

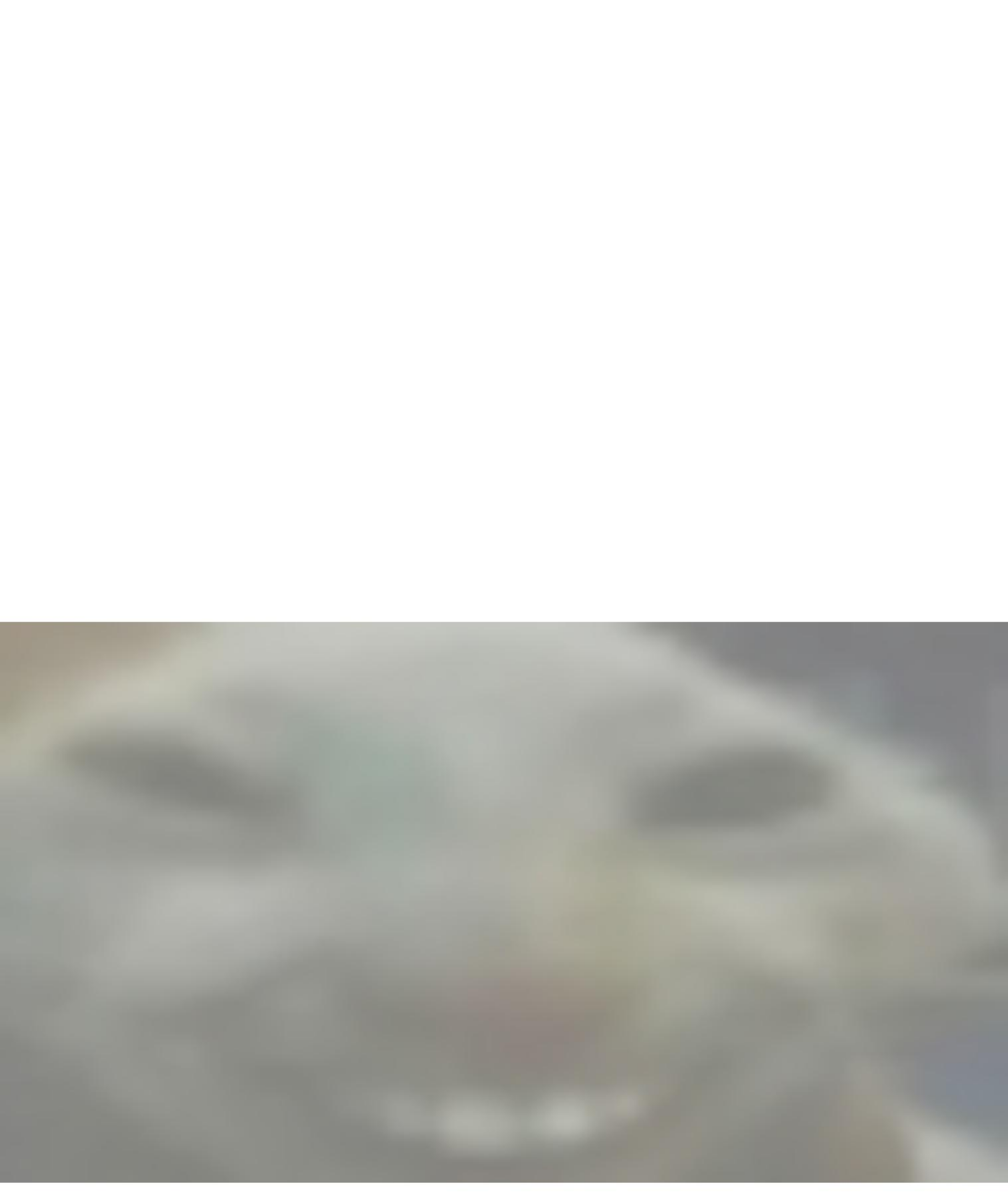
Matematyka

Podręcznik
część 2

5

Oznaczono zmiany
W PODSTAWIE
PROGRAMOWEJ
2024





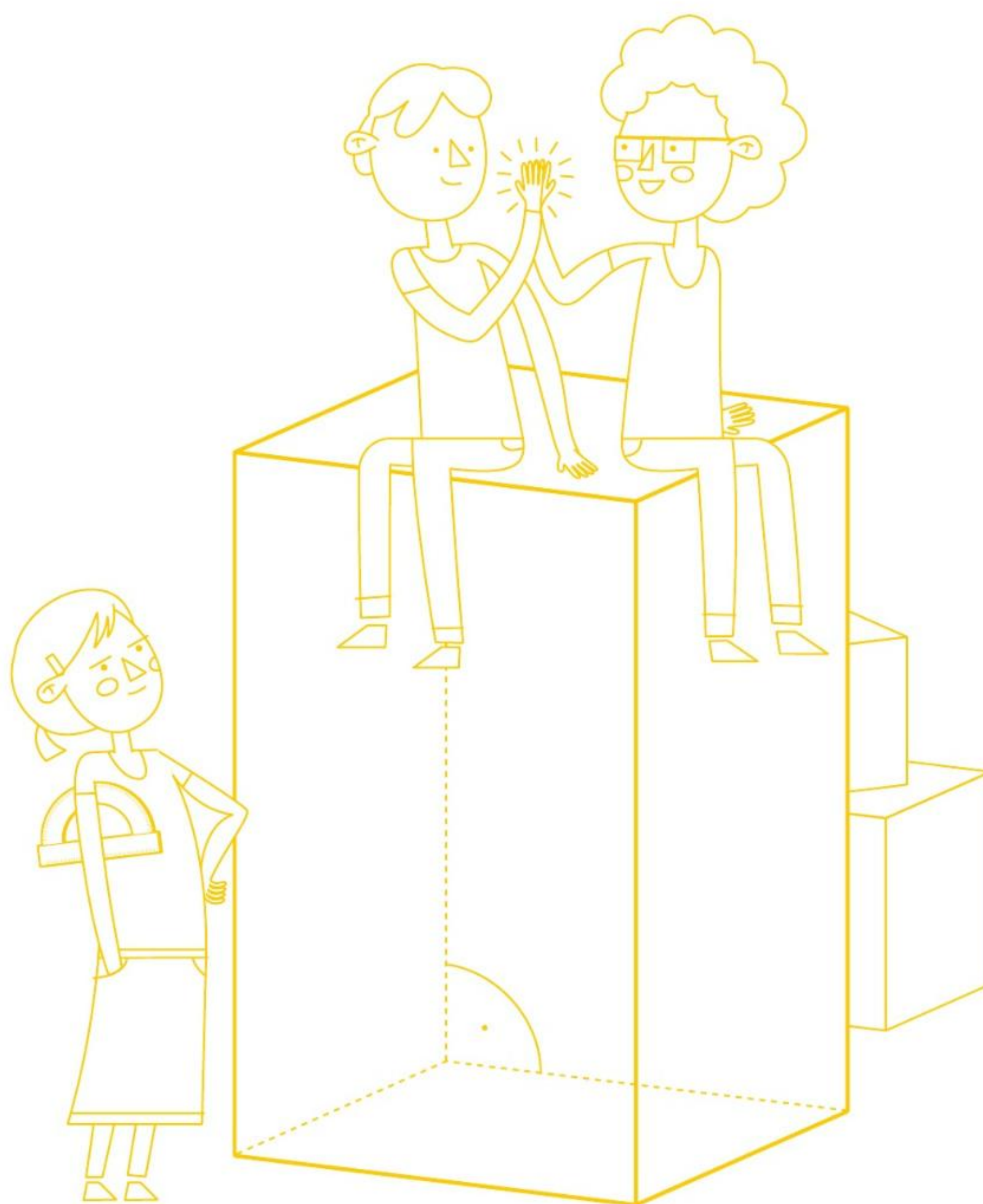
Jolanta Borzyszkowska
Maria Stolarska-Walkowiak

5

Matematyka

Podręcznik dla klasy piątej szkoły podstawowej

— 440 —



Redaktor serii
Anna Parzęcka

Redaktor prowadzący
Ewa Kowalik

Redakcja merytoryczna
Ewa Kowalik, Justyna Kubicka

Redakcja językowa i korekta
Anna Kołat

Redakcja techniczna
Paweł Kowalski

Skład i łamanie
Adam Ziółkowski

Redakcja artystyczna
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska, Marcin Kot

Projekt i koncepcja artystyczna
Futu Creative / Kay Humelt i Rafał Kwiczor

Koordinacja prac graficznych
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska

Projekt okładki
Futu Creative / Kay Humelt i Rafał Kwiczor

Ilustracja na okładce i ilustracje na stronach działowych
Ładne Halo / Maciej Błażniak

Opracowanie kartograficzne
Carto Team

Fotoedycja
Grzegorz Wrzecionowski

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Przestrzegaj praw, jakie im przysługują. Udostępniając książkę lub jej fragmenty, rób to wyłącznie w zakresie dozwolonego użytku, który określają przepisy prawa. Zawartość książki możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

© Grupa MAC S.A., Kielce 2018

Wydawca oświadcza, że dołożył wszelkich starań, aby dotrzeć do wszystkich właścicieli i dysponentów praw autorskich. Osoby, których nie udało nam się ustalić, prosimy o kontakt z wydawnictwem.

ISBN 978-83-8108-376-8

Grupa MAC S.A.
25-561 Kielce, ul. Witosa 76
tel. 41 366 55 55, faks: 41 366 33 02
e-mail: kontakt@mac.pl; www.mac.pl



× Treści usunięte z podstawy programowej w 2024 r.

Spis treści

4. Figury płaskie

4.1	Podstawowe figury geometryczne	6
4.2	Proste oraz odcinki prostopadłe i równoległe	10
4.3	Odległość punktu od prostej	15
4.4	Rodzaje kątów	18
4.5	Kąty przyległe i kąty wierzchołkowe	24
4.6	Wielokąty. Obwód wielokąta	28
4.7	Trójkąt i jego własności	32
4.8	Rodzaje trójkątów	36
4.9	Konstruowanie trójkątów	40
4.10	Prostokąt i kwadrat	45
4.11	Równoległobok i romb	49
4.12	Trapez	53
4.13	Zależności między czworokątami	57
4.14	Wielokąty w skali	59
4.15	Skala na planach i mapach	64
	Podsumowanie działu 4	70

5. Pole wielokąta

5.1	Pole figury	74
5.2	Jednostki pola	77
5.3	Pole prostokąta i kwadratu	80
5.4	Pole równoległoboku	85
5.5	Pole rombu	90
5.6	Wysokości trójkąta	95
5.7	Pole trójkąta	101
5.8	Pole trapezu	103
	Podsumowanie działu 5	107

6. Bryły

6.1	Prostopadłościan	112
6.2	Graniastosłup prosty	119
6.3	Siatki graniastosłupa	124
6.4	Pole powierzchni prostopadłościanu	132
	Link do wiedzy	
	<i>Matematyka w sztuce</i>	136
	Podsumowanie działu 6	138

	Odpowiedzi do zadań	141
	Indeks	143

Jak korzystać z podręcznika

Numer i temat

Podejmij temat

Wprowadzenie do tematu lekcji

Ćwiczenia

Ćwiczenia do wykonania na lekcji

Treści powtórzeniowe

Przykłady

Przykładowe rozwiązania zadań

4.12 Trapez

Podnij temat

Przypomnij sobie: Czy potrafisz określić odcinek?

1. Narysuj dowolny trapez, którego długości boków są różne, ale dwa boki są równoległe. Podkreśl swój rysunek z rysunkami wykonanymi przez inne osoby w klasie.

Jestli rysujemy jakiś przedmiot, figurę geometryczną czy obszar (np. część miasta lub plan mieszkania) w zmiennym lub powiększonym – o trzy razy dokładniej – to mówimy, że jest on narysowany **w skali**.

Jestli każdy wymiar figury jest zmniejszony:

- 2 razy to mówimy, że figura jest narysowana **w skali 1:2**.
- 3 razy to mówimy, że figura jest narysowana **w skali 1:3**.
- 4 razy to mówimy, że figura jest narysowana **w skali 1:4** itd.

Jestli każdy wymiar figury jest powiększony:

- 2 razy to mówimy, że figura jest narysowana **w skali 2:1**.
- 3 razy to mówimy, że figura jest narysowana **w skali 3:1**.
- 4 razy to mówimy, że figura jest narysowana **w skali 4:1** itd.

Przykład 4

Oblicz, ile centymetrów kwadratowych wynosi pole prostokąta o wymiarach 2 dm i 4 dm.

Wynikiem ma być liczba centymetrów kwadratowych, a wymiary prostokąta są podane w decymetrach, więc najpierw zamieńmy jednostki:

2 dm = 20 cm i 4 dm = 40 cm.

Teraz możemy obliczyć pole prostokąta:

$P = 20 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm} = 800 \text{ cm}^2$.

Ale dlaczego zapisaliśmy to dla nas samych? Chyba, że to jest 100 cm? Dlaczego nie możemy obliczyć, jak w prostokącie, a w innych figurach geometrycznych?

Dialogi dzieci

Pole obliczamy, zapisując to dla nas samych. Chyba, że to jest 100 cm? Dlaczego nie możemy obliczyć, jak w prostokącie, a w innych figurach geometrycznych?

Dialogi dzieci

Rozmowy uczniów wyjaśniające problemy matematyczne prostym, potocznym językiem

Najważniejsze treści matematyczne

Ciekawostki

W szkole Touraine-Selvy (zob. film w sieci) uczniowie zbudowali most z papieru.

Zadania

1. Działka pani Kowalskiej jest prostokątem o długości 28 m i szerokości 12 m. Oblicz pole tej działki.

2. Pole kłosa na brzoście do pólki wynosi 16,50 m. Oblicz pole tego pola.

3. Jedną z ław prostokąta ma 3 dm. Jaka długość ma drugi bok, jeżeli wiadomo, że pole tego prostokąta wynosi 60 dm²?
A. 35 dm B. 20 dm C. 8 dm D. 4 dm

4. Jaka długość ma bok kwadratu o polu równym 36 m²?

5. Jaki wymiar może mieć prostokąt o polu równym 24 cm²?
Pokaż kilka możliwości. Narysuj jeden z tych prostokątów.

Więcej na temat:

Konstrukcja geometryczna to sposób rysowania figur geometrycznych z wykorzystaniem określonych metod, jest to rysunek figur geometrycznych, z których należy skonstruować figurę – jak w przykładzie 1).

Konstrukcja klasyczna to taka konstrukcja geometryczna, która wykonujemy wyłącznie za pomocą linijki i cyrkla. W tym przypadku linijka służy tylko do rysowania linii prostych, a nie do miarowania, nie korzystamy więc z jej podziałki centymetrowej.

W przykładzie 1, polecenie mogło zatem brzmieć: „Skonstruujmy trójkąt ABC którego bokami mogą być trzy dane odcinki”.

Zadania

Zadania utrwalające materiał

Ciekawe!

Interesujące wiadomości uzupełniające temat lekcji

Wskazówki

Podpowiedzi w formie rozmowy dzieci za pomocą komunikatora internetowego

Zadania wielokrotnego wyboru

Gwiazdka

Oznaczenie zadania trudniejszego

Więcej na temat

Treści dodatkowe

Link do wiedzy

Treści, które mogą rozwinąć twoje zainteresowania

Podsumowanie działu

Powtórzenie najważniejszych treści działu

8 MATEMATYKA W SZTUCE

Matematyka pomaga nam w życiu. A sztuka wielu twórców wykorzystuje w swoich pracach znajomości matematyki – znanymi przykładami może być geometria w malownictwie czy rzeźbie.

Podsumowanie działu 4

Ważne pojęcia

prostokąt, trapez, trójkąt, kwadrat, romb, deltoid, pięciokąt, sześciokąt, heptagon, oktagon, dekad, hendekagon, dodekagon, trójkąt równoboczny, trójkąt równoramienny, trójkąt prostokątny, trójkąt rozwartokątny, trójkąt ostrokątny, trapez prostokątny, trapez równoramienny, trapez nierównoramienny.

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta i trójkąta

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Obwód prostokąta i kwadratu

$O_{\text{prostokąt}} = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ lub $O_{\text{prostokąt}} = 2 \cdot (a + b)$

$O_{\text{kwadrat}} = 4 \cdot a$

Zakreśl miary czworokątami

Czy już umiesz?

1. Znajdź odcinki proste na rysunku obrotu. W tym celu wybierz odpowiednie odcinki i zmierz ich długość.

2. Dany jest miar jednego z dwóch kątów przyległych. Oblicz miarę drugiego kąta.
a) 120° b) 37° c) 84° d) 90°

3. Jaką są miary kątów α , β , γ , δ ?

4. Obwód trójkąta równobocznego wynosi 21 cm. Wyznacz miary kątów.

5. Jeden z kątów trójkąta ma miarę 132° . Jaka jest suma miar jego pozostałych kątów? Jaki to rodzaj trójkąta?

6. Narysuj trójkąt prostokątny równoramienny. Oblicz miary kątów wewnętrznych tego trójkąta. Zapisz swoje spostrzeżenia.

7. Narysuj romb o bokach o długościach 10 cm. Oblicz jego obwód. Jaki jest jego pole? Jaki jest jego promień? Jak się nazywa taki romb? Jak się nazywa taki romb? Jak się nazywa taki romb?

Czy już umiesz?

Zadania na koniec działu

Znaczenie ikon

 praca zespołowa

 nawiązanie do innego przedmiotu

 nawiązanie do ilustracji

 zastosowanie nowoczesnych technologii

 uwaga

 łamigłówka, żart

Pamiętaj, że podręcznik ma służyć uczniom z kolejnych klas. Nic w nim nie zapisuj.

4. Figury płaskkie



Rysunek przedstawia fragment alejki w parku wyłożonej kostką brukową. Powyżej widoczne są kształty przykładowych kostek. Przyjrzyj się uważnie ilustracji i odpowiedz na pytania.

1. Które kostki zostały użyte do wyłożenia alejki? Jak się nazywają figury mające taki kształt?
2. Które kostki nie zostały wykorzystane? Podaj nazwy figur, które mają taki kształt.
3. Narysuj kształty kilku innych kostek brukowych niż te pokazane na ilustracji. Spróbuj nazwać narysowane przez siebie figury.
4. Zaprojektuj fragment chodnika, na którym ułożone będą kostki w kształcie różnych wielokątów.

4.1 Podstawowe figury geometryczne

Podejmij temat

Wracamy do geometrii, czyli znowu będziemy rysować.

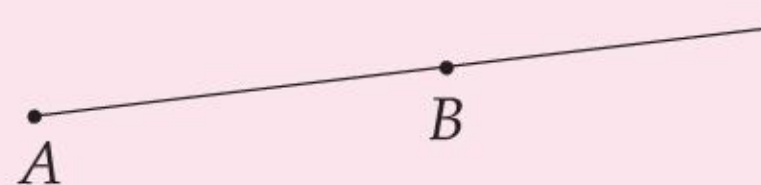
Trafiłaś w punkt!
Według mnie geometria jest ciekawa i łatwa.

Ja też ją lubię, ale powiedziałabym raczej, że jest prosta ;)

Przypomnijmy sobie figury geometryczne poznane w klasie czwartej.



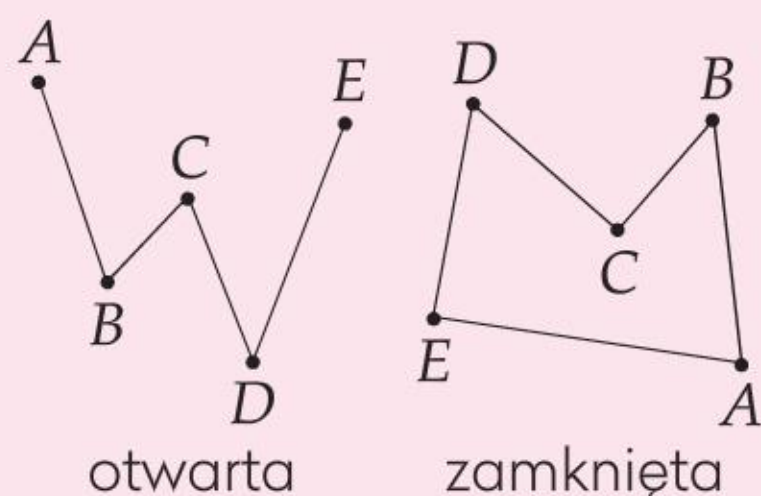
punkt B



półprosta AB



odcinek CD lub DC



łamana $ABCDE$

Punkty oznaczamy wielkimi literami alfabetu.

Proste oznaczamy małymi literami alfabetu.

Nazwę **półprostej** zapisujemy za pomocą dwóch wielkich liter, z których pierwsza oznacza początek półprostej, a druga – punkt należący do tej półprostej.

Nazwę **odcinka** zapisujemy za pomocą dwóch wielkich liter, z których każda oznacza jeden z końców odcinka.

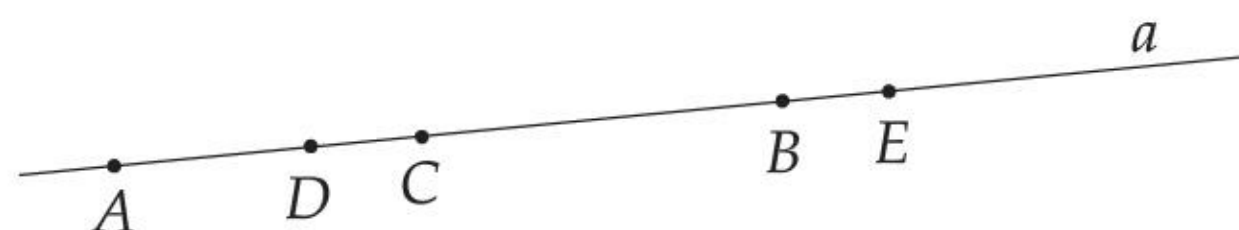
Nazwę **łamanej** zapisujemy za pomocą wielkich liter, z których każda oznacza jeden z jej kolejnych wierzchołków.

1. Odpowiedz na pytania i wykonaj polecenie.
 - a) Ile prostych można poprowadzić przez jeden punkt?
 - b) Ile prostych można poprowadzić przez dwa różne punkty?
 - c) Narysuj trzy różne punkty, które będą położone tak, aby można było poprowadzić przez nie dokładnie jedną prostą.

2. Zaznacz sześć różnych punktów: A , B , C , D , E , F , a następnie narysuj:

- a) prostą przechodzącą przez punkty A i B ,
- b) półprostą CD ,
- c) odcinek EF .

3. Wypisz wszystkie odcinki leżące na prostej a oraz te półproste, do których należy punkt C .



4. Na wyspie znajdują się cztery domy. Każde dwa domy łączy ścieżka biegnąca wzdłuż linii prostej. Innych ścieżek nie ma.

- a) Ile ścieżek jest na tej wyspie?
- b) Narysuj w zeszycie cztery punkty – tak jak są one rozmieszczone na wyspie. Ile możesz narysować odcinków łączących każde dwa punkty spośród tych czterech?
- c) Zmierz odległości między każdymi dwoma narysowanymi domami (między zaznaczonymi punktami).



Długość odcinka oznaczamy za pomocą pionowych kresek (np. długość odcinka AB oznaczamy $|AB|$) lub małą literą alfabetu, np. a . Na rysunku jest ona zapisana nad lub pod odcinkiem, zwykle w pobliżu jego środka.

Dla uproszczenia zamiast „odcinek ma długość 5 cm” czy „długość odcinka wynosi 5 cm” będziemy często pisać „odcinek ma 5 cm”.



5. Narysuj odcinek o podanej długości.

a) $|AB| = 3 \text{ cm}$

c) $|EF| = 5\frac{3}{5} \text{ cm}$

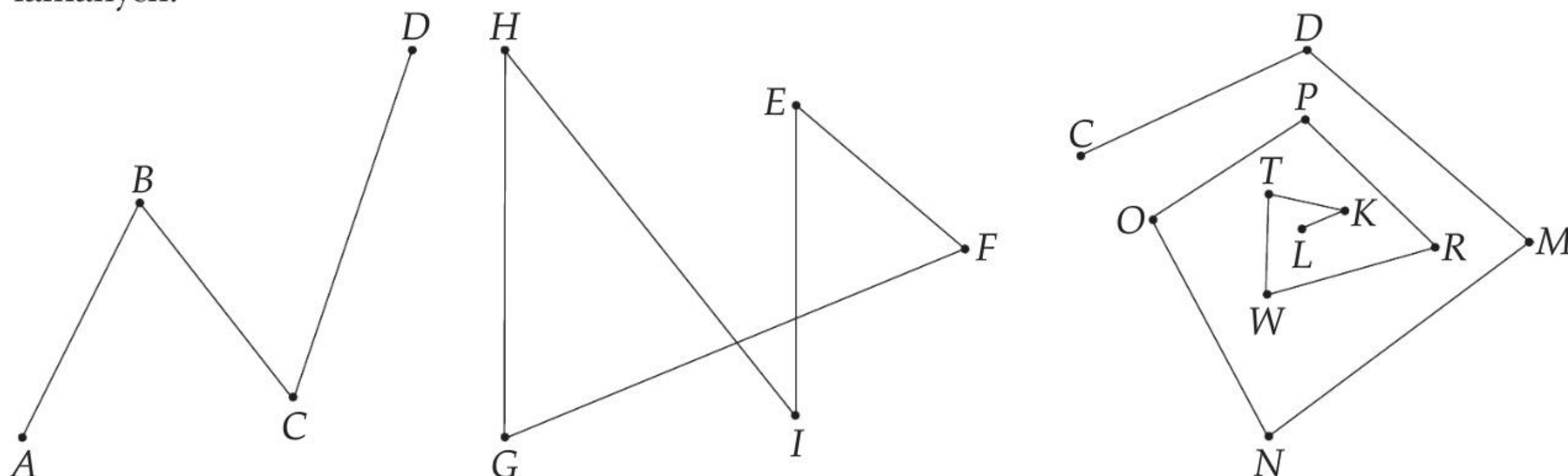
e) $b = 0,4 \text{ dm}$

b) $|CD| = 3 \text{ cm } 7 \text{ mm}$

d) $a = 4,6 \text{ cm}$

f) $c = 0,28 \text{ dm}$

6. Narysuj trzy różne odcinki w taki sposób, żeby pierwszy miał wspólny koniec z drugim, a drugi z trzecim oraz aby odcinki te nie leżały na jednej prostej. Jak się nazywa figura, która powstała?
7. Zapisz oznaczenia literowe poniższych łamanych. Podaj liczbę wierzchołków i liczbę boków tych łamanych.



Czy pamiętasz?

Odcinki, z których składa się łamana, nazywamy **bokami łamanej**.

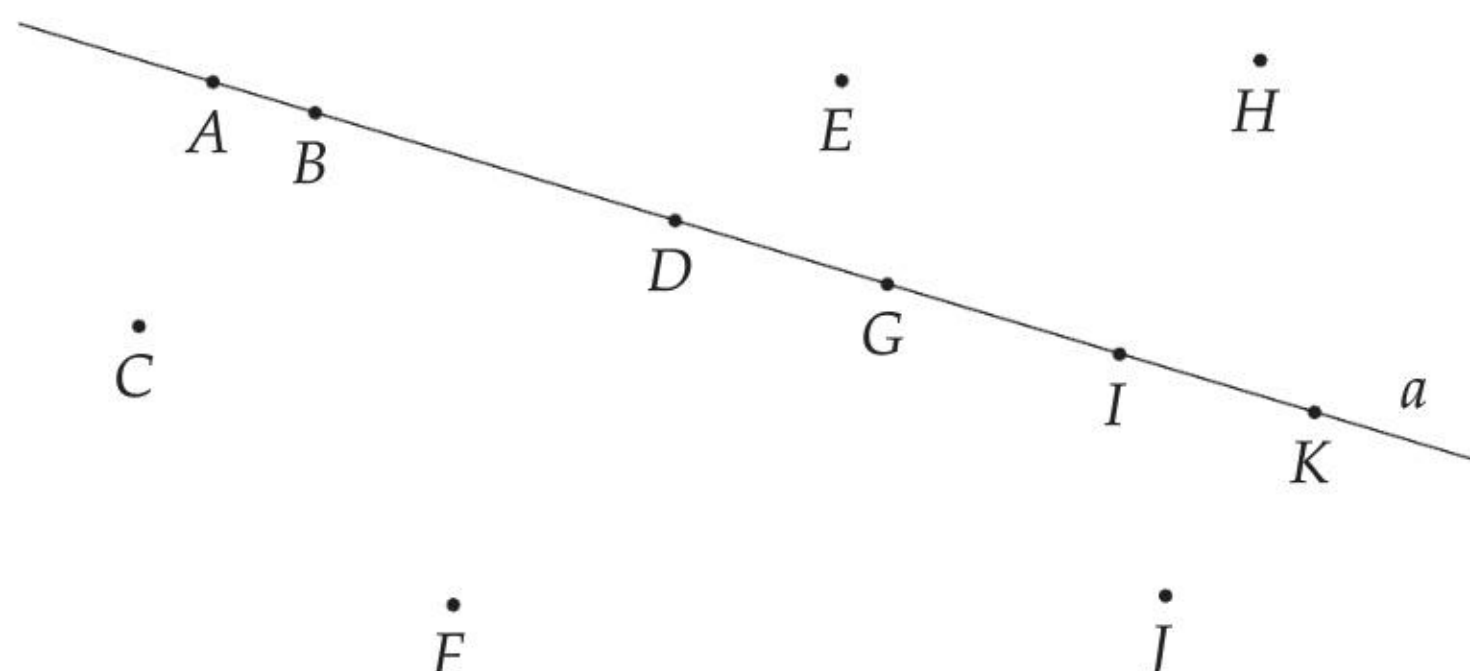
Długość łamanej to suma długości wszystkich jej boków.

8. Narysuj dwie łamane: otwartą i zamkniętą, każdą złożoną z sześciu odcinków. Wierzchołki obu łamanych oznacz dowolnymi literami. Zmierz i zapisz długości boków tych łamanych.
9. Narysuj łamaną otwartą złożoną z czterech odcinków, których długości wynoszą: 4 cm, 3,6 cm, 2,2 cm, 3,6 cm. Jaka jest długość tej łamanej?

Zadania

● Zapisz, jakie punkty należą do:

- a) prostej a ,
 b) półprostej ID ,
 c) półprostej DI ,
 d) odcinka BK .



- Ile punktów wspólnych mają odcinki AB i BC ?



- Dany jest odcinek AB o długości 6,2 cm. Jaką długość ma odcinek, który od odcinka AB jest:

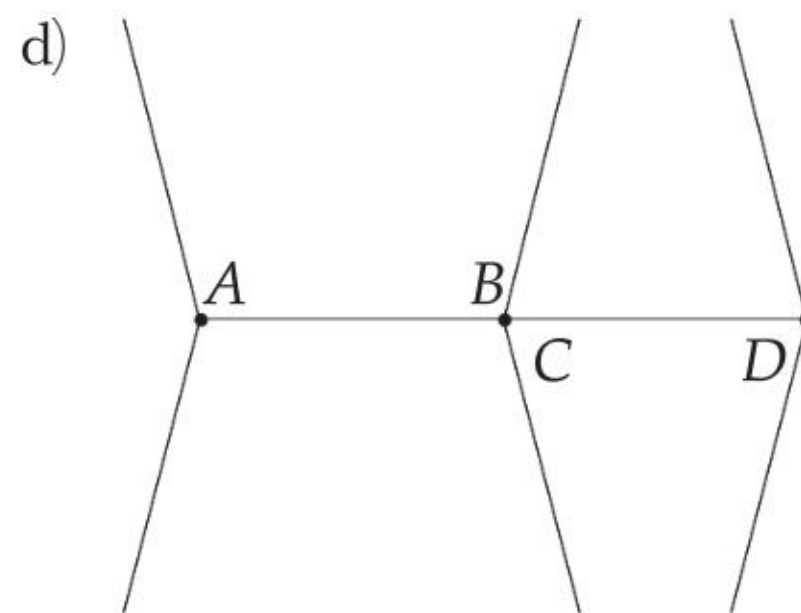
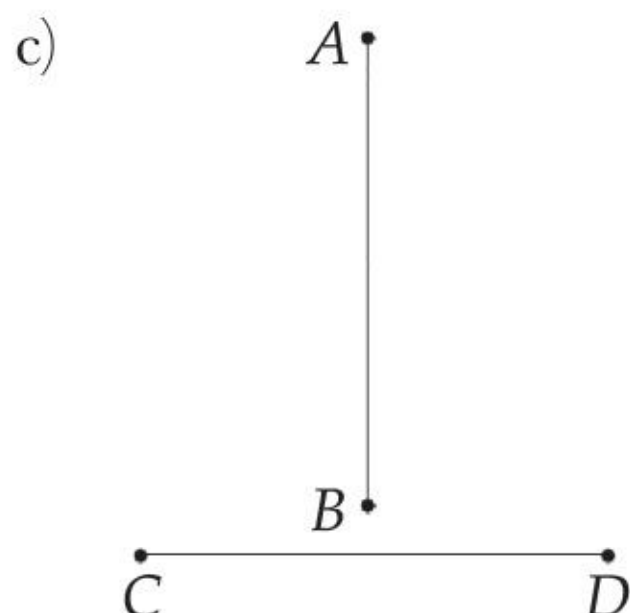
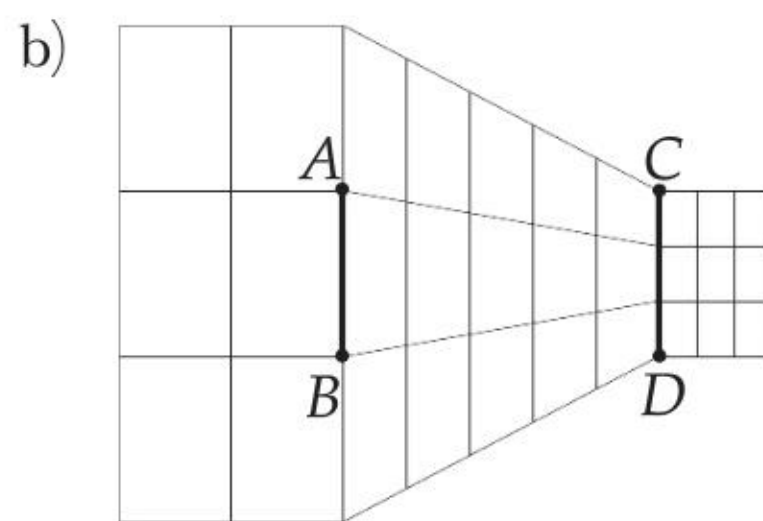
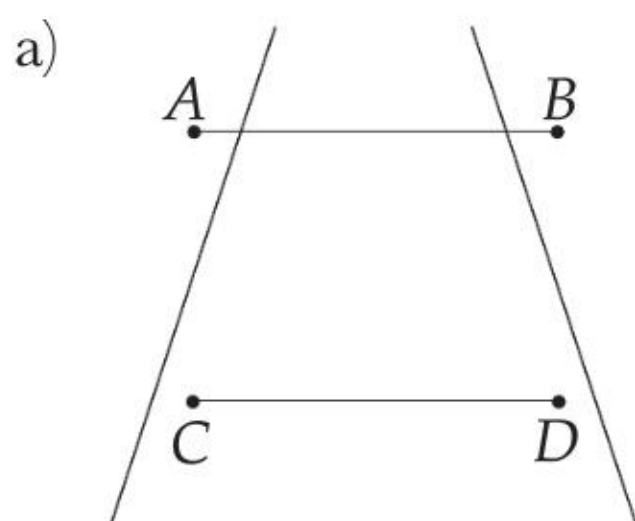
- | | |
|----------------------|-------------------------|
| a) 2 razy dłuższy, | b) o 5 cm dłuższy, |
| c) o 3,4 cm krótszy, | d) o 7,2 cm dłuższy, |
| e) 2 razy krótszy, | f) o 1 cm 3 mm krótszy, |
| g) o 25 mm dłuższy, | h) o 50% dłuższy? |

- Które z wielkich drukowanych liter alfabetu mają kształt łamanej? Narysuj je.

- Łamana otwarta $ABCDEFGHI$ o długości 28 cm ma wszystkie boki równe. Jaka jest długość każdego jej boku?

- Łamana o długości 45 cm ma pięć wierzchołków. Pierwszy jej bok ma 3 cm, drugi jest od niego dwa razy dłuższy, a pozostałe są tej samej długości. Podaj długości boków tej łamanej. Rozważ dwa rodzaje łamanych.

- Oceń, który z odcinków jest dłuższy: AB czy CD ? Następnie zmierz odcinki i zapisz ich długości. Czy udało ci się prawidłowo porównać długości odcinków?



Ciekawe!

W zadaniu 7 mamy do czynienia ze **złudzeniem optycznym**. Można powiedzieć żartobliwie, że jest to rodzaj oszustwa. Złudzenie optyczne bowiem to błędna ocena obrazu, jakiej dokonuje nasz mózg pod wpływem określonego użycia kolorów, linii, kontrastu, perspektywy itp. Opisane zjawisko powoduje, że obraz, który widzimy, nie jest zgodny z rzeczywistością. Korzyści wynikające ze złudzeń optycznych wykorzystujemy na co dzień, często o tym nie wiedząc. Jeśli np. chcemy wyszczuplić naszą sylwetkę, wybieramy ubrania w poziome czy pionowe paski?

4.2 Proste oraz odcinki prostopadłe i równoległe

Podejmij temat

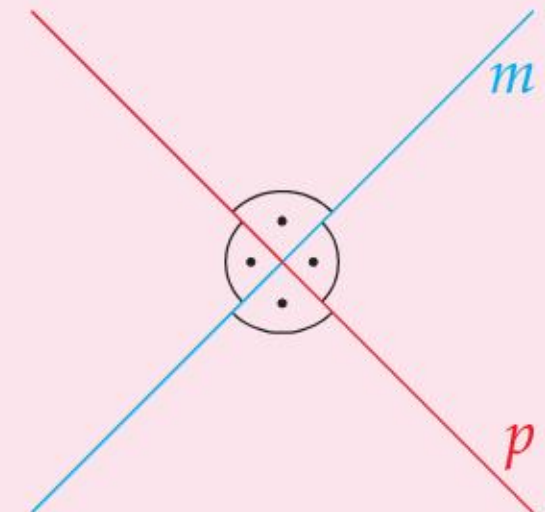


Czy pamiętasz, jak się nazywają odcinki i proste, które są tak położone jak te zaznaczone na rysunku jednakowymi kolorami (zielonym albo żółtym)?
A jak się nazywają takie pary odcinków, z których jeden jest zielony, a drugi żółty?



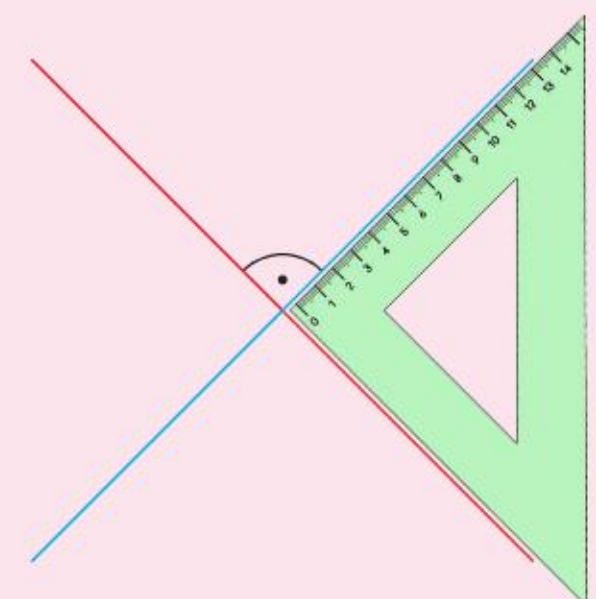
Rysunek przedstawia dwie **proste prostopadłe** m i p .

Zapisujemy: $m \perp p$ lub $p \perp m$.

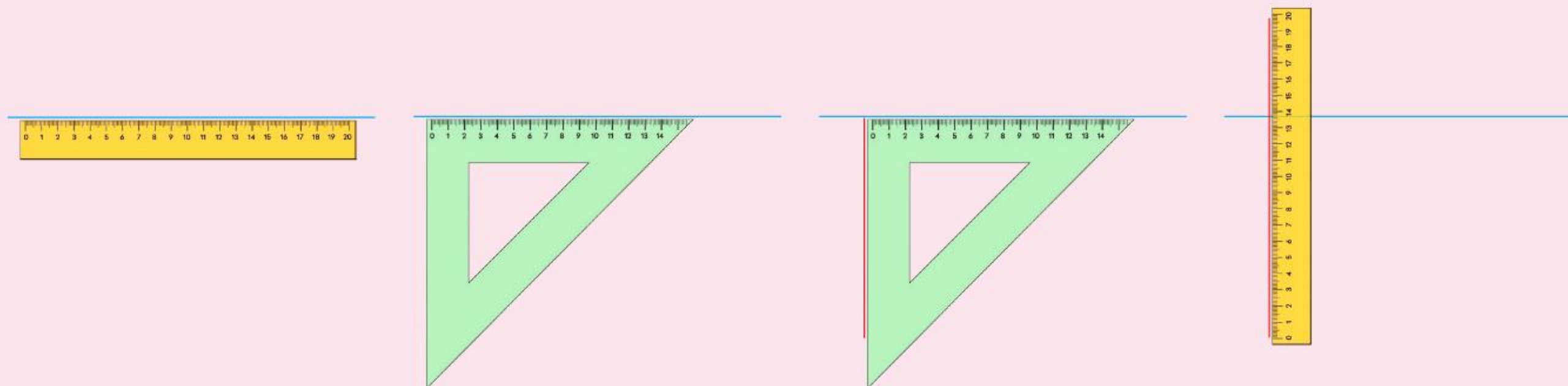


Przypomnijmy, jak się sprawdza, czy proste są prostopadłe, oraz jak się rysuje takie proste.

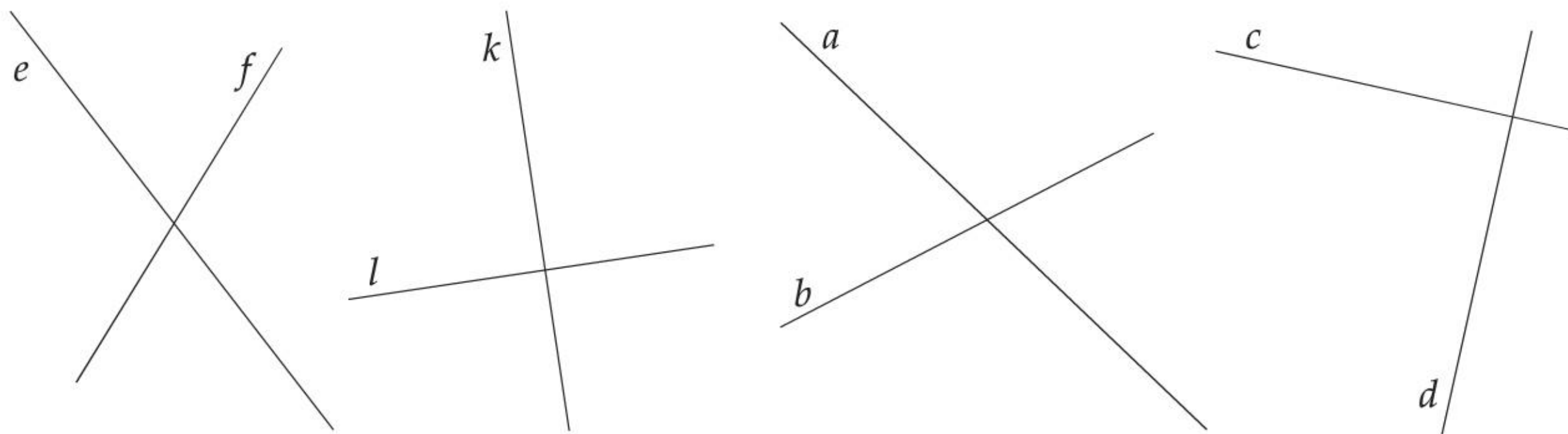
Do sprawdzenia, czy dwie proste są prostopadłe, służy ekierka.



Do rysowania prostych prostokątnych używamy ekierki i linijki (lub samej ekierki).



1. Sprawdź za pomocą ekierki, które z poniższych par prostych są prostokątne. Odpowiedź zapisz w zeszyte za pomocą symbolu prostokątności.



2. Narysuj dwie proste k i l , które są do siebie prostokątne.
3. Narysuj prostą m i zaznacz punkt A nienależący do niej. Narysuj prostą k prostokątną do prostej m i przechodzącą przez punkt A .
4. Narysuj prostą a i zaznacz na niej dwa punkty B i C . Poprowadź przez te punkty proste b i c prostokątne do prostej a . Czy proste b i c się przecinają?
5. Narysuj prostą a i zaznacz poza nią punkty B i C . Poprowadź proste prostokątne do prostej a , przechodzące przez te punkty. Ile odcinków powstało na rysunku? Zmierz te odcinki.
6. Narysuj prostą a i zaznacz punkty B i C nienależące do tej prostej. Poprowadź proste przechodzące przez te punkty i prostokątne do prostej a . Przez punkty B i C poprowadź prostą b . Co można powiedzieć o tej prostej? Jak należy zaznaczyć punkty B i C , żeby proste a i b były prostokątne?

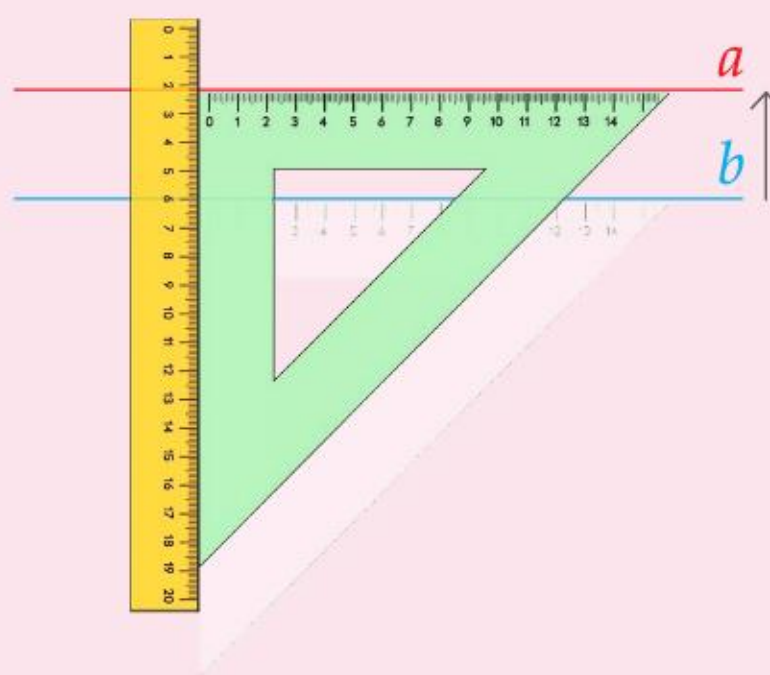
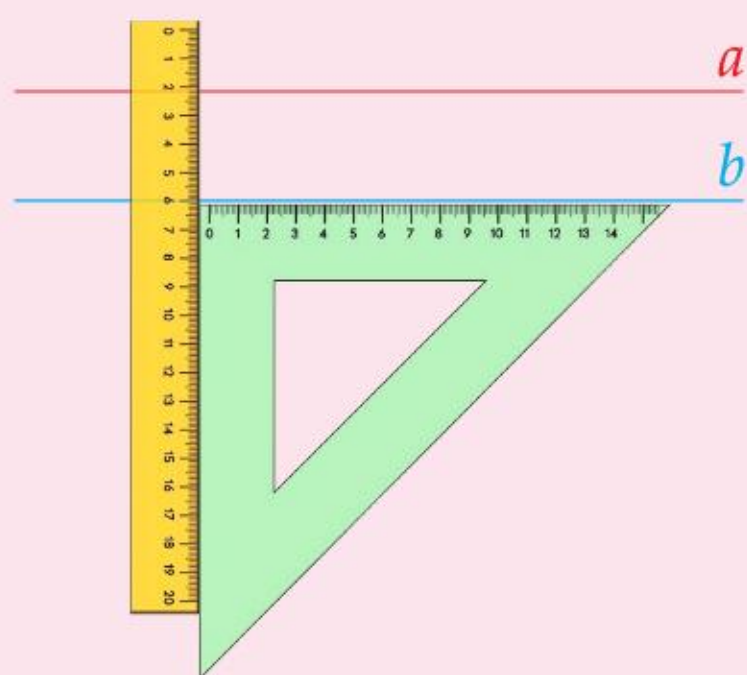
Proste, które nie mają punktów wspólnych, to **proste równoległe**.

Zapisujemy: $a \parallel b$ lub $b \parallel a$.

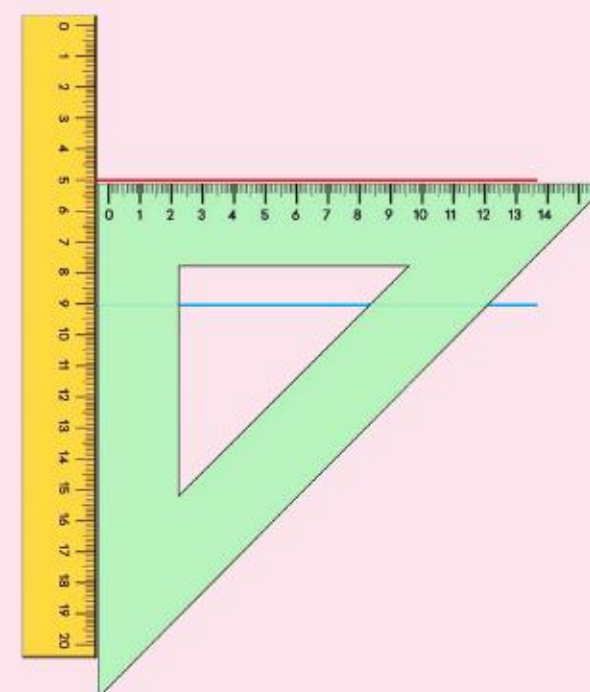
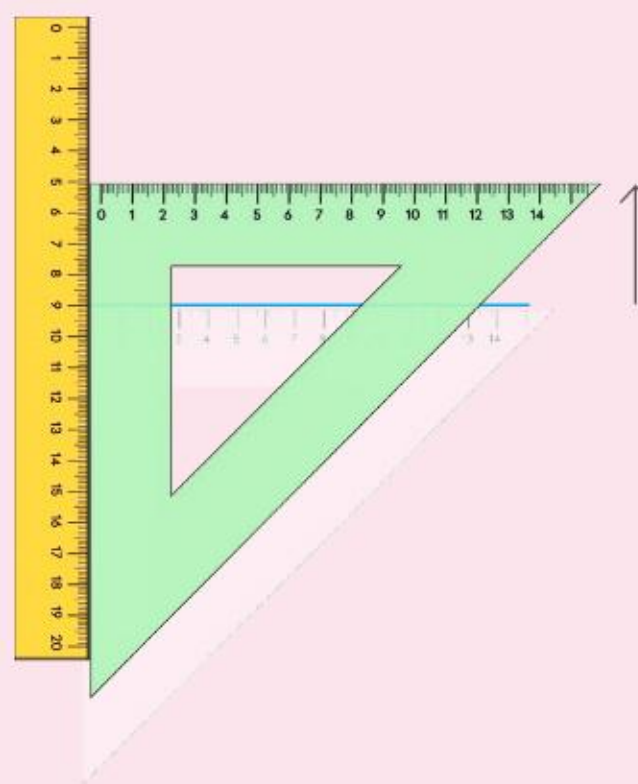
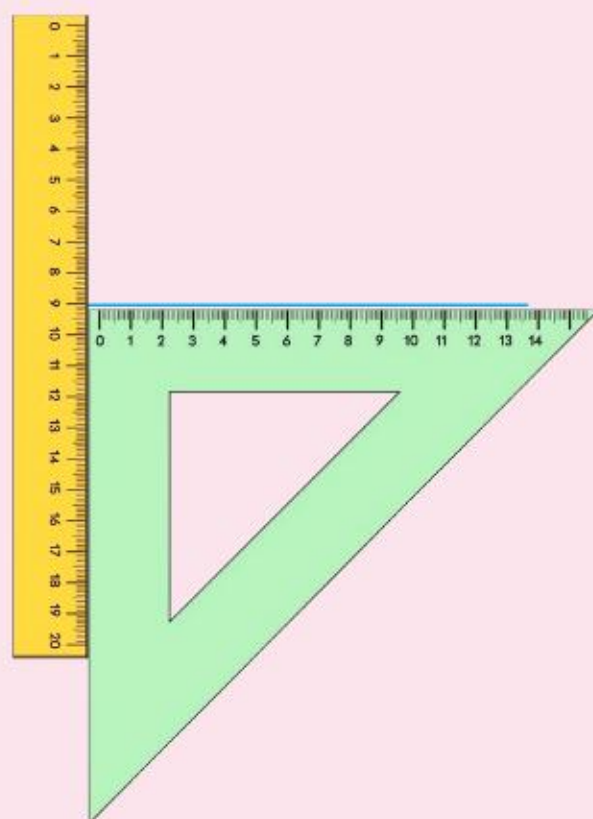
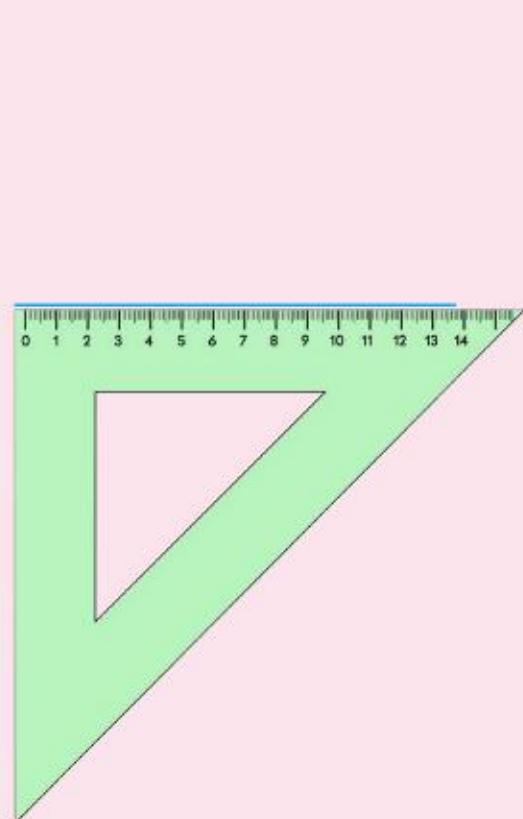


Przypomnijmy, jak się sprawdza, czy proste są równoległe, oraz jak się rysuje takie proste.

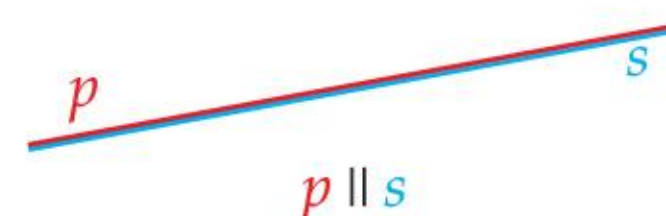
Do sprawdzenia, czy dwie proste są równoległe, służą ekierka i linijka.



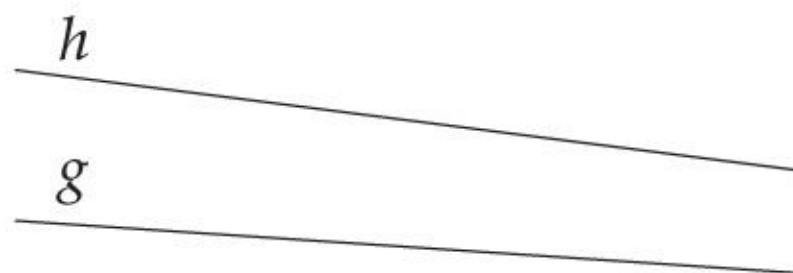
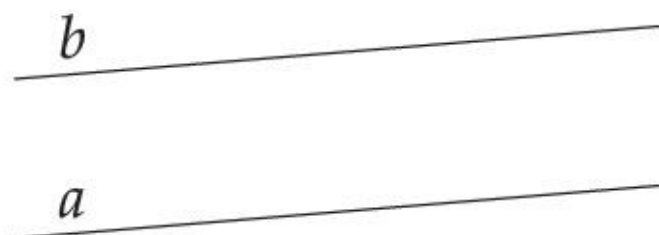
Do rysowania prostych równoległych również używamy tych przyrządów.



Na rysunku obok przedstawione są proste **pokrywające się**; takie proste także traktujemy jako **proste równoległe** (szczególny przypadek takich prostych).

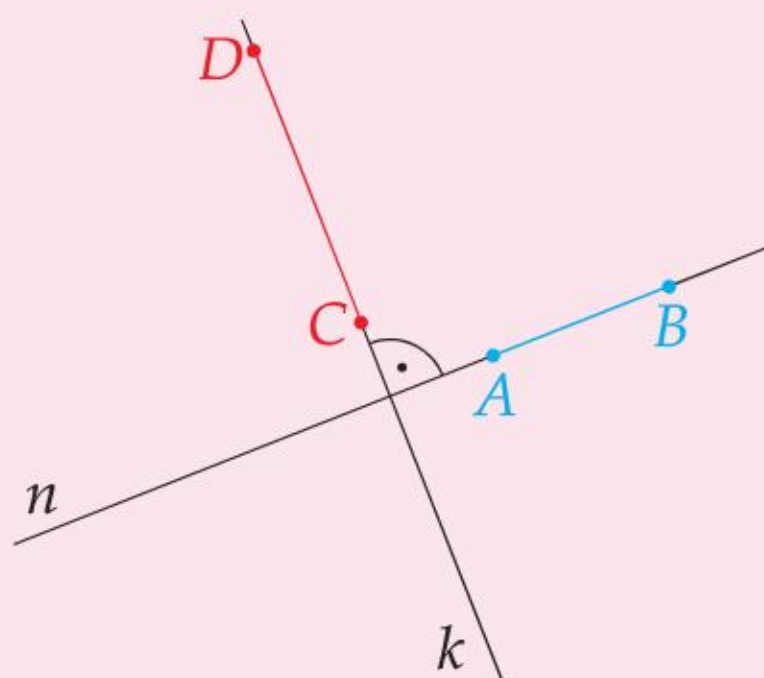


7. Sprawdź, które z prostych na rysunku są równoległe. Odpowiedź zapisz w zeszycie za pomocą symbolu równoległości.



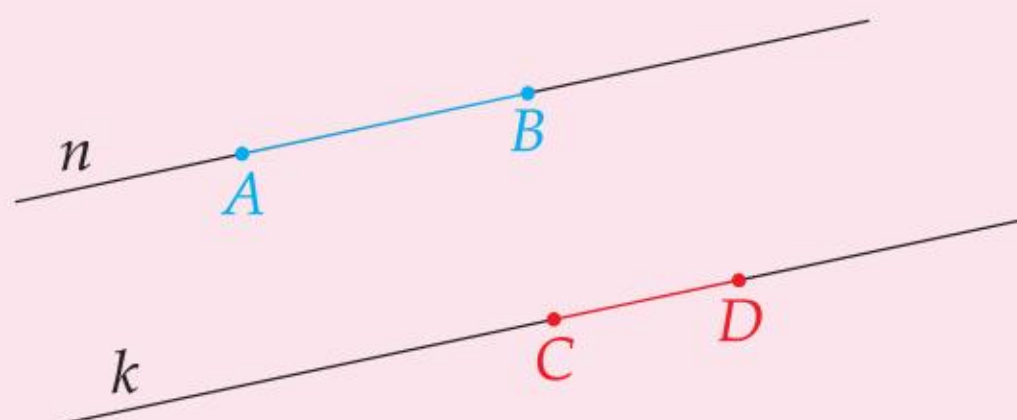
8. Zaznacz na kartce w zeszycie dwa punkty A i B . Następnie przez te punkty poprowadź proste a i b równoległe do siebie.

Odcinki prostopadłe to odcinki leżące na prostych prostopadłych.



$n \perp k$, więc $AB \perp CD$

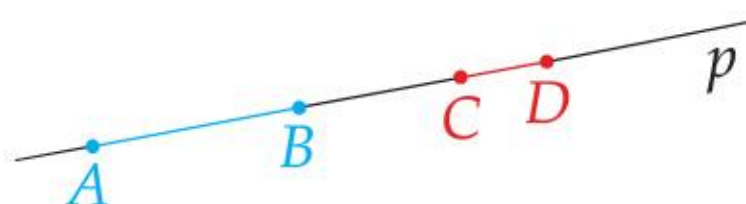
Odcinki równoległe to odcinki leżące na prostych równoległych.



$n \parallel k$, więc $AB \parallel CD$

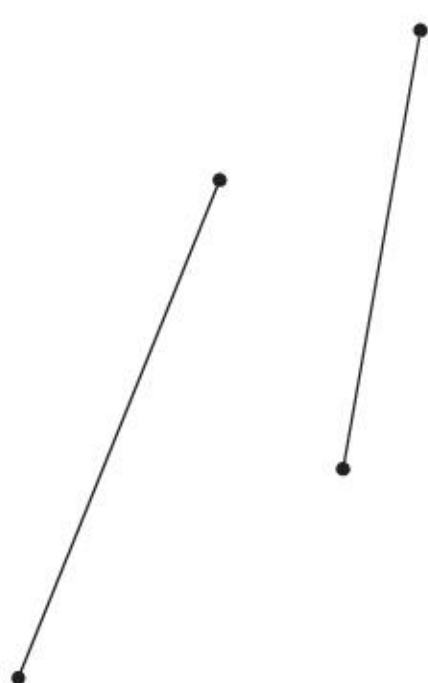


Odcinki leżące na jednej prostej są do siebie równoległe.

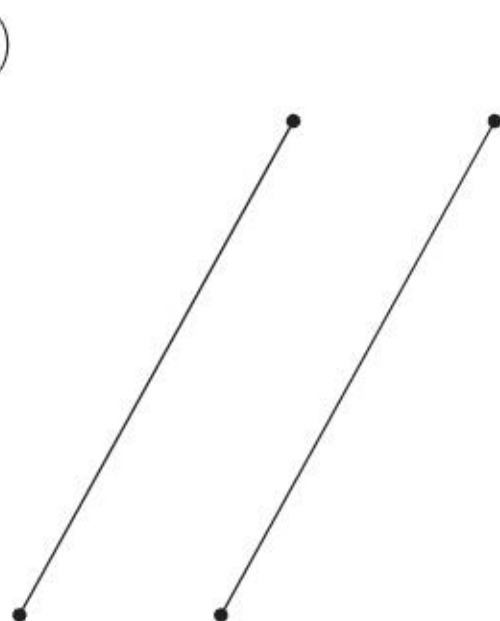


9. Sprawdź, czy odcinki są równoległe.

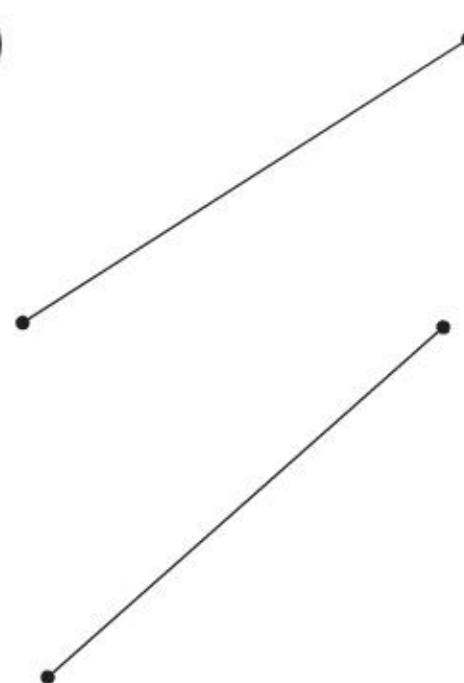
a)



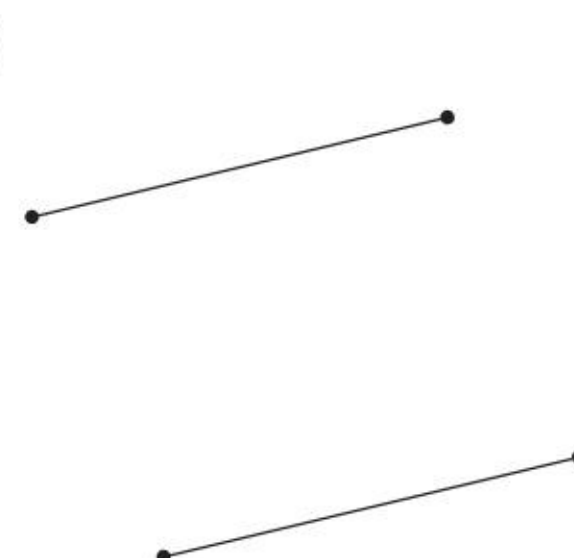
b)



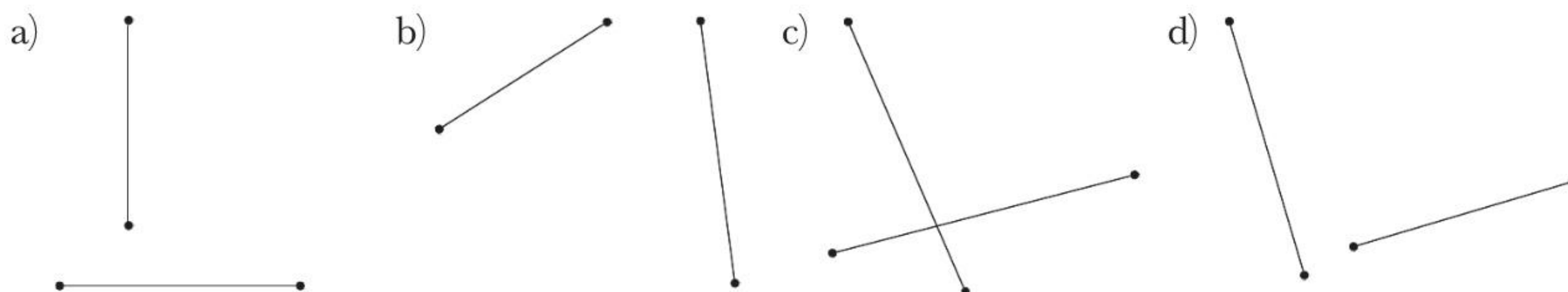
c)



d)



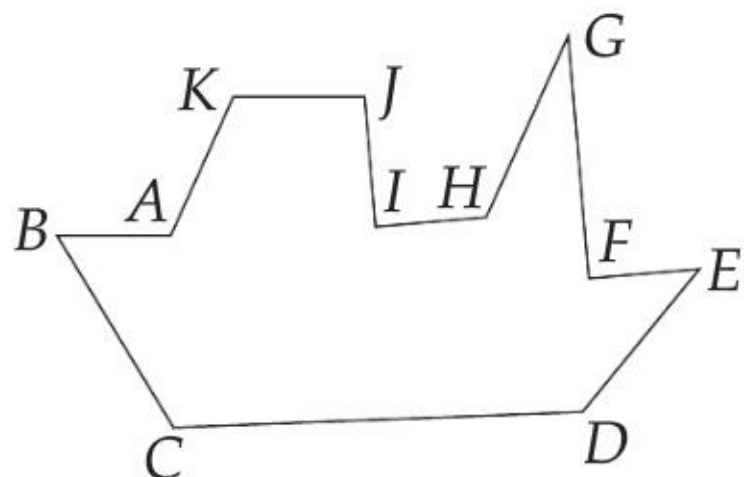
10. Sprawdź, czy odcinki są prostopadłe.



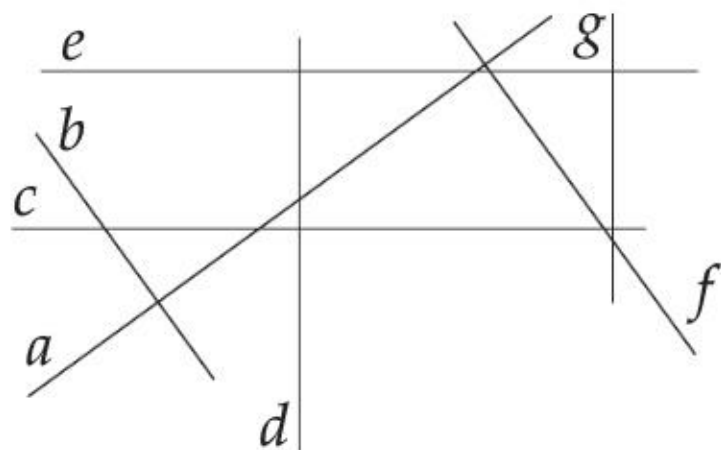
11. Narysuj dwa odcinki równoległe i dwa odcinki prostopadłe.

Zadania

- Sprawdź, które boki poniższej łamanej są równoległe, a które – prostopadłe.



- Które pary prostych są prostopadłe, a które – równoległe? Odpowiedź zapisz w zeszycie za pomocą odpowiednich symboli.



- Narysuj proste k, l, m , takie że $k \parallel l$ i $l \parallel m$. Jak są położone względem siebie proste k i m ?
- Narysuj proste p, r, s , takie że $p \perp r$ i $r \perp s$. Jak są położone względem siebie proste p i s ?

- Narysuj prostą m . Zaznacz cztery dowolne punkty: A, B, C, D , które nie leżą na prostej m . Przez punkty A i B poprowadź proste a i b równoległe do m , a przez punkty C i D – proste c i d prostopadłe do m . Co możesz powiedzieć o wzajemnym położeniu prostych: a, b, c, d ?

- Narysuj kwadrat $ABCD$ i jego przekątne. Wypisz wszystkie pary odcinków prostopadłych znajdujące się na twoim rysunku.

- Narysuj łamaną otwartą złożoną z sześciu odcinków, taką że każdy kolejny jej bok jest prostopadły do poprzedniego. Oznacz literami wierzchołki tej łamanej. Wypisz wszystkie pary odcinków równoległych widoczne na rysunku.

- Znajdź w internecie rysunki pokazujące złudzenia optyczne dotyczące równoległości lub prostopadłości. Przerysuj jeden z nich do zeszytu.

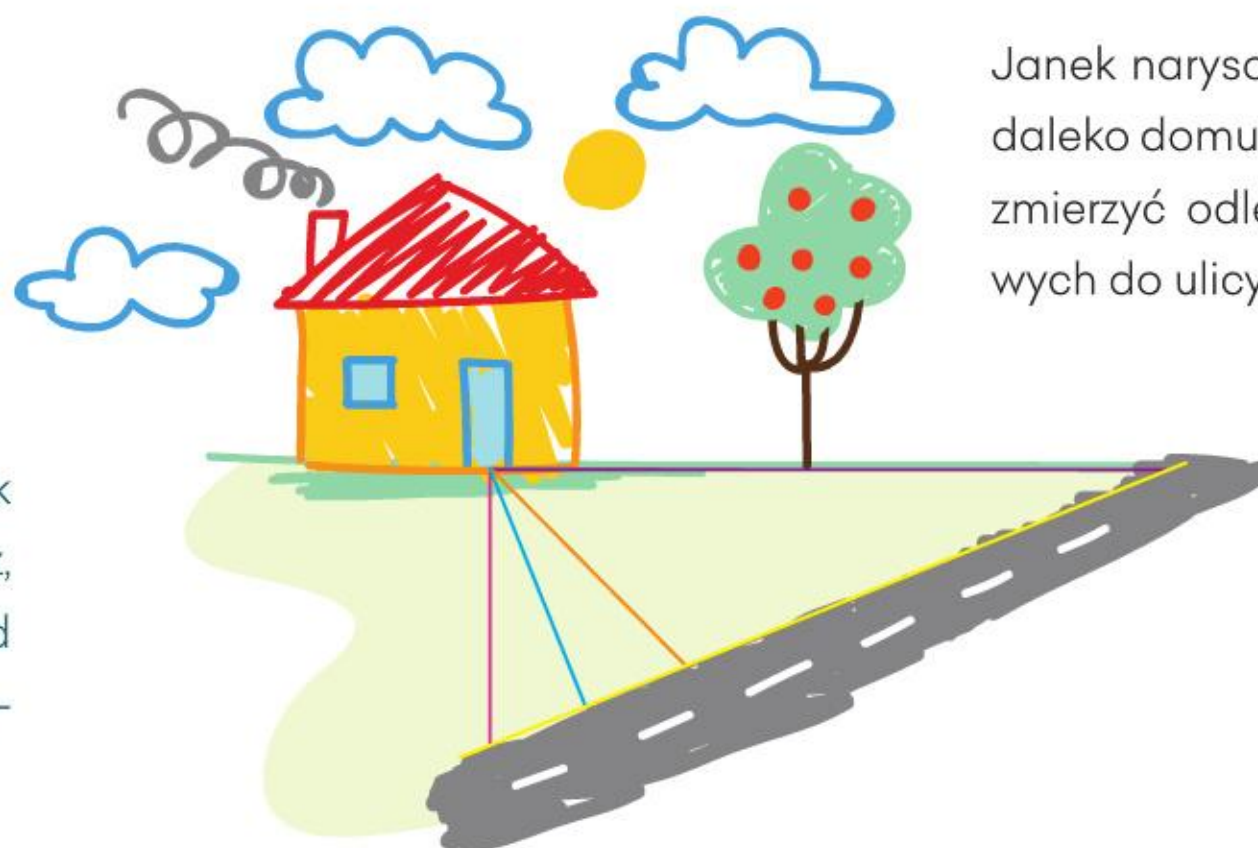
- Ile najmniej odcinków równoległych należy narysować, żeby otrzymać sześć par odcinków równoległych?

4.3 Odległość punktu od prostej

Podejmij temat



Zmierz kolorowe odcinki łączące środek drzwi wejściowych z ulicą. Jak myślisz, któreśdy należałoby iść, żeby droga od drzwi do ulicy była najkrótsza? Który odcinek wskazuje tę drogę?

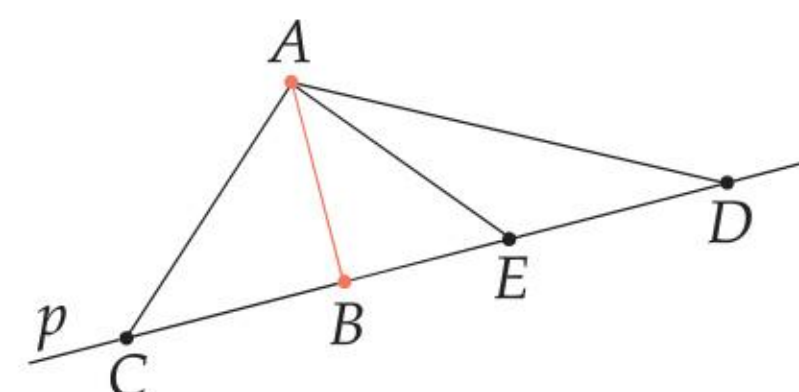


Janek narysował dom i biegnącą nie-daleko domu ulicę. Zastanawiał się, jak zmierzyć odległość od drzwi wejściowych do ulicy.

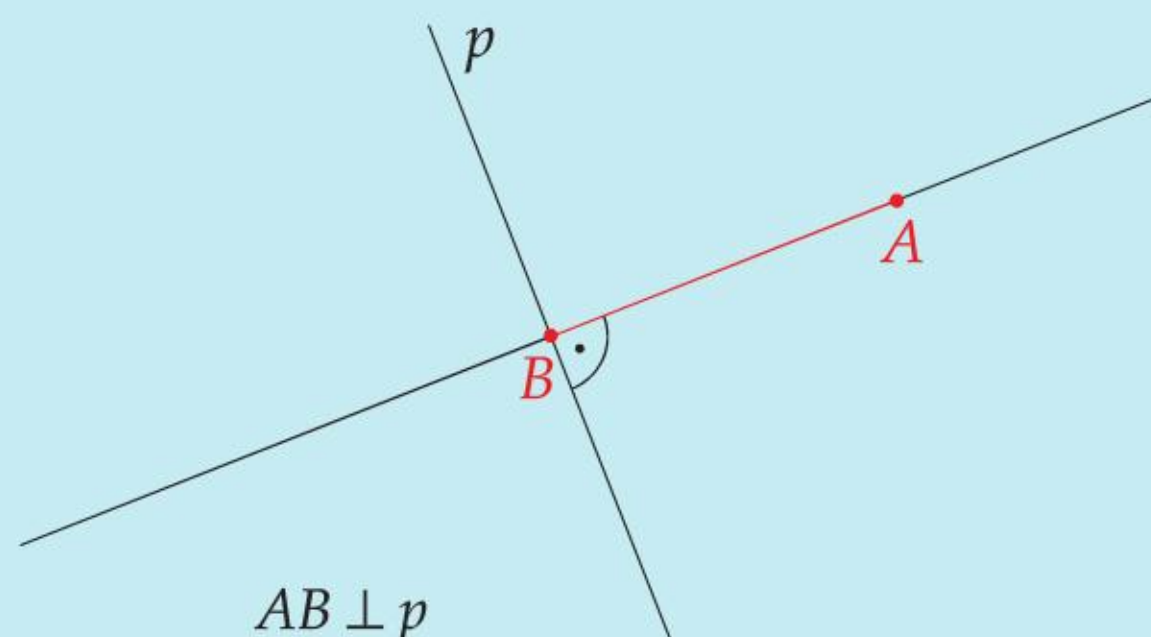
Aby zmierzyć odległość między dwoma obiektami, wykonujemy pomiar wzdłuż najkrótszego odcinka łączącego te dwa obiekty. W przypadku rysunku Janka z *Podejmij temat* najkrótszym odcinkiem łączącym drzwi wejściowe domu z ulicą jest odcinek niebieski.

Według tej samej zasady mierzymy odległość punktu od prostej.

Odległość punktu A od prostej p to długość odcinka AB . Sprawdź za pomocą ekierki, jakie jest wzajemne położenie odcinka AB i prostej p .



Odległość punktu A od prostej p to długość odcinka AB , którego koniec B leży na prostej p i który jest prostopadły do tej prostej.

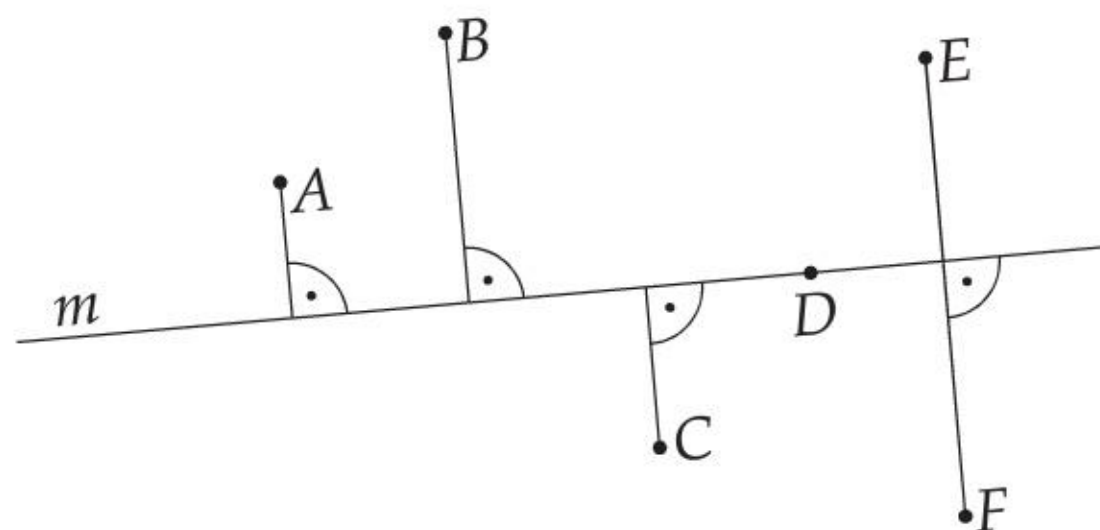


Czyli jeśli chcę wyznaczyć odległość punktu od prostej, to muszę narysować odcinek prostopadły do tej prostej, tak?

Zgadza się – tak powinieneś zrobić, bo rysunek pozwoli na dokładne zmierzenie długości odcinka.



1. Zmierz odległości punktów A, B, C, D, E i F od prostej m .

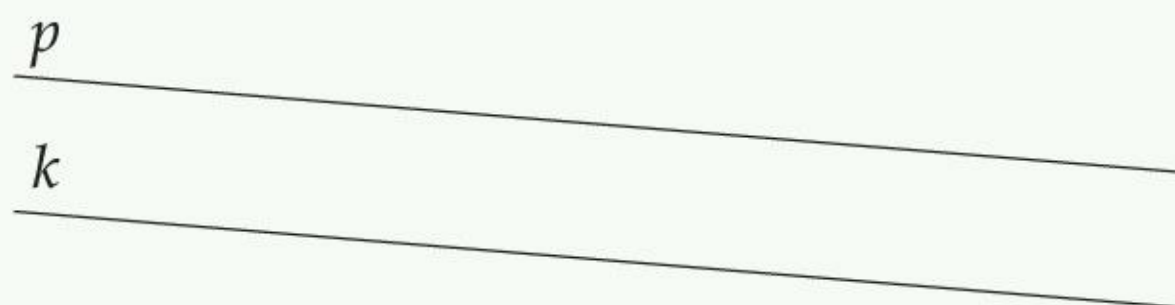


2. Narysuj prostą oraz zaznacz sześć punktów nienależących do niej. Zmierz odległości tych punktów od narysowanej prostej. W tym celu narysuj pomocnicze odcinki prostopadłe.

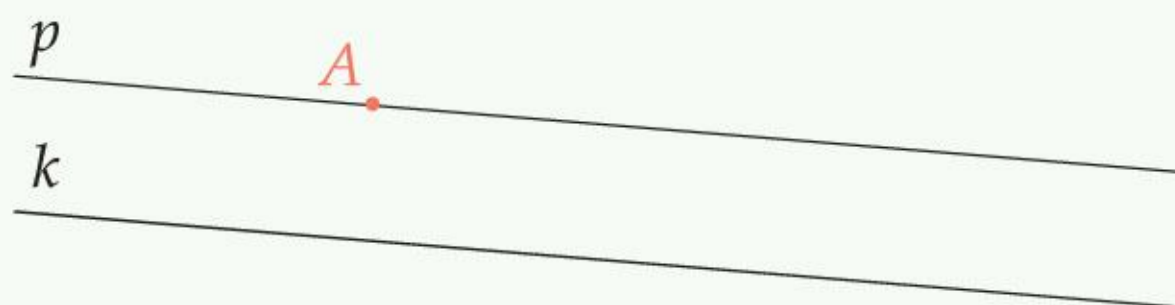
W podobny sposób można mierzyć odległość między prostymi równoległymi.

Przykład 1

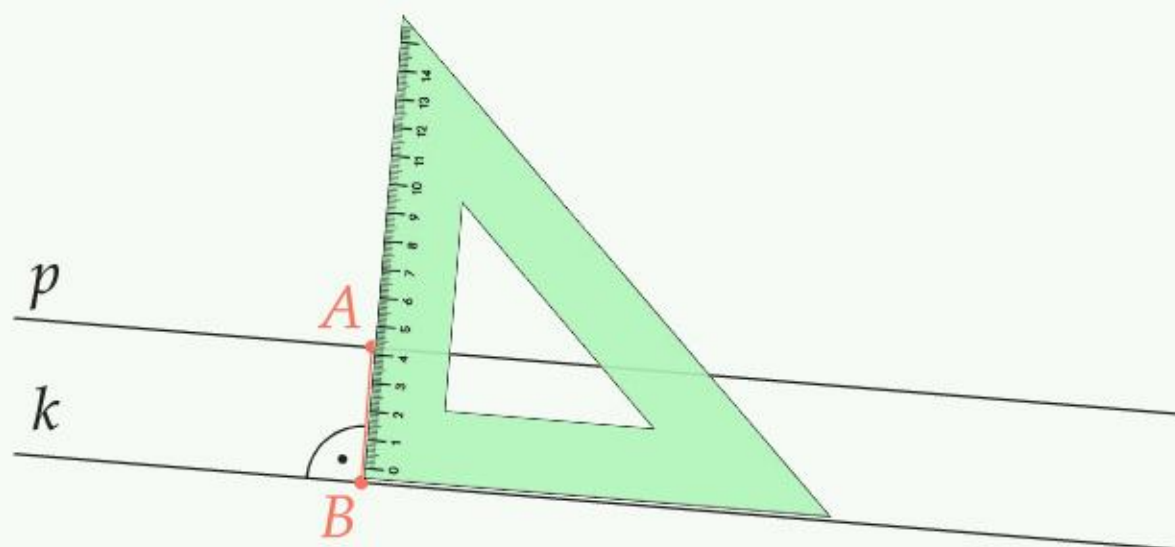
Zmierzmy odległość między prostymi równoległymi p i k .



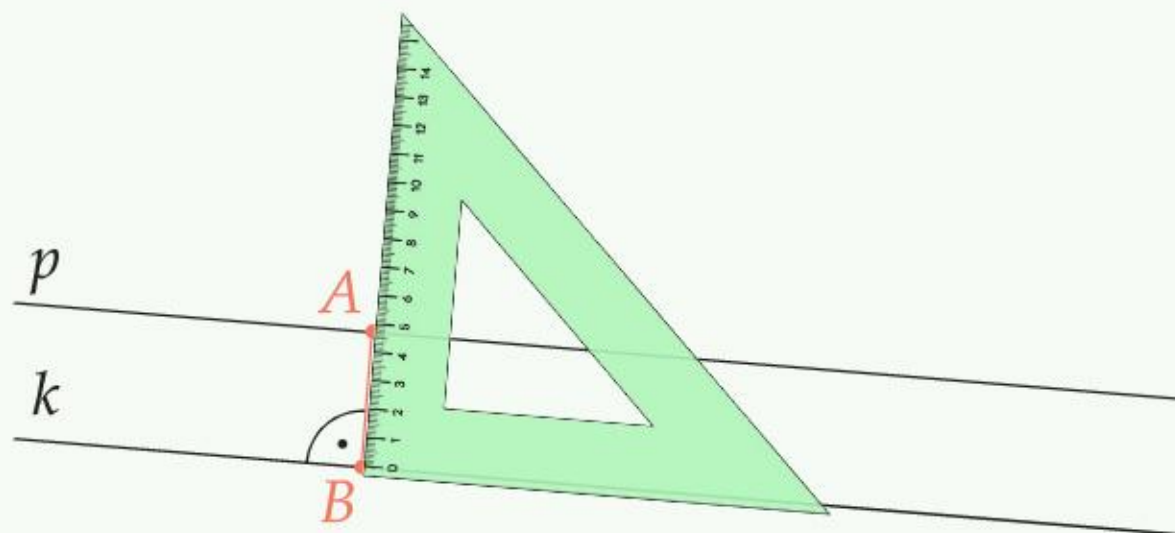
- Na jednej z prostych, np. na prostej p , zaznaczamy w dowolnym miejscu punkt A .



- Przy użyciu ekierki rysujemy taki odcinek AB prostopadły do prostej k , którego koniec B leży na tej prostej.



- Mierzmy długość odcinka AB .
Odległość między prostymi p i k to długość odcinka AB .

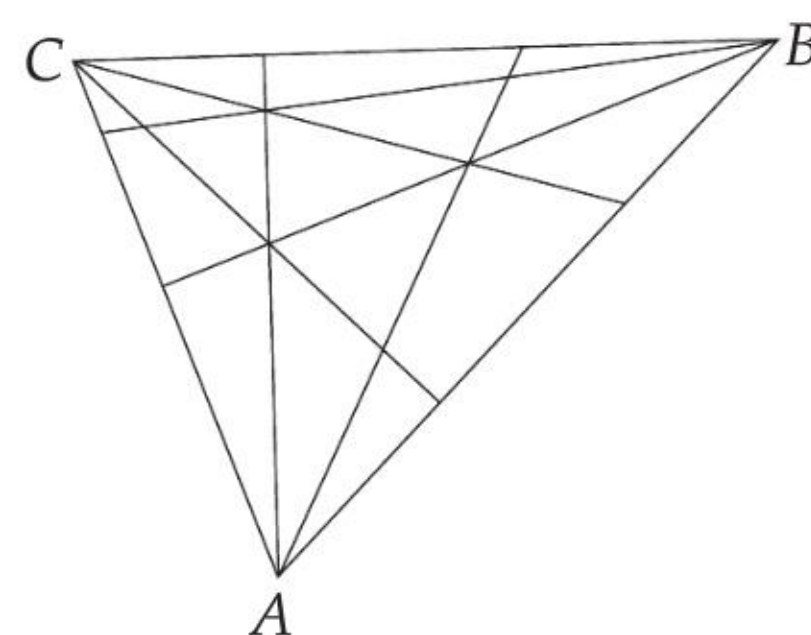


3. Narysuj dwie proste równoległe i zmierz odległość między nimi.
4. Jaka jest odległość między prostymi pokrywającymi się?

Zadania

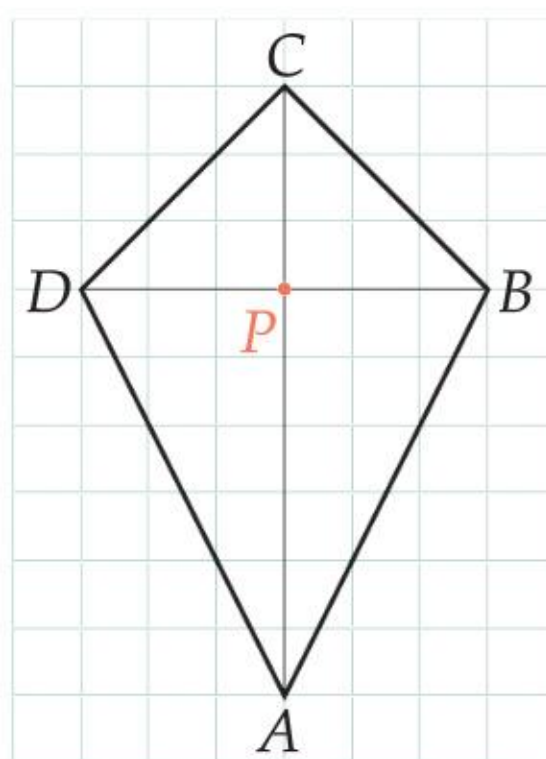
- Narysuj prostą p i zaznacz:
 - a) punkt A w odległości 2 cm od prostej p ,
 - b) punkt B w odległości 3,5 cm od prostej p ,
 - c) punkt C w odległości 42 mm od prostej p ,
 - d) punkt D w odległości 0,15 dm od prostej p ,
 - e) punkt E w odległości 0 cm od prostej p .

- Dla każdego wierzchołka trójkąta ABC zmierz jego odległość od przeciwległego boku.

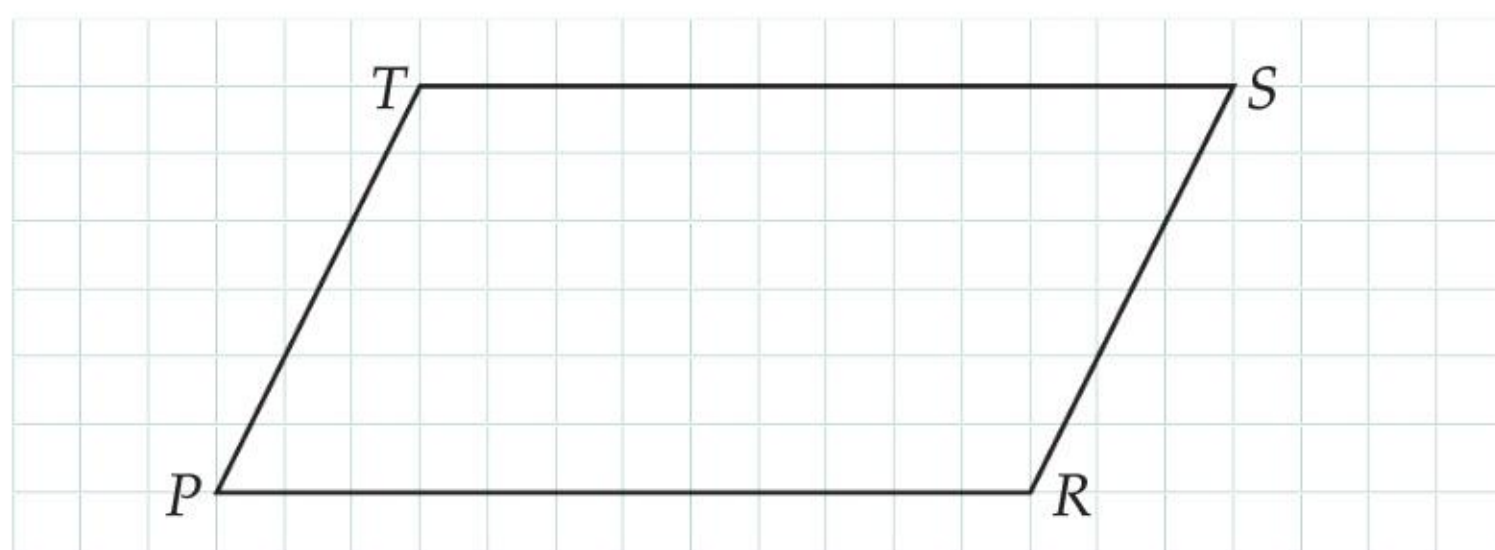


- Działka ma kształt prostokąta o wymiarach 15 m $\times$ 20 m. W samym jej środku (czyli w punkcie przecięcia się przekątnych tego prostokąta) posadzono orzech włoski. Naszkicuj plan tej działki. Jakie są odległości tego drzewa do każdego boku działki (czyli do ogrodzenia)?

- Przerysuj do zeszytu figurę przedstawioną na rysunku obok. Narysuj odpowiednie odcinki i zmierz odległości punktu P od boków figury.



- Przerysuj do zeszytu poniższą figurę. Zmierz odległości między odcinkami równoległymi: PR i TS oraz RS i PT .



Odległość między odcinkami równoległymi mierzymy tak samo jak odległość między prostymi równoległymi. Jeżeli odcinki są za krótkie, aby narysować pomiędzy nimi odcinek prostopadły, rysujemy proste, na których leżą te odcinki, a następnie mierzymy odległość między tymi prostymi.

4.4 Rodzaje kątów

Podejmij temat



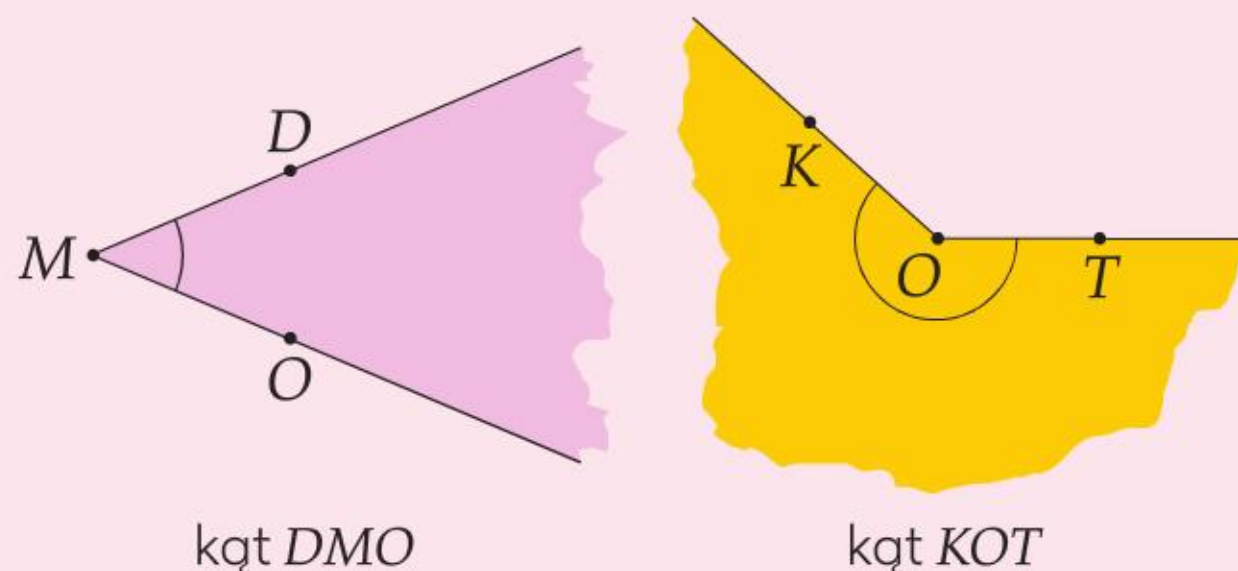
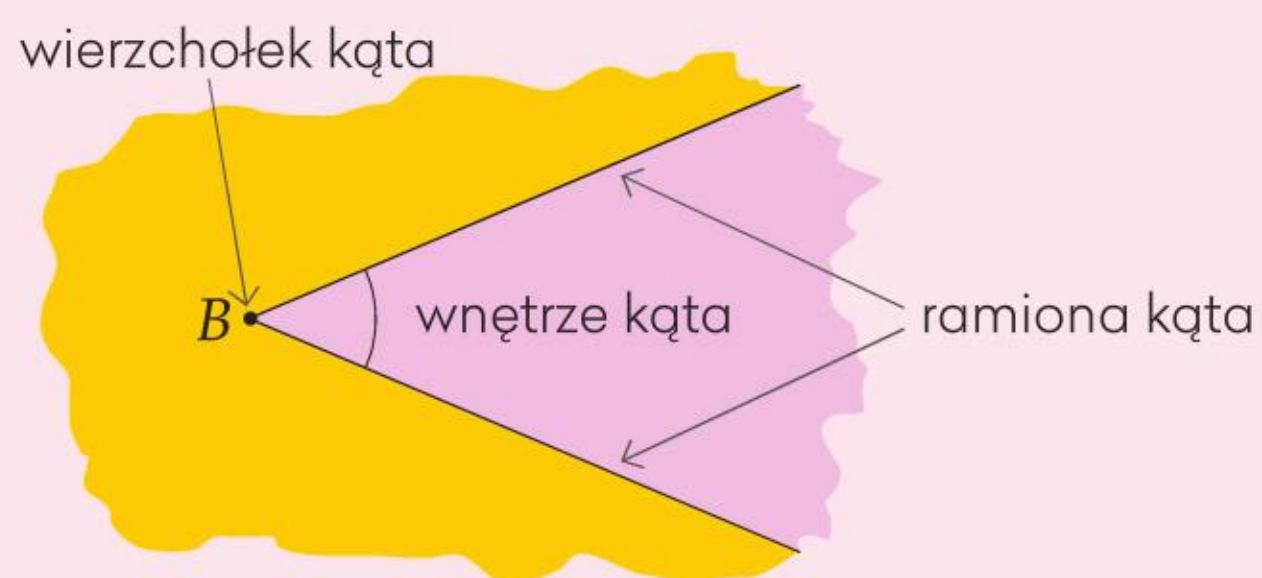
A ty ile widzisz kątów wyznaczonych przez wskazówki tego zegara? Czy pamiętasz, jak takie kąty się nazywają?



1. Narysuj dwie półproste o wspólnym początku. Zamaluj jeden z obszarów wyznaczony przez te półproste. Czy pamiętasz, jak się nazywa figura geometryczna, która w ten sposób powstała?

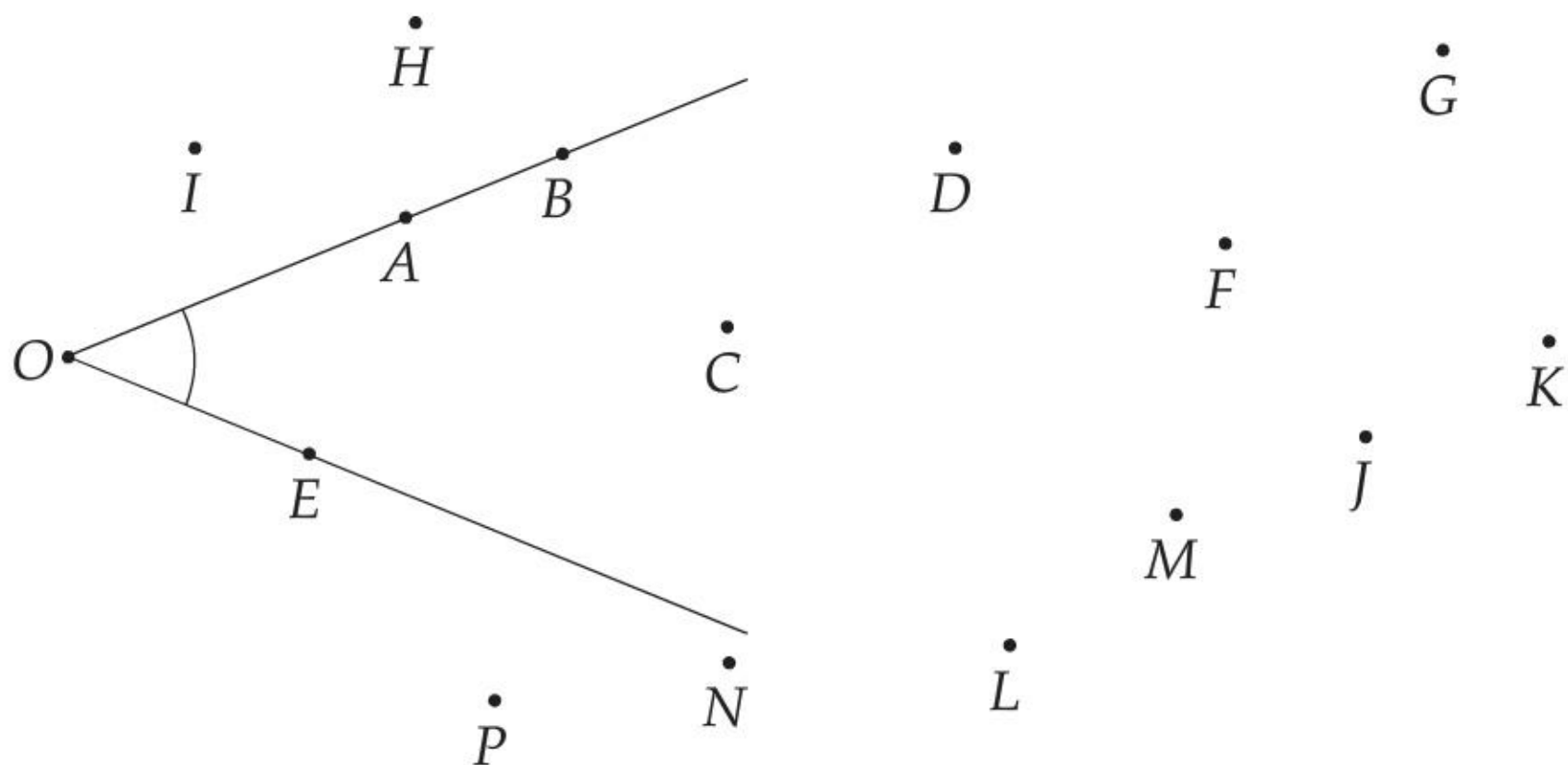
Kąt to każda z części płaszczyzny ograniczona dwiema półprostymi o wspólnym początku wraz z tymi półprostymi.

Kąt, o którym mówimy, zaznaczamy na rysunku łukiem. Do oznaczenia kątów używamy trzech liter, przy czym środkowa litera oznacza wierzchołek kąta.



2. Wypisz punkty, które:
- a) leżą na ramionach kąta AOE ,

b) należą do kąta AOE .



