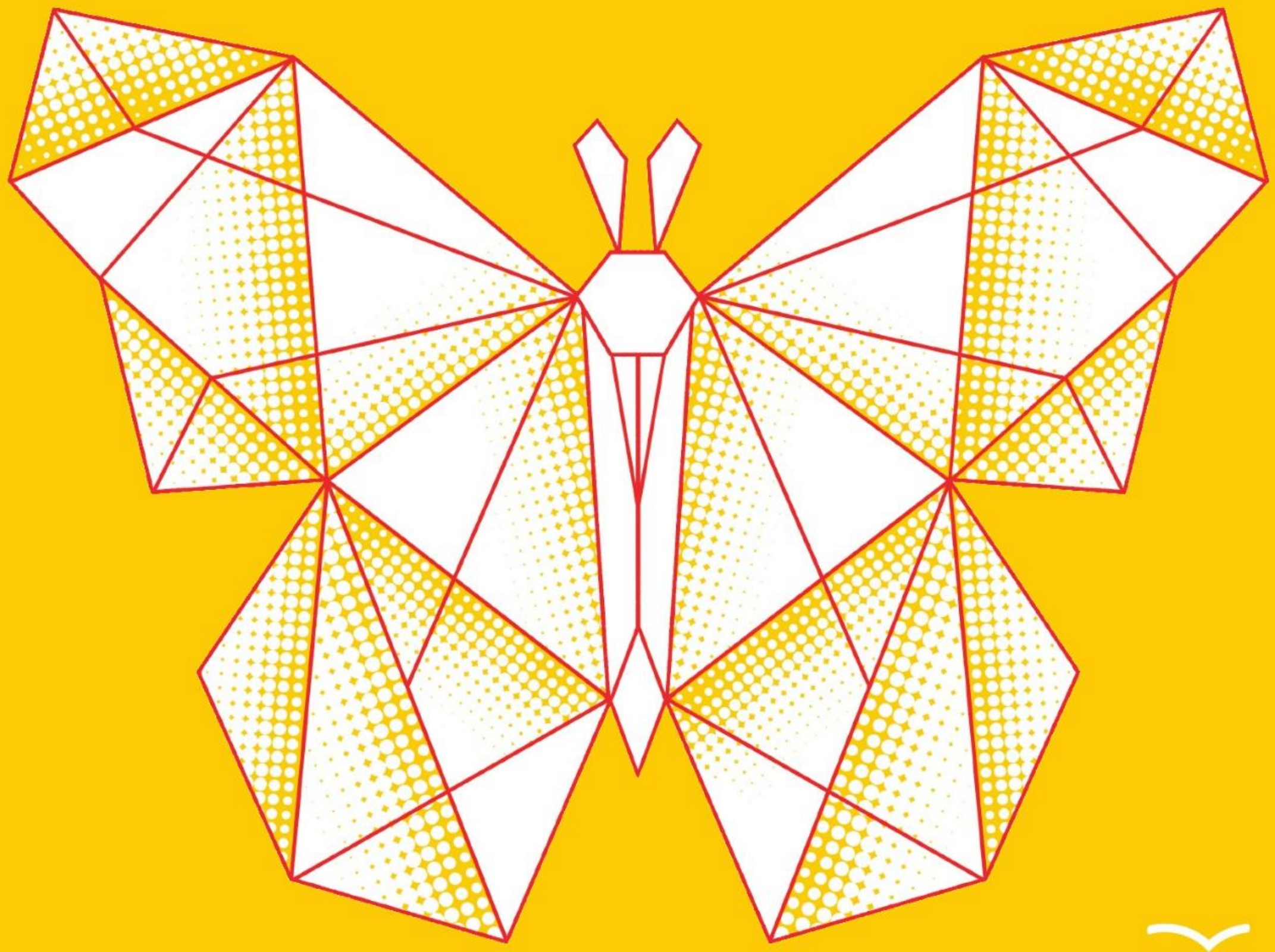
Matematyka 8

Podręcznik
część 2

Oznaczono zmiany
W PODSTAWIE
PROGRAMOWEJ
2024



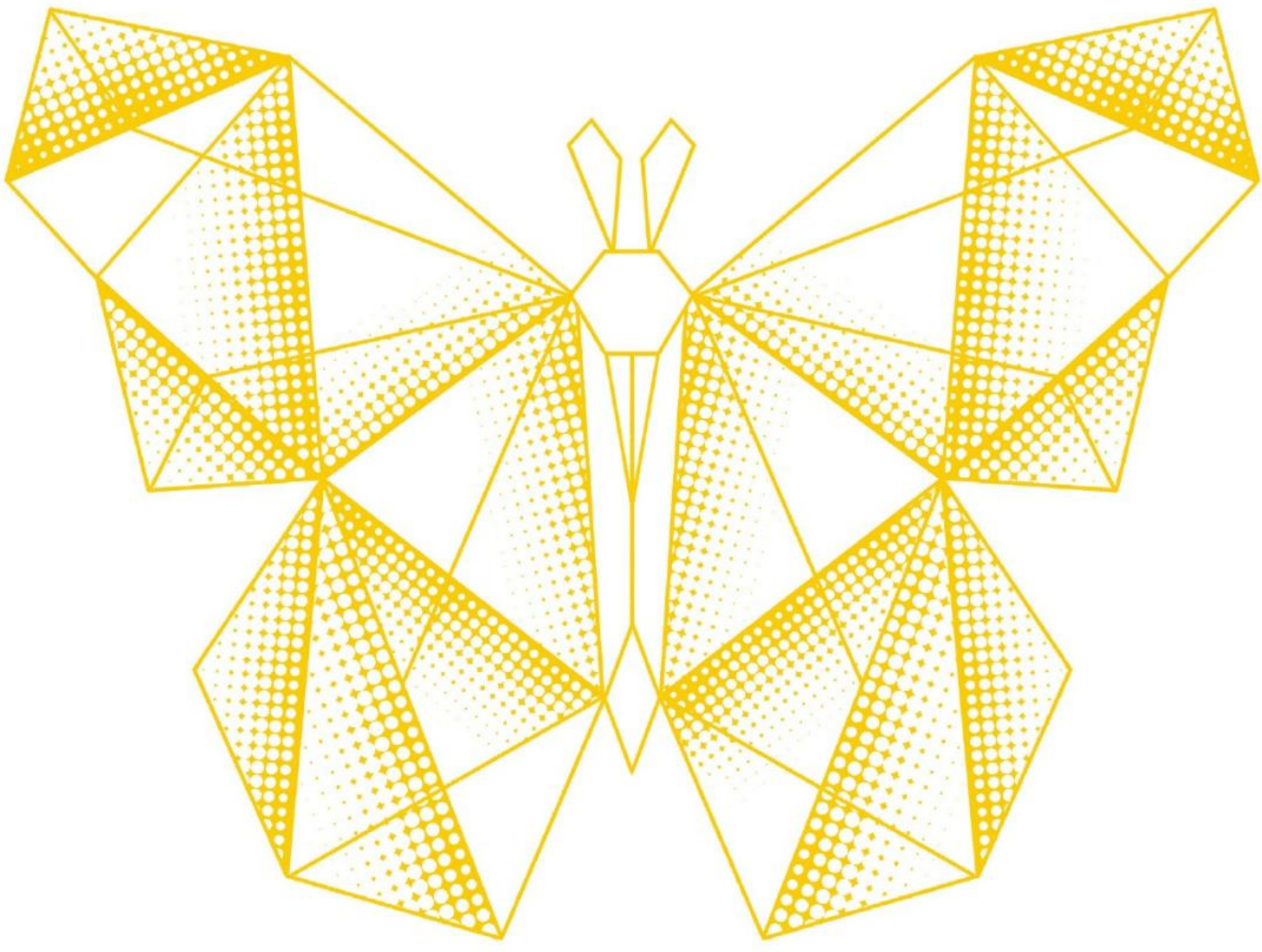
mac
EDUKACJA

Monika Czajkowska
Małgorzata Ogłoza-Fisiak
Teresa Gwadowska

8

Matematyka

Podręcznik dla klasy ósmej szkoły podstawowej
część 2



mac
EDUKACJA

Redaktor serii
Justyna Kubicka

Redakcja merytoryczna
Monika Czajkowska
Adam Pawłowski
Anna Kotwica

Redakcja językowa i korekta
Krystyna Bajor

Redakcja techniczna
Paweł Kowalski

Skład i łamanie
Adam Ziółkowski

Redakcja artystyczna
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska
Marcin Kot

Projekt i koncepcja artystyczna
Futu Creative / Kay Humelt i Rafał Kwiczor

Koordynacja prac graficznych
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska

Projekt okładki
Futu Creative

Ilustracja na okładce, na stronie tytułowej
i ilustracje na stronach działowych
Acapulco Studio / Agata Dudek i Małgorzata Nowak-Żurek

Fotoedycja
Grzegorz Wrzecionowski

Ilustracje
Agata Zarzycka (s. 54, 59, 70, 118, 125, 132), Katarzyna Surman-Pusz (s. 58, 65, 74, 84, 99), Marcin Kot (s. 54, 91, 118, 132), Joanna Majewska (s. 75, 90, 96), Agnieszka Staniec (s. 146-147/projekt Linku do wiedzy)

Wykaz dysponentów praw autorskich do obrazów i zdjęć zamieszczonych w publikacji
Wikipedia: GJ (ciasto z liczbą pi, s. 57), Михаил Колобаев, пресс-служба Правительства Москвы (okrągły budynek mieszkalny, s. 65), odder (znak drogowy, s. 82), Shutterstock: NewFabrika (świeczka, s. 26), Luciano Cosmo (kostka dwudziestościenna, s. 38), Kamira (London Eye, s. 58), Felix Mizioznikov (Apple Park, s. 75), Mike Liu (Tower Bridge, s. 90), Vladimirkarp (niebieski motyl, s. 96), Butterfly Hunter (żółty motyl, s. 96; pomarańczowy motyl, s. 96), RedKoala (wycinanka ludowa, s. 96; wycinanka ludowa, s. 96), Bridzia (wycinanka ludowa, s. 96; ozdobna serweta, s. 99), IgorCheri (nietoperz, s. 98), Alina Bratosin (samochód, s. 98), AN NGUYEN (kwiat, s. 98), Dmitry Kolmakov (koło samochodowe, s. 98), Aliaksei Tararukha (mandala, s. 103), Jurand38 (ogród przed pałacem Branckich w Białymstosku, s. 103), weter78 (plaster miodu, s. 103), johzio (płytki, s. 103), PandaWild (karty do gry, s. 104), rangizzz (kompas, s. 109), gd_project (kostka rubika, s. 124)

Wydawca oświadcza, że dołożył wszelkich starań, aby dotrzeć do wszystkich właścicieli i dysponentów praw autorskich.
Osoby, których nie udało nam się ustalić, prosimy o kontakt z wydawnictwem.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Przestrzegaj praw, jakie im przysługują. Udostępniając książkę lub jej fragmenty, rób to wyłącznie w zakresie dozwolonego użytku, który określają przepisy prawa. Zawartość książki możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

© Grupa MAC S.A., Kielce 2021

ISBN 978-83-8227-132-4

Treści usunięte z podstawy programowej w 2024 r.

Grupa MAC S.A.
25-561 Kielce, ul. Witosa 76
tel. 41 366 55 55, faks: 41 366 33 02
e-mail: kontakt@mac.pl; www.mac.pl

Spis treści

5. Powtarzamy, utrwalamy

5.1 Liczby wymierne — **6**
5.2 Działania na liczbach rzeczywistych — **10**
5.3 Wyrażenia algebraiczne i równania — **14**
5.4 Figury geometryczne na płaszczyźnie — **18**
5.5 Geometria przestrzenna — **23**
5.6 Oś liczbowa. Układ współrzędnych — **28**
5.7 Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa — **33**
5.8 Praktyczne zastosowania matematyki — **39**

6. Okrąg i koło

6.1 Koła i okręgi — **46**
6.2 Długość okręgu — **54**
6.3 Pole koła — **59**
6.4 Pierścień kołowy — **65**
6.5 Okrąg, koło i pierścień kołowy – zadania z kontekstem realistycznym — **70**
Podsumowanie działu 6 — **76**

7. Symetrie

7.1 Symetralna odcinka — **84**
7.2 Dwusieczna kąta — **87**
7.3 Symetria względem prostej — **90**
7.4 Figury osiowosymetryczne — **96**
7.5 Symetria względem punktu — **99**
7.6 Figury środkowosymetryczne — **103**
7.7 Symetria względem osi układu współrzędnych — **105**
7.8 Symetria względem początku układu współrzędnych — **109**
Podsumowanie działu 7 — **112**

8. Zaawansowane metody zliczania i rachunek prawdopodobieństwa

8.1 Reguła mnożenia — **118**
8.2 Reguła dodawania — **125**
8.3 Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń — **132**
Podsumowanie działu 8 — **141**
Link do wiedzy *Kombinatoryka* — **146**

Odpowiedzi do zadań — **148**
Indeks — **152**

Jak korzystać z podręcznika

Numer i tytuł tematu

Podejmij temat
Wprowadzenie do tematu lekcji

Treści powtórzeniowe

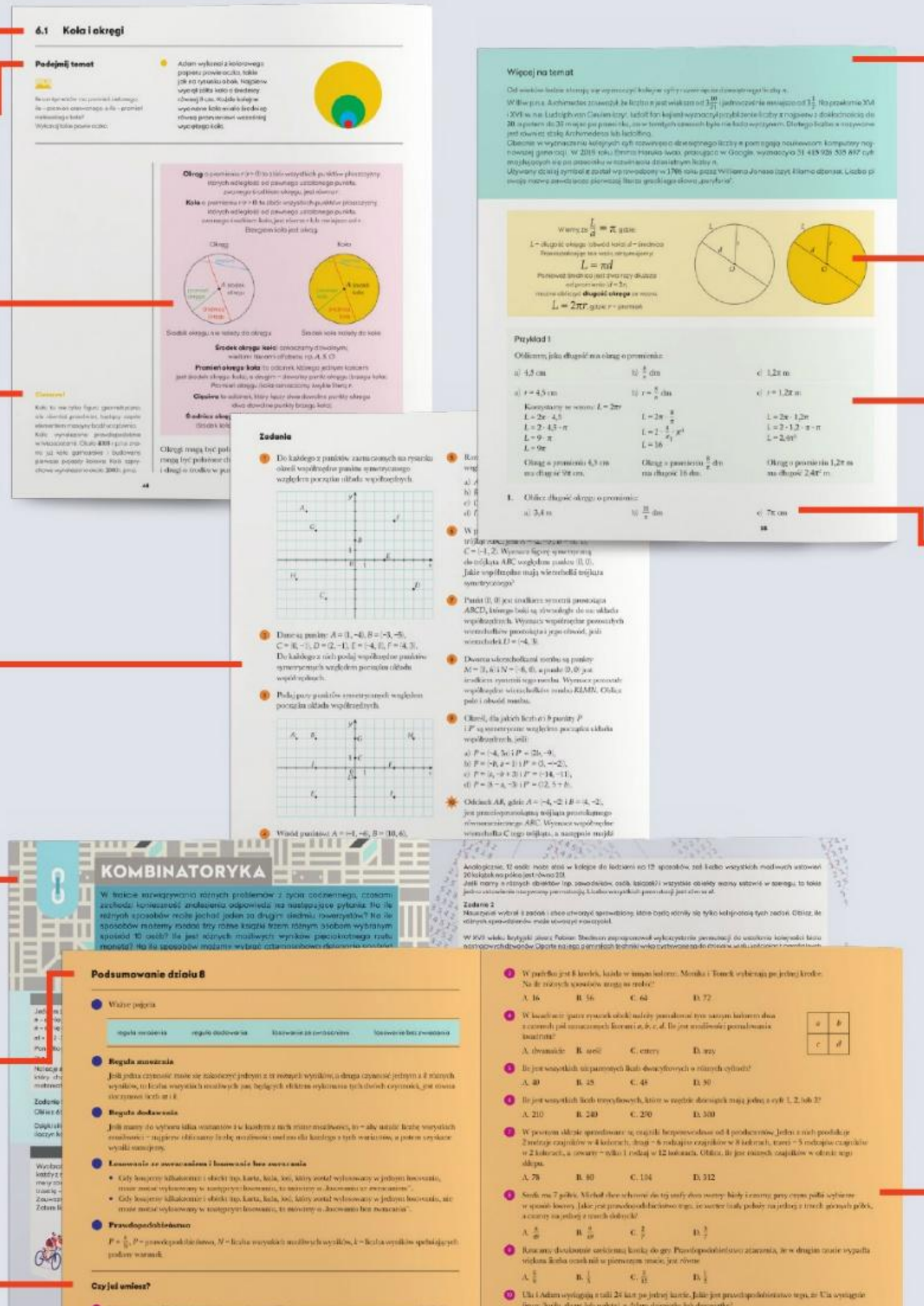
Ciekawe!
Interesujące wiadomości uzupełniające temat lekcji

Zadania
Zadania utrwalające materiał

Link do wiedzy
Treści, które mogą rozwinąć twoje zainteresowania

Podsumowanie działu
Powtórzenie najważniejszych treści działu

Czy już umiesz?
Zadania na koniec działu



Więcej na temat
Treści dodatkowe

Treść ważna, definicja
Objaśnienie nowych terminów

Przykłady
Przykładowe rozwiązania zadań

Ćwiczenia
Ćwiczenia do wykonania na lekcji

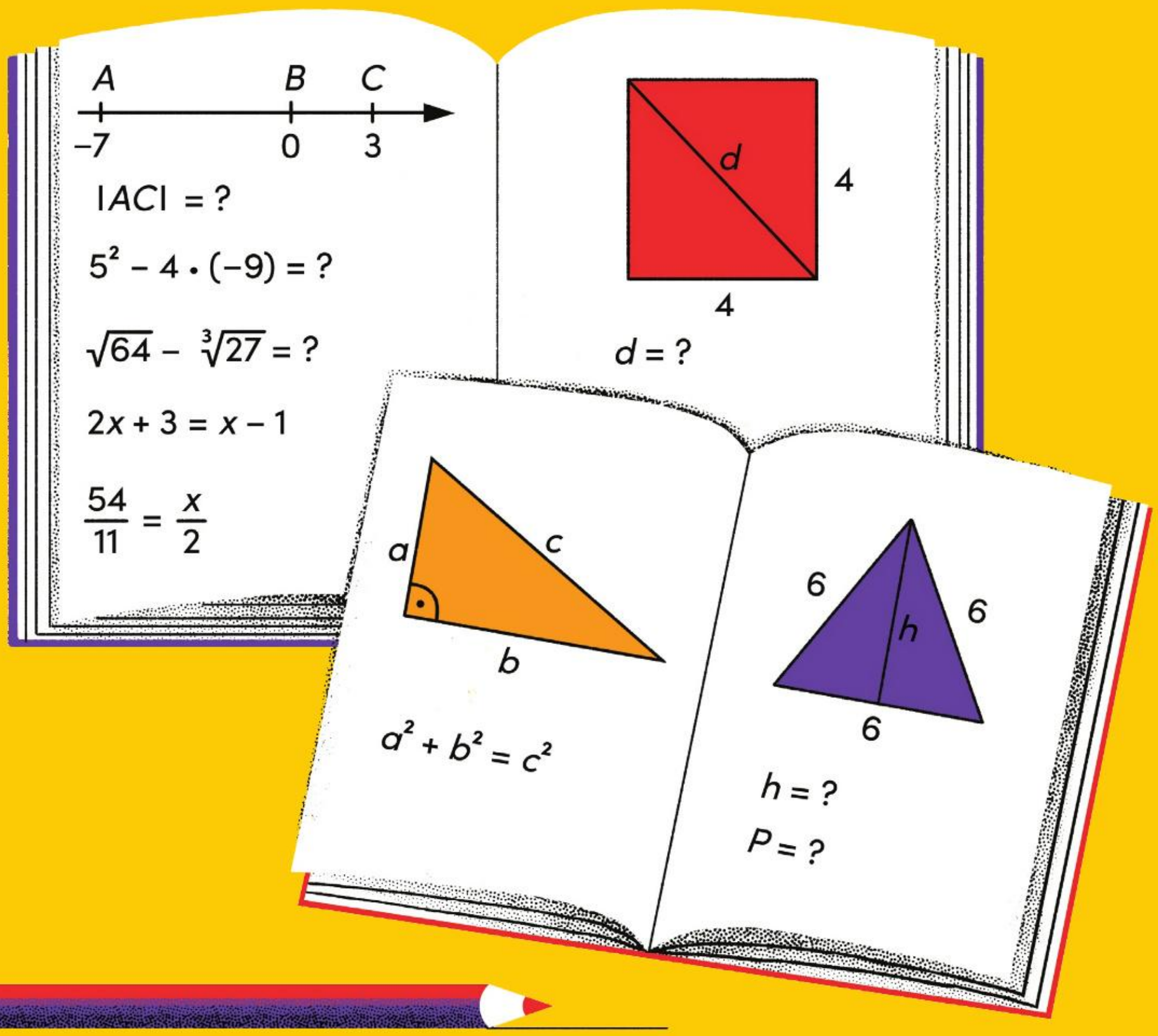
Zadania wielokrotnego wyboru

Tego podręcznika będą używać inni uczniowie. Niczego w nim nie zapisuj. Przekaż go w dobrym stanie.

Znaczenie ikon

- nawiązanie do innego przedmiotu
- zastosowanie nowoczesnych technologii
- uwaga
- nawiązanie do ilustracji
- praca zespołowa
- polecenie trudniejsze

5. Powtarzamy, utrwalamy



1. Jaka jest długość odcinka AC zaznaczonego na osi liczbowej?
2. Rozwiąż równania, które widzisz na rysunku.
3. Wynik jednego z działań jest równy 5. Jak myślisz, o które działanie chodzi?
4. Jaką długość ma przekątna kwadratu o boku równym 4? A jaką długość ma wysokość trójkąta równobocznego o boku równym 6?
5. Powiedz, z jakim twierdzeniem kojarzy ci się trójkąt prostokątny i zapisana pod nim równość.

5.1 Liczby wymierne

Rzymski system zapisu liczb

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Liczby naturalne

Liczby naturalne: 0, 1, 2, 3, 4…

Liczba pierwsza to liczba naturalna, większa od 1, która ma dokładnie dwa różne dzielniki: liczbę 1 i samą siebie.

Liczba złożona to liczba naturalna, większa od 1, która ma więcej niż dwa różne dzielniki.

Zaokrąglanie liczb

Gdy pierwszą zastępowaną zerem cyfrą jest:
0, 1, 2, 3 lub 4, to ostatnia pozostawiona cyfra się nie zmienia,
5, 6, 7, 8 lub 9, to ostatnia pozostawiona cyfra zostaje powiększona o 1.

Dzielenie z resztą

Jeżeli podczas dzielenia liczby a przez liczbę b (różną od zera) otrzymujemy resztę r, czyli $a : b = k$ reszta r, to liczbę a możemy zapisać jako: $a = b \cdot k + r$, gdzie $r < b$.

Cechy podzielności liczb

Liczba jest podzielna przez:
2 – gdy jej cyfrą jedności jest 0, 2, 4, 6 lub 8,
3 – gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3,
4 – gdy jej dwie ostatnie cyfry (cyfra dziesiątek i cyfra jedności) tworzą liczbę podzielną przez 4 lub są zerami,
5 – gdy jej cyfrą jedności jest 0 lub 5,
9 – gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9,
10 – gdy jej cyfrą jedności jest 0,
25 – gdy jej dwie ostatnie cyfry (cyfra dziesiątek i cyfra jedności) tworzą liczbę podzielną przez 25 lub są zerami,
100 – gdy jej dwie ostatnie cyfry (cyfra dziesiątek i cyfra jedności) to 00.

Zapisywanie i odczytywanie liczb w systemie rzymskim

762 = DCCLXII
MCCCXLVI = 1346

Liczby naturalne dodatnie:
1, 2, 3, 4…

Przykłady liczb pierwszych

2, 3, 5, 7…

Przykłady liczb złożonych

4, 6, 8, 9, 10...
Liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi.

Zaokrąglanie liczb naturalnych

3429 ≈ 3430 (do rzędu dziesiątek)
3429 ≈ 3400 (do rzędu setek)
3429 ≈ 3000 (do rzędu tysięcy)

Zapis liczb w dzieleniu z resztą

733 : 3 = 244 r 1
733 = 3 · 244 + 1

Dzielniki i wielokrotności liczb

$D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, \underline{21}, 42\}$
$D_{105} = \{1, 3, 5, 7, 15, \underline{21}, 35, 105\}$
NWD(42, 105) = 21

$W_{42} = \{0, 42, 84, 126, 168, \underline{210}, 252, \ldots\}$
$W_{105} = \{0, 105, \underline{210}, 315, \ldots\}$
NWW(42, 105) = 210

Liczby całkowite to liczby naturalne i liczby do nich przeciwne.

Liczby całkowite: ..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...
Liczby całkowite dodatnie: 1, 2, 3, 4, ...
Liczby całkowite ujemne: ..., −4, −3, −2, −1
Liczba 0 nie jest ani liczbą dodatnią, ani ujemną.

Liczbą wymierną nazywamy każdą liczbę, którą można przedstawić w postaci ułamka zwykłego $\frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami całkowitymi i q jest liczbą różną od zera.

Przykłady liczb wymiernych

12, −5, $\frac{27}{3}$, $-\frac{1}{5}$, −3,4, 0,65

Liczby przeciwne to dwie liczby, które leżą na osi liczbowej w tej samej odległości od zera, ale po przeciwnych jego stronach.

Pary liczby przeciwnych

7 i −7 −15,2 i 15,2 $\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{2}$

Liczba odwrotna do liczby a różnej od zera to taka liczba b różna od zera, że $a \cdot b = 1$, czyli $b = \frac{1}{a}$.
Zatem liczbą odwrotną do a jest $\frac{1}{a}$.

Pary liczb odwrotnych

$\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{2}$ $-4\frac{7}{9}$ i $-\frac{9}{43}$

Ułamek to część całości.
Ułamek właściwy ma licznik mniejszy od mianownika.
Ułamek niewłaściwy ma licznik równy mianownikowi lub większy od mianownika.

Zamiana ułamka niewłaściwego na liczbę mieszaną

$\frac{38}{5} = \frac{7 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{7 \cdot 5}{5} + \frac{3}{5} = 7 + \frac{3}{5} = 7\frac{3}{5}$

Zamiana liczby mieszanej na ułamek niewłaściwy

$2\frac{6}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 6}{7} = \frac{20}{7}$

Ułamek dziesiętny to ułamek, w którego mianowniku jest liczba 10 lub 100, lub 1000 itd.

Zapisywanie ułamka dziesiętnego w postaci dziesiętnej

$\frac{2}{10} = 0{,}2$ $\frac{345}{10\,000} = 0{,}0345$

Liczba cyfr po przecinku musi być równa liczbie zer w mianowniku ułamka.

Zaokrąglanie ułamków dziesiętnych
Gdy pierwszą zastępowaną zerem cyfrą jest:
0, 1, 2, 3 lub 4, to ostatnia pozostawiona cyfra się nie zmienia,
5, 6, 7, 8 lub 9, to ostatnia pozostawiona cyfra zostaje powiększona o 1.

Zaokrąglanie ułamków dziesiętnych
971,283 ≈ 1000 (do setek)
971,283 ≈ 970 (do dziesiątek)
971,283 ≈ 971 (do jedności)
971,283 ≈ 971,3 (do części dziesiątych)
971,283 ≈ 971,28 (do części setnych)

Wartość bezwzględna
Wartość bezwzględna liczby to odległość tej liczby od zera na osi liczbowej.

Obliczanie wartości bezwzględnej

$|7| = 7$ $|-3{,}4| = 3{,}4$ $|0| = 0$

Zadania

Od największej liczby trzycyfrowej odjęto najmniejszą liczbę dwucyfrową. Otrzymana liczba to liczba

A. pierwsza.
B. parzysta.
C. podzielna przez 13.
D. podzielna przez 23.

Wartość wyrażenia $(54 : 2 \cdot 3 - 81 : 3) + 24 \cdot 2$ jest równa

A. 30
B. 67
C. 102
D. 156

Tomek poprawnie zaokrąglił liczbę 1956 do dziesiątek, a następnie zapisał ją w systemie rzymskim. Zatem Tomek zapisał liczbę

A. MDC
B. MCMXC
C. MCMLX
D. DCCLIX

Ile spośród liczb: $4, -\frac{8}{3}, 1, 0, -\frac{3}{4}, -3, -\frac{10}{3}, 5, -7{,}(3)$ jest mniejszych od -2?

A. dwie liczby
B. trzy liczby
C. cztery liczby
D. pięć liczb

Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb 315 i 525 to

A. 105
B. 1575
C. 1050
D. 3150

Wiadomo, że $a = \frac{4}{44}$, $b = \frac{11}{121}$, $c = \frac{3}{33}$. Prawdą jest, że:

A. $b < a < c$
B. $a < b < c$
C. $c < b < a$
D. $a = b = c$

Suma liczby $1\frac{3}{5}$ i liczby do niej odwrotnej jest równa

A. 0
B. $2\frac{9}{40}$
C. 3
D. $4\frac{4}{15}$

Dane są cztery liczby: $a = \frac{2}{3} + (-0{,}625)$, $b = \frac{2}{3} - (-0{,}625)$, $c = \frac{2}{3} \cdot (-0{,}625)$, $d = \frac{2}{3} : (-0{,}625)$. Najmniejszą z tych liczb jest:

A. liczba a
B. liczba b
C. liczba c
D. liczba d

Aneta kupiła $\frac{7}{8}$ kilograma marchewki, a Beata kupiła 0,25 kg marchewki. Wynika z tego, że

A. dziewczęta kupiły łącznie więcej niż kilogram marchewki.
B. Aneta kupiła dwa razy więcej marchewki niż Beata.
C. Aneta kupiła o pół kilograma więcej marchewki niż Beata.
D. Beata kupiła ponad dwieście dekagramów marchewki.

Za zbieranie makulatury klasa otrzymała 48 zeszytów w linię i 72 zeszyty w kratkę. Każdy z uczniów tej klasy otrzymał jednakowy zestaw zeszytów. Ilu uczniów maksymalnie liczyła ta klasa?

A. 12
B. 24
C. 28
D. 32

Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) Liczba $\frac{24}{20}$ jest równa 1,2.

b) Liczba dwadzieścia osiem setnych jest równa $\frac{7}{25}$.

c) Liczba przeciwna do 0,08 to $-\frac{4}{25}$.

d) Liczba odwrotna do liczby $\frac{5}{11}$ to 2,2.

Jaką cyfrą należy zastąpić znak ?, aby liczba 8324? była podzielna przez:

a) 2, b) 3, c) 4, d) 5,
e) 9, f) 10, g) 12?

Podaj wszystkie możliwości.

Oblicz wartość każdego z podanych wyrażeń.

a) $0{,}7 : (-2{,}8) \cdot (1{,}2 : 0{,}3)$

b) $(1{,}85 + 0{,}35) : \frac{7{,}7}{5} - 1\frac{1}{14}$

c) $-0{,}3 \cdot \frac{0{,}42}{0{,}06} + 0{,}006$

d) $0{,}003 \cdot \frac{27}{0{,}009} - 3{,}5$

Kasia zaokrągliła liczbę 142,189 do dziesiątek, a Michał zaokrąglił tę liczbę do części dziesiątych.

Które z dzieci otrzymało większą liczbę? O ile większą?

W torebce były cukierki. Piotrek zjadł $\frac{2}{5}$ wszystkich cukierków, Iwona zjadła $\frac{1}{3}$ wszystkich cukierków, a Ewa $\frac{16}{60}$ wszystkich cukierków. Ile najmniej cukierków mogło być w torebce?

Pan Bogdan trzy razy w tygodniu gra w tenisa przez dwie godziny. Za godzinę korzystania z kortu tenisowego trzeba zapłacić 9 zł. Karnet uprawniający do 39 godzin gry kosztuje 273 zł. Ile złotych zaoszczędzi pan Bogdan, jeśli przez cały rok (52 tygodnie) będzie korzystał z karnetów, zamiast płacić oddzielnie za każdą godzinę gry?

Arek biegał przez $\frac{3}{4}$ godziny, a Marek biegał przez $\frac{3}{5}$ stu dwudziestu minut. Który z chłopców biegał dłużej i o ile minut?

Uzasadnij, że iloczyn kolejnych dwudziestu liczb naturalnych, z których najmniejsza jest równa 1 jest podzielny przez 10 000.

Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe, które przy dzieleniu przez 14 dają resztę 5.

Największy wspólny dzielnik dwóch liczb jest równy 7, a najmniejsza wspólna wielokrotność tych liczb to 42. Oblicz iloczyn tych liczb.

Wskazówka: $a \cdot b = \text{NWW}(a, b) \cdot \text{NWD}(a, b)$

Podaj przykład liczby:

a) większej od 0,7, ale mniejszej od $0{,}(7)$,

b) większej od $-\frac{3}{6}$, ale mniejszej od $-\frac{3}{7}$.

5.2 Działania na liczbach rzeczywistych

Potęgi

Potęga o wykładniku naturalnym

Potęgą liczby a o wykładniku naturalnym n (większym od 1) nazywamy iloczyn n jednakowych czynników, z których każdy jest równy a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Przyjmujemy, że:

$a^1 = a$ dla dowolnej liczby a

$a^0 = 1$ dla dowolnej liczby a różnej od zera ($a \neq 0$)

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ oraz $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$; n – liczba naturalna

Przykłady potęg

$2^5 = 32$

$(-6)^3 = -216$

$-5^3 = -125$

$\left(-\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$

$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$

Działania na potęgach

Iloczyn potęg o tych samych podstawach

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$a \neq 0$; n, m – liczby naturalne

Iloraz potęg o tych samych podstawach

$a^n : a^m = a^{n-m}$

$a \neq 0$; n, m – liczby naturalne, $n > m$

Potęga potęgi

$(a^n)^m = a^{nm}$

$a \neq 0$; n, m – liczby naturalne

Potęga iloczynu

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$a \neq 0$ i $b \neq 0$; n – liczba naturalna

Potęga ilorazu

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$a \neq 0$ i $b \neq 0$; n – liczba naturalna

Przykłady działań na potęgach

$4^2 \cdot 4^5 = 4^{2+5} = 4^7$

$10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-4} = \frac{1}{10^4}$

$\left(\frac{1}{7}\right)^6 : \left(\frac{1}{7}\right)^4 = \left(\frac{1}{7}\right)^{6-4} = \left(\frac{1}{7}\right)^2$

$(6^5)^2 = 6^{5 \cdot 2} = 6^{10}$

$(-3 \cdot 5)^4 = (-3)^4 \cdot 5^4 = 3^4 \cdot 5^4$

$\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot 6^7 = \left(\frac{1}{3} \cdot 6\right)^7 = 2^7$

$\left(2\frac{1}{4}\right)^6 : (2{,}5)^6 = \left(\frac{9}{4} : \frac{5}{2}\right)^6 = \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{5}\right)^6 = \left(\frac{9}{10}\right)^6$

Notacja wykładnicza

Liczba zapisana w notacji wykładniczej jest iloczynem liczby a, spełniającej warunek $1 \leqslant a < 10$, oraz potęgi liczby 10 o wykładniku n będącym liczbą całkowitą.

$a \cdot 10^n$

Przykłady notacji wykładniczej

$17\,500\,000\,000 = 1{,}75 \cdot 10^{10}$

$0{,}000000028 = 2{,}8 \cdot 10^{-8}$

Pierwiastki

Pierwiastek kwadratowy

Pierwiastek drugiego stopnia z liczby nieujemnej a to taka liczba nieujemna b, która podniesiona do kwadratu daje liczbę a.

$\sqrt{a} = b$, gdy $b^2 = a$, $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$

Pierwiastek sześcienny

Pierwiastek trzeciego stopnia z liczby a to taka liczba b, która podniesiona do potęgi trzeciej daje liczbę a.

$\sqrt[3]{a} = b$, gdy $b^3 = a$

Działania na pierwiastkach

Pierwiastek z iloczynu

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$

$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$

Pierwiastek z ilorazu

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $a \geqslant 0$ i $b > 0$

$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $b \neq 0$

Pierwiastek z potęgi

$\sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt[3]{a^3} = a$

Włączanie czynnika pod znak pierwiastka

$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$, dla $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$

$a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$

Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka

$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$, dla $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$

$\sqrt[3]{a^3 b} = a\sqrt[3]{b}$

Kolejność wykonywania działań

1. Najpierw wykonujemy działania w tych nawiasach, w których już nie ma innych nawiasów.
2. Następnie wykonujemy potęgowanie i pierwiastkowanie.
3. Potem wykonujemy mnożenie i dzielenie w kolejności występowania, czyli od strony lewej do prawej.
4. Na końcu wykonujemy dodawanie i odejmowanie w kolejności występowania, czyli od strony lewej do prawej.

Przykłady pierwiastków

$\sqrt{121} = 11$, bo $11^2 = 121$

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, bo $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

$\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$, bo $2{,}5^2 = 6{,}25$

$\sqrt[3]{343} = 7$, bo $7^3 = 343$

$\sqrt[3]{\frac{64}{729}} = \frac{4}{9}$, bo $\left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{64}{729}$

$\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$, bo $0{,}2^3 = 0{,}008$

Przykłady działań na pierwiastkach

$\sqrt{8} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{8 \cdot 18} = \sqrt{144} = 12$

$\sqrt[3]{250} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{250 \cdot 4} = \sqrt[3]{1000} = 10$

$\frac{\sqrt{126}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{126}{14}} = \sqrt{9} = 3$

$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{648}} = \sqrt[3]{\frac{81}{648}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{(-19)^2} = |-19| = 19$

$\sqrt[3]{23^3} = 23$

$6\sqrt{3} = \sqrt{6^2 \cdot 3} = \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{108}$

$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$

$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$

$\sqrt[3]{432} = \sqrt[3]{216 \cdot 2} = \sqrt[3]{6^3 \cdot 2} = 6\sqrt[3]{2}$

Obliczanie z uwzględnieniem kolejności wykonywania działań

$2 + \left(3^3 + 7 \cdot \sqrt[3]{27}\right) : \left(\sqrt{576} - 2 \cdot 3^2\right) =$

$= 2 + (27 + 7 \cdot 3) : (24 - 2 \cdot 9) =$

$= 2 + (27 + 21) : (24 - 18) =$

$= 2 + 48 : 6 = 2 + 8 = 10$

Zadania

Liczba podzielna przez 10 to

A. $5^{100} + 1^{100}$ B. $5^{100} + 5^{100}$ C. $1^{100} + 9^{100}$ D. $5^{100} + 10^{100}$

Wartość wyrażenia $4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4$ jest równa

A. 4^5 B. 4^{16} C. 16^4 D. 4^{4^4}

Iloraz piątej potęgi liczby ujemnej a przez trzecią potęgę tej liczby jest równy 81. Zatem

A. $a = 9$ B. $a = -9$ C. $a = 3$ D. $a = -3$

Prawdą jest, że

A. $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{20}$ B. $3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{45}$ C. $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}$ D. $4\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{500}$

Oceń prawdziwość poniższych zapisów. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) $\left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 64$ b) $3 \cdot \sqrt[3]{4\frac{17}{27}} = 5$ c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5}$ d) $\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2} = \sqrt{9}$

Dana jest liczba $K = \sqrt{1\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{2}{3}} + (-1)^{10}$. Które z poniższych zdań I–IV są prawdziwe?

I. Liczba K jest większa od 2.
II. Liczba K jest całkowita.
III. Liczba K jest ujemna.
IV. Liczba K jest mniejsza od 3.

A. Tylko I i II. B. Tylko II i III. C. Tylko I i IV. D. Tylko III i IV.

Liczby $\sqrt{5}, 2\sqrt{2}, 2\frac{1}{2}, -\sqrt{2}$ zapisane w kolejności rosnącej to:

A. $-\sqrt{2} < 2\sqrt{2} < \sqrt{5} < 2\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{5} < -\sqrt{2} < 2\sqrt{2} < 2\frac{1}{2}$

C. $2\frac{1}{2} < \sqrt{5} < 2\sqrt{2} < -\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2} < \sqrt{5} < 2\frac{1}{2} < 2\sqrt{2}$

Dorosły słoń waży około 6 ton. Masa słonia to około

A. $0{,}6 \cdot 10^5$ dag B. $6 \cdot 10^6$ g C. $0{,}6 \cdot 10^3$ kg D. $0{,}6 \cdot 10^6$ g

Liczba x jest liczbą całkowitą, taką że $x < \sqrt{99} < x + 1$. Oceń prawdziwość zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) Liczba x jest większa od 9.
b) Połowa liczby x nie jest liczbą całkowitą.
c) Liczba x jest liczbą dwucyfrową.

Który ze znaków = czy ≠ należy wstawić w miejsce znaku zapytania?

a) $(\sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{48} + \sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$? 42

b) $\dfrac{0{,}75 \cdot \sqrt{11\frac{1}{9}} - 1{,}2^5 : \left(\frac{6}{5}\right)^4 \cdot \frac{5}{6}}{\left(\frac{7}{8} : 0{,}75\right)^3}$? $2^2 \cdot 3^4 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3$

Korzystając z własności działań na potęgach, oblicz wartość każdego z wyrażeń.

a) $2 \cdot 3^6 + 5 \cdot 3^5 - 6 \cdot 3^4$

b) $5 \cdot 9^2 - 2 \cdot \frac{3^4}{3^2} \cdot 3^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 : (1{,}5)^2$

c) $\frac{3 \cdot 5^4 + 4 \cdot 25^2}{7 \cdot 5^5} - \frac{1}{5^2} \cdot \left(3\frac{1}{3}\right)^2$

Dane są liczby $k = 1{,}25 \cdot 10^5$ i $l = 2{,}5 \cdot 10^{-7}$. Ile razy iloraz liczb k i l jest większy od ich iloczynu?

Zapisz w postaci potęgi liczby 4 wartość wyrażenia: $\frac{\frac{1}{2} \cdot 2^3 \cdot 32}{0{,}5 \cdot 4^2} : \frac{1}{4}$

Oblicz wartość wyrażenia: $\left(\frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{8}}\right)^2$

Oblicz najprostszym sposobem wartość wyrażenia: $\sqrt{\frac{3 \cdot 125 \cdot 27 \cdot 5}{2{,}25}}$

Wykonaj obliczenia, stosując poznane własności pierwiastków.

a) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{4{,}5} \cdot \sqrt{50} + \sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{0{,}4}$

b) $\left(\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{50}\right) : \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{2{,}16} : \sqrt[3]{0{,}01} + \sqrt{12} \cdot \sqrt{27} - \sqrt[3]{19{,}2} : \sqrt[3]{0{,}3}$

d) $2\sqrt{28} + 4\sqrt{63} - \sqrt{112} + \sqrt{700}$

Znajdź liczbę a, wiedząc, że $a\sqrt{3} = \sqrt{75} - 2\sqrt{27}$.

Uzasadnij, że liczba $M = \left(3 - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + 3\right) - \left(3\frac{1}{5} + 0{,}8\right)$ jest liczbą pierwszą.

Wiedząc, że $\sqrt{151{,}29} = 12{,}3$ oblicz:

a) $\sqrt{15\,129}$ b) $\sqrt{1{,}5129}$ c) $\sqrt{605{,}16}$ d) $\sqrt{37{,}8225}$

Uzasadnij, że:

a) liczba A będąca iloczynem pierwiastków kolejnych liczb naturalnych dodatnich mniejszych od 11 jest większa od 1900,

b) pierwiastek z pierwiastka z liczby 16 jest liczbą wymierną,

c) istnieją trzy takie kolejne liczby naturalne dodatnie, że suma kwadratów dwóch z tych liczb jest równa kwadratowi trzeciej z tych liczb.

5.3 Wyrażenia algebraiczne i równania

Wyrażenia algebraiczne to wyrażenia, w których obok liczb, znaków działań i nawiasów występują litery.

Przykłady wyrażeń algebraicznych

$4 \cdot a$, $b + 7$, a^2, $\frac{c-d}{8}$

Nazwę wyrażenia algebraicznego określa to działanie, które należy wykonać jako ostatnie, zgodnie z zasadą kolejności wykonywania działań.

Nazywanie wyrażeń algebraicznych

$\frac{1}{2}(x-y)^2$ połowa kwadratu różnicy liczb x i y

$7x + y$ suma iloczynu liczb 7 i x oraz liczby y

Jednomian to wyrażenie, które jest liczbą, literą (zmienną) lub iloczynem liczb i liter (zmiennych).

Przykłady jednomianów

5, y, $-4a^2b$, $0{,}6rs^3$

Jednomianami podobnymi (wyrazami podobnymi) nazywamy jednomiany, które różnią się tylko współczynnikami liczbowymi.

Przykłady jednomianów podobnych

$-\frac{6}{7}x^3y^2$ $3x^3y^2$

współczynniki liczbowe

Suma algebraiczna to wyrażenie, które powstaje przez dodawanie jednomianów.

$3x + 2y + z$

wyrazy sumy

Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

$a(b + c) = ab + ac$

$-2a(a - 3b + 0{,}6c) = -2a^2 + 6ab - 1{,}2ac$

Mnożenie sum algebraicznych

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

$(x - 2y)(5y + 2) = 5xy + 2x - 10y^2 - 4y$

Równaniem nazywamy równość dwóch wyrażeń algebraicznych.
Litery x, y występujące **w równaniu** nazywamy **niewiadomymi**.

$3y + 6 = y - 2$, $81 : x = 3$, $5x + x = 48$

Liczba spełnia równanie (jest **rozwiązaniem równania** lub jest **pierwiastkiem równania**), jeżeli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej otrzymujemy równość.
Wszystkie liczby spełniające równanie tworzą **zbiór rozwiązań** równania.

Rozwiązanie równania

Liczba 6 jest rozwiązaniem równania
$4x : 3 = 8$,
ponieważ $4 \cdot 6 : 3 = 8$.
Liczba 3,3 jest rozwiązaniem równania
$x - 0{,}8 = 2{,}5$,
ponieważ $x = 2{,}5 + 0{,}8$
$x = 3{,}3$.

Równania równoważne otrzymamy, gdy

- do obu stron równania dodamy tę samą liczbę (lub to samo wyrażenie algebraiczne),
- od obu stron równania odejmiemy tę samą liczbę (lub wyrażenie algebraiczne),
- obie strony równania pomnożymy przez tę samą liczbę różną od zera,
- obie strony równania podzielimy przez tę samą liczbę różną od zera.

Przykłady równań równoważnych

$10 - 2x = x + 7$ i $(x + 9) : 5 = 2$

$5y + 12 = 9 + 4y$ i $3y - 8 = 8y + 7$

Zadania

Liczby x, y to liczby naturalne dodatnie, takie że $x \neq y$. Pomnożono sumę liczb $2y$ i x przez różnicę tych liczb i od otrzymanego iloczynu odjęto kwadrat liczby $2y$. Otrzymano w ten sposób

A. liczbę ujemną. B. zero. C. liczbę dodatnią. D. ułamek niewłaściwy.

Niech x oznacza liczbę naturalną nieparzystą. Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych, z których najmniejszą jest x, jest równa

A. $3(x - 2)$ B. $3(x + 2)$ C. $x + 6$ D. $x - 6$

Pewnego dnia do biblioteki zakupiono p słowników i k razy więcej powieści. Ile książek zakupiono do biblioteki?

A. $p + k$ B. $p + (p + k)$ C. $k(1 + p)$ D. $p(1 + k)$

W trójkącie każdy kolejny bok jest większy o $k - 1$, a najmniejszy bok ma długość równą $5 + k$. Długości boków tego trójkąta są równe:

A. $5 + k$, $2k + 3$, $3k + 4$ B. $k - 1$, $5 + k$, $2k + 4$
C. $2k + 4$, $5 + k$, $3k + 3$ D. $5 + k$, $3k + 3$, $k - 1$

Wartość wyrażenia: $\frac{x}{x^2 - 9} + \frac{x + 1}{x - 1}$ dla $x = -1$ po zaokrągleniu do części dziesiątych jest równa

A. 0,1 B. 0,2 C. 0,3 D. 1,1

Boki prostokąta o obwodzie 20 mają długości a i b. Która z podanych równości **nie jest** prawdziwa?

A. $a + b = 10$ B. $b = 20 - a$ C. $a = \frac{20 - 2b}{2}$ D. $\frac{b}{a} = -1 + \frac{10}{a}$

Wyrażenie: $-(2a - 5)(2 + 3a)$ jest równe

A. $-6a^2 + 19a + 10$ B. $6a^2 - 11a - 10$
C. $-6a^2 + 11a + 10$ D. $-6a^2 - 19a - 10$

Wartość liczbowa wyrażenia $\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{5}y^3$ dla $x = \sqrt{3}$ i $y = \sqrt[3]{-5}$ jest równa

A. -2 B. 0 C. 2 D. 4

Rozwiązaniem równania: $-(3x - 1) - (x - 1)(2 - x) = x(x - 5)$ jest liczba

A. 3 B. -3 C. 4 D. -1

Rozwiązaniem równania: $\frac{x-4}{5} + \frac{1}{2}x = \frac{4+2x}{5} + 0{,}2$ jest liczba

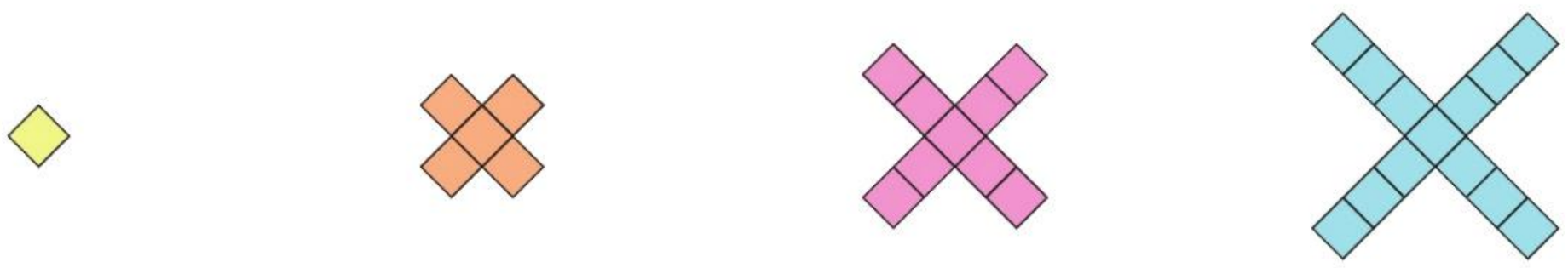
A. ujemna. B. pierwsza. C. podzielna przez 5. D. parzysta.

Oceń prawdziwość zdań.

a) Iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą.
b) Iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest liczbą podzielną przez 6.
c) Iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest liczbą parzystą.
d) Suma dwóch liczb naturalnych nieparzystych jest liczbą parzystą.
e) Wśród liczb pierwszych jest dokładnie jedna liczba parzysta.

Kolejne figury budowane są z jednakowych kwadratów o boku a według określonej reguły. Odkryj tę regułę.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4



Podaj pole figury o numerze:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 10 f) n

Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego:

a) liczbę naturalną podzielną przez 10,
b) liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4,
c) sumę trzech kolejnych liczb naturalnych, z których dwie są nieparzyste,
d) sumę czterech kolejnych liczb naturalnych, z których największa jest równa $n + 2$.

Wiadro kredy waży około 18 kg, wiadro piasku 15,5 kg, a wiadro gipsu waży 2,3 kg. Opisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ile łącznie kilogramów waży:

a) k wiader kredy i p wiader piasku,
b) g wiader gipsu i $2k$ wiader kredy,
c) $3p$ wiader piasku, $0{,}5k$ wiader kredy oraz $1{,}5g$ wiader gipsu.

Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące kwotę zebraną na bilety do cyrku przez grupę osób, w której jest: p osób dorosłych płacących po 15 zł za bilet normalny i d dzieci, których jeden bilet ulgowy kosztuje 8 zł.

Tata ma x lat, mama ma y lat. Ada jest o 24 lata młodsza od mamy. Julek jest o 3 lata starszy od Ady. Mama ma więcej niż 27 lat.

Opisz za pomocą wyrażeń algebraicznych:

a) wiek Julka za 2 lata,

b) wiek Ady 3 lata temu,

c) sumę lat mamy, taty, Julka i Ady za 5 lat.

Znajdź takie wartości liczb a, b, c, d i e, aby otrzymać kwadrat magiczny (rysunek obok).

a	b	c
$5a-1$	$\frac{a}{2}+4$	1
$2a$	d	e

Liczba przekątnych wielokąta o n bokach wyraża się wzorem $\frac{n(n-3)}{2}$.

Oblicz liczbę przekątnych pięćdziesięciokąta.

Z podanych wzorów wyznacz wielkość x. Zapisz konieczne założenia.

a) $p = 2(m + x)$ b) $2y + 7 = xy - y$ c) $ax + \frac{bx}{y} = d$, gdy $y \neq 0$

Sprawdź, które liczby całkowite niedodatnie i większe od -5 są rozwiązaniami równania: $\frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} = 0$

Rozwiąż równania.

a) $-3(a-2) - 7 = -4(3-a) + 1$

b) $y + \frac{1}{2} = 0{,}5y - y + \frac{1}{3}$

c) $2x - 4 = 2x + \frac{8}{3}$

d) $5k - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}(3 + 2k)$

e) $2\left(b - 3\frac{1}{2}\right) = 1\frac{5}{9} - b$

f) $0{,}625t + 6{,}72 = 7 - 0{,}25t$

g) $(m-1)(m+3) = (m+2)(m-5) + 2$

h) $(2-w)(3w+5) = -3(w-1)(w+3)$

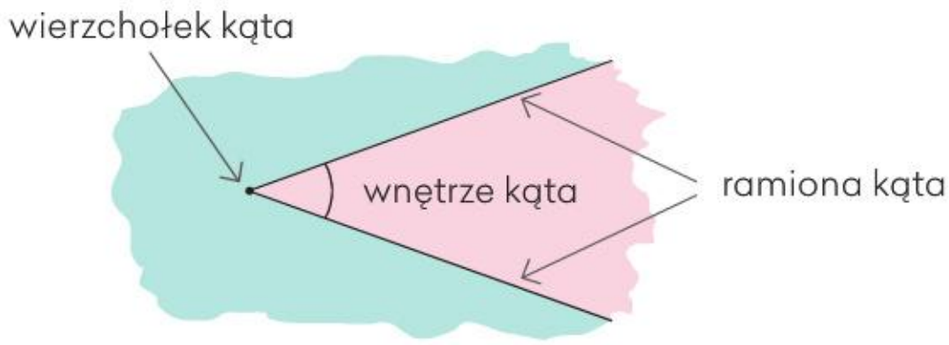
Uzasadnij, że rozwiązaniem równania: $\frac{x^2-(2+x)(x-3)}{2} = -0{,}5x - 1$ jest liczba mniejsza od -2.

Uzasadnij, że równania: $2x - 6 = 2(x-1) - 4$ oraz $2(x-6) = x - 6$ nie są równoważne.

5.4 Figury geometryczne na płaszczyźnie

Kąt to każda z dwóch części płaszczyzny ograniczona dwiema półprostymi o wspólnym początku, wraz z tymi półprostymi.

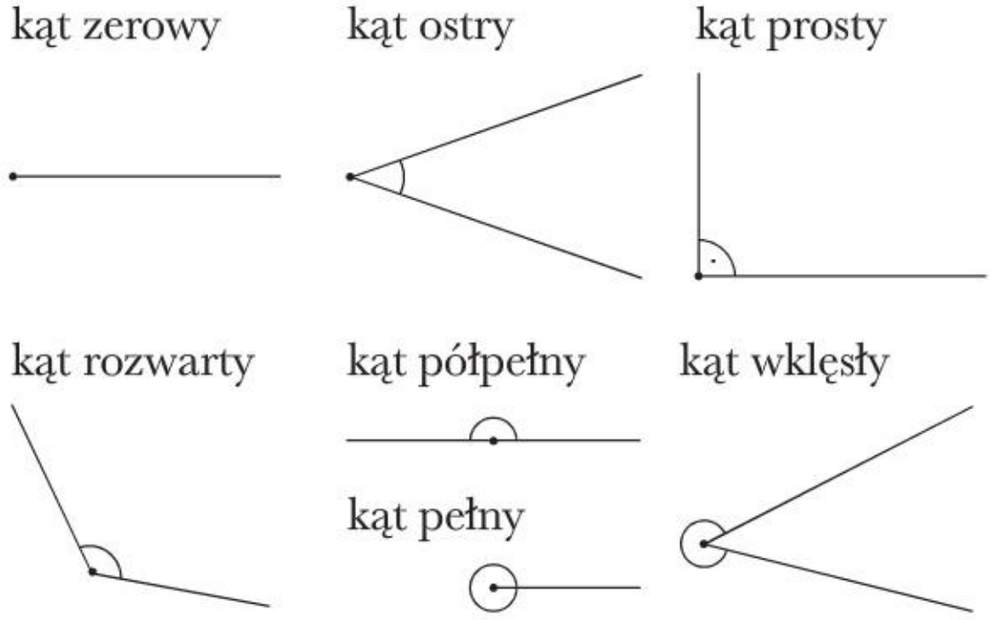
Kąt



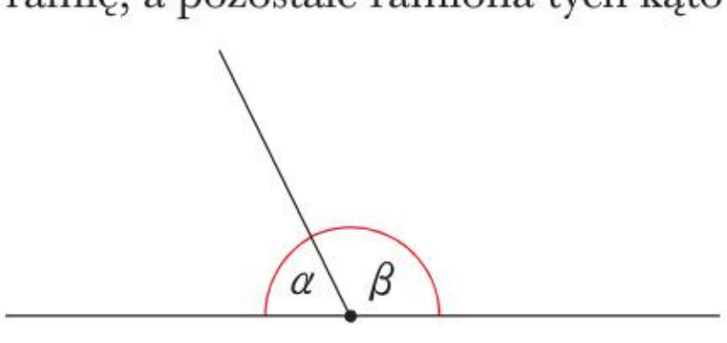
Rodzaje kątów ze względu na miarę

Kąt zerowy ma 0°.
Kąt ostry ma więcej niż 0° i mniej niż 90°.
Kąt prosty ma 90°.
Kąt rozwarty ma więcej niż 90° i mniej niż 180°.
Kąt półpełny ma 180°.
Kąt wklęsły ma więcej niż 180° i mniej niż 360°.
Kąt pełny ma 360°.

Rodzaje kątów

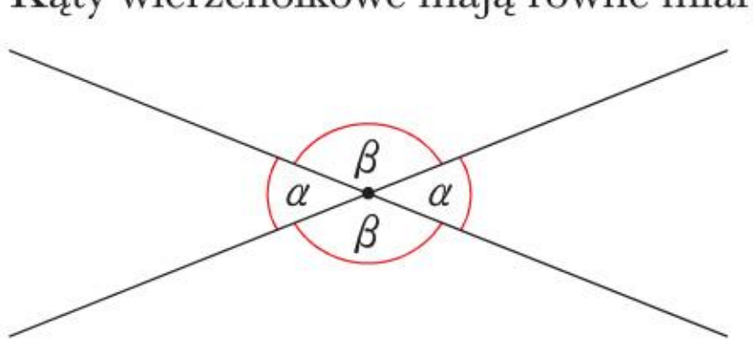


Kąty przyległe to dwa kąty, które mają jedno wspólne ramię, a pozostałe ramiona tych kątów tworzą prostą.



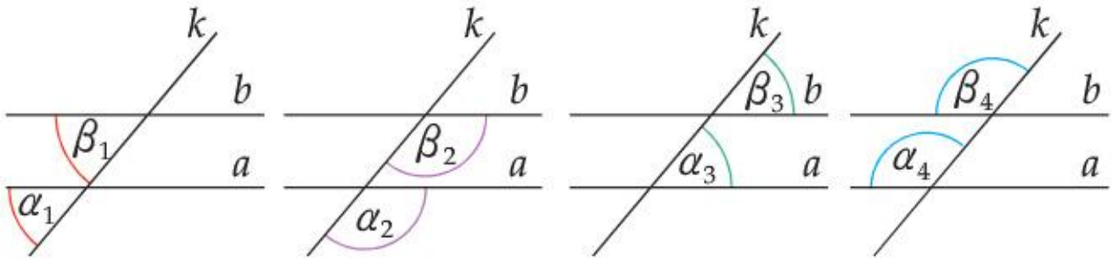
$\alpha + \beta = 180°$

Kątami wierzchołkowymi nazywamy kąty, które mają wspólny wierzchołek, a przedłużenia ramion jednego kąta są ramionami drugiego kąta. Kąty wierzchołkowe mają równe miary.



Kąty odpowiadające

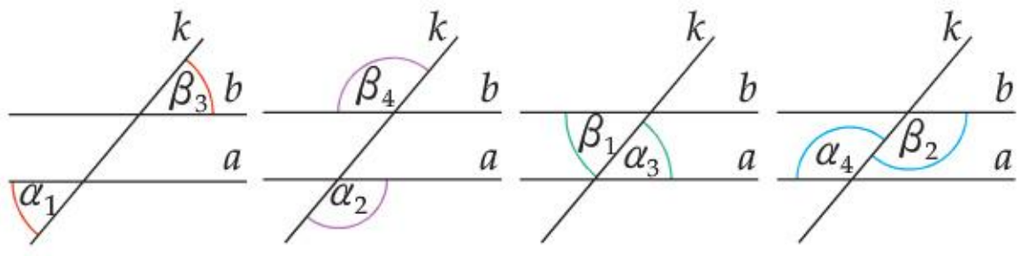
Proste a i b są równoległe ($a \parallel b$)



$\alpha_1 = \beta_1$ $\alpha_2 = \beta_2$ $\alpha_3 = \beta_3$ $\alpha_4 = \beta_4$

Kąty naprzemianległe

Proste a i b są równoległe ($a \parallel b$)

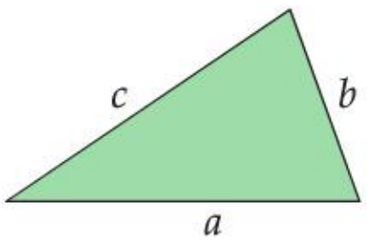


$\alpha_1 = \beta_3$ $\alpha_2 = \beta_4$ $\alpha_3 = \beta_1$ $\alpha_4 = \beta_2$

Trójkąty

Nierówność trójkąta

Suma długości dwóch dowolnych boków trójkąta jest większa od długości trzeciego boku.

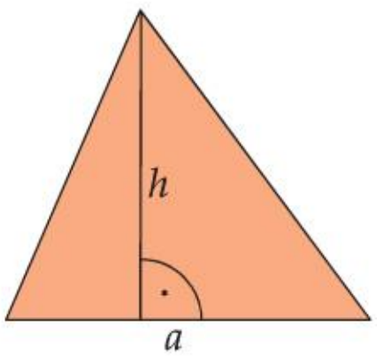


$a + b > c$
$a + c > b$
$b + c > a$

Cechy przystawania trójkątów

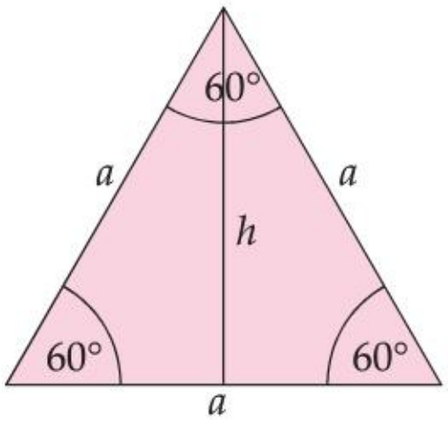
- Cecha: bok, bok, bok
  Jeżeli boki jednego trójkąta mają takie same długości jak boki drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.
- Cecha: bok, kąt, bok
  Jeżeli dwa boki jednego trójkąta mają takie same długości jak dwa boki drugiego trójkąta oraz kąty między tymi bokami mają tę samą miarę, to trójkąty są przystające.
- Cecha: kąt, bok, kąt
  Jeżeli bok jednego trójkąta ma taką samą długość jak bok drugiego trójkąta, a kąty leżące przy tych bokach mają takie same miary, to trójkąty są przystające.

Pole trójkąta



$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

Trójkąt równoboczny



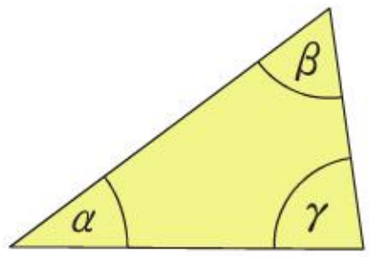
Wysokość trójkąta równobocznego

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

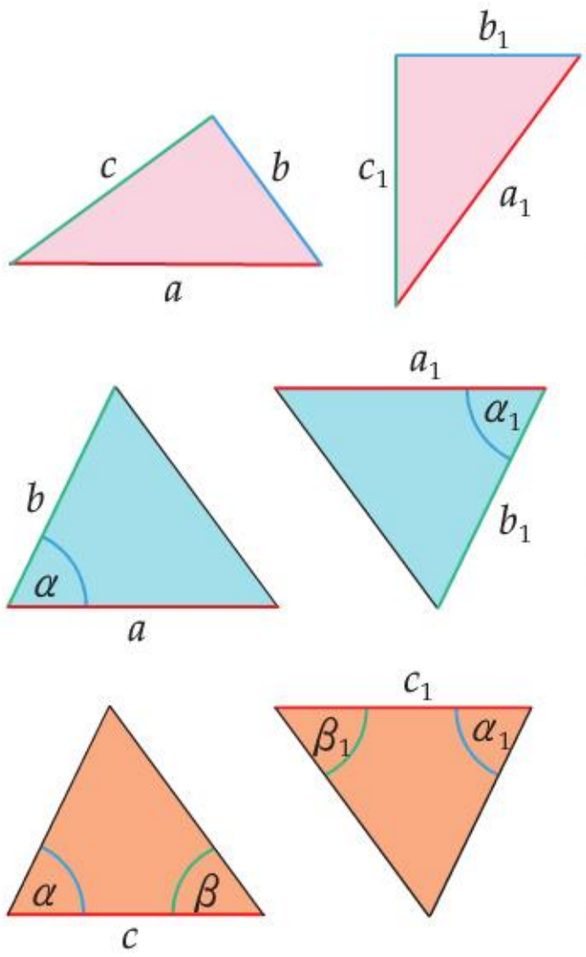
Pole trójkąta równobocznego

$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Kąty w trójkącie



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



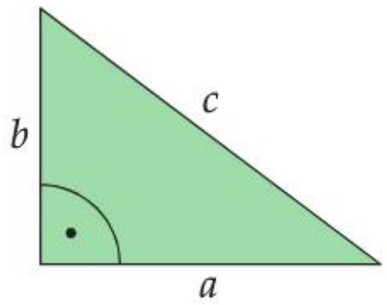
$a = a_1,\ b = b_1,\ c = c_1$

$a = a_1,\ \alpha = \alpha_1,\ b = b_1$

$\alpha = \alpha_1,\ c = c_1,\ \beta = \beta_1$

Twierdzenie Pitagorasa

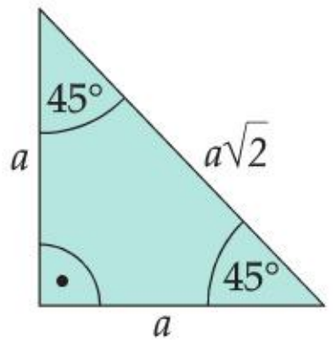
Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



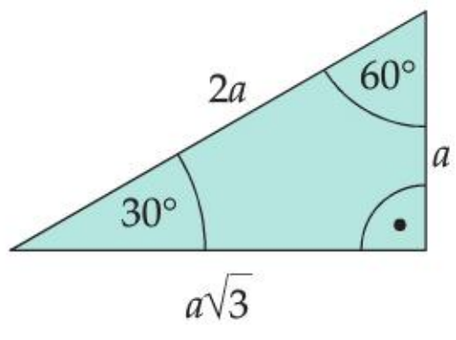
$a^2 + b^2 = c^2$
a, b – przyprostokątne
c – przeciwprostokątna

Trójkąt o kątach

90°, 45°, 45°

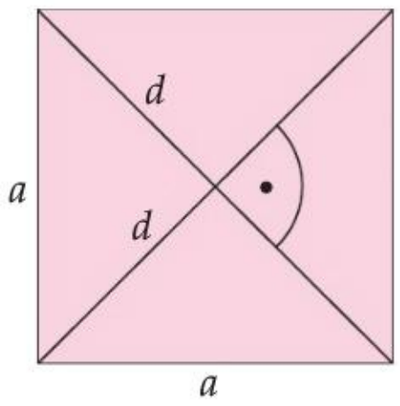


90°, 60°, 30°



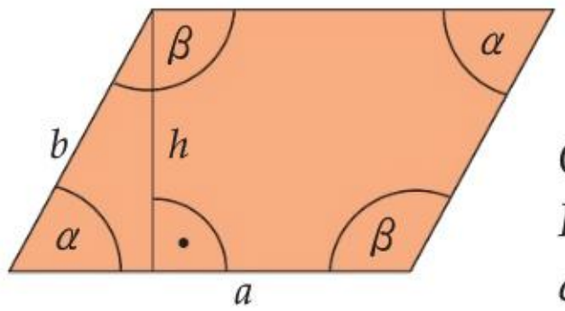
Czworokąty

Kwadrat



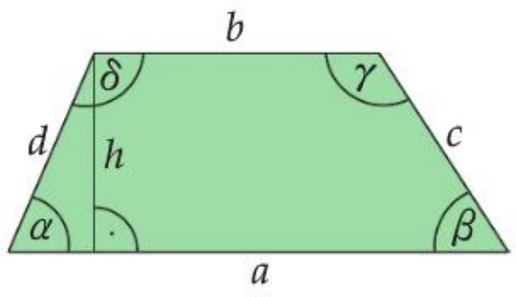
$Obw. = 4a$
$P = a^2$
$d = a\sqrt{2}$
$P = \frac{1}{2} \cdot d^2$

Równoległobok



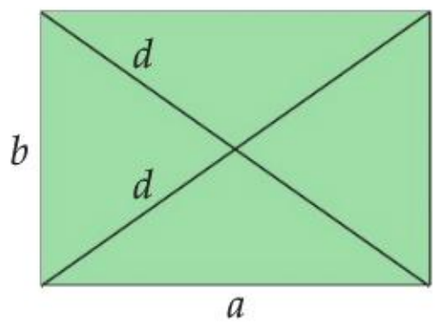
$Obw. = 2a + 2b = 2(a + b)$
$P = a \cdot h$
$\alpha + \beta = 180°$

Trapez



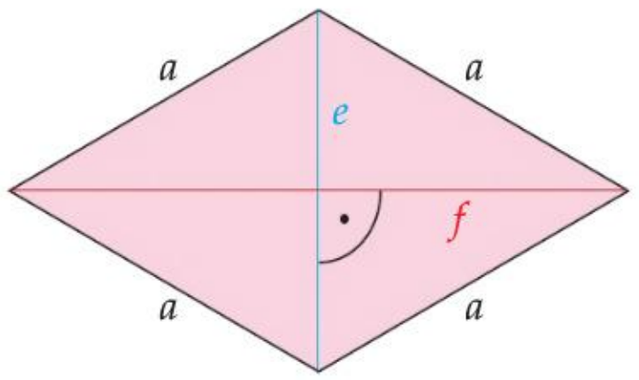
$Obw. = a + b + c + d$
$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$
$\alpha + \delta = 180°$
$\beta + \gamma = 180°$

Prostokąt

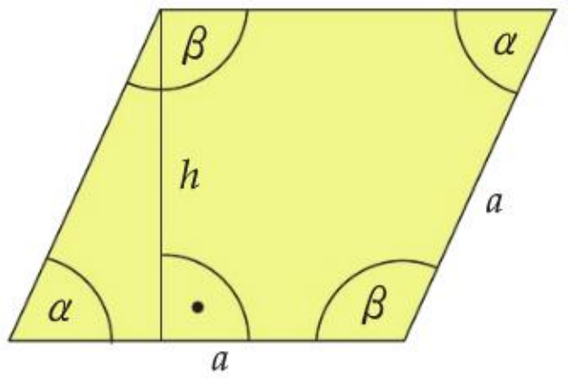


$Obw. = 2a + 2b = 2(a + b)$
$d = \sqrt{a^2 + b^2}$
$P = a \cdot b$

Romb



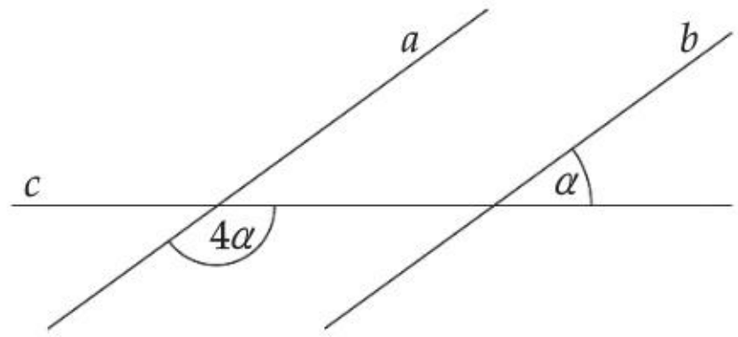
$Obw. = 4a$
$P = \frac{1}{2} e \cdot f$



$P = a \cdot h$
$\alpha + \beta = 180°$

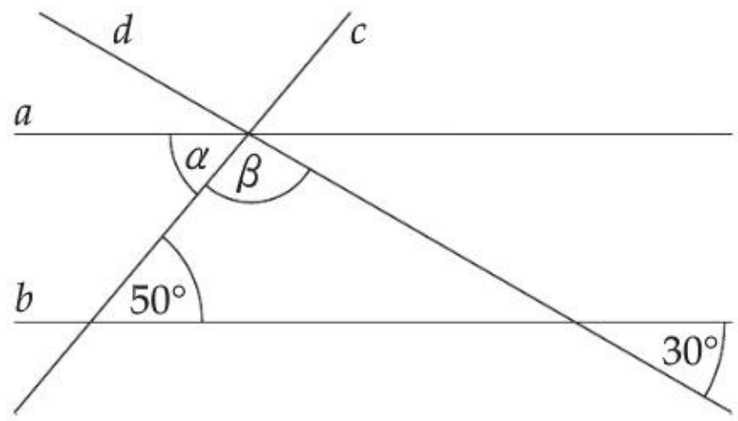
Zadania

Proste a i b są równoległe. Ile jest równa miara kąta α?



A. 24°
B. 36°
C. 45°
D. 60°

Kinga narysowała kilka prostych, tak jak na rysunku. Proste a i b są równoległe i są przecięte prostymi c i d. Które z zapisów I–III są prawdziwe?



I. $\alpha + \beta = 150°$
II. $\beta = 2\alpha$
III. $\beta - \alpha = 60°$

A. Wszystkie trzy.
B. Tylko I i III.
C. Tylko II i III.
D. Tylko I i II.

Narysowano prostą k i punkt E nienależący do tej prostej. Następnie na prostej k zaznaczono punkty A, B, C, D (w tej kolejności), w taki sposób, że $|AE| = |BE| = |BC|$ i miara kąta ECD jest równa 145°. Jakie miary mają kąty trójkąta AEC?

A. 35°, 70°, 75° B. 35°, 35°, 110° C. 25°, 45°, 110° D. 70°, 70°, 40°

Kąt wewnętrzny wielokąta foremnego ma miarę 120°. Najdłuższa przekątna tego wielokąta ma długość 4,6 cm. Obwód tego wielokąta jest równy

A. 9,2 cm B. 13,8 cm C. 18,4 cm D. 27,6 cm

Obwód równoległoboku jest równy 3 cm. Jeden z boków tego równoległoboku jest równy $\frac{1}{6}$ obwodu.

Wynika z tego, że

A. jeden z boków równoległoboku jest dwukrotnie krótszy od drugiego boku.

B. każda z wysokości tego równoległoboku jest dłuższa od 0,6 cm.

C. długości obu boków tego równoległoboku wyrażają się liczbami całkowitymi.

D. boki tego równoległoboku są równe.

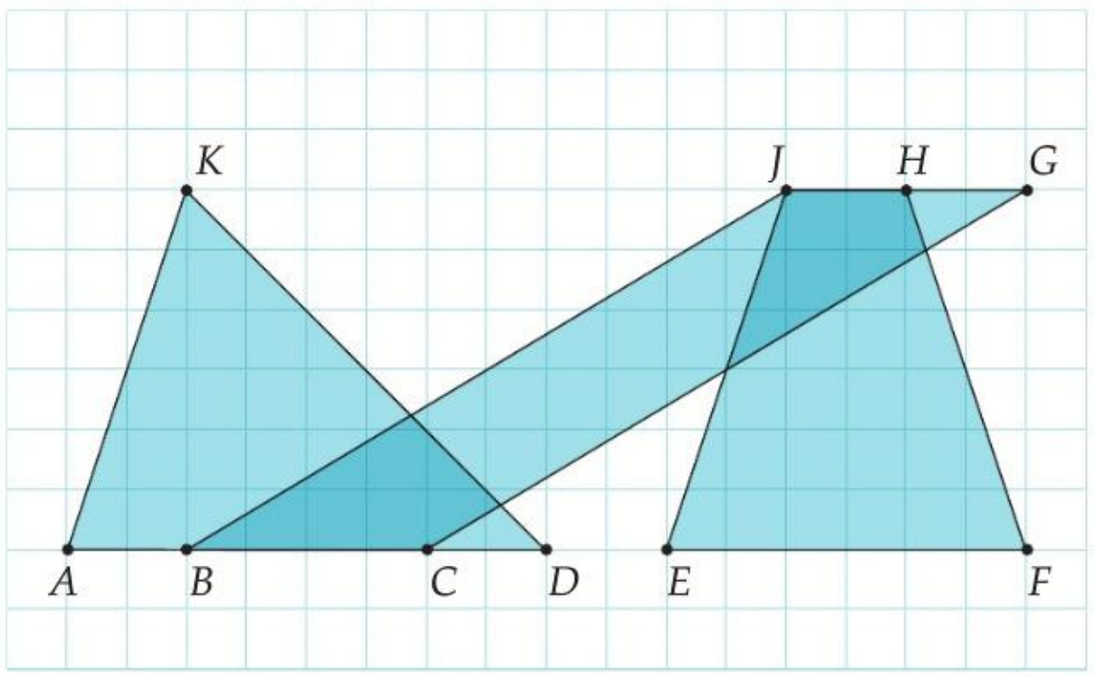
Pola których wielokątów przedstawionych na rysunku są równe?

A. Tylko trójkąta ADK i równoległoboku $BCGJ$.

B. Tylko trójkąta ADK i trapezu $EFHJ$.

C. Tylko równoległoboku $BCGJ$ i trapezu $EFHJ$.

D. Trójkąta ADK, równoległoboku $BCGJ$ i trapezu $EFHJ$.



Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 32 cm. Podstawa jest o 2 cm dłuższa od ramienia.

Wysokość tego trójkąta jest równa

A. 4 cm B. 5 cm C. 8 cm D. 10 cm

Ogródek ma kształt prostokąta, w którym długości boków pozostają w stosunku 12 : 5. Ścieżka łącząca środki sąsiednich boków ogródka ma długość 26 m.

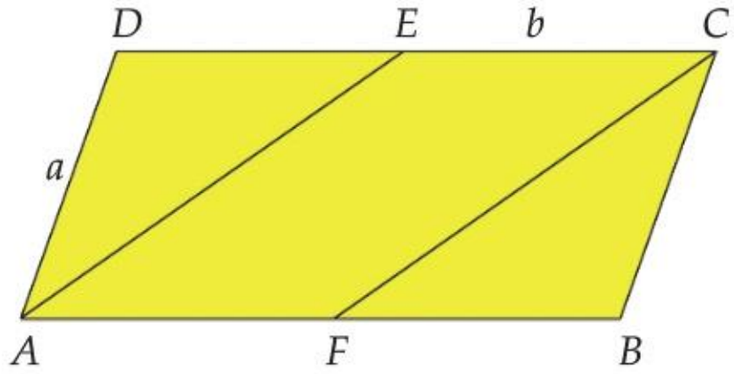
Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) Pole powierzchni ogródka jest większe od 900 m^2.

b) Do ogrodzenia tego ogródka potrzeba 60 m bieżących siatki, po odliczeniu 8 m na bramę i furtkę.

Działkę w kształcie trójkąta o podstawie 36 m i wysokości 32 m zamieniono na kwadratową działkę o tym samym polu powierzchni. Nową działkę z trzech stron ogrodzono płotem. Oblicz długość tego płotu.

W równoległoboku $ABCD$ poprowadzono takie odcinki AE i CF, że $AE||CF$, kąty DAE i BAE są równe oraz kąty DCF i BCF są równe. Boki równoległoboku mają długości a i b, gdzie $b > a$.



Długość odcinka AF jest równa

A. $a + b$ B. $2a - b$

C. $(a + b) : 2$ D. $b - a$

Przekątne rombu $ABCD$ mają długości 6 cm i 8 cm. Na boku AB obrano taki punkt E, że DE jest wysokością tego rombu. Oblicz długość odcinka DE.

Z dwóch przystających trójkątów równobocznych zbudowano równoległobok, którego krótsza przekątna jest jednym z boków trójkąta. Pole tego równoległoboku wynosi $12{,}5\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz obwód jednego z tych trójkątów.

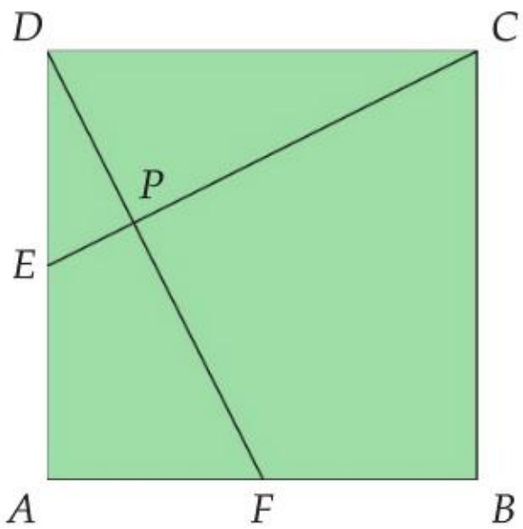
W trapezie równoramiennym $ABCD$ ($AB||CD$) górna podstawa CD i wysokość mają długość a, podstawa dolna jest trzy razy dłuższa od postawy górnej. Z wierzchołków C i D tego trapezu poprowadzono odcinki CE i DF prostopadłe do boku AB oraz odcinek łączący punkty C i F. Następnie rozcięto ten trapez na cztery części wzdłuż odcinków DF, CE i CF. Z otrzymanych części zbudowano kwadrat. Oblicz długość boku i długość przekątnej tego kwadratu.

