

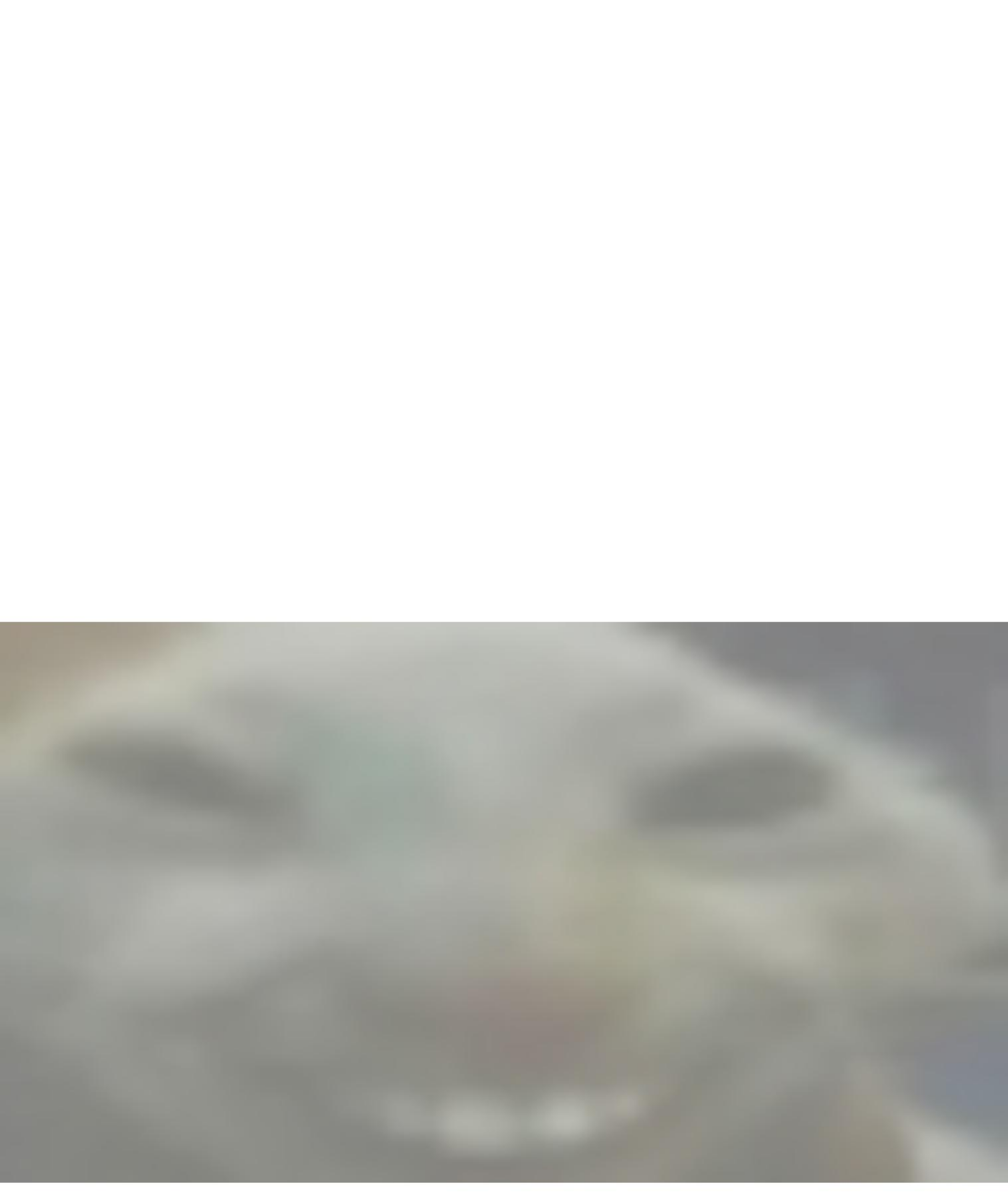
Matematyka

6

Podręcznik
część 2

Oznaczono zmiany
W PODSTAWIE
PROGRAMOWEJ
2024



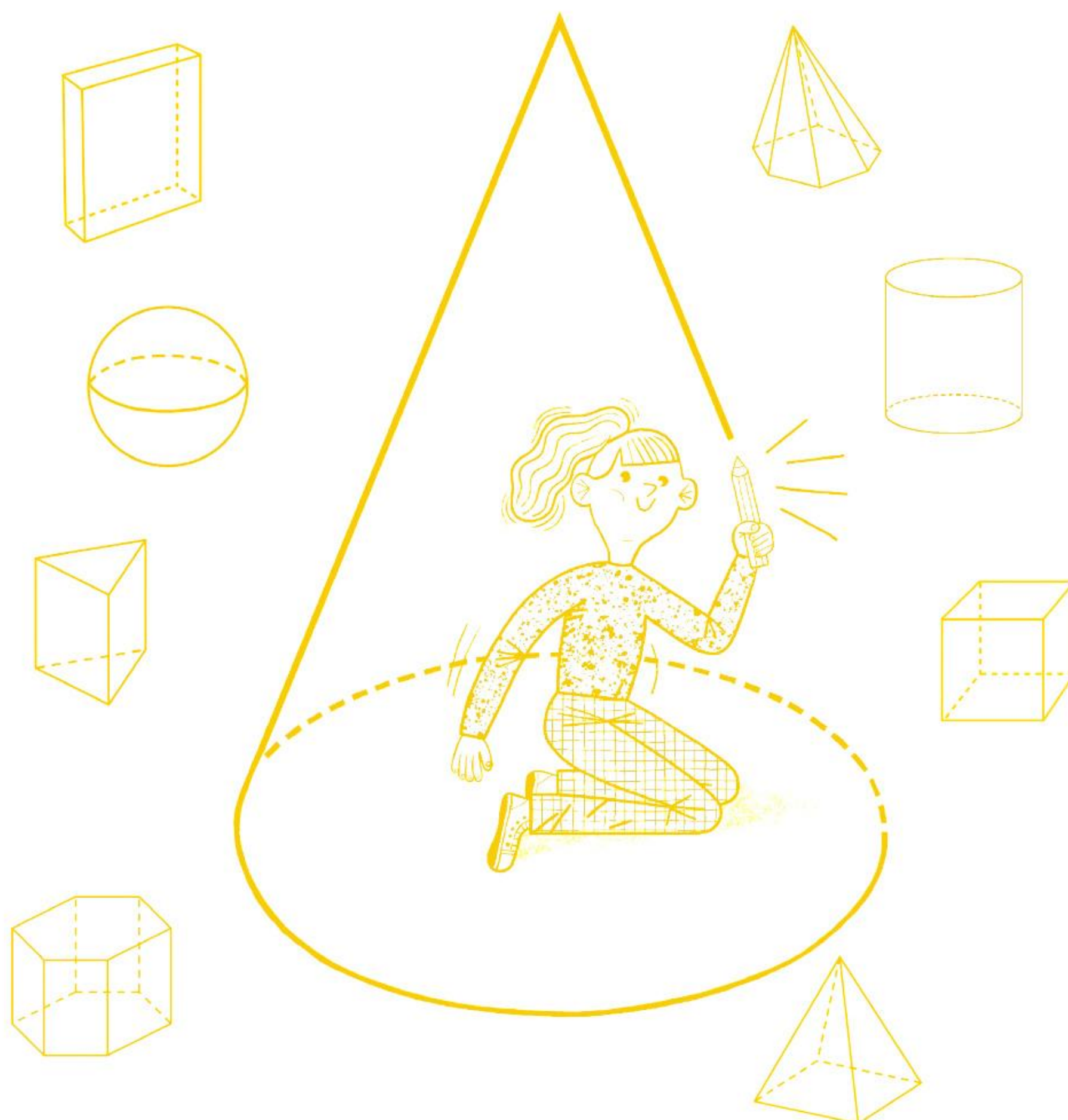


Jolanta Borzyszkowska
Maria Stolarska-Walkowiak



Matematyka

Podręcznik dla klasy szóstej szkoły podstawowej
część 2



Redaktor serii
Anna Parzęcka

Redaktor prowadzący
Ewa Kowalik

Redakcja merytoryczna
Ewa Kowalik

Redakcja językowa i korekta
Anna Kołat

Redakcja techniczna
Paweł Kowalski

Skład i łamanie
Adam Ziółkowski

Redakcja artystyczna
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska, Marcin Kot

Projekt i koncepcja artystyczna
Futu Creative / Kay Humelt i Rafał Kwiczor

Koordinacja prac graficznych
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska

Projekt okładki
Futu Creative / Kay Humelt i Rafał Kwiczor

Ilustracja na okładce i ilustracje na stronach działowych
Acapulco Studio / Agata Dudek, Małgorzata Nowak

Opracowanie kartograficzne
Carto Team

Fotoedycja
Grzegorz Wrzecionowski

Wydawca oświadcza, że dołożył wszelkich starań, aby dotrzeć do wszystkich właścicieli i dysponentów praw autorskich. Osoby, których nie udało nam się ustalić, prosimy o kontakt z wydawnictwem.

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Przestrzegaj praw, jakie im przysługują. Udostępniając książkę lub jej fragmenty, rób to wyłącznie w zakresie dozwolonego użytku, który określają przepisy prawa. Zawartość książki możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

© Grupa MAC S.A., Kielce 2019

ISBN 978-83-65463-65-4

Grupa MAC S.A.
25-561 Kielce, ul. Witosa 76
tel. 41 366 55 55, faks: 41 366 33 02
e-mail: kontakt@mac.pl; www.mac.pl



x

Treści usunięte z podstawy programowej w 2024 r.

Spis treści

4. Praktyczne zastosowania matematyki

4.1	Średnia arytmetyczna	6
4.2	Jednostki miar	9
4.3	Prędkość. Jednostki prędkości	16
4.4	Droga	21
4.5	Czas	24
4.6	Tabele, diagramy, wykresy	28
4.7	Tworzenie diagramów i wykresów	35
4.8	Procenty	42
4.9	Obliczanie procentu danej liczby	46
	Podsumowanie działu 4	49

5. Figury płaskie

5.1	Trójkąty – rodzaje i własności	56
5.2	Czworokąty – rodzaje i własności	61
5.3	Pole figury. Jednostki pola	67
5.4	Pola czworokątów	71
5.5	Pole trójkąta	75
5.6	Pola wielokątów	78
5.7	Figury osiowosymetryczne	82
	Podsumowanie działu 5	86

6. Bryły

6.1	Powtórzenie wiadomości o prostopadłościanach	92
6.2	Siatki i pole powierzchni prostopadłościanu	96
6.3	Powtórzenie wiadomości o graniastosłupach	101
6.4	Siatki graniastosłupów	105
6.5	Ostrosłupy	110
6.6	Siatki ostrosłupów	114
6.7	Walec, stożek, kula	118
6.8	Objętość. Jednostki objętości	123
6.9	Objętość prostopadłościanu	127
	Podsumowanie działu 6	131

7. Powtórzenie materiału z klas 4–6

7.1	Liczby naturalne	136
7.2	Liczby całkowite	140
7.3	Ułamki	144
7.4	Działania na ułamkach	148
7.5	Wyrażenia algebraiczne i równania	152
7.6	Praktyczne zastosowania matematyki	156
7.7	Figury płaskie	160
7.8	Wielokąty, ich własności i pola	164
7.9	Bryły	168
	Link do wiedzy	
	Koło – wynalazek wszech czasów	172
	Odpowiedzi do zadań	174
	Indeks	176

4. Praktyczne zastosowania matematyki



Obejrzyj rysunek, a następnie odpowiedz na pytania i wykonaj polecenia.



1. Jakie przyrządy pomiarowe widzisz na desce rozdzielczej samochodu? Czy potrafisz je nazwać?
2. Czy wiesz, w jakich jednostkach podajemy:
 - a) odległość,
 - b) czas przejazdu,
 - c) prędkość jazdy?



4. Odczytaj z mapy elektronicznej, ile czasu zajmuje przejazd samochodem z Krakowa do Radomia, a następnie wykonaj obliczenia samodzielnie na podstawie tradycyjnej mapy. Przyjmij, że samochód pokonuje w ciągu każdej godziny 80 km.

4.1 Średnia arytmetyczna

Podejmij temat



Czy wiesz, jaką metodą można porównać oceny dwóch (lub więcej) osób?



Jak można stwierdzić, która dziewczynka z *Podejmij temat* uzyskała lepsze wyniki w nauce? Jednym ze sposobów porównywania ocen jest obliczanie średniej arytmetycznej. Z taką średnią spotkaliśmy się już wcześniej. Teraz przypomnimy sobie i uporządkujemy te wiadomości.

Aby obliczyć **średnią arytmetyczną**:

- **dwóch** liczb, należy sumę tych liczb podzielić przez **2**,
- **trzech** liczb, należy sumę tych liczb podzielić przez **3**,
- **czterech** liczb, należy sumę tych liczb podzielić przez **4** itd.

Ogólnie: aby obliczyć średnią arytmetyczną kilku liczb, należy obliczyć ich sumę, a potem podzielić tę sumę przez liczbę jej składników.

1. Tomek i Franek to dwaj koledzy z tej samej klasy. Ich półroczne oceny są następujące:
Tomek: 6, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3 Franek: 5, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3
Który z nich uczy się lepiej? Aby to stwierdzić, oblicz średnią arytmetyczną ocen obu kolegów.
2. Oblicz średnią swoich ocen ze świadectwa z klasy piątej.

3. Oblicz średnią arytmetyczną podanych liczb.

a) 14, 26 i 29

b) 38, 19, 25 i 44

c) 14, 26 i 29

d) 6, -7, -8, 9 i -10

e) 5,3; 7,1 i 2,9

f) 0,24; 0,26; 0,01 i 0,03

g) $1\frac{2}{5}$ i $2\frac{1}{4}$

h) $2\frac{3}{5}$, $1\frac{1}{10}$ i $3\frac{1}{2}$

i) $-3, 4\frac{2}{3}, 5$ i 1,6

Średnia arytmetyczna jest bardzo często stosowana w codziennym życiu – oczywiście nie tylko do porównywania wyników w nauce. Możemy obliczać średnią płacę w pewnej firmie, średnią cenę jabłek w kilku sklepach, średni wzrost czy wagę uczniów z pewnego rocznika, średnią liczbę prawidłowych odpowiedzi po rozwiązaniu przez uczniów testu oraz wiele innych średnich arytmetycznych.

Zadania

W rodzinie państwa Kowalskich jest troje dzieci. Najstarszy, Paweł, dostaje miesięcznie 60 zł kieszonkowego, Marysia otrzymuje 30 zł, a najmłodszy, Jacek – 15 zł. Oblicz, jaką średnią kwotę otrzymują dzieci w tej rodzinie.

W 5-osobowej grupie tanecznej występują osoby które mają: 32 lata, 28 lat, 19 lat, 22 lata i 21 lat. Jaka jest średnia wieku osób występujących w tej grupie?

W zakładzie krawieckim pracują cztery panie. Ich miesięczne zarobki przedstawiono w tabeli obok. Oblicz średnie wynagrodzenie krawcowych w tym zakładzie.

krawcowa 1	2800 zł
krawcowa 2	2300 zł
krawcowa 3	2100 zł
krawcowa 4	2500 zł

Nauczyciel matematyki ustalił z uczniami, że plus przy ocenie podnosi jej wartość o $\frac{2}{5}$, natomiast minus obniża ją o 0,45.

a) Oblicz średnią arytmetyczną ocen Bartka i średnią arytmetyczną ocen Piotra.

b) Który z chłopców ma wyższą średnią? O ile wyższą?

Bartek M.
4, 3-, 3+, 2, 4-
Piotr K.
2+, 3, 3-, 4, 4-, 3+

Martyna przez tydzień notowała, ile czasu każdego dnia poświęciła na naukę (łącznie z czasem spędzanym w szkole).

Dzień tygodnia	pn.	wt.	śr.	czw.	pt.	sob.	niedz.
Czas	7 godz. 40 min	6 godz. 55 min	7 godz. 20 min	5 godz. 45 min	5 godz. 5 min	3 godz.	1 godz.

Zamień godziny na minuty i oblicz, ile średnio czasu zajmowała Martynie nauka każdego dnia. Wynik podaj w postaci wyrażenia dwumianowanego zawierającego godziny i minuty.

- Michał kupił 3 butelki wody mineralnej po 2,35 zł i 1 butelkę wody mineralnej leczniczej za 4,95 zł. Jaka jest średnia cena 1 butelki? O ile złotych wzrosłaby średnia arytmetyczna, gdyby Michał kupił 2 butelki droższej wody zamiast 1?

- Jacek jest chory i co 3 godziny notuje swoją temperaturę (mierzoną w stopniach Celsjusza). Obok znajduje się tabelka wykonana przez Jacka. Oblicz średnią temperaturę chłopca tego dnia.

7.00	10.00	13.00	16.00	19.00	22.00
38,2	37,8	37,4	38	38,4	38,8

- W klasie VIb poproszono uczniów, by podali, z ilu osób składają się ich rodziny. Nauczyciel zebrał odpowiedzi uczniów i przedstawił je w tabeli. Oblicz średnią liczbę osób w rodzinie uczniów tej klasy.

Liczba uczniów	8	12	3	1	1
Liczba osób w rodzinie ucznia	3	4	5	6	7

- W klasie VIa przeprowadzono wśród uczniów test ze znajomości znaków drogowych. Nikt nie rozwiązał testu bezbłędnie. Pięcioro uczniów popełniło po 1 błędzie, troje po 2 błędy, ośmioro po 3 błędy, czworo po 5 błędów. Ilu uczniów rozwiązywało ten test? Oblicz średnią arytmetyczną liczby błędów popełnionych przez uczniów tej klasy.

- W zespole muzycznym jest 12 osób. W tabeli przedstawiono lata, w których urodzili się członkowie zespołu. Oblicz średnią arytmetyczną ich wieku w 2020 roku.

Rok urodzenia	1998	1999	2000	2001	2002
Liczba osób	3	1	4	1	3

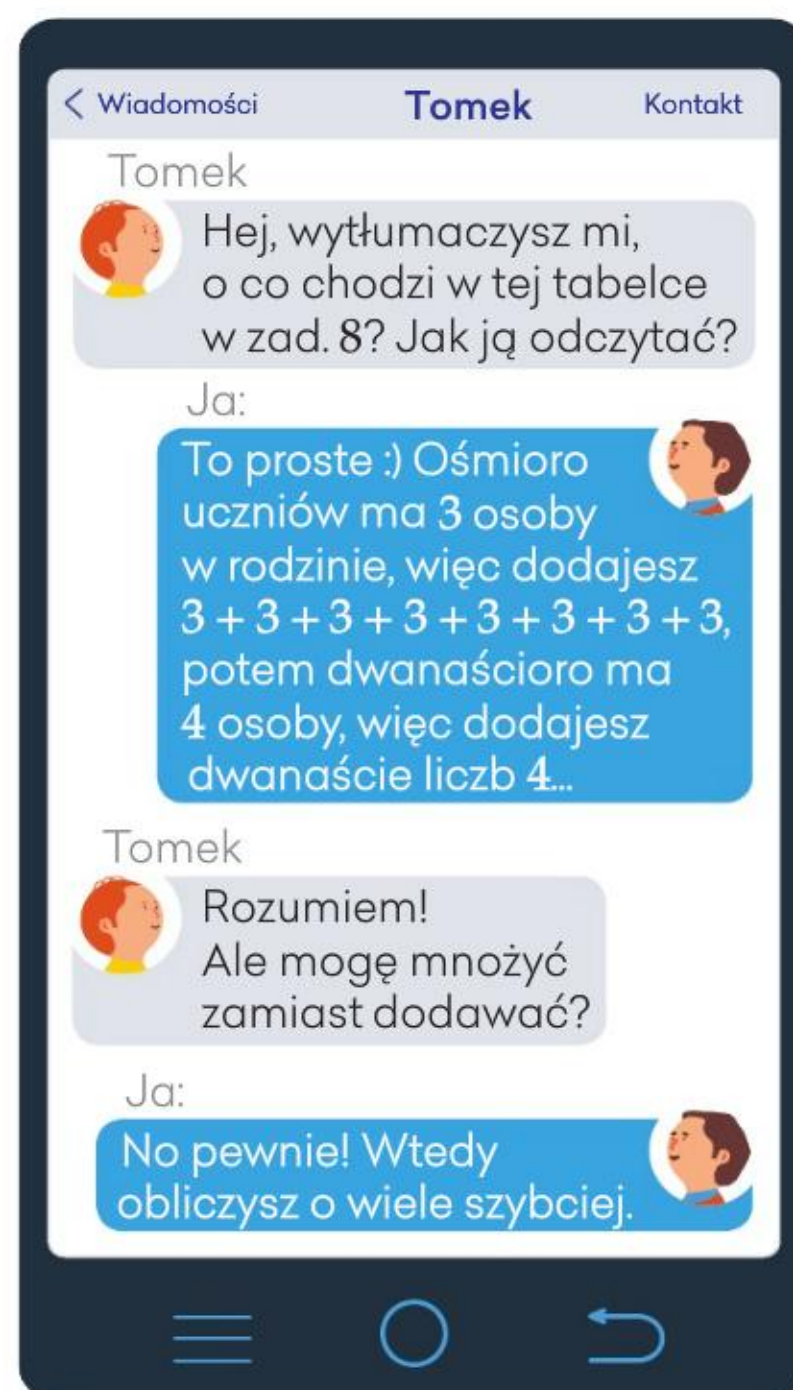
- Cztery panie policzyły zebrane w lesie grzyby. Wyniki zapisały w tabeli.

Imię	Anna	Daria	Kamila	Olga
Liczba grzybów	31	45	39	41

- Oblicz średnią arytmetyczną liczby grzybów zebranych przez wszystkie panie.
- Kto znalazł mniej grzybów niż wynosi średnia arytmetyczna?

- Średnia arytmetyczna dwóch liczb wynosi 45. Jedną z tych liczb jest 51. Jaka jest druga liczba?

- Trzej koledzy podali swój wzrost i obliczyli średnią. Wynosiła ona 1,7 m. Najwyższy z nich miał 1,75 m wzrostu, a najniższy – 1,65 m. Jaki był wzrost trzeciego z kolegów?



4.2 Jednostki miar

Podejmij temat

Coś takiego!
To podręcznik
do biologii,
a jest tu wszystko,
o czym się uczymy
na matematyce.
I długość, i masa,
a nawet czas :)



JASKÓŁKA OKNÓWKA

długość ciała ok. 13–15 cm

masa ciała 18–19 g

rozpiętość skrzydeł 26–29 cm

1 km może przebyć
w czasie ok. 1 min



WRÓBEL

długość ciała 14–15 cm

masa ciała 20–39 g

rozpiętość skrzydeł 21–21,5 cm

1 km może przebyć
w czasie ok. $1\frac{1}{3}$ min

W klasach czwartej i piątej poznaliśmy różne jednostki długości, masy i czasu. Ponieważ znajomość jednostek miar jest niezbędna w codziennym życiu, należy się nimi sprawnie posługiwać.

Jednostki długości i zależności między nimi

1 mm

1 cm = 10 mm

1 dm = 10 cm = 100 mm

1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm

1 km = 1000 m = 10 000 dm = 100 000 cm = 1 000 000 mm

1 mm = 0,1 cm = 0,01 dm = 0,001 m = 0,000001 km

1 cm = 0,1 dm = 0,01 m = 0,00001 km

1 dm = 0,1 m = 0,0001 km

1 m = 0,001 km

Więcej na temat

Podstawową jednostką długości jest metr. Inne jednostki mają nazwy utworzone przez dodanie przedrostka do wyrazu „metr”, np. **kilo**metr, **mili**metr. Takie same przedrostki występują też w nazwach jednostek masy i w wielu innych. Zawsze oznaczają to samo:

- **kilo** to **1000**-krotne **powiększenie**, np. 1 km jest 1000 razy większy od 1 m, a 1 kg jest 1000 razy większy od 1 g,
- **mili** to **1000**-krotne **zmniejszenie**, np. 1 mm jest 1000 razy mniejszy od 1 m, a 1 mg (miligram) jest 1000 razy mniejszy od 1 g.

Przypomnimy sobie postępowanie podczas zamiany jednostek długości.

Przykład 1

Zamieńmy:

a) 3,52 m na milimetry,

b) 841 mm na metry,

c) 17 dm na metry.

a) $\cdot 1000$



$$1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$$

Ponieważ $1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$,
zatem liczbę metrów należy
pomnożyć przez 1000.

Otrzymamy w ten sposób
liczbę milimetrów.

$\cdot 1000$



$$3,52 \text{ m} = 3520 \text{ mm}$$

b) $: 1000$



$$1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m}$$

Ponieważ $1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$,
zatem liczbę milimetrów należy
podzielić przez 1000.

Otrzymamy w ten sposób
liczbę metrów.

$: 1000$



$$841 \text{ mm} = 0,841 \text{ m}$$

c) $: 10$



$$1 \text{ dm} = 0,1 \text{ m}$$

Ponieważ $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$,
zatem liczbę decymetrów należy
podzielić przez 10.

Otrzymamy w ten sposób
liczbę metrów.

$: 10$



$$17 \text{ dm} = 1,7 \text{ m}$$

Analogicznie postępujemy przy zamianie innych jednostek.

1. Narysuj dwa grafy (jak w przykładzie 1) i zamień:

a) 52 m na centymetry,

b) 28 cm na decymetry,

c) 0,2 dm na milimetry.

2. Przepisz i uzupełnij. Zamiast każdego znaku zapytania wstaw odpowiednią liczbę.

a) $2 \text{ mm} = ? \text{ cm}$

$4 \text{ cm } 2 \text{ mm} = ? \text{ cm}$

b) $3 \text{ cm} = ? \text{ dm}$

$5 \text{ dm } 3 \text{ cm} = ? \text{ dm}$

c) $6 \text{ mm} = ? \text{ dm}$

$8 \text{ dm } 6 \text{ mm} = ? \text{ dm}$

d) $9 \text{ dm} = ? \text{ m}$

$2 \text{ m } 9 \text{ dm} = ? \text{ m}$

e) $7 \text{ cm} = ? \text{ m}$

$3 \text{ m } 7 \text{ cm} = ? \text{ m}$

f) $45 \text{ mm} = ? \text{ m}$

$9 \text{ m } 45 \text{ mm} = ? \text{ m}$

g) $328 \text{ m} = ? \text{ km}$

$5 \text{ km } 328 \text{ m} = ? \text{ km}$

h) $42 \text{ cm} = ? \text{ km}$

$8 \text{ km } 42 \text{ cm} = ? \text{ km}$

i) $176 \text{ dm} = ? \text{ km}$

$5 \text{ km } 176 \text{ dm} = ? \text{ km}$

3. Przeczytaj i uzupełnij. Każdy znak zapytania zastąp odpowiednim wyrazem.

- a) 1 mm jest ? razy mniejszy od 1 m.
- c) 1 cm jest 10 razy większy od 1 ?.
- e) 1 dm jest 10 razy ? od 1 m.
- g) 1 dm jest 100 razy większy od 1 ?.

- b) 1 m jest ? razy większy od 1 dm.
- d) 1 ? jest 1000 razy większy od 1 m.
- f) 1 dm jest ? razy mniejszy od 1 km.
- h) 1 km jest ? razy większy od 1 mm.

4. Zmierz potrzebne odcinki i oblicz obwód prostokąta. Wynik zapisz w milimetrach, centymetrach, decymetrach i metrach.



5. Przepisz i uzupełnij. Zamiast każdego znaku zapytania wstaw odpowiednią liczbę.

- a) $15 \text{ km} = ? \text{ m} = ? \text{ dm} = ? \text{ cm} = ? \text{ mm}$
 $0,002 \text{ km} = ? \text{ m} = ? \text{ dm} = ? \text{ cm} = ? \text{ mm}$
- c) $7 \text{ cm} = ? \text{ dm} = ? \text{ m} = ? \text{ km}$
 $520 \text{ cm} = ? \text{ dm} = ? \text{ m} = ? \text{ km}$

- b) $25 \text{ mm} = ? \text{ cm} = ? \text{ dm} = ? \text{ m} = ? \text{ km}$
 $3800 \text{ mm} = ? \text{ cm} = ? \text{ dm} = ? \text{ m} = ? \text{ km}$
- d) $16 \text{ dm} = ? \text{ m} = ? \text{ km}$
 $500 \text{ dm} = ? \text{ m} = ? \text{ km}$

6. Skala mapy wynosi 1 : 2 000 000. Jaka jest w terenie odległość między miejscowościami, które na mapie są oddalone od siebie:

- a) o 3 cm,
- b) o 42 mm.

Otrzymane wyniki zamień na kilometry.

7. Skala mapy wynosi 1 : 1 000 000. Jaka jest na tej mapie odległość między miejscowościami, które w terenie są oddalone od siebie:

- a) o 6 km,
- b) o 8500 m.

Odległości podane w kilometrach i w metrach przed wykonaniem obliczeń zapisz w centymetrach lub milimetrach.



Czy pamiętasz?

Jeżeli znamy odległość na mapie, to po pomnożeniu jej przez liczbę daną w zapisie skali otrzymamy odległość w terenie.

Jeżeli znamy odległość w terenie, to po podzieleniu jej przez liczbę daną w zapisie skali otrzymamy odległość na mapie.

Więcej na temat

Jednostką długości 1000 razy mniejszą od 1 mm jest **mikrometr** (μm), a jednostką 1 000 000 razy mniejszą od milimetra jest **nanometr** (nm).

Czy potrafisz wyobrazić sobie 1 μm ? A 1 nm?

Jednostką długości 1 000 000 razy większą od 1 m jest **megametr** (Mm).

8. Przepisz i uzupełnij. Zamiast każdego znaku zapytania wstaw odpowiednią liczbę.

- a) $3 \text{ Mm} = ? \text{ m}$
- b) $50 \text{ km} = ? \text{ Mm}$
- c) $2 \text{ dm} = ? \mu\text{m}$
- d) $4 \text{ cm} = ? \text{ nm}$
- e) $1 \text{ Mm} = ? \mu\text{m}$
- f) $1 \text{ Mm} = ? \text{ nm}$

Zajmiemy się teraz zamianą jednostek masy. Przebiega ona podobnie jak zamiana jednostek długości.

Jednostki masy i zależności między nimi

1 g
1 dag = 10 g
1 kg = 100 dag = 1000 g
1 t = 1000 kg = 100 000 dag = 1 000 000 g

1 g = 0,1 dag = 0,001 kg = 0,000001 t
1 dag = 0,01 kg = 0,00001 t
1 kg = 0,001 t

Przykład 2

Zamieńmy:

a) 4,28 kg na gramy,

b) 73 kg na tony,

c) 345 dag na kilogramy.

a) $\cdot 1000$

1 kg = 1000 g

Ponieważ 1 kg = 1000 g,
zatem liczbę kilogramów należy
pomnożyć przez 1000.

$\cdot 1000$

4,28 kg = 4280 g

Otrzymamy w ten sposób
liczbę gramów.

b) $: 1000$

1 kg = 0,001 t

Ponieważ 1 t = 1000 kg,
zatem liczbę kilogramów należy
podzielić przez 1000.

$: 1000$

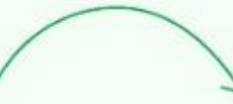
73 kg = 0,073 t

Otrzymamy w ten sposób
liczbę ton.

c) $: 100$

1 dag = 0,01 kg

Ponieważ 1 kg = 100 dag,
zatem liczbę dekagramów należy
podzielić przez 100.

$: 100$

345 dag = 3,45 kg

Otrzymamy w ten sposób
liczbę kilogramów.

Analogicznie postępujemy przy zamianie innych jednostek.

9. Przeczytaj i uzupełnij. Każdy znak zapytania zastąp odpowiednim wyrazem.

a) 1 kg jest 1000 razy mniejszy od 1 ?.

b) 1 dag jest ? razy mniejszy od 1 kg.

c) 1 kg jest 1000 razy ? od 1 g.

d) 1 ? jest 10 razy większy od 1 g.

e) 1 g jest 1 000 000 razy mniejszy od 1 ?.

f) 1 t jest 100 000 razy większa od 1 ?.

10. Przepisz i uzupełnij. Zamiast każdego znaku zapytania wstaw odpowiednią liczbę.

a) $35 \text{ dag} = ? \text{ g}$
 $0,4 \text{ dag} = ? \text{ g}$

b) $73 \text{ kg} = ? \text{ dag} = ? \text{ g}$
 $0,25 \text{ kg} = ? \text{ dag} = ? \text{ g}$

c) $11 \text{ t} = ? \text{ kg} = ? \text{ dag}$
 $0,2 \text{ t} = ? \text{ kg} = ? \text{ dag}$

d) $15 \text{ g} = ? \text{ dag} = ? \text{ kg}$
 $3200 \text{ g} = ? \text{ dag} = ? \text{ kg}$

e) $38 \text{ dag} = ? \text{ kg}$
 $2500 \text{ dag} = ? \text{ kg}$

f) $56 \text{ kg} = ? \text{ t}$
 $360 \text{ kg} = ? \text{ t}$

11. Przepisz i uzupełnij. Zamiast każdego znaku zapytania wstaw odpowiednią liczbę.

a) $2 \text{ g} = ? \text{ dag}$
 $5 \text{ dag } 2 \text{ g} = ? \text{ dag}$

b) $32 \text{ dag} = ? \text{ kg}$
 $8 \text{ kg } 32 \text{ dag} = ? \text{ kg}$

c) $84 \text{ kg} = ? \text{ t}$
 $9 \text{ t } 84 \text{ kg} = ? \text{ t}$

12. Przepisz i uzupełnij. Zamiast każdego znaku zapytania wstaw odpowiednią jednostkę.

a) $8 \text{ kg} = 800 ?$
 $8 \text{ kg} = 0,008 ?$
 $0,25 \text{ kg} = 25 ?$
 $0,25 \text{ kg} = 250 ?$

b) $70 \text{ dag} = 700 ?$
 $70 \text{ dag} = 0,7 ?$
 $9 \text{ dag} = 0,09 ?$
 $9 \text{ dag} = 90 ?$

c) $50 \text{ g} = 0,05 ?$
 $50 \text{ g} = 5 ?$
 $300 \text{ g} = 0,3 ?$
 $300 \text{ g} = 0,0003 ?$

Więcej na temat

Oprócz wymienionych jednostek masy istnieje jeszcze, używana zwłaszcza w rolnictwie, jednostka zwana **kwintalem** (q).

$1 \text{ q} = 100 \text{ kg}$, czyli $10 \text{ q} = 1 \text{ t}$

13. Zapisz w podanej jednostce.

a) 1500 kg w kwintalach

b) $0,3 \text{ q}$ w kilogramach

c) 8 q w tonach

W klasie czwartej poznaliśmy także podstawowe jednostki czasu i zajmowaliśmy się związanymi z nimi obliczeniami.

Jednostki czasu i zależności między nimi

1 s

$1 \text{ s} = \frac{1}{60} \text{ min} = \frac{1}{3600} \text{ h}$

$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$

$1 \text{ min} = \frac{1}{60} \text{ h}$

$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$



Aby zapisać jednostkę „godzina”, używaliśmy dotąd skrótu: godz. Teraz wprowadzimy inny skrót: h. Jest to międzynarodowy skrót jednostki czasu, który pochodzi z języka angielskiego, od słowa: *hour* [czyt. ałer] – godzina.

Przypomnimy teraz, w jaki sposób należy zamieniać jednostki czasu.

Przykład 3

Zamieńmy:

a) 5 h na sekundy,

b) 10 min na godziny,

c) 1200 s na godziny.

a) $\cdot 3600$
 $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$

Ponieważ $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$, zatem liczbę godzin należy pomnożyć przez 3600.

Otrzymamy w ten sposób liczbę sekund.

$\cdot 3600$
 $5 \text{ h} = 18\,000 \text{ s}$

b) $: 60$
 $1 \text{ min} = \frac{1}{60} \text{ h}$

Ponieważ $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$, zatem liczbę minut należy podzielić przez 60.

Otrzymamy w ten sposób liczbę godzin.

$: 60$
 $10 \text{ min} = \frac{10}{60} \text{ h} = \frac{1}{6} \text{ h}$

c) $: 3600$
 $1 \text{ s} = \frac{1}{3600} \text{ h}$

Ponieważ $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$, zatem liczbę sekund należy podzielić przez 3600.

Otrzymamy w ten sposób liczbę godzin.

$: 3600$
 $1200 \text{ s} = \frac{1200}{3600} \text{ h} = \frac{1}{3} \text{ h}$

14. Zamień jednostki. Zamiast każdego znaku zapytania wstaw odpowiednią liczbę.

a) $4 \text{ h} = ? \text{ min} = ? \text{ s}$
 $\frac{2}{3} \text{ h} = ? \text{ min} = ? \text{ s}$

b) $10 \text{ min} = ? \text{ s}$
 $\frac{3}{4} \text{ min} = ? \text{ s}$

c) $240 \text{ s} = ? \text{ min}$
 $15 \text{ s} = ? \text{ min}$

d) $18\,000 \text{ s} = ? \text{ h}$
 $400 \text{ s} = ? \text{ h}$

e) $15 \text{ min} = ? \text{ h}$
 $2 \text{ h } 15 \text{ min} = ? \text{ h}$

f) $20 \text{ s} = ? \text{ min}$
 $5 \text{ min } 20 \text{ s} = ? \text{ min}$

Zadania

- Która paczka jest najlżejsza, a która – najcięższa?
- Metr drutu waży 5 dag. Ile ton ważyłoby 10 km takiego drutu?



- Na budowie zużyto 12 t cementu. Kupowano go w workach po 50 kg. Ile worków cementu zużyto?
- Który sznurek jest najdłuższy, a który – najkrótszy?



23 000 mm



2,3 dm



230 cm



0,23 km

- Przyjmij, że każda zapalka ma długość 45 mm. Ile kilometrów miałyby 10 000 takich zapalek ułożonych jedna za drugą?
- Biedronka ma 6 mm długości, dżdżownica 1,5 dm, anakonda zaś 0,003 km. Ile razy dłuższa jest:
 - anakonda od biedronki,
 - dżdżownica od biedronki,
 - anakonda od dżdżownicy?
- Na okładce płyty z piosenkami turystycznymi podano czas trwania każdego utworu. Zapis 3:45 oznacza 3 min 45 s.
 - Oblicz łączny czas trwania pięciu piosenek.
 - O ile sekund różni się czas trwania najdłuższej piosenki od czasu trwania najkrótszej? Ostateczny wynik podaj w minutach i sekundach.
- Podróż pociągiem z Warszawy do Gdańska trwa według planu 6 h 17 min, natomiast z Warszawy do Katowic 4 h 36 min. O ile sekund dłużej jedzie pociąg z Warszawy do Gdańska?



- Pani Ewa i pan Przemek Kowalscy jadą na wakacje do Hiszpanii. W liniach lotniczych, którymi będą podróżować, obowiązuje limit bagażu: każdy pasażer bez dodatkowych opłat może mieć bagaż główny o masie nieprzekraczającej 20 kg (znajduje się on podczas lotu w luku bagażowym samolotu), a na pokład może zabrać bagaż podręczny ważący nie więcej niż 5 kg. Okazało się, że bagaże państwa Kowalskich ważą:
 - bagaż główny pani Ewy 20,75 kg,
 - bagaż podręczny pani Ewy 6,18 kg,
 - bagaż główny pana Przemka 18,27 kg,
 - bagaż podręczny pana Przemka 5,34 kg.
 - Oblicz, jaka jest łączna masa wszystkich bagaży państwa Kowalskich i o ile przekracza ona dopuszczalną (bez dodatkowych opłat) masę.
 - Co mogą zrobić państwo Kowalscy, aby uniknąć opłaty za nadbagaż, jeżeli:
 - są jeszcze w domu,
 - są już na lotnisku (ale bagaż główny mają jeszcze przy sobie)?

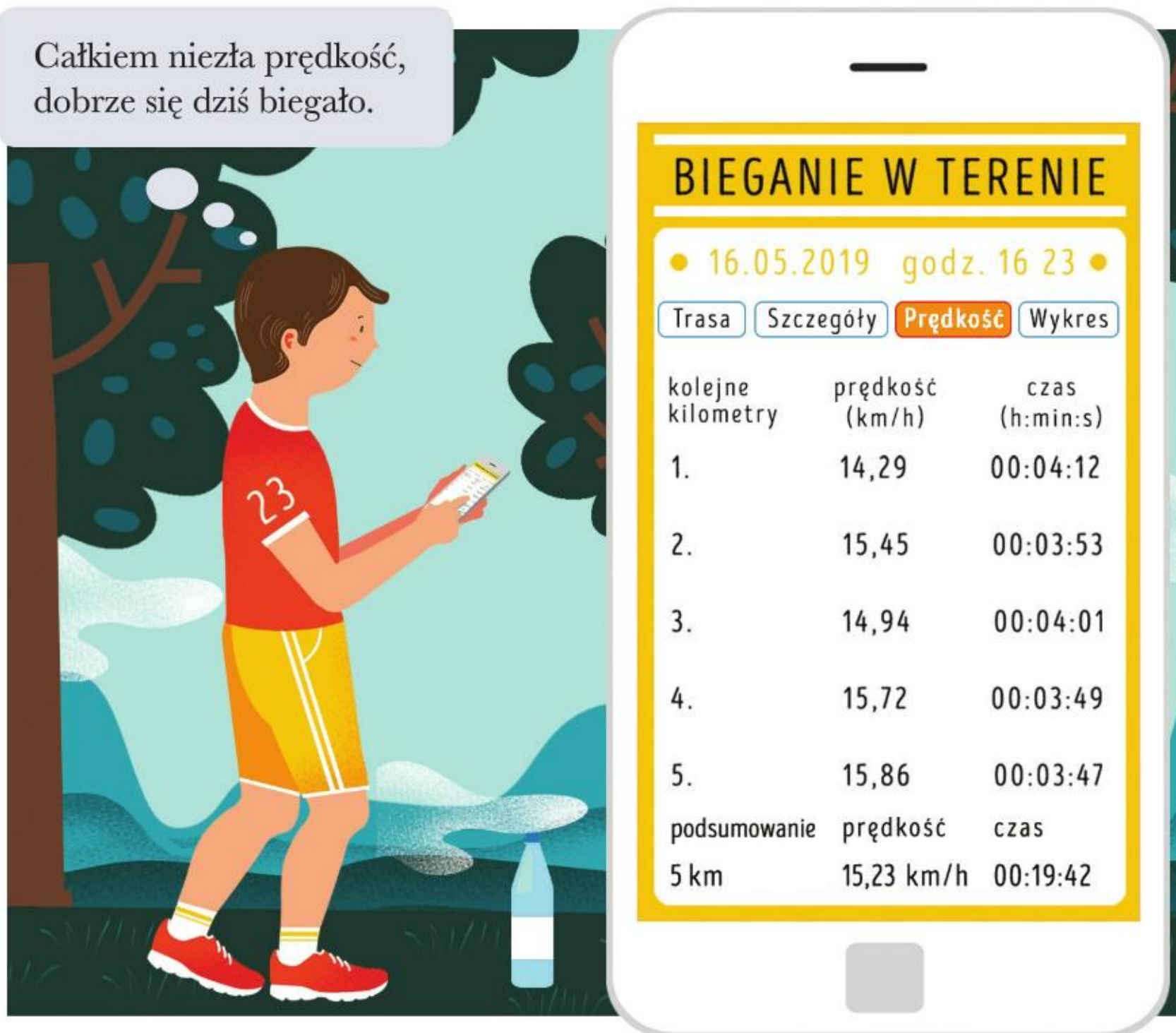
4.3 Prędkość. Jednostki prędkości

Podejmij temat



Jaki dystans pokonał biegacz? W jakim czasie? Dlaczego prędkość podana w podsumowaniu różni się od prędkości, z jaką pokonywał poszczególne kilometry?

Całkiem niezła prędkość, dobrze się dziś biegało.



Prędkość mierzymy w kilometrach na godzinę. Jest to jedna z najczęściej stosowanych jednostek prędkości.

Stosujemy zapis $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a często również: km/h.

W Australii kangur ścigał się z emu. W ciągu 1 godziny emu przebiegł 40 km, a kangur, skacząc, pokonał 75 km. Który z nich poruszał się szybciej?

Szybciej, czyli z większą prędkością, poruszał się kangur, ponieważ w ciągu 1 godziny przebył większy dystans.

Mówimy, że poruszał się on z prędkością 75 km na godzinę, co zapisujemy: $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Natomiast emu w ciągu 1 godziny przebył 40 km, czyli biegł z prędkością $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Zatem przykładowo:

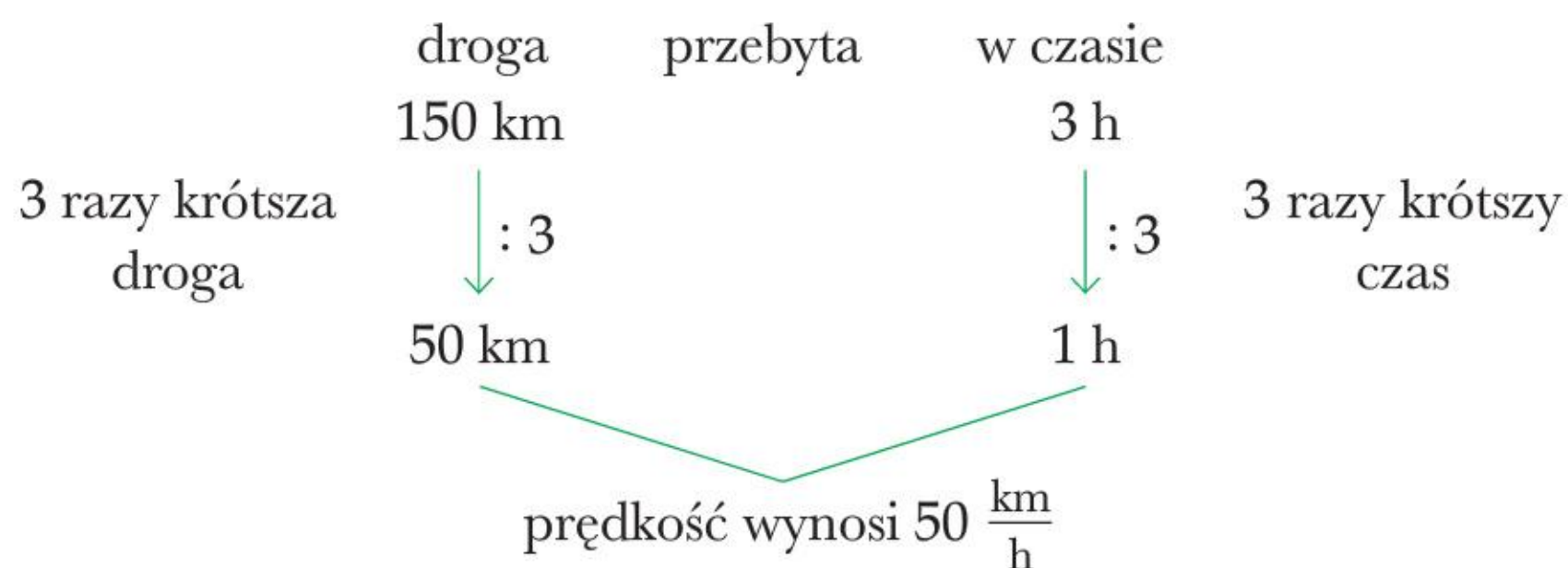
- prędkość $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ oznacza przebycie 25 km w czasie 1 h,
- prędkość $73 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ oznacza przebycie 73 km w czasie 1 h.

A z jaką prędkością jechałem, jeśli przebyłem 150 km nie w ciągu jednej, ale w ciągu trzech godzin?



Pewnie trzeba w jakiś sposób obliczyć, ile przejechałeś w czasie trzy razy krótszym.

Gdybyśmy się poruszali przez 3 godziny z niezmienną prędkością, to pokonalibyśmy drogę 3 razy dłuższą niż w przypadku, gdybyśmy poruszali się z tą samą prędkością tylko przez 1 godzinę.



Z zapisu obok wynika, że aby obliczyć prędkość, należy przebytą drogę podzielić przez czas przebycia tej drogi.

$$\text{prędkość} = \frac{\text{droga}}{\text{czas}}$$

Wzór ten często zapisujemy, stosując oznaczenia literowe:

s – droga, t – czas, v – prędkość.

$$v = \frac{s}{t}$$

Przykład 1

Obliczmy prędkość, jeżeli:

a) drogę 320 km przebyto w czasie 8 h,

b) drogę 34 km przebyto w czasie 0,5 h.

$$\text{a) prędkość} = \frac{\text{droga}}{\text{czas}} = \frac{320 \text{ km}}{8 \text{ h}} = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\text{b) prędkość} = \frac{\text{droga}}{\text{czas}} = \frac{34 \text{ km}}{0,5 \text{ h}} = 68 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Należy pamiętać, że iloraz drogi i czasu pozwala na obliczenie prędkości przeciętnej, średniej. Wiadomo, że najczęściej poruszamy się z niejednakową prędkością – raz trochę wolniej, za chwilę trochę szybciej. Prędkość średnia pozwala ocenić szybkość poruszania się w całym rozpatrywanym czasie, na całej rozpatrywanej drodze. W dalszej części podręcznika stosujemy pojęcie *prędkość* właśnie w znaczeniu *prędkość średnia*.

1. Oblicz prędkość, z jaką jechał samochód, jeżeli:

- a) drogę 52 km przebył w czasie 1 h,
- c) drogę 150 km przebył w czasie 3 h,
- e) drogę 20 km przebył w czasie $\frac{1}{3}$ h,

- b) drogę 180 km przebył w czasie 2 h,
- d) drogę 250 km przebył w czasie 4 h,
- f) drogę 135 km przebył w czasie 1,5 h.



Istnieją różne jednostki prędkości:

$\frac{\text{cm}}{\text{s}}$, $\frac{\text{cm}}{\text{min}}$, $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\frac{\text{km}}{\text{s}}$, $\frac{\text{m}}{\text{h}}$ i inne.

Najczęściej jednak prędkość mierzymy w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ i $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Tak jak w różnych jednostkach mierzy się długość (czyli drogę, odległość, dystans) i czas, także w różnych jednostkach można mierzyć prędkość.

- Ślimak w ciągu 1 min przesunął się o 5 cm, zatem prędkość ślimaka to $5 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$.
- Pocisk karabinowy w ciągu 1 s przeleciał 900 m, zatem prędkość pocisku to $900 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- Rakieta kosmiczna w ciągu 1 s przebyła 9 km, zatem prędkość rakiety to $9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

2. Oblicz w najdogodniejszych dla siebie jednostkach prędkość sportowca, który podaną drogę pokonał we wskazanym czasie.

a) 45 km, 2 h

b) 3000 m, 4 min

c) 400 m, 50 s

d) 1500 m, 16 min



Ponieważ prędkość wyrażamy w różnych jednostkach, problemem może być porównywanie dwóch prędkości. Na przykład trudno od razu powiedzieć, która prędkość jest większa: $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ czy $25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Aby to ustalić, należy zamienić jednostki tak, żeby były jednakowe w obu przypadkach.

Przykład 2

Zapiszmy prędkość:

a) $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w $\frac{\text{m}}{\text{s}}$,

b) $50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

$$\begin{aligned} \text{a) } 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} &= \\ &= \frac{54 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \\ &= \frac{54\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Taka prędkość oznacza przebycie 54 km w czasie 1 h.

W liczniku ułamka zamieniamy 54 km na 54 000 m, a w mianowniku 1 h na 3600 s.

Skracamy ułamek i wyłączamy całości.

$$b) 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} =$$

$$= \frac{50 \text{ m}}{1 \text{ s}} =$$

$$= \frac{0,05 \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 0,05 : \frac{1}{3600} \frac{\text{km}}{\text{h}} =$$

$$= 0,05 \cdot \frac{3600 \text{ km}}{1 \text{ h}} =$$

$$= 0,05 \cdot 3600 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 180 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Taka prędkość oznacza przebycie 50 m w czasie 1 s.

W liczniku ułamka zamieniamy 50 m na 0,05 km,
a w mianowniku 1 s na $\frac{1}{3600}$ h.

Dzielimy liczbę w liczniku przez liczbę w mianowniku.

3. Zapisz $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w podanej jednostce prędkości.

a) $\frac{\text{km}}{\text{min}}$

b) $\frac{\text{km}}{\text{s}}$

c) $\frac{\text{m}}{\text{h}}$

d) $\frac{\text{m}}{\text{min}}$

e) $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

4. Zapisz $40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w podanej jednostce prędkości.

a) $\frac{\text{m}}{\text{min}}$

b) $\frac{\text{m}}{\text{h}}$

c) $\frac{\text{km}}{\text{s}}$

d) $\frac{\text{km}}{\text{min}}$

e) $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Zadania

Gołąb pocztowy został wypuszczony o godzinie 13.25. Do celu odległego o 216 km doleciał o 16.25. Załóż, że leciał wzdłuż linii prostej, i oblicz, z jaką prędkością leciał.

Samochód przejechał trasę o długości 243 km w czasie 4 h 30 min. Oblicz prędkość samochodu na tej trasie. Podaj ją w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Antek mieszka w odległości 4 km od szkoły, a Maciek w odległości 6 km. Obaj dojeżdżają do szkoły na rowerach. Antek jedzie 24 min, a Maciek 30 min. Z jaką prędkością porusza się każdy z nich, jadąc do szkoły?
Odpowiedź podaj w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Na zdjęciu widoczny jest prędkościomierz samochodu pana Darka. Odczytaj z niego prędkość, z jaką jedzie pan Darek, i zapisz ją w $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ i $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.





Skorzystaj z tabeli obok i oblicz prędkości, z jakimi poruszają się mucha, ważka i motyl. Zapisz wszystkie prędkości w jednakowych jednostkach. Który owad lata najszybciej?

Owad	mucha	ważka	motyl
Droga	100 m	250 m	1000 m
Czas	40 s	20 s	5 min



Chód konia, w zależności od prędkości i sposobu stawiania nóg, nazywa się tak jak podano w tabeli obok.

Chód konia	Prędkość średnia
stęp	$6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
kłus	$15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
galop	$24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
cwał	$36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

a) Wyraż te prędkości w $\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

b) O ile szybciej od konia w galopie porusza się samochód jadący z prędkością $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$? Odpowiedź podaj w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

c) O ile wolniej od kłusującego konia porusza się pieszy idący z prędkością $0,1 \frac{\text{km}}{\text{min}}$? Odpowiedź podaj w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.



Odpowiedz na pytania i wykonaj polecenia.



a) Wiatr nad morzem wiał z prędkością $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a w głębi lądu – z prędkością $42 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Który był silniejszy?

b) Tornado to wiatr w postaci wirującej kolumny powietrza. Jego prędkość może dochodzić aż do $140 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ile to $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

c) Przeanalizuj dane z tabeli obok. Wyraż podane prędkości w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Miejsce	Największa zanotowana prędkość wiatru
Śnieżka (Karkonosze)	ok. $95 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Kasprowy Wierch (Tatry)	ok. $80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Bielsko-Biała (Śląsk)	ok. $48 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Gdańsk (Pomorze)	ok. $45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$



d) Dane w tabeli pochodzą z 2018 roku. Sprawdź w internecie, czy nie uległy zmianie. Jeśli okaże się, że tak, to oblicz, o ile zwiększyła się nowa prędkość w stosunku do dotychczasowego rekordu w danym miejscu.



Samolot przeleciał nad Warszawą 21 km w czasie 1 min 10 s. Oblicz prędkość, z jaką leciał samolot. Odpowiedź podaj w $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ oraz w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.



Odległość między Żarnowcem a Choczewem wynosi 24 km. Autobus wyjechał z Żarnowca o godzinie 12.48 i dojechał do Choczewa o 13.20. Oblicz prędkość autobusu na tym odcinku. Podaj ją w $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ oraz w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.



Rowerzysta wyjechał o 7.15 do miejscowości odległej o 21 km. Z jaką prędkością musi się poruszać, by dotrzeć do celu o podanej godzinie?

a) 9.35 b) 9.00 c) 8.45



Odległość Księżyca od Ziemi wynosi około 384 400 km. Z jaką prędkością musiałby się poruszać statek kosmiczny, aby dolecieć na Księżyc w czasie krótszym niż 12 h? Odpowiedź podaj w $\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

4.4 Droga

Podejmij temat

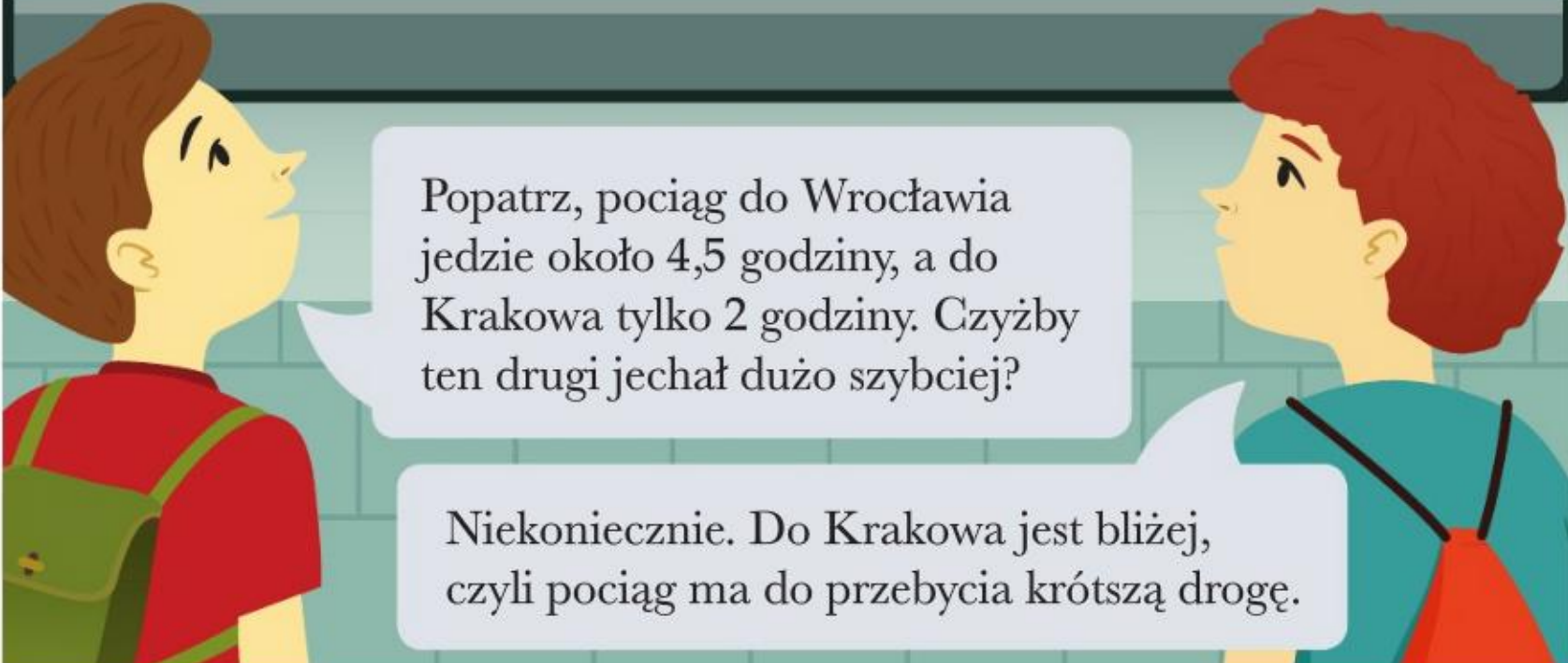


Sprawdź w internecie, jaką odległość pokonuje pociąg z Kielc do Wrocławia, a jaką – z Kielc do Krakowa.

K I E L C E



Odjazd	Kurs	Kierunek	Przyjazd do stacji docelowej	Peron
8:27	R23487	Częstochowa	10:08	2
8:50	R12854	Ostrowiec Świętokrzyski	10:41	2
8:58	IC65905	Olsztyn Główny	14:51	1
9:08	TLK33561	Wrocław Główny	13:47	4
10:24	R67054	Kraków Główny	12:23	3
10:35	R44559	Ostrowiec Świętokrzyski	12:21	2

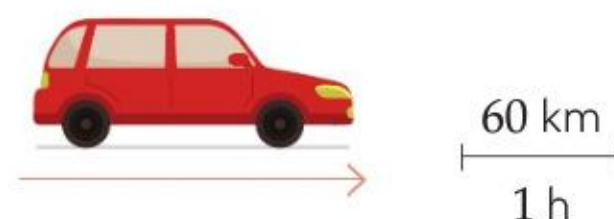


Popatrz, pociąg do Wrocławia jedzie około 4,5 godziny, a do Krakowa tylko 2 godziny. Czyżby ten drugi jechał dużo szybciej?

Niekoniecznie. Do Krakowa jest bliżej, czyli pociąg ma do przebycia krótszą drogę.

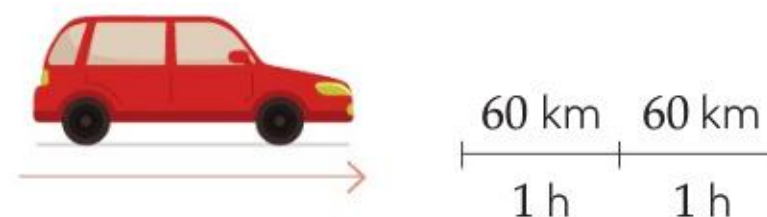
Auto jechało przez 1 godzinę z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Przejechało zatem $60 \text{ km} \cdot 1 = 60 \text{ km}$.



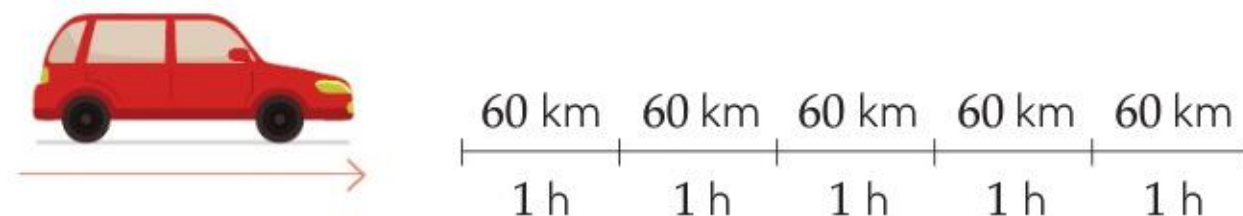
Auto jechało przez 2 godziny z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Przejechało więc $60 \text{ km} \cdot 2 = 120 \text{ km}$.



Auto jechało przez 5 godzin z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Przejechało zatem $60 \text{ km} \cdot 5 = 300 \text{ km}$.



Zauważ, że aby obliczyć drogę przebytą przez auto, wystarczyło prędkość, z jaką się poruszało, pomnożyć przez czas jazdy.

droga = prędkość · czas

Zgodnie z przyjętymi wcześniej oznaczeniami możemy zapisać to krócej.

$s = v \cdot t$

Gdy obliczamy drogę, musimy mieć czas wyrażony w takiej samej jednostce, jaka występuje w jednostce prędkości. „Dobrymi” parami jednostek są na przykład:

- h oraz $\frac{km}{h}$ – otrzymamy drogę wyrażoną w kilometrach (**km**),
- min oraz $\frac{m}{min}$ – otrzymamy drogę wyrażoną w metrach (**m**),
- s oraz $\frac{cm}{s}$ – otrzymamy drogę wyrażoną w centymetrach (**cm**).

Przykład 1

Obliczmy drogę przebytą przez:

- samolot odrzutowy poruszający się z prędkością $750 \frac{km}{h}$ przez 3 h,
- pieszego idącego z prędkością $6 \frac{km}{h}$ przez 40 min,
- rowerzystę jadącego z prędkością $5 \frac{m}{s}$ przez 2 h.

a) droga = prędkość · czas

$$\text{droga} = 750 \frac{km}{h} \cdot 3 h = 2250 km$$

b) Czas jest wyrażony w minutach, a prędkość w odniesieniu do godziny, dlatego musimy dokonać zamiany. Najprościej zrobić to na jeden z dwóch sposobów.

- Czas podany w minutach wyrażamy w godzinach:

$$40 min = \frac{40}{60} h = \frac{2}{3} h$$

Obliczamy drogę:

$$s = v \cdot t = 6 \frac{km}{h} \cdot \frac{2}{3} h = 4 km$$

- Godzinę występującą w zapisie prędkości zamieniamy na minuty:

$$1 h = 60 min$$

Obliczamy drogę:

$$s = v \cdot t = 6 \frac{km}{h} \cdot 40 min = \frac{6 km}{60 min} \cdot 40 min = 4 km$$

c) Czas jest wyrażony w godzinach, a prędkość w odniesieniu do sekundy, dlatego musimy dokonać zamiany. Najprościej zrobić to na jeden z dwóch sposobów.

- Czas podany w godzinach zamieniamy na sekundy:

$$2 h = 7200 s$$

Obliczamy drogę:

$$s = v \cdot t = 5 \frac{m}{s} \cdot 7200 s =$$

$$= 36\,000 m = 36 km$$

- Sekundę występującą w zapisie prędkości zamieniamy na godziny:

$$1 s = \frac{1}{3600} h$$

Obliczamy drogę:

$$s = v \cdot t = 5 \frac{m}{s} \cdot 2 h = \frac{5 m}{\frac{1}{3600} h} \cdot 2 h =$$

$$= 5 m \cdot \frac{3600}{1} \cdot 2 = 36\,000 m = 36 km$$

1. Oblicz, jaką drogę przejechał samochód jadący z podaną prędkością we wskazanym czasie.

a) $55 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, 3 h

b) $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $1\frac{1}{4}$ h

c) $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, 35 min

d) $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, 1 h 45 min

Zadania

 Dźwięk w powietrzu rozchodzi się z prędkością około $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, natomiast w wodzie z prędkością około $1500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz, jak daleko od miejsca uderzenia pioruna znajdował się:



a) człowiek, który usłyszał grzmot po 5 s od uderzenia pioruna w ziemię,

b) wieloryb, który usłyszał grzmot po 10 s od uderzenia pioruna w wodę.

 Pociąg przez 2 godziny jechał z prędkością $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, przez następne 3 godziny z prędkością o $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ większą, a przez kolejne pół godziny z prędkością o $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ większą od poprzedniej. Jaki dystans pokonał pociąg?

 Kasia wyszła z domu o godzinie 15.55, a do kina doszła o 16.40. Przez całą drogę szła z prędkością $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jak daleko jest z domu dziewczynki do kina?

 Rakieta kosmiczna leci z prędkością $10 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Jaką drogę pokona w podanym czasie?

a) 35 s

b) 1 min

c) kwadrans

d) 1,5 h

 Które ze zwierząt przebyło najdłuższą drogę, a które – najkrótszą: rekin pływający z prędkością $48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przez 20 min, gepard biegnący z prędkością $114 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przez 8 min czy jerzyk lecący z prędkością $180 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przez 4 min?



 Kolarz przejechał etap jazdy indywidualnej na czas z prędkością $250 \frac{\text{m}}{\text{min}}$. Jazdę rozpoczął o godzinie 9.40, a ukończył o 10.28. Jaką długość miał ten odcinek wyścigu?

 Koniec minutowej wskazówki porusza się z prędkością $1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$. Jaką drogę przebywa ta wskazówka w czasie jednego obiegu tarczy zegara?

 Marek i Jacek umówili się, że obaj wyjdą z domów o 10.00 i będą iść w swoim kierunku. Marek szedł z prędkością $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a Jacek – z prędkością $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Spotkali się o 11.30. Jaka jest odległość między domami Marka i Jacka?



4.5 Czas

Podejmij temat

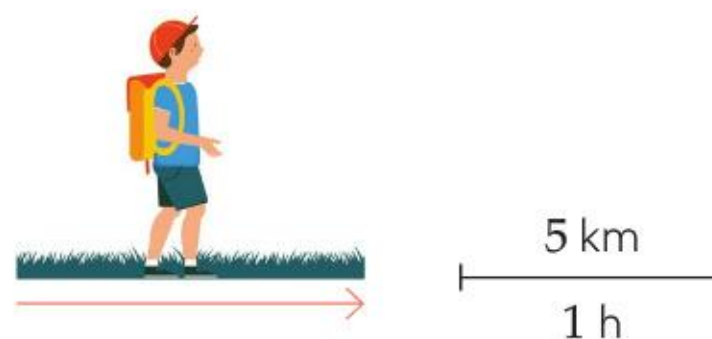
W internecie można znaleźć przelicznik czasu upływającego między dwiema dowolnymi datami.



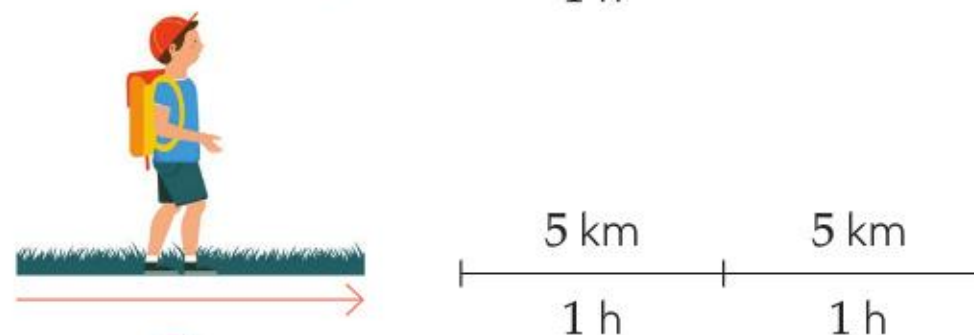
Czy wiesz, w jaki sposób zostały zamienione doby na godziny, godziny na minuty, a minuty na sekundy?

Przelicznik czasu	
Data początkowa	08.03.2020 godzina 12:15:03
Data końcowa	01.01.2021 godzina 00:00:00
Czas	9 miesięcy, 23 dni, 11 godzin, 44 minuty i 57 sekund
	298 dni, 11 godzin, 44 minuty i 57 sekund
	7163 godziny, 44 minuty i 57 sekund
	429824 minuty i 57 sekund
	25789497 sekund

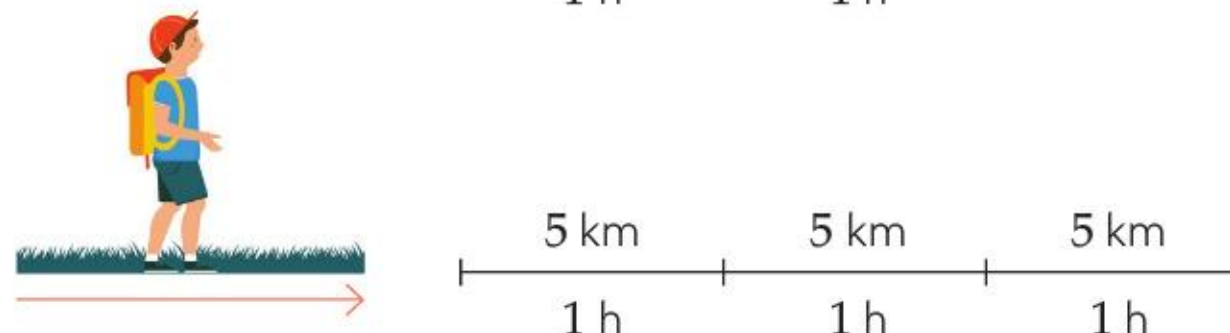
Turysta przeszedł 5 km z prędkością $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Szedł zatem 1 godzinę.



Turysta przeszedł 10 km z prędkością $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Szedł więc 2 godziny.



Turysta przeszedł 15 km z prędkością $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Szedł zatem 3 godziny.



Zauważ, że aby obliczyć, ile czasu szedł turysta, wystarczyło podzielić przebytą drogę przez prędkość, z jaką się poruszał.

$$\text{czas} = \frac{\text{droga}}{\text{prędkość}}$$

Zgodnie z przyjętymi wcześniej oznaczeniami możemy zapisać to krócej.

$$t = \frac{s}{v}$$

Gdy obliczamy czas, musimy mieć drogę wyrażoną w takiej samej jednostce, jaka występuje w jednostce prędkości. „Dobrymi” parami jednostek są na przykład:

- **km** i $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ – otrzymamy czas wyrażony w godzinach (**h**),
- **m** i $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ – otrzymamy czas wyrażony w minutach (**min**),
- **cm** i $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ – otrzymamy czas wyrażony w sekundach (**s**).

Przykład 1

Obliczmy czas:

a) jazdy rowerzysty, który przejechał 54 km z prędkością $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$,

b) potrzebny żółwiowi na przebyciu 300 m, jeżeli porusza się z prędkością $\frac{3}{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$\text{a) } t = \frac{s}{v} = \frac{54 \text{ km}}{18 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 3 \text{ h}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } t &= \frac{s}{v} = \frac{300 \text{ m}}{\frac{3}{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 300 \text{ m} : \frac{3}{10} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \\ &= 100 \cdot 300 \cdot \frac{10}{3} \text{ s} = 1000 \text{ s} \end{aligned}$$

1. Oblicz czas, w jakim samochód jadący z podaną prędkością przebył wskazaną drogę.

- a) $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, 420 km b) $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, 200 km c) $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, 50 km

2. W jakim czasie motocyklista przebył drogę 120 km, jeżeli poruszał się z podaną prędkością?

- a) $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ b) $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ c) $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

3. Turyści zwiedzają Kraków, jadąc dorożką, która porusza się z prędkością $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile czasu zajmie turystom przejechanie trasy o podanej długości?

- a) 15 km b) 0,6 km c) $1\frac{4}{5}$ km

4. Psi zaprzęg porusza się z prędkością $9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz, ile czasu potrzebuje, aby przebyć podaną drogę. Zamień otrzymaną liczbę sekund na minuty.

- a) 1080 m b) 900 m c) 3,6 km

Ciekawe!

Psy zaprzęgowe to najczęściej psy ras husky, samojed, malamut. Nie są one bardzo szybkie (biegają z prędkością około $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$), ale są za to silne i niezwykle wytrzymałe.

Natomiast najszybciej biegającymi psami są charty. Chart angielski potrafi biec z prędkością około $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Przykład 2

Obliczmy, w jakim czasie:

- a) zając poruszający się z prędkością $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ przebiegnie 3 km,
- b) kajak płynący z prędkością $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przepłynie 4500 m.

a) Droga jest wyrażona w kilometrach, a prędkość w odniesieniu do sekundy, dlatego musimy dokonać zamiany. Najprościej zrobić to na jeden z dwóch sposobów.

- Drogę podaną w kilometrach wyrażamy w metrach:

$$3 \text{ km} = 3000 \text{ m}$$

Obliczamy czas:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{3000 \text{ m}}{15 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 200 \text{ s}$$

- Prędkość podaną w metrach na sekundę wyrażamy w kilometrach na sekundę:

$$15 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,015 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Obliczamy czas:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{3 \text{ km}}{0,015 \frac{\text{km}}{\text{s}}} = 200 \text{ s}$$

b) Droga jest wyrażona w metrach, a prędkość w odniesieniu do kilometra, dlatego musimy dokonać zamiany. Najprościej zrobić to na jeden z dwóch sposobów.

- Drogę podaną w metrach wyrażamy w kilometrach:

$$4500 \text{ m} = 4,5 \text{ km}$$

Obliczamy czas:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{4,5 \text{ km}}{15 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{3}{10} \text{ h} = \frac{18}{60} \text{ h} = 18 \text{ min}$$

- Prędkość podaną w kilometrach na godzinę wyrażamy w metrach na godzinę:

$$15 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15\,000 \frac{\text{m}}{\text{h}}$$

Obliczamy czas:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{4500 \text{ m}}{15\,000 \frac{\text{m}}{\text{h}}} = \frac{3}{10} \text{ h} = \frac{18}{60} \text{ h} = 18 \text{ min}$$

5. a) Oblicz, w jakim czasie samolot lecący z prędkością $300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ pokona 90 km.
- b) Ile czasu potrzebuje ślimak pełzający z prędkością $20 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$, aby przebyć 0,5 m?
- c) Ile czasu zajmie jaskółce lecącej z prędkością $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przebycie 1200 m?
6. Podczas szkolnego Dnia Sportu jedną z dyscyplin był bieg z jajkiem na łyżeczce do tyczki oddalonej od miejsca startu o 30 m, i z powrotem. Najlepszym w tej dyscyplinie okazał się Antek, który pokonał całą trasę z prędkością $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- a) Ile czasu zajął ten bieg Antkowi?
- b) Ile czasu trwałby bieg Antka, gdyby trasę pokonywał o $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ wolniej?

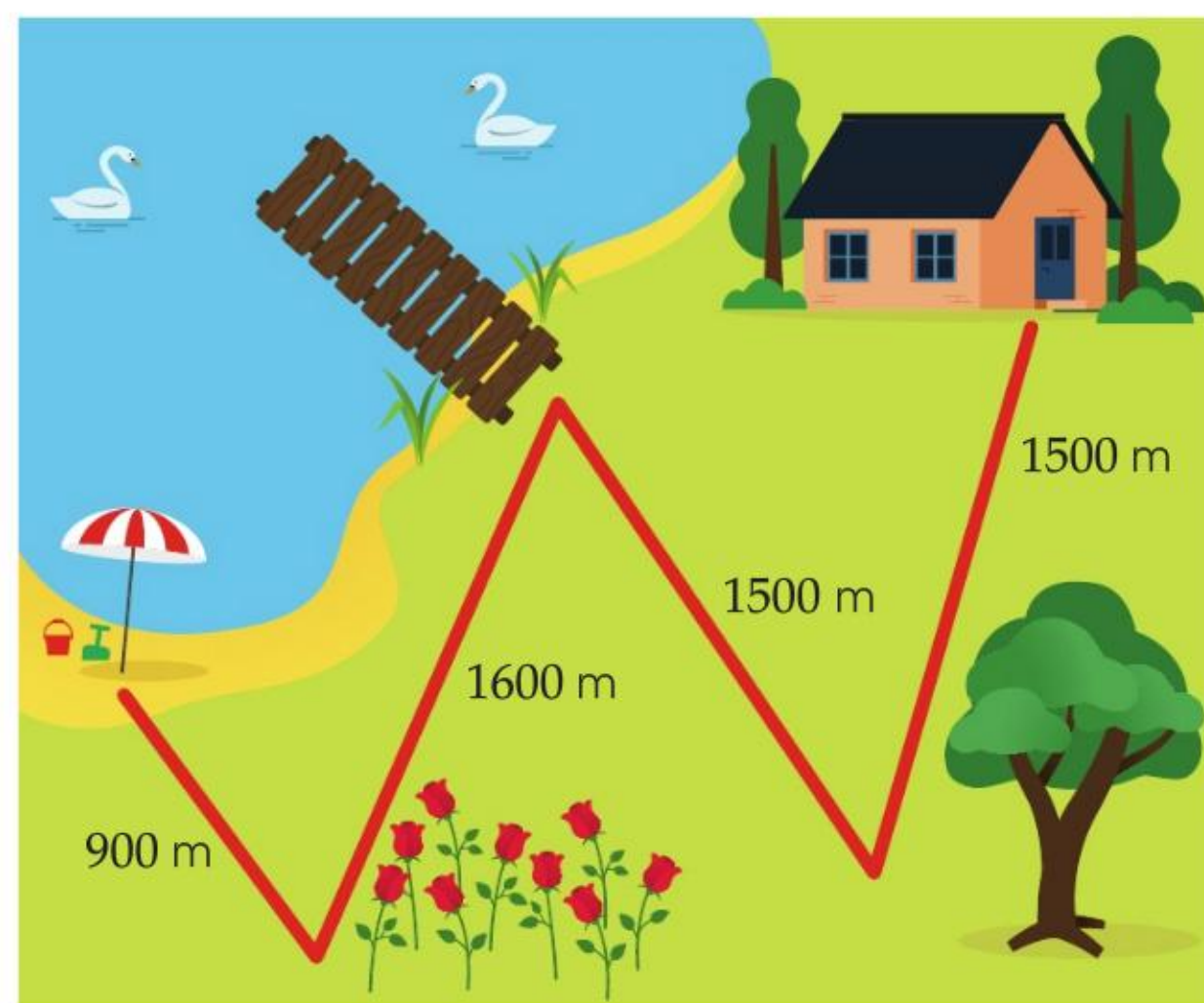
Zadania

- Pługopiaskarka odśnieżająca i posypująca piaskiem drogi jedzie z prędkością $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Po jakim czasie odśnieży fragment ulicy o podanej długości?

a) 1500 m b) 16 km c) 0,9 km

- Maciek i Bolek ścigali się na dystansie 1,5 km. Maciek biegł z prędkością $250 \frac{\text{m}}{\text{min}}$, a Bolek z prędkością $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Któremu z nich przebiegnięcie wyznaczonej trasy zajęło więcej czasu? O ile sekund więcej?

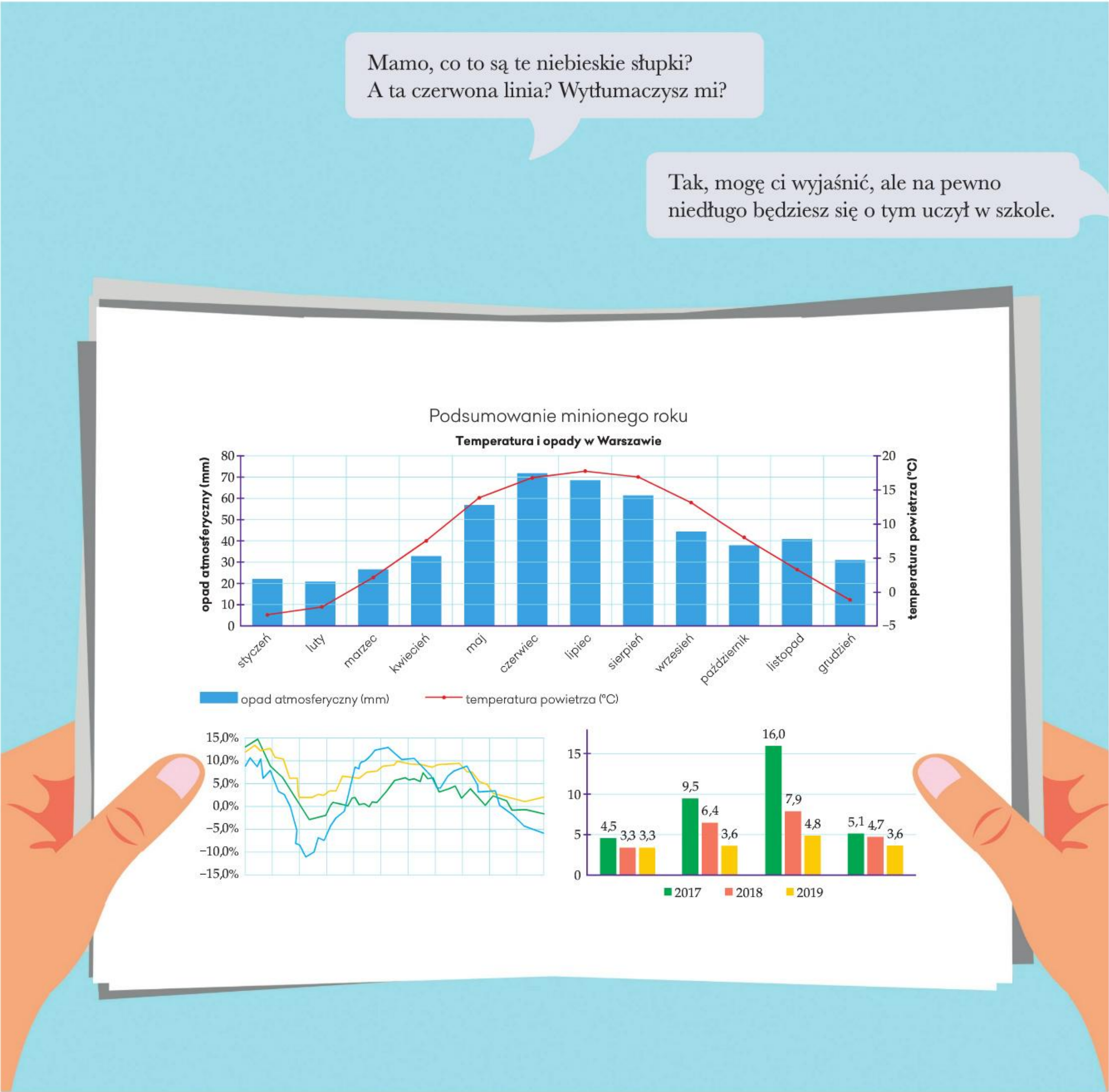
- Turysta spacerował nad jeziorem. Trasę, jaką szedł, pokazano na rysunku. Pierwszy odcinek prowadzący od domku letniskowego do drzewa (pomnika przyrody) przeszedł z prędkością $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, drugi – od drzewa do mołu – z prędkością $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, od mołu do ogrodu różanego szedł z prędkością $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a z ogrodu na plażę – z prędkością $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile czasu zajął mu spacer od domku do plaży, jeżeli przy drzewie, na mołu i w ogrodzie zatrzymywał się za każdym razem na 15 min?



- Pan Władysław mieszka w odległości 7,5 km od swojej firmy. Do pracy jeździ skuterem z prędkością $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. O której godzinie musi wyjechać z domu, aby znaleźć się w firmie o 6.50?
- Pani Ela i pani Monika wybrały się do teatru. Aby dojechać na miejsce spotkania, pani Ela musiała przebyć 21 km, a pani Monika 45 km. Pani Ela wybrała się do teatru autobusem, który jechał z prędkością $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, natomiast pani Monika jechała samochodem, z prędkością $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Która z pań potrzebowała więcej czasu na dojazd? O ile minut więcej?
- Pies Marty biegnie z prędkością $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ po piłeczkę rzuconą na odległość 30 m i z tą samą prędkością wraca z piłeczką do właścicielki. Po ilu sekundach przybiegnie do Marty ze swoją zabawką?
- Pierwszy ślimak porusza się z prędkością $15,33 \frac{\text{km}}{\text{rok}}$ (rok zwykły), a drugi z prędkością $294 \frac{\text{m}}{\text{tydzień}}$.
🐌 Który ze ślimaków potrzebuje mniej czasu, aby przebyć 60 m?

4.6 Tabele, diagramy, wykresy

Podejmij temat



Czy wiesz, co pokazuje rysunek, o którym mówi chłopiec? Czy widzisz informacje podane w podobny sposób? Jeśli tak, czego zazwyczaj one dotyczą?

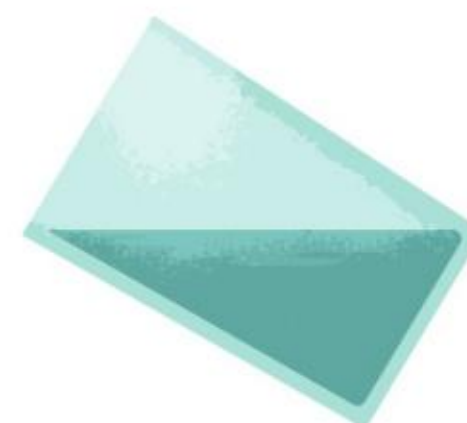
W codziennym życiu bardzo często spotykamy się z przedstawianiem informacji za pomocą tabel. Pozwalają one w przejrzysty sposób zaprezentować dane, najczęściej liczbowe. Również na lekcjach matematyki treść niektórych zadań zapisana jest w postaci tabeli. W tym temacie przećwiczmy odczytywanie informacji podanych w tabelach oraz jeszcze w inny, graficzny sposób.

1. Skorzystaj z tabeli, w której zamieszczono informacje o niektórych produktach spożywczych, i odpowiedz na pytania.

Uwaga: kiedy mówi się *szklanka mleka* czy *łyżka oliwy*, chodzi o masę produktu mieszczącego się w szklance lub na łyżce.

Produkt	Płaska łyżeczka	Płaska łyżka stołowa	Szklanka
bułka tarta cukier puder mąka proszek do pieczenia	0,3 dag	0,9 dag	15 dag
cukier kasza manna masło margaryna mleko woda	0,5 dag	1,5 dag	25 dag
kakao płatki owsiane	0,2 dag	0,6 dag	10 dag
mleko w proszku	0,25 dag	0,75 dag	12 dag
oliwa śmietana	0,4 dag	1,2 dag	20 dag

Ciekawe!



Rysunek pokazuje, w jaki sposób, przechylając szklankę, można łatwo odmierzyć dokładnie $\frac{1}{2}$ szklanki płynu.

- Ile waży:
 - łyżeczka oliwy,
 - łyżka stołowa cukru,
 - szklanka mleka?
- Które z wymienionych w tabeli produktów są najlżejsze?
- Które z wymienionych produktów są 2 razy lżejsze od śmietany?
- Ile razy łyżka stołowa mąki jest cięższa od łyżeczki mąki?
- Ile razy szklanka kakao jest cięższa od łyżeczki kakao?
- O ile lżejsza jest łyżka stołowa mleka w proszku od łyżki stołowej oliwy?
- Według pewnego przepisu do zrobienia ciasta należy użyć: 2 szklanek mąki, 1 szklanki cukru, 3 łyżek stołowych kakao, $\frac{1}{2}$ szklanki oliwy i 4 jajek, z których każde waży 7 dag. Ile waga razem produkty potrzebne do upieczenia ciasta?
- W jaki sposób odmierzyć, dysponując łyżeczką, łyżką stołową i szklanką:
 - 1 dag kakao,
 - 15 dag cukru,
 - 15 dag mleka w proszku,
 - 6 dag oliwy?

2. Znajdź i zapisz dowolny przepis na ciasto. Jeżeli składniki podane są w kilogramach i dekagramach, zamień je na odpowiednie liczby łyżeczek, łyżek lub szklanek. Poproś rodziców, by pomogli ci upiec ciasto. Smacznego!

3. Przeczytaj poniższy tekst.

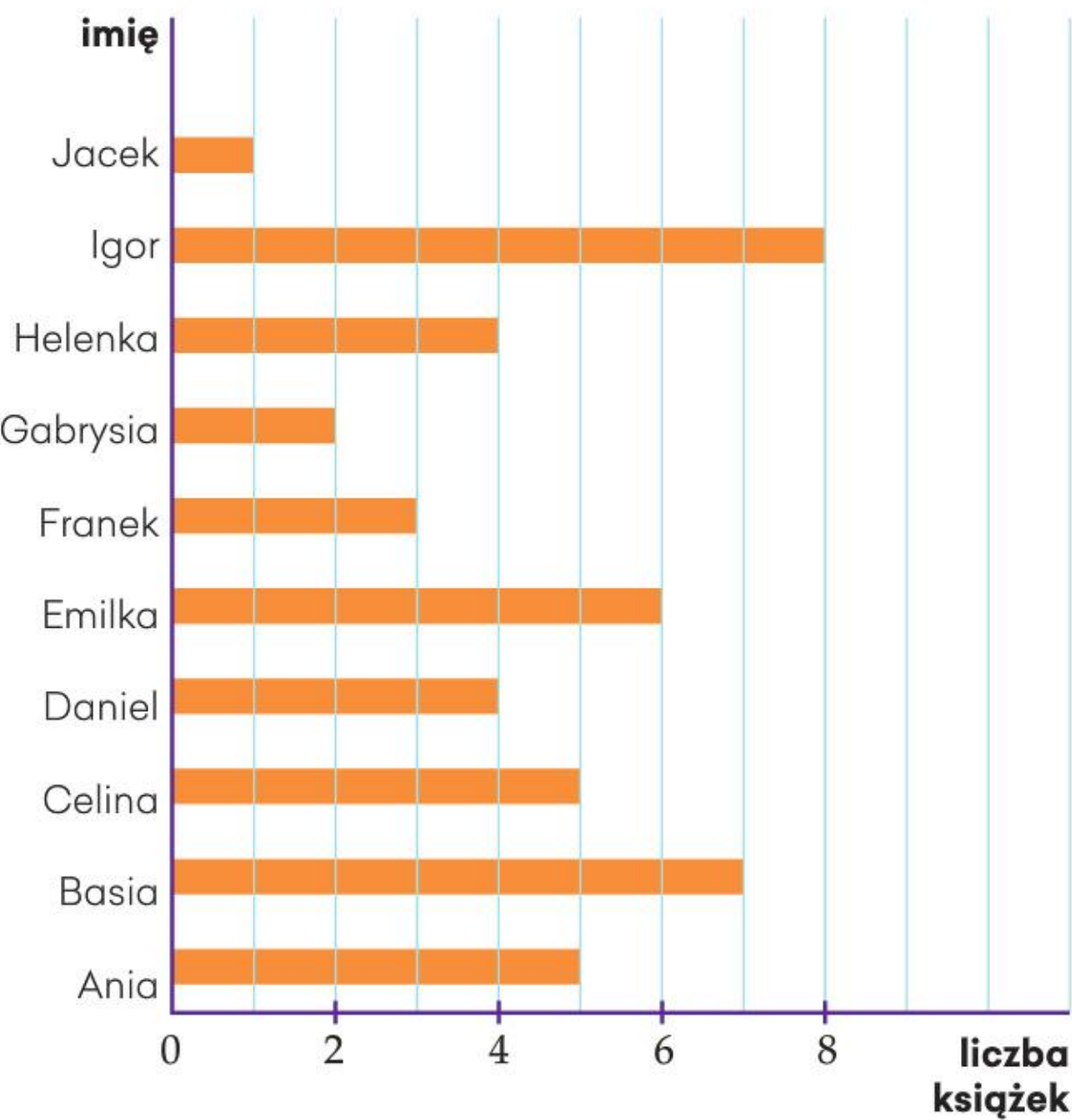
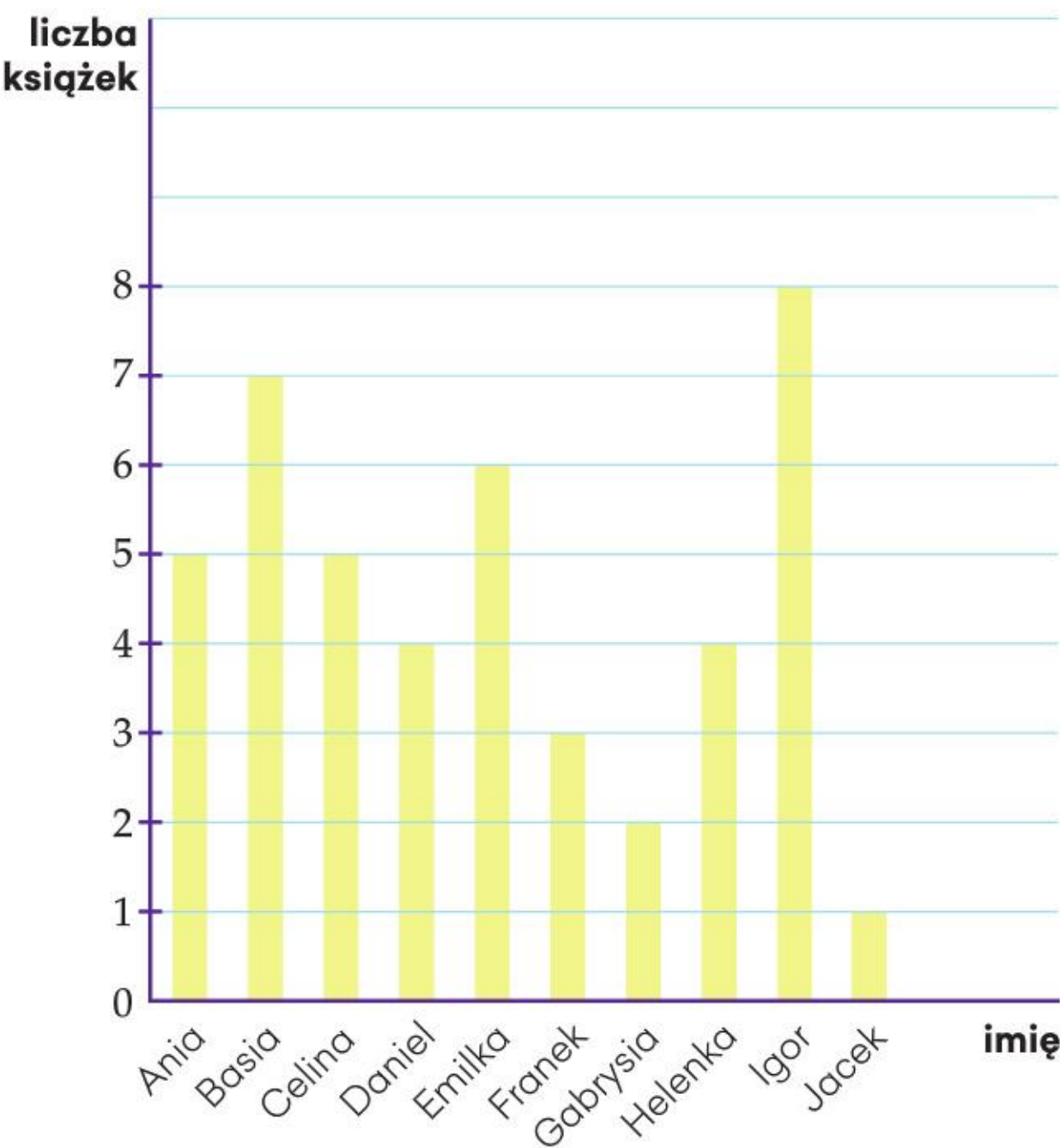
We wrześniu Ania wypożyczyła ze szkolnej biblioteki 5 książek, Basia – 7, Celina – 5, Daniel – 4, Emilka – 6, Franek – 3, Gabrysia – 2, Helenka – 4, Igor – 8, a Jacek – 1 książkę.

Utwórz tabelę, która w czytelny sposób zaprezentuje informacje zawarte w tym tekście.

Informacje zawarte w tekście z ćwiczenia 3 można przedstawić także w inny sposób, równie czytelny jak tabela. Taki sposób uporządkowania i przedstawienia danych nazywa się **diagramem słupkowym**.

Każdemu dziecku przyporządkowany jest słupek, którego wysokość oznacza liczbę przeczytanych przez to dziecko książek.

Słupki diagramu mogą być też ułożone poziomo.



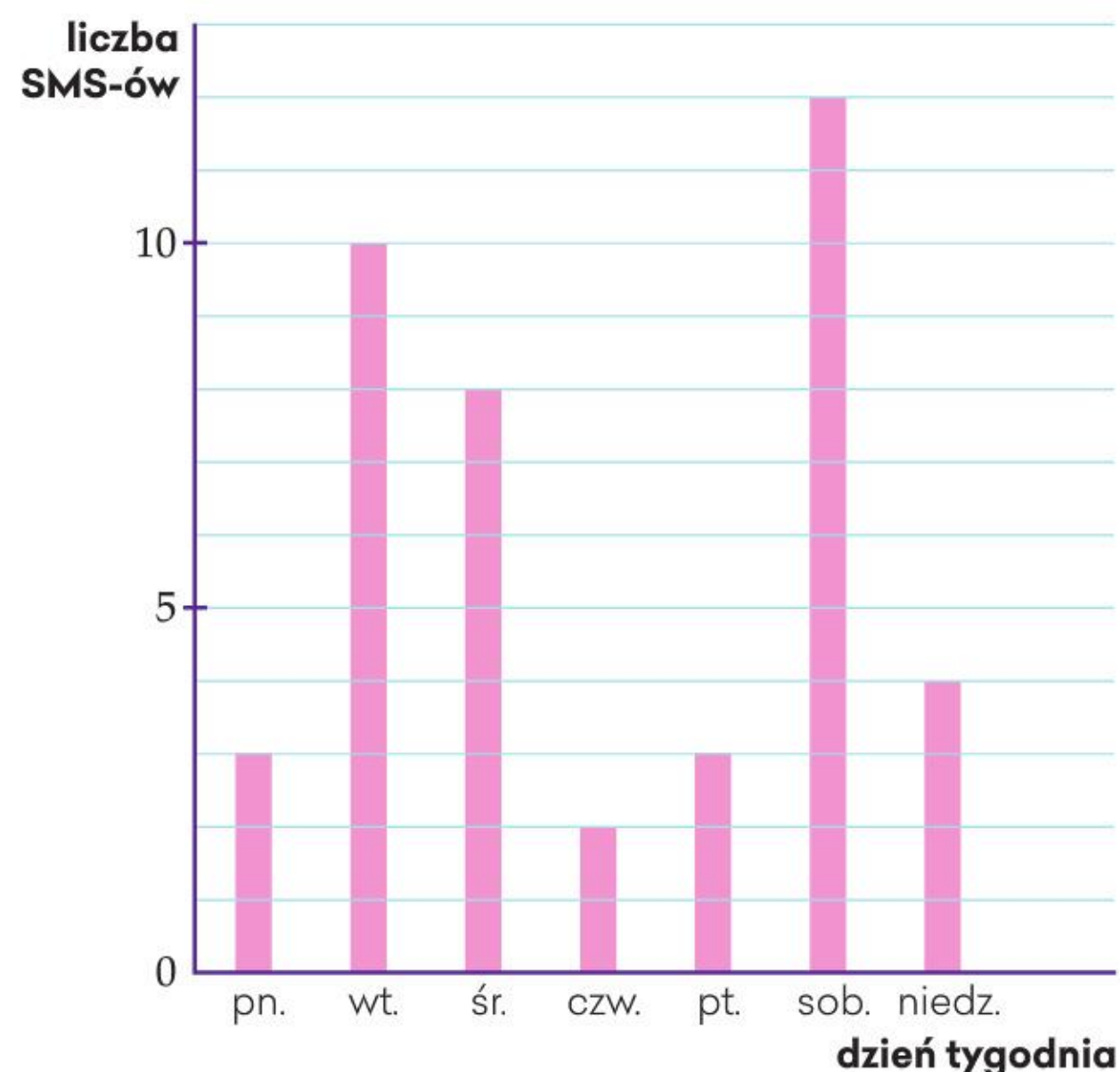
4. Skorzystaj z dowolnego z powyższych diagramów i odpowiedz na pytania.
- a) Kto przeczytał najwięcej książek?
 - b) Kto przeczytał więcej książek niż Celina?
 - c) Kto przeczytał mniej książek niż Ania?
 - d) Kto przeczytał tyle samo książek co Helenka?
 - e) Ile książek przeczytały razem wszystkie dziewczęta, a ile – wszyscy chłopcy?
 - f) Jaka jest średnia arytmetyczna liczby książek przeczytanych przez te dzieci?

5. Uczniowie mieli do wykonania pracę domową:

Sprawdź liczbę wysłanych SMS-ów w poszczególne dni ubiegłego tygodnia i wyniki przedstaw w postaci diagramu słupkowego.

Na rysunku obok znajduje się diagram Marysi.

- Którego dnia Marysia wysłała najwięcej wiadomości, a którego – najmniej?
- W jakie dni wysłała taką samą liczbę SMS-ów?
- Oblicz średnią arytmetyczną liczby wysłanych wiadomości przez Marysię każdego dnia w ciągu tego tygodnia.
- Ułóż inne pytanie, które można zadać na podstawie tego diagramu.

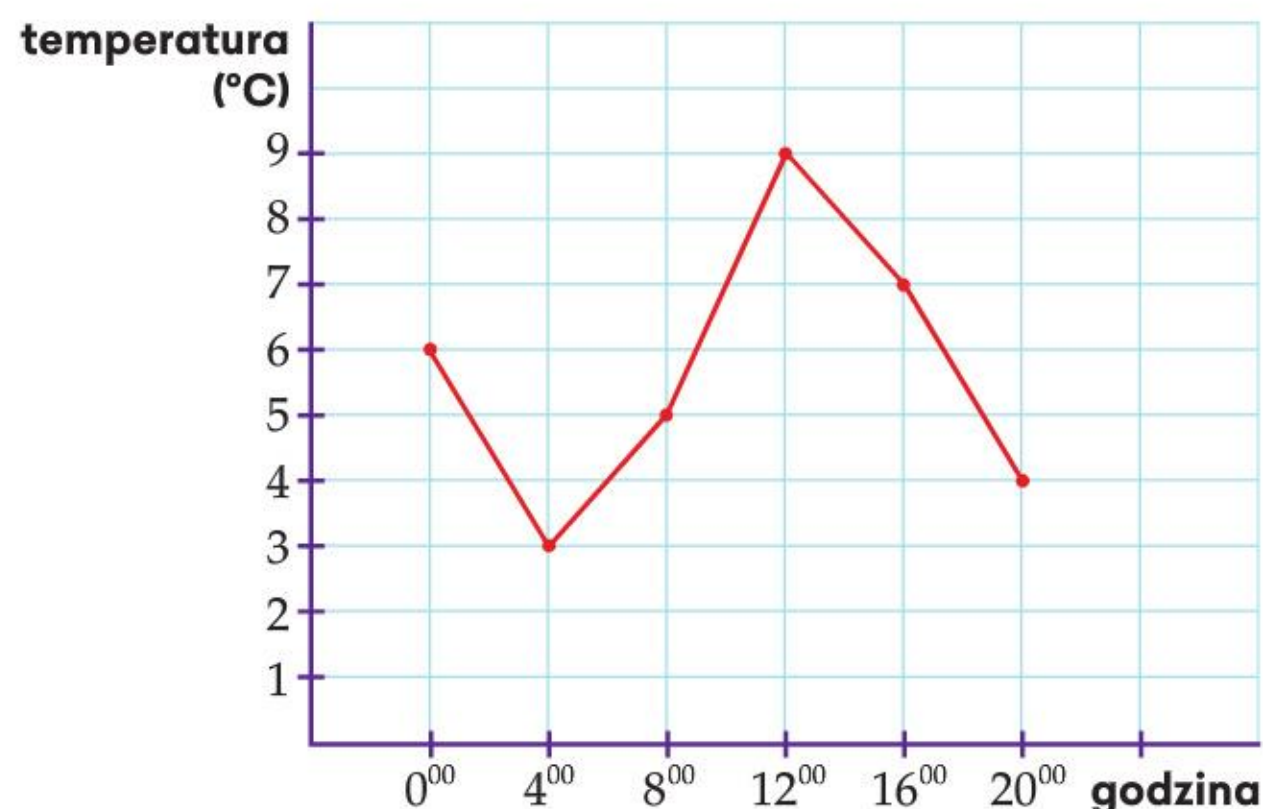
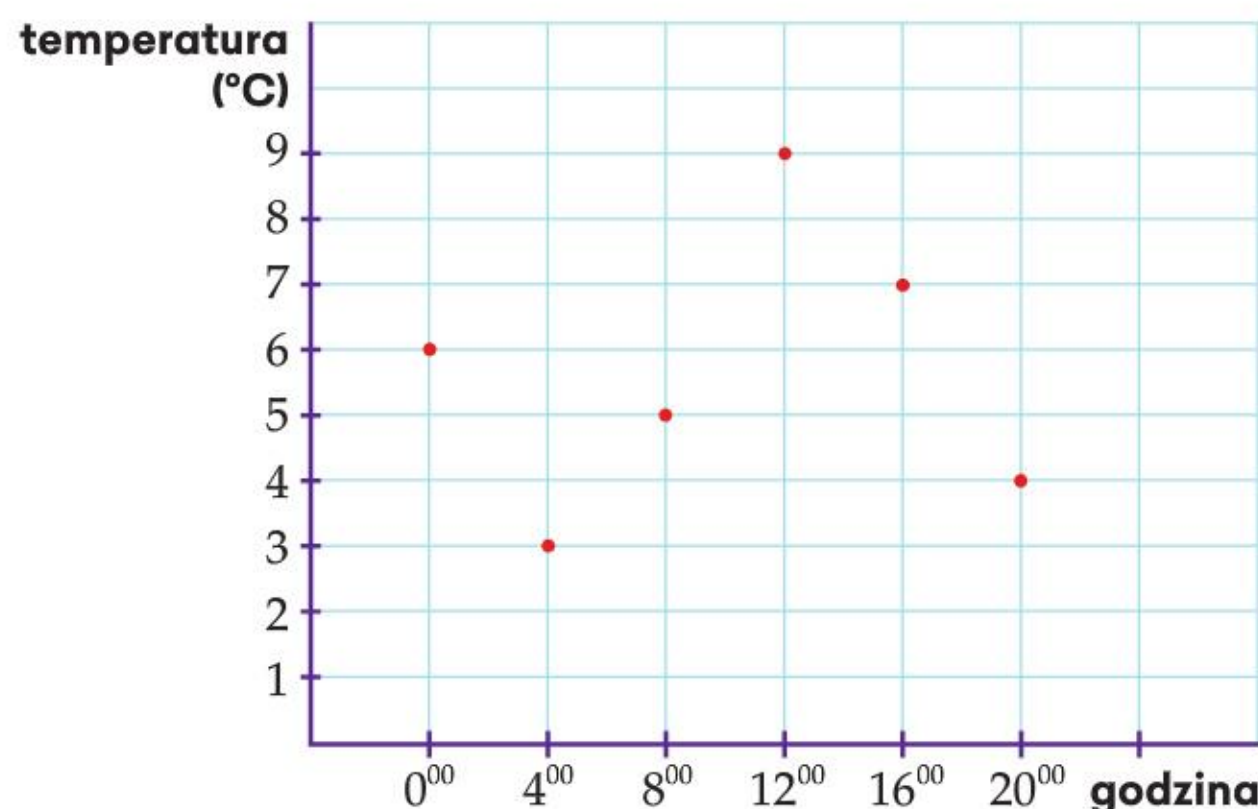


Temperatura notowana pewnego dnia co 4 godziny na stacji meteorologicznej jest podana w tabeli obok.

Godzina	0.00	4.00	8.00	12.00	16.00	20.00
Temperatura (°C)	6	3	5	9	7	4

Jeżeli poszczególne temperatury są zaznaczone tylko punktami umieszczonymi na odpowiedniej wysokości (a nie słupkami), to rysunek takiego diagramu wygląda tak jak poniżej.

Ponieważ temperatura nie zmienia się w sposób skokowy (co oznacza, że np. między godzinami 0.00 a 4.00 nie zmieniła się nagle z 6°C na 3°C), lecz maleje (opada) lub rośnie (podnosi się) stopniowo, dlatego na rysunku zaznaczone punkty możemy połączyć.



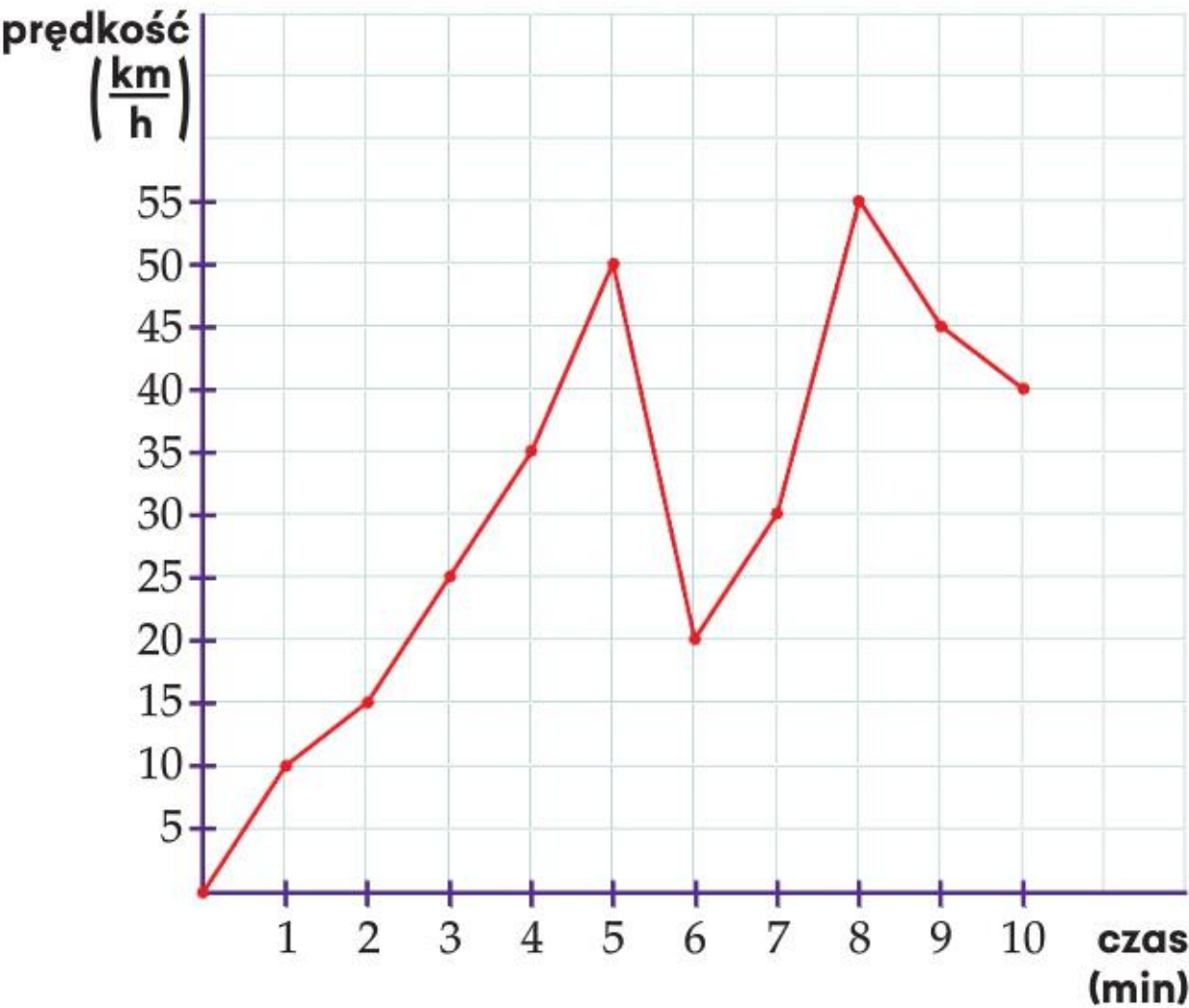
Powyższe rysunki to **wykresy**.