Do oznaczania kątów można też używać małych liter greckiego alfabetu:



Więcej na temat

W matematyce często się używa liter alfabetu greckiego. Oto małe litery tego alfabetu:

Pisownia	Nazwa
α	alfa
β	beta
γ	gamma
δ	delta
ϵ	epsilon
ζ	zeta

Pisownia	Nazwa
η	eta
θ	teta
ι	iota
κ	kappa
λ	lambda
μ	mi

Pisownia	Nazwa
ν	ni
ξ	xi
$\omicron$	omikron
π	pi
ρ	ro
σ	sigma

Pisownia	Nazwa
τ	tau
υ	ypsilon
φ	phi
χ	chi
ψ	psi
ω	omega

Przypomnijmy teraz poznane w klasie czwartej rodzaje kątów.



Zarówno ramiona kąta zerowego, jak i kąta pełnego nakładają się na siebie, ale do kąta zerowego należą tylko punkty znajdujące się na ramionach, natomiast do kąta pełnego – także wszystkie punkty poza ramionami.

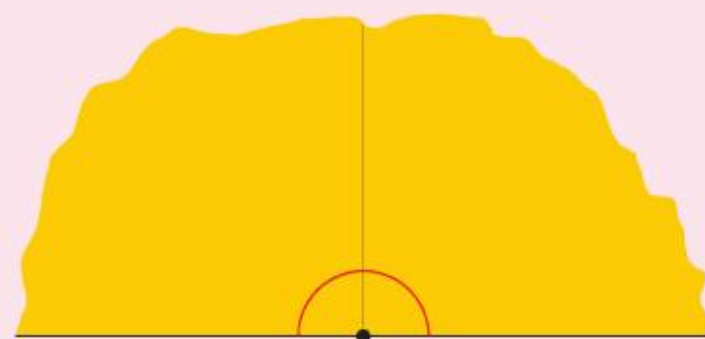
Kąt zerowy to kąt bez wnętrza, wyznaczony przez dwie półproste, które się na siebie nakładają.



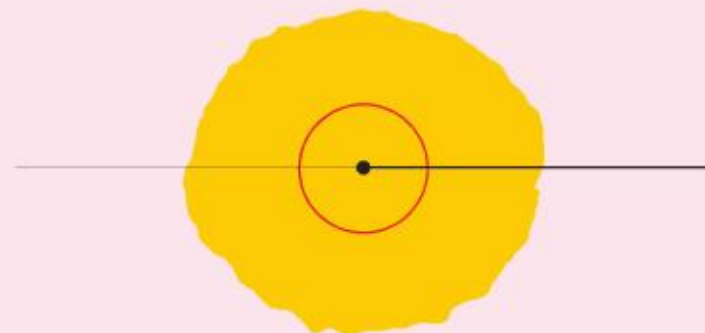
Kąt prosty to kąt utworzony przez półproste prostopadłe.



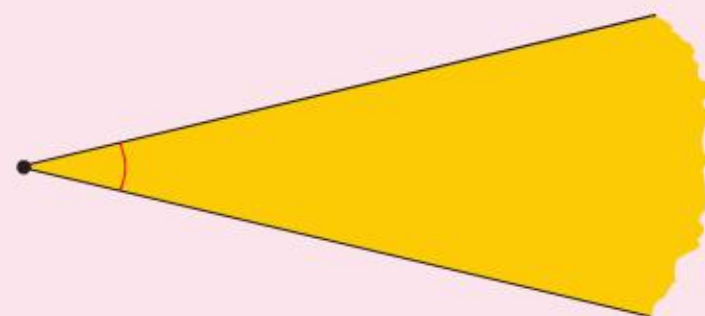
Kąt półpełny to kąt, który otrzymamy, gdy narysujemy dwa kąty proste o wspólnym wierzchołku i wspólnym ramieniu.



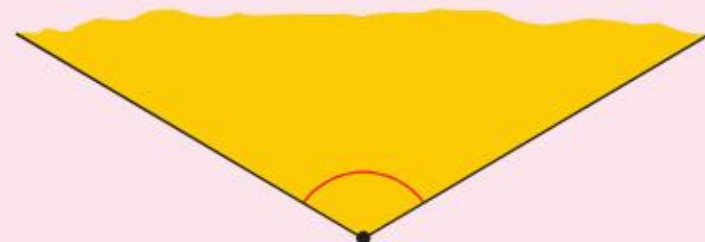
Kąt pełny to kąt, który otrzymamy, gdy narysujemy dwa kąty półpełne o wspólnym wierzchołku i wspólnych ramionach.



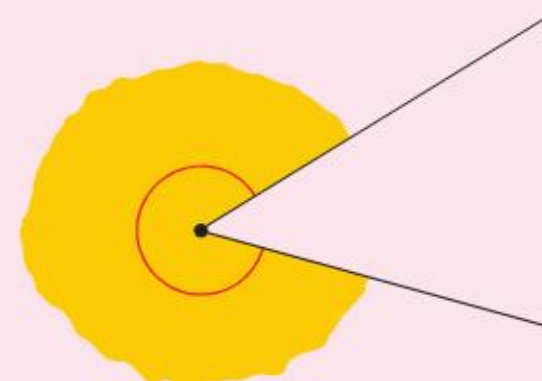
Kąt ostry to kąt, który jest większy od kąta zerowego, ale mniejszy od kąta prostego.



Kąt rozwarty to kąt, który jest większy od kąta prostego, ale mniejszy od kąta półpełnego.



Kąt wklęsły to kąt, który jest większy od kąta półpełnego, ale mniejszy od kąta pełnego.



Pamiętasz, jak się używało tego przyrządu?



Pewnie, że tak! Łatwizna – robiliśmy to w czwartej klasie.



Do mierzenia kątów służy przyrząd zwany kątomierzem.

Gdy podajemy, jak duży jest kąt, możemy powiedzieć, że „kąt ma miarę ... stopni”. Dla uproszczenia będziemy często pomijać określenie „miarę” i mówić krócej, że „kąt ma ... stopni”.

3. Narysuj kąt ostry $KO\acute{N}$, rozwarty OSA , wklęsły MAK i prosty LIS . Zmierz narysowane kąty.
4. Narysuj kąty: prosty, półpełny, pełny, a następnie podaj ich miary.
5. Narysuj kąty: pełny i półpełny. Jaką figurę geometryczną tworzą ramiona kąta pełnego, a jaką półpełnego?



Kąt zerowy ma miarę 0° .



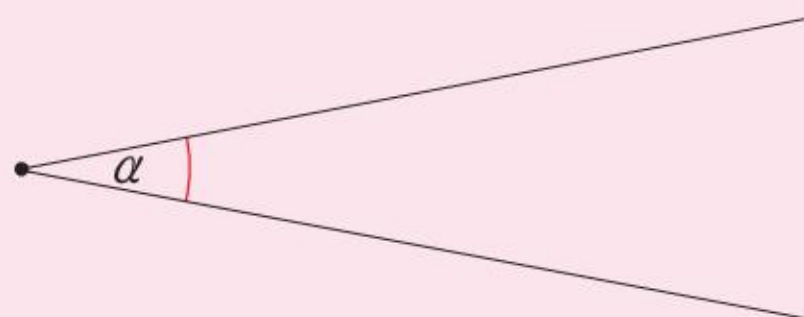
Kąt prosty ma miarę 90° .



Kąt półpełny ma miarę 180° .



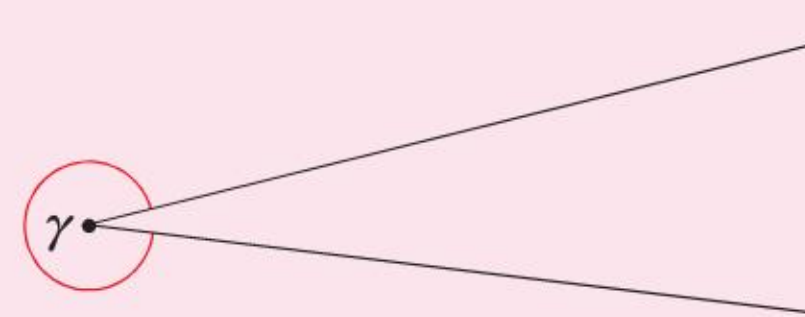
Kąt pełny ma miarę 360° .



Kąt ostry ma miarę większą niż 0° , ale mniejszą niż 90° , co zapisujemy: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.



Kąt rozwarty ma miarę większą niż 90° , ale mniejszą niż 180° , co zapisujemy: $90^\circ < \beta < 180^\circ$.



Kąt wklęsły ma miarę większą niż 180° , ale mniejszą niż 360° , co zapisujemy: $180^\circ < \gamma < 360^\circ$.

6. Które miary są miarami kątów ostrych, a które – rozwartych?

23° 112° 13° 140° 90° 181° 104° 115° 30° 45° 186° 180° 0° 20°

Więcej na temat

Jednostki miary kąta mniejsze od stopnia to minuty i sekundy kątowe.

1° – jeden stopień	miara kąta będącego $\frac{1}{360}$ kąta pełnego	
1' – jedna minuta (kątowa)	$\frac{1}{60}$ jednego stopnia	1° = 60'
1" – jedna sekunda (kątowa)	$\frac{1}{60}$ jednej minuty kątowej	1' = 60" 1° = 3600"

Czy potrafisz wyobrazić sobie 1° podzielony na 60 równych części? A na 3600 równych części? To właśnie minuty kątowe i sekundy kątowe.

7. Oblicz, ile:
- a) minut ma kąt półpełny, b) sekund ma kąt prosty, c) sekund ma kąt pełny.

Zadania

● Jakim rodzajem kąta jest kąt zaznaczony na zdjęciu?

a)



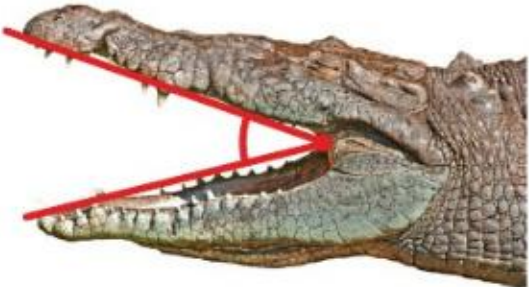
b)



c)



d)



e)



f)



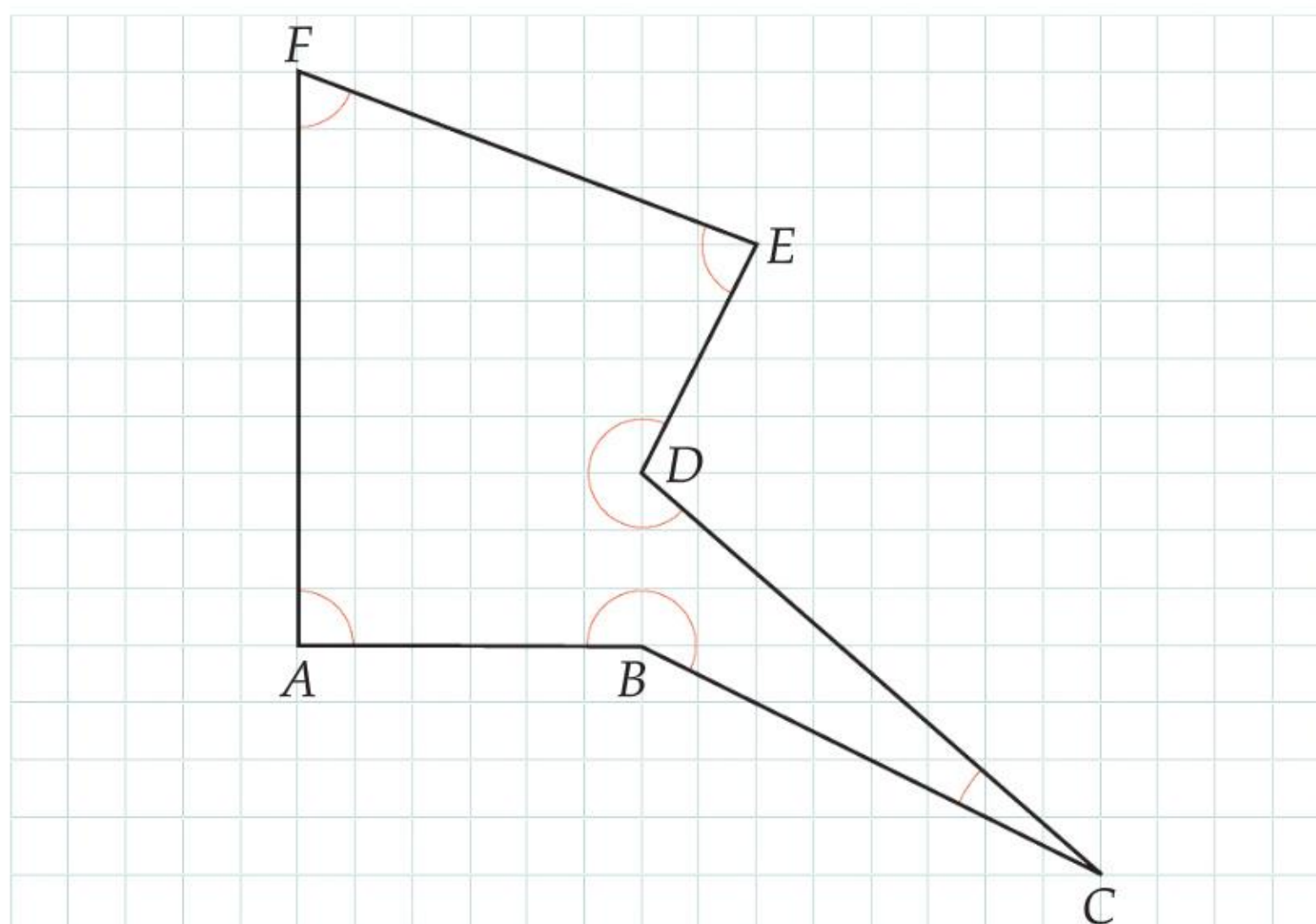
g)



- Narysuj kąt prosty i podziel go na trzy takie same kąty (skorzystaj z kątomierza). Ile stopni ma każdy z nich?
- Narysuj kąt:
 - a) który ma 20° ,
 - b) który ma 100° ,
 - c) 2 razy mniejszy od kąta prostego,
 - d) o 43° mniejszy od kąta półpełnego.
- Podane miary kątów podziel na grupy: I – kąty ostre, II – proste, III – rozwarte, IV – wklęsłe. Czy są miary kątów, których nie udało się przyporządkować do żadnej grupy? Jak się nazywają te kąty?

360°	$3 \cdot 45^\circ$	20°	145°	94°	$172^\circ - 3^\circ$	200°	$123^\circ - 23^\circ$
78°	259°	30°	$240^\circ - 60^\circ$	187°	152°	136°	
$67^\circ + 33^\circ$	240°	45°	154°	90°	$2 \cdot 45^\circ$	$54^\circ + 32^\circ$	180°

- Przerysuj figurę, która znajduje się poniżej. Zmierz zaznaczone kąty i zapisz ich miary.



- Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.
 - a) Każdy kąt ostry jest mniejszy od dowolnego kąta rozwartego.
 - b) Kąt cztery razy mniejszy od kąta pełnego to kąt prosty.
 - c) Jeśli kąt wklęsły zmniejszymy dwukrotnie, to zawsze otrzymamy kąt rozwarty.
 - d) Kąt o 50° większy od dowolnego kąta ostrego to kąt rozwarty.

4.5 Kąty przyległe i kąty wierzchołkowe

Podejmij temat



Jaka jest miara kąta utworzonego przez wskazówkę minutową i czerwoną, a jaka – przez godzinową i czerwoną? Jaki rodzaj kąta utworzyły wskazówki godzinowa i minutowa?



Ciekawe!

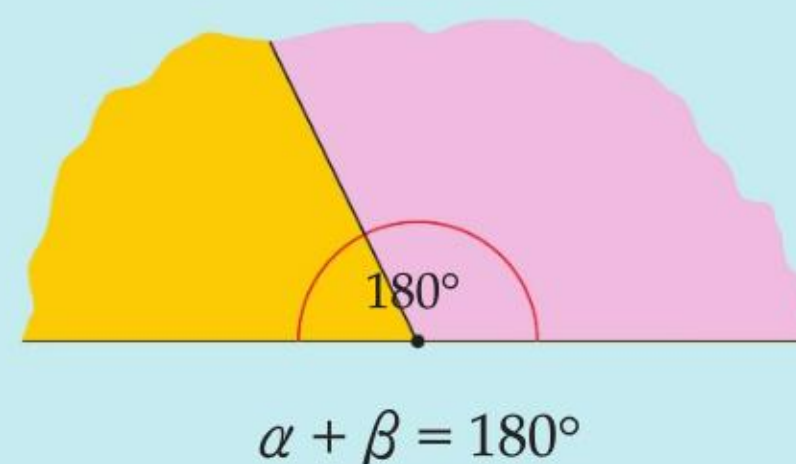
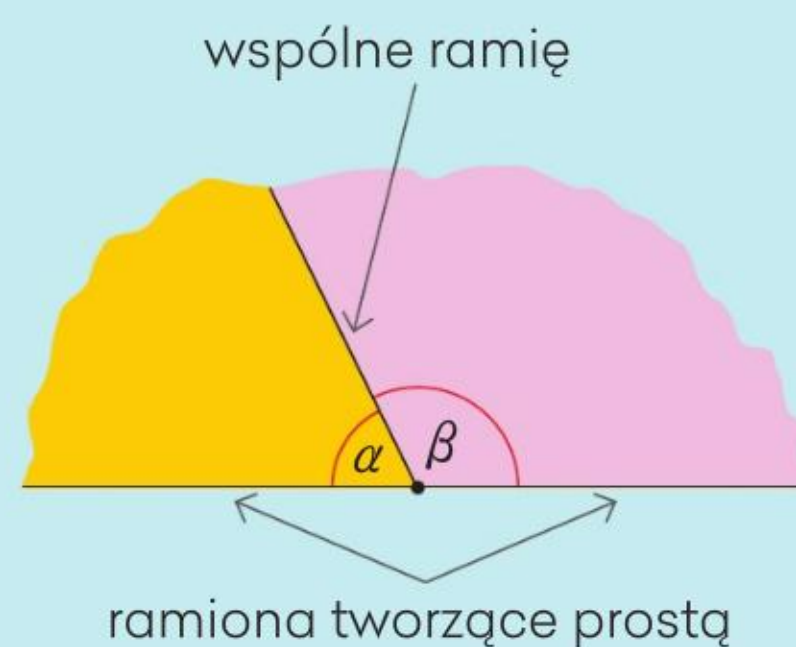
Tradycyjny budzik mechaniczny oprócz wskazówki godzinowej i minutowej (oraz ewentualnie sekundowej) ma wskazówkę służącą do ustawiania czasu budzenia za pomocą pokrętła znajdującego się z tyłu, na obudowie. Na rysunku obok jest to wskazówka czerwona.

1. Narysuj kąt półpełny i podziel go na dwa dowolne kąty. Zmierz te kąty.

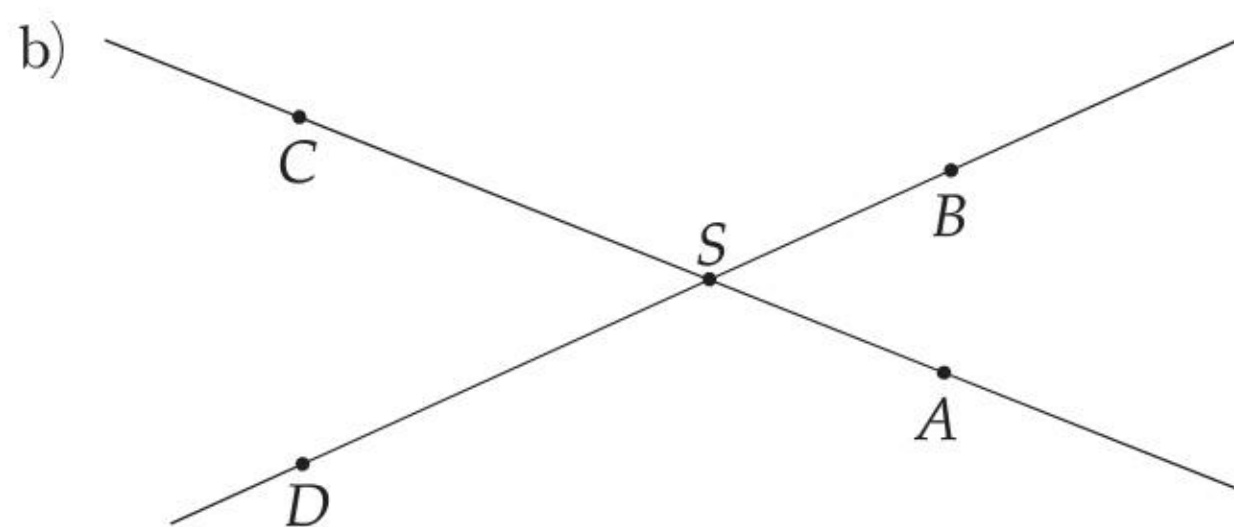
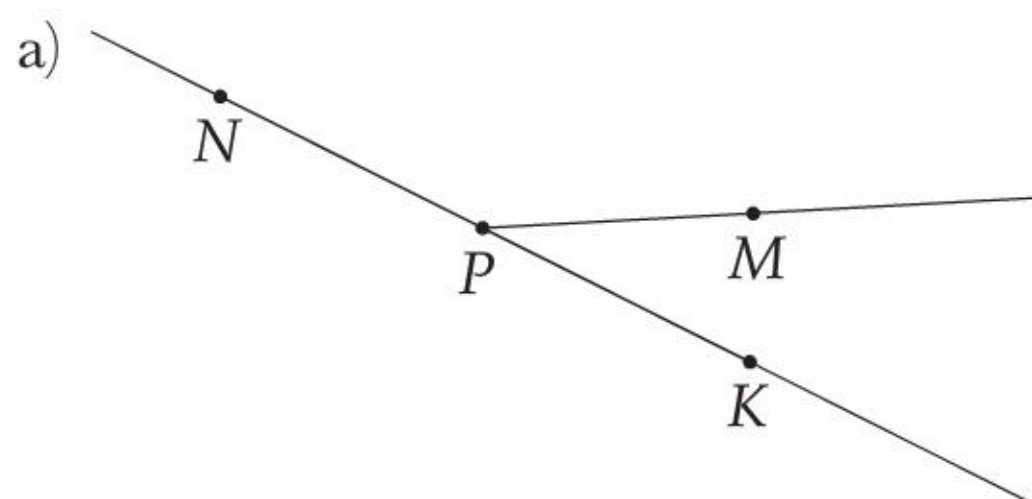
Dwa kąty, które powstały na twoim rysunku w ćwiczeniu 1, nazywamy kątami przyległymi.

Kąty przyległe to dwa kąty, które mają jedno wspólne ramie, a pozostałe ramiona tych kątów tworzą prostą.

Suma miar kątów przyległych jest równa 180° .

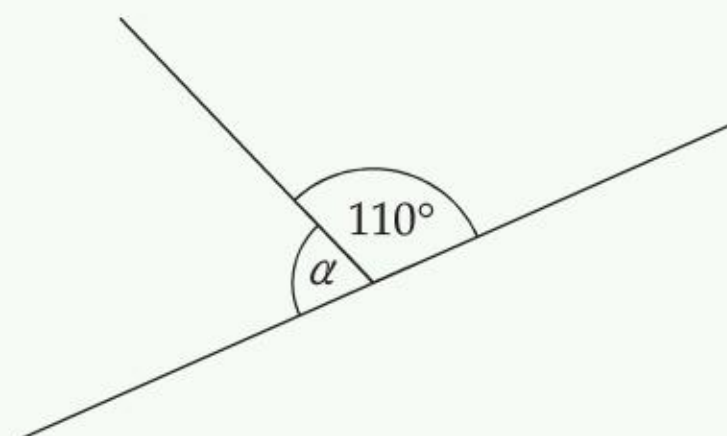


2. Wypisz wszystkie pary kątów przyległych występujące na rysunku.



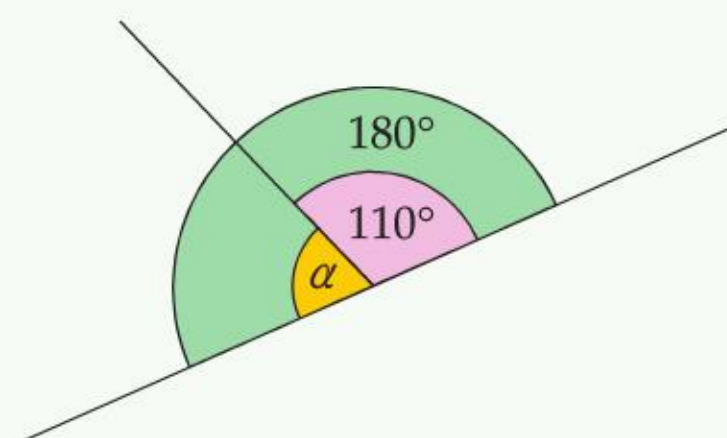
Przykład 1

Obliczmy, jaką miarę ma kąt α .

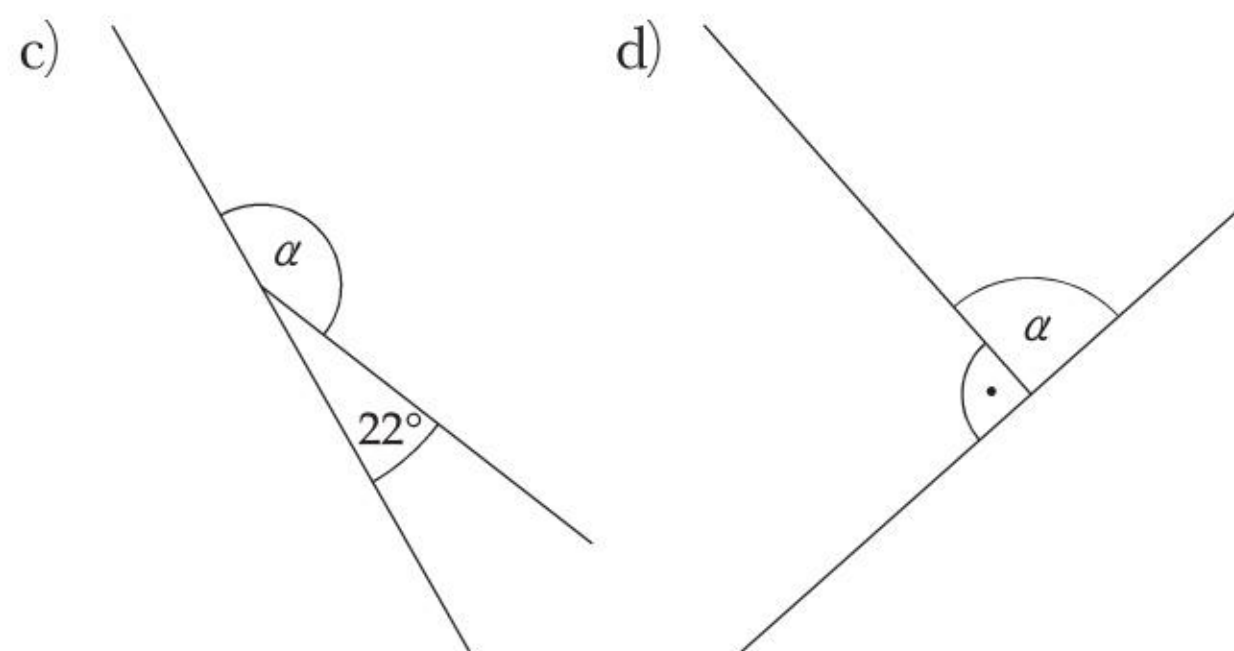
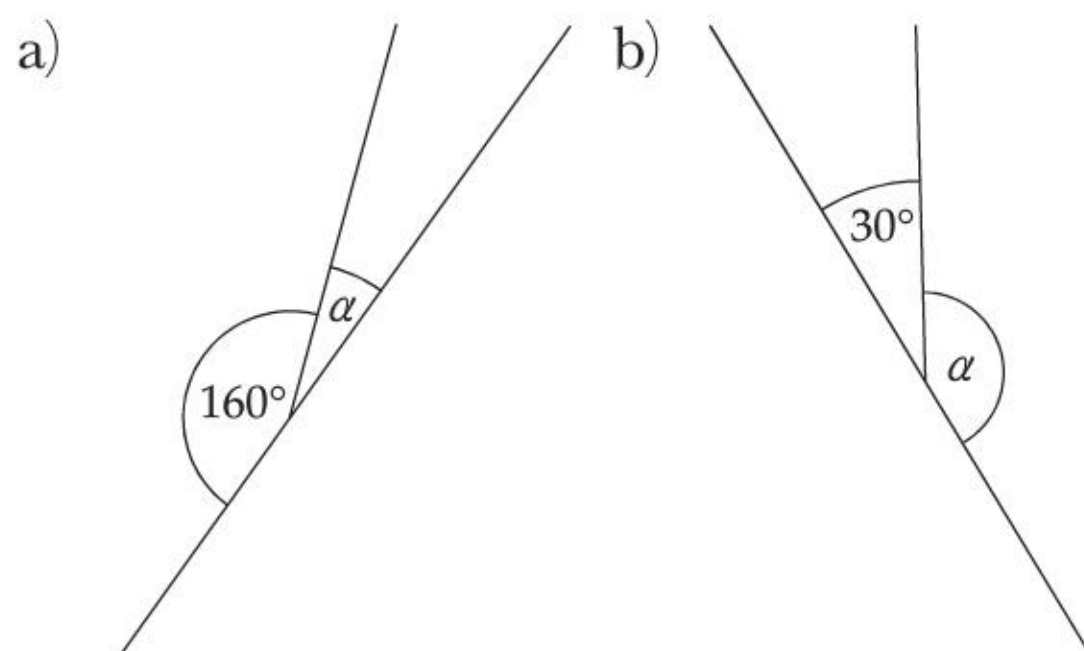


Zauważmy, że kąty na rysunku są kątami przyległymi, więc suma ich miar wynosi 180° ,

zatem $\alpha + 110^\circ = 180^\circ$,
czyli $\alpha = 180^\circ - 110^\circ$,
dlatego $\alpha = 70^\circ$.



3. Podaj miarę kąta α .



4. Oblicz miarę kąta przyległego do kąta o podanej mierze.

- a) 35°
e) 97°

- b) 80°
f) 134°

- c) 120°
g) 156°

- d) 18°
h) 55°

5. Narysuj dwie proste, które się przecinają, ale nie są prostopadłe. Pokoloruj na żółto kąty ostre, a na zielono – rozwarte. Zmierz każdy z tych kątów. Co można powiedzieć o kątach ostrych, a co – o rozwartych?

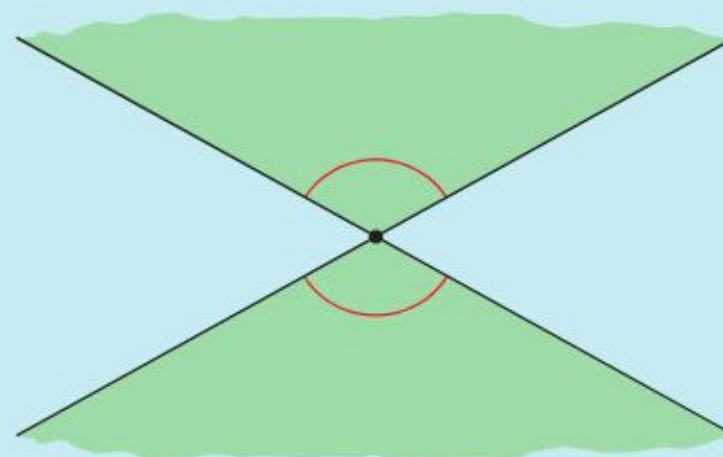
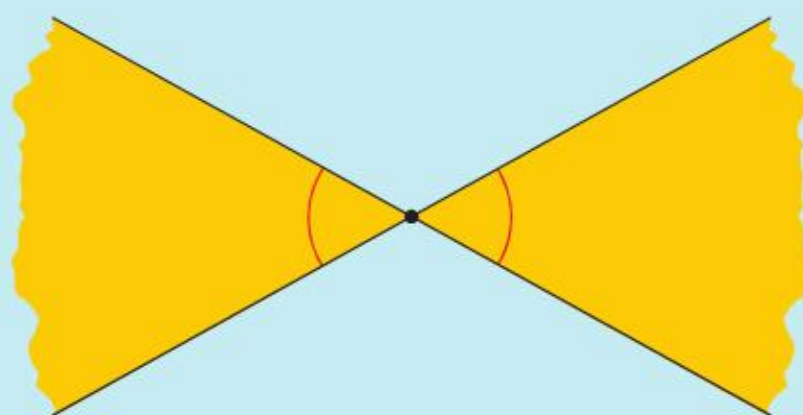
Każdą parę kątów, które powstały na rysunku w ćwiczeniu 5 (dwa kąty ostre i dwa rozwarte), nazywamy kątami wierzchołkowymi.

Zauważyłeś, że w ćwiczeniu 5 kąty ostre mają taką samą miarę?

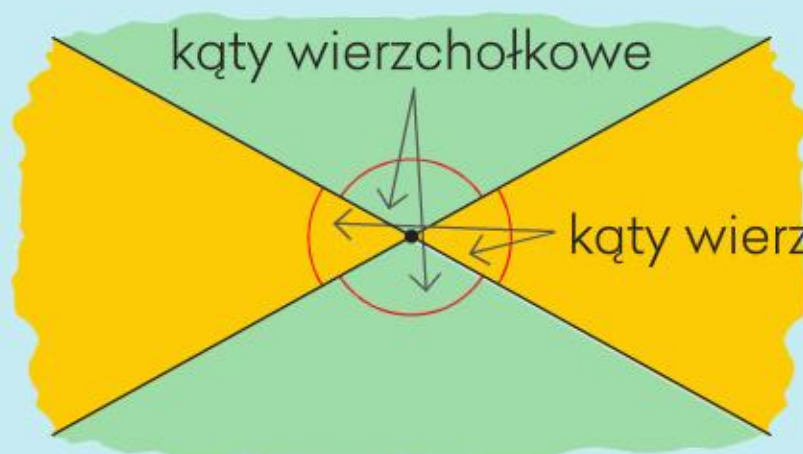
Faktycznie! Rozwarte też są sobie równe.



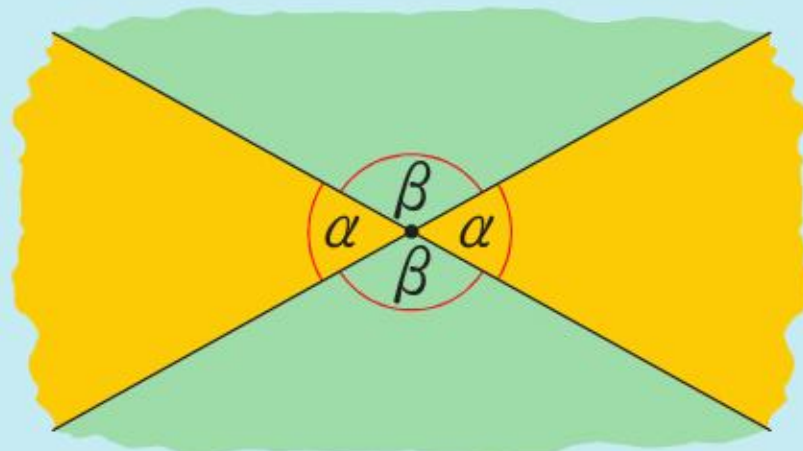
Kąty wierzchołkowe to dwa kąty, które mają wspólny wierzchołek, a ramiona jednego są przedłużeniem ramion drugiego.



W wyniku przecięcia się dwóch prostych powstają dwie pary kątów wierzchołkowych.

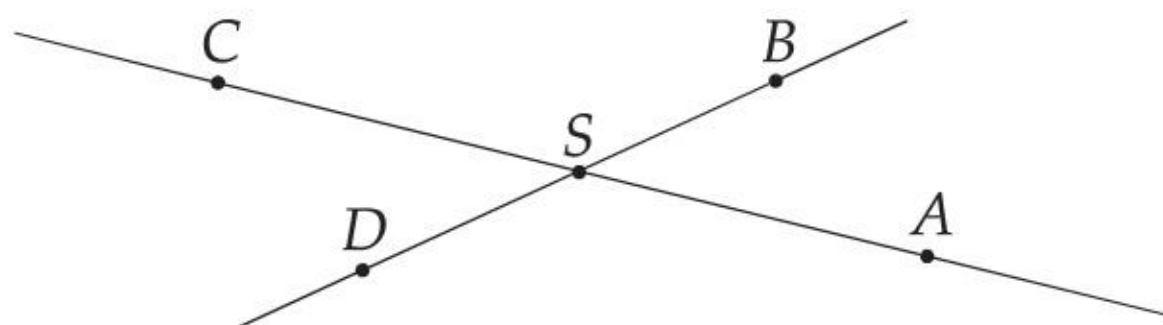


Kąty wierzchołkowe są sobie równe.



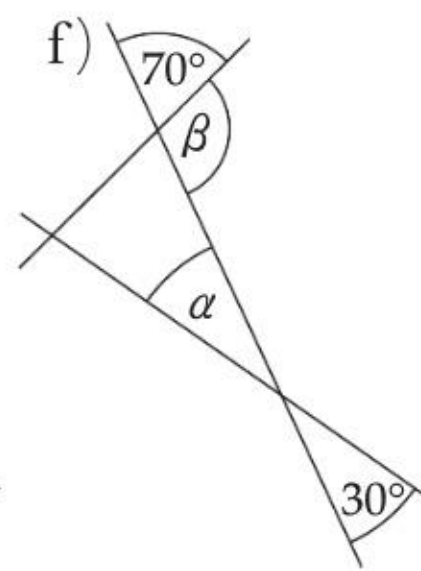
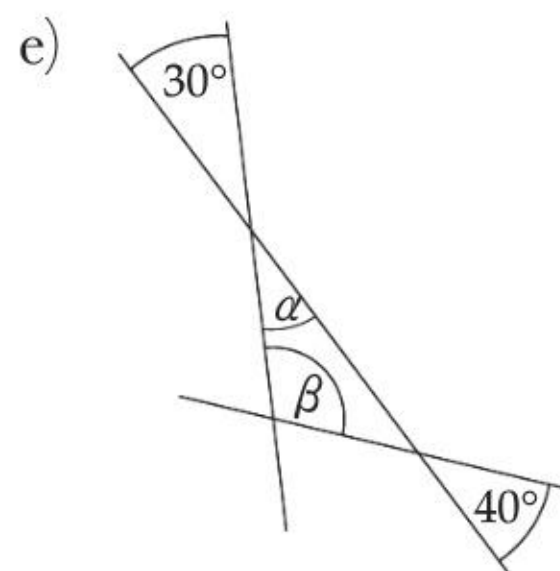
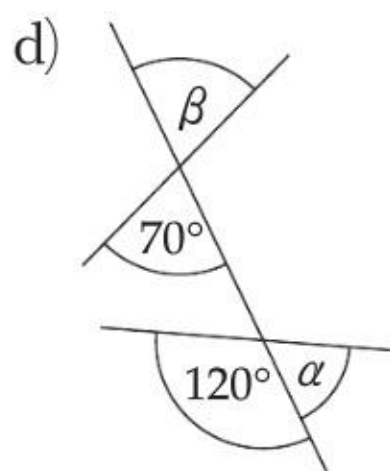
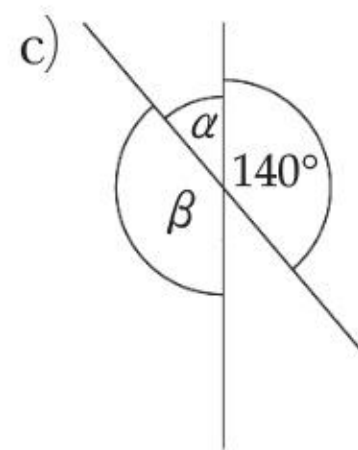
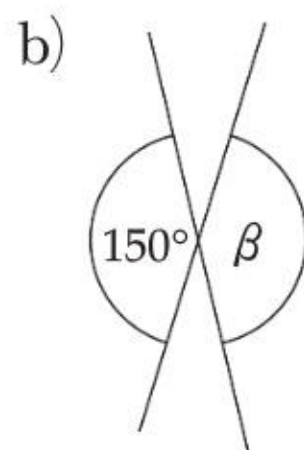
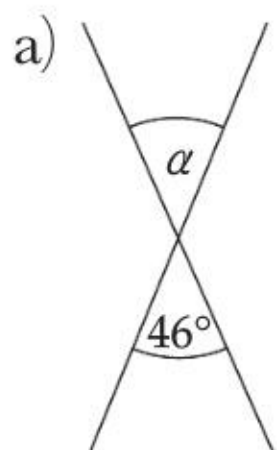
Ani kąty wierzchołkowe, ani kąty przyległe nie mogą być kątami wklęsłymi.

6. Wypisz wszystkie pary kątów wierzchołkowych występujące na rysunku obok.
7. Narysuj dwie przecinające się proste w taki sposób, żeby przynajmniej jeden z powstałych kątów wierzchołkowych był kątem prostym. Co zauważasz?



Zadania

- Narysuj prostokąt $ABCD$ i jego przekątne przecinające się w punkcie S . Wypisz pary kątów wierzchołkowych, które znajdują się na rysunku.
- Narysuj kąty przyległe, które mają równe miary.
- Jeden z kątów przyległych jest o 63° mniejszy od kąta prostego. Jakie miary mają te kąty przyległe?
A. 27° i 63° B. 27° i 153° C. 17° i 163° D. 117° i 63°
- Jeden z kątów przyległych jest 4 razy mniejszy od kąta półpełnego. Jakie miary mają te kąty przyległe?
A. 125° i 55° B. 90° i 90° C. 45° i 135° D. 4° i 166°
- ★ Narysuj trzy proste przecinające się w jednym punkcie. Ile par kątów wierzchołkowych powstało w ten sposób?
- Ile stopni mają kąty wierzchołkowe utworzone przez dwie proste przecinające się pod kątem 35° ?
- Czy kąty utworzone przez dwie proste przecinające się mogą mieć 45° i 125° ? Odpowiedź uzasadnij.
- Podaj miary kątów α i β .



- ★ Z dwóch kątów przyległych jeden jest o 30° większy od drugiego. Jakie miary mają te kąty?

4.6 Wielokąty. Obwód wielokąta

Podejmij temat



Czy potrafisz rozpoznać, które z narysowanych figur są wielokątami?
Których figur do wielokątów nie zaliczymy? Czy wiesz, dlaczego?

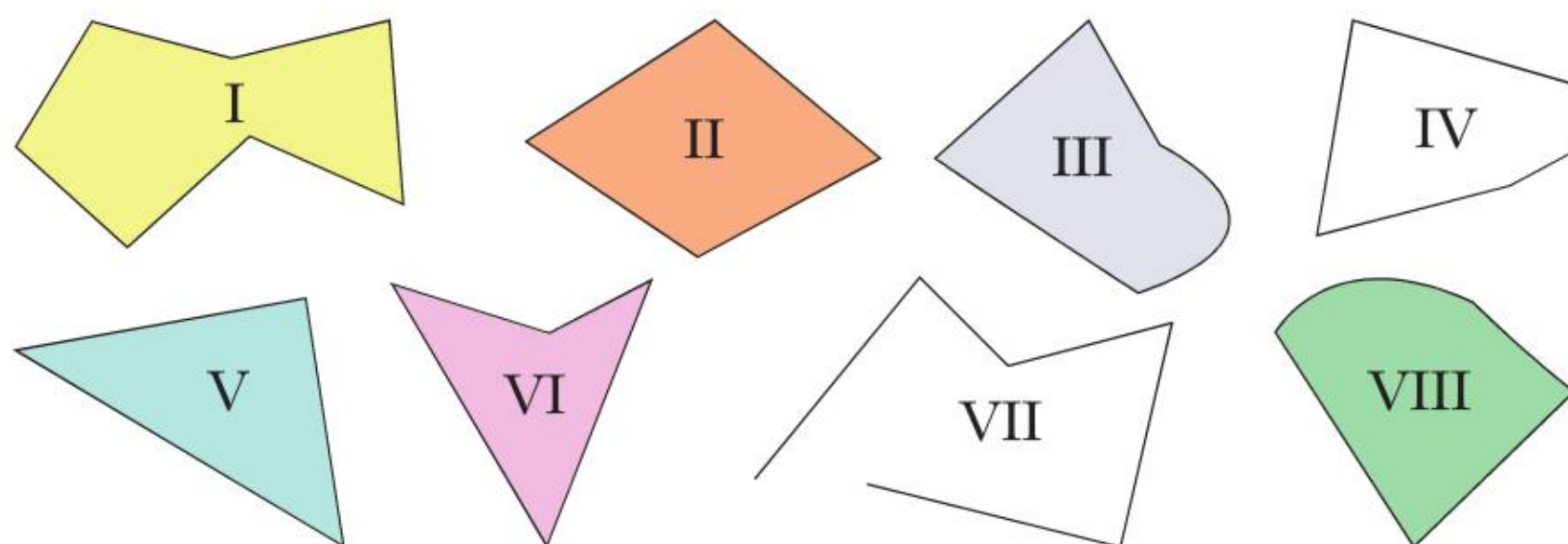
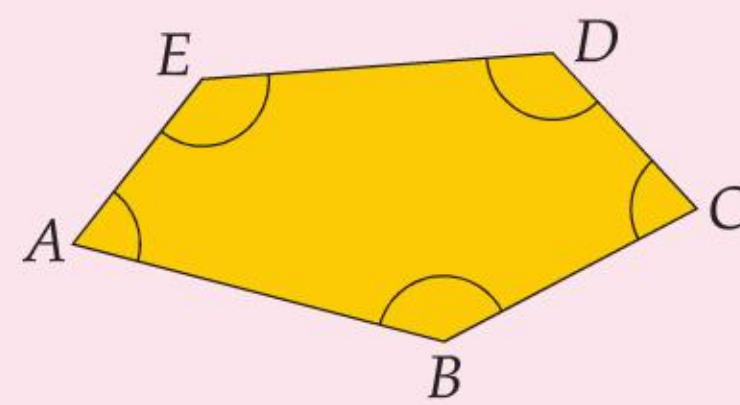


Figura narysowana obok to **wielokąt** $ABCDE$.

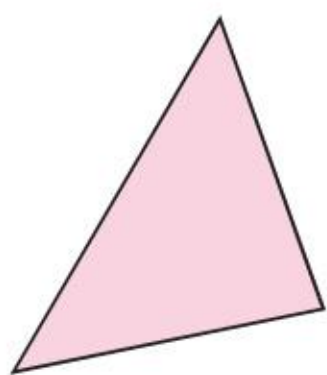
Punkty: A, B, C, D, E , to **wierzchołki wielokąta** $ABCDE$.

Odcinki: AB, BC, CD, DE, EA , to **boki wielokąta** $ABCDE$.

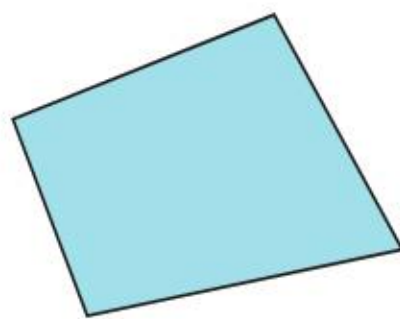
Kąty: EAB, ABC, BCD, CDE, DEA , to **kąty** (wewnętrzne) **wielokąta** $ABCDE$.



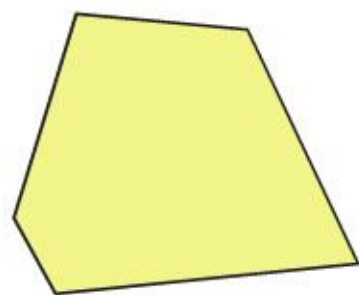
Przypomnijmy sobie nazwy wielokątów. Tworzymy je według następującej zasady:



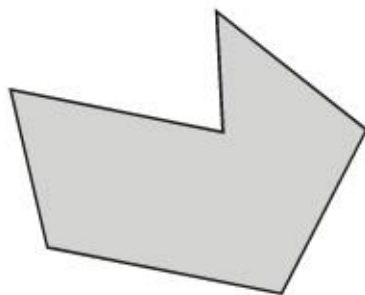
Wielokąt o **trzech** bokach nazywamy **trójkątem**.



Wielokąt o **czterech** bokach nazywamy **czworokątem**.



Wielokąt o **pięciu** bokach nazywamy **pięciokątem**.



Wielokąt o **sześciu** bokach nazywamy **sześciokątem**.

Pamiętasz, że każdy wielokąt ma taką samą liczbę boków, kątów oraz wierzchołków? A więc trójkąt ma 3 boki, 3 kąty i 3 wierzchołki, czworokąt ma 4 boki, 4 kąty i 4 wierzchołki... i tak można wyliczać w nieskończoność.



Pewnie, że pamiętam. Mielśmy to przecież w czwartej klasie!

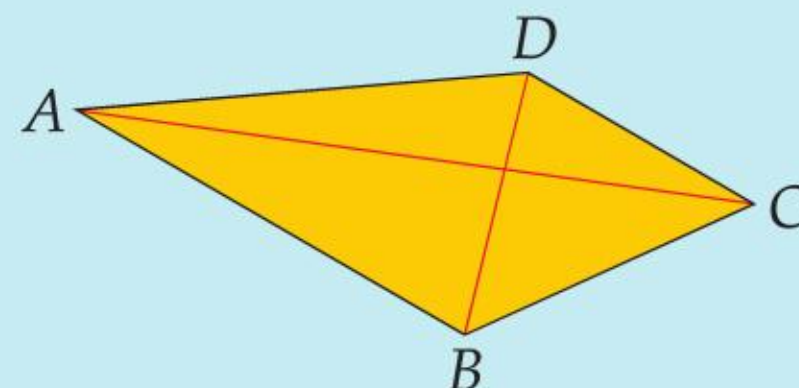
1. Odpowiedz na pytania.

- a) Ile kątów ma trójkąt?
- c) Ile kątów ma czworokąt?
- e) Ile kątów ma sześciokąt?

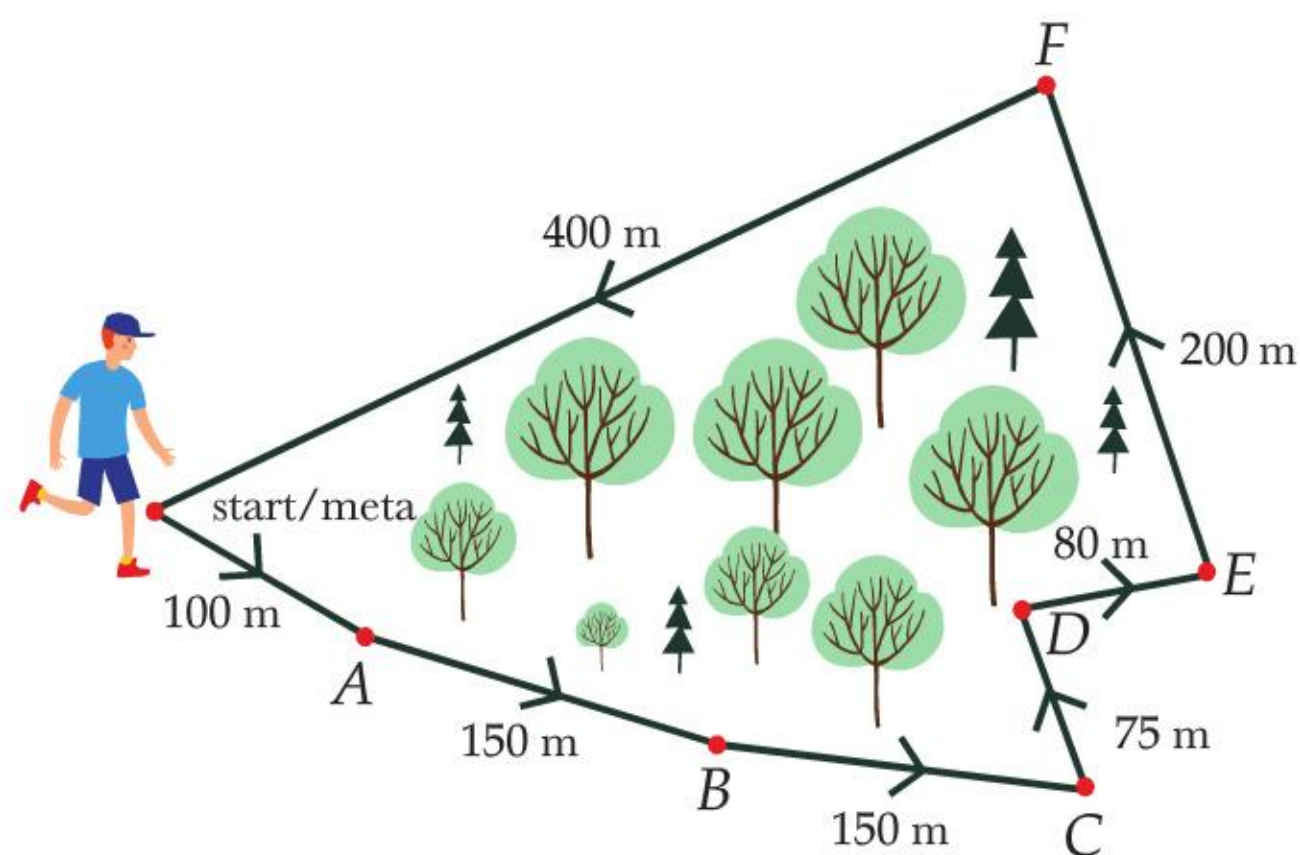
- b) Ile wierzchołków ma trójkąt?
- d) Ile boków ma dziesięciokąt?
- f) Ile wierzchołków ma siedmiokąt?

Przekątna wielokąta to odcinek, który łączy dwa wierzchołki tego wielokąta nieleżące przy jednym boku.

Przekątnymi czworokąta $ABCD$ na rysunku obok są odcinki AC i BD .



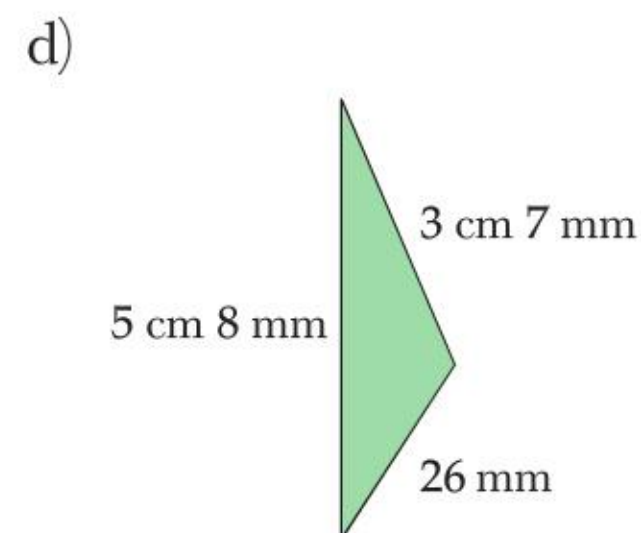
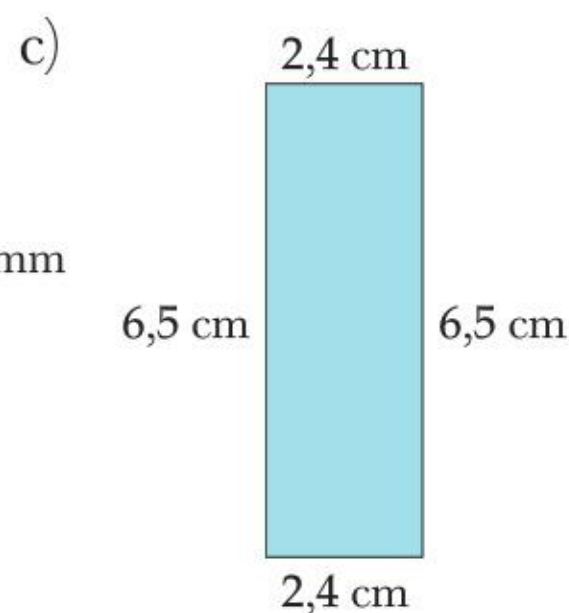
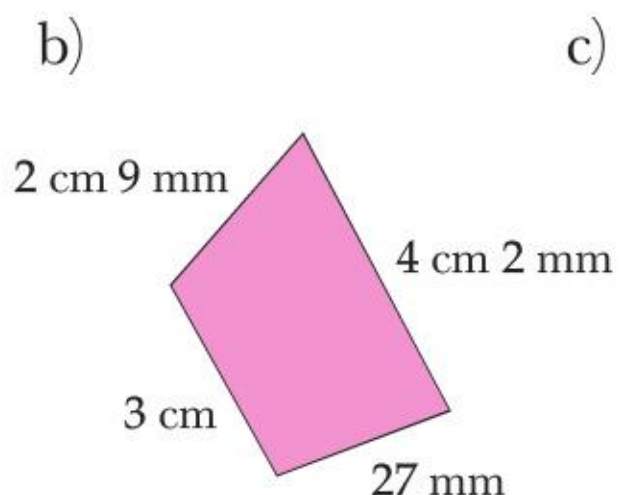
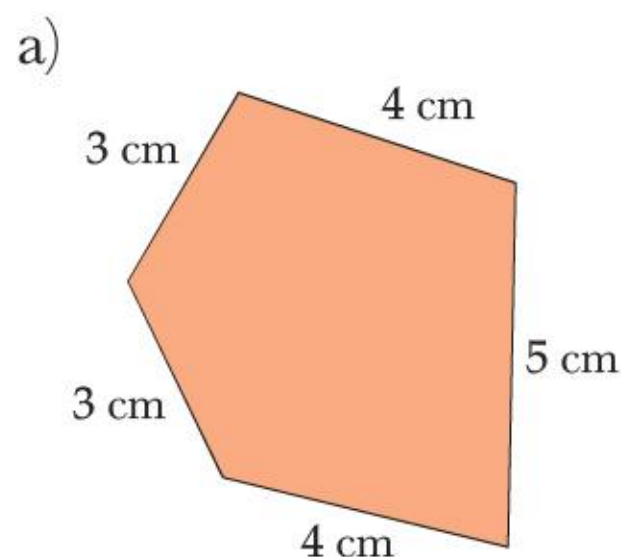
2. Narysuj dowolny pięciokąt oraz sześciokąt i wszystkie ich przekątne. Ile przekątnych ma każdy z tych wielokątów?
3. Podczas szkolnych zawodów sportowych w biegach uczniowie muszą okrążyć park. Trasa przebiega przez wyznaczone punkty: A, B, C, D, E, F , tak jak pokazano na rysunku obok. Jaki dystans muszą pokonać uczniowie, żeby okrążyć ten park?



Obwód wielokąta to suma długości wszystkich boków tego wielokąta.

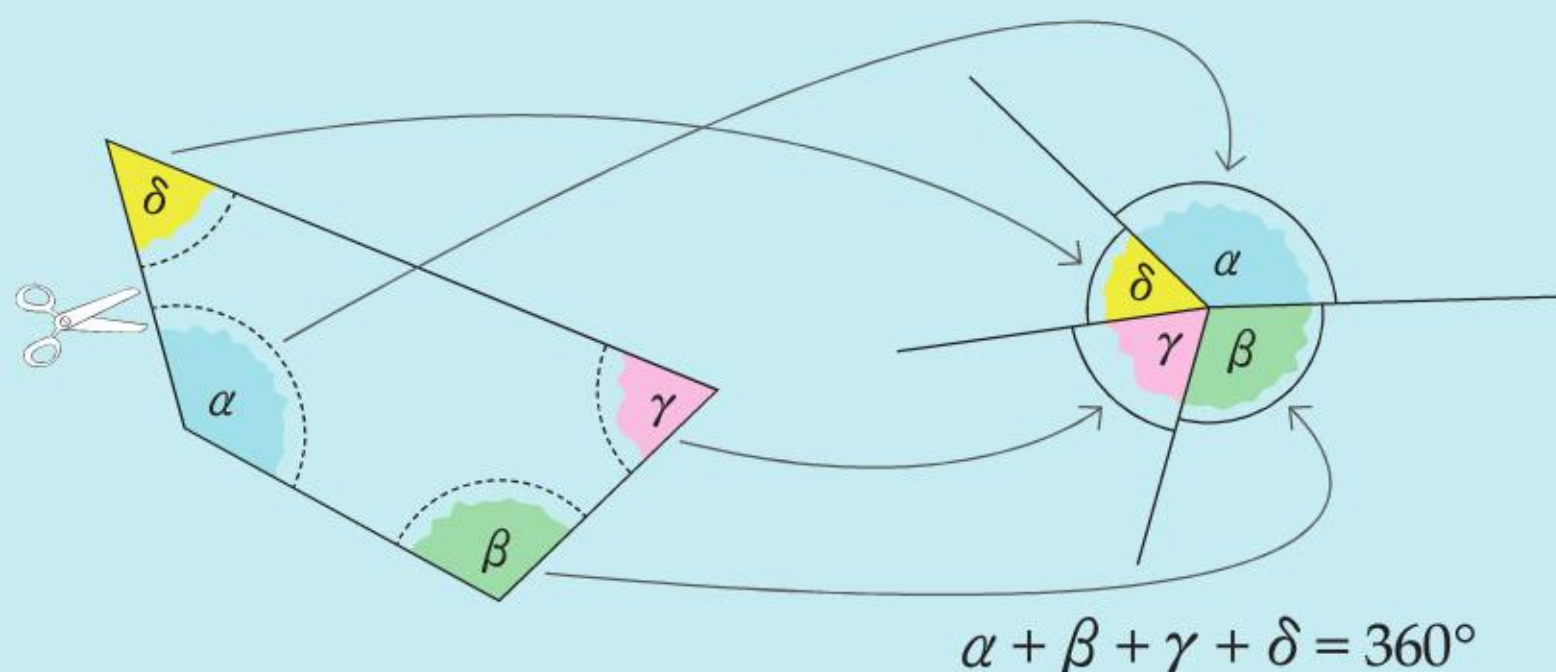
Będziemy go oznaczać *Obw.*

4. Oblicz obwód wielokąta.



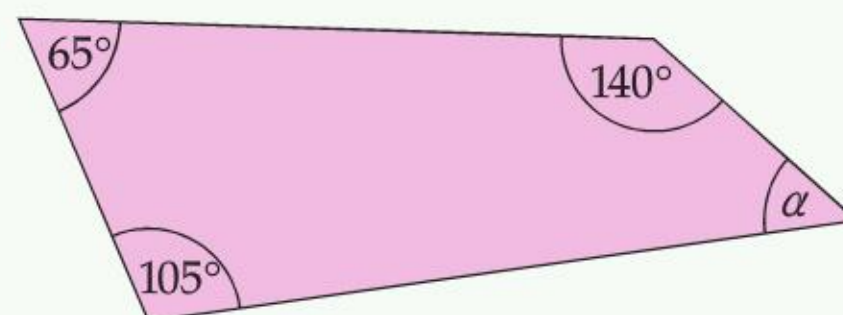
5. Narysuj dowolny czworokąt. Zmierz jego kąty. Oblicz sumę miar kątów tego czworokąta. Porównaj swój wynik z wynikami innych osób w klasie.

Suma miar kątów wewnętrznych dowolnego czworokąta wynosi 360° .



Przykład 1

Obliczmy miarę kąta α narysowanego obok czworokąta.



Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta wynosi 360° , więc:

$$140^\circ + 65^\circ + 105^\circ + \alpha = 360^\circ$$

$$310^\circ + \alpha = 360^\circ$$

$$\alpha = 360^\circ - 310^\circ$$

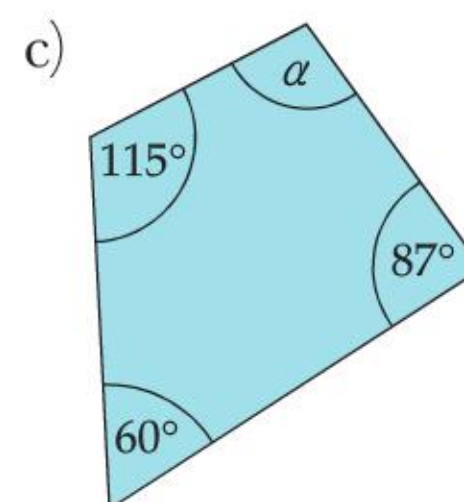
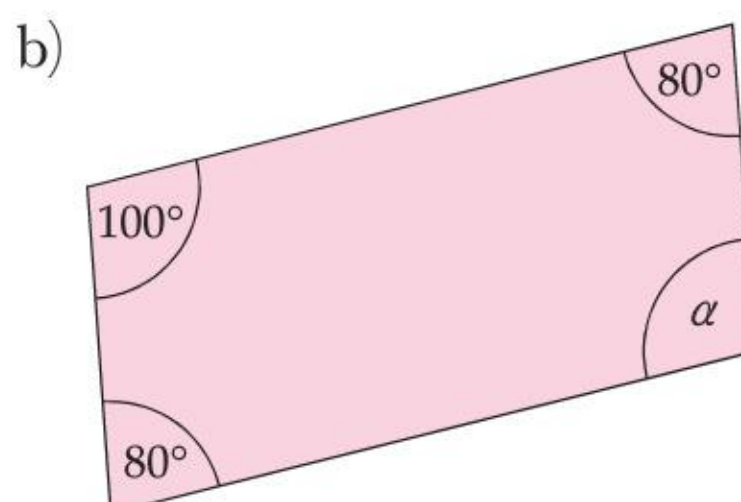
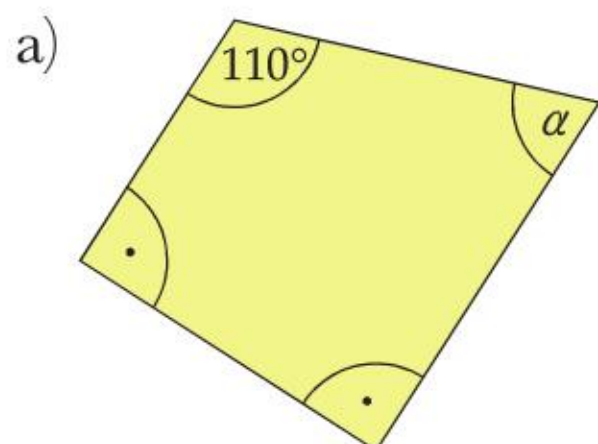
$$\alpha = 50^\circ$$

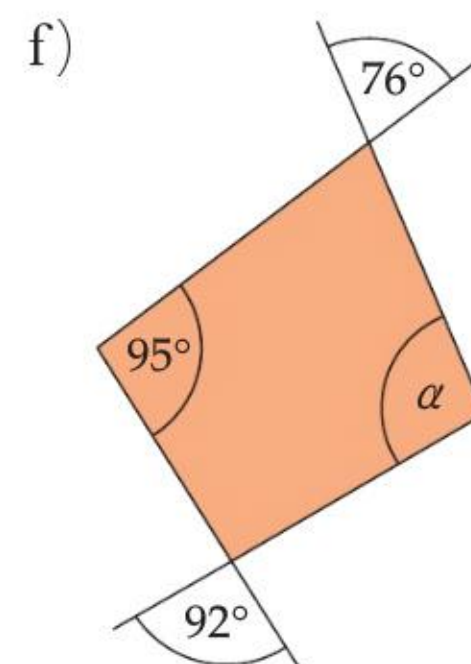
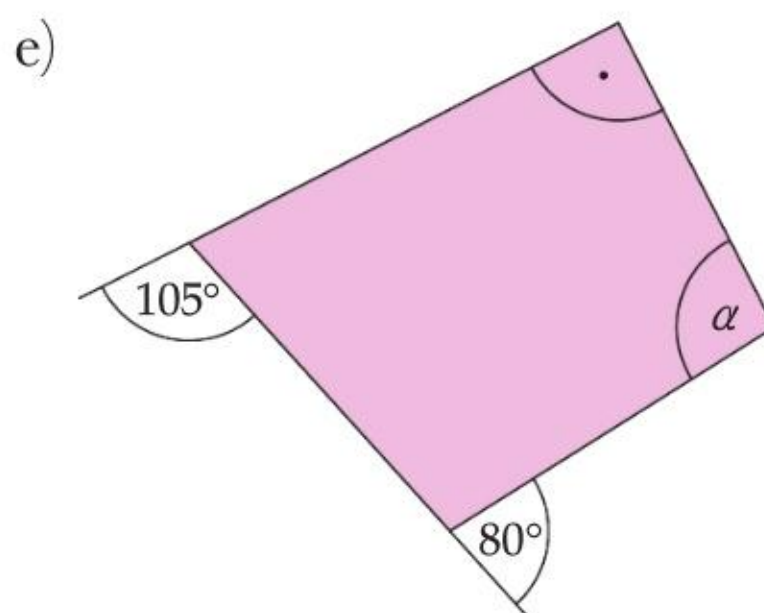
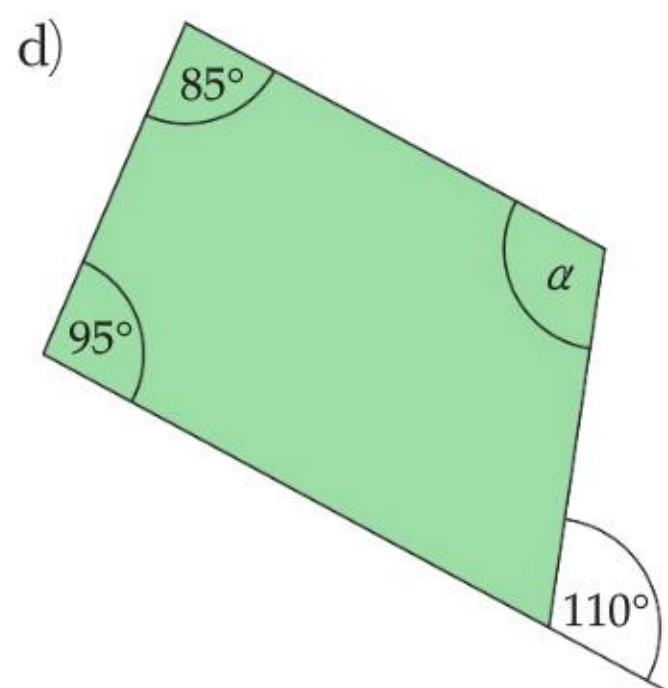
Czyli trzeba dodać miary wszystkich znanych kątów...



... i wynik odjąć od 360° .

6. Oblicz miarę kąta α .





Zadania

- Narysuj dwie proste równoległe a i b oraz dwie proste c i d prostopadłe do prostych a i b . Oznacz punkty przecięcia tych prostych literami A, B, C, D . Jaką figurą jest czworokąt $ABCD$? Zmierz odpowiednie odcinki i oblicz obwód tej figury.
- Narysuj dowolny siedmiokąt i wszystkie jego przekątne. Ile ich jest?
- Jakie długości mogą mieć boki czworokąta o obwodzie równym 45,5 cm? Podaj trzy przykłady.
- Trójkąt ma boki równej długości. Jaką długość mają jego boki, jeśli obwód tego trójkąta wynosi 36,3 cm?

A. 9,1 cm	B. 12 cm
C. 12,1 cm	D. 9 cm
- Obwód pięciokąta jest równy 150 cm. Wiadomo, że wszystkie jego boki są równe. Jaką długość mają boki tego pięciokąta?

A. 250 mm	B. 50 cm
C. 30 mm	D. 300 mm
- Jeden z boków czworokąta $ABCD$ ma 13 cm, a każdy następny jest trzy razy dłuższy od poprzedniego. Oblicz długości boków tego czworokąta oraz jego obwód.
- Narysuj czworokąt, który ma dwa kąty proste, a jeden z pozostałych kątów ma 70° . Oblicz, ile stopni ma czwarty kąt. Upewnij się, czy twój rysunek jest dokładny.
- Sprawdź, czy podane miary kątów mogą być miarami kątów wewnętrznych czworokąta.

a) $25^\circ, 25^\circ, 75^\circ, 75^\circ$
b) $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$
c) $120^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 60^\circ$
d) $38^\circ, 151^\circ, 94^\circ, 75^\circ$
- ★ Trójkąt ABC ma obwód równy 27 cm. Bok BC jest o 3 cm dłuższy od boku AB , a bok AC jest o 3 cm dłuższy od boku BC . Jakie długości mają boki tego trójkąta?
- ★ Jakie miary mają kąty wewnętrzne czworokąta $ABCD$, jeśli wiadomo, że kąt o wierzchołku A jest najmniejszy, a każdy następny jest dwa razy większy od poprzedniego?

4.7 Trójkąt i jego własności

Podejmij temat



A ty potrafisz nazwać figury widoczne na latawcach?

Wiesz, że nasze latawce to czworokąty?



Jasne! I wiem też, na jakie figury zostały podzielone!

1. Zaznacz trzy punkty, które nie leżą na jednej prostej, i połącz je odcinkami. Zamaluj obszar ograniczony tymi odcinkami. Jaka figura powstała?

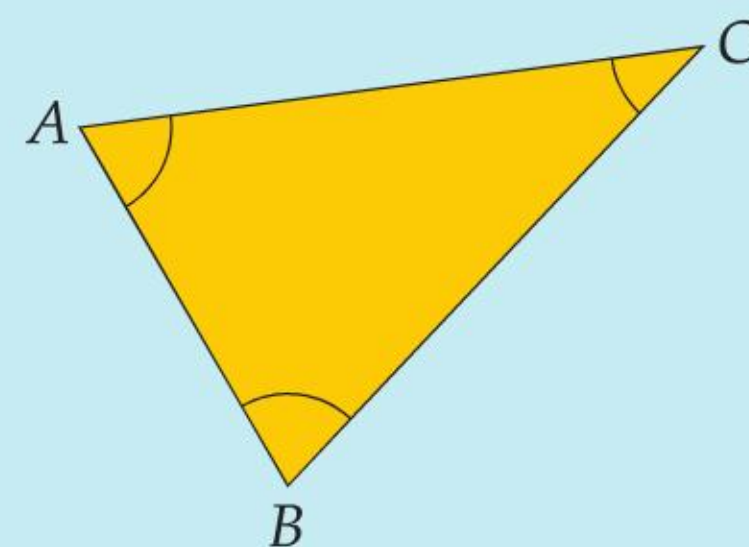
Trójkąt to wielokąt o najmniejszej liczbie boków.

Na rysunku obok przedstawiono trójkąt ABC .

Punkty: A, B, C , to **wierzchołki trójkąta** ABC .

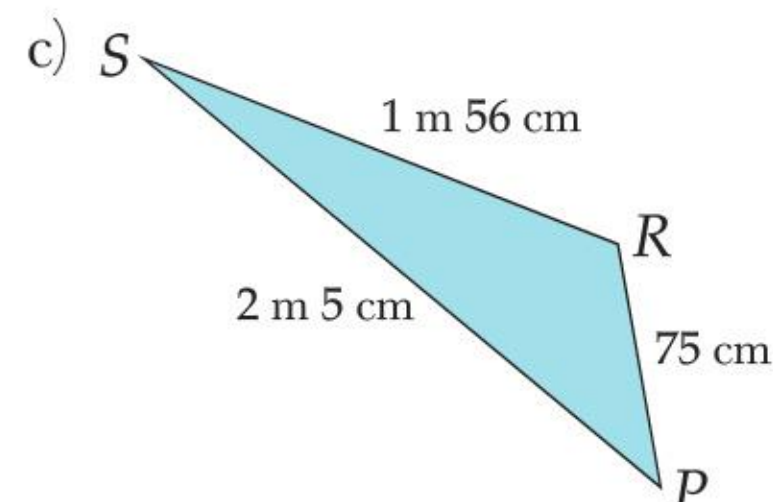
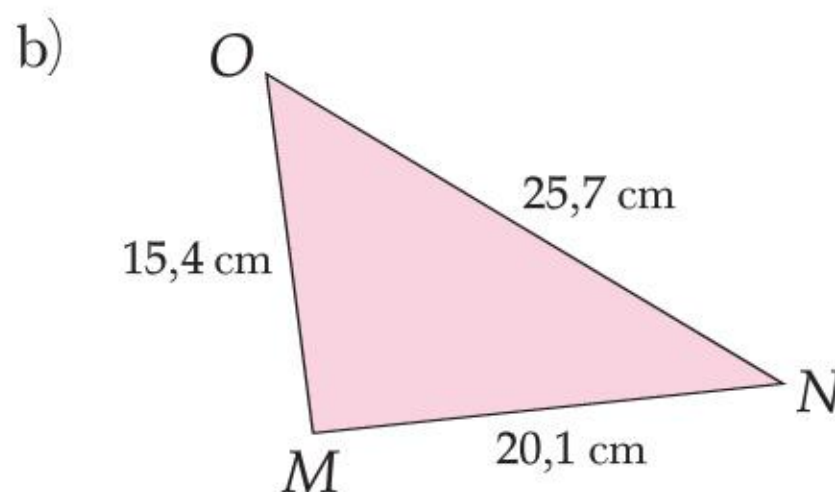
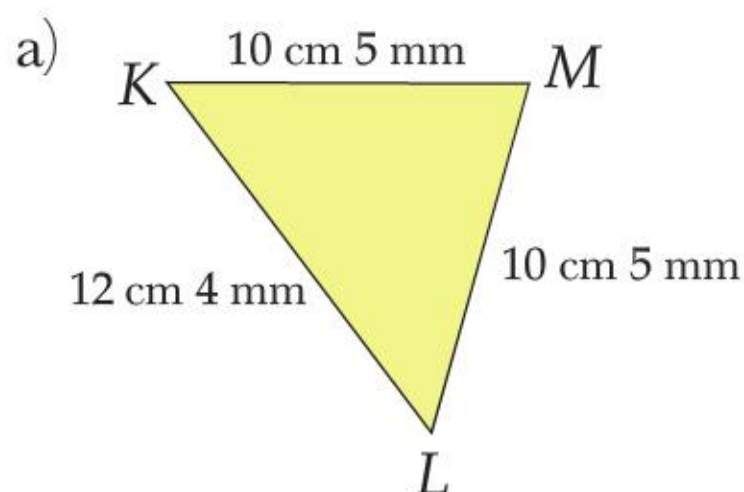
Odcinki: AB, BC, CA , to **boki trójkąta** ABC .

Kąty: CAB, ABC, BCA , to **kąty** (wewnętrzne) **trójkąta** ABC .



2. Narysuj dowolny trójkąt PRS . Wypisz jego wierzchołki, boki i kąty.

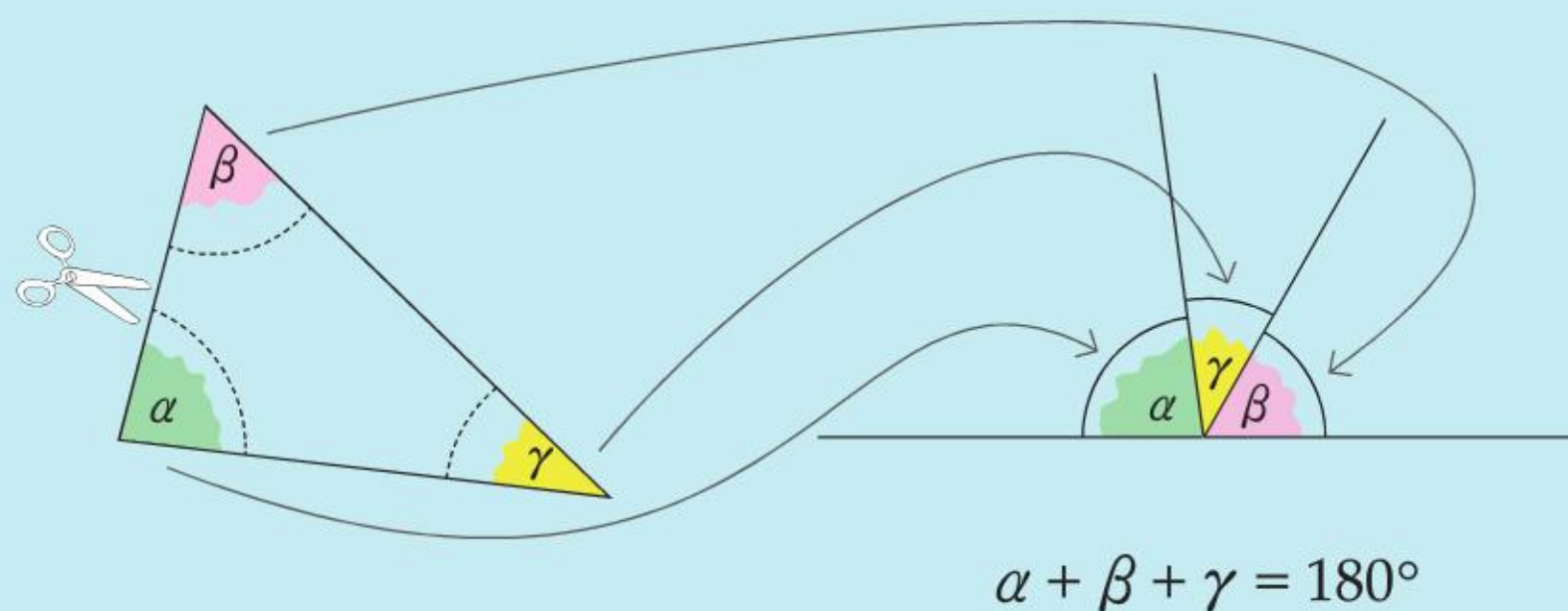
3. Oblicz obwód trójkąta. Długości boków odczytaj z rysunku.



4. Oblicz obwód trójkąta o podanych długościach boków.
- 10 cm, 15 cm, 6 cm
 - 13 cm, 14 cm 2 mm, 6 cm 6 mm
 - 12 cm 8 mm, $10\frac{1}{2}$ cm, 8,6 cm
 - 2,5 cm, 3 cm, trzeci bok jest dwa razy dłuższy od pierwszego
5. Obwód trójkąta jest równy 36 cm. Dwa jego boki mają odpowiednio 12 cm i 16 cm. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.
6. Narysuj dowolny trójkąt ABC . Zmierz jego kąty i dodaj otrzymane miary.



Suma miar kątów wewnętrznych każdego trójkąta wynosi 180° .

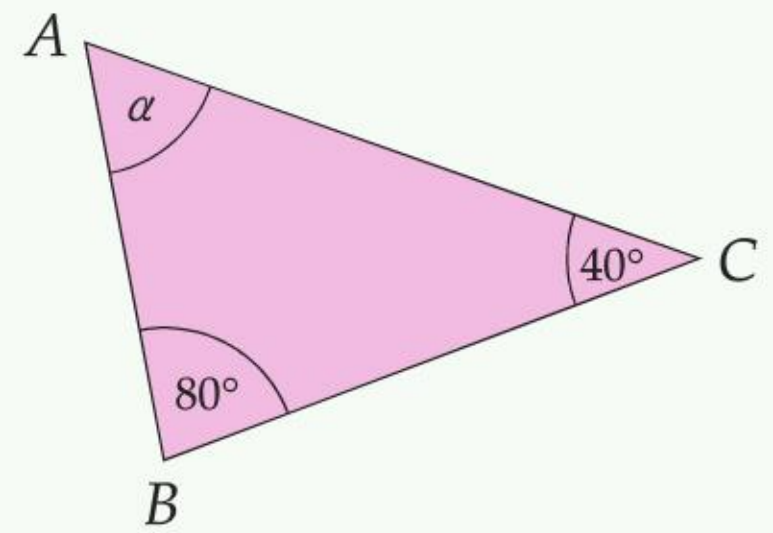


Powyższy rysunek pokazuje, w jaki sposób można sprawdzić, że suma miar kątów trójkąta jest równa 180° .

7. Wytnij z papieru dowolny trójkąt. Oznacz jego kąty literami: α , β , γ . Wykonaj cięcia i ułóż fragmenty trójkąta jak pokazano na rysunku powyżej. Czy połączone kąty twojego trójkąta tworzą kąt półpełny?

Przykład 1

Obliczmy, ile stopni ma kąt α trójkąta ABC .



Suma miar kątów wewnętrznych każdego trójkąta wynosi 180° , więc:

$$80^\circ + 40^\circ + \alpha = 180^\circ$$

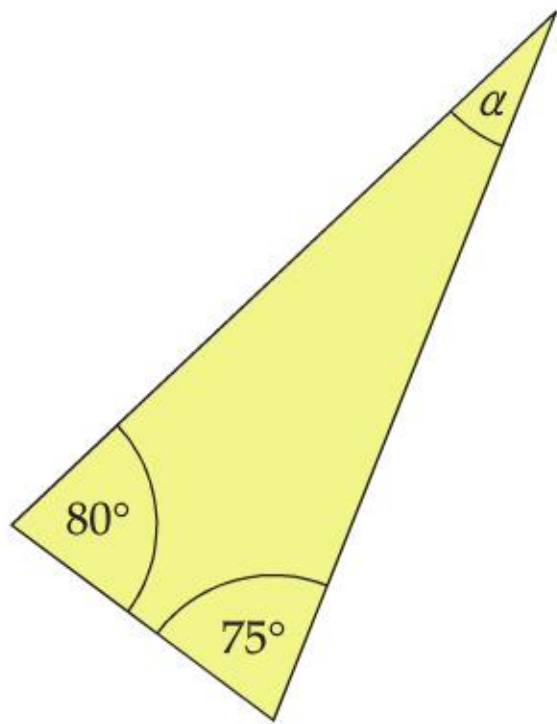
$$120^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 120^\circ$$

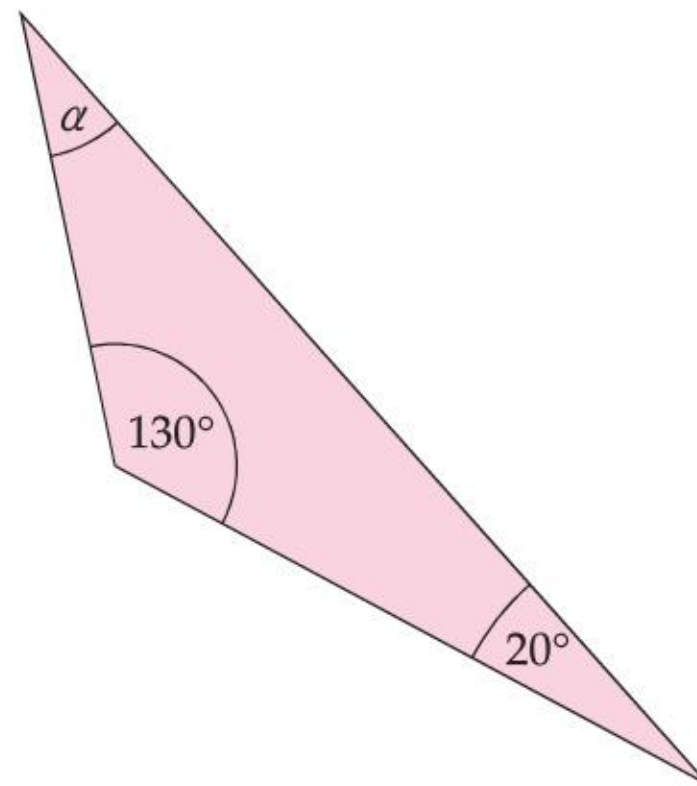
$$\alpha = 60^\circ$$

8. Oblicz, ile stopni ma kąt α .

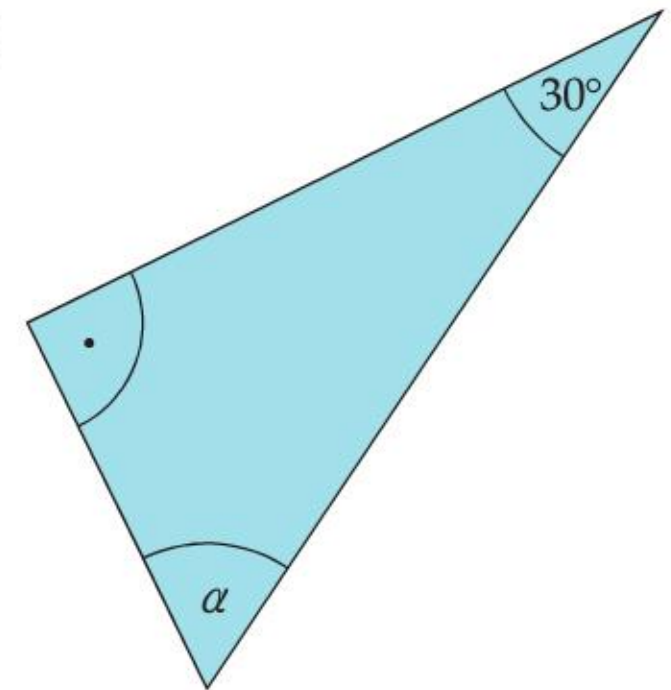
a)



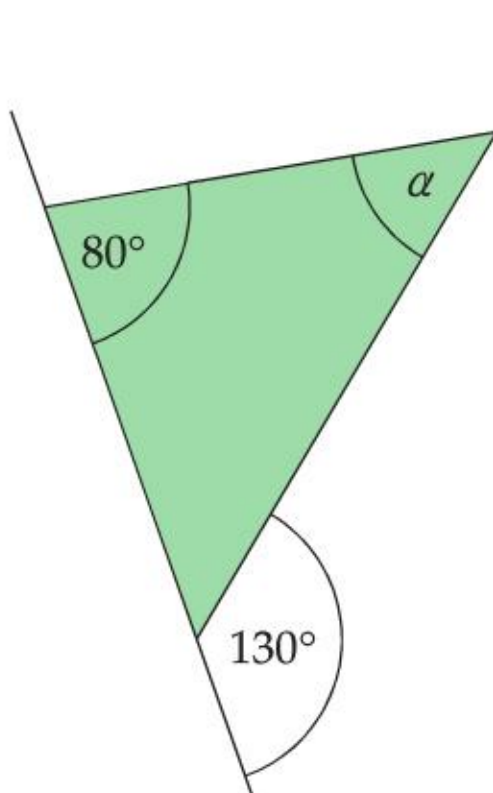
b)



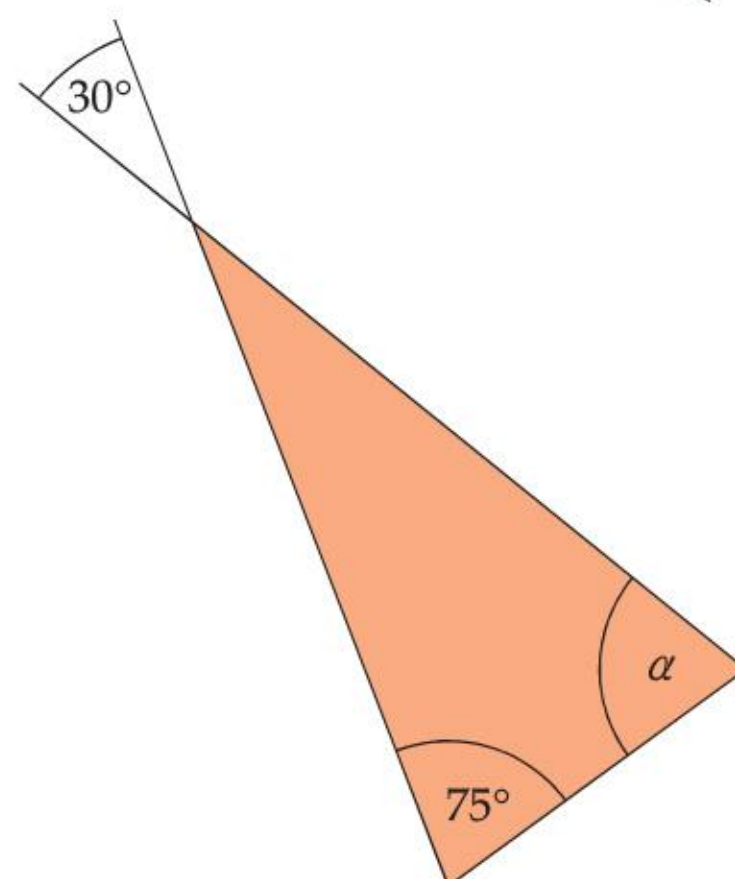
c)



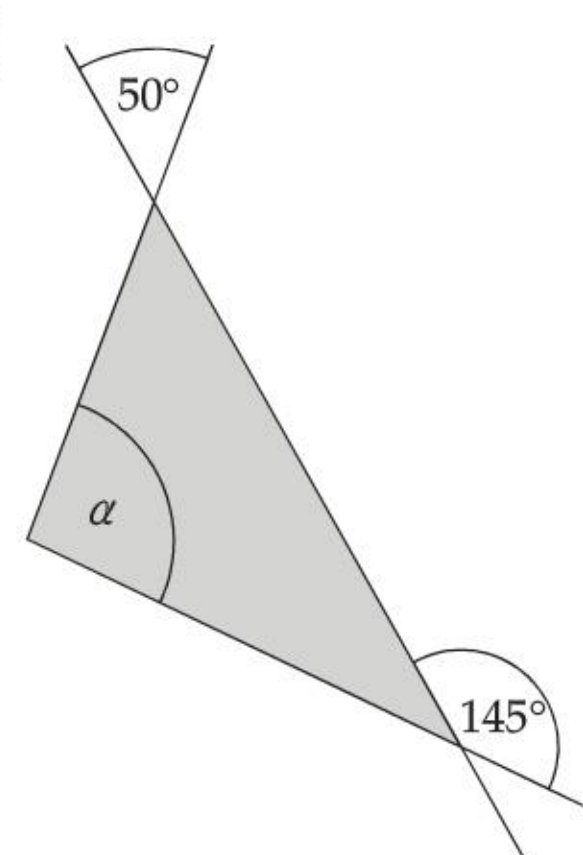
d)



e)

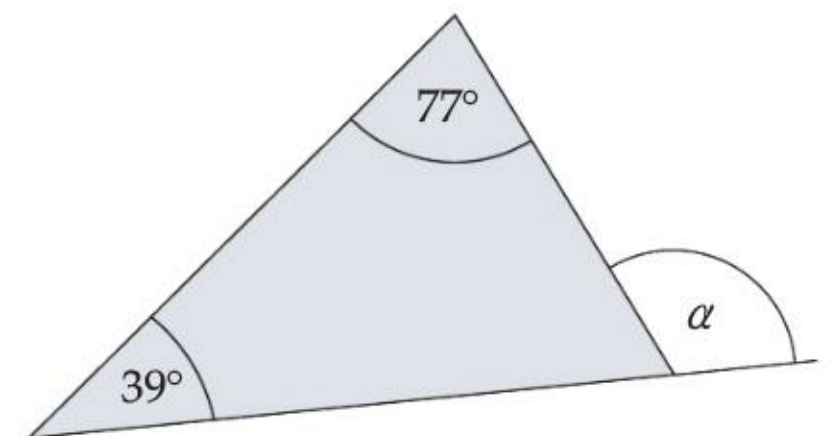


f)

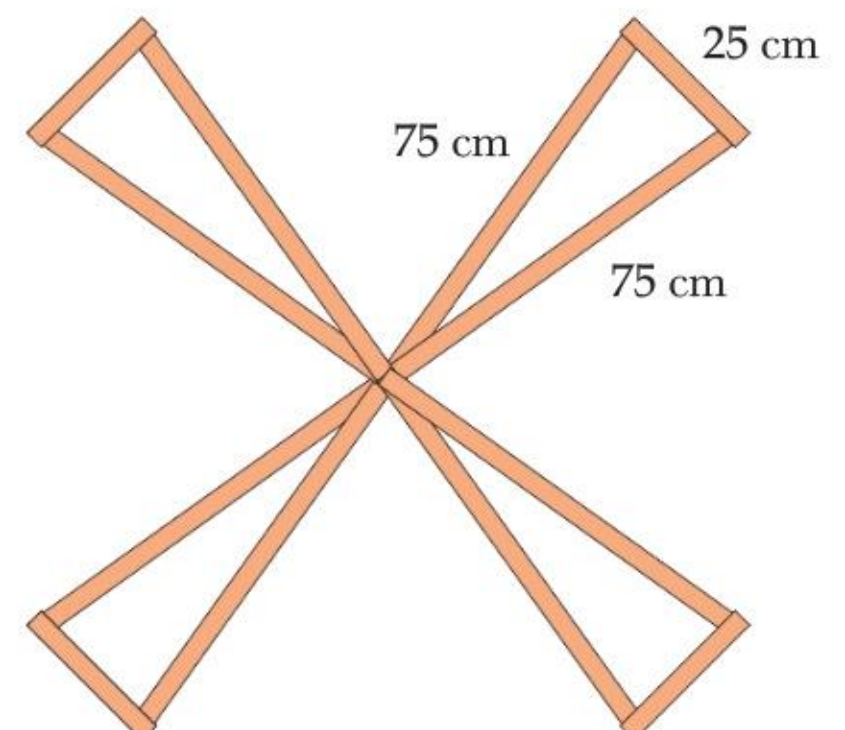


Zadania

- Obwód trójkąta wynosi 20 cm. Dwa jego boki są równe, a trzeci bok ma 7,2 cm. Oblicz dwie nieznane długości boków tego trójkąta.
- Czy podane miary kątów mogą być miarami kątów wewnętrznych trójkąta? Odpowiedź uzasadnij.
 - a) $40^\circ, 80^\circ, 60^\circ$ b) $35^\circ, 70^\circ, 70^\circ$ c) $15^\circ, 150^\circ, 15^\circ$
 - d) $37^\circ, 80^\circ, 53^\circ$ e) $82^\circ, 47^\circ, 21^\circ$ f) $49^\circ, 58^\circ, 73^\circ$
- O dwóch kątach trójkąta wiadomo, że:
 - a) $\alpha = 20^\circ, \beta = 20^\circ,$ b) $\alpha = 90^\circ, \beta = 45^\circ,$ c) $\alpha = 47^\circ, \beta = 2 \cdot \alpha.$Oblicz miarę trzeciego kąta.
- Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.
 - a) W każdym trójkącie wszystkie kąty są ostre.
 - b) Trójkąt może mieć dwa kąty rozwarte.
 - c) Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 360° .
 - d) Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° .
 - e) Jeden kąt trójkąta może mieć 90° .
- Uzasadnij, że przedstawiony na rysunku obok kąt α ma 116° .



- Tomek i jego tata budują wiatrak z drewnianych listewek według przedstawionego schematu.
 - a) Na podstawie danych umieszczonych na schemacie oblicz, jaka będzie łączna długość listewek użytych do zbudowania wiatraka.
 - b) Tata Tomka wie, że do budowy wiatraka potrzeba będzie o 10% więcej listewek niż to wynika z rysunku, ponieważ część materiału trzeba odliczyć na straty. Ile zatem centymetrów listewek musi kupić tata chłopca?



4.8 Rodzaje trójkątów

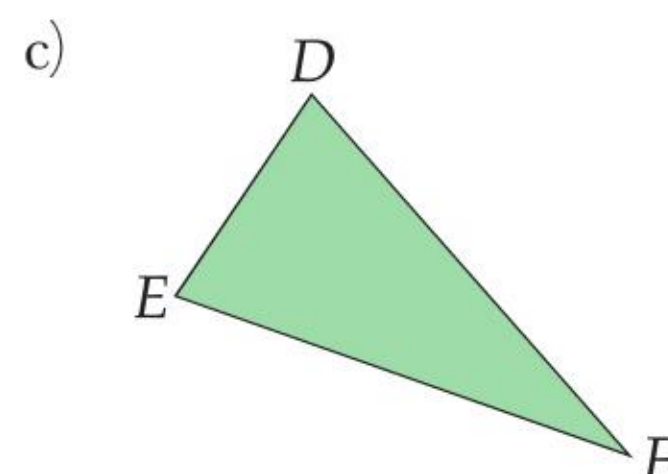
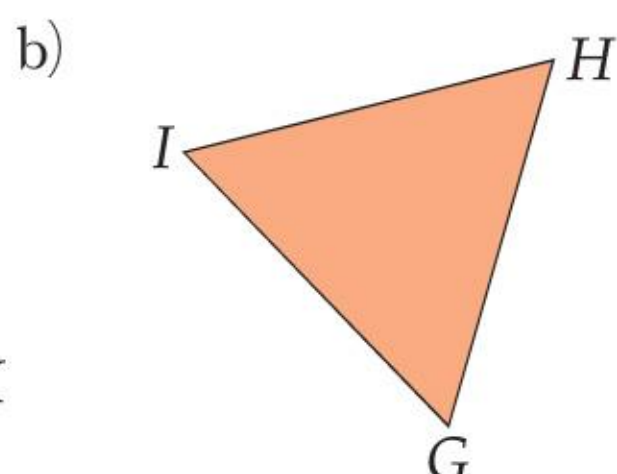
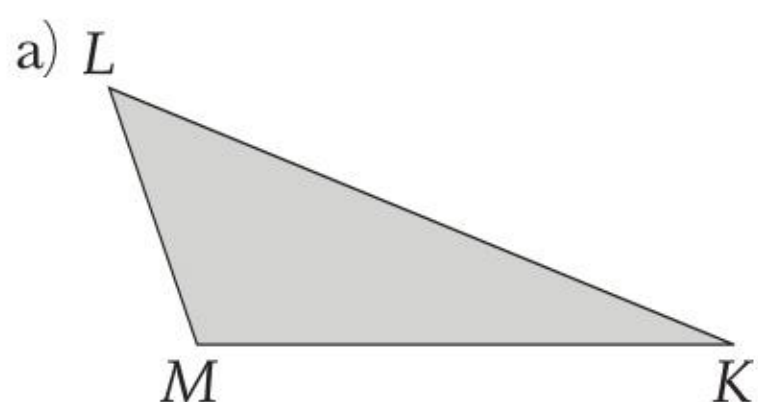
Podejmij temat



Czy potrafisz wskazać podobieństwa i różnice między tymi ekierkami?



1. Zmierz i zapisz w zeszycie długości boków trójkąta. Co możesz powiedzieć o długościach zmierzonych odcinków?

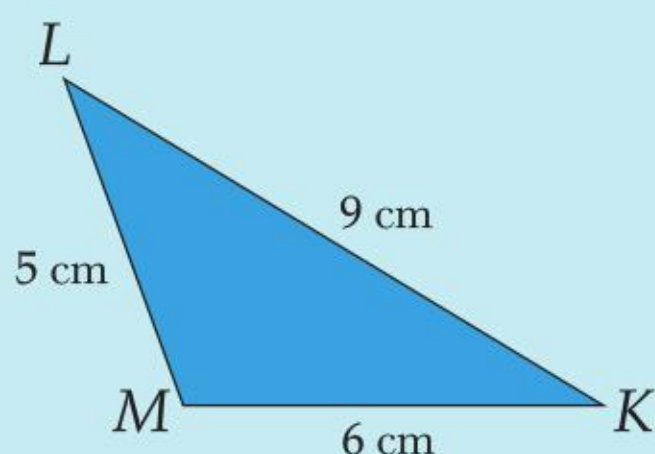


Jak wynika z ćwiczenia 1, zależności między długościami boków trójkąta mogą być różne i dlatego trójkąty mają różne, określone nazwy.

Rodzaje trójkątów ze względu na boki

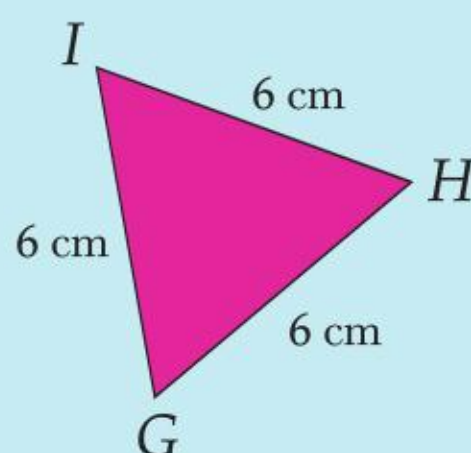
Trójkąt różnoboczny

to trójkąt, którego każdy bok jest innej długości.



