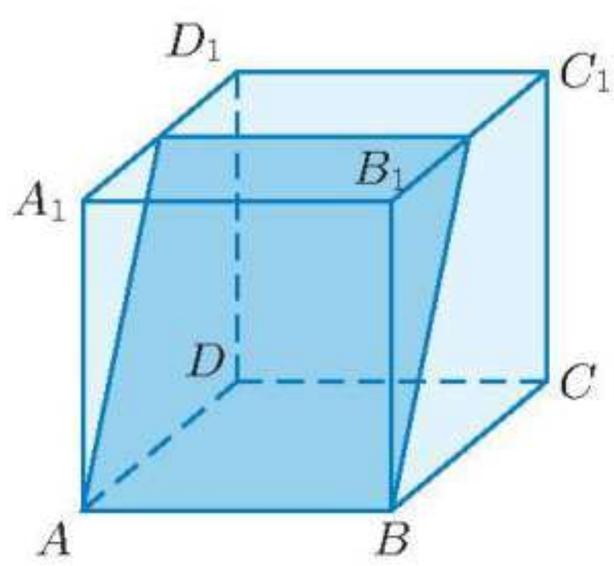
a) trójkątnego, b) pięciokątnego, c) sześciokątnego.

Ćwiczenie 2

Oblicz cosinus kąta, który z płaszczyzną podstawy $ABCD$ sześcianu tworzy płaszczyzna przechodząca przez wierzchołki A i B oraz:

a) środki krawędzi A_1D_1 i B_1C_1 (rysunek obok),

b) środki krawędzi DD_1 i CC_1.

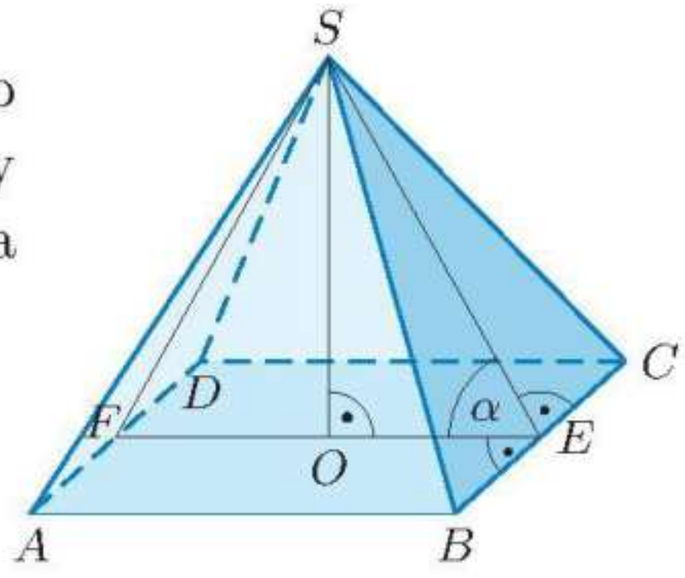


Przykład 2

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego wysokość jest równa $5\sqrt{3}$, a krawędź podstawy ma długość 10. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.
Zauważmy, że proste FE i SE są prostopadłe do BC – krawędzi kąta dwuściennego zawartego między ścianą boczną a podstawą ostrosłupa, czyli miara tego kąta jest miarą kąta płaskiego FES.
Zatem szukamy miary kąta α w trójkącie OES:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|OS|}{|OE|} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}, \text{ czyli } \alpha = 60^\circ$$



Ćwiczenie 3

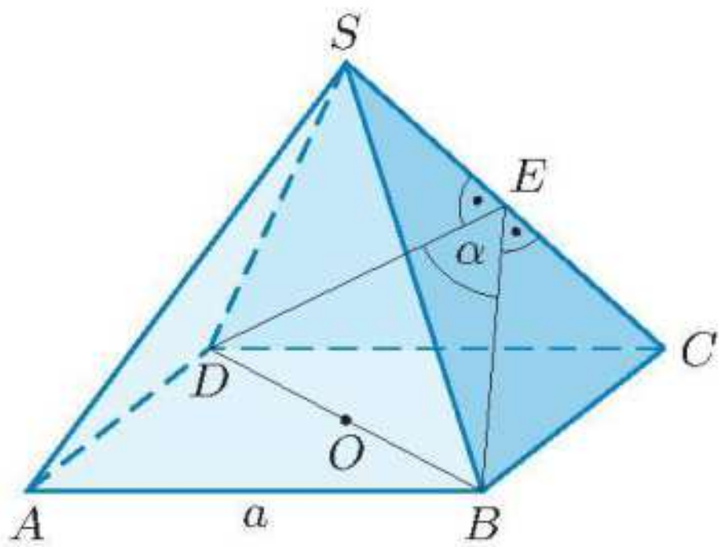
a) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 12 cm, a jego wysokość jest równa $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

b) Przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 cm. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do jego podstawy pod kątem 45°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

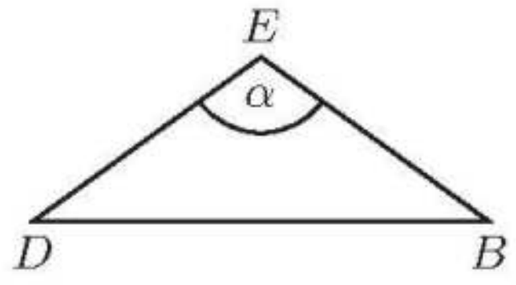
Przykład 3

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego są trójkątami równobocznymi. Oblicz cosinus kąta, który tworzą dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa.

Szukamy cosinusa kąta BED, gdzie E jest wierzchołkiem kąta płaskiego otrzymanego przez przekrój płaszczyzną prostopadłą do krawędzi kąta dwuściennego zawartego między sąsiednimi ścianami ostrosłupa.
Oznaczmy długość krawędzi ostrosłupa przez a.
Wówczas przekątna podstawy $|DB| = a\sqrt{2}$.



Odcinek EB jest wysokością trójkąta równobocznego BCS o boku a, zatem $|EB| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Podobnie $|ED| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta DBE:

$$(a\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos\alpha \ / : a^2$$

$$2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

Zauważ, że $\cos\alpha < 0$, więc α jest kątem rozwartym.

Ćwiczenie 4

Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od jego krawędzi podstawy. Oblicz cosinus kąta, który tworzą dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa.

Przykład 4

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z podstawą kąt α (rysunek poniżej). Krawędź podstawy ma długość a. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym, a punkt O jest środkiem opisanego na nim okręgu, zatem:

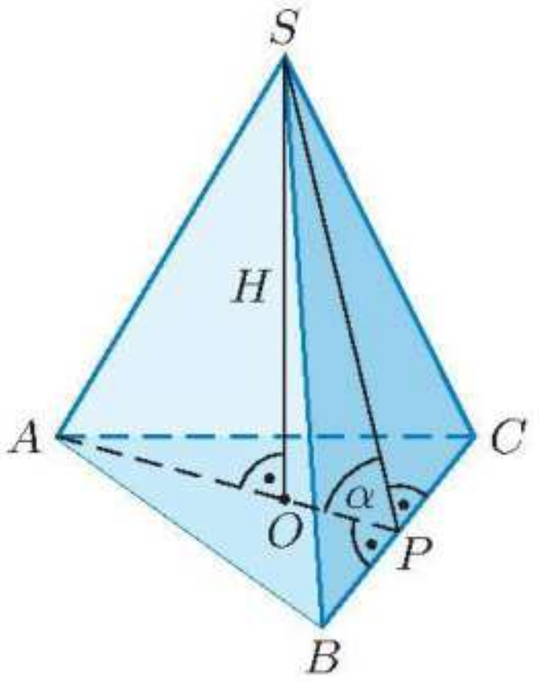
$$|AP| = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad |OP| = \frac{1}{3}|AP| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Wyznaczamy wysokość ostrosłupa:

$$H = |OP| \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Zatem objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3}{24} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$



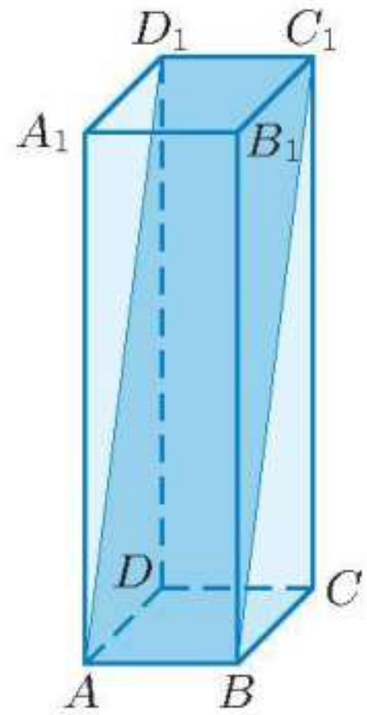
Ćwiczenie 5

Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa H, a ściana boczna tworzy z podstawą kąt α. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Zadania

1. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 7 cm i 24 cm. Oblicz miary kątów zawartych między sąsiednimi ścianami bocznymi tego graniastosłupa.

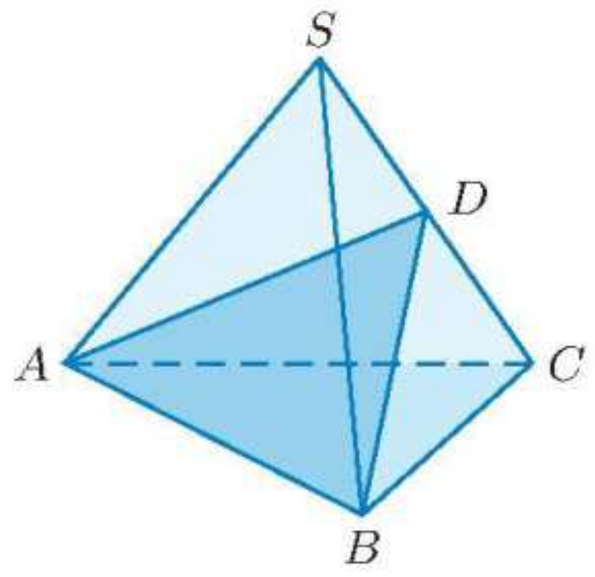
2. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, którego pole powierzchni bocznej jest równe 480 cm^2, a pole powierzchni całkowitej – 530 cm^2. Oblicz sinus kąta, który tworzy płaszczyzna zawierająca krawędzie AB i C_1D_1 tego graniastosłupa (rysunek obok) z jego podstawą.



3. a) Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $72\sqrt{3}$ cm^3, a jego wysokość jest równa 2 cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

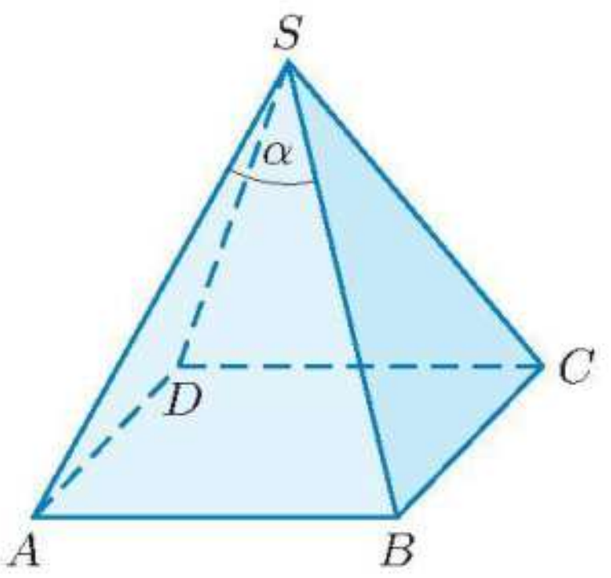
b) Oblicz cosinus kąta zawartego między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 10 cm, a krawędź boczna – 13 cm.

4. Dany jest czworościan foremny $ABCS$ (rysunek obok). Punkt D jest środkiem krawędzi CS. Oblicz cosinus kąta zawartego między płaszczyzną ABD a płaszczyzną zawierającą podstawę ABC tego ostrosłupa.



D **5.** Cosinus kąta zawartego między ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równy $\frac{1}{3}$. Uzasadnij, że jest to czworościan foremny.

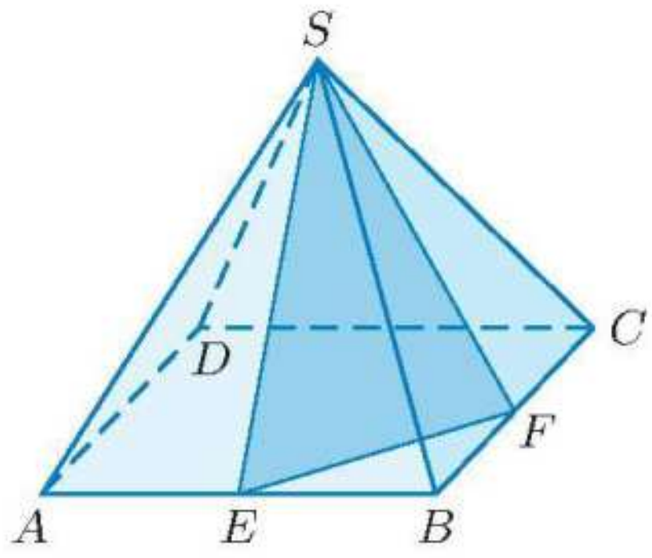
6. Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $20\sqrt{3}$ cm^3, a koło opisane na jego podstawie ma pole równe 16π cm^2. Oblicz tangens kąta zawartego między ścianą boczną tego ostrosłupa a jego podstawą.



D **7.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt płaski przy wierzchołku ma miarę α (rysunek obok). Wykaż, że jeśli $\cos\alpha = \frac{7}{25}$, to cosinus kąta zawartego między dwoma sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa jest równy $-\frac{9}{16}$.

8. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt płaski przy wierzchołku ma miarę α oraz $\cos\alpha = \frac{7}{25}$. Oblicz cosinus kąta zawartego między dwoma sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

9. Kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma miarę 2α. Punkty E i F są środkami krawędzi podstawy odpowiednio AB i BC (rysunek obok). Wyznacz tangens kąta zawartego między podstawą tego ostrosłupa a płaszczyzną, do której należą punkty E, F i S.



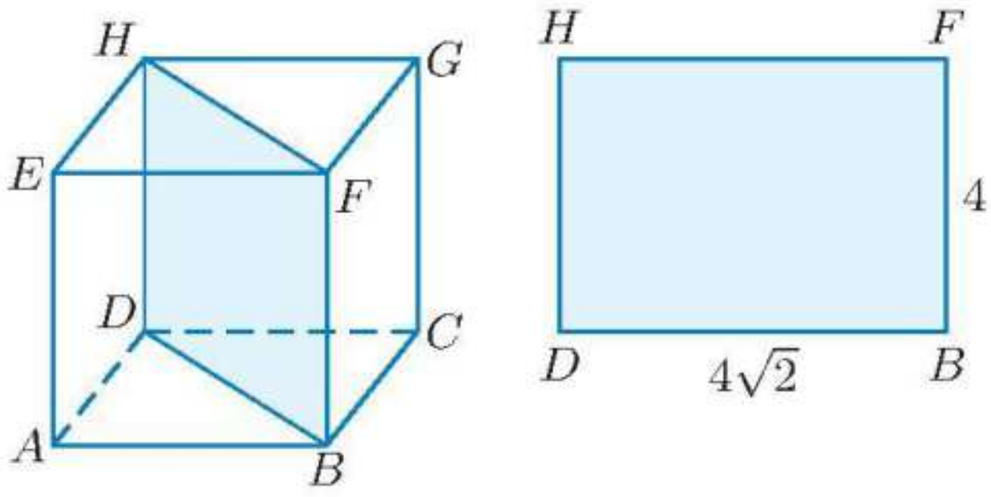
10. W podstawę ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o wysokości 6 wpisano okrąg o promieniu $6\sqrt{3}$. Oblicz cosinus kąta zawartego między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

D **11.** Uzasadnij, że jeżeli wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do podstawy pod takim samym kątem, to spodek wysokości tego ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę.

2.10. Przekroje prostopadłościanów

Przykład 1

Sześcian o krawędzi 4 cm przecięto płaszczyzną wyznaczoną przez równoległe przekątne jego podstaw (rysunek obok). Oblicz pole otrzymanego przekroju.



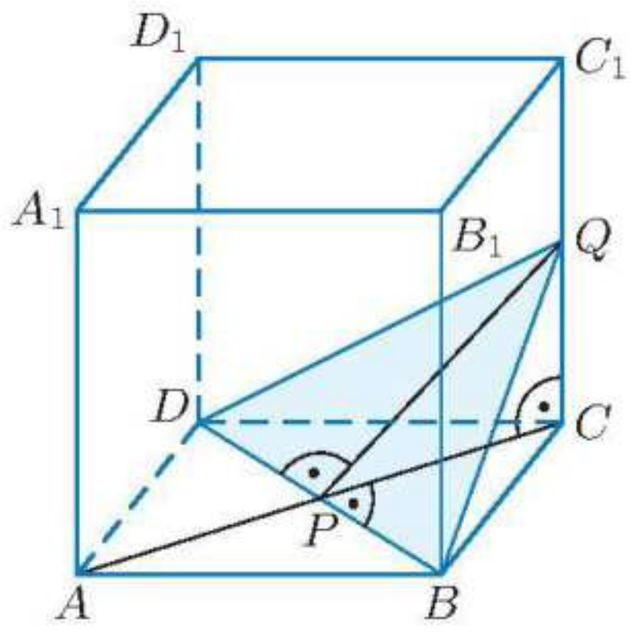
Dany przekrój jest prostokątem o polu $P = 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ [cm^2].

Ćwiczenie 1

Sześcian o krawędzi a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy. Płaszczyzna ta tworzy z podstawą kąt α. Wyznacz pole otrzymanego przekroju, jeśli wiadomo, że: a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, b) $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.

Przykład 2

Wyznacz pole przekroju sześcianu o krawędzi a płaszczyzną BDQ, gdzie Q jest środkiem krawędzi CC_1 (rysunek obok).



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PCQ:

$$|PQ|^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2, \text{ skąd } |PQ| = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Zatem pole przekroju:

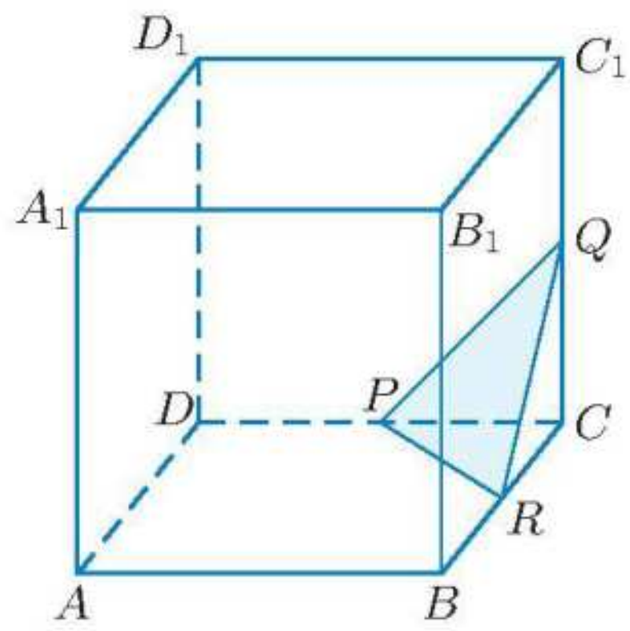
$$P_{BDQ} = \frac{1}{2}|BD| \cdot |PQ| = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$$

Ćwiczenie 2

Punkty P, Q, R są środkami krawędzi sześcianu wychodzących z wierzchołka C (rysunek obok). Oblicz pole przekroju sześcianu płaszczyzną PQR, jeśli wiadomo, że:

a) krawędź tego sześcianu ma długość 12,

b) przekątna tego sześcianu ma długość $2\sqrt{6}$.



Ćwiczenie 3

Wyznacz pole przekroju sześcianu o krawędzi a płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i tworzącą z tą podstawą kąt α taki, że:

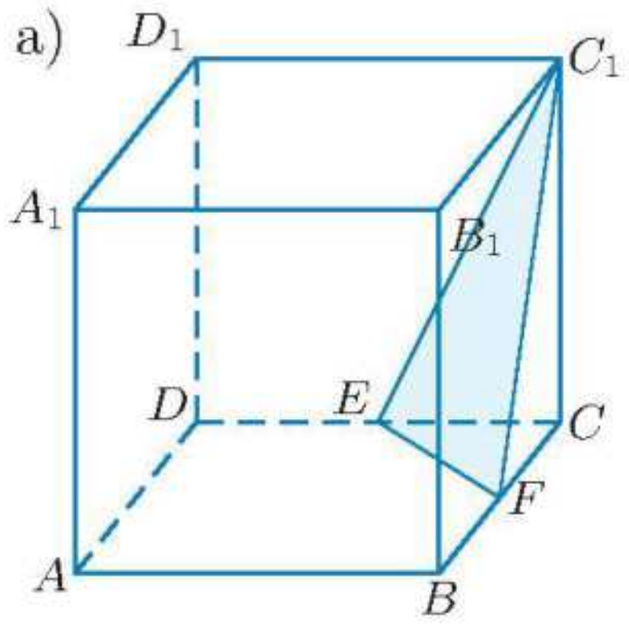
a) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

R

Ćwiczenie 4

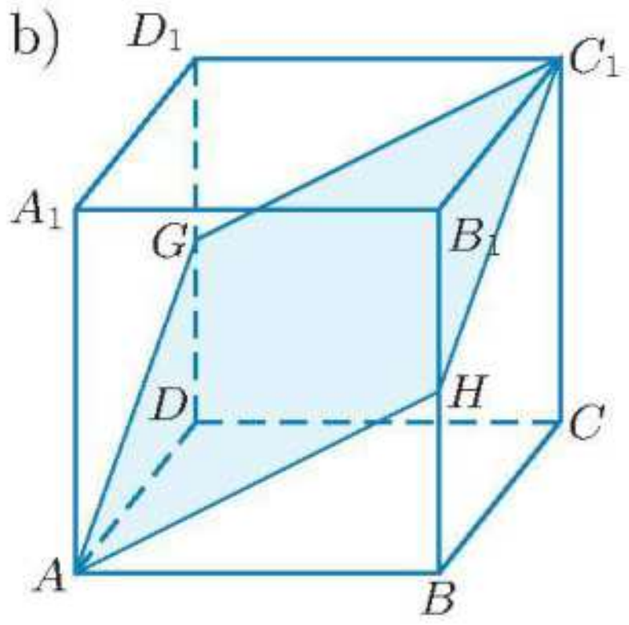
Oblicz pole przekroju sześcianu przedstawionego na rysunku poniżej, jeżeli wiadomo, że krawędź sześcianu ma długość 6 cm.

a)



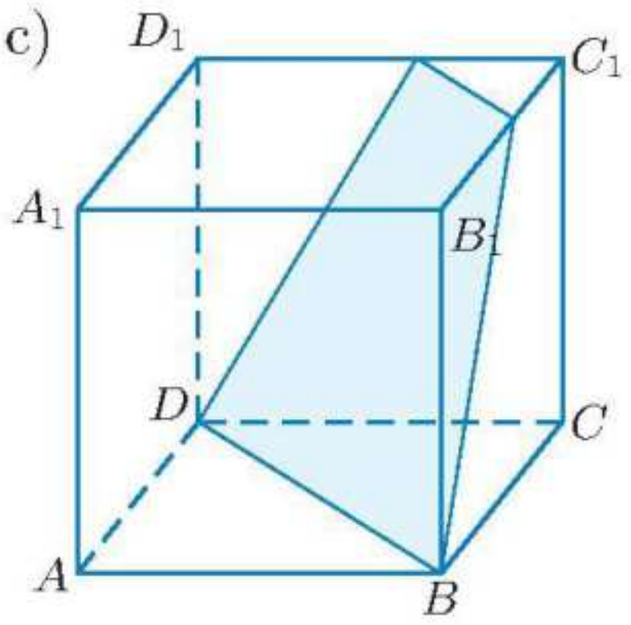
Płaszczyzna przekroju przechodzi przez środki sąsiednich krawędzi CD i BC (odpowiednio punkty E i F) oraz wierzchołek C_1.

b)



Płaszczyzna przekroju przechodzi przez wierzchołki A i C_1 oraz punkty G i H będące odpowiednio środkami krawędzi DD_1 i BB_1.

c)



Płaszczyzna przekroju przechodzi przez przekątną podstawy DB i tworzy z tą podstawą kąt 60°.

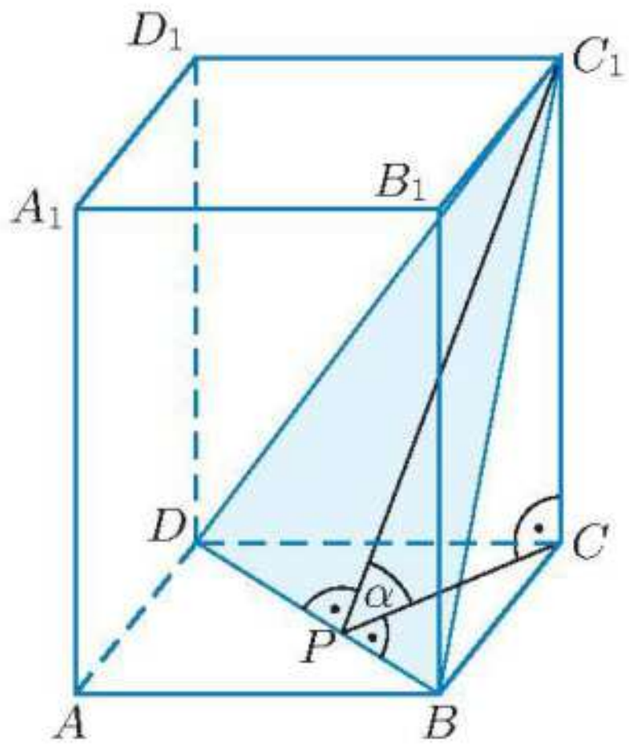
D

Ćwiczenie 5

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy równej 4 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i jeden z wierzchołków górnej podstawy. Uzasadnij, że jeśli pole otrzymanego przekroju jest równe 16, to płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą kąt 60°.

Przykład 3

Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt $ABCD$ o bokach $|AB| = 4$ i $|BC| = 3$. Płaszczyzna przechodząca przez wierzchołki B, C_1 i D tworzy z podstawą kąt α taki, że $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ (rysunek obok). Oblicz pole trójkąta BC_1D.



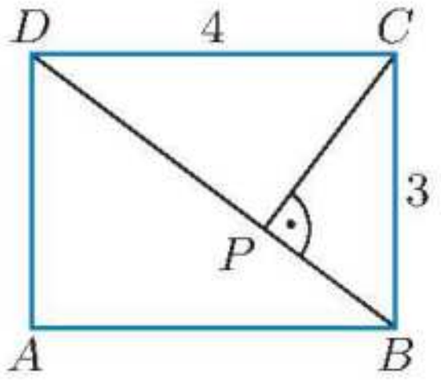
Przekątna podstawy $|BD| = 5$.

Aby obliczyć długość odcinka PC, wyznaczamy pole trójkąta BCD na dwa sposoby:

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |PC| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot |PC| = \frac{5}{2} \cdot |PC|$$

Stąd $|PC| = \frac{12}{5}$.



$\frac{|PC|}{|PC_1|} = \cos\alpha$, więc $|PC_1| = \frac{|PC|}{\cos\alpha} = \frac{12}{5} : \frac{2}{5} = 6$.

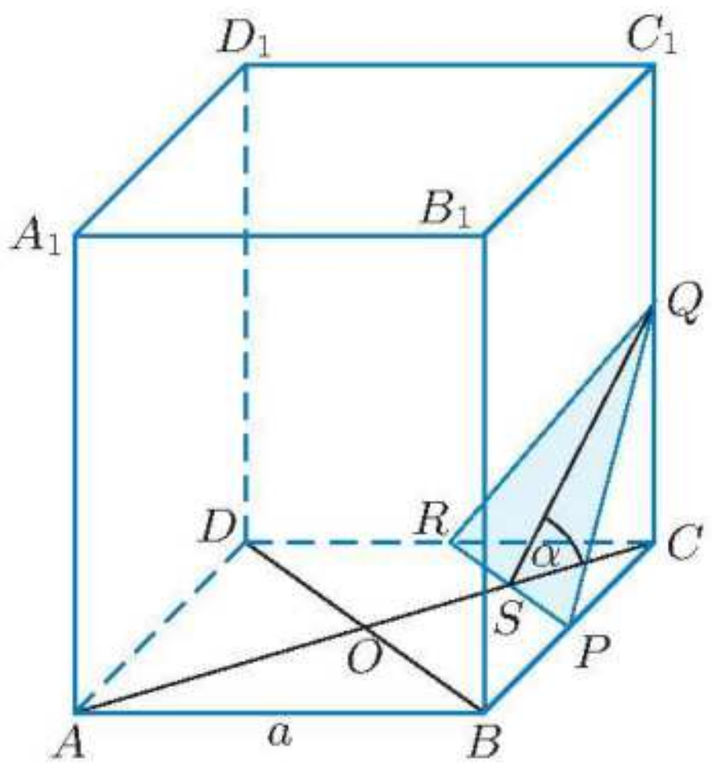
Zatem $P_{BC_1D} = \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |PC_1| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$.

Ćwiczenie 6

Prostopadłościan, którego podstawą jest prostokąt o bokach 5 cm i 12 cm, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i jeden z wierzchołków górnej podstawy. Otrzymany przekrój jest trójkątem, którego pole jest równe 84,5 cm^2. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

Przykład 4

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka (rysunek obok). Wyznacz objętość tego graniastosłupa oraz pole otrzymanego przekroju, jeśli jest on nachylony do podstawy graniastosłupa pod kątem $\alpha = 60^\circ$.



$|AC| = a\sqrt{2}$, zatem $|SC| = \frac{1}{4}|AC| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ oraz:

$$|SQ| = 2|SC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Wyznaczamy pole trójkąta PQR:

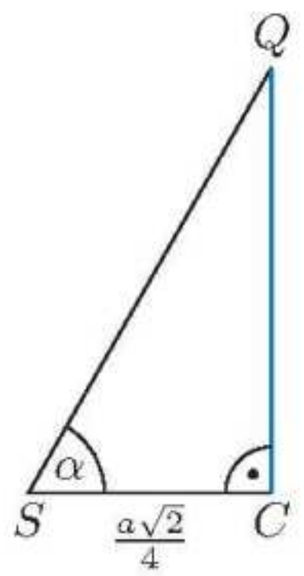
$$P_{PQR} = \frac{1}{2}|PR| \cdot |SQ| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{4}$$

Zauważmy, że:

$$|CQ| = |SC| \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Zatem wysokość graniastosłupa:

$$|CC_1| = 2|CQ| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$



Objętość graniastosłupa: $V = a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Ćwiczenie 7

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Oblicz miarę kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą tego graniastosłupa, i wyznacz jego objętość, jeśli trójkąt będący przekrojem ma pole równe:

a) $\frac{\sqrt{2}a^2}{8}$,

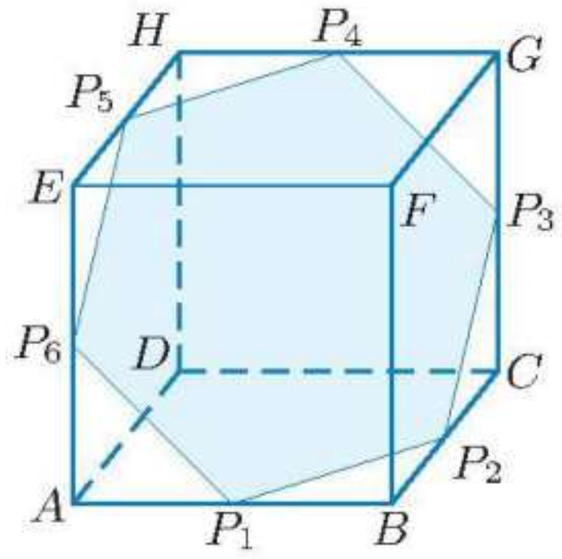
b) $\frac{\sqrt{3}a^2}{12}$.

Ćwiczenie 8

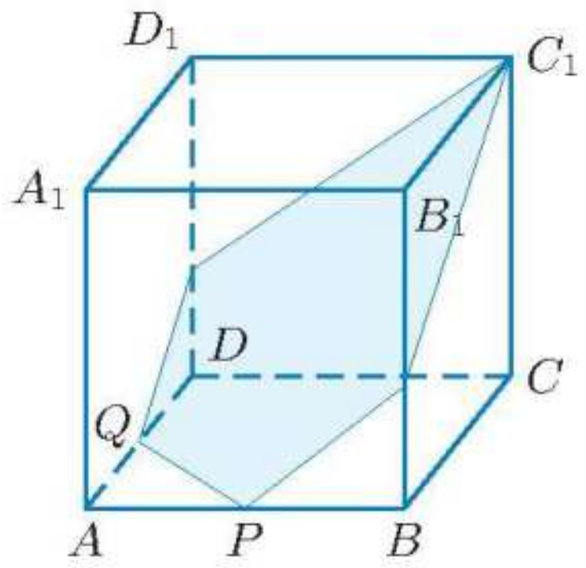
Graniastosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków i otrzymano w przekroju romb, którego kąt ostry ma miarę 2α. Wyznacz cosinus kąta nachylenia płaszczyzny przekroju do podstawy tego graniastosłupa.

Zadania

D **1.** Przekrojem sześcianu o krawędzi a jest sześciokąt $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, którego wierzchołki są środkami odpowiednich krawędzi sześcianu (rysunek obok). Uzasadnij, że otrzymany sześciokąt jest foremny. Wyznacz jego pole.



2. Sześcian o krawędzi 6 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i tworzącą z tą podstawą kąt α. Oblicz pole otrzymanego przekroju, jeśli: a) $\alpha = 30^\circ$, b) $\alpha = 45^\circ$.



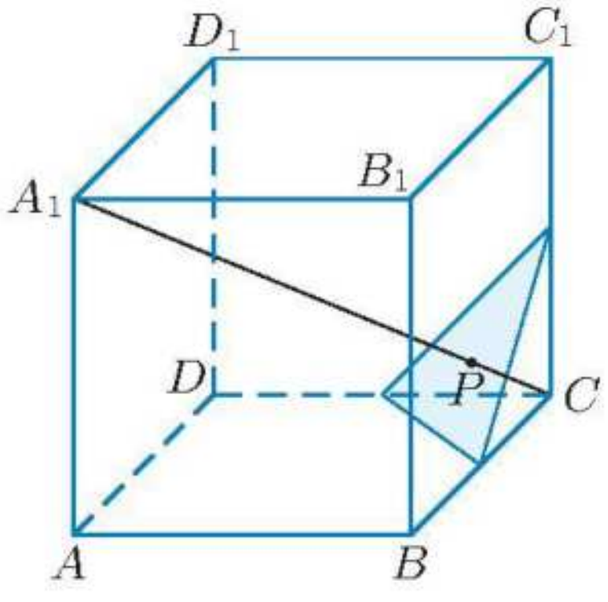
3. Sześcian o krawędzi 4 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy (punkty P i Q na rysunku obok) oraz wierzchołek C_1. Płaszczyzna ta tworzy z podstawą kąt α. Oblicz cosinus kąta α oraz pole otrzymanego przekroju.

4. Graniastosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i jeden z wierzchołków górnej podstawy. Otrzymany przekrój jest trójkątem równoramiennym, którego ramiona tworzą kąt α taki, że $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Pole podstawy tego graniastosłupa jest równe 32 cm^2. Oblicz jego objętość.

5. Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i środki dwóch krawędzi górnej podstawy. Płaszczyzna otrzymanego przekroju tworzy z podstawą kąt 45°. Wyznacz pole przekroju i objętość tego graniastosłupa.

6. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach 6 cm i 8 cm. Prostopadłościan ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i jeden z wierzchołków górnej podstawy. Otrzymany przekrój ma pole 25 cm^2. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

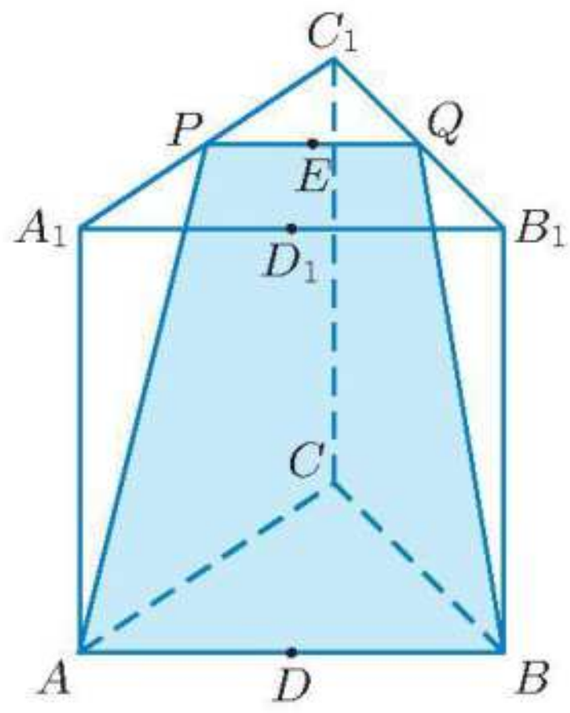
*7. Sześcian o krawędzi 6 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z wierzchołka C (rysunek obok). P jest punktem wspólnym tej płaszczyzny i przekątnej A_1C sześcianu. Oblicz długość odcinka PC.



Przekroje innych graniastosłupów

Przykład

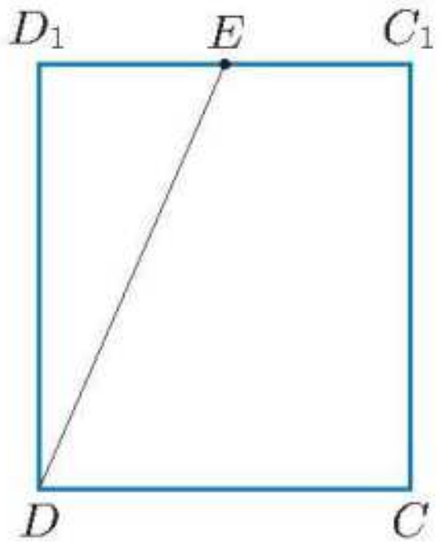
Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego mają długość a. Wyznacz pole przekroju otrzymanego z przecięcia tego graniastosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i środki dwóch krawędzi górnej podstawy.



Niech punkty P i Q będą odpowiednio środkami krawędzi A_1C_1 i B_1C_1 górnej podstawy, punkty D i D_1 – środkami krawędzi AB i A_1B_1, a punkt E niech będzie środkiem odcinka PQ. Rozpatrzmy prostokąt DCC_1D_1:

$$|D_1E| = \frac{1}{2}|D_1C_1| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$|DE| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{19}}{4}$$



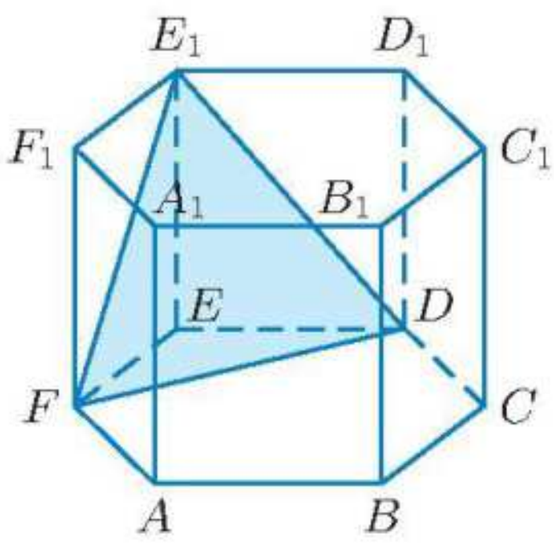
Opisany przekrój jest trapezem o podstawach AB i PQ oraz wysokości DE. Zatem jego pole:

$$P = \frac{|AB|+|PQ|}{2} \cdot |DE| = \frac{a+\frac{1}{2}a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{19}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{19}}{16}$$

1. Graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i środki dwóch krawędzi górnej podstawy. Otrzymany przekrój ma pole równe a^2. Oblicz cosinus kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z dolną podstawą tego graniastosłupa.

2. Graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną ściany bocznej i środek tej krawędzi podstawy, która nie ma punktu wspólnego z tą przekątną. Pole otrzymanego przekroju jest równe S. Oblicz cosinus kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z dolną podstawą, oraz wyznacz objętość tego graniastosłupa.

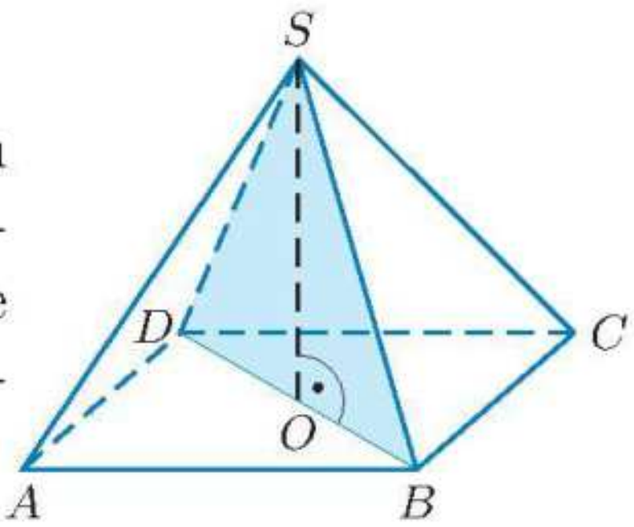
3. Graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną zawierającą przekątne sąsiednich ścian bocznych wychodzące z tego samego wierzchołka (rysunek obok). Pole otrzymanego przekroju jest równe S. Oblicz cosinus kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą, oraz wyznacz objętość tego graniastosłupa.



*2.11. Przekroje ostrosłupów

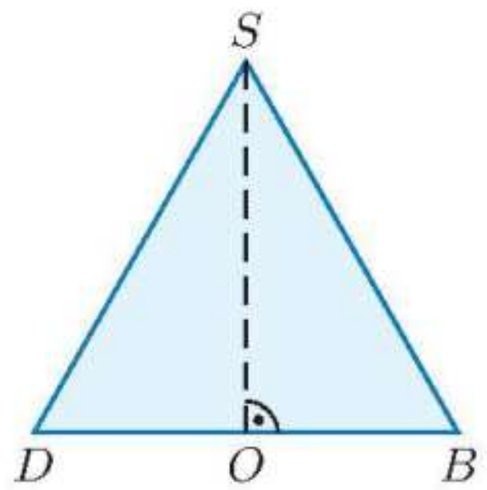
Przykład 1

Ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości 9 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek i przekątną podstawy (rysunek obok). Pole otrzymanego przekroju jest równe 36 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Rozpatrzmy przekrój DBS:
$\frac{1}{2}|DB| \cdot 9 = 36$, czyli $|DB| = 8$ cm.
Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o przekątnej 8 cm, więc bok kwadratu ma długość $\frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ [cm].
Obliczamy objętość ostrosłupa:

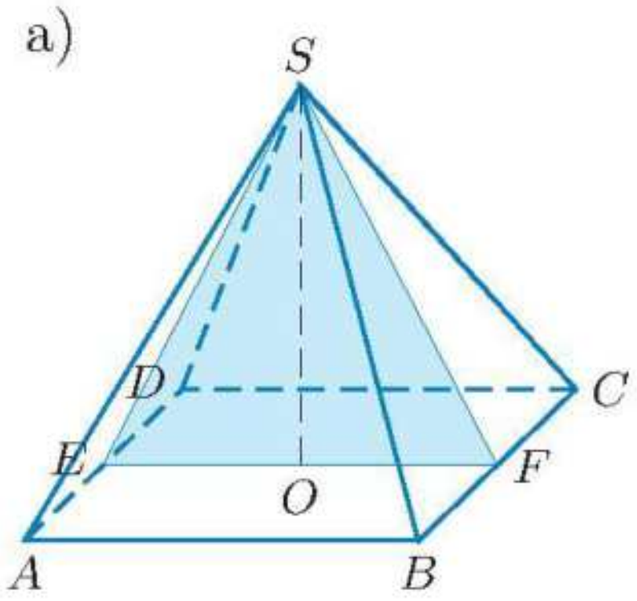
$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot 9 = 96 \text{ [cm}^3\text{]}$$



Ćwiczenie 1

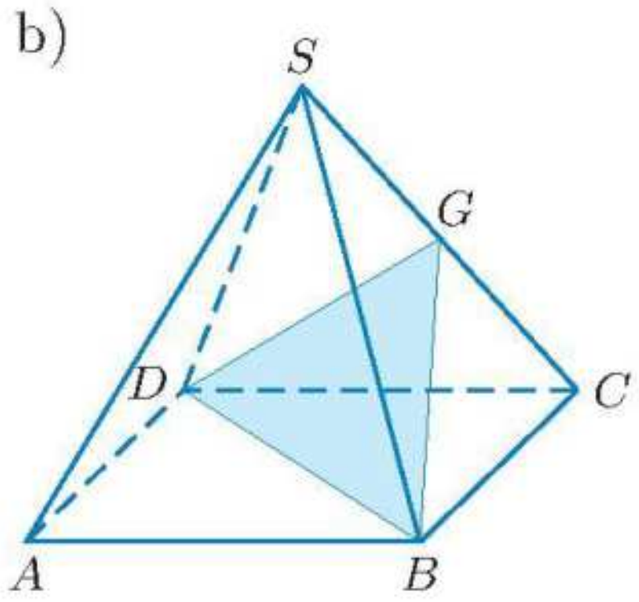
Oblicz pole przekroju ostrosłupa prawidłowego czworokątnego przedstawionego na rysunku poniżej. Wiadomo, że krawędź jego podstawy ma długość 6 cm, a wszystkie ściany boczne są trójkątami równobocznymi.

a)



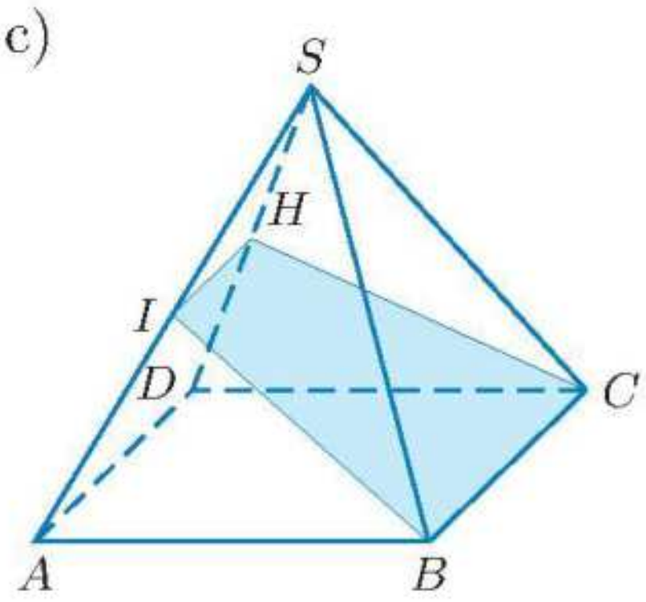
Płaszczyzna przekroju przechodzi przez wysokość ściany bocznej i wysokość ostrosłupa.

b)



Płaszczyzna przekroju przechodzi przez przekątną podstawy i punkt G będący środkiem krawędzi bocznej.

c)



Płaszczyzna przekroju przechodzi przez krawędź podstawy i punkty H, I będące środkami krawędzi bocznych.

Ćwiczenie 2

Narysuj przekrój ostrosłupa prawidłowego trójkątnego płaszczyzną przechodzącą przez:

a) wysokość podstawy i krawędź boczną,

b) krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej.

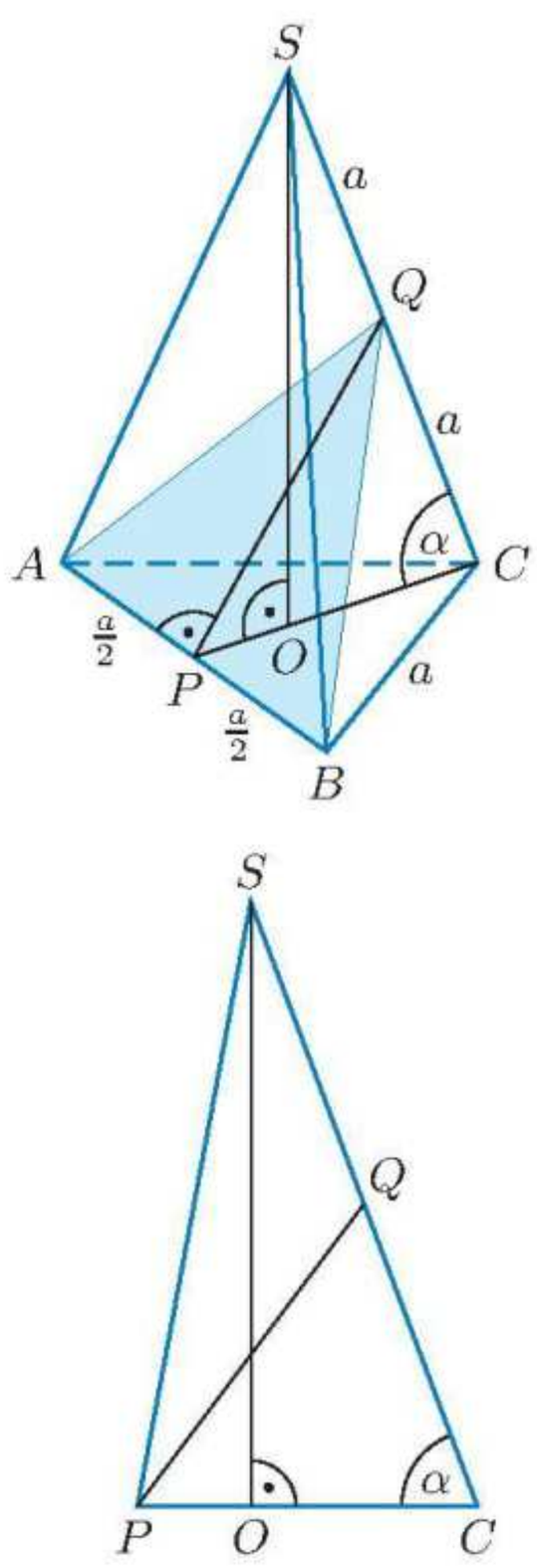
Oblicz pole tego przekroju, jeśli wiadomo, że krawędź podstawy ostrosłupa ma długość 6 cm, a krawędź boczna – 12 cm.

Ćwiczenie 3

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego krawędź podstawy ma długość 5 cm. Pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną prostopadłą do podstawy i zawierającą jej przekątną jest równe 25 cm^2. Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i prostopadłą do krawędzi bocznej rozłącznej z tą przekątną.

Przykład 2

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a, a krawędź boczna – $2a$. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej (rysunek obok). Wyznacz pole tego przekroju.



Niech punkt O będzie spodkiem wysokości ostrosłupa. W trójkącie PCS: $|SC| = 2a$, $|PC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oraz:

$$|OC| = \frac{2}{3}|PC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Zatem $\cos\alpha = \frac{|OC|}{|SC|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

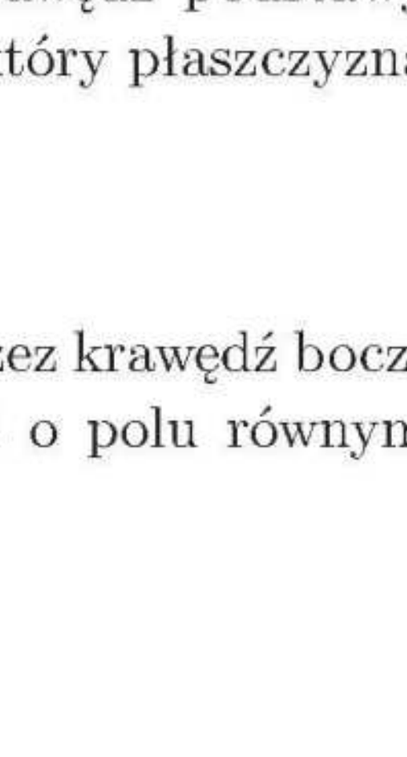
Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta PCQ:

$$|PQ|^2 = |PC|^2 + |CQ|^2 - 2 \cdot |PC| \cdot |CQ| \cdot \cos\alpha$$

$$|PQ|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$|PQ|^2 = \frac{3a^2}{4} + a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{5a^2}{4}$$

$$|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$



Wyznaczamy pole przekroju, czyli pole trójkąta ABQ:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}$$

Ćwiczenie 4

Czworościan foremny przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej. Oblicz sinus kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą czworościanu.

Ćwiczenie 5

Czworościan foremny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź boczną i wysokość podstawy. Jako przekrój otrzymano trójkąt o polu równym $4\sqrt{2}$ cm^2. Oblicz objętość tego czworościanu.

Zadania

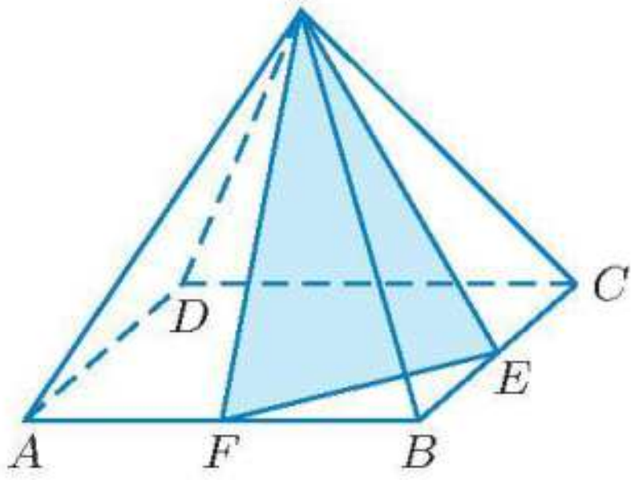
D **1.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 26 cm, a pole podstawy jest równe $100\sqrt{3}$ cm^2. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch krawędzi podstawy oraz jego wierzchołek. Wykaż, że pole otrzymanego przekroju jest większe od 115 cm^2.

2. Ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka podstawy. Pole otrzymanego przekroju jest równe S. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

D **3.** Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a, a jego objętość jest równa $\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$. Wykaż, że przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną zawierającą jego wysokość oraz krawędź boczną jest trójkątem prostokątnym o polu $\frac{\sqrt{2}}{8}a^2$.

4. Przekrój ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek i przekątną podstawy jest trójkątem równobocznym o polu P. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

5. Ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek i środki sąsiednich krawędzi podstawy. Płaszczyzna ta tworzy z podstawą kąt α. Wyznacz pole otrzymanego przekroju oraz objętość tego ostrosłupa.



D **6.** Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty B i D oraz przez punkt P będący środkiem krawędzi CS. Wykaż, że jeśli trójkąt BDP jest równoboczny, to stosunek długości krawędzi bocznej ostrosłupa do długości krawędzi podstawy jest równy $2\sqrt{3} : \sqrt{2}$.

7. Przekrój ostrosłupa prawidłowego trójkątnego płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i środek jego wysokości ma pole równe $2\sqrt{6}$. Płaszczyzna przekroju jest nachylona do podstawy pod kątem 45°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

8. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 4. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i środek jego wysokości. Płaszczyzna ta jest nachylona do podstawy pod kątem 45°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

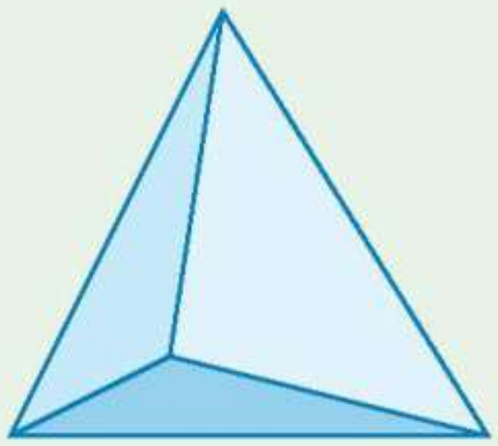
2.12. Zagadnienia uzupełniające

Wielościany foremne

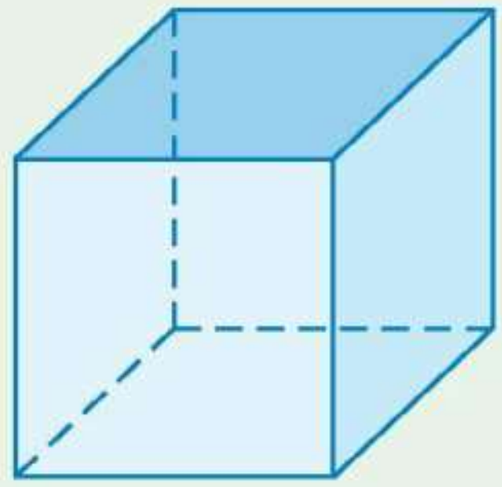


Wielościanem foremnym (bryłą platońską) nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i w każdym wierzchołku zbiega się jednakowa liczba ścian.

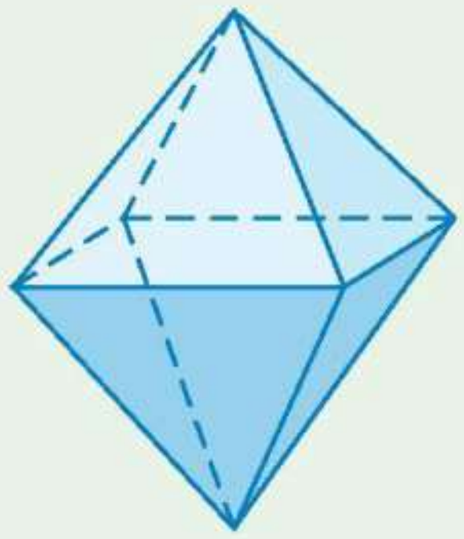
Istnieje pięć wielościanów foremnych. Wszystkie znane były już w starożytności (nazwy greckie podane w nawiasach pochodzą od greckich nazw liczb 4, 6, 8, 12 i 20).



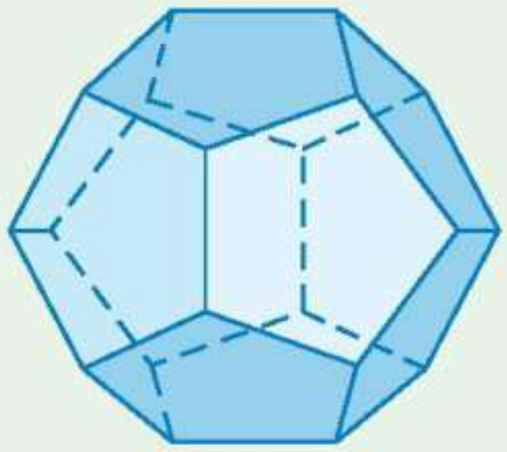
Czworościan foremny (tetraedr) ma cztery ściany będące trójkątami równobocznymi.



Sześcian (heksaedr) ma sześć ścian będących kwadratami.

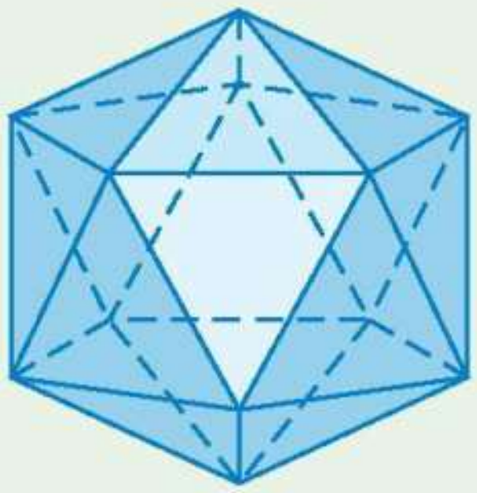


Ośmiościan foremny (oktaedr) ma osiem ścian będących trójkątami równobocznymi.

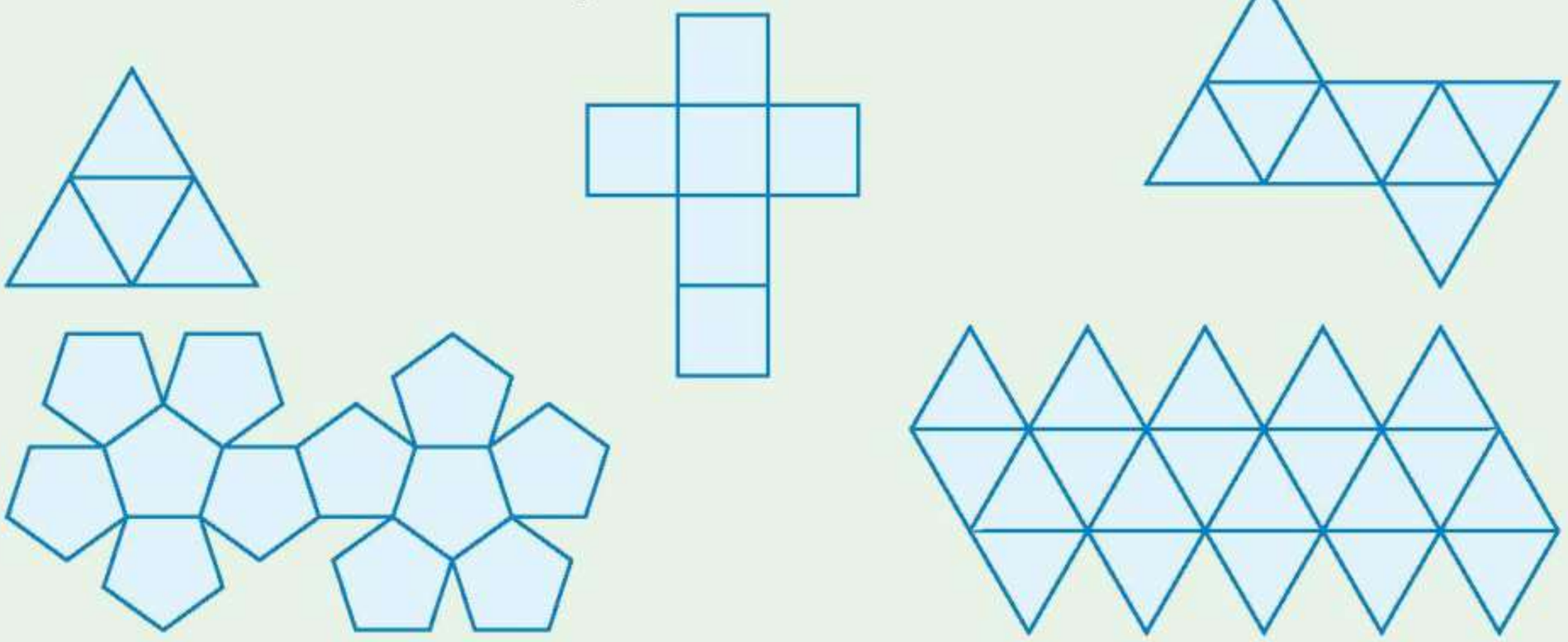


Dwunastościan foremny (dodekaedr) ma dwanaście ścian będących pięciokątami foremnymi.

Dwudziestościan foremny (ikosaedr) ma dwadzieścia ścian będących trójkątami równobocznymi.



Siatki wielościanów foremnych

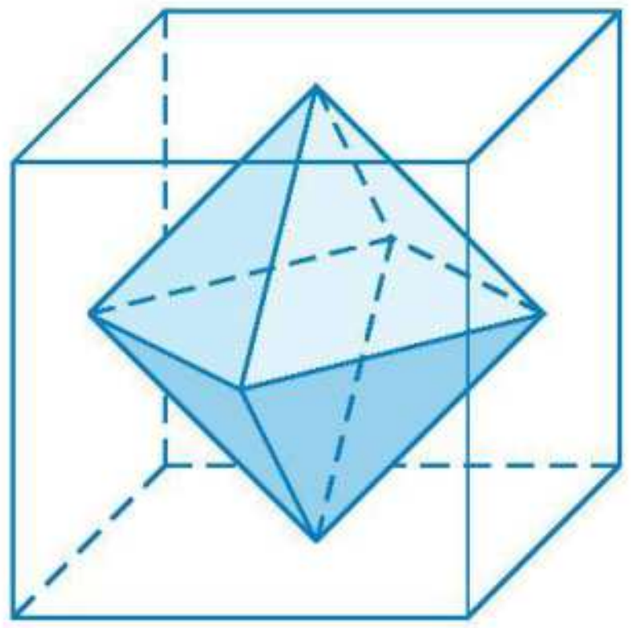


1. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i uzupełnij dane dotyczące wielościanów foremnych. Sprawdź, czy dla każdego z tych wielościanów spełniony jest wzór Eulera: $s - k + w = 2$, gdzie s oznacza liczbę ścian, k – liczbę krawędzi, w – liczbę wierzchołków.

Wielościan foremny	Liczba ścian	Liczba krawędzi	Liczba wierzchołków
czworościan	?	?	?
sześcian	6	12	8
ośmiościan	?	?	?
dwunastościan	?	?	?
dwudziestościan	?	?	?

2. Oblicz pole powierzchni i objętość ośmiościanu foremnego, którego krawędź ma długość 4 cm.

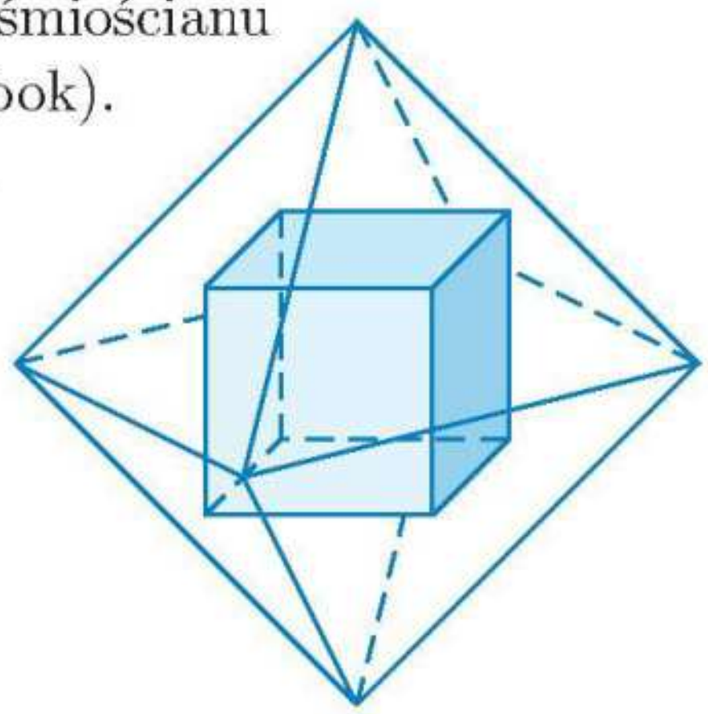
3. Łączymy odpowiednio środki ścian sześcianu i otrzymujemy ośmiościan foremny (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni i objętość tego ośmiościanu, jeśli wiadomo, że krawędź sześcianu ma długość 8 cm.



4. Przekrój ośmiościanu foremnego płaszczyzną, która przechodzi przez jego dwa przeciwległe wierzchołki oraz środki dwóch przeciwległych krawędzi, jest rombem o polu równym $18\sqrt{2}$ cm^2. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ośmiościanu.

5. Pole powierzchni czworościanu foremnego jest dwa razy większe od pola powierzchni ośmiościanu foremnego. Oblicz stosunek objętości tych wielościanów.

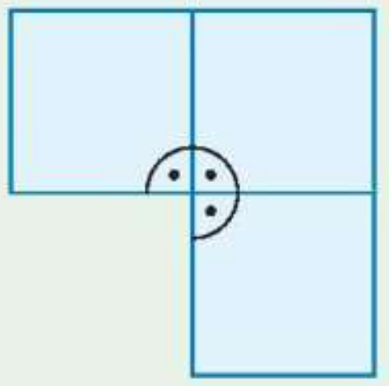
6. Łączymy odpowiednio środki ciężkości ścian ośmiościanu foremnego i otrzymujemy sześcian (rysunek obok). Oblicz objętość tego sześcianu, jeśli wiadomo, że krawędź ośmiościanu ma długość 4 cm.



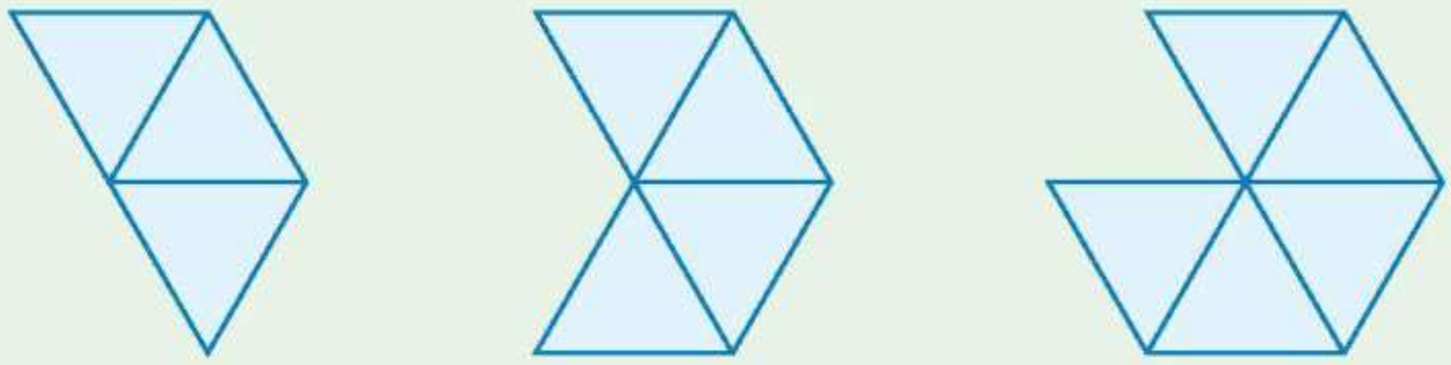
7. Ściany wielościanu foremnego malujemy w ten sposób, aby żadne dwie ściany mające wspólną krawędź nie były tego samego koloru. Jakiej najmniejszej liczby kolorów należy użyć do pomalowania:
a) czworościanu, b) sześcianu, c) ośmiościanu?

8. Dwa czworościany foremne tej samej wielkości złączono podstawami i w ten sposób otrzymano wielościan o sześciu ścianach. Narysuj otrzymany wielościan. Czy jest on foremny?

■ Dlaczego istnieje tylko pięć wielościanów foremnych?

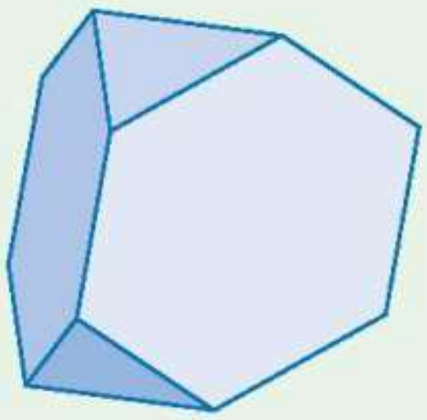


W każdym wierzchołku wielościanu spotykają się co najmniej jego trzy ściany. Na przykład w sześcianie są to trzy kwadraty – fragment siatki przedstawiający ściany mające wspólny wierzchołek przedstawiono na rysunku obok. W każdym fragmencie siatki wielościanu zawierającym ściany mające wspólny wierzchołek suma kątów przy tym wierzchołku musi być mniejsza od 360°. Zatem jeśli ścianą wielościanu jest trójkąt równoboczny, to przy jednym wierzchołku mogą się znajdować trzy trójkąty (czworościan foremny), cztery trójkąty (ośmiościan foremny) lub pięć trójkątów (dwudziestościan foremny). W przypadku sześciu trójkątów otrzymalibyśmy 360°.

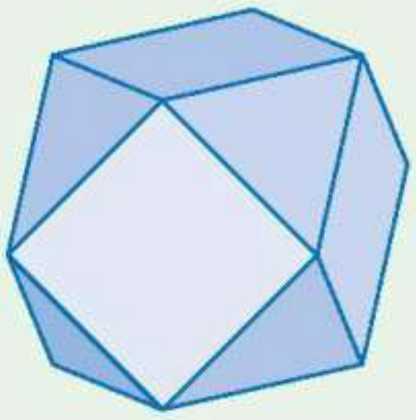


Istnieje tylko jeden wielościan foremny, którego ścianami są pięciokąty i nie istnieją wielościany foremne, których ścianami są n-kąty dla $n > 5$ (uzasadnij). Zatem istnieje tylko pięć wielościanów foremnych.

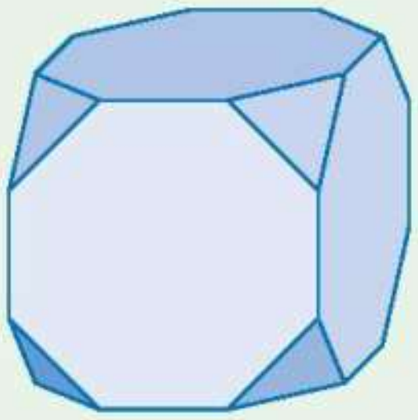
Bryły Archimedesa



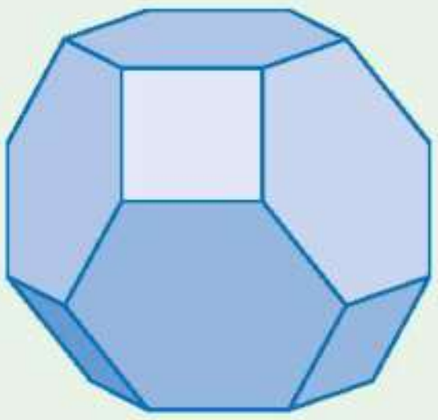
czworościan ścięty



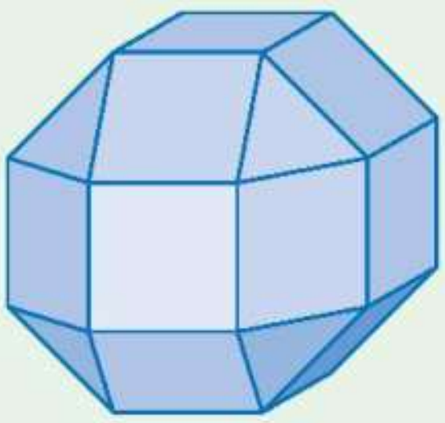
sześcio-ośmiościan



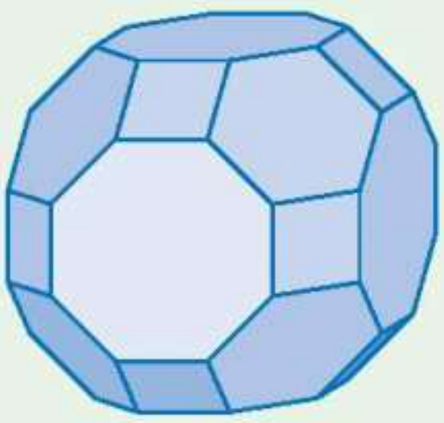
sześcian ścięty



ośmiościan ścięty



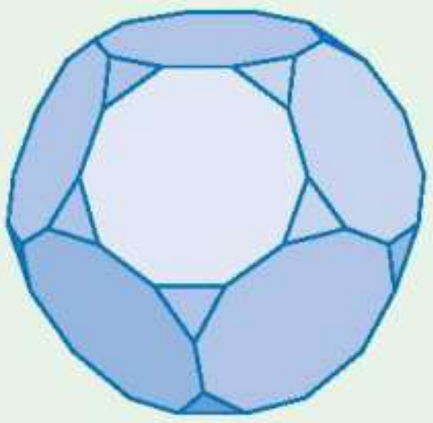
sześcio-ośmiościan rombowy mały



sześcio-ośmiościan rombowy wielki



dwudziesto--dwunastościan



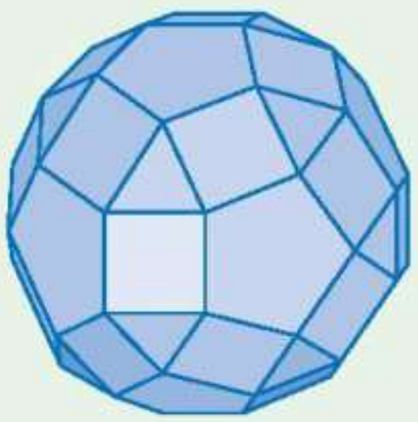
dwunastościan ścięty



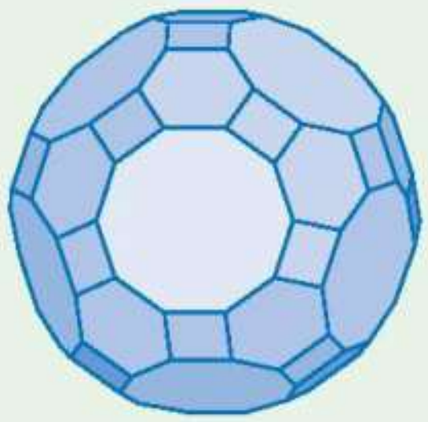
dwudziestościan ścięty



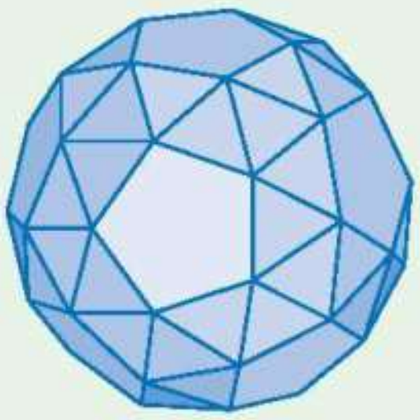
sześcian przycięty



dwudziesto--dwunastościan rombowy mały



dwudziesto--dwunastościan rombowy wielki



dwunastościan przycięty

Na rysunkach przedstawiono 13 **brył Archimedesa** – wielościanów półforemnych. Wszystkie ich ściany są wielokątami foremnymi, nie wszystkie o jednakowej liczbie boków. Wszystkie krawędzie mają jednakową długość.

9. Oblicz objętość sześcianu ściętego, którego krawędź ma długość 1 cm.

10. Z sześcianu o krawędzi 3 cm odcięto narożniki i otrzymano sześcian ścięty. Oblicz długość jego krawędzi.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego ma długość 2, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe 24. Oblicz wysokość tego graniastosłupa, jeżeli jego podstawą jest: a) czworokąt, b) trójkąt, c) sześciokąt.

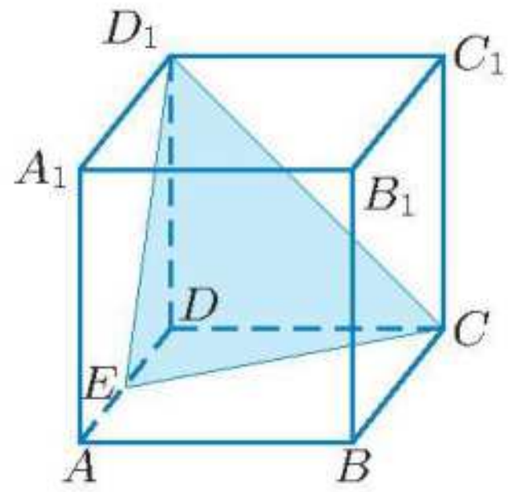
2. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość sześcianu, którego przekątna jest o 2 dłuższa od jego krawędzi.

3. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego jest nachylona do podstawy pod kątem 30°, a krawędź podstawy ma długość 6. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa, jeżeli jego podstawą jest:

a) czworokąt, b) trójkąt, c) sześciokąt.

4. Wysokość prostopadłościanu jest równa 4 cm, a jego podstawą jest kwadrat o boku 3 cm. Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka.

5. Sześcian o krawędzi długości 1 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki C i D_1 oraz środek krawędzi AD (rysunek obok). Oblicz długości boków trójkąta CD_1E oraz cosinus kąta położonego naprzeciwko najdłuższego boku tego trójkąta.



6. W sześcianie połączono wierzchołki dolnej podstawy z jednym z wierzchołków górnej podstawy i otrzymano ostrosłup. Oblicz cosinus kąta zawartego między ścianami bocznymi tego ostrosłupa, których wspólną krawędzią jest przekątna sześcianu.

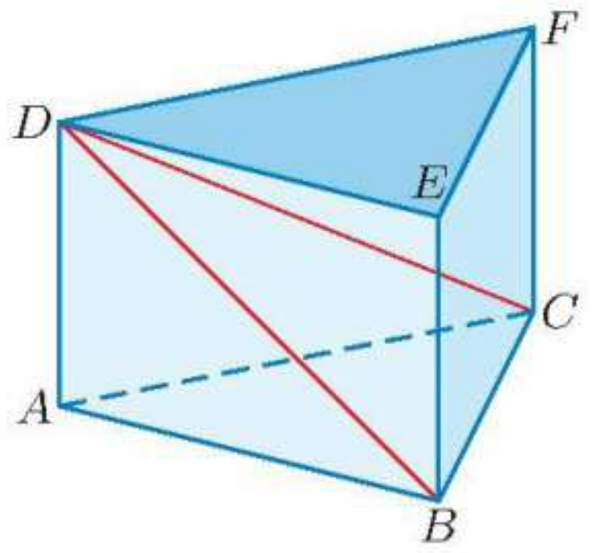
7. Oblicz długość krawędzi czworościanu foremnego, którego wierzchołki są czterema wierzchołkami sześcianu o objętości 8.

8. Wyznacz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole powierzchni bocznej jest równe P, a kąt między wysokościami ścian bocznych opuszczonymi z wierzchołka ostrosłupa ma miarę 2α. Rozważ dwa przypadki.

9. Spośród wszystkich ostrosłupów prawidłowych czworokątnych $ABCDS$ o krawędzi bocznej długości 5 wybieramy ten, dla którego pole trójkąta ACS jest największe. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zestaw II

1. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy długości 6 cm (rysunek obok). Przekątne ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka D tworzą kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



2. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekątne ścian bocznych wychodzące z tego samego wierzchołka mają długość p i tworzą kąt α. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

3. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = 4$, $|AC| = |BC| = 6$, a ściany boczne są nachylone do podstawy pod kątem 60°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

4. Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkątami prostokątnymi. Oblicz miarę kąta α zawartego między ścianami bocznymi i miarę kąta β, który tworzą ściany boczne z podstawą tego ostrosłupa.

5. Kąt dwuścienny zawarty między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma miarę 2α. Wyznacz sinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

***6.** Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6 cm, a kąt zawarty między jego sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę 120°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

7. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4 cm, a krawędź boczna – 5 cm. Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy tak, że w przekroju otrzymano trapez, którego jedna podstawa jest dwa razy krótsza od drugiej. Oblicz pole tego trapezu.

8. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest równa h i tworzy z krawędzią boczną kąt 45°. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do podstawy pod kątem 60°. Wyznacz pole otrzymanego przekroju.

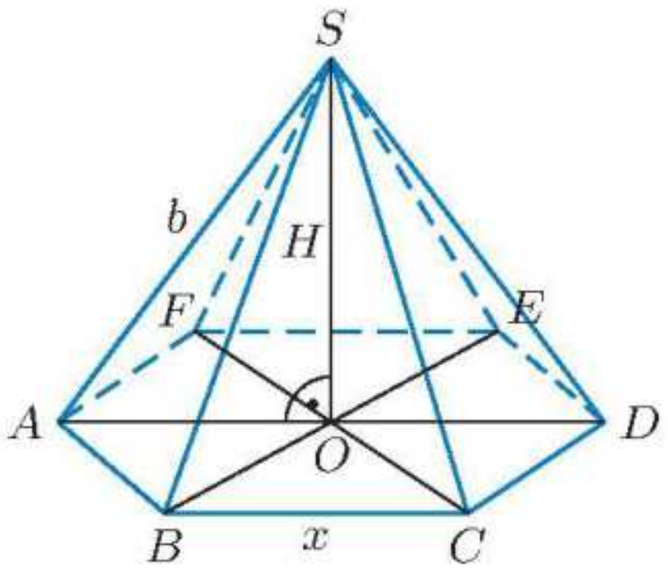
D **9.** Niech P będzie dowolnym punktem leżącym wewnątrz czworościanu foremnego. Wykaż, że suma odległości punktu P od ścian tego czworościanu jest równa jego wysokości.

Sposób na zadanie

Przykład

Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 12. Jakie powinny być długości krawędzi takiego ostrosłupa, aby miał on możliwie największą objętość? Oblicz tę objętość.

Oznaczmy przez x długość krawędzi podstawy,
a przez b – długość krawędzi bocznej.
Z warunku zadania $6x+6b=12$, czyli $x=2-b$.
Ponieważ $b>x>0$, otrzymujemy $0<2-b<b$,
czyli $b\in(1;2)$, a stąd $x\in(0;1)$.



Zauważmy, że jeśli O jest spodkiem wysokości H ostrosłupa, to $|AO|=x$. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOS otrzymujemy:

$$H^2=b^2-x^2=(2-x)^2-x^2=4-4x$$

Zatem wysokość ostrosłupa:

$$H=\sqrt{4-4x}=2\sqrt{1-x},\ \ x\in(0;1)$$

Pole podstawy ostrosłupa:

$$P_p=6\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa jako funkcję zmiennej x:

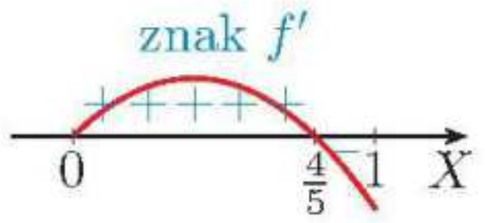
$$V(x)=\frac{1}{3}P_p\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2\cdot 2\sqrt{1-x}=$$

$$=\sqrt{3}\,x^2\sqrt{1-x}=\sqrt{3x^4-3x^5},\ D_V=(0;1)$$

Rozpatrzmy funkcję pomocniczą $f(x)=3x^4-3x^5$, $D_f=(0;1)$.
Funkcja $g(t)=\sqrt{t}$ jest rosnąca, więc funkcje f i V największą wartość przyjmują dla tego samego argumentu.

$$f'(x)=12x^3-15x^4,\ D_{f'}=(0;1)$$

$$f'(x)=0 \text{ dla } x=\frac{4}{5}$$



Funkcja f rośnie w przedziale $\left(0;\frac{4}{5}\right\rangle$ oraz maleje w przedziale $\left\langle\frac{4}{5};1\right)$, zatem dla $x=\frac{4}{5}$ funkcje f i V przyjmują największe wartości.
Krawędź boczna ma zatem długość: $2-\frac{4}{5}=\frac{6}{5}$. Obliczamy największą objętość:

$$V\left(\frac{4}{5}\right)=\sqrt{3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4-3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^5}=$$

$$=\sqrt{3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(1-\frac{4}{5}\right)}=\frac{16}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{16\sqrt{15}}{125}$$

Odpowiedź: Największą objętość ma ostrosłup o krawędzi podstawy $\frac{4}{5}$ i krawędzi bocznej $\frac{6}{5}$. Objętość tego ostrosłupa jest równa $\frac{16\sqrt{15}}{125}$.

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku 6 cm, a kąt nachylenia przekątnej prostopadłościanu do ściany bocznej ma miarę 30°. Przekątna ta ma długość:

A. $3\sqrt{2}$ cm, **B.** $3\sqrt{3}$ cm, **C.** $6\sqrt{3}$ cm, **D.** 12 cm.

2. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o przekątnych długości 3 i 4. Jeśli przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa ma długość $\sqrt{7}$, to jego pole powierzchni całkowitej jest równe:

A. $12\sqrt{3}$, **B.** $12+5\sqrt{3}$, **C.** $10+4\sqrt{3}$, **D.** 13.

3. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6, a krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 45°. Objętość tego ostrosłupa jest równa:

A. $36\sqrt{2}$, **B.** $48\sqrt{2}$, **C.** $72\sqrt{2}$, **D.** $108\sqrt{2}$.

4. Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 3 cm przecięto płaszczyzną zawierającą przeciwległe krawędzie jego podstaw. Otrzymany przekrój tworzy z jedną ze ścian bocznych kąt α taki, że $\cos\alpha = 0{,}8$. Pole tego przekroju jest równe:

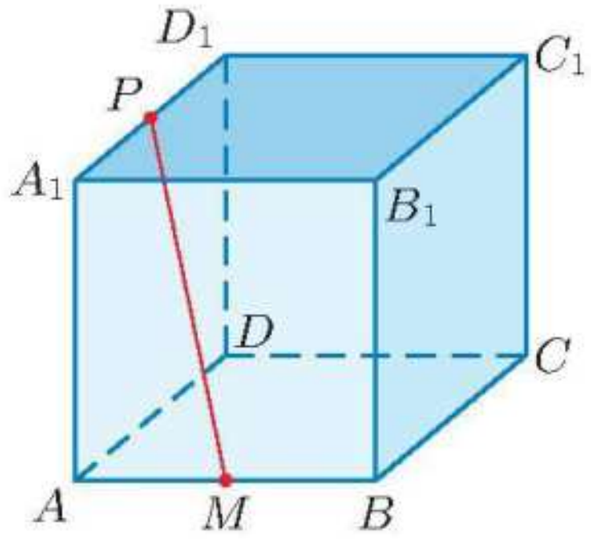
A. 8 cm^2, **B.** 9 cm^2, **C.** 12 cm^2, **D.** 15 cm^2.

5. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy 2 cm pole podstawy jest dwa razy mniejsze od pola powierzchni bocznej. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe:

A. 12 cm^2, **C.** $18\sqrt{3}$ cm^2,
B. 18 cm^2, **D.** $36\sqrt{2}$ cm^2.

6. Punkty M i P są środkami krawędzi sześcianu przedstawionego na rysunku obok. Sinus kąta, który odcinek MP tworzy z podstawą, jest równy:

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$, **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$,
B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$, **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



7. Ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego ściany boczne są trójkątami prostokątnymi, a pole podstawy jest równe $16\sqrt{3}$ cm^2, przecięto płaszczyzną równoległą do dwóch krawędzi bocznych i przechodzącą przez środek trzeciej. Pole otrzymanego przekroju jest równe:

A. 4 cm^2, **B.** 6 cm^2, **C.** $4\sqrt{3}$ cm^2, **D.** $6\sqrt{3}$ cm^2.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Sześcian o krawędzi 4 cm i graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy $2\sqrt{2}$ cm mają taką samą objętość. Oblicz długość przekątnej graniastosłupa.

Zadanie 2 (2 pkt)

Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi jego podstawy. Oblicz tangens kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

Zadanie 3 (2 pkt)

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkątami prostokątnymi o przyprostokątnych długości 2 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 4 (4 pkt)

Wysokość graniastosłupa prostego jest równa 12 cm, a przekątna ściany bocznej ma długość 15 cm. Jego podstawą jest romb o kącie ostrym 60°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 5 (4 pkt)

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy równej 4 przekątna tworzy z tą krawędzią kąt 60°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 6 (4 pkt)

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 6 cm, a pole podstawy jest cztery razy mniejsze od pola powierzchni bocznej. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 7 (4 pkt)

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, w którym wysokość ściany bocznej jest równa 10 cm i tworzy z podstawą kąt 45°.

Zadanie 8 (4 pkt)

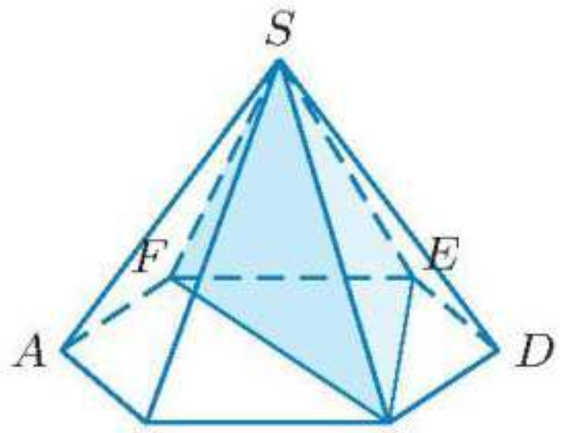
Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość 12 cm, a jeden z kątów ostrych ma miarę 60°. Wysokość ostrosłupa jest równa 8 cm, a spodkiem wysokości jest środek okręgu opisanego na podstawie. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Zadanie 1 (2 pkt)

Wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 2, a kąt między przekątną ściany bocznej a podstawą ma miarę 60°. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

Zadanie 2 (2 pkt)

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 4, a krawędź boczna – długość 6. Oblicz stosunek pola trójkąta CFS do pola trójkąta CES (rysunek obok).

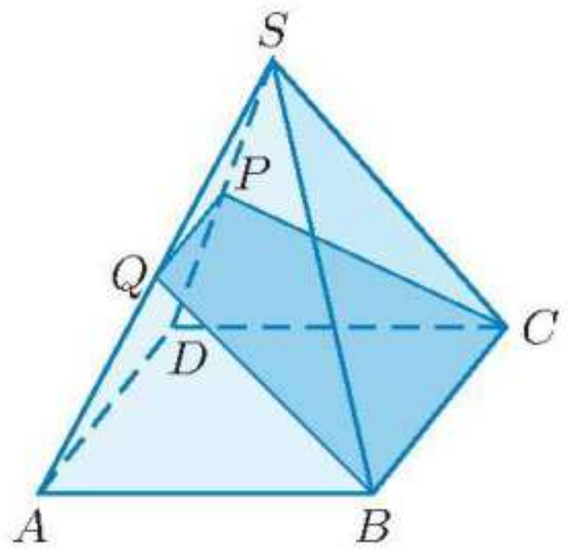


Zadanie 3 (4 pkt)

Podstawa graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma pole równe 50 cm^2. Przekrój tego graniastosłupa płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i jeden z wierzchołków górnej podstawy jest trójkątem o polu równym 65 cm^2. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 4 (5 pkt)

Ostrosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną $BCPQ$, która tworzy równe kąty z płaszczyznami $ABCD$ i BCS (rysunek obok). Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy, jeśli wiadomo, że płaszczyzna $BCPQ$ podzieliła powierzchnię boczną tego ostrosłupa na dwie części o równych polach.



Zadanie 5 (5 pkt)

Ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a i wysokości h przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i środek wysokości ostrosłupa. Wyznacz pole otrzymanego przekroju.

Zadanie 6 (5 pkt)

Ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy a i kącie płaskim przy wierzchołku α przecięto płaszczyzną zawierającą wysokości dwóch ścian bocznych wychodzące z wierzchołka ostrosłupa. Wyznacz pole tego przekroju.

Zadanie 7 (5 pkt)

Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 60. Dla jakich długości krawędzi ostrosłup ten będzie miał największą objętość?

Zadanie 8 (5 pkt)

Suma długości krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wychodzących z jednego wierzchołka jest równa P. Jaką największą objętość może mieć taki graniastosłup?

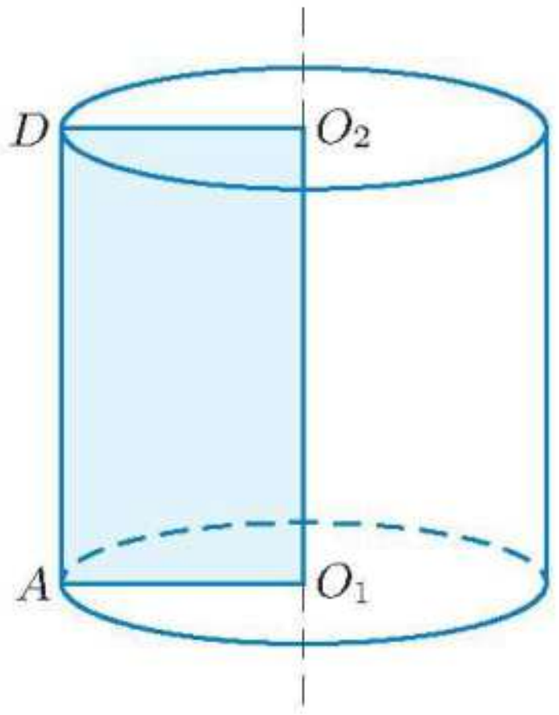


3 Bryły obrotowe

W celu zapewnienia bezpiecznego ruchu statków przy podejściach do portów tor wodny jest oznakowany czerwonymi bojami w kształcie walca i zielonymi w kształcie stożka. Stosuje się też boje o innych kształtach i kolorach. Boje malowane w biało-czerwone pasy to znaki bezpiecznej wody – wskazują, że wokół nich woda jest żeglowna. Zwykle boje takie są kuliste, walcowe lub drążkowe. Na zdjęciu boja podejściowa do portu w Gdyni.

3.1. Walec

Walec to bryła obrotowa otrzymana przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jeden z jego boków. Prostą tę nazywamy **osią** walca.



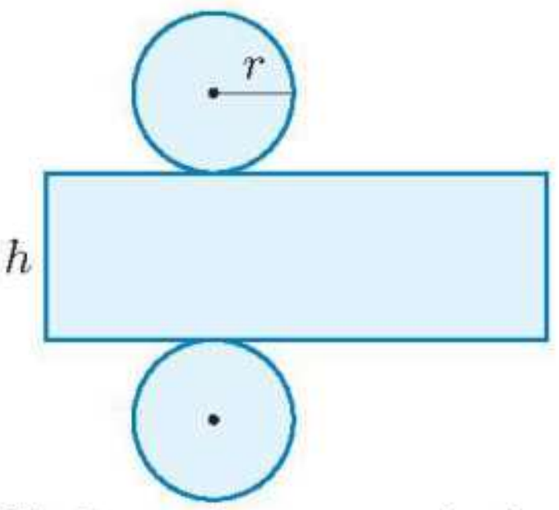
Dwa koła otrzymane przez obrót dwóch boków prostokąta prostopadłych do osi obrotu nazywamy **podstawami** walca. Dowolny odcinek łączący podstawy walca i do nich prostopadły nazywamy **wysokością** walca. W szczególności odcinki O_1O_2 oraz AD (rysunek obok) są wysokościami walca.

Dowolny odcinek, który łączy dwa punkty z brzegów podstaw walca i jest prostopadły do tych podstaw, nazywamy **tworzącą** walca (np. odcinek AD na rysunku powyżej).

Pole powierzchni całkowitej walca o promieniu podstawy r i wysokości h wyraża się wzorem:

$$P_c = 2P_p + P_b = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

gdzie P_p jest polem podstawy walca, a P_b – polem jego powierzchni bocznej.



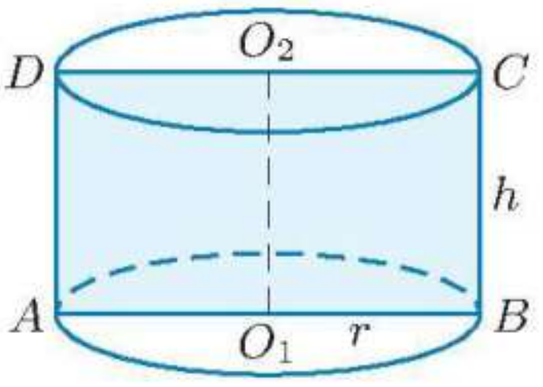
Siatka walca o promieniu podstawy r i wysokości h

Ćwiczenie 1

D a) Uzasadnij wzór na pole powierzchni całkowitej walca.

b) Pole powierzchni całkowitej walca jest równe 40π cm^2, a jego wysokość ma 10 cm. Oblicz pole koła będącego podstawą tego walca.

Przekrojem osiowym walca nazywamy przekrój walca płaszczyzną zawierającą jego oś (rysunek obok) – jest to prostokąt o bokach h i $2r$.

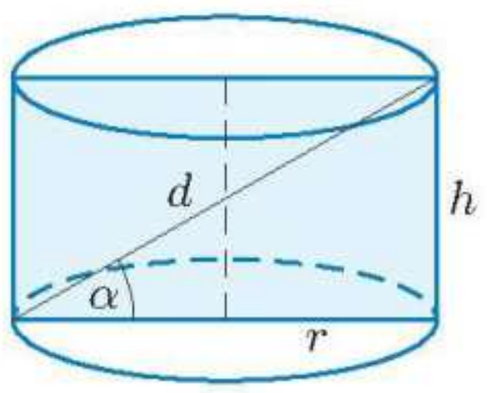


Ćwiczenie 2

Pole przekroju osiowego walca jest równe 40 cm^2, a promień jego podstawy ma 4 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

Ćwiczenie 3

Przekątna d prostokąta będącego przekrojem osiowym walca ma długość 12 cm i tworzy z jego podstawą kąt $\alpha = 30^\circ$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.



Twierdzenie

Objętość walca o promieniu podstawy r i wysokości h wyraża się wzorem:

$$V = P_p \cdot h = \pi r^2 h$$

gdzie P_p jest polem podstawy walca.

Ćwiczenie 4

Oblicz objętość walca, którego przekrój osiowy jest:

a) kwadratem o polu 64 cm^2,

b) prostokątem o bokach 6 cm i 8 cm (rozpatrz dwa przypadki).

Ćwiczenie 5

a) Średnica podstawy walca ma 8 cm, a pole jego powierzchni bocznej jest czterokrotnie większe od pola podstawy. Oblicz objętość tego walca.

b) Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 15 cm i tworzy z jego podstawą kąt α taki, że $\cos\alpha = 0{,}6$. Oblicz objętość tego walca.

Zadania

1. Przekątna przekroju osiowego walca ma długość d i tworzy z jego podstawą kąt α. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego walca.

a) $d = 6$, $\alpha = 30^\circ$ b) $d = 8$, $\alpha = 60^\circ$ c) $d = 12$, $\alpha = 45^\circ$

2. Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 20 cm i tworzy z jego podstawą kąt α. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

a) $\cos\alpha = 0{,}8$ b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$

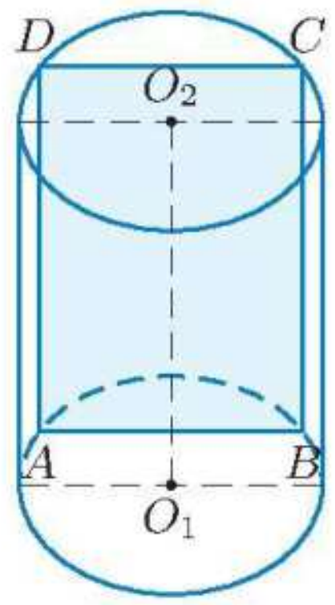
3. Pole powierzchni bocznej walca wynosi 392π, a promień jego podstawy i wysokość są równe. Oblicz pole podstawy i objętość tego walca.

4. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest prostokąt o polu 144 cm^2, jeżeli wiadomo, że stosunek długości boków tego prostokąta jest równy $9:4$ (rozpatrz dwa przypadki).

D **5.** Uzasadnij, że w każdym walcu stosunek pola powierzchni bocznej do pola przekroju osiowego jest równy π.

D **6.** Dany jest prostokąt o bokach a i b, przy czym $a < b$. Wykaż, że walec otrzymany w wyniku obrotu tego prostokąta wokół krótszego boku ma większą objętość od walca otrzymanego w wyniku obrotu wokół dłuższego boku.

7. Walec przecięto płaszczyzną równoległą do jego przekroju osiowego i otrzymano prostokąt $ABCD$ o polu S (rysunek obok). Trójkąt AO_1B (gdzie O_1 jest środkiem podstawy walca) jest prostokątny. Wyznacz pole przekroju osiowego tego walca.

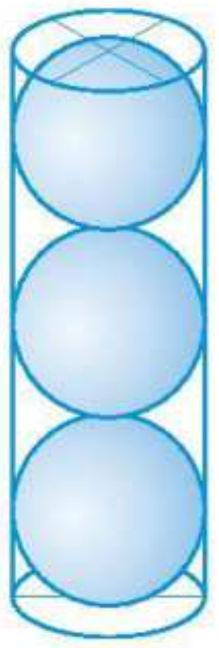


8. Odcinek łączący środek dolnej podstawy walca z punktem na brzegu górnej podstawy tworzy z tymi podstawami kąt α. Wyznacz objętość walca, jeżeli wiadomo, że:

a) pole jego przekroju osiowego jest równe S,

b) przekątna jego przekroju osiowego ma długość d.

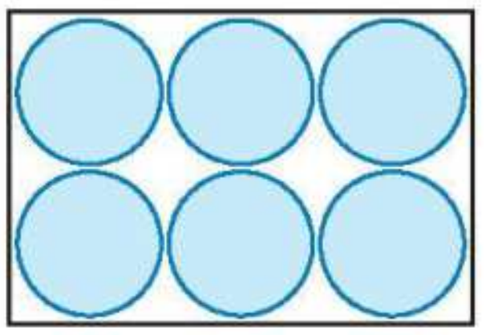
9. W pudełku mającym kształt walca można zmieścić trzy piłki tenisowe o średnicy 6,4 cm każda (rysunek obok). Czy pole powierzchni bocznej tego pudełka jest większe od 3 dm^2?



10. Przekrojem osiowym walca jest prostokąt $ABCD$. Długości boków AB i BC oraz przekątnej AC są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz stosunek pola powierzchni bocznej tego walca do pola jego podstawy (rozpatrz dwa przypadki).

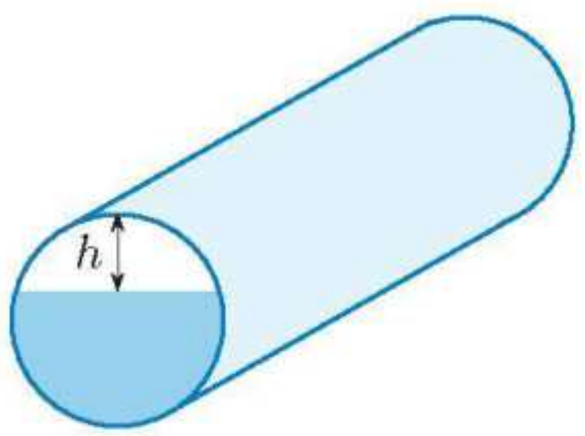
11. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem o przekątnej długości 6 tworzącej z jednym z boków prostokąta kąt 60°. Oblicz objętość tego walca.

D **12.** W prostopadłościennym kartonie umieszczono sześć puszek w kształcie walca o objętości 1 litra i wysokości 10 cm każda (rysunek obok). Wykaż, że pole podstawy kartonu jest większe od 750 cm^2.



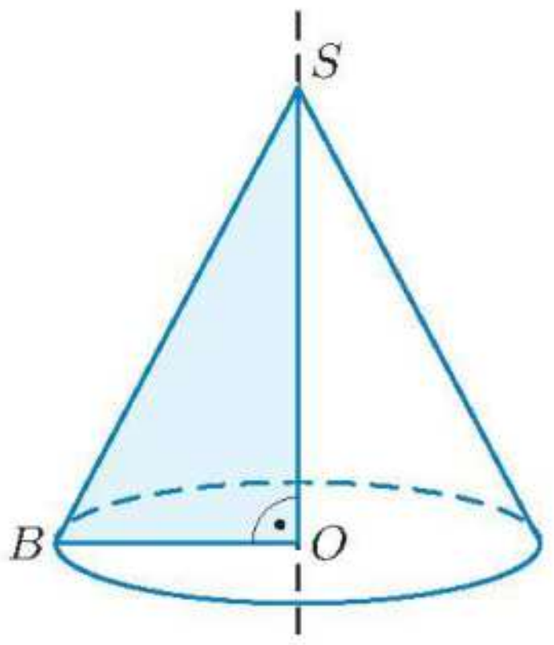
13. Kubek mający kształt walca o średnicy podstawy 8 cm i wysokości 10 cm jest w 90% wypełniony wodą. Wkładamy do niego cztery sześcienne metalowe kostki o krawędzi 2 cm każda. Czy woda z kubka się wyleje (pomiń grubość ścianek kubka)?

14. Zbiornik w kształcie walca o promieniu podstawy 6 dm i wysokości 15 dm jest położony poziomo (rysunek obok). Został on częściowo wypełniony wodą tak, że odległość h przedstawiona na rysunku jest równa: a) 3 dm, b) $3(2-\sqrt{2})$ dm. Oblicz objętość wody w zbiorniku.



3.2. Stożek

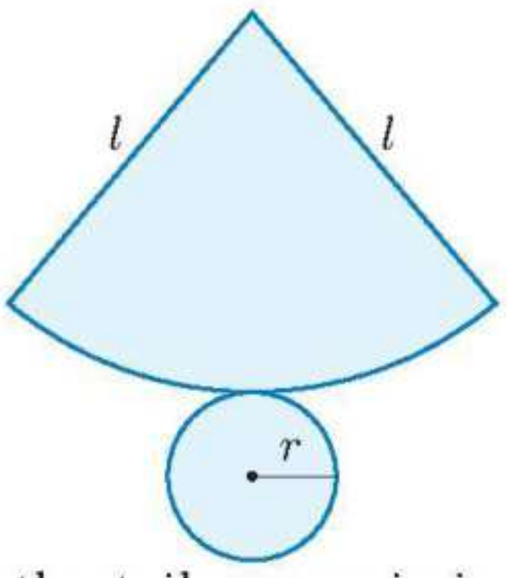
Stożek to bryła obrotowa otrzymana przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych tego trójkąta. Prostą tę nazywamy **osią** stożka.