To, czy punkty wykresu powinny być połączone odcinkami, czy nie, zależy od tego, co dany wykres przedstawia.

6. Samochód ruszył z parkingu. Jego prędkość odczytywaną z prędkościomierza w trakcie początkowych 10 minut jazdy pokazuje wykres.

- a) Z jaką prędkością samochód poruszał się po upływie pierwszej minuty jazdy, a z jaką – po upływie początkowych sześciu minut?
- b) Jaka była największa prędkość samochodu w tym czasie?
- c) W którym momencie prędkościomierz pokazywał największą prędkość?
- d) Przez jaki czas samochód jechał z prędkością nie większą niż $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- e) W której minucie nastąpił największy spadek prędkości?
- f) Wymyśl inne pytanie, które można zadać na podstawie tego wykresu.



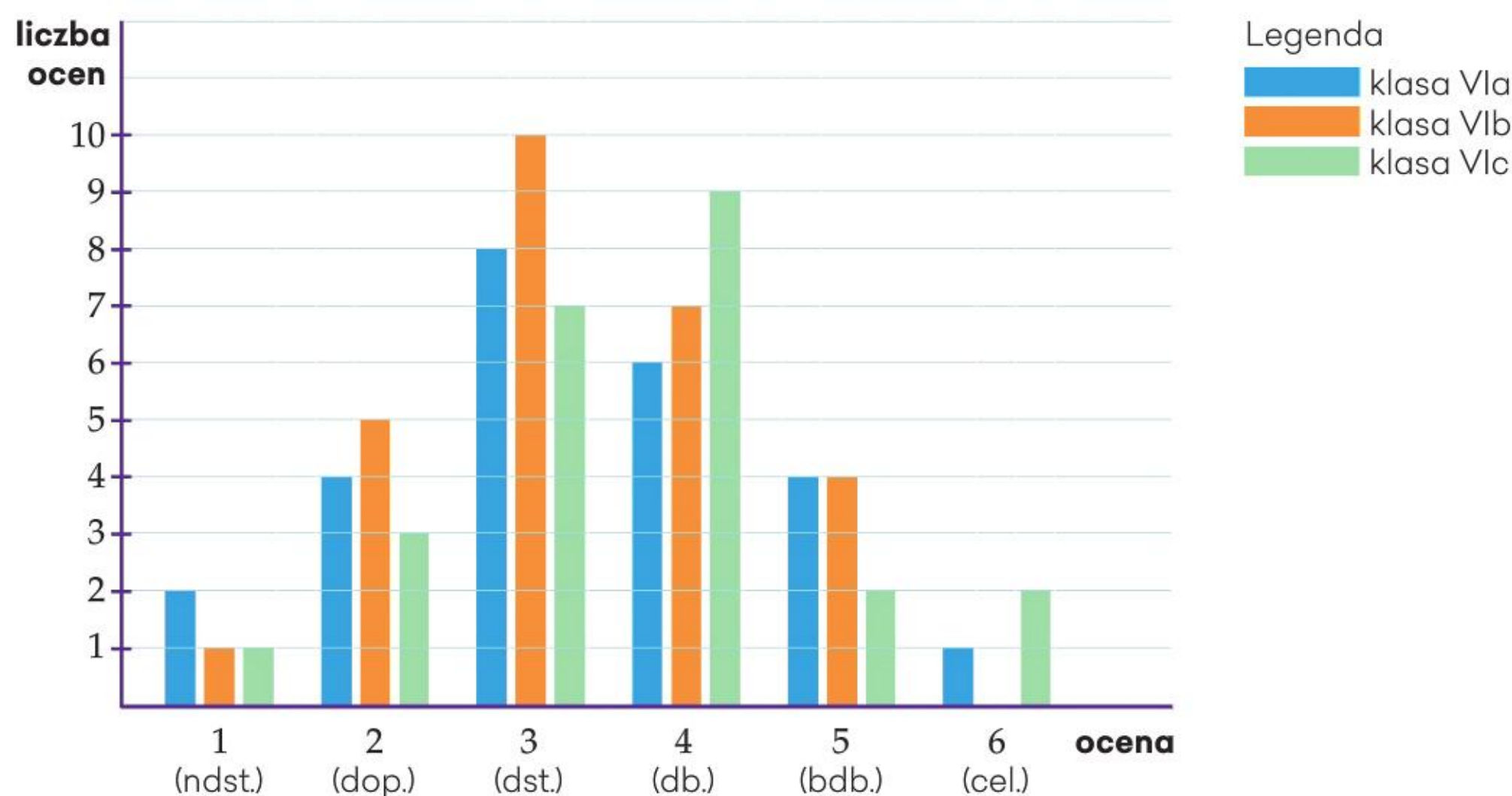
Zadania

● Prędkość wiatru podawana jest w stopniach w skali Beauforta [czyt. boforta]. W tabeli poniżej przedstawiono zależność między tymi stopniami a prędkością wiatru wyrażoną w $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Podana jest również opisowa nazwa wiatru. Z tabeli można np. odczytać, że wiatr mający 4 stopnie w skali Beauforta (4 B) wieje z prędkością od $5,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do $7,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i określany jest jako wiatr umiarkowany. Natomiast wiatr wiejący z prędkością ok. $18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ma 8 stopni w skali Beauforta (8 B) i jest to wicher lub sztorm. Skorzystaj z informacji zawartych w tabeli i odpowiedz na pytania.

- a) Ile stopni w skali Beauforta ma wiatr wiejący z podaną prędkością?
 - $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 - $8,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 - $5,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 - $24,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 - $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
 - $37,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
- b) Jaka nazwą określa się wiatr o podanej prędkości?
 - 5 B
 - 1 B
 - 12 B
 - $27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 - $13,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 - $14,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Stopień w skali Beauforta	Prędkość wiatru ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$)	Nazwa wiatru
0	0–0,2	cisza
1	0,3–1,5	powiew
2	1,6–3,3	słaby wiatr
3	3,4–5,4	łagodny wiatr
4	5,5–7,9	umiarkowany wiatr
5	8,0–10,7	dość silny wiatr
6	10,8–13,8	silny wiatr
7	13,9–17,1	bardzo silny wiatr
8	17,2–20,7	wicher/sztorm
9	20,8–24,4	silny sztorm
10	24,5–28,4	bardzo silny sztorm
11	28,5–32,6	gwałtowny sztorm
12	32,7–...	huragan

- Diagram pokazuje liczby i rodzaje ocen otrzymanych na półroczu z matematyki w klasach VIa, VIb i VIc. Skorzystaj z diagramu i odpowiedz na pytania.



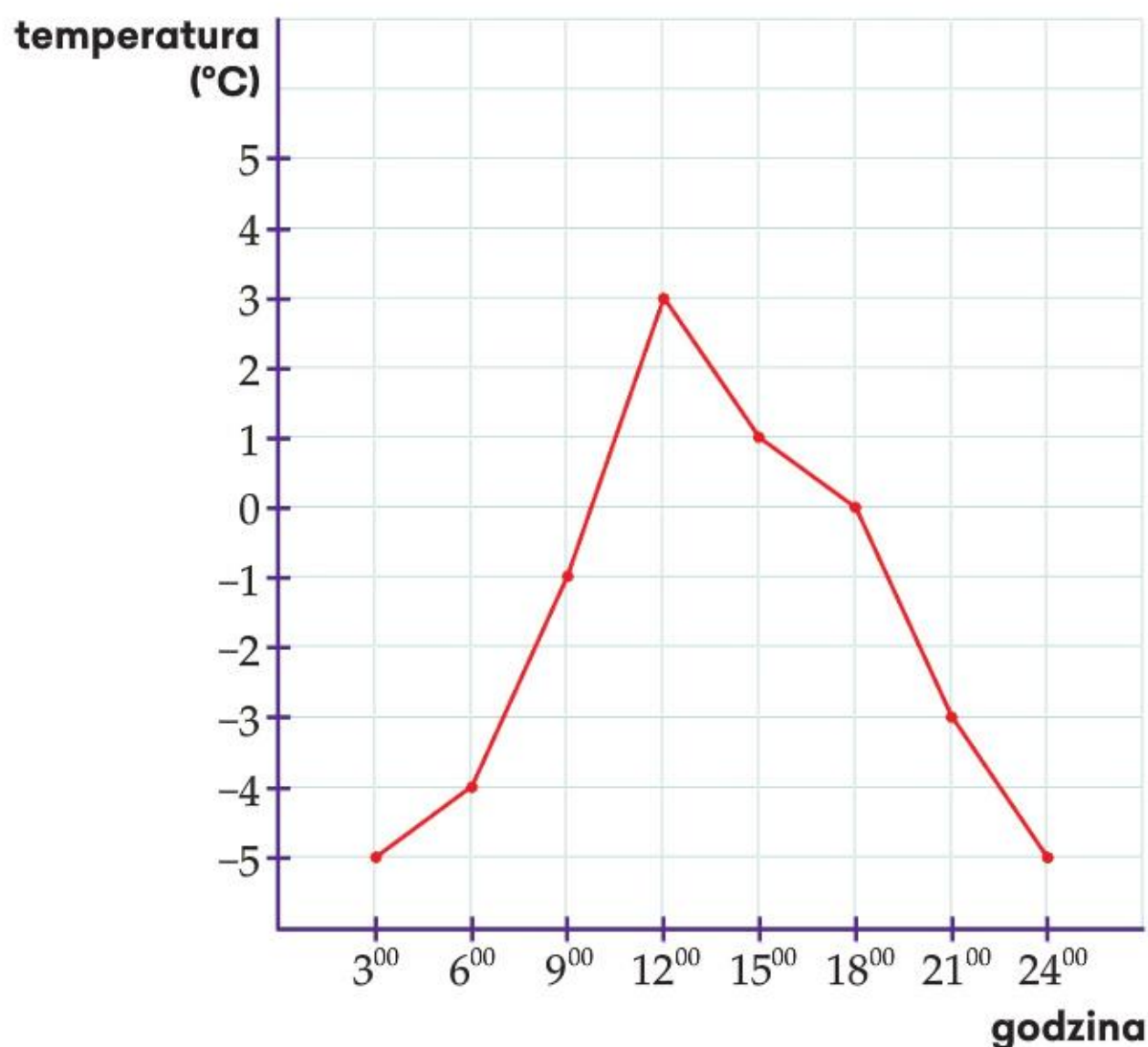
- Ilu uczniów z klasy:
 - VIa otrzymało ocenę bardzo dobrą,
 - VIb otrzymało ocenę dostateczną,
 - VIc otrzymało ocenę dobrą,
 - VIa otrzymało ocenę gorszą niż dostateczna,
 - VIb otrzymało ocenę lepszą niż dostateczna?
- W której z klas uczniowie otrzymali:
 - najwięcej ocen niedostatecznych,
 - najmniej ocen dopuszczających,
 - dwie oceny bardzo dobre?
- W której z klas uczniowie nie otrzymali ani jednej oceny celującej?
- Ilu uczniów ze wszystkich klas VI otrzymało oceny:
 - celujące,
 - bardzo dobre,
 - niedostateczne,
 - lepsze niż dostateczne,
 - gorsze niż dostateczne?
- Jakich ocen uczniowie wszystkich klas VI otrzymali najwięcej, a jakich – najmniej?
- Ilu uczniów liczy klasa VIa, ilu VIb, a ilu VIc?



- Do diagramu z zadania 2 ułóż swoje pytania (inne niż w zadaniu) i zadaj je koledze lub koleżance. Sprawdź odpowiedzi.

● Wykres pokazuje wyniki pomiarów temperatury powietrza prowadzonych pewnego zimowego dnia co 3 godziny. Odczytaj z niego potrzebne informacje i odpowiedz na pytania.

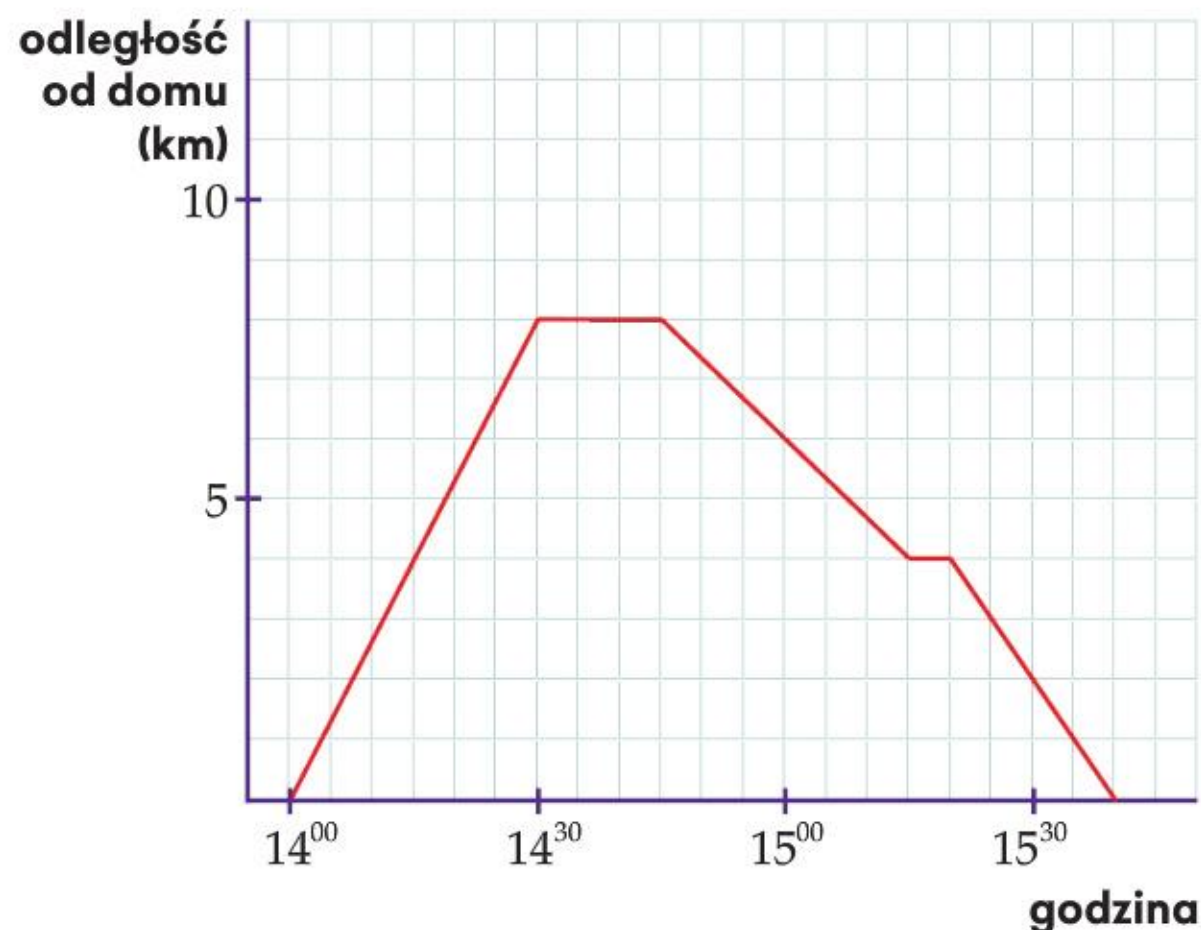
- Jaka była najniższa, a jaka najwyższa temperatura zmierzona i zanotowana tego dnia?
- O której godzinie zarejestrowano najwyższą temperaturę?
- O której godzinie odnotowano temperaturę -3°C , a o której 0°C ?
- W jakich godzinach wyniki pomiarów były jednakowe?
- Jaką temperaturę zanotowano o 9.00?
- O ile stopni spadła temperatura między 15.00 a 21.00?
- O ile stopni wzrosła temperatura między 3.00 a 9.00?
- Jaka jest różnica najwyższej i najniższej temperatury zanotowanej tego dnia?



★ Przemek wybrał się na przejażdżkę rowerową. Wyjechał o godzinie 14.00. W trakcie jazdy coraz bardziej oddalał się od domu. Po 30 minutach zatrzymał się, by odpocząć, i przez pewien czas fotografował okolicę. Następnie ruszył w drogę powrotną, podczas której zatrzymał się tylko raz, aby napić się wody.

Odległość Przemka od jego domu podczas całej wycieczki jest pokazana na wykresie. Obejrzyj wykres i odpowiedz na pytania.

- Jak daleko od domu znajdował się Przemek po upływie 30 minut?
- Ile kilometrów przejechał w czasie całej wycieczki?
- Ile minut trwał krótszy, a ile – dłuższy postój?
- O której godzinie Przemek:
 - zatrzymał się na dłuższy postój,
 - ruszył w drogę powrotną,
 - skończył krótszy postój,
 - dotarł do domu?
- Ile czasu trwała wycieczka chłopca?
- Ile kilometrów od domu znajdował się Przemek o podanej godzinie?
 - 14.15 • 14.45 • 15.00 • 15.25
- O której godzinie Przemek znajdował się bliżej domu: o 14.10 czy o 15.25?

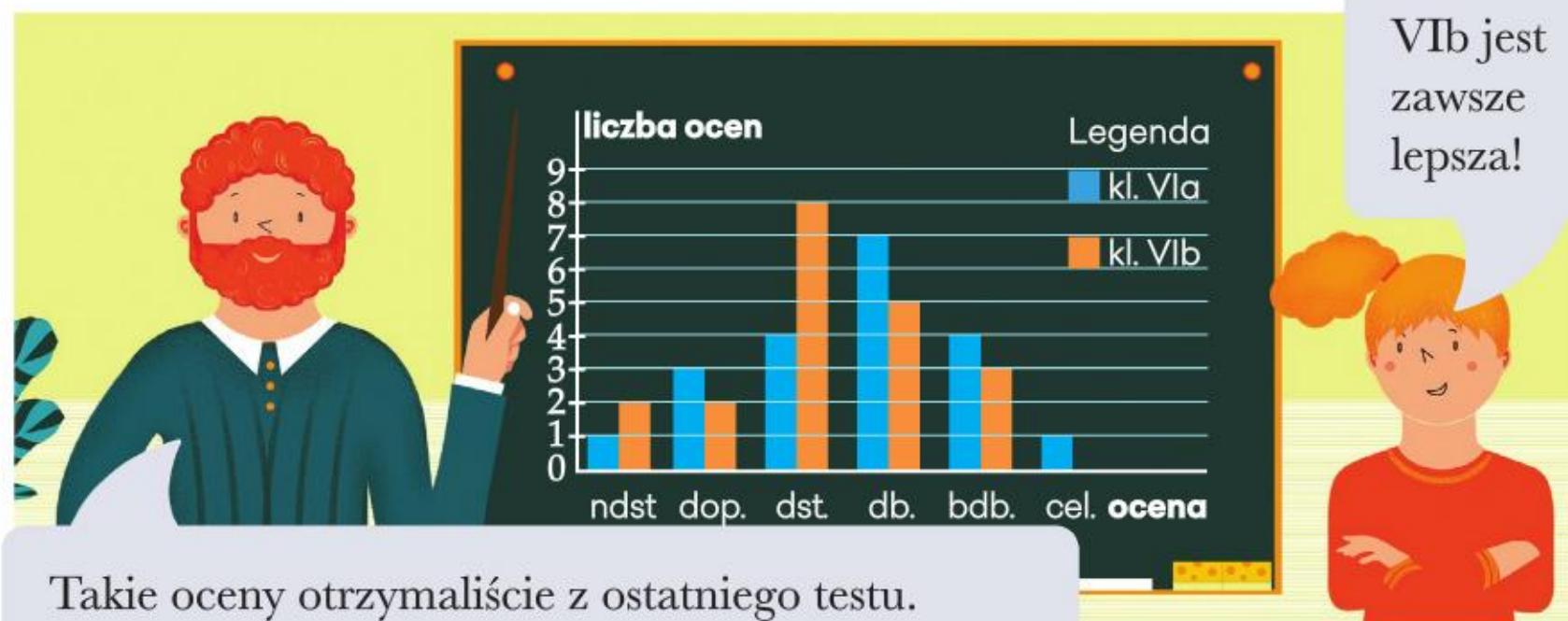


4.7 Tworzenie diagramów i wykresów

Podejmij temat



Jak sądzisz, czy dziewczynka właściwie oceniła wyniki sprawdzianu? Co należy zrobić, jeżeli trudno jest stwierdzić, która klasa otrzymała lepsze oceny?

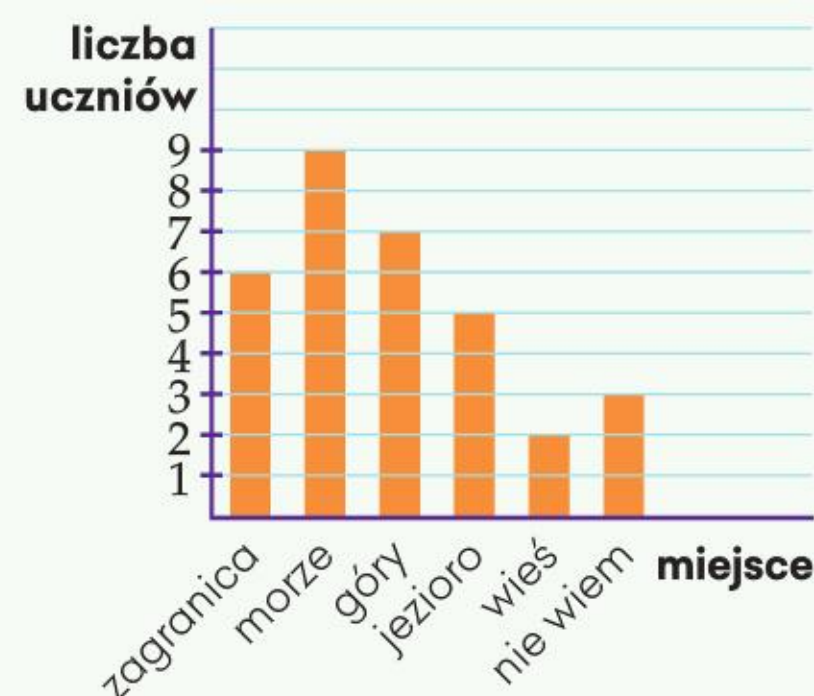
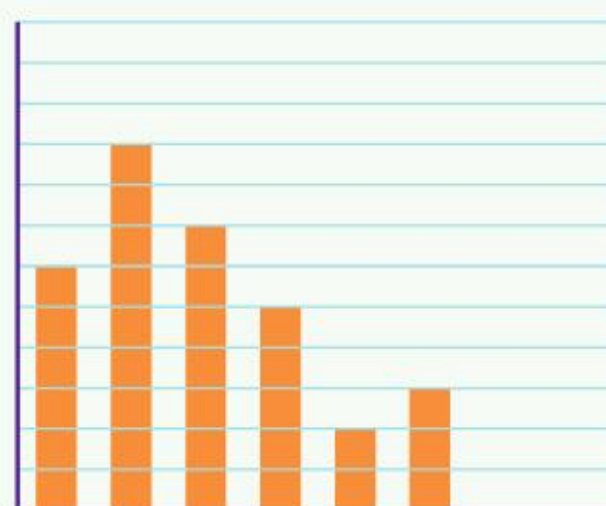


Takie oceny otrzymaliście z ostatniego testu. Czy widać, która klasa tym razem wypadła lepiej?

Dotychczas zajmowaliśmy się odczytywaniem informacji z tabel, diagramów i wykresów. W tym temacie przejdziemy do samodzielnego ich tworzenia.

Przykład 1

W klasie VI, liczącej 32 uczniów, przeprowadzono ankietę. Na pytanie, gdzie uczniowie chcieliby spędzić wakacje, 6 uczniów odpowiedziało, że chcieliby wyjechać za granicę, 9 – że nad morze, 7 – w góry, 5 – nad jezioro, 2 – na wieś. Pozostali odpowiedzieli: „nie wiem”. Który diagram prawidłowo pokazuje opisaną sytuację?



Pierwszy diagram jest nieprawidłowy, ponieważ nie są zachowane właściwe odległości między liczbami na osi pionowej (brak liczb 1, 4 i 8), przez co wysokość słupków nie oddaje rzeczywistych różnic między oddanymi głosami. Źle zrobiony jest też diagram drugi, gdyż brakuje na nim opisu, czego dotyczą poszczególne słupki i ich wysokości. Prawidłowo wykonano diagram trzeci, bo zawiera on wszystkie informacje z ankiety, a słupki poprawnie prezentują odpowiedzi uczniów.

- Po lekcjach przeprowadź wśród uczniów swojej klasy ankietę podobną do opisanej w przykładzie 1 i w domu wykonaj diagram pokazujący jej wyniki.
- Państwo Markowscy, zarabiający razem 4600 zł miesięcznie, utworzyli zestawienie miesięcznych wydatków.

Cel	utrzymanie mieszkania	żywność	odzież	zdrowie i higiena	inne	oszczędności
Kwota (zł)	900	1300	800	500	300	800

Narysuj diagram słupkowy pokazujący wydatki państwa Markowskich, a następnie odpowiedz na pytania.

- Na co państwo Markowscy przeznaczili najwięcej pieniędzy, a na co – najmniej?
 - O ile większe są wydatki na zakup żywności niż na utrzymanie mieszkania?
 - Na co przeznaczają tyle samo pieniędzy, ile miesięcznie oszczędzają?
- Czy łatwiej ci korzystać z danych umieszczonych w tabeli, czy przedstawionych na diagramie?

Przykład 2

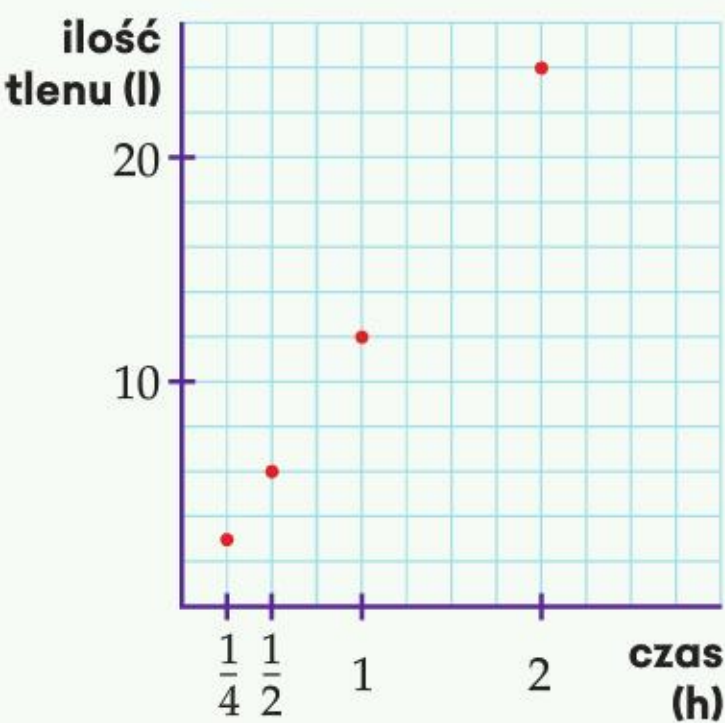
Narysujmy wykres, który przedstawia zużycie tlenu przez dorosłego człowieka podczas oddychania.

W internecie możemy znaleźć informację, że człowiek, który nie wykonuje czynności wymagających szczególnego wysiłku, zużywa w ciągu minuty około 0,2 litra tlenu. Przy równomiernym oddychaniu w ciągu 2 minut zużyje 2 razy więcej tlenu, w ciągu 3 minut – 3 razy więcej itd.

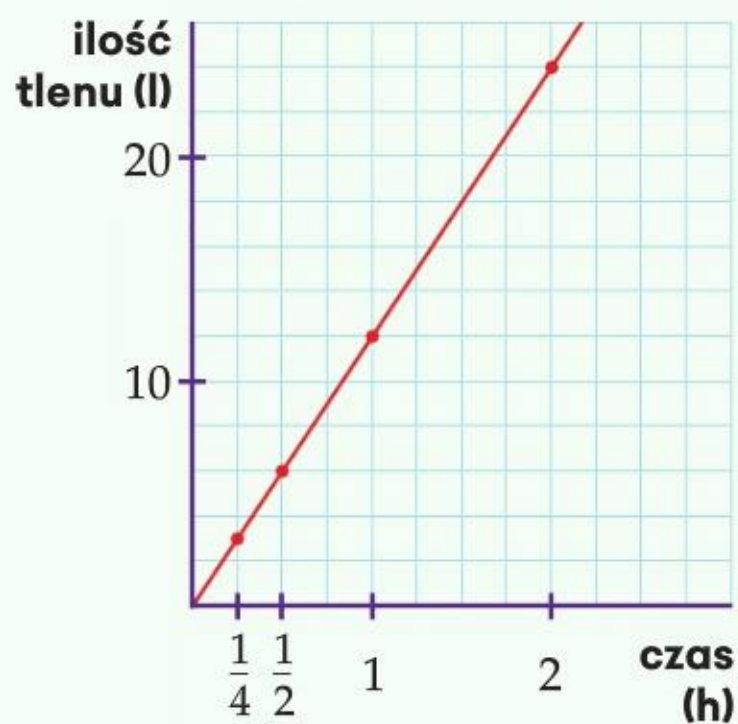
Wykonajmy najpierw tabelę przedstawiającą ilość zużytego tlenu w różnym czasie.

Czas (h)	$\frac{1}{60}$	$\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$	$\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$	1	2
Ilość zużytego tlenu (l)	0,2	$15 \cdot 0,2 = 3$	$30 \cdot 0,2 = 6$	$60 \cdot 0,2 = 12$	24

Przystępujemy do tworzenia wykresu.



- Nad liczbą oznaczającą $\frac{1}{4}$ h stawiamy punkt na wysokości odpowiadającej zużyciu tlenu w tym czasie, czyli na wysokości liczby 0,2.
- Nad liczbą oznaczającą $\frac{1}{2}$ h stawiamy punkt na wysokości odpowiadającej zużyciu tlenu w tym czasie, czyli na wysokości liczby 3.
- Nad liczbą oznaczającą 1 h stawiamy punkt na wysokości odpowiadającej zużyciu tlenu w tym czasie, czyli na wysokości liczby 6.
- Nad liczbą oznaczającą 2 h stawiamy punkt na wysokości odpowiadającej zużyciu tlenu w tym czasie, czyli na wysokości liczby 12.



Ponieważ oddychanie przebiega w sposób ciągły, a nie tylko w momentach, dla których wykonaliśmy obliczenia, zatem przez zaznaczone punkty prowadzimy półprostą.

3. W czasie wysiłku fizycznego zwiększa się zapotrzebowanie organizmu na tlen. Podczas lekkiej pracy człowiek zużywa około 0,6 litra tlenu na minutę. Narysuj wykres przedstawiający zużycie tlenu podczas lekkiej pracy.

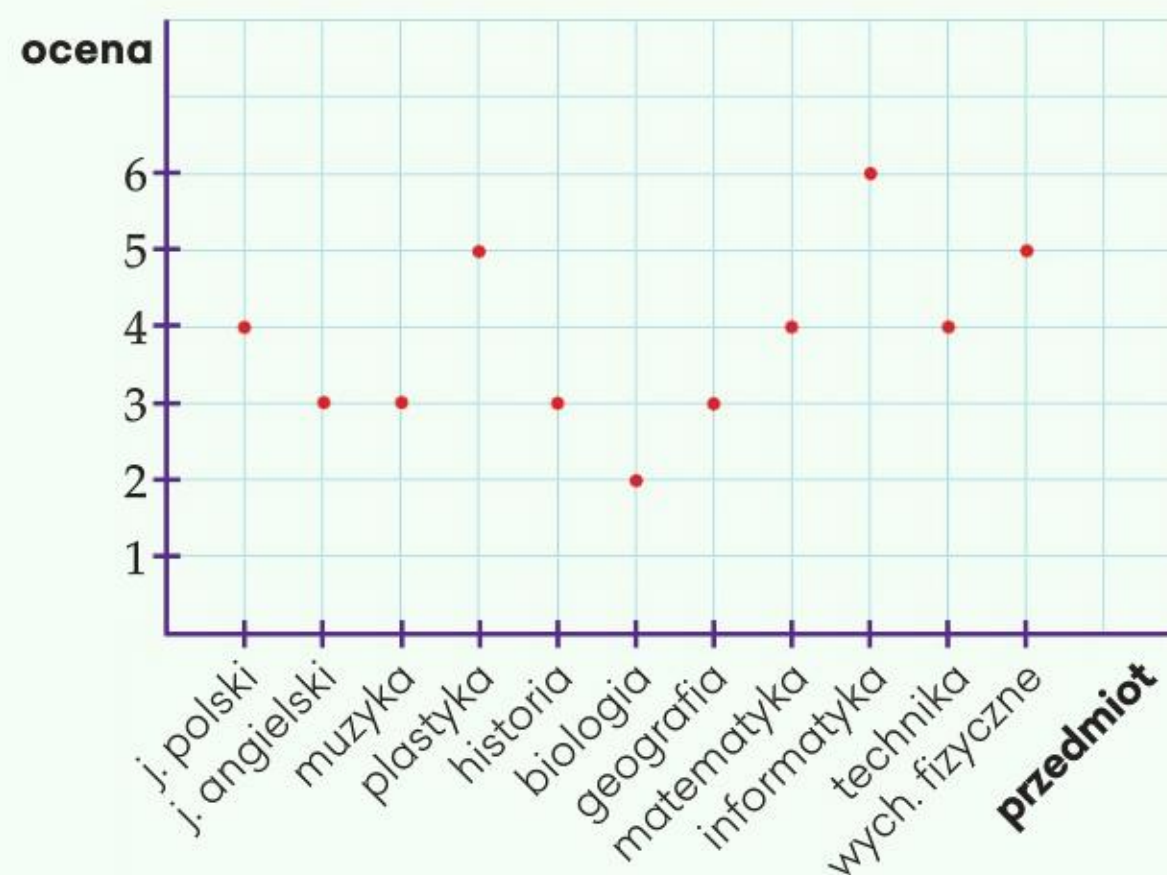
Przykład 3

Narysujmy wykres pokazujący oceny uzyskane przez Marcina na koniec roku szkolnego.

WYNIKI KLASYFIKACJI ROCZNEJ	
zachowanie	dobry
religia / etyka	—
Obowiązkowe zajęcia edukacyjne	
język polski	dobry
język angielski	dostateczny
muzyka	dostateczny
plastyka	bardzo dobry
historia	dostateczny
biologia	dopuszczający
geografia	dostateczny
matematyka	dobry
informatyka	celujący
technika	dobry
wychowanie fizyczne	bardzo dobry
Dodatkowe zajęcia edukacyjne	
—	—
—	—
—	—

Nad każdą nazwą przedmiotu stawiamy punkt na wysokości odpowiadającej ocenie otrzymanej przez Marcina.

Tym razem nie łączymy punktów, ponieważ dotyczą one odrębnych elementów.



Z każdego przedstawionego wykresu, podobnie jak z każdego diagramu, możemy odczytywać różne informacje. Wykres z przykładu 3 pozwala odpowiedzieć między innymi na pytania:

Ile Marcin miał ocen bardzo dobrych? Czy lepszą ocenę dostał z plastyki, czy z informatyki? Z jakiego przedmiotu Marcin otrzymał najlepszą ocenę, a z jakiego – najgorszą?

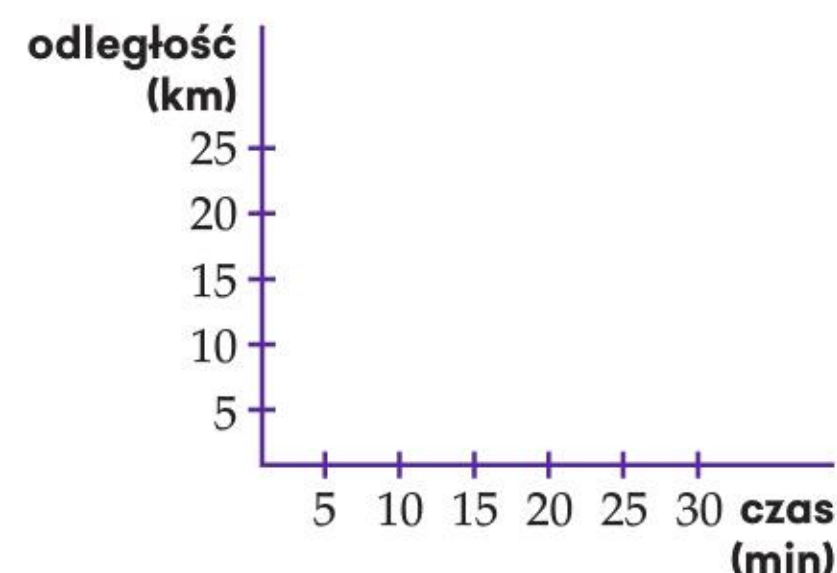
4. Tabela obok przedstawia, ile wynosi w zaokrągleniu powierzchnia poszczególnych części świata. Przedstaw te informacje w postaci wykresu, a następnie odpowiedz na pytania, korzystając z tabeli lub wykresu.



Część świata	Powierzchnia w zaokrągleniu do mln km ²
Europa	10
Azja	45
Afryka	30
Ameryka Płn.	24
Ameryka Płd.	18
Australia i Oceania	8
Antarktyda	14

- Która z części świata ma największą powierzchnię, a która – najmniejszą?
 - Ile razy powierzchnia Ameryki Północnej jest większa niż powierzchnia Australii i Oceanii?
 - Europa i Azja tworzą jeden kontynent nazywany Eurazją. Jaką ma on powierzchnię?
 - Które części świata mają powierzchnię większą niż 20 mln km²?
 - Które części świata mają powierzchnię mniejszą od mniejszej z Ameryk?
- W którym punkcie łatwiej było ci korzystać z tabeli, a w którym – z wykresu?

5. Pociąg wyjechał z początkowej stacji w mieście A i przez 15 minut przejechał 20 km. Następnie stał 5 minut na stacji w mieście B. Przez kolejne 20 minut przejechał 25 km i znów stanął na 5 minut w mieście C. Do ostatniej stacji, w mieście D, oddalonej od miasta C o 10 km, jechał 10 minut. Narysuj w zeszycie wykres, na którym przedstawisz, w jakiej odległości od początkowej stacji, w zależności od mijającego czasu, znajdował się pociąg. Skorzystaj z rysunku obok.



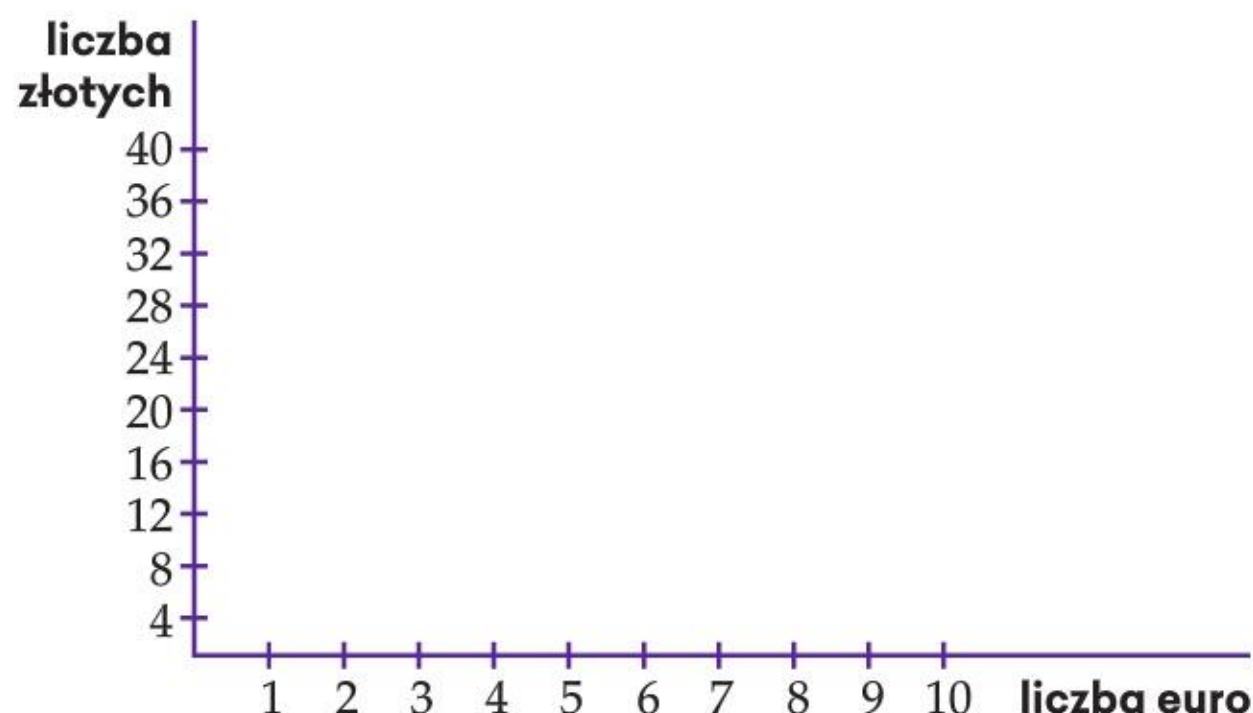
6. Wybierzcie jedno z poniższych pytań (każda grupa inne) lub wymyślcie podobne i zadajcie je kolegom i koleżankom z klasy. Wyniki ankiety przedstawcie w postaci wykresu i zaprezentujcie na lekcji.



- Jaki jest twój ulubiony owoc?
- Jakie miasto w Polsce chcesz zwiedzić?
- Jaki kolor jest dla ciebie najładniejszy?
- Jaki jest twoje ulubione zajęcie w czasie wolnym?
- Jakie ciasto uważasz za najsmaczniejsze?
- Jakie zwierzę najbardziej ci się podoba?
- Jaki przedmiot szkolny lubisz najbardziej?
- Jakiej muzyki najchętniej słuchasz?

7. Pewnego dnia w kantorze wymiany walut za 40 zł można było kupić dokładnie 10 €. Zatem 1 € kosztowało 4 zł, 2 € – 8 zł itd.

- Narysuj w zeszycie wykres pokazujący zależność między tymi walutami. Skorzystaj z rysunku obok.
- Odczytaj z wykresu, ile złotych należało tego dnia zapłacić za 5 €, 7 €, 0,5 €.



Zadania

W parku rosną drzewa: 16 klonów, 6 kasztanowców, 4 jodły, 3 modrzewie, 9 lip, 8 świerków, 5 dębów i 7 sosen. Narysuj diagram słupkowy pokazujący liczbę poszczególnych drzew w tym parku (drzewa iglaste i liściaste oznacz różnymi kolorami), a następnie odpowiedz na pytania.

- a) Ile drzew rośnie w tym parku?
- b) O ile więcej drzew liściastych niż iglastych rośnie w tym parku?
- c) Jakich drzew jest najwięcej, a jakich – najmniej?

Magda notowała przez tydzień, przez ile czasu każdego dnia słuchała muzyki. Notatki zapisała w tabeli. Na jej podstawie narysuj w zeszycie diagram słupkowy. Skorzystaj z rysunku poniżej.

Dzień tygodnia	Czas słuchania
poniedziałek	1 h 45 min
wtorek	1 h
środa	2 h 15 min
czwartek	2 h
piątek	1 h 15 min
sobota	2 h 45 min
niedziela	30 min

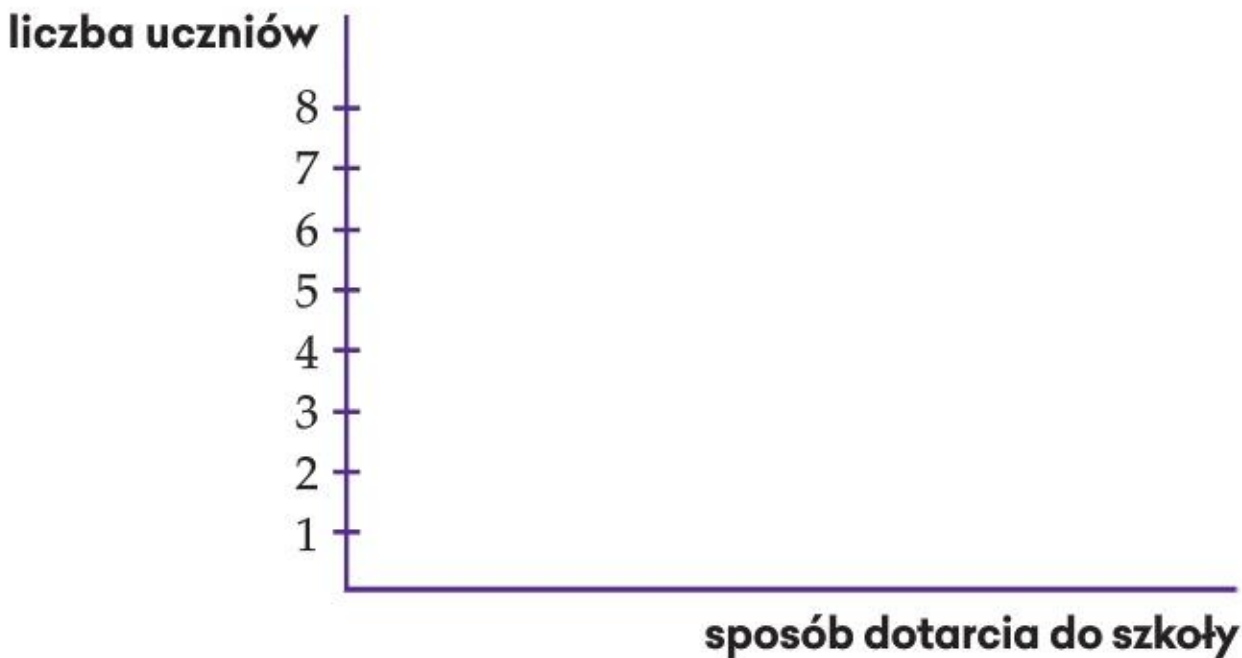


- a) Którego dnia Magda najdłużej słuchała muzyki, a którego – najkrócej?
- b) O ile minut dłużej Magda słuchała muzyki w środę niż w poniedziałek?
- c) Ile godzin Magda słuchała muzyki w ciągu całego tygodnia?

Uczniowie klasy VIa zostali zapytani, w jaki sposób docierają do szkoły. Okazało się, że 12 uczniów (w tym 7 dziewcząt) przychodzi do szkoły pieszo, 7 uczniów (w tym 2 dziewczynki) jest przywożonych przez rodziców samochodem, 4 dziewczynki przyjeżdżają autobusem, a 3 chłopców i 1 dziewczynka przyjeżdżają na rowerze.

Skorzystaj z powyższych informacji i utwórz tabelę według przedstawionego wzoru, oraz diagram słupkowy (użyj innego koloru dla dziewcząt i innego dla chłopców). Następnie odpowiedz na pytania.

Sposób dotarcia do szkoły							
pieszo		samochodem		autobusem		rowerem	
dz.	chł.	dz.	chł.	dz.	chł.	dz.	chł.

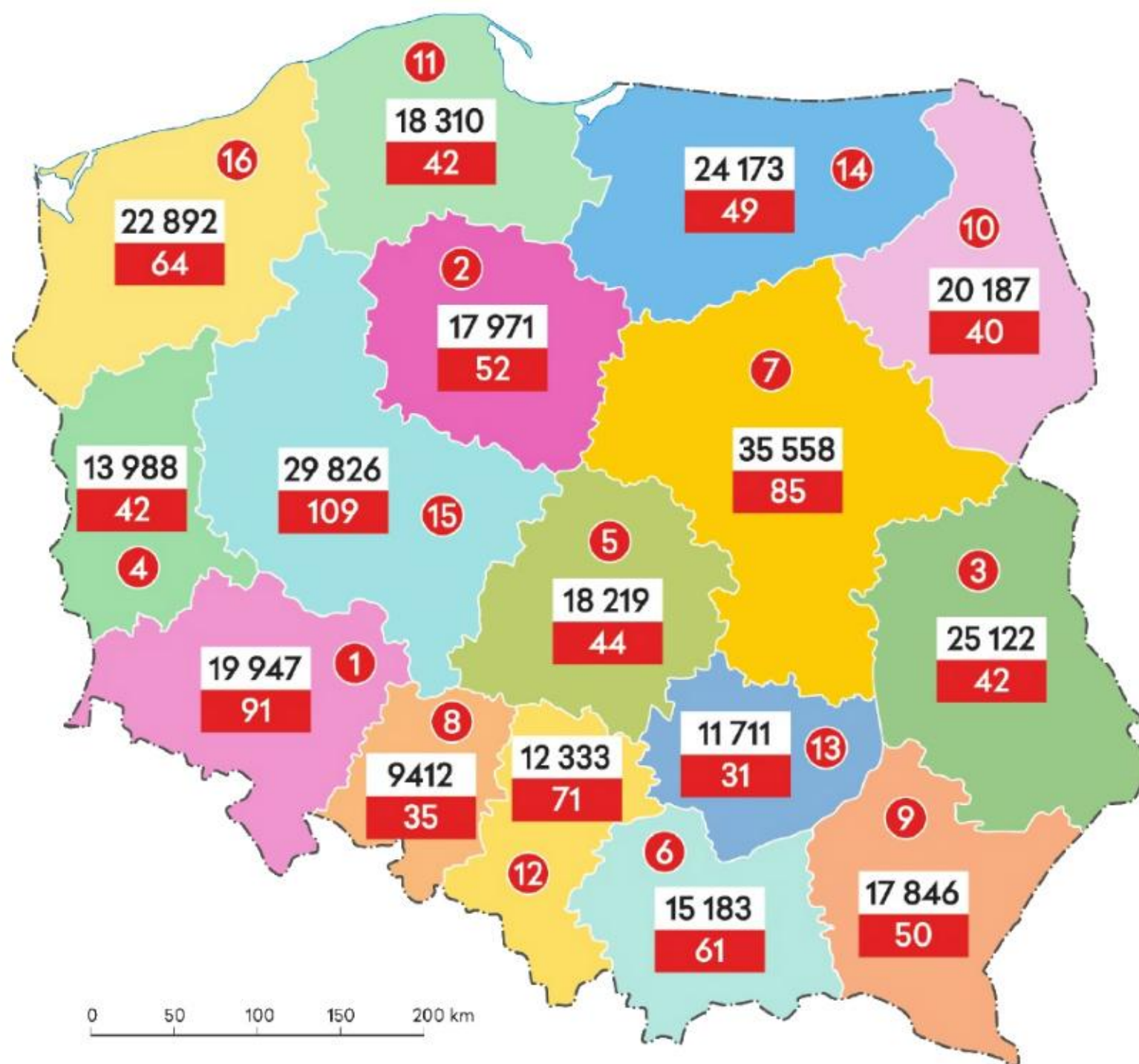


- a) Ilu uczniów liczy klasa VIa?
- b) Ile dziewcząt, a ilu chłopców uczęszcza do klasy VIa?
- c) W jaki sposób dociera do szkoły najwięcej chłopców?
- d) Ile dziewcząt nie przychodzi do szkoły pieszo?
- e) Ilu uczniów przyjeżdża do szkoły na rowerze?

Na podstawie mapy wykonaj poniższe polecenia.



Polska z podziałem na województwa



Legenda

powierzchnia (w km²)
 liczba miast

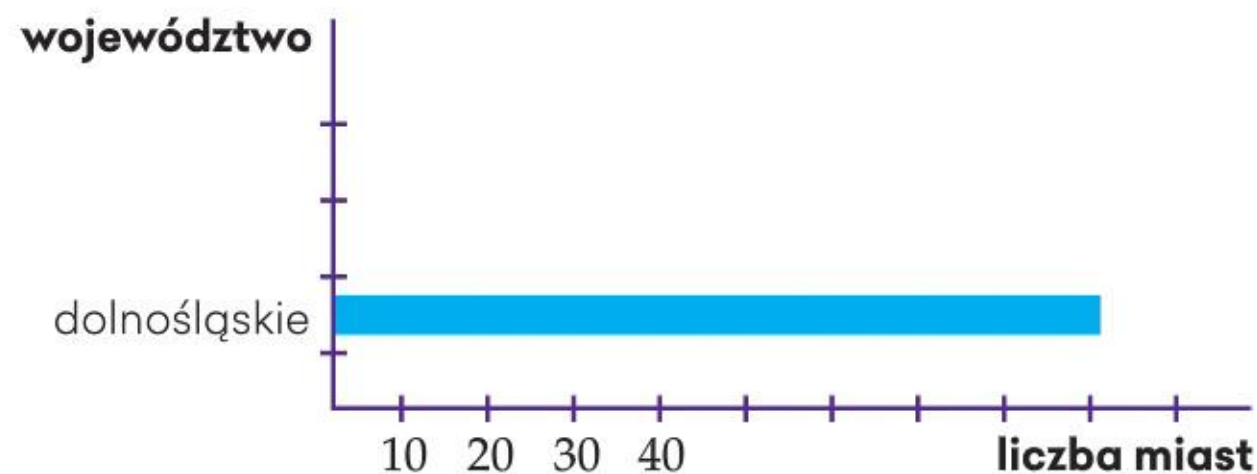
Województwa:

- 1 dolnośląskie
- 2 kujawsko-pomorskie
- 3 lubelskie
- 4 lubuskie
- 5 łódzkie
- 6 małopolskie
- 7 mazowieckie
- 8 opolskie
- 9 podkarpackie
- 10 podlaskie
- 11 pomorskie
- 12 śląskie
- 13 świętokrzyskie
- 14 warmińsko-mazurskie
- 15 wielkopolskie
- 16 zachodniopomorskie

a) Wykonaj tabelę według przedstawionego wzoru.

Województwo	Powierzchnia		
	w km ²	w zaokrągleniu	
		do tys. km ²	w tys. km ²
dolnośląskie	19 947	20 000	20
...	...	...	...

b) Wykonaj diagram.
Skorzystaj z rysunku obok.

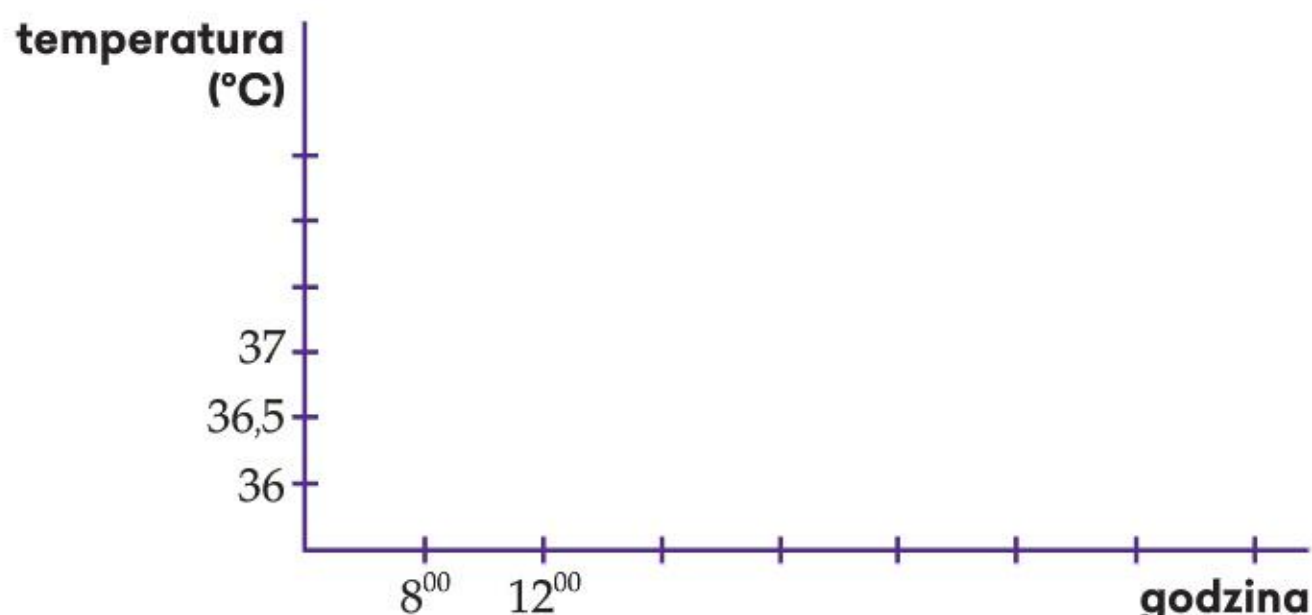


c) Odpowiedz na pytania.

- Które województwo ma największą, a które – najmniejszą powierzchnię?
- Które województwa mają powierzchnię większą niż 20 000 km²?
- Które województwa mają powierzchnię mniejszą niż województwo małopolskie?
- W których województwach jest najwięcej, a w których – najmniej miast?
- W których województwach jest więcej niż 50 miast?

d) Podaj inne pytania, które można zadać na podstawie tabeli i diagramu.

- Agnieszka zachorowała i co 4 godziny mierzyła sobie temperaturę. Oto kolejne wyniki jej pomiarów: $38,5^{\circ}\text{C}$, $38,5^{\circ}\text{C}$, 38°C , 37°C , $37,5^{\circ}\text{C}$, $36,5^{\circ}\text{C}$. Narysuj w zeszycie wykres jej temperatury. Skorzystaj z rysunku obok. Czy możesz połączyć zaznaczone punkty?



- W szkole zorganizowano eliminacje do miejskiego konkursu matematycznego. W konkursie szkołę mogą reprezentować uczniowie, którzy uzyskali nie mniej niż 10 punktów.

Liczba punktów zdobyta przez ucznia	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba uczniów	1	0	1	2	1	3	5	4	5	7	5	6	4

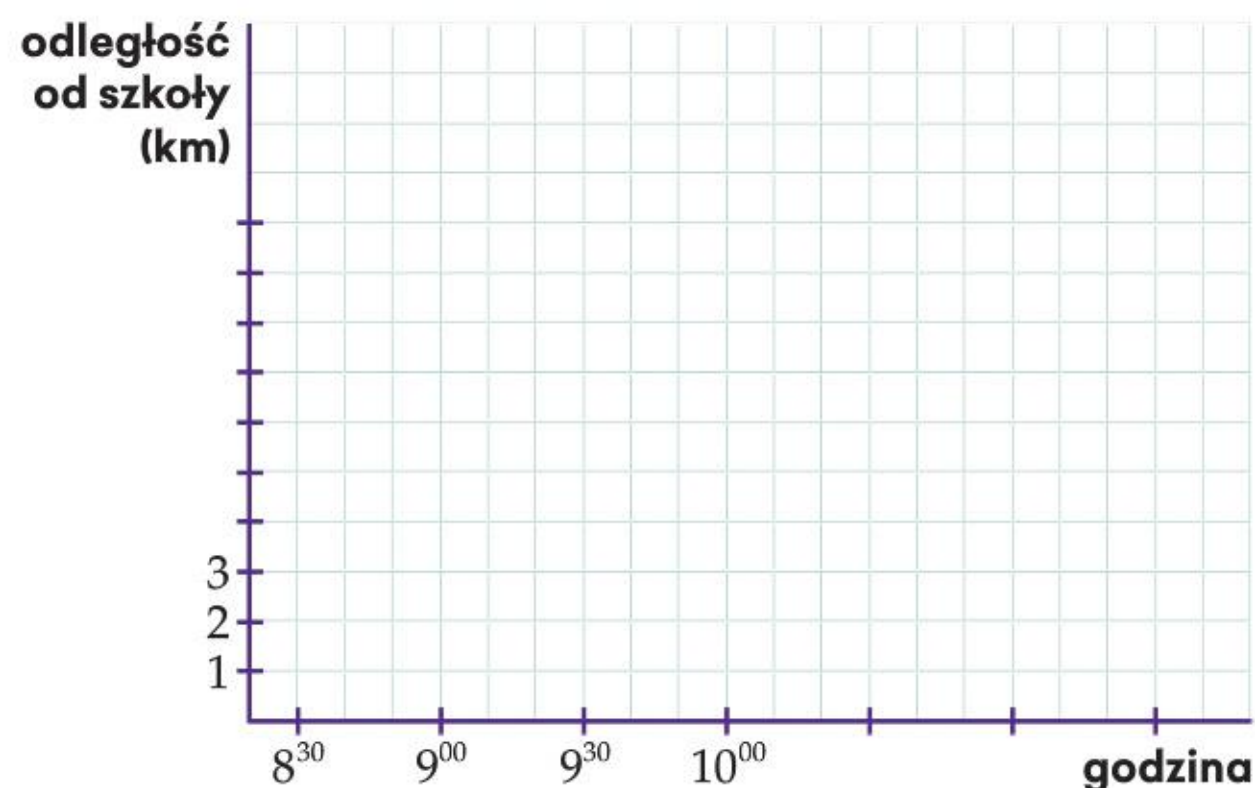
Narysuj w zeszycie diagram słupkowy. Skorzystaj z rysunku obok.



- Ilu uczniów brało udział w eliminacjach?
- Ilu uczniów zakwalifikowało się do konkursu?
- Jaka jest średnia liczba punktów przypadająca na jednego ucznia?
- Ilu uczniów uzyskało wynik poniżej średniej?

- ★ Klasa VIa wybrała się na wycieczkę. Uczniowie wyszli ze szkoły o godzinie 8.30. Po 10 min doszli do wąwozu znajdującego się od niej w odległości 1 km. Następnie przez 30 min szli plażą, oddalając się o kolejne 2 km od budynku szkoły. Potem przez 40 min zwiedzali latarnię morską. Stamtąd podążyli szosą jeszcze dalej, do rezerwatu ptaków – przeszli 4 km, co zajęło im 1 h 10 min. Zrobili tam postój na pół godziny i przyglądali się bielikom, a następnie wrócili autobusem, który dowiózł ich pod samą szkołę. Autobus jechał 10 min.

Narysuj w zeszycie wykres pokazujący odległość uczniów od szkoły podczas całej wycieczki (skorzystaj z rysunku obok) i odpowiedz na pytania.



- O której godzinie uczniowie wrócili do szkoły?
- W jakiej odległości od szkoły znajdowali się o podanej godzinie?
 - 9.10 • 9.50 • 11.00
- Ile czasu szli pieszo?
- Ile trwała wycieczka?

4.8 Procenty

Podejmij temat

Wykształcenie

Według badań przeprowadzonych w czerwcu br. 54% dorosłych ma wykształcenie wyższe, 25% – średnie, a pozostali – podstawowe.

MEDIA – TV – RADIO

Telewizjowicze protestują!
Okolo 16% czasu antenowego zajmują reklamy.



Czy pamiętasz, co to jest procent?

REKORDOWA LICZBA GŁOSUJĄCYCH!

Znamy już oficjalne wyniki głosowania. W wyborach wzięło udział 68% uprawnionych obywateli. Wygrał kandydat partii Samodzielność – zdobył aż 58% głosów. Jego główny kontrkandydat uzyskał jedynie 18% poparcia.

Ile soku w napoju?

W większości napojów jest nie więcej niż 10% soku owocowego.

Widziałaś te wycinki z gazet? Wiesz, co oznacza ten symbol użyty w tekście? Ten z dwoma kółeczkami.



Pamiętam, że to się czyta „procent”. Ale nie mogę sobie przypomnieć, do czego on służy.

Za pomocą symbolu % można zapisywać ułamki o mianowniku 100. Procent to setna część całości.

$$\frac{1}{100} = 1\%$$

$$\frac{7}{100} = 7\%$$

$$\frac{34}{100} = 34\%$$

$$0,02 = 2\%$$

$$0,56 = 56\%$$

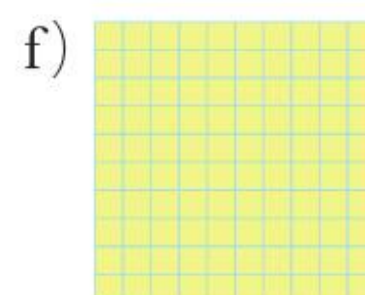
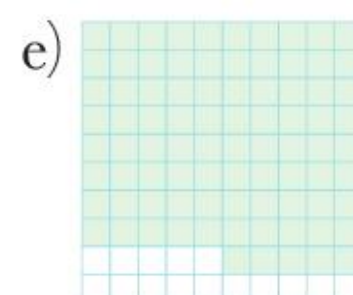
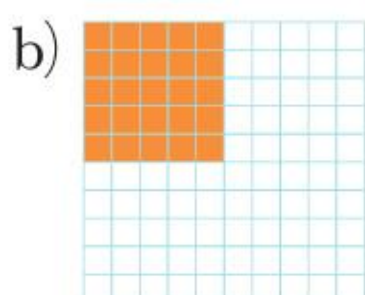
$$0,6 = 0,60 = 60\%$$

$$1 = \frac{100}{100} = 100\%$$

$$2 = \frac{200}{100} = 200\%$$

$$7 = \frac{700}{100} = 700\%$$

1. Zapisz w postaci ułamka i procentu, jaka część kwadratu została zamalowana.



2. Podaj odpowiedzi w postaci procentów.

- a) Do koła turystycznego należy 100 uczniów, w tym 72 z klas IV–VIII. Jaki procent członków koła stanowią uczniowie klas IV–VIII?
- b) W sklepie jest 100 słoików dżemu, 32 z nich to dżem truskawkowy. Jaki procent wszystkich słoików dżemu stanowią te z dżemem truskawkowym?
- c) W parku miejskim ustawiono 100 ławek, z których 61 pomalowano na brązowo. Jaki procent wszystkich ławek stanowią te brązowe?
- d) Robert zapisał 17 kartek 100-kartkowego notesu. Jaki procent notesu zapisał?
- e) Ewa wydała 84 zł ze 100 zł, które miała w portfelu. Jaki procent pieniędzy wydała Ewa? Jaki procent pieniędzy jej pozostał?
- f) W szkole, do której uczęszcza 200 uczniów, pewnego dnia było 18 nieobecnych. Jaki procent wszystkich uczniów stanowili uczniowie obecni, a jaki – nieobecni?
- g) W 400-stronicowej książce 36 stron zajmują ilustracje. Jaki procent książki stanowią ilustracje?
- h) W ankiecie skierowanej do 300 osób zadano następujące pytanie: Czy lubisz deszczową pogodę? Twierdząco odpowiedziało zaledwie 45 osób. Jaki procent osób z tej grupy lubi deszcz?

Aby ułamek wyrazić w postaci procentów, należy ten ułamek pomnożyć przez 100%.

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot 100\% = 40\%$$

$$0,35 = 0,35 \cdot 100\% = 35\%$$

Powyższa zasada dotyczy nie tylko ułamków, ale również liczb mieszanych i liczb naturalnych.

$$2\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4} \cdot 100\% = \frac{9}{4} \cdot 100\% = 225\%$$

$$6 = 6 \cdot 100\% = 600\%$$

3. Zapisz w postaci procentów.

- | | | | |
|--------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| a) $\frac{1}{2}$ | b) $\frac{3}{4}$ | c) $\frac{4}{25}$ | d) $\frac{7}{20}$ |
| e) $\frac{17}{50}$ | f) 0,71 | g) 0,03 | h) 0,4 |
| i) 0,99 | j) 5 | k) $1\frac{3}{5}$ | l) 2,34 |



Czy mnożenie przez 100% nie zmienia wartości liczby?

Nie, ponieważ $100\% = 1$, zatem mnożenie liczby przez 100% to mnożenie przez 1.

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5} \cdot 100\% = 40\%$$

Ciekawe!

Być może dla niektórych trudniejsza od obliczania procentów jest odmiana tego słowa.

Pamiętaj! W dopełniaczu liczby pojedynczej lepiej jeśli powiemy: *rabat w wysokości 1 procentu* (nie: procenta).

W liczbie mnogiej odmieniamy wyraz *procent* w połączeniu z liczebnikiem oznaczającym całości tylko w celowniku, narzędniku i miejscowniku; mówimy więc: *zadowolił się 5 procentami zysku*, ale: *zabrakło mu 5 procent głosów*.

Z liczebnikami ułamkowymi słowo *procent* jest nieodmienne. Zatem *7,34 procent* to forma poprawna.

Aby procenty wyrazić w postaci ułamka, należy liczbę wskazującą procenty podzielić przez 100.

$$17\% = 17 : 100 = \frac{17}{100} = 0,17$$

$$90\% = 90 : 100 = \frac{9}{10} = 0,9$$

Powyższa zasada dotyczy nie tylko ułamków, ale również liczb mieszanych i naturalnych.

$$347\% = 347 : 100 = \frac{347}{100} = 3\frac{47}{100} = 3,47$$

$$700\% = 700 : 100 = 7$$

4. Zapisz w postaci ułamka zwykłego lub liczby mieszanej (pamiętaj, aby wynik był ułamkiem nieskracalnym).

- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| a) 31% | b) 26% | c) 45% | d) 80% |
| e) 151% | f) 175% | g) 423% | h) 350% |

5. Zapisz w postaci ułamka dziesiętnego.

- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| a) 47% | b) 16% | c) 3% | d) 70% |
| e) 126% | f) 221% | g) 320% | h) 105% |

Więcej na temat

Czasami istnieje konieczność opisania bardzo małej części całości, mniejszej niż $\frac{1}{100}$.

Aby nie stosować ułamków procentu (choć oczywiście można), wprowadzono pojęcie określające tysięczną część całości. Jest to **promil** – oznacza się go symbolem ‰.

$$1‰ = \frac{1}{1000}$$

$$2‰ = \frac{2}{1000}$$

$$17‰ = \frac{17}{1000}$$

$$89‰ = \frac{89}{1000}$$

Zauważmy, że $10‰ = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100} = 1\%$, a więc $1‰ = 0,1\%$.

Podobnie jak w przypadku procentów, również promile możemy zapisywać jako ułamki, i odwrotnie.

- Aby ułamek wyrazić w postaci promili, należy ten ułamek pomnożyć przez 1000‰.
- Aby promile wyrazić w postaci ułamka, należy liczbę wskazującą promile podzielić przez 1000.

6. Czosnek zawiera (oprócz węglowodanów i wody):



• 64‰ białka,

• 5‰ tłuszczu,

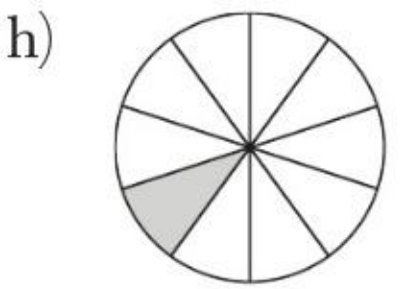
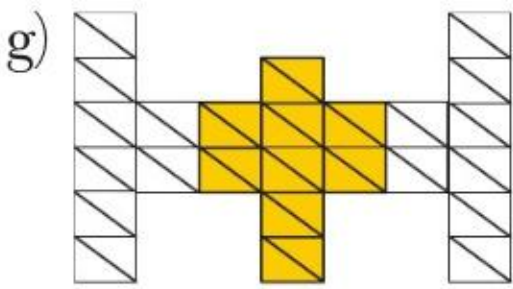
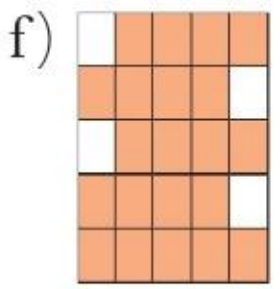
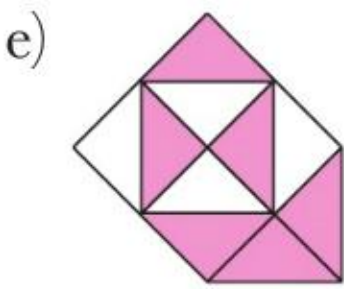
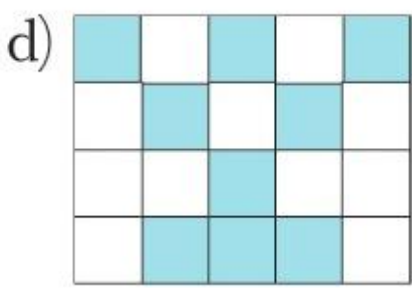
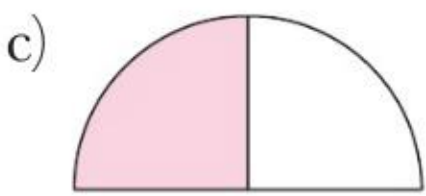
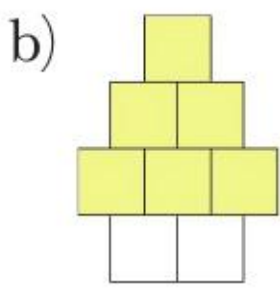
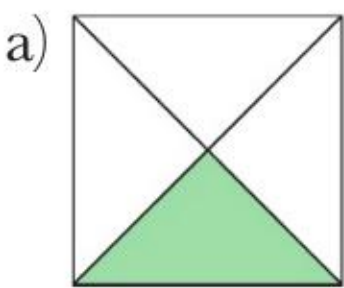
• 0,4‰ witamin,

• 6‰ soli mineralnych.

Zapisz zawartość powyższych składników za pomocą ułamków.

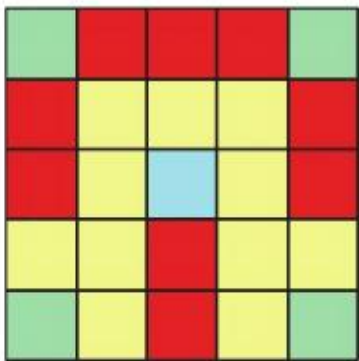
Zadania

Jaki procent figury zamalowano?



Jaki procent całego kwadratu stanowi część w kolorze:

- a) zielonym, b) niebieskim,
c) czerwonym, d) żółtym?



Uczniowie klas szóstych zbierali surowce wtórne. Klasa VIa zebrała $\frac{1}{5}$ całej makulatury, klasa VIb zebrała $\frac{7}{20}$, klasa VIc – $\frac{1}{4}$, a pozostałą część zebrała VId. Jaki procent całej zebranej makulatury stanowiła część zebrana przez poszczególne klasy?

Gospodarz obsiał $\frac{3}{5}$ swojego pola pszenicą, a $\frac{3}{10}$ – jęczmieniem. Ile procent pola przeznaczył pod uprawę pszenicy, a ile – pod uprawę jęczmienia? Czy obsiał całe pole?

Białko stanowi 56% masy jajka, żółtko – 32%, a reszta to skorupka. Jakim ułamkiem masy jajka jest białko, jakim jest żółtko, a jakim – skorupka?

Mama ugotowała kompot wieloowocowy. Jabłka stanowiły w nim 0,36 masy owoców, gruszki $\frac{1}{5}$, wiśnie $\frac{1}{4}$, a pozostałą część stanowił agrest. Zapisz skład procentowy owoców w tym kompocie.

Bartek i Ola jadą na spotkanie. Bartek przejechał 8,4 km, a Ola 3 km. Jaki procent drogi przejechał Bartek, a jaki Ola? Brakujące informacje odczytaj z rysunku.



W tabeli przedstawiono oceny uczniów klas szóstych z ostatniego testu z matematyki.
a) Ilu uczniów pisało ten test?
b) Ile procent uczniów klas szóstych otrzymało poszczególne oceny?

Ocena	cel.	bdb.	db.	dst.	dop.	ndst.
Liczba uczniów	4	16	20	24	12	4

4.9 Obliczanie procentu danej liczby

Podejmij temat



Czy potrafisz odpowiedzieć na pytanie, ilu jest chłopców wśród znajomych Maćka?

Mam już 120 znajomych, z czego 50% to chłopcy.



Iza ma 80 płyt CD, z czego 50% to płyty z muzyką. Pamiętamy, że 50% oznacza połowę, łatwo możemy więc obliczyć, że połowa liczby 80 to 40, czyli 50% liczby 80 to 40. A zatem wiemy już, że Iza ma 40 płyt z muzyką.



Obliczanie procentu danej liczby w trudniejszych przypadkach wykonujemy tak jak obliczanie ułamka danej liczby, bo przecież procenty to ułamki o mianowniku 100.

Trzeba tylko zamienić procent na ułamek i już wiemy, jak obliczać.

Przykład 1

- a) Aneta przeczytała w tym roku 40 książek, z czego 30% to były lektury szkolne. Obliczmy, ile lektur przeczytała Aneta.
b) Obliczmy 20% liczby 14.

a) 30% liczby 40 to
 $\frac{30}{100}$ liczby 40, czyli
 $\frac{30}{100} \cdot 40 = \frac{3}{10} \cdot 40 =$
 $= 12$

Zamieniamy procenty na ułamek.
Zapisujemy obliczanie ułamka liczby 40.
Obliczamy ułamek liczby 40 – mnożymy ułamek przez tę liczbę.
Aneta przeczytała zatem 12 lektur.

b) 20% liczby 14 to

$\frac{20}{100}$ liczby 14, czyli

$$\frac{20}{100} \cdot 14 = \frac{1}{5} \cdot 14 = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$$

Zamieniamy procenty na ułamek.

Zapisujemy obliczanie ułamka liczby 14.

Obliczamy ułamek liczby 14 – mnożymy ułamek przez tę liczbę.

1. Oblicz.

a) 10% liczby 170
20% liczby 25

b) 10% liczby 15
70% liczby 30

c) 1% liczby 300
5% liczby 25

d) 25% liczby 16
50% liczby 4,8

W niektórych przypadkach procent danej liczby łatwo obliczyć w pamięci.

• $1\% = \frac{1}{100}$, więc aby obliczyć 1% liczby, wystarczy pomnożyć tę liczbę przez $\frac{1}{100}$, czyli podzielić ją przez 100.

• $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, więc aby obliczyć 10% liczby, wystarczy pomnożyć tę liczbę przez $\frac{1}{10}$, czyli podzielić ją przez 10.

Przykład 2

Obliczmy.

a) 1% liczby 7200

b) 1% liczby 28

c) 10% liczby 560

d) 10% liczby 47

$$\begin{aligned} \text{a) } 1\% \text{ liczby } 7200 &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{100} \cdot 7200 = 72 \\ \text{lub} \\ 7200 : 100 = 72 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 1\% \text{ liczby } 28 &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{100} \cdot 28 = \frac{28}{100} = 0,28 \\ \text{lub} \\ 28 : 100 = 0,28 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 10\% \text{ liczby } 560 &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{10}{100} \cdot 560 = 56 \\ \text{lub} \\ 560 : 10 = 56 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 10\% \text{ liczby } 47 &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{10}{100} \cdot 47 = 4,7 \\ \text{lub} \\ 47 : 10 = 4,7 \end{array} \right. \end{aligned}$$



Aby obliczyć 2% liczby, można obliczyć 1% liczby w sposób pokazany w przykładzie 2 i otrzymany wynik pomnożyć przez 2.
Aby obliczyć 30% liczby, można obliczyć 10% liczby w sposób pokazany w przykładzie 2 i otrzymany wynik pomnożyć przez 3.

2. Oblicz w pamięci.

a) 1% liczby 800
1% liczby 90
1% liczby 34

b) 10% liczby 300
10% liczby 40
10% liczby 85

c) 1% liczby 400
2% liczby 400
7% liczby 400

d) 10% liczby 500
30% liczby 500
60% liczby 500

Zadania

- W klasie VIa liczącej 30 uczniów pewnego dnia nieobecnych było 10% osób. Ilu uczniów klasy VIa nie przyszło tego dnia do szkoły?
- Ania, Bożena, Krysia i Monika czytają 200-stronicową książkę. Ania przeczytała 20% książki, Bożena 25%, Krysia 50%, a Monika 100%. Ile stron przeczytała każda z dziewcząt?
- W szkolnej bibliotece jest 5400 książek, z czego 40% to książki historyczne. Ile książek historycznych jest w tej bibliotece?
- Plecak, który Marta niesie do szkoły, waży 4 kg 20 dag. Ciężar zeszytów stanowi 20% całego ciężaru plecaka. Zapisz w dekagramach, ile waży plecak z zawartością, i oblicz, ile ważą zeszyty.
- Kamil mieszka w odległości 4800 m od szkoły. Autobusem przebywa 80% tej drogi, a pozostałą część idzie piechotą. Ile metrów Kamil idzie pieszo?
- Ściana w sali lekcyjnej, na której wiszą tablice, jest prostokątem o powierzchni 18 m^2 . Tablice zajmują 25% powierzchni ściany. Oblicz powierzchnię tablic.
- W sklepie rozpoczęła się wiosenna wyprzedaż. Cena każdego towaru została obniżona o 10%. Na witrynie sklepu, widocznej na rysunku obok, podane są pierwotne ceny. Oblicz, ile teraz kosztują zimowe ubrania i buty.
- Pan Marian zarobił 5400 zł i postanowił 60% tej kwoty przeznaczyć na wycieczkę zagraniczną. Jaki był koszt planowanej przez pana Mariana wycieczki?
- Pani Ala kupiła na raty samochód za 40 000 zł. Pierwsza rata stanowiła 12% ceny auta. Oblicz, ile złotych zapłaciła pani Ala, wpłacając pierwszą ratę. Jaka kwota pozostała jej jeszcze do spłacenia?
- Do klas IV–VIII uczęszcza 240 uczniów, z których 35% należy do szkolnego koła sportowego. Ilu uczniów uczęszcza na zajęcia tego koła?
- W ubiegłym roku w Lubinowie mieszkało 12 500 osób, w Rudowie 12 200, a w Środkowie 10 300. Przez rok liczba mieszkańców Lubinowa wzrosła o 8%, Rudowa o 6%, a Środkowa o 10%. Ilu mieszkańców jest obecnie w każdej z tych miejscowości?
- Która wartość jest większa: 5% liczby 6 czy 6% liczby 5?



Podsumowanie działu 4

Ważne pojęcia

droga	średnia arytmetyczna	czas	diagram	prędkość	wykres
-------	----------------------	------	---------	----------	--------

Prędkość, droga, czas i ich jednostki

$$\text{prędkość} = \frac{\text{droga}}{\text{czas}}$$
$$v = \frac{s}{t}$$

$$\text{droga} = \text{prędkość} \cdot \text{czas}$$
$$s = v \cdot t$$

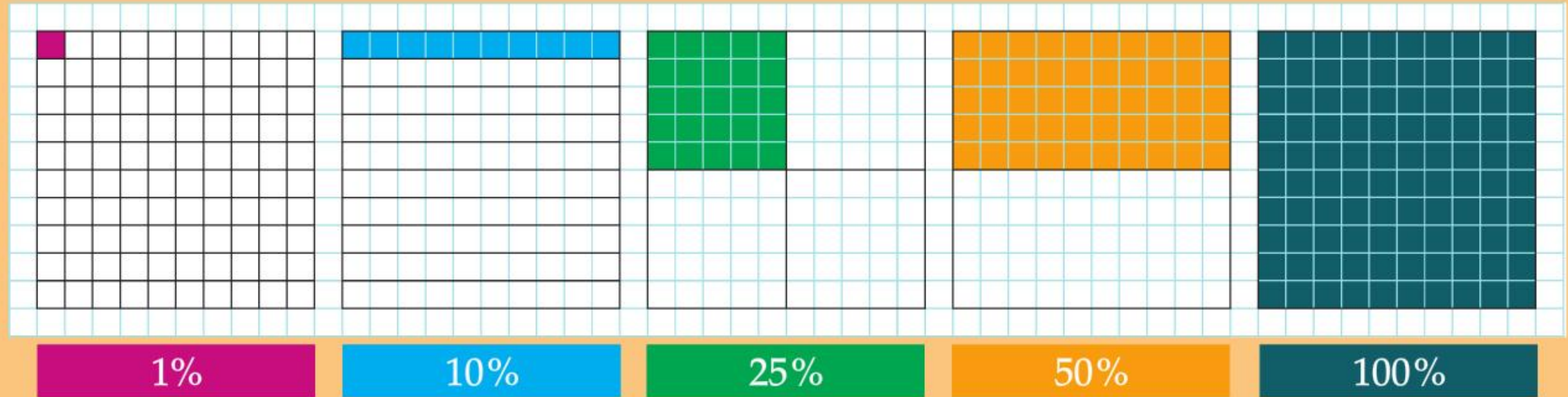
$$\text{czas} = \frac{\text{droga}}{\text{prędkość}}$$
$$t = \frac{s}{v}$$

Jednostki	prędkości	$\frac{\text{mm}}{\text{s}}, \frac{\text{cm}}{\text{s}}, \frac{\text{cm}}{\text{min}}, \frac{\text{m}}{\text{s}}, \frac{\text{m}}{\text{min}}, \frac{\text{m}}{\text{h}}, \frac{\text{km}}{\text{s}}, \frac{\text{km}}{\text{min}}, \frac{\text{km}}{\text{h}}$
	drogi	mm, cm, m, km
	czasu	s, min, h

Tabela, diagram, wykres



Procenty



Czy już umiesz?

- 1 Która z dziewczynek ma średnią ocen z matematyki równą 3,6?

Magda

Matematyka
db. (4)
db. (4)
bdb. (5)
dst. (3)
ndst. (1)
db. (4)

Ania

Matematyka
dst. (3)
bdb. (5)
cel. (6)
dst. (3)

Ola

Matematyka
bdb. (5)
db. (4)
dst. (3)
dop. (2)
db. (4)

Ewa

Matematyka
dop. (2)
dst. (3)
db. (4)
db. (4)
db. (4)
dst. (3)
dop. (2)

A. Magda

B. Ania

C. Ola

D. Ewa

- 2 Podczas zawodów lekkoatletycznych zawodnicy zwycięskiej drużyny biegnący w sztafecie 4×400 m uzyskali następujące czasy: 52,7 s, 51,6 s, 52,1 s i 49,4 s. Oblicz średnią arytmetyczną czasów uzyskanych przez tych zawodników.

- 3 Pani Joanna zapakowała warzywa kupione na targu do czterech toreb. Zawartość pierwszej torby ważyła 1,82 kg, drugiej 2,14 kg, trzeciej 0,9 kg, a czwartej 3,4 kg.

- a) Oblicz średnią arytmetyczną masy zawartości wszystkich toreb.
b) Przyjmij, że pani Joanna przepakowała zakupy tak, by produkty w każdej torbie ważyły tyle samo. Jaka byłaby wówczas masa warzyw w każdej torbie?

- 4 Które wyrażenie opisuje największą długość?

A. $0,3 \text{ m} + 2,8 \text{ m}$

B. $3,2 \text{ cm} + 8 \text{ mm}$

C. $0,32 \text{ m} + 8 \text{ mm}$

D. $0,003 \text{ km} - 280 \text{ cm}$

- 5 Która masa jest najmniejsza?

A. 0,00045 t

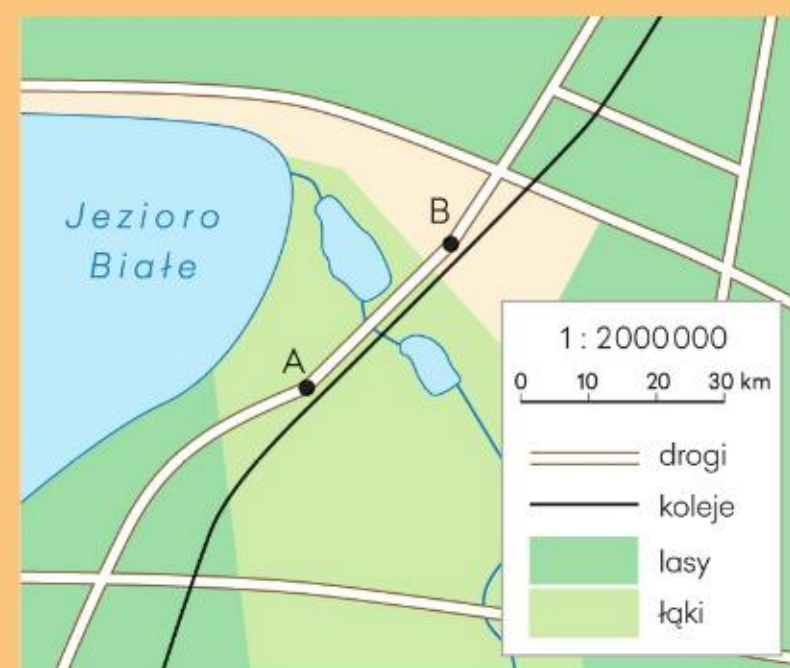
B. 0,045 kg

C. 45 dag

D. 450 g

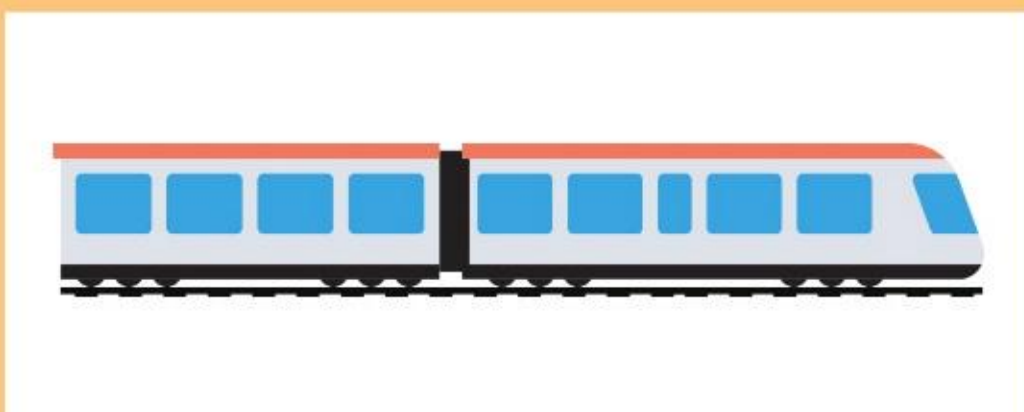
- 6 Przyjrzyj się narysowanej obok mapie i odczytaj z niej informacje potrzebne do wykonania obliczeń.

- a) Oblicz, jaka jest odległość między miejscowościami A i B w terenie.
b) Jaka byłaby odległość między miejscowościami A i B na mapie w skali 1 : 3 000 000?
c) W jakiej odległości na załączonej mapie znajdowałyby się dwie inne miejscowości oddalone od siebie o 40 km?



- 7 Pod rysunkiem podano, jaką drogę pokonano w określonym czasie. Oblicz prędkość w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a)



130 km w czasie 2 h

b)



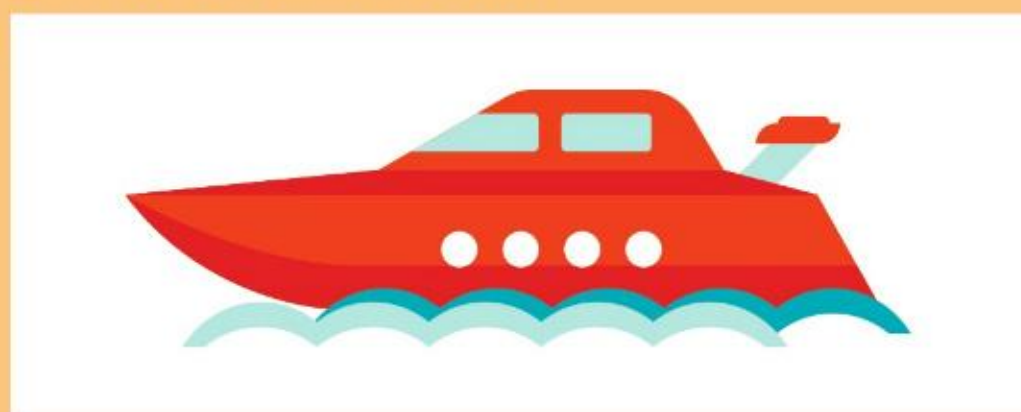
200 m w czasie 4 min

c)



240 km w czasie 180 min

d)



3500 m w czasie 5 min

e)



30 m w czasie 4 s

f)



650 m w czasie 13 s

- 8 Pan Jan w ciągu 3 h przejechał samochodem 195 km, a pan Adam w ciągu 2,5 h przejechał 156 km. Czyj samochód poruszał się z większą prędkością? O ile większą?
- 9 Pociąg z Antosiewa do Marzenówki jedzie z prędkością $63 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przez 20 min, z Marzenówki do Celestynowa – z prędkością $66 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przez $\frac{1}{2}$ h, a z Celestynowa do Dąbrówki – z prędkością $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przez 40 min. Oblicz odległość między:
- Antosiewem a Marzenówką,
 - Marzenówką a Celestynowem,
 - Celestynowem a Dąbrówką.
- 10 Kropla deszczu spadała z chmury na ziemię z prędkością średnią $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ przez $3\frac{2}{3}$ min. Na jakiej wysokości znajdowała się chmura, z której spadała ta kropla?
- 11 Jaką drogę pokona w ciągu 3 s piłka tenisowa, która po uderzeniu rakietą leci z prędkością średnią $180 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- A. 5 m B. 15 m C. 50 m D. 150 m

12 Kot Bartka biegnie z prędkością $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w kierunku futrzanej myszki rzuconej mu na odległość 4 m. Po ilu sekundach do niej dobiegnie?

13 Po jakim czasie samolot lecący z prędkością $250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ pokona 1800 km?

A. 2 h

B. 7,2 h

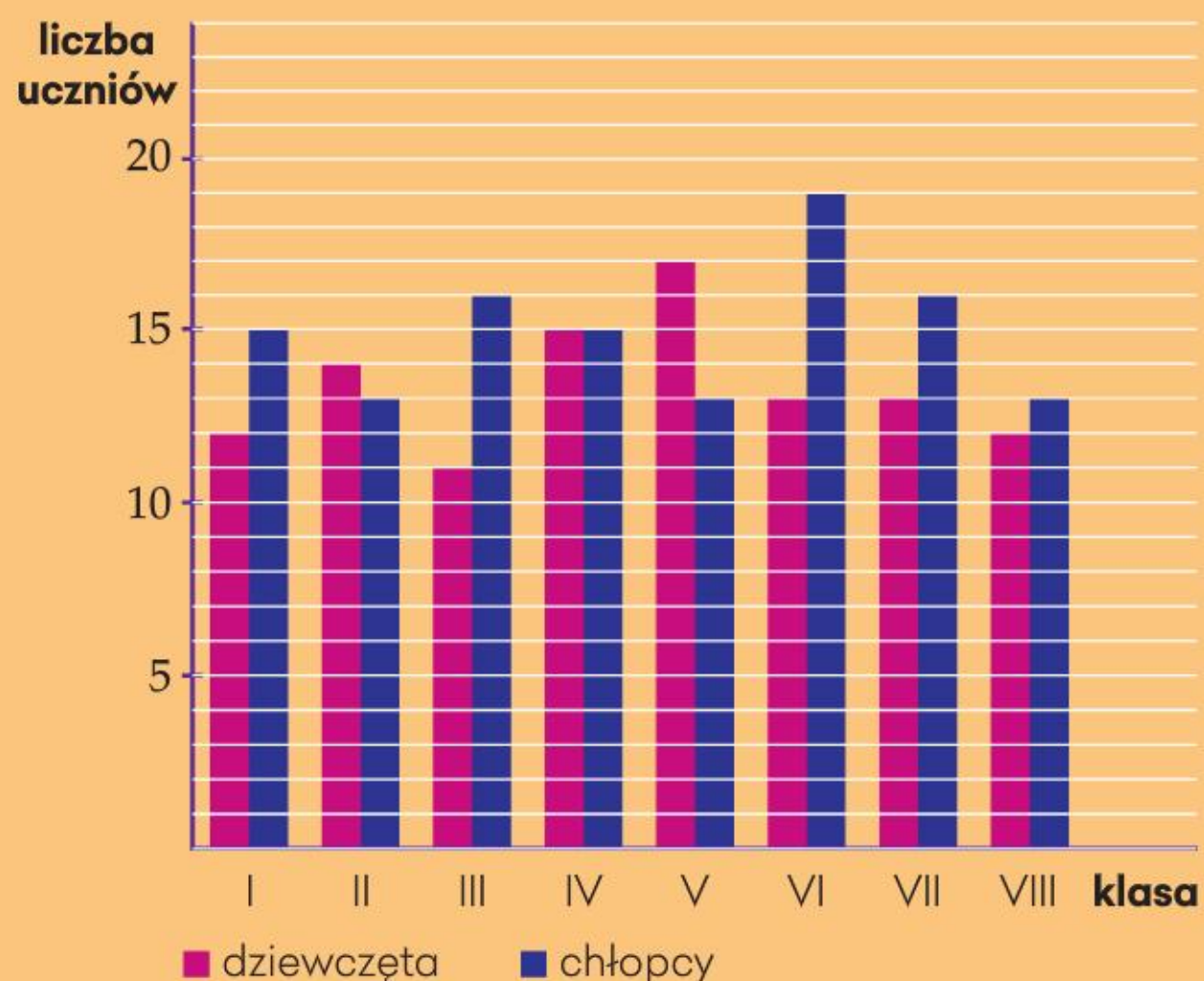
C. 200 min

D. 780 s

14 Diagram przedstawia liczbę uczniów w pewnej szkole podstawowej (z podziałem na dziewczęta i chłopcy).

Odpowiedz na pytania.

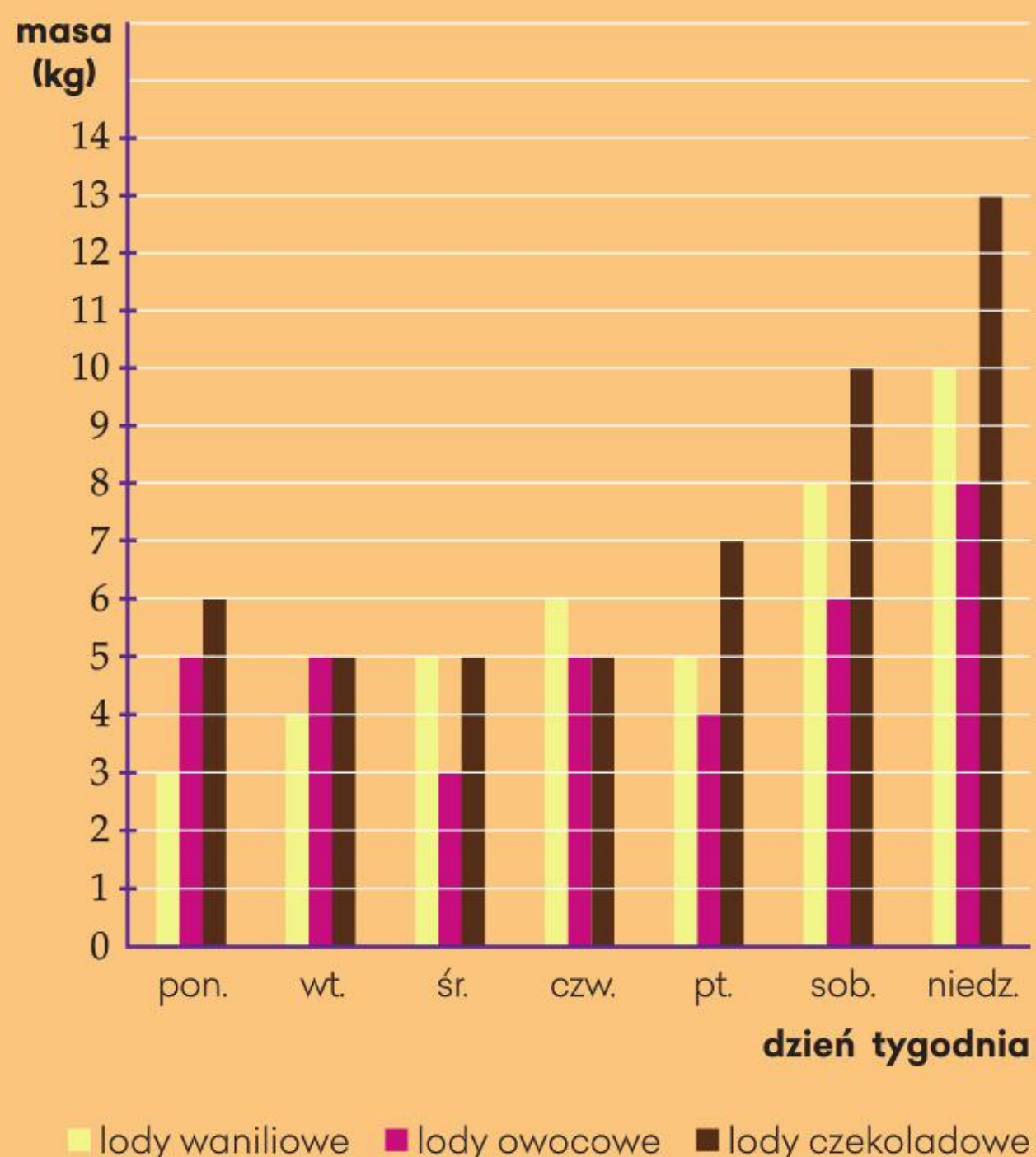
- Do której klasy uczęszcza najwięcej chłopców?
- Do której klasy chodzi najmniej dziewcząt?
- W których klasach jest więcej dziewcząt niż chłopców?
- Ilu uczniów liczy klasa V?
- Czy więcej uczniów uczęszcza do klasy IV, czy do VIII? O ilu więcej?
- W której klasie jest najwięcej uczniów?



15 W kiosku prowadzona jest sprzedaż lodów w trzech smakach: waniliowym, owocowym i czekoladowym. Na diagramie są przedstawione wyniki tygodniowej sprzedaży.

Odpowiedz na pytania.

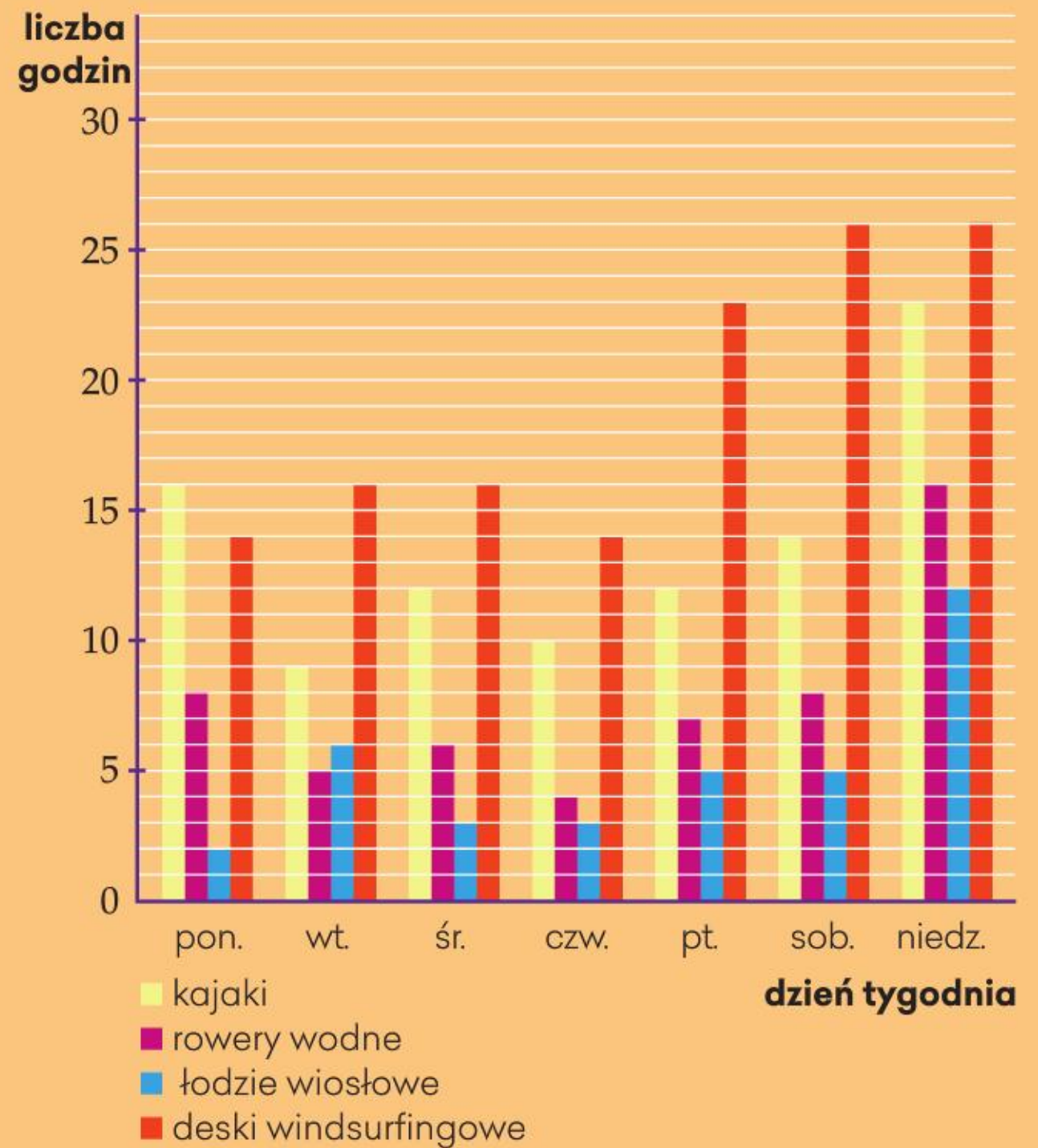
- Ile kilogramów lodów waniliowych sprzedano we wtorek?
- Którego dnia sprzedano więcej lodów waniliowych niż czekoladowych?
- Którego dnia sprzedano najmniej lodów owocowych?
- Ile kilogramów lodów sprzedano w piątek?
- O ile więcej lodów sprzedano w sobotę niż w środę?
- Ile kilogramów lodów waniliowych, ile owocowych, a ile czekoladowych sprzedano w ciągu całego tygodnia?



- 16 Wypożyczalnia sprzętu wodnego oferuje kajaki, rowery wodne, łodzie wiosłowe i deski windsurfingowe. Właściciel codziennie notuje, na ile godzin sprzęt został wypożyczony, a po upływie tygodnia informacje te przedstawia w postaci diagramu.

Odpowiedz na pytania.

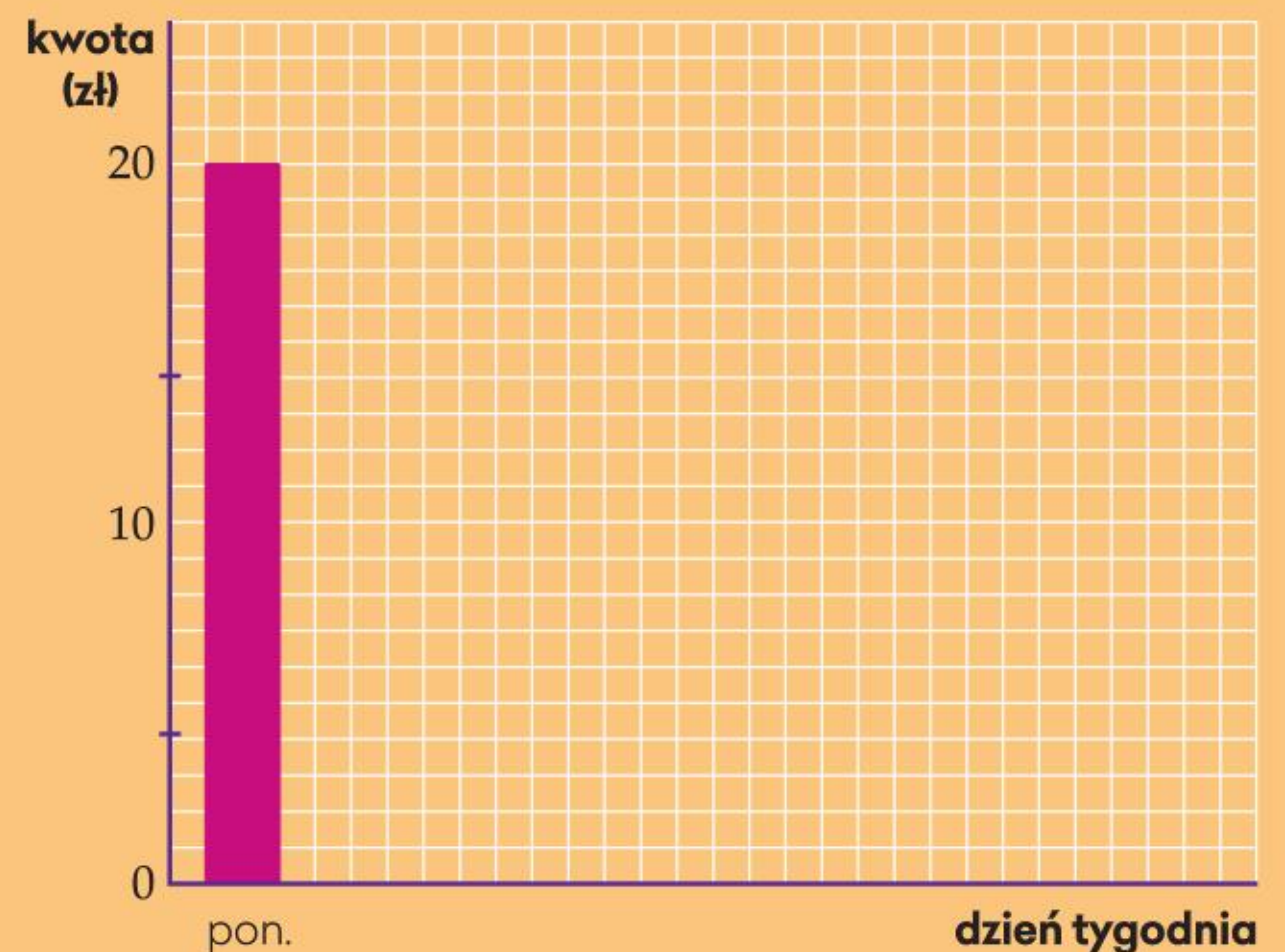
- Jaki sprzęt był wypożyczany na największą liczbę godzin każdego dnia, a jaki – na najmniejszą?
- Przez ile godzin w ciągu całego tygodnia były wypożyczone kajaki?
- W które dni rowery wodne zostały wypożyczone na dłużej niż 2 godziny?
- Którego dnia łodzie wiosłowe wypożyczono na najmniejszą liczbę godzin?
- Na ile godzin deski windsurfingowe były wypożyczone w weekend?



- 17 Kasia notowała codziennie, ile ma pieniędzy. W poniedziałek zapisała, że ma 20 zł. We wtorek wydała 6 zł na owoce. W środę dostała 13 zł od taty i kupiła zeszyt za 8 zł. W czwartek dała 5 zł na składkę klasową. W piątek otrzymała 10 zł od babci. W sobotę wydała 3 zł, a w niedzielę pożyczyła koleżance 12 zł.

Sporządź tabelę i diagram słupkowy pokazujące, ile pieniędzy miała Kasia pod koniec każdego dnia. Skorzystaj z podanych wzorów.

Dzień	pon.						
Kwota	20 zł						



Odpowiedz na pytania.

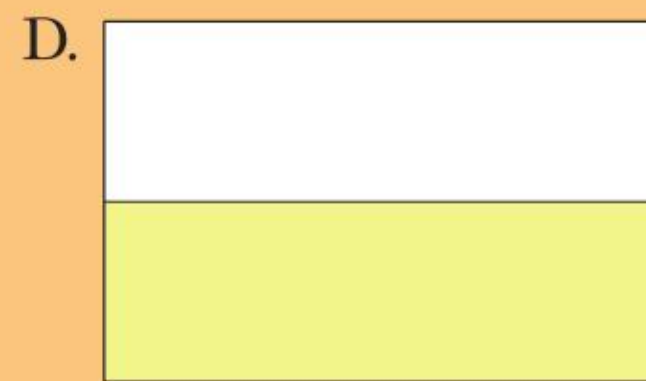
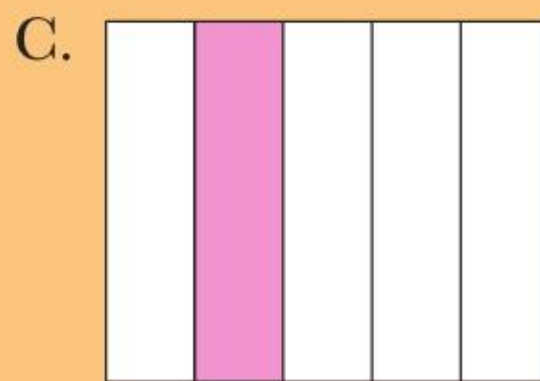
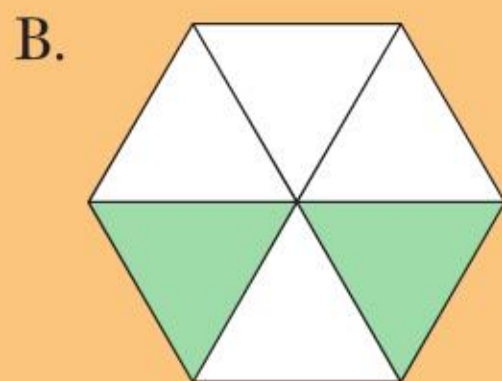
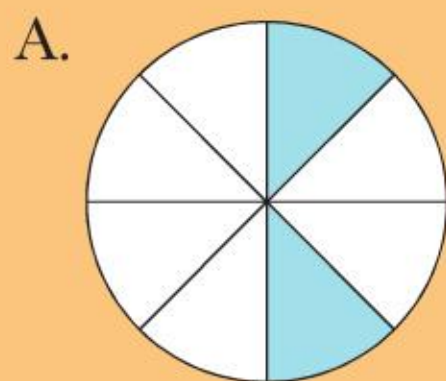
- Którego dnia Kasia zanotowała największą kwotę, a którego – najmniejszą?
- Na koniec których dni Kasia miała więcej niż 20 zł?
- W które dni słupek narysowany przez Kasię wskazywał kwotę mniejszą niż 15 zł?
- Jaka jest średnia arytmetyczna kwot Kasi przypadająca na jeden dzień?
- Czy za pieniądze posiadane na koniec niedzieli Kasia mogłaby kupić w kolejny poniedziałek w szkolnym sklepiu dwie kanapki po 3,49 zł i napój za 2 zł?