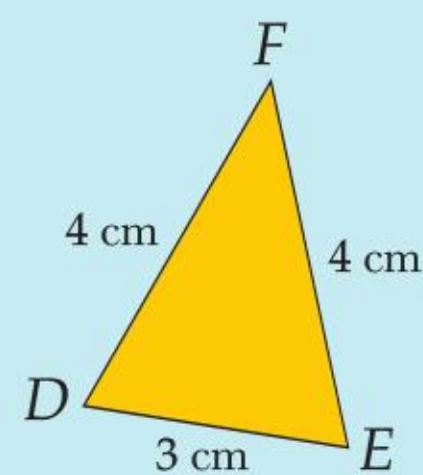
Trójkąt równoboczny

to trójkąt, który ma wszystkie boki równej długości.



Trójkąt równoramienny

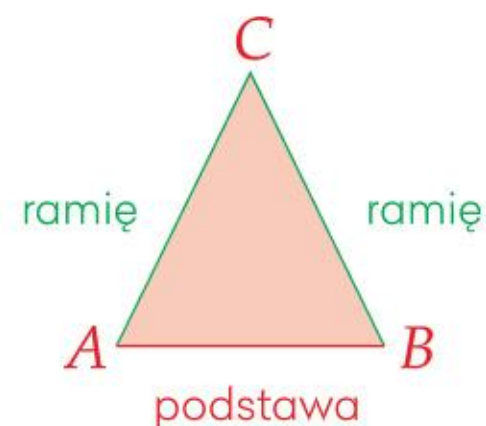
to trójkąt, który ma dwa boki równej długości.





Boki trójkąta równoramiennego, które są równej długości, nazywamy **ramionami** trójkąta, natomiast trzeci bok – **podstawą** trójkąta.

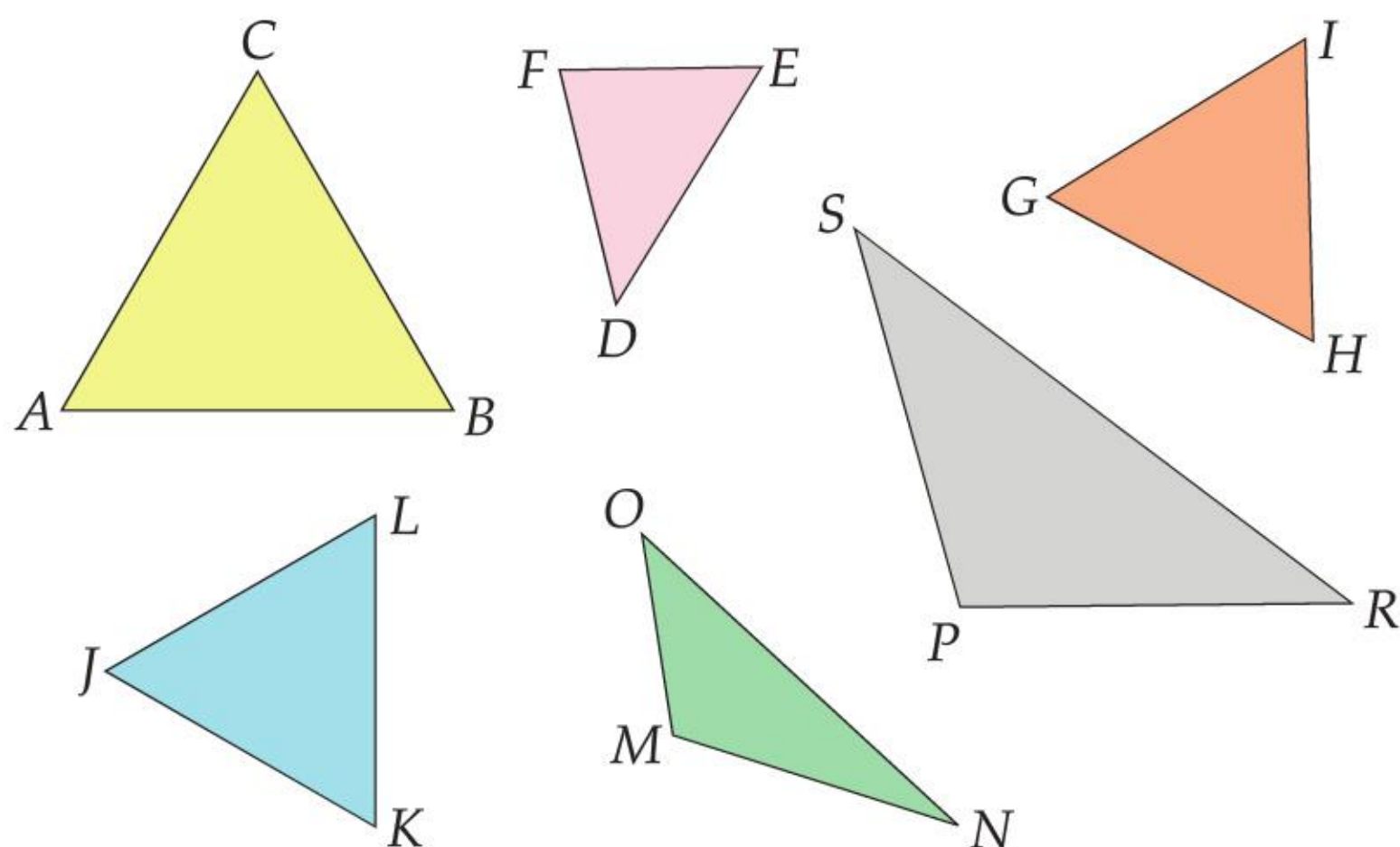
Zauważ, że trójkąt równoramienny musi mieć dwa boki równej długości. Trzeci bok może mieć inną długość, ale może także mieć taką samą długość jak dwa pozostałe boki. Trójkąt równoboczny jest zatem szczególnym przypadkiem trójkąta równoramiennego.



2. Czy trójkąt o podanych długościach boków jest równoboczny, równoramienny, czy różnoboczny?

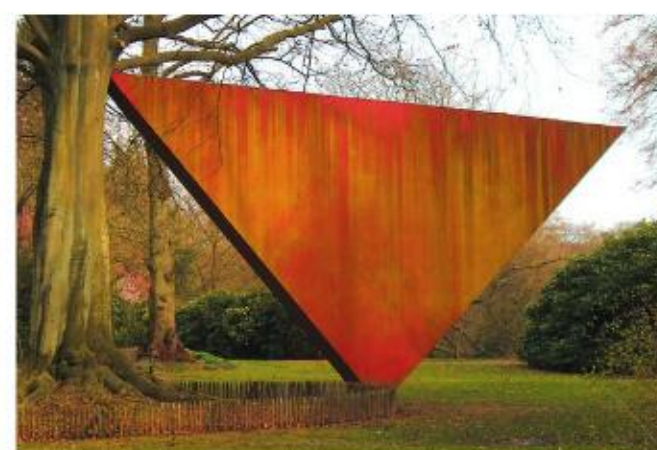
- | | | |
|------------------------|-----------------------|-----------------------------|
| a) 3 cm, 4 cm, 3 cm | b) 2 cm, 2 cm, 3 cm | c) 8 cm, 4 cm, 8 cm |
| d) 3 cm, 30 mm, 3,5 cm | e) 4 dm, 30 cm, 41 cm | f) 8 dm, 80 cm, 800 mm |
| g) 7 cm, 8 cm, 80 mm | h) 2 cm, 2,5 cm, 3 cm | i) 45 mm, 4,5 cm, 4 cm 5 mm |

3. Sprawdź, które trójkąty są równoboczne, które są równoramienne, a które – różnoboczne. Dla każdego trójkąta równoramiennego wymień jego podstawę i ramiona.



4. Bok trójkąta równobocznego ma 4 cm. Podaj jego obwód.
5. Ramię trójkąta równoramiennego ma 6 cm, natomiast jego podstawa – 10 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.
6. Jaką długość ma bok trójkąta równobocznego, jeżeli jego obwód wynosi 27,6 cm?
7. Wiemy, że trójkąt równoboczny ma wszystkie boki takiej samej długości. Równe są także jego kąty. Jakie są zatem miary tych kątów?

Ciekawe!



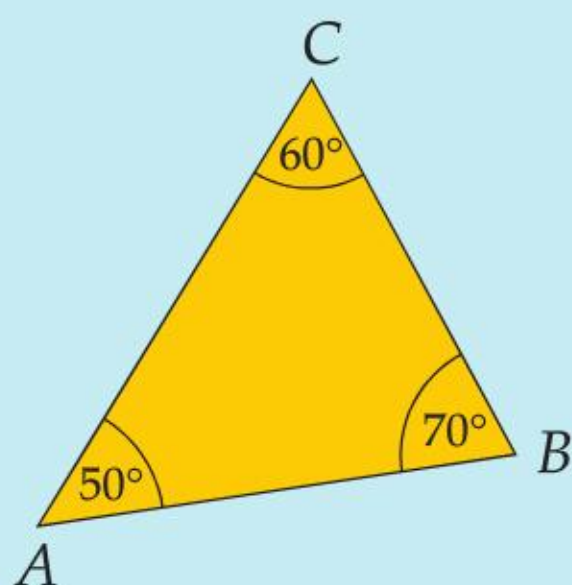
W parku Tournay-Solvay [czyt. turne-solwe] w Brukseli znajduje się czerwona rzeźba w kształcie trójkąta równoramiennego, opartego na jednym wierzchołku i ustawionego podstawą do góry. Jej autorem jest włoski rzeźbiarz Mauro Staccioli [czyt. mauro staczioli].

Poza rodzajami trójkątów wyróżnionymi ze względu na długość boków istnieją też rodzaje trójkątów, w których najważniejsza jest miara kątów.

Rodzaje trójkątów ze względu na kąty

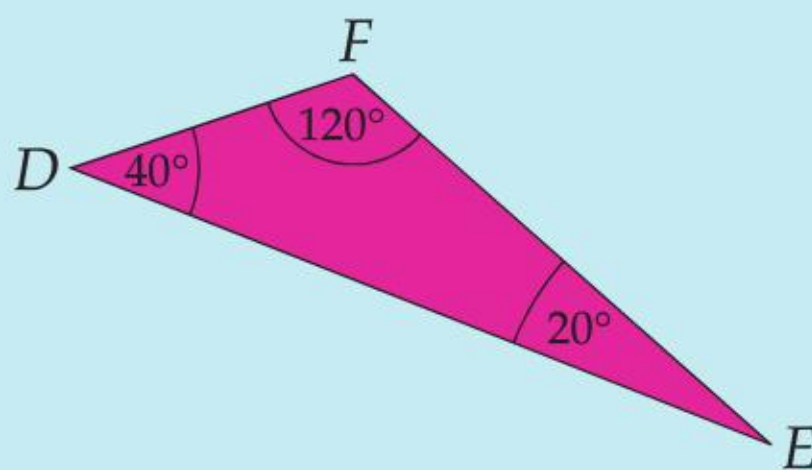
Trójkąt ostrokątny

to trójkąt, którego każdy kąt jest ostry.



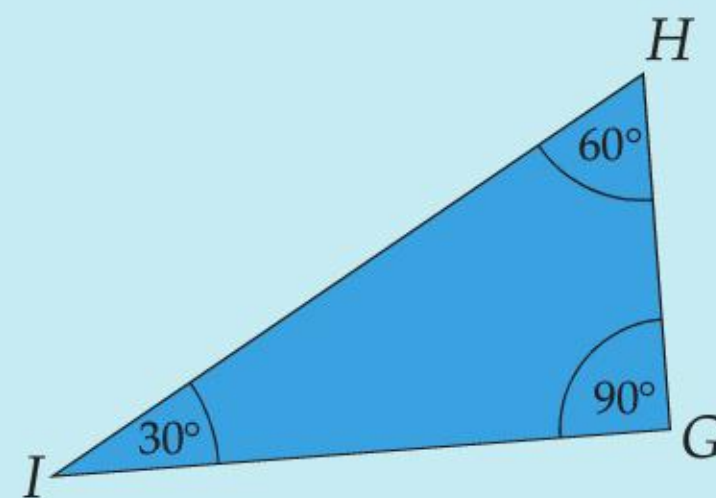
Trójkąt rozwartokątny

to trójkąt, którego jeden kąt jest rozwarty.



Trójkąt prostokątny

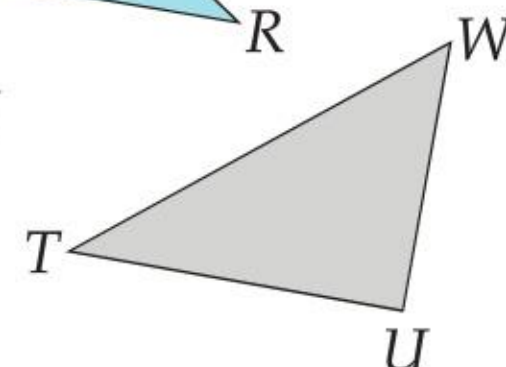
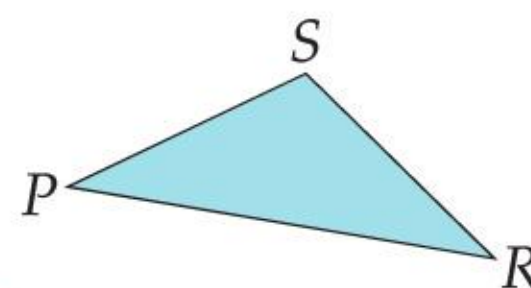
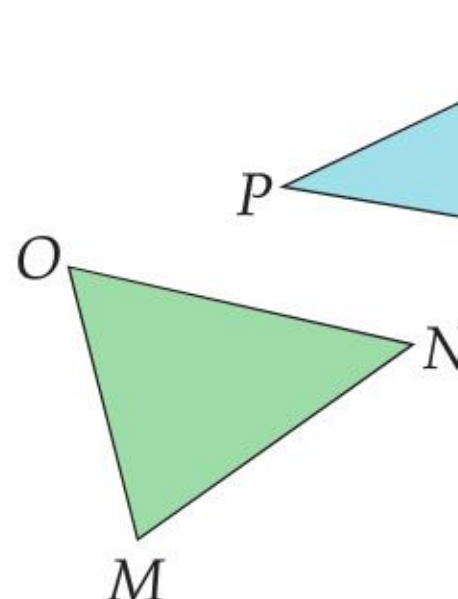
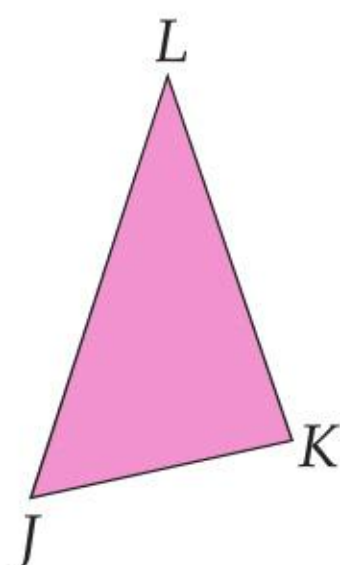
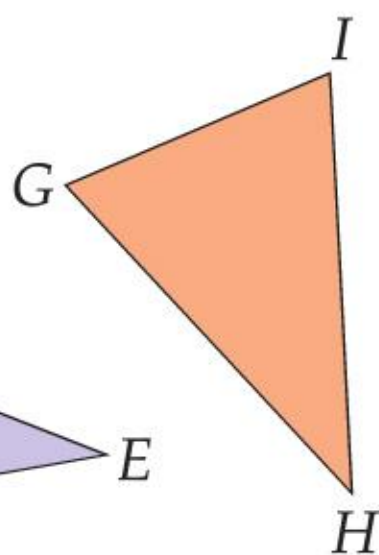
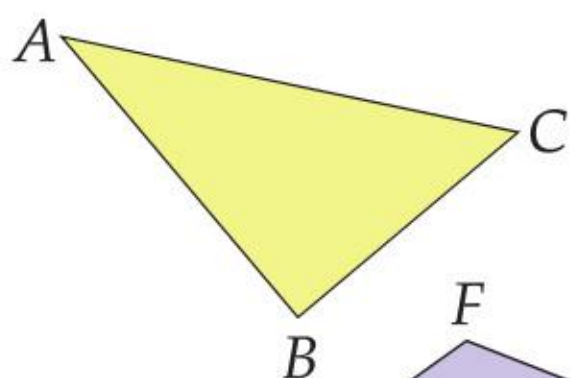
to trójkąt, którego jeden kąt jest prosty.



Trójkąt rozwartokątny ma jeden kąt rozwarty i dwa kąty ostre.

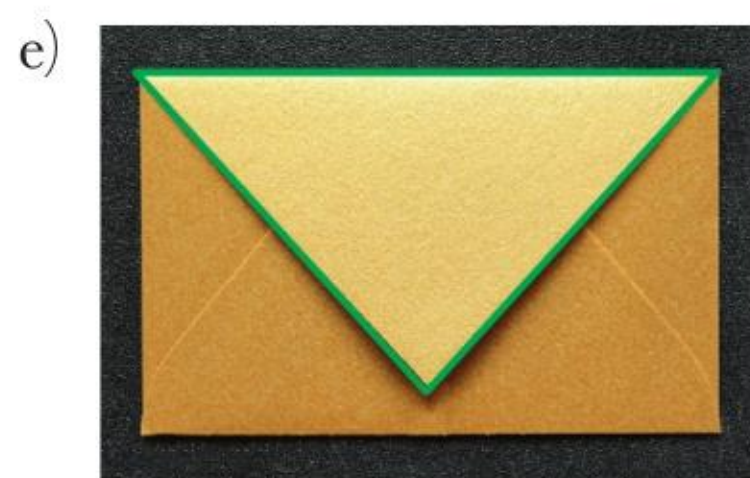
Trójkąt prostokątny ma jeden kąt prosty i dwa kąty ostre.

8. Narysuj po jednym trójkącie ostrokątnym, rozwartokątnym i prostokątnym.
9. Narysuj trójkąt, którego jeden kąt ma 30° . Jaki trójkąt widzisz na swoim rysunku: ostrokątny, rozwartokątny czy prostokątny? Porównaj swoją odpowiedź z odpowiedziami innych uczniów. Czy wszyscy otrzymali trójkąty tego samego rodzaju? Odpowiedź uzasadnij. Wykonaj to samo zadanie w odniesieniu do trzech innych trójkątów: w pierwszym trójkącie jeden kąt ma 70° , w drugim trójkącie – 90° , w trzecim – 130° .
10. Za pomocą ekiejki sprawdź, który z poniższych trójkątów jest ostrokątny, który jest prostokątny, a który – rozwartokątny.



Zadania

- Jakim rodzajem trójkąta jest zielony trójkąt zaznaczony na zdjęciu? Podaj zarówno rodzaj ze względu na długość boków, jak i na miarę kątów.



- Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma 20° .
 - a) Ile stopni ma drugi kąt ostry tego trójkąta?
 - b) Ile stopni ma suma miar kątów ostrych dowolnego trójkąta prostokątnego?
- Czy istnieje trójkąt, który ma kąty o podanych miarach? Jeśli tak, zapisz, jaki to rodzaj trójkąta.
 - a) 30° , 50° , 100°
 - b) 40° , 50° , 70°
 - c) 75° , 75° , 30°
- Narysuj trójkąt:
 - a) rozwartokątny równoramienny,
 - b) prostokątny równoramienny.
- Suma miar dwóch kątów trójkąta prostokątnego jest równa 150° . Ile stopni mają kąty ostre tego trójkąta?
- Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.
 - a) Każdy trójkąt prostokątny jest równoramienny.
 - b) Nie istnieje trójkąt rozwartokątny różnoboczny.
 - c) Każdy trójkąt różnoboczny jest ostrokątny.
 - d) Każdy trójkąt równoramienny jest trójkątem równobocznym.
 - e) Istnieją trójkąty różnoboczne mające kąt prosty.
 - f) Trójkąt rozwartokątny może mieć jeden kąt prosty.
 - g) Trójkąt równoramienny nie może być trójkątem rozwartokątnym.
- ★ Jeden z boków trójkąta równoramiennego ma długość 7 cm, a drugi 12 cm. Oblicz obwód tego trójkąta. Rozważ dwa przypadki.

4.9 Konstruowanie trójkątów

Podejmij temat



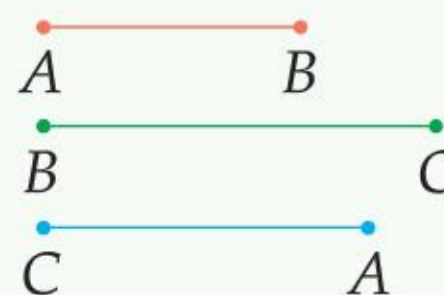
A ty jak sądzisz?

Zastanawiam się, czy z trzech patyków zawsze da się ułożyć figurę w kształcie trójkąta...



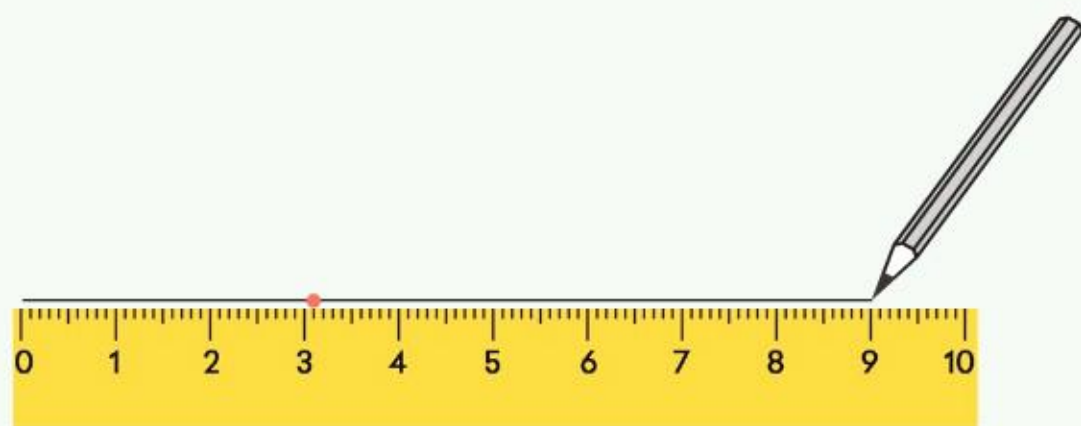
Przykład 1

Narysujmy trójkąt ABC , którego bokami mają być trzy dane odcinki.



Do wykonania tego zadania wystarczą nam (oprócz ołówka) cyrkiel i linijka.

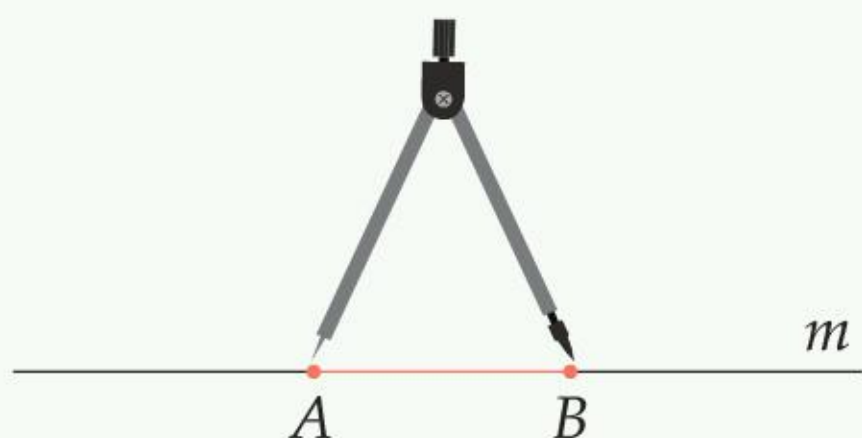
1. Rysujemy prostą m i zaznaczamy na niej dowolny punkt A .



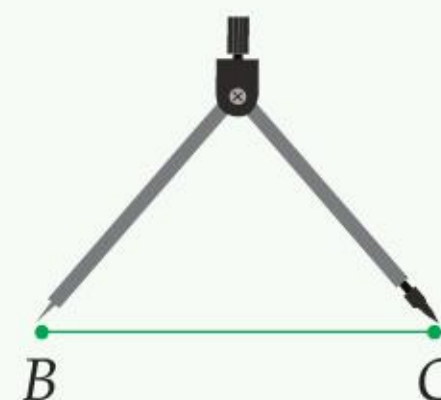
2. Mierzymy za pomocą cyrkla długość odcinka AB .



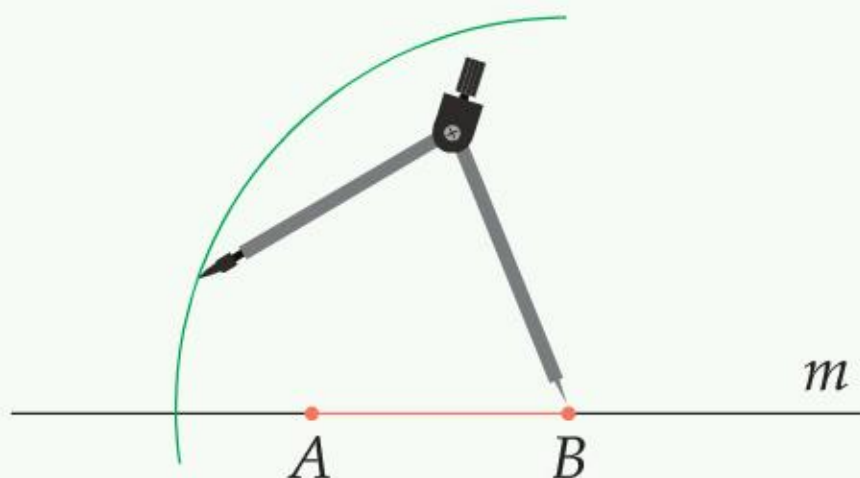
3. Odmierzamy na prostej m odcinek AB .



4. Mierzymy za pomocą cyrkla długość odcinka BC .



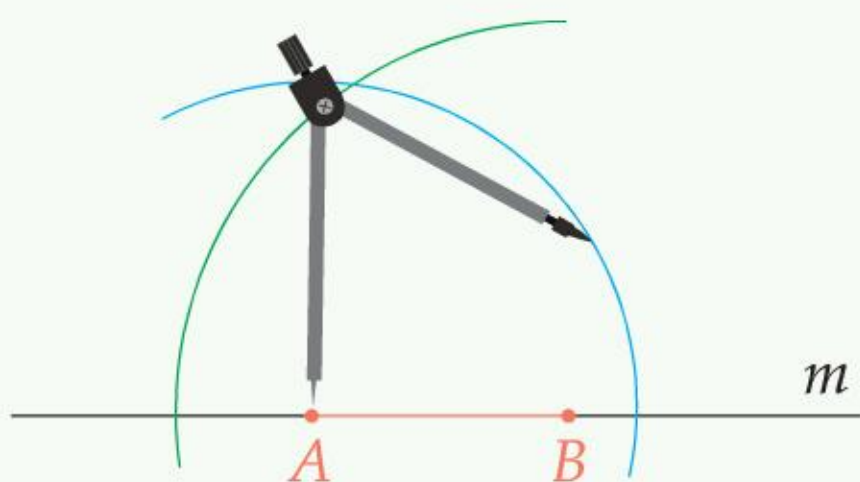
5. Wbijamy w punkt B nóżkę cyrkla i wyznaczoną rozwartością zakreślamy fragment okręgu (promień tego okręgu jest równy długości odcinka BC – punkt C musi leżeć na tym łuku).



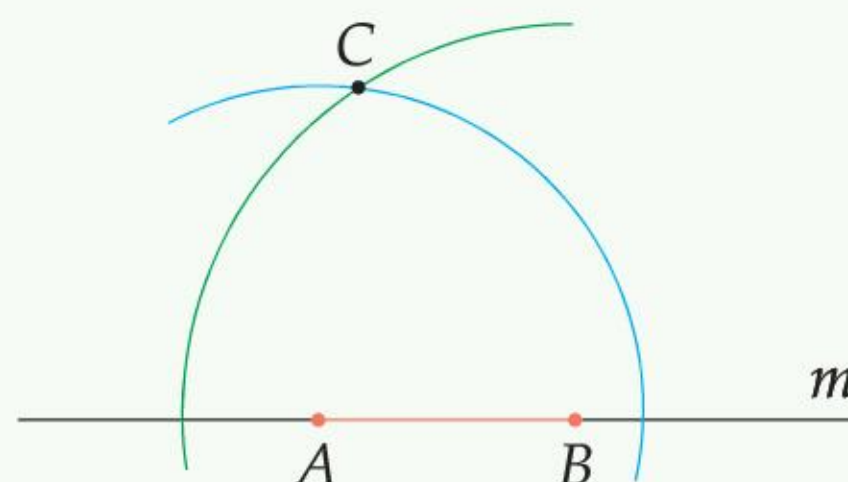
6. Mierzymy za pomocą cyrkla długość odcinka CA .



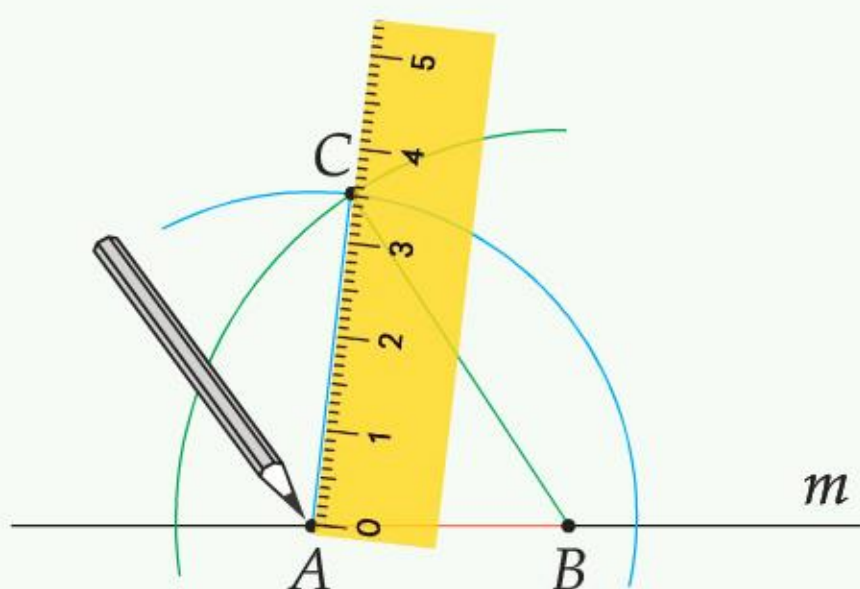
7. Wbijamy w punkt A nóżkę cyrkla i wyznaczoną rozwartością zakreślamy fragment okręgu (promień tego okręgu jest równy długości odcinka CA – punkt C musi leżeć na tym łuku).



8. Punkt przecięcia zakreślonych łuków wyznacza wierzchołek C trójkąta ABC (punkt C musi leżeć na obu łukach jednocześnie).



9. Za pomocą linijki łączymy punkt B z punktem C oraz A z C .



10. Otrzymaliśmy trójkąt ABC .



Zauważ, że w opisany sposób może powstać także drugi punkt C , który znajduje się po przeciwnej stronie prostej m .

Więcej na temat

Konstrukcja geometryczna to sposób rysowania figury geometrycznej z wykorzystaniem określonych metod, jeśli dane są inne figury (np. odcinki, z których należy skonstruować trójkąt – jak w przykładzie 1).

Konstrukcja klasyczna to taka konstrukcja geometryczna, którą wykonujemy wyłącznie za pomocą linijki i cyrkla. W tym przypadku linijka służy tylko do rysowania linii prostych, a nie do mierzenia, nie korzystamy więc z jej podziałki centymetrowej.

W przykładzie 1 polecenie mogło zatem brzmieć: „Skonstruujmy trójkąt ABC , którego bokami mają być trzy dane odcinki”.

1. Narysuj odcinki o podanych długościach i skonstruuj z nich trójkąt.

a) 3 cm, 2 cm, 4 cm

b) 2 cm, 6 cm, 5 cm

c) 4 cm, 3 cm, 4 cm

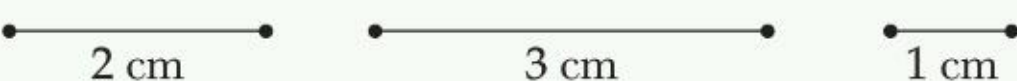
d) 4 cm, 4 cm, 4 cm

e) 6 cm, 4 cm, 5 cm

f) 7 cm, 3 cm, 6 cm

Przykład 2

Zbudujmy trójkąt z poniższych odcinków.

a) 

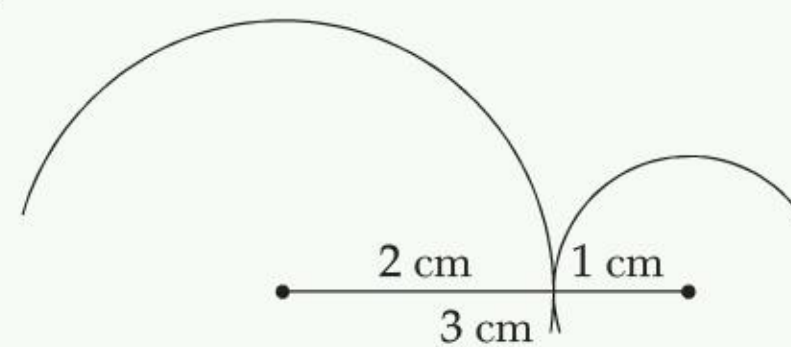
b) 

a) Postępujemy analogicznie jak w przykładzie 1.

Wbijamy nóżkę cyrkla kolejno w końce odcinka o długości 3 cm i zakreślamy fragmenty okręgów o promieniach odpowiednio 1 cm i 2 cm. Zauważmy, że narysowane łuki spotykają się w punkcie leżącym właśnie na tym odcinku. Dzieje się tak dlatego, że suma długości dwóch odcinków jest równa długości trzeciego odcinka:

$$1 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}.$$

Zbudowanie trójkąta w tym przypadku nie jest zatem możliwe.

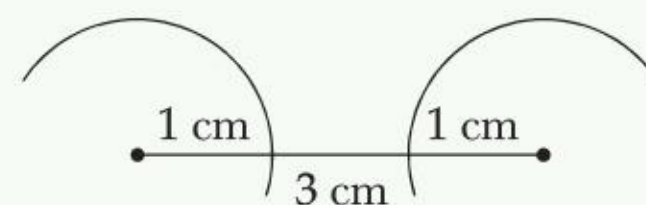


b) Podczas próby skonstruowania trójkąta możemy zauważyć, że odpowiednie łuki w ogóle się nie przeczną.

W tym przypadku suma długości dwóch danych odcinków jest mniejsza niż długość trzeciego odcinka:

$$1 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 2 \text{ cm} < 3 \text{ cm}.$$

Z tych odcinków również nie uda się zbudować trójkąta.



Przykład 3

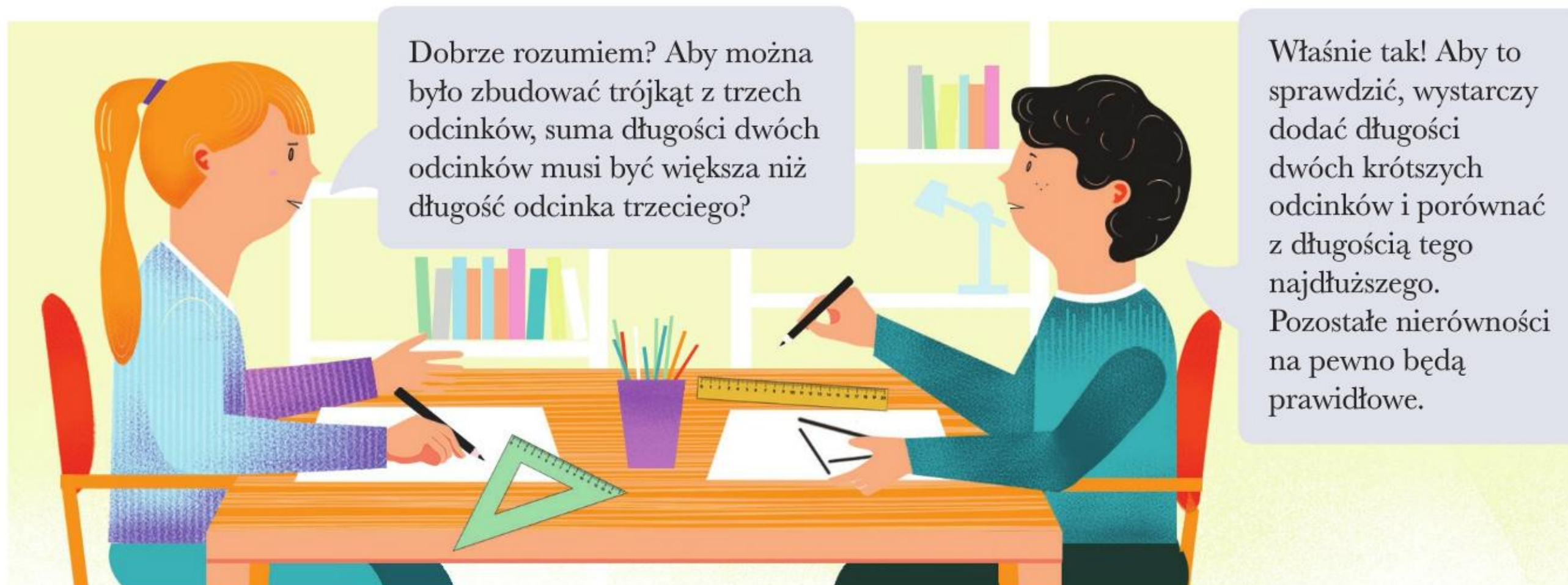
Czy z odcinków o długościach: 5 cm, 6 cm i 8 cm, można skonstruować trójkąt?

Po przeanalizowaniu przykładów 1 i 2 widać, że jest to możliwe, ponieważ odpowiednie dwa łuki zawsze się przetną i wyznaczą trzeci wierzchołek trójkąta, gdyż:

$$5 + 6 > 8,$$

$$5 + 8 > 6,$$

$$6 + 8 > 5.$$



2. Antek rozwiązywał następujące zadanie:

Czy z odcinków o długościach:

4 cm, 1 cm, 2 cm, można zbudować trójkąt?

Obok znajduje się rozwiązanie Antka.

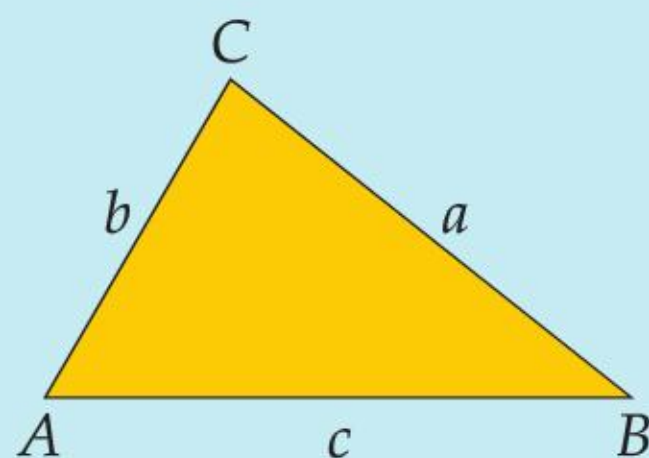
Wyjaśnij, na czym polegał błąd chłopca.

$$4 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 5 \text{ cm} > 2 \text{ cm}$$

Suma długości dwóch odcinków jest większa niż długość trzeciego odcinka, czyli trójkąt można zbudować. **Błąd!**

Dla dowolnego trójkąta suma długości każdych dwóch boków jest większa od długości trzeciego boku.

Powyższa zasada jest nazywana **nierównością trójkąta**.



$$a + b > c$$

$$b + c > a$$

$$c + a > b$$

3. Sprawdź, czy z trzech odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt.

a) 3 cm, 4 cm, 5 cm

b) 4 cm, 10 cm, 5 cm

c) 4 cm, 4 cm, 1 cm

d) 4,5 cm, 3 cm, 35 mm

e) 80 mm, 3 cm, $3\frac{1}{2}$ cm

f) $8\frac{1}{3}$ cm, $5\frac{2}{5}$ cm, $3\frac{1}{4}$ cm

Zadania

Narysuj odcinki o podanych długościach i skonstruuj trójkąt o takich bokach.

a) 3 cm 7 mm, 5 cm 2 mm, 3 cm

b) 3,8 cm, 3,1 cm, 0,4 dm

Narysuj odcinek o długości 4 cm i skonstruuj trójkąt równoboczny o takim boku.

Narysuj dwa odcinki o długościach 3,5 cm i 4,5 cm, a następnie skonstruuj z nich dwa różne trójkąty równoramienne (ale nie równoboczne).

Zmierz poniższe odcinki i sprawdź, czy można z nich zbudować trójkąt.

a) 

b) 

c) 

d) 

Podaj przykładowe długości trzech odcinków, z których **nie** można zbudować trójkąta.

Dane są trzy odcinki o długościach: 3 cm, 8 cm i 4 cm. Z tych odcinków nie można zbudować trójkąta. Jak należałoby zmienić jeden z nich (skrócić lub wydłużyć), żeby po tej zmianie utworzenie trójkąta było możliwe? Rozważ modyfikację kolejno dla każdego odcinka.

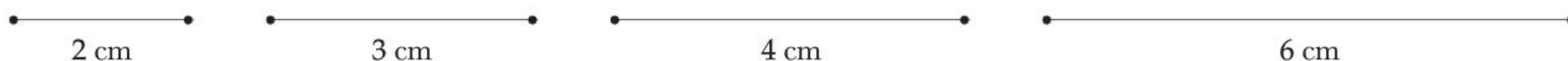
Wykorzystaj jeden, dwa lub trzy z poniższych odcinków (każdy odcinek możesz użyć kilka razy) i skonstruuj trójkąt:

a) różnoboczny,

b) równoramienny, który nie jest równoboczny,

c) równoboczny.

Ile jest możliwych rozwiązań dla każdego podpunktu?



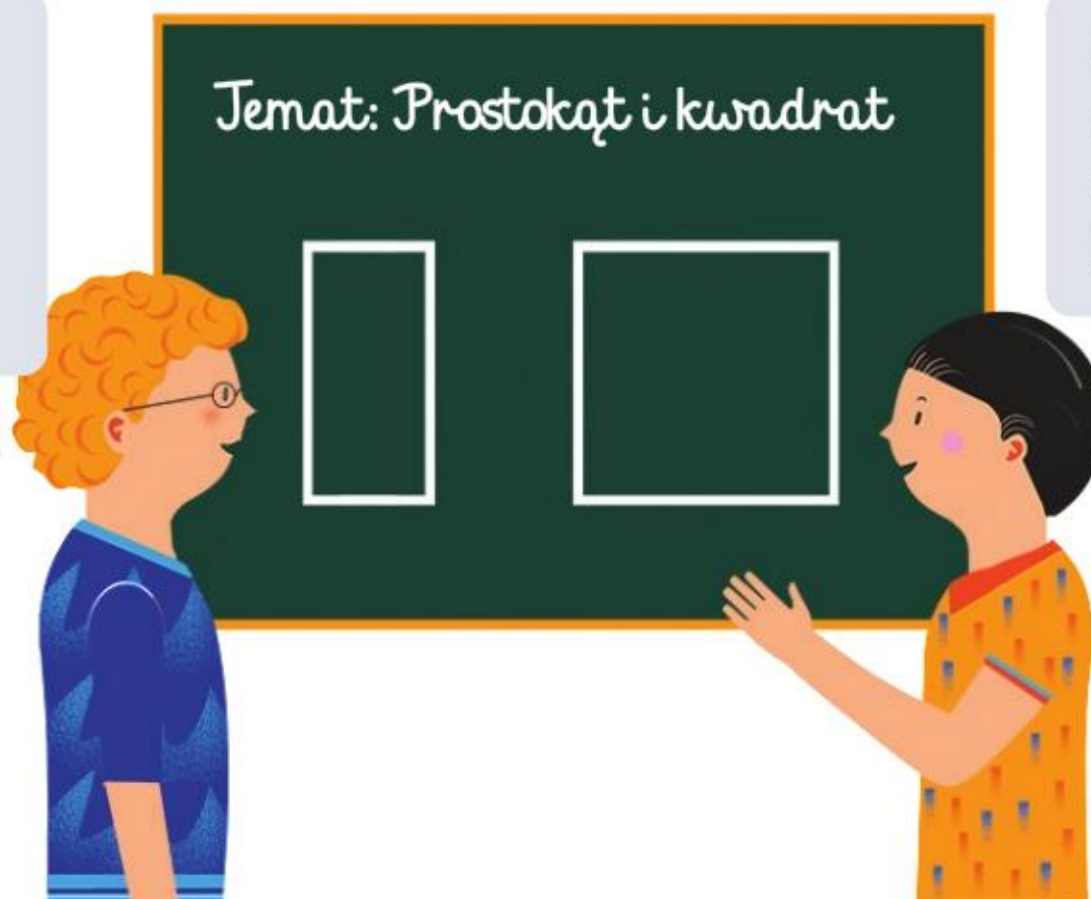
4.10 Prostokąt i kwadrat

Podejmij temat



Czy potrafisz wymienić wszystkie własności prostokąta i kwadratu?

Pamiętasz, co wspólnego mają ze sobą prostokąt i kwadrat?



Oczywiście! Oba mają wszystkie kąty proste.

W klasie czwartej poznaliśmy już prostokąt i jego własności. Przypomnijmy je teraz.

Prostokąt to czworokąt, którego wszystkie kąty są proste.

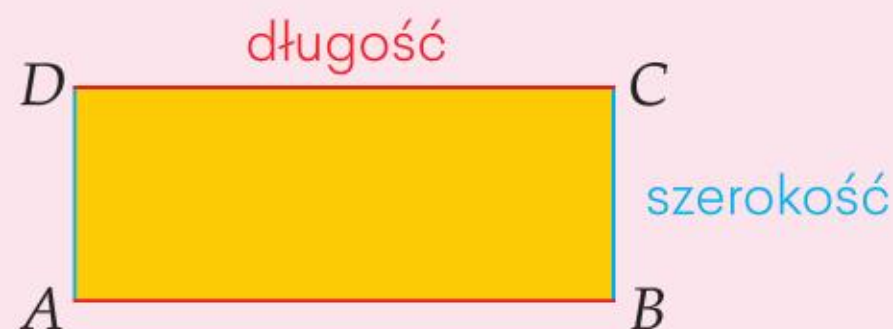
Punkty: A, B, C, D , to **wierzchołki prostokąta** $ABCD$.

Odcinki: AB, BC, CD, DA , to **boki prostokąta** $ABCD$.

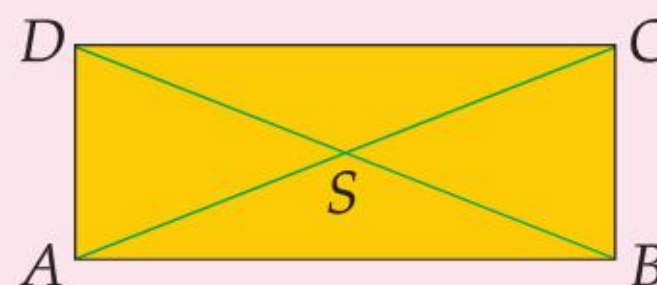
Wymiary prostokąta to długości jego dwóch sąsiednich boków. Jeden z nich nazywamy **długością**, a drugi – **szerokością**.

Przeciwległe boki prostokąta są równoległe i mają tę samą długość.

Przekątne prostokąta są równej długości i przecinają się w połowie.

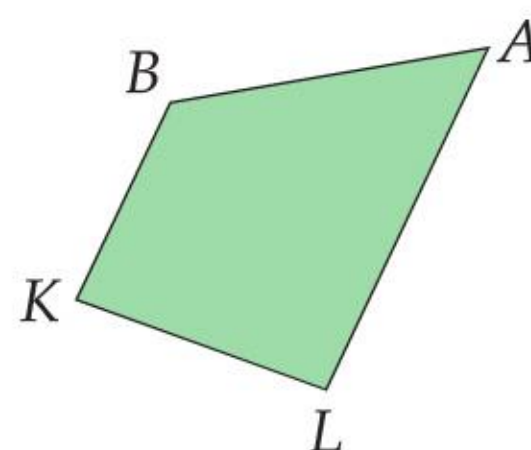
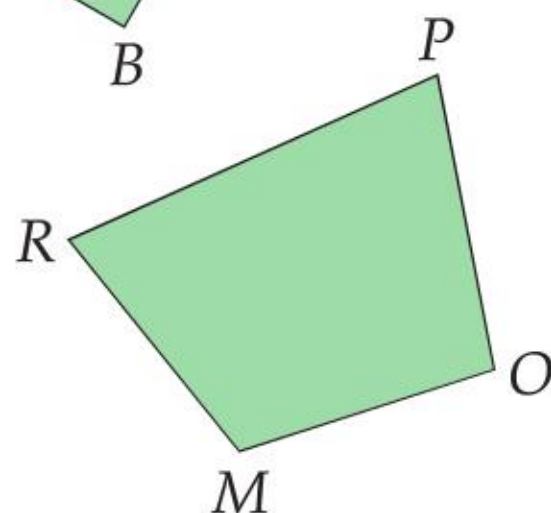
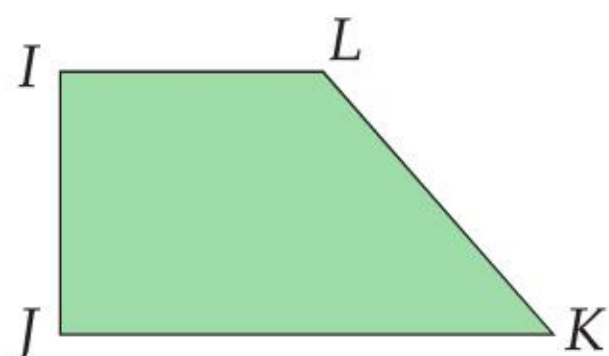
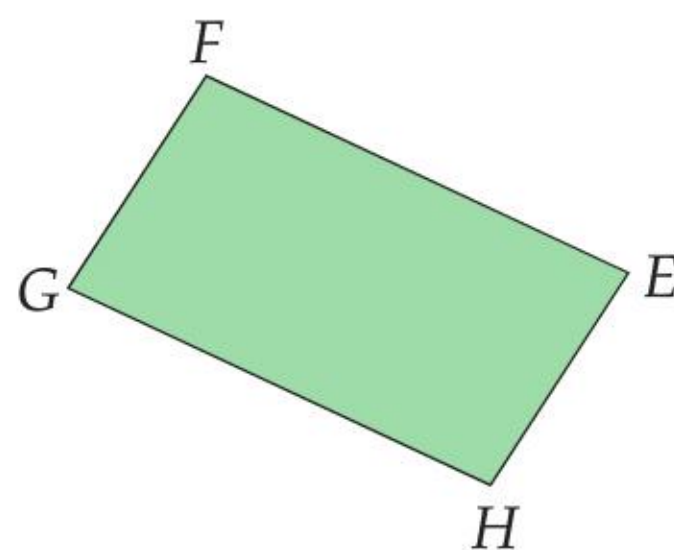
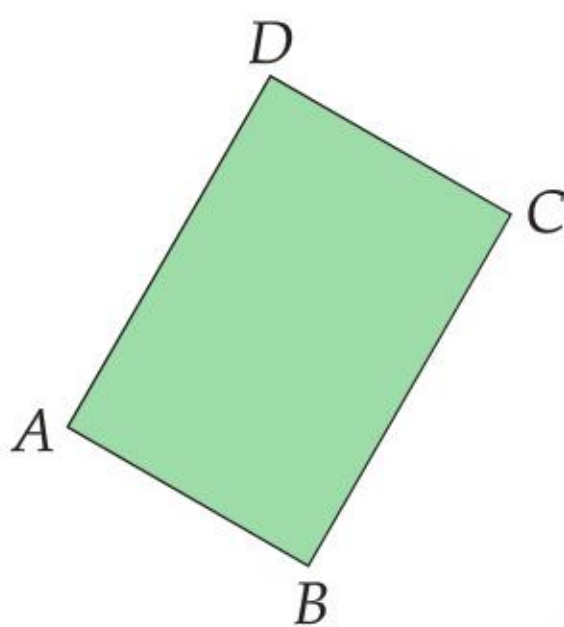
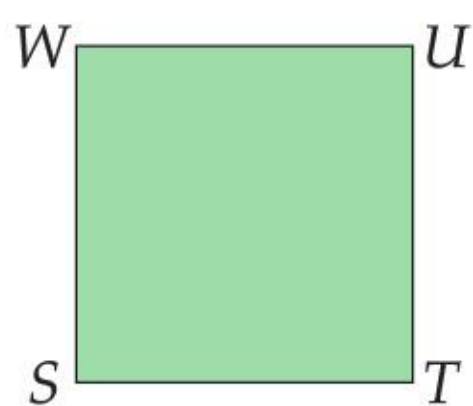


$$AB \parallel CD \text{ i } |AB| = |CD|$$
$$BC \parallel AD \text{ i } |BC| = |AD|$$



$$|AC| = |BD| \text{ oraz } |AS| = |SC| \text{ i } |DS| = |SB|,$$
$$\text{a zatem } |AS| = |SC| = |DS| = |SB|.$$

1. Zmierz i podaj długość boków poniższych czworokątów. Które z nich są prostokątami?



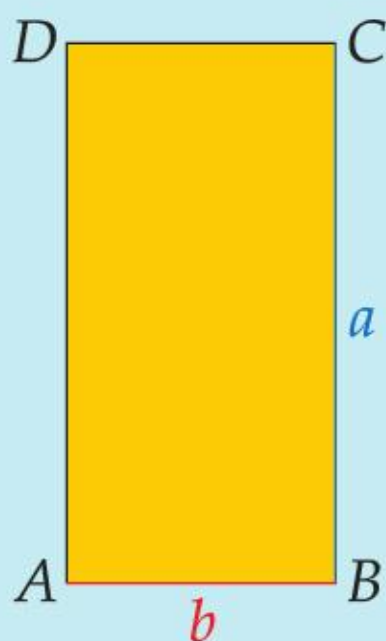
2. Narysuj prostokąt o szerokości 5 cm i długości 6 cm. Zaznacz jednakowymi kolorami przeciwległe boki.
3. Narysuj prostokąt o szerokości 2 cm i długości 1,5 raza większej od szerokości.

Jeśli długość boku prostokąta jest oznaczona literą a , szerokość zaś literą b , to obwód tego prostokąta można obliczyć według wzoru:

$$\text{Obw.} = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

lub

$$\text{Obw.} = 2 \cdot (a + b)$$



Wiem! Aby obliczyć obwód prostokąta, trzeba podwoić jego wymiary i je dodać.

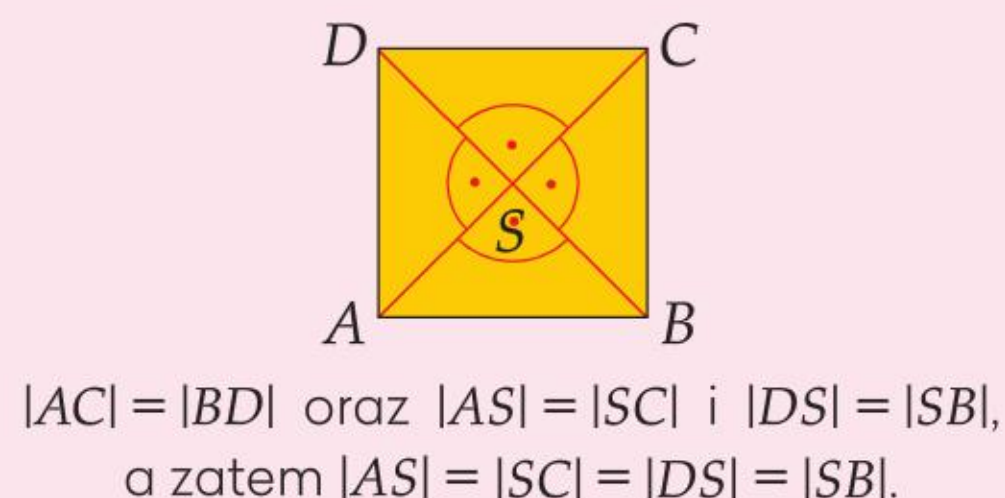
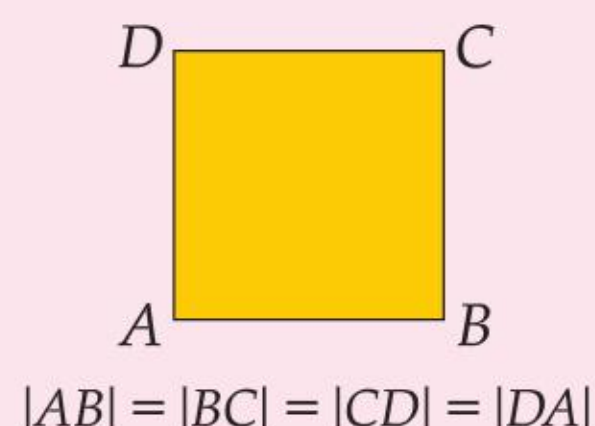
Albo dodać długość i szerokość prostokąta, a potem pomnożyć przez 2.



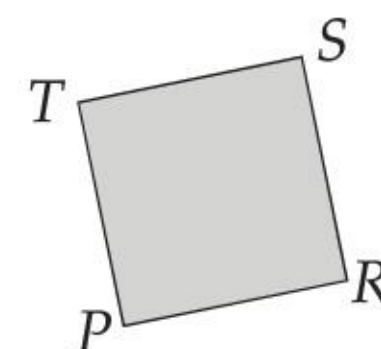
4. Oblicz obwód prostokąta o podanych wymiarach. Zastosuj dowolny z poznanych wzorów.
- | | | |
|-------------------|-----------------|---------------------------------|
| a) 4 cm × 2 cm | b) 5 cm × 6 cm | c) 8 cm × 70 mm |
| d) 10 mm × 200 mm | e) 25 dm × 25 m | f) 8,2 cm × 11 $\frac{4}{5}$ cm |

Kwadrat to prostokąt, który ma wszystkie boki równej długości.

Przekątne kwadratu są równej długości i dzielą się w połowie pod kątem prostym.

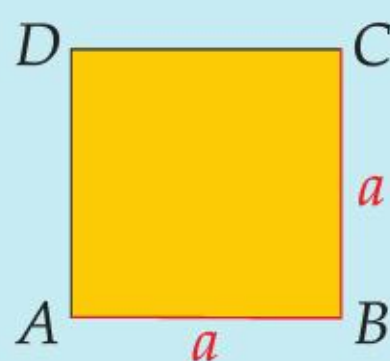


5. Narysuj kwadrat o boku mającym 5 cm. Narysuj przekątne tego kwadratu, zmierz ich długość i podaj miarę kąta, jaki tworzą te przekątne.
6. Zmierz długość boku kwadratu *PRST* na rysunku obok i oblicz jego obwód.



Jeśli długość boku kwadratu jest oznaczona literą *a*, to obwód tego kwadratu można obliczyć według wzoru:

$$\text{Obw.} = 4 \cdot a$$



Pamiętasz, że aby obliczyć obwód, wystarczy dodać długości wszystkich boków kwadratu?

Można też długość boku pomnożyć przez 4 – przecież kwadrat ma cztery boki tej samej długości!



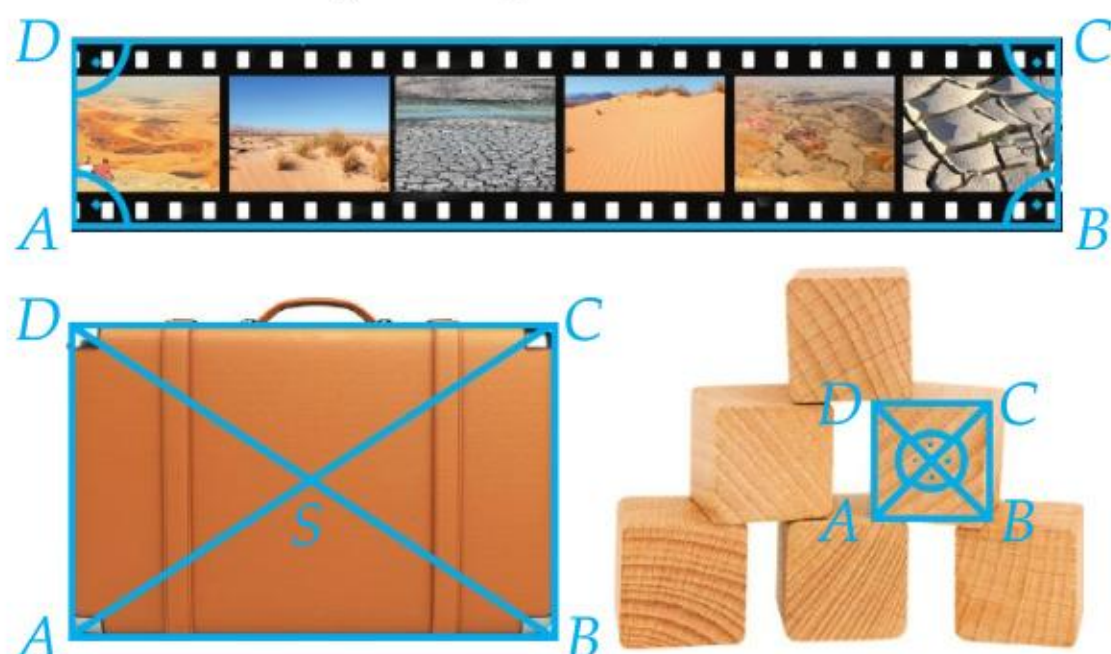
7. Oblicz obwód kwadratu o podanej długości boku. Zastosuj poznany wzór.

a) 5 cm	b) 3,4 cm	c) 16 m
d) 250 mm	e) $2\frac{5}{16}$ cm	f) 1,7 dm

Zadania

- Wskaż pięć przedmiotów mających kształt kwadratu i pięć – o kształcie prostokąta, który nie jest kwadratem.

- Omów własności prostokąta i kwadratu zilustrowane poniżej.

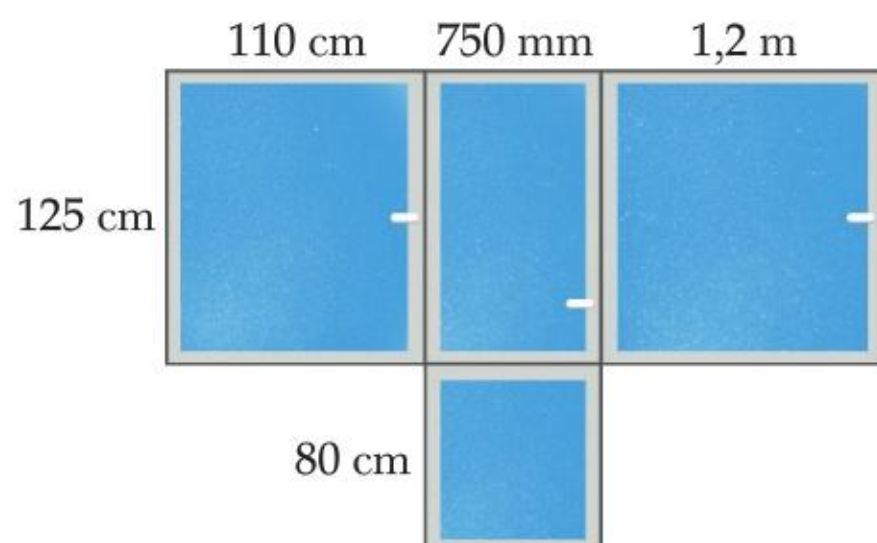


- Oblicz obwód prostokąta, jeśli wiadomo, że:

- jeden z boków ma 2,8 cm, a drugi bok jest dwa razy dłuższy,
- jego długość jest o 15 cm większa od szerokości równej 13 cm.

- Pan Paweł musi okleić okna taśmą uszczelniającą.

- Oblicz, czy do uszczelnienia dwóch okien w kształcie prostokątów o wymiarach $2\text{ m} \times 110\text{ cm}$ wystarczy mu 15 m taśmy.
- Ile metrów taśmy potrzebowalby pan Paweł na uszczelnienie okien i drzwi balkonowych pokazanych na rysunku?



- Jeden z boków prostokąta o obwodzie 40 cm ma 8 cm. Drugi bok tego prostokąta ma

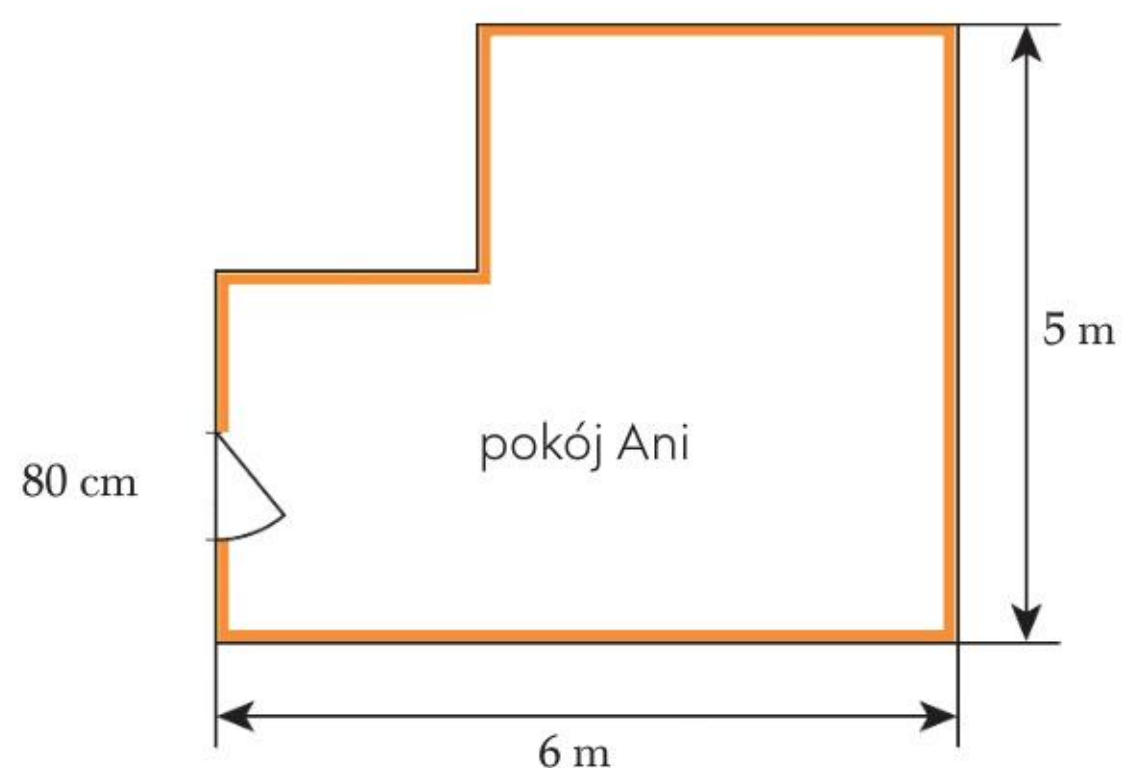
- 32 cm
- 24 cm
- 12 cm
- 16 cm

- Bok kwadratu o obwodzie 40 cm ma

- 4 cm
- 4 dm
- 20 cm
- 10 cm

- Szerokość prostokąta o obwodzie 36 cm wynosi 9 cm. Oblicz długość prostokąta.

- Tata Ani położył nowe panele w jej pokoju. Wzdłuż ścian musi ułożyć jeszcze listwę przypodłogową. Pomóż mu obliczyć, ile metrów listwy musi kupić. Wykorzystaj dane umieszczone na planie pokoju Ani.



- Jeden z boków prostokąta o obwodzie równym 48 cm jest dwa razy dłuższy od drugiego. Oblicz wymiary tego prostokąta.

- Podziel kwadrat na:



- 9 kwadratów,
- 6 kwadratów,
- 10 kwadratów,

niekoniecznie tej samej wielkości.

4.11 Równoległobok i romb

Podejmij temat

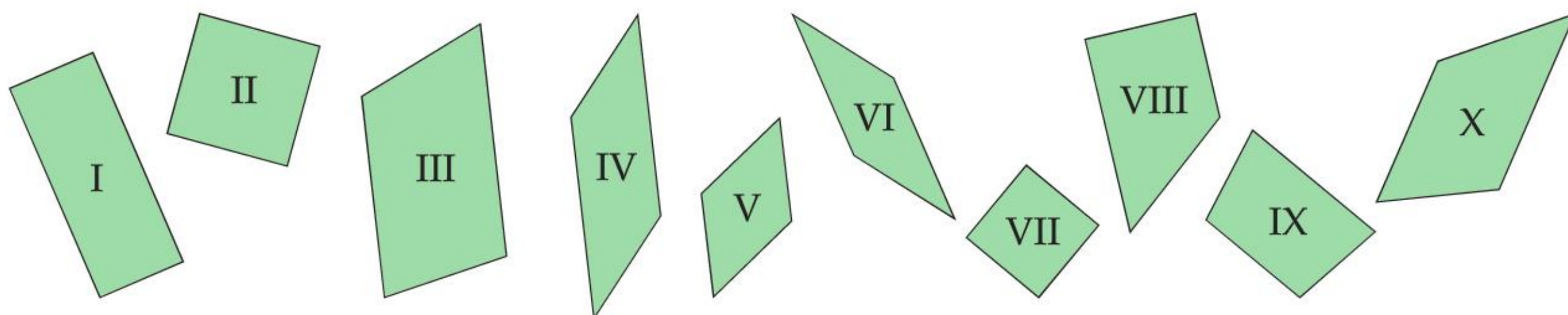


Czy wiesz, jak się nazywają te „rozciągnięte” kwadraty?

Był w kwadraty,
taki ładny... A teraz?
Wszystko rozciągnięte ☹

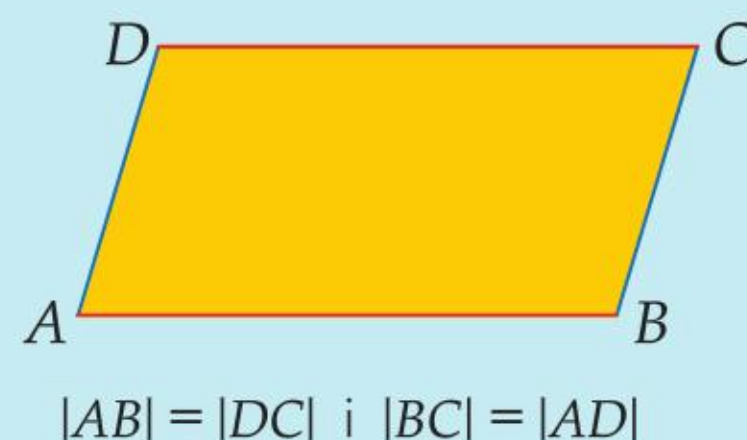


1. Które z poniższych czworokątów mają dwie pary boków równoległych?



Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Przeciwnie boki równoległoboku są równej długości.

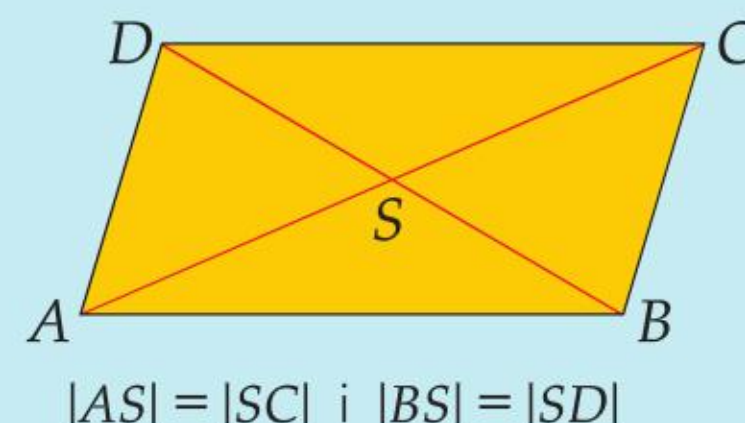


- Ile jest równoległoboków na rysunku w ćwiczeniu 1?
Ile z nich to prostokąty?
- Narysuj dowolny równoległobok (który nie jest prostokątem) i jego przekątne. Zmierz długości przekątnych i odcinki powstałe po przecięciu się tych przekątnych. Co możesz powiedzieć o przekątnych równoległoboku i o uzyskanych odcinkach?



Prostokąt jest szczególnym przypadkiem równoległoboku.

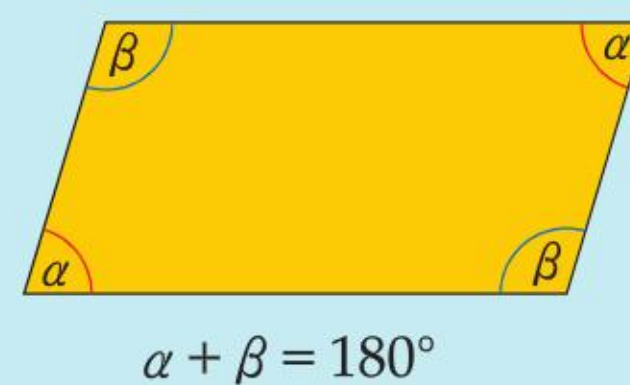
Przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.



4. Narysuj dowolny równoległobok (który nie jest prostokątem) o bokach mających 5 cm oraz 3 cm. Zmierz jego kąty wewnętrzne. Co możesz powiedzieć o miarach tych kątów?

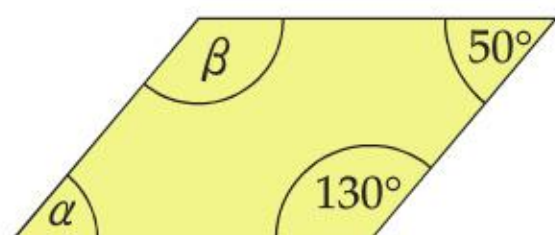
Przeciwnie kąty równoległoboku mają równe miary.

Suma miar każdego dwóch sąsiednich kątów równoległoboku równa się 180° .

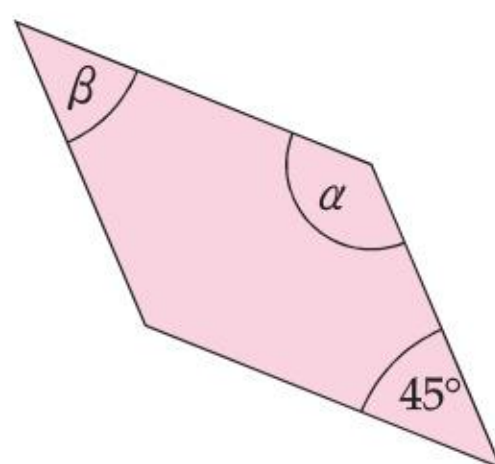


5. Podaj (bez mierzenia), ile stopni mają kąty α i β .

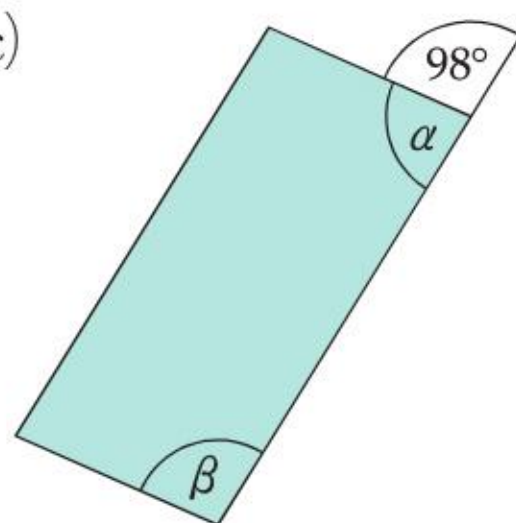
a)



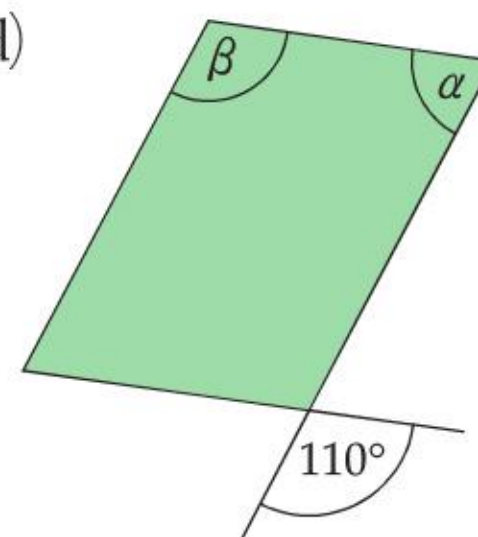
b)



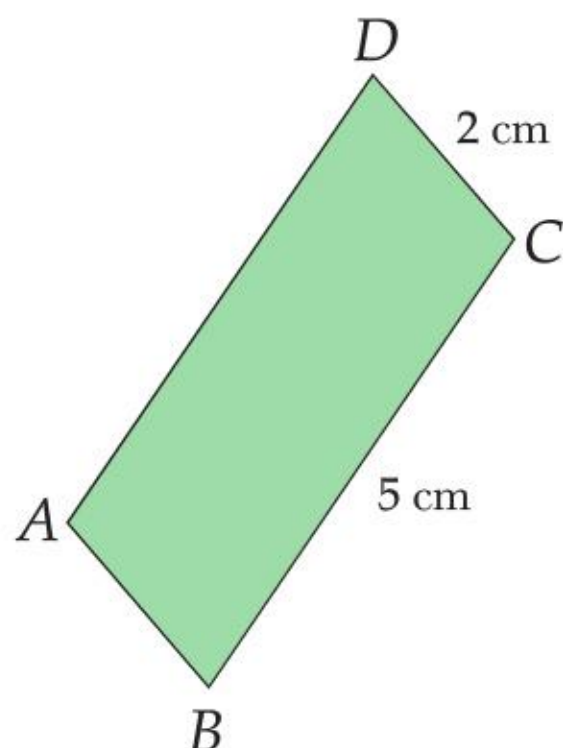
c)



d)



6. Oblicz obwód równoległoboku $ABCD$.



7. Oblicz obwód równoległoboku, którego boki mają podane długości.

a) 6 cm i 7 cm

b) 3 cm i 2 cm

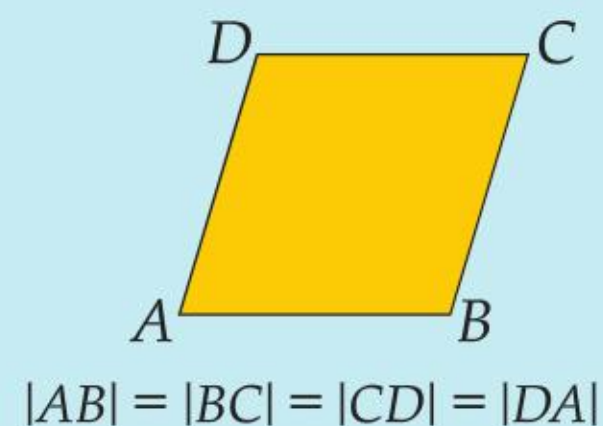
c) 10 cm i 70 mm

d) 2,5 cm i 3,5 cm

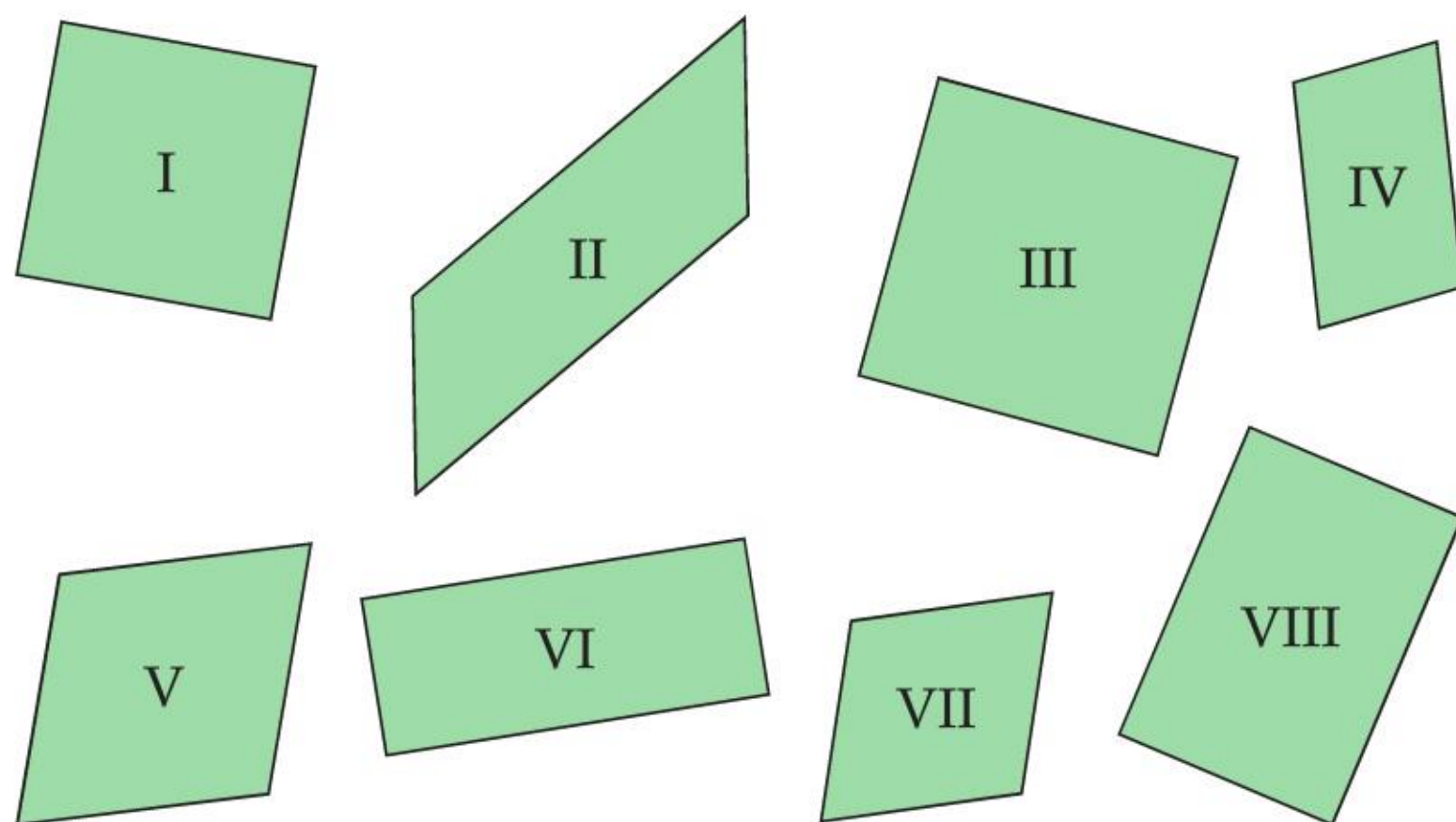
e) 2,5 dm i 45 cm

f) $2\frac{1}{4}$ cm i $8\frac{1}{2}$ cm

Romb to równoległobok, który ma boki równej długości.

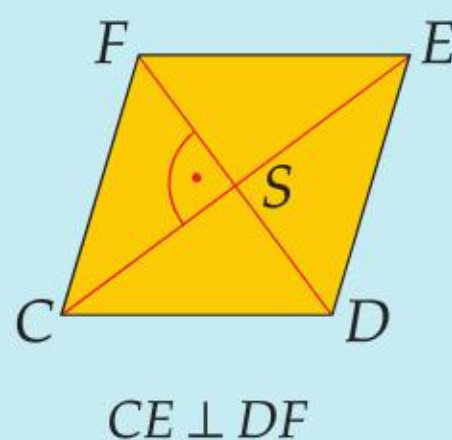


8. Które z poniższych figur są rombami? Czy niektóre romby są równocześnie innymi znanymi ci figurami? Jakimi?



9. Narysuj romb (który nie jest kwadratem) i jego przekątne. Co możesz powiedzieć o wzajemnym położeniu tych przekątnych?

Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.



Kwadrat jest szczególnym przypadkiem rombu.



Ponieważ każdy romb jest równoległobokiem, to przekątne rombu dzielą się na połowy, a przeciwległe kąty rombu mają równe miary.

10. Oblicz obwód rombu o boku mającym podaną długość.

- a) 4 cm b) 45 mm c) 4,5 dm d) $8\frac{1}{4}$ m

11.  Narysuj romb o obwodzie równym 20 cm. Zmierz kąty tego rombu i porównaj otrzymane wyniki z wynikami innych osób w klasie.

Obwód rombu liczysz tak jak obwód kwadratu?



Tak samo! Mnożę długość jego boku przez 4 i gotowe ☺

Zadania

Na każdym zdjęciu zaznaczono na czerwono jeden czworokąt. Ile widzisz wśród nich rombów? Opisz je.



- Narysuj równoległobok, którego wszystkie kąty mają tę samą miarę. Jak nazywamy taką figurę?
- Narysuj romb, którego jeden z kątów ma 90° . Jaka to figura?

● Oblicz długość boku rombu, którego obwód wynosi 36,8 cm.

● Jeden z boków równoległoboku ma 13 dm, a drugi jest od niego o 5,3 dm dłuższy. Ile wynosi obwód tego równoległoboku?

- A. 62,6 dm B. 313 cm
C. 36,6 dm D. 366 cm

● Jeden z boków równoległoboku ma 225 cm, a drugi jest od niego pięć razy krótszy. Ile wynosi obwód tego równoległoboku?

- A. 270 cm B. 36 dm
C. 5,4 m D. 900 cm

● Obwód równoległoboku wynosi 60 dm. Jeden z jego boków ma 8 dm. Jaką długość ma sąsiedni bok?

- A. 285 cm B. 44 dm
C. 220 cm D. 24 dm

● Dwie trójkątne działki położone obok siebie tworzą romb o obwodzie równym 400 m. Granica działek biegnie wzdłuż krótszej przekątnej tego rombu i ma długość 90 m. Ile metrów siatki musi kupić właściciel każdej z działek, aby ogrodzić swój teren, jeżeli obaj umówili się, że wspólną część ogrodzenia wykonają po połowie?

4.12 Trapez

Podejmij temat



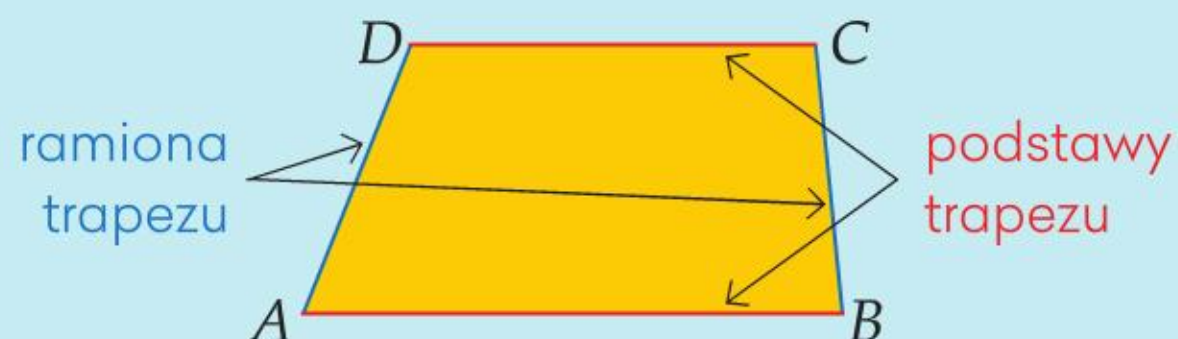
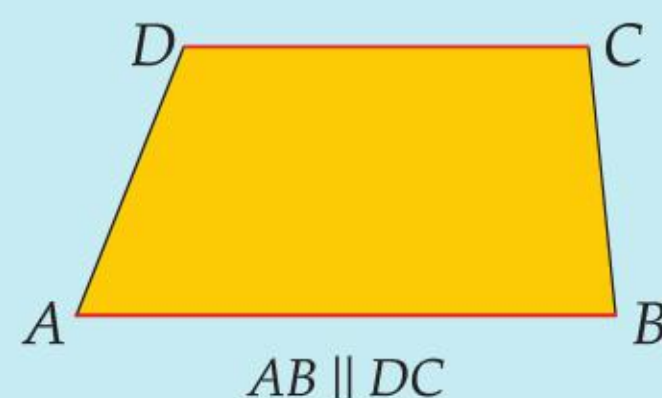
Przyjrzyj się zaznaczonym figurom.
Czy dostrzegasz ich wspólne cechy?



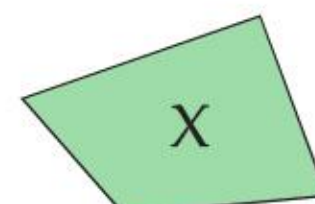
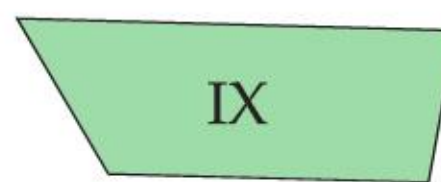
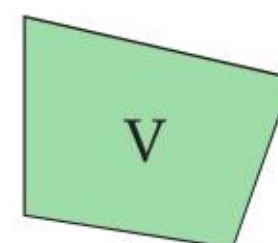
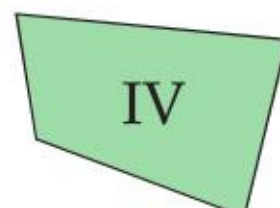
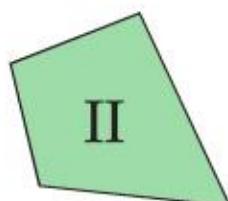
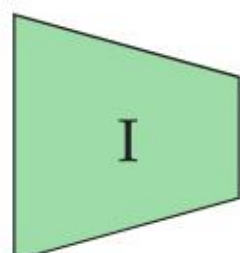
1. Narysuj czworokąt, którego długości boków są różne, ale dwa boki są równoległe. Porównaj swój rysunek z rysunkami wykonanymi przez inne osoby w klasie.

Trapez to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Boki równoległe nazywamy **podstawami trapezu**, a pozostałe boki – **ramionami trapezu**.



2. Narysuj trapez $ABCD$. Kolorem czerwonym zaznacz podstawy, niebieskim – ramiona tego trapezu, a zielonym – jego przekątne.
3. Spośród poniższych czworokątów wybierz trapezy. Wykorzystaj linijkę i ekierkę.



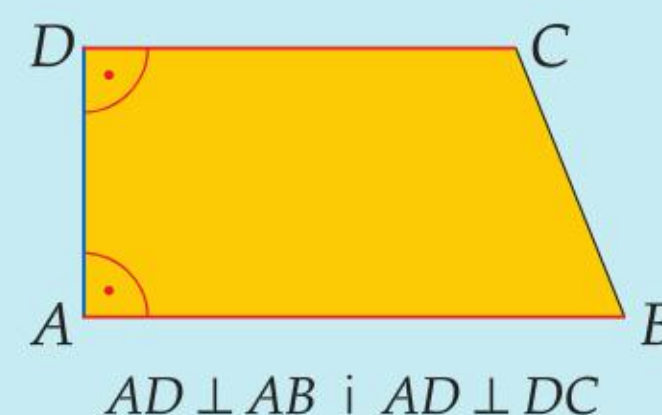


Czasami, np. w celu doprecyzowania opisu rysunku, używamy pojęć: **podstawa dolna**, **podstawa górna** trapezu.

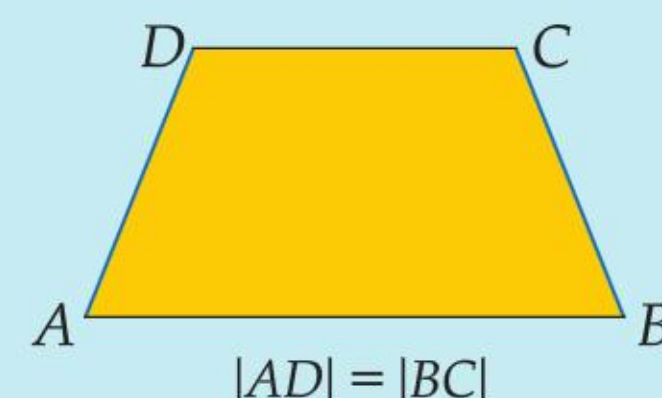
4. Narysuj trapez, którego:

- podstawa górna ma 3 cm, a dolna 5 cm,
- podstawa górna ma 55 mm, a dolna 3,5 cm,
- ramiona mają długości 3 cm i 4 cm,
- jedno z ramion jest prostopadłe do obu podstaw,
- ramiona mają taką samą długość, równą 5 cm.

Trapez prostokątny to trapez, którego co najmniej jedno ramię jest prostopadłe do podstaw.

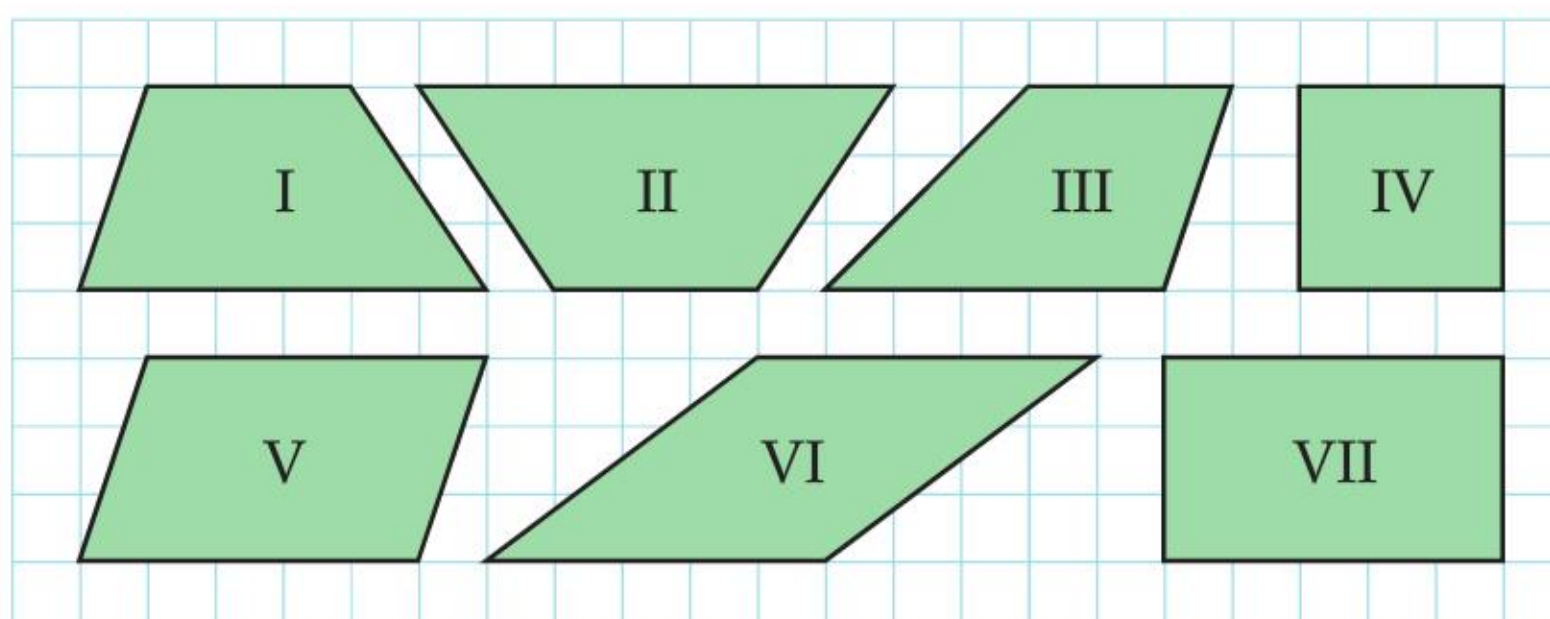


Trapez równoramienny to trapez, którego ramiona są równej długości.



- Narysuj dowolny trapez równoramienny i dowolny trapez prostokątny.
- Narysuj trapez prostokątny, którego podstawy mają długości 4 cm i 5 cm.

7. Przyjrzyj się rysunkom i odpowiedz na pytania.



Które figury są:

- trapezami,
- trapezami równoramiennymi,
- trapezami prostokątnymi?



Każdy prostokąt (a więc i kwadrat) oraz każdy równoległobok (a więc i romb) jest szczególnym przypadkiem trapezu.

8. Wykonaj polecenia.



- Narysuj dowolny trapez (niebędący prostokątem) i zmierz jego kąty. Oblicz sumę miar kątów leżących przy jednym ramieniu. Jaki jest wynik?
- Narysuj taki trapez równoramienny (niebędący równoległobokiem), którego ramię ma 4 cm. Zmierz kąty wewnętrzne tego trapezu. Co zauważasz?

Porównaj swoje odpowiedzi z odpowiedziami innych osób w klasie.

Suma miar kątów leżących przy jednym ramieniu dowolnego trapezu wynosi 180° .



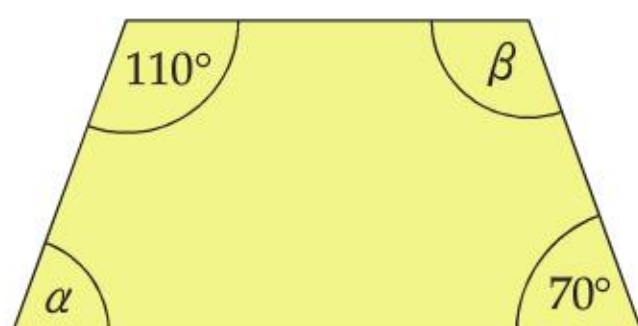
$$\alpha + \delta = 180^\circ \text{ oraz } \beta + \gamma = 180^\circ$$

W trapezie równoramiennym, który ma tylko jedną parę boków równoległych, oba kąty przy dowolnej podstawie są równe.