Koło otrzymane przez obrót drugiej przyprostokątnej nazywamy **podstawą** stożka, a wierzchołek trójkąta nienależący do podstawy – **wierzchołkiem** stożka.

Odcinek łączący wierzchołek stożka ze środkiem podstawy (punkt O na rysunku) nazywamy **wysokością** stożka. Środek podstawy zwany jest też **spodkiem** wysokości stożka. Dowolny odcinek łączący wierzchołek stożka z brzegiem podstawy nazywamy **tworzącą** stożka (np. odcinek SB na rysunku).

Powierzchnią boczną stożka po rozwinięciu jest wycinek koła o promieniu równym tworzącej stożka.



Siatka stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l

> Pole powierzchni bocznej stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l wyraża się wzorem:
>
> $$P_b = \pi r l$$

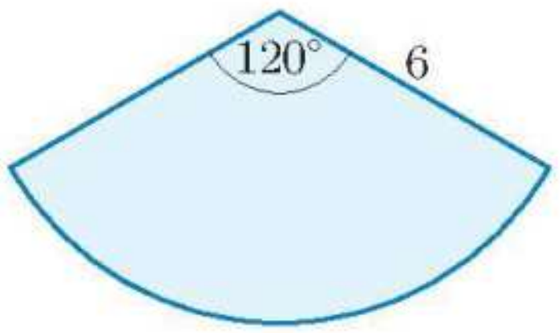
D Ćwiczenie 1

Uzasadnij wzór na pole powierzchni bocznej stożka.

> Pole powierzchni całkowitej stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l wyraża się wzorem:
>
> $$P_c = P_p + P_b = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$$
>
> gdzie P_p jest polem podstawy stożka.

Ćwiczenie 2

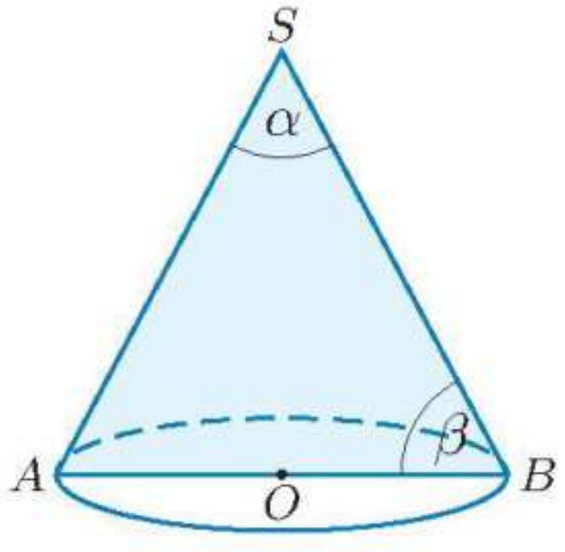
Na rysunku obok przedstawiono wycinek koła, który po zwinięciu jest powierzchnią boczną stożka. Oblicz pole podstawy i pole powierzchni całkowitej tego stożka.



Ćwiczenie 3

Podstawą stożka jest koło o polu równym 36π cm^2, a powierzchnia boczna tego stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu 9 cm wyznaczonym przez kąt środkowy α. Oblicz miarę tego kąta.

Przekrojem osiowym stożka nazywamy przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś. Przekrojem tym jest trójkąt równoramienny. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia** stożka (kąt α na rysunku obok). Kąt między tworzącą stożka a jego podstawą oznaczono na rysunku przez β.



Ćwiczenie 4

Oblicz miarę kąta rozwarcia stożka, którego tworząca ma długość 10 cm, a pole podstawy jest równe 50π cm^2.

Objętość stożka o promieniu podstawy r i wysokości h wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie P_p jest polem podstawy stożka.

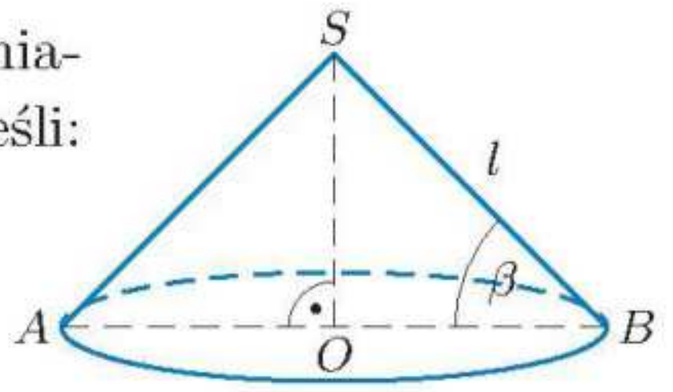
Objętość stożka jest równa $\frac{1}{3}$ objętości walca o takiej samej podstawie i wysokości.

Ćwiczenie 5

Kąt między tworzącą l stożka a jego podstawą ma miarę β (rysunek obok). Oblicz objętość tego stożka, jeśli:

a) $\sin\beta = 0{,}6$, $l = 15$ cm,

b) $\operatorname{tg}\beta = 2{,}4$, $l = 13$ cm.



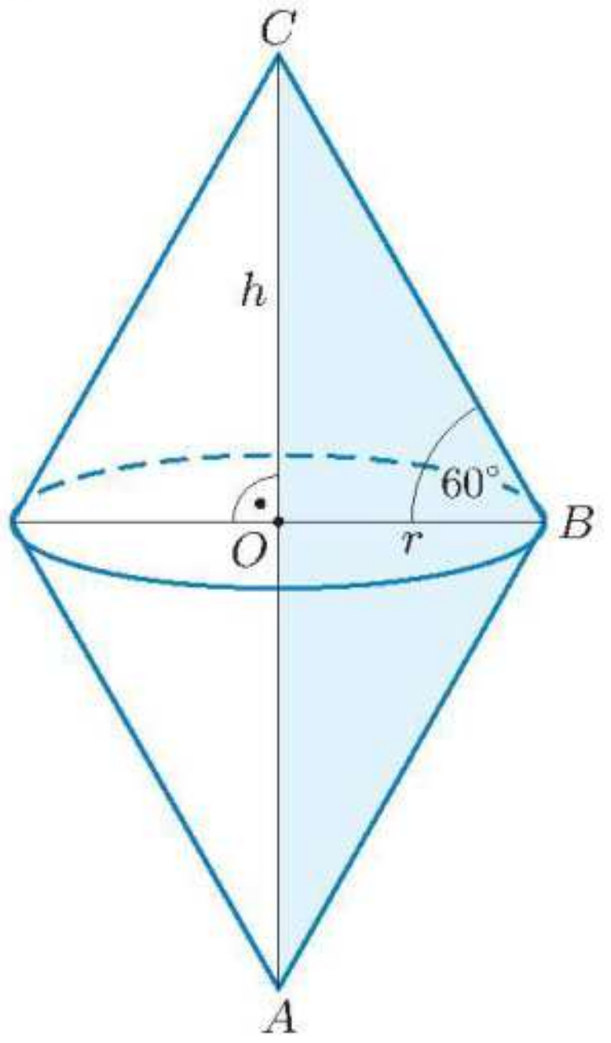
Ćwiczenie 6

a) Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu równym $16\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz objętość tego stożka.

b) Pole podstawy stożka jest równe 27π cm^2, a jego objętość jest równa 27π cm^3. Oblicz miarę kąta między tworzącą stożka a jego podstawą.

Przykład 1

W trójkącie równoramiennym ABC kąt przy wierzchołku B ma miarę 120° oraz $|AB| = |BC| = 6$ cm. Bryła, która powstała przez obrót tego trójkąta wokół najdłuższego boku, to dwa stożki połączone podstawami (rysunek obok). Oblicz objętość tej bryły.



$r = |OB| = 3$ cm oraz $h = |OC| = 3\sqrt{3}$ cm.

Obliczamy objętość otrzymanej bryły:

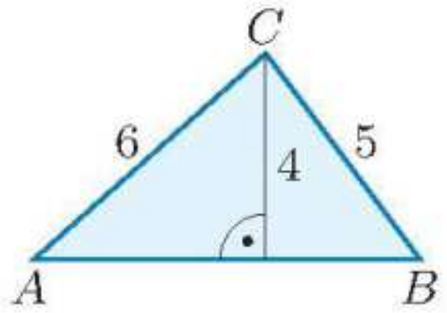
$$V = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

Ćwiczenie 7

Oblicz objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu:

a) trójkąta prostokątnego równoramiennego o polu równym 8 cm^2 wokół jego przeciwprostokątnej,

b) trójkąta ABC (rysunek obok) wokół jego najdłuższego boku.



Zadania

1. Powierzchnią boczną stożka po rozwinięciu jest wycinek koła o promieniu 12 cm wyznaczony przez kąt środkowy α. Oblicz pole podstawy i objętość tego stożka.

a) $\alpha = 60^\circ$ b) $\alpha = 180^\circ$ c) $\alpha = 240^\circ$ d) $\alpha = 270^\circ$

2. a) Powierzchnią boczną stożka po rozwinięciu jest wycinek koła o promieniu 15 cm wyznaczony przez kąt środkowy α. Podstawę tego stożka można wyciąć z kwadratu o boku 6 cm. Wyznacz największą możliwą miarę kąta α.

b) Oblicz pole przekroju osiowego stożka, którego podstawą jest koło opisane na kwadracie o boku 5 cm, a sinus kąta między tworzącą a wysokością stożka jest równy $\frac{2}{3}$.

3. a) Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt prostokątny o polu równym S. Wyznacz pole powierzchni całkowitej i objętość tego stożka.

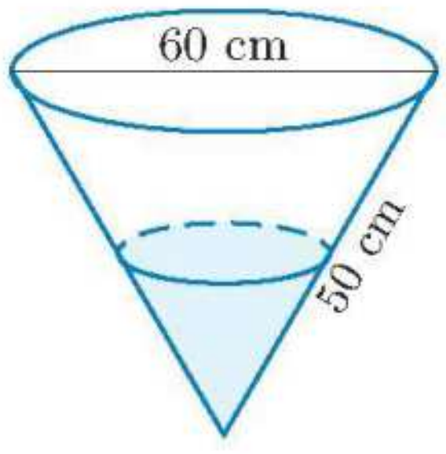
b) Pole powierzchni bocznej stożka jest dwukrotnie większe od pola jego podstawy. Oblicz miarę kąta rozwarcia tego stożka.

4. a) Kąt rozwarcia stożka ma miarę 60°, a pole jego powierzchni bocznej jest równe 8π cm^2. Oblicz objętość tego stożka.

b) Kąt rozwarcia stożka ma miarę 30°, a jego podstawa ma pole równe $(18 - 9\sqrt{3})\pi$ cm^2. Oblicz pole przekroju osiowego i objętość tego stożka.

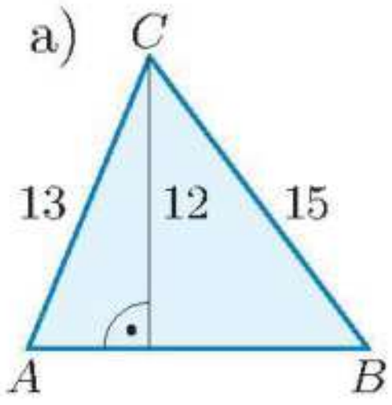
5. Dany jest stożek o polu powierzchni bocznej $2\pi\sqrt{2}$ cm^2 i polu powierzchni całkowitej $\frac{2\pi}{\sqrt{2}-1}$ cm^2. Oblicz miarę kąta zawartego między tworzącą tego stożka a jego podstawą.

6. Poziom wody w zbiorniku w kształcie stożka sięga połowy jego wysokości (rysunek obok). Ile litrów wody znajduje się w zbiorniku? Na jaką wysokość sięgałaby woda, gdyby zajmowała połowę objętości zbiornika?

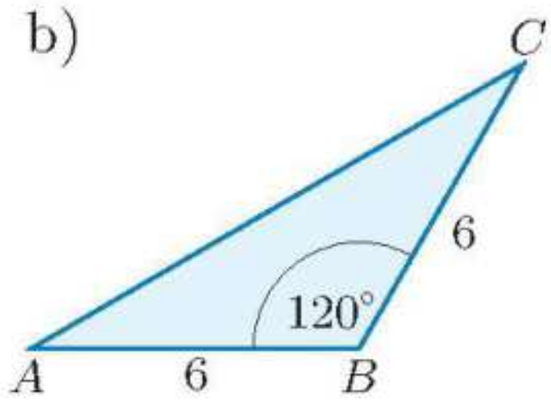


7. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość bryły, która powstanie w wyniku obrotu trójkąta ABC wokół prostej AB.

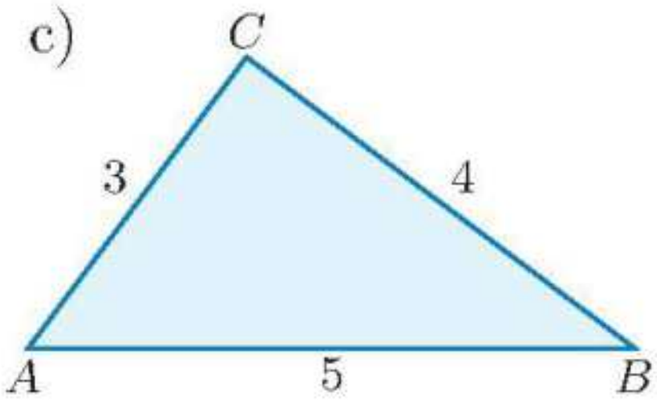
a)



b)

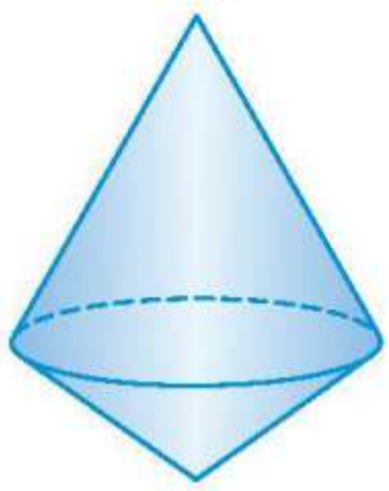


c)



8. Trójkąt równoramienny o podstawie 10 cm i ramionach 13 cm obracamy wokół prostej zawierającej jego ramię. Oblicz pole powierzchni całkowitej otrzymanej bryły.

9. Dwa stożki mają identyczne podstawy o polu 16π cm^2. Stożki te złączono podstawami i otrzymano bryłę przedstawioną na rysunku.
Jej przekrojem osiowym jest deltoid o polu 60 cm^2.



a) Oblicz objętość tej bryły.

b) Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły, jeśli wiadomo, że wysokość jednego stożka jest dwukrotnie dłuższa od wysokości drugiego.

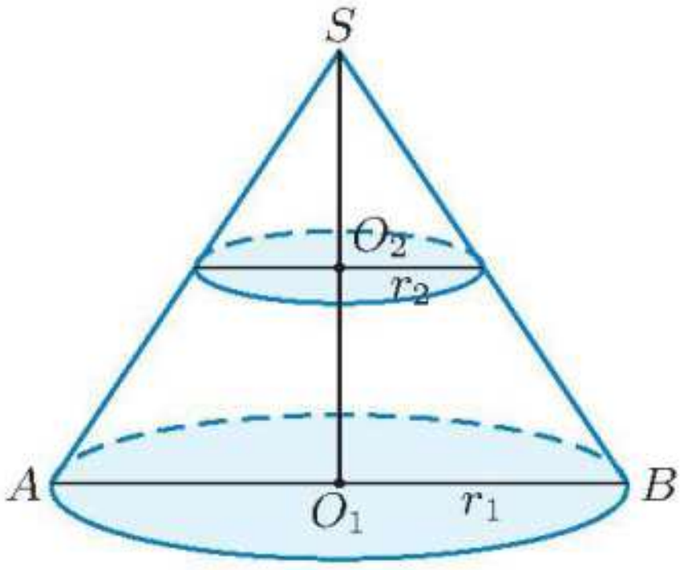
D **10.** Wykaż, że stosunek pola podstawy stożka do pola jego powierzchni bocznej jest równy sinusowi kąta między tworzącą a wysokością tego stożka.

11. a) Wysokość stożka o wierzchołku S jest równa $2\sqrt{3}$, a podstawą tego stożka jest koło o promieniu 12. Cięciwa AB podstawy ma długość $12\sqrt{3}$. Oblicz miarę kąta nachylenia płaszczyzny ABS do podstawy stożka.

b) W podstawę stożka o wierzchołku S i wysokości 7 wpisano kwadrat $ABCD$ o boku długości 6. Oblicz pole przekroju stożka płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek S i zawierającą bok AB.

12. Stożek o promieniu podstawy 10 cm i wysokości $6\sqrt{3}$ cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek i nachyloną do podstawy stożka pod kątem 60°. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

13. Stożek przecięto płaszczyzną prostopadłą do jego wysokości i otrzymano dwie bryły: mniejszy stożek i stożek ścięty, którego podstawami są koła o promieniach r_1 i r_2 (rysunek obok). Oblicz objętość stożka ściętego.



a) $r_1 = 6,\ r_2 = 4,\ |O_1O_2| = 5$

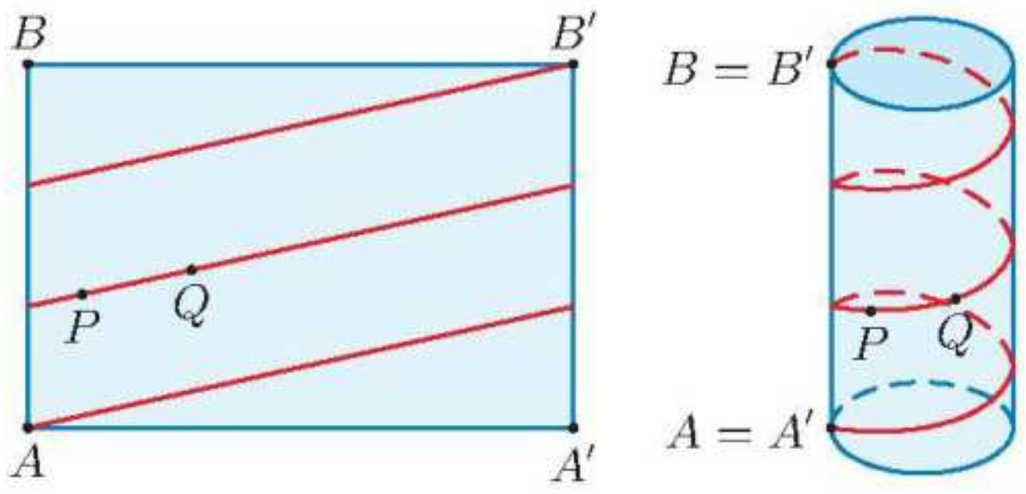
b) $r_1 = 12,\ r_2 = 9,\ \sphericalangle ASB = 90°$

Warto wiedzieć

Linie geodezyjne

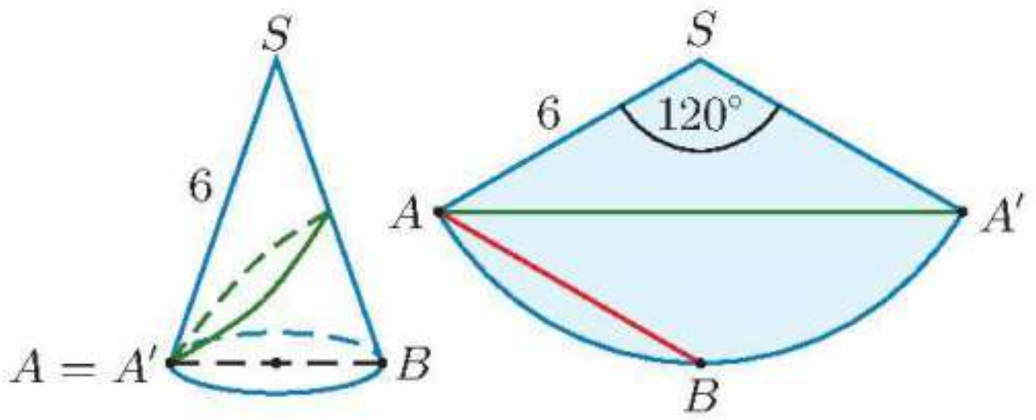
Najkrótsza linia na powierzchni bryły łącząca dwa punkty nazywa się **linią geodezyjną**.

Po zwinięciu prostokąta przedstawionego na rysunku obok w powierzchnię boczną walca otrzymujemy na powierzchni tego walca tzw. **linię śrubową** (zaznaczoną kolorem czerwonym). Nazwa tej krzywej pochodzi stąd, że wzdłuż linii śrubowej nacinany jest gwint śruby. Zauważmy, że dla punktów P i Q położonych na powierzchni walca tak jak na powyższym rysunku najkrótsza droga między tymi punktami prowadzi wzdłuż linii śrubowej.

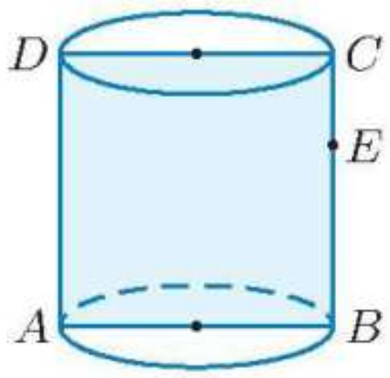


Przykład 1

Przekrojem osiowym stożka o tworzącej równej 6 jest trójkąt ABS (rysunek obok). Powierzchnią boczną tego stożka po rozwinięciu jest wycinek koła wyznaczony przez kąt środkowy 120°. Najkrótsza droga z punktu A do punktu B poprowadzona po powierzchni bocznej stożka (kolor czerwony) ma długość 6. Długość najkrótszej pętli poprowadzonej po powierzchni bocznej stożka, zaczynającej się i kończącej w punkcie A (kolor zielony), jest równa $6\sqrt{3}$.



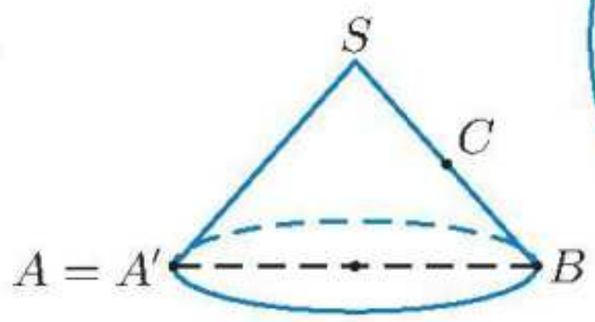
1. Przekrój osiowy walca jest kwadratem $ABCD$ o boku 12. Na boku BC wybrano punkt E taki, że $|BE| = 2|CE|$ (rysunek obok). Oblicz długość najkrótszej drogi poprowadzonej po powierzchni bocznej walca z punktu E do punktu: a) A, b) D.

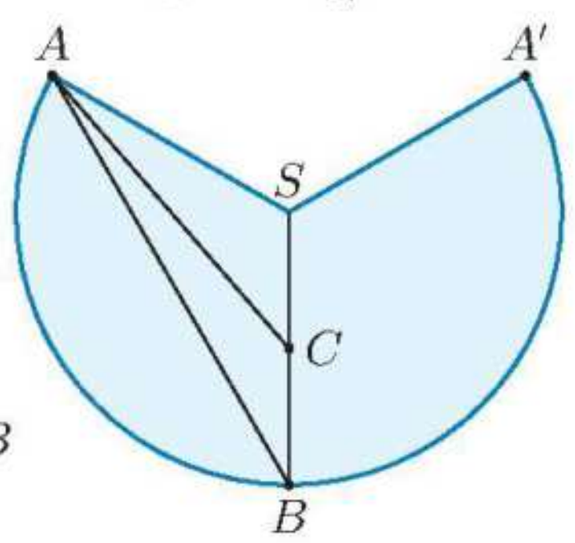


2. Przekrojem osiowym stożka o promieniu podstawy 8 i wysokości $4\sqrt{5}$ jest trójkąt ABS. Punkt C jest środkiem odcinka BS (rysunek poniżej). Oblicz długość najkrótszej drogi poprowadzonej po powierzchni bocznej stożka:

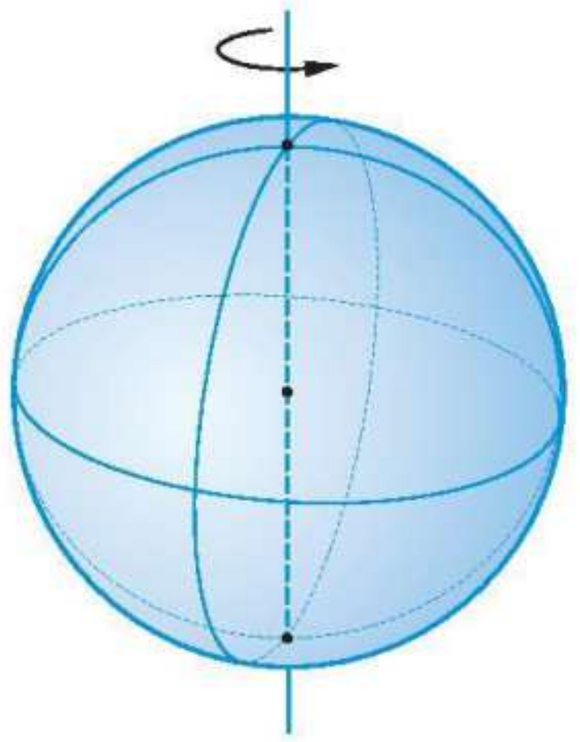
a) z punktu A do punktu B,

b) z punktu A do punktu C.





3.3. Kula



Kula to bryła obrotowa otrzymana przez obrót koła wokół prostej zawierającej jego średnicę.

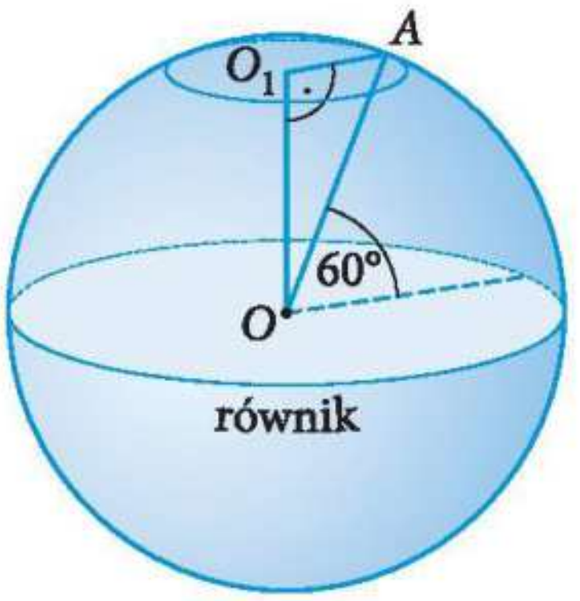
Kula o środku w punkcie O i promieniu $r > 0$ jest zbiorem punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r.

Sfera o środku w punkcie O i promieniu $r > 0$ jest zbiorem punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest równa r (sfera jest powierzchnią kuli).

Każdy przekrój kuli płaszczyzną, która ma więcej niż jeden punkt wspólny z tą kulą, jest kołem. Jeśli płaszczyzna ta przechodzi przez środek kuli, to przekrój ten nazywamy **kołem wielkim**.

Przykład 1

Przyjmując, że Ziemia jest kulą, oblicz stosunek długości równoleżnika przechodzącego przez punkty o szerokości geograficznej 60° do długości równika.



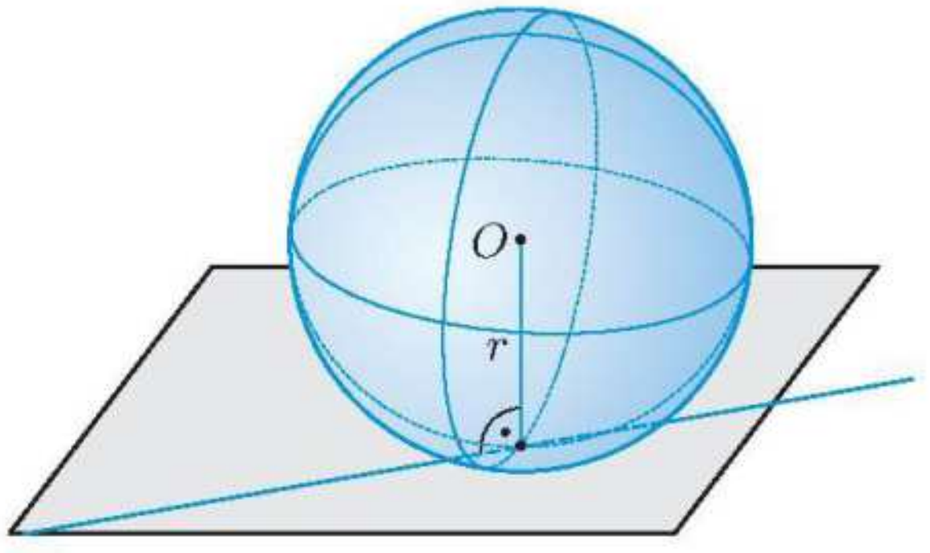
W trójkącie OO_1A mamy $|OA| = 2|O_1A|$ (rysunek obok). Stosunek długości okręgów jest równy stosunkowi długości ich promieni, więc szukany stosunek długości równoleżnika 60° do długości równika jest równy $1:2$.

Ćwiczenie 1

a) Kulę o promieniu 10 cm przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest kołem o środku oddalonym od środka kuli o 7 cm. Oblicz pole tego koła.

b) Kulę o promieniu 5 cm przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest kołem o polu równym 16π cm^2. Oblicz odległość środka tego koła od środka kuli.

Jeśli płaszczyzna ma z kulą dokładnie jeden punkt wspólny, to mówimy, że ta płaszczyzna jest **styczna** do kuli. Promień poprowadzony ze środka kuli do punktu styczności jest prostopadły do płaszczyzny stycznej.

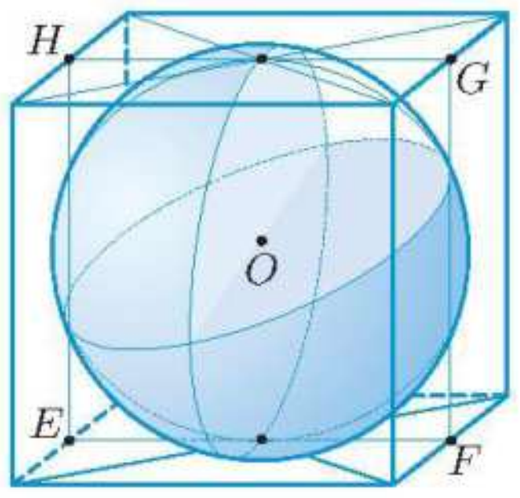


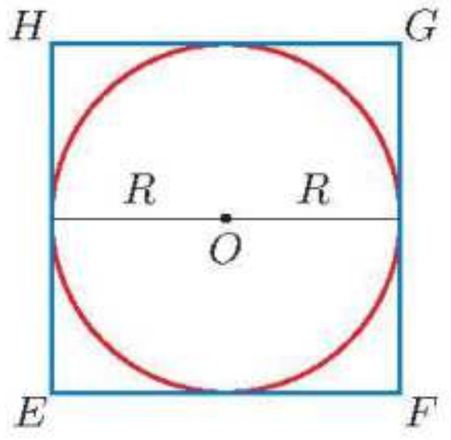
Ćwiczenie 2

Punkt O jest środkiem sześcianu (punktem przecięcia przekątnych sześcianu) o krawędzi a. Oblicz promień sfery o środku w punkcie O:

a) stycznej do wszystkich ścian tego sześcianu (rysunek obok),

b) zawierającej wszystkie wierzchołki tego sześcianu.





Sformułowanie wzorów na pole powierzchni i objętość kuli zawdzięczamy greckiemu filozofowi i matematykowi Archimedesowi (ok. 287–ok. 212 r. p.n.e.).

Przykład 2

Pole powierzchni kuli jest równe 144π cm^2. Oblicz objętość tej kuli.

Obliczamy promień kuli:

$$P = 4\pi r^2 = 144\pi$$

stąd $r^2 = 36$, czyli $r = 6$ cm.
Zatem objętość kuli:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

Pole powierzchni kuli o promieniu r wyraża się wzorem:

$$P = 4\pi r^2$$

Objętość kuli o promieniu r wyraża się wzorem:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Ćwiczenie 3

Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o promieniu r.

a) $r = \frac{3}{2}$ cm b) $r = \sqrt{3}$ cm c) $r = 2\sqrt{2}$ cm

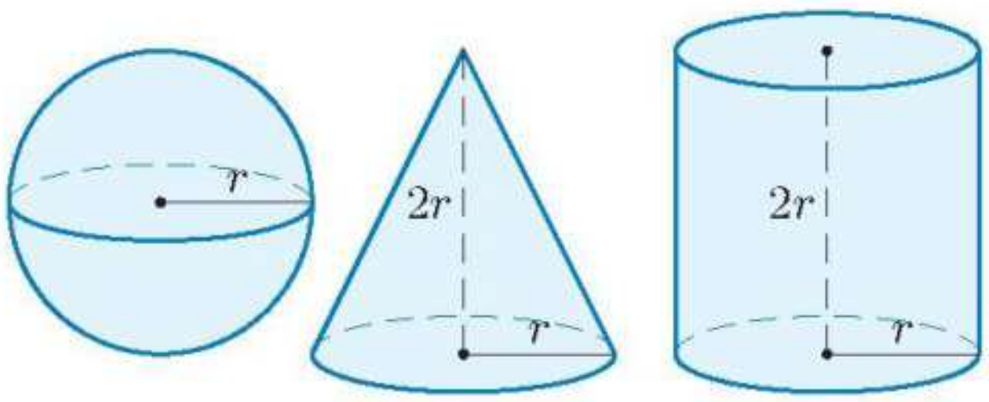
Ćwiczenie 4

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Promień kuli	6	3	?	?	?
Pole powierzchni kuli	144π	36π	256π	?	$3{,}24\pi$
Objętość kuli	288π	?	?	$\frac{32}{3}\pi$	?

D Ćwiczenie 5

Dane są kula, stożek i walec o wymiarach takich jak na rysunku obok. Uzasadnij, że suma objętości kuli i stożka jest równa objętości walca.



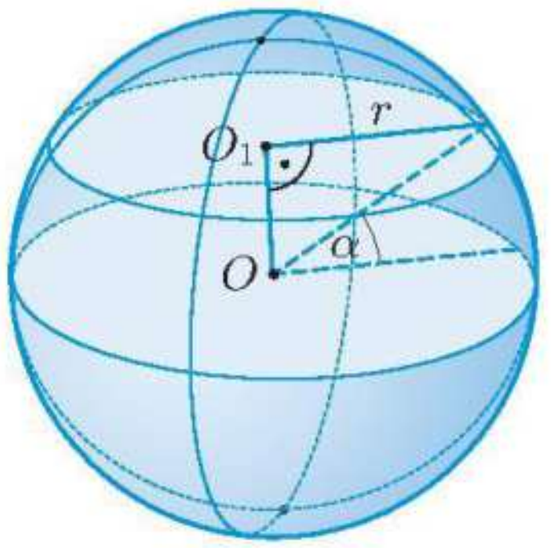
Zadania

1. Kulę o środku O przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkt O_1 (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni i objętość tej kuli, jeśli:

a) $\sin\alpha = 0{,}5$ i $|OO_1| = 2\sqrt{3}$ cm,

b) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$ i $|OO_1| = 6$ cm,

c) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ i $|OO_1| = 2\sqrt{5}$ cm.



2. Kulę o promieniu 8 cm przecięto dwiema równoległymi płaszczyznami i otrzymano w przekrojach koła o promieniach 3 cm i 4 cm. Oblicz odległość między tymi płaszczyznami (rozpatrz dwa przypadki).

3. Kulę o środku O przecięto płaszczyzną i otrzymano w przekroju koło o środku S. Oblicz:

a) objętość kuli, jeśli $|OS| = \sqrt{2}$, a pole przekroju jest równe 25π,

b) pole przekroju, jeśli $|OS| = 2\sqrt{3}$, a objętość kuli jest równa $108\sqrt{3}\pi$.

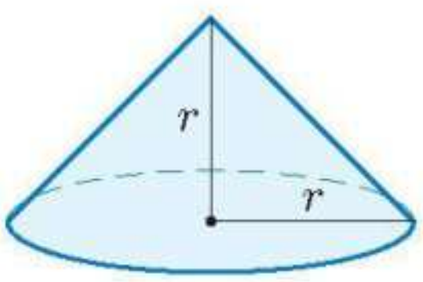
4. a) Dane są dwie kule o promieniach 3 cm i 5 cm oraz wspólnym środku. Oblicz pole przekroju utworzonego przez przecięcie większej kuli płaszczyzną styczną do mniejszej kuli.

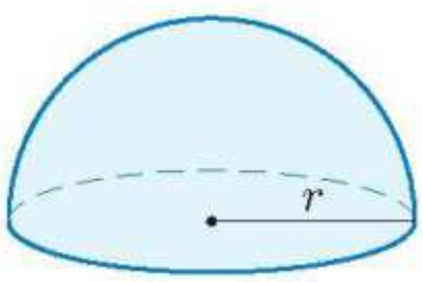
b) Dane są dwie kule o promieniach 6 cm i r cm oraz wspólnym środku. Pole przekroju utworzonego przez przecięcie większej kuli płaszczyzną styczną do mniejszej kuli jest równe 9π cm^2. Oblicz r (rozpatrz dwa przypadki).

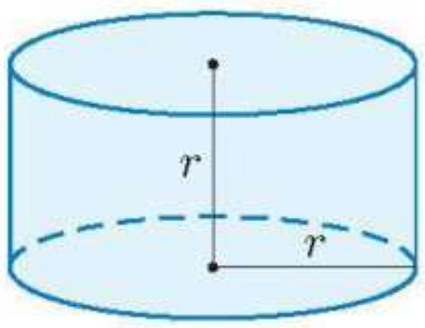
5. a) Kulisty balon ma promień równy 20 cm. Po dopompowaniu powietrza promień balonu zwiększył się o 25%. O ile wzrosło jego pole powierzchni?

b) Z kulistego balonu o promieniu równym 20 cm spuszczono częściowo powietrze. Promień balonu zmniejszył się o 25%. O ile zmalało jego pole powierzchni?

D **6.** Na rysunku poniżej przedstawiono stożek, półkulę i walec. Wszystkie bryły mają taką samą podstawę, a wysokości stożka i walca są równe promieniowi półkuli. Uzasadnij, że objętości tych brył są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.







D **7.** a) Sześcian z brązu przetopiono na kulę. Wykaż, że stosunek pola powierzchni tej kuli do pola powierzchni sześcianu jest równy $\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$.

b) Metalowy walec, którego przekrój osiowy jest kwadratem, przetopiono na kulę. Wykaż, że promień tej kuli jest równy $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ promienia podstawy walca.

8. Kula i stożek mają równe objętości. Promień podstawy stożka jest równy r, a stosunek jego pola powierzchni bocznej do pola podstawy wynosi 2,6. Wyznacz promień kuli.

9. Środki dwóch sfer są oddalone od siebie o 10 cm, a ich promienie są równe r_1 i r_2. Oblicz długość okręgu będącego częścią wspólną obu tych sfer.

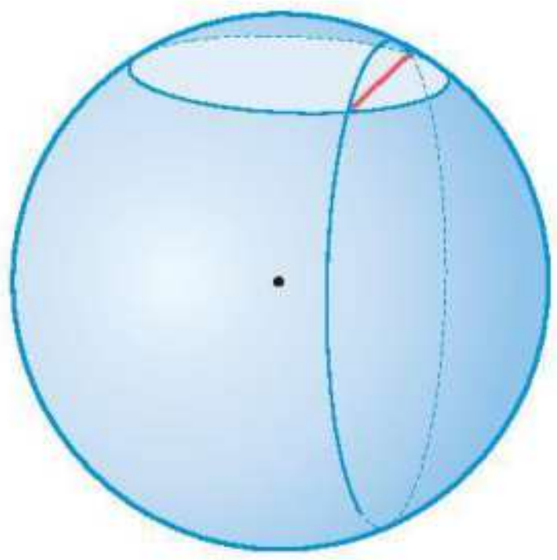
a) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 8$ cm b) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 14$ cm

10. Środek sfery o promieniu r_1 należy do sfery o promieniu r_2. Oblicz długość okręgu będącego częścią wspólną obu tych sfer.

a) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 3$ cm

b) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 2\sqrt{3}$ cm

11. Kulę o średnicy 7 przecięto dwiema płaszczyznami, które są do siebie prostopadłe (rysunek obok). Otrzymane przekroje są kołami o promieniach 2 i 3. Oblicz długość odcinka będącego częścią wspólną obu przekrojów.

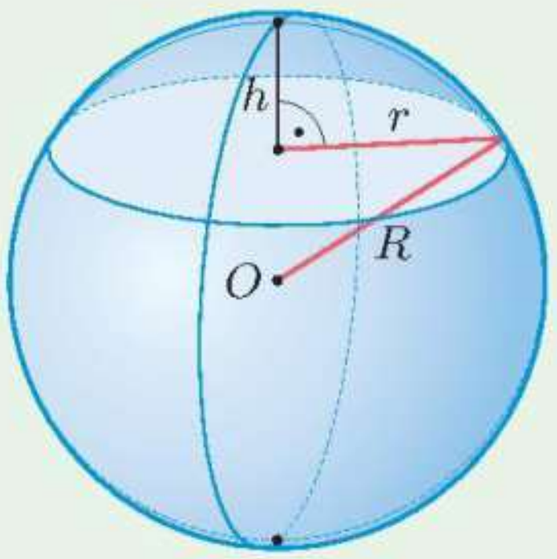


Czaszą kulistą (czaszą kuli) nazywamy każdą z dwóch części, na które dzieli powierzchnię kuli przecinająca ją płaszczyzna. Pole powierzchni czaszy kulistej wyraża się wzorem:

$$P = 2\pi Rh$$

Każdą z dwóch brył, na które dzieli kulę przecinająca ją płaszczyzna, nazywamy **odcinkiem kulistym** (odcinkiem kuli). Objętość odcinka kulistego wyraża się wzorem:

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3R - h) = \tfrac{1}{6}\pi h(3r^2 + h^2)$$



R – promień kuli,
r – promień podstawy czaszy,
h – wysokość czaszy

12. Kulę o promieniu 6 cm przecięto płaszczyzną, której odległość od środka kuli jest równa 3 cm. Oblicz objętości otrzymanych odcinków kuli.

Odwzorowania kartograficzne

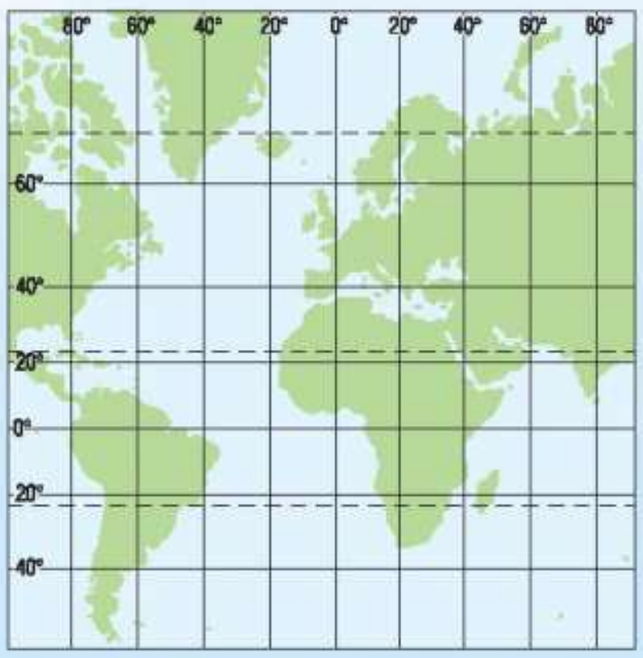
Odwzorowanie powierzchni Ziemi na płaszczyźnie, jaką jest płaska mapa, pociąga za sobą różne zniekształcenia. Mogą to być zniekształcenia pól powierzchni, długości bądź kątów. Oto przykłady dwóch odwzorowań wiernokątnych, czyli zachowujących zależności kątowe między południkami a równoleżnikami.



Odwzorowanie walcowe

Powierzchnia modelu Ziemi jest odwzorowana na powierzchni bocznej walca stycznego do powierzchni modelu wzdłuż równika. Obrazami południków są proste prostopadłe do równika.

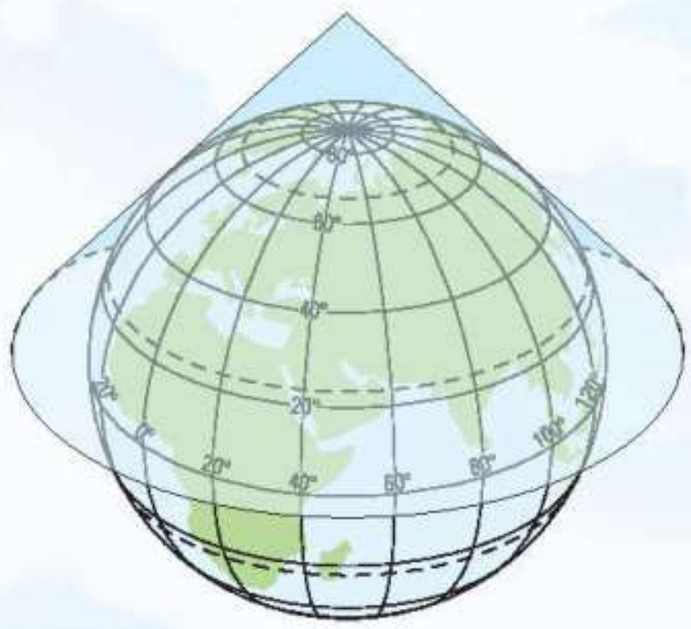




Takie odwzorowanie nazywamy odwzorowaniem Merkatora, od nazwiska flamandzkiego matematyka i kartografa (1512–1594). Zauważ, że w tym odwzorowaniu szczególnie zniekształcone są obszary okołobiegunowe.

Odwzorowanie stożkowe

Powierzchnia modelu Ziemi jest odwzorowana na powierzchni bocznej stożka stycznego do powierzchni modelu wzdłuż jednego z równoleżników.



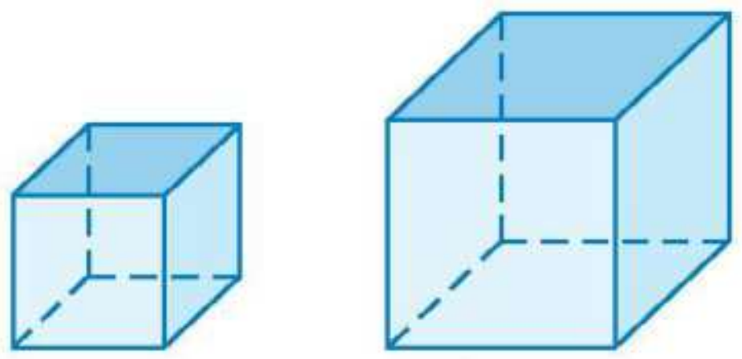


Za pomocą takich siatek przedstawia się na przykład obszary między zwrotnikami a kołami podbiegunowymi.

1 Znajdź informacje o odwzorowaniu powierzchni Ziemi za pomocą siatki azymutalnej.

3.4. Bryły podobne

Dwie bryły są **podobne**, jeśli odległości między punktami jednej bryły są proporcjonalne do odległości między odpowiadającymi im punktami drugiej bryły. Stosunek odległości między odpowiednimi punktami brył podobnych nazywamy **skalą podobieństwa**.

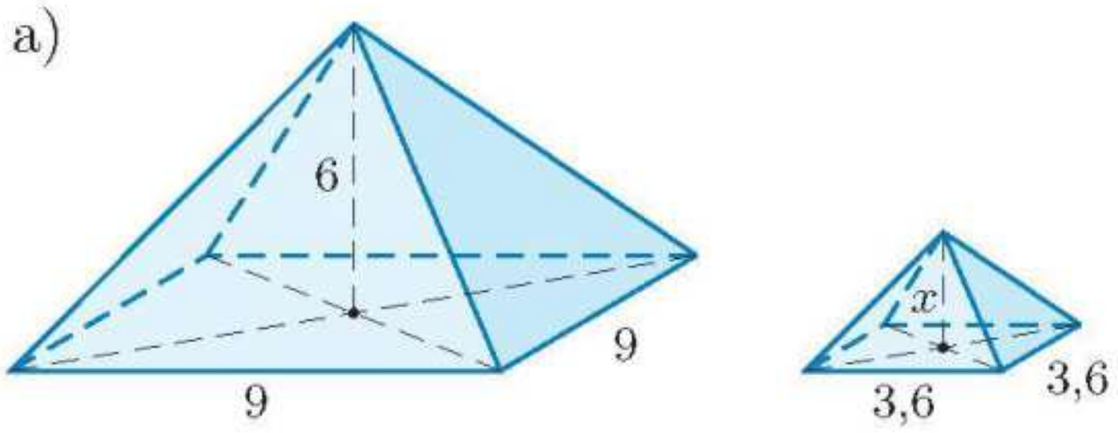


Na przykład dowolne dwie kule czy dowolne dwa sześciany są podobne. Na rysunku powyżej skala podobieństwa większego sześcianu do mniejszego jest równa $\frac{3}{2}$, co możemy też zapisać $3:2$.

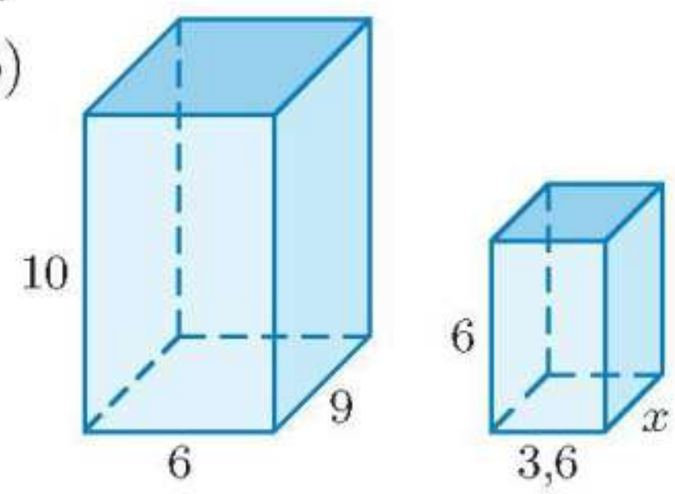
Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiono wielościany podobne. Oblicz x oraz podaj skalę podobieństwa mniejszego wielościanu do większego.

a)



b)



Przykład 1

Pole powierzchni kuli K_1 jest dwa razy większe od pola powierzchni kuli K_2. Oblicz stosunek objętości tych kul.

Niech r_1 i r_2 będą odpowiednio promieniami kul K_1 i K_2. Stosunek pól powierzchni tych kul:

$$\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 2$$

zatem $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2}$ – zauważmy, że jest to skala podobieństwa kuli K_1 do kuli K_2. Obliczamy stosunek objętości:

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$$

Jeśli skala podobieństwa brył podobnych jest równa $a:b$, to:
- stosunek pól powierzchni tych brył jest równy $a^2:b^2$,
- stosunek objętości tych brył jest równy $a^3:b^3$.

Ćwiczenie 2

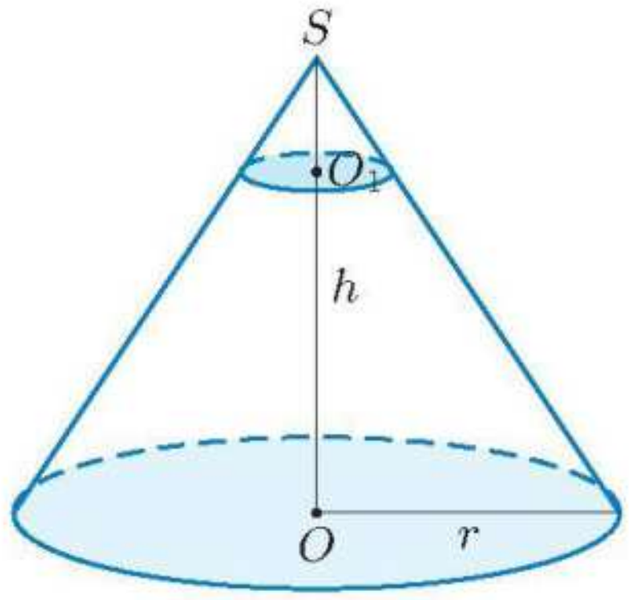
Dane są dwa sześciany. Pole powierzchni pierwszego jest czterokrotnie większe od pola powierzchni drugiego. Oblicz stosunek objętości tych sześcianów.

Ćwiczenie 3

Dane są dwie kule. Objętość pierwszej jest równa 36π cm^3, a jej promień jest dwa razy krótszy od promienia drugiej kuli. Oblicz objętość drugiej kuli. Jaki jest stosunek pól powierzchni tych kul?

Przykład 2

Stożek o promieniu podstawy 8 cm i wysokości 12 cm przecięto płaszczyzną prostopadłą do tej wysokości w odległości 3 cm od wierzchołka S (rysunek obok). Oblicz objętości brył, na które płaszczyzna podzieliła stożek.



W wyniku przecięcia stożka płaszczyzną równoległą do jego podstawy otrzymujemy dwie bryły: stożek i stożek ścięty.

Obliczamy objętość dużego (wyjściowego) stożka:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 12 = 256\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

Skala podobieństwa małego stożka do dużego:

$$\frac{|SO_1|}{|SO|} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Zatem objętość małego stożka:

$$V_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot V = \frac{256}{64}\pi = 4\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

Obliczamy objętość stożka ściętego: $V_2 = V - V_1 = 256\pi - 4\pi = 252\pi$ [cm^3].

Ćwiczenie 4

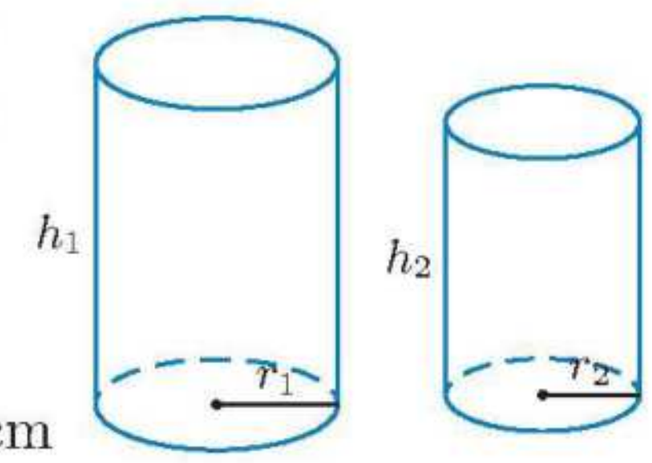
Stożek o objętości 27π cm^3 przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta podzieliła wysokość stożka w stosunku 2:1, gdy liczymy od podstawy. Oblicz objętości brył powstałych w wyniku tego podziału.

Zadania

1. Promienie podstaw dwóch walców oraz ich wysokości są równe r_1, h_1 i r_2, h_2 (rysunek obok). Sprawdź, czy te walce są podobne.

a) $r_1 = 20$ cm, $h_1 = 24$ cm,
$r_2 = 12$ cm, $h_2 = 15$ cm

b) $r_1 = 12$ cm, $h_1 = 16$ cm, $r_2 = 9$ cm, $h_2 = 12$ cm



2. a) Dane są dwa stożki podobne. Wysokość mniejszego stożka jest równa 6 cm, a pole powierzchni całkowitej większego jest o 125% większe od pola powierzchni całkowitej mniejszego. Oblicz wysokość większego stożka.

D b) Uzasadnij, że stożek o wysokości 4 i polu powierzchni całkowitej 24π nie jest podobny do stożka o tworzącej 20 i objętości 1024π.

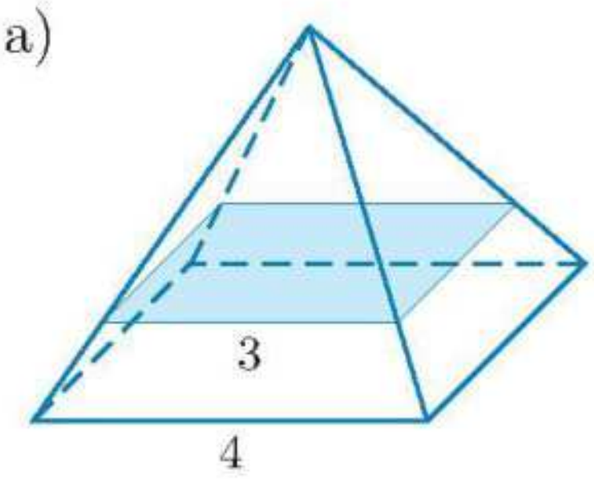
3. Ostrosłupy prawidłowe O_1, O_2, O_3 i O_4 są podobne. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Podaj skalę podobieństwa ostrosłupów:

a) O_1 i O_2, b) O_1 i O_3, c) O_2 i O_3, d) O_3 i O_4.

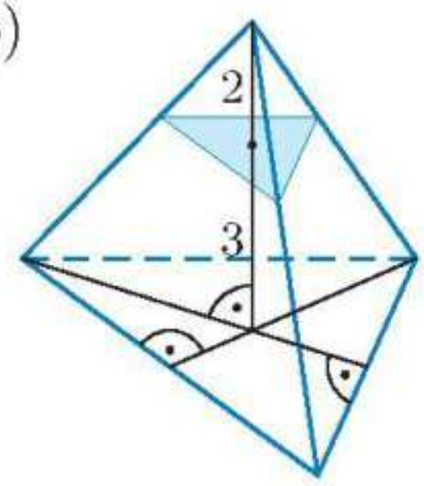
Ostrosłup	Wysokość	Krawędź podstawy	Pole podstawy	Objętość
O_1	8 cm	6 cm	36 cm^2	96 cm^3
O_2	?	9 cm	?	?
O_3	?	?	144 cm^2	?
O_4	?	?	?	12 cm^3

4. Na rysunku przedstawiono ostrosłup i jego przekrój płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta podzieliła ostrosłup na dwie części. Oblicz stosunek objętości mniejszej części do objętości większej części.

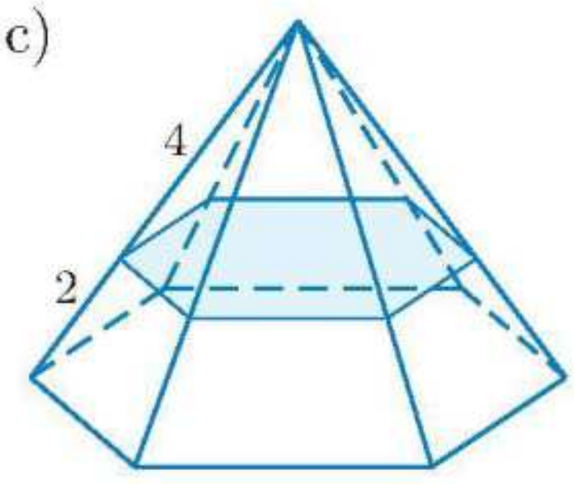
a)



b)



c)

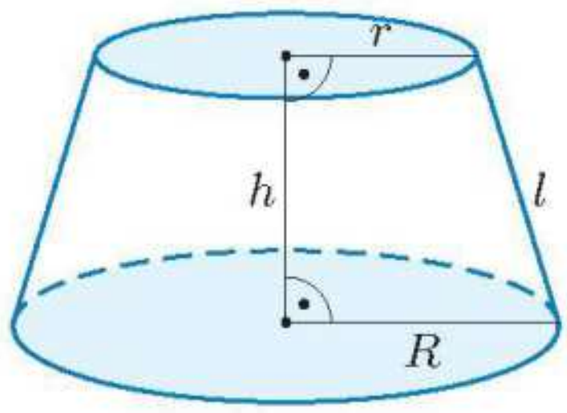


5. Stożek został podzielony płaszczyzną równoległą do podstawy na dwie bryły o równych objętościach. W jakim stosunku płaszczyzna ta podzieliła wysokość stożka?

D **6.** Korzystając z oznaczeń na rysunku obok, wyprowadź wzór na:

a) objętość stożka ściętego w zależności od r, R, h,

b) pole powierzchni bocznej stożka ściętego w zależności od r, R, l.



7. Podstawami stożka ściętego są koła o promieniach 1 cm i 4 cm, a odległość między płaszczyznami podstaw jest równa 6 cm. Stożek ten został podzielony płaszczyzną równoległą do jego podstaw na dwie bryły podobne. Oblicz objętości tych brył.

D **8.** Podstawami stożka ściętego są koła o promieniach r_1 i r_2. Płaszczyzna poprowadzona równolegle do podstaw podzieliła ten stożek na dwa stożki ścięte podobne. Uzasadnij, że skala ich podobieństwa jest równa $\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$.

Warto wiedzieć

Zasada Cavalieriego

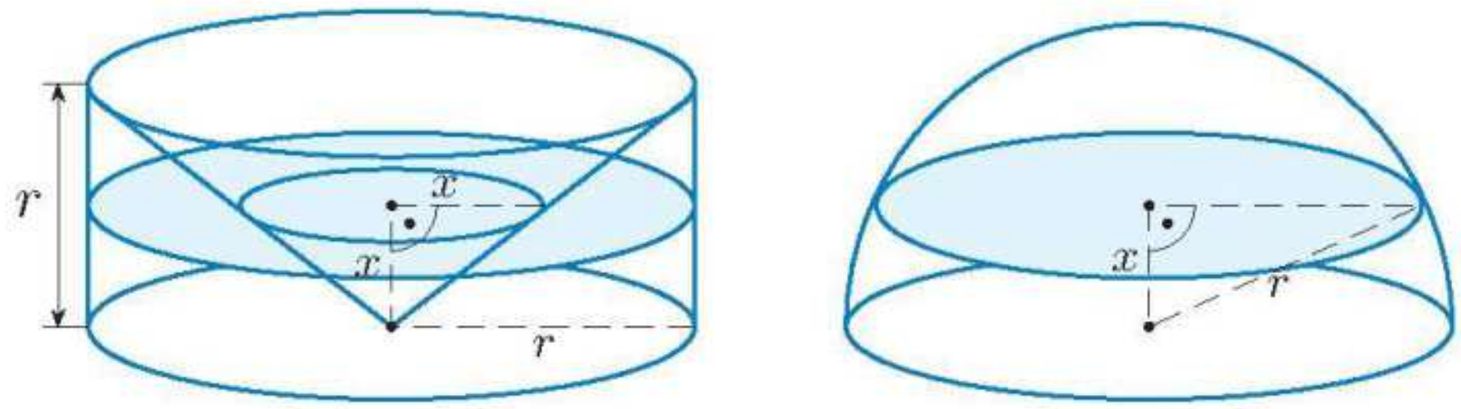
Bonaventura Cavalieri [czyt. kawalieri] (1598–1647), matematyk włoski, sformułował następującą zasadę, zwaną **zasadą Cavalieriego**.

> Jeśli przekroje dwóch brył dowolną płaszczyzną równoległą do pewnej ustalonej płaszczyzny mają równe pola, to bryły te mają równe objętości.



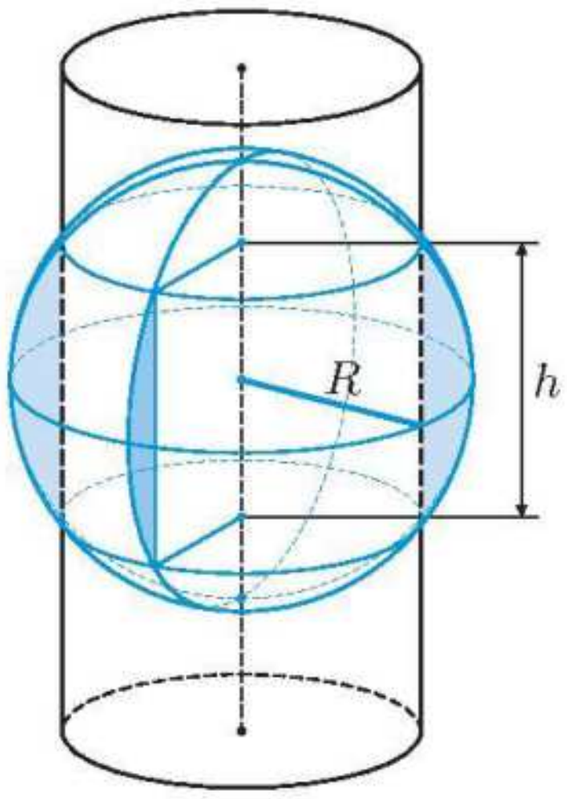
Poniżej pokażemy, jak tę zasadę można wykorzystać do udowodnienia wzoru na objętość kuli.

Rozpatrzmy połowę kuli o promieniu r oraz walec o promieniu podstawy r i wysokości r. Z walca usuwamy stożek w sposób przedstawiony na rysunku. Pokażemy, że przekroje obu brył płaszczyznami równoległymi do podstawy walca mają równe pola.



Rozważmy przekroje poprowadzone na wysokości x od podstawy walca.
Przekrój półkuli jest kołem o promieniu $\sqrt{r^2 - x^2}$, pole tego przekroju jest więc równe $\pi(r^2 - x^2)$.
Przekrój walca z usuniętym stożkiem jest pierścieniem o promieniach wewnętrznym x i zewnętrznym r, zatem jego pole jest równe $\pi r^2 - \pi x^2 = \pi(r^2 - x^2)$.
Pola te są równe, więc zgodnie z zasadą Cavalieriego objętości obu brył są równe. Objętość półkuli jest równa różnicy objętości walca i objętości stożka: $V_w - V_s = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$.
Zatem objętość kuli dana jest wzorem:

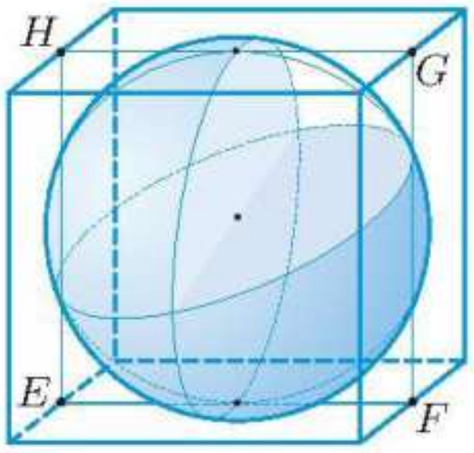
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

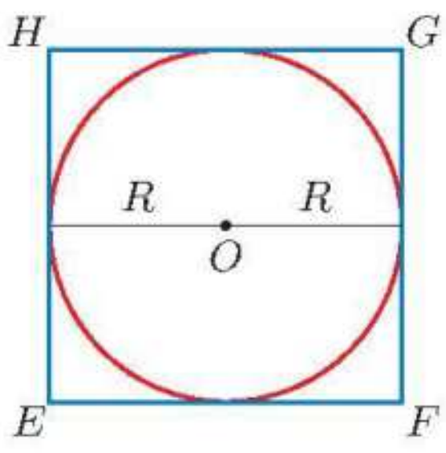


D **1.** Kulę o promieniu R przecięto walcem (rysunek obok), a następnie usunięto z niej część wspólną tej kuli oraz walca i otrzymano pierścień kulisty o wysokości h. Udowodnij (lub znajdź dowód w dostępnych źródłach), że objętość takiego pierścienia nie zależy od wielkości kuli, a tylko od wysokości h.

*3.5. Bryły opisane na kuli

Sześcian opisany na kuli (kula wpisana w sześcian)

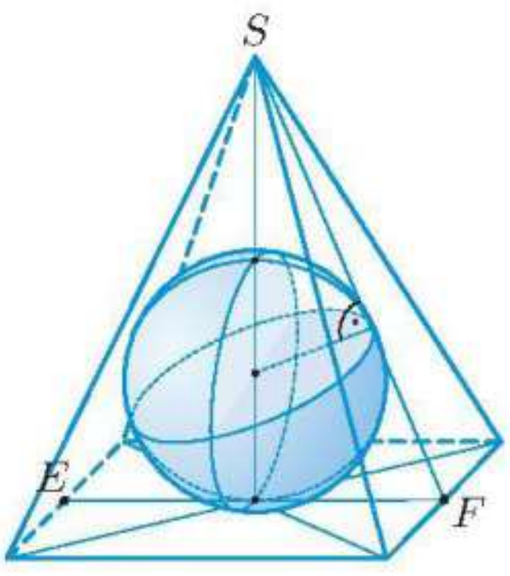


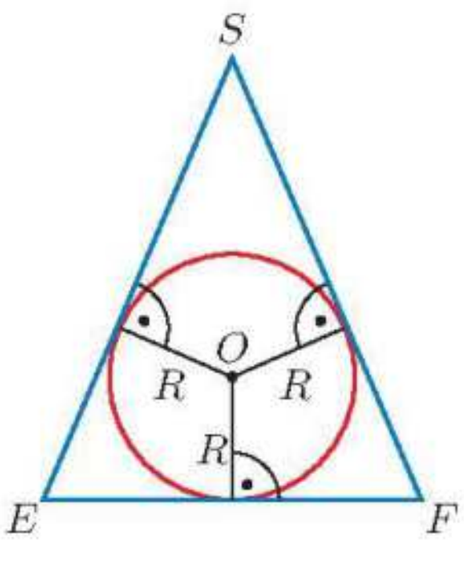


Kula jest styczna do każdej ściany sześcianu. Kwadrat $EFGH$ jest przekrojem sześcianu przechodzącym przez środki odpowiednich krawędzi. Jeśli sześcian jest opisany na kuli o promieniu R, to jego krawędź ma długość $2R$.

Uwaga. Jeśli prostopadłościan jest opisany na kuli, to musi on być sześcianem (uzasadnij).

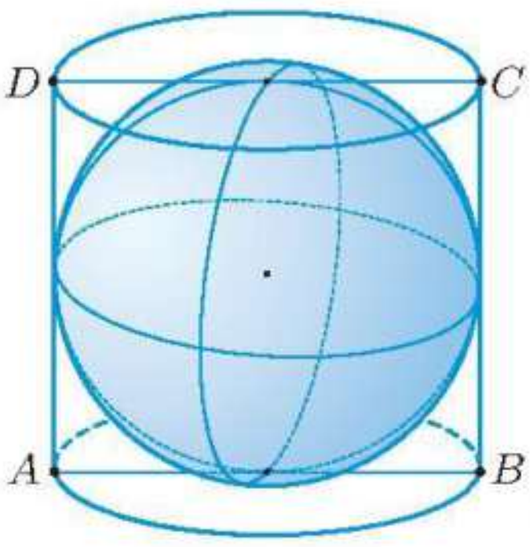
Ostrosłup prawidłowy czworokątny opisany na kuli (kula wpisana w ostrosłup)

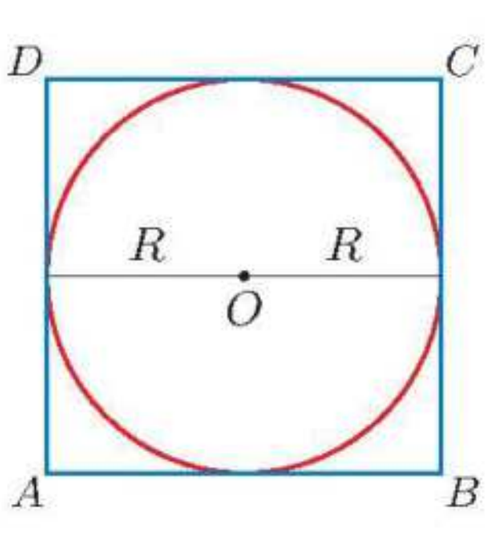




Kula jest styczna do podstawy oraz wszystkich ścian bocznych ostrosłupa. Trójkąt EFS jest przekrojem ostrosłupa przechodzącym przez jego wysokość oraz środki dwóch przeciwległych krawędzi podstawy. Jeśli ostrosłup jest opisany na kuli o promieniu R, to trójkąt ten jest opisany na okręgu o promieniu R.

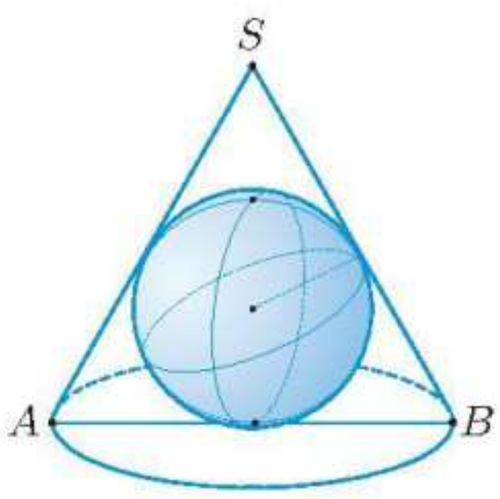
Walec opisany na kuli (kula wpisana w walec)

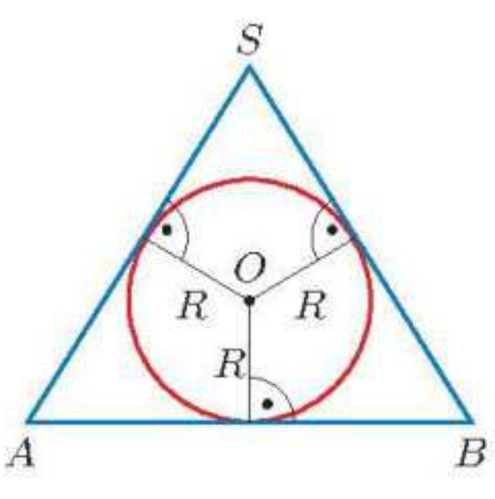




Kula jest styczna do obu podstaw walca i do każdej jego tworzącej. Kwadrat $ABCD$ jest przekrojem osiowym walca. Jeśli walec jest opisany na kuli o promieniu R, to jego przekrój osiowy jest kwadratem o boku $2R$.

Stożek opisany na kuli (kula wpisana w stożek)



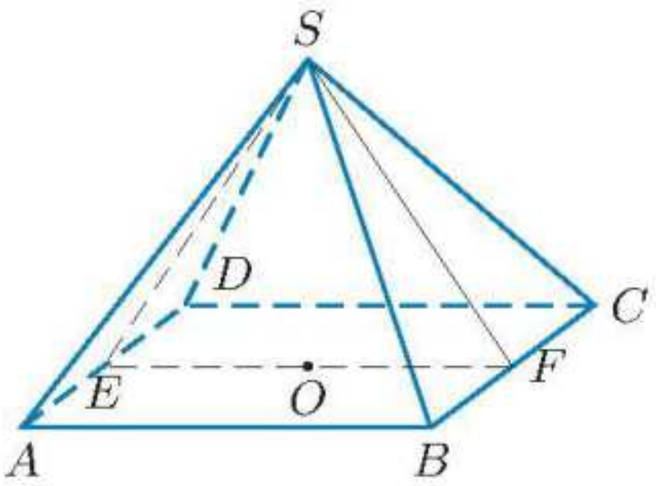


Kula jest styczna do podstawy stożka i do każdej jego tworzącej. Trójkąt ABS jest przekrojem osiowym stożka. Jeśli stożek jest opisany na kuli o promieniu R, to jego przekrój osiowy jest trójkątem opisanym na okręgu o promieniu R.

Przykład 1

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 12 cm, a jego ściana boczna tworzy z podstawą kąt 60°. Oblicz objętość kuli wpisanej w ten ostrosłup.

Niech punkt S będzie wierzchołkiem ostrosłupa,
punkt E – środkiem krawędzi AD,
punkt F – środkiem krawędzi BC,
a punkt O – środkiem odcinka EF.



Rozpatrzmy trójkąt EFS: $\sphericalangle SEF = \sphericalangle SFE = 60°$, więc jest to trójkąt równoboczny.

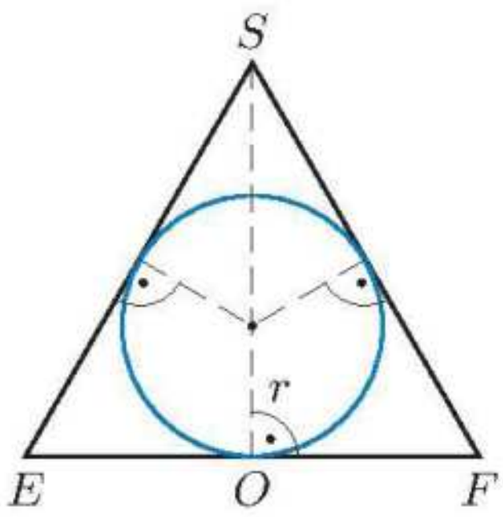
Zatem $|SO| = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ [cm].

Promień r koła wpisanego w trójkąt EFS jest zarazem promieniem kuli wpisanej w ostrosłup:

$$r = \frac{1}{3}|SO| = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Zatem objętość kuli:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(2\sqrt{3})^3 = 32\pi\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$



Ćwiczenie 1

a) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 18 cm, a jego ściana boczna tworzy z podstawą kąt 2α oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz objętość kuli wpisanej w ten ostrosłup.

b) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $4\sqrt{3}$ cm. Kula wpisana w ten ostrosłup ma promień 2 cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy tego ostrosłupa oraz jego objętość.

Przykład 2

Oblicz promień kuli wpisanej w stożek o promieniu podstawy 4 i tworzącej równej 6.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej, na którym przedstawiono przekrój osiowy ABS stożka.

Obliczamy wysokość stożka i pole tego przekroju:

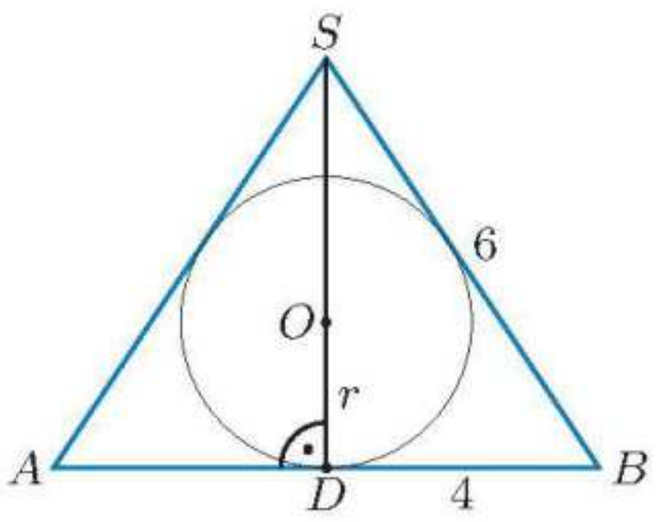
$$|SD| = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

Promień r kuli wpisanej w stożek jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABS, zatem:

$$P = \frac{|AB| + |BS| + |AS|}{2} \cdot r = 10r$$

Otrzymujemy $10r = 8\sqrt{5}$, skąd $r = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.



Ćwiczenie 2

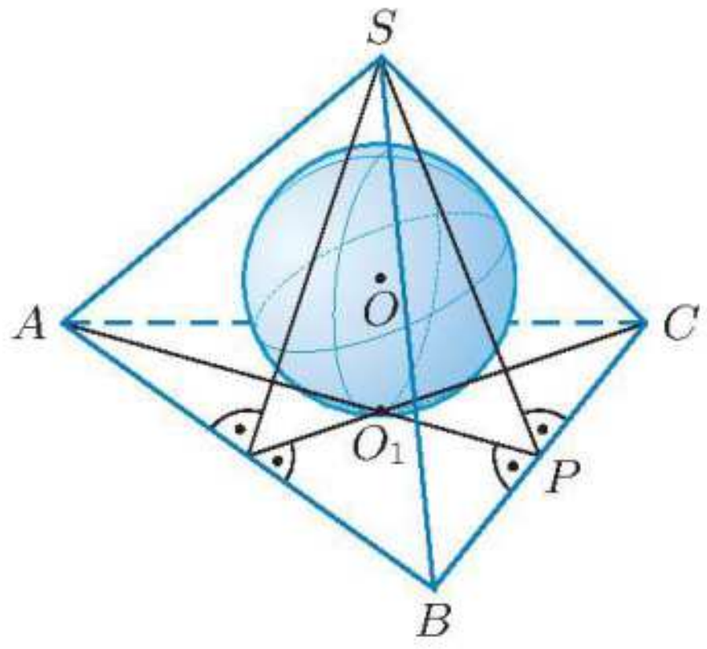
Na kuli opisano stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem:

a) równobocznym o boku 12, b) prostokątnym o przeciwprostokątnej 6.

Oblicz promień tej kuli.

Przykład 3

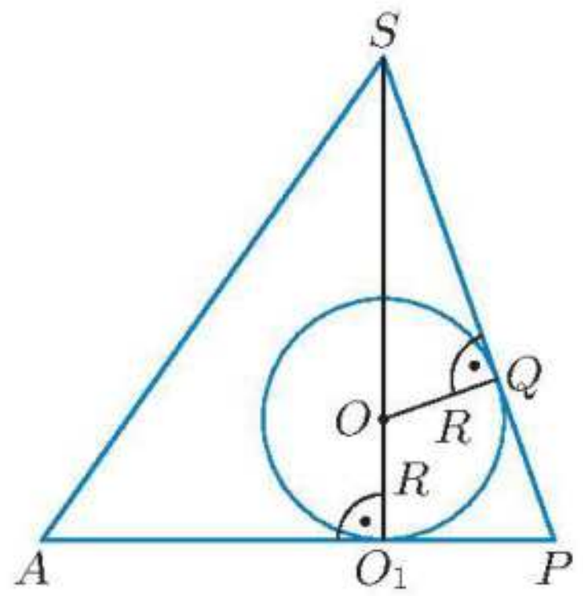
Wyznacz promień kuli wpisanej w czworościan foremny o krawędzi a (rysunek obok).



Oznaczmy przez R promień kuli wpisanej w ten czworościan, a przez H jego wysokość.

Przypomnijmy, że $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Rozpatrzmy trójkąt APS będący przekrojem tego czworościanu.



Trójkąty SOQ i SPO_1 są podobne, zatem:

$$\frac{|OQ|}{|SO|} = \frac{|PO_1|}{|SP|}, \text{ czyli } \frac{R}{H-R} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{R}{H-R} = \frac{1}{3}$$

$$3R = H - R$$

$$R = \frac{1}{4}H = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

Ćwiczenie 3

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a, a krawędź boczna – $2a$. Wyznacz promień kuli wpisanej w ten ostrosłup.

Zadania

1. Oblicz promień i objętość kuli wpisanej w sześcian, jeżeli wiadomo, że:
a) długość krawędzi sześcianu jest równa 6,
b) długość przekątnej sześcianu jest równa 8.

2. Oblicz stosunek objętości sześcianu do objętości wpisanej w niego kuli.

3. a) Oblicz objętość walca opisanego na kuli o promieniu 2.
b) Oblicz promień kuli wpisanej w walec, którego przekrój osiowy jest kwadratem o przekątnej długości $\sqrt{2}$.

D **4.** Wykaż, że jeśli w walec wpiszemy kulę, to zarówno stosunek ich pól powierzchni, jak i stosunek ich objętości są równe $3:2$.

D **5.** Daną kulę można wpisać w pewien graniastosłup prawidłowy trójkątny oraz w pewien graniastosłup prawidłowy czworokątny. Uzasadnij, że stosunek objętości tych graniastosłupów jest równy $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

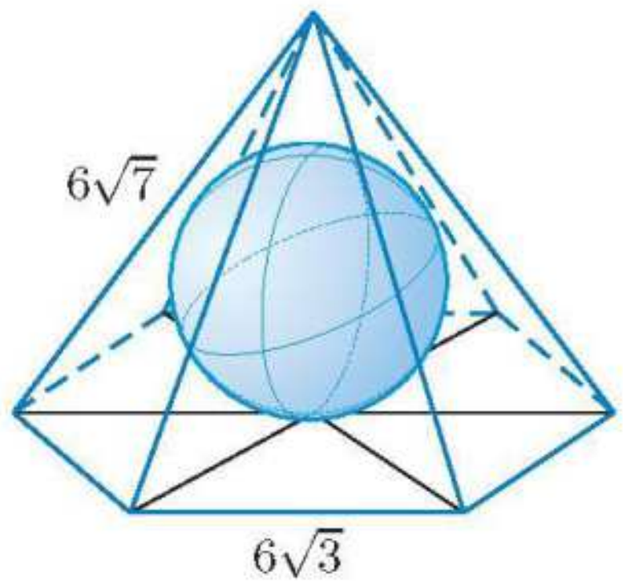
6. Na kuli opisano graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego krawędź podstawy ma długość 5. Oblicz promień kuli oraz wysokość graniastosłupa.

7. Przekrój ostrosłupa prawidłowego czworokątnego zawierający dwie jego krawędzie boczne jest trójkątem równobocznym. W ostrosłup ten wpisano kulę. Oblicz stosunek objętości tej kuli do objętości ostrosłupa.

8. Ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 6 opisano na kuli o promieniu $\sqrt{3}$. Oblicz miarę kąta dwuściennego zawartego między ścianą boczną a podstawą ostrosłupa.

9. Oblicz promień kuli wpisanej w ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego każda krawędź ma długość 8.

10. W ostrosłup prawidłowy sześciokątny przedstawiony na rysunku obok wpisano kulę. Oblicz pole powierzchni tej kuli.

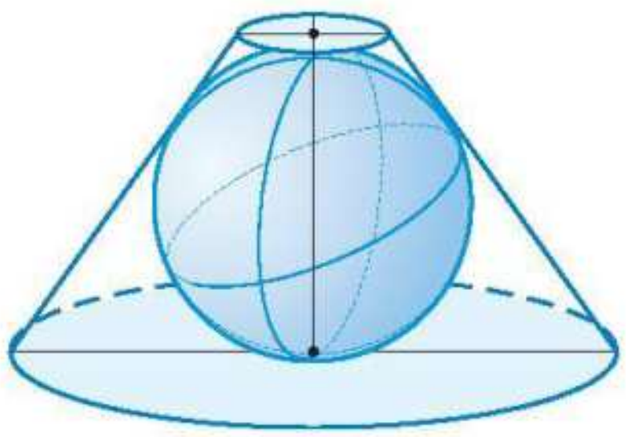


D **11.** Ostrosłup o polu powierzchni całkowitej P_c jest opisany na kuli o promieniu r. Uzasadnij, że objętość tego ostrosłupa jest równa $\frac{1}{3}P_c \cdot r$.

12. Wyznacz pole powierzchni kuli wpisanej w stożek, którego przekrojem osiowym jest trójkąt równoramienny o polu S i największym kącie równym:

a) 90°, b) 120°.

***13.** Kula wpisana w stożek ma pole powierzchni dwa razy mniejsze od pola powierzchni całkowitej stożka. Oblicz cosinus kąta nachylenia tworzącej tego stożka do jego podstawy.

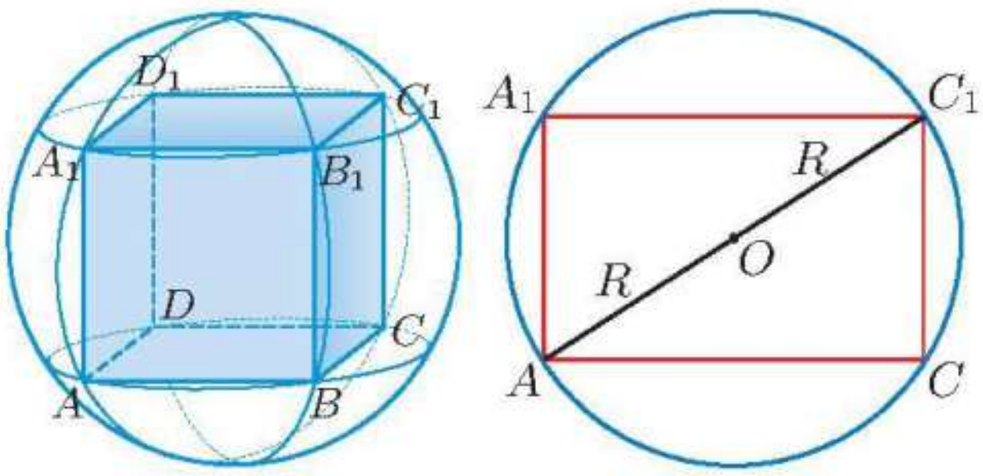


14. Podstawami stożka ściętego są koła o promieniach 2 i 8 (rysunek obok). Oblicz objętość kuli wpisanej w ten stożek.

15. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny, którego kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 2α, przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy i styczną do kuli wpisanej w ten ostrosłup. Wyznacz stosunek objętości wielościanów, na które płaszczyzna przekroju podzieliła ten ostrosłup.

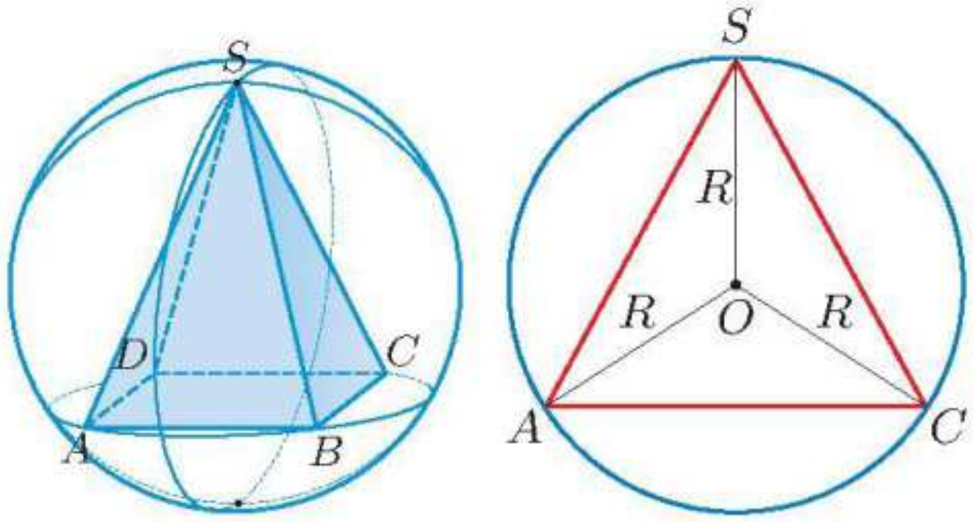
*3.6. Bryły wpisane w kulę

Prostopadłościan wpisany w kulę (kula opisana na prostopadłościanie)



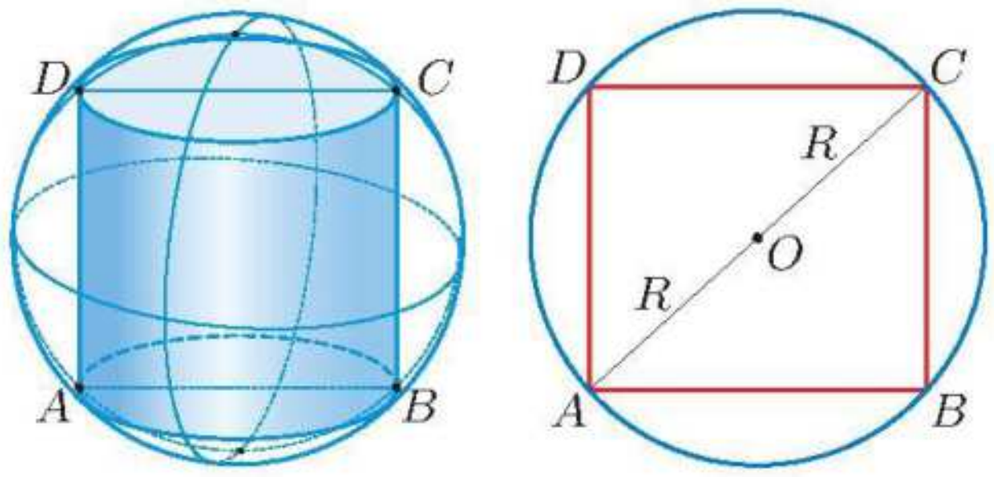
Wszystkie wierzchołki prostopadłościanu leżą na powierzchni kuli. Prostokąt ACC_1A_1 jest przekrojem prostopadłościanu przechodzącym przez przekątne jego podstaw – przekątna prostopadłościanu jest średnicą kuli.

Ostrosłup czworokątny wpisany w kulę (kula opisana na ostrosłupie)



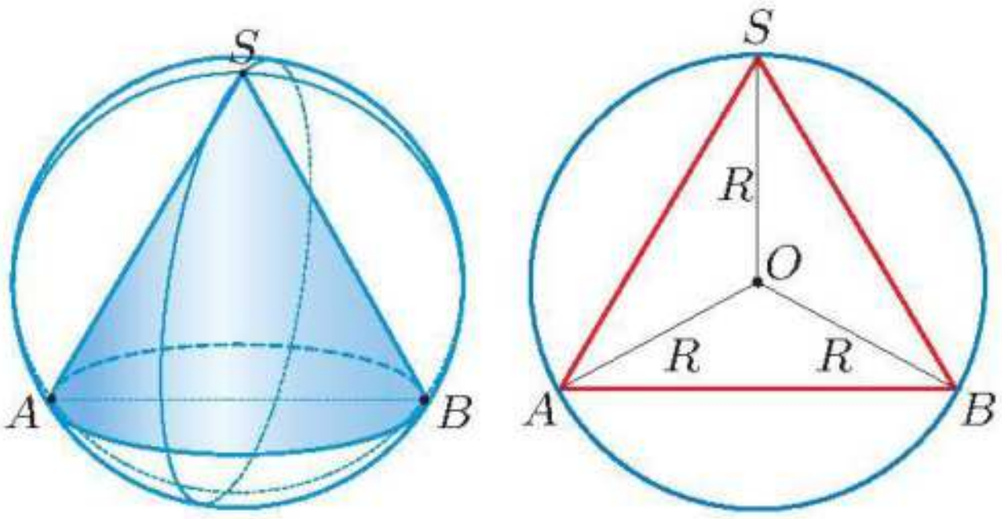
Wszystkie wierzchołki ostrosłupa leżą na powierzchni kuli. Trójkąt ACS jest przekrojem ostrosłupa poprowadzonym przez jego wierzchołek i przekątną podstawy. Jeżeli wysokość ostrosłupa jest dłuższa od promienia kuli, to środek kuli leży wewnątrz ostrosłupa.

Walec wpisany w kulę (kula opisana na walcu)



Okręgi ograniczające podstawy walca zawierają się w powierzchni kuli. Prostokąt $ABCD$ jest przekrojem osiowym walca – jego przekątna jest średnicą kuli.

Stożek wpisany w kulę (kula opisana na stożku)



Okrąg ograniczający podstawę stożka zawiera się w powierzchni kuli, a wierzchołek stożka leży na powierzchni kuli. Trójkąt ABS jest przekrojem osiowym stożka. Jeśli wysokość stożka jest dłuższa od promienia kuli, to środek kuli leży wewnątrz stożka.

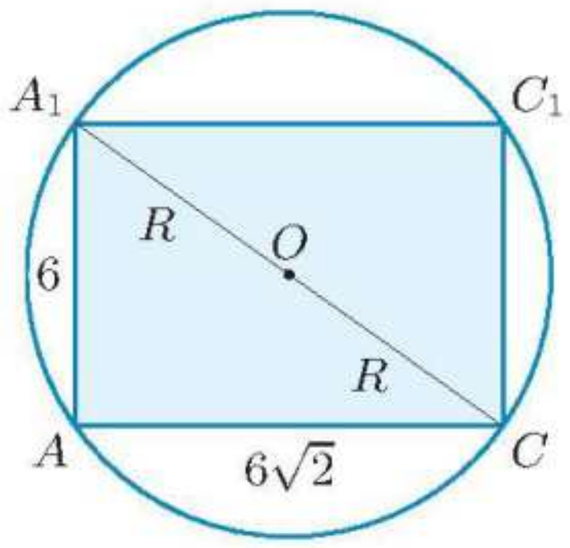
Przykład 1

Oblicz promień kuli opisanej na sześcianie, którego krawędź ma długość 6 cm.

Rozpatrzmy prostokąt ACC_1A_1 będący przekrojem sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez przekątne AC i A_1C_1 podstaw sześcianu (rysunek obok).
Aby obliczyć promień kuli, korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACA_1:

$$(2R)^2 = 6^2 + (6\sqrt{2})^2$$

zatem $R^2 = 27$, stąd $R = 3\sqrt{3}$ cm.



Ćwiczenie 1

a) Oblicz objętość kuli opisanej na graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o wysokości 10 cm, którego pole podstawy jest równe 32 cm^2.

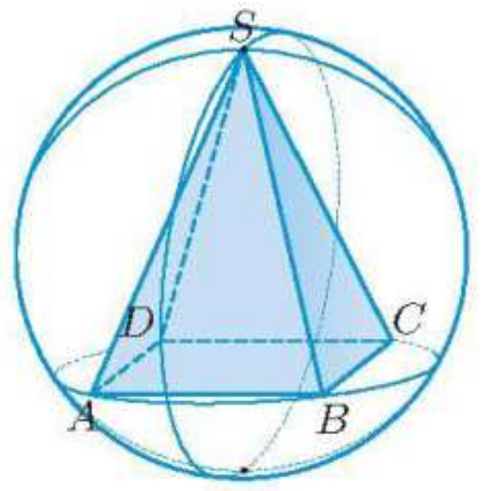
b) Pole powierzchni kuli jest równe 12π cm^2. Oblicz objętość sześcianu wpisanego w tę kulę.

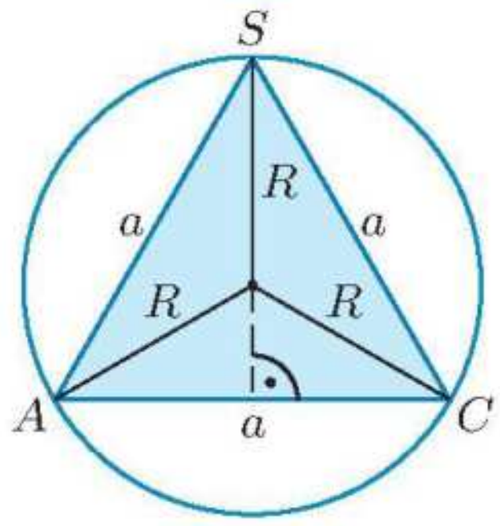
Przykład 2

W kulę o promieniu 3 cm jest wpisany ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach obok. Oznaczmy dodatkowo przez h wysokość trójkąta ACS, przez a – długość jego boku, a przez R – promień kuli.
$\sphericalangle SAC = \sphericalangle SCA = 60°$, więc trójkąt ACS jest równoboczny.
Korzystamy z zależności $R = \frac{2}{3}h$ i otrzymujemy:
$h = \frac{9}{2}$ cm, jednocześnie $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, więc $a = 3\sqrt{3}$ cm.
Przekątna podstawy ostrosłupa ma długość $3\sqrt{3}$ cm, zatem krawędź podstawy ma długość $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cm.
Wysokość trójkąta ACS jest też wysokością ostrosłupa.
Zatem objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{81}{4} = 20{,}25\ [\text{cm}^3]$$





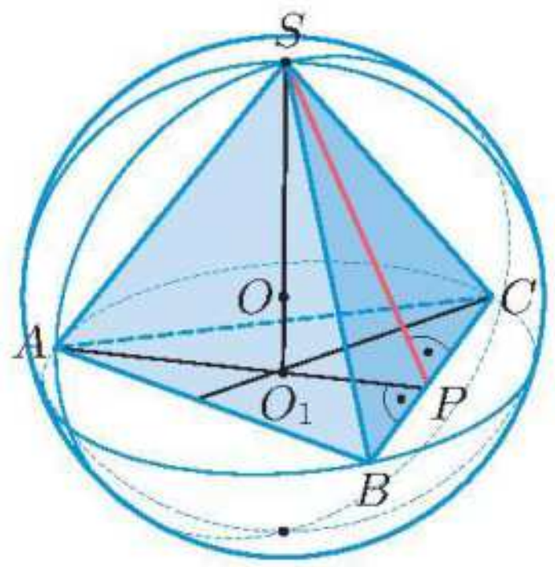
Ćwiczenie 2

W kulę o promieniu 6 cm jest wpisany ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 45°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Przykład 3

Wyznacz promień kuli opisanej na czworościanie foremnym o krawędzi a.

Promień kuli opisanej na czworościanie oznaczmy przez R, a wysokość czworościanu – przez H.
Przypomnijmy, że $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.
Rozpatrzmy trójkąt APS będący przekrojem czworościanu (rysunek obok).
Trójkąt AO_1O jest trójkątem prostokątnym o bokach $|AO| = R$, $|AO_1| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ oraz:



$$|OO_1| = H - R = \frac{a\sqrt{6}}{3} - R$$

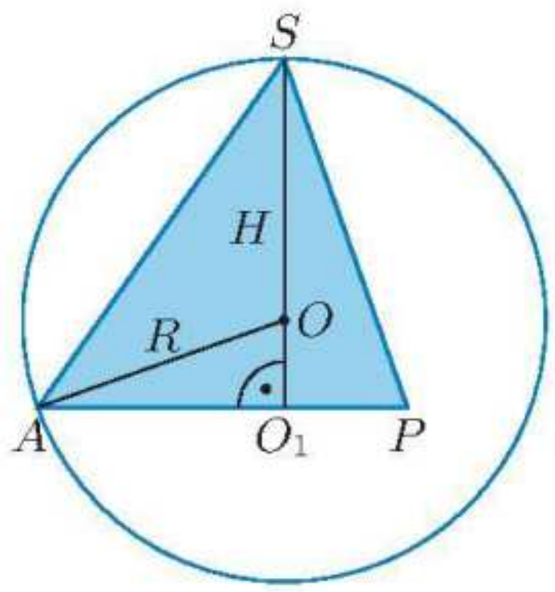
Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3} - R\right)^2 = R^2$$

$$\frac{3a^2}{9} + \frac{6a^2}{9} - \frac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot R + R^2 = R^2$$

$$a^2 = \frac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot R$$

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$



Ćwiczenie 3

Wyznacz objętość kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o krawędzi podstawy a i krawędzi bocznej $2a$.

Przykład 4

W kulę o promieniu R wpisano bryłę złożoną z dwóch stożków połączonych podstawami o promieniu r. Wyznacz objętość tej bryły.

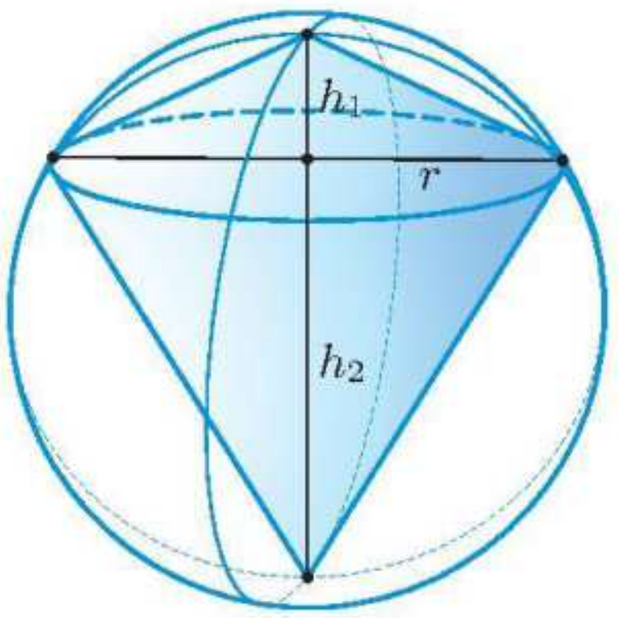
Oznaczmy przez h_1 i h_2 wysokości danych stożków.
Wyznaczamy ich objętości:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1, \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_2$$

Wyznaczamy objętość bryły:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2)$$

Ale $h_1 + h_2 = 2R$, więc $V = \frac{2}{3}\pi r^2 R$.



Ćwiczenie 4

W kulę o promieniu R wpisano dwa stożki o wspólnej podstawie. Pole powierzchni bocznej jednego z nich jest dwa razy większe od pola powierzchni bocznej drugiego. Wyznacz wysokość większego stożka.

Zadania

1. a) Oblicz objętość sześcianu, na którym opisano kulę o promieniu 2 cm.

b) Oblicz objętość kuli opisanej na sześcianie, którego pole powierzchni całkowitej jest równe 864 cm^2.

2. W kulę o promieniu 7 cm wpisano graniastosłup prawidłowy czworokątny o polu podstawy równym 16 cm^2. Oblicz wysokość tego graniastosłupa.

3. a) W kulę o promieniu 13 wpisano walec, którego wysokość jest równa 10. Oblicz objętość tego walca.

b) W kulę o promieniu 5 wpisano walec, którego pole powierzchni bocznej jest równe 48π. Oblicz objętość tego walca (rozpatrz dwa przypadki).

4. a) Promień podstawy stożka jest równy 6 cm, a kąt między tworzącą a podstawą ma miarę 15°. Oblicz odległość środka tej podstawy od środka kuli opisanej na tym stożku.

b) Promień podstawy stożka jest równy r, a kąt między tworzącą stożka a jego podstawą ma miarę α. Wyznacz objętość kuli opisanej na tym stożku.

5. Tworząca stożka jest nachylona do podstawy pod kątem α. Oblicz stosunek objętości kuli wpisanej w ten stożek do objętości kuli na nim opisanej dla:

a) $\alpha = 45^\circ$, b) $\alpha = 30^\circ$.

6. a) Na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, którego ściany boczne są nachylone do podstawy pod kątem 60°, opisano kulę o polu powierzchni 16π. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

b) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość równą a, a jego ściany boczne są nachylone do podstawy pod kątem 45°. Wyznacz promień kuli opisanej na tym ostrosłupie.

7. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 8 wpisanego w kulę o promieniu 6 (rozpatrz dwa przypadki).

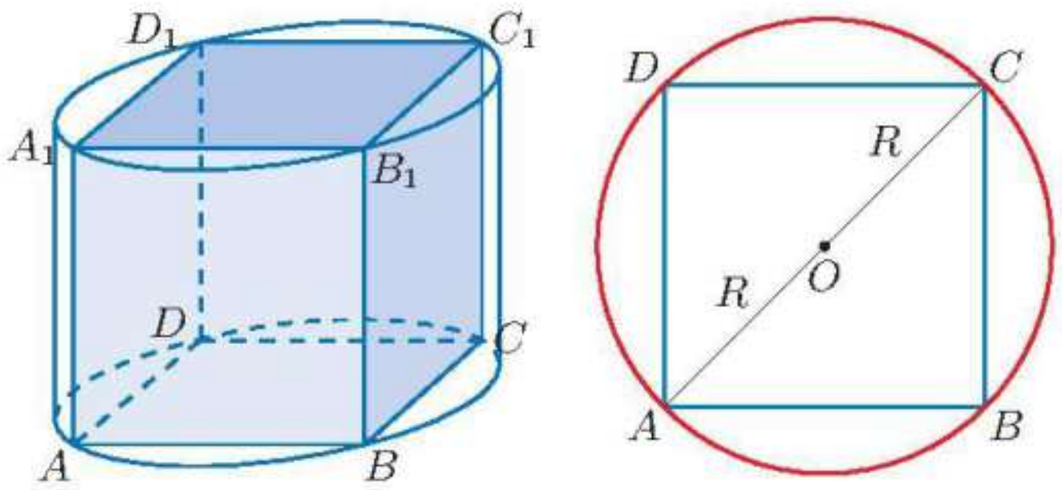
8. Wyznacz promień kuli opisanej na graniastosłupie prawidłowym trójkątnym, którego wszystkie krawędzie mają długość a.

***9.** Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkątami prostokątnymi. Oblicz stosunek objętości tego ostrosłupa do objętości kuli na nim opisanej.

*3.7. Inne bryły wpisane i opisane

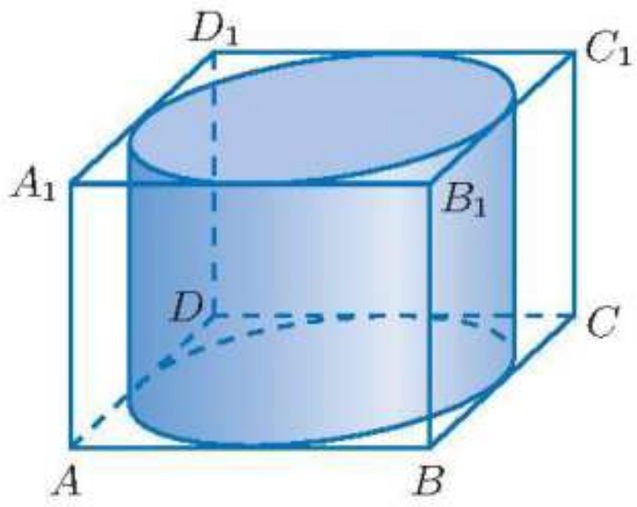
Poniżej przedstawiono przykłady brył wpisanych i opisanych.