W trapezie równoramiennym kąt rozwarty ma miarę 135°. Wysokość jest równa 6 cm, a krótsza podstawa 8 cm. Oblicz pole trapezu.

Prostokątny trawnik ma wymiary 42 m × 16 m. Oblicz, o ile metrów kwadratowych zmniejszy się pole powierzchni trawnika, jeżeli wzdłuż boków tego trawnika zostanie ułożony chodnik o szerokości 60 cm.

Pole trójkąta prostokątnego równoramiennego jest równe 16 cm^2. Oblicz wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego.

W kwadracie $ABCD$ (rysunek obok) środki boków AD i AB oznaczono odpowiednio przez E i F. Następnie poprowadzono odcinki DF i CE, które przecięły się w punkcie P. Wykaż, że trójkąt EPD jest prostokątny. Wskazówka: Skorzystaj z własności przystawania trójkątów AFD i DEC oraz z własności kątów w trójkącie prostokątnym.



W trójkącie największy kąt jest trzykrotnie większy od najmniejszego. Najmniejszy kąt jest o 20° mniejszy od trzeciego z kątów. Wykaż, że ten trójkąt jest rozwartokątny.

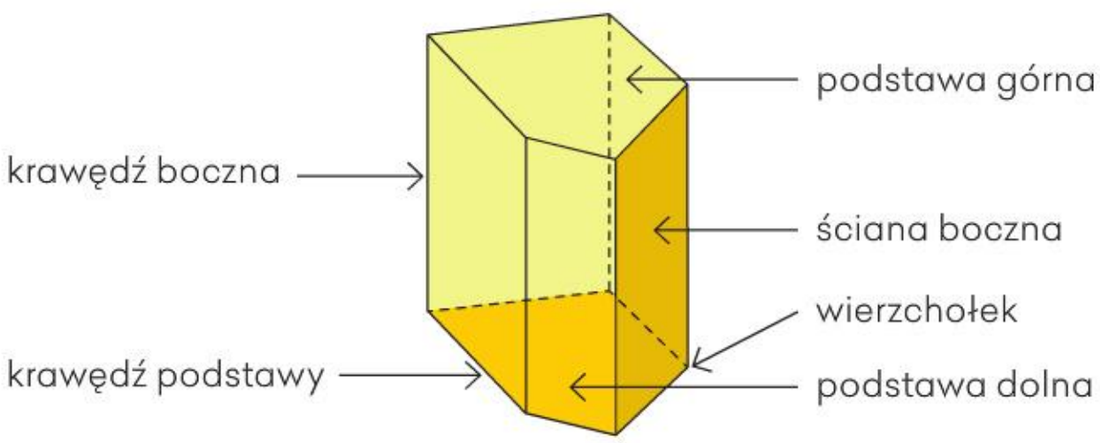
Jeden z kątów rombu ma miarę 120°. Bok rombu ma długość a cm. Zapisz wzór na pole tego rombu.

W trapezie prostokątnym $ABCD$ ramię BC jest równe 17 cm. Wysokość tego trapezu jest równa krótszej podstawie CD, a różnica długości podstaw jest równa 8 cm. Oblicz długości przekątnych tego trapezu.

5.5 Geometria przestrzenna

Graniastosłupy

Graniastosłup to figura przestrzenna, której dwie ściany (podstawy) są przystające i równoległe do siebie, a pozostałe ściany (ściany boczne) są równoległobokami.



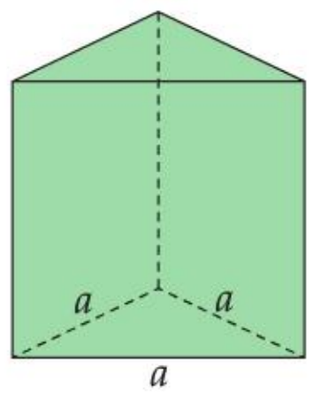
Graniastosłup prosty to graniastosłup, w którym krawędzie boczne są prostopadłe do podstawy.

Graniastosłup pochyły to graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstawy.

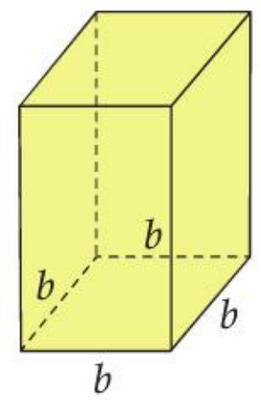
Graniastosłup prawidłowy to graniastosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym.

Przykłady graniastosłupów prawidłowych

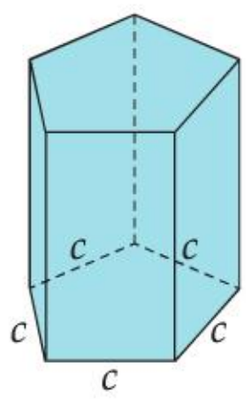
Graniastosłup prawidłowy trójkątny



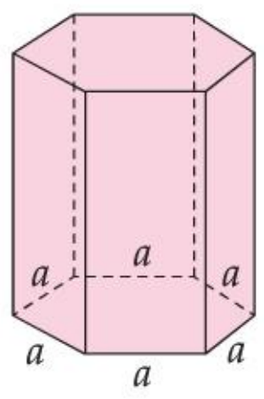
Graniastosłup prawidłowy czworokątny



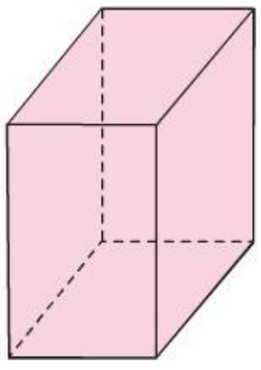
Graniastosłup prawidłowy pięciokątny



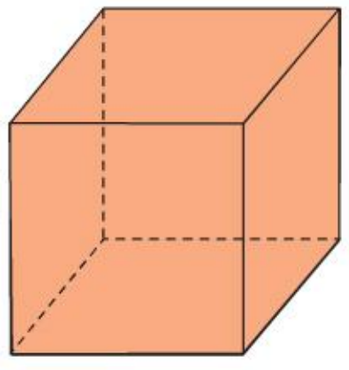
Graniastosłup prawidłowy sześciokątny



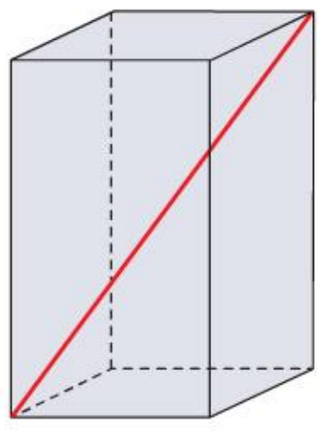
Prostopadłościan to taki graniastosłup, którego podstawy są prostokątami.



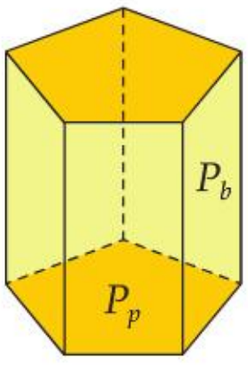
Sześcian to taki prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami.



Przekątna graniastosłupa to odcinek łączący wierzchołki obu podstaw, które nie należą do tej samej ściany graniastosłupa.



Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa



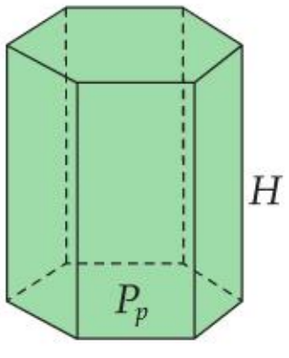
$P_c = 2 \cdot P_p + P_b$

P_c – pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

P_p – pole podstawy graniastosłupa

P_b – pole powierzchni bocznej graniastosłupa

Objętość graniastosłupa



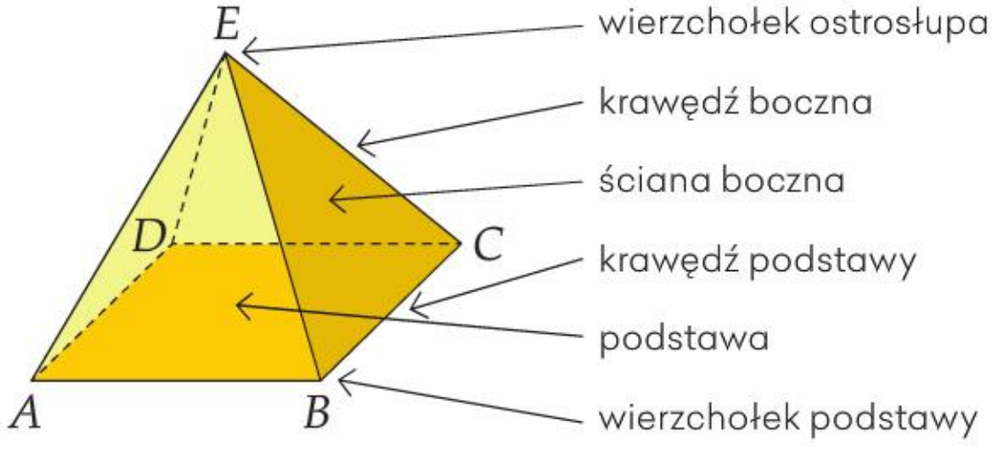
$V = P_p \cdot H$

V – objętość graniastosłupa

P_p – pole podstawy graniastosłupa

H – wysokość graniastosłupa

Ostrosłup to figura przestrzenna, której podstawą jest dowolny wielokąt, a ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

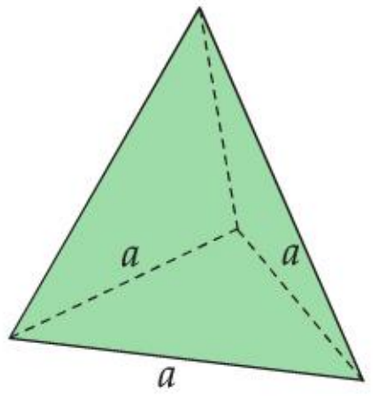


Ostrosłup prosty to ostrosłup, którego wszystkie krawędzie boczne są równe.

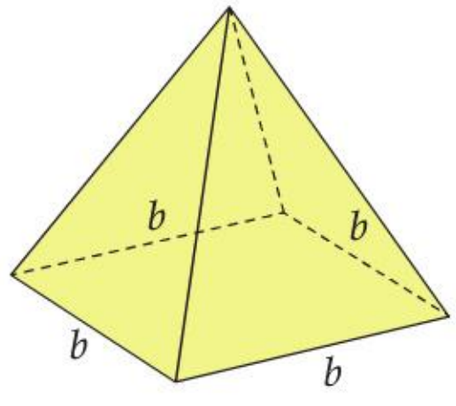
Ostrosłup prawidłowy to ostrosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym.

Przykłady ostrosłupów prawidłowych

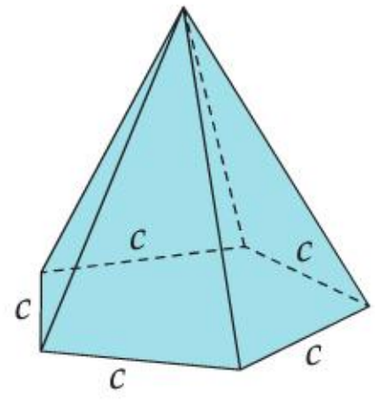
Ostrosłup prawidłowy trójkątny



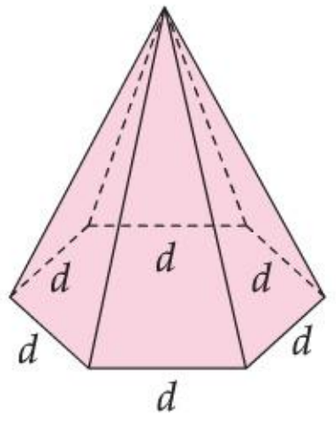
Ostrosłup prawidłowy czworokątny



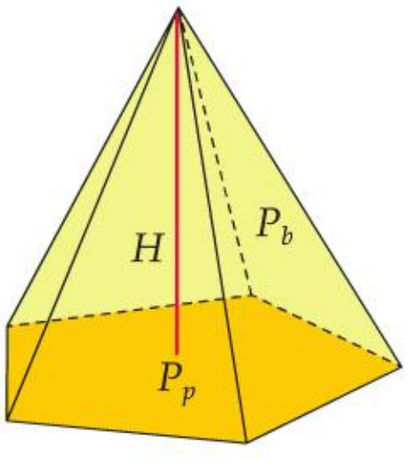
Ostrosłup prawidłowy pięciokątny



Ostrosłup prawidłowy sześciokątny



Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa



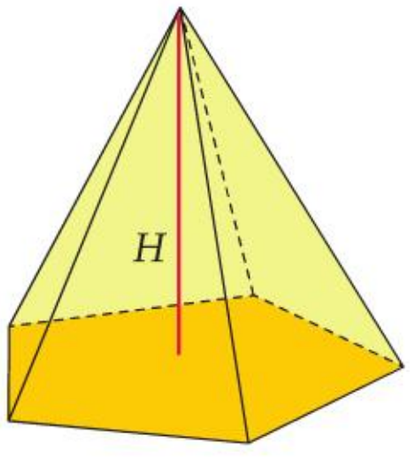
$P_c = P_p + P_b$

P_c – pole powierzchni całkowitej ostrosłupa

P_p – pole podstawy ostrosłupa

P_b – pole powierzchni bocznej ostrosłupa

Objętość ostrosłupa



$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$

V – objętość ostrosłupa

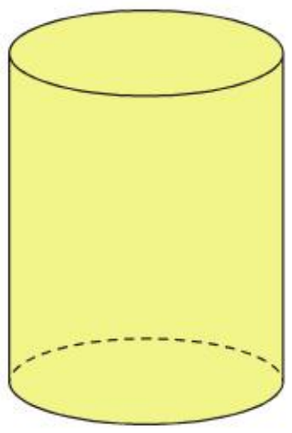
P_p – pole podstawy ostrosłupa

H – wysokość ostrosłupa

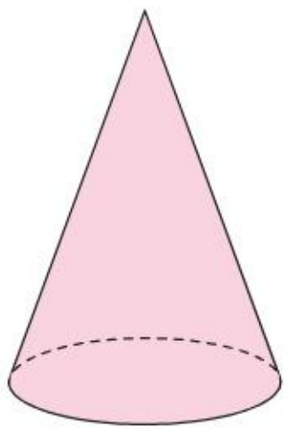
Bryły obrotowe

Walec, **stożek** i **kula** to bryły powstałe przez obrót odpowiednio: prostokąta, trójkąta prostokątnego, półkola (lub koła) wokół pewnej ustalonej prostej.

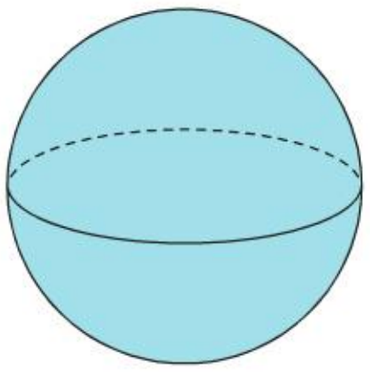
Walec



Stożek

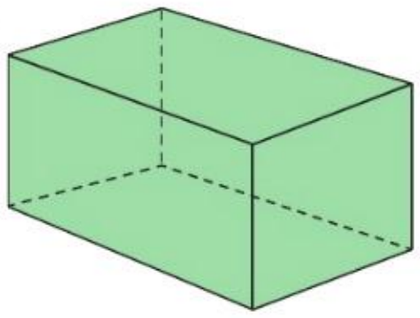


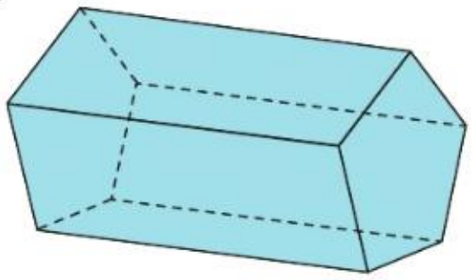
Kula

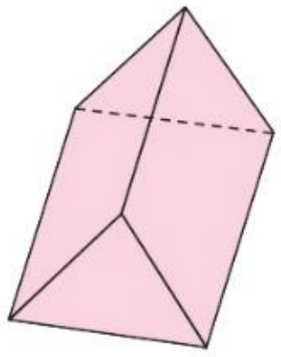


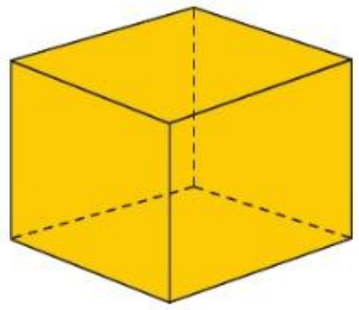
Zadania

Na którym rysunku przedstawiono graniastosłup o podstawie pięciokąta?

A. 

B. 

C. 

D. 

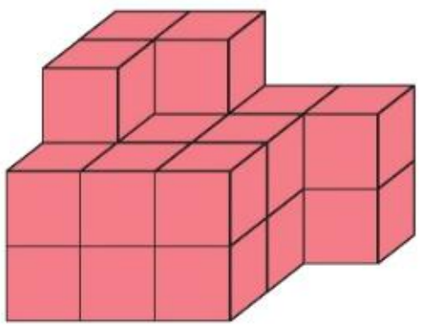
Marek zapisał w tabeli własności pewnego graniastosłupa.

Liczba ścian	7
Liczba krawędzi	15
Liczba wierzchołków	10

Podstawą tego graniastosłupa jest

A. siedmiokąt. B. pięciokąt.
C. dziesięciokąt. D. dwunastokąt.

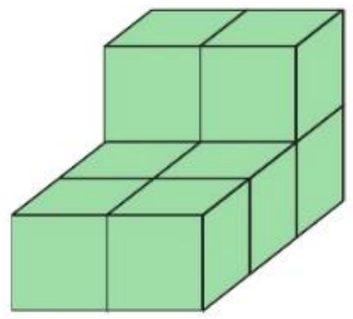
Bryła przedstawiona na rysunku zbudowana jest z jednakowych sześciennych klocków.



Ile najmniej klocków trzeba dołożyć, aby z tej bryły ułożyć sześcian?

A. 10 B. 13
C. 16 D. 41

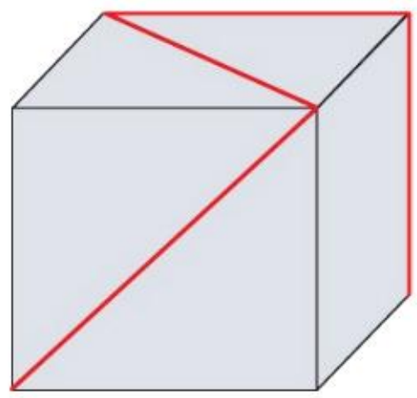
Z jednakowych sześciennych klocków zbudowano bryłę, taką jak na rysunku. Jedna ściana klocka ma pole równe 9 cm^2.



Pole powierzchni bryły jest równe

A. 126 cm^2 B. 198 cm^2
C. 252 cm^2 D. 448 cm^2

Krawędź sześciennego klocka jest równa 5 cm. Jaką długość ma linia zaznaczona na rysunku kolorem czerwonym, przebiegająca wzdłuż dwóch krawędzi i dwóch przekątnych ścian tego klocka?



Długość tej linii wynosi

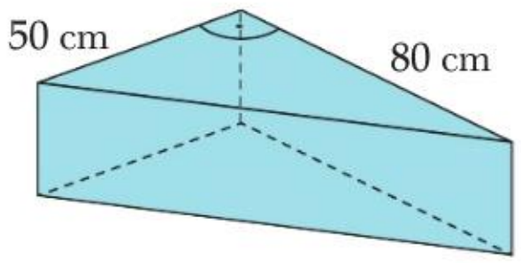
A. 30 cm B. $20\sqrt{2}$ cm
C. $10(1+\sqrt{2})$ cm D. $10(1+2\sqrt{2})$ cm

Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Wysokość prostopadłościanu jest trzy razy większa od długości krawędzi podstawy. Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest równa 40 cm.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) Wysokość prostopadłościanu jest równa 6 cm.
b) Pole powierzchni prostopadłościanu jest równe 56 cm^2.
c) Objętość prostopadłościanu jest równa 108 cm^3.

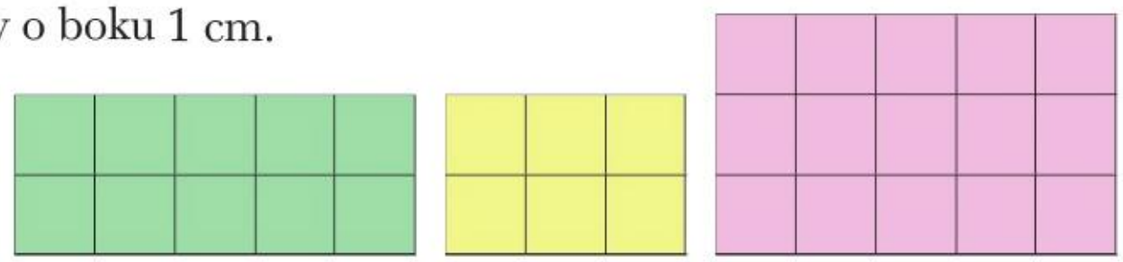
Na rysunku przedstawiony jest graniastosłup prosty o objętości 60 dm^3.



Wysokość tego graniastosłupa jest równa

A. 6 cm
B. 30 dm
C. 6 dm
D. 30 cm

Rysunek przedstawia trzy różne ściany graniastosłupa prostego czworokątnego.
Każda ściana podzielona jest na jednakowe kwadraty o boku 1 cm.



Objętość tego graniastosłupa jest równa

A. 30 cm^3
B. 60 cm^3
C. 12 cm^3
D. 24 cm^3

Ostrosłup ma 231 wierzchołków. Ile ma wszystkich krawędzi?

A. 231
B. 462
C. 460
D. 531

Świeca na rysunku obok ma kształt bryły składającej się z



A. walca i ostrosłupa.
B. walca i graniastosłupa.
C. graniastosłupa i stożka.
D. walca i stożka.

Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny równoramienny. Objętość graniastosłupa jest równa 25 cm^3, a jego wysokość jest równa 8 cm. Oblicz, ile co najmniej centymetrów drutu potrzeba na wykonanie modelu szkieletowego tego graniastosłupa. Wynik zaokrąglij do całości.

Basen w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 8,5 m × 20 m × 3 m napełniono $3{,}4 \cdot 10^3$ hl wody.
Ile hektolitrów wody należy jeszcze dolać, aby basen był napełniony do pełna? Jaką część pojemności basenu stanowi woda, którą należy dolać, aby basen był pełny?

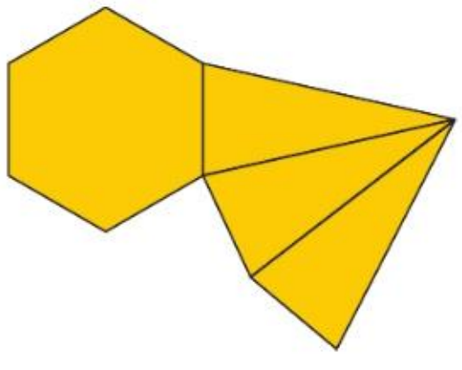
Jeden hektolitr jest równy 100 litrom.
1 hl = 100 l

Sosnowa deska ma 3 m długości, 0,25 dm grubości i 15 cm szerokości. Ile kilogramów waży ta deska, jeśli 1 dm^3 drewna sosnowego waży 0,6 kg?

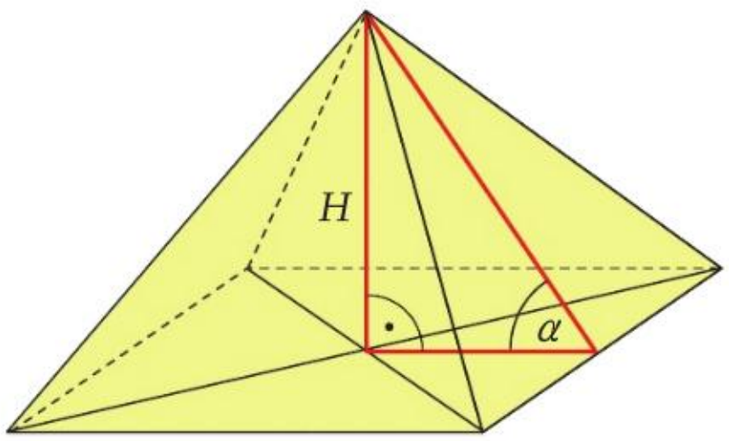
Wymiary zewnętrzne prostopadłościennej umywalki wynoszą: długość 120 cm, szerokość 40 cm, wysokość 17 cm. Grubość ścianek jest równa 5 cm. Oblicz pojemność tej umywalki. Wynik zapisz w litrach.

Pojemnik na perfumy ma kształt ostrosłupa, którego podstawą jest romb. Jedna przekątna tego rombu jest równa 6 cm. Wysokość pojemnika jest równa 10 cm, a jego objętość 40 cm^3. Oblicz długość krawędzi podstawy ostrosłupa. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 cm.

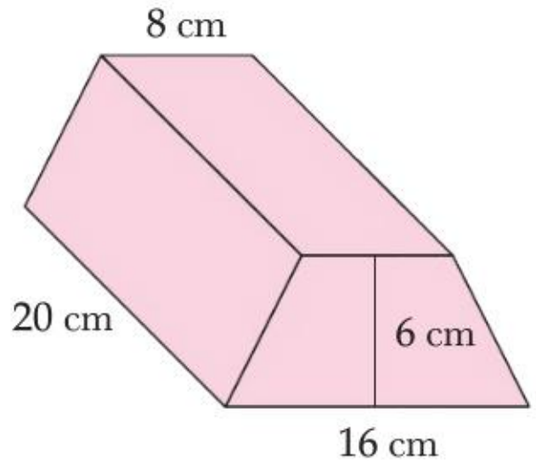
Na rysunku przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prawidłowego. Krawędź podstawy tego ostrosłupa jest równa 2 cm, a pole powierzchni całkowitej jest równe $6(\sqrt{3} + 9)$ cm^2. Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa.



Oblicz wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego obwód podstawy jest równy 0,6 m, a miara kąta α jest równa 45°.



Podstawą graniastosłupa jest trapez równoramienny. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość graniastosłupa, korzystając z danych zamieszczonych na rysunku.

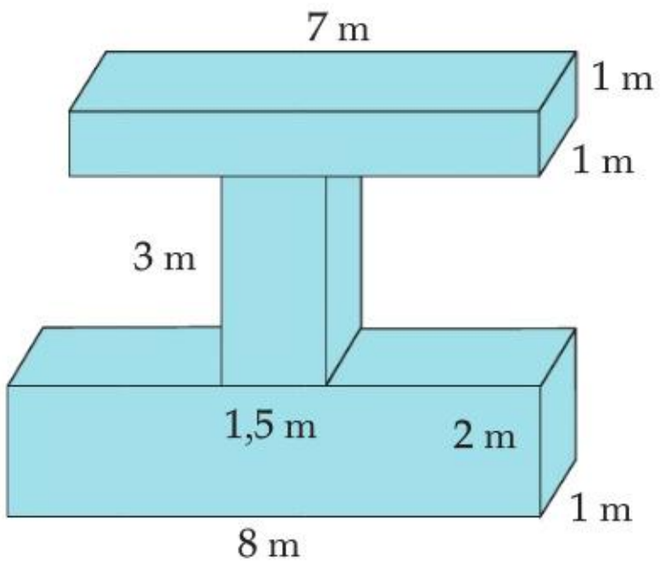


Krawędź czworościanu foremnego jest równa 6 cm. Oblicz pole powierzchni tej bryły.

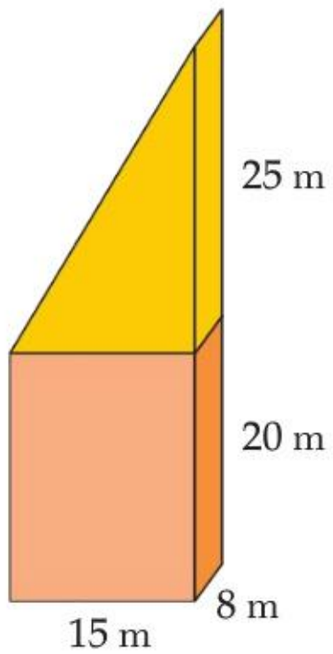
Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego są jednakowej długości. Suma wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa 108 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

Oblicz, ile waży każdy z betonowych elementów, takich jak na rysunku. Przyjmij, że 1 m^3 betonu waży 2100 kg. Wykorzystaj dane zamieszczone na rysunku.

a)

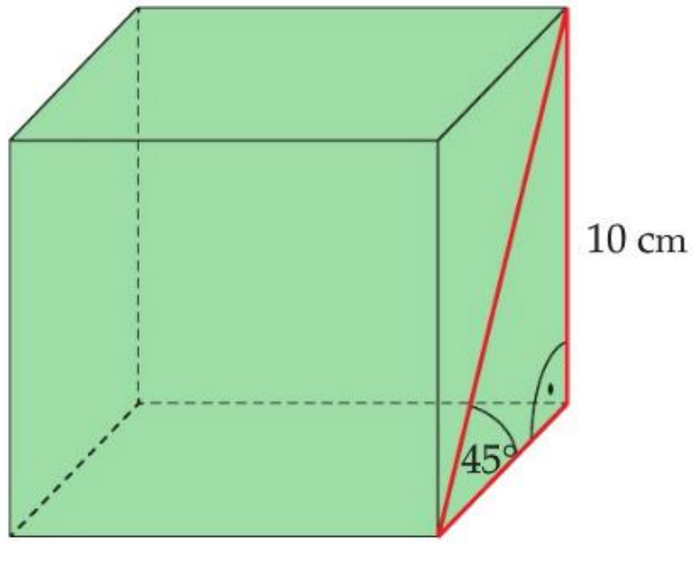


b)



Każdą krawędź prostopadłościanu A powiększono trzykrotnie i otrzymano prostopadłościan B. Ile razy objętość prostopadłościanu B jest większa od objętości prostopadłościanu A?

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 10 cm. Przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa tworzy z krawędzią podstawy kąt 45°. Oblicz objętość i pole powierzchni tego graniastosłupa (rysunek obok).

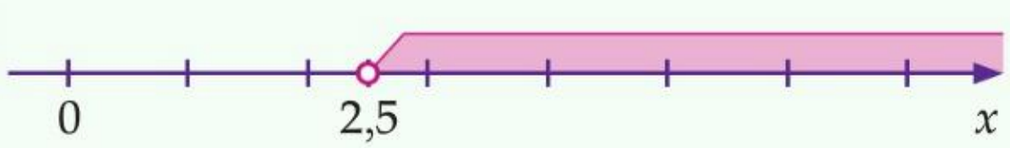


Ostrosłup i graniastosłup prawidłowy czworokątny mają takie same podstawy i wysokości. Wysokość graniastosłupa jest równa 40 cm, a krawędź podstawy jest równa 18 cm. Która z tych brył ma większe pole powierzchni? O ile większe?

5.6 Oś liczbowa. Układ współrzędnych

Zaznaczanie liczb na osi liczbowej

- liczby większe od 2,5



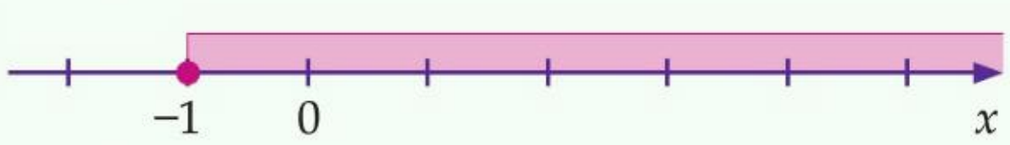
$x > 2{,}5$

- liczby mniejsze od 3



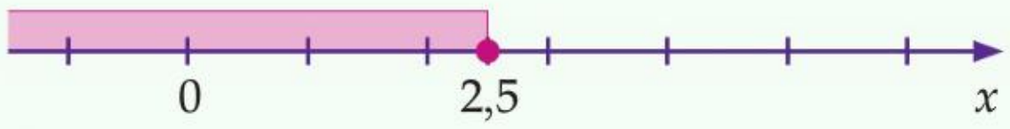
$x < 3$

- liczby większe od −1 lub równe −1



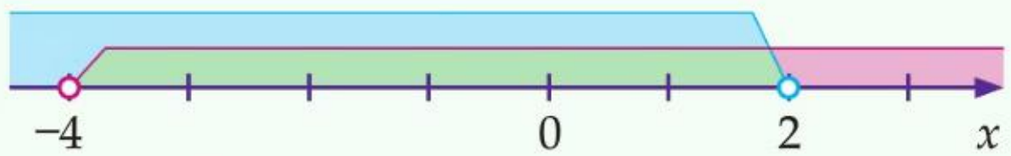
$x \geqslant -1$

- liczby mniejsze od 2,5 lub równe 2,5



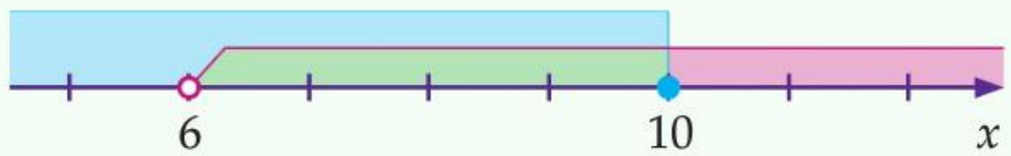
$x \leqslant 2{,}5$

- liczby większe od −4 i mniejsze od 2



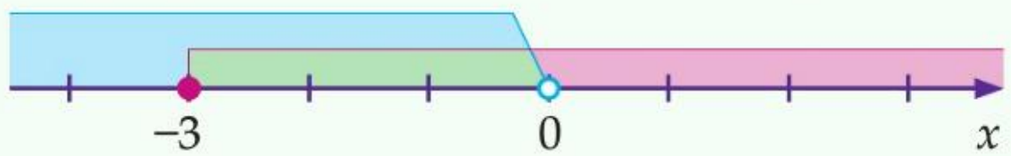
$-4 < x < 2$

- liczby większe od 6 i mniejsze od 10 lub równe 10



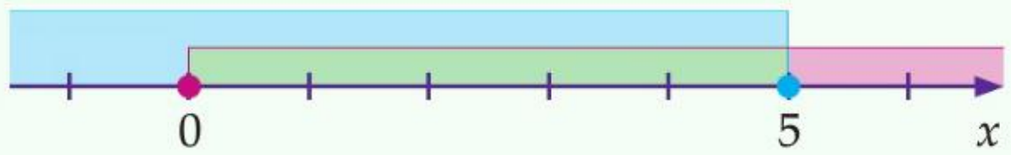
$6 < x \leqslant 10$

- liczby większe od −3 lub równe −3 i mniejsze od 0



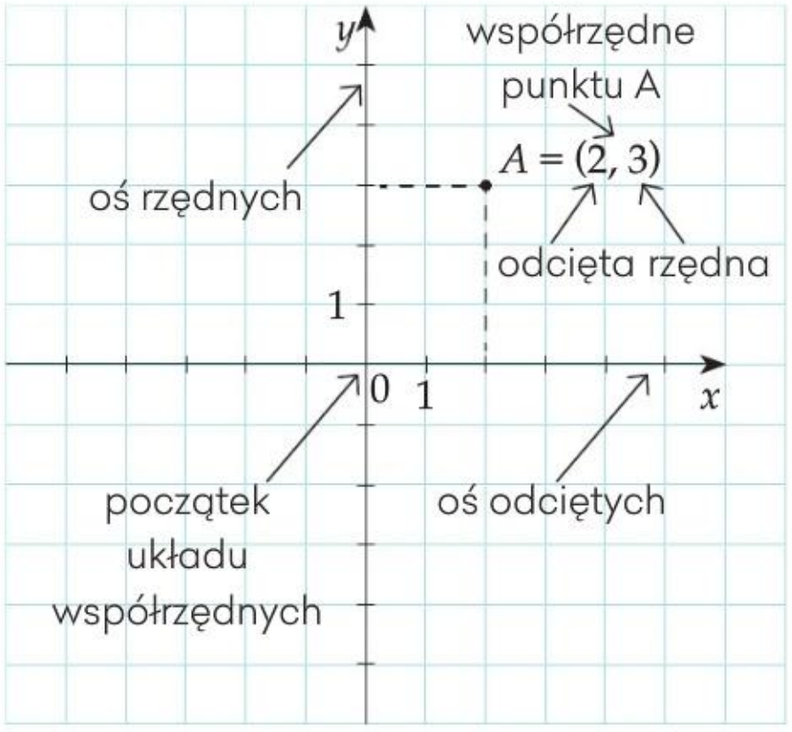
$-3 \leqslant x < 0$

- liczby większe od 0 lub równe 0 i mniejsze od 5 lub równe 5



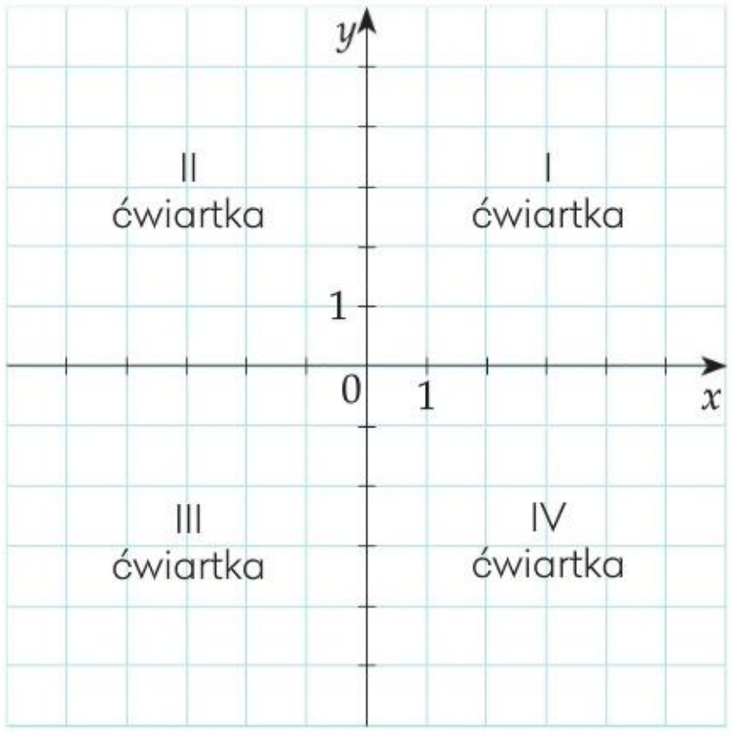
$0 \leqslant x \leqslant 5$

Prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie



Punkt kratowy to punkt, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

Ćwiartki układu współrzędnych



Współrzędne środka odcinka

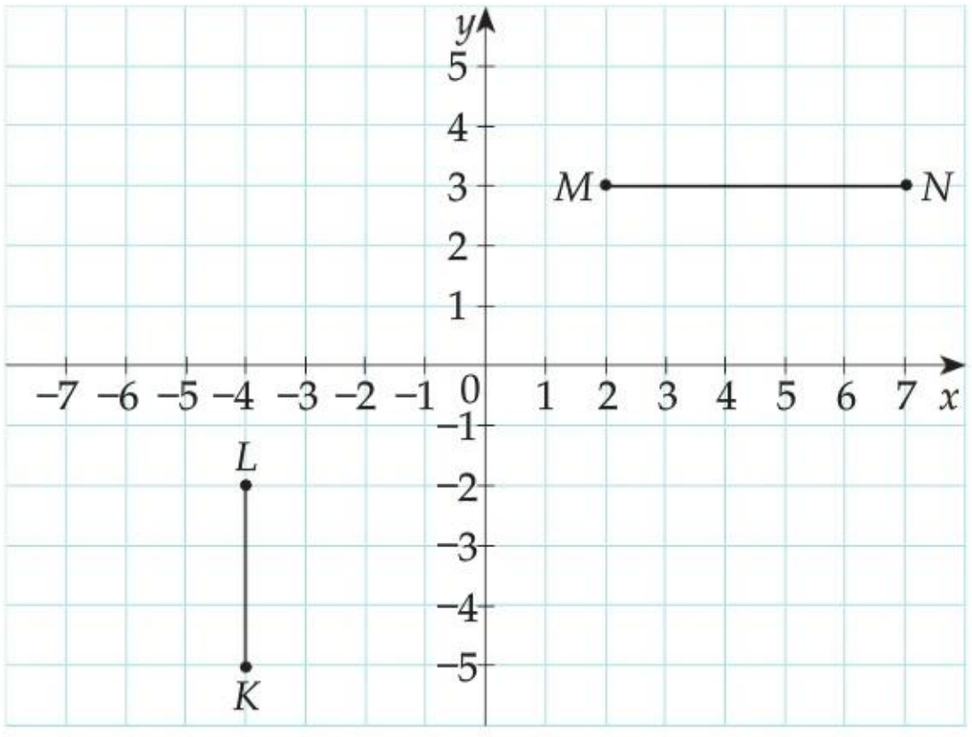
Aby wyznaczyć współrzędne środka odcinka, należy wyznaczyć średnie arytmetyczne odpowiednich współrzędnych jego końców.

$A = (-5, 8), B = (1, 2)$

$S = \left(\frac{-5+1}{2}, \frac{8+2}{2}\right)$

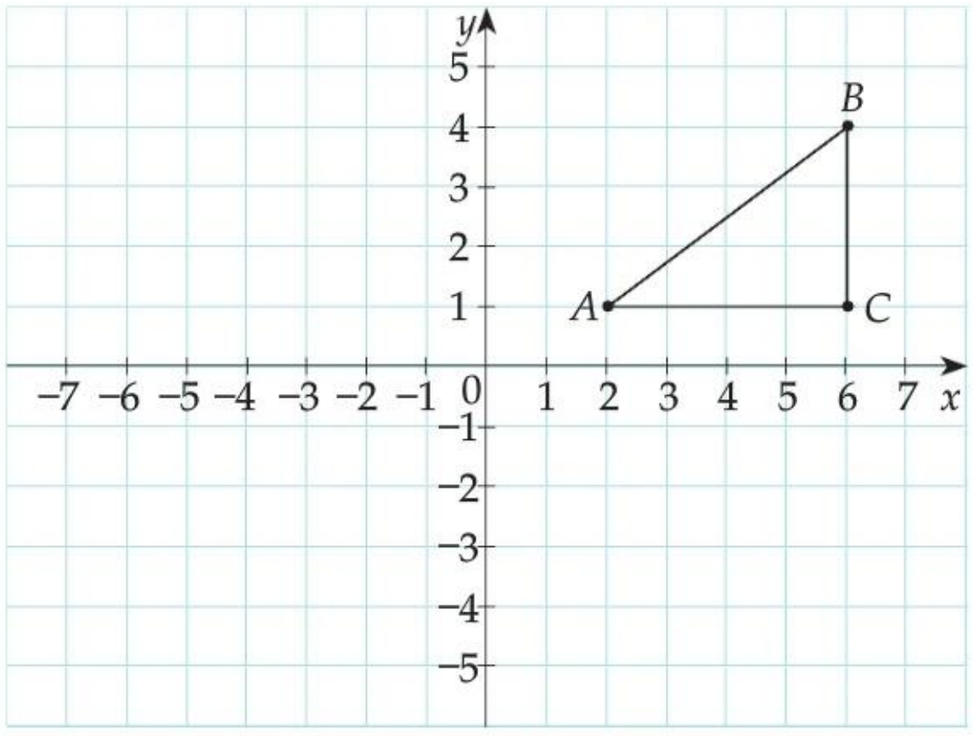
$S = (-2, 5)$

Obliczanie długości odcinka



$|KL| = |-2 - (-5)| = |-2 + 5| = |3| = 3$

$|MN| = |7 - 2| = 5$



$|AC| = |6 - 2| = 4$

$|BC| = |4 - 1| = |3| = 3$

$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$

$|AB|^2 = 4^2 + 3^2$

$|AB|^2 = 16 + 9$

$|AB|^2 = 25$

$|AB| = \sqrt{25}$

$|AB| = 5$

Zadania

Na osi liczbowej zaznaczono kropkami sześć liczb.

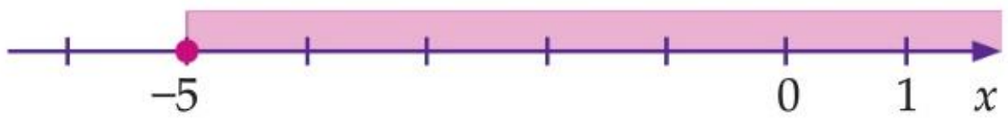


Ile spośród tych liczb jest większych od -3 i jednocześnie mniejszych od 2?

A. 2 B. 3

C. 4 D. 5

Którą z podanych nierówności spełniają wszystkie liczby, które zostały zaznaczone na osi?



A. $x < -5$ B. $x > -5$

C. $x \leqslant -5$ D. $x \geqslant -5$

Która spośród podanych liczb znajduje się na osi liczbowej między liczbą $-\frac{1}{3}$ a liczbą $-\frac{1}{4}$?

A. $-\frac{7}{24}$ B. $-\frac{3}{8}$ C. $-\frac{5}{24}$ D. $-\frac{5}{12}$

Ile spośród punktów: $A = (-2, -2)$, $B = (-1, 3)$, $C = (5, -8)$, $D = (6, 2)$, $E = (-5, 2)$, $F = (1, -7)$, $G = (-9, 8)$, $H = (4, -1)$, $I = (9, -9)$, $J = (1, 7)$ leży w drugiej ćwiartce układu współrzędnych?

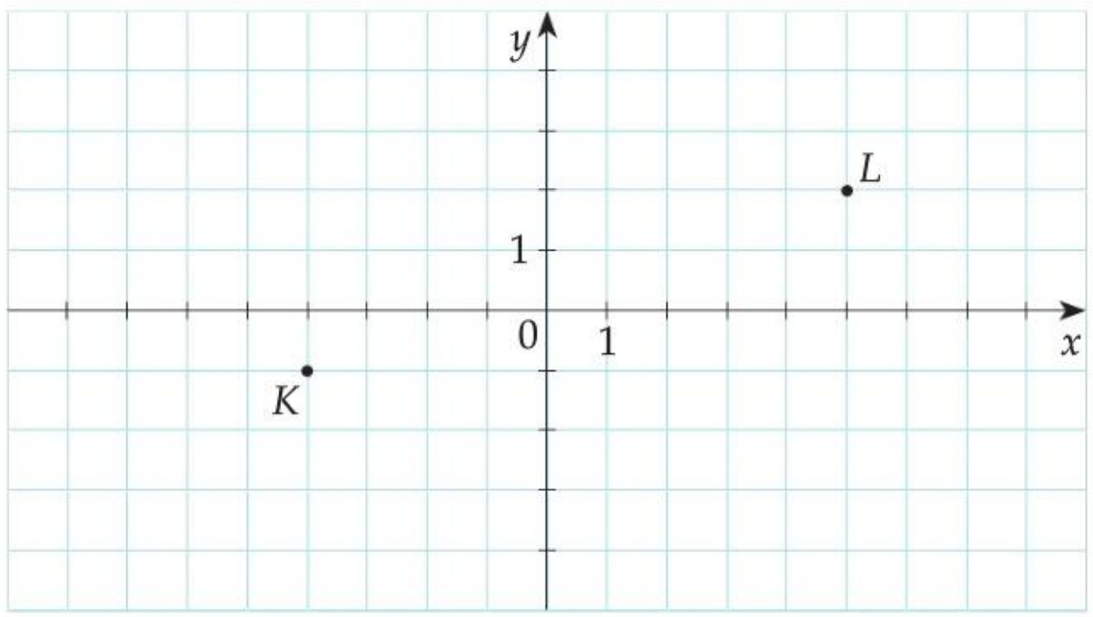
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Wiadomo, że rzędna punktu S jest liczbą mniejszą od -2 i że iloczyn współrzędnych tego punktu jest liczbą ujemną. W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się punkt S?

A. w I ćwiartce B. w II ćwiartce C. w III ćwiartce D. w IV ćwiartce

Który z podanych punktów **nie leży** na tej samej prostej co punkty K i L?

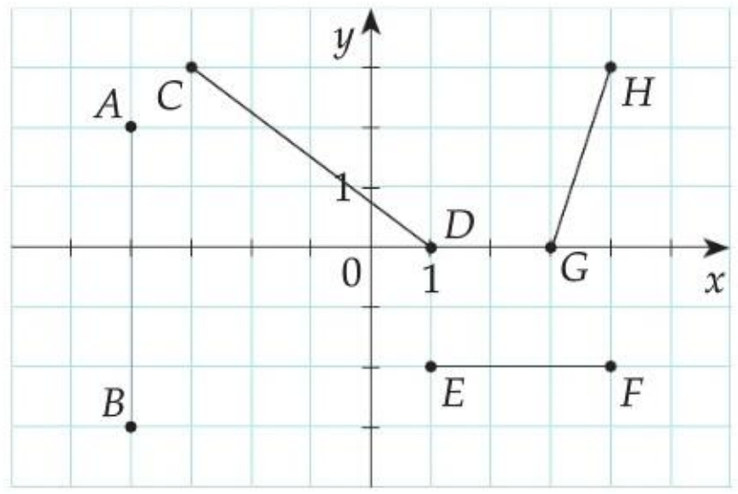
A. $A = (8, 3)$ B. $B = (-1, 0)$
C. $C = (1, 2)$ D. $D = (-7, -2)$



Trzy z podanych punktów: $A = (-1, 0)$, $B = (-1, 3)$, $C = (-5, -2)$, $D = (5, 3)$ nie mogą być wierzchołkami trójkąta. Które to punkty?

A. A, B, C B. A, B, D
C. B, C, D D. A, C, D

W układzie współrzędnych zaznaczono cztery odcinki.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) Odcinek AB ma taką samą długość jak odcinek CD.
b) Odcinek EF ma taką samą długość jak odcinek GH.
c) Odcinek GH jest o 1 krótszy od odcinka CD.

W układzie współrzędnych zaznaczono punkty $A = (8, -3)$, $B = (8, 1)$ i $C = (-4, -3)$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) Odcinek AB jest równoległy do odcinka AC.
b) Odcinek AC jest trzy razy dłuższy od odcinka AB.
c) Środek odcinka AC ma współrzędne $(4, -3)$.

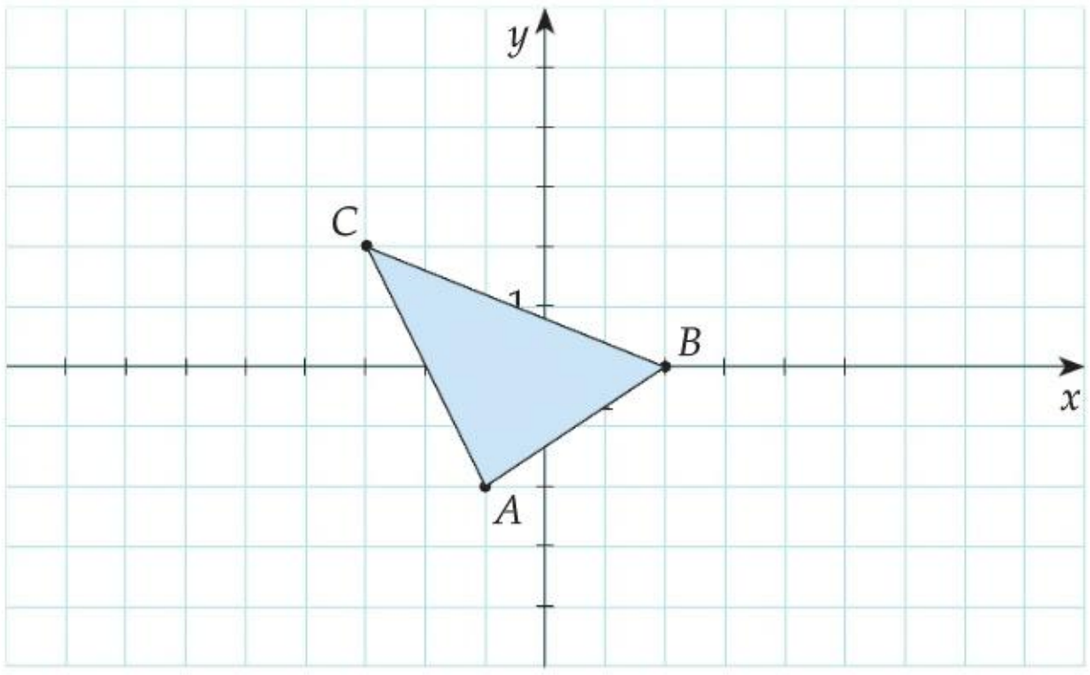
W układzie współrzędnych zaznaczono punkty: $K = (-5, -1)$, $L = (-1, 2)$ i M. Punkt L jest środkiem odcinka KM. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D i zapisz je w zeszycie.

Punkt M ma współrzędne A/B A. (3, 5) B. (5, 3)
Odcinek KM ma długość C/D C. 14 D. 10

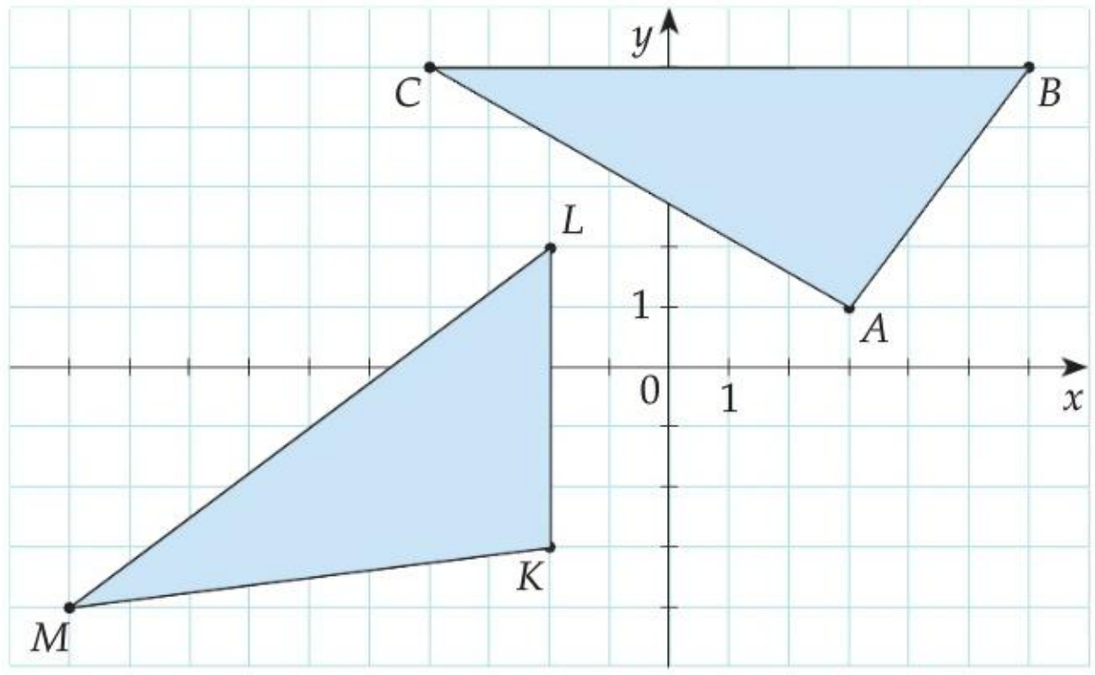
Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby spełniające podane nierówności. Zapisz, ile liczb całkowitych ujemnych spełnia te nierówności.

a) $-6 < x \leqslant -3$ b) $-9 \leqslant x \leqslant -1$ c) $-4 < x < 4$ d) $-10 \leqslant x < -2$

W układzie współrzędnych narysowano trójkąt *ABC*. Zapisz współrzędne wszystkich punktów kratowych, które należą do tego trójkąta.



Czy przedstawione na rysunku trójkąty *ABC* i *KLM* są przystające? Odpowiedź uzasadnij.



Na odcinku o końcach w punktach $K = (-7, 3)$, $L = (3, 3)$ zaznaczono punkt $M = (-1, 3)$ oraz taki punkt N, że $|KN| : |NL| = 1 : 4$.

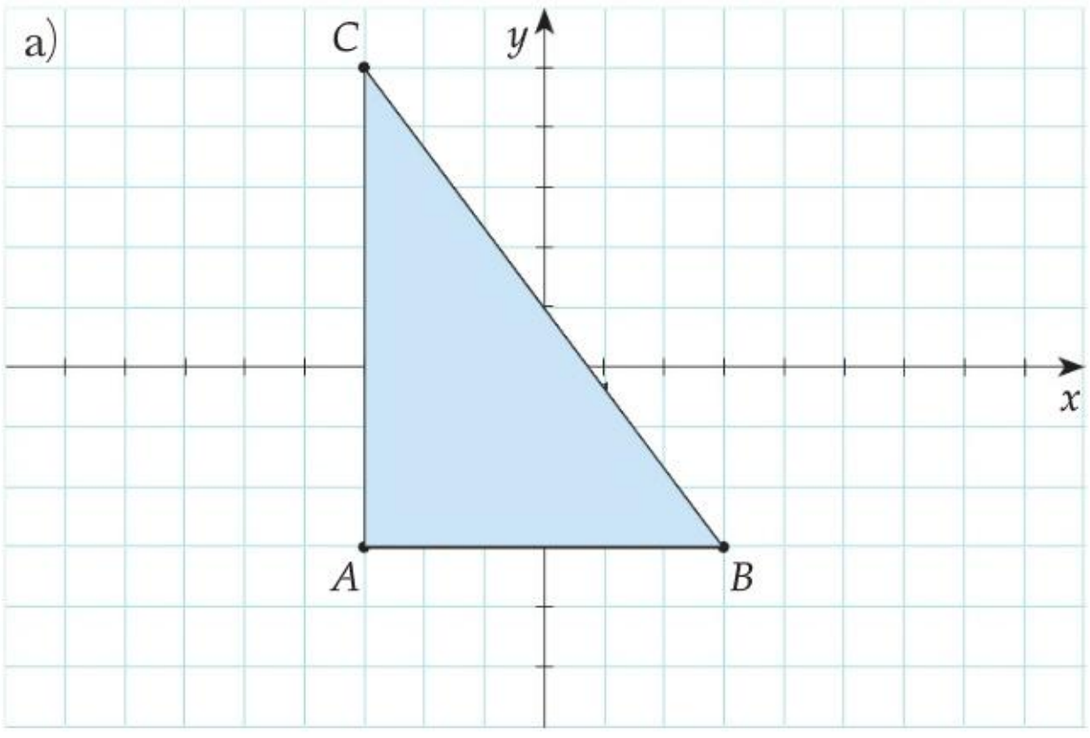
a) Oblicz stosunek długości odcinka *KM* do długości odcinka *ML*.
b) Wyznacz współrzędne punktu *N*.
c) Oblicz długość odcinka *MN*.
d) Wyznacz współrzędne środka *S* odcinka *MN*.

Zaznacz w układzie współrzędnych punkty: $A = (2, -4)$, $B = (1, -2)$, $C = (-3, 6)$.

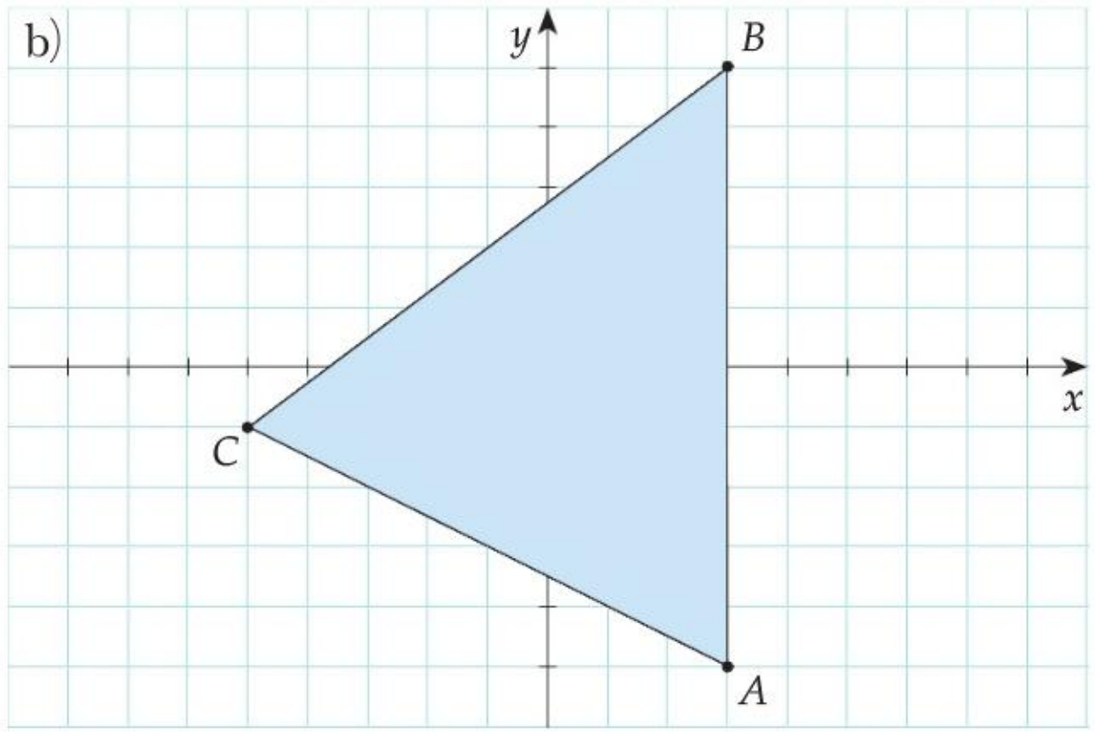
a) Sprawdź, czy punkty *A, B* i *C* leżą na jednej prostej.
b) Oblicz, ile razy odcinek *AC* jest dłuższy od odcinka *AB*.
c) Wyznacz współrzędne środka *S* odcinka *AC*.

Oblicz obwody i pola trójkątów przedstawionych na rysunkach.

a)

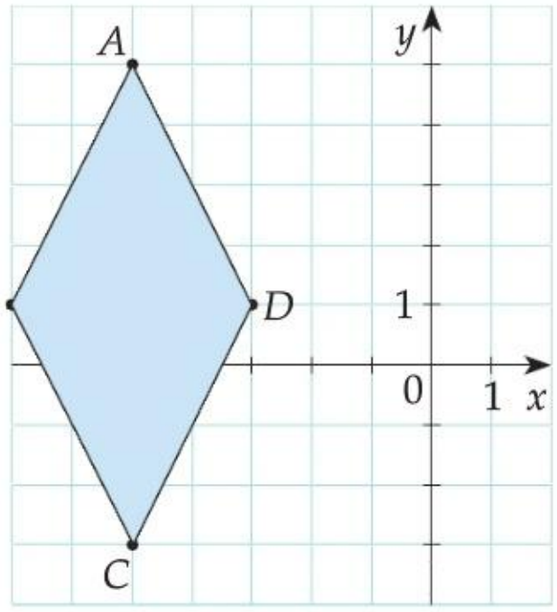


b)

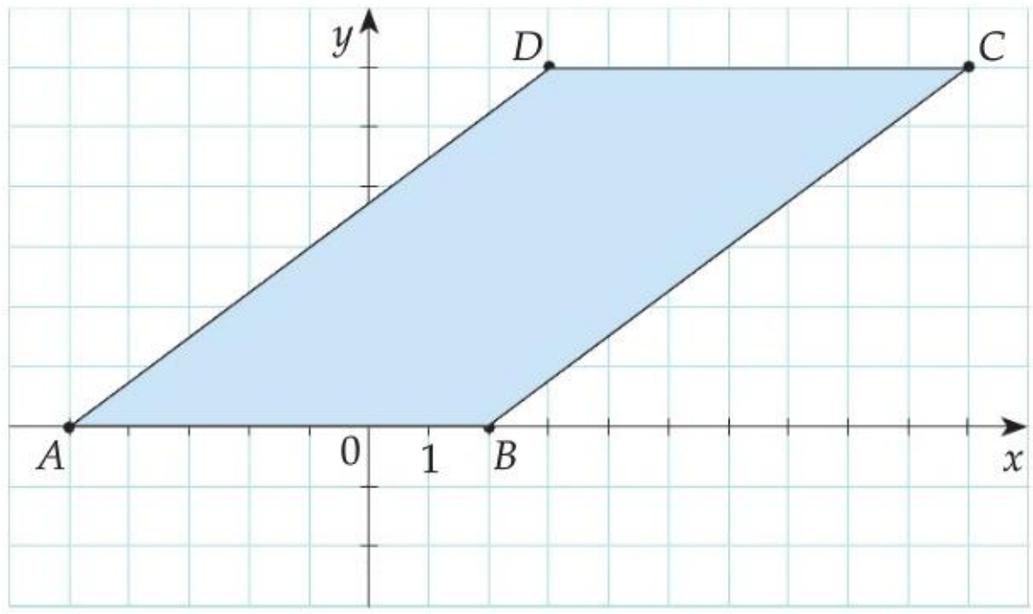


Oblicz obwody i pola czworokątów przedstawionych na rysunkach.

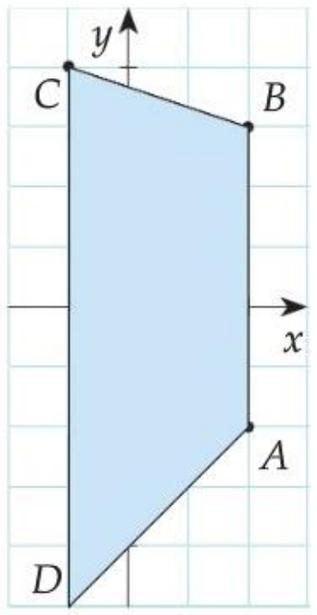
a)



b)



c)



Punkty $R = (1, -2)$, $S = (1, 4)$, $T = (-3, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami prostokąta $RSTU$.

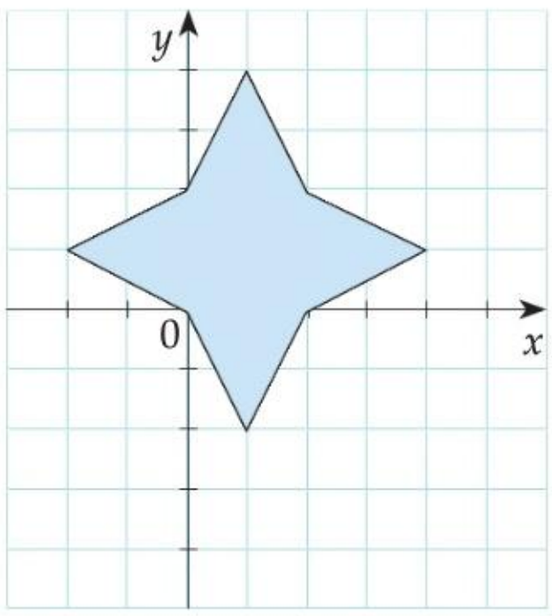
a) Wyznacz współrzędne wierzchołka U.
b) Oblicz współrzędne punktu przecięcia się przekątnych tego prostokąta.
c) Oblicz obwód i pole prostokąta $RSTU$.

Punkty $A = (-2, 2)$ i $B = (-8, -1)$ są dwoma kolejnymi wierzchołkami rombu $ABCD$. Punkt S przecięcia się przekątnych tego rombu ma współrzędne $(-2, -1)$.

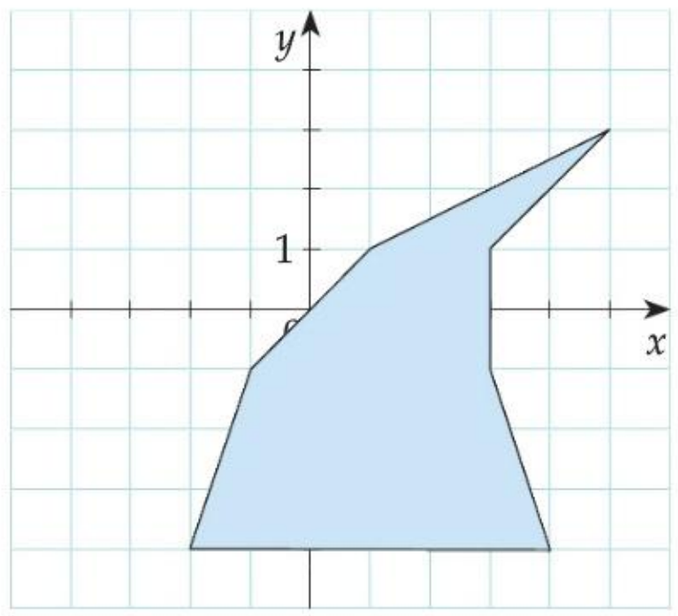
a) Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D.
b) Oblicz pole i obwód tego rombu.

Oblicz pola figur przedstawionych na rysunkach.

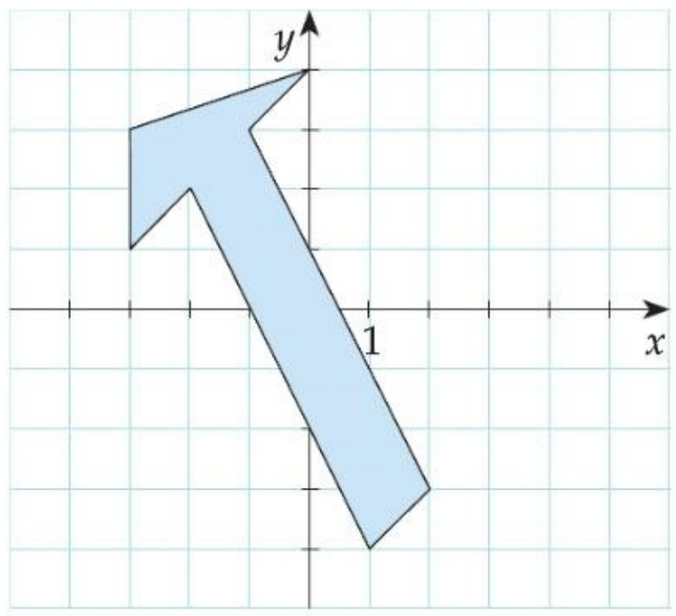
a)



b)



c)



W układzie współrzędnych narysowano prostą, na której znajdują się tylko punkty, których obie współrzędne są równe. Na tej prostej obrano punkt P, którego odległość od osi y jest równa 6. Oblicz odległość tego punktu od początku układu współrzędnych. Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa.

W układzie współrzędnych narysowano prostą, na której znajdują się tylko punkty, których rzędna jest o 5 mniejsza od odciętej. Prosta ta przecięła osie układu współrzędnych w punktach K i L. Oblicz pole i obwód trójkąta KOL, jeśli punkt O jest początkiem układu współrzędnych. Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa.

5.7 Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

Sposoby przedstawiania i porządkowania danych statystycznych

Dane statystyczne mogą być przedstawiane za pomocą opisu słownego, tabeli, diagramu (np. słupkowego, kołowego) lub wykresu (np. punktowego, liniowego).

Średnia arytmetyczna ($x_{śr.}$) to liczba uzyskana przez dodanie wszystkich wyników i podzielenie tej sumy przez liczbę wyników.

suma danych ↓

średnia arytmetyczna $\longrightarrow x_{śr.} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n}{n}$

↑ liczba danych

Doświadczenie losowe to eksperyment, który możemy powtarzać wielokrotnie w tych samych warunkach i którego wyniku nie jesteśmy w stanie przewidzieć ani nie mamy na niego wpływu, choć znamy wszystkie wyniki, jakimi może zakończyć się ten eksperyment.

Zdarzenie elementarne to wynik doświadczenia losowego.

Częstością występowania zdarzenia nazywamy iloraz $\frac{m}{N}$, w którym N oznacza liczbę powtórzeń pewnego doświadczenia losowego, a m liczbę wystąpień interesującego wyniku.
Prawdopodobieństwo zdarzenia można obliczyć, korzystając ze wzoru: $\frac{k}{N}$, gdzie N jest to liczba wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych), a k liczba wyników (zdarzeń elementarnych), spełniających podany warunek.

Zadania

Codziennie w ciągu tygodnia o godzinie 14:00 zapisywano temperaturę powietrza w miejscowości Krogulec. Wyniki pomiarów przedstawiono w tabeli.

Poniedziałek	Wtorek	Środa	Czwartek	Piątek	Sobota	Niedziela
4°C	–0,5°C	–1°C	2,5°C	5°C	–1,8°C	0°C

Przeczytaj poniższe zdania.

I. W środę temperatura powietrza była niższa niż w sobotę.
II. W ciągu tego tygodnia temperatura powietrza była codziennie nie wyższa niż 5°C.
III. W ciągu tego tygodnia temperatura powietrza była codziennie nie niższa niż 1°C.
IV. We wtorek temperatura powietrza była niższa niż w czwartek o 3°C.

Dwa z tych zdań są prawdziwe. Które to zdania?

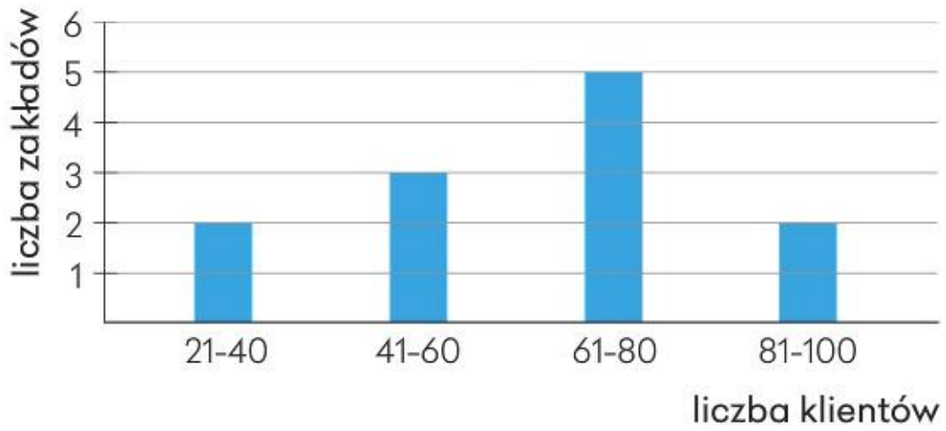
A. zdania I i III B. zdania I i IV C. zdania II i III D. zdania II i IV

W tabeli zamieszczono informacje o liczbie klientów korzystających w ciągu ostatniego tygodnia z usług każdego z dwunastu zakładów fryzjerskich należących do jednej sieci.

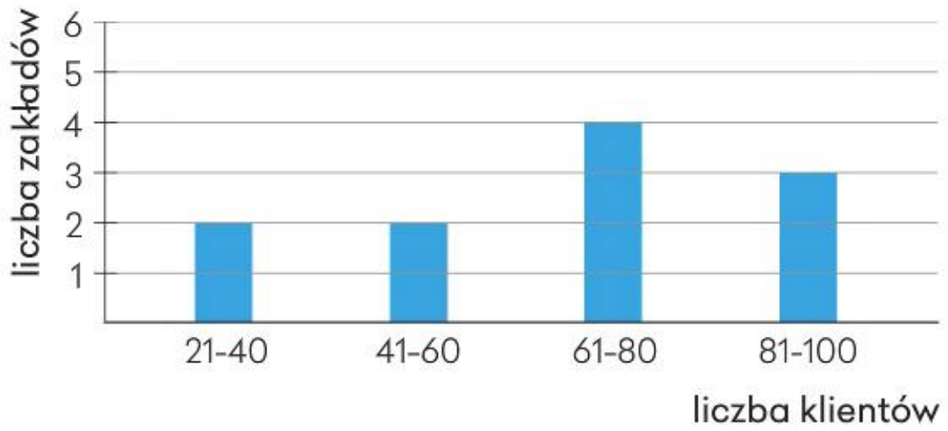
Nr zakładu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba klientów	75	28	54	96	64	80	40	72	60	52	75	89

Na którym z diagramów poprawnie przedstawiono dane z tabeli?

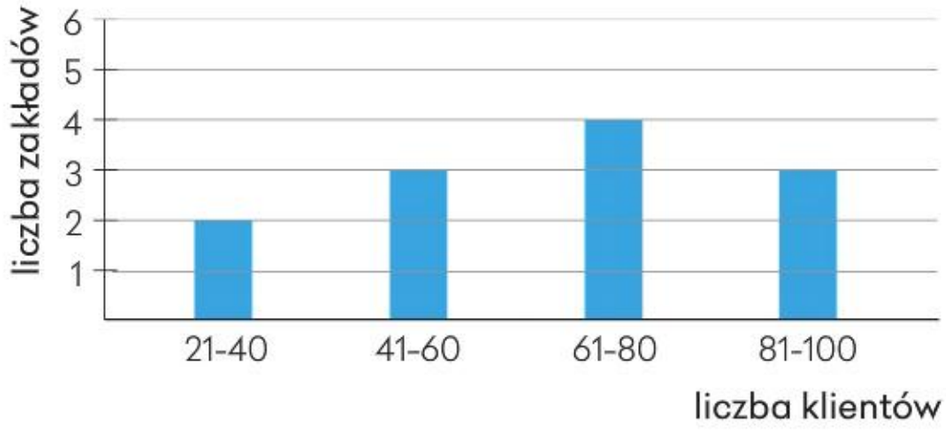
A.



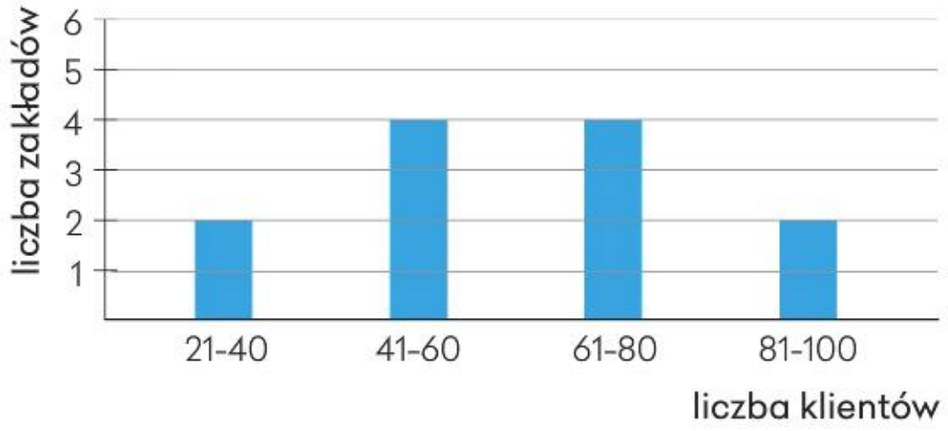
B.



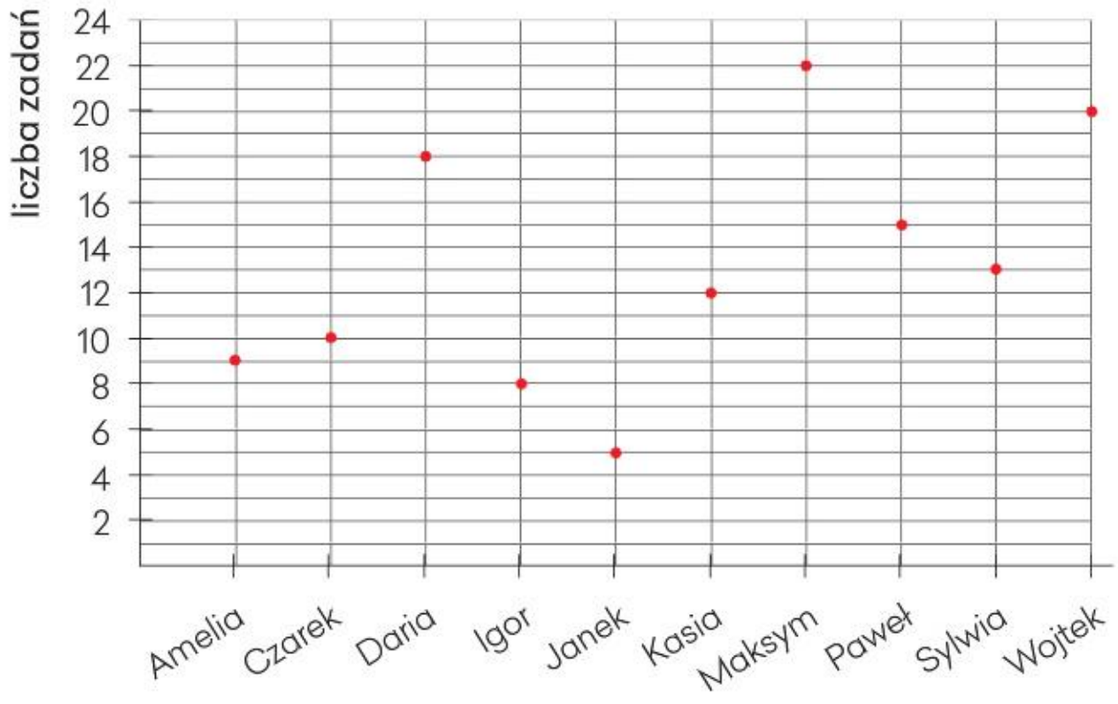
C.



D.



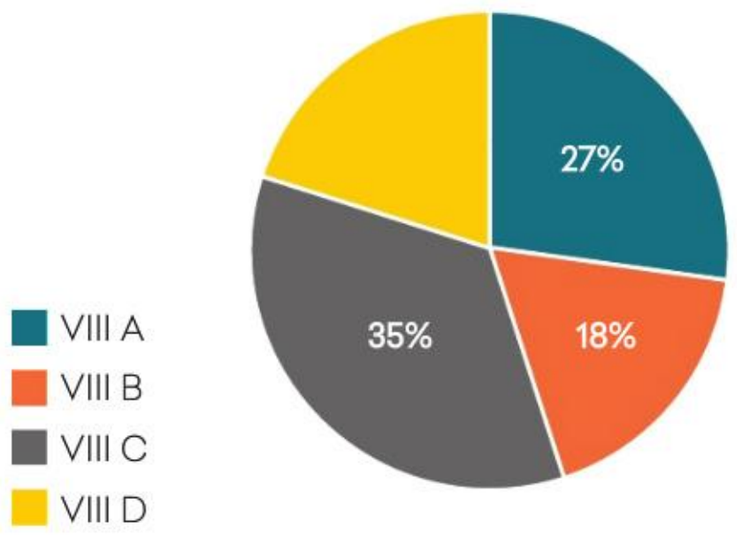
Zapytano dziesięcioro uczniów, którzy przygotowują się do konkursu matematycznego, ile zadań rozwiązali poprzedniego dnia. Wyniki zamieszczono na diagramie.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) Pięcioro uczniów rozwiązało więcej niż 14 zadań.
b) Maksym rozwiązał o 9 zadań więcej niż Sylwia.
c) Daria rozwiązała o 20% zadań więcej niż Paweł.