- 18 Jacek szedł z domu do szkoły w zmiennym tempie. Przez pierwsze 5 min przeszedł 500 m, przez kolejne 5 min – 400 m, przez następne 10 min – 900 m, a przez ostatnie 5 min – 200 m.

Narysuj w zeszycie wykres zależności między czasem poruszania się Jacka a przebytą przez niego drogą, według podanego wzoru.



- 19 Na którym rysunku zamalowano 20% figury?



- 20 Jaki procent wszystkich płatków stanowią płatki koloru żółtego?

- A. 60% B. 1,5%
C. 6% D. 66%



- 21 Posadzka składa się ze 140 płytek w dwóch kolorach: niebieskim i szarym. Niebieskie stanowią 70% wszystkich płytek. Ile szarych kafli położono na tej posadzce?

- A. 30 B. 70
C. 42 D. 98

- 22 Pan Zygmunt jest właścicielem stoiska z pamiątkami znad morza. Ma w sprzedaży kubki z rysunkami latarni morskich. Aby zachęcić turystów do kupowania kubków, wymyślił specjalną promocję (plakat obok).

- a) Ile trzeba zapłacić za 2 kubki w promocji?
b) Jaki jest koszt zakupu 5 kubków?
c) Czy za 40 zł można kupić 3 kubki?

PROMOCJA

- Cena 1 kubka – 15 zł
- Przy zakupie 2 kubków – cena drugiego o 10% niższa!
- Przy zakupie 3 lub więcej kubków – cena trzeciego i kolejnych o 20% niższa od ceny pierwszego!!

5. Figury płaskkie



Obejrzyj rysunek. Następnie wykonaj polecenia i odpowiedz na pytania.

1. Latawce, którymi bawią się dzieci, mają kształty wielokątów. Podaj ich nazwy.
2. Każdy latawiec został sklejony z figur w różnych kolorach. Wymień nazwy tych figur.
3. Który latawiec jest największy? Jak to sprawdzić? Spróbuj zaproponować sposób, w jaki można obliczyć pola poszczególnych latawców, tak aby móc porównać ich powierzchnię.
4. Zaprojektuj latawiec o innym kształcie niż te widoczne na rysunku i podziel go na wielokąty.
 - a) Podaj nazwy tych wielokątów, jeśli je znasz.
 - b) Zmierz odpowiednie odcinki i oblicz obwód narysowanego przez siebie latawca.
 - c) Jeżeli potrafisz, oblicz również jego pole.

5.1 Trójkąty – rodzaje i własności

Podejmij temat



Ile najwięcej trójkątów może pokolorować dziewczynka?

Mama mówiła, że masz się ze mną bawić!

Wiem... To jest rysunek naszej furty. Tu jest mnóstwo figur, o których będziesz się uczyć w szkole. Na razie pomaluj je różnymi kolorami.



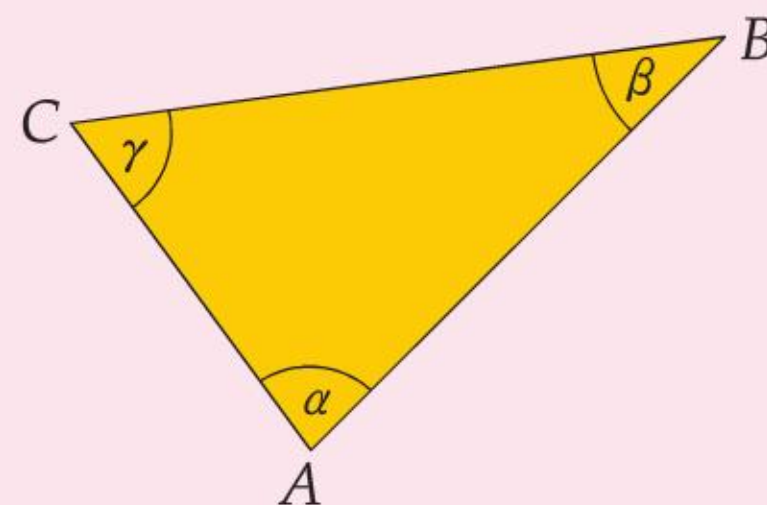
Trójkąt to wielokąt o najmniejszej liczbie boków.

Trójkąt ma trzy boki, a także trzy wierzchołki i trzy kąty.

Punkty: A , B , C , to **wierzchołki trójkąta** ABC .

Odcinki: AB , BC , CA , to **boki trójkąta** ABC .

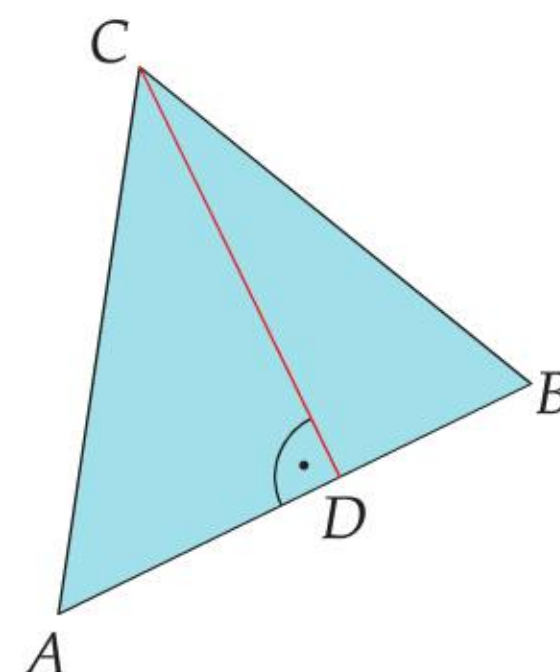
Kąty: α , β , γ , to **kąty** (wewnętrzne) **trójkąta** ABC .



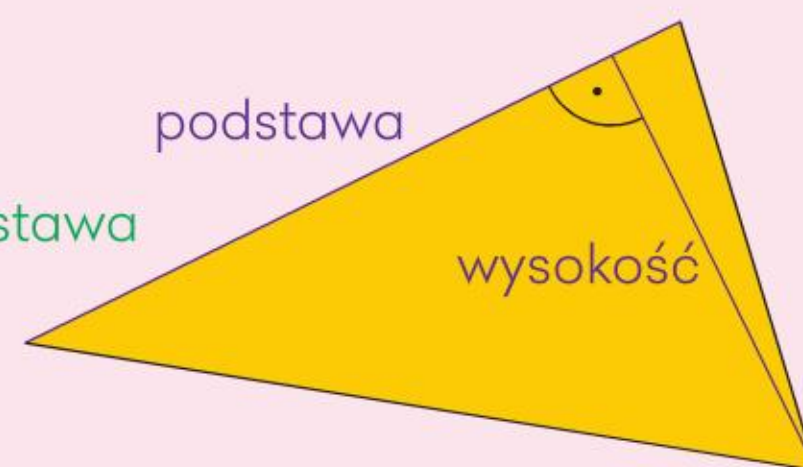
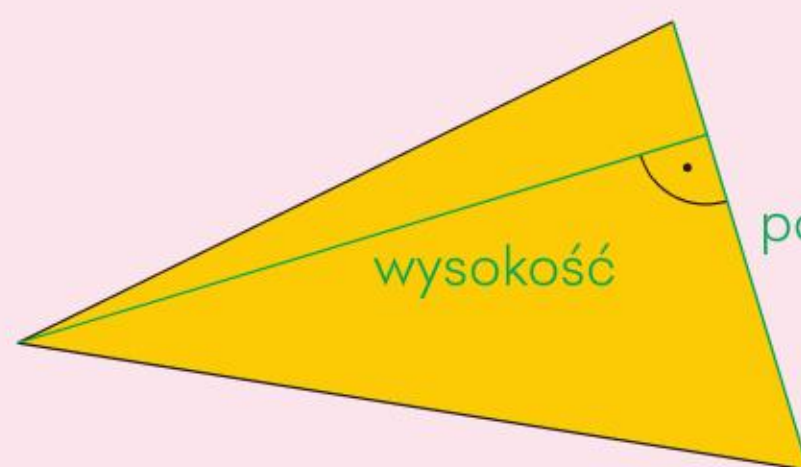
1. Przyjrzyj się rysunkowi obok, a następnie przepisz i uzupełnij poniższe zdania. Zamiast każdego znaku zapytania wpisz odpowiedni wyraz.

Odcinek CD to ? trójkąta ABC . Jest to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z przeciwległym bokiem trójkąta (lub jego przedłużeniem), tworzący z tym bokiem kąt ?.

Bok, na który została opuszczona ? CD , nazywamy ? trójkąta ABC . Na rysunku jest to odcinek ?.

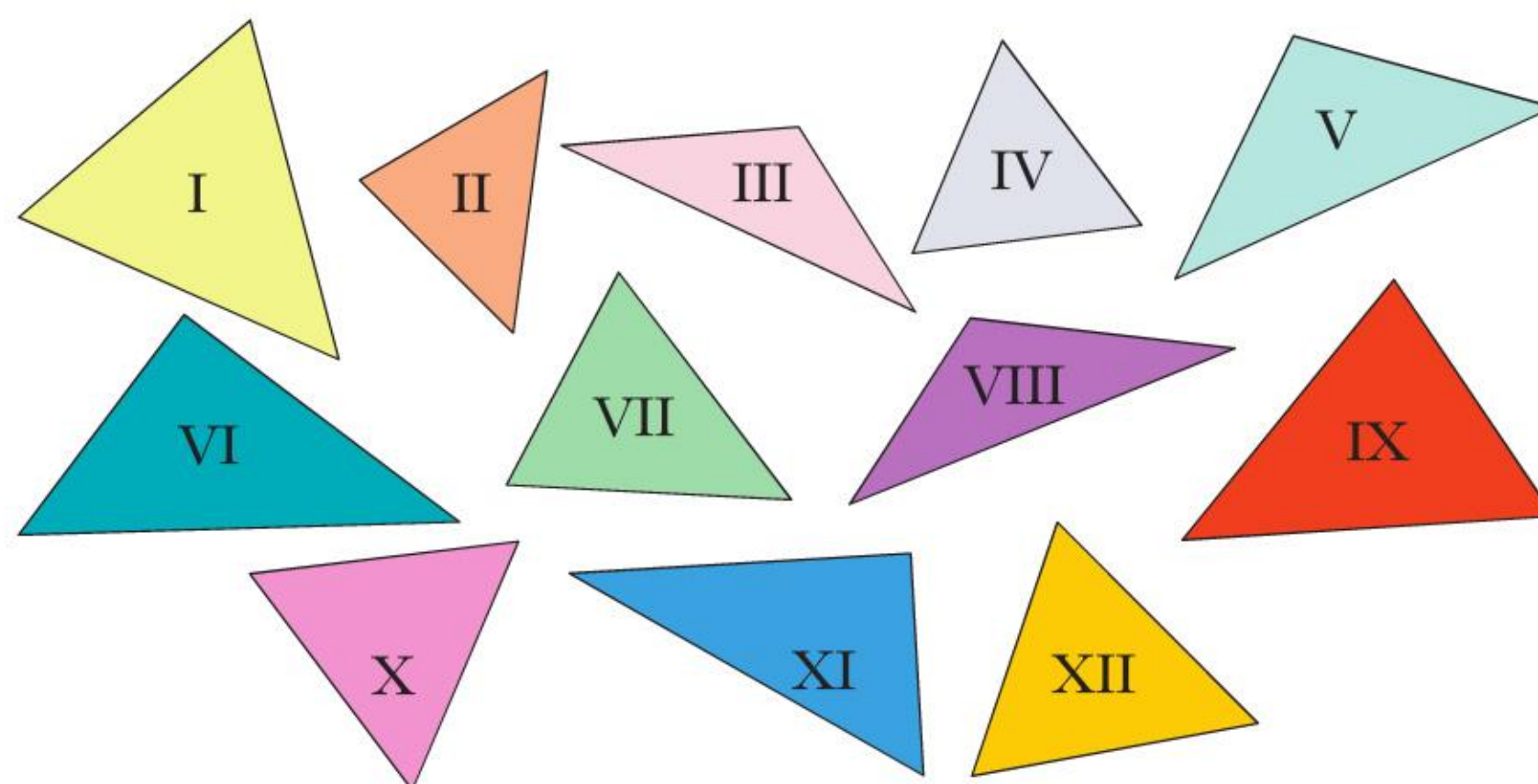


Każdy trójkąt ma trzy wysokości.



2. Z pomocą ekierki i linijki lub ekierki i cyrkla znajdź na rysunku obok trójkąty, które mają:

- a) wszystkie kąty ostre,
- b) kąt prosty,
- c) kąt rozwarty,
- d) wszystkie boki równej długości,
- e) dwa boki równej długości.



Rodzaje trójkątów ze względu na boki

Trójkąt równoboczny

to trójkąt, który ma wszystkie boki równej długości.

Trójkąt równoramienny

to trójkąt, który ma co najmniej dwa boki równej długości.

Trójkąt różnoboczny

to trójkąt, którego każdy bok jest innej długości.

Rodzaje trójkątów ze względu na kąty

Trójkąt ostrokątny

to trójkąt, którego każdy kąt jest ostry.

Trójkąt rozwartokątny

to trójkąt, którego jeden kąt jest rozwarty.

Trójkąt prostokątny

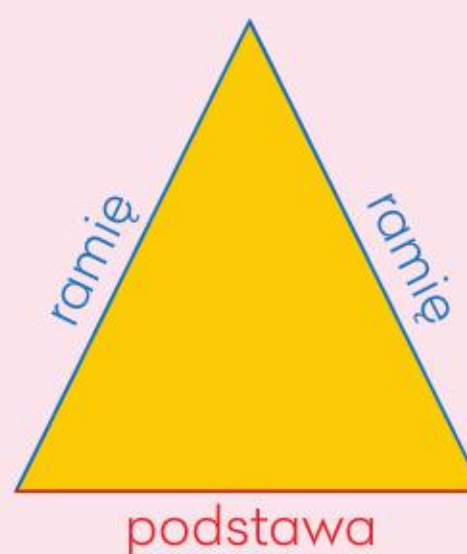
to trójkąt, którego jeden kąt jest prosty.

3. Podaj rodzaj każdego trójkąta z ćwiczenia 2 ze względu na boki oraz ze względu na kąty.

4. Narysuj trójkąt:

- a) ostrokątny,
- b) prostokątny równoramienny,
- c) rozwartokątny różnoboczny.

Boki trójkąta równoramiennego, które są równej długości, nazywamy **ramionami**, a trzeci bok – **podstawą**.



Boki trójkąta prostokątnego leżące przy kącie prostym nazywamy **przyprostokątnymi**, a bok leżący naprzeciw kąta prostego – **przeciwprostokątną**.



5. Istnieją różne rodzaje drabin. Drabina wolno stojąca tworzy z podłożem trójkąt. Drabina przystawna, czyli opierana o ścianę, tworzy trójkąt wraz z podłożem i linią ściany.
- Przyjrzyj się ilustracjom obok i narysuj w zeszycie trójkąty, o których mowa.
 - Zapisz, jak się nazywają boki tych trójkątów.



6. Bartek ułożył trójkąt z trzech jednakowych wykałaczek. Jaki trójkąt otrzymał? A jaki mógłby ułożyć z pięciu takich wykałaczek?
7. Narysuj trójkąt ostrokątny, którego boki mają długości: 2 cm, 3 cm i 4,5 cm. Jaki jest jego obwód?
8. Jaką długość ma trzeci bok trójkąta o obwodzie 123 cm, jeżeli o dwóch pozostałych bokach wiadomo, że mają 450 mm i 5,4 dm?

9. Obwód pewnego trójkąta jest równy 15 cm. Jakie długości mogą mieć boki tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że są one liczbami naturalnymi? Podaj trzy przykłady.

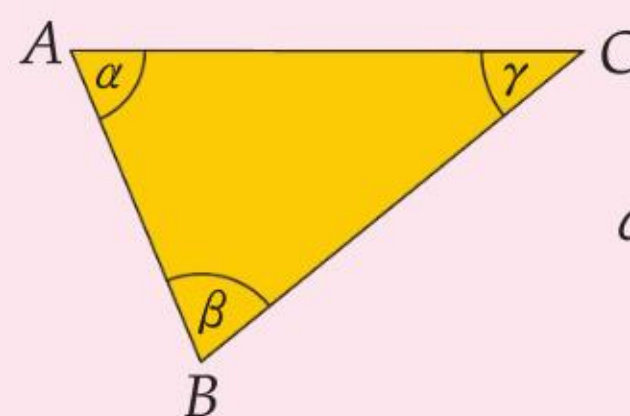
10. Jeżeli odcinki o podanych długościach mogą być długościami boków trójkąta, narysuj ten trójkąt i zapisz, jaki to rodzaj trójkąta.

- a) 3 cm, 2 cm, 5 cm
- b) 3,5 cm, 1,3 cm, 6 cm
- c) 2 cm, 20 mm, 0,2 dm

11. Narysuj dowolny trójkąt i zmierz jego kąty wewnętrzne. Czy pamiętasz, jak sprawdzić, czy twój pomiar jest prawidłowy?



Suma miar kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta jest równa 180° .



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

12. Czy kąty o podanych miarach mogą być kątami wewnętrznymi trójkąta?

- a) $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$
- b) $20^\circ, 30^\circ, 50^\circ$
- c) $110^\circ, 10^\circ, 60^\circ$
- d) $75^\circ, 32^\circ, 73^\circ$

13. Narysuj dwa trójkąty równoramienne, z których dokładnie jeden jest trójkątem równobocznym. W każdym z nich wskaż kąty, które mają taką samą miarę.

Zadania

● Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

- a) Trójkąt równoboczny jest także trójkątem równoramienne.
- b) Każdy trójkąt równoramienne jest ostrokątny.
- c) Kąty trójkąta rozwartokątnego mogą mieć miary: $130^\circ, 20^\circ, 20^\circ$.
- d) Boki trójkąta równoramienne, które mają taką samą długość, nazywamy ramionami.
- e) Trójkąt rozwartokątny nie może być równoboczny.
- f) Trójkąt równoboczny może mieć kąt prosty.
- g) Trójkąt prostokątny ma trzy kąty proste.

● Spośród podanych miar kątów wybierz te, które mogą być miarami kątów jednego trójkąta.

a) $30^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 55^\circ, 75^\circ, 35^\circ$

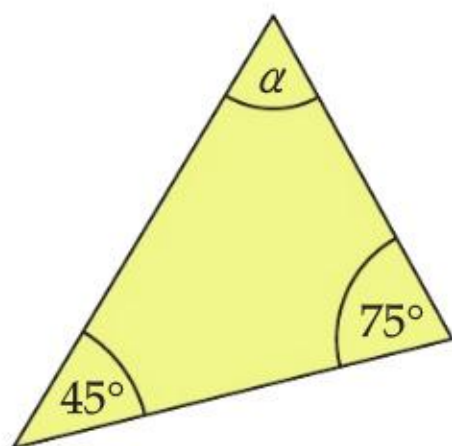
b) $80^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 10^\circ$

c) $25^\circ, 70^\circ, 20^\circ, 45^\circ, 85^\circ, 50^\circ, 60^\circ$

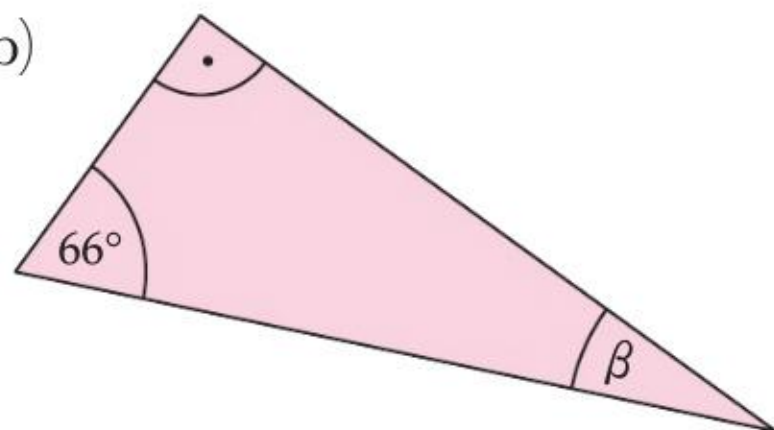
d) $75^\circ, 30^\circ, 25^\circ, 50^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 35^\circ$

● Oblicz miary kątów α, β, γ .

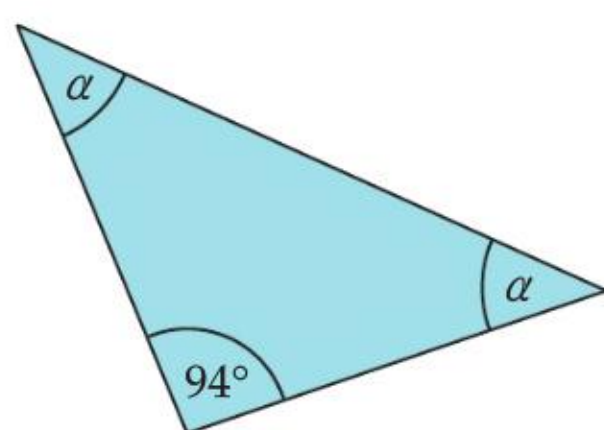
a)



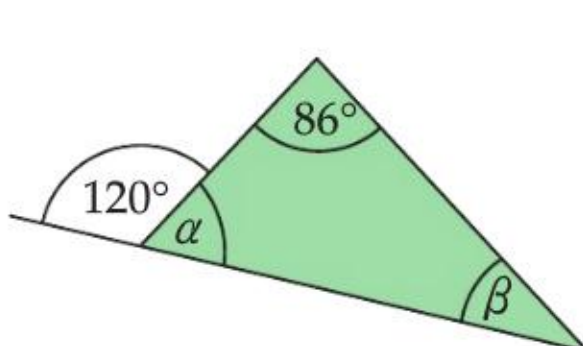
b)



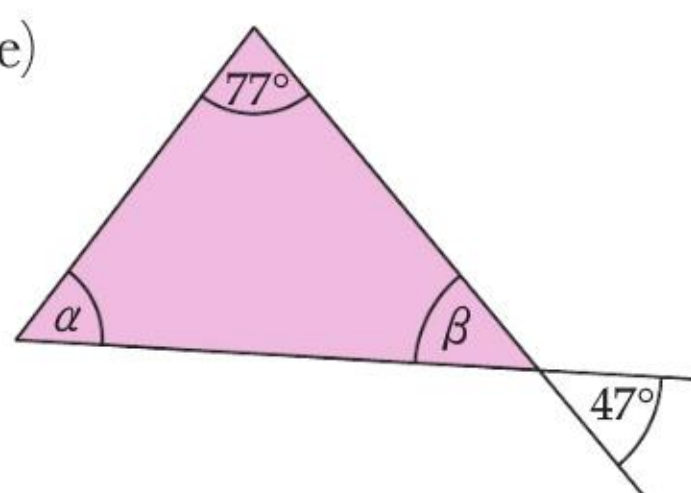
c)



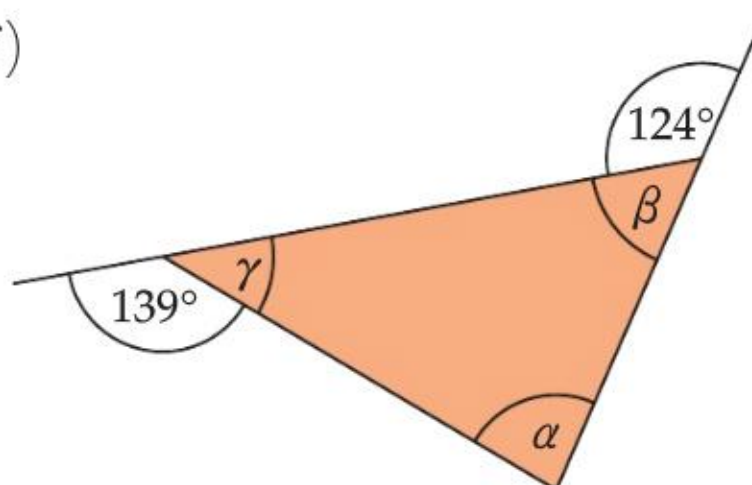
d)



e)



f)

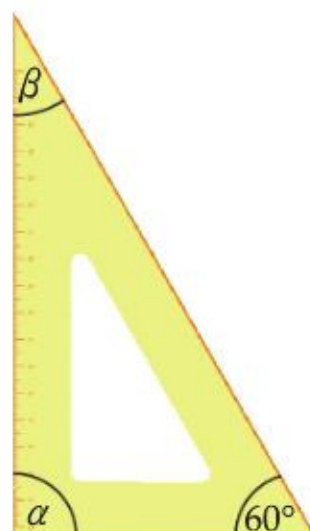


● Podaj (bez mierzenia) miary kątów α, β i γ zaznaczonych na rysunku.

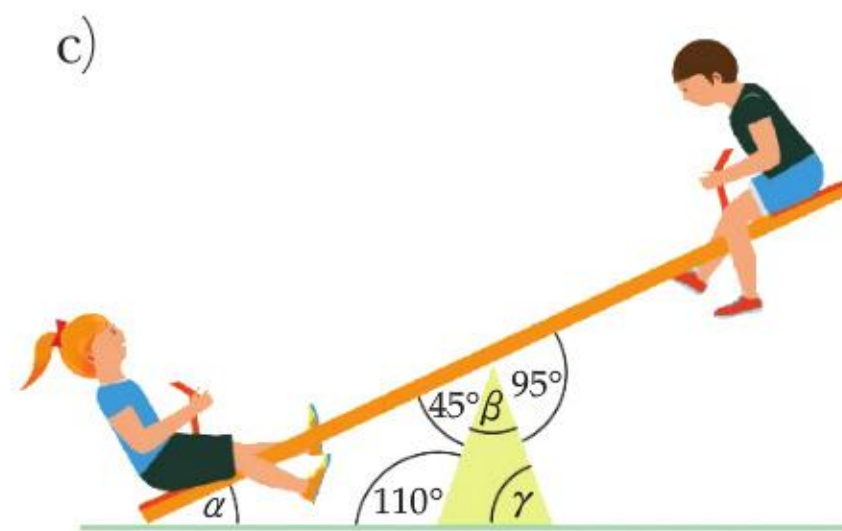
a)



b)



c)



● Trójkąt równoboczny o boku, który ma 6 cm, został podzielony na dwa trójkąty prostokątne. Dla powstałych trójkątów podaj:

a) długości przeciwprostokątnych,

b) miary kątów ostrych.

★ Jaką długość mają boki trójkąta równoramienne o obwodzie 48 cm, jeśli jeden z nich ma 8 cm?

5.2 Czworokąty – rodzaje i własności

Podejmij temat

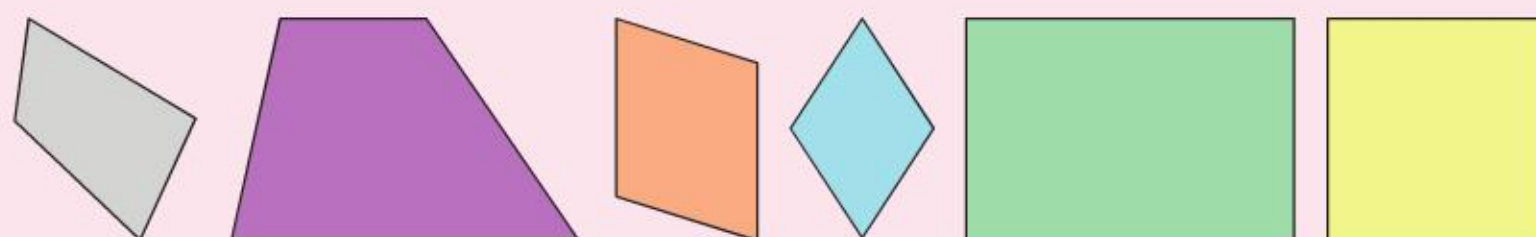


Czy pamiętasz, jak się nazywają czworokąty widoczne na monitorze laptopa?



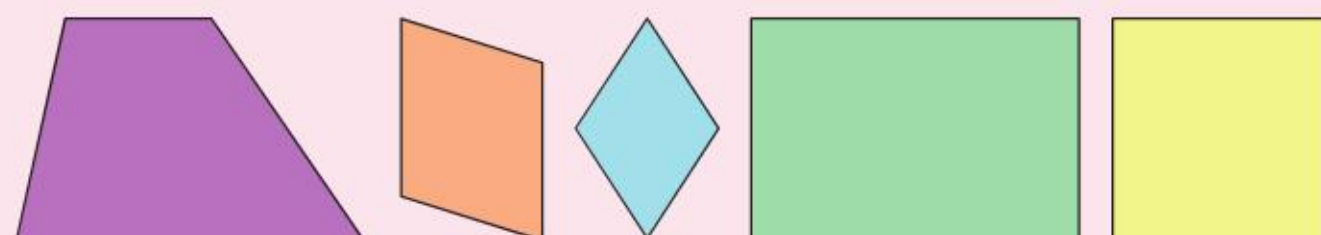
To są czworokąty.

Czworokąt to wielokąt, który ma cztery boki.



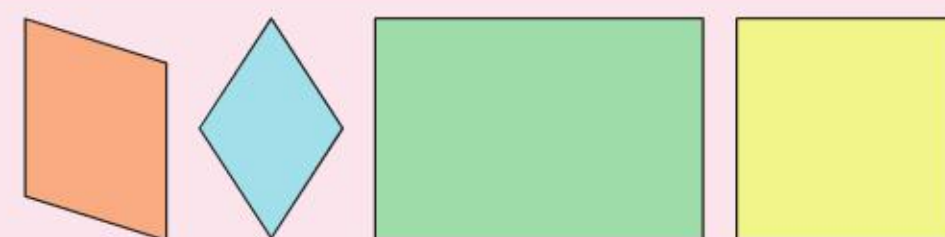
To są trapezy.

Trapez to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.



To są równoległoboki.

Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.



To są romby.

Romb to równoległobok, który ma wszystkie boki równej długości.



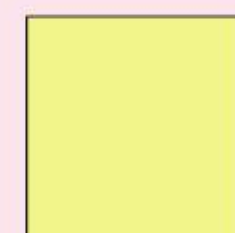
To są prostokąty.

Prostokąt to równoległobok, który ma wszystkie kąty proste.



To jest kwadrat.

Kwadrat to prostokąt, który ma wszystkie boki równej długości.





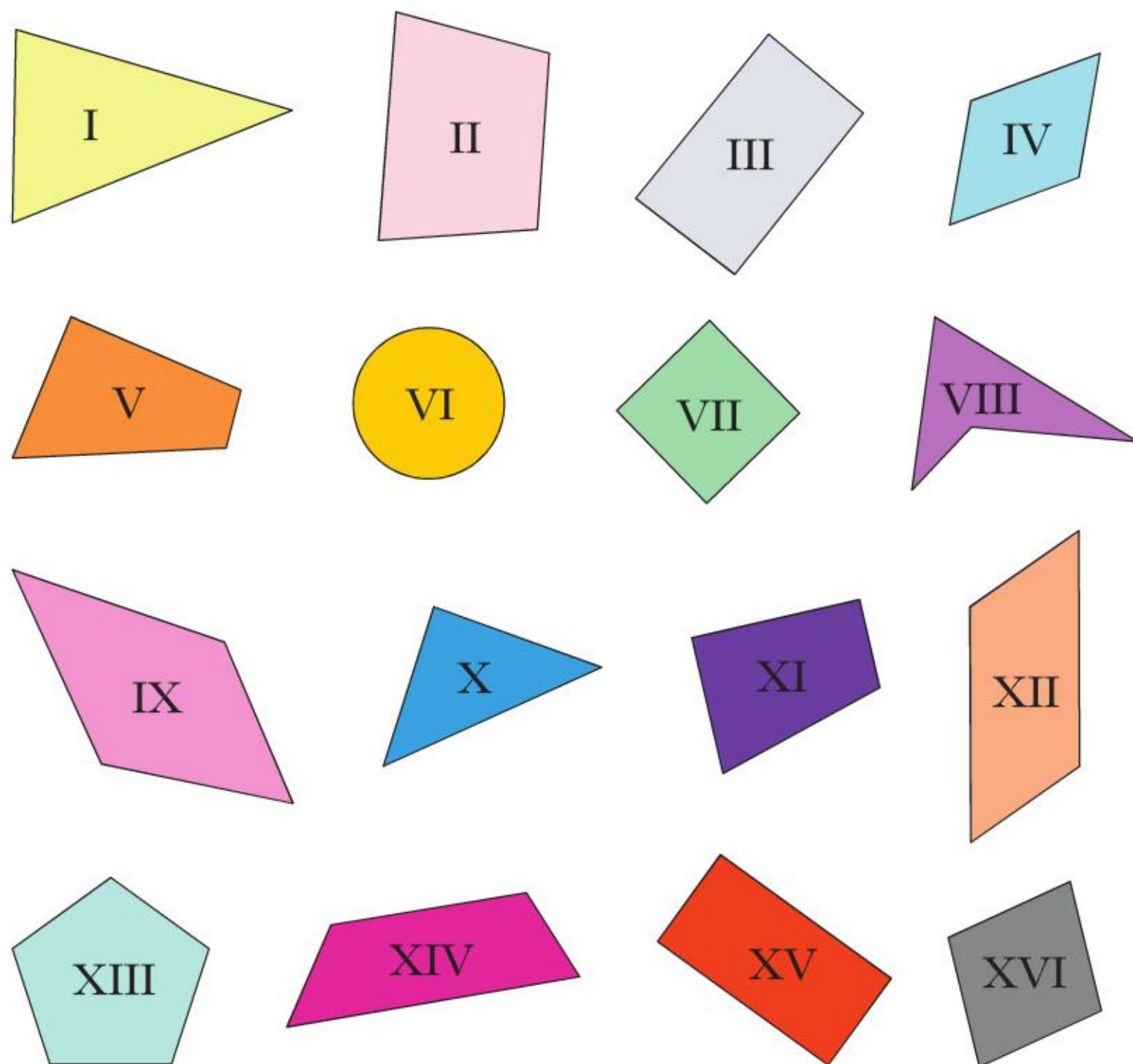
Nazwa *równoległobok* ma szerokie znaczenie, bo odnosi się do kwadratów, prostokątów, rombów i innych dowolnych równoległoboków.

Nazwa *prostokąt* ma węższe znaczenie, bo odnosi się tylko do kwadratów i prostokątów.

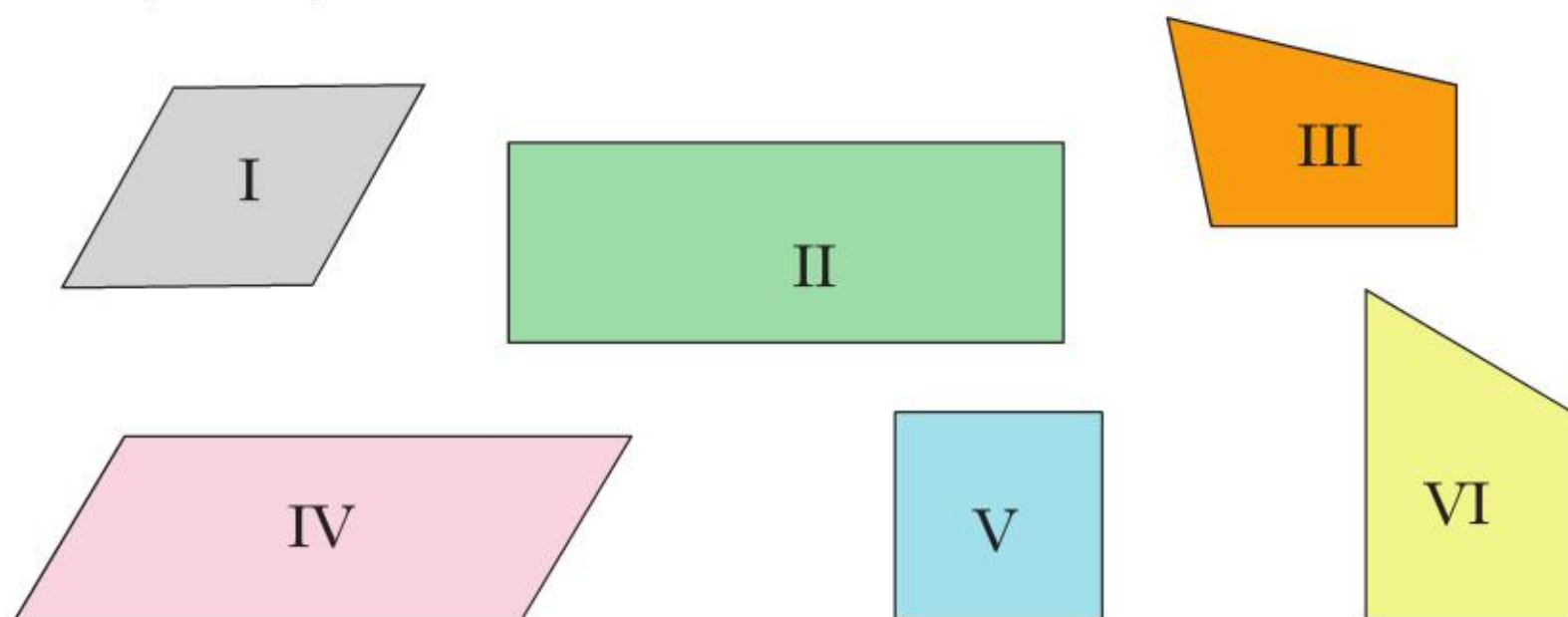
A nazwa *kwadrat* ma najwęższe znaczenie, bo odnosi się wyłącznie do kwadratów.

Najczęściej podajemy taką nazwę figury, która ma najwęższe znaczenie (jeśli nie ma innej konieczności wynikającej z kontekstu).

1. Sprawdź za pomocą ekierki i linijki, która z poniższych figur jest prostokątem, kwadratem, równoległobokiem, rombem, a która trapezem.



2. Wypisz nazwy narysowanych poniżej figur. Dla każdej figury podaj kilka jej nazw (jeżeli jest to możliwe) i podkreśl tę o największym znaczeniu.

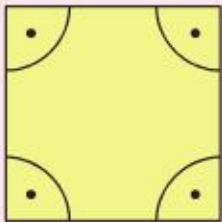
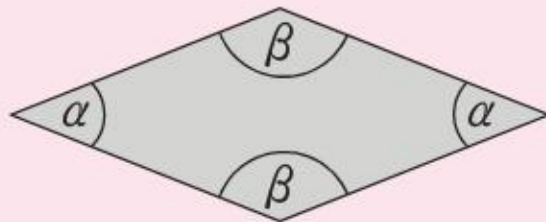
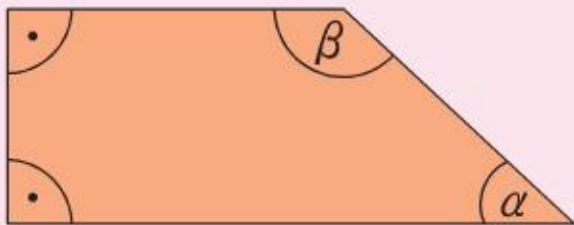
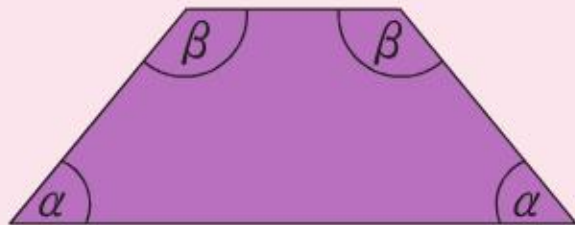


3. Narysuj:
- trapez, który nie jest równoległobokiem,
 - równoległobok, który nie jest rombem ani prostokątem,
 - romb, który nie jest kwadratem,
 - prostokąt, który nie jest kwadratem.

Co wiemy o czworokątach?

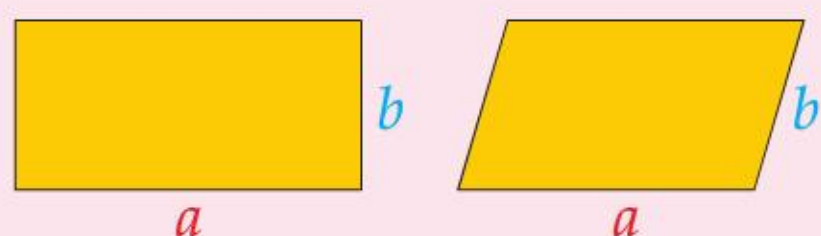
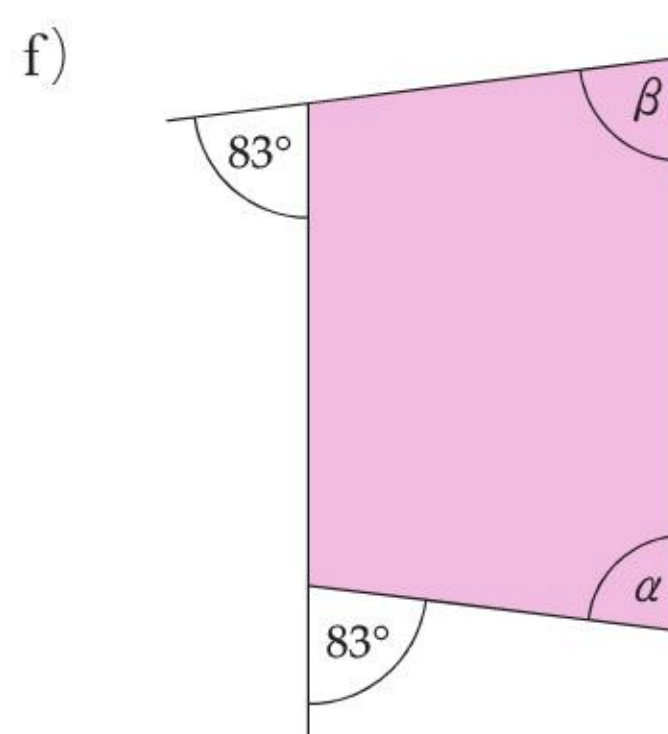
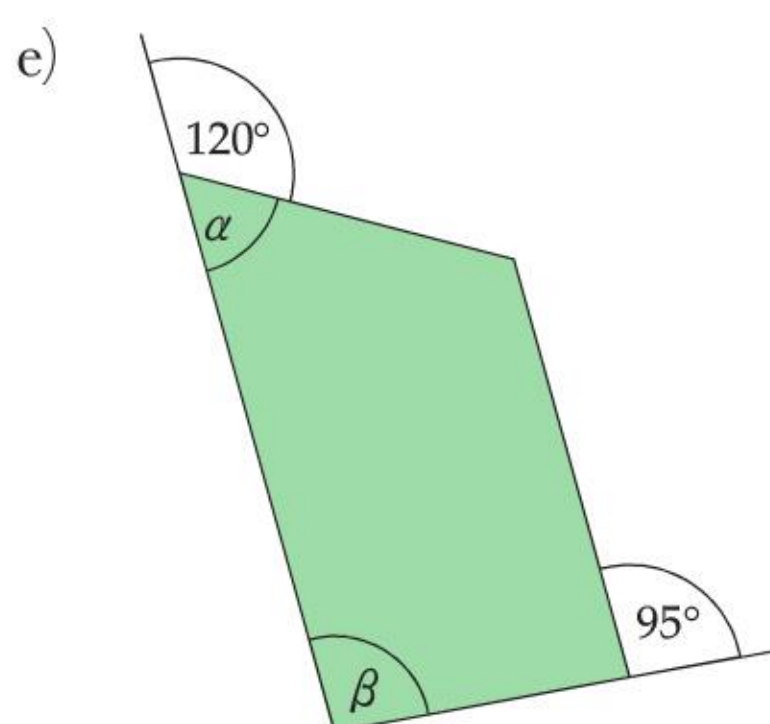
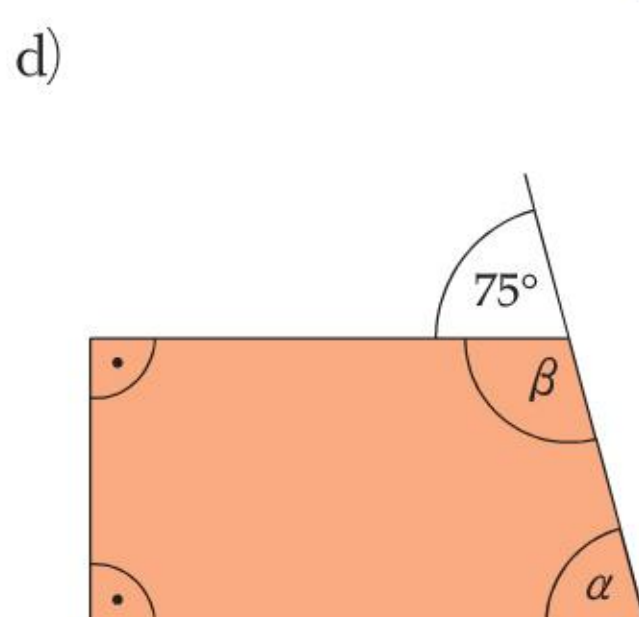
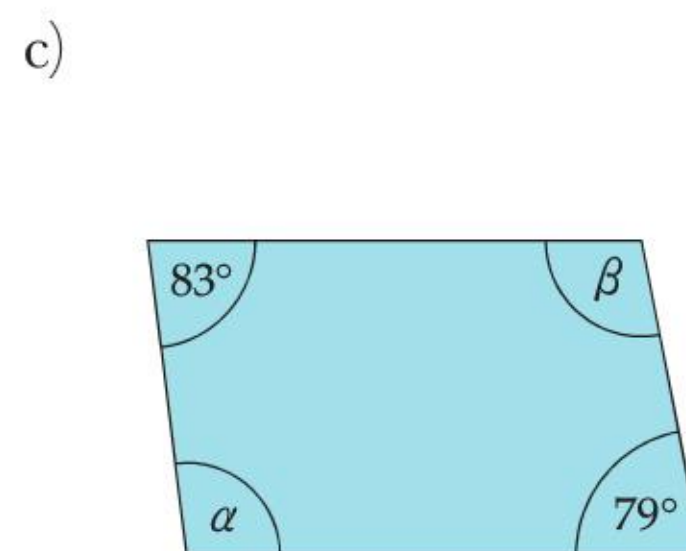
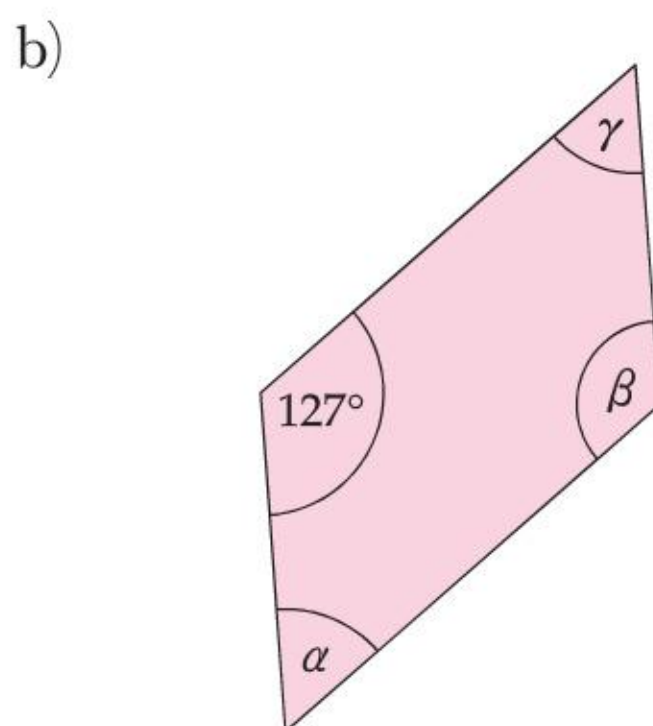
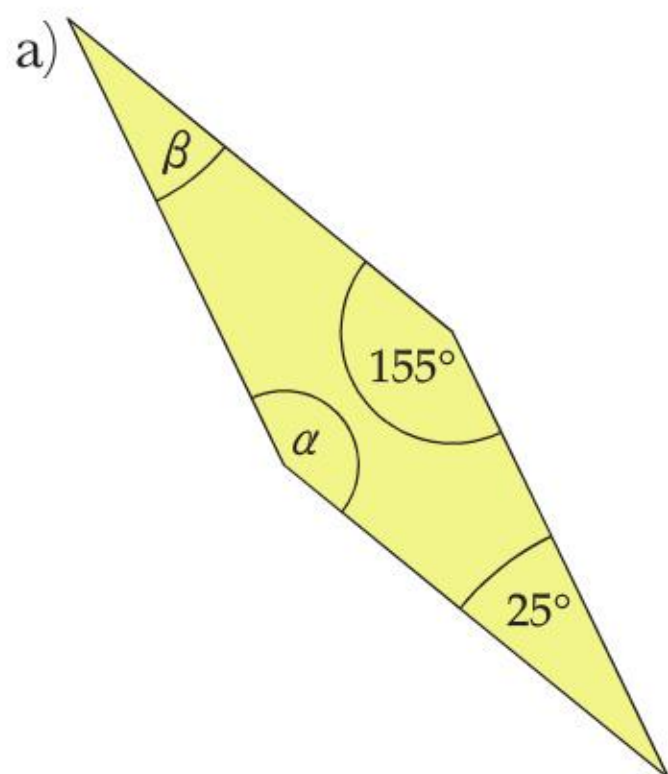
Figura		Boki	Przekątne
trapez	(dowolny)	Mogą mieć różną długość.	Mogą mieć różną długość.
	prostokątny	Mogą mieć różną długość.	Mogą mieć różną długość.
	równoramienny	Ramiona są równe.	Są równe.
równoległobok		Przeciwnie boki są równe.	Dzielą się na połowy.
romb		Wszystkie boki są równe.	Dzielą się na połowy i przecinają się pod kątem prostym.
prostokąt		Przeciwnie boki są równe.	Są równe i dzielą się na połowy.
kwadrat		Wszystkie boki są równe.	Są równe, dzielą się na połowy i przecinają się pod kątem prostym.

Kąty w czworokątach

kwadrat 	prostokąt 	równoległobok 	romb 
Cztery kąty proste.		$\alpha + \beta = 180^\circ$	
trapez (dowolny)  $\alpha + \delta = 180^\circ$ $\beta + \gamma = 180^\circ$	trapez prostokątny  $\alpha + \beta = 180^\circ$	trapez równoramienny  $\alpha + \beta = 180^\circ$	

4. Dopasuj do nazwy każdego czworokąta opis jego własności. Do danego czworokąta możesz dopasować kilka własności.
- | | |
|--|--|
| A. kwadrat | I. Wszystkie jego boki są równej długości. |
| B. prostokąt | II. Jego przekątne są różnej długości. |
| C. równoległobok (niebędący prostokątem) | III. Ma wszystkie kąty proste. |
| D. romb (niebędący kwadratem) | IV. Jego przekątne dzielą się na połowy. |
| | V. Ma dwie pary boków równoległych. |
| | VI. Jego przekątne mają równą długość. |
| | VII. Ma równe kąty leżące przy każdej z podstaw. |

5. Oblicz miary kątów α , β , γ . Potrzebne dane odczytaj z rysunku.
Uwaga: Figury w punktach a)–b) to równoległoboki, a w punktach c)–f) to trapezy.

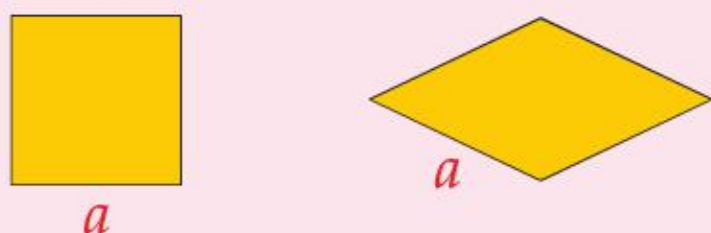


Obwód prostokąta lub równoległoboku, którego długości boków oznaczmy literami a i b , można obliczyć, korzystając z poniższych wzorów.

$$\text{Obw.} = 2a + 2b$$

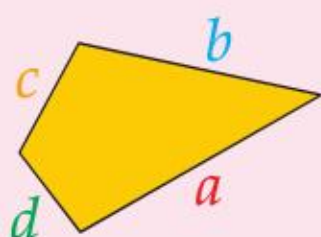
lub

$$\text{Obw.} = 2(a + b)$$



Obwód kwadratu lub rombu, którego długość boku oznaczmy literą a , można obliczyć, korzystając z poniższego wzoru.

$$\text{Obw.} = 4a$$

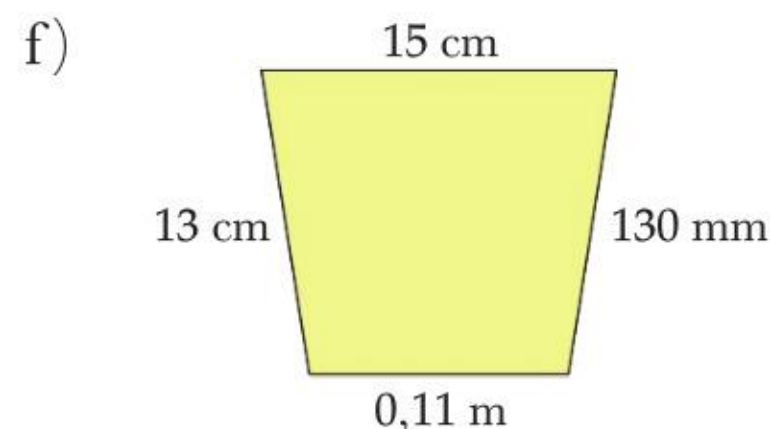
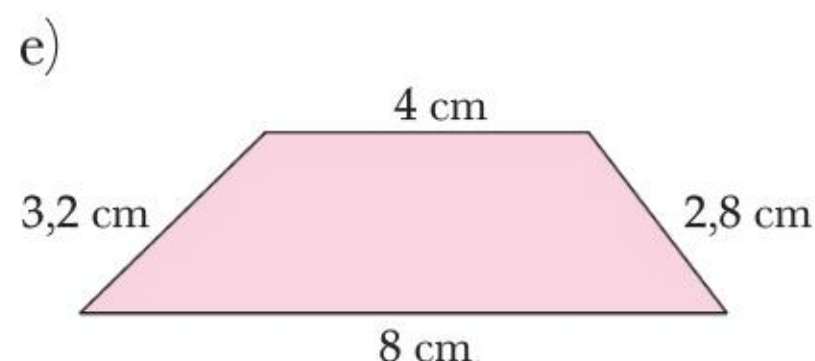
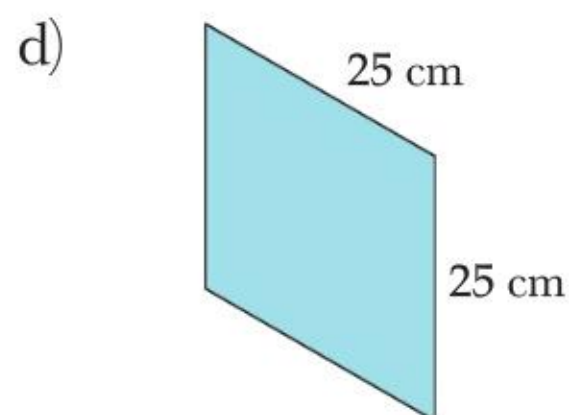
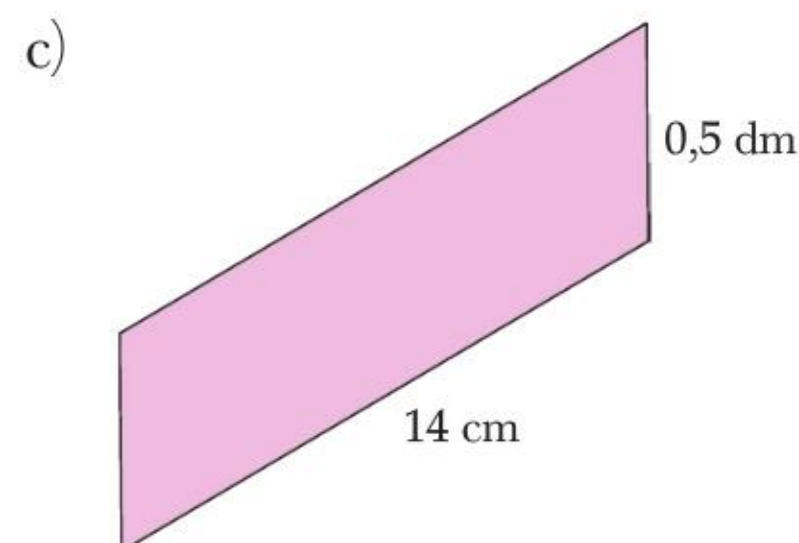
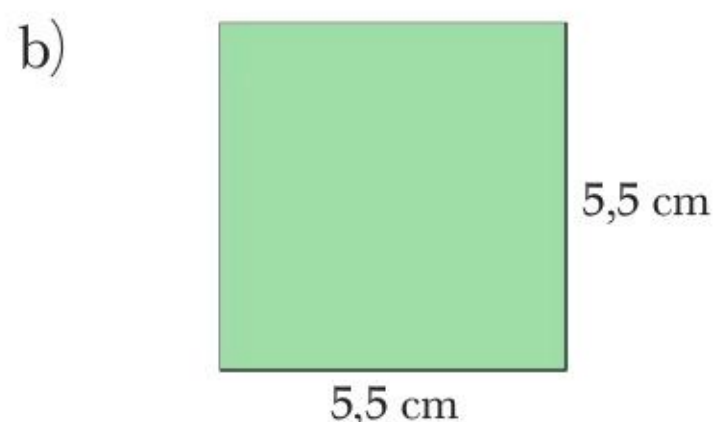
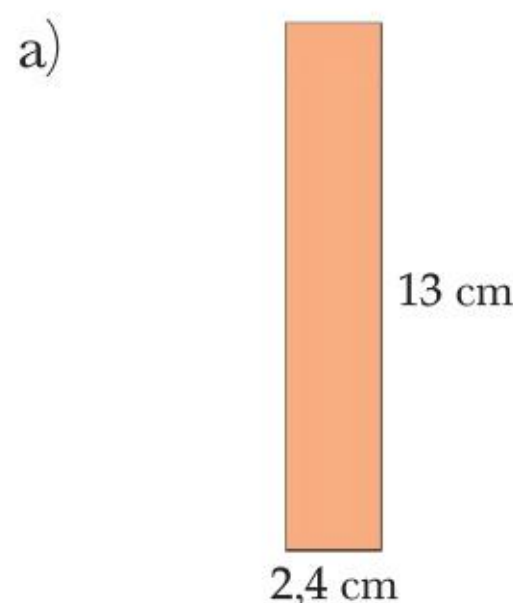


Obwód dowolnego czworokąta o bokach długości a , b , c , d można obliczyć w podany niżej sposób.

$$\text{Obw.} = a + b + c + d$$

6. Narysuj prostokąt, romb i równoległobok o równych obwodach. Podaj długości ich boków.

7. Oblicz obwód czworokąta. Potrzebne dane odczytaj z rysunku.
Uwaga: Figury w punktach a)–d) to równoległoboki, a w punktach e) i f) to trapezy.

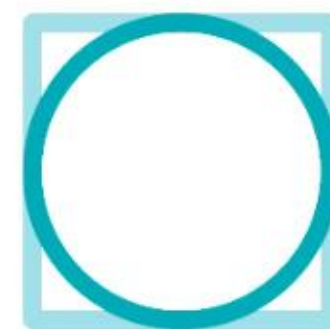


8. Oblicz obwód prostokąta o podanych wymiarach.
- a) $2\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ b) $2,5\text{ cm} \times 0,4\text{ dm}$ c) $7\text{ cm} \times 70\text{ mm}$
9. Dobierz długości boków równoległoboku tak, aby jego obwód wynosił 14 cm, a następnie narysuj ten równoległobok w skali 1 : 2.
10. Narysuj trapez, którego obie pary przeciwległych boków są równej długości. Jaka figura powstała? Zmierz potrzebne odcinki i oblicz obwód tej figury.

Zadania

- Jaką długość ma bok kwadratu, którego obwód wynosi 18 cm?
- Jaką długość ma bok prostokąta prostopadły do boku o długości 24 cm, jeżeli obwód tego prostokąta wynosi 144 cm?
- Jakie miary mają pozostałe kąty równoległoboku, jeżeli jeden ma 30° ?
- Jakie miary mają pozostałe kąty trapezu równoramienne, jeżeli kąt przy dłuższej podstawie ma 55° ?
- Jakie miary mają pozostałe kąty trapezu, jeżeli kąty przy jednej z podstaw mają 50° i 78° ?

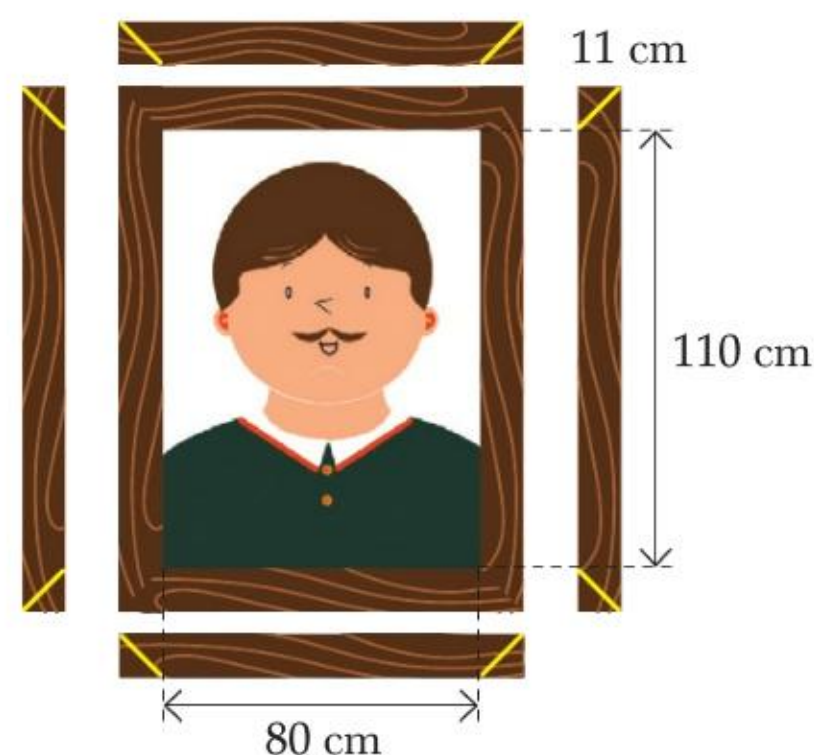
- Pani Hania, która ma na poddaszu okno w kształcie koła o promieniu 50 cm, postanowiła przerobić je na okno w kształcie kwadratu, jak pokazano na rysunku. Jaka będzie szerokość nowego okna? Ile metrów listwy powinna kupić pani Hania, aby wykonać z niej framugę do kwadratowego okna?



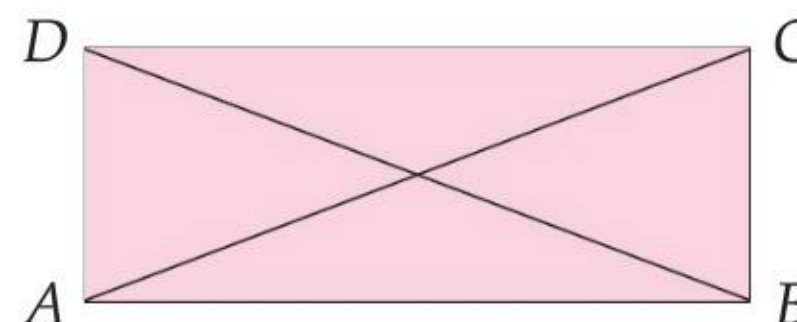
- Na rysunku obok można zauważyć wiele trapezów (w tym również np. kwadraty). Wybierz trzy, które wydają ci się największe, zmierz potrzebne odcinki i oblicz ich obwody.
- Obwód pewnego kwadratu jest równy obwodowi trapezu, którego jedna podstawa ma 3 cm, druga podstawa jest od niej 5 razy dłuższa, a ramiona mają po 7 cm. Jaka długość ma bok tego kwadratu?
- Przed domem państwa Kowalskich znajdują się dwa kwietniki w kształcie prostokątów o wymiarach $2\text{ m} \times 165\text{ cm}$. Oblicz, ile metrów płotku potrzeba do ogrodzenia tych kwietników.



- Obraz o wymiarach $80\text{ cm} \times 110\text{ cm}$ oprawiono w ramę o szerokości 11 cm. Rama powstała z listewek (odpowiednio przyciętych na końcach), które zostały na rysunku pokazane wokół obrazu (przedstawionego już razem z ramą).
- a) Jakie są wymiary oprawionego obrazu?
- b) Jaki jest obwód obrazu przed oprawieniem, a jaki po?
- Trapez prostokątny podzielono na dwie części: jedna jest kwadratem o boku 12 cm, a druga – trójkątem prostokątnym równoramiennym. Jaka długość mają podstawy tego trapezu?



- Przekątne prostokąta $ABCD$ na rysunku obok przecinają się pod kątem 42° . Oblicz miary kątów BAC i CAD .
- ★ Obwód trójkąta ACD wynosi 42 cm, trójkąta ABC – 45 cm, a czworokąta $ABCD$ – 51 cm. Oblicz długość odcinka AC .



- Kwadrat i trójkąt równoboczny mają równe obwody wynoszące 48 cm. Bok kwadratu zmniejszono o 6 cm. O ile centymetrów należy zmniejszyć bok trójkąta, by obwody pozostały jednakowe?
- Równoległobok o bokach długości 5 cm i 10 cm oraz kącie ostrym o mierze 60° podzielono na cztery jednakowe trójkąty. Jaki jest obwód jednego takiego trójkąta?

5.3 Pole figury. Jednostki pola

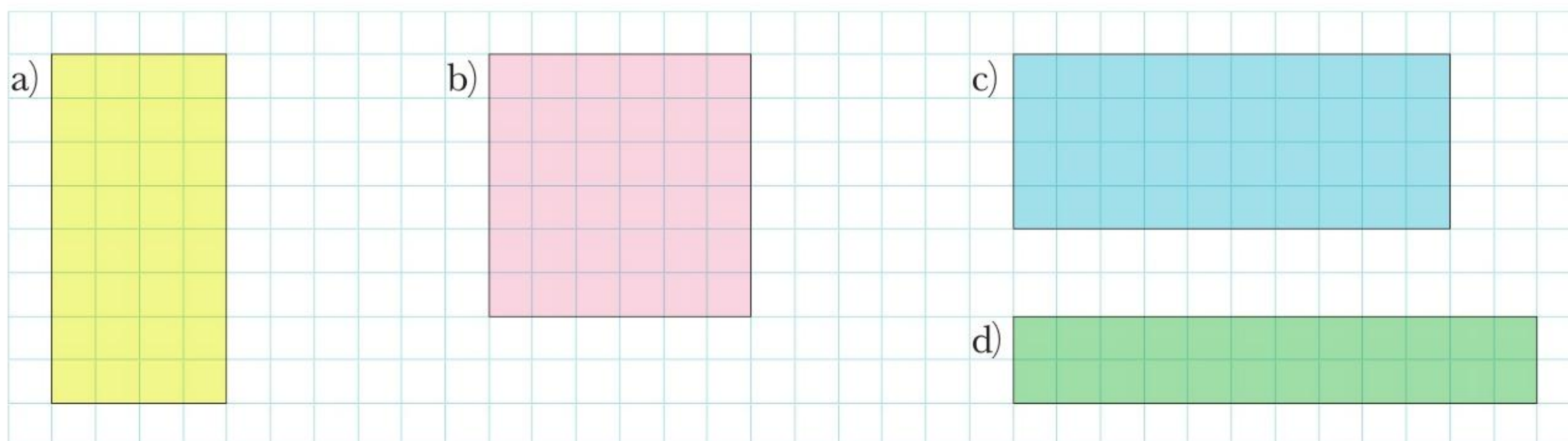
Podejmij temat



Który z chłopców miał rację? Czy wiesz, co to są ary?



1. Ile kwadratów o boku długości 1 cm mieści się w przedstawionej figurze?



2. Narysuj w zeszycie figurę złożoną z pięciu kwadratów o boku długości 1 cm.
3. Narysuj kwadrat o boku długości 3 cm i podziel go na kwadraty o boku, który ma 1 cm. Ile małych kwadratów jest w dużym kwadracie?
4. Narysuj prostokąt o wymiarach $60 \text{ mm} \times 0,7 \text{ dm}$. Ile kwadratów o boku mającym 1 cm potrzeba, aby wypełnić nimi cały prostokąt (kwadraty nie mogą na siebie nachodzić)? A ile potrzeba kwadratów o boku długości 1 mm?

W piątej klasie poznaliśmy pojęcie pola figury. **Pole figury** pozwala nam ocenić jej wielkość oraz porównać ją z wielkością innych figur.

Jednostki pola

1 mm² to pole kwadratu o boku długości 1 mm.

1 cm² to pole kwadratu o boku długości 1 cm.

1 dm² to pole kwadratu o boku długości 1 dm.

1 m² to pole kwadratu o boku długości 1 m.

1 km² to pole kwadratu o boku długości 1 km.

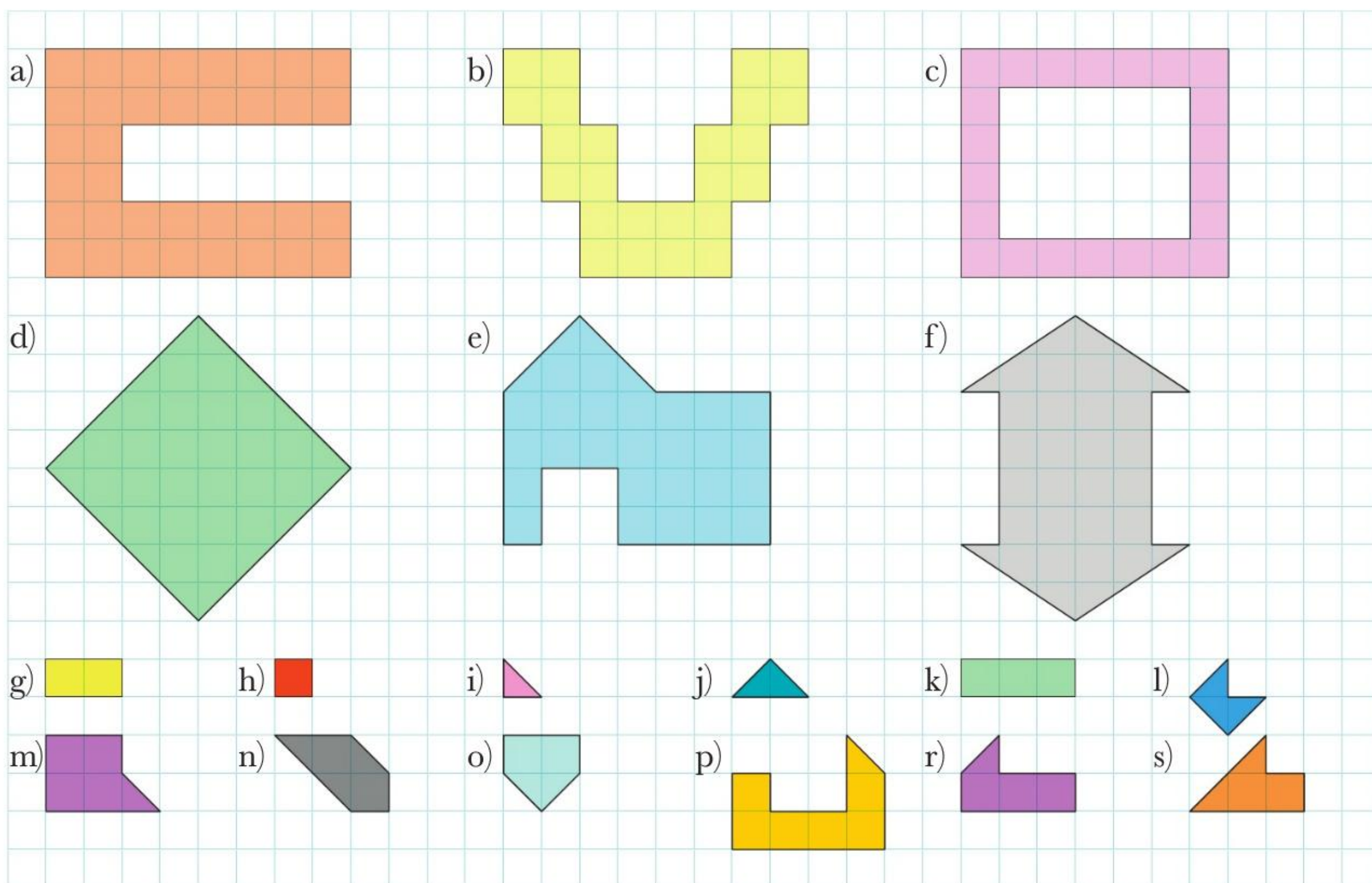
Jednostkami pola większymi od 1 m², ale mniejszymi od 1 km², są **ary** (a) i **hektary** (ha).

1 a = 100 m²

1 ha = 10 000 m²

1 ha = 100 a

5. Jakie pole ma narysowana figura? Wynik podaj w centymetrach kwadratowych.

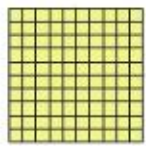


6. Zapisz:

a) metrach kwadratowych: 5 ha, 1,2 ha, 3 a, 27 a;

b) w arach: 700 m², 20 m², 5 ha, 0,2 ha;

c) w hektarach: 90 000 m², 2000 m², 300 a, 17 000 a.

7. Pokój ma podłogę w kształcie prostokąta o wymiarach $4\text{ m} \times 3\text{ m}$. Jakie wymiary ma plan tego pokoju narysowany w skali $1 : 100$? Ile centymetrów kwadratowych wynosi pole tego planu? Ile zmieściłoby się na nim kwadratów o polu 1 mm^2 ?
8. Ile kwadratów o polu 1 mm^2 mieści się w kwadracie o polu 1 cm^2 ? 
9. Przyjrzyj się rysunkowi z ćwiczenia 8 i odpowiedz, ile milimetrów kwadratowych jest:
 a) w $\frac{1}{2}\text{ cm}^2$, b) w $\frac{1}{4}\text{ cm}^2$, c) w $\frac{1}{5}\text{ cm}^2$, d) w $\frac{1}{10}\text{ cm}^2$.
10. Narysuj kwadrat o polu 1 dm^2 i podziel go na kwadraty o polu 1 cm^2 .
11. Skorzystaj z rysunku wykonanego przez siebie w ćwiczeniu 10 i odpowiedz, ile centymetrów kwadratowych jest:
 a) w $\frac{3}{4}\text{ dm}^2$, b) w $\frac{2}{5}\text{ dm}^2$, c) w $\frac{9}{10}\text{ dm}^2$, d) w $\frac{1}{100}\text{ dm}^2$.

Na rysunkach w ćwiczeniach 8 i 10 można zobaczyć zależności między jednostkami pola.

Więcej na temat

Zauważ, że kwadrat o polu 1 dm^2 składa się z $10 \cdot 10$ kwadratów o polu 1 cm^2 , czyli $1\text{ dm}^2 = 100\text{ cm}^2$. Kwadrat o polu 1 cm^2 składa się z $10 \cdot 10$ kwadratów o polu 1 mm^2 .

Podobnie można wytłumaczyć inne zależności między jednostkami pola. Przykłady różnych takich zależności są zapisane poniżej.

$$1\text{ cm}^2 = 100\text{ mm}^2$$

$$1\text{ dm}^2 = 100\text{ cm}^2$$

$$1\text{ m}^2 = 100\text{ dm}^2$$

$$1\text{ km}^2 = 1\,000\,000\text{ m}^2$$

12. Zamień na podaną jednostkę. Zamiast każdego znaku zapytania wpisz odpowiednią liczbę.

a) $4\text{ cm}^2 = ?\text{ mm}^2$

$32\text{ cm}^2 = ?\text{ mm}^2$

$5\text{ dm}^2 = ?\text{ cm}^2$

$3,4\text{ dm}^2 = ?\text{ cm}^2$

$7\text{ m}^2 = ?\text{ dm}^2$

$3\text{ km}^2 = ?\text{ m}^2$

b) $800\text{ mm}^2 = ?\text{ cm}^2$

$325\text{ mm}^2 = ?\text{ cm}^2$

$200\text{ cm}^2 = ?\text{ dm}^2$

$750\text{ cm}^2 = ?\text{ dm}^2$

$600\text{ dm}^2 = ?\text{ m}^2$

$3\,000\,000\text{ m}^2 = ?\text{ km}^2$

13. Który zapis pokazuje największe pole figury? Ustaw podane pola figur w kolejności od najmniejszego do największego.

• $5,6\text{ dm}^2$

• 56 cm^2

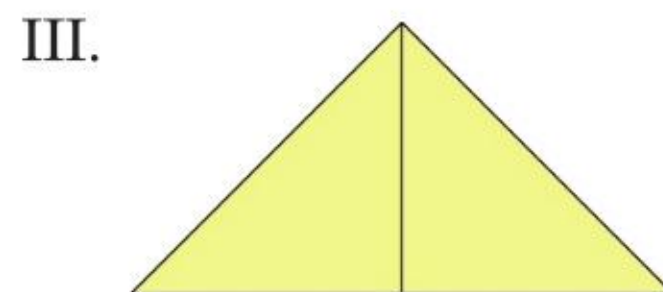
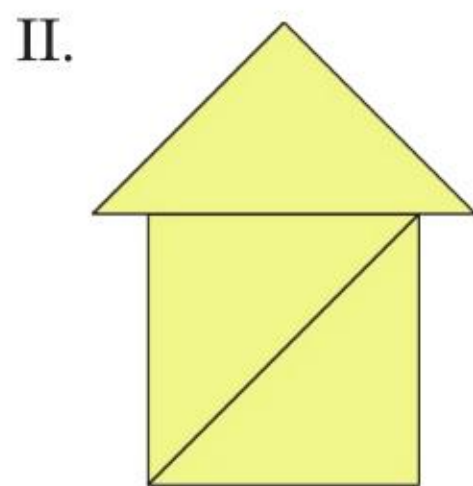
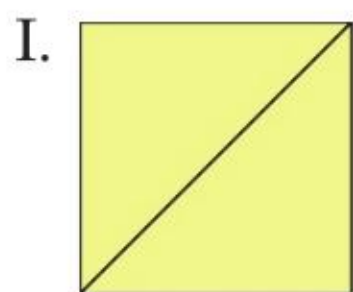
• 560 mm^2

• $0,56\text{ m}^2$

• $0,056\text{ a}$

Zadania

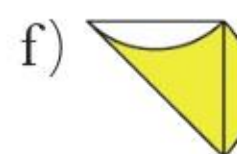
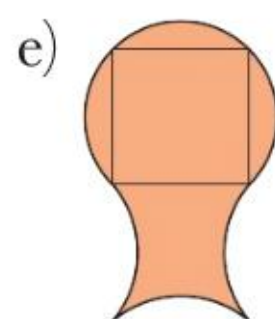
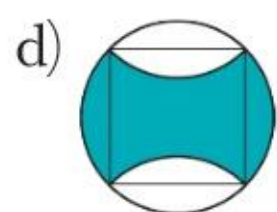
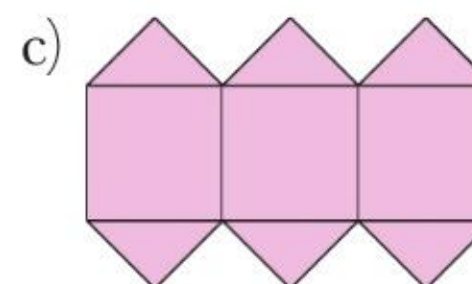
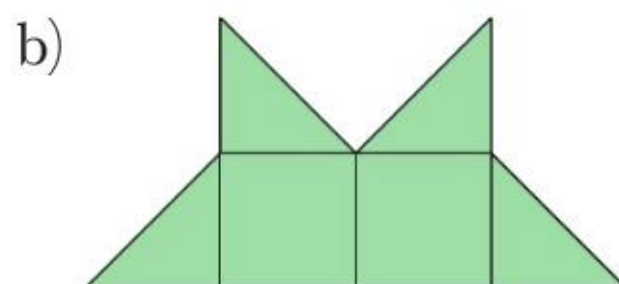
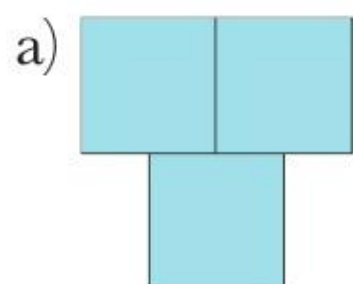
- Która z figur ma największe pole?



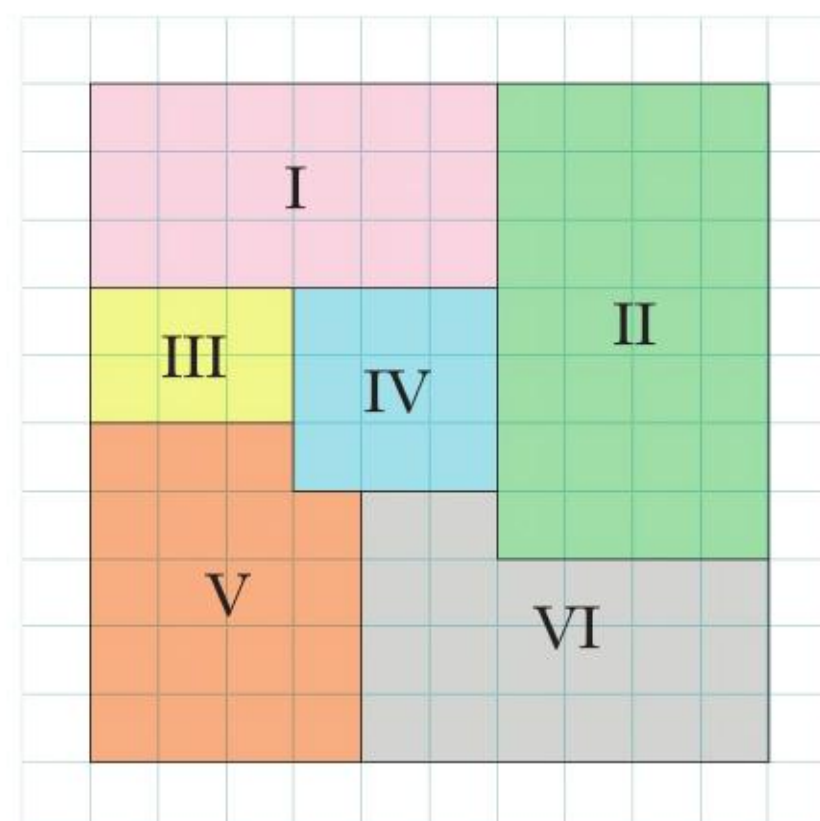
- Narysuj dwie pary figur o różnym kształcie, ale jednakowym polu.

- Przyjmij, że kwadrat obok ma pole 9 cm^2 . Jakie jest zatem pole zamalowanej figury?

9 cm^2



- Rysunek obok przedstawia plan sześciu pomieszczeń wykonany w pewnej skali. Powierzchnia najmniejszego z nich ma w rzeczywistości 3 m^2 . Oblicz powierzchnię pozostałych. Jaka jest różnica powierzchni największego i najmniejszego pomieszczenia?



- Ile centymetrów ma obwód kwadratu o podanym polu?

a) 1 cm^2 b) 1 dm^2 c) 1 m^2

- Narysuj kwadrat o polu 1 cm^2 , a następnie figurę o podanym polu.

a) 6 cm^2 b) 12 cm^2 c) $10\frac{1}{2} \text{ cm}^2$

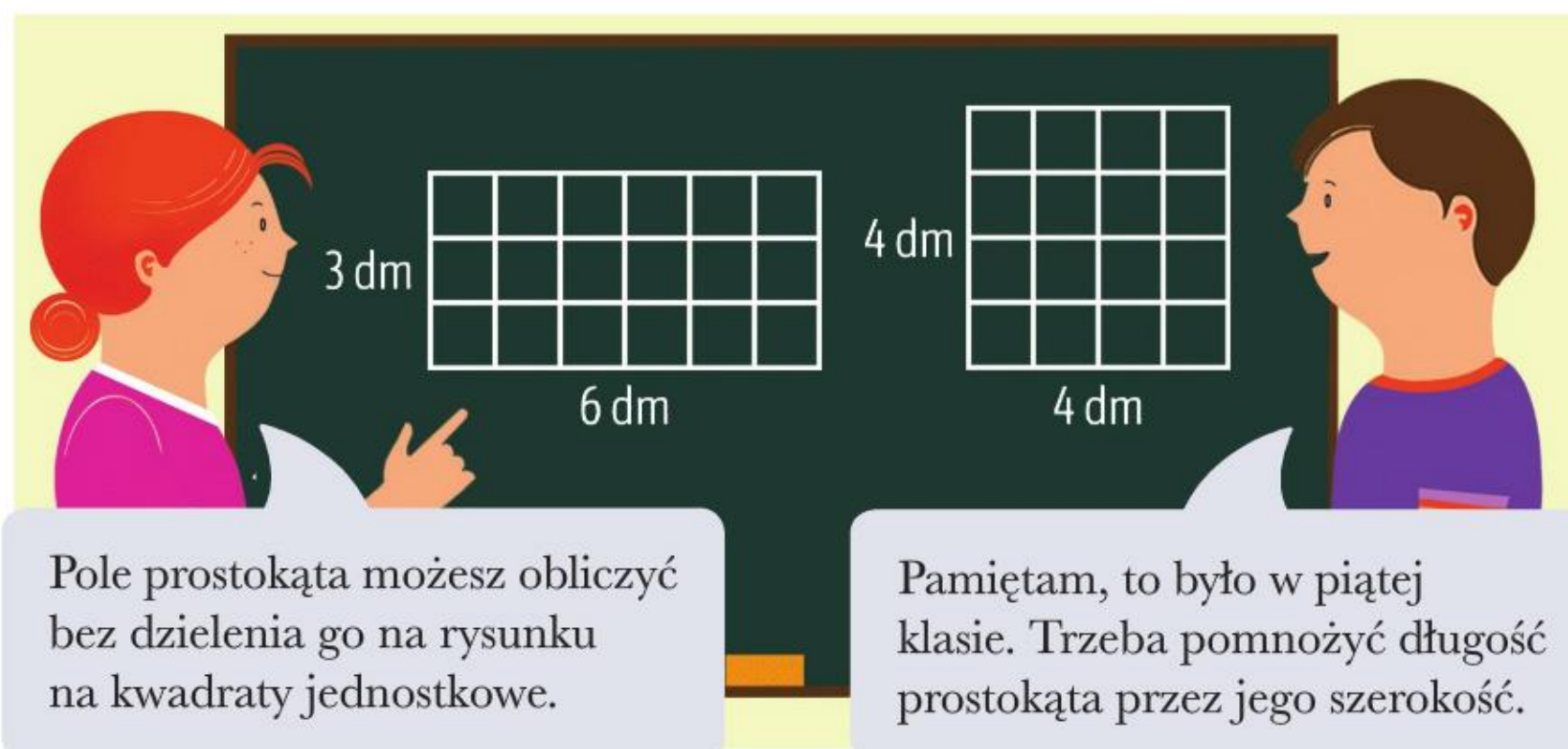
- Narysuj kwadrat, który ma obwód równy 20 cm . Ile wynosi pole tego kwadratu? A jakie jest pole kwadratu o obwodzie równym 40 cm ?

5.4 Pola czworokątów

Podejmij temat



Ile wynoszą pola figur narysowanych na tablicy? Jak można obliczyć pole kwadratu bez dzielenia go na kwadraty jednostkowe?



Pole prostokąta możesz obliczyć bez dzielenia go na rysunku na kwadraty jednostkowe.

Pamiętam, to było w piątej klasie. Trzeba pomnożyć długość prostokąta przez jego szerokość.

Przypomnijmy wzory na pola różnych czworokątów poznane w klasie piątej.

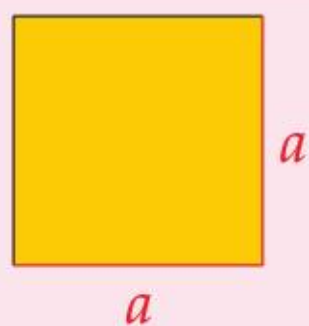
Pole prostokąta i kwadratu obliczamy według poniższych wzorów.



$$P = a \cdot b$$

gdzie:

a, b – długości sąsiednich boków



$$P = a \cdot a = a^2$$

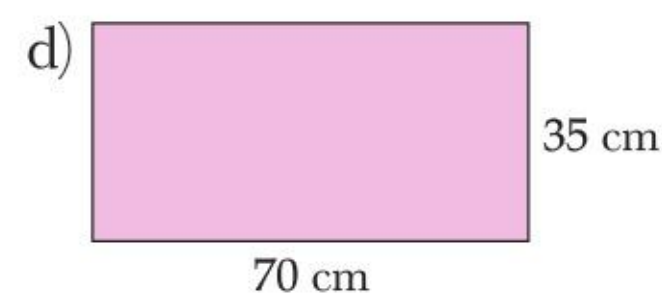
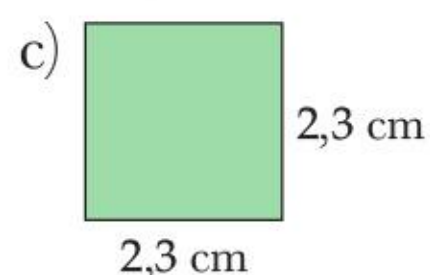
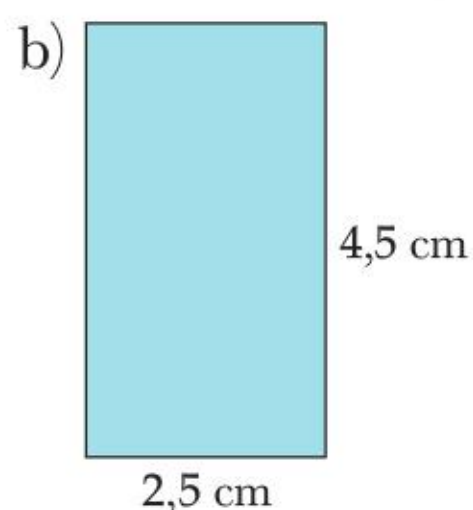
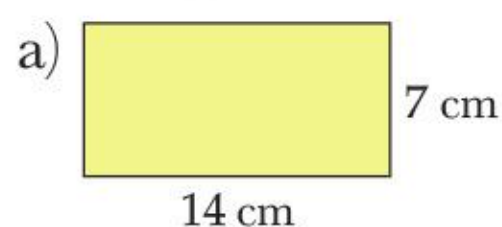
gdzie:

a – długość boku



Wzory, według których obliczamy pola, są wyrażeniami algebraicznymi. Zauważ, że w ich zapisie nie zostały uwzględnione wszystkie zasady, o których była mowa w dziale 3. Zapis bez pomijania znaku mnożenia wydaje się w tym miejscu bardziej czytelny i łatwiejszy do zapamiętania i stosowania. Jeśli jednak wolisz znak mnożenia pomijać – możesz to robić.

1. Oblicz pole narysowanego prostokąta. Wymiary odczytaj z rysunku.





Jeżeli długości boków prostokąta (lub innej figury) podane są w różnych jednostkach, to przed wykonaniem obliczeń należy zapisać te długości w jednakowych jednostkach.



Pole rombu możemy obliczać również tak jak pole równoległoboku.

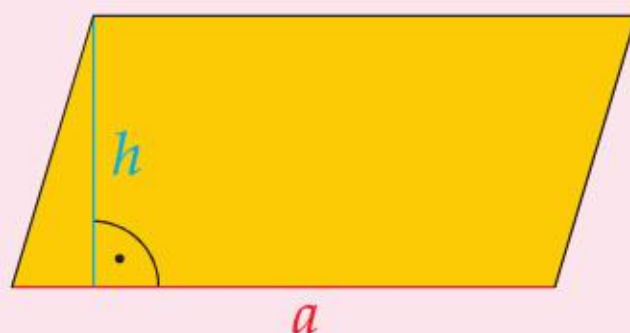
2. Oblicz pole prostokąta o podanych wymiarach.

- | | |
|--|---|
| a) $15 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ | b) $2,4 \text{ cm} \times 6,5 \text{ cm}$ |
| c) $0,8 \text{ dm} \times 13 \text{ cm}$ | d) $5,4 \text{ m} \times 5,4 \text{ m}$ |
| e) $30 \text{ dm} \times 3 \text{ m}$ | f) $5,4 \text{ dm} \times 90 \text{ mm}$ |

3. Oblicz pole prostokąta, którego:

- długość jest równa szerokości i wynosi 15 cm ,
- jeden z boków ma 6 mm , a drugi jest od niego $2,5$ razy dłuższy,
- jeden z boków ma 12 m , a drugi jest od niego o $7,6 \text{ m}$ krótszy.

Pole równoległoboku, rombu i trapezu obliczamy według poniższych wzorów.

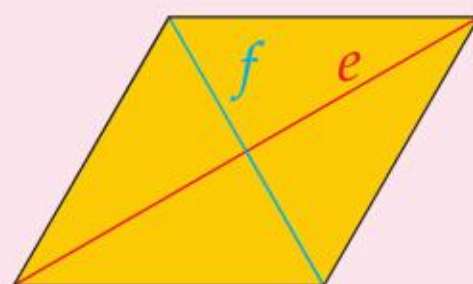


$$P = a \cdot h$$

gdzie:

a – długość podstawy

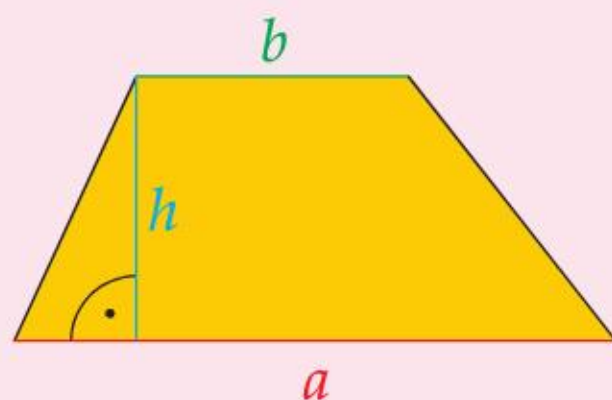
h – wysokość opuszczona na podstawę a



$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

gdzie:

e, f – długości przekątnych



$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

gdzie:

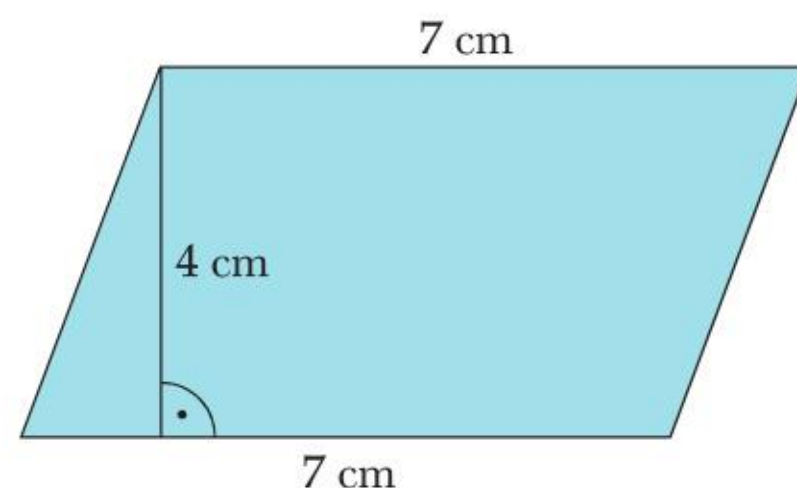
a, b – długości podstaw

h – wysokość

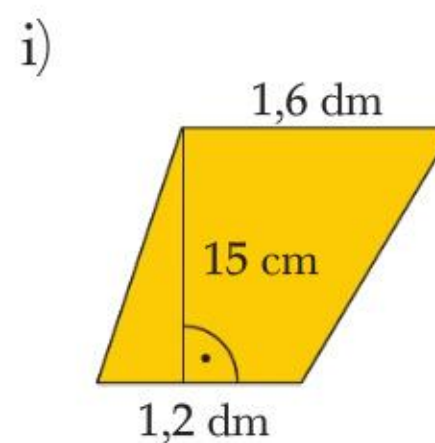
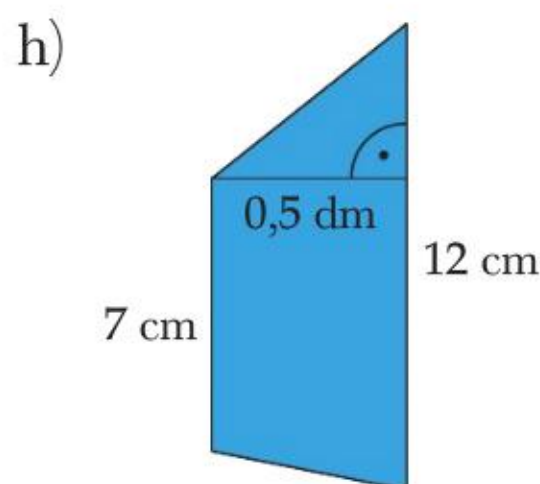
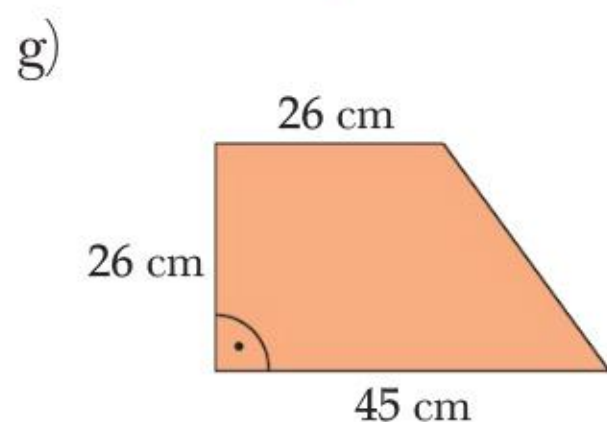
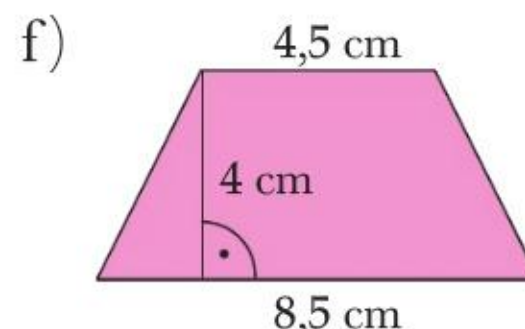
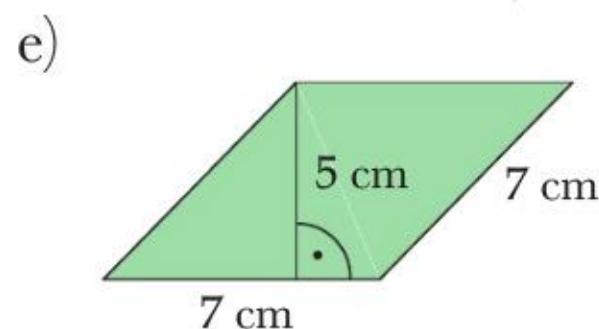
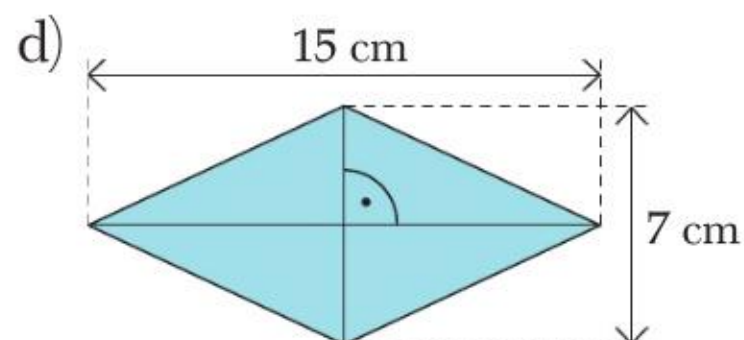
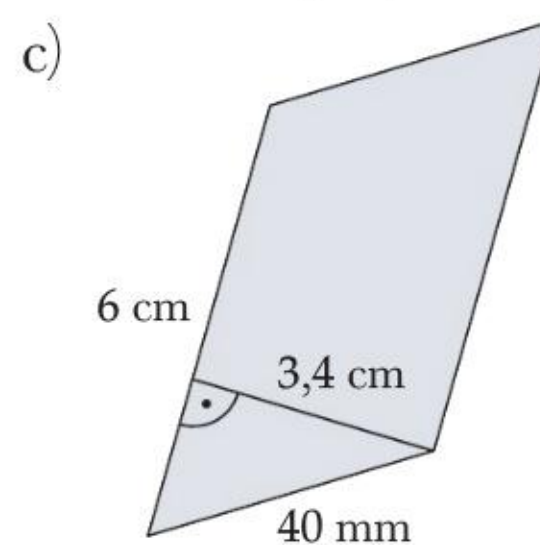
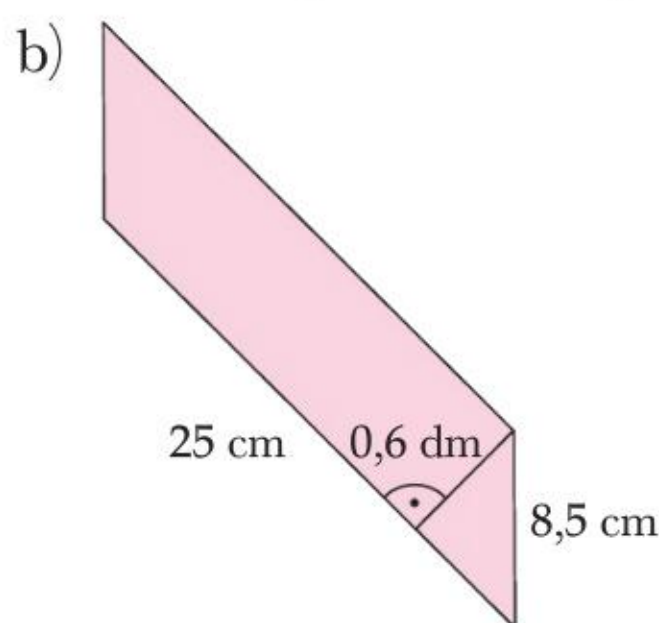
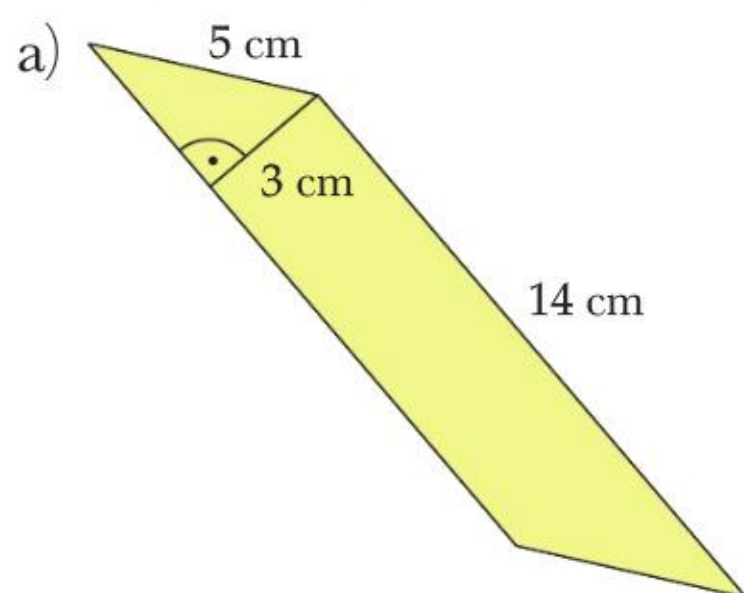
4. Każdy równoległobok jest trapezem. Oblicz pole równoległoboku przedstawionego na rysunku obok dwoma sposobami:

- korzystając ze wzoru na pole równoległoboku,
- korzystając ze wzoru na pole trapezu.

Iloma sposobami można podobnie obliczyć pole prostokąta?



5. Oblicz pole narysowanego czworokąta. Potrzebne dane odczytaj z rysunku.
Uwaga: Figury w punktach a)–e) to równoległoboki, a w punktach f)–i) to trapezy.

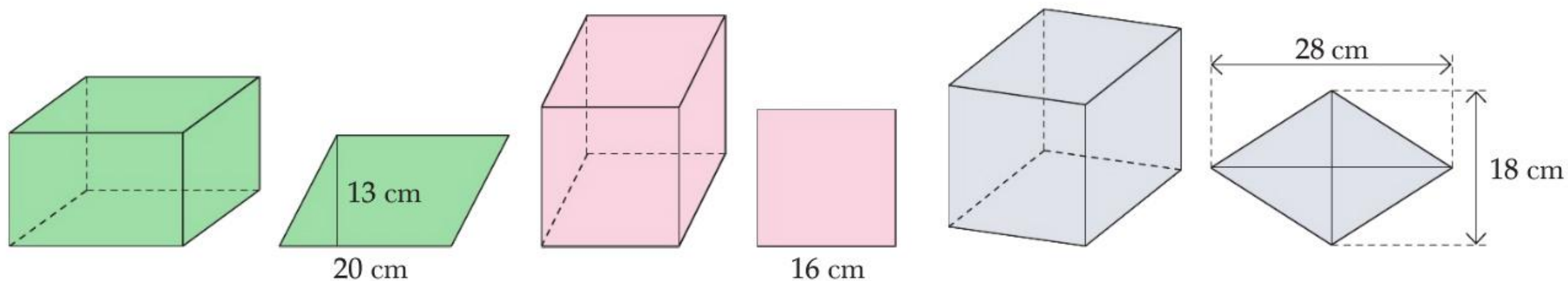


6. Oblicz pole równoległoboku, którego bok ma długość 20 cm, a wysokość opuszczona na ten bok wynosi 13 cm.
7. Jakie pole ma romb, którego przekątne mają długości 7 cm i 10 cm?
8. Jakie pole ma trapez, którego suma długości podstaw wynosi 24 cm, a wysokość ma 16 cm?
9. Narysuj romb, którego pole jest równe 10 cm^2 , a jedna z przekątnych ma 5 cm.

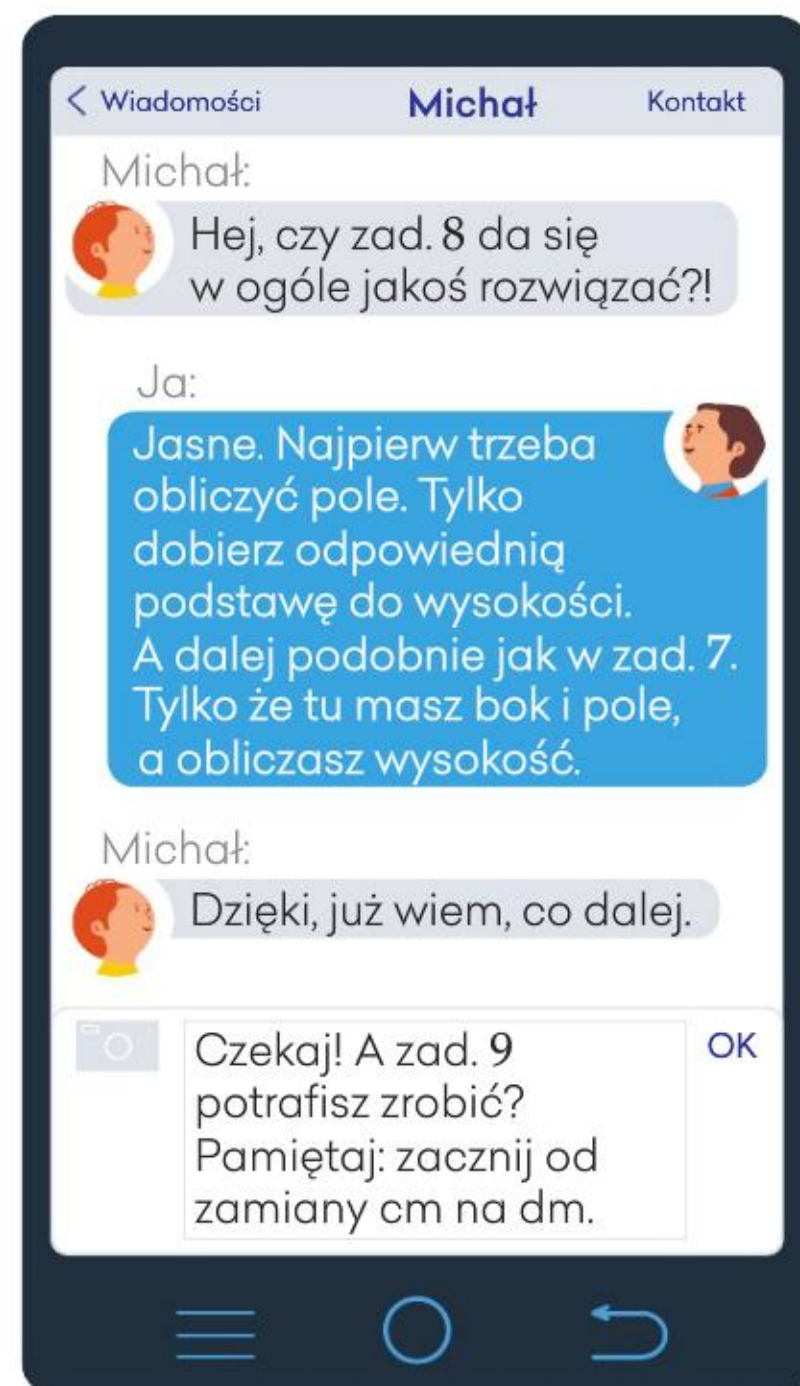
Zadania

- O ile zwiększy się pole kwadratu o boku długości 3,6 cm, jeżeli jego bok powiększymy o 1,4 cm?
- Jeśli staniesz na środku boiska do piłki nożnej i spojrzysz na bramkę, to zobaczysz, że dwa pionowe słupki, poprzeczka i linia na murawie tworzą prostokąt. Oblicz jego pole, jeżeli wiadomo, że słupki mają wysokość 2,44 m i są od siebie oddalone o 7,32 m. Wynik podaj w metrach kwadratowych w zaokrągleniu do jedności.

- Oblicz pole:
 - a) rombu o przekątnych długości 4,5 cm i 8 cm,
 - b) kwadratu o przekątnej długości 9 cm.
- Jedna z podstaw trapezu ma 2,4 cm, a druga jest od niej 3 razy dłuższa. Oblicz pole tego trapezu, jeżeli wiadomo, że jego wysokość jest równa 10 cm.
- Obwód trapezu równoramiennego wynosi 80 cm. Jakie jest jego pole, jeżeli wiadomo, że każde z ramion ma 25 cm, a wysokość ma 13,4 cm?
- Trzy pudełka mają kształt różnych graniastosłupów. Zielone ma pokrywę w kształcie równoległoboku, różowe – w kształcie kwadratu, a szare – w kształcie rombu. Wymiary pokrywek są przedstawione na rysunku. Które pudełko, postawione na stole (otworem do góry), zajmuje najwięcej miejsca, a które – najmniej? Odpowiedź uzasadnij obliczeniami.



- Jaką długość ma bok rombu, którego pole wynosi 360 cm^2 , a wysokość jest równa 18 cm?
- Długości boków równoległoboku są równe 20 cm i 10 cm. Wysokość opuszczona na krótszy bok ma 6 cm. Ile centymetrów ma wysokość opuszczona na dłuższy bok?
- Prostokątne lustro z ramą ma wymiary $130 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$. Szerokość ramy wynosi 10 cm. Ile decymetrów kwadratowych ma powierzchnia tafli lustra?
- Prostokąt o wymiarach $6,5 \text{ cm} \times 5,4 \text{ cm}$ jest planem działki budowlanej w skali 1 : 1000. Ile arów mierzy ta działka?
- Trawnik przed domem państwa Kowalskich ma kształt trapezu równoramiennego o wysokości 6 cm i podstawach długości 8 cm oraz 18 cm.
 - a) Oblicz powierzchnię trawnika.
 - b) Ile kilogramów nasion trawy należy kupić na obsianie tego trawnika, jeżeli 10 dag wystarcza na obsianie 2 m^2 ?