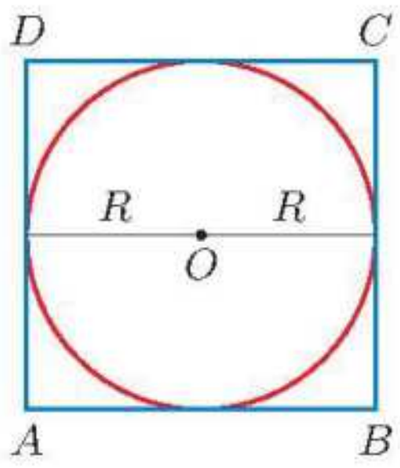
Walec opisany na graniastosłupie (graniastosłup wpisany w walec)



Podstawy graniastosłupa są wpisane w podstawy walca. Na rysunkach przedstawiono walec opisany na graniastosłupie prawidłowym czworokątnym oraz podstawę walca z wpisaną w nią podstawą graniastosłupa.

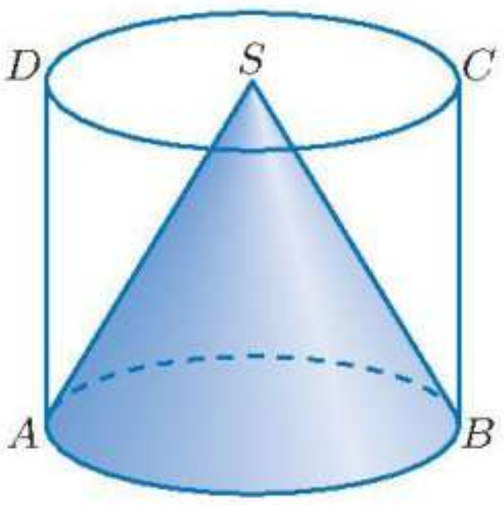
Walec wpisany w graniastosłup (graniastosłup opisany na walcu)

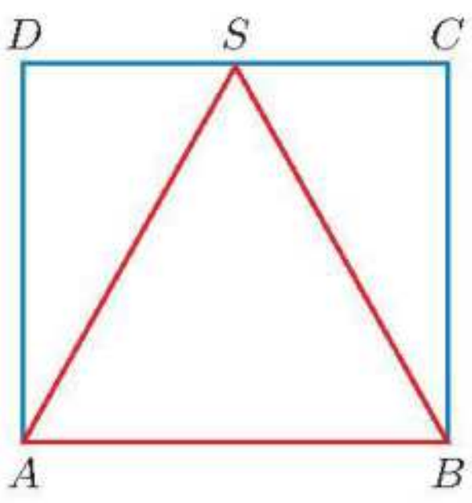




Podstawy walca są wpisane w podstawy graniastosłupa. Na rysunkach przedstawiono walec wpisany w graniastosłup prawidłowy czworokątny oraz podstawę walca z opisaną na niej podstawą graniastosłupa.

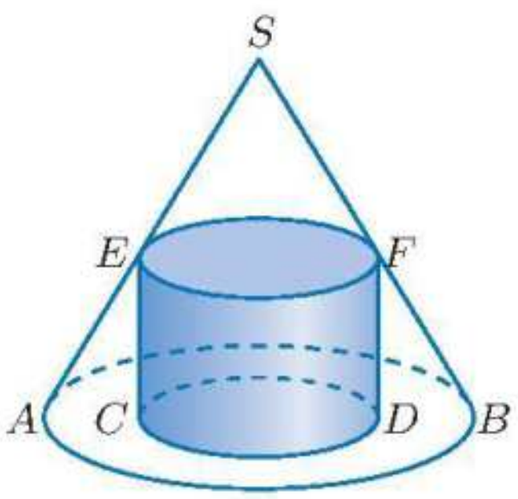
Walec opisany na stożku (stożek wpisany w walec)

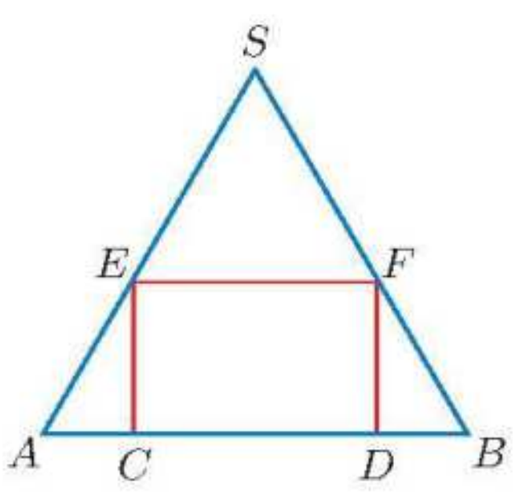




Podstawa stożka pokrywa się z jedną podstawą walca, a wierzchołek stożka należy do drugiej podstawy walca. Na rysunku po prawej przedstawiono wspólny przekrój osiowy tych brył.

Walec wpisany w stożek (stożek opisany na walcu)





Okrąg ograniczający jedną podstawę walca zawiera się w powierzchni bocznej stożka, a druga podstawa walca zawiera się w podstawie stożka. Na rysunku po prawej przedstawiono wspólny przekrój osiowy tych brył.

Ćwiczenie 1

a) Oblicz objętość walca opisanego na sześcianie o krawędzi 6 cm.

b) Oblicz stosunek objętości walca opisanego na sześcianie do objętości walca wpisanego w ten sześcian.

Ćwiczenie 2

Na stożku o tworzącej długości 6 cm i kącie rozwarcia α opisano walec. Oblicz objętość tego walca, jeśli wiadomo, że: a) $\alpha = 45^\circ$, b) $\cos\alpha = \frac{1}{9}$.

Ćwiczenie 3

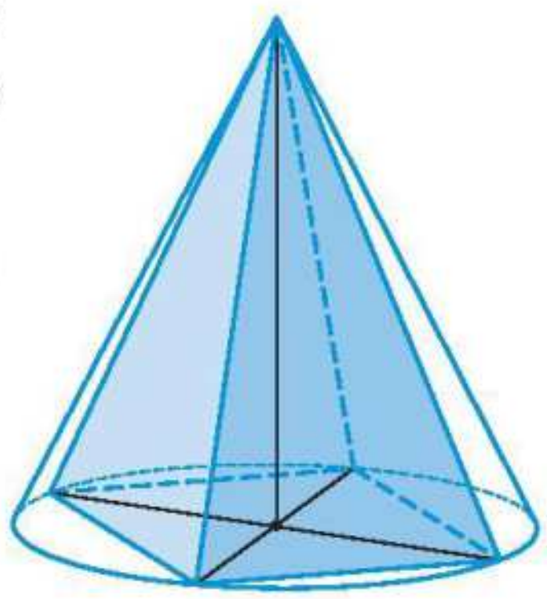
a) Walec o promieniu podstawy równym 1 i wysokości 4 jest wpisany w stożek o kącie rozwarcia 90°. Oblicz objętość tego stożka.

b) Walec o promieniu podstawy równym $\sqrt{3}$ i wysokości 2 jest wpisany w stożek o kącie rozwarcia 120°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Przykład 1

Na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym opisano stożek w ten sposób, że podstawa ostrosłupa jest wpisana w podstawę stożka, a wierzchołki obu brył się pokrywają. Oblicz stosunek objętości stożka do objętości ostrosłupa.

Oznaczmy przez r promień podstawy stożka, wówczas przekątna podstawy ostrosłupa ma długość $2r$, a jego krawędź podstawy ma długość $\sqrt{2}r$.



Oznaczmy przez h wspólną wysokość ostrosłupa i stożka.

Wówczas objętość stożka: $V_S = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Wyznaczamy objętość ostrosłupa:

$$V_O = \frac{1}{3}(\sqrt{2}r)^2 \cdot h = \frac{2}{3}r^2 h$$

Zatem stosunek objętości stożka do objętości ostrosłupa:

$$\frac{V_S}{V_O} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{2}{3}r^2 h} = \frac{\pi}{2}$$

Ćwiczenie 4

Ostrosłup prawidłowy sześciokątny wpisano w stożek w ten sposób, że podstawa ostrosłupa jest wpisana w podstawę stożka, a wierzchołki obu brył się pokrywają. Wyznacz stosunek objętości stożka do objętości ostrosłupa.

D Ćwiczenie 5

Stożek wpisano w ostrosłup prawidłowy czworokątny w ten sposób, że podstawa stożka jest wpisana w podstawę ostrosłupa, a wierzchołki obu brył się pokrywają. Wykaż, że stosunek objętości ostrosłupa do objętości stożka jest równy $\frac{4}{\pi}$.

Zadania

1. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny. Oblicz stosunek objętości walca opisanego na tym graniastosłupie do objętości walca w niego wpisanego.

2. W prostopadłościan, którego podstawa jest kwadratem, wpisano walec. Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest równe 16. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca.

3. Wysokość graniastosłupa jest równa 5 cm, a jego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm. Oblicz objętość walca:

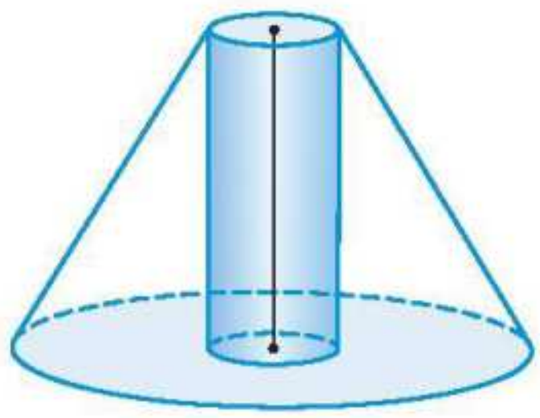
a) opisanego na tym graniastosłupie, b) wpisanego w ten graniastosłup.

4. W stożek o promieniu podstawy 3 wpisano walec o wysokości 4 i promieniu podstawy 2. Oblicz objętość tego stożka.

5. W walec o promieniu podstawy 5 wpisano stożek, którego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest połową koła. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

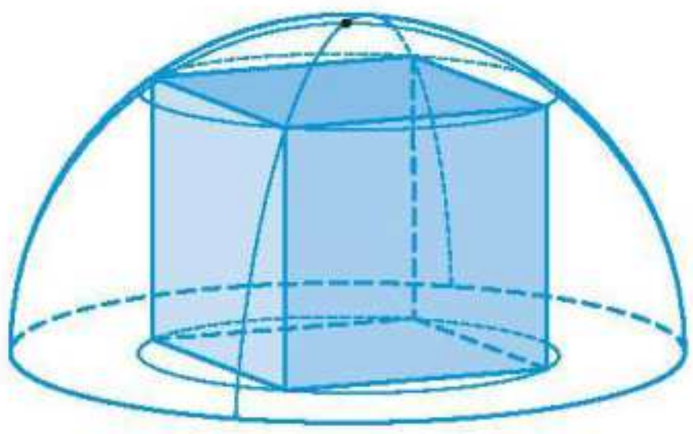
6. W walec wpisano stożek. Pola powierzchni bocznych obu brył są równe. Oblicz miarę kąta rozwarcia stożka.

7. W stożek ścięty, w którym stosunek promieni podstaw jest równy $1:4$, wpisano walec jak na rysunku obok. Oblicz, jaką część objętości stożka ściętego stanowi objętość walca.



8. Oblicz sinus kąta nachylenia tworzącej stożka ściętego do podstawy, jeżeli wiadomo, że w bryłę tę można wpisać kulę o objętości cztery razy mniejszej niż objętość tego stożka ściętego.

9. Wyznacz największą możliwą objętość sześcianu zawartego w półkuli o promieniu R (rysunek obok).

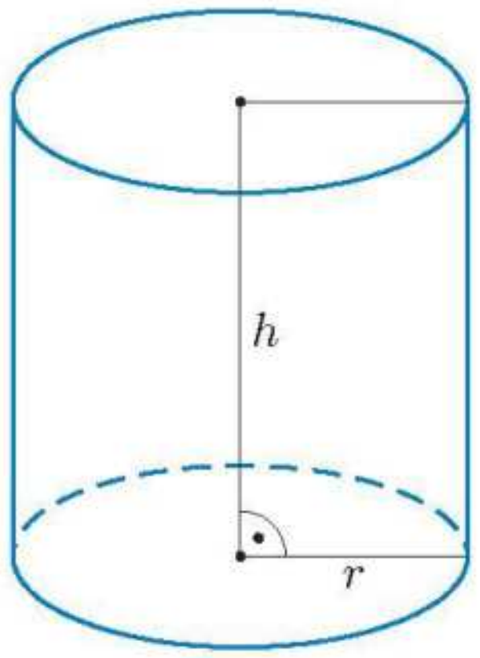


10. Prostopadłościan ma osiem krawędzi długości x i cztery krawędzie długości $2x$. Oblicz największą możliwą objętość takiego prostopadłościanu, jeśli wiadomo, że jest on zawarty w półkuli o promieniu 15.

*3.8. Zagadnienia optymalizacyjne

Przykład 1

Jakie wymiary powinna mieć puszka w kształcie walca o polu powierzchni całkowitej 150π cm^2, aby jej objętość była największa?



Oznaczmy przez r promień podstawy walca,
a przez h – jego wysokość.

Pole powierzchni całkowitej walca:

$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 150\pi$$

Stąd $h = \frac{150-2r^2}{2r} = \frac{75-r^2}{r}$, gdzie $r \in (0; 5\sqrt{3})$.

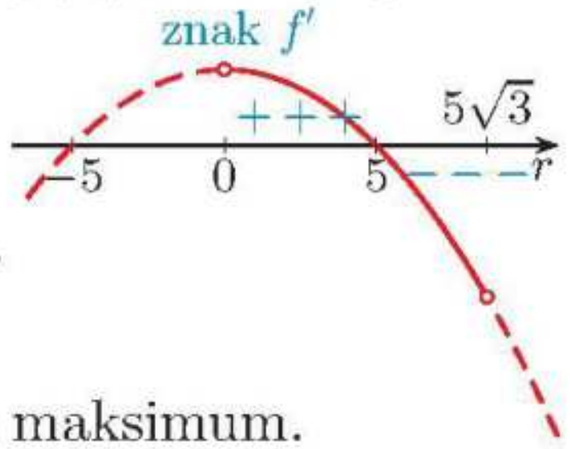
Wyznaczamy objętość walca jako funkcję zmiennej r:

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{75-r^2}{r} = \pi(75r - r^3),\ r \in (0; 5\sqrt{3})$$

Aby wyznaczyć największą wartość funkcji V, obliczamy jej pochodną:

$$V'(r) = \pi(75 - 3r^2)$$

$$V'(r) = 0 \text{ dla } r = 5$$



$V'(r) > 0$ dla $r \in (0; 5)$ oraz $V'(r) < 0$ dla $r \in (5; 5\sqrt{3})$.

Pochodna V' zmienia znak z dodatniego na ujemny
w punkcie $r = 5$, więc w punkcie tym funkcja V osiąga maksimum.

Funkcja V rośnie w przedziale $(0; 5\rangle$ i maleje w przedziale $\langle 5; 5\sqrt{3})$, więc objętość walca jest największa dla $r = 5$ cm i $h = \frac{75-25}{5} = 10$ [cm].

Ćwiczenie 1

Oblicz promień podstawy i wysokość walca, którego przekrój osiowy jest prostokątem o obwodzie 12 cm i który ma największą możliwą objętość.

Ćwiczenie 2

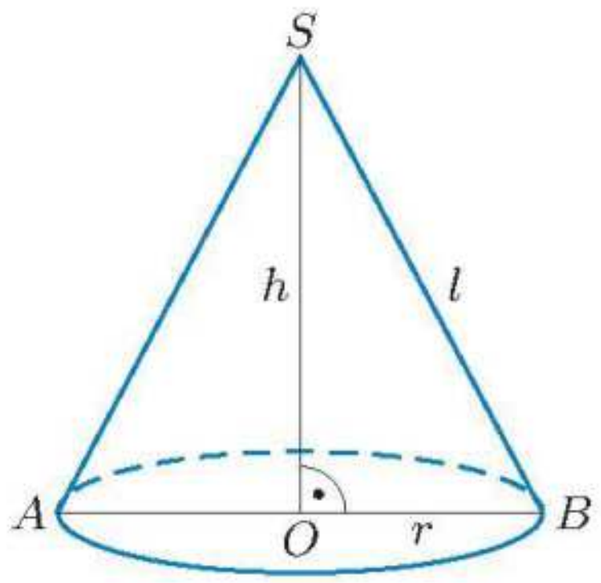
Jakie wymiary powinna mieć puszka w kształcie walca o objętości 1 l, aby zużyć jak najmniej materiału do jej wytworzenia?

Ćwiczenie 3

Blaszana puszka w kształcie walca ma mieć pojemność 0,4 dm^3. Na wycięcie kół na obie podstawy puszki trzeba przeznaczyć kwadratowe kawałki blachy. Cena materiału, z którego wykonuje się podstawy, jest o 5% wyższa od ceny materiału, z którego wykonuje się powierzchnię boczną. Jakie wymiary powinna mieć puszka, aby koszt jej wykonania był najmniejszy?

Przykład 2

Jaką największą objętość może mieć stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem o obwodzie równym 8 cm?



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.
$2l+2r=8$, czyli $l=4-r$. Zauważmy, że $l>r>0$, czyli $4-r>r>0$, skąd $r\in(0;2)$.
Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OBS:

$$h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{(4-r)^2-r^2}=\sqrt{16-8r}$$

Wyznaczamy objętość stożka jako funkcję zmiennej r:

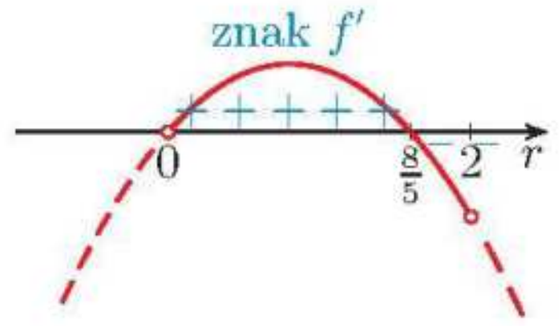
$$V(r)=\tfrac{1}{3}\pi r^2h=\tfrac{1}{3}\pi r^2\sqrt{16-8r}=\tfrac{1}{3}\pi\sqrt{16r^4-8r^5},\ r\in(0;2)$$

Rozpatrzmy funkcję pomocniczą $f(r)=16r^4-8r^5$, gdzie $r\in(0;2)$.
Funkcja $g(t)=\sqrt{t}$ jest rosnąca, więc funkcje V i f osiągają wartość największą dla tego samego argumentu.

$$f'(r)=64r^3-40r^4,\ \text{ gdzie } r\in(0;2)$$

$$64r^3-40r^4=0\ \text{ dla } r\in\left\{0,\tfrac{8}{5}\right\}$$

Z założenia $r\in(0;2)$, zatem $f'(r)=0\Leftrightarrow r=\frac{8}{5}$.
Funkcja f rośnie w przedziale $\left(0;\frac{8}{5}\right\rangle$ i maleje w przedziale $\left\langle\frac{8}{5};2\right)$, czyli dla $r=\frac{8}{5}$ funkcje f i V osiagają wartości największe.



Dla $r=\frac{8}{5}$ mamy $h=\sqrt{16-8\cdot\frac{8}{5}}=\sqrt{\frac{16}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ [cm].
Obliczamy największą objętość stożka:

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{8}{5}\right)^2\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{256\sqrt{5}\pi}{375}\ [\text{cm}^3]$$

Ćwiczenie 4

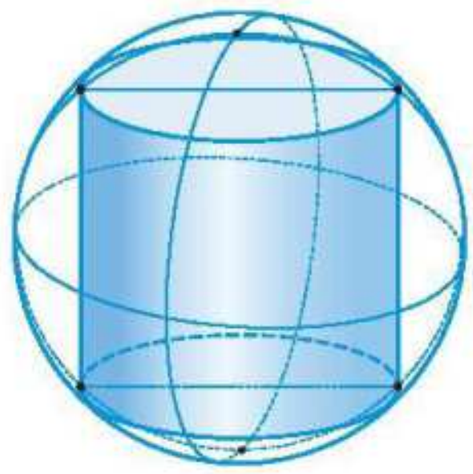
Jaką największą objętość może mieć stożek, którego tworząca ma długość 6 cm?

Zadania

1. Wymiary puszki w kształcie walca o objętości 2 dm^3 zaprojektowano tak, aby do jej wykonania zużyć jak najmniej blachy. Na całą powierzchnię boczną puszki naklejono etykietę. Oblicz powierzchnię tej etykiety.

2. Spośród wszystkich walców o polu powierzchni całkowitej S wybrano ten, który ma największą objętość. Wyznacz jego wysokość i promień podstawy.

D **3.** Spośród wszystkich walców o objętości V wybrano ten, który ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej. Uzasadnij, że przekrój osiowy tego walca jest kwadratem.

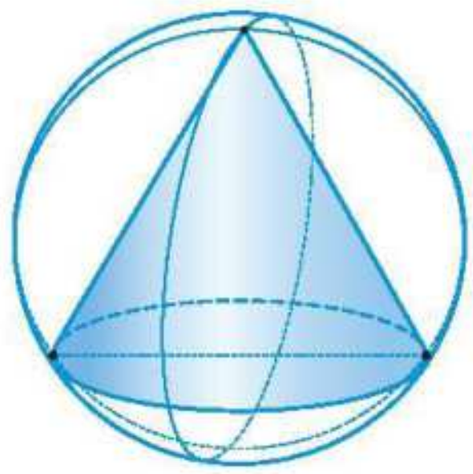


4. Oblicz, jaką największą część kuli może stanowić wpisany w nią walec (rysunek obok).

5. Spośród wszystkich stożków o tworzącej l wybrano ten, który ma największą objętość. Oblicz miarę kąta środkowego wycinka koła, który tworzy po rozwinięciu powierzchnia boczna tego stożka.

6. Dany jest trójkąt równoramienny o obwodzie równym 24 cm. Trójkąt ten obrócono wokół jego podstawy. Dla jakich długości podstawy i ramion takiego trójkąta otrzymana bryła obrotowa ma największą możliwą objętość?

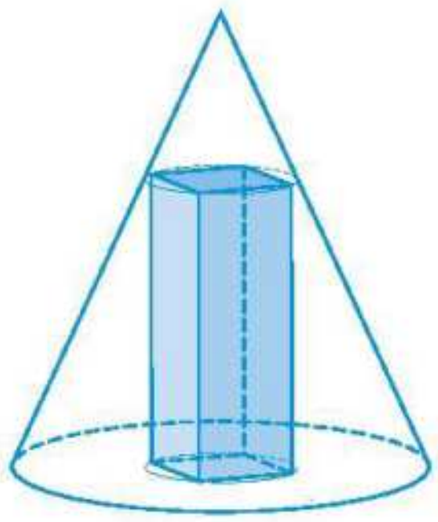
7. Spośród wszystkich stożków wpisanych w kulę o promieniu 12 cm wybrano ten o największej objętości. Oblicz jego wysokość i promień podstawy.



*8. Oblicz, jaką najmniejszą objętość może mieć stożek opisany na kuli o promieniu 4 cm.

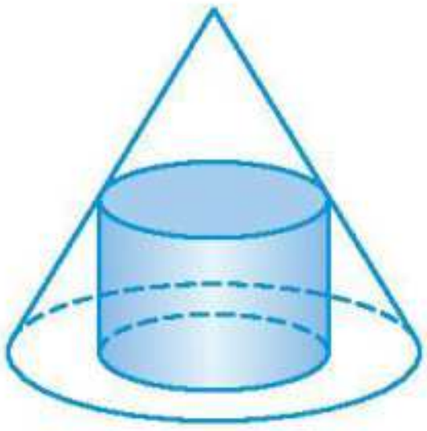
9. W stożek o promieniu podstawy r i wysokości h wpisano prostopadłościan, w którym stosunek długości krawędzi podstawy wynosi $2:1$. Wyznacz największą możliwą objętość tego prostopadłościanu.

Uwaga. W stożek jest wpisany prostopadłościan, gdy wierzchołki jego górnej podstawy należą do powierzchni bocznej stożka, a dolna podstawa jest zawarta w podstawie stożka.



10. Trapez równoramienny o obwodzie 22 cm obraca się wokół dłuższej podstawy równej 6 cm. Dobierz długości pozostałych boków trapezu tak, aby otrzymać bryłę o największej możliwej objętości.

D **11.** Spośród wszystkich walców wpisanych w stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym o boku $2a$, wybrano ten o największej objętości. Wykaż, że objętość tego walca jest równa objętości kuli wpisanej w dany stożek.

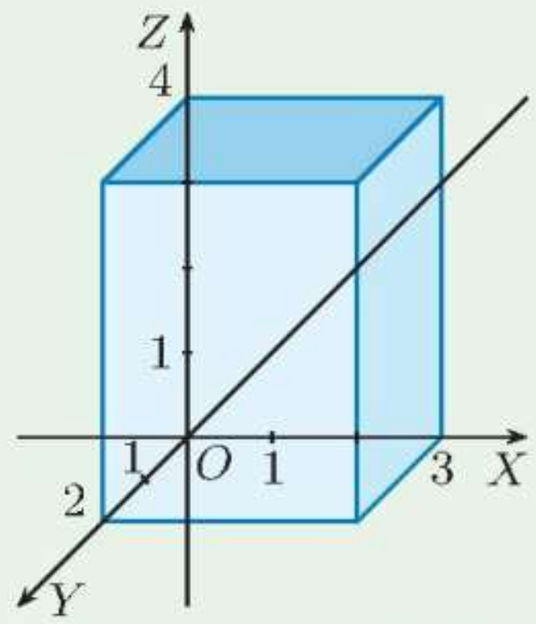


3.9. Zagadnienia uzupełniające

Układ współrzędnych w przestrzeni

Położenie dowolnego punktu w przestrzeni jest określone przez trójkę jego współrzędnych (x, y, z).

Wierzchołkami dolnej podstawy prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok są punkty:
$(0,0,0)$, $(0,2,0)$, $(3,2,0)$, $(3,0,0)$,
a wierzchołkami górnej podstawy – punkty:
$(0,0,4)$, $(0,2,4)$, $(3,2,4)$, $(3,0,4)$.



Współrzędne punktów należących do prostopadłościanu spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 \leqslant z \leqslant 4 \end{cases}$$

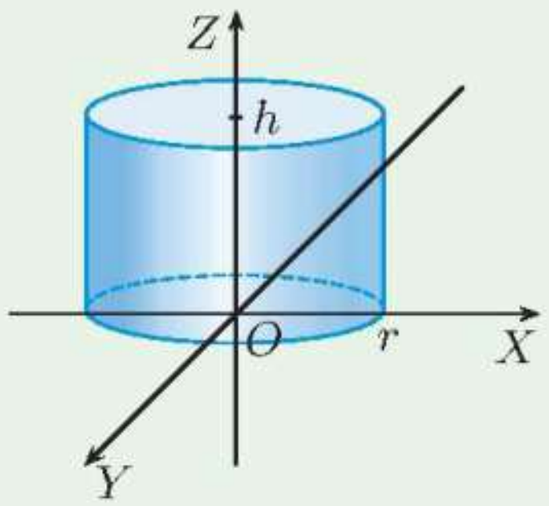
Obliczmy objętość tego prostopadłościanu: $V = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

1. Oblicz objętość graniastosłupa, do którego należą punkty o współrzędnych spełniających podany układ nierówności.

a) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 1 \leqslant y \leqslant 4 \\ 2 \leqslant z \leqslant 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 8 \\ -2 \leqslant y \leqslant 4 \\ -5 \leqslant z \leqslant -2 \end{cases}$ *c) $\begin{cases} 0 \leqslant x \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 - x \\ 0 \leqslant z \leqslant 4 \end{cases}$

Rozpatrzmy walec o promieniu podstawy r i wysokości h umieszczony w trójwymiarowym układzie współrzędnych (rysunek obok). Współrzędne punktów należących do tego walca spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant r^2 \\ 0 \leqslant z \leqslant h \end{cases}$$



2. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej walca opisanego podanym układem nierówności.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9 \\ 0 \leqslant z \leqslant 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 10 \\ -2 \leqslant z \leqslant 6 \end{cases}$ *c) $\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 15 \leqslant 0 \\ -1 \leqslant z \leqslant 5 \end{cases}$

Odległość punktu $P(x, y, z)$ od początku trójwymiarowego układu współrzędnych $O(0, 0, 0)$ wyraża się wzorem (uzasadnij):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

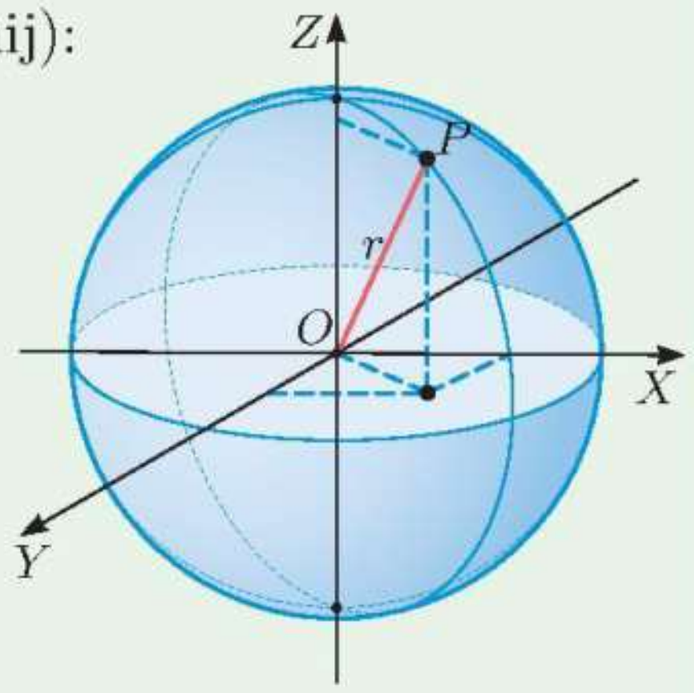
Zatem nierówność:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2$$

gdzie $r > 0$, opisuje kulę o środku w punkcie O i promieniu r, a równanie:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

opisuje sferę będącą powierzchnią tej kuli.



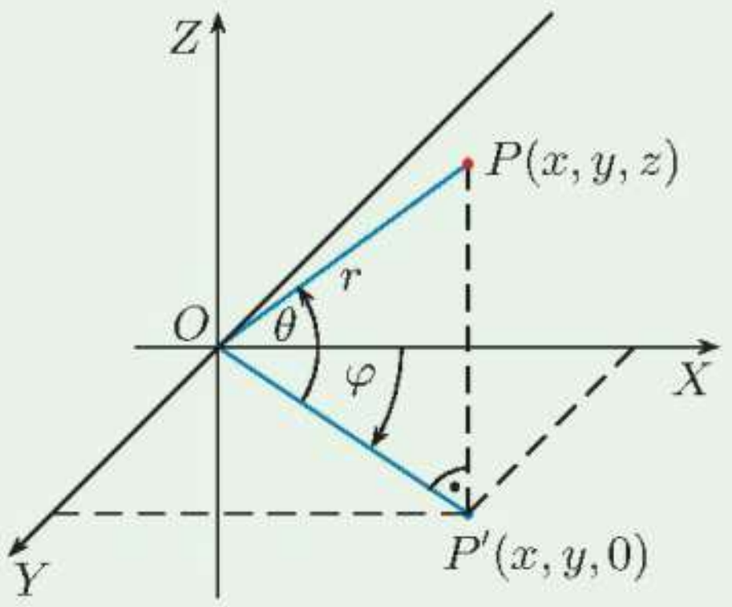
Na przykład nierówność $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36$ opisuje kulę o środku w punkcie $O(0, 0, 0)$ i promieniu $r = 6$. Jej objętość: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi$, a pole powierzchni: $P = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi$.

3. Oblicz pole powierzchni i objętość kuli opisanej nierównością:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, b) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3$, c) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 10$.

4. Podaj nierówność opisującą zbiór punktów (x, y, z) należących do kuli o środku w początku trójwymiarowego układu współrzędnych, jeśli wiadomo, że: a) jej średnica jest równa 8, b) jej objętość jest równa 972π.

Położenie punktu w przestrzeni możemy opisać za pomocą **współrzędnych sferycznych**. Rozpatrzmy punkt P' będący rzutem prostokątnym punktu $P(x, y, z)$ na płaszczyznę OXY (rysunek obok).



Aby określić położenie punktu P we współrzędnych sferycznych, podajemy:

r – długość odcinka OP,

θ – kąt między odcinkiem OP i odcinkiem OP' $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$,

φ – kąt między odcinkiem OP' i osią OX $(-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

D **5.** Uzasadnij, że współrzędne sferyczne punktu $P(2, 2, 2\sqrt{2})$ są równe:

$$r = 4, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

D **6.** Uzasadnij, że współrzędne sferyczne punktu $P(1, 1, \sqrt{6})$ są równe:

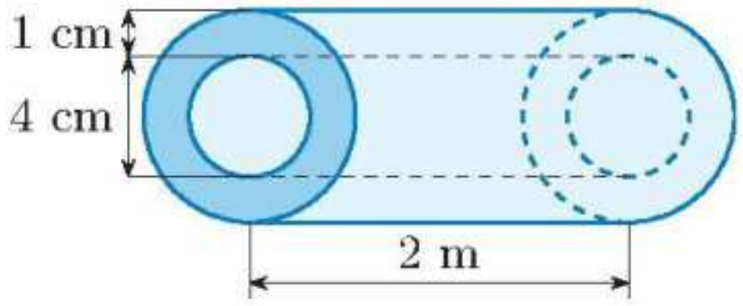
$$r = 2\sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Dwa walce mają taką samą wysokość. Promień podstawy jednego z nich jest o 50% dłuższy od promienia podstawy drugiego. Oblicz stosunek objętości tych walców.

2. Oblicz objętość metalu użytego do wykonania metalowej rury o wymiarach podanych na rysunku (skala nie jest zachowana).



3. Oblicz pole przekroju osiowego walca, którego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest prostokątem o wymiarach 7 cm $\times$ 5 cm.

4. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu 12 cm wyznaczonym przez kąt środkowy 225°. Oblicz objętość tej bryły.

5. Wycinek koła o promieniu 2 wyznaczony przez kąt środkowy 90° zwinięto w powierzchnię boczną stożka. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

6. Stożek i walec mają równe pola powierzchni bocznych, równe tworzące i takie same objętości. Oblicz tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy.

7. Dany jest trójkąt równoramienny, w którym kąt przy podstawie ma miarę 30°, a wysokość opuszczona na podstawę jest równa 1. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły otrzymanej przez obrót tego trójkąta wokół: a) jego podstawy, b) jednego z jego ramion.

8. Objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu trapezu równoramiennego wokół dłuższej podstawy stanowi 70% objętości bryły otrzymanej w wyniku obrotu tego trapezu wokół krótszej podstawy. Oblicz stosunek długości podstaw trapezu.

9. Kulę o środku O przecięto płaszczyzną i otrzymano w przekroju koło o środku S. Oblicz długość odcinka OS, jeśli wiadomo, że pole powierzchni kuli jest równe 20π, a obwód przekroju jest równy 2π.

10. Stożek o wysokości 4 przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta podzieliła powierzchnię boczną stożka na dwie części o równych polach. Oblicz odległość płaszczyzny przekroju od podstawy tego stożka.

Zestaw II

D **1.** Wykaż, że jeżeli przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym, to pole powierzchni bocznej tego stożka jest dwa razy większe od pola jego podstawy.

2. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym o polu 32 cm^2. Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego opisanego na tym stożku.

3. Oblicz objętość stożka wpisanego w graniastosłup prawidłowy czworokątny, którego przekrój płaszczyzną zawierającą przekątne podstaw jest kwadratem o boku 5.

4. W stożek o promieniu podstawy 6 wpisano graniastosłup prawidłowy czworokątny. Przekątna graniastosłupa ma długość $2\sqrt{13}$, a pole jego podstawy jest równe 18. Oblicz objętość stożka.

5. Wysokość walca wpisanego w stożek o promieniu podstawy 4 cm jest dwa razy krótsza od wysokości tego stożka. Oblicz, jaką część objętości stożka stanowi objętość walca.

6. W kulę wpisano stożek o wysokości 4. Objętość stożka jest czterokrotnie mniejsza od objętości kuli. Oblicz pole przekroju osiowego stożka.

7. Oblicz stosunek objętości kuli wpisanej w walec do objętości kuli opisanej na tym walcu.

8. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 2α. Wyznacz stosunek objętości kuli wpisanej w ten stożek do objętości kuli na nim opisanej.

9. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość x, a krawędź boczna – $2x$. Wyznacz promień kuli:

a) opisanej na tym ostrosłupie, b) wpisanej w ten ostrosłup.

10. W kulę wpisano walec, którego promień podstawy stanowi 60% promienia kuli. Oblicz sinus kąta, pod którym ze środka kuli widać średnicę podstawy walca.

11. W kulę o promieniu R wpisano stożek o wysokości H, gdzie $H > R$. Wyznacz cosinus kąta rozwarcia stożka.

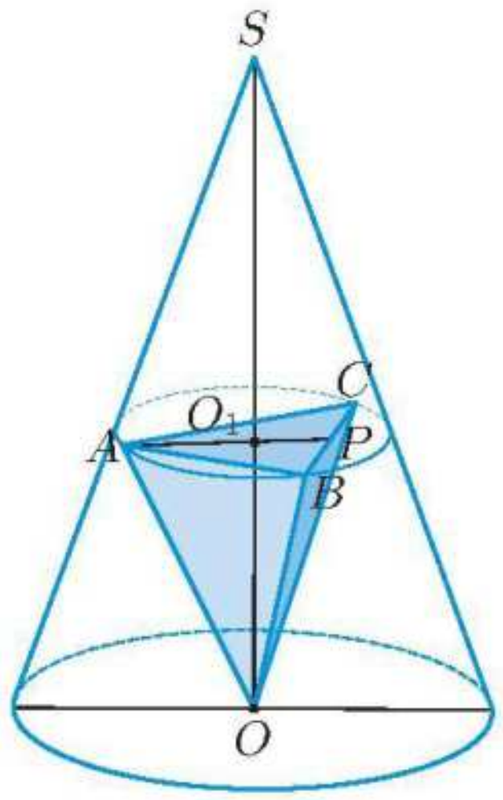
12. Promień podstawy stożka jest dwa razy dłuższy od promienia kuli wpisanej w ten stożek. Oblicz cosinus kąta rozwarcia stożka.

Sposób na zadanie

W zadaniach ze stereometrii często kluczowe jest przeanalizowanie odpowiedniego przekroju danej bryły.

Przykład

W stożek o promieniu podstawy 2 i wysokości 6 wpisano ostrosłup prawidłowy trójkątny w następujący sposób: wierzchołek ostrosłupa jest środkiem podstawy stożka, a wierzchołki podstawy ostrosłupa należą do powierzchni bocznej stożka (rysunek obok). Oblicz największą możliwą objętość takiego ostrosłupa.



Rozpatrzmy przekrój osiowy stożka zawierający środkową podstawy ostrosłupa – odcinek AP.
Oznaczmy przez a krawędź podstawy ostrosłupa, a przez h jego wysokość (odcinek OO_1 na rysunkach). Wówczas:

$$|AO_1| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Trójkąty AO_1S i DOS są podobne, zatem:

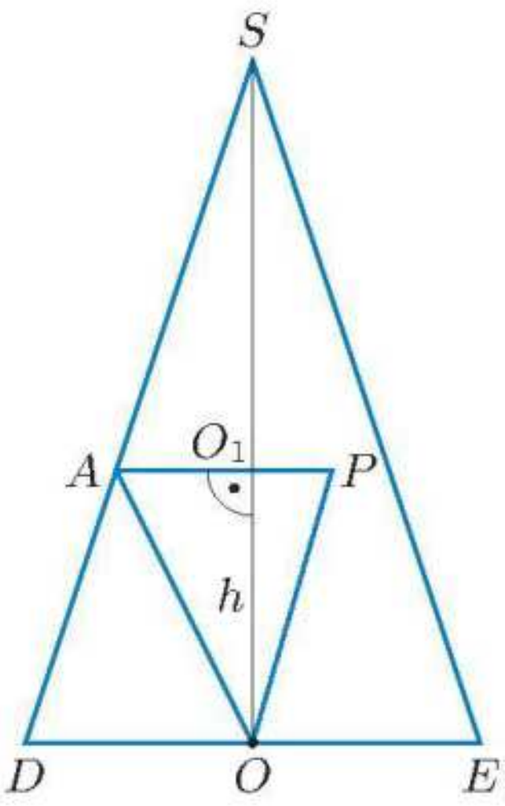
$$\frac{|AO_1|}{|DO|} = \frac{|SO_1|}{|SO|}$$

czyli:

$$\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{6-h}{6}, \text{ gdzie } h \in (0;6)$$

$$a\sqrt{3} = 6 - h$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3}(6-h)$$



Wyznaczamy objętość ostrosłupa jako funkcję zmiennej h:

$$V(h) = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(6-h)\right)^2 \cdot h =$$

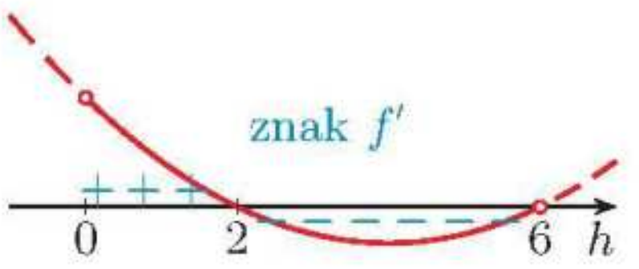
$$= \frac{\sqrt{3}}{36}(36h - 12h^2 + h^3)$$

gdzie $h \in (0;6)$.

Obliczamy pochodną funkcji V:

$$V'(h) = \frac{\sqrt{3}}{36}(36 - 24h + 3h^2) = \frac{\sqrt{3}}{12}(12 - 8h + h^2) = \frac{\sqrt{3}}{12}(6-h)(2-h)$$

$D_{V'} = (0;6)$, więc $V'(h) = 0$ dla $h = 2$.



Funkcja V rośnie w przedziale $(0;2\rangle$ i maleje w przedziale $\langle 2;6)$, zatem dla $h = 2$ osiąga wartość największą:

$$V(2) = \frac{\sqrt{3}}{36}(36 \cdot 2 - 12 \cdot 4 + 8) = \frac{32\sqrt{3}}{36} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

Odpowiedź: Największa objętość takiego ostrosłupa jest równa $\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Różnica objętości brył powstałych przez obrót prostokąta o bokach 4 cm i 6 cm wokół krótszego i wokół dłuższego boku jest równa:

A. 48π cm^3, **B.** 42π cm^3, **C.** 36π cm^3, **D.** 30π cm^3.

2. Pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku a, jest równe:

A. πa^2, **B.** $\frac{3}{2}\pi a^2$, **C.** $2\pi a^2$, **D.** $\frac{5}{2}\pi a^2$.

3. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku 12. Pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe:

A. 144π, **B.** 72π, **C.** 36π, **D.** 24π.

4. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest półkolem. Kąt rozwarcia tego stożka ma miarę:

A. 120°, **B.** 90°, **C.** 60°, **D.** 45°.

5. Trójkąt o bokach długości 15, 20 i 25 obracamy wokół najdłuższego boku i otrzymujemy bryłę złożoną z dwóch stożków o wspólnej podstawie. Objętość tej bryły jest równa:

A. 1600π, **B.** 1200π, **C.** 1000π, **D.** 750π.

6. Koło o polu 36π obracamy wokół średnicy. Otrzymujemy wówczas bryłę o objętości:

A. 288π, **B.** 240π, **C.** 144π, **D.** 120π.

7. Suma promieni dwóch kul jest równa 12. Wynika stąd, że suma pól powierzchni tych kul może być dowolną liczbą z przedziału:

A. $(0; 240\pi)$, **B.** $(240\pi; 288\pi)$, **C.** $(288\pi; 576\pi)$, **D.** $(296\pi; 684\pi)$.

8. Dane są dwa stożki podobne. Przekrój osiowy pierwszego z nich jest trójkątem równobocznym o obwodzie 12, a przekrój osiowy drugiego ma pole $16\sqrt{3}$. Wynika stąd, że skala podobieństwa większego stożka do mniejszego jest równa:

A. 2, **B.** $2\sqrt{3}$, **C.** 4, **D.** $4\sqrt{3}$.

9. Na kuli opisano stożek, którego pole powierzchni bocznej jest trzykrotnie większe od pola jego podstawy. Wynika stąd, że stosunek objętości stożka do objętości kuli jest równy:

A. $\sqrt{2}:1$, **B.** $\sqrt{3}:1$, **C.** $2:1$, **D.** $3:1$.

Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Przekrój osiowy walca jest kwadratem. Oblicz stosunek pola powierzchni całkowitej tego walca do pola jego powierzchni bocznej.

Zadanie 2 (2 pkt)
Średnica podstawy stożka jest dwa razy krótsza od jego tworzącej. Oblicz tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do jego podstawy.

Zadanie 3 (2 pkt)
Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu $9\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz objętość tego stożka.

Zadanie 4 (2 pkt)
Oblicz objętość kuli, której pole powierzchni jest równe sumie pól powierzchni dwóch kul o promieniach 3 cm i 6 cm.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 5 (3 pkt)
Wnętrze szklanki ma kształt walca o średnicy podstawy 6 cm i wysokości 8 cm. Oblicz, ile takich szklanek można napełnić po brzegi sokiem przechowywanym w dwóch prostopadłościennych kartonach o wymiarach 10 cm $\times$ 8 cm $\times$ 15 cm.

D **Zadanie 6 (4 pkt)**
Uzasadnij, że pole powierzchni bocznej stożka stanowi więcej niż 50% jego pola powierzchni całkowitej.

Zadanie 7 (3 pkt)
Oblicz objętość bryły, która powstała przez obrót trójkąta równobocznego o boku 12 cm wokół jednego z boków.

Zadanie 8 (3 pkt)
Kulę o promieniu 6 cm przecięto dwoma równoległymi płaszczyznami dzielącymi promień kuli na trzy równe odcinki. Oblicz sumę pól otrzymanych w ten sposób dwóch przekrojów.

Zadanie 9 (3 pkt)
Ostrosłup o wysokości 8 cm przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy i otrzymano dwa wielościany o równych objętościach. Oblicz, w jakiej odległości od wierzchołka ostrosłupa leży ta płaszczyzna.

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

Zadanie 1 (2 pkt)

Oblicz różnicę objętości sześcianu opisanego na kuli o promieniu 3 i sześcianu wpisanego w tę kulę.

Zadanie 2 (2 pkt)

Dany jest walec o objętości 32π. Średnica podstawy tego walca jest równa połowie jego wysokości. Oblicz objętość kuli opisanej na tym walcu.

Zadanie 3 (4 pkt)

Trapez prostokątny o podstawach a i $2a$ oraz kącie ostrym α obracamy wokół prostej zawierającej krótsze ramię trapezu. Wyznacz objętość otrzymanej bryły.

Zadanie 4 (6 pkt)

Oblicz, jaką największą objętość może mieć graniastosłup prawidłowy trójkątny wpisany w stożek o promieniu podstawy r i wysokości h.

Uwaga. W stożek jest wpisany graniastosłup, gdy wierzchołki jego górnej podstawy należą do powierzchni bocznej stożka, a dolna podstawa jest zawarta w podstawie stożka.

Zadanie 5 (6 pkt)

Stosunek długości krawędzi podstawy prostopadłościanu jest równy 2. Prostopadłościan ten jest wpisany w stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym o polu równym $9\sqrt{3}$. Oblicz największą objętość, jaką może mieć taki prostopadłościan.

Zadanie 6 (4 pkt)

Stożek o promieniu podstawy 3 i wysokości 4 przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Pole otrzymanego przekroju jest równe 4π. Oblicz objętości brył, na które płaszczyzna ta podzieliła stożek.

Zadanie 7 (4 pkt)

Pole powierzchni bocznej stożka stanowi $\frac{2}{3}$ jego pola powierzchni całkowitej. Oblicz miarę kąta, który tworzy wysokość stożka z jego tworzącą.

Zadanie 8

Dany jest prostopadłościan o wymiarach $6 \times 8 \times 24$.

Zadanie 8.1 (2 pkt)

Oblicz promień kuli opisanej na tym prostopadłościanie.

Zadanie 8.2 (3 pkt)

Wybieramy losowo dwa wierzchołki tego prostopadłościanu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że są one końcami odcinka o długości większej od 25.



4 Przykłady dowodów w matematyce

Pitagorasowi (VI/V w. p.n.e.) przypisuje się autorstwo pierwszego dowodu twierdzenia nazwanego jego imieniem. Uczony nie pozostawił jednak po sobie żadnych pism. Dowód twierdzenia Pitagorasa przedstawił Euklides (IV/III w. p.n.e.) w *Elementach* – dziele podsumowującym stan wiedzy matematycznej starożytnej Grecji. Składa się ono z trzynastu ksiąg. Księgi I–IV i VI poświęcone są geometrii płaszczyzny, księgi V i VII–X – arytmetyce, a księgi XI–XIII – geometrii przestrzeni. W księdze IX znajduje się dowód istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych. W tym podręczniku przedstawiono go na str. 181. Powyżej pokazano fragment fresku Rafaela Santi *Szkoła ateńska* przedstawiający Pitagorasa.

4.1. Dowody w algebrze (1)

Przykład 1

Wykaż, że jeśli suma dwóch liczb naturalnych jest nieparzysta, to iloczyn tych liczb jest parzysty.

Załóżmy, że n_1 i n_2 są liczbami naturalnymi takimi, że suma $n_1 + n_2$ jest liczbą nieparzystą. Wówczas jedna z liczb (możemy przyjąć, że n_1) jest liczbą parzystą, a druga – nieparzystą (uzasadnij).

Zatem dla pewnych $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$: $n_1 = 2k_1$ oraz $n_2 = 2k_2 + 1$. Czyli:

$$n_1 \cdot n_2 = 2k_1 \cdot (2k_2 + 1) = 2(2k_1k_2 + k_1), \text{ gdzie } 2k_1k_2 + k_1 \in \mathbf{N}$$

Oznacza to, że iloczyn $n_1 \cdot n_2$ jest liczbą parzystą.

Zdanie postaci „jeśli p, to q" nazywamy **implikacją**, p – **poprzednikiem** implikacji, a q – **następnikiem** implikacji.
Twierdzenia w matematyce często można sformułować w postaci implikacji. Poprzednik implikacji nazywamy założeniem, a następnik – tezą twierdzenia. Wykazanie prawdziwości takiego twierdzenia polega na wykazaniu prawdziwości tezy przy założeniu prawdziwości założenia.

Ćwiczenie 1

Wykaż, że jeśli suma trzech liczb naturalnych jest nieparzysta, to suma ich kwadratów jest nieparzysta.

Przykład 2

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2(n^2 - 1)$ jest podzielna przez 12.

Zauważmy, że $n^2(n^2 - 1) = n(n - 1)n(n + 1)$. Wśród dowolnych dwóch kolejnych liczb całkowitych znajduje się liczba podzielna przez 2, a wśród trzech – liczba podzielna przez 3. Oznacza to, że liczba:

- $n(n - 1)$ jest podzielna przez 2,
- $n(n + 1)$ jest podzielna przez 2,
- $(n - 1)n(n + 1)$ jest podzielna przez 3.

Zatem liczba $n^2(n^2-1)$ jest podzielna przez 4 oraz przez 3, jest więc podzielna przez 12.

Ćwiczenie 2

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba:

a) $n(n^4-1)$ jest podzielna przez 6, b) $n^6-2n^4+n^2$ jest podzielna przez 36.

Ćwiczenie 3

a) Udowodnij, że iloczyn pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 120.

b) Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

Przykład 3

Wykaż, że liczba $17^8 - 6^8$ jest podzielna przez 11 i przez 23.

Korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 17^8 - 6^8 &= (17^4 - 6^4)(17^4 + 6^4) = (17^2 - 6^2)(17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) = \\ &= (17 - 6)(17 + 6)(17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) = \\ &= 11 \cdot 23 \cdot (17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) \qquad (17^2 + 6^2)(17^4 + 6^4) \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

Zatem liczba $17^8 - 6^8$ jest podzielna przez 11 i przez 23.

Ćwiczenie 4

a) Wykaż, że liczba $7^{77} - 6 \cdot 7^{76} + 12 \cdot 7^{75}$ jest podzielna przez 19.

b) Wykaż, że liczba $32^{32} - 5^{64}$ jest podzielna przez 7.

Przykład 4

Wykaż, że reszta z dzielenia liczby pierwszej większej od 3 przez 6 jest równa 1 lub 5.

Każdą liczbę naturalną n można zapisać w jednej z postaci: $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$, $6k+5$ dla pewnego $k \in \mathbf{N}$. Liczby postaci $6k$, $6k+2$, $6k+4$ są podzielne przez 2, a liczba postaci $6k+3$ jest podzielna przez 3. Zatem jeśli liczba n jest pierwsza i różna od 2 i 3, to ma postać $6k+1$ lub $6k+5$.

Ćwiczenie 5

a) Reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 6 jest równa 5. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby n^2 przez 6 jest równa 1.

b) Reszta z dzielenia każdej z liczb naturalnych n_1, n_2 i n_3 przez 6 jest równa 4. Wykaż, że suma kwadratów tych liczb jest podzielna przez 12.

Zadania

1. Dane są dwie liczby naturalne, obie podzielne przez 3.

a) Udowodnij, że różnica kwadratów tych liczb jest podzielna przez 9.

b) Udowodnij, że suma sześcianów tych liczb jest podzielna przez 27.

2. Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych, z których pierwsza jest parzysta, jest podzielny przez 24.

3. a) Dane są trzy liczby naturalne takie, że reszta z dzielenia każdej z nich przez 3 jest równa 2. Udowodnij, że suma tych liczb jest podzielna przez 3.

b) Dane są trzy liczby naturalne takie, że reszta z dzielenia każdej z nich przez 6 jest równa 4. Udowodnij, że suma tych liczb jest podzielna przez 6.

4. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 0$:

a) liczba $3^{n+1} + 3^n + 3^{n-1}$ jest podzielna przez 13,

b) liczba $8^{2n-1} + 4^{3n-1}$ jest podzielna przez 24.

5. a) Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$ jest naturalna.

b) Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n liczba $\frac{n^3}{8} - \frac{n}{8}$ jest naturalna.

6. a) Udowodnij, że jeśli reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 5 jest równa 4, to liczba $n^2 - 1$ jest podzielna przez 5.

b) Udowodnij, że jeśli liczba naturalna n nie jest podzielna przez 5, to jedna z liczb $n^2 - 1$ lub $n^2 + 1$ jest podzielna przez 5.

7. a) Wykaż, że jeśli liczba naturalna n nie jest podzielna przez 3, to reszta z dzielenia liczby n^2 przez 3 jest równa 1.

b) Wykaż, że suma kwadratów trzech liczb naturalnych niepodzielnych przez 3 jest podzielna przez 3.

8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Wykaż, że dla żadnej liczby naturalnej n liczba n^2+2 nie jest podzielna przez 4.
>
> Jeśli n jest liczbą parzystą, to $n = 2k$ dla pewnego $k \in \mathbf{N}$. Wówczas $n^2 + 2 = (2k)^2 + 2 = 4k^2 + 2$, co oznacza, że reszta z dzielenia $n^2 + 2$ przez 4 jest równa 2.
>
> Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $n = 2k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbf{N}$. Wówczas $n^2 + 2 = (2k + 1)^2 + 2 = 4k^2 + 4k + 3 = 4(k^2 + k) + 3$, co oznacza, że reszta z dzielenia $n^2 + 2$ przez 4 jest równa 3.
>
> Zatem liczba $n^2 + 2$ nie jest podzielna przez 4.

Wykaż, że dla żadnej liczby naturalnej n liczba:

a) $n^2 + 6n + 2$ nie jest podzielna przez 4,

b) $n^2 + n + 2$ nie jest podzielna przez 3.

Warto wiedzieć

Dowód nie wprost

Dowód **nie wprost** polega na założeniu, że dowodzona teza jest nieprawdziwa, a następnie pokazaniu, że prowadzi to do sprzeczności. Poniżej przedstawiamy przykład takiego dowodu.

Twierdzenie

> Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Dowód

Załóżmy, że liczb pierwszych jest skończenie wiele. Niech $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi ustawionymi w kolejności rosnącej (czyli $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ itd.). Rozpatrzmy liczbę:

$$M = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

Liczba M jest większa od każdej z liczb $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ oraz jest albo liczbą pierwszą, albo złożoną.

Jeżeli M jest liczbą pierwszą, to liczby $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ nie są wszystkimi liczbami pierwszymi.

Jeżeli M jest liczbą złożoną, to można ją przedstawić jako iloczyn czynników będących liczbami pierwszymi. Zauważmy, że w rozkładzie liczby M na czynniki nie może wystąpić żadna spośród liczb $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, gdyż przy dzieleniu przez p_k $(k \leqslant n)$ otrzymujemy resztę równą 1. Zatem liczba M ma dzielnik pierwszy różny od każdej z liczb:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$$

Oznacza to, że zarówno wtedy, gdy liczba M jest pierwsza, jak i wtedy, gdy jest złożona, istnieje liczba pierwsza większa od każdej z liczb:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$$

Zatem nie jest prawdą, że liczb pierwszych jest skończenie wiele.

Powyższe twierdzenie podał i udowodnił Euklides (ok. 365 – ok. 300 r. p.n.e.).



***1.** Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ istnieje liczba pierwsza p taka, że:

$$n < p < n!$$

Wskazówka. Rozpatrz liczbę $n! - 1$.

D 4.2. Dowody w algebrze (2)

Aby zapisać, że dwie nierówności są równoważne, będziemy używać symbolu $\Leftrightarrow$ [czyt. „wtedy i tylko wtedy"].

Przykład 1

Udowodnij, że nierówność $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b.

Przekształcamy nierówność równoważnie:

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 \geqslant 2ab \\ \Leftrightarrow\ & a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 && \text{Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.} \\ \Leftrightarrow\ & (a-b)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}$, zatem również nierówność $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ zachodzi dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}$.

Przykład 2

Wykaż, że dla dowolnych liczb nieujemnych a i b prawdziwa jest nierówność $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ (czyli że średnia arytmetyczna liczb nieujemnych jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej).

Załóżmy, że a i b są liczbami nieujemnymi.

$$\begin{aligned} & \tfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} && \text{Dla dowolnych nieujemnych } \alpha \text{ i } \beta \text{ nierówności } \alpha \geqslant \beta \text{ i } \alpha^2 \geqslant \beta^2 \text{ są równoważne.} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab \\ \Leftrightarrow\ & a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab \\ \Leftrightarrow\ & a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 && \text{Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.} \\ \Leftrightarrow\ & (a-b)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych liczb nieujemnych a i b, zatem także nierówność $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ zachodzi dla dowolnych liczb nieujemnych a i b.

Ćwiczenie 1

a) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $ab > 0$, prawdziwa jest nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.

b) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $ab < 0$, prawdziwa jest nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leqslant -2$.

Ćwiczenie 2

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność:

a) $a^2 \geqslant 4b(a-b)$,

b) $a(6b - 7a) \leqslant 2(b-a)(b+a)$.

Przykład 3

Wykaż, że równanie $x^4 - 3x^2 - 4x + 8 = 0$ nie ma pierwiastków.

$$\begin{aligned} & x^4 - 3x^2 - 4x + 8 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^4 - 4x^2 + 4 + x^2 - 4x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2 - 2)^2 + (x - 2)^2 = 0 \end{aligned}$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

Rozpatrzmy składniki otrzymanej sumy: $(x^2 - 2)^2$ i $(x - 2)^2$. Zauważmy, że:

- $(x^2 - 2)^2 \geqslant 0$ i $(x - 2)^2 \geqslant 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$,
- nie istnieje takie x, dla którego jednocześnie $(x^2 - 2)^2 = 0$ i $(x - 2)^2 = 0$

(pierwszy składnik przyjmuje wartość 0 dla $x = -\sqrt{2}$ oraz dla $x = \sqrt{2}$, a drugi składnik – dla $x = 2$).

Zatem równanie $x^4 - 3x^2 - 4x + 8 = 0$ nie ma pierwiastków.

Ćwiczenie 3

Udowodnij, że podana nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

a) $x^4 - 2x + 2 > x^2 + 4x - 8$ b) $x^4 - 4x^2 + 5 > 4x - 12$

Przykład 4

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność:

$$5x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 1 \geqslant 0$$

Przekształcamy wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$5x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 1 = x^2 + 2xy + y^2 + 4x^2 - 4x + 1 = (x + y)^2 + (2x - 1)^2$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzą nierówności $(x + y)^2 \geqslant 0$ oraz $(2x - 1)^2 \geqslant 0$, więc nierówność jest zawsze prawdziwa.

Ćwiczenie 4

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność:

a) $x^2 + 10y^2 + 9 \geqslant 6y(x + 1)$, b) $3x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 2x - \frac{1}{2}$.

Zadania

1. Wykaż, że dla dowolnej liczby $x > 0$ prawdziwa jest nierówność:

a) $x + \frac{4}{x} \geqslant 4$, b) $4 + \frac{1}{x} \geqslant \frac{4}{\sqrt{x}}$, c) $\frac{1}{x^5} + \frac{9}{x} \geqslant \frac{6}{x^3}$.

2. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb a i b prawdziwa jest nierówność:

a) $\frac{(a+b)^2}{ab} \geqslant 4$, b) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geqslant a + b$, c) $\frac{4}{a+b} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność:

a) $(x-y)^2+2x^2+8 \geqslant 4x(2-y)$,

b) $(x+2)(x+3)+1 > (1-y)(x+y+1)$.

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność:

a) $x^2+y^2-x(y+1) \geqslant y-1$, b) $2x^2y^2+x^2+y^2 \geqslant 6xy-2$.

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że $a+b=\frac{1}{2}$, prawdziwa jest podana nierówność. Skorzystaj z zależności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną dwóch liczb.

a) $ab \leqslant \frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant 8$ c) $\frac{1}{2ab}-4a \geqslant 6+4b$

6. a) Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że $ab=4$, prawdziwa jest nierówność $a+b \geqslant 4$.

b) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $a+b=1$, prawdziwa jest nierówność $a^3+b^3 \geqslant ab$.

7. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że:

a) $ab=16$, prawdziwa jest nierówność $(1+a)(1+b) \geqslant 25$,

b) $ab=\frac{1}{4}$, prawdziwa jest nierówność $4(1+a)(1+b) \geqslant 9$.

8. a) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $a \geqslant b > 0$, prawdziwa jest nierówność $b^2(a+1) \leqslant a^2(b+1)$.

b) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ takich, że $a^2+b^2=1$, prawdziwa jest nierówność $\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{b^2}\right) \geqslant 9$.

***9.** Przeczytaj podany w ramce przykład.

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b i przeciwprostokątnej c. Wykaż, że $a+b \leqslant \sqrt{2}c$.

W dowodzie skorzystamy z tego, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność $2ab \leqslant a^2+b^2$ oraz z twierdzenia Pitagorasa.

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \leqslant a^2+(a^2+b^2)+b^2 = 2(a^2+b^2) = 2c^2$$

$a+b>0$ oraz $\sqrt{2}c>0$, zatem otrzymujemy $a+b \leqslant \sqrt{2}c$.

Dany jest prostopadłościan o krawędziach a, b, c i przekątnej d. Wykaż, że $a+b+c \leqslant \sqrt{3}d$.

4.3. Dowody w geometrii (1)

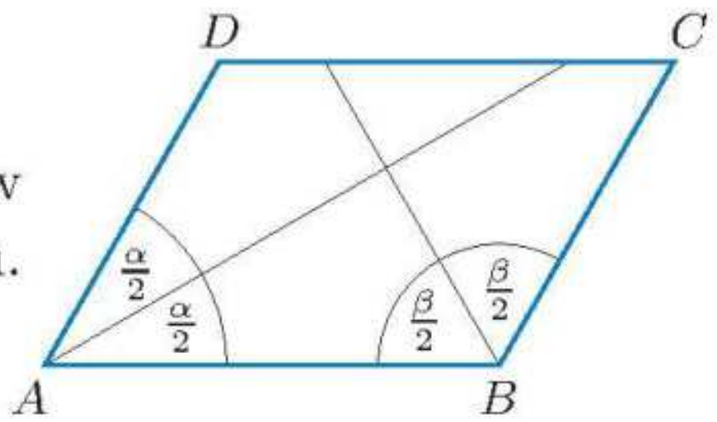
Ćwiczenie 1

Udowodnij, że suma miar kątów trójkąta jest równa $180°$.

Gdy przedstawiamy dowód twierdzenia, często korzystamy z twierdzeń już udowodnionych. W dowodach twierdzeń w ćwiczeniach 2. i 3. można skorzystać z twierdzenia udowodnionego w ćwiczeniu 1.

Ćwiczenie 2

Udowodnij, że dwusieczne dwóch sąsiednich kątów równoległoboku przecinają się pod kątem prostym.



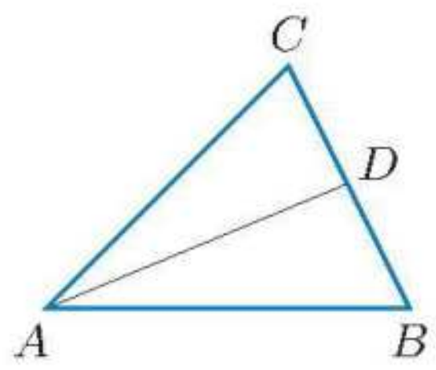
Ćwiczenie 3

Udowodnij, że jeśli środek okręgu opisanego na trójkącie jest środkiem jednego z jego boków, to trójkąt ten jest prostokątny.

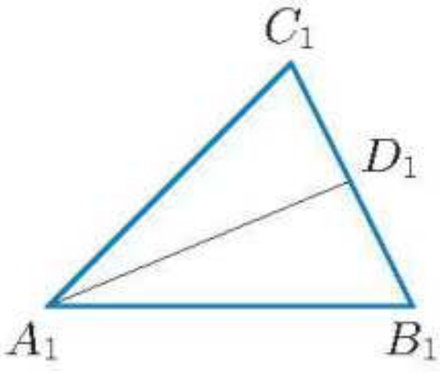
W dowodzie przedstawionym w poniższym przykładzie korzystamy z twierdzeń nazywanych cechami przystawania trójkątów (przypomnij ich treść).

Przykład 1

W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ (rysunek obok) poprowadzono dwusieczne odpowiednio AD i A_1D_1. Wykaż, że jeśli $|AB| = |A_1B_1|$, $|AD| = |A_1D_1|$ oraz $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C_1A_1B_1$, to $|AC| = |A_1C_1|$.



$|AB| = |A_1B_1|$, $|AD| = |A_1D_1|$ oraz $\sphericalangle BAD = \sphericalangle B_1A_1D_1$, więc na podstawie cechy BKB trójkąty ABD i $A_1B_1D_1$ są przystające ($\triangle ABD \equiv \triangle A_1B_1D_1$).
Stąd $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$.



Z powyższego wniosku i założeń $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C_1A_1B_1$ oraz $|AB| = |A_1B_1|$, na podstawie cechy KBK, otrzymujemy: $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$. Zatem $|AC| = |A_1C_1|$.

Ćwiczenie 4

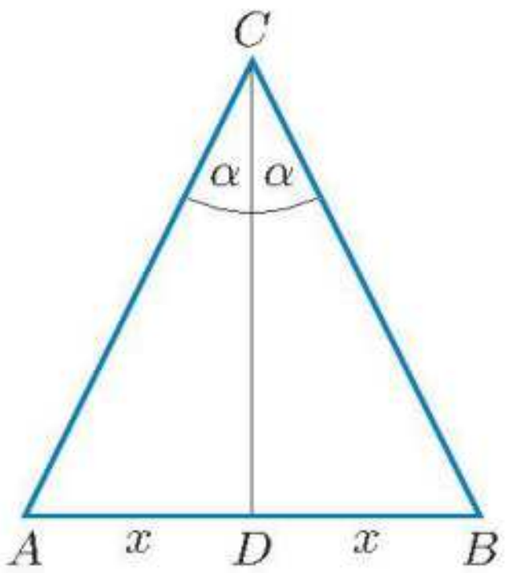
Środkowe AD i A_1D_1 poprowadzone odpowiednio w trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ mają równe długości. Wykaż, że jeśli:

a) $|AB| = |A_1B_1|$ oraz $|BC| = |B_1C_1|$, to $|AC| = |A_1C_1|$,

b) $\sphericalangle CAD = \sphericalangle C_1A_1D_1$ oraz $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A_1D_1B_1$, to $|AB| = |A_1B_1|$.

Przykład 2

Środkowa CD trójkąta ABC zawiera się w dwusiecznej kąta ACB (rysunek obok). Wykaż, że trójkąty ADC i BDC są przystające.



Trójkąty ADC i BDC mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka C i równe podstawy, zatem:

$$P_{\triangle ADC} = P_{\triangle BDC}$$

Wyznaczamy te pola:

$$P_{\triangle ADC} = \tfrac{1}{2}|AC| \cdot |CD| \cdot \sin\alpha$$
$$P_{\triangle BDC} = \tfrac{1}{2}|BC| \cdot |CD| \cdot \sin\alpha$$

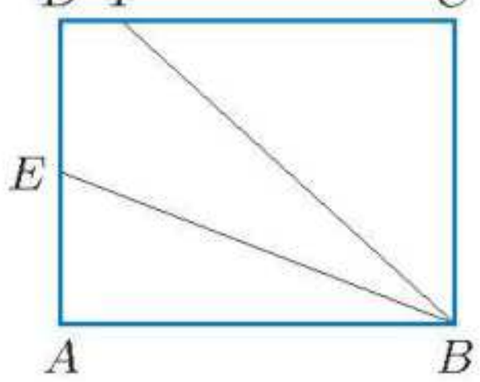
i otrzymujemy $|AC| = |BC|$. Trójkąty ADC i BDC mają odpowiednie boki tej samej długości, zatem na podstawie cechy BBB są przystające.

Zwróćmy uwagę, że z udowodnionego w przykładzie 2. twierdzenia wynika, że jeśli środkowa trójkąta zawiera się w dwusiecznej jednego z jego kątów, to jest ona wysokością tego trójkąta.

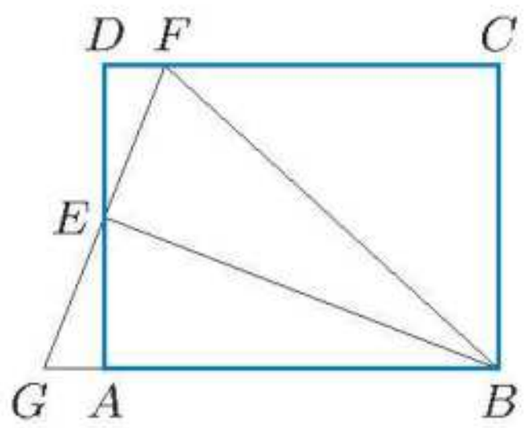
W niektórych dowodach geometrycznych potrzebne jest poprowadzenie dodatkowych prostych lub odcinków.

Przykład 3

Punkt E jest środkiem boku AD prostokąta $ABCD$. Na boku DC obrano taki punkt F, że $\sphericalangle ABE = \sphericalangle FBE$. Wykaż, że kąt FEB jest prosty.

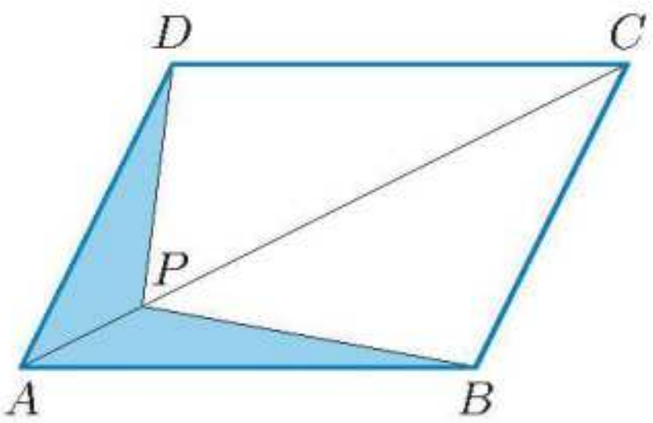


Odcinek FE przedłużamy do przecięcia z prostą AB w punkcie G. Trójkąty FDE i GAE są przystające (uzasadnij), stąd $|EF| = |EG|$. Odcinek EB jest więc środkową trójkąta FBG, a ponieważ zawiera się w dwusiecznej kąta FBG, jest też wysokością tego trójkąta. Zatem kąt FEB jest prosty.



Ćwiczenie 5

Punkt P należy do przekątnej AC równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok). Wykaż, że pola trójkątów ADP i ABP są równe.

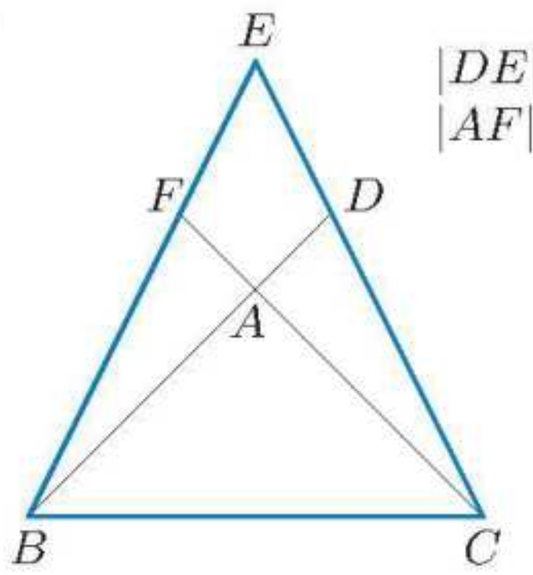


Wskazówka. Narysuj wysokość trójkąta ACD opuszczoną z wierzchołka D oraz wysokość trójkąta ACB opuszczoną z wierzchołka B i wykaż, że wysokości te są równe.

Zadania

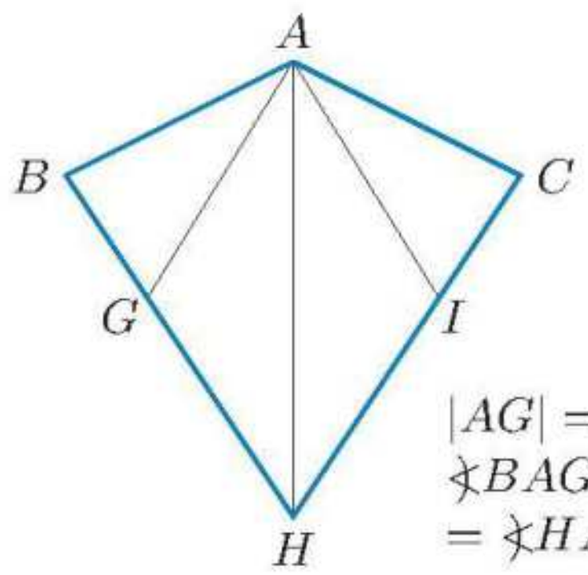
1. Korzystając z podanych informacji, wykaż, że $|AB| = |AC|$.

a)



$|DE| = |FE|$,
$|AF| = |AD|$

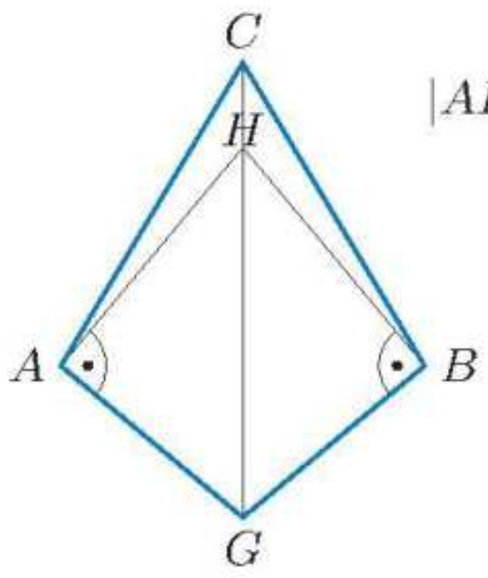
b)



$|AG| = |AI|$,
$\sphericalangle BAG = \sphericalangle GAH =$
$= \sphericalangle HAI = \sphericalangle IAC$

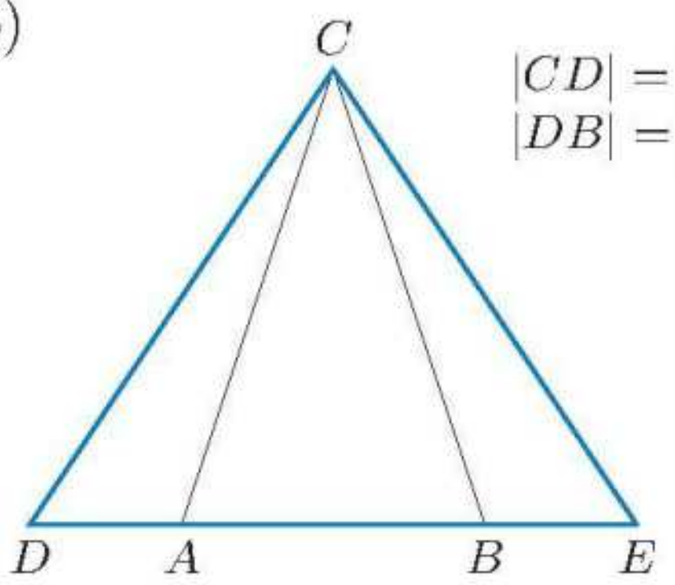
2. Korzystając z podanych informacji, wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny.

a)



$|AH| = |BH|$

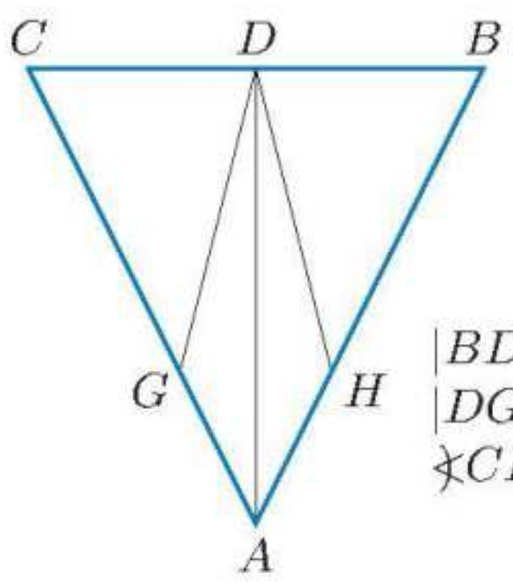
b)



$|CD| = |CE|$,
$|DB| = |AE|$

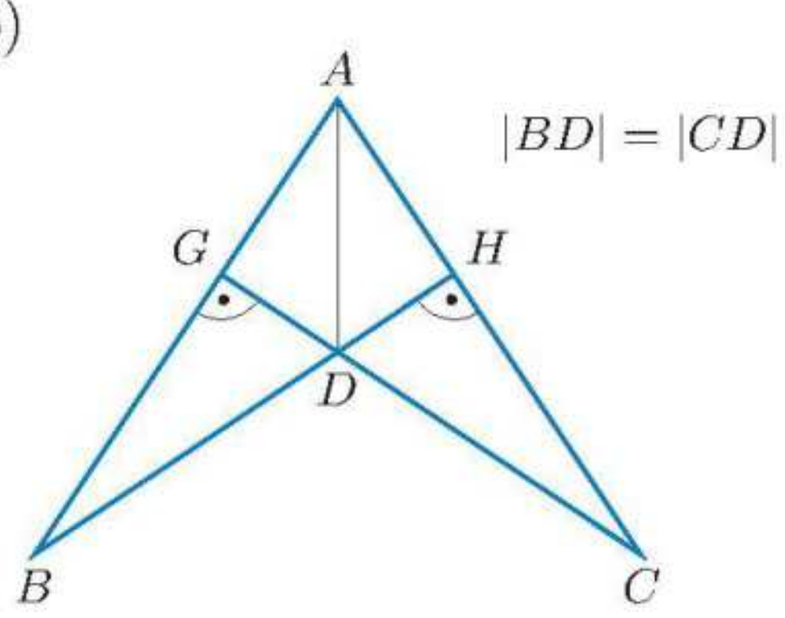
3. Korzystając z podanych informacji, wykaż, że odcinek AD zawiera się w dwusiecznej kąta BAC.

a)



$|BD| = |CD|$,
$|DG| = |DH|$,
$\sphericalangle CDG = \sphericalangle BDH$

b)

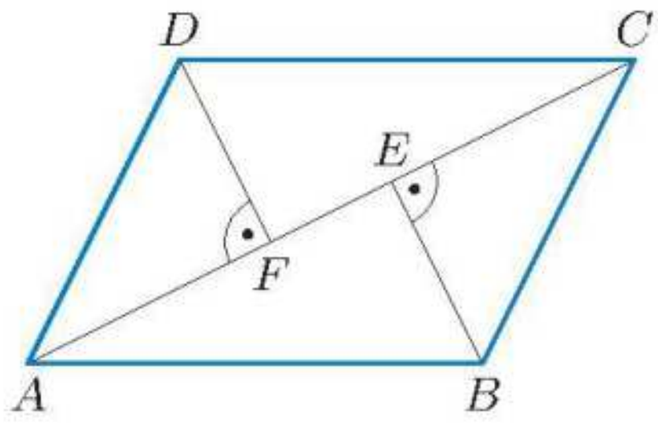


$|BD| = |CD|$

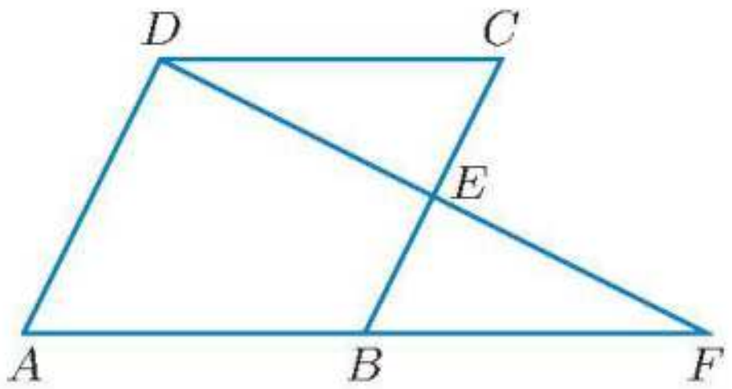
4. Dany jest czworokąt $ABCD$ (rysunek obok).

a) Wykaż, że $|AB| = |DC|$, jeśli wiadomo, że $|AF| = |CE|$ oraz $\sphericalangle FAD = \sphericalangle ECB$.

b) Wykaż, że $|AD| = |BC|$, jeśli wiadomo, że $|BE| = |DF|$ oraz $AB \parallel CD$.



5. Dany jest równoległobok $ABCD$ (rysunek obok). Punkt E jest środkiem boku BC, a punkt F – punktem przecięcia prostych AB i DE. Wykaż, że pola trójkąta AFD i równoległoboku $ABCD$ są równe.

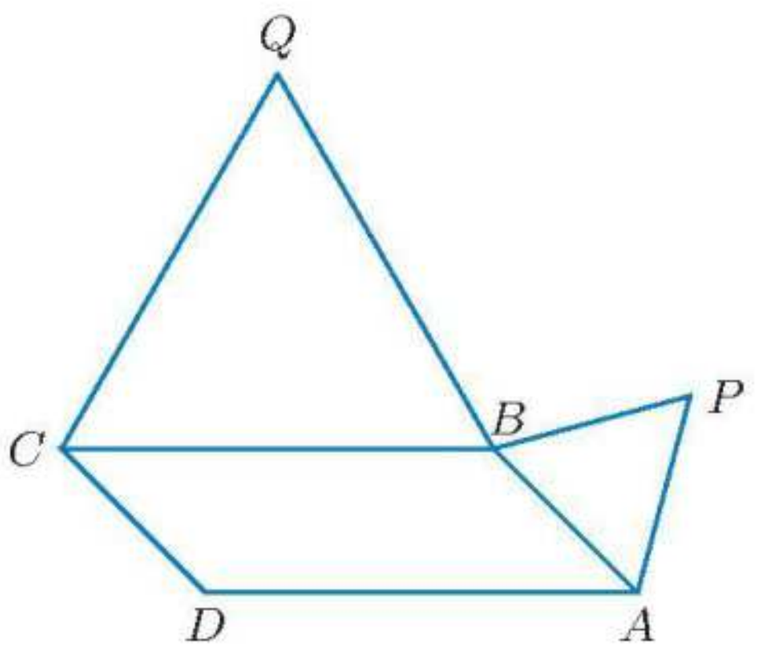


6. Na bokach AB, BC i AC trójkąta równobocznego ABC obrano odpowiednio punkty P, Q i R tak, że $|AP| = |BQ| = |CR|$. Wykaż, że trójkąt PQR jest równoboczny oraz że punkty przecięcia odcinków AQ, BR i CP są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

7. W trójkącie ABC poprowadzono środkową CD, a z punktu D poprowadzono środkowe trójkątów ADC i CDB: odpowiednio DE i DF. Wykaż, że jeśli $|DE| = |DF|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

8. Dany jest równoległobok $ABCD$ o kącie ostrym przy wierzchołku A. Na półprostych AB i CB obrano odpowiednio punkty E i F takie, że $|CB| = |CE|$ oraz $|AB| = |AF|$. Wykaż, że $\triangle DAF \equiv \triangle ECD$.

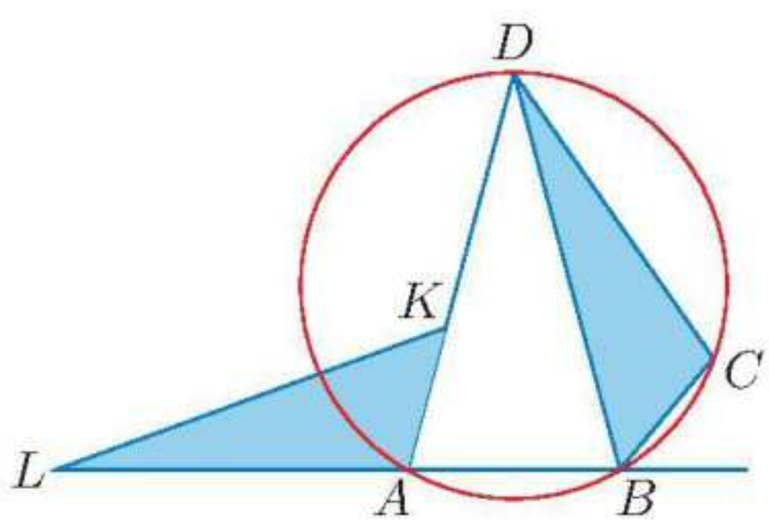
9. Na zewnątrz równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok) obrano punkty P i Q tak, że trójkąty BAP i CBQ są równoboczne. Wykaż, że trójkąt PQD jest równoboczny.



10. Dany jest trapez $ABCD$. Punkt P jest środkiem ramienia AD. Udowodnij, że pole trójkąta BPC jest dwa razy mniejsze od pola trapezu $ABCD$.

11. Punkty P, Q, R i S są środkami boków trapezu równoramiennego. Wykaż, że czworokąt $PQRS$ jest rombem.

12. Dany jest czworokąt $ABCD$, na którym opisano okrąg. Na boku AD tego czworokąta obrano punkt K taki, że $|AK| = |BC|$, a na prostej AB – punkt L taki, że $|AL| = |DC|$ (rysunek obok). Wykaż, że trójkąty LAK i DCB są przystające oraz że prosta AC jest równoległa do prostej KL.

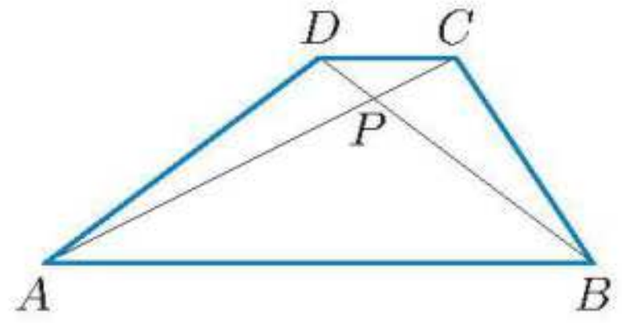


D 4.4. Dowody w geometrii (2)

Ćwiczenie 1

a) Przypomnij cechy podobieństwa trójkątów.

b) Dany jest trapez $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie P (rysunek obok). Podaj cechę, na podstawie której można uzasadnić podobieństwo trójkątów ABP i CDP.



Trójkąty ABP i CDP są podobne, co zapisujemy:

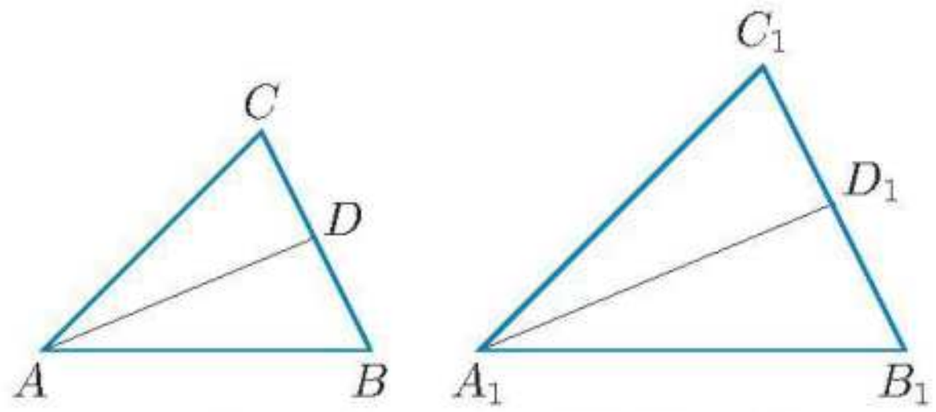
$$\triangle ABP \sim \triangle CDP$$

Przykład 1

W trójkątach podobnych ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono środkowe AD i A_1D_1. Wykaż, że długości tych środkowych są proporcjonalne do długości boków trójkątów.

Korzystamy z podobieństwa trójkątów ABC i $A_1B_1C_1$:

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{\frac{1}{2}|BC|}{\frac{1}{2}|B_1C_1|} = \frac{|BD|}{|B_1D_1|}$$



Ponadto kąty ABD i $A_1B_1D_1$ są równe, więc na podstawie cechy BKB trójkąty ABD i $A_1B_1D_1$ są podobne. Zatem:

$$\frac{|AD|}{|A_1D_1|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|}$$

Ćwiczenie 2

Boki AB, BC i AC trójkąta ABC są proporcjonalne odpowiednio do boków A_1B_1, B_1C_1 i A_1C_1 trójkąta $A_1B_1C_1$.

a) W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono dwusieczne kątów BAC i $B_1A_1C_1$. Przecięły one boki BC i B_1C_1 odpowiednio w punktach D i D_1. Wykaż, że długości odcinków AD i A_1D_1 są proporcjonalne do długości boków trójkątów.

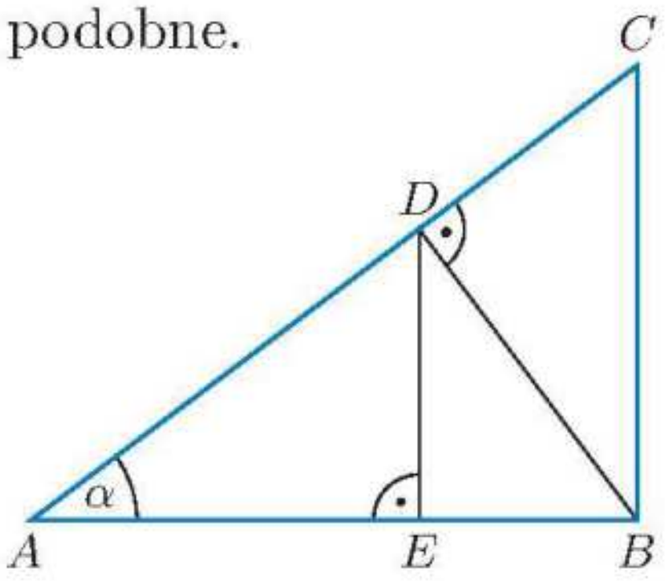
b) Symetralna boku AB przecina boki trójkąta ABC w punktach P i Q, a symetralna boku A_1B_1 przecina boki trójkąta $A_1B_1C_1$ odpowiednio w punktach P_1 i Q_1. Wykaż, że trójkąty APQ i $A_1P_1Q_1$ są podobne.

Ćwiczenie 3

Dany jest trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok). Wykaż, że stosunek pól trójkątów:

a) BDC i ABC jest równy $\sin^2\alpha$,

b) AED i ABC jest równy $\cos^4\alpha$.



Przykład 2

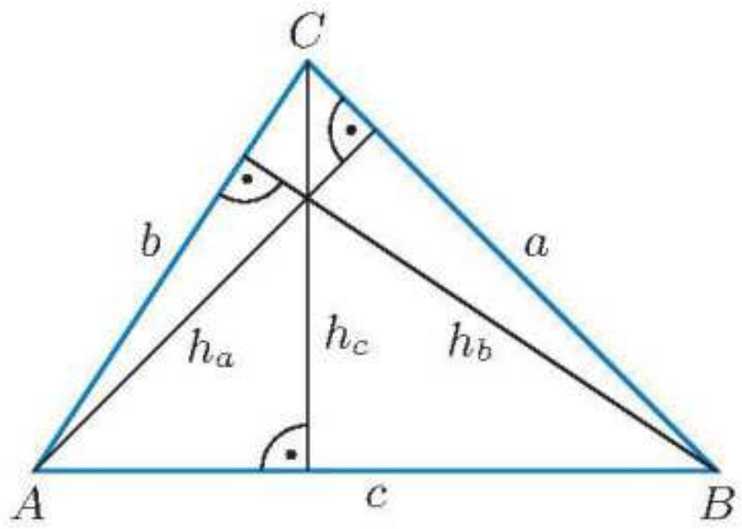
Udowodnij, że wysokości trójkąta są odwrotnie proporcjonalne do długości boków, na które je opuszczono.

Rozpatrzmy trójkąt o bokach a, b i c oraz wysokościach h_a, h_b i h_c (rysunek obok). Wówczas pole trójkąta ABC:

$$P = \tfrac{1}{2}ah_a = \tfrac{1}{2}bh_b$$

Stąd $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$.

Analogicznie $\frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a}$ oraz $\frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b}$.



Ćwiczenie 4

Udowodnij, że jeśli wysokości jednego trójkąta są proporcjonalne do wysokości drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Ćwiczenie 5

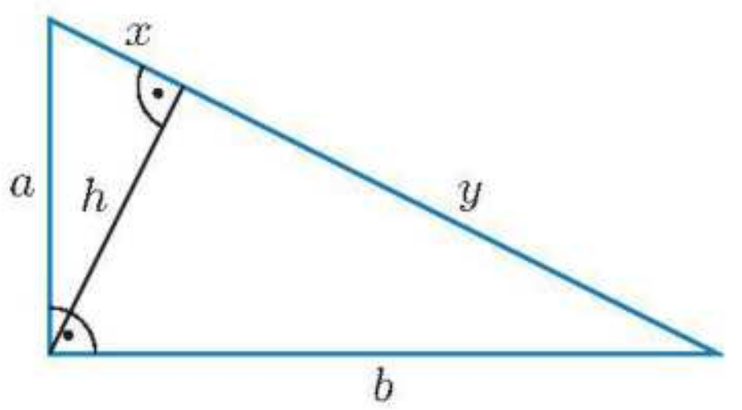
Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a, b i przeciwprostokątnej długości $x + y$, gdzie x i y są długościami odcinków, na które wysokość h podzieliła przeciwprostokątną. Udowodnij, że:

a) $h = \frac{ab}{x+y}$,

b) $h = \sqrt{xy}$,

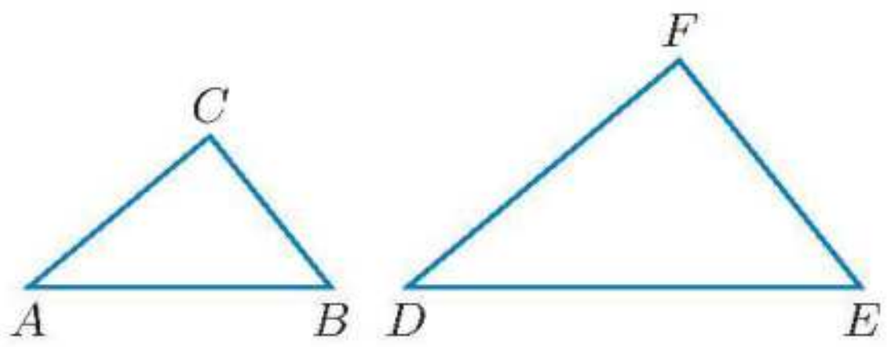
c) $a = \sqrt{x(x+y)}$,

d) $b = \sqrt{y(x+y)}$.

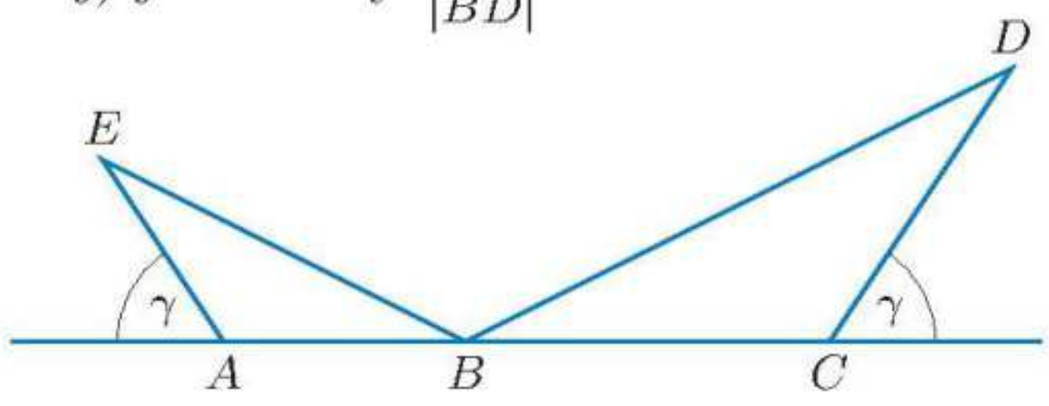


Zadania

1. Boki trójkąta ABC są równoległe do odpowiednich boków trójkąta DEF (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty te są podobne.



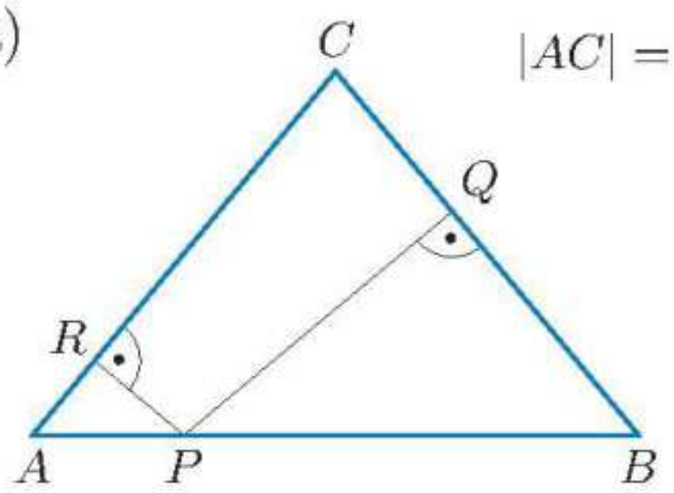
2. Wykaż, że jeśli $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CB|}$, to stosunek obwodów trójkątów ABE i CBD (rysunek poniżej) jest równy $\frac{|BE|}{|BD|}$.



3. Wewnątrz trójkąta ABC obrano punkt P tak, że $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CBP$. Wykaż, że $\triangle APL \sim \triangle BPK$ oraz $\triangle APB \sim \triangle KLP$, gdzie punkty K i L są punktami przecięcia prostych AP i BP odpowiednio z bokami BC i AC.

4. Korzystając z podanych informacji, wykaż, że $x = y$.

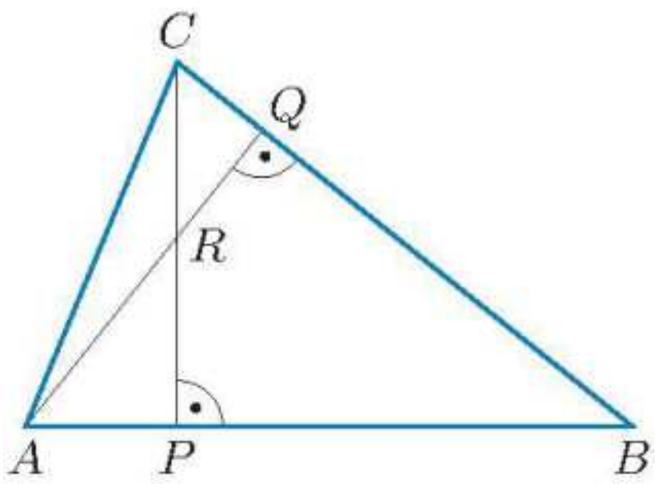
a)



$|AC| = |BC|$

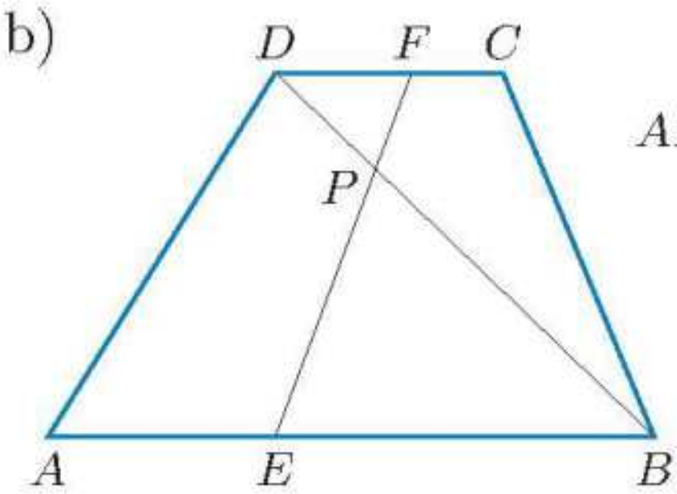
$x = |AR| \cdot |PQ|,\ y = |PR| \cdot |BQ|$

c)



$x = |AR| \cdot |QR|,\ y = |PR| \cdot |CR|$

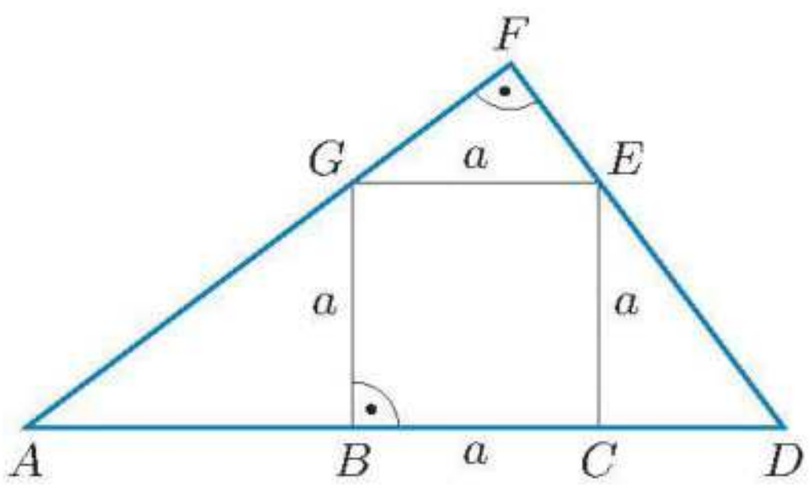
b)



$AB \parallel DC$

$x = |FD| \cdot |PB|,\ y = |EB| \cdot |PD|$

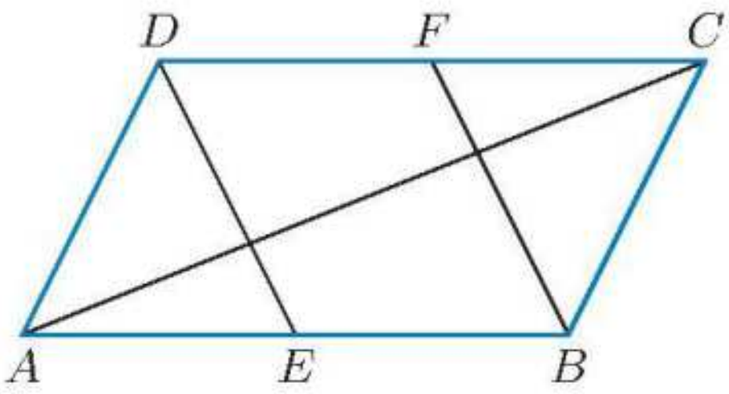
d)



$x = a^2,\ y = |AB| \cdot |CD|$

5. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC oraz $\sphericalangle ACM = \sphericalangle ABC$. Wykaż, że $|AB| = \sqrt{2} \cdot |AC|$.

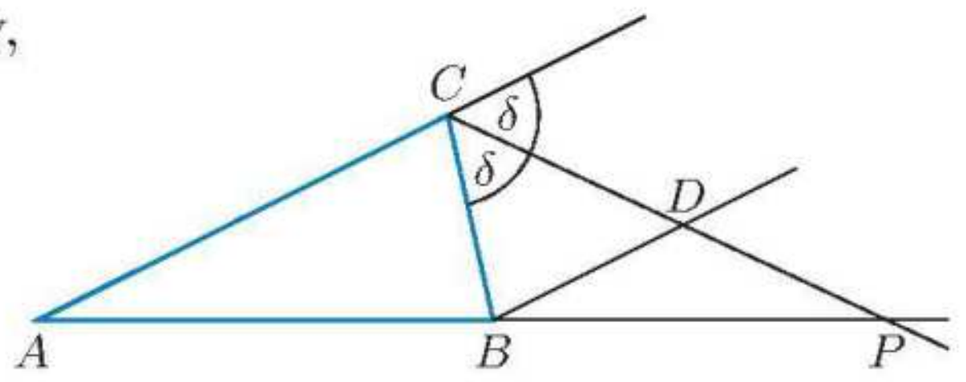
6. Punkty E i F są środkami boków AB i DC równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że odcinki DE i FB dzielą przekątną AC na trzy odcinki równej długości.



7. Dany jest trójkąt ABC. Punkt P jest punktem przecięcia prostej będącej przedłużeniem boku AB i dwusiecznej kąta zewnętrznego trójkąta (rysunek poniżej). Odcinek BD jest równoległy do odcinka AC. Wykaż, że:

a) trójkąt BCD jest równoramienny,

b) $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|BP|}$.



Warto wiedzieć

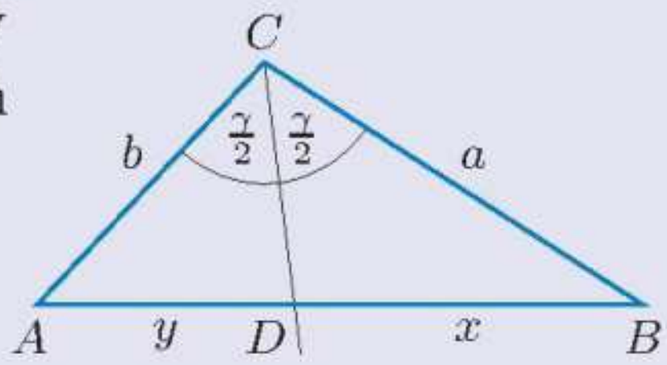
Różne dowody twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie

Poniższe twierdzenie zostało przedstawione w klasie pierwszej.

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

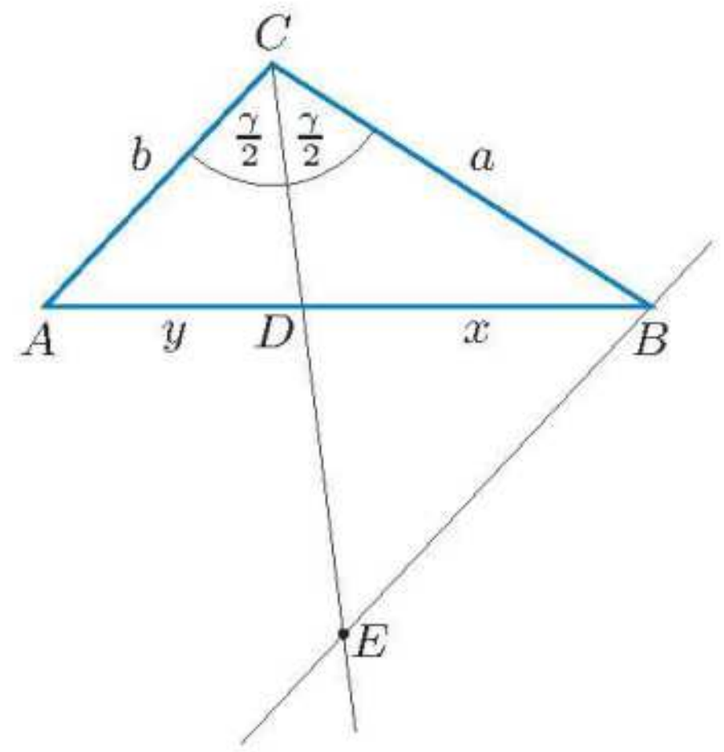
Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Dowód 1

Prowadzimy prostą równoległą do boku AC trójkąta ABC i przechodzącą przez wierzchołek B aż do przecięcia z dwusieczną CD kąta ACB. Punkt przecięcia oznaczamy przez E.