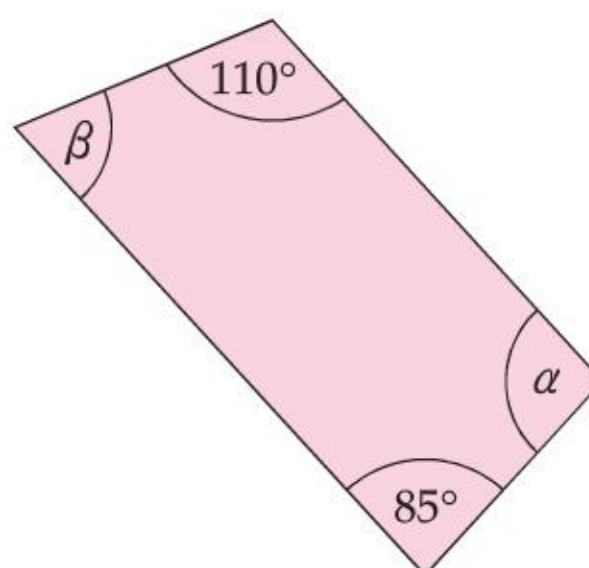


9. Oblicz miary kątów α , β i γ .

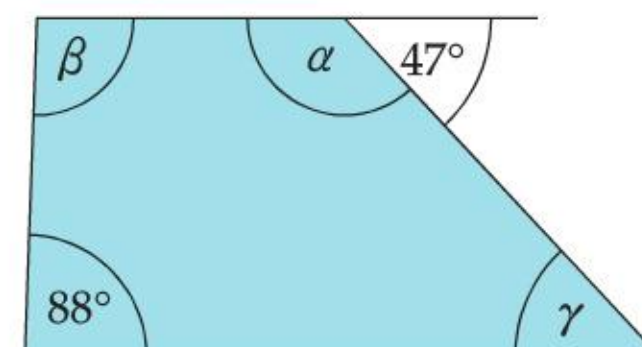
a)



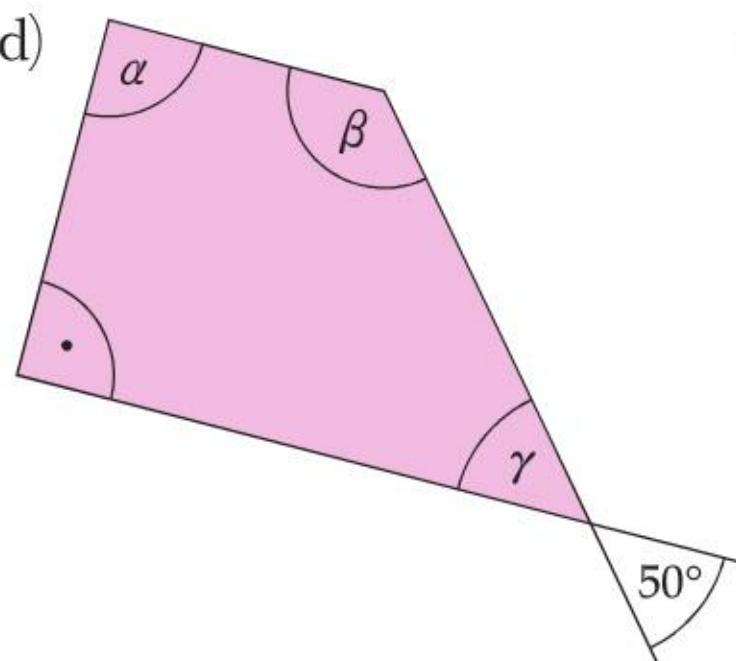
b)



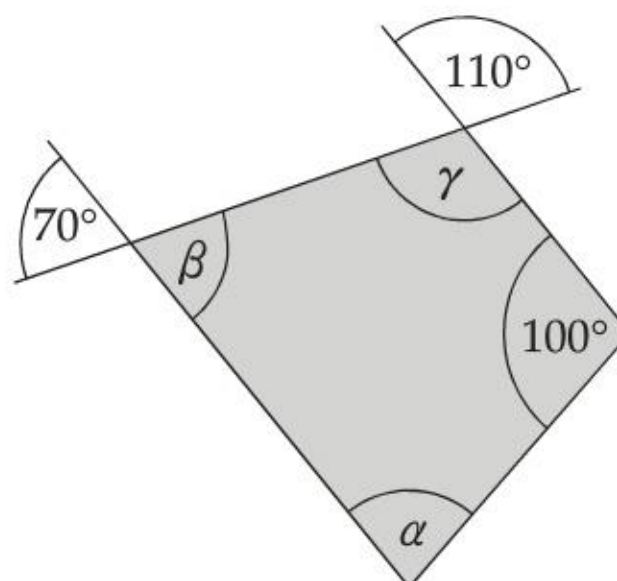
c)



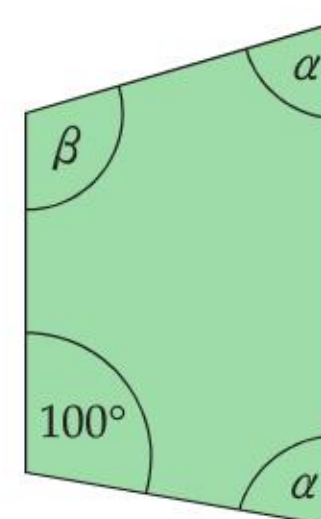
d)



e)

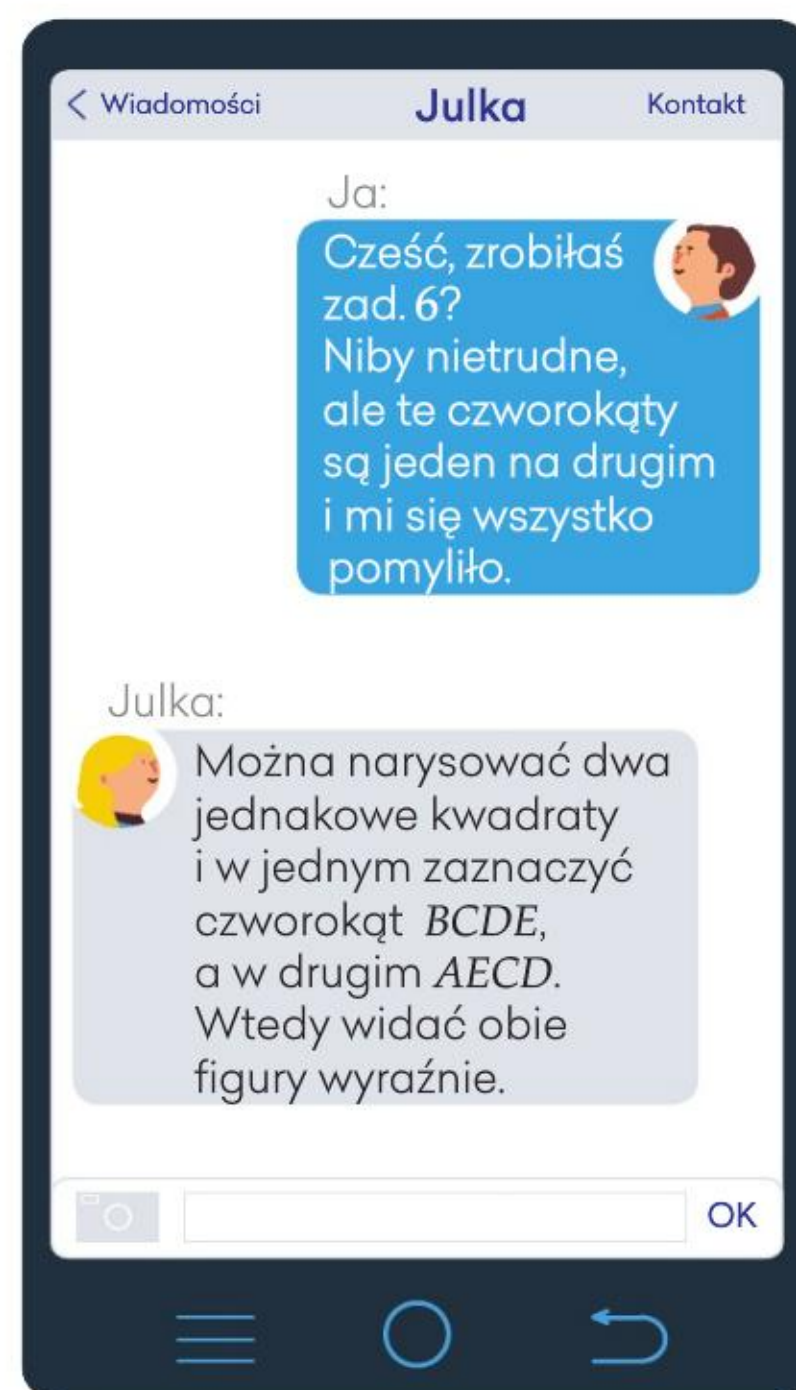
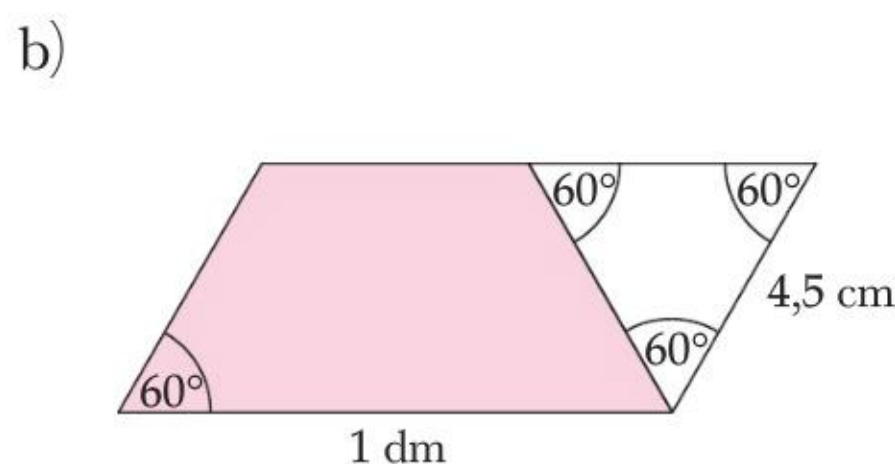
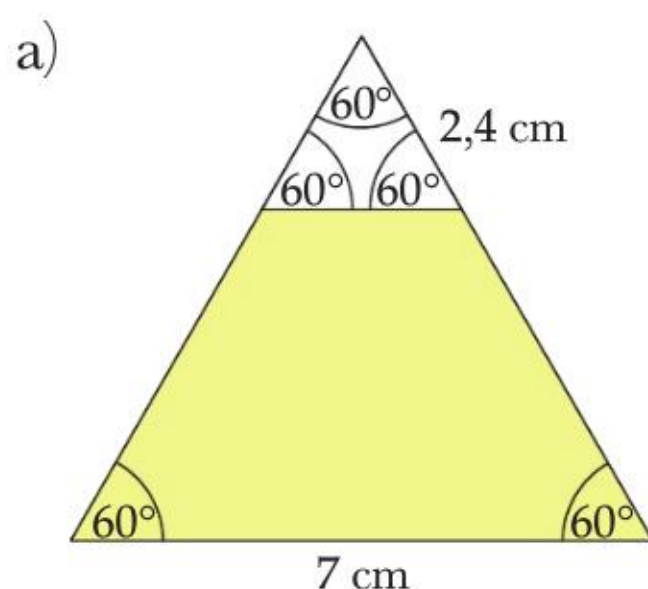


f)



Zadania

- Narysuj trapez równoramienny, którego podstawy mają 5 cm i 3 cm.
- Narysuj trapez, który jest jednocześnie równoramienny i prostokątny. Jaka figura powstała?
- Narysuj trapez prostokątny, którego obie podstawy mają 5 cm, a ramię prostopadłe do podstaw ma 4 cm. Jaka figura powstała? Oblicz jej obwód.
- Oblicz obwód trapezu równoramiennego, którego podstawy mają 28 cm i 15 cm, a ramiona 1 dm.
- Narysuj trapez równoramienny, którego dłuższa podstawa ma 8 cm, krótsza 4 cm, a kąty przy dłuższej podstawie mają 45° . Zmierz z dokładnością do 1 mm ramiona tego trapezu i oblicz jego obwód.
- Narysuj kwadrat $ABCD$ o boku długości 5 cm. Na boku AB zaznacz punkt E oddalony o 1,8 cm od wierzchołka A . Jaką figurą jest czworokąt $BCDE$, a jaką $AECD$? Zmierz odpowiednie odcinki i oblicz obwody tych czworokątów.
- Krótsza podstawa pewnego trapezu równoramiennego i jego ramiona mają taką samą długość. Dłuższa podstawa ma 25 cm, a obwód jest równy 73 cm. Jaka jest długość ramienia tego trapezu?
- Jedna z podstaw trapezu równoramiennego jest trzy razy dłuższa od drugiej. Ramiona mają po 7 cm, a obwód wynosi 48 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu.
- ★ Oblicz obwód zamalowanego trapezu.



4.13 Zależności między czworokątami

Podejmij temat

Trapez, który ma dwie pary boków równoległych, to równoległobok, czy tak?

Tak. A równoległobok, który ma wszystkie kąty proste, to prostokąt 😊

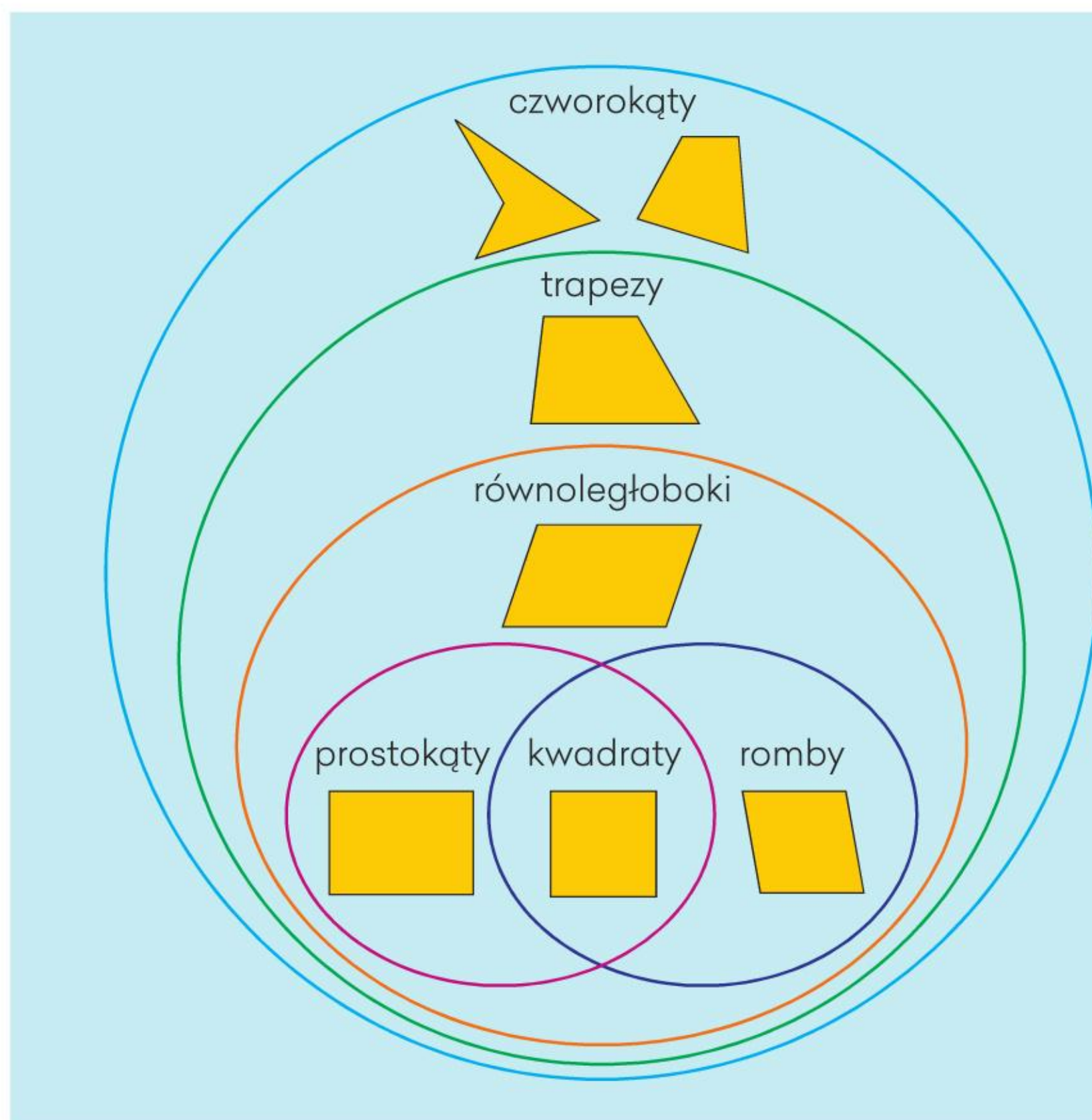


Czy romb jest trapezem? Wszystko mi się już płące... Muszę to sobie jakoś uporządkować...

1. Wymień wszystkie czworokąty poznane w klasie piątej i podaj ich własności.

Czasami, gdy mamy problem z uporządkowaniem pewnej wiedzy, warto pomóc sobie prostym rysunkiem, schematem czy wykresem. Aby zobrazować zależności między czworokątami, można skorzystać z diagramu przedstawionego obok.

2. Na podstawie diagramu sformułuj co najmniej trzy zależności podobne do tych, o jakich rozmawiają dzieci na ilustracji (*Podejmij temat*).



- a) Każdy prostokąt jest kwadratem.
b) Każdy kwadrat jest rombem.
c) Każdy romb jest prostokątem.
d) Każdy romb jest kwadratem.
e) Każdy równoległobok jest trapezem.
f) Każdy trapez jest prostokątem.
g) Każdy prostokąt jest trapezem.
h) Każdy kwadrat jest trapezem.
i) Każdy równoległobok jest trapezem
równoramiennym.
j) Każdy kwadrat jest trapezem
prostokątnym.

Zadania

- Narysuj trapez, którego ramiona i górna podstawa mają tę samą długość, a kąt przy podstawie ma 90° . Jaka figura powstała?
- Narysuj równoległobok, którego jeden z kątów ma 90° . Co to za czworokąt? Podaj jego własności.
- Jaki czworokąt otrzymasz, jeżeli narysujesz romb, którego jeden z kątów będzie miał 90° ? Wypisz własności dowolnego rombu i otrzymanego czworokąta. Podkreśl te, które są wspólne dla obydwu czworokątów.
- Wykonaj diagram podobny do tego ze s. 57, w którym znajdują się następujące nazwy wielokątów: trapezy, trapezy prostokątne, trapezy równoramienne, prostokąty.
- W którym czworokącie przekątne zawsze przecinają się pod kątem prostym?
A. W równoległoboku. B. W prostokącie.
C. W trapezie równoramiennym. D. W rombie.
- W którym czworokącie przeciwległe kąty **nie** mają takiej samej miary?
A. W prostokącie niebędącym kwadratem.
B. W równoległoboku niebędącym rombem.
C. W trapezie prostokątnym niebędącym prostokątem.
D. W rombie niebędącym kwadratem.
- ★ Jaki czworokąt otrzymasz, jeśli narysujesz trapez, który ma dwie pary boków równoległych i dodatkowo:
a) nie jest on trapezem prostokątnym, a jego podstawy są równej długości,
b) nie jest trapezem prostokątnym, a wszystkie jego boki są równej długości,
c) jest także trapezem prostokątnym, a sąsiednie boki są różnej długości?

4.14 Wielokąty w skali

Podejmij temat



Czym się różni obraz powstały na wyświetlaczu telefonu czy ten uzyskany za pomocą lupy od obrazu rzeczywistego? Co pozostało bez zmiany w obu przypadkach?



Jeżeli rysujemy jakiś przedmiot, figurę geometryczną czy obszar (np. część miasta lub plan mieszkania) w zmniejszeniu lub powiększeniu – a przy tym dokładnie – to mówimy, że jest on narysowany **w skali**.

Jeżeli każdy wymiar figury jest zmniejszony:

- 2 razy, to mówimy, że figura jest narysowana **w skali 1 : 2**,
- 3 razy, to mówimy, że figura jest narysowana **w skali 1 : 3**,
- 4 razy, to mówimy, że figura jest narysowana **w skali 1 : 4** itd.

Jeżeli każdy wymiar figury jest powiększony:

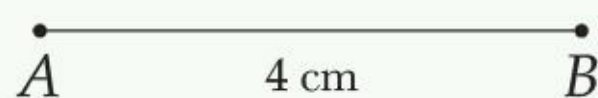
- 2 razy, to mówimy, że figura jest narysowana **w skali 2 : 1**,
- 3 razy, to mówimy, że figura jest narysowana **w skali 3 : 1**,
- 4 razy, to mówimy, że figura jest narysowana **w skali 4 : 1** itd.

Przykład 1

Narysujmy:

- odcinek AB o długości 4 cm w skali 1 : 2,
- trójkąt równoboczny ABC o boku mającym 4,5 cm w skali 1 : 3,
- prostokąt $ABCD$ o wymiarach 2,5 cm $\times$ 5 cm w skali 1 : 5.

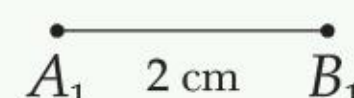
a)



zmniejszony 2 razy

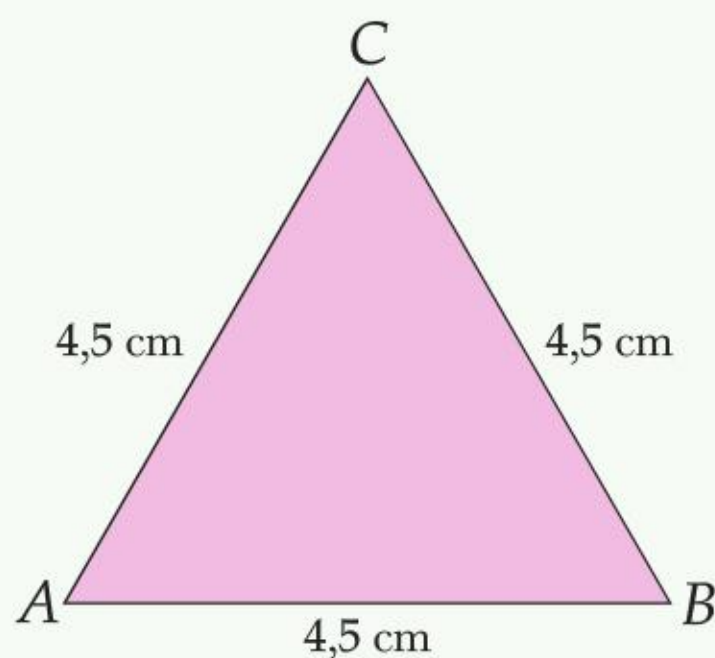


$$4 \text{ cm} : 2 = 2 \text{ cm}$$



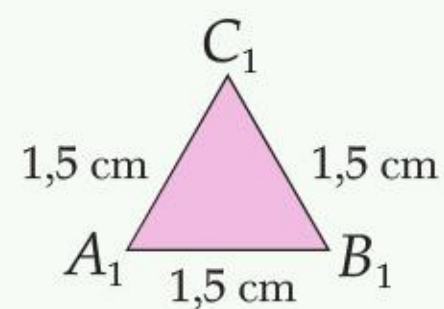
skala 1 : 2

b)



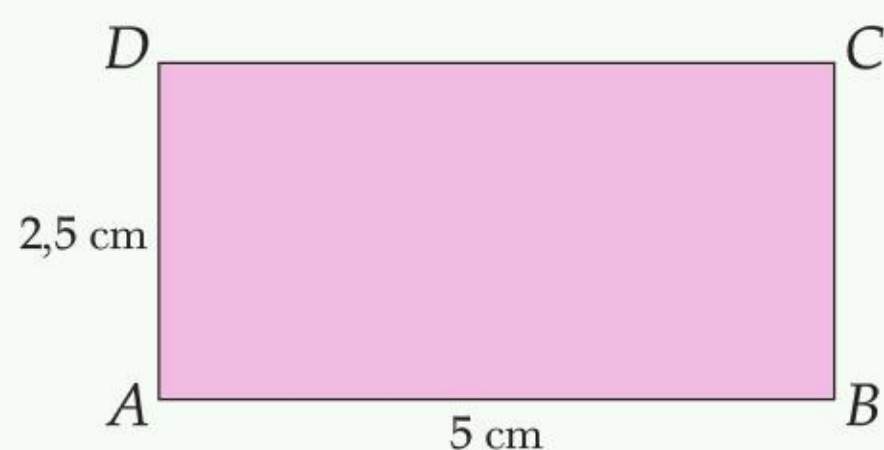
zmniejszony 3 razy

$$4,5 \text{ cm} : 3 = 1,5 \text{ cm}$$



skala 1 : 3

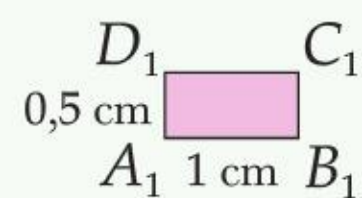
c)



zmniejszony 5 razy

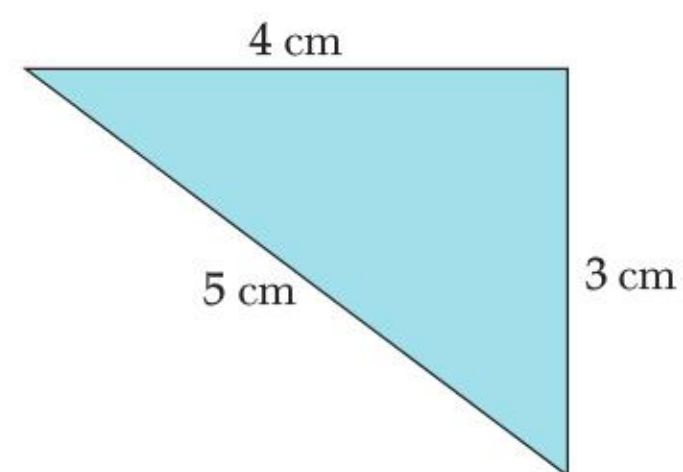
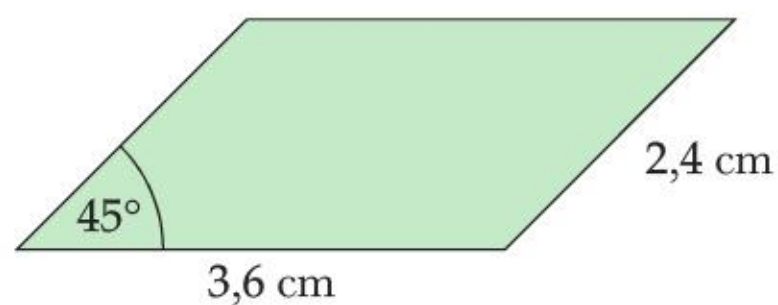
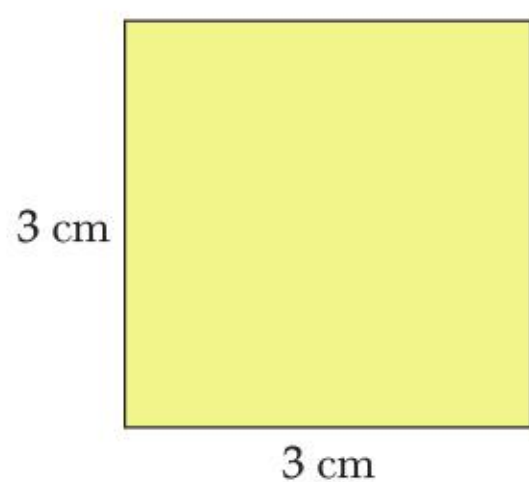
$$2,5 \text{ cm} : 5 = 0,5 \text{ cm}$$

$$5 \text{ cm} : 5 = 1 \text{ cm}$$



skala 1 : 5

1. Narysuj poniższe wielokąty w skali 1 : 2.

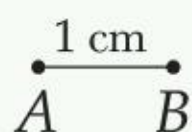


Przykład 2

Narysujmy:

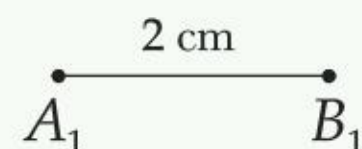
- odcinek AB o długości 1 cm w skali 2 : 1,
- trójkąt równoboczny ABC o boku mającym 1,7 cm w skali 3 : 1,
- prostokąt $ABCD$ o wymiarach $0,8 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ w skali 6 : 1.

a)



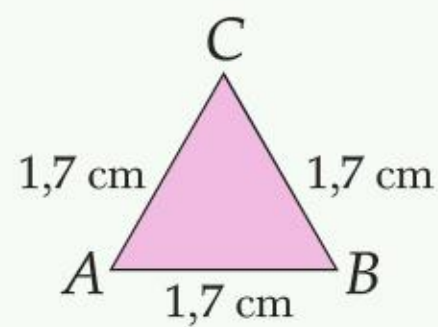
powiększony 2 razy

$$1 \text{ cm} \cdot 2 = 2 \text{ cm}$$

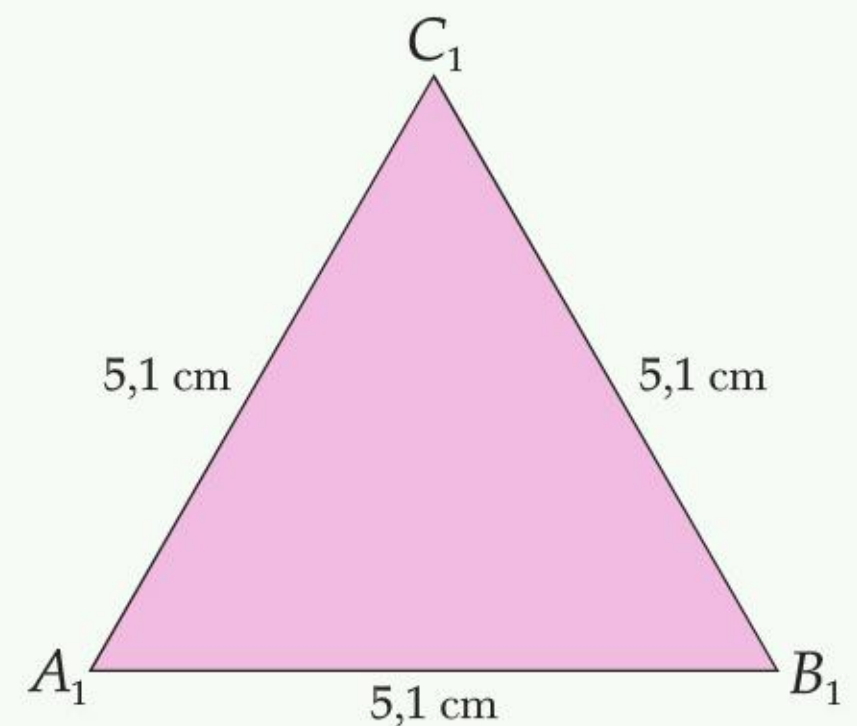


skala 2 : 1

b)

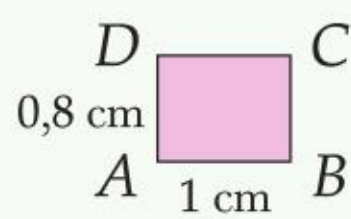


powiększony 3 razy
 $\xrightarrow{1,7\text{ cm} \cdot 3 = 5,1\text{ cm}}$

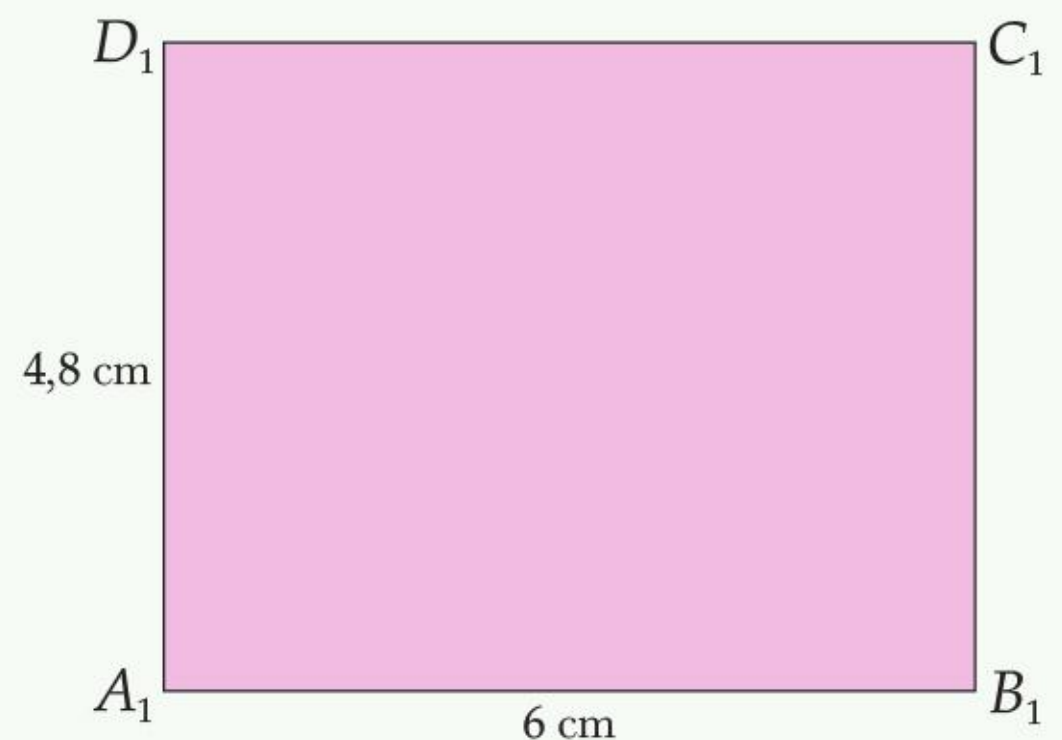


skala 3 : 1

c)

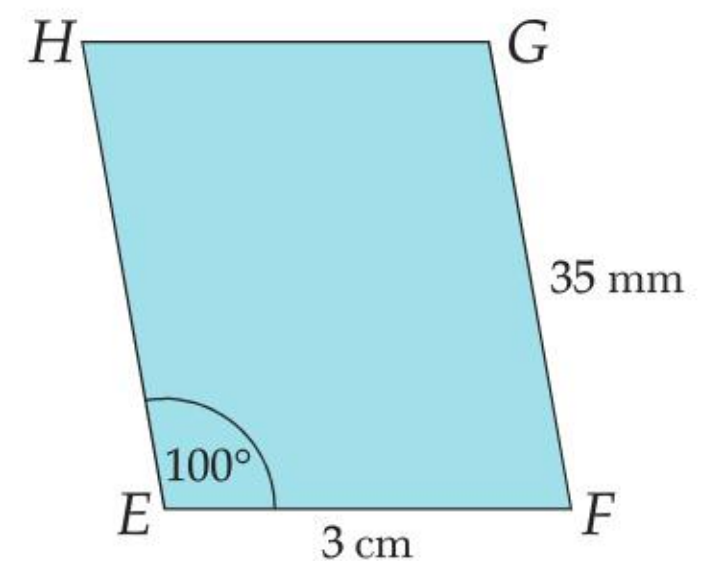
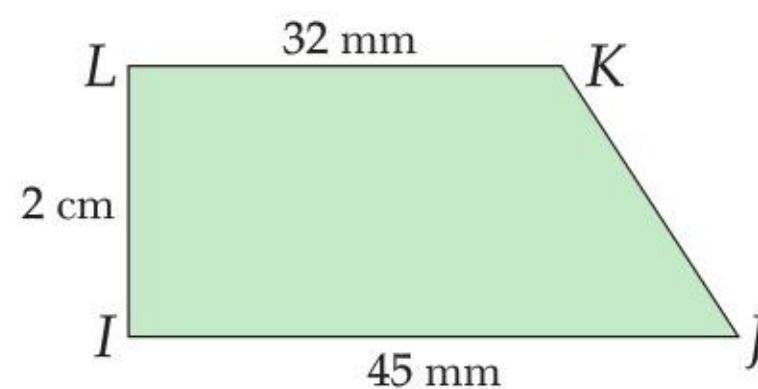
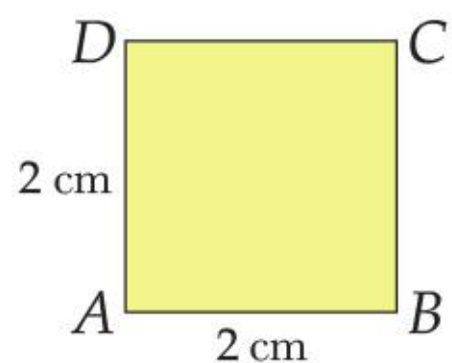


powiększony 6 razy
 $\xrightarrow{0,8\text{ cm} \cdot 6 = 4,8\text{ cm}}$
 $\xrightarrow{1\text{ cm} \cdot 6 = 6\text{ cm}}$



skala 6 : 1

2. Narysuj poniższe czworokąty w skali 2 : 1.



3. Oblicz długości boków prostokąta w podanej skali, jeżeli jego rzeczywiste wymiary to $16\text{ cm} \times 20\text{ cm}$.

a) 1 : 4

b) 1 : 2

c) 2 : 1

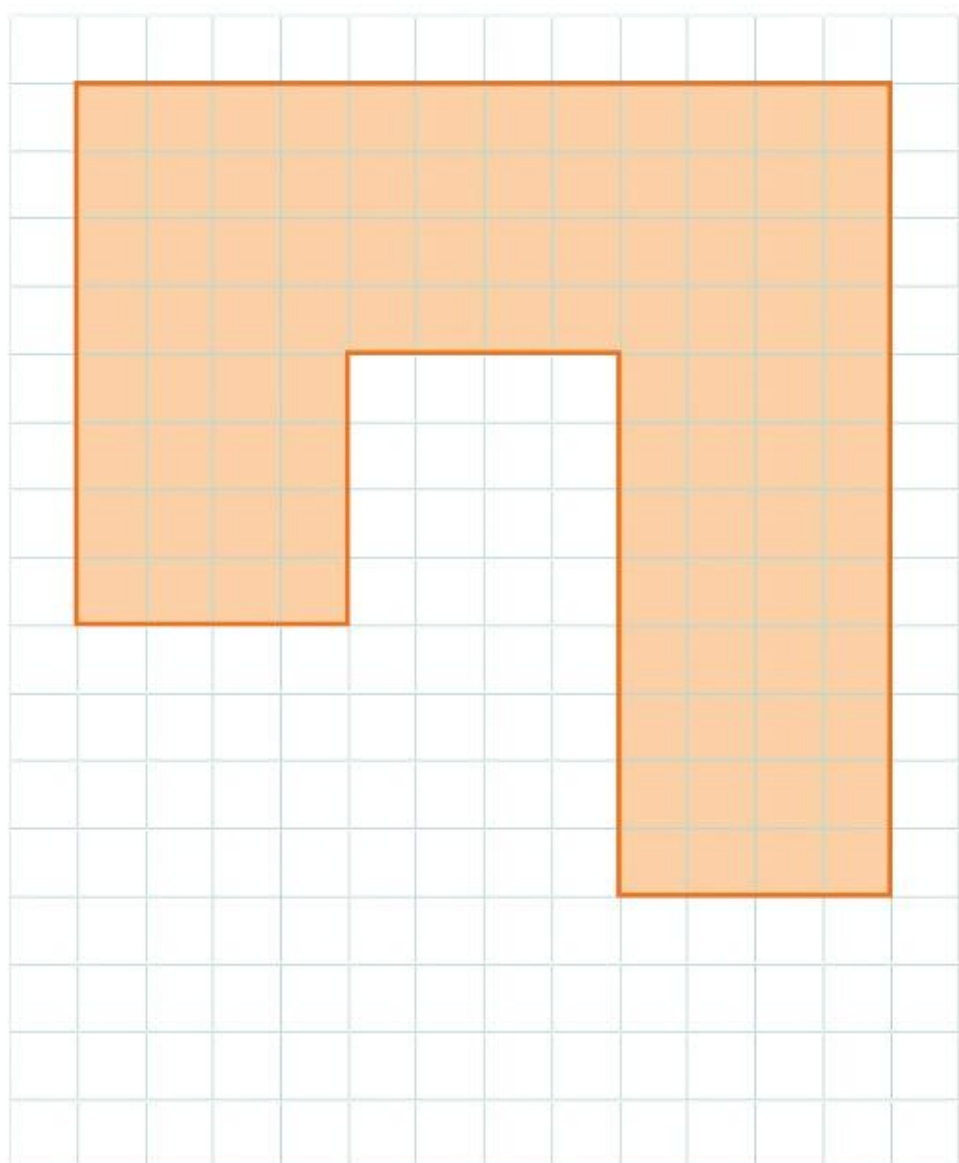
d) 4 : 1

e) 1 : 5

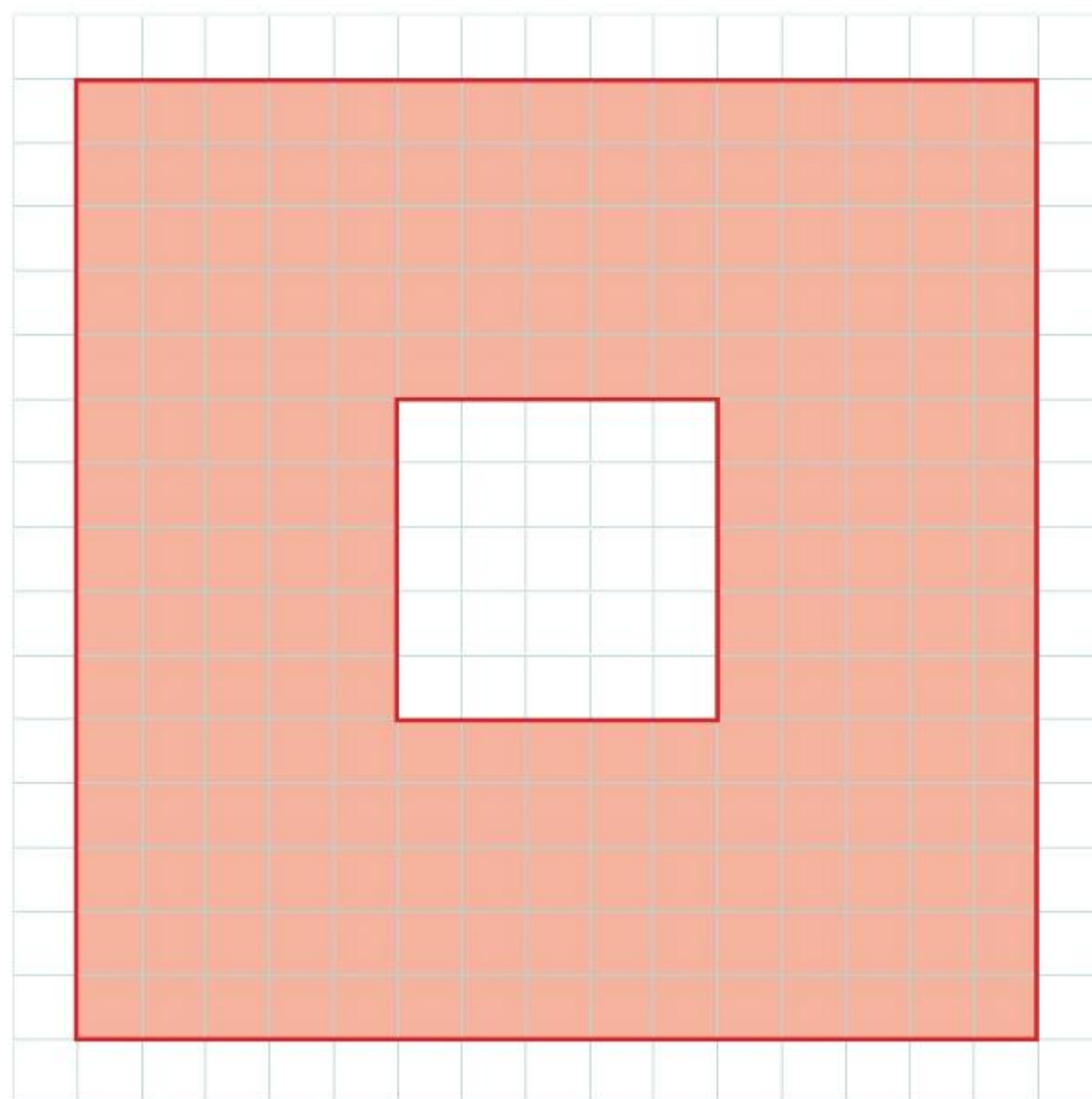
Zadania

● Narysuj wielokąt w podanej skali.

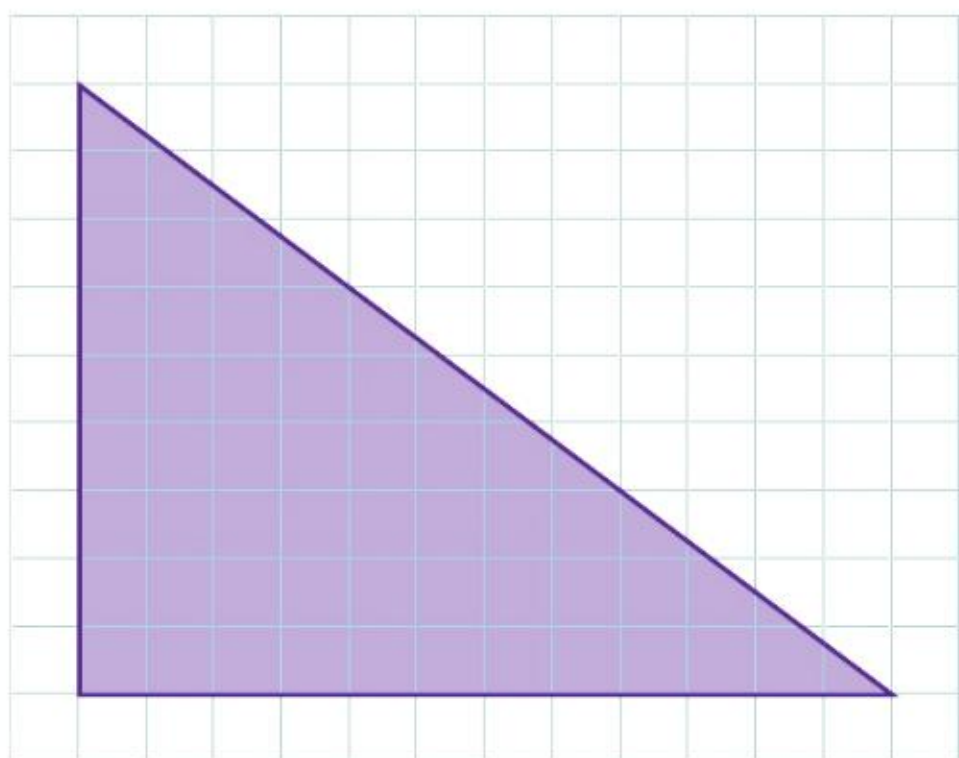
a) 1 : 4



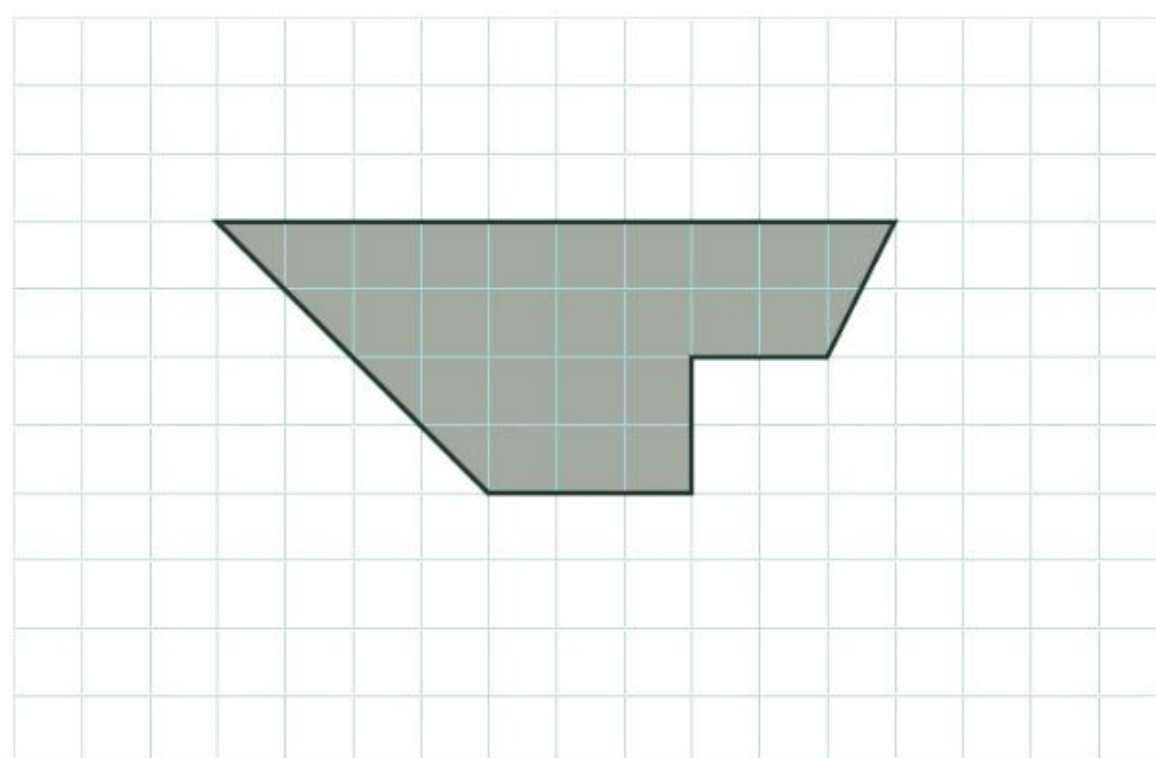
b) 1 : 5



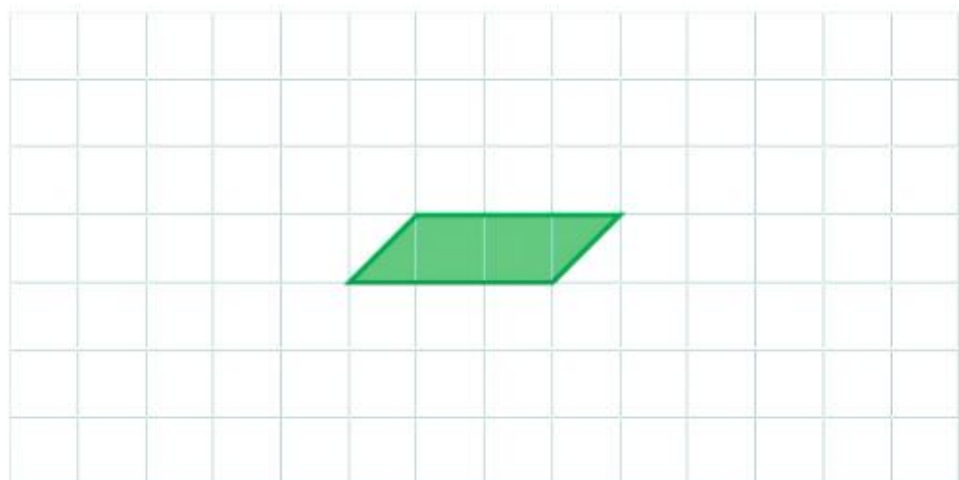
c) 1 : 3



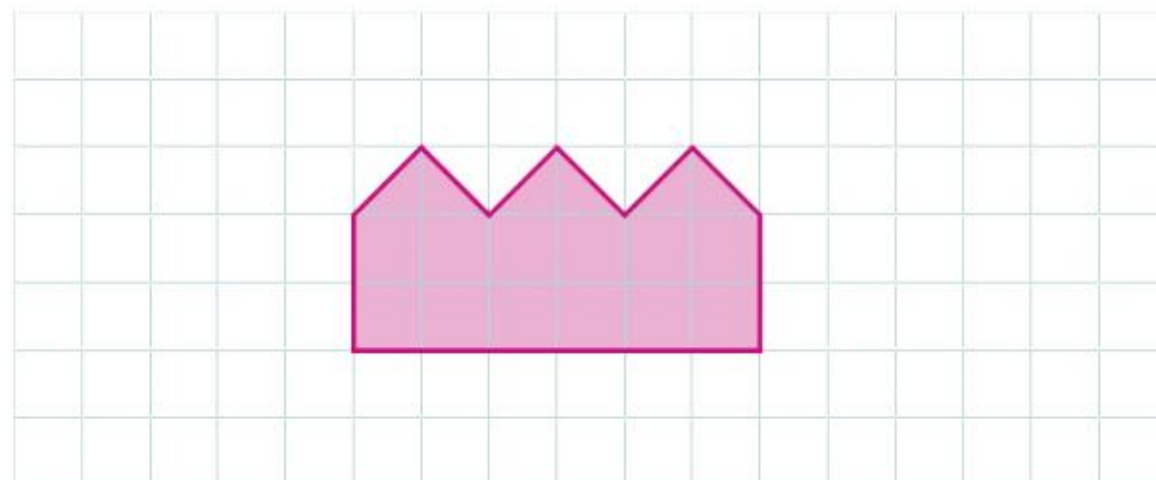
d) 2 : 1



e) 5 : 1



f) 3 : 1



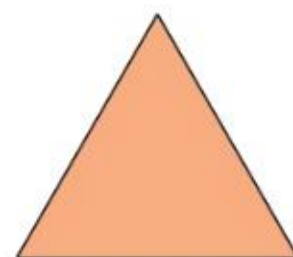
- Prostokąt ma wymiary $1,5 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$. Narysuj ten prostokąt w skali $3 : 1$ oraz w skali $4 : 1$.
- Romb o boku 20 cm i kącie ostrym 30° narysuj w skali $1 : 10$ oraz w skali $1 : 5$.
- Wymienione długości boków trójkąta ABC są długościami rzeczywistymi. Oblicz długości boków tego trójkąta narysowanego w podanej skali.

a) $ AB = 20 \text{ mm}$	$ BC = 32 \text{ mm}$	$ CA = 24 \text{ mm}$	skala $1 : 4$
b) $ AB = 20 \text{ cm}$	$ BC = 25 \text{ cm}$	$ CA = 7\frac{1}{2} \text{ cm}$	skala $1 : 5$
c) $ AB = 3,2 \text{ cm}$	$ BC = 4\frac{1}{4} \text{ cm}$	$ CA = 2,3 \text{ cm}$	skala $8 : 1$
d) $ AB = 7,2 \text{ dm}$	$ BC = 8,4 \text{ dm}$	$ CA = 9,7 \text{ dm}$	skala $10 : 1$
e) $ AB = 214 \text{ cm}$	$ BC = 316 \text{ cm}$	$ CA = 3,5 \text{ m}$	skala $1 : 10$
- Jaką rzeczywistą długość mają boki czworokąta, jeżeli:
 - czworokąt został narysowany w skali $1 : 3$, a jego boki przedstawione w tej skali mają długości: 3 cm , 4 cm , 6 cm i 7 cm ,
 - czworokąt został narysowany w skali $3 : 1$, a jego boki przedstawione w tej skali mają długości: 6 cm , 9 cm , 9 cm i 3 cm .
 - czworokąt został narysowany w skali $7 : 1$, a jego boki przedstawione w tej skali mają długości: $5,6 \text{ cm}$, $5,6 \text{ cm}$, 7 cm i 7 cm ?
- Wymiary prostokąta narysowanego w skali $1 : 20$ są równe $35 \text{ mm} \times 2 \text{ cm}$.
 - Jakie są rzeczywiste wymiary tego prostokąta?
 - Jakie wymiary miałby ten prostokąt narysowany w skali $1 : 5$?
- Kwadrat, trójkąt równoboczny, romb, równoległobok i prostokąt zostały narysowane w podanych skalach. Oblicz rzeczywisty obwód każdego z tych wielokątów.



$1,2 \text{ cm}$

skala $1 : 6$



$2 \text{ cm } 1 \text{ mm}$

skala $3 : 1$



8 mm

skala $1 : 8$



$1,6 \text{ cm}$

$4,2 \text{ cm}$

skala $2 : 1$



10 mm

$2,3 \text{ cm}$

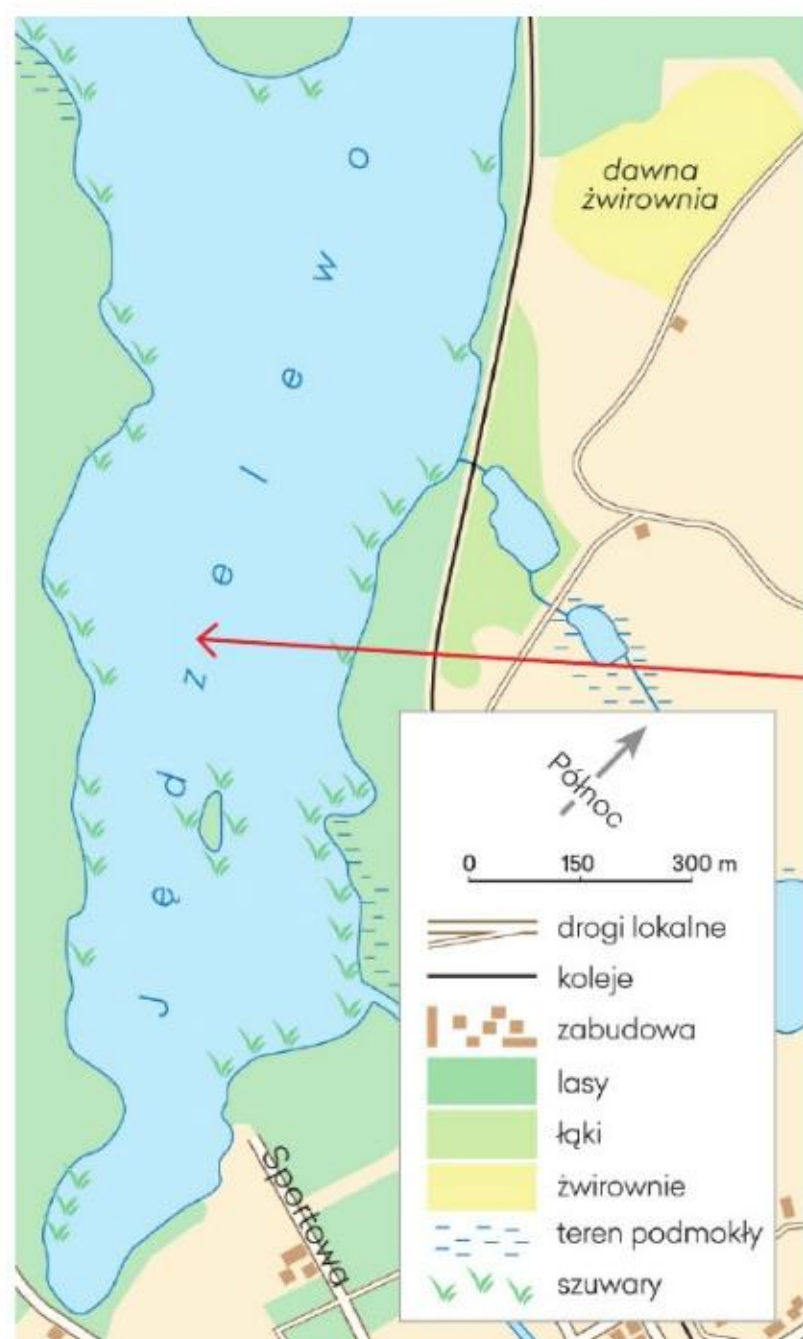
skala $1 : 3$

4.15 Skala na planach i mapach



Podejmij temat

Loty widokowe to duża atrakcja dla dzieci i dorosłych. Bartek z tatą podczas wakacji na Mazurach skorzystali z takiej właśnie oferty turystycznej.



Gdy przebywamy w terenie, którego nie znamy, często posługujemy się planem lub mapą okolicy.



Plany i mapy pozwalają nam sprawdzić, gdzie znajdują się interesujące nas miejsca, budynki i inne obiekty, a także pomagają ustalić drogę dotarcia do nich. Na podstawie mapy i jej skali można też obliczyć rzeczywiste odległości w terenie.

Każda mapa i każdy plan narysowane są w pewnej skali.

Poniżej zamieszczono fragment planu Olsztyna. Jest on wykonany w skali 1 : 5000, to znaczy, że wszystkie odległości w terenie są 5000 razy większe niż te odpowiadające im na planie.



Czy pamiętasz?

1 cm = 10 mm

1 dm = 10 cm = 100 mm

1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm

1 km = 1000 m

Przykład 1

Obliczmy rzeczywistą odległość w linii prostej od Wysokiej Bramy do Muzeum Warmii i Mazur.

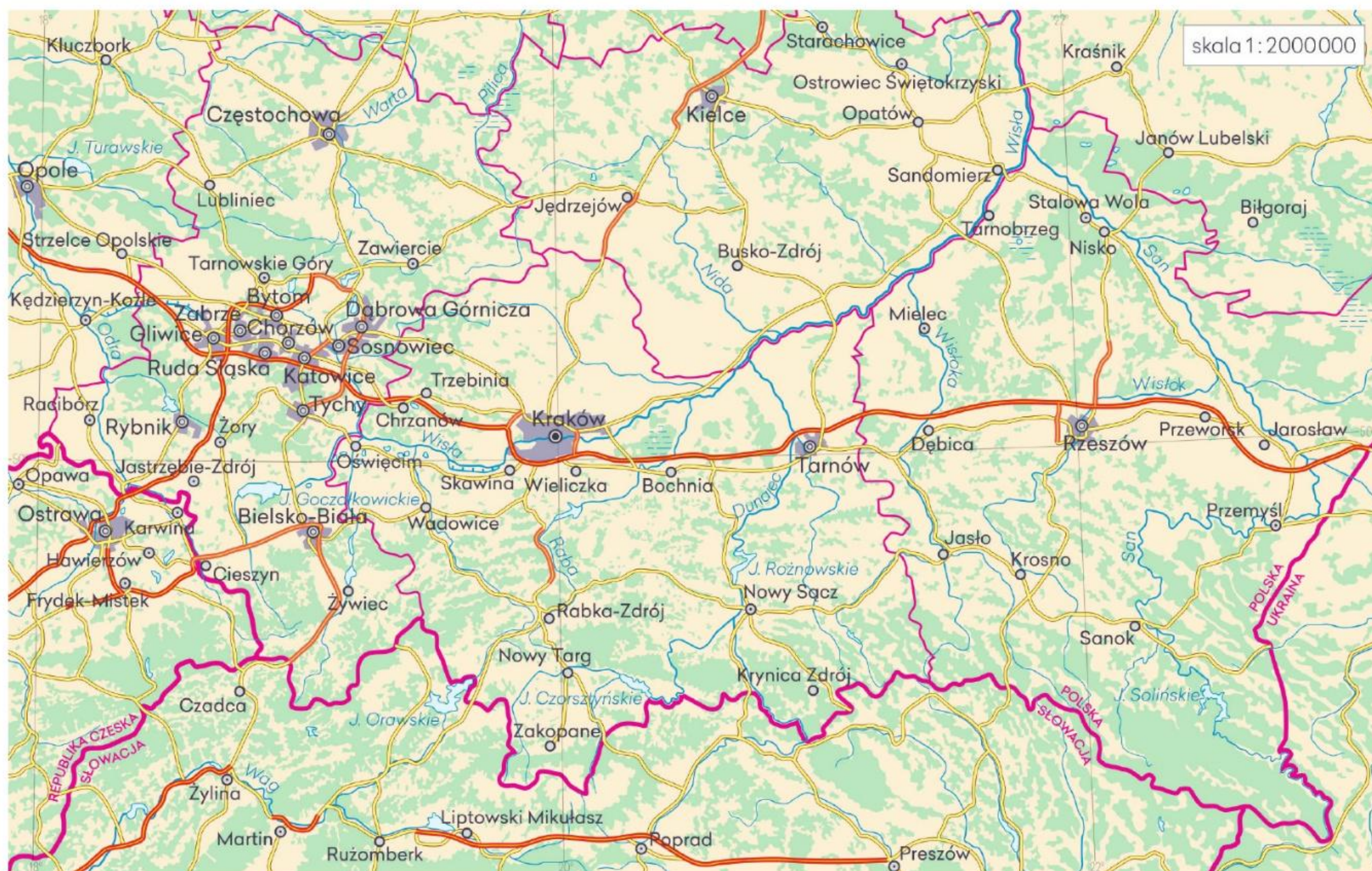
Mierzymy odległość na planie. Wynosi ona 41 mm. Rzeczywista odległość jest 5000 razy większa, aby ją obliczyć, należy zatem wykonać działanie: $41 \text{ mm} \cdot 5000 = 205\,000 \text{ mm}$.

Rzeczywistych odległości między obiektami w mieście nie podajemy w milimetrach, należy więc zamienić jednostki: $205\,000 \text{ mm} = 205 \text{ m}$.

Odległość w linii prostej od Wysokiej Bramy do Muzeum Warmii i Mazur wynosi 205 m.

1. Oblicz rzeczywistą odległość w linii prostej:
 - a) od Starego Ratusza do Muzeum Warmii i Mazur,
 - b) od pomnika Mikołaja Kopernika do Wysokiej Bramy.

Oto fragment mapy Polski przedstawiający jej południowo-wschodnią część. Mapa jest narysowana w skali 1 : 2 000 000, zatem wszystkie odległości w terenie są 2 000 000 razy większe niż na mapie.



Przykład 2

Obliczmy rzeczywistą odległość w linii prostej między Krakowem a Przemyślem.

Mierzmy odległość na mapie.

Wynosi ona 10 cm.

Mnożymy tę odległość, zgodnie ze skalą mapy, przez 2 000 000.

$$10 \text{ cm} \cdot 2\,000\,000 = 20\,000\,000 \text{ cm} =$$

Zamieniamy jednostki długości.

$$= 200\,000 \text{ m} = 200 \text{ km}$$

Odległość między Krakowem a Przemyślem wynosi 200 km.

2. Oblicz rzeczywistą odległość w linii prostej między:

- a) Katowicami a Częstochową,
- c) Krakowem a Wieliczką,

- b) Krakowem a Zakopanem,
- d) Rzeszowem a Przemyślem.



Jeśli znamy skalę, możemy też wykonywać obliczenia odwrotne: na podstawie odległości w terenie jesteśmy w stanie obliczyć odpowiadającą jej odległość na planie czy mapie.

Przykład 3

Obliczmy, w jakiej odległości na planie Sopotu – wykonanym w skali 1 : 6000 – znajdują się dwie atrakcje turystyczne: Krzywy Domek i Fontanna Jasia Rybaka. W rzeczywistości znajdują się one 90 m od siebie.

Skala planu wynosi 1 : 6000, zatem odległości na planie są 6000 razy mniejsze niż odpowiadające im odległości w terenie. Odległość między Krzywym Domkiem a Fontanną Jasia Rybaka w rzeczywistości wynosi 90 m, musimy zatem 90 m podzielić przez 6000 i wówczas otrzymamy odległość tych obiektów na planie:

$$90 \text{ m} : 6000.$$

Liczba 90 nie jest jednak „wygodna” do podzielenia przez 6000, zapiszmy więc 90 m inaczej – za pomocą większej liczby. W tym celu zamieńmy jednostki:

$$90 \text{ m} : 6000 = 9000 \text{ cm} : 6000 = 9 \text{ cm} : 6 = 1,5 \text{ cm}.$$

Obliczyliśmy, że na planie wykonanym w skali 1 : 6000 odległość między tymi atrakcjami turystycznymi wynosi 1,5 cm.

3. Rynek w pewnym mieście jest prostokątem o wymiarach 200 m × 120 m. Jakie wymiary będzie miał ten rynek na planie wykonanym w skali 1 : 5000?

W przypadku gdy jednemu centymetrowi na mapie odpowiada bardzo duża odległość w terenie (np. jeśli mapa jest wykonana w skali 1 : 2 000 000 czy 1 : 45 000 000), zamiana jednostek może początkowo sprawiać trudności. Pokażemy, jak sobie z tym radzić na przykładzie.

Przykład 4

Obliczmy, w jakiej odległości od Poznania powinien być zaznaczony Toruń na mapie Polski wykonanej w skali 1 : 4 000 000. Rzeczywista odległość między tymi miastami w linii prostej wynosi 132 km.

Odległość na mapie jest 4 000 000 razy mniejsza niż w rzeczywistości, zatem 132 km należy podzielić przez 4 000 000.

Aby ułatwić sobie dzielenie, najpierw zamieniamy jednostki.

$$\begin{aligned} 132 \text{ km} &= \\ &= 132\,000 \text{ m} = \\ &= 13\,200\,000 \text{ cm} = \\ &= 132\,000\,000 \text{ mm} \text{ (tę liczbę będzie nam się już dobrze dzieliło} \\ &\text{przez } 4\,000\,000, \text{ ponieważ liczba zer w dzielniku i dzielnej} \\ &\text{będzie taka sama)} \end{aligned}$$

Wykonujemy dzielenie. $132\,000\,000 \text{ mm} : 4\,000\,000 = 132 \text{ mm} : 4 = 33 \text{ mm} = 3,3 \text{ cm}$

Obliczyliśmy, że na mapie Polski wykonanej w skali 1 : 4 000 000 Toruń powinien być zaznaczony w odległości 3,3 cm od Poznania.

4. W jakiej odległości od siebie na mapie wykonanej w skali 1 : 25 000 000 zaznaczone są dwie miejscowości, między którymi rzeczywista odległość wynosi 450 km?

Zdarza się, że zamiast skali liczbowej (np. 1 : 100 000) pod mapą jest umieszczona tzw. skala liniowa, np. 0  30 km lub podobnie: 30 km .

Jest to graficzny sposób przedstawienia skali.

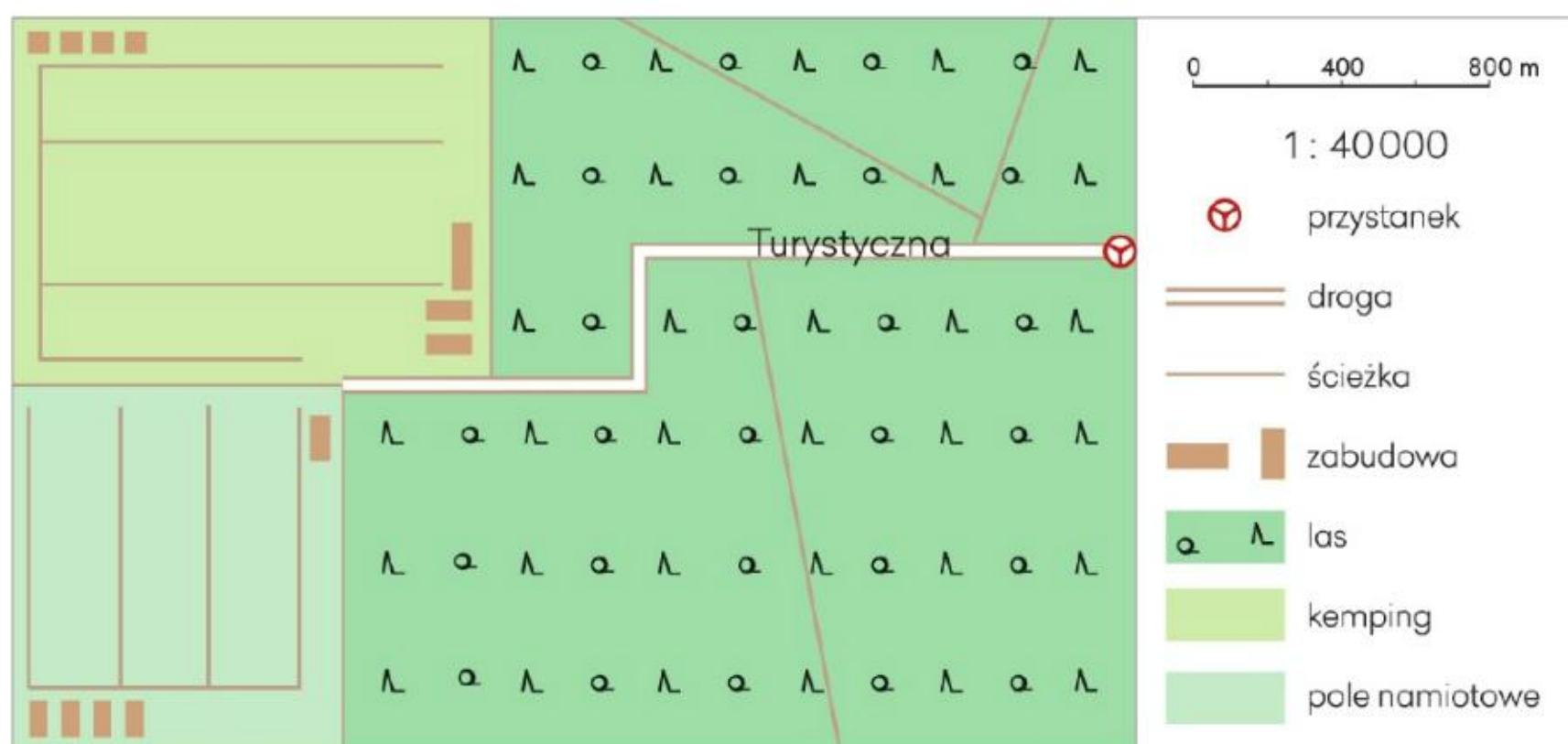
W jaki sposób ustalić skalę liczbową takiej mapy?

- Należy zmierzyć długość narysowanego odcinka. W naszym przypadku ma on 2 cm.
- Oznacza to, że 2 cm na mapie odpowiadają 30 km w rzeczywistości.
- Teraz musimy 30 km zapisać w tej samej jednostce, w której zmierzaliśmy odcinek – czyli w centymetrach. 2 cm na mapie odpowiadają 30 km = 30 000 m = 3 000 000 cm w rzeczywistości, zatem 1 cm na mapie odpowiada 1 500 000 cm w rzeczywistości.

Teraz możemy już stwierdzić, że skala liczbową tej mapy to 1 : 1 500 000.

Zadania

- Ilu metrom w terenie odpowiada odcinek długości 3 cm na planie wykonanym w podanej skali?
a) 1 : 500 b) 1 : 6000 c) 1 : 10 000
- Odległość między dwoma miastami wynosi 80 km. Jaka jest odległość między tymi miastami na mapie wykonanej w podanej skali?
a) 1 : 400 000 b) 1 : 8 000 000 c) 1 : 20 000 000
- Skorzystaj z fragmentu planu Olsztyna na s. 65 i oblicz rzeczywistą długość ulicy:
a) Seweryna Pieniężnego, b) Jana Długosza, c) Podwale.
- Skorzystaj z fragmentu mapy Polski na s. 66 i oblicz, jaką rzeczywistą długość miałaby trasa po liniach prostych z Zakopanego przez Nowy Targ i Nowy Sącz do Krynicy Zdroju.
- Jacek, Marek i Tomek mieszkają przy jednej ulicy. Jacek mieszka na samym początku ulicy, Marek 400 m dalej, a Tomek w odległości 1100 m od Marka. Za domem Tomka ulica ma jeszcze tylko 60 m długości. Cała ulica nie ma ani jednego zakrętu. Narysuj w skali 1 : 20 000 ulicę z zaznaczonymi domami trzech chłopców. W tym celu oblicz, jakie długości będą miały odpowiednie odcinki na tym planie.
- Plan przedstawia fragment lasu i drogę prowadzącą od przystanku PKS na pole namiotowe oraz kemping. Zmierz odpowiednie odcinki i oblicz rzeczywistą długość drogi oraz rzeczywiste wymiary pola namiotowego i kempingu.



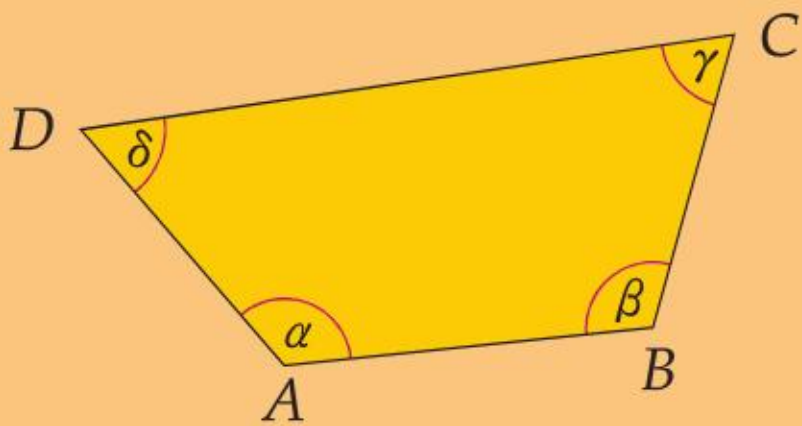
- Ogródek działkowy ma kształt prostokąta o wymiarach 24 m × 16 m. Część ogródka zajmuje prostokątny trawnik o wymiarach 9 m × 7 m; na trawniku znajduje się altanka o długości 3 m i szerokości 2,2 m. Narysuj plan tego ogródka w skali 1 : 200. Następnie w dowolnym miejscu zaznacz na nim trawnik, a na trawniku altankę.

Podsumowanie działu 4

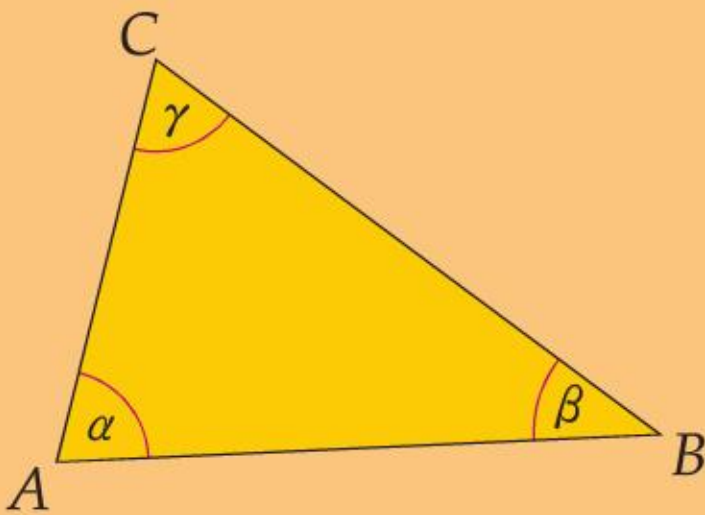
Ważne pojęcia

proste pokrywające się	odległość punktu od prostej	kąty przyległe	kąty wierzchołkowe
przekątna wielokąta	trójkąt	trójkąt różnoboczny	trójkąt równoboczny
trójkąt ostrokątny	trójkąt rozwartokątny	trójkąt prostokątny	nierówność trójkąta
równoległobok	trapez	trapez prostokątny	trapez równoramienny

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta i trójkąta

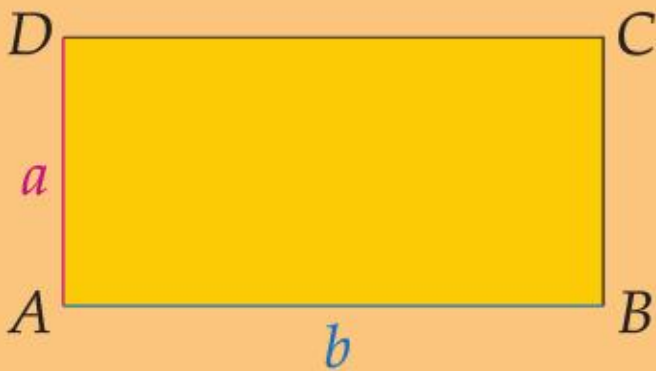


$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

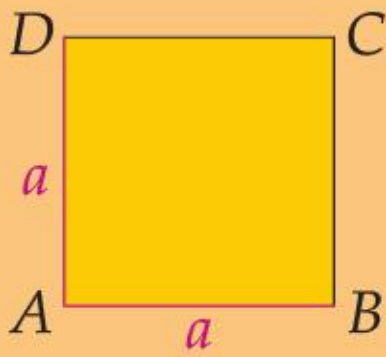


$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Obwód prostokąta i kwadratu

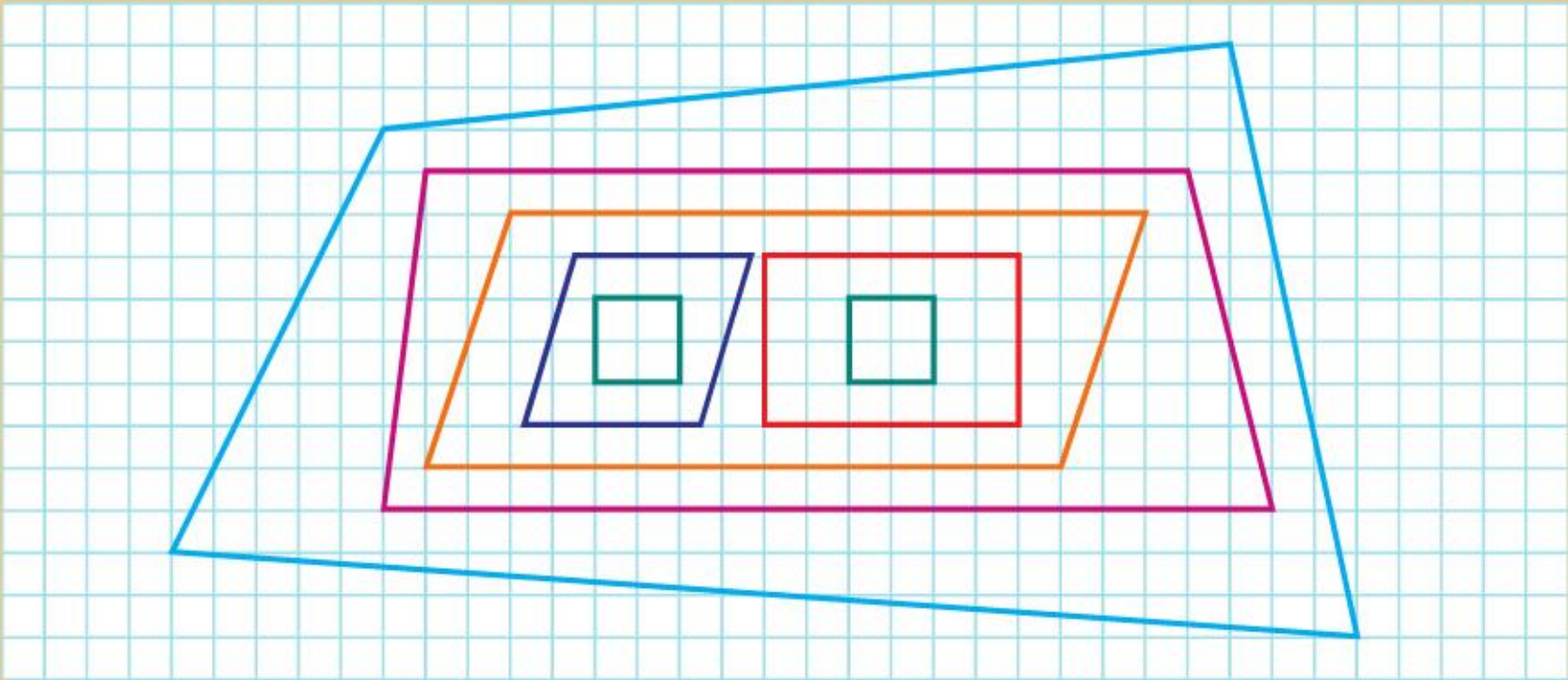


$$Obw. = 2 \cdot a + 2 \cdot b \text{ lub } Obw. = 2 \cdot (a + b)$$



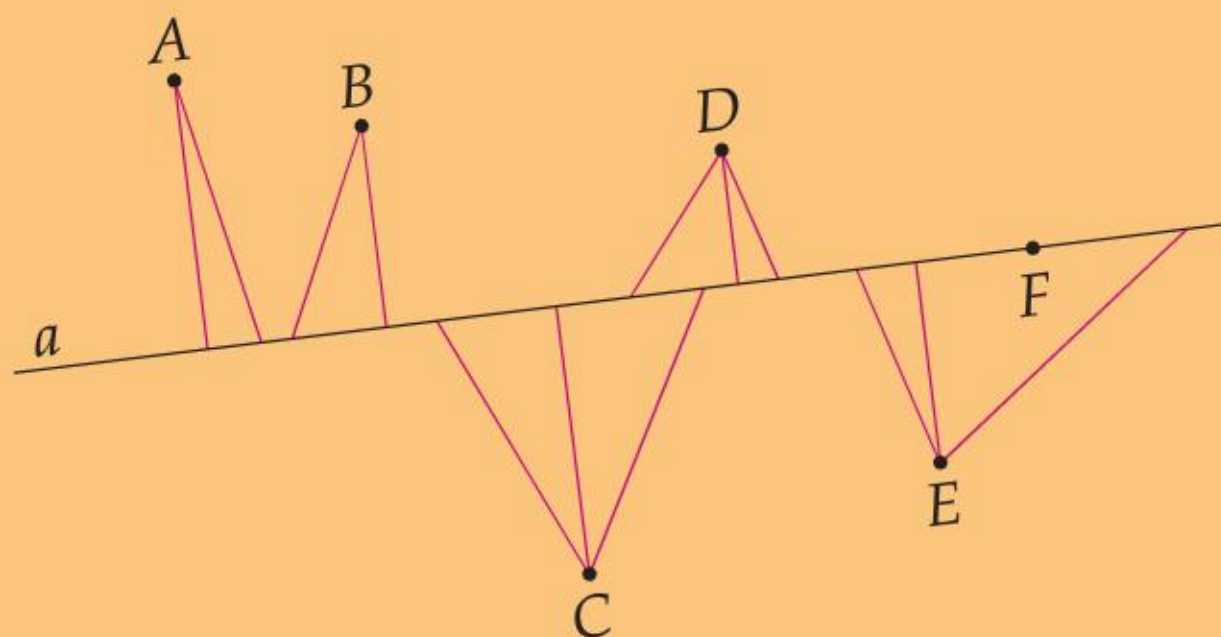
$$Obw. = 4 \cdot a$$

Zależności między czworokątami

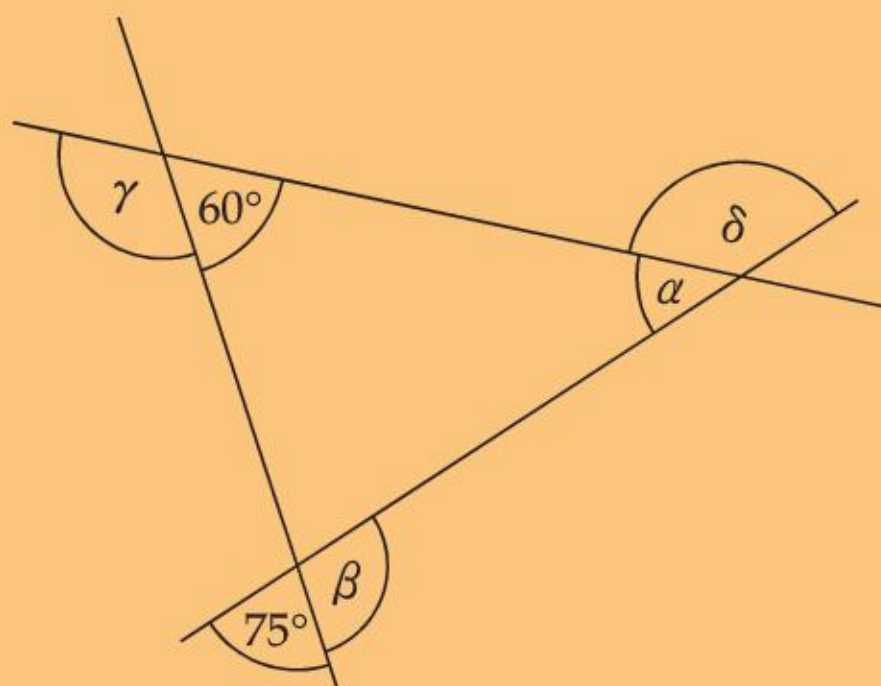


Czy już umiesz?

- 1 Podaj odległości punktów zaznaczonych na rysunku od prostej a . W tym celu wybierz odpowiednie odcinki i zmierz ich długości.

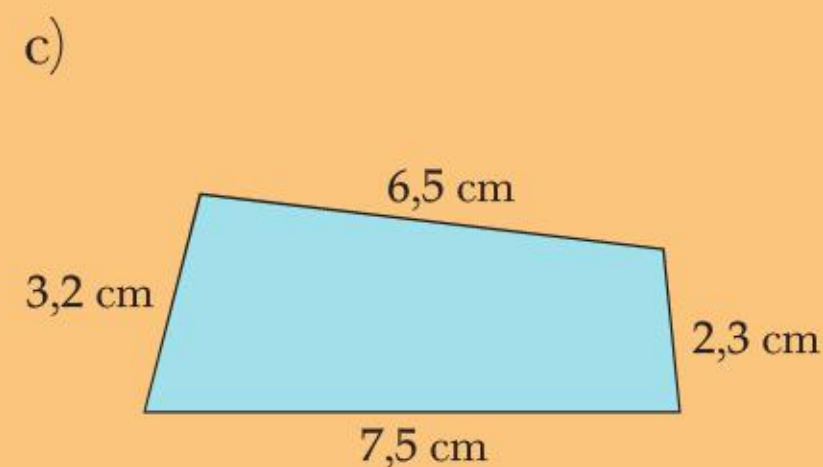
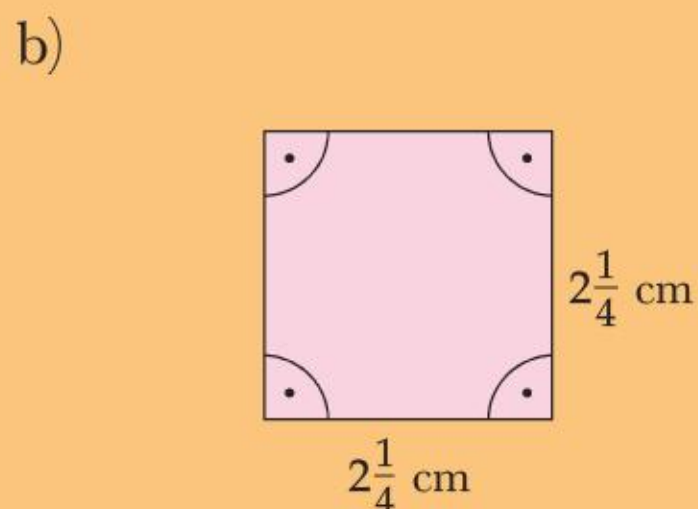
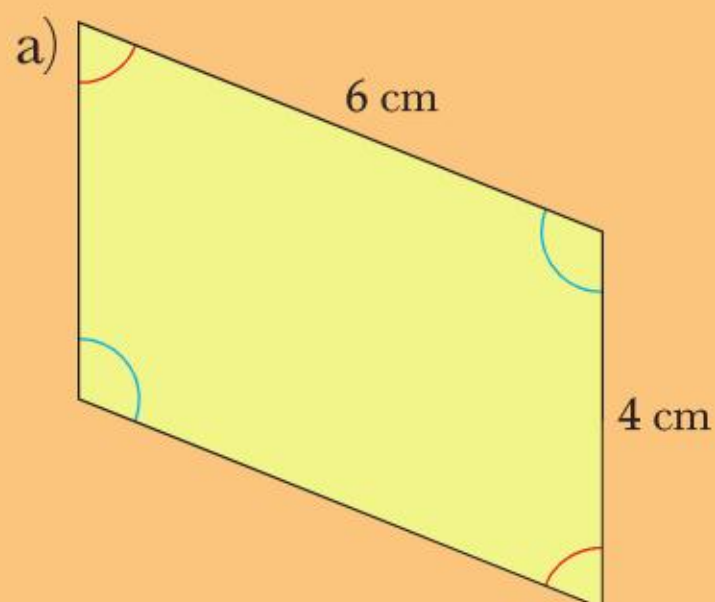


- 2 Dana jest miara jednego z dwóch kątów przyległych. Oblicz miarę drugiego kąta.
- a) 120° b) 37° c) 84° d) 90°
- 3 Jakie są miary kątów: α , β , γ , δ ?



- 4 Obwód trójkąta równobocznego wynosi 21 cm. Skonstruuj ten trójkąt.
- 5 Jeden z kątów trójkąta ma miarę 132° . Jaka jest suma miar jego pozostałych kątów? Jaki to rodzaj trójkąta?
- 6 Narysuj trójkąt prostokątny równoramienny. Oblicz miary kątów ostrych tego trójkąta. Zapisz swoje spostrzeżenia.
- 7 Narysuj równoległobok o dowolnych długościach boków, którego przekątne przecinają się pod kątem prostym. Jak się nazywa taki równoległobok?

- 8 Oblicz obwód czworokąta, którego długości boków podano na rysunku.



- 9 Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

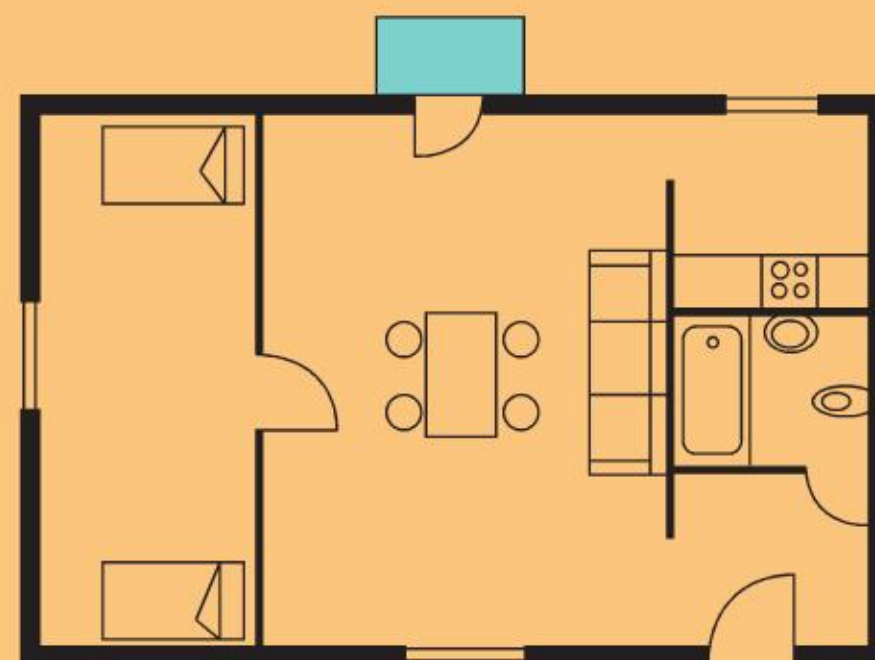
- a) Każdy trójkąt ma co najmniej dwa kąty ostre.
- b) Trójkąt rozwartokątny nie może być równoramienny.
- c) Istnieje trójkąt równoboczny prostokątny.
- d) Każdy trójkąt prostokątny ma dwa kąty proste.
- e) Przekątne każdego rombu przecinają się pod kątem prostym.
- f) Przekątne każdego prostokąta przecinają się pod kątem prostym.
- g) Kąty przy podstawie trapezu równoramiennego mają równe miary.
- h) Każdy kwadrat jest trapezem.
- i) Istnieje trapez, który ma cztery kąty proste.

- 10 Jeden z boków prostokąta ma 10 m, a drugi jest o 50 dm dłuższy. Prostokąt ten narysowano w skali 1 : 100. Jaki obwód ma narysowany prostokąt?

- 11 Prostokątna działka na rysunku wykonanym w skali 1 : 50 ma wymiary 16 cm × 15 cm. Jakie wymiary ma w rzeczywistości? Jaką długość ma płot ogradzający tę działkę?

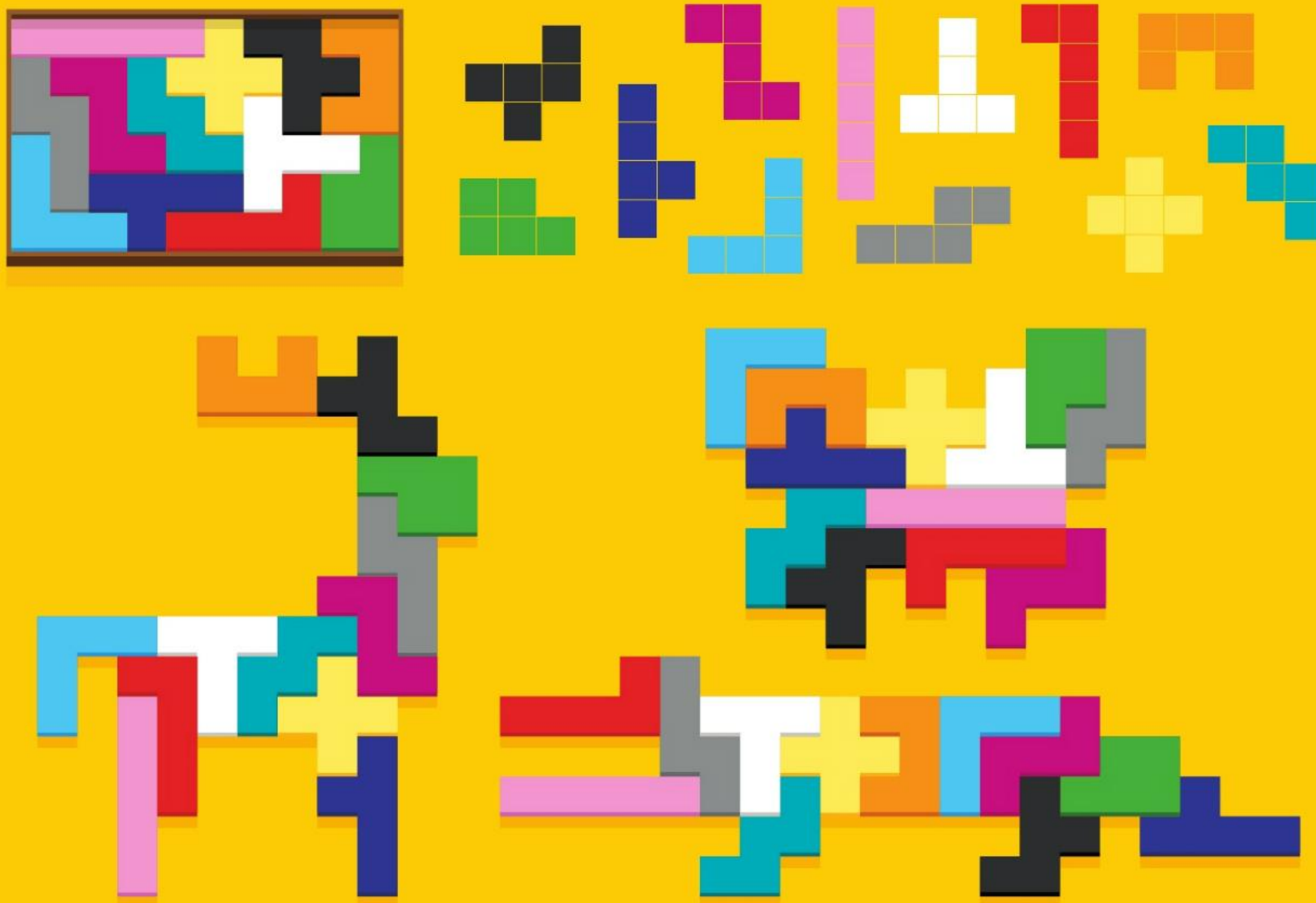
- 12 Na planie mieszkania zaznaczony jest prostokątny balkon. Zmierz boki odpowiedniego prostokąta i oblicz, jakie są rzeczywiste wymiary balkonu.

skala 1 : 200



- 13 Odległość w linii prostej między Warszawą a Berlinem wynosi (w przybliżeniu) 500 km. Jaka jest odległość między tymi miastami na mapie narysowanej w skali 1 : 5 000 000?

5. Pole wielokąta



Na ilustracji przedstawiono układankę logiczną pentomino składającą się z 12 klocków w kształcie wielokątów. Z klocków, które można dowolnie obracać, układa się różne kształty. Obejrzyj klocki i ułożone z nich zwierzęta. Następnie odpowiedz na pytania i wykonaj polecenia.

1. Jaką wspólną cechę mają wszystkie klocki układanki, a co je różni?
2. Wyobraź sobie, że przerysujesz do zeszytu w kratkę wszystkie ułożone powyżej figury: prostokąt (jest w pudełku), motyla, jelenia i krokodyla. Który z rysunków zajmie najwięcej miejsca (najwięcej kratek)?
3. Jak myślisz, czy ze wszystkich 12 klocków pentomino można ułożyć kwadrat?
4. Podobnie jak prostokąt, każde zwierzę ułożone z klocków jest wielokątem. Który z tych wielokątów ma najmniejszy obwód: prostokąt, motyl, jelen czy krokodyl?
5. Spróbuj ułożyć ze wszystkich klocków pentomino prostokąt o innych wymiarach niż ten pokazany na ilustracji.
6. Ułóż z 12 klocków pentomino strusia, psa, rybę lub słonia. Jeśli będziesz mieć z tym zadaniem kłopot, poszukaj wzorów w internecie.
7. Na podstawie wiadomości i zdjęć w internecie zbierz informacje na temat tej układanki logicznej. Zachęć kolegów i koleżanki w klasie do wspólnych zabaw z pentomino.



5.1 Pole figury

Podejmij temat

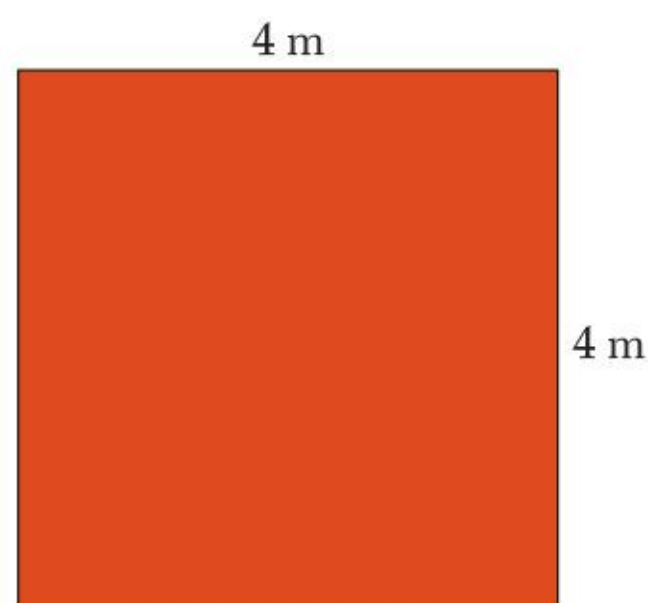


Pokój Romka jest dłuższy.
Czy wobec tego jest większy?

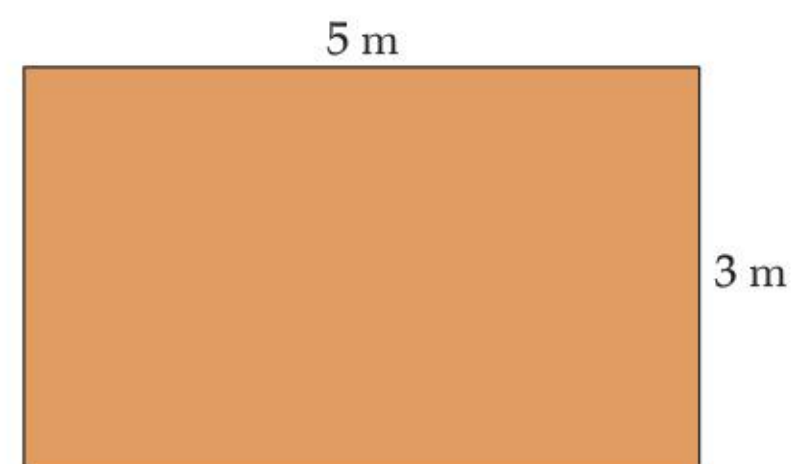
Pokój Romka jest węższy.
Czy wobec tego jest mniejszy?

Pokój Romka ma długość większą o 1 m od pokoju Maćka. Szerokość tego pokoju jest mniejsza niż szerokość pokoju Maćka – również o 1 m. Czy oba pokoje są zatem tej samej wielkości?

Podłogi w pokojach dwóch braci, Maćka i Romka, mają taki kształt, jak na rysunkach poniżej.



pokój Maćka



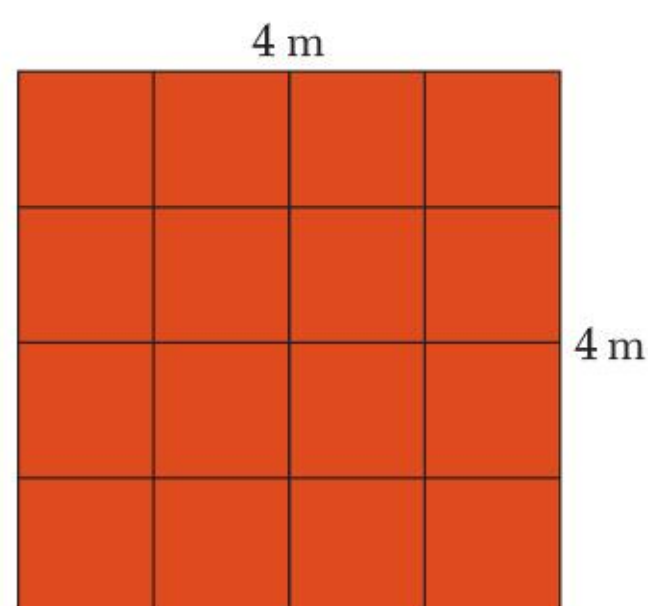
pokój Romka



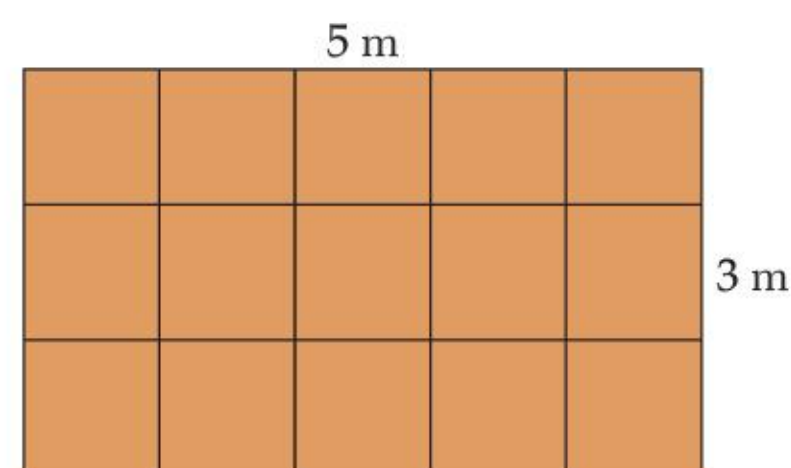
Mówimy, że podłoga w pokoju Maćka ma większą powierzchnię lub że prostokąt, którym jest podłoga, ma większe **pole**. Obliczenie pola pozwala nam określić wielkość figury.

Aby odpowiedzieć na pytania zadane w *Podejmij temat*, możemy wyobrazić sobie, że oba pokoje wyłożono kwadratowymi kawałkami wykładziny o wymiarach $1\text{ m} \times 1\text{ m}$. Ile takich kwadratów należałoby ułożyć w pokoju Maćka, a ile w pokoju Romka?

Możemy wykonać rysunki:



pokój Maćka



pokój Romka

Jak widać, w pokoju Maćka należałoby ułożyć 16 kawałków wykładziny (kwadratów), a w pokoju Romka – 15. Większy jest zatem pokój Maćka.

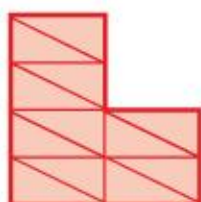
1. Przypatrz się planowi mieszkania rodziny Kowalskich i powiedz, w którym pokoju: Ani, Basi czy rodziców, podłoga ma największą powierzchnię.



Aby porównać pola kilku figur, należy wypełnić te figury jednakowymi elementami.



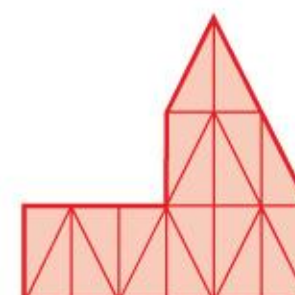
18



12



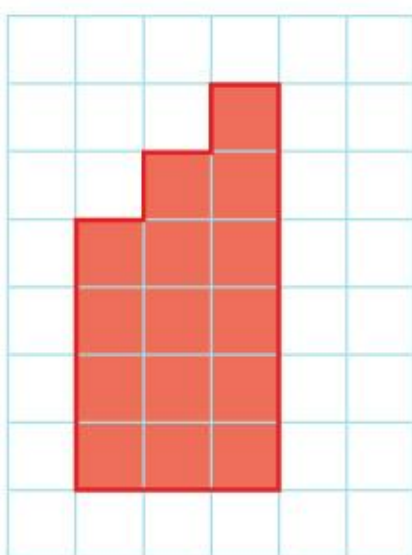
16



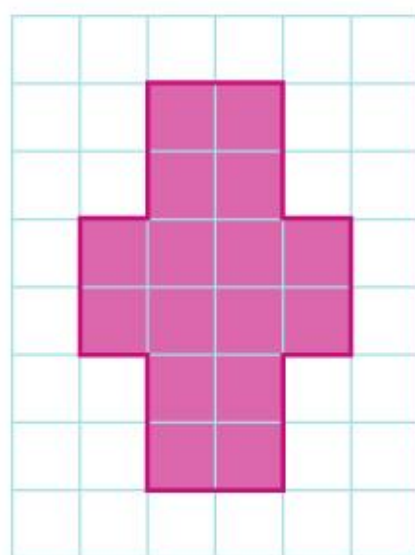
19

2. Ile kwadratów mieści się w każdej z figur? Która z nich ma największe pole?

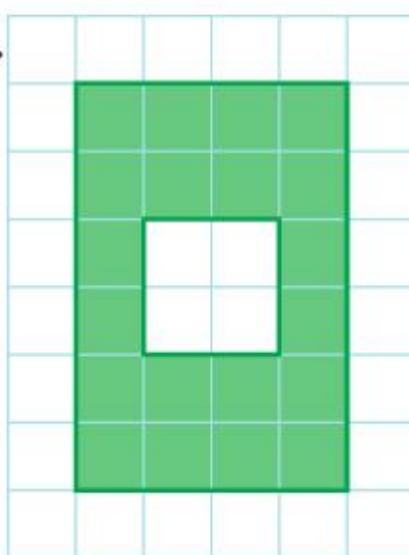
I.