Uczniowie klas VIIIa, VIIIb, VIIIc i VIIId uczestniczyli w zbiórce pieniędzy dla schroniska dla zwierząt. Klasa VIIId zebrała 280 zł. Diagram przedstawia, ile procent całej kwoty zebranej przez ósmoklasistów stanowią kwoty zebrane przez uczniów poszczególnych klas.



Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedzi spośród oznaczonych literami A i B oraz spośród oznaczonych literami C i D i zapisz je w zeszycie.

Wszystkie klasy zebrały łącznie A/B.
A. 1750 zł
B. 1400 zł

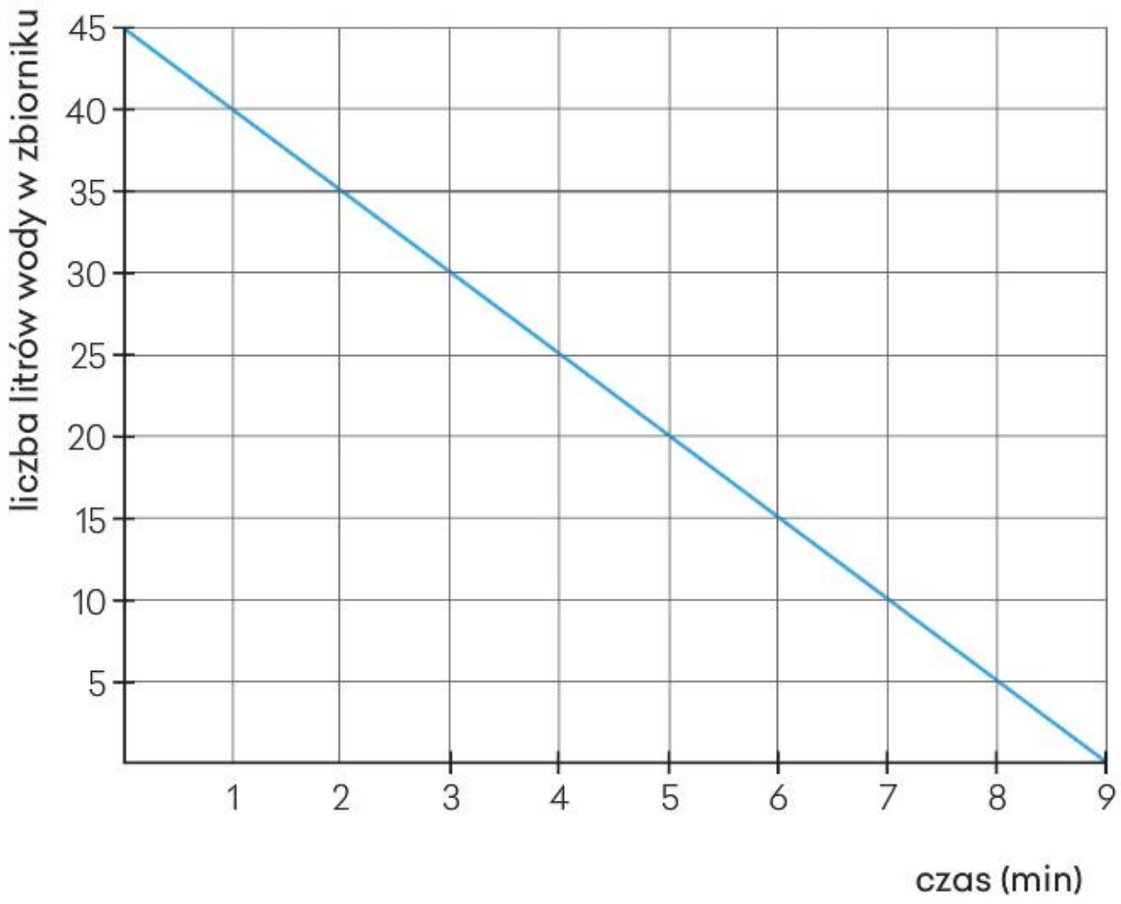
Klasa VIIIc zebrała o C/D więcej niż klasa VIIIa.
C. 112 zł
D. 126 zł

Na diagramie przedstawiono, ile dzieci w wieku 5–13 lat uczęszcza na zajęcia akrobatyczne. O ile procent więcej dzieci, które uczęszczają na zajęcia akrobatyczne, ma lat 10 lub mniej niż dzieci, które mają więcej niż 10 lat?



A. o 20%
B. o 40%
C. o 60%
D. o 80%

O godzinie 10:55 zaczęto opróżniać zbiornik, w którym znajdowało się 45 litrów wody. Na wykresie przedstawiono zależność liczby litrów wody, która znajdowała się w zbiorniku, od czasu jego opróżniania.



Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedzi spośród oznaczonych literami A i B oraz spośród oznaczonych literami C i D i zapisz je w zeszycie.

O godzinie A/B w zbiorniku było pięć litrów wody.
A. 11:03 B. 11:15

W ciągu czterech pierwszych minut ze zbiornika wyciekło C/D litrów wody.
C. 20 D. 25

Paweł na ręce nosi krokomierz, który pokazuje mu, ile kroków zrobił każdego dnia. W tabeli przedstawiono, ile kroków Paweł zrobił w ciągu pięciu kolejnych dni.

Dzień	1	2	3	4	5
Liczba kroków	9206	10114	9521	8473	10046

Ile średnio kroków dziennie robił Paweł?

A. 9468 B. 9472 C. 9668 D. 9672

W pudełku są jednakowe płytki, na których napisane są liczby dwucyfrowe od 50 do 99. Na każdej płytce jest jedna liczba. Oliwka losuje jedną płytkę z tego pudełka. Które ze zdarzeń jest najmniej prawdopodobne?

A. Oliwka wylosuje płytkę, na której napisana jest liczba pierwsza.
B. Oliwka wylosuje płytkę, na której napisana jest liczba większa od 90.
C. Oliwka wylosuje płytkę, na której napisana jest liczba o dwóch jednakowych cyfrach.
D. Oliwka wylosuje płytkę, na której napisana jest liczba, której cyfra dziesiątek jest o 1 mniejsza od cyfry jedności.

W woreczku znajdują się kule ponumerowane kolejnymi liczbami naturalnymi od 15 do 25. Ile wynosi prawdopodobieństwo wylosowania z tego woreczka kuli oznaczonej liczbą pierwszą?

A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{4}{10}$ C. $\frac{3}{11}$ D. $\frac{4}{11}$

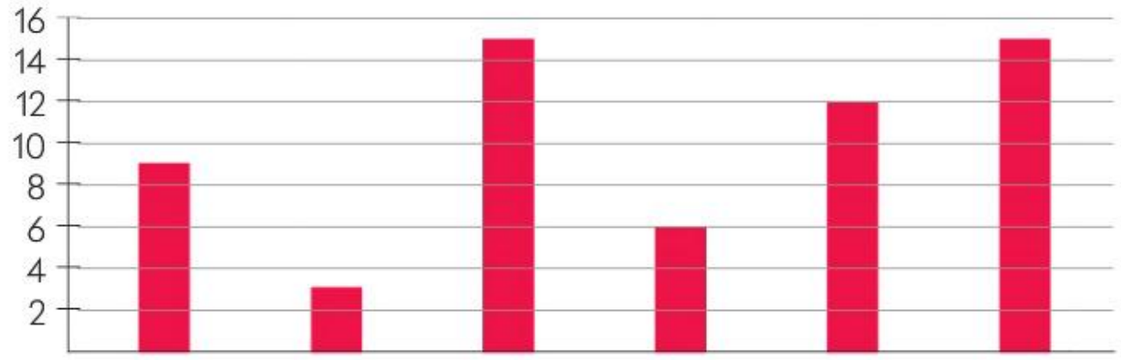
Na kartonikach zapisano wszystkie dzielniki liczby 36, po jednym na każdym kartoniku. Wszystkie kartoniki wrzucono do woreczka i wymieszano. Losujemy jeden kartonik. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) Prawdopodobieństwo wylosowania liczby mniejszej od 6 jest równe $\frac{1}{3}$.

b) Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 jest mniejsze od $\frac{1}{3}$.

c) Prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej jest dwukrotnie większe niż prawdopodobieństwo wylosowania liczby nieparzystej.

W pudełku znajdują się klocki w sześciu różnych kolorach. Diagram przedstawia, ile jest klocków w poszczególnych kolorach.



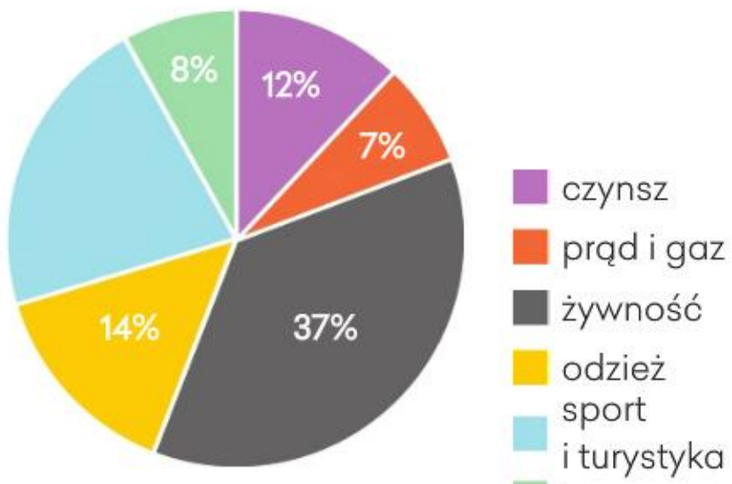
W sposób losowy wybieramy jeden klocek. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) Prawdopodobieństwo wylosowania klocka zielonego jest równe $\frac{1}{5}$.

b) Prawdopodobieństwo wylosowania klocka żółtego jest większe niż $\frac{3}{10}$.

c) Prawdopodobieństwo wylosowania klocka brązowego jest pięć razy mniejsze niż wylosowanie klocka czerwonego.

We wrześniu 2020 r. państwo Kowalscy zarobili razem 6000 zł, z czego 80% wydali, a pozostałą kwotę zaoszczędzili. Diagram przedstawia, ile procent wszystkich wydanych pieniędzy stanowiły poszczególne wydatki.



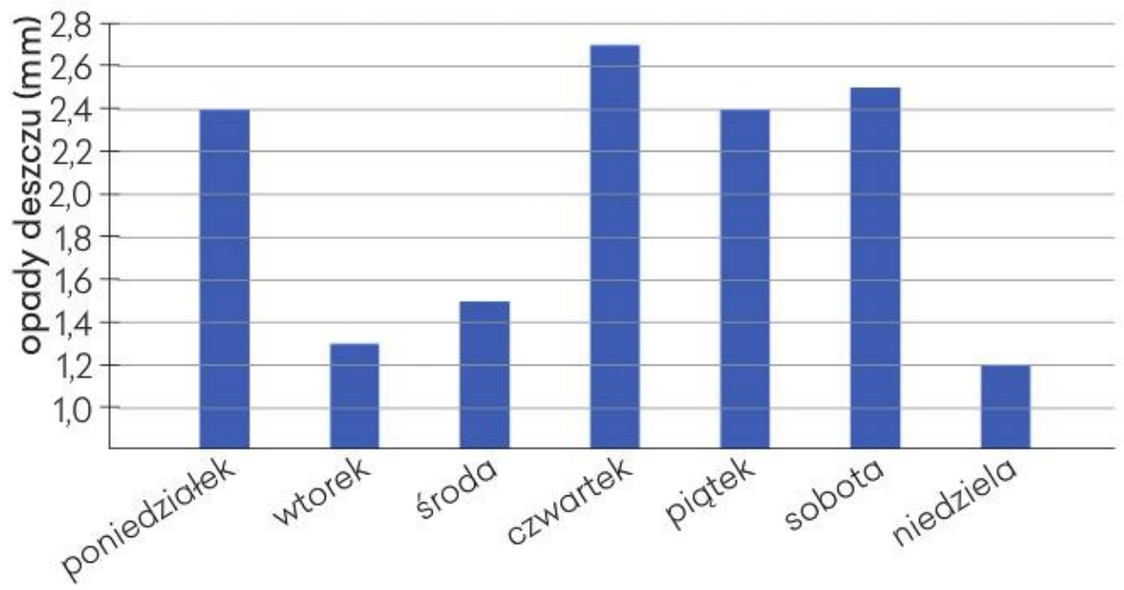
a) Ile złotych państwo Kowalscy zaoszczędzili, a ile wydali?

b) Ile złotych państwo Kowalscy wydali na żywność?

c) O ile złotych więcej państwo Kowalscy wydali na czynsz niż na prąd i gaz?

d) Ile złotych wydali państwo Kowalscy na sport i turystykę?

Diagram przedstawia wysokość (w milimetrach) dziennych opadów deszczu w ciągu tygodnia.



a) W których dniach wysokość opadów deszczu była taka sama?

b) Przez ile dni wysokość opadów deszczu była mniejsza niż 1,5 mm?

c) Jaka była różnica wielkości pomiędzy największymi a najmniejszymi opadami w ciągu tego tygodnia?

d) Ile jest równa (w mm) średnia opadów w ciągu tego tygodnia?

e) Przez ile dni w tym tygodniu wielkość opadów była większa od średniej?

Michał zanotował niektóre czynności, które wykonał w ciągu ostatniej doby.

Przedstaw te dane na diagramie kołowym, uwzględniając kategorie: sen, nauka, posiłki, zabawa, sport, inne.

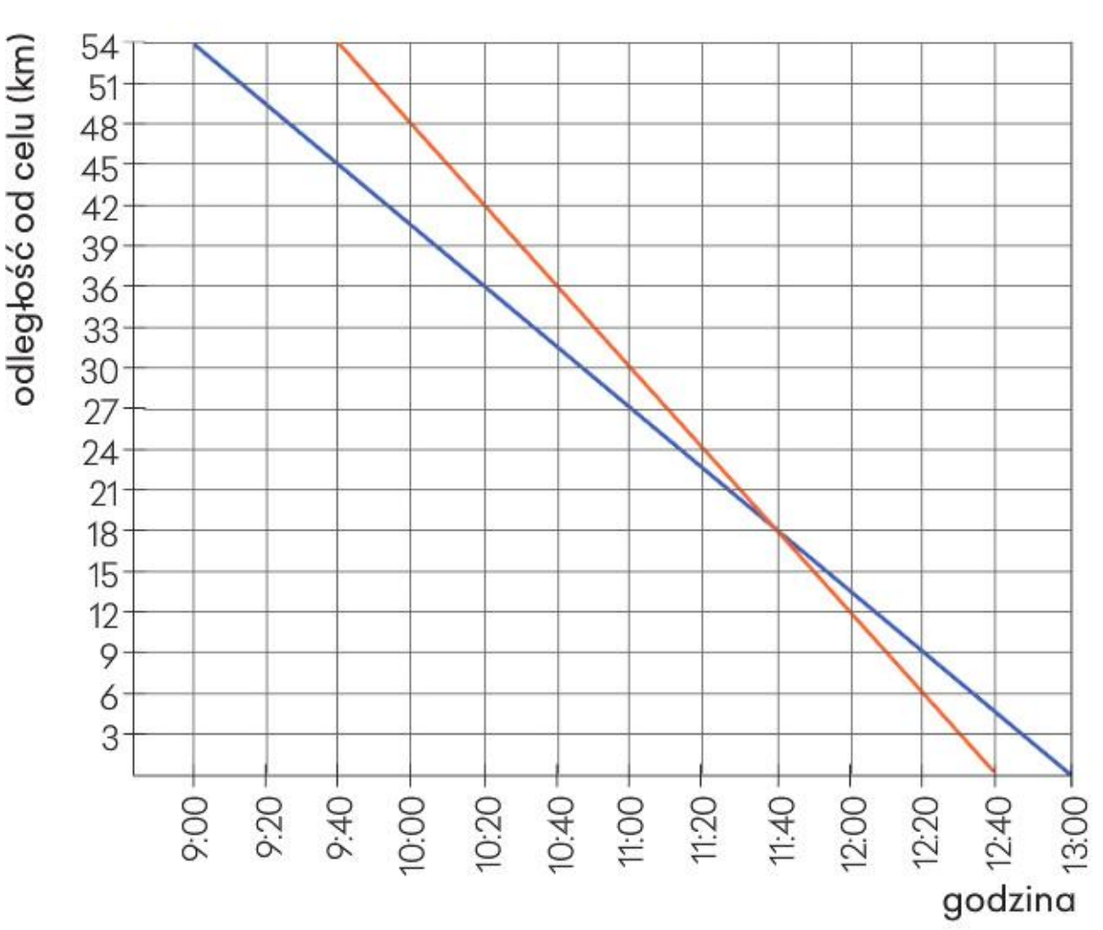
00:00–6:45	sen
6:45–7:10	poranna toaleta
7:10–7:40	śniadanie
7:40–8:00	droga do szkoły
8:00–12:45	lekcje w szkole
12:45–13:15	gra w piłkę nożną
13:15–13:35	droga ze szkoły
13:35–14:35	obiad
14:35–16:50	odrabianie lekcji
16:50–17:30	droga na trening siatkówki
17:30–19:00	trening siatkówki
19:00–19:40	droga powrotna z treningu
19:40–20:10	kolacja
20:10–21:10	granie z bratem w gry planszowe
21:10–21:45	wieczorna kąpiel
21:45–24:00	sen

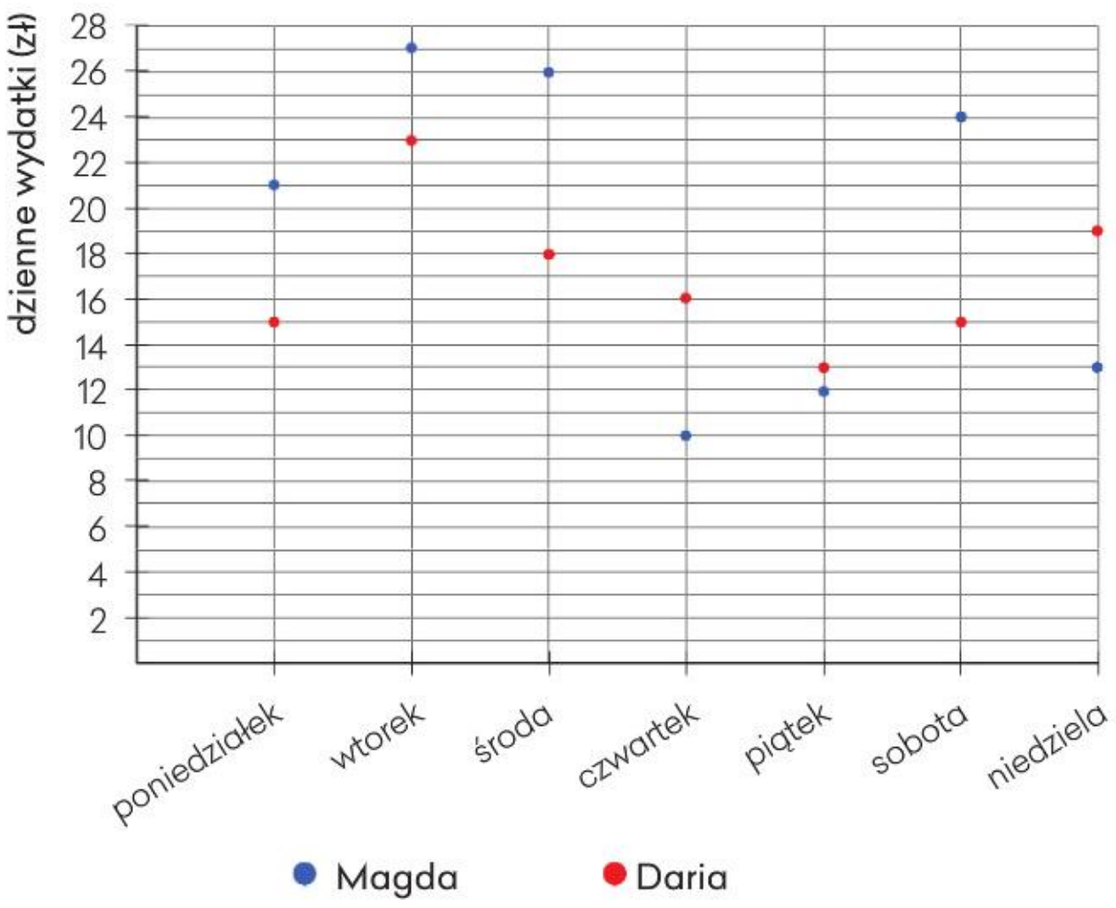
Diagram przedstawia, ile pieniędzy wydały Magda i Daria w ciągu ostatniego tygodnia.

a) Ile złotych we wtorek wydała Magda, a ile Daria?
b) Którego dnia różnica między kwotami, które wydały dziewczynki, była najmniejsza, a którego największa?
c) W które dni Daria wydała taką samą kwotę?
d) Ile razy w ciągu tego tygodnia Magda wydała mniej niż 20 zł, a ile razy zrobiła tak Daria?
e) Ile średnio złotych wydała Daria, a ile średnio wydała Magda w ciągu tego tygodnia?

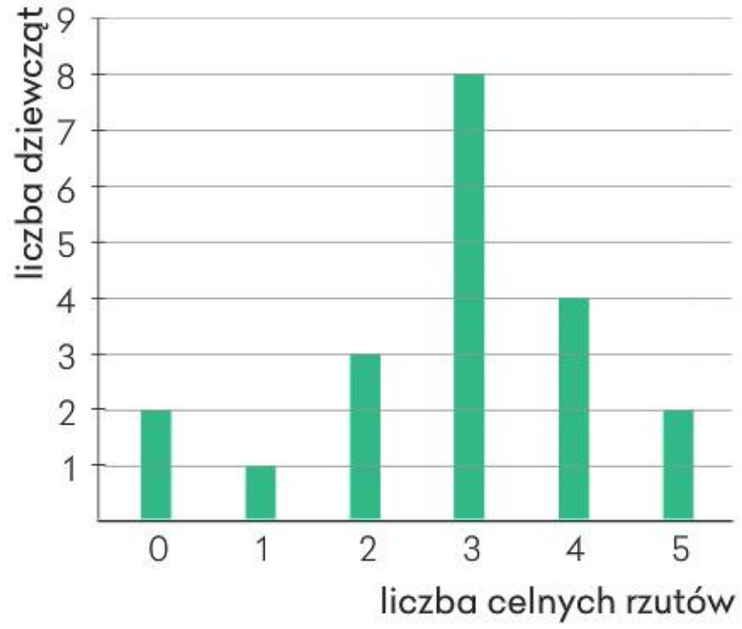
Paweł wyjechał rowerem z Jarzębinowa do Olszówki o godzinie 9:00, a Tomek wyjechał z Jarzębinowa w tę samą trasę 40 minut później. Wykres przedstawia zależność między czasem a liczbą kilometrów, które pozostały do celu każdemu z chłopców.

a) Jaka jest długość trasy z Jarzębinowa do Olszówki?
b) O której godzinie chłopcy się spotkali? W jakiej byli odległości od Jarzębinowa?
c) Który z chłopców był w Olszówce wcześniej i o ile minut wcześniej?
d) Z jaką prędkością jechał Paweł, a z jaką Tomek?



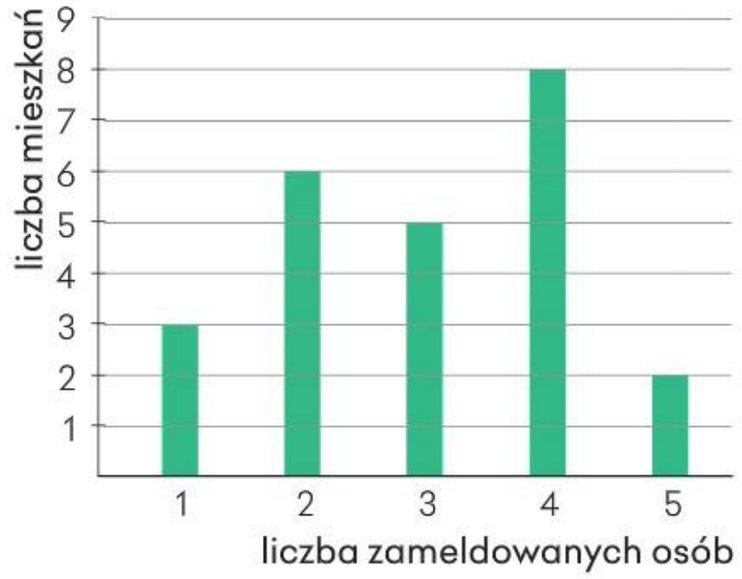


Grupa dziewcząt trenujących koszykówkę ćwiczyła rzuty do kosza. Każda z nich wykonała 5 rzutów. Diagram przedstawia, ile celnych rzutów wykonała każda koszykarka.



a) Ile dziewcząt trenowało koszykówkę?
b) Jaki procent dziewcząt wykonało co najmniej 4 celne rzuty do kosza?
c) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana dziewczyna wykonała 5 celnych rzutów do kosza?
d) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana dziewczyna wykonała nie więcej niż 2 celne rzuty do kosza?

W budynku są 24 mieszkania. Diagram przedstawia dane na temat liczby osób zameldowanych w tym budynku.



a) Ile łącznie osób mieszka w tym budynku?
b) Ile średnio osób mieszka w jednym mieszkaniu w tym budynku?
c) W ilu mieszkaniach zameldowane są co najwyżej 3 osoby?
d) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w losowo wybranym mieszkaniu zameldowane są 2 osoby?
e) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w losowo wybranym mieszkaniu zameldowane są co najmniej 4 osoby?

W woreczku jest 12 kul białych i 18 kul niebieskich. Z zamkniętymi oczami wyciągamy z woreczka jedną kulę.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej, a jakie – kuli niebieskiej?
b) Ile kul białych należałoby dołożyć do woreczka, aby prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej było takie samo jak kuli niebieskiej?
c) Ile kul niebieskich należałoby dołożyć do woreczka, aby prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej było trzy razy mniejsze niż wyciągnięcia kuli niebieskiej?

Kostka na rysunku obok ma 20 ścian oznaczonych liczbami od 1 do 20. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Maksym, rzucając jeden raz taką kostką, wyrzuci:



a) liczbę 20,
b) liczbę mniejszą niż 5,
c) liczbę nieparzystą,
d) liczbę podzielną przez 4,
e) liczbę pierwszą.

Na kartonikach zapisano wszystkie liczby trzycyfrowe, których suma cyfr jest równa 3, po jednej liczbie na każdym kartoniku. Wszystkie kartoniki wrzucono do woreczka i wymieszano. Oblicz prawdopodobieństwo, że przy jednokrotnym losowaniu kartonika otrzymano liczbę:

a) parzystą,
b) podzielną przez 4,
c) podzielną przez 5.

5.8 Praktyczne zastosowania matematyki

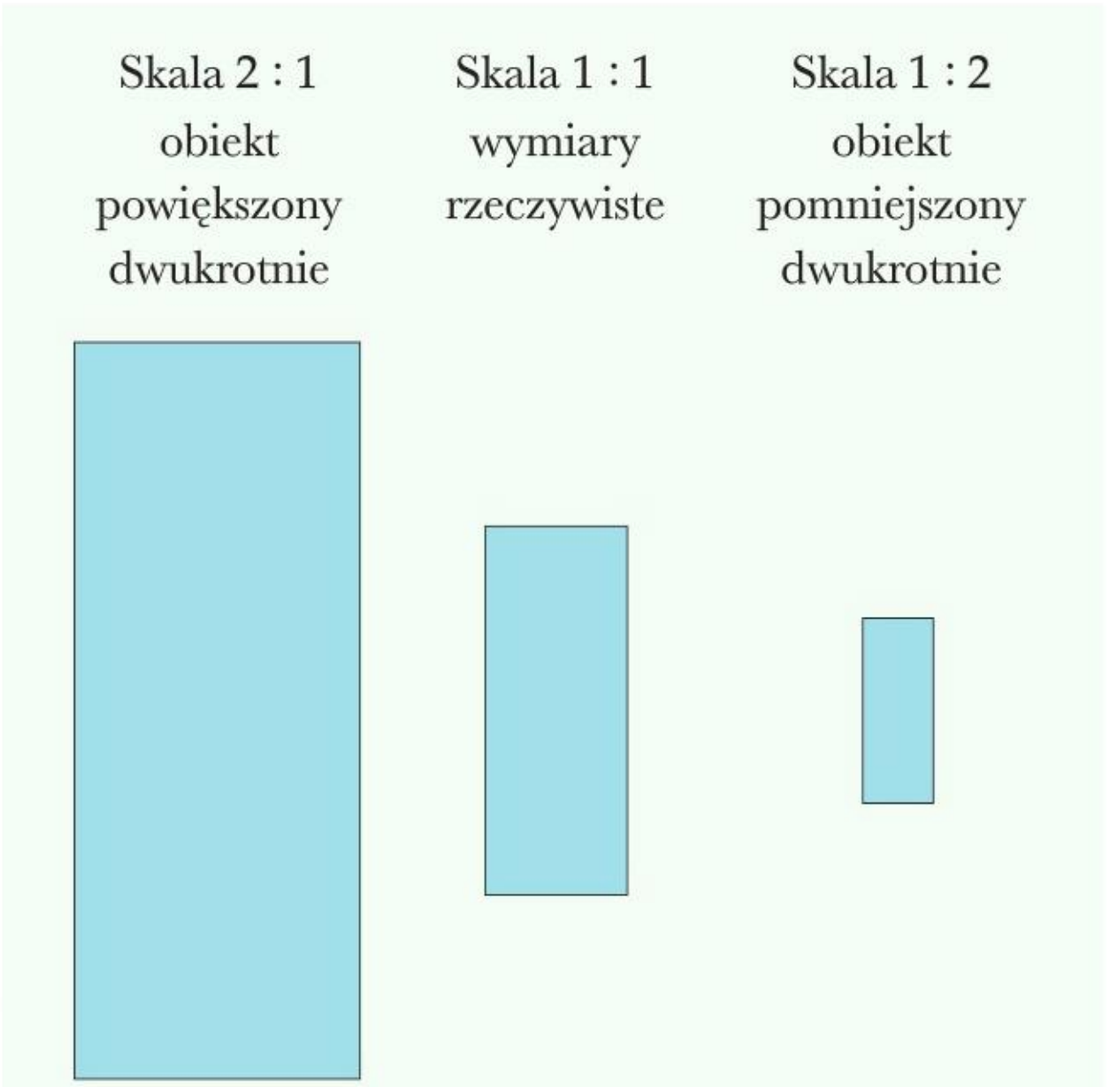
Skala

Skala wskazuje, ile razy dany obiekt został powiększony lub pomniejszony w stosunku do rozmiarów rzeczywistych.

Skala na mapie to stosunek odległości między dwoma obiektami na mapie do odległości między tymi samymi obiektami w rzeczywistości.

Skala liczbowa to skala na mapie zapisywana za pomocą ułamka, np. $1 : 25\,000$ lub $\frac{1}{25\,000}$.

Zapisy $1 : 25\,000$ lub $\frac{1}{25\,000}$ oznaczają, że 1 centymetr na mapie odpowiada 25 000 cm w rzeczywistości. Skala mapy jest tym większa, im mniejszy jest mianownik ułamka.



Proporcja to równość dwóch ilorazów:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lub $a : b = c : d$, $b \neq 0$, $d \neq 0$



W proporcji iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych (mnożymy na krzyż).

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$, $a \cdot d = b \cdot c$

Dodatnie wielkości x, y są wprost proporcjonalne, jeśli ich iloraz jest stały.

$\frac{y}{x} = a$ (co możemy też zapisać w postaci: $y = ax$)

a, x, y – liczby dodatnie

Iloraz ten (liczbę a) nazywamy współczynnikiem proporcjonalności prostej.

Jeżeli $\frac{y}{x} = \frac{t}{s}$, to zachodzą też proporcje: $\frac{y}{t} = \frac{x}{s}$, $\frac{t}{y} = \frac{s}{x}$, $\frac{x}{y} = \frac{s}{t}$

Procenty

Jeden procent to setna część pewnej wielkości.

$1\% = 0{,}01 = \frac{1}{100}$

$10\% = \frac{1}{10}$ $\quad 25\% = \frac{1}{4}$

$50\% = \frac{1}{2}$ $\quad 100\% = 1$

Zamiana procentu na ułamek

Aby procent zapisać w postaci ułamka dziesiętnego, należy liczbę znajdującą się przed symbolem procentu (%) pomnożyć przez 0,01 (podzielić przez 100).

$p\% = p \cdot 0{,}01 = \frac{p}{100}$

$90\% = 90 : 100 = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} = 0{,}9$

Zamiana ułamka na procent

Aby ułamek wyrazić w postaci procentu, należy ten ułamek pomnożyć przez 100%.

$a = a \cdot 100\%$

$0{,}19 = 0{,}19 \cdot 100\% = 19\%$

$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot 100\% = 40\%$

Obliczanie procentu danej liczby

Aby obliczyć procent danej liczby, wystarczy pomnożyć procent przez tę liczbę.

$p\%$ liczby a to $p\% \cdot a = \frac{p}{100} \cdot a$

60% liczby 80 to

$\frac{60}{100}$ liczby 80, czyli $\frac{6\cancel{0}}{1\cancel{00}} \cdot 8\cancel{0} = 48$

Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Aby obliczyć, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, należy podzielić drugą liczbę przez pierwszą i otrzymany wynik pomnożyć przez 100%.

$\frac{x}{y} = \frac{x}{y} \cdot 100\%$

$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot 100\% = 60\%$

Liczba 3 stanowi 60% liczby 5.

Obliczanie liczby na podstawie danego jej procentu

Aby obliczyć liczbę na podstawie danego jej procentu, wystarczy

1. najpierw obliczyć 1% szukanej liczby, a następnie obliczyć jej 100%,

lub

2. ułożyć i rozwiązać równanie, w którym niewiadoma oznacza szukaną liczbę,

lub

3. oznaczyć niewiadomą i ułożyć odpowiednią proporcję.

: 20 → 20% to 80

→ 1% to 4

· 100 → 100% to 400

Liczba, której 20% jest równe 80, to:

$20\% \cdot x = 80$

$\frac{1}{5} \cdot x = 80$

$x = 400$

80	20%
x	100%

$20\%x = 80 \cdot 100\% \mid : 20\%$

$x = 80 \cdot 5$

$x = 400$

Prędkość

Prędkość jest to iloraz długości drogi do czasu, w jakim ta droga została przebyta.

$v = \frac{s}{t}$, v – prędkość, s – droga, t – czas

Zadania

Nil, najdłuższa rzeka na Ziemi, ma około 6671 km długości. Jaka jest długość tej rzeki na mapie w skali 1 : 10 000 000?

A. 6,671 cm B. 66,71 cm C. $6{,}671 \cdot 10^2$ cm D. $0{,}6671 \cdot 10^3$ cm

Prostokątna działka na planie wykonanym w skali 1 : 5000 ma wymiary 0,8 cm × 1,5 cm. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) W rzeczywistości jeden bok działki jest dłuższy o 35 m od drugiego boku tej działki.
b) Rzeczywiste pole powierzchni działki jest równe 0,3 ha.
c) Na planie w skali 1 : 3000 dłuższy bok tej działki będzie miał długość 3 cm.

Pole powierzchni kwadratowej działki w rzeczywistości równe jest 1,44 ha. Na planie bok tej działki jest równy 4,8 cm. W jakiej skali wykonany jest ten plan?

A. 1 : 2500 B. 1 : 25 000 C. 1 : 2400 D. 1 : 24 000

Po obniżce o 30% kurtka kosztuje 357 zł. Ile kosztowała kurtka przed obniżką?

A. 490 zł B. 510 zł C. 810 zł D. 1190 zł

Cenę towaru obniżono o 10%, a następnie obniżono jeszcze o 20%. Cena towaru po obu obniżkach jest równa

A. $\frac{1}{50}$ ceny początkowej. B. $\frac{2}{25}$ ceny początkowej.
C. $\frac{9}{50}$ ceny początkowej. D. $\frac{18}{25}$ ceny początkowej.

Ile gramów soli należy dosypać do 330 g wody, aby otrzymać roztwór o stężeniu 12%?

A. 27,5 g B. 39,6 g C. 40 g D. 45 g

Rower kosztował w poniedziałek 1200 zł. W tabeli przedstawiono zmiany cen roweru w ciągu kolejnych dni tygodnia.

Dzień	wtorek	środa	czwartek	piątek
Cena roweru (w zł)	960	1260	800	1500

Wybierz poprawne uzupełnienie każdego zdania.
W środę cena roweru wzrosła A/B w porównaniu z ceną poniedziałkową.
A. o 5% B. o 15%
Cena roweru w czwartek stanowiła C/D ceny poniedziałkowej.
C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

Do pustego dzbanka wlano x kg soku o zawartości 30% cukru, a następnie dolano y kg soku o zawartości 20% cukru. Oceń prawdziwość poniższych równości. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) Sok w dzbanku zawiera 50% cukru.
b) Sok w dzbanku zawiera tyle samo wody, co cukru.
c) W dzbanku jest $(x + y)$ kg soku.
d) Sok w dzbanku zawiera $(0{,}7x + 0{,}8y)$ kg wody.

Kangur w ciągu 3 s wykonuje 4 skoki o łącznej długości 10 m. Zakładając, że kangur skacze ze stałą prędkością, oceń prawdziwość poniższych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) Aby przebyć dystans 1500 m, kangur musi wykonać 600 skoków.
b) Dystans 5 km kangur pokona w czasie nie większym niż 20 minut.
c) Kangur skacze z prędkością 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Z Malinowa do Łącznej prowadzą dwie drogi – przez Wrzosów i przez Polanów. Trasa z Malinowa do Łącznej przez Wrzosów jest równa 64 km, a przez Polanów jest o 27 km dłuższa. Pan Michał wyjechał samochodem z Malinowa do Łącznej przez Wrzosów o godzinie 10:35 i jechał ze średnią prędkością 48 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wracając z Łącznej do Malinowa, jechał przez Polanów ze średnią prędkością 78 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe. W obliczeniach nie uwzględniaj czasu pobytu pana Michała w Łącznej.

a) Pan Michał przyjechał do Malinowa o godzinie 11:55.
b) Podróż z Malinowa do Łącznej była o 10 minut krótsza niż podróż z Łącznej do Malinowa.
c) Na całej trasie pan Michał jechał ze średnią prędkością 62 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Dźwięk w wodzie w ciągu pół minuty rozchodzi się na odległość 45 km. W jakim czasie głos dotrze w wodzie na odległość 4200 m?

A. w ciągu 2,8 s B. w ciągu 0,28 min C. w ciągu 7 s D. w ciągu 2,8 min

Samochód drogę długości $(6x + 24)$ km pokonał w ciągu 3 godzin. Średnia prędkość samochodu na tej trasie była równa

A. $\frac{1}{2x+8}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ B. $3(6x + 24)\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ C. $(2x - 8)\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ D. $(2x + 8)\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Stosunek oszczędności Darii do oszczędności Magdy jest równy 7 : 5. Razem dziewczynki mają 1140 zł. Ile złotych oszczędności ma Daria?

A. 326 zł B. 475 zł C. 665 zł D. 814 zł

Taśmę ozdobną podzielono na trzy części w stosunku 2 : 3 : 1. Suma najdłuższej i najkrótszej z tych części jest równa 448 cm. Trzecia część ma długość

A. 224 cm B. 672 cm C. 336 cm D. 448 cm

Za 90 biletów do kina zapłacono 2250 zł. Ile trzeba zapłacić za 15 biletów w tej samej cenie za bilet?

A. 500 zł B. 150 zł C. 1350 zł D. 375 zł

Aby otrzymać 8 kg masy czekoladowej, potrzeba 6 kg cukru. Oznaczmy przez x liczbę kilogramów cukru, którą potrzeba do sporządzenia 10 kg takiej masy. Wskaż równanie, które pozwoli wyznaczyć x.

A. $\frac{6}{x} = \frac{10}{8}$ B. $60x = 8$ C. $\frac{x-10}{8-6} = x$ D. $\frac{x}{6} = \frac{10}{8}$

Działka ma kształt trapezu równoramiennego. Na planie wykonanym w skali 1 : 2500 trapez ten ma podstawy równe 4,8 cm i 11,2 cm oraz wysokość równą 2,4 cm.

a) Ile hektarów ma ta działka w rzeczywistości?
b) Ile metrów bieżących siatki potrzeba do ogrodzenia tej działki w rzeczywistości? Odlicz 2 m na furtkę.
c) Jakie długości boków i jaką wysokość będzie miała ta działka na planie w skali 1 : 10 000?

Na szkolną zabawę zakupiono soki w kartonikach po 250 ml w dwóch smakach: jabłkowym i pomarańczowym. Razem było 60 kartoników z sokiem. Liczba kartoników z sokiem pomarańczowym stanowiła 25% liczby kartoników z sokiem jabłkowym.

a) Ile zakupiono kartoników z sokiem jabłkowym, a ile z sokiem pomarańczowym?
b) Ile litrów soku jabłkowego, a ile soku pomarańczowego było łącznie w tych kartonikach?

W poniedziałek rano do stołówki szkolnej przywieziono ziemniaki. W poniedziałek wykorzystano 15%, a we wtorek $\frac{1}{4}$ wszystkich ziemniaków przywiezionych w poniedziałek. W środę rano w stołówce było 240 kg ziemniaków. Ile kilogramów ziemniaków przywieziono w poniedziałek rano? Ile kilogramów ziemniaków wykorzystano w poniedziałek, a ile we wtorek?

W 12 skrzynkach mieści się 240 butelek soku. Oblicz, ile potrzeba takich samych skrzynek, aby zmieścić w nich o 25% butelek więcej.

Edyta wpłaciła do banku 4000 zł. Po roku otrzymała od banku 50 zł odsetek. Oblicz, jakie było roczne oprocentowanie w tym banku.

Monika otrzymuje miesięcznie 360 zł kieszonkowego. Ćwierć tej kwoty wydaje na kosmetyki, za $\frac{1}{3}$ pozostałej kwoty kupuje książki, 40% pozostałej kwoty przeznacza na zakup pokarmu dla kota. Oblicz, ile złotych zostaje jej na inne wydatki.

Cena biletu do teatru dla dzieci stanowi 30% ceny biletu normalnego. Ponadto rodzina 4-osobowa ma dodatkową zniżkę 8% na wszystkie zakupione bilety.

Państwo Bartłomiejczyk wybrali się z dziećmi do teatru. Pan Bartłomiejczyk z synem kupili bilety na balkonie, a pani Bartłomiejczyk z córką w trzecim rzędzie na parterze.
Oblicz, ile zapłacili za wszystkie bilety.

Cena biletu normalnego (w zł)	
Rząd od 1 do 5 na parterze	50
Rząd od 6 do 15 na parterze	40
Pozostałe rzędy na parterze	30
Balkon	20

Jola w ciągu kwadransa przebyła drogę długości 810 m. Jaka była średnia szybkość Joli na tej trasie? Wynik podaj w kilometrach na godzinę.

Drogę z domu do szkoły (lub ze szkoły do domu) Ania pokonuje w czasie kwadransa, idąc ze średnią prędkością 4,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. W pewnym miesiącu Ania była w szkole 22 razy. Ile czasu zajęła jej droga oraz ile kilometrów przeszła łącznie z domu do szkoły i ze szkoły do domu w tym miesiącu?

Samolot pasażerski Boeing 707 przewozi 192 pasażerów i może osiągnąć maksymalną prędkość 960 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

35 Samolot przebył pewną trasę, lecąc ze średnią prędkością 630 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ w ciągu 1 godziny i 20 minut. Jaka musiałaby być średnia prędkość samolotu, aby przebył tę samą trasę w czasie o 10 min krótszym?

Na przyjęcie urodzinowe Marta kupiła 18 litrów napojów.

a) Oblicz, ile średnio litrów napoju będzie przypadać na każdego spośród 30 uczestników tego przyjęcia.
b) Oblicz, ile osób powinno wziąć udział w przyjęciu, aby na każdego uczestnika przypadło średnio 0,4 litra napoju.

Trawnik na działce pana Roberta ma kształt trapezu prostokątnego o kącie ostrym 60°. Dłuższe ramię trapezu jest równe krótszej podstawie i ma 30 m długości. Ile worków nawozu musi zakupić pan Robert, aby użyźnić trawnik, jeśli jeden worek wystarcza na 3 ary powierzchni trawnika?

Listewkę długości 3,6 m rozcięto na dwie części, Jedna z tych części jest 3 razy dłuższa od drugiej. Wyznacz długości tych części.

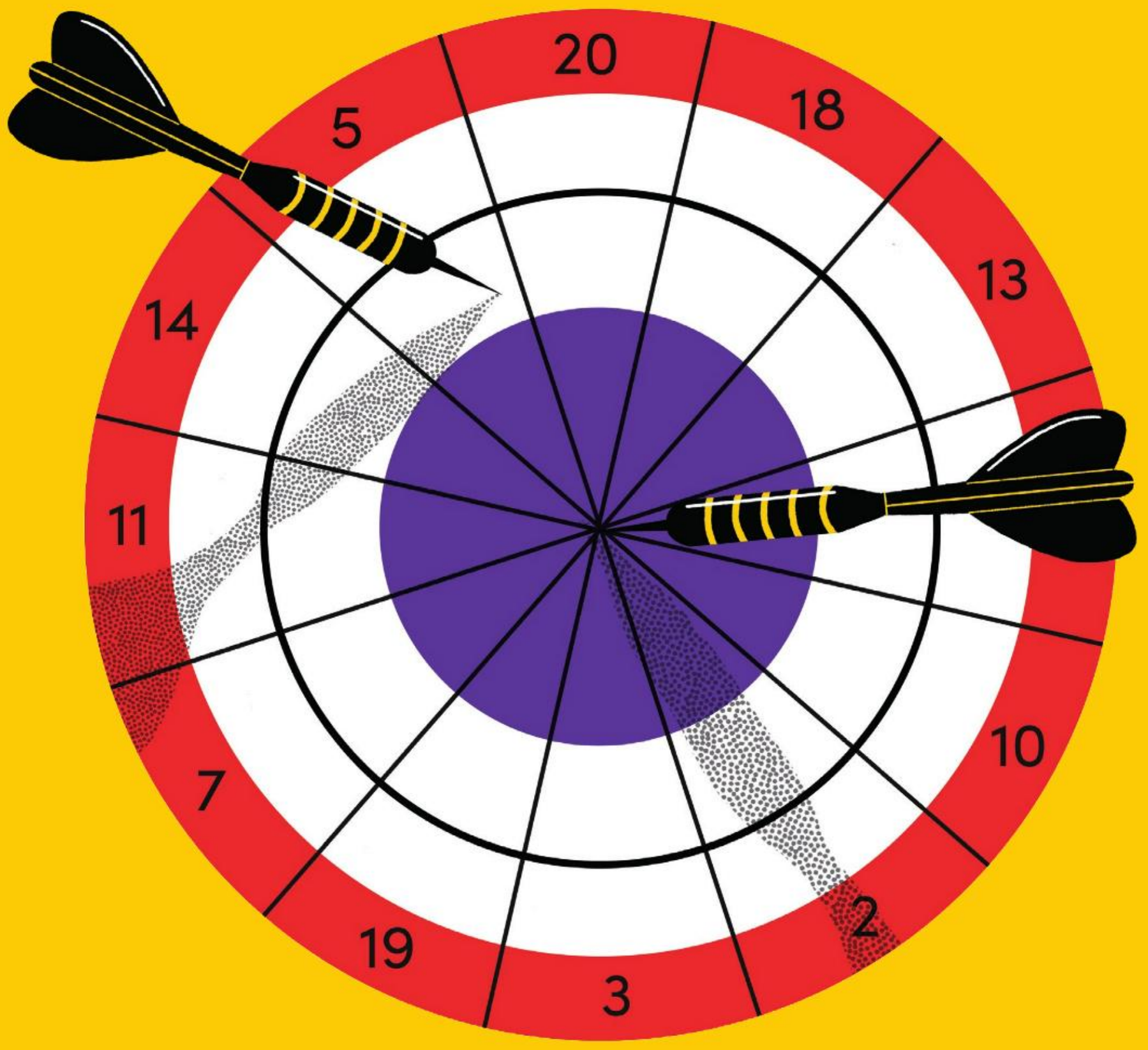
Typowa bieżnia lekkoatletyczna to owalny tor o długości 400 m. W ciągu ilu minut pokona ten dystans ślimak, poruszający się z prędkością 0,5 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$? Czy to więcej niż godzina? Czy to więcej niż doba?

W dzbanku było 5 l soku. Aleksander napełnił sokiem z dzbanka 4 kubki – każdy o pojemności 200 ml. Resztę soku rozlał do jednakowych, mniejszych kubków, napełniając każdy z nich. Ile Aleksander napełnił mniejszych kubków, jeśli każdy miał pojemność równą 100 ml?

Do prostopadłościennej wanny o wymiarach dna 150 cm × 60 cm wlano 216 l wody, napełniając ją do połowy objętości. Podaj wymiary zewnętrzne wanny, jeśli jej dno i ściany boczne wykonane są z płyt marmurowych o grubości 4 cm.

Domek dla kotów ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Każda ściana boczna domku jest w kształcie trójkąta równoramiennego o ramieniu długości 13 dm i podstawie 10 dm. Kwadratowy otwór wejściowy ma bok długości 2 dm. Oblicz pole powierzchni (łącznie z podłogą) tego domku.

6. Okrąg i koło



1. Powiedz, jaki kształt ma tarcza do gry w rzutki.
2. Ile okręgów widzisz na rysunku? Co możesz powiedzieć o środkach tych okręgów?
3. Podaj, ile promieni i ile średnic zaznaczono na kole pomalowanym na fioletowo.

6.1 Koła i okręgi

Podejmij temat

Ile centymetrów ma promień zielonego, ile – promień czerwonego, a ile – promień niebieskiego koła?
Wykonaj takie pawie oczko.

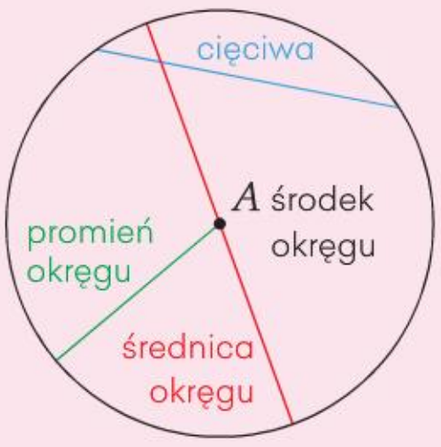
Adam wykonał z kolorowego papieru pawie oczko, takie jak na rysunku obok. Najpierw wyciął żółte koło o średnicy równej 8 cm. Każde kolejne wycinane koło miało średnicę równą promieniowi wcześniej wyciętego koła.



Okrąg o promieniu r $(r > 0)$ to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od pewnego ustalonego punktu, zwanego środkiem okręgu, jest równa r.

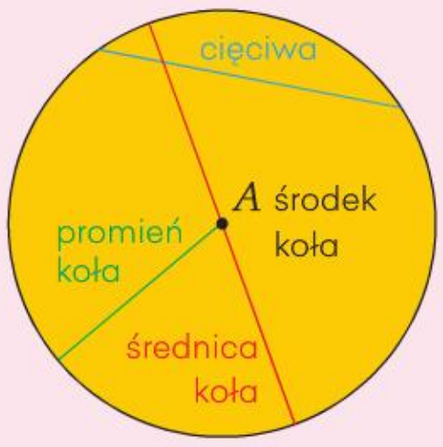
Koło o promieniu r $(r > 0)$ to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od pewnego ustalonego punktu, zwanego środkiem koła, jest równa r lub mniejsza od r.
Brzegiem koła jest okrąg.

Okrąg



Środek okręgu nie należy do okręgu

Koło



Środek koła należy do koła

Środek okręgu (**koła**) oznaczamy dowolnymi, wielkimi literami alfabetu, np. A, S, O.

Promień okręgu (**koła**) to odcinek, którego jednym końcem jest środek okręgu (koła), a drugim – dowolny punkt okręgu (brzegu koła). Promień okręgu (koła) oznaczamy zwykle literą r.

Cięciwa to odcinek, który łączy dwa dowolne punkty okręgu (dwa dowolne punkty brzegu koła).

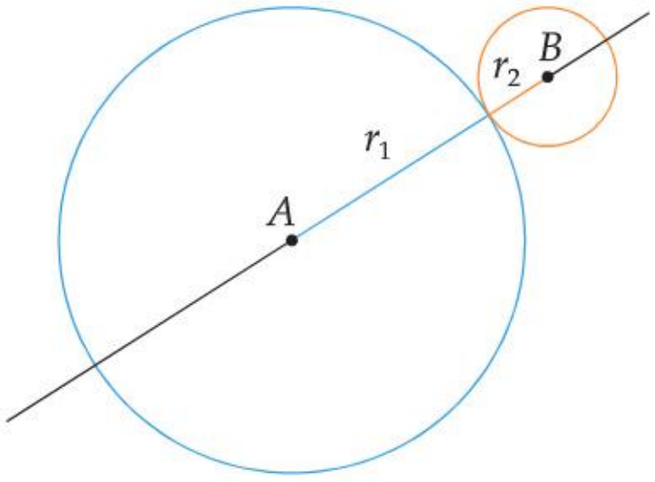
Średnica okręgu (**koła**) to cięciwa, do której należy środek okręgu (środek koła). Średnica jest dwa razy dłuższa od promienia.

Okręgi mogą być położone względem siebie w różny sposób. Zobaczmy, jak mogą być położone dwa okręgi – jeden o środku w punkcie A i promieniu r_1 i drugi o środku w punkcie B i promieniu r_2.

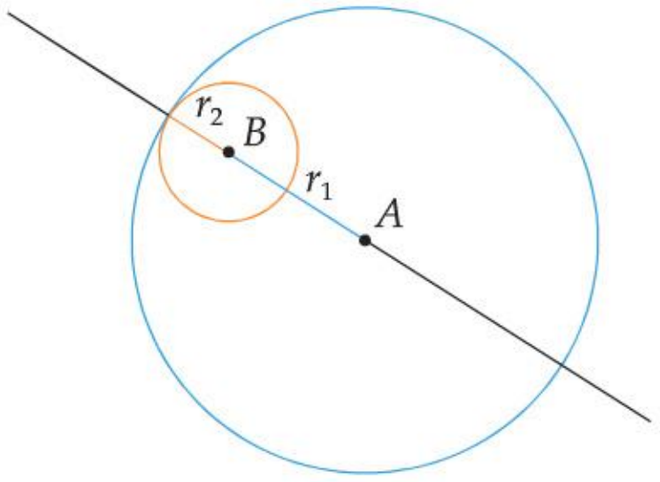
Ciekawe!

Koło to nie tylko figura geometryczna, ale również przedmiot, będący często elementem maszyny bądź urządzenia. Koło wynaleziono prawdopodobnie w Mezopotamii. Około 4000 r p.n.e znano już koła garncarskie i budowano pierwsze pojazdy kołowe. Koło szprychowe wynaleziono około 2000 r. p.n.e.

- Okręgi mogą mieć dokładnie jeden punkt wspólny. O takich okręgach mówimy, że są **styczne**.
  Prosta przechodząca przez środki dwóch okręgów stycznych przechodzi też przez punkt ich styczności.

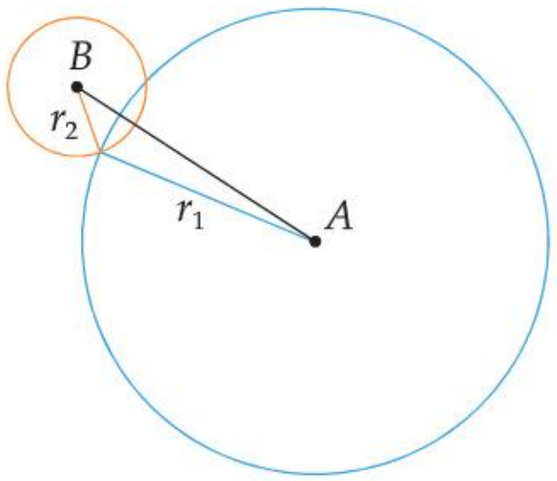


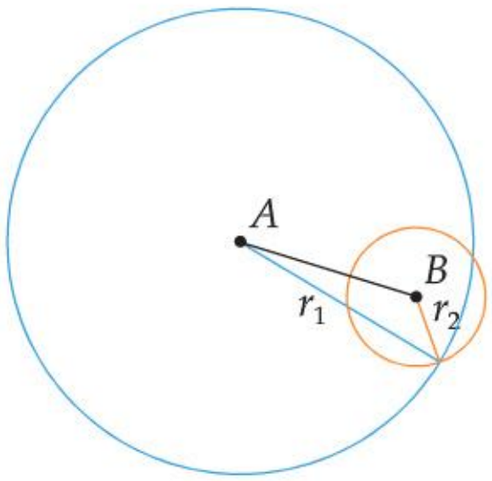
Okręgi styczne zewnętrznie
$|AB| = r_1 + r_2$



Okręgi styczne wewnętrznie
$r_1 > r_2$
$|AB| = r_1 - r_2$

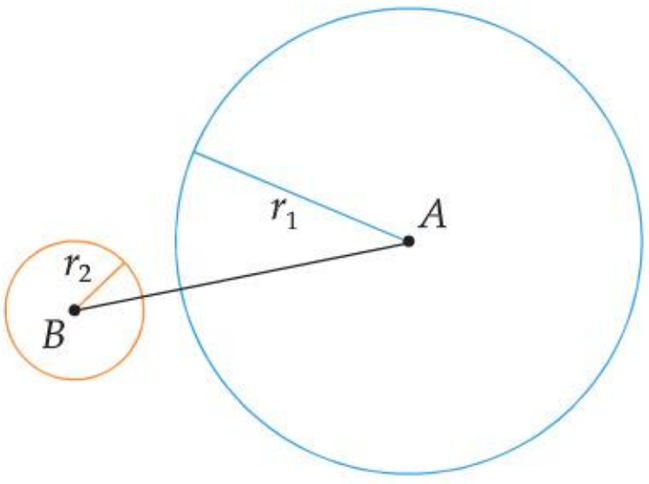
- Okręgi mogą mieć dwa punkty wspólne. O takich okręgach mówimy, że **przecinają się**.



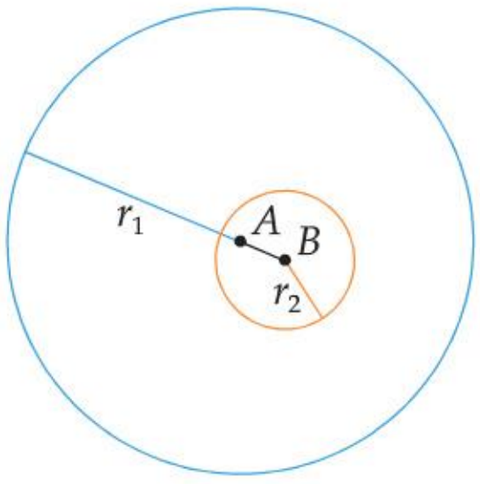


Okręgi przecinające się
$r_1 > r_2$
$r_1 - r_2 < |AB| < r_1 + r_2$

- Okręgi mogą nie mieć punktów wspólnych. O takich okręgach mówimy, że są **rozłączne**.



Okręgi rozłączne zewnętrznie
$|AB| > r_1 + r_2$

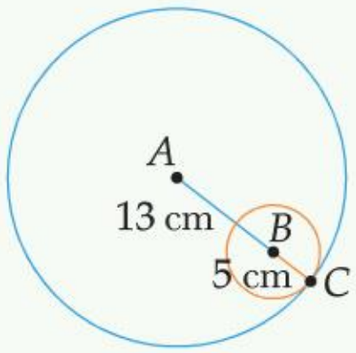


Okręgi rozłączne wewnętrznie
$r_1 > r_2$
$|AB| < r_1 - r_2$

Przykład 1

Okrąg o środku w punkcie A i promieniu 13 cm jest styczny wewnętrznie do okręgu o środku w punkcie B i promieniu 5 cm. Obliczmy, jaka jest odległość między środkami tych okręgów.

Sporządźmy rysunek pomocniczy.



$r_1 = 13$ cm $\qquad r_2 = 5$ cm

Długość odcinka AB jest równa różnicy długości promieni tych okręgów:

$|AB| = r_1 - r_2$ $\qquad |AB| = 13\text{ cm} - 5\text{ cm} = 8\text{ cm}$

Odcinek AB ma długość 8 cm.

1. Okrąg o środku w punkcie C i promieniu 6 cm jest styczny zewnętrznie do okręgu o środku w punkcie D i promieniu 15 cm. Oblicz, jaka jest odległość między środkami tych okręgów.

Przykład 2

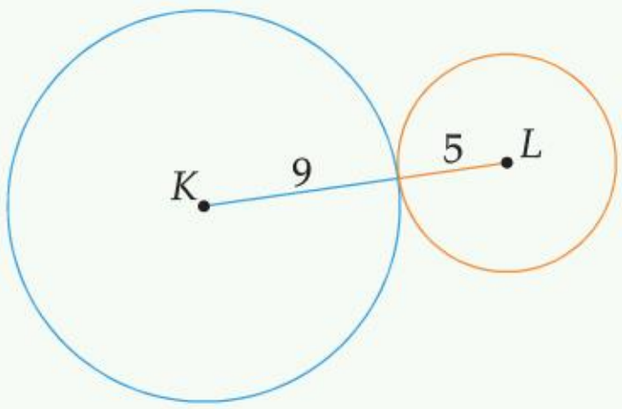
Określmy wzajemne położenie okręgu o środku w punkcie K i promieniu 9 oraz okręgu o środku w punkcie L i promieniu 5, jeśli:

a) $|KL| = 14$ $\qquad$ b) $|KL| = 1{,}7$ $\qquad$ c) $|KL| < 9$ i $|KL| > 4$

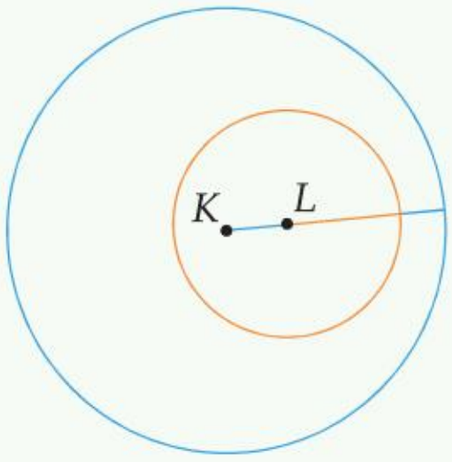
Przyjmijmy: $r_1 = 9$, $r_2 = 5$. Obliczmy sumę i różnicę długości promieni:

$r_1 + r_2 = 9 + 5 = 14$ $\qquad r_1 - r_2 = 9 - 5 = 4$

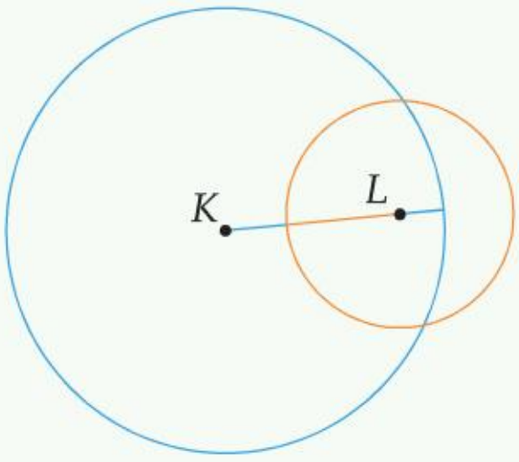
a) $|KL| = 9 + 5 = 14$, zatem $|KL| = r_1 + r_2$ – okręgi są styczne zewnętrznie (mają jeden punkt wspólny)



b) $|KL| < 4$, zatem $|KL| < r_1 - r_2$ – okręgi są rozłączne wewnętrznie (nie mają punktów wspólnych)



c) $4 < |KL| < 9$, zatem $r_1 - r_2 < |KL| < r_1 + r_2$ – okręgi przecinają się (mają dwa punkty wspólne)



2. Określ wzajemne położenie okręgu o środku w punkcie S i promieniu 3,5 oraz okręgu o środku w punkcie T i promieniu 2, jeśli:

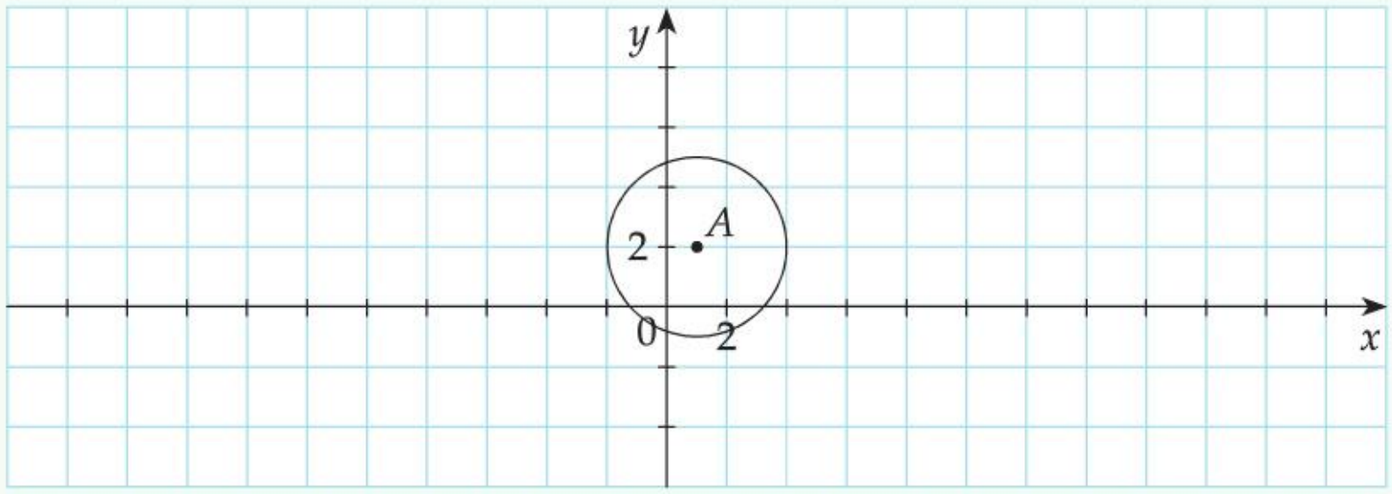
a) $|ST| = 1{,}5$ $\qquad$ b) $|ST| = 7$ $\qquad$ c) $|ST| < 1{,}5$

Odpowiedź zilustruj rysunkami.

Przykład 3

W układzie współrzędnych narysowano okrąg o środku w punkcie $A = (1, 2)$ i promieniu równym 3, styczny do okręgu o środku w punkcie B i promieniu równym 7. Wyznaczmy współrzędne punktu B, jeśli wiadomo, że rzędna (druga współrzędna) punktu B jest równa 2.

Sporządźmy rysunek pomocniczy. Zaznaczmy w układzie współrzędnych punkt $A = (1, 2)$, następnie narysujmy okrąg o środku w tym punkcie i promieniu równym 3.



Okrąg o środku w punkcie A może być styczny zewnętrznie lub wewnętrznie do okręgu o środku w punkcie B.

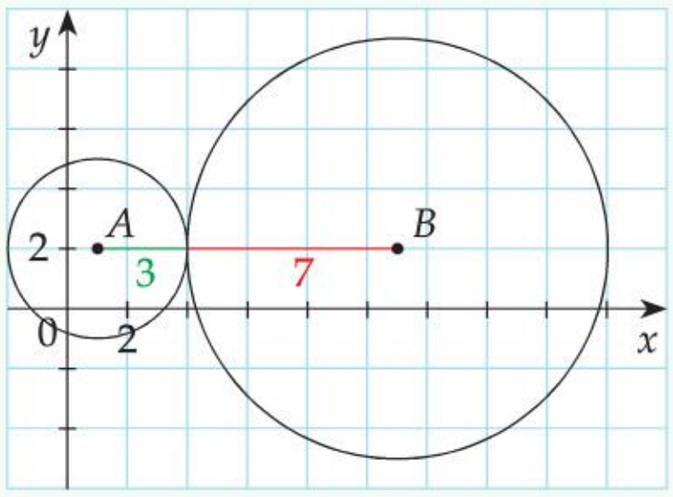
Jeśli okrąg o środku w punkcie A jest styczny zewnętrznie do okręgu o środku w punkcie B, to $|AB| = r_A + r_B = 3 + 7 = 10$. Okrąg o środku w punkcie B może znajdować się z lewej lub prawej strony okręgu o środku w punkcie A.

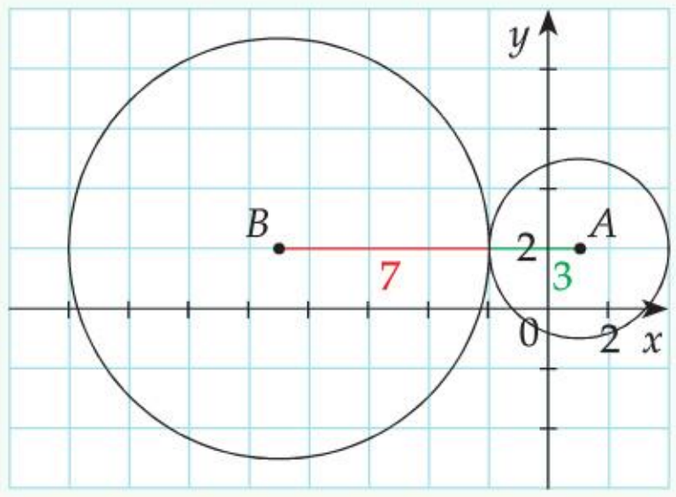
Pierwsza współrzędna punktu B jest równa:

$x_B = 1 + |AB|$ lub $x_B = 1 - |AB|$
$x_B = 1 + 10$ lub $x_B = 1 - 10$
$x_B = 11$ lub $x_B = -9$

Mamy dwa takie punkty:

$B = (11, 2)$ lub $B = (-9, 2)$





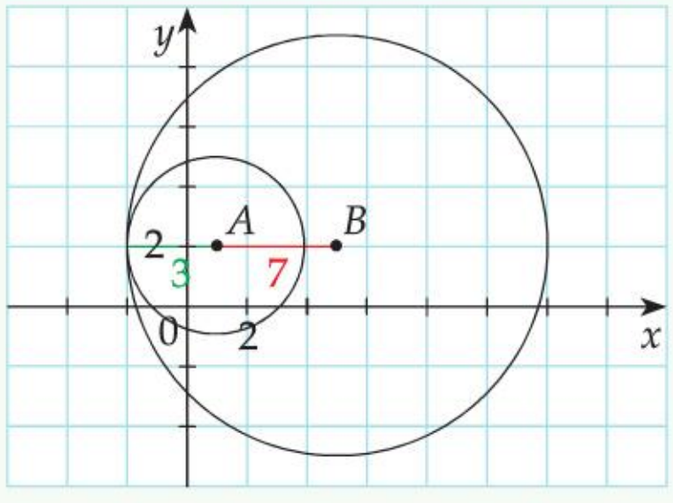
Jeśli okrąg o środku w punkcie A jest styczny wewnętrznie do okręgu o środku w punkcie B, to $|AB| = r_A - r_B = 7 - 3 = 4$.

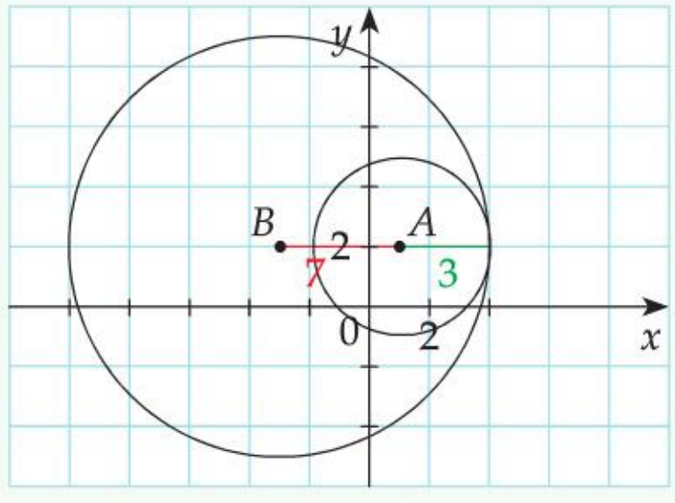
Odcięta (pierwsza współrzędna) punktu B jest równa:

$x_B = 1 + |AB|$ lub $x_B = 1 - |AB|$
$x_B = 1 + 4$ lub $x_B = 1 - 4$
$x_B = 5$ lub $x_B = -3$

Mamy dwa takie punkty:

$B = (5, 2)$ lub $B = (-3, 2)$



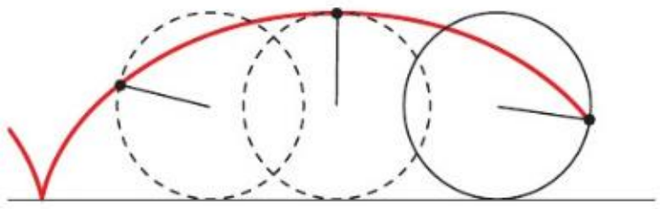


Punkt B może mieć współrzędne: $B = (-9, 2)$ lub $B = (-3, 2)$, lub $B = (5, 2)$, lub $B = (11, 2)$.

3. W układzie współrzędnych narysowano okrąg o środku w punkcie $K = (-3, 0)$ i promieniu równym 2, styczny do okręgu o środku w punkcie L i promieniu równym 5. Wyznacz współrzędne punktu L, jeśli wiadomo, że punkt L leży na osi x.

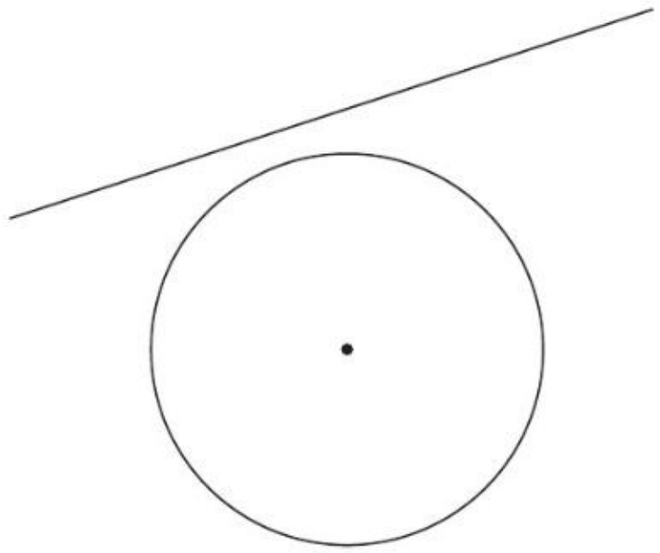
Ciekawe!

Punkt leżący na obwodzie koła toczącego się bez poślizgu po prostej zakreśla krzywą zwaną cykloidą. Łuki utworzone przez cykloidę często inspirują architektów.

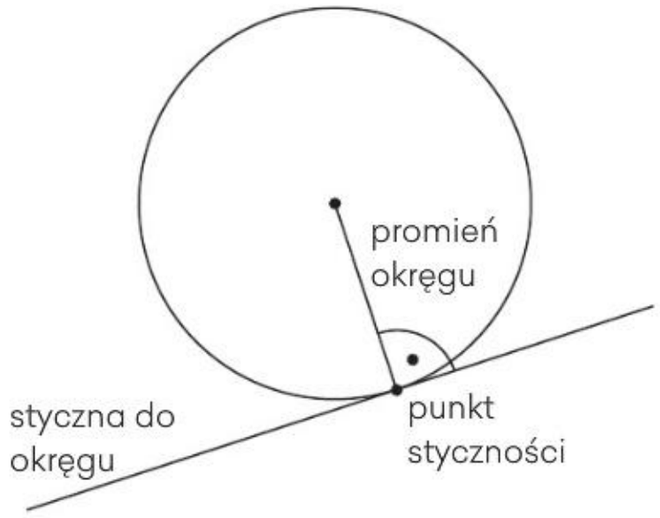


Przyjrzyjmy się teraz, jak mogą być położone względem siebie prosta i okrąg.

- Prosta nie ma z okręgiem punktów wspólnych.

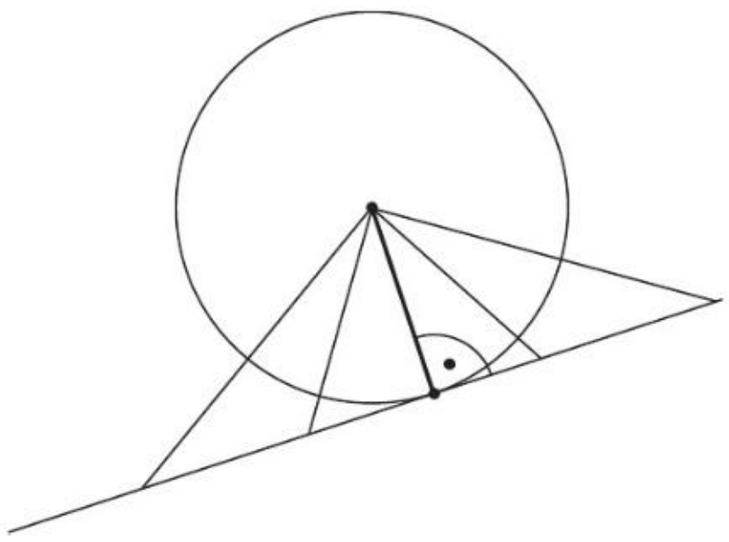


- Prosta ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny.



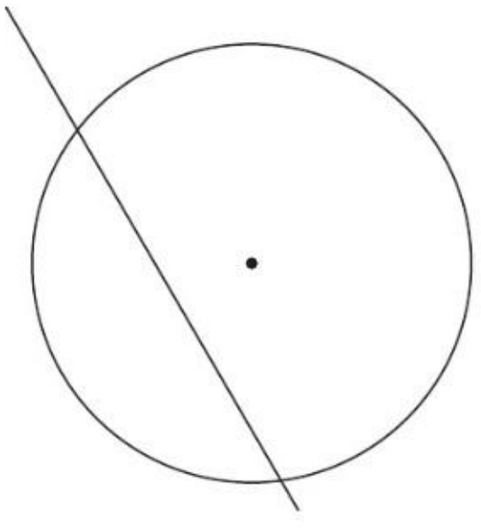
Prostą, która ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną** do okręgu.
Ten wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**.

Promień jest najkrótszym odcinkiem spośród wszystkich odcinków, których jednym końcem jest środek okręgu, a drugim – punkt leżący na stycznej. Jak wiemy, odcinek łączący punkt z prostą jest najkrótszy wtedy, gdy jest prostopadły do tej prostej.



Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.

- Prosta ma z okręgiem dwa punkty wspólne.

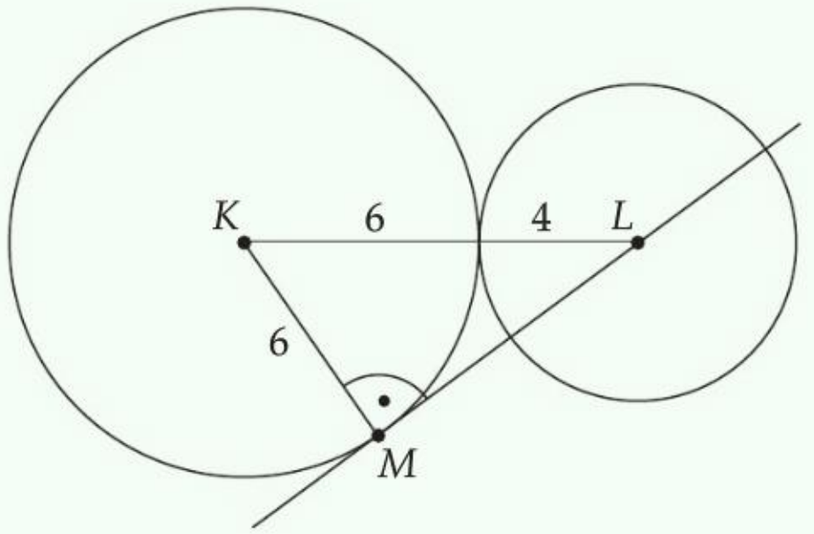


Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy **sieczną okręgu**.

Przykład 4

Dane są okręgi styczne zewnętrznie: okrąg o środku w punkcie K i promieniu 6 oraz okrąg o środku w punkcie L i promieniu 4. Przez punkt L poprowadzono prostą styczną do okręgu o środku w punkcie K i literą M oznaczono punkt styczności prostej z okręgiem. Obliczmy pole trójkąta KLM.

Sporządźmy rysunek pomocniczy.



Odcinek KM jest promieniem okręgu o środku w punkcie K, prostopadłym do prostej LM. Zatem trójkąt KLM jest trójkątem prostokątnym.

Aby obliczyć pole trójkąta KLM, musimy najpierw obliczyć długość odcinka ML. Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa. Zauważmy, że przeciwprostokątna KL tego trójkąta jest równa sumie długości promieni obu okręgów, bo są one styczne zewnętrznie:

$|KL| = 6 + 4 = 10$

$|KM|^2 + |ML|^2 = |KL|^2$

$6^2 + |ML|^2 = 10^2$

$36 + |ML|^2 = 100$

$|ML|^2 = 100 - 36$

$|ML|^2 = 64$

$|ML| = 8$, bo $|ML| > 0$

$P = \frac{1}{2} \cdot |ML| \cdot |KM|$

$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6$

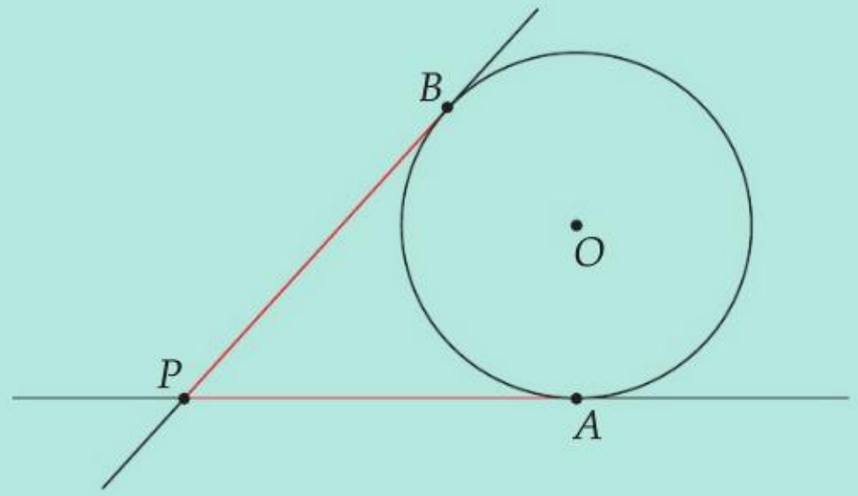
$P = 24$

Pole trójkąta KLM jest równe 24.