Kąty ACE i CEB są naprzemianległe, zatem $\sphericalangle CEB = \frac{\gamma}{2}$.

$\sphericalangle CEB = \sphericalangle ECB$, więc trójkąt BCE jest równoramienny, zatem $|EB| = |BC| = a$.

Na podstawie cechy KKK trójkąty ADC i BDE są podobne, zatem:

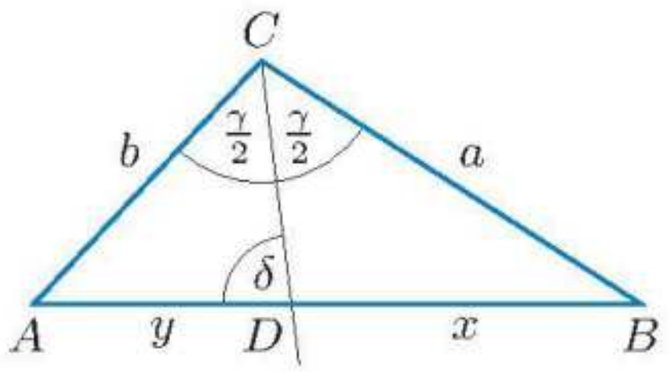
$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BE|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

Dowód 2

Niech $\delta = \sphericalangle ADC$.

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ADC otrzymujemy:

$$\frac{y}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\sin\delta}$$



Z twierdzenia sinusów dla trójkąta BDC otrzymujemy:

$$\frac{x}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{\sin(180^\circ - \delta)}$$

Zauważmy, że $\sin(180^\circ - \delta) = \sin\delta$, zatem:

$$\frac{y}{b} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\delta} = \frac{x}{a}$$

skąd otrzymujemy:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

5 Powtórzenie



R

5.1. Liczby, zbiory i wartość bezwzględna

Zbiór **liczb rzeczywistych** oznaczamy literą **R**.

Liczby naturalne to liczby: $0, 1, 2, 3, \ldots$ Zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą **N**.

Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: $1, 2, 3, 4, \ldots$, liczby do nich przeciwne: $-1, -2, -3, -4, \ldots$ oraz liczba 0. Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą **Z**.

Liczby wymierne to liczby, które można zapisać w postaci $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbf{Z}$ oraz $n \neq 0$. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą **Q**.

Liczby niewymierne to liczby rzeczywiste, które nie są wymierne. Zbiór liczb niewymiernych oznaczamy jako $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Potęga o wykładniku całkowitym

$a^0 = 1$ dla $a \neq 0$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ dla $a \neq 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dla $a \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$

Potęga o wykładniku wymiernym

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ dla $a \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$

$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ dla $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $m \in \mathbf{Z}$

Działania na potęgach

Dla dowolnych liczb $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbf{R}$:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

Działania na pierwiastkach

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ dla $a, b \geqslant 0$

$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ dla $a, b \in \mathbf{R}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ dla $a \geqslant 0$, $b > 0$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ dla $a \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$

Wzory skróconego mnożenia

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

R

Zestaw I – wprowadzający

1. Przedstaw liczbę w postaci a^m, gdzie $m \in \mathbf{Z}$.

a) $0{,}125^3 \cdot 32^{-2}$

b) $\left(\frac{1}{27}\right)^5 : 81^{3{,}25}$

c) $0{,}4^7 \cdot 2{,}5^{-4} : \left(\frac{2}{5}\right)^5$

d) $0{,}64^5 : \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$

e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} : \sqrt{8}$

f) $9^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{27^2}$

2. Oblicz. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

a) $\dfrac{5^6 + 20 \cdot 5^4}{2 \cdot 5^6 - 100 \cdot 5^3}$

b) $\dfrac{6 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4^3}{2 \cdot 8^2 - 5 \cdot 2^6}$

c) $\dfrac{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} + 3{,}5}{4^{-1} \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{17}{19}\right)^0\right]}$

d) $\dfrac{1{,}75 + 0{,}5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{3\frac{1}{12} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2}$

e) $\dfrac{2{,}2 \cdot \frac{10}{11} + 0{,}6 \cdot (0{,}9)^{-1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(2\frac{1}{4} - 1{,}75\right)}$

f) $\dfrac{\left(3\frac{1}{3}\right)^{-7} \cdot (0{,}3)^{-5}}{2^{-2} \cdot \left(1^0 + 2^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3\right)}$

3. Oblicz. Wynik przedstaw w notacji wykładniczej.

a) $(6 \cdot 10^8) \cdot (5{,}5 \cdot 10^7)$

b) $(4 \cdot 10^5) : (8 \cdot 10^{-6})$

c) $0{,}000\,012\,5 \cdot 0{,}000\,04$

d) $0{,}000\,002\,7 : 0{,}000\,09$

e) $(0{,}81 \cdot 0{,}0004)^{0{,}5}$

f) $(245 : 0{,}0005)^{0{,}5}$

4. Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa.

a) $\sqrt{27} + 3\sqrt{48} - 3\sqrt{75} = 0$

b) $\sqrt{48} + \sqrt{12} = \sqrt{50}$

c) $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{-81} = 0$

d) $(7\sqrt{12} - \sqrt{48}) \cdot \sqrt{75} = 150$

e) $(\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{54}) : \sqrt{12} = 0$

f) $\sqrt[3]{-8\frac{1}{6}} : \sqrt[3]{-5\frac{1}{7}} = 1\frac{1}{6}$

5. Oblicz.

a) $(3\sqrt{2} - 4)(3\sqrt{2} + 4)$

b) $(3 + 2\sqrt{5})(3 - 2\sqrt{5})$

c) $(2 + \sqrt{3})^2(7 - 4\sqrt{3})$

d) $(1 - 2\sqrt{2})^2(9 + 4\sqrt{2})$

e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

f) $(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

6. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5} - 2}$

b) $\dfrac{\sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}}$

c) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

d) $\dfrac{5 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$

7. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = 2 - \sqrt{5}$ i $y = 1 + 3\sqrt{5}$. Wynik zapisz w postaci $a + b\sqrt{5}$, gdzie $a, b \in \mathbf{Q}$.

a) $3x + y$

b) $x \cdot y$

c) $y : x$

d) $\dfrac{2y - x}{2x + y}$

8. Sprawdź, czy poniższa równość jest prawdziwa.

a) $3 - \sqrt{3} = \sqrt{12 - 3\sqrt{12}}$

b) $\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

9. Oblicz.

a) $\left|2\sqrt{2}+1\right|-2\left|\sqrt{2}-2\right|$

b) $\left|\sqrt{11}-2\sqrt{3}\right|\cdot(\sqrt{11}+2\sqrt{3})$

c) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

d) $\sqrt{(8-3\sqrt{7})^2}$

$$|a|=\begin{cases} a & \text{dla } a\geqslant 0 \\ -a & \text{dla } a<0 \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2}=|a| \text{ dla } a\in\mathbf{R}$$

- Jeśli $a>0$, to $|x|=a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=-a$ lub $x=a$.
- Jeśli $a>0$, to $|x|<a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(-a;a)$.
- Jeśli $a>0$, to $|x|>a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$.

10. Rozwiąż równanie.

a) $|x+3|=0$ b) $|x+1|=3$ c) $2|2-x|=4$ d) $3|1-x|=9$

11. Rozwiąż równanie.

a) $\left|x+2\sqrt{3}-|3-2\sqrt{3}|\right|=1$

b) $\left|\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+2-x\right|=0$

12. Rozwiąż nierówność.

a) $|x-5|\leqslant 4$

b) $|x+4|<5$

c) $|x-3|\geqslant 2$

d) $|x+2|>3$

e) $|6-x|<4$

f) $|2-x|>3$

13. Oblicz, jaki procent liczby x stanowi liczba y.

a) $x=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{12}\right):\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{16}\right)$, $y=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$

b) $x=3^{-1}\cdot 5^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{81^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[3]{25}}$, $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{4}}{3}\right)^2$

14. Wiadomo, że 21% dodatniej liczby a jest równe 12% liczby b. Która z tych liczb jest większa i o ile procent?

15. Podaj rozwinięcie dziesiętne ułamka zwykłego. Zaokrąglij je do trzeciego miejsca po przecinku. Czy jest to przybliżenie z nadmiarem, czy z niedomiarem?

a) $\frac{85}{6}$ b) $\frac{85}{8}$ c) $\frac{62}{33}$ d) $\frac{11}{111}$

16. Liczba 17,7828 jest przybliżeniem liczby $10^{1,25}$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Wiedząc o tym, wyznacz przybliżenie liczby:

a) $10^{0,25}$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku,

b) $10^{\frac{13}{4}}$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku,

c) $10^{-\frac{7}{4}}$ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku.

Zestaw II – ćwiczeniowy

17. Sprawdź, czy podana liczba jest niewymierna.

a) $\left[(3+5^{0,5})^{0,5}-(3-5^{0,5})^{0,5}\right]^2$

b) $\left[\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^{\frac{2}{3}}+25^{-0,25}\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^{\frac{2}{3}}-25^{-0,25}\right]$

c) $\left[(\sqrt{7}+\sqrt{3})^{\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{3})^{\sqrt{2}}\right]^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

18. Oblicz wartość wyrażenia dla $a=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ i $b=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

a) $a\cdot b$

b) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

c) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$

d) $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$

e) $(a-b)^2$

f) $(a+b)^2$

g) $\frac{1}{a^2}+b^2$

h) $\frac{1}{a^2}-b^2$

19. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) $(x+\sqrt{3})^3+2x(x+3)(x-3)+(x-\sqrt{3})^3$

b) $(x-\sqrt{3})(x^2+\sqrt{3}x+3)+(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3)$

20. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x=\sqrt{2}-1$ i $y=1-2\sqrt{2}$.

a) $(\sqrt{6}x-y)(\sqrt{6}x+y)-(3x+y)^2+3x(2y+x)$

b) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)-(x+2y)^3+6xy(x+2y)$

21. Oblicz a^4+b^4, wiedząc, że:

a) $ab=1$ oraz $a^2+b^2=3$,

b) $a^2+b^2=9$ oraz $a+b=1$.

D **22.** Wykaż, że $\sqrt{21-12\sqrt{3}}$ jest liczbą odwrotną do $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

D **23.** Wykaż, że liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ jest liczbą przeciwną do $1-\sqrt{2}$.

D **24.** Wykaż, że nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x.

a) $(2x+1)^2\geqslant 8x$

b) $x(x+12)\geqslant 9(2x-1)$

c) $\frac{4}{x^2+1}\geqslant 3-x^2$

25. Rozwiąż równanie.

a) $|5x+10|=20$

b) $|7-14x|=7$

c) $|3x+6|+|7x+14|=10$

d) $|4x-12|=5-|3-x|$

e) $\sqrt{9x^2-6x+1}+|9x-3|=12$

f) $\sqrt{25-10x+x^2}=8-3|x-5|$

$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$, $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ dla $b\neq 0$

26. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb, które spełniają podany warunek.

a) $1\leqslant|x|<4$

b) $2<|x-1|\leqslant 7$

c) $0\leqslant|x+3|<8$

27. Rozwiąż nierówność.

a) $|2x+4| \leqslant 6$

b) $|2x+3| > 1$

c) $|5-10x| \geqslant 4+2\left|x-\frac{1}{2}\right|$

d) $|5x+25|-|3x+15| > 7+|x+5|$

28. Rozwiąż równanie.

a) $|x|+|x+2|=8$

b) $|x-3|+|1-x|=2$

c) $|2x-1|=x+|x+4|$

d) $|3+2x|=12-3|x-3|$

29. Rozwiąż nierówność.

a) $|x-7| \geqslant |x+3|$

b) $|x+5| < |x+1|$

c) $|x|+|x-2| \geqslant 4$

d) $|x-1|+|x+1| < 3$

30. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają równanie:

$$\left|\frac{xy}{y^2-x^2}\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\right|=2$$

31. Towary A i B miały jednakową cenę. Oblicz, który z nich jest obecnie tańszy, jeżeli:

a) cenę towaru A obniżano dwukrotnie, za każdym razem o 20%, a cenę towaru B obniżono jednokrotnie o 40%,

b) cenę towaru A zwiększano dwukrotnie, za każdym razem o 20%, a cenę towaru B zwiększono jednokrotnie o 40%,

c) cenę towaru A obniżono o 20%, a następnie zwiększono o 20%, natomiast cena towaru B nie uległa zmianie.

32. Na cenę brutto pewnego towaru wynoszącą 176,55 zł składa się cena netto oraz 7% podatku VAT od ceny netto. Oblicz, jaka będzie cena brutto tego towaru po podwyższeniu podatku do 22% przy niezmienionej cenie netto.

33. Pewną kwotę wpłacono do banku na lokatę roczną oprocentowaną 3,5% w skali roku. Od odsetek dopisanych po roku bank odprowadził podatek w wysokości 14 zł. Jaką kwotę umieszczono na lokacie, jeżeli wiadomo, że podatek od odsetek wynosił 20%?

34. a) Oprocentowanie lokat w pewnym banku, równe początkowo 5% w skali roku, wzrosło o 1,2 punktu procentowego. O ile procent wzrosło to oprocentowanie?

b) Oprocentowanie lokat w pewnym banku, równe początkowo 5% w skali roku, zmniejszyło się o 20%. O ile punktów procentowych zmniejszyło się to oprocentowanie?

R

Zestaw III – podsumowujący

35. Rozwiąż układ nierówności. Rozwiązanie zaznacz na osi liczbowej.

a) $\begin{cases} |x| \leqslant 4 \\ |x+2| > 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x-3| \leqslant 6 \\ |x-2| > 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} |x+1| > 4 \\ |x-1| \geqslant 7 \end{cases}$

36. Rozwiąż równanie.

a) $||x|-4| = 3$ b) $|1-|x|| = 6$ c) $||2x-4|-3| = 7$

37. Rozwiąż nierówność.

a) $|4|x|-2| \leqslant 6$ b) $||x|-1| > 3$ c) $||1-2x|-1| < 4$

D **38.** Uzasadnij, że:

a) $\sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{6+4\sqrt{2}} = 4$, b) $\sqrt{7+2\sqrt{10}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}} = 2\sqrt{5}$.

D **39.** Uzasadnij, że liczba $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ jest wymierna.

Dla $n \geqslant 2$ różnica n-tych potęg dowolnych liczb rzeczywistych a i b wyraża się wzorem:

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \ldots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$

D **40.** Udowodnij powyższy wzór dla: a) $n = 4$, b) $n = 6$.

D **41.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb a i $b \in \mathbf{R}$ prawdziwa jest nierówność.

a) $a^2 + b^2 \geqslant 2(a-b-1)$ b) $a^2 + b^2 \geqslant 4(a+b-2)$ c) $a^2 + ab + b^2 \geqslant 0$

D **42.** Udowodnij, że jeżeli dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest równość $\frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1}$, to $\frac{(a+b)^2}{a^2} + \frac{(a+b)^2}{b^2} = 8$.

D **43.** Udowodnij, że jeżeli dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest równość $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} = \frac{2}{a+b}$, to $a = b$.

D **44.** Udowodnij, że suma dwóch kolejnych potęg liczby 2 o wykładnikach całkowitych dodatnich jest podzielna przez 6, a suma trzech kolejnych potęg jest podzielna przez 14.

D **45.** a) Udowodnij, że suma kwadratów dwóch dowolnych liczb nieparzystych jest liczbą parzystą.

b) Udowodnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą.

D 46. a) Udowodnij, że kwadrat sumy trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 9.

b) Udowodnij, że jeśli suma dwóch liczb naturalnych jest liczbą parzystą, to ich różnica też jest liczbą parzystą.

D 47. a) Udowodnij, że sześciocyfrowa liczba, w której wszystkie cyfry są jednakowe, jest podzielna przez 3.

b) W pewnej liczbie naturalnej podzielnej przez 9 cyfra jedności jest równa a. Suma pozostałych cyfr jest podzielna przez 9. Udowodnij, że $a = 0$ lub $a = 9$.

D 48. a) Jeśli w liczbie dwucyfrowej x zmienimy kolejność cyfr, to otrzymamy liczbę y. Udowodnij, że suma liczb x i y jest podzielna przez 11.

b) Jeśli cyfry liczby trzycyfrowej x zapiszemy w odwrotnej kolejności, to otrzymamy liczbę y. Udowodnij, że różnica liczb x i y jest podzielna przez 99.

D 49. Udowodnij, że różnica czwartych potęg dowolnej liczby naturalnej i liczby o 2 od niej mniejszej jest podzielna przez 8.

D 50. Udowodnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych powiększona o 1 jest podzielna przez 12.

D 51. Udowodnij, że sześcian sumy trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 27.

D 52. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n podana liczba jest podzielna przez 6.

a) $2n(4n^2 - 1)$ b) $n(n^2 - 7)$ c) $n^9 - n$

D 53. Udowodnij, że $a + b = -2$, jeżeli:

$$a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}},$$

$$b = \frac{1}{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}.$$

D 54. a) Udowodnij, że prawdziwa jest równość:

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{49\cdot 50} = 0{,}48$$

b) Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+2)} < \frac{1}{4}$$

5.2. Funkcje

Funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi $x \in X$ odpowiada dokładnie jeden element $y \in Y$.

Wykresem funkcji $f : X \to Y$ nazywamy zbiór wszystkich takich punktów (x, y), że $x \in X$ oraz $y = f(x)$.

Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji, a jego elementy – **argumentami**.

Zbiór wartości funkcji $f\colon X \to Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$.

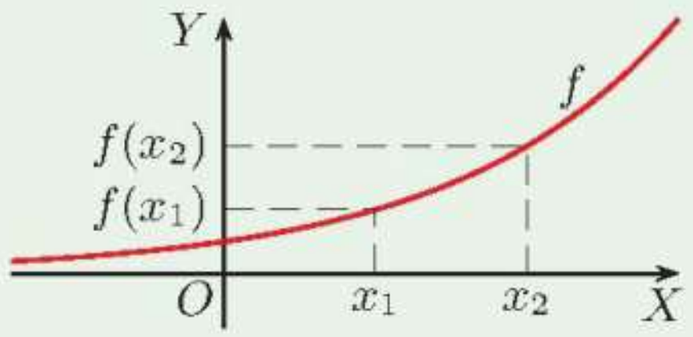
Miejscem zerowym funkcji f nazywamy taki argument x, dla którego:

$$f(x) = 0$$

Monotoniczność funkcji $f\colon X \to \mathbf{R}$, gdzie $X \subset \mathbf{R}$

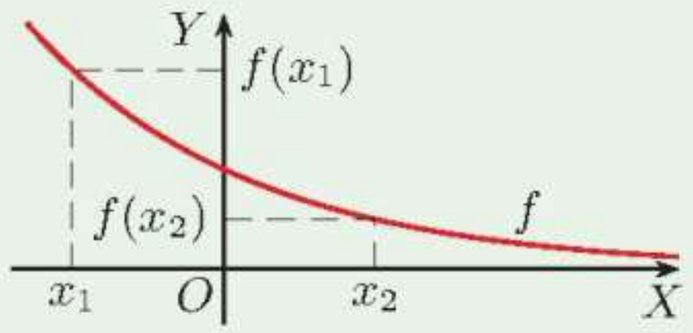
Funkcję $f\colon X \to \mathbf{R}$ nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$



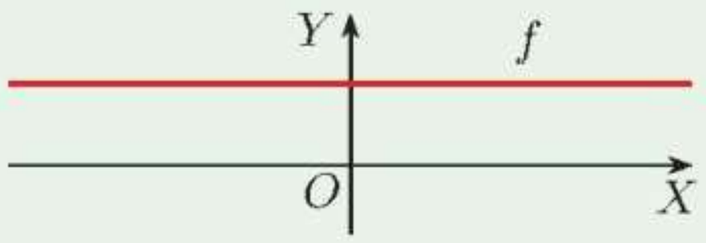
Funkcję $f\colon X \to \mathbf{R}$ nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$



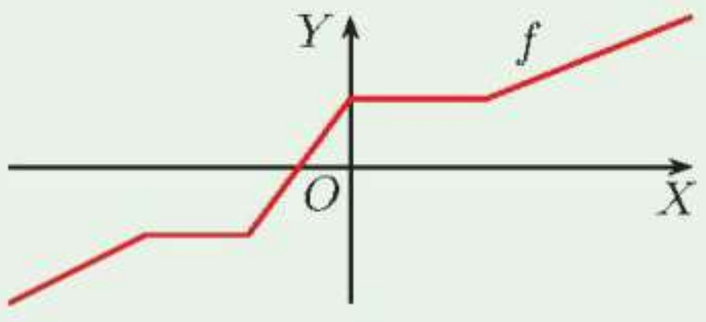
Funkcję $f\colon X \to \mathbf{R}$ nazywamy **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest równość:

$$f(x_1) = f(x_2)$$



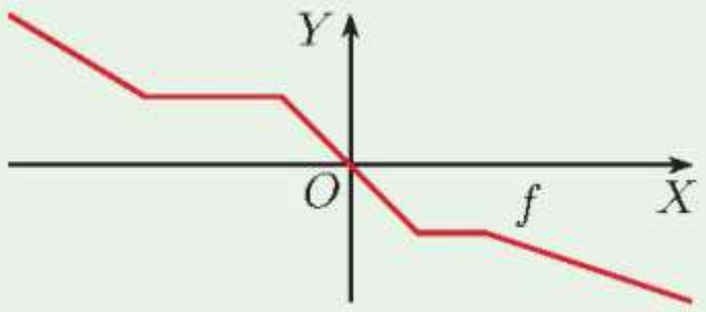
Funkcję $f\colon X \to \mathbf{R}$ nazywamy **niemalejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \leqslant f(x_2)$$



Funkcję $f\colon X \to \mathbf{R}$ nazywamy **nierosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \geqslant f(x_2)$$



Funkcję, która jest rosnąca, malejąca, nierosnąca, niemalejąca lub stała, nazywamy **funkcją monotoniczną**.

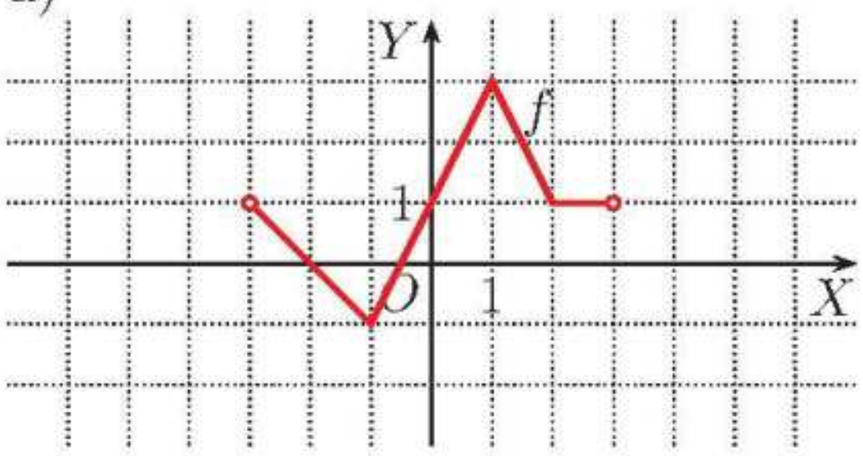
Przekształcenia wykresu funkcji

- Wykres funkcji $y = f(x-p)+q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.
- Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX.
- Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY.
- Wykres funkcji $y = |f(x)|$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie względem osi OX tej części wykresu funkcji f, która znajduje się pod osią OX, pozostałą część wykresu zostawiamy bez zmian.
- Wykres funkcji $y = f(|x|)$ otrzymujemy z wykresu funkcji f, korzystając z tego, że:
  – dla $x \geqslant 0$ (należących do dziedziny) zachodzi równość $f(|x|) = f(x)$,
  – wykres funkcji $y = f(|x|)$ jest symetryczny względem osi OY.

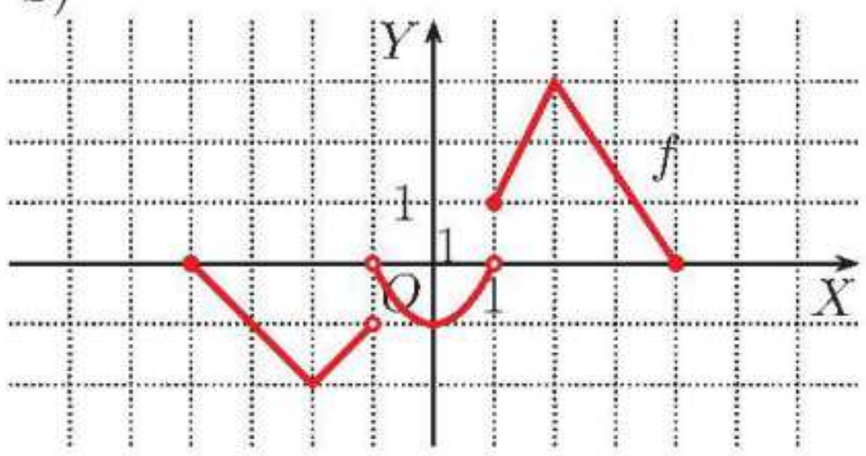
Zestaw I – wprowadzający

1. Odczytaj z wykresu funkcji f:
– jej dziedzinę, zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności,
– argumenty, dla których przyjmuje ona wartości nieujemne.

a)



b)



2. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f.

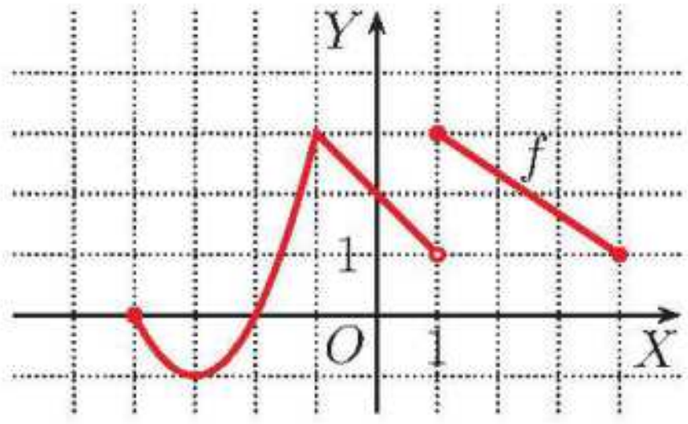
a) $f(x) = \frac{x^2+9}{x^2-9}$
b) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+9}$
c) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$
d) $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$
e) $f(x) = (x+5)^{\frac{1}{2}}$
f) $f(x) = \sqrt{6-4x}$

3. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-4}$
b) $f(x) = \sqrt{(x-2)(x-4)}$
c) $f(x) = (2x-6)^{\frac{1}{2}} - (2x-6)^{-\frac{1}{2}}$
d) $f(x) = (x^2-4)^{\frac{1}{2}} + (9-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

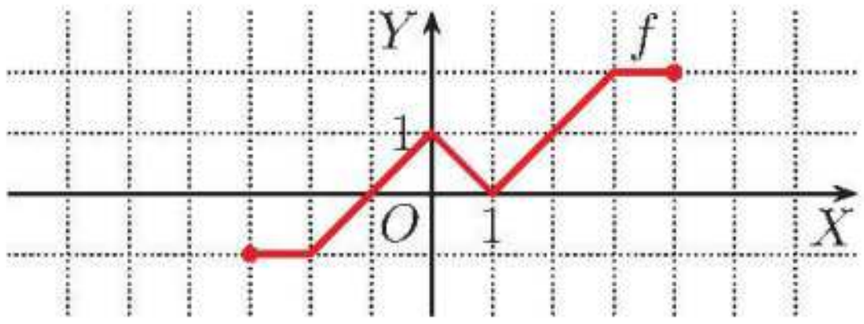
4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -4;4\rangle \to \mathbf{R}$. Odczytaj z wykresu wartość największą i wartość najmniejszą funkcji f w przedziale:

a) $\langle -3;0\rangle$, b) $\langle 1;4\rangle$, c) $\langle -4;4\rangle$.

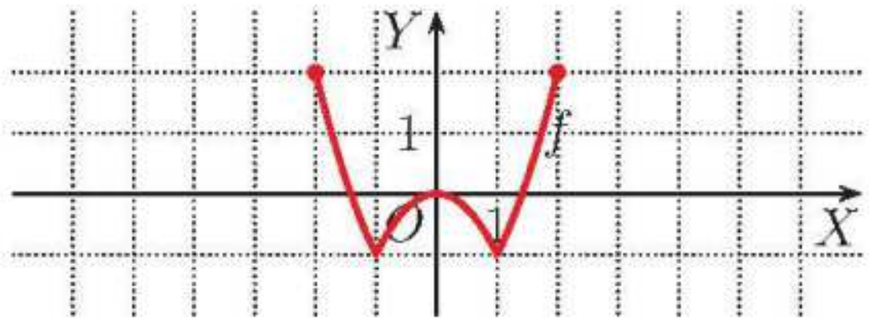


5. Dany jest wykres funkcji f. Naszkicuj wykresy, wyznacz dziedziny i zbiory wartości funkcji $f_1(x) = f(x+4)+1$ oraz $f_2(x) = f(x-4)-1$.

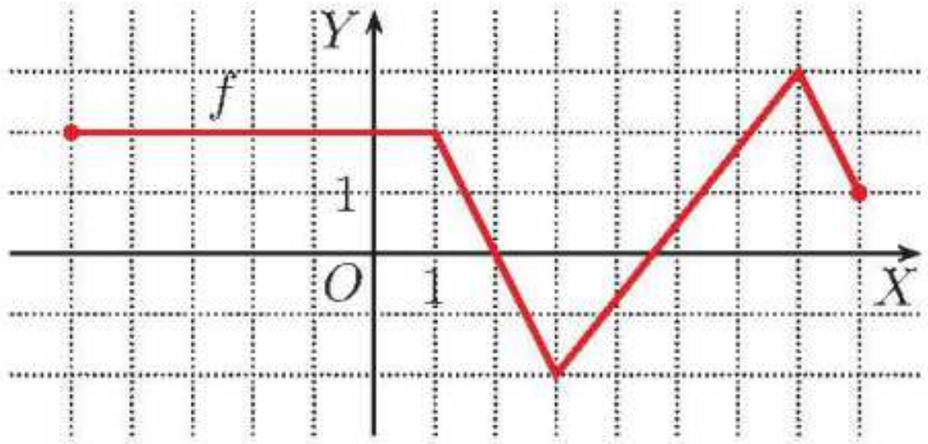
a) $f\colon \langle -3;4\rangle \to \mathbf{R}$



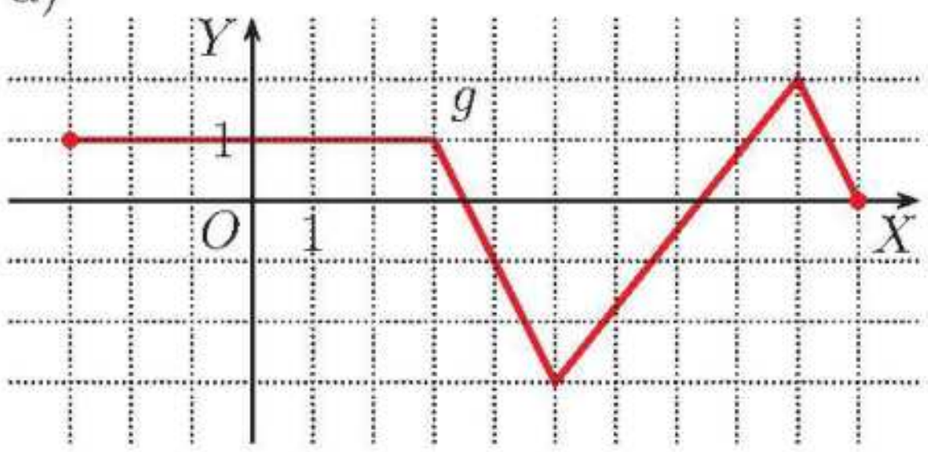
b) $f\colon \langle -2;2\rangle \to \mathbf{R}$



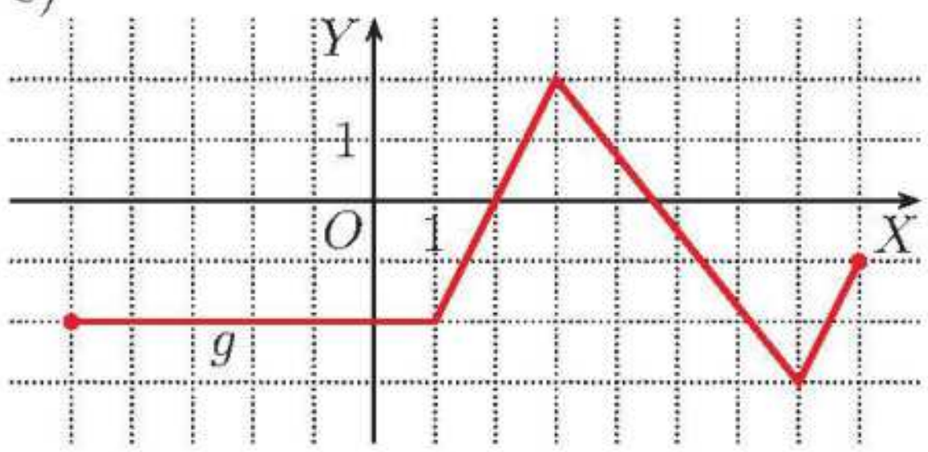
6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -5;8\rangle \to \mathbf{R}$. Jak należy go przekształcić, aby otrzymać wykres funkcji g? Zapisz to przekształcenie za pomocą wzoru.



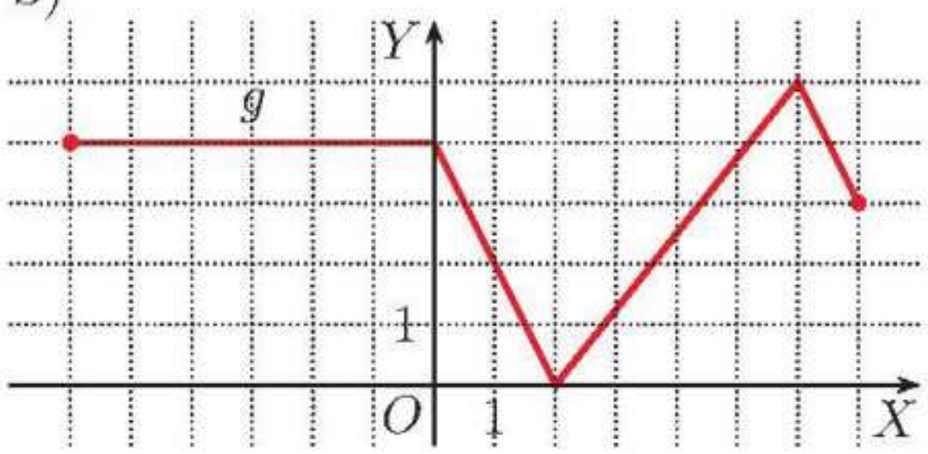
a)



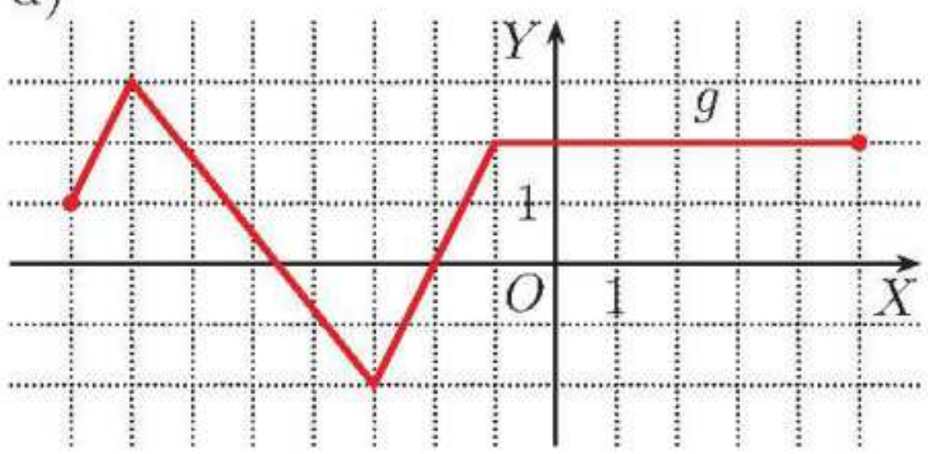
c)



b)



d)



7. Naszkicuj wykres funkcji g, przekształcając odpowiednio wykres funkcji $f(x) = 2|x|$.

a) $g(x) = 2|x+3|$ c) $g(x) = 2(|x+1|-1)$ e) $g(x) = |2x-6|+3$

b) $g(x) = 2|4-x|$ d) $g(x) = -2|x+2|+1$ f) $g(x) = -|2x+8|-1$

Zestaw II – ćwiczeniowy

8. Naszkicuj wykres funkcji $f\colon X \to \mathbf{R}$. Podaj jej zbiór wartości oraz wartości najmniejszą i największą. Czy f jest funkcją monotoniczną?

a) $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą parzystą} \\ 1, & \text{gdy } x \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$

b) $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, f każdemu argumentowi przyporządkowuje jego resztę z dzielenia przez 4.

9. Wyznacz dziedzinę, uprość wzór, a następnie naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x^2+x}{x}$ b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{4x^2-9}{1{,}5-x}$

10. Oblicz wartości funkcji f dla argumentów: $-1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2$.

a) $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty;1\rangle \cup (2;\infty) \\ x^2-1 & \text{dla } x \in (1;2\rangle \end{cases}$

11. Naszkicuj wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Z wykresu odczytaj miejsca zerowe funkcji f, jej przedziały monotoniczności oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant -3$.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{dla } x \in (-\infty;-1\rangle \\ -x+1 & \text{dla } x \in (-1;4\rangle \\ -3 & \text{dla } x \in (4;\infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty;-1\rangle \\ x^2-4 & \text{dla } x \in (-1;2\rangle \\ -x+4 & \text{dla } x \in (2;\infty) \end{cases}$

12. Zbiorem wartości funkcji $f\colon \langle -5;3\rangle \to \mathbf{R}$ jest przedział $\langle -3;1\rangle$, a miejscem zerowym – liczba 2. Wyznacz dziedzinę, zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji g.

a) $g(x) = -f(x)$ b) $g(x) = -f(-x)$ c) $g(x) = f(x+1) - 2$

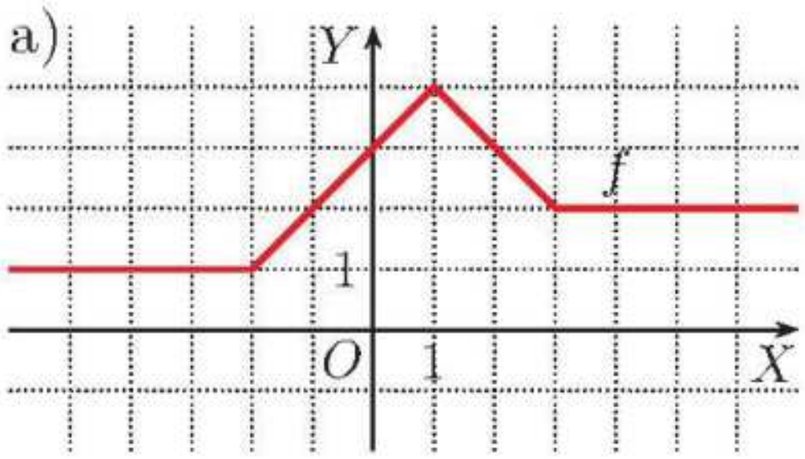
13. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. W tym samym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji f i g, a następnie odczytaj, dla jakich argumentów funkcje f i g przyjmują te same wartości, oraz podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant g(x)$.

a) $g(x) = 1$ b) $g(x) = x$ c) $g(x) = x^2$ d) $g(x) = 2 - x^2$

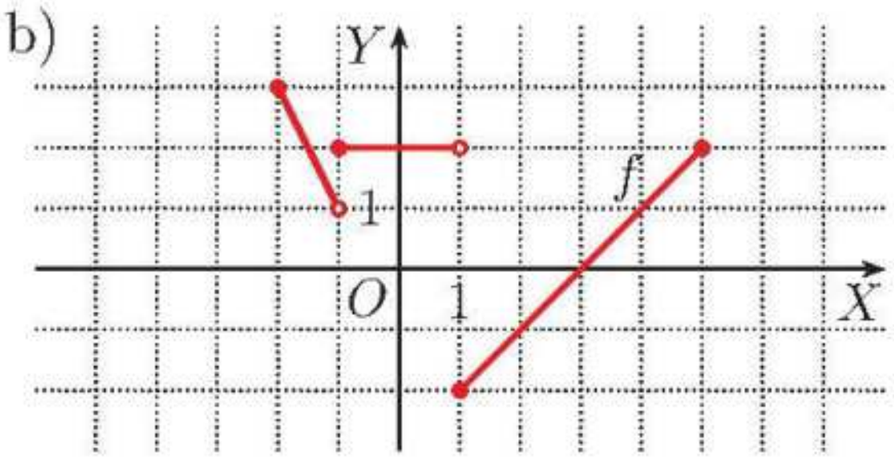
Zestaw III – podsumowujący

14. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz $h(x) = 3 - f(x)$ i na ich podstawie podaj rozwiązanie równania $f(-x) = 3 - f(x)$.

a)



b)

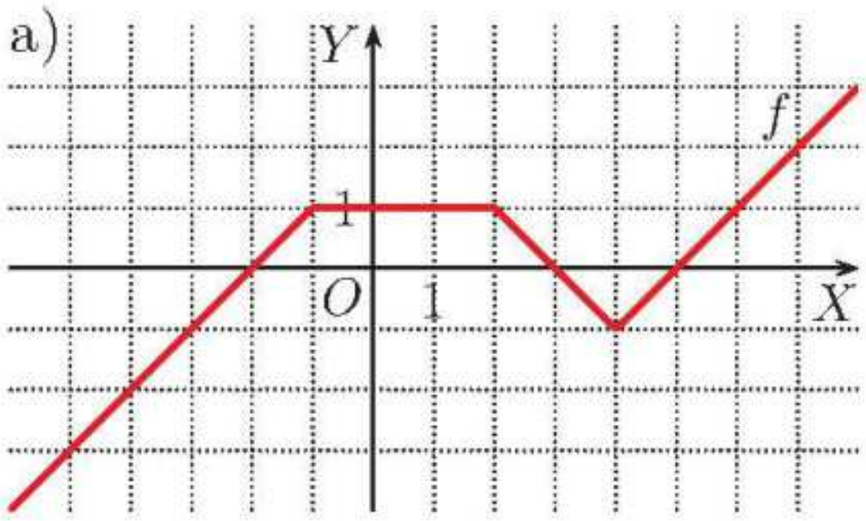


15. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj wzory funkcji $g(x) = f(x+1) - 4$, $h(x) = 1 - f(x-2)$, $k(x) = f(2-x) - 2$ i naszkicuj ich wykresy.

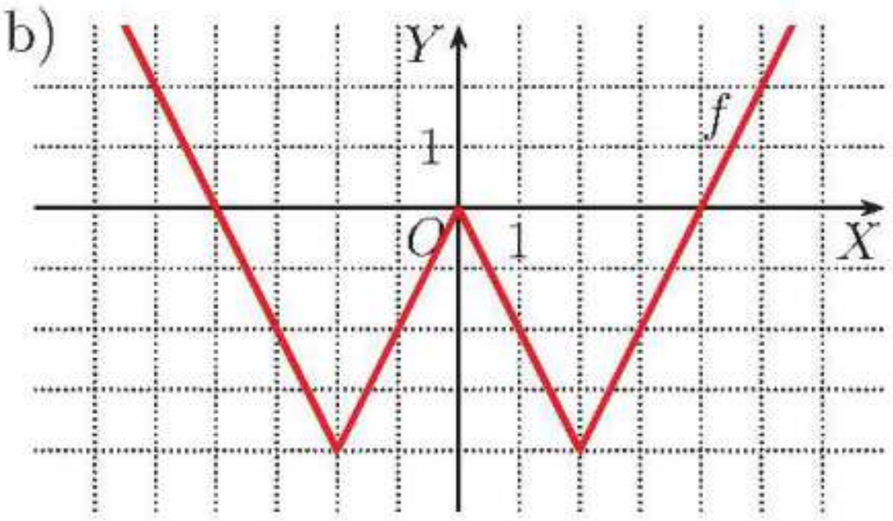
a) $f(x) = 2x - 2$ b) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = -|2x|$

16. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = |f(x)|$, $h(x) = |f(2-x) - 1|$ oraz $k(x) = |2 - f(x)|$.

a)



b)



17. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej przedziały monotoniczności.

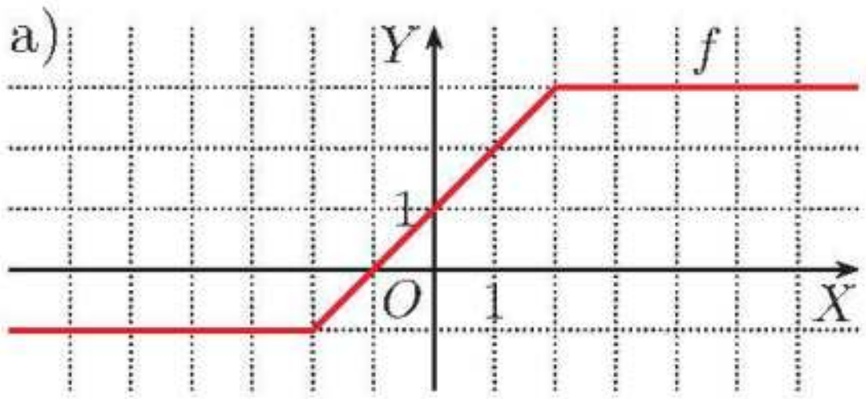
a) $f(x) = ||x| - 1| - 2$ b) $f(x) = ||x - 1| - 2|$

18. Naszkicuj wykres funkcji f i określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

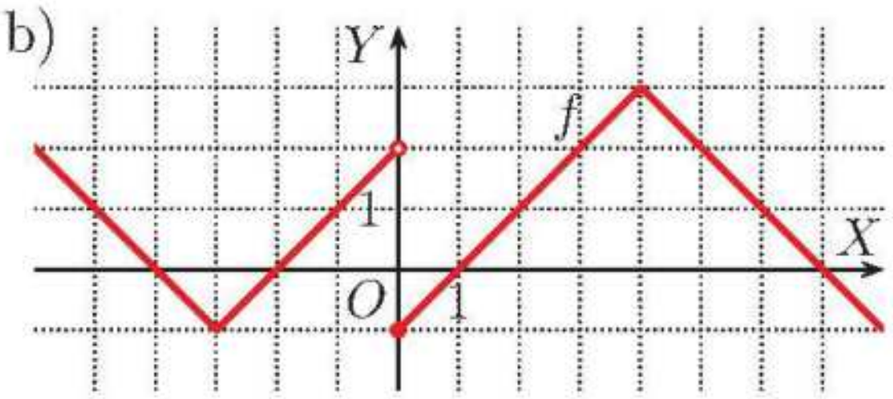
a) $f(x) = |x| + |x - 2|$ b) $f(x) = |x - 2| + |x + 2|$

19. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = f(|x|)$ i $h(x) = |f(|x|)|$. Określ liczbę rozwiązań równania $g(x) = m$ oraz równania $h(x) = m$ w zależności od parametru m.

a)



b)

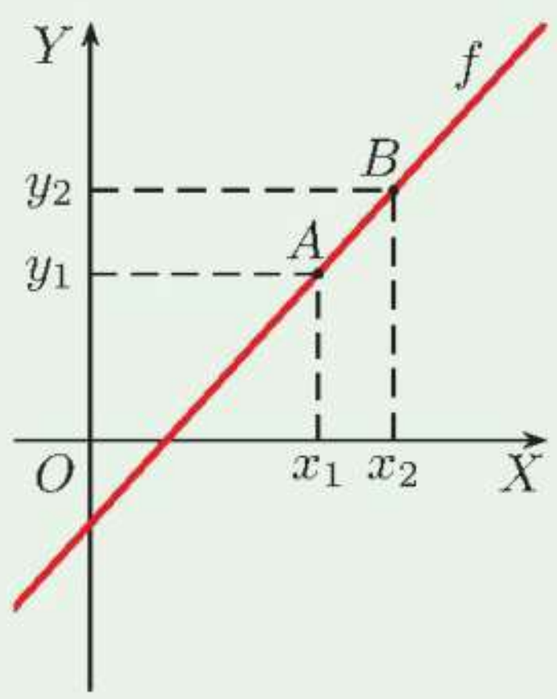


R

5.3. Funkcja liniowa i układy równań liniowych

Funkcją liniową nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a i b są stałymi.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej, a równanie $y = ax + b$ – **równaniem kierunkowym**.



Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$, przechodzącej przez dwa różne punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, jest równy:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = ax + b$ jest:

- **rosnąca** dla $a > 0$,
- **malejąca** dla $a < 0$,
- **stała** dla $a = 0$.

Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:

- **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$,
- **prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym** prostej.

Proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są:

- równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$,
- prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

R

Zestaw I – wprowadzający

1. Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych i naszkicuj ten wykres. Określ monotoniczność funkcji f.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ b) $f(x) = -2x + 2$ c) $f(x) = 4x - 2$

2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -2x + 4$ o dziedzinie $(-1; 1\rangle \cup \langle 2; 3)$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji i miejsca zerowe, jeśli je ma. Czy równanie $f(x) = 1$ ma rozwiązanie?

3. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do prostej k i przechodzi przez punkt P.

a) k: $y = 3x$, $P(-4, 2)$ b) k: $\sqrt{2}x - y - 1 = 0$, $P(\sqrt{2}, -2)$

4. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do prostej k i przechodzi przez punkt P.

a) k: $y = 2x$, $P(2, -1)$

b) k: $y = -4x + 1$, $P(8, 4)$

c) k: $x - 3y - 3 = 0$, $P(1, -1)$

d) k: $\sqrt{5}\,x - y + 3 = 0$, $P(\sqrt{5}, -3)$

5. Wyznacz wzór funkcji liniowej f, która spełnia podane warunki.

a) $f(2) = 0$ i $f(0) = 4$

b) $f(\frac{5}{2}) = \frac{1}{4}$ i $f(2) = -1$

6. Rozwiąż równanie (wynik zapisz w najprostszej postaci).

a) $\sqrt{2}\,x - 2 = \sqrt{2} - 1$

b) $\sqrt{3}\,t - 2 = t - \sqrt{3}$

c) $\sqrt{15}\,x - \sqrt{5} = \sqrt{5}\,x + \sqrt{20}$

d) $\sqrt{6}\,z - \sqrt{3} = \sqrt{12} - \sqrt{3}\,z$

7. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x+5}{5} > \frac{4x-1}{2}$

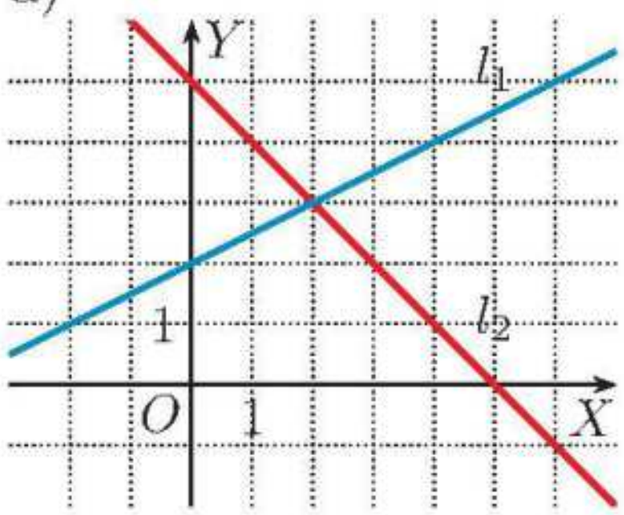
b) $\sqrt{3}(x - 1) \geqslant \sqrt{12}\,x$

c) $10(3x - 6) - 5(x - 2) \leqslant 2(4x - 8)$

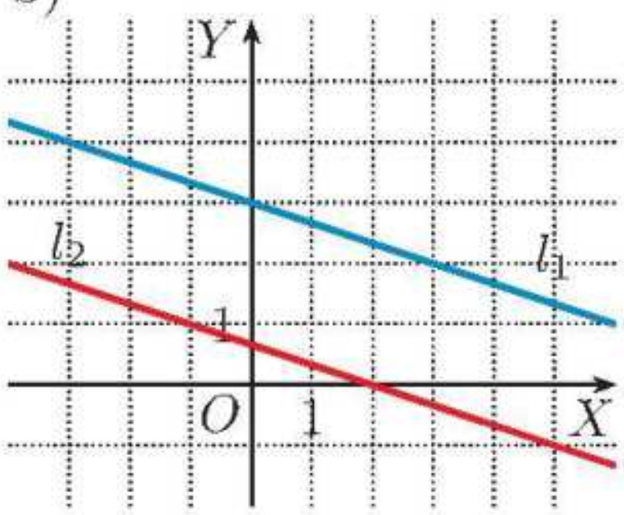
d) $(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) < 4 - (\sqrt{3} - x)^2$

8. Zapisz układ równań liniowych, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku. Jeśli układ ma rozwiązanie, to je podaj.

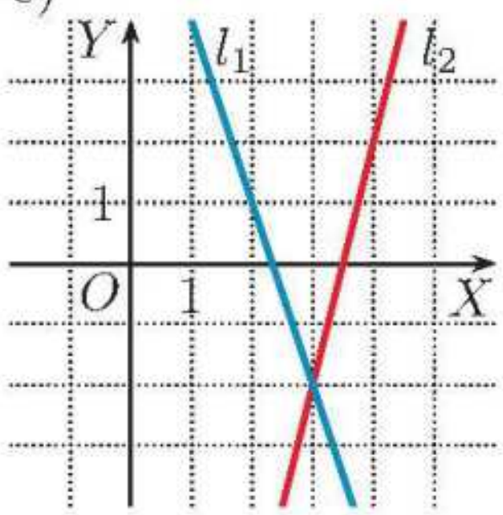
a)



b)



c)



9. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -4x + 2y = 10 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x - 2y = -2 \\ 3y - 9x = 6 \end{cases}$

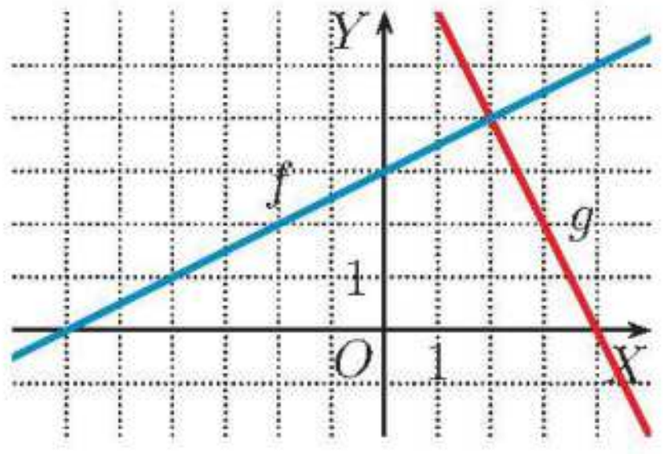
e) $\begin{cases} -0{,}1x + 0{,}2y = 1 \\ 2y = x + 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 0{,}5y = 1 \\ 0{,}5x + 0{,}25y = 0{,}5 \end{cases}$

10. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji liniowych f i g. Odczytaj, dla jakich argumentów:

a) wartości funkcji f i g mają różne znaki,

b) spełniona jest nierówność $f(x) \leqslant g(x)$.



Zestaw II – ćwiczeniowy

11. Wyznacz wzór funkcji liniowej f, która dla każdej liczby rzeczywistej x spełnia warunek:

a) $f(-2x+1) = 4x - 3$, b) $f(3x+2) = 9x + 1$.

12. Sprawdź, czy punkty A, B i C należą do wykresu tej samej funkcji liniowej.

a) $A(0,2)$, $B(5,-\frac{1}{2})$, $C(-2,3)$ b) $A(\frac{1}{3},2)$, $B(-1,1)$, $C(2,3)$

13. Punkty A, B i C należą do wykresu tej samej funkcji liniowej. Oblicz współrzędną a.

a) $A(0,-2)$, $B(-2,2)$, $C(0,a)$ c) $A(\frac{1}{2},7)$, $B(-6,7)$, $C(\sqrt{3},a)$

b) $A(1,3)$, $B(5,5)$, $C(a,0)$ d) $A(3,2)$, $B(a,6)$, $C(-1,\frac{14}{3})$

14. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest stała?

a) $f(x) = (m+2)x + 7$ b) $f(x) = (2 - |m+3|)x + 4$

15. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest malejąca?

a) $f(x) = (m^2 - 4)x + 7$ c) $f(x) = (m^2 - 5m + 6)x + 14$

b) $f(x) = (6 - |m|)x - 3$ d) $f(x) = (4 - |m+4|)x + 4$

16. Dane są punkty $A(5,-3)$, $B(4,2)$ i $C(3,2m-1)$. Wyznacz wartości parametru m, dla których:

a) proste AB i AC są prostopadłe,

b) prosta AC jest równoległa do prostej $3x - 6y + 1 = 0$.

17. Dla jakich wartości parametru m proste p_1 i p_2 są prostopadłe?

a) $p_1\colon y = (1-m)x - 4$, $p_2\colon y = -2x + 7$

b) $p_1\colon y = mx + 5$, $p_2\colon y = (m-2)x - 3$

c) $p_1\colon y = (|m| - 1)x - 1$, $p_2\colon y = \frac{1}{m-1}x + 1$

18. Oblicz miarę kąta, który dana prosta tworzy z osią OX.

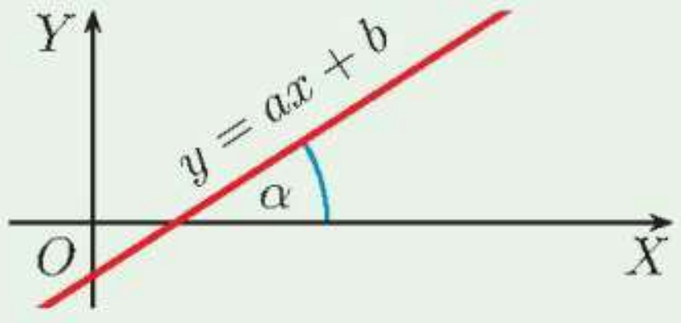
a) $\sqrt{3}x - \sqrt{3}y = 6$

b) $3x - \sqrt{3}y = 1$

c) $2x + 2y = 3$

d) $\sqrt{2}x + \sqrt{6}y = 2$

Jeśli α jest kątem, który prosta $y = ax+b$ tworzy z osią OX, to $a = \operatorname{tg}\alpha$.



19. Oblicz z dokładnością do 1° miarę kąta, który prosta przechodząca przez punkty A i B tworzy z osią OX.

a) $A(-6,-1)$, $B(2,3)$ b) $A(-4,1)$, $B(2,-8)$

20. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i tworzącej z osią OX kąt α.

a) $P(-9,-2\sqrt{3})$, $\alpha = 30^\circ$ b) $P(2\sqrt{3},-2)$, $\alpha = 150^\circ$

21. Określ liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru a.

a) $x + a = 2x - 3a$

b) $(3-a)x = 4 + x$

c) $ax - 1 = a - x$

d) $4ax + a = 2a - ax$

e) $a^2x + 1 = a^2 + ax$

f) $a(ax - a - 1) = x - 2$

22. Dla jakich wartości parametru a rozwiązaniem równania jest liczba dodatnia?

a) $2(x+1) = 3 + ax$ b) $(a+1)x = 2x - a$

23. Koszt (w złotych) wypożyczenia samochodu na jeden dzień opisuje funkcja $f(x) = 40 + 0{,}2x$, gdzie 40 zł jest opłatą stałą, 0,2 zł – opłatą za każdy przejechany kilometr, a x – liczbą przejechanych kilometrów. Oblicz koszt wypożyczenia samochodu, zakładając, że przejechał on 500 km.

24. Koszt wypożyczenia samochodu na 3 dni składa się z opłaty stałej 100 zł oraz opłaty 0,2 zł za każdy przejechany kilometr. Podaj wzór funkcji opisującej koszt wypożyczenia samochodu w zależności od liczby przejechanych kilometrów. Naszkicuj wykres tej funkcji. Ile maksymalnie kilometrów można przejechać, aby koszt wypożyczenia samochodu na 3 dni nie przekroczył 300 zł?

25. Inwestor za kwotę K złotych zakupił akcje dwóch firm A i B. Po roku zysk ze sprzedaży akcji wyniósł 7%, w tym zysk ze sprzedaży akcji firmy A – 4%, a firmy B – 8%. Jaki procent zainwestowanej kwoty wydał inwestor na akcje firmy A, a jaki – na akcje firmy B?

26. Inwestor za 100 tysięcy złotych zakupił akcje dwóch firm, A i B, oraz obligacje. Po roku zysk ze sprzedaży akcji wyniósł 5,6%, w tym ze sprzedaży akcji firmy A – 2%, a firmy B – 6%. Zysk ze sprzedaży obligacji wyniósł 4,6%. Oblicz, jaką kwotę przeznaczył inwestor na akcje firmy A, jaką – na akcje firmy B, a jaką – na obligacje, jeśli wiadomo, że zysk ze sprzedaży wszystkich papierów wartościowych wyniósł 5,4%.

Zestaw III – podsumowujący

27. Wyznacz równania prostych, w których zawierają się przekątne równoległoboku $ABCD$. Podaj współrzędne punktu przecięcia tych przekątnych.

a) $A(-2,-1)$, $B(4,-1)$, $C(3,6)$ b) $A(0,0)$, $B(6,1)$, $C(4,6)$

28. Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ względem początku układu współrzędnych. Wyznacz wzór funkcji g. Naszkicuj wykresy obu funkcji i odczytaj, dla jakich argumentów zachodzą jednocześnie nierówności $f(x) \leqslant 3$ i $g(x) \geqslant -2$.

29. Zbadaj wzajemne położenie wykresów funkcji f i g. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nie mniejsze niż funkcja g?

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 7$, $g(x) = -\frac{7}{6}x + 9$

b) $f(x) = \frac{x+2}{3} - \frac{x-3}{4}$, $g(x) = \frac{x+6}{9} - \frac{x+4}{6}$

30. Funkcje liniowe $f(x) = 4x - a$ oraz $g(x) = ax - 1$ mają wspólne miejsce zerowe, a g jest funkcją malejącą. Oblicz a.

31. Funkcje liniowe $f(x) = 3x + b$ oraz $g(x) = ax - 1$ mają wspólne miejsce zerowe. Oblicz wszystkie całkowite wartości współczynników a i b.

32. Wyznacz wzór funkcji liniowej f, jeśli wiadomo, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x+2) + f(x-2) = 6x - 8$.

33. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = |2x+4| - 6$. Z wykresów odpowiednich funkcji odczytaj rozwiązanie równania.

a) $f(x) - f(x+2) = 4$ b) $f(x-1) + f(x+1) = 0$

34. Dla jakich wartości parametru m równanie $4m^2x - 1 = 2m + x$ ma dokładnie jedno rozwiązanie spełniające warunek $|x| > x$?

35. Wykres funkcji liniowej f przechodzi przez punkty $A(0,3)$ i $B(-2,1)$. Rozwiąż nierówność:

a) $|f(3x)| < 6$, b) $f(|x|) \geqslant x + 2$, c) $f(|2x+1|) \leqslant 13 - 3x$.

36. Funkcje f i g dane są wzorami $f(x) = x + |2 - m|$ i $g(x) = 2x + |m + 1|$. Wyznacz wartości parametru m, dla których:

a) wykresy tych funkcji przecinają oś OY w tym samym punkcie,

b) funkcje te mają wspólne miejsce zerowe.

37. Wyznacz całkowite wartości parametru m, dla których punkt wspólny wykresów funkcji $f(x) = -2x + |m| - 7$ i $g(x) = 6x - 3$ leży w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych.

38. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 2(x+y) - 3(x-y) = 27 \\ 3(x+y) + (x-y) = -20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2x+y) - 6(x+2y) = 3 \\ (x+2y) + 2(2x+y) = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3(y-x)}{4} - \frac{2x-y}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{2x-y}{2} - \frac{y-x}{3} = \frac{1}{6} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{3x-y}{2} - \frac{1-y}{3} = 0 \\ \frac{x-y}{2} + \frac{3x+y}{4} = 5 \end{cases}$

39. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań jest para liczb dodatnich?

a) $\begin{cases} x - 3y = m \\ 2x + y = m + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - my = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x - my = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx + 2y = 6 \\ 2x + my = 1 \end{cases}$

40. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań jest para liczb różnych znaków?

a) $\begin{cases} 2x + y = m + 1 \\ x - 2y = m - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 2m + 1 \\ x + 4y = 4 - m \end{cases}$

41. Dla jakich wartości parametru m punkt przecięcia prostych $y - x = m - 1$ oraz $2x + y = 4m + 1$ należy do wnętrza trójkąta ograniczonego prostymi $y = 5$, $2x + y = 1$ i $x - y = 1$?

42. Dane są proste $y = x + m + 2$ oraz $y = 2x + 3m$.

a) Dla jakich wartości parametru m punkt przecięcia tych prostych należy do obszaru opisanego nierównością $|x| + |y| \leqslant 4$?

b) Jaką figurą jest zbiór punktów przecięcia tych prostych dla $m \in \mathbf{R}$?

43. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór rozwiązań układu nierówności.

a) $\begin{cases} y \geqslant -3x + 1 \\ 2y < x - 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y \leqslant 2 \\ x + 2y \leqslant 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 2y \leqslant 4 \\ y \geqslant |x| - 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y < 2 - |x - 2| \\ y > |x| - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} |x + y| \leqslant 4 \\ |x - y| \leqslant 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} |y| \leqslant |x| \\ |x| \leqslant 3 \end{cases}$

5.4. Funkcja kwadratowa

Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$ określoną dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$ oraz $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową** lub **trójmianem kwadratowym**.

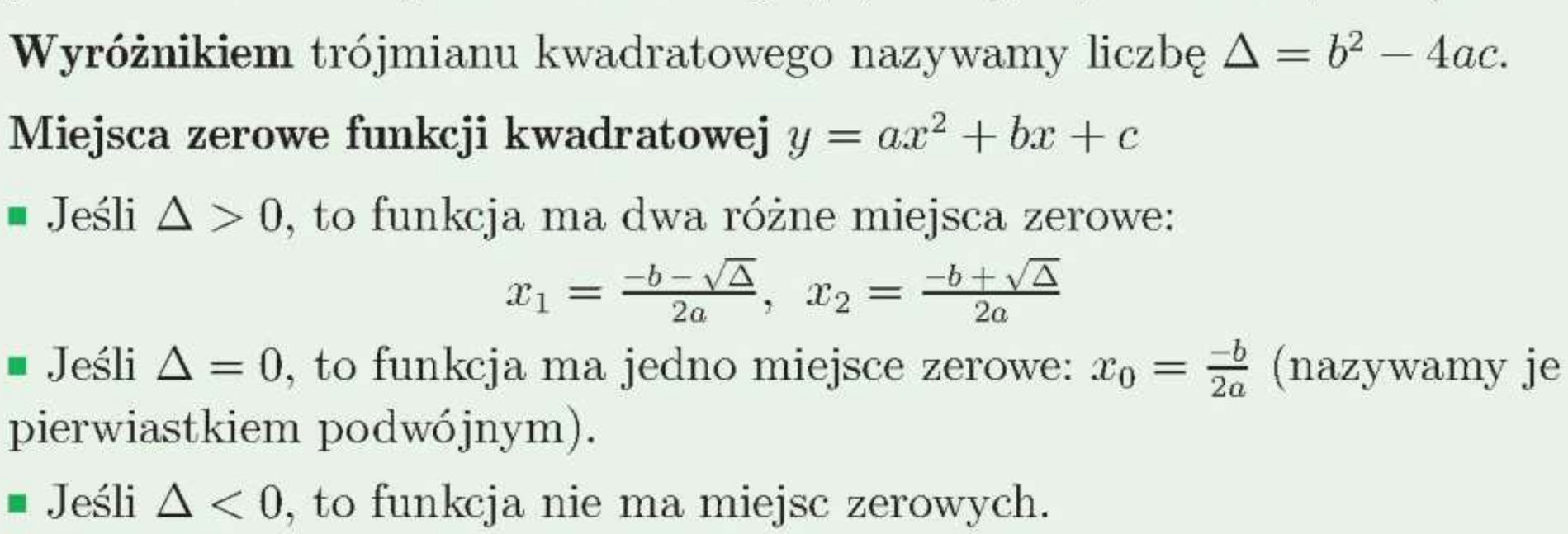
Wykres funkcji kwadratowej nazywamy **parabolą**.
Znak współczynnika a decyduje o tym, czy ramiona paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$ są skierowane do góry ($a > 0$), czy do dołu ($a < 0$).

Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego nazywamy liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$.

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$

- Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa różne miejsca zerowe:
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = \frac{-b}{2a}$ (nazywamy je pierwiastkiem podwójnym).
- Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych.

Położenie wykresu funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ względem osi OX

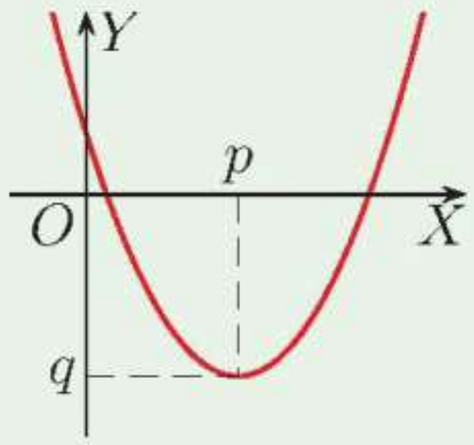


Wzór funkcji kwadratowej

- Postać **ogólna**: $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$
- Postać **kanoniczna**: $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$

Punkt o współrzędnych (p, q) jest wierzchołkiem paraboli oraz:

$$p = -\frac{b}{2a} \quad \text{i} \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

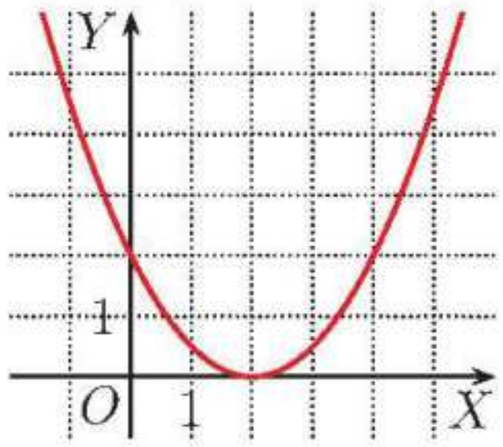


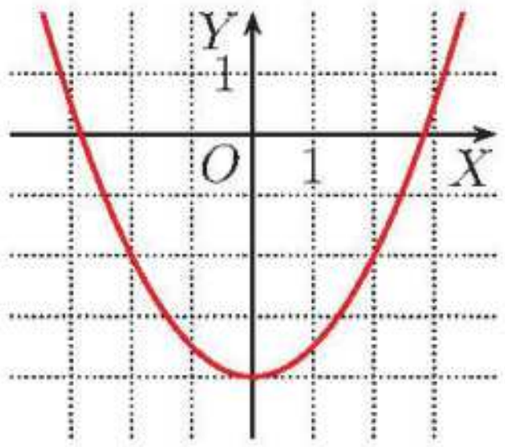
- Postać **iloczynowa**:

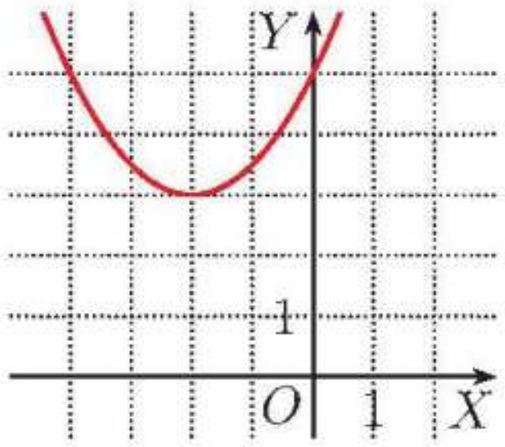
• jeśli $\Delta > 0$, to $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1 i x_2 są miejscami zerowymi;
• jeśli $\Delta = 0$, to $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest miejscem zerowym;
• jeśli $\Delta < 0$, to nie istnieje postać iloczynowa.

Zestaw I – wprowadzający

1. Podaj równanie paraboli przedstawionej na rysunku, jeżeli wiadomo, że powstała ona w wyniku przesunięcia paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$.

a) 

b) 

c) 

2. Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Naszkicuj wykres tej funkcji i odczytaj z niego jej zbiór wartości.

a) $f(x) = x^2 + 8x + 16$
b) $f(x) = x^2 - 4x$
c) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$
d) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$

3. Wykresem funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie W. Oblicz współczynniki b i c oraz podaj zbiór wartości funkcji f.

a) $W(0,0)$
b) $W(-1,0)$
c) $W(0,-1)$
d) $W(1,4)$
e) $W(2,3)$
f) $W(-1,4)$
g) $W(4,1)$
h) $W(-1,-1)$

4. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = x^2 + 4\sqrt{2}x - 2$
b) $f(x) = -10x^2 + 200x + 3000$

5. Podany przedział jest zbiorem wartości funkcji $f(x) = x^2 + bx + 1$. Oblicz współczynnik b.

a) $\langle -3; \infty)$
b) $\langle 0; \infty)$
c) $\langle -8; \infty)$

6. Wykres funkcji kwadratowej f, do którego należą punkty A i B, jest osiowosymetryczny względem prostej $x = 1$. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej oraz podaj współrzędne wierzchołka jej wykresu.

a) $A(-1,0),\ B(0,6)$
b) $A(0,0),\ B(3,6)$

7. Parabolę o równaniu $y = x^2 + 2x + 1$ przesunięto o wektor $\vec{u}$. Naszkicuj otrzymaną w ten sposób parabolę i podaj jej wzór.

a) $\vec{u} = [3,0]$
b) $\vec{u} = [0,-2]$
c) $\vec{u} = [3,-2]$
d) $\vec{u} = [-1,-2]$

8. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $f(x) = 3x^2$, aby otrzymać wykres funkcji g?

a) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$
b) $g(x) = 3x^2 - 6x + 5$
c) $g(x) = 3x^2 + 3x + 1$
d) $g(x) = 3x^2 + 12x + 12$

9. Rozwiąż równanie.

a) $x(2x+1)=0$ c) $25x^2-1=0$ e) $x^2-6x+9=0$

b) $3x^2-6x=0$ d) $x^2-3=0$ f) $4x^2+4x+1=0$

10. Sprawdź, czy równanie ma rozwiązanie.

a) $x^2-3x+\sqrt{5}=0$ b) $x^2+4x+3\sqrt{2}=0$ c) $2x^2-2\sqrt{6}x+3=0$

11. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f i zapisz jej wzór w postaci iloczynowej (o ile jest to możliwe). Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego, dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie, a dla jakich – ujemne.

a) $f(x)=-x^2+3x+4$ c) $f(x)=x^2-6x+9$

b) $f(x)=3x^2-12x+9$ d) $f(x)=-2x^2+4x-2$

12. Wyznacz punkty wspólne paraboli i prostej.

a) $y=-6x^2+7x+6$, $y=1-6x$ b) $y=3x^2-2x+7$, $y=4x-4$

13. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające podaną nierówność.

a) $x^2\leqslant 16$ b) $9-x^2>0$ c) $x^2<4x$ d) $16+x^2\leqslant 8x$

14. Dane są funkcje $f(x)=2x^2-x+3$ i $g(x)=x+7$. Rozwiąż nierówność.

a) $f(x)\leqslant g(x)$ b) $f(x)+x\cdot g(x)\leqslant 0$ c) $f(x)+g(x)>0$

15. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x)=\frac{x+1}{(x+2)(x-1)}$ b) $f(x)=\sqrt{6-5x-6x^2}$ c) $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-8x+15}}$

16. Naszkicuj wykres funkcji f. Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x)=x^2-2x$, $\langle -1;3\rangle$ c) $f(x)=x^2+4x+4$, $\langle -4;-3\rangle$

b) $f(x)=-x^2-2x$, $\langle 0;2\rangle$ d) $f(x)=-2x^2+4x+6$, $\langle 0;3\rangle$

17. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia paraboli o równaniu $y=(x+1)(x-2)$ przez:

a) symetrię względem osi OX, d) przesunięcie o wektor $\vec{u}=[-1,4]$,

b) symetrię względem osi OY, e) symetrię względem prostej $x=-2$.

c) symetrię względem początku układu współrzędnych,

18. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x)=|m|$ w zależności od parametru m.

a) $f(x)=|(x+3)^2-4|$ b) $f(x)=|(x+1)(x+3)|$

Zestaw II – ćwiczeniowy

19. Dana jest funkcja $f(x) = a(x-7)(x+1)$, której najmniejsza wartość jest równa -4. Oblicz współczynnik a oraz wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f.

20. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, jeżeli wiadomo, że jej wykresem jest parabola o wierzchołku $W(1,2)$ oraz:

a) jednym z miejsc zerowych jest 0, b) należy do niej punkt $A(3,4)$.

21. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 5x + c$. Oblicz współczynnik c, jeśli:

a) do wykresu funkcji f należy punkt $P(-2,1)$,

b) funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe,

c) najmniejsza wartość funkcji f jest równa $-\frac{5}{4}$.

22. Oblicz współczynniki b i c trójmianu $y = x^2 + bx + c$, jeśli:

a) trójmian ten ma dwa pierwiastki 2 i -5,

b) trójmian ten osiąga najmniejszą wartość równą 7 dla $x = -1$,

c) trójmian ten przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (-1;4)$,

d) wykres tego trójmianu jest symetryczny względem prostej $x = 3$ i przecina oś OY w punkcie $(0,5)$.

23. Wyznacz wszystkie wartości współczynnika c, dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + c$ c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x - c$

b) $f(x) = -x^2 + 5x + c$ d) $f(x) = x^2 - x - c$

24. Wyznacz wszystkie wartości współczynnika b, dla których funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

a) $f(x) = x^2 + bx + 3$ b) $f(x) = x^2 + bx - 4$ c) $f(x) = 2x^2 + bx$

25. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ c) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$ e) $x^2 - 9|x| = 0$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ d) $2x^4 + 7x^2 - 4 = 0$ f) $x^2 + 18 = 9|x|$

26. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 4x - 3 \\ x + y = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ x + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$

27. Określ liczbę miejsc zerowych funkcji f w zależności od parametru m.

a) $f(x) = x^2 + 2x + m$ b) $f(x) = (m-1)x^2 + 2mx + 3m - 2$

28. Określ liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru a.

a) $4x^2 + ax + 9 = 0$ b) $(a+1)x^2 + (a+2)x + 1 = 0$

29. Dla jakich wartości parametru a funkcja f przyjmuje tylko wartości nieujemne?

a) $f(x) = (a+3)x^2 - 4x + 2$ b) $f(x) = (1-a)x^2 + 4x - 2a$

30. Dla jakich wartości parametru m funkcja f przyjmuje tylko wartości ujemne?

a) $f(x) = (m+1)x^2 - x + m + 1$ b) $f(x) = (m^2-1)x^2 + (m-1)x - \frac{m}{4}$

31. Dla jakich wartości parametru m nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x?

a) $mx^2 + mx - 1 < 0$ c) $(m-1)(m+1)x^2 + (m-1)x + \frac{1}{4} > 0$

b) $(1-m)x^2 + mx - 1 \leqslant 0$ d) $mx^2 + (m-3)x + 2 - m \leqslant 0$

Wzory Viète'a

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2+bx+c = 0$ ma pierwiastki x_1 i x_2 ($\Delta \geqslant 0$), to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

32. Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

a) $3x^2 + 12x - 18 = 0$ b) $(\sqrt{3}+1)x^2 + 6x = 1 - \sqrt{3}$

33. Określ znaki pierwiastków równania.

a) $10x^2 - 3x - 100 = 0$ c) $2x^2 + 5\sqrt{2}x + 2 = 0$

b) $-7x^2 + 14x - 3 = 0$ d) $-6x^2 + x + 2\sqrt{3} = 0$

34. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $12x^2-4x-15 = 0$. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $x_1^2 + x_2^2$, c) $|x_1 - x_2|$, e) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$,

b) $(x_1 - x_2)^2$, d) $(x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1)$, f) $\frac{1}{x_1^2 x_2} + \frac{1}{x_2^2 x_1}$.

35. Dla jakich wartości parametru a równanie ma pierwiastki o różnych znakach?

a) $x^2 + 2x + a + 2 = 0$ b) $ax^2 + 4x + a + 3 = 0$

36. Dla jakich wartości parametru a równanie ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

a) $x^2 + (2a-3)x + 2a + 5 = 0$ b) $ax^2 - (a+2)x + a + 2 = 0$

37. Dla jakich wartości parametru a równanie ma dwa różne pierwiastki ujemne?

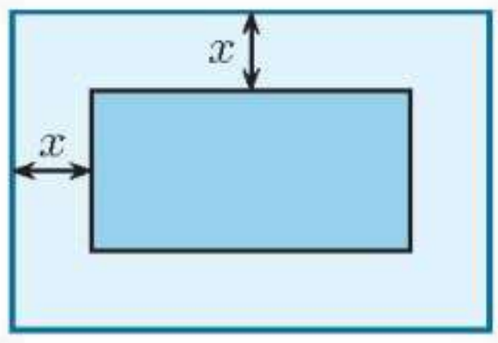
a) $x^2 + (a+2)x + a - 1 = 0$ b) $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$

38. Znajdź dwie liczby, których suma jest równa 3 oraz:

a) suma ich kwadratów jest równa 65,

b) różnica ich kwadratów jest równa 33.

39. Wokół basenu o wymiarach 9 m $\times$ 4 m wyłożono kafelkami pas szerokości x. Jaka jest szerokość tego pasa, jeśli zużyto 68 m^2 kafelków?



40. Suma cyfr liczby dwucyfrowej jest równa 7. Jeżeli pomnożymy ją przez liczbę o przestawionych cyfrach, to otrzymamy 1300. Znajdź tę liczbę.

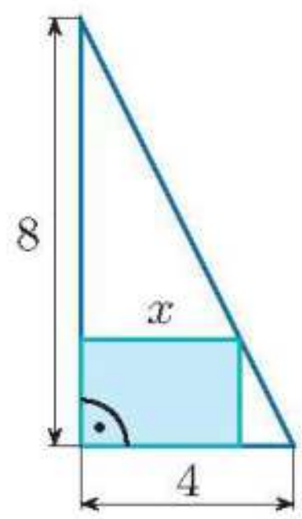
41. Wyznacz najmniejszą wartość sumy kwadratów liczb x i y, jeśli:

a) $x + y = 3$, b) $x - y = 6$, c) $2x - y = 0$.

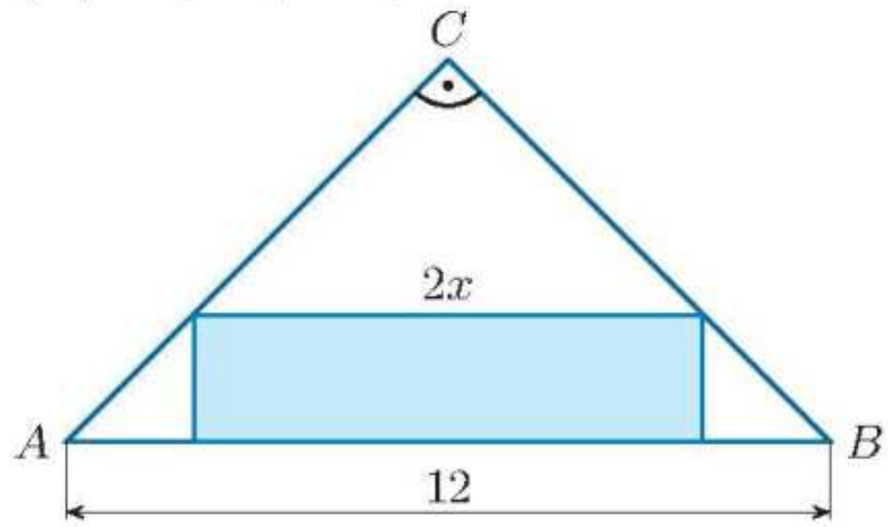
42. Drut o długości 68 cm dzielimy na dwie części – z jednej tworzymy ramkę kwadratową, a z drugiej – prostokątną. Stosunek długości boków ramki prostokątnej wynosi 3 : 1. Na części jakiej długości należy rozciąć drut, aby suma pól powierzchni ograniczonych przez ramki była najmniejsza?

43. Przedstaw pole P prostokąta (rysunek poniżej) jako funkcję zmiennej x. Podaj dziedzinę tej funkcji i naszkicuj jej wykres. Dla jakiego argumentu pole jest największe? Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu.

a)



b) $|AC| = |BC|$



44. Obwód prostokąta jest równy 24 cm. Jakie powinny być długości jego boków, aby walec, który powstanie przez obrót tego prostokąta wokół jednego z boków, miał jak największe pole powierzchni bocznej?

45. Wyznacz liczbę wierzchołków wielokąta, który ma:

a) 90 przekątnych, b) 135 przekątnych, c) 189 przekątnych.

46. Dwaj kolarze przejechali trasę 120 km. Pierwszy jechał ze średnią prędkością o 1 km/h większą od prędkości drugiego i całą trasę pokonał w czasie o 12 minut krótszym. Oblicz średnią prędkość każdego z kolarzy.

47. Punkt porusza się wzdłuż osi OX, a jego położenie w chwili t dane jest wzorem $x(t) = 4t^2 + t$, gdzie x wyrażone jest w metrach, a t – w sekundach. Oblicz średnią prędkość punktu od chwili t_1 do chwili t_2.

a) $t_1 = 0$ s, $t_2 = 1$ s b) $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s c) $t_1 = 0$ s, $t_2 = 2$ s

48. Rowerzysta przejechał z miasta A do miasta B odległego od A o 54 km. Wzór $s(t) = 36t - 6t^2$ opisuje długość s (w kilometrach) drogi pokonanej przez rowerzystę po t godzinach jazdy.

a) Oblicz, ile czasu jechał rowerzysta.

b) Oblicz średnie prędkości rowerzysty w pierwszej i w drugiej godzinie jazdy oraz na całej trasie (w km/h).

49. Z wysokości 5 m wypuszczono z łuku pionowo do góry strzałę z prędkością początkową 50 m/s. Wysokość strzały nad ziemią (w metrach) można przybliżyć wzorem:

$$h(t) = 5 + 50t - 5t^2$$

gdzie t jest czasem lotu strzały (w sekundach).

a) Określ dziedzinę funkcji h.

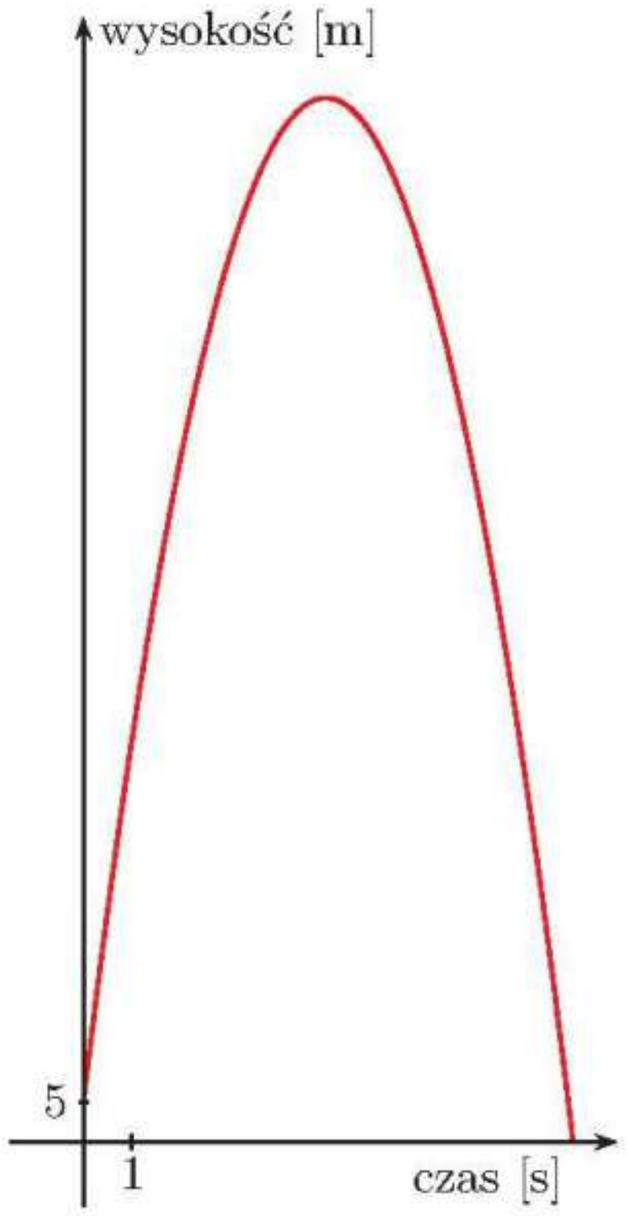
b) Przerysuj tabelę wartości funkcji h do zeszytu i ją uzupełnij.

t [s]	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h [m]	50	85	?	?	?	125	110	85	50

c) Po ilu sekundach od momentu wypuszczenia z łuku strzała osiągnie wysokość, z której ją wypuszczono?

d) Po ilu sekundach od momentu wypuszczenia z łuku strzała osiągnie największą wysokość?

e) Na jaką największą wysokość doleci strzała?



Zestaw III – podsumowujący

50. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f, której wykresem jest parabola o wierzchołku W przystająca do paraboli $y = x^2$.

a) $W(m^4, 0)$ b) $W(0, -25m^2)$ c) $W(-2m, -4m^2)$ d) $W(m, -4m^2)$

51. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = (x - 2p)^2 + p$, gdzie $p \in \mathbf{R}$. Wyznacz zbiór wartości funkcji g oraz podaj równanie osi symetrii jej wykresu.

a) $g(x) = f(x + p) - p$
b) $g(x) = f(p - x)$
c) $g(x) = p - f(x)$
d) $g(x) = p - f(2p - x)$

52. Naszkicuj wykres funkcji f, a następnie odczytaj z niego liczbę rozwiązań równania $f(x) = a$ w zależności od parametru a.

a) $f(x) = 2|(x + 1)(x - 3)|$

b) $f(x) = -|x^2 - 4| + 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 2(x-1)^2 & \text{dla } x \leqslant 2 \\ -x + 4 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x & \text{dla } x < 0 \\ -\frac{4}{5}x^2 + 4x & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$

53. Rozwiąż równanie.

a) $|3x^2 - 4x + 2| = 1$
b) $|x^2 + x - 10| = 10$
c) $|x^2 - 6x + 7| = 2$
d) $x^2 - 2x + |x - 1| = 1$
e) $|x| + |1 - x^2| = 1$
f) $|x^2 + 4x - 5| + |x^2 + 4x| = 5$

54. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 8x + 12 \\ y = -x^2 - 2x \end{cases}$
b) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 11 \\ y = (x - 1)(x + 1) \end{cases}$
c) $\begin{cases} y = (x - 2)^2 - 1 \\ y + x^2 = 6x - 5 \end{cases}$

55. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} xy = -6 \\ x + y = 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x - y = 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 4 \end{cases}$

56. Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji:

$$f(x) = \sqrt{mx^2 + (m+2)x + (m+2)}$$

jest zbiór liczb rzeczywistych?

57. Dla jakich wartości parametru m zbiorem wartości funkcji:

$$f(x) = (m+1)x^2 - 8x + m$$

jest przedział $\langle -7; \infty)$?

58. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m+1)x^2 - 4mx + 2m + 3 = 0$ ma pierwiastek podwójny? Wyznacz ten pierwiastek.

D **59.** Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru m przynajmniej jedno z równań $x^2 + 2x + m = 0$ oraz $x^2 + (m+1)x + 1 = 0$ ma rozwiązanie.

60. Dla jakich wartości parametru m funkcje $f(x) = 2x^2 - 3x + m - 1$ oraz $g(x) = x^2 - 2x + m + 1$ mają wspólne miejsce zerowe? Wyznacz to miejsce zerowe.

61. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $x^2 - 7x + 2 = 0$, a liczby $4x_1$ i $4x_2$ są pierwiastkami równania $x^2 + bx + c = 0$. Oblicz $x_1 + x_2$ oraz $x_1 \cdot x_2$, a następnie wyznacz współczynniki b i c.

62. Dla jakich wartości parametru m suma dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + (m-1)x - m + 1 = 0$ jest mniejsza od 2?

63. Dla jakich wartości parametru m suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania $mx^2 - 2x + m = 0$ jest nieujemna?

64. Dla jakich wartości parametru m dwa różne pierwiastki równania:

$$-2x^2 + mx - 2m = 0$$

a) są większe od 1, b) są mniejsze od 2?

65. Dla jakich wartości parametru b dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 równania $6x^2 + bx + 1 = 0$ spełniają warunek:

a) $x_1 + x_2 = 4$, b) $|x_2 - x_1| = \frac{1}{6}$?

66. Sprawdź, czy istnieje taka liczba m, że dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 równania $x^2 + mx + m = 0$ spełniają warunek:

$$\left(\frac{1}{x_1} + x_2\right)\left(\frac{1}{x_2} + x_1\right) = \frac{9}{2}$$

67. Dla jakich wartości parametru m dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 równania:

a) $(4m-1)x^2 - 8mx + 4 = 0$ spełniają warunek $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 1$,

b) $2x^2 + (2m-1)x + 2m + 1 = 0$ spełniają warunek $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 1$,

c) $x^2 + (m+2)x + 4 = 0$ spełniają warunek $|x_1 - x_2| = 3$?

68. Wyznacz wzór funkcji $y = f(m)$ i naszkicuj jej wykres, jeśli wiadomo, że $f(m)$ jest sumą:

a) kwadratów pierwiastków równania $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$,

b) odwrotności pierwiastków równania $(5m-1)(m-1)x^2 + 6x + 1 = 0$.

5.5. Wielomiany

Funkcję zmiennej rzeczywistej x daną wzorem:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, nazywamy **wielomianem** stopnia n.
Funkcję w stale równą zero nazywamy **wielomianem zerowym** ($w \equiv 0$) i jego stopnia nie określamy.
Liczby: a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 nazywamy **współczynnikami** wielomianu, a współczynnik a_0 – **wyrazem wolnym**.
Każdy niezerowy wielomian można przedstawić jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.
Liczbę a nazywamy **pierwiastkiem** wielomianu w, jeśli $w(a) = 0$.

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu
Dla dowolnych wielomianów w i q, gdzie $q \not\equiv 0$, istnieją wielomiany p i r takie, że:

$$w(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$$

oraz $r \equiv 0$ lub $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(q)$.

Twierdzenie o reszcie
Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$, to $r = w(a)$.

Twierdzenie Bézouta
Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych
Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ($a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych
Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny $x = \frac{p}{q}$ i p, q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, a q jest dzielnikiem współczynnika a_n.

Liczbę a nazywamy **pierwiastkiem k-krotnym** ($k \in \mathbf{N}_+$) wielomianu w, jeżeli w jego rozkładzie występuje czynnik $(x - a)^k$ i nie występuje czynnik $(x - a)^{k+1}$.

Zestaw I – wprowadzający

1. Oblicz współczynniki a i b wielomianu w, jeżeli $w(1) = 3$ i $w(0) = -2$.

a) $w(x) = x^3 + ax^2 - 2x + b$

b) $w(x) = ax^{100} + 5x^{50} - 10x^{25} + b$

2. Dane są wielomiany $w(x) = 2x^2 - 1$ i $u(x) = 3x^3 - x^2$. Wyznacz wielomian k i podaj jego stopień.

a) $k(x) = u(x) + w(x)$

b) $k(x) = u(x) - w(x)$

c) $k(x) = w(x) + 2u(x)$

d) $k(x) = 3x \cdot w(x) - 2u(x)$

3. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomiany u i w mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach?

a) $u(x) = 8x^3 - a$, $w(x) = (b+2)x^3 + 1$

b) $u(x) = x(x+a)^2 + b$, $w(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

c) $u(x) = x(ax-b)^2 + b$, $w(x) = 9x^3 + 6x^2 + x + 1$

4. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 5x^5 - 20x^3$

b) $w(x) = x^5 - 125x^2$

c) $w(x) = -5x^5 + 30x^4 - 45x^3$

d) $w(x) = 2x^5 + 8x^4 - 10x^3$

5. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $w(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

c) $w(x) = 3x^3 - x^2 + 6x - 2$

d) $w(x) = 3x^4 - 15x^3 - 6x^2 + 30x$

e) $w(x) = 2x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 12x$

f) $w(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$

6. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = (x+3)^2 - (2x+1)^2$

b) $w(x) = (2x-4)^2 - (2-x)^2$

c) $w(x) = 5(x-1)^5 - 20(x-1)^4$

d) $w(x) = 4(x+1)^5 - 8(x+1)^3$

7. Rozwiąż równanie.

a) $3x^5 = 12x^3$

b) $5x^5 = 20x$

c) $x^6 = (2x)^3$

d) $27x^7 = -8x^4$

e) $\frac{1}{2}x^5 = 32x^2$

f) $x^2 = \sqrt{2}x^5$

g) $6x^4 - 12x^3 + 6x^2 = 0$

h) $x^7 - x^6 = 6x^5$

i) $\frac{1}{9}x^6 + x^5 = \frac{1}{3}x^5 - x^4$

8. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^3 + 5x^2 + 3x + 15 = 0$

c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

d) $2x^4 - x^3 + 16x - 8 = 0$

e) $x^4 - 3x^3 = 3 - x$

f) $4x^3 - 8x^2 = x - 2$

g) $12x^3 - 2 = 3x^2 - 8x$

h) $54x^4 = 27x^3 + 2x - 1$

9. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q. Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$.

a) $w(x) = 2x^3 - x^2 - 2x - 3, \quad q(x) = x + 1$

b) $w(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x + 3, \quad q(x) = 3x - 2$

c) $w(x) = -x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 3x - 9, \quad q(x) = x + 5$

10. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ przez dwumian q.

a) $q(x) = x - 2$ b) $q(x) = x + 2$ c) $q(x) = x - \sqrt{2}$

11. Nie wykonując dzielenia, sprawdź, czy wielomian:

$$w(x) = x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30$$

jest podzielny przez dwumian q.

a) $q(x) = x + 1$ c) $q(x) = x + 3$ e) $q(x) = x + 5$

b) $q(x) = x + 2$ d) $q(x) = x - 4$ f) $q(x) = x - 6$

12. Współczynniki wielomianu $w(x) = x^5 + a_4x^4 + \ldots + a_1x + a_0$ są liczbami całkowitymi. Które z liczb: -3, 0, 1, 2, 5 nie mogą być pierwiastkami wielomianu w, jeżeli:

a) $a_0 = 4$, b) $a_0 = 6$, c) $a_0 = 15$?

13. Rozwiąż równanie.

a) $3x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ d) $2x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 4x - 4 = 0$

b) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ e) $x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$

c) $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$ f) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

14. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ c) $w(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 4x - 20$

b) $w(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27$ d) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2x - 15$

15. Współczynniki wielomianu $w(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + \ldots + a_1x + a_0$ są liczbami całkowitymi. Które z liczb: $-\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ nie mogą być pierwiastkami wielomianu w, jeżeli:

a) $a_0 = 4, \ a_5 = 4,$ c) $a_0 = 6, \ a_5 = 4,$

b) $a_0 = 4, \ a_5 = 6,$ d) $a_0 = 6, \ a_5 = 6$?

16. Rozwiąż równanie.

a) $3x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$ c) $4x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = 0$

b) $2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ d) $12x^3 + 8x^2 = x + 1$

Zestaw II – ćwiczeniowy

17. Wyznacz wielomian $v(x,y,z) = 4u(x,y,z) - 2w(x,y,z)$ i oblicz jego wartość dla $x = -1$, $y = 2$, $z = -\frac{1}{2}$.

a) $u(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2yz - 2xy^2z + xz^2$, $w(x,y,z) = 3x^2yz + 4xyz^2 - xy^2$

b) $u(x,y,z) = \frac{1}{8}x^3y^2z - \frac{1}{4}xyz^2$, $w(x,y,z) = \frac{1}{4}x^3y^2z + \frac{1}{2}xy^2z^2 - xyz$

18. Rozwiąż równanie. Podaj krotności pierwiastków.

a) $(x-2)(x^2-6x+10) = 2(x-2)$

b) $(x^2+2x+1)(x^2-2x) = 3(x+1)^2$

c) $(x+2)(4x^3+8x^2) = x^2+4x+4$

d) $(x-1)^2(x+2)^3 + (x-1)^3(x+2)^2 = 0$

19. Rozwiąż nierówność.

a) $x(x-2)(x+3) < 0$

b) $3(x+2)(x^2+1)(x+1)^2 \geqslant 0$

c) $-3(x+2)(x^2+1)(x+1)^2 \geqslant 0$

d) $-2(x+1)(x-2)(x^2-1)^2 \leqslant 0$

e) $x^5 + 8x^2 \leqslant 0$

f) $4x^3 + 12x^2 - x - 3 \geqslant 0$

g) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 < 0$

h) $-x^3 + 2x^2 - 4x + 3 > 0$

20. Rozwiąż nierówność.

a) $x^4 + 3x^3 - 4x^2 \leqslant 0$

b) $16x^5 - 8x^3 + x > 0$

c) $x^6 + x^4 \geqslant 2x^2$

d) $x^5 + 4x > 5x^3$

21. Po podzieleniu wielomianu w przez wielomian p otrzymano iloraz q oraz resztę r. Wyznacz wielomian p.

a) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 5$, $q(x) = x^2 + 3x - 2$, $r = 3$

b) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 1$, $q(x) = x^2 - 3x + 2$, $r = -1$

22. Dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu w przez wielomian q jest równa r?

a) $w(x) = x^3 + 2x^2 + mx - 8$, $q(x) = x - 2$, $r = 14$

b) $w(x) = x^5 + 3x^3 + |m-2|$, $q(x) = x + 1$, $r = 6$

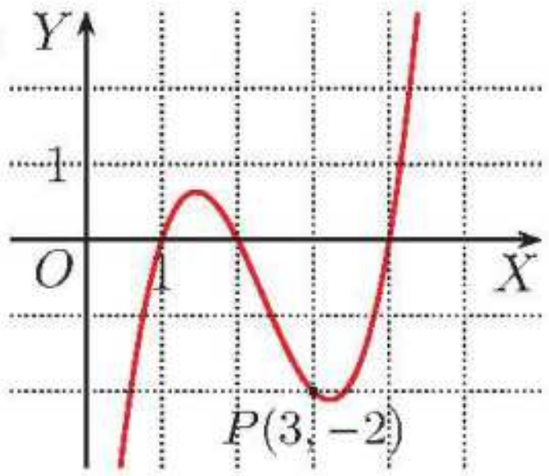
c) $w(x) = x^5 + (m^3-1)x^2 - 3mx$, $q(x) = x - 1$, $r = -2$

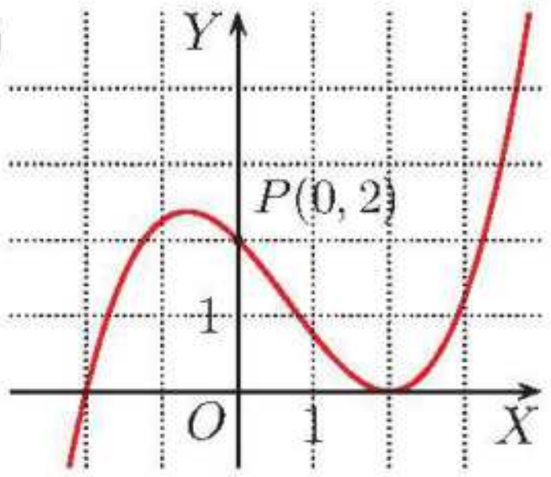
23. Dla jakich wartości parametru a wielomian w jest podzielny przez dwumian q?

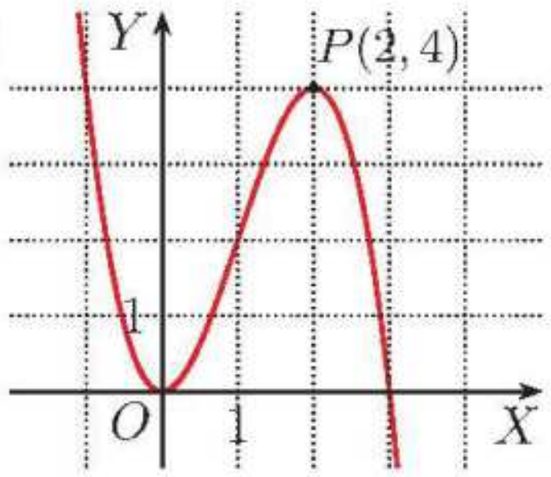
a) $w(x) = x^3 - ax^2 + 2ax - 3$, $q(x) = x - 3$

b) $w(x) = a^2x^3 - 4ax + 5$, $q(x) = x + 1$

24. Na rysunku przedstawiony jest wykres wielomianu trzeciego stopnia. Podaj jego miejsca zerowe, zbiór argumentów, dla których przyjmuje wartości dodatnie, oraz wzór tego wielomianu.

a) 

b) 

c) 

25. Dla jakich wartości parametrów p i q liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem równania?

a) $x^3 - 2x^2 + px = q$, $x_0 = 1$

b) $x^3 + px^2 + qx = 2$, $x_0 = -1$

26. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian $w(x) = 3x^3 + 4x^2 - 13x + 6$ jest równy wielomianowi u?

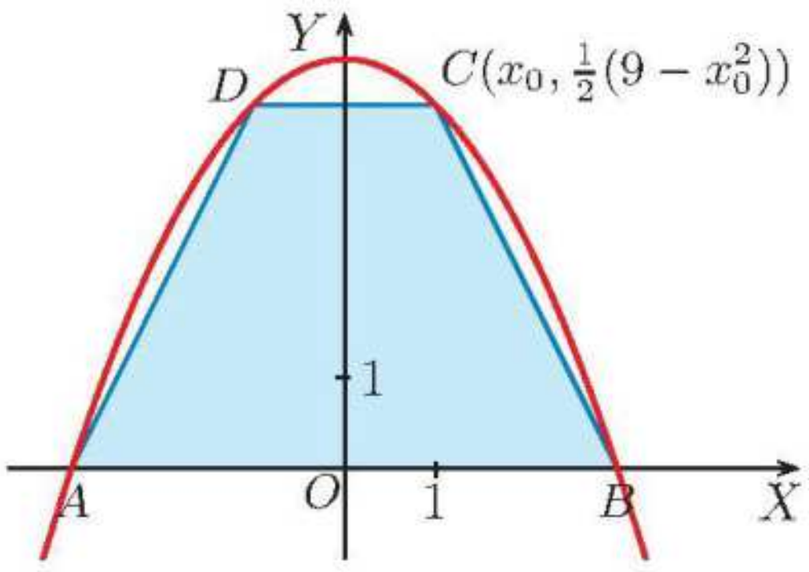
a) $u(x) = (x-1)(ax^2 + bx - 6)$

b) $u(x) = (ax + b)(x^2 - bx - a)$

c) $u(x) = (3x - 2)(ax^2 + bx + a - b)$

d) $u(x) = (x + 3)(ax^2 - bx + a - b)$

27. Wierzchołki trapezu $ABCD$ należą do paraboli $y = \frac{1}{2}(9 - x^2)$. Punkty A i B są punktami przecięcia paraboli z osią OX, a punkty C i D leżą powyżej osi OX. Wyznacz wielomian opisujący pole trapezu w zależności od x_0 (rysunek obok). Podaj dziedzinę tej funkcji. Dla jakiej wartości x_0 pole trapezu jest równe 16?

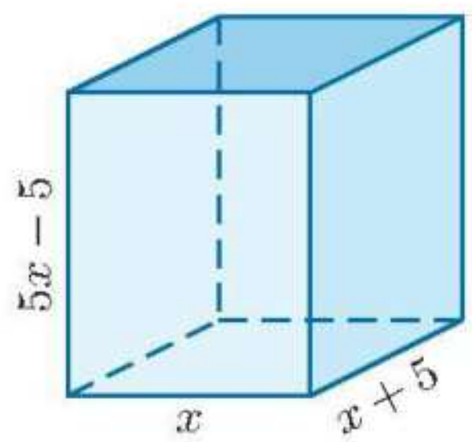


28. Dany jest prostopadłościan (rysunek obok).

a) Wyznacz wielomian opisujący objętość tego prostopadłościanu w zależności od x. Podaj dziedzinę tej funkcji.

b) Oblicz objętość tego prostopadłościanu dla $x = 5$.

c) Wyznacz wielomian opisujący pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu. Podaj dziedzinę tej funkcji.