II.

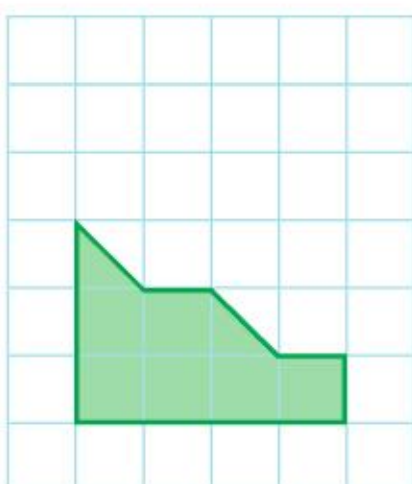


III.

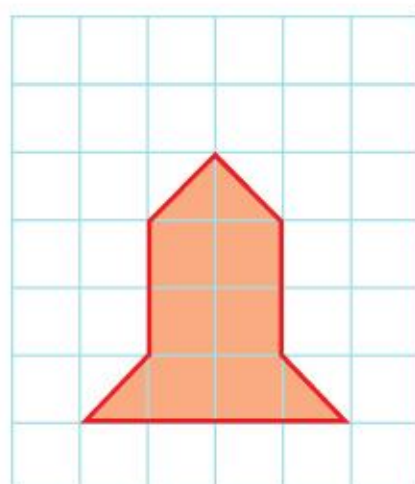


3. Ile trójkątów mieści się w każdej z figur? Która z nich ma najmniejsze pole?

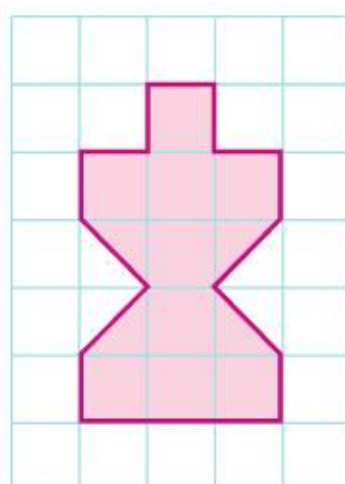
I.



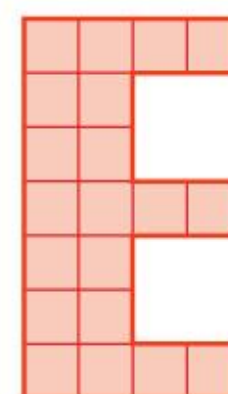
II.



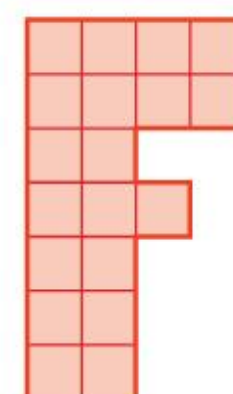
III.



Elementami, którymi wypełniamy figury, żeby porównać ich pola, są najczęściej kwadraty.



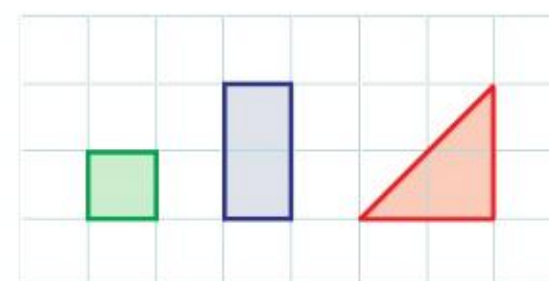
20



19

Zadania

- Na rysunku obok znajduje się kwadrat, prostokąt i trójkąt. Narysuj cztery różne figury, których pole jest takie samo jak pole:

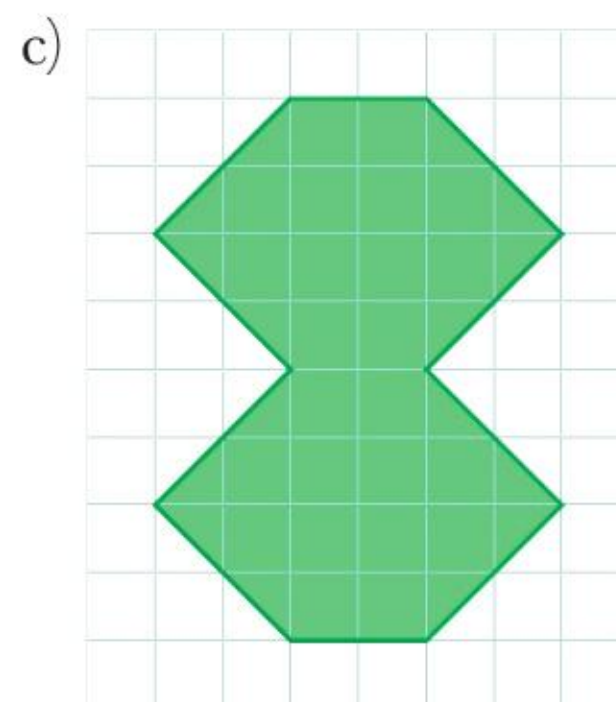
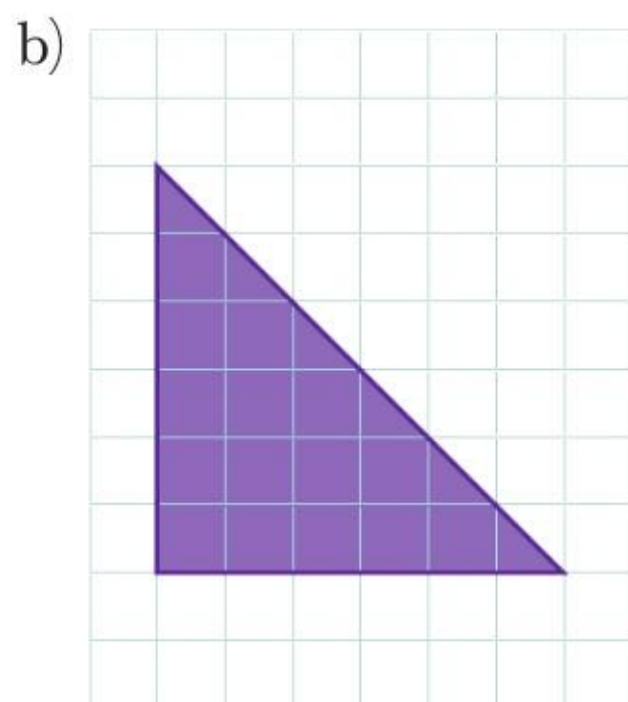
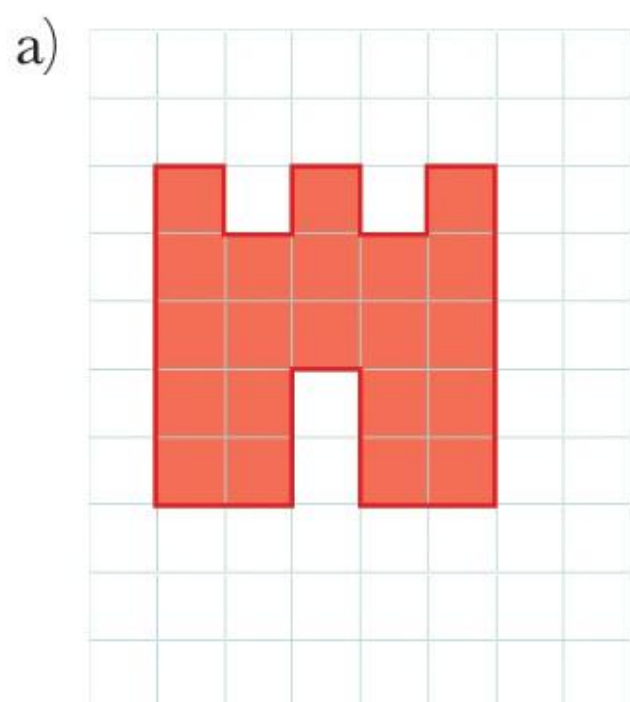


- a) 28 kwadratów,
- b) 15 prostokątów,
- c) 10 trójkątów.

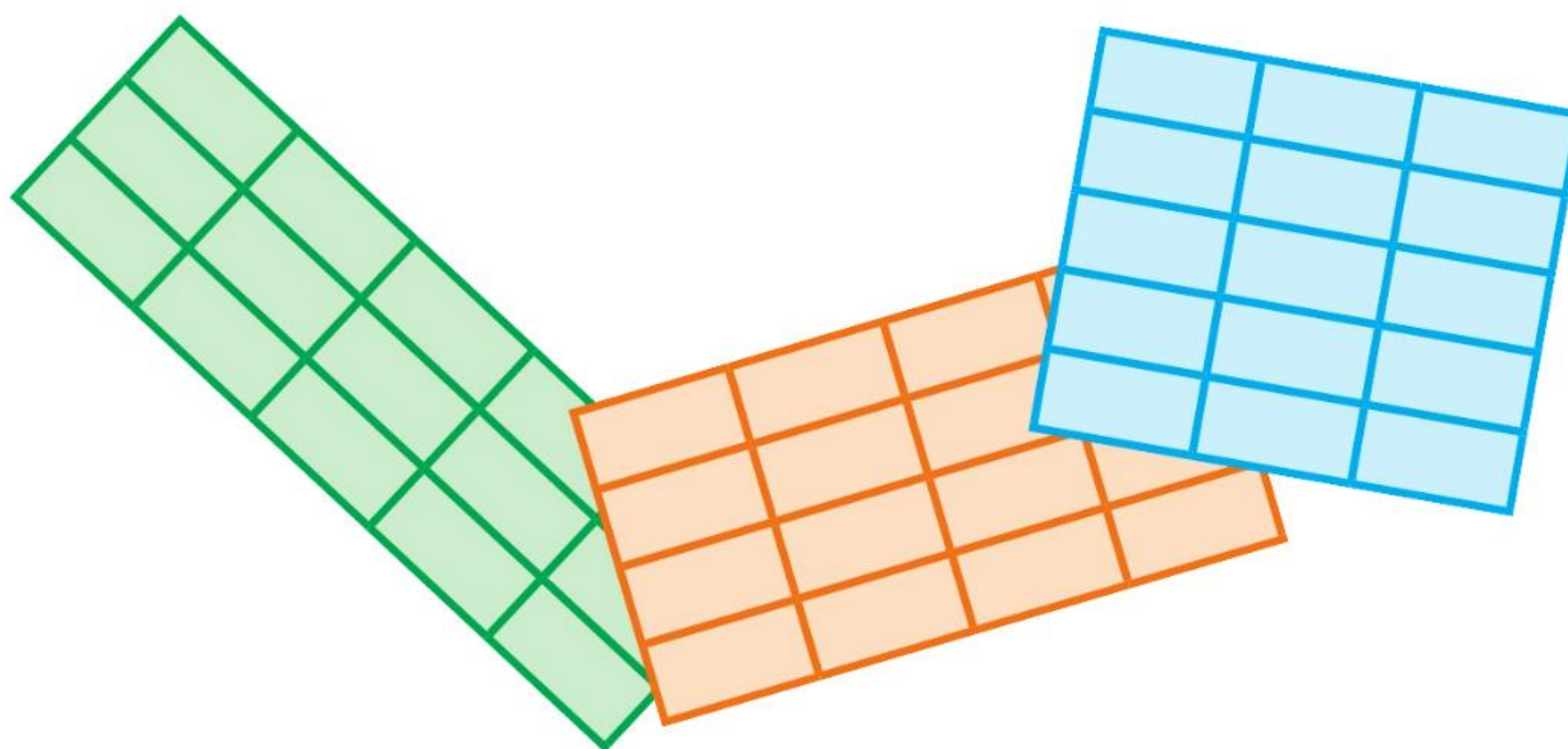
- Narysuj prostokąty o wymiarach $2\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ oraz $3\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Ile kwadratów o boku długości 1 cm mieści się w każdym z tych prostokątów? Który z nich ma mniejsze pole?

- Prostokątną kartkę o wymiarach $30\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ pocięto na jednakowe kawałki w kształcie kwadratów, każdy o boku 5 cm. Ile małych karteczek otrzymano?

- Narysuj prostokąt o polu takim jak podana figura.



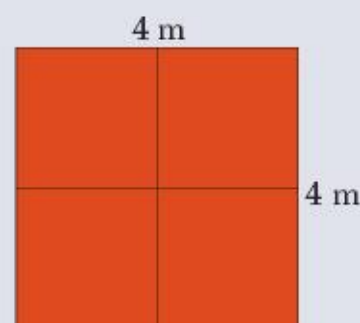
- Który z prostokątów ma największe pole: zielony, pomarańczowy czy niebieski?



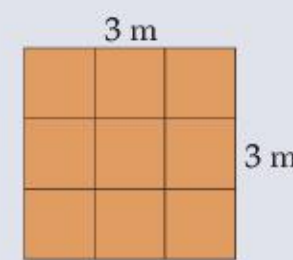
5.2 Jednostki pola

Podejmij temat

Ewo, w moim pokoju można byłoby ułożyć na podłodze 4 kwadratowe panele.



A w moim aż 9! Aniu, mój pokój jest o wiele większy!



Czy Ewa ma rację? Czy jej pokój jest rzeczywiście większy od pokoju Ani?



Aby porównać powierzchnię podłogi w pokojach dziewczynek rozmawiających w *Podejmij temat*, należałoby podłogę w obu pokojach podzielić na identyczne elementy, czyli np. na kwadraty o wymiarach $1\text{ m} \times 1\text{ m}$. W pokoju Ewy mieści się 9 takich kwadratów. U Ani na podłodze zmieściłoby się ich 16. Większy jest zatem pokój Ani.

Jeżeli chcemy podać pole mniejszej figury, możemy posłużyć się kwadratami o wymiarach $1\text{ dm} \times 1\text{ dm}$, a w przypadku jeszcze mniejszych figur – użyć kwadratów o wymiarach $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$, albo $1\text{ mm} \times 1\text{ mm}$.

Pola kwadratów o bokach długości: 1 mm , 1 cm , 1 dm , 1 m , 1 km , to **jednostki pola**.

Mają one ustalone nazwy:

1 mm^2 (czytamy: milimetr kwadratowy) to pole kwadratu o boku długości 1 mm ,

1 cm^2 (czytamy: centymetr kwadratowy) to pole kwadratu o boku długości 1 cm ,

1 dm^2 (czytamy: decymetr kwadratowy) to pole kwadratu o boku długości 1 dm ,

1 m^2 (czytamy: metr kwadratowy) to pole kwadratu o boku długości 1 m ,

1 km^2 (czytamy: kilometr kwadratowy) to pole kwadratu o boku długości 1 km .

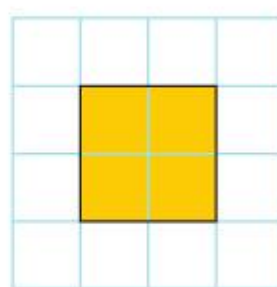
Kwadraty o polu 1 mm^2 i 1 cm^2 wyglądają tak:

▣ 1 mm^2

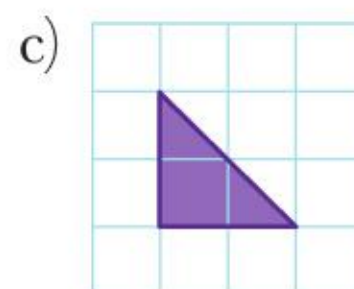
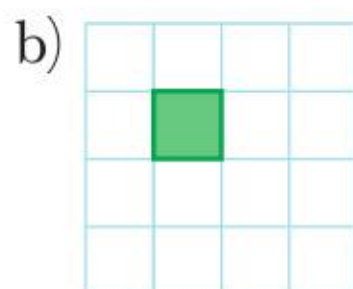
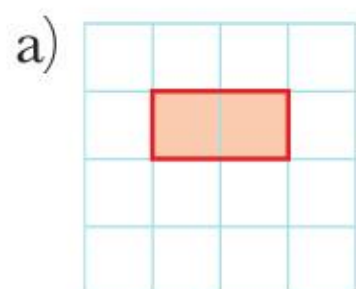


1 cm^2

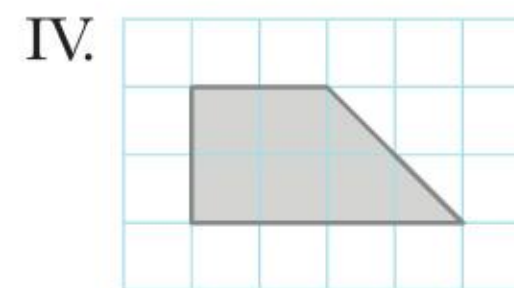
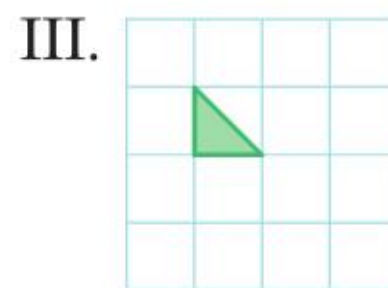
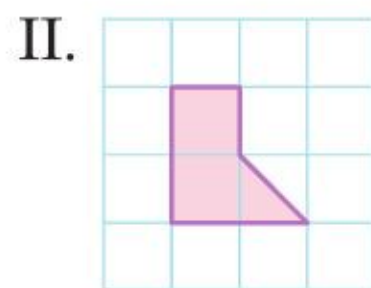
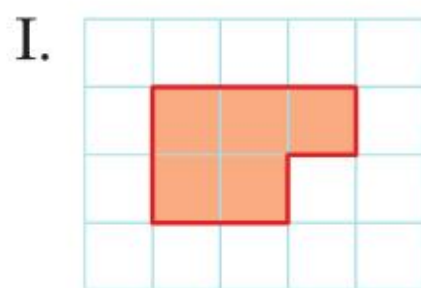
W zeszycie w kratkę 1 cm^2 wygląda tak:



1. Jakim ułamkiem centymetra kwadratowego jest pole narysowanej figury?



2. Dopasuj każdą z figur do liczby określającej jej pole w centymetrach kwadratowych.



A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{5}{8}$

C. $1\frac{1}{4}$

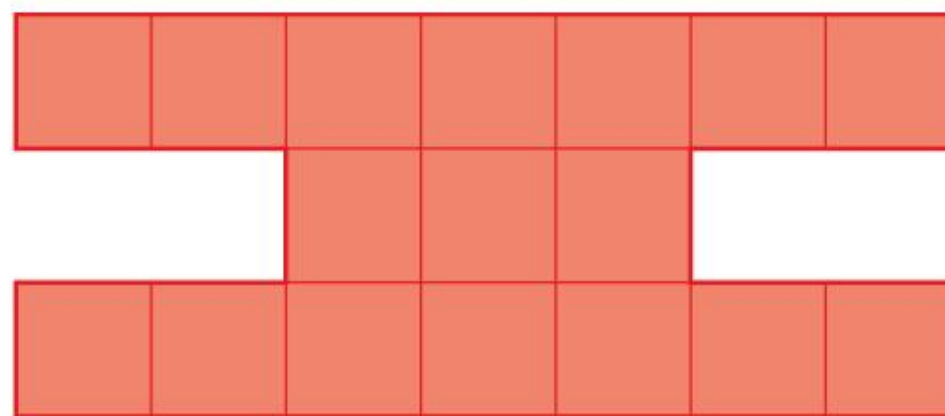
D. $1\frac{1}{2}$

3. Narysuj w zeszycie kwadrat o polu 1 dm^2 i podziel go na kwadraty o polu 1 cm^2 . Ile centymetrów kwadratowych mieści się w 1 dm^2 ?



Jeżeli figura składa się np. z 17 kwadratów o boku długości 1 cm , to mówimy, że pole tej figury wynosi 17 cm^2 , co zapisujemy krótko:

$P = 17 \text{ cm}^2$
↑
pole



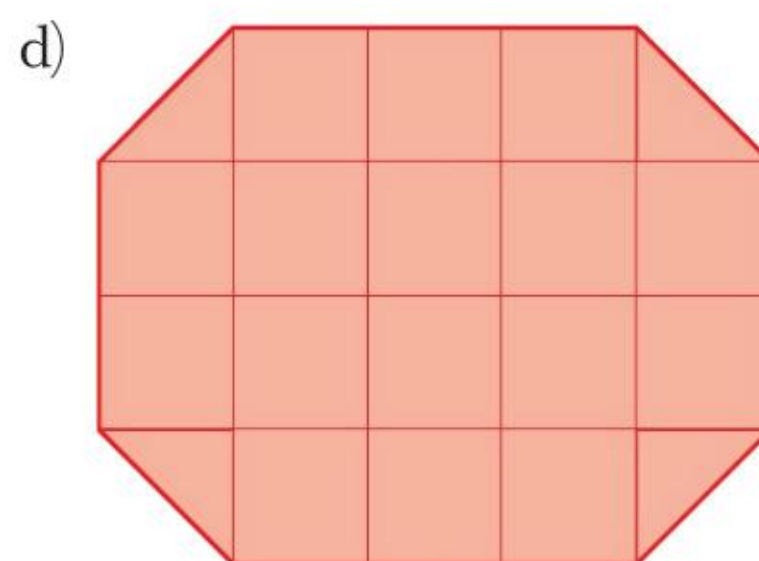
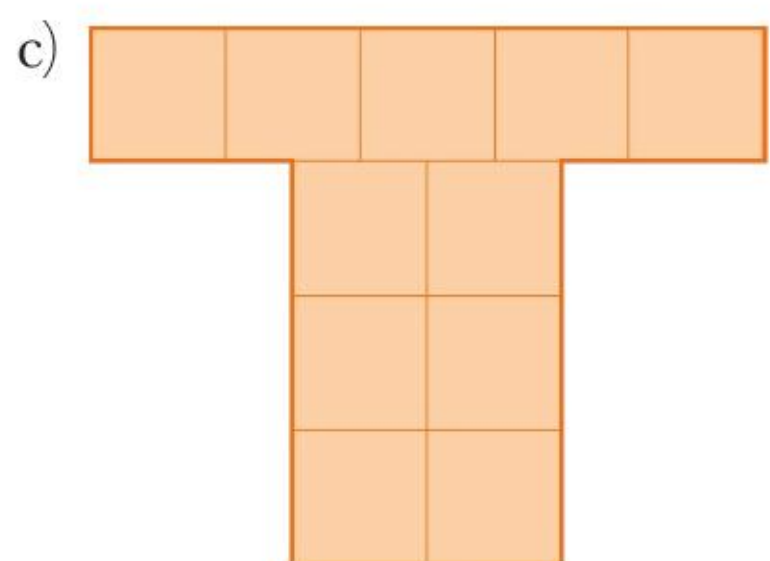
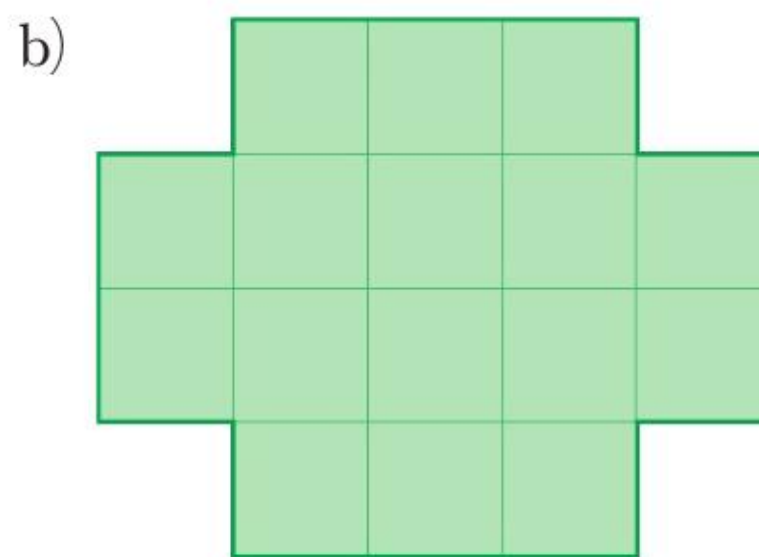
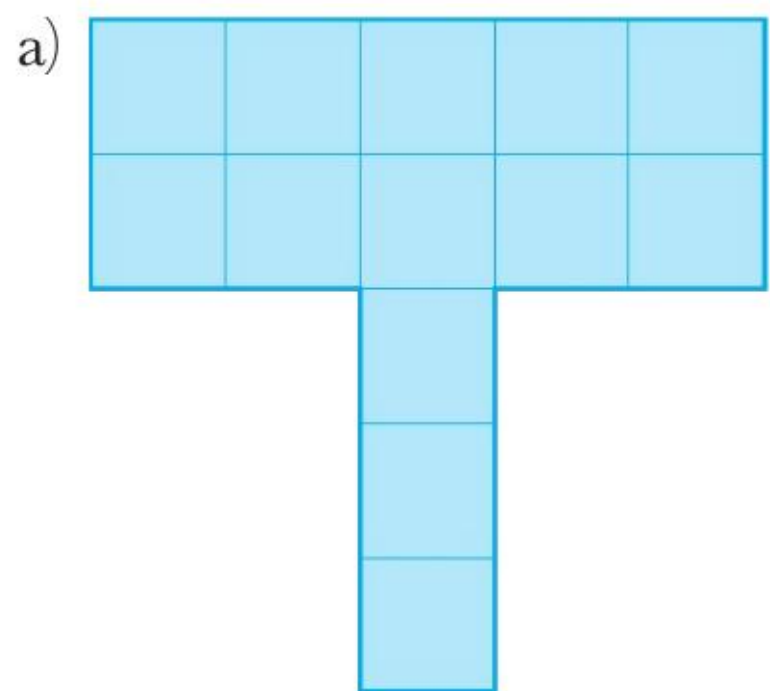
4. Narysuj figurę składającą się z czterech kwadratów o boku długości 1 cm . Oblicz jej pole.

5. Z ilu kwadratów o polu 1 cm^2 składa się prostokąt o wymiarach $5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$?

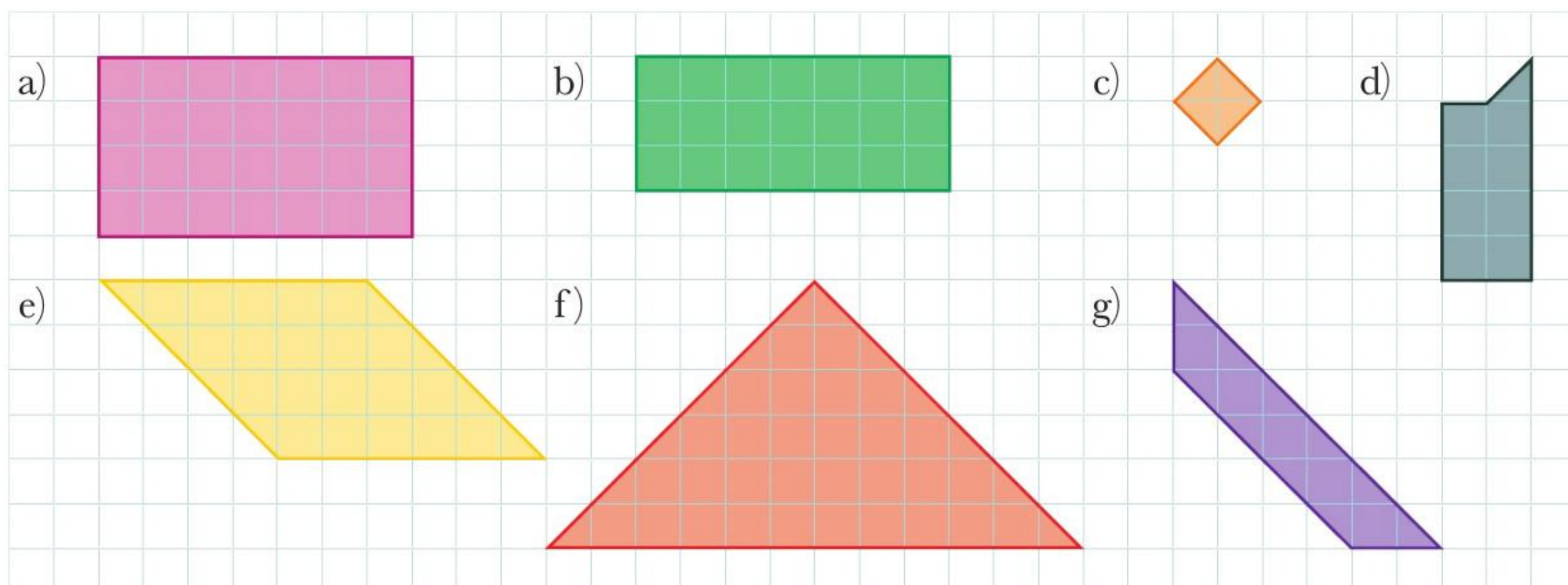
6. Wspólnie z kolegą lub koleżanką narysujcie na kartce w kratkę 10 figur. Narysujcie je tak, żeby pole pierwszej miało 20 cm^2 , a pole każdej następnej było o $1,5 \text{ cm}^2$ mniejsze. Zanim wykonacie to zadanie, obliczcie, jakie pole będzie miała dziesiąta figura.

Zadania

- Podaj w centymetrach kwadratowych pole narysowanej figury.

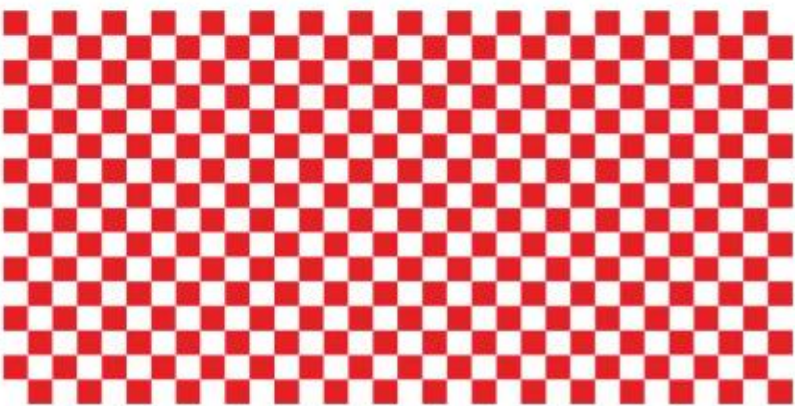


- Narysuj trzy różne figury o polu równym 8 cm^2 .
- Narysuj trzy różne prostokąty o obwodzie równym 12 cm . Zapisz, ile wynosi pole każdego z nich.
- Narysuj cztery figury: trójkąt, prostokąt, równoległobok i trapez – wszystkie o takim samym polu.
- Przerysuj figurę do zeszytu i oblicz jej pole.



5.3 Pole prostokąta i kwadratu

Podejmij temat



Czy masz pomysł, jak szybko obliczyć, ile centymetrów kwadratowych ma ta serwetka?



Ciekawe, jak duża jest ta serwetka, to znaczy: jakie ma pole... Patrz, każdy kwadracik ma pole 1 cm².

Ile tu będzie liczenia! Chyba, że jest na to jakiś sprytny sposób...

Przykład 1

Długość prostokąta wynosi 12 cm, a szerokość 3 cm. Obliczmy, jakie jest pole tego prostokąta.

Policzmy, ile kwadratów o polu 1 cm² zmieści się w tym prostokącie.

12 cm											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
3 cm											

$P = 36 \text{ cm}^2$

Warto ustalić sposób obliczania pola dowolnego prostokąta bez potrzeby rysowania go.

W przypadku prostokąta z przykładu 1 można np. zauważyć, że są w nim 3 rzędy po 12 kwadratów (albo 12 kolumn po 3 kwadraty). Zatem prostokąt składa się z 36 kwadratów (bo $3 \cdot 12 = 12 \cdot 3 = 36$), co oznacza, że jego pole wynosi 36 cm^2 .

Zauważmy, że 12 i 3 to liczby oznaczające długość i szerokość prostokąta w centymetrach. Jeżeli więc chcemy obliczyć pole prostokąta, a znamy jego wymiary, to możemy pomnożyć jego długość przez szerokość. W przypadku naszego prostokąta: $P = 12 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 36 \text{ cm}^2$.



$$P = a \cdot b$$

a, b – długości sąsiednich boków prostokąta



pole prostokąta =
= długość $\cdot$ szerokość

1. Oblicz pole prostokąta o podanych wymiarach.

a) $10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$

b) $16 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$

c) $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$

Przykład 2

Obliczmy pole prostokąta o długości 6 cm i szerokości 3 mm.

Ponieważ wymiary prostokąta podane są w centymetrach i milimetrach, najpierw należy długość i szerokość zapisać w tych samych jednostkach.

Sposób I

Oba wymiary zapiszmy w milimetrach:

długość to $6 \text{ cm} = 60 \text{ mm}$,

szerokość to 3 mm .

$$P = 60 \text{ mm} \cdot 3 \text{ mm} = 180 \text{ mm}^2$$

Pole prostokąta wynosi zatem 180 mm^2 .

Sposób II

Oba wymiary zapiszmy w centymetrach:

długość to 6 cm ,

szerokość to $3 \text{ mm} = 0,3 \text{ cm}$.

$$P = 6 \text{ cm} \cdot 0,3 \text{ cm} = 1,8 \text{ cm}^2$$

Pole prostokąta wynosi zatem $1,8 \text{ cm}^2$.

2. Oblicz pole prostokąta o podanych wymiarach.

a) $3 \text{ dm} \times 20 \text{ cm}$

b) $9 \text{ cm} \times 6 \text{ dm}$

c) $4 \text{ m} \times 7 \text{ dm}$

d) $2 \text{ cm} \times 2,3 \text{ dm}$

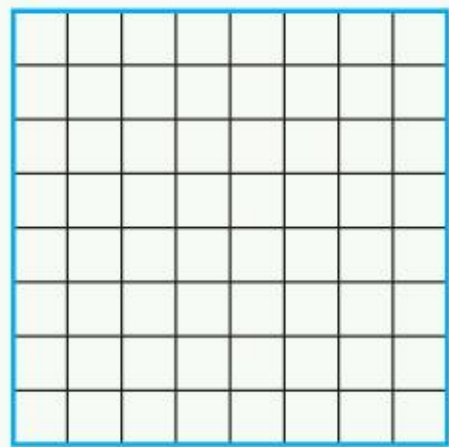
e) $5,1 \text{ cm} \times 2,4 \text{ m}$

f) $1\frac{1}{2} \text{ m} \times 4 \text{ dm}$

Przykład 3

Obliczmy pole kwadratu o boku długości 8 cm.

Postępujemy tak jak w przypadku dowolnego prostokąta (bo kwadrat jest prostokątem).



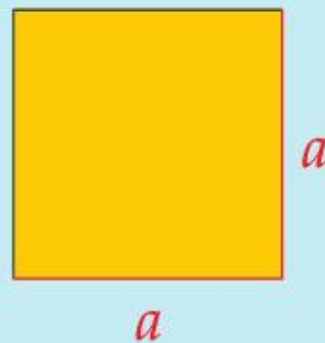
8 rzędów,
a w każdym rzędzie
po 8 kwadratów
o wymiarach $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$,
czyli łącznie $8 \cdot 8$ kwadratów

$$P = 8 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 64 \text{ cm}^2$$

długość szerokość



pole kwadratu =
= długość boku do potęgi drugiej
(do kwadratu)



$$P = a \cdot a \text{ lub } P = a^2$$

a – długość boku kwadratu

3. Oblicz pole kwadratu o podanej długości boku.

a) 7 dm

b) 10 m

c) 8 mm

d) 13 cm

e) 1,2 m

f) 25 dm 5 cm

Przykład 4

Obliczmy, ile centymetrów kwadratowych wynosi pole prostokąta o wymiarach $2 \text{ dm} \times 4 \text{ dm}$.

Wynikiem ma być liczba centymetrów kwadratowych, a wymiary prostokąta są podane w decymetrach, więc najpierw musimy zamienić jednostki:

$$2 \text{ dm} = 20 \text{ cm} \text{ i } 4 \text{ dm} = 40 \text{ cm}.$$

Dopiero teraz obliczamy pole prostokąta:

$$P = 20 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm} = 800 \text{ cm}^2.$$

A dlaczego nie mogliśmy po prostu pomnożyć $2 \text{ dm} \cdot 4 \text{ dm}$? Wychodzi 8 dm^2 , a to przecież 80 cm^2 .



Pole obliczyłeś poprawnie, ale źle zamieniłeś jednostki. Owszem, 1 dm to 10 cm, ale 1 dm^2 to nie 10 cm^2 !!! Dlatego na razie obliczamy tak jak w przykładzie, a w starszych klasach nauczymy się innego sposobu.

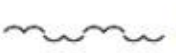
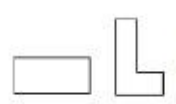
4. Ile potrzeba kwadratowych płytek o polu 1 dm^2 do wyłożenia całej podłogi prostokątnego tarasu o wymiarach $8 \text{ m} \times 4 \text{ m}$?
5.  Na dużej kartce papieru w kratkę (A4) narysujcie w skali $1 : 100$ plan prostokątnej działki o wymiarach $18 \text{ m} \times 28 \text{ m}$.
- Narysujcie kwadrat w miejscu, gdzie będzie się znajdować altanka. Zaznaczcie wejście na działkę i ścieżkę prowadzącą od wejścia do altanki.
 - Narysujcie prostokąt w miejscu, gdzie planujecie posadzić kwiaty, i drugi – w miejscu, gdzie mają rosnąć warzywa.
 - Narysujcie małe koła w miejscach, gdzie posadzicie drzewa owocowe (jedno koło to jedno drzewo).
 - Jak chcielibyście zagospodarować pozostałą część działki?
 - Jakie wymiary ma wasza altanka na rysunku, a jakie w rzeczywistości? Jaką zajmuje powierzchnię na rysunku, a jaką w rzeczywistości?
 - Jakie wymiary i jakie pole na rysunku, a jakie w rzeczywistości, ma część działki przeznaczona pod uprawę kwiatów, a jakie – część warzywna?
 - Jaka jest na planie najmniejsza odległość między dwoma „posadzonymi” przez was drzewami? Odległość tę mierzymy między środkami narysowanych kół. A jaka jest ta odległość w rzeczywistości?

Zadania

-  Działka państwa Kowalskich jest prostokątem o długości 28 m i szerokości 13 m . Oblicz powierzchnię tej działki.
-  Pole karne na boisku do piłki nożnej ma kształt prostokąta o wymiarach $16,50 \text{ m} \times 40,32 \text{ m}$. Podaj wymiary tego prostokąta w centymetrach i oblicz jego pole.
-  Jeden z boków prostokąta ma 5 dm . Jaką długość ma drugi bok, jeżeli wiadomo, że pole tego prostokąta wynosi 40 dm^2 ?
A. 35 dm B. 20 dm C. 8 dm D. 4 dm
-  Jaką długość ma bok kwadratu o polu równym 36 m^2 ?
-  Jakie wymiary może mieć prostokąt o polu równym 24 cm^2 ? Podaj kilka możliwości. Narysuj jeden z tych prostokątów.

Ciekawe!

Na planach przedstawiających tereny zielone mogą być stosowane następujące oznaczenia:

	drzewo iglaste
	lasy iglaste
	drzewo liściaste
	lasy liściaste
	łąki
	sady
	żywopłot
	zabudowa
	furtka

Opis symboli zawsze znajdziesz w legendzie planu.

Ciekawe!

Wyraz „pole” ma w języku polskim wiele znaczeń. Pole to obszar przeznaczony pod uprawę, część sportowego boiska lub wyróżnione kolorem miejsce na planszy do gry, np. w warcabach. Pole w matematyce określa wielkość figury – trójkąta, kwadratu, prostokąta itp.

Zastanówcie się wspólnie, jakie znaczenia mogą mieć takie słowa jak „wynik”, „odcinek” czy „składnik”.

Zorganizujcie w klasie szybki konkurs: kto poda w ciągu 5 minut jak najwięcej znaczeń wyrazu „figura”?

- Oblicz pole prostokąta, którego jeden z boków ma długość 8 cm, a jego obwód wynosi 28 cm.
- Ile centymetrów kwadratowych wynosi pole prostokąta, którego długość to 15 cm, a szerokość to 110 mm?

- Pani Maria zawiesiła na ścianie dwa obrazy, a pomiędzy nimi lustro. Obraz po lewej stronie ma wymiary 3 dm $\times$ 7 dm, a obraz po prawej stronie – 4 dm $\times$ 6 dm. Lustro ma wysokość 1 m, a szerokość 50 cm. Sprawdź, czy oba obrazy zajmują razem większą powierzchnię niż lustro. Wykonaj w tym celu odpowiednie obliczenia.



- Z prostokątnej kartki o wymiarach 21 cm $\times$ 30 cm wycięto kwadrat o boku mającym 13 cm. Oblicz pole tej części kartki, która pozostała po wycięciu kwadratu.

- Trawnik przed domem pana Andrzeja jest prostokątem o wymiarach 14 m $\times$ 3 m. Pan Andrzej chce zasiać na nim trawę. Ile paczek z nasionami trawy musi kupić? Wykorzystaj informację podaną na opakowaniu.



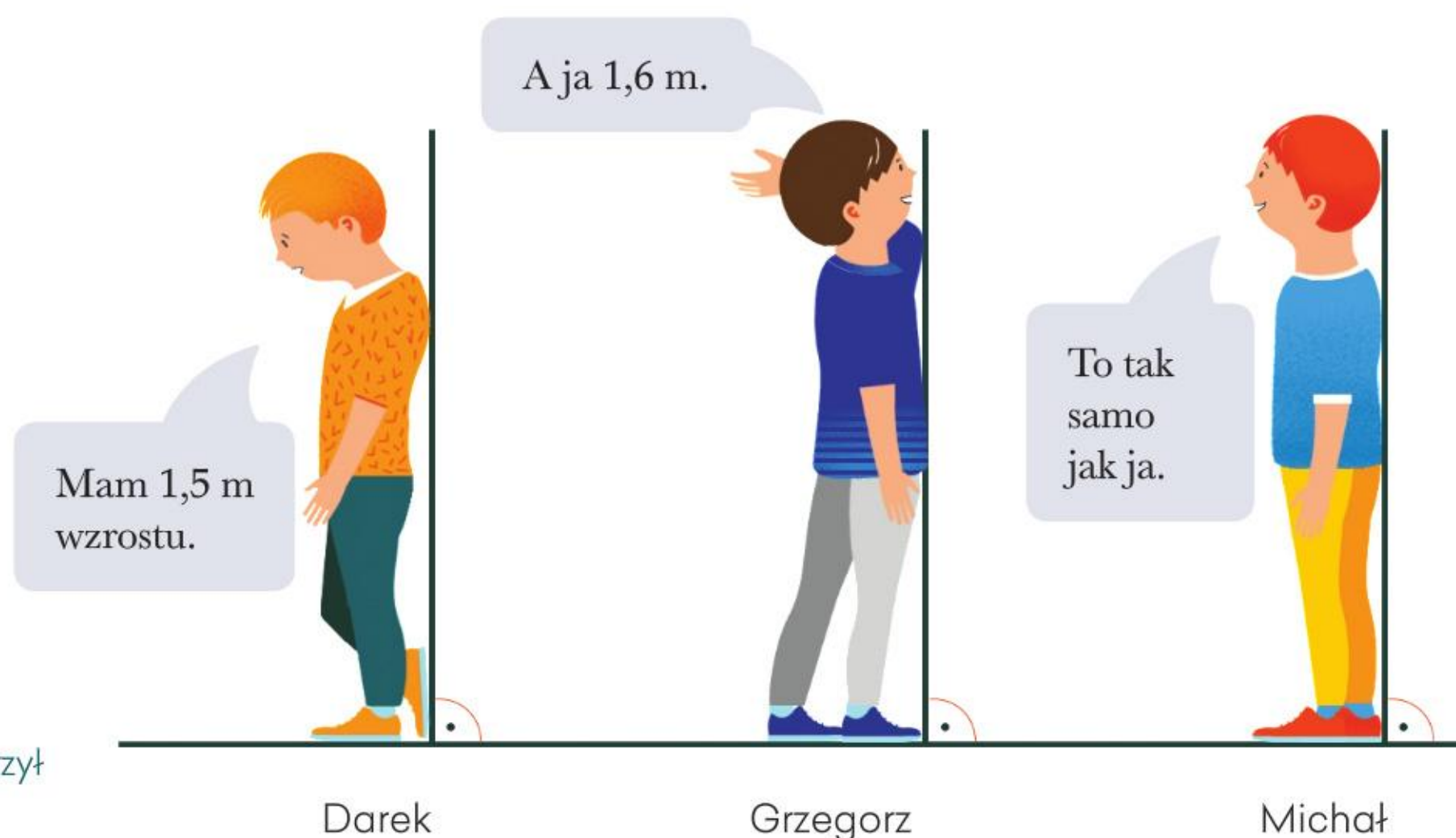
- Dom, którego długość i szerokość mają po 15 m, wybudowano na prostokątnej działce o wymiarach 20 m $\times$ 25 m. Całą powierzchnię działki dookoła domu zajmuje trawnik. Jaka jest powierzchnia całej działki, a jaka – trawnika? Ile kosztowała ta działka, jeżeli za 1 m² trzeba było zapłacić 350 zł?
- ★ Podłoga w łazience państwa Nowaków jest prostokątem o wymiarach 4 m $\times$ 2,5 m. Jaką powierzchnię ma ta łazienka? Ile metrów kwadratowych kafelków do wyłożenia podłogi powinni kupić państwo Nowakowie, jeśli wiadomo, że (ze względu na straty) należy kupić o 10% więcej, niż wynosi powierzchnia łazienki? Ile państwo Nowakowie zapłacą za te płytki, jeżeli 1 m² kosztuje 21,50 zł?

5.4 Pole równoległoboku

Podejmij temat



Który z chłopców poprawnie zmierzył swój wzrost?



Aby poprawnie zmierzyć swój wzrost, trzeba stanąć prostopadłe do podłoża. Podobnie, żeby poprawnie zmierzyć np. wysokość budynku, należy ją mierzyć prostopadłe do podstawy.

Ciekawe!

Aby pokazać, że wysokość należy mierzyć prostopadłe do podstawy, można posłużyć się przykładem krzywych wież. Najbardziej znana jest Krzywa Wieża w Pizie (we Włoszech), ale i w Polsce można znaleźć podobne budowle. Na zdjęciach pokazano, jak zmierzyć ich wysokość: zielonym odcinkiem zaznaczono poziom podłoża (podstawę), a żółtym – wysokość.



Krzywa Wieża w Pizie



Krzywa Wieża w Toruniu



Krzywa Wieża w Zabkowicach Śląskich

1. Narysuj dowolny równoległobok $ABCD$. Zmierz odległość wierzchołka D od boku AB . W tym celu narysuj odpowiedni odcinek (jeśli to konieczne – narysuj najpierw prostą, na której leży odcinek AB).

Odcinek, który należało narysować w ćwiczeniu 1, żeby zmierzyć odległość wierzchołka D od boku AB , nazywa się wysokością równoległoboku. Mówimy, że wysokość ta została *opuszczona* na bok AB .

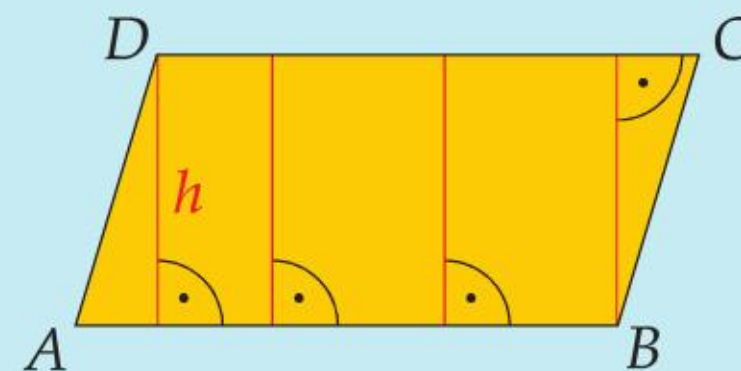
Wysokość równoległoboku to odcinek łączący wierzchołek równoległoboku z przeciwległym bokiem (lub jego przedłużeniem), prostopadły do tego boku.

Bok, na który została opuszczona dana wysokość, jest nazywany **podstawą równoległoboku**.

Wysokość równoległoboku (i wielu innych figur) oznacza się zwykle literą h ; można też używać symboli $h_1, h_2, h_3, \dots$

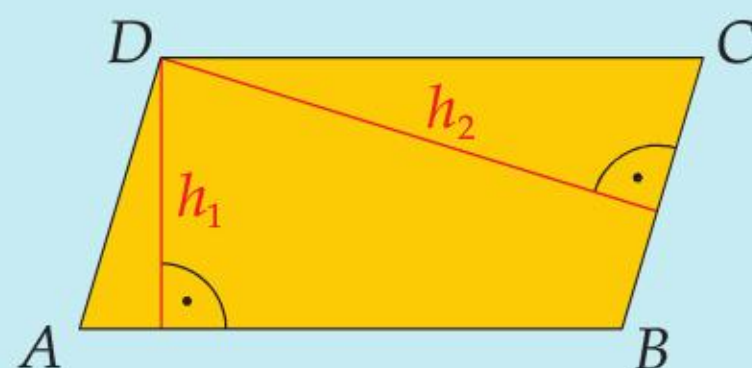
Słowem wysokość będziemy określać również długość tego odcinka; wówczas h będzie oznaczać liczbę większą od zera.

Tak rozumiana wysokość równoległoboku jest równa odległości między jego równoległymi bokami, dlatego każdy z czerwonych odcinków zaznaczonych na rysunku obok traktujemy jako wysokość.

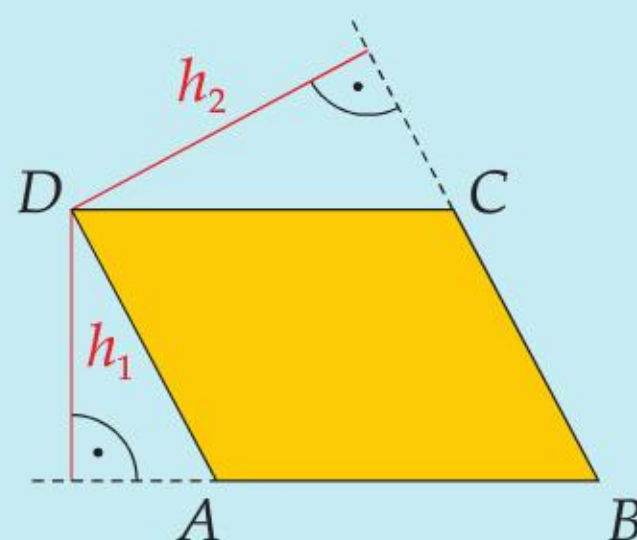


2. Narysuj równoległobok $KLMN$, a następnie z wierzchołka M poprowadź wysokość. Ile jest takich wysokości? Zastanów się, ile jest boków przeciwległych do wierzchołka M .

Z każdego wierzchołka równoległoboku można poprowadzić dwie wysokości.



$$h_1 \perp AB, h_2 \perp BC$$

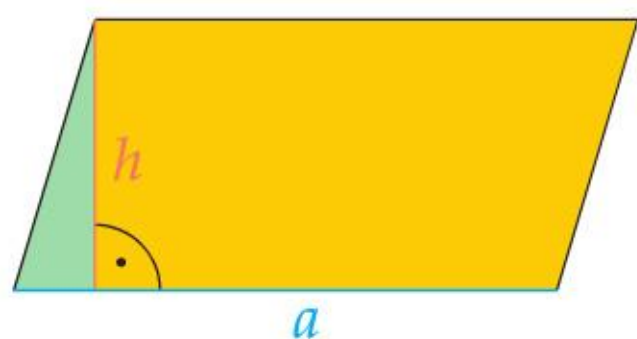


$$h_1 \perp AB, h_2 \perp BC$$

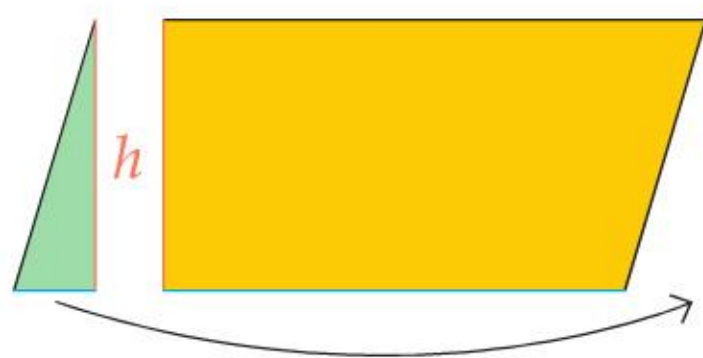


Wysokość równoległoboku może leżeć na zewnątrz tego równoległoboku.

3. Narysuj dwa razy ten sam równoległobok $ABCD$. Dla pierwszego z nich poprowadź dwie wysokości z wierzchołka A , a dla drugiego – dwie wysokości z wierzchołka B .



Jeżeli równoległobok o podstawie a przetniemy wzdłuż wysokości h



i otrzymany zielony trójkąt przeniesiemy na prawą stronę równoległoboku, jak pokazano na rysunku obok,



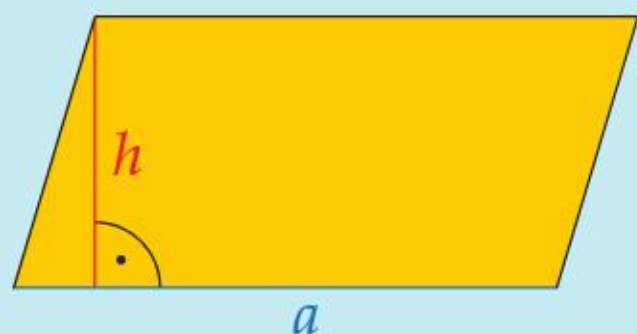
to otrzymamy prostokąt o wymiarach $a \times h$.

Aby obliczyć pole prostokąta, mnożymy jego długość przez szerokość, czyli $P = a \cdot h$, a ponieważ prostokąt ten zbudowaliśmy z równoległoboku, to pole tego równoległoboku jest takie samo jak pole prostokąta, czyli określa je wzór $P = a \cdot h$.

Chyba już się domyślasz, jak trzeba liczyć pole równoległoboku.



Jasne! Trzeba pomnożyć długość boku przez wysokość opuszczoną na ten bok.



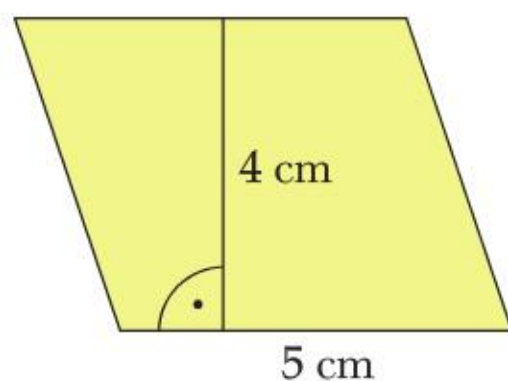
$$P = a \cdot h$$

a – długość podstawy równoległoboku

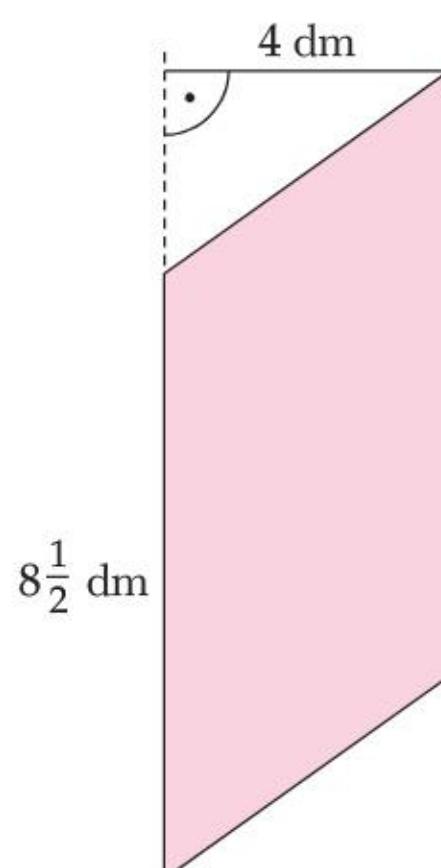
h – wysokość równoległoboku opuszczona na podstawę a

4. Oblicz pole równoległoboku.

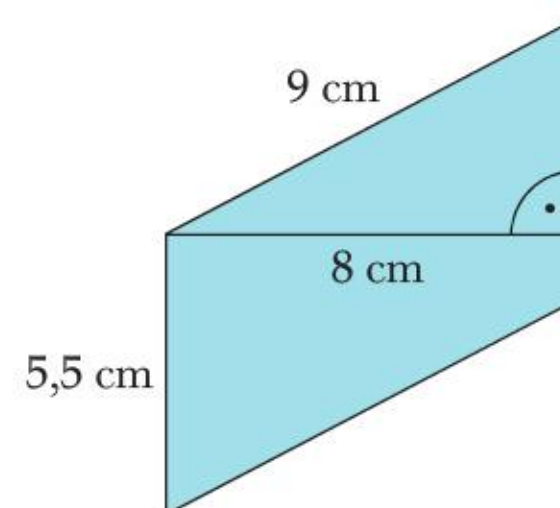
a)



b)



c)



Przykład 1

Obliczmy, ile metrów kwadratowych wynosi pole równoległoboku, którego podstawa ma 600 cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę ma 25 dm.

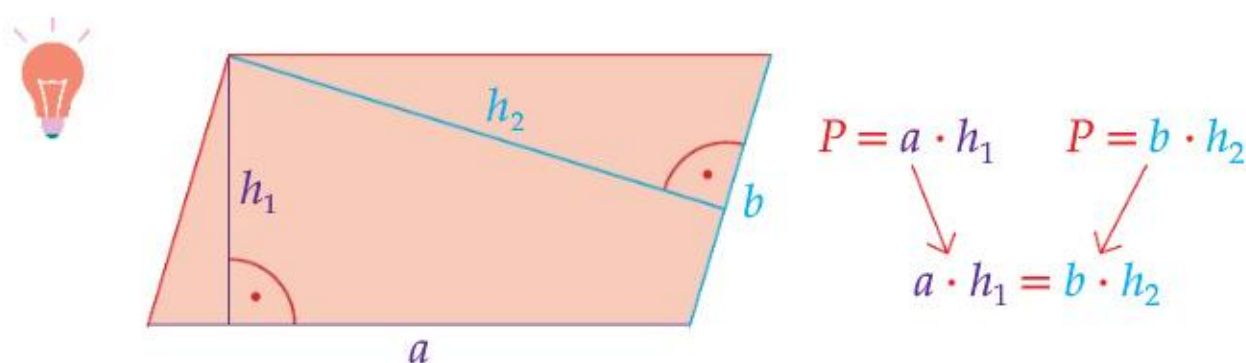
Pole równoległoboku chcemy otrzymać w metrach kwadratowych, dlatego jego wymiary zapiszmy w metrach.

$$600 \text{ cm} = 6 \text{ m}, 25 \text{ dm} = 2,5 \text{ m}$$

Tak otrzymane liczby wykorzystujemy do obliczenia pola.

$$P = 6 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ m} = 15 \text{ m}^2$$

5. Oblicz, ile decymetrów kwadratowych wynosi pole równoległoboku, którego bok ma 400 mm, a wysokość opuszczona na ten bok ma 200 mm.
6. Narysuj dowolny równoległobok, zmierz potrzebne odcinki i oblicz jego pole.
7. Narysuj dowolny równoległobok $ABCD$. Z wierzchołka A poprowadź obie wysokości. Zmierz potrzebne odcinki i oblicz pole tego równoległoboku dwoma sposobami: wykorzystaj najpierw jedną wysokość, a potem drugą.



Czy w ćwiczeniu 7 też ci wyszły dwa takie same wyniki?

Tak, a więc nie ma znaczenia, którą wysokość narysujemy. Ważne jest, żeby dobrać do niej właściwą podstawę!

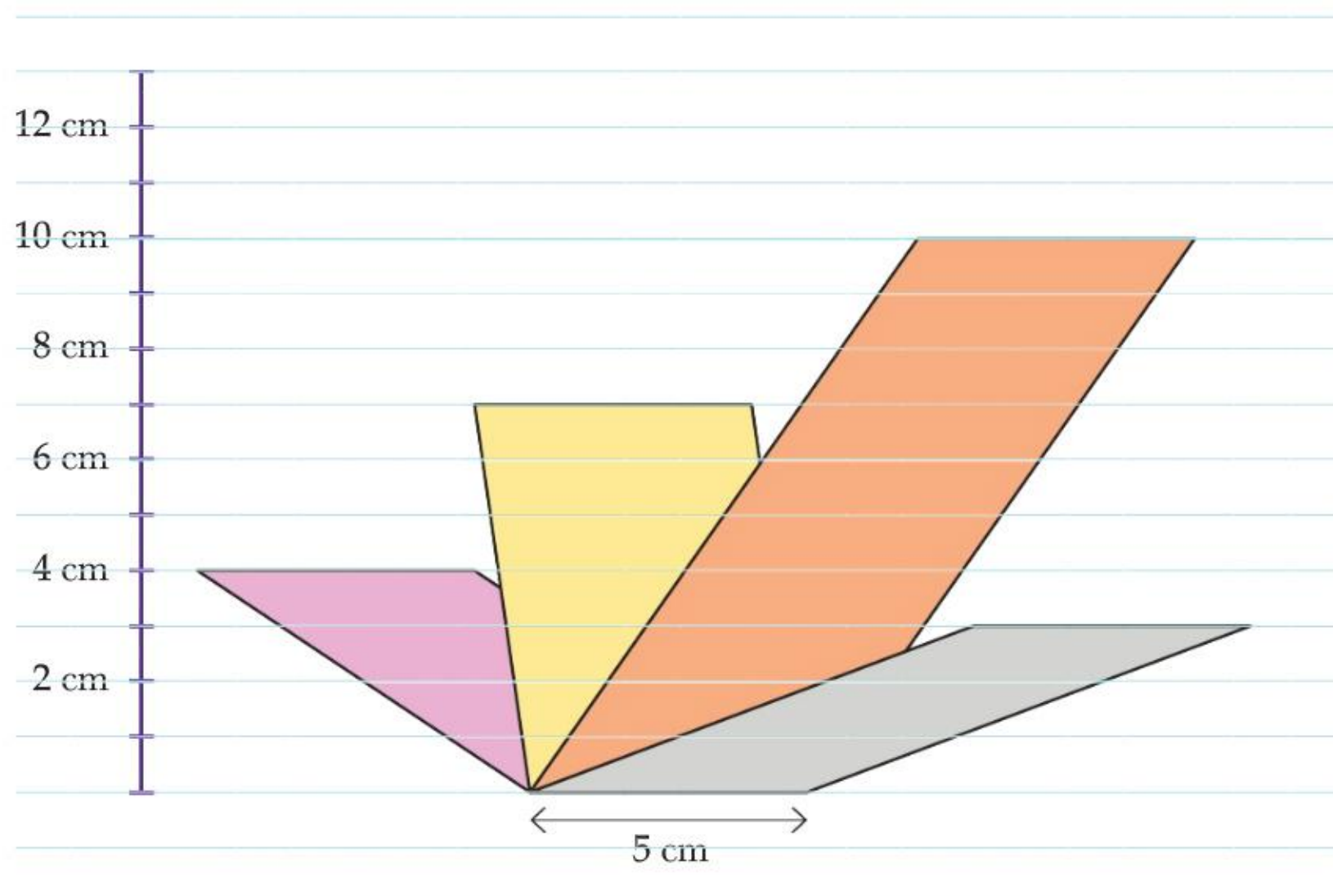
Na to wychodzi ☺

Zadania

- Narysuj trzy różne równoległoboki, których pole wynosi 12 cm^2 .
- Prostokąt ma wymiary $28 \text{ mm} \times 5 \text{ cm}$. Narysuj równoległobok, którego pole jest równe polu tego prostokąta.

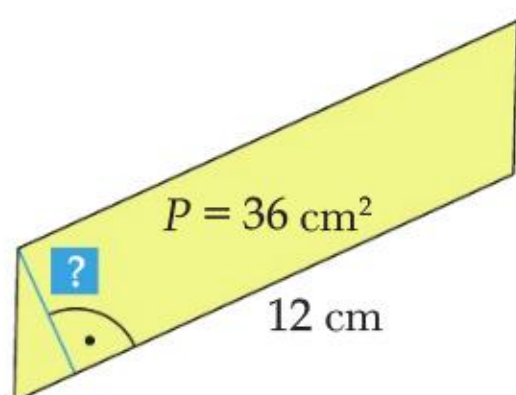
- Jeden z boków równoległoboku ma 15 cm, a wysokość opuszczona na ten bok jest od niego dwa razy dłuższa. Ile wynosi pole tego równoległoboku?
A. 60 cm^2 B. 120 cm^2 C. 450 cm^2 D. 900 cm^2
- Boki równoległoboku mają długości 14 cm i 16 cm. Wysokość opuszczona na krótszy bok stanowi 50% długości dłuższego boku. Oblicz pole tego równoległoboku.

- Z kolorowego papieru wycięto kilka równoległoboków. Krótszy bok każdego miał 5 cm. Równoległoboki te ułożono jak na rysunku obok: każdy kolejny zasłaniał częściowo poprzedni. Ile jest tych równoległoboków? Oblicz pole każdego z nich.

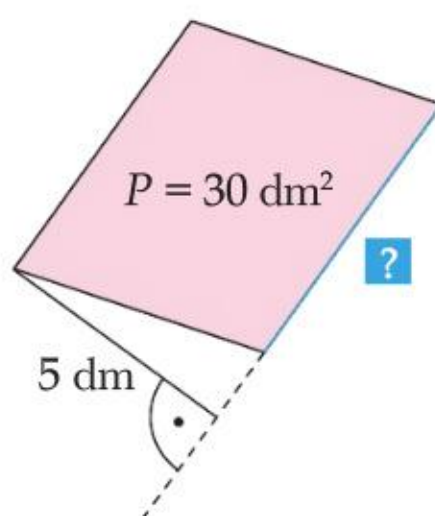


- Pole równoległoboku jest równe 24 m^2 . Jeden z jego boków ma 6 m. Ile metrów ma wysokość opuszczona na ten bok?
- Oblicz długość odcinka oznaczonego znakiem zapytania.

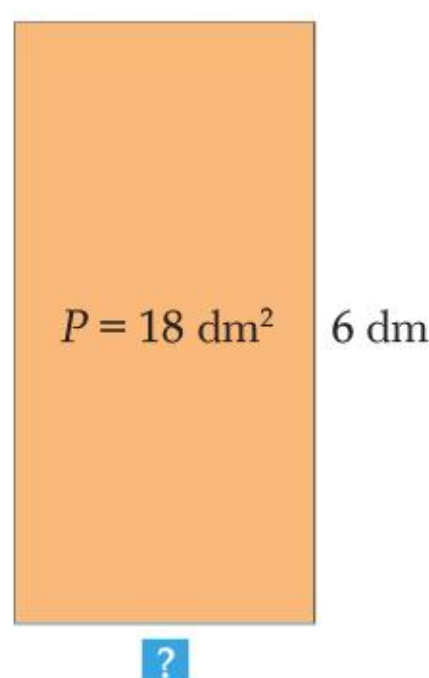
a)



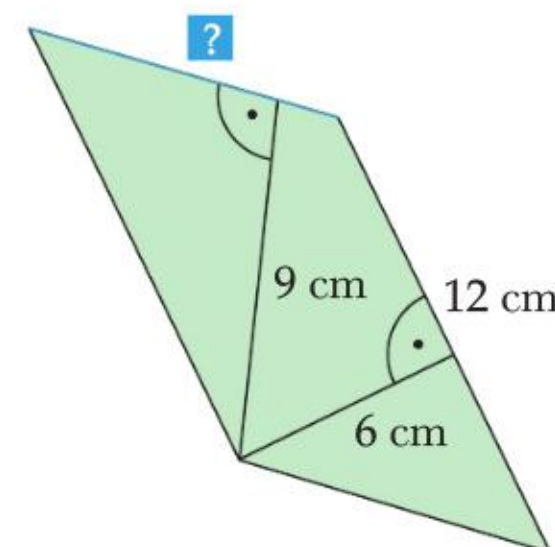
b)



c)



d)



- Boki równoległoboku mają długości 8 cm i 70 mm. Wysokość opuszczona na krótszy bok ma 4 cm. Ile wynosi druga wysokość?
A. 3,5 cm B. 30 mm C. 35 cm D. 45 mm

5.5 Pole rombu

Podejmij temat



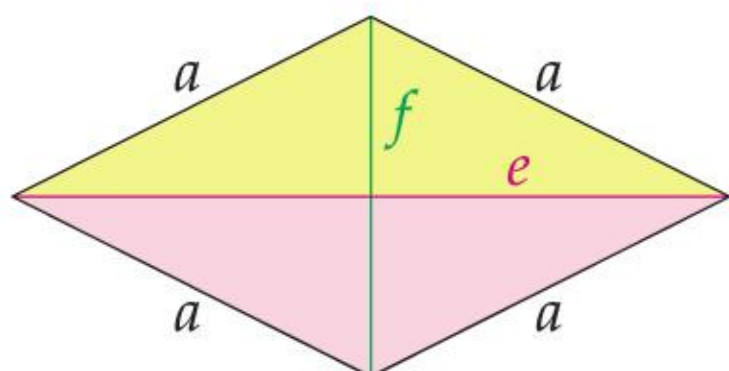
Na jakie figury zostanie podzielony romb, jeżeli przetniemy go wzdłuż przekątnych?

Czy wiesz, w jaki sposób trzeba podzielić romb, żeby otrzymać cztery jednakowe figury?

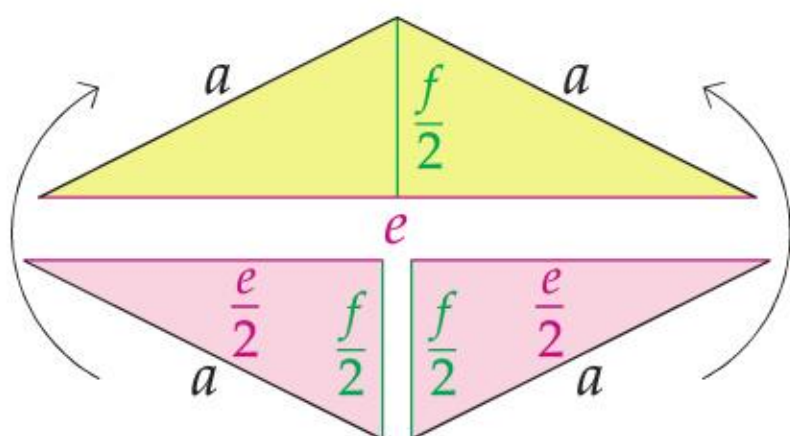


Jasne! Trzeba go rozciąć wzdłuż przekątnych.

1. Narysuj romb i oblicz jego pole za pomocą wzoru na pole równoległoboku. Dlaczego tak można?

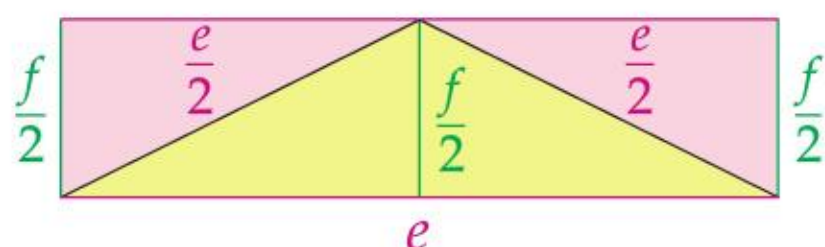


Narysujmy romb o boku a i przekątnych e oraz f . Przekątne rombu dzielą go zawsze na cztery identyczne trójkąty prostokątne.



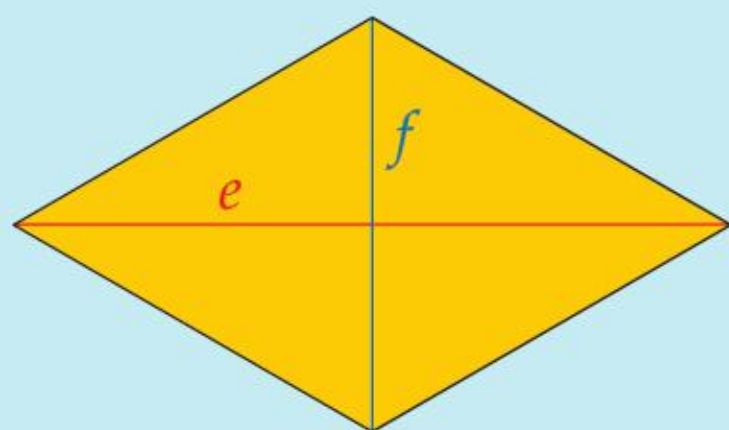
Przetnijmy ten romb wzdłuż przekątnej e , a następnie różowy trójkąt wzdłuż zielonego odcinka (czyli wzdłuż połowy przekątnej f) i otrzymane dwa różowe trójkąty prostokątne przenieśmy, jak pokazano na rysunku obok.

$\frac{f}{2}$ to połowa przekątnej f
 $\frac{e}{2}$ to połowa przekątnej e



Otrzymaliśmy prostokąt o bokach e oraz $\frac{f}{2}$.

Aby obliczyć pole prostokąta, mnożymy jego długość przez szerokość, czyli $P = e \cdot \frac{f}{2}$, a ponieważ prostokąt ten powstał z rombu, to pole rombu jest takie samo jak pole prostokąta, czyli określa je wzór $P = e \cdot \frac{f}{2}$.



$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

e, f – długości przekątnych rombu



Pamiętasz, jak mnożymy liczbę naturalną przez ułamek?

Na przykład $5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2}$.

Tak samo możemy zmienić zapis we wzorze na pole rombu:

$$P = e \cdot \frac{f}{2} = \frac{e \cdot f}{2}$$

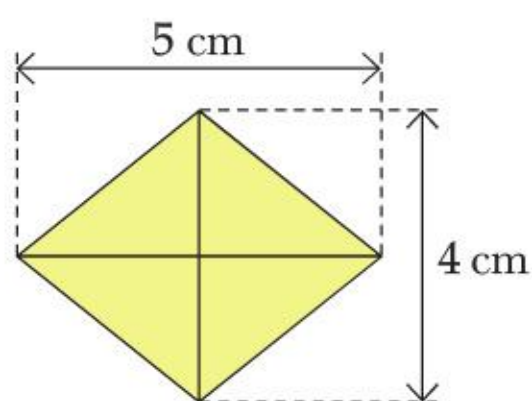
Umiem obliczyć pole rombu! Mnożę długości przekątnych i wynik dzielę przez dwa.



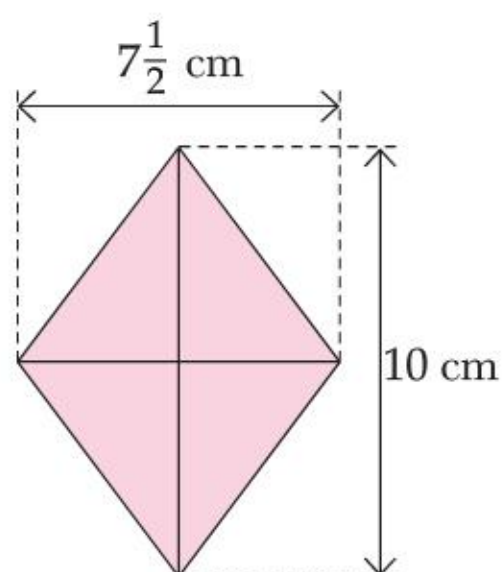
Pamiętaj, że możesz też obliczać pole rombu tak jak równoległoboku, czyli długość podstawy razy wysokość.

2. Oblicz pole rombu.

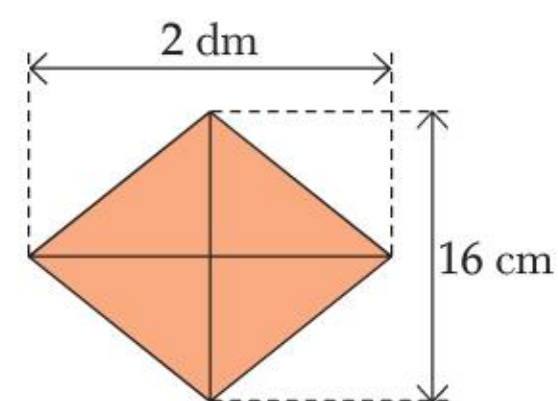
a)



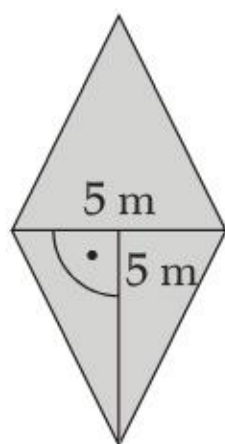
b)



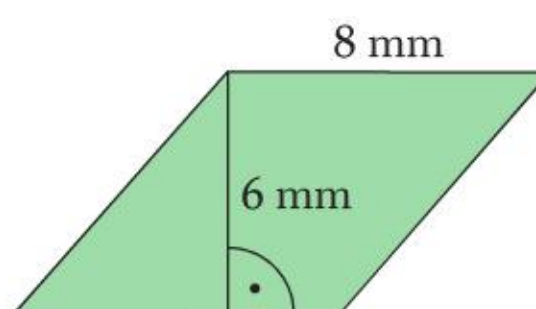
c)



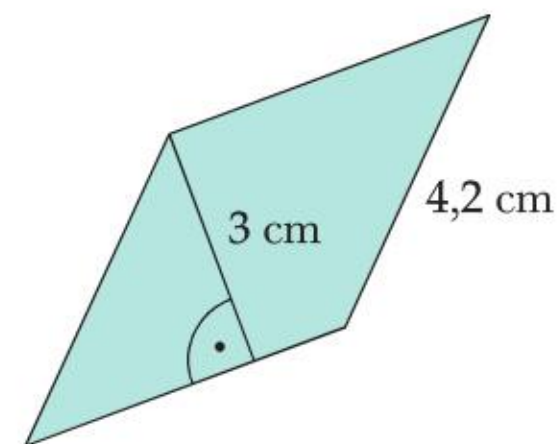
d)



e)



f)



3. Długości przekątnych rombu wynoszą 9 cm i 80 mm. Oblicz pole tego rombu.

4. Jaką długość ma bok rombu, którego wysokość jest równa 4,5 cm, a pole wynosi 27 cm²?

Jeśli mamy dane pole rombu i jego wysokość, potrafimy już obliczyć długość boku rombu (korzystając ze wzoru na pole równoległoboku). Podobnie postępujemy, gdy mamy dane pole rombu i długość boku, a chcemy obliczyć wysokość.

Jeśli natomiast mamy dane pole rombu i długość jednej z przekątnych, to możemy obliczyć długość drugiej przekątnej (korzystając ze wzoru na pole rombu). Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 1

Pole rombu wynosi 36 cm^2 . Jedna z jego przekątnych ma 8 cm . Obliczmy długość drugiej przekątnej.

Sposób I

Zgodnie ze wzorem na pole rombu musimy znaleźć taką liczbę, która po pomnożeniu przez 8 , a następnie podzieleniu przez 2 da nam 36 . Możemy to zrobić metodą prób i błędów.

Weźmy np. 6 i sprawdźmy: $\frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{48}{2} = 24$. Wynik jest za mały (miało być 36), czyli 6 to za mało.

Weźmy zatem np. 8 i sprawdźmy: $\frac{8 \cdot 8}{2} = \frac{64}{2} = 32$. Wynik jest nadal za mały, ale już bliższy liczbie 36 .

Weźmy zatem 9 i sprawdźmy: $\frac{9 \cdot 8}{2} = \frac{72}{2} = 36$. Teraz się zgadza.

Druga przekątna ma zatem 9 cm .

Sposób II

Zapiszmy wzór na pole rombu:

$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

Zamiast liter wstawmy do wzoru odpowiednie liczby dane

w zadaniu ($P = 36$, $e = 8$):

$$36 = \frac{8 \cdot f}{2}$$

Ostatni zapis oznacza, że iloczyn długości przekątnych podzielony przez 2 wynosi 36 . Gdyby iloczyn przekątnych nie był dzielony przez 2 , to wynik byłby 2 razy większy, czyli:

$$8 \cdot f = 72 \text{ (bo } 36 \cdot 2 = 72\text{)}$$

Aby obliczyć nieznany czynnik iloczynu, należy wykonać działanie odwrotne do mnożenia, czyli dzielenie:

$$f = 72 : 8$$

Druga przekątna ma zatem 9 cm .

$$f = 9$$

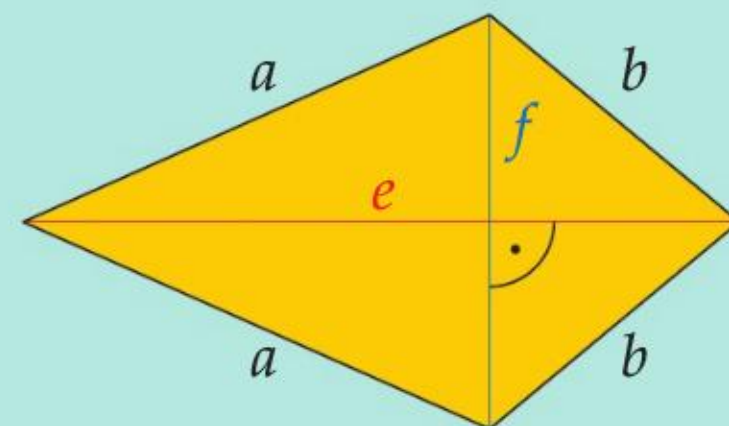
5. Pole rombu jest równe 30 dm^2 . Jedna z jego przekątnych ma 5 dm . Jaka jest długość drugiej przekątnej tego rombu?

Więcej na temat

Tradycyjne latawce mają kształt czworokąta, którego rysunek znajduje się obok. Jest to **deltoid**.

Ma on dwie pary sąsiednich boków równej długości. Jego przekątne są prostopadłe, a jedna z nich dzieli drugą na połowy.

Pole deltoidu o przekątnych długości e i f wyraża się takim samym wzorem jak pole rombu, czyli $P = \frac{e \cdot f}{2}$.



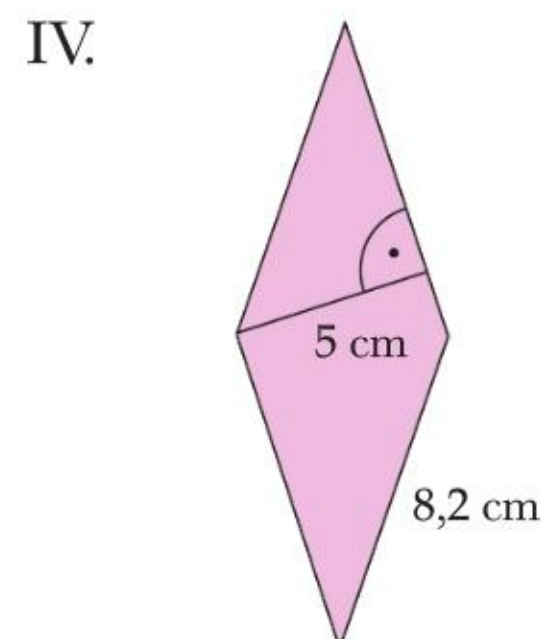
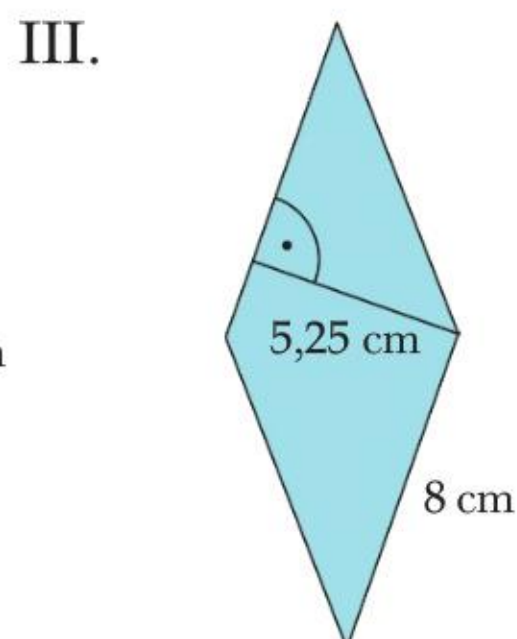
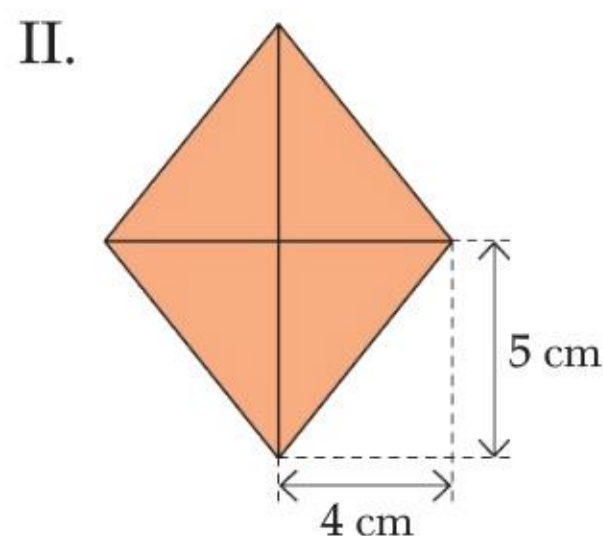
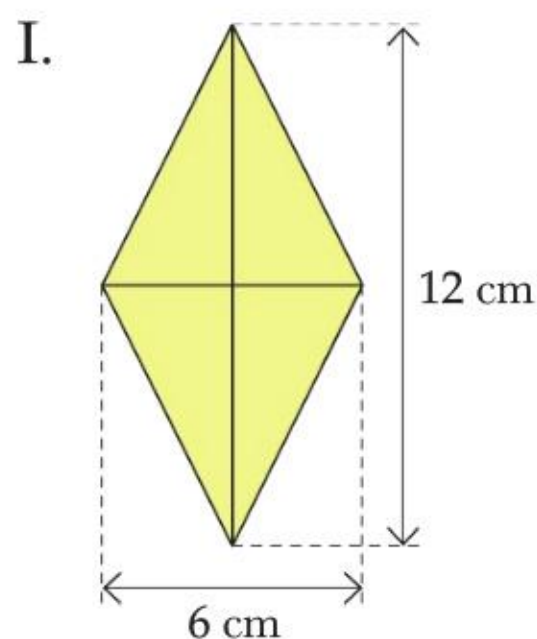
6. Jeśli obie przekątne deltoidu dzielą się wzajemnie na połowy, to jest to szczególny przypadek deltoidu. Jak się nazywa taki czworokąt?
7. Narysuj trzy różne deltoidy o przekątnych długości 4 cm i 5 cm, z których dokładnie jeden ma przekątne dzielące się wzajemnie na połowy. Oblicz pole tych deltoidów, zmierz ich boki i oblicz wszystkie trzy obwody.

Zadania

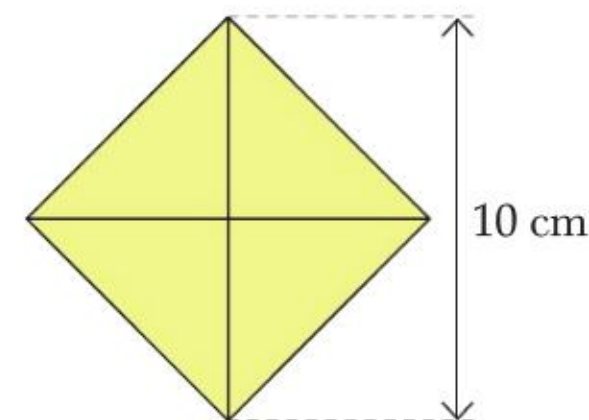
- Tomek skonstruował latawiec w kształcie rombu. Listewki, do których przymocował materiał, miały długości 50 cm i 90 cm. Jaka jest powierzchnia tego latawca?



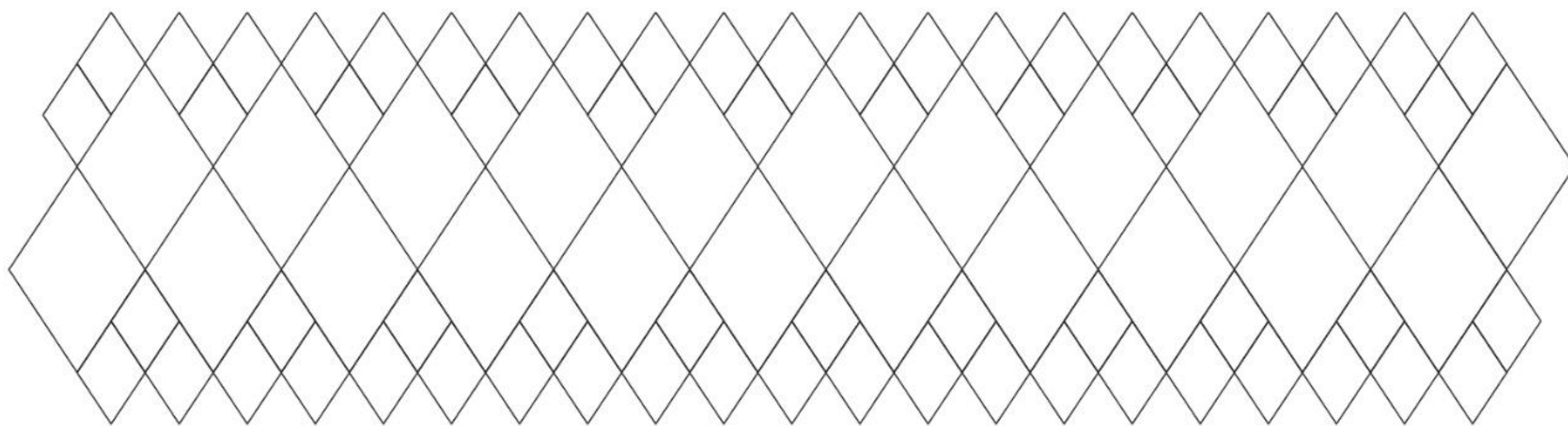
- Który romb ma największe pole, a który – najmniejsze?



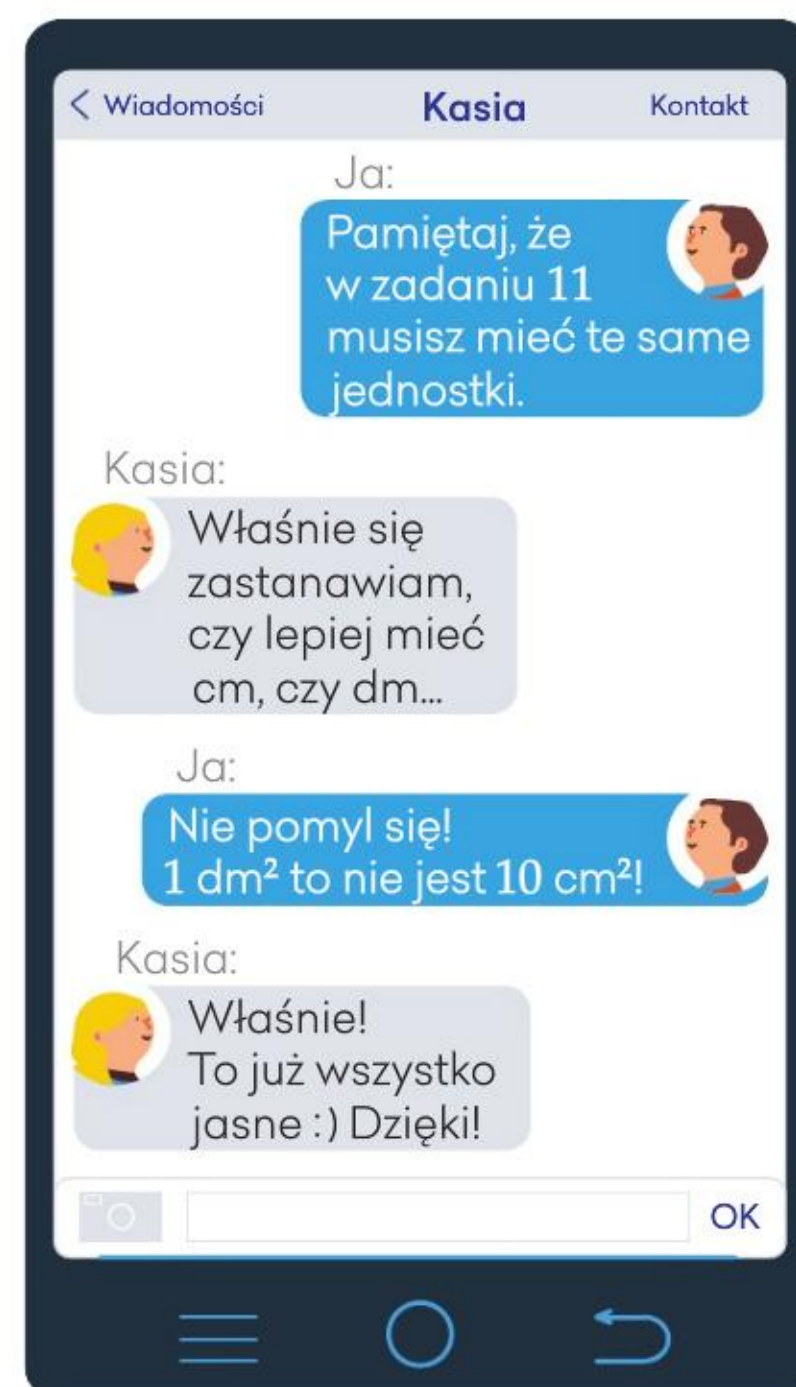
- Narysuj romb o polu równym 10 cm^2 .
- Jakie jest pole kwadratu przedstawionego na rysunku obok?
- Przekątne rombu $ABCD$ mają długości 9 cm i 6 cm . O ile większe jest pole rombu $KLMN$, którego obie przekątne są o $1,5 \text{ cm}$ dłuższe od przekątnych rombu $ABCD$?



- Siatka, której fragment widoczny jest na rysunku poniżej, składa się z oczek w kształcie rombów dwóch rozmiarów – duży romb w skali $1 : 2$ to mały romb. Przekątne mniejszego rombu mają długości $8,5 \text{ cm}$ i 4 cm . Oblicz pola obu rombów: małego i dużego. Ile razy pole dużego rombu jest większe od pola małego rombu?



- Pole rombu o boku mającym 9 cm wynosi 54 cm^2 . Jaka jest wysokość tego rombu?
- Bok rombu ma 5 cm , a jego przekątne mają 6 cm i 8 cm . Oblicz pole tego rombu i jego wysokość.
- Oblicz pole rombu, którego jedna przekątna ma 40 cm , a druga jest od niej o 20 cm dłuższa. Odpowiedź podaj:
 - w centymetrach kwadratowych,
 - w decymetrach kwadratowych.
- Narysuj dowolny romb, a następnie drugi romb, którego pole jest dwa razy większe od pola pierwszego rombu.
- ★ Pole rombu wynosi 10 dm^2 . Jedna z jego przekątnych ma 50 cm . Oblicz długość drugiej przekątnej tego rombu.



5.6 Wysokości trójkąta

Podejmij temat



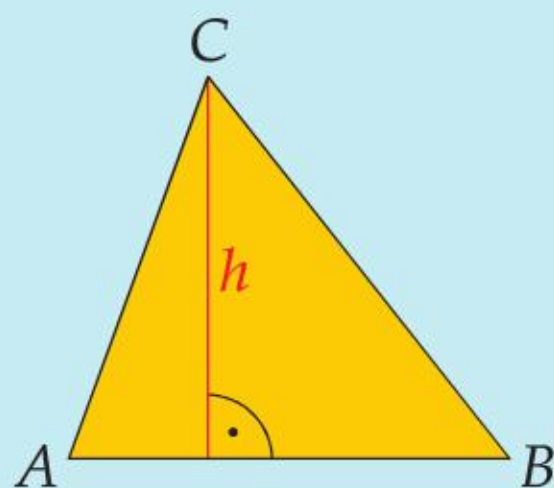
W jaki sposób zmierzyć wysokość wejścia do namiotu? Naszkicuj w zeszyte trójkąt obrazujący to wejście i odcinek, który będzie wskazywał jego wysokość.

Mam 1,48 m wzrostu.
Czy dam radę wejść
do namiotu bez
schylania się...?



Wysokość trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z przeciwległym bokiem (lub jego przedłużeniem), prostopadły do tego boku.

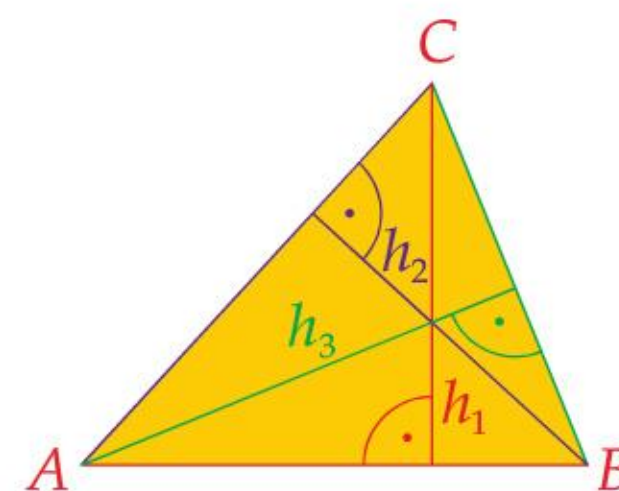
Bok, na który została opuszczona dana wysokość, jest nazywany **podstawą trójkąta**.



Słowem wysokość będziemy określać również długość odcinka będącego wysokością. Tak rozumiana wysokość trójkąta jest równa odległości od jego wierzchołka do przeciwległego boku.