4. Dany jest okrąg o środku w punkcie S i promieniu 9 oraz punkt P taki, że długość odcinka PS jest równa 41. Przez punkt P poprowadzono styczną do okręgu o środku w punkcie S i punkt styczności oznaczono literą T. Oblicz obwód trójkąta PST.

Więcej na temat

Jeżeli dwie styczne do okręgu przecinają się w punkcie P, to odcinki łączące punkt P z punktami styczności A i B mają tę samą długość: $|PA| = |PB|$.



Zadania

Okrąg o środku w punkcie P ma promień równy 14 cm, a okrąg o środku w punkcie S ma promień równy 19 cm. Oblicz odległość między środkami tych okręgów, jeśli:

a) okręgi są styczne zewnętrznie,
b) okręgi są styczne wewnętrznie,
c) okrąg o większym promieniu przechodzi przez środek okręgu o mniejszym promieniu,
d) okrąg o mniejszym promieniu przechodzi przez środek okręgu o większym promieniu.

Odległość AB między środkami dwóch okręgów jest równa 40 cm. Okrąg o środku w punkcie B ma promień równy 17 cm. Oblicz promień okręgu o środku w punkcie A, jeśli:

a) okręgi są styczne zewnętrznie,
b) okręgi są styczne wewnętrznie.

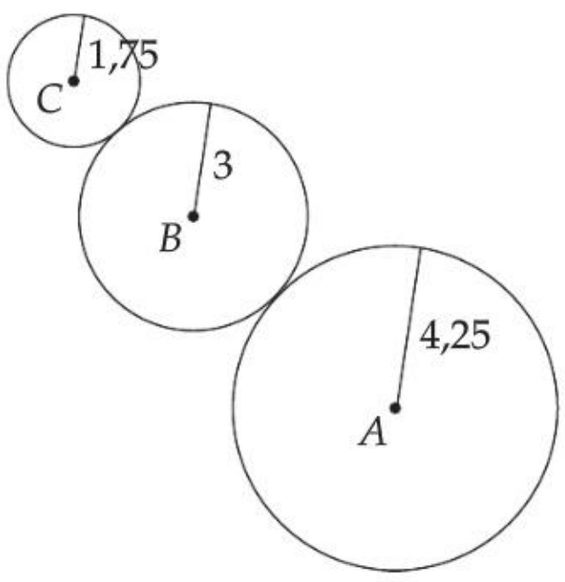
Określ wzajemne położenie okręgu o środku w punkcie C i promieniu 4,7 cm oraz okręgu o środku w punkcie D i promieniu 1,3 cm, jeśli:

a) $|CD| = 3{,}4$ cm
b) $|CD| = 2$ cm
c) $|CD| = 5{,}5$ cm
d) $|CD| = 6$ cm
e) $|CD| < 3{,}4$ cm
f) $|CD| < 4{,}7$ cm i $|CD| > 3{,}4$ cm

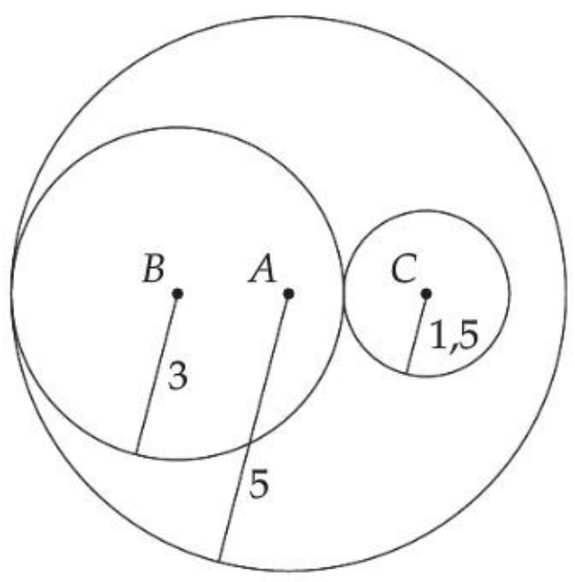
Odpowiedź zilustruj.

Punkty A, B, C leżą na jednej prostej i są środkami trzech okręgów. Okrąg o środku w punkcie B jest styczny do okręgu o środku w punkcie A i okręgu o środku w punkcie C. Korzystając z informacji podanych na rysunku, oblicz długości odcinków: AB, AC, BC.

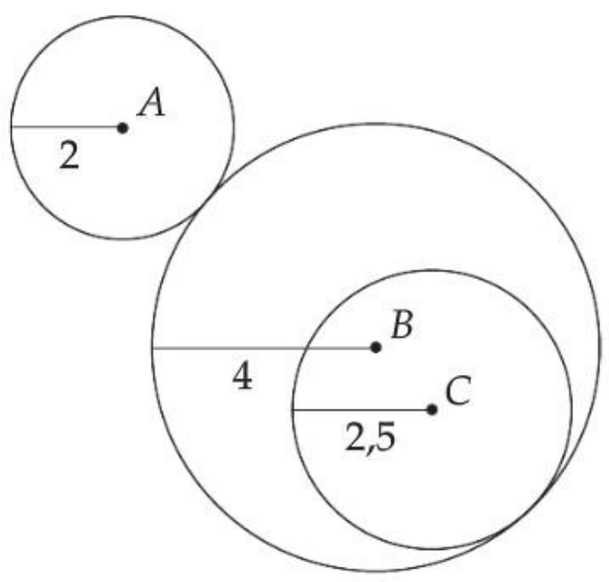
a)



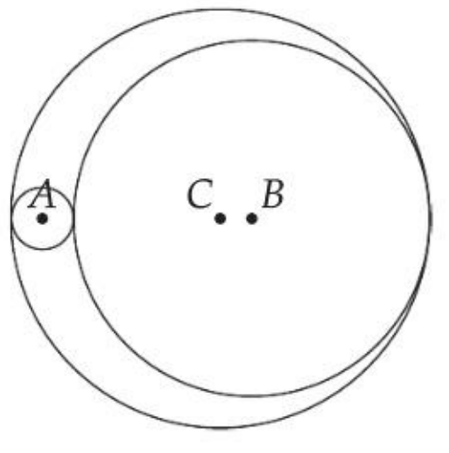
b)



c)



Punkty A, B i C leżą na jednej prostej. Okrąg o środku w punkcie A jest styczny zewnętrznie do okręgu o środku w punkcie B oraz styczny wewnętrznie do okręgu o środku w punkcie C. Okrąg o środku w punkcie B jest styczny wewnętrznie do okręgu o środku w punkcie C. Okrąg o środku w punkcie C ma średnicę równą 10 cm, a długość odcinka CB jest równa 1 cm. Oblicz promienie okręgów: o środku w punkcie A i o środku w punkcie B.



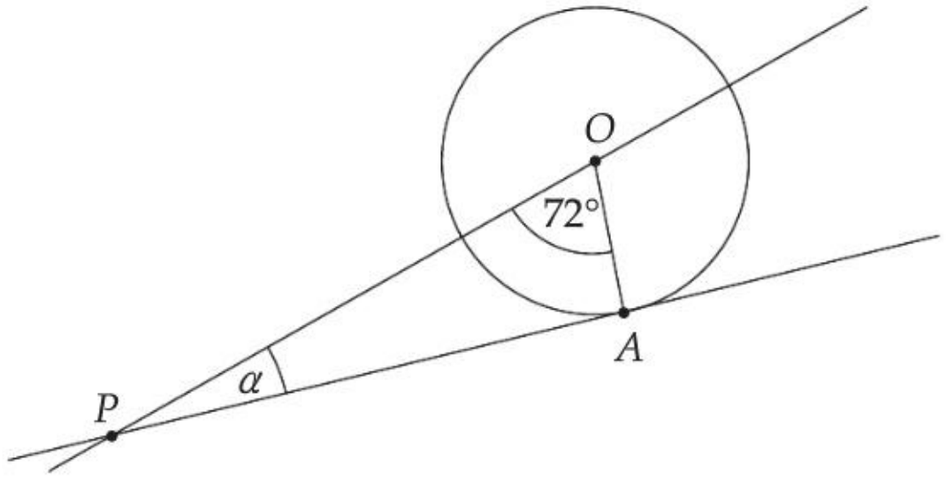
W układzie współrzędnych narysowano okrąg o środku w punkcie $A = (1, -3)$ i promieniu równym 6, styczny do okręgu o środku w punkcie B i promieniu równym 4. Wyznacz współrzędne punktu B, jeśli wiadomo, że odcięta punktu B jest równa odciętej punktu A.

W układzie współrzędnych narysowano trzy okręgi: okrąg o środku w punkcie $A = (-5, 5)$ i promieniu 10, okrąg o środku w punkcie $B = (-5, b)$ i promieniu 2 oraz okrąg o środku w punkcie $C = (0, b)$ i promieniu r. Każdy z tych okręgów jest styczny zewnętrznie do dwóch pozostałych.

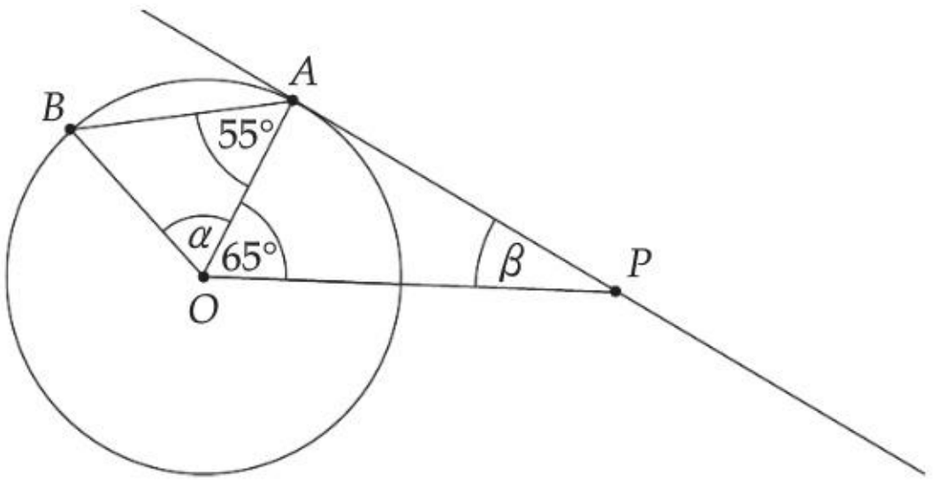
a) Oblicz b i r.
b) Oblicz obwód i pole trójkąta ABC.

Oblicz miary podanych kątów, wiedząc, że narysowana prosta jest styczna do okręgu w punkcie A.

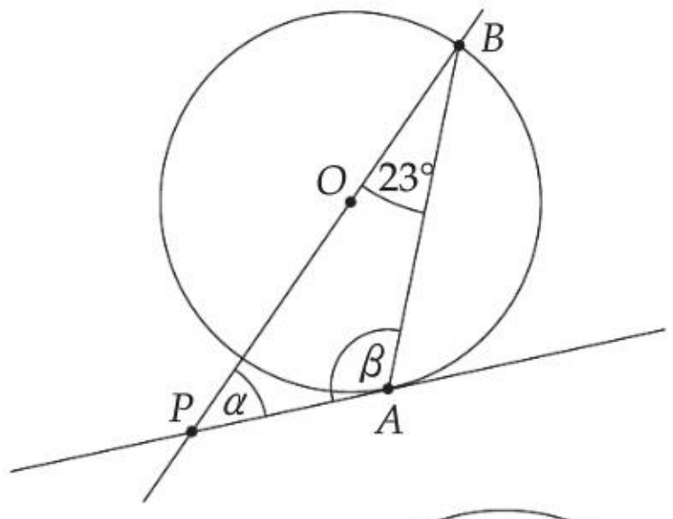
a)

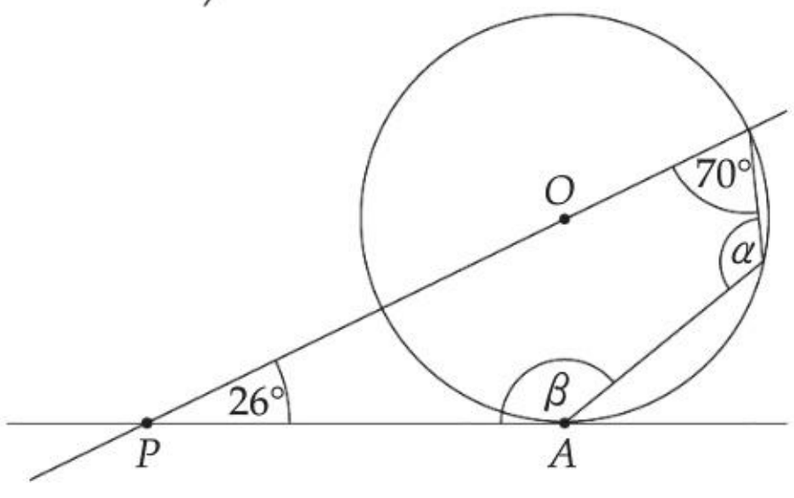


b)

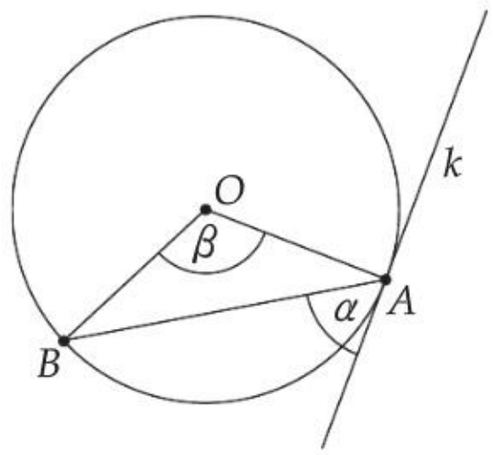


c)

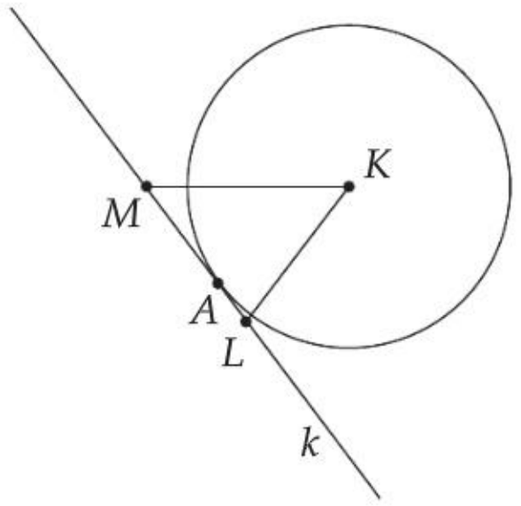




Punkt A jest punktem styczności okręgu o środku w punkcie O z prostą k. Uzasadnij, że kąt β jest dwa razy większy od kąta α.

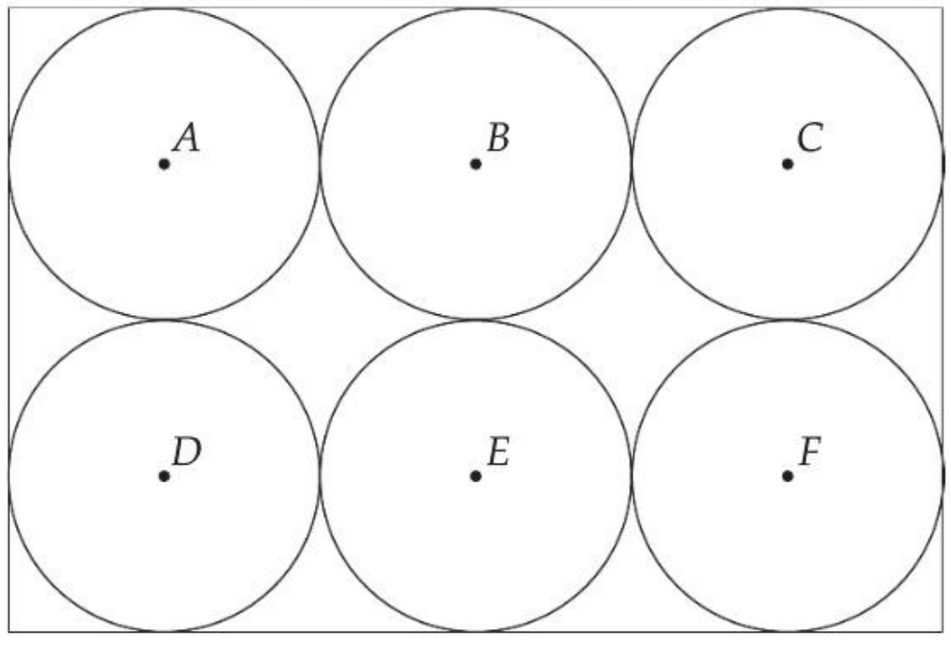


Punkt A jest punktem styczności okręgu o środku w punkcie K z prostą k. Wiadomo, że $|KL| = |LM| = 25$ i $|AL| = 7$. Oblicz pole i obwód trójkąta KLM.



W prostokąt o obwodzie 70 cm wpisano 6 jednakowych okręgów, tak jak na rysunku. Każdy z okręgów jest styczny do co najmniej jednego boku prostokąta. Sąsiednie okręgi są styczne zewnętrznie. Oblicz obwody i pola:

a) prostokąta $DFCA$, b) równoległoboku $EFBA$,
c) trójkąta BDF, d) trójkąta BCD.



6.2 Długość okręgu

Podejmij temat



Weź okrągłą pokrywkę (lub inny przedmiot, którego brzeg ma kształt okręgu, np. garnek, kubek, zakrętkę od słoika) i zmierz centymetrem lub za pomocą sznurka i linijki jej obwód oraz średnicę. Oblicz iloraz obwodu pokrywki przez jej średnicę. Porównaj otrzymany wynik z wynikami Karoliny, Nikodema oraz twoich koleżanek i kolegów z klasy. Co zauważasz?



Wyobraź sobie, że wykonaną z drutu obręcz rozcinamy i prostujemy. Długość drutu bez względu na to, czy jest on skręcony tak, że ma kształt okręgu, czy jest wyprostowany, jest taka sama.

Analogicznie możemy wyobrazić sobie, że „rozcinamy" okrąg i „prostujemy" go tak, aby otrzymać odcinek. Długość tego odcinka jest równa długości okręgu. Już tysiące lat temu ludzie zauważyli, że stosunek długości okręgu do długości średnicy tego okręgu jest dla wszystkich okręgów taki sam.

Stosunek długości okręgu do długości średnicy tego okręgu jest równy **liczbie pi**, którą oznaczamy grecką literą π.
Liczba π nie jest liczbą wymierną.

Jej rozwinięcie jest nieskończone i nieokresowe.
$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494...$

W praktyce korzysta się zazwyczaj z przybliżonych wartości liczby π zapisanych w postaci ułamka dziesiętnego $\pi \approx 3{,}14$ lub ułamka zwykłego, np. $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Okrąg jest brzegiem pewnego koła. Dlatego długość okręgu nazywana jest również obwodem koła.

Więcej na temat

Od wieków ludzie starają się wyznaczyć kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby π.

W III w p.n.e. Archimedes zauważył, że liczba π jest większa od $3\frac{10}{71}$ i jednocześnie mniejsza od $3\frac{1}{7}$. Na przełomie XVI i XVII w. Ludolph van Ceulen (czyt. ludolf fan kejlen) wyznaczył przybliżenie liczby π najpierw z dokładnością do 20, a potem do 35 miejsc po przecinku, co w tamtych czasach było nie lada wyczynem. Dlatego liczba π nazywana jest również stałą Archimedesa lub ludolfiną.

Obecnie w wyznaczeniu kolejnych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby π pomagają naukowcom komputery najnowszej generacji. W 2019 roku Emma Haruka Iwao, pracująca w Google, wyznaczyła $31\,415\,926\,535\,897$ cyfr znajdujących się po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π.

Używany dzisiaj symbol π został wprowadzony w 1706 roku przez Williama Jonesa (czyt. łiliama dżonsa). Liczba pi swoją nazwę zawdzięcza pierwszej literze greckiego słowa „peryferia".

Wiemy, że $\frac{L}{d} = \pi$, gdzie:

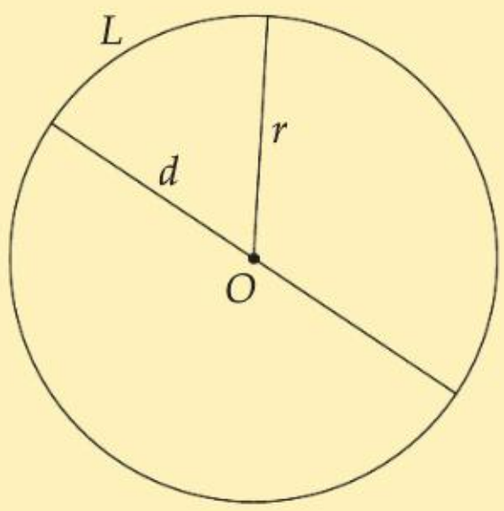
L – długość okręgu (obwód koła), d – średnica

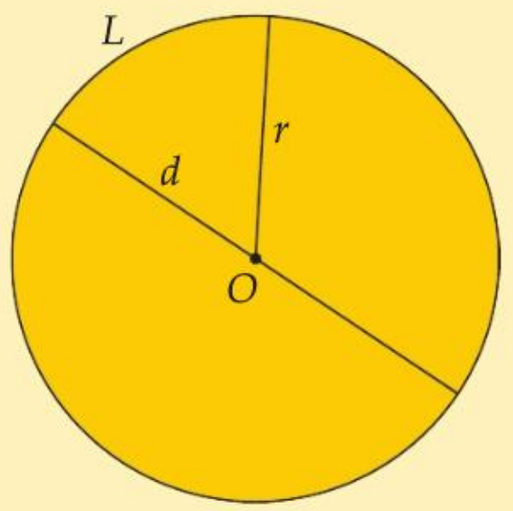
Przekształcając ten wzór, otrzymujemy:

$$L = \pi d$$

Ponieważ średnica jest dwa razy dłuższa od promienia ($d = 2r$), można obliczyć **długość okręgu** ze wzoru:

$L = 2\pi r$, gdzie: r – promień





Przykład 1

Obliczmy, jaką długość ma okrąg o promieniu:

a) $4{,}5$ cm b) $\frac{8}{\pi}$ dm c) $1{,}2\pi$ m

a) $r = 4{,}5$ cm

Korzystamy ze wzoru: $L = 2\pi r$

$L = 2\pi \cdot 4{,}5$

$L = 2 \cdot 4{,}5 \cdot \pi$

$L = 9 \cdot \pi$

$L = 9\pi$

Okrąg o promieniu $4{,}5$ cm ma długość 9π cm.

b) $r = \frac{8}{\pi}$ dm

$L = 2\pi \cdot \frac{8}{\pi}$

$L = 2 \cdot \frac{8}{\pi_1} \cdot \pi^1$

$L = 16$

Okrąg o promieniu $\frac{8}{\pi}$ dm ma długość 16 dm.

c) $r = 1{,}2\pi$ m

$L = 2\pi \cdot 1{,}2\pi$

$L = 2 \cdot 1{,}2 \cdot \pi \cdot \pi$

$L = 2{,}4\pi^2$

Okrąg o promieniu $1{,}2\pi$ m ma długość $2{,}4\pi^2$ m.

1. Oblicz długość okręgu o promieniu:

a) $3{,}4$ m b) $\frac{15}{\pi}$ dm c) 7π cm

Ciekawe!

Pomimo osiągnięć technologicznych pozwalających na wyznaczenie coraz dokładniejszych przybliżeń (kolejnych cyfr rozwinięcia dziesiętnego) liczby π, agencja NASA uznała, że do ich obliczeń wystarczające jest przybliżenie liczby pi z dokładnością do piętnastu miejsc po przecinku. W 1977 roku NASA wysłała w przestrzeń kosmiczną sondę Voyager 1 (czyt. **wo**jedżer), która z końcem roku 2020 znajdowała się w odległości niecałych 23 miliardów kilometrów od Ziemi. Jeśli policzymy długość okręgu, którego promień jest równy tej odległości, i w obliczeniach wykorzystamy przybliżenie liczby π do 15 miejsc po przecinku, to uzyskany wynik będzie różnił się od rzeczywistej długości zaledwie o 4 cm.

Źródło: https://voyager.jpl.nasa.gov/mission/status/

Przykład 2

Obliczmy średnicę koła, którego obwód jest równy:

a) 35 mm b) $\frac{10}{\pi}$ cm c) $6{,}5\pi$ dm

a) $L = 35$ mm Korzystamy ze wzoru: $L = \pi d$

$35 = \pi d \mid : \pi$ Obie strony równania dzielimy przez π.

$d = \frac{35}{\pi}$

Średnica koła o obwodzie 35 mm jest równa $\frac{35}{\pi}$ mm.

b) $L = \frac{10}{\pi}$ cm

$\frac{10}{\pi} = \pi d \mid : \pi$ Obie strony równania dzielimy przez π.

$d = \frac{10}{\pi^2}$

Średnica koła o obwodzie $\frac{10}{\pi}$ cm jest równa $\frac{10}{\pi^2}$ cm.

c) $L = 6{,}5\pi$ dm

$6{,}5\pi = \pi d \mid : \pi$ Obie strony równania dzielimy przez π.

$d = 6{,}5$

Średnica koła o obwodzie $6{,}5\pi$ dm jest równa 6,5 dm.

2. Oblicz średnicę koła, którego obwód jest równy:

a) 2,4 m b) $\frac{6}{\pi}$ cm c) $\frac{\pi}{8}$ km

Przykład 3

Obliczmy, ile w przybliżeniu decymetrów ma promień koła o obwodzie 24 dm.

$L = 24$ dm

$24 = 2\pi r$ Korzystamy ze wzoru: $L = 2\pi r$

$24 = 2\pi r \mid : 2\pi$ Obie strony równania dzielimy przez 2π.

$r = \frac{12}{\pi}$

$r \approx \frac{12}{3{,}14} \approx 3{,}82$

Promień koła o obwodzie 24 dm jest w przybliżeniu równy 3,82 dm.

3. Oblicz, ile w przybliżeniu centymetrów ma promień okręgu o długości 1 m.

Zadania

1. Oblicz długość okręgu o promieniu:

a) 5 b) 12 c) 34,5 d) 9,25

e) $\frac{5}{6}$ f) $2\frac{1}{12}$ g) $\frac{5}{8\pi}$ h) π

2. Oblicz obwód koła o średnicy:

a) 10 b) 7,6 c) 24π d) $\frac{3}{5\pi}$

e) π^2 f) $\frac{22}{\pi}$ g) $\frac{3}{5}\pi$ h) $\frac{18}{5\pi^2}$

3. Oblicz średnicę koła o obwodzie:

a) 13 b) 37,5 c) $\frac{2}{9}$ d) $3\frac{1}{3}$

e) 4π f) π g) $\frac{3}{4}\pi^2$ h) $\frac{3}{5\pi}$

4. Oblicz promień okręgu o długości:

a) 36 b) 4,8 c) $\frac{6}{13}$ d) 8π

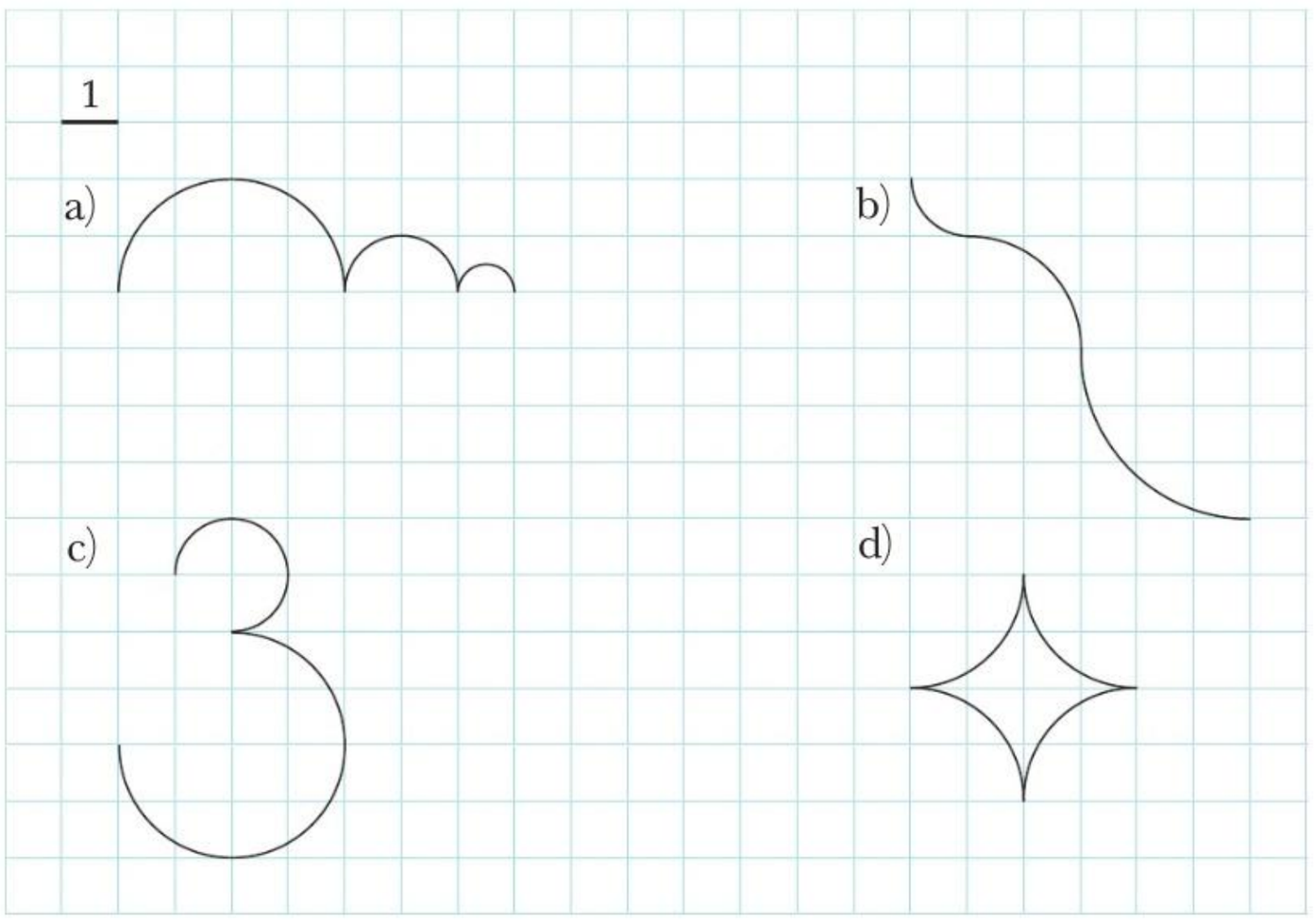
e) π f) $1\frac{3}{7}\pi$ g) $2\pi^2$ h) $\frac{2}{\pi}$

5. Oblicz, ile w przybliżeniu centymetrów ma obwód koła o promieniu:

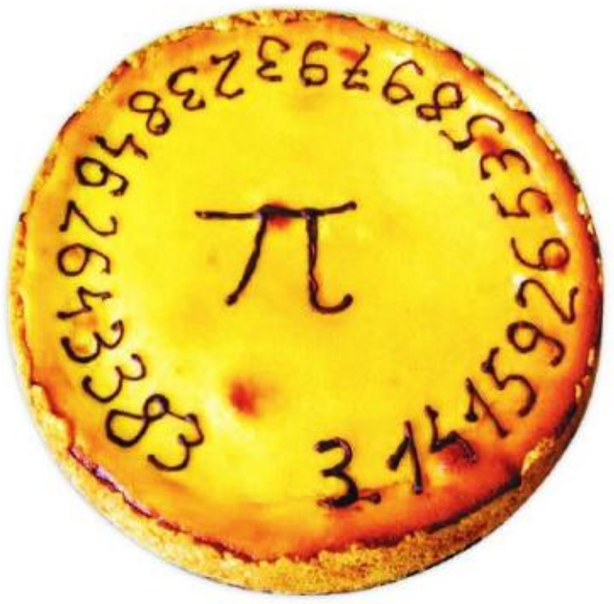
a) 6 mm b) 8,3 cm c) 24,5 cm d) 2,7 dm

Przyjmij, że $\pi \approx 3{,}14$. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 cm.

6. Oblicz długości narysowanych linii. Przyjmij, że bok jednej kratki ma długość 1.



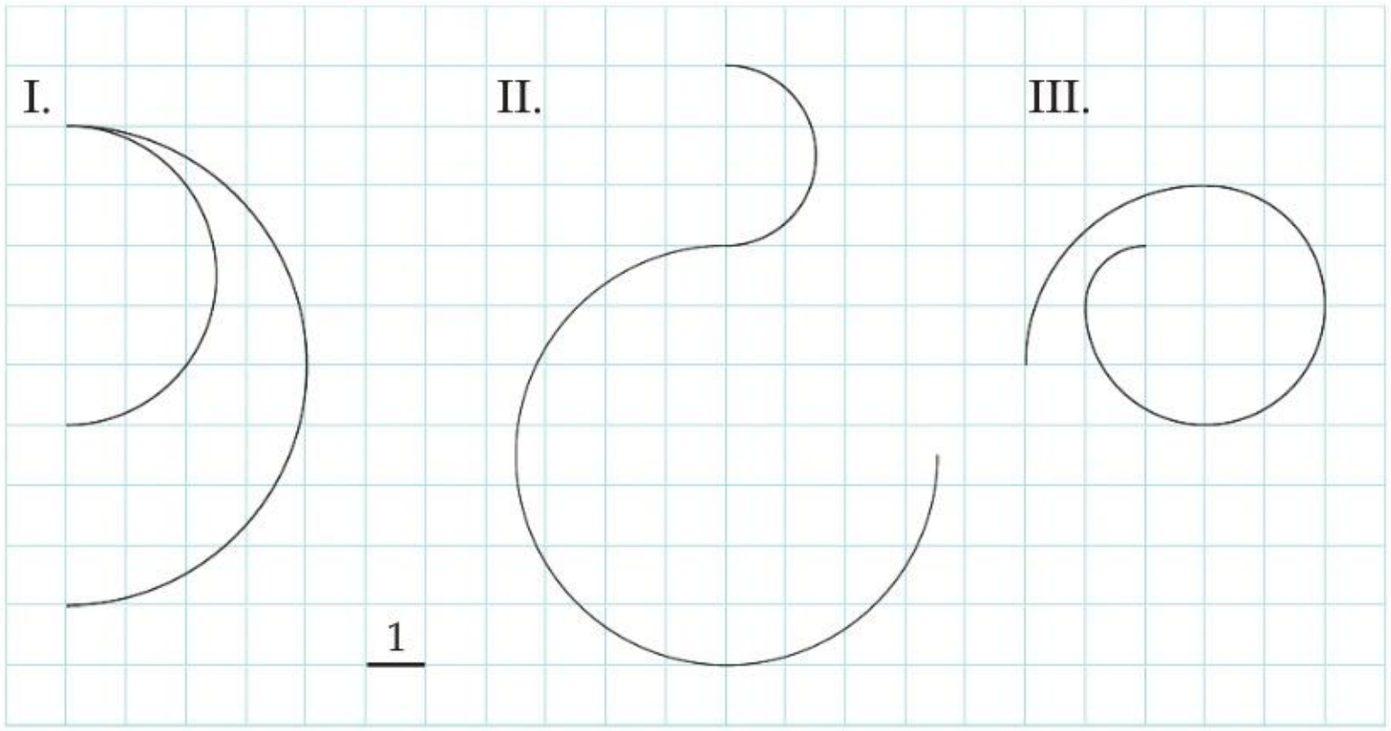
Ciekawe!



Co roku w wielu państwach obchodzony jest Dzień Liczby Pi. W Stanach Zjednoczonych oraz niektórych krajach Europy (m.in. w Polsce) dzień ten przypada na 14 marca. Datę tę wybrano ze względu na często stosowane przybliżenie liczby pi oraz stosowany w USA sposób zapisu dat – data 14 marca zapisywana jest jako 3.14. W 1988 roku po raz pierwszy zorganizowano obchody Dnia Liczby Pi. Odbyły się one w muzeum nauki Exploratorium w San Francisco, z inicjatywy Larry'ego Shawa (czyt. larego szoła). Od tego czasu w USA to święto obchodzone jest co roku. W tym dniu przygotowywane są specjalne ciasteczka ozdobione napisem pokazującym przybliżenie liczby pi.

W niektórych państwach Europy, ze względu na inny sposób zapisu dat, Dzień Liczby Pi obchodzony jest 22 lipca (datę 22 lipca można zapisać w postaci 22/7, czyli 22 : 7).

Która z narysowanych linii jest najdłuższa, a która najkrótsza? Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.



W tabeli podane są promienie polskich monet będących obecnie w obiegu. Oblicz przybliżony obwód każdej z tych monet. Przyjmij, że $\pi \approx 3{,}14$. Wynik podaj z dokładnością do 1 mm.

Nominał	1 gr	2 gr	5 gr	10 gr	20 gr	50 gr	1 zł	2 zł	5 zł
Promień monety (mm)	7,75	8,75	9,75	8,25	9,25	10,25	11,5	10,75	12

Długości wskazówek zegara – godzinowej, minutowej i sekundowej – zmierzone od środka tarczy zegara są odpowiednio równe: 5 cm, 7 cm, 7,5 cm. Oblicz długość drogi, jaką pokonują końce każdej z tych wskazówek:



a) w ciągu jednego obrotu,
b) w ciągu jednej godziny,
c) w ciągu jednej doby.

Przyjmij, że $\pi \approx 3{,}14$. Wynik podaj z dokładnością do 1 cm.

Wśród podanych zdań wskaż zdania prawdziwe.

a) Długość okręgu o promieniu 3,25 m jest o 11 m mniejsza od długości okręgu o promieniu 8,75 m.
b) Długość okręgu o średnicy $\sqrt{50}$ cm jest o $\sqrt{2}\pi$ cm większa od długości okręgu o średnicy $\sqrt{32}$ cm.
c) Obwód kwadratu o polu 4 dm^2 jest większy od długości okręgu o średnicy 4 dm.
d) Obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm jest mniejszy od długości okręgu o promieniu 4,5 cm.
e) Długość okręgu o promieniu 6,5 cm jest o 10π cm większa od obwodu trójkąta równobocznego o boku π cm.

Ciekawe!



London Eye (Londyńskie Oko, Koło Milenijne) to jedna z najpopularniejszych londyńskich atrakcji. Jest to najwyższa tego typu (diabelski młyn) konstrukcja w Europie – ma 135 m wysokości. Pełny obrót koła trwa około 30 minut. Na kole znajdują się 32 klimatyzowane kapsuły pasażerskie. Niewielka prędkość liniowa tych kabin $\left(\text{ok. } 0{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ pozwala na zabieranie i wysadzenie pasażerów bez zatrzymywania koła.

6.3 Pole koła

Podejmij temat

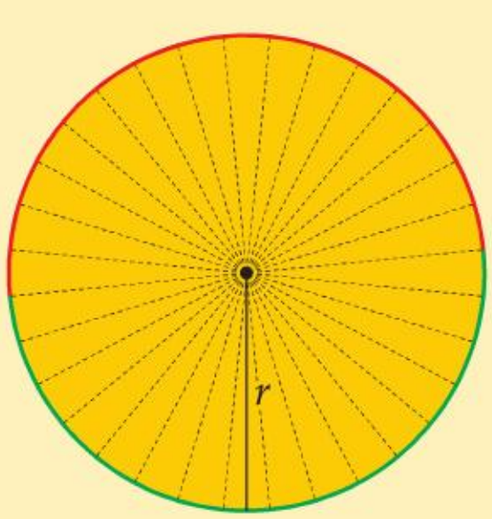


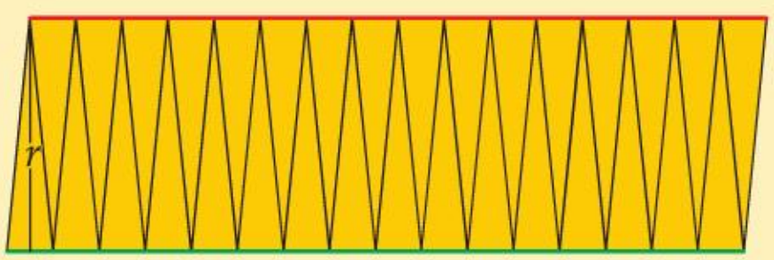
Kasia wycięła z kartonu trzy identyczne koła. Jedno z nich podzieliła na 8 jednakowych części, a drugie na 16 jednakowych części. Jaka jest długość linii zaznaczonej na zielono, a jaka – zaznaczonej na czerwono?

Jeśli koło podzielimy na kilka przystających części, to możemy zbudować z nich figurę mającą kształt podobny do równoległoboku. Im więcej jest części, na które podzielimy koło, tym bardziej ułożona figura przypomina równoległobok. Długość linii, zaznaczonej na rysunku na zielono, bez względu na to, na ile części podzieliliśmy koło, jest zawsze równa połowie długości okręgu. Oczywiście długość czerwonej linii też jest równa połowie długości okręgu.

Pole koła o promieniu r jest równe πr^2.

$$P = \pi r^2$$





Ciekawe!

Kwadratura koła to jeden z problemów postawionych przez pitagorejczyków – należy tylko przy użyciu cyrkla i linijki bez podziałki skonstruować kwadrat, którego pole jest równe polu danego koła. Okazuje się, że konstrukcja taka jest niewykonalna. W języku potocznym określenia „kwadratura koła" używa się na określenie czegoś niewykonalnego.

Przykład 1

Obliczmy pole koła:

a) o promieniu 5 m

b) o średnicy $\frac{2}{\pi}$ dm

c) o obwodzie 6π cm

a) $r = 5$ m

Korzystamy ze wzoru: $P = \pi r^2$

$P = \pi \cdot 5^2$

$P = 25 \cdot \pi$

$P = 25\pi$

Koło o promieniu 5 m ma pole równe 25π m^2.

b) $d = \frac{2}{\pi}$ dm

Korzystamy ze wzoru: $d = 2r$

$\frac{2}{\pi} = 2r \mid : 2$

$\frac{1}{\pi} = r$

$P = \pi \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right)^2$

$P = \pi \cdot \frac{1}{\pi^2}$

$P = \frac{1}{\pi}$

Koło o średnicy $\frac{2}{\pi}$ dm ma pole równe $\frac{1}{\pi}$ dm^2.

c) $L = 6\pi$ cm

Korzystamy ze wzoru: $L = 2\pi r$

$2\pi r = 6\pi \mid : 2\pi$

$r = 3$

$P = \pi \cdot 3^2$

$P = \pi \cdot 9$

$P = 9\pi$

Koło o obwodzie 6π cm ma pole równe 9π cm^2.

1. Oblicz pole koła:

a) o promieniu 2π m

b) o średnicy 3 dm

c) o obwodzie 10 cm

Przykład 2

Obliczmy średnicę koła, którego pole jest równe:

a) $1{,}44\pi$

b) $\frac{64}{\pi}$

c) $\frac{4}{25}$

a) $P = 1{,}44\pi$

Korzystamy ze wzoru: $P = \pi r^2$

$\pi r^2 = 1{,}44\pi \mid : \pi$

$r^2 = 1{,}44$

$r = \sqrt{1{,}44}$

$r = 1{,}2$

Korzystamy ze wzoru: $d = 2r$

$d = 2 \cdot 1{,}2$

$d = 2{,}4$

Średnica koła o polu $1{,}44\pi$ jest równa 2,4.

b) $P = \frac{64}{\pi}$

$\pi r^2 = \frac{64}{\pi} \mid : \pi$

$r^2 = \frac{64}{\pi^2}$

$r = \sqrt{\frac{64}{\pi^2}}$

$r = \frac{8}{\pi}$

$d = 2 \cdot \frac{8}{\pi}$

$d = \frac{16}{\pi}$

Średnica koła o polu $\frac{64}{\pi}$ jest równa $\frac{16}{\pi}$.

c) $P = \frac{4}{25}$

$\pi r^2 = \frac{4}{25} \mid : \pi$

$r^2 = \frac{4}{25\pi}$

$r = \sqrt{\frac{4}{25\pi}}$

Korzystamy z własności pierwiastków.

$r = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{2}{5\sqrt{\pi}}$

$d = 2 \cdot \frac{2}{5\sqrt{\pi}} = \frac{4}{5\sqrt{\pi}}$

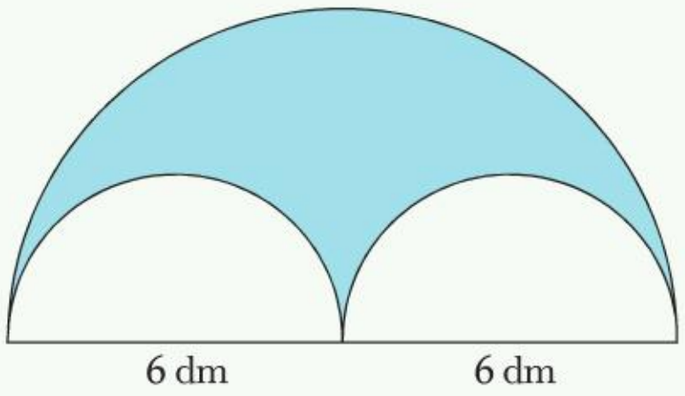
Średnica koła o polu $\frac{4}{25}$ jest równa $\frac{4}{5\sqrt{\pi}}$.

2. Oblicz obwód koła, którego pole jest równe:

a) $0{,}81\pi$ b) π^3 c) 100

Przykład 3

Obliczmy pole figury pomalowanej na niebiesko, korzystając z danych zamieszczonych na rysunku.



Figura, której pole mamy obliczyć, to półkole o promieniu 6 dm, z którego wycięto dwa jednakowe mniejsze półkola o średnicy 6 dm.

Obliczamy pole połowy koła o promieniu 6 dm.

$r_1 = 6$

$P_1 = \pi \cdot 6^2$

$P_1 = 36\pi$

$\frac{P_1}{2} = 18\pi$

Obliczmy sumę pól dwóch jednakowych półkoli – jest ona równa polu koła o średnicy 6 dm.

$r_2 = \frac{6}{2}$

$r_2 = 3$

$P_2 = \pi \cdot 3^2$

$P_2 = 9\pi$

Obliczamy pole figury pomalowanej na niebiesko – jest ono równe różnicy pola połowy koła o promieniu 6 dm i pola koła o promieniu 3 dm.

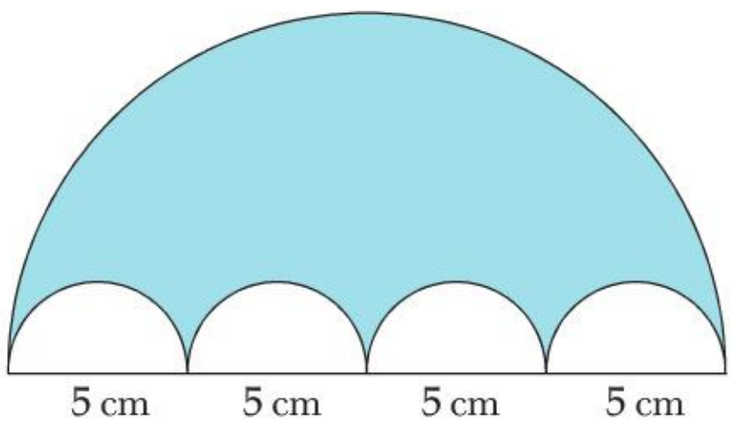
$P = P_1 - P_2$

$P = 18\pi - 9\pi$

$P = 9\pi$

Pole figury pomalowanej na niebiesko jest równe 9π dm^2.

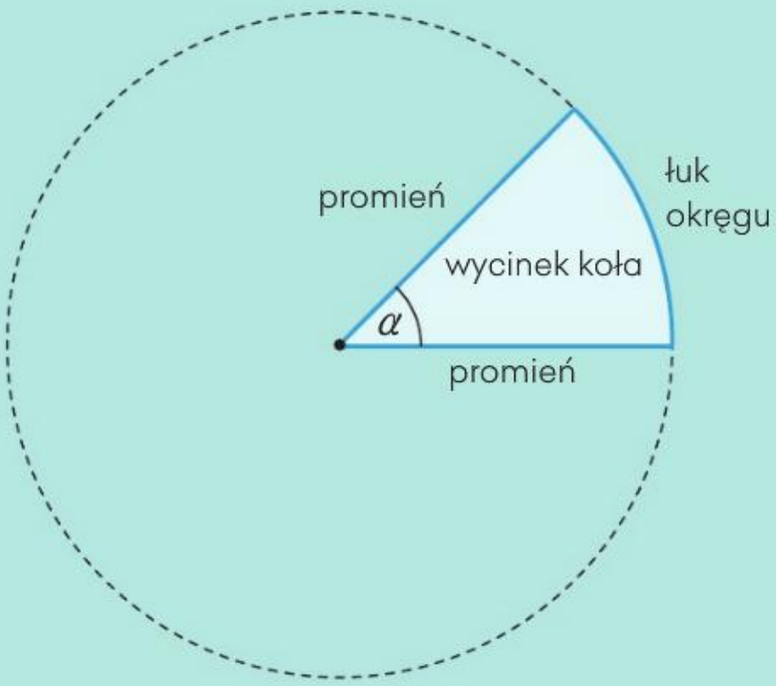
3. Oblicz pole figury pomalowanej na niebiesko, korzystając z danych zamieszczonych na rysunku.

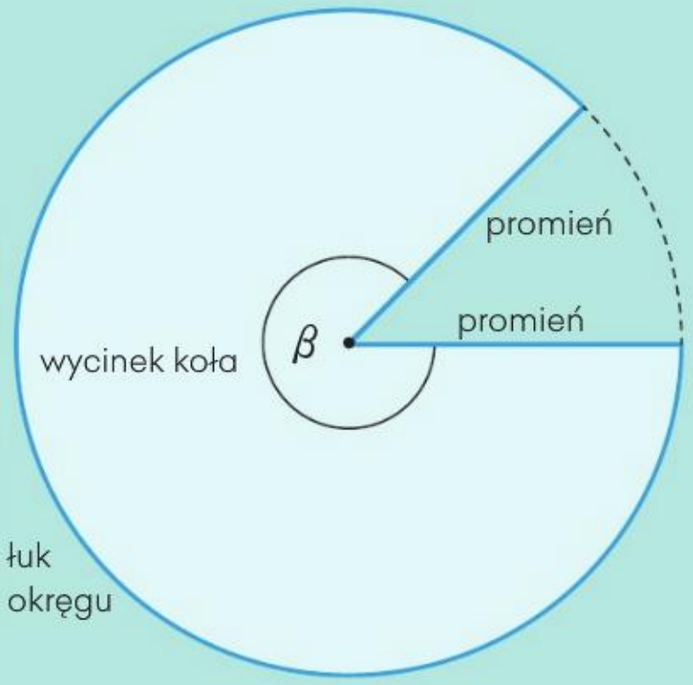


Półkole – połowa koła, część koła ograniczona średnicą i połową okręgu.

Więcej na temat

Dwa różne promienie dzielą koło na dwie części zwane wycinkami koła.





Oznaczmy:
P_k – pole koła o promieniu r
α – kąt wyznaczony przez dwa promienie
P_w – pole wycinka koła o promieniu r i kącie α

Wyznaczmy wzór na pole wycinka kołowego, korzystając z proporcji:

P_k — $360°$

P_w — α

$\frac{P_k}{P_w} = \frac{360°}{\alpha}$ Układamy proporcję. Mnożymy na krzyż.

$360° \cdot P_w = \alpha \cdot P_k \mid : 360°$ Dzielimy obie strony równania przez $360°$.

$P_w = \frac{\alpha}{360°} \cdot P_k$

$P_w = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$ Korzystamy ze wzoru: $P_k = \pi r^2$

Pole wycinka koła P_W o promieniu r i kącie α jest równe:

$P_w = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$

Obliczmy pola wycinków koła, na jakie podzieliły go dwa promienie, jeżeli promień koła ma długość 6 cm i kąt jednego z wycinków jest równy $54°$.

Korzystamy ze wzoru: $P_w = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$

$P_{w1} = \frac{54°}{360°} \cdot \pi \cdot 6^2$

$P_{w1} = \frac{54}{360} \cdot 36\pi$

$P_{w1} = 5{,}4\pi$

Obliczamy pole drugiego wycinka koła.
Wyznaczamy miarę drugiego kąta wyznaczonego przez te promienie: $360° - 54° = 306°$ i korzystamy ze wzoru na pole wycinka kołowego

$P_{w2} = \frac{306°}{360°} \cdot \pi \cdot 6^2$

$P_{w2} = \frac{306}{360} \cdot 36\pi$

$P_{w2} = 30{,}6\pi$

Pole drugiego wycinka koła możemy również obliczyć, odejmując od pola koła pole pierwszego wycinka koła:

$P_{w2} = P - P_{w1}$

$P = \pi \cdot 6^2$

$P = 36\pi$

$P_{w2} = 36\pi - 5{,}4\pi = 30{,}6\pi$

Wycinki koła mają pola równe odpowiednio: $5{,}4\pi$ cm^2, $30{,}6\pi$ cm^2.

4. Oblicz pola wycinków koła o promieniu 10 cm i kącie α równym:

a) $72°$ b) $126°$ c) $225°$

Zadania

Oblicz pole koła o średnicy:

a) 18 b) 5 c) 4,2 d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{6}{\pi}$ f) $\frac{3}{2\pi}$ g) $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ h) 2π

Oblicz pole koła o obwodzie:

a) 10π b) 24π c) 7π d) $\frac{2}{3}\pi$

e) $1{,}6\pi$ f) $2\pi^2$ g) 2 h) 20

Oblicz promień koła, którego pole jest równe:

a) 49π b) 196π c) $\frac{1}{81}\pi$ d) $1{,}21\pi$

e) π^3 f) $9\pi^3$ g) $\frac{25}{36}\pi$ h) 100

Oblicz obwód koła, którego pole jest równe:

a) 81π b) 441π c) $\frac{4}{9}\pi$ d) $0{,}0064\pi$

e) π^3 f) $\frac{1}{25}\pi^3$ g) $\frac{1}{16}\pi$ h) 36

Pole koła jest równe 2π. Jaki promień ma koło o polu:

a) dwa razy mniejszym,
b) dwa razy większym,
c) cztery razy mniejszym,
d) cztery razy większym?

Narysowano trzy koła, odpowiednio o środkach w punktach: A, B, C. Koło o środku w punkcie B ma promień trzy razy większy niż koło o środku w punkcie A, a koło o środku w punkcie C ma promień dwa razy mniejszy niż koło o środku w punkcie A. Oblicz, ile razy pole koła o środku w punkcie B jest większe od pola koła o środku w punkcie C.

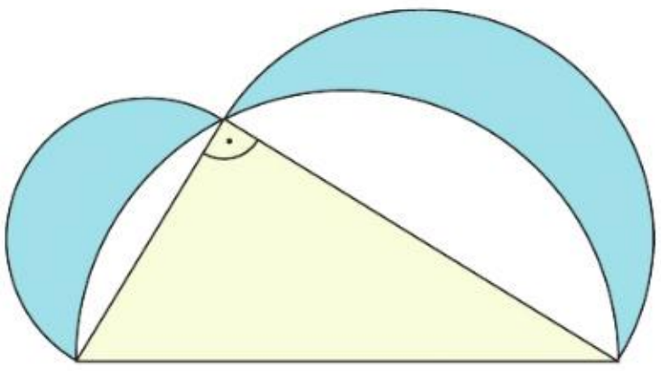
Moneta 1-groszowa ma średnicę równą 15,5 mm, a moneta 5-złotowa ma średnicę 24 mm. Zosia na kartce papieru narysowała w skali 1 : 1 kilkanaście monet 1-groszowych i kilka monet 5-złotowych.

a) Czy suma pól powierzchni narysowanych przez Zosię dwóch monet 1-groszowych jest większa od pola powierzchni narysowanej jednej monety 5-złotowej? Odpowiedź uzasadnij.
b) Czy suma pól powierzchni narysowanych przez Zosię dwunastu monet 1-groszowych jest większa od pola powierzchni narysowanych pięciu monet 5-złotowych? Odpowiedź uzasadnij.



Moneta ma dwie strony, które nazywamy awersem i rewersem lub orłem i reszką. Mówiąc o polu powierzchni awersu, mamy na myśli pole powierzchni jednej strony monety.

Ciekawe!



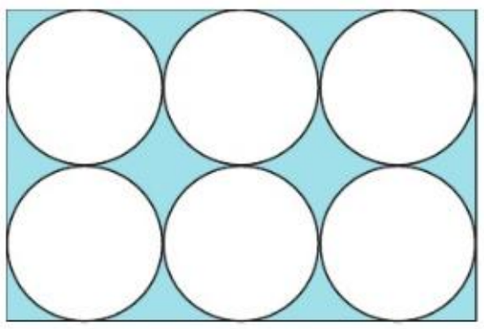
Księżyce Hipokratesa to figury geometryczne w kształcie księżyców, zbudowane na bokach wielokątów. Ograniczone są łukami okręgów, których średnicami są boki danego wielokąta.
W przypadku trójkąta prostokątnego suma pól księżyców Hipokratesa jest równa polu trójkąta.

Które z poniższych zdań są prawdziwe?

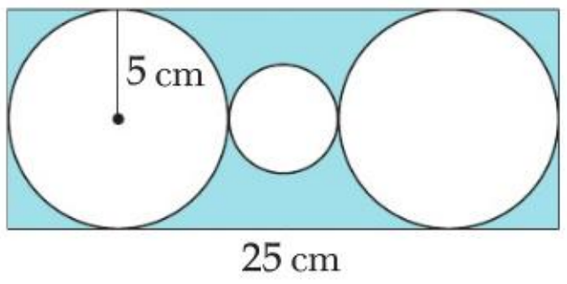
A. Pole koła o promieniu 7 dm jest o 8π dm^2 większe od pola koła o promieniu 3 dm.
B. Pole koła o obwodzie 3π m jest o $6{,}75\pi$ m^2 mniejsze od pola koła o promieniu 3 m.
C. Pole koła o średnicy $\frac{4}{5}\pi$ cm jest o $\frac{7}{100}\pi$ cm^2 większe od pola koła o promieniu $\frac{3}{5}\pi$ cm.
D. Pole kwadratu o boku 2 cm jest większe od pola koła o promieniu 1,2 cm.
E. Pole trójkąta równobocznego o boku 4 dm jest mniejsze od pola koła o promieniu 1,6 dm.

W każdym z prostokątów narysowano kilka kół. Oblicz pola figur zamalowanych na niebiesko, korzystając z informacji zamieszczonych na rysunkach.

a)

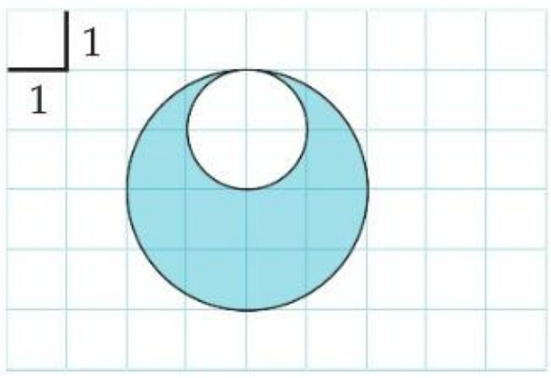


b)

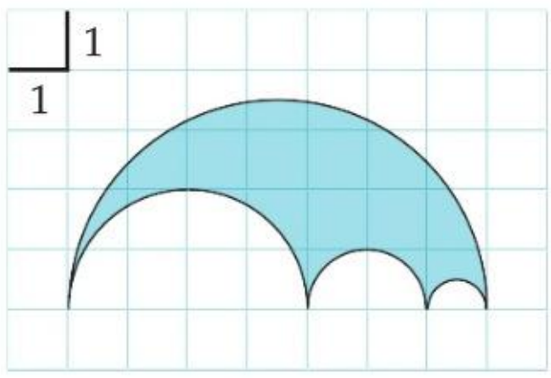


Przyjmując, że pole jednej kratki jest równe 1, oblicz pola figur zamalowanych na niebiesko.

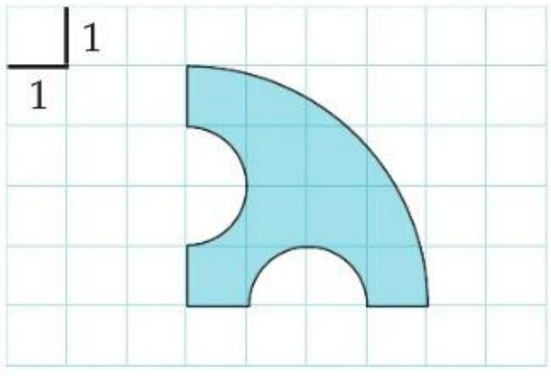
a)



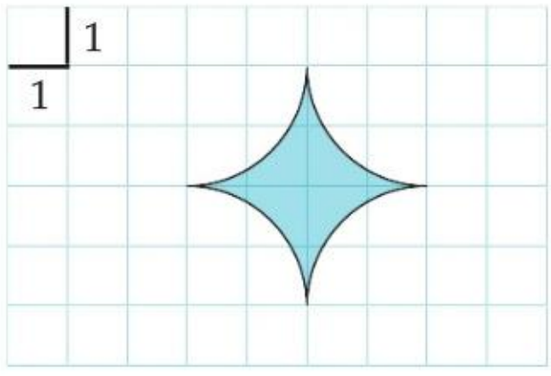
b)



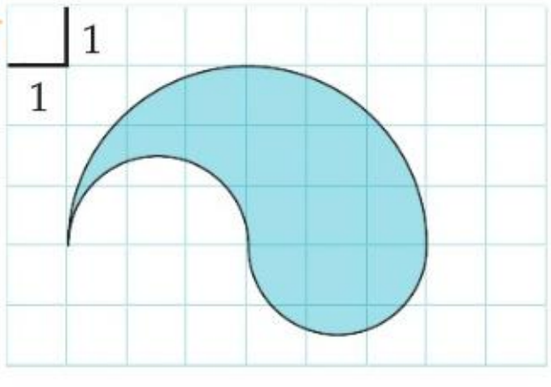
c)



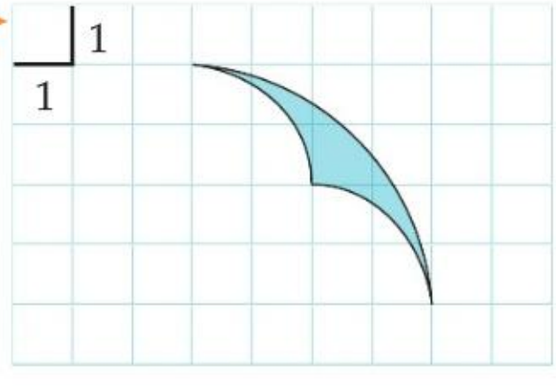
d)









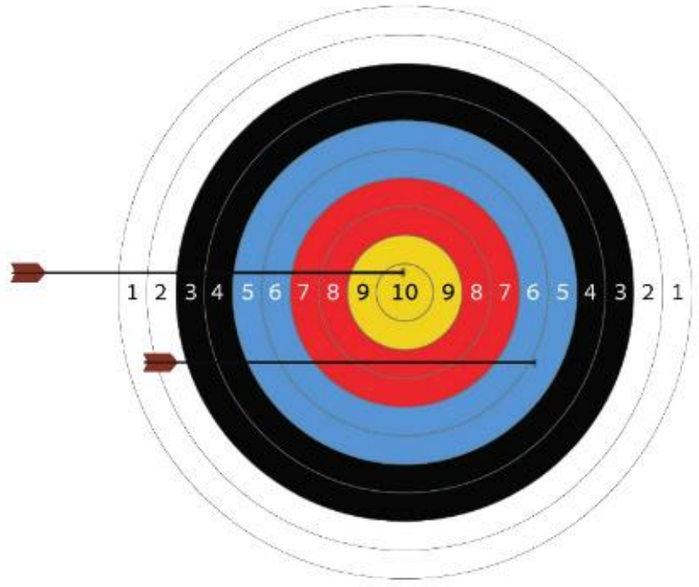


6.4 Pierścień kołowy

Podejmij temat

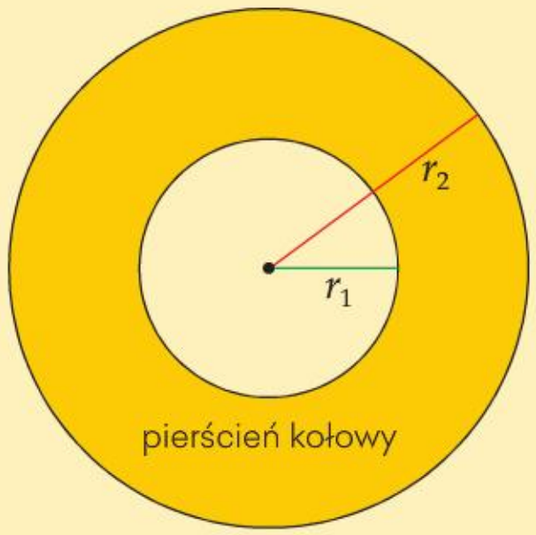
Tarcza łucznicza składa się z 10 pól w pięciu kolorach: złotym (numery 10 i 9), czerwonym (numery 8 i 7), niebieskim (numery 6 i 5), czarnym (numery 4 i 3), białym (numery 2 i 1). Średnica tarczy ma 80 cm.





Jaki promień ma koło z numerem 10?
Jaki promień ma koło w kolorze złotym?
Jaki promień ma koło składające się z pól w kolorach złotym, czerwonym i niebieskim?
Ile razy pole koła z numerami: 8, 9 i 10 jest większe od pola koła z numerem 10?
Ile razy pole koła, składające się z pól w kolorach czerwonym i złotym, jest większe od pola koła w kolorze złotym?

Dwa koła o wspólnym środku i różnych promieniach wyznaczają figurę zwaną **pierścieniem kołowym**.



Obliczmy pole pierścienia kołowego. Przyjmijmy, że większe koło ma promień r_2, a mniejsze r_1 $(r_1 < r_2)$. Pole P pierścienia kołowego jest równe różnicy pola P_2 koła o promieniu r_2 i pola P_1 koła o promieniu r_1.

$P = P_2 - P_1$

$P_1 = \pi r_1^2, P_2 = \pi r_2^2$

$P = \pi r_2^2 - \pi r_1^2$

$P = \pi(r_2^2 - r_1^2)$

Pole pierścienia kołowego, wyznaczonego przez dwa koła o promieniach r_1 i r_2, gdzie $r_1 < r_2$, można obliczyć ze wzoru:

$$P = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

Ciekawe!



W latach 70. XX wieku zbudowano w Moskwie cylindryczny, 9-piętrowy budynek mieszkalny (później powstał drugi). Średnica konstrukcji wynosi ok. 150 m. Budynek ma 26 wejść, 913 mieszkań i 6 dużych łuków prowadzących na dziedziniec. Ze względu na swój kształt nazywany jest Bublikiem (*bublik* to po ros. bajgiel).

Przykład 1

Obliczmy pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez dwa koła o obwodach równych 8 cm i 6 cm.

$L_2 = 8$ cm $\qquad L_1 = 6$ cm

Obliczamy promień każdego z kół, korzystając ze wzoru: $L = 2\pi r$

$8 = 2\pi r_2 \mid : 2\pi$ $\qquad 6 = 2\pi r_1 \mid : 2\pi$

$\frac{8}{2\pi} = r_2$ $\qquad \frac{6}{2\pi} = r_1$

$r_2 = \frac{4}{\pi}$ $\qquad r_1 = \frac{3}{\pi}$

Obliczamy pole pierścienia kołowego, korzystając ze wzoru: $P = \pi(r_2^2 - r_1^2)$

$P = \pi\left(\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^2\right) = \pi\left(\frac{16}{\pi^2} - \frac{9}{\pi^2}\right)$

$P = \pi \cdot \frac{7}{\pi^2}$

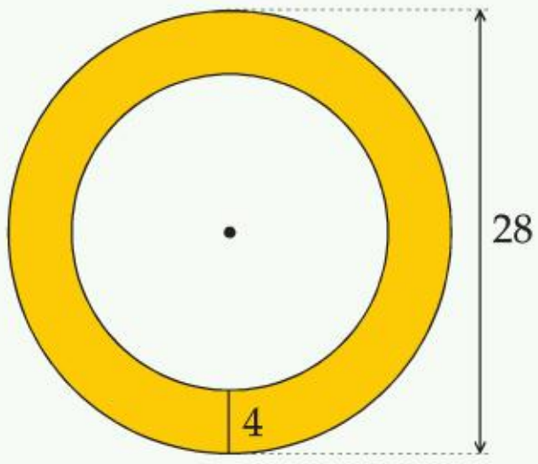
$P = \frac{7}{\pi}$

Pole pierścienia kołowego jest równe $\frac{7}{\pi}$ cm².

1. Oblicz pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez dwa koła o obwodach równych odpowiednio 15π m i 10π m.

Przykład 2

Obliczmy pole pierścienia kołowego, korzystając z danych zamieszczonych na rysunku.



$d_2 = 28$ – średnica dużego koła

$2r_2 = 28 \mid : 2$ Obliczamy promień r_2 dużego koła, korzystając ze wzoru: $d = 2r$

$r_2 = 14$

$r_1 = 14 - 4$ Obliczamy promień r_1 małego koła.

$r_1 = 10$

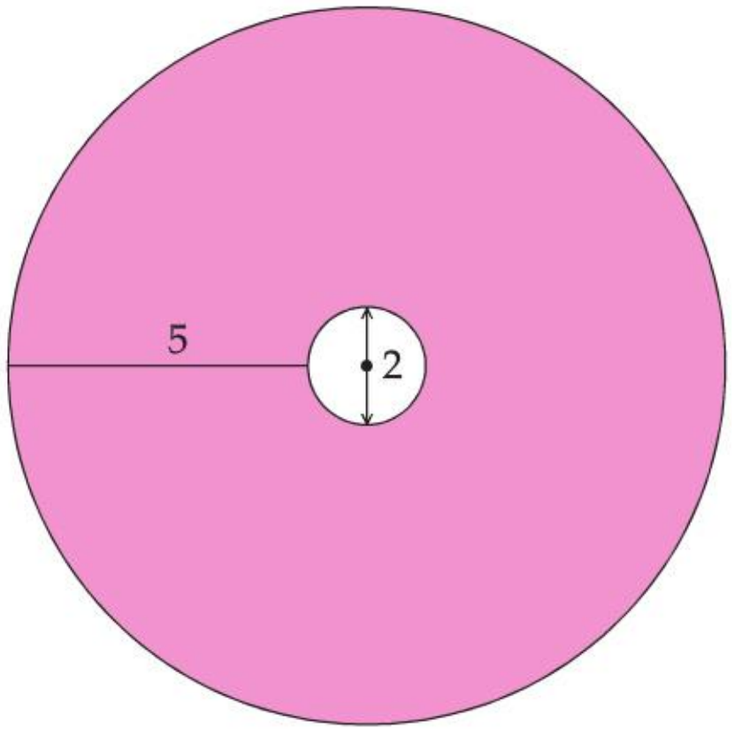
$P = \pi(14^2 - 10^2)$ Obliczamy pole pierścienia kołowego, korzystając ze wzoru: $P = \pi(r_2^2 - r_1^2)$

$P = \pi(196 - 100)$

$P = 96\pi$

Pole pierścienia kołowego jest równe 96π.

2. Oblicz pole pierścienia kołowego, korzystając z danych zamieszczonych na rysunku.



Przykład 3

Koła o wspólnym środku oraz o promieniach odpowiednio równych 10 i r_2 $(10 < r_2)$ wyznaczają pierścień kołowy, którego pole jest trzy razy większe od pola koła o promieniu 10. Obliczmy długość promienia r_2.

Wprowadźmy oznaczenia:

P_1 – pole koła o promieniu 10
P_2 – pole koła o promieniu r_2
P – pole pierścienia kołowego

$P = 3P_1$ Pole pierścienia kołowego jest trzy razy większe od pola koła o promieniu 10.

$P = 3 \cdot \pi \cdot 10^2$
$P = 300\pi$
$P = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ Korzystamy ze wzoru na pole pierścienia kołowego.
$P = \pi(r_2^2 - 10^2)$
$P = \pi(r_2^2 - 100)$

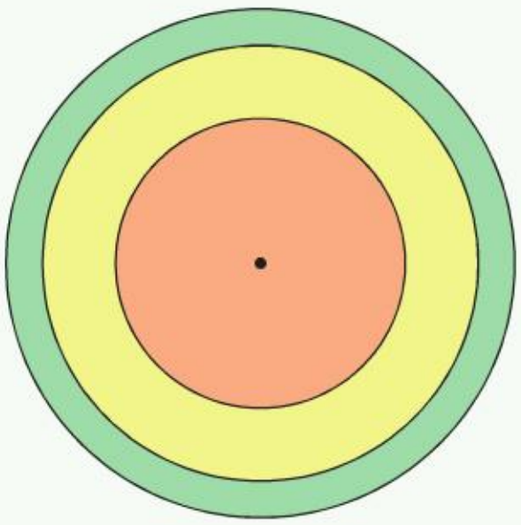
$\pi(r_2^2 - 100) = 300\pi \mid : \pi$ Układamy i rozwiązujemy równanie.
$r_2^2 - 100 = 300$
$r_2^2 = 400$
$r_2 = \sqrt{400}$
$r_2 = 20$

Długość promienia r_2 jest równa 20.

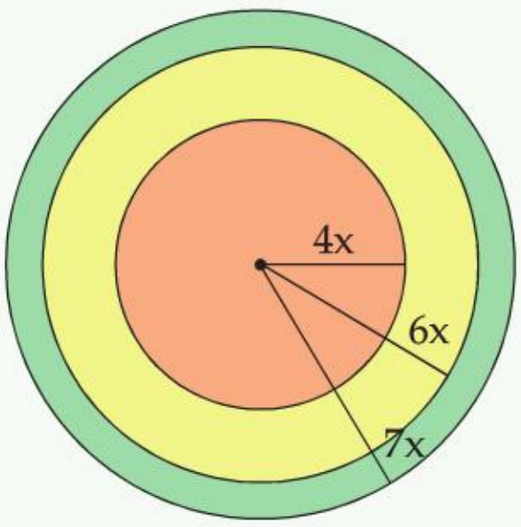
3. Pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez koła o promieniach odpowiednio równych r_1 i 12 $(r_1 < 12)$ jest równe $\frac{7}{16}$ pola koła o promieniu 12. Oblicz długość promienia r_1.

Przykład 4

Dwa pierścienie kołowe, zaznaczone na rysunku kolorami żółtym i zielonym, zostały wyznaczone przez trzy okręgi o wspólnym środku. Stosunek długości promieni tych okręgów jest równy 4 : 6 : 7. Obliczmy stosunek pola pierścienia zaznaczonego na zielono do pola pierścienia zaznaczonego na żółto.



Wprowadźmy oznaczenia, takie jak na rysunku, gdzie $x > 0$.



Korzystamy ze wzoru na pole pierścienia kołowego:
$P = \pi(r_2^2 - r_1^2)$

$P_1 = \pi((7x)^2 - (6x)^2)$ — Obliczamy pole pierścienia kołowego zaznaczonego na zielono.

$P_1 = \pi(7^2x^2 - 6^2x^2)$ — Korzystamy z własności potęg.

$P_1 = \pi(49x^2 - 36x^2)$ — Dokonujemy redukcji wyrazów podobnych występujących w nawiasie.

$P_1 = \pi \cdot 13x^2$
$P_1 = 13x^2\pi$

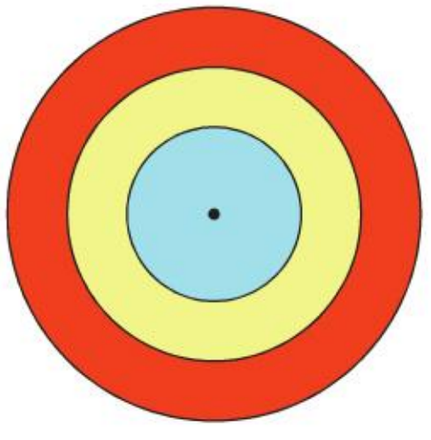
$P_2 = \pi((6x)^2 - (4x)^2)$ — Obliczamy pole pierścienia kołowego zaznaczonego na żółto.
$P_2 = \pi(6^2x^2 - 4^2x^2)$
$P_2 = \pi(36x^2 - 16x^2)$
$P_2 = \pi \cdot 20x^2$
$P_2 = 20x^2\pi$

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{13x^2\pi}{20x^2\pi}$ — Obliczamy stosunek pól obu pierścieni kołowych. Skracamy ułamek, dzieląc licznik i mianownik przez $x^2\pi$.

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{13}{20}$

Stosunek pola pierścienia zaznaczonego na zielono do pola pierścienia zaznaczonego na żółto jest równy 13 : 20.

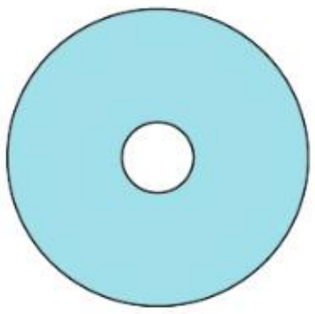
4. Dwa pierścienie kołowe, zaznaczone na rysunku kolorami żółtym i czerwonym, zostały wyznaczone przez trzy okręgi o wspólnym środku. Promienie tych okręgów są odpowiednio równe: 3 cm, 5 cm, 7 cm. Oblicz stosunek pola pierścienia zaznaczonego na żółto do pola pierścienia zaznaczonego na czerwono.



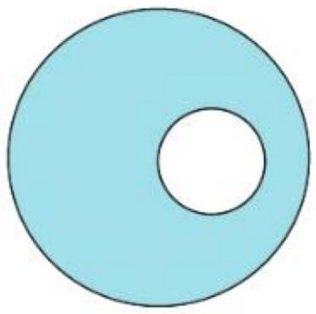
Zadania

Wśród podanych rysunków wskaż te, na których przedstawiono pierścień kołowy.

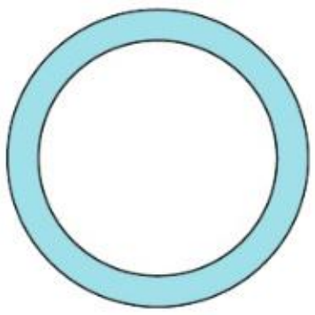
I.



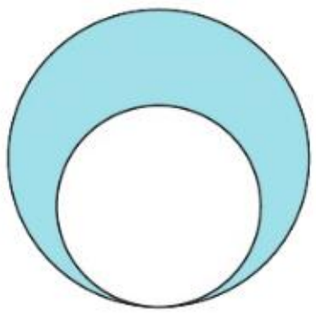
II.



III.



IV.

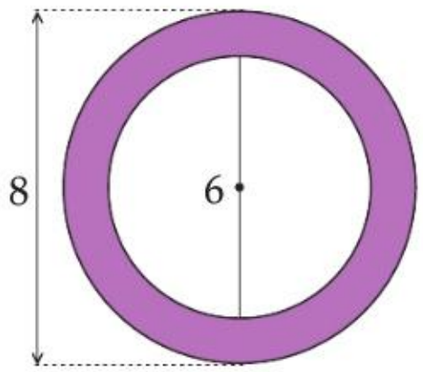


Oblicz pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez dwa koła o wspólnym środku i średnicach odpowiednio równych:

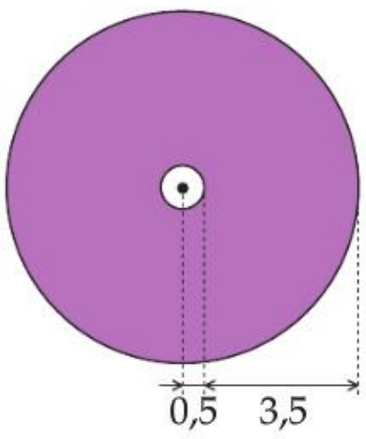
a) 20 i 14
b) 15 i 5
c) 2,4 i 1,6
d) $6\sqrt{2}$ i $2\sqrt{2}$

Oblicz pole pierścienia kołowego, korzystając z danych zamieszczonych na rysunku.

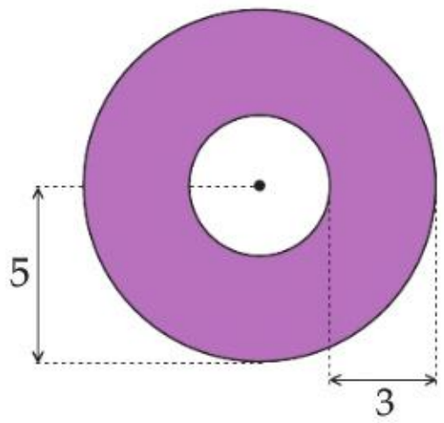
a)



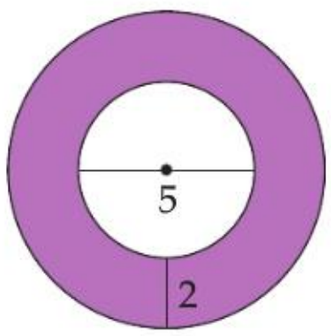
b)



c)



d)



Oblicz, ile razy pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez koła o promieniach r_1 i r_2 jest większe od pola koła o promieniu r_1, jeśli:

a) $r_1 = 5$, $r_2 = 15$
b) $r_1 = 21$, $r_2 = 42$

Oblicz stosunek pola pierścienia kołowego wyznaczonego przez koła o promieniach r_1 i r_2 do pola koła o promieniu r_2, jeśli:

a) $r_1 = 7$, $r_2 = 14$
b) $r_1 = 12$, $r_2 = 20$

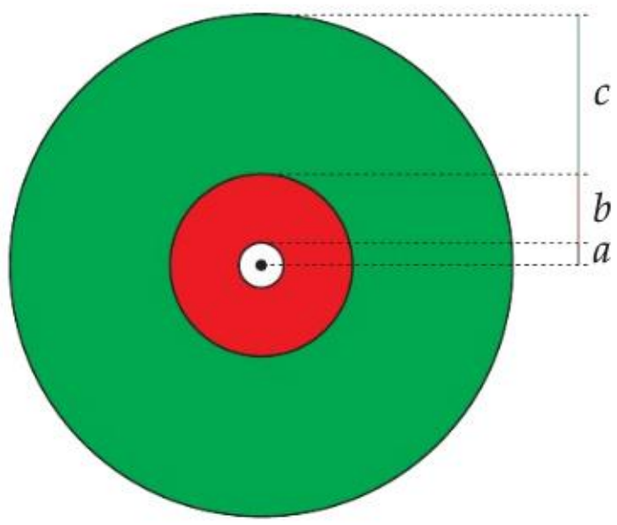
Pierścień kołowy wyznaczony jest przez dwa koła o promieniach r_1 i r_2. Oblicz, ile razy pole tego pierścienia kołowego jest większe od pola koła o promieniu r_1, jeśli $r_2 = 2r_1$.

Pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez koła – mniejsze o promieniu 5 dm i większe o promieniu r_2 – jest 15 razy większe od pola koła o promieniu 5 dm. Oblicz długość promienia r_2.

Pierścień kołowy wyznaczony jest przez dwa koła – mniejsze o promieniu 6,5 cm i większe o promieniu r_2. Pole pierścienia kołowego jest o $3{,}5\pi$ cm^2 mniejsze od pola koła o promieniu 6,5 cm. Oblicz długość promienia r_2.

Koła o wspólnym środku i promieniach równych r_1 i r_2 $(r_1 < r_2)$ wyznaczają pierścień kołowy, którego pole jest równe połowie pola koła o promieniu r_2. Oblicz długość promienia r_1, jeśli wiadomo, że obwód koła o promieniu r_2 jest równy $10\sqrt{2}\pi$.

Dwa pierścienie kołowe, zaznaczone na rysunku kolorami czerwonym i zielonym, zostały wyznaczone przez trzy okręgi o wspólnym środku i promieniach równych r_1, r_2 i r_3 $(r_1 < r_2 < r_3)$. Oblicz, ile razy pole pierścienia zaznaczonego na zielono jest większe od pola pierścienia zaznaczonego na czerwono, jeśli $a : b : c = 1 : 3 : 7$.



6.5 Okrąg, koło i pierścień kołowy – zadania z kontekstem realistycznym

Podejmij temat



A ty jak sądzisz? Czy dziewczynce wystarczy 1,5 m koronki do obszycia mniejszej serwety? Większa serweta ma 70 cm średnicy. Ile najmniej centymetrów koronki trzeba kupić, aby obszyć brzeg tej serwety?

W życiu codziennym zazwyczaj podajemy przybliżoną wartość obwodu lub pola przedmiotu w kształcie koła. W obliczeniach zazwyczaj przyjmujemy, że $\pi \approx 3{,}14$.

Przykład 1

Obliczmy w przybliżeniu do 1 cm długość drogi, jaką pokona w ciągu jednego obrotu koło rowerowe o średnicy 29 cali.
Przyjmijmy, że 1 cal $\approx$ 2,54 cm oraz $\pi \approx 3{,}14$.

Droga, jaką pokonuje koło w trakcie jednego obrotu, jest równa obwodowi tego koła.

$d = 29 \text{ cali} \approx 29 \cdot 2{,}54 \text{ cm} = 73{,}66 \text{ cm}$

$L \approx 73{,}66\pi$ Korzystamy ze wzoru: $L = \pi d$
$L \approx 73{,}66 \cdot 3{,}14$
$L \approx 231{,}2924$
$L \approx 231$

W trakcie jednego obrotu koło rowerowe o średnicy 29 cali pokona około 231 cm.

1. Oblicz w przybliżeniu do 1 cm długość drogi, jaką pokona w ciągu jednego obrotu koło rowerowe o średnicy 27,5 cali. Przyjmij, że 1 cal $\approx$ 2,54 cm oraz $\pi \approx 3{,}14$.

Przykład 2

Sprawdźmy, czy serwetę w kształcie koła o obwodzie 3 m można tak położyć na stole, którego blat ma kształt kwadratu o boku 1 m, aby żaden fragment serwety nie zwisał z blatu tego stołu.

Serwetę będzie można położyć na stole tak, aby żaden jej fragment nie zwisał z blatu stołu, jeżeli średnica serwety będzie mniejsza od długości boku blatu stołu.

Z tekstu zadania wiemy, że $L = 3$ m.

Średnicę serwety obliczymy, korzystając ze wzoru: $L = \pi d$

$\pi d = 3 \mid : \pi$ Obie strony równania dzielimy przez π.

$d = \frac{3}{\pi}$ $\pi > 3$

$\frac{3}{\pi} < 1$

$d < 1$ Średnica serwety jest mniejsza od 1 m.

Serwetę w kształcie koła o obwodzie 3 m można tak położyć na kwadratowym stole o boku 1 m, aby żaden jej fragment nie zwisał z blatu stołu.

2. Sprawdź, czy promień zakrętki słoika o obwodzie 20 cm jest większy od 3 cm.

Przykład 3

Szyba w oknie ma kształt koła o średnicy 1,6 m. Obliczmy, ile metrów kwadratowych, w przybliżeniu do całości, ma pole powierzchni tej szyby. Przyjmijmy, że $\pi \approx 3{,}14$.

$2r = d$ Obliczamy promień.

$2r = 1{,}6$

$r = 0{,}8$

$P = \pi \cdot 0{,}8^2$ Obliczamy pole powierzchni szyby.

$P = \pi \cdot 0{,}64$

$P \approx 3{,}14 \cdot 0{,}64$

$P \approx 2{,}0096$

Pole szyby w oknie w kształcie koła o średnicy 1,6 m w przybliżeniu do całości wynosi 2 m^2.

3. Patera ma kształt koła o średnicy 30 cm. Oblicz z dokładnością do części setnych, ile metrów kwadratowych ma pole powierzchni tej patery. Przyjmij, że $\pi \approx 3{,}14$.

Przykład 4

W pewnej pizzerii sprzedawane są dwa rodzaje pizzy: mała o średnicy 30 cm i duża o średnicy 45 cm. Obliczmy, ile razy pole powierzchni dużej pizzy jest większe od pola powierzchni małej pizzy.

Oznaczmy:
r_m – promień małej pizzy
P_m – pole powierzchni małej pizzy

Obliczamy promień małej pizzy.
$2r_m = 30$
$r_m = 15$

Obliczamy pole powierzchni małej pizzy.
$P_m = \pi \cdot 15^2$
$P_m = 225\pi$

r_d – promień dużej pizzy
P_d – pole powierzchni dużej pizzy

Obliczamy promień dużej pizzy.
$2r_d = 45$
$r_d = 22{,}5$

Obliczamy pole powierzchni dużej pizzy.
$P_d = \pi \cdot 22{,}5^2$
$P_d = 506{,}25\pi$

Obliczamy iloraz pól powierzchni.
$\frac{P_d}{P_m} = \frac{506{,}25\pi}{225\pi}$
$\frac{P_d}{P_m} = 2{,}25$

Pole powierzchni dużej pizzy jest 2,25 razy większe od pola powierzchni małej pizzy.

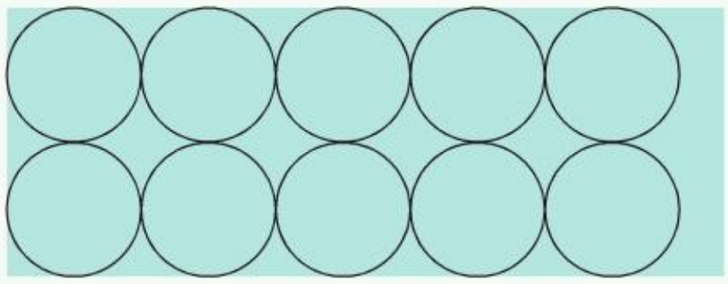
4. Oblicz, ile razy pole powierzchni dna patelni o średnicy 28 cm jest większe od pola powierzchni dna patelni o średnicy 20 cm.

Przykład 5

Z prostokątnej kartki o wymiarach 30 cm × 80 cm należy wyciąć możliwie największą liczbę jednakowych kół o promieniu 7,5 cm. Obliczmy z dokładnością do części dziesiątych, ile procent pola powierzchni kartki będzie stanowić pole powierzchni ścinków.

Sporządźmy rysunek pomocniczy.

Średnica koła jest równa 15 cm.
Z tej kartki możemy wyciąć maksymalnie 10 kół.



P_p – pole prostokąta
P_k – pole powierzchni jednego koła

$P_p = 30 \cdot 80 = 2400$ Obliczamy pole powierzchni prostokątnej kartki.

$P_k = \pi \cdot 7{,}5^2 = 56{,}25\pi$ Obliczamy pole powierzchni jednego koła.

$10P_k = 562{,}5\pi$ Obliczamy pole powierzchni 10 kół.

$10P_k \approx 562{,}5 \cdot 3{,}14$ — Obliczamy, ile w przybliżeniu centymetrów kwadratowych jest równe pole 10 kół, przyjmując, że $\pi \approx 3{,}14$.

$10P_k \approx 1766{,}25$

$P_s = P_p - P_k$ — Obliczamy pole powierzchni ścinków.

$P_s \approx 2400 - 1766{,}25$

$P_s \approx 633{,}75$

$\frac{P_s}{P_p} \cdot 100\% \approx \frac{633{,}75}{2400} \cdot 100\%$ — Obliczamy, jakim w przybliżeniu procentem pola powierzchni kartki jest pole powierzchni ścinków.

$\frac{P_s}{P_p} \cdot 100\% \approx 26{,}4\%$

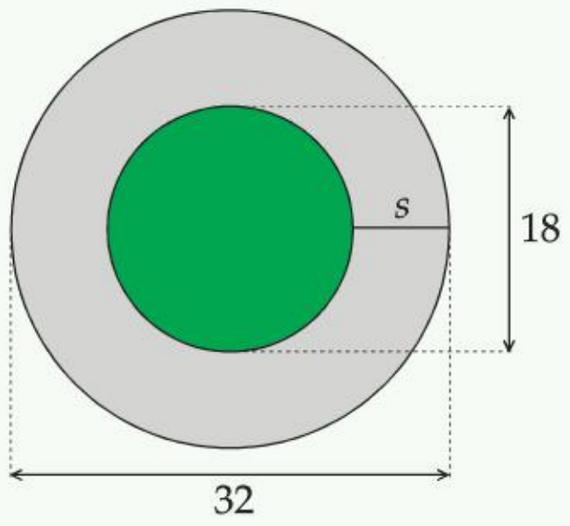
Pole powierzchni ścinków stanowi około 26,4% pola powierzchni kartki.

5. Z kwadratowej kartki o boku 50 cm należy wyciąć możliwie największą liczbę jednakowych kół o promieniu 5 cm. Oblicz z dokładnością do części setnych, o ile centymetrów kwadratowych pole wyciętych kół będzie większe od pola ścinków.

Przykład 6

Na środku ronda o średnicy zewnętrznej równej 32 m jest wyspa środkowa o średnicy 18 metrów. Obliczmy szerokość jezdni i pole pasa ruchu na tym rondzie.

r_r – promień ronda
r_w – promień wyspy



$r_r = \frac{32}{2}$ — Obliczamy promień ronda.

$r_r = 16$

$r_w = \frac{18}{2}$ — Obliczamy promień wyspy.

$r_w = 9$

$s = r_r - r_w$ — Obliczamy szerokość jezdni.

$s = 16 - 9$

$s = 7$

$P = \pi(16^2 - 9^2)$ — Obliczamy pole pasa ruchu na rondzie, korzystając ze wzoru na pole pierścienia kołowego.

$P = \pi(256 - 81)$

$P = 175\pi$

$P \approx 175 \cdot 3{,}14$ — Przyjmujemy, że $\pi \approx 3{,}14$.

$P \approx 549{,}5$

Szerokość jezdni jest równa 7 m, a pole powierzchni pasa ruchu na tym rondzie wynosi ok. 549,5 m^2.

6. Oblicz szerokość i pole powierzchni ramy lustra w kształcie koła, jeżeli średnica zewnętrzna ramy jest równa 1,2 m, a średnica szkła lustra jest równa 1,1 m.

Zadania

Oblicz, o ile centymetrów więcej ozdobnej taśmy potrzeba do obszycia brzegu obrusu w kształcie koła o średnicy 1,2 m niż do obszycia brzegu serwety w kształcie koła o promieniu 35 cm. Przyjmij, że $\pi \approx 3{,}14$.

Czy 1,2 m drutu wystarczy do zrobienia:

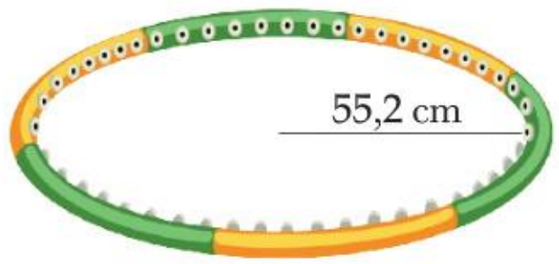
a) jednej obręczy w kształcie okręgu o promieniu 20 cm,
b) dwóch obręczy w kształcie okręgu o promieniu 9,5 cm,
c) pięciu obręczy w kształcie okręgu o średnicy 7,5 cm?

Rabatę w kształcie koła o promieniu 3,65 m należy ogrodzić ozdobnym płotkiem. Płotki sprzedawane są w opakowaniach. Jedno opakowanie w cenie 27 zł zawiera 2,3 metra bieżącego płotka. Oblicz koszt zakupu płotka potrzebnego do ogrodzenia tej rabaty. Przyjmij, że $\pi \approx 3{,}14$.

Ciekawe!

Światowy Dzień Hula-Hoop to czas, kiedy hooperki i hoopiści z całego świata nagrywają specjalne choreografie. Pierwszy World Hoop Day odbył się 7 lipca 2007 r.

Do hula-hoop o promieniu 55,2 cm przymocowanych jest w równych odstępach 48 kulek masujących. Oblicz, jaka jest długość części hula-hoop między kolejnymi dwiema kulkami masującymi. Przyjmij, że $\pi \approx 3$.

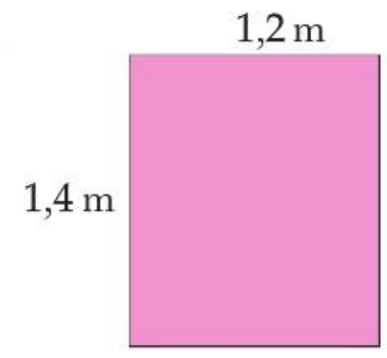


W 2011 r. jedna z londyńskich sieci sprzedaży telefonów komórkowych zdobyła rekord Guinnessa, wykonując największy i najsłodszy świąteczny przysmak – czekoladową monetę o średnicy 3,6 m.

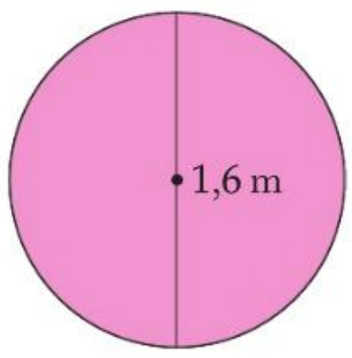
a) Oblicz z dokładnością do 0,01 m^2 pole powierzchni tej monety.
b) Ile razy pole tej monety jest większe od pola powierzchni zwykłej czekoladowej monety o średnicy 3 cm?

Na rysunkach przedstawione są trzy rodzaje obrusów – prostokątny, okrągły oraz uszyty z kwadratu i dwóch półkoli – a także ich wymiary.

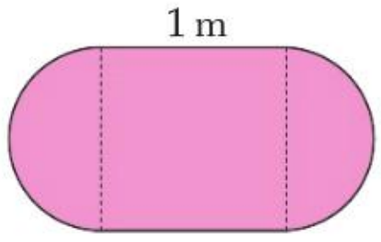
A.



B.



C.



a) Oblicz z dokładnością do części setnych pole powierzchni każdego obrusu.
b) Który z nich ma najmniejsze, a który największe pole powierzchni?
c) Czy każdym z tych obrusów można zakryć całkowicie kwadratowy blat stołu o boku 1,2 m? Odpowiedź uzasadnij.

Na ścianie powieszono dwa ozdobne lustra w kształcie kół. Promień dużego lustra jest równy 0,4 m. Promień małego lustra jest o 30% mniejszy od promienia dużego lustra. Oblicz, ile razy pole powierzchni dużego lustra jest większe od pola powierzchni małego lustra.

W pewnej pizzerii ogłoszono promocję: „Za zakup megapizzy o średnicy 48 cm otrzymasz małą pizzę o średnicy 20 cm".

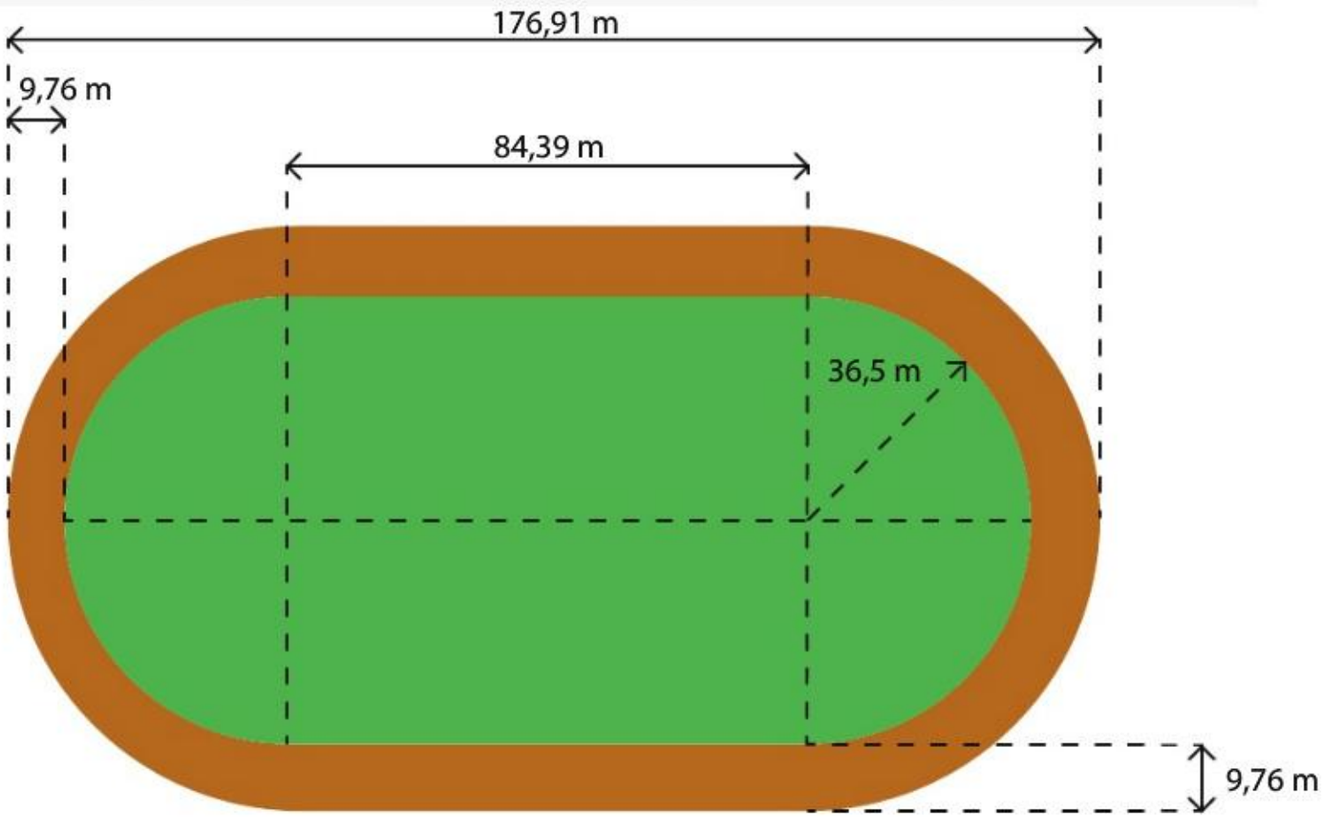
a) Oblicz stosunek pola megapizzy do pola małej pizzy.
b) Oblicz, o ile centymetrów kwadratowych pole megapizzy jest większe od pola małej pizzy. Przyjmij, że $\pi \approx 3{,}14$. Wynik podaj z dokładnością do 1 cm^2.

Tarcza zegara ma kształt koła o promieniu 20 cm. Wokół tarczy jest ozdobna ramka w kształcie pierścienia kołowego o szerokości 1 cm. Przyjmując, że $\pi \approx 3{,}14$, oblicz:

a) pole tarczy zegara,
b) pole ramki.

Na rysunku poniżej podano wymiary boiska sportowego oraz zbudowanej dookoła niego bieżni lekkoatletycznej ośmiotorowej. Każdy tor ma jednakową szerokość. Przyjmij, że $\pi \approx 3{,}14$. Do obliczeń użyj kalkulatora. Wynik zaokrąglij do całości.

a) Oblicz pole powierzchni boiska (zaznaczonego na rysunku na zielono).
b) Oblicz pole powierzchni bieżni (zaznaczonej na rysunku na brązowo).
c) Oblicz długość linii (wewnętrznej i zewnętrznej) wyznaczających granice bieżni.
d) Oblicz pole powierzchni najbardziej wewnętrznego toru.
e) Oblicz pole powierzchni najbardziej zewnętrznego toru.



Ciekawe!



Apple Park to główna siedziba firmy Apple Inc., zlokalizowana w Kalifornii w Stanach Zjednoczonych. Budynek ten to spełnienie marzeń i projekt Steve'a Jobsa. Został otwarty w kwietniu 2017 r. Budynek jest w kształcie pierścienia, ma obwód jednej mili (1,6 km) i średnicę 1512 stóp (461 m, cztery piętra nad ziemią i trzy piętra pod ziemią. Położony jest na podmiejskim terenie o łącznej powierzchni 71 hektarów.

Podsumowanie działu 6

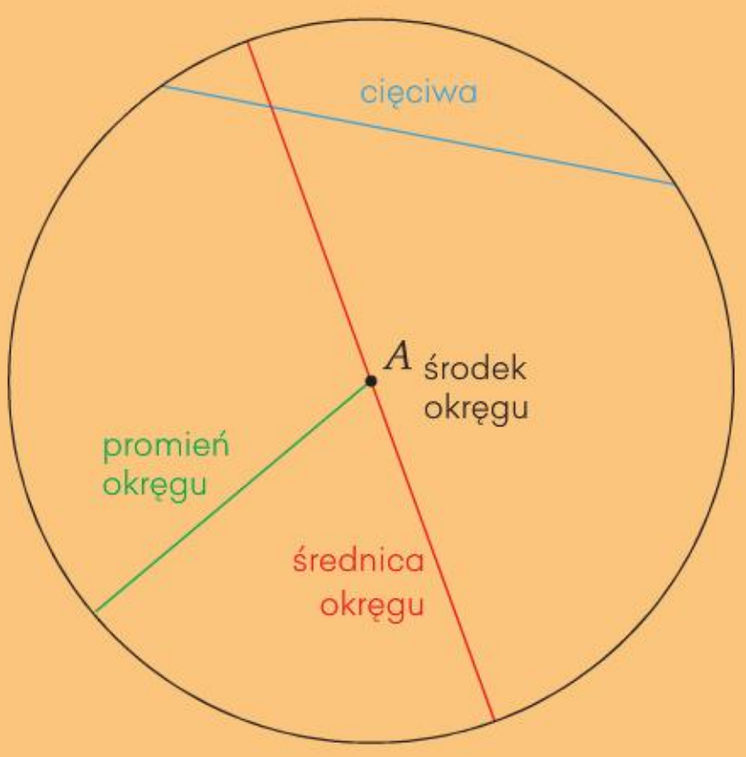
- Ważne pojęcia

styczna | punkt styczności | liczba π | długość okręgu | pole koła | pierścień kołowy

- **Okrąg** o promieniu r $(r > 0)$ to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od pewnego ustalonego punktu, zwanego środkiem okręgu, jest równa r.

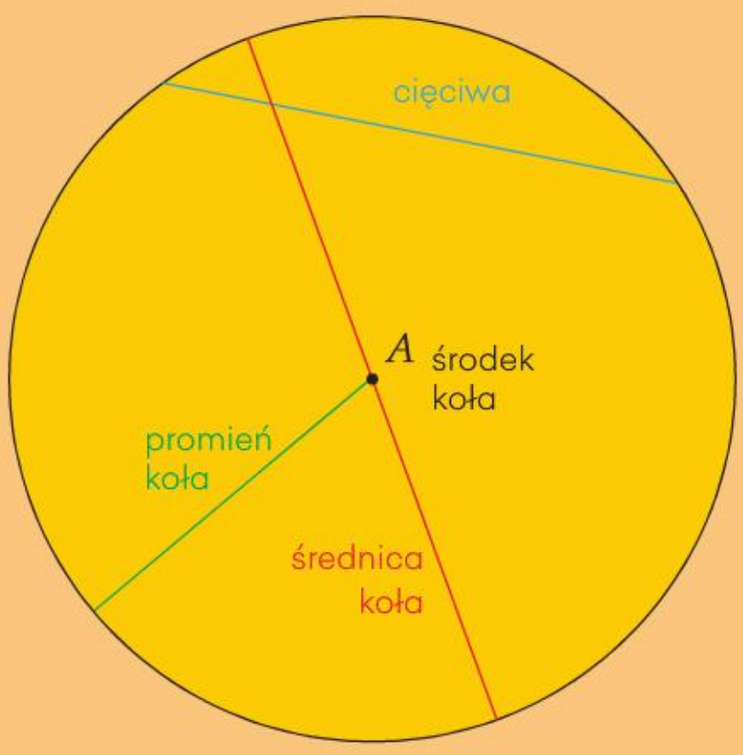
- **Koło** o promieniu r $(r > 0)$ to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od pewnego ustalonego punktu, zwanego środkiem koła, jest równa r lub mniejsza od r.

Okrąg



Środek okręgu nie należy do okręgu.

Koło



Środek koła należy do koła.

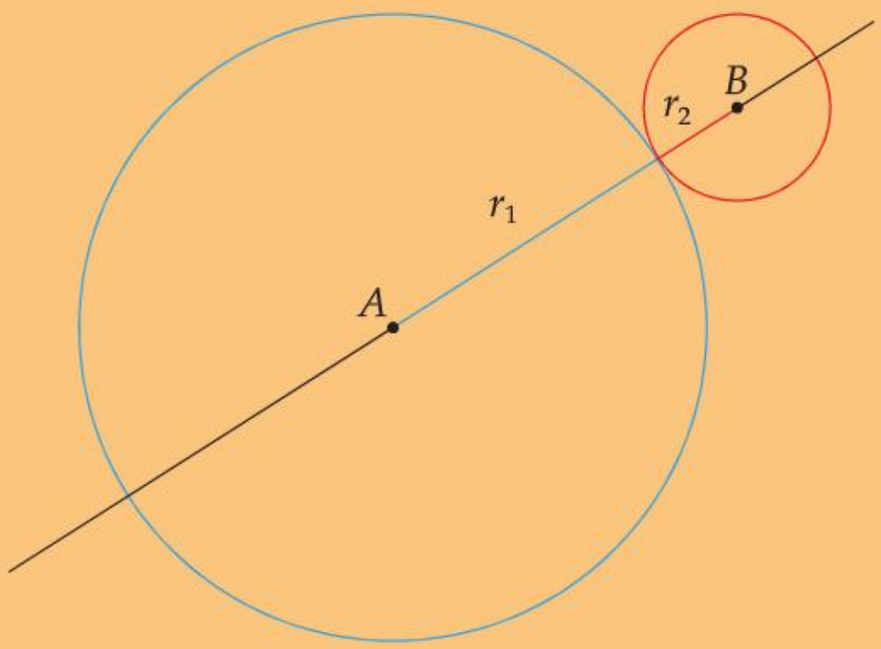
- **Środek okręgu** (**koła**) oznaczamy dowolnymi, wielkimi literami alfabetu, np. A, S, O.

- **Promień okręgu** (**koła**) to odcinek, którego jednym końcem jest środek okręgu (koła), a drugim – dowolny punkt okręgu (brzegu koła). Promień okręgu (koła) oznaczamy zwykle literą r.

- **Cięciwa** to odcinek, który łączy dwa dowolne punkty okręgu (dwa dowolne punkty brzegu koła).

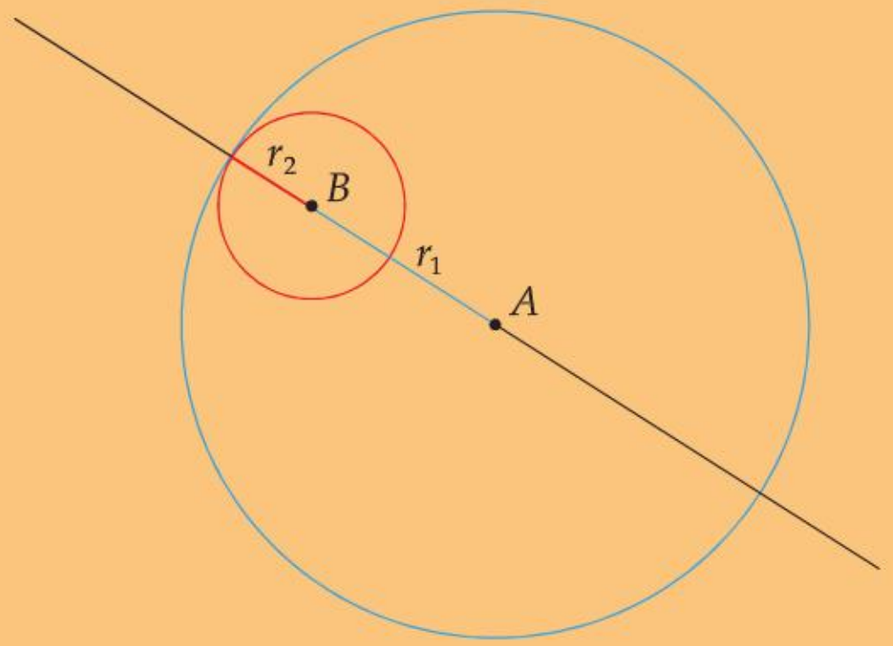
- **Średnica okręgu** (**koła**) to cięciwa, do której należy środek okręgu (środek koła). Średnica jest dwa razy dłuższa od promienia.

Wzajemne położenie dwóch okręgów.



Okręgi styczne zewnętrznie

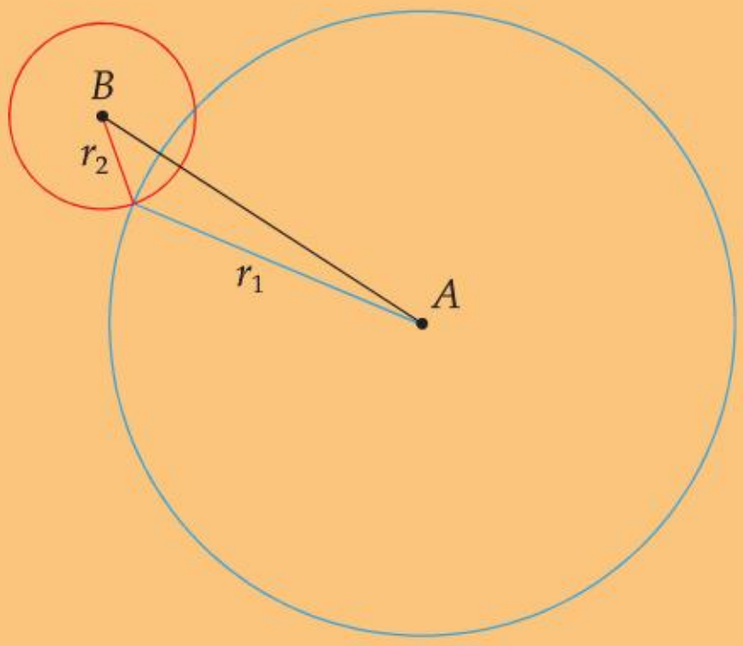
$|AB| = r_1 + r_2$

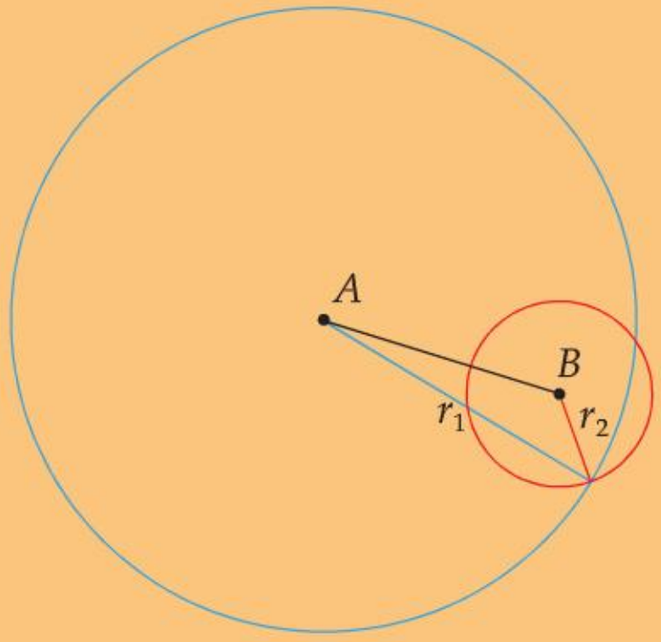


Okręgi styczne wewnętrznie

$r_1 > r_2$

$|AB| = r_1 - r_2$

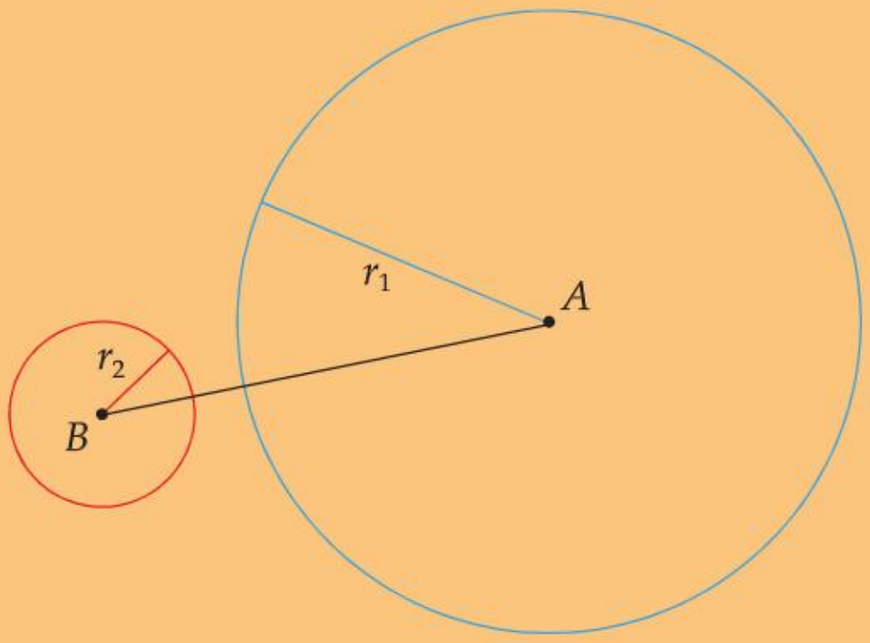




Okręgi przecinające się

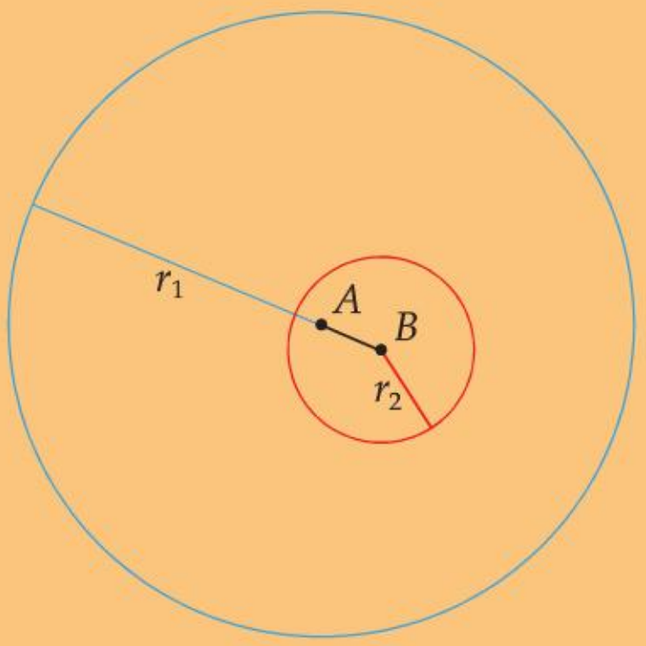
$r_1 > r_2$

$r_1 - r_2 < |AB| < r_1 + r_2$



Okręgi rozłączne zewnętrznie

$|AB| > r_1 + r_2$



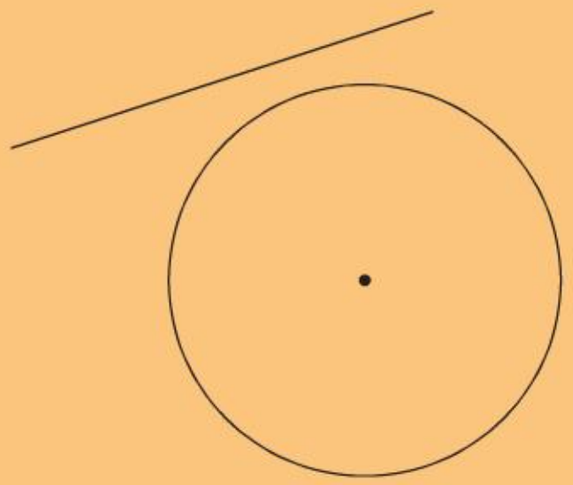
Okręgi rozłączne wewnętrznie

$r_1 > r_2$

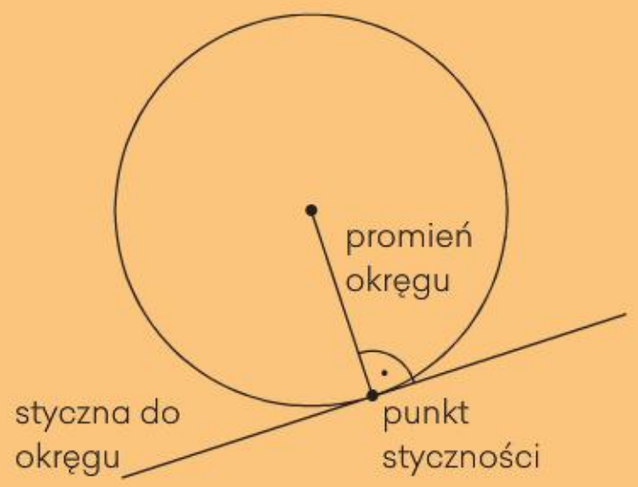
$|AB| < r_1 - r_2$

Wzajemne położenie prostej i okręgu

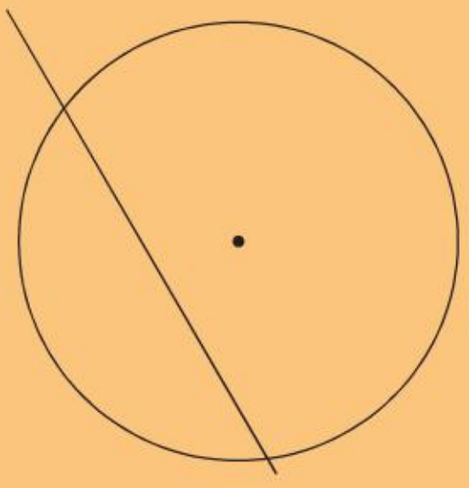
- Prosta nie ma z okręgiem punktów wspólnych.



- Prosta ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny.
  Prostą, która ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną** do okręgu. Ten punkt nazywamy **punktem styczności**. Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.



- Prosta ma z okręgiem dwa punkty wspólne.
  Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy **sieczną**.



Stosunek długości okręgu do długości średnicy tego okręgu jest równy **liczbie pi**, którą oznaczamy grecką literą **π**.

$$\pi = \frac{\text{długość okręgu}}{\text{długość średnicy okręgu}}$$

Liczba π nie jest liczbą wymierną. Jej rozwinięcie jest nieskończone i nieokresowe.

$\pi \approx 3{,}14$ $\qquad$ $\pi \approx \frac{22}{7}$

Długość okręgu można obliczyć ze wzorów:

$L = 2\pi r$; r – promień okręgu
$L = \pi d$; d – średnica okręgu

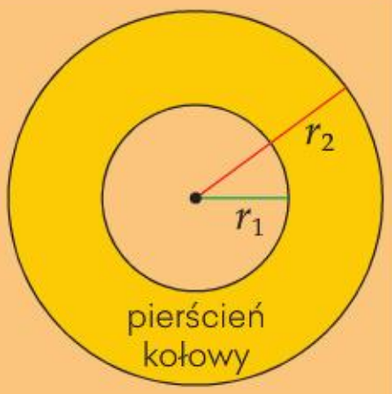
Pole koła można obliczyć ze wzoru:

$P = \pi r^2$; r – promień koła

Pierścieniem kołowym nazywamy figurę wyznaczoną przez dwa koła o wspólnym środku i różnych promieniach.

Pole pierścienia kołowego, wyznaczonego przez dwa koła o promieniach r_1 i r_2, gdzie $r_1 < r_2$, można obliczyć ze wzoru:

$P = \pi(r_2^2 - r_1^2)$



Czy już umiesz?

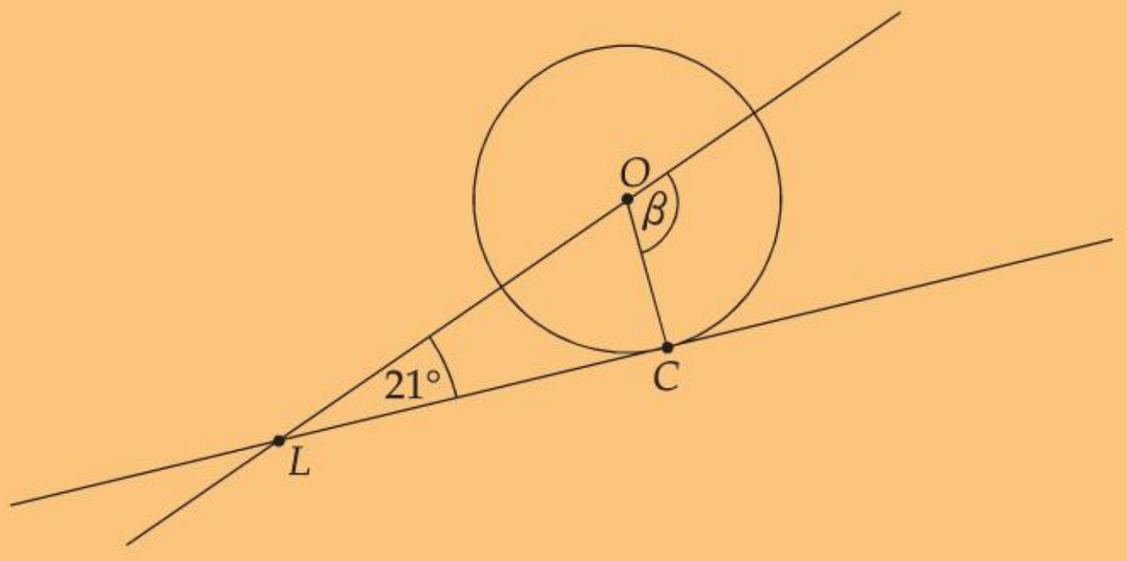
1 Odległość między środkiem okręgu o promieniu 9 cm a środkiem okręgu o promieniu 3 cm jest równa 6 cm. Oznacza to, że te okręgi

A. są rozłączne.
B. są styczne zewnętrznie.
C. mają dwa punkty wspólne.
D. są styczne wewnętrznie.

2 Punkt C jest punktem styczności prostej LC i okręgu o środku w punkcie O.

Kąt β ma miarę

A. 69°
B. 101°
C. 109°
D. 111°



3 Punkt E jest punktem styczności okręgu o środku w punkcie S i prostej EF, $|ES| = 8$ i $|EF| = 15$. Obwód trójkąta ESF jest równy

A. 38
B. 40
C. 48
D. 60

4 Spośród poniższych zdań wybierz zdanie **fałszywe**.

A. Liczba π jest równa ilorazowi długości okręgu i długości średnicy tego okręgu.
B. Liczba π jest w przybliżeniu równa 3,1.
C. Rozwinięcie liczby π jest nieskończone i okresowe.
D. Liczba $\sqrt{7}$ jest mniejsza od liczby π.

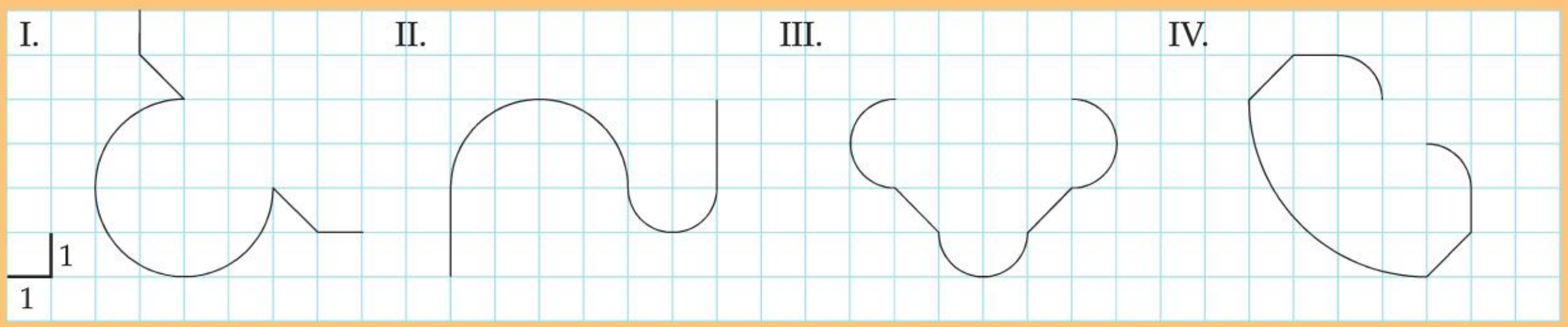
5 Spośród podanych ułamków wybierz ten, który jest najbardziej dokładnym przybliżeniem liczby π.

A. $\frac{25}{8}$
B. $\frac{34}{11}$
C. $\frac{135}{43}$
D. $\frac{340}{108}$

6 Długość okręgu jest równa $\sqrt{5}\pi$. Promień tego okręgu jest równy

A. 5
B. $2\sqrt{5}$
C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
D. 25

7 Które linie mają tę samą długość? Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.



A. I i III
B. I i IV
C. II i III
D. II i IV

8 Koło o średnicy 14 cm ma

A. obwód równy 14π cm i pole równe 49π cm^2.
B. obwód równy 49π cm i pole równe 14π cm^2.
C. obwód równy 28π cm i pole równe 196π cm^2.
D. obwód równy 28π cm i pole równe 392π cm^2.

9 Jeżeli promień koła zwiększymy o 40%, to jego pole zwiększy się

A. 0,16 razy.
B. 0,36 razy.
C. 1,96 razy.
D. 16 razy.

10 Różnica pola koła o promieniu 10 cm i pola koła o promieniu 8 cm jest równa polu koła o promieniu

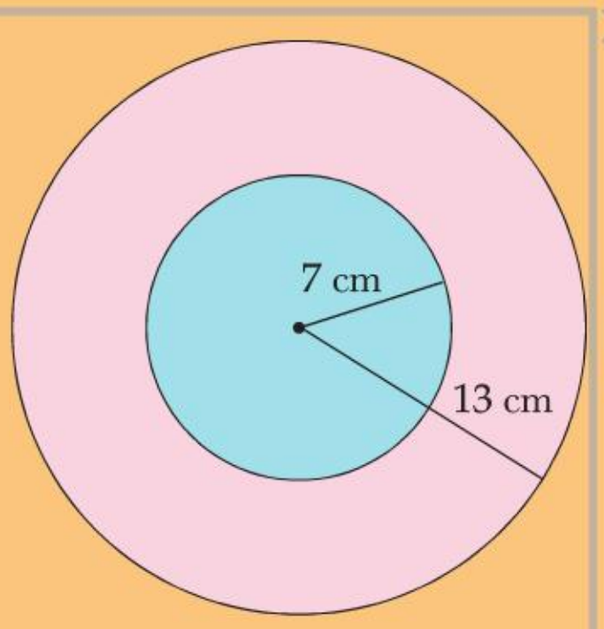
A. 2 cm
B. 4 cm
C. 6 cm
D. 8 cm

11 Suma obwodu koła o promieniu 5 mm i obwodu koła o promieniu 15 mm jest równa obwodowi koła, którego pole jest równe

A. 40π mm^2
B. 40π cm^2
C. 4π cm^2
D. 4π dm^2

12 Promień mniejszego z kół jest równy 7 cm, a większego 13 cm. Pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez te koła jest równe

A. 44 cm^2
B. 36π cm^2
C. 144 cm^2
D. 120π cm^2



13 Dwa koła o tym samym środku i promieniach odpowiednio równych 9 i r $(r > 9)$ wyznaczają pierścień kołowy, którego pole jest równe 40π. Promień r jest równy

A. 11
B. 20,5
C. 29
D. 41

14 W trakcie nauki konnej jazdy koń był prowadzony po okręgu na napiętej lonży (linie) o długości 6 m. Ile metrów pokonał koń, jeżeli wykonał 25 okrążeń?

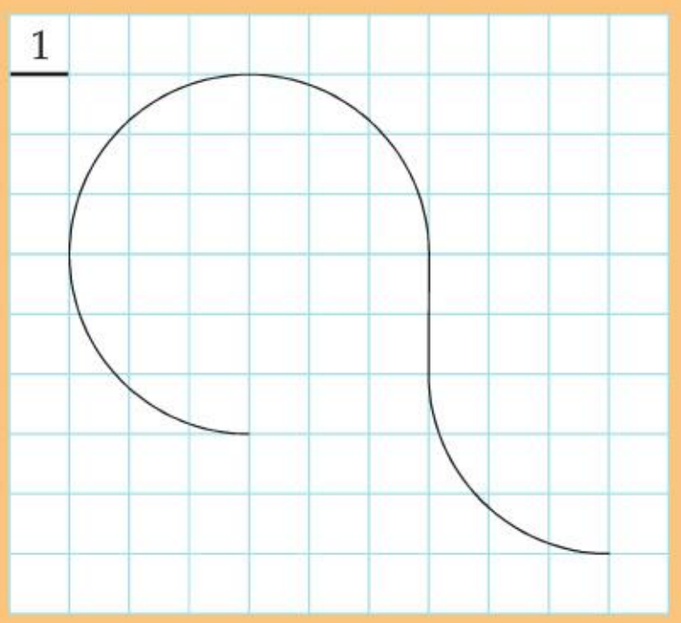
A. nie więcej niż 471 m
B. więcej niż 471 m, ale nie więcej niż 899 m
C. więcej niż 899 m, ale nie więcej niż 960 m
D. więcej niż 960 m

15 Pole powierzchni rabaty w kształcie koła jest równe 2 ary. Ile jest równa średnica tej rabaty? Przyjmij, że $\sqrt{\pi} \approx 1{,}77$.

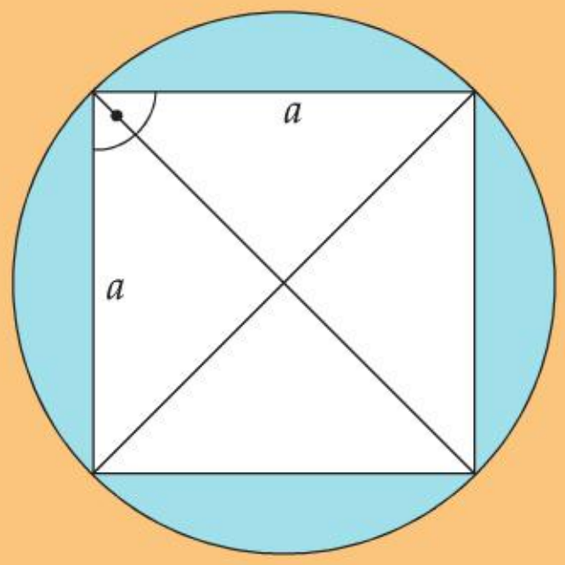
A. ok. 8 m
B. ok. 10 m
C. ok. 16 m
D. ok. 20 m

16 Bok kratki ma długość 1. Czy długość czarnej linii jest mniejsza od 20? Wybierz odpowiedź Tak lub Nie i jej uzasadnienie spośród A–C.

Tak,	ponieważ	A.	jest ona równa $9\pi + 2$.
Nie,		B.	jest ona równa powiększonej o 2 długości okręgu o średnicy 3.
		C.	jest ona równa powiększonej o 2 długości okręgu o promieniu 3.



17 Czy pole zacieniowanego obszaru można obliczyć ze wzoru: $\frac{a^2}{2}\pi - a^2$, gdzie a to długość boku kwadratu? Wybierz odpowiedź Tak lub Nie i jej uzasadnienie spośród A–C.



Tak,	ponieważ	A.	promień koła jest równy połowie długości boku kwadratu.
Nie,		B.	średnica koła jest równa przekątnej kwadratu.
		C.	obwód koła jest równy $a\sqrt{2}$.

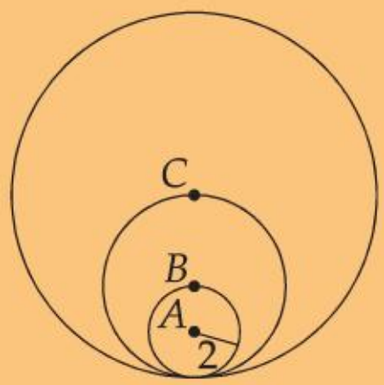
18 Okrąg o środku w punkcie K ma promień równy 4,7 dm, a okrąg o środku w punkcie L ma promień równy 28 cm. Oblicz odległość między środkami tych okręgów, jeśli:

a) okręgi są styczne zewnętrznie,
b) okręgi są styczne wewnętrznie.

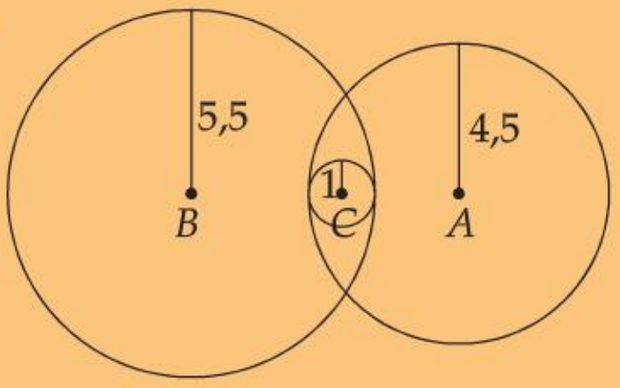
19 Okrąg o środku w punkcie $A = (2, -1)$ i promieniu 5 oraz okrąg o środku w punkcie $B = (2, 13)$ i promieniu 3 są styczne wewnętrznie do okręgu o środku w punkcie C i promieniu r. Wyznacz współrzędne punktu C i długość promienia r.

20 Punkty ABC leżą na jednej prostej i są środkami trzech okręgów. Każdy z okręgów jest styczny do dwóch pozostałych. Korzystając z informacji podanych na rysunku, oblicz długości odcinków: AB, BC, AC.

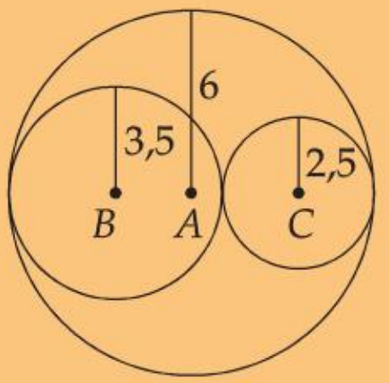
a)



b)

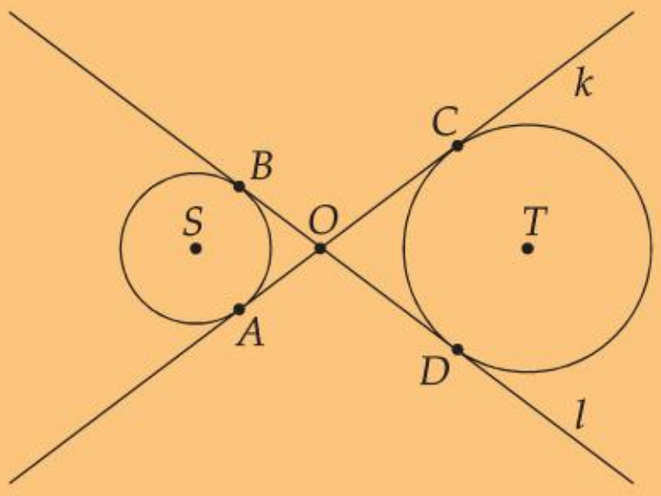


c)



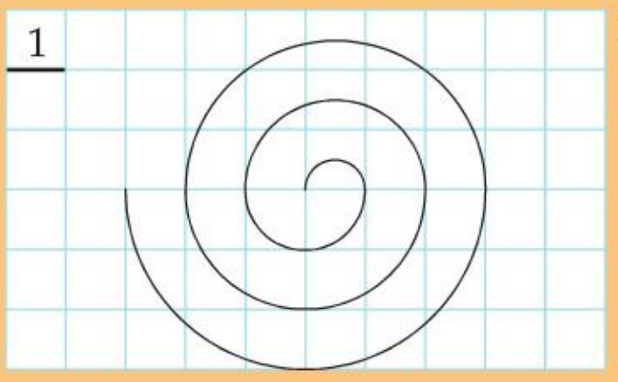
21 Proste k i l są styczne w punktach: A, B, C, D odpowiednio do okręgu o środku w punkcie S i promieniu 3,75 dm i okręgu o środku w punkcie T. Odcinek SO jest równy 6,25 dm, a odcinek OC jest równy 8 dm.

a) Oblicz długość odcinka BD.
b) Oblicz promień okręgu o środku w punkcie T, wiedząc, że odcinek OT jest o 3 dm krótszy od odcinka BD.

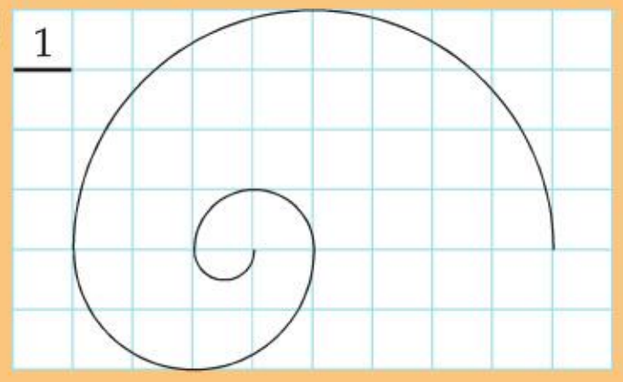


22 Bok kratki ma długość 1. Oblicz długości spirali.

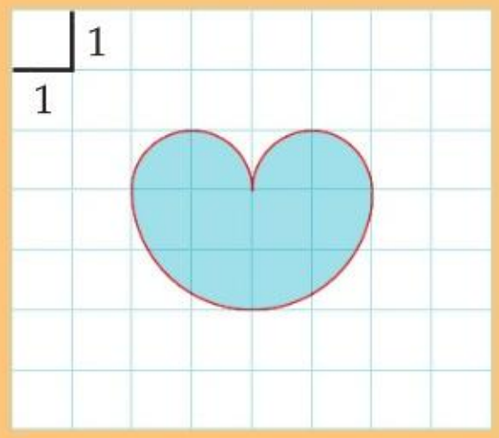
a)

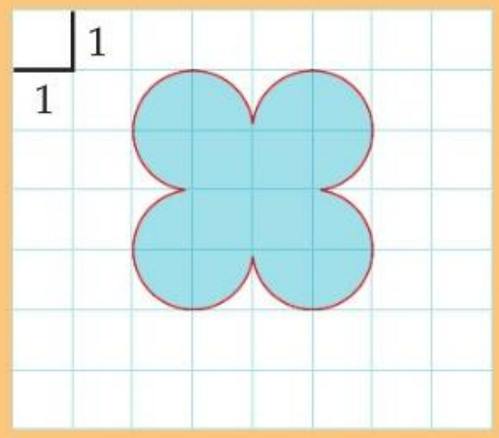


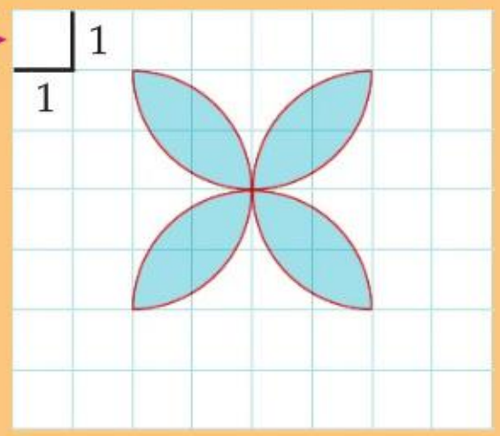
b)



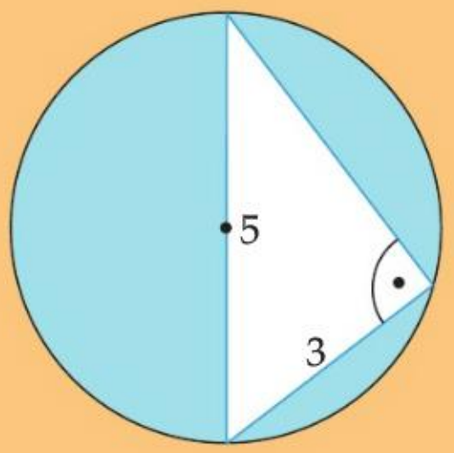
23 Bok kratki ma długość 1. Oblicz długość linii zaznaczonej na czerwono i pole powierzchni obszaru zaznaczonego na niebiesko.

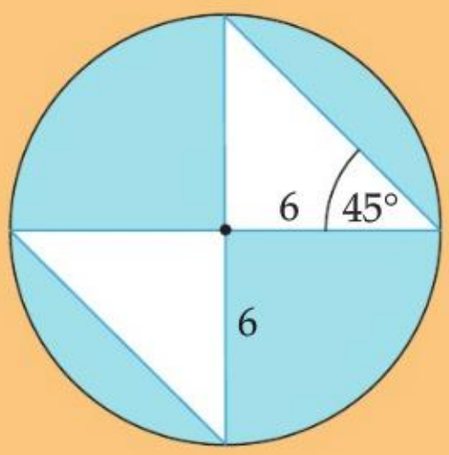
a) 

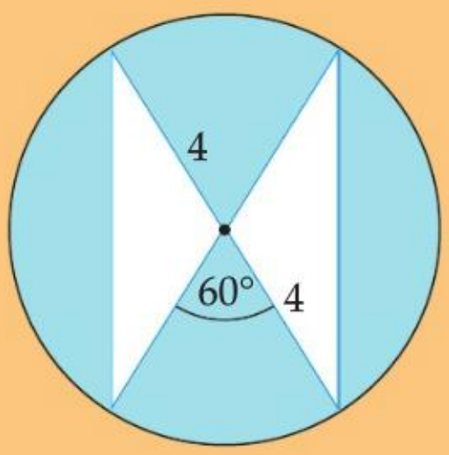
b) 

c) 

24 Oblicz pole powierzchni zacieniowanego obszaru, korzystając z danych zamieszczonych na rysunku.

a) 

b) 

c) 

25 Koło, kwadrat, trójkąt równoboczny i sześciokąt foremny mają równe obwody. Oblicz stosunek pola koła do pola:

a) kwadratu, b) trójkąta równobocznego, c) sześciokąta foremnego.

26 Oblicz,

a) jakie jest największe pole koła, które zmieści się w kwadracie o polu 50,
b) jakie jest największe pole kwadratu, który zmieści się w kole o polu 144π.

27 Pole powierzchni serwetki w kształcie koła jest równe $1{,}44\pi$ dm². Ile co najmniej centymetrów ozdobnej taśmy potrzeba na obszycie tej serwetki? Przyjmij, że $\pi \approx 3{,}14$.

28 Znak nakazu jazdy prosto, stojący na drodze ekspresowej, ma 90 cm średnicy. Oblicz, ile centymetrów kwadratowych blachy zużyto na jego wykonanie. Przyjmij, że $\pi \approx 3{,}14$. Wynik podaj z dokładnością do 1 cm².



29 Blat stołu w kształcie kwadratu ma pole powierzchni równe 2 m². Czy można całkowicie przykryć blat tego stołu okrągłym obrusem:

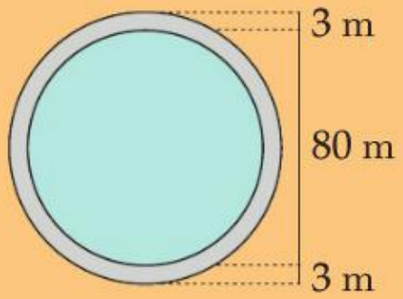
a) o promieniu 70 cm, b) o średnicy 1,5 m, c) o obwodzie 6,3 m?

Do obliczeń użyj kalkulatora.

30 Wokół stawu w kształcie koła o średnicy 80 m znajduje się ścieżka o szerokości 3 m. Oblicz:

a) pole powierzchni stawu,
b) pole powierzchni ścieżki.

Wynik podaj w arach. Przyjmij, że $\pi \approx 3{,}14$.



7. Symetrie



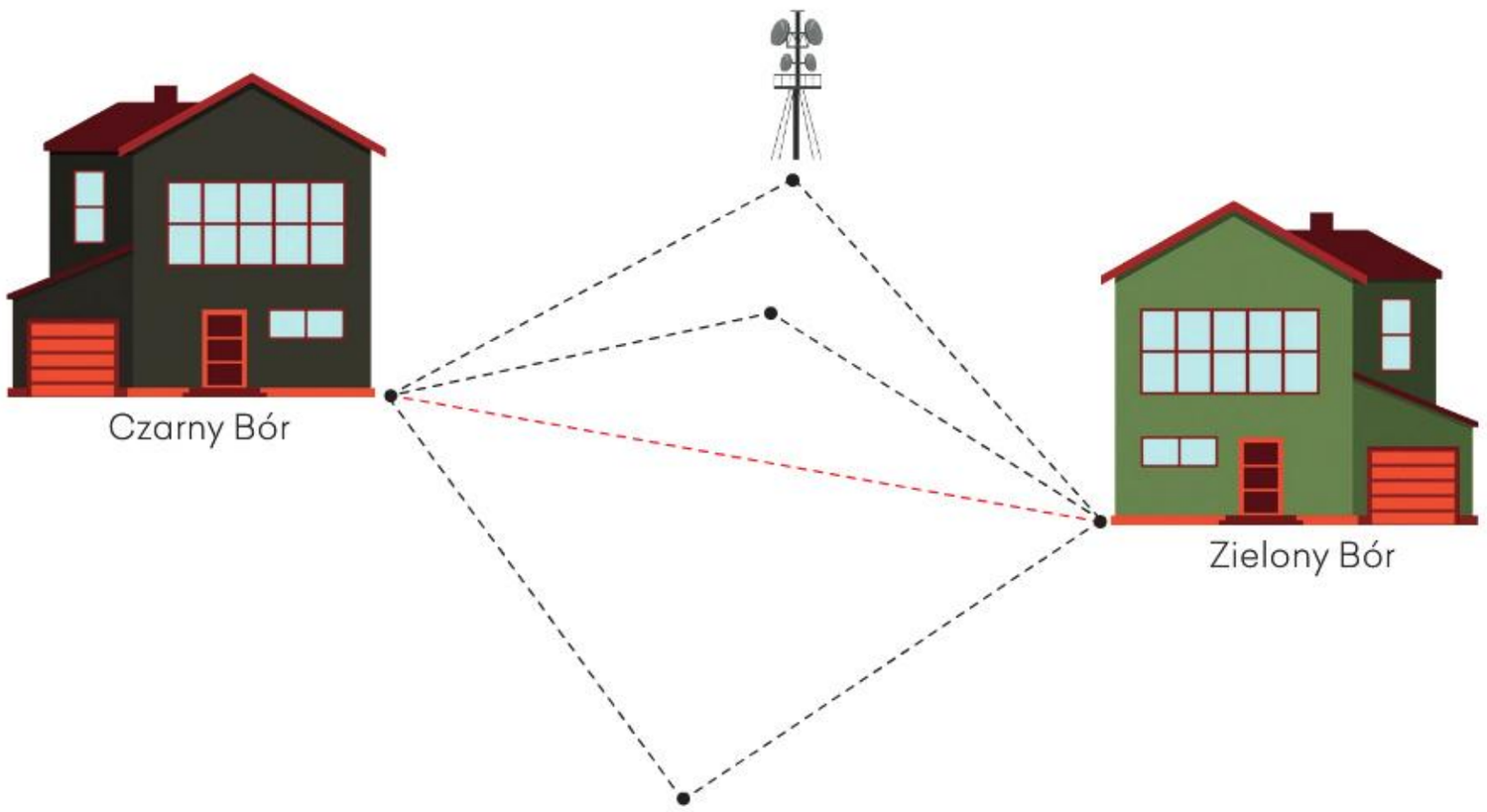
1. Czy zdarzyło ci się obserwować efekty odbicia przedmiotów w lustrze wody?
2. Jak sądzisz, czy powstałe obrazy są podobne do rzeczywistych przedmiotów? Czy mają ten sam kształt? Czy mają tę samą wielkość? Uzasadnij odpowiedzi.

7.1 Symetralna odcinka

Podejmij temat

Między dwoma pensjonatami Czarny Bór i Zielony Bór należy wybudować stację przekaźnikową telefonii komórkowej. Właściciele obu posesji ustalili, że konstrukcja powinna stanąć w takiej samej odległości od każdego z tych pensjonatów. Poniżej pokazano plan zagospodarowania terenu, na którym zaznaczono miejsce, gdzie może powstać ta stacja.

Plan zagospodarowania terenu



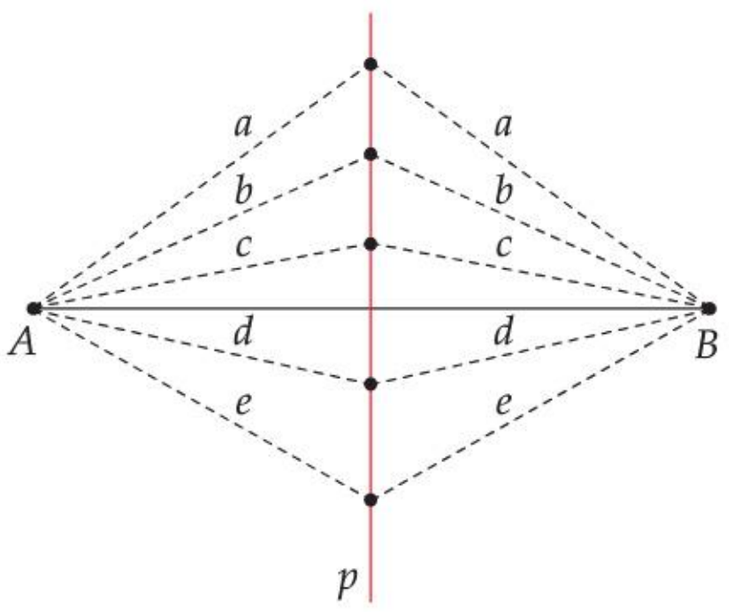
Zastanów się, w jakim jeszcze innym miejscu można postawić stację przekaźnikową. Jak wyznaczyć wszystkie miejsca, gdzie może być stacja przekaźnikowa? Gdzie powinna zostać zbudowana ta stacja, aby odległość od każdego z pensjonatów była taka sama i jednocześnie najmniejsza?

Każdy punkt leżący na symetralnej odcinka jest jednakowo odległy od końców tego odcinka.

Zauważmy, że na płaszczyźnie wszystkie punkty, których odległość od końców danego odcinka (np. odcinka AB) jest taka sama, leżą na prostej prostopadłej do tego odcinka i przechodzącej przez jego środek.

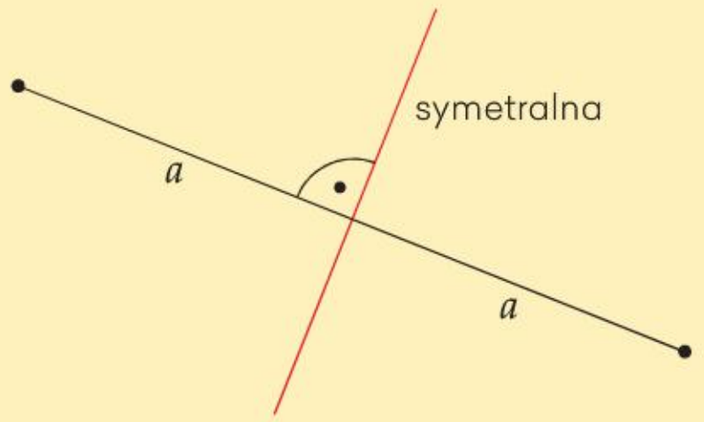
O takiej prostej mówimy, że jest symetralną danego odcinka.

Na rysunku symetralną odcinka AB jest prosta p.



Symetralna odcinka to prosta wyznaczona przez wszystkie punkty równo oddalone od obu końców tego odcinka.

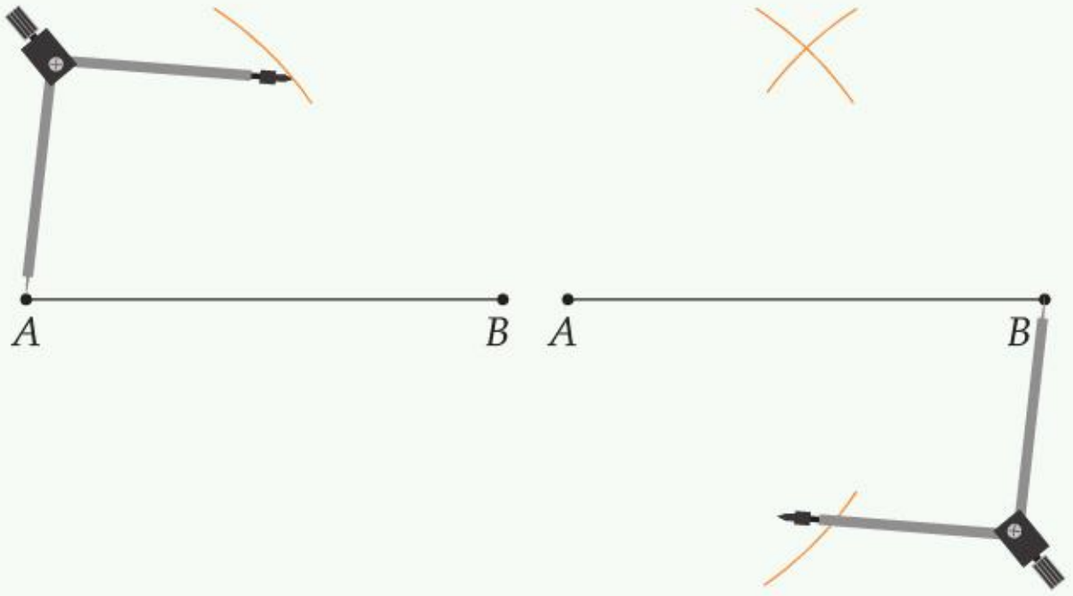
Symetralną odcinka jest prosta prostopadła do tego odcinka i przechodząca przez jego środek.



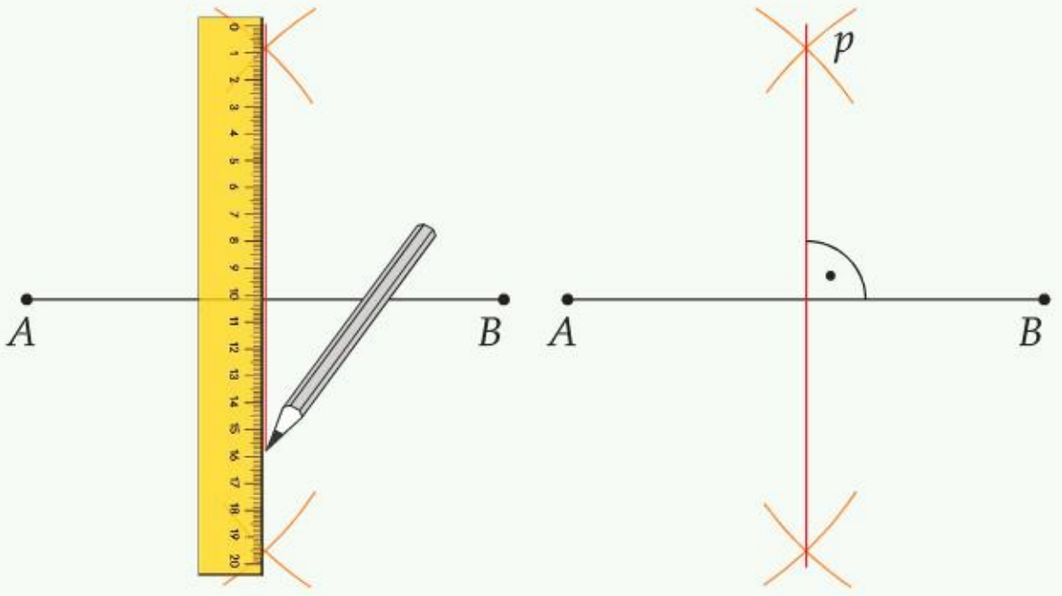
Przykład 1

Skonstruujmy symetralną odcinka AB.

Rysujemy odcinek AB.
Z punktu A oraz z punktu B wykreślamy cyrklem jednakowe łuki okręgu o promieniu większym niż połowa długości odcinka AB.



Przez punkty przecięcia łuków okręgów prowadzimy prostą p.
Prosta p jest symetralną odcinka AB.



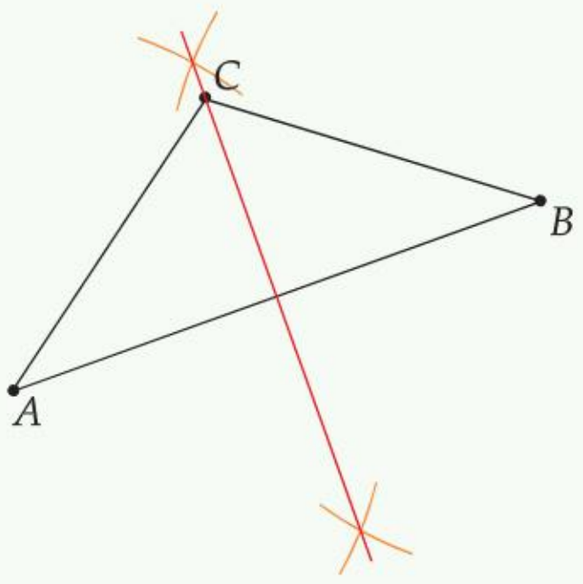
1. Narysuj odcinek AB dowolnej długości i podziel go na cztery równe części.

Przykład 2

Skonstruujmy trójkąt równoramienny, którego podstawą jest dowolny odcinek AB.

Rysujemy odcinek AB i konstruujemy jego symetralną. Na symetralnej obieramy dowolny punkt i oznaczamy go C.

Punkt C jest równo oddalony od punktów A i B, zatem $|AC| = |BC|$, czyli trójkąt ABC jest równoramienny.



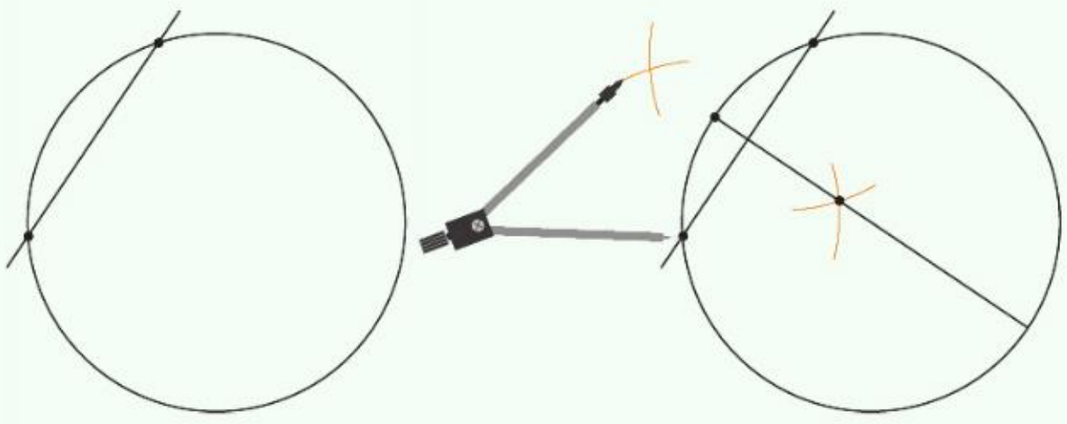
2. Narysuj odcinek AB o długości mniejszej niż 12 cm. Skonstruuj trójkąt równoramienny ABC taki, że $|AC| = |BC| = 6$ cm.

Symetralna boku trójkąta to prosta prostopadła do tego boku, przechodząca przez jego środek.

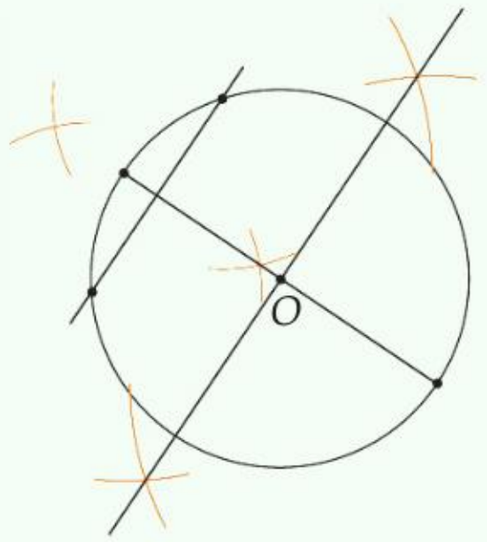
Przykład 3

Narysujmy dowolny okrąg, np. za pomocą szablonu lub obrysowując przedmiot o okrągłym kształcie, i znajdźmy jego środek.

Rysujemy okrąg. Następnie rysujemy dowolną prostą przecinającą okrąg i konstruujemy symetralną cięciwy okręgu wyznaczoną przez tę prostą. Punkty przecięcia się symetralnej z okręgiem wyznaczają średnicę tego okręgu. Rysujemy tę średnicę.



Konstruujemy symetralną średnicy okręgu i zaznaczamy punkt O przecięcia tej symetralnej ze średnicą. Punkt O jest środkiem okręgu.



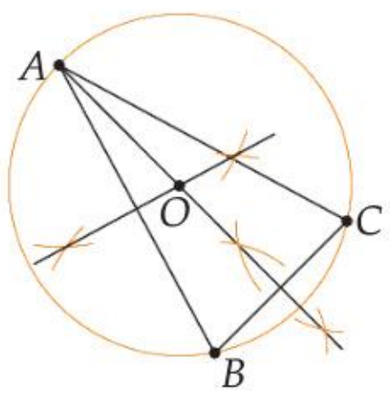
3. Narysuj dowolne koło i znajdź konstrukcyjnie jego środek.