5.5 Pole trójkąta

Podejmij temat



W jaki inny sposób można sprawdzić zależność między wielkościami obu krakersów? Który sposób wydaje ci się najłatwiejszy?

Kupmy te trójkątne krakersy, duże i małe. Ciekawe, czy jeden duży to tyle samo, co dwa małe.

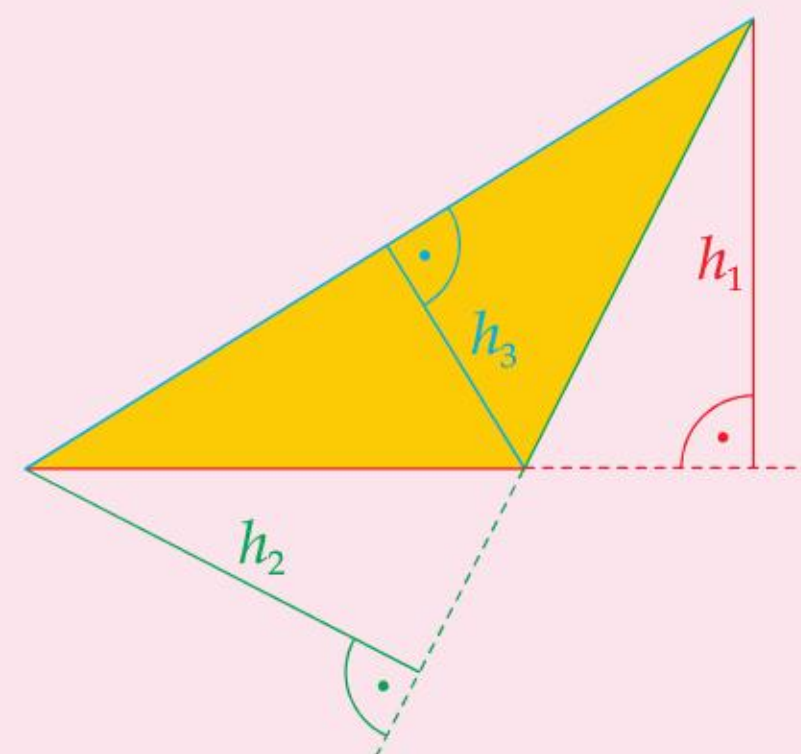
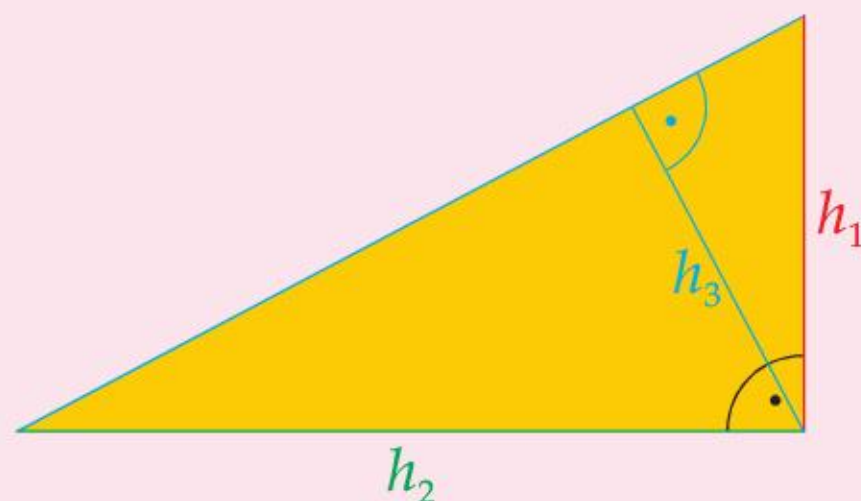
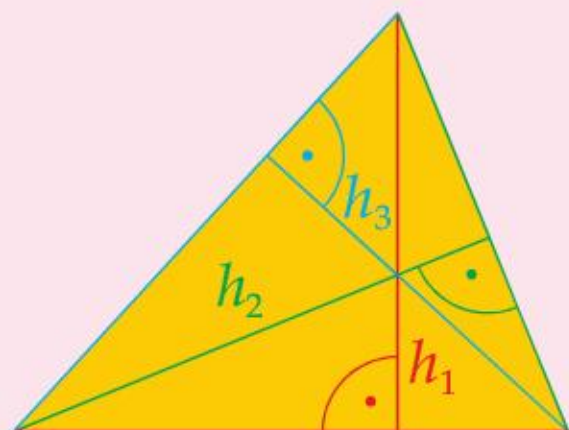


Możesz obliczyć pola obu trójkątów, bo grubość mają chyba taką samą.



Przed rozpoczęciem obliczania pól trójkątów przypomnimy sobie pojęcie wysokości trójkąta.

Każdy trójkąt ma trzy wysokości.

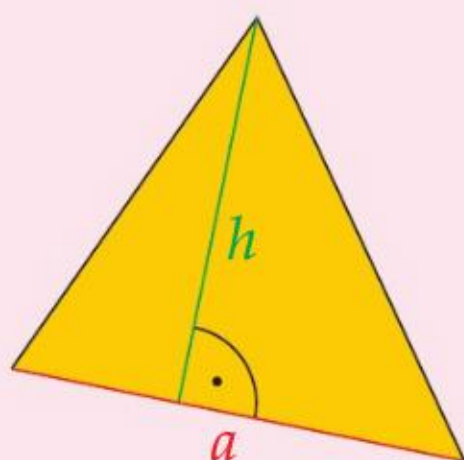


Patrz, nie zawsze wysokości leżą wewnątrz trójkąta. W prostokątnym dwie wysokości leżą na przyprostokątnych.



A w rozwartokątnym dwie leżą na zewnątrz... I nawet nie łączą wierzchołka z bokiem, tylko z jego przedłużeniem.

1. Narysuj trójkąty: równoboczny, równoramienny i różnoboczny. W każdym z nich poprowadź trzy wysokości i porównaj ich długości. Zapisz wnioski.



Pole trójkąta obliczamy według poniższego wzoru.

$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

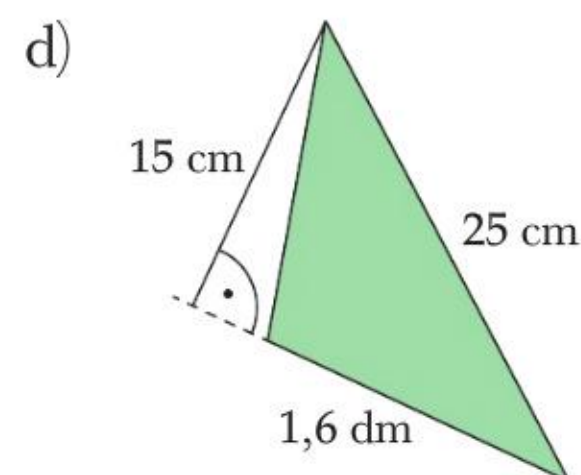
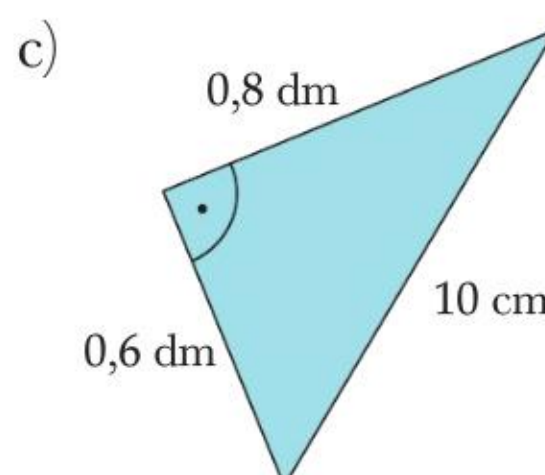
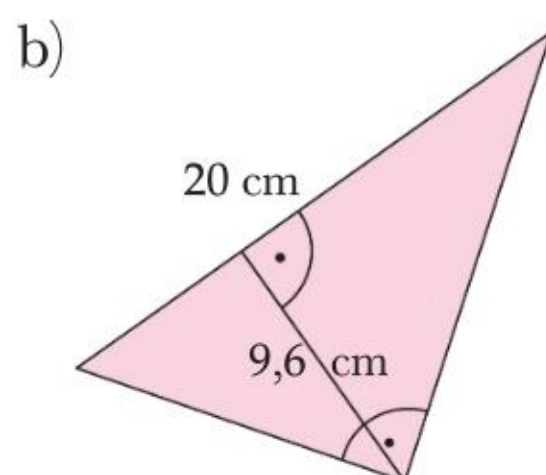
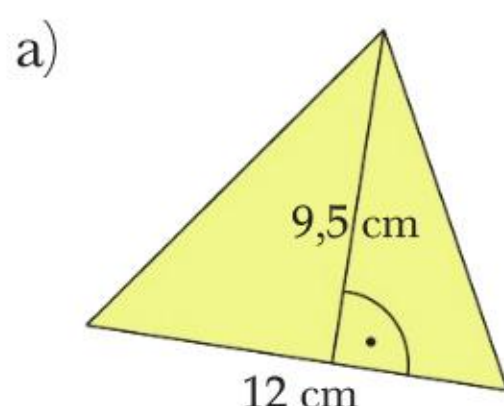
gdzie:

a – długość podstawy

h – wysokość opuszczona na podstawę

2. Wykonaj rysunek ilustrujący następujące zdanie: Pole trójkąta o podstawie a i wysokości h jest równe połowie pola równoległoboku o podstawie a i wysokości h .

3. Oblicz pole narysowanego trójkąta. Potrzebne dane odczytaj z rysunku.



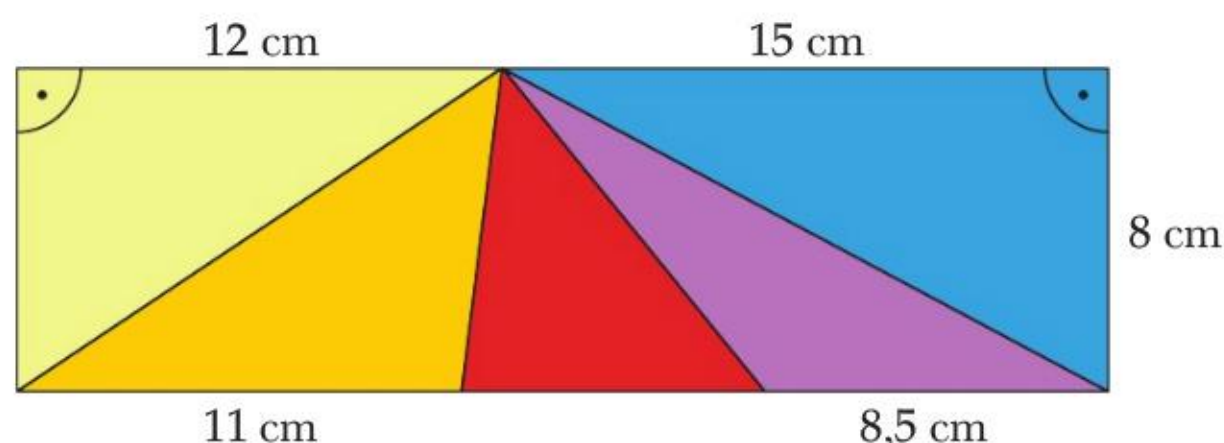
Przyprostokątne trójkąta prostokątnego są jednocześnie podstawą i wysokością, więc wzór na pole trójkąta prostokątnego można sformułować następująco:

$P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdzie a, b – długości przyprostokątnych.

4. Narysuj dowolny trójkąt, zmierz odpowiednie odcinki i oblicz jego pole.
5. Narysuj trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości 6 cm i 3,5 cm. Oblicz jego pole.
6. Oblicz pole trójkąta, którego podstawa ma 26 cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę jest od niej 1,5 raza dłuższa.
7. Jaką długość ma podstawa trójkąta o polu 30 cm^2 , jeżeli jego wysokość wynosi 6 cm?

Zadania

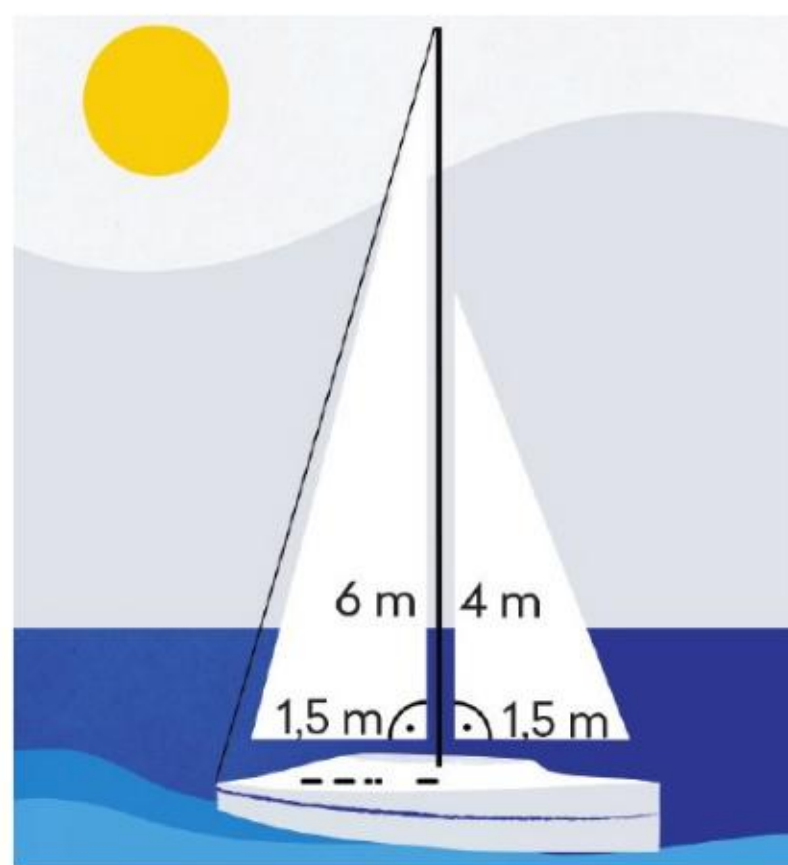
- Oblicz pola pięciu trójkątów zaznaczonych na rysunku różnymi kolorami, a następnie dodaj te pola. Jakie wymiary ma prostokąt utworzony z trójkątów? Oblicz jego pole. Co zauważasz?



- Narysuj trójkąt, którego pole wynosi 10 cm^2 , a jego wysokość ma 5 cm .
- Narysuj podany rodzaj trójkąta o polu 12 cm^2 .
 - a) ostrokątny
 - b) prostokątny
 - c) rozwartokątny
- Oblicz pole trójkąta prostokątnego, którego jedna z przyprostokątnych ma 9 cm , a druga jest o $2,5 \text{ cm}$ krótsza.
- Wysokość trójkąta jest 4 razy dłuższa od boku, na który jest opuszczona, i ma długość 32 cm . Oblicz pole tego trójkąta.
- Jeden z boków trójkąta ma 20 cm . Wysokość opuszczona na ten bok wynosi 6 cm . Drugi bok trójkąta ma 12 cm . Oblicz pole trójkąta i wysokość opuszczoną na jego drugi bok.
- Jaką długość mają przyprostokątne trójkąta prostokątnego równoramienne, jeżeli jego pole wynosi 18 cm^2 ? Czy do obliczenia musisz wykorzystywać wzór na pole trójkąta?

- Żaglówka pana Wojtka ma dwa żagle – grot oraz fok. Skorzystaj z wymiarów podanych na rysunku i odpowiedz na pytania.

- Który z żagli ma większą powierzchnię? O ile większą?
- Jaka jest łączna powierzchnia obu żagli jachtu pana Wojtka?



Ciekawe!

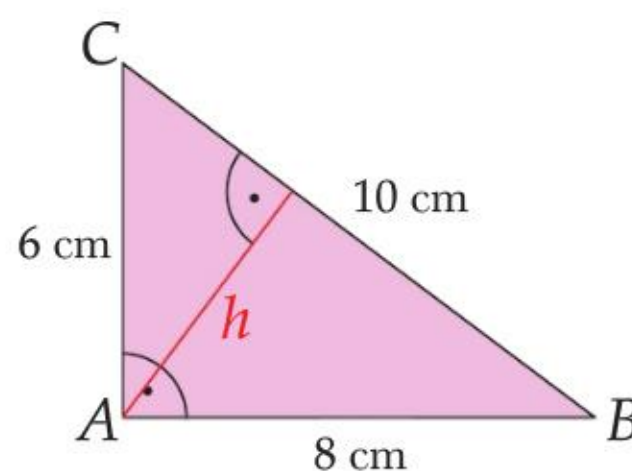


Grot to najważniejszy żagiel na jednostce żaglowej. Jest on najczęściej największy albo jedyny. Natomiast fok to podstawowy żagiel przedni.

Żagle nie zawsze są trójkątne. Często mają one również kształt czworokąta. Jeśli interesujesz się sportami wodnymi, sprawdź, jaki kształt mają pochodzące z wysp Polinezji żagle nazywane zabawnie „kleszczami kraba”.

- Na rysunku obok przedstawiono trójkąt ABC wraz z długościami jego boków.

 - Oblicz pole trójkąta ABC .
 - Jaką długość ma wysokość h tego trójkąta?



- Narysuj trójkąt ostrokątny o podstawie mającej długość $7,5 \text{ cm}$. Podziel go na pięć trójkątów o równych polach.

5.6 Pola wielokątów

Podejmij temat



Jakimi figurami są podkładki pod szklanki? Jak porównać ich wielkość? Czy znasz wzór, według którego można obliczyć ich pola?



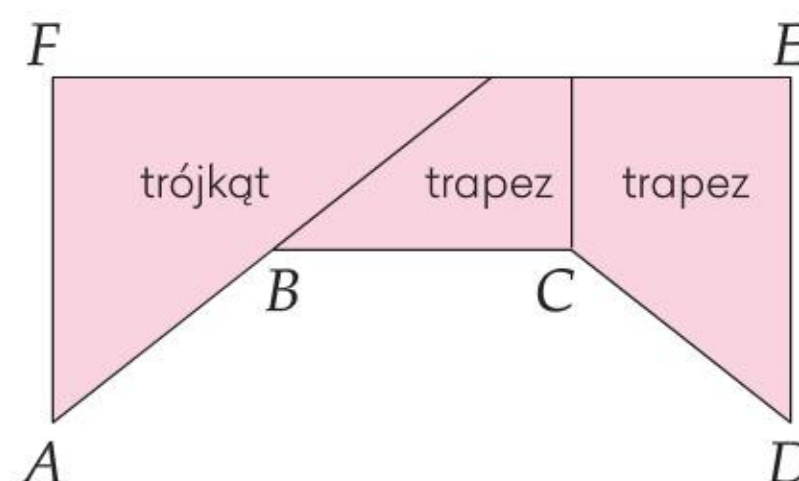
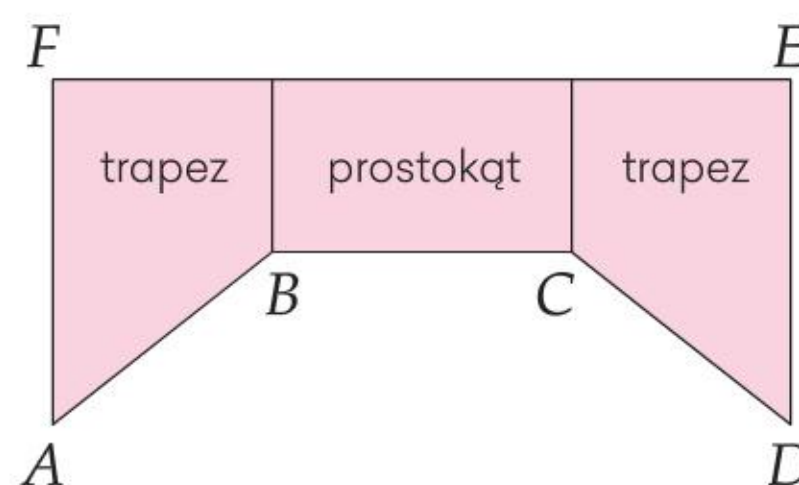
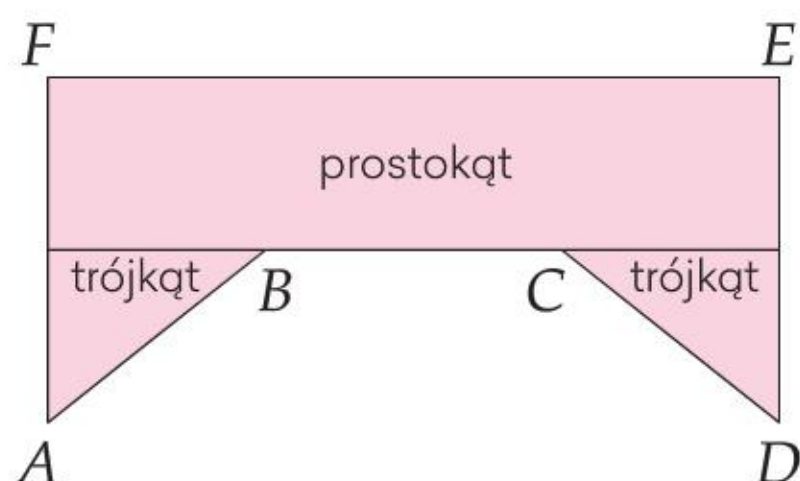
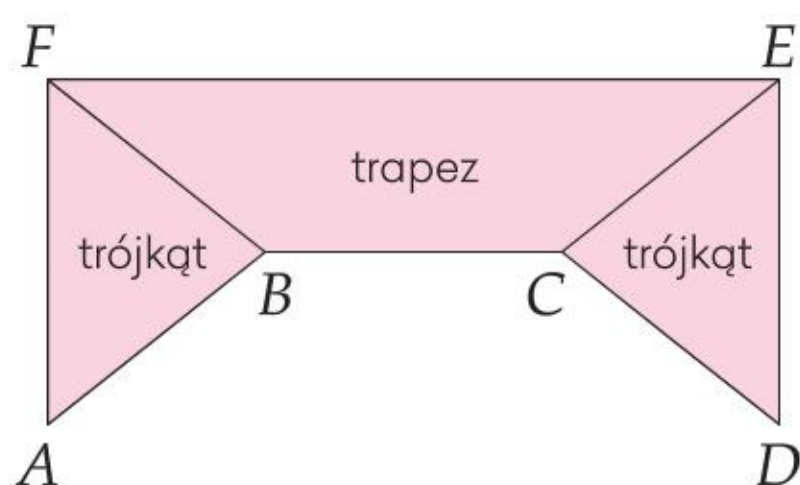
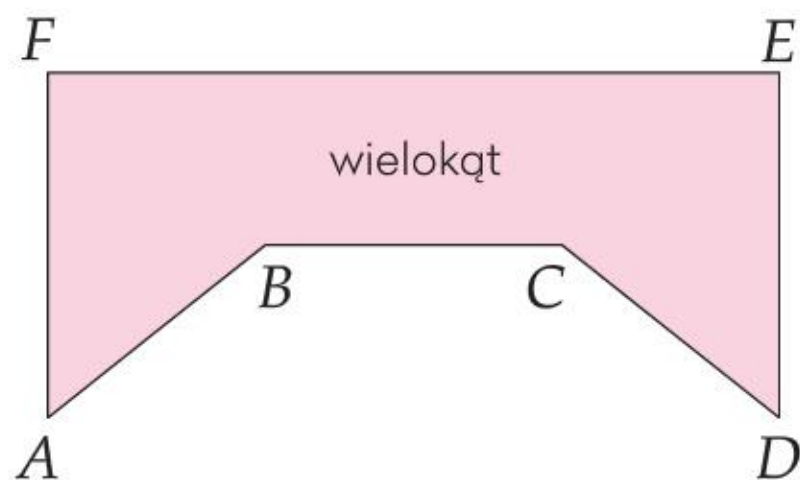
Potrafiemy obliczyć pola trójkątów i niektórych czworokątów. Zastanówmy się, jak obliczyć pola innych wielokątów: pięciokątów, sześciokątów, siedmiokątów itd. Okazuje się, że wystarczą do tego wzory, które już znamy.

Aby obliczyć pole wielokąta $ABCDEF$, należy podzielić go na dowolne figury, których pola potrafimy już obliczyć.

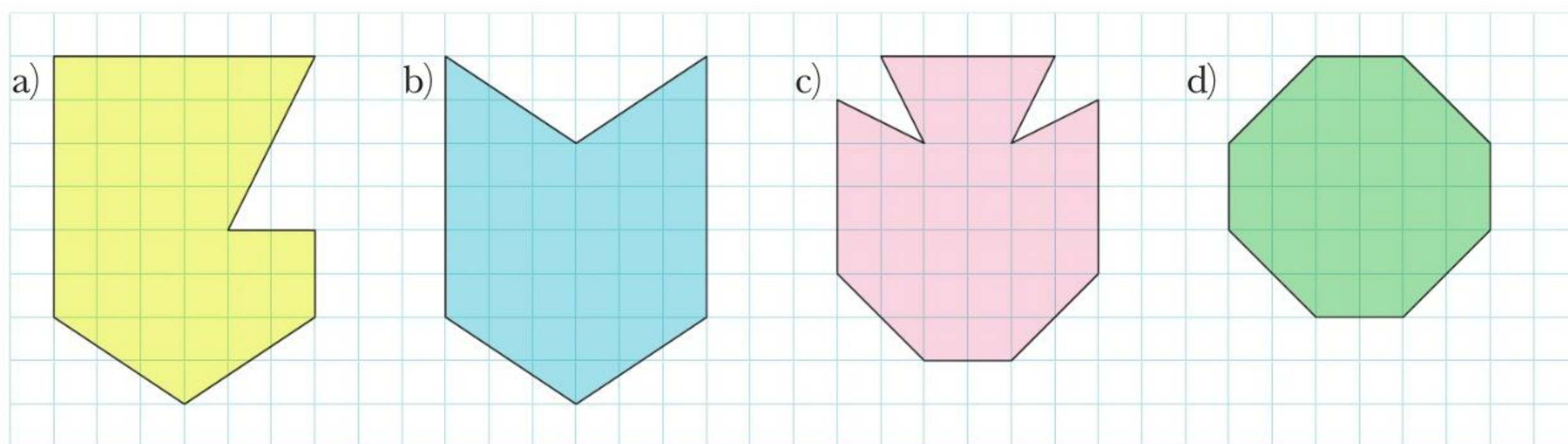
Na rysunku obok przedstawiono cztery sposoby takiego podziału.

Po obliczeniu pól figur tworzących wielokąt $ABCDEF$ należy te pola dodać.

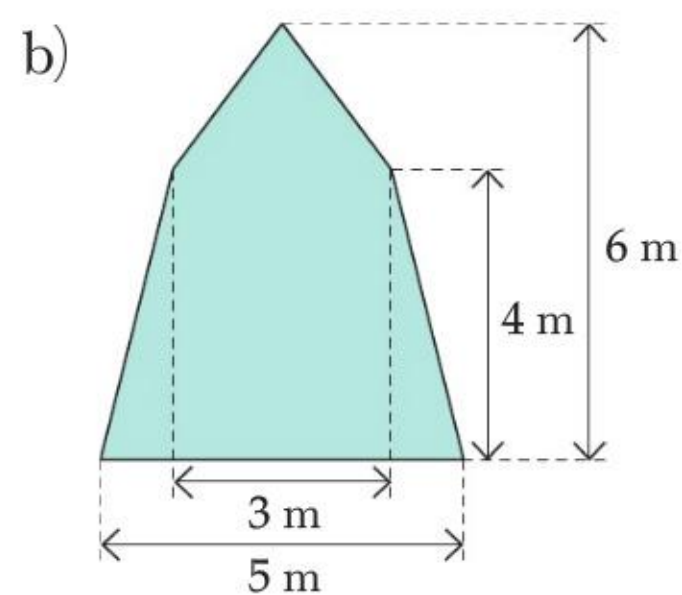
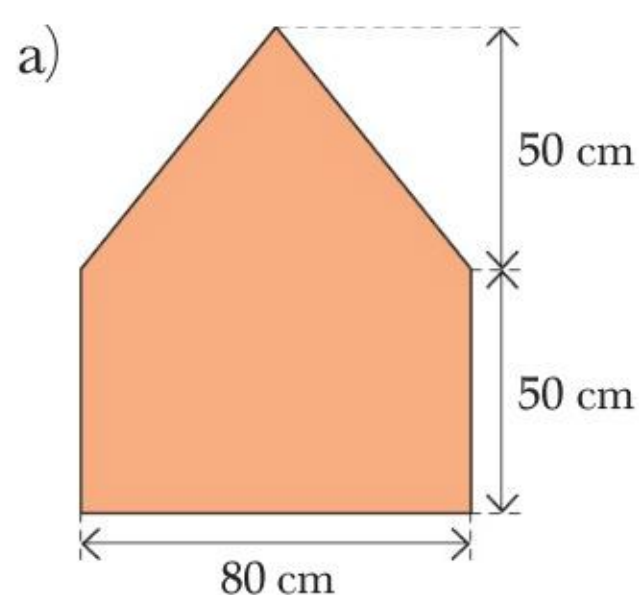
Aby obliczyć **pole wielokąta**, zwykle dodajemy pola figur, na jakie ten wielokąt można podzielić.



1. Przerysuj figurę do zeszytu. Podziel ją na takie figury, których pola potrafisz obliczyć.



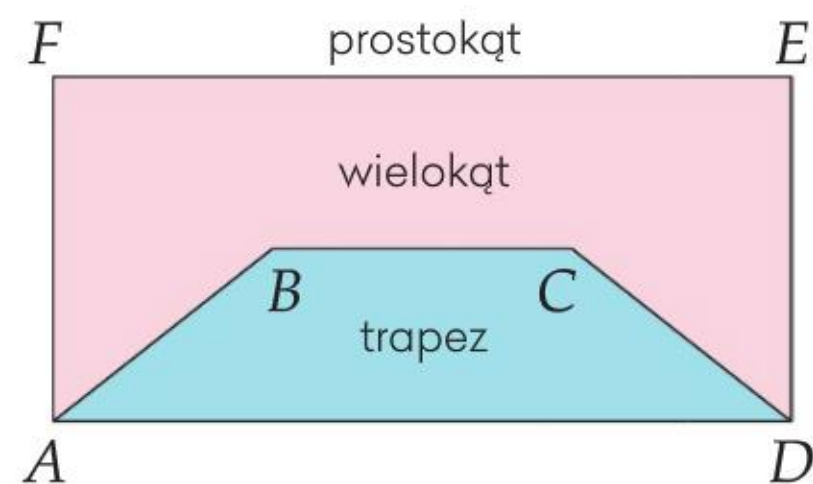
2. Oblicz pole wielokąta o podanych wymiarach. W tym celu podziel go na trójkąt i czworokąt.



Istnieje też inny sposób obliczania pola wielokąta: polega on na powiększeniu danego wielokąta tak, aby powstała z niego figura, której pole potrafimy obliczyć.

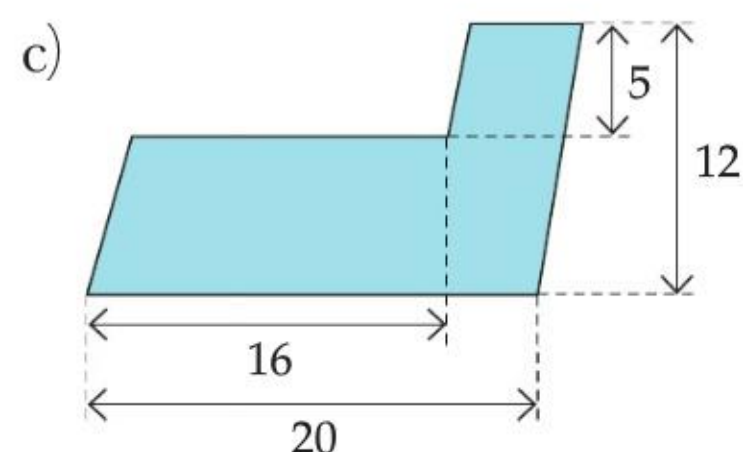
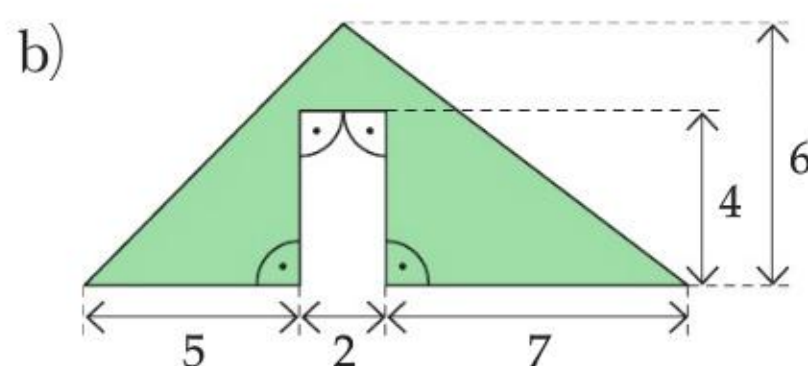
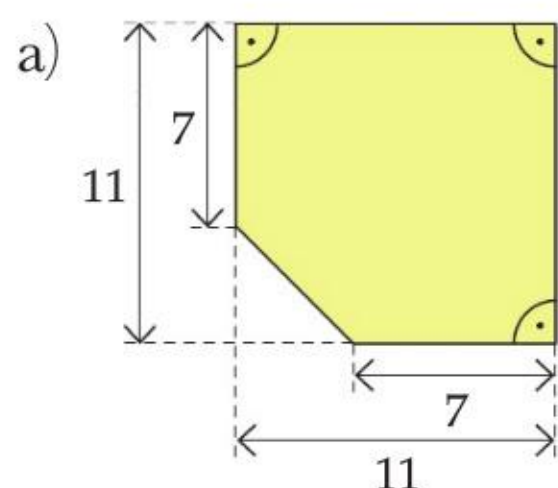
W przypadku rozważanego wcześniej wielokąta możemy dołączyć do niego trapez. Powiększona figura jest prostokątem.

Pole wielokąta $ABCDEF$ obliczymy, jeśli od pola prostokąta $ADEF$ odejmiemy pole trapezu $ADCB$.



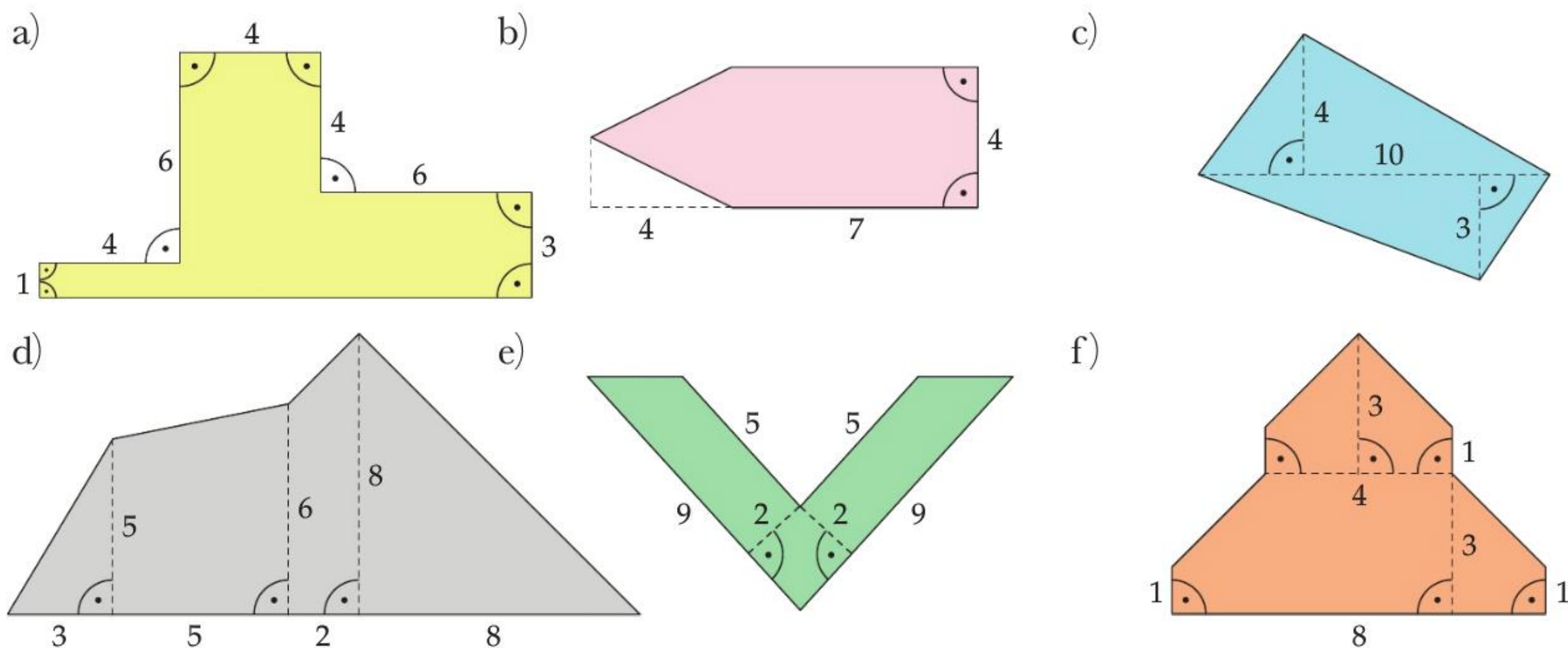
3. Oblicz pole narysowanego wielokąta. W tym celu uzupełnij go tak, aby powstała figura, której pole potrafisz obliczyć.

Uwaga: Długości na wszystkich rysunkach są podane w centymetrach, a przeciwległe boki wielokąta w punkcie c) są równoległe.

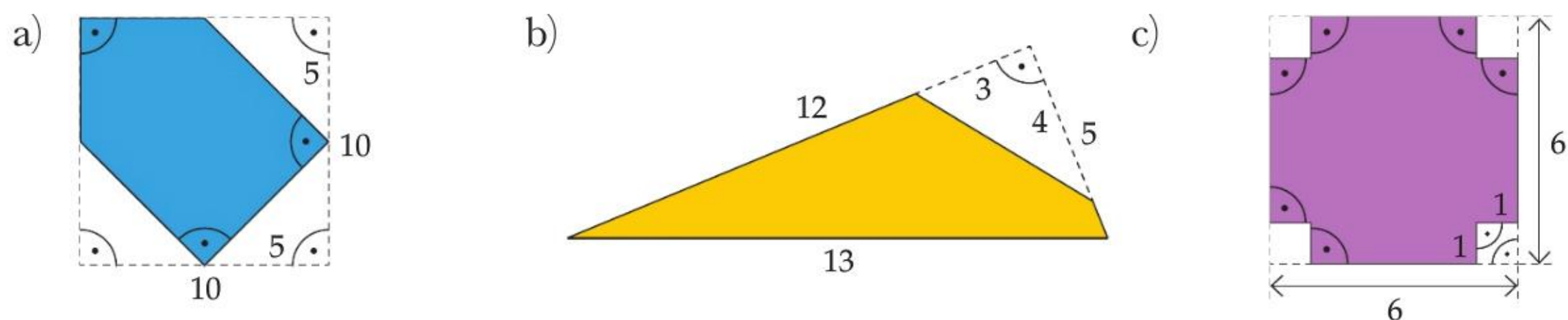


Zadania

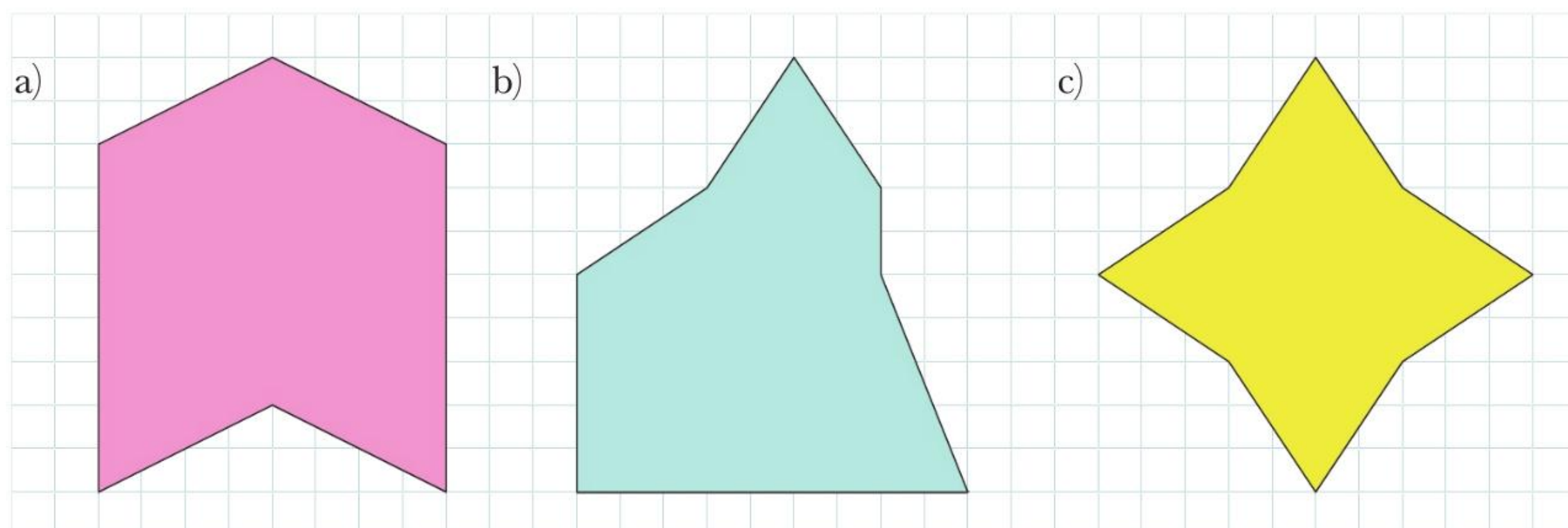
- Oblicz pole wielokąta. Potrzebne dane odczytaj z rysunku.
Uwaga: Długości na wszystkich rysunkach są podane w centymetrach.



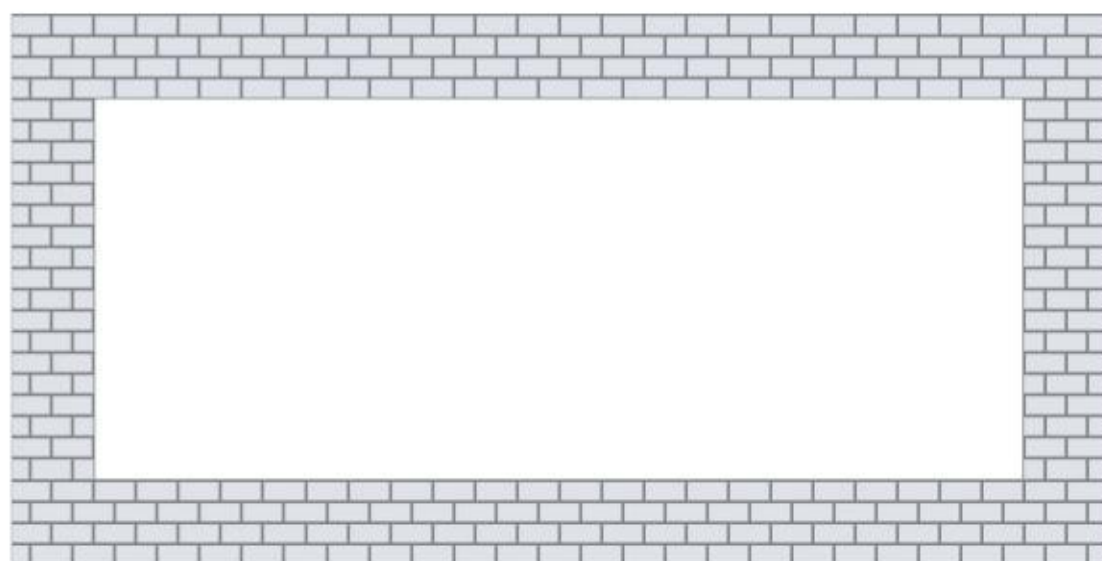
- Oblicz pole wielokąta. Potrzebne dane odczytaj z rysunku.
Uwaga: Długości na wszystkich rysunkach są podane w decymetrach. Równość odpowiednich odcinków możesz sprawdzić za pomocą cyrkla lub linijki.



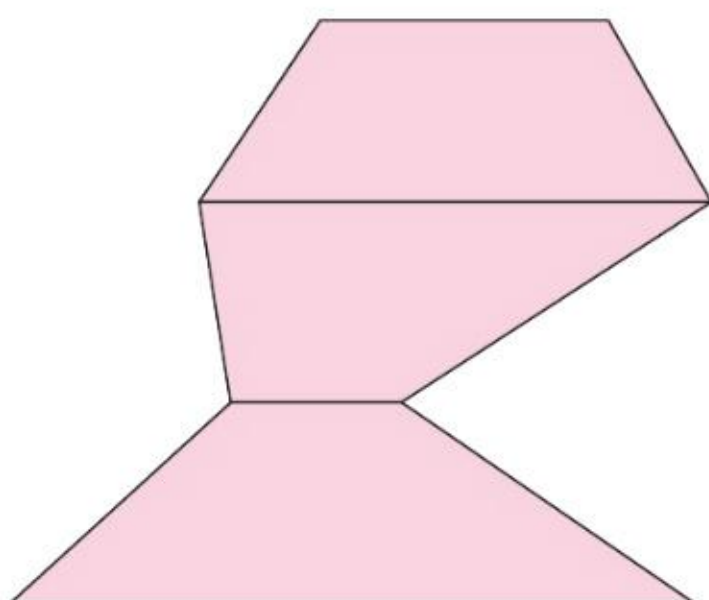
- Oblicz pole wielokąta.



- Rysunek przedstawia plan chodnika wokół bloku. Długość bloku to 22 m, a szerokość wynosi 9 m. Chodnik ma szerokość 2 m. Oblicz pole chodnika.



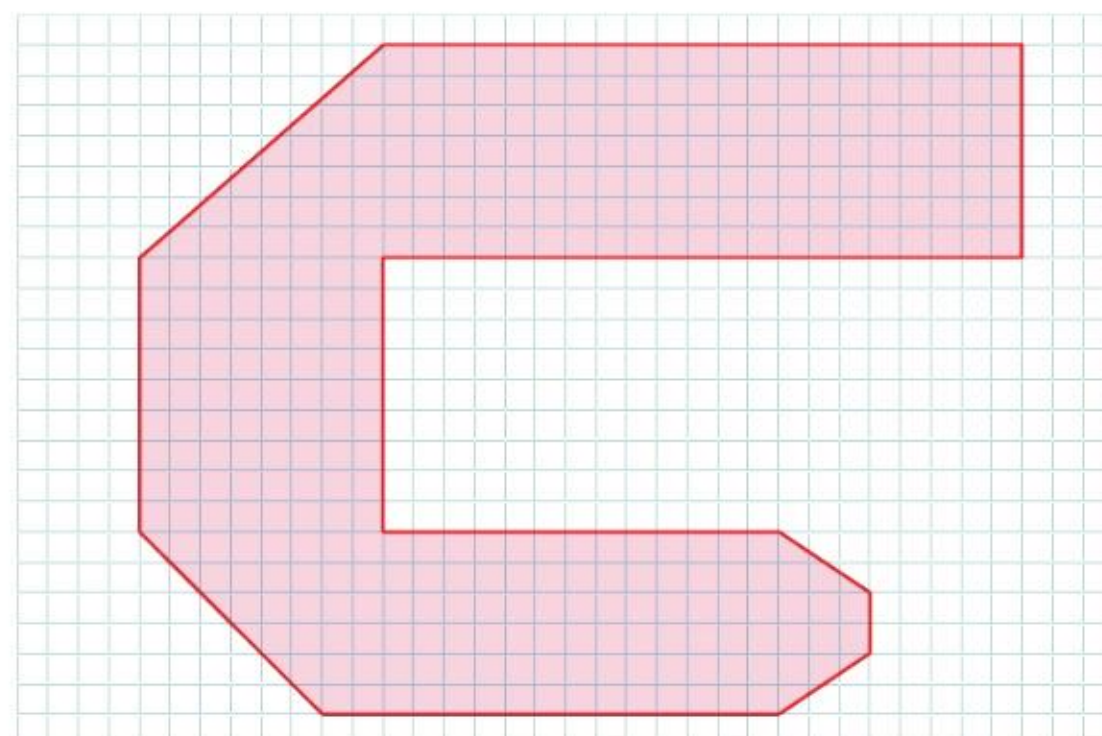
- Trzy trapezy łączą się podstawami jak na rysunku poniżej. Podaj nazwę powstałej w ten sposób figury. Wykonaj podobny rysunek, zmierz potrzebne odcinki i oblicz pole tej figury.



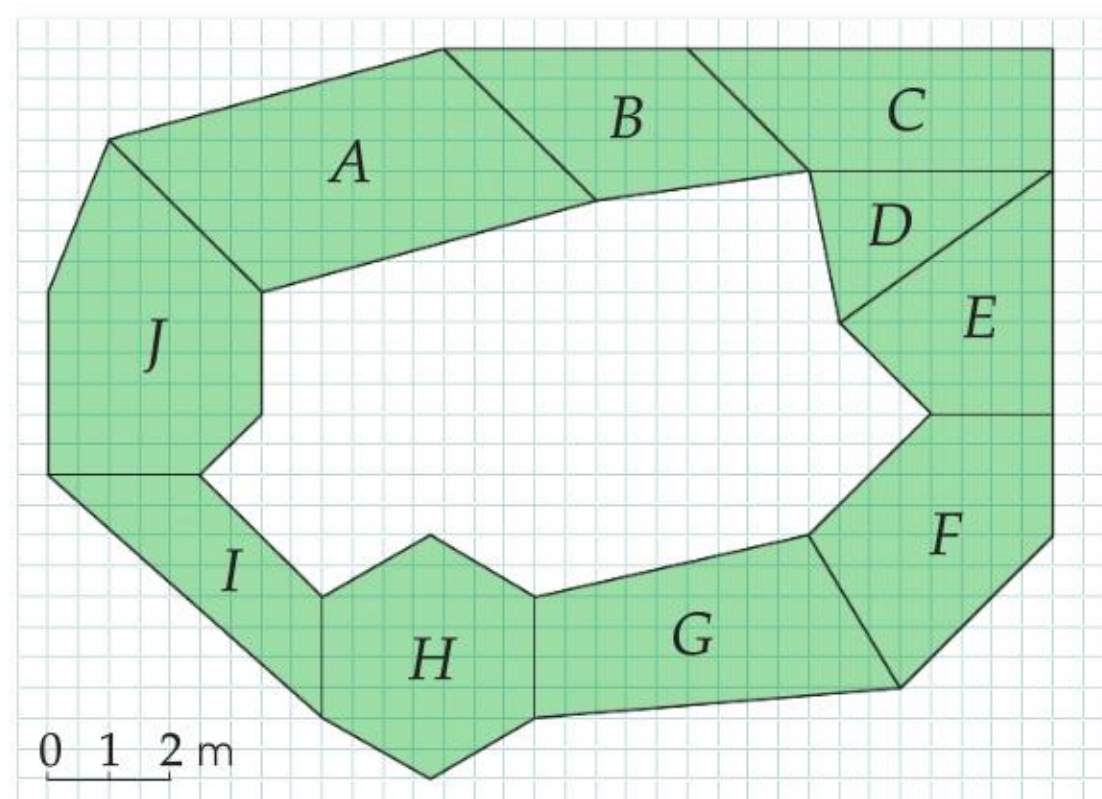
- W Polsce znak nakazu STOP jest ośmiokątem o bokach jednakowej długości. Zmierz potrzebne odcinki i oblicz pole zamieszczonego w podręczniku rysunku tego znaku.



- Oblicz powierzchnię korytarza, którego plan widzisz poniżej. Przyjmij, że długość boku kratki na planie odpowiada długości 0,5 m w rzeczywistości.



- Na zielonej szkole uczestnicy bawili się w poszukiwaczy skarbów. Każda para dzieci próbowała odnaleźć skarb ukryty w największej komnacie zamku, którego plan przedstawiono poniżej. Olek i Ada nie odnaleźli skarbu, ale zdobyli nagrodę pocieszenia za ponumerowanie komnat w kolejności od najmniejszej do największej.
 - Wybierz trzy komnaty, które wydają ci się najmniejsze i oblicz ich powierzchnie w rzeczywistości.
 - Skarb znajdował się w komnacie A, G, H lub J. Oblicz powierzchnie tych komnat w rzeczywistości i odpowiedz, w której ukryto skarb.



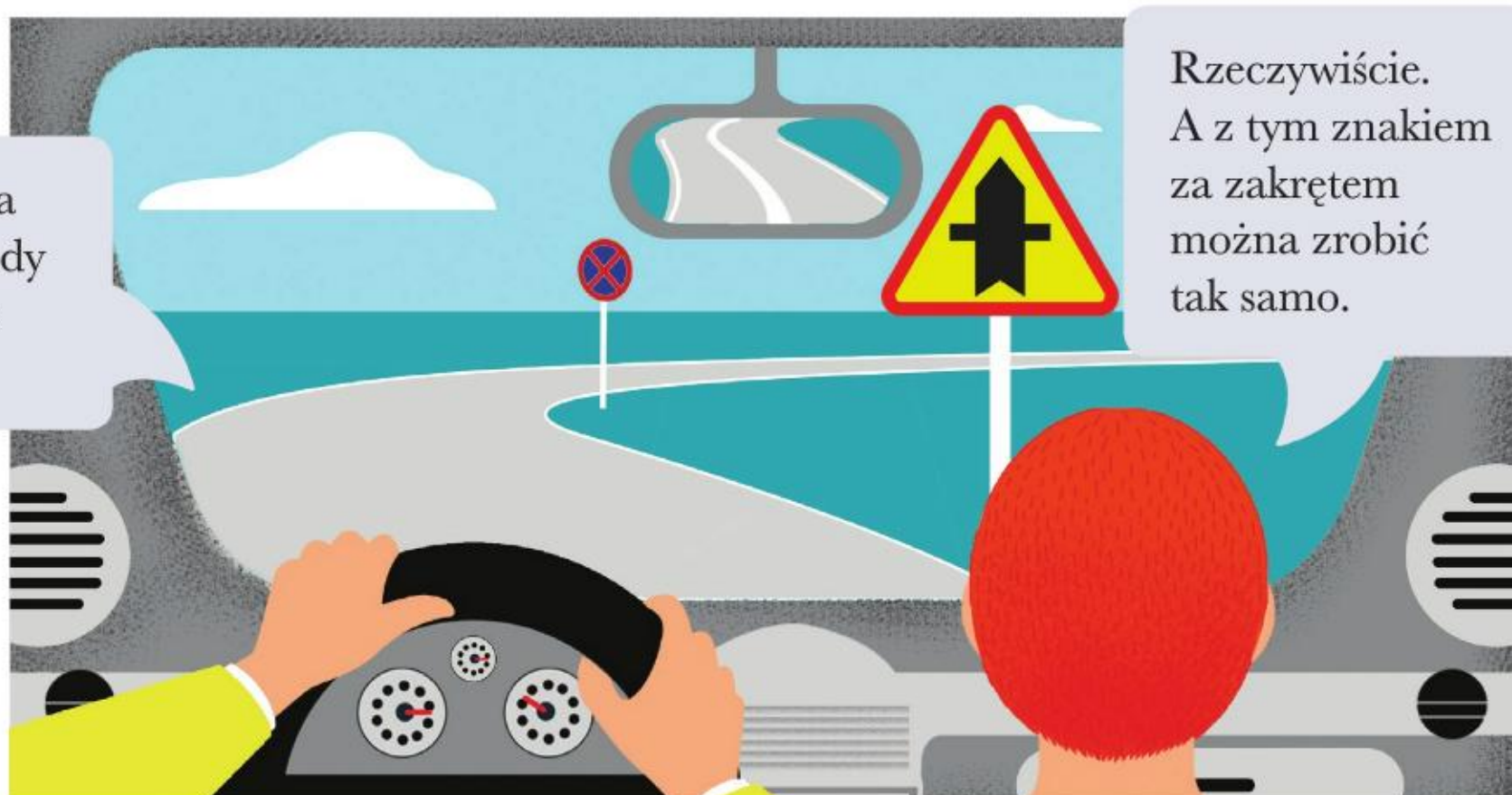
5.7 Figury osiowosymetryczne

Podejmij temat

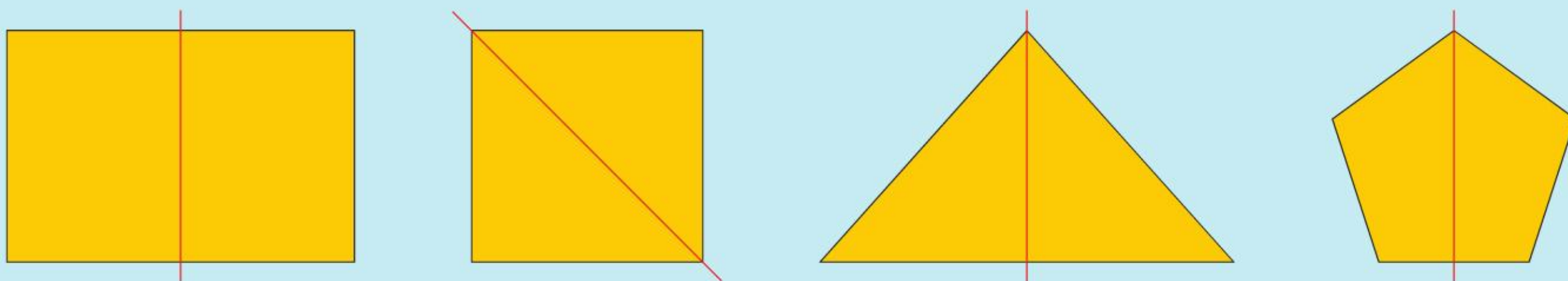
Spójrz, na tym znaku drogowym można byłoby narysować pionową kreskę i wtedy jedna połówka wyglądałaby jak odbicie drugiej w lustrze.



Czy znasz inne znaki drogowe składające się z dwóch takich części, z których jedna jest lustrzanym odbiciem drugiej?



Poniżej narysowano przykłady prostych figur geometrycznych, które można podzielić linią prostą na dwie jednakowe części tak, że jedna jest lustrzanym odbiciem drugiej.



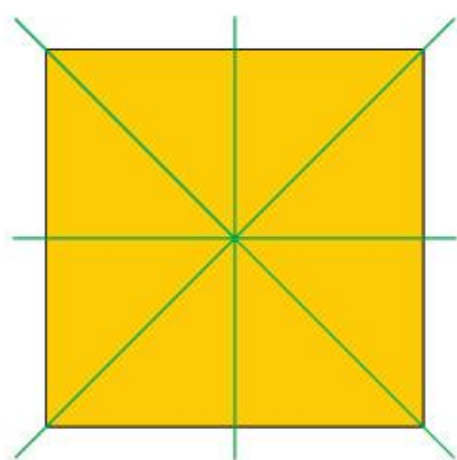
Linia dzieląca w taki sposób figurę nazywa się **osią symetrii figury**.
Figury, które mają oś symetrii, nazywają się **figurami osiowosymetrycznymi**.

Oś symetrii mają nie tylko figury geometryczne. Poniższe zdjęcia przedstawiają przedmioty, które widzimy codziennie. Zdjęcia te również mają oś symetrii, czyli są osiowosymetryczne.

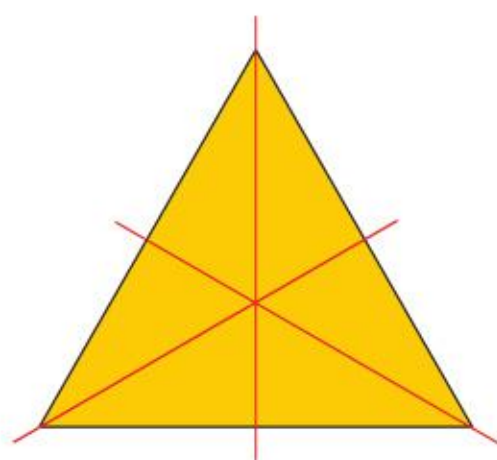


Istnieją figury osiowosymetryczne, które mają więcej niż jedną oś symetrii.

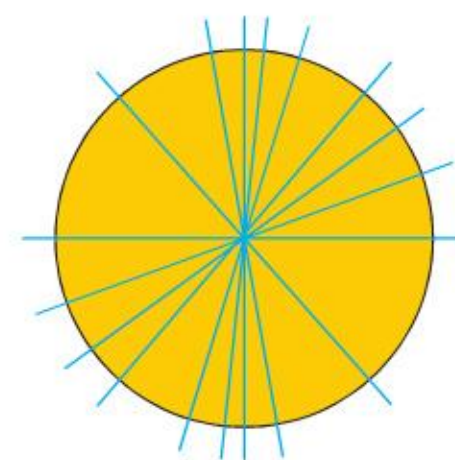
Kwadrat ma **cztery** osie symetrii.



Trójkąt równoboczny ma **trzy** osie symetrii.



Koło ma **nieskończenie wiele** osi symetrii.

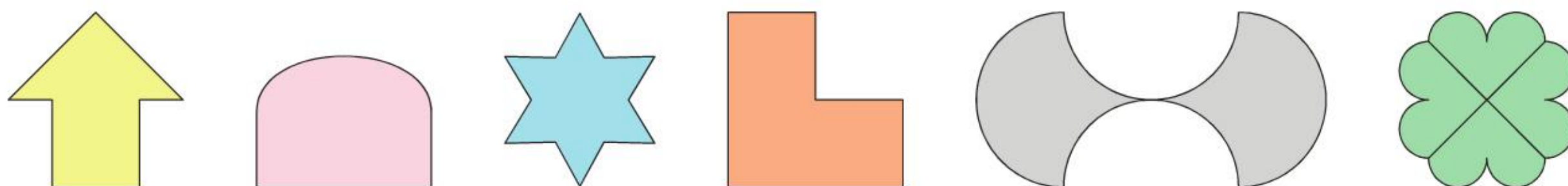


1. Ile osi symetrii ma:

- a) trójkąt równoramienny (niebędący trójkątem równobocznym),
- b) prostokąt (niebędący kwadratem),
- c) trapez równoramienny (niebędący prostokątem),
- d) romb (niebędący kwadratem)?

Narysuj te figury oraz ich osie symetrii.

2. Poniżej narysowano przykłady figur osiowosymetrycznych. Przerysuj je i narysuj ich osie symetrii.



3. Narysuj trzy wielokąty (inne niż te narysowane w podręczniku), które mają co najmniej jedną oś symetrii.

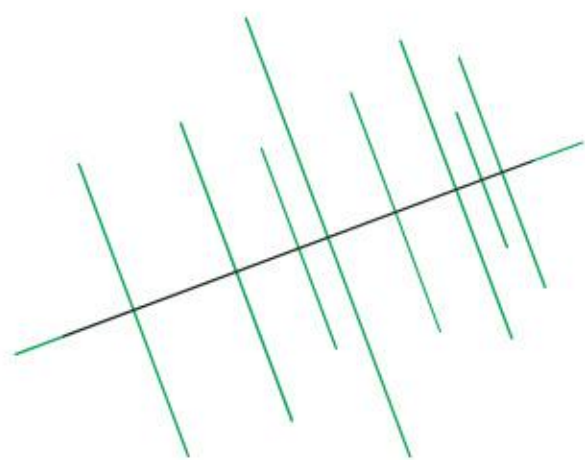
Różne figury osiowosymetryczne można zauważyć w przyrodzie, technice, sztuce czy budownictwie.



4. Narysuj w zeszyte serwetę (prostokąt, kwadrat lub koło) i zaprojektuj na niej taki wzór, by ta serweta była figurą osiowosymetryczną.

Podstawowe figury geometryczne, jak prosta, półprosta, odcinek i kąt, również mają osie symetrii.

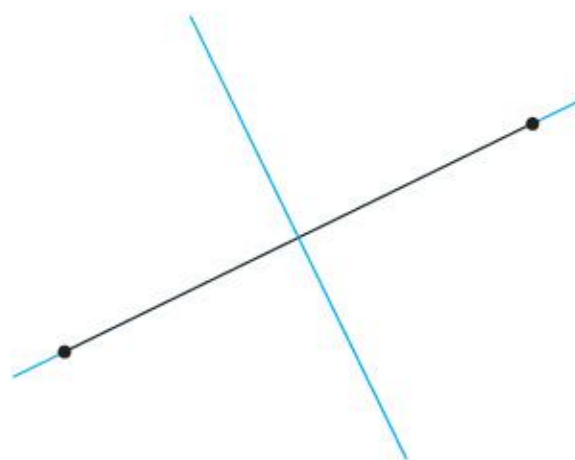
Prosta ma osi symetrii
nieskończenie wiele.



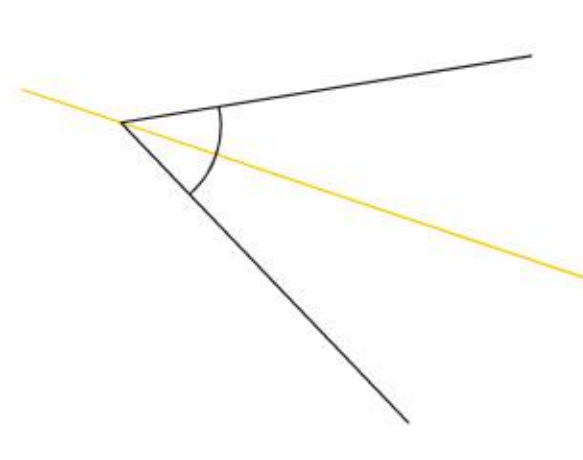
Półprosta ma **jedną** oś symetrii.



Odcinek ma **dwie** osie symetrii.



Kąt ma **jedną** oś symetrii.

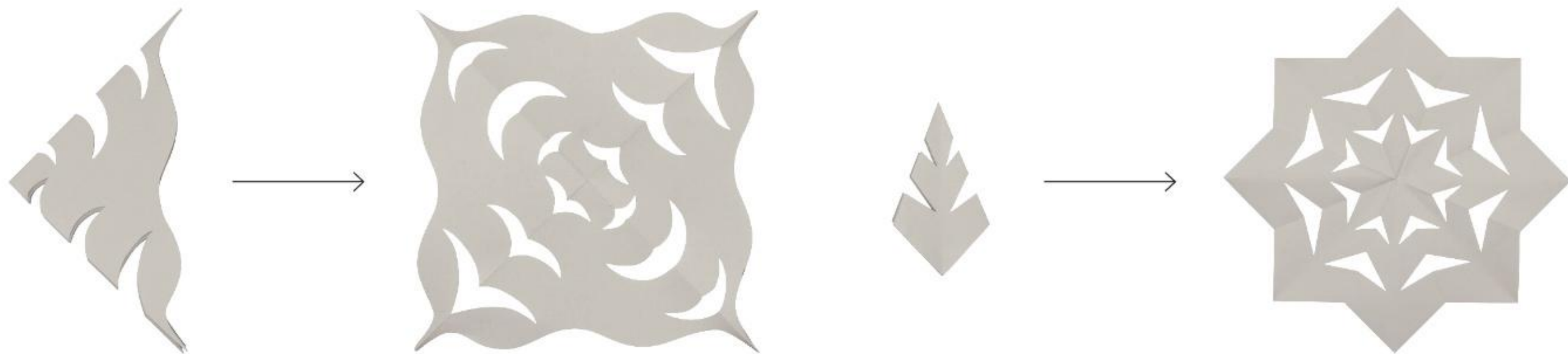


Nie wszystkie figury mają oś symetrii. Figurą, która nie ma osi symetrii, jest np. trójkąt różnoboczny czy równoległobok (niebędący rombem ani prostokątem).

5. Narysuj figurę, która nie jest osiowosymetryczna (inną niż te wymienione powyżej).

Jednym ze sposobów sprawdzenia, czy rysunek wykonany na kartce papieru ma oś symetrii, jest złożenie tej kartki w odpowiednim miejscu. Jeżeli jedna część rysunku pokryje się dokładnie z drugą, wtedy linia złożenia będzie osią symetrii. Można też takie składanie kartki tylko sobie wyobrazić.

Składanie kartki papieru można również wykorzystać do wykonania symetrycznych wycinanek.



Linie złożenia kartki są osiami symetrii serwetki. Ile osi symetrii ma pierwsza serwetka, a ile – druga?

Ciekawe!

Pismo lustrzane to pismo, w którym wyrazy pisane są od tyłu, tak że wraz z prawidłowym zapisem tworzą figurę osiowo-symetryczną. Odczytanie treści takiego tekstu jest bardzo proste przy użyciu lustra.

W taki sposób sporządzał swoje zapiski włoski artysta i naukowiec – Leonardo da Vinci [czyt. da winczi] (1452–1519). Szyfrował w ten sposób swoje notatki. Na pierwszy rzut oka wyglądały one na zapisane w nieznanym języku.

Ծիւթմետր | *Matematyka*

Նոյն ժամանակ զարգացան նաև
 արհեստագործական և արհեստագործական
 արհեստագործական արհեստագործական

Zadania

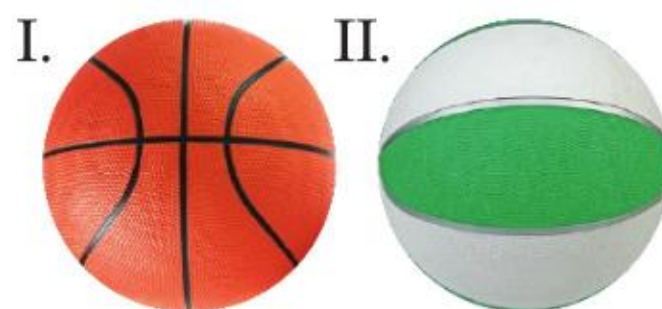
- Które z wielkich drukowanych liter współczesnego alfabetu polskiego są figurami osiowosymetrycznymi? Narysuj te litery i ich osie symetrii.

- Ile osi symetrii mają zdjęcia piłek?

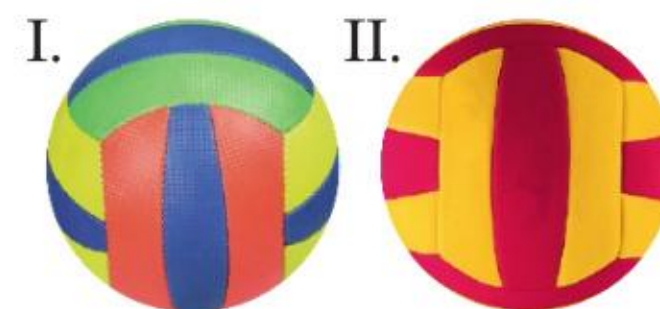
a) futbolowe



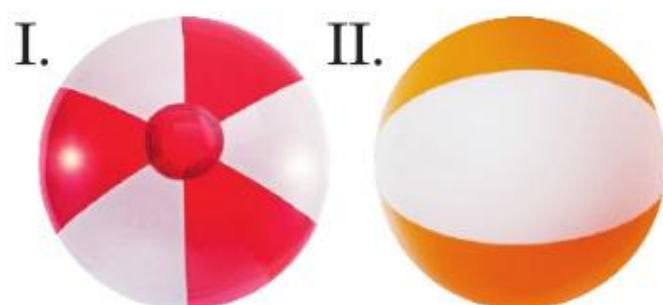
b) do koszykówki



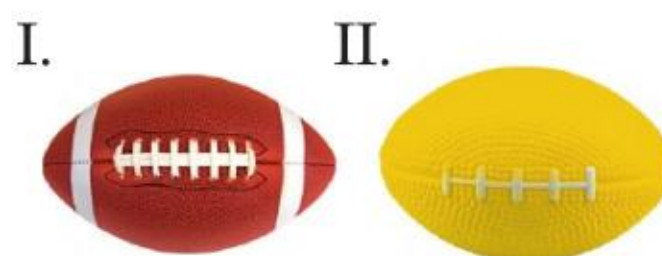
c) do siatkówki



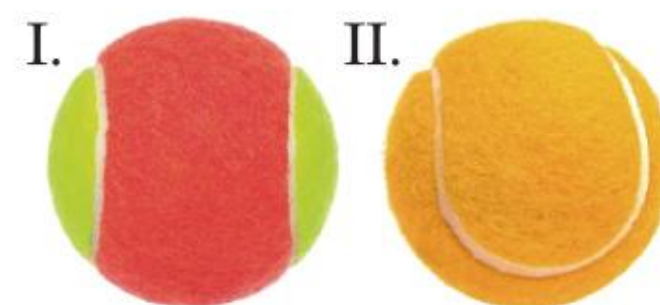
d) plażowe



e) do rugby



f) do tenisa



- Ile osi symetrii ma ludowa wycinanka?



- Które z liczb mniejszych od 50, zapisanych w systemie rzymskim, są osiowosymetryczne? Zapisz te liczby i dla każdej z nich podaj liczbę jej osi symetrii.

- Rysunek przedstawia różne płatki śniegu. Każdy z nich ma tyle samo osi symetrii. Ile?



Czy pamiętasz?

Podstawowe znaki służące do zapisu liczb w systemie rzymskim to:

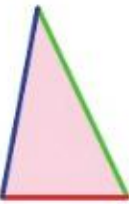
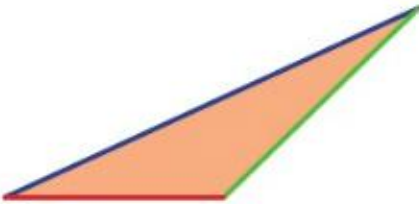
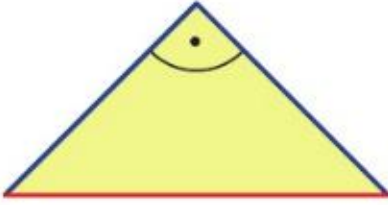
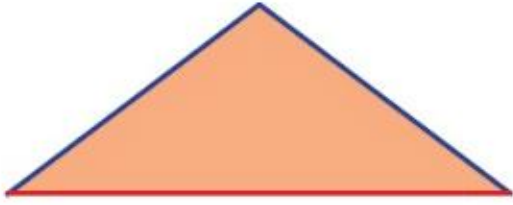
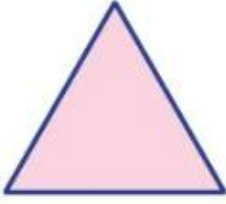
I – 1	C – 100
V – 5	D – 500
X – 10	M – 1000
L – 50	

Podsumowanie działu 5

Ważne pojęcia

przyprostokątna	ar	oś symetrii
przeciwprostokątna	hektar	figura osiowosymetryczna

Rodzaje trójkątów ze względu na boki i kąty

Trójkąt	ostrokątny	prostokątny	rozwartokątny
różnoboczny			
równoramienny			
równoboczny		nie istnieje	nie istnieje

Obliczanie pól wielokątów

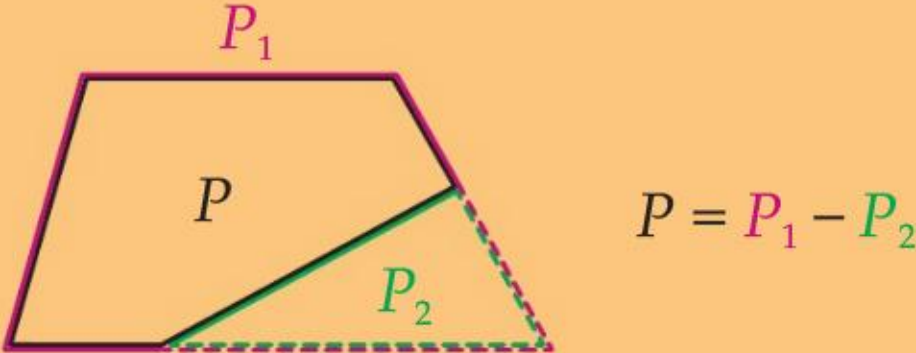
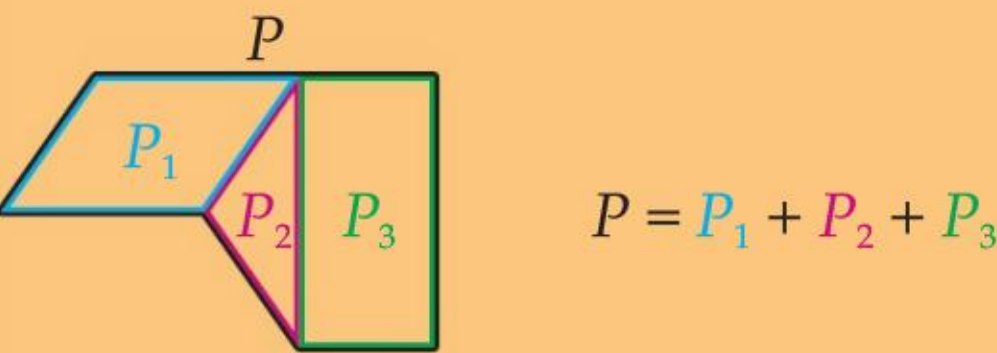
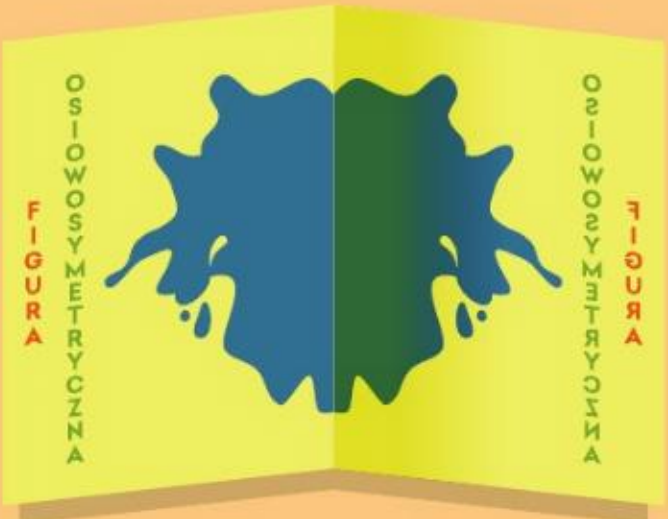


Figura osiowosymetryczna

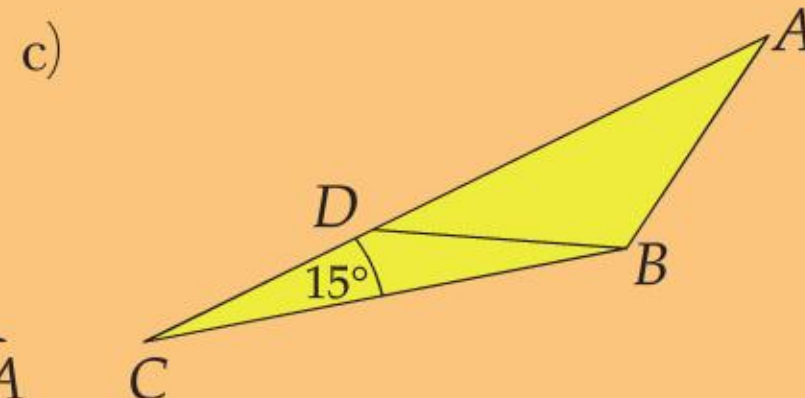
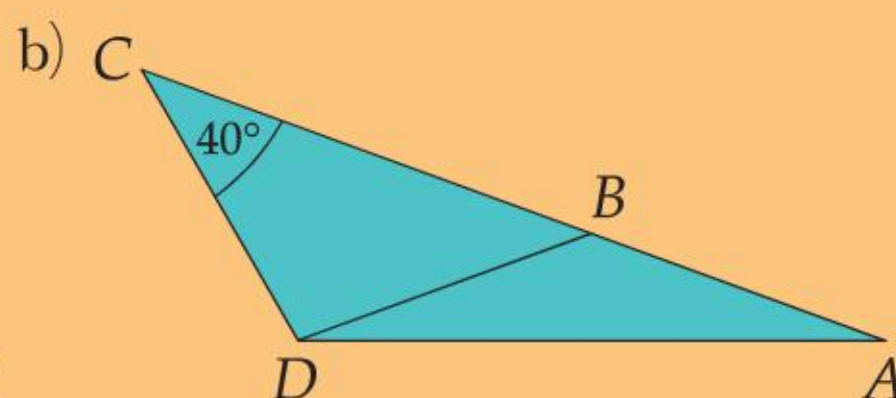
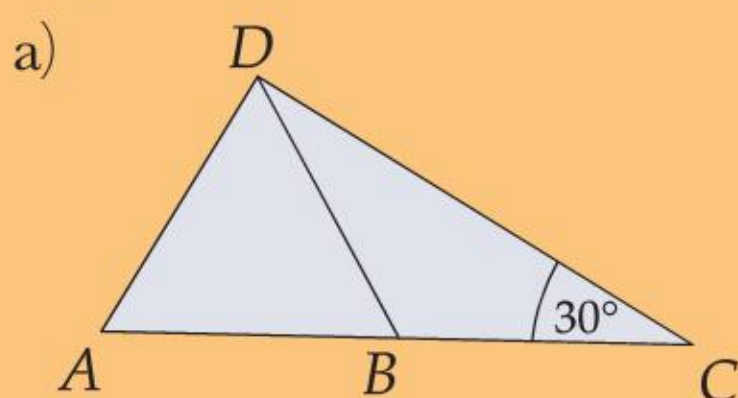


Czy już umiesz?

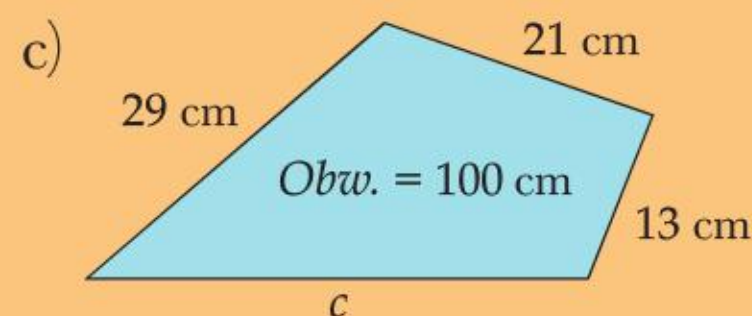
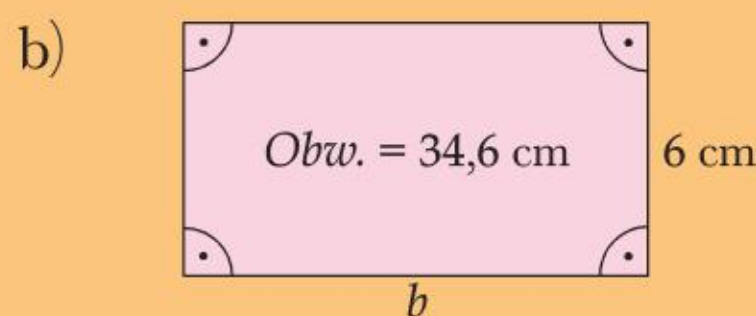
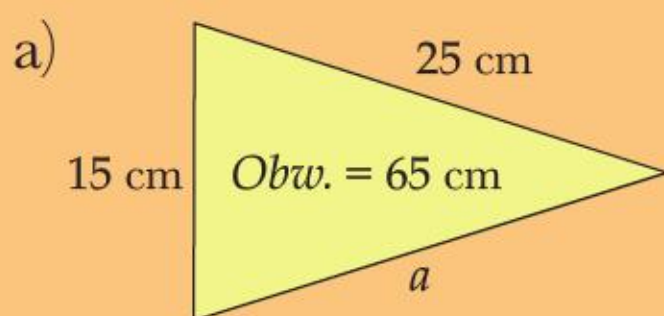
- 1 Zapisz wszystkie wzory dotyczące pól trójkątów i czworokątów z działu 5, stosując zasady zapisu wyrażeń algebraicznych poznane w dziale 3.
- 2 Narysuj trójkąt, który ma dokładnie dwie równe wysokości. Jaki to rodzaj trójkąta?
- 3 Znane są miary dwóch kątów trójkąta. W którym przypadku są to kąty trójkąta równoramiennego?

A. 90° i 30° B. 30° i 60° C. 45° i 100° D. 80° i 50°
- 4 Dany jest trójkąt równoramienny.
 - a) Jego podstawa ma długość 8,3 cm, a ramię 10,7 cm. Jaki jest obwód tego trójkąta?
 - b) Jego ramię ma 12,6 cm, a obwód wynosi 30 cm. Jaką długość ma podstawa tego trójkąta?
 - c) Jego podstawa ma 7,6 cm, a obwód jest równy 33 cm. Jaką długość ma ramię tego trójkąta?

- 5 Trójkąty ABD i BCD są równoramienne. Oblicz miarę kąta BAD . Brakujące dane odczytaj z rysunku.

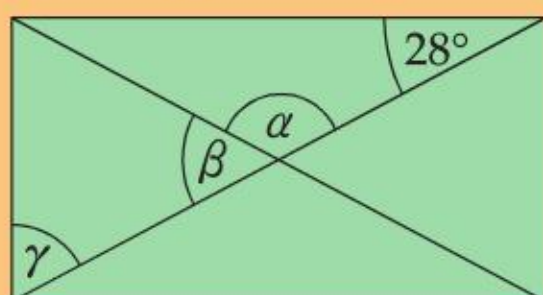


- 6 Oblicz długość nieznanego boku wielokąta. Obwód i inne potrzebne informacje odczytaj z rysunku.

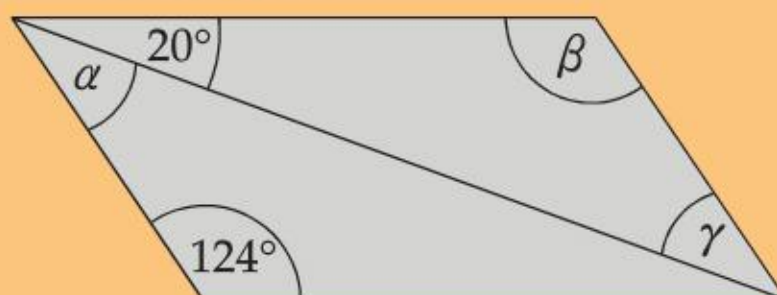


- 7 Oblicz miary kątów α , β , γ narysowanej figury. Potrzebne dane odczytaj z rysunku.

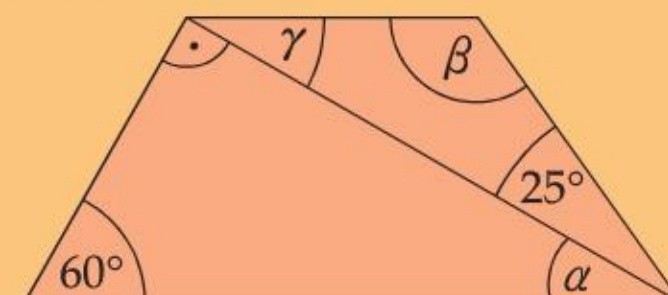
a) prostokąt



b) równoległobok

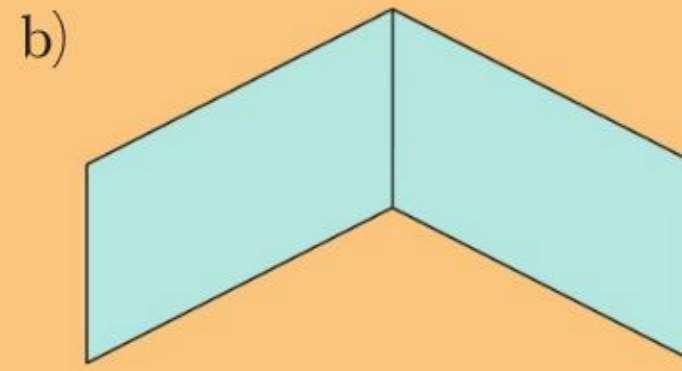
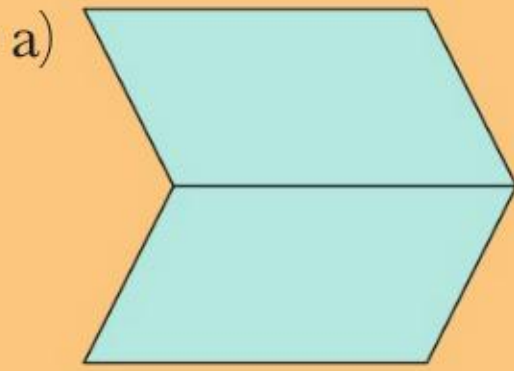


c) trapez

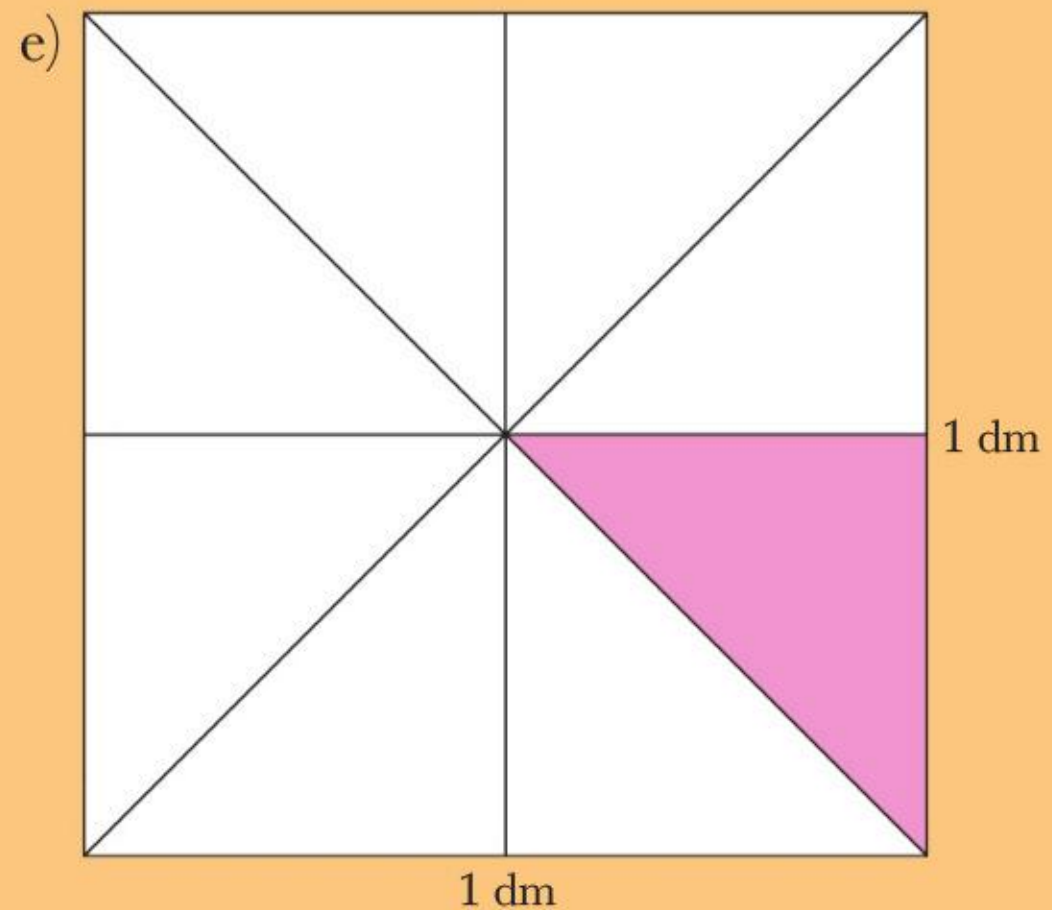
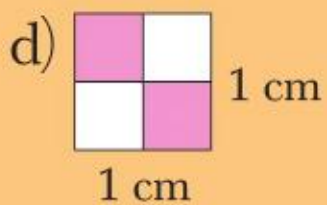
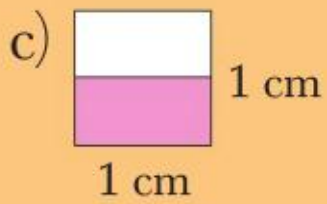
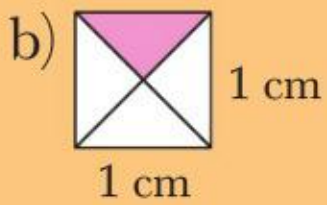
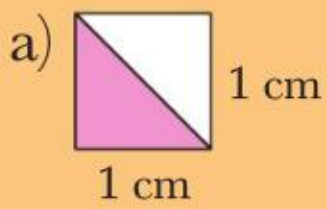


8 Narysuj trzy różne czworokąty, które mają dwie równe przekątne o długości 4 cm. Jak się nazywają te czworokąty?

9 Dwa równoległoboki o bokach długości 7 cm i 12 cm połączono bokami tak, jak pokazuje rysunek. Oblicz obwód powstałej figury.



10 Jakie jest pole zamalowanej figury?

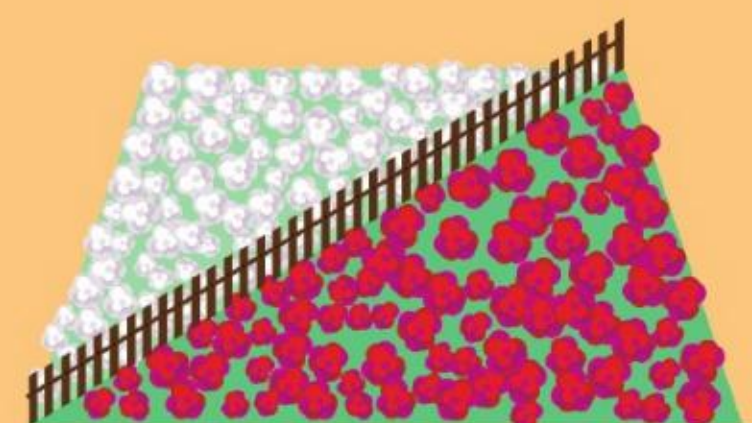


11 Dwaj gospodarze mają pola sąsiadujące ze sobą. Pole pierwszego ma powierzchnię 36,2 ha, a pole drugiego – 370 a. Który z nich ma większe pole? O ile większe? Odpowiedź podaj w metrach kwadratowych.

12 Pole pod uprawę ziemniaków ma 36,8 a. Ile worków nawozu należy kupić, aby użyźnić ziemię pod uprawę? Potrzebne dane odczytaj z rysunku.

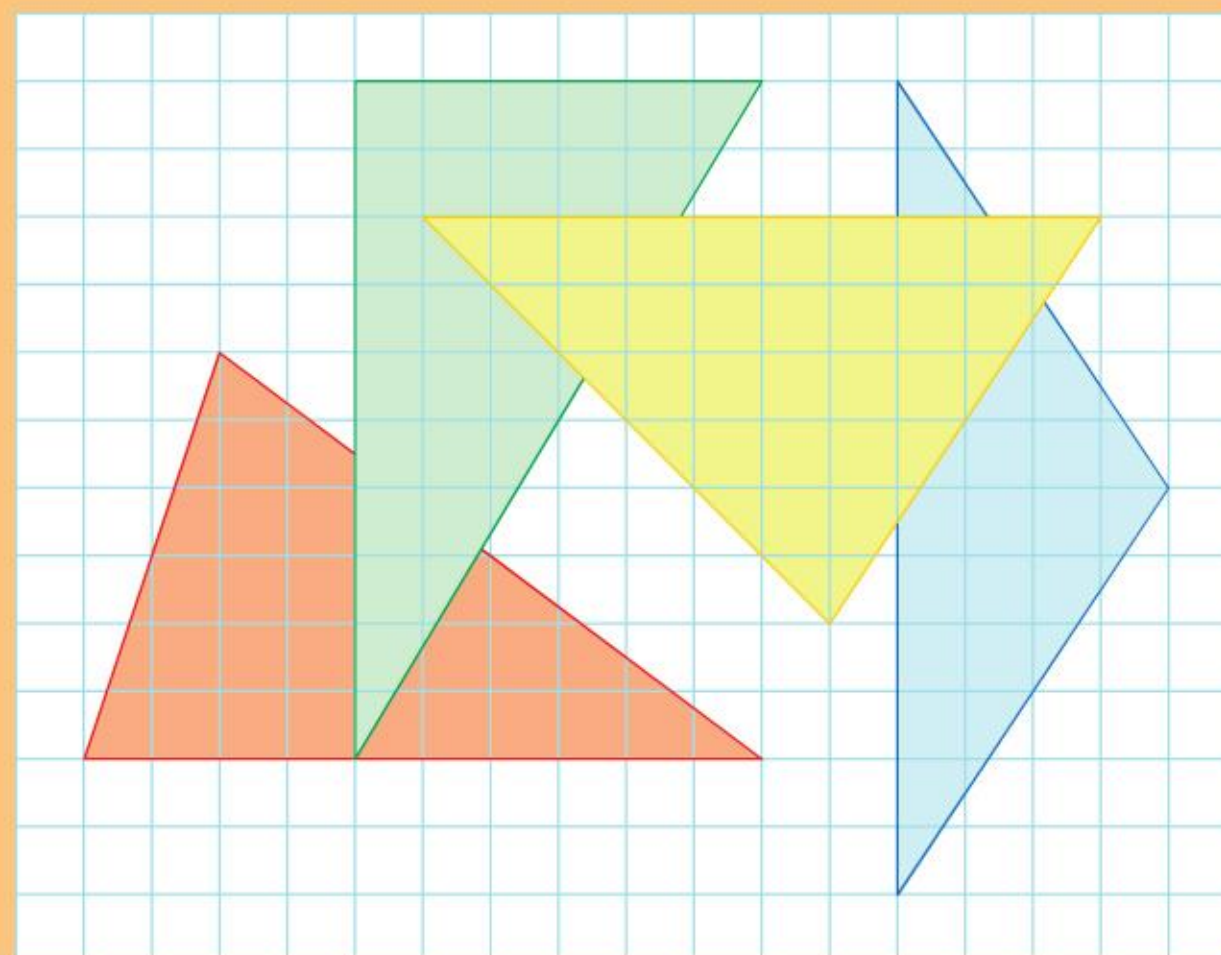


13 Klomb w parku ma kształt trapezu równoramiennego o podstawach długości 6 m i 4 m oraz wysokości 3 m. Podzielono go ozdobnym płotkiem wzdłuż przekątnej i na jednej części posadzono begonie czerwone, a na drugiej białe (jak pokazano na rysunku). O ile metrów kwadratowych większa jest część obsadzona czerwonymi kwiatami?



14 Który trójkąt ma pole różne od pozostałych?

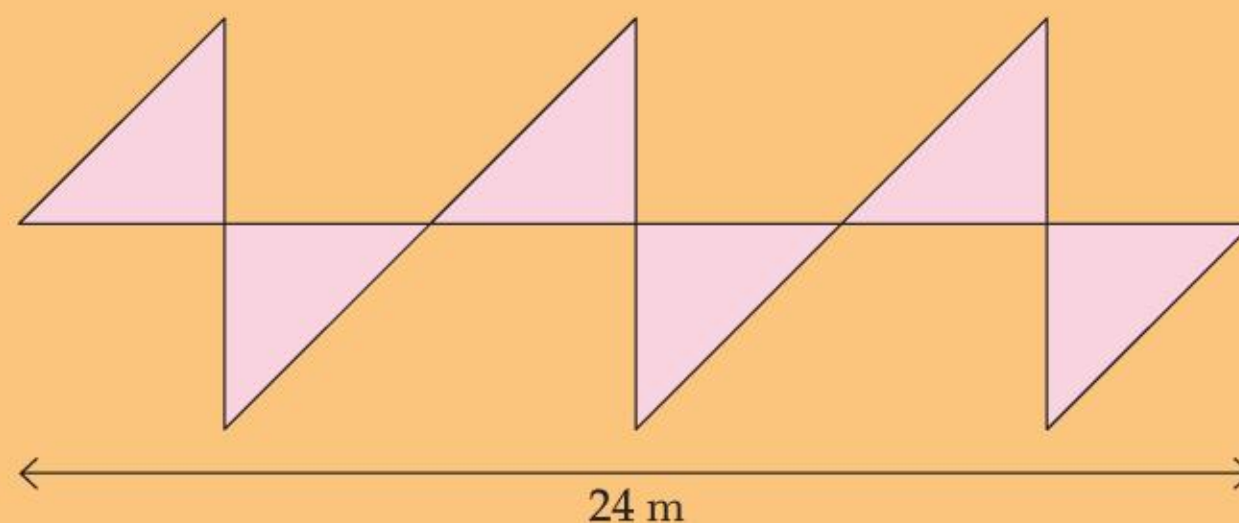
- A. Pomarańczowy.
- B. Zielony.
- C. Żółty.
- D. Niebieski.



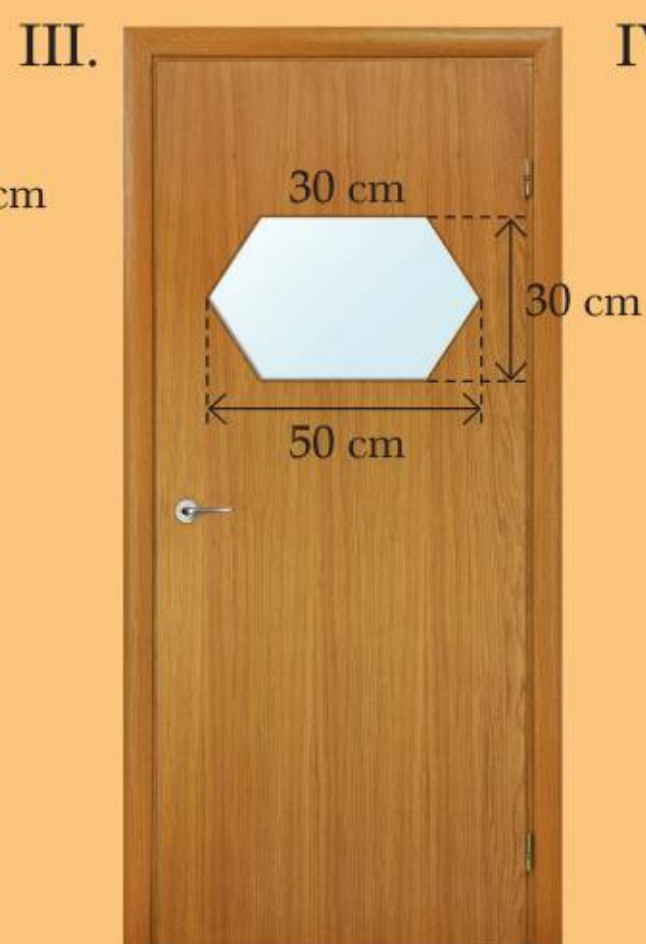
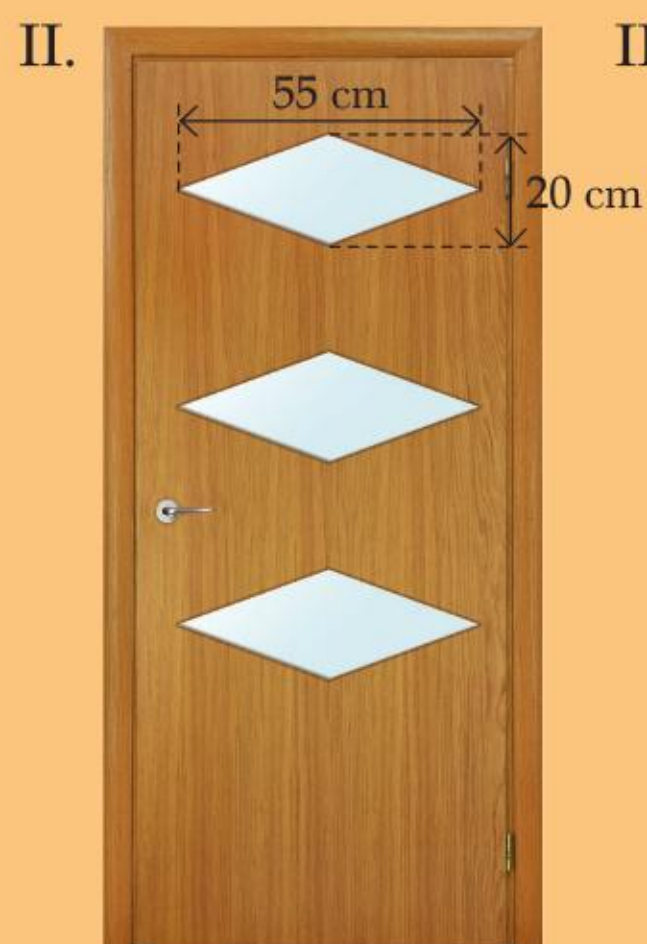
15 Przyprostokątne AC i BC trójkąta prostokątnego ABC mają po 8 cm. Boki trójkąta zostały podzielone na połowy punktami D, E, F , przy czym punkt E leży na przeciwprostokątnej. Ile razy pole trójkąta ABC jest większe od pola trójkąta CDF ?

16 Różowa figura składa się z sześciu jednakowych równoramiennych trójkątów prostokątnych. Ile wynosi pole tej figury?

- A. 24 m^2
- B. 48 m^2
- C. 72 m^2
- D. 96 m^2

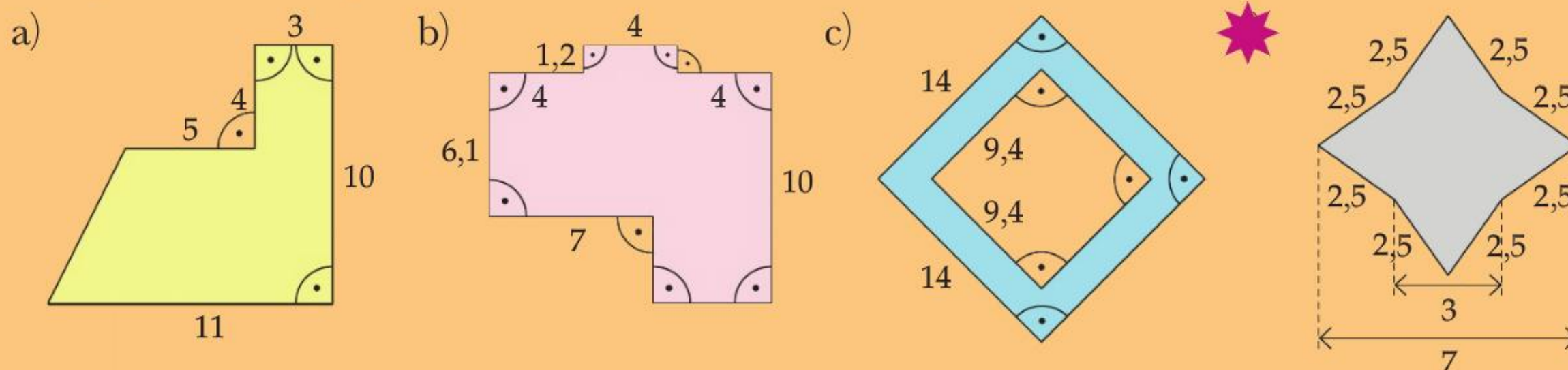


17 W sklepie budowlanym są w sprzedaży cztery rodzaje drzwi. Oblicz łączną powierzchnię szyb dla każdego z nich.

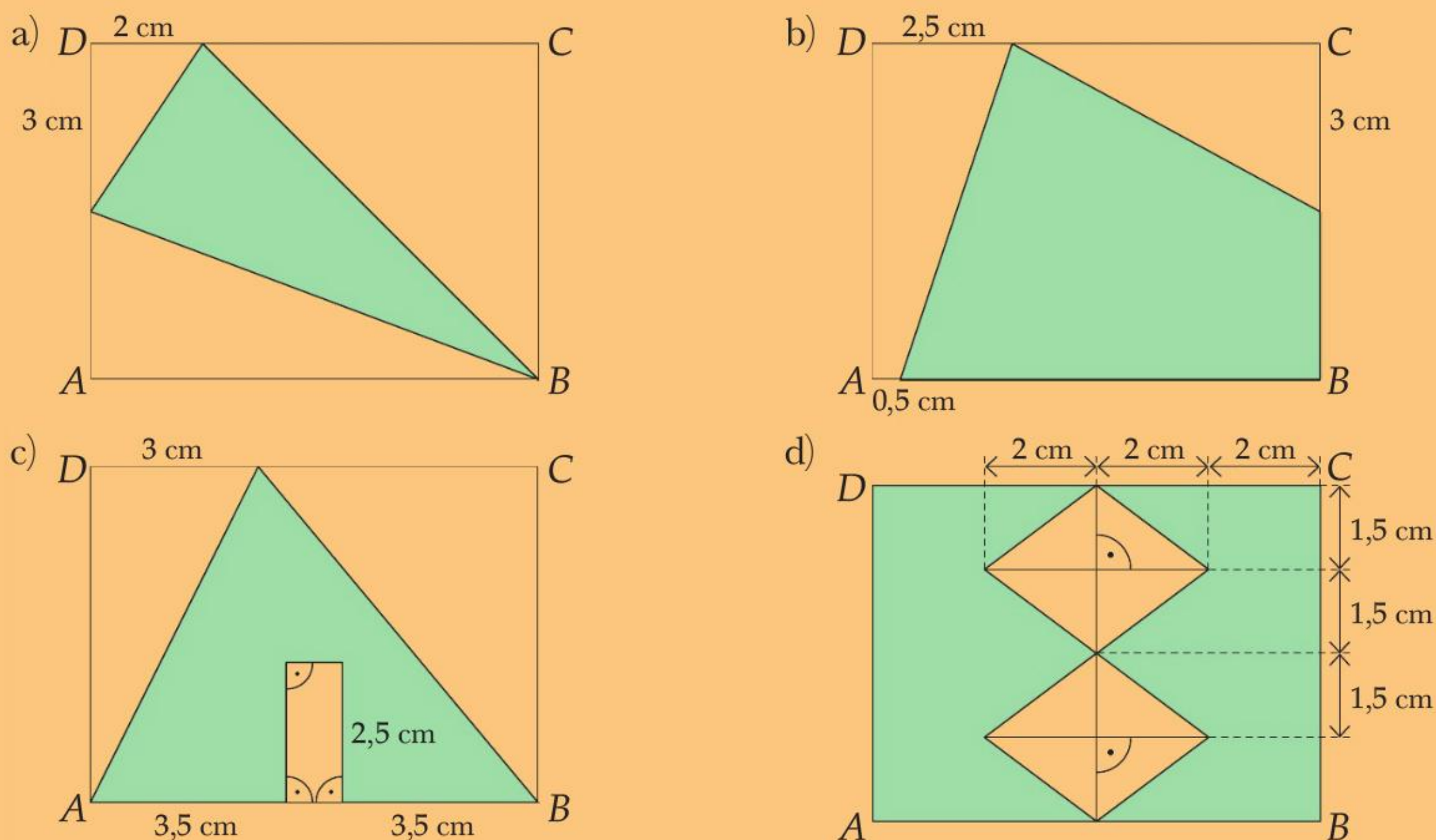


Zaprojektuj własne drzwi z szybą w kształcie wielokąta (lub kilku wielokątów), zapisz wymyślone przez siebie wymiary tej szyby i oblicz jej pole.

- 18 Oblicz pole wielokąta. Wymiary podane są w centymetrach.
Uwaga: Wielokąt w punkcie d) ma 4 osie symetrii.



- 19 Prostokąt $ABCD$ ma wymiary $8\text{ cm} \times 6\text{ cm}$. Oblicz pole zielonej figury.



- 20 Odpowiedz na pytania i wykonaj polecenie.



- I. II. III. IV. V. VI.

- a) Które z powyższych flag są figurami osiowosymetrycznymi?
b) Dla każdej z flag wymienionych w odpowiedzi do pytania w punkcie a) podaj liczbę jej osi symetrii.
c) Jakich państw to flagi? Jeśli nie wiesz, poszukaj odpowiedzi w dostępnych źródłach.

- 21 Narysuj znak drogowy, który ma podaną liczbę osi symetrii.

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) nieskończenie wiele

6. Bryły



Przyjrzyj się rysunkowi, a następnie odpowiedz na pytania i wykonaj polecenia.

1. Świece na rysunku mają kształt brył geometrycznych. Które z tych brył potrafisz nazwać?
2. Jaki inny kształt mogłaby mieć świeca? Naszkicuj ją. Czy też przypomina bryłę geometryczną?
3. Zaproponuj, jak bez spalania świec można wskazać, która z nich jest największa.
4. Czy sądzisz, że sprzedawcy udało się wybrać największą świecę? A może potrafiłby to zrobić twój nauczyciel matematyki?

6.1 Powtórzenie wiadomości o prostopadłościanach

Podejmij temat



Który karton zmieści się do paczkomatu? Jak opiszesz kształt tego pudełka?

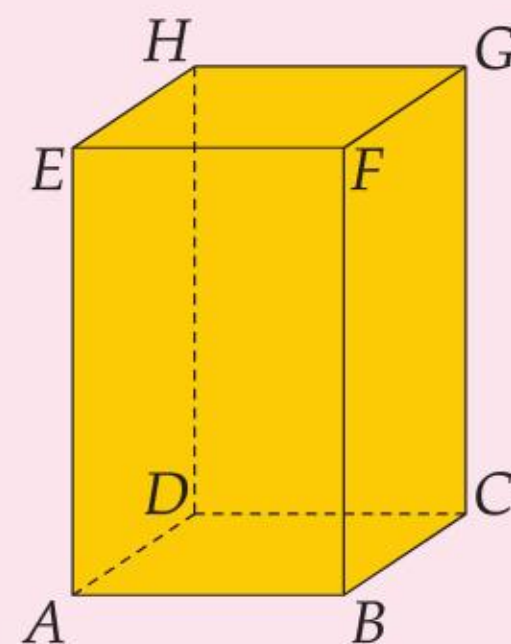


Na rysunku pokazany jest **prostopadłościan** $ABCDEFGH$. Jest to bryła, której wszystkie ściany są prostokątami.