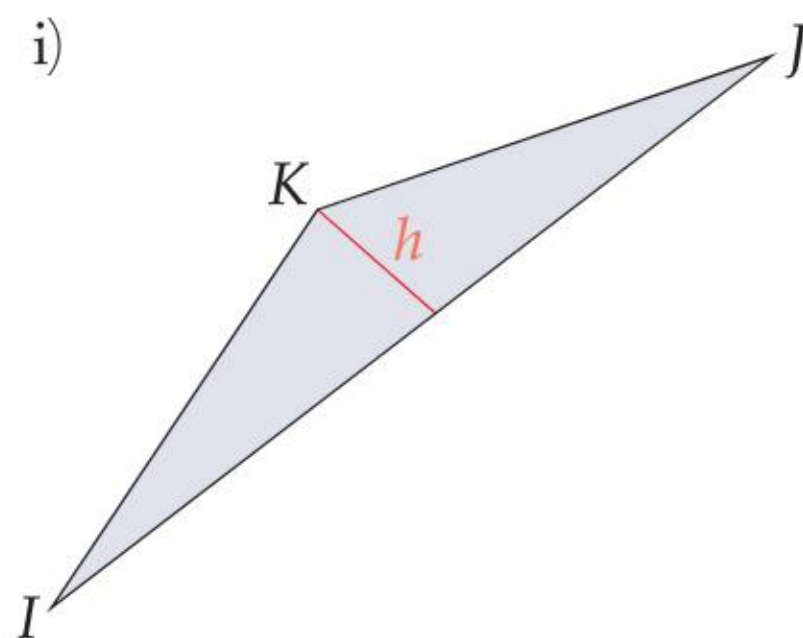
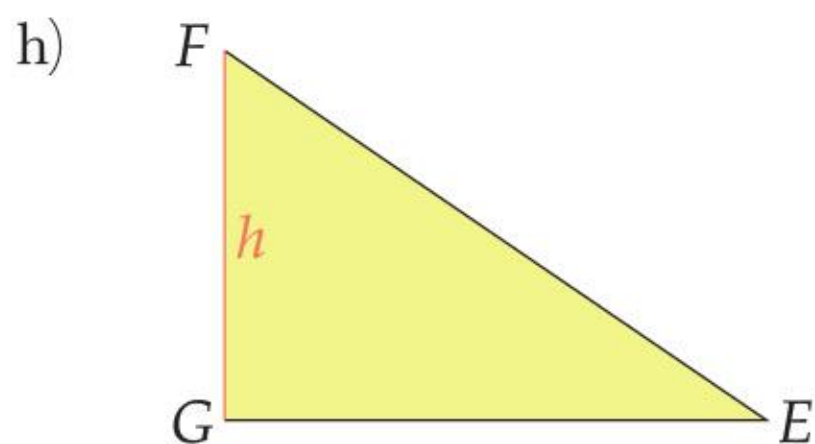
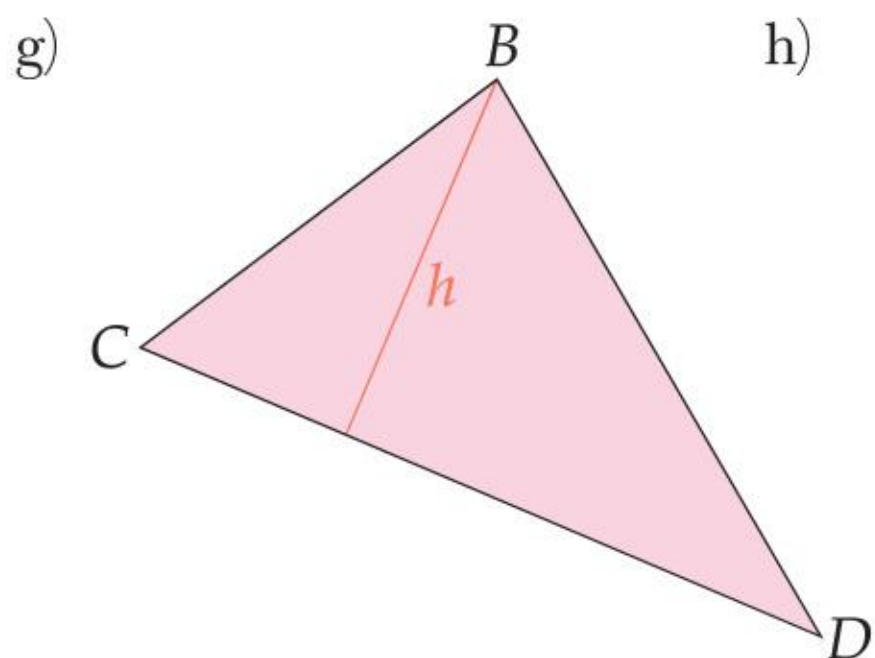
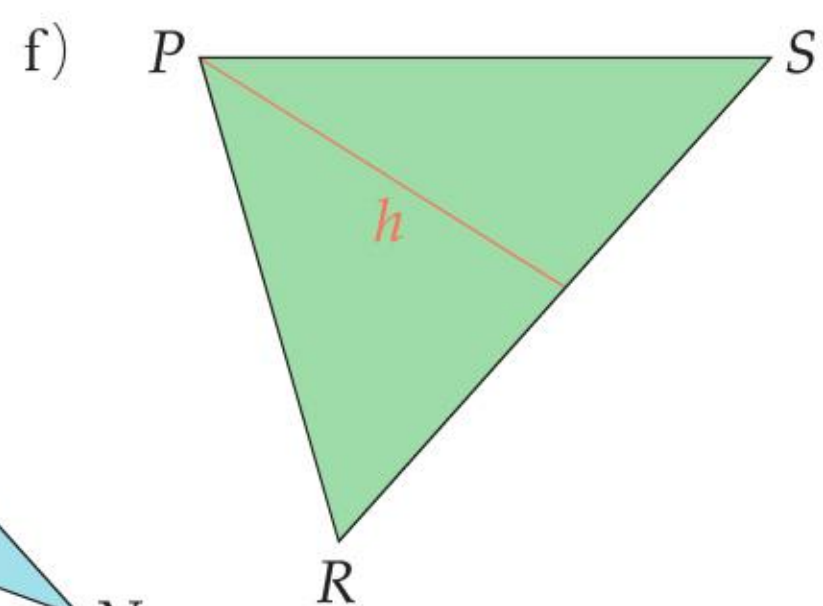
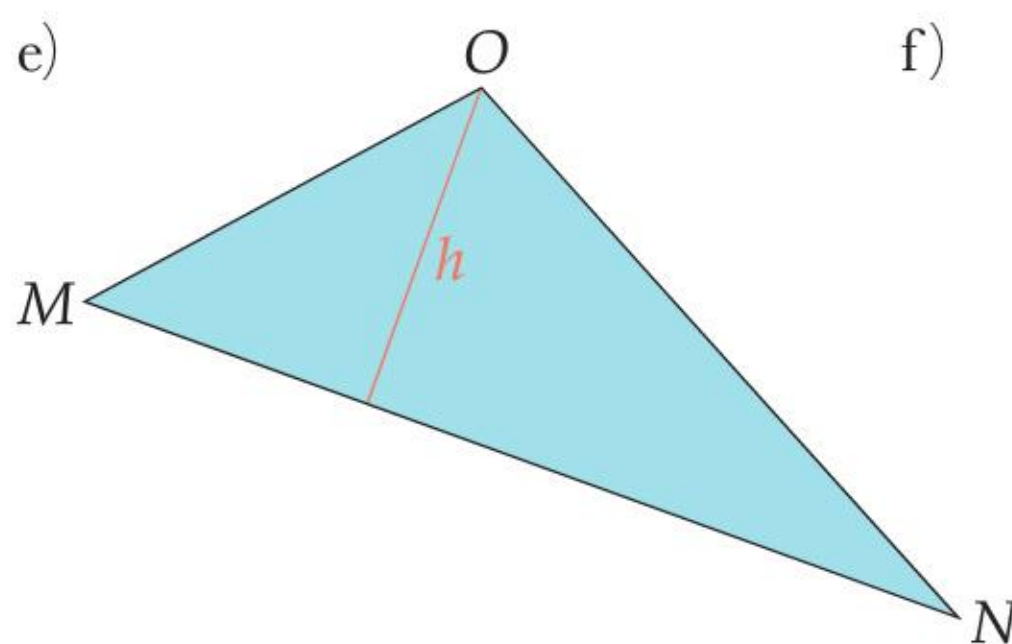
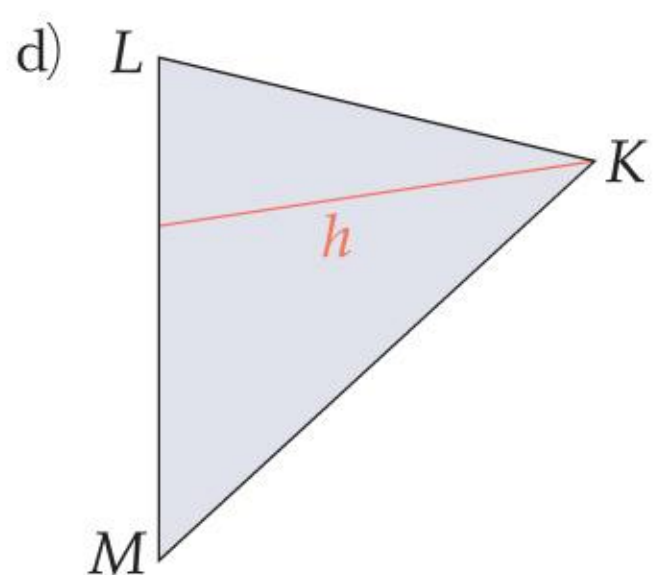
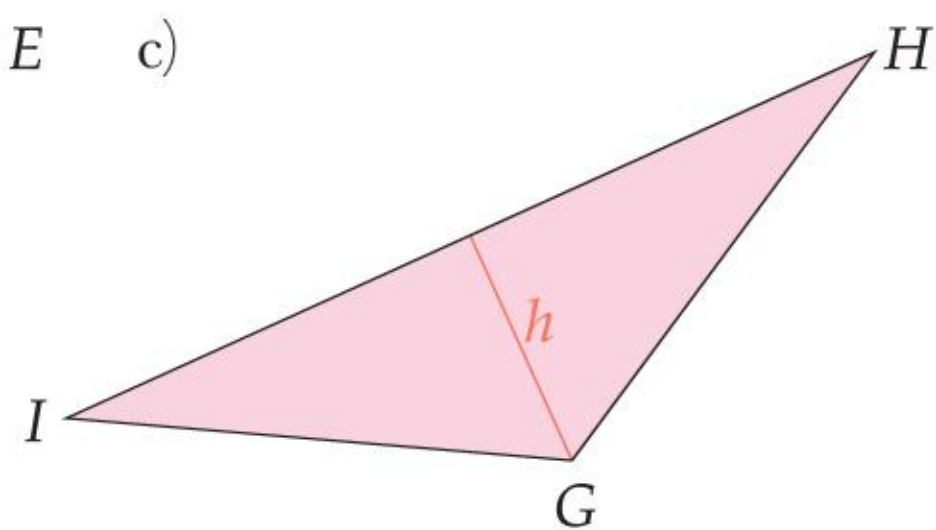
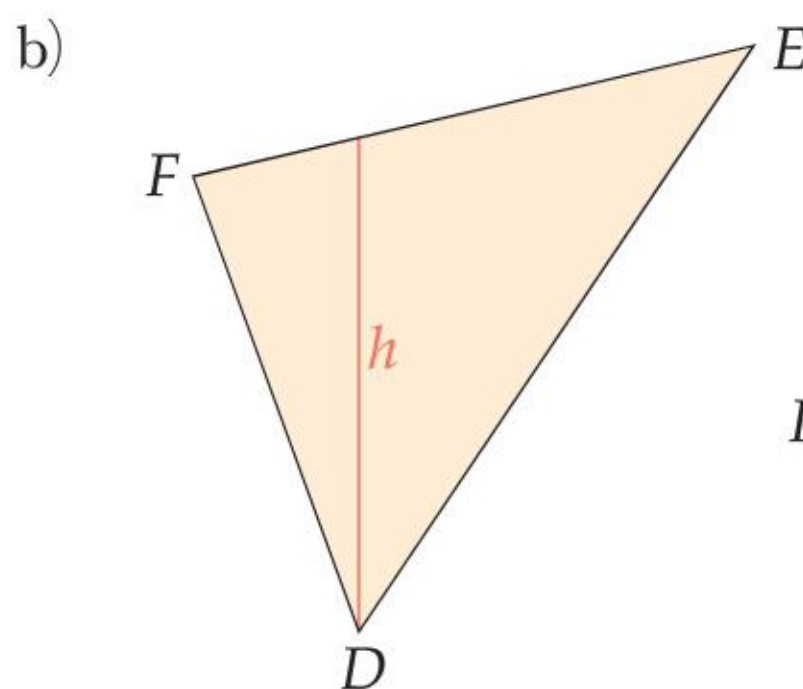
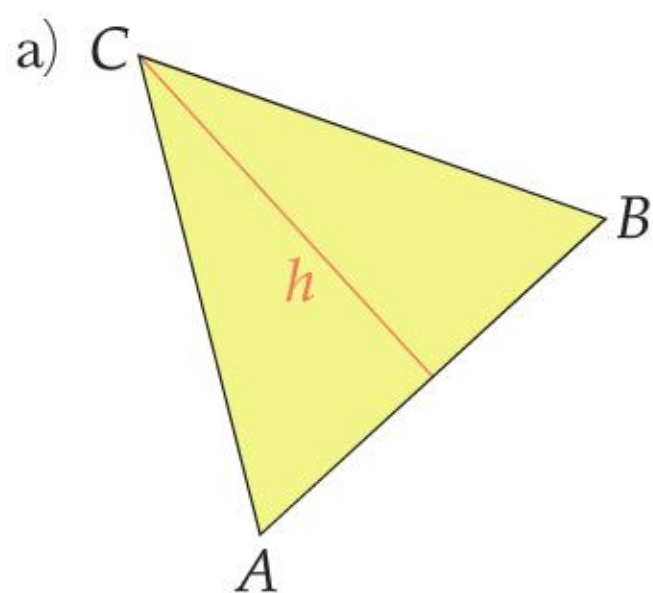


Trójkąt ma trzy wierzchołki, więc ma także trzy wysokości.

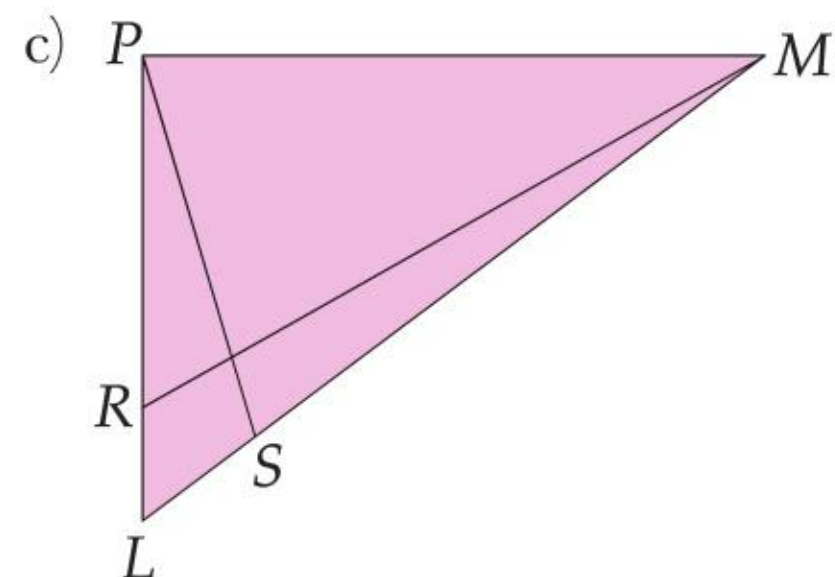
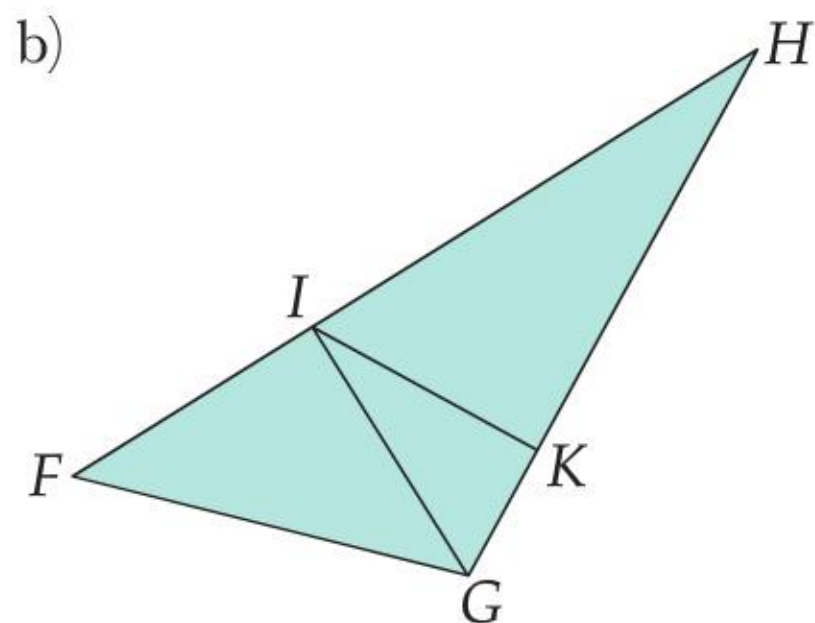
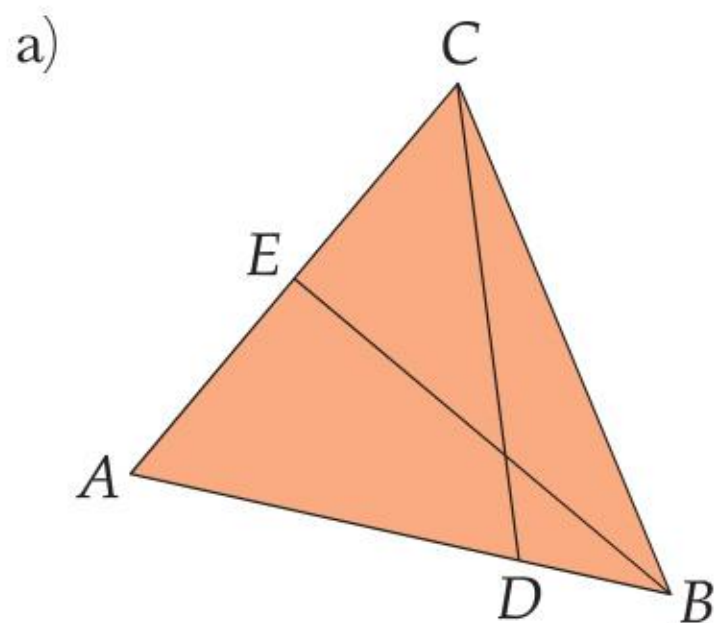


Dla każdego trójkąta wszystkie wysokości (lub ich przedłużenia) przecinają się w jednym punkcie.

1. Sprawdź za pomocą ekierki, czy rysunek przedstawia trójkąt z prawidłowo narysowaną wysokością.

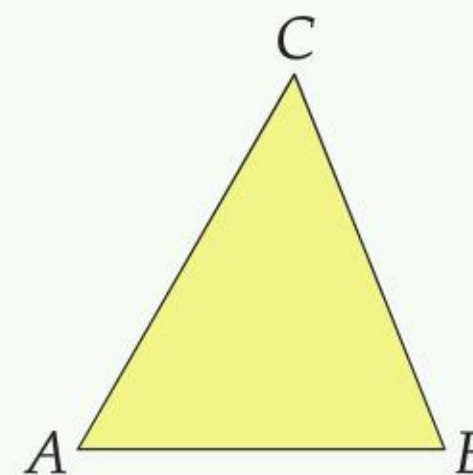


2. Który odcinek lub które odcinki są wysokością trójkąta?

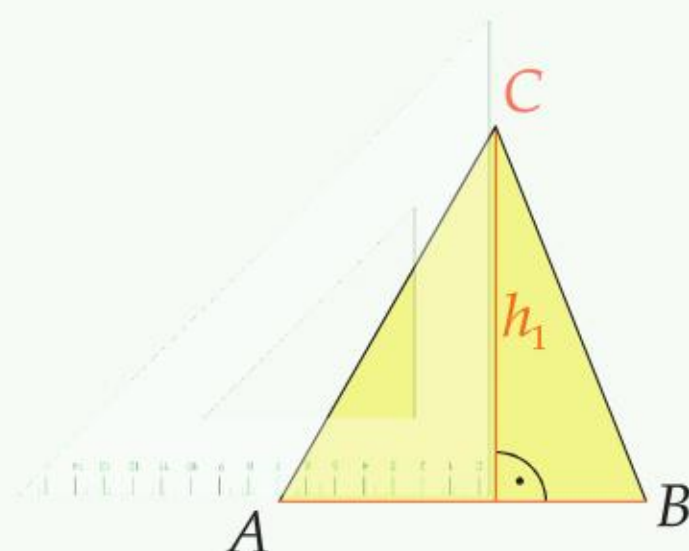


Przykład 1

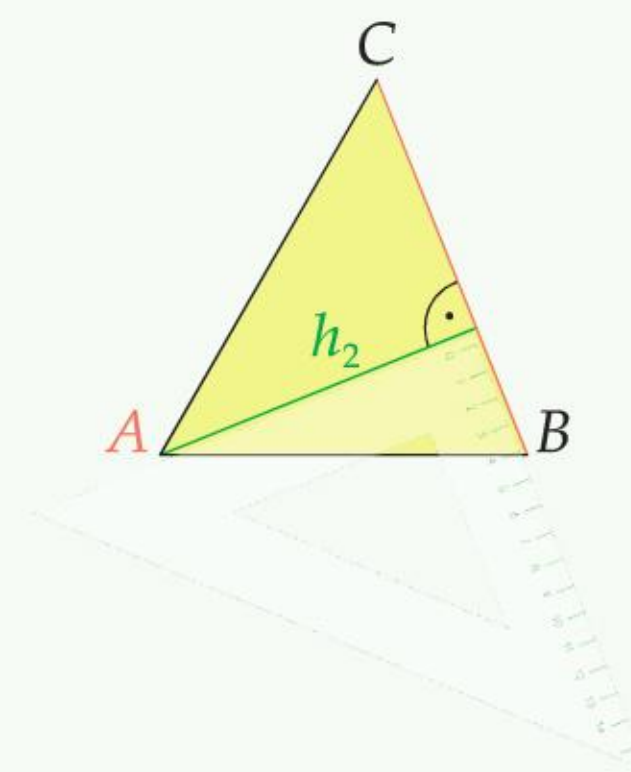
Narysujmy trzy wysokości trójkąta ostrokątnego ABC .



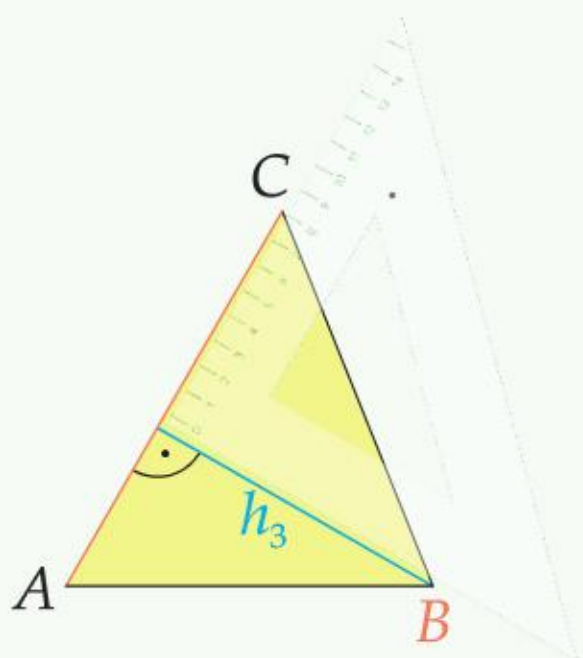
1. Pierwszą wysokość narysujemy z wierzchołka C . Przeciwległym bokiem do wierzchołka C jest bok AB , więc wysokość ta musi być prostopadła do boku AB .
Za pomocą ekierki rysujemy wysokość h_1 .



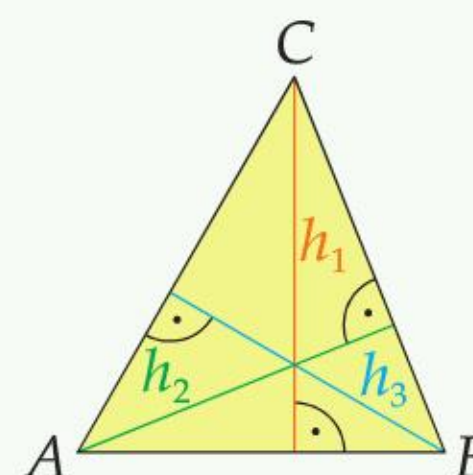
2. Rysujemy teraz drugą wysokość – z wierzchołka A . Przeciwległym bokiem do wierzchołka A jest bok BC , więc ta wysokość musi być odcinkiem prostopadłym do boku BC .
Za pomocą ekierki rysujemy wysokość h_2 .



3. Teraz rysujemy trzecią wysokość – opuszczoną z wierzchołka B na przeciwległy bok AC .
Za pomocą ekierki rysujemy wysokość h_3 .



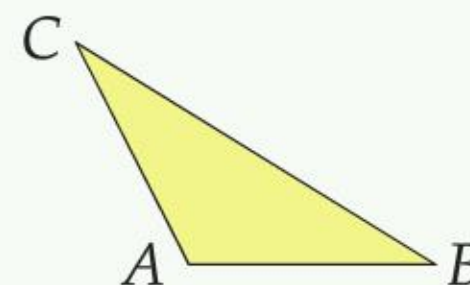
4. W ten sposób otrzymaliśmy wszystkie trzy wysokości trójkąta ABC .



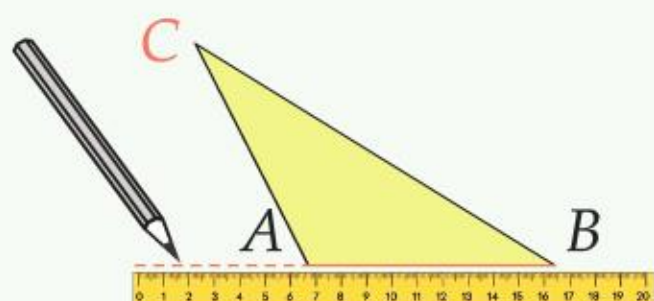
3. Narysuj trzy trójkąty ostrokątne i dla każdego z nich poprowadź trzy wysokości.

Przykład 2

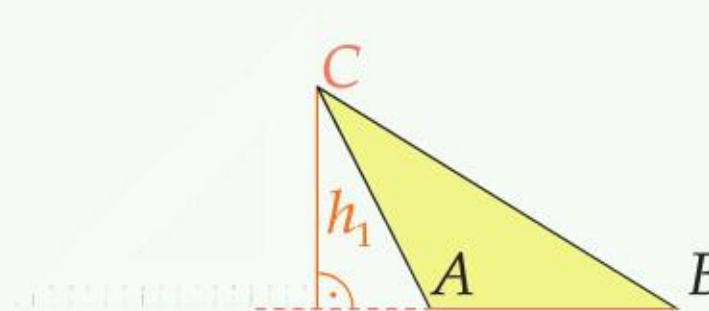
Narysujmy trzy wysokości trójkąta rozwartokątnego ABC .



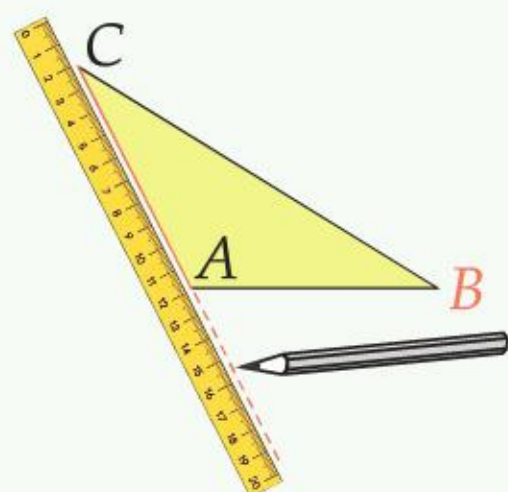
1. Pierwszą wysokość narysujemy z wierzchołka C . Przeciwległym bokiem do niego jest bok AB , więc wysokość ta musi być prostopadła do boku AB . Aby zatem ją narysować, przedłużymy bok AB .



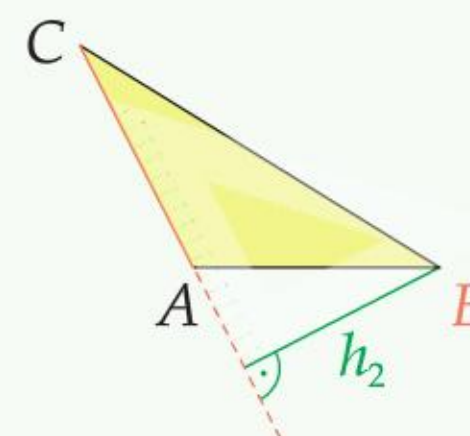
2. Teraz już z łatwością możemy narysować wysokość h_1 przy użyciu ekierki.



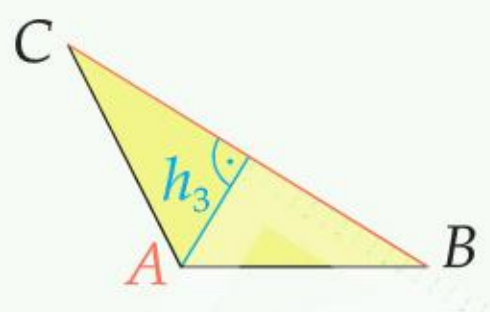
3. Rysujemy teraz drugą wysokość – opuszczoną z wierzchołka B na przeciwległy bok AC . Aby narysować tę wysokość, przedłużymy bok AC .



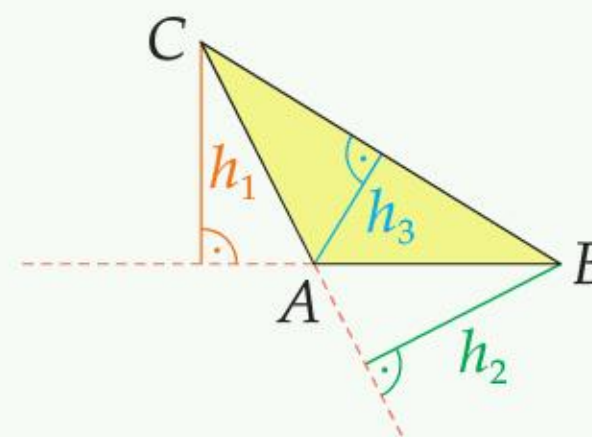
4. Teraz już z łatwością za pomocą ekierki narysujemy wysokość h_2 .



5. Na koniec rysujemy trzecią wysokość – z wierzchołka A . Przeciwległym bokiem do wierzchołka A jest bok BC , więc ta wysokość musi być odcinkiem prostopadłym do boku BC . Za pomocą ekierki rysujemy wysokość h_3 .



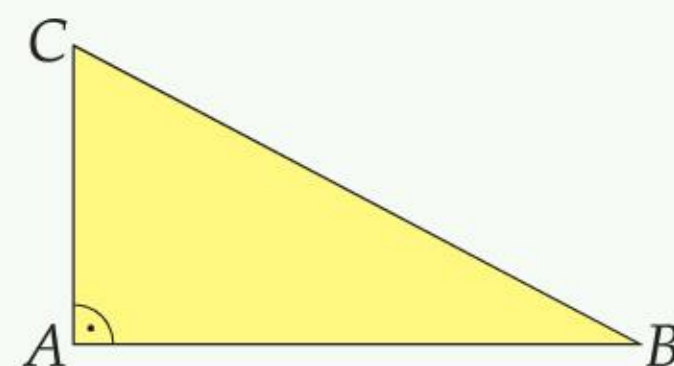
6. W ten sposób otrzymaliśmy wszystkie trzy wysokości trójkąta ABC .



4. Narysuj trzy różne trójkąty rozwartokątne i dla każdego z nich poprowadź trzy wysokości.

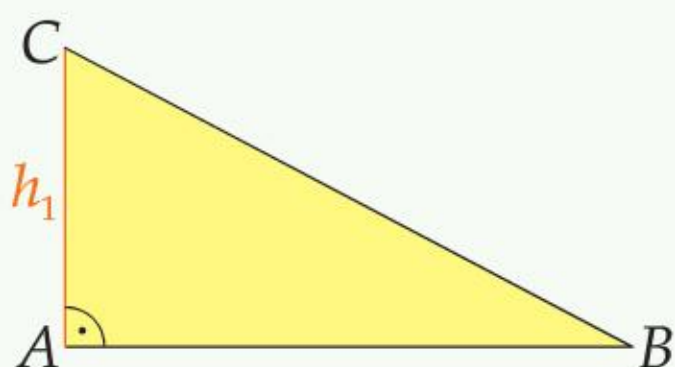
Przykład 3

Narysujmy wysokości trójkąta prostokątnego ABC .

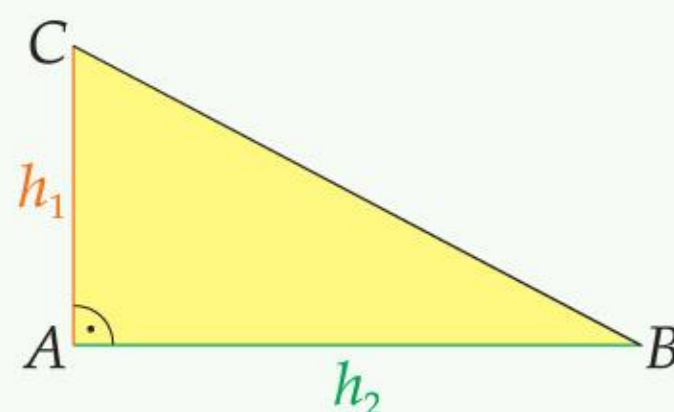


1. Ponieważ jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma miarę 90° , więc boki leżące na ramionach tego kąta są wysokościami trójkąta.

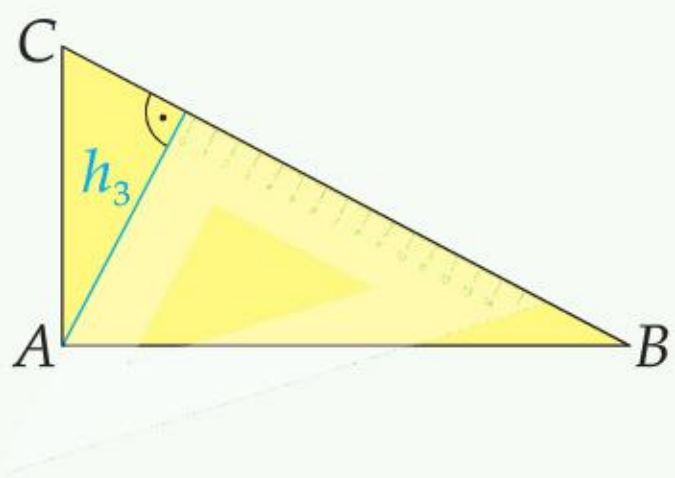
Wysokość h_1 jest opuszczona z wierzchołka C na przeciwległy bok AB .



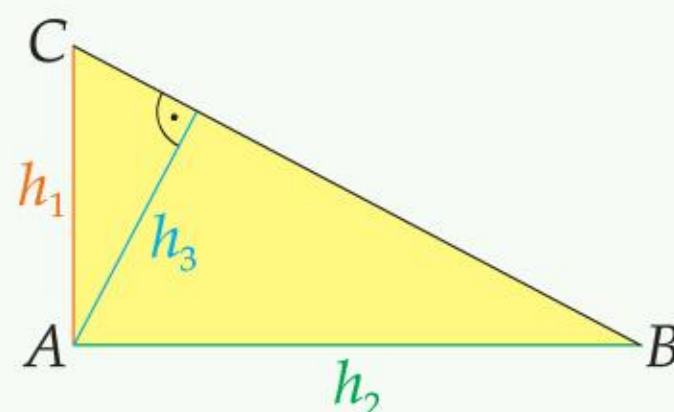
2. Wysokość h_2 jest opuszczona z wierzchołka B na przeciwległy bok AC .



3. Trzecią wysokość h_3 , opuszczoną z wierzchołka A na przeciwległy bok BC , wyznaczamy za pomocą ekierki.



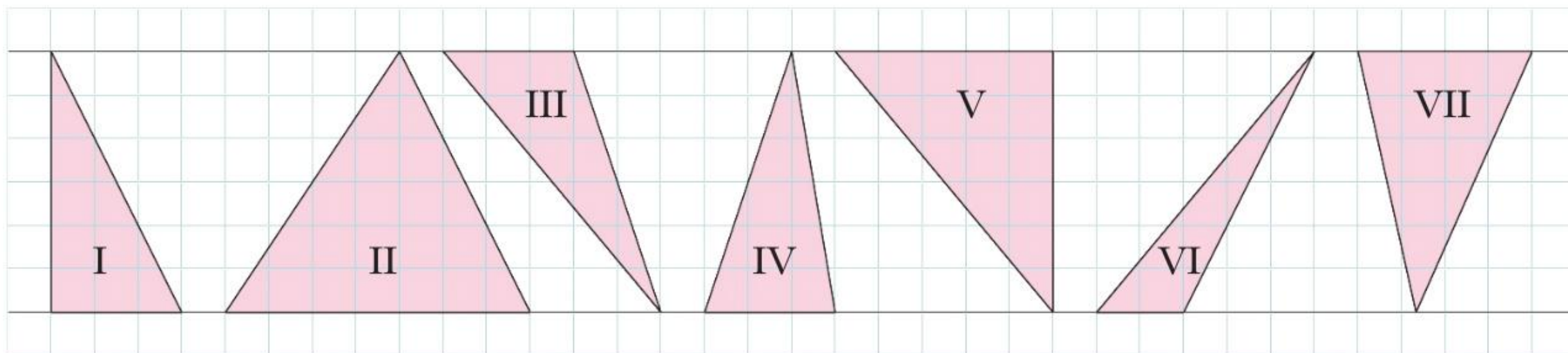
4. W ten sposób otrzymaliśmy wszystkie trzy wysokości trójkąta ABC .



5. Narysuj trzy dowolne trójkąty prostokątne. Dla każdego poprowadź trzy wysokości i zmierz długość każdej z nich.
6. Narysuj trzy dowolne trójkąty: ostrokątny, rozwartokątny i prostokątny. Poprowadź ich wszystkie wysokości i zmierz długość każdej z nich.
7. Narysuj dwa trójkąty: równoboczny i równoramienne. Poprowadź ich wszystkie wysokości i zmierz długość każdej z nich. Co możesz powiedzieć o tych długościach?

Zadania

- Jaka wspólną cechę mają trójkąty przedstawione na rysunku?



- Skonstruuj trójkąt ABC z odcinków o długościach: 4 cm, 5 cm, 6 cm. Narysuj trzy wysokości tego trójkąta i zmierz je. Przepisz i uzupełnij zdania.

- Bok AB ma cm, a wysokość opuszczona na ten bok ma cm.
- Bok BC ma cm, a wysokość opuszczona na ten bok ma cm.
- Bok AC ma cm, a wysokość opuszczona na ten bok ma cm.

W poniższym zdaniu każdy ze znaków zapytania zastąp odpowiednim przymiotnikiem:
najdłuższa/najkrótsza.

- Spośród wszystkich wysokości trójkąta ABC wysokość opuszczona na najdłuższy bok jest ?, a wysokość opuszczona na najkrótszy bok jest ?.

- Narysuj dowolny równoległobok i jego dłuższą przekątną. W powstałych trójkątach narysuj po jednej wysokości, ale w taki sposób, żeby każda z nich miała inną długość.

- Narysuj dowolny trapez równoramienny (niebędący równoległobokiem) i jedną z jego przekątnych. W powstałych trójkątach narysuj po jednej wysokości, ale w taki sposób, żeby miały one:

- a) jednakową długość, b) różne długości.

- Mała Madzia wycięła trójkątne drzewka z zielonego papieru i przykleiła je na kartkę. Starsza siostra Madzi do każdego drzewka dorysowała pień. Ile drzew ma pień będący przedłużeniem wysokości trójkąta?



5.7 Pole trójkąta

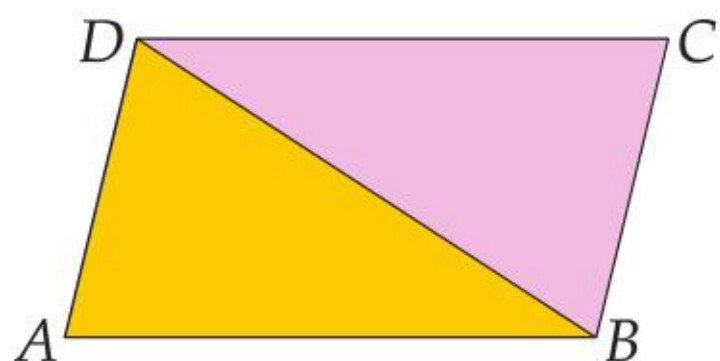
Podejmij temat

Pamiętasz, że jak chcieliśmy obliczyć pole równoległoboku czy rombu, to najpierw przecinaliśmy go jakoś sprytnie, żeby złożyć z kawałków inną figurę?

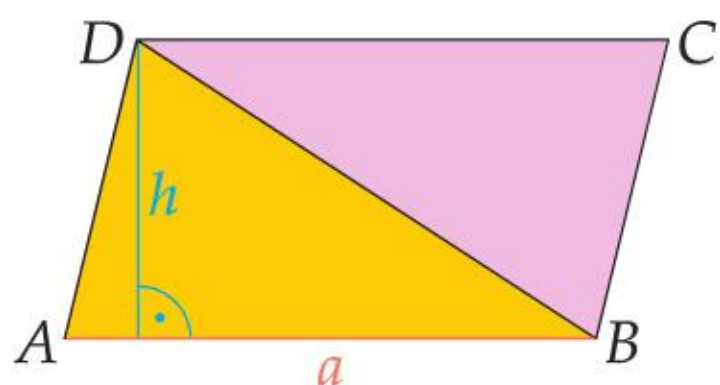


Tak, pamiętam. Pewnie z trójkątem też trzeba będzie zrobić jakąś sztuczkę.

1. Narysuj dowolny równoległobok $ABCD$ i jego przekątną. Na jakie figury został podzielony ten równoległobok?



Każda przekątna dzieli równoległobok na dwa identyczne trójkąty. Mają one zatem takie samo pole. Obliczymy pole jednego takiego trójkąta, wychodząc od pola równoległoboku.



Pole równoległoboku $ABCD$ obliczymy ze wzoru, który już znamy: $P = a \cdot h$.

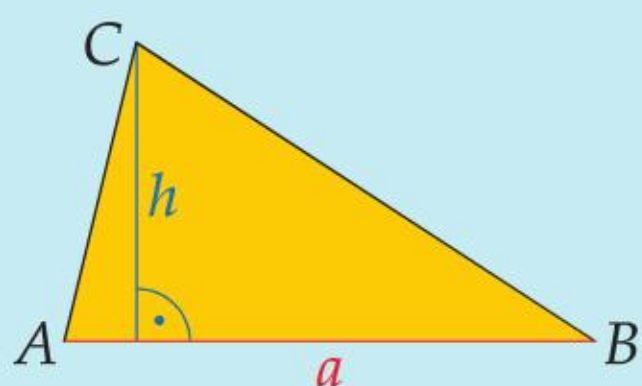
Skoro trójkąt ABD to połowa równoległoboku $ABCD$, to pole trójkąta określa wzór:

$$P = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Czyli jak mogę obliczyć pole trójkąta?



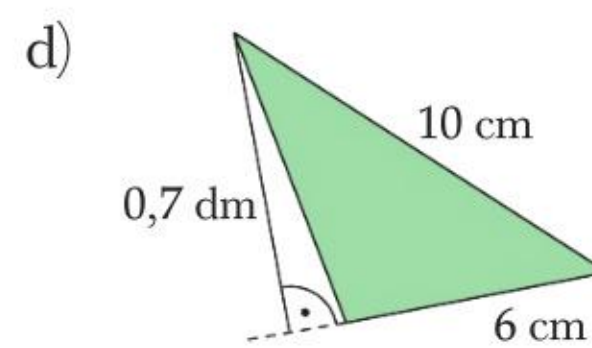
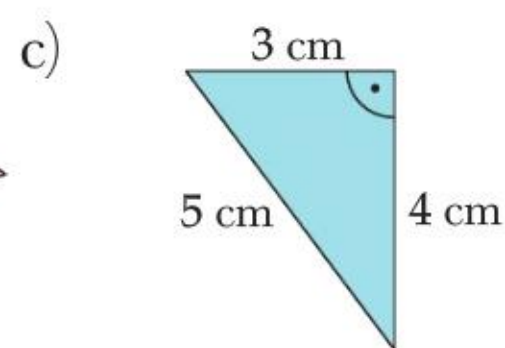
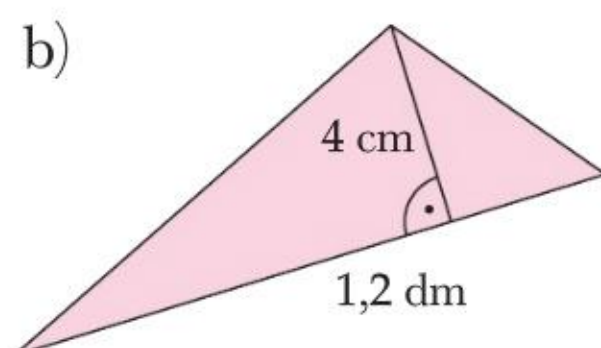
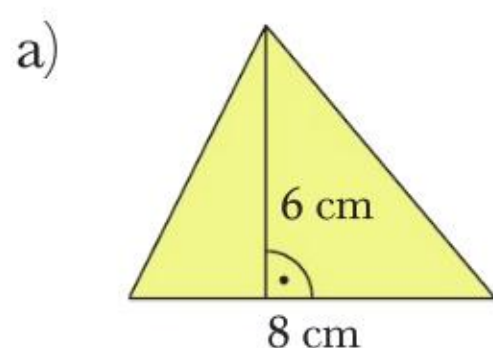
Bardzo prosto: mnożysz długość podstawy przez wysokość opuszczoną na tę podstawę i dzielisz przez dwa.



$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

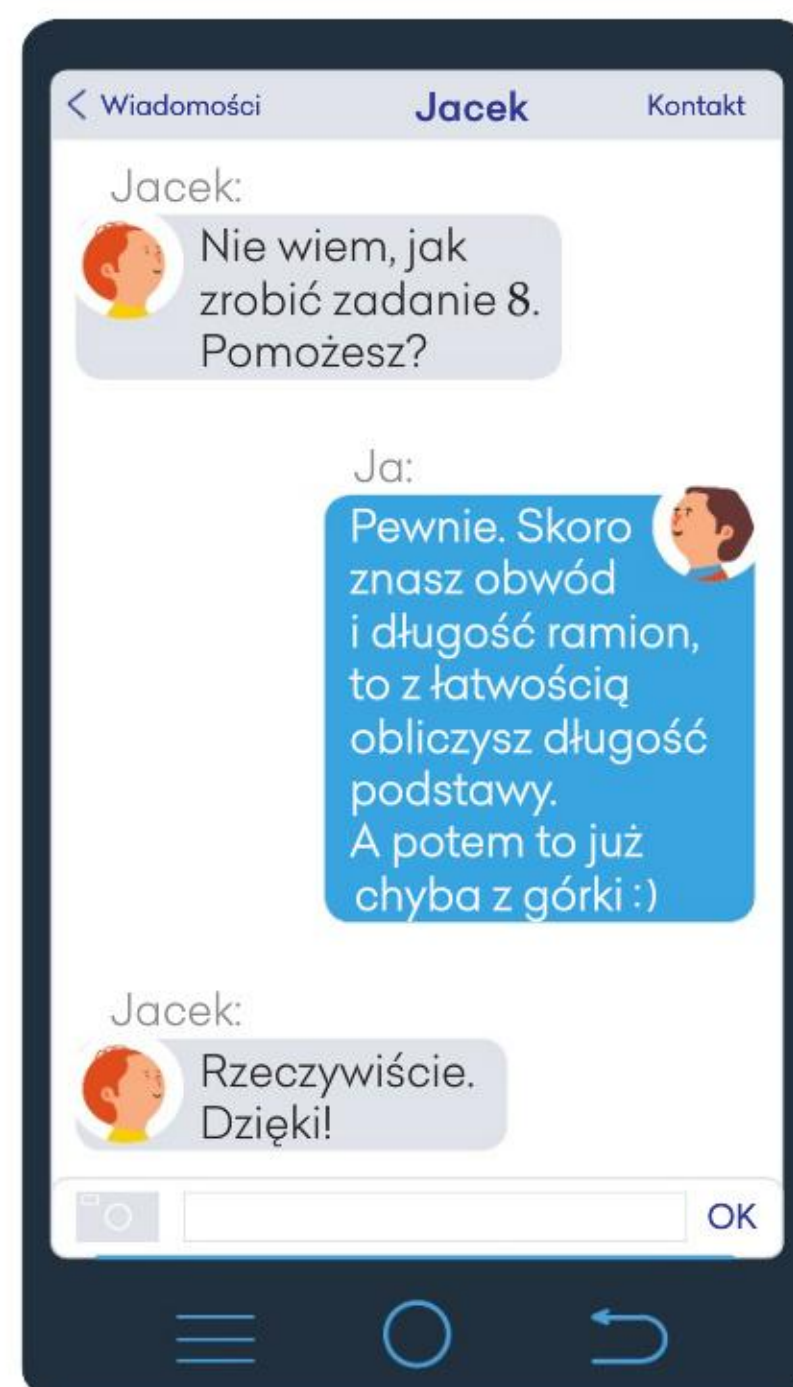
a – długość podstawy trójkąta
 h – wysokość trójkąta opuszczona na podstawę a

2. Oblicz pole trójkąta.



Zadania

- Sprawdź bez wykonywania obliczeń, który trójkąt z zadania 1 na s. 100 ma największe pole, a który – najmniejsze.
- Skonstruuj trójkąt z odcinków o długościach: 3 cm, 4 cm, 6 cm.
 - a) Narysuj jego wysokość opuszczoną na najkrótszy bok, zmierz ją i oblicz pole trójkąta.
 - b) Wykonaj te same czynności co w punkcie a), lecz w odniesieniu do boku najdłuższego.
 - c) Wykonaj te same czynności co w punkcie a), lecz w odniesieniu do trzeciego boku.Porównaj pole trójkąta obliczone w kolejnych punktach.
- Oblicz pole trójkąta równoramiennego, którego podstawa ma 10 cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę jest od niej o 4 cm dłuższa.
- Skonstruuj trójkąt równoboczny o obwodzie równym 18 cm. Oblicz pole tego trójkąta. W tym celu zmierz najpierw jego wysokość.
- Wysokość trójkąta ma 16 cm, a podstawa, na którą opuszczona została ta wysokość, ma długość równą $\frac{3}{4}$ tej wysokości. Ile wynosi pole tego trójkąta?
A. 32 cm² B. 192 cm² C. 64 cm² D. 96 cm²
- Narysuj dwa trójkąty: jeden o polu 20 cm², a drugi o polu 30 cm².
- ★ Podstawa trójkąta o polu równym 30 cm² ma 6 cm. Ile centymetrów ma wysokość opuszczona na tę podstawę?
- ★ Obwód trójkąta równoramiennego o ramionach długości 10 cm wynosi 32 cm. Wysokość opuszczona na podstawę trójkąta jest o 4 cm krótsza od tej podstawy. Oblicz pole tego trójkąta.



5.8 Pole trapezu

Podejmij temat



A czy ty potrafisz odpowiedzieć na pytanie dziewczynki?

Czy wiesz, w jaki sposób skleić te trapezy, żeby otrzymać równoległobok?

Jeszcze nie wiem, ale chętnie pokombinuję.

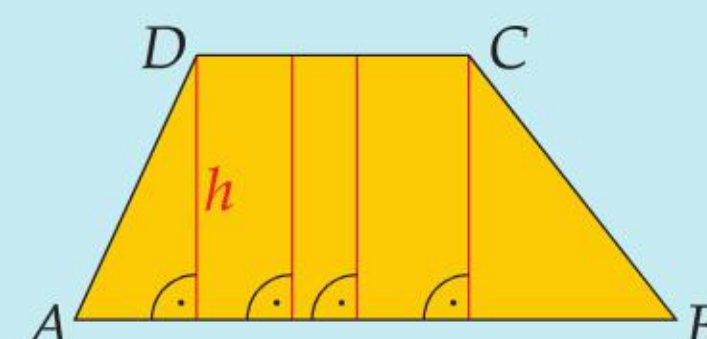
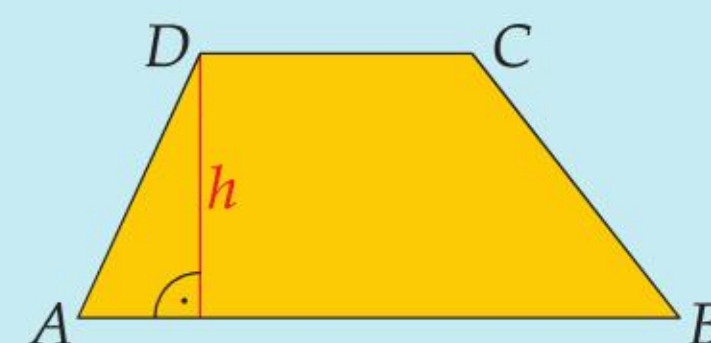


1. Narysuj trzy trapezy: równoramienny, prostokątny i taki, który nie jest ani równoramienny, ani prostokątny. We wszystkich trapezach zaznacz odcinki prostopadłe do obu podstaw. Zwróć uwagę, że w każdym trapezie możesz narysować kilka takich odcinków. Co możesz powiedzieć o ich długościach?

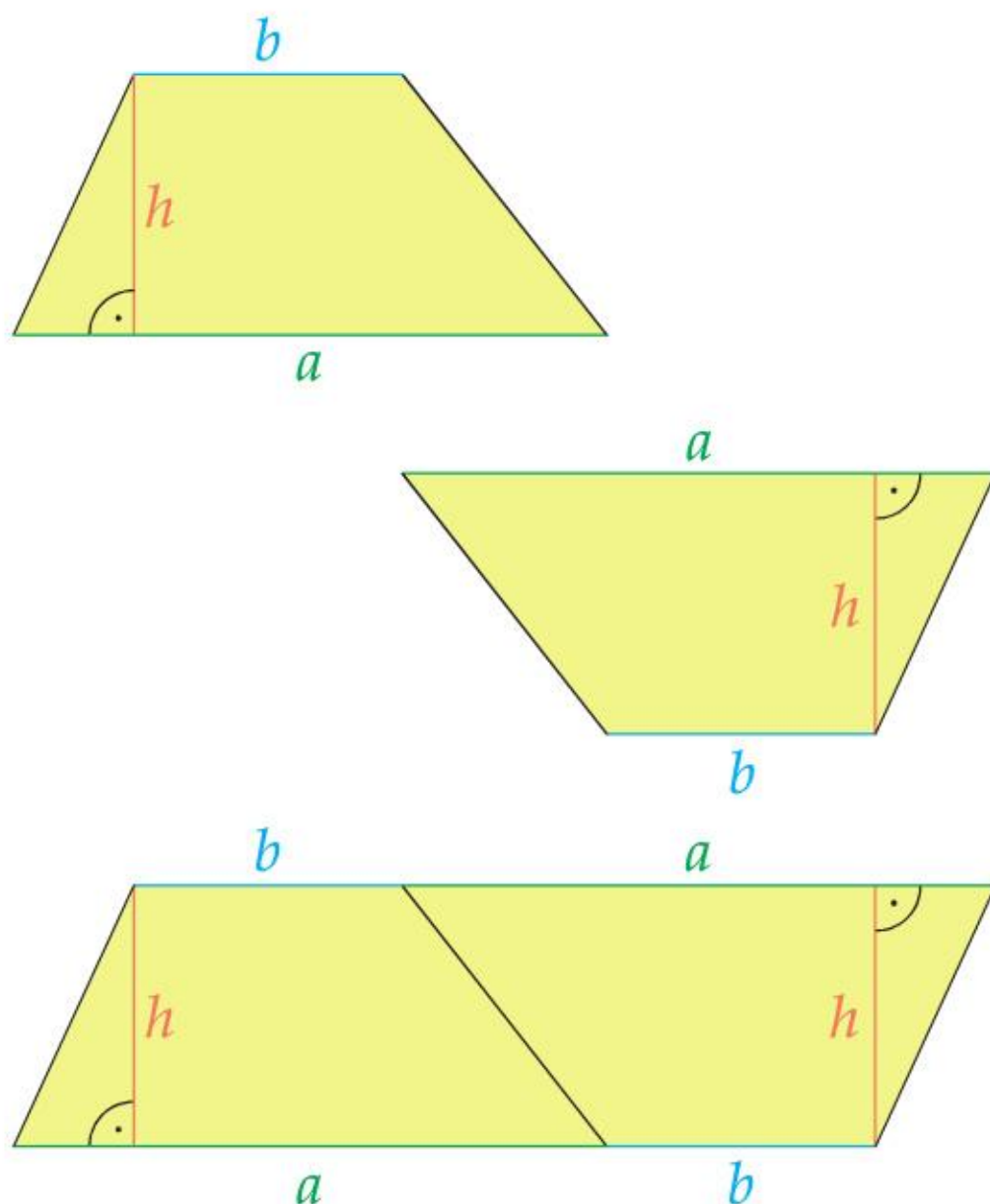
Wysokość trapezu to odcinek łączący wierzchołek trapezu z przeciwległą podstawą (lub jej przedłużeniem), prostopadły do niej.

Słowem wysokość będziemy określać również długość tego odcinka.

Tak rozumiana wysokość trapezu jest równa odległości między jego podstawami, dlatego każdy z czerwonych odcinków zaznaczonych na rysunku obok traktujemy jako wysokość.



2. Zmierz wysokości trapezów narysowanych w ćwiczeniu 1.



Narysujmy dowolny trapez i oznaczmy długości jego podstaw jako a i b .

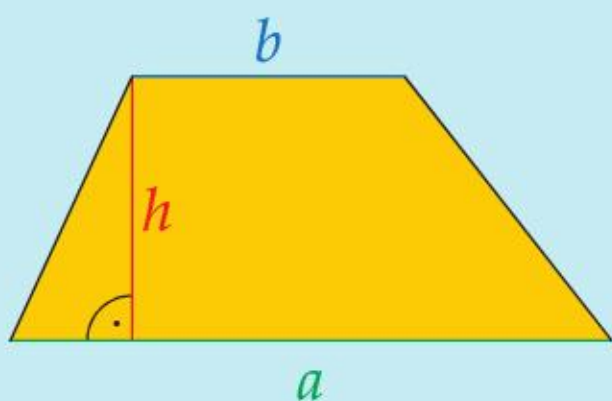
Narysujmy jego wysokość h .

Wyobraźmy sobie teraz identyczny trapez, tylko narysowany w sposób pokazany na rysunku obok.

Połączmy oba trapezy wzdłuż tego samego ramienia. Otrzymany w ten sposób równoległobok ma bok o długości $a + b$ oraz opuszczoną na ten bok wysokość o długości h .

Aby obliczyć pole tego równoległoboku, należy pomnożyć długość jego podstawy (czyli $a + b$) przez wysokość (czyli h), a ponieważ równoległobok zbudowaliśmy z dwóch takich samych trapezów, to ten równoległobok ma pole dwa razy większe niż pole trapezu. Pole wyjściowego trapezu obliczymy zatem, jeśli pole tego równoległoboku podzielimy przez dwa, czyli zgodnie ze wzorem:

$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}.$$



$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

a, b – długości podstaw trapezu

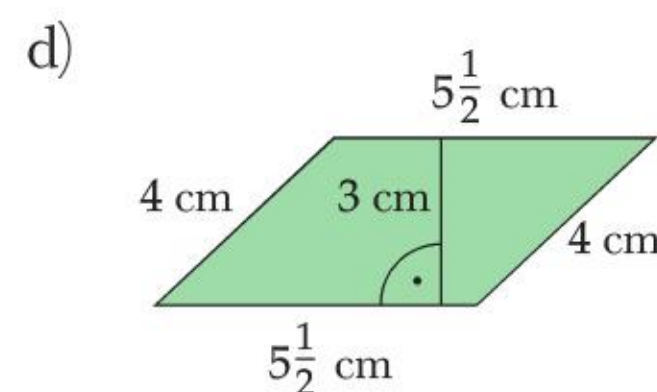
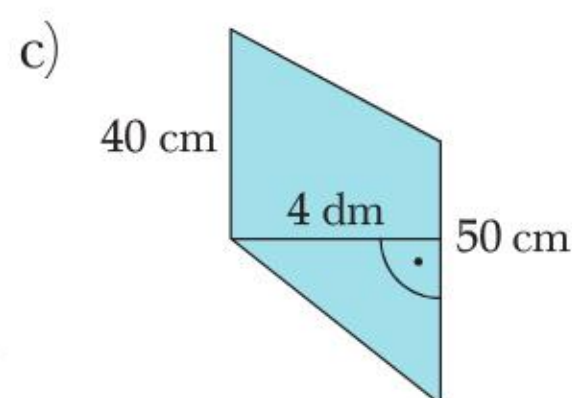
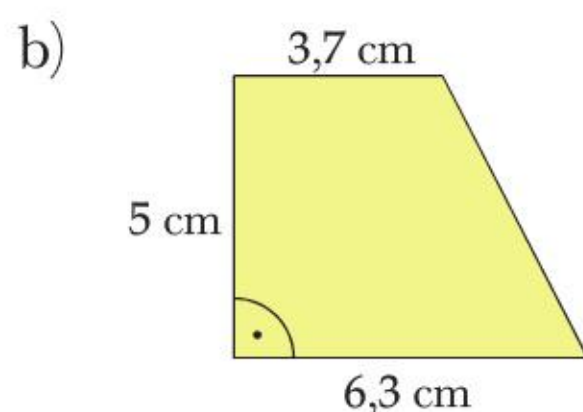
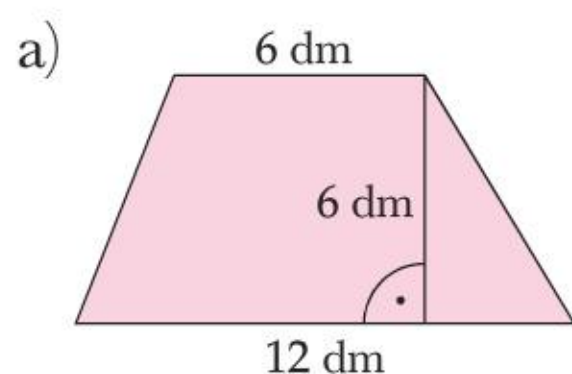
h – wysokość trapezu

Czyli aby obliczyć pole trapezu, należy dodać długości jego podstaw i tę sumę pomnożyć przez wysokość...

... i pamiętać, że wynik trzeba jeszcze podzielić przez dwa.



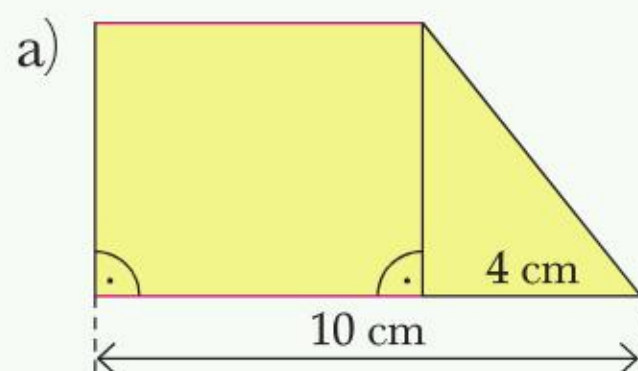
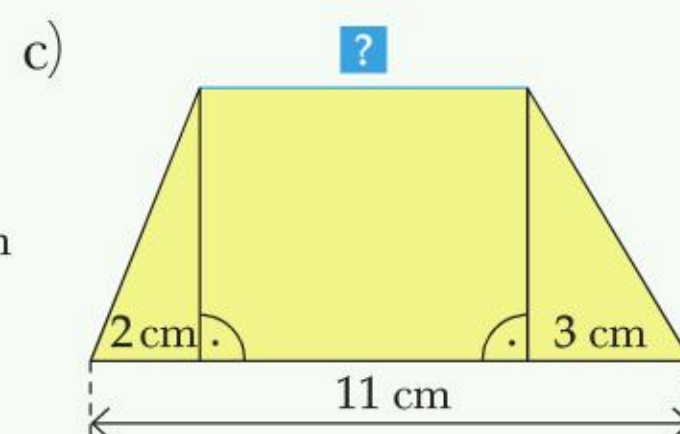
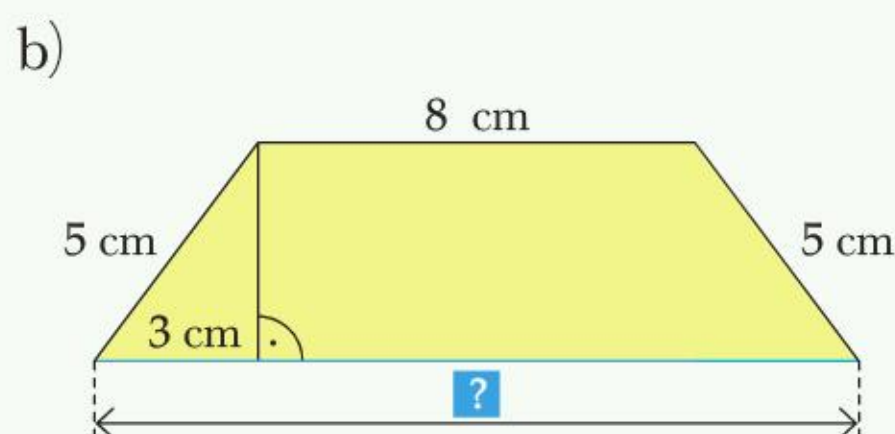
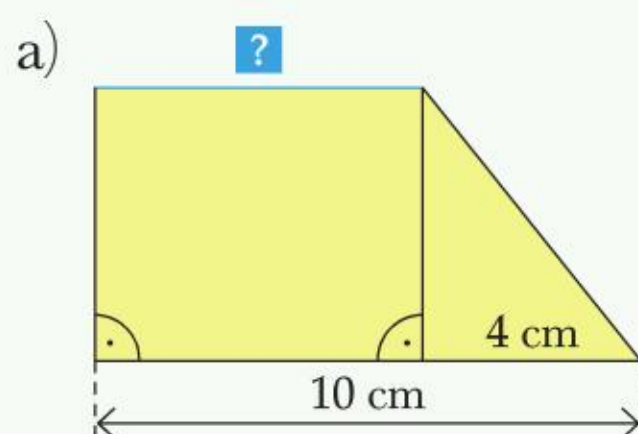
3. Oblicz pole trapezu.



4. Oblicz pole trapezu, którego podstawy mają długości 4 cm i 8 cm, a wysokość jest równa 10 cm.

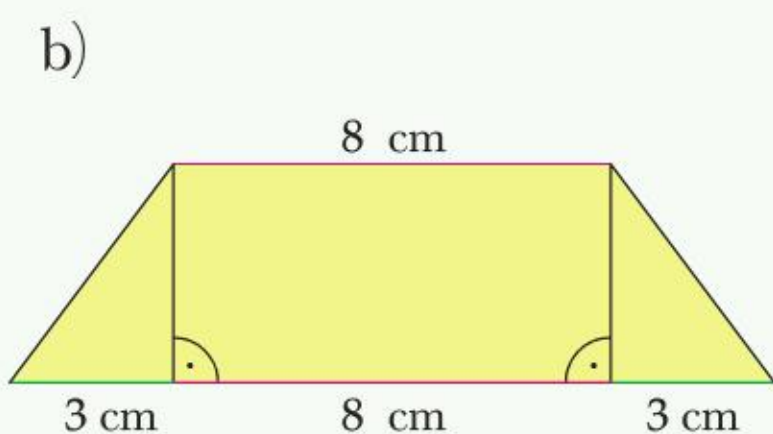
Przykład 1

Obliczmy nieznaną długość podstawy trapezu.



Przedstawiony trapez to trapez prostokątny, więc narysowana wysokość dzieli go na trójkąt i prostokąt. Zatem długość górnej podstawy jest taka sama jak długość tej części dolnej podstawy, która została zaznaczona na czerwono.

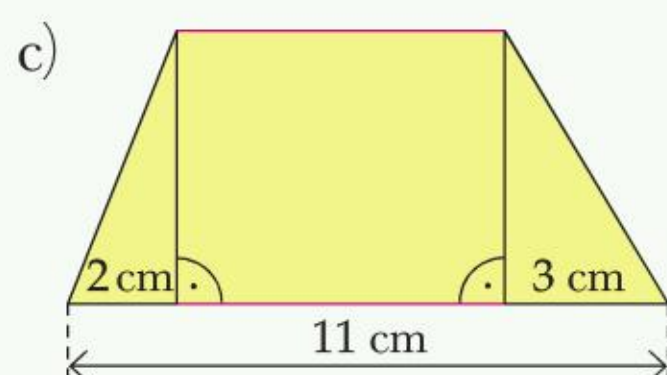
Z tego wynika, że górna podstawa ma:
 $10 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 6 \text{ cm}.$



Aby obliczyć długość dolnej podstawy, rysujemy drugą wysokość (opuszczoną z drugiego końca górnej podstawy). Skoro ten trapez jest trapezem równoramiennym, to trójkąty wyznaczone przez narysowane wysokości są identyczne.

Dolna podstawa została podzielona na trzy odcinki o długościach podanych na rysunku.

Zatem jej długość obliczymy tak:
 $3 \text{ cm} + 8 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 14 \text{ cm}.$



Widzimy, że narysowane wysokości dzielą dolną podstawę na trzy odcinki. Wiemy też, że długość górnej podstawy jest taka sama jak długość środkowego odcinka dolnej podstawy.

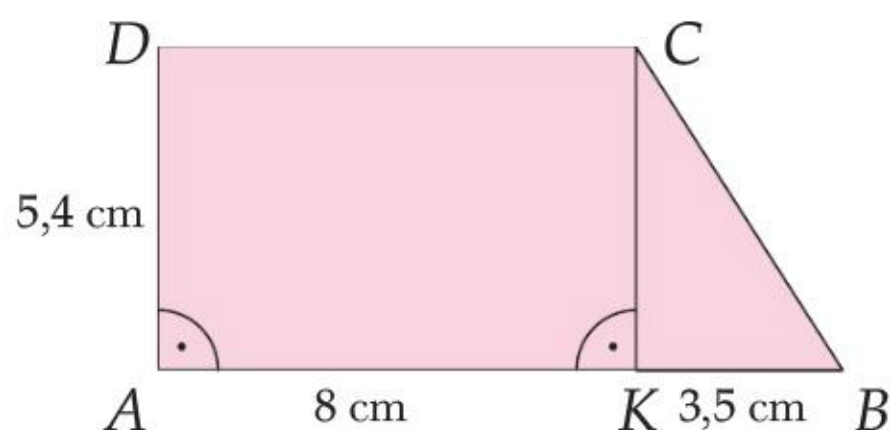
Górna podstawa ma więc:
 $11 \text{ cm} - 2 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}.$

Zadania

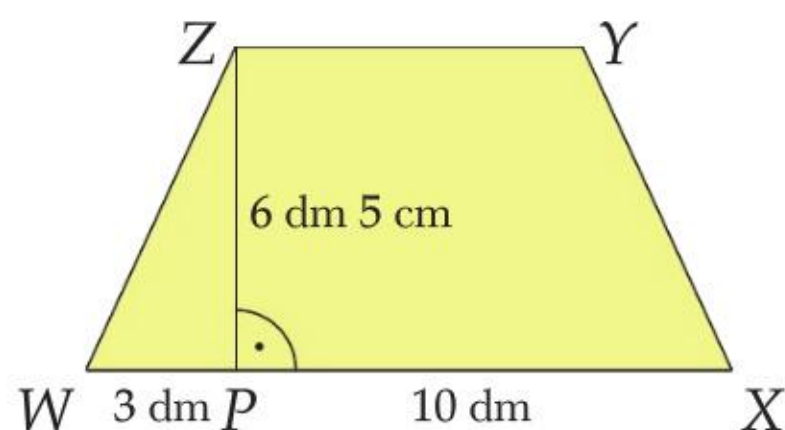
- Podstawy trapezu prostokątnego mają długości $3\frac{1}{2}$ cm i $4\frac{1}{3}$ cm, a ramię prostopadłe do podstaw ma 2 cm. Oblicz pole tego trapezu.
- Oblicz pole trapezu, którego podstawy mają długości 10 cm i $5\frac{1}{5}$ cm, a wysokość jest dwa razy krótsza od dłuższej podstawy.

- Odczytaj potrzebne dane z rysunku i oblicz pole:

a) trapezu $ABCD$,



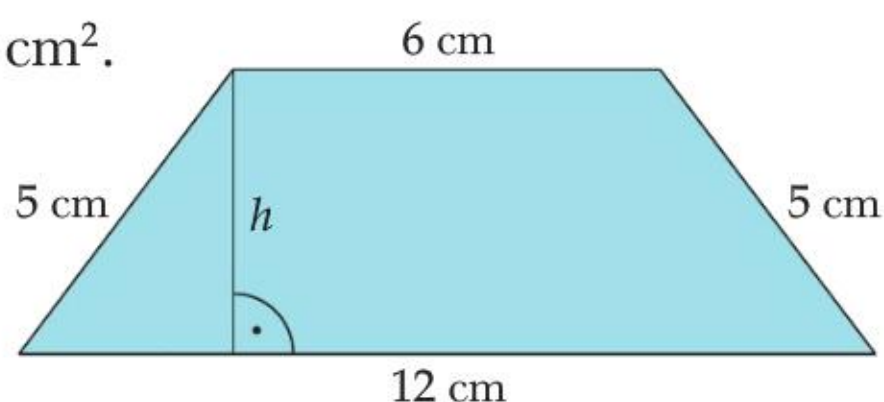
b) trapezu równoramiennego $WXYZ$.



- Jaką długość ma jedna z podstaw trapezu o polu 150 m^2 , jeżeli jego wysokość wynosi 5 m, a druga podstawa ma 30 m?

A. 20 m B. 25 m C. 35 m D. 30 m

- Pole trapezu jest równe 36 cm^2 . Długości jego boków są podane na rysunku. Oblicz wysokość tego trapezu.



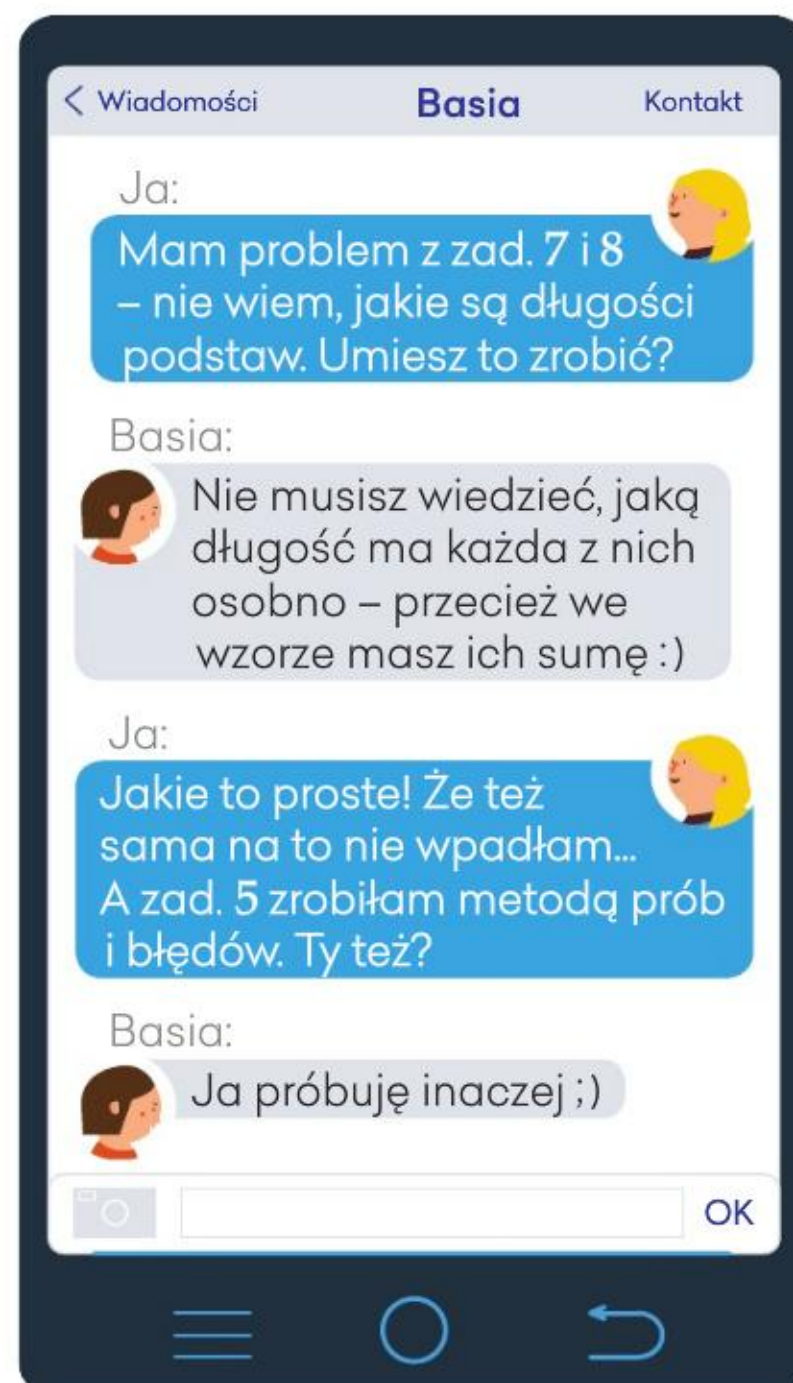
- Jedna podstawa trapezu równoramiennego ma 4,1 cm, a druga jest od niej dłuższa o 1,8 cm. Wysokość tego trapezu jest dwa razy dłuższa od tej drugiej podstawy. Ile wynosi pole trapezu?

A. 41 cm^2 B. $34,81 \text{ cm}^2$ C. 59 cm^2 D. $69,92 \text{ cm}^2$

- Jakie jest pole trapezu, którego suma długości podstaw wynosi 13 cm, a wysokość jest równa 10 cm?

A. 65 cm^2 B. 130 cm^2 C. 70 cm^2 D. 60 cm^2

- Oblicz pole trapezu, którego wysokość jest równa 10 cm, a suma długości podstaw jest trzy razy większa od wysokości.

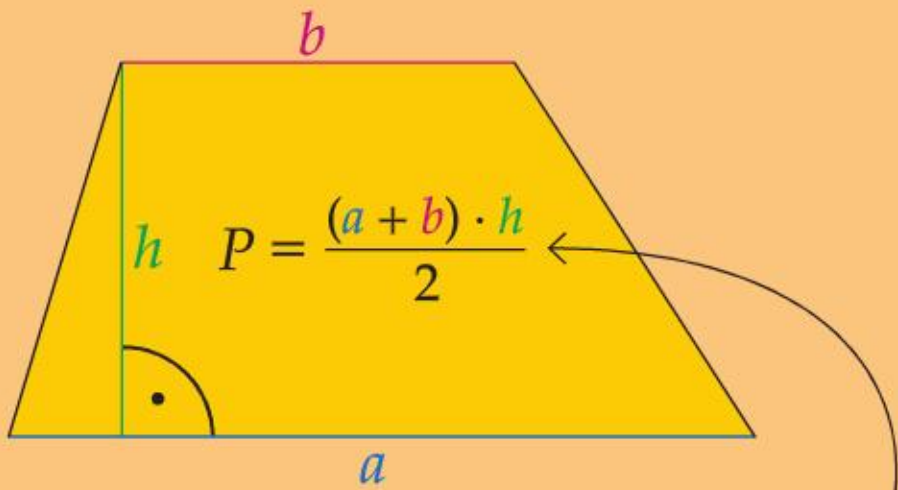
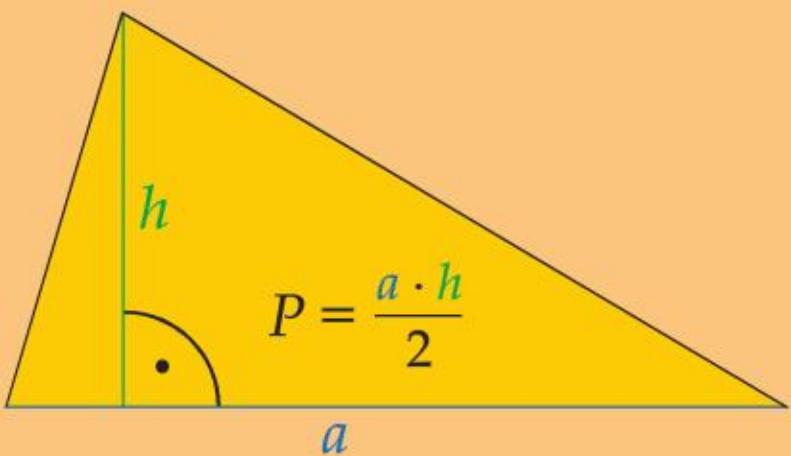
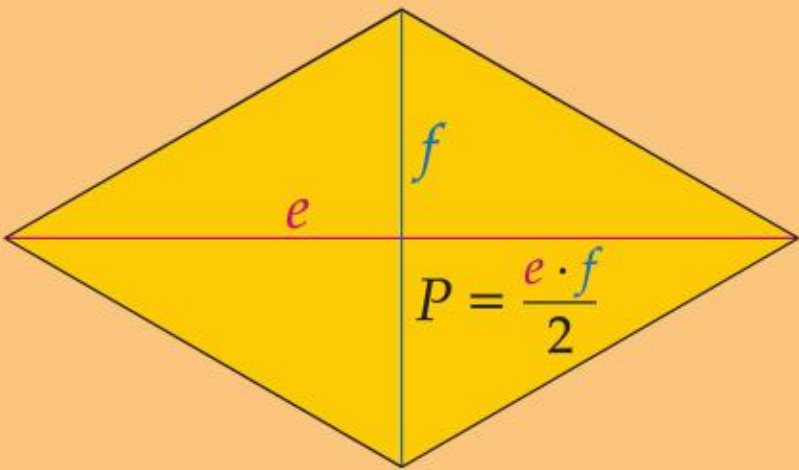
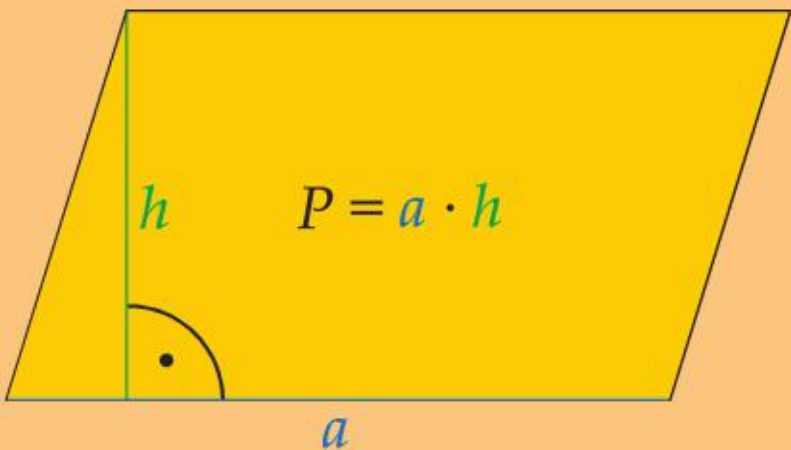
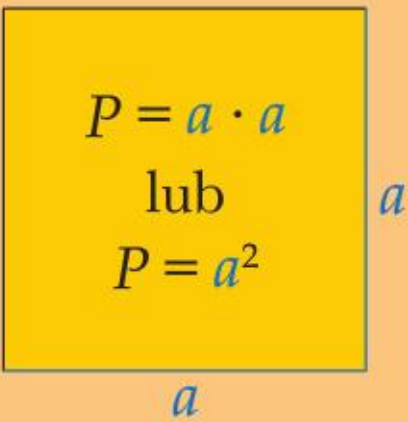
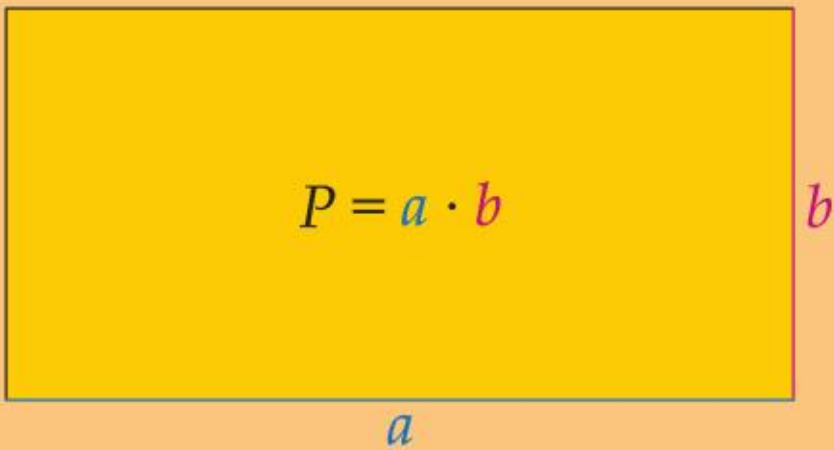


Podsumowanie działu 5

Ważne pojęcia

pole	jednostki pola	wysokość równoległoboku
podstawa równoległoboku	wysokość trójkąta	podstawa trójkąta
wysokość trapezu	podstawa trapezu	

Wzory na pole wielokątów



Pole trapezu 🤖

Pamiętaj w domu,
pamiętaj w szkole:
trapez podstawy ma,
wysokość, **pole**.

Chcesz wzór spamiętać,
drogi kolego?
Nie bój się wcale,
to nic trudnego:

„**a** dodać **b**
i razy **h**,
a potem śmiało
dziel to przez **2**”.

Czy już umiesz?

1 Oblicz pole prostokąta, którego jeden z boków ma 8 cm, a drugi bok jest od niego:

- a) o 3 cm dłuższy,
- b) 5 razy dłuższy,
- c) o 2 cm krótszy,
- d) 4 razy krótszy.

2 Działka państwa Kowalskich ma kształt kwadratu o boku mającym 50 m.

- a) Oblicz, ile metrów siatki potrzeba na ogrodzenie tej działki.
- b) Na ile grządek państwo Kowalscy mogliby podzielić całą działkę, gdyby na każdą grządkę przeznaczili 5 m²?

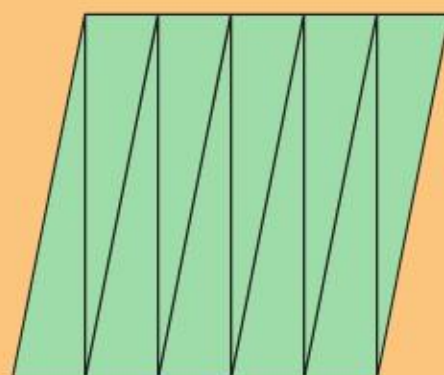
3 Jaki jest obwód prostokąta, którego pole wynosi 64 cm², a jeden z boków ma 8 cm?

- A. 8 cm
- B. 32 cm
- C. 48 cm
- D. 19 cm

4 W pewnej sali prostokątna podłoga ma wymiary 40 m × 50 m. Jakie są wymiary tej sali na planie wykonanym w skali 1 : 1000? Jaką powierzchnię ma ta sala na planie, a jaką w rzeczywistości?

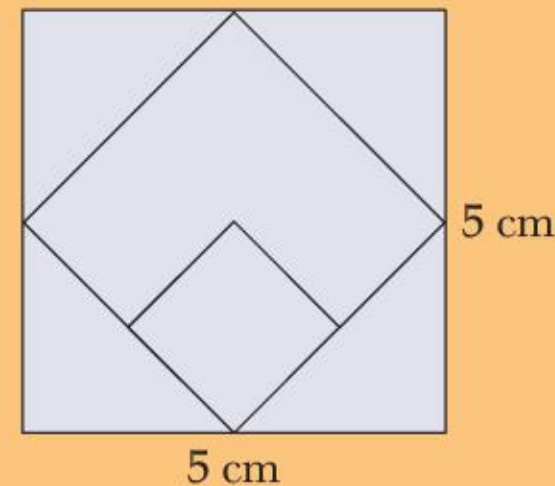
5 Z dziesięciu jednakowych trójkątów prostokątnych utworzono równoległobok widoczny na rysunku. Podstawa i wysokość równoległoboku są sobie równe, a jego pole wynosi 81 cm². Jaką długość ma najkrótszy bok każdego trójkąta?

- A. 9 cm
- B. 0,9 cm
- C. 1,8 cm
- D. 0,8 cm



6 Narysuj romb i równoległobok (niebędący rombem), każdy o polu równym 20 cm².

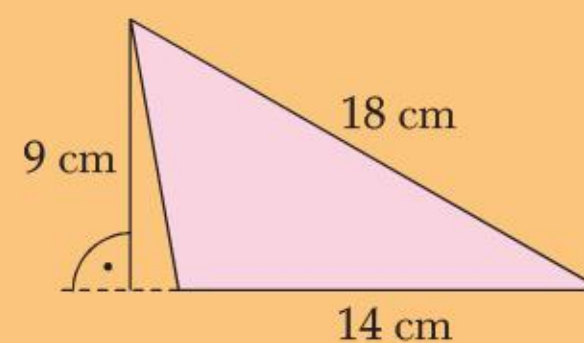
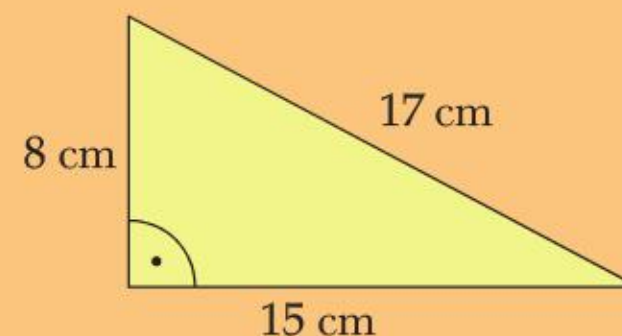
7 Ile rombów widzisz na rysunku? Oblicz pole każdego z nich.



8 Pole rombu wynosi 64 cm², a jedna z jego przekątnych ma 16 cm. Jaką długość ma druga przekątna?

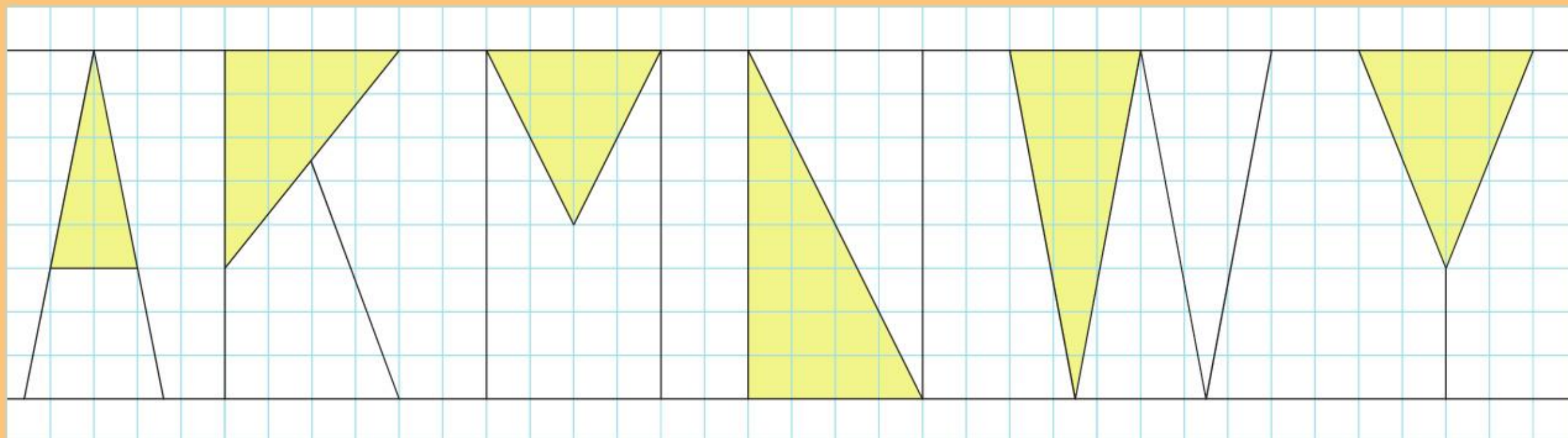
- A. 8 cm
- B. 2 cm
- C. 4,5 cm
- D. 20 cm

9 Który trójkąt ma najmniejsze pole?



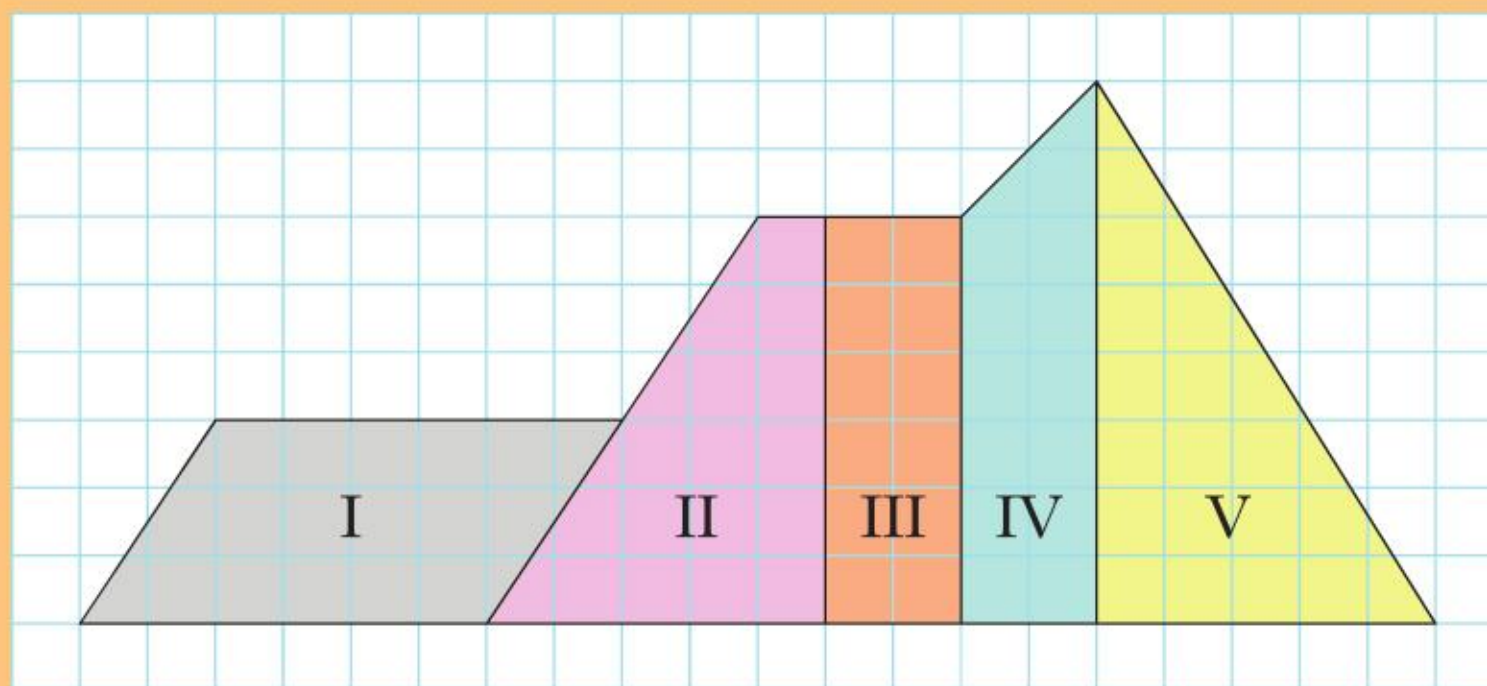
- A. Rozwartokątny.
- B. Prostokątny równoramienne.
- C. Prostokątny różnoboczny.
- D. Wszystkie pola są równe.

- 10 Maciek szukał kształtu trójkątów wśród wielkich drukowanych liter. Znalazł takie trójkąty, jak pokazano na rysunku. Odczytaj z niego długości odpowiednich odcinków i oblicz pola zamalowanych trójkątów. Czy potrafisz podać inne litery, w których można odnaleźć trzy lub dwa boki trójkąta?

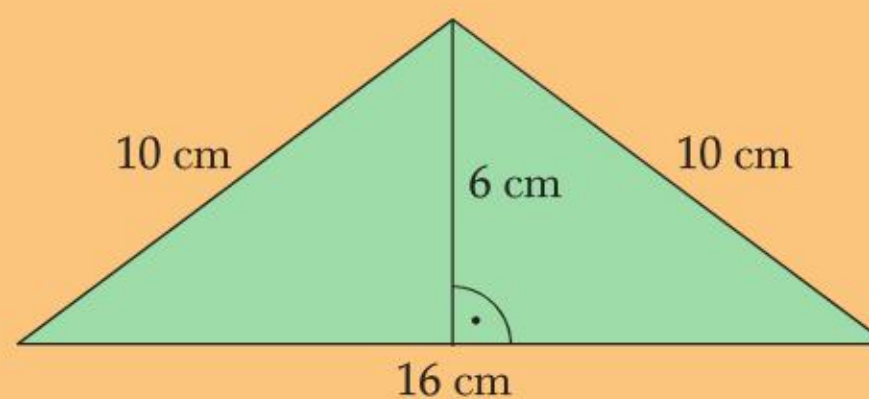
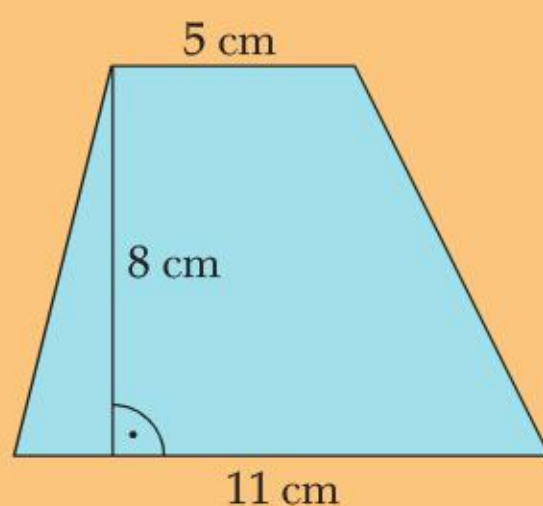
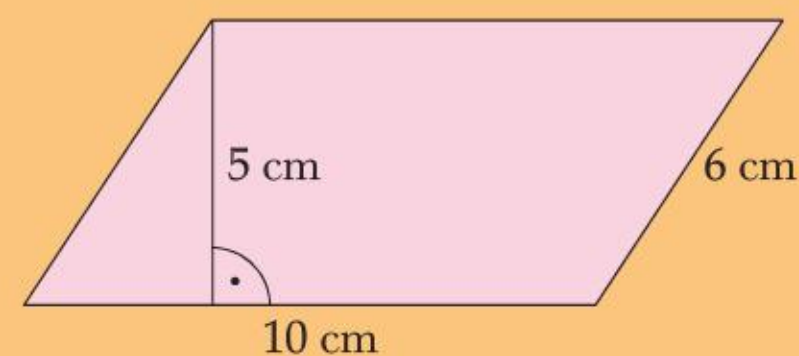
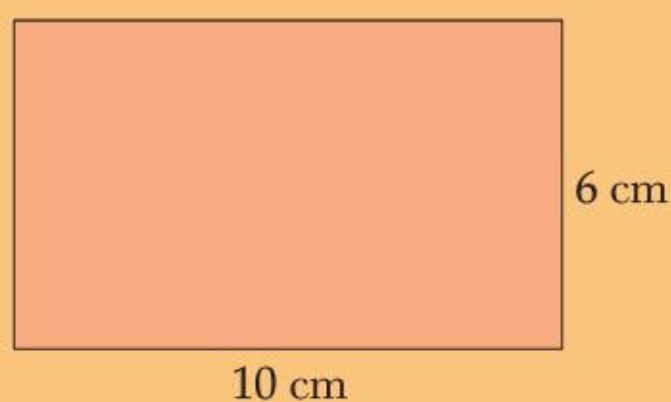
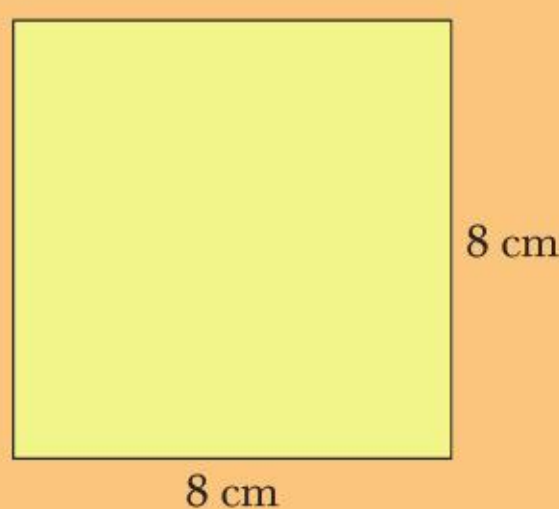


- 11 Jak zmieni się pole trójkąta ABC o podstawie długości 10 cm i wysokości 8 cm, jeżeli wysokość zwiększymy o 4 cm, a podstawę zmniejszymy 5 razy?
- 12 Trójkąt prostokątny ma boki o długościach: 6 cm, 8 cm i 10 cm.
a) Skonstruuj ten trójkąt.
b) Oblicz jego pole.
c) Oblicz wysokość opuszczoną na najdłuższy bok tego trójkąta.
- 13 Podstawy trapezu mają długości 13 dm i 8 dm, natomiast wysokość trapezu stanowi $\frac{2}{7}$ sumy długości tych podstaw. Ile wynosi pole tego trapezu?
A. 31,5 dm² B. 63 dm² C. 45 dm² D. 94,5 dm²
- 14 Suma długości podstaw trapezu wynosi 2 dm i jest o 13 cm większa od jego wysokości. Oblicz pole tego trapezu. Odpowiedź podaj:
a) w centymetrach kwadratowych,
b) w decymetrach kwadratowych.
- 15 Górna podstawa trapezu ma 12 cm. Wysokość trapezu stanowi 10% tej długości. Natomiast długość dolnej podstawy to 50% długości górnej. Oblicz pole trapezu.
- 16 Pewien trapez po narysowaniu w nim trzycentymetrowej wysokości został podzielony na kwadrat i trójkąt prostokątny równoramienny. „To z pewnością jest trapez prostokątny” – pomyślała Asia i szybko wykonała rysunek pomocniczy. Czy Asia dobrze określiła kształt figury? Narysuj trapez, o jakim jest mowa w zadaniu, i oblicz jego pole.

- 17 Figura widoczna na rysunku składa się z pięciu wielokątów. Oblicz pole każdego z nich. W tym celu zmierz długości potrzebnych odcinków.



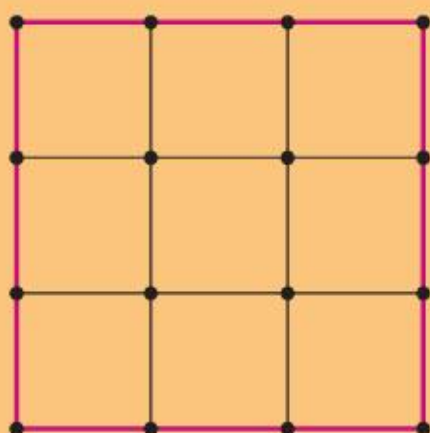
- 18 Na rysunku widoczne są kolejno: kwadrat, prostokąt, równoległobok, trapez i trójkąt. Pola których wielokątów są równe? Wskaż poprawną odpowiedź.



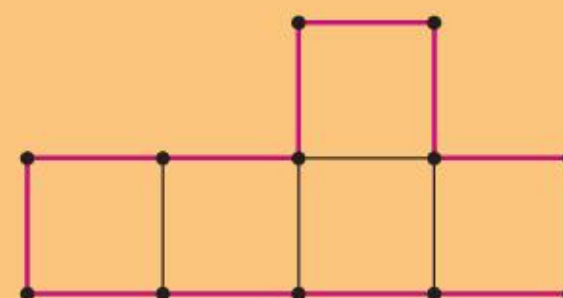
- A. Prostokąta i równoległoboku.
C. Trapezu i trójkąta.

- B. Kwadratu i trapezu.
D. Kwadratu i trójkąta.

- 19 Mamy 12 odcinków o długości 1 cm. Można z nich układać kształty różnych wielokątów o różnych polach (zob. rysunki).



Ten czworokąt ma pole równe 9 cm^2 , co doskonale widać na rysunku.



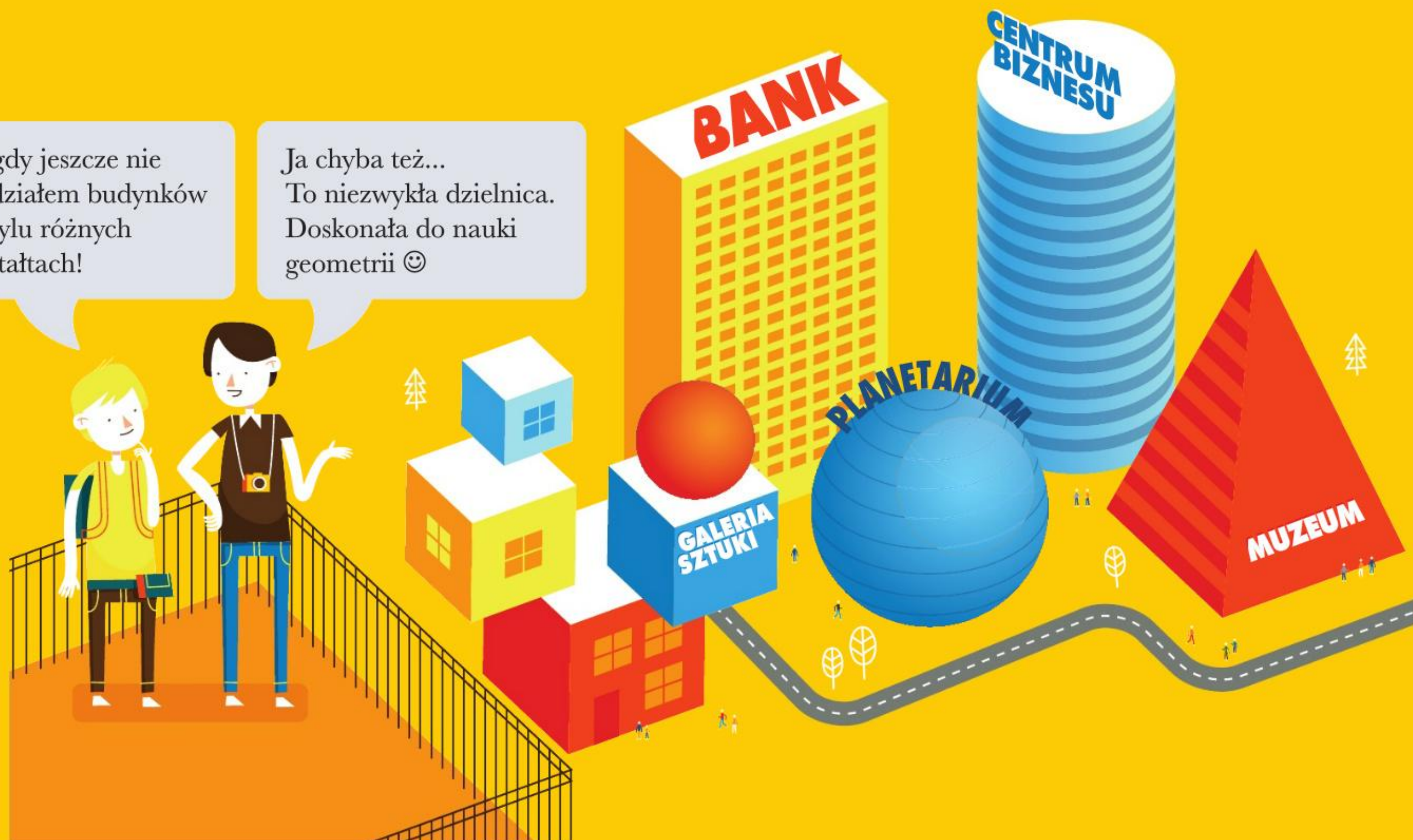
A pole tego ośmiokąta wynosi 5 cm^2 , co również łatwo odczytać z rysunku.