Zadania

- Narysuj dowolny odcinek i podziel go konstrukcyjnie na
  a) dwie równe części, b) cztery równe części.
- Narysuj dwa dowolne odcinki a i b. Zbuduj odcinki x, y takie, że
  a) $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b$ b) $y = \frac{3}{4}a + b$
- Skonstruuj trójkąt równoramienny, którego wysokość jest równa 5 cm.
- Narysuj dwa okręgi przecinające się. Wyznacz konstrukcyjnie zbiór punktów równo oddalonych od środków tych okręgów.
- Zaznacz na rysunku trzy punkty A, B, C nieleżące na jednej prostej. Wyznacz konstrukcyjnie punkt równo oddalony od każdego z punktów: A, B, C.
- Narysuj odcinek AB. Skonstruuj:
  a) okrąg, którego średnicą jest ten odcinek,
  b) kwadrat, którego przekątną jest ten odcinek.
- Skonstruuj kwadrat, którego przekątna jest średnicą pewnego okręgu.

Ciekawe!

Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu przechodzącego przez wszystkie wierzchołki tego trójkąta.
O takim okręgu mówimy, że jest opisany na trójkącie.

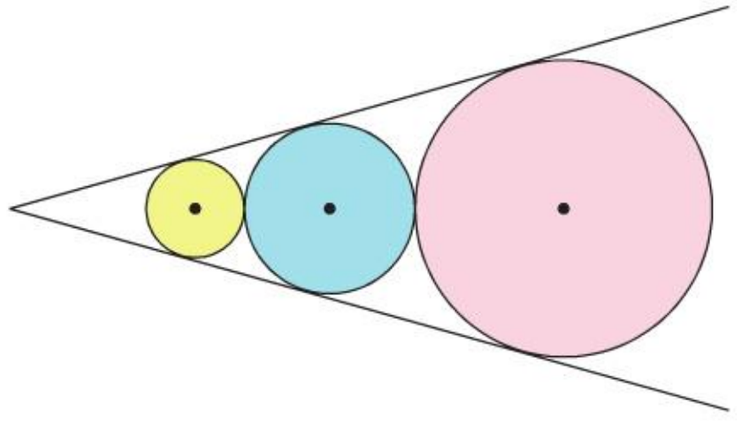


7.2 Dwusieczna kąta

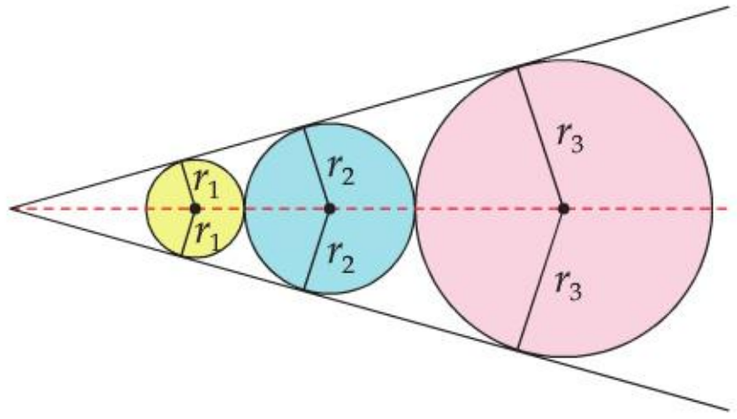
Podejmij temat

Przyjrzyj się położeniu środków narysowanych kół. Co zauważasz? Porównaj odległość środka każdego koła od każdego z ramion kąta. Co zauważasz?

Na rysunku każde koło jest styczne do ramion kąta. Oznacza to, że każde z ramion kąta ma po jednym punkcie wspólnym z każdym z kół.

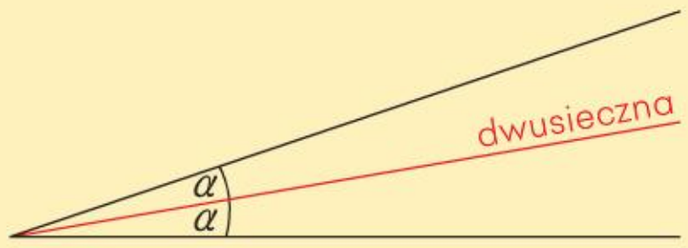


Na rysunku w *Podejmij temat* odległość środka każdego koła od każdego z ramion kąta jest taka sama (równa promieniowi koła). Środki tych trzech kół leżą na jednej półprostej, której początek jest wierzchołkiem kąta. Zauważ, że ta półprosta dzieli kąt na dwa kąty o takich samych miarach. O takiej półprostej mówimy, że jest dwusieczną kąta.



Dwusieczna kąta to półprosta o początku w wierzchołku tego kąta, która dzieli ten kąt na dwa kąty o takich samych miarach.

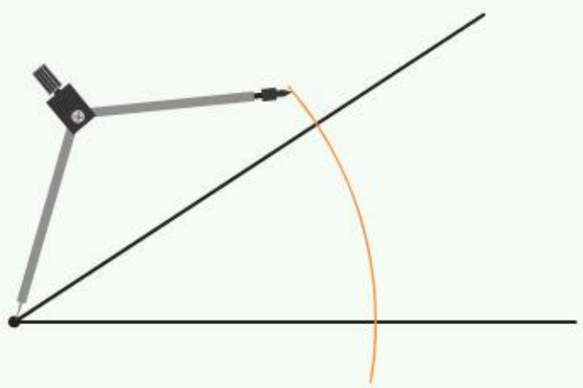
Do dwusiecznej kąta należą punkty należące do tego kąta i równo oddalone od jego ramion.



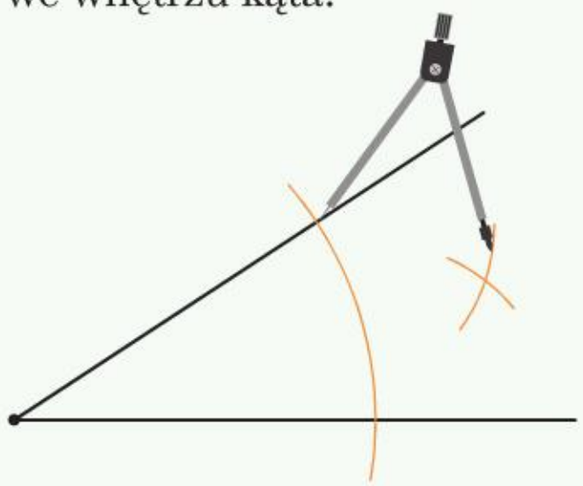
Przykład 1

Skonstruujmy dwusieczną kąta.

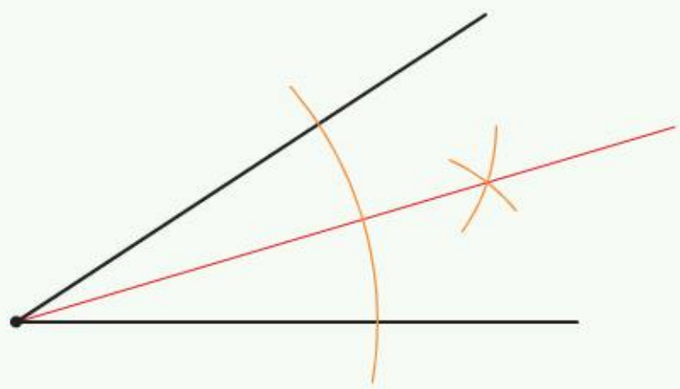
Rysujemy kąt.
Z wierzchołka kąta zakreślamy łuk o dowolnym promieniu, tak aby przeciął ramiona kąta.



Z punktów przecięcia narysowanego łuku z ramionami kąta zakreślamy łuki o dowolnym promieniu, tak aby przecięły się we wnętrzu kąta.



Z wierzchołka kąta prowadzimy półprostą przechodzącą przez otrzymany punkt.
Otrzymana półprosta jest dwusieczną danego kąta.

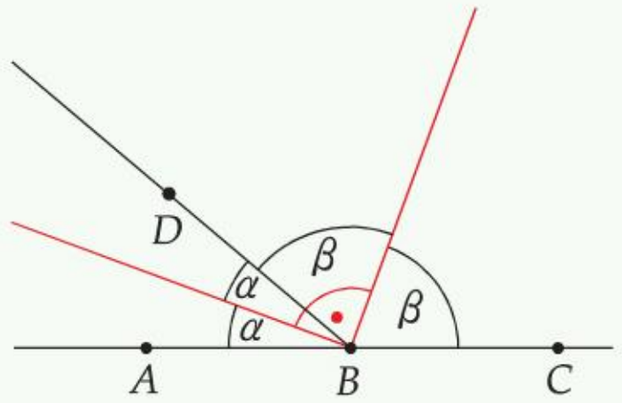


1. Narysuj dowolny kąt ostry i skonstruuj jego dwusieczną.

Przykład 2

Narysujmy dwa kąty przyległe *ABD* i *CBD* i zaznaczmy ich dwusieczne. Jaki kąt tworzą te dwusieczne?

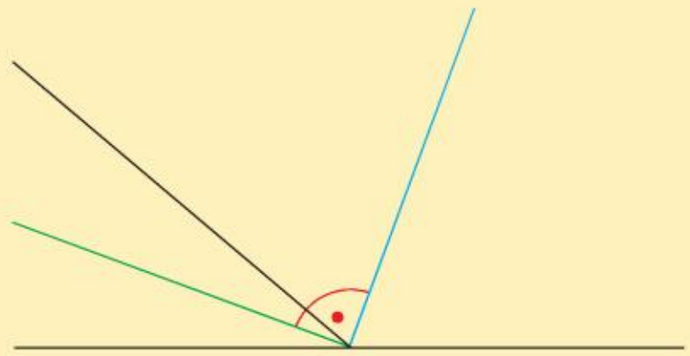
Niech miara kąta *ABD* będzie równa 2α, a miara kąta *CBD* równa 2β.
Wtedy dwusieczna kąta *ABD* dzieli ten kąt na dwa kąty – każdy o mierze α.
Dwusieczna kąta *CBD* dzieli ten kąt na dwa kąty – każdy o mierze β.



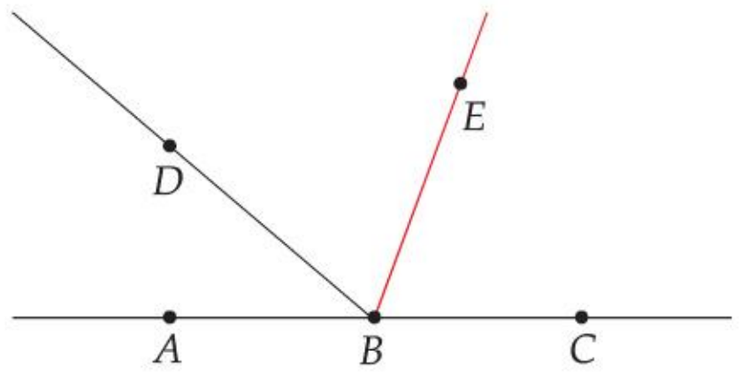
Suma kątów przyległych jest równa 180°. Zatem:
$2\alpha + 2\beta = 180° \mid : 2$
$\alpha + \beta = 90°$

Dwusieczne kątów przyległych tworzą kąt o mierze 90°.

Dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.



2. Kąty *ABD* i *CBD* to kąty przyległe. Półprosta *BE* jest dwusieczną kąta *CBD*. Miara kąta *EBA* jest równa 110°. Oblicz miarę kąta *ABD* i kąta *EBD*.

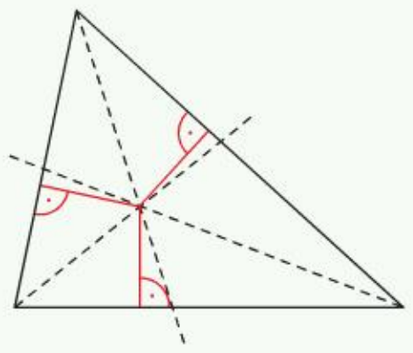


Przykład 3

Skonstruujmy dwusieczne wszystkich kątów wewnętrznych trójkąta.

Rysujemy dowolny trójkąt i konstruujemy dwusieczne jego kątów.

Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest równo oddalony od każdego z boków trójkąta.

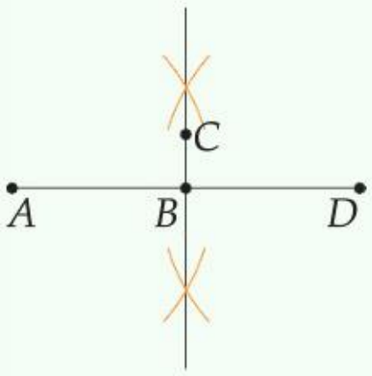


3. Skonstruuj dwusieczne kątów trójkąta prostokątnego. Gdzie leży punkt przecięcia tych dwusiecznych?

Przykład 4

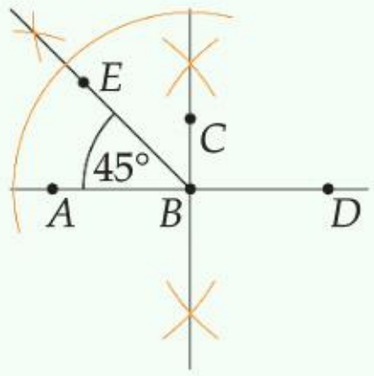
Skonstruujemy kąt o mierze 45°.

Rysujemy dowolny odcinek AD i konstruujemy jego symetralną. Na symetralnej zaznaczamy punkt C.



Otrzymujemy kąt prosty ABC.

Konstruujemy dwusieczną kąta ABC. Na dwusiecznej zaznaczamy dowolny punkt E.



Otrzymujemy kąt ABE o mierze 45°.

4. Skonstruuj kąt o mierze 22,5°.

Zadania

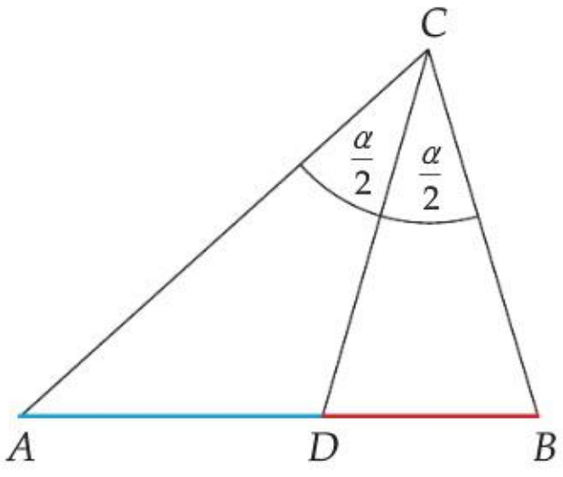
- Narysuj dowolny kąt rozwarty i podziel go na cztery kąty o równych miarach.
- Skonstruuj kąt o mierze:

  a) 135° b) 30° c) 15°
- W pewnym trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki równej długości. Oblicz miary kątów ostrych tego trójkąta.
- Skonstruuj:

  a) trójkąt równoboczny,
  b) trójkąt prostokątny o kątach ostrych 30° i 60°,
  c) trójkąt, którego dwa kąty mają miary 30° i 45°.
- W równoległoboku $ABCD$ z wierzchołka kąta BAD poprowadzono dwusieczną, która przecięła bok CD w punkcie E. Wiadomo, że $|\sphericalangle BAD| = 80°$. Oblicz miary kątów trójkąta ADE.
- W trójkącie ABC miara kąta BCA jest równa 40°, a dwusieczna tego kąta zawiera jedną z wysokości tego trójkąta. Oblicz miary pozostałych kątów tego trójkąta i określ jego rodzaj.
- W trójkącie ABC dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Wiadomo, że $|AD| = 4$, $|DB| = 6$ i $|AC| = 10$. Oblicz obwód trójkąta ABC.

Ciekawe!

Dwusieczna kąta trójkąta dzieli przeciwległy bok proporcjonalnie do długości pozostałych boków.



$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

7.3 Symetria względem prostej

Podejmij temat



Zdjęcie przedstawia most i jego odbicie w wodzie. Czy łatwo określić, który most jest mostem rzeczywistym, a który jego odbiciem?
A gdyby odwrócić zdjęcie do góry nogami? Czy teraz byłoby łatwiej odpowiedzieć na to pytanie? Dlaczego?
Porównaj odległości punktów A i B od prostej k.
Porównaj odległości punktów C i D od prostej k.
Co zauważasz?

Ciekawe!

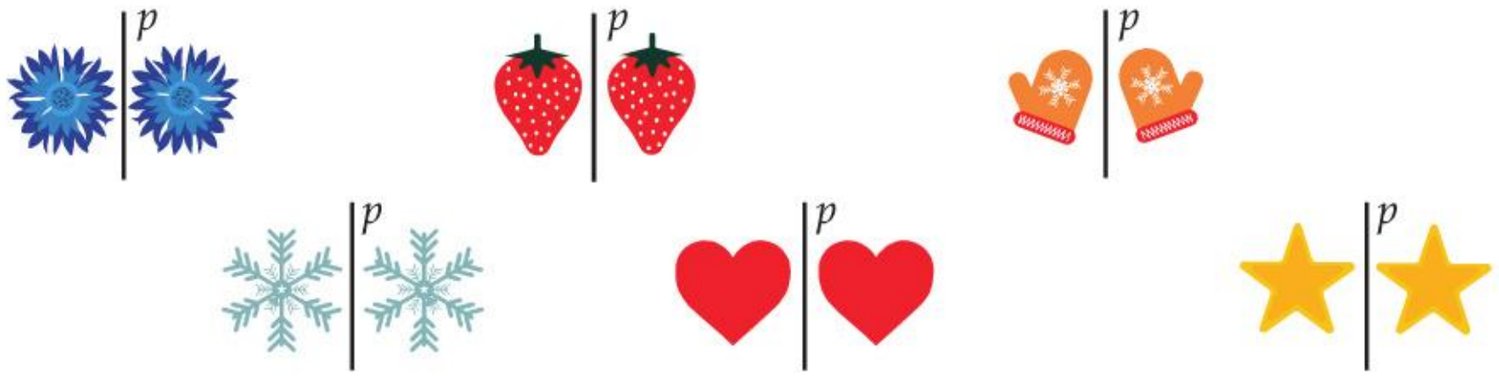
Za twórcę pisma lustrzanego uważa się włoskiego artystę Leonarda da Vinci, który sporządzał często notatki, używając właśnie takiego pisma. Jedni uważają, że szyfrował w ten sposób swoje zapiski, a inni, że nie chciał rozmazywać tuszu, przesuwając dłonią od prawej do lewej (był bowiem leworęczny).

Zauważmy, że na zdjęciu z *Podejmij temat* odpowiadające sobie punkty obrazu mostu i obrazu jego odbicia w wodzie znajdują się w tej samej odległości od prostej k. Zatem gdybyśmy złożyli zdjęcie wzdłuż prostej k, to obraz budowli i obraz jej odbicia w wodzie nałożą się na siebie. O takich figurach mówimy, że są do siebie **symetryczne względem prostej k**.
Figury symetryczne można też otrzymać, korzystając z lusterka.

1. Użyj lusterka i odczytaj słowa, których odbicia lustrzane zapisano poniżej.



Poniższy rysunek przedstawia przykłady par figur symetrycznych względem prostej p.



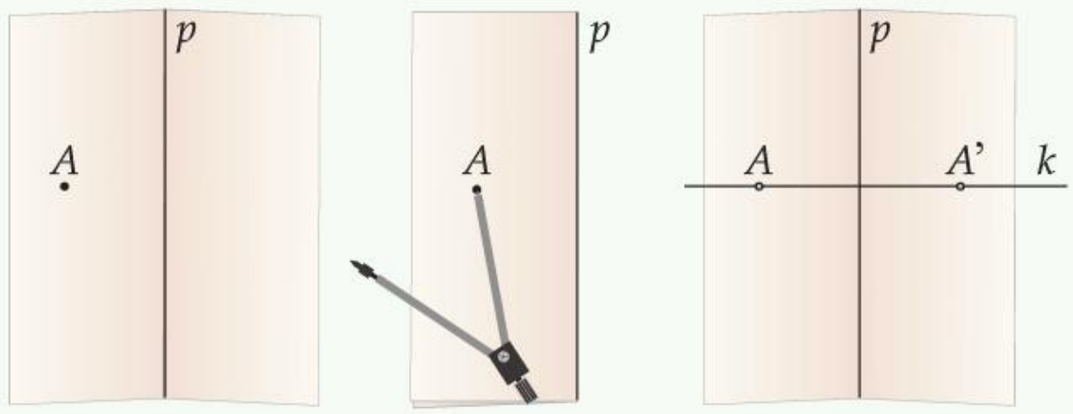
Zauważmy, że figura symetryczna do danej ma ten sam kształt oraz wielkość jak dana figura. **Figury symetryczne względem prostej są przystające.**

Przykład 1

Wyznaczmy punkty symetryczne względem prostej p.

Przypadek I

Na kartce papieru kreślimy prostą p i zaznaczamy punkt A, który nie należy do prostej p. Zginamy kartkę wzdłuż prostej p i przekłuwamy cyrklem kartkę w punkcie A. Rozkładamy kartkę. Powstały ślad przekłucia oznaczamy jako punkt A'. Przez punkty A i A' prowadzimy prostą k.

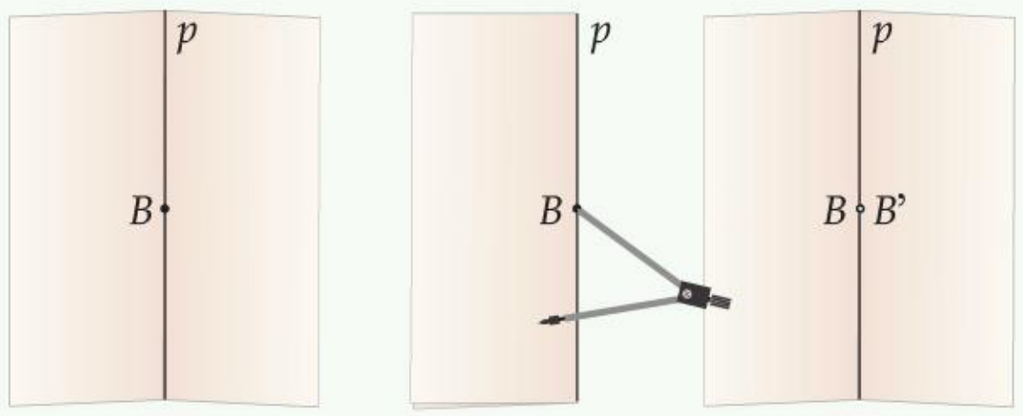


Zauważmy, że punkty A i A' znajdują się po przeciwnych stronach prostej p w tej samej odległości od prostej. Prosta k jest prostopadła do prostej p.

Otrzymaliśmy parę punktów A i A' symetrycznych względem prostej p. O punkcie A' mówimy, że jest obrazem punktu A w symetrii względem prostej p.

Przypadek II

Na kartce papieru kreślimy prostą p i zaznaczamy punkt B, który należy do prostej p. Zginamy kartkę wzdłuż prostej p i przekłuwamy cyrklem kartkę w punkcie B. Rozkładamy kartkę. Powstały ślad przekłucia oznaczamy jako punkt B'.

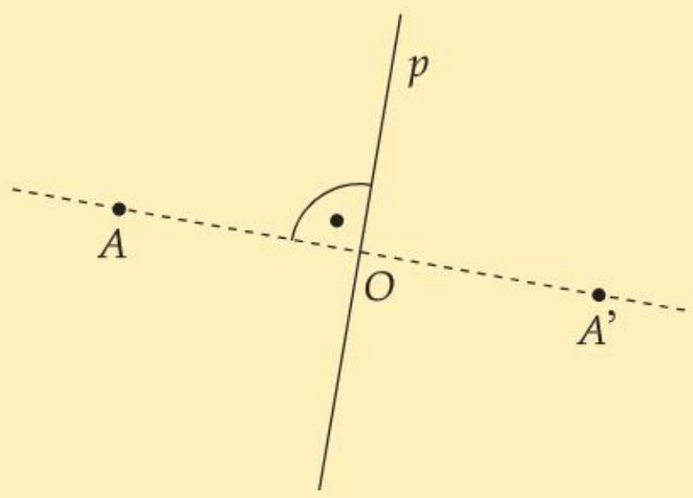


Punkty B i B' pokryły się. O takich punktach też mówimy, że są symetryczne względem prostej p.

Punkty A i A' symetryczne względem prostej p i nieleżące na tej prostej:

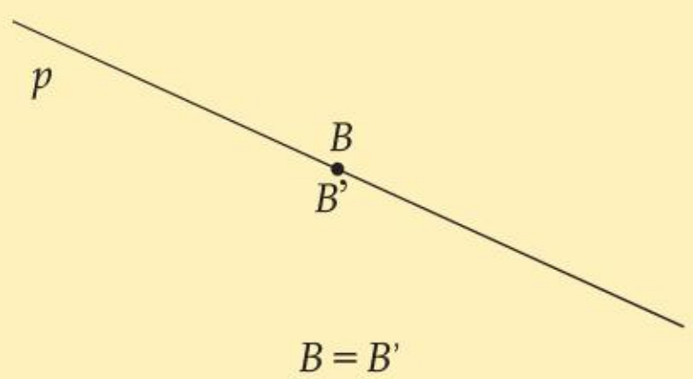
- znajdują się po przeciwnych stronach prostej p,
- znajdują się w tej samej odległości od prostej p,
- należą do tej samej prostej prostopadłej do prostej p.

Symetrię względem prostej nazywamy też **symetrią osiową**.



$|AO| = |A'O|$

Jeżeli punkt leży na prostej p, to jego obrazem w symetrii względem prostej p jest ten sam punkt.



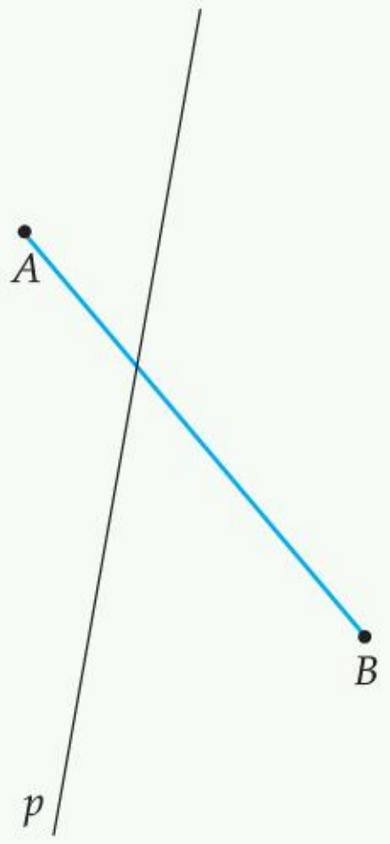
$B = B'$

Punkty A i A' są symetryczne względem prostej p, gdy prosta p jest symetralną odcinka AA'.

2. Na kartce papieru narysuj trójkąt i prostą p, która nie będzie miała punktów wspólnych z trójkątem. Złóż na pół kartkę papieru wzdłuż prostej p. Przekłuj cyrklem kartkę papieru w wierzchołkach trójkąta. Porównaj odległości odpowiadających sobie punktów od prostej wyznaczonej przez zgięcie kartki.

Przykład 2

Wyznaczmy figurę symetryczną do odcinka AB względem prostej p.



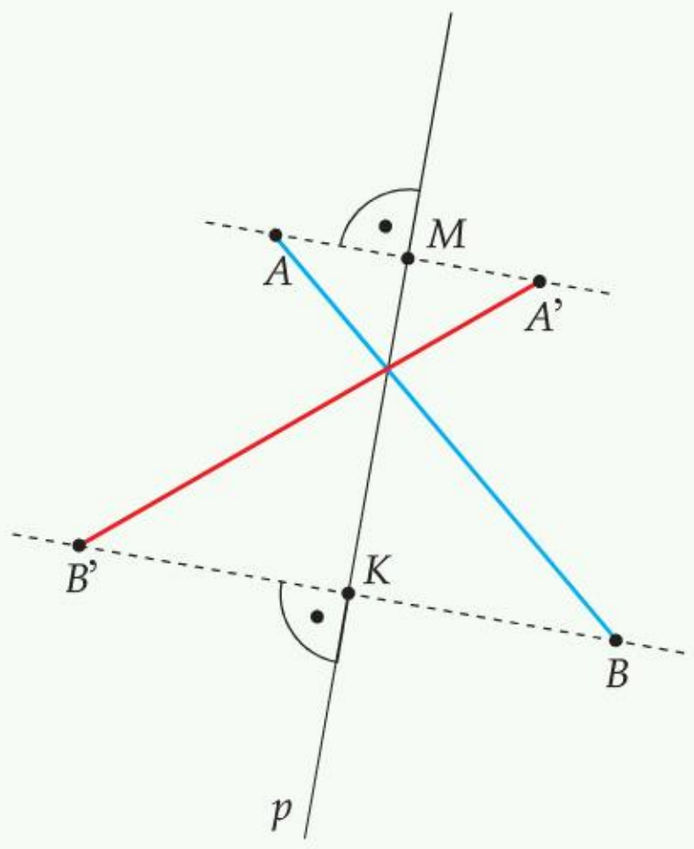
Aby narysować odcinek symetryczny do danego odcinka AB względem prostej p, wystarczy znaleźć punkty symetryczne do końców danego odcinka. Punkty te wyznaczą końce szukanego odcinka.

Przez punkty A i B kreślimy proste prostopadłe do prostej p, przecinające prostą p w punktach odpowiednio M i K.

Na prostych prostopadłych wyznaczamy punkty A' i B' takie, że $|AM| = |MA'|$ i $|BK| = |KB'|$.

Kreślimy odcinek $A'B'$, który jest symetryczny do odcinka AB względem prostej p.

Każdy punkt odcinka $A'B'$ jest symetryczny do odpowiedniego punktu odcinka AB względem prostej p. Figurą symetryczną do odcinka AB jest odcinek $A'B'$ o takiej samej długości.

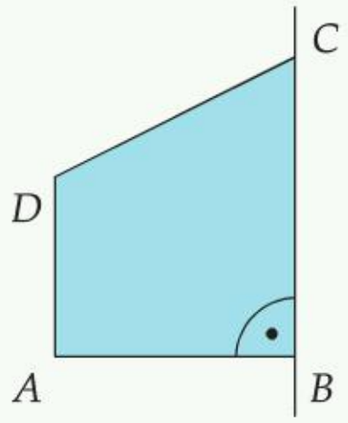


Figurą symetryczną do odcinka względem prostej jest odcinek tej samej długości.

3. Narysuj prostą p i odcinek EF, który nie ma z tą prostą punktów wspólnych. Skonstruuj odcinek $E'F'$ symetryczny do odcinka EF względem prostej p.

Przykład 3

Skonstruujmy figurę symetryczną do czworokąta *ABCD* względem prostej *BC*.

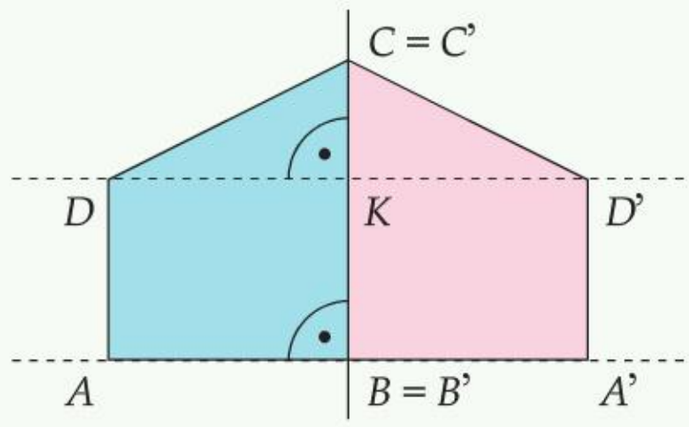


Aby narysować czworokąt symetryczny do danego czworokąta *ABCD* względem prostej *BC*, należy znaleźć punkty symetryczne do wierzchołków czworokąta *ABCD*, które wyznaczą czworokąt symetryczny do danego. Punkty *B* i *C* leżą na prostej *BC*, więc punktami symetrycznymi do nich są te same punkty. Wystarczy zatem wyznaczyć punkty symetryczne do wierzchołków *A* i *D*.

Przez punkty *A* i *D* kreślimy proste prostopadłe do prostej *BC*, przecinające prostą *BC* w punktach *B* i *K*.

Na prostych prostopadłych wyznaczamy punkty *A'* i *D'* takie, że $|AB| = |BA'|$ i $|DK| = |KD'|$.

Kreślimy boki czworokąta *B'A'D'C'*, który jest symetryczny do czworokąta *ABCD* względem prostej *BC*.

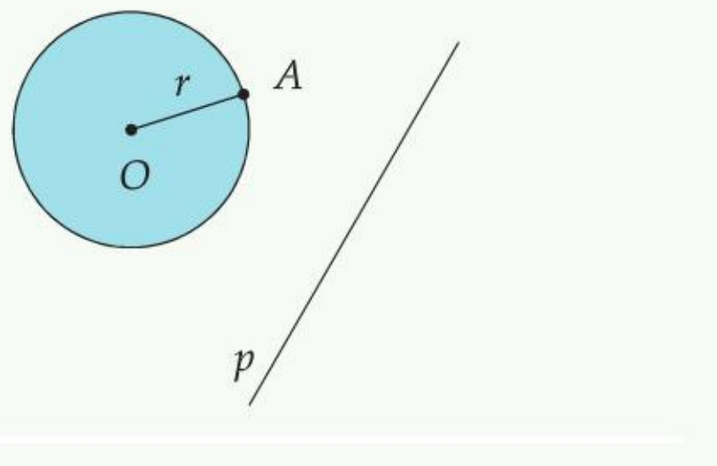


Figurą symetryczną do czworokąta *ABCD* względem prostej *BC* jest przystający do niego czworokąt *B'A'D'C'*.

4. Narysuj trójkąt *ABC* i prostą *k* przechodzącą przez punkt *B*. Narysuj trójkąt symetryczny do trójkąta *ABC* względem prostej *k*.

Przykład 4

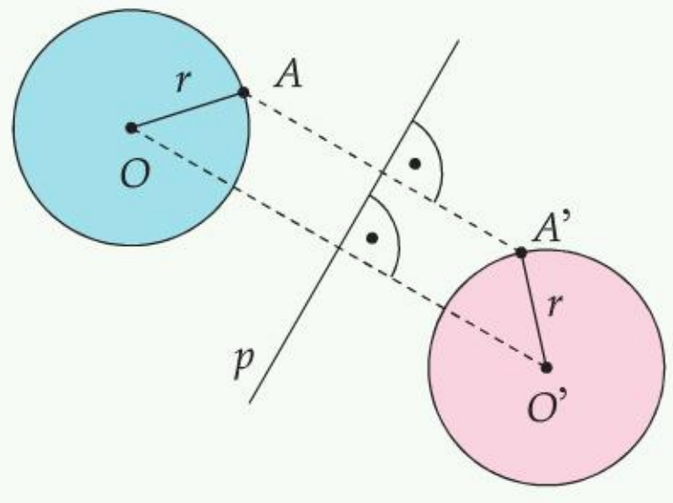
Dane jest koło o środku w punkcie *O* i promieniu *r* oraz prosta *p*, która nie ma punktów wspólnych z tym kołem. Wyznaczmy figurę symetryczną do tego koła względem prostej *p*.



Aby wyznaczyć figurę symetryczną do koła względem prostej *p*, wykonujemy następujące czynności:

- wyznaczamy punkt *O'* symetryczny do środka *O* danego koła względem prostej *p*,
- wyznaczamy punkt *A'* symetryczny do punktu *A* należącego do okręgu względem prostej *p*,
- kreślimy koło o środku w punkcie *O'* i promieniu $r = |O'A'|$.

Figurą symetryczną do koła względem prostej *p* jest koło o takim samym promieniu.

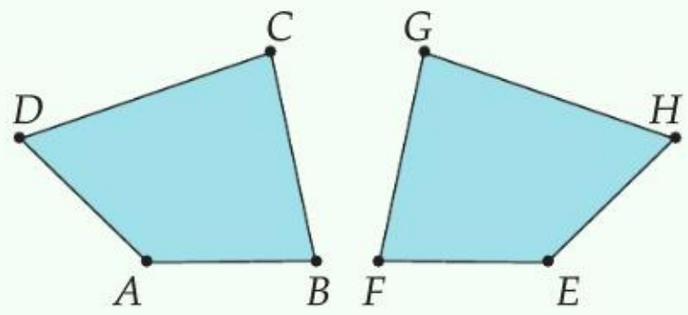


5. Narysuj okrąg o środku w punkcie S i prostą k przecinającą ten okrąg. Skonstruuj figurę symetryczną do tego okręgu względem prostej k.

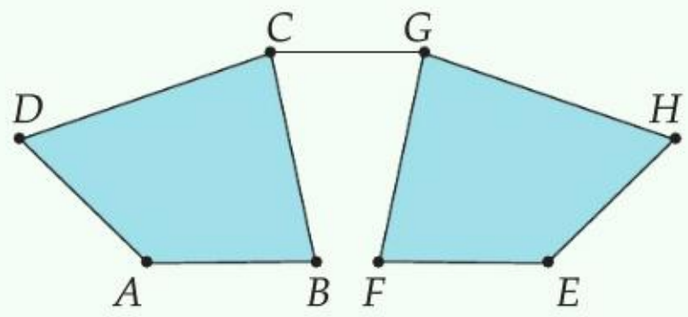
Figury symetryczne względem prostej są przystające.

Przykład 5

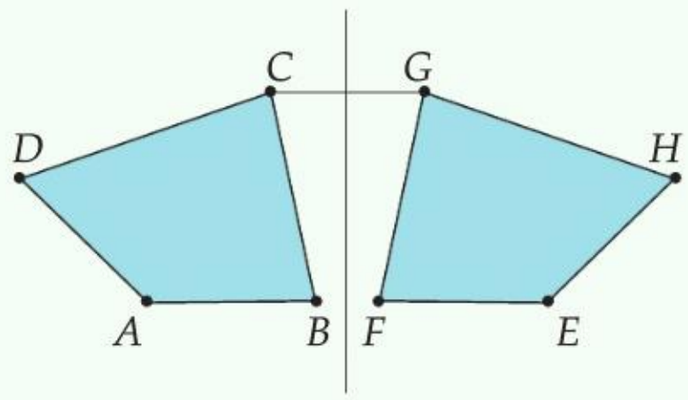
Czworokąty $ABCD$ i $EFGH$ są symetryczne względem pewnej prostej. Wyznaczmy tę prostą.



Wiemy, że czworokąty $ABCD$ i $EFGH$ są symetryczne względem pewnej prostej. Zauważmy, że pary punktów A i E, B i F, C i G oraz D i H są symetryczne względem tej prostej. Wybieramy jedną z tych par, np. C i G, i rysujemy odcinek CD.



Rysujemy symetralną odcinka CD – jest ona szukaną prostą.



Z własności przystawania figur nie wynika jednak, że te figury są symetryczne. Oto przykłady figur przystających, które nie są symetryczne względem żadnej prostej.



Zadania

● Narysuj trójkąt prostokątny o bokach długości: 3 cm, 4 cm, 5 cm. Przyłóż lusterko do kartki z narysowanym trójkątem tak, aby trójkąt i jego obraz utworzyły:

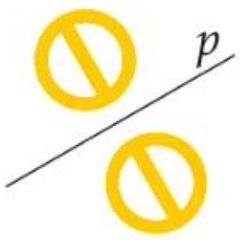
a) prostokąt,

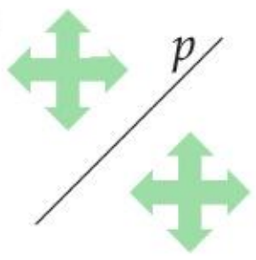
b) trójkąt równoramienny.

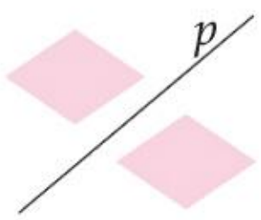
Ciekawe!

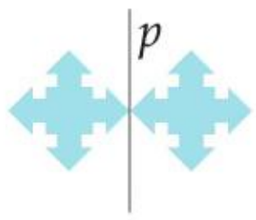
Do najwspanialszych budowli świata zalicza się między innymi: Tadź Mahal w Indiach, wieżę Eiffla (czyt. ajfla) i katedrę Notre Dame we Francji czy Pałac Kultury i Nauki w Polsce. Każda z tych budowli jest przykładem wykorzystania symetrii w architekturze.

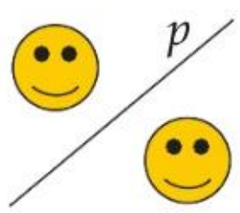
Na rysunku przedstawiono pary figur przystających. Wskaż pary figur, które nie są symetryczne względem prostej p.

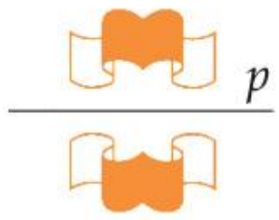
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

Ilustracja przedstawia odbicia lustrzane pewnych wyrazów. Odczytaj je. Możesz skorzystać z lusterka.

a) 

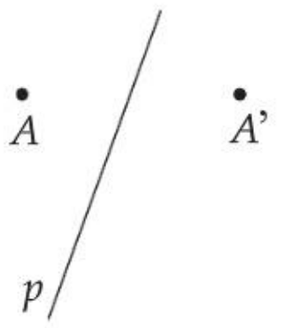
b) 

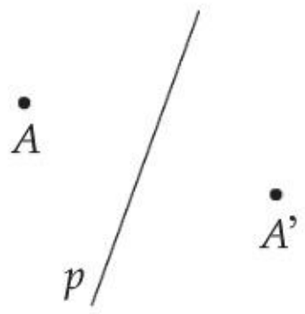
c) 

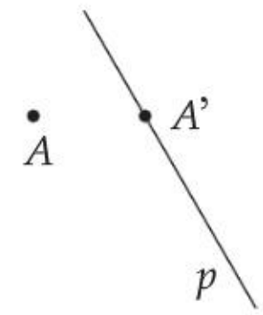
Według jakiej zasady powstał szlaczek? Narysuj w zeszycie 6 kolejnych elementów.



Czy punkty A i A' są symetryczne względem prostej p? Odpowiedź uzasadnij.

a) 

b) 

c) 

Narysuj dowolny trójkąt ABC i skonstruuj trójkąt do niego symetryczny względem prostej:

a) niemającej punktów wspólnych z trójkątem,
b) przechodzącej przez wierzchołek B,
c) zawierającej bok AC,
d) przecinającej dwa boki trójkąta.

Narysuj dowolny okrąg. Wyznacz figurę do niego symetryczną względem prostej:

a) stycznej do okręgu,
b) przechodzącej przez środek okręgu,
c) niemającej punktów wspólnych z okręgiem.

Narysuj równoległobok $KLMN$. Narysuj figurę do niego symetryczną względem prostej zawierającej odcinek KM.

Zaznacz dwa różne punkty A i B. Narysuj prostą, względem której te punkty są do siebie symetryczne.

Narysuj dwa przystające kwadraty, które są symetryczne względem pewnej prostej. Narysuj tę prostą.

Narysuj trójkąt prostokątny ABC, w którym przeciwprostokątna AC ma długość 5 cm, a przyprostokątna AB ma 3 cm. Narysuj figurę symetryczną do tego trójkąta względem prostej AC. Oblicz obwód czworokąta $ABCB'$.

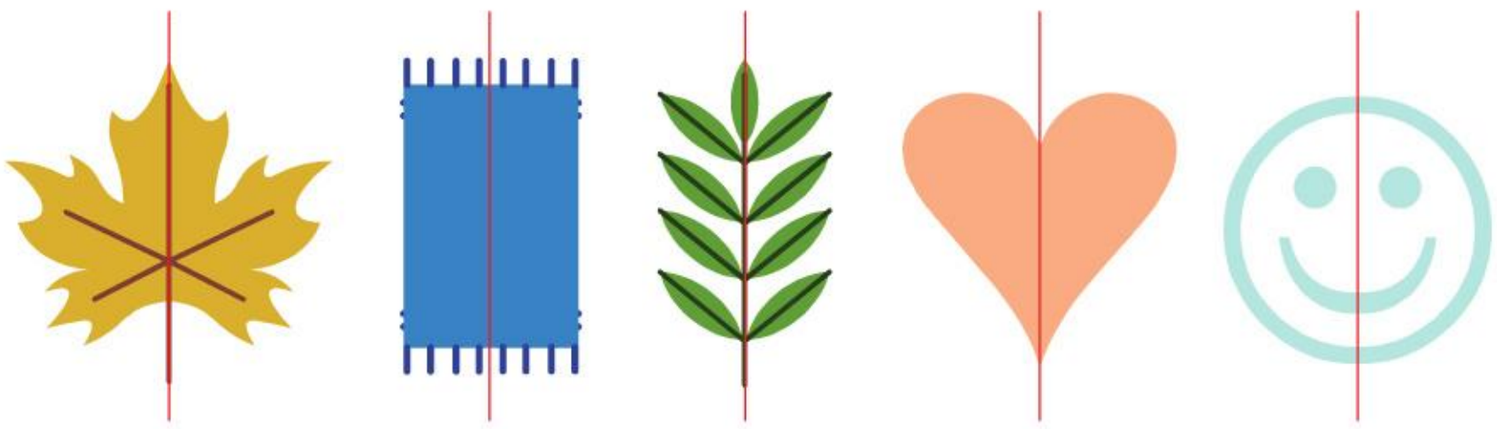
7.4 Figury osiowosymetryczne

Podejmij temat

Zdjęcia przedstawiają różne motyle. Spróbuj dla każdego motyla znaleźć prostą, która podzieli go na dwie przystające części.



Zauważmy, że zdjęcia motyli w *Podejmij temat* można podzielić pewną prostą na dwie przystające części w ten sposób, że obie części są symetryczne do siebie względem tej prostej.
Podobne własności mają też zdjęcia czy rysunki innych obiektów.



Jeśli daną figurę można podzielić pewną prostą na dwie części w ten sposób, że obie części są symetryczne do siebie względem tej prostej (czyli jedna z nich jest odbiciem lustrzanym drugiej), to o tej prostej powiemy, że jest **osią symetrii** danej figury. O figurach, które mają oś symetrii, mówimy, że są **osiowosymetryczne**.

Oś symetrii dzieli daną figurę na dwie figury przystające.

1. Przyjrzyj się wycinankom. Określ, ile osi symetrii ma każda z nich.

a) 

b) 

c) 

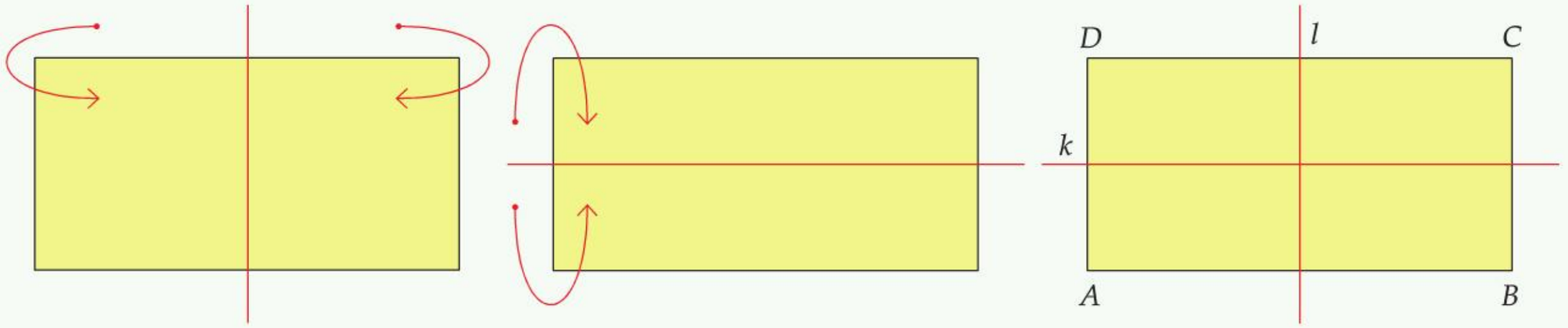
2. Złóż kartkę papieru na kilka części i wykonaj własną wycinankę.

Ciekawe!

Wycinanka to ozdoba wycięta z papieru, najczęściej wykorzystująca różnego rodzaju symetrie. Pierwsze wycinanki pojawiły się już ponad 4 tysiące lat temu w Chinach.
W polskiej sztuce ludowej wycinanki wykonuje się z kolorowych papierów. Mogą one mieć motywy roślinne, zwierzęce, mogą być inspirowane postaciami ludzkimi czy figurami geometrycznymi.

Przykład 1

Składając prostokątną kartkę papieru na pół, sprawdzimy, ile osi symetrii ma prostokąt.



Wierzchołki A i D oraz B i C są symetryczne względem prostej k.

Wierzchołki A i B oraz D i C są symetryczne względem prostej l.

Prostokąt ma dwie osie symetrii.

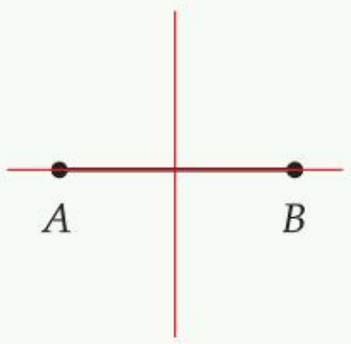
3. Narysuj na kartce romb. Składając odpowiednio kartkę, sprawdź, ile osi symetrii ma romb.

Przykład 2

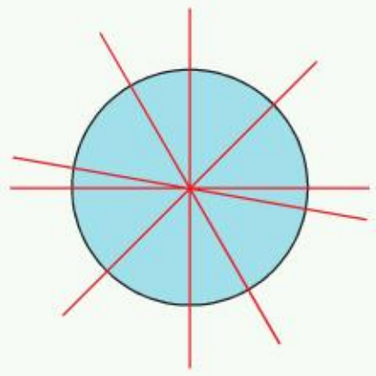
Wskażmy osie symetrii:

a) odcinka,
b) koła,
c) dowolnego kąta,
d) trójkąta różnobocznego.

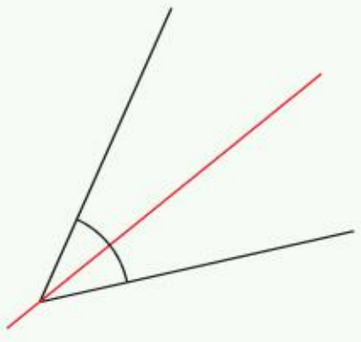
a) Odcinek AB ma dwie osie symetrii: prostą AB, w której jest zawarty, oraz prostą prostopadłą, przechodzącą przez środek (czyli symetralną AB).



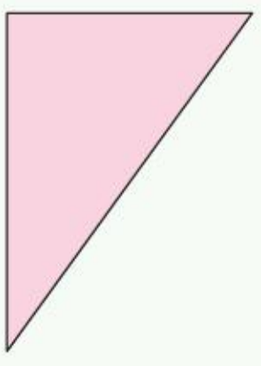
b) Koło ma nieskończenie wiele osi symetrii. Są to proste przechodzące przez środek koła.



c) Kąt ma jedną oś symetrii. To prosta zawierająca dwusieczną kąta.



d) Trójkąt różnoboczny nie ma osi symetrii.



Figury osiowosymetryczne mogą mieć jedną, kilka lub nieskończenie wiele osi symetrii.

Ciekawe!

Projektując swoje logo, firmy samochodowe biorą pod uwagę przede wszystkim cechy charakterystyczne oferowanych produktów. Nie zapominają jednak o tym, że znak firmowy musi przyciągać uwagę klienta i być przez niego łatwo zapamiętany. Zatem często logo firmy jest figurą osiowosymetryczną.
Zaprojektuj i narysuj w zeszycie swoje logo, które będzie figurą osiowosymetryczną.

Zadania

Wytnij z kartki papieru kwadrat, a następnie, odpowiednio go zginając, określ, ile ma on osi symetrii. Wskaż pary wierzchołków symetrycznych w tym kwadracie względem każdej osi symetrii.

Określ, ile osi symetrii ma każda z figur przedstawionych na zdjęciach.

a) 
b) 
c) 
d) 

Określ, ile osi symetrii ma każdy z poniższych znaków zodiaku.

a) ♈ b) ♓ c) ♎ d) ♋

Narysuj znak drogowy, który ma:

a) jedną oś symetrii,
b) dwie osie symetrii,
c) trzy osie symetrii,
d) nieskończenie wiele osi symetrii.

Zapisz, ile osi symetrii ma każdy z podanych wyrazów.

a) OTO b) CICHO c) DACH
d) ECHO e) MIECH f) MAM

Narysuj następujące figury i zaznacz ich osie symetrii (jeżeli istnieją):

a) trójkąt równoboczny,
b) kwadrat,
c) równoległobok,
d) deltoid,
e) trapez prostokątny,
f) trapez równoramienny,
g) sześciokąt foremny.

Podaj, ile osi symetrii ma figura złożona z dwóch różnych prostych. Rozpatrz różne przypadki.

Narysuj trójkąt, który ma jedną oś symetrii i jest jednocześnie:

a) ostrokątny,
b) prostokątny,
c) rozwartokątny.

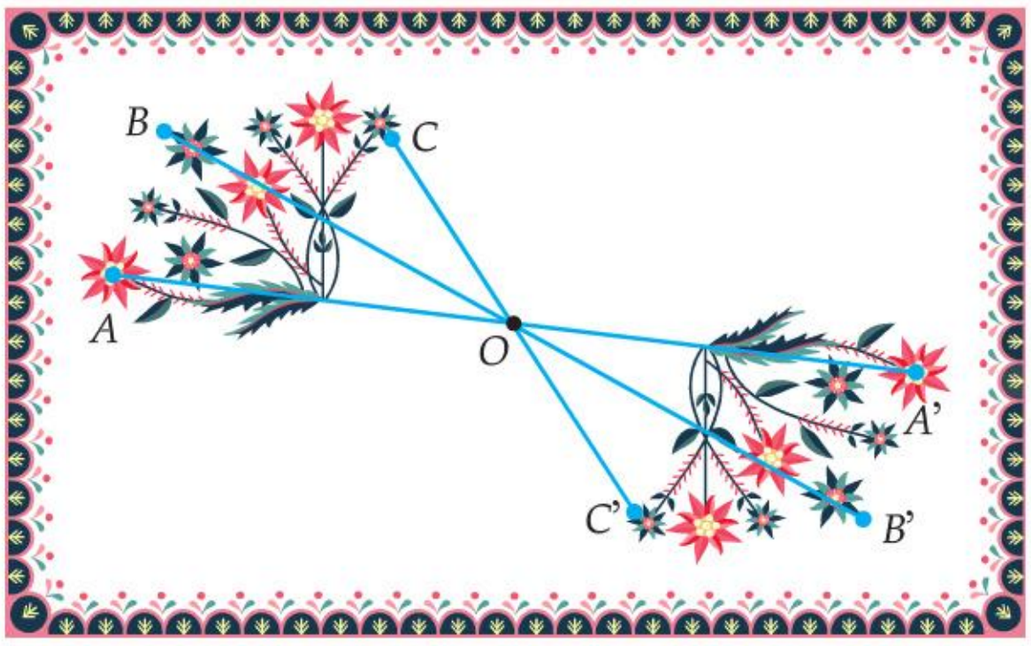
7.5 Symetria względem punktu

Podejmij temat

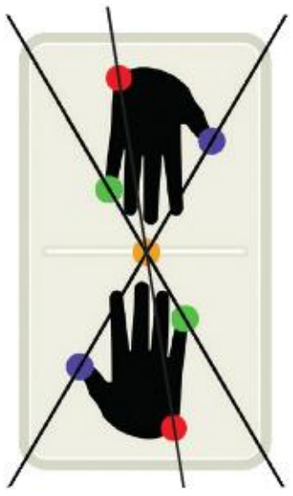


Porównaj wielkość i kształt motywów kwiatowych na serwecie.
Czy te motywy są figurami przystającymi?
Czy są to figury osiowosymetryczne?

Przyjrzyjmy się rysunkowi z *Podejmij temat*. Połączmy odcinkami pary odpowiadających sobie punktów w danych figurach.



Zauważmy, że narysowane odcinki przecięły się w jednym punkcie, który jest środkiem każdego z odcinków.
O punktach A i A', B i B', C i C' mówimy, że są **symetryczne względem punktu O**, zwanego **środkiem symetrii**.
Podobną własność mają pary punktów zaznaczonych na rysunkach poniżej.







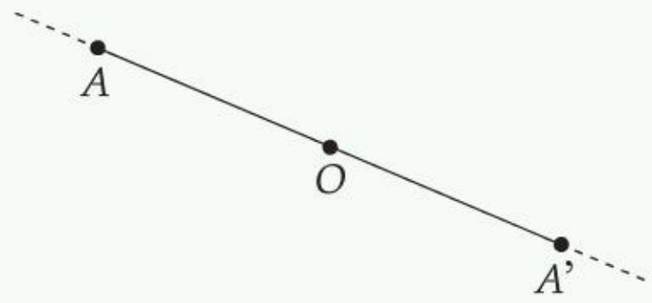
Przykład 1

Wyznaczmy punkt A' symetryczny do punktu A względem punktu O.



Kreślimy prostą AO i zaznaczamy na niej punkt A' różny od punktu A, taki, że $|AO| = |OA'|$.

Zauważmy, że punkt O jest środkiem odcinka AA'.



Punkty A i A' są symetryczne względem punktu O, jeśli punkt O jest środkiem odcinka AA'.

1. Narysuj punkty B i K. Wyznacz punkt B' symetryczny do punktu B względem punktu K. Wyznacz punkt K' symetryczny do punktu B względem punktu B. Co zauważasz?

Przykład 2

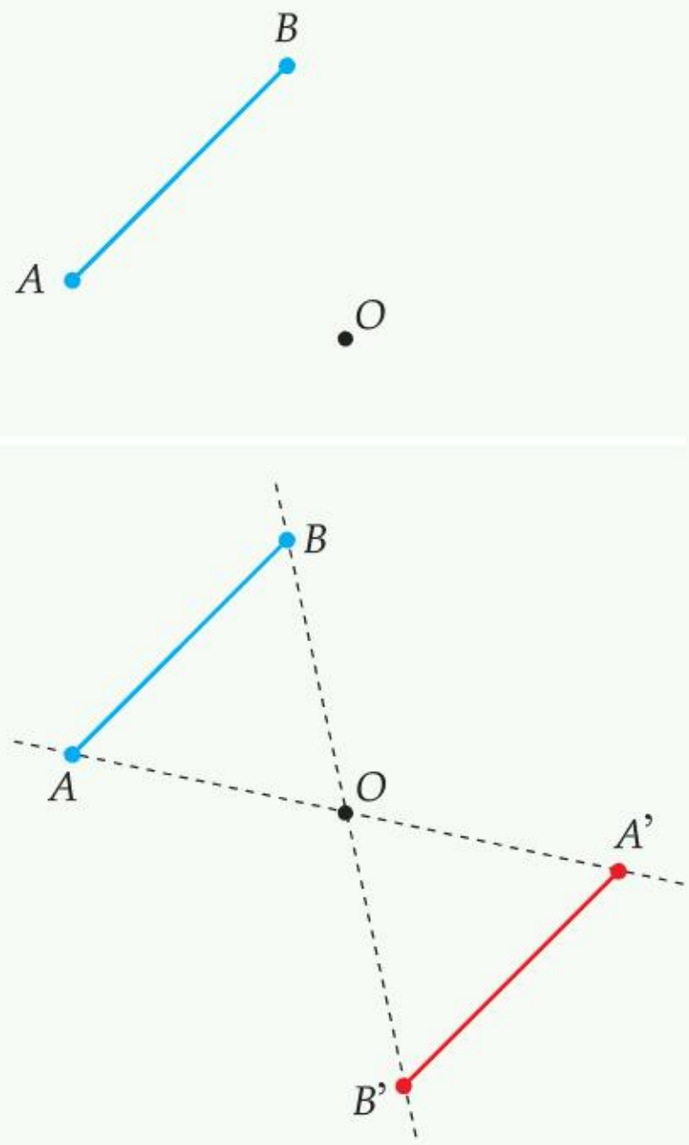
Wyznaczmy figurę symetryczną do odcinka AB względem punktu O, który nie należy do tego odcinka.

Aby wykreślić figurę symetryczną do odcinka AB względem punktu O, wystarczy wyznaczyć punkty symetryczne do końców tego odcinka.

Wykonujemy następujące czynności:

- na prostej AO zaznaczamy punkt A' taki, że O jest środkiem odcinka AA',
- na prostej BO zaznaczamy punkt B' taki, że O jest środkiem odcinka BB',
- kreślimy odcinek $A'B'$.

Zauważ, że $|AB| = |A'B'|$ oraz odcinek $AB \parallel A'B'$.



Odcinek i jego obraz w symetrii względem punktu są równoległe i równe.

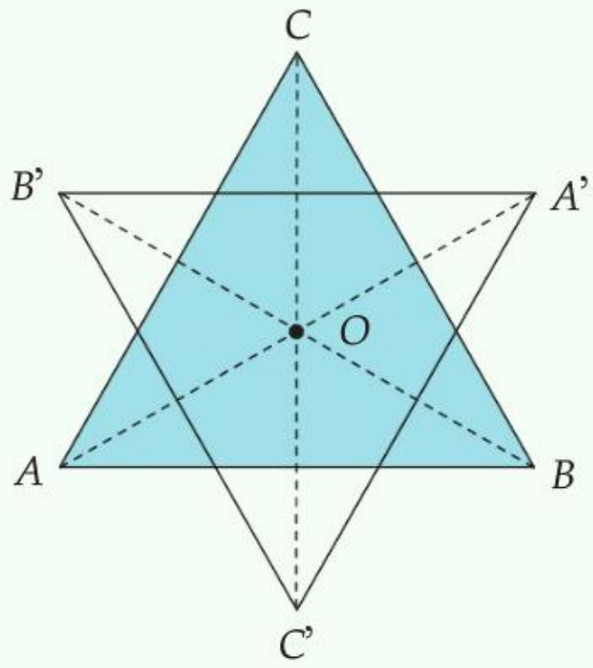
2. Narysuj kwadrat $ABCD$. Oznacz przez M punkt przecięcia przekątnych tego kwadratu. Podaj pary boków kwadratu symetryczne względem punktu M.

Przykład 3

Wyznaczmy trójkąt symetryczny do trójkąta równobocznego ABC względem punktu O przecięcia się wysokości tego trójkąta.

Rysujemy trójkąt równoboczny ABC oraz jego wysokości.

Aby wykreślić figurę symetryczną do trójkąta ABC względem punktu O, wystarczy wyznaczyć punkty symetryczne do wierzchołków tego trójkąta.



Wykonujemy następujące czynności:

- na prostej AO zaznaczamy punkt A' taki, że O jest środkiem odcinka AA',
- w ten sam sposób wyznaczamy punkty B' i C' leżące odpowiednio na prostych BO i CO,
- kreślimy boki trójkąta $A'B'C'$.

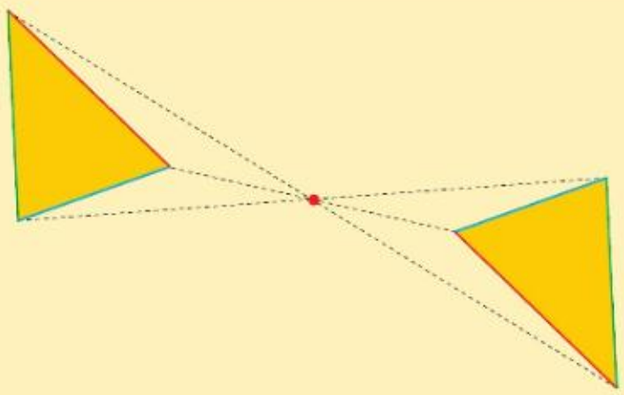
Zauważ, że: $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, $|BC| = |B'C'|$ oraz odcinki $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$.

Otrzymane trójkąty są przystające, a odpowiednie boki są równolegle.

Figury symetryczne względem punktu są przystające.

Odpowiednie boki wielokątów symetrycznych względem punktu są równoległe.

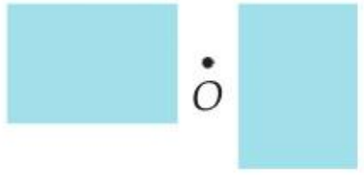
Symetrię względem punktu nazywamy **symetrią środkową**.

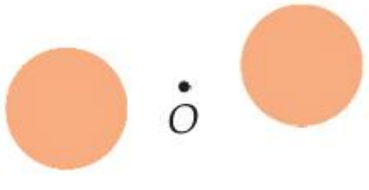


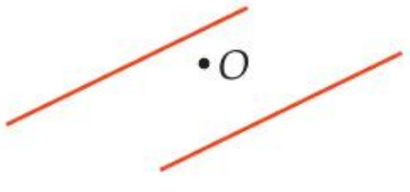
3. Narysuj równoległobok i wyznacz figurę symetryczną do tego równoległoboku względem punktu przecięcia przekątnych.

Zadania

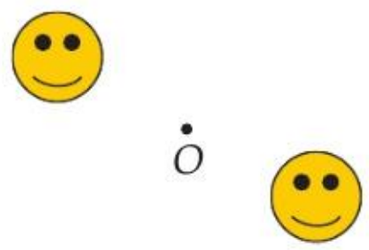
Na rysunku przedstawiono pary figur przystających. Wskaż pary figur, które nie są symetryczne względem punktu O. Odpowiedź uzasadnij.

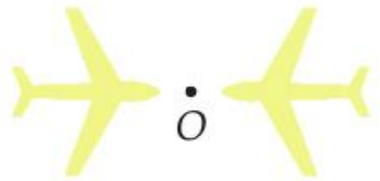
a) 

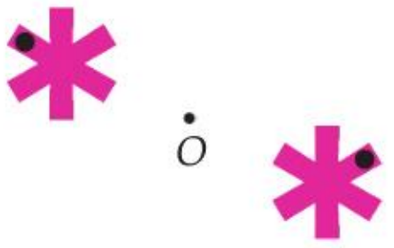
b) 

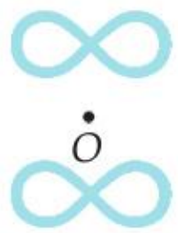
c) 

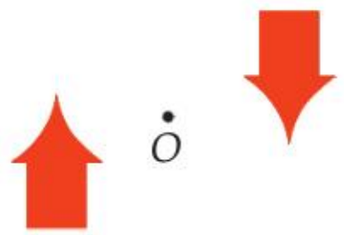
Na rysunku przedstawiono pary figur przystających. Wskaż pary figur, które są symetryczne względem punktu *O*. Odpowiedź uzasadnij.

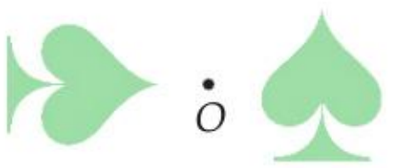
a) 

b) 

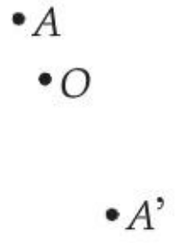
c) 

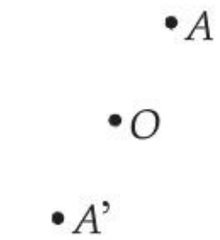
d) 

e) 

f) 

Czy punkty *A* i *A'* są symetryczne względem punktu *O*? Odpowiedź uzasadnij.

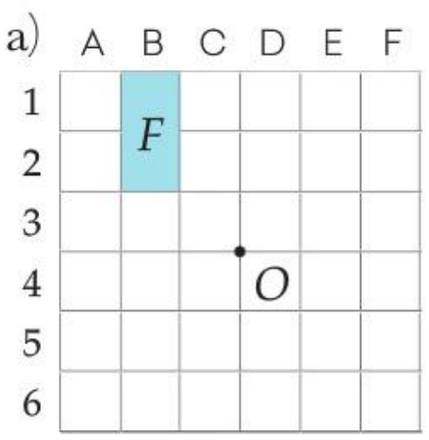
a) 

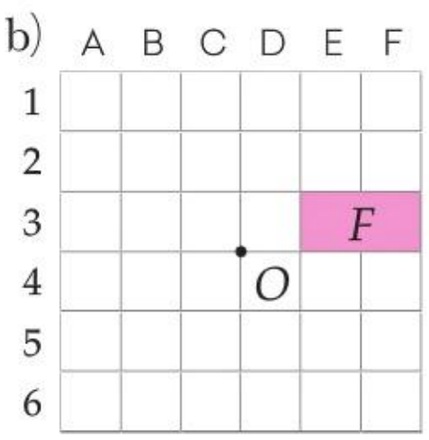
b) 

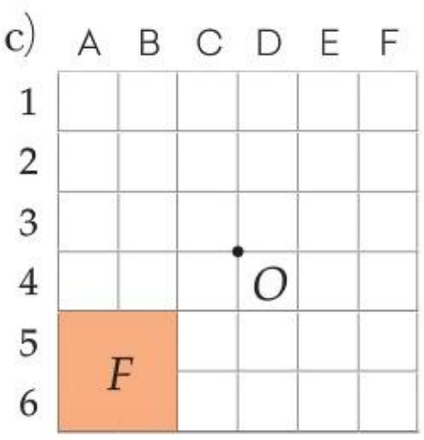
c) 

Opisz położenie figury *F'* symetrycznej do figury *F* względem punktu *O*.

Położenie figury na siatce opisanej literami i liczbami możemy opisać, określając, na jakich kwadratach ona leży, np. B1 i B2.

a) 

b) 

c) 

Narysuj dowolny trójkąt *ABC*, a następnie narysuj trójkąt do niego symetryczny względem:

a) punktu *A*,
b) środka boku *BC*,
c) punktu leżącego poza tym trójkątem,
d) punktu przecięcia wysokości tego trójkąta.

Narysuj okrąg o środku w punkcie *O* i promieniu 3 cm. Wyznacz figurę symetryczną do tego okręgu względem punktu *S*, jeśli:

a) $|SO| = 3$ cm b) $|SO| < 3$ cm c) $|SO| > 3$ cm

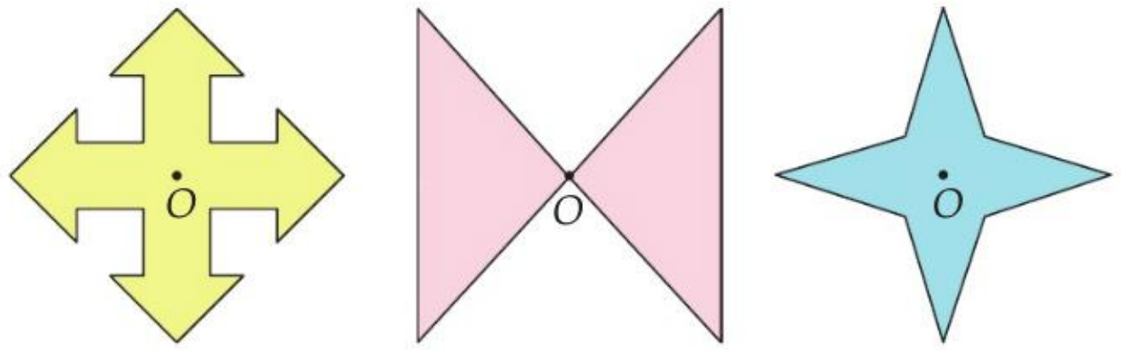
W każdym przykładzie określ wzajemne położenie otrzymanych par okręgów.

Narysuj trapez równoramienny *KLMN*. Narysuj figurę symetryczną do tego trapezu względem punktu przecięcia przekątnych.

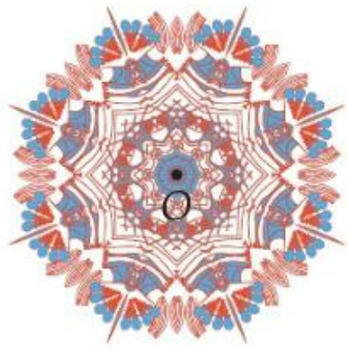
7.6 Figury środkowosymetryczne

Podejmij temat

Do każdej z figur na rysunku znajdź figurę symetryczną względem punktu O.
Jak położona jest dana figura do niej symetryczna względem punktu O?



Na rysunku obok figura i figura do niej symetryczna względem punktu O pokrywają się. Takie figury nazywamy **środkowosymetrycznymi**.
Punkt O nazywamy **środkiem symetrii figury**.



Symetrię środkową często obserwujemy w przyrodzie. Wykorzystywana jest również w tworzeniu elementów architektonicznych i przedmiotów codziennego użytku.



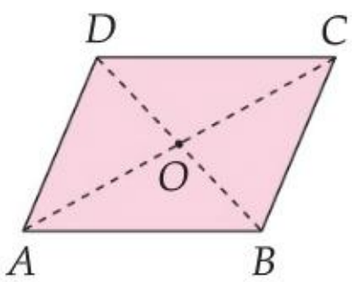


Zauważmy, że odcinek jest figurą środkowosymetryczną. Środkiem symetrii odcinka jest jego środek.



1. Narysuj odcinek EF i wyznacz środek symetrii tego odcinka.

Przekątne w równoległoboku przecinają się w punkcie O, który jest środkiem symetrii odcinków AC i BD.
Punkt O jest środkiem symetrii równoległoboku $ABCD$.
Wierzchołek A jest symetryczny do wierzchołka C, a wierzchołek B jest symetryczny do wierzchołka D względem punktu O.
Równoległobok jest figurą środkowosymetryczną.



Ciekawe!

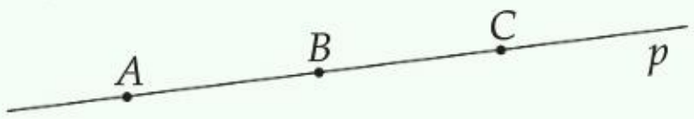


W XVII wieku we Francji zapoczątkowano styl aranżacji ogrodów oparty na symetrii osiowej i środkowej. W Polsce przykładem ogrodu w stylu francuskim jest ogród przed pałacem Branickich w Białymstoku.

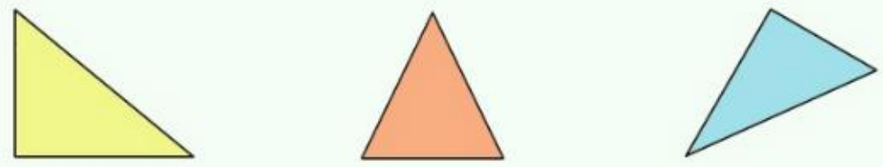
Przykład 1

Ustalmy, czy prosta, trójkąt, pięciokąt foremny, sześciokąt foremny to figury środkowosymetryczne.

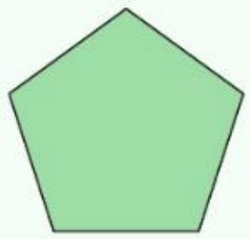
Każdy z punktów A, B, C jest środkiem symetrii prostej p. Prosta ma nieskończenie wiele środków symetrii. Środkiem symetrii prostej jest każdy punkt tej prostej.



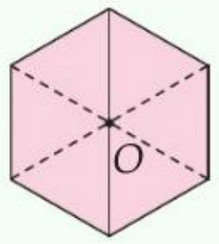
Dla trójkąta nie istnieje punkt, względem którego dany trójkąt i jego obraz pokrywałyby się. Trójkąt nie ma środka symetrii.



Pięciokąt foremny nie ma środka symetrii.



Punkt O jest środkiem symetrii sześciokąta foremnego. Sześciokąt foremny ma jeden środek symetrii.

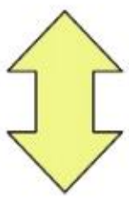


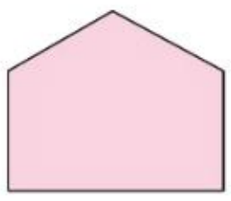
Figurę F', którą otrzymamy, przekształcając daną figurę F w symetrii względem punktu, nazywamy **obrazem figury** F.

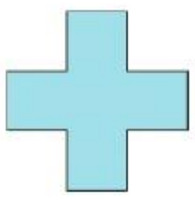
2. Wskaż środek symetrii okręgu i kwadratu. Podaj przykład wielokąta, który nie jest środkowosymetryczny.

Zadania

Wskaż figury, które mają środek symetrii.

a) 

b) 

c) 

Określ, która z kart ma środek symetrii.

a) 

b) 

c) 

Podaj przykład wielkiej litery z alfabetu polskiego mającej środek symetrii.

Podaj przykład cyfry, która ma środek symetrii.

Określ, który z podanych wyrazów ma środek symetrii.

SOS OHO WAM SIS BOB ZOZ ZEZ IXI

Określ, ile środków symetrii ma:

a) kąt ostry,
b) okrąg,
c) równoległobok,
d) ośmiokąt foremny.

Podaj przykład wielokąta foremnego

a) mającego środek symetrii,
b) niemającego środka symetrii.

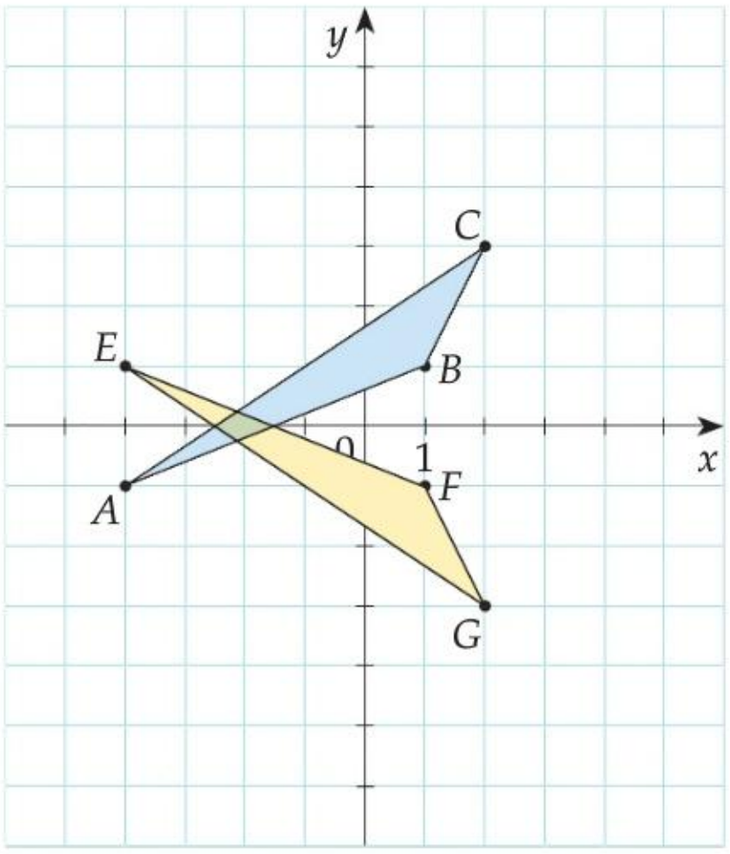
Wskaż zdania prawdziwe.

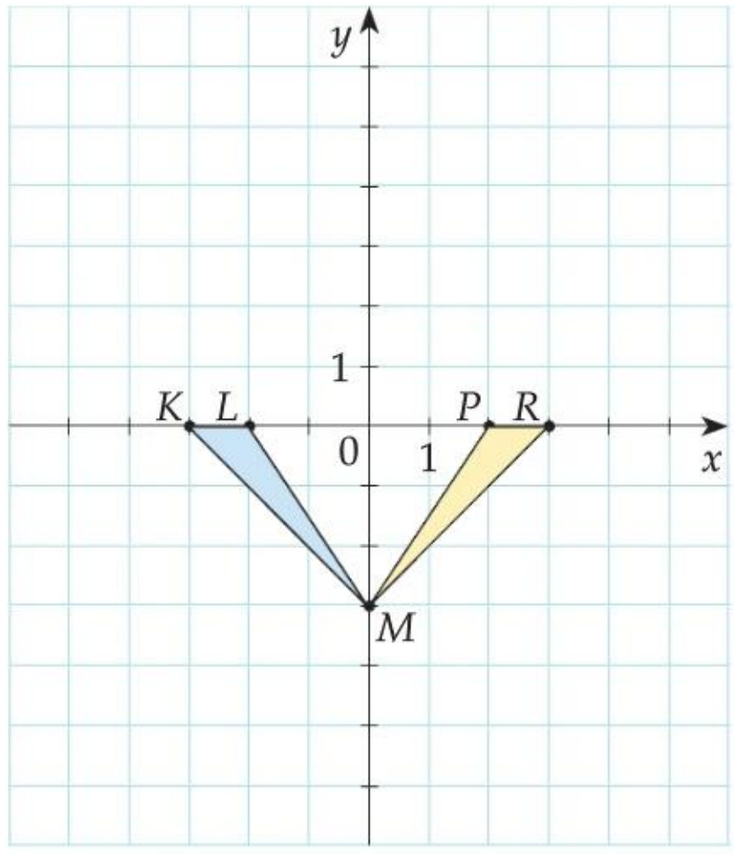
a) Koło jest figurą środkowosymetryczną.
b) Każdy trójkąt ma środek symetrii.
c) Środkiem symetrii równoległoboku jest punkt przecięcia się przekątnych.

Narysuj trzy odcinki różnej długości, które przecinają się w połowie każdego z nich. Połącz kolejno końce tych odcinków. Czy otrzymana figura jest środkowosymetryczna? Odpowiedź uzasadnij.

7.7 Symetria względem osi układu współrzędnych

Podejmij temat





Jak położone są względem siebie trójkąty ABC i EFG? Porównaj współrzędne odpowiadających sobie wierzchołków. Co zauważasz?

Jak położone są względem siebie trójkąty KLM i RPM? Porównaj współrzędne odpowiadających sobie wierzchołków. Co zauważasz?

Przykład 1

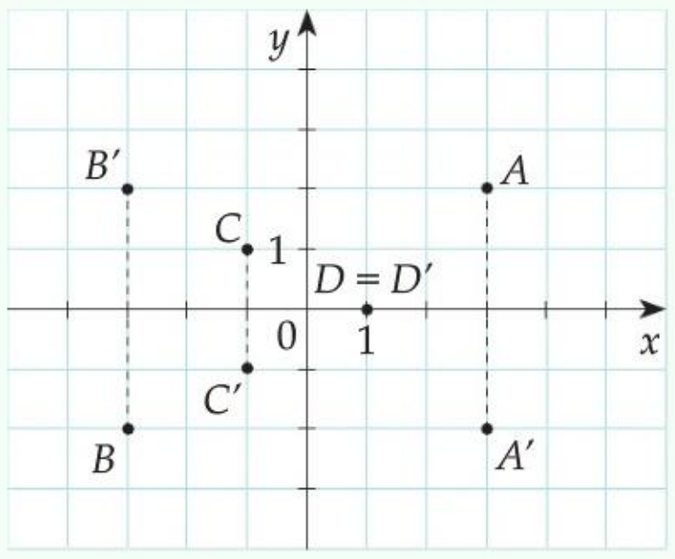
W układzie współrzędnych zaznaczmy punkty: $A = (3, 2)$, $B = (-4, -2)$, $C = (-1, 1)$, $D = (1, 0)$ i znajdźmy do nich punkty symetryczne względem osi x.