Prostopadłościan ma **6 ścian**:
 $ABCD$, $EFGH$ to **podstawy**,
 $ABFE$, $BCGF$, $CGHD$, $ADHE$ to **ściany boczne**.

Prostopadłościan ma **12 krawędzi**:
 AB , BC , CD , DA , EF , FG , GH , HE to **krawędzie podstaw**,
 AE , BF , CG , DH to **krawędzie boczne**.

Prostopadłościan ma **8 wierzchołków**: A , B , C , D , E , F , G , H .

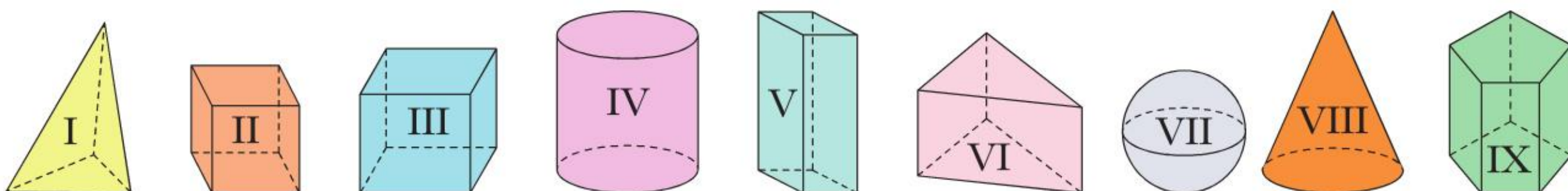


Czy pamiętasz?

Każde dwie przeciwległe ściany prostopadłościanu mogą być traktowane jako podstawy.

Czasami, na przykład w celu doprecyzowania opisu rysunku, używamy pojęć: **podstawa dolna** i **podstawa górna**.

1. Na poniższym rysunku są przedstawione różne bryły. Wskaż te, które mają kształt prostopadłościanu. Odpowiedź uzasadnij.

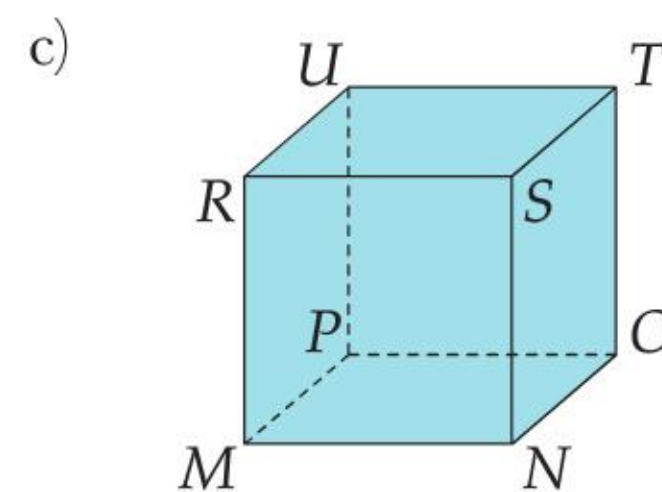
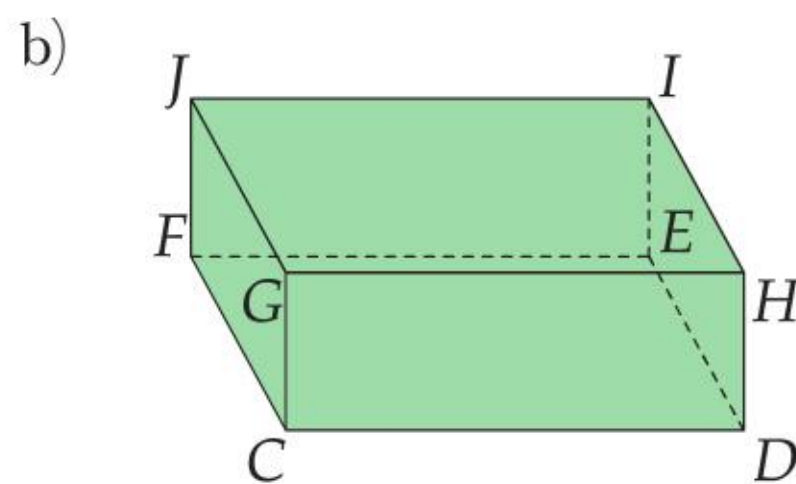
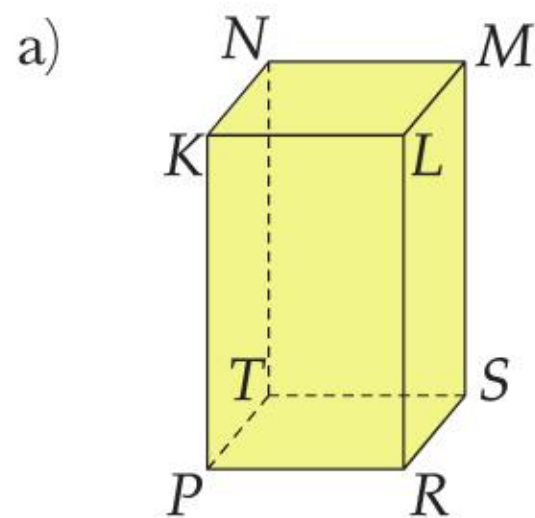


2. Podaj nazwę prostopadłościanu przedstawionego na rysunku. Wymień jego:

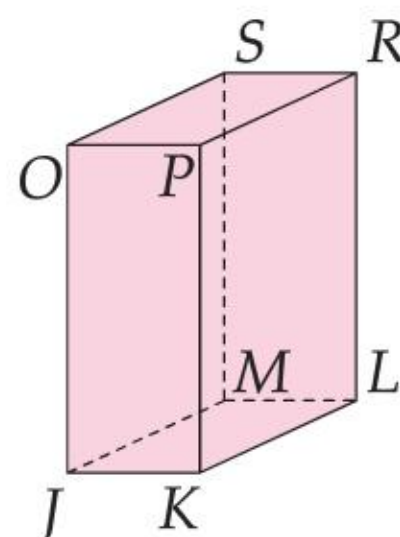
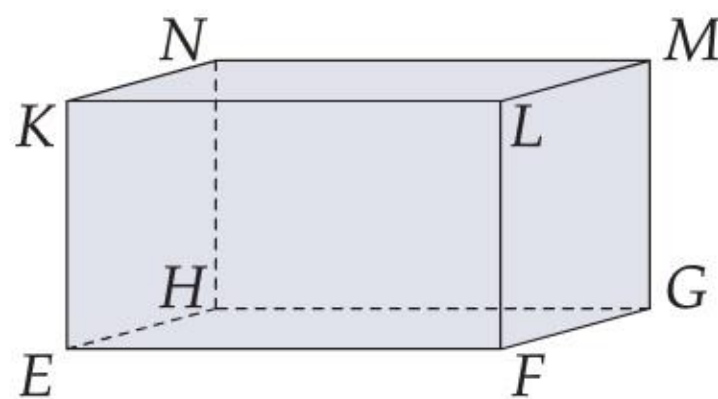
- wierzchołki,
- krawędzie podstawy dolnej,

- krawędzie boczne,
- ściany boczne,

- krawędzie podstawy górnej,
- podstawy.



3. Dane są dwa prostopadłościany. W odniesieniu do każdego z nich odpowiedz na pytania.

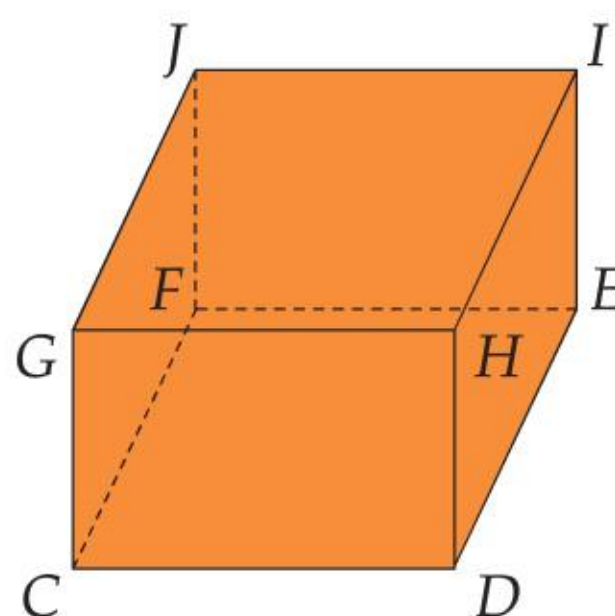


- a) Które ściany są na pewno jednakowymi prostokątami?
b) Które krawędzie są do siebie równoległe?

4. Dla prostopadłościanu umieszczonego na rysunku obok wypisz krawędzie, które:

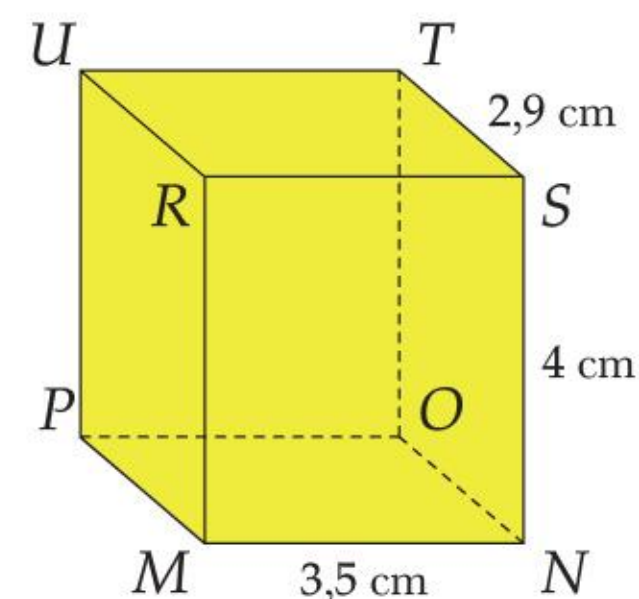
- a) na pewno mają taką samą długość,
b) są do siebie równoległe.

Co zauważasz?



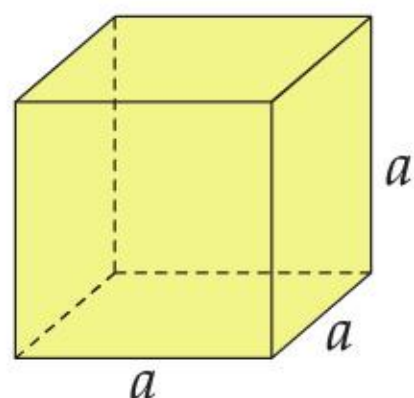
5. Rysunek obok przedstawia prostopadłościan $MNOPRSTU$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

- a) Krawędź RM ma długość 3,5 cm.
b) Krawędź MN jest prostopadła do krawędzi SN .
c) Krawędź MP ma długość 4 cm.
d) Krawędzie PU i SN są równej długości.
e) Krawędź RU jest równoległa do krawędzi RS .



Prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami, nazywamy **sześcianem**.

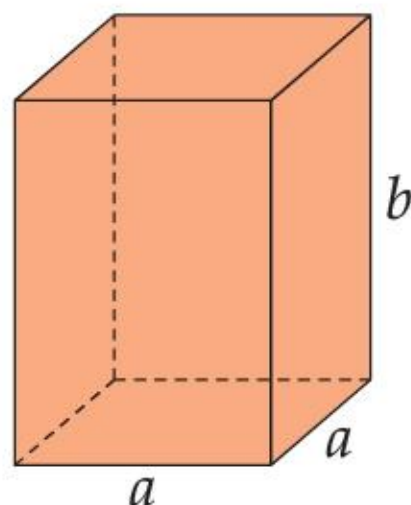
Istnieją trzy typy prostopadłościanów.



Wszystkie ściany mają kształt kwadratu (jest to sześcian).

12 krawędzi ma długość a .

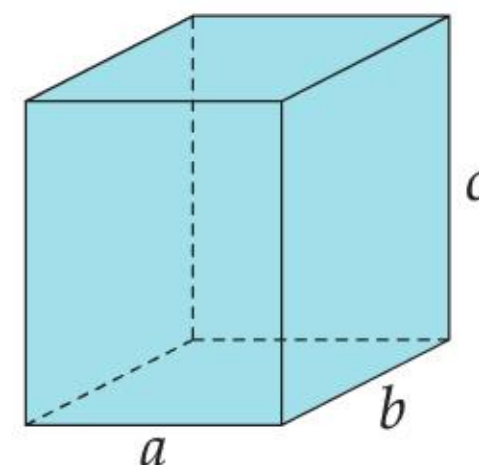
Wymiary zapisujemy:
 $a \times a \times a$.



Dwie ściany mają kształt kwadratu, a cztery – prostokątów (które nie są kwadratami).

8 krawędzi ma długość a ,
4 krawędzie mają długość b .

Wymiary zapisujemy:
 $a \times a \times b$.



Wszystkie ściany mają kształt prostokątów (które nie są kwadratami).

4 krawędzie mają długość a ,
4 krawędzie mają długość b ,
4 krawędzie mają długość c .

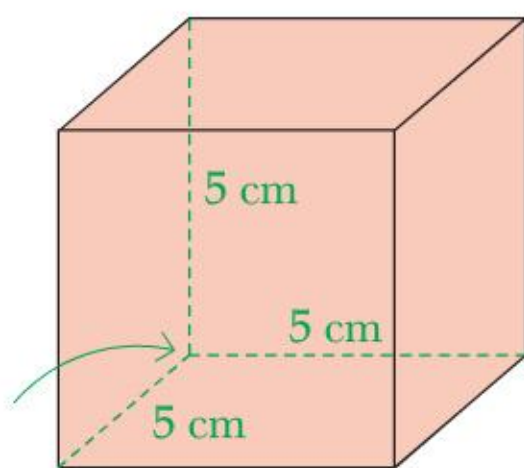
Wymiary zapisujemy:
 $a \times b \times c$.



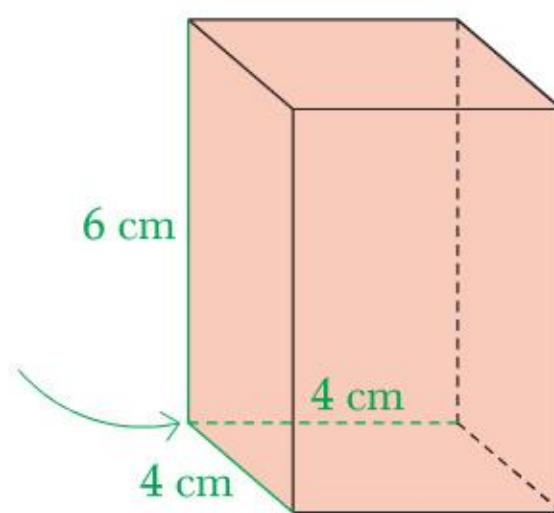
Jeżeli mówimy o **wymiarach prostopadłościanu**, mamy na myśli jego **długość**, **szerokość** i **wysokość**, czyli długości trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.

Prostopadłościan o wymiarach

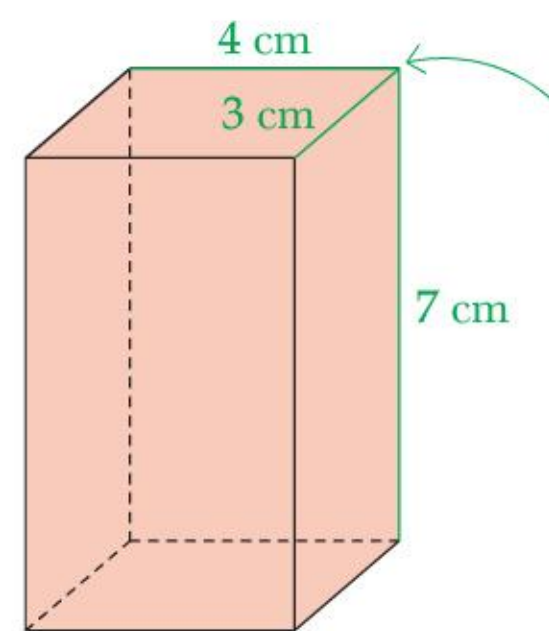
$5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$



$4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$



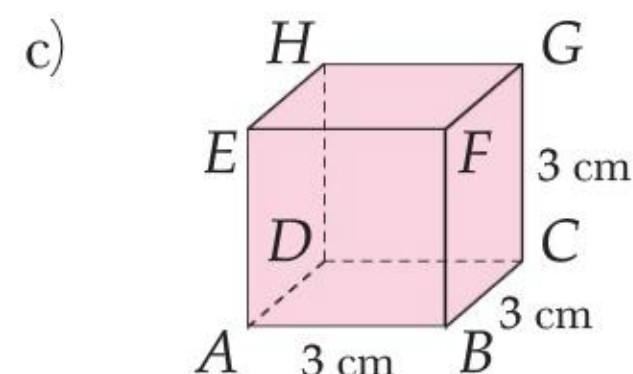
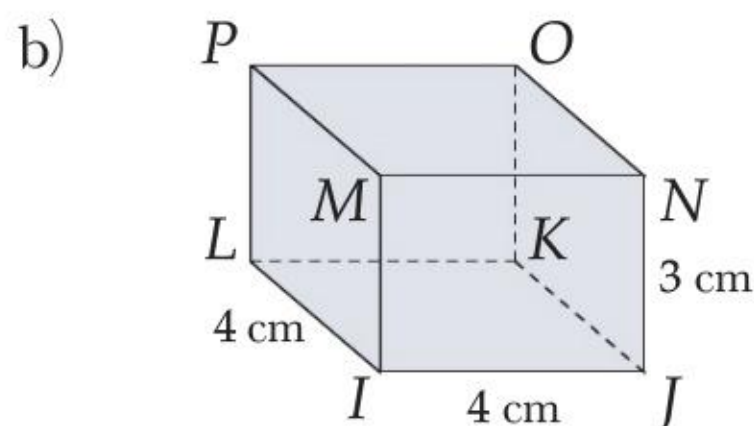
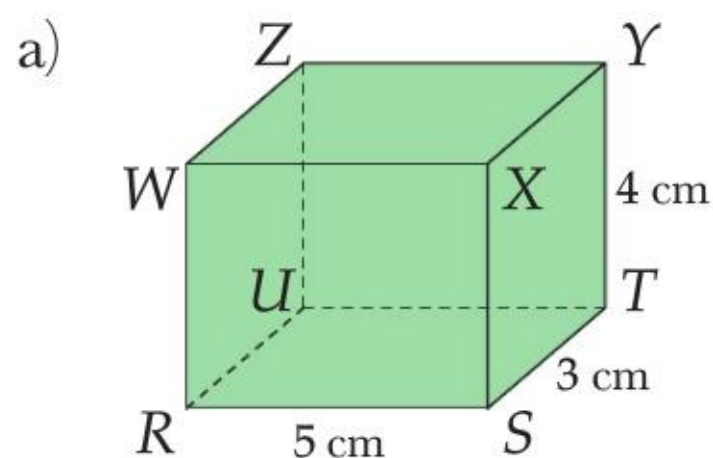
$3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$



Jest to szybki sposób na dokładne opisanie prostopadłościanu.

6. Weź do ręki pudełko w kształcie prostopadłościanu i sprawdź, czy z każdego wierzchołka wychodzi taka sama trójka krawędzi.

7. Zapisz, jaką długość ma każda z krawędzi prostopadłościanu. Następnie oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu.



Przypomnisz mi, jak obliczaliśmy sumę długości krawędzi prostopadłościanu?



Możesz dodać długości wszystkich krawędzi, ale możesz dodawanie jednakowych długości zastąpić mnożeniem. Będzie szybciej!

8. Sformułuj zasady i zapisz wzory, według których można obliczyć sumę długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu o podanych wymiarach.

a) $a \times a \times a$

b) $a \times a \times b$

c) $a \times b \times c$

Zadania

- Narysuj prostopadłościan i zaznacz jednakowym kolorem wszystkie równoległe krawędzie.
- Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu o podanych wymiarach.

a) $9 \text{ dm} \times 6 \text{ dm} \times 2 \text{ dm}$ b) $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ c) $4,5 \text{ m} \times 4,5 \text{ m} \times 4,5 \text{ m}$
- Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu, którego jedna z krawędzi ma długość 4 cm, druga jest dwa razy krótsza, a trzecia jest o 3 cm krótsza od pierwszej.
- Marcin dostał dodatkowe zadanie z matematyki: miał zbudować model sześcianu o krawędzi długości 15 cm. Do wykonania tego zadania tata dał mu drut o długości 180 cm.

a) Czy drut, który dostał Marcin, wystarczy do wykonania szkieletu tego modelu?

b) Gdyby szkielek sześcianu powstał z 66 cm drutu, to jaką długość miałyby krawędź tego sześcianu?
- Który wzór pozwala obliczyć sumę długości krawędzi prostopadłościanu o podanych wymiarach?

a) $a \times a \times a$	A. $6a$	B. $12a$	C. $3(a + a + a)$	D. $3a$
b) $a \times a \times b$	A. $8a + 4b$	B. $4a + 4b$	C. $6a + 6b$	D. $2a + b$
c) $a \times b \times c$	A. $4(a + b + c)$	B. $3a + 3b + 3c$	C. $2a + 4b + 4c$	D. $a + b + c$

6.2 Siatki i pole powierzchni prostopadłościanu

Podejmij temat



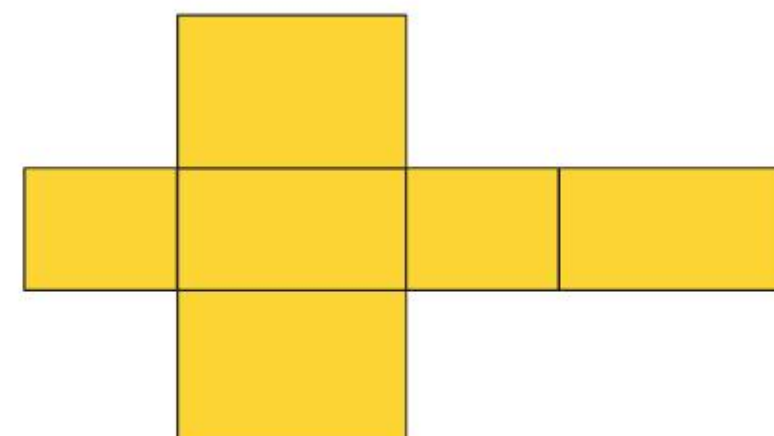
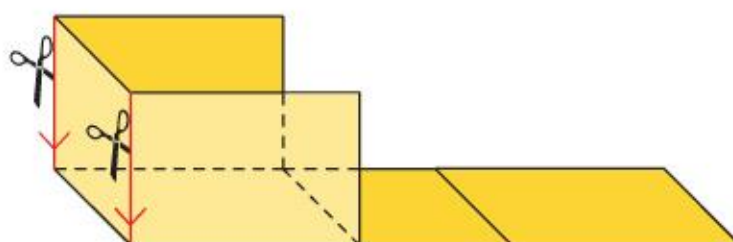
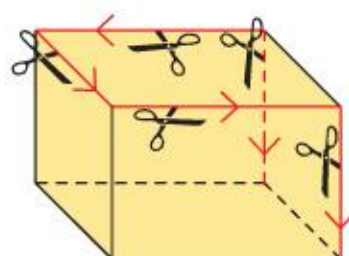
Wytłumacz, dlaczego dziewczynka nie otrzyma siatki prostopadłościanu, chociaż rozetnie model wzdłuż krawędzi.

Co ty robisz?
Dlaczego śmiesz?



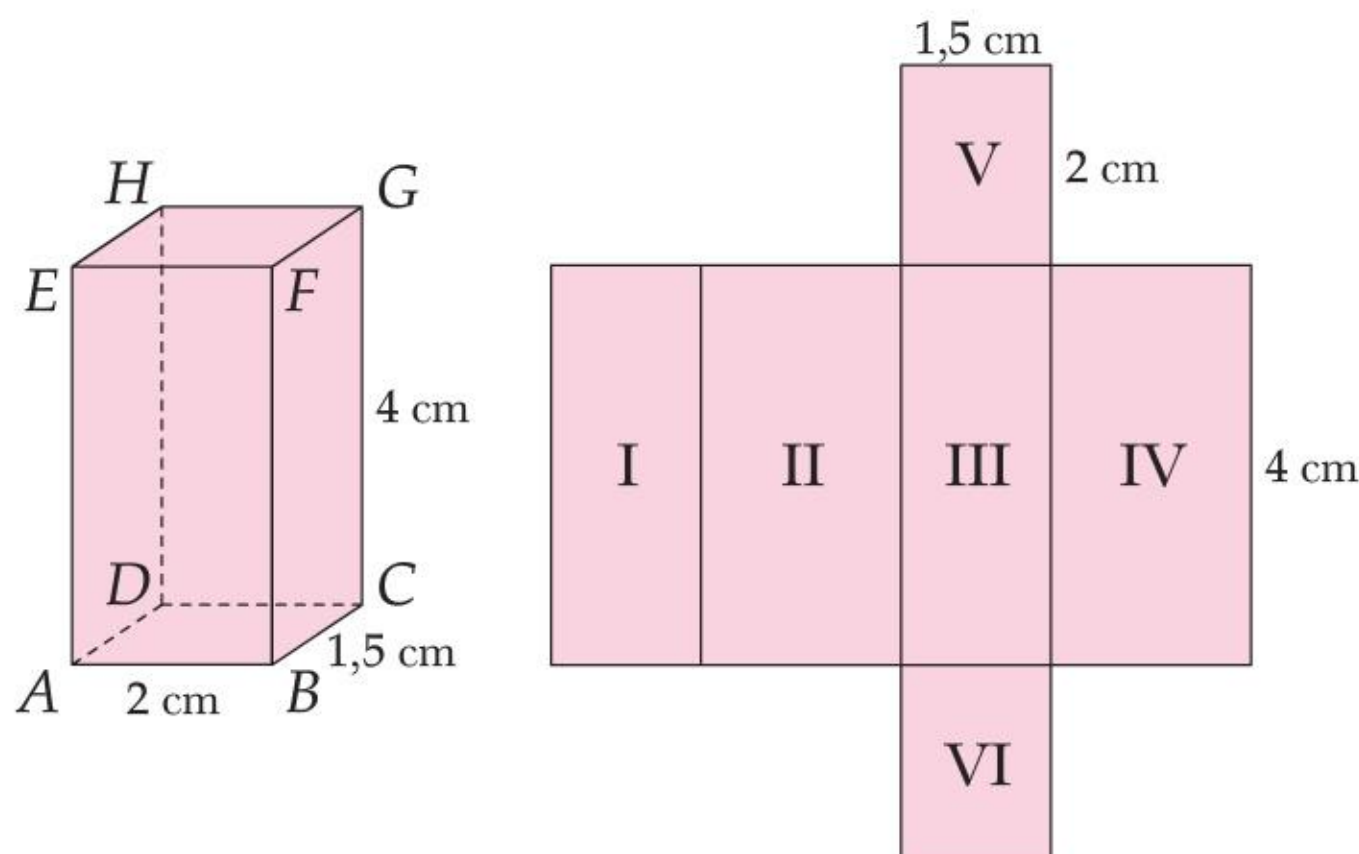
Chciałam zobaczyć,
jak wygląda siatka tego
prostopadłościanu...

Aby utworzyć siatkę prostopadłościanu, wystarczy wyobrazić sobie, w jaki sposób można rozciąć jego powierzchnię (np. model z papieru), by powstała figurę dało się rozłożyć na płaszczyźnie. Oczywiście rozcinać możemy wyłącznie wzdłuż krawędzi i tak, żeby żadna ściana nie została odcięta całkowicie (zob. rysunek).

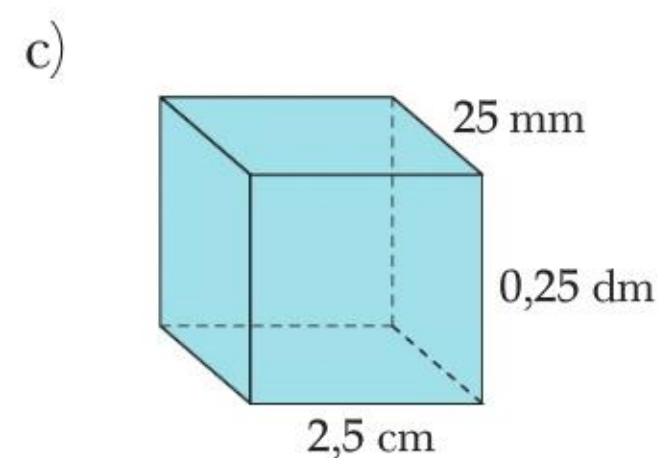
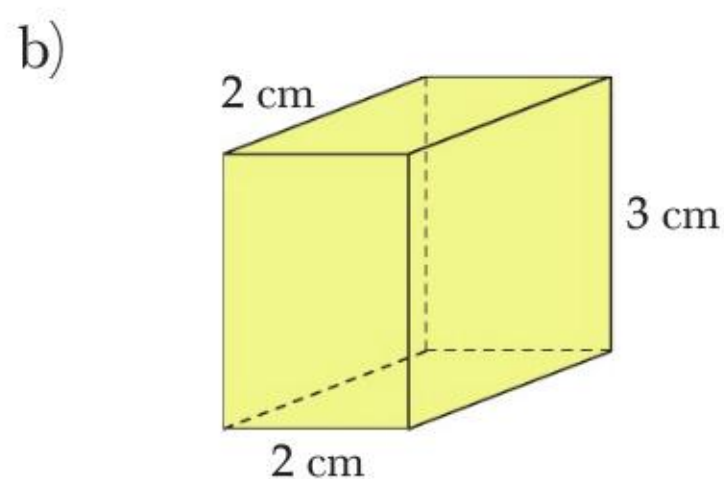
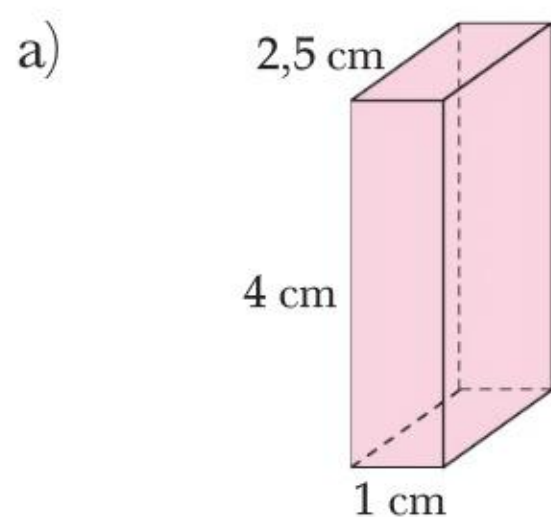


1. Poszukaj w domu niepotrzebnego pudełka w kształcie prostopadłościanu i utwórz jego siatkę. W tym celu odpowiednio go rozetnij.

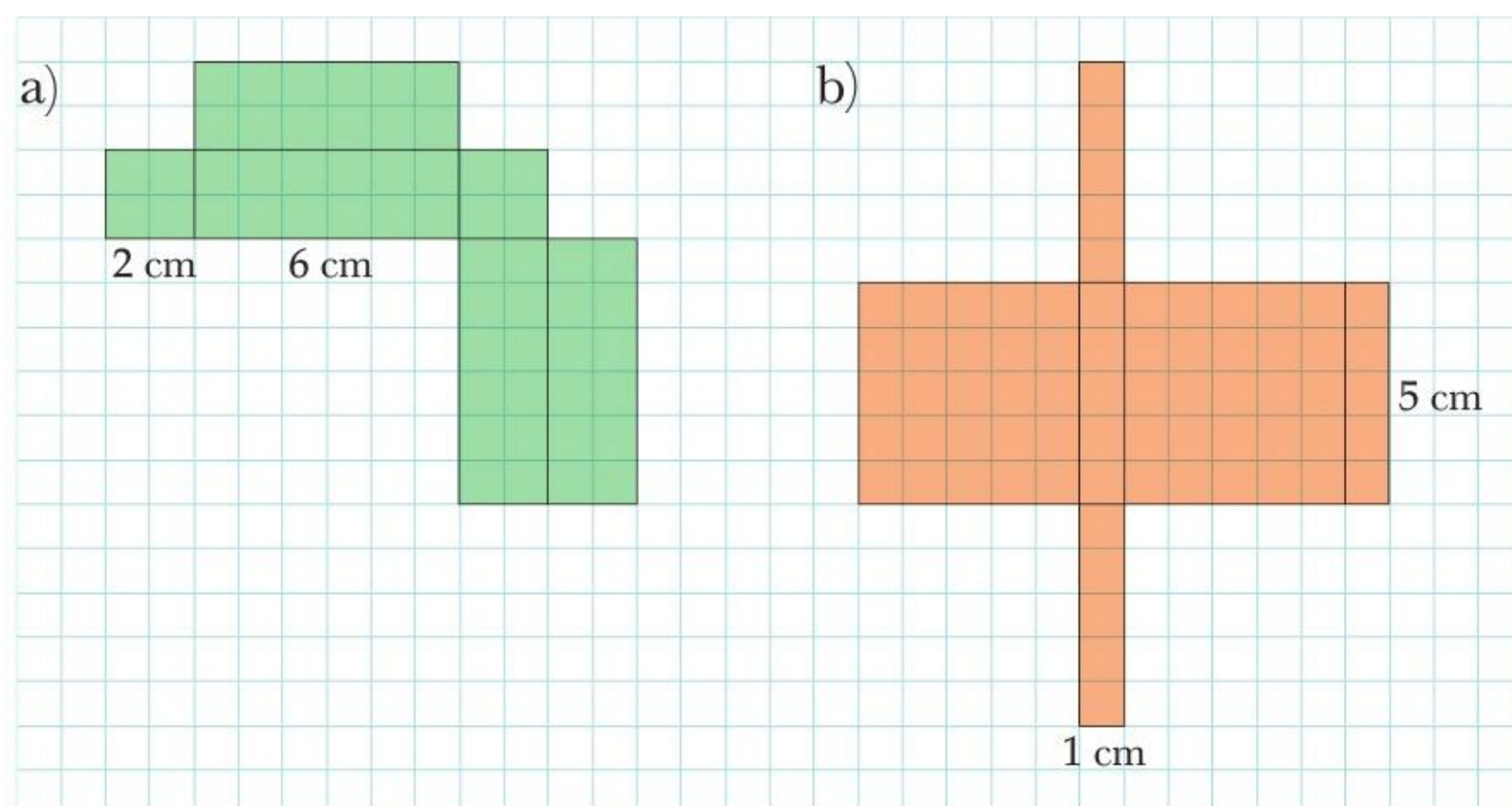
2. Na rysunku obok przedstawiono prostopadłościan i jego siatkę. Wypisz oznaczenia literowe każdego z prostokątów I–VI tworzących siatkę, używając nazw wierzchołków prostopadłościanu.



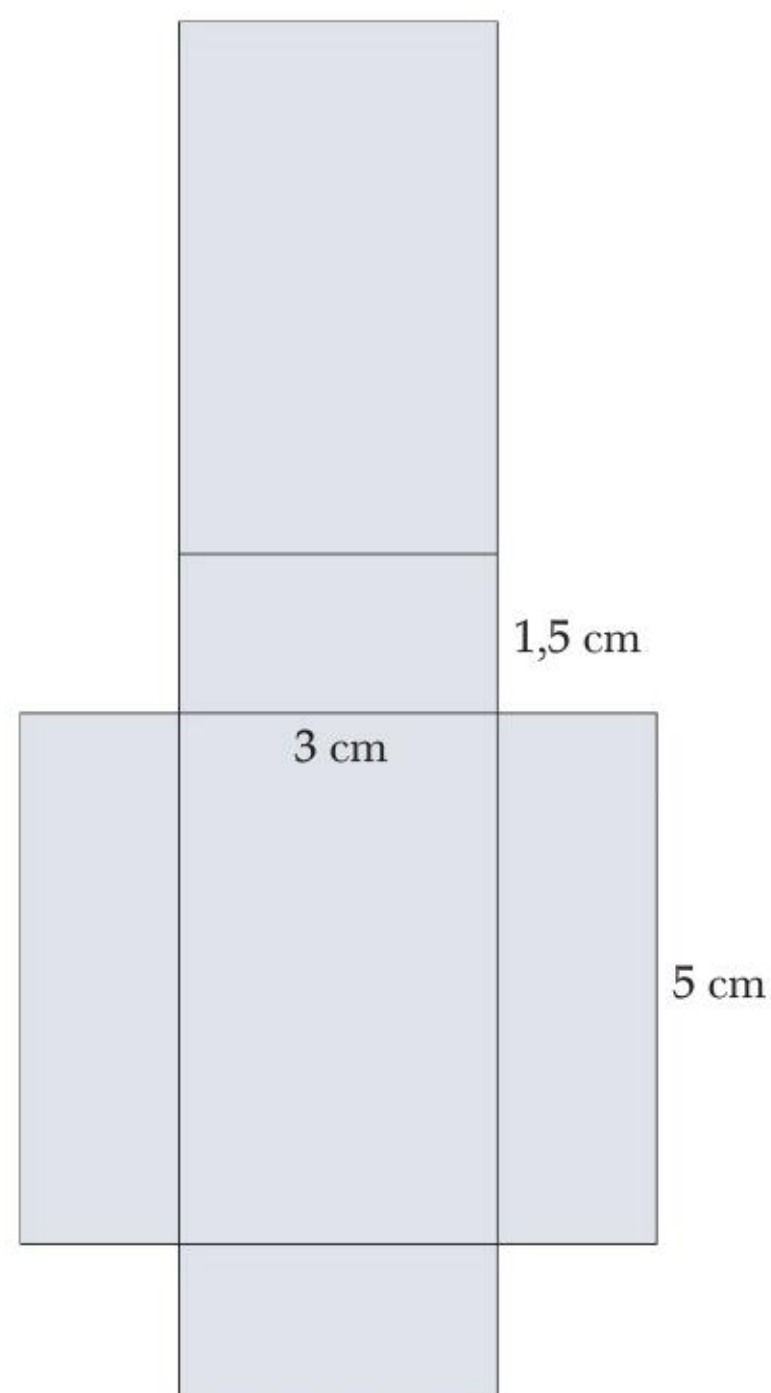
3. Narysuj siatkę prostopadłościanu.



4. Jakie wymiary ma prostopadłościan, którego siatkę przedstawiono na rysunku?



5. Rysunek obok przedstawia siatkę prostopadłościanu. Oblicz pola wszystkich ścian tego prostopadłościanu. Co otrzymamy po dodaniu pól tych wszystkich ścian?



Sumę pól wszystkich ścian prostopadłościanu nazywamy **polem powierzchni prostopadłościanu** i oznaczamy P .

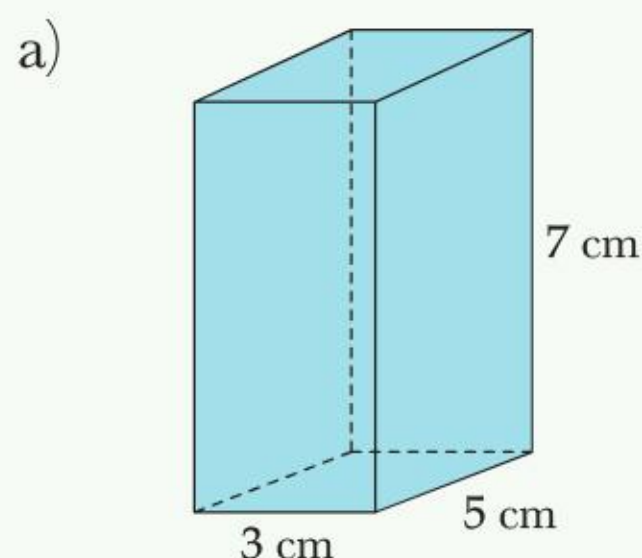
Przykład 1

Obliczmy pole powierzchni prostopadłościanu o podanych wymiarach.

a) $3 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$

b) $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$

c) $8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$

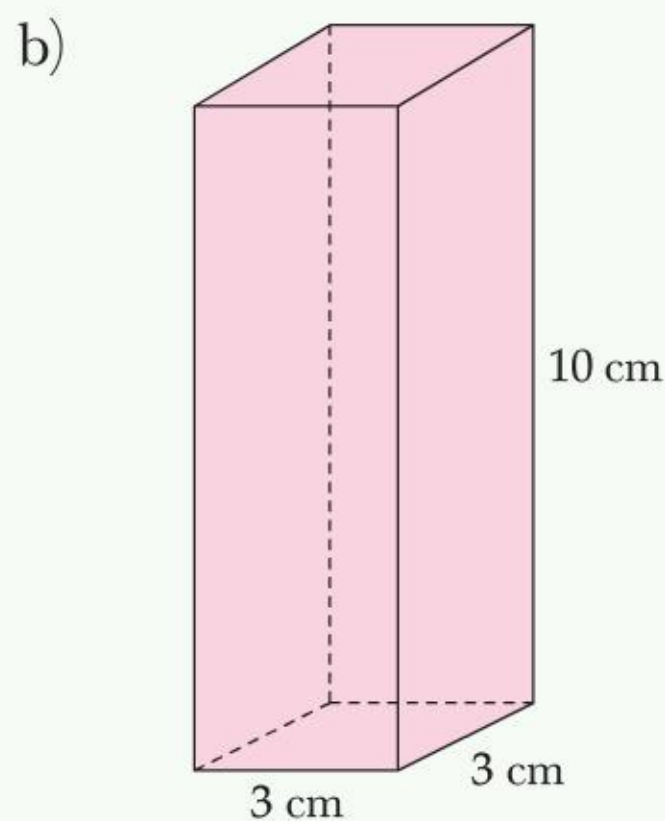


Prostopadłościan ma:

- 2 ściany o wymiarach $3 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$,
- 2 ściany o wymiarach $3 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$,
- 2 ściany o wymiarach $5 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$.

Jego pole powierzchni obliczymy, jeśli dodamy pola jego ścian.

$$P = 2 \cdot 3 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} + 2 \cdot 3 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} + 2 \cdot 5 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = \\ = 30 \text{ cm}^2 + 42 \text{ cm}^2 + 70 \text{ cm}^2 = 142 \text{ cm}^2$$

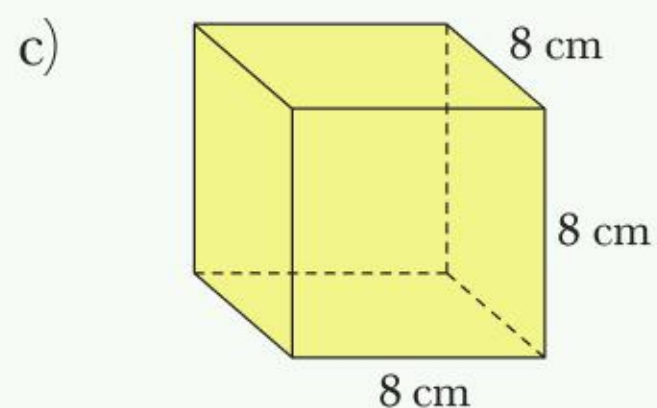


Prostopadłościan ma:

- 2 ściany o wymiarach $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$,
- 4 ściany o wymiarach $3 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$.

Obliczamy jego pole powierzchni.

$$P = 2 \cdot 3 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} + 4 \cdot 3 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = \\ = 18 \text{ cm}^2 + 120 \text{ cm}^2 = 138 \text{ cm}^2$$



Prostopadłościan ma:

- 6 ścian o wymiarach $8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ (jest to sześcian).

Obliczamy jego pole powierzchni.

$$P = 6 \cdot 8 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 384 \text{ cm}^2$$



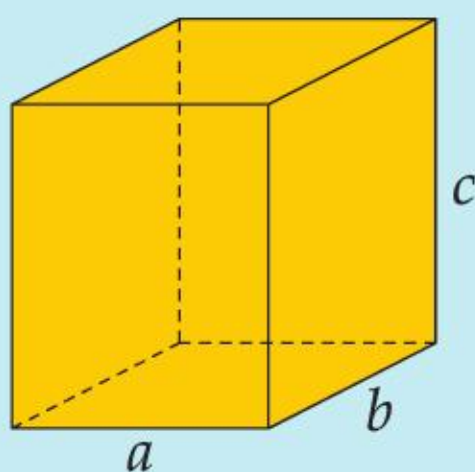
W przykładzie 1 dla przejrzystości zapisu w obliczeniach zapisywane były jednostki długości. Zwykle, gdy długości podane są w jednakowych jednostkach lub gdy wiemy, jakie jednostki wystąpią w wyniku, nie musimy ich zapisywać w trakcie obliczeń.

Pole powierzchni prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times c$ obliczamy według dowolnego z poniższych wzorów.

$$P = 2ab + 2bc + 2ac$$

lub

$$P = 2(ab + bc + ac)$$



Podany wzór jest uniwersalny, można go stosować nie tylko dla prostopadłościanu o trzech różnych długościach krawędzi. Jest on poprawny również dla prostopadłościanu, który ma krawędzie o dwóch różnych długościach (wtedy np. w miejsce liter a i b wstawiamy tę samą liczbę), oraz dla sześcianu.

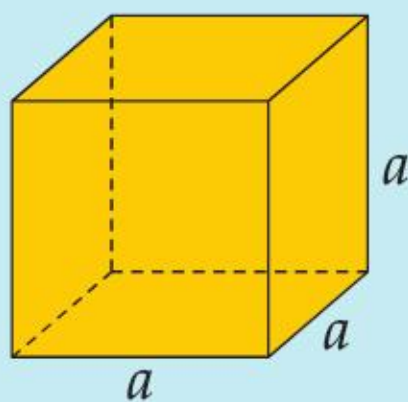
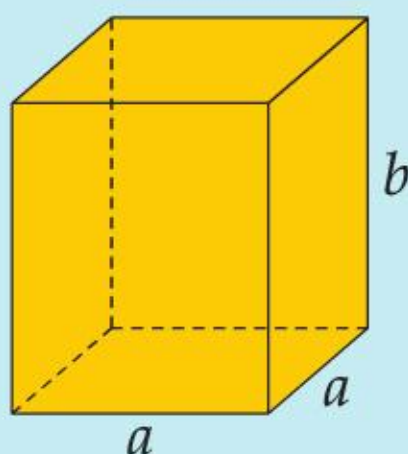
W takich przypadkach wygodnie jest jednak obliczać pole powierzchni w szybszy sposób, taki jak pokazany w przykładzie 1 w punktach b) i c).

Pole powierzchni prostopadłościanu o wymiarach $a \times a \times b$ możemy obliczyć, stosując poniższy wzór.

$$P = 2a^2 + 4ab$$

Pole powierzchni sześcianu o krawędzi długości a (prostopadłościanu o wymiarach $a \times a \times a$) obliczamy zgodnie z poniższym wzorem.

$$P = 6a^2$$



Jeśli wolisz, we wzorach na pole możesz zapisywać znaki mnożenia. Wówczas wzory te będą miały poniższą postać.

$$P = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c$$

lub

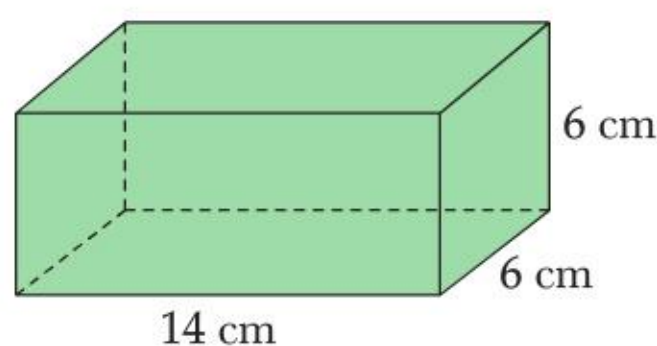
$$P = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$$

$$P = 2 \cdot a \cdot a + 4 \cdot a \cdot b = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot b$$

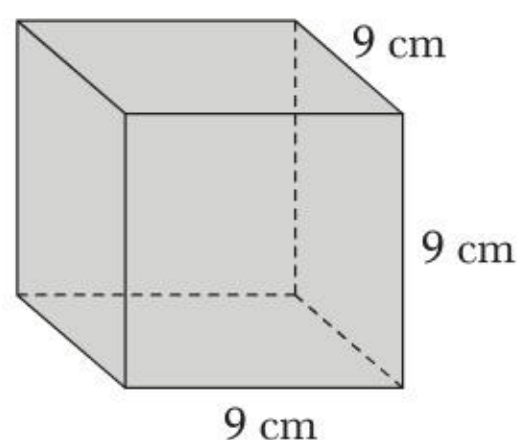
$$P = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2$$

6. Oblicz pole powierzchni narysowanego prostopadłościanu.

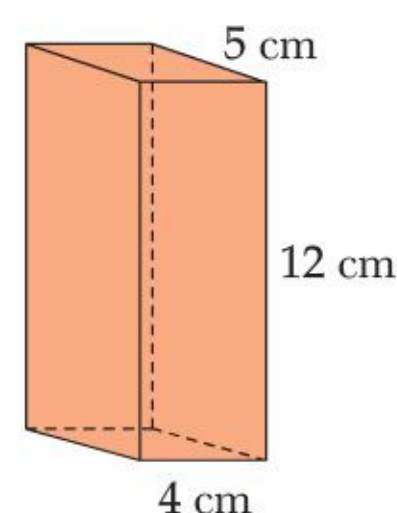
a)



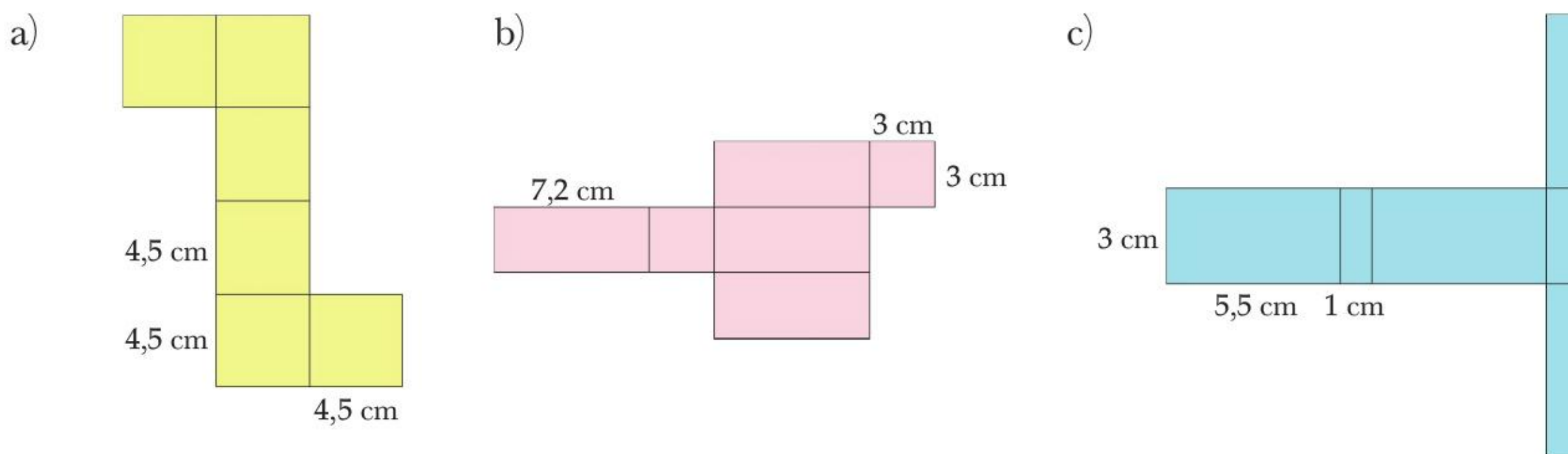
b)



c)



7. Oblicz pole powierzchni prostopadłościanu na podstawie narysowanej siatki.



Zadania

- Narysuj siatkę prostopadłościanu, którego najdłuższa krawędź ma 6 cm, druga jest o 4 cm krótsza, a trzecia jest 12 razy krótsza od pierwszej.
- Oblicz pole powierzchni prostopadłościanu o wymiarach $16 \text{ cm} \times 2 \text{ dm} \times 90 \text{ mm}$.
- Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku 7,5 cm. Oblicz jego pole powierzchni, jeżeli wiadomo, że krawędź boczna jest:
 - a) 2 razy dłuższa od krawędzi podstawy,
 - b) o 3 cm krótsza od krawędzi podstawy.
- Oblicz pole powierzchni prostopadłościanu, który ma krawędzie o długościach równych trzem najmniejszym liczbom pierwszym. Liczby te oznaczają długości w centymetrach.
- Oblicz pole powierzchni prostopadłościanu o wymiarach $3,2 \text{ m} \times 1,8 \text{ m} \times 2,9 \text{ m}$. Wynik zaokrąglaj do całości.
- Oblicz pole powierzchni sześcianu, którego jedna ściana ma pole równe 196 cm^2 .
- Wysokość prostopadłościanu wynosi 20 cm, długość stanowi 50% wysokości, a szerokość to 25% wysokości. Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu i jego pole powierzchni.
- Pole powierzchni sześcianu wynosi 384 cm^2 . Oblicz pole jednej ściany sześcianu i długość jego krawędzi.
- Sześć jednakowych sześcianów, każdy o krawędzi 4 cm, należy skleić tak, by utworzyły prostopadłościan. Na ile sposobów można to zrobić? Naszkicuj każdy powstały w taki sposób prostopadłościan, podaj jego wymiary i oblicz jego pole powierzchni.
- Ile metrów kwadratowych płytek ceramicznych potrzeba na wyłożenie nimi basenu o długości 8,5 m, szerokości 3,5 m i głębokości 2 m?
- Ile papieru potrzeba na oklejenie pudełka o wymiarach $3 \text{ dm} \times 24 \text{ cm} \times 80 \text{ mm}$? Odpowiedź podaj w centymetrach kwadratowych.

6.3 Powtórzenie wiadomości o graniastosłupach

Podejmij temat



Zwróć uwagę na kształt przedmiotów, o których rozmawiają dzieci. Czy pamiętasz, jak się nazywają takie bryły?

Myślałam, że pudełka są zawsze prostopadłościanami. A to przecież jest inna bryła.

Moja puszka też nie jest prostopadłościanem.



Graniastosłup prosty to bryła (figura przestrzenna), której dwie ściany są identycznymi wielokątami, a pozostałe ściany są prostokątami.

Wszystkie krawędzie boczne graniastosłupa prostego muszą być prostopadłe do krawędzi podstaw.

Punkty $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ to **wierzchołki** graniastosłupa $ABCDEFGHJI$.

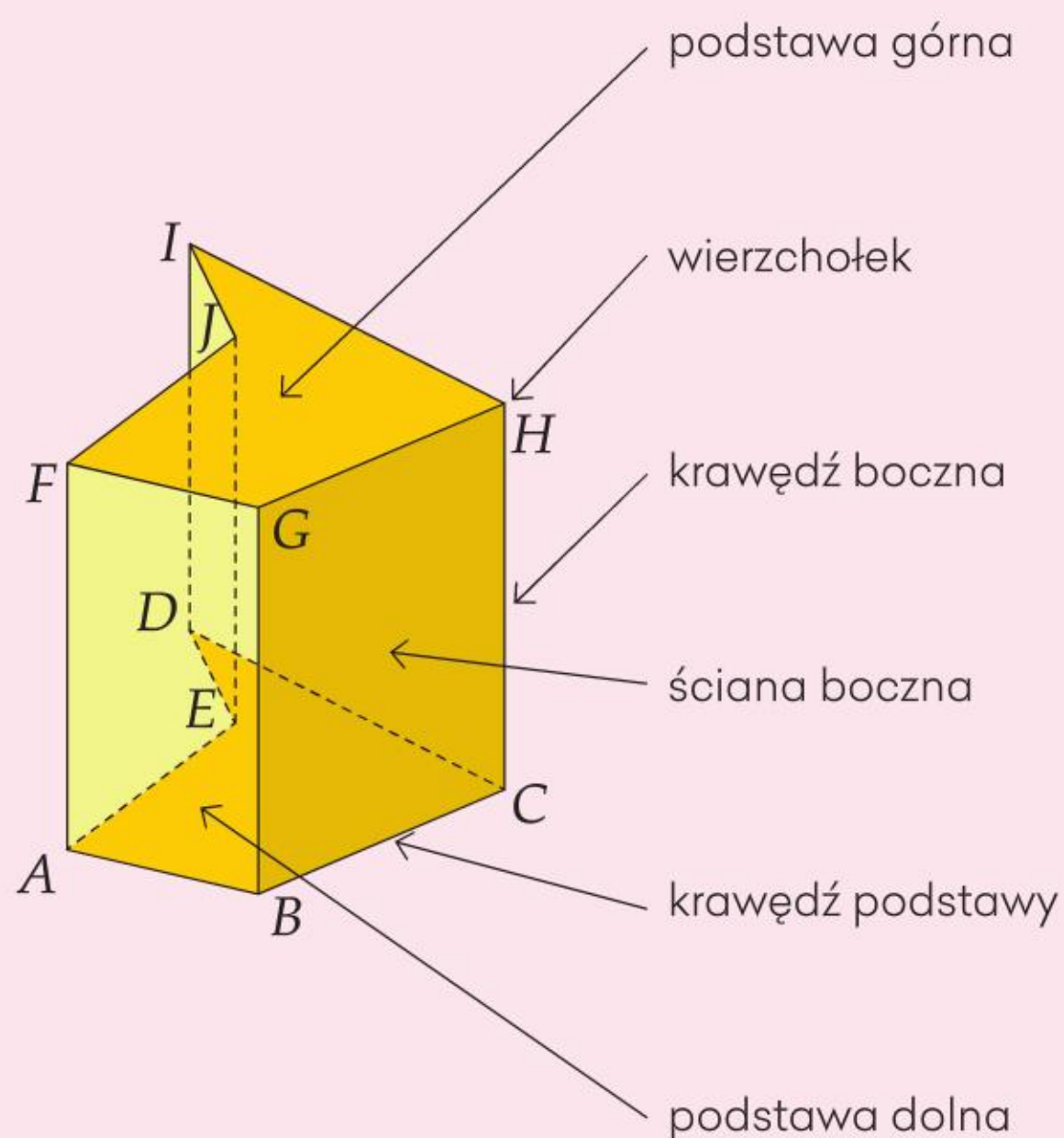
Odcinki AF, BG, CH, DI, EJ to **krawędzie boczne**.

Odcinki AB, BC, CD, DE, EA to **krawędzie podstawy dolnej**.

Odcinki FG, GH, HI, IJ, JF to **krawędzie podstawy górnej**.

Prostokąty $ABGF, BCHG, CDIH, DEJI, AEJF$ to **ściany boczne**.

Wielokąty $ABCDE, FGHIJ$ to **podstawy (dolna i górna)**.



Oprócz graniastosłupów prostych istnieją też graniastosłupy pochyłe (były one pokazane w podręczniku do klasy piątej). W szkole podstawowej nie będziemy się o nich uczyć, dlatego nie jest konieczne wskazywanie, którego z graniastosłupów (prostego czy pochyłego) dotyczy dana treść w podręczniku. Użyta nazwa *graniastosłup* zawsze będzie oznaczać graniastosłup prosty.

3. Przerysuj do zeszytu tabelę i wypełnij ją.

Liczba \ Graniastosłup	trójkątny	czworokątny	pięciokątny	ośmiokątny	dziesięciokątny	n -kątny
podstaw						
ścian bocznych						
ścian						
wierzchołków						
krawędzi bocznych						
krawędzi podstaw						
krawędzi						

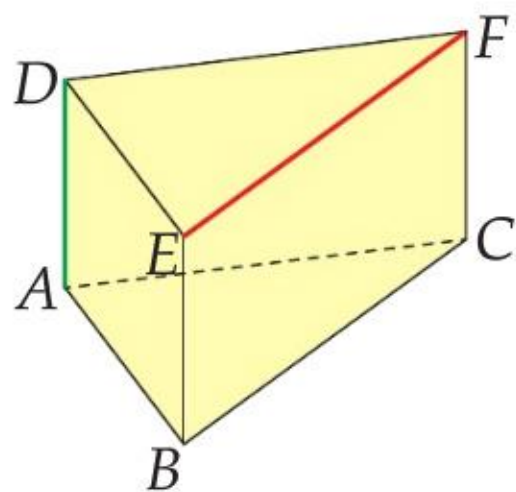
Ponieważ podstawami graniastopu są identyczne wielokąty, zatem każda para krawędzi (jedna z podstawy dolnej i odpowiadająca jej druga – z podstawy górnej) mają tę samą długość; są one również do siebie równoległe.

Równe i równoległe są też wszystkie krawędzie boczne graniastosłupa.

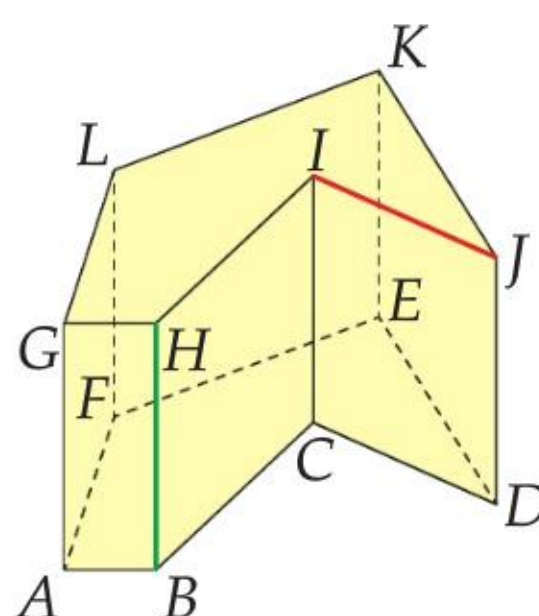
4. Wymień krawędzie graniastosłupa, które są na pewno tej samej długości co wyróżniona krawędź:

- zielona,
- czerwona.

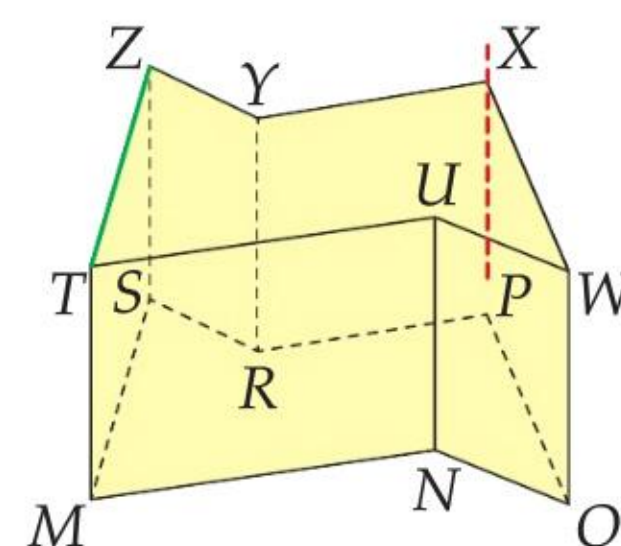
a)



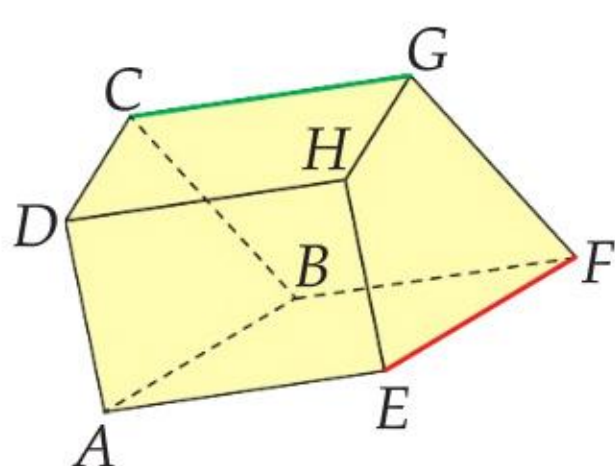
b)



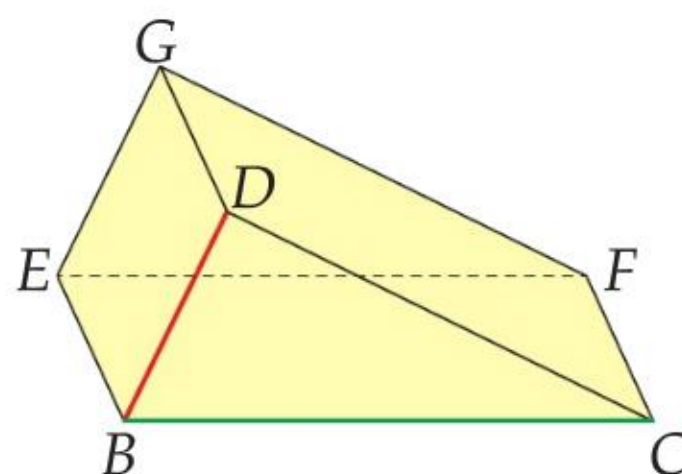
c)



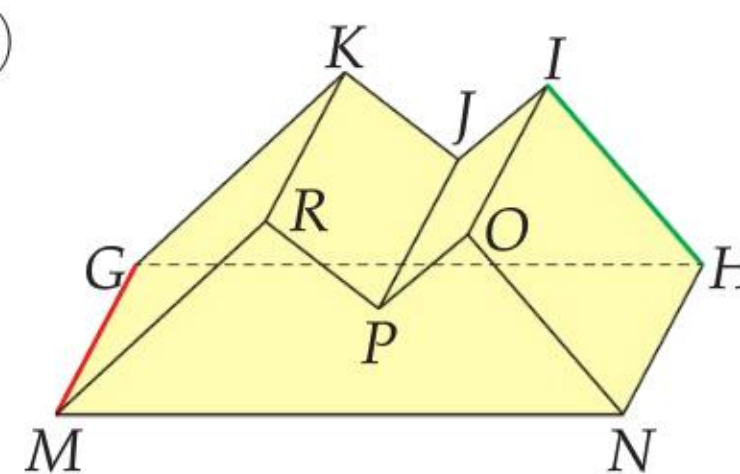
d)



e)



f)



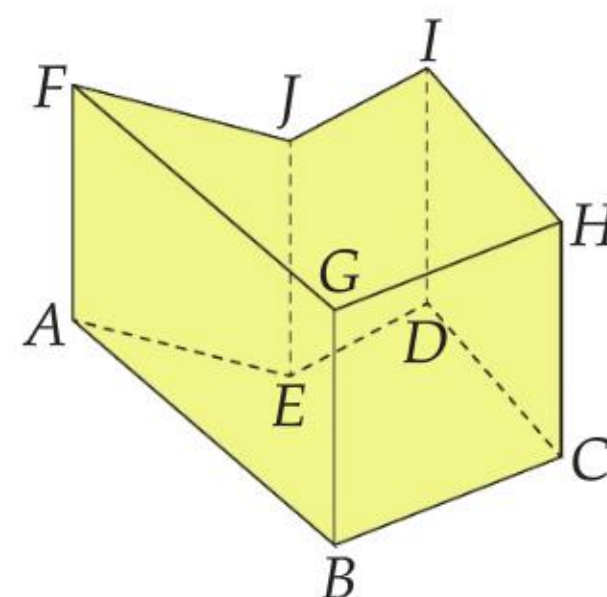
Zadania

- Jak się nazywa graniastosłup czworokątny:

- a) którego podstawą jest prostokąt,

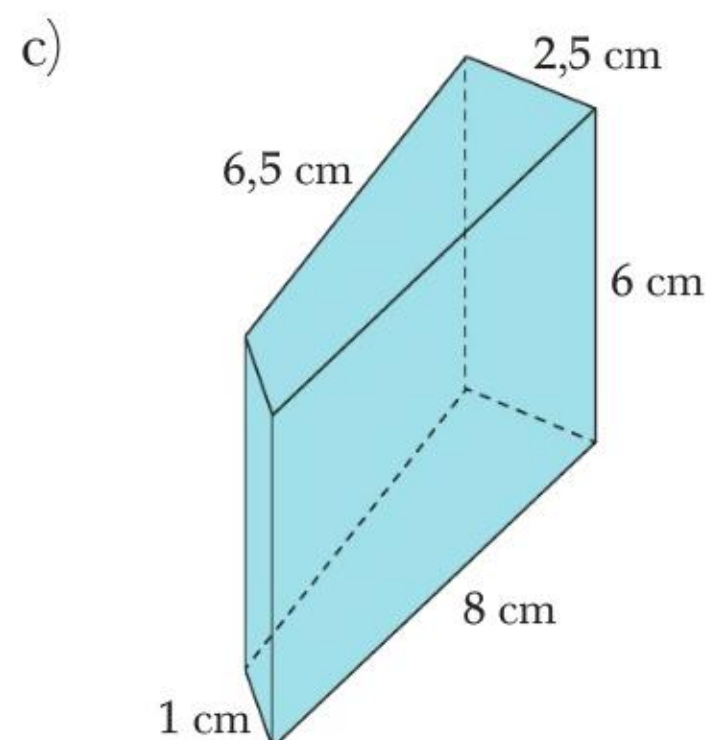
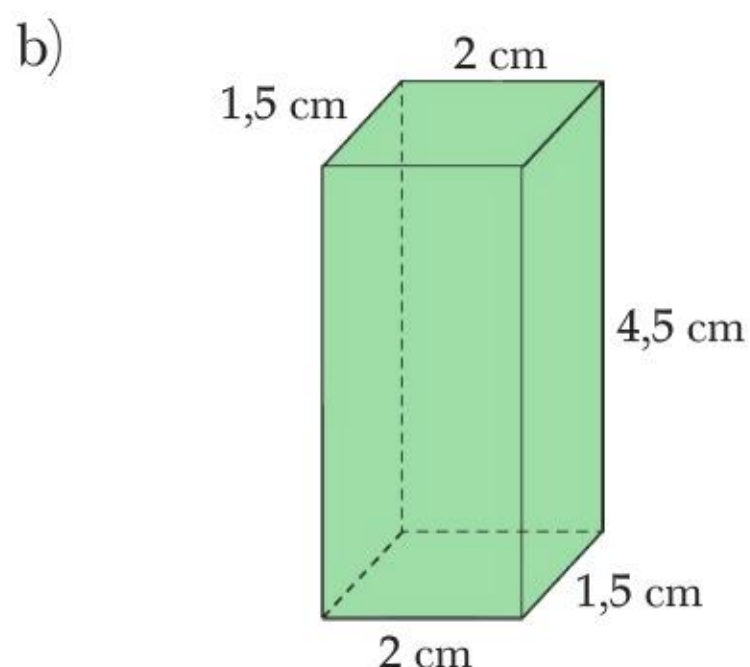
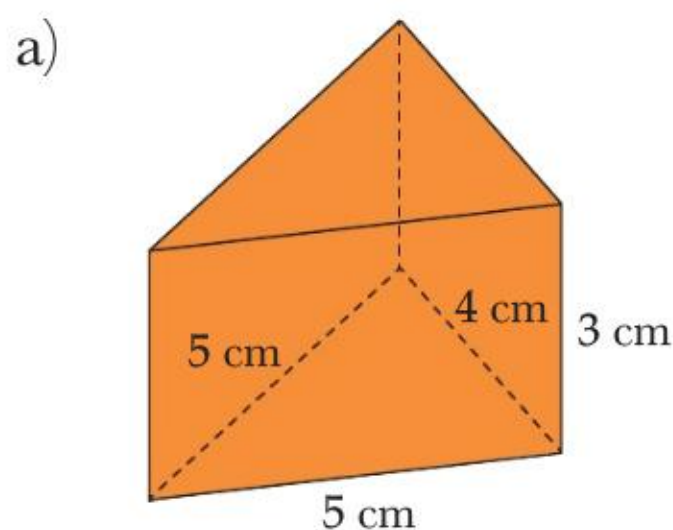
- b) który ma wszystkie krawędzie równej długości?

- Podstawą graniastostupa $ABCDEFGHJI$ jest pięciokąt, którego żadne dwa boki nie są równoległe. Na podstawie tej informacji oraz korzystając z rysunku, wypisz oznaczenia literowe równoległych krawędzi tego graniastostupa.

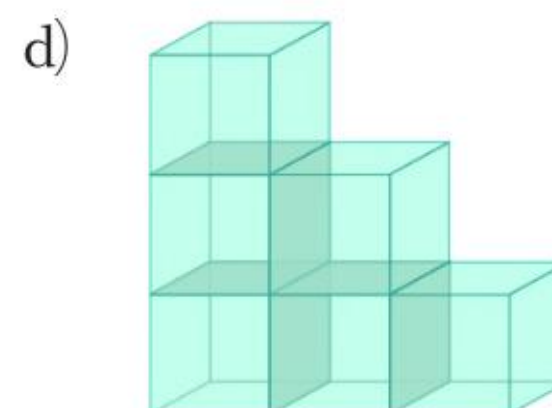
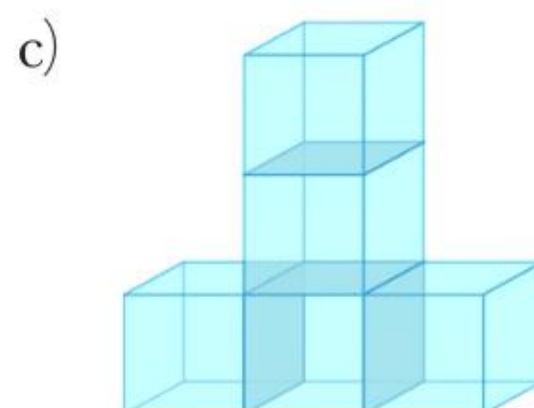
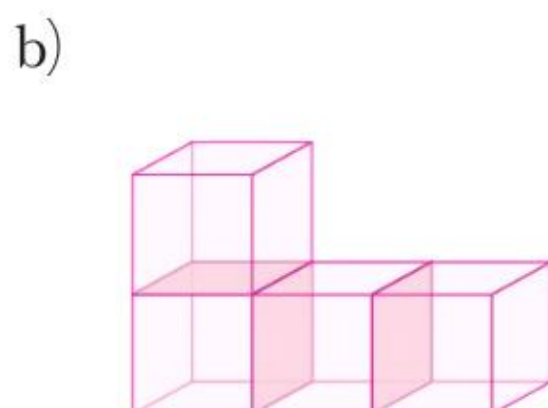
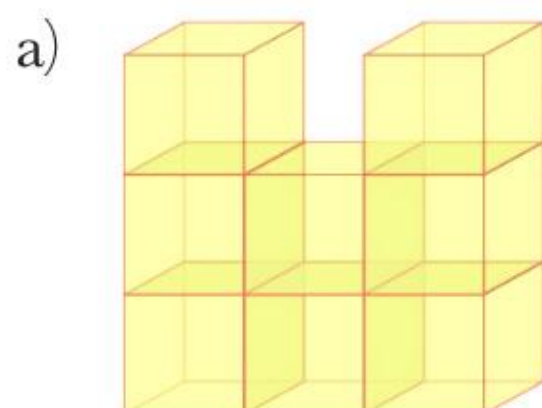


- Graniastostup o wysokości 5 cm ma podstawy w kształcie trójkąta prostokątnego o bokach 1,5 cm, 2 cm, 2,5 cm. Z dwóch takich graniastostupów złożono prostopadłościan. Podaj jego wymiary i oblicz sumę długości wszystkich jego krawędzi.
- Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.
 - Każdy graniastostup pięciokątny ma dwie podstawy.
 - Podstawą graniastostupa może być koło.
 - Każdy graniastostup ma pięć krawędzi bocznych.
 - Liczba ścian bocznych graniastostupa zależy od jego podstawy.
 - Podstawy dolna i górna graniastostupa mogą być różnymi wielokątami.
 - Krawędzie boczne graniastostupa są do siebie równoległe.
 - Ściany boczne graniastostupa są równoległobokami bez kątów prostych.

- Oblicz sumę długości krawędzi graniastostupa. Potrzebne dane odczytaj z rysunku.



- Z sześciątów o krawędzi o długości 1 cm zbudowano graniastostup pokazany na rysunku. Jakim wielokątem jest podstawa tego graniastostupa? Narysuj ją.



6.4 Siatki graniastosłupów

Podejmij temat



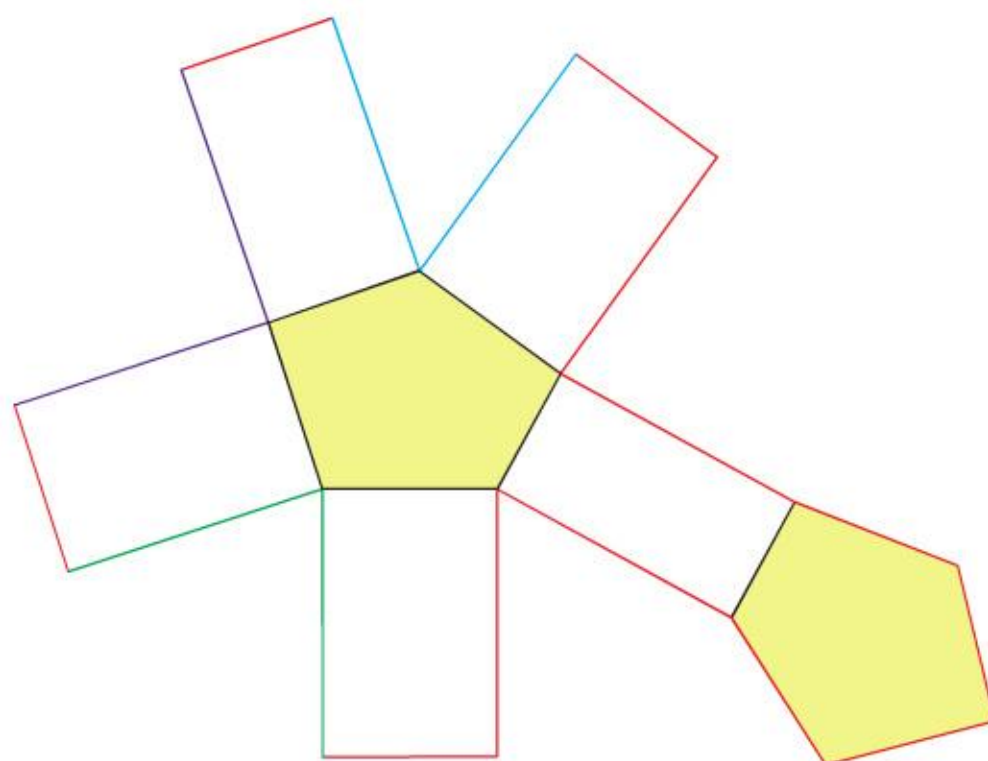
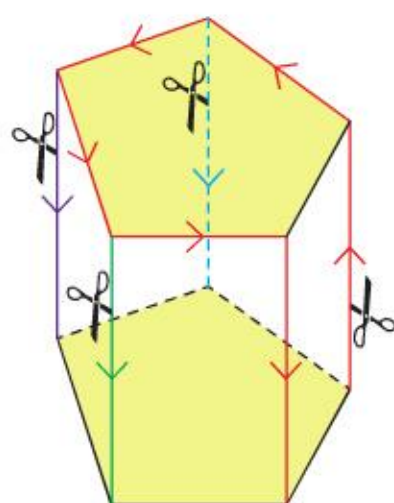
Podstawą każdego graniastosłupa jest wielokąt. Czy jest możliwe narysowanie litery O tak, by miała kształt wielokąta? A litery S? Naszkicuj swoją propozycję.

Spójrz, skleiliśmy graniastosłup. Ma podstawę w kształcie pierwszej litery mojego imienia. Gdyby każdy z naszej klasy zrobił graniastosłup z inną literą, to może mielibyśmy cały alfabet.

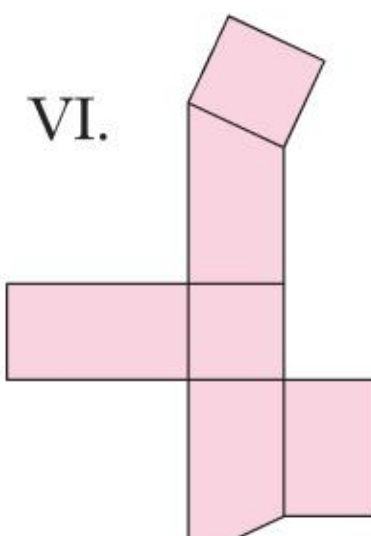
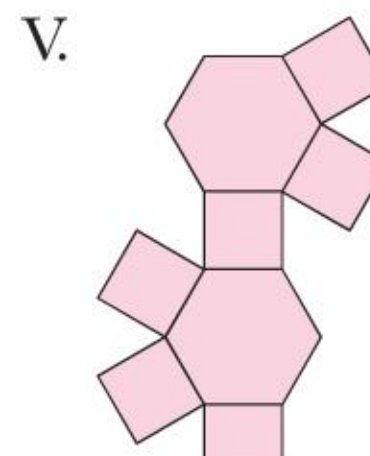
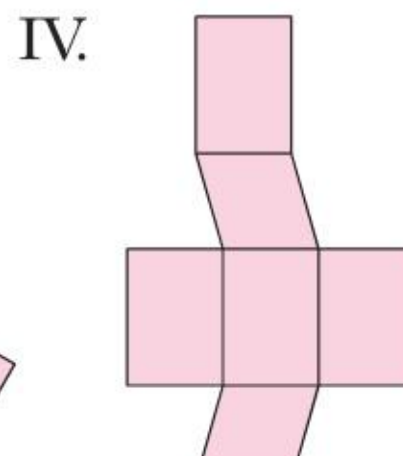
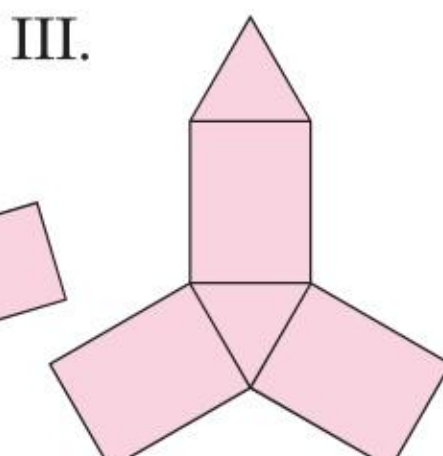
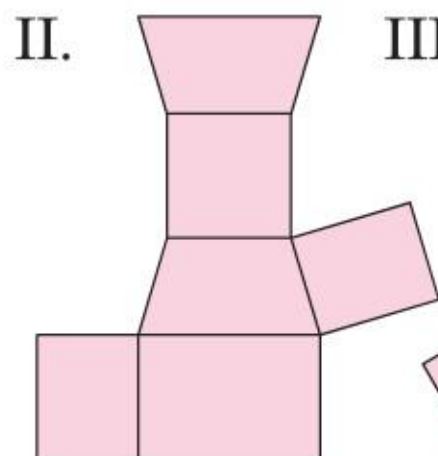
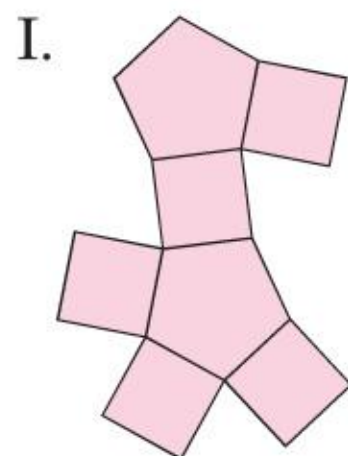
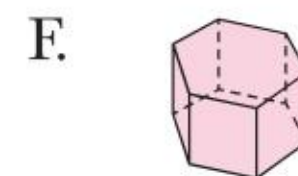
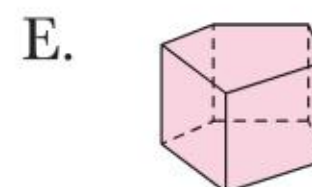
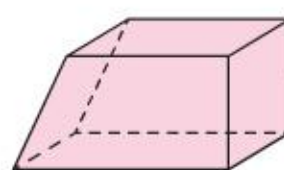
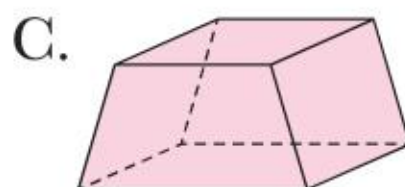
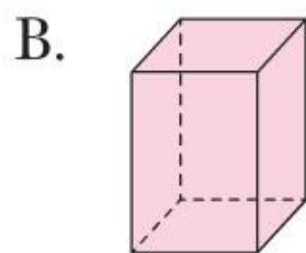
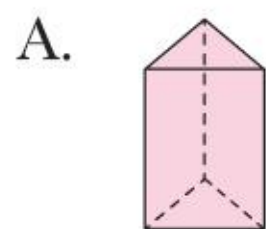
To ja rezerwuję dla siebie literę I ;)



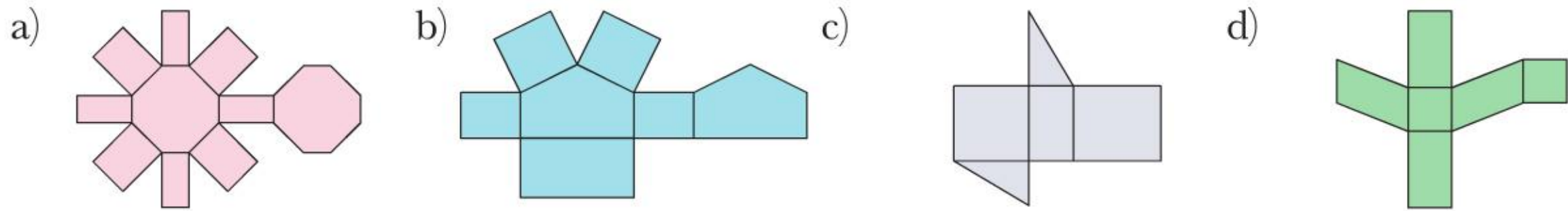
Już w klasie piątej zapoznaliśmy się z zagadnieniem rysowania siatek graniastosłupów. Pamiętamy, że pokazać ich kształt można w podobny sposób jak kształt siatek prostopadłościanów. Wystarczy wyobrazić sobie rozcięcie modelu graniastosłupa wzdłuż niektórych krawędzi, np. tak jak pokazano na rysunku obok.



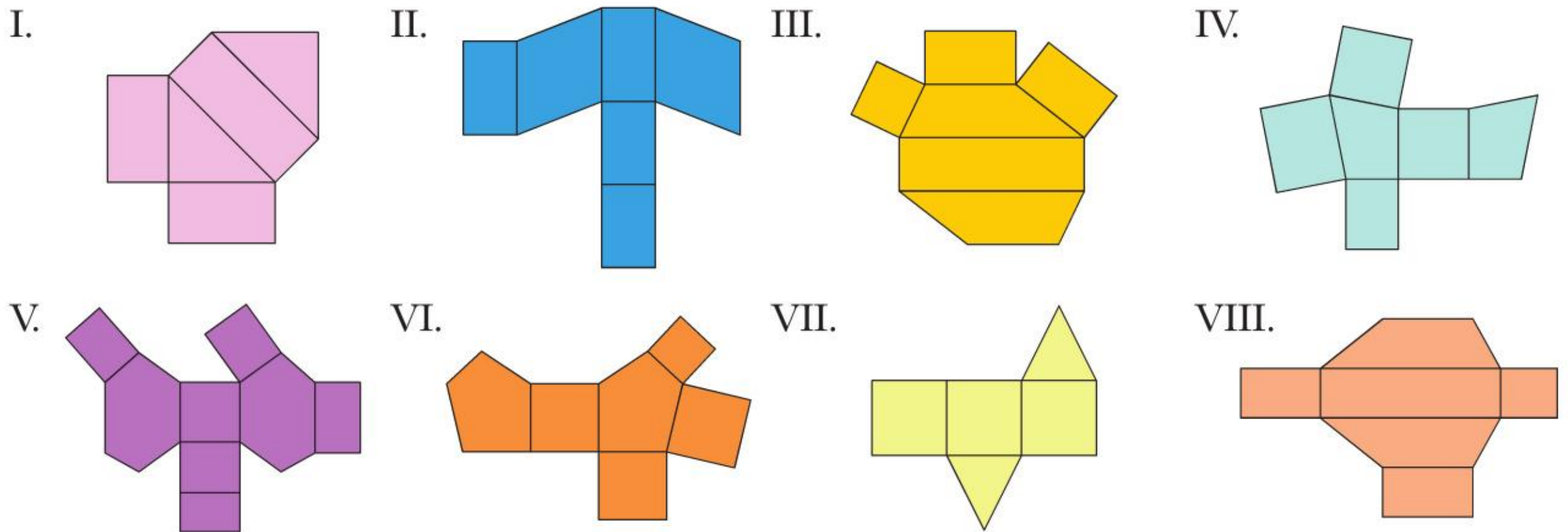
1. Dobierz w pary kształty graniastosłupów i ich siatki.



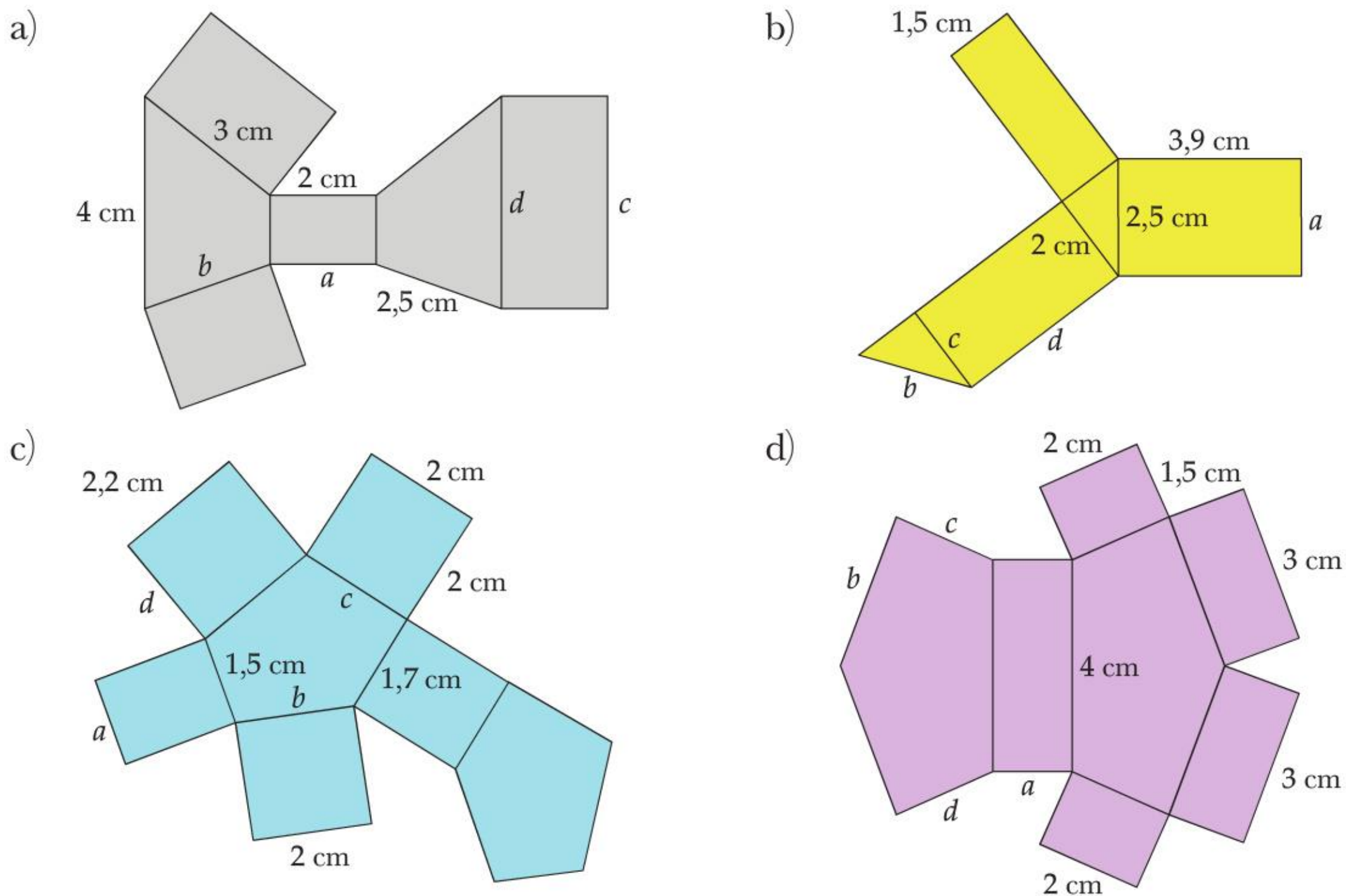
2. Jaki wielokąt jest podstawą graniastostupa, którego siatkę przedstawiono na rysunku? Ile ścian bocznych ma ten graniastostup?



3. Które z poniższych rysunków **nie** przedstawiają siatek graniastostupów? Odpowiedź uzasadnij.



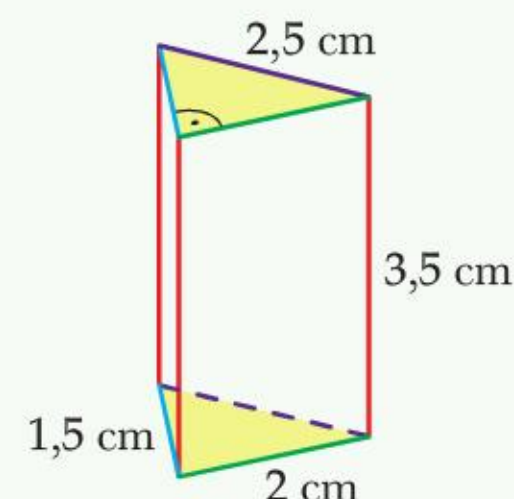
4. Rysunek przedstawia siatkę graniastostupa. Podaj długości odcinków: a , b , c , d .



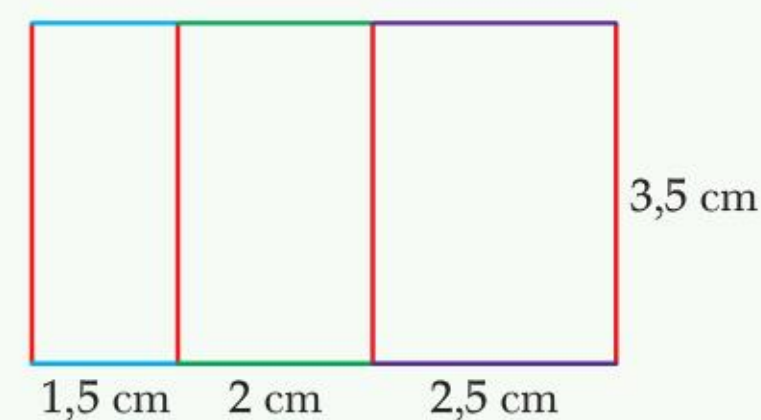
Wcześniej pokazaliśmy, w jaki sposób powstaje siatka graniastopuła przez rozcinanie modelu wzdłuż krawędzi. A jak ją narysować? To nic trudnego. Jest to zadanie podobne do rysowania siatki prostopadłościanu. Jednym z możliwych sposobów rysowania siatki graniastopuła jest ten opisany poniżej.

Przykład 1

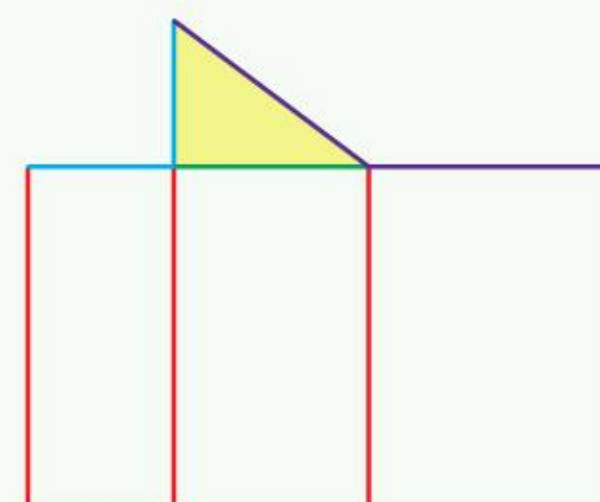
Narysujmy siatkę graniastopuła o podstawie w kształcie trójkąta prostokątnego. Długości odpowiednich krawędzi są podane na rysunku.



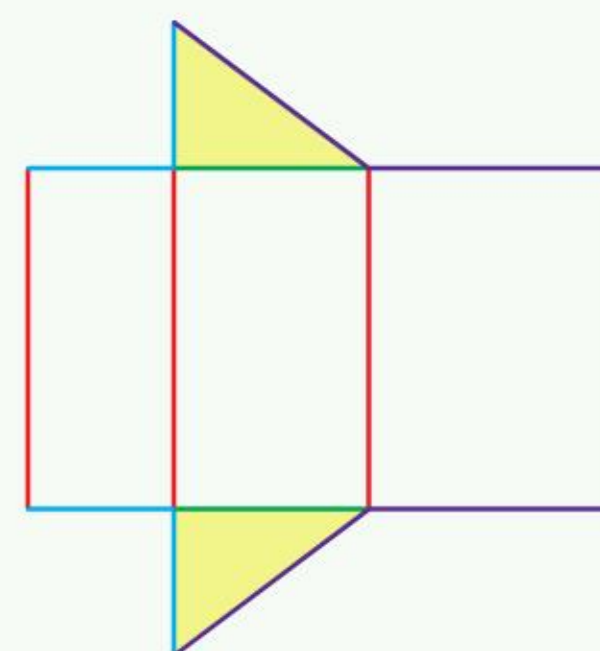
Zacznijmy od narysowania połączonych ze sobą wszystkich ścian bocznych graniastopuła w takiej kolejności, w jakiej występują w modelu (oglądanym np. podczas jego obracania).



Następnie do jednej ze ścian dorysujmy podstawę górną, pamiętając, żeby odpowiednie boki tworzące po złożeniu jedną krawędź były tej samej długości.



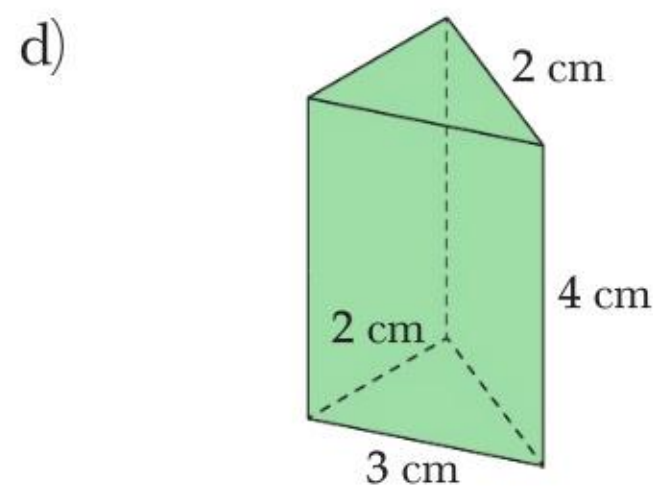
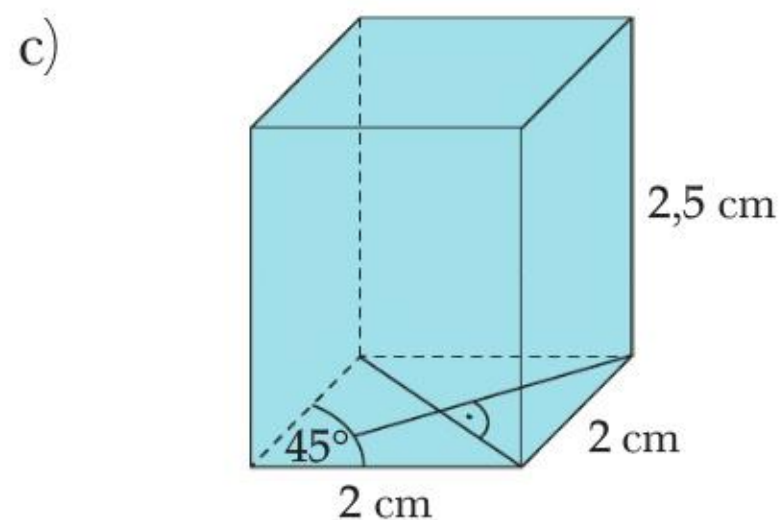
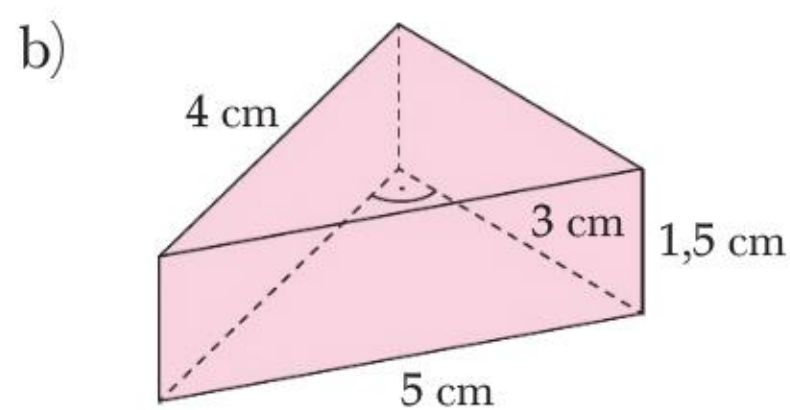
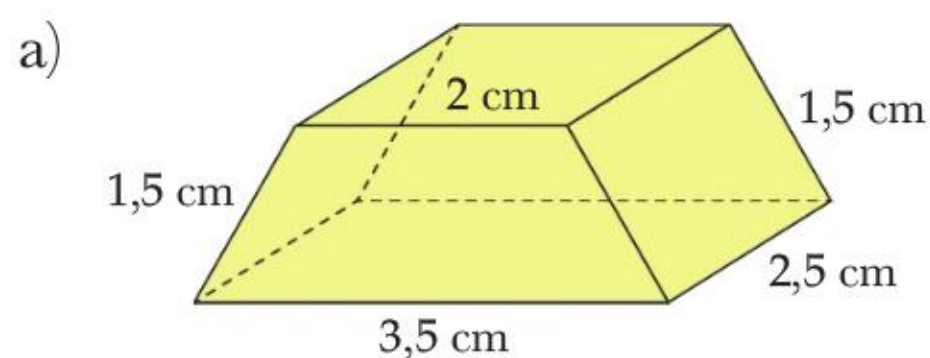
Ostatnią częścią siatki jest podstawa dolna, którą trzeba narysować po przeciwnej stronie ścian bocznych. Jeżeli będzie się ona znajdowała przy tej samej ścianie bocznej co podstawa górna, wtedy cała siatka będzie figurą osiowosymetryczną, a obie podstawy utworzą efekt odbicia w lustrze.



Powyższy sposób to jedna z metod rysowania siatki graniastopuła. Występujący w niej układ ścian (wszystkie ściany boczne tworzą wspólnie jeden prostokąt) jest bardzo logiczny, bo pozwala w szybki sposób zauważyć kształt podstaw i liczbę ścian bocznych oraz ich wymiary.

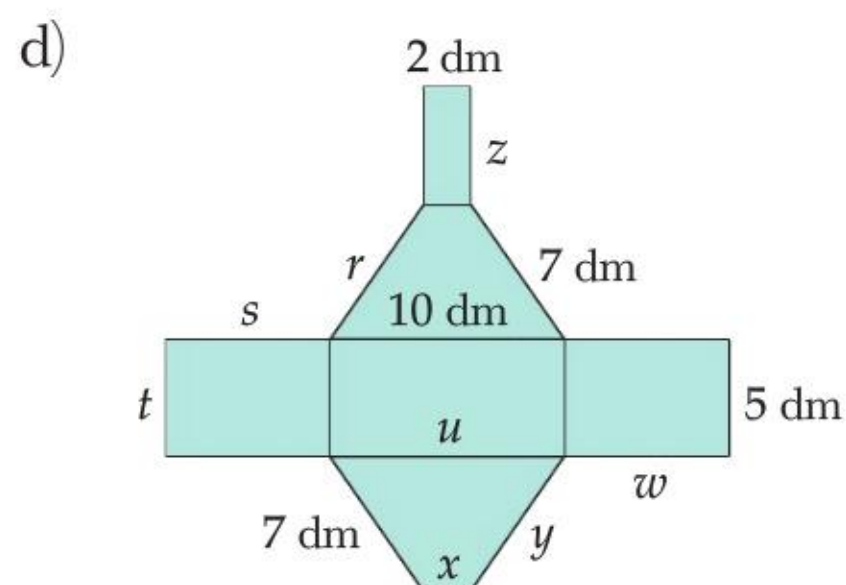
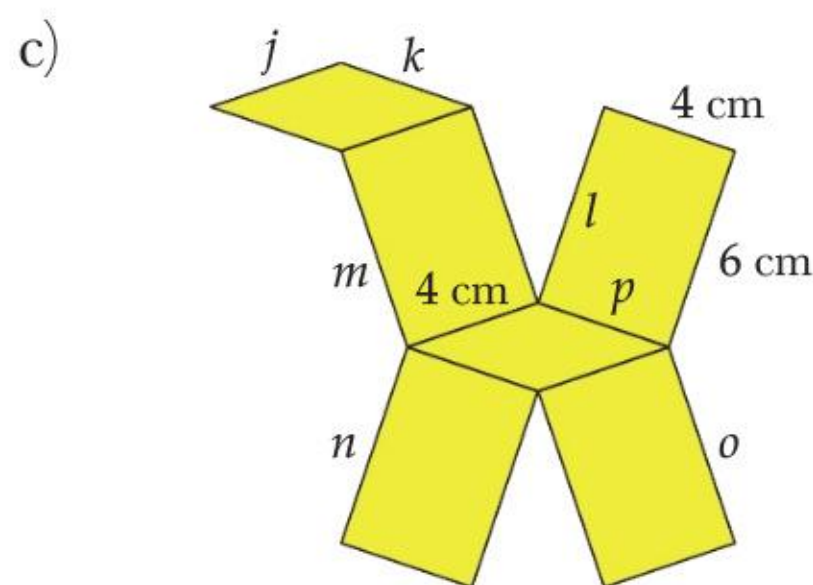
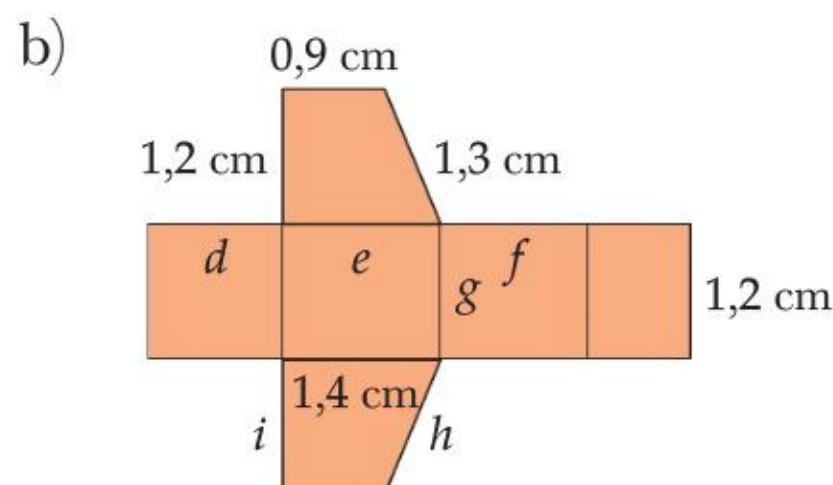
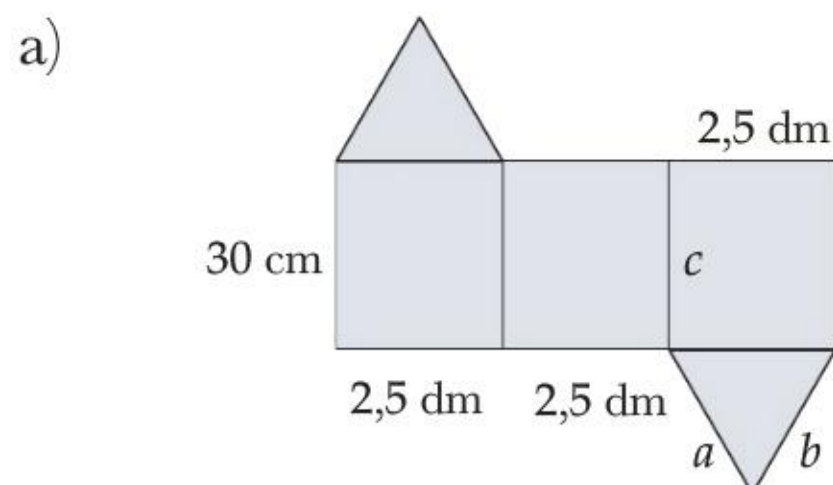
Oczywiście, siatkę można też narysować inaczej: wystarczy w inny sposób połączyć ściany boczne i podstawy. Wiele przykładów różnych siatek przedstawiono w ćwiczeniach 1–4 z tej lekcji.

5. Narysuj siatkę graniastostupa przedstawionego na rysunku.



Zadania

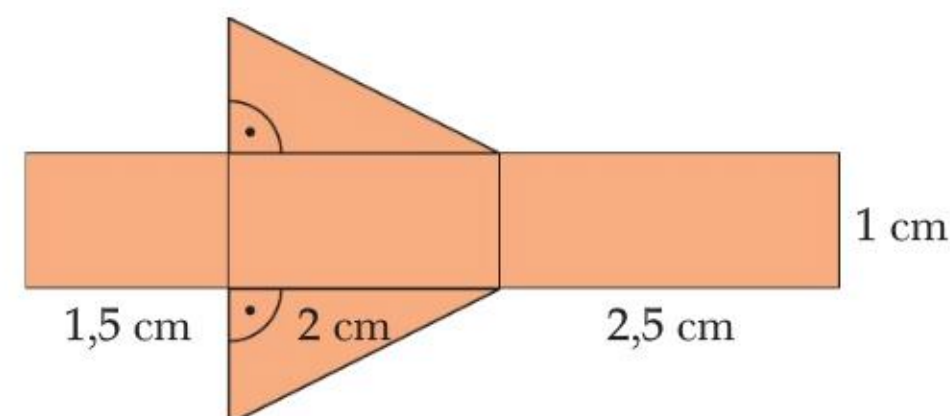
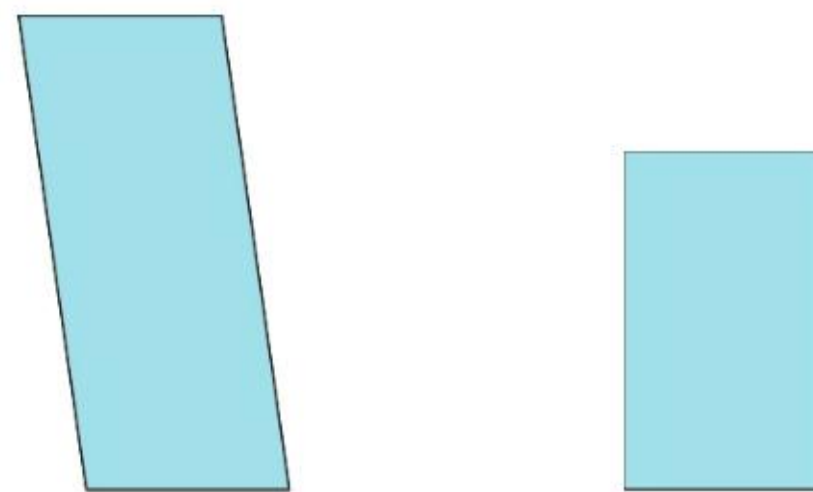
Rysunek przedstawia siatkę graniastostupa. Podaj długości odcinków oznaczonych literami.



Narysuj siatkę graniastostupa, którego krawędź boczna ma 2,5 cm, a podstawą jest:

- trójkąt prostokątny o bokach 3 cm, 4 cm, 5 cm,
- trójkąt równoramienny o ramionach 3 cm i podstawie, która ma 1,5 cm,
- trapez równoramienny o podstawach 5 cm i 1,5 cm oraz ramionach mających 2 cm,
- równoległobok o bokach 3 cm i 1,5 cm.

- Na rysunku obok znajdują się dwie ściany pewnego graniastopu. Narysuj jego siatkę.
- Narysuj siatkę graniastopu, którego podstawą jest romb, a wszystkie krawędzie graniastopu mają 3 cm.
- Siatka graniastopu na rysunku obok jest wykonana w skali 1 : 4.
 - Jakie są rzeczywiste wymiary wielokątów tworzących tę siatkę?
 - Na sztywnej kartce papieru narysuj tę siatkę w skali 1 : 1, dorysuj skrzydełka do sklejania, następnie wytnij siatkę, pozginaj wzdłuż krawędzi i sklej model graniastopu.