29. Krawędzie prostopadłościanu mają długości $2x$, $x-2$, $x-1$. Wyznacz wielomian opisujący objętość tego prostopadłościanu w zależności od x. Podaj dziedzinę tej funkcji. Dla jakiej wartości x objętość prostopadłościanu jest równa 12?

Zestaw III – podsumowujący

30. Po podzieleniu wielomianu w przez dwumian $x-4$ otrzymano iloraz x^2-3x+1 i resztę 2. Rozwiąż równanie $w(x)=6-x$.

31. Dla jakich wartości parametru m wielomian $w(x)=x^3+(m-8)x+2m$ jest podzielny przez dwumian $x-m$?

32. Wielomian $w(x)=3x^3+(a+b)x^2-27x+a-4b$ jest podzielny przez dwumian $x-2$, a reszta z dzielenia przez dwumian $x-1$ jest równa 24. Wyznacz wartości parametrów a i b oraz oblicz pierwiastki tego wielomianu.

33. Dane są wielomiany $f(x)=(a-2b)x^3+9x^2-6x-2$, $p(x)=ax+2$ i $q(x)=x^2+bx-2$. Wyznacz wartości parametrów a i b, dla których wielomian $w(x)=p(x)\cdot q(x)-2f(x)$ jest wielomianem zerowym.

34. Reszta z dzielenia wielomianu w trzeciego stopnia przez dwumian $x+1$ jest równa -8. Liczby -2 i 3 są pierwiastkami tego wielomianu, a jego wykres przechodzi przez punkt $(0,-24)$. Wyznacz wzór wielomianu w i podaj zbiór argumentów, dla których przyjmuje on wartości nieujemne.

35. a) Wielomian $w(x)=3x^3+5x^2-9x-4$ ma pierwiastek wymierny należący do przedziału $(1;\frac{3}{2})$. Rozwiąż nierówność $w(x)\geqslant 0$.

b) Wielomian $w(x)=5x^3-x^2-9x-4$ ma pierwiastek wymierny należący do przedziału $(-1;-\frac{1}{2})$. Oblicz pierwiastki tego wielomianu.

36. Pierwiastki x_1, x_2 i x_3 wielomianu $w(x)=x^3+ax+b$ spełniają warunki $x_1-x_2=0$ oraz $x_1-x_3=3$. Oblicz a i b oraz rozwiąż nierówność:

$$w(x)\geqslant x+2$$

37. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x)=\sqrt{x^3-5x^2+3x+9}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{18x^3-3x^2-4x+1}}$

D **38.** Wykaż, że liczba $p\neq 0$ jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu:

$$w(x)=x^3-3p^2x+2p^3$$

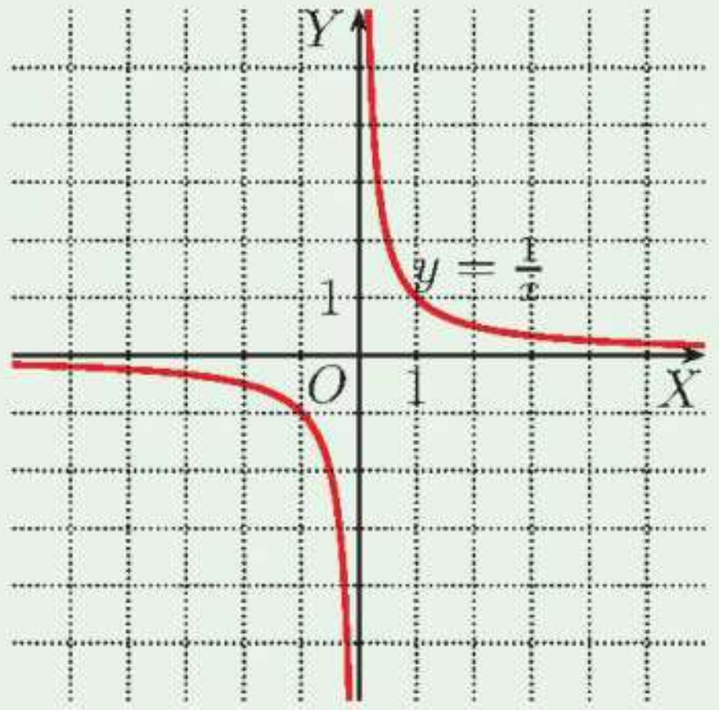
39. a) Jaki warunek muszą spełniać współczynniki wielomianu trzeciego stopnia $w(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, aby dla dowolnego argumentu $x\in\mathbf{R}$ zachodziła równość $w(x)+w(-x)=0$?

D b) Wykaż, że jeśli dla dowolnego argumentu $x\in\mathbf{R}$ wielomian w spełnia warunek $w(x)=w(-x)$, to wielomian ten nie może być wielomianem trzeciego stopnia.

5.6. Funkcje wymierne

Funkcję postaci $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R}_+$ oraz a jest stałą dodatnią, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**, wielkości x i y – **odwrotnie proporcjonalnymi**, a stałą a – **współczynnikiem proporcjonalności**.

Wykresem funkcji $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $a \neq 0$, jest **hiperbola**.
Prosta $y = 0$ jest jej **asymptotą poziomą**, a prosta $x = 0$ – jej **asymptotą pionową**.



Funkcję postaci $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$, określoną dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, jeżeli nie jest ona funkcją stałą, nazywamy **funkcją homograficzną**.
Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola.

Postać $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{p\}$ i $r \neq 0$, nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji homograficznej.

Zestaw I – wprowadzający

1. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę, wiedząc, że wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$2\sqrt{3}$	?	?
y	?	?	?	?	?	?	$2\sqrt{3}$	3	$\frac{1}{2}$

2. Do wykresu proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$ należy punkt A. Wyznacz jej wzór.

a) $A(3, 2)$ b) $A\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ c) $A\left(\sqrt{2}, \sqrt{6}\right)$

3. Wyznacz dziedzinę wyrażenia.

a) $\frac{(x+4)(x-2)}{(x-3)(x+7)}$ b) $\frac{x^2-2x+3}{9x^2-4}$ c) $\frac{x^3+4x}{27x^3+x}$

4. Rozwiąż równanie.

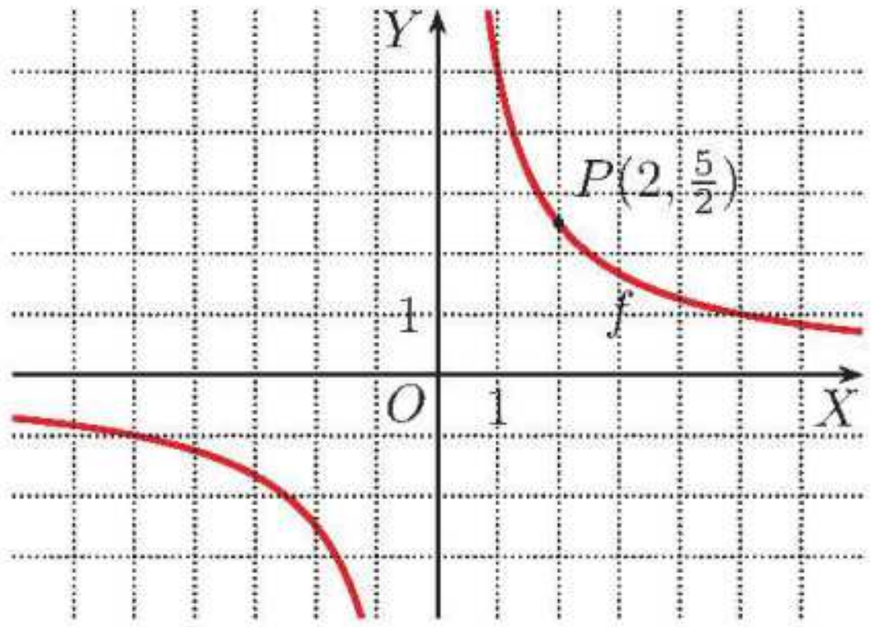
a) $\frac{4}{x+3} = 1$ c) $\frac{4x-1}{x} = 3x$ e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = 6$

b) $\frac{3x-1}{9-5x} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{x}{x+2} = \frac{2x}{x-2}$ f) $\frac{5}{4x} + \frac{1}{9x} = x$

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a.

a) Które spośród punktów $A(-5, 2)$, $B(\sqrt{5}, \sqrt{5})$ i $C(\frac{1}{4}, -20)$ nie należą do wykresu funkcji f?

b) Podaj zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od 1.



6. Wykres funkcji f przesuń o wektor $\vec{u}$. Podaj wzór otrzymanej w ten sposób funkcji g, wyznacz jej dziedzinę i zbiór wartości. Odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności funkcji g.

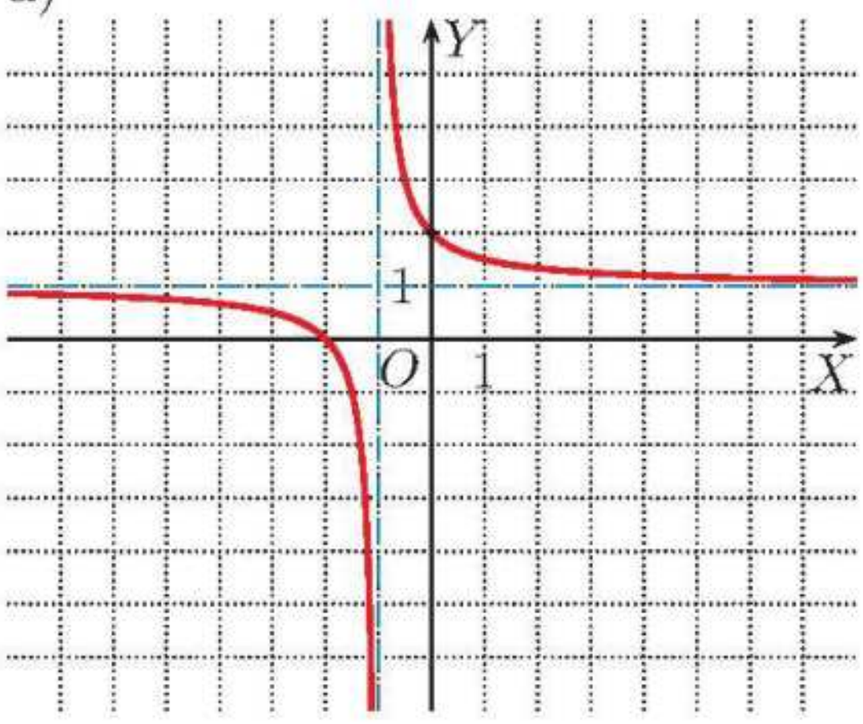
a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $\vec{u} = [2, 0]$ b) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $\vec{u} = [1, -2]$

7. Wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{3x}$ przesunięto o wektor i otrzymano wykres funkcji g. Wyznacz wzór tej funkcji, jeżeli punkt P jest środkiem symetrii jej wykresu. Sprawdź, czy punkt $A(\frac{2}{3}, -4)$ należy do tego wykresu.

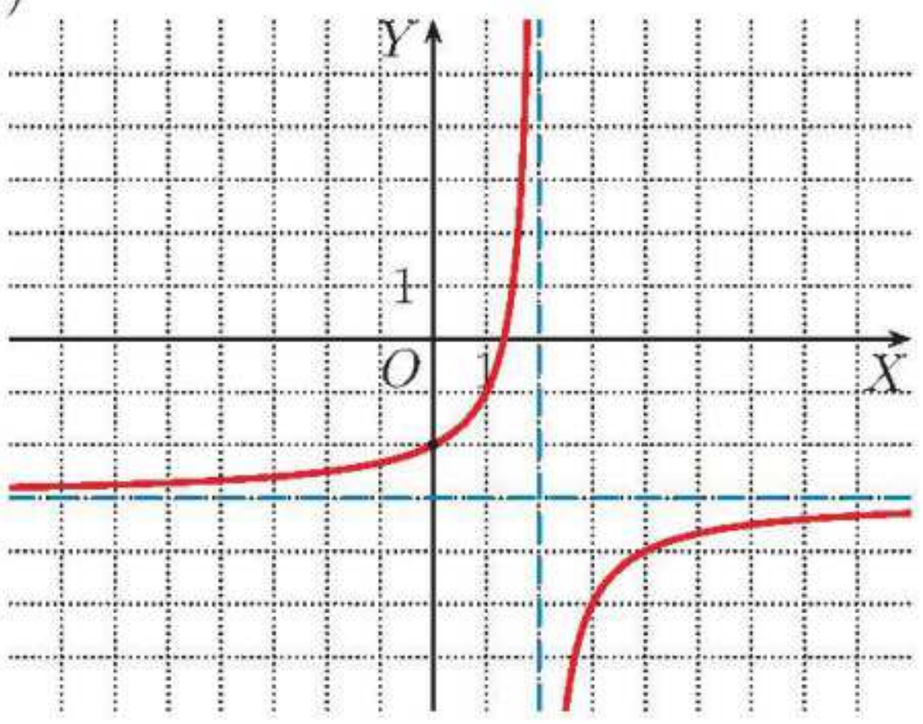
a) $P(0, -3)$ b) $P(1, -6)$ c) $P(-2, 2)$

8. Podaj wzór funkcji, której wykres przedstawiono poniżej. Dla jakiej wartości współrzędnej m punkt $P(m, 3)$ należy do tego wykresu?

a)



b)



9. Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Naszkicuj jej wykres i odczytaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.

a) $f(x) = \frac{x-5}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{-2x-4}{x+3}$ c) $f(x) = \frac{3x+18}{x+5}$

10. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$. Zapisz wzór funkcji g w postaci kanonicznej i wyznacz równania asymptot jej wykresu.

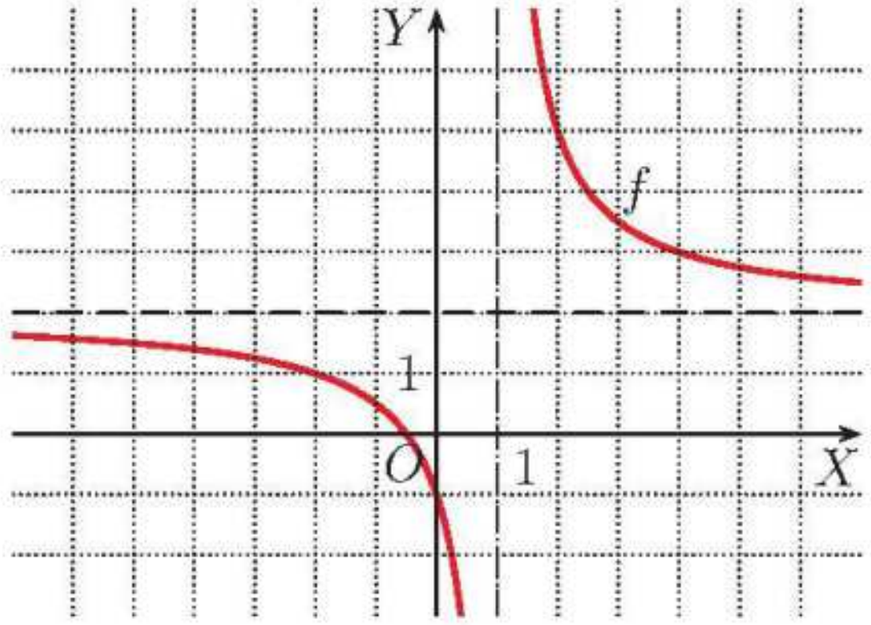
a) $g(x) = f(x+4) - 1$ b) $g(x) = f(-x)$ c) $g(x) = 3 - f(x)$

Zestaw II – ćwiczeniowy

11. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{x-p} + q$.

a) Podaj współczynniki p i q oraz wyznacz miejsce zerowe funkcji f.

b) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 5, a dla jakich – mniejsze od 3.



12. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej dziedzinę, zbiór wartości oraz miejsca zerowe. Dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie?

a) $f(x) = \frac{3x}{x-3}$

b) $f(x) = \frac{3-2x}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

d) $f(x) = \frac{-3x-6}{x+3}$

e) $f(x) = \frac{3x-12}{x-3}$

f) $f(x) = \frac{3x+12}{x+3}$

13. Wykres funkcji f przesunięto o wektor $\vec{u}$. Podaj wzór otrzymanej hiperboli oraz współrzędne punktów, w których przecina ona osie układu współrzędnych.

a) $f(x) = \frac{2}{x-3}$, $\vec{u} = [2, -1]$

b) $f(x) = 4 - \frac{3}{x+4}$, $\vec{u} = [1, -2]$

c) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$, $\vec{u} = [0, 2]$

d) $f(x) = \frac{3x}{2x-3}$, $\vec{u} = [-2, 3]$

14. Wyznacz dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz jego wartość dla $x = -2$.

a) $\frac{x^2-9}{x^3-3x^2}$

b) $\frac{x^5-81x}{x^2+9}$

c) $\frac{x^2+9x+8}{2x+16}$

d) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

e) $\frac{x^2+10x+25}{x^2+4x-5}$

f) $\frac{4x^2-1}{2x^3+x^2-6x-3}$

15. Wyznacz dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz jego wartość dla $x = -7$.

a) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{16-x^4} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-2x+1}$

b) $(x^3 - 8) : \frac{x^2+2x+4}{x+2}$

16. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{4}{x+2} + \frac{3}{x-1}$

b) $\frac{3x+1}{x+1} + \frac{x}{x+2}$

c) $\frac{1}{x^2+2x+1} - \frac{3x}{x+1}$

d) $\frac{5x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} - 8$

e) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} - \frac{x^2+9}{x^2-9}$

f) $\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{3x-2} + \frac{3}{9x^2-9x+2}$

17. Rozwiąż równanie.

a) $5 - \frac{4x-12}{x} = x$

b) $x + \frac{21}{x} = 10$

c) $\frac{3}{x-7} + \frac{2}{x-8} = 0$

d) $\frac{9}{x-1} - \frac{4}{x-2} = 1$

e) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x-3} = 2$

f) $\frac{2x+1}{x+1} = 4 - \frac{x}{x-1}$

18. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x^2+x-12}{x^2+3x-4} = 0$

b) $\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2+2x} = 0$

c) $\frac{9x^2-5x}{3x-2} = 2 + \frac{x}{3x-2}$

d) $\frac{6}{x+3} + \frac{x}{x-3} = \frac{18}{x^2-9}$

e) $\frac{2x-3}{x} + \frac{5x-3}{x^2} = 2 + \frac{2x^2+x-6}{x^3}$

f) $\frac{1-x}{x+2} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{9}{x^2+x-2}$

19. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} & \text{dla } x > 0 \\ -\frac{4}{x-2} & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-5}{x-2} & \text{dla } x < 2 \\ \frac{4}{x} & \text{dla } x \geqslant 2 \end{cases}$

20. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{4}{x} \geqslant 1$

b) $\frac{6}{x} < 5$

c) $\frac{3-x}{2x-1} \leqslant 7$

d) $\frac{2x-5}{3-4x} > 1$

e) $x \geqslant \frac{x+1}{1-x}$

f) $\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{3}{x-2}$

g) $\frac{3x}{x+2} \leqslant \frac{2x}{x-2}$

h) $\frac{2x+2}{x-1} \geqslant \frac{x+1}{x+3}$

i) $\frac{2}{x} + 3 > \frac{1+x}{1+2x}$

21. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x} \geqslant -\frac{3}{2}$

b) $x + \frac{3}{x-3} \geqslant \frac{2x+3}{3-x}$

c) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} > \frac{1}{x^2+3x+2}$

d) $\frac{x+2}{x+1} + \frac{x-3}{x-1} \leqslant \frac{1}{x^2-1}$

22. Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$ i nierówność $f(x) \geqslant g(x)$.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = 2x$

b) $f(x) = \frac{-3x-1}{x+1}$, $g(x) = x - 1$

23. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Rozwiąż nierówność:

a) $f(x) < f(x+1)$,

b) $f(x-3) > f(x)$.

24. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa rozwiązania?

a) $x + \frac{4}{x} = m$

b) $\frac{m-3}{x-m} = x$

25. Dla jakich wartości parametru m nierówność jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbf{R}$?

a) $\frac{mx+5}{x^2+1} > 0$

b) $\frac{x^2+x+1}{-x^2+mx-9} < 0$

c) $\frac{-x^2-1}{mx^2-2} > 0$

Zestaw III – podsumowujący

26. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x) = \frac{x-4}{4x-3} - \frac{3}{4}$

b) $f(x) = \frac{x+6}{x} - 2x$

c) $f(x) = \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-3}{x-5}$

d) $f(x) = \frac{1-x}{x+1} + \frac{2x-5}{2x-2}$

Punktem kratowym w układzie współrzędnych nazywamy punkt, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

27. Wyznacz współrzędne wszystkich punktów kratowych należących do wykresu funkcji f.

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{-2x-2}{x+9}$

c) $f(x) = \frac{2x+20}{x+7}$

d) $f(x) = \frac{3x+6}{x-2}$

28. Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność.

a) $\frac{x}{x+2} - 1 > x$

b) $\frac{x-5}{3x-1} > 3$

c) $\frac{1}{x-1} > \frac{2}{x+2}$

d) $\frac{x+2}{2x+1} \leqslant \frac{2}{x+1}$

29. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5}{|x-7|} = 1$

b) $\frac{6}{\sqrt{(1-3x)^2}} = 5$

c) $\left|\frac{x-1}{x+3}\right| = 1$

d) $\left|\frac{6x-3}{2x+1}\right| = 3$

e) $\frac{1}{|3-x|} = \frac{2}{|2x-1|}$

f) $\left|\frac{3}{|x+2|} - 1\right| = 8$

30. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{9}{|6x-3|} < 1$

b) $\frac{1}{|4-3x|} > 2$

c) $\frac{1}{|x+3|} \geqslant \frac{1}{|x-6|}$

31. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości. Określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

a) $f(x) = \frac{2}{|x|}$

b) $f(x) = \frac{2}{|x+1|} + 3$

c) $f(x) = \left|\frac{2}{x+1} + 3\right|$

d) $f(x) = \frac{2}{|x|+1} + 3$

e) $f(x) = \frac{|x|}{x-1}$

f) $f(x) = \frac{x}{|x-1|}$

32. Rozwiąż graficznie nierówność.

a) $\left|\frac{2x-1}{x+2}\right| < 3$

b) $\left|\frac{7-x}{x-3}\right| \geqslant 3$

c) $\left|\frac{1}{|x-1|}\right| < 1$

33. Dla jakich wartości parametru m równanie $\left|3 - \frac{6}{x-2}\right| = m$ ma dwa pierwiastki dodatnie?

D **34.** Przeczytaj zamieszczony w ramce przykład.

Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ jest rosnąca w przedziale $(-3;\infty)$.

Zakładamy, że $x_1 < x_2$ oraz $x_1, x_2 \in (-3;\infty)$. Wówczas:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2x_2}{x_2+3} - \frac{2x_1}{x_1+3} = \frac{2x_2(x_1+3)-2x_1(x_2+3)}{(x_2+3)(x_1+3)} = \frac{6(x_2-x_1)}{(x_2+3)(x_1+3)}$$

Z założeń wynika, że $x_2 - x_1 > 0$, $x_2 + 3 > 0$ i $x_1 + 3 > 0$, zatem $f(x_2)-f(x_1) > 0$, co oznacza, że funkcja f rośnie w przedziale $(-3;\infty)$.

a) Wykaż, że funkcja $f(x) = -\frac{2x}{x-2}$ jest rosnąca w przedziale $(2;\infty)$.

b) Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$ jest malejąca w przedziale $(-1;\infty)$.

35. Dla jakich wartości parametru m przedział $(0;4)$ jest zbiorem rozwiązań podanej nierówności?

a) $\frac{4}{x} > m$ b) $-\frac{2}{x} < m$ c) $\frac{1}{x} > m^2$

36. Wykres funkcji $f(x) = \frac{2x-1}{ax+6}$ nie ma punktów wspólnych z prostą $x = -2$. Oblicz a oraz wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z prostą $y = x$.

37. Funkcja homograficzna f jest malejąca w przedziałach $(-\infty;3), (3;\infty)$, jej wykres nie ma punktów wspólnych z prostą $y = 3$, a miejscem zerowym jest liczba 1. Wyznacz wzór funkcji f i rozwiąż nierówność $f(x) \leqslant 1$.

38. Proste o równaniach $y = -x + 1$ i $y = x + 5$ są osiami symetrii wykresu funkcji homograficznej f. Wykres ten przecina oś OY w punkcie $(0,2)$. Podaj wzór funkcji f i wyznacz jej miejsce zerowe.

39. Dwa samochody wyjechały jednocześnie z miasta A do miasta B, oddalonego od A o 560 km. Średnia prędkość pierwszego samochodu była o 10 km/h większa od średniej prędkości drugiego, więc przybył on na miejsce o godzinę wcześniej. Oblicz średnie prędkości obu samochodów.

40. Z dwóch miejscowości oddalonych od siebie o 126 km wyjechali naprzeciw siebie dwaj rowerzyści. Jeden z nich wyjechał godzinę później i jechał o 4 km/h szybciej. Rowerzyści spotkali się w połowie drogi. Oblicz średnią prędkość każdego z nich.

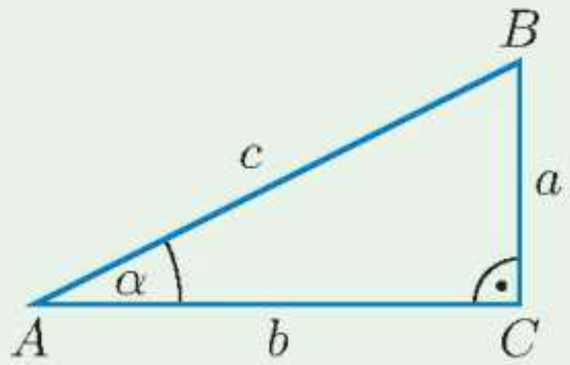
41. Drogę w dół rzeki z punktu A do punktu B motorówka przepływa w czasie o 22,5 minuty krótszym niż drogę powrotną. Odległość między punktami A i B wynosi 18 km, a prędkość własna motorówki jest równa 20 km/h. Oblicz prędkość prądu rzeki.

5.7. Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$



α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$

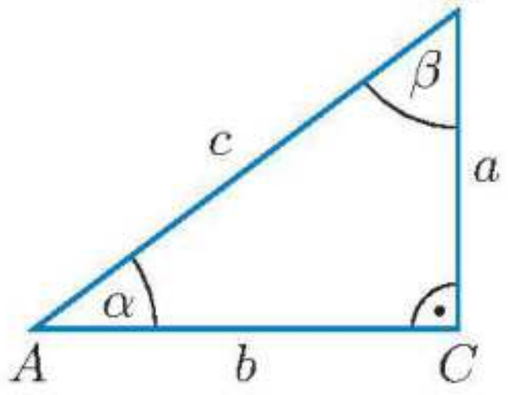
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

Zestaw I – wprowadzający

1. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta prostokątnego ABC (rysunek obok) oraz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α.

a) $a = 6$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$ c) $a = 6$, $\cos\alpha = \frac{1}{5}$

b) $a = 2$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ d) $c = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 3$



2. Rozwiąż trójkąt prostokątny ABC (rysunek powyżej), w którym:

a) $a = 40$, $\alpha = 30^\circ$, b) $b = 6$, $\alpha = 60^\circ$, c) $a = \sqrt{2} - 1$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{3}$.

3. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{12}{13}$, b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{4}$, c) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{7}{24}$.

4. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α.

a) $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ b) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{6}$ d) $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$

5. Oblicz miarę kąta ostrego α, jeśli wiadomo, że:

a) $\frac{3 - \sin\alpha}{5} = \frac{1}{2}$,

b) $\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha$,

c) $\sqrt{2}\sin\alpha - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$,

d) $\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha} = 0$,

e) $\frac{1 - \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{3}{2}$,

f) $\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin^3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2$.

6. Kąt α jest ostry oraz $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Nie wyznaczając wartości $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, oblicz wartość wyrażenia:

a) $\dfrac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\cos\alpha}$, b) $\dfrac{4\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$, c) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$.

7. Kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$, b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$, c) $\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)^2$.

8. Dla kątów ostrych α i β pewnego trójkąta prostokątnego zachodzi równość $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{7}{5}$. Oblicz:

a) $\cos\alpha + \cos\beta$, b) $\sin\alpha \cdot \sin\beta$, c) $\cos\alpha \cdot \cos\beta$.

9. Rozwiąż trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 10 oraz kątach ostrych α i β spełniających warunek:

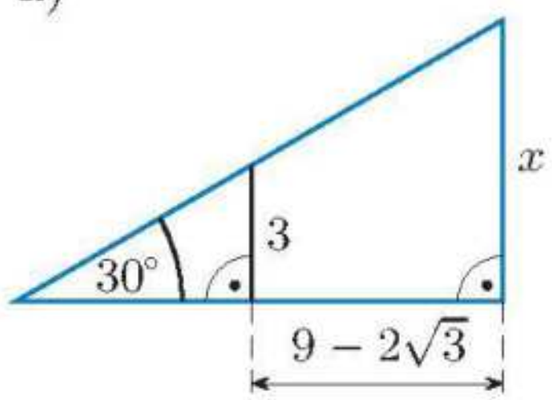
a) $\sin\alpha \cdot \cos\beta = 0{,}36$, b) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 2$, c) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1{,}5$.

10. Uprość wyrażenie tak, aby występowała w nim jedynie funkcja cosinus. Oblicz jego wartość dla $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, jeśli α jest kątem ostrym.

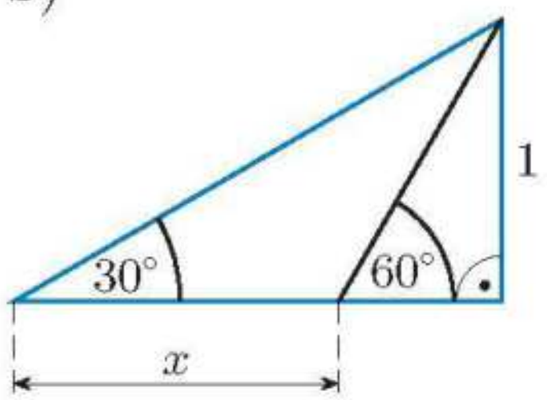
a) $\left(\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$ b) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$ c) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$

11. Oblicz x.

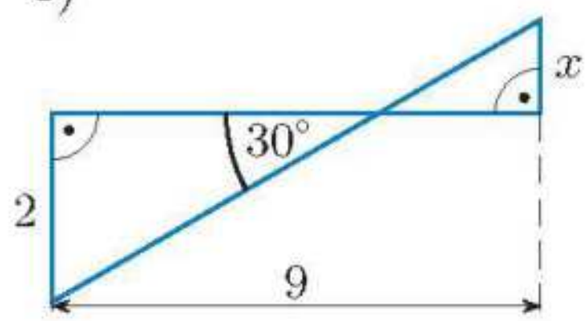
a)



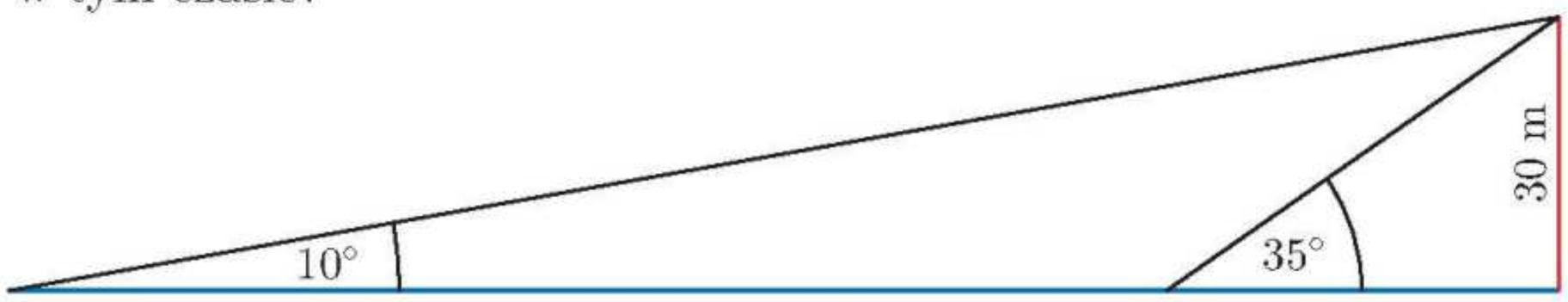
b)



c)



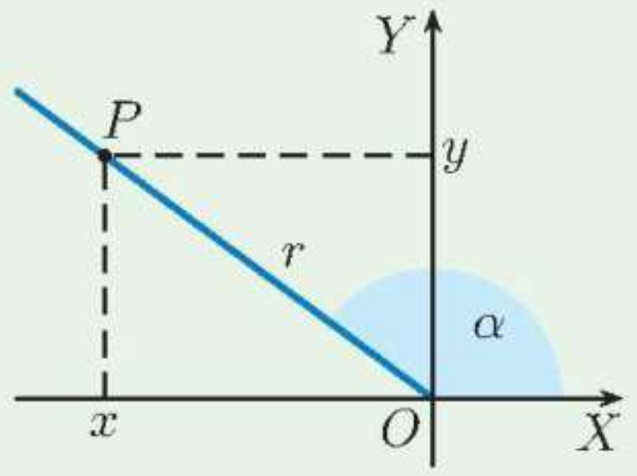
12. Wierzchołek latarni morskiej znajduje się 30 m nad poziomem morza. W kierunku latarni płynął ponton, z którego było widać jej wierzchołek pod kątem 10°. Po pewnym czasie ponton zbliżył się do latarni tak, że jej wierzchołek było widać pod kątem 35°. Jaką odległość przebył ponton w tym czasie?



13. Z jednego okna latarni morskiej widać kuter pod kątem 10°, a z drugiego, położonego 4 m wyżej – pod kątem 11°. Oblicz odległość kutra od latarni.

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in \langle 0°; 360° \rangle$. Wtedy:



$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}\ (x \neq 0),$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}\ (y \neq 0),$$

gdzie $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Tożsamości trygonometryczne

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\colon\ k \in \mathbf{Z}\right\}$

$\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi\colon\ k \in \mathbf{Z}\}$

$\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ oraz $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}\colon\ k \in \mathbf{Z}\right\}$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\colon\ k \in \mathbf{Z}\right\}$

$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi\colon\ k \in \mathbf{Z}\}$

Wzory redukcyjne

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$

Wzory redukcyjne można stosować dla tych kątów, dla których dana funkcja jest określona.

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$
$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$
$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

Zestaw II – ćwiczeniowy

14. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli do jego ramienia końcowego należy punkt A.

a) $A(8,6)$ b) $A(-3,-4)$ c) $A(5,-12)$ d) $A(4,-4)$

15. Oblicz.

a) $\sin 765^\circ$ c) $\operatorname{tg} 810^\circ$ e) $\sin(-1710^\circ)$ g) $\sin 960^\circ$

b) $\cos 1200^\circ$ d) $\cos(-1395^\circ)$ f) $\operatorname{tg} 420^\circ$ h) $\operatorname{tg}(-750^\circ)$

16. Oblicz.

a) $\dfrac{\cos^2 180^\circ - \sin 120^\circ \cdot \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 135^\circ}$ b) $\dfrac{\sin^4 405^\circ + \sin^2 405^\circ \cdot \cos^2 405^\circ}{\cos^2 405^\circ \cdot \operatorname{tg} 405^\circ}$

17. Wyznacz miarę łukową kąta środkowego w okręgu o promieniu r, opartego na łuku o długości l. Podaj miarę tego kąta w stopniach.

a) $r = 2,\ l = \pi$ b) $r = 8,\ l = 4\pi$ c) $r = 4,\ l = \frac{2}{3}\pi$ d) $r = 8,\ l = \frac{2}{3}\pi$

18. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta x.

a) $\sin x = \frac{1}{3}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ i $x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$

c) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i $x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$

d) $\operatorname{tg} x = -3$ i $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$

19. Sprawdź, czy istnieje taki kąt x, dla którego:

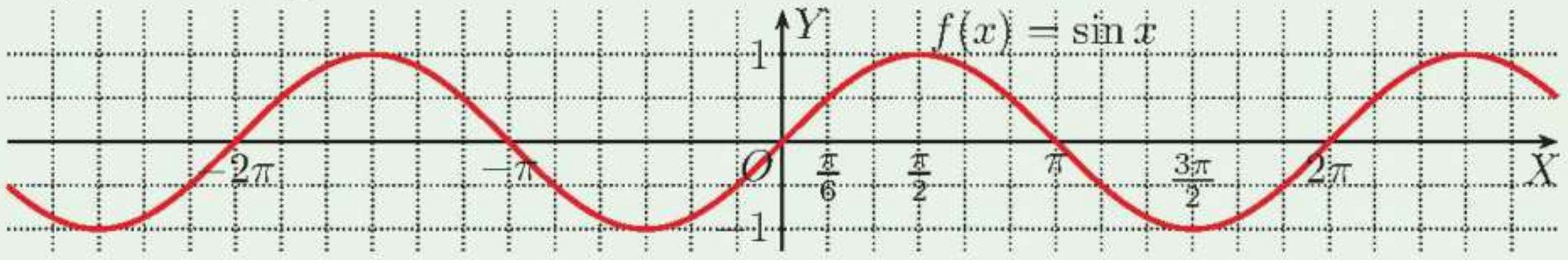
a) $\sin x = 0{,}6$ i $\cos x = 0{,}8$,

b) $\sin x = 0{,}5$ i $\cos x = 0{,}5$,

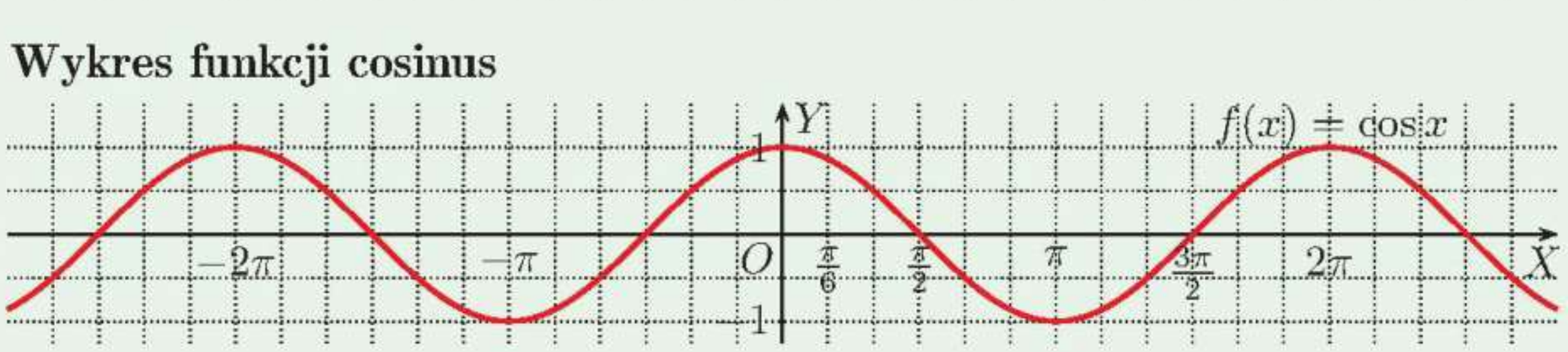
c) $\sin x = \frac{2}{3}$ i $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$,

d) $\sin x = \frac{5}{13}$ i $\operatorname{tg} x = \frac{5}{12}$.

Wykres funkcji sinus



Wykres funkcji cosinus



20. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$. Podaj jej dziedzinę, okres podstawowy, miejsca zerowe i przedziały monotoniczności.

21. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \sin x + 2$
b) $f(x) = \cos x - 1$
c) $f(x) = \frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}$
d) $f(x) = 2\operatorname{tg} x + 1$
e) $f(x) = 3\cos x - 2$
f) $f(x) = 2\cos x + 3$

22. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$
b) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$
c) $f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{6})$

23. Wyznacz okres podstawowy funkcji f i naszkicuj jej wykres. Odczytaj z niego zbiór wartości funkcji f oraz jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = -2\sin 2x$
b) $f(x) = -3\cos \frac{1}{2}x$
c) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$
d) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
e) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$
f) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$
g) $f(x) = 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$
h) $f(x) = 2 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

24. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 3x = \frac{1}{2}$
b) $\sin(3x - \frac{\pi}{2}) = 0$
c) $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$
d) $\cos^2(2x - \frac{\pi}{4}) = 1$
e) $2\cos(3x - \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$
f) $\sqrt{3}\operatorname{tg}(3x + \frac{2}{3}\pi) = 1$
g) $2\sin^2 2x = 1$
h) $\operatorname{tg}^2 2x = 1$
i) $|\cos 2x - 1| = \frac{1}{2}$

25. Rozwiąż nierówność dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

a) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$
b) $\sqrt{2}\cos x \geqslant 1$
c) $2\cos 4x > -1$
d) $\sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\cos \frac{x}{2} > \frac{1}{2}$
f) $3\operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}$
g) $2\sin(x + \frac{\pi}{6}) \geqslant \sqrt{3}$
h) $2\cos(x - \frac{\pi}{4}) \leqslant -\sqrt{2}$
i) $\sqrt{3}\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) > 3$

26. Rozwiąż nierówność.

a) $2\sin^2 x < 1$
b) $4\cos^2 x - 3 \leqslant 0$
c) $\sin^2 x - 1 \geqslant 0$
d) $\operatorname{tg}^2 x \leqslant 1$
e) $\sin x \cos x > 0$
f) $2|\cos x| \geqslant 1$
g) $|3\operatorname{tg} x| \leqslant \sqrt{3}$
h) $|4\sin x + 1| < 3$
i) $|4\cos x - 1| > 1$

27. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji f.

a) $f(x) = |1 - \operatorname{tg} x| - 2$
b) $f(x) = 2 - 3|\sin x|$
c) $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + 1$
d) $f(x) = 3\sin^2 x + 2\cos^2 x$
e) $f(x) = \dfrac{1}{1 - \operatorname{tg} x}$
f) $f(x) = \dfrac{1}{2 + |\sin x|}$

28. Naszkicuj wykres funkcji f. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma rozwiązanie?

a) $f(x) = |\sin x| - 1$
b) $f(x) = 3 - 2|\cos x|$
c) $f(x) = |\operatorname{tg} x| - 4$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Jeśli $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$, to:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Jeśli $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$, to:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Zestaw III – podsumowujący

D 29. Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

c) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$

d) $\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

D 30. Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = \frac{2}{\sin^2 x}$

b) $\sin x\cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$

c) $\frac{1-\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{2}{\cos x}$

d) $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin^2 x$

e) $\operatorname{tg} x(\cos x + \cos^2 x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$

f) $1 + \cos^2 2x = 2(\sin^4 x + \cos^4 x)$

31. Oblicz.

a) $\sin\frac{\pi}{8}$

b) $\cos\frac{7}{12}\pi$

c) $\sin 13^\circ\cos 17^\circ + \sin 17^\circ\cos 13^\circ$

d) $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{15} - \cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{15}$

e) $\sin 105^\circ\cos 105^\circ$

f) $\cos^2 105^\circ - \cos^2 195^\circ$

32. Wiadomo, że $\sin x = \frac{4}{5}$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Oblicz:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, b) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, c) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, d) $\sin 2x$.

33. Oblicz $\sin x$ i $\cos x$, jeśli wiadomo, że:

a) $\cos 2x = 0{,}6$ i $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

b) $\cos 2x = 0{,}6$ i $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$,

c) $\sin\frac{x}{2} = \frac{5}{13}$ i $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

d) $\sin\frac{x}{2} = \frac{5}{13}$ i $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

34. Rozwiąż równanie.

a) $\sin^2 x = 1 - \cos x$

b) $2\sin^2 x = \cos 2x$

c) $2\cos^2 x = \sin 2x$

d) $\sin 4x = \cos 2x$

e) $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$

f) $\sin 2x \operatorname{tg} x = 1$

35. Rozwiąż równanie dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$

b) $2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$

c) $2\sin^2 x = 1 - \sin x$

d) $2\cos^2 x = \sin x - 1$

e) $2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x - 2 = 0$

f) $2\cos^3 x - 3\sin^2 x = 2\cos x - 3$

36. Rozwiąż równanie.

a) $\cos 2x + 2 = 2\sqrt{2}\cos x$

b) $2\sin^4 x - \sin^2 x = 0$

c) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$

d) $4\cos^4 x - 7\cos^2 x + 3 = 0$

e) $\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x = 0$

f) $3\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1 = 0$

37. Wyznacz największe rozwiązanie równania należące do przedziału $\langle 0; \pi \rangle$.

a) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos x = 0$

b) $\cos 2x + 7\sin x + 3 = 0$

c) $2\sin^3 x + 3\cos^2 x - 2\sin x = 3$

d) $2\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

38. Rozwiąż równanie.

a) $\sin^2 2x + 6\sin^2 x = 6$

b) $2\sin^2 2x + 3\cos 2x = 0$

c) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$

d) $\sin 8x - \sin 4x = 0$

39. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2\sin^2 x + \sin x}{\sin 2x} = 0$

b) $\frac{2\cos^2 x - 3\cos x + 1}{4\cos^2 x - 1} = 0$

c) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - 3} = \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 3}$

d) $2\sqrt{2} - 2\sin x = \frac{\cos 2x + 1}{\sin x}$

D **40.** Udowodnij poniższą równość.

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

41. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x + \cos x = 0$

b) $\sin x - \cos x = 1$

c) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

42. Wyznacz pierwiastki równania należące do przedziału $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.

a) $4\cos 5x \sin 2x + 2\sin 3x = \sqrt{2}$

b) $2\sin 3x + 4\sin x \cos 4x = 1$

c) $4\cos 6x \cos 2x - 1 = 2\cos 8x$

d) $\sin 3x \cos x + \frac{1}{2} = \sin x \cos x$

43. Rozwiąż nierówność w przedziale $(0; 2\pi)$.

a) $(\sin x - 2)^2 \leqslant \frac{9}{2} - 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

b) $(\cos 2x - 2)^2 \leqslant 8\sin^2 x + \frac{1}{4}$

c) $\cos^4 x + \sin^4 x \leqslant 1$

d) $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x \geqslant \frac{1}{4}$

44. Naszkicuj wykres funkcji f. Czy jest to funkcja okresowa?

a) $f(x) = \sin 2x - |\sin 2x|$

b) $f(x) = |\cos x| - \cos x$

45. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej miejsca zerowe należące do przedziału $\langle 1; 5 \rangle$.

a) $f(x) = |\cos x \cos(\frac{\pi}{3} - x) + \sin x \sin(\frac{\pi}{3} - x)|$

b) $f(x) = 4|\sin(x + \frac{\pi}{3})\cos(x + \frac{\pi}{3})|$

46. Naszkicuj wykres funkcji f i rozwiąż nierówność $f(x) \geqslant 0$.

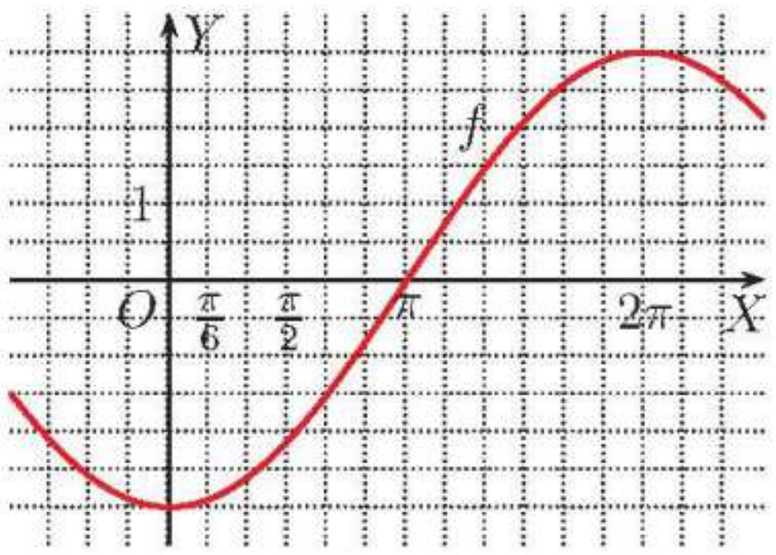
a) $f(x) = \cos \pi x$

b) $f(x) = \sin 2\pi x$

47. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji postaci $f(x) = a\cos(bx)$.

a) Podaj współczynniki a i b.

b) Rozwiąż nierówność $2f(x) > 3$.



48. Wyznacz najmniejszą dodatnią wartość sumy $x + y$, jeżeli:

$$\frac{1}{2\cos x \cdot \cos y} = 1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$$

D **49.** Wykaż, że jeżeli $x - y = \frac{\pi}{2}$, to $\sin^4(x + y) - \cos^4(x + y) = \cos 4x$.

50. Podaj największy ujemny pierwiastek równania $\frac{a\sin 2x}{\operatorname{tg} x} - 8\cos^4 x = 0$, jeżeli:

$$a = \frac{(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2}{\sin 125^\circ \cdot \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cdot \cos 125^\circ}$$

51. Oblicz $\sin\alpha + \cos\alpha$, jeżeli $\frac{2\cos\alpha}{1-\sin\alpha} + \frac{2\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = 5$ oraz $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

52. Na podstawie wykresów funkcji f i g danych wzorami:

$f(x) = \sqrt{2}\left|\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \sin(x - \frac{\pi}{4})\right|$,

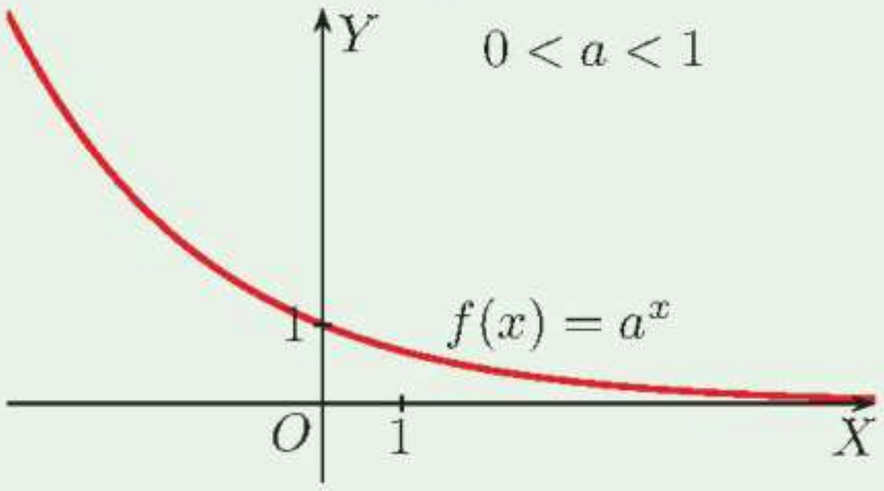
$g(x) = 2\left(\sin(x - \frac{\pi}{6})\cos(x - \frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{\pi}{3} - x)\cos(\frac{\pi}{6} - x)\right)$

podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant g(x)$ w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$.

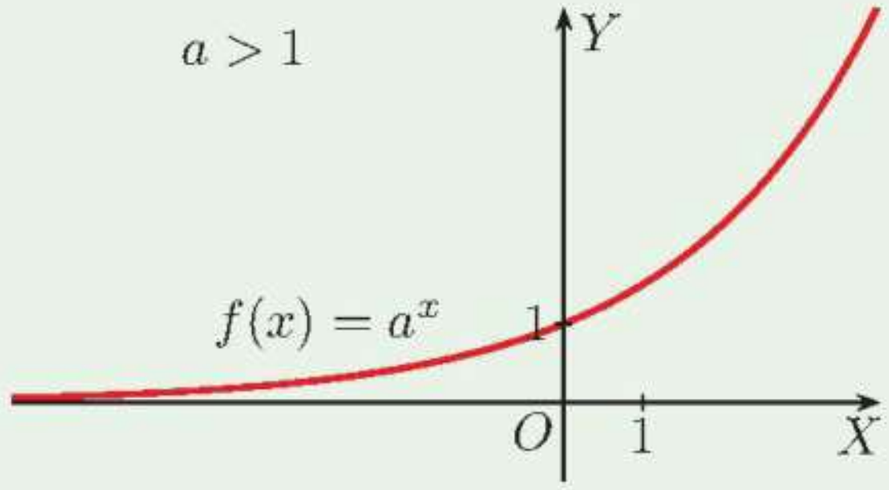
5.8. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Funkcja wykładnicza

Funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją wykładniczą**.



Dla $a \in (0;1)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1;\infty)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca.

Logarytm

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, wówczas:

$$\log_a b = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^x = b$$

Jeżeli a, b, x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$\log_a a^x = x$

$a^{\log_a b} = b$

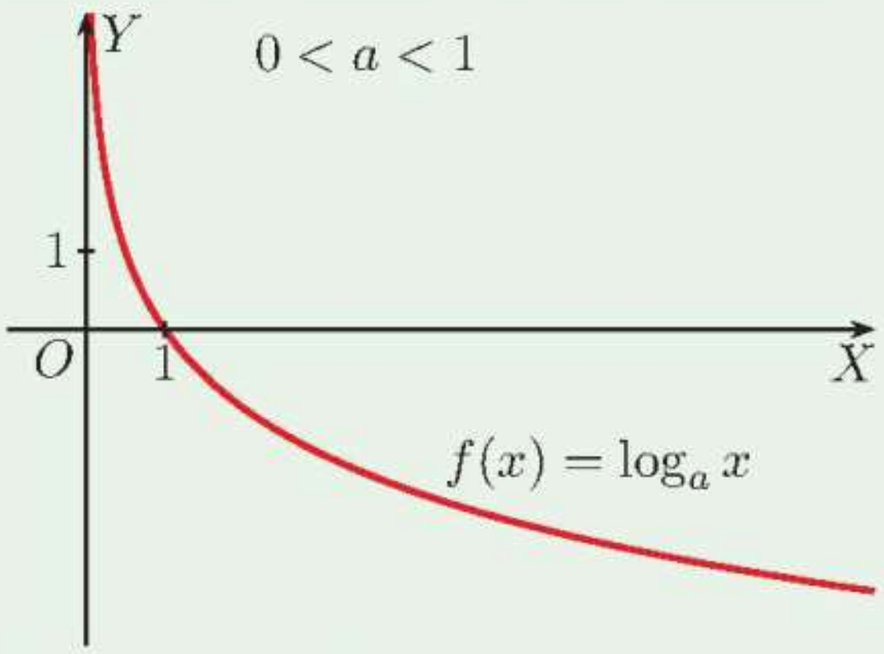
$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

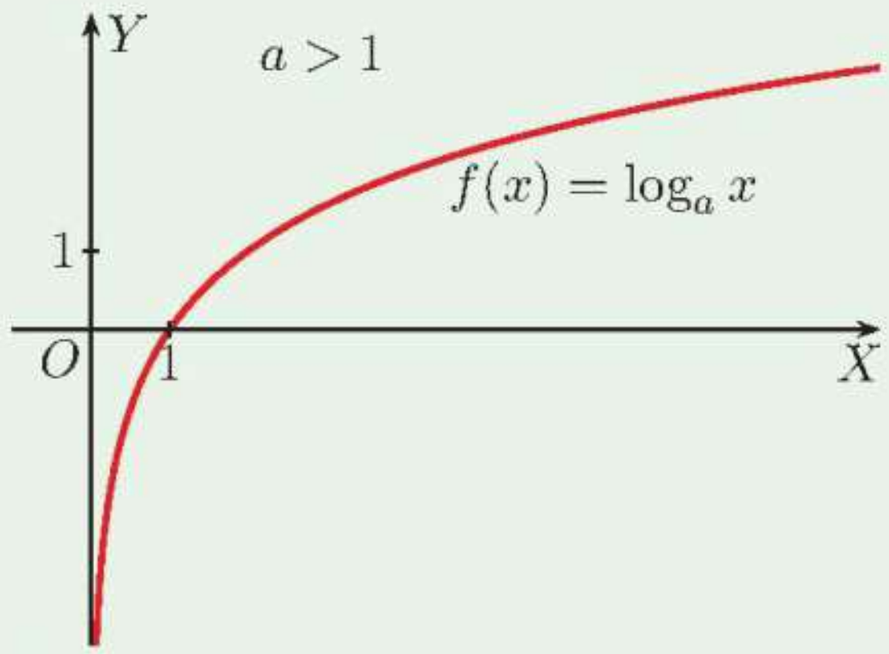
$\log_a x^p = p \log_a x$, gdzie $p \in \mathbf{R}$

Funkcja logarytmiczna

Funkcję postaci $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, określoną dla $x \in (0;\infty)$, nazywamy **funkcją logarytmiczną**.



Dla $a \in (0;1)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1;\infty)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca.

Zestaw I – wprowadzający

1. Przedstaw liczbę w postaci a^x, gdzie $a \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{Q}$.

a) $3^{\frac{7}{4}} \cdot 9^{-\frac{3}{8}}$ c) $32^{\frac{7}{5}} \cdot \sqrt[3]{2^4}$ e) $\sqrt[4]{27^3} \cdot \left(\sqrt[3]{9}\right)^{-2}$

b) $25^{\frac{3}{4}} : 125^{-\frac{5}{2}}$ d) $\sqrt[5]{64} : (0{,}5)^{\frac{3}{5}}$ f) $(0{,}04)^{-\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[4]{5^3}$

2. Oblicz.

a) $\left[4 \cdot (0{,}5)^{\sqrt{3}}\right]^{2+\sqrt{3}}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}} \cdot 2^{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{5}^{\sqrt{5}} \cdot 5^{\sqrt{5}+1} \cdot 125^{1-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ d) $(2-\sqrt{3})^{\sqrt{2}}(2+\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$

3. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x) = (2m-3)^x$ b) $f(x) = (1-4m)^{-x}$ c) $f(x) = (2-m^2)^x$

4. Określ, do którego z przedziałów: $(0;1)$ czy $(1;\infty)$ należy liczba a, jeżeli:

a) $a^{\sqrt{2}} < a^{\sqrt{3}}$, b) $a^{\frac{1}{\sqrt{2}}} < a^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$, c) $a^{-2} < a^{-3}$, d) $a^3 > \frac{1}{a^2}$.

5. Porównaj liczby. Wpisz odpowiedni symbol: $<$, $>$ lub $=$ w miejsce ?.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$? $\sqrt{2}^{\,0,5}$ b) $0{,}6^{\,-3}$? $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ c) $2{,}5^{\,2,5}$? $0{,}4^{\,-2,5}$

6. Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $9\sqrt{3}$, $27^{\frac{3}{2}}$, $3^{\sqrt{3}}$, $9^{2,1}$ b) $0{,}8^{\sqrt{2}}$, $\left(\frac{16}{25}\right)^{1,5}$, $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1,8}$, $\left(\frac{4}{5}\right)^{\sqrt{5}}$

7. Naszkicuj wykres funkcji f. Z wykresu odczytaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 1.

a) $f(x) = 2 - 2^{-x}$ b) $f(x) = 27 \cdot 3^x - 2$ c) $f(x) = -2^{x+1} + 3$

8. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie?

a) $f(x) = 9 \cdot 3^x - 1$ b) $f(x) = \sqrt{2} - 4^{-x}$ c) $f(x) = 5^{2x+1} - 5^x$

9. Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = 4 \cdot 2^x - 1$, $g(x) = 3^{x+1}$ b) $f(x) = 2^{2x-4}$, $g(x) = \frac{9}{3^x}$

10. Oblicz.

a) $\log_2 16$ c) $\log_2 \frac{1}{8}$ e) $\log_{0,5} 32$ g) $\log_{\sqrt{2}} 16$

b) $\log_{16} 2$ d) $\log_{\frac{1}{16}} 2$ f) $\log_8 \sqrt{2}$ h) $\log_{32} 2\sqrt{2}$

11. Oblicz.

a) $\log_{0,4} \frac{5}{3} + \log_{0,4} 3 - \log_{0,4} 2$ c) $3\log 2 - \log 0{,}2 + \log 25$

b) $\log_9 15 - \log_9 \frac{20}{3} + 2\log_9 6$ d) $\log_{\sqrt{2}} 6 + 2\log_{\sqrt{2}} 2 - \log_{\sqrt{2}} 3$

12. Oblicz podstawę logarytmu.

a) $\log_a 81 = 4$ c) $\log_a 9 = -2$ e) $\log_a \frac{8}{125} = 3$

b) $\log_a 81 = -4$ d) $\log_a 9 = \frac{1}{2}$ f) $\log_a \frac{8}{125} = -1$

13. Oblicz x.

a) $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$ c) $\log_{(x+2)} 27 = 3$ e) $\log_{(x^2-4)} 5 = 1$

b) $\log_{\sqrt{3}} x = 3$ d) $\log_{(x+1)} 9 = 2$ f) $\log_{(x+1)} (x^2+3) = 2$

14. Oblicz x.

a) $\log_4 x = 2\log_4 6 - \log_4 \frac{9}{4}$ c) $\log x = -2 + 3\log 5 - \log 0{,}25$

b) $\log_{0,5} x = 1 + 2\log_{0,5} 3$ d) $\log_3 x = 2\log_3 4 - \log_3 12 - 1$

15. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest malejąca?

a) $f(x) = \log_{(3-2m)} x$ b) $f(x) = \log_{(m-2)}(-x)$

16. Naszkicuj wykres funkcji f. Z wykresu odczytaj, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości większe od 1.

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+3) + 1$ b) $f(x) = \log_2(x+1) - 1$

Zestaw II – ćwiczeniowy

17. Rozwiąż graficznie równanie.

a) $2^{x+1} + 2^{-x} = 3$ b) $2^{|x|} = x + 1$ c) $2|x| = 3^x - 1$

18. Rozwiąż równanie.

a) $16^{x^2} = 2^{2x}$ b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x-2} = 81^{1-x^2}$ c) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-2} = 80$

19. Rozwiąż nierówność.

a) $9^{2x-5} \geqslant 27\sqrt{3}$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} \leqslant 0{,}04$ c) $25 \cdot (0{,}2)^{x^2} \leqslant 5^x$

20. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności tej funkcji. Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie $f(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

a) $f(x) = 2|2^x - 2|$ b) $f(x) = \left|\frac{1-3^{x+1}}{3^x}\right|$ c) $f(x) = 2^{-|x|} + 4$

Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu

Jeśli a, b, x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, $b \neq 1$, to:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

21. Oblicz.

a) $\log_2 25 \cdot \log_{\sqrt{5}} 2$

b) $\log_{0,25} 27 \cdot \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{8}$

c) $9^{6\log_{81} 2+\log_3 2}$

d) $5^{\log_{25} 8+\log_{\frac{1}{5}} 4}$

e) $(\sqrt{8})^{\frac{1}{3\log_5 2}}$

*f) $3^{\log_7 4} - 4^{\log_7 3}$

22. Niech $a = \log_2 3$ i $b = \log_2 10$. Wyraź liczbę p za pomocą a i b.

a) $p = \log 3$

b) $p = \log 4$

c) $p = \log 5$

d) $p = \log 6$

e) $p = \log_{\frac{1}{2}} 10$

f) $p = \log_{\frac{1}{10}} 30$

23. Oblicz $\sqrt{abc}$, jeżeli wiadomo, że:

a) $\log_a 2 = \frac{1}{4}$, $\log_{\sqrt{2}} b = 8$, $\log_{0,25} c = -2$,

b) $a = \log_2 6$, $b = \log_6 8$, $c = \log_8 32$,

c) $a = \log_3 4$, $b = \log_5 81$, $c = \log_4 5$.

24. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz podaj jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = \log_{0,2}(1 - x^2)$

b) $f(x) = \log(3 - 4x)$

c) $f(x) = \log_{0,1}|x - 7|$

d) $f(x) = \log_2(x^2 - 3x)$

25. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \log_4\left(\log_{\frac{1}{4}}(x - 3)\right)$

b) $f(x) = \log_{(x-1)}(3 - x)$

c) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(10 - x^2)}$

d) $f(x) = \log_{(x^2-1)}(x + 1)$

26. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \log_2 x$. Naszkicuj wykres funkcji g oraz podaj jej dziedzinę, zbiór wartości i przedziały monotoniczności.

a) $g(x) = f(x + 3) - 1$ b) $g(x) = 1 - f(x - 2)$ c) $g(x) = |f(x + 2)|$

27. Naszkicuj wykres funkcji f oraz podaj jej dziedzinę, zbiór wartości i przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = |\log_2(x + 1) + 2|$

b) $f(x) = \left|1 - \frac{1}{2}\log_2 x^2\right|$

28. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g. Odczytaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant g(x)$.

a) $f(x) = 3 + \log_{\frac{1}{3}}(x + 2)$, $g(x) = \log_3(x - 4)$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 3)$, $g(x) = 2 - \log_2 x$

D 29. Wykaż, że nierówność jest prawdziwa.

a) $\frac{1}{\log_3 16} + \frac{1}{\log_5 16} < 1$

b) $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_{\sqrt{2}} 2} > 2$

D 30. Wykaż, że jeśli:

a) $a = \log_3 15$, to $\log_3 \sqrt{5} = \frac{a-1}{2}$,

b) $a = \log_{18} 27$, to $\log_9 2 = \frac{3-2a}{2a}$.

Zestaw III – podsumowujący

31. Dla jakich wartości parametru m równanie ma pierwiastek ujemny?

a) $\log_{0,5}(x+1) = m^2 - 2$ b) $\log_2 m = 4 - x$

32. Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych?

a) $f(x) = \log_2(x^2 + 3x - m)$ b) $f(x) = \log(x^2 - 3mx + 1)^2$

D **33.** Uzasadnij, że funkcja f jest rosnąca.

a) $f(x) = \log_{0,1}(\log_{0,5} x)$ b) $f(x) = \log_{0,1}(-x)$

34. Wyznacz liczbę p, dla której zachodzi równość:

a) $\log_{\sqrt{2}}(\log_{0,5} p) = 0$,
b) $\log_{0,5}(\log_2 p) = 1$,
c) $\log_2(\log_{\sqrt{2}} p) = 2$,
d) $\log_3(\log_2(\log_4 p)) = 1$.

35. Wyznacz liczbę q, dla której zachodzi równość:

a) $\log_2 q = \log_{0,5} q + \log_{\sqrt{2}} 5$, b) $\log_{0,1} q = 2 - 2\log 5 + \log 4$.

D **36.** Wykaż, że dla dowolnej liczby $x \in \mathbf{R}$ zachodzi równość:

$$\left|\log\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\right| = \left|\log\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)\right|$$

Okres połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego to czas T, po którym masa próbki tego izotopu zmniejszy się o połowę. Jeśli m_0 jest początkową masą próbki, to masa próbki po upływie czasu t jest równa:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

37. Okres połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego pewnego pierwiastka wynosi 16 godzin. Po jakim czasie próbka tego izotopu straci:

a) 75% swojej masy, b) 87,5% swojej masy?

38. Okres połowicznego rozpadu izotopu węgla ^{14}C wynosi około 5730 lat. Jaką masę będzie miała próbka tego izotopu o masie początkowej 96 gramów po upływie:

a) 17 190 lat, b) 22 920 lat?

39. Masa próbki izotopu promieniotwórczego pewnego pierwiastka wynosiła 48 gramów, a po 24 dniach zmniejszyła się do 6 gramów. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu.

5.9. Ciągi

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich. Ciąg a: $\mathbf{N}_+ \to \mathbf{R}$ oznaczamy (a_n), a kolejne jego wartości nazywamy **wyrazami** i oznaczamy: $a_1, a_2, a_3, \ldots$
Ciągiem skończonym k-wyrazowym nazywamy funkcję, której dziedziną jest skończony zbiór liczb $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$.

Ciągi monotoniczne

Ciąg (a_n) nazywamy:
- **rosnącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} > a_n$,
- **malejącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} < a_n$,
- **nierosnącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} \leqslant a_n$,
- **niemalejącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} \geqslant a_n$,
- **stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy ciągu są równe.

Ciąg arytmetyczny

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągiem arytmetycznym**, jeżeli istnieje taka liczba r, że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ zachodzi równość:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu (a_n).

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1+(n-1)r}{2} \cdot n$$

Ciąg geometryczny

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągiem geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q, że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ zachodzi równość:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu (a_n).

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Zestaw I – wprowadzający

1. Oblicz $3a_9 + b_{12}$.

a) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-6}{n}$, $b_n = (-1)^{n+1}\sqrt{4n+1}$

b) $a_n = \log_3 n$, $b_n = \log_4(5n+4)$

2. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (c_n), gdzie $c_n = a_n \cdot b_n$ oraz:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 2n+5 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2^n - n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

3. Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n)?

a) $a_n = 4n - 15$ b) $a_n = n^2 - 10n + 16$ c) $a_n = (2n-3)(2n-9)$

4. Zaproponuj wzór ogólny ciągu.

a) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ e) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \ldots$

b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$ d) $2, -4, 6, -8, 10, \ldots$ f) $2, 2\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{3}, 2, \ldots$

D **5.** Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący.

a) $a_n = \frac{1}{n+1}$ b) $a_n = 2 + \frac{4}{n}$ c) $a_n = \frac{5}{2n+1}$

6. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

a) $a_n = n^2 + n + 1$ d) $a_n = \frac{4n+1}{2n+1}$ g) $a_n = n^3 - n$

b) $a_n = 4n - n^2$ e) $a_n = \frac{2-6n}{1-3n}$ h) $a_n = \sqrt{n+4}$

c) $a_n = n^2 - 6n + 8$ f) $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$ i) $a_n = (-1)^{n+1}$

7. Dane są pierwsze trzy wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n). Podaj wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy a_5 i a_8.

a) $1, 3, 5, \ldots$ b) $8, 3, -2, \ldots$ c) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \ldots$

8. Oblicz n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r.

a) $a_1 = -4$, $r = 2$, $n = 7$ c) $a_2 = 3$, $r = -2$, $n = 15$

b) $a_1 = 3$, $r = -5$, $n = 10$ d) $a_2 = 2$, $r = -\frac{1}{2}$, $n = 20$

9. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = \frac{2n+1}{4}$ b) $a_n = n^2 - 1$ c) $a_n = \sqrt{3}n - 1$ d) $a_n = \frac{n}{n+1}$

10. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n). Określ monotoniczność tego ciągu.

a) $a_1 = 1$, $a_5 = 9$ b) $a_4 = -6$, $a_{10} = 12$ c) $a_3 = 0$, $a_6 = 2$

11. Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego podane warunki.

a) $\begin{cases} a_1 + a_2 = -6 \\ a_2 + a_4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 + a_3 = 2 \\ a_2 \cdot a_4 = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_3 \cdot a_5 = -8 \\ a_3 + a_7 = -2 \end{cases}$

12. Dla jakich wartości x podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego? Podaj te wyrazy.

a) $2x - 1,\ 2x + 5,\ 3x + 4$ b) $(x + 1)^2,\ (2x + 1)^2,\ (3x - 1)^2$

13. a) Wyznacz takie liczby a, b, c, aby liczby 3, a, b, c, 63 tworzyły ciąg arytmetyczny.

b) Między liczby $12+\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ wstaw pięć takich liczb, aby wszystkie razem tworzyły ciąg arytmetyczny.

14. a) W ciągu arytmetycznym suma wyrazów drugiego i trzeciego jest równa -4, natomiast różnica wyrazów szóstego i dziesiątego jest równa 8. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

b) W ciągu arytmetycznym suma wyrazów drugiego i szóstego jest równa 4, natomiast iloczyn wyrazów czwartego i siódmego jest równy 22. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

15. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n).

a) $a_1 = \frac{3}{2},\ r = \frac{1}{2},\ n = 12$ c) $a_1 = -3,\ a_3 + a_4 = 9,\ n = 15$

b) $a_1 = 1 - \sqrt{2},\ r = \sqrt{2},\ n = 9$ d) $a_2 = 2,\ a_{12} - a_9 = 15,\ n = 7$

16. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych dodatnich, które:

a) przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2,

b) są podzielne przez 4 lub są podzielne przez 6.

17. Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0, a suma jedenastu początkowych wyrazów jest równa 220. Który wyraz tego ciągu jest równy 25?

18. Czwarty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 6. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

19. Lewa strona równania jest sumą kilku początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

a) $2 + 4 + 6 + \ldots + x = 110$ c) $1 + 5 + 9 + \ldots + (4x - 3) = 120$

b) $5 + 1 - 3 - \ldots - x = -72$ d) $-4 - 1 + 2 + \ldots + (3x + 2) = 72$

20. S_n jest sumą n początkowych wyrazów ciągu (a_n). Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

a) $S_n = n^2$ b) $S_n = n^2 - 1$ c) $S_n = n^3 - 1$

D **21.** Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg (b_n) też jest ciągiem arytmetycznym.

a) $b_n = a_{2n}$ b) $b_n = a_{2n+1}$ c) $b_n = 2a_n - 5$

22. Dane są trzy początkowe wyrazy ciągu geometrycznego (a_n). Podaj wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy a_6 i a_{10}.

a) $2, 4, 8, \ldots$ b) $9, 3, 1, \ldots$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \sqrt{2}, \ldots$

23. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n). Oblicz wyrazy a_4 i a_7.

a) $a_1 = -3$, $q = 2$ c) $a_1 = 3$, $q = -\sqrt{2}$ e) $a_3 = 3$, $a_6 = -81$

b) $a_1 = 4$, $q = -1$ d) $a_2 = 2$, $a_3 = 1$ f) $a_1 = 2\sqrt{3}$, $\frac{a_5}{a_2} = 3\sqrt{3}$

24. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n). Określ monotoniczność tego ciągu.

a) $a_3 = 8$, $a_4 = 16$ b) $a_2 = 18$, $a_5 = \frac{16}{3}$ c) $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_7 = -2\sqrt{2}$

25. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

a) $a_n = \frac{2^n}{3}$ b) $a_n = 4 \cdot 5^{n+2}$ c) $a_n = 1 + 2^n$ d) $a_n = 3^n \cdot 5^{n-1}$

D **26.** Wykaż, że ciąg $a_n = 3 \cdot 2^n$ jest ciągiem geometrycznym. Czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym?

a) $b_n = (a_n)^2$ b) $b_n = 5 \cdot a_n$ c) $b_n = 1 - a_n$

D **27.** Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to ciąg (b_n) też jest ciągiem geometrycznym.

a) $b_n = a_{2n}$ b) $b_n = a_{2n+1}$ c) $b_n = a_{n+1} - a_n$

28. a) Między liczby 7 i 189 wstaw dwie takie liczby, aby wszystkie razem tworzyły ciąg geometryczny.

b) Między liczby 6 i 96 wstaw trzy takie liczby, aby wszystkie razem tworzyły ciąg geometryczny rosnący.

c) Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa $4\frac{1}{3}$, a ich iloczyn jest równy 1. Znajdź te liczby.

29. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n).

a) $a_1 = 5$, $q = \frac{3}{2}$, $n = 5$ c) $a_3 = -1$, $a_6 = \frac{1}{8}$, $n = 6$

b) $a_1 = \sqrt{2}$, $q = -1$, $n = 45$ d) $a_1 \cdot a_4 = \sqrt{5}$, $a_2 = 1$, $n = 7$

30. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 10, a iloraz jest równy 2. Ile co najmniej początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać liczbę: a) większą od 600, b) większą od 1500?

31. a) Dany jest ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_1 = 3$ i $a_3 = 12$. Suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu równa się 9. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

b) Dany jest ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_2 + a_3 = 8$ i $a_4 + a_5 = 2$. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

32. W ciągu geometrycznym suma drugiego i czwartego wyrazu jest równa 300, a suma trzeciego i piątego jest równa 225. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać 592?

33. W ciągu geometrycznym $a_1 = 2$ i $a_2 = -\sqrt{2}$. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu:

a) o numerach parzystych, b) o numerach nieparzystych.

34. Kapitał w wysokości 1000 zł złożono w banku na procent składany. Jaka będzie wielkość kapitału po n latach przy oprocentowaniu rocznym r?

a) $n = 2$, $r = 4\%$ b) $n = 6$, $r = 5\%$ c) $n = 10$, $r = 4\%$

35. Bank przyjął kwotę 10 000 zł na 3% rocznie i pożyczył ją na 8% rocznie. Ile zyska bank w ciągu czterech lat, a ile – w ciągu ośmiu lat?

36. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał 500 zł złożony w banku na pięć lat, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 4%, a odsetki są kapitalizowane:

a) co pół roku, b) co dwa miesiące, c) co miesiąc?

37. W bankach A, B, C lokaty terminowe są oprocentowane 2% w skali roku. W banku A odsetki są kapitalizowane co rok, w banku B – co kwartał, a w banku C – co miesiąc. Do każdego z tych banków wpłacono 2000 zł. W którym banku odsetki od tej kwoty po roku będą największe? O jaki procent wzrośnie kapitał w każdym z tych banków po roku?

38. Banki A, B, C i D oferują następujące warunki oprocentowania lokat:
bank A – 5,6% rocznie, odsetki kapitalizowane co miesiąc,
bank B – 5,65% rocznie, odsetki kapitalizowane co kwartał,
bank C – 5,75% rocznie, odsetki kapitalizowane co pół roku,
bank D – 5,8% rocznie, odsetki kapitalizowane co rok.
Który z tych banków oferuje najkorzystniejsze warunki?

Zestaw II – ćwiczeniowy

39. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie. Wypisz pięć początkowych wyrazów tego ciągu. Zbadaj, czy jest to ciąg monotoniczny.

a) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$, $n \geqslant 1$

b) $a_1 = -4$, $a_{n+1} = a_n + n$, $n \geqslant 1$

c) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n - n^2$, $n \geqslant 1$

d) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$, $n \geqslant 1$

40. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie. Czy jest to ciąg arytmetyczny lub geometryczny?

a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n$, $n \geqslant 1$

b) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = a_n - 6$, $n \geqslant 1$

c) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n - 1$, $n \geqslant 1$

d) $a_1 = -5$, $a_{n+1} = 3^n a_n$, $n \geqslant 1$

41. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu (a_n).

a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n - n^2$, $n \geqslant 1$

b) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = na_n - 1$, $n \geqslant 1$

42. Ciąg (a_n) jest rosnący i wszystkie jego wyrazy są ujemne. Zbadaj monotoniczność ciągu (b_n).

a) $b_n = 3a_n - 1$

b) $b_n = -2a_n + 4$

c) $b_n = \frac{1}{a_n}$

43. Ciąg (a_n) jest malejący i wszystkie jego wyrazy są dodatnie. Zbadaj monotoniczność ciągu (b_n).

a) $b_n = 4a_n - 1$

b) $b_n = -a_n^2$

c) $b_n = \sqrt{a_n^2 + 1}$

d) $b_n = a_n^2 + a_n$

e) $b_n = \frac{10}{a_n}$

f) $b_n = -\frac{1}{1+a_n}$

Ciąg (a_n) ma **granicę** równą g, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Jeśli ciąg (a_n) ma granicę równą g, to mówimy, że jest **zbieżny** do g.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do ∞, jeśli dla każdej liczby M istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność $a_n > M$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny do** $-\infty$, jeśli dla każdej liczby M istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność $a_n < M$.

- Jeśli $q \in (-1;1)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
- Jeśli $k > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.
- Jeśli $a > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
- Jeśli $q > 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.
- Jeśli $k > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$, to:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$, gdzie $c \in \mathbf{R}$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$ — granica sumy ciągów
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b$ — granica różnicy ciągów
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$ — granica iloczynu ciągów
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$, gdy $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$ — granica ilorazu ciągów

44. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \dfrac{-4n^2+3n+1}{2+n+2n^2}$ c) $a_n = \dfrac{6n^4+n^2-5}{2-n^3}$ e) $a_n = \dfrac{6-2n-9n^2}{6+2n+3n^2}$

b) $a_n = \dfrac{10n^2-2}{2-n+n^3}$ d) $a_n = \dfrac{2n^3-2n+4}{n^2+1}$ f) $a_n = \dfrac{-3n^4+3n^2+4}{4n^4+n^3+1}$

45. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \dfrac{(2n+1)(2n-1)^2}{(4-2n^2)(n+3)}$ c) $a_n = \dfrac{(n+2)^2(2n+3)^2}{(3n-1)(2n+1)^2}$ e) $a_n = \dfrac{2^n+3\cdot 4^{n+1}}{2^{2n}-2\cdot 3^n}$

b) $a_n = \dfrac{(6-3n)^2(1-2n)}{(3n+1)^2}$ d) $a_n = \dfrac{2\cdot 5^{n+1}+3}{5^n+2\cdot 6^n}$ f) $a_n = \dfrac{3\cdot 8^n-6^{n+2}}{36+6^n+4\cdot 8^n}$

46. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = 2n^3 - n + 5$ b) $a_n = 8 + 2n^3 - 4n^5$ c) $a_n = 8 \cdot 2^n - 4^n$

47. Oblicz granicę ciągu (a_n).

a) $a_n = \sqrt{\dfrac{2n-1}{8n+8}}$ b) $a_n = \sqrt{\dfrac{4n^2+1}{9n^2-n}}$ c) $a_n = \sqrt[3]{\dfrac{n^3+2}{8n^3+n}}$

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli wyrazy ciągów (a_n), (b_n) i (c_n) spełniają nierówność $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla wszystkich (lub prawie wszystkich) $n \in \mathbf{N}_+$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$, to:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = g$$

48. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n + 9^n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{9 \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{8 + 206n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n - 3^n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n - \sin n}$

Szereg geometryczny $a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots$ o ilorazie $q \in (-1; 1)$ jest zbieżny. Jego suma wyraża się wzorem:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

49. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), wiedząc, że:

a) $a_1 = 2$, $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

b) $a_1 = -18$, $a_1 + a_2 = -12$,

c) $a_1 + a_3 = 10$, $a_2 + a_4 = -5$,

d) $a_3 = \sqrt{2}$, $4a_6 = (a_3)^2$.

50. Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły.

a) 0,(2)

b) 1,(4)

c) 2,1(3)

d) 2,4(9)

e) 2,(45)

f) 3,(01)

g) 1,(450)

h) 0,(270)

51. Dla jakich wartości x szereg geometryczny o ilorazie q jest zbieżny?

a) $q = 2x - 1$

b) $q = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

52. Dla jakich wartości x szereg geometryczny jest zbieżny? Wyznacz jego sumę.

a) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots$

b) $1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{16x^2} + \frac{1}{64x^3} + \ldots$

53. Rozwiąż równanie.

a) $1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{(2-x)^2} + \ldots = 3 - 2x$

b) $1 + \frac{x}{x+3} + \left(\frac{x}{x+3}\right)^2 + \ldots = x^2 + \frac{1}{3}$

c) $6(x - x^2 + x^3 - \ldots) = \frac{1}{1+x} + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 + \ldots$

d) $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \ldots = -1$

54. Rozwiąż nierówność.

a) $-2 + \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} + \ldots < x^2 + x$

b) $\sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x + \ldots \geqslant \frac{1}{2}$ dla $x \in (0; \pi)$

55. Rozwiąż równanie.

$$\lim_{n\to\infty} (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x + \ldots + \operatorname{tg}^{2n-1} x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

56. Określ dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji f. Podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots$

b) $f(x) = -1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \ldots$

Zestaw III – podsumowujący

57. a) Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 4, a czwarty jest równy 16. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych.

b) Ciąg arytmetyczny składa się z szesnastu wyrazów. Suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 256, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 240. Oblicz pierwszy i ostatni wyraz tego ciągu.

58. W skończonym ciągu arytmetycznym wyrazy drugi, piąty i ostatni są równe odpowiednio: -4, 2 i 42. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu oraz liczbę jego wyrazów.

59. W skończonym ciągu arytmetycznym trzeci wyraz jest równy 28, a dziesiąty – 0. Suma wszystkich wyrazów jest równa -40. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu oraz liczbę jego wyrazów.

60. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 6. Dla pewnej liczby k mamy $a_k = 48$, a suma k początkowych wyrazów ciągu $S_k = 405$. Oblicz różnicę tego ciągu oraz k.

61. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy 5 jest o 500 mniejsza od sumy następnych n wyrazów tego ciągu. Oblicz n.

62. Skończony ciąg arytmetyczny ma nieparzystą liczbę wyrazów. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 2, a ostatni jest równy 42. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest o 242 większa od sumy wyrazów o numerach parzystych. Oblicz różnicę tego ciągu oraz liczbę jego wyrazów.

63. a) W ciągu geometrycznym suma trzech początkowych wyrazów jest równa 2, a suma kwadratów tych wyrazów jest równa 12. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

b) W ciągu geometrycznym suma trzech początkowych wyrazów jest równa 27, a suma dziewięciu początkowych wyrazów jest równa 39. Oblicz iloraz tego ciągu.

64. Czwarty wyraz ciągu geometrycznego jest równy $\sqrt{5}$. Oblicz iloczyn siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

65. Trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego są długościami boków trójkąta. Jakie wartości może przyjmować iloraz tego ciągu?

66. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Jedna z przyprostokątnych ma długość 6. Oblicz długości drugiej przyprostokątnej oraz przeciwprostokątnej (rozważ dwie możliwości).

67. Oblicz długości boków prostokąta, jeżeli długości dwóch z nich razem z długością przekątnej tworzą ciąg arytmetyczny oraz:
a) obwód prostokąta jest równy 14, b) pole prostokąta jest równe 48.

68. a) Między liczby 2 i 56 wstaw dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny.
b) Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 21. Jeśli do pierwszej liczby dodamy 1, do drugiej 2, a do trzeciej 15, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

D **69.** Wykaż, że dla dowolnego ciągu arytmetycznego zachodzi równość:

$$S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$$

70. Wyznacz takie kąty $\alpha \in (0;\pi)$, dla których ciąg: $\frac{1}{2}$, $\sin\alpha$, $\cos 2\alpha$ jest ciągiem geometrycznym.

D **71.** Dany jest ciąg geometryczny o wyrazach całkowitych. Wykaż, że suma kwadratów trzech jego kolejnych wyrazów jest podzielna przez sumę tych wyrazów.

72. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 4a_n + 6 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

D a) Wykaż, że ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_n + 2$ jest ciągiem geometrycznym oraz wyznacz wzór ogólny tego ciągu.
b) Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n).

73. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).
a) $a_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n+1}$ b) $a_n = \frac{3+6+9+\ldots+3n}{4n+6}$

74. Oblicz granicę ciągu (a_n).
a) $a_n = \frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{2n^2+1}$ c) $a_n = \frac{3+9+27+\ldots+3^n}{1+5\cdot 2^n}$
b) $a_n = \frac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{-2-n}$ d) $a_n = \frac{1+5+25+\ldots+5^n}{3-5^{n+1}}$

75. Zbadaj zbieżność ciągu (a_n) w zależności od parametru p.
a) $a_n = \frac{pn}{(p+1)n+2}$ b) $a_n = \frac{(p^2-4)n^3+5}{(p-2)n^2+1}$

76. Dla jakiej wartości parametru p granica ciągu (a_n) jest równa 6?

a) $a_n = n^2\left(\frac{2p}{(n+1)(n+2)} - \frac{p+1}{(n+2)(n+3)}\right)$

b) $a_n = (n+2)^2\left(\frac{2p-1}{n^2+2n} - \frac{p+2}{n^2+3n}\right)$

77. Dla jakich wartości parametrów a i b zachodzi poniższa równość?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an^4+5n^3+1}{bn^4-n^3+2} = -\infty$$

D **78.** Wykaż, że dla każdego $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ szereg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = \frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ jest zbieżny. Wyznacz wartość $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, dla której suma tego szeregu jest równa $\sqrt{2}+2$.

79. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 8. Suma pierwszego i trzeciego wyrazu jest równa 15. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

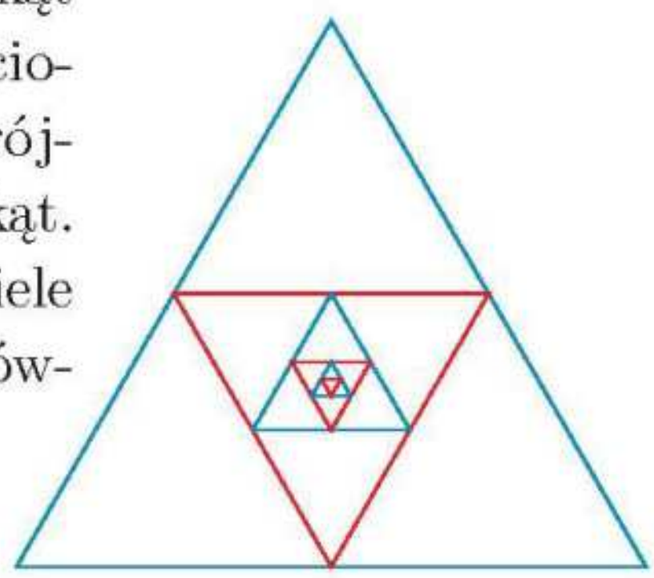
80. Suma wyrazów o numerach parzystych nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 6, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 9. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

81. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 10, a suma kwadratów tych wyrazów jest równa 60. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

82. W trójkąt równoboczny o boku 1 wpisano trójkąt tak, że jego wierzchołki są środkami boków wyjściowego trójkąta (rysunek obok). W powstały trójkąt wpisano w ten sam sposób następny trójkąt. Opisaną procedurę powtórzono nieskończenie wiele razy i otrzymano nieskończony ciąg trójkątów równobocznych. Oblicz sumę:

a) obwodów trójkątów czerwonych,

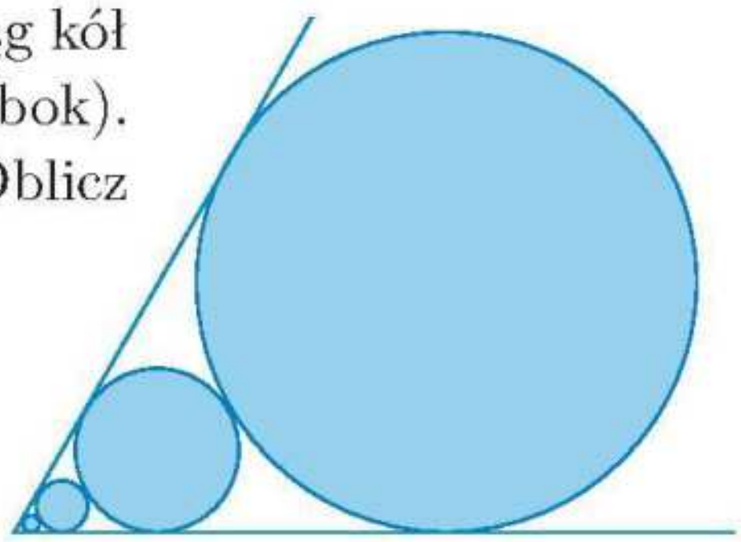
b) pól trójkątów niebieskich.



83. W kąt o mierze $60°$ wpisano nieskończony ciąg kół stycznych do siebie zewnętrznie (rysunek obok). Promień największego koła jest równy 3. Oblicz sumę:

a) obwodów wszystkich tych kół,

b) pól wszystkich tych kół.



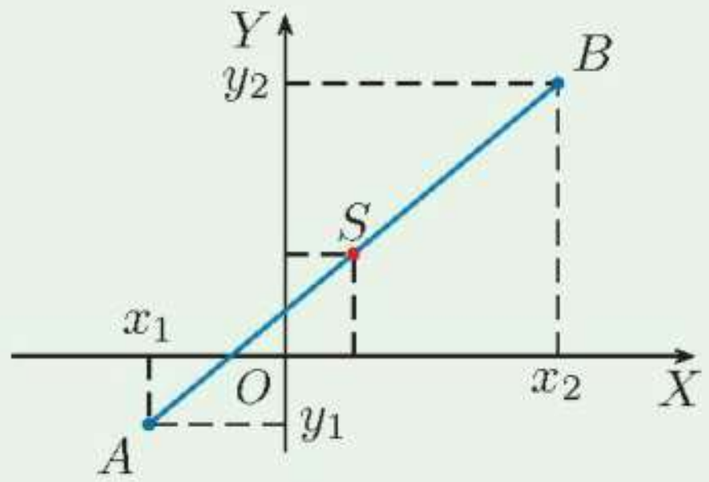
5.10. Geometria analityczna

Dane są punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$.
Środek odcinka AB ma współrzędne:

$$S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Długość odcinka AB wyraża się wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ **od prostej** l o równaniu $Ax + By + C = 0$ wyraża się wzorem:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Dane są punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$. **Współrzędne wektora** $\overrightarrow{AB}$ określone są za pomocą wzoru:

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

Długość wektora $\vec{u} = [a, b]$ wyraża się za pomocą wzoru: $|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2}$.

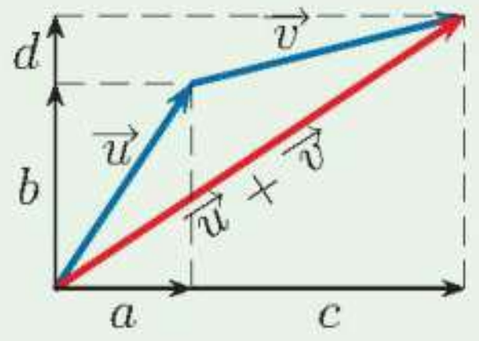
Wektorem przeciwnym do wektora $\vec{u} = [a, b]$ jest wektor $-\vec{u} = [-a, -b]$.

Sumą wektorów $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$ jest wektor:

$$\vec{u} + \vec{v} = [a + c, b + d]$$

Różnicą wektorów $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$ jest wektor:

$$\vec{u} - \vec{v} = [a - c, b - d]$$



Iloczynem wektora $\vec{u} = [a, b]$ **przez liczbę** $\alpha \in \mathbf{R}$ nazywamy wektor:

$$\alpha\vec{u} = [\alpha a, \alpha b]$$

Zestaw I – wprowadzający

1. Punkt S jest środkiem odcinka AB. Oblicz a i b.

a) $A(1, -3)$, $B(2, 5)$, $S(a, b)$
b) $A(-3, a)$, $B(b, 2)$, $S(0, 5)$
c) $A(0, 4)$, $B(a, b)$, $S(2, -1)$
d) $A(a, 2)$, $B(2a, b)$, $S(b, a)$

2. Oblicz odległość punktu $A(3, 2)$ od środka odcinka BC.

a) $B(-5, -2)$, $C(3, 0)$
b) $B(7\frac{1}{2}, 2)$, $C(4\frac{1}{2}, -4)$

3. Oblicz obwód trójkąta ABC.

a) $A(2, -1)$, $B(6, 7)$, $C(2, 4)$
b) $A(0, 3)$, $B(2, -1)$, $C(6, 7)$

4. Czy trójkąt ABC jest równoramienny? Czy jest on prostokątny?

a) $A(2,1)$, $B(16,7)$, $C(6,11)$ c) $A(-2,-9)$, $B(2,-10)$, $C(3,11)$

b) $A(-6,-8)$, $B(10,0)$, $C(-3,6)$ d) $A(-4,-5)$, $B(12,-3)$, $C(-6,7)$

5. Wyznacz równanie osi symetrii odcinka AB.

a) $A(4,-14)$, $B(4,25)$ b) $A(-2,-2)$, $B(2,10)$ c) $A(-1,7)$, $B(5,-2)$

6. Oblicz wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C, a następnie pole tego trójkąta.

a) $A(-3,1)$, $B(2,-4)$, $C(3,3)$ b) $A(-2,2)$, $B(6,6)$, $C(3,-3)$

7. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, którego bok CD jest zawarty w prostej k.

a) $A(0,3)$, $B(4,1)$, $k\colon y=-\frac{1}{2}x+5$ b) $A(-1,-3)$, $B(5,-1)$, $k\colon x=3y-5$

8. Oblicz odległość między prostymi k i l.

a) $k\colon y=-3x+2$, $l\colon y=-3x-2$ b) $k\colon y=\frac{1}{2}x+3$, $l\colon y=\frac{1}{2}x-1$

9. Sprawdź, czy okrąg o średnicy AB jest symetryczny do okręgu o średnicy CD względem osi OX, osi OY lub początku układu współrzędnych.

a) $A(1,0)$, $B(3,-6)$, $C(-5,-4)$, $D(1,-2)$

b) $A(-3,-1)$, $B(5,5)$, $C(-4,2)$, $D(2,-6)$

10. Wyznacz współrzędne punktu B symetrycznego do punktu A względem prostej l.

a) $A(10,11)$, $l\colon y-5=0$ c) $A(2,3)$, $l\colon x+3y-1=0$

b) $A(10,11)$, $l\colon y=-x$ d) $A(2,3)$, $l\colon y=\frac{1}{2}x-3$

11. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia symetralnych boków trójkąta ABC.

a) $A(-5,4)$, $B(3,0)$, $C(7,8)$ b) $A(-6,4)$, $B(-1,-1)$, $C(2,2)$

12. a) Wyznacz współrzędne punktu leżącego na osi OX i równo odległego od prostych $x+y-8=0$ oraz $y=7x-14$.

b) Wyznacz współrzędne punktu leżącego na osi OY i równo odległego od prostych $-x+y+4=0$ oraz $2x-y-7=0$.

13. Wyznacz równanie prostej równoległej do podanych prostych oraz równo odległej od każdej z nich.

a) $x-y+2=0$, $x-y-5=0$ b) $2x-y-3=0$, $2x-y+7=0$

Zestaw II – ćwiczeniowy

14. Dane są punkty $A(-1,2)$, $B(2,6)$ i $C(4,2)$. Wyznacz współrzędne wektora:
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, b) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AB}$, c) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$.

15. Dane są punkty $A(2,1)$, $B(2,-3)$ i $C(-1,3)$. Wyznacz współrzędne punktu P, wiedząc, że: a) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BP}$, b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$, c) $\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AB}$.

16. Punkty A, B, C i D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku, O zaś jest punktem przecięcia jego przekątnych. Czy prawdziwa jest równość:
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$,
b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$,
c) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AD}$,
d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}$?

17. Punkty A, B, C i D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wyznacz współrzędne punktu D, jeżeli wiadomo, że:
a) $A(-3,-2)$, $B(5,2)$, $C(1,6)$, b) $A(3,-1)$, $B(5,2)$, $C(-1,6)$.

18. Dane są punkty $A(0,0)$ i $B(-3,2)$. Narysuj w układzie współrzędnych odcinek $A'B'$, który powstał przez przesunięcie odcinka AB o wektor $\vec{v}$. Podaj współrzędne punktów A' i B'.
a) $\vec{v}=[3,0]$ b) $\vec{v}=[3,3]$ c) $\vec{v}=[1,-3]$ d) $\vec{v}=[0,-4]$

19. Dany jest kwadrat o wierzchołkach $A(2,2)$, $B(4,6)$, $C(0,8)$ i $D(-2,4)$. Znajdź współrzędne wierzchołków kwadratu otrzymanego przez przesunięcie kwadratu $ABCD$ o wektor $\vec{v}$.
a) $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ b) $\vec{v}=\overrightarrow{BA}$ c) $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

20. W równoległoboku $ABCD$ dane są: $A(-3,-2)$, $B(3,1)$ oraz $\overrightarrow{DB}=[5,-1]$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego równoległoboku oraz oblicz jego pole.

W dowolnym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie, zwanym **środkiem ciężkości** trójkąta. Współrzędne środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ i $C(x_3,y_3)$ wyrażają się wzorami:

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

21. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB dane są współrzędne wierzchołków $A(-5,1)$ i $C(3,7)$ oraz środka podstawy $D(-1,-1)$. Wyznacz współrzędne środka ciężkości tego trójkąta.

22. W trójkącie ABC dane są: $A(1,-3)$, $B(4,2)$ i środek ciężkości $D(1,-1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C oraz oblicz pole tego trójkąta.

Okrąg o środku w punkcie $S(a,b)$ i promieniu $r>0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r. Punkt (x,y) należy do tego okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Równanie $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, gdzie A, B, C są stałymi, jest równaniem okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C>0$.

23. Wyznacz równanie okręgu o środku S przechodzącego przez punkt A.

a) $S(0,0)$, $A(1,3)$ b) $S(1,3)$, $A(0,0)$ c) $S(3,-1)$, $A(0,3)$

24. Wyznacz równanie okręgu o promieniu 5, do którego należą punkty A i B.

a) $A(-6,0)$, $B(4,0)$ b) $A(-3,-2)$, $B(5,4)$ c) $A(0,1)$, $B(1,2)$

25. Wyznacz równanie okręgu o środku $S(-1,4)$, który jest styczny do:

a) osi OX, b) osi OY, c) prostej $4x-3y=9$.

26. Punkt A należy do okręgu stycznego do osi OY w punkcie $B(0,2)$. Wyznacz równanie tego okręgu, jeśli: a) $A(6,2)$, b) $A(-2,-2)$.

27. Wyznacz równanie okręgu o środku $S(3,1)$ stycznego do okręgu o podanym równaniu (rozpatrz dwa przypadki).

a) $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ b) $x^2+y^2+2x+4y+1=0$

28. Dany jest okrąg o środku $S(1,2)$ i promieniu 2. Określ wzajemne położenie tego okręgu oraz okręgu danego równaniem:

a) $x^2+(y-2)^2=1$,
b) $(x+2)^2+(y+2)^2=8$,
c) $x^2-2x+y^2-8=0$,
d) $x^2-10x+y^2-4y+25=0$.

29. Zbadaj wzajemne położenie okręgów O_1 i O_2.

a) O_1: $x^2+y^2-8y+8=0$, O_2: $x^2+y^2-8x+8=0$
b) O_1: $x^2+y^2-4x+8y+11=0$, O_2: $x^2+y^2+6x-4y-12=0$

30. Dla jakich wartości parametru m podane równanie opisuje okrąg?

a) $x^2+y^2-2y-m=0$ b) $x^2+y^2-2mx-m=0$

31. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

a) $A(-9,0)$, $B(-1,-4)$, $C(3,4)$ b) $A(-1,1)$, $B(3,-1)$, $C(3,5)$

32. Dany jest okrąg o środku $S(-2,3)$ i promieniu 3. Określ, ile punktów wspólnych ma podana prosta z tym okręgiem.

a) $3x-4y+4=0$ b) $y=x+1$ c) $3x+4y+9=0$

33. Określ, ile punktów wspólnych ma podana prosta z okręgiem o równaniu $(x+2)^2+(y-3)^2=25$.

a) $x-2y+18=0$ b) $2x-y-6=0$ c) $4x-3y-8=0$

34. Oblicz odległość między prostymi k i l. Wyznacz równanie okręgu o środku leżącym na osi OX stycznego do obu tych prostych.

a) $k\colon y=x+1$, $l\colon y=x-3$ b) $k\colon y=-2x-6$, $l\colon y=-2x+14$

35. Dla jakich wartości parametru m podana prosta jest styczna do okręgu określonego równaniem $x^2-4x+y^2+2y-11=0$?

a) $x-y+m=0$ b) $x+y+m=0$ c) $x-2y+m=0$

36. Wyznacz równanie okręgu, który jest obrazem okręgu K w symetrii względem prostej l.

a) $K\colon (x-6)^2+(y+1)^2=16$, $l\colon y=x+1$

b) $K\colon (x+2)^2+(y-3)^2=50$, $l\colon 2y-x+2=0$

37. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x^2+y^2-6x-7=0 \\ y=x+1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2-2x-2y-3=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y=0 \\ y=x+4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2+8x+7=0 \end{cases}$

38. Oblicz długość cięciwy okręgu K zawartej w prostej l.

a) $K\colon x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $l\colon x-y-1=0$

b) $K\colon x^2+y^2-6x-8y+15=0$, $l\colon x+2y-6=0$

39. Oblicz odległość punktu $P(-1,-4)$ od prostej, do której należą punkty wspólne okręgów $x^2-6x+y^2-8y+21=0$ oraz $x^2+y^2-2y-9=0$.

40. Punkty $A(0,-4)$ i $D(-3,0)$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, a jego podstawa AB zawiera się w prostej $2x-y=4$. Prosta $x+2y-2=0$ jest osią symetrii tego trapezu.

a) Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trapezu.

b) Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trapezie.

Zestaw III – podsumowujący

41. Dla jakich wartości parametru m punkt wspólny prostych o równaniach $x+2y=-1$ i $x-y=3m-4$ należy do wnętrza kwadratu o wierzchołkach $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ i $(-1,-1)$?

42. Dla jakich wartości parametru m proste o równaniach $3x-2y=2m-1$ i $x+y=3-m$ przecinają się w punkcie należącym do okręgu $x^2+y^2=5$?

43. Dla jakich wartości parametru m punkt wspólny prostych k i l należy do koła ograniczonego okręgiem $x^2+y^2=\frac{25}{16}$?

a) $k\colon 3x+4y=3m-7,\ \ l\colon x-4y=m+3$

b) $k\colon 4x+y=m-4,\ \ l\colon 2x-y=-m-\frac{1}{2}$

44. Dla jakich wartości parametru m proste k i l są prostopadłe? Dla wyznaczonych wartości m oblicz odległość punktu przecięcia tych prostych od początku układu współrzędnych.

a) $k\colon mx+2y-6=0,\ \ l\colon 4x+m^2y+6=0$

b) $k\colon (m^2-m)x+y-1=0,\ \ l\colon (m-1)x+my-4=0$

45. Dla jakiej wartości parametru m proste o równaniach $2x+my+1=0$ i $2mx+y-1=0$ nie mają punktów wspólnych? Dla wyznaczonej wartości m podaj równanie okręgu o środku w początku układu współrzędnych, który jest styczny do obu tych prostych.

46. Proste o równaniach $ax+y=b+1$ i $x+by=1-2a$ przecinają się w punkcie $P(1,4)$. Oblicz obwód trójkąta ABP, gdzie A i B są punktami, w których podane proste przecinają oś OX.

47. Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A(-3,1)$ i $B(3,-2)$ jest równe 15. Wierzchołek C należy do prostej o równaniu $y=3x+1$. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

48. W trójkącie ABC wierzchołek A ma współrzędne $(3,-2)$, a dwie wysokości zawierają się w prostych $y=2x+7$ i $x=-7$. Wyznacz równania prostych zawierających boki trójkąta ABC.

49. Oblicz współrzędne wierzchołków trójkąta, wiedząc, że punkty $P(-3,1)$, $R(-2,-6)$, $S(0,0)$ są środkami jego boków. Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

50. Oblicz odległość środka okręgu opisanego na trójkącie ABC od środka jego ciężkości, jeżeli wiadomo, że $A(-8,0)$, $B(4,-6)$ i $C(-2,6)$.

51. Z punktu $P(2,0)$ poprowadzono styczną do okręgu $(x+3)^2+(y-4)^2=1$. Oblicz odległość punktu P od punktu styczności.

52. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC jest zawarta w prostej $2x-y-3=0$ oraz $|AC|=|BC|=2\sqrt{10}$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że $C(-3,1)$.

53. Punkt $A(-4,4)$ jest wierzchołkiem kwadratu, którego jedna z przekątnych jest zawarta w prostej $y=\frac{1}{2}x+1$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków oraz równanie okręgu opisanego na tym kwadracie.

54. Punkt $P(0,-2)$ jest środkiem podstawy trójkąta równoramiennego, a punkt $S(\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$ jest punktem przecięcia się jego środkowych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że jedna ze środkowych zawiera się w prostej $7x+y-8=0$.

55. W trójkącie równoramiennym ABC wierzchołek A ma współrzędne $(0,-2)$. Podstawa tego trójkąta zawiera się w prostej $x+y=6$ i ma długość $4\sqrt{2}$.

a) Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

b) Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

56. Punkt $P(-2,-2)$ jest wierzchołkiem rombu, którego jeden z boków jest zawarty w prostej $x-2y-2=0$. Punkt $S(1,2)$ jest środkiem symetrii rombu. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków oraz cosinus kąta ostrego tego rombu.

57. Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2+y^2+2x-6y+5=0$ prostopadłych do prostej $x-2y+1=0$.

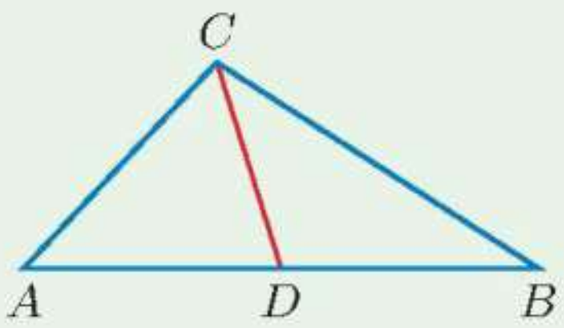
58. Dla jakich wartości parametru k punkt przecięcia prostych $y=x+k-3$ i $y=-2x+10k$ należy do koła o środku $S(1,-2)$ i promieniu 1?

59. Punkt $S(1,0)$ jest środkiem boku AB równoległoboku $ABCD$ oraz $\overrightarrow{BC}=[1,3]$ i $\overrightarrow{CD}=[-6,-2]$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku oraz oblicz jego pole.