Punktem symetrycznym do punktu $A = (3, 2)$ względem osi x jest punkt $A' = (3, -2)$.

Punktem symetrycznym do punktu $B = (-4, -2)$ względem osi x jest punkt $B' = (-4, 2)$.

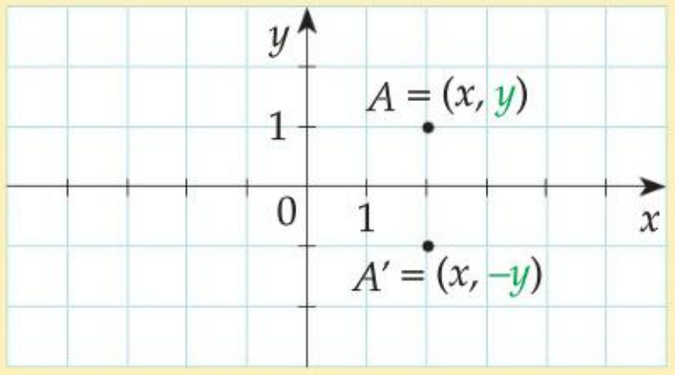
Punktem symetrycznym do punktu $C = (-1, 1)$ względem osi x jest punkt $C' = (-1, -1)$.

Punktem symetrycznym do punktu $D = (1, 0)$ względem osi x jest punkt $D' = (1, 0)$.



W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty symetryczne względem osi x mają pierwsze współrzędne (odcięte) równe, a drugie współrzędne (rzędne) przeciwne.

Punktem symetrycznym do punktu $A = (x, y)$ w symetrii osiowej względem osi x jest punkt $A' = (x, -y)$.



1. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty: $L = (1, 3)$, $M = (2, -2)$, $N = (4, 0)$ oraz punkty symetryczne do tych punktów względem osi x.

Przykład 2

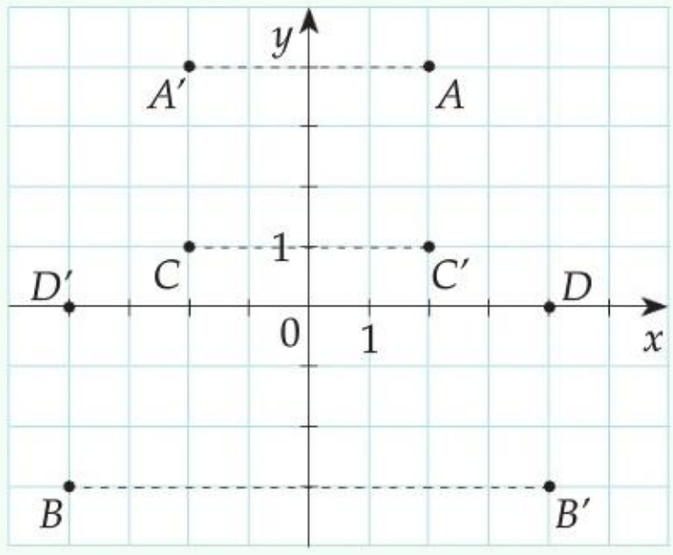
Znajdźmy punkty symetryczne do punktów: $A = (2, 4)$, $B = (-4, -3)$, $C = (-2, 1)$, $D = (4, 0)$ względem osi y.

Punktem symetrycznym do punktu $A = (2, 4)$ względem osi y jest punkt $A' = (-2, 4)$.

Punktem symetrycznym do punktu $B = (-4, -3)$ względem osi y jest punkt $B' = (4, -3)$.

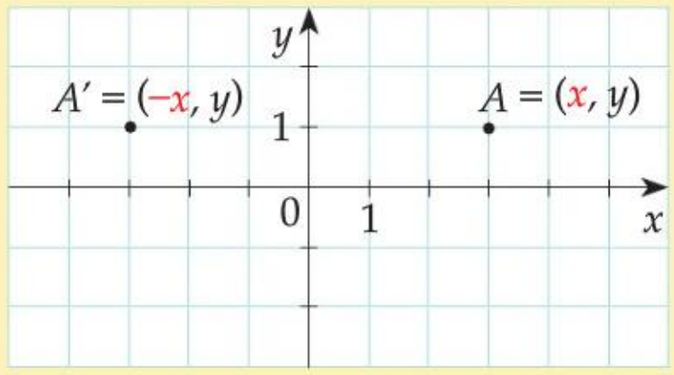
Punktem symetrycznym do punktu $C = (-2, 1)$ względem osi y jest punkt $C' = (2, 1)$.

Punktem symetrycznym do punktu $D = (4, 0)$ względem osi y jest punkt $D' = (-4, 0)$.



W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty symetryczne względem osi y mają pierwsze współrzędne (odcięte) przeciwne, a drugie współrzędne (rzędne) równe.

Punktem symetrycznym do punktu $A = (x, y)$ w symetrii osiowej względem osi y jest punkt $A' = (-x, y)$.



2. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty: $L = (-2, 3)$, $M = (2, -4)$, $N = (0, -3)$ oraz punkty symetryczne do tych punktów względem osi y.

Przykład 3

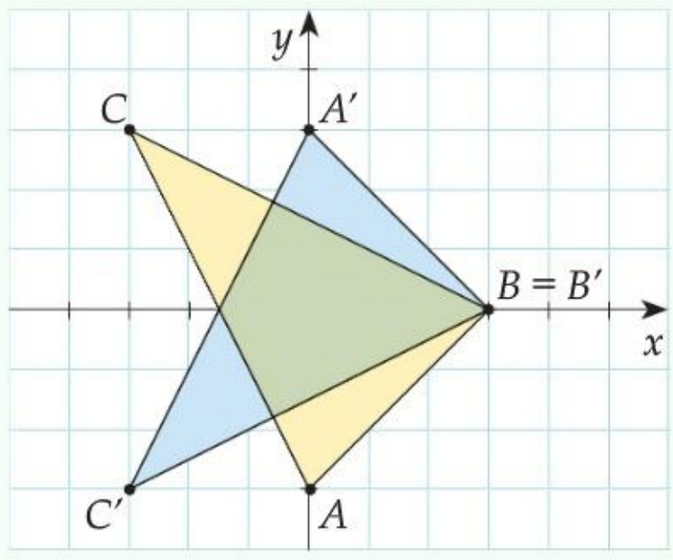
Punkty o współrzędnych: $A = (0, -3)$, $B = (3, 0)$, $C = (-3, 3)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wyznaczmy współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$ symetrycznego do danego względem osi x.

Współrzędne wierzchołków trójkąta ABC

$A = (0, -3)$ $B = (3, 0)$ $C = (-3, 3)$

Współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$

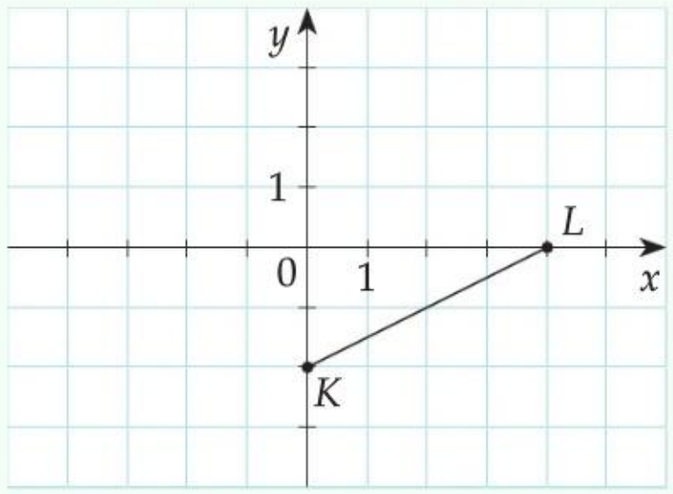
$A' = (0, 3)$ $B' = (3, 0)$ $C' = (-3, -3)$



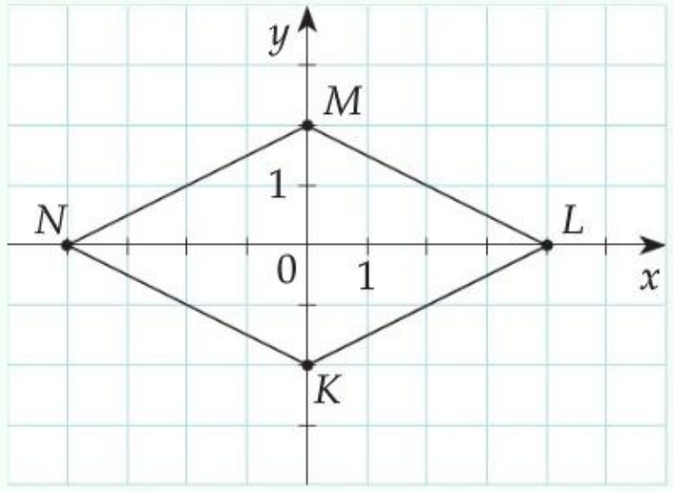
3. Punkty o współrzędnych: $A = (0, -3)$, $B = (3, 0)$, $C = (-3, 3)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$ symetrycznego do danego względem osi y.

Przykład 4

Punkty $K = (0, -2)$ i $L = (4, 0)$ są dwoma wierzchołkami rombu $KLMN$. Obie osie układu współrzędnych są osiami symetrii tego rombu. Wyznaczmy współrzędne pozostałych wierzchołków rombu.

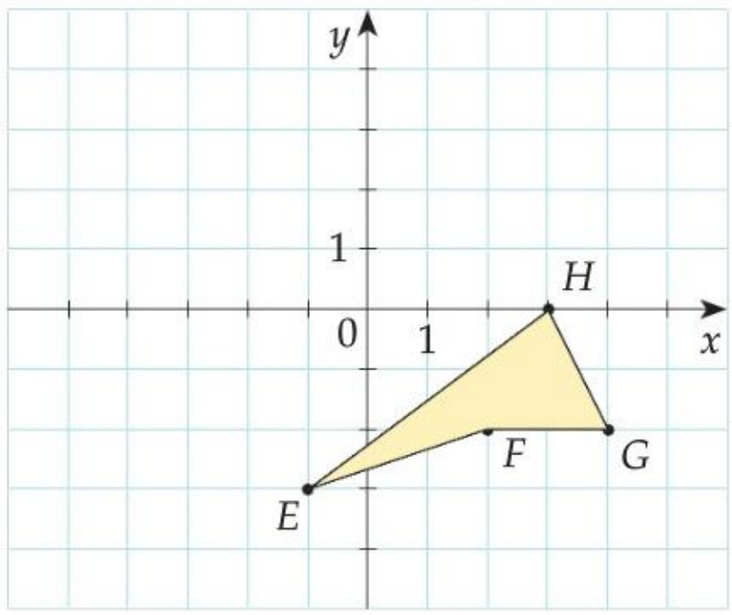


Punkty K i M są symetryczne względem osi x, czyli $M = (0, 2)$. Punkty L i N są symetryczne względem osi y, czyli $N = (-4, 0)$.



4. Wielokąt $ABCD$ jest obrazem wielokąta $EFGH$ w symetrii względem osi x.

Podaj pozostałe współrzędne wierzchołków wielokąta $ABCD$.



Zadania

- Zaznacz w układzie współrzędnych punkty: $A = (1, 4)$, $B = (-3, 5)$, $C = (0, -2)$, $D = (-2, -2)$, $E = (7, 0)$, $F = (6, -3)$ i ich obrazy w symetrii względem osi x. Podaj współrzędne otrzymanych punktów.

- Zaznacz w układzie współrzędnych punkty: $A = (-4, -7)$, $B = (5, 5)$, $C = (0, 3)$, $D = (-3, -3)$, $E = (-6, 0)$, $F = (1, -2)$ i ich obrazy w symetrii względem osi y. Podaj współrzędne otrzymanych punktów.

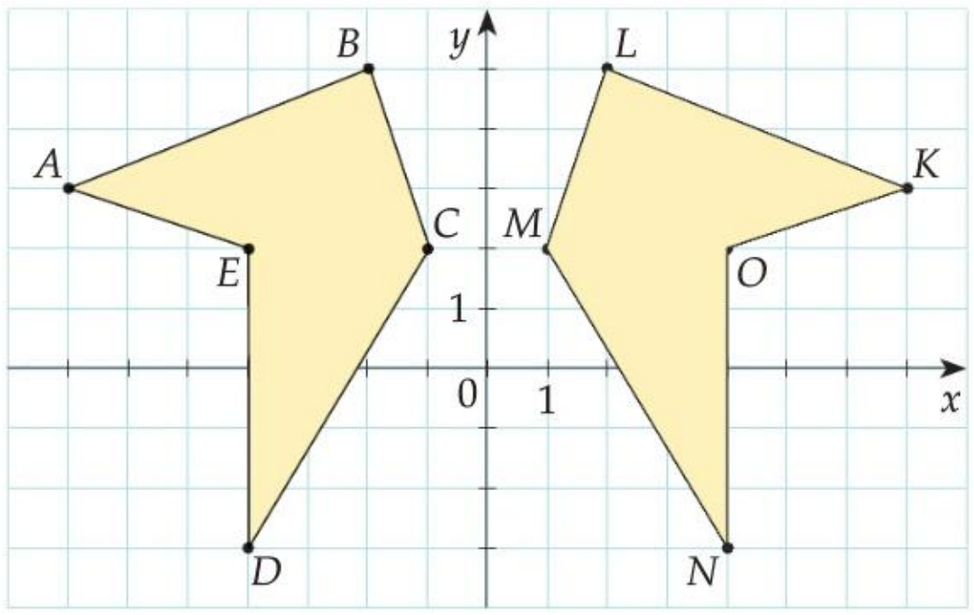
Wśród podanych punktów: $J = (-10, -6)$, $K = (10, 6)$, $L = (-8, 9)$, $M = (8, -9)$, $N = (10, -6)$, $P = (8, 9)$, $R = (-8, -9)$ wskaż pary punktów symetrycznych względem:

a) osi x, b) osi y.

Określ, względem której osi układu współrzędnych podane punkty są symetryczne.

a) $A = (-5, 12)$ i $A' = (5, 12)$
b) $B = (10, 0)$ i $B' = (-10, 0)$
c) $C = (0, 2)$ i $C' = (0, -2)$

Rozstrzygnij, czy wielokąty na rysunku są symetryczne względem osi y. Jeśli tak, podaj współrzędne odpowiadających sobie par punktów.



W układzie współrzędnych narysuj trójkąt ABC, jeśli $A = (-2, 5)$, $B = (4, -1)$, $C = (-1, -1)$. Wyznacz figurę symetryczną do trójkąta ABC względem:

a) osi x, b) osi y.

Punkty $A = (-4, 0)$, $B = \left(-1, -3\frac{1}{2}\right)$, $C = (1, 1{,}5)$, $D = (-2, 3)$ są wierzchołkami czworokąta. Wyznacz figurę symetryczną do tego czworokąta względem:

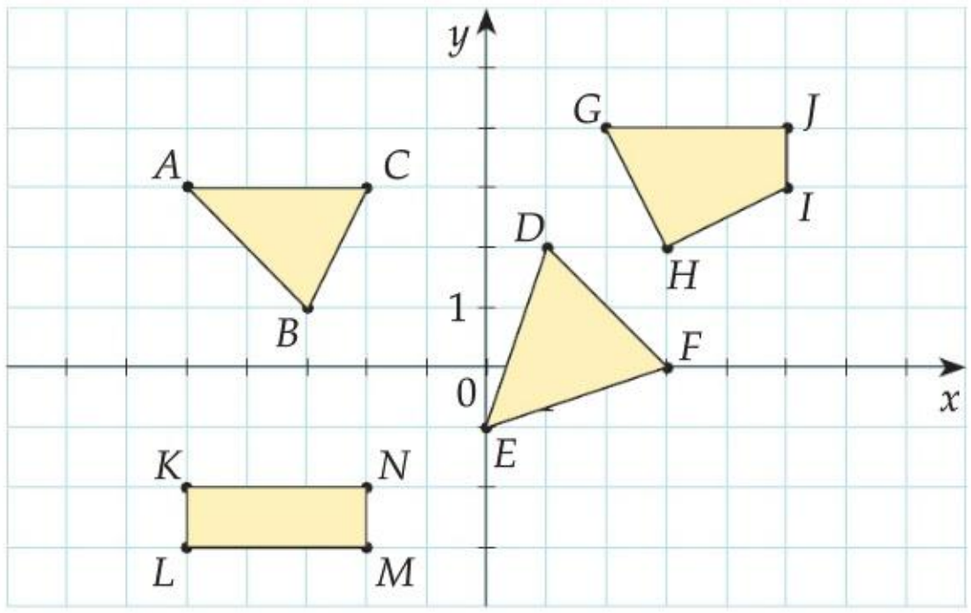
a) osi x, b) osi y.

Podaj współrzędne wierzchołków figur symetrycznych.

Oblicz długość odcinka KL, wiedząc, że $K = (-3, -2)$ oraz punkty K i L są symetryczne względem:

a) osi x, b) osi y.

Podaj współrzędne wierzchołków wielokątów symetrycznych względem osi x do wielokątów zaznaczonych na rysunku.



Osie układu współrzędnych są osiami symetrii prostokąta $ABCD$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków prostokąta, jeśli $B = (4, -2)$.

Punkty $A = (-4, -1)$ i $C = (1, 2)$ są wierzchołkami trapezu $ABCD$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trapezu, wiedząc, że oś y jest jego osią symetrii. Oblicz pole trapezu $ABCD$.

Określ, dla jakich wartości a i b punkty P i P' są symetryczne względem osi x, jeśli:

a) $P = (6, a)$ i $P' = (2b, -5)$,
b) $P = (a - 1, 8)$ i $P' = (3, b + 2)$,
c) $P = (a, b + 3)$ i $P' = (-2, -10)$,
d) $P = (b, a - b)$ i $P' = (3, 0)$.

Zapisz, dla jakich wartości m i n punkty R i R' są symetryczne względem osi y, jeśli:

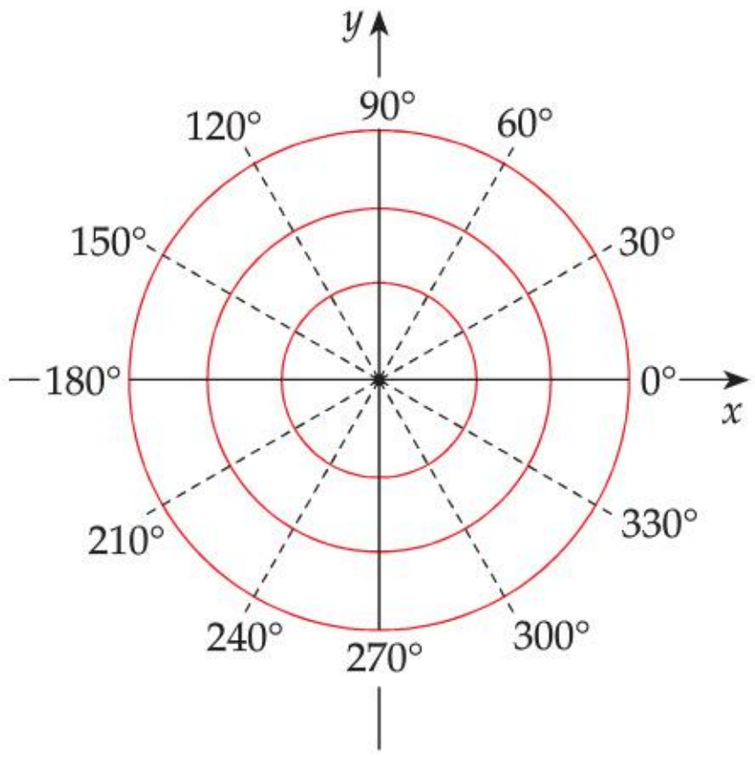
a) $R = (-6, n)$ i $R' = (3m, -6)$,
b) $R = (m + 1, 8)$ i $R' = (-3, n - 2)$,
c) $R = (3m, n + 2)$ i $R' = (3, 7)$,
d) $R = (6, 5)$ i $R' = (-2m, 4 + n)$.

Jeden z wierzchołków kwadratu ma współrzędne $(3, 0)$. Jakie współrzędne mają pozostałe wierzchołki, jeśli przekątna tego kwadratu o długości 6 jednostek leży na osi x?

7.8 Symetria względem początku układu współrzędnych

Podejmij temat



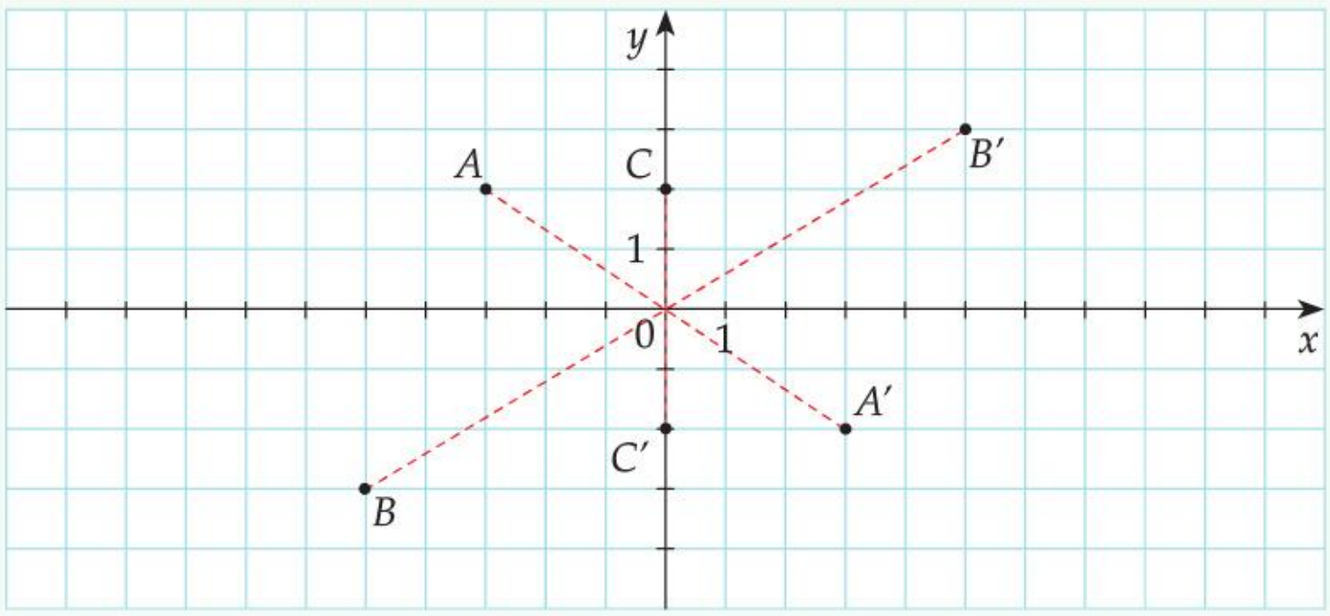


Czy kompas można uznać za model figury środkowosymetrycznej?
Rysunek przedstawia matematyczny model róży wiatrów.
Czy możesz wskazać na nim punkty położone symetrycznie względem początku układu współrzędnych?

Przykład 1

W układzie współrzędnych zaznaczymy punkty: $A = (-3, 2)$, $B = (-5, -3)$, $C = (0, 2)$, a następnie znajdziemy do nich punkty symetryczne względem początku układu współrzędnych.

Porównajmy współrzędne punktów symetrycznych względem punktu O.



Współrzędne danych punktów:

$A = (-3, 2)$ $B = (-5, -3)$ $C = (0, 2)$

Współrzędne punktów symetrycznych względem punktu $(0, 0)$:

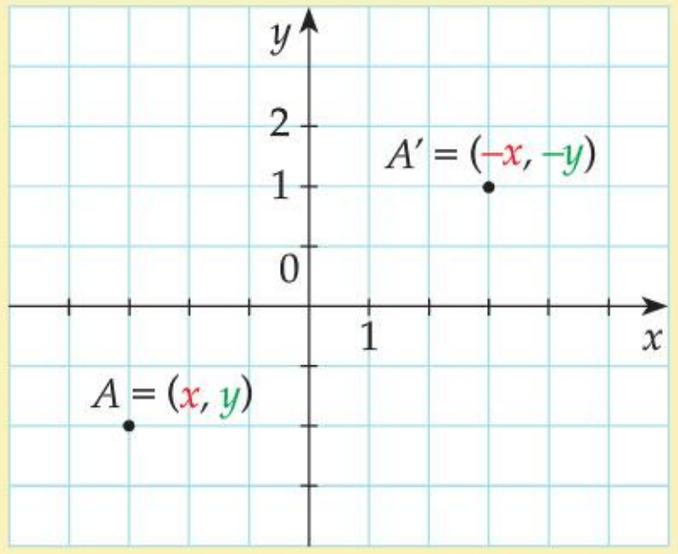
$A' = (3, -2)$ $B' = (5, 3)$ $C' = (0, -2)$

Ciekawe!

Układ współrzędnych geograficznych na kuli jest odpowiednikiem prostokątnego układu współrzędnych na płaszczyźnie.
Początkiem układu jest przecięcie południka zerowego z równikiem.

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty symetryczne względem początku układu współrzędnych mają pierwsze współrzędne (odcięte) przeciwne i drugie współrzędne (rzędne) przeciwne.

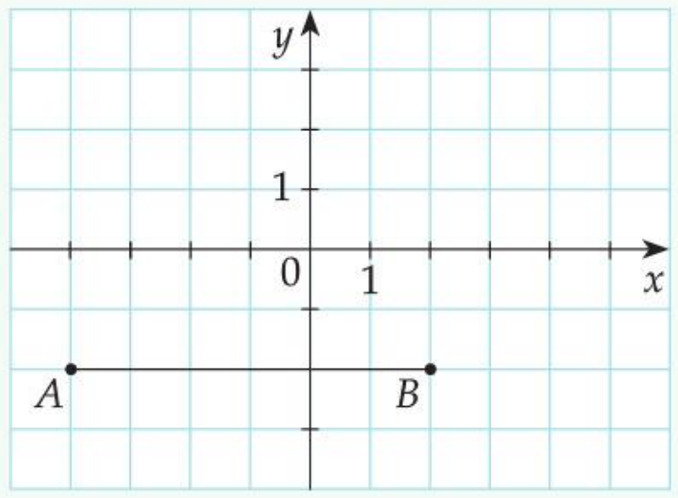
Punktem symetrycznym do punktu $A = (x, y)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest punkt $A' = (-x, -y)$.



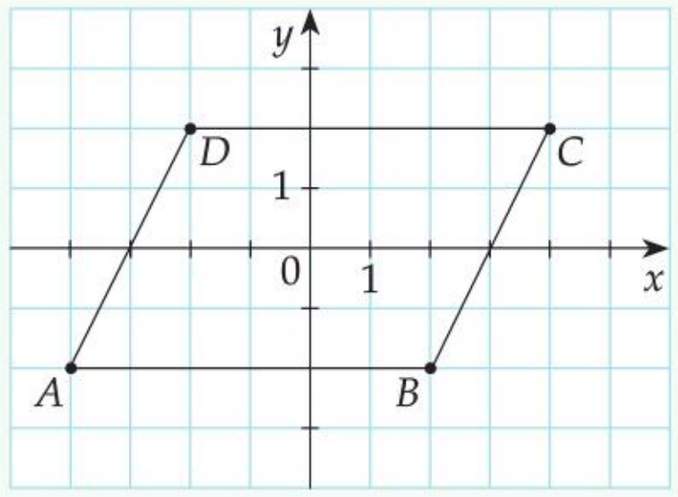
1. Dane są punkty: $F = (401, -200)$, $G = (0, -67)$, $H = (34, 0)$. Określ współrzędne punktów symetrycznych względem początku układu współrzędnych do danych punktów.

Przykład 2

Odcinek AB, gdzie $A = (-4, -2)$, $B = (2, -2)$, jest bokiem równoległoboku. Środkiem symetrii równoległoboku $ABCD$ jest początek układu współrzędnych. Wyznaczymy współrzędne pozostałych wierzchołków tego równoległoboku.



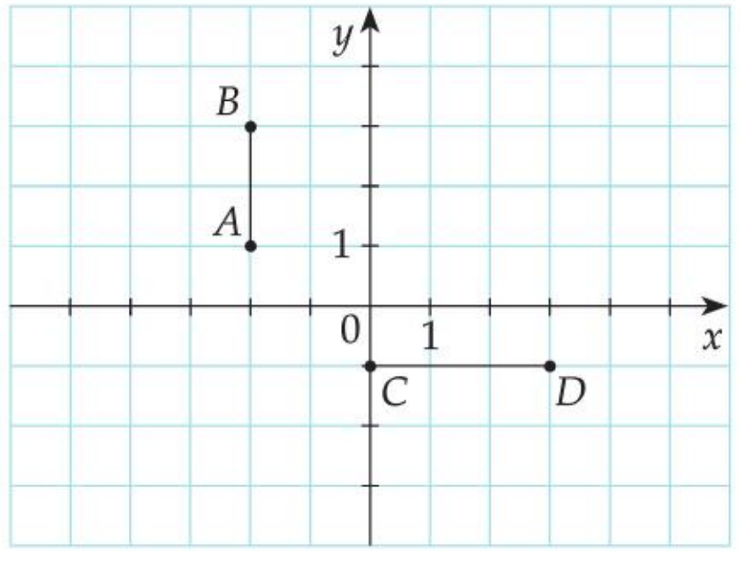
Wierzchołki A i C oraz B i D są symetryczne względem początku układu współrzędnych, czyli $C = (4, 2)$ i $D = (-2, 2)$.



2. Trójkąty ABP i CDG są prostokątne równoramienne. Odcinek AB jest jedną z przyprostokątnych trójkąta ABP. Odcinek CD jest jedną z przyprostokątnych trójkąta CDG.

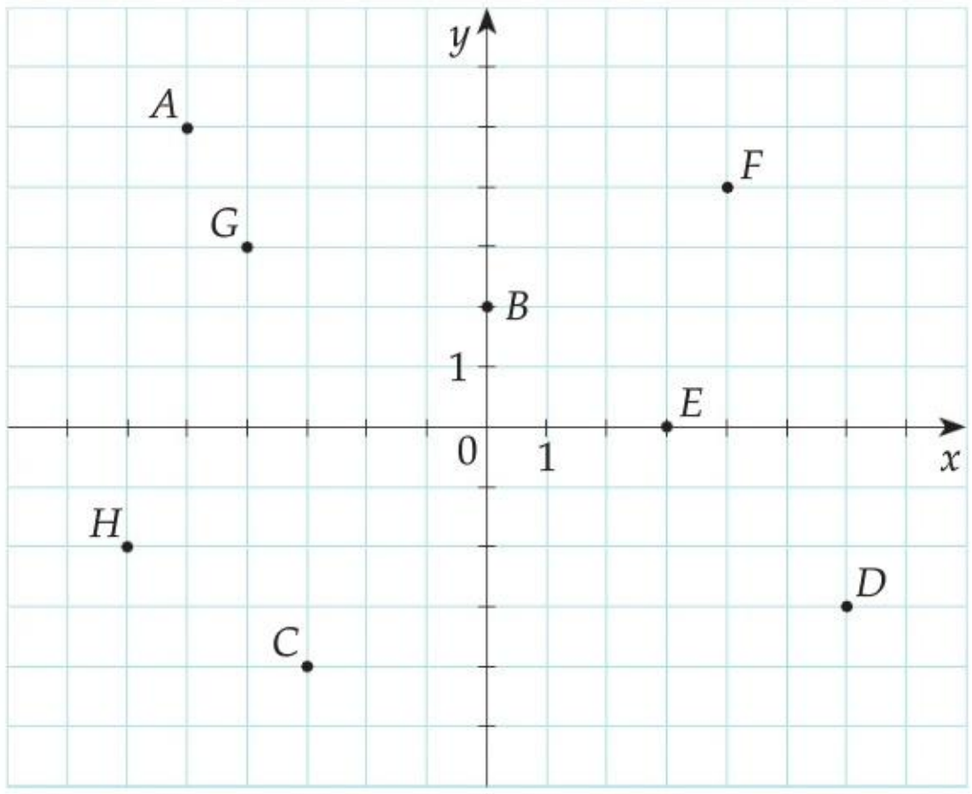
a) Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'P'$ symetrycznego do trójkąta ABP względem początku układu współrzędnych.
b) Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta $C'D'G'$ symetrycznego do trójkąta CDG względem początku układu współrzędnych.

Rozpatrz w każdym podpunkcie cztery przypadki.



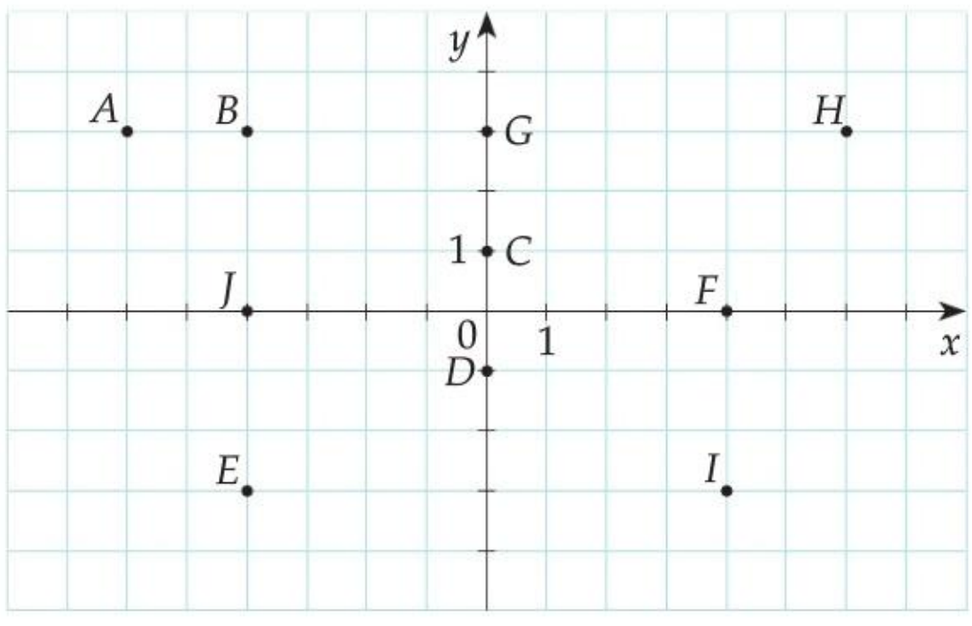
Zadania

Do każdego z punktów zaznaczonych na rysunku określ współrzędne punktu symetrycznego względem początku układu współrzędnych.



Dane są punkty: $A = (1, -4)$, $B = (-3, -5)$, $C = (0, -1)$, $D = (2, -1)$, $E = (-4, 0)$, $F = (4, 3)$. Do każdego z nich podaj współrzędne punktów symetrycznych względem początku układu współrzędnych.

Podaj pary punktów symetrycznych względem początku układu współrzędnych.



Wśród punktów: $A = (-1, -6)$, $B = (10, 6)$, $C = (-18, 9)$, $D = (8, 9)$, $E = (1, 6)$, $F = (18, -9)$, $G = (-8, -9)$, $H = (-10, -6)$ wskaż pary punktów symetrycznych względem początku układu współrzędnych.

Rozstrzygnij, czy dane punkty są symetryczne względem początku układu współrzędnych.

a) $A = (-7, 1)$ i $A' = (7, 1)$

b) $B = (1, -3)$ i $B' = (-1, 3)$

c) $C = (0, 35)$ i $C' = (0, -35)$

d) $D = (2, 0)$ i $D' = (-2, 0)$

W układzie współrzędnych narysuj trójkąt ABC, jeśli $A = (2, -5)$, $B = (4, 1)$, $C = (-1, 2)$. Wyznacz figurę symetryczną do trójkąta ABC względem punktu $(0, 0)$. Jakie współrzędne mają wierzchołki trójkąta symetrycznego?

Punkt $(0, 0)$ jest środkiem symetrii prostokąta $ABCD$, którego boki są równoległe do osi układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków prostokąta i jego obwód, jeśli wierzchołek $D = (-4, 3)$.

Dwoma wierzchołkami rombu są punkty $M = (0, 6)$ i $N = (-8, 0)$, a punkt $(0, 0)$ jest środkiem symetrii tego rombu. Wyznacz pozostałe współrzędne wierzchołków rombu $KLMN$. Oblicz pole i obwód rombu.

Określ, dla jakich wartości a i b punkty P i P' są symetryczne względem początku układu współrzędnych, jeśli:

a) $P = (-4, 3a)$ i $P' = (2b, -9)$,

b) $P = (-b, a - 1)$ i $P' = (3, -(-2))$,

c) $P = (a, -b + 3)$ i $P' = (-14, -11)$,

d) $P = (8 - a, -3)$ i $P' = (12, 5 + b)$.

Odcinek AB, gdzie $A = (-4, -2)$ i $B = (4, -2)$, jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC. Wyznacz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta, a następnie znajdź trójkąt do niego symetryczny względem początku układu współrzędnych. Rozważ dwa przypadki.

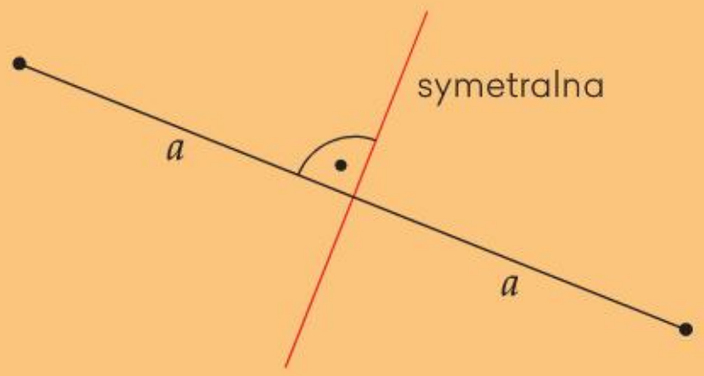
Podsumowanie działu 7

Ważne pojęcia

symetria względem punktu (symetria środkowa) symetria względem prostej (symetria osiowa)
symetralna odcinka dwusieczna kąta figury osiowosymetryczne figury środkowosymetryczne

Symetralna odcinka to prosta wyznaczona przez wszystkie punkty równo oddalone od obu końców tego odcinka.

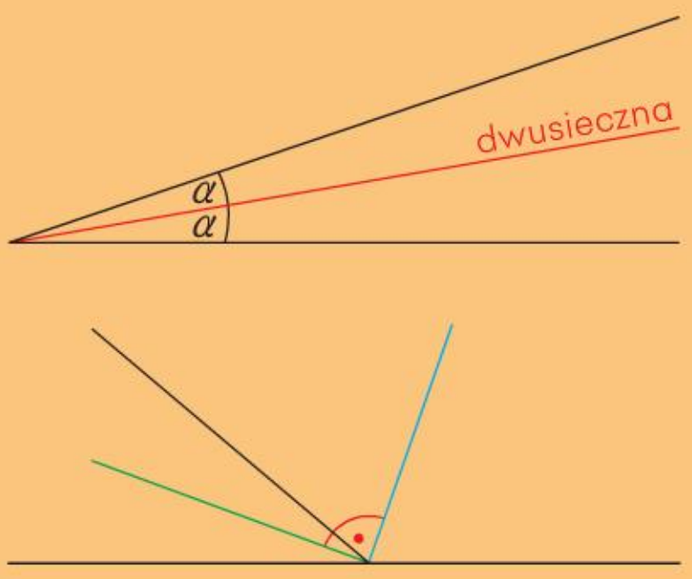
Symetralną odcinka jest prosta prostopadła do tego odcinka i przechodząca przez jego środek.



Dwusieczna kąta to półprosta o początku w wierzchołku tego kąta, która dzieli ten kąt na dwa kąty o takich samych miarach.

Do dwusiecznej kąta należą punkty należące do tego kąta i równo oddalone od jego ramion.

Dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.



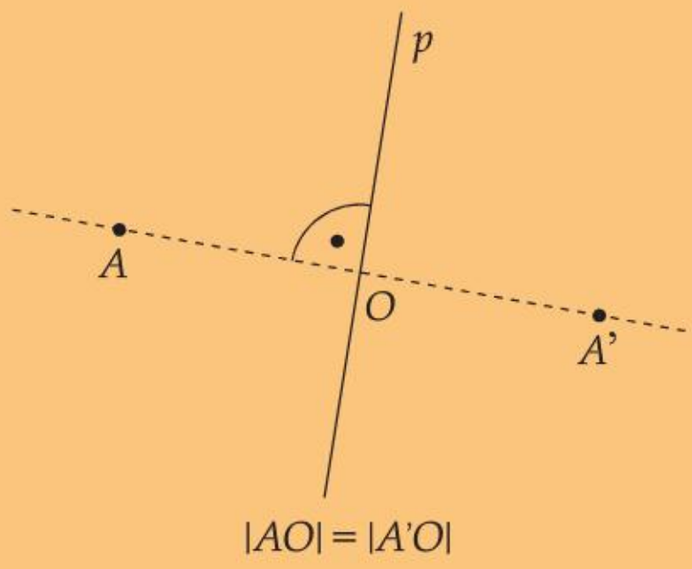
Symetria względem prostej

Figury symetryczne względem prostej są przystające.

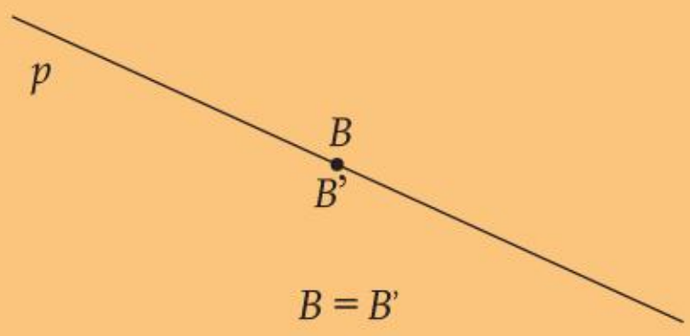
Punkty A i A' symetryczne względem prostej p i nieleżące na tej prostej:

- znajdują się po przeciwnych stronach prostej p,
- znajdują się w tej samej odległości od prostej p,
- należą do tej samej prostej prostopadłej do prostej p.

Symetrię względem prostej nazywamy też **symetrią osiową**.



Jeżeli punkt leży na prostej p, to jego obrazem w symetrii względem prostej p jest ten sam punkt.



Figurą symetryczną do odcinka względem prostej jest odcinek tej samej długości.

Figury osiowosymetryczne

Jeśli daną figurę można podzielić pewną prostą na dwie części w ten sposób, że obie części są symetryczne do siebie względem tej prostej (czyli jedna z nich jest odbiciem lustrzanym drugiej), to o tej prostej powiemy, że jest **osią symetrii** danej figury. O figurach, które mają oś symetrii, mówimy, że są **osiowosymetryczne**.

Oś symetrii dzieli daną figurę na dwie figury przystające.

Figury osiowosymetryczne mogą mieć jedną, kilka lub nieskończenie wiele osi symetrii.

Symetria względem punktu

Punkty A i A' są symetryczne względem punktu O, jeśli punkt O jest środkiem odcinka AA'.

Odcinek i jego obraz w symetrii względem punktu są równoległe i równe.

Figury symetryczne względem punktu są przystające. Odpowiednie boki wielokątów symetrycznych względem punktu są równoległe.

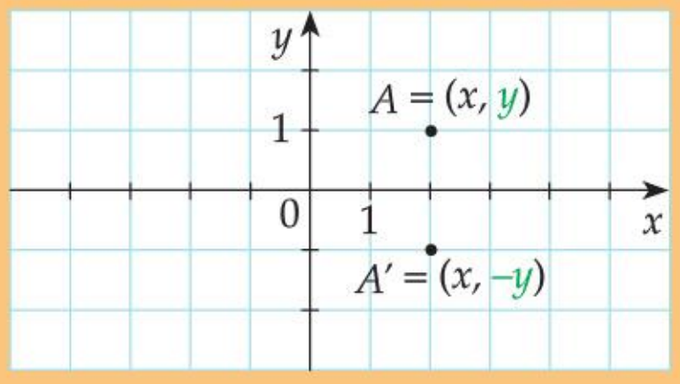
Symetrię względem prostej nazywamy **symetrią środkową**.

Figury środkowosymetryczne

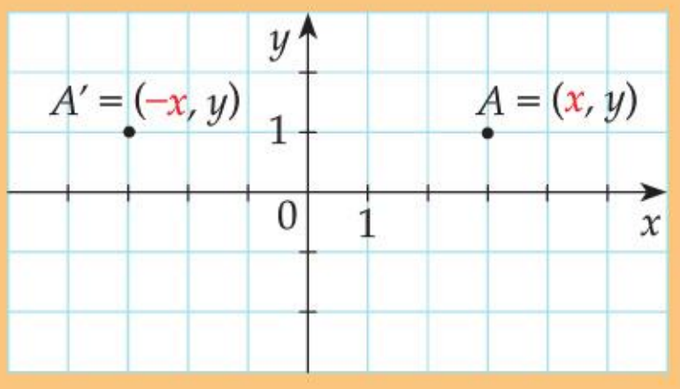
Figurę nazywamy środkowosymetryczną, jeśli istnieje taki punkt O, że obraz każdego punktu tej figury, w symetrii względem punktu O, też należy do tej figury.

Symetria względem osi układu współrzędnych

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty symetryczne względem osi x mają pierwsze współrzędne (odcięte) równe, a drugie współrzędne (rzędne) przeciwne.
Punktem symetrycznym do punktu $A = (x, y)$ w symetrii osiowej względem osi x jest punkt $A' = (x, -y)$.

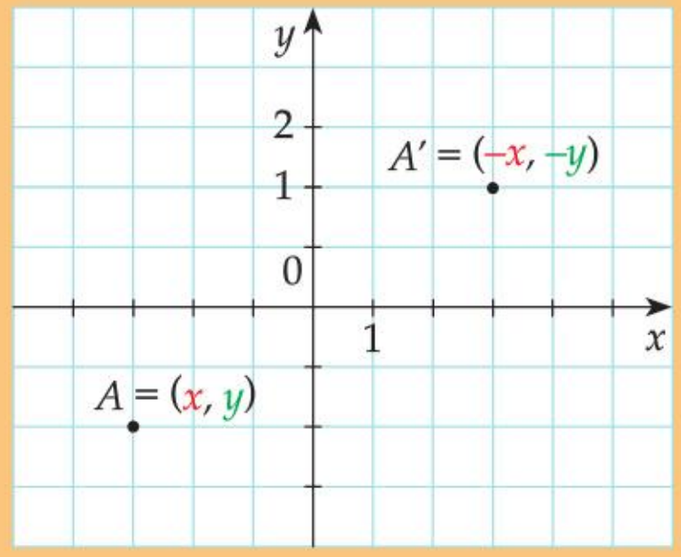


W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty symetryczne względem osi y mają pierwsze współrzędne (odcięte) przeciwne, a drugie współrzędne (rzędne) równe.
Punktem symetrycznym do punktu $A = (x, y)$ w symetrii osiowej względem osi y jest punkt $A' = (-x, y)$.



Symetria względem początku układu współrzędnych

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty symetryczne względem początku układu współrzędnych mają pierwsze współrzędne (odcięte) przeciwne i drugie współrzędne (rzędne) przeciwne.
Punktem symetrycznym do punktu $A = (x, y)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest punkt $A' = (-x, -y)$.



Czy już umiesz?

1 Rysunki przedstawiają pary figur przystających. Rozstrzygnij, które figury nie są symetryczne względem narysowanej prostej.

I 

II 

III 

IV 

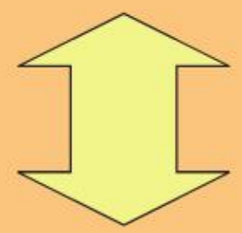
A. I i II

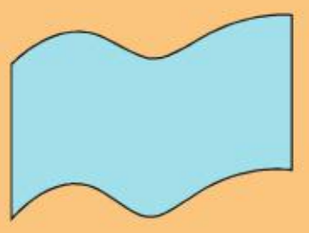
B. III i IV

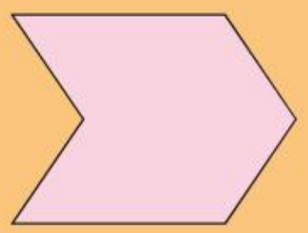
C. I i III

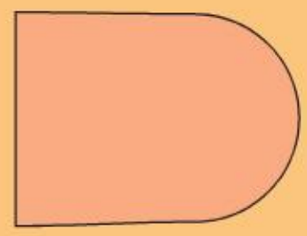
D. II i IV

2 Figurą osiowosymetryczną nie jest

A. 

B. 

C. 

D. 

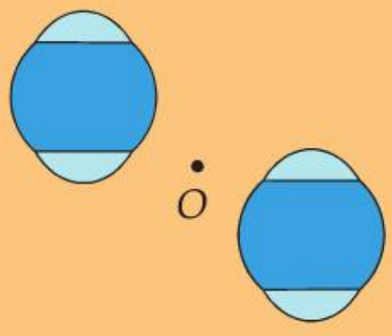
3 Wskaż wszystkie zdania prawdziwe.

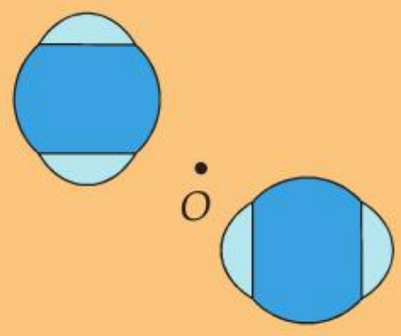
A. Okrąg ma nieskończenie wiele osi symetrii.
B. Trójkąt równoboczny ma trzy osie symetrii.
C. Każdy romb ma cztery osie symetrii.
D. Każdy prostokąt ma tylko jedną oś symetrii.

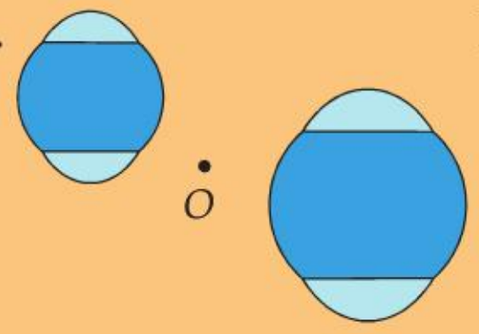
4 Wskaż wszystkie zdania fałszywe.

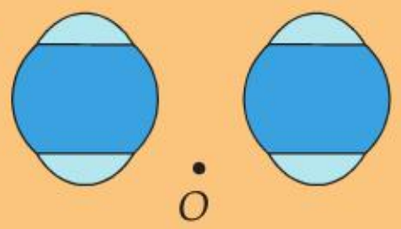
A. Każdy równoległobok mający oś symetrii jest prostokątem.
B. Istnieje trójkąt, który ma dokładnie jedną oś symetrii.
C. Każdy romb ma dokładnie dwie osie symetrii.
D. Odcinek ma tylko jedną oś symetrii.

5 Figury przedstawione na rysunku mają ten sam kształt. Które figury są symetryczne względem punktu *O*?

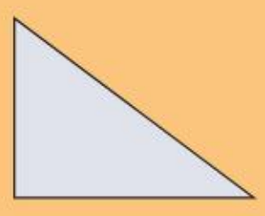
A. 

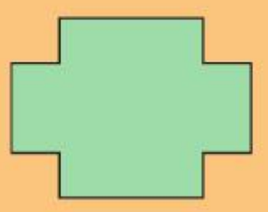
B. 

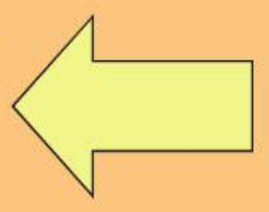
C. 

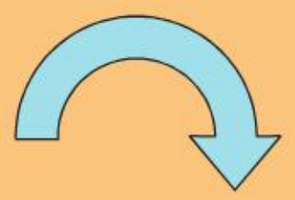
D. 

6 Figurą środkowosymetryczną jest

A. 

B. 

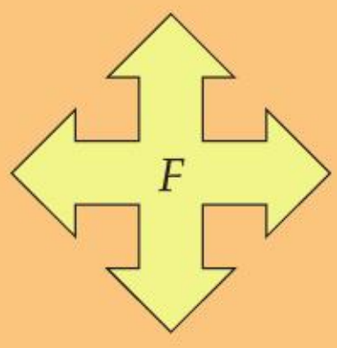
C. 

D. 

7 Środek symetrii ma każdy

A. trójkąt.
B. prostokąt.
C. trapez.
D. pięciokąt foremny.

8 Figura F



A. jest tylko osiowosymetryczna.
B. jest tylko środkowosymetryczna.
C. nie jest ani osiowosymetryczna, ani środkowosymetryczna.
D. jest osiowosymetryczna i środkowosymetryczna.

9 Punkty symetryczne względem osi x to

A. $(2, -7)$ i $(-2, 7)$. B. $(0, -4{,}5)$ i $\left(0, 4\frac{1}{2}\right)$. C. $(9, -6)$ i $(-9, -6)$. D. $(-5, 0)$ i $(0, 5)$.

10 Oś y jest osią symetrii prostokąta $ABCD$. Jeśli $A = (-3, -3)$ i $D = (-3, 4)$, to współrzędne pozostałych wierzchołków są równe

A. $(-3, 3)$ i $(-3, -4)$. B. $(3, -4)$ i $(3, 3)$. C. $(3, 4)$ i $(3, -3)$. D. $(-3, 3)$ i $(3, 4)$.

11 Punkty $P = (-4, b)$ i $P' = (a, -7)$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych, jeśli

A. $a = 4$ i $b = -7$ B. $a = -4$ i $b = 7$ C. $a = -4$ i $b = -7$ D. $a = 4$ i $b = 7$

12 Dany jest romb o wierzchołkach $(-4, 0)$, $(0, -3)$, $(4, 0)$, $(0, 3)$. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

A. Osie układu współrzędnych są jego osiami symetrii.
B. Obwód rombu jest równy 20.
C. Pole rombu jest równe 48.
D. Punkt $(0, 0)$ jest jego środkiem symetrii.

13 Narysuj trójkąt, który ma:

a) jedną oś symetrii, b) więcej niż jedną oś symetrii.

14 Narysuj trzy okręgi o różnych promieniach, tak aby otrzymana figura miała jedną oś symetrii.

15 Wyznacz wszystkie osie symetrii sześciokąta foremnego.

16 Określ, jak położone są względem siebie odcinek i prosta będąca osią symetrii, jeżeli częścią wspólną tego odcinka i odcinka do niego symetrycznego jest:

a) punkt, b) odcinek.

Jakie jest ich wzajemne położenie, jeśli odcinki symetryczne nie mają części wspólnej?

17 Przeciwprostokątna AC trójkąta prostokątnego ABC ma 13 cm długości, a jedna z przyprostokątnych 12 cm. Narysuj trójkąt symetryczny do tego trójkąta względem prostej AC, a następnie oblicz obwód czworokąta zbudowanego z tych trójkątów.

18 Prostokąt ma wymiary 0,3 dm × 0,05 m. Narysuj prostokąt do niego symetryczny względem prostej zawierającej jeden z jego boków. Wyznacz obwód figury otrzymanej z tych prostokątów. Rozważ dwa przypadki.

19 Osiami symetrii rombu o obwodzie 52 są osie prostokątnego układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego rombu, jeśli jedna z jego przekątnych jest równa 10. Rozważ dwa przypadki.

20 Trapez prostokątny ma wysokość 0,4 dm i podstawy długości 50 mm oraz 0,03 m. Oblicz pole i obwód figury zbudowanej z tego trapezu i trapezu do niego symetrycznego względem punktu, który jest środkiem dłuższego ramienia.

21 Bok kwadratu ma 2 cm długości. Wyznacz figury symetryczne do tego kwadratu względem każdego z jego wierzchołków. Oblicz pole i obwód figury złożonej z kwadratu i kwadratów do niego symetrycznych.

22 Jakie współrzędne ma środek symetrii równoległoboku, którego wierzchołki mają współrzędne: (−1, −4), (2, −4), (5, 4), (2, 4)? Oblicz pole tego równoległoboku.

23 Który rysunek flagi jest figurą

a) osiowosymetryczną,
b) środkowosymetryczną?

I. 
II. 
III. 
IV. 
V. 
VI. 
VII. 
VIII. 
IX. 
X. 

24 Podaj po trzy przykłady liter, które:

a) mają jedną oś symetrii,
b) mają dwie osie symetrii,
c) mają środek symetrii,
d) są osiowosymetryczne i środkowosymetryczne.

25 Narysuj czworokąt, który:

a) ma jedną oś symetrii i nie ma środka symetrii,
b) ma dwie osie symetrii i środek symetrii,
c) ma cztery osie symetrii i środek symetrii,
d) nie ma osi symetrii i ma środek symetrii.

26 Dwa okręgi o równych promieniach przecinają się w punktach A i B. Czy figura złożona z tych okręgów

a) ma środek symetrii,
b) ma osie symetrii?

27 W układzie współrzędnych zaznacz punkty (−4, 1) i (−1, 3), które są wierzchołkami czworokąta. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego czworokąta, jeśli:

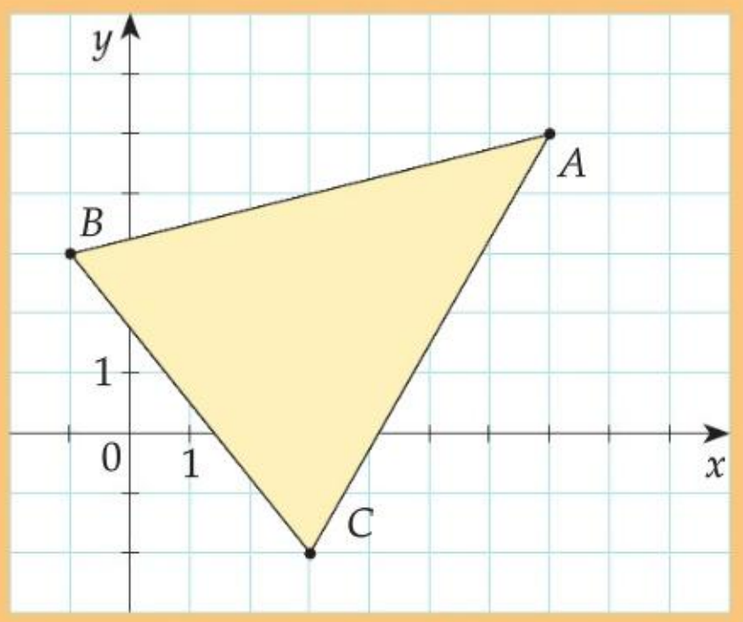
a) oś x jest osią symetrii,
b) oś y jest osią symetrii,
c) punkt O jest środkiem symetrii tego czworokąta.

Jaki czworokąt otrzymasz w każdym z tych przypadków?

28 W układzie współrzędnych dany jest trójkąt ABC.

Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta EFG symetrycznego do trójkąta ABC względem:

a) osi x,
b) osi y,
c) początku układu współrzędnych.



29 Punkt $K = (-3, -4)$ jest symetryczny do punktu L względem początku układu współrzędnych. Oblicz długość odcinka KL.

30 Punkty (−1, 1) i (4, −4) są dwoma kolejnymi wierzchołkami kwadratu. Wyznacz pozostałe wierzchołki, oblicz pole i obwód kwadratu. Rozpatrz dwa przypadki.

8. Zaawansowane metody zliczania i rachunek prawdopodobieństwa



1. Powiedz, jakie rodzaje kostek widzisz na rysunku. Ile ścian ma każda z nich?
2. Do każdego pudełka należy włożyć jedną kostkę. Jak sądzisz, na ile różnych sposobów możemy to zrobić? Czy tych możliwości jest mniej, czy więcej niż 10? Wypisz je wszystkie.
3. Ile różnych wyników możemy otrzymać, jeżeli raz rzucimy kostką sześcienną? A ile, jeśli raz rzucimy kostką czworościenną? A dwunastościenną?
4. Jak myślisz, ile różnych wyników możemy otrzymać, jeżeli dwa razy rzucimy kostką sześcienną? A ile, jeśli dwa razy rzucimy kostką czworościenną? A dwunastościenną?

8.1 Reguła mnożenia

Podejmij temat



Natalia ma 2 kubki i 3 talerzyki. Każdego ranka wybiera jeden kubek i jeden talerzyk. Narysuj lub wypisz w zeszycie wszystkie możliwości wyboru jednego kubka i jednego talerzyka.
Ile jest tych możliwości?

Przykład 1

Kasia przygotowuje ozdoby do sali szkolnej. Ma do dyspozycji jednakowe szablony płatków kwiatów w czterech kolorach: pomarańczowym, różowym, czerwonym i niebieskim oraz jednakowe szablony środków kwiatów w kolorach brązowym i zielonym.



Policzmy, ile różnych kwiatów może zrobić Kasia.

Aby wykonać kwiatek, Kasia musi dokonać dwóch wyborów. Najpierw zdecyduje, w jakim kolorze będą płatki kwiatka. Ma tutaj cztery możliwości: pomarańczowy (p), różowy (r), czerwony (c), niebieski (n). Następnie wybiera kolor środka kwiatka. Tutaj ma dwie możliwości: brązowy (b) lub zielony (z).

Efekt możliwych wyborów dokonywanych przez Kasię przedstawimy w tabeli.

Kolor	płatków	p		r		c		n	
	środka	b	z	b	z	b	z	b	z
Kwiatek									

Zatem wszystkich możliwości jest: $4 \cdot 2 = 8$

Kasia może zrobić 8 różnych kwiatów.

Możemy to również przedstawić inaczej.

		Kolor środka kwiatka (2 możliwości)	
		b	z
Kolor płatków kwiatka (4 możliwości)	p	pb	pz
	r	rb	rz
	c	cb	cz
	n	nb	nz

1. W sklepiku osiedlowym sprzedawane są zestawy składające się z jednego zeszytu w kratkę i jednego długopisu, przy czym klient może sam dokonać wyboru zeszytu i długopisu. Dostępnych jest 5 różnych zeszytów w kratkę: 96-kartkowy, 80-kartkowy, 60-kartkowy, 32-kartkowy i 16-kartkowy oraz 3 różne długopisy: czarny, niebieski i zielony. Ile różnych zestawów można zrobić?

Przykład 2

Czworo ósmoklasistów: Magda, Sylwia, Adam i Tomek chce pomóc w organizacji zabawy klasowej. Postanowili, że o tym, kto z nich przygotuje posiłki, zadecyduje losowanie. Najpierw mają wylosować osobę, która przygotuje kanapki, a potem tę, która przygotuje ciasto. Ile może być różnych wyników obu losowań, jeśli:

a) ta sama osoba może przygotować kanapki i ciasto,
b) inna osoba ma przygotować kanapki, a inna – ciasto?

a) Sporządźmy tabelę. Oznaczmy: Magda (M), Sylwia (S), Adam (A), Tomek (T).

		Osoba przygotowująca ciasto (4 możliwości)			
		M	S	A	T
Osoba przygotowująca kanapki (4 możliwości)	M	MM	MS	MA	MT
	S	SM	SS	SA	ST
	A	AM	AS	AA	AT
	T	TM	TS	TA	TT

$4 \cdot 4 = 16$

Jeśli ta sama osoba może przygotować kanapki i ciasto, to jest 16 różnych możliwych wyników losowań.

Zauważmy, że w niektórych parach są te same osoby, np. zarówno w parze SA, jak i w parze AS są Sylwia i Adam. Jednak pary SA i AS są różne, ponieważ w przypadku pary SA – Sylwia ma przygotować kanapki, a Adam – ciasto, a w przypadku pary AS to Adam ma przygotować kanapki, a Sylwia – ciasto.

b)

Sposób I

Zauważmy, że najpierw spośród 4 uczniów losowana jest osoba, która przygotuje kanapki, a potem spośród 3 (bo nie może być wylosowana osoba, która ma przygotować kanapki) ta, która przygotuje ciasto.

Efekty losowań możemy przedstawić następująco:

Wynik pierwszego losowania (osoba, która przygotuje kanapki)	M			S			A			T		
Wynik drugiego losowania (osoba, która przygotuje ciasto)	S	A	T	M	A	T	M	S	T	M	S	A
Wynik obu losowań	MS	MA	MT	SM	SA	ST	AM	AS	AT	TM	TS	TA

Możemy przedstawić je również w taki sposób:

		Osoba przygotowująca ciasto (3 możliwości)			
		M	S	A	T
Osoba przygotowująca kanapki (4 możliwości)	M		MS	MA	MT
	S	SM		SA	ST
	A	AM	AS		AT
	T	TM	TS	TA	

Zauważmy, że pierwsze losowanie może zakończyć się jednym z 4 wyników i do każdej wylosowanej osoby można dobrać jedną z pozostałych 3 osób.

Zatem wszystkich możliwości jest: $4 \cdot 3 = 12$

Sposób II

W punkcie a) obliczyliśmy, że jeśli ta sama osoba może przygotować kanapki i ciasto, to jest 16 możliwych wyników losowań. Od tej liczby trzeba odjąć liczbę przypadków, gdy ta sama osoba ma przygotować kanapki i ciasto. Są cztery takie możliwości losowań: MM, SS, AA, TT (wyniki na przekątnej w tabeli). Zatem wszystkich możliwości jest: $4 \cdot 4 - 4 = 16 - 4 = 12$

Jeśli inna osoba ma przygotować kanapki, a inna ciasto, to jest 12 różnych możliwych wyników losowań.

Przykład 3

W woreczku jest 7 kul, ponumerowanych od 1 do 7. Losujemy jedną kulę i zapisujemy jej numer. Następnie drugi raz losujemy kulę i zapisujemy jej numer za poprzednio zapisanym numerem. W ten sposób tworzymy liczbę dwucyfrową, w której w rzędzie dziesiątek jest taka cyfra jak numer pierwszej wylosowanej kuli, a rzędzie jedności taka cyfra jak numer drugiej wylosowanej kuli. Ile różnych liczb możemy utworzyć w ten sposób, jeśli:

a) po pierwszym losowaniu kulę wrzucamy z powrotem do woreczka,
b) po pierwszym losowaniu kulę odkładamy na bok?

a) Wyniki losowania możemy zapisać w tabeli.

		Wynik drugiego losowania (7 możliwości)						
		1	2	3	4	5	6	7
Wynik pierwszego losowania (7 możliwości)	1	11	12	13	14	15	16	17
	2	21	22	23	24	25	26	27
	3	31	32	33	34	35	36	37
	4	41	42	43	44	45	46	47
	5	51	52	53	54	55	56	57
	6	61	62	63	64	65	66	67
	7	71	72	73	74	75	76	77

Pierwsze losowanie może się skończyć jednym z 7 wyników. Do każdej zapisanej cyfry można dopisać jedną z 7 cyfr z drugiego losowaania (bo pierwszą wylosowaną kulę z powrotem wrzucamy do woreczka).

Liczba wszystkich utworzonych w ten sposób liczb dwucyfrowych jest więc równa: $7 \cdot 7 = 49$

Możemy w ten sposób utworzyć 49 różnych liczb.

b) Wyniki losowania możemy zapisać w tabeli.

Wynik pierwszego losowania (7 możliwości)	Wynik drugiego losowania (6 możliwości)						
	1	2	3	4	5	6	7
1		12	13	14	15	16	17
2	21		23	24	25	26	27
3	31	32		34	35	36	37
4	41	42	43		45	46	47
5	51	52	53	54		56	57
6	61	62	63	64	65		67
7	71	72	73	74	75	76	

Sposób I

Pierwsze losowanie może się skończyć jednym z 7 wyników. Do każdej zapisanej cyfry można dopisać jedną z 6 cyfr (bo wylosowaną kulę odkładamy na bok).

Liczba wszystkich utworzonych w ten sposób liczb dwucyfrowych jest równa: $7 \cdot 6 = 42$

Sposób II

$7 \cdot 7 - 7 = 42$

Możemy w ten sposób utworzyć 42 różne liczby.

2. Wśród 32 uczestników spotkania literackiego z autorem poczytnych książek historycznych w wyniku losowania zostaną wyłonione 2 osoby, z których każda otrzyma inną książkę pisarza. Ile jest różnych możliwych wyników tego losowania?

3. W woreczku jest 5 kul, oznaczonych numerami: 2, 3, 5, 7, 11. Losujemy jedną kulę i zapisujemy jej numer – jest to licznik ułamka. Piszemy kreskę ułamkową, a wylosowaną kulę odkładamy na bok. Następnie drugi raz losujemy kulę i zapisujemy jej numer pod zapisaną kreską ułamkową – jest to mianownik naszego ułamka. Ile różnych ułamków możemy utworzyć w ten sposób?

Efektem wykonania dwóch czynności (np. wyborów, losowań) jest para AB, w której A jest wynikiem pierwszej i B jest wynikiem drugiej czynności.

Jeśli pierwsza czynność może zakończyć się jednym z m różnych wyników, a druga czynność jednym z k różnych wyników, to liczba wszystkich możliwych par AB, będących efektem wykonania tych dwóch czynności, jest równa iloczynowi liczb m i k.

Liczba wszystkich możliwych par jest równa $m \cdot k$.

Gdy musimy dokonać więcej czynności (np. wyborów lub losowań) niż dwie, to do obliczenia liczby wszystkich możliwych wyników, jakie możemy otrzymać w efekcie wykonania tych czynności, możemy również zastosować metodę opisaną powyżej.

Przykład 4

Kinga i jej trzy koleżanki zbierają stare monety. Kinga ma w swojej kolekcji 20 różnych monet, których nie mają pozostałe dziewczynki. Kinga postanowiła dać koleżankom po jednej monecie. Na ile sposobów Kinga może wybrać monety dla koleżanek?

Obdarowywana koleżanka		
pierwsza	druga	trzecia
20		

Kinga może wybrać monetę dla pierwszej obdarowywanej koleżanki na 20 sposobów.

Obdarowywana koleżanka		
pierwsza	druga	trzecia
20	19	

Do każdej wybranej monety dla pierwszej koleżanki może spośród 19 pozostałych monet dobrać drugą monetę dla drugiej koleżanki.

$20 \cdot 19 = 380$

Dla dwóch koleżanek Kinga może wybrać monety na 380 sposobów.

Obdarowywana koleżanka		
pierwsza	druga	trzecia
20	19	18

Do każdej pary wybranych monet może spośród 18 pozostałych monet dobrać trzecią, dla trzeciej koleżanki.

$20 \cdot 19 \cdot 18 = 380 \cdot 18 = 6840$

Kinga może wybrać monety dla koleżanek na 6840 sposobów.

4. W autobusie są 22 wolne miejsca. Na ile sposobów mogą zająć w nim miejsca:

a) dwie osoby, b) trzy osoby, c) cztery osoby?

Przykład 5

Obliczmy, ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5.

_ _ _
(2)

Aby liczba była podzielna przez 5, w rzędzie jedności tej liczby musi być 0 lub 5. Mamy więc dwie możliwości.

_ _ _
(10) (2)

$2 \cdot 10 = 20$

Do każdej z nich dobieramy jedną z dziesięciu cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, która będzie cyfrą dziesiątek. Cyfry w rzędzie jedności i dziesiątek możemy wybrać na 20 sposobów.

_ _ _
(9) (10) (2)

$2 \cdot 10 \cdot 9 = 20 \cdot 9 = 180$

Do dwóch wybranych cyfr dobieramy jedną z dziewięciu cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, która będzie cyfrą setek (zero nie może być w rzędzie setek).

Jest 180 liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5.

5. Ile jest wszystkich nieparzystych liczb trzycyfrowych?

Więcej na temat

Obliczmy, na ile sposobów możemy ustawić w szeregu 7 osób.

_ _ _ _ _ _ _ (7)	Na pierwszym miejscu możemy ustawić jedną z siedmiu osób.
_ _ _ _ _ _ _ (7) (6)	Do wybranej osoby możemy dobrać i ustawić na drugim miejscu jedną z sześciu osób: $7 \cdot 6 = 42$
_ _ _ _ _ _ _ (7) (6) (5)	Do wybranych dwóch osób możemy dobrać i ustawić na trzecim miejscu jedną z pięciu osób: $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$
_ _ _ _ _ _ _ (7) (6) (5) (4)	Na czwartym miejscu ustawimy jedną z czterech osób: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$
_ _ _ _ _ _ _ (7) (6) (5) (4) (3)	Na piątym miejscu ustawimy jedną z trzech osób: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$
_ _ _ _ _ _ _ (7) (6) (5) (4) (3) (2)	Na szóstym miejscu ustawimy jedną z dwóch osób: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5040$
_ _ _ _ _ _ _ (7) (6) (5) (4) (3) (2) (1)	Na siódmym miejscu ustawiamy osobę, która pozostała: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

Siedem osób możemy więc ustawić w szeregu na $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ sposobów.

6. Oblicz, na ile sposobów można ustawić na jednej półce:

a) 5 b) 8 c) 10

różnych książek.

Zadania

Pan Stefan ma 12 koszul i 7 par spodni. Na ile sposobów może wybrać strój złożony z koszuli i spodni?

A. 19 B. 72 C. 77 D. 84

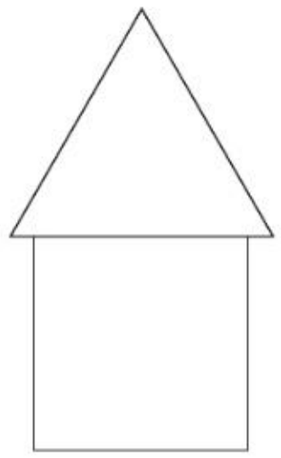
Regał na książki ma 8 półek. Magda postanowiła, że na jednej z półek będą tylko książki historyczne, a na innej – tylko książki przygodowe. Na ile sposobów Magda może wybrać półki, aby położyć na nich te dwa rodzaje książek?

A. 16 B. 56 C. 64 D. 72

Przed zrobieniem prania trzeba ustawić pralkę, wybierając program i temperaturę. Do wyboru jest 7 programów oraz temperatury: 30°C, 60°C, 90°C. Ile jest różnych możliwości ustawienia tej pralki?

Rower Pawła ma 3 koła zębate z przodu i 8 z tyłu, a rower Tomka 2 koła zębate z przodu i 11 z tyłu. Ile jest możliwych przełożeń w rowerze Pawła, a ile w rowerze Tomka? Nie uwzględniaj tego, że niektórych ustawień przerzutek nie należy stosować w praktyce.

Michał ma 12 kolorów farbek, którymi ma pomalować kwadrat i trójkąt, takie jak na rysunku obok.



Na ile sposobów może to zrobić, jeśli:

a) kwadrat i trójkąt mogą być pomalowane na ten sam kolor,

b) kwadrat i trójkąt nie mogą być pomalowane na ten sam kolor?

Na talerzu leżą: jabłko, gruszka, śliwka, pomarańcza, banan, mandarynka i kiwi. Kilka osób wybiera po jednym owocu. Na ile różnych sposobów można to zrobić, jeśli owoce wybierają:

a) dwie osoby, b) trzy osoby, c) cztery osoby?

W kinie w jednym rzędzie jest 18 ponumerowanych krzeseł. Na ile sposobów mogą usiąść w jednym rzędzie:

a) dwie osoby, b) trzy osoby, c) cztery osoby?

Ile różnych odpowiedzi możemy otrzymać, jeśli zapytamy:

a) dwie osoby, b) trzy osoby, c) cztery osoby,
w jakim województwie chciałyby mieszkać?

W pewnej szkole zorganizowano turniej gier matematycznych i logicznych. Dla trzech graczy, którzy zajmą najlepsze lokaty, ufundowano trzy różne nagrody. Oblicz, ile jest różnych możliwości rozdzielenia nagród między graczy, jeśli w turnieju startuje:

a) 7 uczniów, b) 16 uczniów, c) 25 uczniów.

Zamek szyfrowy składa się z czterech ruchomych obręczy. Na każdej obręczy zapisane są cyfry: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ustalając szyfr, musimy wybrać po jednej cyfrze na każdej obręczy. Ile różnych szyfrów możemy utworzyć?

Z cyfr 1, 2, 3, 5, 7 Marek tworzy liczby trzycyfrowe. Ile takich liczb może utworzyć, jeżeli cyfry w liczbie

a) mogą się powtarzać,

b) nie mogą się powtarzać?

Ciekawe!



W 1974 roku węgierski architekt i rzeźbiarz, wykładowca architektury w Budapeszteńskiej Akademii Sztuki Użytkowej Ernő Rubik skonstruował kostkę, która miała ułatwić studentom zrozumienie zasady przestrzenności i trójwymiarowości. Wkrótce stała się popularną zabawką-łamigłówką, nazwaną od nazwiska wynalazcy kostką Rubika.

Typowa kostka Rubika składa się z 26 sześcianów oraz przegubu, który je łączy i umożliwia ruch jednej warstwy kostek wokół osi prostopadłej do tej warstwy. Zadanie polega na ułożeniu pomieszanych kolorów kostki w taki sposób, aby każda ściana była w innym kolorze. Nie jest to łatwe, bo liczba różnych konfiguracji w kostce Rubika jest większa od 43 trylionów!

8.2 Reguła dodawania

Podejmij temat

Ile różnych zestawów obiadowych złożonych z zupy i dania głównego można utworzyć w restauracji Smakosz, a ile w restauracji Pod Fiołkami?
Z ilu różnych zestawów obiadowych złożonych z zupy i dania głównego można wybierać, jadając w tych restauracjach?

Czasami jest tak, że mamy do wyboru kilka wariantów (np. kilka restauracji) i w każdym z nich różne możliwości (np. wybór zupy i dania głównego). W takich przypadkach, aby ustalić liczbę wszystkich możliwości, najpierw obliczamy liczbę możliwości osobno dla każdego z tych wariantów, a potem uzyskane wyniki sumujemy. Mówimy wtedy, że stosujemy regułę dodawania.

Przykład 1

Kasia ma trzy spódnice: różową (r), zieloną (z) i czarną (c) oraz cztery bluzki: białą (b), pomarańczową (p), niebieską (n) i granatową (g). Dziewczynka stwierdziła, że do różowej spódnicy nie pasuje tylko bluzka pomarańczowa, a do pozostałych spódnic nie pasuje tylko bluzka granatowa. Obliczmy, na ile sposobów Kasia może się ubrać, wybierając jedną bluzkę i jedną spódnicę, tak aby bluzka i spódnica pasowały do siebie.

Sporządźmy tabelę.

Kolor bluzki / Kolor spódnicy	biały (b)	pomarańczowy (p)	niebieski (n)	granatowy (g)
różowy (r)	rb		rn	rg
zielony (z)	zb	zp	zn	
czarny (c)	cb	cp	cn	

Wariant I

Przyjmijmy, że Kasia wybierze spódnicę różową. Do niej nie pasuje tylko bluzka pomarańczowa, natomiast pasują bluzki: biała, niebieska, granatowa. Mamy więc 3 możliwości: rb, rn, rg.

Wariant II

Przyjmijmy, że Kasia wybierze spódnicę inną niż różowa, czyli zieloną lub czarną. Do każdej z nich pasują trzy bluzki: biała, pomarańczowa lub niebieska. Zgodnie z regułą mnożenia mamy 6 możliwości:

$2 \cdot 3 = 6$ (zb, zp, zn, cb, cp, cn)

Stosujemy regułę dodawania: $3 + 6 = 9$

Kasia może się ubrać na 9 sposobów.

1. Tomek chce zamówić obiad złożony z zupy i drugiego dania. Ma do wyboru 4 zupy: pomidorową, rybną, rosół i barszcz oraz 5 drugich dań: kotlet schabowy, pierogi z mięsem, pierogi z serem, dorsz po kaszubsku i spaghetti. Do zupy rybnej Tomek nie chce dorsza, a do pozostałych zup nie chce pierogów. Ile zestawów obiadowych spełnia wymagania Tomka?

Przykład 2

W pewnym sklepie można kupić zestaw podarunkowy złożony z filiżanki i 100 g herbaty lub z kubka i 100 g kawy. Jeżeli klient zdecyduje się kupić pierwszy z zestawów, będzie mógł wybrać filiżankę spośród 7 różnych filiżanek i herbatę spośród 26 różnych rodzajów herbat. Jeżeli zdecyduje się kupić drugi z zestawów, będzie mógł wybrać kubek spośród 14 różnych kubków i kawę spośród 19 różnych rodzajów kaw. Ile różnych zestawów podarunkowych można utworzyć w tym sklepie?

$7 \cdot 26 = 182$

Wariant I – zestaw złożony z filiżanki i herbaty. Z 7 rodzajów filiżanek wybieramy jedną i do wybranej filiżanki dobieramy jeden spośród 26 rodzajów herbat. Stosujemy regułę mnożenia.

$14 \cdot 19 = 266$

Wariant II – zestaw złożony z kubka i kawy. Z 14 rodzajów kubków wybieramy jeden i do wybranego kubka dobieramy jedną spośród 19 rodzajów kaw. Stosujemy regułę mnożenia.

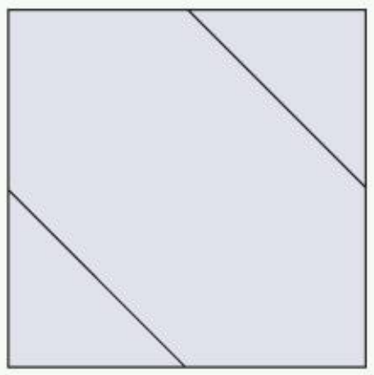
$182 + 266 = 448$

Stosujemy regułę dodawania. Obliczamy, ile można utworzyć różnych zestawów podarunkowych złożonych z filiżanki i herbaty lub z kubka i kawy.

W tym sklepie można utworzyć 448 różnych zestawów podarunkowych.

2. Pewna sieć komórkowa ogłosiła promocję „W abonamencie telefon za 1 zł". Zgodnie z jej regulaminem, wykupując abonament za 30 zł lub 40 zł, klient otrzymuje za 1 zł jeden z 4 typów telefonów komórkowych, a wykupując abonament za 70 zł, 80 zł lub 90 zł otrzymuje za 1 zł jeden z 7 typów telefonów komórkowych. Oblicz, ile jest w tej promocji różnych możliwości zakupu abonamentu i telefonu za 1 zł.