Ułóż 12 centymetrowych odcinków tak, żeby pole otrzymanego wielokąta wynosiło 6 cm^2 .

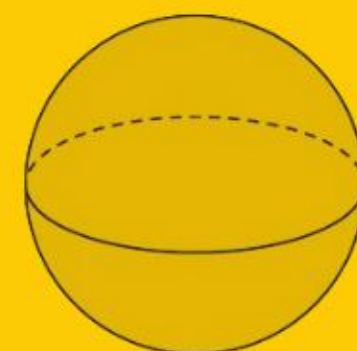
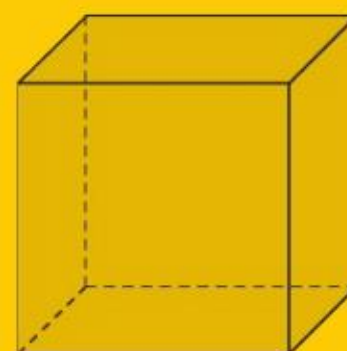
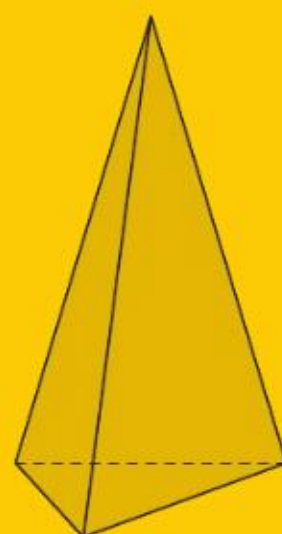
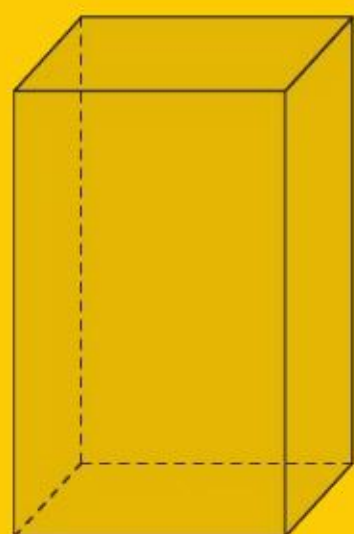
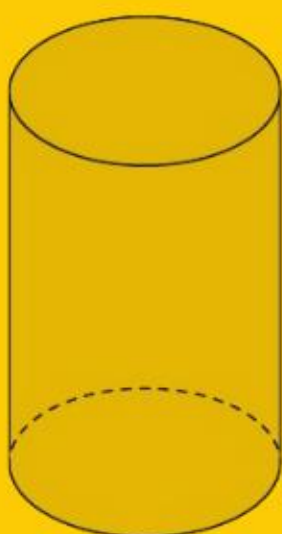
6. Bryły

Nigdy jeszcze nie widziałem budynków w tylu różnych kształtach!

Ja chyba też...
To niezwykła dzielnica.
Doskonała do nauki geometrii ☺



1. Które budynki lub elementy budynków mają kształt podobny do piłeczki pingpongowej?
2. Który budynek ma kształt przypominający pudełko zapalek?
3. Czy widzisz na ilustracji elementy budynków w kształcie kostki do gry?
4. Jaki kształt mają okna w galerii sztuki? A w banku?
5. Czy kształt okna możesz narysować na kartce? A kształt budynku?
6. Czy potrafisz dopasować poniższe rysunki do budynków na ilustracji ze względu na ich podobny kształt?



6.1 Prostopadłościan

Podejmij temat

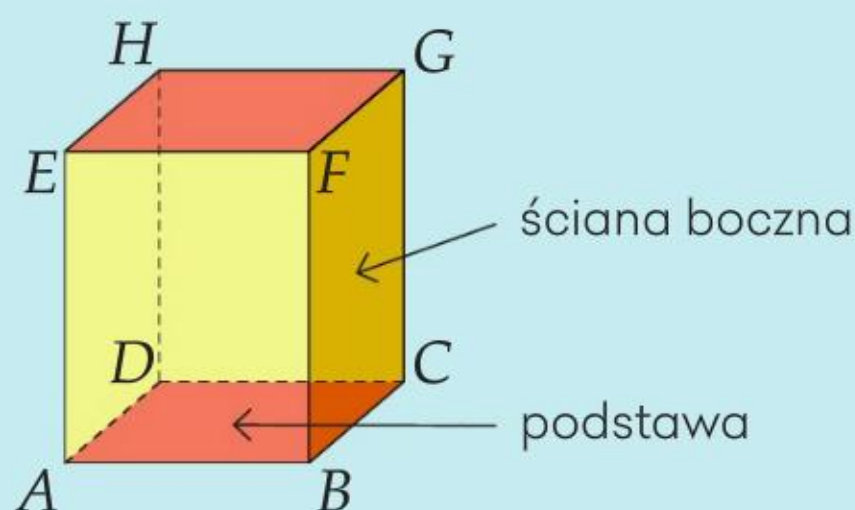


Obrazki obok przedstawiają różne obiekty (przedmioty, meble, budynek), które możesz bez trudu zobaczyć w swoim otoczeniu. Czy dostrzegasz ich wspólne cechy?



W przestrzeni, która nas otacza, mamy do czynienia nie tylko z figurami płaskimi, które już poznaliście. Występują w niej również **bryły** (zwane inaczej **figurami przestrzennymi**). O ile figurę płaską można przedstawić na płaskiej powierzchni (kartce, tablicy, ekranie komputera), o tyle bryły nie da się dokładnie narysować. Rysujemy zatem jej wyobrażenie w taki sposób, by łatwo można było „zobaczyć” trzeci wymiar niemieszczący się na płaszczyźnie (np. niewidoczne odcinki rysujemy zwykle za pomocą linii przerywanych).

Prostopadłościan to bryła, której wszystkie ściany są prostokątami. Każdy prostopadłościan ma 6 **ścian**. Wśród ścian wyróżniamy 2 **podstawy** zaznaczone na rysunku kolorem czerwonym. Pozostałe ściany to **ściany boczne**.

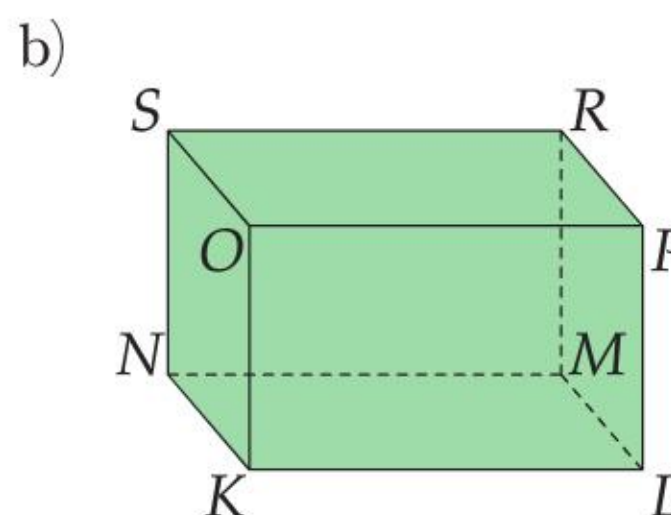
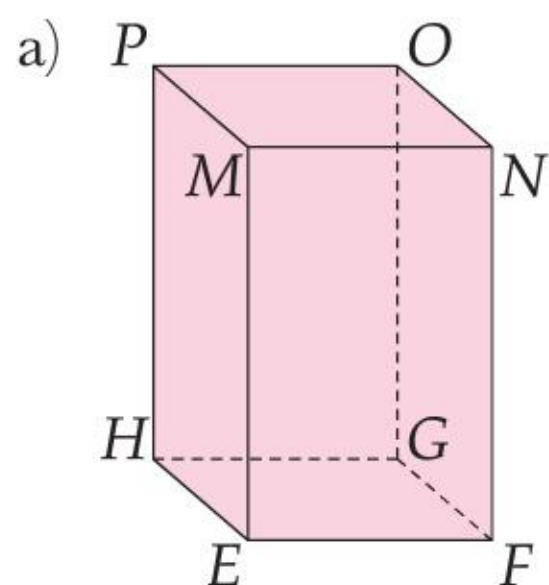


1. Jakie przedmioty na poniższym rysunku mają kształt prostopadłościanu? Wskaż kilka takich przedmiotów.



Każda ściana prostopadłościanu może być traktowana jako podstawa.

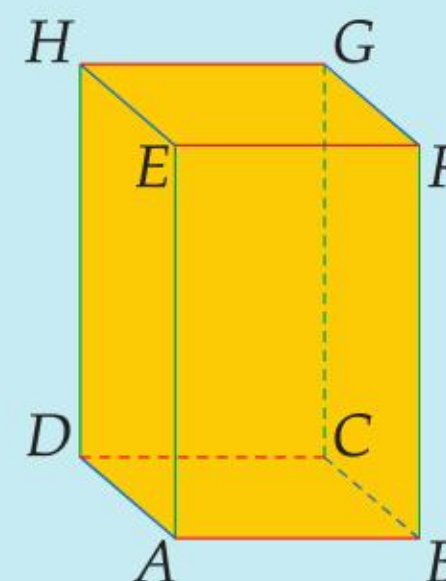
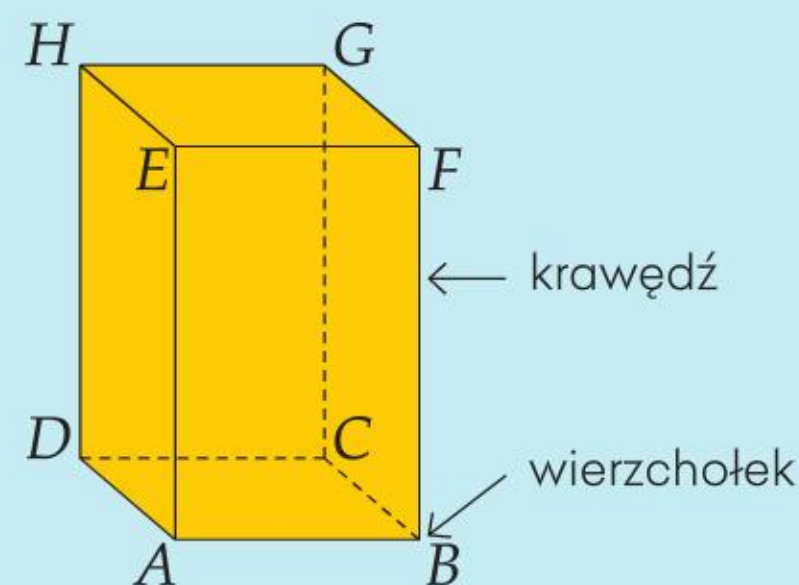
2. Wskaż w swoim otoczeniu kilka przedmiotów (innych niż na rysunku w ćwiczeniu 1 czy w *Podejmij temat*), które mają kształt prostopadłościanu.
3. Wymień wszystkie ściany narysowanego prostopadłościanu.



Każdy prostopadłościan ma 8 **wierzchołków** i 12 **krawędzi**.

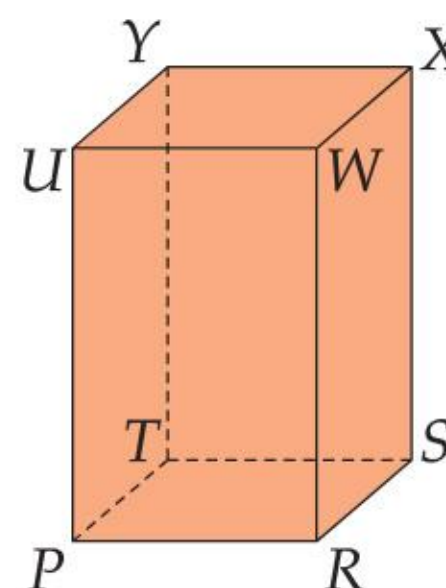
Prostopadłościan $ABCDEFGH$ na rysunku ma wierzchołki: A, B, C, D, E, F, G, H , oraz **krawędzie podstaw**: $AB, EF, CD, GH, BC, FG, AD, EH$, i **krawędzie boczne**: AE, BF, CG, DH .

Krawędzie oznaczone jednym kolorem są do siebie równoległe i są równej długości.



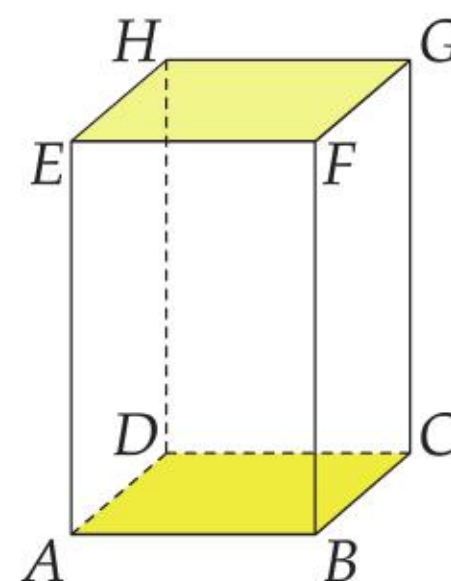
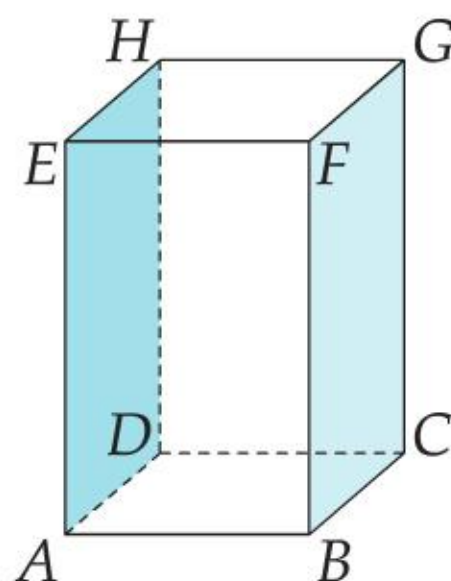
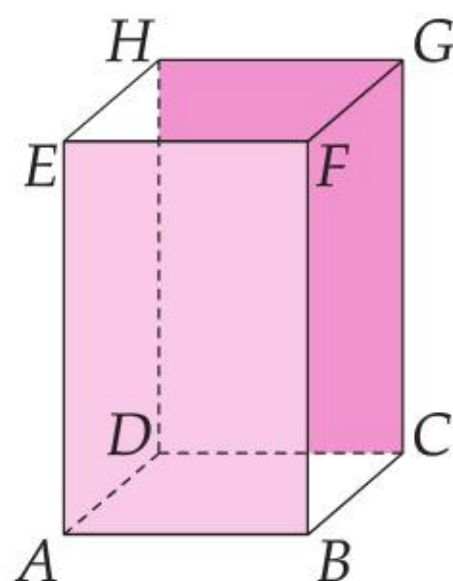
4. Na rysunku przedstawiony został prostopadłościan $PRSTUWXY$.
Napisz, jak się nazywają wszystkie jego:
- wierzchołki,
 - krawędzie.

Które krawędzie są równej długości?

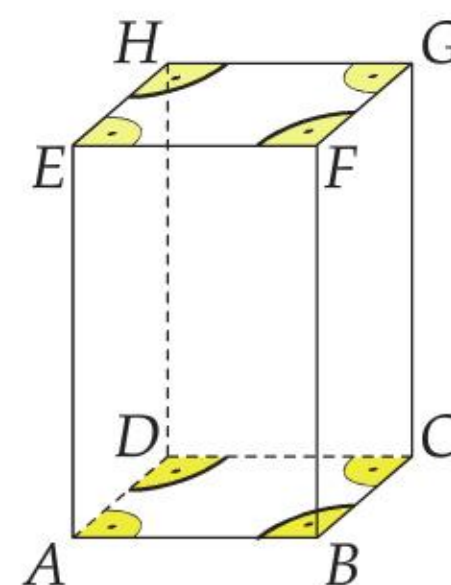
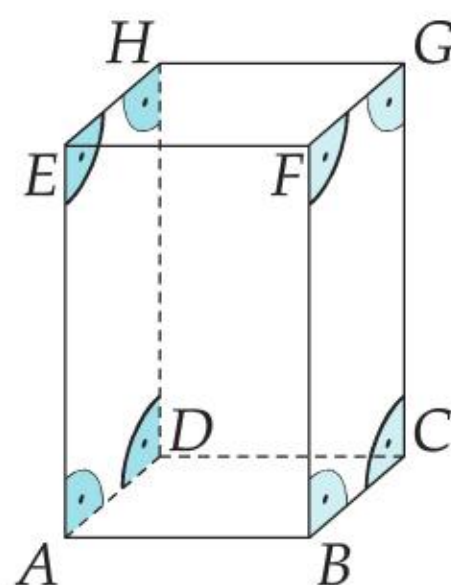
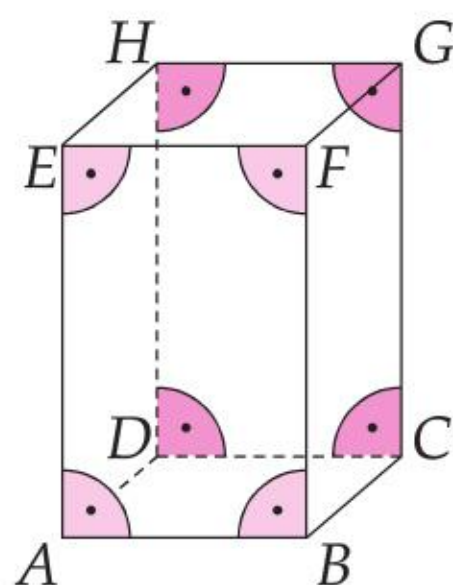




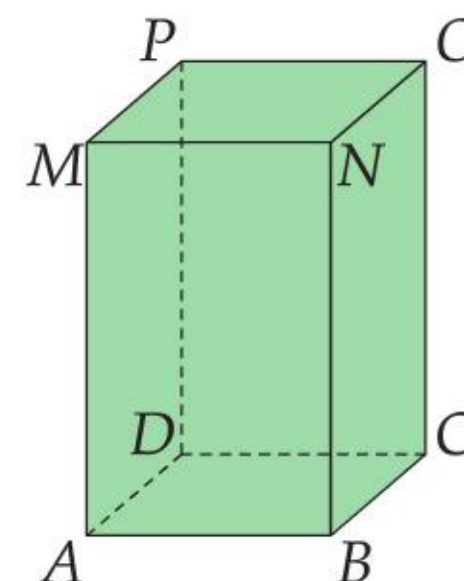
Przeciwnie ściany prostopadłościanu są takimi samymi prostokątami.



Każde dwie krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka prostopadłościanu są sąsiednimi bokami prostokąta (któreś ściany), dlatego są do siebie prostopadłe.



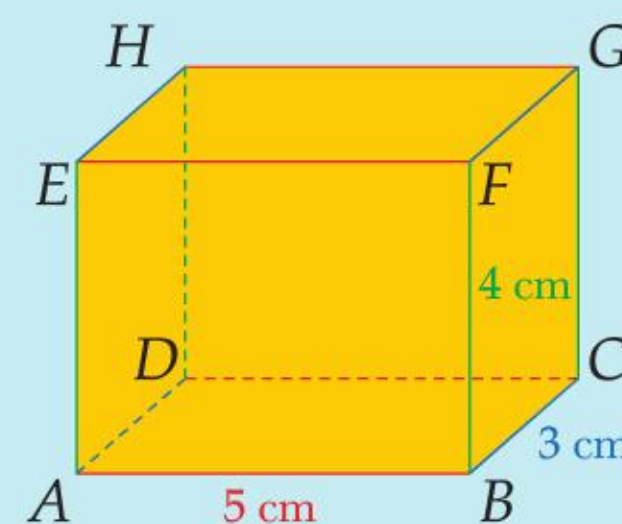
5. Spójrz na narysowany obok prostopadłościan. Wymień:
- jego wierzchołki i podaj ich liczbę,
 - krawędzie równoległe tego prostopadłościanu, które mają taką samą długość jak krawędź AM ,
 - jego ściany, które są takimi samymi prostokątami.



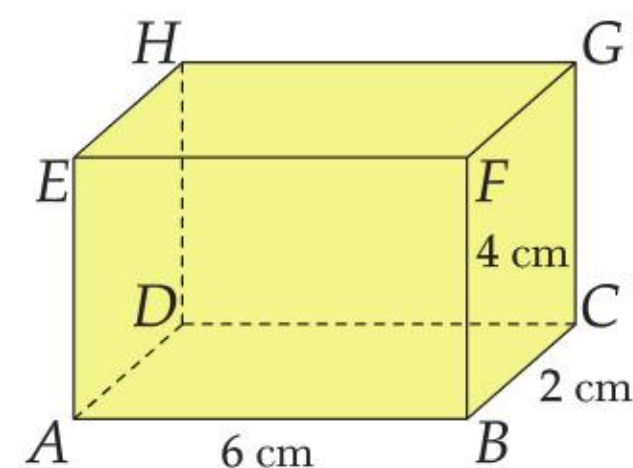
Wśród 12 krawędzi prostopadłościanu mogą być maksymalnie 3 różne długości krawędzi (dzieje się tak, gdy żadna ze ścian nie jest kwadratem). Wówczas z każdego wierzchołka wychodzą 3 krawędzie o różnych długościach.

Wymiary prostopadłościanu to długości jego trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.

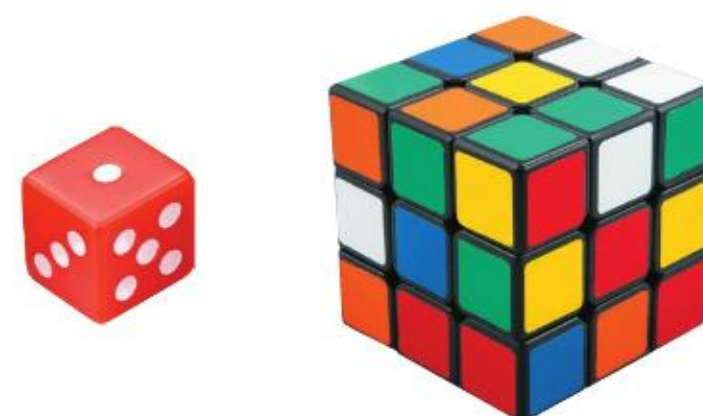
O takim prostopadłościanie, jak np. narysowany obok, mówimy: prostopadłościan o wymiarach $3\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 5\text{ cm}$.



6. Rysunek obok przedstawia prostopadłościan o wymiarach $2\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 6\text{ cm}$.
- Które krawędzie mają długość 2 cm ?
 - Które krawędzie mają długość 4 cm ?
 - Które krawędzie mają długość 6 cm ?
 - Która ściana ma takie same wymiary jak ściana $ABFE$?
 - Które ściany mają wymiary $2\text{ cm} \times 6\text{ cm}$?

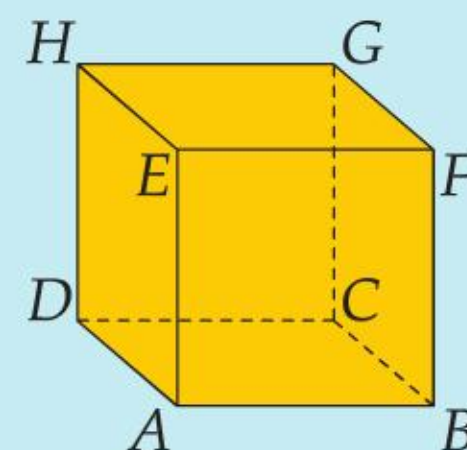


7. Spójrz na kostkę do gry i kostkę Rubika. Jaką wspólną cechę mają prostopadłościany o takim kształcie?



Sześcian to prostopadłościan, którego każda ściana jest kwadratem.

Wszystkie krawędzie sześcianu mają jednakową długość.



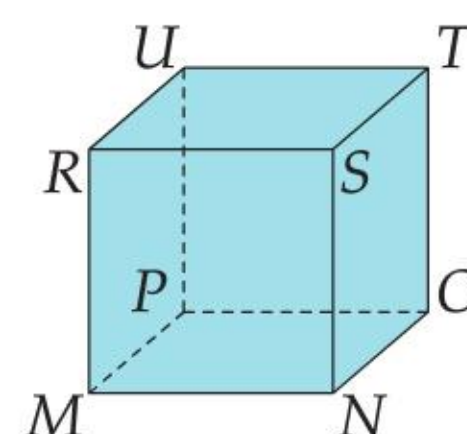
Ciekawe!

Czy wiesz, że w Japonii hoduje się arbuzy w kształcie sześcianu? Takie geometryczne owoce uprawia się w rejonie Kagawa, a ich produkcja jest całkowicie naturalna – bez ingerencji w genetykę roślin. Małe arbuzy są umieszczane w pojemnikach, które wymuszają uformowanie się owocu w określonym kształcie.

Sześciennie arbuzy są popularne stosunkowo od niedawna, choć ta metoda uprawy jest znana już od 1978 roku. Widoczny na zdjęciu kształt znacznie ułatwia przechowywanie i transport owoców. Opisana produkcja jest niestety bardzo kosztowna (cena japońskiego arbuza wynosi około 125 dolarów amerykańskich za sztukę), więc niewielu klientów może sobie pozwolić na zakup takiego geometrycznego smakołyku.

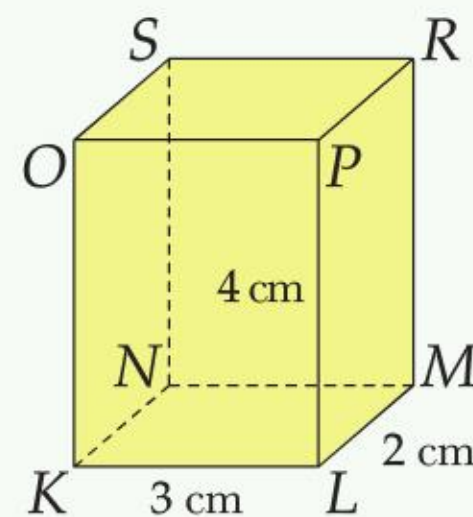


8. Wypisz nazwy wszystkich ścian sześcianu przedstawionego na rysunku obok. Ile jednakowych ścian ma ta bryła? A ile krawędzi o tej samej długości?

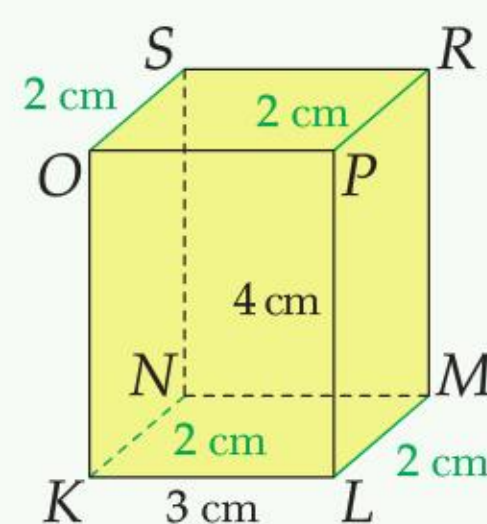
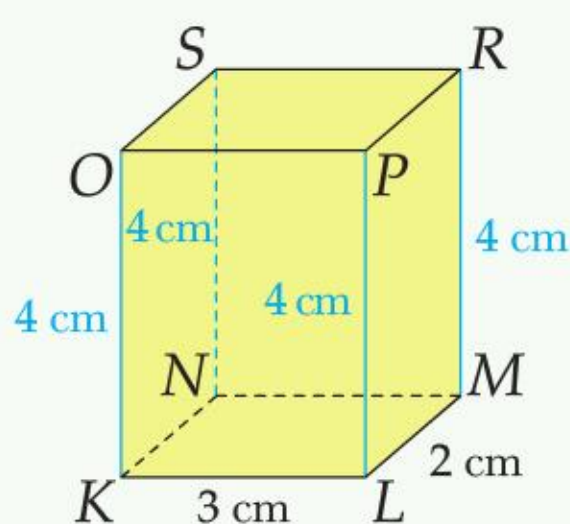
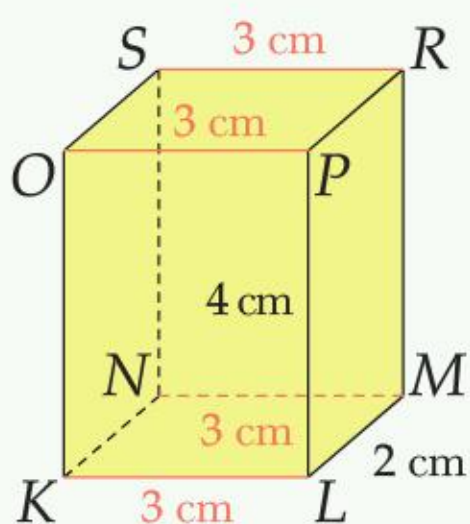


Przykład 1

Obliczmy sumę długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu o wymiarach przedstawionych na rysunku obok.



Na początku określimy długości wszystkich krawędzi.



Teraz obliczymy sumę tych długości.

$$3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 36 \text{ cm}$$

Oczywiście można zapisać to krócej:

długości krawędzi (wymiar prostopadłościanu)

$$4 \cdot 3 \text{ cm} + 4 \cdot 4 \text{ cm} + 4 \cdot 2 \text{ cm} = 12 \text{ cm} + 16 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 36 \text{ cm}$$

liczba krawędzi o tej samej długości

albo:

długości krawędzi (wymiar prostopadłościanu)

$$4 \cdot (3 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 2 \text{ cm}) = 4 \cdot 9 \text{ cm} = 36 \text{ cm}$$

liczba krawędzi o tej samej długości

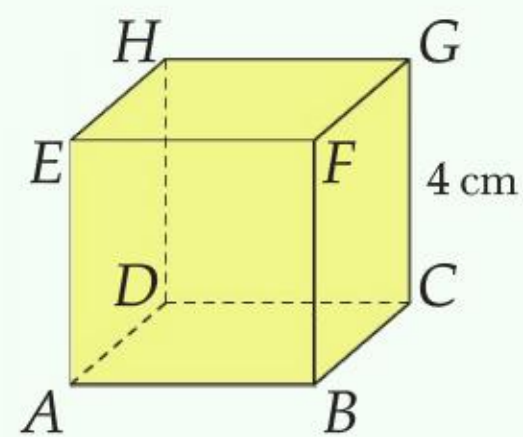
Aby obliczyć tę sumę, możemy zacząć od dodania długości trzech jego krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka, tak?

Tak, a potem wynik pomnożymy przez 4.



Przykład 2

Obliczmy sumę długości wszystkich krawędzi sześcianu przedstawionego na rysunku obok.



Wszystkie krawędzie sześcianu są takiej samej długości, zatem sumę długości krawędzi obliczamy w następujący sposób:

długość krawędzi

$$12 \cdot 4 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$$

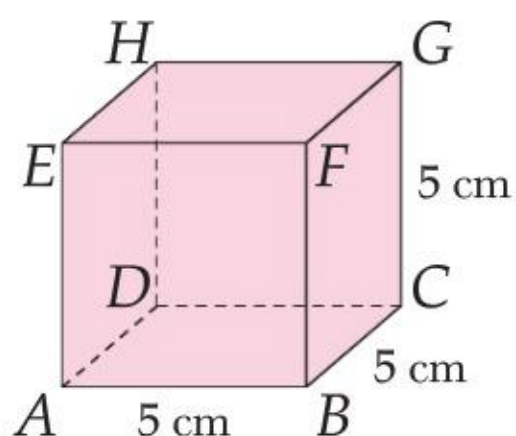
liczba krawędzi

Dla sześcianu to proste: mnożymy długość krawędzi sześcianu przez 12 i gotowe!

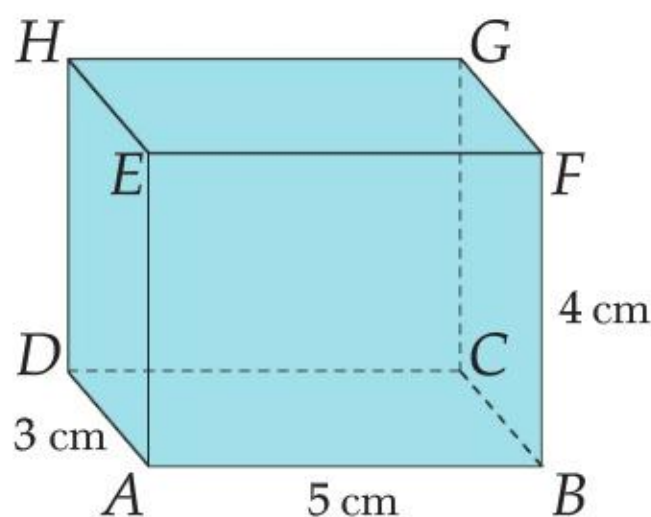


9. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi narysowanego prostopadłościanu.

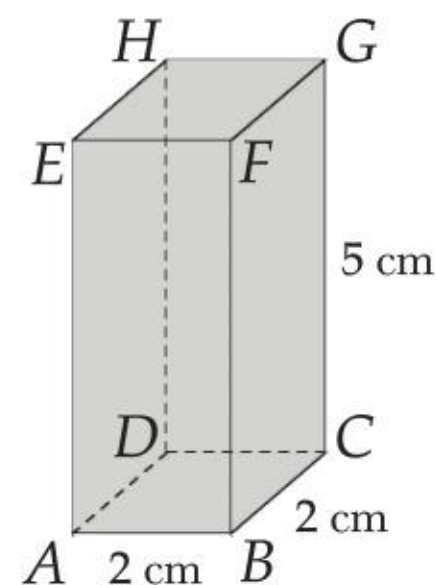
a)



b)



c)



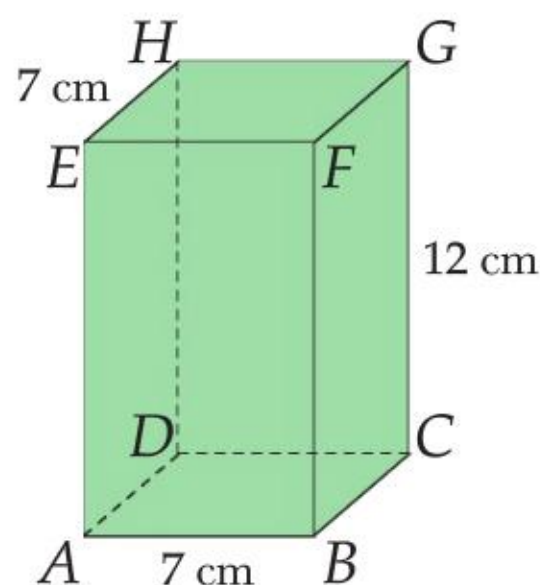
Zadania

● Przyjrzyj się zdjęciu i odpowiedz na pytania.

- Jaki kształt ma pudełko?
- Ile ścian, ile krawędzi oraz ile wierzchołków widocznych jest na zdjęciu?
- Ile ścian, ile krawędzi oraz ile wierzchołków jest na zdjęciu niewidocznych?



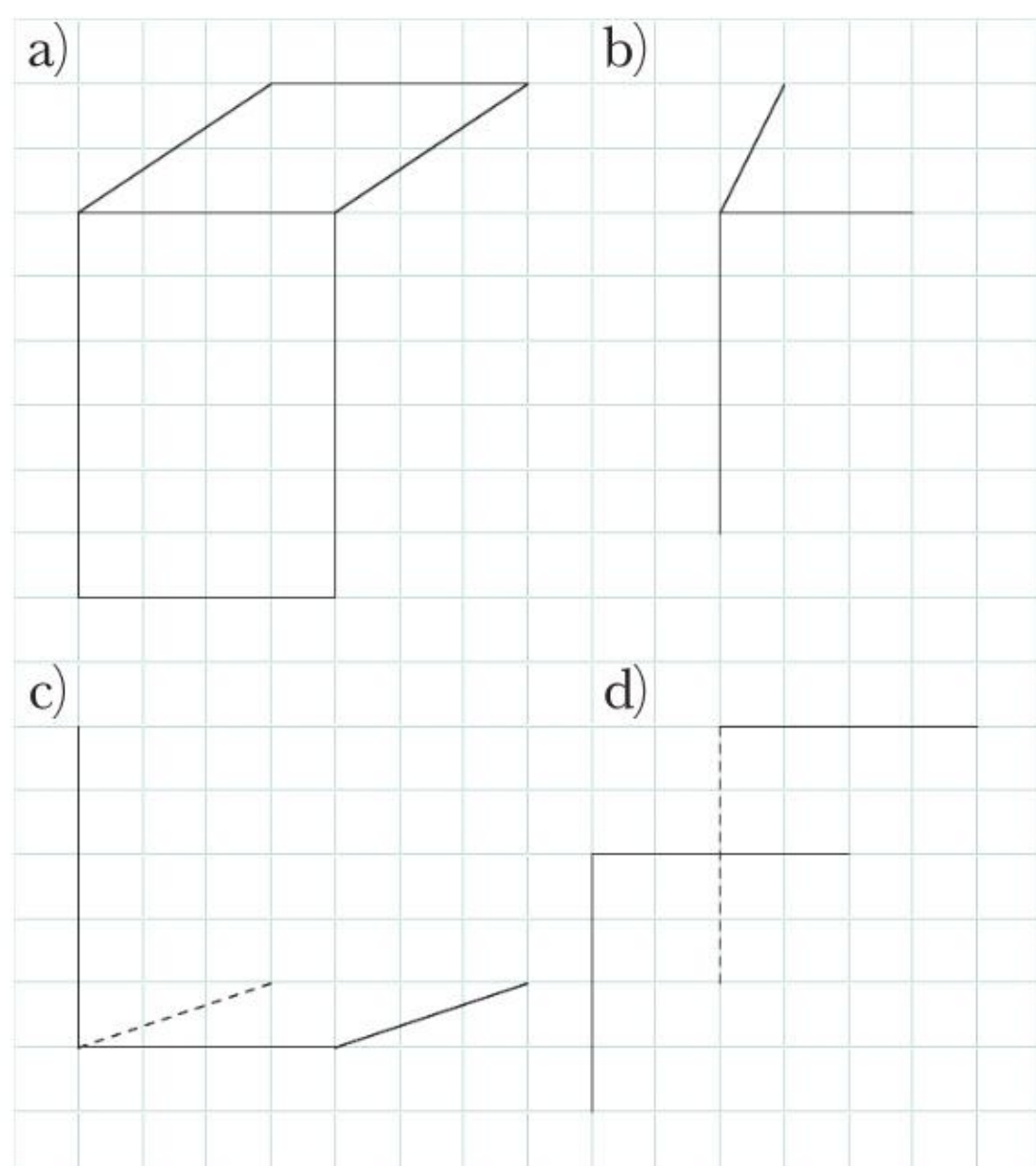
- Wypisz krawędzie, które mają długość 7 cm, oraz te, które mają 12 cm.



- Ile ścian w kształcie kwadratu, a ile w kształcie prostokąta, ma prostopadłościan o podanych wymiarach?

- $12 \text{ dm} \times 8 \text{ dm} \times 8 \text{ dm}$
- $1 \text{ m} \times 10 \text{ dm} \times 100 \text{ cm}$
- $3 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 30 \text{ dm}$
- $12 \text{ cm} \times 25 \text{ cm} \times 9 \text{ cm}$
- $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$
- $10 \text{ mm} \times 10 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$

- Przerysuj do zeszytu rozpoczęty rysunek i dokończ go tak, by otrzymać prostopadłościan.



- Prostopadłościan $ABCDEFGH$ ma wymiary $5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$. Jakie są wymiary jego ścian?

- Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu wynosi 36 cm. Jaka jest długość jego krawędzi? Jaki jest obwód jednej ściany tego sześcianu?

- Ścianami pewnego prostopadłościanu są prostokąty o wymiarach: $9 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$, $9 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ i $5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu.

- Na podstawie ciekawostki o arbuzech ze s. 115 rozwiąż zadanie.

- Założmy, że arbuz ma kształt sześcianu o krawędzi długości 30 cm. Ile takich owoców może zmieścić się w prostopadłościennym skrzynce o wymiarach $1,2 \text{ m} \times 0,9 \text{ m} \times 0,3 \text{ m}$?
- Sprawdź w internecie kurs dolara amerykańskiego i oblicz, ile w Polsce kosztowałby taki niezwykle arbuz.

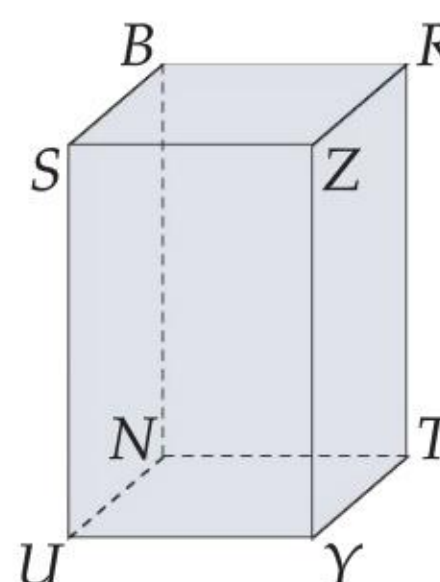


- Z liter oznaczających wierzchołki prostopadłościanu przedstawionego na rysunku poniżej ułóż wyraz:



- czteroliterowy,
- ośmioliterowy.

Każda litera w wyrazie może występować tylko raz.



6.2 Graniastosłup prosty

Podejmij temat

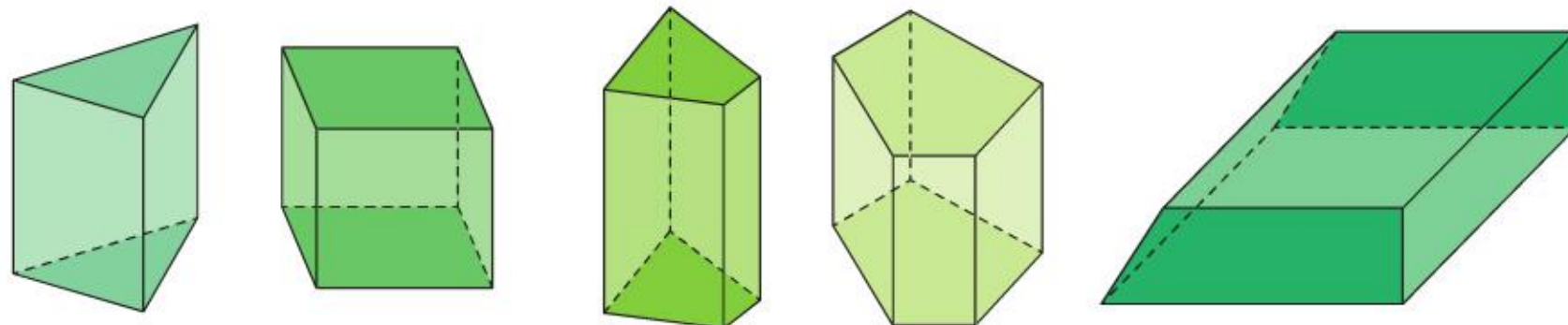
Te bryły mają ze sobą coś wspólnego...

Kolor?

No coś ty! Chodzi mi o kształt, o własności geometryczne.



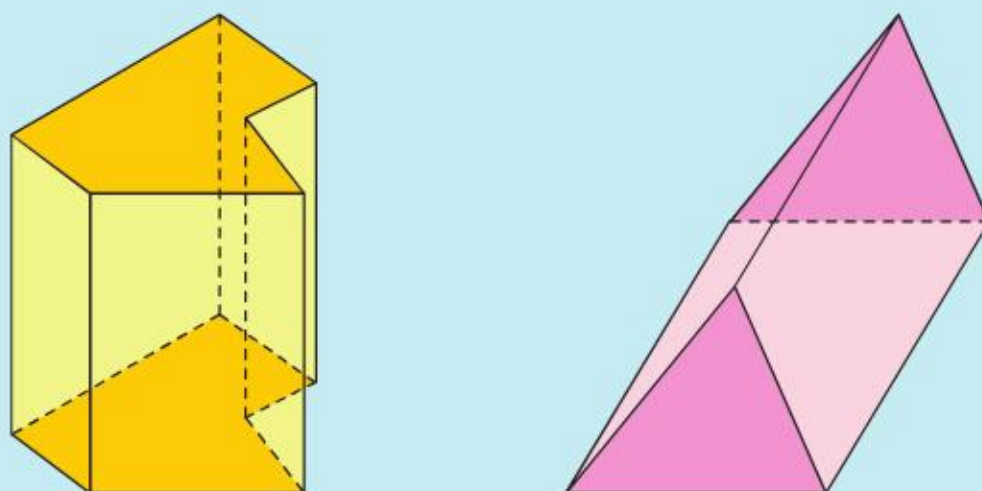
A czy ty potrafisz znaleźć wspólne cechy narysowanych brył?



W każdej z brył narysowanych powyżej można wyróżnić dwie identyczne ściany będące wielokątami, podczas gdy wszystkie pozostałe ściany są prostokątami. Taką bryłę nazywamy graniastosłupem prostym.

Graniastosłup prosty to bryła, której dwie ściany są jednakowymi wielokątami, a pozostałe – są prostokątami.

Te dwie jednakowe ściany graniastosłupa prostego nazywamy **podstawami** (na rysunku zaznaczono je ciemniejszymi kolorami), a pozostałe – **ścianami bocznymi**.

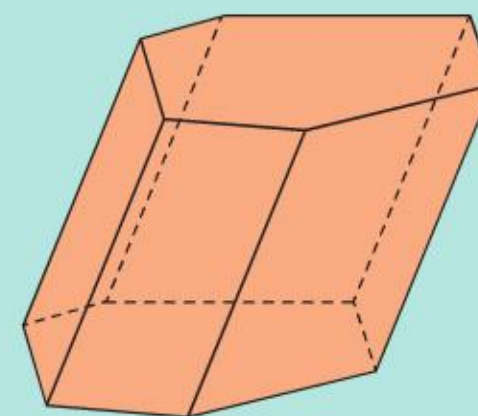
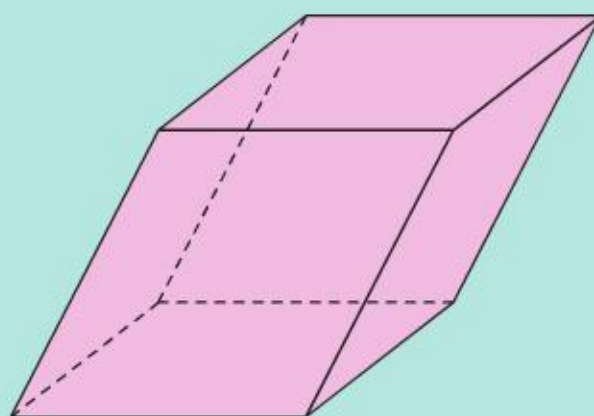
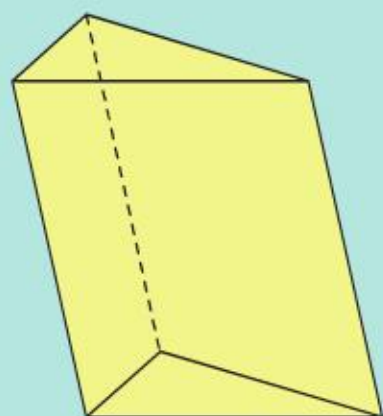


Czasami, np. w celu doprecyzowania opisu rysunku, używamy pojęć: **podstawa dolna** i **podstawa górna** graniastosłupa.

Więcej na temat

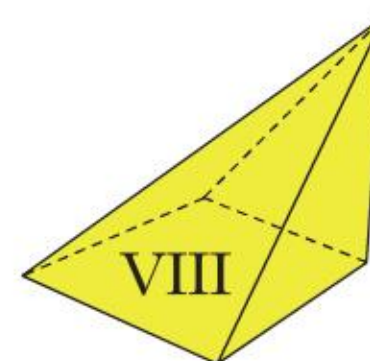
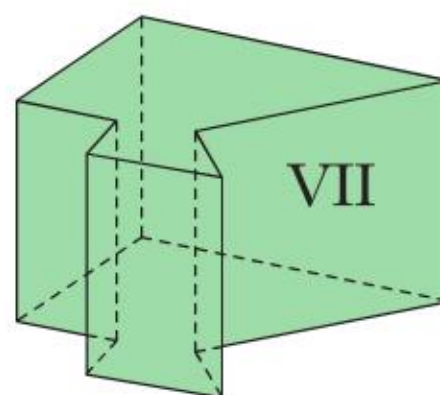
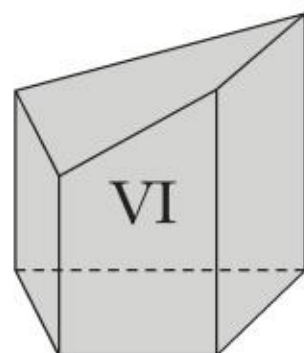
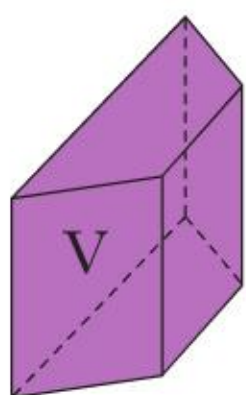
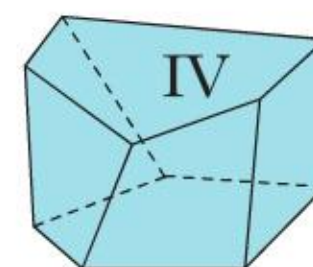
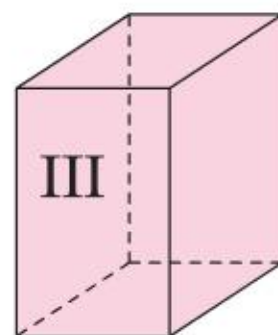
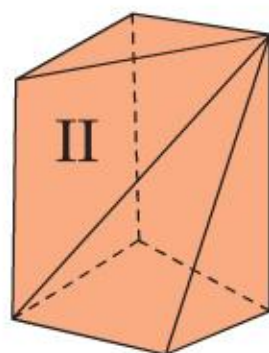
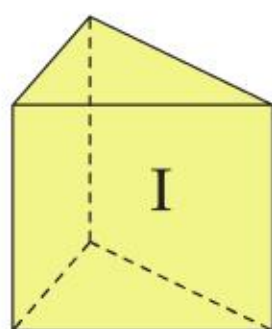
Oprócz graniastosłupów prostych istnieją też **graniastosłupy pochyłe**. Mają one dwie jednakowe podstawy, ale niektóre (lub wszystkie) ściany boczne nie są prostokątami, lecz innymi równoległobokami.

Przykłady graniastosłupów pochyłych są widoczne poniżej.



O takich graniastosłupach nie będziemy się uczyć w szkole podstawowej, dlatego w podręczniku będziemy używać nazwy *graniastosłup*, mając na myśli zawsze graniastosłup prosty.

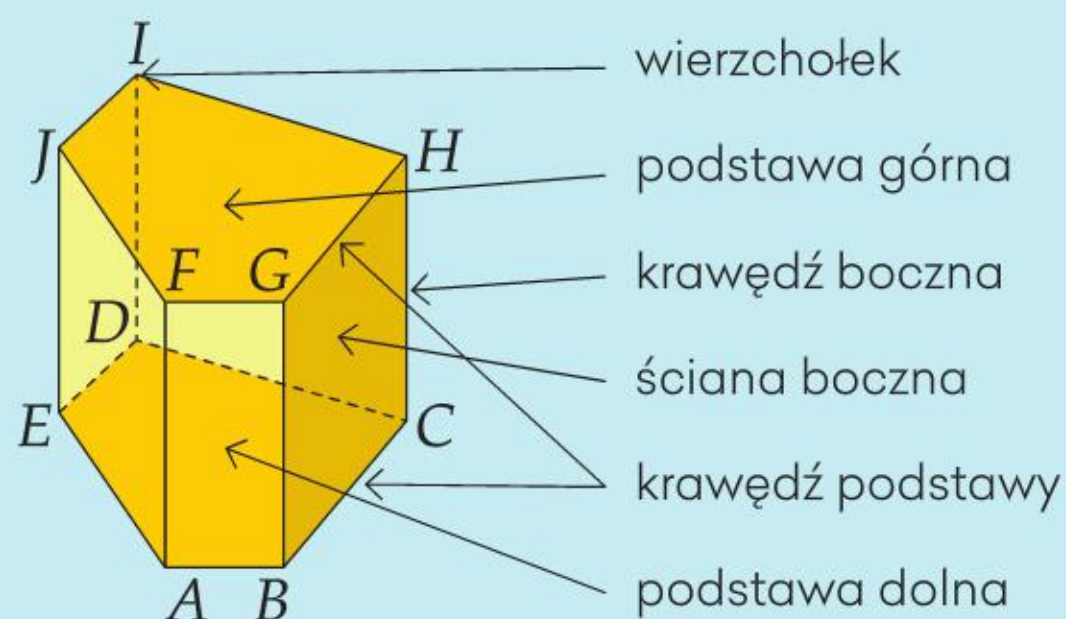
1. Które z poniższych brył **nie** są graniastosłupami?



Podobnie jak w przypadku prostopadłościanu, w graniastosłupie również wyróżniamy **wierzchołki** oraz **krawędzie**.

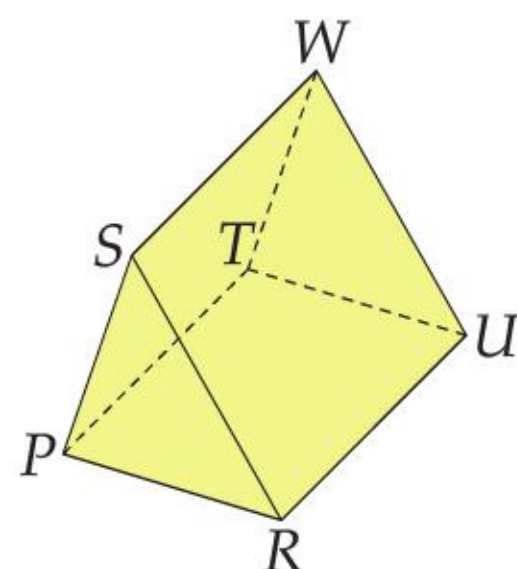
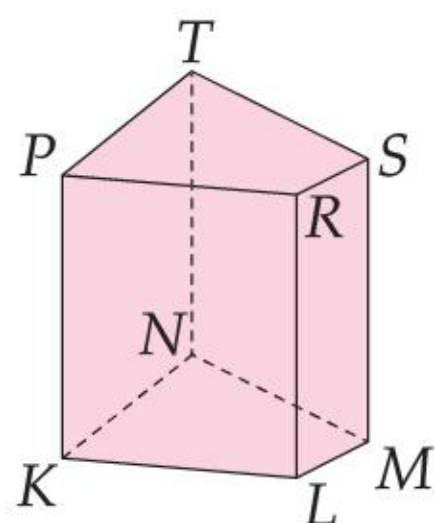
W graniastosłupie można wskazać **krawędzie podstawy** i **krawędzie boczne**.

Ponieważ w graniastosłupie prostym ściany boczne są prostokątami, zatem krawędzie podstaw są prostopadłe do krawędzi bocznych.



2. Dla obu narysowanych graniastosłupów wypisz oznaczenia literowe:

- podstaw,
- ścian bocznych,
- krawędzi podstaw,
- krawędzi bocznych.



Te różne graniastosłupy trochę przypominają mi prostopadłościany.

To prawda. Tylko zamiast prostokąta mogą mieć jako podstawę inny wielokąt.

No tak. Czyli prostopadłościan jest graniastosłupem?

Oczywiście! Sześcian też 😊

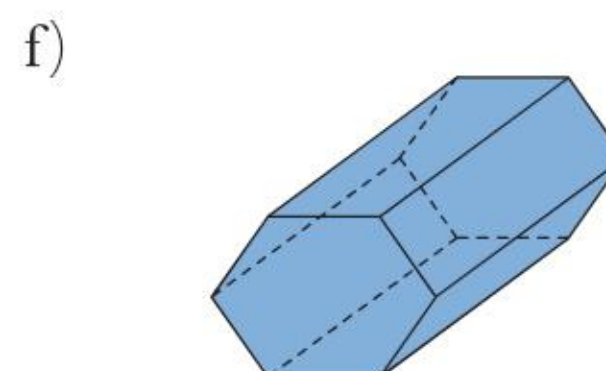
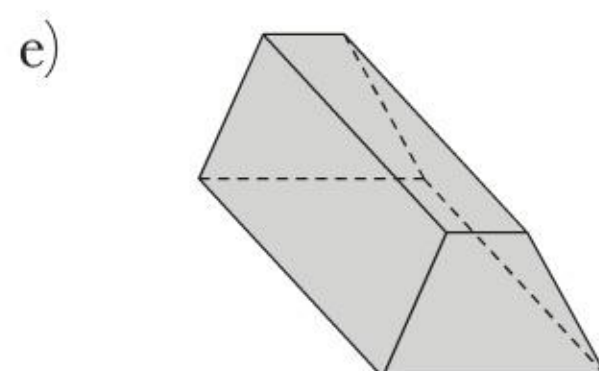
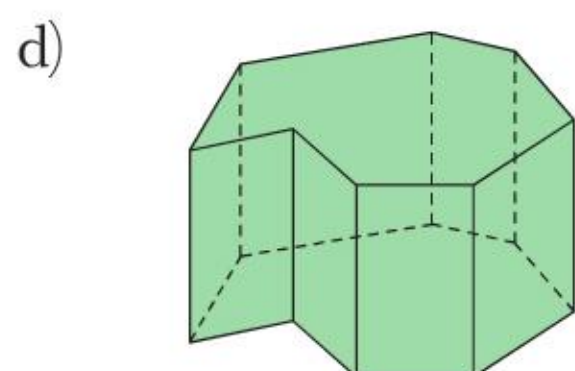
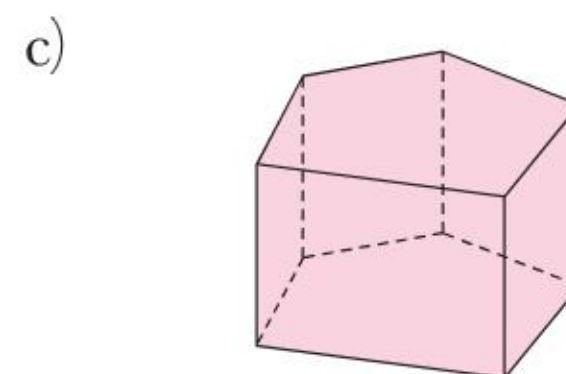
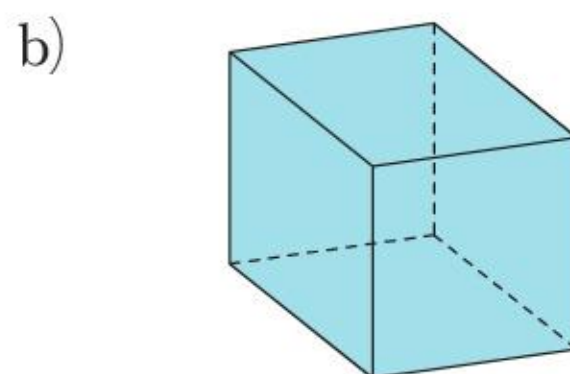
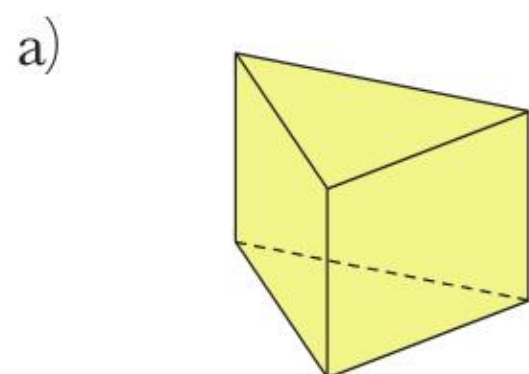
Nazwy graniastosłupów tworzymy według poniższej zasady. Jeżeli podstawą graniastosłupa jest:

- **trójkąt**, to graniastosłup nazywamy **trójkątnym**,
- **czworokąt**, to graniastosłup nazywamy **czworokątnym**,
- **pięciokąt**, to graniastosłup nazywamy **pięciokątnym**,
- **sześciokąt**, to graniastosłup nazywamy **sześciokątnym**.



Graniastosłup czworokątny o podstawie będącej prostokątem to prostopadłościan.

3. Jaki wielokąt jest podstawą narysowanego graniastosłupa? Podaj liczbę ścian bocznych tego graniastosłupa.



Jaką można zauważyć zależność między podstawą graniastosłupa a liczbą jego ścian bocznych?

4. Przepisz i uzupełnij tabelę. Pomocne ci będą rysunki z ćwiczenia 3.

Graniastosłup	Liczba krawędzi bocznych	Liczba wszystkich krawędzi	Liczba ścian bocznych	Liczba wszystkich ścian	Liczba wierzchołków
trójkątny					
czworokątny					
pięciokątny					
sześciokątny					
dziesięciokątny					

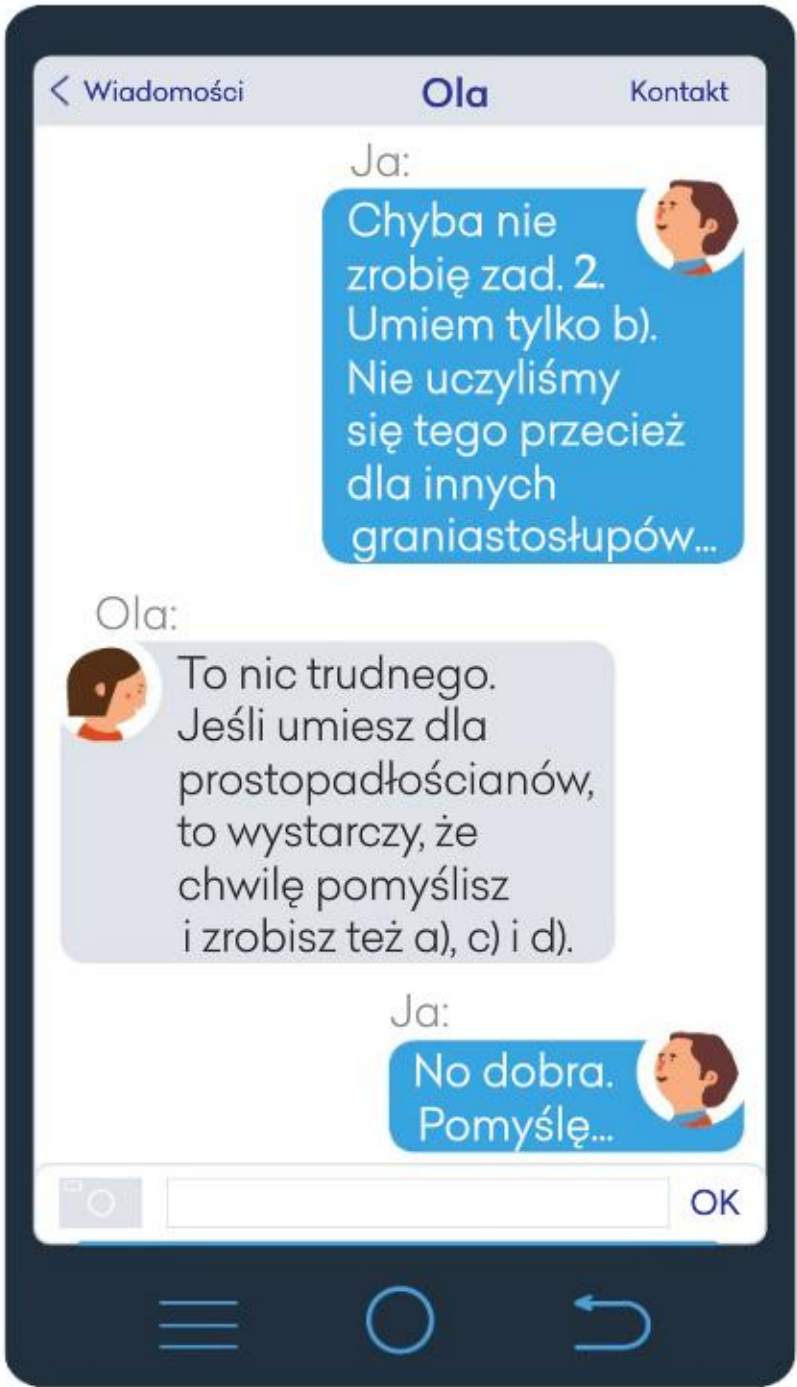
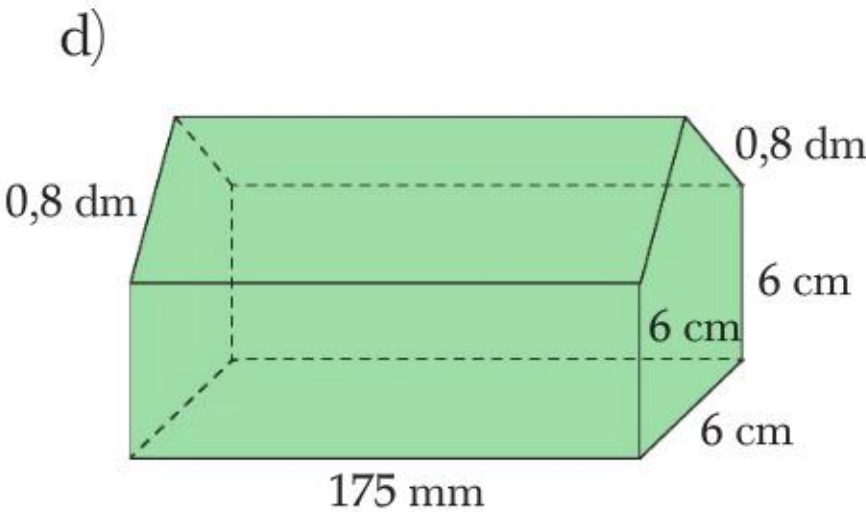
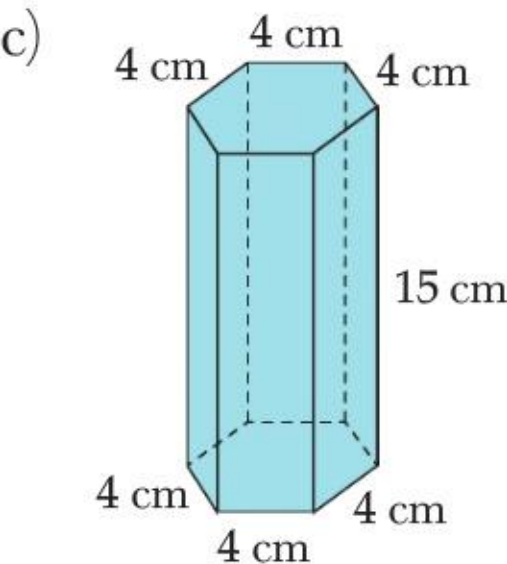
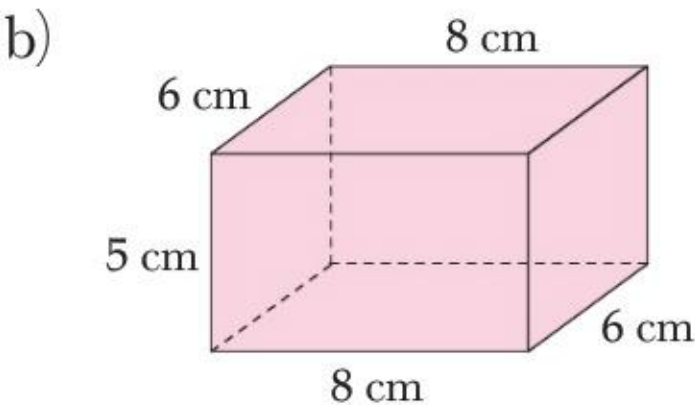
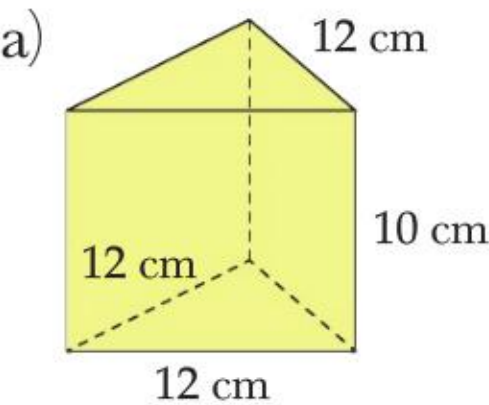
Zadania

Dokończ każde zdanie tak, aby było prawdziwe – zamiast znaku zapytania wstaw odpowiednio wyraz lub liczbę.

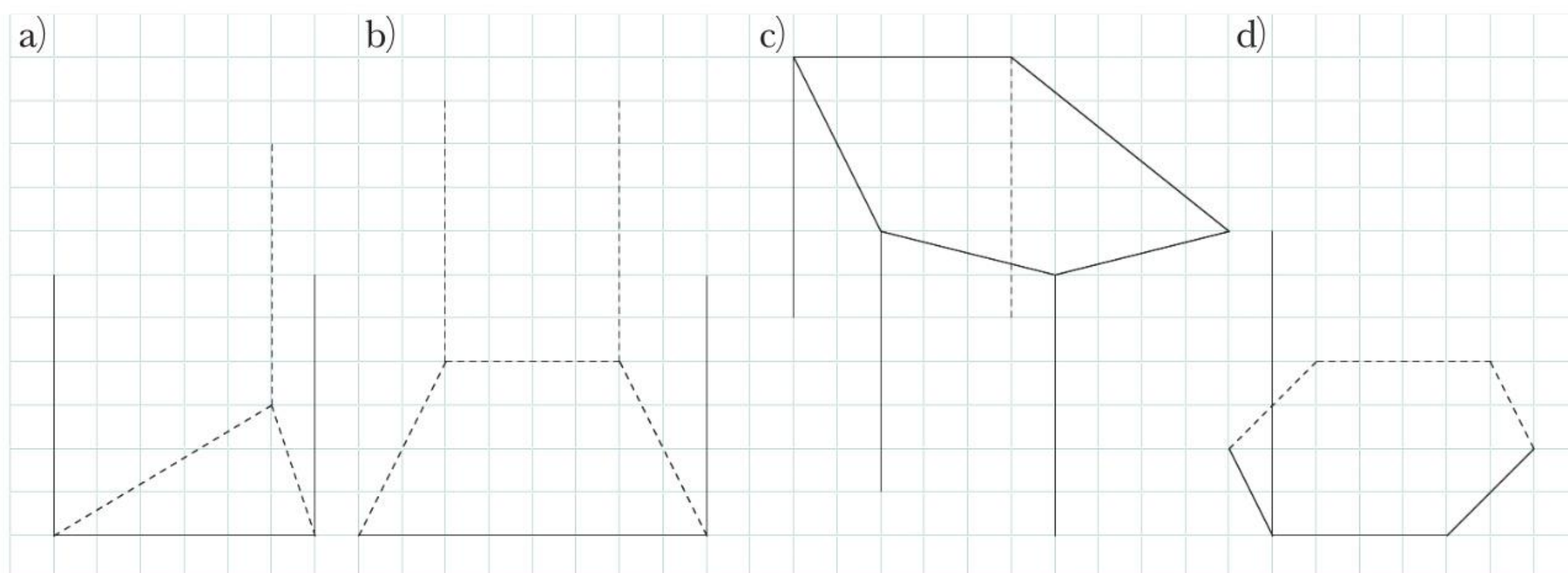
Jeżeli graniastosłup ma:

- 7 krawędzi bocznych, to jego podstawą jest ?.
- 10 ścian bocznych, to jego podstawą jest ?.
- 11 ścian, to jego podstawą jest ?.
- 15 krawędzi, to jego podstawą jest ?.
- 16 wierzchołków, to jego podstawą jest ?.
- 10 wierzchołków, to ma ? krawędzi.
- 18 krawędzi, to ma ? wierzchołków.

Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi graniastosłupa.

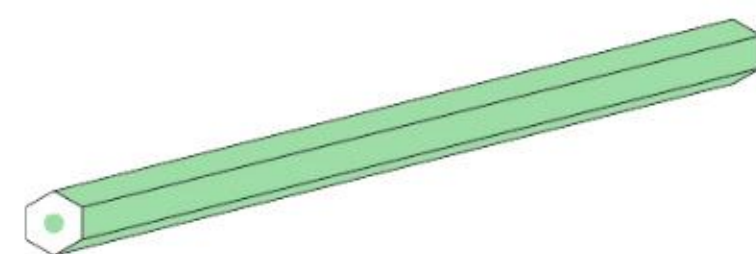


- Przerysuj do zeszytu rozpoczęty rysunek i dokończ go tak, by powstał obraz graniastosłupa.



- Kredka (przed zatemperowaniem) może mieć kształt graniastosłupa, jak widać na rysunku.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.



- Podstawą tego graniastosłupa, czyli kredki, jest sześciokąt.
- Ten graniastosłup ma 2 ściany boczne.
- Graniastosłup przedstawiony na rysunku ma 10 wierzchołków.
- Graniastosłup przedstawiony na rysunku ma 12 wierzchołków.
- Ten graniastosłup ma tyle samo krawędzi, co wierzchołków.
- Kredka ma 18 krawędzi.

- Maciek, Bartek, Tomek i Antek na zajęciach koła przyrodniczego robili budki dla ptaków. Po zakończonej pracy oglądali wykonane domki. Przeczytaj, co powiedzieli chłopcy, i oceń, kto miał rację.



6.3 Siatki graniastostupa

Podejmij temat



Czy wiesz, jak tata Zosi mógł „zobaczyć” sześcian, patrząc na płaski karton?

Tato, kupiłam ozdobne pudełko na prezent dla koleżanki, ale trzeba je samemu złożyć. Pomożesz? Zaraz wyjmę instrukcję.

Zosiu, nie trzeba, to proste. Przynieś tylko klej. Ładne sześciennne pudełko zaraz będzie gotowe ☺

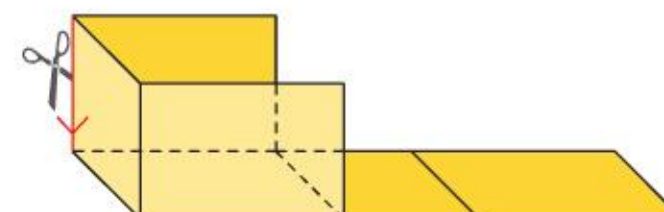
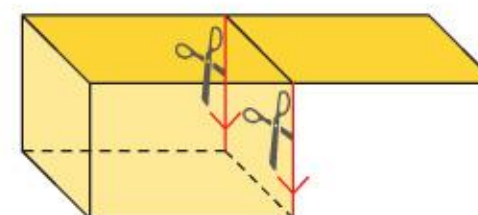
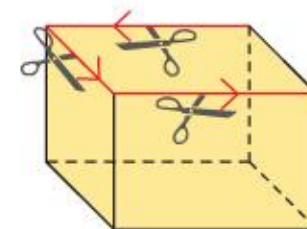
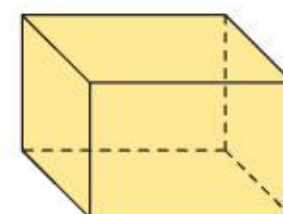
A skąd ty od razu wiesz, że sześcienne?

Jeżeli chcemy wykonać model graniastostupa z papieru, musimy najpierw wyciąć odpowiednią figurę składającą się z poszczególnych ścian graniastostupa. Będzie to **siatka graniastostupa**.

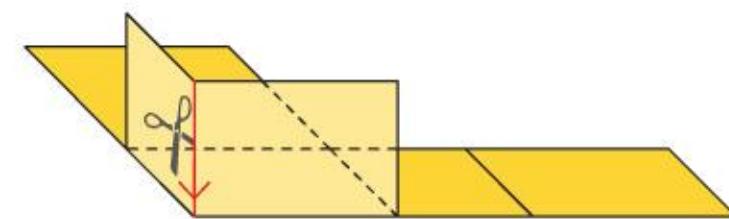
Aby narysować siatkę danego graniastostupa, najlepiej sobie wyobrazić, w jaki sposób jego model (składający się z samych ścian) jest rozkładany czy też rozcinany, tak by uzyskać płaski kształt.

Wyobraźmy sobie zatem pudełko w kształcie prostopadłościanu położone na stole. Będziemy je rozcinać wzdłuż krawędzi.

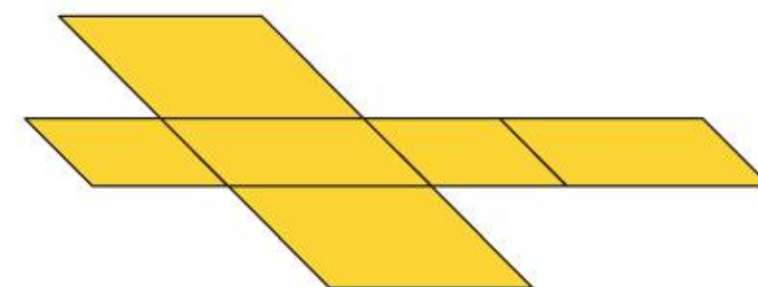
1. Rozetnijmy pudełko wzdłuż krawędzi górnej podstawy, jak zaznaczono strzałkami na rysunku obok. W efekcie tego rozcięcia pokrywę pudełka – podstawę górną – będzie można odchylić.
2. Rozetnijmy nasze pudełko dalej, wzdłuż zaznaczonych krawędzi bocznych. Podstawę górną i prawą ścianę boczną będzie można rozłożyć na stole.
3. Następnie przetnijmy kolejną krawędź boczną, co pozwoli nam położyć tylną ścianę.



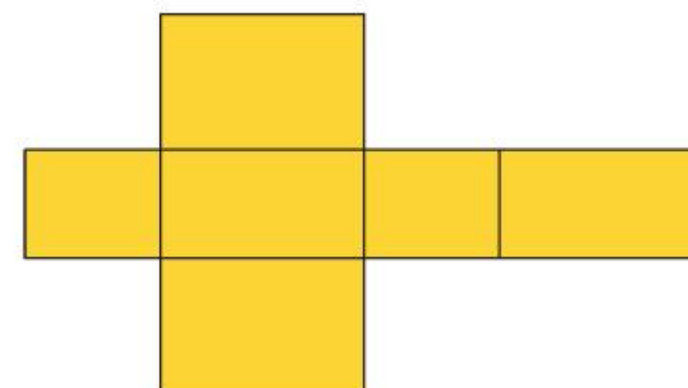
4. Rozetnijmy pudełko wzdłuż następnej krawędzi bocznej, żeby położyć lewą ścianę.



5. Dalej już niczego nie trzeba ciąć, bo przednią ścianę można już też położyć płasko na stole.



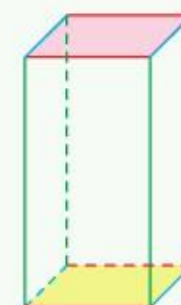
Trzeba oczywiście pamiętać, że ściany prostopadłościanu są prostokątami, a więc po rozłożeniu pudełka na płaskiej powierzchni i spojrzeniu na nie z góry zobaczymy taką figurę, jak na rysunku obok. Jest to siatka wyjściowego prostopadłościanu.



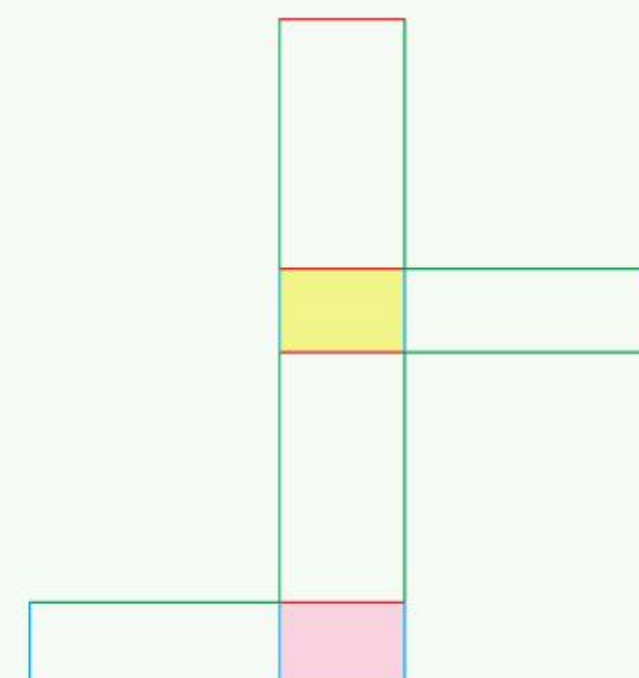
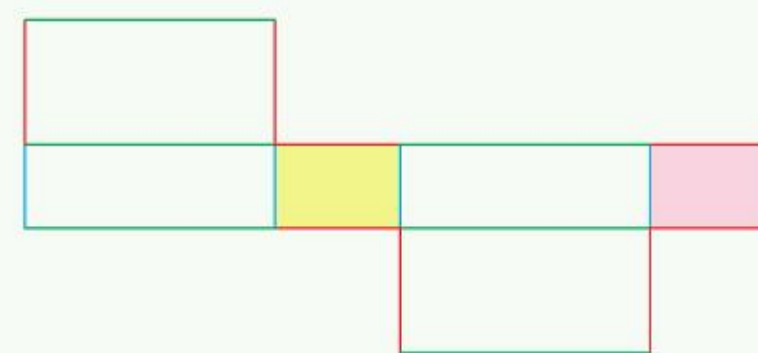
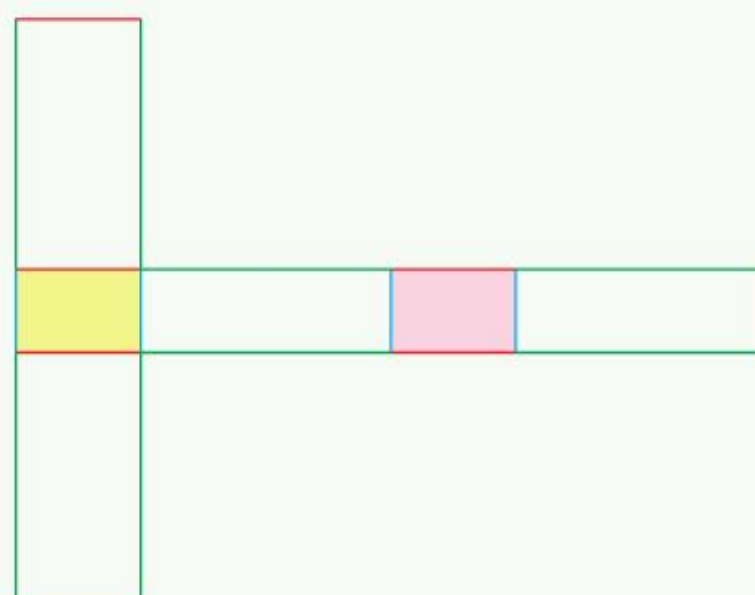
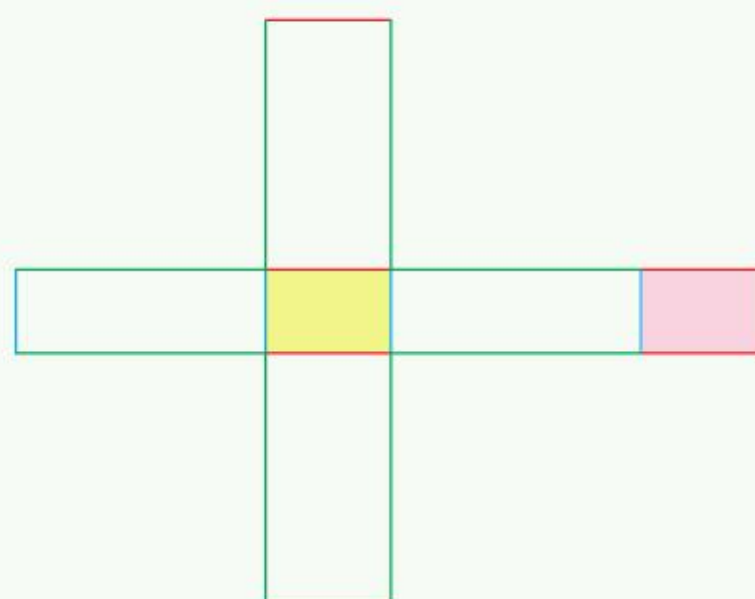
Siatki prostopadłościanów mogą mieć różne kształty – zależą one od sposobu rozcięcia danego modelu. Pokażemy przykładowe siatki tego samego prostopadłościanu.

Przykład 1

Narysujmy kilka różnych siatek prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok.

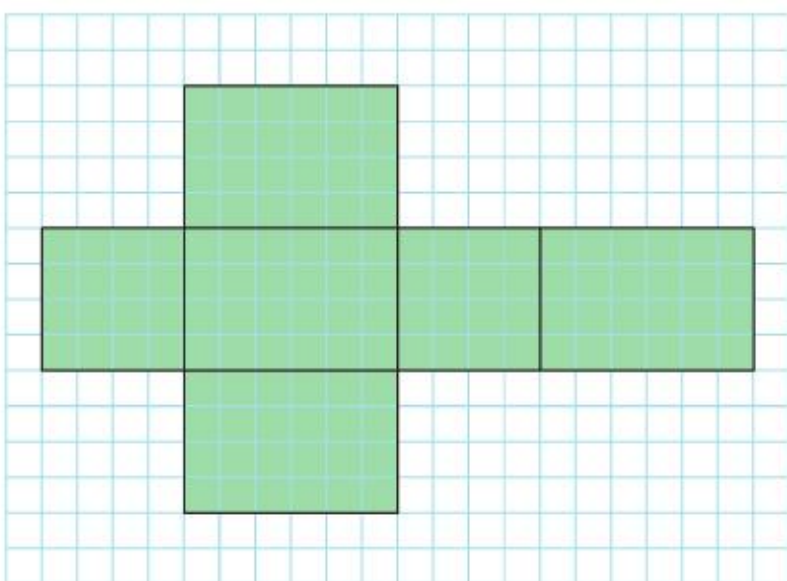


Każda z siatek składa się z sześciu prostokątów (będących ścianami prostopadłościanu) odpowiednio połączonych bokami. Wśród tych prostokątów są zawsze trzy pary jednakowych prostokątów (każda para to dwie przeciwległe ściany prostopadłościanu, które mają takie same wymiary).

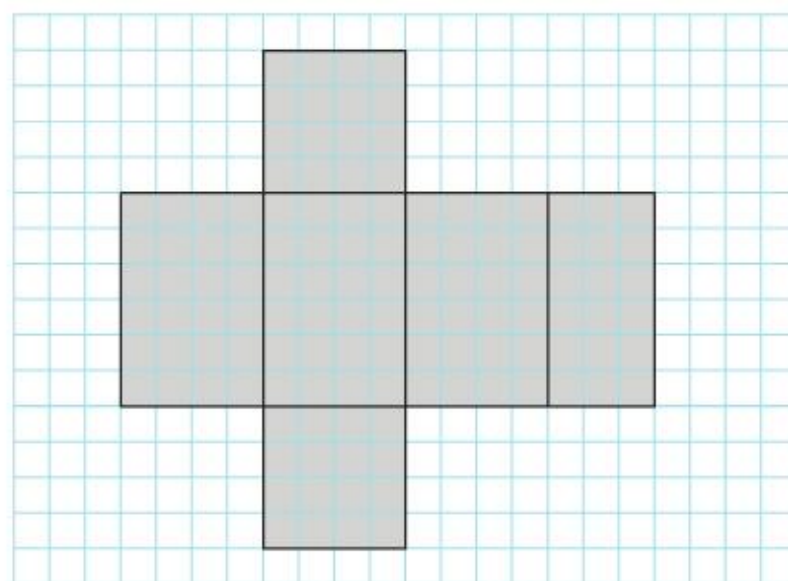


1. Które z poniższych rysunków **nie** przedstawiają siatek prostopadłościów?

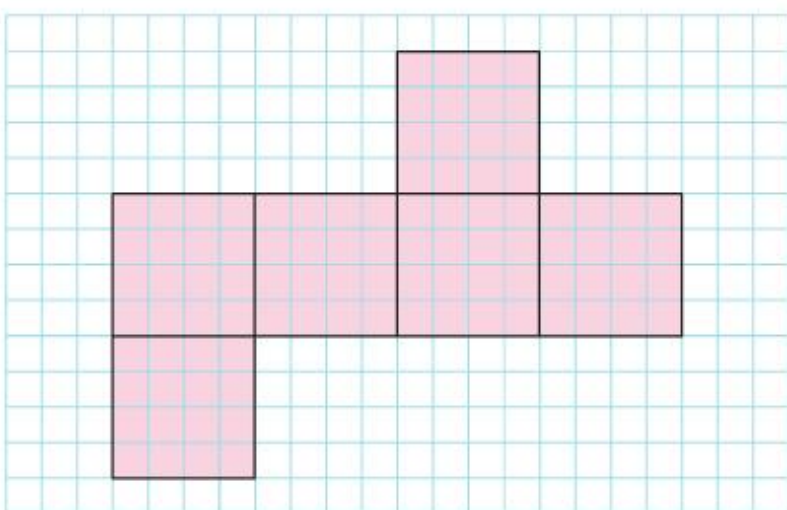
I.



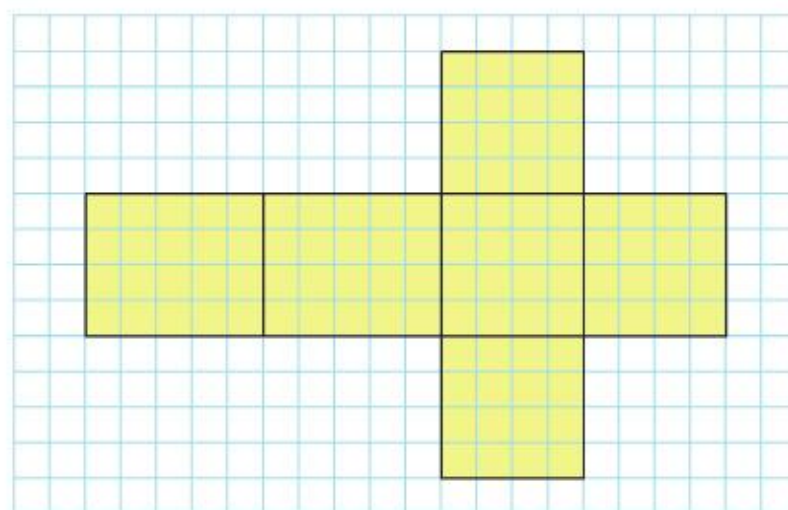
II.



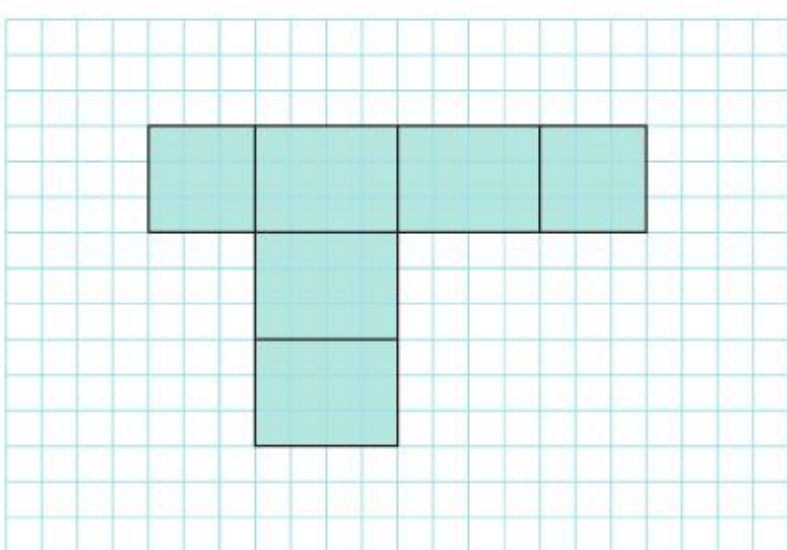
III.



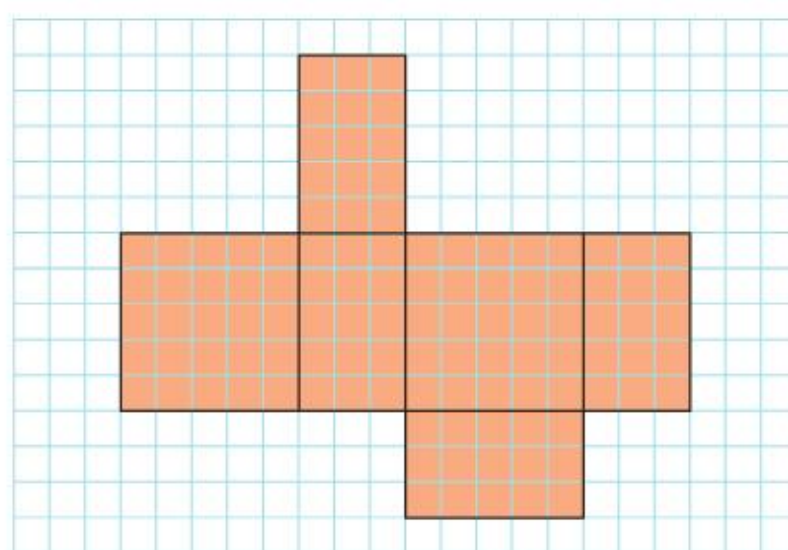
IV.



V.

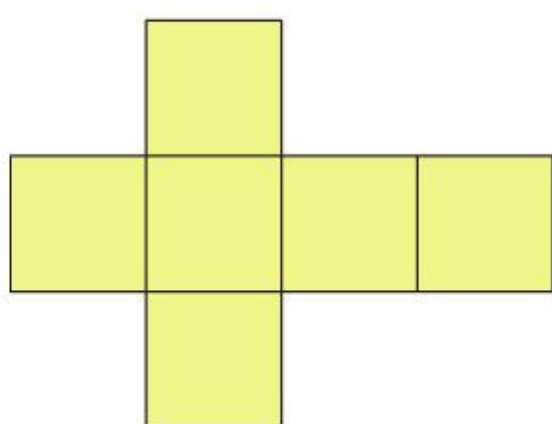


VI.

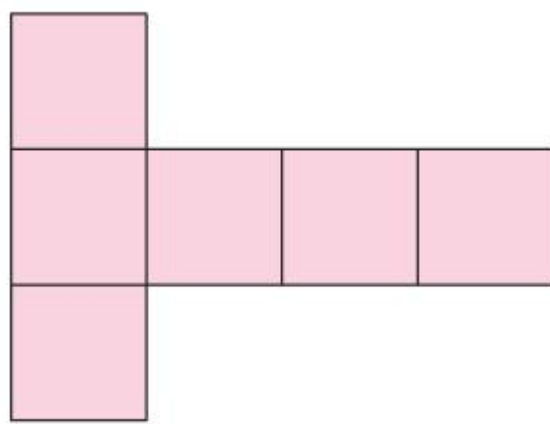


2. Które spośród siatek I–IV są siatkami sześciątów? Wybierz jedną z nich, przerysuj, wytnij i sklej w domu. Aby sklejenie siatki było możliwe, musisz wyciąć ją ze skrzydełkami, jak pokazano w przypadku siatki z prawej strony.

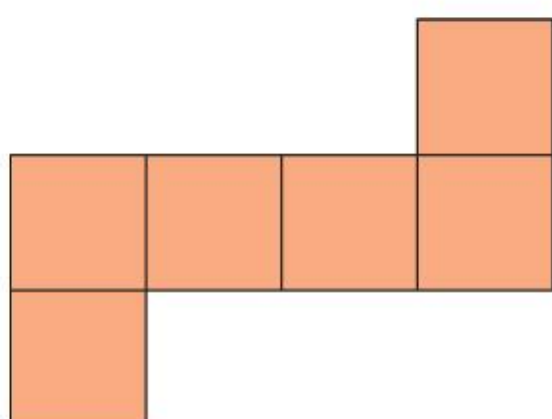
I.



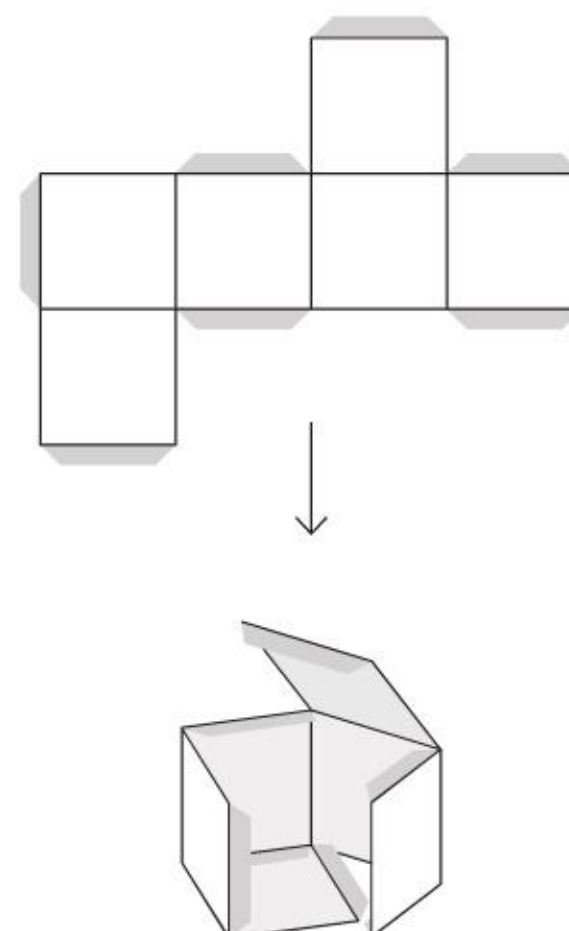
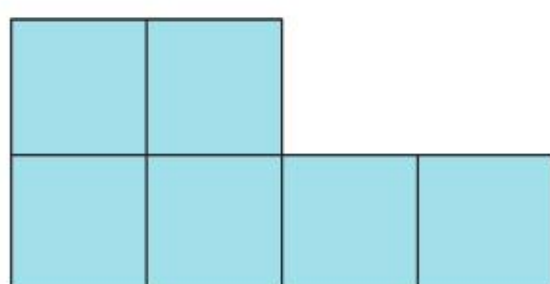
II.



III.

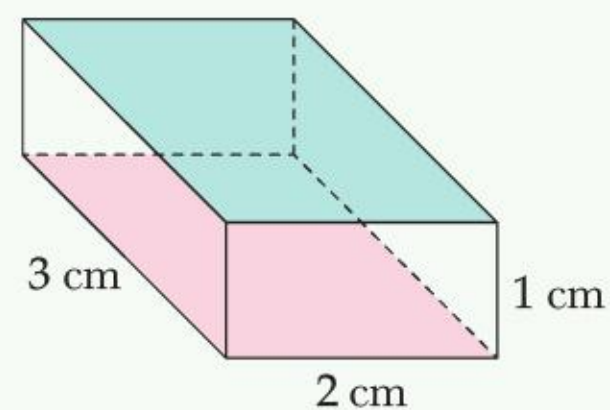


IV.

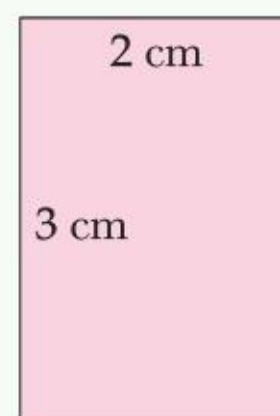


Przykład 1

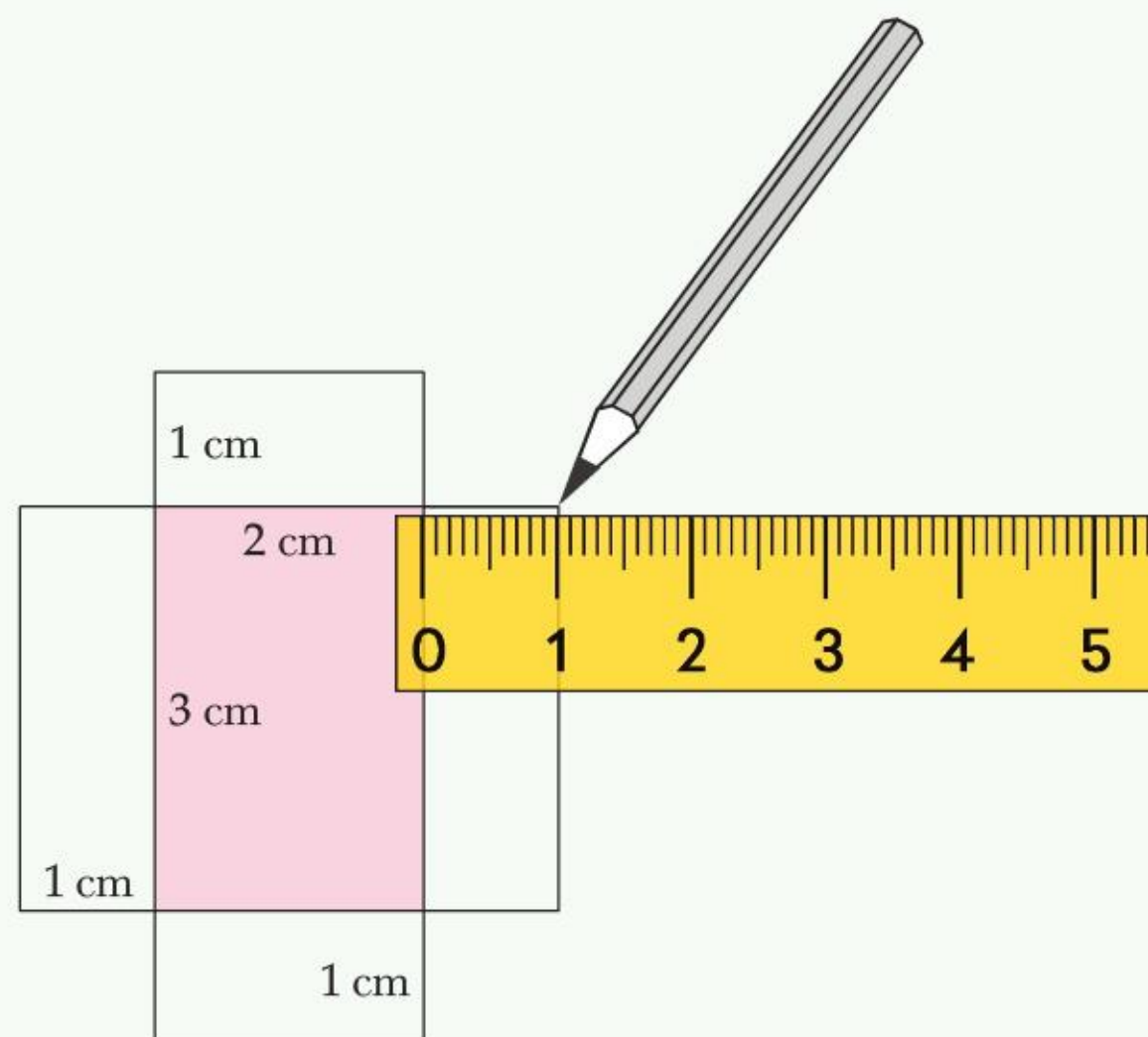
Narysujmy siatkę prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok.