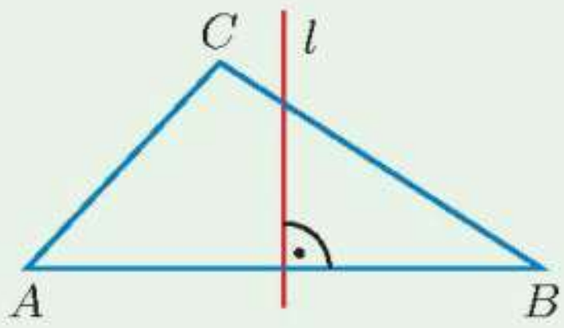
60. Punkty $A(-5,2)$ i $B(-1,-2)$ należą do okręgu $x^2+y^2+2x-4y=11$. Wyznacz współrzędne punktu C należącego do tego okręgu tak, aby trójkąt ABC o podstawie AB był równoramienny.

61. Punkty $A(2,-1)$, $B(5,2)$ i $C(0,7)$ są trzema wierzchołkami prostokąta $ABCD$, na którym opisano okrąg. Wyznacz równanie stycznej do tego okręgu w punkcie D.

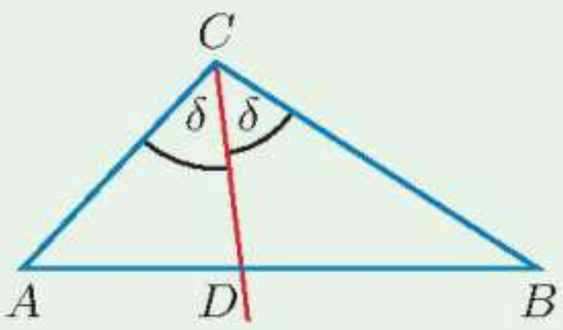
5.11. Planimetria



Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku (np. odcinek CD).

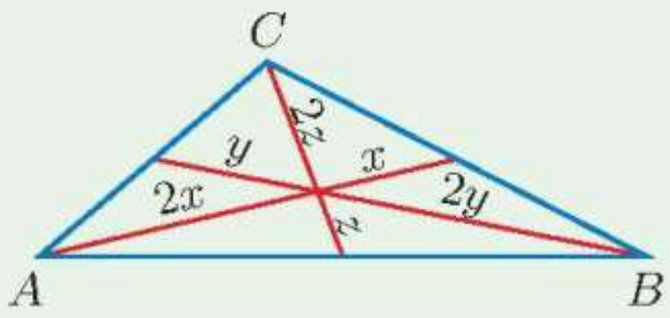


Symetralna boku trójkąta to prosta prostopadła do tego boku i przechodząca przez jego środek (np. prosta l).

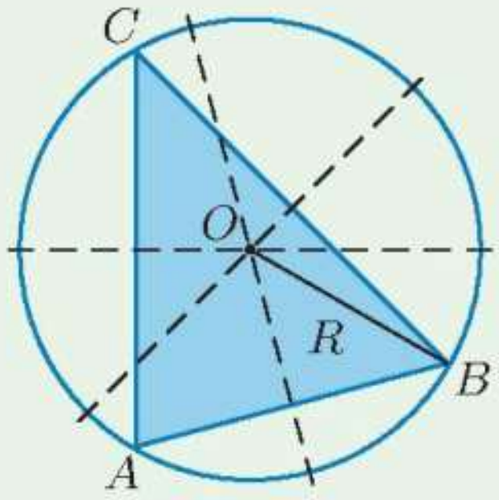


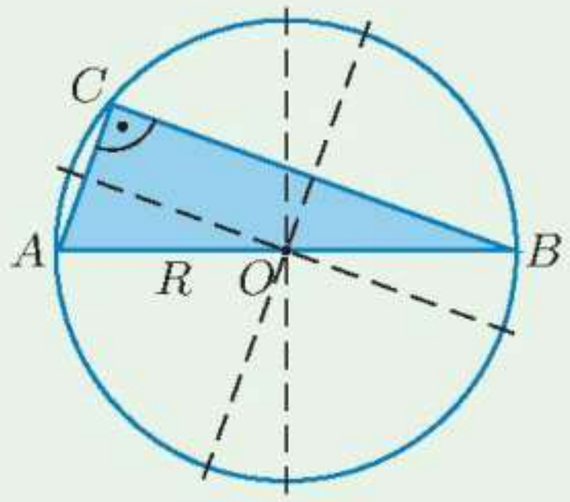
Dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta to półprosta o początku w wierzchołku tego kąta, dzieląca go na dwa kąty przystające (np. półprosta CD).

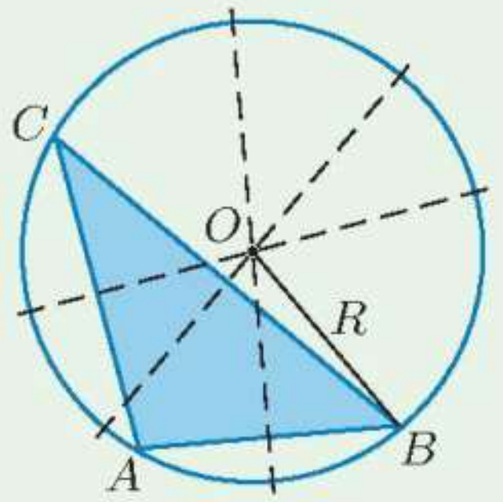
Punkt przecięcia się środkowych trójkąta (środek ciężkości) dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2:1, gdy liczymy od wierzchołka.



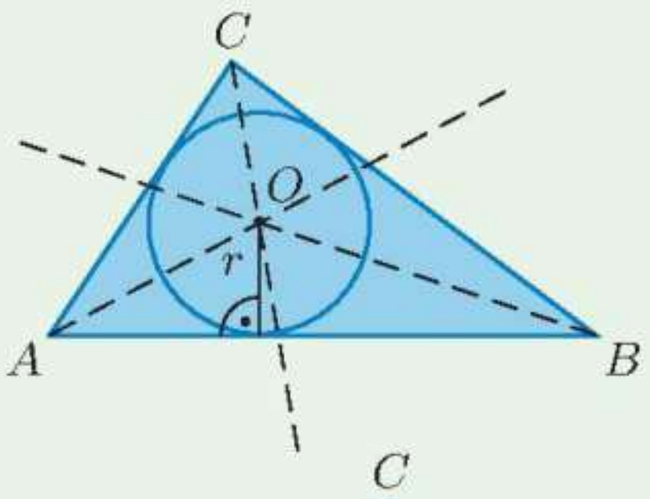
Symetralne boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem okręgu opisanego** na tym trójkącie.







Dwusieczne kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem okręgu wpisanego** w ten trójkąt.

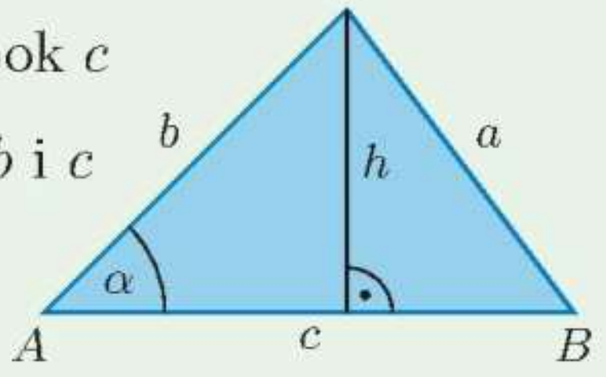


Wzory na pole trójkąta

$P = \frac{1}{2}ch$, gdzie h jest wysokością opuszczoną na bok c

$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, gdzie α jest kątem między bokami b i c

$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt

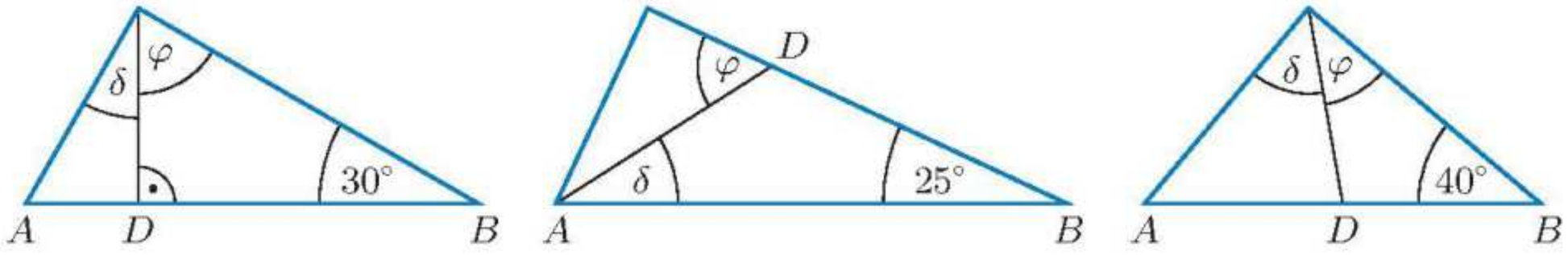


$P = \frac{abc}{4R}$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie

Zestaw I – wprowadzający

1. Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku C. Oblicz miary kątów δ i φ, jeśli wiadomo, że odcinek:

a) CD jest wysokością, b) AD jest zawarty w dwusiecznej, c) CD jest środkową.



Wskazówka do podpunktu c). W trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

2. Długość jednej z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 3. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że:

a) wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa $\sqrt{5}$,

b) środkowa wychodząca z wierzchołka kąta prostego jest równa 2,5,

c) odcinek dwusiecznej kąta prostego zawarty w trójkącie jest równy $2\sqrt{2}$.

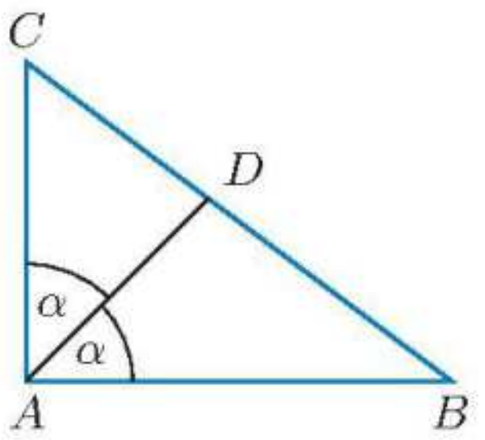
Wskazówka do podpunktu c). Zapisz pole trójkąta jako sumę pól trójkątów, na które podzieliła go dwusieczna.

3. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 3 cm i 4 cm. Oblicz:

a) długości środkowych tego trójkąta,

b) wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną,

c) długość odcinka AD (rysunek obok).



4. Dwa boki trójkąta mają długości $3\sqrt{3}$ i 6, a kąt między nimi zawarty ma miarę 30°. Oblicz:

a) pole tego trójkąta, b) wszystkie wysokości tego trójkąta.

5. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej długości 18 cm. Środkowe tego trójkąta przecinają się w punkcie P. Oblicz sumę odległości punktu P od wierzchołków tego trójkąta.

6. W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Przeciwprostokątna została podzielona przez punkt styczności z okręgiem na odcinki o długościach 2 cm i 3 cm. Oblicz długości przyprostokątnych oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

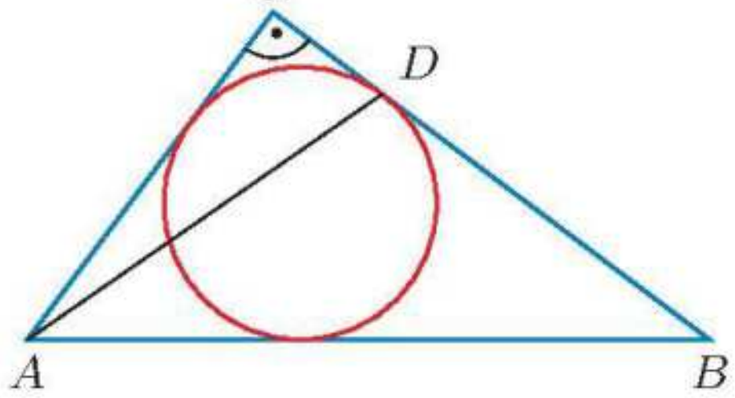
7. Oblicz pole trójkąta prostokątnego o jednej z przyprostokątnych długości 6 cm, jeśli wiadomo, że:

a) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2 cm,

b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 4 cm.

8. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy 12,5, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3. Oblicz pole tego trójkąta.

9. Dane są długości boków trójkąta prostokątnego ABC (rysunek obok): $|AB| = 10$, $|BC| = 8$ i $|AC| = 6$. D jest punktem styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt z bokiem BC. Oblicz długość odcinka AD.



10. Podstawa w trójkącie równoramiennym ma długość 8 cm, a wysokość na nią opuszczona jest równa 4 cm. W trójkąt ten wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków, na które ramię trójkąta zostało podzielone przez punkt styczności z okręgiem.

11. W okrąg o promieniu 5 cm wpisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami 120°. Oblicz długości boków tego trójkąta.

12. Na okręgu o promieniu 6 cm opisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami 150°. Oblicz długość podstawy tego trójkąta.

Cechy podobieństwa trójkątów

Cecha BBB: jeśli długości trzech boków jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do długości trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

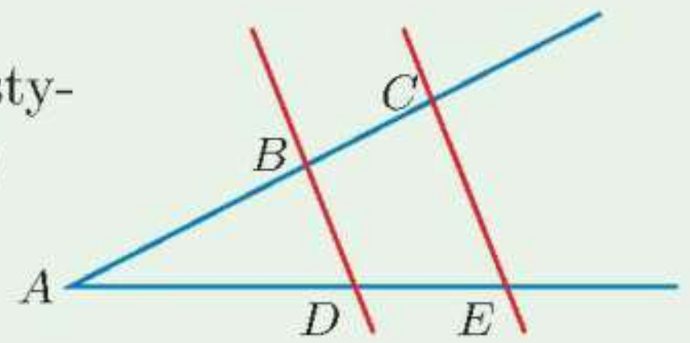
Cecha BKB: jeśli długości dwóch boków jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do długości dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

Cecha KKK: jeśli kąty jednego trójkąta są równe kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

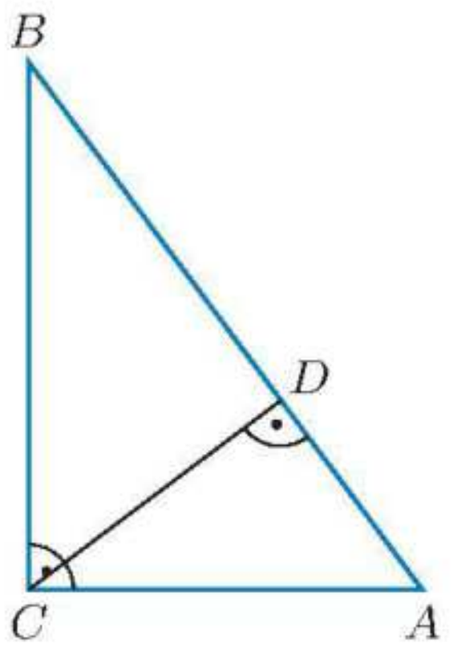
Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta A przetniemy dwiema prostymi równoległymi BD i CE (rysunek obok), to:

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}, \quad \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AE|}$$



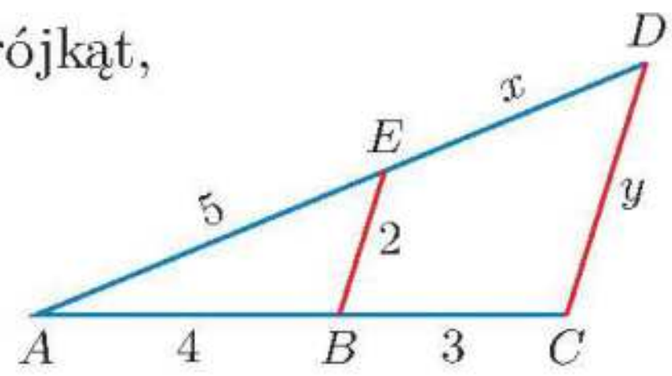
13. W trójkącie prostokątnym ABC z wierzchołka kąta prostego opuszczono wysokość CD (rysunek obok). Oblicz promienie okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ADC i BCD, jeśli wiadomo, że $|AD| = 3$ oraz $|CD| = 4$.



14. W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją na odcinki o długościach 4 cm i 9 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

15. W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją w stosunku 1:4. Oblicz stosunek:
a) pól trójkątów, na które wysokość dzieli ten trójkąt,
b) długości przyprostokątnych tego trójkąta.

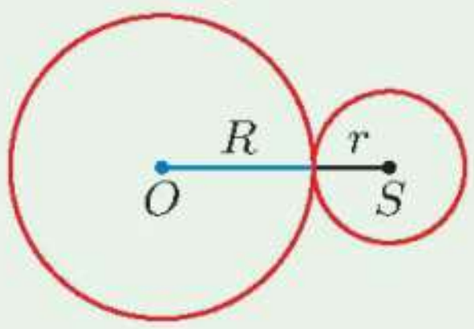
16. Odcinki BE i CD są równoległe (rysunek obok). Oblicz x i y.



17. W trójkącie ABC poprowadzono dwie proste równoległe do boku AB. Podzieliły one trójkąt na trzy figury o równych polach. Oblicz długości odcinków, na które te proste podzieliły bok AC, jeśli ma on długość $3\sqrt{3}$.

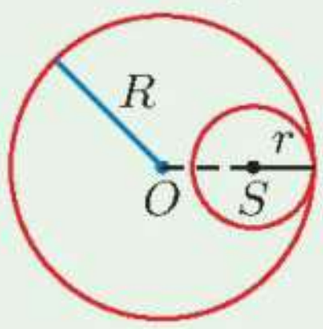
Okręgi styczne (mają jeden punkt wspólny)

styczne zewnętrznie



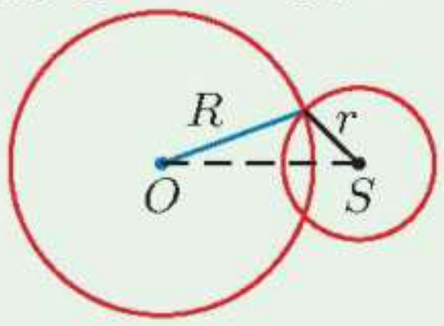
$|OS| = R + r$

styczne wewnętrznie



$|OS| = |R - r|$

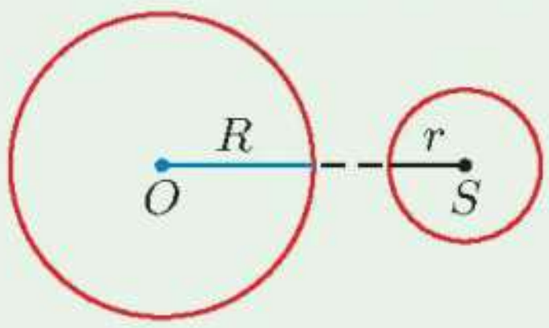
Okręgi przecinające się (mają dwa punkty wspólne)



$|R - r| < |OS| < R + r$

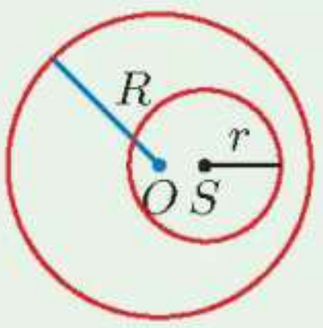
Okręgi rozłączne (nie mają punktów wspólnych)

rozłączne zewnętrznie



$|OS| > R + r$

rozłączne wewnętrznie



$|OS| < |R - r|$

18. Dane są dwa okręgi o promieniach r i R. Określ wzajemne położenie tych okręgów, jeśli wiadomo, że odległość między ich środkami wynosi $2\sqrt{5}$ oraz:

a) $r = \sqrt{5}$, $R = 3$,

b) $r = 1$, $R = 2$,

c) $r = 2$, $R = 2(\sqrt{5} - 1)$,

d) $r = 1{,}5$, $R = 3{,}5$.

19. Promienie dwóch okręgów są równe 2 i $x + 3$, a odległość między ich środkami jest równa 6. Dla jakiej wartości x okręgi te są:

a) styczne zewnętrznie,

b) styczne wewnętrznie?

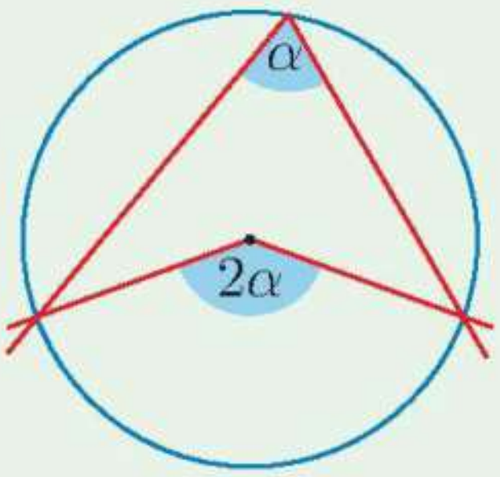
20. Dane są dwa okręgi o promieniach r i R, a odległość między ich środkami jest równa x. Określ liczbę punktów wspólnych tych okręgów w zależności od x.

a) $r = 1$, $R = 5$

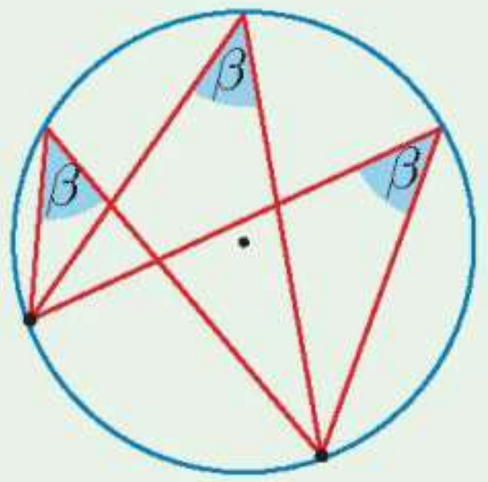
b) $r = \sqrt{3}$, $R = 2 - \sqrt{3}$

21. W trójkącie prostokątnym ABC odcinek CD jest wysokością, a przyprostokątne mają długości $|AC| = 5$ i $|BC| = 2\sqrt{5}$. Dane są również dwa okręgi: pierwszy o środku w wierzchołku C i promieniu 1, drugi o środku w punkcie D i promieniu r. Podaj liczbę punktów wspólnych tych okręgów w zależności od r.

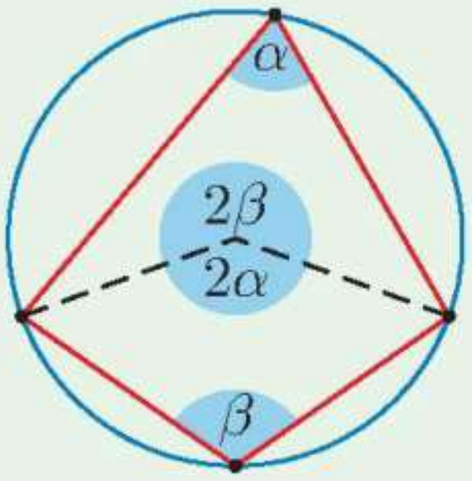
22. Dwa okręgi styczne zewnętrznie wpisano w kąt o wierzchołku P. Oblicz promienie tych okręgów, jeśli wiadomo, że odległość punktu P od jednego ze środków okręgów wynosi 6 cm, a od drugiego – 14 cm.



Kąt środkowy w okręgu ma miarę dwukrotnie większą od miary kąta wpisanego w ten okrąg opartego na tym samym łuku.



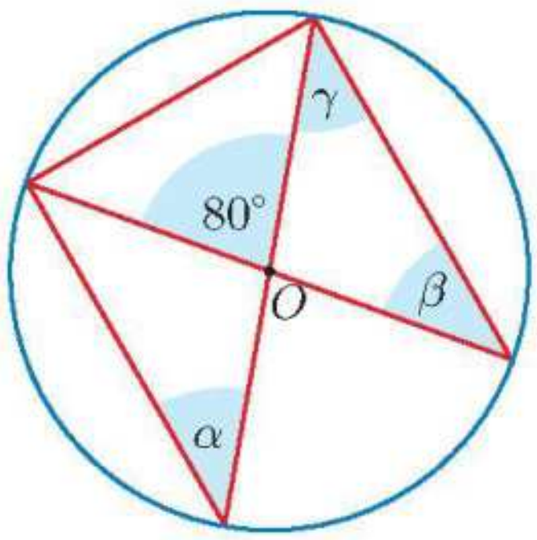
Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku mają równe miary.



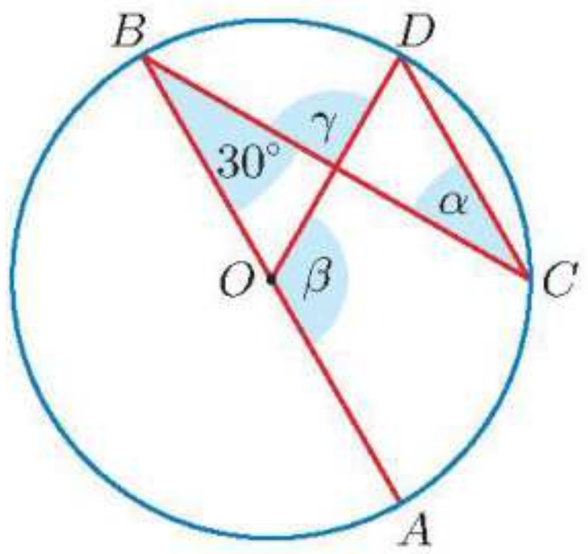
Suma miar kątów α i β wpisanych w okrąg, jak na rysunku po lewej, jest równa $180°$.

23. Wyznacz miary kątów α, β i γ.

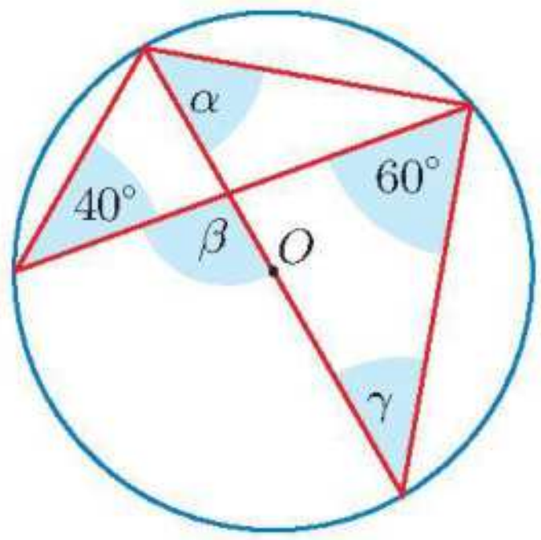
a)



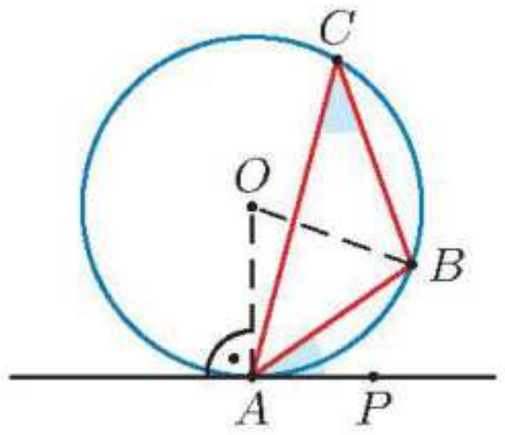
b) $AB \parallel CD$



c)



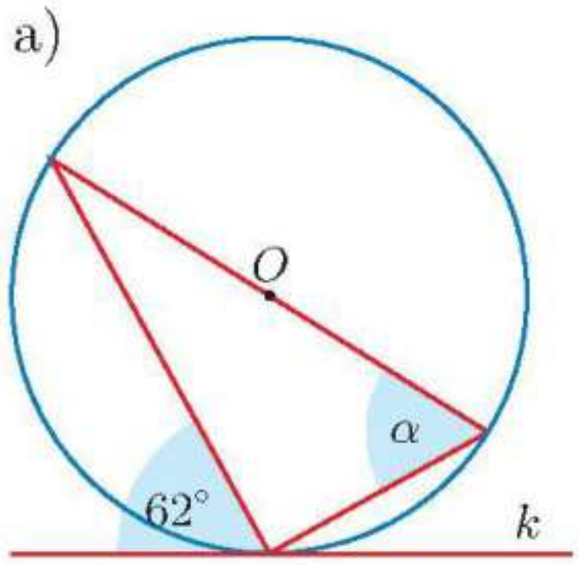
D **24.** Uzasadnij, że kąt PAB między styczną do okręgu a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu ACB opartemu na łuku wyznaczonym przez końce tej cięciwy (rysunek obok).



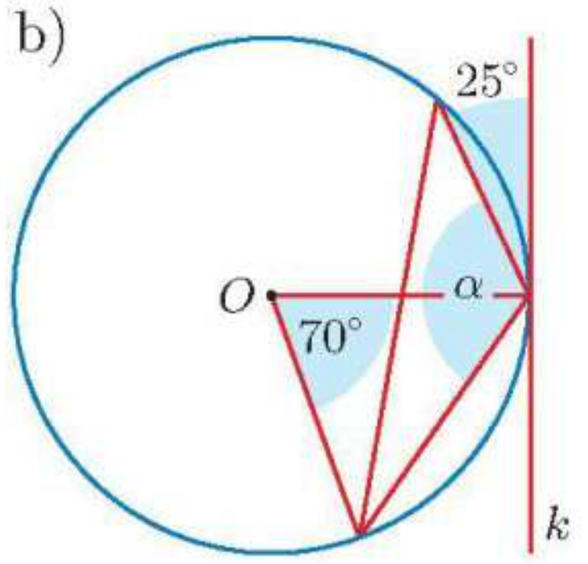
25. W okręgu o środku O poprowadzono cięciwę AB. Miara kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie B wynosi 58°. Wyznacz miary kątów trójkąta AOB.

26. Prosta k jest styczna do okręgu o środku O. Wyznacz miarę kąta α.

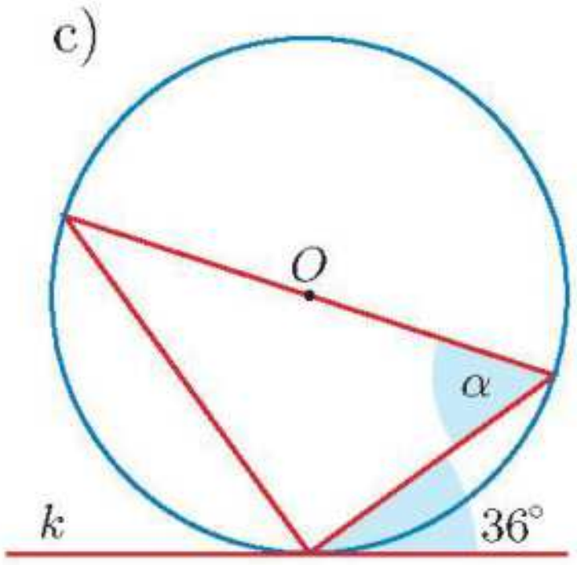
a)



b)



c)



27. W okręgu o promieniu 3 cm cięciwa AB wyznacza łuk o długości $\frac{\pi}{2}$ cm. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie A.

28. a) Podaj miary kątów wewnętrznych dziesięciokąta i dwunastokąta foremnego.

Wielokąt nazywamy **foremnym**, jeśli ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty wewnętrzne przystające.

D b) Wykaż, że kąty wewnętrzne n-kąta foremnego mają miarę $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

29. Oblicz długość boku wielokąta foremnego o obwodzie równym 20, jeśli suma miar kątów wewnętrznych tego wielokąta jest równa: a) 540°, b) 1440°.

Zestaw II – ćwiczeniowy

30. a) Bok sześciokąta foremnego ma długość 1. Oblicz różnicę pola koła opisanego na tym sześciokącie i pola koła w niego wpisanego.

D b) Wykaż, że dla dowolnego wielokąta foremnego o boku długości a różnica pola koła opisanego na tym wielokącie i pola koła w niego wpisanego jest równa $\frac{\pi}{4}a^2$.

31. Kąt ostry rombu ma miarę 70°. Oblicz miarę kąta zawartego między wysokościami poprowadzonymi z wierzchołka kąta rozwartego.

32. Przekątne równoległoboku mają długości 16 i 8, a kąt zawarty między nimi ma miarę 60°. Oblicz obwód tego równoległoboku.

33. Dłuższa podstawa trapezu ma długość 9 cm, a punkt przecięcia jego przekątnych dzieli je w stosunku 2:3. Oblicz długość krótszej podstawy.

34. W trapezie równoramiennym przekątna ma długość $8\sqrt{5}$ cm, wysokość jest równa 8 cm, a stosunek długości podstaw wynosi 1:3. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

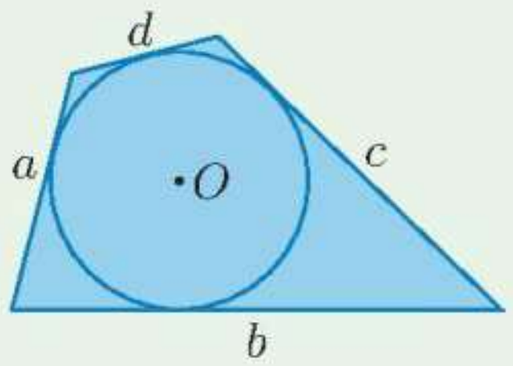
D **35.** a) Wykaż, że długość odcinka łączącego środki ramion trapezu jest średnią arytmetyczną długości jego podstaw.

b) Wysokość trapezu jest równa 5 cm, a odcinek łączący środki jego ramion ma długość 10 cm. Oblicz pole tego trapezu.

Okrąg wpisany w czworokąt

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe:

$$a + c = b + d$$

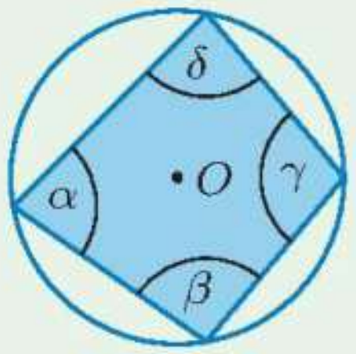


Środek okręgu wpisanego w czworokąt jest punktem przecięcia się dwusiecznych kątów wewnętrznych tego czworokąta.

Okrąg opisany na czworokącie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe i mają po 180°:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$



Środek okręgu opisanego na czworokącie jest punktem przecięcia się symetralnych boków tego czworokąta.

D **36.** Uzasadnij.

a) Jeśli trapez jest równoramienny, to można na nim opisać okrąg.

b) Jeśli na trapezie można opisać okrąg, to jest on równoramienny.

37. W trapez równoramienny wpisano okrąg. Oblicz obwód i pole tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego:

a) ramię ma długość 6 cm, a promień okręgu wpisanego jest równy 2,5 cm,

b) podstawy mają długości 4 cm i 16 cm,

c) kąt ostry ma miarę 60°, a promień okręgu opisanego na tym trapezie jest równy 1 cm.

38. Na okręgu o promieniu 1,5 opisano trapez o kątach przy dłuższej podstawie 30° i 60°. Oblicz pole tego trapezu.

39. a) W trapezie równoramiennym kąt ostry ma miarę 60°, ramię ma długość 2 cm, a przekątna – $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.

b) Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma długość 8 cm. Kąt nachylenia jego przekątnej do tej podstawy ma miarę 30°, a wysokość jest równa $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz pole koła opisanego na tym trapezie.

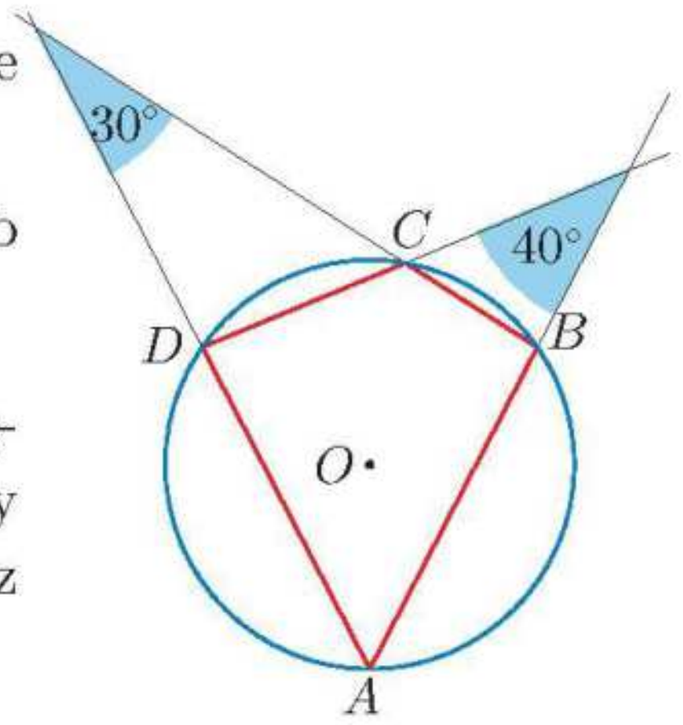
40. Długość jednego z boków trapezu równoramiennego jest równa promieniowi okręgu wpisanego w ten trapez i wynosi 3 cm. Oblicz pole tego trapezu.

D **41.** Wykaż, że jeżeli w trapez równoramienny można wpisać okrąg, to wysokość trapezu jest średnią geometryczną długości jego podstaw.

42. a) Wyznacz pole koła wpisanego w romb o kącie ostrym α i boku a.

b) Wyznacz promień okręgu wpisanego w romb o polu P i kącie ostrym α.

43. W okrąg wpisano czworokąt $ABCD$. Kąt między prostymi AB i DC wynosi 40°, a między prostymi AD i BC – 30° (rysunek obok). Oblicz miary kątów tego czworokąta.



44. Z punktu P odległego od środka okręgu o 10 poprowadzono sieczną. Sieczna przecięła okrąg w punktach A i B takich, że $|PA| = |AB| = 4\sqrt{2}$. Oblicz promień tego okręgu.

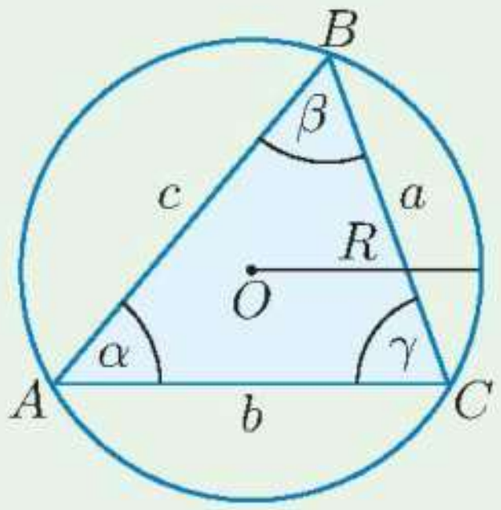
R

R

Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są równe średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

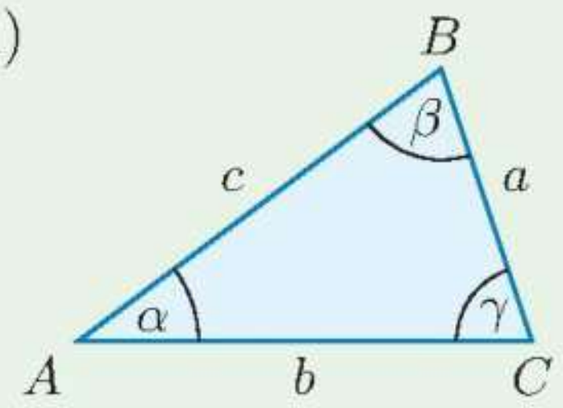
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta (oznaczenia jak na rysunku) prawdziwe są następujące zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



45. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta, w którym:

a) $a = 4\sqrt{3}$, $b = 4$, $\alpha = 60^\circ$,

b) $b = 8$, $c = 4\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$,

c) $a = 3\sqrt{3}$, $b = 9$, $\alpha = 30^\circ$,

d) $b = 2\sqrt{2}$, $c = 4$, $\beta = 30^\circ$.

46. Rozwiąż trójkąt o danych kątach i boku.

a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $c = 2\sqrt{3}$

b) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $b = 6$

47. a) Najdłuższy bok trójkąta ma długość 12, a jeden z kątów ma miarę 135°. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

b) Kąt rozwarty trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 5 ma miarę 120°. Oblicz długość najdłuższego boku tego trójkąta.

48. Oblicz długość boku c trójkąta, w którym:

a) $a = 3$, $b = 6$, $\gamma = 60^\circ$,

b) $a = 3\sqrt{3}$, $b = 2$, $\gamma = 150^\circ$.

49. Jeden z kątów trójkąta ma miarę 60°, a bok położony naprzeciwko tego kąta ma długość 9. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta, jeśli wiadomo, że jeden z nich jest dwa razy dłuższy od drugiego.

50. Sprawdź, czy trójkąt o podanych bokach jest rozwartokątny.

a) $a = 5$, $b = 8$, $c = 9$

b) $a = 10$, $b = 4$, $c = 7$

51. Długości boków równoległoboku są równe 4 i $4\sqrt{3}$, a jeden z kątów ma miarę 30°. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.

52. Jeden z boków równoległoboku ma długość 7, a przekątne mają długości 6 i 10. Oblicz miarę kąta rozwartego zawartego między przekątnymi tego równoległoboku oraz długość jego drugiego boku.

53. Dany jest trapez prostokątny, którego dłuższa podstawa ma długość 6, ramię ma długość $3\sqrt{2}$ i tworzy z podstawą kąt ostry α, a krótsza przekątna ma długość $\sqrt{6}$. Oblicz $\sin\alpha$ i obwód tego trapezu.

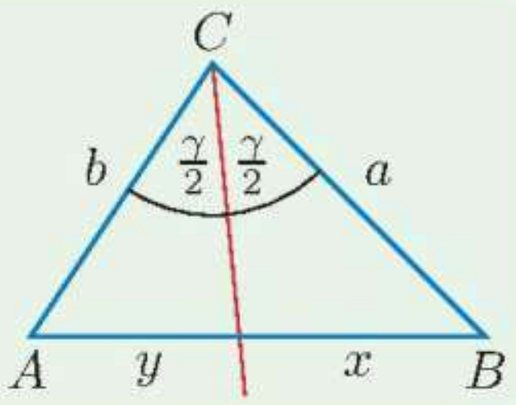
54. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB środkowe poprowadzone z wierzchołków A i B przecinają się pod kątem prostym w punkcie P oraz $|AP| = 6$. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.

55. W trójkącie równobocznym ABC o obwodzie 6 na boku AC wybrano punkt P taki, że $\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{1}{5}$. Oblicz pole koła opisanego na trójkącie APB.

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok tego trójkąta na odcinki proporcjonalne do jego pozostałych boków.

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$



56. W trójkącie ABC kąt ACB ma miarę $60°$. Dwusieczna tego kąta przecina bok AB w punkcie D. Oblicz długości boków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że $|AD| = 2$ i $|BD| = 6$.

57. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, którego przeciwprostokątna AB ma długość 6 cm. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D i dzieli go w stosunku 2:1. Oblicz obwody trójkątów ACD i ABD.

58. Na kole o promieniu 2 opisano trapez równoramienny o kącie ostrym $75°$. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

59. W okrąg o promieniu 3 wpisano czworokąt. Jedna z przekątnych tego czworokąta jest średnicą okręgu, a jeden z jego kątów ma miarę $135°$. Oblicz długość drugiej przekątnej tego czworokąta.

60. Ramiona trapezu mają długości równe 5 i 7, a odcinek łączący ich środki dzieli trapez na części, których pola są w stosunku 1:2. Oblicz długości podstaw tego trapezu, jeśli wiadomo, że można go opisać na okręgu.

61. Jedno z ramion trapezu ma długość 5 i jest nachylone do dłuższej podstawy pod kątem $60°$. Długość dłuższej podstawy jest równa 8. Na trapezie tym można opisać okrąg. Oblicz promień tego okręgu.

62. W trójkąt ABC wpisano okrąg o promieniu 1. Bok BC został podzielony przez punkt styczności D na odcinki długości $|BD| = 7$ i $|DC| = 3$. Oblicz sinus kąta ABC i długości boków AB i AC tego trójkąta.

Zestaw III – podsumowujący

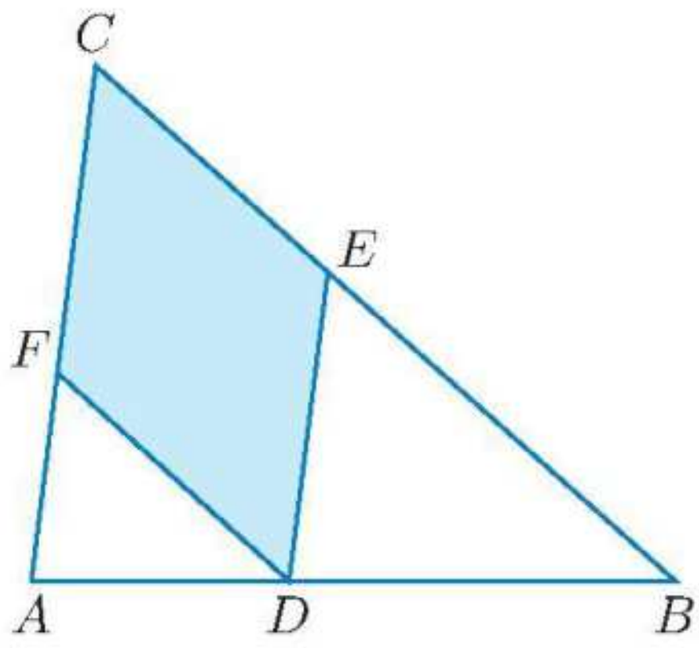
63. Podstawą trójkąta równoramiennego ABC jest odcinek AB. Na boku BC istnieje punkt D taki, że $|AB| = |AD| = |CD|$. Oblicz miary kątów trójkąta ABC.

64. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 4 cm i 6 cm. Oblicz promień okręgu stycznego do obu przyprostokątnych, którego środek należy do przeciwprostokątnej.

65. Na boku AD prostokąta $ABCD$ obrano taki punkt E, że trójkąty ABE, DEC i EBC są podobne. Wyznacz skale podobieństwa $\triangle ABE$ do $\triangle DEC$, $\triangle DEC$ do $\triangle EBC$, $\triangle ABE$ do $\triangle EBC$ i oblicz pole trójkąta BEC, jeśli wiadomo, że $\sphericalangle ECD = 60^\circ$ i $|DC| = 6$.

66. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 cm. Wysokość CD równa jest długości odcinka DE łączącego środek podstawy ze środkiem ramienia. Oblicz długość ramienia oraz pole tego trójkąta.

67. Dany jest trójkąt ABC o bokach $|AC| = 4$ i $|BC| = 6$. Na bokach tego trójkąta obrano punkty D, E i F takie, że czworokąt $DECF$ jest rombem (rysunek obok). Oblicz długość boku tego rombu.



D **68.** W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB wysokość AD podzieliła bok BC na odcinki długości $|BD| = k$ i $|CD| = l$. Wykaż, że $|AB| = \sqrt{2k(k+l)}$.

69. W trapezie równoramiennym kąty przy krótszej podstawie mają miarę dwa razy większą niż kąty przy dłuższej podstawie. Dłuższa podstawa ma długość 16 cm, a odcinek łączący środki ramion – 10 cm. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

70. Długości podstaw trapezu prostokątnego są równe 7 cm i 3 cm, a ramię prostopadłe do podstaw ma długość 5 cm. Oblicz odległości punktu przecięcia się przekątnych tego trapezu od dłuższej podstawy i ramienia prostopadłego do podstaw.

71. Długości podstaw trapezu równoramiennego są równe a i b $(a > b)$, a kąt ostry ma miarę α. Wyznacz pole czworokąta, który powstał przez połączenie odcinkami środków sąsiednich boków tego trapezu.

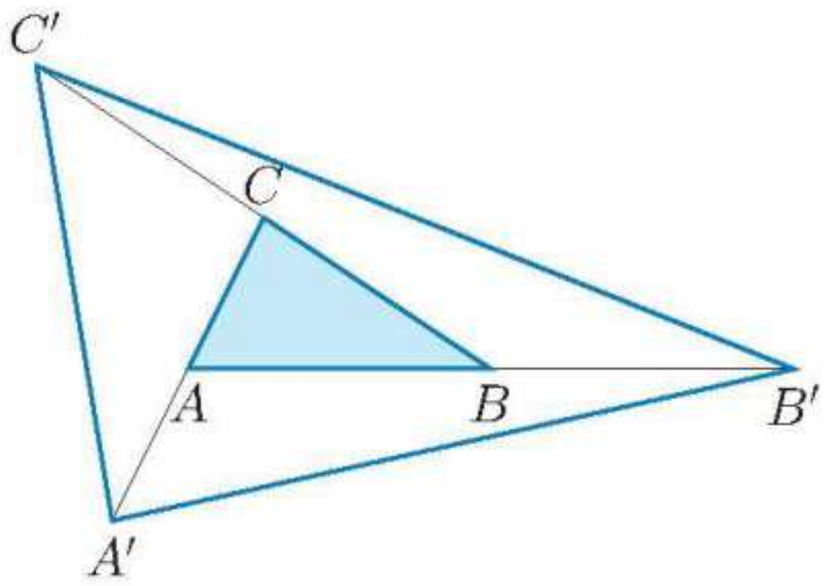
72. W trapezie kąty przy podstawie mają miary 60° i 45°, a różnica kwadratów długości podstaw jest równa 30. Oblicz pole tego trapezu.

73. W równoległoboku $ABCD$ krótsza przekątna BD ma długość d i jest prostopadła do boków AD i BC, a kąt ostry ma miarę 30°. Wyznacz długość przekątnej AC.

D **74.** Długości dwóch boków trójkąta są równe a i b. Kąt leżący naprzeciwko trzeciego boku ma miarę dwa razy większą od miary kąta leżącego naprzeciwko boku o długości a. Wykaż, że długość trzeciego boku jest równa $\sqrt{a(a+b)}$.

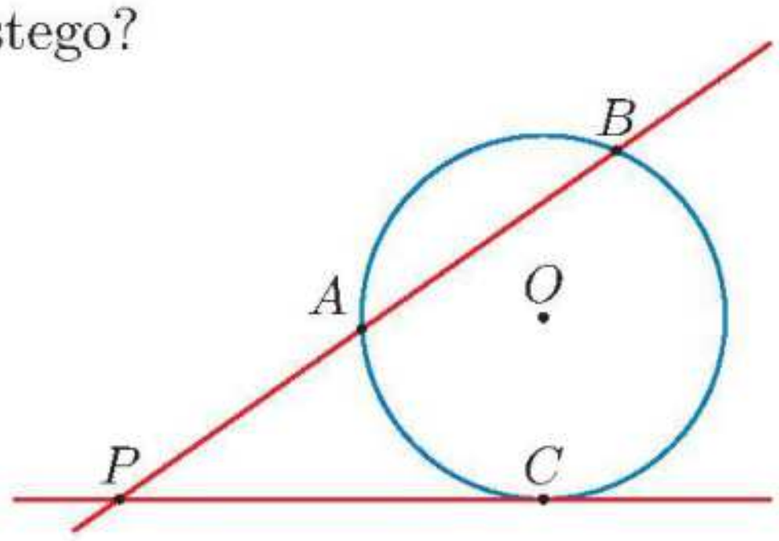
75. Długości podstaw trapezu są równe 6 i 9, a ramiona mają długości 2 i 4. Oblicz cosinusy kątów tego trapezu.

D **76.** Dane są trójkąty ABC i $A'B'C'$ takie, że punkty C i A' są symetryczne względem punktu A, punkty A i B' – względem punktu B, a punkty B i C' – względem punktu C. Pole trójkąta ABC jest równe S. Wykaż, że pole trójkąta $A'B'C'$ jest równe $7S$.



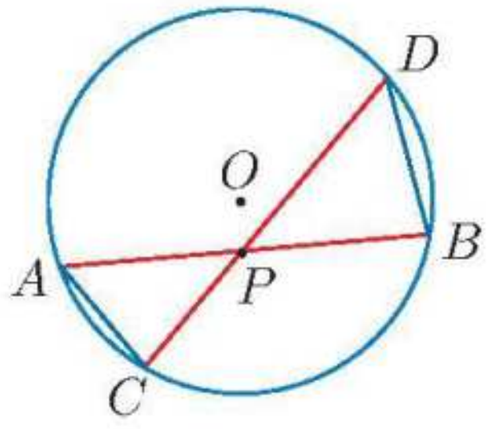
77. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną w stosunku 2:3. W jakim stosunku dzieli przeciwprostokątną wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego?

D **78.** Z punktu P poprowadzono sieczną przecinającą dany okrąg w punktach A i B oraz styczną do okręgu w punkcie C (rysunek obok). Wykaż, że trójkąty PCA i PCB są podobne. Oblicz długości odcinków PA i PB, jeśli $|PC| = 12$ i $|AB| = 10$.



Wskazówka. Wykaż, że $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA$ oraz $\triangle PCA \sim \triangle PBC$.

D **79.** Wykaż, że trójkąty ACP i BDP (rysunek obok) są podobne, oraz uzasadnij, że $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$. Oblicz promień okręgu, jeśli $|AP| = 5$, $|PB| = 2$, $|CP| = 1$ i $\sphericalangle CBD = 150^\circ$.

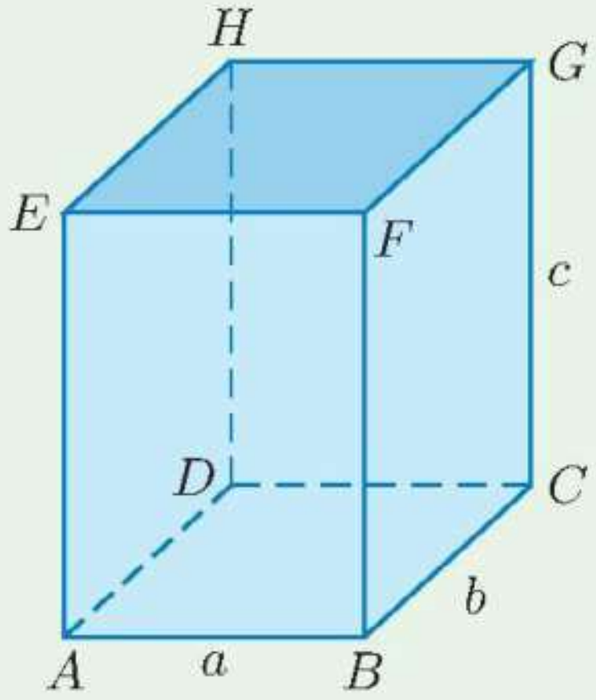


5.12. Stereometria

Oznaczenia

P_c – pole powierzchni całkowitej
P_p – pole powierzchni podstawy
P_b – pole powierzchni bocznej
V – objętość

Prostopadłościan

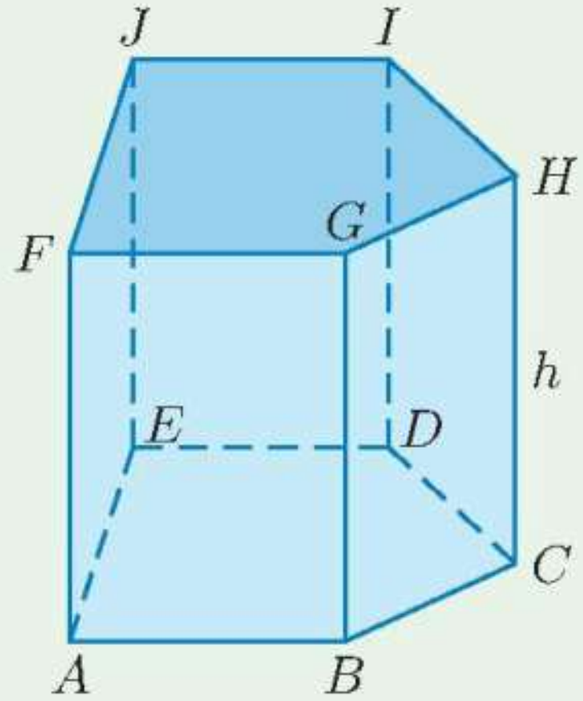


$P_c = 2(ab + bc + ac)$

$V = abc$

gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu

Graniastosłup prosty

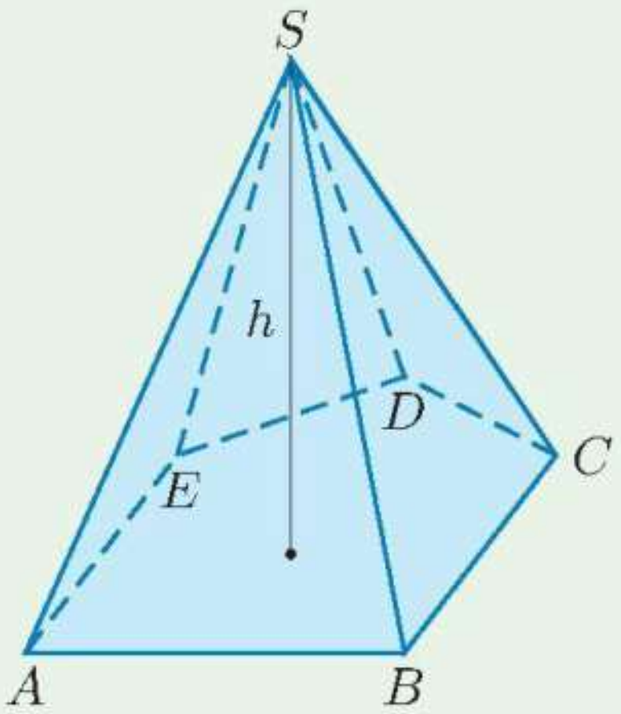


$P_b = p \cdot h$

$V = P_p \cdot h$

gdzie p jest obwodem podstawy graniastosłupa, a h – jego wysokością

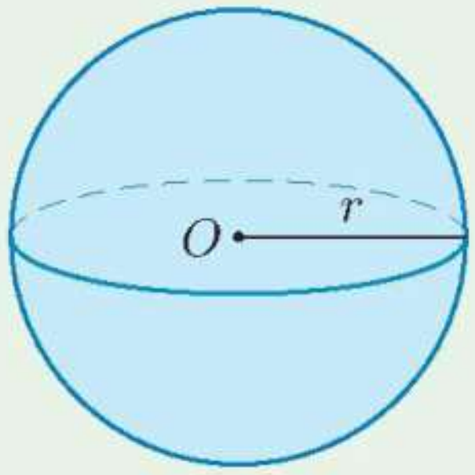
Ostrosłup



$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa

Kula

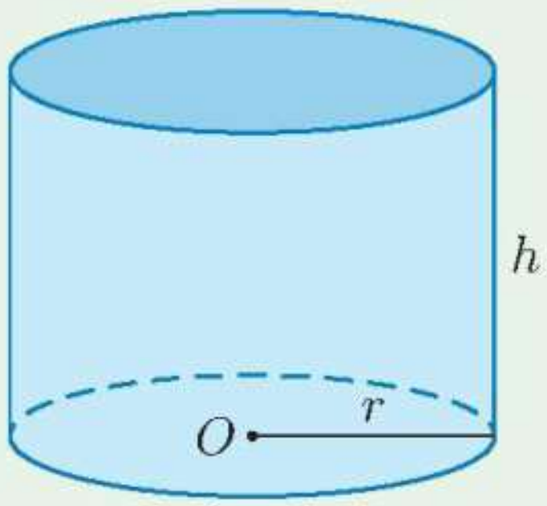


$P = 4\pi r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

gdzie r jest promieniem kuli

Walec



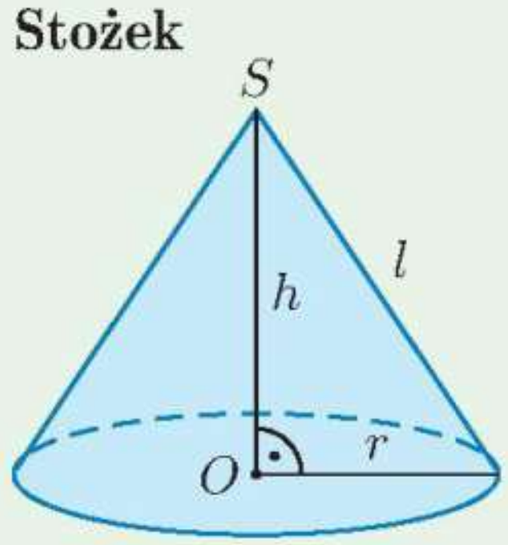
$P_b = 2\pi rh$

$P_c = 2\pi r(r+h)$

$V = \pi r^2 h$

gdzie r jest promieniem podstawy walca, a h – jego wysokością

Stożek



$P_b = \pi rl$

$P_c = \pi r(r+l)$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

gdzie r jest promieniem podstawy stożka, h – jego wysokością, a l – długością tworzącej

Zestaw I – wprowadzający

1. Dany jest graniastosłup prawidłowy o wysokości 10. Promień okręgu opisanego na jego podstawie jest równy 6. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeżeli wiadomo, że jest on:

a) trójkątny, b) czworokątny, c) sześciokątny.

2. Dany jest ostrosłup prawidłowy o krawędzi podstawy 4 i krawędzi bocznej 6. Oblicz wysokość tego ostrosłupa, jeżeli wiadomo, że jest on:

a) trójkątny, b) czworokątny, c) sześciokątny.

3. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 6. Ściana boczna ABS jest prostopadła do podstawy oraz $|AS| = |BS| = 5$. Narysuj siatkę tego ostrosłupa i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.

4. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6, a krawędź boczna ma długość 4.

a) Oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

b) Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $\sqrt{3}$, a kąt nachylenia ściany bocznej do jego podstawy ma miarę $30°$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

6. Pole ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe polu jego podstawy. Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do podstawy tego ostrosłupa.

7. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do podstawy pod kątem 30°, a wysokość tej ściany jest równa $3\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

8. Podstawą ostrosłupa o wierzchołku S jest trójkąt ABC o bokach długości $|AB| = 6$, $|AC| = |BC| = 5$. Wysokość ostrosłupa jest równa 2, a jej spodek jest środkiem okręgu opisanego na podstawie. Oblicz tangens kąta nachylenia ściany ABS do podstawy ostrosłupa.

9. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o przekątnych długości 10 i 12. Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do podstawy pod kątem 45°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

10. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość d i tworzy ze ścianą boczną kąt 30°. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

11. Objętość walca jest równa V, a jego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest kwadratem. Wyznacz wysokość tego walca.

12. Stosunek pola powierzchni bocznej stożka do jego pola podstawy jest równy $\sqrt{2} : 1$. Objętość stożka jest równa objętości kuli o średnicy 6. Oblicz wysokość tego stożka oraz miarę kąta nachylenia tworzącej do podstawy.

13. Oblicz objętość stożka, którego pole podstawy jest równe 16, a pole powierzchni bocznej jest równe 20.

14. Od sześcianu, którego krawędź ma długość 2, odcięto naroża, zawierające po jednym wierzchołku, płaszczyznami przechodzącymi przez środki krawędzi wychodzących z tych wierzchołków. Oblicz objętość wielościanu otrzymanego w ten sposób.

15. Prostopadłościan o wysokości 6 cm, którego podstawą jest kwadrat, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków podstawy i nachyloną do niej pod kątem 30°. W przekroju otrzymano romb, którego dłuższa przekątna jest równa $2\sqrt{6}$ cm.

a) Oblicz długość krawędzi podstawy tego prostopadłościanu.

b) Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

Zestaw II – ćwiczeniowy

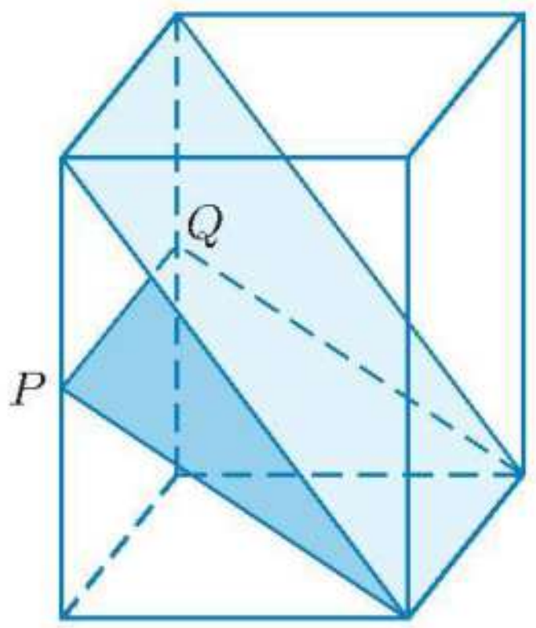
16. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a, a przekątna ściany bocznej tworzy z drugą ścianą boczną kąt α. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

17. Podstawą graniastosłupa prostego o objętości równej 12 jest romb o kącie ostrym 60°. Wysokość tego graniastosłupa jest równa dłuższej przekątnej jego podstawy.

a) Oblicz długość krawędzi podstawy.

b) Oblicz cosinusy kątów między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych.

18. Graniastosłup prawidłowy czworokątny przecięto dwiema płaszczyznami i otrzymano przekroje o polach 20 i $8\sqrt{13}$ (rysunek obok). Oblicz objętość tego graniastosłupa, wiedząc, że punkty P i Q są środkami jego krawędzi bocznych.

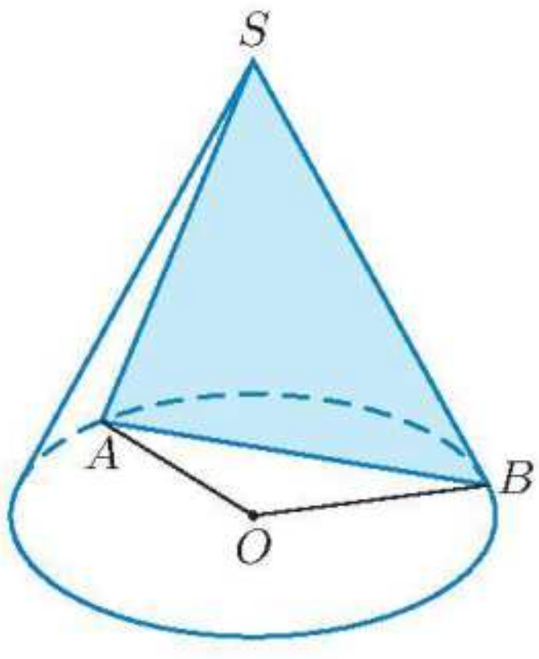


19. Prostopadłościan o wymiarach $6 \times 8 \times 15$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jego trzy wierzchołki i otrzymano w przekroju trójkąt. Oblicz obwód tego trójkąta.

20. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy jest równa 4, a odległość środka jego wysokości od krawędzi bocznej jest równa 1. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

21. Przekrój ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa jest trójkątem równoramiennym o ramionach długości 6 cm oraz kącie między ramionami 30°. Oblicz pole tego przekroju i objętość ostrosłupa.

22. Trójkąt równoramienny o podstawie a i ramieniu $2a$ obracamy wokół prostej zawierającej jedno z jego ramion. Wyznacz objętość otrzymanej bryły.



23. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest półkolem o promieniu 10. Stożek ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez cięciwę podstawy AB i wierzchołek S (rysunek obok). Oblicz $\cos \sphericalangle ASB$, jeśli $\sphericalangle AOB = 120°$.

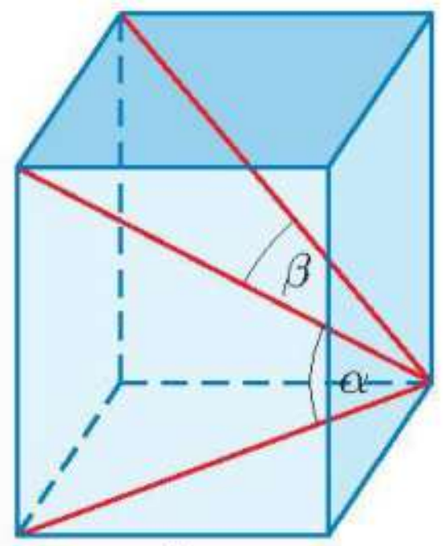
24. Kulę przecięto dwiema równoległymi płaszczyznami odległymi od siebie o 8 w ten sposób, że środek kuli leży między nimi. Pola otrzymanych przekrojów są równe 9π i 25π. Oblicz promień tej kuli.

25. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu S, a dwie ściany boczne są prostopadłe do podstawy. Pozostałe ściany tworzą z podstawą kąty α i β. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

26. W czworościanie o podstawie ABC i wierzchołku S dwie krawędzie AB i CS mają długość 2, a długość każdej z pozostałych krawędzi jest równa 3. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

27. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym pole ściany bocznej jest cztery razy większe od pola podstawy. Oblicz cosinus kąta zawartego między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

28. Dany jest prostopadłościan P_1, którego podstawa jest kwadratem o boku długości 4 (rysunek obok). Jego przekątna jest nachylona do podstawy pod kątem α, a ze ścianą boczną tworzy kąt β. Prostopadłościan P_2 o objętości 64 jest podobny do prostopadłościanu P_1. Oblicz skalę podobieństwa tych prostopadłościanów, jeśli wiadomo, że: a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\beta = 30^\circ$.



4

29. W podstawę stożka wpisano kwadrat. Przekrój stożka płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek oraz jeden z boków kwadratu jest trójkątem równoramiennym o kącie między ramionami równym α. Wyznacz cosinus kąta rozwarcia tego stożka.

30. Czworościan foremny o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch krawędzi podstawy i wierzchołek nienależący do tej podstawy. Wyznacz pole otrzymanego przekroju oraz cosinus kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą czworościanu.

31. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole podstawy jest równe S, a kąt między ścianą boczną a podstawą ma miarę α. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź boczną oraz środek krawędzi podstawy. Wyznacz pole otrzymanego przekroju.

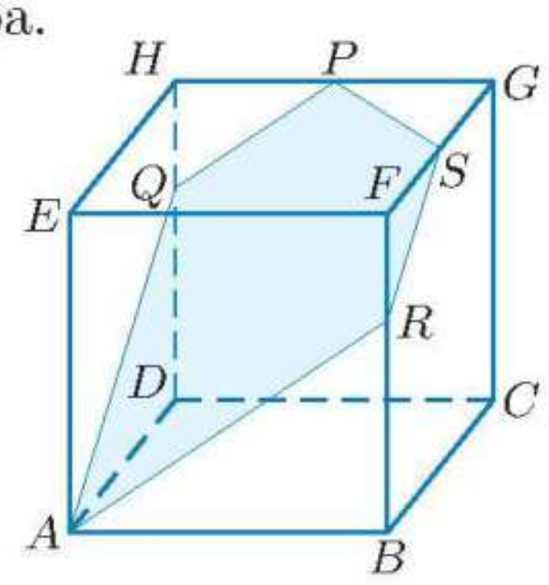
D **32.** Miara kąta między ramionami ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 2α. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek i przez środki sąsiednich krawędzi podstawy. Wykaż, że tangens kąta, który ta płaszczyzna tworzy z podstawą, jest równy $\frac{\sqrt{2\cos 2\alpha}}{\sin \alpha}$.

Zestaw III – podsumowujący

33. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny o podstawach długości 8 i 2 oraz wysokości równej 3. Oblicz objętość tego graniastosłupa oraz miarę kąta między jego przekątną i najdłuższą krawędzią, jeżeli wiadomo, że ta przekątna ma długość $5\sqrt{2}$.

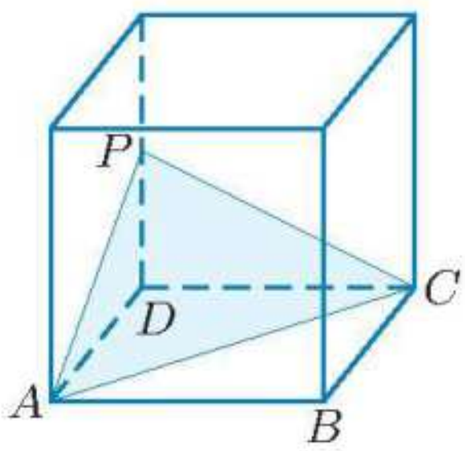
34. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ o objętości 36 cm^3 jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 12 cm. Punkt P jest środkiem krawędzi BC, a punkt Q, będący środkiem odcinka AP, jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa. Oblicz pole powierzchi bocznej ostrosłupa.

35. Na rysunku przedstawiono sześcian $ABCDEFGH$ i jego przekrój płaszczyzną AQR. Wiadomo, że $|HQ| : |QD| = |FR| : |RB| = 1 : k$, gdzie k jest liczbą naturalną większą od 1. Oblicz stosunek długości odcinków, na jakie płaszczyzna przekroju dzieli krawędzie FG i HG.



D **36.** W prostopadłościanie z wierzchołka podstawy poprowadzono przekątne dwóch sąsiednich ścian bocznych. Kąty nachylenia tych przekątnych do podstawy wynoszą α i β. Wykaż, że cosinus kąta zawartego między tymi przekątnymi jest równy $\sin\alpha \cdot \sin\beta$.

37. Punkt P jest środkiem krawędzi sześcianu przedstawionego na rysunku obok. Niech S będzie rzutem prostokątnym punktu D na płaszczyznę ACP. Wyznacz odległość punktu S od punktu A, jeśli długość krawędzi tego sześcianu jest równa a.



38. Miara kąta między ramionami ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 2α, a pole ściany bocznej jest równe S. Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

39. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między ścianą boczną a podstawą jest równy 2α, a krawędź podstawy ma długość a. Wyznacz pole przekroju otrzymanego z przecięcia tego ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do podstawy pod kątem α.

D **40.** Miara kąta między ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi β. Uzasadnij, że $\beta > 90°$. Wykaż, że cosinus kąta między ścianą boczną tego ostrosłupa a jego podstawą jest równy $\sqrt{-\cos\beta}$.

5.13. Rachunek prawdopodobieństwa

Permutacje

Liczba sposobów, na które n różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa n^k.

Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg składający się z k różnych wyrazów $(1 \leqslant k \leqslant n)$, jest równa:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Kombinacje

Liczba sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k elementów $(0 \leqslant k \leqslant n)$, jest równa $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Własności prawdopodobieństwa

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$
- $P(\emptyset) = 0$ ($\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe), $P(\Omega) = 1$ (Ω – zdarzenie pewne)
- $P(A) \leqslant P(B)$ dla $A \subset B \subset \Omega$
- $P(A') = 1 - P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwo zdarzenia A **pod warunkiem**, że zaszło zdarzenie B, określamy wzorem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prawdopodobieństwo całkowite

Niech Ω będzie zbiorem wszystkich wyników pewnego doświadczenia. Jeśli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ spełniają następujące warunki:

- zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich $(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega)$,
- prawdopodobieństwo każdego z nich jest dodatnie,
- zdarzenia te parami się wykluczają,

to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ opisuje wzór:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

Zestaw I – wprowadzający

1. Dane są zbiory $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ i $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych takich, że pierwsza cyfra należy do zbioru A, druga – do zbioru B, a trzecia – do zbioru C? Ile wśród nich jest liczb nieparzystych?

2. Dwie drużyny rozgrywają ze sobą mecz piłki nożnej. Ile jest możliwych wyników, jeśli wiadomo, że każda z drużyn strzeliła:
a) nie więcej niż 3 bramki, b) nie więcej niż 4 bramki?

3. Na ile sposobów można ustawić w kolejce 4 osoby, a na ile – 6 osób?

4. Dziewięciorgu zawodnikom, wśród których jest pięć dziewcząt, przydzielono kolejne numery od 1 do 9.
a) Ile jest wszystkich sposobów przydzielenia numerów?
b) Ile jest takich sposobów przydzielenia numerów, aby dziewczęta dostały numery nieparzyste, a chłopcy dostali parzyste?

5. Pewien kod składa się z trzech liter na początku oraz z dwóch dowolnych cyfr na końcu. Litery należą do zbioru $\{A, B, C, D\}$. Ile można utworzyć takich kodów, jeżeli:
a) cyfry i litery się nie powtarzają, b) cyfry i litery mogą się powtarzać?

6. Ile jest wszystkich liczb:
a) trzycyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 0 i 1 oraz żadna cyfra się nie powtarza,
b) czterocyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 0, 1 i 2 oraz żadna cyfra się nie powtarza,
c) pięciocyfrowych, w których zapisie żadna cyfra się nie powtarza?

7. Ile jest wszystkich liczb:
a) pięciocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2 i 4,
b) czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0,
c) parzystych trzycyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 7 i 9?

8. Dwie siostry kupiły wspólnie 10 długopisów, każdy w innym kolorze. Oblicz, na ile sposobów mogą się nimi podzielić, jeśli obydwie mają dostać tyle samo długopisów.

9. Ile można utworzyć różnych siedmiocyfrowych ciągów, w których cztery razy występuje cyfra 1 i trzy razy cyfra 0?

10. Ile jest wszystkich liczb podzielnych przez 3, do których zapisu użyto wyłącznie cyfr 0 i 1, jeśli liczby te są:

a) czterocyfrowe, b) pięciocyfrowe, c) ośmiocyfrowe?

11. Rzucamy trzy razy monetą. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że co najwyżej raz wypadła reszka, B – że co najwyżej dwa razy wypadła reszka, C – że trzy razy wypadła reszka.

a) Podaj pary zdarzeń wykluczających się i pary zdarzeń przeciwnych.

b) Które ze zdarzeń $B \cup C$, $A' \cap B$, $A \cap C$ jest zdarzeniem niemożliwym, a które – zdarzeniem pewnym?

12. Z urny zawierającej cztery kule ponumerowane od 1 do 4 losujemy dwie kule. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że dwie wylosowane kule mają numery nieparzyste. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω tego doświadczenia, wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom A i A' oraz oblicz prawdopodobieństwa tych zdarzeń, jeśli losujemy:

a) bez zwracania, b) ze zwracaniem.

13. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to liczba podzielna:

a) przez 2, b) przez 3, c) przez 2 lub 3.

14. Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) iloczyn oczek, które wypadną w obydwu rzutach, będzie równy 6,

b) w każdym rzucie liczba oczek będzie większa od numeru rzutu.

15. W urnie są cztery kule oznaczone numerami 1, 2, 3 i 4. Losujemy kolejno cztery kule bez zwracania. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę czterocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba będzie:

a) parzysta, b) większa od 1234.

16. Z urny, w której znajduje się 5 kul białych i 3 czarne, losujemy kolejno 3 kule. Czy bardziej prawdopodobne jest wylosowanie trzech kul białych w wypadku losowania bez zwracania, czy ze zwracaniem?

17. W klasie IVa jest 8 chłopców i 12 dziewcząt, a w klasie IVb – 10 chłopców i 6 dziewcząt. Z każdej klasy wybieramy losowo jedną osobę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będą to:

a) dwie dziewczyny, b) dziewczyna i chłopiec.

Zestaw II – ćwiczeniowy

18. Winda, w której są 3 osoby, zatrzymuje się na 5 piętrach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) każda osoba wysiądzie na innym piętrze,

b) na którymś z pięter wysiądą dokładnie 2 osoby.

19. Losowo ustawiamy w rzędzie 7 dziewcząt i 8 chłopców. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) żaden chłopiec nie stoi obok chłopca,

b) wszystkie dziewczęta stoją obok siebie.

20. Na egzaminie posadzono losowo w jednym rzędzie 10 osób, w tym dwie z jednej szkoły. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie siedzą one obok siebie.

21. Liczby $1, 2, 3, \ldots, 10$ uporządkowano w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo wystąpienia w tym uporządkowaniu:

a) dwójki bezpośrednio przed ósemką, b) dwójki przed ósemką.

22. Z grupy, w której jest 8 dziewcząt i 6 chłopców, wybieramy losowo 4 osoby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybierzemy:

a) 2 dziewczyny i 2 chłopców, b) 1 dziewczynę i 3 chłopców.

23. Na loterii jest 10 losów, w tym 2 wygrywające. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wygrywa co najmniej jeden spośród pięciu zakupionych losów.

24. Z urny, w której jest 7 kul białych i 5 zielonych, losujemy jednocześnie 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul:

a) przynajmniej jedna jest biała, b) jest więcej zielonych niż białych.

25. W szafie są 4 pary butów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) losowo wybrane dwa buty są parą,

b) wśród losowo wybranych czterech butów jest co najmniej jedna para.

26. Rzucono pięcioma kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) na wszystkich kostkach takiej samej liczby oczek,

b) dokładnie na dwóch kostkach takiej samej liczby oczek (pary), a na trzech pozostałych kostkach – różnych liczb oczek,

c) dokładnie na trzech kostkach takiej samej liczby oczek (trójki), a na dwóch pozostałych kostkach – różnych liczb oczek,

d) trójki i pary.

27. W urnie jest 7 kul białych i 8 czarnych. Losujemy z urny jedną kulę, a następnie drugą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że druga kula jest czarna, jeśli pierwsza była biała.

28. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma oczek otrzymanych w trzech rzutach kostką jest równa 10, jeśli w dwóch pierwszych rzutach wypadły parzyste liczby oczek.

29. Do dwóch szuflad wrzucamy losowo 1 kulę czarną i 5 kul białych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kula czarna znajdzie się w drugiej szufladzie, jeśli do pierwszej zostały wrzucone dokładnie dwie kule.

30. Ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ wybieramy losowo jedną liczbę, a następnie rzucamy tyle razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie jednej szóstki.

Wzór Bayesa

Niech Ω będzie zbiorem wszystkich wyników pewnego doświadczenia. Jeśli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ spełniają następujące warunki:

- zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich ($B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$),
- prawdopodobieństwo każdego z nich jest dodatnie,
- zdarzenia te parami się wykluczają,

to dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ o dodatnim prawdopodobieństwie prawdziwy jest wzór:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)}$$

31. Zakłady Z_1, Z_2 i Z_3 wyprodukowały odpowiednio 20%, 30% i 50% pewnej partii towaru. Wiadomo, że wadliwe wyroby zakładu Z_1 stanowią 1% całej jego produkcji, zakładu Z_2 – 3%, a zakładu Z_3 – 5%. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany wyrób z tej partii towaru pochodzi z zakładu Z_1, jeśli wyrób ten jest wadliwy.

32. Rzucamy raz kostką. Jeżeli wypadnie mniej niż 5 oczek, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, która zawiera 5 kul białych i 1 kulę czarną. W przeciwnym razie losujemy jedną kulę z drugiej urny, która zawiera 6 kul białych i 3 kule czarne. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kula pochodzi z drugiej urny, jeśli jest to kula czarna.

33. Rzucamy raz kostką. Jeżeli wypadnie 6 oczek, to losujemy 2 kule z pierwszej urny, która zawiera 2 kule białe i 4 kule czarne. W przeciwnym razie losujemy 2 kule z drugiej urny, która zawiera 3 kule białe i 3 kule czarne. Wylosowano dwie kule czarne. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pochodzą one z pierwszej urny.

34. Prawdopodobieństwo otrzymania orła i reszki w rzucie pierwszą monetą jest takie samo. Dla drugiej monety prawdopodobieństwo otrzymania orła jest równe $\frac{1}{3}$, a reszki – $\frac{2}{3}$. Wykonujemy trzy rzuty losowo wybraną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucono:

a) pierwszą monetą, jeśli wypadły dwa orły,

b) drugą monetą, jeśli wypadły dwie reszki.

Schemat Bernoulliego

W schemacie n prób Bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania k sukcesów wyraża się wzorem:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ dla } k = 0, 1, \ldots, n$$

gdzie p oznacza prawdopodobieństwo sukcesu, a q – prawdopodobieństwo porażki w pojedynczej próbie ($q = 1 - p$).

35. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w czterech rzutach monetą:

a) ani razu nie wypadnie orzeł, b) wypadną dokładnie 3 orły.

36. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w dziesięciu rzutach monetą reszka wypadnie:

a) dokładnie 3 razy, b) co najmniej 3 razy.

37. Rzucamy sześć razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba oczek mniejsza od 3 wypadnie:

a) dokładnie 2 razy, b) co najwyżej 2 razy.

38. Tomek i Romek rzucają piłką do kosza. Tomek trafia w 80% rzutów, a Romek – w 60%. Każdy z nich wykonał po 5 rzutów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że piłka trafiła do kosza co najmniej 9 razy.

39. Prawdopodobieństwo tego, że Basia trafi piłką do kosza, jest równe 0,8. Ile co najmniej rzutów powinna wykonać, aby prawdopodobieństwo co najmniej jednego trafienia było większe od 0,999?

Zestaw III – podsumowujący

40. Ze zbioru liczb dwucyfrowych wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to liczba podzielna przez 10 i niepodzielna przez 3.

41. Każda z osób bawiących się na pewnym przyjęciu, wychodząc, żegnała się ze wszystkimi pozostałymi gośćmi uściskiem dłoni. Ile było osób na przyjęciu, jeżeli wymieniono 66 uścisków?

42. Ile jest wszystkich liczb sześciocyfrowych, w których zapisie występuje dokładnie raz cyfra 5 oraz dokładnie dwa razy cyfra 7?

43. Ze zbioru liczb dwucyfrowych losujemy bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wylosowanych liczb jest parzysta.

44. Uczeń potrafi rozwiązać 10 z 20 zadań egzaminacyjnych. Losuje 3 zadania i jeśli rozwiąże co najmniej 2 z nich, to zda egzamin. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że uczeń zaliczy egzamin. Jakie byłoby to prawdopodobieństwo, gdyby uczeń umiał rozwiązać 15 zadań?

45. W partii 25 żarówek 16% jest uszkodzonych. Losujemy dwie żarówki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) obie żarówki będą dobre,

b) przynajmniej jedna żarówka będzie dobra.

46. Z cyfr liczby 12345678 tworzymy liczby ośmiocyfrowe, w których zapisie cyfry się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) cyfry 1, 2 i 3 znajdują się obok siebie w dowolnej kolejności,

b) pomiędzy cyframi 1 i 2 znajdują się dokładnie trzy cyfry.

47. Ze zbioru $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania i wstawiamy je odpowiednio w miejsce współczynników a i b do wzoru funkcji $f(x) = ax^2 + bx + 1$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) funkcja f jest rosnąca w zbiorze $\mathbf{R}$,

b) wykres funkcji f jest symetryczny względem osi OY,

c) wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej $x = 1$.

48. Na pierwszej loterii jest n losów, w tym 1 wygrywający, a na drugiej jest $2n$ losów, w tym 2 wygrywające. Sprawdź, czy prawdopodobieństwo wygrania na obu loteriach jest jednakowe, gdy kupujemy: a) 1 los, b) 2 losy.

49. W sklepie jest n sztuk pewnego wyrobu, w tym 30% sztuk pierwszego gatunku i 70% – drugiego. Na opakowaniach tego wyrobu nie podano jednak informacji o gatunku. Prawdopodobieństwo tego, że druga sprzedana sztuka będzie pierwszego gatunku, pod warunkiem, że pierwsza sprzedana sztuka będzie też pierwszego gatunku, wynosi $\frac{2}{7}$. Oblicz n.

50. Rzucamy trzy razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za trzecim razem wypadła szóstka, jeśli:

a) iloczyn otrzymanych oczek jest liczbą podzielną przez 3,

b) suma otrzymanych oczek jest równa 12,

c) suma otrzymanych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

51. Z urny zawierającej 4 kule białe i 2 czarne losujemy 1 kulę i wkładamy ją do drugiej urny zawierającej 3 kule białe i 5 czarnych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kula wylosowana z drugiej urny będzie czarna.

52. Z urny, w której znajdują się 3 kule białe i 5 czarnych, losujemy jedną kulę, zwracamy ją do urny i dorzucamy 2 kule koloru wylosowanej kuli. Następnie losujemy jeszcze jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dwie wylosowane kule są takiego samego koloru.

53. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ wybieramy losowo jedną liczbę, a następnie z pozostałych losujemy jeszcze dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem dwóch liczb parzystych.

54. W dwóch urnach, w których są po 4 kule czarne, rozmieszczamy dodatkowo 6 kul białych. Następnie z losowo wybranej urny losujemy jedną kulę. Jak rozmieścić białe kule w urnach, aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej było największe? Oblicz to prawdopodobieństwo.

55. Student z $2n$ pytań $(n > 1)$ losuje na egzaminie 2 pytania. Jeżeli odpowie na nie dobrze – zdaje egzamin, jeżeli odpowie na każde źle – nie zdaje egzaminu. W przypadku jednej złej odpowiedzi wyciąga dodatkowe pytanie i jeżeli odpowie poprawnie, zda egzamin. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że student zda egzamin, jeżeli umie odpowiedzieć na n pytań.

56. W rzucie niesymetryczną kostką prawdopodobieństwo uzyskania co najwyżej czterech oczek jest równe 0,6, a co najmniej czterech oczek – 0,8. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania czterech oczek w rzucie tą kostką.

57. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A|B)$, jeśli wiadomo, że $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B') = \frac{1}{6}$ oraz $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

58. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cap B)$, jeśli wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ oraz $P(A|B) = \frac{1}{5}$.

59. a) Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cap B)$ i $P(B \setminus A)$, jeśli wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ oraz $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym.

b) Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cup B)$ i $P(A \setminus B)$, jeśli wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ oraz $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym.

60. a) Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A' \cup B)$ i $P(A|B)$, jeśli wiadomo, że $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B') = \frac{3}{4}$ oraz $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$.

b) Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A'|B)$, jeśli wiadomo, że $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym oraz $P(A) = P(B) = 3P(A \cap B)$.

D **61.** Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(B) > 0$. Wykaż, że:

$$P(A|B) \geqslant \frac{P(A)+P(B)-1}{P(B)}$$

Niech X będzie zmienną losową o wartościach x_1, x_2, ..., x_n przyjmowanych z prawdopodobieństwami odpowiednio p_1, p_2, ..., p_n. **Wartością oczekiwaną** zmiennej X nazywamy liczbę:

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$$

Grę nazywamy **sprawiedliwą**, jeśli jej wartość oczekiwana jest równa 0.

62. Pewna gra polega na dwóch rzutach monetą. Jeśli wypadną dwa orły, to wygrywamy 80 zł, jeśli dwie reszki – wygrywamy 40 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy p zł.

a) Oblicz wartość oczekiwaną tej gry dla $p = 50$.

b) Dla jakiej wartości p gra jest sprawiedliwa?

63. Pewna gra polega na rzucie dwiema kostkami i dodaniu liczby wyrzuconych oczek. Jeśli otrzymamy co najmniej 10 oczek, to wygrywamy x zł, jeśli otrzymamy 7 oczek, to wygrywamy $2x$ zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 36 zł. Dla jakiej wartości x gra jest sprawiedliwa?

64. Spośród liczb 3, 4 i 5 losujemy dwie. Zmienna losowa X przyporządkowuje każdej parze liczb jej sumę. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej X, jeśli losujemy:

a) bez zwracania,

b) ze zwracaniem.

5.14. Statystyka

Średnią arytmetyczną n liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Średnia ważona n liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$, którym przypisano odpowiednio wagi $w_1, w_2, \ldots, w_n$, będące liczbami dodatnimi, jest równa:

$$\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n liczb: $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ jest:

- dla n nieparzystych: $x_{\frac{n+1}{2}}$ – wartość środkowa,
- dla n parzystych: $\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$ – średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wartości środkowych.

Dominanta (wartość modalna, moda) jest wartością, która występuje wśród danych najczęściej.

Wariancją n liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o średniej arytmetycznej $\overline{x}$ jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (\overline{x})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

Zestaw I – wprowadzający

1. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę danych liczb.

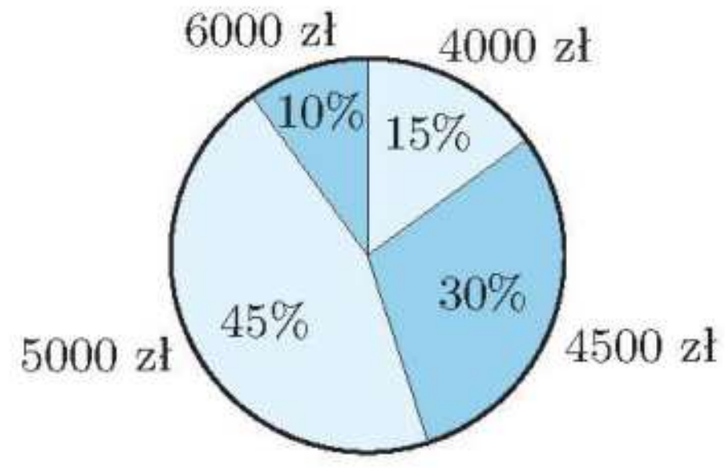
a) 4, 3, 1, 10, 10, 13, 8, 10, 4

b) 2, 2, 4, 4, 2, 6, 6, 4, 2, 2, 10

c) 3, 2, 3, 9, 4, 10, 14, 3

d) 16, 8, 8, 0, 8, 8, 14, 2

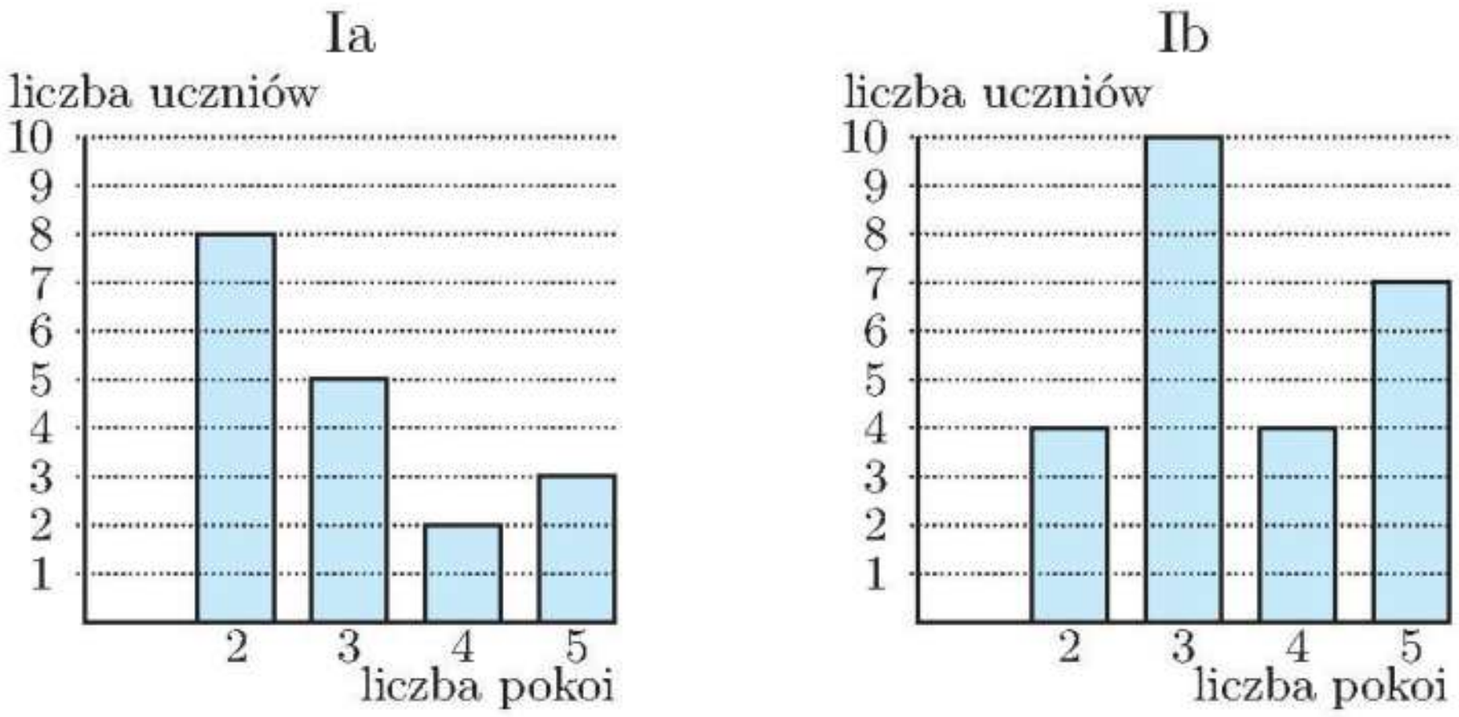
2. Pewna firma ma cztery oddziały. Na diagramie przedstawiono, jaki procent osób pracuje w poszczególnych oddziałach i jakie są w nich średnie zarobki. Oblicz średnią zarobków w tej firmie.



3. W pewnej szkole są trzy klasy drugie liczące kolejno 21, 23 i 23 uczniów. Średni wzrost uczniów w pierwszej z nich jest równy 172 cm, w drugiej – 174 cm, w trzeciej – 170 cm. Oblicz średni wzrost wszystkich uczniów klas drugich.

4. Uczniom klas Ia i Ib zadano pytanie: „Ile pokoi ma twoje mieszkanie?". Wyniki ankiety przedstawiono na poniższych diagramach. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zebranych danych dla:

a) klasy Ia, b) klasy Ib, c) obu klas razem.



5. Pewien nauczyciel, aby wystawić oceny na półrocze, oblicza średnią arytmetyczną wszystkich ocen, a następnie zaokrągla wynik do liczby całkowitej. Oceny Ani to 5, 3, 4, 4, 4, 2 i 3. Jaką najniższą ocenę musi dostać Ania z ostatniego sprawdzianu, żeby na koniec semestru mieć ocenę dobrą?

6. Wykonano serię rzutów kostką – średnia liczba otrzymanych oczek jest równa 4. Na diagramie przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek, ale pominięto informację, ile razy wypadły 2 oraz 3 oczka – wiadomo, że każdy z tych wyników wyrzucono parzystą liczbę razy. Ile rzutów wykonano podczas tej serii?



7. W tabeli podane są liczby i odpowiadające im wagi. Oblicz średnią ważoną tych liczb.

a)

Liczba	2	3	5	10
Waga	4	5	1	2

b)

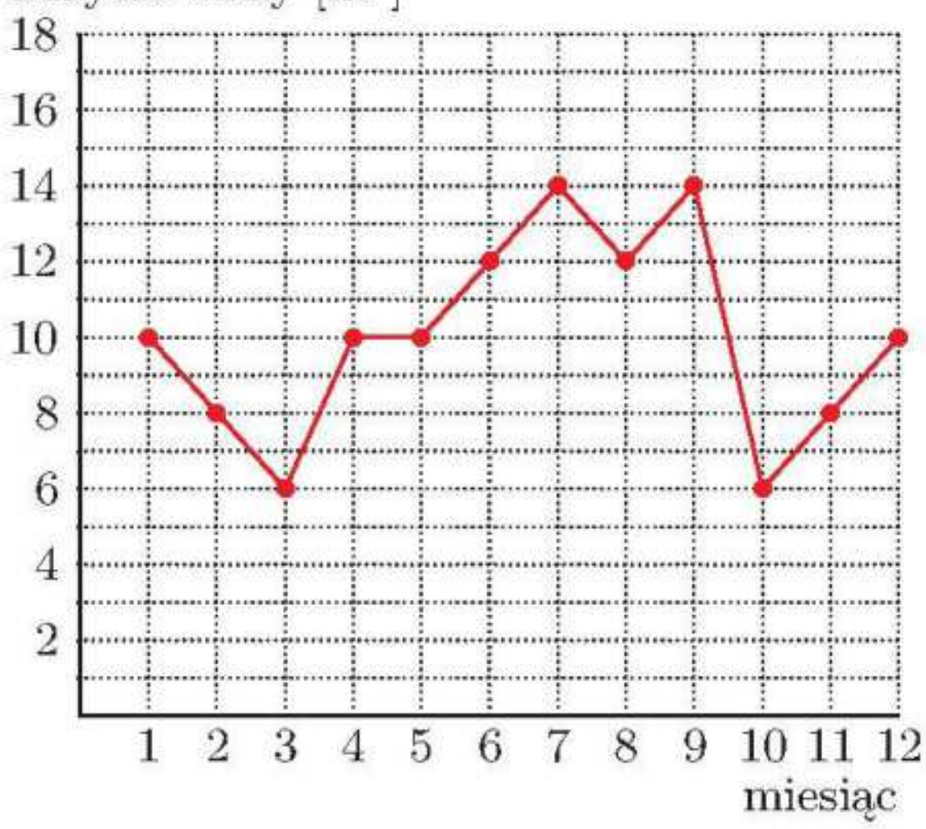
Liczba	9	2	6	8	16
Waga	0,2	0,4	0,25	0,05	0,1

8. Ocena wystawiana na półrocze przez pewnego nauczyciela jest średnią ważoną (zaokrągloną do liczby całkowitej) ze średnich arytmetycznych ocen z prac klasowych, sprawdzianów i pracy na lekcji – z wagami odpowiednio 0,5, 0,3 i 0,2. Oceny Kuby z prac klasowych to 5, 4, 2, ze sprawdzianów – 4, 3, 3, 5, 2 i za pracę na lekcji – 4, 3. Jaką ocenę otrzyma Kuba na półrocze?

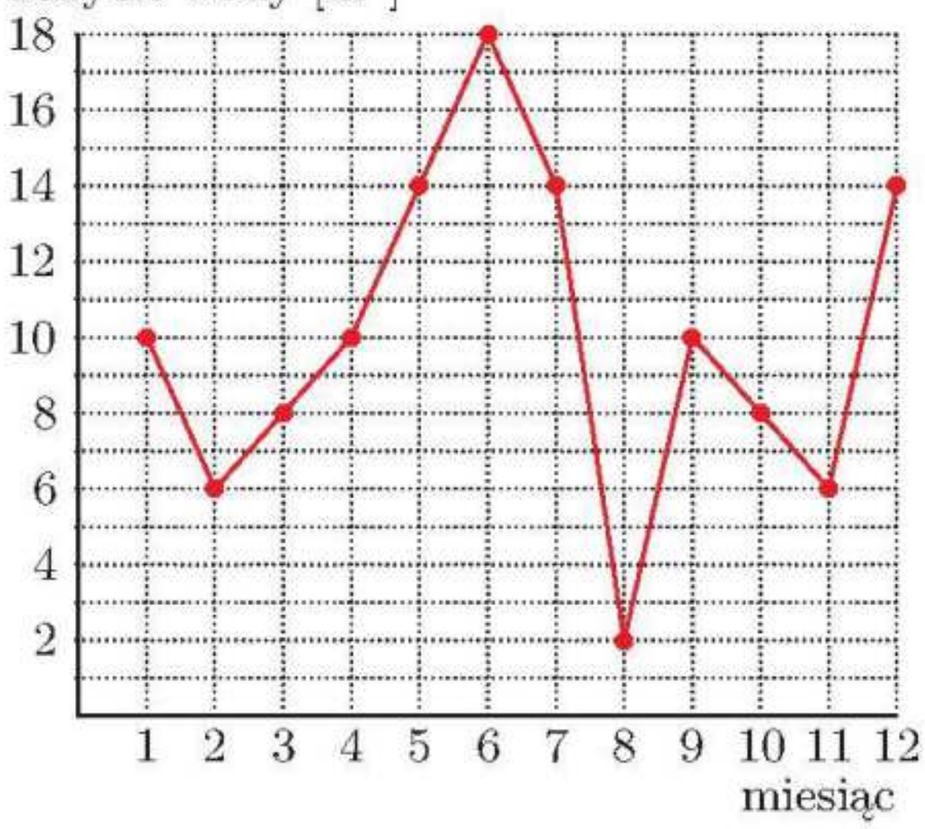
9. Na wykresach poniżej podano zużycie wody w kolejnych miesiącach przez rodziny Kowalskich i Nowaków. Sprawdź, czy średnie miesięczne zużycie wody w obu rodzinach jest takie samo. Oblicz odchylenie standardowe miesięcznego zużycia wody dla:

a) rodziny Kowalskich, b) rodziny Nowaków, c) obu rodzin razem.

Rodzina Kowalskich

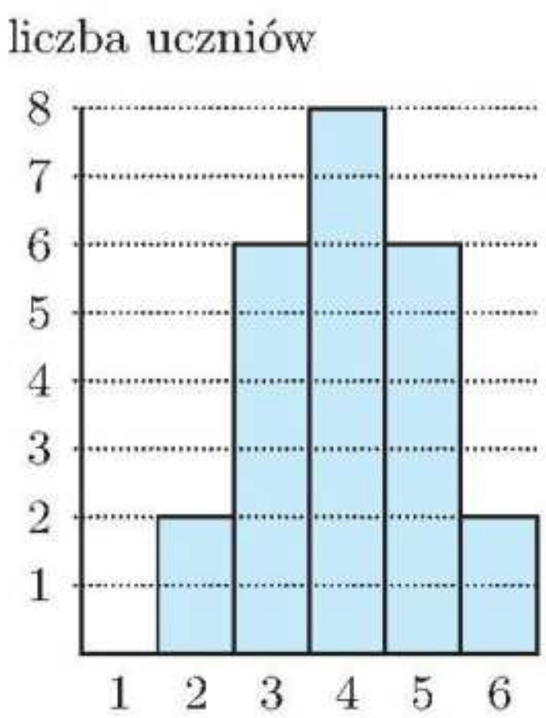


Rodzina Nowaków

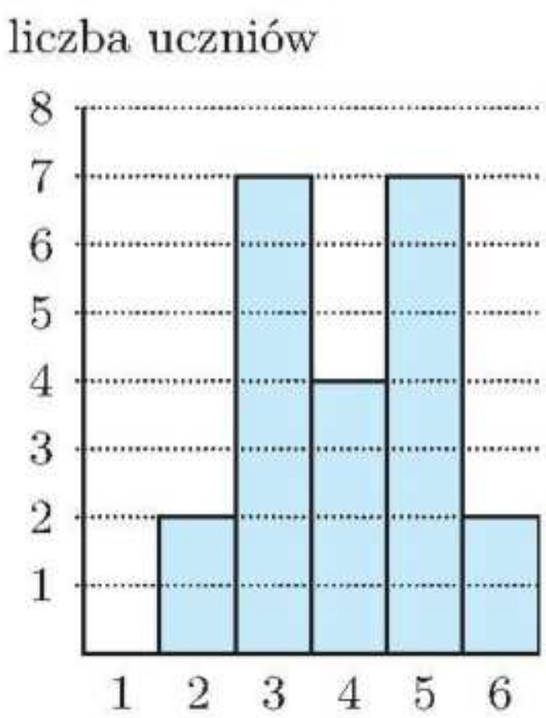


10. Na diagramach podano wyniki sprawdzianu w trzech klasach w pewnym liceum. Oblicz średnią ocen ze sprawdzianu w każdej klasie. W której z nich odchylenie standardowe ocen jest największe?

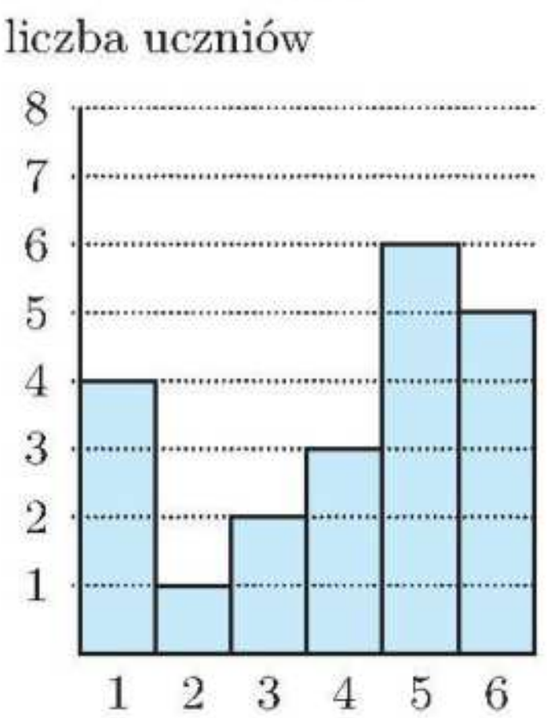
IVa



IVb



IVc



11. Pewna firma ma dwa oddziały. W oddziale I pracuje 20% osób zatrudnionych w tej firmie, pozostałe osoby pracują w oddziale II. Średnie zarobki w oddziale I wynoszą 6000 zł, w oddziale II – 4000 zł, natomiast odchylenia standardowe są równe odpowiednio 1000 zł i 200 zł. Oblicz średnią i odchylenie standardowe zarobków dla całej firmy.