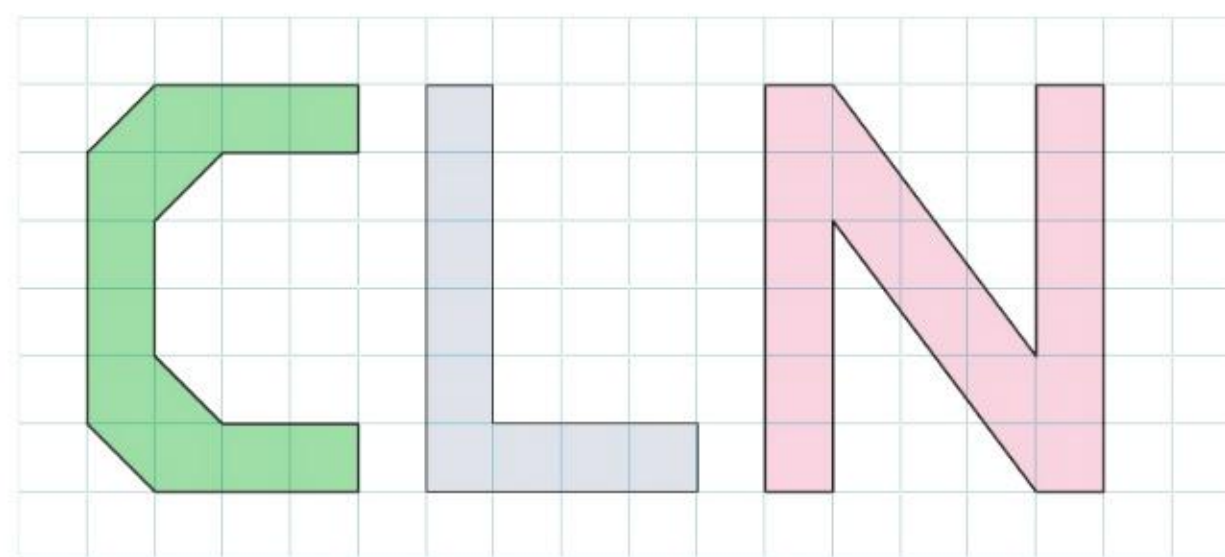


- Narysuj siatkę graniastopu, którego liczba krawędzi to:

a) 9	b) 12	c) 15	d) 18
------	-------	-------	-------

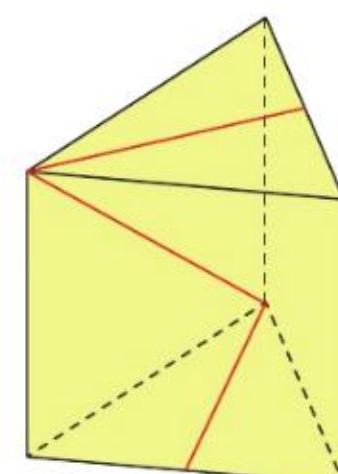
 i wszystkie krawędzie mają jednakową długość.
- Narysuj siatkę graniastopu, który w podstawie ma trapez równoramienny. Dorysuj do siatki skrzydełka. Następnie wytnij siatkę i sklej model tego graniastopu.

- Narysuj siatkę i wykonaj model graniastopu o podstawie w kształcie dowolnej litery alfabetu. Pamiętaj, że ta litera ma być narysowana jako wielokąt (w sposób analogiczny do liter na rysunku obok).



- Zaprojektuj model graniastopu (który nie jest prostopadłościem) o podstawie w kształcie dowolnego wielokąta, narysuj jego siatkę, wytnij ją i sklej model.

- Na ścianach graniastopu, którego podstawą jest trójkąt równoboczny, namalowano trzy odcinki, jak pokazano na rysunku obok. Narysuj siatkę tego graniastopu i na odpowiednich ścianach zaznacz namalowane odcinki.

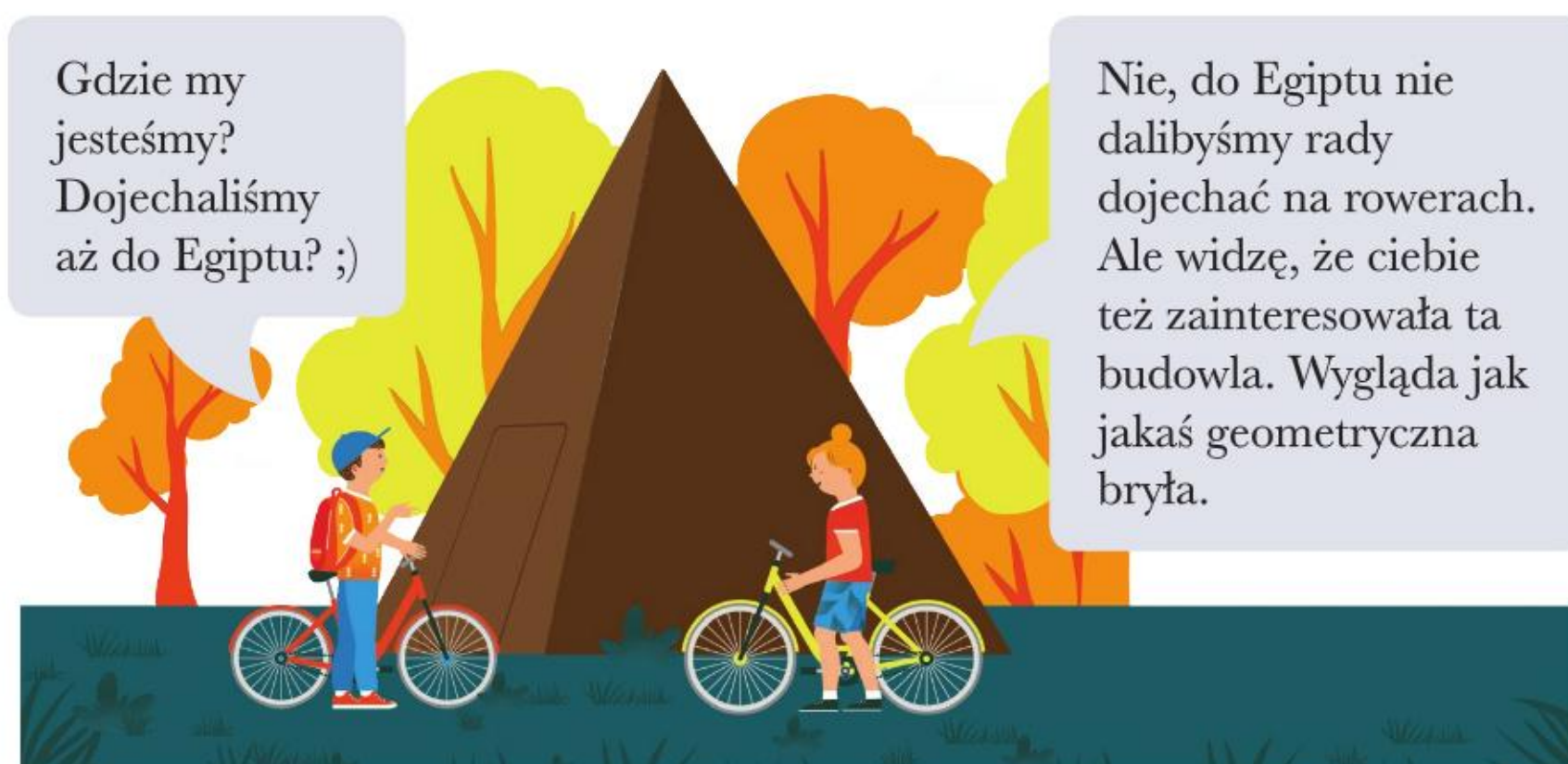


6.5 Ostrosłupy

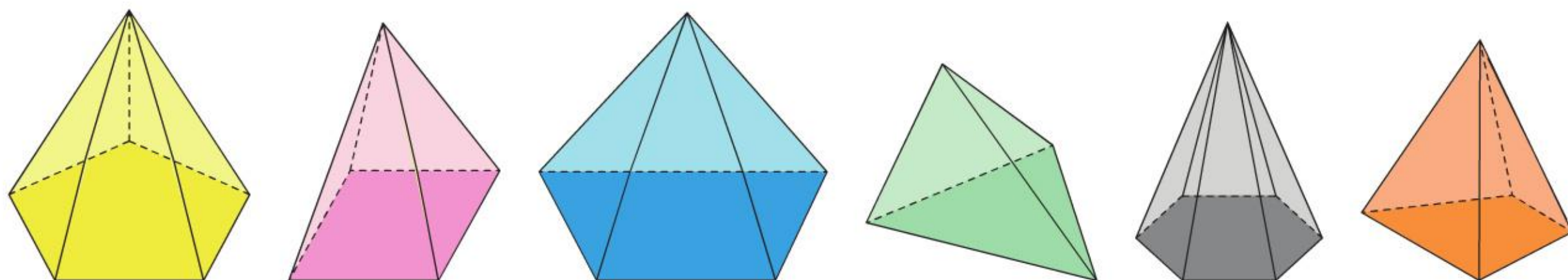
Podejmij temat



Jak sądzisz, dlaczego chłopiec zażartował, że znajdują się w Egipcie? Wymień kilka przedmiotów, które mogą mieć kształt przypominający budowlę z rysunku. Czy wiesz, jak ta bryła się nazywa?



1. Narysowane poniżej bryły mają pewne cechy wspólne. Podaj przynajmniej dwie z nich.

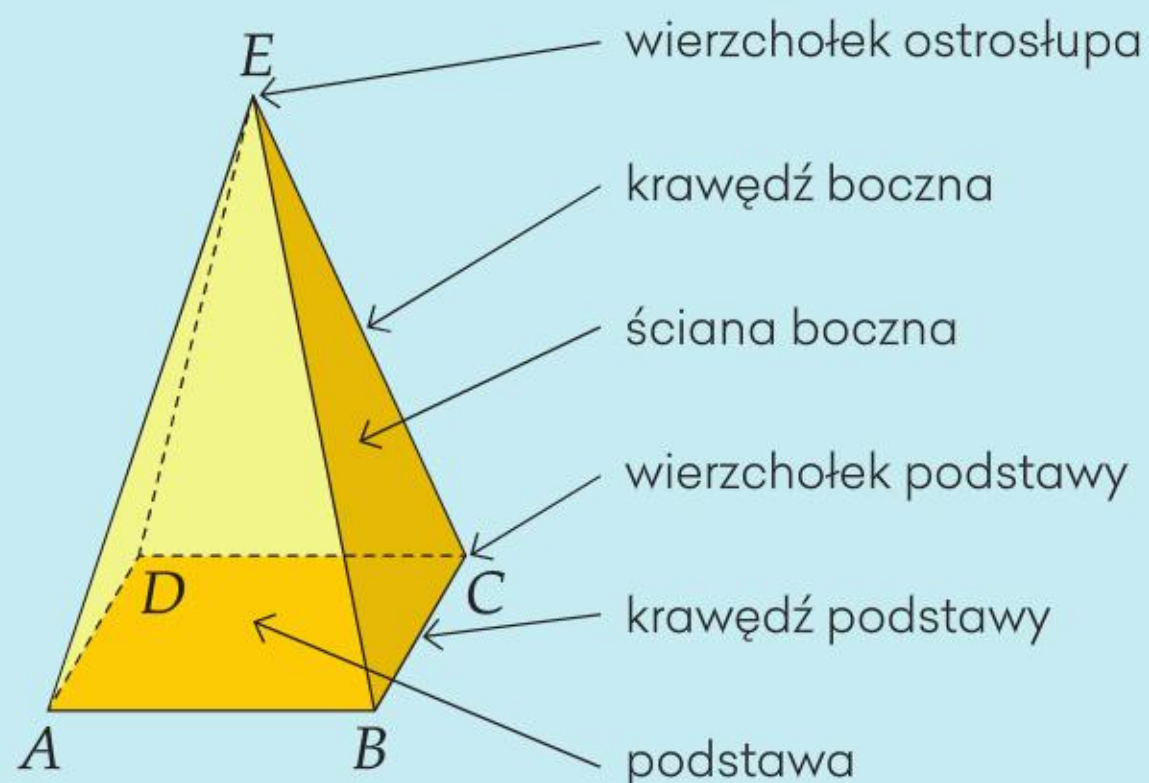


Bryły występujące w ćwiczeniu 1 nazywamy ostrosłupami.

Ostrosłup to bryła (figura przestrzenna), która ma jedną podstawę w kształcie dowolnego wielokąta i ściany boczne w kształcie trójkątów. Trójkąty te mają wspólny wierzchołek.

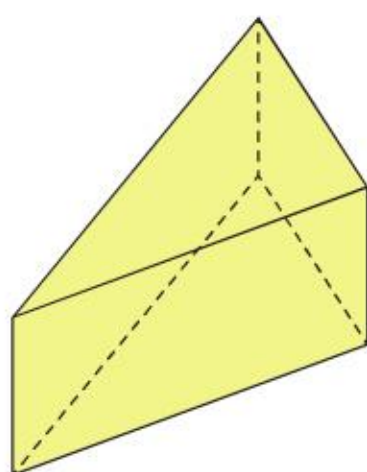
W ostrosłupie $ABCDE$:

- punkty A, B, C, D to **wierzchołki podstawy**,
- punkt E to **wierzchołek ostrosłupa**,
- odcinki AB, BC, CD, DA to **krawędzie podstawy**,
- odcinki AE, BE, CE, DE to **krawędzie boczne**,
- wielokąt $ABCD$ to **podstawa ostrosłupa**,
- trójkąty ABE, BCE, CDE, DAE to **ściany boczne**.

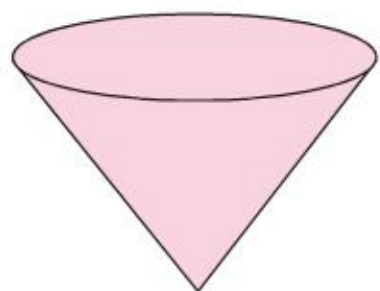


2. Wskaż na rysunku bryły, które mają kształt ostrosłupa.

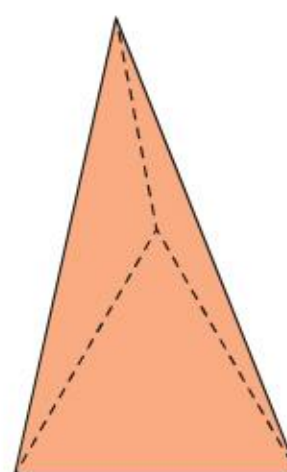
I.



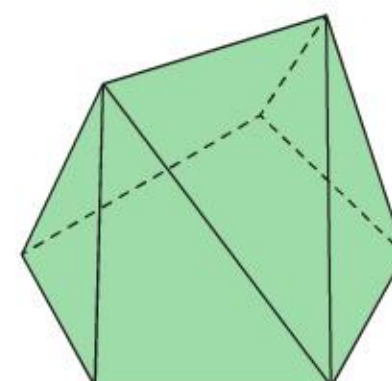
II.



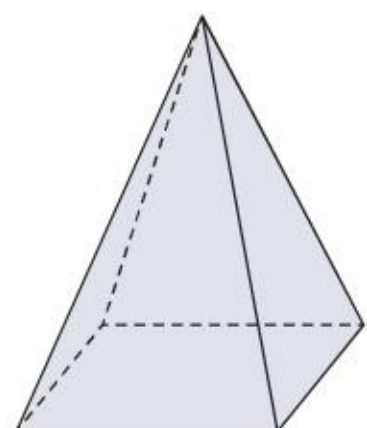
III.



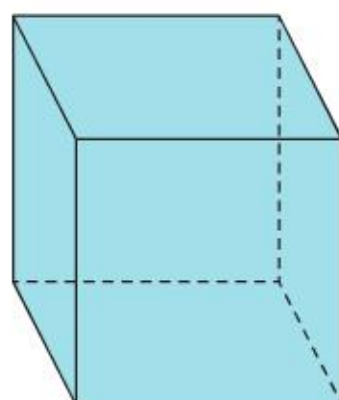
IV.



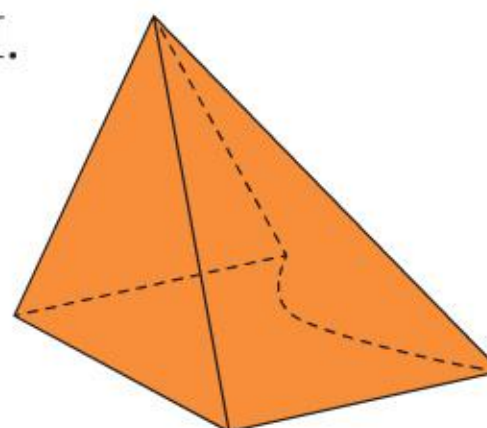
V.



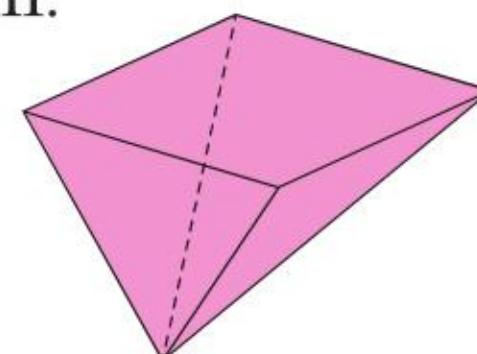
VI.



VII.

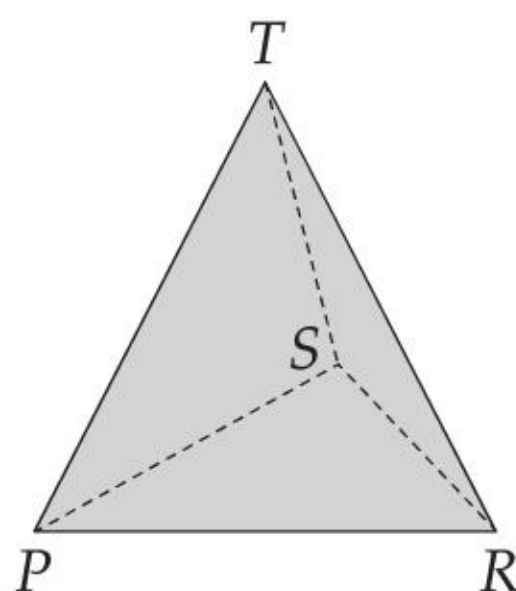


VIII.



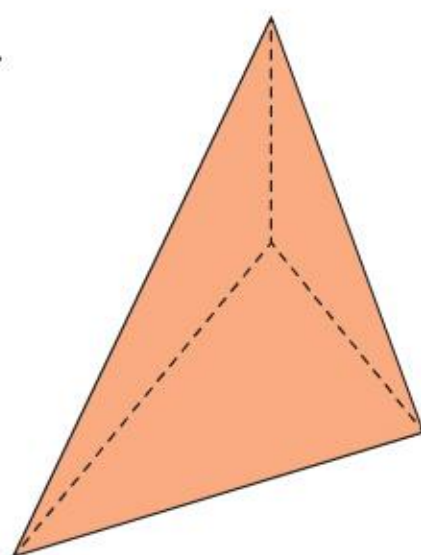
3. Dany jest ostrosłup $PRST$ o wierzchołku T .
Zapisz oznaczenia literowe jego:

- podstawy,
- ścian bocznych,
- krawędzi podstawy,
- krawędzi bocznych.

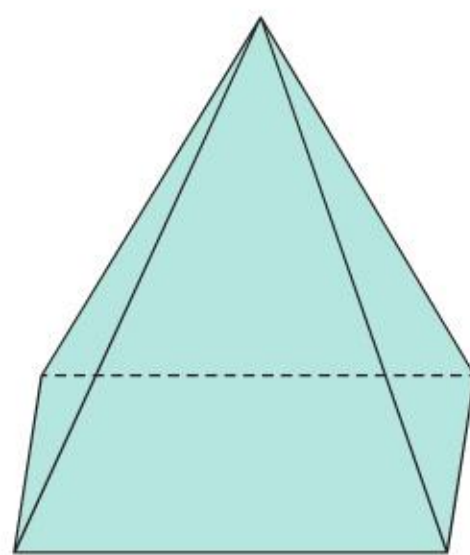


4. Jakie wielokąty stanowią podstawę poniższych ostrosłupów?
Ile krawędzi i ile ścian bocznych ma każdy z nich?

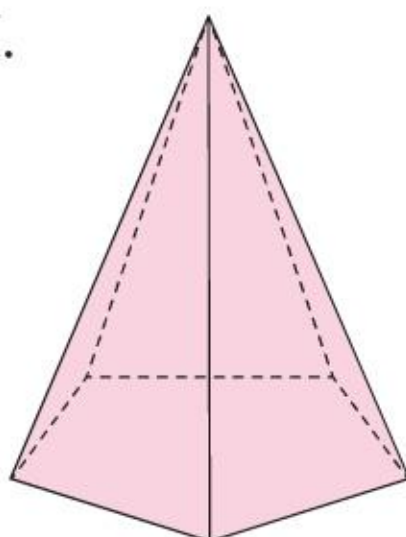
I.



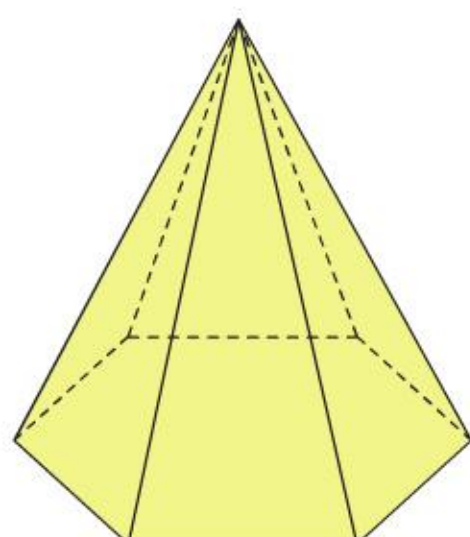
II.



III.



IV.



Ciekawe!



Najbardziej znanymi budowlami w kształcie ostrosłupów są egipskie piramidy. Największą z nich jest **piramida Cheopsa**, która znajduje się w Gizie (Egipt). Została wzniesiona ok. 2560 r. p.n.e. jako grobowiec faraona Cheopsa. W starożytności zaliczono ją do siedmiu cudów świata i jest jedynym, który przetrwał do dziś. W Polsce grobowiec w kształcie piramidy można zobaczyć w Wągrowcu (Wielkopolska).



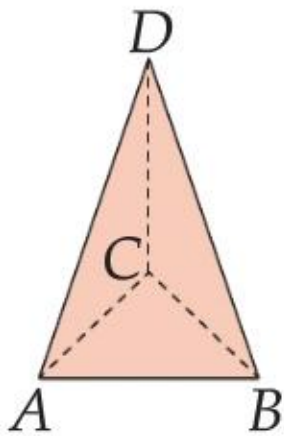
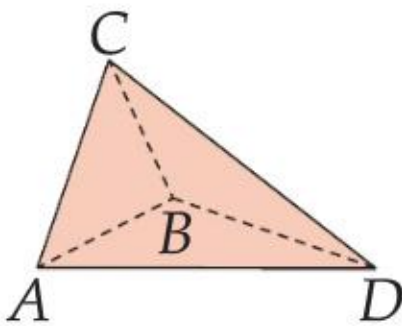
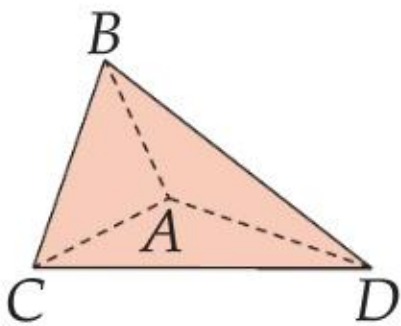
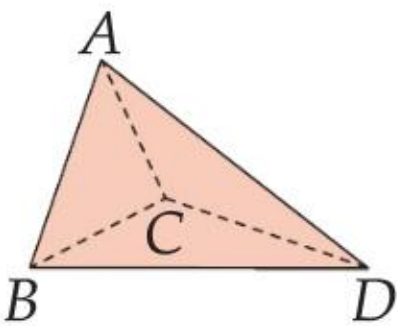
Podobnie jak w przypadku graniastosłupów, również nazwa ostrosłupa zależy od tego, jaki wielokąt stanowi jego podstawę.

Wyróżniamy następujące rodzaje ostrosłupów:

- trójkątny – jego podstawa jest trójkątem,
- czworokątny – jego podstawa jest czworokątem,
- pięciokątny – jego podstawa jest pięciokątem itd.



Zauważ, że za podstawę ostrosłupa trójkątnego można przyjąć dowolną jego ścianę.



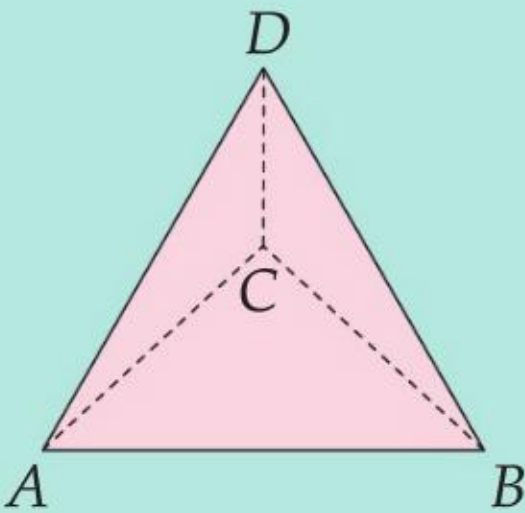
5. Przerysuj do zeszytu tabelę i wypełnij ją.

Liczba \ Ostrosłup	trójkątny	czworokątny	pięciokątny	ośmiokątny	dziesięciokątny	n -kątny
podstaw						
ścian bocznych						
ścian						
wierzchołków podstawy						
wierzchołków						
krawędzi bocznych						
krawędzi podstaw						
krawędzi						

Więcej na temat

Ostrosłup, którego ścianami są jednakowe trójkąty równoboczne, nazywamy **czworościanem foremnym**.

Słowo *foremny* w nazwie tej bryły oznacza, że ściany są jednakowymi wielokątami, których długości boków i miary kątów są takie same.



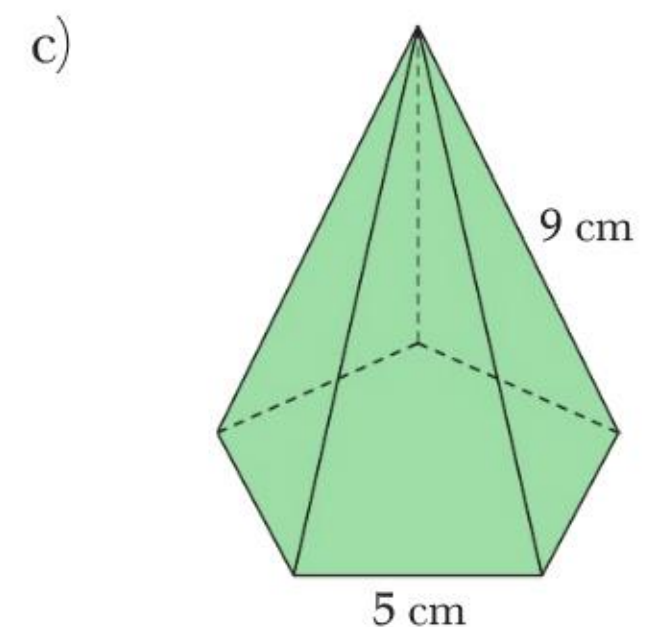
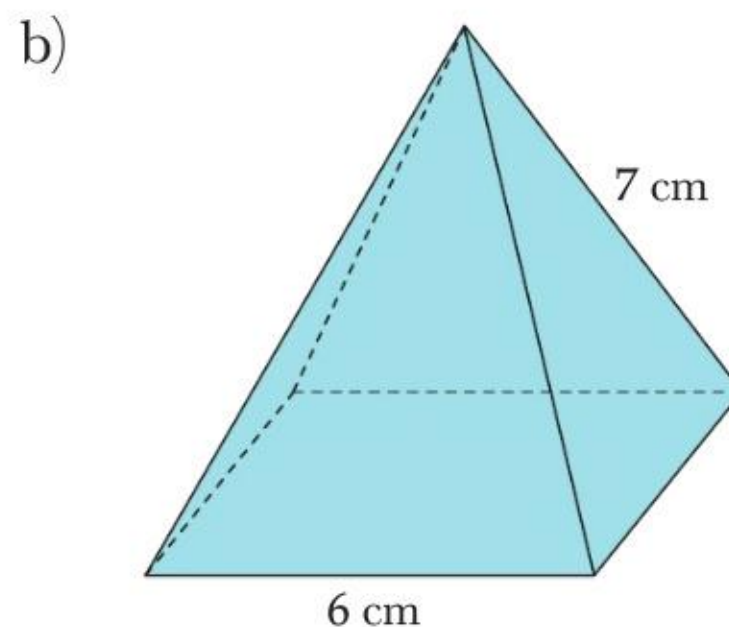
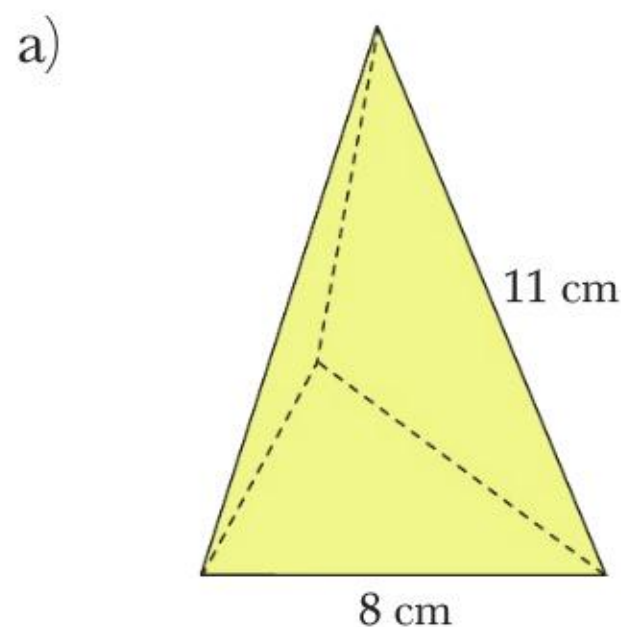
$$|AB| = |BC| = |AC| = |AD| = |BD| = |CD|$$

6. Czy znasz inną bryłę, którą nazywamy foremną?

7. Ile wierzchołków, a ile krawędzi ma czworościan foremny? Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi czworościanu, z których każda ma długość 8 cm.

Zadania

- Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.
- a) Ostrosłup ma jeden wierzchołek.
 - b) Podstawą ostrosłupa może być dowolny wielokąt.
 - c) Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, a ściany boczne są dowolnymi wielokątami.
 - d) Podstawą ostrosłupa może być koło.
 - e) Istnieje ostrosłup, który ma dokładnie 3 wierzchołki.
 - f) Istnieje ostrosłup, który ma 15 krawędzi.
 - g) Liczba krawędzi podstawy ostrosłupa jest dwa razy mniejsza od liczby wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.
- Jakim wielokątem jest podstawa ostrosłupa mającego:
- a) 13 wierzchołków,
 - b) 15 ścian,
 - c) 30 krawędzi?
- Odpowiedz na pytania.
- a) Ile wierzchołków ma ostrosłup, który ma 12 ścian?
 - b) Ile wszystkich wierzchołków ma ostrosłup o 10 wierzchołkach przy podstawie?
 - c) Ile krawędzi ma ostrosłup mający 9 wierzchołków?
 - d) Ile ścian ma ostrosłup z 14 krawędziami?
 - e) Ile wierzchołków ma ostrosłup z 20 krawędziami?
 - f) Ile wszystkich krawędzi ma ostrosłup o 7 krawędziach bocznych?
 - g) Ile krawędzi ma ostrosłup mający 10 ścian?
 - h) Ile ścian ma ostrosłup, który ma 15 wierzchołków?
- Narysuj trójkąt równoramienny. Następnie dorysuj trzy odcinki (niektóre lub wszystkie linią przerywaną) tak, by otrzymać rysunek ostrosłupa. Jaki to ostrosłup?
- Ostrosłup na rysunku ma równe krawędzie podstaw oraz równe krawędzie boczne. Oblicz sumę długości krawędzi tego ostrosłupa.



6.6 Siatki ostrosłupów

Podejmij temat



Jakimi figurami są podstawy ostrosłupów widocznych na rysunku? Z ilu figur, i jakich, powinny się składać siatki tych ostrosłupów?

Prostopadłościany gotowe! Zaczynij je malować. Ten duży dach po prawej i mały po lewej to graniastosłupy – teraz będę je sklejać.

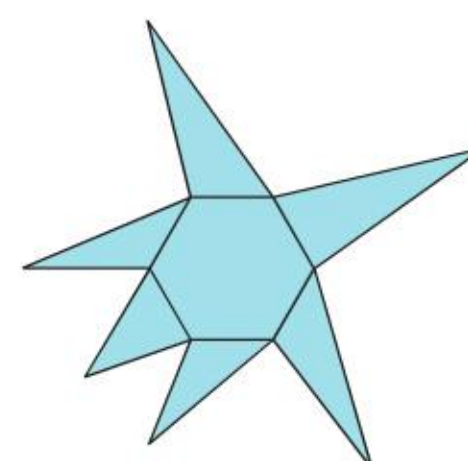
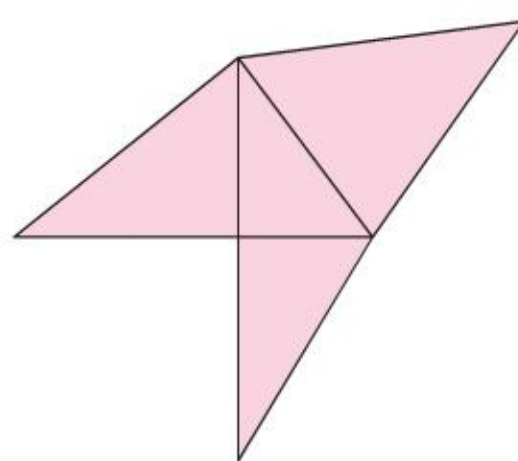
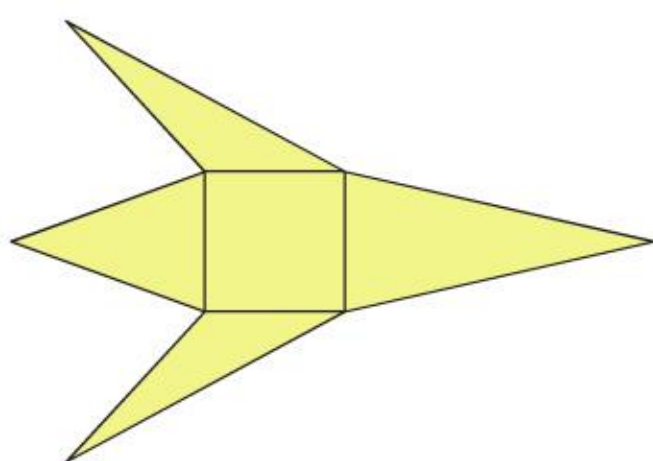


A te dachy z jednym wierzchołkiem u góry? To są ostrosłupy. Wiesz, jak je zrobić?

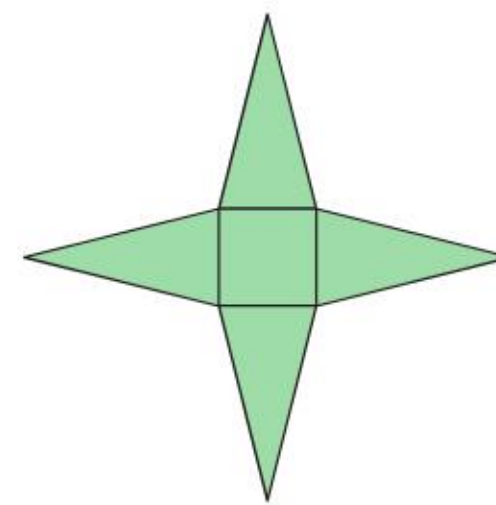
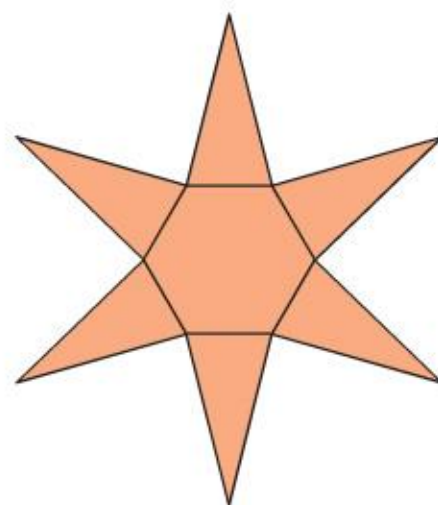
Każdy ostrosłup ma jedną podstawę (będącą dowolnym wielokątem) i ściany boczne, które są trójkątami, zatem siatka ostrosłupa składa się z takich właśnie figur.

Jeżeli podstawą ostrosłupa jest kwadrat, to aby utworzyć siatkę ostrosłupa, najwygodniej zacząć od narysowania tego kwadratu. Następnie do każdego jego boku trzeba dorysować trójkąty. Boki trójkątów, które po złożeniu modelu utworzą jedną krawędź, muszą mieć taką samą długość.

Tak samo postępujemy, gdy podstawą ostrosłupa jest inna figura.



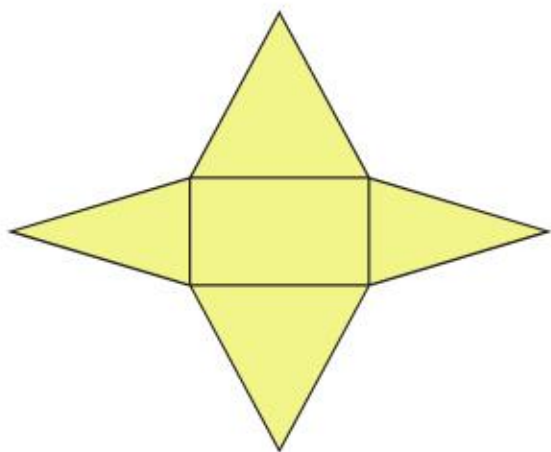
Jeżeli przy każdym boku wielokąta dorysujemy trójkąt równoramienny, to otrzymamy siatkę ostrosłupa, którego wierzchołek znajduje się dokładnie nad środkiem podstawy.



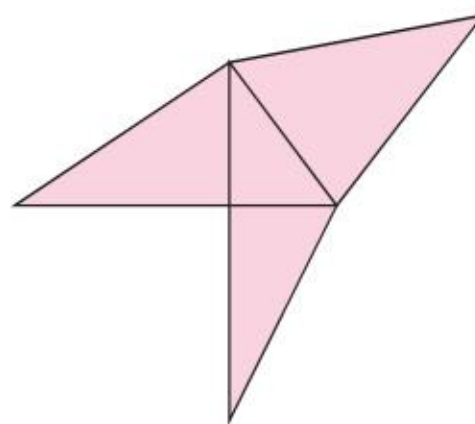
1. Zmierz boki figur tworzących zieloną siatkę ostrosłupa o podstawie kwadratowej (rysunek powyżej). Przerysuj tę siatkę w skali 4 : 1 na sztywną kartkę papieru, dorysuj skrzydełka, wytnij i złoż model ostrosłupa.

2. Jaki wielokąt jest podstawą ostrosłupa, którego siatkę przedstawiono na rysunku? Ile ścian bocznych ma ten ostrosłup?

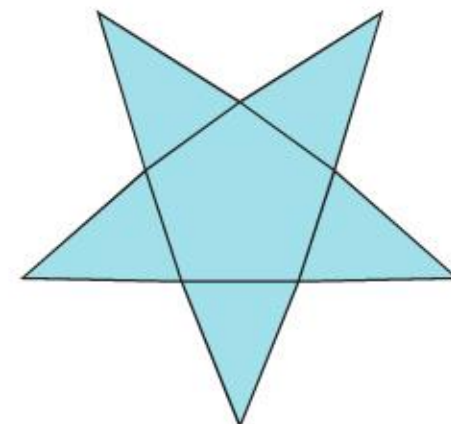
a)



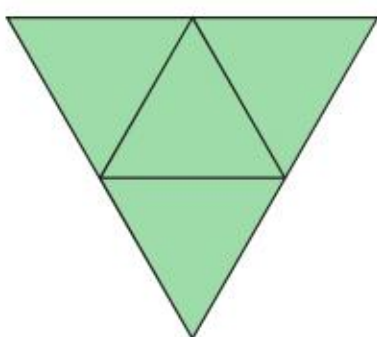
b)



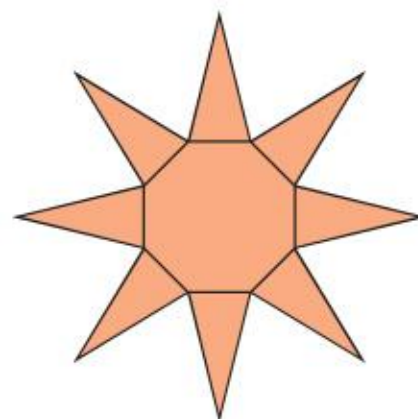
c)



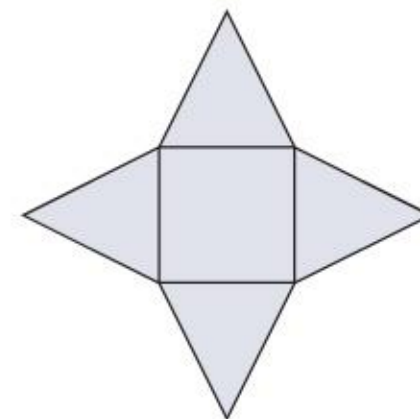
d)



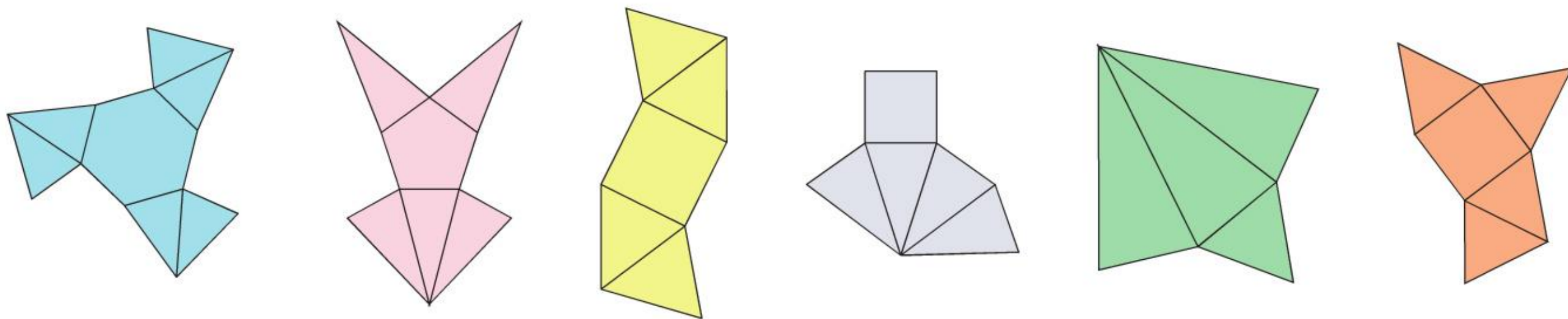
e)



f)

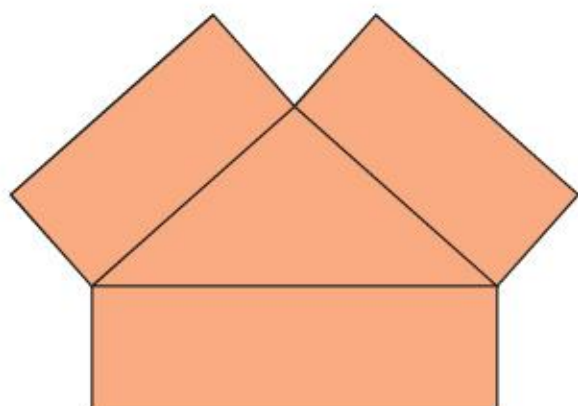


Przedstawione dotąd siatki ostrosłupów są narysowane w najprostszy sposób i są najbardziej czytelne. Siatki można jednak rysować inaczej, na przykład tak jak pokazano poniżej. Czy potrafisz powiedzieć, jakimi figurami są podstawy poszczególnych ostrosłupów?

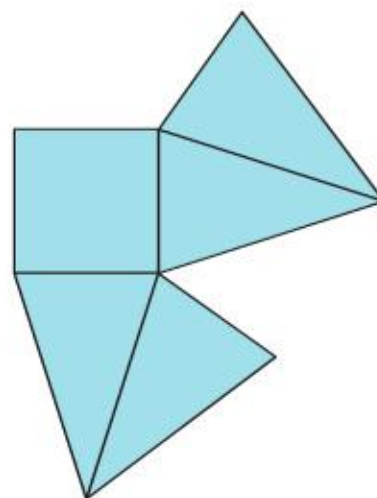


3. Która z narysowanych poniżej siatek **nie** jest siatką ostrosłupa? Odpowiedź uzasadnij.

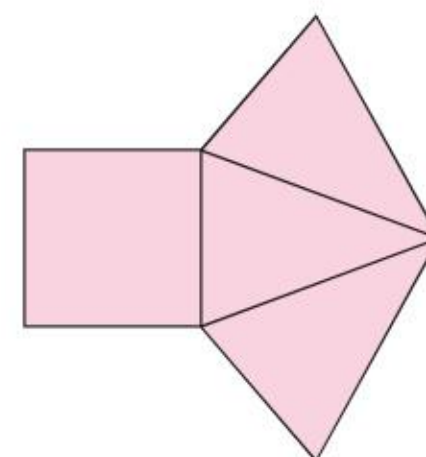
I.



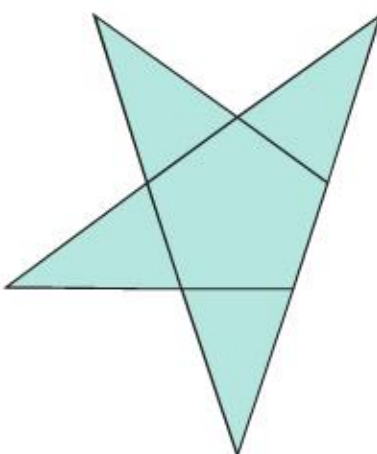
II.



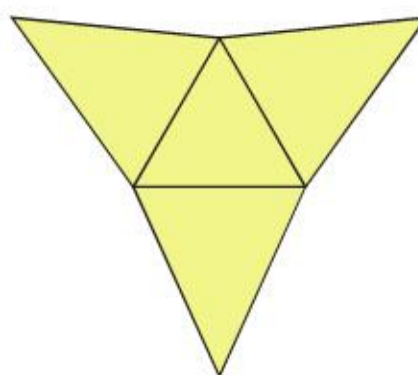
III.



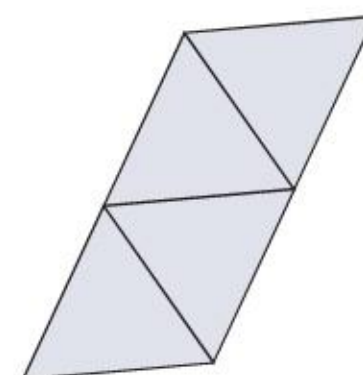
IV.



V.



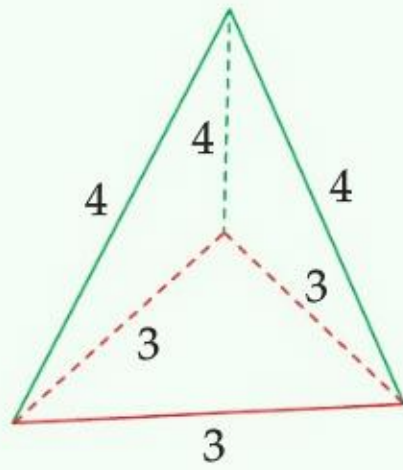
VI.



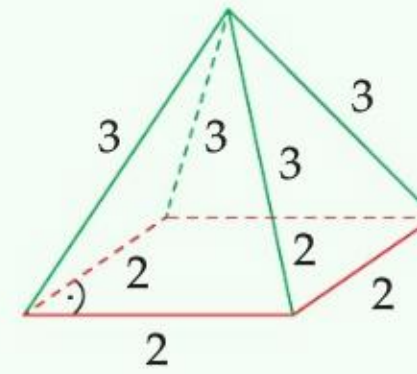
Przykład 1

Narysujmy siatkę ostrosłupa (liczby oznaczają długości krawędzi podane w centymetrach).

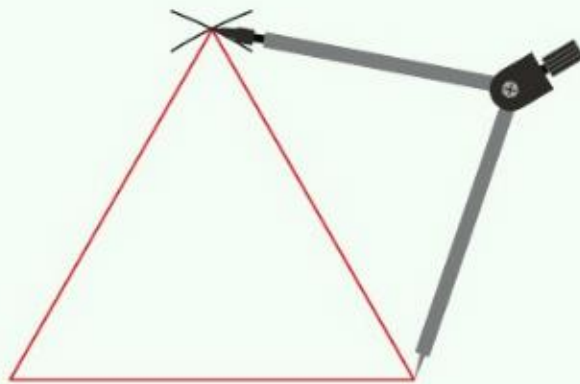
a)



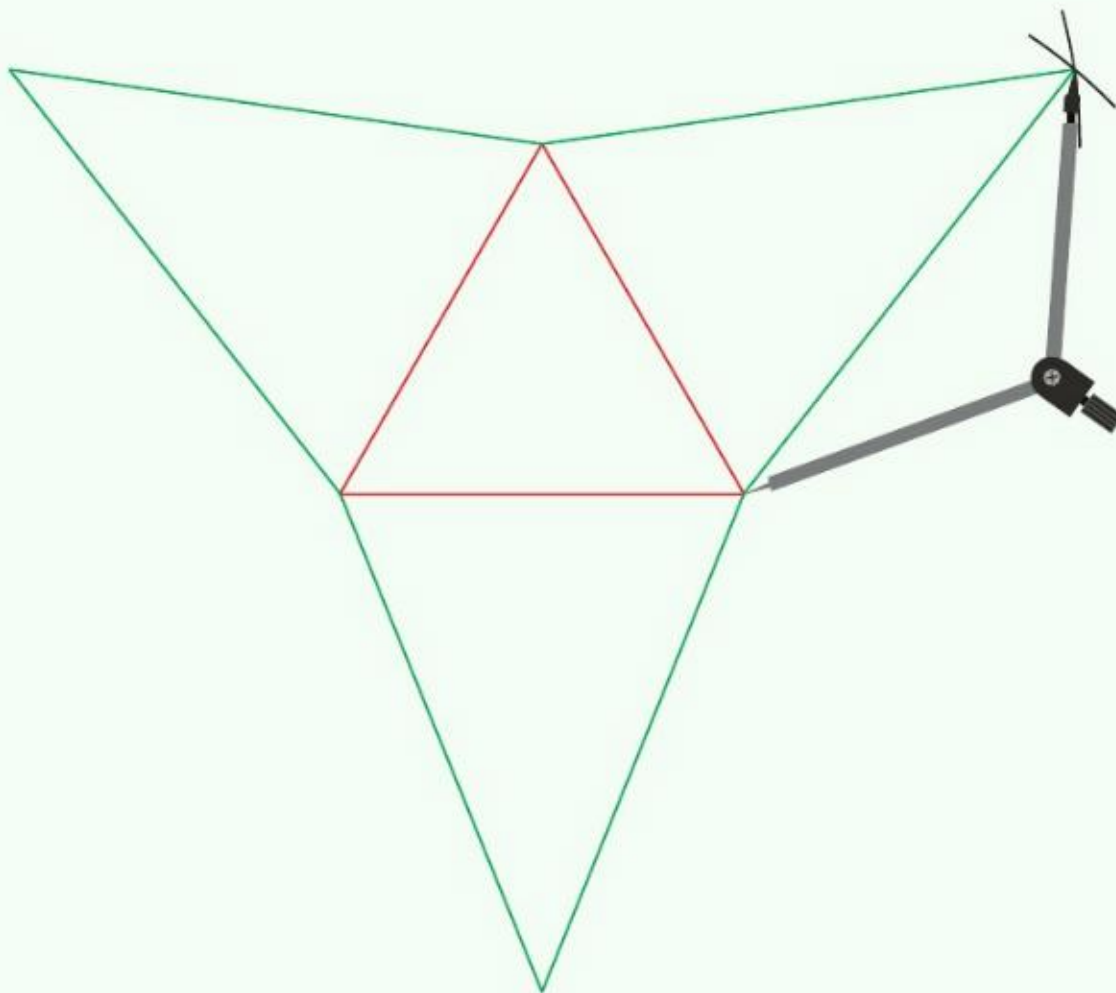
b)



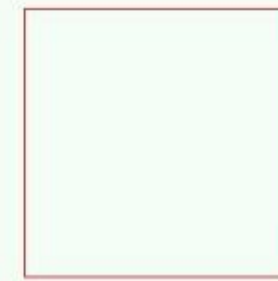
a) Rysujemy podstawę ostrosłupa – trójkąt równoboczny o boku 3 cm.



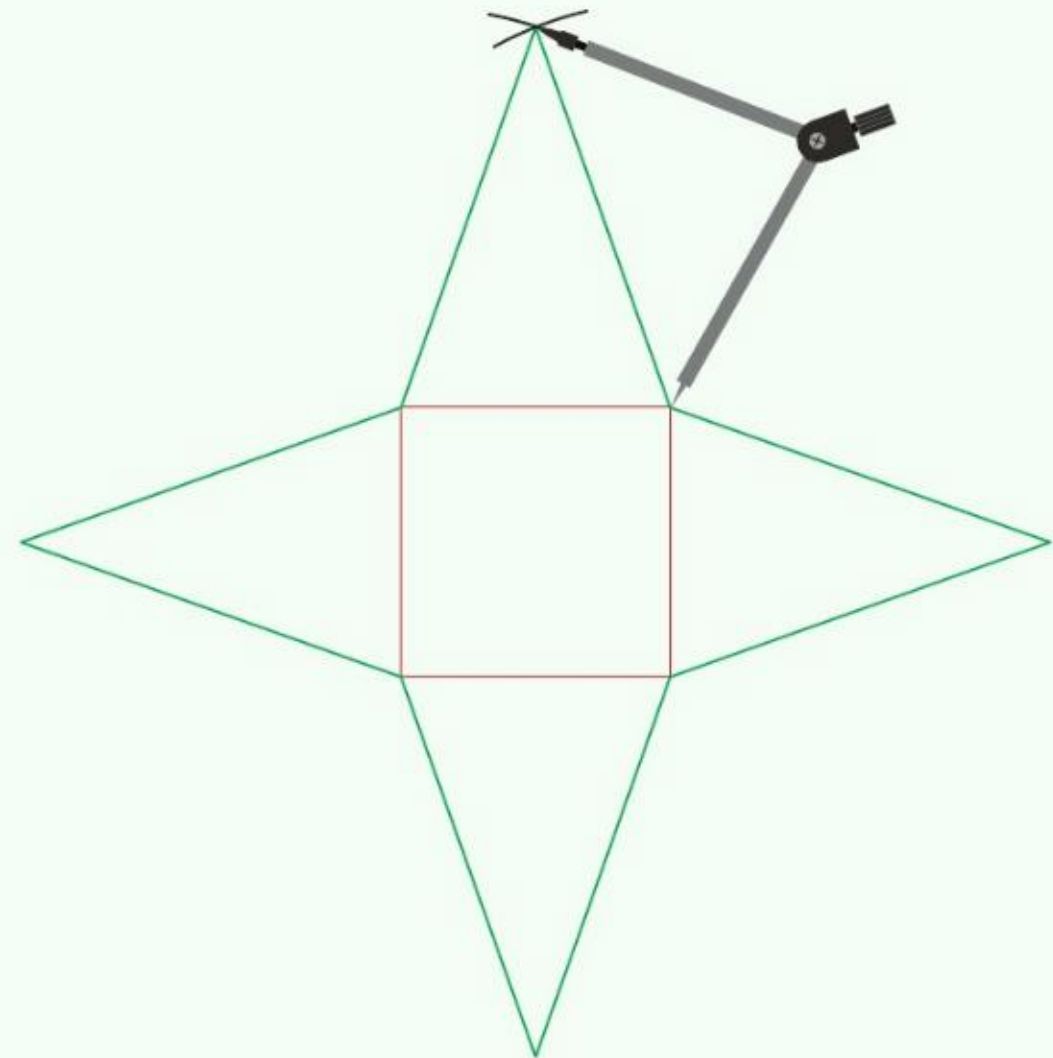
Do każdego boku tego trójkąta dorysowujemy trójkąt równoramienny o ramieniu 4 cm.



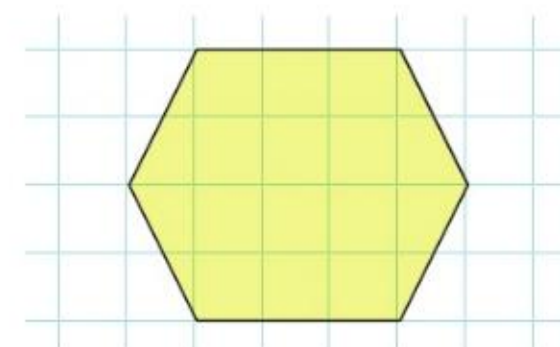
b) Rysujemy podstawę ostrosłupa – kwadrat o boku 2 cm.



Do każdego boku tego kwadratu dorysowujemy trójkąt równoramienny o ramieniu 3 cm.



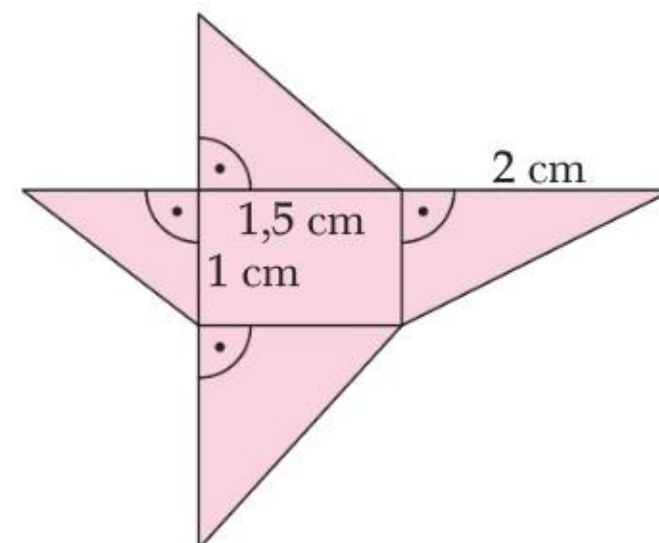
4. Narysuj siatkę ostrosłupa, którego krawędzie boczne mają długość 2,5 cm, a podstawą jest taki wielokąt jak pokazany obok.



5. Narysuj siatkę ostrosłupa, którego ściany boczne to trójkąty równoramienne, a podstawa to:
- a) trójkąt równoboczny, b) prostokąt (niebędący kwadratem).

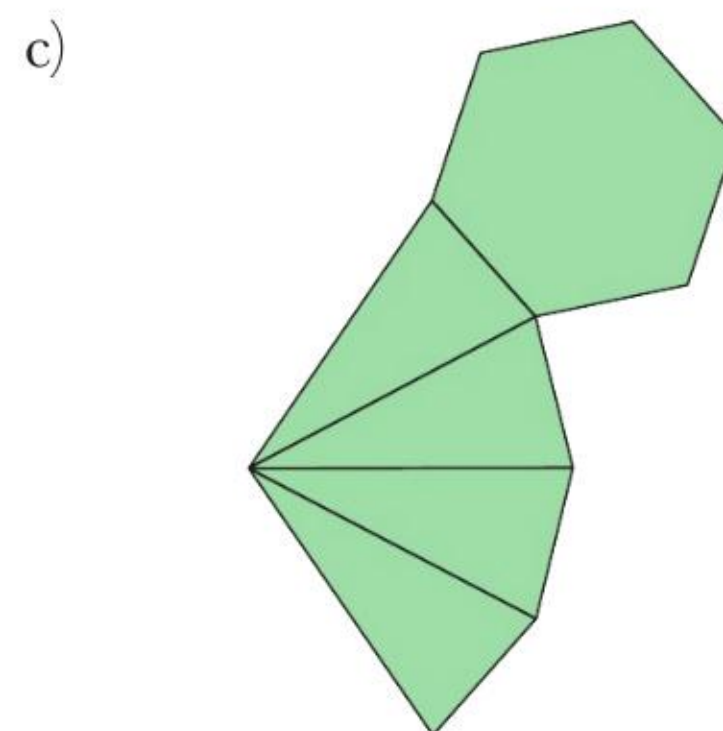
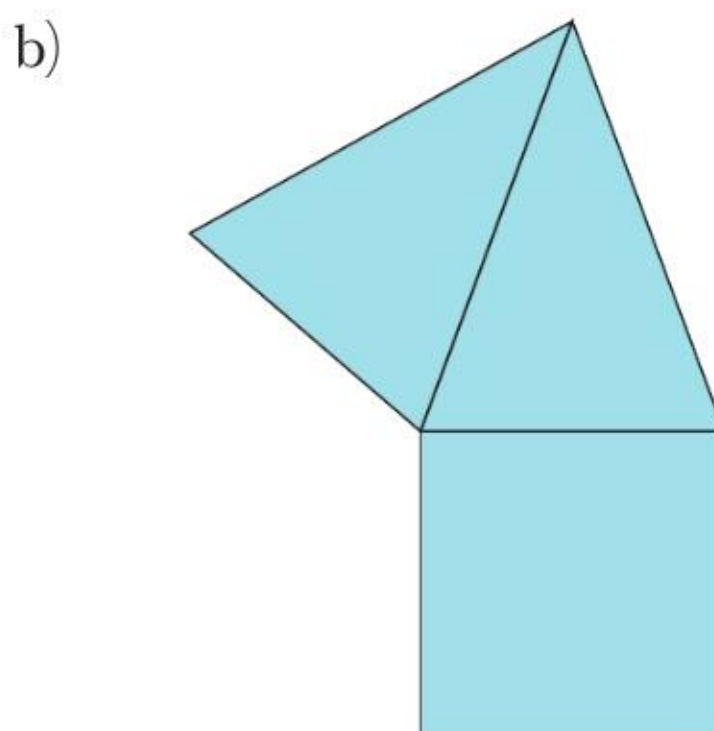
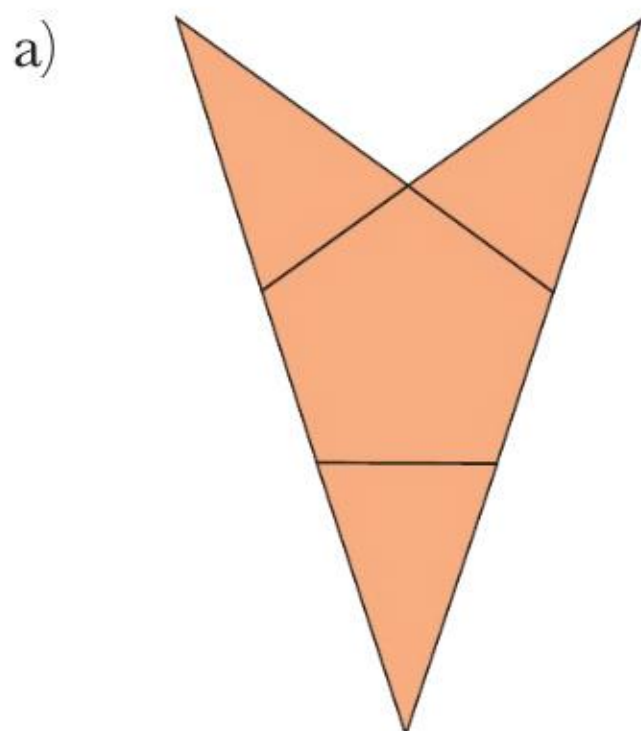
Zadania

- Na rysunku obok jest widoczna siatka ostrosłupa o podstawie w kształcie prostokąta. Na sztywnej kartce papieru narysuj tę siatkę w skali 2 : 1. Dorysuj skrzydełka, wytnij i sklej model ostrosłupa.



- Narysuj siatkę ostrosłupa, który ma:
- a) 8 krawędzi, b) 4 wierzchołki.

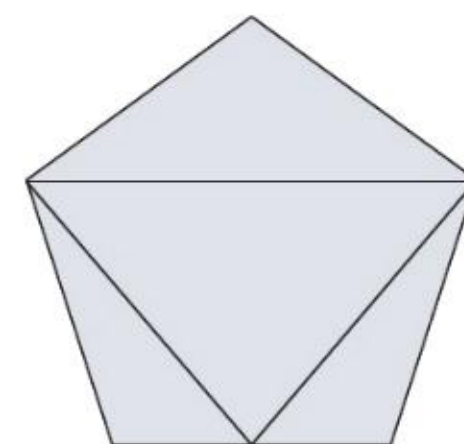
- Ile ścian należy dorysować, aby powstała siatka ostrosłupa?



Ciekawe!

Dany jest pięciokąt o równych bokach i równych kątach. Jeżeli połączymy środek jego boku z dwoma wierzchołkami i wierzchołki te również połączymy (jak na rysunku obok), to otrzymamy nietypową, interesującą siatkę ostrosłupa.

Siatkę ostrosłupa można też narysować, zaczynając od kwadratu lub od trójkąta równobocznego.



- Narysuj siatkę według instrukcji. Pokoloruj figurę, która po złożeniu z tej siatki ostrosłupa, będzie jego podstawą.
- a) Narysuj kwadrat $ABCD$. Zaznacz punkt E , który jest środkiem boku AB , i punkt F , który jest środkiem boku BC . Narysuj odcinki: EF , ED i FD .
- b) Narysuj trójkąt równoboczny. Połącz trzema odcinkami środki jego boków.



Pięciokąt o równych bokach i równych kątach można otrzymać, rysując łamaną zamkniętą, której każde dwa sąsiednie boki tworzą kąt o mierze 108° .

6.7 Walec, stożek, kula

Podejmij temat

Mówiłaś, że nie lubisz geometrii. A lody lubisz? A sok pomarańczowy, który masz w szklance? A te ciastka – bajaderki?

Dlaczego pytasz? Co one mają wspólnego z geometrią?



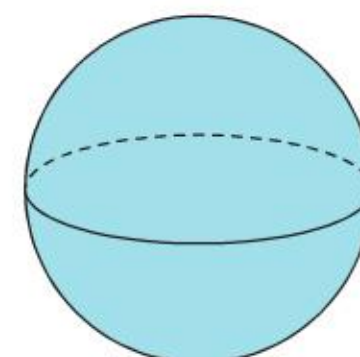
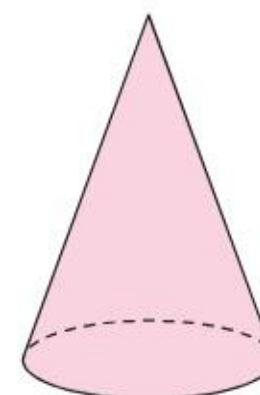
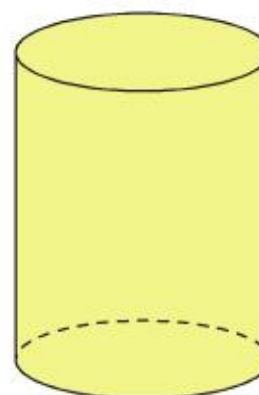
To, że szklanka, ciastko i wafelek mają kształty pewnych brył geometrycznych. Na pewno będziesz się o nich niedługo uczyć.

Czy to, co widzisz na ilustracji, przypomina ci kształtem poznane wcześniej bryły? Co wspólnego z graniastopami i ostrosłupami ma szklanka, rożek i bajaderka? A co je różni od tych brył?

To, co widzisz na zdjęciach obok, prawdopodobnie często masz okazję zobaczyć w swoim otoczeniu. Różne przedmioty i produkty mają kształty brył geometrycznych.

Rysunki tych brył zamieszczono obok.

Nazywamy je **bryłami obrotowymi**, ponieważ powstają przez obrót pewnej figury płaskiej wokół pewnej prostej.



walec

stożek

kula

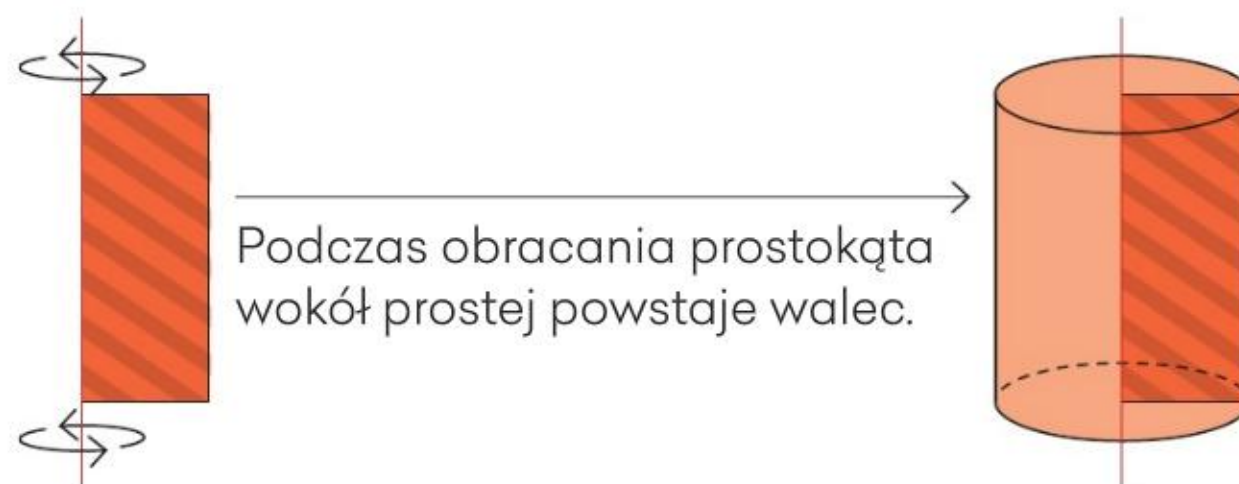
Przykład 1

Postaw monetę na jej brzegu (przytrzymując ją dwoma palcami), a następnie wprowadź ją w ruch, by samodzielnie się obracała. Jaką bryłę widzisz?



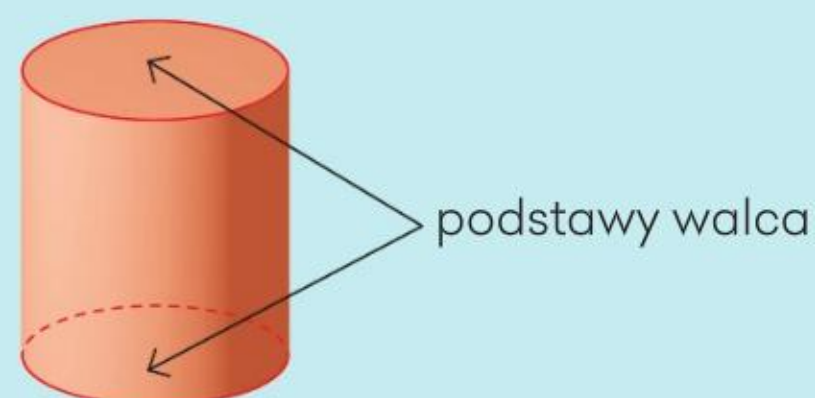
Walec jest bryłą obrotową, ponieważ powstaje przez obrót prostokąta.

Aby wyobrazić sobie, w jaki sposób powstaje walec, wystarczy do jednego boku sztywnej kartki przymocować patyczek, a następnie szybko nim obracać.



Walec to bryła, która powstaje przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jeden z jego boków.

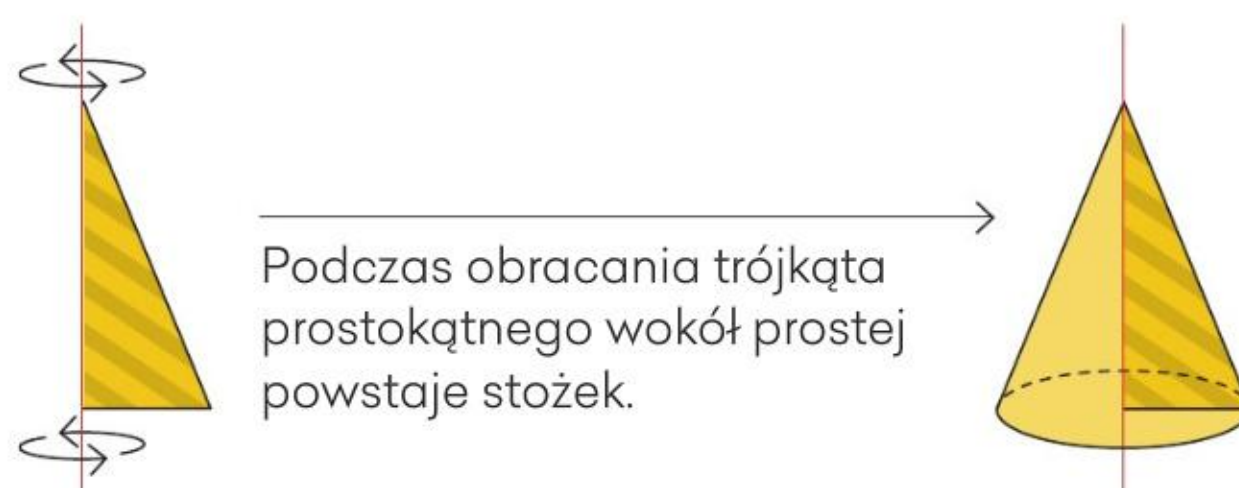
Walec ma dwie **podstawy**, które są jednakowymi kołami.



1. Wymień co najmniej trzy przedmioty o kształcie walca, które możesz dostrzec w swoim otoczeniu.
2. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.
 - a) Podstawą walca może być dowolna figura płaska.
 - b) Walec ma trzy ściany boczne.
 - c) Walec może powstać przez obrót kwadratu wokół jednego z jego boków.
 - d) Walec może mieć tylko jedną podstawę.
 - e) Podstawami walca są okręgi.

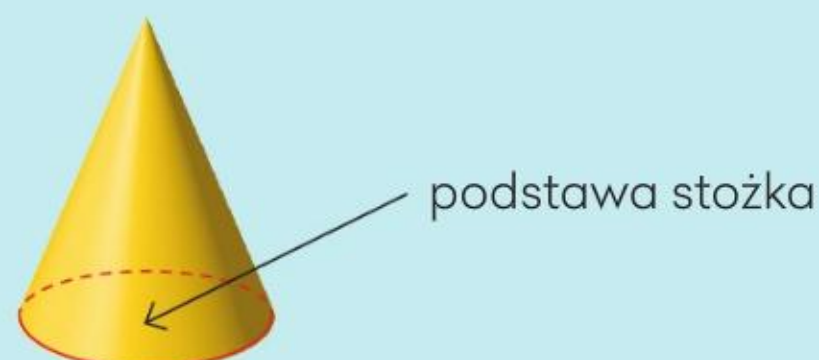
Stożek jest bryłą obrotową, ponieważ powstaje przez obrót trójkąta prostokątnego.

Aby wyobrazić sobie, w jaki sposób powstaje stożek, wystarczy wyciąć ze sztywnej kartki trójkąt prostokątny, do jednej z przyprostokątnych przymocować patyczek, a następnie szybko nim obracać.



Stożek to bryła, która powstaje przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej jedną z jego przyprostokątnych.

Stożek ma jedną **podstawę** będącą kołem.



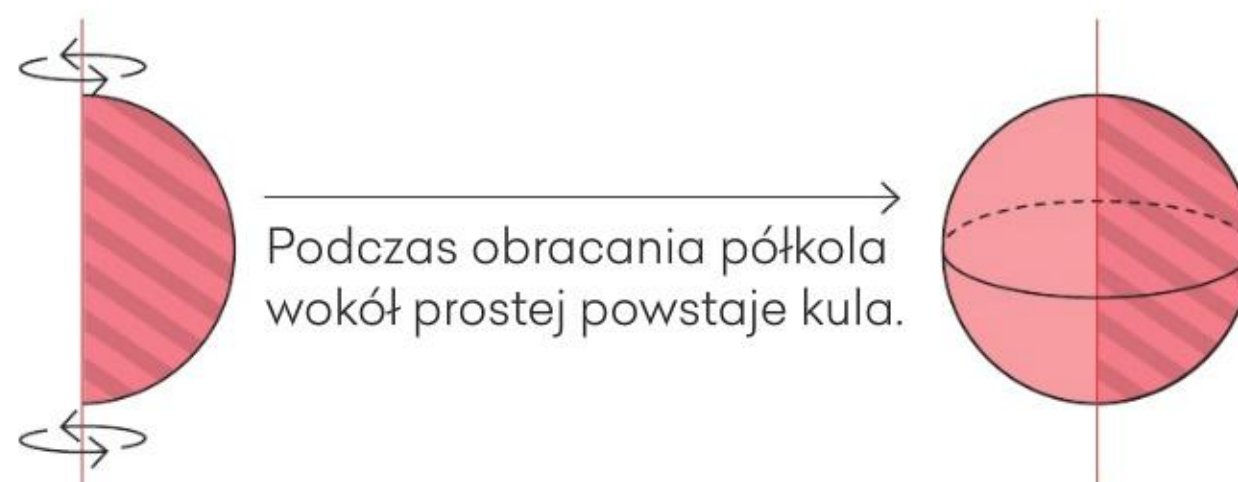
3. Wymień co najmniej 3 przedmioty o kształcie stożka, które możesz dostrzec w swoim otoczeniu.
4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.
- Podstawą stożka może być dowolna figura płaska.
 - Stożek ma dwie ściany boczne.
 - Stożek może powstać przez obrót trójkąta równobocznego dookoła jednego z boków.
 - Podstawą stożka jest koło.
 - Ścianami bocznymi stożka są trójkąty.



A ja znam prostszy sposób na powstanie stożka! Bez patyczka. Wystarczy obracać ekierkę dookoła jednej z przyprostokątnych.

Kula jest bryłą obrotową, ponieważ powstaje przez obrót półkola (lub koła).

Aby wyobrazić sobie, w jaki sposób powstaje kula, wystarczy wyciąć ze sztywnej kartki półkole, wzdłuż średnicy przymocować patyczek, a następnie szybko nim obracać.



Kula to bryła, która powstaje przez obrót półkola (lub koła) wokół prostej zawierającej jego średnicę.



Aby określić wymiary walca i stożka, należy podać promień podstawy i wysokość, a w przypadku kuli – jej promień.

5. Wymień co najmniej 3 przedmioty o kształcie kuli, które możesz dostrzec w swoim otoczeniu.
6. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.
- Kula to bryła, która nie ma podstaw.
 - Kula powstaje przez obrót okręgu.
 - Kula ma nieskończenie wiele ścian bocznych.
 - Kula może powstać przez obrót kąta półpełnego dookoła prostej zawierającej ramiona kąta.
 - Kula nie jest figurą płaską.

Więcej na temat

Istnieje przyrząd służący do demonstrowania, w jaki sposób powstają różne bryły obrotowe.

Zasada jego działania jest następująca. Białą ramkę, która jest konturem pewnej figury płaskiej, umieszcza się w statywie. Po włączeniu zasilania ramka obraca się z dużą szybkością i na ciemnym tle tworzy wyraźny obraz bryły.



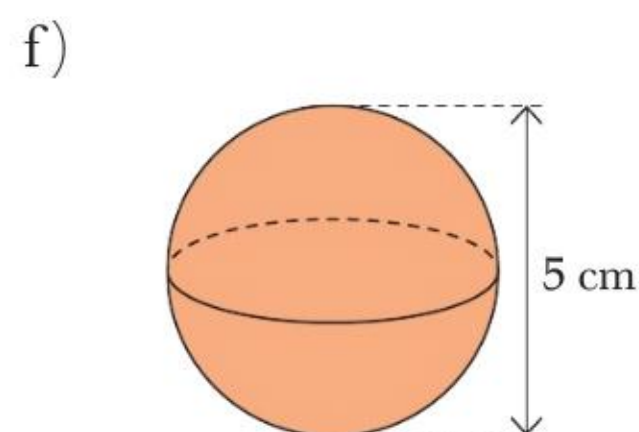
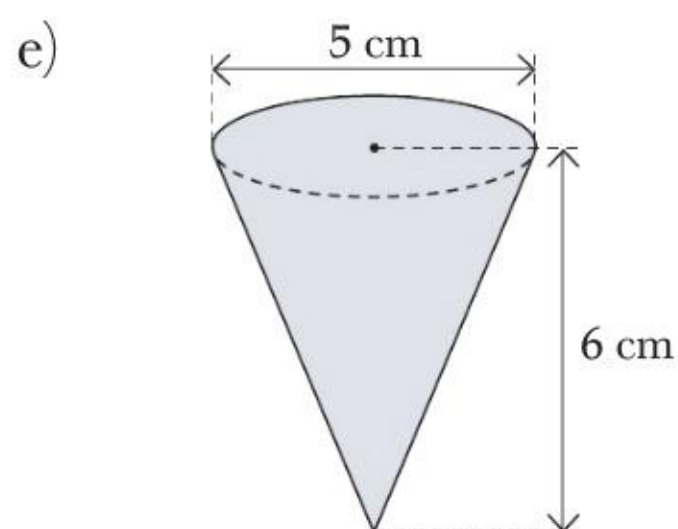
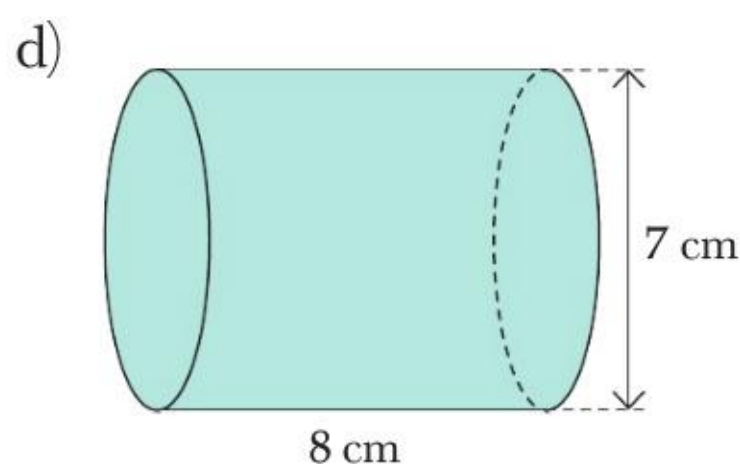
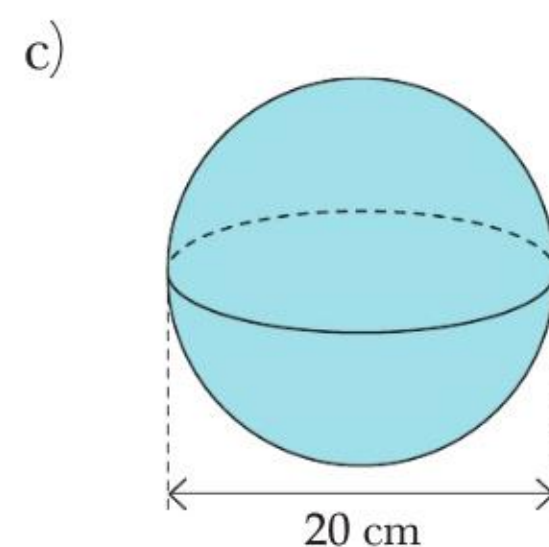
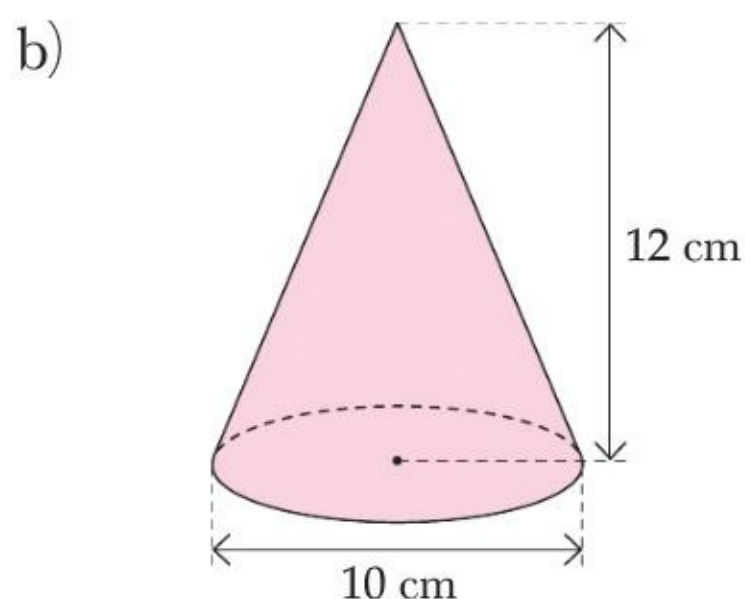
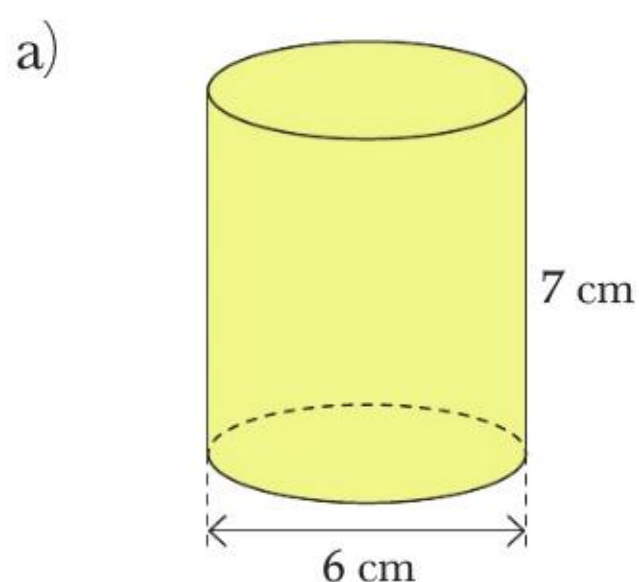
7. Jaki kształt miały ramki, z których powstały obrazy brył widoczne na zdjęciach obok?

Zadania

● Kształty jakich brył widzisz na zdjęciu?

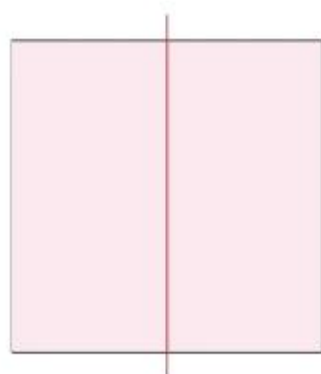


- Kształt stożka może mieć
A. termos. B. świeca. C. taboret. D. stojąca doniczka.
- Kształtu walca **nie** może mieć
A. rura. B. garnek. C. lejek. D. słoik.
- Na rysunku jest pokazany model bryły wraz z wymiarami. W wyniku obrotu jakiej figury powstała ta bryła? Podaj wymiary tej figury.

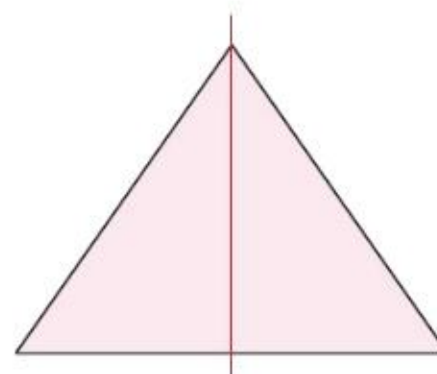


- Naskicuj bryłę, która powstanie przez obrót:

- prostokąta o wymiarach $7\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ dookoła prostej zawierającej dłuższy bok,
- trójkąta prostokątnego o bokach długości 6 cm, 8 cm, 10 cm dookoła prostej zawierającej krótszą przyprostokątną,
- kwadratu o boku długości 8 cm wokół prostej przechodzącej przez środki przeciwległych boków,



- koła o średnicy mającej 20 cm dookoła prostej zawierającej tę średnicę,
- trapezu równoramiennego o podstawach długości 10 cm i 6 cm oraz wysokości 3 cm dookoła osi symetrii trapezu,
- trójkąta równoramiennego o podstawie długości 7 cm i wysokości 5 cm dookoła prostej zawierającej tę wysokość.



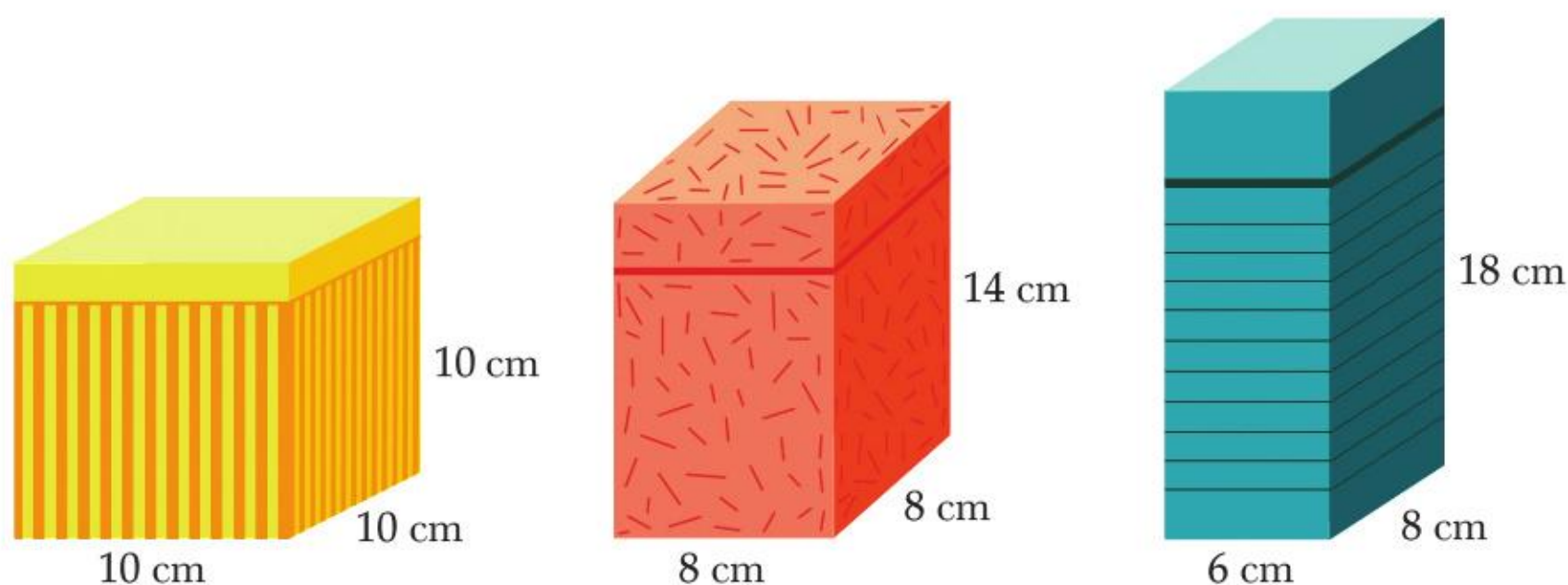
Podaj wymiary otrzymanych brył.

6.8 Objętość. Jednostki objętości

Podejmij temat

Marta chciała dać mamie na herbatę największe ze swoich pudełek. Pierwsze było najniższe, ale też najszersze. Trzecie najwyższe, ale i najwęższe...

Dziewczynka zastanawiała się, jak sprawdzić, w którym zmieści się najwięcej herbaty. Pożyczyła od brata całe opakowanie klocków. Wszystkie miały sześcienny kształt oraz jednakową wielkość i było ich bardzo dużo.



Marta poukładała klocki w pudełkach tak, że wypełniły szczelnie całe ich wnętrza, i policzyła, że w prostopadłościanie o wymiarach:

- $10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$
– zmieściło się 125 klocków,
- $8\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 14\text{ cm}$
– zmieściło się 112 klocków,
- $6\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 18\text{ cm}$
– zmieściło się 108 klocków.



Czy potrafisz wytłumaczyć, w jaki sposób Marta oceniła wielkość pudełek? Które z nich okazało się największe?

Już wiem, które jest największe!



Aby określić wielkość prostopadłościanu, nie wystarczy podać jego długość, szerokość i wysokość. Nie wystarczy też obliczyć pole jego powierzchni. Musimy określić, ile można byłoby włożyć (wsypać, wlać) czegoś do prostopadłościennego pojemnika o takiej samej wielkości, czyli jaką miałby on **pojemność**.

Pudełka z *Podejmij temat* zostały wypełnione sześcianami o krawędzi długości 2 cm. Były one jednakowe i dlatego można było za ich pomocą porównać pojemność pudełek.

Pudełka wypełnione sześcianami możemy uważać za prostopadłościany (bo są pełne w środku). Wielkość każdego z nich nie musi być określana ze względu na wnętrze. Można po prostu ocenić, ile miejsca zajmuje prostopadłościan w przestrzeni, czyli jaka jest jego **objętość**. Liczba określająca objętość prostopadłościanu jest taka sama, jak liczba określająca pojemność pudełka o takim samym kształcie.

Najczęściej do obliczania objętości (lub pojemności) wykorzystuje się nie klocki – zabawki, jakie zostały opisane w *Podejmij temat*, ale sześciany o ustalonych wymiarach. Nazywamy je sześcianami jednostkowymi.

Objętości sześcianów o krawędziach długości 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 m i 1 km to **jednostki objętości** (oraz **jednostki pojemności**). Mają one ustalone nazwy:

1 mm³ (czytamy: milimetr sześcienny) to objętość sześcianu o krawędzi długości 1 mm,

1 cm³ (czytamy: centymetr sześcienny) to objętość sześcianu o krawędzi długości 1 cm,

1 dm³ (czytamy: decymetr sześcienny) to objętość sześcianu o krawędzi długości 1 dm,

1 m³ (czytamy: metr sześcienny) to objętość sześcianu o krawędzi długości 1 m,

1 km³ (czytamy: kilometr sześcienny) to objętość sześcianu o krawędzi długości 1 km.

W życiu codziennym częściej podajemy pojemność niż objętość. Mówimy o pojemności szklanki, butelki czy kartonu z mlekiem. Pojemność oznacza wówczas wielkość wnętrza naczynia czy opakowania, czyli objętość tego wnętrza.

Nie kupujemy jednak mleka, podając jego ilość w centymetrach sześciennych, czy napoju – w decymetrach sześciennych. Zwykle w takich przypadkach używamy jednostek, które wskazują te same wielkości, ale mają swoje zwyczajowe nazwy.

Zwyczajowo używane jednostki pojemności to: **litr** (l), **mililitr** (ml) i **hektolitr** (hl).

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$$

$$1 \text{ l} = 1000 \text{ ml}$$

$$1 \text{ hl} = 100 \text{ dm}^3$$

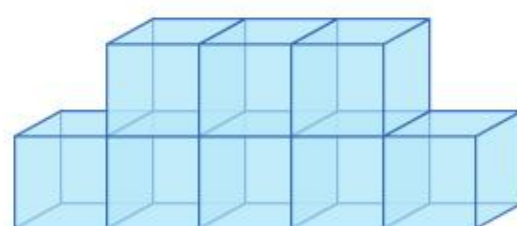
$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$$

1. Rysunek przedstawia bryłę wypełnioną sześcianami jednostkowymi. Z ilu takich sześcianów składa się ta bryła?

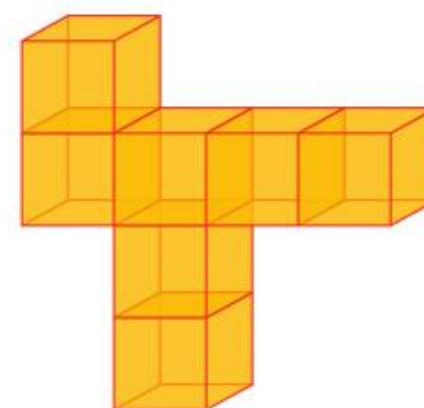
a)



b)

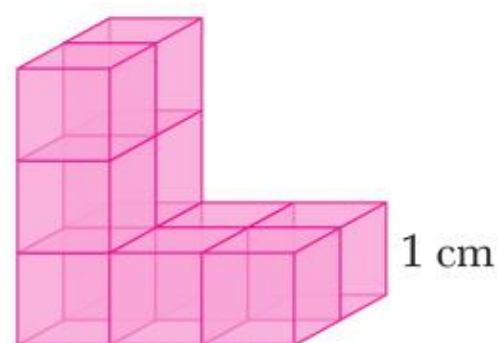


c)

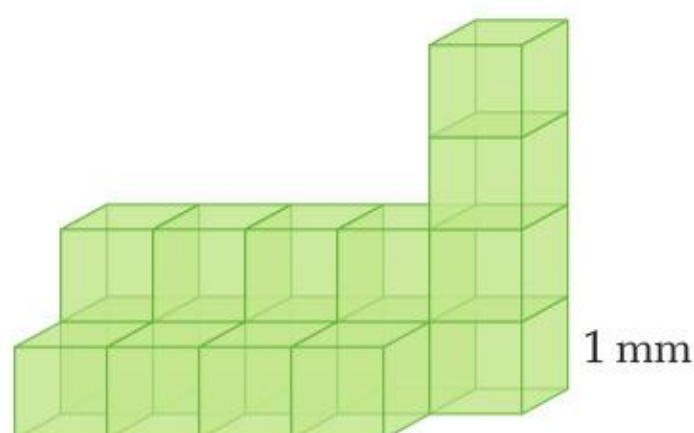


2. Narysowana bryła jest zbudowana z jednakowych sześcianów. Jaka jest jej objętość?

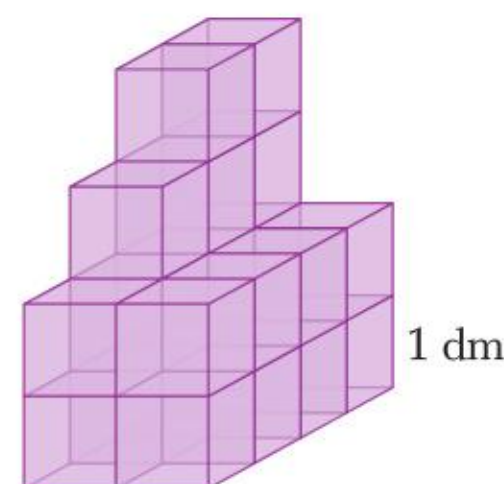
a)



b)



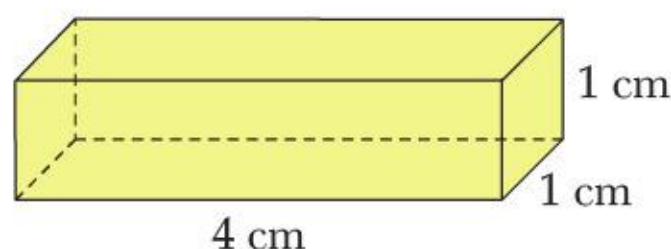
c)



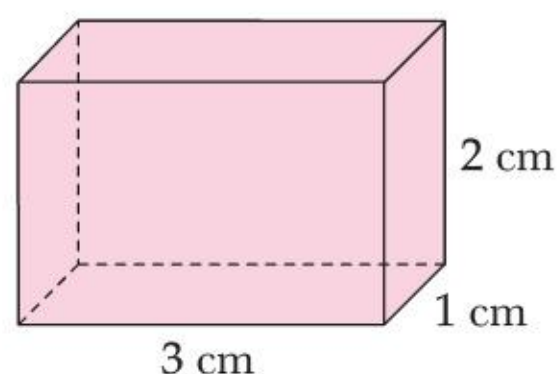
3. Sprawdź na opakowaniach kilku artykułów spożywczych, w jakich jednostkach – litrach, mililitrach, centymetrach sześciennych czy decymetrach sześciennych – podawana jest ich pojemność.

4. Ilość sześcianów o krawędzi długości 1 cm można wypełnić prostopadłościan o wymiarach podanych na rysunku?

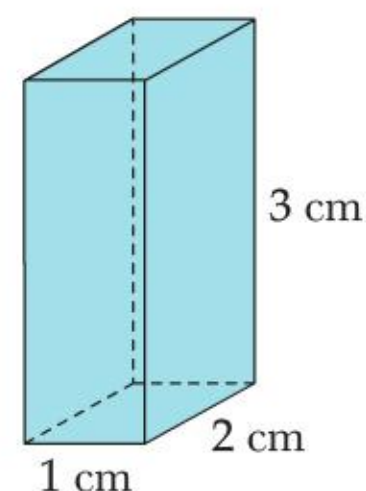
a)



b)



c)



Między jednostkami objętości zachodzą pewne związki, analogicznie jak między jednostkami długości czy pola.

Przykład 1

Obliczmy, ile centymetrów sześciennych mieści się w 1 dm^3 .

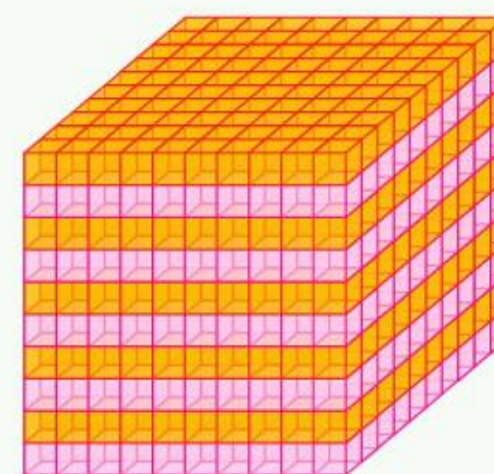
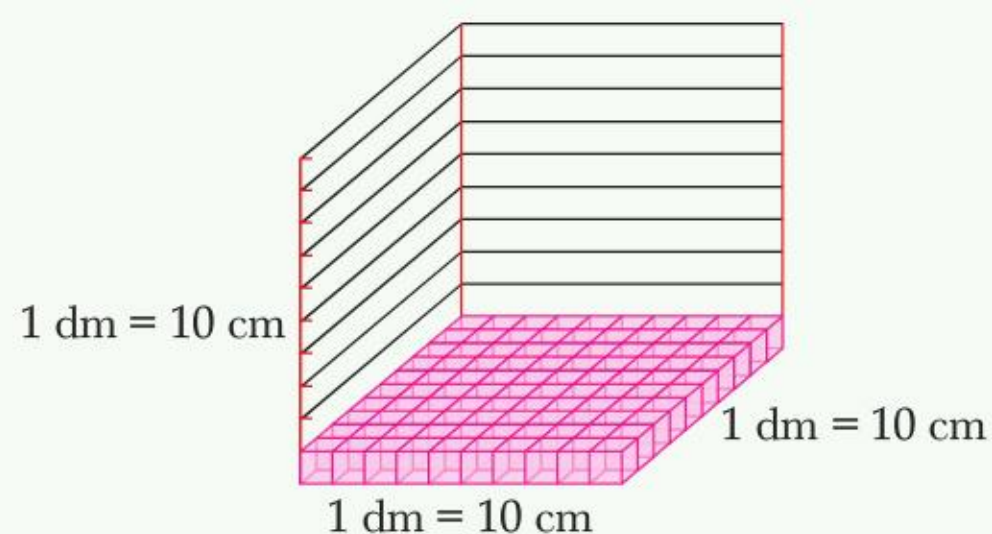
Wyobraźmy sobie papierowy model sześcianu o krawędzi długości 1 dm, czyli sześcian o objętości 1 dm^3 , i małe sześciany o objętości 1 cm^3 . Ile małych sześcianów potrzeba, by dokładnie wypełnić nimi większy sześcian?

Sześciany o objętości 1 cm^3 układamy najpierw na dolnej podstawie sześcianu. Skoro krawędź dużego sześcianu ma 1 dm, to pierwsza warstwa ma wymiary $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$. Składa się więc ze 100 małych sześcianów.

Zatem jedna warstwa ma objętość 100 cm^3 .

Ponieważ w sześcianie o objętości 1 dm^3 zmieści się 10 takich warstw, a w każdej jest 100 cm^3 , więc cały duży sześcian ma objętość $10 \cdot 100 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$.

Zatem $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$.



Podobnie można wskazać zależności między innymi jednostkami objętości (trudno to pokazać na rysunku, więc w tym wypadku trzeba posłużyć się wyobraźnią).

$$1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ km}^3 = 1\,000\,000\,000 \text{ m}^3$$

Zadania

● Z ilu sześciąt o krawędzi długości 1 cm składa się prostopadłościan o podanych wymiarach?

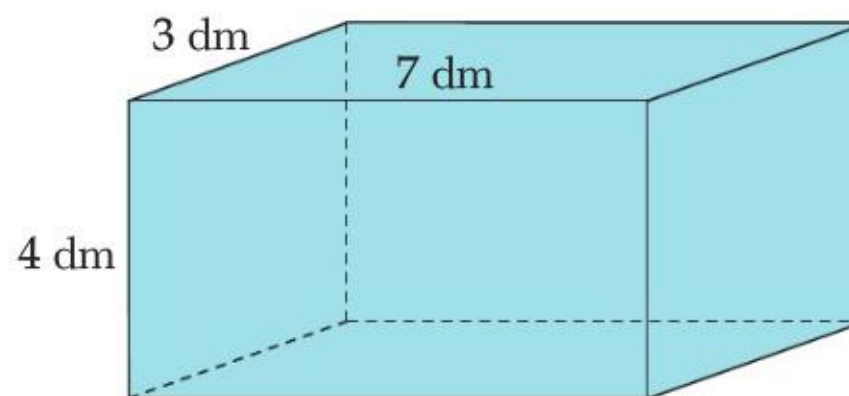
a) $3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$

b) $4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$

c) $3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$

d) $4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$

● Ile sześciąt o krawędzi długości 1 dm wypełniłoby akwarium przedstawione na rysunku obok?



● Ile kartoników napoju o pojemności 200 ml należy wlać do litrowego dzbanka, aby wypełnić go całkowicie?

● Zapisz pojemności podane na opakowaniach w decymetrach sześciennych.



● Dopasuj objętość lub pojemność do odpowiedniego rysunku.

I.



II.



III.



IV.



V.



VI.



VII.



VIII.



10 dm^3

135 hl

16 km^3

1,5 l

250 ml

200 l

1 dm^3

3 cm^3

● Wiadomo, że 1 ml wody waży 1 g. Oblicz, ile waży podana ilość wody.



a) 7 ml

b) 40 ml

c) 800 ml

d) 1000 ml

e) 1 l

6.9 Objętość prostopadłościanu

Podejmij temat



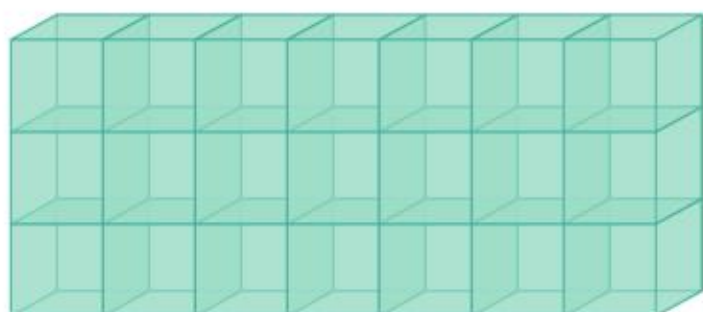
Czy masz pomysł, w jaki sposób dowiedzieć się, ile mleka znajduje się w kartonie? Jak można to obliczyć?



W poprzednim temacie, aby powiedzieć, jaką objętość ma prostopadłościan, opisywano wypełnianie go sześciąciami o danej długości krawędzi. Natomiast teraz poznamy sposób na obliczenie objętości prostopadłościanu bez układania w nim klocków.

1. Skorzystaj z rysunku i odpowiedz na pytanie, ile sześciątów o krawędzi długości 1 cm wypełnia prostopadłościan o podanych wymiarach.

a) $7 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$



b) $5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$



Na rysunku w ćwiczeniu 1 widać wszystkie sześciątne, z których składa się prostopadłościan, dlatego łatwo można je policzyć. Często jednak prostopadłościan jest złożony z kilku takich warstw i wówczas część sześciątów wypełniających prostopadłościan jest niewidoczna.

Ja potrafię sobie wyobrazić każdy prostopadłościan i wypełnienie go sześciąciami też.

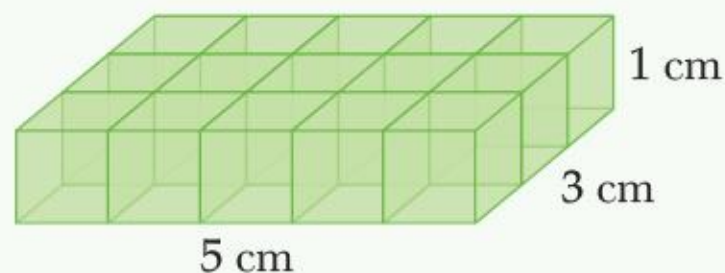


A taki o wymiarach $1 \text{ m} \times 1 \text{ dm} \times 1 \text{ cm}$? Chyba trudno by było...

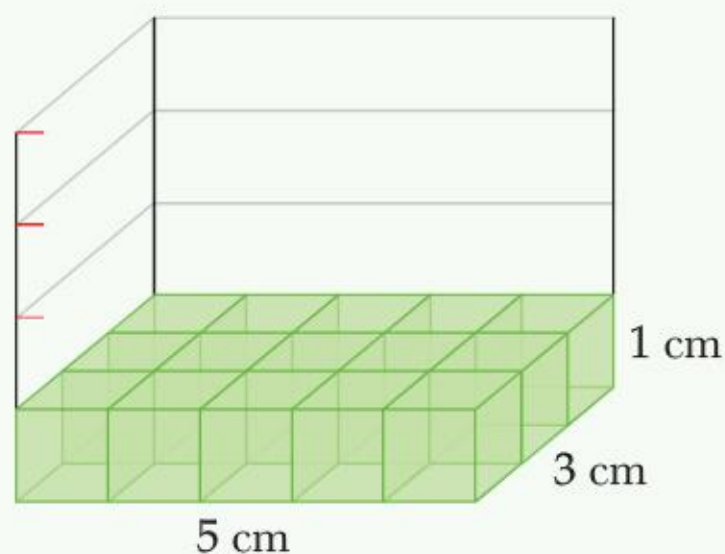


Przykład 1

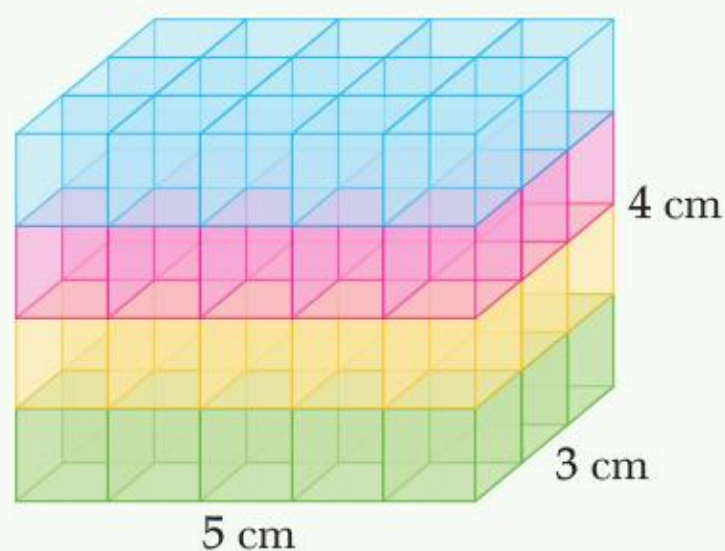
Obliczmy objętość prostopadłościanu o wymiarach $5\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 4\text{ cm}$.



Tak wygląda pierwsza warstwa sześciątów o krawędzi długości 1 cm ułożona na samym spodzie prostopadłościanu. Składa się ona z $5 \cdot 3 = 15$ sześciątów.



Ponieważ wysokość prostopadłościanu wynosi 4 cm, trzeba ułożyć jeszcze 3 takie warstwy (razem będą 4 warstwy).



Na cały prostopadłościan składają się 4 warstwy. W każdej warstwie jest tyle samo sześciątów. Aby obliczyć, ile jest wszystkich sześciątów, wystarczy wykonać poniższe mnożenie.

$$\begin{array}{c} 5 \cdot 3 \cdot 4 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{liczba sześciątów} \quad \text{liczba warstw} \\ \text{w jednej warstwie} \end{array}$$

Liczby 5, 3 i 4 to wymiary (w centymetrach) prostopadłościanu, inaczej: długość, szerokość i wysokość. Aby zatem obliczyć objętość prostopadłościanu, należy pomnożyć długości krawędzi wskazujących wymiary prostopadłościanu.

Objętość prostopadłościanu jest zatem równa $5 \cdot 3 \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60\text{ (cm}^3\text{)}$.

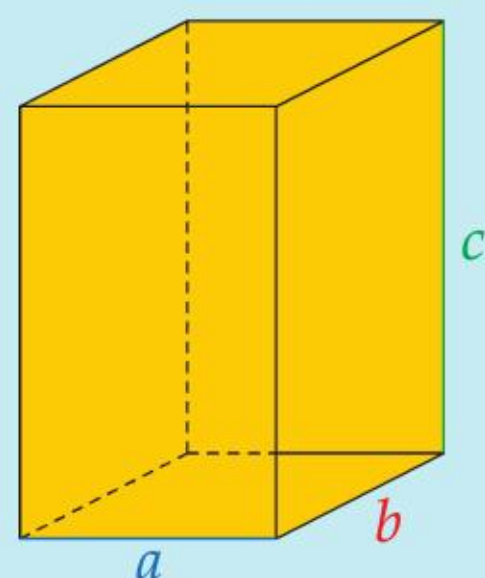
2. Jaka jest objętość prostopadłościanu o wymiarach $3\text{ cm} \times 2\text{ cm} \times 4\text{ cm}$?