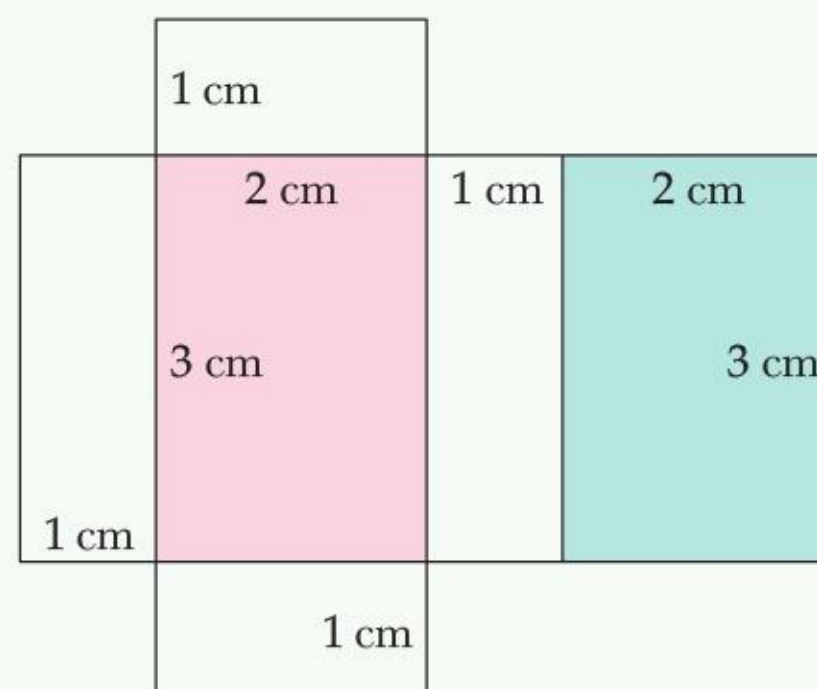
Zacznijmy od narysowania dolnej podstawy, którą jest prostokąt o wymiarach $2\text{ cm} \times 3\text{ cm}$.



Do dolnej podstawy dorysujemy teraz cztery ściany boczne, które są prostokątami o szerokości 1 cm (długość to odpowiednio 2 cm lub 3 cm).

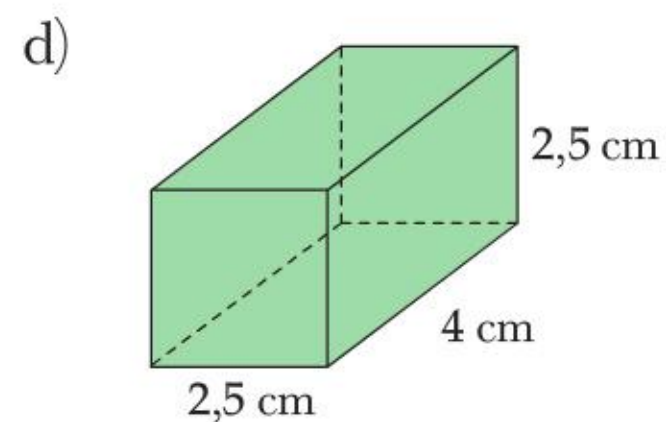
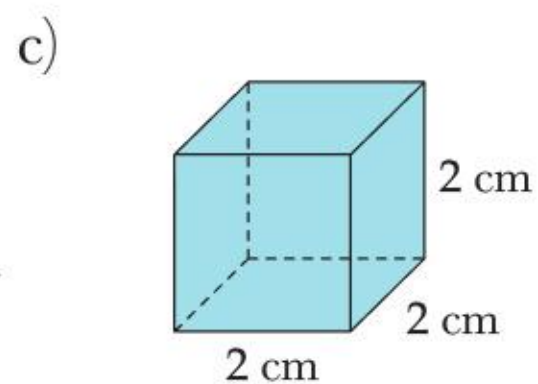
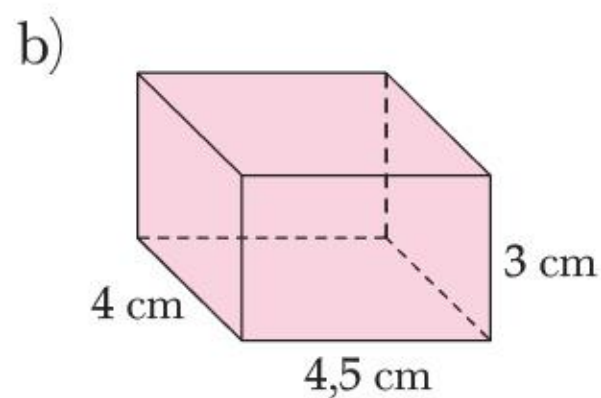
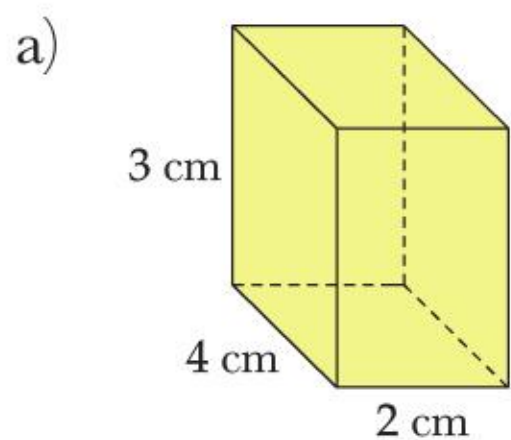


Teraz wystarczy dorysować podstawę górną tego prostopadłościanu – możemy połączyć ją z dowolną ścianą boczną.



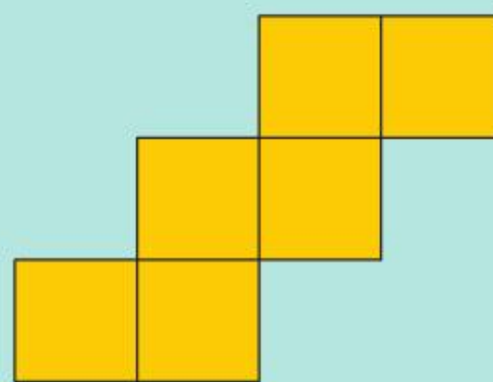
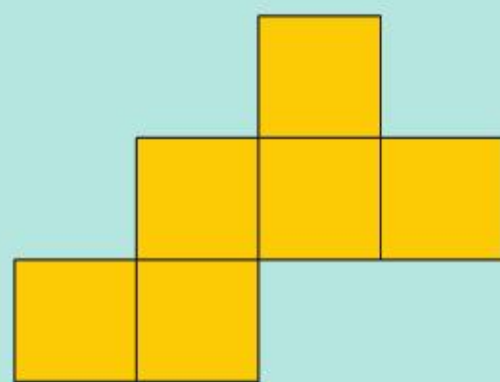
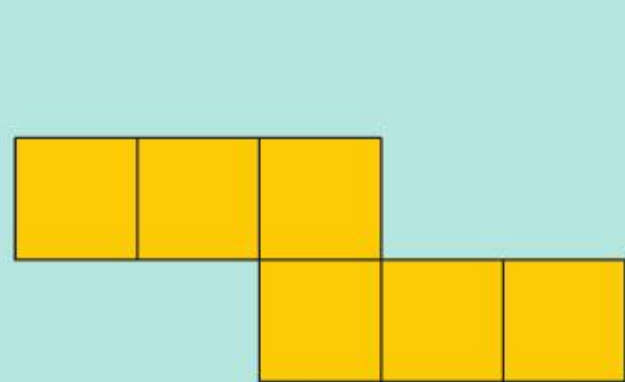
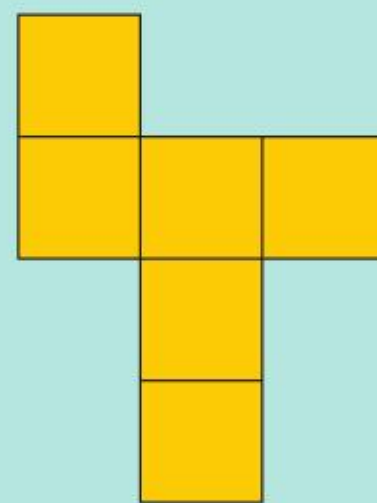
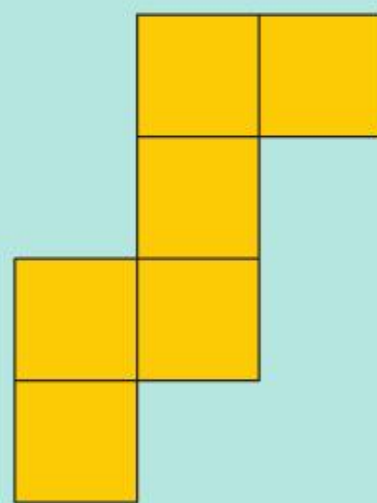
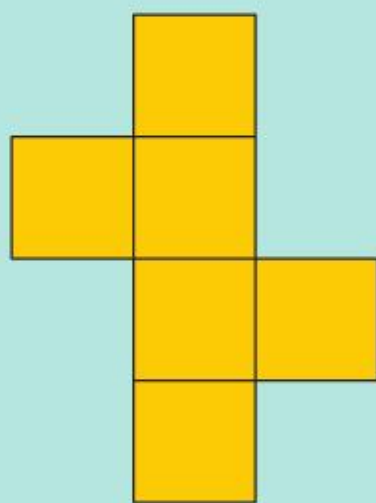
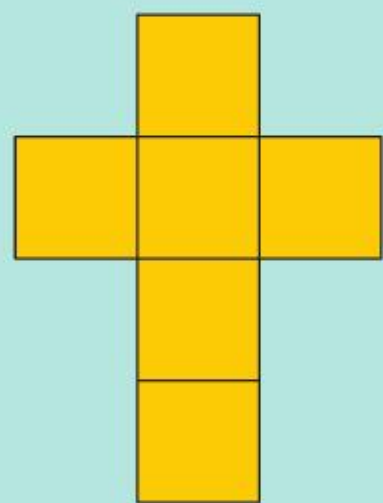
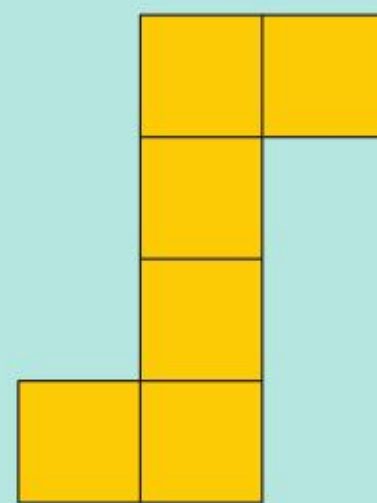
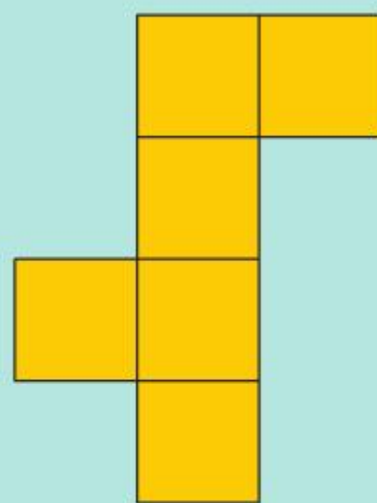
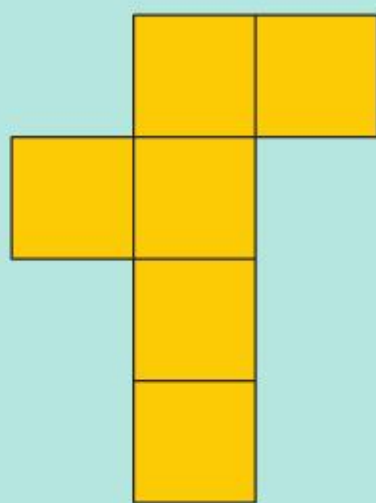
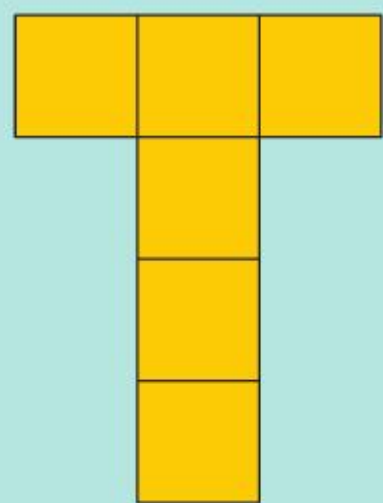
Oczywiście siatkę można narysować na różne sposoby, bo każdy prostopadłościan można złożyć z kilku różnych siatek.

3. Narysuj siatkę prostopadłościanu oraz oblicz sumę długości wszystkich jego krawędzi.



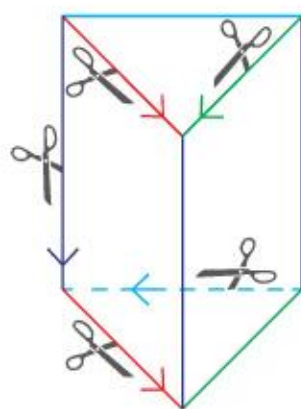
Więcej na temat

Każdy sześcian ma dokładnie 11 różnych siatek.

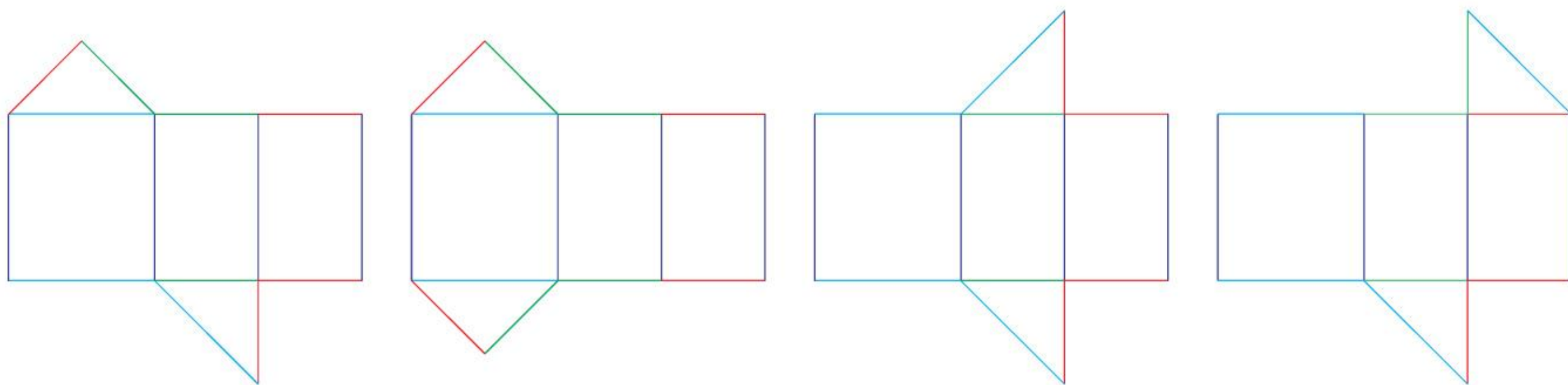


4. Wyobraź sobie, że ze wszystkich powyższych siatek wykonasz modele sześciątów, a potem skleisz wszystkie sześciany ze sobą w taki sposób, żeby powstał model prostopadłościanu. Jakie wymiary będzie miał taki prostopadłościan przy założeniu, że każda siatka składa się z kwadratów o boku długości 2 cm?

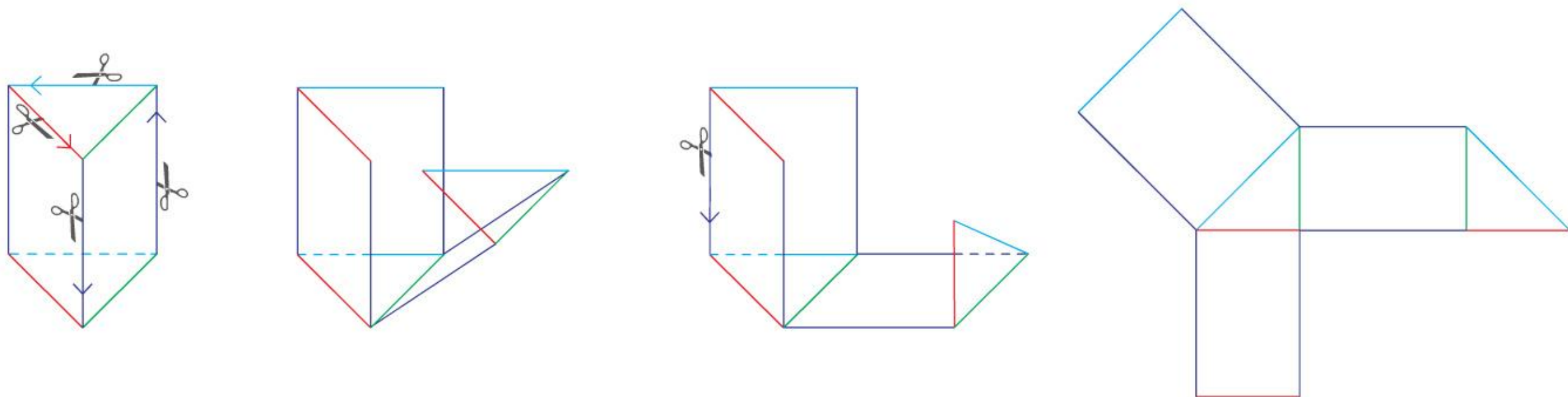
Teraz nauczymy się tworzyć siatki innych graniastosłupów (niebędących prostopadłościanami). Najprostszą, najbardziej czytelną siatkę graniastosłupa otrzymamy, jeśli wykonamy rozcięcia wzdłuż krawędzi podstaw (nie przecinamy jednej krawędzi górnej i jednej krawędzi dolnej) oraz wzdłuż jednej z krawędzi bocznych, jak pokazano na rysunku.



Otrzymamy wówczas siatkę, w której wszystkie ściany boczne graniastosłupa znajdą się obok siebie i utworzą jeden większy prostokąt, natomiast podstawy graniastosłupa będą po przeciwnych jego stronach, dołączone do jednej z krawędzi. Siatka będzie wówczas wyglądać tak jak na rysunku pierwszym od lewej (spójrz niżej) lub podobnie, w zależności od tego, gdzie będą umieszczone podstawy. Inne przykładowe siatki pokazano na kolejnych rysunkach.



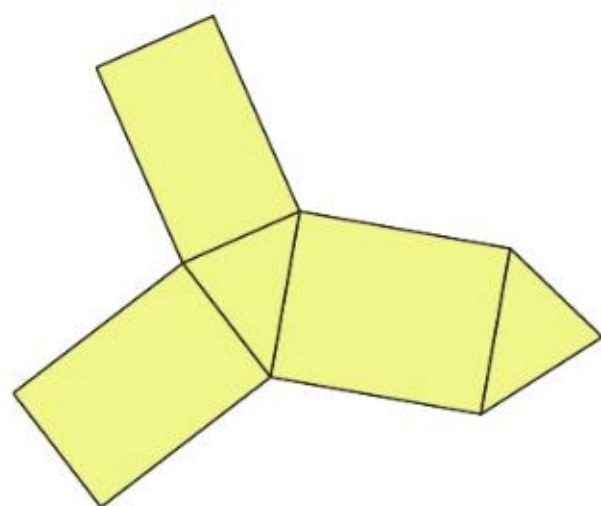
Oczywiście model tego samego graniastosłupa możemy rozciąć inaczej, np. wzdłuż dwóch krawędzi jednej podstawy i kolejno wzdłuż wszystkich krawędzi bocznych, jak pokazano na rysunkach poniżej.



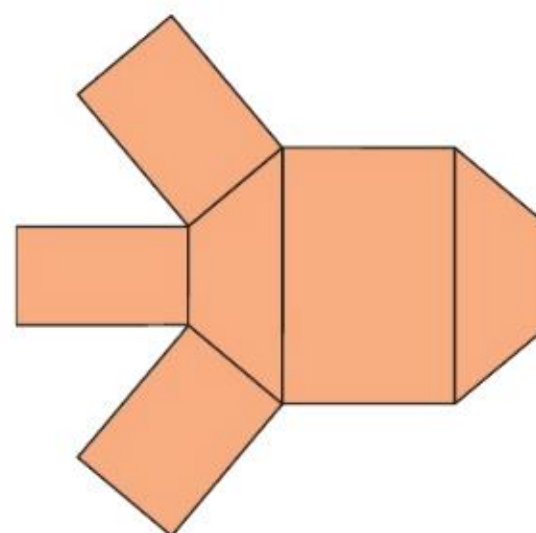
5. Podstawą graniastosłupa jest kwadrat o boku długości 5 cm, a ściany boczne to prostokąty o wymiarach 5 cm $\times$ 8 cm. Jakie wymiary miałby prostokąt utworzony ze ścian bocznych tego graniastosłupa, jeżeli jego siatkę rysowalibyśmy według pierwszego z opisanych sposobów?

6. Na rysunku przedstawiono siatkę graniastoslupa. Przyjrzyj się i powiedz, jaki wielokąt jest podstawą tego graniastoslupa. Podaj liczbę ścian bocznych tego graniastoslupa.

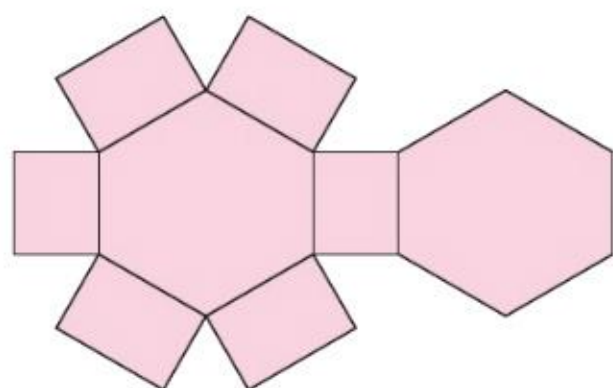
a)



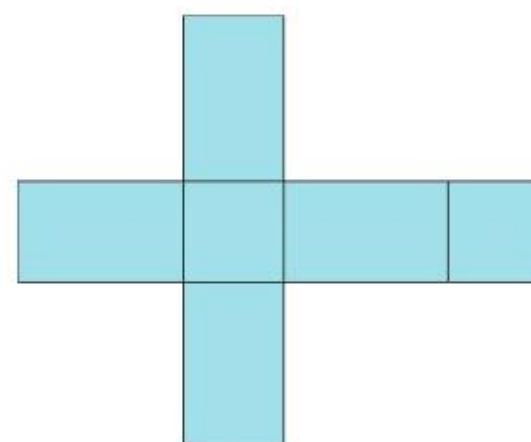
b)



c)

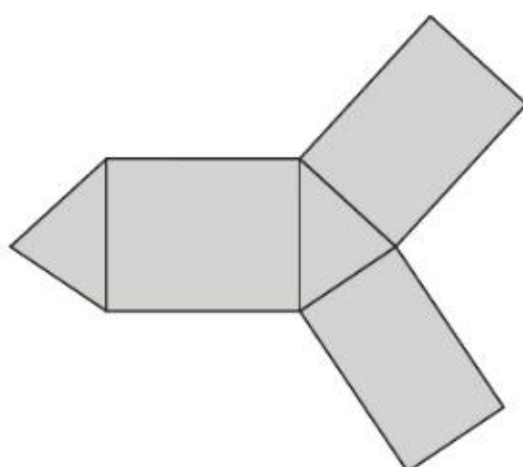


d)

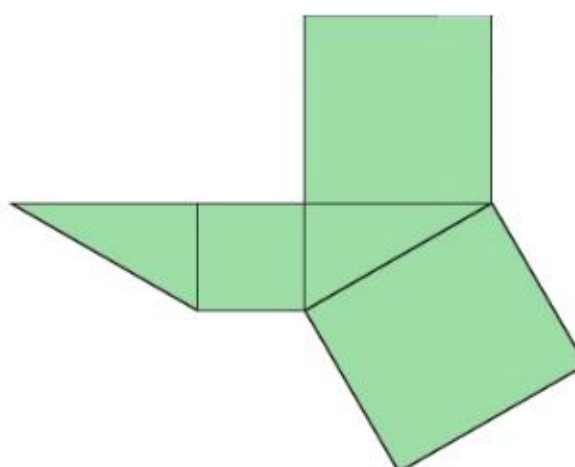


7. Które z poniższych siatek są siatkami graniastoslupa?

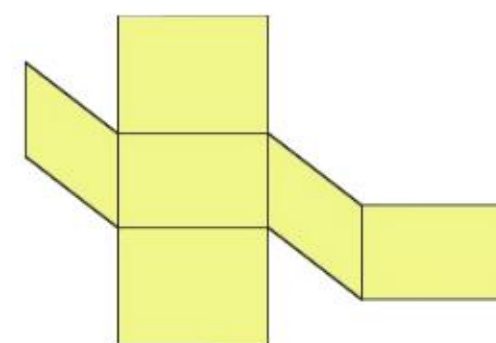
I.



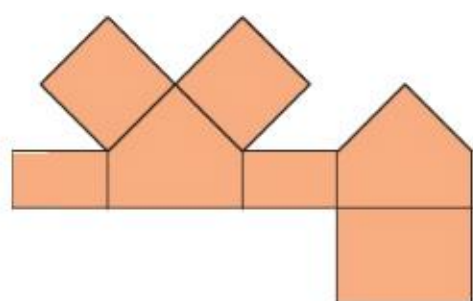
II.



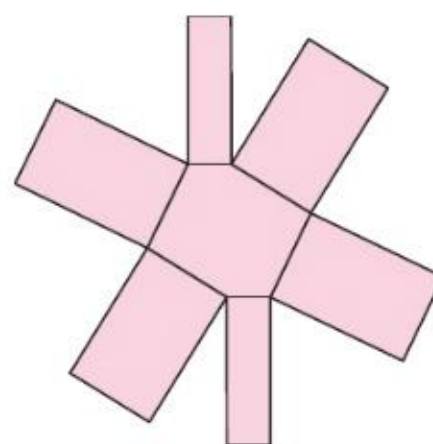
III.



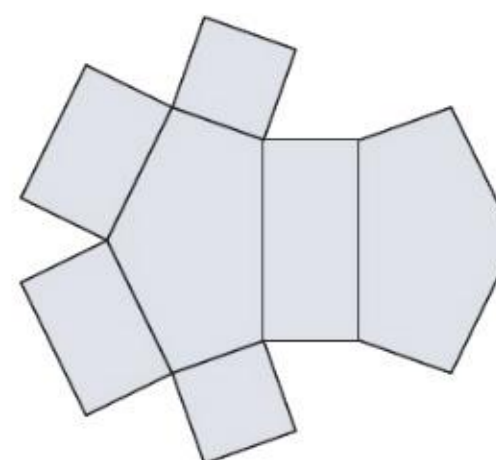
IV.



V.



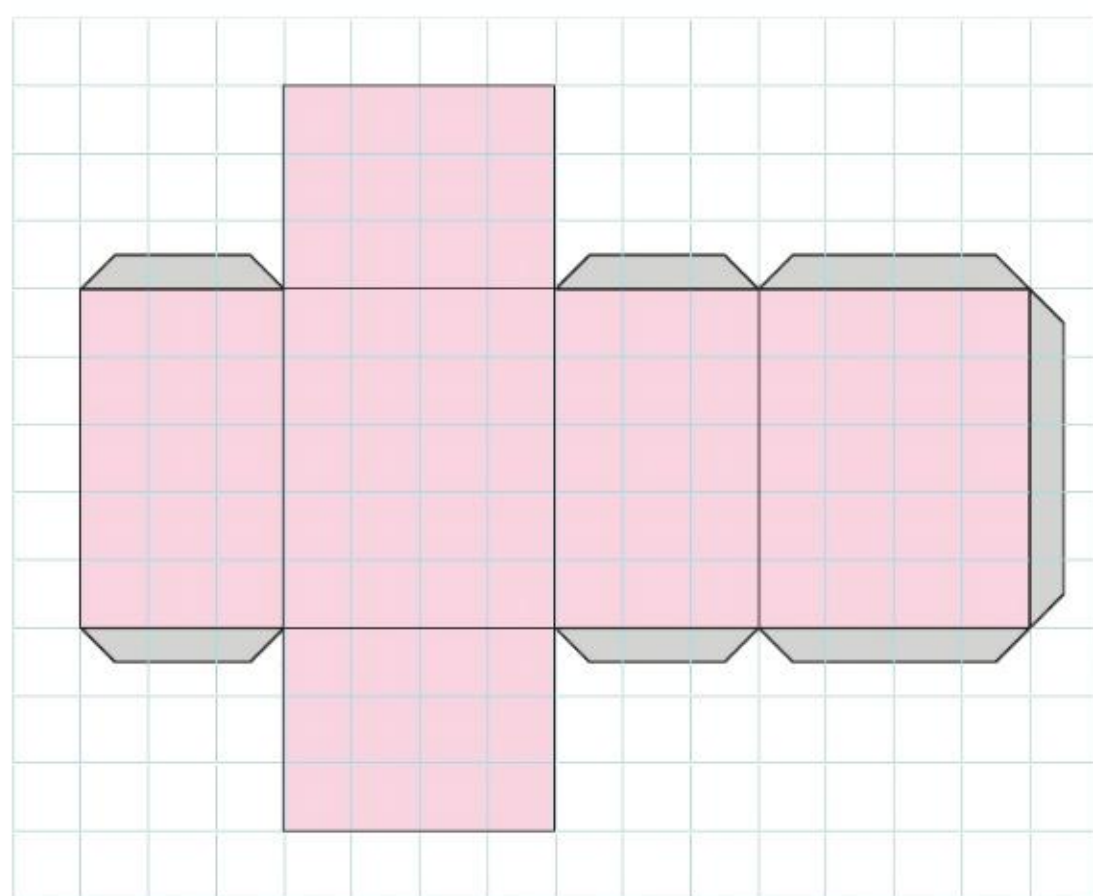
VI.



Zadania

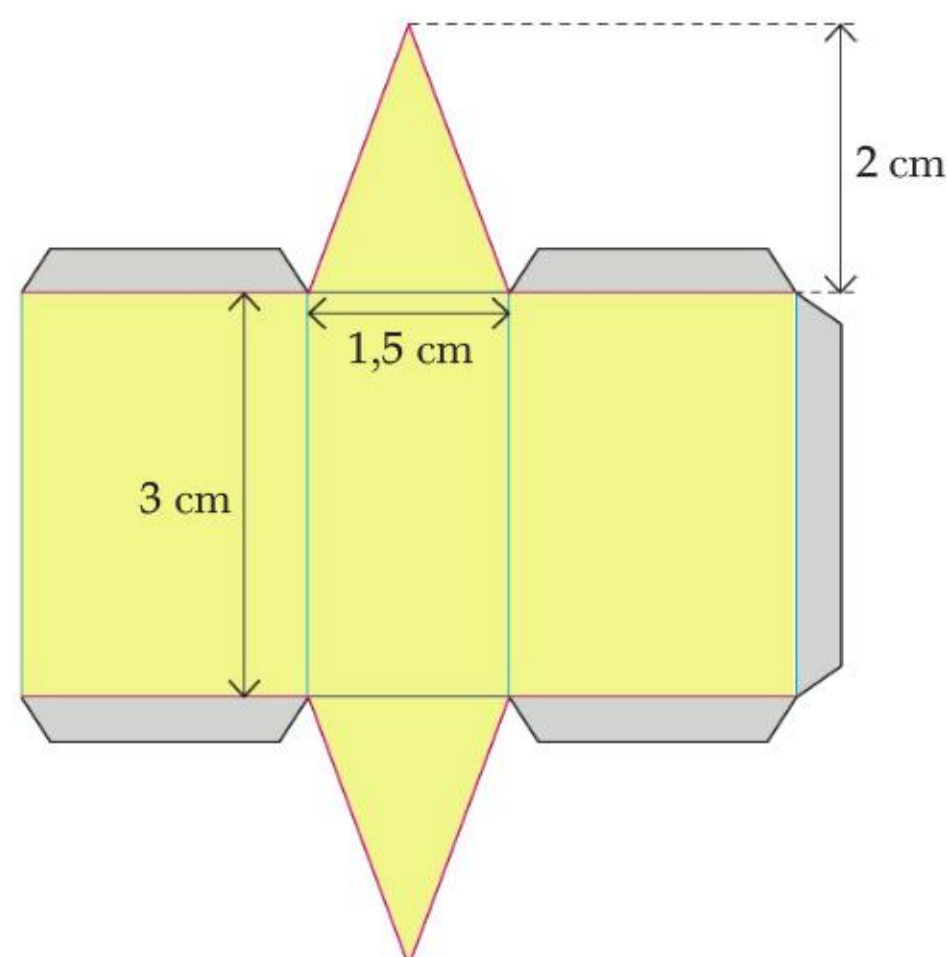
- Narysuj siatkę prostopadłościanu, którego:
 - podstawą jest prostokąt o wymiarach $3\text{ cm} \times 3,5\text{ cm}$, a krawędź boczna ma $2,5\text{ cm}$,
 - podstawą jest kwadrat o boku długości 2 cm , a krawędź boczna ma 3 cm ,
 - wymiary to $2\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 3\text{ cm}$.
- Prostopadłościan ma wymiary $12\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 10\text{ cm}$. Narysuj jego siatkę w skali $1 : 4$.

- Na sztywnej kartce narysuj poniższą siatkę prostopadłościanu w skali 3 : 1. Wytnij ją i sklej z niej model prostopadłościanu.



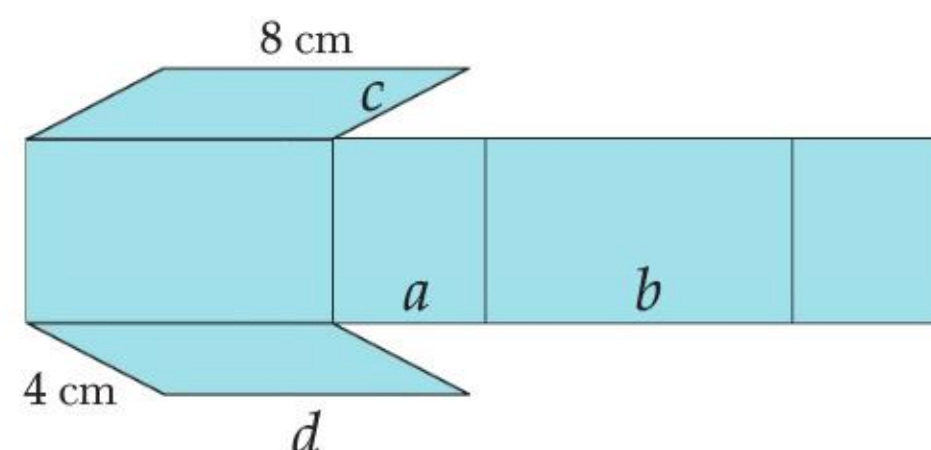
- Na kartce brystolu narysuj siatkę dowolnego prostopadłościanu. Wytnij ją i sklej. Pamiętaj o dodaniu skrzydełek umożliwiających sklejenie modelu.

- Na kartce z brystolu narysuj w rzeczywistych wymiarach przedstawioną poniżej siatkę graniastopła, która została narysowana w skali 1 : 3. Wytnij siatkę i sklej z niej model graniastopła.

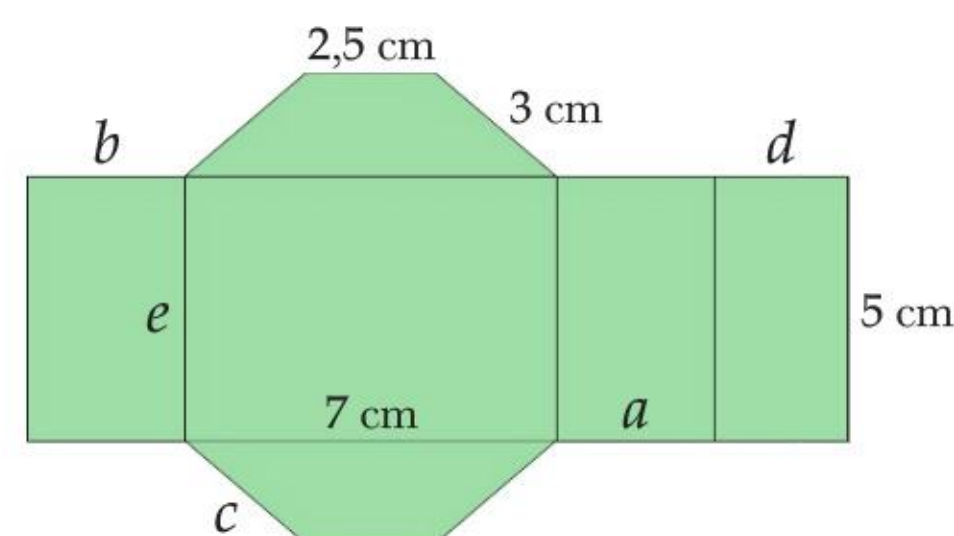


- Na rysunku przedstawiono siatkę graniastopła. Podaj długości odcinków oznaczonych literami.

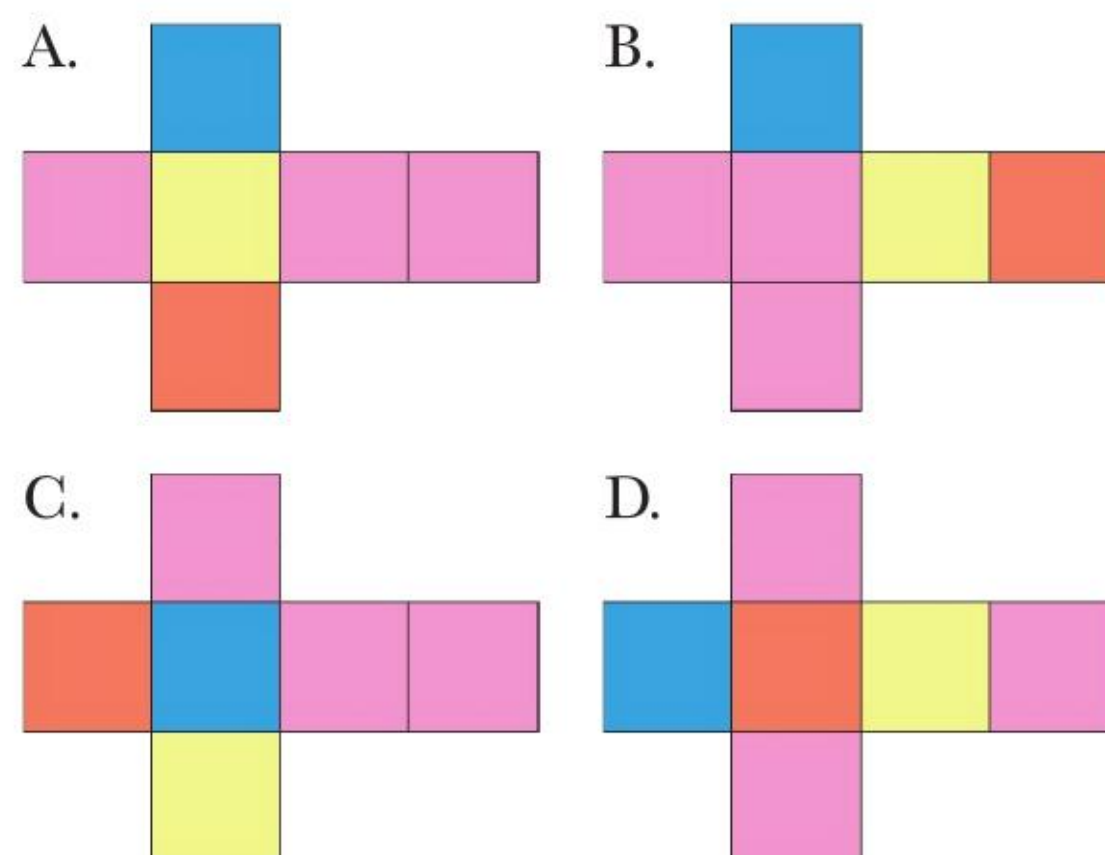
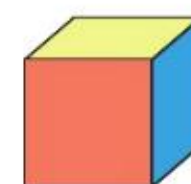
- a) Podstawą graniastopła jest równoległobok.



- b) Podstawą graniastopła jest trapez równoramienny.



- Niewidoczne ściany kostki przedstawionej na rysunku są różowe. Z której siatki można złożyć taką samą kostkę?



6.4 Pole powierzchni prostopadłościanu

Podejmij temat

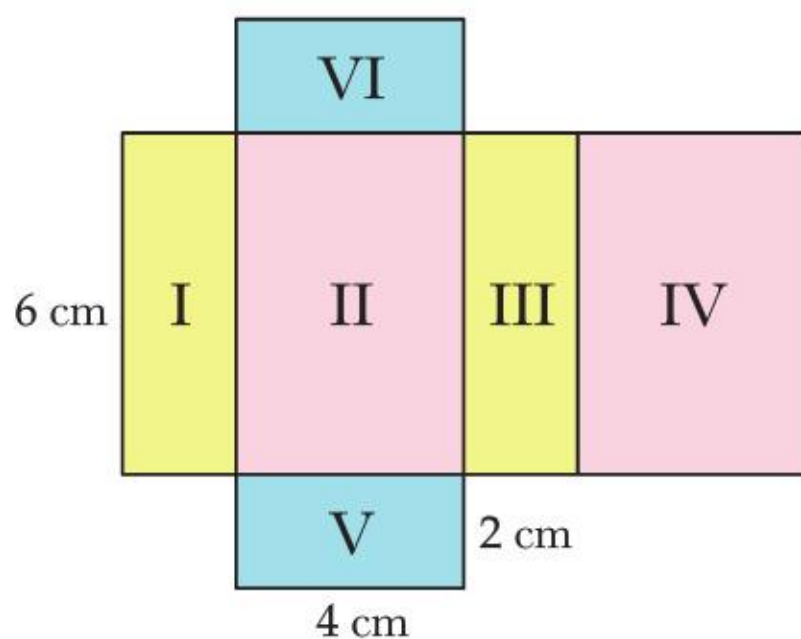
Marta ma model kostki sześciennej o krawędzi mającej 1 dm i arkusz czerwonego papieru o wymiarach 3 dm $\times$ 4 dm, z którego chce zrobić siatkę tego sześcianu.



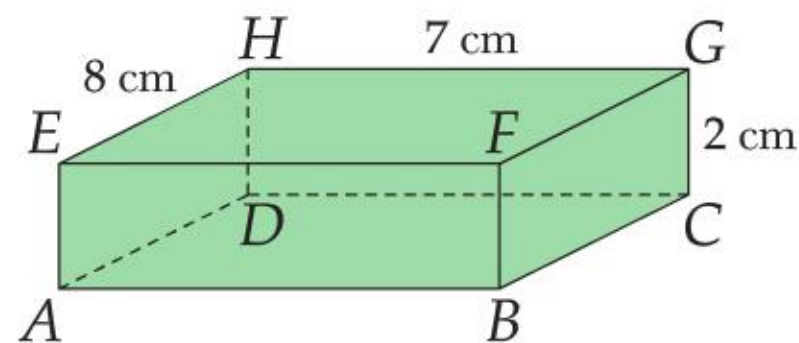
Czy, twoim zdaniem, Marcie wystarczy jeden arkusz kolorowego papieru?



1. Oblicz pola prostokątów, z których składa się siatka prostopadłościanu.



2. Oblicz pola wszystkich ścian prostopadłościanu, a następnie je dodaj. Jak to szybko obliczyć?



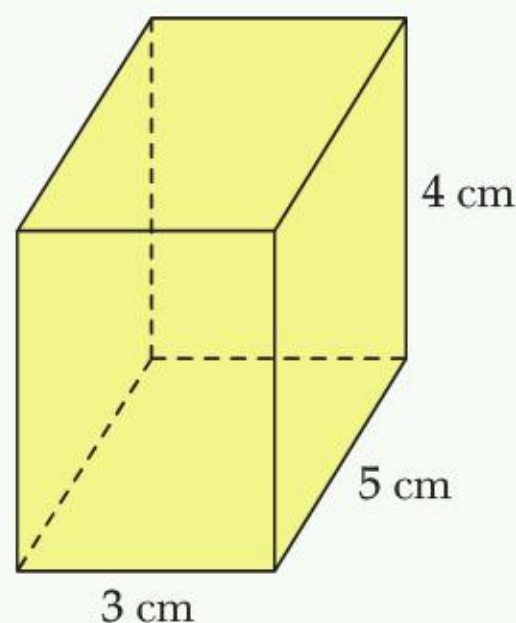
Pole powierzchni prostopadłościanu to suma pól wszystkich ścian prostopadłościanu.

Jeśli widoczna jest siatka prostopadłościanu, to bardzo łatwo można obliczyć jego pole powierzchni. Należy obliczyć pola prostokątów tworzących tę siatkę i dodać je (lub pomnożyć przez odpowiednią liczbę w przypadku jednakowych ścian).

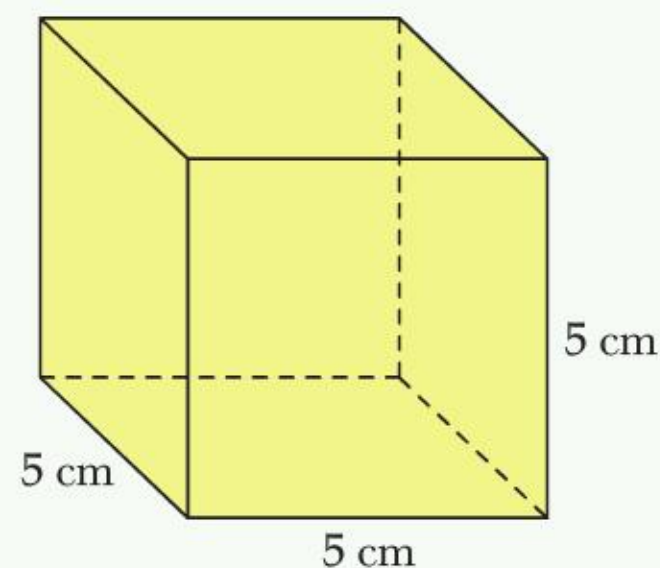
Przykład 1

Obliczmy pole powierzchni:

a) prostopadłościanu,



b) sześcianu.



a) Prostopadłościan ma 6 ścian, które są prostokątami:

- 2 ściany mają wymiary $3\text{ cm} \times 5\text{ cm}$,
- 2 ściany mają wymiary $5\text{ cm} \times 4\text{ cm}$,
- 2 ściany mają wymiary $3\text{ cm} \times 4\text{ cm}$.

Pole powierzchni prostopadłościanu obliczymy, jeśli dodamy pola jego ścian.

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot 3\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} + 2 \cdot 5\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} + 2 \cdot 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = \\ &= 2 \cdot 15\text{ cm}^2 + 2 \cdot 20\text{ cm}^2 + 2 \cdot 12\text{ cm}^2 = \\ &= 30\text{ cm}^2 + 40\text{ cm}^2 + 24\text{ cm}^2 = \\ &= 94\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Powyższe obliczenia można zapisać krócej.

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot (3\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} + 5\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} + 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}) = \\ &= 2 \cdot (15\text{ cm}^2 + 20\text{ cm}^2 + 12\text{ cm}^2) = \\ &= 2 \cdot 47\text{ cm}^2 = \\ &= 94\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Zatem pole powierzchni tego prostopadłościanu wynosi 94 cm^2 .

b) Sześcian składa się z 6 jednakowych ścian, które są kwadratami o boku długości 5 cm .

Aby obliczyć pole jednego kwadratu, mnożymy przez siebie długość jego boku: $5\text{ cm} \cdot 5\text{ cm}$. Jednakowych ścian jest 6, więc pole powierzchni sześcianu obliczamy tak:

$$P = 6 \cdot 5\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 150\text{ cm}^2.$$

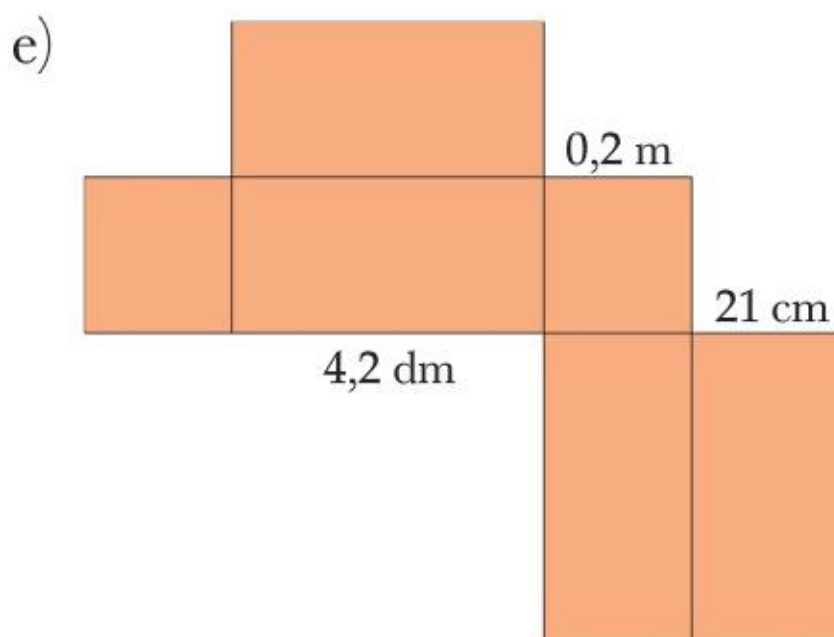
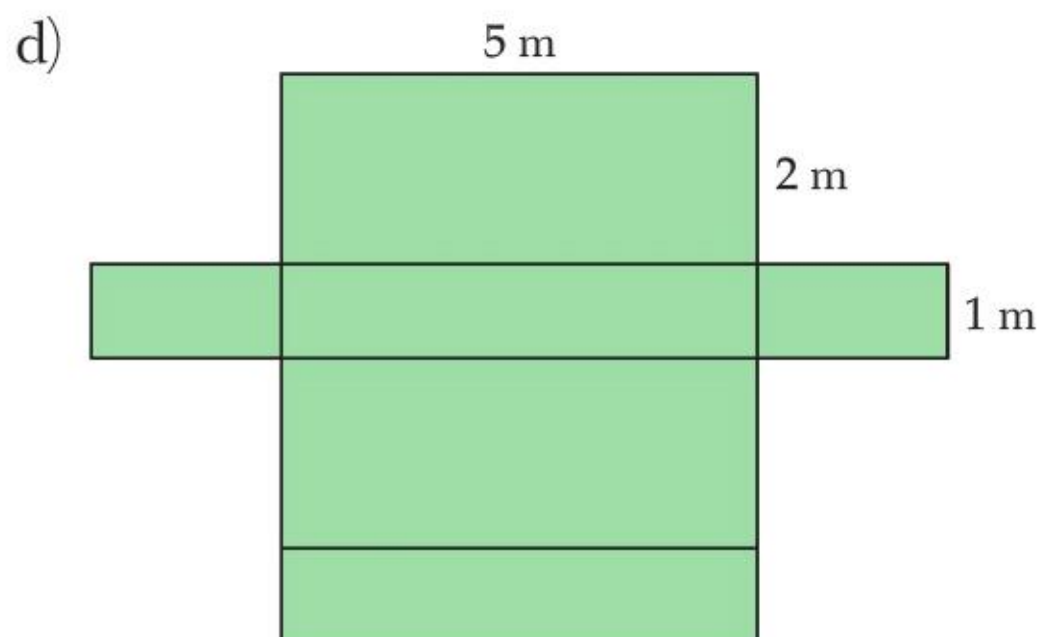
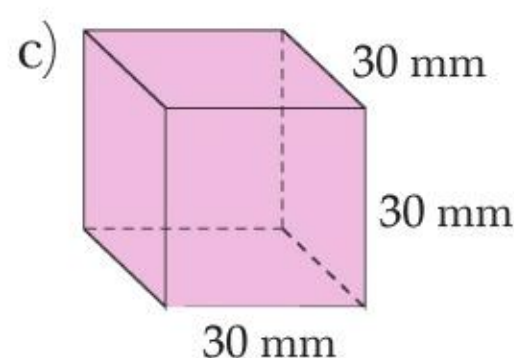
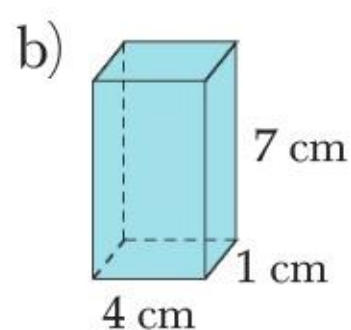
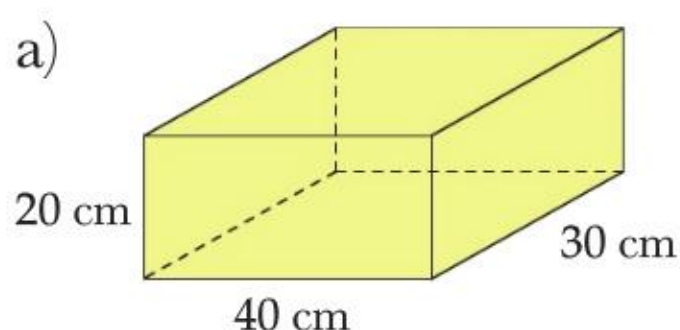
Zatem pole powierzchni tego sześcianu wynosi 150 cm^2 .

Jeśli będę chciał obliczyć pole powierzchni prostopadłościanu, to wystarczy, że obliczę pola wszystkich jego ścian i je dodam?



Tak, tylko warto pamiętać, że przeciwległe ściany mają takie same wymiary!

3. Oblicz pole powierzchni prostopadłościanu. Potrzebne dane odczytaj z rysunku.



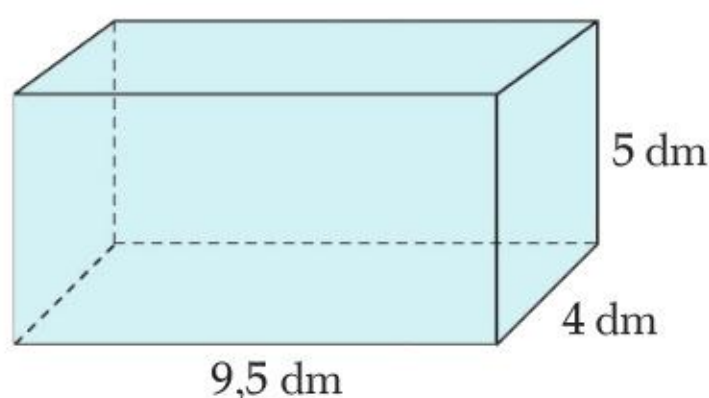
Zadania

- Oblicz pole powierzchni:
 - prostopadłościanu o krawędziach długości 3 cm, 4 cm i 12 cm,
 - prostopadłościanu o wymiarach $4\text{ m} \times 6\text{ m} \times 3\text{ m}$,
 - prostopadłościanu o wymiarach $8\text{ cm} \times 7\text{ cm} \times 2\text{ cm}$,
 - prostopadłościanu o wymiarach $5\text{ dm} \times 5\text{ dm} \times 3\text{ dm}$,
 - sześcianu o krawędzi mającej 20 cm,
 - prostopadłościanu o wymiarach $7\text{ m} \times 70\text{ dm} \times 700\text{ cm}$,
 - graniastostupa, którego podstawą jest kwadrat o boku 2 dm, a krawędź boczna ma 70 cm.

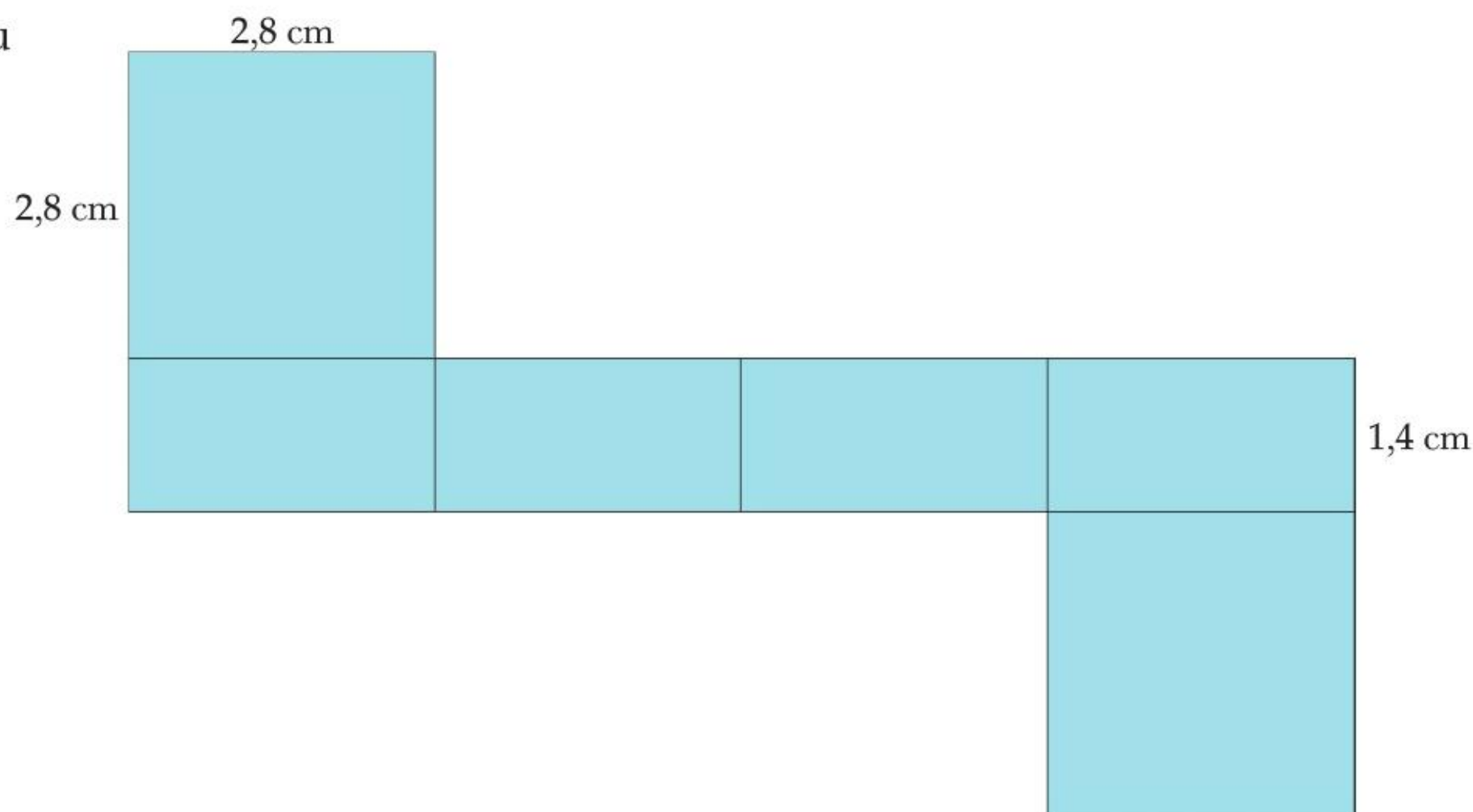
- Ile centymetrów kwadratowych tektury potrzeba na wykonanie modelu prostopadłościanu o wymiarach $15\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 5\text{ cm}$, jeżeli na zakładki należy doliczyć 65 cm^2 ?

- Suma długości krawędzi sześcianu wynosi 96 cm. Oblicz pole powierzchni tego sześcianu.

- ★ Ile decymetrów kwadratowych szklanej tafli potrzeba do zrobienia akwarium w kształcie prostopadłościanu o wymiarach widocznych na rysunku?



Siatka prostopadłościanu narysowana jest w skali 1 : 5. Oblicz rzeczywiste wymiary i pole powierzchni tego prostopadłościanu.



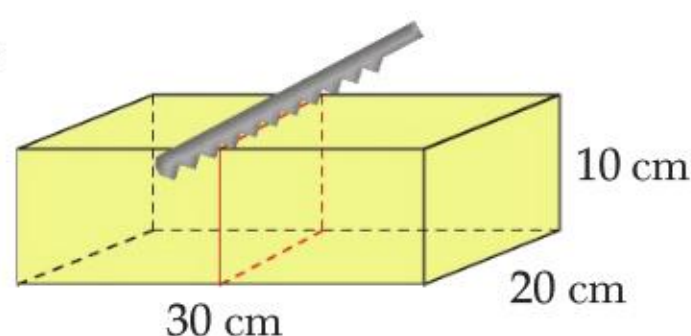
Kuchnia ma kształt prostopadłościanu. Podłoga jest prostokątem o wymiarach $4\text{ m} \times 2,5\text{ m}$, a jej wysokość to $2,8\text{ m}$. Ile pieniędzy trzeba przeznaczyć na odnowienie tej kuchni, jeśli pomalowanie 1 m^2 ścian i sufitu kosztuje 6 zł ? Powierzchnia okna i drzwi, które nie będą malowane, wynosi łącznie $5,5\text{ m}^2$.

Podłoga w pokoju ma wymiary $4,5\text{ m} \times 3,2\text{ m}$, a wysokość pokoju jest równa 3 m . Podczas remontu postanowiono ściany tego pokoju okleić tapetą. W jednej rolce jest 9 m^2 tapety.

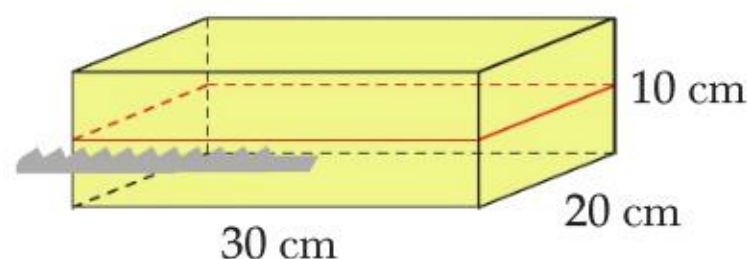
- Ile rolek tapety należy kupić, żeby wytapetować ściany tego pokoju, jeśli okna i drzwi mają łącznie 6 m^2 ?
- Ile litrowych pojemników trzeba należy kupić, aby pomalować sufit w tym pokoju, jeśli 1 l farby wystarcza na pomalowanie około 12 m^2 powierzchni?

Trzy jednakowe drewniane klocki mają kształt prostopadłościanu o wymiarach $30\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 10\text{ cm}$. Oblicz pole powierzchni jednego takiego klocka. Każdy z klocków przecięto na pół tak, jak pokazano na rysunkach. Oblicz, ile wynosi pole powierzchni połówki klocka I, ile – połówki klocka II, a ile – połówki klocka III. Jak myślisz, dlaczego w żadnym przypadku pole powierzchni połówki klocka nie jest równe połowie pola powierzchni całego klocka?

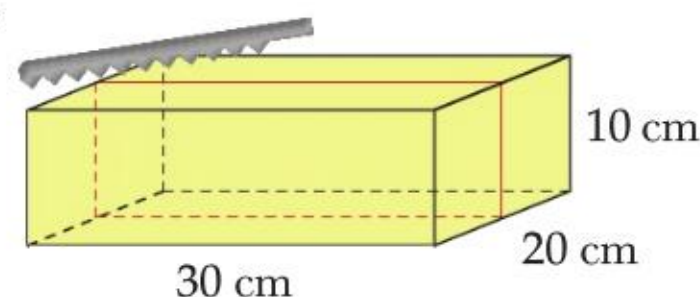
I.



II.



III.



Marta z *Podejmij temat* oprócz czerwonego papieru miała niebieski arkusz o wymiarach $3\text{ dm} \times 3\text{ dm}$ i żółty o wymiarach $2\text{ dm} \times 3\text{ dm}$. Czy mogłaby niebieskim papierem okleić swój sześciąt? A żółtym? Czy na żółtym arkuszu mogłaby narysować siatkę tego sześciąt? A na niebieskim?

MATEMATYKA W SZTUCE

Matematyka pozornie niewiele ma wspólnego ze sztuką. A jednak wielu twórców wykorzystuje w swoich pracach znajomość matematyki – znakomitym przykładem może być geometria w malarstwie czy rzeźbie.



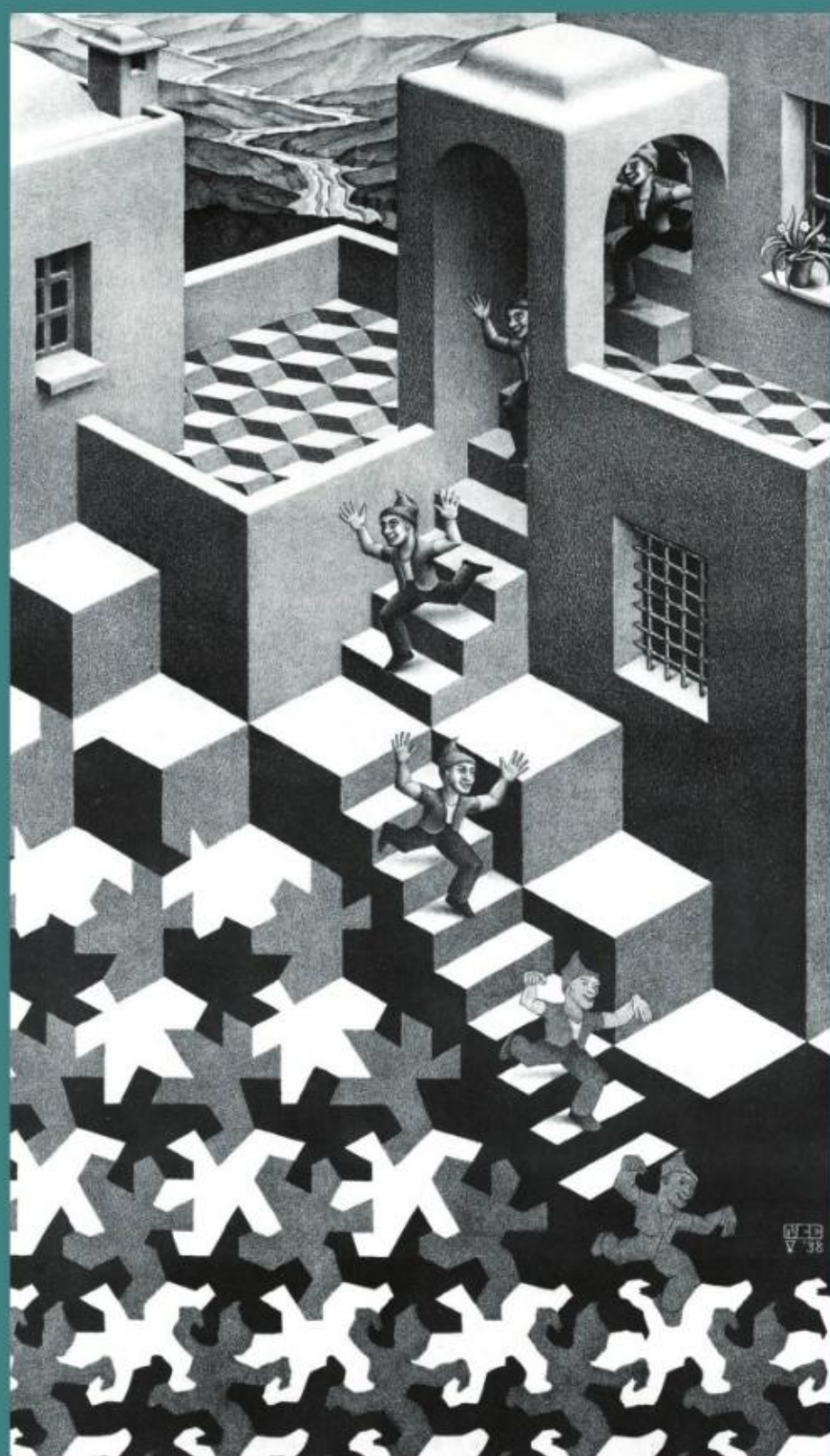
Tadeusz Makowski, *Improwizowane święto*

Na początku XX wieku rozwinął się kierunek artystyczny zwany kubizmem; jego nazwa pochodzi od łacińskiego słowa *cubus* [czyt. kubus], które oznacza kostkę. Kierunek ten charakteryzował się uproszczeniem przedstawionych elementów obrazu lub rzeźby tak, by miały one kształt figur geometrycznych. Najwybitniejszymi przedstawicielami kubizmu są Pablo Picasso [czyt. pikasso] i Georges Braque [czyt. żorż brak]. Kubizm zaznaczył się także w twórczości artystów polskich, takich jak Tadeusz Makowski czy Leon Chwistek.



Rzeźba Victora Vasarely'ego w Peczu (Węgry)

Innym kierunkiem w sztuce, który wykorzystuje formy geometryczne, jest op-art, czyli tzw. sztuka optyczna. Charakterystyczne dla tego kierunku są złudzenia optyczne tworzące pozory trójwymiarowości lub wywołujące wrażenie ruchu. Przykładem takiego dzieła może być rzeźba (na zdjęciu), której autorem jest węgierski artysta – Victor Vasarely [czyt. wiktór wazareli].



Maurits Cornelis Escher, *Cykl*

Przedstawicielem op-artu w sztuce jest także Maurits Cornelis Escher [czyt. mauric kornelis eszer]. Ten holenderski malarz i grafik w mistrzowski sposób przedstawiał geometryczne formy przestrzenne, tworząc iluzje sprzeczne z naszymi doświadczeniami wynikającymi z życia codziennego. Jego obrazy to doskonały przykład wykorzystania w sztuce piękna matematyki.

Zadanie 1

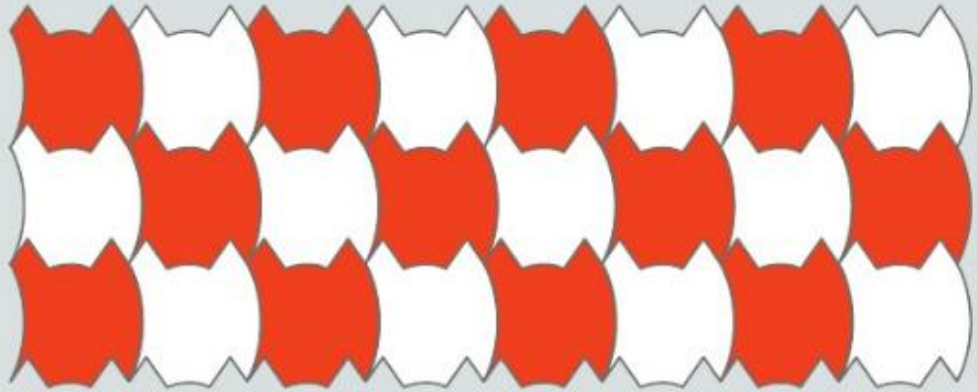
Przyjrzyj się grafice M.C. Eschera *Cykl*. Powiedz, jaki efekt osiągnął autor dzięki wykorzystaniu figur geometrycznych na podłodze tarasu.

Zadanie 2



Poszukaj w internecie informacji na temat twórczości tego artysty.

Innym obszarem zainteresowań M.C. Eschera było wypełnianie powierzchni powtarzającymi się figurami, czyli tzw. parkietaż (widoczny na dole obrazu). W jaki sposób tworzy się podobne mozaiki?

Zaczynamy od figury geometrycznej, np. kwadratu.	
Rozcinamy kwadrat i górną część przykładamy na dole. Zasada jest następująca: co odetniemy – musimy dołączyć po przeciwnej stronie. W ten sposób otrzymujemy pewną figurę.	
Możemy jeszcze urozmaicić nasz rysunek: odcinamy fragment z lewej strony i przykładamy z prawej.	
Otrzymałą figurą wypełniamy wyznaczoną powierzchnię.	

Zadanie 3

Stwórz własny parkietaż. Rozpocznij od:

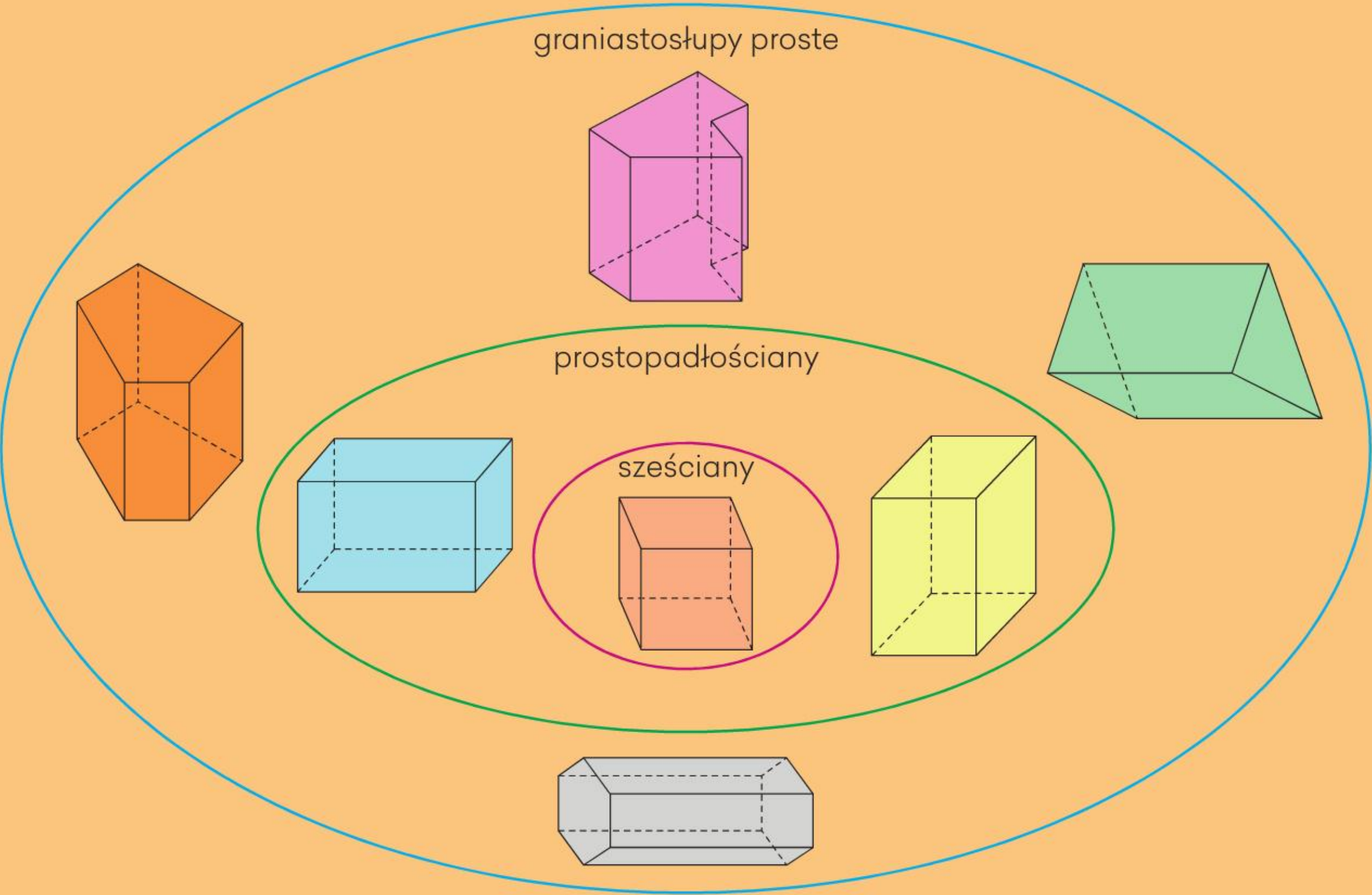
a) trójkąta równobocznego, b) równoległoboku.

Podsumowanie działu 6

Ważne pojęcia

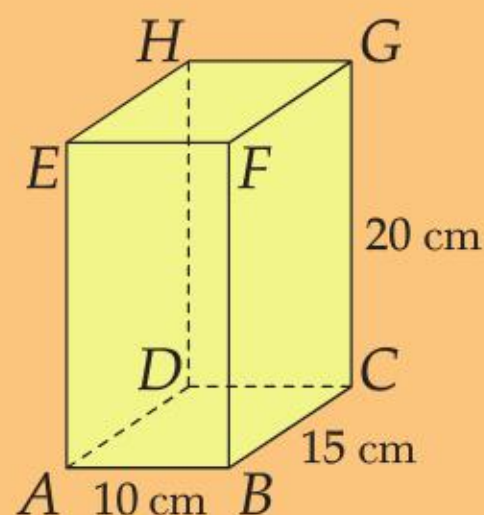
figura przestrzenna	bryła	prostopadłościan	sześcian	ściana prostopadłościanu
wierzchołek prostopadłościanu		krawędź prostopadłościanu		wymiary prostopadłościanu
graniastosłup prosty	ściana graniastosłupa	podstawa graniastosłupa		ściana boczna graniastosłupa
krawędź graniastosłupa		krawędź podstawy graniastosłupa		krawędź boczna graniastosłupa
wierzchołek graniastosłupa		siatka graniastosłupa		siatka prostopadłościanu
siatka sześciangu		pole powierzchni prostopadłościanu		pole powierzchni sześciangu

Zależności między graniastosłupami



Czy już umiesz?

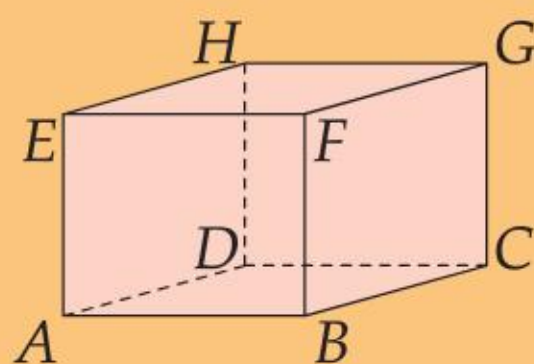
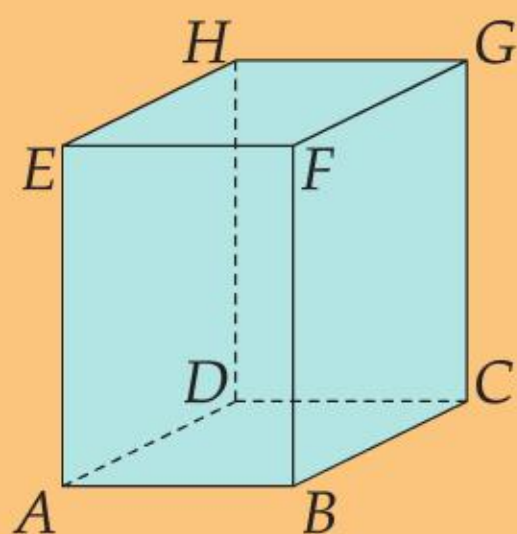
- 1 Podaj długości krawędzi AD , HG i AE prostopadłościanu przedstawionego na rysunku.



- 2 Wymień te krawędzie narysowanego prostopadłościanu, które mają taką samą długość jak:

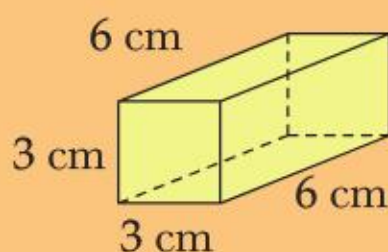
a) odcinek AE ,

b) krawędź AD .

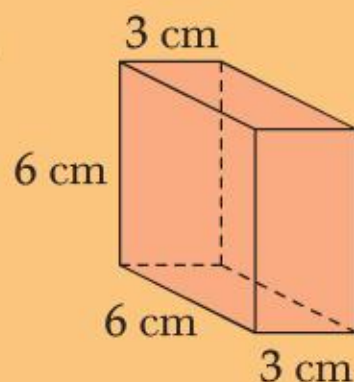


- 3 Trzy z poniższych prostopadłościanów mają jednakowe wymiary, a jeden – inne. Który?

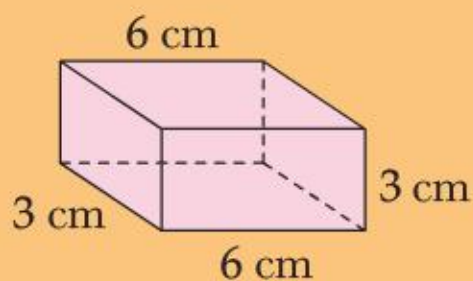
A.



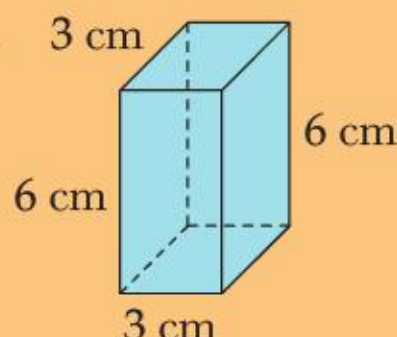
B.



C.



D.



- 4 Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu jest równa 36 dm. Ile wynosi długość jednej krawędzi tego sześcianu?

A. 60 cm

B. 40 cm

C. 90 cm

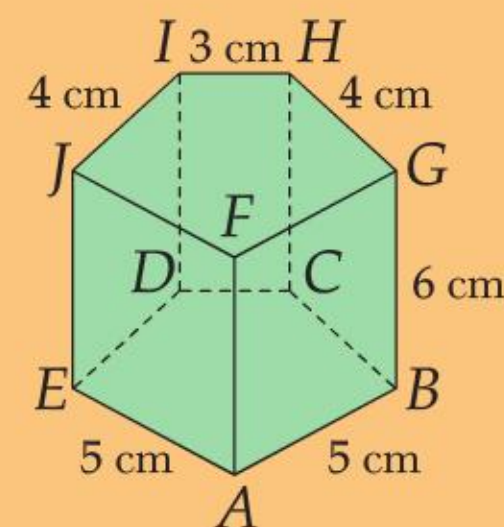
D. 30 cm

- 5 Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

- a) Prostopadłościan jest graniastostupem, który ma 4 ściany boczne i 1 podstawę.
b) Każdy prostopadłościan ma 6 ścian.
c) Prostopadłościan ma 10 krawędzi i 8 wierzchołków.
d) Każdy graniastostup ma 12 wierzchołków.

- 6 Odpowiedz na pytania dotyczące graniastostupa przedstawionego na rysunku.

- a) Które krawędzie mają długość 5 cm, a które 6 cm?
b) Które ściany mają wymiary 4 cm $\times$ 6 cm?
c) Które krawędzie mają długość równą długości krawędzi DC ?
d) Jaki wielokąt jest podstawą tego graniastostupa?



- 7 Ile wynosi suma długości wszystkich krawędzi graniastostupa z poprzedniego zadania?

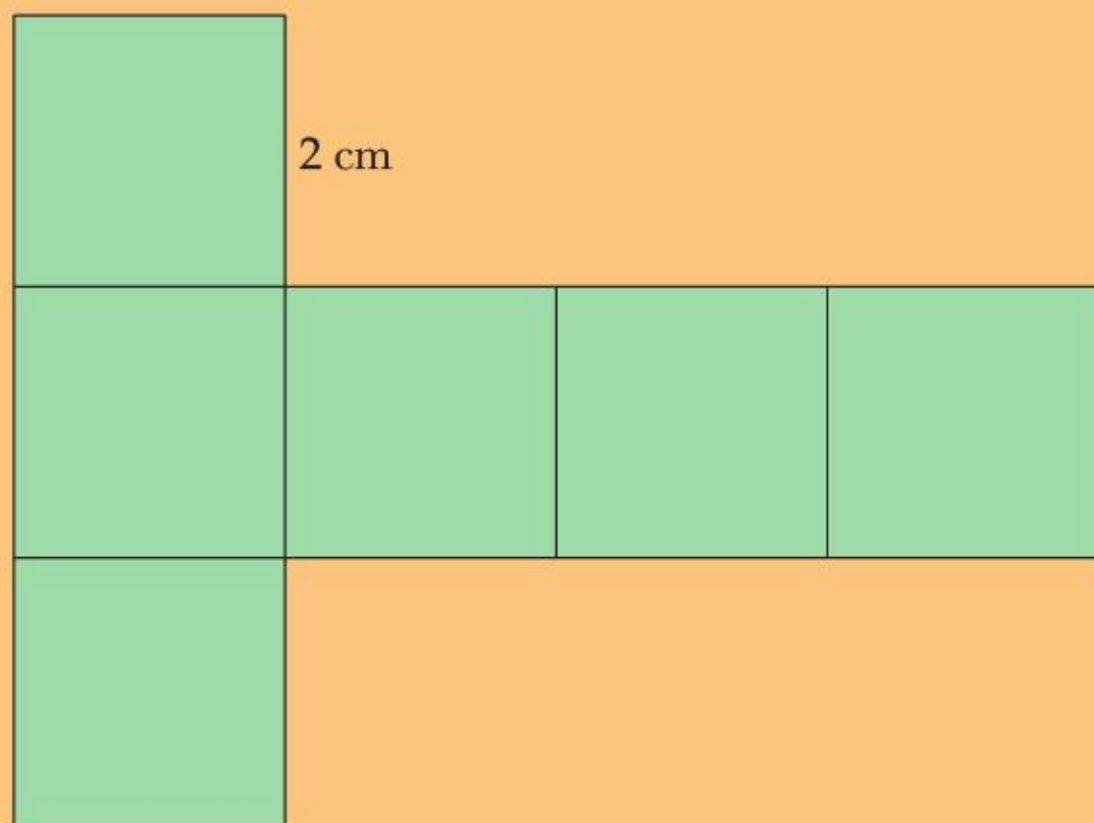
A. 98 cm

B. 96 cm

C. 72 cm

D. 100 cm

- 8 Siatka sześcianu na rysunku poniżej została narysowana w skali 1 : 2. Ile wynosi suma długości wszystkich krawędzi rzeczywistego sześcianu?

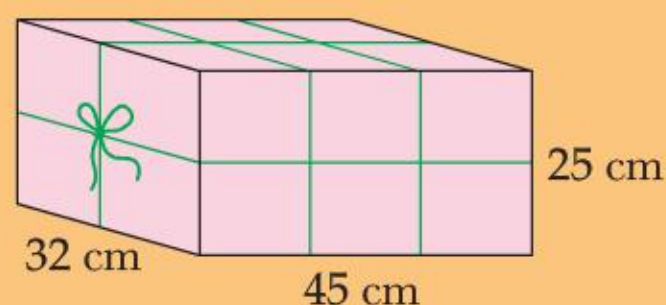


- A. 48 cm B. 70 cm
C. 12 cm D. 54 cm

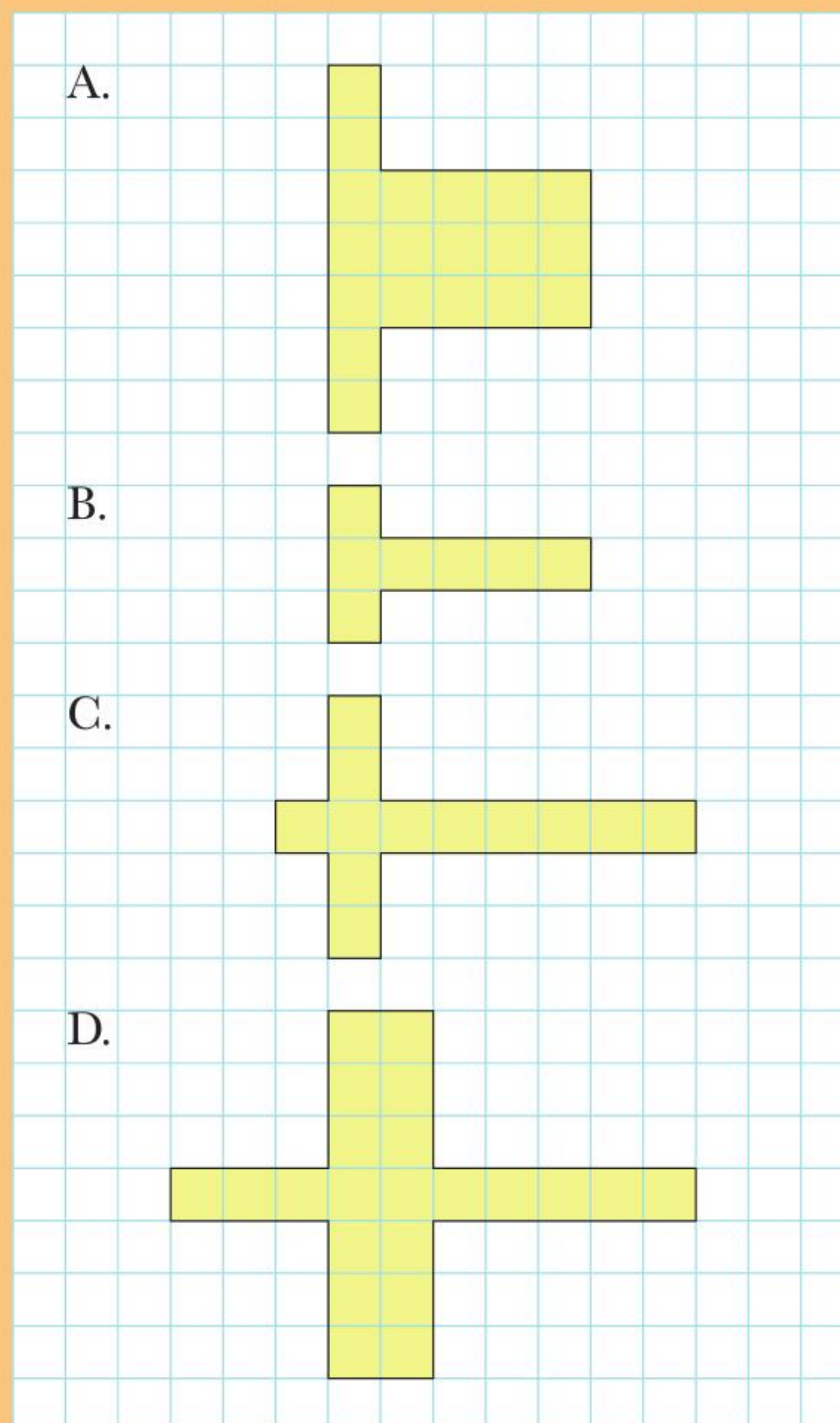
- 9 Akwarium ma kształt prostopadłościanu o wymiarach $90\text{ cm} \times 80\text{ cm} \times 70\text{ cm}$. Narysuj siatkę tego prostopadłościanu w skali 1 : 50.

- 10 Siatka prostopadłościanu została narysowana w skali 1 : 3. Gdyby z tej siatki złożyć prostopadłościan, miałby on wymiary $80\text{ mm} \times 30\text{ mm} \times 50\text{ mm}$. Oblicz sumę długości krawędzi wyjściowego prostopadłościanu.

- 11 Ile centymetrów wstążki należy przygotować, żeby prezent zapakowany w pudełko o kształcie prostopadłościanu przewiązać w sposób pokazany na rysunku? Przyjmij, że na zawiązanie kokardki trzeba dodać 0,5 m wstążki.



- 12 Który wielokąt może być siatką graniastosłupa?



- 13 Mały sześcian ma krawędź długości 3 cm. Krawędź dużego sześcianu jest cztery razy dłuższa. Ile razy pole powierzchni dużego sześcianu jest większe od pola powierzchni małego sześcianu?
- 14 Ile różnych prostopadłościanów można utworzyć, jeśli sklei się ze sobą 8 jednakowych sześcianów o krawędzi długości 3 cm? Zapisz wymiary każdego z nich i oblicz ich pola powierzchni.

Odpowiedzi do zadań

4. Figury płaskie

- 4.1 Podstawowe figury geometryczne (s. 8)
6. łamana otwarta: 3 cm, 6 cm, 18 cm, 18 cm,
łamana zamknięta: 3 cm, 6 cm, 12 cm, 12 cm, 12 cm
- 4.2 Proste oraz odcinki prostopadłe i równoległe (s. 14)
3. $k \parallel m$ 4. $p \parallel s$
- 4.4 Rodzaje kątów (s. 22)
2. 30° 6. a) P b) P c) P d) F
- 4.5 Kąty przyległe i kąty wierzchołkowe (s. 27)
3. B 4. C 5. 6 6. $35^\circ, 145^\circ$ 7. nie 9. 75° i 105°
- 4.6 Wielokąty. Obwód wielokąta (s. 31)
3. np. 12 cm, 13,5 cm, 10 cm, 10 cm 4. C 5. D
6. 13 cm, 39 cm, 117 cm, 351 cm; *Obw.* = 520 cm
8. a) nie b) tak c) tak d) nie 9. 6 cm, 9 cm, 12 cm
10. najmniejszy ma 24°
- 4.7 Trójkąt i jego własności (s. 35)
1. 6,4 cm 2. a) tak b) nie c) tak d) nie e) nie f) tak
3. a) 140° b) 45° c) 39° 4. a) F b) F c) F d) P e) P
6. a) $700 \text{ cm} = 7 \text{ m}$ b) $770 \text{ cm} = 7,7 \text{ m}$
- 4.8 Rodzaje trójkątów (s. 39)
2. a) 70° b) 90° 3. a) rozwartokątny różnoboczny
b) nie istnieje c) ostrokątny równoramienny
5. 30° i 60° 6. a) F b) F c) P d) F e) P f) F g) F
7. 26 cm lub 31 cm
- 4.9 Konstruowanie trójkątów (s. 44)
6. najdłuższy skrócić o ponad 1 cm lub najkrótszy
wydłużyć o ponad 1 cm, lub średni wydłużyć
o ponad 1 cm 7. a) 2 b) 9 c) 4
- 4.10 Prostokąt i kwadrat (s. 48)
3. a) 16,8 cm b) 82 cm 4. a) tak b) 15,2 m
5. C 6. D 8. 21,2 m 9. $8 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$
- 4.11 Równoległobok i romb (s. 52)
5. A 6. C 7. C 8. 245 m
- 4.12 Trapez (s. 56)
4. 63 cm 7. 16 cm 8. 8,5 cm i 25,5 cm
9. a) 18,6 cm b) 24,5 cm
- 4.13 Zależności między czworokątami (s. 58)
5. D 7. a) równoległobok niebędący prostokątem
b) romb niebędący kwadratem
c) prostokąt niebędący kwadratem
- 4.14 Wielokąty w skali (s. 62)
6. a) $70 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ b) $14 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$
7. 28,8 cm; 2,1 cm; 25,6 cm; 5,8 cm; 19,8 cm

4.15 Skala na planach i mapach (s. 69)

1. a) 15 m b) 180 m c) 300 m
2. a) 20 cm b) 1 cm c) 0,4 cm
5. 20 mm, 55 mm, 3 mm

Czy już umiesz? (s. 71)

3. $\alpha = 45^\circ, \beta = 105^\circ, \gamma = 120^\circ, \delta = 135^\circ$ 5. 48° ;
rozwartokątny 8. a) 20 cm b) 9 cm c) 19,5 cm
9. a) P b) F c) F d) F e) P f) F g) P h) P i) P
10. 5 dm 11. $8 \text{ m} \times 7,5 \text{ m}$; 31 m 13. 10 cm

5. Pole wielokąta

- 5.1 Pole figury (s. 76)
2. pierwszy 3. 48
- 5.2 Jednostki pola (s. 79)
5. a) 7 cm^2 b) $5\frac{1}{4} \text{ cm}^2$ c) $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$ d) $2\frac{1}{8} \text{ cm}^2$ e) 6 cm^2
f) 9 cm^2 g) $2\frac{1}{2} \text{ cm}^2$
- 5.3 Pole prostokąta i kwadratu (s. 83)
1. 364 m^2 3. C 4. 6 m 6. 48 cm^2
7. 165 cm^2 8. nie 9. 461 cm^2 10. 5
11. 500 m^2 ; 275 m^2 ; 175 000 zł
12. 10 m^2 ; 11 m^2 ; 236,50 zł
- 5.4 Pole równoległoboku (s. 88)
3. C 4. 112 cm^2 7. a) 3 cm b) 6 dm c) 3 dm
d) 8 cm 8. A
- 5.5 Pole rombu (s. 93)
1. 2250 cm^2 2. największe – III, najmniejsze – I
4. 50 cm^2 6. 17 cm^2 i 68 cm^2 ; 4 razy
8. $P = 24 \text{ cm}^2, h = 4,8 \text{ cm}$ 9. a) 1200 cm^2 b) 12 dm^2
11. 4 dm
- 5.7 Pole trójkąta (s. 102)
1. największe – II, najmniejsze – VI 3. 70 cm^2
5. D 7. 10 cm 8. 48 cm^2
- 5.8 Pole trapezu (s. 106)
1. $7\frac{5}{6} \text{ cm}^2$ 2. 38 cm^2 3. a) $52,65 \text{ cm}^2$ b) $74,75 \text{ dm}^2$
4. D 5. 4 cm 6. C 7. A 8. 150 cm^2
- Czy już umiesz? (s. 108)
1. a) 88 cm^2 b) 320 cm^2 c) 48 cm^2 d) 16 cm^2
2. a) 200 m b) 500 3. B 4. $4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$;
powierzchnia na planie 20 cm^2 ,
w rzeczywistości 2000 m^2 5. C 8. A 9. C
11. zmniejszy się o 28 cm^2 12. b) 24 cm^2 c) $4,8 \text{ cm}$
13. B 14. a) 70 cm^2 b) $0,7 \text{ dm}^2$ 15. $10,8 \text{ cm}^2$
16. $13,5 \text{ cm}^2$ 18. B

6. Bryły

6.1 Prostopadłościan (s. 117)

6. 3 cm; 12 cm 7. 68 cm

6.2 Graniastosłup prosty (s. 122)

2. a) 102 cm b) 76 cm c) 138 cm d) 155,5 cm

4. a) P b) F c) F d) P e) F f) P

6.3 Siatki graniastosłupa (s. 130)

6. a) $a = 4$ cm, $b = 8$ cm, $c = 4$ cm, $d = 8$ cm

b) $a = 3$ cm, $b = 3$ cm, $c = 3$ cm, $d = 2,5$ cm, $e = 5$ cm

6.4 Pole powierzchni prostopadłościanu (s. 134)

2. 455 cm^2 3. 384 cm^2 4. 173 dm^2

5. $14 \text{ cm} \times 14 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$, $P = 784 \text{ cm}^2$ 6. 245,40 zł

7. a) 5 rolek b) 2 8. cały klocek – 2200 cm^2 ,

pół klocka I – 1300 cm^2 , pół klocka II – 1700 cm^2 ,

pół klocka III – 1400 cm^2

Czy już umiesz? (s. 139)

3. B 4. D 5. a) F b) P c) F d) F 7. C 8. A

10. 192 cm 11. 572 cm 12. D 13. 16 razy

14. 3 prostopadłościany

Indeks

B		P		Ś	
bok trójkąta	32	podstawa graniastosłupa	119	ściana boczna graniastosłupa	119
bryła	112	podstawa równoległoboku	86	ściana prostopadłościanu	112
F		podstawa trapezu	53	T	
figura przestrzenna	112	podstawa trójkąta	95	trapez	53
G		podstawa trójkąta		trapez prostokątny	54
graniastosłup prosty	119	równoramiennego	37	trapez równoramienny	54
J		pole	74	trójkąt	32
jednostka pola	77	pole powierzchni	132	trójkąt ostrokątny	38
K		prostopadłościanu	12	trójkąt prostokątny	38
kąt (wewnętrzny) trójkąta	32	proste pokrywające się	112	trójkąt rozwartokątny	38
kąty przyległe	24	prostopadłościan	29	trójkąt równoboczny	36
kąty wierzchołkowe	26	przekątna wielokąta		trójkąt równoramienny	36
krawędź graniastosłupa	120	R		trójkąt różnoboczny	36
krawędź prostopadłościanu	113	ramię trapezu	53	W	
N		ramię trójkąta		wierzchołek graniastosłupa	120
nierówność trójkąta	43	równoramiennego	37	wierzchołek	
O		romb	51	prostopadłościanu	113
odległość punktu od prostej	15	równoległobok	49	wierzchołek trójkąta	32
		S		wymiary prostopadłościanu	114
		siatka graniastosłupa	124	wysokość równoległoboku	86
		sześcian	115	wysokość trapezu	103
				wysokość trójkąta	95

Ilustracje

Marcin Kot (s. 136, 137), Renata Motyka (s. 64/samolot, 72, 75), Karolina Skorupska (s. 15/domek, 29, 84), Jaga Słowińska (s. 7, 10, 48, 100, 123), Katarzyna Surman-Pusz (s. 6, 15, 18, 21, 26, 28, 30, 32, 33, 36, 40, 43, 45, 46, 47, 49, 50, 52, 57, 64/papierowa mapa, papierowy plan, 67, 77, 80, 82, 85, 87, 88, 90, 91, 95, 101, 103, 104, 112, 116, 117, 119, 121, 124, 132, 133)

Wykaz dysponentów praw autorskich do obrazów i zdjęć zamieszczonych w publikacji:

Archiwum: (Tadeusz Makowski *Improwizowane święto*, s. 136); Getty Images: Kyodo News (arbuzy, s. 115); Shutterstock: akiyoko (wachlarz, s. 22), pikselstock (zegar, s. 22), ZaZa Studio (książka, s. 22), mjf99 (krokodyl, s. 22), amstockphoto (saszetka, s. 22), ILYA AKINSHIN (monitor, s. 22), Vladyslav Starozhylov (rower, s. 22), cobalt88 (budzik, s. 24), Aleksey Stemmer (żaglowiec, s. 39), SteveWoods (trójkąt ostrzegawczy, s. 39), Albertus teolog (fronton budynku, s. 39), Manfred Steinbach (proporczyk, s. 39), chrupka (koperta, s. 39), Protasov AN (klisza, s. 48), Aleks vF (walizka, s. 48), Veniamin Kraskov (klocki, s. 48), Photographee.eu (schody, s. 52), lalcreative (ogrodzenie pastwiska, s. 52), Lorant Matyas (żelazne ogrodzenie, s. 52), Virunja (siatka, s. 52), Shchus (drewniane drzwi, s. 52), PunkbarbyO (ściana, s. 52), Christian Musat (latarnia, s. 53), Yurich (okno, s. 53), maradon 333 (rower, s. 53), Drakuliren (ptaki, s. 59), guteksk7 (telefon, s. 59), Still for Style (kwiaty, s. 59), Alzay (lupa, s. 9), Tupungato (jezioro, s. 64), ThomasDeco (mapa w telefonie, s. 64), Denys Prykhodov (mapa w nawigacji w samochodzie, s. 64), Fedor Selivanov (Krzywa Wieża w Pizie, s. 85), photka (latawiec, s. 93), mrsnstudio (świeca, s. 112), Jo De Vulder (pudełko, s. 112), Katerina Pereverzeva (kostka, s. 112), Kazyeva-Dem'yanenko Svitlana (komoda, s. 112), Photobac (szafa, s. 112), Atosan (budynek, s. 112), ftohunter (kostka do gry, s. 115), Popartic (kostka Rubika, s. 115), Anna Minsk (szkatułka, s. 117); Wikipedia: (Varech, rzeźba w kształcie trójkąta, s. 37), (Bobkeenan Photography, fronton z zaznaczonym trójkątem prostokątnym, s. 39), (Zorro2212, Krzywa Wieża w Toruniu, s. 85), (Jacek Halicki, Krzywa Wieża w Ząbkowicach Śląskich, s. 85), (Tankwart, https://de.wikipedia.org/wiki/Op-Art#/media/File:Vasarely_Pecs_2009.JPG, rzeźba Victora Vasarely'ego w Peczu, s. 136); Grzegorz Wrzecionowski (książka, s. 112), (opakowanie soku, s. 112); Maurits Cornelius Escher, *Cykl* M.C. „Cykl” Eschera © 2018 The M.C. Escher Company-The Netherlands. Wszelkie prawa zastrzeżone. www.mcescher.com (s. 137)



Grupa MAC S.A.
ul. Witosza 76
25-561 Kielce

www.mac.pl

ISBN 978-83-8108-376-8



9 788381 083768
indeks 880887