Zestaw II – ćwiczeniowy

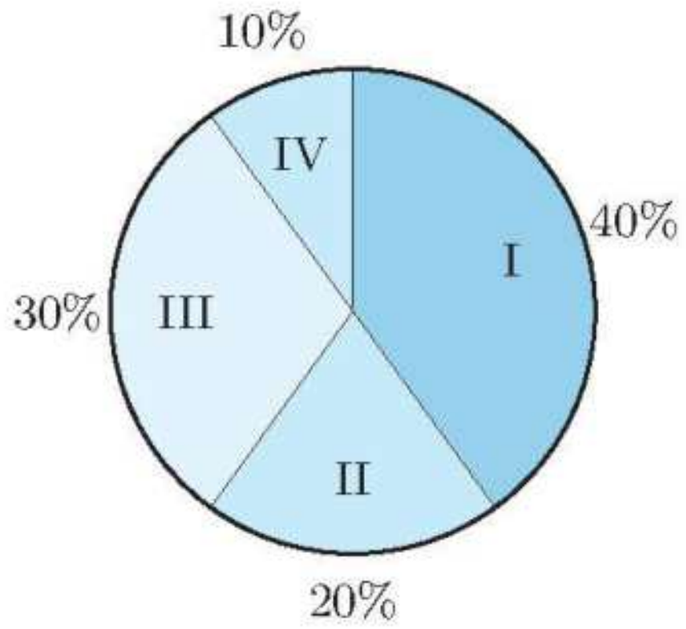
12. a) Średnia arytmetyczna liczb $14, 2, 4, 15, 14, x, 6x$ jest równa 12. Oblicz x oraz wyznacz medianę i dominantę tych liczb.

b) Średnia arytmetyczna liczb $3, 1, 2, 5, 6, x, y$ jest równa 4. Oblicz x i y, jeśli wiadomo, że dominanta tych liczb jest równa 1 oraz $x > y$.

13. Pewna firma zatrudnia 120 osób w czterech oddziałach znajdujących się w różnych miastach. Średnie miesięczne wynagrodzenie w I oddziale wynosi 4400 zł, w II – 4800 zł, w III – 4200 zł, w IV – 6000 zł. Na diagramie poniżej został podany procentowy rozkład zatrudnienia w poszczególnych oddziałach.

a) Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie.

b) Jak zmieni się średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie, jeśli w I oddziale zatrudnienie zmniejszy się o 25%, a średnia zarobków w tym oddziale nie ulegnie zmianie?



14. W pewnej firmie 20% pracowników zarabia średnio miesięcznie 7 tysięcy złotych. Średnia płaca pozostałych pracowników tej firmy wynosi 4,5 tysiąca złotych. Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie.

15. Podczas międzyszkolnych zawodów w łyżwiarstwie figurowym dziewięciu sędziów przyznawało noty za technikę i prezentację programu w skali od 0,0 do 6,0 punktów. Nota zarówno za technikę, jak i za prezentację programu była średnią arytmetyczną uzyskanych punktów. Jakie były końcowe noty dwóch par, których punktacja została podana w tabeli, jeśli końcowa nota była:

a) średnią arytmetyczną noty za technikę i noty za prezentację,

b) średnią ważoną, przy czym nota za technikę miała wagę 0,6, a nota za prezentację – wagę 0,4?

Para I	technika	5,0	5,1	5,0	5,2	5,5	5,0	5,3	5,1	5,6
	prezentacja	4,9	5,0	4,8	5,2	5,4	4,9	5,0	4,8	5,0
Para II	technika	6,0	5,8	5,9	6,0	5,7	5,8	5,7	5,9	5,4
	prezentacja	5,5	5,8	5,5	5,9	5,6	5,8	5,9	5,4	5,9

16. Oblicz średnią arytmetyczną $\overline{x}$, średnią arytmetyczną kwadratów $\overline{x^2}$ oraz wariancję poniższych danych.

a) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3

b) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5

c) 10, 20, 30, 40, 50

d) $-2, -2, -1, -1, 0, 5, 5$

D **17.** Wykaż, że jeżeli $\overline{x^2}$ jest średnią arytmetyczną kwadratów liczb $x_1, \ldots, x_k$, a $\overline{y^2}$ jest średnią arytmetyczną kwadratów liczb $y_1, \ldots, y_l$, to średnia arytmetyczna kwadratów wszystkich tych liczb jest równa:

$$\frac{k \cdot \overline{x^2} + l \cdot \overline{y^2}}{k+l}$$

18. W pewnej klasie jest 12 dziewcząt i 8 chłopców. W tabeli podano średnie ocen z klasówki ze statystyki w tej klasie oraz odchylenia standardowe (z podziałem na dziewczęta i chłopców).

	Dziewczęta	Chłopcy
Średnia ocen	4	4,2
Odchylenie standardowe	0,9	1,5

Oblicz średnią ocen z tej klasówki i odchylenie standardowe dla całej klasy. Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

19. W firmie A pracuje 10 osób, a w firmie B – 20 osób. Średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie A wynosi 4000 zł, a odchylenie standardowe – 500 zł, natomiast w firmie B średnie miesięczne wynagrodzenie wynosi 5000 zł, a odchylenie standardowe – 1000 zł. Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie oraz odchylenie standardowe dla obu firm łącznie. Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

20. Średnie zarobki w pewnej firmie wynoszą 6000 zł, a odchylenie standardowe wynosi 500 zł. Oblicz, jak zmieni się średnie wynagrodzenie i odchylenie standardowe, jeżeli każdy z pracowników dostanie:

a) 5% podwyżki,

b) 200 zł podwyżki.

21. Średnia arytmetyczna liczb $x, y, 2, 6, 6, 4, 3, 4$ jest równa 4, a odchylenie standardowe jest równe 1,5. Oblicz x i y, jeśli wiadomo, że $x < y$.

22. Wśród 10 ocen z matematyki pewnego ucznia są tylko trójki i czwórki. Oblicz, ile jest czwórek, jeśli wiadomo, że wariancja ocen wynosi 0,16 oraz czwórek jest więcej niż trójek.

Zestaw III – podsumowujący

23. Średnia wyników w skoku wzwyż 12 uczniów wyniosła 140 cm. Dwóch uczniów skoczyło na wysokość 150 cm. Ile wynosiłaby średnia, gdyby skoczyli oni o 10 cm wyżej?

24. W pewnej firmie średnia płaca wynosi 4800 zł, przy czym średnia płaca pracowników ze stażem nie dłuższym niż 5 lat wynosi 4000 zł, natomiast tych ze stażem dłuższym – 4900 zł. Oblicz, jaki procent wszystkich pracowników stanowią pracownicy z krótszym stażem.

25. Pewna firma ma dwa oddziały. Średnie miesięczne wynagrodzenie w I oddziale wynosi 4600 zł, a w II – 5800 zł. Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie w obu oddziałach razem, jeżeli wiadomo, że:

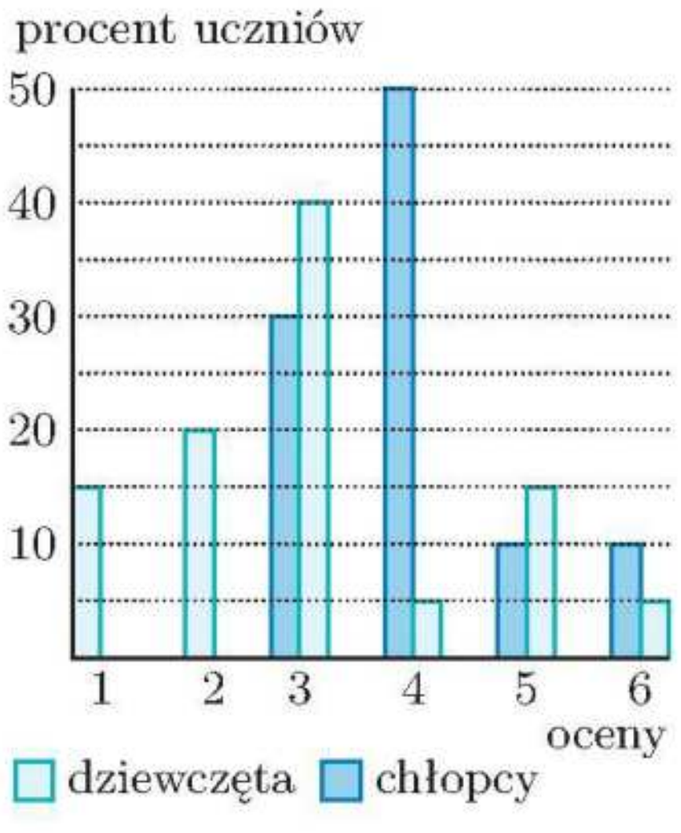
a) I oddział zatrudnia dwa razy więcej pracowników niż II oddział,

b) I oddział zatrudnia o 40% pracowników mniej niż II oddział.

26. W tabeli podano miesięczne wynagrodzenia pracowników pewnej firmy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany pracownik z tej firmy zarabia powyżej mediany.

Liczba pracowników	12	6	2	2	3
Wynagrodzenie [zł]	3000	3500	4000	5000	7000

27. W klasach drugich pewnej szkoły przeprowadzono test sprawdzający z matematyki, w którym wzięło udział 60 uczniów, w tym 20 dziewcząt. Na diagramie podano oceny oddzielnie w grupie dziewcząt i w grupie chłopców.



a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ocena losowo wybranej dziewczyny będzie się różniła od średniej w grupie dziewcząt o więcej niż odchylenie standardowe. Ile wynosi to samo prawdopodobieństwo w grupie chłopców?

b) Wybieramy losowo dziewczynę i chłopca. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ocena dziewczyny będzie nie mniejsza od średniej w grupie dziewcząt, a ocena chłopca – nie mniejsza od średniej w grupie chłopców.

*5.15. Rachunek różniczkowy

Funkcja $f\colon (a;b) \to \mathbf{R}$ jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in (a;b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Funkcję $f\colon (a;b) \to \mathbf{R}$ nazywamy **ciągłą w przedziale otwartym** $(a;b)$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Funkcję $f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbf{R}$ nazywamy **ciągłą w przedziale domkniętym** $\langle a;b\rangle$, jeżeli jest ciągła w przedziale $(a;b)$ oraz:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

Twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich
Jeśli funkcja $f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbf{R}$ jest ciągła oraz $f(a) \neq f(b)$, to funkcja ta przyjmuje w przedziale $(a;b)$ każdą wartość liczbową p znajdującą się między liczbami $f(a)$ i $f(b)$.

Powyższe twierdzenie mówi, że funkcja ciągła ma **własność Darboux**.

Z twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich wynika, że jeśli funkcja $f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbf{R}$ jest ciągła oraz:

$$f(a) < 0,\ f(b) > 0 \quad \text{lub} \quad f(a) > 0,\ f(b) < 0$$

to istnieje przynajmniej jeden argument $c \in (a;b)$ taki, że $f(c) = 0$.

Twierdzenie Weierstrassa
Jeśli funkcja $f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbf{R}$ jest ciągła, to w pewnym punkcie tego przedziału funkcja ta przyjmuje wartość największą oraz w pewnym punkcie tego przedziału przyjmuje wartość najmniejszą.

Zestaw I – wprowadzający

1. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^3-9}{4x-5}$

b) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3-1}{2-x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{2-x}$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^4-1}{x^3-x}$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-3x-4}{x^2-16}$

f) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-x-6}$

g) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{-x^2+4x-3}{x^2-5x+6}$

h) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^3+8}$

i) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-3x-2}{2x^3+3x^2-1}$

2. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{4-x}}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{2-\sqrt{5-x}}$

3. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^2+3x-4}{-2x^2+2x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^4-3x}{4x^4+x^3-1}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{2x^3-x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4-x^2}{1+x-2x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3-8x^2-9x)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3+6x^2+1)$

4. Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to4^+} \frac{1}{x-4}$

b) $\lim\limits_{x\to4^-} \frac{1}{x-4}$

c) $\lim\limits_{x\to3^-} \frac{x-2}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to5^+} \frac{x+4}{5-x}$

e) $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{1}{x^2-x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{x+2}{4x-3-x^2}$

5. Zbadaj ciągłość funkcji f.

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{dla } x\geqslant 0 \\ -x^2+1 & \text{dla } x<0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x} & \text{dla } x>1 \\ -x+1 & \text{dla } x\leqslant 1 \end{cases}$

6. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f jest ciągła?

a) $f(x)=\begin{cases} a-x & \text{dla } x<1 \\ 4 & \text{dla } x=1 \\ \frac{6}{x+1}+b & \text{dla } x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{dla } x<2 \\ 3 & \text{dla } x=2 \\ \frac{b}{x+2} & \text{dla } x>2 \end{cases}$

7. Wyznacz punkty, w których funkcja f nie jest ciągła.

a) $f(x)=\begin{cases} \frac{2-x}{x^2-4} & \text{dla } x\in\mathbf{R}\setminus\{-2,2\} \\ \frac{1}{4} & \text{dla } x=-2 \\ -\frac{1}{4} & \text{dla } x=2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x-7 & \text{dla } x\leqslant 2 \\ x^2-9 & \text{dla } 2<x<7 \\ \frac{x^2+1}{x} & \text{dla } x\geqslant 7 \end{cases}$

8. Dla jakiej wartości parametru a funkcja f jest ciągła? Naszkicuj wykres tej funkcji i z wykresu odczytaj jej ekstrema lokalne.

a) $f(x)=\begin{cases} ax+1 & \text{dla } x<0 \\ a & \text{dla } x=0 \\ (x-a)^2 & \text{dla } x>0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax & \text{dla } x<-1 \\ \frac{a-x}{x+2} & \text{dla } x\geqslant -1 \end{cases}$

D **9.** Wykaż, że funkcja f ma w podanym przedziale co najmniej jedno miejsce zerowe.

a) $f(x)=x^3-5x^2+7x-7\log_2 x,\ \langle 1;4\rangle$

b) $f(x)=\frac{x+5}{x+2}-3^x,\ \langle -1;1\rangle$

D **10.** Wykaż, że równanie ma w podanym przedziale co najmniej jedno rozwiązanie.

a) $x^3-3x+1=0,\ \langle 0;1\rangle$

b) $-x^4+4x+3=0,\ \langle 1;2\rangle$

11. Wyznacz przybliżone rozwiązanie równania z dokładnością do $\frac{1}{4}$.

a) $x^3+4x-1=0$

b) $x^3+2x+1=0$

Jeżeli istnieje skończona granica:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

to granicę tę nazywamy **pochodną funkcji** f **w punkcie** x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$. Mówimy wówczas, że funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie x_0.

Pochodna $f'(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta, jaki styczna do wykresu funkcji f w punkcie $P_0(x_0, f(x_0))$ tworzy z osią OX.

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to **styczna** do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma równanie:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x, to:

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, gdzie c jest dowolną stałą
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ dla $g(x) \neq 0$
- $(g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Pochodne niektórych funkcji

$(c)' = 0$, gdzie c – stała

$(x)' = 1$

$(x^r)' = rx^{r-1}$, $r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in \mathbf{R}_+$

12. Na podstawie definicji oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0.

a) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = 2x^2$, $x_0 = 4$

c) $f(x) = \frac{4}{x}$, $x_0 = 2$

d) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $x_0 = 1$

13. Sprawdź, korzystając z definicji pochodnej funkcji w punkcie, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie $x_0 = 0$.

a) $f(x) = |2x|$

b) $f(x) = x|x|$

14. Wyznacz pochodną funkcji f, a następnie oblicz $f'(0)$ i $f'(1)$.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 6$

b) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + x$

d) $f(x) = x^5 + 2x^3 + 0{,}5x^2 + 1$

15. Wyznacz pochodną funkcji f, a następnie oblicz $f'(-1)$ i $f'(-2)$.

a) $f(x) = (3x-1)(x+2)$

b) $f(x) = (x^2-4)(x^2+x)$

c) $f(x) = (1-4x^2)(x^3+1)$

d) $f(x) = (x+1)^2(x-1)^2$

16. Określ dziedzinę funkcji f, a następnie wyznacz jej pochodną i określ dziedzinę pochodnej.

a) $f(x) = \frac{2}{x+4}$

b) $f(x) = \frac{4x}{x-3}$

c) $f(x) = 3x^4 - \frac{5}{x}$

d) $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x-1}$

e) $f(x) = \frac{x+6}{x^2-4}$

f) $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2+3}$

g) $f(x) = \frac{x^3-x+1}{x^4+x}$

h) $f(x) = \frac{2x+1}{4x-1} - \frac{1}{x^2}$

i) $f(x) = \frac{2}{x^4+x} + \frac{1}{x^3+8}$

17. Określ dziedzinę funkcji f, a następnie wyznacz jej pochodną i określ dziedzinę pochodnej.

a) $f(x) = \sqrt{2x}(x^2-1)$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

c) $f(x) = \sqrt{x^4+2x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+4}}$

e) $f(x) = \sqrt{4x^2+\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{2-\sqrt{x}}$

18. Oblicz miarę kąta, który styczna do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 tworzy z osią OX.

a) $f(x) = 2\sqrt{3}x^4$, $x_0 = \frac{1}{2}$

b) $f(x) = \sqrt{6x}$, $x_0 = \frac{9}{2}$

c) $f(x) = x^2 - 6x + \frac{9}{x}$, $x_0 = 3$

d) $f(x) = (x^2-x)^6$, $x_0 = \frac{1}{2}$

19. Oblicz tangens kąta, który styczna do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 tworzy z osią OX. Podaj przybliżoną miarę tego kąta.

a) $f(x) = x^2 + 3x - \frac{8}{x}$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$, $x_0 = \sqrt{5}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $x_0 = -1$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)^4$, $x_0 = -\frac{1}{2}$

20. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.

a) $f(x) = 2x^2 - 3$, $x_0 = -1$

b) $f(x) = x^3 - 6x$, $x_0 = 2$

c) $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$

d) $f(x) = \frac{5x+2}{x+6}$, $x_0 = -4$

e) $f(x) = \frac{-4x}{x^2+4}$, $x_0 = -2$

f) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-x+2}$, $x_0 = 1$

g) $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$, $x_0 = -2$

h) $f(x) = \sqrt{x^4+x^2+7}$, $x_0 = 1$

21. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji f w punktach jej przecięcia z osią OX.

a) $f(x) = x^2 + 4x$

b) $f(x) = 8x - x^4$

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+2}$

22. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 1$:

a) równoległej do prostej $2x + y = 0$,

b) prostopadłej do prostej $4x + y - 1 = 0$,

c) przechodzącej przez punkt $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$.

23. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{2x^2} - 1$, jeśli wiadomo, że z osią OX tworzy ona kąt $150°$.

D **24.** Wykaż, że prosta o równaniu $y = 2(x - 3)$ jest wspólną styczną wykresów funkcji:

$$f(x) = \frac{-2x^2}{3(x-1)} \quad \text{i} \quad g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Wyznacz współrzędne punktów styczności.

25. Dla jakiej wartości parametru m podana prosta jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^4 + m$?

a) $y = -4x$ b) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$ c) $y = -2$

Jeśli pochodna funkcji f jest **dodatnia** w przedziale $(a; b)$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których przyjmuje ona wartość 0, to funkcja f jest w tym przedziale **rosnąca**.

Jeśli pochodna funkcji f jest **ujemna** w przedziale $(a; b)$, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których przyjmuje ona wartość 0, to funkcja f jest w tym przedziale **malejąca**.

Jeśli funkcja f jest rosnąca (malejąca) w przedziale $(a; b)$ i jest ciągła w przedziale $\langle a; b\rangle$, to jest rosnąca (malejąca) w przedziale $\langle a; b\rangle$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 i osiąga w tym punkcie ekstremum, to $f'(x_0) = 0$ (styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi OX).

Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego

Jeśli funkcja f ma pochodną w przedziale $(a; b)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (a; x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0; b)$, to ma ona w punkcie x_0 **maksimum**.

Jeśli funkcja f ma pochodną w przedziale $(a; b)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (a; x_0)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0; b)$, to ma ona w punkcie x_0 **minimum**.

Dalej ekstrema lokalne będziemy nazywać ekstremami.

Zestaw II – ćwiczeniowy

26. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 1$

b) $f(x) = -3x^5 - 5x^3 + 30x - 1$

c) $f(x) = x + \frac{9}{x}$

d) $f(x) = (4x^2 - 9)^4$

e) $f(x) = \frac{x^4}{(x-1)^2}$

f) $f(x) = \frac{x^2+5x+5}{x+3}$

g) $f(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{x+2}$

h) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}$

27. Wyznacz ekstrema funkcji f.

a) $f(x) = x^3 - 9x + 1$

b) $f(x) = x^4 - 6x^2$

c) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

e) $f(x) = \frac{x}{x-3} + \frac{x}{x+3}$

f) $f(x) = \frac{8}{x^2} + \frac{1}{(x-6)^2}$

28. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w danym przedziale.

a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$, $\langle -1; 2\rangle$

b) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{4} - 2x^2 - 3x$, $\langle 0; 3\rangle$

c) $f(x) = \frac{x^2-4x+8}{2x-4}$, $\langle -3; 1\rangle$

d) $f(x) = \frac{x-\sqrt{3}}{x^2+1}$, $\langle -1; 4\rangle$

29. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji f.

a) $f(x) = 3x^4 + (3x - 6)^4$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

c) $f(x) = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2}(x+1)^4$

d) $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}$

30. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

a) $f(x) = 2x^2 - x^4$

b) $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2}$

c) $f(x) = \frac{|x-2|}{x^2+1}$

31. Określ liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru a.

a) $2x^3 - 6x = a$

b) $x^4 - 4x^2 + 3 = a$

32. Określ liczbę ekstremów funkcji f w zależności od parametru a.

a) $f(x) = ax^2 + x - 2$

b) $f(x) = x^3 + ax^2 - 1$

c) $f(x) = ax^3 - x^2$

33. Dla jakiego $x > 0$ wyrażenie $x^3 + 2y$ przyjmuje najmniejszą wartość, jeśli wiadomo, że $6x + y - 1 = 0$? Oblicz tę wartość.

34. Dla jakich x i y wyrażenie $x^4 + y^2$ przyjmuje najmniejszą wartość, jeśli wiadomo, że $x + y + 3 = 0$? Oblicz tę wartość.

35. Jakie wymiary powinien mieć prostokąt o polu równym 18, aby jego obwód był najmniejszy?

36. Wyznacz najmniejszą wartość sumy długości przekątnych rombu o polu równym 50.

37. Na kole o promieniu 2 opisano trójkąt prostokątny. Wyznacz wymiary trójkąta, dla którego promień koła na nim opisanego jest najkrótszy.

38. Jaką największą objętość może mieć graniastosłup prawidłowy, jeśli suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa 36, a jego podstawą jest:

a) trójkąt, b) czworokąt?

39. Z drutu o długości 720 cm zrobiono szkielet akwarium w kształcie prostopadłościanu, którego długości krawędzi podstawy są w stosunku 1:2. Wyznacz wymiary akwarium o największej objętości.

40. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest równe 24 cm^2. Jakie wymiary powinien mieć ten prostopadłościan, aby jego objętość była największa?

41. Uczeń miał rozwiązać następujące zadanie:

„Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 8. Dla jakiej długości boków trójkąta objętość bryły powstałej przez obrót tego trójkąta dookoła jego osi symetrii jest największa?"

Początek rozwiązania podanego przez ucznia przedstawiono w ramce.

Mamy $2x + 2r = 8$,

stąd $x = 4 - r$, gdzie $r \in (0; 2)$.

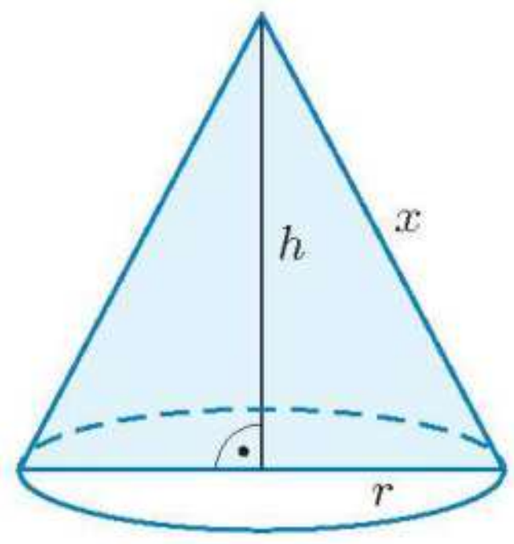
Objętość stożka:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{x^2 - r^2}$

Zatem:

$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{(4-r)^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{16 - 8r}$

czyli $V(r) = \frac{1}{3}\pi \sqrt{16r^4 - 8r^5}$, gdzie $r \in (0; 2)$.



Dokończ rozwiązanie zadania:

a) analizując znak pochodnej funkcji V,

b) rozpatrując funkcję pomocniczą $f(r) = 16r^4 - 8r^5$.

42. Tworząca stożka ma długość 12. Wyznacz objętość stożka jako funkcję jego wysokości x i podaj dziedzinę tej funkcji. Dla jakiej wartości x objętość stożka jest największa?

Zestaw III – podsumowujący

43. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x}{(1-2x)^2}$ i prostopadłej do prostej przechodzącej przez punkty $A(9,0)$ i $B(0,-1)$.

D **44.** Wykaż, że styczne do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-6}{x-3}$, $x \neq 3$, poprowadzone w punktach jego przecięcia z osiami układu współrzędnych, są równoległe. Oblicz odległość między tymi stycznymi.

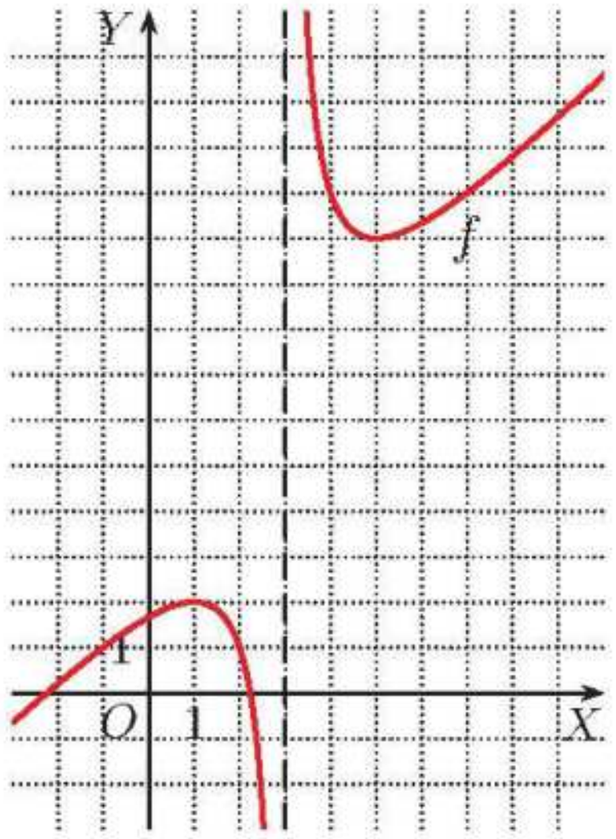
45. Prosta o równaniu $y = \frac{1}{4}x$ jest styczna do wykresu funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2-x}{3x+1} + \cos 2\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha$$

w punkcie o dodatniej odciętej. Wyznacz α, jeśli $\alpha \in \langle 0; \pi \rangle$.

46. Dane są funkcje $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a$ i $g(x) = \frac{1}{x}$. Dla jakiej wartości parametru a styczne do wykresów funkcji f i g w punkcie ich przecięcia są prostopadłe?

47. Funkcja $f(x) = \frac{x^2-5}{x-3}$ (rysunek obok) w punkcie A osiąga maksimum, a w punkcie B – minimum. Wyznacz współrzędne punktów A i B oraz równanie prostej przechodzącej przez środek odcinka AB i równoległej do stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej równej 2.



48. Punkt $P(1,-2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2+ax-4}{x+b}$, $b \neq -1$. Styczna do tego wykresu poprowadzona w punkcie P jest prostopadła do prostej $3x + y + 5 = 0$. Oblicz a i b.

49. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(3,4)$ i ograniczającej z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt o najmniejszym polu. Oblicz pole tego trójkąta.

50. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(6,0)$ i $C(x,y)$. Wyznacz współrzędne punktu C tak, aby pole trójkąta ABC było największe, jeśli punkt ten należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+1}$ oraz $x \in \langle -2; 1 \rangle$. Oblicz pole tego trójkąta.

51. Wyznacz współrzędne punktu P należącego do wykresu funkcji f i leżącego najbliżej prostej $x - y + 2 = 0$.

a) $f(x) = 1 - x^2$

*b) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

52. W okrąg o promieniu 1 wpisano trójkąt równoramienny. Niech x oznacza odległość środka tego okręgu od podstawy trójkąta. Dla jakiej wartości x pole trójkąta jest największe? Oblicz to pole.

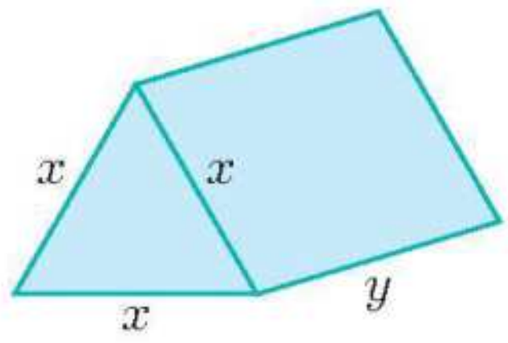
53. Oblicz największą możliwą objętość walca, którego przekątna przekroju osiowego ma długość 6.

54. Długość boku rombu jest równa 4. Wyznacz długości przekątnych rombu tak, aby objętość bryły otrzymanej z obrotu rombu wokół jednej z przekątnych była największa.

55. Powierzchnia metalowego zbiornika w kształcie walca bez pokrywy wynosi 4π m^2. Wyznacz wysokość pojemnika o największej objętości.

56. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu jest równa 40, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe 64. Wyznacz najmniejszą możliwą objętość tego prostopadłościanu.

57. Namiot ma kształt graniastosłupa prawidłowego trójkątnego (rysunek obok). Pole powierzchni całkowitej namiotu (łącznie z podłogą) jest równe $18\sqrt{3}$ m^2. Dla jakiej długości krawędzi $x \in \langle 2; 3\rangle$, podanej w metrach, objętość namiotu będzie największa?

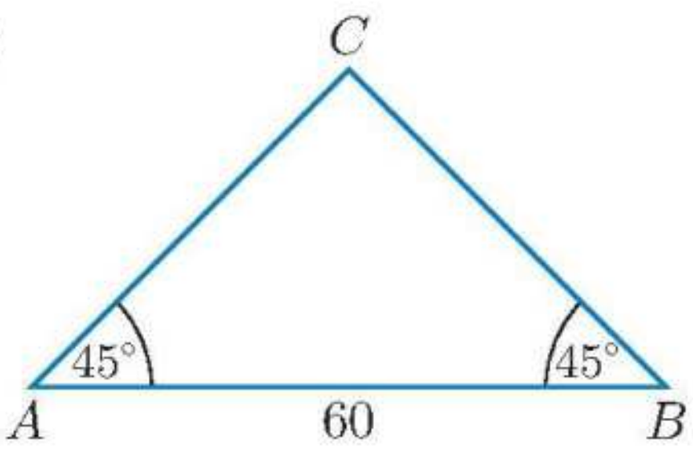


58. Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 16. Jakie wymiary powinien mieć ten graniastosłup, aby jego pole powierzchni całkowitej było najmniejsze?

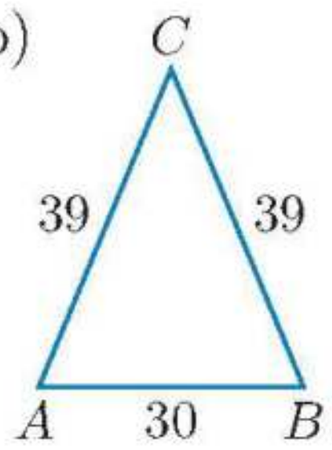
D **59.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość a. Wyznacz taką wysokość ostrosłupa, dla której jego objętość jest największa, i uzasadnij, że kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi jest rozwarty.

60. W trójkącie równoramiennym ABC (rysunek poniżej) na wysokości opuszczonej z wierzchołka C obrano punkt P taki, że suma $|AP| + |BP| + |CP|$ jest najmniejsza. Oblicz długość odcinka CP.

a)



b)



Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

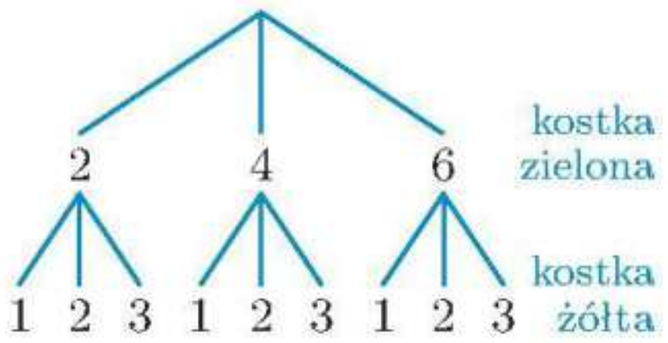
1.1. Reguła mnożenia

Ć **1.** 260

2. **a)** 36 **b)** 56

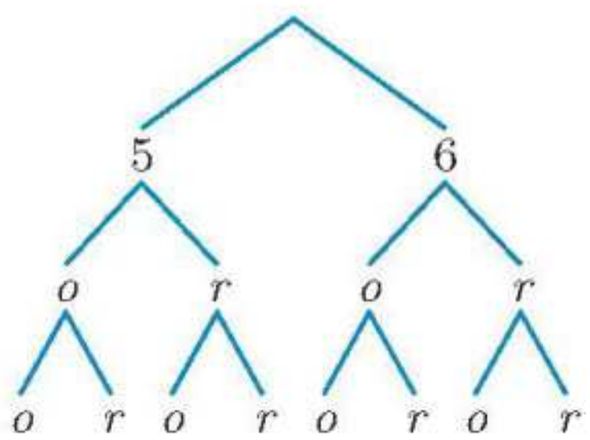
3. **a)** 32 000 **b)** 518 616 **c)** 456 976 000

4.



Możliwych jest 9 wyników.

5.



Możliwych jest 8 wyników.

Z **1.** 1600

2. 82 944

3. 72

4. liczb parzystych: 108,
liczb większych od 500: 72

5. **a)** 625 **b)** 500

6. **a)** 90 000 **b)** 9000

7. **a)** 540 **b)** 720

9. **a)** *ooo*, *oor*, *oro*, *orr*, *roo*, *ror*, *rro*, *rrr*
b) pięciokrotnego: 32,
dziesięciokrotnego: 1024

10. **b)** 9 **c)** 3

1.2. Permutacje

Ć **1.** **a)** 35, 53
b) 357, 375, 537, 573, 735, 753
c) 3579, 3597, 3759, 3795, 3957, 3975,
5379, 5397, 5739, 5793, 5937, 5973,
7359, 7395, 7539, 7593, 7935, 7953,
9357, 9375, 9537, 9573, 9735, 9753

2. **a)** 4 **b)** 8 **c)** 12

3. **a)** 5 **b)** 42 **c)** $\frac{1}{90}$ **d)** 10 302 **e)** $n+1$
f) $\frac{1}{n}$ **g)** n^2+3n+2 **h)** $\frac{1}{n^2-n}$

4. **a)** 720 **b)** 5040 **c)** 3 628 800 **d)** 479 001 600

Z **1.** **a)** 120 **b)** 720

2. **a)** 362 880 **b)** 3 265 920

3. **a)** 96 **b)** 72

4. **a)** 120 **b)** 360

5. **a)** 4 **b)** 5 **c)** 8 **d)** 10

6. **a)** 7 **b)** 11 lub 12

7. **a)** 24 **b)** 120

8. **a)** 5040 **b)** 40 320

9. **a)** 362 880 **b)** 2880 **c)** 4320

10. **a)** 56 **b)** $\frac{1}{420}$ **c)** 35 **d)** 120 **e)** $\frac{1}{55}$
f) 75 **g)** $\frac{5}{6}$ **h)** $\frac{7}{5}$ **i)** n^2-5n+6
j) n^2+n **k)** n^2 **l)** $1+\frac{1}{n}$

11. **a)** 5 **b)** 3

12. **a)** $n=8$ **b)** $n=6$ **c)** $n=5$
d) $n=8$ **e)** $n=4$ **f)** $n=2$

15. **a)** 3 **b)** 7 **c)** 24

16. **a)** 2 **b)** 9 **c)** 44

Permutacje z powtórzeniami

1. **a)** 210 **b)** 30 240

2. **a)** 16 800 **b)** 12 600

1.3. Wariacje bez powtórzeń

Ć **1.** **a)** 360 **b)** 358 800

3. trzycyfrowych: 504,
czterocyfrowych: 3024

4. 320

Z **1.** trzycyfrowych: 60,
czterocyfrowych: 120

2. **a)** 2520 **b)** 840

3. **a)** 5040 **b)** 840

4. 480

5. **a)** 360 **b)** 1320

6. wszystkich: 181 440,
spełniających podany warunek: 4320

7. 18 480

8. **a)** 210 **b)** 5040 **c)** 56
d) 1680 **e)** n **f)** $n!$

1.4. Wariacje z powtórzeniami

Ć **1.** **a)** 16 **b)** 15 625

2. 11 881 376

3. **a)** 100 **b)** 1024

Z **1.** **a)** 729 **b)** 512 **c)** 343 **d)** 448

2. **a)** 1000 **b)** 9000

3. **a)** $W_2^3 < W_3^2$ **b)** $W_4^3 < W_3^4$

5. **a)** 19 683 **b)** 729

6. **a)** 10^6 **b)** 6^{10}

8. **a)** 32 **b)** 2048 **c)** 2^n

9. **a)** 162 **b)** 118 098 **c)** $2 \cdot 3^{n-1}$

10. **a)** 216 **b)** 720 **c)** 36 **d)** 324

11. **a)** 38 000 **b)** 43 299 **c)** 3125 **d)** 86 875

12. tyle samo

13. $n = 10$

14. **a)** 64 **b)** 125

15. 41^5

1.5. Kombinacje

Ć **1.** $k = 1$: $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$
$k = 2$: $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$
$k = 3$: $\{x, y, z\}$

2. $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$, $\{4, 6\}$, $\{5, 6\}$;
$\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

3. **a)** 1, 4, 6, 4, 1 **b)** 1, 5, 10, 10, 5, 1

6. obie na 35 sposobów

9. **a)** $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
b) $a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$
c) $a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$
d) $a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$

Z **1.** **a)** 56 **b)** 28 **c)** 45 **d)** 120 **e)**, **f)** 165
g) 12 **h)** 220 **i)**, **j)** 1 **k)** 5050 **l)** 5151

2. **a)** $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$;
$\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$
b) $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$

3. **a)** 66 **b)** 495

4. **a)** 1260 **b)** 960

5. **a)** 15 **b)** 280

6. **a)** 45 **b)** 11

7. 150°

8. **a)** 120 **b)** $n = 9$

9. czworokątów: 15,
wszystkich wielokątów: 42

10. trójkątów: 70, czworokątów: 60

11. **a)** $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
b) $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
c) $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$
d) $a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$

12. $(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$,
$(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$

13. **a)** $28 + 16\sqrt{3}$ **b)** $68 - 48\sqrt{2}$
c) $232 + 164\sqrt{2}$ **d)** $44\sqrt{3} - 76$

14. **a)** $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
b) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$
c) $16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$
d) $16x^4 - 16x^3 + 6x^2 - x + \frac{1}{16}$
e) $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
f) $32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$
g) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$
h) $x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$

15. **a)** 8 **b)** -56 **c)** 3584 **d)** $-\frac{21}{2}$
e) 128 **f)** -160 **g)** 160 **h)** -28

18. 126

1.6. Kombinatoryka – zadania

Ć **1.** **a)** 10 **b)** 9

2. 6556

3. **a)** 36 **b)** 56

4. **a)** 10 **b)**, **c)** 220 **d)** 55

Z **2.** pięciocyfrowych: 7560,
sześciocyfrowych: 30 240

3. 78

4. **a)** 81 **b)** 729

5. **a)** 7140 **b)** 9660

6. **a)** 36 **b)** 6

7. **a)** 21 **b)** 16 **c)** 13

8. **b)** 144

9. **a)** 8 709 120
b) 4 838 400

10. **a)** 252 **b)** 32 **c)** 220

11. 17 520

12. 3360

14. 37 837 800

15. cyfr: 21, liczb: 2 053 230 379 200

16. **a)** 28 513 **b)** 255

17. **a)** 1 656 369 **b)** 3 421 322 190

18. **a)** 847 704 **b)** 2 221 968

19. 62 403 588

20. tak

21. $7^7 = 823\,543$

Dwójkowy system liczbowy

1. **a)** 11 **b)** 26 **c)** 171 **d)** 1025

2. **a)** $11111_{(2)}$ **b)** $100100_{(2)}$
c) $1001110_{(2)}$ **d)** $10010110_{(2)}$

3. **a)** $1000_{(2)}$ **b)** $100110_{(2)}$
c) $111011_{(2)}$ **d)** $11101001_{(2)}$

4. **a)** 512 **b)** 84

1.7. Zdarzenia losowe

Ć **1.** **a)** $\Omega = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$
b) $\Omega = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$

2. $A = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$,
$B = \{(2,5), (4,5), (5,2), (5,4), (5,6), (6,5)\}$

3. $A = \{(r,r,o,o), (r,o,r,o), (r,o,o,r), (o,r,r,o), (o,r,o,r), (o,o,r,r), (r,o,o,o), (o,r,o,o), (o,o,r,o), (o,o,o,r), (o,o,o,o)\}$,
$B = \{(r,r,o,o), (r,o,r,o), (r,o,o,r), (o,r,r,o), (o,r,o,r), (o,o,r,r)\}$

4. zdarzenia wykluczające się: A i D, A i E, B i D, C i D, C i E;
zdarzenia przeciwne: A i E, B i D

Z **1.** $A = \{(5,6,6), (6,5,6), (6,6,5)\}$,
$B = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4), (1,2,1), (1,2,2), (1,2,3), (1,3,1), (1,3,2), (1,4,1), (2,1,1), (2,1,2), (2,1,3), (2,2,1), (2,2,2), (2,3,1), (3,1,1), (3,1,2), (3,2,1), (4,1,1)\}$,
$C = \{(1,6,6), (2,3,6), (2,6,3), (3,2,6), (3,3,4), (3,4,3), (3,6,2), (4,3,3), (6,1,6), (6,2,3), (6,3,2), (6,6,1)\}$

2. pewne: D, niemożliwe: A, B, C

3. Żadna nie zachodzi.

4. **b)** $A \cup B = \{(1,2), (1,4), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (5,2), (5,4)\}$,
$A \cap B = B \cap C = A \cap B \cap C = \{(1,4)\}$

1.8. Prawdopodobieństwo klasyczne

Ć **1.** **a)** $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{2}$

2. **a)** $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{4}$

3. **a)** $\frac{71}{495}$ **b)** $\frac{56}{165}$ **c)** $\frac{32}{495}$ **d)** $\frac{98}{165}$

Z **1.** C

2. **a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{4}{9}$

3. **a)** $\frac{1}{27}$ **b)** $\frac{1}{12}$

4. **a)** $\frac{4}{45}$ **b)** $\frac{1}{15}$

5. **a)** $\frac{1}{300}$ **b)** $\frac{1}{150}$

6. **a)** $\frac{5}{18}$ **b)** $\frac{1}{216}$

7. $\frac{10!}{10^{10}} = \frac{9!}{10^9} = 0{,}00036288$

8. **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{8}{15}$

9. **a)** $\frac{7}{22}$ **b)** $\frac{21}{44}$ **c)** $\frac{7}{44}$ **d)** $\frac{35}{44}$

10. **a)** $\frac{12}{65}$ **b)** na I loterii

11. **a)** $\frac{308}{969}$ **b)** $\frac{147}{323}$

12. $\frac{1}{9}$; 3 razy

13. **a)** $\frac{11}{1024}$ **b)** $\frac{11}{64}$

14. **a)** $\frac{1}{5525}$ **b)** $\frac{6}{5525}$

15. **a)** $\frac{1014}{20\,825}$ **b)** $\frac{193}{270\,725}$ **c)** $\frac{263\,764}{270\,725}$ **d)** $\frac{15\,229}{54\,145}$

16. 4

1.9. Własności prawdopodobieństwa

Ć **2.** **a)** $\frac{15}{16}$ **b)** $\frac{91}{216}$

3. $P(A) = \frac{11}{12}$, $P(B) = \frac{8}{9}$

4. **a)** $\frac{2}{9}$ **b)** $\frac{1}{2}$

5. $P(A \setminus B) = \frac{11}{45}$, $P(B \setminus A) = \frac{7}{45}$

6. **a)** $\frac{7}{12}$ **b)** $\frac{17}{36}$ **c)** 1

Z **1.** **a)** $\frac{1}{12}$ **b)** 0

2. **a)** 0,05 **b)** 0,25

4. **a)** $\frac{1}{8}$ **b)** $\frac{1}{5}$

5. **a)** nie **b)** tak

6. nie

8. $P(A) = \frac{7}{18}$, $P(B) = \frac{1}{3}$

9. **a)** 0,67 **b)** 0,43

10. 0,4

11. **a)** 0 **b)** $\frac{7}{12}$

12. $P(A' \cup B') = \frac{11}{12}$, $P(A' \cap B') = \frac{5}{12}$

14. $P(A' \cup B') = \frac{4}{9}$, $P(A' \cap B') = \frac{1}{36}$

15. $\frac{27}{40}$

16. $\frac{3}{20}$

17. 0,58

Rozkład prawdopodobieństwa

1. $\frac{13}{30}$

2.

ω_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

3. $\frac{29}{60}$

ω_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

4. rozkład ucznia A

1.10. Prawdopodobieństwo warunkowe

Ć **1.** **a)** $\frac{5}{6}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** 1

2. **a), b), c)** $\frac{1}{2}$

3. **a)** $\frac{91}{216}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{6}$

5. $P(A|B_1) = \frac{7}{11}$, $P(A|B_2) = \frac{6}{11}$

Z **1.** **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}$

2. **a)** $\frac{1}{12}$ **b)** $\frac{3}{10}$

3. **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{1}{4}$

4. **a), b)** $\frac{1}{3}$

5. **a)** $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{5}{12}$ **c)** $\frac{3}{4}$

6. **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{7}{12}$

7. $\frac{2}{7}$

8. $P(B|A)$

9. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}$

10. **a)** $\frac{53}{60}$ **b)** 1 **c)** $\frac{1}{14}$ **d)** $\frac{1}{2}$

12. **a)** 0,3 **b)** $\frac{3}{8}$ **c)** 1 **d)** $\frac{3}{5}$

Zdarzenia niezależne

4. **a)** tak **b), c)** nie

1.11. Prawdopodobieństwo całkowite

Ć **1.** $\frac{9}{20}$

2. **a)** $\frac{5}{14}$ **b)** $\frac{17}{40}$

3. **a)** 0,021 **b)** 0,996

Z **1.** $\frac{3}{80}$

2. 0,7

3. 0,032

4. 0,56

5. przy trzecim

6. $m : n = 24 : 25$

7. $n = 4$

8. w jednej urnie: 2 losy wygrywające, w drugiej urnie: 98 losów przegrywających

9. 0,52

10. $\frac{1129}{1260}$

1.12. Wzór Bayesa

Ć **2.** **a)** $\frac{9}{17}$ **b)** $\frac{3}{7}$

3. **a)** $\frac{6}{7}$ **b)** $\frac{3}{5}$

4. **a)** $\frac{1}{21}$ **b)** $\frac{4}{21}$ **c)** $\frac{16}{21}$

Z **1.** $\frac{3}{11}$

2. $\frac{36}{61}$

3. **a)** $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{1}{5}$

4. $\frac{2}{7}$

5. **a)** $\frac{1}{15}$ **b)** $\frac{2}{3}$

1.13. Doświadczenia wieloetapowe

Ć **1.** $\frac{23}{45}$

2. $\frac{1}{6}$

3. $\frac{2539}{4324}$

Z **1.** a) $\frac{14}{55}$ b) $\frac{219}{220}$

2. $\frac{5}{14}$

3. $\frac{241}{348}$

4. $\frac{13}{27}$

5. 0,06

6. 7

7. 3 lub 4

8. 5

9. $P(A) = P(B) = \frac{49}{99}$,
$P(C) = \frac{8}{33}$, $P(D) = \frac{1}{99}$

10. 0,936

11. a) $\frac{1}{9}$ b) $x = 75$

12. 3 lub 6

13. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

14. a) $6 \leqslant n \leqslant 12$ b) $6 \leqslant n \leqslant 33$

15. a) 0,3 b) $\frac{8}{35}$

1.14. Schemat Bernoulliego

Ć **1.** a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{16}$

2. a) $\frac{13}{3888}$ b) $\frac{3875}{3888}$

3. trzech partii z pięciu

Z **1.** a), b) 0,375

2. a) $\frac{15}{64}$ b) $\frac{11}{32}$

3. a) $n \geqslant 4$ b) $n \geqslant 7$
c) $n \geqslant 10$ d) $n \geqslant 14$

4. a) $\frac{25}{216}$ b) $\frac{425}{432}$

5. a) $\frac{125}{3888}$ b) $\frac{131}{243}$

6. a) $\frac{17}{864}$ b) $\frac{1225}{23\,328}$

7. a) $0{,}96^5 \approx 0{,}815$
b) $1 - 0{,}96^5 \approx 0{,}185$

8. $P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0{,}0173$,
$P(B) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0{,}9827$,
$P(C) \approx 0{,}104$

9. nie

10. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$

11. a), b) $\frac{8}{125}$ c) 0,96844

12. a)

ω_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

b) $\frac{729}{4096}$

1.15. Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Ć **1.**

x_i	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

2. a)

x_i	2	3	4	5	6	7	8
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

b)

x_i	3	4	5	6	7
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3. b) 5 zł

4. b) 147

Z **1.** a) −5 zł b) 75 zł

2. a) 30 b) 108

3. a) w pierwszej b) 20 zł

4. a) $-\frac{15}{16}$ zł b) $\frac{3}{32}$ zł

5. a) około 13 888 889 zł
b) około 9 835 888 zł
c) około 3,64 zł

6. a) 14,4 cm
b) $\frac{1}{5}(12\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 9\sqrt{7})$ cm^2

7. a) $\frac{1}{7}(3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm
b) $\frac{1}{14}(3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm^2

1.16. Zagadnienia uzupełniajce

1. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{\pi}{9}$

2. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{16}$

3. $\frac{5}{9}$

4. $\frac{1}{4}$

5. $\frac{32}{225}$

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) 20 b) 12

2. a) 300 b) 320

3. a) 8 b) 360

4. a) 10 080 b) 2880

5. A

6. a), b) $\frac{5}{9}$

7. $\frac{59}{65}$

8. a) $\frac{16}{81}$ b) $\frac{16}{27}$

9. a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{2}$

10. tak

11. a) $\frac{14}{55}$ b) $\frac{28}{55}$

12. a) $\frac{13}{80}$ b) 0,5

13. a) Sposób rozmieszczenia kul nie ma znaczenia.
b) w jednej urnie: wszystkie kule białe, w drugiej urnie: wszystkie czarne

14. $\frac{20}{27}$

15. $\frac{11}{20}$

16. $P(A|B) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{6}$

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $\frac{29}{30}$ b) $\frac{2}{3}$

2. $\frac{149}{198}$

3. $P(A) = \frac{1}{243}$, $P(B) = \frac{473}{729}$, $P(C) = \frac{10}{81}$

4. a) $\frac{2}{105}$ b) $\frac{1}{7}$ c) $\frac{11}{15}$

5. $\frac{11}{57}$

6. a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{5}{12}$

7. 9

8. a) $\frac{259}{5184}$ b) $\frac{3355}{5184}$

9. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{2}$

10. $\frac{4}{15}$

11. $\frac{14}{33}$

12. a) $P(A|B) = \frac{2}{5}$, $P(A|B') = 1$ b) $\frac{1}{9}$

13. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$

14. a) $\frac{11}{1024}$ b) $\frac{11}{64}$

15. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{10}$

16. 22,50

17. 1,875

Zadania testowe

1. C **2.** D **3.** D **4.** C **5.** B
6. C **7.** A **8.** A

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $n = 5$

2. 192

3. $\frac{81}{625}$

4. $\frac{4}{9}$

5. $\frac{57}{64}$

6. 329

7. $\frac{2}{5}$

8. $\frac{2}{5}$

9. $-0{,}5$ zł

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 447

2. $\frac{4}{7}$

3. $\frac{11}{12}$

5. $p = 0{,}6$ lub $p = 0{,}9$

6. $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}4914$

7. $\frac{5}{16}$

8. $\frac{4}{9}$

9. 166 749

2.1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni

Ć **1.** a) BCC_1B_1 b) ABB_1A_1

2. Wzdłuż prostej l przecinają się płaszczyzny P_1 i P_4. Wzdłuż prostej k przecinają się płaszczyzny P_2 i P_3.

3. np. A, B_1, C_1

4. SC, SD

5. a) BB_1, CC_1, DD_1
b) AB, BC, CD, AD, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1

6. B i C_1, B i D_1, C i B_1, C i D_1, D i B_1, D i C_1

7. AD, A_1D_1, BC, B_1C_1; nie

8. nie

Z **1.** a) proste równoległe: BC_1, AD_1, proste prostopadłe: BE, AB, AE, CF, DC, DF, B_1E_1, A_1B_1, A_1E_1, C_1F_1, D_1C_1, D_1F_1, E_1F, B_1C, A_1D
b) proste równoległe: B_1F_1, AC, BF, proste prostopadłe: D_1B_1, C_1E_1, DB, CE, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1, FF_1, D_1B, B_1D, C_1E, E_1C

2. a) D_1B_1 b) AD_1 c) C_1B d) A_1B

4. M, P i Q – środki krawędzi sześcianu odpowiednio A_1B_1, CC_1 i CD
a) np. MC **b)** np. MQ **c)** np. MP

5. **a)**, **b)** nie **c)** tak

2.2. Graniastosłupy

Ć **1.** $768\ \text{cm}^2$

2. **a)** 5 ścian, 9 krawędzi, 6 wierzchołków
b) 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków
c) 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków

3. **a)** tak – graniastosłup siedmiokątny
b) nie – liczba krawędzi graniastosłupa musi być podzielna przez 3

4. **a)** 2,6 cm **b)** 3,6 cm

5. $6\sqrt{6}$ cm

6. **a)**, **b)**, **d)** tak **c)** nie

Z **1.** **a)** $528\ \text{cm}^2$ **b)** $6(16+11\sqrt{3})\ \text{cm}^2$

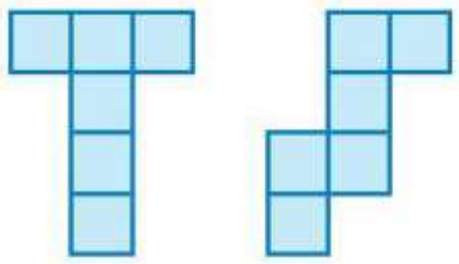
2. **a)** 20 cm **b)** 15 cm

3. $288\ \text{cm}^2$

4. **a)** $18(10+\sqrt{3})$ **b)** $16(7+3\sqrt{2})$ **c)** 180

5. **a)** $2(6+\sqrt{3})\ \text{cm}^2$ **b)** $24\ \text{cm}^2$
c) $12(2+\sqrt{3})\ \text{cm}^2$

6.



2.3. Odcinki w graniastosłupach

Ć **1.** $770\ \text{cm}^2$

2. **a)** $18(\sqrt{3}+12\sqrt{2})\ \text{cm}^2$
b) $9(3\sqrt{2}+\frac{1}{4}\sqrt{3})\ \text{cm}^2$

3. $32\sqrt{7}\ \text{cm}^2$

5. **a)** przekątne ścian: $\sqrt{106}$, 13, 15; przekątna prostopadłościanu: $5\sqrt{10}$
b) przekątne ścian: 10, $3\sqrt{29}$, 17; przekątna prostopadłościanu: $5\sqrt{13}$

6. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\alpha\approx 35^\circ$

Z **1.** **a)** $50(1+\frac{2}{3}\sqrt{3})\ \text{cm}^2$ **b)** $50(1+2\sqrt{3})\ \text{cm}^2$
c) $50(1+2\sqrt{2})\ \text{cm}^2$

3. **a)** 8 cm **b)** $8\sqrt{2}$ cm **c)** 8 cm

4. 160

5. $|BE_1|=4\sqrt{5}$ cm, $|BD_1|=|BF_1|=8$ cm

6. $\frac{525}{4}\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

7. $2(\sqrt{5}+2)$ cm

8. $516\ \text{cm}^2$

10. $\frac{\sqrt{33}}{33}$

11. $6\sqrt{23}a^2$

14. $n=8$

2.4. Objętość graniastosłupa

Ć **1.** P_2

2. $0{,}125\ \text{dm}^3$

3. $V_A=30\ \text{cm}^3$, $V_B=50\ \text{cm}^3$

4. **a)** $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$ **b)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$

5. **a)** $180\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ **b)** $\frac{125}{8}\ \text{cm}^3$

6. $78\ \text{m}^3$

Z **1.** **a)** $84\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ **b)** $\frac{9}{2}a^3\operatorname{tg}\alpha$

2. **a)** $112\ \text{cm}^3$
b) $d^3\cos^2\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $\alpha\in(45^\circ;90^\circ)$

3. $x=14$ cm

4. $V_1=1500\ \text{cm}^3$, $V_2=4500\ \text{cm}^3$, $V_3=7500\ \text{cm}^3$, $V_4=13\,500\ \text{cm}^3$

5. $0{,}45\ \text{m}^3$

6. $\frac{9}{8}(2\sqrt{3}-3)a^3$

7. $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}b^3}$

8. $d^3\cos^2\beta\sin\beta\sin\alpha$

9. A – nie, B – tak, $V=96\sqrt{3}$

10. krawędź podstawy $a=6$ cm, wysokość graniastosłupa $H=1{,}5$ cm

Graniastosłupy pochyłe

1. **a)** $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ **b)** $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}a\sqrt{1+2\cos\alpha}$

2. **a)** $27\sqrt{2}\ \text{cm}^2$ **b)** $12{,}29\ \text{cm}^3$

2.5. Ostrosłupy

Ć **2.** **a)**, **c)** nie
b) tak, $P_c=4(1+2\sqrt{2})$

3. $4(3+\sqrt{3})\ \text{cm}^2$

4. $10\sqrt{3}$

5. $36(1+\sqrt{3})\ \text{cm}^2$

6. **a)** $25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **b)** 42 cm

Z **1.** $64 + \frac{25}{2}\sqrt{3}$

2. $h = \sqrt{11}$ cm lub $h = \sqrt{39}$ cm

3. 360 cm^2

4. $8(3 + \sqrt{3})$ cm^2

5. $\frac{3\sqrt{3}}{4}(3 + \sqrt{73})$ cm^2

6. $2\sqrt{3}$ cm^2

7. $\frac{3s^2 \operatorname{tg}\alpha}{(\operatorname{tg}\alpha+2)^2}$

8. $2h^2 \operatorname{tg} 2\alpha$

9. $H = 4\sqrt{3(1+\sqrt{3})}$,
$P_c = 96(\sqrt{3} + \sqrt{6+3\sqrt{3}})$

10. $12(4\sqrt{3} + 9\sqrt{2})$ cm^2

11. pozostałe krawędzie: $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$;
$P_c = a^2(2+\sqrt{2})$

12. $\cos \sphericalangle SAB = \cos \sphericalangle ASB = \frac{2\sqrt{2}}{5}$,
$\cos \sphericalangle ABS = \frac{9}{25}$

2.6. Objętość ostrosłupa

Ć **1.** $V_1 = \frac{64}{3}$ cm^3, $V_2 = \frac{512}{3}$ cm^3

2. a) 228 b) 864

3. $P_c = P + 2h\sqrt{P}$, $V = \frac{1}{3}P\sqrt{h^2 - \frac{1}{4}P}$

4. $972\sqrt{3}$ cm^3

5. a) $256\sqrt{3}$ cm^3 b) $2304\sqrt{3}$ cm^3

6. a) $\frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}$ b) $\frac{a^3\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{24\sin\frac{\alpha}{2}}$

7. a) $18\sqrt{2}$ cm^3 b) $36\sqrt{3}$ cm^2

Z **1.** a) 180 cm^3 b) $80\sqrt{3}$ cm^3 c) $120\sqrt{3}$ cm^3

2. $36\sqrt{2}$ cm^3

3. $\frac{100}{3}\sqrt{119}$ cm^3

4. $\frac{\sqrt{5}}{3}a^3 \operatorname{ctg}\alpha$

5. $\frac{4}{3}S\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}$

6. $\frac{1000\sqrt{2}}{3}$ cm^3

7. $\frac{3\sqrt{39}}{4}$

8. $54\sqrt{3}$ cm^3

9. a) $\sqrt{3}$ cm^3 b) $2\sqrt{3}(140+99\sqrt{2})$ cm^3

10. $\frac{8\sqrt{17}}{3}$ cm^3

11. $\frac{\sqrt{35}}{24}a^3$

12. $\frac{a^3}{24\operatorname{tg}\alpha}$

14. $V_1 = \frac{4}{9}\sqrt{182}$ cm^3,
$V_2 = \sqrt{182}\,(3\sqrt{2} - \frac{4}{9})$ cm^3

2.7. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Ć **1.** a) AD, BC
b) AC, A_1C_1, AB_1, CB_1, A_1D, C_1D

Z **3.** b) 48

4. a) AD, BC, EF b) AC, DF c) BF, CE
d) AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF, EF

5. 3

7. tak, $AC_1 \perp BD_1$, $A_1C \perp B_1D$

8. $3\sqrt{3}$ cm^2

2.8. Kąt między prostą a płaszczyzną

Ć **1.** 30°, około 27°

2. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$, $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

3. $\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}a^3$

4. $d\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\alpha}$

5. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{1365}}{39}$

Z **1.** $\frac{\sqrt{21}}{5}$

2. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$

4. a) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

5. $P_c = P(1 + \frac{1}{\cos\alpha})$, $V = \frac{1}{6}P\sqrt{P}\operatorname{tg}\alpha$

6. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{13}}{13}$

8. $\frac{5}{13}$

9. $\frac{1}{6}a^3 \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$

2.9. Kąt dwuścienny

Ć **1.** a) 60° b) 108° c) 120°

2. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. a) 30° b) $9\sqrt{2}$ cm^3

4. $-\frac{1}{15}$

5. $\frac{H^3\sqrt{3}}{\operatorname{tg}^2\alpha}$

Z **1.** 90°, około 74°, około 16°

2. $\frac{24\sqrt{601}}{601}$

3. a) około 18° b) $-\frac{25}{144}$

4. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

6. $\frac{5}{2}$

8. $\frac{7}{32}$

9. $\sqrt{2(\operatorname{ctg}^2\alpha - 1)}$

10. $-\frac{7}{8}$

2.10. Przekroje prostopadłościanów

Ć **1.** **a)** $\frac{5}{4}a^2$ **b)** $\frac{5\sqrt{6}}{12}a^2$

2. **a)** $18\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{3}$

3. **a)** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$

4. **a)** $13{,}5\ \text{cm}^2$ **b)** $18\sqrt{6}\ \text{cm}^2$
c) $24(\sqrt{6}-1)\ \text{cm}^2$

6. $\frac{60\sqrt{24\,961}}{13}\ \text{cm}^3$

7. **a)** 45°, $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$
b) 30°, $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

8. $\operatorname{tg}\alpha$

Z **1.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

2. **a)** $12\sqrt{3}$ **b)** $18\sqrt{2}$

3. $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{17}}{17}$, $P=\frac{14\sqrt{17}}{3}$

4. $128\ \text{cm}^3$

5. $P=\frac{3\sqrt{2}a^2}{8}$, $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$

6. $67{,}2\ \text{cm}^3$

7. $\sqrt{3}\ \text{cm}$

Przekroje innych graniastosłupów

1. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

2. $\cos\alpha=\frac{a^2\sqrt{3}}{8S}$, $V=\frac{a}{8}\sqrt{64S^2-3a^4}$

3. $\cos\alpha=\frac{a^2\sqrt{3}}{4S}$, $V=\frac{3}{4}a\sqrt{16S^2-3a^4}$

2.11. Przekroje ostrosłupów

Ć **1.** **a), b)** $9\sqrt{2}\ \text{cm}^2$ **c)** $\frac{27\sqrt{11}}{4}\ \text{cm}^2$

2. **a)** $9\sqrt{11}\ \text{cm}^2$ **b)** $9\sqrt{5}\ \text{cm}^2$

3. $5\sqrt{5}\ \text{cm}^2$

4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. $\frac{16}{3}\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

Z **2.** $\frac{a}{24}\sqrt{768S^2-a^4}$

4. $\frac{2}{3}P\sqrt{\frac{\sqrt{3}P}{3}}$

5. $P=\frac{a^2}{8\cos\alpha}$, $V=\frac{1}{12}\sqrt{2}a^3\operatorname{tg}\alpha$

7. $5\frac{1}{3}$

8. $4(\sqrt{3}+\sqrt{15})$

2.12. Zagadnienia uzupełniające

1. do uzupełnienia kolejno:
czworościan: 4, 6, 4,
ośmiościan: 8, 12, 6,
dwunastościan: 12, 30, 20,
dwudziestościan: 20, 30, 12

2. $P_c=32\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $V=\frac{64}{3}\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

3. $P_c=64\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $V=85\frac{1}{3}\ \text{cm}^3$

4. $72\ \text{cm}$

5. 2:1

6. $\frac{128}{27}\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

7. **a)** 4 **b)** 3 **c)** 2

8. nie

9. $7(1+\frac{2}{3}\sqrt{2})\ \text{cm}^3$

10. $3(\sqrt{2}-1)\ \text{cm}$

Zestaw powtórzeniowy I

1. **a)** 2 **b)** $4-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **c)** $2-\sqrt{3}$

2. $P_c=12(\sqrt{3}+2)$,
$V=2(5+3\sqrt{3})$

3. **a)** $P_c=12(3+2\sqrt{3})$, $V=12\sqrt{3}$
b) $P_c=9(2+\sqrt{3})$, $V=3\sqrt{3}$
c) $P_c=54(2+\sqrt{3})$, $V=54\sqrt{3}$

4. 0,64

5. $|CD_1|=\sqrt{2}$, $|CE|=|ED_1|=\frac{\sqrt{5}}{2}$,
$\cos\alpha=\frac{1}{5}$

6. $-\frac{1}{2}$

7. $2\sqrt{2}$

8. $\frac{1}{6}P\cos\alpha\sqrt{P\sin\alpha}$ lub
$\frac{\sqrt[4]{2}}{6}P\sqrt{P\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)}$

9. $\frac{125\sqrt{2}}{6}$

Zestaw powtórzeniowy II

1. $P_c=18(\sqrt{3}+3)\ \text{cm}^2$,
$V=27\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

2. $V=\frac{\sqrt{3}}{2}p^3(1-\cos\alpha)\sqrt{2\cos\alpha-1}$

3. $24\sqrt{2}$

4. $\alpha=90^\circ$, $\beta\approx55^\circ$

5. $\sqrt{2}\cos\alpha$

6. $288\ \text{cm}^3$

7. $9\sqrt{6}\ \text{cm}^2$

8. $h^2(\sqrt{3}-1)$

Zadania testowe

1. D **2.** B **3.** A **4.** D **5.** C **6.** A **7.** A

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $4\sqrt{5}$ cm

2. 4

3. $2(3+\sqrt{3})$ cm^2

4. $486\sqrt{3}$ cm^3

5. $64\sqrt{2}$

6. $162\sqrt{15}$ cm^3

7. $250\sqrt{6}$ cm^3

8. $3(16+\sqrt{219}+\sqrt{91})$ cm^2

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. $4\sqrt{3}$

2. $\frac{\sqrt{10}}{3}$

3. 600 cm^3

4. 45°

5. $\frac{5}{16}a\sqrt{2h^2+a^2}$

6. $\frac{1}{16}a^2\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}$

7. krawędź podstawy: $5(5-\sqrt{13})$,
krawędź boczna: $5(\sqrt{13}-2)$

8. $\frac{P^3\sqrt{3}}{108}$

3.1. Walec

Ć **1.** b) $10\pi(7-3\sqrt{5})$ cm^2

2. 72π cm^2

3. $18\pi(3+2\sqrt{3})$ cm^2

4. a) 128π cm^3 b) 72π cm^3 lub 96π cm^3

5. a) 128π cm^3 b) 243π cm^3

Z **1.** a) $P_c=9\pi(\frac{3}{2}+\sqrt{3})$, $V=\frac{81}{4}\pi$
b) $P_c=8\pi(1+2\sqrt{3})$, $V=16\sqrt{3}\pi$
c) $P_c=108\pi$, $V=108\sqrt{2}\pi$

2. a) 320π cm^2 b) $\frac{13000}{41}\pi$ cm^2
c) $32\pi(6+\sqrt{6})$ cm^2

3. $P_p=196\pi$, $V=2744\pi$

4. $V=288\pi$ cm^3, $P_c=176\pi$ cm^2 lub
$V=648\pi$ cm^3, $P_c=306\pi$ cm^2

7. $\sqrt{2}S$

8. a) $\frac{1}{2}\pi S\sqrt{\frac{S}{2\operatorname{tg}\alpha}}$ b) $\pi d^3\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{1}{4+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}$

9. tak

10. $4\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ lub $4\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

11. $\frac{81}{4\pi}$ lub $\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$

13. nie

14. a) $45(8\pi+3\sqrt{3})$ dm^3 b) $135(3\pi+2)$ dm^3

3.2. Stożek

Ć **2.** $P_p=4\pi$, $P_c=16\pi$

3. 240°

4. 90°

5. a) 432π cm^3 b) 100π cm^3

6. a) $\frac{64\sqrt{3}}{3}\pi$ cm^3 b) 30°

7. a) $\frac{32\sqrt{2}}{3}\pi$ cm^3 b) $16\pi(\frac{2\sqrt{5}}{3}+1)$

Z **1.** a) $P_p=4\pi$ cm^2, $V=\frac{8}{3}\pi\sqrt{35}$ cm^3
b) $P_p=36\pi$ cm^2, $V=72\pi\sqrt{3}$ cm^3
c) $P_p=64\pi$ cm^2, $V=\frac{256}{3}\pi\sqrt{5}$ cm^3
d) $P_p=81\pi$ cm^2, $V=81\pi\sqrt{7}$ cm^3

2. a) 72° b) $\frac{25}{4}\sqrt{5}$ cm^2

3. a) $P_c=(1+\sqrt{2})\pi S$, $V=\frac{1}{3}\pi S\sqrt{S}$ b) 60°

4. a) $\frac{8}{3}\pi\sqrt{3}$ cm^3
b) $P=9$ cm^2, $V=\frac{9}{2}\pi(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ cm^3

5. 45°

6. $1{,}5\pi$ l, $20\sqrt[3]{4}$ cm

7. a) $P_c=336\pi$, $V=672\pi$
b) $P_c=18\pi(3+\sqrt{3})$, $V=54\pi$
c) $P_c=16{,}8\pi$, $V=9{,}6\pi$

8. $\frac{2760}{13}\pi$ cm^2

9. a) 80π cm^3 b) $4\pi(2\sqrt{29}+\sqrt{41})$ cm^2

11. a) 30° b) $3\sqrt{58}$

12. 96 cm^2

13. a) $\frac{380}{3}\pi$ b) 333π

Linie geodezyjne

1. a) $2\sqrt{9\pi^2+16}$
b) $2\sqrt{9\pi^2+4}$

2. a) $12\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{7}$

3.3. Kula

Ć **1.** a) 51π cm^2 b) 3 cm

2. a) $\frac{a}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

3. a) $P=9\pi$ cm^2, $V=\frac{9}{2}\pi$ cm^3
b) $P=12\pi$ cm^2, $V=4\sqrt{3}\pi$ cm^3
c) $P=32\pi$ cm^2 $V=\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$ cm^3

4.

r	6	3	8	2	0,9
P	144π	36π	256π	16π	$3{,}24\pi$
V	288π	36π	$\frac{2048}{3}\pi$	$\frac{32}{3}\pi$	$0{,}972\pi$

Z **1.** **a)** $P = 192\pi$ cm^2, $V = 256\pi\sqrt{3}$ cm^3
b) $P = 400\pi$ cm^2, $V = \frac{4000}{3}\pi$ cm^3
c) $P = 144\pi$ cm^2, $V = 288\pi$ cm^3

2. $(\sqrt{55} - 4\sqrt{3})$ cm lub $(\sqrt{55} + 4\sqrt{3})$ cm

3. **a)** $108\sqrt{3}\pi$ **b)** 15π

4. **a)** 16π cm^2
b) $3\sqrt{3}$ cm lub $3\sqrt{5}$ cm

5. **a)** o 900π cm^2 **b)** o 700π cm^2

8. $\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\,r$

9. **a)** $9{,}6\pi$ cm **b)** $6\sqrt{3}\pi$ cm

10. **a)** $\frac{8}{3}\pi\sqrt{5}$ cm **b)** 6π cm

11. $\sqrt{3}$

12. 45π cm^3, 243π cm^3

3.4. Bryły podobne

Ć **1.** **a)** $x = 2{,}4$, skala podobieństwa: $k = \frac{2}{5}$
b) $x = 5{,}4$, skala podobieństwa: $k = \frac{3}{5}$

2. $8:1$

3. $V_2 = 288\pi$ cm^3, $1:4$

4. π cm^3, 26π cm^3

Z **1.** **a)** nie **b)** tak

2. **a)** 9 cm

3. **a)** $2:3$ **b)** $1:2$ **c)** $3:4$ **d)** $4:1$

4. **a)** $\frac{27}{37}$ **b)** $\frac{8}{117}$ **c)** $\frac{8}{19}$

5. $1:(\sqrt[3]{2} - 1)$

6. **a)** $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$
b) $P_b = \pi l(R + r)$

7. $4\frac{2}{3}\pi$ cm^3, $37\frac{1}{3}\pi$ cm^3

Zasada Cavalieriego

1. $V = \frac{1}{6}\pi h^3$

3.5. Bryły opisane na kuli

Ć **1.** **a)** 36π cm^3
b) $\alpha = 60^\circ$, $V = 96$ cm^3

2. **a)** $2\sqrt{3}$ **b)** $3(\sqrt{2} - 1)$

3. $\frac{(3\sqrt{5}-1)\sqrt{33}}{132}a$

Z **1.** **a)** $r = 3$, $V = 36\pi$
b) $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $V = \frac{256}{27}\pi\sqrt{3}$

2. $\frac{6}{\pi}$

3. **a)** 16π **b)** $\frac{1}{2}$

6. $R = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $H = 5\sqrt{3}$

7. $\frac{\pi(5\sqrt{7}-11)}{18}$

8. 60°

9. $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$

10. 81π

12. **a)** $4\pi S(3 - 2\sqrt{2})$
b) $4\pi S(7\sqrt{3} - 12)$

13. $\frac{1}{3}$

14. $\frac{256}{3}\pi$

15. $\left(\frac{\operatorname{ctg}\alpha + \sqrt{3}}{\operatorname{ctg}\alpha - \sqrt{3}}\right)^3 - 1$

3.6. Bryły wpisane w kulę

Ć **1.** **a)** $\frac{164\sqrt{41}}{3}\pi$ cm^3 **b)** 8 cm^3

2. 144 cm^3

3. $\frac{32\sqrt{33}}{121}\pi a^3$

4. $\frac{8}{5}R$

Z **1.** **a)** $\frac{64}{9}\sqrt{3}$ cm^3 **b)** $864\sqrt{3}\pi$ cm^3

2. $2\sqrt{41}$ cm

3. **a)** 1440π **b)** 72π lub 96π

4. **a)** $6\sqrt{3}$ cm **b)** $\frac{4r^3}{3\sin^3 2\alpha}\pi$

5. **a)** $5\sqrt{2} - 7$
b) $\frac{3}{8}(26\sqrt{3} - 45)$

6. **a)** 23,04 **b)** $\frac{3}{4}a$

7. $\frac{256}{3}$ lub $\frac{512}{3}$

8. $\frac{\sqrt{21}}{6}a$

9. $\frac{\sqrt{3}}{9\pi}$

3.7. Inne bryły wpisane i opisane

Ć **1.** **a)** 108π cm^3 **b)** $2:1$

2. **a)** $27\pi(2 - \sqrt{2})\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ cm^3
b) $32\pi\sqrt{5}$ cm^3

3. **a)** $\frac{125}{3}\pi$ **b)** $9\pi(3 + 2\sqrt{3})$

4. $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$

Z **1.** $\frac{4}{3}$

2. 4π

3. **a)** 125π cm^3 **b)** 20π cm^3

4. 36π

5. $50\pi(1 + \sqrt{3})$

6. 120°

7. $\frac{1}{7}$

8. $\frac{2}{3}$

9. $\frac{2\sqrt{6}}{9}R^3$

10. 2000

3.8. Zagadnienia optymalizacyjne

Ć **1.** $r = h = 2$ cm

2. $r = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$ dm, $h = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$ dm

3. $r = \frac{10}{21}\sqrt[3]{441}$ cm, $h = \frac{4}{\pi}\sqrt[3]{441}$ cm

4. $16\pi\sqrt{3}$ cm^3

Z **1.** $4\sqrt[3]{\pi}$ dm^2

2. $h = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$, $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$

4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

6. ramię: 9 cm, podstawa: 6 cm

7. $H = 16$ cm, $r = 8\sqrt{2}$ cm

8. $\frac{512}{3}\pi$ cm^3

9. $\frac{32}{135}r^2h$

10. ramię: 6 cm, krótsza podstawa: 4 cm

3.9. Zagadnienia uzupełniające

1. **a)** 60 **b)** 108 **c)** 8

2. **a)** $V = 36\pi$, $P_b = 24\pi$
b) $V = 80\pi$, $P_b = 16\sqrt{10}\pi$
c) $V = 96\pi$, $P_b = 48\pi$

3. **a)** $P = 36\pi$, $V = 36\pi$
b) $P = 12\pi$, $V = 4\sqrt{3}\pi$
c) $P = 40\pi$, $V = \frac{40}{3}\sqrt{10}\pi$

4. **a)** $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16$
b) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 81$

Zestaw powtórzeniowy I

1. 9:4

2. 1000π cm^3

3. $\frac{35}{\pi}$ cm^2

4. $\frac{225\sqrt{39}}{8}\pi$ cm^3

5. $\frac{5}{4}\pi$

6. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$

7. **a)** $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$, $P_c = 4\pi$
b) $V = 2\pi$, $P_c = 2\pi(3 + \sqrt{3})$

8. $\frac{13}{4}$

9. 2

10. $2(2 - \sqrt{2})$

Zestaw powtórzeniowy II

2. $512\sqrt{2}$ cm^3

3. $\frac{125}{24}\pi$

4. 96π

5. $\frac{3}{8}$

6. 16 lub $16\sqrt{\sqrt{5} - 2}$

7. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

8. $8\sin^3\alpha\,(1 - \sin\alpha)^3$

9. **a)** $\frac{2}{3}\sqrt{3}x$ **b)** $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}x$

10. $\frac{24}{25}$

11. $\frac{H-R}{R}$

12. $\frac{7}{25}$

Zadania testowe

1. A **2.** B **3.** B **4.** C **5.** B **6.** A **7.** C
8. A **9.** C

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $\frac{3}{2}$

2. $\sqrt{15}$

3. $9\sqrt{3}\pi$ cm^3

4. $180\sqrt{5}\pi$ cm^3

5. 10 szklanek

7. 432π cm^3

8. 52π cm^2

9. $4\sqrt[3]{4}$ cm

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. $24(9 - \sqrt{3})$

2. $\frac{160\sqrt{5}}{3}\pi$

3. $\frac{7}{3}\pi a^3 \operatorname{tg}\alpha$

4. $\frac{\sqrt{3}}{9}hr^2$

5. $\frac{32\sqrt{3}}{5}$

6. $\frac{32}{9}\pi$, $\frac{76}{9}\pi$

7. 30°

8.1. 13

8.2. $\frac{2}{7}$

5.1. Liczby, zbiory i wartość bezwzględna

1. np. **a)** 2^{-19} **b)** 3^{-28} **c)** $\left(\frac{2}{5}\right)^6$
d) $\left(\frac{4}{5}\right)^{12}$ **e)** $(\sqrt[3]{2})^{-2}$ **f)** $(\sqrt[6]{3})^{17}$

2. **a)** $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{13}{6}$ **c)** $\frac{17}{4}$
d) $\frac{10}{7}$ **e)** $\frac{12}{1}$ **f)** $\frac{3}{25}$

3. **a)** $3{,}3 \cdot 10^{16}$ **b)** $5 \cdot 10^{10}$ **c)** $5 \cdot 10^{-10}$
d) $3 \cdot 10^{-2}$ **e)** $1{,}8 \cdot 10^{-2}$ **f)** $7 \cdot 10^{2}$

4. **a)**, **c)**, **d)**, **e)**, **f)** tak
b) nie

5. **a)** 2 **b)** -11 **c)** 1
d) 49 **e)** $12\sqrt{7}$ **f)** 25

6. **a)** $2\sqrt{5}+4$ **b)** $\frac{3\sqrt{7}-7}{2}$
c) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ **d)** $3\sqrt{3}-4$

7. **a)** 7 **b)** $-13+5\sqrt{5}$
c) $-17-7\sqrt{5}$ **d)** $-\frac{7}{4}+\frac{7}{4}\sqrt{5}$

8. **a)** tak **b)** nie

9. **a)** $4\sqrt{2}-3$ **b)** 1
c) $\sqrt{3}-1$ **d)** $8-3\sqrt{7}$

10. **a)** $x=-3$ **b)** $x=-4,\ x=2$
c) $x=0,\ x=4$ **d)** $x=-2,\ x=4$

11. **a)** $x=-4,\ x=-2$ **b)** $x=\sqrt{5}$

12. **a)** $x \in \langle 1;9\rangle$
b) $x \in (-9;1)$
c) $x \in (-\infty;1\rangle \cup \langle 5;\infty)$
d) $x \in (-\infty;-5) \cup (1;\infty)$
e) $x \in (2;10)$
f) $x \in (-\infty;-1) \cup (5;\infty)$

13. **a)** 75% **b)** 375%

14. b o 75%

15. **a)** 14,167, z nadmiarem
b) 10,625, wartość dokładna
c) 1,879, z nadmiarem
d) 0,099, z niedomiarem

16. **a)** 1,7783 **b)** 1778,28 **c)** 0,01778

17. **a)**, **c)** 2, wymierna
b) $-\frac{4}{25}$, wymierna

18. **a)** 1 **b)** $2\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $-2\sqrt{2}$ **e)** $2\sqrt{3}-2$
f) $2\sqrt{3}+2$
g) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ **h)** 0

19. **a)** $4x^3$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
b) $2x^3$, $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

20. **a)** $-2y^2$, $-18+8\sqrt{2}$
b) 0

21. **a)** 7 **b)** 49

25. **a)** $x=-6,\ x=2$
b) $x=0,\ x=1$
c) $x=-3,\ x=-1$
d) $x=2,\ x=4$
e) $x=-\frac{2}{3},\ x=\frac{4}{3}$
f) $x=3,\ x=7$

26. **a)** $x \in (-4;-1\rangle \cup \langle 1;4)$
b) $x \in \langle -6;-1) \cup (3;8\rangle$
c) $x \in (-11;5)$

27. **a)** $x \in \langle -5;1\rangle$
b) $x \in (-\infty;-2) \cup (-1;\infty)$
c) $x \in (-\infty;0\rangle \cup \langle 1;\infty)$
d) $x \in (-\infty;-12) \cup (2;\infty)$

28. **a)** $x=-5,\ x=3$
b) $x \in \langle 1;3\rangle$
c) $x=-\frac{3}{4}$
d) $x=0,\ x=\frac{18}{5}$

29. **a)** $x \in (-\infty;2\rangle$
b) $x \in (-\infty;-3)$
c) $x \in (-\infty;-1\rangle \cup \langle 3;\infty)$
d) $x \in (-1{,}5;1{,}5)$

30. suma dwóch prostych $y=\frac{3}{5}x$ i $y=\frac{5}{3}x$ bez punktu $(0,0)$

31. **a)** B **b)** B **c)** A

32. 201,30 zł

33. 2000 zł

34. **a)** o 24%
b) o 1 punkt procentowy

35. **a)** $x \in \langle -4;-3) \cup (-1;4\rangle$
b) $x \in \langle -3;0) \cup (4;9\rangle$
c) $x \in (-\infty;-6\rangle \cup \langle 8;\infty)$

36. **a)** $x=-7,\ x=-1,\ x=1,\ x=7$
b) $x=-7,\ x=7$
c) $x=-3,\ x=7$

37. **a)** $x \in \langle -2;2\rangle$
b) $x \in (-\infty;-4) \cup (4;\infty)$
c) $x \in (-2;3)$

5.2. Funkcje

1. **a)** $D = (-3;3)$, $f(D) = \langle -1;3\rangle$,
f rośnie w $\langle -1;1\rangle$,
maleje w $(-3;-1\rangle$ i $\langle 1;2\rangle$,
jest stała w $\langle 2;3)$,
$f(x) \geqslant 0$ dla $x \in (-3;-2\rangle \cup \langle -\frac{1}{2};3)$
b) $D = \langle -4;4\rangle \setminus \{-1\}$, $f(D) = \langle -2;3\rangle$,
f rośnie w $\langle -2;-1)$ i $\langle 0;2\rangle$,
maleje w $\langle -4;-2\rangle$, $(-1;0\rangle$ i $\langle 2;4\rangle$,
$f(x) \geqslant 0$ dla $x \in \{-4\} \cup \langle 1;4\rangle$

2. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-3,3\}$, brak miejsc zerowych
b) $D = \mathbf{R}$, miejsca zerowe: -3, 3
c) $D = (-1;1) \cup (1;\infty)$, brak miejsc zerowych
d) $D = (-1;\infty)$, miejsce zerowe: 1
e) $D = \langle -5;\infty)$, miejsce zerowe: -5
f) $D = (-\infty;\frac{3}{2}\rangle$, miejsce zerowe: $\frac{3}{2}$

3. **a)** $D = \langle 4;\infty)$
b) $D = (-\infty;2\rangle \cup \langle 4;\infty)$
c) $D = (3;\infty)$
d) $D = (-3;-2\rangle \cup \langle 2;3)$

4. **a)** $f_{\min}(-3) = -1$, $f_{\max}(-1) = 3$
b) $f_{\min}(4) = 1$, $f_{\max}(1) = 3$
c) $f_{\min}(-3) = -1$,
$f_{\max}(-1) = f_{\max}(1) = 3$

5. **a)** $D_1 = \langle -7;0\rangle$, $f_1(D_1) = \langle 0;3\rangle$,
$D_2 = \langle 1;8\rangle$, $f_2(D_2) = \langle -2;1\rangle$
b) $D_1 = \langle -6;-2\rangle$, $f_1(D_1) = \langle 0;3\rangle$,
$D_2 = \langle 2;6\rangle$, $f_2(D_2) = \langle -2;1\rangle$

6. **a)** $g(x) = f(x-2) - 1$
b) $g(x) = f(x+1) + 2$
c) $g(x) = -f(x)$
d) $g(x) = f(-x)$

7. **a)** $g(x) = f(x+3)$
b) $g(x) = f(x-4)$
c) $g(x) = f(x+1) - 2$
d) $g(x) = -f(x+2) + 1$
e) $g(x) = f(x-3) + 3$
f) $g(x) = -f(x+4) - 1$

8. **a)** $f(D) = \{0,1\}$,
wartość najmniejsza: 0,
wartość największa: 1,
nie jest monotoniczna

8. **b)** $f(D) = \{0,1,2,3\}$,
wartość najmniejsza: 0,
wartość największa: 3,
nie jest monotoniczna

9. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = x + 1$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = x - 2$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $f(x) = -4x - 6$

10. **a)** 1, 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4-\sqrt{2}}{7}$, $\frac{2}{5}$
b) 0, 0, 0, 0, 1, 3

11. **a)** $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2,1\}$,
f rośnie w $(-\infty;-1\rangle$,
maleje w $\langle -1;4\rangle$,
jest stała w $\langle 4;\infty)$,
$f(x) \geqslant -3$ dla $x \in \langle -3\frac{1}{2};\infty)$
b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{2,4\}$,
f rośnie w $\langle 0;2\rangle$,
maleje w $\langle -1;0\rangle$ i w $(2;\infty)$,
jest stała w $(-\infty;-1\rangle$,
$f(x) \geqslant -3$ dla $x \in (-\infty;-1\rangle \cup \langle 1;7\rangle$

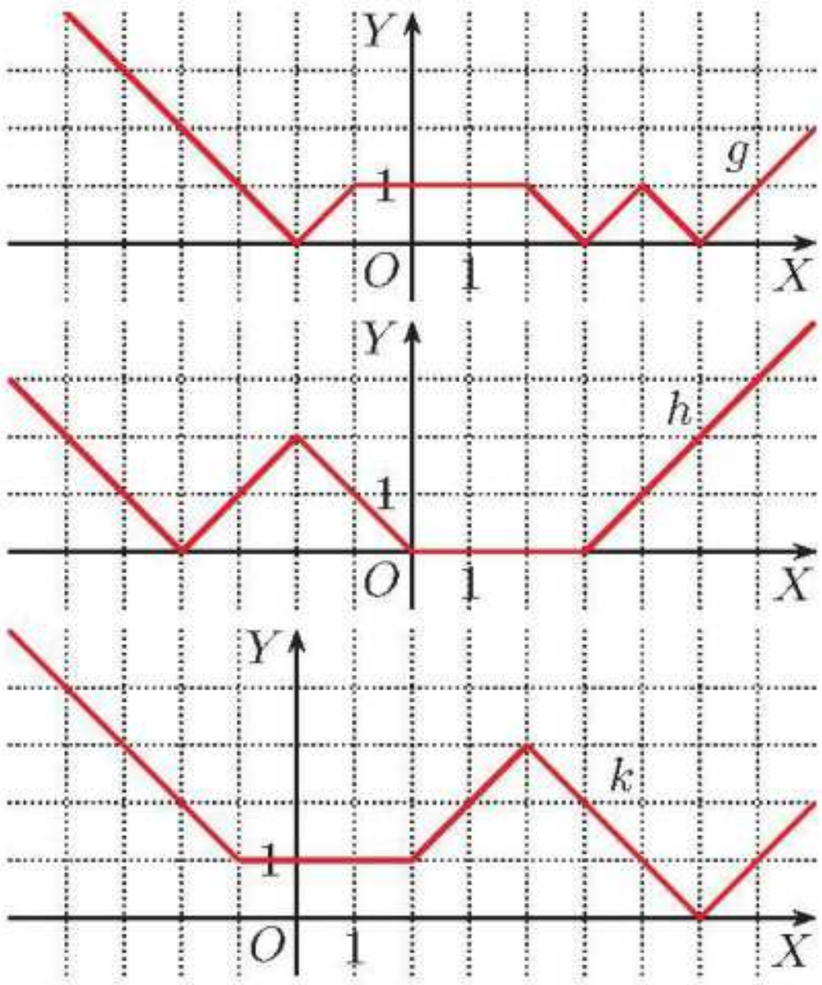
12. **a)** $D = \langle -5;3\rangle$, $g(D) = \langle -1;3\rangle$,
miejsce zerowe: 2
b) $D = \langle -3;5\rangle$, $g(D) = \langle -1;3\rangle$,
miejsce zerowe: -2
c) $D = \langle -6;2\rangle$, $g(D) = \langle -5;-1\rangle$,
brak miejsc zerowych

13. **a)** $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1,1,3\}$,
$f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in \langle -1;1\rangle \cup \langle 3;\infty)$
b) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \langle 0;2\rangle$,
$f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in \langle 0;\infty)$
c) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1,0,1\}$,
$f(x) \leqslant g(x)$ dla
$x \in (-\infty;-1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1;\infty)$
d) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1,1\}$,
$f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in \langle -1;1\rangle$

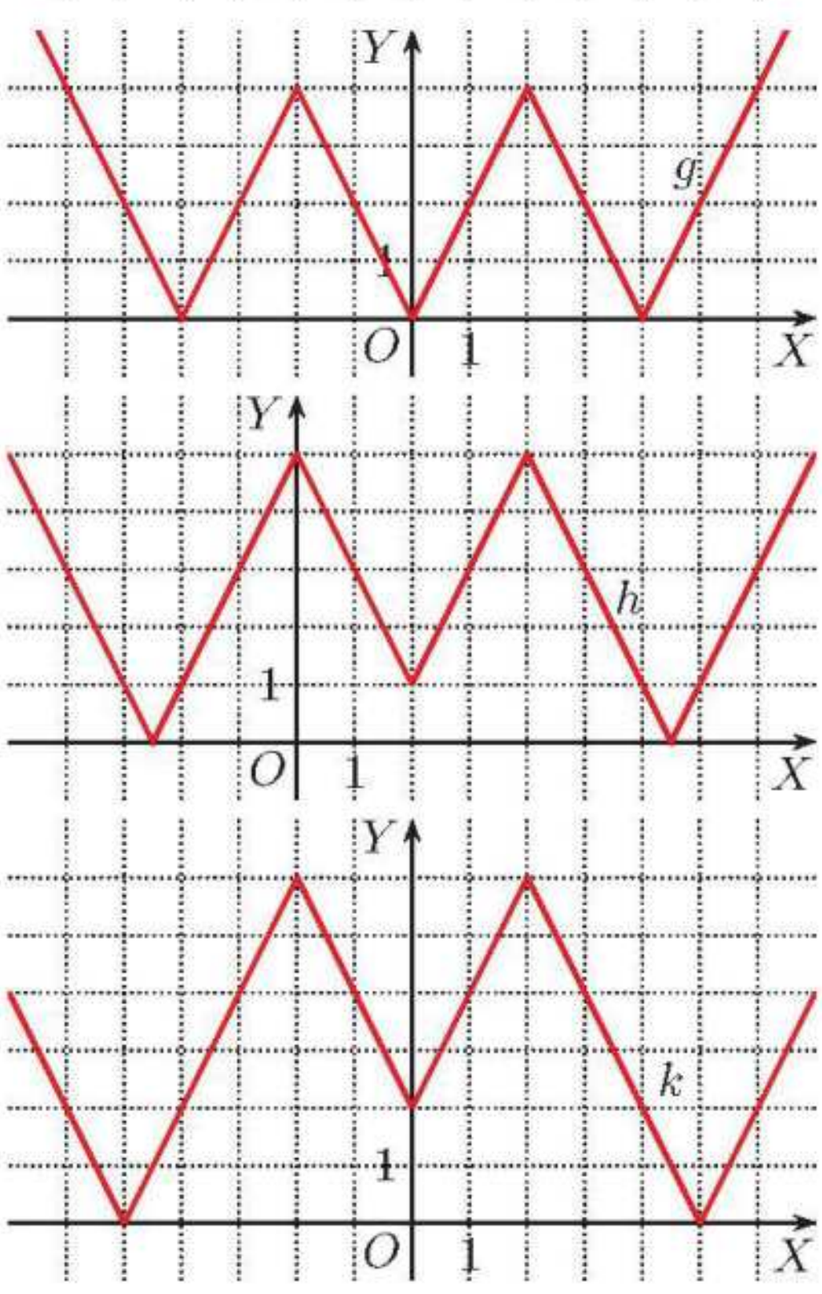
14. **a)** $x \in (-\infty;-3\rangle \cup \langle 3;\infty)$
b) brak rozwiązania

15. **a)** $g(x) = 2x - 4$, $h(x) = -2x + 7$,
$k(x) = -2x$
b) $g(x) = |x+1| - 4$, $h(x) = 1 - |x-2|$,
$k(x) = |x-2| - 2$
c) $g(x) = -2|x+1| - 4$,
$h(x) = 2|x-2| + 1$,
$k(x) = -2|x-2| - 2$

16. a)



b)



17. a) maleje w $(-\infty; -1\rangle$ i w $\langle 0; 1)$,
rośnie w $\langle -1; 0\rangle$ i w $\langle 1; \infty)$
b) maleje w $(-\infty; -1\rangle$ i w $\langle 1; 3\rangle$,
rośnie w $\langle -1; 1\rangle$ i w $\langle 3; \infty)$

18. a) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 2)$,
2 rozwiązania dla $m \in (2; \infty)$,
nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 2$
b) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 4)$,
2 rozwiązania dla $m \in (4; \infty)$,
nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 4$

19. a) dla obu równań:
0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$,
1 rozwiązanie dla $m = 1$,
2 rozwiązania dla $m \in (1; 3)$,
nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 3$
b) dla równania $g(x) = m$:
0 rozwiązań dla $m \in (3; \infty)$,
2 rozwiązania dla $m \in (-\infty; -1) \cup \{3\}$,
3 rozwiązania dla $m = -1$,
4 rozwiązania dla $m \in (-1; 3)$,
dla równania $h(x) = m$:
0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
2 rozwiązania dla $m \in (3; \infty)$,
4 rozwiązania dla $m \in \{0, 3\}$,
6 rozwiązań dla $m \in (1; 3)$,
7 rozwiązań dla $m = 1$,
8 rozwiązań dla $m \in (0; 1)$

5.3. Funkcja liniowa i układy równań liniowych

1. a) $(0, 1)$, $(-3, 0)$, rosnąca
b) $(0, 2)$, $(1, 0)$, malejąca
c) $(0, -2)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, rosnąca

2. $f(D) = (-2; 0\rangle \cup \langle 2; 6)$,
miejsce zerowe: 2,
równanie $f(x) = 1$ nie ma rozwiązania

3. a) $y = 3x + 14$ **b)** $y = \sqrt{2}x - 4$

4. a) $y = -\frac{1}{2}x$ **b)** $y = \frac{1}{4}x + 2$
c) $y = -3x + 2$ **d)** $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x - 2$

5. a) $f(x) = -2x + 4$ **b)** $f(x) = \frac{5}{2}x - 6$

6. a) $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $t = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
c) $x = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$ **d)** $z = 3(\sqrt{2} - 1)$

7. a) $x < \frac{5}{6}$ **b)** $x \leqslant -1$
c) $x \leqslant 2$ **d)** $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

8. a) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -x + 5 \end{cases}$
$x = 2$, $y = 3$
b) $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x + 3 \end{cases}$
c) $\begin{cases} y = -3x + 7 \\ y = 4x - 14 \end{cases}$
$x = 3$, $y = -2$

9. **a)** $x = 6,\ y = 2$
b) $x = 1,\ y = 1$
c) $x = 0,\ y = 5$
d), e) układ sprzeczny
f) układ nieoznaczony: $x \in \mathbf{R}$, $y = -2x + 2$

10. **a)** $x \in (-\infty; -6) \cup (4; \infty)$
b) $x \in (-\infty; 2\rangle$

11. **a)** $f(x) = -2x - 1$ **b)** $f(x) = 3x - 5$

12. **a)** tak **b)** nie

13. **a)** $a = -2$ **b)** $a = -5$
c) $a = 7$ **d)** $a = -3$

14. **a)** $m = -2$ **b)** $m = -5,\ m = -1$

15. **a)** $m \in (-2; 2)$
b) $m \in (-\infty; -6) \cup (6; \infty)$
c) $m \in (2; 3)$
d) $m \in (-\infty; -8) \cup (0; \infty)$

16. **a)** $m = -\frac{6}{5}$ **b)** $m = -\frac{3}{2}$

17. **a)** $m = \frac{1}{2}$ **b)** $m = 1$
c) Nie ma takiego m.

18. **a)** 45° **b)** 60° **c)** 135° **d)** 150°

19. **a)** 27° **b)** 124°

20. **a)** $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ **b)** $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

21. **a)** 1 rozwiązanie dla każdego $a \in \mathbf{R}$
b) 1 rozwiązanie dla $a \neq 2$,
brak rozwiązań dla $a = 2$
c) 1 rozwiązanie dla $a \neq -1$,
nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = -1$
d) 1 rozwiązanie dla $a \neq 0$,
nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = 0$
e) 1 rozwiązanie dla $a \neq 0$ i $a \neq 1$,
brak rozwiązań dla $a = 0$,
nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = 1$
f) 1 rozwiązanie dla $a \neq -1$ i $a \neq 1$,
brak rozwiązań dla $a = -1$,
nieskończenie wiele rozwiązań dla $a = 1$

22. **a)** $a \in (-\infty; 2)$ **b)** $a \in (0; 1)$

23. 140 zł

24. $f(x) = 100 + 0{,}2x$, 1000 km

25. 25% – firma A, 75% – firma B

26. akcje firmy A – 8000 zł,
akcje firmy B – 72 000 zł,
obligacje – 20 000 zł

27. **a)** $y = \frac{7}{5}x + \frac{9}{5}$, $y = -x + 3$, $(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$
b) $y = \frac{3}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x + 4$, $(2, 3)$

28. $g(x) = \frac{1}{2}x - 1,\ x \in \langle -2; 4\rangle$

29. **a)** Przecinają się,
$f(x) \geqslant g(x)$ dla $x \geqslant 6$.
b) Przecinają się,
$f(x) \geqslant g(x)$ dla $x \geqslant -10{,}2$.