Objętość – czyli liczba sześciątów jednostkowych w prostopadłościanie. Wiesz, jak to obliczyć?



To proste – liczysz $3 \cdot 2$, czyli ile jest sześciątów w jednej warstwie, i jeszcze mnożysz przez 4, czyli przez liczbę warstw.

Objętość prostopadłościanu jest iloczynem długości jego trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.



Jeżeli prostopadłościan ma wymiary $a \times b \times c$, to jego objętość V obliczymy według poniższego wzoru.

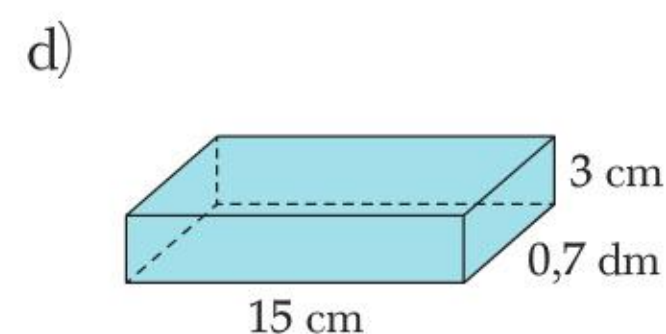
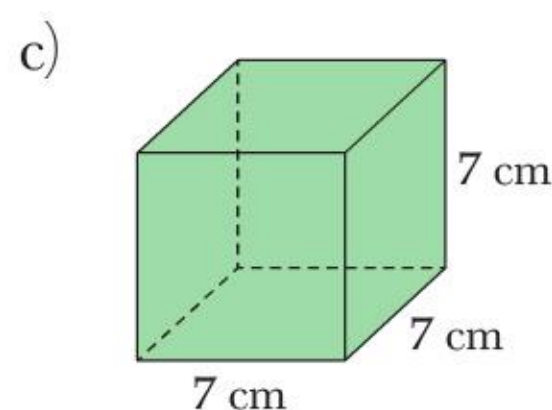
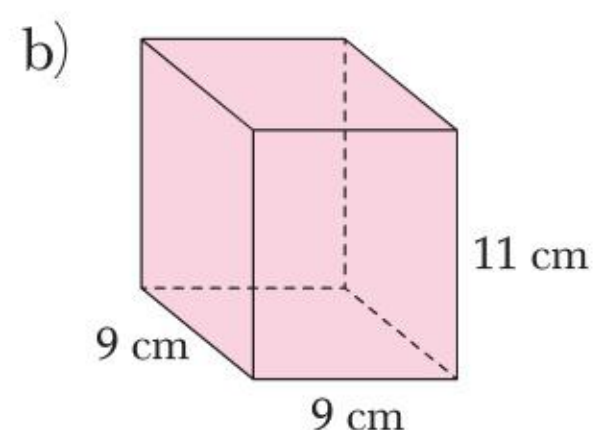
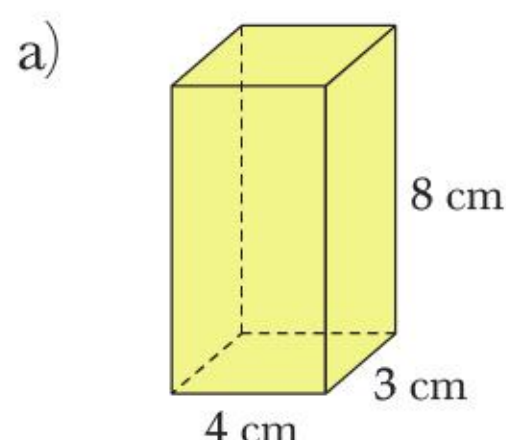
$$V = a \cdot b \cdot c$$

objętość długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka



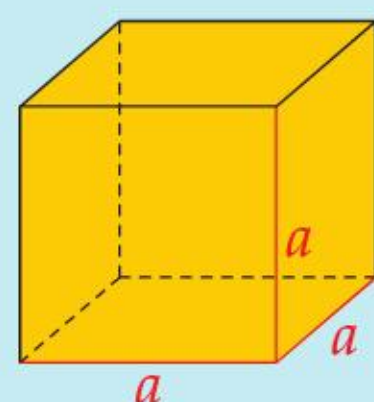
Podczas obliczania objętości należy pamiętać, aby długości krawędzi były wyrażone w jednakowych jednostkach.

3. Oblicz objętość prostopadłościanu.



W punkcie c) ćwiczenia 3 obliczyliśmy objętość sześcianu. Ponieważ sześcian jest prostopadłościanem, jego objętość można obliczać według wzoru $V = a \cdot b \cdot c$. Skoro jednak sześcian ma wszystkie krawędzie równej długości, jego objętość możemy zapisać, używając tylko jednej litery.

Objętość sześcianu obliczamy według wzoru:



$$V = a \cdot a \cdot a$$

czyli

$$V = a^3$$

objętość długość krawędzi

Tu na pewno nie będzie problemu z różnymi jednostkami.



4. Oblicz objętość sześcianu o krawędzi, która ma podaną długość.

a) 5 cm

b) 1,4 cm

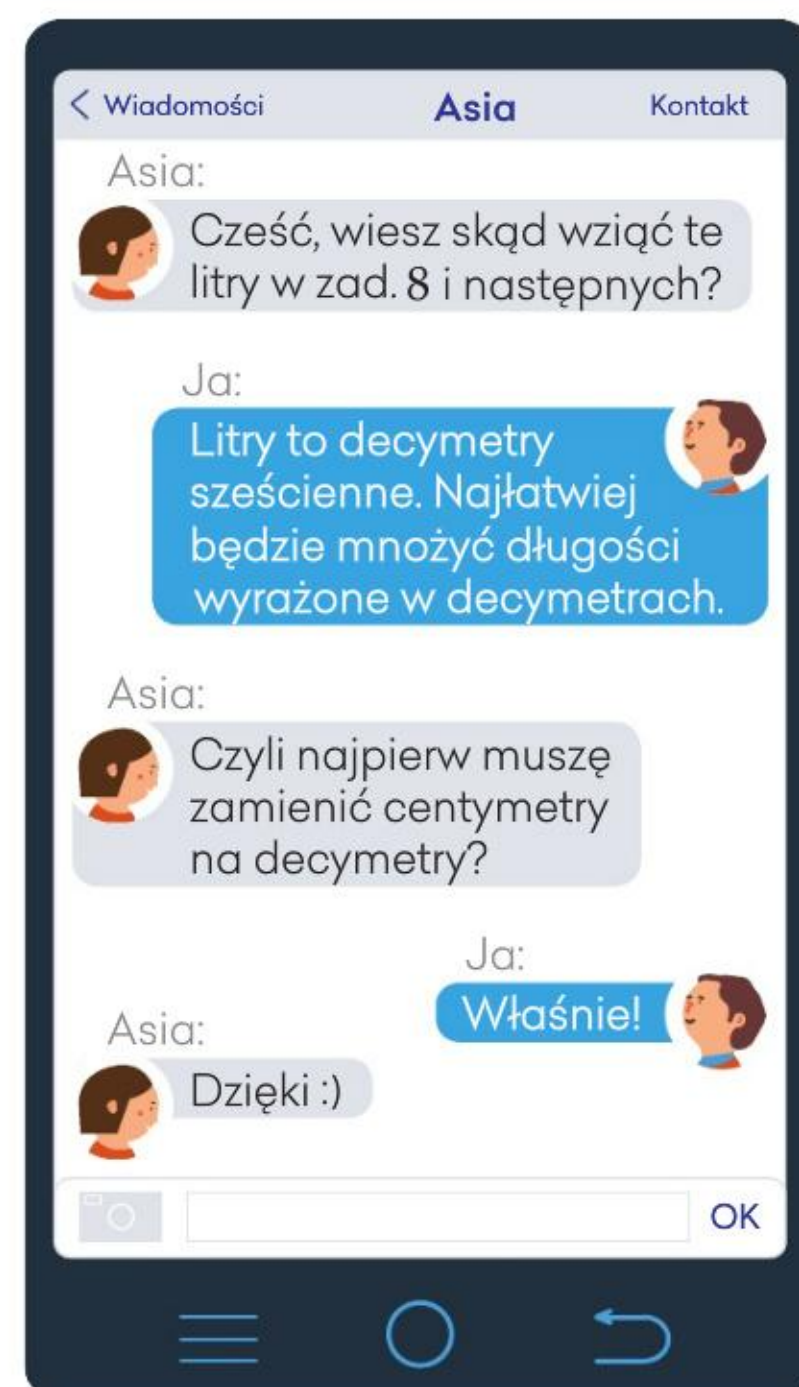
c) $1\frac{1}{5}$ m

d) 200 mm

5. Zapisz wzór, według którego można obliczyć objętość prostopadłościanu, który nie jest sześcianem, a jego podstawą jest kwadrat.

Zadania

- Kostka masła jest prostopadłościanem o wymiarach $9\text{ cm} \times 7\text{ cm} \times 3\text{ cm}$. Oblicz jej objętość.
- Dane są trzy prostopadłościany o następujących wymiarach:
I. $5\text{ dm} \times 5\text{ dm} \times 5\text{ dm}$, II. $4\text{ dm} \times 4\text{ dm} \times 7\text{ dm}$, III. $5\text{ dm} \times 4\text{ dm} \times 6\text{ dm}$.
Zauważ, że mają one jednakową sumę długości krawędzi. Czy mają jednakową objętość? Jeśli nie, to ustal, który z nich ma największą objętość, a który najmniejszą.
- Trzy krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka pewnego prostopadłościanu mają długości: 9 cm , $0,8\text{ dm}$, 23 mm . Oblicz jego objętość. Odpowiedź podaj w centymetrach sześciennych.
- Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku długości 6 cm . Objętość tego prostopadłościanu wynosi 288 cm^3 . Jaka jest jego wysokość?
- Krawędzie podstawy prostopadłościanu mają długości 8 cm i 4 cm . Jaka jest wysokość tego prostopadłościanu, jeżeli jego objętość wynosi 352 cm^3 ?
- Drewniany klocek jest prostopadłościanem o wymiarach $4\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 5\text{ cm}$. Ile takich klocków potrzeba, by wypełnić nimi szczelnie prostopadłościenną pudełko, którego dno jest kwadratem o boku długości 24 cm , a wysokość wynosi 30 cm ?
- Jaką długość ma krawędź sześcienu o objętości 216 cm^3 ?
- Tata Janka kupił akwarium w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $60\text{ cm} \times 45\text{ cm} \times 40\text{ cm}$. Ile maksymalnie litrów wody można wlać do tego akwarium?
- Ile litrów powietrza znajduje się w sali lekcyjnej, która ma kształt prostopadłościanu o wymiarach $8\text{ m} \times 6\text{ m} \times 3,5\text{ m}$?
- Basen ma kształt prostopadłościanu o wymiarach dna $7\text{ m} \times 4,5\text{ m}$ i głębokości 3 m . Ile litrów wody należy wlać do basenu, aby był wypełniony do połowy?
- Do prostopadłościennego akwarium o krawędziach podstawy długości 8 dm i $4,5\text{ dm}$ nalano 144 l wody. Jak wysoki jest poziom wody w akwarium?
- Sprawdź, czy w prostopadłościennym wazonie o wymiarach $8\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 3\text{ dm}$ zmieszczą się 2 l wody.

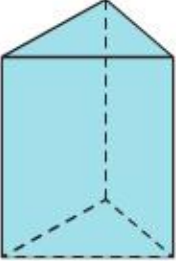
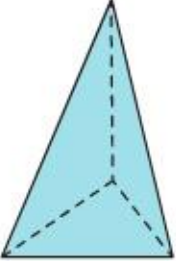
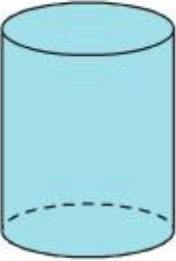
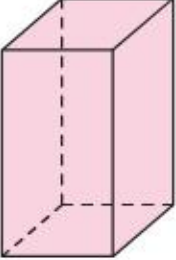
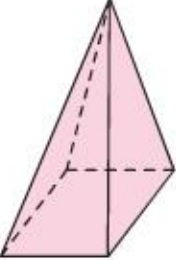
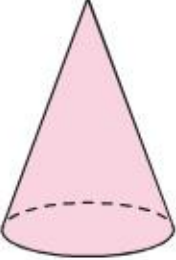
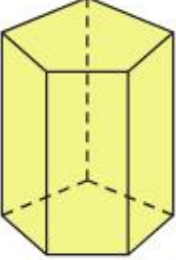
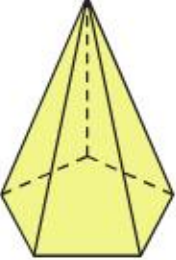


Podsumowanie działu 6

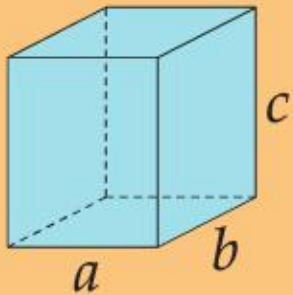
Ważne pojęcia

ostrosłup	wierzchołek ostrosłupa	siatka ostrosłupa	walec	stożek	kula
bryła obrotowa	objętość	pojemność	jednostki objętości	litr	mililitr

Bryły

Graniastosłupy		Ostrosłupy		Bryły obrotowe	
trójkątny		trójkątny		walec	
czworokątny		czworokątny		stożek	
pięciokątny		pięciokątny		kula	
itd.		itd.			

Pole powierzchni i objętość prostopadłościanu



wymiary
 $a \times b \times c$

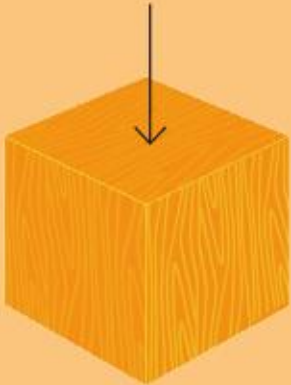
pole powierzchni
 $P = 2ab + 2ac + 2bc$

objętość
 $V = abc$

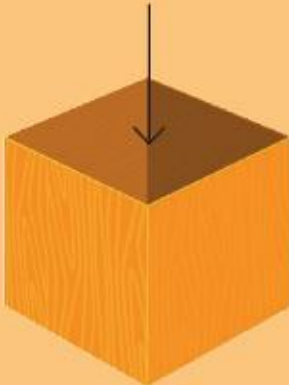
Jednostki objętości i pojemności

1 mm³
1 cm³ = 1 ml (mililitr)
1 dm³ = 1 l (litr)
1 m³ = 1000 l
1 km³

objętość



pojemność



Czy już umiesz?

- 1 Wybierz poprawne dokończenie zdania.

Każdy prostopadłościan ma

- A. 4 ściany, 4 wierzchołki, 12 krawędzi.
C. 6 ścian, 8 wierzchołków, 12 krawędzi.

- B. 6 ścian, 12 wierzchołków, 8 krawędzi.
D. 8 ścian, 4 wierzchołki, 12 krawędzi.

- 2 Dany jest prostopadłościan o wymiarach $5,5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 7,5 \text{ cm}$. Oblicz sumę długości jego wszystkich krawędzi.

- 3 Narysuj siatkę prostopadłościanu o wymiarach $2,5 \text{ cm} \times 15 \text{ mm} \times 0,2 \text{ dm}$.

- 4 Narysuj siatkę sześcianu, którego suma długości krawędzi wynosi 18 cm .

- 5 Narysuj siatkę sześcianu i na narysowanych kwadratach zapisz liczby 1, 2, 3, 4, 5 i 6 tak, aby po złożeniu z tej siatki modelu sześcianu suma liczb na przeciwległych ścianach wynosiła 7.

- 6 Wybierz poprawne dokończenie zdania.

Każdy graniastosłup ma

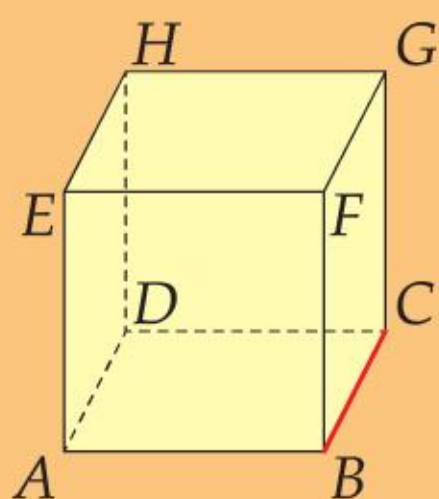
- A. jedną podstawę.
C. dwie jednakowe podstawy.

- B. cztery ściany boczne.
D. jeden wierzchołek.

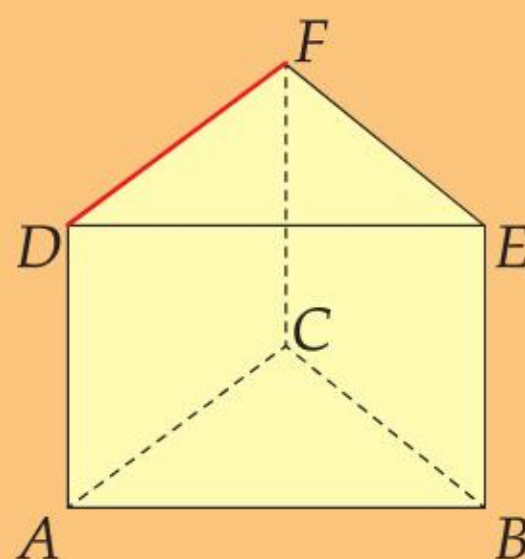
- 7 Które krawędzie graniastosłupa są takiej samej długości jak krawędź zaznaczona kolorem? Zapisz ich oznaczenia literowe.

Uwaga: Podstawami graniastosłupów są kolejno: romb, trójkąt różnoboczny i trapez równoramienny.

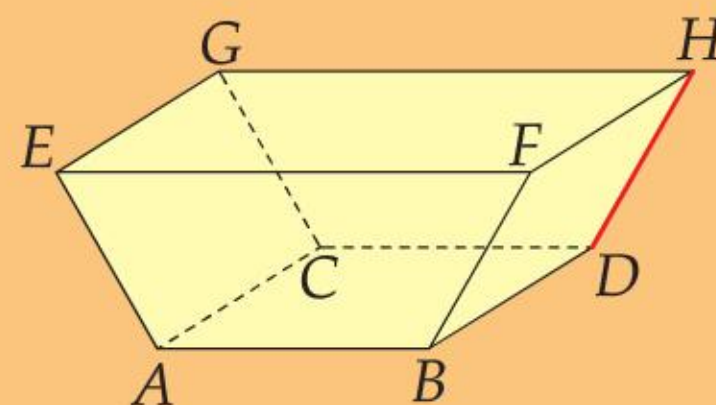
a)



b)



c)



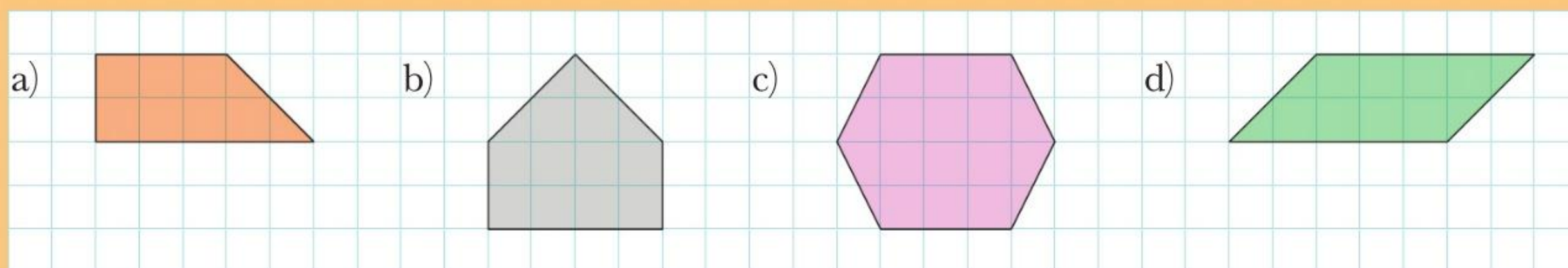
- 8 Czy graniastosłup może mieć:

- a) 16 krawędzi,
d) 6 krawędzi,

- b) 20 wierzchołków,
e) 15 wierzchołków,

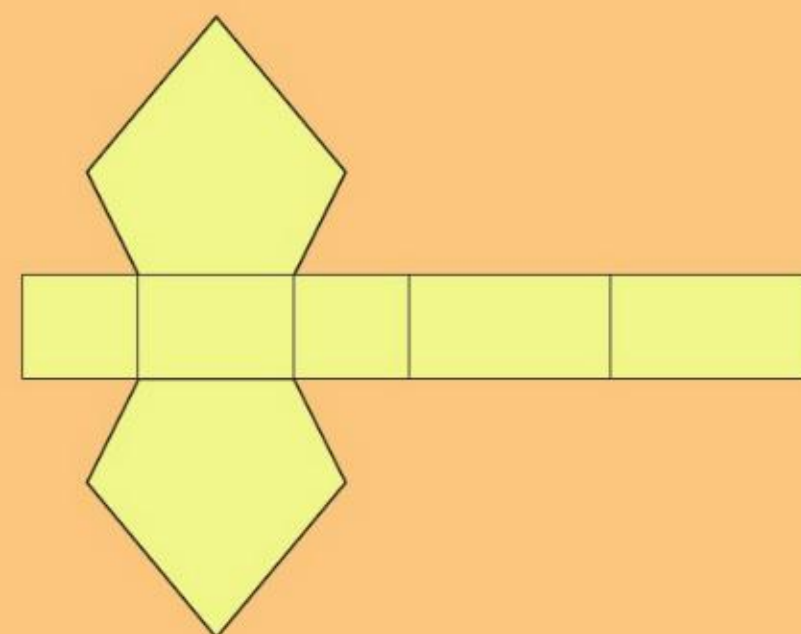
- c) 10 ścian,
f) 21 ścian?

- 9 Narysuj siatkę graniastosłupa o narysowanej podstawie i dowolnej wysokości.



- 10 Czy podstawą graniastosłupa, który ma 8 ścian, jest czworokąt? A jeśli graniastosłup ma 18 krawędzi, to czy jego podstawą jest sześciokąt?

- 11 Ile ścian, ile krawędzi, a ile wierzchołków ma graniastosłup, którego siatka jest narysowana obok?



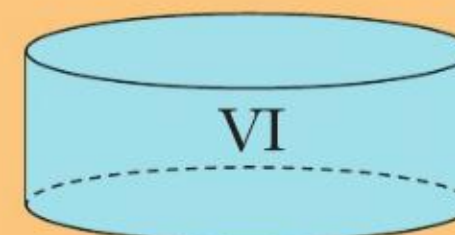
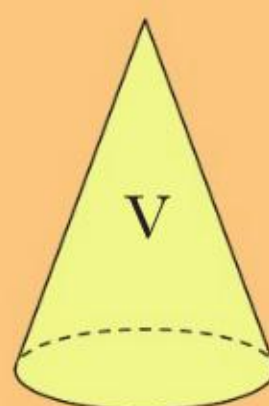
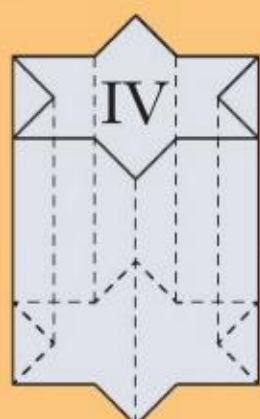
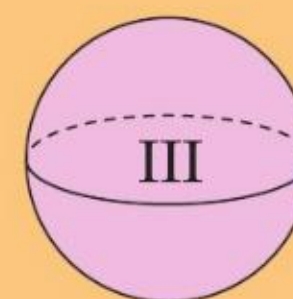
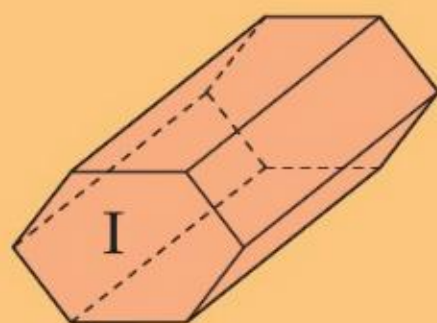
- 12 Ostrosłup ma 18 krawędzi. Jego podstawą jest
 A. sześciokąt. B. dziewięciokąt. C. trójkąt. D. osiemnastokąt.

- 13 Ostrosłup ma 20 wierzchołków. Jego podstawą jest
 A. dziesięciokąt. B. pięciokąt. C. dziewiętnastokąt. D. dwudziestokąt.

- 14 Ostrosłup ma 15 ścian. Jego podstawą jest
 A. pięciokąt. B. dziesięciokąt. C. dwunastokąt. D. czternastokąt.

- 15 Narysuj siatkę ostrosłupa czworokątnego, którego wszystkie krawędzie są równe.

- 16 Które z figur przedstawionych na rysunku to bryły obrotowe?



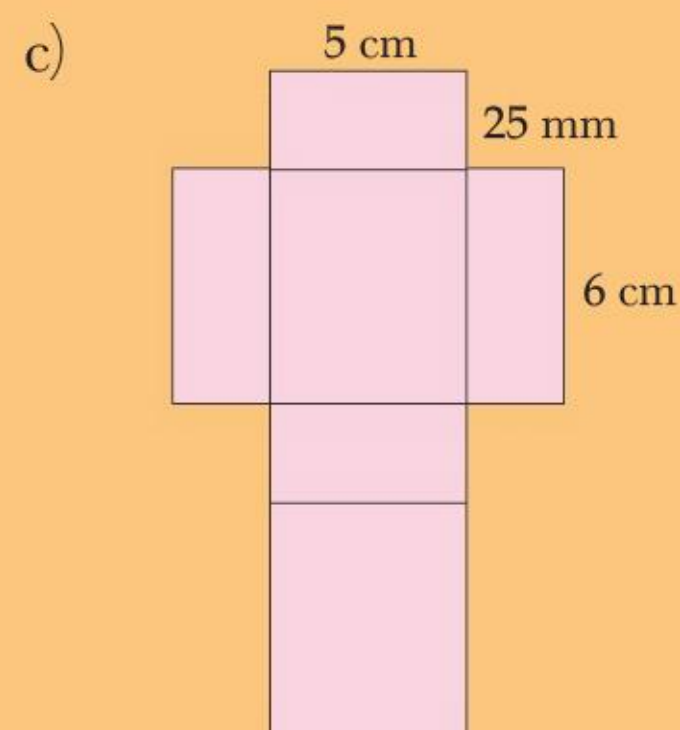
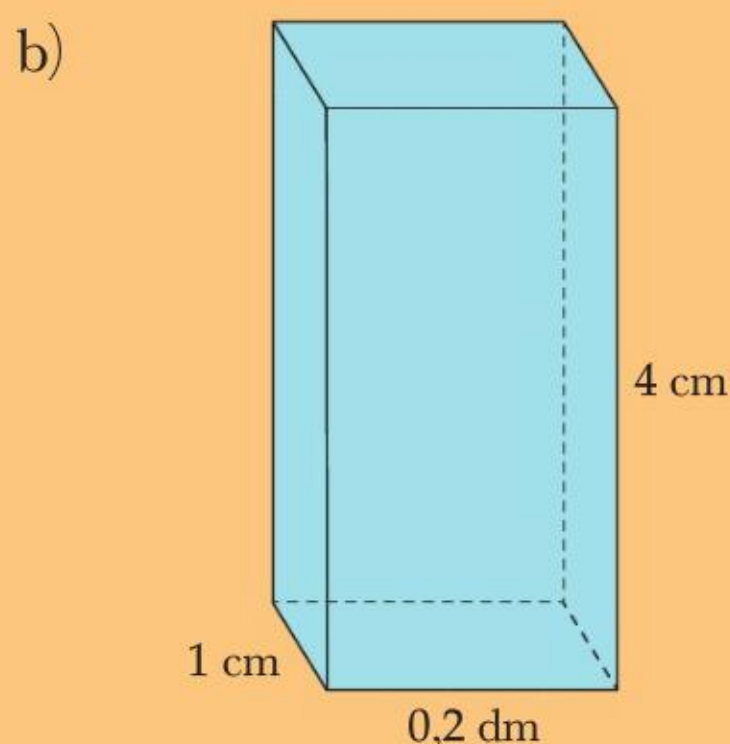
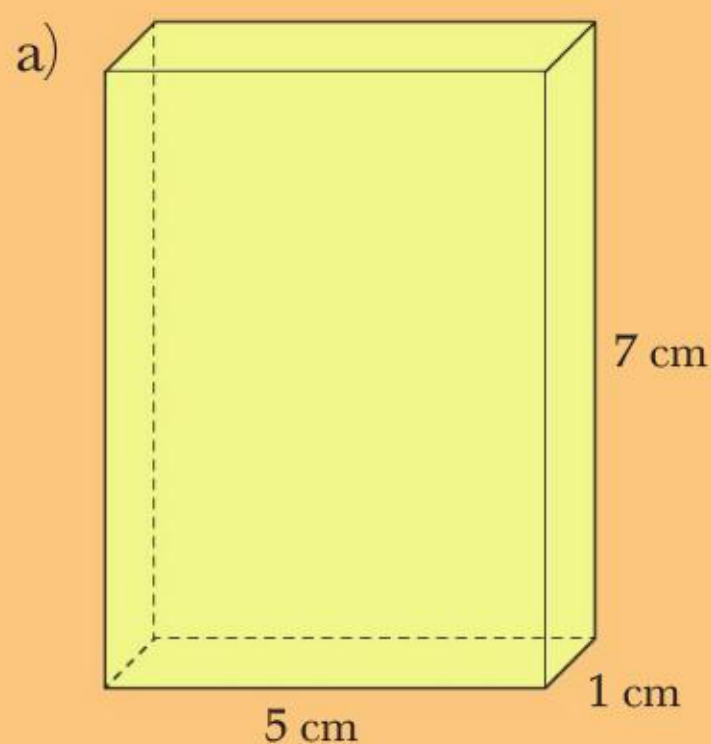
17 Które z poniższych zdań są **fałszywe**? Zmień je na prawdziwe i zapisz.

- a) Podstawą ostrosłupa może być dowolny wielokąt.
- b) Ściany boczne ostrosłupa są dowolnymi wielokątami.
- c) Walec ma dwie podstawy, które są dowolnymi wielokątami.
- d) Kula nie ma podstaw.
- e) Stożek ma dwie podstawy.
- f) Walec powstaje przez obrót trójkąta prostokątnego.
- g) Podstawą graniastoslupa może być tylko dowolny czworokąt.
- h) Prostopadłoscian jest graniastoslupem.

18 Co jest większe: liczba wyrażająca pole powierzchni sześcianu o krawędzi długości 1,2 dm czy liczba wyrażająca jego objętość? Ile razy większa?

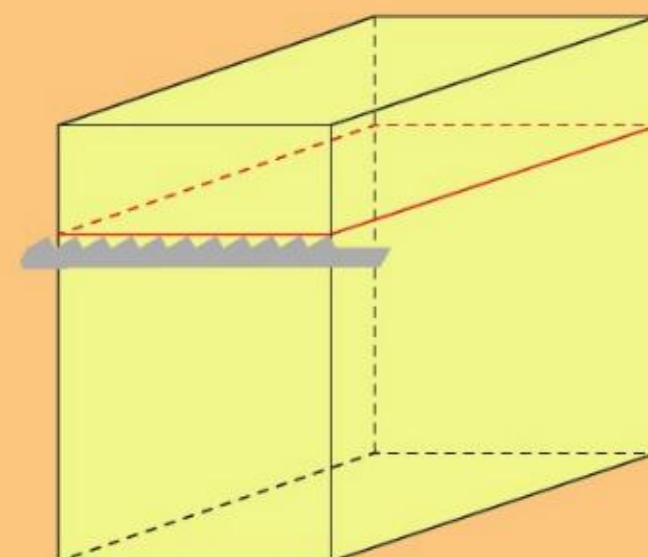
19 W oceanarium znajduje się akwarium z żółwiami morskimi. Ma ono kształt prostopadłościanu. Jego podstawą jest prostokąt o wymiarach $3,5\text{ m} \times 4\text{ m}$ i wysokości 160 cm. Ile litrów wody musi wlać pracownik oceanarium, aby napełnić to akwarium do $\frac{3}{4}$ jego wysokości?

20 Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość prostopadłościanu.



21 Oblicz objętość prostopadłościanu, którego jedna z krawędzi podstawy ma 15 cm, a druga jest od niej 3 razy krótsza. Krawędź boczna jest o 8 cm krótsza od dłuższej krawędzi podstawy.

22 Drewniany klocek ma wymiary $0,8\text{ dm} \times 0,5\text{ dm} \times 0,7\text{ dm}$. Odpiłowano jego część tak, że najdłuższy wymiar został zmniejszony o 2 cm. O ile centymetrów sześciennych zmniejszy się objętość prostopadłościanu, a o ile centymetrów kwadratowych jego pole?



23 Jaka jest długość krawędzi sześcianu, którego objętość wynosi 125 cm^3 ? Jakie jest jego pole powierzchni?

7. Powtórzenie materiału z klas 4–6



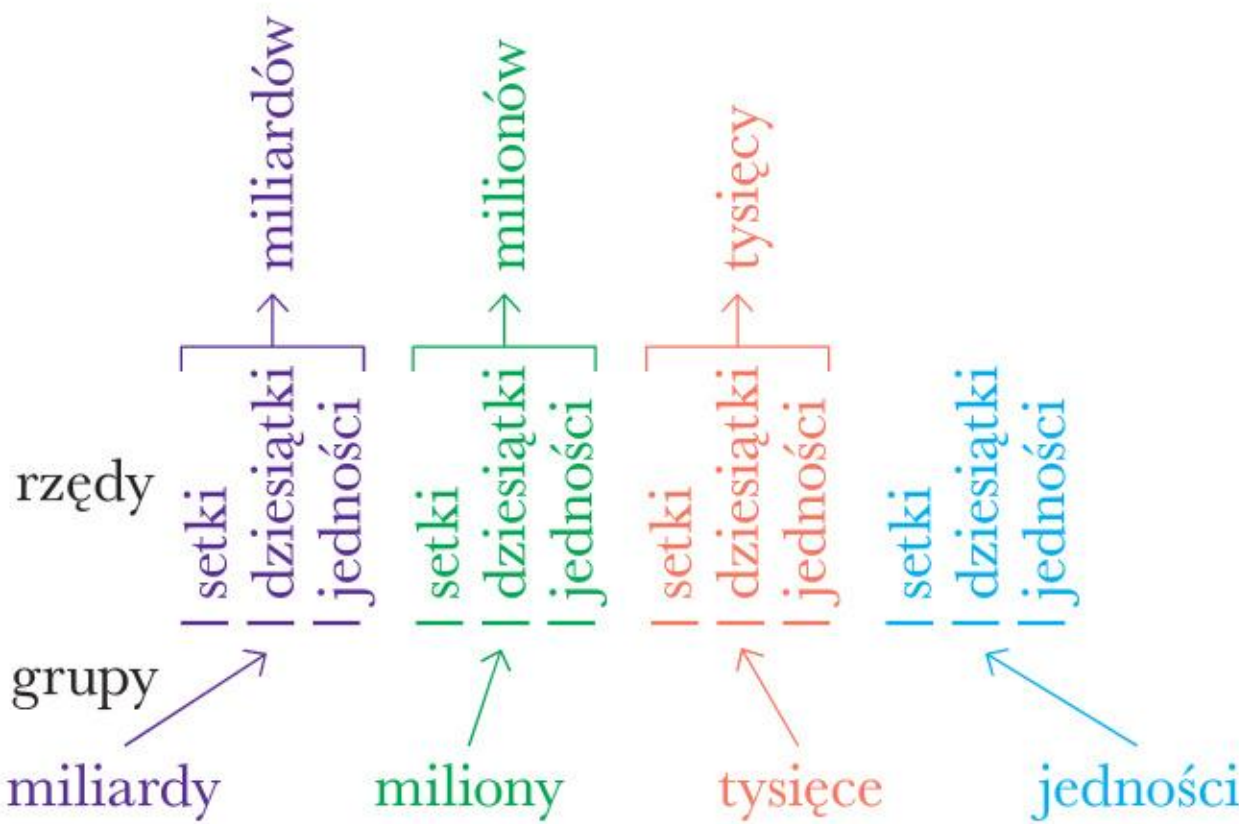
Obejrzyj rysunek. Następnie wykonaj polecenia i odpowiedz na pytania.

1. Spójrz na kalendarz. Ile dni pozostało do wyjazdu na wycieczkę?
2. Czy liczba dni jest liczbą pierwszą, czy złożoną?
3. Przez jakie liczby jest podzielna?
4. Zapisz liczbę dni znakami rzymskimi.
5. Jakim ułamkiem roku są dni widoczne na kalendarzu?
6. Kształt jakiej figury ma kalendarz wiszący na ścianie?
7. Oblicz obwód i pole tej figury, wiedząc, że dłuższy brzeg kalendarza ma 80 cm, a krótszy – 35 cm.
8. Zadaj koleżance lub koledze pytanie związane z rysunkiem i poznanymi w szkole zagadnieniami matematycznymi.



7.1 Liczby naturalne

Liczba w dziesiętkowym systemie pozycyjnym



Rzymski system zapisu liczb

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Porównywanie liczb

34 625 > 8932 porównanie ze względu na liczbę cyfr

72 145 < 72 513 porównanie cyfr w kolejnych rzędach (od najwyższego)

Własności działań

$a + b = b + a$	przemienność dodawania
$a \cdot b = b \cdot a$	przemienność mnożenia
$(a + b) + c = a + (b + c)$	łączność dodawania
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	łączność mnożenia
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	rozdzielność mnożenia względem dodawania

Zapisywanie i odczytywanie liczb w dziesiętkowym systemie pozycyjnym

42 560 091 106

grupy: miliardy, miliony, tysiące, jedności

42 miliardy 560 milionów 91 tysięcy 106

Zapisywanie i odczytywanie liczb w systemie rzymskim

762 = DCCLXII

MCCCXLVI = 1346

Zapis liczb w kolejności:

- **rosnącej** 52 < 134 < 3491 < 25 782
- **malejącej** 784 > 754 > 724 > 721

Zastosowanie własności rozdzielności mnożenia względem dodawania

$$64 \cdot 8 = (60 + 4) \cdot 8 = 60 \cdot 8 + 4 \cdot 8 = 480 + 32 = 512$$

Kolejność wykonywania działań

1. Działania w nawiasach.
2. Potęgowanie.
3. Mnożenie i dzielenie (w kolejności zapisu).
4. Dodawanie i odejmowanie (w kolejności zapisu).

Zaokrąglanie liczb

Gdy pierwszą pomijaną cyfrą jest:

- 0, 1, 2, 3 lub 4, to ostatnia pozostawiona cyfra się nie zmienia,
- 5, 6, 7, 8 lub 9, to ostatnia pozostawiona cyfra powiększa się o 1.

Dzielenie z resztą

Jeżeli podczas dzielenia liczby a przez liczbę b (różną od zera) otrzymujemy resztę r , czyli

$$a : b = q \text{ reszta } r,$$

to liczbę a możemy zapisać jako:

$$a = b \cdot q + r.$$

Cechy podzielności liczb

Liczba jest podzielna przez:

- 2 – gdy jej ostatnia cyfra to 0, 2, 4, 6 lub 8,
- 3 – gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3,
- 4 – gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4,
- 5 – gdy jej ostatnia cyfra to 0 lub 5,
- 9 – gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9,
- 10 – gdy jej ostatnia cyfra to 0,
- 100 – gdy jej dwie ostatnie cyfry to 00.

Liczba pierwsza ma dokładnie dwa dzielniki.

Liczba złożona ma więcej niż dwa dzielniki.

Liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi.

Obliczanie z uwzględnieniem kolejności wykonywania działań

$$\begin{aligned} 2 + (3^3 + 7 \cdot 3) : (4^2 - 2 \cdot 5) &= \\ = 2 + (27 + 7 \cdot 3) : (16 - 2 \cdot 5) &= \\ = 2 + (27 + 21) : (16 - 10) &= \\ = 2 + 48 : 6 = 2 + 8 &= 10 \end{aligned}$$

Zaokrąglanie liczb naturalnych

$$3429 \approx 3430 \text{ (do rzędu dziesiątek)}$$

$$3429 \approx 3400 \text{ (do rzędu setek)}$$

$$3429 \approx 3000 \text{ (do rzędu tysięcy)}$$

Zapis liczb w dzieleniu z resztą

$$26 : 8 = 3 \text{ r } 2$$

zatem

$$26 = 8 \cdot 3 + 2$$

Dzielniki i wielokrotności liczb

$$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$\text{NWD}(18, 30) = 6$$

$$W_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \dots\}$$

$$W_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \dots\}$$

$$\text{NWW}(4, 6) = 12$$

Rozkład liczb na czynniki pierwsze

$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{NWD}(168, 126) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{NWW}(168, 126) = 3 \cdot 7 \cdot 168 = 3528$$

Zadania

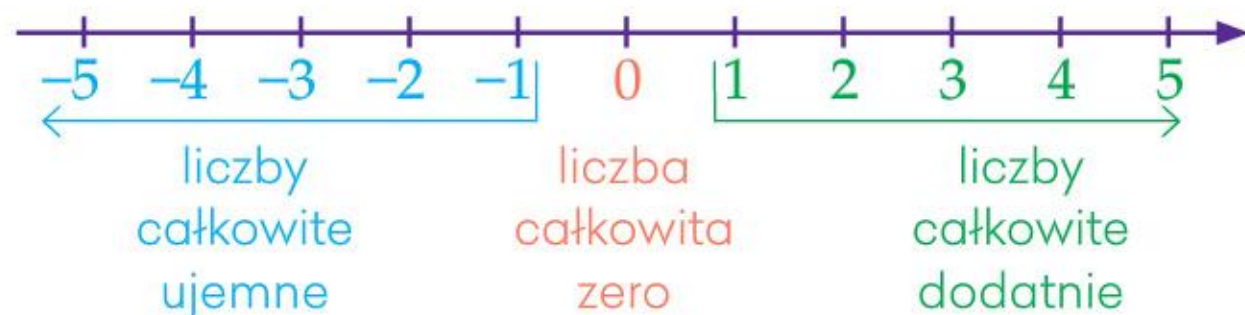
-  Zapisz za pomocą cyfr liczbę dwadzieścia miliardów pięć milionów dwieście tysięcy pięćdziesiąt.
-   Liczbę 300 000 005 100 zapisz słowami.
-   Zapisz liczbę 1974 w systemie rzymskim, a liczbę DCCCXLVII cyframi arabskimi.
-  Bez wykonywania dokładnych obliczeń oszacuj, które z działań ma wynik większy od 999.
A. $29 \cdot 26$ B. $754 + 156$ C. $528 + 516$ D. $98 \cdot 9$
-  Znajdź prosty sposób wykonania działania. Podaj wynik.
a) $8 \cdot 13 \cdot 25$ b) $254 + 181 + 146 + 519$
-  Oblicz.
a) $5 \cdot 4^2 - 3 \cdot 2^3 + 6$ b) $11 \cdot (10 - 8) + 20 \cdot (7 + 2)$
c) $(87 + 23) : (214 - 209)$ d) $3642 - (98 + 68 \cdot 42)$
e) $17^2 - 7^2 - 6^2 : 3^2$ f) $(13 - 7)^2 - (22 - 18)^2$
-  Spośród liczb z ramki wypisz te, które są podzielne przez podaną liczbę.
- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| 2345 | 2685 | 2754 | 6498 | 6900 | 7050 |
|------|------|------|------|------|------|
- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 9 f) 100
-  Wskaż czwórkę liczb, która składa się z dwóch liczb pierwszych i dwóch złożonych.
A. 1, 7, 16, 50 B. 3, 6, 23, 26 C. 4, 13, 14, 27 D. 8, 9, 17, 25
-  Rozłóż na czynniki pierwsze liczby 280 i 36 i znajdź ich największy wspólny dzielnik oraz najmniejszą wspólną wielokrotność.
-  Z 99 m materiału uszyto 22 sukienki i pewną liczbę spódnic. Na każdą sukienkę zużyto 190 cm materiału, a na każdą spódnicę 110 cm. Ile spódnic uszyto?
-  Hotel ma 9 pięter, a na każdym piętrze (oprócz parteru) są 24 pokoje. Pokoje są tak ponumerowane, że np. 705 oznacza pokój o numerze 5 na 7. piętrze.
a) Ile pokoi jest w tym hotelu?
b) Jaki jest najmniejszy, a jaki największy numer pokoju?
c) Ilu cyfr 0 użyto przy numeracji pokoi?

- Pani Ewelina w poniedziałek wypłaciła z banku 372 zł, a we wtorek 569 zł. Ile pieniędzy miała na koncie pani Ewelina, jeżeli po obu wypłatach pozostało jej 1562 zł?
- W teatrze na parterze znajduje się 18 rzędów po 26 miejsc, na balkonie 13 rzędów po 19 miejsc, a w łóżach po prawej i lewej stronie widowni jest łącznie 117 miejsc.
 - a) O ile więcej miejsc jest na parterze niż na balkonie?
 - b) Ile razy mniej miejsc jest w łóżach niż na parterze?
 - c) Pewnego dnia sprzedano 395 biletów na parter i 328 na balkon i łóża. Ile miejsc zostało wolnych?
- Podaj 10 liczb złożonych, większych od 256. Następnie zapisz je w systemie rzymskim.
- Oblicz. Wynik zaokrąglaj do dziesiątek.
 - a) $2854 + 375$
 - b) $1200 - 507$
 - c) $678 \cdot 52$
 - d) $208 : 26$
- Zapisz trzy liczby większe od 500 i podzielne przez:
 - a) 5,
 - b) 9,
 - c) 3 i 2,
 - d) 5 i 4.

W każdym punkcie wybierz jedną z zapisanych liczb i rozłóż ją na czynniki pierwsze.
- Ile jest liczb pierwszych, większych od 60 i jednocześnie mniejszych od 75? Oblicz iloczyn największej i najmniejszej z nich.
- Z cyfr: 2, 3, 4, 7, utwórz liczbę trzycyfrową o różnych cyfrach, podzielną przez podaną liczbę.
 - a) 2
 - b) 3
 - c) 4
 - d) 9
- Rozłóż podane liczby na czynniki pierwsze i znajdź NWD tych liczb.
 - a) 60 i 40
 - b) 72 i 240
 -  42, 69 i 102
 -  40, 112 i 176 
- Rozłóż podane liczby na czynniki pierwsze i znajdź NWW tych liczb.
 - a) 24 i 56
 - b) 16 i 28
 - c) 90 i 126
 - d) 112 i 176
- Magda ma mniej niż 30 maskotek. Gdy ustawia je na półkach po 6, po 8 lub po 12, za każdym razem pozostaje jej jedna maskotka, którą kładzie na łóżku. Ile Magda ma maskotek?
- Babcia miała 12 jabłek i 18 gruszek. Dała je swoim wnuczkom (nie dzieliła owoców na części). Ile mogła mieć wnuczek, jeżeli każde z nich dostało tyle samo jabłek i tyle samo gruszek?
- Przepisz i uzupełnij. Zamiast każdego znaku zapytania wpisz odpowiednią liczbę.
 - a) $27 : 7 = ? \text{ r } 6$, czyli $27 = 7 \cdot ? + 6$
 - b) $32 : 5 = 6 \text{ r } ?$, czyli $32 = 5 \cdot 6 + ?$
 - c) $52 : ? = 8 \text{ r } 4$, czyli $52 = ? \cdot 8 + 4$
 - d) $39 : 9 = ? \text{ r } ?$, czyli $39 = 9 \cdot ? + ?$

7.2 Liczby całkowite

Liczby całkowite na osi liczbowej



Porównywanie liczb całkowitych

- Każda liczba ujemna jest mniejsza od zera i od dowolnej liczby dodatniej.
- Z dwóch liczb ujemnych mniejsza jest ta, która na osi liczbowej leży w większej odległości od zera.

Liczby przeciwne to dwie liczby, które leżą na osi liczbowej w tej samej odległości od zera, ale po przeciwnych jego stronach.

Wartość bezwzględna liczby jest to odległość tej liczby na osi liczbowej od zera.

Działania na liczbach całkowitych

Aby **dodać** liczby o jednakowych znakach, należy:

- obliczyć wartości bezwzględne składników,
- dodać te wartości bezwzględne,
- przy wyniku postawić taki znak, jaki był przy obu składnikach.

Aby **dodać** liczby o różnych znakach, należy:

- obliczyć wartości bezwzględne składników,
- od większej wartości bezwzględnej odjąć mniejszą,
- przy wyniku postawić taki znak, jaki był przy liczbie o większej wartości bezwzględnej.

Odejmowanie liczby jest równoznaczne z dodawaniem liczby przeciwnej.

Przykłady liczb:

- **całkowitych dodatnich:** 6, 9, 32, 58, 89,
- **całkowitych ujemnych:** -7, -10, -45, -52, -83,
- **całkowitych:** -15, -8, 0, 23, 71.

Porównywanie liczb całkowitych

$$\begin{array}{ll} -4 < 0 & 0 > -8 \\ -7 < 3 & 3 > -5 \\ -5 < -2 & -1 > -6 \\ -20 < -3 & -8 > -15 \end{array}$$

Pary liczby przeciwnych

$$9 \text{ i } -9 \qquad -4 \text{ i } 4 \qquad 0 \text{ i } 0$$

Obliczanie wartości bezwzględnej

$$|6| = 6 \qquad |-5| = 5 \qquad |0| = 0$$

Dodawanie liczb całkowitych

$$\begin{array}{l} 9 + 5 = 14 \\ -9 + (-5) = -14 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -3 + 8 = 5 \\ -10 + 6 = -4 \end{array}$$

Odejmowanie liczb całkowitych

$$\begin{array}{l} 7 - 12 = 7 + (-12) = -5 \\ -4 - (-1) = -4 + 1 = -3 \end{array}$$

Mnożenie i dzielenie wykonujemy tak jak mnożenie i dzielenie liczb naturalnych, tylko przy wyniku stawiamy odpowiedni znak:

- liczba ujemna $\cdot$ liczba ujemna = liczba dodatnia,
- liczba ujemna $\cdot$ liczba dodatnia = liczba ujemna,
- liczba dodatnia $\cdot$ liczba ujemna = liczba ujemna.

Analogicznie ustalamy znak ilorazu.

Mnożenie liczb całkowitych

$$-10 \cdot (-3) = 30$$

$$-9 \cdot 5 = -45$$

$$6 \cdot (-8) = -48$$

Dzielenie liczb całkowitych

$$-35 : (-5) = 7$$

$$-56 : 7 = -8$$

$$24 : (-8) = -3$$

Zadania

- Podaj kilka przykładów zastosowań liczb ujemnych.
- Zapisz liczbę przeciwną do każdej z liczb: -23 , 17 , -96 , -150 , 325 , 0 , -333 .
- Zaznacz na osi liczbowej liczby: 5 , -8 , -3 , 3 , -1 . Podaj odległość każdej z nich od liczby 0 .
- Zapisz trzy liczby całkowite:
 - a) większe od -7 , b) większe od -2 , c) mniejsze od 2 , d) mniejsze od 0 .
- Wymień wszystkie liczby całkowite:
 - a) większe od -2 i jednocześnie mniejsze od 5 , b) większe od -4 i jednocześnie mniejsze od 3 .
- Ile jest liczb całkowitych:
 - a) większych od -8 i jednocześnie mniejszych od 10 ,
 - b) większych od -20 i jednocześnie mniejszych od 20 ,
 - c) mniejszych od 1 i jednocześnie większych od -51 ,
 - d) mniejszych od 100 i jednocześnie większych od -100 ,
 - e) mniejszych od -25 i jednocześnie większych od -10 .
- Ustaw w kolejności rosnącej liczby: 4 , -6 , 12 , -12 , -1 , 3 , -9 , -20 .
- Oblicz.
 - a) $|8|$ b) $|-6|$ c) $4 + |-5|$ d) $|2| + 10$
 - e) $|4 + 9|$ f) $|21 - 19|$ g) $3 \cdot |-6| - |-2|$ h) $|7 \cdot 3 - 9|$
 - i) $|-6| + |-5| - |-4|$ j) $(|4| + |-6|) : |-2|$ k) $|-6| \cdot |-8| \cdot |-1|$ l) $|-10| \cdot (|-9| : |-3|)$

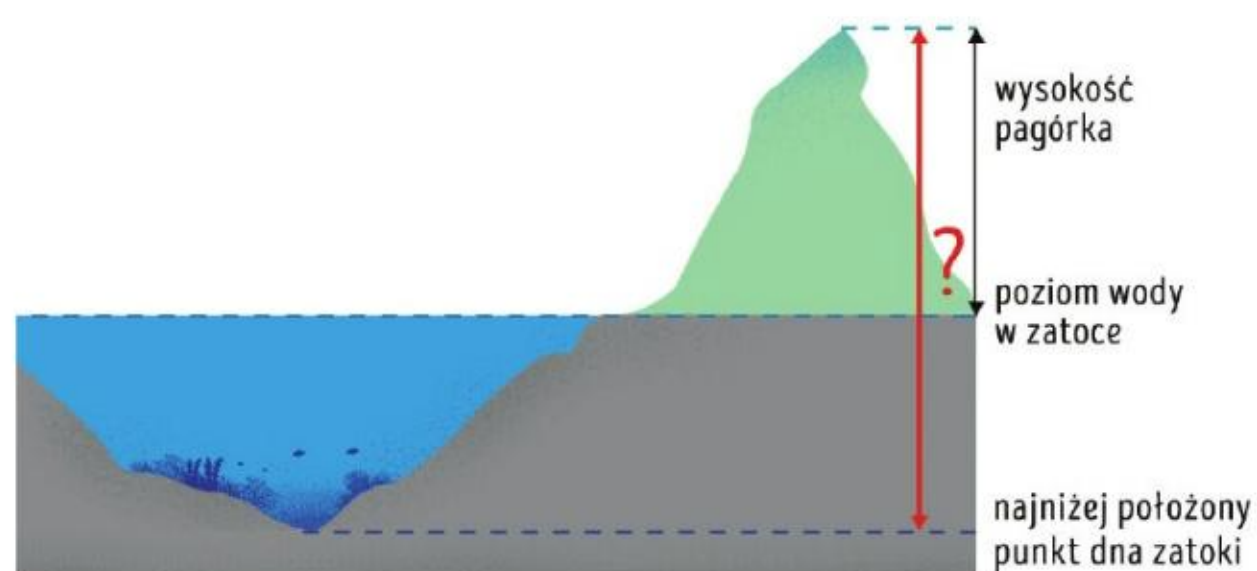
Za aktywność na lekcjach nauczyciel przyznaje uczniom plusy i minusy. Pod koniec tygodnia sumuje je według zasady, że jeden plus oznacza liczbę 1, a jeden minus liczbę -1 . Oblicz, ile plusów lub minusów zdobył przez tydzień każdy z uczniów wymienionych w tabeli obok.

Dzień Uczeń	pon.	wt.	śr.	czw.	pt.
Jacek	-3	-4	3	-2	-7
Daniel	4	-1	-4	6	2
Marta	-2	3	-7	-2	6
Iwona	5	-3	4	-6	-1
Beata	-6	4	-1	5	-4
Andrzej	3	-2	1	-6	2

Rozwiąż zadania.

- Termometr o godzinie 6.00 wskazywał temperaturę -6°C . Do godziny 12.00 temperatura wzrosła o 8°C . Jaką temperaturę wskazywał termometr w południe?
A. -14°C B. -2°C C. 2°C D. 14°C
- Przez trzy godziny temperatura zwiększyła się od -15°C do -6°C . O ile stopni wzrosła temperatura?
A. o -21°C B. o -9°C C. o 9°C D. o 21°C
- Termometr w południe wskazywał temperaturę 4°C . Do północy temperatura spadła o 11°C . Jaką temperaturę pokazywał termometr o północy?
A. -15°C B. -7°C C. 7°C D. 15°C
- Przez pięć godzin temperatura obniżyła się z -2°C do -9°C . O ile stopni spadła temperatura?
A. o -11°C B. o 11°C C. o -7°C D. o 7°C

Zatoka morska jest otoczona pagórkami o wysokościach: 65 m, 92 m, 88 m i 112 m. Najgłębsze miejsce zatoki jest położone na wysokości -15 m n.p.m. Ile metrów dzieli najgłębiej położony punkt zatoki od szczytu każdego z pagórków (w pionie)? Iloma sposobami potrafisz obliczyć tę odległość?



Oblicz.

- | | | | |
|-------------|-------------|----------------|------------------|
| a) $-7 + 2$ | b) $-6 + 9$ | c) $4 + (-13)$ | d) $423 + (-68)$ |
| $-7 + (-2)$ | $-6 + (-9)$ | $4 - (-13)$ | $423 - (-68)$ |
| $-7 - 2$ | $-6 - 9$ | $4 - 13$ | $-423 - 68$ |
| $-7 - (-2)$ | $-6 - (-9)$ | $-4 - 13$ | $-423 - (-68)$ |
| $7 + (-2)$ | $6 - 9$ | $-4 - (-13)$ | $-423 + 68$ |
| $7 - (-2)$ | $6 - (-9)$ | $-4 + 13$ | $-423 + (-68)$ |

Ułóż treść zadania do podanego działania.

- | | |
|-------------------------------|--------------|
| a) $-450 + 280 + 60 + (-130)$ | b) $14 - 30$ |
|-------------------------------|--------------|

Wykonaj działania.

- | | | | |
|--------------------|------------------------------|-------------|-----------------|
| a) $-6 \cdot (-8)$ | b) $7 \cdot (-2) \cdot (-5)$ | c) $(-6)^2$ | d) $-48 : (-4)$ |
| $7 \cdot (-9)$ | $-9 \cdot (-3) \cdot (-1)$ | $(-35)^2$ | $28 : (-7)$ |
| $-4 \cdot (-12)$ | $3 \cdot (-8) \cdot 10$ | $(-2)^3$ | $-125 : 5$ |
| $-84 \cdot 78$ | $-15 \cdot (-9) \cdot 23$ | $(-10)^3$ | $-468 : (-13)$ |

Oblicz. Pamiętaj o poprawnej kolejności wykonywania działań.

- | | |
|--|--|
| a) $(-8) + 6 + (-4) + (-6) + 12$ | b) $-2 \cdot 6 + (-3) \cdot (-7) \cdot (-2)$ |
| $-8 + (-5) - (-10) + (-9) - (-15) - 2$ | $-64 : (-4) : 4 + (-5) \cdot 2$ |
| $32 - (-15) + (-45) - (-20) + (-34)$ | $-1 \cdot (-15) : (-3) : (-1)$ |
| c) $6 \cdot (-5) + 9 - (-64) : 16$ | d) $(-4)^3 + 7^2 - (-10)^2$ |
| $10 - (-7 + 14) \cdot (-5)$ | $(7 - 15)^2 - (4 - 6)^3$ |
| $-16 - 42 : (-6) - 27 : 3$ | $(-10)^3 : (-5)^2 + (-9)^2$ |

Jacek, Darek i Michał bawili się sześcienną kostką do gry. Każdy z nich rzucał kostką czterokrotnie: dwa razy lewą ręką i dwa razy prawą. Każdy wynik rzutu lewą ręką chłopcy zapisywali jako liczbę ujemną, a ręką prawą – jako dodatnią. Otrzymane liczby dodawali. Jacek otrzymał wynik -1 , Darek -3 , a Michał 3 . Jakie mogły być rezultaty poszczególnych rzutów każdego z chłopców? Podaj po trzy przykłady dla każdego chłopca.

Oceń prawdziwość zdań. Zapisz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli zdanie jest fałszywe.

- Suma dwóch liczb ujemnych zawsze jest ujemna.
- Suma liczby ujemnej i liczby dodatniej zawsze jest liczbą dodatnią.
- Kwadrat liczby ujemnej jest zawsze liczbą ujemną.
- Sześcian liczby ujemnej jest zawsze ujemny.
- Iloraz dwóch liczb ujemnych jest zawsze ujemny.
- Różnica dwóch liczb dodatnich jest zawsze liczbą dodatnią.

Wybierz właściwe fragmenty zdań (A lub B oraz C lub D), tak by powstało zdanie prawdziwe.

Kwadrat liczby całkowitej jest	A. liczbą dodatnią lub zerem,	ponieważ	C. iloczyn liczb ujemnych jest liczbą ujemną, a dodatnich – dodatnią.
	B. liczbą dodatnią lub ujemną,		D. iloczyn liczb o jednakowych znakach jest liczbą dodatnią.

Porównaj liczby $(-76)^3$ i $(-238)^2$.

W poniedziałek Maciek pożyczył od Piotra 7 zł, we wtorek oddał mu 4 zł, w środę znowu pożyczył od niego 12 zł, a w czwartek zwrócił mu 15 zł. W piątek dwukrotnie pożyczał od Piotra po 7 zł, a w sobotę oddał mu 10 zł. Ile złotych Maciek musi jeszcze oddać Piotrowi, by pozbyć się długu? A może zwrócił mu już całą pożyczoną kwotę?

7.3 Ułamki

Ułamek to część całości.

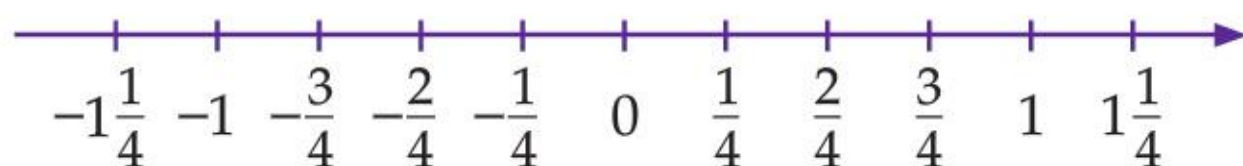
Ułamek można traktować jako iloraz liczb naturalnych.

Skracanie ułamka polega na podzieleniu licznika i mianownika przez tę samą liczbę (różną od 0 i 1).

Rozszerzanie ułamka polega na pomnożeniu licznika i mianownika przez tę samą liczbę (różną od 0 i 1).

Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika polega na takim rozszerzeniu dwóch (lub więcej) ułamków, aby miały one taki sam mianownik.

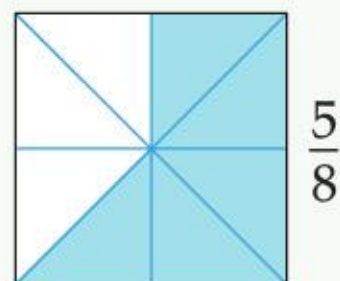
Ułamki na osi liczbowej



Porównywanie ułamków

- Jeżeli dwa ułamki mają jednakowe mianowniki, to ten ułamek jest większy, który ma większy licznik.
- Jeżeli dwa ułamki mają jednakowe liczniki, to ten ułamek jest większy, który ma mniejszy mianownik.
- Jeżeli dwa ułamki mają różne liczniki i różne mianowniki, to aby je porównać, należy sprowadzić je do wspólnego mianownika lub wspólnego licznika.

Część całości opisana ułamkiem



Ułamek jako iloraz

$$8 : 9 = \frac{8}{9}$$

Skracanie i rozszerzanie ułamka

$$\frac{35}{56} \overset{:7}{=} \frac{5}{8} \qquad \frac{4}{9} \overset{\cdot 6}{=} \frac{24}{54}$$

Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika

$$\frac{5}{6} \overset{\cdot 2}{=} \frac{10}{12} \qquad \frac{3}{4} \overset{\cdot 3}{=} \frac{9}{12}$$

Porównywanie ułamków

$$\begin{aligned} \frac{7}{9} &> \frac{4}{9} \\ \frac{2}{15} &< \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} &> \frac{4}{5}, \text{ ponieważ } \frac{30}{35} > \frac{28}{35} \end{aligned}$$

Ułamek właściwy ma licznik mniejszy od mianownika.

Ułamek niewłaściwy ma licznik równy mianownikowi lub większy od mianownika.

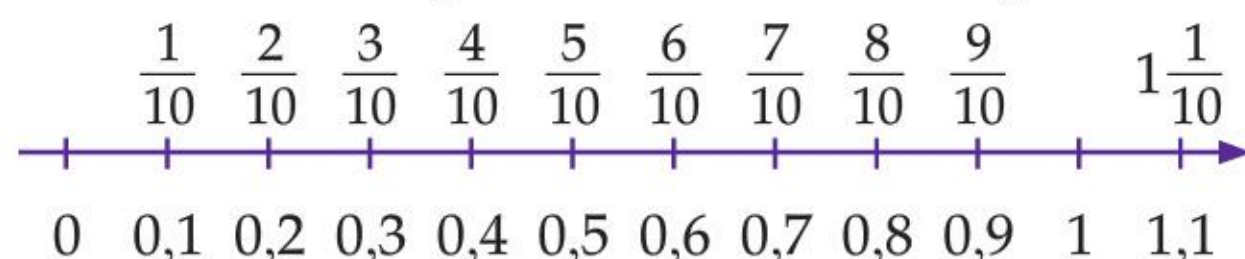
Ułamek dziesiętny to ułamek, w którego mianowniku jest liczba 10 lub 100, lub 1000 itd.

Zapis ułamka dziesiętnego w postaci dziesiętnej

$$2\frac{45}{100} = 2,45$$

część całkowita liczby część ułamkowa liczby

Ułamki dziesiętne na osi liczbowej



Aby **zamienić ułamek dziesiętny na zwykły**, należy zapisać go za pomocą kreski ułamkowej oraz – jeżeli jest to możliwe – skrócić.

Aby **zamienić ułamek zwykły na dziesiętny** należy:

- rozszerzyć go tak, aby w mianowniku otrzymać potęgę liczby 10, a następnie zapisać rozszerzony ułamek w postaci dziesiętnej, lub
- podzielić licznik przez mianownik.

Po zamianie ułamka zwykłego na dziesiętny otrzymujemy **rozwiniecie dziesiętne** ułamka zwykłego. Może ono być **skończone** lub **nieskończone**.

Zamiana ułamka niewłaściwego na liczbę mieszaną

$$\frac{25}{7} = 25 : 7 = 3 \text{ r } 4 = 3\frac{4}{7}$$

Zamiana liczby mieszanej na ułamek niewłaściwy

$$4\frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{14}{3}$$

Zapisywanie ułamka dziesiętnego w postaci dziesiętnej

$$\frac{3}{10} = 0,3 \qquad \frac{135}{10\,000} = 0,0135$$

Liczba cyfr po przecinku musi być równa liczbie zer w mianowniku ułamka.

Odczytywanie ułamków dziesiętnych

1, 2 3 4 5 6 7

↑ części milionowe
↑ części stutysięczne
↑ części dziesięciotysięczne
↑ części tysięczne
↑ części setne
↑ części dziesiąte

Zamiana ułamka dziesiętnego na zwykły

$$0,045 = \frac{45}{1000} = \frac{9}{200}$$

Rozwinięcie dziesiętne ułamka zwykłego

$$1\frac{3}{20} = 1\frac{15}{100} = 1,15$$

lub

$$1\frac{3}{20} = \frac{23}{20} = 23 : 20 = 1,15$$

$$2\frac{5}{6} = \frac{17}{6} = 17 : 6 = 2,8333...$$

$$\begin{array}{r} 2,8333... \\ 17 : 6 \\ - 12 \\ \hline 50 \\ - 48 \\ \hline 20 \\ - 18 \\ \hline 20 \\ - 18 \\ \hline 2... \end{array}$$

Porównywanie ułamków dziesiętnych

Aby porównać dwa ułamki dziesiętne (o równych częściach całkowitych), należy:

- zapisać ułamki tak, by miały jednakową liczbę cyfr po przecinku i porównać części ułamkowe, lub
- porównywać kolejne cyfry obu ułamków.

Zaokrąglanie ułamków dziesiętnych

Gdy pierwszą pomijaną cyfrą jest:

- 0, 1, 2, 3 lub 4, to ostatnia pozostawiona cyfra się nie zmienia,
- 5, 6, 7, 8 lub 9, to ostatnia pozostawiona cyfra powiększa się o 1.

Porównywanie ułamków dziesiętnych

$3,5342 < 3,56$, ponieważ $3,5342 < 3,5600$

lub

$2,756 > 2,7513$, ponieważ $7 = 7$, $5 = 5$ i $6 > 1$

Zaokrąglanie ułamków dziesiętnych

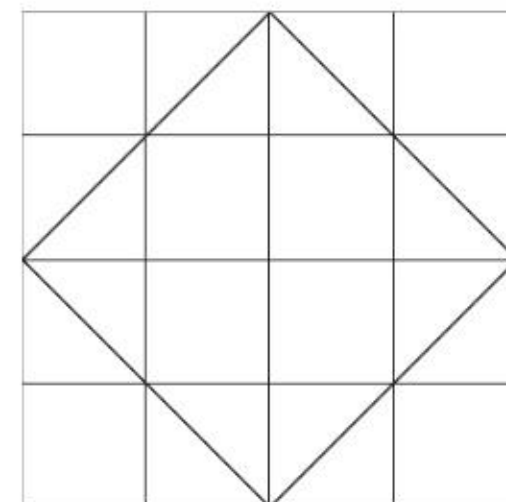
$23,54 \approx 23,5$ (do części dziesiątych)

$3,726 \approx 3,73$ (do części setnych)

Zadania

- Przerysuj czterokrotnie do zeszytu narysowaną obok figurę. Zamaluj $\frac{3}{4}$ każdej figury różnymi sposobami (nie wykonuj dodatkowych podziałów). Czy zamalowana część może mieć kształt:

- a) prostokąta,
- b) kwadratu,
- c) trójkąta,
- d) pięciokąta,
- e) litery T,
- f) litery L?



- Zapisz ułamek $\frac{45}{270}$ w postaci nieskracalnej.

- Ułamek $\frac{3}{7}$ po rozszerzeniu może być równy

A. $\frac{18}{48}$

B. $\frac{36}{84}$

C. $\frac{27}{54}$

D. $\frac{45}{95}$

- Ustaw podane liczby w kolejności rosnącej.

a) $\frac{2}{9}, \frac{5}{7}, \frac{1}{9}, \frac{5}{6}, \frac{5}{8}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}$

b) $\frac{9}{11}, \frac{7}{15}, \frac{7}{20}, \frac{7}{11}, \frac{8}{11}, \frac{7}{13}, \frac{7}{16}$

- Jaką współrzędną ma punkt A na poniższej osi liczbowej?



A. 3

B. $1\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $1\frac{2}{5}$

- Jaką współrzędną ma punkt B na poniższej osi liczbowej?



- A. $-\frac{4}{10}$ B. -4 C. $-\frac{1}{2}$ D. $-1\frac{4}{8}$

- Który ułamek niewłaściwy **nie** jest równy liczbie 4?

- A. $\frac{64}{18}$ B. $\frac{60}{15}$ C. $\frac{48}{12}$ D. $\frac{36}{9}$

- Ile jest ułamków niewłaściwych:

- a) o liczniku 20, b) o mianowniku 50 i liczniku mniejszym od 60,
 ☆ o mianowniku 2, d) o liczniku i mianowniku mniejszym od 5?

- Która liczba mieszana jest równa 2,0325?

- A. $2\frac{3}{8}$ B. $2\frac{3}{80}$ C. $2\frac{13}{40}$ D. $2\frac{13}{400}$

- Ile jest równe rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{5}{16}$?

- A. 0,516 B. 0,3125 C. 0,32 D. 5,16

- Które z poniższych ułamków mają rozwinięcie dziesiętne nieskończone? Podaj te rozwinięcia.

$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{9}{20}$
---------------	----------------	----------------	-----------------	---------------	---------------	----------------

- Zaokrąglij liczby z ramki obok do:

- a) całości, b) części dziesiątych, c) części setnych.

35,726	4,952
9,876	0,005

- Podane liczby zapisz w kolejności rosnącej.

a) 1,88 1,088 1,808 1,888 1,8 1,08

b) 2,145 2,245 2,14 22,145 2,1 2,24

- Zapisz liczbę, której:

- część całkowita zapisana w systemie rzymskim wynosi XLIX,
- cyfra części dziesiątych jest największą jednocyfrową liczbą pierwszą,
- cyfra części setnych jest najmniejszą liczbą naturalną,
- cyfra części tysięcznych jest najmniejszą liczbą złożoną,

a następnie zapisz tę liczbę w postaci ułamka zwykłego.

7.4 Działania na ułamkach

Działania na ułamkach zwykłych

Aby **dodać** lub **odjąć** ułamki, należy:

- sprowadzić je do wspólnego mianownika,
- dodać (lub odjąć) całości (o ile w działaniu występują liczby mieszane),
- dodać (lub odjąć) liczniki,
- wspólny mianownik przepisać bez zmiany.

Aby **pomnożyć** ułamki, należy:

- zamienić liczby mieszane (o ile występują w działaniu) na ułamki niewłaściwe,
- skrócić (o ile jest to możliwe) liczniki z mianownikami,
- pomnożyć liczniki i pomnożyć mianowniki.

Aby **podzielić** ułamki, należy:

- zamienić liczby mieszane (o ile występują w działaniu) na ułamki niewłaściwe,
- dzielenie zamienić na mnożenie przez odwrotność dzielnika,
- pomnożyć ułamki w sposób opisany powyżej.

Działania na ułamkach dziesiętnych

najłatwiej jest wykonywać sposobem pisemnym; po uzyskaniu wprawy, w prostych przypadkach – w pamięci, ale według takich samych zasad.

Aby **dodać** lub **odjąć** ułamki, należy:

- zapisać liczby tak, aby przecinki we wszystkich liczbach znajdowały się jeden pod drugim,
- dodać (lub odjąć) cyfry w kolejnych rzędach, zaczynając od najniższego (według zasad dodawania i odejmowania liczb naturalnych).

Aby **pomnożyć** ułamki, należy:

- zapisać liczby tak, aby ostatnie cyfry obu czynników znajdowały się jeden pod drugim,
- pomnożyć je tak jak liczby naturalne,
- postawić w iloczynie przecinek w takim miejscu, by za przecinkiem znajdowało się tyle cyfr, ile jest ich razem za przecinkiem w obu czynnikach.

Działania na ułamkach zwykłych

$$2\frac{4}{9} + 3\frac{5}{6} = 2\frac{8}{18} + 3\frac{15}{18} = 5\frac{23}{18} = 6\frac{5}{18}$$

$$7\frac{3}{5} - 2\frac{6}{7} = 7\frac{21}{35} - 2\frac{30}{35} = 6\frac{56}{35} - 2\frac{30}{35} = 4\frac{26}{35}$$

$$3\frac{3}{5} \cdot 1\frac{11}{24} = \frac{3 \cdot 18}{1 \cdot 5} \cdot \frac{35}{24} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

$$2\frac{6}{25} : 1\frac{1}{15} = \frac{56}{25} : \frac{16}{15} = \frac{7 \cdot 56}{5 \cdot 25} \cdot \frac{15}{16} = \frac{21}{10} = 2\frac{1}{10}$$

$$\left(3\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{13}{4}\right)^2 = \frac{13}{4} \cdot \frac{13}{4} = \frac{169}{16} = 10\frac{9}{16}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{125}$$

Działania, w których występują ułamki dodatnie i ujemne:

$$2\frac{3}{4} + \left(-5\frac{5}{6}\right) = 2\frac{9}{12} + \left(-5\frac{10}{12}\right) = -3\frac{1}{12}$$

$$-1\frac{7}{8} : 4\frac{2}{7} = -\frac{15}{8} : \frac{30}{7} = -\frac{1 \cdot 15}{8} \cdot \frac{7}{30} = -\frac{7}{16}$$

Działania na ułamkach dziesiętnych

$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \\ 5 \ 2,7 \ 9 \\ 3,1 \ 5 \ 6 \\ + 3 \ 9,2 \\ \hline 9 \ 5,1 \ 4 \ 6 \end{array}$	$\times$	$\begin{array}{r} 3 \ 14 \ 11 \ 10 \\ 4 \ 5,2 \\ - 8,6 \ 3 \\ \hline 3 \ 6,5 \ 7 \end{array}$
---	----------	---

$$1,3 + 5,28 = 6,58, \quad \text{bo } 130 + 528 = 658$$

$$7 - 2,81 = 4,19, \quad \text{bo } 700 - 281 = 419$$

$$\begin{array}{r} 4,5 \ 8 \\ \cdot \ 2 \ 0,7 \\ \hline 3 \ 2 \ 0 \ 6 \\ + 9 \ 1 \ 6 \\ \hline 9 \ 4,8 \ 0 \ 6 \end{array}$$

$$2,3 \cdot 0,3 = 0,69, \quad \text{bo } 23 \cdot 3 = 69$$

Aby **podzielić** ułamki, należy:

- powiększyć tyle samo razy dzielną i dzielnik tak, aby dzielnik stał się liczbą naturalną,
- podzielić tak, jak dzieli się liczby naturalne,
- postawić w ilorazie przecinek nad przecinkiem dzielnej.

Aby **pomnożyć** lub **podzielić** ułamek dziesiętny przez **potęgę liczby 10**, należy w ułamku przesunąć przecinek o tyle miejsc, ile jest zer w potędze liczby 10.

Przecinek przesuwamy:

- w prawo – podczas mnożenia,
- w lewo – podczas dzielenia.

Ułamek danej liczby

Aby obliczyć ułamek danej liczby, należy pomnożyć ten ułamek przez daną liczbę.

Wyznaczanie liczby, której część jest podana

Aby wyznaczyć liczbę, której część jest podana, należy podzielić liczbę wskazującą tę część przez ułamek.

$$12,145 : 3,5 = 121,45 : 35$$

$$\begin{array}{r} 3,47 \\ 121,45 : 35 \\ - 105 \\ \hline 164 \\ - 140 \\ \hline 245 \\ - 245 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$0,75 : 2,5 = 7,5 : 25 = 0,3, \text{ bo } 75 : 25 = 3$$

$$2,678 \cdot 100 = 267,8$$

$$3,5 \cdot 1000 = 3500$$

$$123,9 : 10 = 12,39$$

$$7,5 : 100 = 0,075$$

Obliczanie ułamka danej liczby

$$\frac{5}{6} \text{ liczby } 30 \text{ to } \frac{5}{6} \cdot 30 = 25$$

$$0,15 \text{ liczby } 80 \text{ to } 0,15 \cdot 80 = 12$$

Obliczanie liczby x , której część określono za pomocą ułamka

Jeżeli $\frac{2}{5}$ liczby x wynosi 8,

$$\text{to } x = 8 : \frac{2}{5} = 8 \cdot \frac{5}{2} = 20.$$

Jeżeli 0,32 liczby x wynosi 64,

$$\text{to } x = 64 : 0,32 = 200.$$

Zadania

Wykonaj działania.

a) $2\frac{5}{6} + 3\frac{4}{9}$

$$1\frac{2}{5} - 5\frac{3}{4}$$

$$7 - 2\frac{3}{8}$$

$$-3\frac{7}{9} + (-2\frac{1}{6})$$

b) $1\frac{13}{15} \cdot 3\frac{3}{14}$

$$-7\frac{1}{5} : 1\frac{7}{20}$$

$$\frac{15}{16} \cdot (-12)$$

$$-1\frac{3}{5} : (-20)$$

c) $0,682 + 0,68 + 0,6$

$$5,75 - 8$$

$$-4,74 - 6,392$$

$$-3,54 + 8,6$$

d) $3,78 \cdot 4,5$

$$0,016 \cdot (-9)$$

$$-2,082 : (-0,6)$$

$$-0,45 : 0,0015$$

Oblicz wartości liczb: a , b , c .

a) a to $\frac{5}{6}$ kwoty 48 zł

b to 0,75 masy 72 kg

c to $\frac{7}{8}$ długości 36 km

b) $\frac{2}{3}$ kwoty a to 24 zł

$\frac{3}{7}$ masy b to 6 dag

0,25 długości c to 50 cm

Wykonaj działania. W punktach a) i c) zapisz najpierw obie liczby w postaci ułamków zwykłych (lub liczb mieszanych), natomiast w punktach b) i d) – w postaci dziesiętnej. W punkcie d) do obliczeń użyj kalkulatora.

a) $3\frac{5}{6} + (-1\frac{2}{9})$

$$\frac{2}{3} - (-4,7)$$

$$-0,8 - 3\frac{5}{7} - 1,25$$

$$-8\frac{1}{3} + 4,2$$

b) $\frac{3}{4} + 3,015$

$$\frac{3}{5} - 1,75$$

$$2\frac{1}{4} - 3,5 + \frac{7}{8}$$

$$-1\frac{1}{2} + (-2,64) + (-\frac{1}{4})$$

c) $0,55 \cdot (-7\frac{1}{7})$

$$-3\frac{8}{9} \cdot 1,08$$

$$-3,375 : (-10\frac{2}{7})$$

$$8\frac{1}{6} : 8,75$$

d) $36,4 : (-3\frac{1}{4})$

$$-7\frac{3}{8} \cdot 5,84$$

$$2510,067 : 2\frac{11}{20}$$

$$-1\frac{3}{20} \cdot (-8,62)$$

Oblicz.

a) $-2,2 \cdot 1\frac{13}{22} + 2,5 \cdot 2\frac{1}{2}$

$$3,4 : (-\frac{2}{5}) - \frac{5}{6} \cdot 6,6$$

$$-5,6 \cdot (-\frac{5}{6}) \cdot (-1\frac{11}{28} + 2\frac{1}{4})$$

$$-2,2 \cdot (3\frac{1}{3} - 5\frac{11}{15})$$

b) $0,4 \cdot (-1\frac{2}{5}) : 0,1 \cdot (-\frac{5}{14})$

$$-\frac{2}{3} : 1,6 \cdot (-1,5) : (-1\frac{7}{8})$$

$$\frac{5}{6} + (-1,5) - \frac{1}{12} + 0,75$$

$$-0,1 - (-3\frac{1}{5}) + (-5,4)$$

c) $1\frac{1}{6} - (-0,5)^3 + (-\frac{1}{4})^2$

$$-2\frac{2}{3} : (-\frac{2}{3})^2 + (-2\frac{5}{6})$$

$$(1,6 - 1\frac{3}{4})^2 \cdot 4\frac{4}{9}$$

$$(-\frac{2}{3})^2 - (-1,5)^3$$

d) $\frac{1,5 + (-1\frac{3}{5})}{3,3 + (-3\frac{1}{3})}$

$$(-1\frac{1}{3} - 0,3) \cdot (-8\frac{4}{7})$$

$$(5,125 + (-6\frac{1}{2})) \cdot (-1\frac{3}{4} + 0,75)$$

$$\frac{-5\frac{5}{8} + 2,25}{0,8 \cdot 1\frac{1}{8}}$$

Oblicz sumę pięciu takich liczb, z których:

a) pierwsza to $2\frac{5}{6}$, a każda kolejna jest o $\frac{3}{5}$ większa od poprzedniej,

b) ostatnia to 9,4, a każda z nich (oprócz najmniejszej) jest o 1,32 większa od poprzedniej.

Jaka liczba na osi liczbowej znajduje się dokładnie pośrodku między zerem a podaną liczbą?

a) $5\frac{7}{9}$

b) $-8\frac{3}{4}$

c) 6,72

d) -12,7

- Oblicz obwód prostokąta, którego:
 - a) jeden bok ma 4,6 cm, a drugi jest o 0,5 cm krótszy,
 - b) dłuższy bok ma 24 cm, a długość krótszego stanowi $\frac{5}{8}$ długości dłuższego,
 - c) krótszy bok ma 15,6 cm, a drugi jest od niego 2,5 razy dłuższy.

- Oblicz, ile kosztuje:
 - a) 5 m wstążki po 3,45 zł za metr,
 - b) 17 owoców kiwi po 0,95 zł za sztukę,
 - c) 4,5 l mleka po 1,98 zł za litr,
 - d) 0,48 kg szynki po 24,60 zł za kilogram.

- Krysia miała 56,85 zł, a jej brat Maciek 43,56 zł. Ze sprzedaży makulatury w poniedziałek oboje dostali po 15,50 zł, a w środę po 17,60 zł. Krysia z tych pieniędzy wydała 43,90 zł, a Maciek 32,85 zł. Czy więcej pieniędzy zostało Krysi, czy Maćkowi? O ile więcej?

- Architekt wykonał plan budynku w skali 1 : 100.
 - a) Ile metrów ma na planie odcinek, który w rzeczywistości ma podaną długość?
 - 24 m • 7 m • 0,8 m • 160 cm
 - b) Ile metrów ma w rzeczywistości odcinek, który na planie ma podaną długość?
 - 0,145 m • 0,03 m • 0,2 m • 1,3 cm

- Malwina przeczytała $\frac{3}{5}$ książki liczącej 285 stron. Ile stron przeczytała?

- Cenę piłki do ćwiczeń wynoszącą 36 zł obniżono o $\frac{1}{3}$. Ile kosztowała piłka po obniżce?

- Iza ze 128 zł oszczędności wydała $\frac{3}{8}$ na prezent dla mamy. Ile pieniędzy wydała, a ile jej zostało?

- Natalia robi na drutach szalik. Część szalika zrobiona w poniedziałek miała długość 42 cm. Przez tydzień długość ta wzrosła o $\frac{2}{3}$ długości z poniedziałku. Ile centymetrów szalika zrobiła Natalia przez ten tydzień? Jaka jest obecnie długość szalika?

- Jacek wracał ze szkoły przez 35 minut. Przez 0,2 tego czasu rozmawiał z kolegą, a przez $\frac{3}{5}$ słuchał muzyki. Przez ile minut podczas drogi do domu ani nie rozmawiał, ani nie słuchał muzyki?

- Turysta przebył 63 km. Było to $\frac{7}{9}$ zaplanowanej przez niego trasy. Ile kilometrów liczyła cała trasa?

- Kierowca zatankował 24 l benzyny, co stanowiło $\frac{4}{9}$ pojemności zbiornika paliwa. Ile litrów paliwa zmieści się maksymalnie w zbiorniku tego samochodu?

- Bateria kosztuje 3,50 zł. Cena baterii stanowi $\frac{2}{5}$ ceny latarki z baterią. Ile kosztuje sama latarka?

7.5 Wyrażenia algebraiczne i równania

Wyrażenie algebraiczne to zapis, w którym oprócz liczb, znaków działań i nawiasów występują litery.

Zasady zapisu wyrażeń algebraicznych

- Znak mnożenia (kropkę) zwykle pomijamy, jeżeli nie znajduje się przed liczbą.
- W iloczynie liczby i litery (lub kilku liter) na pierwszym miejscu zapisujemy liczbę.
- Mnożenia przez 1 i -1 zwykle nie zapisujemy.
- Znak dzielenia (dwukropek) zastępujemy zwykle kreską ułamkową.

Nazwy wyrażeń algebraicznych pochodzą od nazw działań w wyrażeniach arytmetycznych.

Jeżeli w wyrażeniu algebraicznym występuje więcej niż jedno działanie, nazwa wyrażenia pochodzi od działania, które byłoby wykonywane jako ostatnie.

Wartość liczbową wyrażenia

algebraicznego to wynik działania, które otrzymamy, gdy do tego wyrażenia w miejsce liter wstawimy liczby i wykonamy obliczenia.

Działania na wyrażeniach algebraicznych

- Dodawać i odejmować możemy tylko te wyrażenia, które zawierają tę samą literę – dodajemy (lub odejmujemy) liczby, a literę przepisujemy bez zmiany.
- Wyrażenie typu $5a$ można mnożyć lub dzielić przez liczbę – mnożymy (lub dzielimy) liczby, a literę przepisujemy bez zmiany.

Przykłady wyrażeń algebraicznych

$$3 \cdot a, a + 8, a^2, x - \frac{y}{6}$$

Zapisywanie wyrażeń algebraicznych

$$5 \cdot x = 5x$$

$$a \cdot 7 \cdot b = 7ab$$

$$1 \cdot m = m$$

$$-1 \cdot p = -p$$

$$x : y = \frac{x}{y}$$

Nazywanie wyrażeń algebraicznych

$$a + 8 \quad \text{suma liczb } a \text{ i } 8$$

$$7 - b \quad \text{różnica liczb } 7 \text{ i } b$$

$$ab \quad \text{iloczyn liczb } a \text{ i } b$$

$$\frac{4}{c} \quad \text{iloraz liczb } 4 \text{ i } c$$

$$z^2 \quad \text{kwadrat liczby } z$$

$$x^3 \quad \text{sześcian liczby } x$$

Obliczanie wartości liczbowej wyrażenia algebraicznego

$$-2a + 5b \text{ dla } a = 4, b = 3$$

$$-2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = -8 + 15 = 7$$

Dodawanie i odejmowanie:

- możliwe do wykonania

$$5x + 8x = 13x \quad 5y - y = 4y$$

- niewykonalne

$$3a + 7b \quad 4 - 2x$$

Mnożenie i dzielenie

$$7x \cdot 3 = 21x$$

$$5y : 4 = 1,25y$$

Równanie to równość dwóch wyrażeń, z których przynajmniej jedno jest wyrażeniem algebraicznym.

Rozwiązywanie równania polega na znalezieniu liczby, dla której obie strony równania mają taką samą wartość liczbową. Tę znaną liczbę nazywamy **rozwiązaniem równania**.

Rozwiązanie równania możemy znaleźć przez odgadywanie (w bardzo prostych przypadkach), dopełnianie lub przez wykonywanie działań odwrotnych do tych, które występują w równaniu.

Przykłady równań

$$252 : x = 42$$

$$x + 2x = 36$$

$$5x + 6 = 21 + 2x$$

Rozwiązanie równania

Liczba 6 jest rozwiązaniem równania

$$4x : 3 = 8,$$

ponieważ $4 \cdot 6 : 3 = 8$.

Liczba 3,3 jest rozwiązaniem równania

$$x - 0,8 = 2,5,$$

ponieważ liczbę tę otrzymujemy po zapisaniu działania odwrotnego:

$$2,5 + 0,8 = x, \text{ co oznacza, że } x = 3,3.$$

Zadania

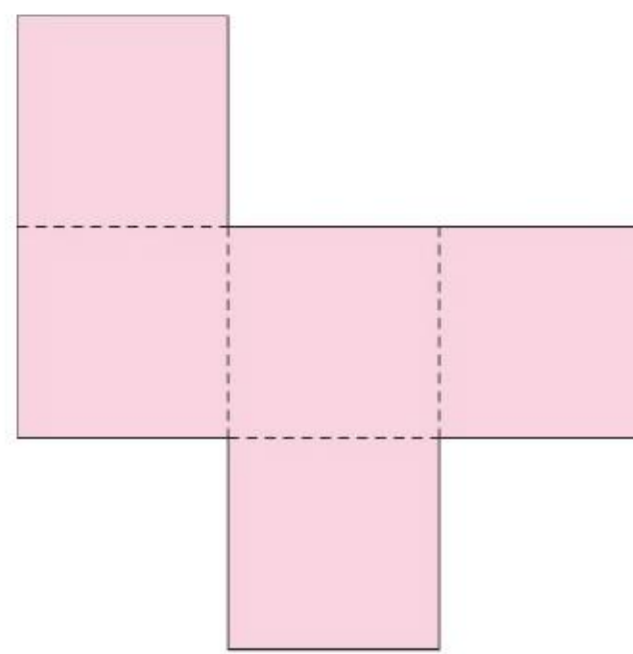
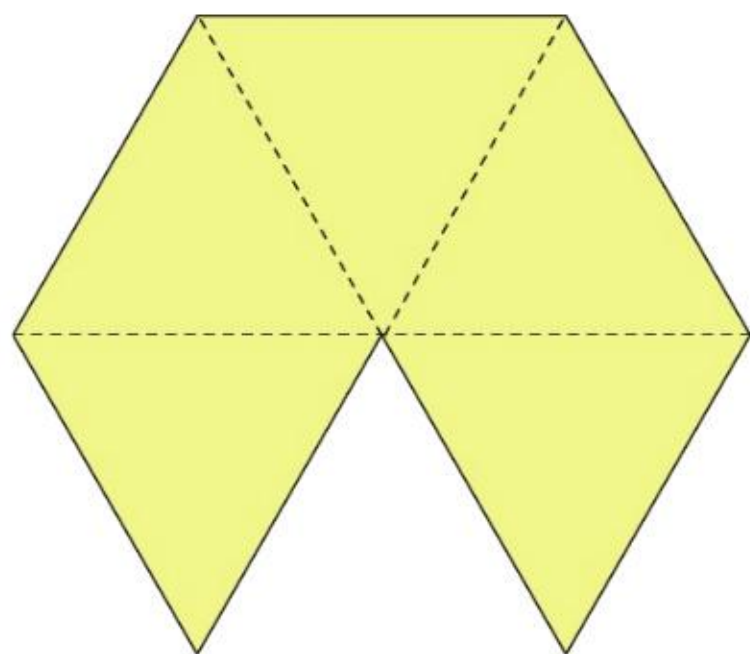
- Dopasuj wyrażenie algebraiczne do opisu.
 - A. liczba o 5 większa od n
 - B. liczba 5 razy mniejsza od n
 - C. liczba o 5 mniejsza od n
 - D. liczba 5 razy większa od n
 - I. $5n$
 - II. $5 + n$
 - III. $\frac{n}{5}$
 - IV. $n - 5$
- Maciek jest o s cm wyższy od Tomka. Jaki jest wzrost Tomka, jeżeli Maciek ma 152 cm wzrostu?
 - A. $s - 152$
 - B. $152s$
 - C. $152 - s$
 - D. $152 + s$
- Ela waży o p kg mniej niż Kasia. Ela waży 43 kg. Ile waży Kasia?
 - A. $43 + p$
 - B. $43 - p$
 - C. $p - 43$
 - D. $43p$
- Janek ma o m zł mniej niż Adam, który ma 23 zł. Ile razy więcej pieniędzy niż Janek ma Adam?
 - A. m
 - B. $\frac{23}{23 - m}$
 - C. $\frac{m}{23}$
 - D. $m - 23$
- Zegar ścienny w ciągu doby spóźnia się o p minut.
 - a) O ile minut spóźnia się ten zegar w ciągu tygodnia, a o ile w ciągu godziny?
 - b) O ile sekund spóźnia się ten zegar w ciągu doby, a o ile w ciągu godziny?

Do każdego zadania ułóż wyrażenie algebraiczne będące jego opisem.

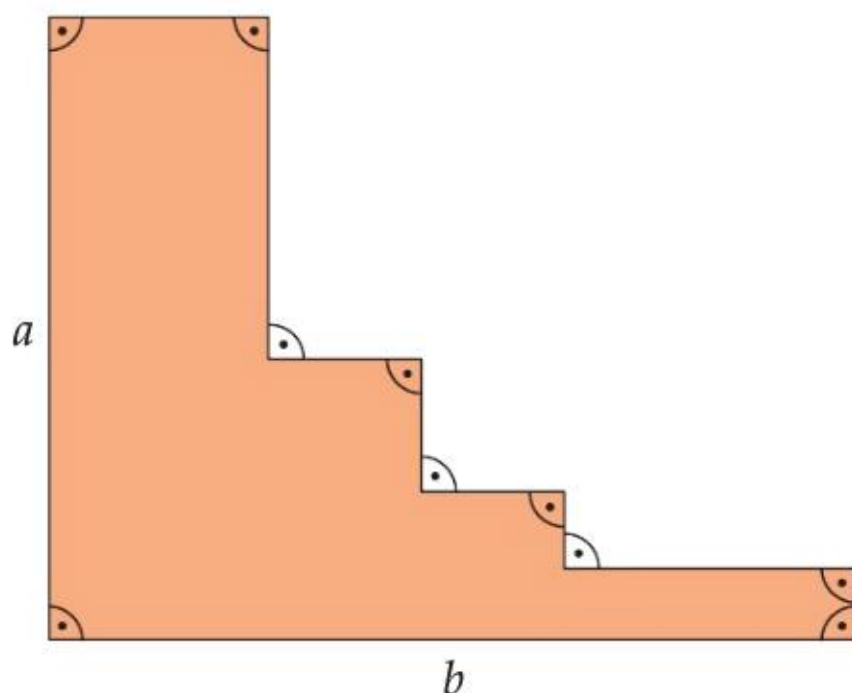
- a) Ania ma a książek, Bartek ma b książek, a Kamil ma tyle, co Ania i Bartek razem. Ile książek mają razem Ania, Bartek i Kamil?
- b) Pan Jan ma ogród o powierzchni m arów. Pod uprawę truskawek przeznaczył $\frac{1}{10}$ jego powierzchni, a $\frac{1}{20}$ pod uprawę pomidorów. Ile arów zajmują truskawki, ile – pomidory, a ile pozostaje pod inne uprawy?
- c) Na wycieczkę pojechało x uczniów i y uczennic. Dziewczęta nocowały w pokojach 3-osobowych, a chłopcy w 2-osobowych. Jeden pokój zajęły 3 opiekunki. W ilu pokojach nocowali uczestnicy wycieczki?
Uwaga: Wszystkie miejsca w pokojach były wykorzystane i dla żadnego dziecka nie zabrakło miejsca.
- d) Krawcowa szyje k sukienek w ciągu m dni. Ile sukienek szyje przeciętnie w ciągu jednego dnia?
- e) Pan Mateusz kupił m kg jabłek po p zł za kilogram. Zapłacił banknotem o wartości 20 zł. Ile reszty otrzymał?

Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego obwód:

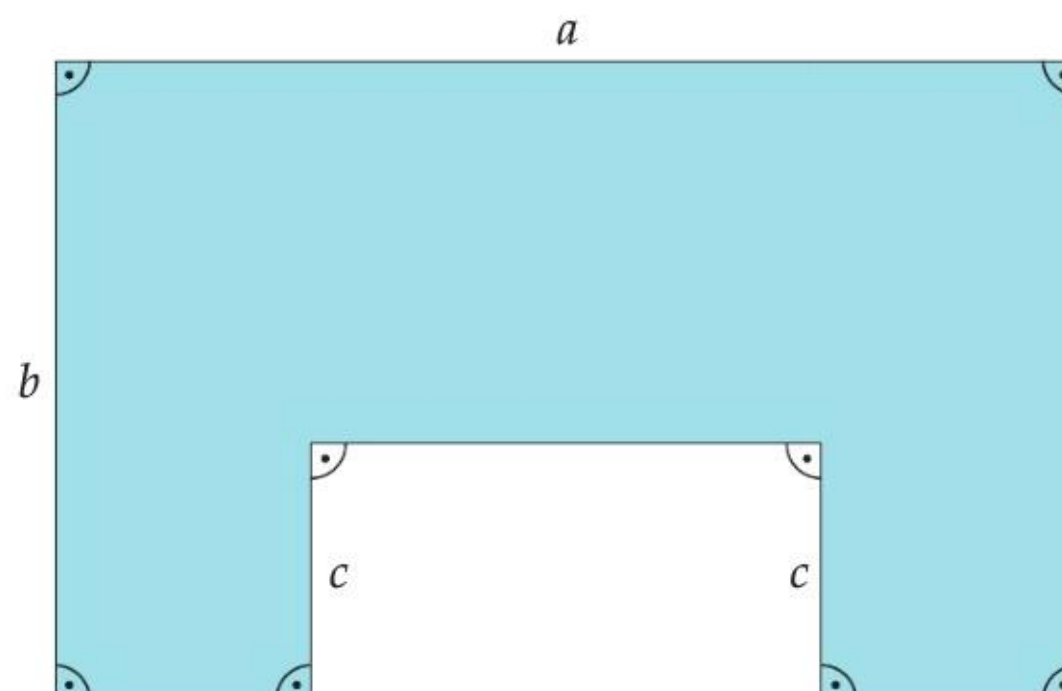
- a) trójkąta równobocznego o boku długości a ,
- b) kwadratu o boku długości b ,
- c) figury złożonej jak na rysunku z pięciu trójkątów równobocznych o boku długości c ,
- d) figury złożonej jak na rysunku z pięciu kwadratów o boku długości d ,



- e) figury danej na rysunku (a i b to długości boków),



- f) figury danej na rysunku (a , b i c to długości boków).



- Krawędź sześcianu ma długość a . Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego sumę długości krawędzi sześcianu, pole jego powierzchni i objętość. Oblicz wartości tych wyrażen dla $a = 11$ cm.
- Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku długości x . Krawędź boczna prostopadłościanu jest o 2 cm dłuższa od krawędzi podstawy.

- Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego sumę długości krawędzi tego prostopadłościanu.
- Oblicz wartość tego wyrażenia dla $x = 2,5$ cm.

- Wykonaj działania.

a) $4x + 5x + 3,7x$

b) $6x \cdot 9$

c) $48a : 6$

d) $5 \cdot (3x - x)$

$5a + a + 2\frac{3}{5}a$

$1,5 \cdot (-8y)$

$\frac{4}{7}b : (-2)$

$7x + \frac{8x}{3}$

$-3z + 8z - 5z$

$-\frac{3}{5}z \cdot 10$

$-2,4c : (-6)$

$9x - \frac{5x - x}{4}$

$10c - c - 11c$

$8 \cdot 0,35w$

$2d : \frac{8}{9}$

$3 \cdot (7x - 4x) - 8x$

- Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego.

a) $a^2 - b^2$ dla $a = 10$ i $b = -6$

b) $1 - 3cd$ dla $c = 8$ i $d = \frac{1}{2}$

c) $5e - 6f + 1$ dla $e = -1$ i $f = -2$

d) $\frac{g+1}{h}$ dla $g = -6$ i $h = -1$

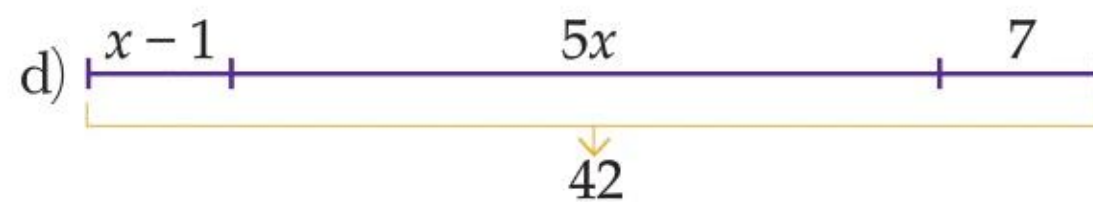
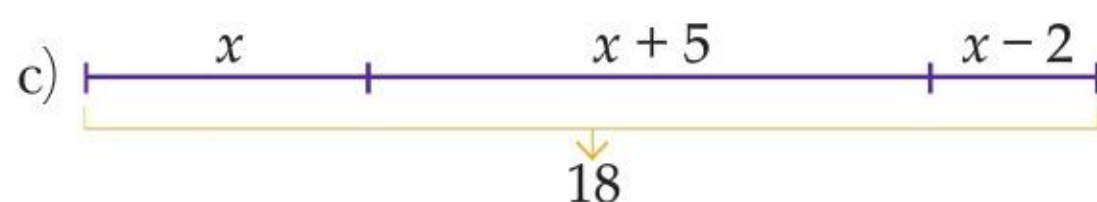
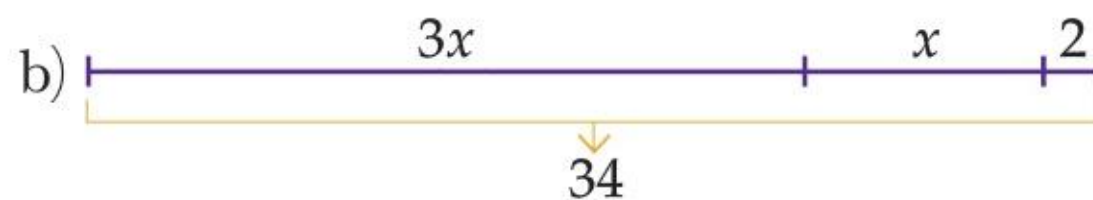
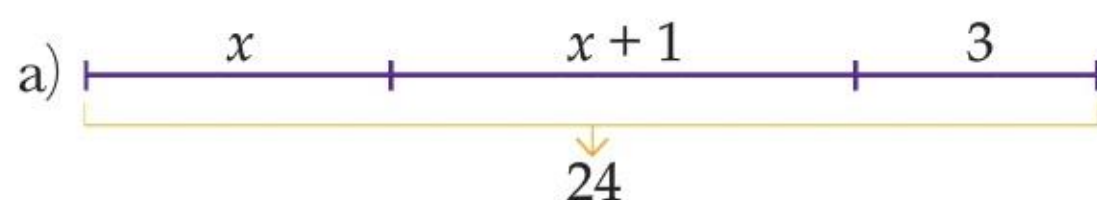
e) $k^2 + k + 5$ dla $k = -3$

f) $3m - \frac{7}{10}$ dla $m = \frac{4}{5}$

g) $\frac{2p+3s}{5p}$ dla $p = 3$ i $s = -1$

h) $\frac{7w}{w-3z}$ dla $w = -6$ i $z = 0$

- Ułóż i zapisz równanie do rysunku. Jaką liczbą jest x ?



- Zapisz działania odwrotne i rozwiąż równania.

a) $x + 53 = 81$

b) $x - 26 = 93$

c) $x \cdot 20 = 160$

d) $\frac{x}{12} = 9$

$x + 0,46 = 2,9$

$x - 4,9 = 0,68$

$-9x = 54$

$-\frac{48}{x} = -8$

$\frac{1}{6} + x = \frac{2}{3}$

$1\frac{14}{15} - x = \frac{9}{15}$

$x \cdot 0,8 = 1,2$

$x : 1\frac{2}{3} = 6$

$-8 + x = 15$

$-18 - x = -7$

$-3\frac{1}{5}x = 32$

$0,72 : x = 0,4$

7.6 Praktyczne zastosowania matematyki

Aby obliczyć **średnią arytmetyczną** kilku liczb, należy obliczyć ich sumę, a następnie podzielić tę sumę przez liczbę jej składników.

Jednostki długości i zależności między nimi

1 mm
1 cm = 10 mm
1 dm = 10 cm = 100 mm
1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm
1 km = 1000 m = 100 000 cm = 1 000 000 mm

Jednostki masy i zależności między nimi

1 g
1 dag = 10 g
1 kg = 100 dag = 1000 g
1 t = 1000 kg = 100 000 dag = 1 000 000 g

Jednostki czasu i zależności między nimi

1 s
1 min = 60 s
1 h = 60 min = 3600 s

Jednostki prędkości

$\frac{\text{cm}}{\text{s}}$, $\frac{\text{cm}}{\text{min}}$, $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\frac{\text{m}}{\text{min}}$, $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Zależności między prędkością, drogą i czasem

$$v = \frac{s}{t} \qquad s = vt \qquad t = \frac{s}{v}$$

gdzie v – prędkość, s – droga, t – czas

Obliczanie średniej arytmetycznej

liczby: 7,2, -4, 2,5, 6, -1,9

$$\text{średnia liczb: } \frac{7,2 + (-4) + 2,5 + 6 + (-1,9)}{5} = 1,96$$

Przykłady zamiany jednostek:

- **długości** (na metry)

7 mm = 0,007 m
3 cm = 0,03 m
5 dm = 0,5 m
8 km = 8000 m

- **masy** (na kilogramy)

7 g = 0,007 kg
4 dag = 0,04 kg
2 t = 2000 kg

- **czasu** (na minuty)

8 s = $\frac{8}{60}$ min = $\frac{2}{15}$ min
4 h = 240 min

- **prędkości** (na $\frac{\text{metry}}{\text{sekundę}}$ oraz na $\frac{\text{kilometry}}{\text{godzinę}}$)

$$72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{72\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{0,005 \text{ km}}{\frac{1 \text{ h}}{3600}} = \frac{5}{1000} \text{ km} : \frac{1 \text{ h}}{3600} =$$

$$= \frac{5}{1000} \text{ km} \cdot \frac{3600}{1 \text{ h}} = \frac{1}{200} \text{ km} \cdot \frac{3600}{1 \text{ h}} = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Obliczanie prędkości

Rowerzysta, który w czasie 3 h przebył 45 km, poruszał się z prędkością

$$v = \frac{45 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Skala informuje nas, ile razy obiekt został powiększony albo zmniejszony w celu przedstawienia go na rysunku.

Sposoby przedstawiania i porządkowania danych

Dane mogą być przedstawiane za pomocą opisu słownego, tabeli, diagramu lub wykresu.

Procenty

Procent danej wielkości to jedna setna tej wielkości.

$$1\% = \frac{1}{100}$$

Aby **ułamek** wyrazić **w postaci procentów**, należy ten ułamek pomnożyć przez 100%.

Aby **procenty** wyrazić **w postaci ułamka**, należy liczbę wskazującą procenty podzielić przez 100.

Procent danej liczby

Aby obliczyć procent danej liczby, należy:

- zamienić liczbę wskazującą procenty na ułamek,
- obliczyć ułamek danej liczby.

Przykłady skal

Skala **3 : 1** oznacza, że na rysunku każdy wymiar obiektu jest **3 razy większy** od rzeczywistego.

Skala **1 : 50** oznacza, że na rysunku każdy wymiar obiektu jest **50 razy mniejszy** od rzeczywistego.

Skala **1 : 1** oznacza, że na rysunku każdy wymiar obiektu jest **taki sam** jak w rzeczywistości.

Zapis procentów jako części całości

$$10\% = \frac{1}{10} \quad 25\% = \frac{1}{4}$$

$$50\% = \frac{1}{2} \quad 100\% = 1$$

Zapis ułamka w postaci procentu

$$0,34 = 0,34 \cdot 100\% = 34\%$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot 100\% = 60\%$$

Zapis procentu w postaci ułamka

$$70\% = 70 : 100 = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} = 0,7$$

Obliczanie procentu danej liczby

60% liczby 80 to

$\frac{60}{100}$ liczby 80, czyli

$$\frac{60}{100} \cdot 80 = 48$$

Zadania

- Ile wynosi różnica mas paczek pokazanych na rysunku?

A. 3,634 kg

B. 2,634 kg

C. 2,174 kg

D. 3,174 kg



- Z mapki umieszczonej obok wynika, że droga z Borkowa do Gajewa ma długość
- A. 2682 m B. 26,82 km
C. 26 km 82 m D. 26,082 km



- Uzupełnij w zeszycie podaną tabelę.
- Turyści szli brzegiem morza. Pierwszego dnia przeszli 12,6 km, drugiego – 11,85 km, a trzeciego – 8 km 700 m. Oblicz średnią długość ich dziennej trasy. Odpowiedź podaj w postaci wyrażenia dwumianowanego.

Czas		
w godzinach	w minutach	w sekundach
$\frac{1}{15}$		
	140	
		720

- Auto przejechało 240 km w ciągu 3 h, a następne 60 km w ciągu $\frac{3}{4}$ h. Oblicz całkowitą drogę przebytą przez auto, całkowity czas, z jakim się poruszało, i średnią prędkość, z jaką pokonało całą trasę.
- Jacek i Maciek mieszkający w odległości 1800 m od siebie wyruszyli ze swoich domów o 10.58, by się spotkać. Jacek szedł piechotą, a Maciek jechał rowerem. Spotkali się o 11.04. Jacek przeszedł w tym czasie 600 m. Oblicz prędkości, z jakimi poruszali się chłopcy. Odpowiedzi podaj w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- Panie Ewa, Anna, Małgorzata i Zofia dojeżdżają codziennie do pracy. Która z pań ma najdalej, a która – najbliżej do pracy?

Imię	Środek transportu	Czas	Prędkość
Ewa	autobus	40 min	$60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
Anna	samochód	$\frac{1}{2}$ h	$86 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
Małgorzata	motocykl	50 min	$54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
Zofia	pociąg	35 min	$72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

- Rekin płynie z prędkością $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. W jakim czasie przepłynie 1,5 km?
- A. $2\frac{1}{4}$ min B. 3 min
C. 180 s D. 2 min 20 s

- Na wystawę kotów zorganizowaną z okazji Dnia Kota (17 lutego) zgłoszono zwierzęta wielu ras. Dokładne dane na ten temat przedstawiono w tabeli.