30. $a = -2$

31. $a = 1$ i $b = -3$ lub $a = -1$ i $b = 3$
lub $a = 3$ i $b = -1$ lub $a = -3$ i $b = 1$

32. $f(x) = 3x - 4$

33. **a)** $x \in (-\infty; -4\rangle$
b) $x = -5,\ x = 1$

34. $m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

35. $f(x) = x + 3$
a) $x \in (-3; 1)$ **b)** $x \in \mathbf{R}$
c) $x \in (-\infty; \frac{9}{5}\rangle$

36. **a)** $m = \frac{1}{2}$ **b)** $m = 1,\ m = 5$

37. $m \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

38. **a)** $x = -7,\ y = 4$ **b)** $x = 2,\ y = -1$
c) $x = 2,\ y = 3$
d) $x = -4\frac{1}{2},\ y = -42\frac{1}{2}$

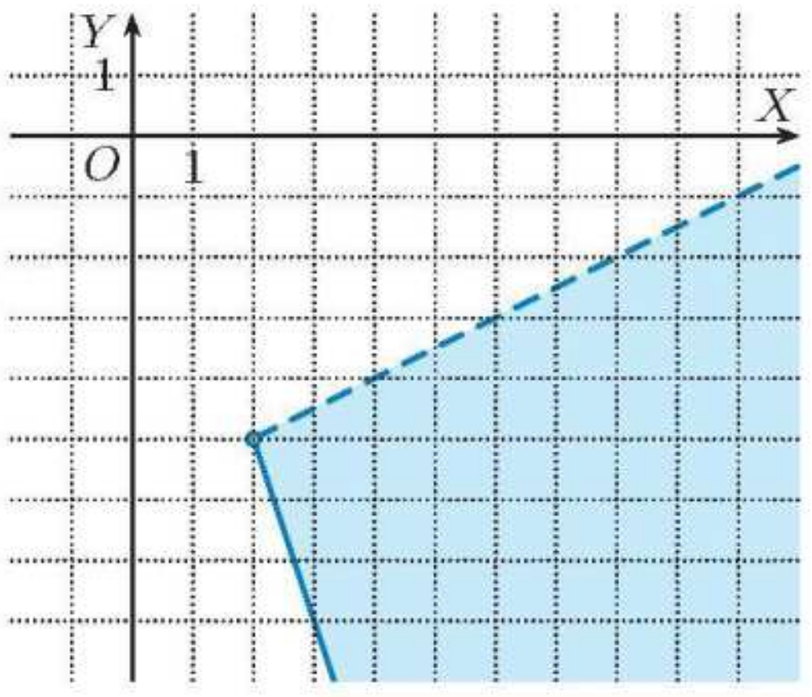
39. **a)** $m \in \left(-\frac{3}{4}; 1\right)$
b) $m \in (-\infty; -6)$
c) $m \in \left(-\frac{5}{3}; \frac{3}{5}\right)$
d) $m \in \left(-2; \frac{1}{3}\right) \cup (12; \infty)$

40. **a)** $m \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (7; \infty)$
b) $m \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{11}{5}; \infty\right)$

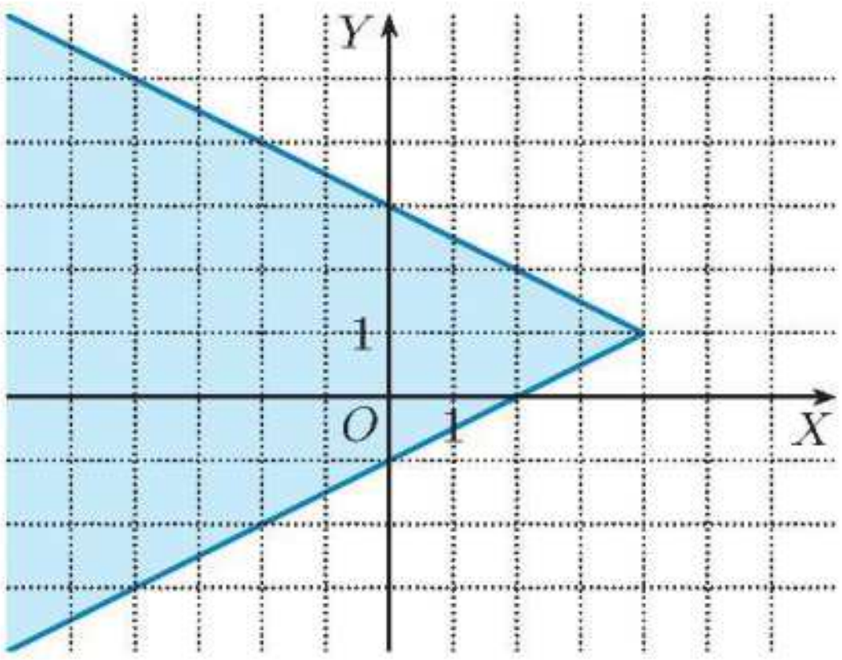
41. $m \in \left(0; \frac{8}{3}\right)$

42. **a)** $m \in \left\langle \frac{2}{3}; 2\right\rangle$
b) prosta o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 3$

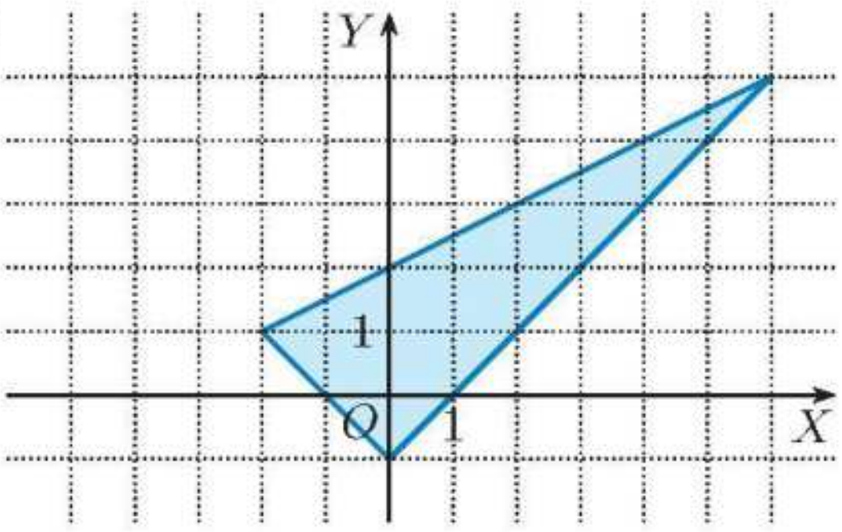
43. **a)**



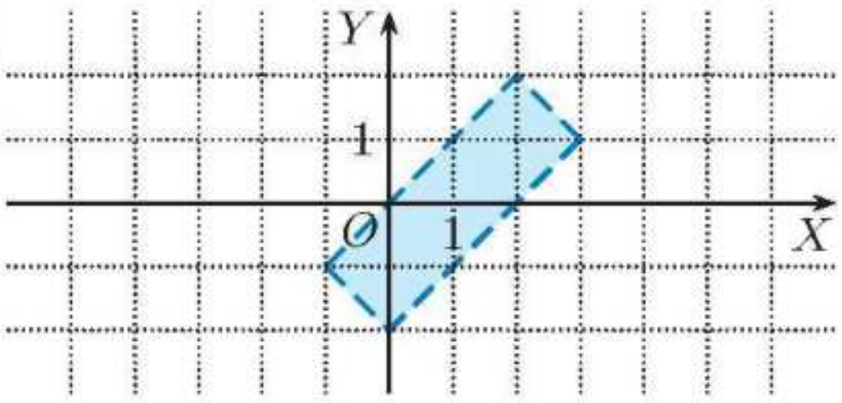
43. b)



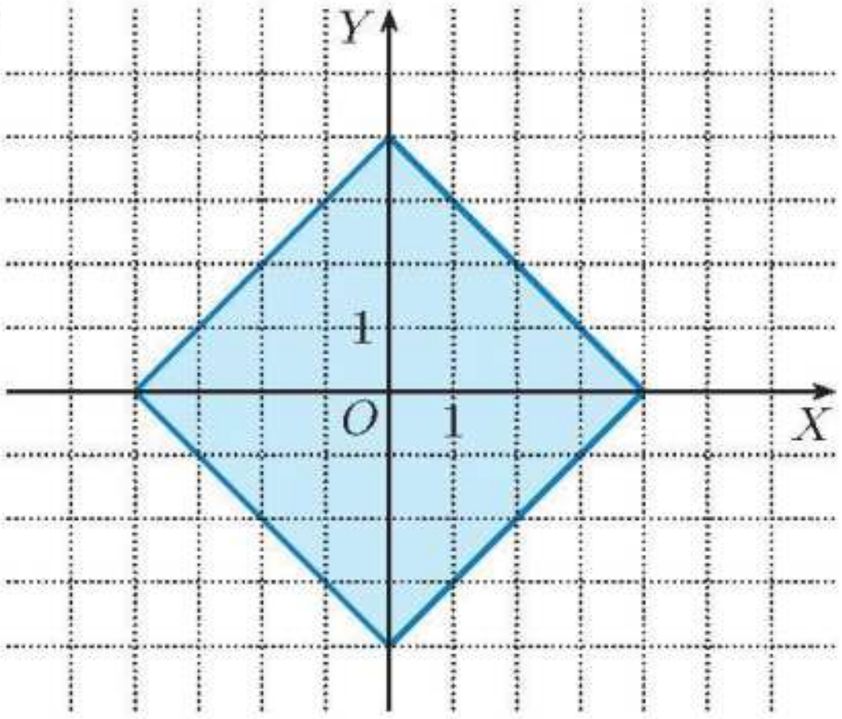
c)



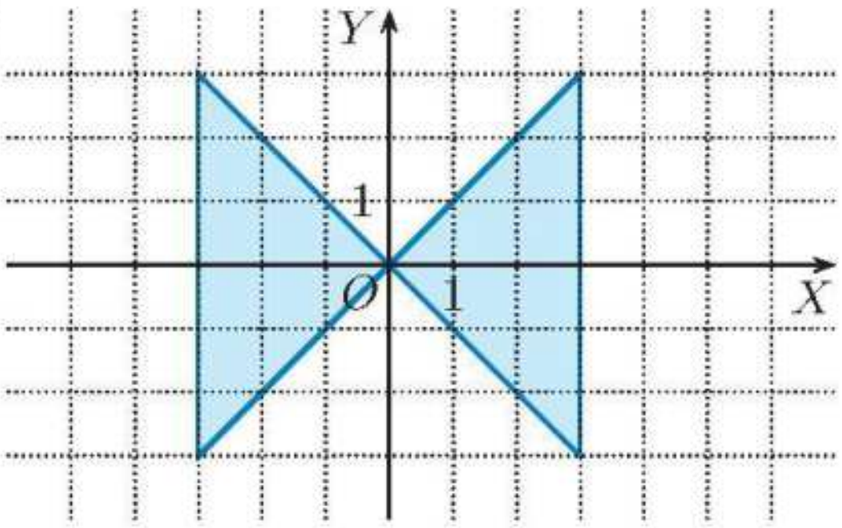
d)



e)



f)



5.4. Funkcja kwadratowa

1. **a)** $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$
c) $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$

2. **a)** $f(x) = (x+4)^2$, $f(D) = \langle 0; \infty)$
b) $f(x) = (x-2)^2 - 4$, $f(D) = \langle -4; \infty)$
c) $f(x) = -(x+3)^2 + 4$, $f(D) = (-\infty; 4\rangle$
d) $f(x) = -2(x-1)^2$, $f(D) = (-\infty; 0\rangle$

3. **a)** $b = c = 0$, $f(D) = \langle 0; \infty)$
b) $b = 2$, $c = 1$, $f(D) = \langle 0; \infty)$
c) $b = 0$, $c = -1$, $f(D) = \langle -1; \infty)$
d) $b = -2$, $c = 5$, $f(D) = \langle 4; \infty)$
e) $b = -4$, $c = 7$, $f(D) = \langle 3; \infty)$
f) $b = 2$, $c = 5$, $f(D) = \langle 4; \infty)$
g) $b = -8$, $c = 17$, $f(D) = \langle 1; \infty)$
h) $b = 2$, $c = 0$, $f(D) = \langle -1; \infty)$

4. **a)** maleje w $(-\infty; -2\sqrt{2}\rangle$,
rośnie w $\langle -2\sqrt{2}; \infty)$
b) maleje w $\langle 10; \infty)$, rośnie w $(-\infty; 10\rangle$

5. **a)** $b = -4$, $b = 4$ **b)** $b = -2$, $b = 2$
c) $b = -6$, $b = 6$

6. **a)** $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$, $W(1, 8)$
b) $f(x) = 2(x-1)^2 - 2$, $W(1, -2)$

7. **a)** $y = x^2 - 4x + 4$ **b)** $y = x^2 + 2x - 1$
c) $y = x^2 - 4x + 2$ **d)** $y = x^2 + 4x + 2$

8. **a)** $[-1, 2]$ **b)** $[1, 2]$ **c)** $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$ **d)** $[-2, 0]$

9. **a)** $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$
b) $x = 0$, $x = 2$
c) $x = -\frac{1}{5}$, $x = \frac{1}{5}$
d) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$
e) $x = 3$ **f)** $x = -\frac{1}{2}$

10. **a)** ma **b)** nie ma **c)** ma

11. **a)** $f(x) = -(x-4)(x+1)$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-1; 4)$,
$f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (4; \infty)$
b) $f(x) = 3(x-1)(x-3)$,
$f(x) < 0$ dla $x \in (1; 3)$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$
c) $f(x) = (x-3)^2$,
$f(x) > 0$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
wartości ujemnych nie przyjmuje
d) $f(x) = -2(x-1)^2$,
$f(x) < 0$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,
wartości dodatnich nie przyjmuje

12. **a)** $(2\frac{1}{2}, -14)$, $(-\frac{1}{3}, 3)$
b) brak punktów wspólnych

13. **a)** $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$
b) $-2, -1, 0, 1, 2$ **c)** $1, 2, 3$ **d)** 4

14. **a)** $x \in \langle -1; 2\rangle$ **b)** $x = -1$ **c)** $x \in \mathbf{R}$

15. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$
b) $D = \langle -\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\rangle$
c) $D = (-\infty; 3) \cup (5; \infty)$

16. **a)** $f_{\min} = -1$, $f_{\max} = 3$
b) $f_{\min} = -8$, $f_{\max} = 0$
c) $f_{\min} = 1$, $f_{\max} = 4$
d) $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = 8$

17. **a)** $y = -x^2 + x + 2$
b) $y = x^2 + x - 2$
c) $y = -x^2 - x + 2$
d) $y = x^2 + x + 2$
e) $y = x^2 + 9x + 18$

18. **a)** 2 rozwiązania dla
$m \in (-\infty; -4) \cup \{0\} \cup (4; \infty)$,
3 rozwiązania dla $m \in \{-4, 4\}$,
4 rozwiązania dla $m \in (-4; 0) \cup (0; 4)$
b) 2 rozwiązania dla
$m \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; \infty)$,
3 rozwiązania dla $m \in \{-1, 1\}$,
4 rozwiązania dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

19. $a = \frac{1}{4}$, $W(3, -4)$

20. **a)** $y = -2x^2 + 4x$
b) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$

21. **a)** $c = 7$ **b)** $c = \frac{25}{4}$ **c)** $c = 5$

22. **a)** $b = 3$, $c = -10$ **b)** $b = 2$, $c = 8$
c) $b = -3$, $c = -4$ **d)** $b = -6$, $c = 5$

23. **a)** $c < 2$ **b)** $c > -\frac{25}{4}$ **c)** $c > -36$
d) $c > -\frac{1}{4}$

24. **a)** $b = -2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$
b) Nie ma takich wartości.
c) $b = 0$

25. **a)** $x = -2$, $x = 2$
b) $x = -3$, $x = 3$
c) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$
d) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $x = -9$, $x = 0$, $x = 9$
f) $x = -6$, $x = -3$, $x = 3$, $x = 6$

26. **a)** $x = -4$, $y = -3$ lub $x = -1$, $y = -6$
b) $x = 1$, $y = 3$ lub $x = 4$, $y = 0$
c) $x = 4$, $y = -1$ lub $x = 6$, $y = 1$

27. **a)** 0 miejsc zerowych dla $m \in (1; \infty)$,
1 miejsce zerowe dla $m = 1$,
2 miejsca zerowe dla $m \in (-\infty; 1)$
b) 0 miejsc zerowych dla
$m \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$,
1 miejsce zerowe dla $m \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$,
2 miejsca zerowe dla $m \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; 2)$

28. **a)** 0 rozwiązań dla $a \in (-12; 12)$,
1 rozwiązanie dla $a \in \{-12, 12\}$,
2 rozw. dla $a \in (-\infty; -12) \cup (12; \infty)$
b) 1 rozwiązanie dla $a \in \{-1, 0\}$,
2 rozwiązania dla $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$

29. **a)** $a \geqslant -1$ **b)** $a \leqslant -1$

30. **a)** $m < -\frac{3}{2}$ **b)** $m \in (\sqrt{2} - 1; 1\rangle$

31. **a)** $m \in (-4; 0\rangle$ **b)** $m = 2$ **c)** $m \geqslant 1$
d) Nie ma takiego m.

32. **a)** $x_1 + x_2 = -4$, $x_1 x_2 = -6$
b) $x_1 + x_2 = -3(\sqrt{3} - 1)$, $x_1 x_2 = 2 - \sqrt{3}$

33. **a)** różnych znaków **b)** dodatnie
c) ujemne **d)** różnych znaków

34. **a)** $2\frac{11}{18}$ **b)** $5\frac{1}{9}$ **c)** $\frac{\sqrt{46}}{3}$
d) $-1\frac{1}{36}$ **e)** $1\frac{151}{225}$ **f)** $\frac{16}{75}$

35. **a)** $a < -2$ **b)** $a \in (-3; 0)$

36. **a)** $a \in (-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$
b) $a \in (0; \frac{2}{3})$

37. **a)** $a > 1$ **b)** $a \in (-4; -3)$

38. **a)** -4, 7 lub 7, -4 **b)** 7, -4

39. $x = 2$ m

40. 25 lub 52

41. **a)** 4,5 **b)** 18 **c)** 0

42. $29\frac{1}{7}$ cm (ramka kwadratowa)
i $38\frac{6}{7}$ cm (ramka prostokątna)

43. **a)** $P(x) = 2x(4 - x)$, $D_P = (0; 4)$,
pole największe dla $x = 2$,
wymiary prostokąta: 2×4
b) $P(x) = 2x(6 - x)$, $D_P = (0; 6)$,
pole największe dla $x = 3$,
wymiary prostokąta: 6×3

44. kwadrat o boku 6 cm

45. **a)** 15 **b)** 18 **c)** 21

46. 25 km/h i 24 km/h

47. **a)** 5 m/s **b)** 13 m/s **c)** 9 m/s

48. **a)** 3 h
b) pierwsza godzina: 30 km/h,
druga godzina: 18 km/h,
cała trasa: 18 km/h

49. **a)** $D = \langle 0; 5 + \sqrt{26} \rangle$
b) kolejno uzupełniamy: 110, 125, 130
c) po 10 s **d)** po 5 s **e)** 130 m

50. **a)** $x = m^4$
b) $x = -5m$, $x = 5m$
c) $x = 0$, $x = -4m$
d) $x = -m$, $x = 3m$

51. **a)** $g(D) = \langle 0; \infty)$, $x = p$
b) $g(D) = \langle p; \infty)$, $x = -p$
c) $g(D) = (-\infty; 0\rangle$, $x = 2p$
d) $g(D) = (-\infty; 0\rangle$, $x = 0$

52. **a)** 0 rozwiązań dla $a \in (-\infty; 0)$,
2 rozwiązania dla $a \in \{0\} \cup (8; \infty)$,
3 rozwiązania dla $a = 8$,
4 rozwiązania dla $a \in (0; 8)$
b) 0 rozwiązań dla $a \in (2; \infty)$,
2 rozw. dla $a \in (-\infty; -2) \cup \{2\}$,
3 rozwiązania dla $a = -2$,
4 rozwiązania dla $a \in (-2; 2)$
c) 1 rozwiązanie dla $a \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$,
2 rozwiązania dla $a \in \{0, 2\}$,
3 rozwiązania dla $a \in (0; 2)$
d) 1 rozw. dla $a \in (-\infty; -2) \cup (5; \infty)$,
2 rozwiązania dla $a \in \{-2, 5\}$,
3 rozwiązania dla $a \in (-2; 5)$

53. **a)** $x = \frac{1}{3}$, $x = 1$
b) $x = -5$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 4$
c) $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$
d) $x = 0$, $x = 2$
e) $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$
f) $x \in \langle -5; -4\rangle \cup \langle 0; 1\rangle$

54. **a)** $x = -3$, $y = -3$ lub $x = -2$, $y = 0$
b) $x = 2$, $y = 3$
c) $x = 1$, $y = 0$ lub $x = 4$, $y = 3$

55. **a)** $x = -2$, $y = 3$ lub $x = 3$, $y = -2$
b) $x = -2$, $y = -3$ lub $x = 3$, $y = 2$
c) $x = -\frac{4}{3}$, $y = -3$ lub $x = -1$, $y = -4$
lub $x = 1$, $y = 4$ lub $x = \frac{4}{3}$, $y = 3$

56. $m \geqslant \frac{2}{3}$

57. $m = 1$

58. $m = 3$, $x_0 = \frac{3}{2}$ lub $m = -\frac{1}{2}$, $x_0 = -2$

60. $m = -4$, $x = -1$ lub $m = -1$, $x = 2$

61. $x_1 + x_2 = 7$, $x_1 x_2 = 2$, $b = -28$, $c = 32$

62. $m > 1$

63. $m \in (0; 1)$

64. **a)** $m > 16$ **b)** $m < 0$

65. **a)** $b = -24$ **b)** $b = -5$, $b = 5$

66. Takie m nie istnieje.

67. **a)** $m > \frac{1}{2}$
b) $m \in (-\infty; -\frac{1}{2}\rangle \cup (\frac{5}{2} + 2\sqrt{2}; \infty)$
c) $m = -7$, $m = 3$

68. **a)** $f(m) = 2m^2 + 2$, $m \in \mathbf{R}$
b) $f(m) = -6$, $m \in \left(-\frac{4}{5}; 2\right)$

5.5. Wielomiany

1. **a)** $a = 6$, $b = -2$
b) $a = 10$, $b = -2$

2. **a)** $k(x) = 3x^3 + x^2 - 1$, $\mathrm{st}(k) = 3$
b) $k(x) = 3x^3 - 3x^2 + 1$, $\mathrm{st}(k) = 3$
c) $k(x) = 6x^3 - 1$, $\mathrm{st}(k) = 3$
d) $k(x) = 2x^2 - 3x$, $\mathrm{st}(k) = 2$

3. **a)** $a = -1$, $b = 6$
b) $a = -3$, $b = 0$
c) $a = -3$, $b = 1$

4. **a)** $w(x) = 5x^3(x - 2)(x + 2)$
b) $w(x) = x^2(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$
c) $w(x) = -5x^3(x - 3)^2$
d) $w(x) = 2x^3(x + 5)(x - 1)$

5. **a)** $w(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$
b) $w(x) = (x + 3)(x + 2)(x - 2)$
c) $w(x) = (3x - 1)(x^2 + 2)$
d) $w(x) = 3x(x - 5)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
e) $w(x) = x(x - 4)(2x^2 + 3)$
f) $w(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x^2 + x + 1)$

6. **a)** $w(x) = -(x - 2)(3x + 4)$
b) $w(x) = 3(x - 2)^2$
c) $w(x) = 5(x - 1)^4(x - 5)$
d) $w(x) = 4(x + 1)^3(x + 1 + \sqrt{2}) \cdot$
$\cdot (x + 1 - \sqrt{2})$

7. **a)** $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$
b) $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$
c) $x = 0$, $x = 2$
d) $x = -\frac{2}{3}$, $x = 0$
e) $x = 0$, $x = 4$
f) $x = 0$, $x = \frac{\sqrt[6]{32}}{2}$
g) $x = 0$, $x = 1$
h) $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$
i) $x = -3$, $x = 0$

8. **a)** $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$
b) $x = -5$
c) $x = -2$, $x = 2$, $x = 3$
d) $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$
e) $x = -1$, $x = 3$
f) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$
g) $x = \frac{1}{4}$ **h)** $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{2}$

9. **a)** $w(x) = (x+1)(2x^2 - 3x + 1) - 4$
b) $w(x) = (3x-2)(x^2 - x) + 3$
c) $w(x) = (x+5)(-x^4 + 2x^3 - 3) + 6$

10. **a)** 31 **b)** 11 **c)** $3\sqrt{2} + 7$

11. **a)**, **c)**, **d)**, **f)** nie **b)**, **e)** tak

12. **a)** -3, 0, 5 **b)** 0, 5 **c)** 0, 2

13. **a)** $x = 1$
b) $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$
c) $x = -3$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$
d) $x = -2$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $x = -2$, $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
f) $x = -1$, $x = 2$

14. **a)** $w(x) = (2x-1)(x+2)(x-3)$
b) $w(x) = (x-3)^2(2x+3)$
c) $w(x) = (x-2)(x+2)(x^2 + x + 5)$
d) $w(x) = (x-3)(x+5)(x^2+1)$

15. **a)** $-\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ **b)** $-\frac{3}{4}$
c) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ **d)** $-\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$

16. **a)** $x = -\frac{1}{3}$
b) $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
c) $x = -1 - \sqrt{2}$, $x = \frac{1}{4}$, $x = -1 + \sqrt{2}$
d) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$

17. **a)** $v(x,y,z) = -4x^2yz - 8xy^2z - 8xyz^2 + 4xz^2 + 2xy^2$, $v(-1, 2, -\frac{1}{2}) = -17$
b) $v(x,y,z) = -xy^2z^2 - xyz^2 + 2xyz$, $v(-1, 2, -\frac{1}{2}) = 3\frac{1}{2}$

18. **a)** $x = 2$ – dwukrotny,
$x = 4$ – jednokrotny
b) $x = -1$ – trzykrotny,
$x = 3$ – jednokrotny
c) $x = -2$ – dwukrotny,
$x = -\frac{1}{2}$ – jednokrotny,
$x = \frac{1}{2}$ – jednokrotny
d) $x = -2$ – dwukrotny,
$x = -\frac{1}{2}$ – jednokrotny,
$x = 1$ – dwukrotny

19. **a)** $x \in (-\infty; -3) \cup (0; 2)$
b) $x \in \langle -2; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \{-1\}$
d) $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \{1\} \cup \langle 2; \infty)$
e) $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \{0\}$
f) $x \in \langle -3; -\frac{1}{2}\rangle \cup \langle \frac{1}{2}; \infty)$
g) $x \in (-\infty; -1)$
h) $x \in (-\infty; 1)$

20. **a)** $x \in \langle -4; 1\rangle$
b) $x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1; \infty)$
d) $x \in (-2; -1) \cup (0; 1) \cup (2; \infty)$

21. **a)** $p(x) = x - 1$
b) $p(x) = 2x + 1$

22. **a)** $m = 3$
b) $m = -8$, $m = 12$
c) $m = -2$, $m = 1$

23. **a)** $a = 8$
b) $a = -1$, $a = 5$

24. **a)** $w(x) = 0$ dla $x \in \{1, 2, 4\}$,
$w(x) > 0$ dla $x \in (1; 2) \cup (4; \infty)$,
$w(x) = (x-1)(x-2)(x-4)$
b) $w(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 2\}$,
$w(x) > 0$ dla $x \in (-2; 2) \cup (2; \infty)$,
$w(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2(x+2)$
c) $w(x) = 0$ dla $x \in \{0, 3\}$, $w(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$, $w(x) = -x^2(x-3)$

25. **a)** $p = 1$, $q = 0$
b) $p = 0$, $q = -3$

26. **a)** $a = 3$, $b = 7$ **b)** $a = 3$, $b = -2$
c), **d)** Nie ma takich a i b.

27. $P(x_0) = \frac{1}{2}(3 + x_0)^2(3 - x_0)$, $D = (0; 3)$, $P(1) = 16$

28. **a)** $V(x) = 5x^3 + 20x^2 - 25x$, $x > 1$
b) $V(5) = 1000$
c) $P(x) = 22x^2 + 40x - 50$, $x > 1$

29. $V(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$, $x > 2$, $V(3) = 12$

30. $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$

31. $m = -3$, $m = 0$, $m = 2$

32. $a = 6$, $b = -12$, $x = -3$, $x = 2$, $x = 3$

33. $a = 8$, $b = 2$

34. $w(x) = 2x^3 + 2x^2 - 16x - 24$,
$w(x) \geqslant 0$ dla $x \in \{-2\} \cup \langle 3; \infty)$

35. **a)** $x \in \left\langle -\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{4}{3}; \infty \right)$
b) $x = -\frac{4}{5}$, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

36. $a = -3$, $b = 2$,
$w(x) \geqslant x + 2$ dla $x \in \langle -2; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$

37. **a)** $D = \langle -1; \infty)$
b) $D = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$

39. **a)** $b = d = 0$, $a, c \in \mathbf{R}$

5.6. Funkcje wymierne

1. kolejno uzupełniamy
x: 4, 24,
y: 48, 36, 24, 12, 6, 4

2. **a)** $y = \frac{6}{x}$ **b)** $y = -\frac{2}{x}$
c) $y = \frac{2\sqrt{3}}{x}$

3. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-7, 3\}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

4. **a)** $x = 1$ **b)** $x = 1$
c) $x = \frac{1}{3}$, $x = 1$
d) $x = -6$, $x = 0$ **e)** $x = \frac{1}{4}$
f) $x = -\frac{7}{6}$, $x = \frac{7}{6}$

5. $a = 5$
a) A, C
b) $x \in (-\infty; 0) \cup (5; \infty)$

6. **a)** $g(x) = \frac{2}{x-2}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
$g(D) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$
b) $g(x) = \frac{-2x+1}{x-1}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$,
$g(D) = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
rośnie w $(-\infty; 1)$ i w $(1; \infty)$

7. **a)** $g(x) = -\frac{2}{3x} - 3$, tak
b) $g(x) = -\frac{2}{3x-3} - 6$, tak
c) $g(x) = -\frac{2}{3x+6} + 2$, nie

8. **a)** $f(x) = \frac{1}{x+1} + 1$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,
$m = -\frac{1}{2}$
b) $f(x) = \frac{-2}{x-2} - 3$, $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
$m = 1\frac{2}{3}$

9. **a)** $f(x) = 1 - \frac{3}{x-2}$,
$x \in (-\infty; 2) \cup \langle 5; \infty)$
b) $f(x) = -2 + \frac{2}{x+3}$,
$x \in (-3; -2\rangle$
c) $f(x) = 3 + \frac{3}{x+5}$,
$x \in (-\infty; -6\rangle \cup (-5; \infty)$

10. **a)** $g(x) = 2 - \frac{2}{x+5}$,
asymptoty: $x = -5$, $y = 2$
b) $g(x) = 3 + \frac{2}{x-1}$,
asymptoty: $x = 1$, $y = 3$
c) $g(x) = \frac{2}{x+1}$,
asymptoty: $x = -1$, $y = 0$

11. **a)** $p = 1$, $q = 2$,
$f(x) = 0$ dla $x = -\frac{1}{2}$
b) $f(x) > 5$ dla $x \in (1; 2)$,
$f(x) < 3$ dla $x \in (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$

12. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
$f(x) = 0$ dla $x = 0$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$,
$f(x) = 0$ dla $x = \frac{3}{2}$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (\frac{3}{2}; 2)$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$,
$f(x) = 0$ dla $x = -\frac{3}{2}$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{3}{2}; \infty)$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$,
$f(x) = 0$ dla $x = -2$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-3; -2)$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
$f(x) = 0$ dla $x = 4$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 3) \cup (4; \infty)$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$, $f(D) = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
$f(x) = 0$ dla $x = -4$,
$f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup (-3; \infty)$

13. **a)** $y = \frac{-x+7}{x-5}$, $(7, 0)$, $(0, -\frac{7}{5})$
b) $y = \frac{2x+3}{x+3}$, $(-\frac{3}{2}, 0)$, $(0, 1)$
c) $y = \frac{4x+5}{x+3}$, $(-\frac{5}{4}, 0)$, $(0, \frac{5}{3})$
d) $y = \frac{9x+9}{2x+1}$, $(-1, 0)$, $(0, 9)$

14. **a)** $\frac{x+3}{x^2}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$, $\frac{1}{4}$
b) $x(x^2 - 9)$, $D = \mathbf{R}$, 10
c) $\frac{x+1}{2}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-8\}$, $-\frac{1}{2}$
d) $\frac{x+3}{x+1}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, -1
e) $\frac{x+5}{x-1}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, 1\}$, -1
f) $\frac{2x-1}{x^2-3}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}\}$, -5

15. **a)** $-\frac{x-1}{x^2+4}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$, $\frac{8}{53}$
b) $x^2 - 4$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, 45

16. **a)** $\frac{7x+2}{(x+2)(x-1)}$ **b)** $\frac{4x^2+8x+2}{(x+1)(x+2)}$
c) $\frac{-3x^2-3x+1}{(x+1)^2}$ **d)** $\frac{2x+8}{x^2-1}$
e) $\frac{x^2+9}{x^2-9}$ **f)** $\frac{6x}{(3x-1)(3x-2)}$

17. **a)** $x = -3$, $x = 4$
b) $x = 3$, $x = 7$
c) $x = \frac{38}{5}$ **d)** $x = 4$
e) $x = 2$
f) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

18. **a)** $x = 3$ **b)** $x = -1$
c) sprzeczne
d) $x = -12$ **e)** $x = \frac{3}{2}$
f) sprzeczne

19. **a)** $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$
b) $x \in \langle 1; \infty)$

20. **a)** $x \in (0; 4\rangle$
b) $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{6}{5}; \infty)$
c) $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup \langle \frac{2}{3}; \infty)$
d) $x \in (\frac{3}{4}; \frac{4}{3})$ **e)** $x \in (1; \infty)$
f) $x \in \langle -\frac{5}{2}; -1) \cup (2; \infty)$
g) $x \in (-2; 0\rangle \cup (2; 10\rangle$
h) $x \in (-\infty; -7\rangle \cup (-3; -1\rangle \cup (1; \infty)$
i) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; \infty)$

21. **a)** $x \in (-\infty; -2\rangle \cup (-1; 0) \cup \langle 1; \infty)$
b) $x \in (3; \infty)$
c) $x \in (-2; -1) \cup (-1; \infty)$
d) $x \in \langle -\frac{3}{2}; -1) \cup (1; 2\rangle$

22. **a)** $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1, 1\}$,
$f(x) \geqslant g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1\rangle \cup (0; 1\rangle$
b) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-3, 0\}$,
$f(x) \geqslant g(x)$ dla $x \in (-\infty; -3\rangle \cup (-1; 0\rangle$

23. **a)** $x \in (0; 1)$
b) $x \in (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$

24. **a)** $m \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$
b) $m \in (-\infty; -6) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$

25. **a)** $m = 0$
b) $m \in (-6; 6)$
c) $m \in (-\infty; 0\rangle$

26. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{3}{4}\}$, miejsce zerowe: $-\frac{7}{8}$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
miejsca zerowe: $-\frac{3}{2}$, 2
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{2, 5\}$, miejsce zerowe: 8
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, miejsce zerowe: 7

27. **a)** $(-2, 1)$, $(0, -1)$, $(2, 5)$, $(4, 3)$
b) $(-25, -3)$, $(-17, -4)$, $(-13, -6)$, $(-11, -10)$, $(-10, -18)$, $(-8, 14)$, $(-7, 6)$, $(-5, 2)$, $(-1, 0)$, $(7, -1)$
c) $(-13, 1)$, $(-10, 0)$, $(-9, -1)$, $(-8, -4)$, $(-6, 8)$, $(-5, 5)$, $(-4, 4)$, $(-1, 3)$
d) $(-10, 2)$, $(-4, 1)$, $(-2, 0)$, $(-1, -1)$, $(0, -3)$, $(1, -9)$, $(3, 15)$, $(4, 9)$, $(5, 7)$, $(6, 6)$, $(8, 5)$, $(14, 4)$

28. **a)** $x = -3$ **b)** $x = 0$
c) $x = 3$ **d)** $x = 1$

29. **a)** $x = 2$, $x = 12$
b) $x = -\frac{1}{15}$, $x = \frac{11}{15}$
c) $x = -1$
d) $x = 0$
e) $x = \frac{7}{4}$
f) $x = -\frac{7}{3}$, $x = -\frac{5}{3}$

30. **a)** $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
b) $x \in (\frac{7}{6}; \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}; \frac{3}{2})$
c) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; \frac{3}{2}\rangle$

31. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D) = (0; \infty)$,
liczba rozwiązań równania $f(x) = m$:
0 rozwiązań dla $m \leqslant 0$,
2 rozwiązania dla $m > 0$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $f(D) = (3; \infty)$,
liczba rozwiązań równania $f(x) = m$:
0 rozwiązań dla $m \leqslant 3$,
2 rozwiązania dla $m > 3$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $f(D) = \langle 0; \infty)$,
liczba rozwiązań równania $f(x) = m$:
0 rozwiązań dla $m < 0$,
1 rozwiązanie dla $m \in \{0, 3\}$,
2 rozwiązania dla $m \in (0; 3) \cup (3; \infty)$

31. **d)** $D = \mathbf{R}$, $f(D) = (3; 5\rangle$,
liczba rozwiązań równania $f(x) = m$:
0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 3\rangle \cup (5; \infty)$,
1 rozwiązanie dla $m = 5$,
2 rozwiązania dla $m \in (3; 5)$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $f(D) = (-\infty; 0\rangle \cup (1; \infty)$,
liczba rozwiązań równania $f(x) = m$:
0 rozwiązań dla $m \in (0; 1\rangle$,
1 rozwiązanie dla
$m \in (-\infty; -1\rangle \cup \{0\} \cup (1; \infty)$,
2 rozwiązania dla $m \in (-1; 0)$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $f(D) = (-1; \infty)$,
liczba rozwiązań równania $f(x) = m$:
0 rozwiązań dla $m \leqslant -1$,
1 rozwiązanie dla $m \in (-1; 1\rangle$,
2 rozwiązania dla $m > 1$

32. **a)** $x \in (-\infty; -7) \cup (-1; \infty)$
b) $x \in \langle 1; 3) \cup (3; 4\rangle$
c) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

33. $m \in (0; 3) \cup (6; \infty)$

35. **a)** $m = 1$
b) $m = -\frac{1}{2}$
c) $m = -\frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$

36. $a = 3$, $(-1, -1)$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

37. $f(x) = \frac{3x-3}{x-3}$,
$f(x) \leqslant 1$ dla $x \in \langle 0; 3)$

38. $f(x) = \frac{3x+4}{x+2}$,
miejsce zerowe: $-\frac{4}{3}$

39. $v_1 = 80$ km/h, $v_2 = 70$ km/h

40. $v_1 = 18$ km/h, $v_2 = 14$ km/h

41. 4 km/h

5.7. Funkcje trygonometryczne

1. **a)** $b = 3$, $c = 3\sqrt{5}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$
b) $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{5}{2}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$
c) $b = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $c = \frac{5\sqrt{6}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{6}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$
d) $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$

2. **a)** $b = 40\sqrt{3}$, $c = 80$, $\beta = 60^\circ$
b) $a = 6\sqrt{3}$, $c = 12$, $\beta = 30^\circ$
c) $c = 2(\sqrt{2} - 1)$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$

3. **a)** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$
b) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$
c) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$

4. **a)** $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$
b) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{15}{8}$
c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$
d) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

5. **a)** 30° **b)** 60° **c)** 45°
d) 45° **e)** 45° **f)** 60°

6. **a)** $1\frac{2}{5}$ **b)** $13\frac{2}{3}$ **c)** 16

7. **a)** $1\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{5}{9}$

8. **a)** $\frac{7}{5}$ **b)** $\frac{12}{25}$ **c)** $\frac{12}{25}$

9. **a)** $\alpha \approx 37^\circ$, $\beta \approx 53^\circ$, $a = 6$, $b = 8$
b) $\alpha = \beta = 45^\circ$, $a = b = 5\sqrt{2}$
c) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $a = 5$, $b = 5\sqrt{3}$

10. **a)** $\frac{1}{(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha}$, $5\frac{1}{3}$
b) $2\cos^2\alpha - 1$, $-\frac{1}{2}$
c) $1 - \cos^2\alpha$, $\frac{3}{4}$

11. **a)** $x = 1 + 3\sqrt{3}$
b) $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
c) $x = 3\sqrt{3} - 2$

12. około 127,3 m

13. około 221,5 m

14. **a)** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$
b) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$
c) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$
d) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$,
$\operatorname{ctg}\alpha = -1$

15. **a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** Nie istnieje.
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **e)** 1 **f)** $\sqrt{3}$ **g)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **h)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

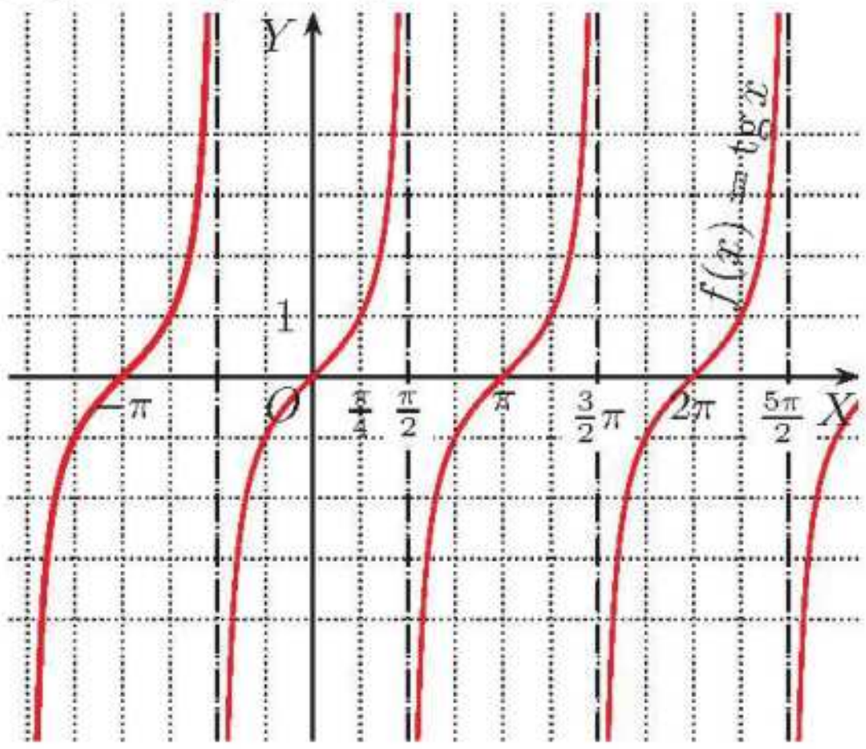
16. **a)** $\frac{7}{8}$ **b)** 1

17. **a)** $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ **b)** $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ **c)** $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$
d) $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$

18. **a)** $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{ctg} x = -2\sqrt{2}$
b) $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg} x = -2$
c) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos x = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
d) $\sin x = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{3}$

19. **a)** tak **b)** nie **c)** nie **d)** tak

20. $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, $T = \pi$,
$\operatorname{tg} x = 0$ dla $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,
rośnie w każdym z przedziałów postaci $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$



21. **a)** $\langle 1; 3\rangle$ **b)** $\langle -2; 0\rangle$ **c)** $\langle -2; 1\rangle$ **d)** $\mathbf{R}$
e) $\langle -5; 1\rangle$ **f)** $\langle 1; 5\rangle$

22. **a)** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

23. **a)** $T = \pi$, $f(D) = \langle -2; 2\rangle$, maleje w przedziałach $\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\rangle$, rośnie w przedziałach $\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $T = 4\pi$, $f(D) = \langle -3; 3\rangle$, maleje w przedziałach $\langle -2\pi + 4k\pi; 4k\pi\rangle$, rośnie w przedziałach $\langle 4k\pi; 2\pi + 4k\pi\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $T = \frac{\pi}{2}$, $f(D) = \mathbf{R}$, rośnie w przedziałach $(-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $T = \pi$, $f(D) = \langle -1; 1\rangle$, maleje w przedziałach $\langle \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{7}{12}\pi + k\pi\rangle$, rośnie w przedziałach $\langle -\frac{5}{12}\pi + k\pi; \frac{\pi}{12} + k\pi\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
e) $T = \pi$, $f(D) = \langle -1; 1\rangle$, maleje w przedziałach $\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi\rangle$, rośnie w przedziałach $\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
f) $T = 4\pi$, $f(D) = \langle -1; 1\rangle$, maleje w przedziałach $\langle \frac{\pi}{2} + 4k\pi; \frac{5}{2}\pi + 4k\pi\rangle$, rośnie w przedziałach $\langle -\frac{3}{2}\pi + 4k\pi; \frac{\pi}{2} + 4k\pi\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
g) $T = 2\pi$, $f(D) = \mathbf{R}$, rośnie w przedziałach $(2k\pi; 2(k+1)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
h) $T = \pi$, $f(D) = \langle 1; 3\rangle$, maleje w przedziałach $\langle -\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi\rangle$, rośnie w przedziałach $\langle \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

24. **a)** $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi$, $x = \frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$
e) $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi$, $x = \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$
g) $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$
h) $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$
i) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

25. **a)** $x \in \langle -2\pi; -\frac{11}{6}\pi\rangle \cup \langle -\frac{7}{6}\pi; \frac{\pi}{6}\rangle \cup \langle \frac{5}{6}\pi; 2\pi\rangle$
b) $x \in \langle -2\pi; -\frac{7}{4}\pi\rangle \cup \langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{7}{4}\pi; 2\pi\rangle$
c) $x \in \langle -2\pi; -\frac{11}{6}\pi) \cup (-\frac{5}{3}\pi; -\frac{4}{3}\pi) \cup (-\frac{7}{6}\pi; -\frac{5}{6}\pi) \cup (-\frac{2}{3}\pi; -\frac{\pi}{3}) \cup (-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi) \cup (\frac{5}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi) \cup (\frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi) \cup (\frac{11}{6}\pi; 2\pi\rangle$
d) $x \in \langle -2\pi; -\frac{11}{6}\pi) \cup (-\frac{5}{3}\pi; -\frac{5}{6}\pi) \cup (-\frac{2}{3}\pi; \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{3}; \frac{7}{6}\pi) \cup (\frac{4}{3}\pi; 2\pi\rangle$
e) $x \in (-\frac{2}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi)$
f) $x \in \langle -2\pi; -\frac{11}{6}\pi\rangle \cup (-\frac{3}{2}\pi; -\frac{5}{6}\pi\rangle \cup (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\rangle \cup (\frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi\rangle \cup (\frac{3}{2}\pi; 2\pi\rangle$
g) $x \in \langle -\frac{11}{6}\pi; -\frac{3}{2}\pi\rangle \cup \langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\rangle$
h) $x \in \langle -\pi; -\frac{\pi}{2}\rangle \cup \langle \pi; \frac{3}{2}\pi\rangle$
i) $x \in (-2\pi; -\frac{11}{6}\pi) \cup (-\pi; -\frac{5}{6}\pi) \cup (0; \frac{\pi}{6}) \cup (\pi; \frac{7}{6}\pi)$

26. **a)** $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
e) $x \in \left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
f) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
g) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
h) $x \in \left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) \cup$
$\cup \left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi; \frac{13}{6}\pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
i) $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \cup$
$\cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

27. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$,
$f(D) = \langle -2; \infty)$
b) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle -1; 2\rangle$
c) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle 0; 2\rangle$
d) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \langle 2; 3\rangle$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$,
$f(D) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$
f) $D = \mathbf{R}$, $f(D) = \left\langle \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\rangle$

28. **a)** $m \in \langle -1; 0\rangle$
b) $m \in \langle 1; 3\rangle$
c) $m \in \langle -4; \infty)$

31. **a)** $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
c) $\frac{1}{2}$ **d)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $-\frac{1}{4}$ **f)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

32. **a)** $\frac{-3-4\sqrt{3}}{10}$ **b)** $\frac{-3-4\sqrt{3}}{10}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ **d)** $-\frac{24}{25}$

33. **a)** $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
b) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$
c) $\sin x = \frac{120}{169}$, $\cos x = \frac{119}{169}$
d) $\sin x = -\frac{120}{169}$, $\cos x = \frac{119}{169}$

34. **a)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$,
$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
e) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
f) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$

35. **a)** $x = \pi$ **b)** $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$
c) $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{3\pi}{2}$
d) $x = \frac{\pi}{2}$ **e)** $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$
f) $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$

36. **a)** $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = k\pi$,
$k \in \mathbf{Z}$
e) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = k\pi$,
$k \in \mathbf{Z}$
f) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$,
$k \in \mathbf{Z}$

37. **a)** $\frac{\pi}{2}$ **b)** brak rozwiązania **c)** π **d)** $\frac{3}{4}\pi$

38. **a)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{k\pi}{4}$, $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$,
$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$

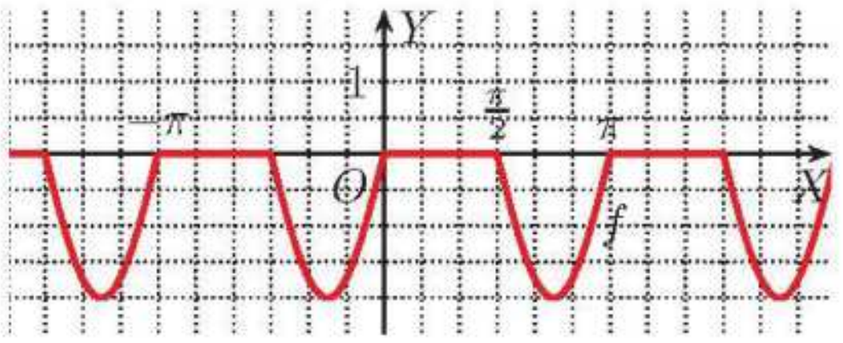
39. **a)** $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

41. **a)** $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

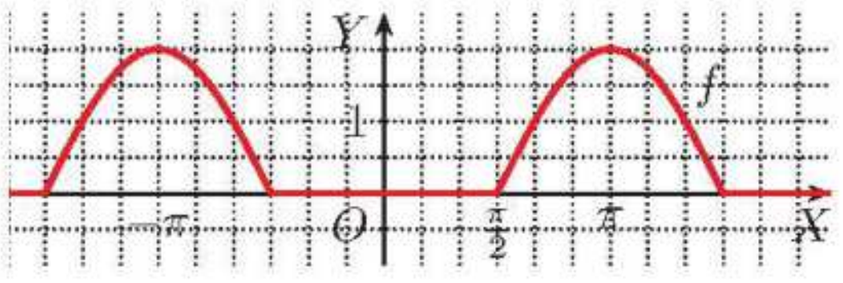
42. **a)** $-\frac{13}{28}\pi$, $-\frac{1}{4}\pi$, $-\frac{5}{28}\pi$, $\frac{1}{28}\pi$, $\frac{3}{28}\pi$,
$\frac{9}{28}\pi$, $\frac{11}{28}\pi$
b) $-\frac{11}{30}\pi$, $-\frac{7}{30}\pi$, $\frac{1}{30}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{13}{30}\pi$
c) $-\frac{5}{12}\pi$, $-\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5}{12}\pi$ **d)** $-\frac{\pi}{8}$, $\frac{3}{8}\pi$

43. **a)** $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{4}\pi; 2\pi\right)$
b) $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{6}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{6}\pi; \frac{4}{3}\pi \right\rangle \cup$
$\cup \left\langle \frac{5}{3}\pi; \frac{11}{6}\pi \right\rangle$
c) $x \in (0; 2\pi)$
d) $x \in \left\{\frac{1}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi\right\}$

44. **a)** okresowa, $T = \pi$



b) okresowa, $T = 2\pi$



45. **a)** $f(x) = \left|\cos 2(x - \frac{\pi}{6})\right|$,
miejsca zerowe: $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{11}{12}\pi$, $\frac{17}{12}\pi$
b) $f(x) = 2\left|\sin 2(x + \frac{\pi}{3})\right|$,
miejsca zerowe: $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$

46. **a)** $x \in \langle -\frac{1}{2} + 2k; \frac{1}{2} + 2k\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$
b) $x \in \langle k; k + \frac{1}{2}\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$

47. **a)** $a = -3$, $b = \frac{1}{2}$ lub $a = -3$, $b = -\frac{1}{2}$
b) $x \in (\frac{4}{3}\pi + 4k\pi; \frac{8}{3}\pi + 4k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$

48. $x + y = \frac{\pi}{3}$

50. $x = -\frac{\pi}{6}$

51. $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$

52. $x \in \langle -\pi; -\frac{5}{6}\pi\rangle \cup \langle -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\rangle \cup \langle \frac{5}{6}\pi; \pi\rangle$

5.8. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

1. **a)** 3^1 **b)** 5^9 **c)** $2^{\frac{25}{3}}$ **d)** $2^{\frac{9}{5}}$ **e)** $3^{\frac{11}{12}}$ **f)** 5^1

2. **a)** 2 **b)** 625 **c)** 1 **d)** 1

3. **a)** $m \in (2; \infty)$ **b)** $m \in (0; \frac{1}{4})$
c) $m \in (-1; 1)$

4. **a), d)** $a \in (1; \infty)$ **b), c)** $a \in (0; 1)$

5. **a)** $<$ **b)** $>$ **c)** $=$

6. **a)** $3^{\sqrt{3}} < 9\sqrt{3} < 9^{2,1} < 27^{\frac{3}{2}}$
b) $\left(\frac{16}{25}\right)^{1,5} < \left(\frac{4}{5}\right)^{\sqrt{5}} < \left(\frac{5}{4}\right)^{-1,8} < 0{,}8^{\sqrt{2}}$

7. **a)** $x \in (0; \infty)$ **b)** $x \in (-2; \infty)$
c) $x \in (-\infty; 0)$

8. **a)** $x \in (-2; \infty)$ **b)** $x \in (-\frac{1}{4}; \infty)$
c) $x \in (-1; \infty)$

9. **a)** $x = -1$, $x = 0$ **b)** $x = 2$

10. **a)** 4 **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** -3 **d)** $-\frac{1}{4}$ **e)** -5 **f)** $\frac{1}{6}$
g) 8 **h)** 0,3

11. **a)** -1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 6

12. **a)** $a = 3$ **b)** $a = \frac{1}{3}$ **c)** $a = \frac{1}{3}$ **d)** $a = 81$
e) $a = \frac{2}{5}$ **f)** $a = \frac{125}{8}$

13. **a)** $x = 27$ **b)** $x = 3\sqrt{3}$ **c)** $x = 1$
d) $x = 2$ **e)** $x = -3$, $x = 3$ **f)** $x = 1$

14. **a)** $x = 16$ **b)** $x = 4{,}5$ **c)** $x = 5$ **d)** $x = \frac{4}{9}$

15. **a)** $m \in (1; 1\frac{1}{2})$ **b)** $m \in (3; \infty)$

16. **a)** $x \in (-3; -2)$ **b)** $x \in (3; \infty)$

17. **a)** $x = -1$, $x = 0$
b) $x = 0$, $x = 1$
c) $x = 0$, $x = 1$

18. **a)** $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$
b) $x = -\frac{3}{4}$, $x = 1$
c) $x = 6$

19. **a)** $x \in \langle 3\frac{3}{8}; \infty)$ **b)** $x \in (-\infty; 0\rangle$
c) $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; \infty)$

20. **a)** $f(D) = \langle 0; \infty)$, rośnie w $\langle 1; \infty)$,
maleje w $(-\infty; 1\rangle$, $m \in \{0\} \cup \langle 4; \infty)$
b) $f(D) = \langle 0; \infty)$, rośnie w $\langle -1; \infty)$,
maleje w $(-\infty; -1\rangle$, $m \in \{0\} \cup \langle 3; \infty)$
c) $f(D) = (4; 5\rangle$, rośnie w $(-\infty; 0\rangle$,
maleje w $\langle 0; \infty)$, $m = 5$

21. **a)** 4 **b)** 9 **c)** 32 **d)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **e)** $\sqrt{5}$ **f)** 0

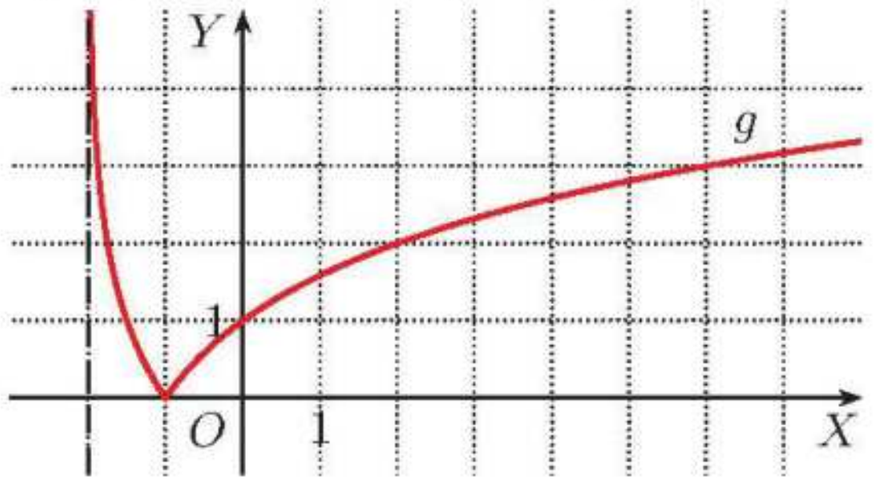
22. **a)** $\frac{a}{b}$ **b)** $\frac{2}{b}$ **c)** $1 - \frac{1}{b}$ **d)** $\frac{a+1}{b}$ **e)** $-b$
f) $-1 - \frac{a}{b}$

23. **a)** 64 **b)** $\sqrt{5}$ **c)** 2

24. **a)** $D = (-1; 1)$, $f(0) = 0$
b) $D = (-\infty; \frac{3}{4})$, $f(\frac{1}{2}) = 0$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{7\}$, $f(6) = f(8) = 0$
d) $D = (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$,
$f(\frac{3-\sqrt{13}}{2}) = f(\frac{3+\sqrt{13}}{2}) = 0$

25. **a)** $D = (3; 4)$
b) $D = (1; 2) \cup (2; 3)$
c) $D = (-\sqrt{10}; -3\rangle \cup \langle 3; \sqrt{10})$
d) $D = (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$

26. **a)** $D = (-3; \infty)$, $g(D) = \mathbf{R}$, rosnąca
b) $D = (2; \infty)$, $g(D) = \mathbf{R}$, malejąca
c) $D = (-2; \infty)$, $g(D) = \langle 0; \infty)$, maleje
w $(-2; -1\rangle$, rośnie w $\langle -1; \infty)$



27. **a)** $D = (-1; \infty)$, $f(D) = \langle 0; \infty)$,
maleje w $(-1; -\frac{3}{4}\rangle$, rośnie w $\langle -\frac{3}{4}; \infty)$
b) $f(x) = |\log_2|x| - 1|$,
$D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(D) = \langle 0; \infty)$,
maleje w $(-\infty; -2\rangle$ i w $(0; 2\rangle$,
rośnie w $\langle -2; 0)$ i w $\langle 2; \infty)$

28. **a)** $x \in (4; 7\rangle$ **b)** $x \in (3; 4\rangle$

31. **a)** $m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$
b) $m \in (16; \infty)$

32. **a)** $m \in (-\infty; -2\frac{1}{4})$ **b)** $m \in (-\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$

34. **a)** $p = 0{,}5$ **b)** $p = \sqrt{2}$ **c)** $p = 4$
d) $p = 65\,536$

35. **a)** $q = 5$ **b)** $q = \frac{1}{16}$

37. **a)** 32 h **b)** 48 h

38. **a)** 12 g **b)** 6 g

39. 8 dni

5.9. Ciągi

1. **a)** -8 **b)** 9

2. $c_1 = 7$, $c_2 = 4$, $c_3 = \frac{11}{3}$, $c_4 = 24$

3. **a)** 3 **b)** 5 **c)** 3

4. **a)** $a_n = n^2$ **b)** $a_n = \frac{1}{2n-1}$ **c)** $a_n = \frac{n}{n+1}$
d) $a_n = (-1)^{n+1}2n$ **e)** $a_n = \frac{1}{3^n}$
f) $a_n = \begin{cases} 2 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2 + \frac{2}{n+2} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

6. **a)**, **d)**, **g)**, **h)** rosnący
b), **c)**, **i)** niemonotoniczny
e) stały
f) malejący

7. **a)** $a_n = 2n - 1$, $a_5 = 9$, $a_8 = 15$
b) $a_n = -5n + 13$, $a_5 = -12$, $a_8 = -27$
c) $a_n = \frac{1}{2}n - 1\frac{1}{2}$, $a_5 = 1$, $a_8 = 2\frac{1}{2}$

8. **a)** $a_7 = 8$ **b)** $a_{10} = -42$ **c)** $a_{15} = -23$
d) $a_{20} = -7$

9. **a)** tak **b)** nie **c)** tak **d)** nie

10. **a)** $a_n = 2n - 1$, rosnący
b) $a_n = 3n - 18$, rosnący
c) $a_n = \frac{2}{3}n - 2$, rosnący

11. **a)** $r = 2$ **b)** $r = \frac{1}{2}$ **c)** $r = -4\frac{1}{2}$

12. **a)** $x = 7$ **b)** $x = 0$, $x = 6$

13. **a)** $a = 18$, $b = 33$, $c = 48$
b) $10 + \sqrt{2}$, $8 + \sqrt{2}$, $6 + \sqrt{2}$, $4 + \sqrt{2}$, $2 + \sqrt{2}$

14. **a)** $a_1 = 1$, $r = -2$
b) $a_n = 3n - 10$

15. **a)** $S_{12} = 51$ **b)** $S_9 = 9(1 + 3\sqrt{2})$
c) $S_{15} = 270$ **d)** $S_7 = 84$

16. **a)** 981 **b)** 1566

17. a_7

18. 42

19. **a)** $x = 20$ **b)** $x = 23$
c) $x = 8$ **d)** $x = 6$

20. **a)** $a_n = 2n - 1$, tak
b) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 1 \\ 2n - 1 & \text{dla } n > 1 \end{cases}$, nie
c) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 1 \\ 3n^2 - 3n + 1 & \text{dla } n > 1 \end{cases}$, nie

22. **a)** $a_n = 2^n$, $a_6 = 64$, $a_{10} = 1024$
b) $a_n = \frac{27}{3^n}$, $a_6 = \frac{1}{27}$, $a_{10} = \frac{1}{2187}$
c) $a_n = (\sqrt{2})^{n-2}$, $a_6 = 4$, $a_{10} = 16$

23. **a)** $a_n = -3 \cdot 2^{n-1}$, $a_4 = -24$, $a_7 = -192$
b) $a_n = 4 \cdot (-1)^{n-1}$, $a_4 = -4$, $a_7 = 4$
c) $a_n = 3 \cdot (-\sqrt{2})^{n-1}$, $a_4 = -6\sqrt{2}$, $a_7 = 24$
d) $a_n = \frac{1}{2^{n-3}}$, $a_4 = \frac{1}{2}$, $a_7 = \frac{1}{16}$
e) $a_n = \frac{(-3)^{n-1}}{3}$, $a_4 = -9$, $a_7 = 243$
f) $a_n = 2 \cdot (\sqrt{3})^n$, $a_4 = 18$, $a_7 = 54\sqrt{3}$

24. **a)** $a_n = 2^n$, rosnący
b) $a_n = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, malejący
c) $a_n = \frac{1}{4} \cdot (-\sqrt{2})^n$, niemonotoniczny

25. **a)** tak **b)** tak **c)** nie **d)** tak

26. **a)** tak **b)** tak **c)** nie

28. **a)** 21, 63 **b)** 12, 24, 48
c) $\frac{1}{3}$, 1, 3 lub 3, 1, $\frac{1}{3}$

29. **a)** $S_5 = \frac{1055}{16}$ **b)** $S_{45} = \sqrt{2}$
c) $S_6 = -\frac{21}{8}$ **d)** $S_7 = 31 + \frac{156\sqrt{5}}{5}$

30. **a)** 6 **b)** 8

31. **a)** -1023 **b)** -21 lub 21

32. 3

33. **a)** $-\frac{63\sqrt{2}}{32}$ **b)** $\frac{63}{16}$

34. **a)** 1081,60 zł **b)** 1340,10 zł
c) 1480,24 zł

35. po 4 latach: 2349,80 zł,
po 8 latach: 5841,60 zł

36. **a)** 609,50 zł **b)** 610,30 zł **c)** 610,50 zł

37. największe odsetki w banku C, w banku A o 2%, w banku B o około 2,015%, w banku C o około 2,018%

38. bank C

39. **a)** stały **b)** rosnący **c)**, **d)** malejący

40. **a)** geometryczny **b)** arytmetyczny
c), **d)** ani arytmetyczny, ani geometryczny

41. **a)** -123 **b)** 47

42. **a)** rosnący
b), **c)** malejący

43. **a)**, **c)**, **d)**, f) malejący
b), **e)** rosnący

44. **a)** -2 **b)** 0 **c)** $-\infty$ **d)** ∞ **e)** -3 **f)** $-\frac{3}{4}$

45. **a)** -4 **b)** $-\infty$ **c)** ∞ **d)** 0 **e)** 12 **f)** $\frac{3}{4}$

46. **a)** ∞ **b)** $-\infty$ **c)** $-\infty$

47. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}$

48. **a)** 9 **b)** 6 **c)** 4 **d)** 7 **e)** 1 **f)** 3

49. **a)** $3+\sqrt{3}$ **b)** $-\frac{27}{2}$ **c)** $\frac{16}{3}$ **d)** $4(1+\sqrt{2})$

50. **a)** $\frac{2}{9}$ **b)** $\frac{13}{9}$ **c)** $\frac{32}{15}$ **d)** $\frac{5}{2}$ **e)** $\frac{27}{11}$ **f)** $\frac{298}{99}$
g) $\frac{161}{111}$ **h)** $\frac{10}{37}$

51. **a)** $x \in (0;1)$ **b)** $x \in (-1;1) \cup (1;3)$

52. **a)** $x \in \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $S = \frac{1}{1-2x}$
b) $x \in \left(-\infty;-\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4};\infty\right)$, $S = \frac{4x}{4x-1}$

53. **a)** $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $x = -\frac{2}{3}$, $x = 1$
c) $x = \frac{1}{2}$
d) $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

54. **a)** $x \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty)$
b) $x \in \left\langle \frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\frac{5}{6}\pi\right\rangle$

55. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

56. **a)** $D = (-1;1)$, $f(x) = \frac{2x}{1-x} = \frac{-2}{x-1} - 2$,
$f(D) = (-1;\infty)$
b) $D = (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$,
$f(x) = -\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 1$,
$f(D) = (-\infty;-1) \cup \left(-1;-\frac{1}{2}\right)$

57. **a)** 580 **b)** $a_1 = 16$, $a_{16} = 46$

58. $a_1 = -6$, $n = 25$

59. $a_1 = 36$, $n = 20$

60. $r = 3$, $k = 15$

61. $n = 10$

62. $r = 2$, $n = 21$

63. **a)** $a_n = 2 \cdot (-1)^{n-1}$
b) $q = -\frac{\sqrt[3]{36}}{3}$, $q = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$

64. $125\sqrt{5}$

65. $q \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

66. 8, 10 lub $4\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$

67. **a)** 3, 4 **b)** 6, 8

68. **a)** 8, 32 lub -7, $24\frac{1}{2}$
b) 2, 7, 12 lub 26, 7, -12

70. $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$

72. **a)** $b_n = 5 \cdot 4^{n-1}$ **b)** $a_n = 5 \cdot 4^{n-1} - 2$

73. **a)** $a_n = \frac{n}{2}$, rosnący
b) $a_n = \frac{3n(n+1)}{4(2n+3)}$, rosnący

74. **a)** $\frac{3}{4}$ **b)** $-\infty$ **c)** ∞ **d)** $-\frac{1}{4}$

75. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \frac{p}{p+1} & \text{dla } p \neq -1 \\ -\infty & \text{dla } p = -1 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{dla } p < -2 \\ 0 & \text{dla } p = -2 \\ 5 & \text{dla } p = 2 \\ \infty & \text{dla } p > -2 \text{ i } p \neq 2 \end{cases}$

76. **a)** $p = 7$ **b)** $p = 9$

77. $a > 0$ i $b = 0$

78. $\alpha = \frac{\pi}{4}$

79. $a_1 = 12$, $q = -\frac{1}{2}$

80. $a_1 = 5$, $q = \frac{2}{3}$

81. $a_1 = \frac{15}{2}$, $q = \frac{1}{4}$

82. **a)** 2 **b)** $\frac{4\sqrt{3}}{15}$

83. **a)** 9π **b)** $10\frac{1}{8}\pi$

5.10. Geometria analityczna

1. **a)** $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$ **b)** $a = 8$, $b = 3$
c) $a = 4$, $b = -6$ **d)** $a = 4$, $b = 6$

2. **a)** 5 **b)** $3\sqrt{2}$

3. **a)** $10 + 4\sqrt{5}$ **b)** $6\sqrt{5} + 2\sqrt{13}$

4. **a)** równoramienny i prostokątny
b) równoramienny **c)** prostokątny
d) ani prostokątny, ani równoramienny

5. **a)** $y = \frac{11}{2}$ **b)** $y = -\frac{1}{3}x + 4$ **c)** $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{6}$

6. **a)** $h = 4\sqrt{2}$, $P = 20$ **b)** $h = 3\sqrt{5}$, $P = 30$

7. **a)** 8 **b)** 26

8. **a)** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ **b)** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

9. **a)** względem osi OY
b) względem początku układu współrzędnych

10. **a)** $B(10,-1)$ **b)** $B(-11,-10)$
c) $B(0,-3)$ **d)** $B(6,-5)$

11. **a)** $(1,6)$ **b)** $(-2,3)$

12. **a)** $(-13,0)$ lub $(\frac{9}{2},0)$
b) $\left(0,-2-\sqrt{10}\right)$ lub $\left(0,-2+\sqrt{10}\right)$

13. **a)** $x-y-\frac{3}{2}=0$ **b)** $2x-y+2=0$

14. **a)** $[5,0]$ **b)** $[-6,-8]$ **c)** $[7,-4]$

15. **a)** $P(-1,-1)$ **b)** $P(2,1)$ **c)** $P(-1,11)$

16. **a)**, **b)**, **c)** tak **d)** nie

17. **a)** $D(-7,2)$ **b)** $D(-3,3)$

18. **a)** $A'(3,0)$, $B'(0,2)$
b) $A'(3,3)$, $B'(0,5)$
c) $A'(1,-3)$, $B'(-2,-1)$
d) $A'(0,-4)$, $B'(-3,-2)$

19. **a)** $A'(4,6)$, $B'(6,10)$, $C'(2,12)$, $D'(0,8)$
b) $A'(0,-2)$, $B'(2,2)$, $C'(-2,4)$, $D'(-4,0)$
c) $A'(1,0)$, $B'(3,4)$, $C'(-1,6)$, $D'(-3,2)$

20. $C(4,5)$, $D(-2,2)$, $P=21$

21. $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$

22. $C(-2,-2)$, $P=9$

23. **a)** $x^2+y^2=10$
b) $(x-1)^2+(y-3)^2=10$
c) $(x-3)^2+(y+1)^2=25$

24. **a)** $(x+1)^2+y^2=25$
b) $(x-1)^2+(y-1)^2=25$
c) $(x-4)^2+(y+2)^2=25$ lub $(x+3)^2+(y-5)^2=25$

25. **a)** $(x+1)^2+(y-4)^2=16$
b) $(x+1)^2+(y-4)^2=1$
c) $(x+1)^2+(y-4)^2=25$

26. **a)** $(x-3)^2+(y-2)^2=9$
b) $(x+5)^2+(y-2)^2=25$

27. **a)** $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ lub $(x-3)^2+(y-1)^2=25$
b) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ lub $(x-3)^2+(y-1)^2=49$

28. **a)** styczne wewnętrznie
b) rozłączne zewnętrznie
c) przecinają się
d) styczne zewnętrznie

29. **a)** styczne zewnętrznie
b) przecinają się

30. **a)** $m>-1$ **b)** $m\in(-\infty;-1)\cup(0;\infty)$

31. **a)** $(x+3)^2+(y-2)^2=40$
b) $(x-2)^2+(y-2)^2=10$

32. **a)**, **b)** dwa punkty wspólne
c) jeden punkt wspólny

33. **a)** 2 **b)** 0 **c)** 1

34. **a)** $d=2\sqrt{2}$, $(x-1)^2+y^2=2$
b) $d=4\sqrt{5}$, $(x-2)^2+y^2=20$

35. **a)** $m=-3+4\sqrt{2}$, $m=-3-4\sqrt{2}$
b) $m=-1+4\sqrt{2}$, $m=-1-4\sqrt{2}$
c) $m=-4+4\sqrt{5}$, $m=-4-4\sqrt{5}$

36. **a)** $(x+2)^2+(y-7)^2=16$
b) $(x-2)^2+(y+5)^2=50$

37. **a)** $x=-1$, $y=0$ lub $x=3$, $y=4$
b) sprzeczny
c) $x=3$, $y=0$ lub $x=0$, $y=3$
d) $x=-4$, $y=3$ lub $x=-4$, $y=-3$

38. **a)** $\sqrt{2}$ **b)** $2\sqrt{5}$

39. $5\sqrt{2}$

40. **a)** $B(4,4)$, $C(-1,4)$
b) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{325}{16}$

41. $m\in(1;2)$

42. $m=0$, $m=4$

43. **a)** $m\in\left\langle\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right\rangle$
b) $m\in\langle 0;2\rangle$

44. **a)** $m_1=-2$, $d_1=\frac{3}{4}\sqrt{10}$, $m_2=0$, $d_2=\frac{3}{2}\sqrt{5}$
b) $m=0$, $d=\sqrt{17}$

45. $m=1$, $x^2+y^2=\frac{1}{5}$

46. $6+4\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

47. $C(1,4)$ lub $C\left(-\frac{13}{7},-\frac{32}{7}\right)$

48. $y=-2$, $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, $y=-2x-11$

49. $(-5,-5)$, $(-1,7)$, $(1,-7)$, $x^2+y^2=50$

50. $\sqrt{2}$

51. $2\sqrt{10}$

52. $A(-1,-5)$, $B(3,3)$

53. $B(-6,-2)$, $C(0,-4)$, $D(2,2)$, $(x+2)^2+y^2=20$

54. $(-2,2)$, $(2,-6)$, $(4,0)$

55. **a)** $B(6,0)$, $C(2,4)$ lub $B(2,4)$, $C(6,0)$
b) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$

56. $(3,\frac{1}{2})$, $(4,6)$, $(-1,\frac{7}{2})$, $\frac{3}{5}$

57. $y=-2x-4$, $y=-2x+6$

58. $k\in\left\langle-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right\rangle$

59. $A(-2,-1)$, $B(4,1)$, $C(5,4)$, $D(-1,2)$, $P=16$

60. $C(-2\sqrt{2}-1,-2\sqrt{2}+2)$ lub $C(2\sqrt{2}-1,2\sqrt{2}+2)$

61. $D(-3,4)$, $y=4x+16$

5.11. Planimetria

1. **a)** $\delta=30^\circ$, $\varphi=60^\circ$ **b)** $\delta=32^\circ30'$, $\varphi=57^\circ30'$ **c)** $\delta=50^\circ$, $\varphi=40^\circ$

2. **a)** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$, $\frac{9}{2}$ **b)** 5, 4 **c)** 6, $3\sqrt{5}$

3. **a)** $\frac{5}{2}$ cm, $\sqrt{13}$ cm, $\frac{\sqrt{73}}{2}$ cm
b) $\frac{12}{5}$ cm **c)** $\frac{12\sqrt{2}}{7}$ cm

4. **a)** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 3, $3\sqrt{3}$

5. $6(1+\sqrt{10})$ cm

6. $a=3$ cm, $b=4$ cm, $r=1$ cm

7. **a)** 24 cm^2 **b)** $6\sqrt{7}$ cm^2

8. 84

9. $2\sqrt{10}$

10. 4 cm, $4(\sqrt{2}-1)$ cm

11. 5 cm, 5 cm, $5\sqrt{3}$ cm

12. $12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2)$ cm

13. $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{3}$, 1

14. $P=39$ cm^2, $Ob=(13+5\sqrt{13})$ cm

15. **a)** 1:4 **b)** 1:2

16. $x=\frac{15}{4}$, $y=\frac{7}{2}$

17. 3, $3(\sqrt{2}-1)$, $3(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

18. **a)** przecinają się **b)** rozłączne zewnętrznie **c)** styczne zewnętrznie **d)** przecinają się

19. **a)** $x=1$ **b)** $x=5$

20. **a)** 0 punktów dla $x\in\langle0;4)\cup(6;\infty)$,
1 punkt dla $x\in\{4,6\}$,
2 punkty dla $x\in(4;6)$
b) 0 pkt dla $x\in\langle0;2\sqrt{3}-2)\cup(2;\infty)$,
1 punkt dla $x\in\{2\sqrt{3}-2,2\}$,
2 punkty dla $x\in(2\sqrt{3}-2;2)$

21. 0 punktów dla $r\in(0;2\frac{1}{3})\cup(4\frac{1}{3};\infty)$,
1 punkt dla $r\in\{2\frac{1}{3},4\frac{1}{3}\}$,
2 punkty dla $r\in(2\frac{1}{3};4\frac{1}{3})$

22. 2,4 cm, 5,6 cm

23. **a)** $\alpha=\beta=\gamma=40^\circ$
b) $\alpha=30^\circ$, $\beta=120^\circ$, $\gamma=90^\circ$
c) $\alpha=50^\circ$, $\beta=100^\circ$, $\gamma=40^\circ$

25. $\sphericalangle A=\sphericalangle B=32^\circ$, $\sphericalangle O=116^\circ$

26. **a)** 62° **b)** 120° **c)** 54°

27. 15°

28. **a)** dziesięciokąt foremny: 144°, dwunastokąt foremny: 150°

29. **a)** 4 **b)** 2

30. **a)** $\frac{\pi}{4}$

31. 70°

32. $8(\sqrt{3}+\sqrt{7})$

33. 6 cm

34. $P=128$ cm^2, $Ob=16(2+\sqrt{2})$ cm

35. **b)** 50 cm^2

37. **a)** $Ob=24$ cm, $P=30$ cm^2
b) $Ob=40$ cm, $P=80$ cm^2
c) $Ob=\frac{8\sqrt{21}}{7}$ cm, $P=\frac{6\sqrt{3}}{7}$ cm^2

38. $3(3+\sqrt{3})$

39. **a)** 2 cm **b)** 16π cm^2

40. 45 cm^2

42. **a)** $\frac{\pi}{4}a^2\sin^2\alpha$ **b)** $\frac{1}{2}\sqrt{P\sin\alpha}$

43. $\sphericalangle A=55^\circ$, $\sphericalangle B=95^\circ$, $\sphericalangle C=125^\circ$, $\sphericalangle D=85^\circ$

44. 6

45. **a)** $\beta=30^\circ$, $\gamma=90^\circ$ **b)** $\alpha=105^\circ$, $\gamma=30^\circ$ **c)** $\beta=60^\circ$, $\gamma=90^\circ$ lub $\beta=120^\circ$, $\gamma=30^\circ$ **d)** $\alpha=105^\circ$, $\gamma=45^\circ$ lub $\alpha=15^\circ$, $\gamma=135^\circ$

46. **a)** $a=3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $b=2(3-\sqrt{3})$, $\gamma=75^\circ$
b) $a=6(1+\sqrt{3})$, $c=3(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$, $\gamma=120^\circ$

47. **a)** $6\sqrt{2}$ **b)** $5\sqrt{3}$

48. **a)** $3\sqrt{3}$ **b)** 7

49. $3\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$

50. **a)** nie jest **b)** jest

51. $4,\ 4\sqrt{7}$

52. $120^\circ,\ \sqrt{19}$

53. $\sin\alpha = \frac{1}{3},\ Ob = 4(2+\sqrt{2})$

54. $10\sqrt{2}\pi$

55. $\frac{31}{27}\pi$

56. $|AB| = 8,\ |AC| = \frac{8\sqrt{7}}{7},\ |BC| = \frac{24\sqrt{7}}{7}$

57. $Ob_{ACD} = 3(\sqrt{3}+1)$ cm,
$Ob_{ABD} = 2(2\sqrt{3}+3)$ cm

58. $P = 16(\sqrt{6}-\sqrt{2}),\ Ob = 16(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

59. $3\sqrt{2}$

60. $2,\ 10$

61. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

62. $\sin\sphericalangle ABC = \frac{7}{25},\ |AB| = 7{,}5,\ |AC| = 3{,}5$

63. $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 72^\circ,\ \sphericalangle C = 36^\circ$

64. 2,4 cm

65. $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{3},\ k_2 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ k_3 = \frac{1}{2}$,
$P = 24\sqrt{3}$

66. $b = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm, $P = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm^2

67. 2,4

69. $P = 60\sqrt{3}$ cm^2, $Ob = 44$ cm

70. od podstawy: 3,5 cm,
od ramienia: 2,1 cm

71. $\frac{1}{8}(a^2-b^2)\operatorname{tg}\alpha$

72. $\frac{15}{2}(3-\sqrt{3})$

73. $d\sqrt{13}$

75. $-\frac{7}{8},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{7}{8}$

77. $4:9$

78. $|PA| = 8,\ |PB| = 18$

79. 11

5.12. Stereometria

1. **a)** $234\sqrt{3}$ **b)** $48(3+5\sqrt{2})$
c) $36(10+3\sqrt{3})$

2. **a)** $\frac{2}{3}\sqrt{69}$ **b)** $2\sqrt{7}$ **c)** $2\sqrt{5}$

3. $6(13+\sqrt{13})$

4. **a)** 30° **b)** $6\sqrt{3}$

5. $V = 27,\ P_b = 54$

6. $\frac{\sqrt{255}}{17}$

7. $60\frac{3}{4}$

8. $2\frac{2}{7}$

9. $24(5+2\sqrt{61})$

10. $\frac{d^3\sqrt{2}}{8}$

11. $\sqrt[3]{4\pi V}$

12. $45^\circ,\ 3\sqrt[3]{4}$

13. $\frac{16\sqrt{\pi}}{\pi}$

14. $6\frac{2}{3}$

15. **a)** 3 cm **b)** 54 cm^3

16. $\frac{a^3\sqrt{3(3-4\sin^2\alpha)}}{8\sin\alpha}$

17. **a)** 2 **b)** $\frac{5}{8},\ \frac{7}{8}$

18. 96

19. $3(9+\sqrt{29})$

20. $\frac{32\sqrt{2}}{3}$

21. $P = 9$ cm^2,
$V = 18\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm^3 $= 9(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ cm^3

22. $\frac{5}{8}\pi a^3$

23. $\frac{5}{8}$

24. $\sqrt{34}$

25. $\frac{1}{3}S\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

26. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$

27. $\frac{47}{96}$

28. **a)** $\sqrt[6]{6}$ **b)** $\sqrt[6]{2}$

29. $2\cos\alpha - 1$

30. $P = \frac{\sqrt{11}}{16}a^2,\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{33}}{33}$

31. $\frac{S\sqrt{5-4\cos^2\alpha}}{8\cos\alpha}$

33. $V = 60,\ 45^\circ$

34. $6(\sqrt{39}+\sqrt{30})$ cm^2

35. $|FS| : |SG| = |HP| : |PG| = 1 : (k-1)$

37. $\frac{\sqrt{30}}{6}a$

38. $S\left(3+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha\right)$

39. $\frac{4a^2\cos^3\alpha}{(1+2\cos 2\alpha)^2}$

5.13. Rachunek prawdopodobieństwa

1. 42, nieparzystych: 24

2. **a)** 16 **b)** 25

3. 4 osoby: 24, 6 osób: 720

4. **a)** 362 880 **b)** 2880

5. **a)** 2160 **b)** 6400

6. **a)** 336 **b)** 840 **c)** 27 216

7. **a)** 243 **b)** 6561 **c)** 280

8. 252

9. 35

10. **a)** 3 **b)** 6 **c)** 42

11. **a)** pary zdarzeń wykluczających się:
A i C oraz B i C,
para zdarzeń przeciwnych: B i C
b) zdarzenie niemożliwe: $A \cap C$,
zdarzenie pewne: $B \cup C$

12. **a)** $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(A') = \frac{5}{6}$
b) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A') = \frac{3}{4}$

13. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{2}{3}$

14. **a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{5}{9}$

15. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{23}{24}$

16. bez zwracania: $\frac{5}{28}$, ze zwracaniem: $\frac{125}{512}$,
bardziej prawdopodobne przy losowaniu ze zwracaniem

17. **a)** $\frac{9}{40}$ **b)** $\frac{21}{40}$

18. **a)** $\frac{12}{25}$ **b)** $\frac{12}{25}$

19. **a)** $\frac{8!\cdot 7!}{15!} = \frac{1}{6435}$ **b)** $\frac{9!\cdot 7!}{15!} = \frac{1}{715}$

20. $\frac{4}{5}$

21. **a)** $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{1}{2}$

22. **a)** $\frac{60}{143}$ **b)** $\frac{160}{1001}$

23. $\frac{7}{9}$

24. **a)** $\frac{21}{22}$ **b)** $\frac{4}{11}$

25. **a)** $\frac{1}{7}$ **b)** $\frac{27}{35}$

26. **a)** $\frac{1}{1296}$ **b)** $\frac{25}{54}$ **c)** $\frac{25}{162}$ **d)** $\frac{25}{648}$

27. $\frac{4}{7}$

28. $\frac{1}{9}$

29. $\frac{2}{3}$

30. $\frac{19}{72}$

31. $\frac{1}{18}$

32. $\frac{1}{2}$

33. $\frac{2}{7}$

34. **a)** $\frac{27}{43}$ **b)** $\frac{32}{59}$

35. **a)** $\frac{1}{16}$ **b)** $\frac{1}{4}$

36. **a)** $\frac{15}{128}$ **b)** $\frac{121}{128}$

37. **a)** $\frac{80}{243}$ **b)** $\frac{496}{729}$

38. $\frac{3^4\cdot 4^4\cdot 67}{5^{10}} \approx 0{,}1423$

39. 5

40. $\frac{1}{15}$

41. 12

42. 28 800

43. $\frac{44}{89}$

44. $\frac{1}{2}$, $\frac{49}{57}$

45. **a)** 0,7 **b)** 0,98

46. **a)** $\frac{3}{28}$ **b)** $\frac{1}{7}$

47. **a)** $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{1}{10}$

48. **a)** jednakowe **b)** na I większe

49. $n = 50$

50. **a)** $\frac{9}{38}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{1}{6}$

51. $\frac{16}{27}$

52. $\frac{5}{8}$

53. $\frac{12}{49}$

54. w każdej urnie po 3 kule białe, $\frac{3}{7}$

55. $\frac{1}{2}$

56. 0,4

57. $\frac{4}{15}$

58. $\frac{1}{8}$

59. **a)** $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(B \setminus A) = \frac{1}{2}$
b) $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, $P(A \setminus B) = \frac{1}{3}$

60. **a)** $P(A' \cup B) = \frac{1}{2}$, $P(A|B) = \frac{2}{3}$
b) $P(A'|B) = \frac{2}{3}$

62. **a)** 5 **b)** 60

63. 48

64. **a)**, **b)** 8

5.14. Statystyka

1. **a)** $\overline{x} = 7$, $M = 8$, $D = 10$
b) $\overline{x} = 4$, $M = 4$, $D = 2$
c) $\overline{x} = 6$, $M = 3{,}5$, $D = 3$
d) $\overline{x} = 8$, $M = 8$, $D = 8$

2. 4800 zł

3. 172 cm

4. **a)** $\overline{x} = 3$, $M = 3$, $D = 2$
b) $\overline{x} = 3{,}56$, $M = 3$, $D = 3$
c) $\overline{x} \approx 3{,}33$, $M = 3$, $D = 3$

5. 3

6. 17 lub 19

7. **a)** 4 **b)** 6,1

8. 4

9. $\overline{x}_K = \overline{x}_N = 10\ \text{m}^3$
a) około $2{,}58\ \text{m}^3$
b) około $4{,}24\ \text{m}^3$
c) około $3{,}51\ \text{m}^3$

10. $\overline{x}_a = 4$, $\sigma_a \approx 1{,}08$, $\overline{x}_b = 4$, $\sigma_b \approx 1{,}17$, $\overline{x}_c = 4$, $\sigma_c \approx 1{,}8$

11. $\overline{x} = 4400$ zł, $\sigma_a \approx 933{,}8$ zł

12. **a)** $x = 5$, $M = 14$, $D = 14$
b) $x = 10$, $y = 1$

13. **a)** 4580 zł **b)** zwiększy się o 20 zł

14. 5000 zł

15. **a)** para I: 5,1, para II: 5,75
b) para I: 5,12, para II: 5,76

16. **a)** $\overline{x} = 2$, $\overline{x^2} = 4\frac{2}{3}$, $\sigma^2 = \frac{2}{3}$
b) $\overline{x} = 3$, $\overline{x^2} = 11$, $\sigma^2 = 2$
c) $\overline{x} = 30$, $\overline{x^2} = 1100$, $\sigma^2 = 200$
d) $\overline{x} = \frac{4}{7}$, $\overline{x^2} = 8\frac{4}{7}$, $\sigma^2 = 8\frac{12}{49}$

18. $\overline{x} = 4{,}08$, $\sigma \approx 1{,}18$

19. $\overline{x} \approx 4666{,}67$ zł, $\sigma \approx 986{,}01$ zł

20. **a)** średnia i odchylenie – wzrost o 5%: odpowiednio 6300 zł i 525 zł
b) średnia – wzrost o 200 zł: 6200 zł, odchylenie bez zmian: 500 zł

21. $x = 2$, $y = 5$

22. 8

23. $141\frac{2}{3}$ cm

24. około 11,1%

25. **a)** 5000 zł **b)** 5350 zł

26. $\frac{7}{25}$

27. **a)** $\frac{7}{20}$ ($\overline{x}_D = 3$, $\sigma_D \approx 1{,}38$), $\frac{1}{2}$ ($\overline{x}_C = 4$, $\sigma_C \approx 0{,}89$) **b)** 0,455

5.15. Rachunek różniczkowy

1. **a)** 5 **b)** 4 **c)** -4 **d)** -2 **e)** $\frac{5}{8}$ **f)** $\frac{6}{5}$ **g)** -2 **h)** $-\frac{1}{4}$ **i)** 1

2. **a)** $\frac{1}{6}$ **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** -2

3. **a)** -3 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 0 **d)** $-\infty$ **e)** ∞ **f)** $-\infty$

4. **a)** ∞ **b), c), d), e), f)** $-\infty$

5. **a)** ciągła **b)** nieciągła

6. **a)** $a = 5$, $b = 1$ **b)** $a = -1$, $b = 12$

7. **a)** $x = -2$ **b)** $x = 7$

8. **a)** $a = 1$, maksimum: $f(0) = 1$, minimum: $f(1) = 0$
b) $a = \frac{1}{2}$, brak ekstremów

11. **a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $-\frac{1}{4}$

12. **a)** $f'(1) = 2$ **b)** $f'(4) = 16$ **c)** $f'(2) = -1$ **d)** $f'(1) = 2$

13. **a)** Nie istnieje. **b)** $f'(0) = 0$

14. **a)** $f'(x) = 6x - 4$, $f'(0) = -4$, $f'(1) = 2$
b) $f'(x) = -3x^2 + 8x - 3$, $f'(0) = -3$, $f'(1) = 2$
c) $f'(x) = 2x^3 - x^2 - 12x + 1$, $f'(0) = 1$, $f'(1) = -10$
d) $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + x$, $f'(0) = 0$, $f'(1) = 12$

15. **a)** $f'(x) = 6x + 5$, $f'(-1) = -1$, $f'(-2) = -7$
b) $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4$, $f'(-1) = 3$, $f'(-2) = -8$
c) $f'(x) = -20x^4 + 3x^2 - 8x$, $f'(-1) = -9$, $f'(-2) = -292$
d) $f'(x) = 4x^3 - 4x$, $f'(-1) = 0$, $f'(-2) = -24$

16. **a)** $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}\setminus\{-4\}$, $f'(x) = -\frac{2}{(x+4)^2}$
b) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}\setminus\{3\}$, $f'(x) = -\frac{12}{(x-3)^2}$
c) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $f'(x) = 12x^3 + \frac{5}{x^2}$
d) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}\setminus\{0, 1\}$, $f'(x) = -\frac{6}{x^3} - \frac{1}{(x-1)^2}$
e) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}\setminus\{-2, 2\}$, $f'(x) = -\frac{x^2+12x+4}{(x^2-4)^2}$
f) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{x^4+9x^2+6x}{(x^2+3)^2}$
g) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}\setminus\{-1, 0\}$, $f'(x) = \frac{-x^6+3x^4-2x^3-1}{(x^4+x)^2}$
h) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}\setminus\{0, \frac{1}{4}\}$, $f'(x) = -\frac{6}{(4x-1)^2} + \frac{2}{x^3}$
i) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}\setminus\{-2, -1, 0\}$, $f'(x) = -\frac{8x^3+2}{(x^4+x)^2} - \frac{3x^2}{(x^3+8)^2}$

17. **a)** $D_f = \langle 0;\infty)$, $D_{f'} = (0;\infty)$,
$f'(x) = \frac{\sqrt{2x}(5x^2-1)}{2x}$
b) $D_f = (-\infty;1\rangle \cup (2;\infty)$,
$D_{f'} = (-\infty;1) \cup (2;\infty)$,
$f'(x) = -\frac{1}{2(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$
c) $D_f = \mathbf{R}$, $D_{f'} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
$f'(x) = \frac{2x(x^2+1)}{\sqrt{x^4+2x^2}}$
d) $D_f = D_{f'} = \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{3x}{(x^2+4)^2}\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2+1}}$
e) $D_f = \langle 0;\infty)$, $D_{f'} = (0;\infty)$,
$f'(x) = \frac{16x\sqrt{x}+1}{4\sqrt{4x^3+x\sqrt{x}}}$
f) $D_f = \langle 0;4) \cup (4;\infty)$,
$D_{f'} = (0;4) \cup (4;\infty)$,
$f'(x) = \frac{x-4\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}(2-\sqrt{x})^2}$

18. **a)** 60° **b)** 30° **c)** 135° **d)** 0°

19. **a)** 9, 84° **b)** $\frac{10}{9}$, 48°
c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 145° **d)** $\frac{3375}{4096}$, 39°

20. **a)** $y = -4x - 5$
b) $y = 6x - 16$
c) $y = -2x + 4$
d) $y = 7x + 19$
e) $y = 1$
f) $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
g) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$
h) $y = x + 2$

21. **a)** $P_1(0,0)$, $y = 4x$;
$P_2(-4,0)$, $y = -4x - 16$
b) $P_1(0,0)$, $y = 8x$;
$P_2(2,0)$, $y = -24x + 48$
c) $P_1(-1,0)$, $y = -2x - 2$;
$P_2(1,0)$, $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

22. **a)** $y = -2x - \frac{5}{2}$
b) $y = \frac{1}{4}x - \frac{35}{32}$
c) $y = -2x - \frac{5}{2}$, $y = 2x - \frac{5}{2}$

23. $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{2}$

24. $P_f(\frac{3}{2}, -3)$, $P_g(3,0)$

25. **a)** $m = 3$ **b)** $m = \frac{1}{16}$ **c)** $m = -2$

26. **a)** malejąca w $\langle -2;4\rangle$,
rosnąca w $(-\infty;-2\rangle$ i w $\langle 4;\infty)$
b) malejąca w $(-\infty;-1\rangle$ i w $\langle 1;\infty)$,
rosnąca w $\langle -1;1\rangle$
c) malejąca w $\langle -3;0)$ i w $(0;3\rangle$,
rosnąca w $(-\infty;-3\rangle$ i w $\langle 3;\infty)$
d) malejąca w $(-\infty;-\frac{3}{2}\rangle$ i w $\langle 0;\frac{3}{2}\rangle$,
rosnąca w $\langle -\frac{3}{2};0\rangle$ i w $\langle \frac{3}{2};\infty)$
e) malejąca w $(-\infty;0\rangle$ i w $(1;2\rangle$,
rosnąca w $\langle 0;1)$ i w $\langle 2;\infty)$
f) rosnąca w $(-\infty;-3)$ i w $(-3;\infty)$
g) malejąca w $(-\infty;-3\rangle$ i w $\langle -\frac{1}{2};1\rangle$,
rosnąca w $\langle -3;-2)$, $(-2;-\frac{1}{2}\rangle$ i w $\langle 1;\infty)$
h) malejąca w $\langle \frac{2}{3};2\rangle$,
rosnąca w $\langle 0;\frac{2}{3}\rangle$ i w $\langle 2;\infty)$

27. **a)** minimum: $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}+1$,
maksimum: $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}+1$
b) minima: $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = -9$,
maksimum: $f(0) = 0$
c) minimum: $f(-1) = -1$,
maksimum: $f(1) = 1$
d) minimum: $f(2) = 4$,
maksimum: $f(0) = 0$
e) maksimum: $f(0) = 0$
f) minimum: $f(4) = \frac{3}{4}$

28. **a)** $f(-1) = -12$, $f(1) = 0$
b) $f(2) = -8$, $f(0) = f(3) = 0$
c) $f(-3) = -2{,}9$, $f(0) = -2$
d) $f(\sqrt{3}-2) = -\frac{\sqrt{3}+2}{2}$,
$f(\sqrt{3}+2) = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

29. **a)** $f(\frac{3}{2}) = \frac{81}{4}$ **b)** $f(1) = \sqrt{2}$
c) $f(-\frac{2}{3}) = \frac{1}{54}$ **d)** $f(-1) = f(1) = 1$

30. **a)** $(-\infty;1\rangle$ **b)** $\langle 0;\infty)$ **c)** $\langle 0;\frac{\sqrt{5}}{2}+1\rangle$

31. **a)** 1 pierwiastek
dla $a \in (-\infty;-4) \cup (4;\infty)$,
2 pierwiastki dla $a \in \{-4,4\}$,
3 pierwiastki dla $a \in (-4;4)$
b) 0 pierwiastków dla $a \in (-\infty;-1)$,
2 pierwiastki dla $a \in \{-1\} \cup (3;\infty)$,
3 pierwiastki dla $a = 3$,
4 pierwiastki dla $a \in (-1;3)$

32. **a)** 0 ekstremów dla $a = 0$,
1 ekstremum dla $a \neq 0$
b) 0 ekstremów dla $a = 0$,
2 ekstrema dla $a \neq 0$
c) 1 ekstremum dla $a = 0$,
2 ekstrema dla $a \neq 0$

33. $x = 2$, najmniejsza wartość: -14

34. $x = -1$, $y = -2$, najmniejsza wartość: 5

35. kwadrat o boku $3\sqrt{2}$

36. 20

37. $4 + 2\sqrt{2}$, $4 + 2\sqrt{2}$, $4 + 4\sqrt{2}$

38. **a)** $16\sqrt{3}$
b) 27

39. 40 cm, 80 cm, 60 cm

40. sześcian o krawędzi 2 cm

41. 2,4, 2,4, 3,2

42. $V(x) = \frac{1}{3}\pi(144x - x^3)$,
$D = (0; 12)$, $x = 4\sqrt{3}$

43. $y = -9x + 12$

44. $y = \frac{1}{3}x - 2$, $y = \frac{1}{3}x + 2$, $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

45. $\alpha = \frac{\pi}{6}$ lub $\alpha = \frac{5}{6}\pi$

46. $a = \frac{1}{2}$

47. $A(1, 2)$, $B(5, 10)$, $y = -3x + 15$

48. $a = -3$, $b = 2$

49. $y = -\frac{4}{3}x + 8$, $P = 24$

50. $C(-1, \frac{3}{2})$, $P = \frac{9}{2}$

51. **a)** $P(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$
b) $P(0, 3)$

52. $x = \frac{1}{2}$, trójkąt równoboczny $P = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

53. $12\sqrt{3}\pi$

54. $\frac{8\sqrt{6}}{3}$, $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

55. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ m

56. 32

57. $x = 3$ m

58. krawędź podstawy: 4,
krawędź boczna: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

59. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

60. **a)** $10(3 - \sqrt{3})$
b) $36 - 5\sqrt{3}$

Indeks

argument funkcji 201
asymptota
  pionowa hiperboli 227
  pozioma hiperboli 227

bryła platońska 127
bryły
  Archimedesa 130
  podobne 151

cechy podobieństwa trójkątów 266
ciąg
  arytmetyczny 246
  geometryczny 246
  malejący 246
  monotoniczny 246
  niemalejący 246
  nierosnący 246
  nieskończony 246
  rosnący 246
  rozbieżny 251
  skończony 246
  stały 246
  zbieżny 251
czasza kulista (czasza kuli) 149
częstość zdarzeń 39
czworościan foremny 102, 127, 128

długość
  odcinka 257
  wektora 257
dominanta 291
dowód nie wprost 181
dwudziestościan foremny 127, 128
dwunastościan foremny 127, 128
dwusieczna kąta wewnętrznego
  trójkąta 264
działania
  na pierwiastkach 194
  na potęgach 194
dziedzina funkcji 201

ekstremum lokalne 301

funkcja 201
  ciągła w przedziale domkniętym 297
  ciągła w przedziale otwartym 297
  ciągła w punkcie 297
  homograficzna 227
  kwadratowa 212
  liniowa 206
  logarytmiczna 241
  malejąca 201
  monotoniczna 201
  niemalejąca 201
  nierosnąca 201
  rosnąca 201
  różniczkowalna w punkcie 299
  stała 201
  wykładnicza 241

funkcje trygonometryczne
  dowolnego kąta 235
  kąta ostrego 233
  podwojonego kąta 238
  sumy i różnicy kątów 238

gra sprawiedliwa 72, 290
graniastosłup 91
  pochyły 91, 100
  prawidłowy 92
  prosty 91, 276
granica ciągu 251, 252

hiperbola 227

igła Buffona 39
iloczyn
  wektora przez liczbę 257
  zdarzeń 37
iloraz ciągu geometrycznego 246
implikacja 178

kąt
  dwuścienny 115
  między prostą a płaszczyzną 112
  nachylenia prostej do osi OX 208
  płaski przy wierzchołku ostrosłupa
    prawidłowego 102
  rozwarcia stożka 142
  środkowy w okręgu 268
  wpisany w okręgu 268
koło wielkie kuli 146

kombinacje 25, 26, 31, 282
krawędź
  boczna graniastosłupa 91
  boczna ostrosłupa 101
  podstawy graniastosłupa 91
  podstawy ostrosłupa 101
kula 146, 276

liczby
  całkowite 194
  naturalne 194
  niewymierne 194
  palindromiczne 24
  wymierne 194
linia
  geodezyjna 145
  śrubowa 145
logarytm 241

maksimum lokalne 301
mediana 291
miara kąta dwuściennego 115
miejsca zerowe funkcji kwadratowej 212
miejsce zerowe funkcji 201
minimum lokalne 301
monotoniczność funkcji liniowej 206

następnik implikacji 178

objętość
  czworościanu foremnego 107
  graniastosłupa 97, 276
  kuli 147, 276
  ostrosłupa 105, 276
  prostopadłościanu 97, 276
  stożka 142, 277
  sześcianu 97
  walca 139, 277
odchylenie standardowe 291
odcinek kulisty (odcinek kuli) 149
odległość punktu od prostej 257
okrąg 260
  opisany na czworokącie 270
  wpisany w czworokąt 270
okres połowicznego rozpadu 245
okręgi
  przecinające się 267
  rozłączne wewnętrznie 267
  rozłączne zewnętrznie 267
okręgi styczne
  wewnętrznie 267
  zewnętrznie 267
ostrosłup 101, 276
  prawidłowy 101
  prosty 101
oś
  stożka 141
  walca 138
ośmiościan foremny 127, 128

parabola 212
paradoks Bertranda 75
permutacje 14, 15, 31, 282
  z powtórzeniami 18
pierwiastek
  k-krotny wielomianu 221
  wielomianu 221
płaszczyzna styczna do kuli 146
płaszczyzny
  przecinające się 86
  równoległe 86
pochodna funkcji w punkcie 299
pochodne wybranych funkcji 299
podstawa
  graniastosłupa 91
  ostrosłupa 101
  stożka 141
  walca 138
pole powierzchni
  bocznej stożka 141, 277
  bocznej walca 138, 277
  całkowitej graniastosłupa 91
  całkowitej ostrosłupa 101
  całkowitej stożka 141, 277
  całkowitej walca 138, 277
  kuli 147, 276
poprzednik implikacji 178
postać
  iloczynowa funkcji kwadratowej 212
  kanoniczna funkcji
    homograficznej 227
  kanoniczna funkcji kwadratowej 212
  ogólna funkcji kwadratowej 212
potęga o wykładniku
  całkowitym 194
  wymiernym 194
powierzchnia boczna graniastosłupa 91
prawa de Morgana 48

prawdopodobieństwo 44
całkowite 55, 282
geometryczne 75
klasyczne 40
różnicy zdarzeń 46
sumy zdarzeń 46
warunkowe 50, 282
zdarzenia 40, 44
zdarzenia przeciwnego 45
proporcjonalność odwrotna 227
prosta
pochyła do płaszczyzny 109
prostopadła do płaszczyzny 88
przecinająca płaszczyznę 88
równoległa do płaszczyzny 88
proste
prostopadłe 87, 206
przecinające się 87
równoległe 87, 206
skośne 87
prostopadłościan 92, 276
próba Bernoulliego 67
przekątna
graniastosłupa 94
prostopadłościanu 94, 95
przekrój osiowy
stożka 142
walca 138
przekształcenia wykresu funkcji 202
przestrzeń zdarzeń elementarnych 36
punkt kratowy w układzie
współrzędnych 231

reguła
dodawania 20
mnożenia 10, 11
romboedr 100
rozkład
prawdopodobieństwa 44, 49
zmiennej losowej 71
równanie
kierunkowe prostej 206
ogólne prostej 206
okręgu 260
różnica
ciągu arytmetycznego 246
wektorów 257
zdarzeń 37
rzut prostokątny
figury na płaszczyznę 89
punktu na płaszczyznę 89

schemat
Bernoulliego 67, 287
klasyczny prawdopodobieństwa 40
sfera 146
silnia 15
skala podobieństwa brył 151
spodek wysokości
ostrosłupa 101
stożka 141
stożek 141, 277
styczna do wykresu funkcji 299
suma
n początkowych wyrazów ciągu
arytmetycznego 246
n początkowych wyrazów ciągu
geometrycznego 246
szeregu geometrycznego 253
wektorów 257
zdarzeń 37
symbol Newtona 26, 27
symetralna boku trójkąta 264
sześcian 92, 127, 128

ściana boczna
graniastosłupa 91
ostrosłupa 101
średnia
arytmetyczna 291
geometryczna 182
ważona 291
środek
ciężkości trójkąta 259, 264
odcinka 257
okręgu opisanego na trójkącie 264
okręgu wpisanego w trójkąt 264
środkowa trójkąta 264

talia kart 34
tożsamości trygonometryczne 233, 235
trójmian kwadratowy 212
twierdzenie
Bézouta 221
cosinusów 272

twierdzenie
o dwusiecznej kąta w trójkącie 192, 273
o pierwiastkach całkowitych
wielomianu 221
o pierwiastkach wymiernych
wielomianu 221
o prostej prostopadłej
do płaszczyzny 88
o przyjmowaniu wartości
pośrednich 297
o reszcie 221
o rozkładzie wielomianu 221
o trzech ciągach 252
o trzech prostych prostopadłych 109
o zmianie podstawy logarytmu 243
sinusów 272
Talesa 266
Weierstrassa 297
tworząca
stożka 141
walca 138

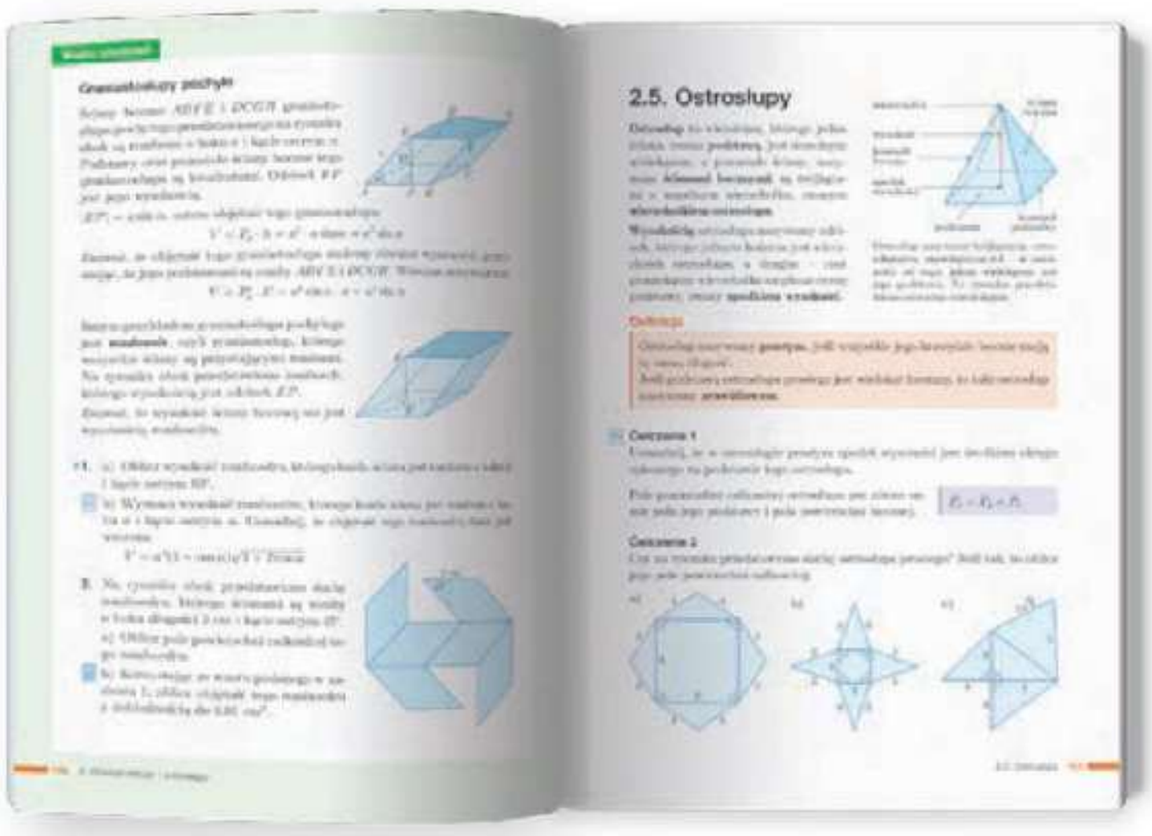
walec 138, 277
wariacje
bez powtórzeń 19, 20, 31, 282
z powtórzeniami 22, 23, 31, 282
wariancja 291
wartość
bezwzględna 196, 197
oczekiwana zmiennej losowej 72, 290
warunek
konieczny istnienia ekstremum 301
wystarczający istnienia ekstremum 301
wektor przeciwny 257
wielkości odwrotnie proporcjonalne 227
wielokąt foremny 269
wielomian 221
zerowy 221
wielościan foremny 127
wierzchołek
graniastosłupa 91
ostrosłupa 101
stożka 141
własność Darboux 297
własności
logarytmów 241
pochodnej funkcji 299
prawdopodobieństwa 44–46, 282
współczynnik
kierunkowy prostej 206
proporcjonalności odwrotnej 227
wielomianu 221
współrzędne
sferyczne 170
środka odcinka 257
wektora 257
wierzchołka paraboli 212
wykres funkcji 201
cosinus 236
liniowej 206
sinus 236
wynik sprzyjający zdarzeniu 36
wyraz wolny wielomianu 221
wyróżnik trójmianu kwadratowego 212
wysokość
czworościanu foremnego 107
graniastosłupa 91
ostrosłupa 101
stożka 141
walca 138
wzory
na pole trójkąta 264
redukcyjne 235
skróconego mnożenia 194, 199
Viète'a 216
wzór
Bayesa 59, 286
Bernoulliego 67, 287
dwumianowy Newtona 27
na prawdopodobieństwo
całkowite 55, 282
ogólny ciągu arytmetycznego 246
ogólny ciągu geometrycznego 246

zasada Cavalieriego 154
zbiór wartości funkcji 201
zdarzenia
niezależne 54
rozłączne (wykluczające się) 37
zależne 54
zdarzenie
elementarne 36
losowe 36
niemożliwe 36
pewne 36
przeciwne 37
zmienna losowa 71

Twoje mocne strony

MATeMAtyka

Podręcznik *MATeMAtyka 4* do zakresu podstawowego i rozszerzonego w spójny i przystępny sposób wprowadza ucznia w zagadnienia matematyczne.



Czytelny układ

Przejrzyste przedstawienie nowych treści, przykłady, ćwiczenia i zadania.

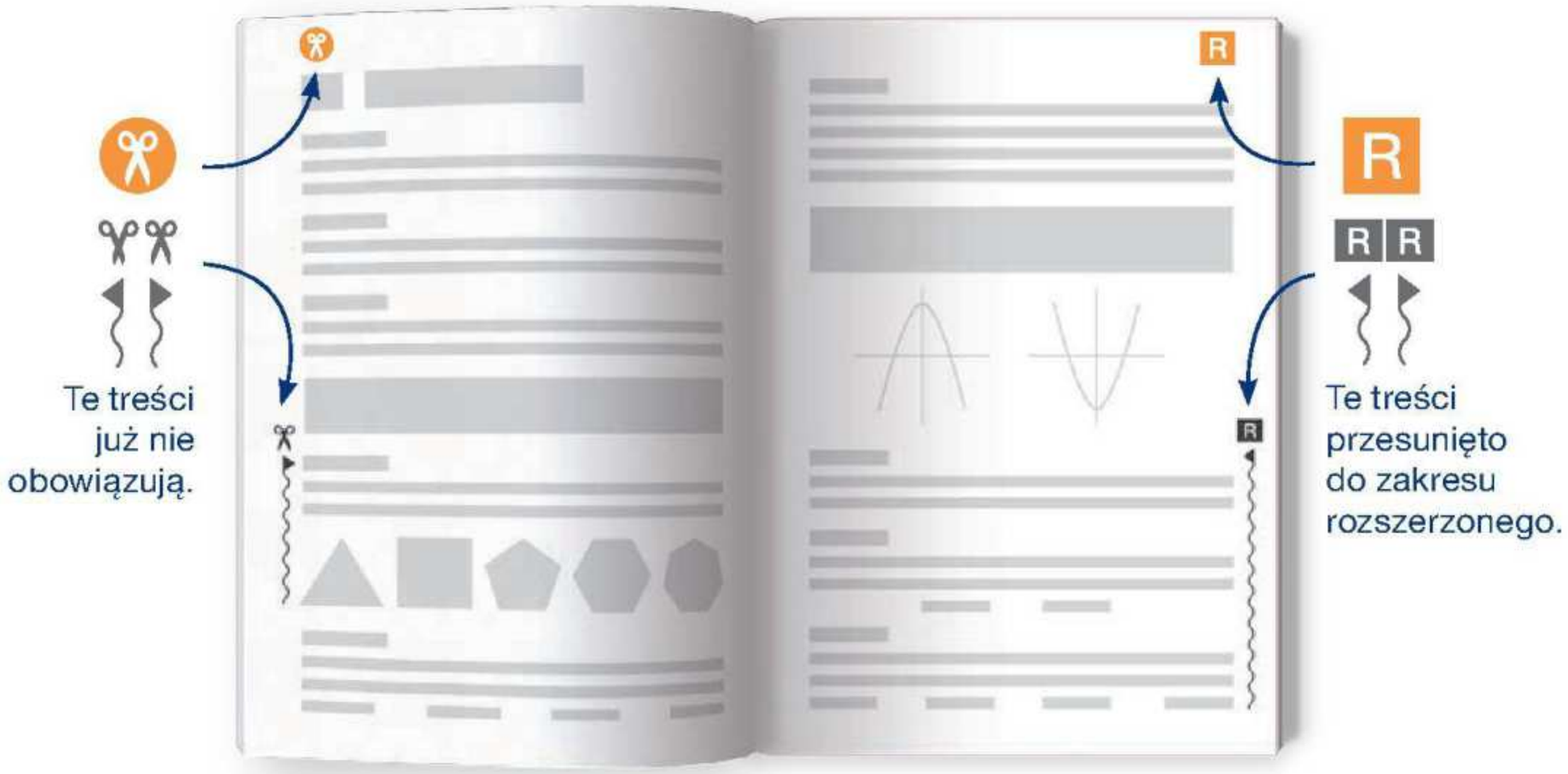
Przydatne sekcje

Warto powtórzyć pomagają przygotować się do wybranych lekcji.
Warto wiedzieć rozszerzają treści z lekcji.

Wiesz, umiesz, zdasz

Ostatni rozdział podręcznika zawiera przekrojowe powtórzenie materiału z całego cyklu nauczania.

W podręczniku znajdziesz oznaczenia związane ze zmianami obowiązującymi od września 2024 r.



Pomarańczowe ikony na górze strony informują, że na tej stronie są zmiany.
Ich dokładne umiejscowienie wskazują szare ikony z falkami.

Nowa Era Sp. z o.o.
www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-5109-7
9 788326 751097