Rasa kota	kot perski	kot egzotyczny	maine coon [czyt. mejn kun]	kot norweski leśny	kot brytyjski krótkowłosy	kot rosyjski niebieski	kot syjamski	devon rex [czyt. dewon reks]	kot bengalski
Liczba kotów	47	12	53	16	40	32	19	23	13

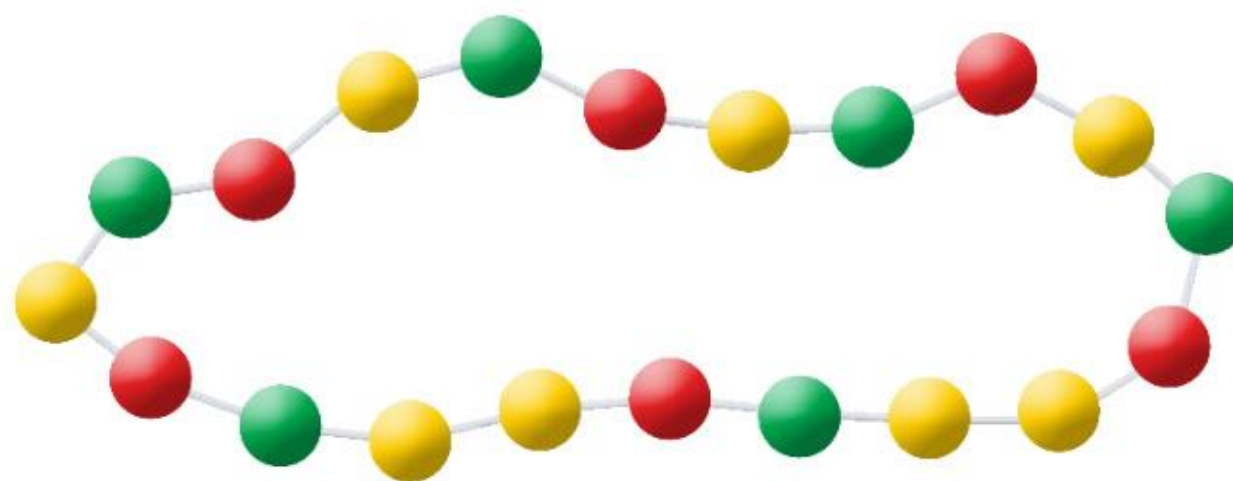
- a) Narysuj w zeszycie diagram słupkowy obrazujący dane zamieszczone w tabeli.
- b) Ile kotów brało udział w wystawie?
- c) Jeden sędzia ocenia najwyżej 55 kotów. Ilu co najmniej sędziów pracowało podczas tej wystawy?

- W tabeli obok przedstawiono zależność między długością boku kwadratu a jego obwodem. Przerysuj do zeszytu wykres dotyczący tej zależności i uzupełnij go do takich wartości, by móc wykonać polecenia a)–d).

Długość boku kwadratu (cm)	1	2	3	4
Obwód kwadratu (cm)	4	8	12	16



- Odczytaj z otrzymanego wykresu:
- jaki jest obwód kwadratu o boku długości 0,5 cm,
 - jaki jest obwód kwadratu o boku długości 3,5 cm,
 - jaka jest długość boku kwadratu o obwodzie równym 6 cm,
 - jaka jest długość boku kwadratu o obwodzie równym 18 cm.
- Mapa jest wykonana w skali 1 : 2 000 000. Odległość między dwoma miastami na tej mapie wynosi 1,5 cm. Jaka jest odległość między tymi miastami w rzeczywistości?
 - Ulica Mariacka ma długość 800 m. Ile wynosi jej długość na planie, który został wykonany w skali 1 : 25 000?
 - Odległość między dwiema miejscowościami w terenie wynosi 48 km. Odpowiadająca jej odległość na mapie jest równa 3 cm. W jakiej skali wykonano mapę?
 - Jaki procent wszystkich koralików jest koloru:
 - czerwonego,
 - żółtego?
 - Zapisz w postaci ułamka lub liczby mieszanej.
 - 28%
 - 10%
 - 55%
 - 273%
 - Zapisz w postaci procentów.
 - $\frac{1}{25}$
 - $\frac{11}{20}$
 - 1,4
 - 3
 - Towar kosztuje 60 zł. O ile złotych wzrośnie jego cena po podwyżce o 30%?
 - Pani Maria kupiła na wyprzedaży kapelusz. Początkowo kosztował on 180 zł, a po przecenie o 20% mniej. Ile pani Maria zapłaciła za kapelusz?



7.7 Figury płaskie

Podstawowe figury geometryczne

- punkt
- prosta
- półprosta
- odcinek
- łamana

Okrąg to figura geometryczna składająca się ze wszystkich punktów, których odległość od pewnego punktu (środek okręgu) jest równa ustalonej liczbie.

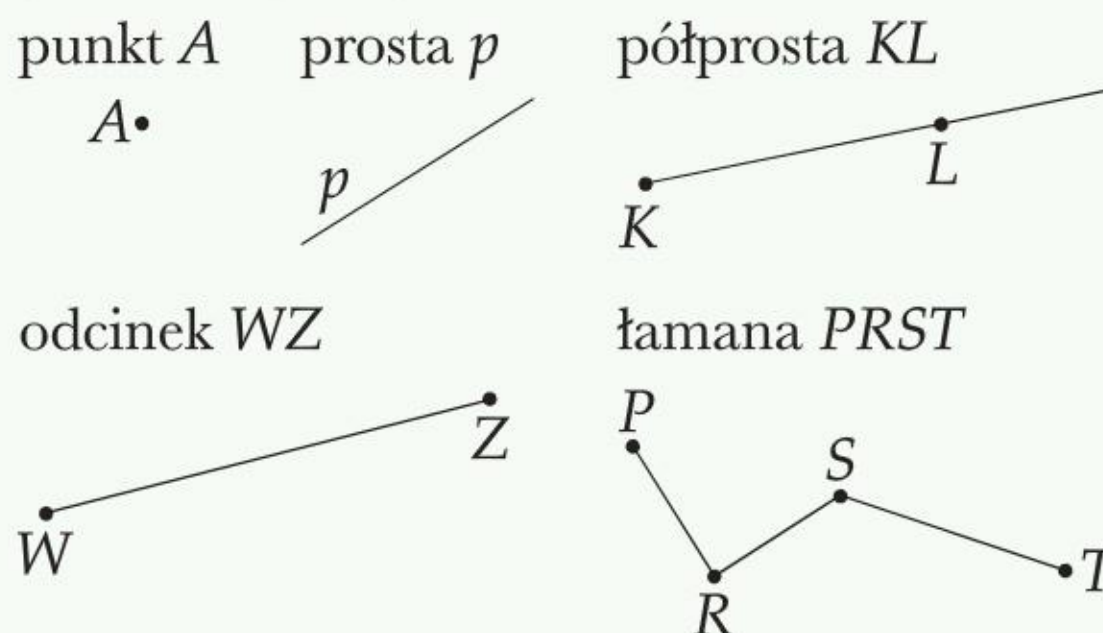
Koło to figura geometryczna składająca się ze wszystkich punktów, których odległość od pewnego punktu (środek koła) jest równa ustalonej liczbie lub jest od niej mniejsza.

Odcinki w kole i okręgu

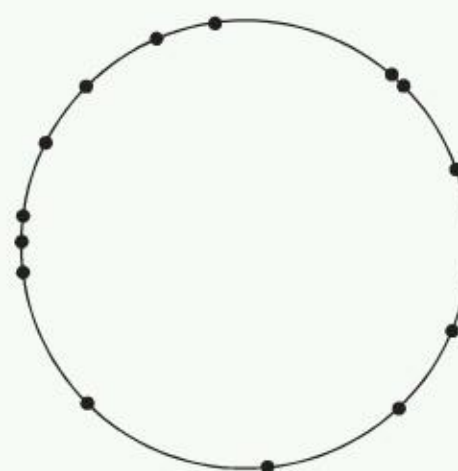
Promień to odcinek, który łączy środek koła (okręgu) z dowolnym punktem brzegu koła (z dowolnym punktem okręgu).

Cięciwa to odcinek, który łączy dwa dowolne punkty brzegu koła (dwa dowolne punkty okręgu).
Średnica to cięciwa, do której należy środek koła (środek okręgu).

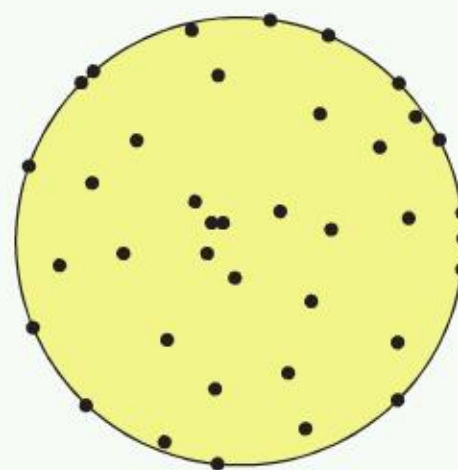
Oznaczenia podstawowych figur geometrycznych



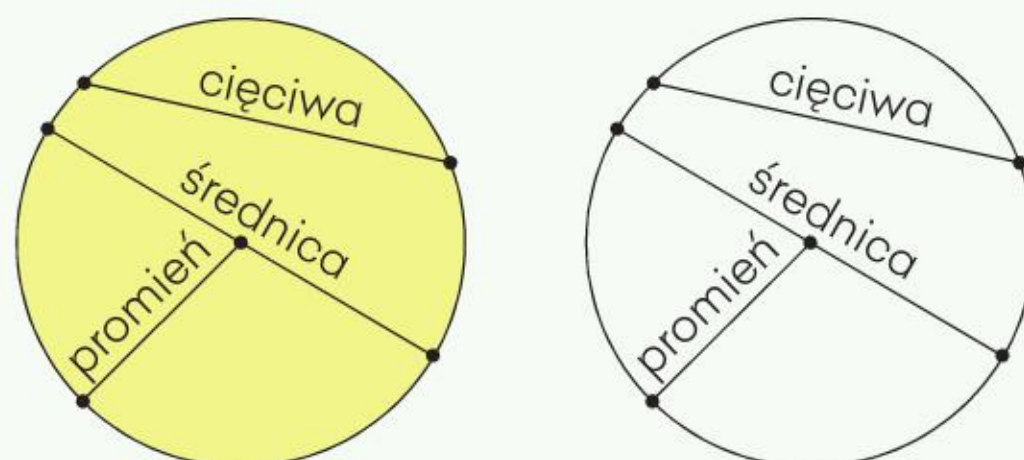
Punkty tworzące okrąg



Punkty tworzące koło



Odcinki w kole i okręgu



Wzajemne położenie prostych

- Proste przecinające się mają dokładnie jeden punkt wspólny.
- Proste prostopadłe to proste przecinające się pod kątem prostym.
- Proste równoległe nie mają punktów wspólnych, lub – w szczególnym przypadku – są prostymi pokrywającymi się, czyli mają wszystkie punkty wspólne.

Kąt to każda z dwóch części płaszczyzny ograniczona dwiema półprostymi o wspólnym początku, wraz z tymi półprostymi.

Rodzaje kątów ze względu na miarę

- Kąt zerowy ma 0° .
- Kąt ostry ma więcej niż 0° i mniej niż 90° .
- Kąt prosty ma 90° .
- Kąt rozwarty ma więcej niż 90° i mniej niż 180° .
- Kąt półpełny ma 180° .
- Kąt wklęsły ma więcej niż 180° i mniej niż 360° .
- Kąt pełny ma 360° .

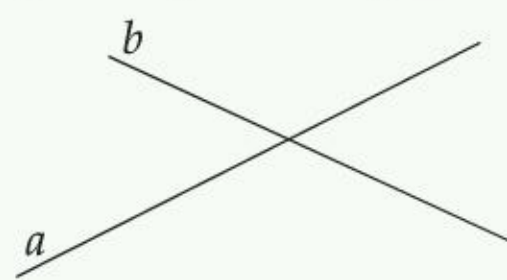
Rodzaje kątów ze względu na wzajemne położenie

- Kąty wierzchołkowe to dwa kąty, które mają wspólny wierzchołek, a ramiona jednego są przedłużeniem ramion drugiego.
- Kąty przyległe to dwa kąty, które mają jedno wspólne ramie, a pozostałe ramiona tych kątów tworzą prostą.

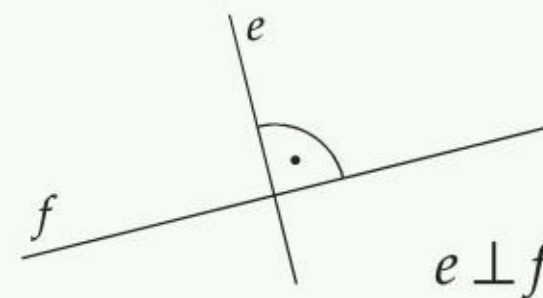
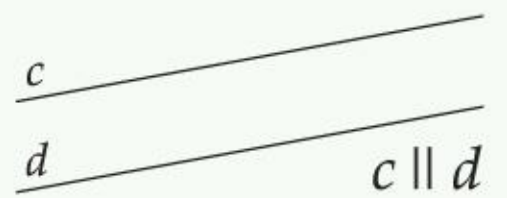
Kąty wierzchołkowe są sobie równe, a suma miar kątów przyległych jest równa 180° .

Wzajemne położenie prostych

proste przecinające się proste prostopadłe



proste równoległe

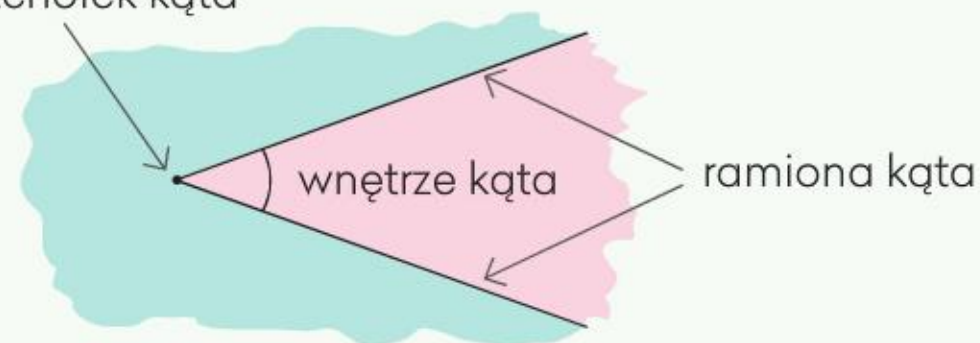


proste pokrywające się



Kąt

wierzchołek kąta



Rodzaje kątów

kąt zerowy



kąt prosty



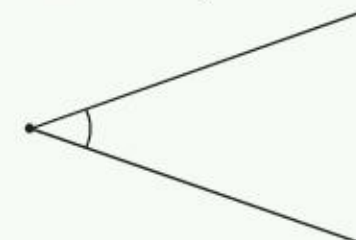
kąt półpełny



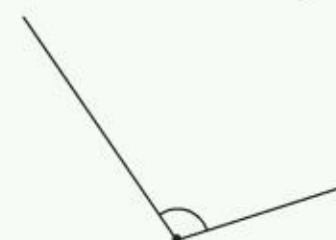
kąt pełny



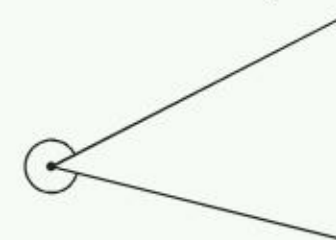
kąt ostry



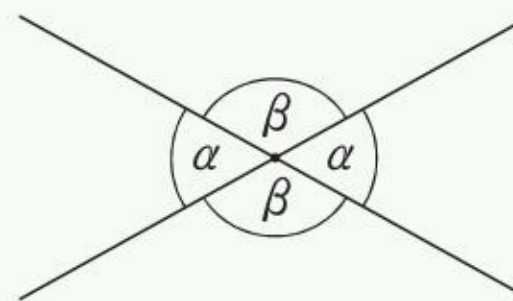
kąt rozwarty



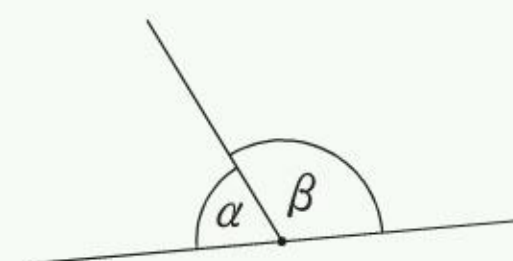
kąt wklęsły



Kąty wierzchołkowe



Kąty przyległe



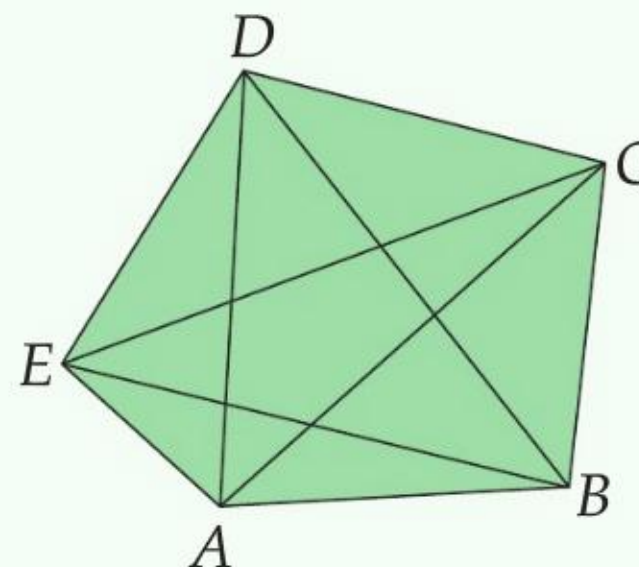
Wielokąt to figura, która składa się z łamanej zwyczajnej zamkniętej i obszaru ograniczonego tą łamaną.

Przekątna wielokąta to odcinek, który łączy dwa wierzchołki wielokąta, a nie jest jego bokiem.

Rodzaje wielokątów

- trójkąt
- czworokąt
- pięciokąt
- sześciokąt itd.

Wielokąt ABCDE i jego przekątne



Zadania

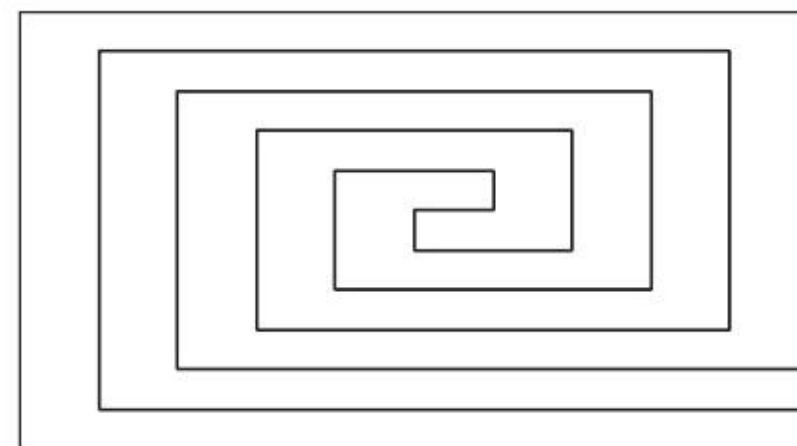
● Oceń prawdziwość zdań. Zapisz literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

- Odcinek to część prostej ograniczona dwoma różnymi punktami.
- Przez dowolny punkt można poprowadzić nieskończenie wiele prostych.
- Przez dwa dowolne punkty można poprowadzić nieskończenie wiele prostych.
- Przez trzy dowolne punkty można poprowadzić prostą.
- Dwie proste przecinające się wyznaczają cztery półproste.
- Dwie półproste o wspólnym początku wyznaczają cztery kąty.

● Jak się nazywa figura narysowana obok? Ile ma boków?

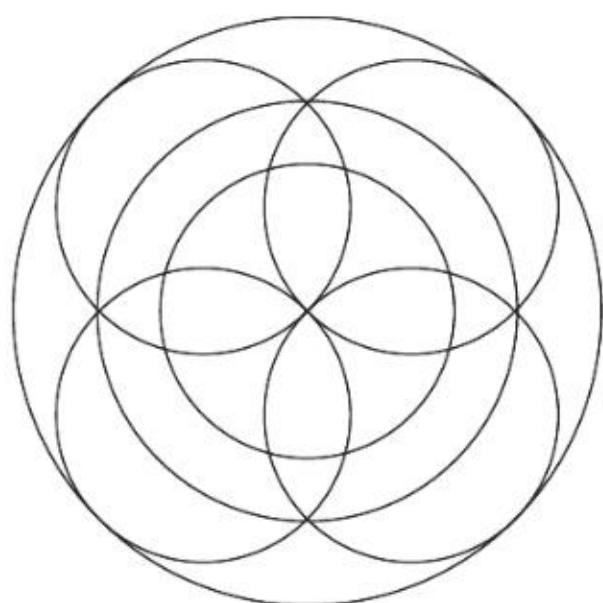
● Prosta k jest prostopadła do prostej m . Prosta p jest prostopadła do prostej k . Prosta t jest prostopadła do prostej p . Jakie jest wzajemne położenie podanych par prostych?

- a) m i p b) k i t c) m i t

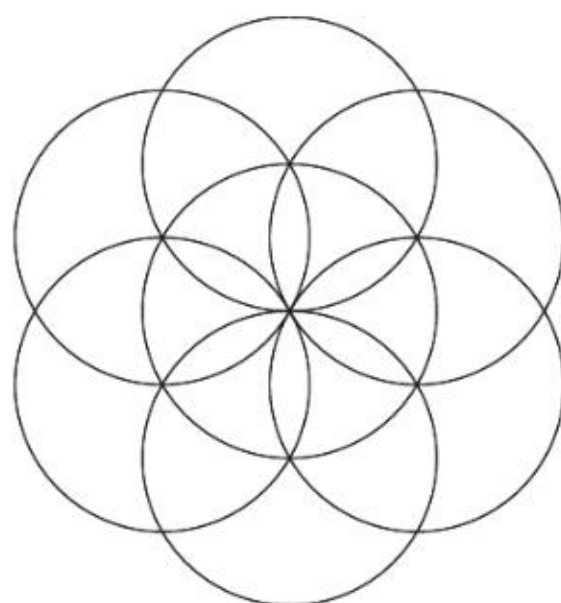


● Ile okręgów tworzy narysowaną figurę? Przerysuj jedną z nich.

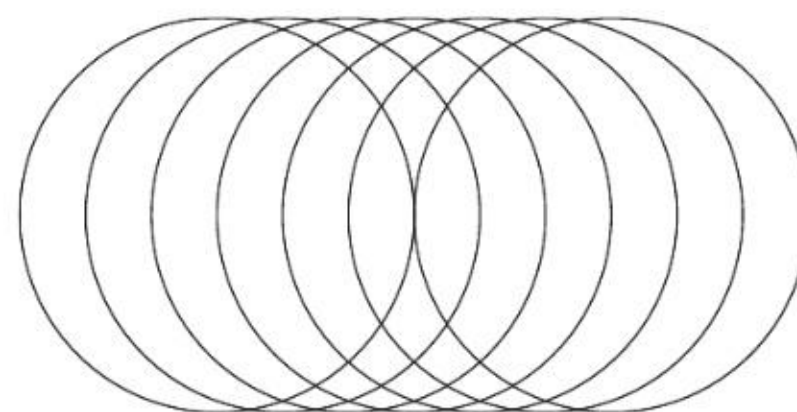
a)



b)

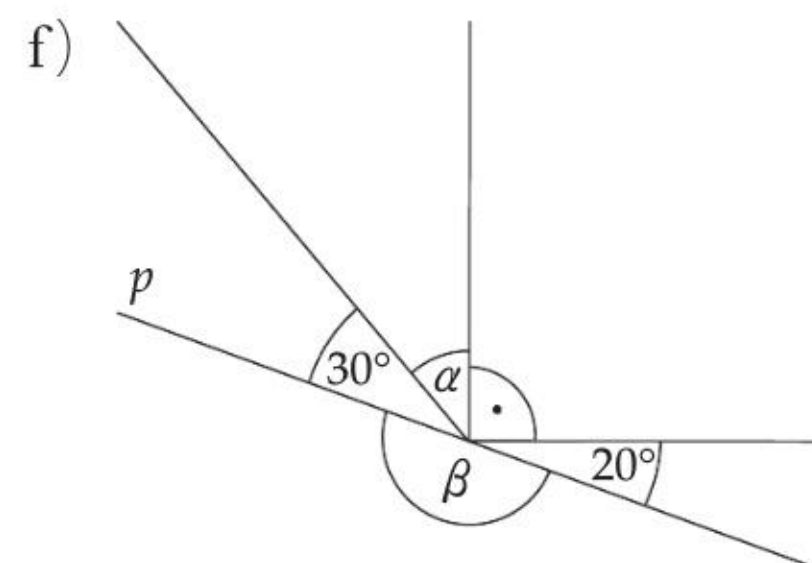
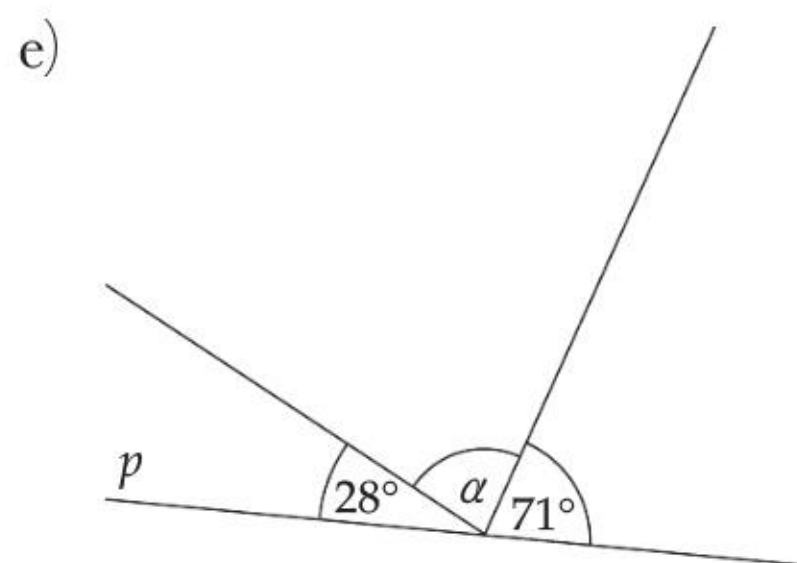
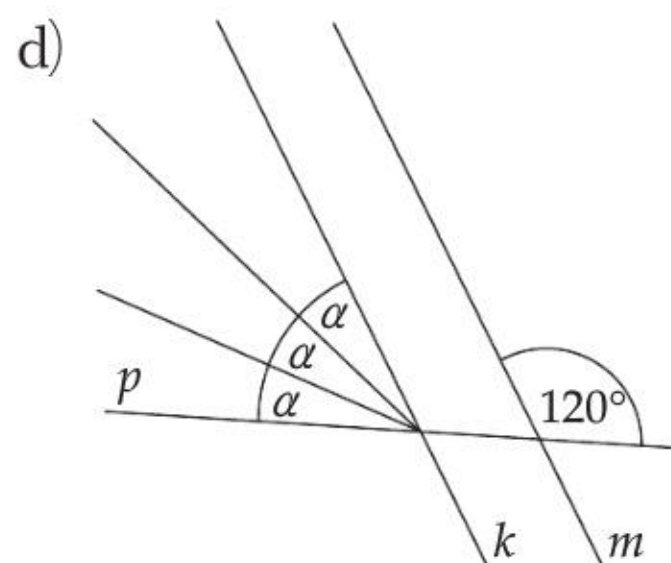
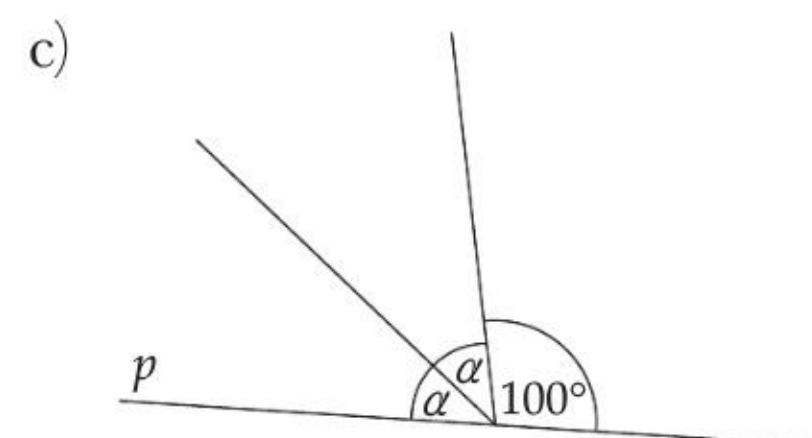
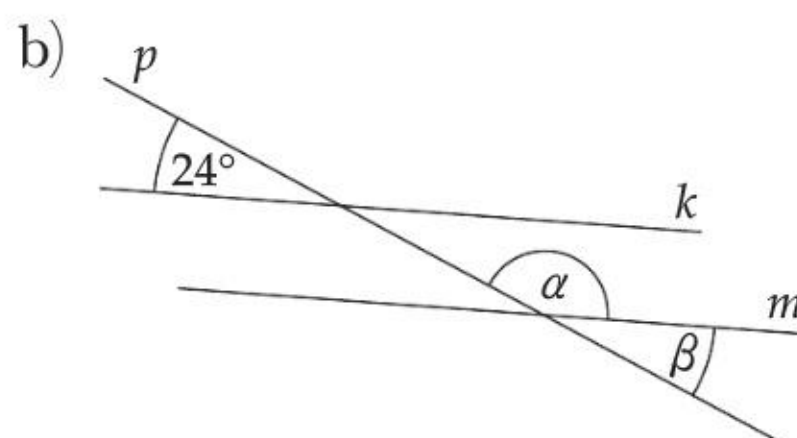
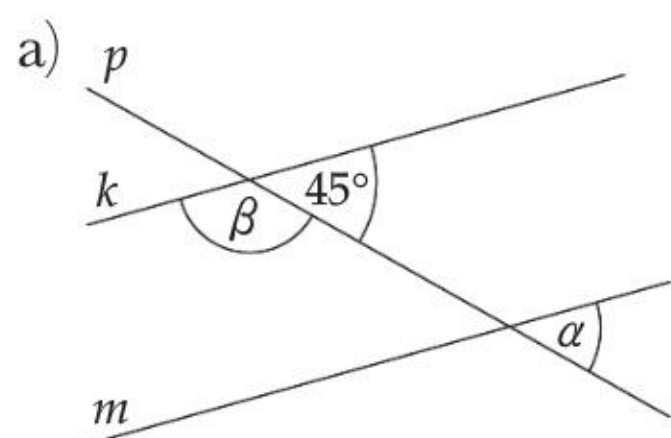
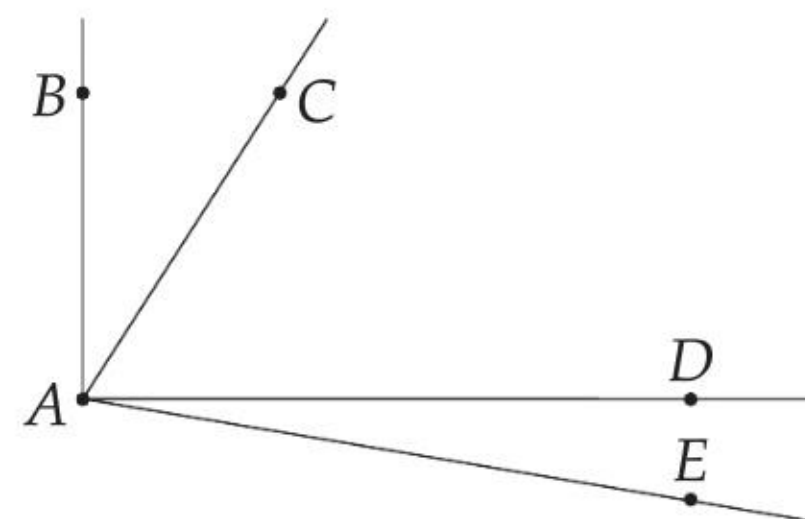
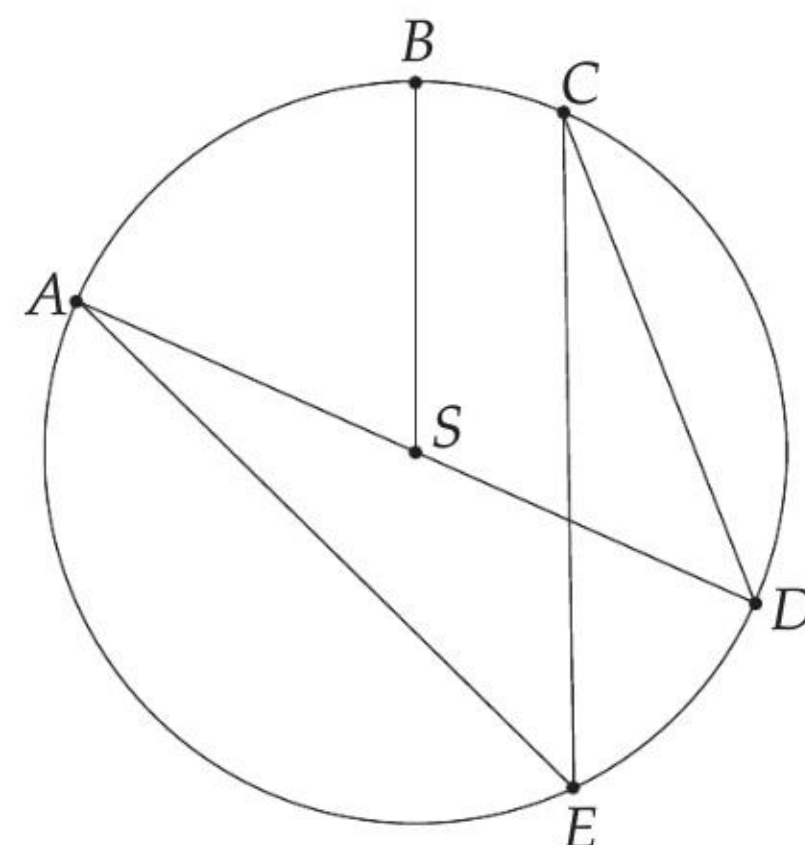


c)



Czy narysowana przez ciebie figura jest osiowosymetryczna? Jeśli tak, podaj, ile ma osi symetrii.

- Narysuj koło i jego średnicę. Następnie narysuj cięciwę równoległą do narysowanej średnicy oraz promień do niej prostopadły.
- W okręgu narysowano cztery cięciwy jak na rysunku obok. Która z nich jest najdłuższa, a która – najkrótsza? Odpowiedz na pytanie bez mierzenia odcinków.
- Które litery polskiego alfabetu można narysować jako łamane otwarte? Narysuj je i zaznacz jednakowym kolorem ich równoległe boki.
- Wypisz co najmniej 10 kątów widocznych na rysunku obok. Przy każdym zapisz, jaki to rodzaj kąta.
- Narysuj dwa kąty przyległe o tej samej mierze.
- Jeden z kątów przyległych jest o 25° większy od drugiego. Ile stopni mają te kąty?
- Podaj miary kątów α i β .
Uwaga: $k \parallel m$.



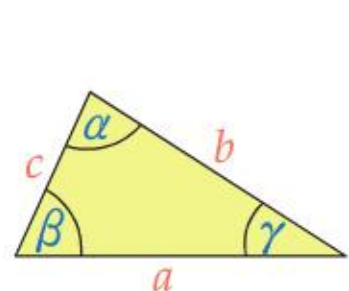
- Narysuj podany wielokąt oraz jego przekątne. Ile przekątnych ma ten wielokąt? A ile przekątnych wychodzi z jednego wierzchołka tego wielokąta?
- a) czworokąt b) pięciokąt c) sześciokąt

7.8 Wielokąty, ich własności i pola

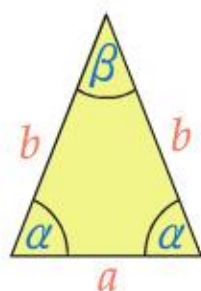
Trójkąty

Suma miar kątów trójkąta wynosi 180° .

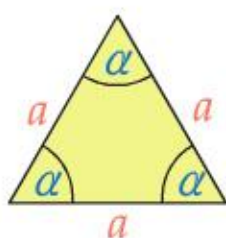
Rodzaje trójkątów ze względu na **boki**



różnoboczny

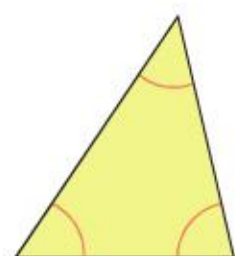


równoramienny

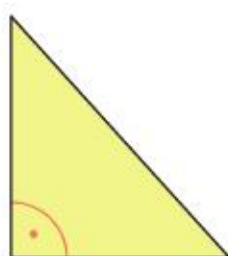


równoboczny

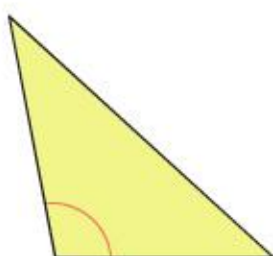
Rodzaje trójkątów ze względu na **kąty**



ostrokątny



prostokątny

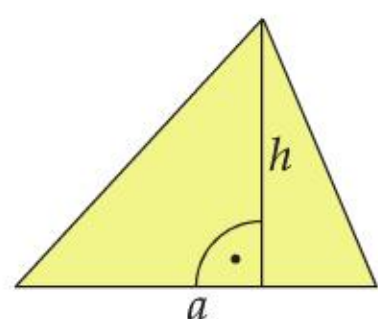


rozwartokątny

Nierówność trójkąta

Suma długości każdych dwóch boków trójkąta jest większa od długości trzeciego boku.

Pole trójkąta



$$P = \frac{ah}{2}$$

a – długość podstawy

h – wysokość opuszczona na podstawę a

Czworokąty

Suma miar kątów czworokąta wynosi 360° .

Trapez to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Suma miar kątów leżących przy jednym ramieniu trapezu wynosi 180° .

$$\alpha + \delta = 180^\circ \quad \beta + \gamma = 180^\circ$$

Miary kątów trójkąta

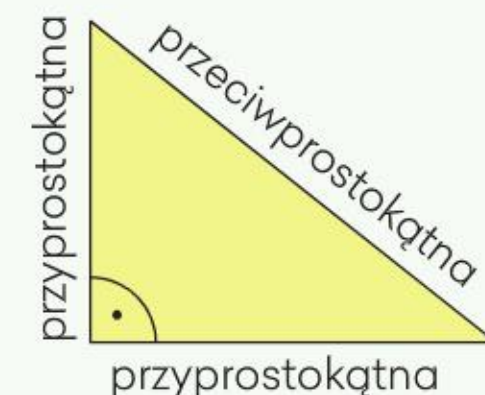


Nazwy boków trójkąta:

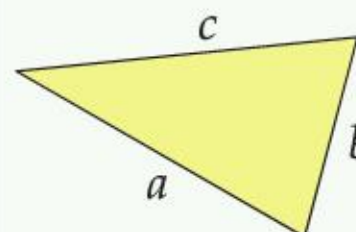
równoramiennego



prostokątnego



Warunek istnienia trójkąta

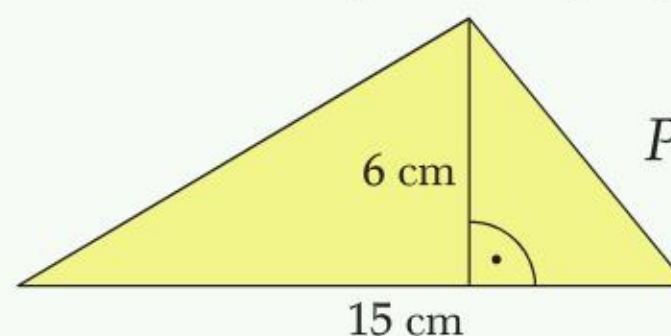


$$a + b > c$$

$$a + c > b$$

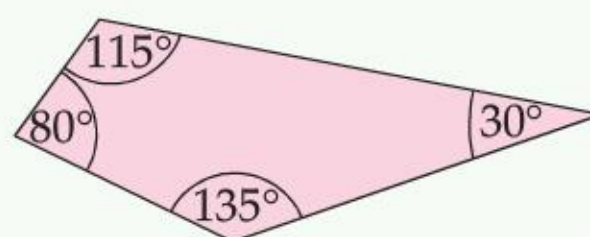
$$b + c > a$$

Obliczanie pola trójkąta



$$P = \frac{15 \cdot 6}{2} = 45 \text{ cm}^2$$

Miary kątów czworokąta



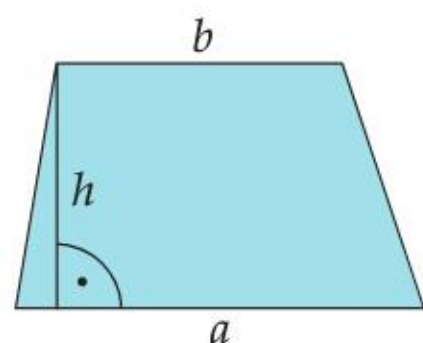
Trapez



Rodzaje trapezów

- Trapez prostokątny ma co najmniej jedno ramię prostopadłe do podstaw.
- Trapez równoramienny ma ramiona równej długości.

Pole trapezu



$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

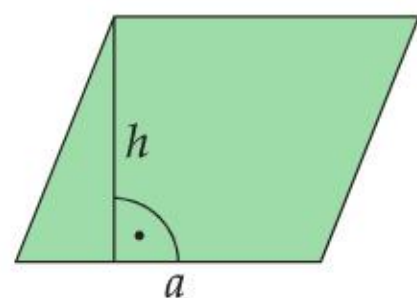
a, b – długości podstaw
 h – wysokość

Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Przeciwległe boki równoległoboku są równej długości, a kąty, które leżą naprzeciw siebie, mają równe miary.

Suma miar dwóch sąsiednich kątów równoległoboku wynosi 180° .

Pole równoległoboku



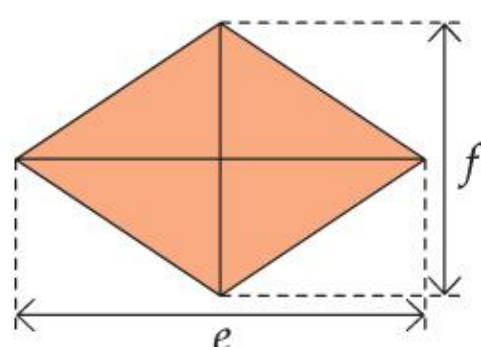
$$P = ah$$

a – długość podstawy
 h – wysokość

Romb to równoległobok, który ma boki równej długości.

Przekątne rombu dzielą się na połowy i przecinają się pod kątem prostym.

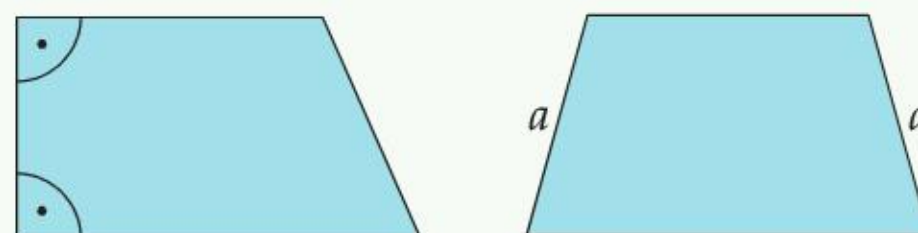
Pole rombu



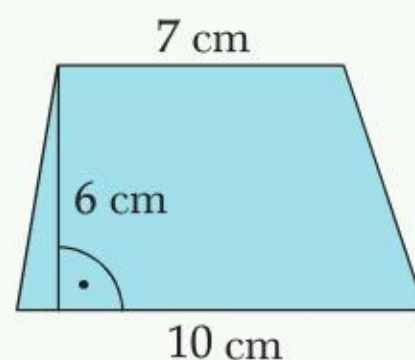
$$P = \frac{ef}{2}$$

e, f – długości przekątnych

Trapez prostokątny i równoramienny

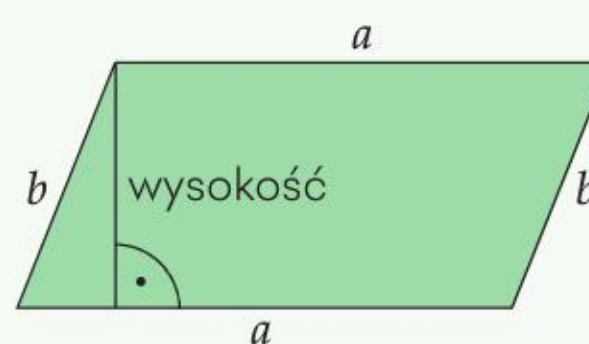


Obliczanie pola trapezu

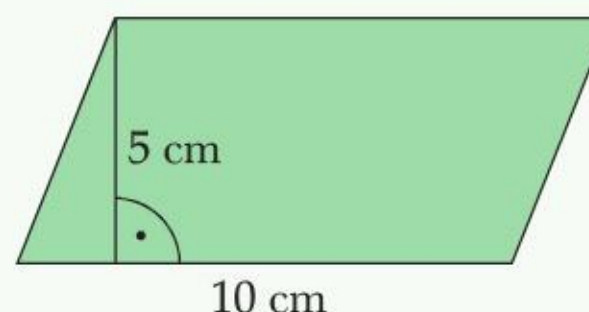


$$P = \frac{(10 + 7) \cdot 6}{2} = 51 \text{ cm}^2$$

Równoległobok

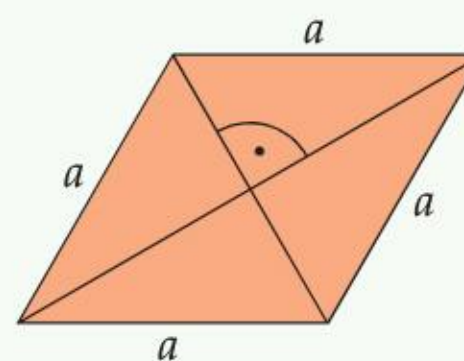


Obliczanie pola równoległoboku

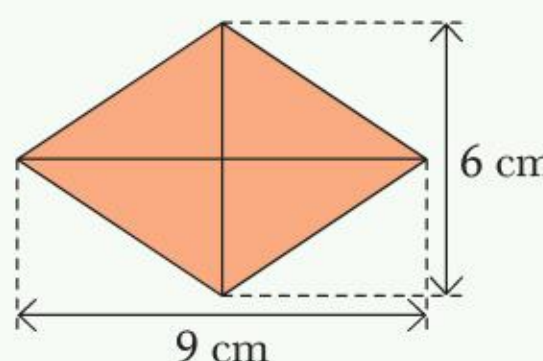


$$P = 10 \cdot 5 = 50 \text{ cm}^2$$

Romb



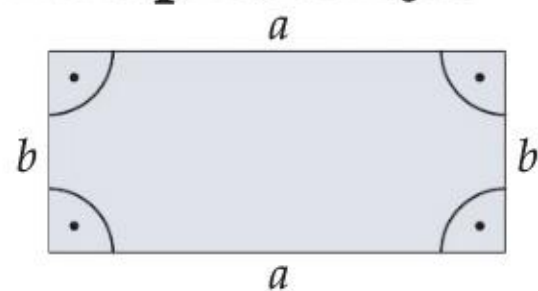
Obliczanie pola rombu



$$P = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27 \text{ cm}^2$$

Prostokąt to czworokąt, którego wszystkie kąty są proste.

Pole prostokąta

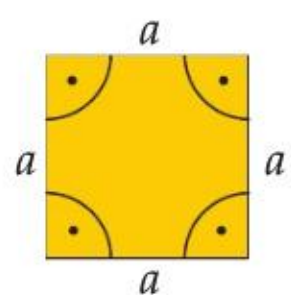


$$P = ab$$

a, b – długości boków

Kwadrat to prostokąt, który ma wszystkie boki równej długości.

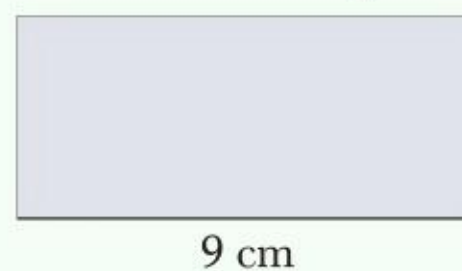
Pole kwadratu



$$P = a \cdot a = a^2$$

a – długość boku

Obliczanie pola prostokąta



$$P = 9 \cdot 4 = 36 \text{ cm}^2$$

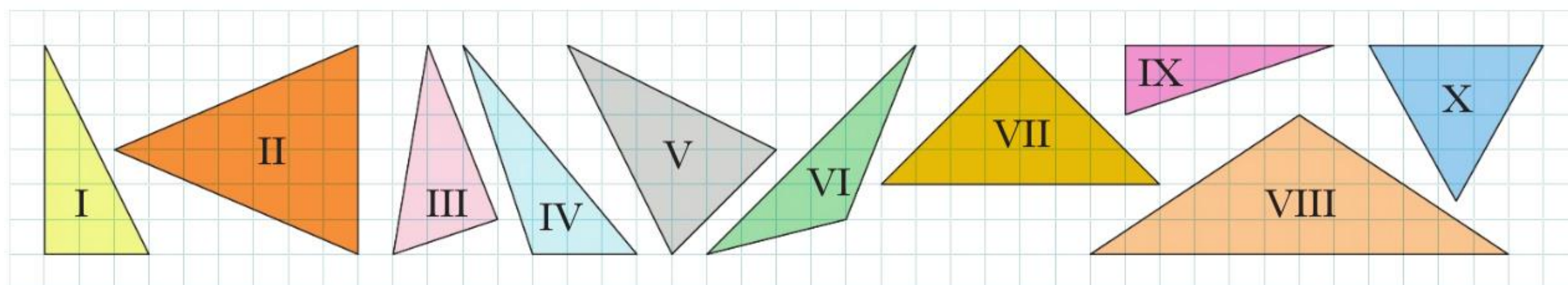
Obliczanie pola kwadratu



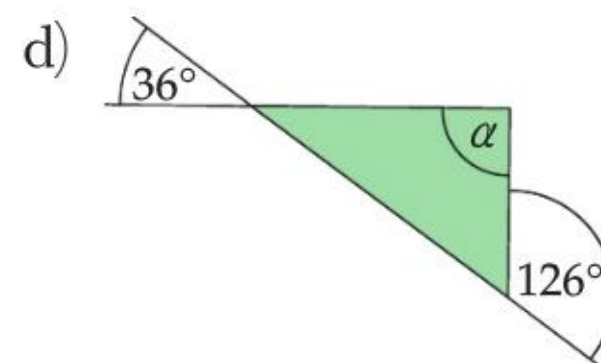
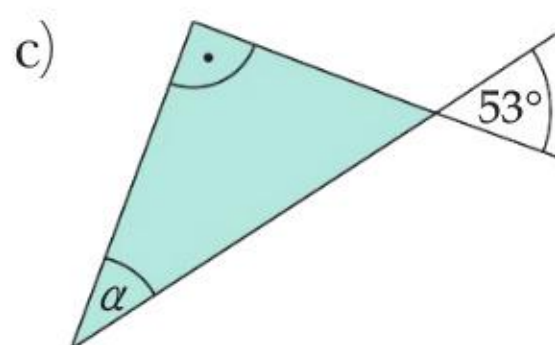
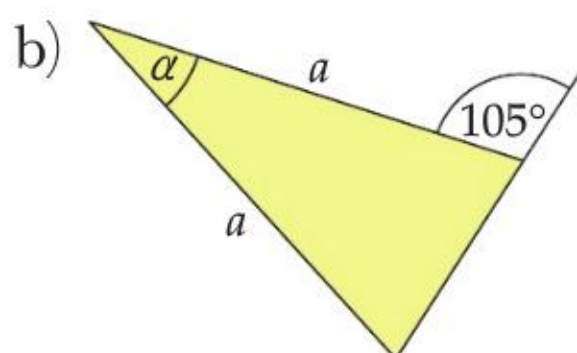
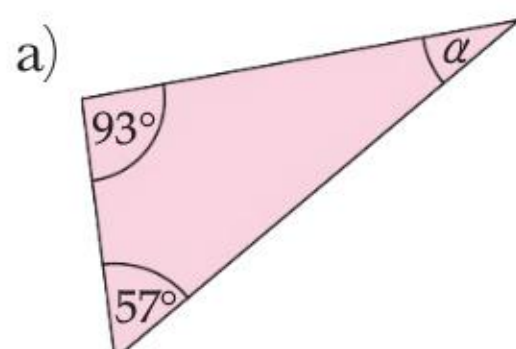
$$P = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$$

Zadania

- Zapisz rodzaj każdego trójkąta (ze względu na boki i ze względu na kąty).

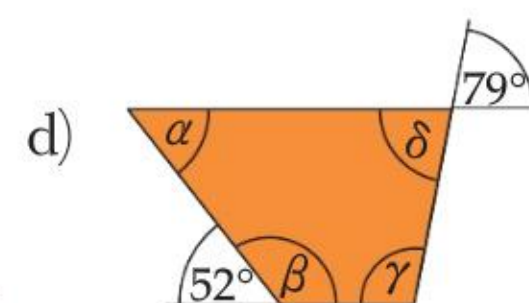
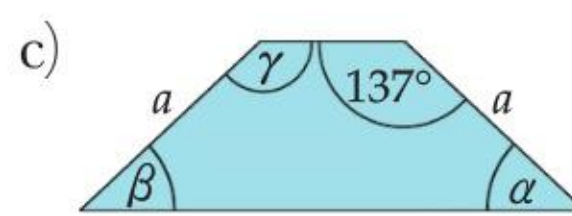
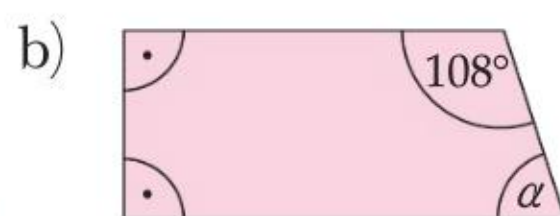
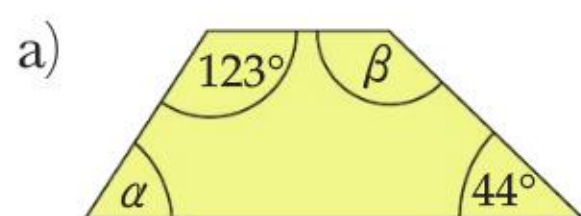


- Które trzy liczby to długości (podane w jednakowych jednostkach) boków jednego trójkąta?
A. 5, 12, 6 B. 5, 12, 9 C. 5, 12, 7 D. 5, 12, 5
- Ile stopni mają kąty trójkąta równobocznego, a ile – prostokątnego równoramiennego?
- Oblicz miarę kąta α .



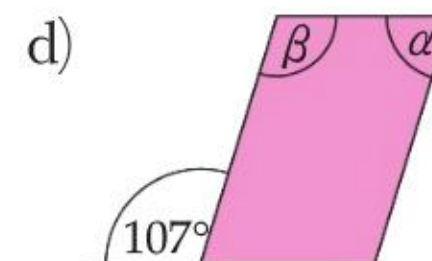
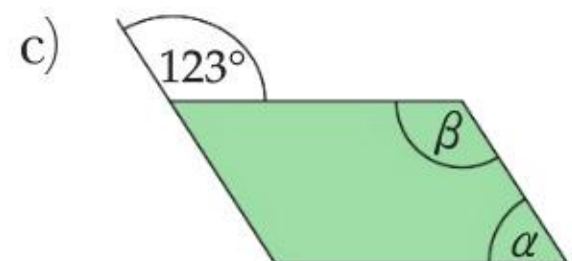
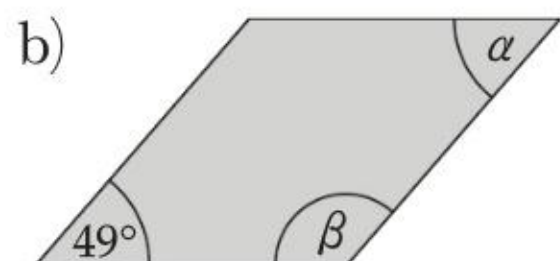
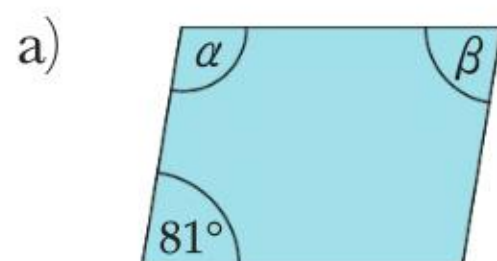
- Oblicz pole trójkąta, którego jeden z boków ma 30 cm, a wysokość opuszczona na ten bok stanowi $\frac{3}{5}$ jego długości.
- Oblicz pole trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają 5 cm i 12 cm, a przeciwprostokątna ma 13 cm.
- W trapezie równoramiennym jedna podstawa ma 8 cm, a druga jest od niej cztery razy krótsza. Ramię stanowi $\frac{3}{4}$ dłuższej podstawy. Narysuj ten trapez.

- Oblicz miary kątów trapezu.



- Narysuj romb, którego obwód ma 12 cm, a kąt ostry ma miarę 60° . Narysuj jego krótszą przekątną. Na jakie trójkąty został podzielony romb?
- Jeden z kątów równoległoboku jest prosty. Jakie są miary pozostałych jego kątów?

- Oblicz miary kątów α i β równoległoboku.



- Boki równoległoboku mają 6 cm i 8 cm. Wysokość prostopadła do dłuższego boku ma 4 cm. Oblicz pole równoległoboku i jego drugą wysokość.
- Dany jest romb o przekątnych długości 10 cm i 15 cm. O ile powiększy się jego pole, jeżeli każdą z tych przekątnych powiększymy o 3 cm? A ile razy zmniejszy się pole, jeżeli każdą z nich zmniejszymy dwukrotnie?
- Boki prostokąta mają 7 cm i 9 cm. O ile powiększy się lub zmniejszy pole prostokąta, jeżeli:
 - a) krótszy bok zmniejszymy o 3 cm, a dłuższy powiększymy o 3 cm,
 - b) oba boki powiększymy dwa razy,
 - c) krótszy bok powiększymy trzy razy, a dłuższy zmniejszymy trzy razy?
- Z pięciu kwadratów o polu 9 cm^2 ułożono prostokąt. Jakie są wymiary tego prostokąta?
- Narysuj prostokąt, równoległobok, romb i trapez, każdy o polu 20 cm^2 .

7.9 Bryły

Najważniejsze **rodzaje brył**

- **graniastosłupy** (wśród nich **prostopadłościany** i **sześcian**)
- **ostrosłupy**
- **bryły obrotowe** (wśród nich **walec**, **stożek** i **kula**)

Graniastosłup prosty to bryła, której dwie ściany (podstawy) są identycznymi wielokątami, a pozostałe ściany (ściany boczne) są prostokątami.

Prostopadłościan to taki graniastosłup, którego podstawy są prostokątami.

Sześcian to taki prostopadłościan, którego wszystkie ściany są jednakowymi kwadratami.

Ostrosłup to bryła, która ma jedną podstawę będącą dowolnym wielokątem i ściany boczne będące trójkątami. Trójkąty te mają wspólny wierzchołek.

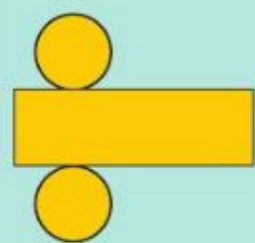
Walec, **stożek** i **kula** to bryły powstałe przez obrót odpowiednio: prostokąta, trójkąta prostokątnego, półkola (lub koła) wokół pewnej ustalonej prostej.

Siatki graniastosłupów i ostrosłupów

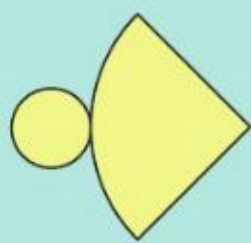
Siatka bryły to przedstawienie tej bryły po „rozcięciu” niektórych krawędzi w taki sposób, aby wszystkie jej ściany można było rozłożyć na płaszczyźnie (np. na stole).

Więcej na temat

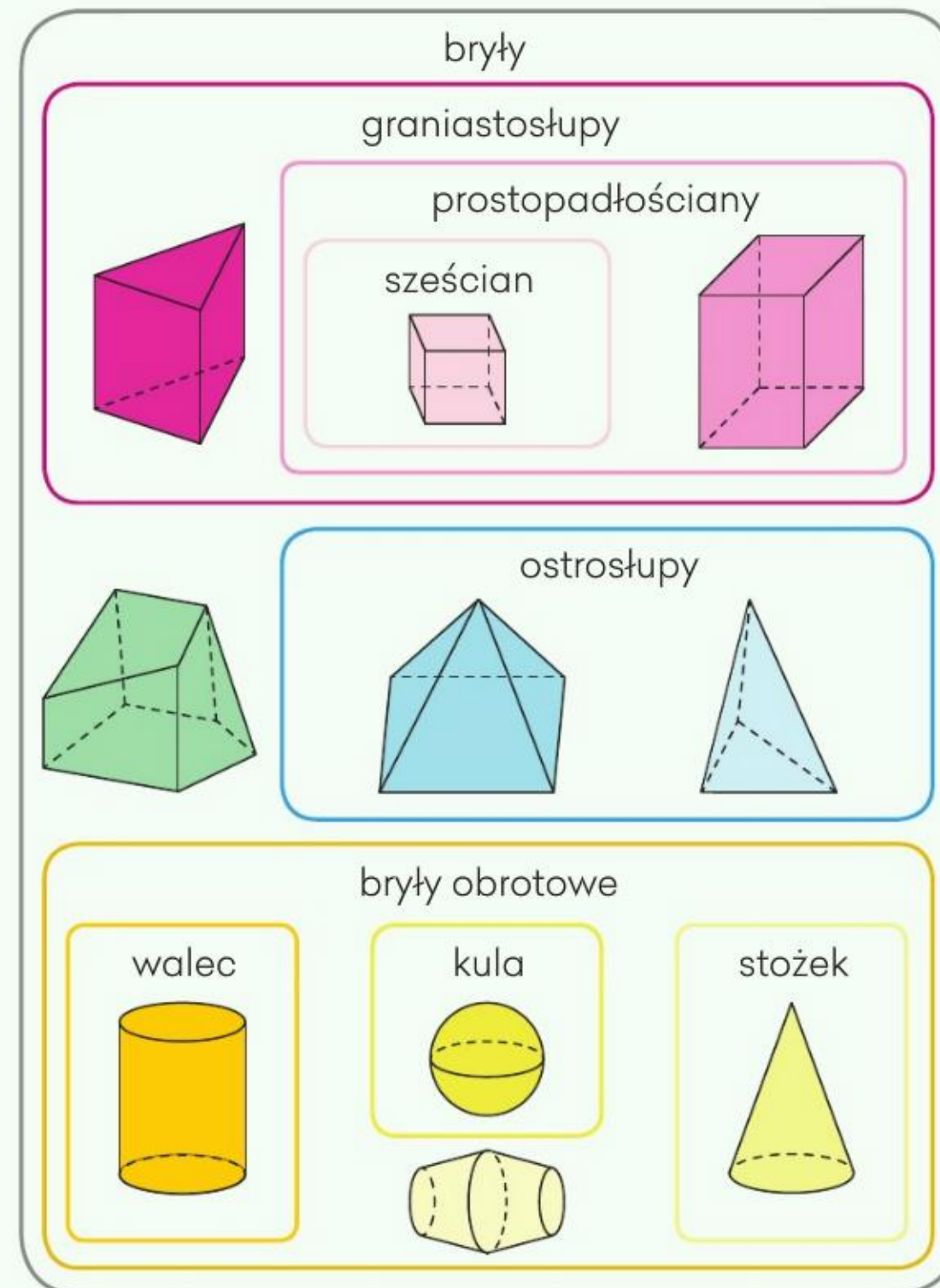
Nie tylko bryły o ścianach w kształcie wielokątów mają swoje siatki. Możliwe jest narysowanie siatek niektórych brył obrotowych.



siatka
walca

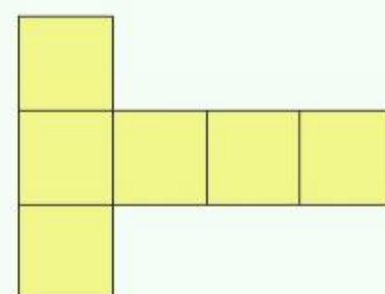


siatka
stożka

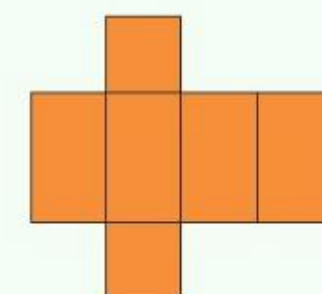


Przykładowe siatki brył

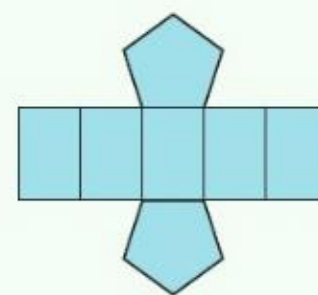
siatka
sześcienu



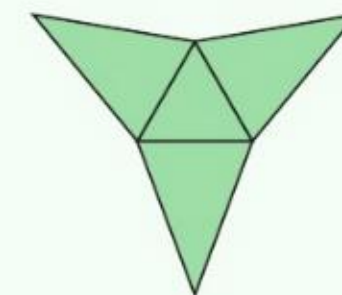
siatka
prostopadłościanu



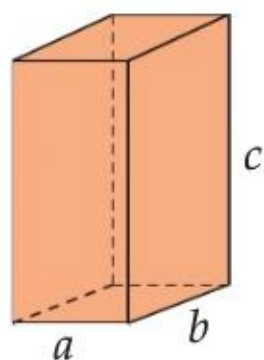
siatka
graniastosłupa



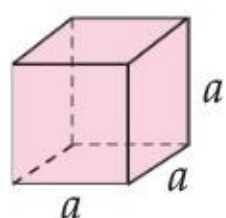
siatka
ostrosłupa



Pole powierzchni prostopadłościanu



$$P = 2ab + 2bc + 2ac = 2(ab + bc + ac)$$



$$P = 6a^2$$

Jednostki objętości i pojemności

$$1 \text{ mm}^3$$

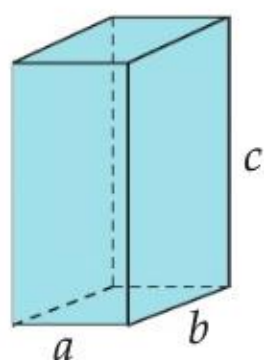
$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$$

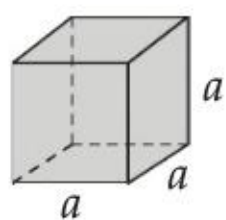
$$1 \text{ m}^3$$

$$1 \text{ km}^3$$

Objętość prostopadłościanu



$$V = a \cdot b \cdot c$$

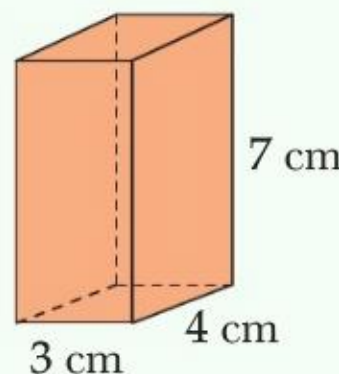


$$V = a \cdot a \cdot a$$

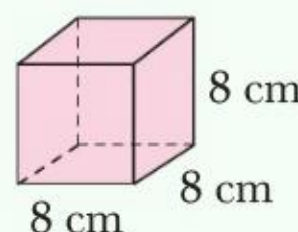
czyli

$$V = a^3$$

Obliczanie pola powierzchni prostopadłościanu



$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot (3 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 7) = \\ &= 2 \cdot (12 + 28 + 21) = \\ &= 2 \cdot 61 = \\ &= 122 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



$$P = 6 \cdot 8^2 = 6 \cdot 64 = 384 \text{ cm}^2$$

Podstawowe zależności między jednostkami objętości

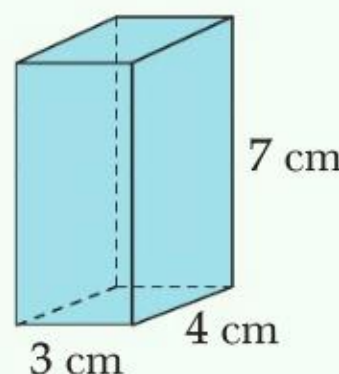
$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3, \text{ zatem } 1 \text{ l} = 1000 \text{ ml}$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$$

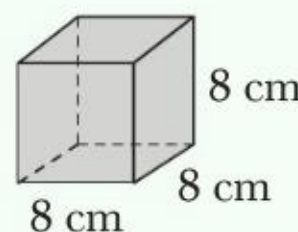
$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ km}^3 = 1\,000\,000\,000 \text{ m}^3$$

Obliczanie objętości prostopadłościanu



$$V = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84 \text{ cm}^3$$



$$V = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512 \text{ cm}^3$$

Zadania

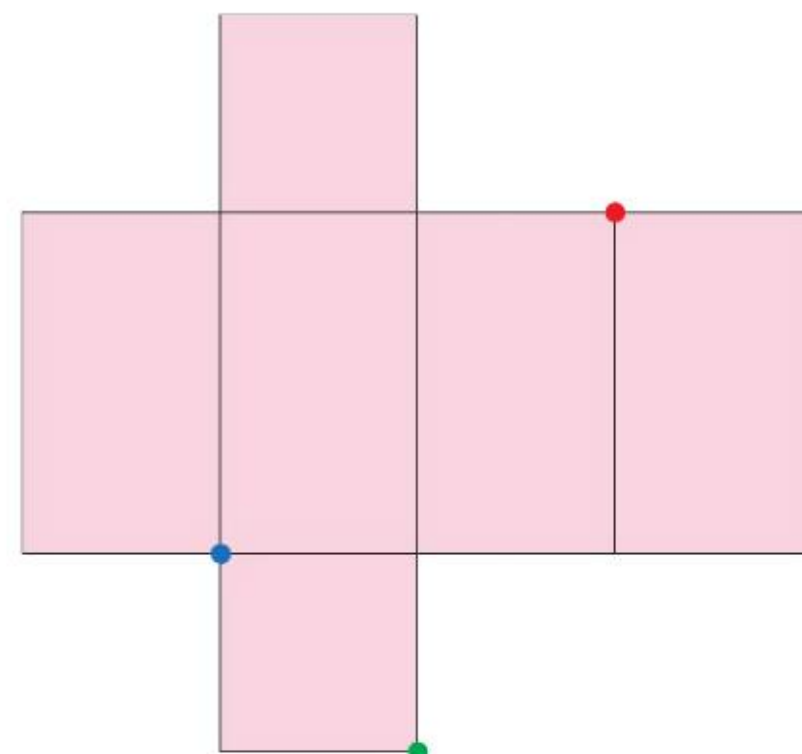
● Odpowiedz na pytania.

- Ile wierzchołków ma graniastosłup pięciokątny?
- Ile krawędzi ma graniastosłup, którego podstawą jest ośmiokąt?
- Ile ścian ma graniastosłup o 21 krawędziach?
- Jakim wielokątem jest podstawa graniastosłupa o 20 wierzchołkach?
- Ile krawędzi podstaw ma graniastosłup o 7 krawędziach bocznych?

- Narysuj siatkę graniastostupa o wysokości 4 cm i podstawie w kształcie:
 - a) trójkąta równobocznego o boku długości 2 cm,
 - b) rombu o boku długości 2 cm,
 - c) trapezu o trzech bokach długości 2 cm i czwartym dwa razy dłuższym.

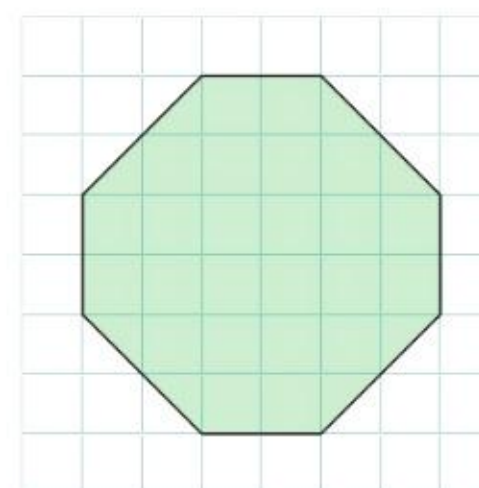
Wybierz jedną z siatek, powiększ ją trzykrotnie i sklej z niej model graniastostupa.

- Przerysuj siatkę prostopadłościanu zamieszczoną obok. Zamaluj odpowiednim kolorem po trzy krawędzie wychodzące z zaznaczonych kolorami wierzchołków. Pamiętaj, że jednej krawędzi prostopadłościanu mogą odpowiadać na siatce dwa odcinki.



- Oblicz sumę długości krawędzi ostrosłupa trójkątnego, którego wszystkie ściany są jednakowymi trójkątami równobocznymi o boku długości 5 cm. Narysuj siatkę tego ostrosłupa w skali 1 : 2.

- Narysuj siatkę ostrosłupa o podstawie w kształcie ośmiokąta umieszczonego obok.



- Siatka prostopadłościanu składa się z kwadratów o boku długości 1,5 cm i prostokątów o wymiarach 1,5 cm × 4 cm. Narysuj tę siatkę. Oblicz pole powierzchni i objętość prostopadłościanu mającego taką siatkę.

- Każda krawędź boczna ostrosłupa ma 4 cm. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat. Długość krawędzi podstawy ostrosłupa stanowi $\frac{3}{4}$ długości krawędzi bocznej. Narysuj siatkę tego ostrosłupa.

- Łazienka ma 3 m długości i 2 m szerokości. Jej podłogę i trzy ściany (dwie dłuższe i jedną krótszą) wyłożono płytkami (ściany do wysokości 1,6 m). Ile płytek użyto, jeżeli każda jest kwadratem o boku długości 1 dm?

- Oblicz, ile sześciąt o krawędzi długości 1 cm wypełni prostopadłościan o wymiarach 2 dm × 12 cm × 8 cm.

- Oblicz objętość sześcianu, którego suma długości wszystkich krawędzi wynosi 84 cm.

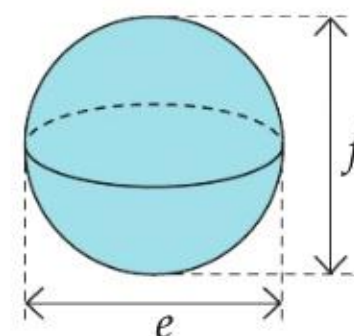
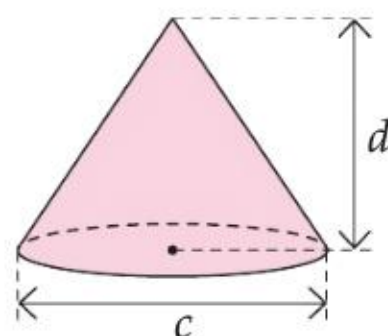
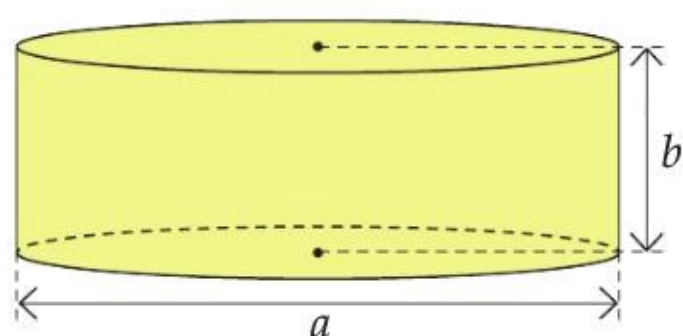
- Oblicz objętość sześcianu, którego pole jednej ściany wynosi 81 cm².

- Sześcian ma objętość 27 cm³. Jaka jest długość krawędzi tego sześcianu? Jakie jest jego pole powierzchni?

- Ile litrów wody trzeba wlać do akwariów, którego dno jest prostokątem o wymiarach $40\text{ cm} \times 70\text{ cm}$, a wysokość wynosi 50 cm , jeżeli powierzchnia wody ma być 5 cm poniżej górnej krawędzi akwariów?

- Walec, stożek i kula powstały odpowiednio przez obrót:
 - prostokąta o wymiarach $7\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ dookoła prostej zawierającej jeden z krótszych boków,
 - trójkąta prostokątnego o bokach długości 6 cm , 8 cm , 10 cm , dookoła prostej zawierającej dłuższą przyprostokątną,
 - koła o promieniu 10 cm dookoła jego średnicy.

Jakiej wielkości figury powstały w ten sposób? Podaj długości oznaczone: a, b, c, d, e, f .



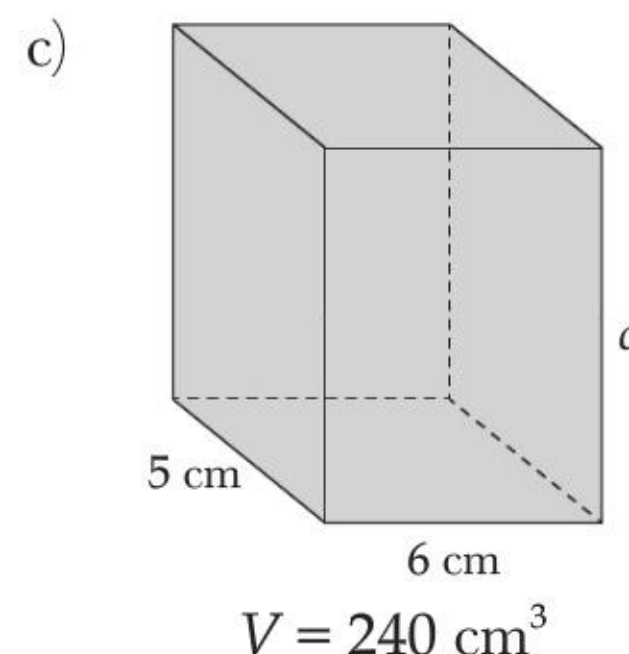
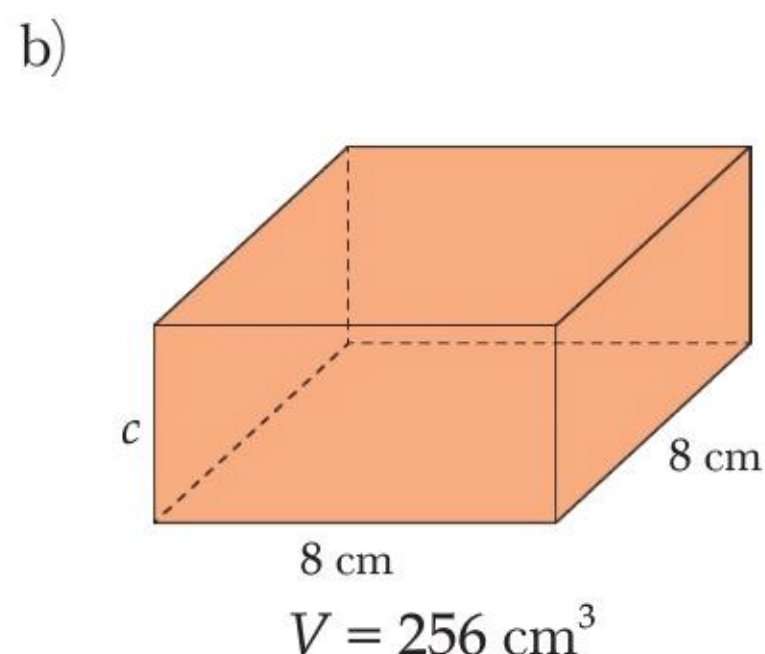
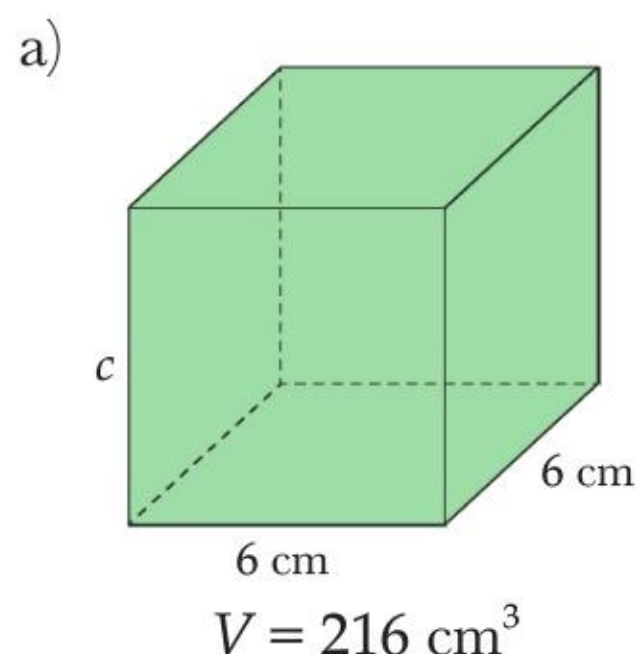
- Które zdania dotyczą graniastosłupów, a które – ostrosłupów?

- Ma więcej niż jedną podstawę.
- Jego podstawa jest kołem.
- Z każdego jego wierzchołka wychodzą trzy krawędzie.
- Ma tyle samo krawędzi bocznych co krawędzi podstaw.
- Jego ściany boczne mają punkt wspólny.
- Ma co najmniej trzy ściany boczne.

- Dane są dwa prostopadłości: pierwszy o wymiarach $8\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 7\text{ cm}$, a drugi o wymiarach $8\text{ cm} \times 7\text{ cm} \times 7\text{ cm}$. Który z nich ma:

- większą sumę długości krawędzi i o ile większą,
- większe pole i o ile większe,
- większą objętość i o ile większą?

- Pod prostopadłościem zapisano jego objętość. Jaka jest długość krawędzi oznaczonej literą c ?





KOŁO – WYNAŁAZEK WSZECH CZASÓW

Koło to nie tylko figura geometryczna, którą poznaliście na lekcjach matematyki. To przede wszystkim przedmiot, bez którego nie można wyobrazić sobie codziennego życia. W połowie IV tysiąclecia p.n.e. kołem posługiwali się Sumerowie na obszarze między Tygrysem a Eufratem, na terenach dzisiejszego Iraku. Wykorzystywali je na dwa sposoby – do budowy koła garncarskiego i różnych pojazdów.



Koła garncarskiego używano do wyrobu naczyń o zaokrąglonych kształtach. Było ono zbudowane z dwóch drewnianych tarcz, mniejszej na górze i większej na dole, połączonych osią. Rzemieślnik wprawiał urządzenie w ruch, popychając nogą dolne koło. Wtedy jednocześnie obracało się koło górne, a na nim porcja gliny, z której garncarz modelował naczynie. Podobnych urządzeń używa się do dziś.

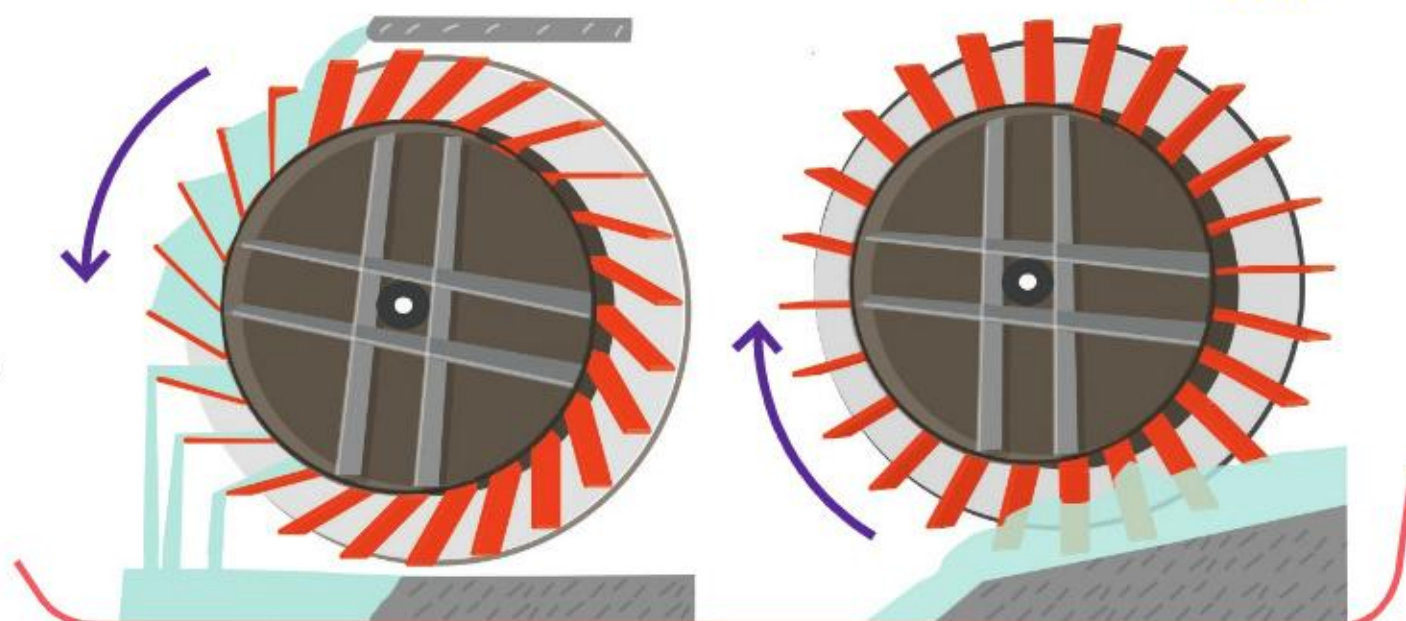


Koła pojazdów początkowo wytwarzano z połączonych ze sobą drewnianych desek, a na terenach, gdzie brakowało drewna, robiono je z kamienia. Takie koła były wytrzymałe, ale ciężkie i trudne do wprawienia w ruch. Aby stały się lżejsze, zaczęto wycinać w nich otwory, ale najskuteczniejsze okazało się zastosowanie szprych. Około 2000 r. p.n.e. koła szprychowe były już szeroko rozpowszechnione. Pojazdy, w których je stosowano, służyły do transportu ciężkich towarów, szybkiego przewożenia ludzi, wykorzystywano je także podczas walki i na polowaniach.

Zadanie 1

Jaki element koła – figury geometrycznej – przypomina szprycha?

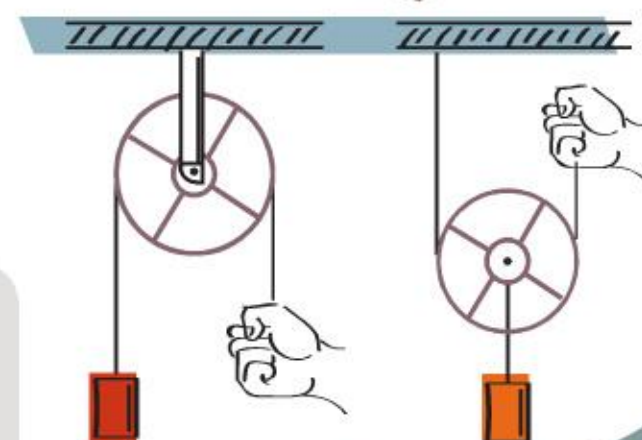
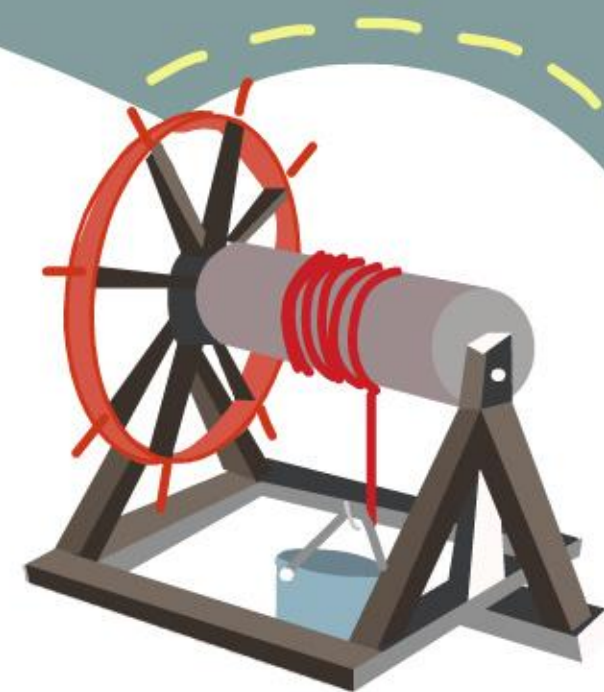
W kolejnych stuleciach koło znalazło też inne zastosowania. Koła z przymocowanymi łopatkami – poruszane siłą płynącej wody – zaczęto wykorzystywać do nawadniania pól uprawnych, napędzania urządzeń w młynach wodnych, tartakach, kuźniach, do poruszania maszyn tekstylnych czy pił mechanicznych. Znane były one od Rzymu aż po Chiny!





Około XI stulecia w Chinach genialny wynalazek stosowano w kołowrotekach do przędzenia nici. W Europie kołowrotek został rozpowszechniony jednak dopiero dwa wieki później.

Od czasów starożytnych koła stanowiły element budowy niektórych maszyn prostych – urządzeń pozwalających na podnoszenie lub przesuwanie dużych ciężarów przy użyciu stosunkowo niewielkiej siły. Maszynami prostymi są m.in. kołowrót i blok. Kołowrót był wykorzystywany jeszcze do niedawna w studniach do wyciągania wody oraz w kopalniach przy transporcie urobku. Bloki (nieruchomy i ruchomy) są stosowane do dziś, głównie w budownictwie, rolnictwie i medycynie.



Zadanie 2

Znajdź w internecie zdjęcia opisanych maszyn prostych i porównaj je z zamieszczonymi rysunkami.

Zadanie 3

Podaj kilka współczesnych przykładów wykorzystywania kół.

Obwód koła można zmierzyć taśmą mierniczą przyłożoną do brzegu koła lub zwykłą nitką, którą owijamy koło, potem zaznaczamy jej długość i mierzymy.



Zadanie 4

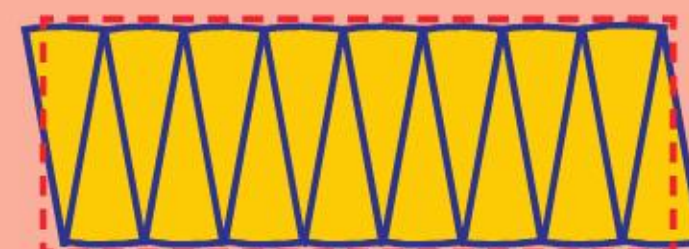
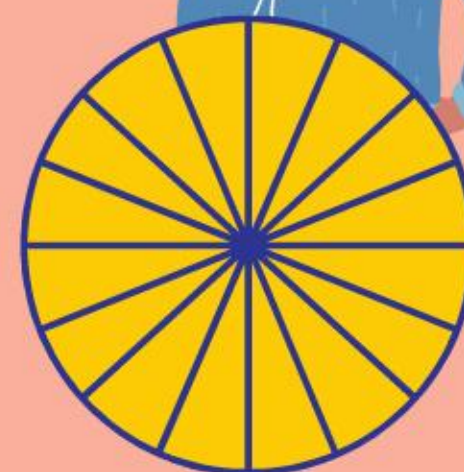
Zmierz obwód i średnicę kilku kół. W każdym przypadku podziel otrzymany obwód przez długość średnicy. Co udało ci się zauważyć?

Dawniej dużym problemem dla ludzi było obliczenie pola koła. Próbowano to zrobić w następujący sposób: koło dzielono na bardzo wiele części (jak na rysunku obok). Fragmenty układano w taki sposób, by utworzyć figurę zbliżoną kształtem do prostokąta. Im więcej było części, na które dzielono koło, tym bardziej ułożona figura przypominała prostokąt, a w konsekwencji pole koła było bliższe polu rzeczywistego prostokąta.

Dziś jest już znany wzór, według którego oblicza się pole koła. We wzorze tym występuje liczba π – będziecie się o niej uczyć w starszych klasach. Jest to liczba o nieskończonym rozwinięciu dziesiętnym. Zazwyczaj do obliczeń stosuje się jej zaokrąglenie do części setnych:

$$\pi \approx 3,14$$

Jeśli zadanie 4 wykona się bardzo dokładnie, to otrzyma się właśnie taki wynik.



Zadanie 5

Znajdź w internecie wzór na pole koła.

Odpowiedzi do zadań

4. Praktyczne zastosowania matematyki

4.1 Średnia arytmetyczna (s. 7)

1. 35 zł 2. 24,4 3. 2425 zł
4. a) Bartek 3,1, Piotr 3,15 b) Piotr o 0,05,
Domecki 2,75, Fabiańczyk 4,25, Górecka 3,5
5. 315 min, czyli 5 godz. 15 min 6. 3 zł; o 0,39 zł
7. 38,1°C 8. 4 osoby 9. 2,75 10. 20 12. 39
13. 1,7 m

4.2 Jednostki miar (s. 14)

1. najlżejsza 0,4 kg, najcięższa 0,4 t 2. 0,5 t 3. 240
4. najdłuższy beżowy, najkrótszy czerwony
5. 0,45 km 6. a) 500 razy b) 25 razy c) 20 razy
7. a) 13 min 42 s b) 113 s 8. o 6060 s

4.3 Prędkość. Jednostki prędkości (s. 19)

1. 72 km/h 2. 54 km/h 3. Antek – 10 km/h,
Maciek – 12 km/h 4. 900 m/min, 15 m/s
5. mucha – 2,5 m/s, ważka – 12,5 m/s,
motyl – 200 m/min = $3\frac{1}{3}$ m/s 6. a) stęp – 100 m/min,
kłus – 250 m/min, galop – 400 m/min, cwał – 600 m/min
b) o 48 km/h c) o 9 km/h 7. a) w głębi lądu
b) 504 km/h c) Śnieżka – ok. 342 km/h, Kasprowy
Wierch – ok. 288 km/h, Bielsko-Biała – ok. 172,8 km/h,
Gdańsk – ok. 162 km/h 8. 0,3 km/s = 1080 km/h
9. 750 m/min = 45 km/h 10. a) 9 km/h b) 12 km/h
c) 14 km/h 11. większą niż 8,9 km/s

4.4 Droga (s. 23)

1. a) ok. 1700 m b) ok. 15 000 m = 15 km
2. 231,5 km 3. 3,75 km 4. a) 350 km b) 600 km
c) 9000 km d) 54 000 km 5. najdłuższą – rekin,
najkrótszą – jerzyk 6. 12 000 m = 12 km
7. 3600 mm = 360 cm 8. 15 km

4.5 Czas (s. 27)

1. a) 0,15 h = 9 min b) 1,6 h = 1 h 36 min
c) 0,09 h = 5 min 24 s 2. Bolkowi o 15 s
3. 2 h 4. o 6.35 5. pani Monika o 6 minut

4.6 Tabele, diagramy, wykresy (s. 32)

1. a) 2 B, 5 B, 4 B, 10 B, 3 B, 5 B b) dość silny wiatr,
powiew, huragan, bardzo silny sztorm, silny wiatr,
łagodny wiatr 4. a) –5°C, 3°C b) 12.00
c) 21.00, 18.00 d) 3.00 i 24.00 e) –1°C f) o 4°C
g) o 4°C h) 8°C

4.7 Tworzenie diagramów i wykresów (s. 39)

1. a) 58 b) o 14 c) najwięcej klonów,
najmniej modrzewi 2. a) najdłużej w sobotę,
najkrócej w niedzielę b) o 30 min c) 11 h 30 min
3. a) 27 b) 14 dziewcząt, 13 chłopców
c) pieszo i samochodem d) 7 e) 4
6. a) 44 b) 15 c) 8 d) 17 7. a) 11.40 b) 3 km,
3 km, 7 km c) 1 h 50 min d) 3 h 10 min

4.8 Procenty (s. 45)

1. a) 25% b) 75% c) 50% d) 45% e) 60% f) 84%
g) 36% h) 10% 2. a) 16% b) 4% c) 36% d) 44%
3. VIa 20%, VIb 35%, VIc 25%, VId 20%
4. pszenica 60%, jęczmień 30%; nie 5. białko $\frac{14}{25}$,
żółtko $\frac{8}{25}$, skorupka $\frac{3}{25}$ 6. 36% jabłek, 20% gruszek,
25% wiśni, 19% agrestu 7. Bartek 42%, Ola 15%
8. a) 80 b) cel. 5%, bdb. 20%, db. 25%, dst. 30%,
dop. 15%, ndst. 5%

4.9 Obliczanie procentu danej liczby (s. 48)

1. 3 2. Ania 40, Bożena 50, Krysia 100, Monika 200
3. 2160 4. plecak z zawartością 420 dag,
zeszyty 84 dag 5. 960 m 6. 4,5 m² 7. buty 82,80 zł,
kurtka 252 zł, czapka 30,60 zł, szalik 14,40 zł,
rękawiczki 22,50 zł, sweter 63 zł 8. 3240 zł
9. 4800 zł; 35 200 zł 10. 84 11. w Lubinie 13 500,
w Rudowie 12 932, w Środzku 11 330

Czy już umiesz? (s. 50)

1. C 2. 51,45 s 3. a) 2,065 kg 4. A 5. B
7. a) 65 km/h b) 3 km/h c) 80 km/h d) 42 km/h
e) 27 km/h f) 180 km/h 9. a) 21 km b) 33 km c) 36 km
10. 2,2 km 11. D 13. A 14. a) VI b) III c) II i V
d) 30 e) do IV; o 5 f) VI 19. C 20. A 21. C

5. Figury płaskie

5.1 Trójkąty – rodzaje i własności (s. 59)

5. a) 6 cm b) 30°, 60°
6. 8 cm, 20 cm, 20 cm lub 8 cm, 8 cm, 32 cm

5.2 Czworokąty – rodzaje i własności (s. 65)

2. 48 cm 3. 150°, 30°, 150° 4. 55°, 125°, 125°
5. 130°, 102° 6. 100 cm; 4 m 8. 8 cm
10. a) 102 cm × 132 cm b) 380 cm, 468 cm 13. 18 cm

5.3 Pole figury. Jednostki pola (s. 70)

3. a) 27 cm² b) 36 cm² c) 40,5 cm² d) 9 cm² e) 18 cm²
f) $4\frac{1}{2}$ cm² 5. a) 4 cm b) 40 cm c) 400 cm

5.4 Pola czworokątów (s. 73)

1. o 12,04 cm² 2. ok. 18 m² 3. a) 18 cm²
b) 40,5 cm² 4. 48 cm² 5. 201 cm²
6. najwięcej zielone, najmniej szare 7. 20 cm
8. 3 cm 9. 6 dm² 10. 35,1 a 11. a) 60 m² b) 3 kg

5.5 Pole trójkąta (s. 76)

1. trójkąty (kolejno od lewej): 48 cm², 44 cm², 30 cm²,
34 cm², 60 cm², prostokąt: 216 cm² 4. 29,25 cm²
5. 128 cm² 6. 60 cm², 10 cm
8. a) Większy jest grot (z lewej strony) o 1,5 m².
b) 7,5 m² 9. 24 cm² b) 4,8 cm

5.6 Pola wielokątów (s. 80)

3. a) 16 cm^2 b) $13,75 \text{ cm}^2$ c) 10 cm^2 4. 140 m^2

5.7 Figury osiowoosymetryczne (s. 85)

3. a) 1 b) 8 c) 4 d) 0 e) 2 f) 1

Czy już umiesz? (s. 87)

4. a) $29,7 \text{ cm}$ b) $4,8 \text{ cm}$ c) $12,7 \text{ cm}$ 5. a) 60° b) 20°
c) 30° 6. a) 25 cm b) $11,3 \text{ cm}$ c) 37 cm
11. pierwszy; o $325\,000 \text{ m}^2$ 12. 11 13. o 3 m^2 16. B
17. I. 1500 cm^2 , II. 1650 cm^2 , III. 1200 cm^2 , IV. 1575 cm^2
18. a) 69 cm^2 b) $97,5 \text{ cm}^2$ c) $107,64 \text{ cm}^2$ d) 21 cm^2
19. a) 15 cm^2 b) $30,75 \text{ cm}^2$ c) $21,5 \text{ cm}^2$ d) 36 cm^2

6. Bryły

6.1 Powtórzenie wiadomości o prostopadłościanach (s. 95)

2. a) 68 dm b) 100 cm c) 54 m 3. 28 cm
4. a) tak b) $5,5 \text{ cm}$

6.2 Siatki i pole powierzchni prostopadłościanu (s. 100)

2. 1228 cm^2 3. a) $562,5 \text{ cm}^2$ b) $247,5 \text{ cm}^2$
4. 62 cm^2 6. 1176 cm^2 8. 64 cm^2 ; 8 cm
9. I. $8 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$, 352 cm^2 ;
II. $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$, 416 cm^2
10. $77,75 \text{ m}^2$ 11. 2304 cm^2

6.3 Powtórzenie wiadomości o graniastosłupach (s. 103)

2. $AB \parallel FG$, $BC \parallel GH$, $CD \parallel HI$, $DE \parallel IJ$, $AE \parallel FJ$
oraz $AF \parallel BG \parallel CH \parallel DI \parallel EJ$ 4. a) P b) F c) F
d) P e) F f) P g) F 5. a) 37 cm b) 32 cm c) 60 cm

6.4 Siatki graniastosłupów (s. 108)

1. a) $a = b = 2,5 \text{ dm}$, $c = 30 \text{ cm}$
b) $d = g = i = 1,2 \text{ cm}$, $e = 1,4 \text{ cm}$, $f = h = 1,3 \text{ cm}$
c) $j = k = p = 4 \text{ cm}$, $l = m = n = o = 6 \text{ cm}$
d) $x = 2 \text{ dm}$, $r = s = w = y = 7 \text{ dm}$, $t = z = 5 \text{ dm}$, $u = 10 \text{ dm}$
5. a) podstawa: 6 cm , 8 cm , 10 cm ,
ściany boczne: $6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$, $8 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$, $10 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$

6.5 Ostrosłupy (s. 113)

1. a) F b) P c) F d) F e) F f) F g) P
5. a) 57 cm b) 52 cm c) 70 cm

6.6 Siatki ostrosłupów (s. 117)

3. a) dwie b) dwie c) dwie

6.7 Walec, stożek, kula (s. 121)

2. B 3. C

6.8 Objętość. Jednostki objętości (s. 126)

2. 84 3. 5

6.9 Objętość prostopadłościanu (s. 130)

1. 189 cm^3 2. największą I, najmniejszą II
3. $165,6 \text{ cm}^3$ 4. 8 cm 5. 11 cm 6. 216 7. 6 cm
8. 108 l 9. $168\,000 \text{ l}$ 10. $47\,250 \text{ l}$ 11. 4 dm
12. Nie, bo pojemność wazonu jest równa $1,92 \text{ l}$.

Czy już umiesz? (s. 132)

1. C 2. 68 cm 6. C 18. liczba wyrażająca pole
powierzchni; 5 razy 19. $16\,800 \text{ l}$
20. a) $P = 94 \text{ cm}^2$, $V = 35 \text{ cm}^3$ b) $P = 28 \text{ cm}^2$, $V = 8 \text{ cm}^3$
c) $P = 115 \text{ cm}^2$, $V = 75 \text{ cm}^3$ 21. 525 cm^3

7. Powtórzenie materiału z klas 4–6

7.1 Liczby naturalne (s. 138)

5. a) 2600 b) 1100 6. a) 62 b) 202 c) 22 d) 688
e) 236 f) 20 10. 52 11. a) 216 c) 99
12. 2503 zł 13. a) o 221 b) 4 razy c) 109

7.2 Liczby całkowite (s. 141)

6. a) 17 b) 39 c) 51 d) 199 e) 0 8. a) 8 b) 6 c) 9
d) 12 e) 13 f) 2 g) 16 h) 12 i) 7 j) 5 k) 48 l) 30
18. A, D

7.3 Ułamki (s. 146)

2. $\frac{1}{6}$ 3. B 5. D 6. C 7. A 8. a) 20 b) 10
c) nieskończenie wiele d) 10 9. D 10. B

7.4 Działania na ułamkach (s. 149)

2. a) $a = 40 \text{ zł}$, $b = 54 \text{ kg}$, $c = 31\frac{1}{2} \text{ km}$
b) $a = 36 \text{ zł}$, $b = 14 \text{ dag}$, $c = 200 \text{ cm}$
3. a) $2\frac{11}{18}$, $5\frac{11}{30}$, $-5\frac{107}{140}$, $-4\frac{2}{15}$ b) $3,765$; $-1,15$; $-0,375$; $-4,39$
c) $-3\frac{13}{14}$, $-4\frac{1}{5}$, $\frac{21}{64}$, $\frac{14}{15}$ d) $-11,2$; $-43,07$; $984,34$; $9,913$
3. a) $2,75$; -14 ; 4 ; $5,28$ b) 2 ; $-\frac{1}{3}$; 0 ; $-2,3$ c) $1\frac{17}{48}$; $-8\frac{5}{6}$;
 $0,1$; $3\frac{59}{72}$ d) 3 ; 14 ; $1\frac{3}{8}$; $-3\frac{3}{4}$ 5. a) $20\frac{1}{6}$ b) $33,8$
7. a) $17,4 \text{ cm}$ b) 78 cm c) $109,2 \text{ cm}$ 9. Krysi; o 224 zł
12. 24 zł 13. wydała 48 zł , zostało jej 80 zł
14. 28 cm ; 70 cm 15. przez 7 min 16. 81 km
17. 54 l 18. $5,25 \text{ zł}$

7.5 Wyrażenia algebraiczne i równania (s. 153)

2. C 3. A 4. B 5. a) $7p$, $\frac{p}{24}$ b) $60p$, $\frac{60p}{24}$
9. a) $8x + 4(x + 2) = 12x + 8$ b) 38 cm
11. a) 64 b) -11 c) 8 d) 5 e) 11 f) $1\frac{7}{10}$ g) $\frac{1}{5}$ h) 7
12. a) 10 b) 8 c) 2 d) 6
13. a) 28 ; $2,44$; $\frac{1}{2}$; 23 b) 119 ; $5,58$; $1\frac{1}{3}$; -11
c) 8 ; -6 ; $1,5$; -10 d) 108 ; 6 ; 10 ; $1,8$

7.6 Praktyczne zastosowania matematyki (s. 157)

1. B 2. B 4. $11,05 \text{ km}$ 5. 80 km/h
6. Jacek 6 km/h , Maciek 12 km/h
7. najdalej Małgorzata, najbliżej Ewa 11. A
12. D 13. D

7.7 Figury płaskie (s. 162)

2. łamana otwarta, 23 3. a) $m \parallel p$ b) $k \parallel t$ c) $m \perp t$
3. a) 7 b) 7 c) 7 6. najdłuższa AD, najkrótsza CD
10. $77,5^\circ$ i $102,5^\circ$

7.8 Wielokąty, ich własności i pola (s. 166)

2. B 5. 270 cm^2 6. 30 cm^2 12. 32 cm^2 , $5\frac{1}{3} \text{ cm}$
13. o 42 cm^2 ; 4 razy

7.9 Bryły (s. 169)

6. $P = 28,5 \text{ cm}^2$, $V = 9 \text{ cm}^3$ 8. 1880 9. 1920
10. 343 cm^3 11. 729 cm^3 12. 3 cm , $P = 54 \text{ cm}^2$
13. 126 l

Indeks

A		J		P	
ar	68	jednostki objętości	124	podstawa ostrosłupa	110
B		jednostki pojemności	124	podstawa stożka	119
bryła obrotowa	118	K		podstawa walca	119
C		krawędź boczna ostrosłupa	110	pojemność	123
czas	24	krawędź podstawy ostrosłupa	110	prędkość	17
D		kula	120	przeciwprostokątna	58
diagram słupkowy	30	L		przyprostokątna	58
droga	21	litr	124	S	
F		M		stożek	119
figura osiowosymetryczna	82	mililitr	124	Ś	
H		O		ściana boczna ostrosłupa	110
hektar	68	objętość	123	średnia arytmetyczna	6
hektolitr	124	ostrosłup	110	W	
		oś symetrii figury	82	walec	119
				wierzchołek ostrosłupa	110
				wierzchołek podstawy ostrosłupa	110
				wykres	31

Ilustracje
Carto Team Chariza Krystian (s. 40, 50), Marcin Kot (s. 24/przelicznik czasu), Jaga Słowińska (s. 54/plakat, 77, 85/wycinanka c, e, 88/klomb), Agnieszka Staniec (s. 182, 183), Katarzyna Surman-Pusz (s. 6, 16, 17, 24/turysta, 28, 35, 42, 46, 51, 54/kwiatek, 56, 58, 59, 60, 61, 66, 67, 71, 75, 78, 82, 92, 95, 96, 101, 105, 110, 114, 118, 120, 123, 127, 128, 129, 131, 142, 157), Kinga Trafas (s. 9, 21, 23, 27, 29, 37, 48, 86, 88/worek)

Wykaz dysponentów praw autorskich do obrazów i zdjęć zamieszczonych w publikacji:
Archiwum: GE S.A. (butelka z zieloną nakrętką, pojemnik na gaz, karton z napisem mleko, s. 126),
Shutterstock: chanafoto (pudełko, s. 14), Christopher Elwell (kłębki, s. 15), jerryasa (okładka płyty, s. 15), piotrbb (jezioro, s. 15), Ljupco Smokovski (rowerzysta, s. 18), spotpoint (panczenista, s. 18), EvrenKalinback (sprinter, s. 18), Microgen (pływak, s. 18), rezachka (prędkościomierz, s. 19), De Visu (żaglówka, s. 77), Dan Kosmayer (łyżka, s. 82), StudioByTheSea (okno, s. 82), Mak3t (samochód, s. 82), CapturePB (szafa, s. 82), Mkadstudio (monitor, s. 82), Roman Yastrebinsky (lampa, s. 82), Vladimirkarp (motyl, s. 83), Winai Tepsuttinun (koło zębate, s. 83), xenia_ok (serwetka, s. 83), Benny Marty (kościół, s. 83), Gino Santa Maria (piłka futbolowa I, s. 85), Harry Huber (piłka futbolowa II, s. 85), Naypong Studio (piłka koszykowa I, s. 85), sagir (piłka koszykowa II, s. 85), s-ts (piłka siatkowa I, s. 85), Kolosov Alexander (piłka siatkowa II, s. 85), yevgeniy11 (piłka plażowa I, s. 85), Feng Yu (piłka plażowa II, s. 85), Denis Pepin (piłka do rugby I, s. 85), Pichit Saekow (piłka do rugby II, s. 85), irin-k (piłka do tenisa I, s. 85), Zurbagan1985 (piłka do tenisa II, s. 85), RedKoala (wycinanka a, b, f, s. 85), John Lock (wycinanka d, s. 85), Zick Swift (drzwi, s. 89), cobalt88 (piramida Cheopsa, s. 111), Africa Studio (szklanka z sokiem, s. 118), Chones (wafel, s. 118), ideation90 (ciastko, s. 118), Valentyna Chukhlyebova (budynek a, s. 121), Sindii (budynek b, s. 121), Mariusz Switulski (budynek c, s. 121), Dmitri Ometsinsky (budynek d, s. 121), konstantinks (budynek e, s. 121), pixelklex (budynek f, s. 121), koosen (czerwone wiadro, s. 126), Razvan Iosif (puszka, s. 126), Ioan Panaite (cysterna, s. 126), levgenii Meyer (kubek, s. 126), photo one (łyżka, s. 126), ValerioMei (jezioro, s. 126), Scisetti Alfiro (butelka z czerwoną nakrętką, s. 126), stocksolutions (wanna, s. 126), Sarah Marchant (wiadro, s. 126), Kamira (waza, s. 182), Wacław Bugno (koło garncarskie, s. 182), hecke61 (koło, s. 182), luna4 (kołowrotek, s. 183),
Wikipedia: Krzysztof Blachnicki (znak stop, s. 81, https://pl.wikipedia.org/wiki/Znaki_zakazu#/media/File:Poland_road_sign_B-20.svg), Wilson Bentley (śnieżynki, s. 85, https://pl.wikipedia.org/wiki/Wilson_Bentley#/media/File:SnowflakesWilsonBentley.jpg), Dbenbenn (flaga Norwegii, s. 90, https://pl.wikipedia.org/wiki/Flaga_Norwegii#/media/File:Flag_of_Norway.svg), SKopp (flaga Francji, s. 90, https://pl.wikipedia.org/wiki/Flaga_Francji#/media/File:Flag_of_France.svg), Zirland (flaga Czech, s. 90, https://pl.wikipedia.org/wiki/Flaga_Czech#/media/File:Flag_of_the_Czech_Republic.svg), Zscout370 (flaga Wielkiej Brytanii, s. 90, https://pl.wikipedia.org/wiki/Flaga_Wielkiej_Brytanii#/media/File:Flag_of_the_United_Kingdom.svg), Nameneko and others (flaga Mołdawii, s. 90, https://pl.wikipedia.org/wiki/Flaga_Mo%C5%82dawii#/media/File:Flag_of_Moldova.svg), Marc Mongenet (flaga Szwajcarii, s. 90, https://pl.wikipedia.org/wiki/Flaga_Szwajcarii#/media/File:Flag_of_Switzerland.svg), Maciej Kaczkowski (piramida w Wągrowcu, s. 111, [https://pl.wikipedia.org/wiki/Franciszek_Jerzy_%C5%81aki%C5%84ski#/media/File:%C5%81aziska_\(pow_w%C4%85growiecki\)-piramida_%C5%81aki%C5%84skiego.jpg](https://pl.wikipedia.org/wiki/Franciszek_Jerzy_%C5%81aki%C5%84ski#/media/File:%C5%81aziska_(pow_w%C4%85growiecki)-piramida_%C5%81aki%C5%84skiego.jpg)),
Małgorzata Struczevska (przyrząd do demonstrowania sposobu powstawania brył obrotowych, s. 121), Grzegorz Wrzecionoski (wycinanki, s. 84, moneta, s. 118)



Grupa MAC S.A.
ul. Witosa 76
25-561 Kielce

www.mac.pl

ISBN 978-83-65463-65-4



indeks 881302