Przykład 3



Maksym ma do wyboru farby w barwach ciepłych (żółtą, pomarańczową, łososiową, czerwoną, ceglastą, pąsową, koralową i różową) i zimnych (morską, szmaragdową, turkusową, błękitną, niebieską i granatową). Chłopiec ma pomalować kwadratowy karton podzielony na trzy części tak jak na rysunku obok, używając tylko dwóch kolorów. Części trójkątne ma pomalować na taki sam kolor, a część sześciokątną – na inny. Obliczmy, na ile sposobów Maksym może to zrobić, jeśli farby, które wybierze:

a) mają należeć do tego samego rodzaju barw,
b) mają być w różnych rodzajach barw.

a) Farby mają należeć do tego samego rodzaju barw, więc obie farby mają być w barwach ciepłych lub obie w zimnych.

$8 \cdot 7 = 56$ — **Wariant I** – obie farby mają być w barwach ciepłych. Z 8 farb w barwach ciepłych wybieramy jedną, którą Maksym może pomalować trójkąty, i do wybranej farby dobieramy jedną z 7 pozostałych farb w tych barwach, którą może pomalować sześciokąt. Można zatem utworzyć 56 par farb w barwach ciepłych.

$6 \cdot 5 = 30$ — **Wariant II** – obie farby mają być w barwach zimnych. Obliczamy, że można utworzyć 30 par farb w barwach zimnych.

$56 + 30 = 86$ — Stosujemy regułę dodawania.

Jeśli obie farby mają być w barwach ciepłych lub obie w zimnych, to karton można pomalować na 86 sposobów.

b) Farby mają być w różnych rodzajach barw, więc jedna farba ma być w barwie ciepłej, a druga w zimnej.

$8 \cdot 6 = 48$ — **Wariant I** – z 8 farb w barwach ciepłych wybieramy jedną, którą Maksym może pomalować trójkąty, i do wybranej farby dobieramy jedną z 6 farb w barwach zimnych, którą może pomalować sześciokąt.

$6 \cdot 8 = 48$ — **Wariant II** – z 6 farb w barwach zimnych wybieramy jedną, którą Maksym może pomalować trójkąty, i do wybranej farby dobieramy jedną z 8 farb w barwach ciepłych, którą może pomalować sześciokąt.

$48 + 48 = 96$ — Stosujemy regułę dodawania.

Jeśli jedna farba ma być w barwie ciepłej, a druga w zimnej, to karton można pomalować na 96 sposobów.

3. Sylwia ma 16 różnych książek przygodowych i 9 różnych książek historycznych. Dziewczynka chce pożyczyć po jednej książce dwóm swoim koleżankom. Na ile sposobów może to zrobić, jeśli:

a) każdej koleżance chce pożyczyć książki w tym samym gatunku,
b) każdej koleżance chce pożyczyć książki w różnych gatunkach?

Przykład 4

Obliczmy, ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, podzielnych przez 5.

Aby liczba była podzielna przez 5, w rzędzie jedności musi być 0 lub 5.

Wariant I

5 _ _	W rzędzie setek jest cyfra 5.
5 _ 0	Liczba ma być podzielna przez 5 i ma mieć różne cyfry, więc w rzędzie jedności musi być cyfra 0.
5 _ 0 (8)	W rzędzie dziesiątek może być zatem jedna z ośmiu cyfr: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

Mamy 8 liczb trzycyfrowych, o różnych cyfrach, które w rzędzie setek mają cyfrę 5 i w rzędzie jedności cyfrę 0.

Wariant II

_ _ _ (8)	W rzędzie setek jest cyfra inna niż 5. W rzędzie setek może być zatem jedna z ośmiu cyfr: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.
_ _ _ (8) (2)	Do każdej z cyfr w rzędzie setek dobieramy jedną z dwóch cyfr: 0 lub 5, która będzie w rzędzie jedności.
_ _ _ (8) (8) (2)	Do każdej pary dwóch wybranych cyfr (w rzędzie setek i w rzędzie jedności) dobieramy jedną z ośmiu cyfr (bo nie możemy wybrać już tych cyfr, które są w rzędzie setek i w rzędzie jedności).
$8 \cdot 8 \cdot 2 = 128$	Stosujemy regułę mnożenia. Jest 128 liczb trzycyfrowych, o różnych cyfrach, podzielnych przez 5, które w rzędzie setek mają cyfrę inną niż 5.
$8 + 128 = 136$	Stosujemy regułę dodawania.

Jest 136 liczb trzycyfrowych, o różnych cyfrach, podzielnych przez 5.

4. Oblicz, ile jest liczb:

a) czterocyfrowych
b) pięciocyfrowych
o różnych cyfrach, podzielnych przez 5.

5. Oblicz, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, w których liczba 7 występuje:

a) dokładnie jeden raz,
b) dokładnie dwa razy.

Może się zdarzyć, że w obu wariantach występuje taka sama możliwość. Wtedy trzeba pamiętać, aby policzyć ją tylko raz.

Przykład 5

W pierwszej kwiaciarni są w sprzedaży 4 rodzaje kwiatów: goździki (G), frezje (F), lewkonie (L) i róże (R), które mogą być ozdobione wstążkami w jednym z 3 kolorów: czerwonym (c), żółtym (ż) i niebieskim (n). Druga kwiaciarnia oferuje 5 rodzajów kwiatów: alstromerie (A), irysy (I), margerytki (M), róże (R) i storczyki (S), które mogą być ozdobione wstążkami w jednym z 5 kolorów: białym (b), żółtym (ż), różowym (r), czerwonym (c) i pomarańczowym (p). Obliczmy, ile mamy różnych możliwości zakupu jednego kwiatka ozdobionego wstążką.

Zauważmy, że w obu kwiaciarniach możemy kupić różę z żółtą wstążką lub różę z czerwoną wstążką.

Gc, Gż, Gn Fc, Fż, Fn Lc, Lż, Ln Rc, Rż, Rn	Wypiszmy wszystkie możliwości zakupu kwiatka ozdobionego wstążką w pierwszej kwiaciarni.
$4 \cdot 3 = 12$	Korzystamy z reguły mnożenia.
Ab, Aż, Ar, Ac, Ap Ib, Iż, Ir, Ic, Ip Mb, Mż, Mr, Mc, Mp Rb, ~~Rż~~, Rr, ~~Rc~~, Rp Sb, Sż, Sr, Sc, Sp	Wypiszmy wszystkie możliwości zakupu kwiatka ozdobionego wstążką w drugiej kwiaciarni. Jest ich: $5 \cdot 5 = 25$ Skreślamy te możliwości, które już wystąpiły, gdybyśmy kupili kwiatek w pierwszej kwiaciarni (skreślamy różę z żółtą wstążką i różę z czerwoną wstążką). W takim razie pozostało: $25 - 2 = 23$
$12 + 23 = 35$	Stosujemy regułę dodawania.

Jest 35 różnych możliwości zakupu kwiatka ozdobionego wstążką w tych kwiaciarniach.

6. W dwóch szafkach są filiżanki i spodeczki. Filiżanki różnią się tylko kolorami, również spodeczki różnią się tylko kolorami. W pierwszej szafce są 4 filiżanki w kolorach: białym, żółtym, czerwonym i granatowym oraz 4 spodeczki w takich samych kolorach jak filiżanki. W drugiej szafce są 3 filiżanki w kolorach: białym, zielonym i czarnym oraz 4 spodeczki w kolorach: białym, czerwonym, zielonym i czarnym. Ile jest różnych możliwości wyboru zestawu złożonego z filiżanki i spodeczka, jeśli filiżankę i spodeczek wybieramy z tej samej szafki?

Przykład 6

Obliczmy, ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 8 lub przez 12.

16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96	Wypisujemy wszystkie liczby dwucyfrowe podzielne przez 8. Takich liczb jest 11.
12, ~~24~~, 36, ~~48~~, 60, ~~72~~, 84, ~~96~~	Wypisujemy wszystkie liczby dwucyfrowe podzielne przez 12. Skreślamy te, które już wcześniej wypisaliśmy (czyli te liczby, które są podzielne przez 12 i przez 8). Nieskreślone pozostały 4 liczby.
$11 + 4 = 15$	

Jest 15 liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 8 lub przez 12.

7. Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 6 lub przez 15.

Zadania

W pizzerii można kupić 10 rodzajów pizzy i 6 rodzajów napojów, a w naleśnikarni 7 rodzajów naleśników i 5 rodzajów napojów. Ile różnych zestawów złożonych z dania i napoju można kupić w tych punktach gastronomicznych?

A. 28 B. 95
C. 100 D. 187

Ile jest liczb trzycyfrowych, w zapisie w których występują dokładnie dwie cyfry 1?

A. 17 B. 19
C. 26 D. 29

Justyna rozważa zakup swetra z wełny owczej lub z angory. W sklepie, w którym chce dokonać zakupu, swetry z wełny owczej sprzedawane są w trzech fasonach i pięciu kolorach, a swetry z angory – w dziewięciu fasonach i sześciu kolorach. Ile jest rodzajów swetrów, spośród których Justyna może wybierać?

Każdego dnia na śniadanie Sylwia robi sobie jedną kanapkę z wędliną i z jeszcze jednym składnikiem. Wędlinę wybiera spośród szynki, polędwicy lub kiełbasy szynkowej, a drugim składnikiem może być: pomidor, ogórek, papryka, ser żółty lub ser wędzony. Sylwia nie łączy jednak kiełbasy z serem, bo takich kanapek nie lubi. Przez ile dni Sylwia może jeść śniadanie, takie jakie lubi, nie powtarzając zestawu składników na kanapce?



Paweł planuje trasę – z domu do wybranej miejscowości i z powrotem – w którą chce się wybrać na rowerze. Rozważa trzy miejscowości: Leszczyny, Wrzosów, Sarnowo, z których każda położona jest w innym kierunku w stosunku do jego miejsca zamieszkania. Z domu Pawła do Leszczyn prowadzą trzy różne drogi, do Wrzosowa – też trzy, a do Sarnowa – aż pięć. Ile jest różnych tras, spośród których Paweł może wybierać, jeśli:

a) może wracać do domu tą samą drogą, którą będzie jechał do miejscowości, którą wybierze,
b) nie chce wracać do domu tą samą drogą, którą będzie jechał do miejscowości, którą wybierze?

W pewnym sklepie można kupić zestawy upominkowe złożone z dwóch różnych rodzajów herbat lub dwóch różnych rodzajów kaw. W każdym zestawie upominkowym jedno opakowanie odpowiednio herbaty lub kawy waży 50 g, a drugie 100 g. Kupujący może zadecydować, jakie chce rodzaje herbat, wybierając je spośród 20 rodzajów herbat, lub jakie chce rodzaje kawy, wybierając je spośród 15 rodzajów kaw, oraz określić, której herbaty lub kawy ma być 50 g, a której 100 g. Ile różnych zestawów upominkowych mogą utworzyć klienci tego sklepu?

W klasie 8a jest 14 dziewcząt i 10 chłopców. Oblicz, ile zostanie łącznie wysłanych wiadomości SMS, jeśli:

a) każda dziewczynka wyśle wiadomość SMS do wszystkich swoich koleżanek z klasy, a każdy chłopiec do wszystkich swoich kolegów,
b) każda dziewczynka wyśle wiadomość SMS do wszystkich swoich kolegów z klasy, a każdy chłopiec do wszystkich swoich koleżanek.

Zakładamy, że żaden z uczniów nie wysyła wiadomości SMS sam do siebie.

Kod do pewnego sejfu składa się z trzech znaków, przy czym można go utworzyć tak, że dwa pierwsze znaki będą literami i ostatni będzie cyfrą, lub pierwszy będzie literą, a kolejne dwa będą cyframi. Ile różnych kodów można w ten sposób utworzyć, jeśli przyjmiemy, że litery wybieramy spośród 23 liter polskiego alfabetu (tylko liter bez znaków diakrytycznych), a cyfry spośród 10 cyfr?

Oblicz, ile jest wszystkich parzystych liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach.

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych:

a) podzielnych przez 14 lub podzielnych przez 15,
b) podzielnych przez 16 lub podzielnych przez 10,
c) podzielnych przez 9 lub podzielnych przez 15.

Ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych:

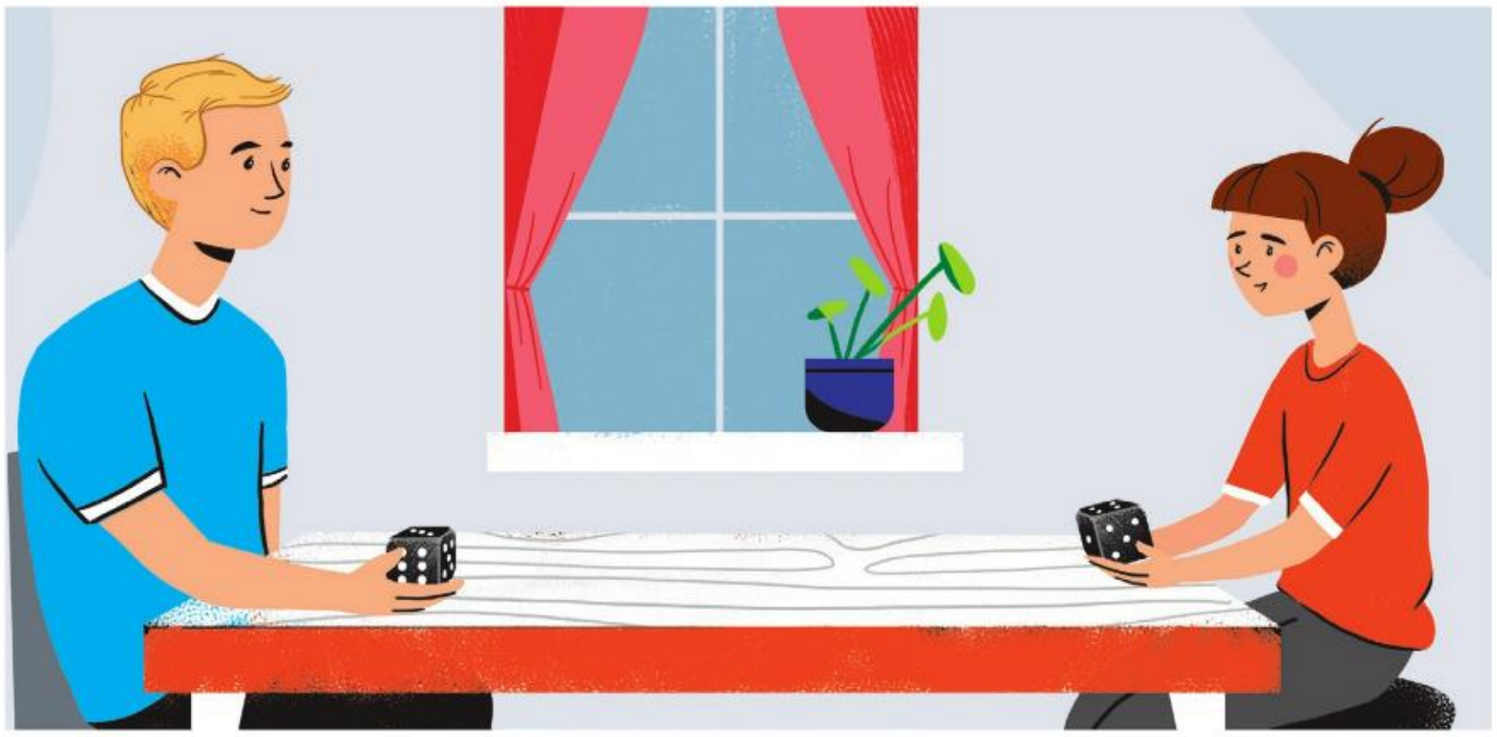
a) podzielnych jednocześnie przez 2 i 5,
b) podzielnych przez 2 lub podzielnych przez 5 i niepodzielnych przez 10,
c) podzielnych przez 2 lub podzielnych przez 5?

Oblicz, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, podzielnych przez 4, takich, że:

a) cyfry w liczbie mogą się powtarzać,
b) żadna cyfra w liczbie się nie powtarza.

8.3. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń

Podejmij temat



Michał i Natalka mają po jednej kostce sześciennej. Na ustalony znak jednocześnie wykonują rzut tymi kostkami. Ile może być różnych wyników jednoczesnego rzutu dwiema kostkami? Wypisz te wyniki. Ile z tych wyników spełnia warunek: Michał wyrzuci liczbę oczek większą niż 4 i jednocześnie Natalka wyrzuci liczbę oczek mniejszą niż 5?

Przypomnijmy – obliczając prawdopodobieństwo, musimy ustalić, ile jest wszystkich możliwych wyników (N) i ile z nich spełnia podany warunek (k), a następnie obliczyć iloraz $\frac{k}{N}$.

$P = \frac{k}{N}$

P – prawdopodobieństwo

N – liczba wszystkich możliwych wyników

k – liczba wyników spełniających podany warunek

W obliczaniu, ile jest wszystkich możliwych wyników losowania oraz ile z nich spełnia podany warunek, pomocne są reguła mnożenia i reguła dodawania.

Przykład 1

Odpowiedzmy na pytania z *Podejmij temat*.

Liczba wszystkich możliwych wyników jest równa: $N = 6 \cdot 6 = 36$.

Chcemy, aby Michał wyrzucił liczbę oczek większą niż 4, więc warunek ten będzie spełniony, jeśli wyrzuci on 5 lub 6 oczek. Jednocześnie chcemy, aby Natalka wyrzuciła liczbę oczek mniejszą niż 5, dlatego może wyrzucić 1, 2, 3, lub 4 oczka.

Liczba wyników, które spełniają ten warunek, jest równa: $k = 2 \cdot 4 = 8$.

Liczymy prawdopodobieństwo: $P = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

Prawdopodobieństwo tego, że Michał wyrzuci liczbę oczek większą niż 4 i jednocześnie Natalka wyrzuci liczbę oczek mniejszą niż 5, jest równe $\frac{2}{9}$.

Przykład 2

Na jednej półce Karolina ma dwa swetry białe, jeden zielony, trzy niebieskie i jeden czarny, a na drugiej półce jedną parę spodni białych, jedną czarnych i dwie pary niebieskich. Karolina chce wyjąć z szafy w sposób losowy jeden sweter i jedne spodnie. Obliczmy prawdopodobieństwo tego, że:

a) wyjęte z szafy sweter i spodnie będą w tym samym kolorze,
b) wyjęty z szafy sweter będzie w kolorze zielonym lub niebieskim.

Sporządźmy tabelę.

		Wyjęte z szafy spodnie (4 możliwości)			
		białe (B)	**czarne (C)**	**niebieske 1 (N_1)**	**niebieske 2 (N_2)**
Wyjęty z szafy sweter (7 możliwości)	**biały 1 (b_1)**	b_1B	b_1C	b_1N_1	b_1N_2
	biały 2 (b_2)	b_2B	b_2C	b_2N_1	b_2N_2
	zielony (z)	zB	zC	zN_1	zN_2
	niebieski 1 (n_1)	n_1B	n_1C	n_1N_1	n_1N_2
	niebieski 2 (n_2)	n_2B	n_2C	n_2N_1	n_2N_2
	niebieski 3 (n_3)	n_3B	n_3C	n_3N_1	n_3N_2
	czarny (c)	cB	cC	cN_1	cN_2

$N = 7 \cdot 4 = 28$ Stosujemy regułę mnożenia. Karolina może wyciągnąć z szafy 28 różnych zestawów złożonych ze swetra i spodni.

a) Sweter i spodnie będą w jednym kolorze:

- obie części ubrania mogą być białe – są takie dwie możliwości (b_1B, b_2B),
- obie części ubrania mogą być czarne – jest jedna możliwość (cC),
- obie części ubrania mogą być niebieskie – jest sześć możliwości (n_1N_1, n_1N_2, n_2N_1, n_2N_2, n_3N_1, n_3N_2).

$k = 2 + 1 + 6 = 9$ Stosujemy regułę dodawania.

$P = \frac{9}{28}$ Obliczamy prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo, że wyjęte z szafy sweter i spodnie będą w tym samym kolorze, jest równe $\frac{9}{28}$.

b) Karolina mogła wybrać jeden z 4 swetrów i do każdego swetra dobrać jedną z 4 par spodni.

$k = 4 \cdot 4 = 16$ Stosujemy regułę mnożenia.

$P = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$ Obliczamy prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo, że wyjęty z szafy sweter będzie w kolorze zielonym lub niebieskim, jest równe $\frac{4}{7}$.

1. Wśród grupy sportowców, w której jest 9 kobiet (cztery łyżwiarki, trzy kajakarki, dwie lekkoatletki) i 10 mężczyzn (czterech skoczków narciarskich, trzech łyżwiarzy, dwóch kajakarzy i jeden wioślarz) należy wybrać w sposób losowy dwuosobową delegację złożoną z jednej kobiety i jednego mężczyzny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) wybrana kobieta uprawia lekkoatletykę i wybrany mężczyzna uprawia sport wodny,
b) wybrane osoby uprawiają tę samą dyscyplinę sportową.

Przykład 3

Na ściankach czworościennej kostki do gry zapisane są liczby: 20, 21, 22, 23. Rzucamy dwukrotnie tą kostką. Obliczmy prawdopodobieństwo tego, że:

a) za pierwszym razem zostanie wyrzucona liczba parzysta, a za drugim razem liczba większa od 20,
b) obie wyrzucone liczby będą liczbami pierwszymi lub obie będą liczbami złożonymi,
c) suma wyrzuconych liczb będzie liczbą podzielną przez 5.

Sporządźmy tabelę.

		Wynik drugiego losowania (4 możliwości)			
		20	**21**	**22**	**23**
Wynik pierwszego losowania (4 możliwości)	**20**	(20, 20)	(20, 21)	(20, 22)	(20, 23)
	21	(21, 20)	(21, 21)	(21, 22)	(21, 23)
	22	(22, 20)	(22, 21)	(22, 22)	(22, 23)
	23	(23, 20)	(23, 21)	(23, 22)	(23, 23)

$N = 4 \cdot 4 = 16$ Stosujemy regułę mnożenia. Jest 16 różnych możliwych wyników dwóch rzutów tą kostką.

a) Za pierwszym razem chcemy wyrzucić jedną z dwóch liczb: 20, 22. Do każdej z tych liczb dobieramy jedną z 3 liczb większych od 20, będącą wynikiem drugiego rzutu.

$k = 2 \cdot 3 = 6$ Stosujemy regułę mnożenia.

$P = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ Obliczamy prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo, że za pierwszym razem zostanie wyrzucona liczba parzysta i za drugim razem liczba większa od 20, jest równe $\frac{3}{8}$.

b) Rozpatrujemy dwa warianty.

Wariant I – obie wyrzucone liczby będą liczbami pierwszymi.

Tylko jedna para (23, 23) spełnia ten warunek.

Wariant II – obie wyrzucone liczby będą liczbami złożonymi. Za pierwszym razem możemy wylosować jedną z liczb: 20, 21, 22. Do każdej z tych liczb dobieramy jedną z 3 liczb złożonych, będącą wynikiem drugiego rzutu.

$3 \cdot 3 = 9$ Stosujemy regułę mnożenia.

$k = 1 + 9 = 10$ Stosujemy regułę dodawania.

$P = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$ Obliczamy prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo, że obie wyrzucone liczby będą liczbami pierwszymi lub obie będą liczbami złożonymi, jest równe $\frac{5}{8}$.

c) $k = 3$ Są 3 pary liczb spełniających ten warunek: (20, 20), (22, 23), (23, 22).

$P = \frac{3}{16}$ Obliczamy prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych liczb będzie liczbą podzielną przez 5, jest równe $\frac{3}{16}$.

2. Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry, na której ściankach napisane są liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) za pierwszym razem wylosujemy liczbę pierwszą, a za drugim razem liczbę złożoną,
b) obie wyrzucone liczby będą parzyste lub obie będą nieparzyste,
c) iloczyn wyrzuconych liczb będzie większy od 15.

Gdy losujemy kilkakrotnie, ważne jest ustalenie, czy obiekt (np. karta, kula, los), który został wylosowany w jednym losowaniu, może czy nie może zostać wylosowany w następnym losowaniu. W pierwszym przypadku mówimy o „losowaniu ze zwracaniem", a w drugim o „losowaniu bez zwracania".

Przykład 4

W woreczku są 3 kule w barwach ciepłych: żółta, czerwona i brązowa, i 2 kule w barwach zimnych: niebieska i turkusowa. Losujemy jedną kulę, wrzucamy ją z powrotem do woreczka i losujemy drugą kulę. Obliczmy prawdopodobieństwo tego, że:

a) za pierwszym razem wylosujemy kulę żółtą i za drugim razem kulę w barwie zimnej,
b) obie wylosowane kule będą w barwach ciepłych lub obie będą w barwach zimnych,
c) obie wylosowane kule będą w tym samym kolorze.

Kule są w pięciu kolorach: żółta (ż), czerwona (c), brązowa (b), niebieska (n), turkusowa (t). Losujemy ze zwracaniem.

$N = 5 \cdot 5 = 25$ Stosujemy regułę mnożenia. Jest 25 różnych możliwych wyników wylosowania dwóch kul.

a) Są dwa wyniki spełniające ten warunek: (ż, n) i (ż, t).

$P = \frac{2}{25}$ Obliczamy prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo, że za pierwszym razem wylosujemy kulę żółtą i za drugim razem kulę w barwie zimnej, jest równe $\frac{2}{25}$.

b) **Wariant I** – obie wylosowane kule będą w barwach ciepłych.

$3 \cdot 3 = 9$ Ten warunek spełnia 9 wyników: (ż, ż), (ż, c), (ż, b), (c, ż), (c, c), (c, b), (b, ż), (b, c), (b, b).

Wariant II – obie wylosowane kule będą w barwach zimnych. Ten warunek spełniają 4 wyniki: (n, n), (n, t), (t, n), (t, t).

$2 \cdot 2 = 4$

$k = 9 + 4 = 13$ Stosujemy regułę dodawania.

$P = \frac{13}{25}$ Obliczamy prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo, że obie wylosowane kule będą w barwach ciepłych lub obie będą w barwach zimnych, jest równe $\frac{13}{25}$.

c) Jest pięć wyników spełniających ten warunek: (ż, ż), (c, c), (b, b), (n, n) i (t, t).

$P = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ Obliczamy prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo, że obie wylosowane kule będą w tym samym kolorze, jest równe $\frac{1}{5}$.

Czy pamiętasz?
W talii liczącej 52 karty jest po 13 kart w czterech kolorach: kier, karo, pik, trefl. W każdym kolorze jest po jednym asie, królu, damie, walecie, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 i 2.
W talii składającej się z 24 kart jest po 6 kart w czterech kolorach: kier, karo, pik, trefl. W każdym kolorze jest po jednym asie, królu, damie, walecie, 10 i 9.

3. W pojemniku jest 5 klocków oznaczonych numerami: 1, 2, 3, 4, 5. Tworzymy liczby dwucyfrowe następująco: losujemy jeden klocek – numer tego klocka jest cyfrą dziesiątek; wylosowany klocek wrzucamy z powrotem do pojemnika i losujemy po raz drugi – numer wylosowanego klocka jest cyfrą jedności. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) liczba będzie parzysta,
b) cyfra dziesiątek będzie mniejsza od 3 i jednocześnie cyfra jedności będzie większa od 3,
c) obie cyfry w liczbie będą takie same.

4. Z dwóch talii 24 kart losujemy po jednej karcie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

a) obie karty będą asami,
b) obie karty będą kierami,
c) karta wylosowana z pierwszej talii będzie damą, a karta wylosowana z drugiej talii będzie kartą karo?

Przykład 5

Kasia i Grzegorz będą losowali po jednej karcie z talii 52 kart, przy czym pierwsza wylosuje kartę Kasia. Obliczmy prawdopodobieństwo tego, że:

a) Kasia wylosuje kartę kier i Grzegorz wylosuje kartę pik,
b) oboje wylosują karty z damami,
c) przynajmniej jedno z nich nie wylosuje karty trefl.

Losowanie jest bez zwracania, bo Grzegorz nie może wylosować karty wylosowanej przez Kasię.

$N = 52 \cdot 51 = 2652$ Stosujemy regułę mnożenia.

a) Kasia może wylosować jedną z 13 kart kier. Do każdej z tych kart Grzegorz może wylosować jedną z 13 kart pik.

$k = 13 \cdot 13 = 169$ Stosujemy regułę mnożenia.

$P = \frac{169}{2652} = \frac{13}{204}$ Obliczamy prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo, że Kasia wylosuje kartę kier i Grzegorz wylosuje kartę pik, jest równe $\frac{13}{204}$.

b) Kasia może wylosować jedną z 4 kart z damą. Do karty wylosowanej przez Kasię Grzegorz może wylosować jedną z 3 kart z damą.

$k = 4 \cdot 3 = 12$ Stosujemy regułę mnożenia.

$P = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221}$ Obliczamy prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo, że Kasia i Grzegorz wylosują po karcie z damą, jest równe $\frac{1}{221}$.

c) **Sposób I** Rozpatrujemy trzy warianty:

$13 \cdot 39 = 507$ **Wariant I** – Kasia wylosuje kartę trefl i Grzegorz nie wylosuje karty trefl.

$39 \cdot 13 = 507$ **Wariant II** – Kasia nie wylosuje karty trefl i Grzegorz wylosuje kartę trefl.

$39 \cdot 38 = 1482$ **Wariant III** – oboje nie wylosują karty trefl.

$k = 507 + 507 + 1482 = 2496$ Stosujemy regułę dodawania.

$P = \frac{2496}{2652} = \frac{16}{17}$ Obliczamy prawdopodobieństwo.

Sposób II

$13 \cdot 12 = 156$ Obliczamy liczbę możliwości wylosowania karty trefl przez Kasię i przez Grzegorza.

$2652 - 156 = 2496$ Od wszystkich możliwych wyników losowania odejmujemy liczbę wyników spełniających warunek, że Kasia i Grzegorz wylosują kartę trefl.

$P = \frac{2496}{2652} = \frac{16}{17}$ Obliczamy prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo, że przynajmniej jedna z osób nie wylosuje karty trefl, jest równe $\frac{16}{17}$.

Ciekawe!

Prawdopodobieństwo tego, że w klasie liczącej co najmniej 23 uczniów dwie osoby są urodzone tego samego dnia, jest większe niż $\frac{1}{2}$.

5. Z talii 24 kart losujemy bez zwracania dwa razy po jednej karcie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) obie wylosowane karty będą kartami pik,
b) za pierwszym razem wylosujemy asa, za drugim – króla.

Zadania

Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że obie wyrzucone liczby będą liczbami pierwszymi?

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{4}{9}$

W woreczku jest 12 kul oznaczonych numerami od 1 do 12. Najpierw Kasia, a potem Sylwia mają wyciągnąć z tego woreczka po jednej kuli. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że obie wyciągną kule z liczbami pierwszymi?

A. $\frac{5}{33}$ B. $\frac{25}{144}$ C. $\frac{5}{22}$ D. $\frac{1}{4}$

Rzucamy dwiema czworościennymi kostkami – czerwoną i niebieską. Na ściankach każdej z tych kostek zapisane są liczby: 1, 2, 3, 4. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) na czerwonej kostce wypadnie liczba 4,
b) na niebieskiej kostce nie wypadnie liczba 1,
c) na czerwonej kostce wypadnie liczba nieparzysta liczba oczek, a na niebieskiej – liczba parzysta,
d) suma oczek na obu kostkach będzie liczbą parzystą,
e) suma oczek na obu kostkach będzie liczbą pierwszą,
f) suma oczek na obu kostkach będzie liczbą podzielną przez 6,
g) iloczyn oczek na obu kostkach będzie liczbą większą od 7.

Maksym ma 6 książek detektywistycznych i 4 dokumentalne, które chcą przeczytać jego dwaj koledzy – Paweł i Kuba. Maksym postanowił, że w sposób losowy wybierze dwie książki i pierwszą z nich pożyczy Pawłowi, a drugą Kubie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) Maksym pożyczy Pawłowi książkę detektywistyczną, a Kubie książkę dokumentalną,
b) Maksym pożyczy obu kolegom książki detektywistyczne,
c) Maksym pożyczy obu kolegom ten sam rodzaj książek.

Wśród 30 uczestników spotkania mają być rozlosowane, na podstawie sporządzonej listy alfabetycznej, dwie różne nagrody. Najpierw z pudełka, w którym są losy oznaczone numerami od 1 do 30, losowany będzie jeden los (nagroda pierwsza), po czym los ten zostanie ponownie wrzucony do pudełka i losowany będzie drugi los (nagroda druga). Uczestnik, który na liście alfabetycznej ma numer taki sam jak na wylosowanym losie, otrzymuje odpowiednią nagrodę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) pierwszą nagrodę otrzyma osoba, która jest 10. na liście alfabetycznej,
b) obie nagrody otrzyma ta sama osoba,
c) obie nagrody otrzymają osoby znajdujące się na liście alfabetycznej w pierwszej dziesiątce,
d) pierwszą nagrodę otrzyma osoba, która na liście alfabetycznej ma numer parzysty, a drugą nagrodę – osoba, która ma numer nieparzysty.

Renata i Czarek mają po jednej talii 52 kart. Każde z nich wyciąga ze swojej talii po jednej karcie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) Renata i Czarek wyciągną takie same karty,
b) Renata wyciągnie króla i Czarek wyciągnie waleta,
c) Renata wyciągnie pika i Czarek wyciągnie pika,
d) Renata wyciągnie kartę z figurą (waleta, damę lub króla) i Czarek wyciągnie pika.

Wśród 10 ponumerowanych kopert 9 jest pustych, a jedna zawiera informację o nagrodzie. Dwie osoby kolejno wybierają po jednej kopercie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

a) druga osoba wybierze kopertę z nagrodą,
b) obie osoby wybiorą puste koperty?

W woreczku jest 7 kul oznaczonych numerami: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Rysujemy trójkąt równoramienny, ustalając jego podstawę i wysokość opuszczoną na tę podstawę za pomocą dwukrotnego losowania z woreczka po jednej kuli bez zwracania, przy czym liczba na pierwszej wylosowanej kuli jest równa długości podstawy trójkąta wyrażonej w centymetrach, a liczba na drugiej wylosowanej kuli – wysokości opuszczonej na tę podstawę wyrażonej w centymetrach. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

a) długość podstawy trójkąta będzie liczbą parzystą, a wysokość będzie większa niż 3 cm,
b) podstawa będzie dłuższa od wysokości,
c) pole trójkąta będzie nie mniejsze niż 15 cm^2,
d) pole trójkąta będzie większe od 2 cm^2 i mniejsze od 9 cm^2?

Nie mniejsze niż 15 cm^2 znaczy: większe od 15 cm^2 lub równe 15 cm^2.

Pamiętaj, że prawdopodobieństwo danego zdarzenia jest liczbą nieujemną, nie większą od 1.

Grupa dziewięciu przyjaciół, wśród których są trzy Magdy, dwóch Maksymów, dwóch Damianów, Daria i Oliwka, dostała jeden bilet do kina i jeden bilet do zoo. Postanowili, że o tym, kto wykorzysta te bilety, zadecyduje losowanie, przy czym jedna osoba nie może otrzymać obu biletów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) bilet do kina otrzyma dziewczynka o imieniu Magda,
b) bilet do kina otrzyma dziewczynka, a bilet do zoo jeden z chłopców,
c) bilety otrzymają osoby, których imiona zaczynają się na tę samą literę.

Magda zapisała w zeszycie liczbę trzycyfrową o różnych cyfrach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) cyfra w rzędzie jedności jest równa 8,
b) liczba jest nieparzysta,
c) liczba jest podzielna przez 5.

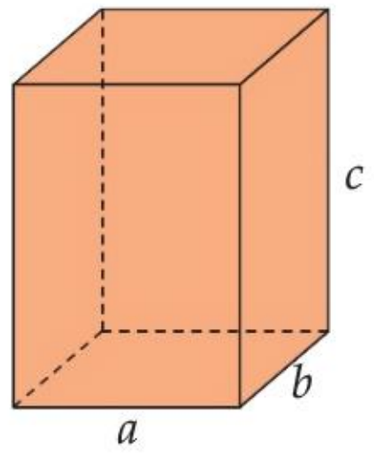
Rzucamy czterokrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) za trzecim razem wypadnie orzeł,
b) za pierwszym razem wypadnie orzeł, a za drugim reszka,
c) co najmniej trzy razy wypadnie orzeł,
d) wypadną same orły lub same reszki.

Boki równoległoboku oznaczono przez a i b. Następnie ustalono długości tych boków, dwukrotnie rzucając sześcienną kostką do gry. Przyjęto, że pierwsza wyrzucona liczba jest równa długości boku a, zaś druga wyrzucona liczba jest równa długości boku b, wyrażonym w centymetrach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) ten równoległobok jest rombem,
b) obwód tego równoległoboku jest mniejszy od 20 cm.

Krawędzie prostopadłościanu wychodzące z jednego wierzchołka oznaczono przez a, b, c. Następnie ustalono długości tych krawędzi, trzykrotnie rzucając sześcienną kostką do gry. Przyjęto, że liczby kolejno wyrzuconych oczek są równe odpowiednio długościom krawędzi a, b, c, wyrażonym w centymetrach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:



a) wszystkie krawędzie mają tę samą długość,
b) każda krawędź ma inną długość,
c) jedna z krawędzi ma długość 5 cm, a dwie pozostałe mają długości różne od 5 cm,
d) krawędzie a i b mają tę samą długość, a krawędź c ma długość inną,
e) objętość prostopadłościanu jest mniejsza od 5 cm^3.

Podsumowanie działu 8

Ważne pojęcia

reguła mnożenia	reguła dodawania	losowanie ze zwracaniem	losowanie bez zwracania

Reguła mnożenia

Jeśli jedna czynność może się zakończyć jednym z m różnych wyników, a druga czynność jednym z k różnych wyników, to liczba wszystkich możliwych par, będących efektem wykonania tych dwóch czynności, jest równa iloczynowi liczb m i k.

Reguła dodawania

Jeśli mamy do wyboru kilka wariantów i w każdym z nich różne możliwości, to – aby ustalić liczbę wszystkich możliwości – najpierw obliczamy liczbę możliwości osobno dla każdego z tych wariantów, a potem uzyskane wyniki sumujemy.

Losowanie ze zwracaniem i losowanie bez zwracania

- Gdy losujemy kilkakrotnie i obiekt (np. karta, kula, los), który został wylosowany w jednym losowaniu, może zostać wylosowany w następnym losowaniu, to mówimy o „losowaniu ze zwracaniem”.
- Gdy losujemy kilkakrotnie i obiekt (np. karta, kula, los), który został wylosowany w jednym losowaniu, nie może zostać wylosowany w następnym losowaniu, to mówimy o „losowaniu bez zwracania”.

Prawdopodobieństwo

$P = \frac{k}{N}$, P – prawdopodobieństwo, N – liczba wszystkich możliwych wyników, k – liczba wyników spełniających podany warunek

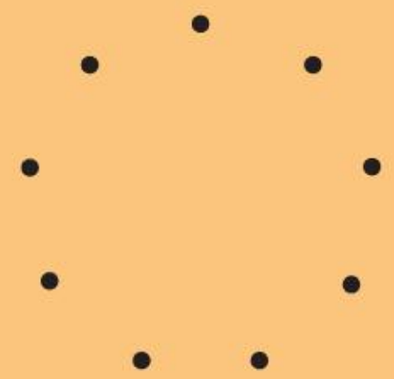
Czy już umiesz?

1. W księgarni jest 25 różnych książek przygodowych i 17 różnych przygodowych gier komputerowych. Na ile sposobów Krzyś może wybrać prezent składający się z jednej książki przygodowej i jednej przygodowej gry komputerowej?

   A. 42 B. 84 C. 425 D. 850

2. Spośród 9 punktów położonych tak jak na rysunku wybieramy dwa różne punkty. Rysujemy półprostą, do której należą wybrane punkty, przy czym pierwszy wybrany punkt jest początkiem półprostej. Ile różnych półprostych możemy narysować?

   A. 18 B. 36 C. 72 D. 81



3 W pudełku jest 8 kredek, każda w innym kolorze. Monika i Tomek wybierają po jednej kredce. Na ile różnych sposobów mogą to zrobić?

A. 16 B. 56 C. 64 D. 72

4 W kwadracie (patrz rysunek obok) należy pomalować tym samym kolorem dwa z czterech pól oznaczonych literami a, b, c, d. Ile jest możliwości pomalowania kwadratu?

a	b
c	d

A. dwanaście B. sześć C. cztery D. trzy

5 Ile jest wszystkich nieparzystych liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach?

A. 40 B. 45 C. 48 D. 50

6 Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, które w rzędzie dziesiątek mają jedną z cyfr 1, 2, lub 3?

A. 210 B. 240 C. 270 D. 300

7 W pewnym sklepie sprzedawane są czajniki bezprzewodowe od 4 producentów. Jeden z nich produkuje 2 rodzaje czajników w 4 kolorach, drugi – 6 rodzajów czajników w 8 kolorach, trzeci – 5 rodzajów czajników w 2 kolorach, a czwarty – tylko 1 rodzaj w 12 kolorach. Oblicz, ile jest różnych czajników w ofercie tego sklepu.

A. 78 B. 80 C. 104 D. 312

8 Szafa ma 7 półek. Michał chce schować do tej szafy dwa swetry: biały i czarny, przy czym półki wybierze w sposób losowy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że sweter biały położy na jednej z trzech górnych półek, a czarny na jednej z trzech dolnych?

A. $\frac{6}{49}$ B. $\frac{9}{49}$ C. $\frac{2}{7}$ D. $\frac{3}{7}$

9 Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w drugim rzucie wypadła większa liczba oczek niż w pierwszym rzucie, jest równe

A. $\frac{5}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{1}{2}$

10 Ula i Adam wyciągają z talii 24 kart po jednej karcie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że Ula wyciągnie figurę (króla, damę lub waleta), a Adam dziesiątkę lub dziewiątkę?

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{4}{23}$ C. $\frac{5}{24}$ D. $\frac{5}{23}$

11 W woreczku jest 21 kul białych i kule czarne. Stosunek liczby kul białych do czarnych jest równy 7 : 3. Z tego woreczka losujemy bez zwracania dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych?

A. $\frac{7}{15}$ B. $\frac{14}{29}$ C. $\frac{49}{100}$ D. $\frac{41}{59}$

12 Spośród 9 kartek, na których zapisane są odpowiednio litery: P, R, O, M, I, E, N, I, E losujemy kolejno dwie i zapisujemy znajdujące się na nich litery. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy słowo: PI?

A. $\frac{1}{49}$ B. $\frac{1}{42}$ C. $\frac{2}{81}$ D. $\frac{1}{36}$

13 Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy jednokrotnym rzucie dwiema monetami otrzymamy:

a) dwie reszki, b) orła i reszkę?

14 Rzucamy monetą, następnie kostką sześcienną do gry i jeszcze raz monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w tym doświadczeniu przynajmniej raz wypadnie orzeł.

15 Doświadczenie losowe polega na rzucie dwiema kostkami sześciennymi do gry i zsumowaniu liczby wyrzuconych oczek na ściankach obu kostek. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania:

a) liczby 2, b) liczby 4,
c) liczby 7, d) liczby podzielnej przez 5,
e) liczby podzielnej przez 6, f) liczby pierwszej?

16 Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry i mnożymy liczby wyrzuconych oczek na ściankach obu kostek. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania:

a) liczby 6, b) liczby 20,
c) liczby nieparzystej, d) liczby podzielnej przez 9?

17 Typowa bieżnia lekkoatletyczna ma 8 torów. Na ile sposobów można przydzielić tory na tej bieżni:

a) dwóm zawodnikom, b) trzem zawodnikom,
c) pięciu zawodnikom d) ośmiu zawodnikom?

18 Blok zawiera 18 różnokolorowych kartek. Na ile sposobów można dać po jednej kartce:

a) dwojgu, b) trojgu, c) czworgu dzieciom?

19 Wśród 20 uczniów uczęszczających na koło filmowe należy rozlosować trzy bilety do kina na różne trzy filmy. Ile jest możliwych wyników losowania, jeśli:

a) jeden uczeń może otrzymać tylko jeden bilet, b) jeden uczeń może otrzymać kilka biletów?

20 Kody PIN składają się z czterech spośród 10 cyfr. Ile istnieje różnych kodów PIN, jeśli:

a) cyfry kodu mogą się powtarzać, b) cyfry kodu nie mogą się powtarzać?

21 Oceń prawdziwość zdań. Zdania prawdziwe przepisz do zeszytu.

a) Wszystkich liczb trzycyfrowych jest o 396 więcej niż wszystkich liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach.
b) Liczb czterocyfrowych, które w rzędzie setek mają cyfrę 7, jest o 100 więcej niż liczb czterocyfrowych, które w rzędzie jedności mają cyfrę 7.
c) Parzystych liczb czterocyfrowych podzielnych przez 5 jest tyle samo, ile wszystkich liczb trzycyfrowych.
d) Liczb czterocyfrowych, które w rzędzie setek mają cyfrę 1 i w rzędzie jedności cyfrę 2, jest więcej niż wszystkich liczb dwucyfrowych.

22 W pewnym zakładzie pracy postanowiono wprowadzić identyfikatory dla pracowników. Każdy identyfikator ma się składać z dwóch różnych liter spośród 23 liter polskiego alfabetu i jednej z 10 cyfr, przy czym cyfry i litery mogą być w jednym z układów: litera–litera–cyfra, litera–cyfra–litera, cyfra–litera–litera. Jaka największa liczba pracowników może być zatrudniona w tym zakładzie, jeśli każdy pracownik ma mieć inny numer identyfikatora?

23 W restauracji są 4 rodzaje przystawek, 6 rodzajów zup, 9 rodzajów dań głównych, 7 rodzajów deserów i 8 rodzajów napojów. Ile zestawów obiadowych można z nich utworzyć, jeżeli zestaw obiadowy ma się składać:

a) z zupy i dania głównego,
b) z dania głównego i deseru,
c) z zupy, dania głównego i deseru,
d) z przystawki, zupy, dania głównego i napoju,
e) z przystawki, zupy, dania głównego, deseru i napoju?

24 W niebieskim woreczku są kule z numerami: 1, 2, 3, 4, a w czerwonym kule z numerami: 5, 6, 7, 8, 9. Losujemy jedną kulę, zapisujemy jej numer i odkładamy ją na bok, a potem losujemy drugą kulę i zapisujemy jej numer za poprzednio zapisanym numerem. W ten sposób tworzymy liczby dwucyfrowe, w których cyfra dziesiątek jest równa numerowi pierwszej wylosowanej kuli, a cyfra jedności – numerowi drugiej wylosowanej kuli. Ile liczb dwucyfrowych możemy utworzyć, jeżeli obie kule losujemy z woreczka w tym samym kolorze?

25 Do pracy w wolontariacie, polegającej na pomaganiu osobom starszym, zgłosiło się 8 chłopców i 11 dziewczynek. Z tej grupy trzeba wybrać dwie osoby, przy czym jedna wybrana osoba będzie pomagała pani Halince, a druga – panu Czesiowi. Ile jest możliwości wyboru osób, jeżeli:

a) nie ma znaczenia płeć wybieranych osób,
b) mają zostać wybrane same dziewczynki,
c) mają zostać wybrane same dziewczynki lub wybrani sami chłopcy,
d) do pomocy pani Halince ma zostać wybrana dziewczynka, a do pomocy panu Czesiowi chłopiec?

26 W pewnej szkole są trzy klasy VIII. W klasie VIIIa jest 23 uczniów, w klasie VIIIb – 25 uczniów, w klasie VIIIc – 28 uczniów. Dyrektor ma wybrać dwóch uczniów, z których jeden na spotkaniu ze znanym sportowcem będzie robił zdjęcia, a inny wręczy kwiaty po spotkaniu. Ile jest różnych możliwości wyboru uczniów, jeżeli:

a) osoba wręczająca kwiaty ma być z klasy VIIIa, a osoba, która będzie robiła zdjęcia, ma być z klasy VIIIb,
b) obie osoby mają być z klasy VIIIb,
c) jedna osoba ma być z klasy VIIIb, a druga z klasy VIIIc,
d) osoba, która będzie wręczała kwiaty, ma być z klasy VIIIc, a osoba, która będzie robiła zdjęcia, ma być z klasy VIIIa lub VIIIb,
e) obie osoby mają być z tej samej klasy?

27 Tworzymy czterocyfrowy kod, wybierając spośród 23 wielkich liter polskiego alfabetu (tylko liter bez znaków diakrytycznych) i 10 cyfr. Ile różnych kodów możemy utworzyć, jeśli:

a) dwoma pierwszymi znakami kodu mają być cyfry 1 i 9 (w dowolnej kolejności), a dwoma kolejnymi – różne litery,
b) pierwszym znakiem kodu ma być litera, a kolejnymi trzy różne cyfry,
c) kod ma się składać tylko z samych liter lub tylko z samych cyfr (cyfry i litery mogą się powtarzać),
d) kod ma się składać tylko z samych różnych liter lub tylko z samych różnych cyfr,
e) pierwszym znakiem kodu ma być cyfra 5, ostatnim litera M, a dwa pozostałe znaki mają być różnymi od 5 i M dwoma cyframi, dwoma literami, literą i cyfrą lub cyfrą i literą?

28 Oblicz, ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach mniejszych od 650.

29 Paweł ma w plecaku 2 duże kieszenie i 6 kieszeni małych. W sposób losowy chce do jednej z nich włożyć portfel, a do drugiej – telefon. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

a) portfel włoży do dużej kieszeni, a telefon do małej,
b) oba przedmioty włoży do dwóch różnych małych kieszeni?

30 Wieżowiec ma parter i 9 pięter. Na parterze tego wieżowca do windy wsiadły dwie osoby. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

a) jedna z tych osób wysiądzie na 4 piętrze, a druga powyżej 4 piętra,
b) obie wysiądą powyżej 3 piętra,
c) obie osoby wysiądą na tym samym piętrze?

31 Nikodem i Łukasz grają w kości. Każdy z nich ma po jednej kostce sześciennej i rzuca nią na ustalony znak. Wygrywa ten, kto wyrzuci większą liczbę oczek. Jeśli obaj chłopcy wyrzucą tyle samo oczek, gra kończy się remisem. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) Nikodem wyrzuci trzy oczka i Łukasz nie wyrzuci trzech oczek,
b) wygra Nikodem,
c) gra zakończy się remisem.

32 Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

a) za pierwszym razem wypadnie liczba oczek mniejsza od 3,
b) za drugim razem wypadnie liczba oczek będąca liczbą pierwszą,
c) za pierwszym razem wypadnie parzysta liczba oczek, a za drugim nieparzysta,
d) suma oczek będzie mniejsza od 6,
e) iloczyn oczek będzie równy 4,
f) iloczyn oczek będzie większy od 10?

8

KOMBINATORYKA

W trakcie rozwiązywania różnych problemów z życia codziennego czasami zachodzi konieczność znalezienia odpowiedzi na rozmaite pytania, np.: Na ile różnych sposobów może jechać jeden za drugim siedmiu rowerzystów? Na ile sposobów możemy rozdać trzy różne książki trzem różnym osobom wybranym spośród 10 osób? Ile jest różnych możliwych wyników pięciokrotnego rzutu monetą? Na ile sposobów możemy wybrać czteroosobową delegację spośród 12 osób? Wyjaśnieniem tego typu zagadnień zajmuje się dział matematyki zwany **kombinatoryką**.

Silnia

Jednym z ważniejszych pojęć kombinatoryki jest pojęcie silni.
n – silnia jest to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do *n*.
n – silnię oznaczmy przez ***n!***.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

Ponadto przyjmujemy, że:

$0! = 1$ $\quad$ $1! = 1$

Notację ***n!*** wprowadził w 1808 roku Francuz Christian Kramp, który choć z wykształcenia był lekarzem, pasjonował się matematyką.

Zauważmy, że:

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

...

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

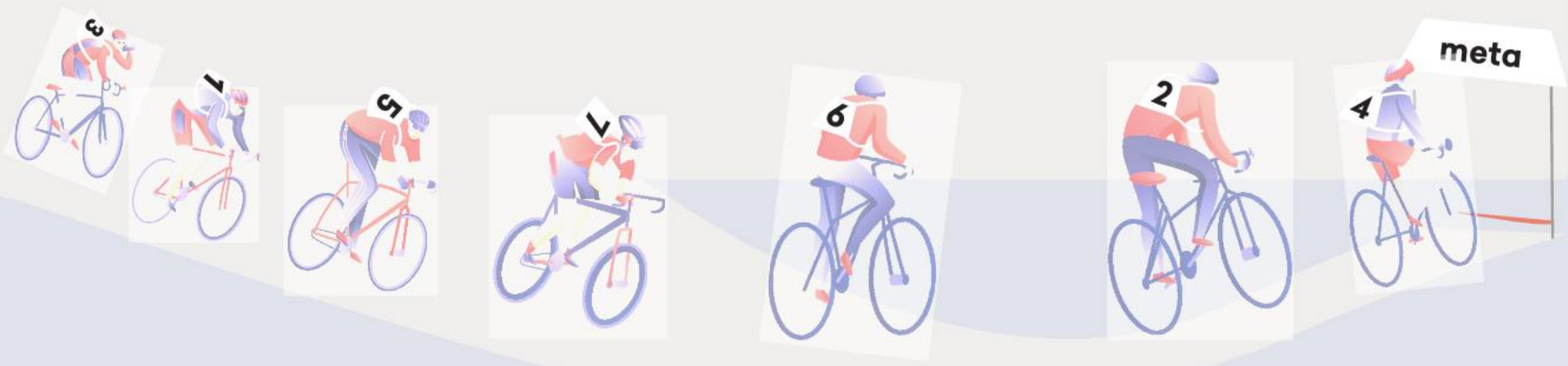
Zadanie 1

Oblicz: 6!, 7!, 8!.

Dzięki silni możemy w prosty sposób zapisywać iloczyny kolejnych liczb naturalnych, z których najmniejsza to 1. Na przykład iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do 100 jest liczbą 157-cyfrową, zaś używając silni, możemy zapisać krótko: 100!.

Permutacje

Wyobraźmy sobie, że w wyścigu rowerowym bierze udział 7 uczestników, którym przydzielono numery od 1 do 7, przy czym każdy z nich ma inny numer. Ile jest różnych możliwości zakończenia tego wyścigu? Przyjmijmy, że zapisujemy kolejno numery zawodników, którzy przekroczyli metę. Pierwszą osobą na mecie może być jeden z 7 zawodników, drugą – jeden z 6, trzecią – jeden z 5 itd. Stosując regułę mnożenia, mamy: $\mathbf{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040}$
Zauważmy, że $\mathbf{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7!}$
Zatem liczba możliwości zakończenia wyścigu, w którym bierze udział **7** zawodników, jest równa **7!**.



Analogicznie, 12 osób może stać w kolejce do lodziarni na 12! sposobów, zaś liczba wszystkich możliwych ustawień 20 książek na półce jest równa 20!.
Jeśli mamy *n* różnych obiektów (np. zawodników, osób, książek) i wszystkie obiekty mamy ustawić w szeregu, to takie jedno ustawienie nazywamy permutacją. Liczba wszystkich permutacji jest równa ***n***!.

Zadanie 2
Nauczyciel wybrał 6 zadań i chce utworzyć sprawdziany, które będą różniły się tylko kolejnością tych zadań. Oblicz, ile różnych sprawdzianów może utworzyć nauczyciel.

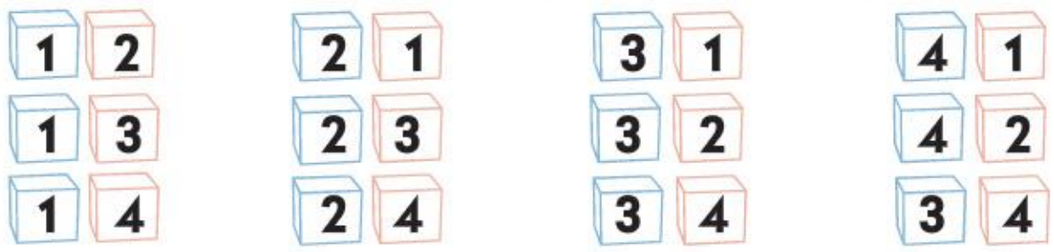
W XVII wieku brytyjski pisarz Fabian Stedman zaproponował wykorzystanie permutacji do ustalania kolejności bicia nastrojowych dzwonów. Oparte na jego pomysłach techniki wykorzystywane są do dzisiaj w wielu kościołach parafialnych w Wielkiej Brytanii i Irlandii.

Wariacje bez powtórzeń

Wyobraźmy sobie, że z woreczka z czterema klockami, na których zapisane są cyfry 1, 2, 3, 4, losujemy kolejno dwa klocki i w ten sposób tworzymy liczby dwucyfrowe.
Wynik może być np. taki:



Mówimy, że utworzyliśmy wariację dwuelementową (bo losowaliśmy dwa klocki) bez powtórzeń (bo każdy klocek mógł być wylosowany tylko raz) ze zbioru czteroelementowego (bo mieliśmy cztery klocki).
Ile różnych liczb dwucyfrowych możemy w ten sposób utworzyć?
Najpierw możemy wylosować jeden z czterech klocków (cyfra dziesiątek), a potem jeden z trzech klocków (cyfra jedności).



Stosując regułę mnożenia, mamy: **4 · 3 = 12**. Zatem możemy utworzyć 12 różnych liczb dwucyfrowych.
Teraz już łatwo jest obliczyć, na ile sposobów możemy rozdać trzy różne książki trzem różnym osobom wybranym spośród 10 osób:

- **pierwszą** książkę możemy wręczyć jednej z **10 osób**,
- **drugą** książkę możemy wręczyć już tylko jednej z **9 osób**,
- **trzecią** książkę możemy wręczyć jednej z **8 osób**.

Stosując regułę mnożenia, mamy: **10 · 9 · 8 = 720** sposobów.

Zadanie 3
W ostatnim rzędzie w kinie jest 13 ponumerowanych miejsc. Na ile sposobów mogą w tym rzędzie zająć miejsca cztery osoby?

Wariacje z powtórzeniami

Rzut monetą może zakończyć się jednym z dwóch wyników: orzeł (O) lub reszka (R). Jeśli rzucimy monetą pięć razy to możemy otrzymać np. RRORO. Mówimy, że utworzyliśmy wariację pięcioelementową (bo pięć razy rzucaliśmy monetą) z powtórzeniami ze zbioru dwuelementowego (bo jeden rzut może zakończyć się jednym z dwóch wyników).
Liczba wszystkich możliwych wyników jest równa: **2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 32**.
Zauważmy, że **2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 2^5**
Dlatego, aby obliczyć liczbę wyników pięciu rzutów monetą, należy obliczyć piątą potęgę liczby **2.**
Analogicznie, możemy obliczyć liczbę możliwych wyników **8** rzutów sześcienną kostką do gry, na ścianach której znajdują się oczka od 1 do 6. Liczba ta jest równa: **6 · 6 · 6 · 6 · 6 · 6 · 6 · 6 = 6^8**.

Zadanie 4
Kod PIN składa się z czterech cyfr, wybranych spośród cyfr od 0 do 9, przy czym cyfry w kodzie mogą się powtarzać. Ile jest różnych kodów PIN?

Odpowiedzi do zadań

5. Powtarzamy, utrwalamy

5.1 Liczby wymierne (s. 8)

1. D **2.** C **3.** C **4.** C **5.** B **6.** D **7.** B **8.** D

9. A **10.** B **11.** a) P b) P c) F d) P

12. a) 0, 2, 4, 6, 8 b) 1, 4, 7 c) 0, 4, 8 d) 0, 5 e) 1 f) 0 g) 4

13. a) -1 b) $\frac{5}{14}$ c) $-2{,}094$ d) 5,5 **14.** Michał o 2,2

15. 15 **16.** 624 zł **17.** Marek o 27 minut

19. 19, 33, 47, 61, 75, 89 **20.** 294 **21*.** a) np. 0,72, 0,75

5.2 Działania na liczbach rzeczywistych (s. 12)

1. B **2.** A **3.** B **4.** C **5.** a) P b) F c) F d) P

6. C **7.** D **8.** B **9.** a) F b) P c) F **10.** a) = b) =

11. a) 3^7 b) $-80\frac{8}{9}$ c) $-\frac{11}{45}$ **12.** $1{,}6 \cdot 10^{13}$ razy

13. 4^3 **14.** 3 **15.** 150 **16.** a) -4 b) 4 c) 20 d) $22\sqrt{7}$

17. $a = -1$ **18.** $M = 3$ **19.** a) 123 b) 1,23 c) 24,6 d) 6,15

5.3 Wyrażenia algebraiczne i równania (s. 15)

1. A **2.** B **3.** D **4.** C **5.** A **6.** B **7.** C **8.** D

9. A **10.** D **11.** a) F b) P c) P d) P e) P

12. a) $P = a^2$ b) $P = 5a^2$ c) $P = 9a^2$

d) $P = 17a^2$ e) $P = 37a^2$ f) $P = (4n - 3)a^2$

13. a) $10n$ b) $5n + 4$ c) $6n + 6$ d) $4n + 2$

14. a) $18k + 15{,}5p$ b) $2{,}3g + 36k$ c) $46{,}5p + 9k + 3{,}45g$

15. $15p + 8d$ **16.** a) $y - 19$ b) $y - 27$ c) $x + 3y - 25$

17. $a = 2, b = 7, c = 6, d = 3, e = 8$ **18.** 1175

19. a) $x = \frac{p - 2m}{2}$ b) $x = \frac{3y + 7}{y}, y \neq 0$

c) $x = \frac{dy}{ay + b}, ay + b \neq 0$ **20.** $-3, 0$

21. a) $a = 1\frac{3}{7}$ b) $y = -\frac{1}{9}$ c) brak rozwiązania d) $k = \frac{9}{16}$

e) $b = 2\frac{23}{27}$ f) $t = 0{,}32$ g) $m = -1$ h) $w = -\frac{1}{7}$

5.4 Figury geometryczne na płaszczyźnie (s. 20)

1. B **2.** D **3.** A **4.** B **5.** A **6.** D **7.** C

8. a) P b) F **9.** 72 m **10.** D **11.** $|DE| = 4{,}8$ cm

12. $Obw. = 15$ cm **13.** bok: $a\sqrt{2}$, przekątna: $2a$

14. $P = 84$ cm² **15.** 68,16 m² **16.** $h = 4$ cm

19. $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **20.** $15\sqrt{2}, \sqrt{754}$

5.5 Geometria przestrzenna (s. 25)

1. B **2.** B **3.** D **4.** C **5.** C **6.** a) P b) P c) F

7. D **8.** A **9.** C **10.** D **11.** 41 cm

12. $1{,}7 \cdot 10^3$ hl, $\frac{1}{3}$ **13.** 6,75 kg **14.** 39,6 l

15. 3,6 cm **16.** $h = 9$ cm **17.** $H = 7{,}5$ cm

18. $P_c = (480 + 80\sqrt{13})$ cm², $V = 1440$ cm³ **19.** $36\sqrt{3}$

20. $P_c = (108\sqrt{3} + 216)$ cm², $V = 324\sqrt{3}$ cm³

21. a) 57 750 kg b) 8 190 000 kg **22.** 27 razy

23. $P_c = 600$ cm², $V = 1000$ cm³

24. graniastosłup o 1728 cm²

5.6 Oś liczbowa. Układ współrzędnych (s. 29)

1. B **2.** D **3.** A **4.** C **5.** D **6.** C **7.** D

8. a) P b) F c) F **9.** a) F b) P c) F **10.** A, D

11. a) 3 b) 9 c) 3 d) 8

12. (−3, 2), (−2, 1), (−1, 1), (−2, 0), (−1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (−1, −1), (0, −1), (−1, −2)

13. Tak, na podstawie cechy bok, bok, bok

14. a) 3 : 2 b) $N = (-5, 3)$ c) $|MN| = 4$ d) $S = (-3, 3)$

15. a) tak b) 5 razy c) $S = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

16. a) $Obw. = 24, P = 24$ b) $Obw. = 20 + 4\sqrt{5}, P = 40$

17. a) $Obw. = 8\sqrt{5}, P = 16$ b) $Obw. = 34, P = 42$

c) $Obw. = 14 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}, P = 21$

18. a) (−3, −2), b) (−1, 1) c) $Obw. = 20, P = 24$

19. a) $C = (-2, -4), D = (4, -1)$ b) $Obw. = 12\sqrt{5}, P = 36$

20. a) $P = 12$ b) $P = 23$ c) $P = 12$ **21.** $6\sqrt{2}$

22. $P = 12{,}5, Obw. = 10 + 5\sqrt{2}$

5.7 Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa (s. 33)

1. D **2.** A **3.** a) F b) P c) P **4.** B, C **5.** D

6. A, C **7.** B **8.** D **9.** C **10.** a) F b) F c) P

11. a) P b) F c) P

12. a) zaoszczędzili 1200 zł, wydali 4800 zł b) 1776 zł

c) o 240 zł d) 1056 zł

13. a) w poniedziałek i piątek b) przez 2 dni

c) 1,5 mm d) 2,0 mm e) przez 4 dni

15. a) 54 km b) 11:40, 36 km c) Tomek, o 20 minut wcześniej d) Paweł 13,5 km/h, Tomek 18 km/h

16. a) Magda 27 zł, Daria 23 zł b) najmniejsza w piątek, największa w sobotę c) w poniedziałek i sobotę d) Magda 3 razy, Daria 6 razy e) Daria 17 zł, Magda 19 zł **17.** a) 20 b) 30% c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{3}{10}$

18. a) 72 b) 3 c) 14 d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{12}$

19. a) białej $\frac{2}{5}$, niebieskiej $\frac{3}{5}$ b) 6 c) 18

20. a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{2}{5}$ **21.** a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$

5.8 Praktyczne zastosowania matematyki (s. 41)

1. B **2.** a) P b) F c) F **3.** A **4.** B **5.** D **6.** D

7. A, D **8.** a) F b) F c) P d) P **9.** a) P b) F c) P

10. a) P b) F c) P **11.** A **12.** D **13.** C **14.** A **15.** D

16. D **17.** a) 1,2 ha b) 598 m c) podstawy: 1,2 cm i 2,8 cm, ramiona: 1 cm, wysokość: 0,6 cm

18. a) sok jabłkowy: 48 sztuk, sok pomarańczowy: 12 sztuk b) sok jabłkowy: 12 l, sok pomarańczowy: 3 l

19. 400 kg, poniedziałek: 60 kg, wtorek: 100 kg

20. 15 **21.** 1,25% **22.** 108 zł **23.** 83,72 zł

24. 3,24 km/h **25.** 11 h, 49,5 km **26.** 720 km/h

27. a) 0,6 l b) 45 osób **28.** 4 worki (9,74 a)

29. 0,9 m, 2,7 m

30. 1333 $\frac{1}{3}$ minuty, więcej niż godzina, mniej niż doba

31. co najwyżej 42 kubki **32.** 158 cm × 68 cm × 52 cm

33. 336 dm²

6. Okrąg i koło

6.1 Koła i okręgi (s. 52)

1. a) 33 cm b) 5 cm c) 19 cm d) 14 cm

2. a) 23 cm b) 57 cm

3. a) okręgi są styczne wewnętrznie b) okręgi są rozłączne wewnętrznie c) okręgi przecinają się d) okręgi są styczne zewnętrznie e) okręgi są rozłączne wewnętrznie f) okręgi przecinają się

4. a) $|AB| = 7{,}25$, $|AC| = 12$, $|BC| = 4{,}75$ b) $|AB| = 2$, $|AC| = 2{,}5$, $|BC| = 4{,}5$ c) $|AB| = 6$, $|AC| = 7{,}5$, $|BC| = 1{,}5$

5*. promień okręgu o środku w punkcie A jest równy 1 cm, promień okręgu o środku w punkcie B jest równy 4 cm

6. $B = (1, -13)$ lub $B = (1, -5)$ lub $B = (1, -1)$ lub $B = (1, 7)$

7. a) $b = -7$, $r = 3$ b) $Obw. = 30$, $P = 30$

8. a) $\alpha = 18°$ b) $\alpha = 70°$, $\beta = 25°$ c) $\alpha = 44°$, $\beta = 113°$ d*) $\alpha = 122°$, $\beta = 142°$ **10.** $P = 300$, $Obw. = 80$

11. a) $Obw. = 42$ cm, $P = 98$ cm² b) $Obw. = 14(1 + \sqrt{2})$ cm, $P = 49$ cm² c) $Obw. = 14(1 + \sqrt{2})$ cm, $P = 49$ cm² d) $Obw. = 7(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$ cm, $P = 24{,}5$ cm²

6.2 Długość okręgu (s. 57)

1. a) 10π b) 24π c) 69π d) $18{,}5\pi$ e) $\frac{5\pi}{3}$ f) $\frac{25\pi}{6}$ g) $\frac{5}{4}$ h) $2\pi^2$ **2.** a) 10π b) $7{,}6\pi$ c) $24\pi^2$ d) $\frac{3}{5}$ e) π^3 f) 22 g) $\frac{3\pi^2}{5}$ h) $\frac{18}{5\pi}$ **3.** a) $\frac{13}{\pi}$ b) $\frac{75}{2\pi}$ c) $\frac{2}{9\pi}$ d) $\frac{10}{3\pi}$ e) 4 f) 1 g) $\frac{3}{4}\pi$ h) $\frac{3}{5\pi^2}$ **4.** a) $\frac{18}{\pi}$ b) $\frac{12}{5\pi}$ c) $\frac{3}{13\pi}$ d) 4 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{5}{7}$ g) π h) $\frac{1}{\pi^2}$ **5.** a) $L \approx 3{,}8$ cm b) $L \approx 52{,}1$ cm c) $L \approx 153{,}9$ cm d) $L \approx 169{,}6$ cm **6.** a) $3{,}5\pi$ b) 3π c) $4{,}5\pi$ d) 4π **7*.** najdłuższa II, najkrótsza III

8. 49 mm, 55 mm, 61 mm, 52 mm, 58 mm, 64 mm, 72 mm, 68 mm, 75 mm **9.** a) 31 cm, 44 cm, 47 cm b) 31 cm, 2638 cm, 169 560 cm c) 754 cm, 63 302 cm, 4 069 440 cm **10.** b), d), e)

6.3 Pole koła (s. 63)

1. a) 81π b) $6{,}25\pi$ c) $4{,}41\pi$ d) $\frac{1}{9}\pi$ e) $\frac{9}{\pi}$ f) $\frac{9}{16\pi}$ g) 4 h) π^3 **2.** a) 25π b) 144π c) $12{,}25\pi$ d) $\frac{1}{9}\pi$ e) $0{,}64\pi$ f) π^3 g) $\frac{1}{\pi}$ h) $\frac{100}{\pi}$

3. a) 7 b) 14 c) $\frac{1}{9}$ d) 1,1 e) π f) 3π g) $\frac{5}{6}$ h) $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$

4. a) 18π b) 42π c) $\frac{4}{3}\pi$ d) $0{,}16\pi$ e) $2\pi^2$ f) $\frac{2}{5}\pi^2$ g) $\frac{1}{2}\pi$ h) $12\sqrt{\pi}$ **5.** a) 1 b) 2 c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $2\sqrt{2}$ **6.** 36 razy

7. a) Nie. Suma pól powierzchni awersu dwóch monet 1-groszowych jest równa $120{,}125\pi$ mm², a pole powierzchni awersu monety 5-złotowej jest równe 144π mm² b) Tak. Suma pól powierzchni awersu dwunastu monet 1-groszowych jest równa $720{,}75\pi$ mm², a suma pól powierzchni awersu pięciu monet 5-złotowych jest równa 720π mm² **8.** B, E

9. a) $P = (1536 - 384\pi)$ cm² b) $P = (250 - 56{,}25\pi)$ cm²

10. a) $P = 3\pi$ b) $P = 3{,}5\pi$ c) $P = 3\pi$ d) $P = 16 - 4\pi$ e*) $P = \frac{9\pi}{2}$ f*) $P = 2\pi - 4$

6.4 Pierścień kołowy (s. 69)

1. I, III **2.** a) 51π b) 50π c) $0{,}8\pi$ d) 16π **3.** a) 7π b) $15{,}75\pi$ c) 21π d) 14π **4.** a) 8 razy b) 3 razy

5. a) 3 : 4 b) 16 : 25 **6.** 3 razy **7.** 20 dm **8.** 9 cm

9. $r_1 = 5$ **10.** 7 razy

6.5 Okrąg, koło i pierścień kołowy – zadania z kontekstem realistycznym (s. 74)

1. 157 cm **2.** a) nie b) tak c) tak **3.** 270 zł

4*. 6,9 cm **5.** a) $P \approx 10{,}18$ m² b) 14 400 razy

6. a) prostokątny: 1,68 m², okrągły: 2,01 m², uszyty z kwadratu i dwóch półkoli: 1,79 m²
b) najmniejsze: A, największe: B
c) A: tak, B: nie, C: nie
7. około 2 razy **8.** a) 144 : 25 b) o ok. 1495 cm²
9. a) 1256 cm² b) 128,74 cm²
10*. a) $P \approx 10\,344$ m² b) $P \approx 4184$ m²
c) $L_w = 398$ m, $L_z = 459$ m d) $P \approx 490$ m² e) $P \approx 556$ m²

Czy już umiesz? (s. 79)

1. D **2.** D **3.** B **4.** C **5.** C **6.** C **7.** B
8. A **9.** C **10.** C **11.** C **12.** D **13.** A
14. C **15.** C **16.** N, C **17.** T, B
18. a) 75 cm b) 19 cm **19.** $C = (2, 5)$, $r = 11$
20*. a) $|AB| = 2$, $|AC| = 6$, $|BC| = 4$ b) $|AB| = 8$, $|AC| = 3{,}5$, $|BC| = 4{,}5$ c) $|AB| = 2{,}5$, $|AC| = 3{,}5$, $|BC| = 6$
21*. a) 13 dm b) 6 dm **22.** a) $10{,}5\pi$ b) $7{,}5\pi$
23. a) $L = 4\pi$, $P = 3\pi$ b) $L = 6\pi$, $P = 4 + 3\pi$ c*) $L = 8\pi$, $P = 8\pi - 16$
24. a) $P = 6{,}25\pi - 6$ b) $P = 36\pi - 36$ c) $P = 16\pi - 8\sqrt{3}$
25. a) $\frac{4}{\pi}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ **26.** a) $12{,}5\pi$ b) 288
27. 75,36 cm **28.** $P = 6359$ cm²
29. a) nie b) nie c) tak **30.** a) ok. 50 a b) ok. 7,8 a

7. Symetrie

7.2 Dwusieczna kąta (s. 89)

3. 45°, 45° **5.** 40°, 40°, 100°
6. 70°, 70°, ostrokątny równoramienny
7*. $Obw. = 35$

7.3 Symetria względem prostej (s. 94)

2. c), e) **3.** a) salon b) butik c) samoobsługa
5. a) nie b) tak c) nie **11.** 14 cm

7.4 Figury osiowosymetryczne (s. 98)

2. a) 1 b) 1 c) 1 d) 8 **3.** a) 1 b) 2 c) 1 d) 0
5. a) 1 b) 1 c) 0 d) 1 e) 0 f) 1

7.5 Symetria względem punktu (s. 101)

1. a), c) **2.** b), d), e) **3.** a) nie b) tak c) nie
4. a) kwadraty E5 i E6 b) kwadraty A4 i B4
c) kwadraty E1, E2, F1 i F2
6. a) Okręgi są styczne zewnętrznie. b) Okręgi przecinają się. c) Okręgi są rozłączne zewnętrznie.

7.6 Figury środkowosymetryczne (s. 104)

1. a), c) **2.** a), c) **5.** SOS, OHO, SIS, ZOZ, IXI
6. a) 0 b) 1 c) 1 d) 1 **8.** a) **9.** tak

7.7 Symetria względem osi układu współrzędnych (s. 107)

1. $A' = (1, -4)$, $B' = (-3, -5)$, $C' = (0, 2)$, $D' = (-2, 2)$, $E' = (4, 0)$, $F' = (6, 3)$
2. $A' = (4, -7)$, $B' = (-5, 5)$, $C' = (0, 3)$, $D' = (3, -3)$, $E' = (6, 0)$, $F' = (-1, -2)$
3. a) K i N, L i R, M i P b) J i N, L i P, M i R
4. a) oś y b) oś y c) oś x
5. tak, $A = (-7, 3)$ i $K = (7,3)$, $B = (-2, 5)$ i $L = (2, 5)$, $C = (-1, 2)$ i $M = (1, 2)$, $D = (-4, -3)$ i $N = (4, -3)$, $E = (-4, 2)$ i $O = (4, 2)$
7. a) $A' = (-4, 0)$, $B' = \left(-1, 3\frac{1}{2}\right)$, $C' = (1, -1{,}5)$, $D' = (-2, -3)$
b) $A' = (4, 0)$, $B' = \left(1, -3\frac{1}{2}\right)$, $C' = (-1, 1{,}5)$, $D' = (2, 3)$
8. a) $|KL| = 4$ b) $|KL| = 6$
9. $A' = (-5, -3)$, $B' = (-3, -1)$, $C' = (-2, -3)$, $D' = (1, -2)$, $E' = (0, 1)$, $F' = (3, 0)$, $G' = (2, -4)$, $H' = (3, -2)$, $I' = (5, -3)$, $J' = (5, -4)$, $K' = (-5, 2)$, $L' = (-5, 3)$, $M' = (-2, 3)$, $N' = (-2, 2)$
10. $A = (-4, -2)$, $C = (4, 2)$, $D = (-4, 2)$
11. $B = (4, -1)$, $D = (-1, 2)$ $P = 15$
12. a) $a = 5$, $b = 3$ b) $a = 4$, $b = -10$ c) $a = -2$, $b = 7$ d) $a = 3$, $b = 3$
13. a) $m = 2$, $n = -6$ b) $m = 2$, $n = 10$ c) $m = -1$, $n = 5$ d) $m = 3$, $n = 1$
14. (0, 3), (–3, 0), (0, –3), lub (6, –3), (9, 0), (6, 3)

7.8 Symetria względem początku układu współrzędnych (s. 111)

1. $A' = (5, -5)$, $B' = (0, -2)$, $C' = (3, 4)$, $D' = (-6, 3)$, $E' = (-3, 0)$, $F' = (-4, -4)$, $G' = (4, -3)$, $H' = (6, 2)$
2. $A' = (-1, 4)$, $B' = (3, 5)$, $C' = (0, 1)$, $D' = (-2, 1)$, $E' = (4, 0)$, $F' = (-4, -3)$
3. B i I, C i D, F i J **4.** A i E, B i H, C i F, D i G
5. a) nie b) tak c) tak d) tak
6. $A' = (-2, 5)$, $B' = (-4, -1)$, $C' = (1, -2)$
7. $A = (-4, -3)$, $B = (4, -3)$, $C = (4, 3)$, $Obw. = 28$
8. $K = (0, -6)$, $L = (8, 0)$, $P = 96$, $Obw. = 40$
9. a) $a = 3$, $b = 2$ b) $a = -1$, $b = 3$ c) $a = 14$, $b = -8$ d) $a = 20$, $b = -2$ **10*.** $C = (0, 2)$ lub $C = (0, -6)$

Czy już umiesz? (s. 114)

1. D **2.** B **3.** A, B **4.** A, C, D **5.** A **6.** B

7. B **8.** D **9.** B **10.** C **11.** D **12.** C

17. $Obw. = 34$ cm **18.** $Obw._1 = 22$ cm, $Obw._2 = 26$ cm

19. (5, 0), (0, 12), (–5, 0), (0, –12) lub (12, 0), (0, 5), (–12, 0), (0, –5)

20. $P = 32$ cm^2, $Obw. = 24$ cm

21. $P = 20$ cm^2, $Obw. = 40$ cm **22.** (2, 0), $P = 24$

23. a) I, II, III, IV, V, VI, VII, IX, X b) I, III, V, VIII

26. a) tak b) tak

27. a) (–4, –1), (–1, –3), trapez równoramienny

b) (4, 1), (1, 3), trapez równoramienny

c) (1, –3), (4, –1), równoległobok

28. a) $E = (7, -5)$, $F = (-1, -3)$, $G = (3, 2)$

b) $E = (-7, 5)$, $F = (1, 3)$, $G = (-3, -2)$

c) $E = (-7, -5)$, $F = (1, -3)$, $G = (-3, 2)$

29. $|KL| = 10$

30* (–6, –4), (–1, –9) lub (9, 1), (4, 6), $P = 50$, $Obw. = 20\sqrt{2}$

8. Zaawansowane metody zliczania i rachunek prawdopodobieństwa

8.1 Reguła mnożenia (s. 123)

1. D **2.** B **3.** 21 **4.** rower Pawła: 24, rower Tomka: 22

5. a) 144 b) 132 **6.** a) 42 b) 210 c) 840

7. a) 306 b) 4896 c) 73 440

8. a) 256 b) 4096 c) 65 536

9. a) 210 b) 3360 b) 13 800 **10.** 10 000

11. a) 125 b) 60

8.2 Reguła dodawania (s. 130)

1. B **2.** C **3.** 69 **4.** 13 **5.** a) 43 b) 32 **6.** 590

7. a) 272 b) 280 **8.** 7590 **9.** 41

10. a) 13 b) 14 c) 14 **11*.** a) 90 b) 450 c) 540

12*. a) 225 b) 160

8.3 Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń (s. 138)

1. C **2.** A **3.** a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{9}{16}$ f) $\frac{3}{16}$ g) $\frac{3}{8}$

4. a) $\frac{4}{15}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{7}{15}$ **5.** a) $\frac{1}{30}$ b) $\frac{1}{30}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{4}$

6. a) $\frac{1}{52}$ b) $\frac{1}{169}$ c) $\frac{1}{16}$ d) $\frac{3}{52}$ **7.** a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{4}{5}$

8. a) $\frac{5}{21}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{10}{21}$ **9.** a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{18}$ c) $\frac{13}{36}$

10. a) $\frac{8}{81}$ b) $\frac{40}{81}$ c) $\frac{17}{81}$ **11.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{5}{16}$ d) $\frac{1}{8}$

12. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{6}$ **13*.** a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{25}{72}$ d) $\frac{5}{36}$ e) $\frac{13}{216}$

Czy już umiesz? (s. 141)

1. C **2.** C **3.** B **4.** B **5.** A **6.** C **7.** A **8.** B

9. C **10.** B **11.** B **12.** D **13.** a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ **14.** $\frac{3}{4}$

15. a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{7}{36}$ e) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{5}{12}$

16. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{18}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{9}$ **17.** a) 56 b) 336 c) 6720

d) 40 320 **18.** a) 306 b) 4896 c) 73 440

19. a) 6840 b) 8000 **20.** a) 10 000 b) 5040

21. a) F b) F c) P d) F **22.** 15 870

23. a) 54 b) 63 c) 378 d) 1728 e) 12 096

24*. 32 **25.** a) 342 b) 110 c) 166 d) 88

26. a) 575 b) 600 c) 1400 d) 1344 e) 1862

27. a) 1012 b) 16 560 c) 289 841 d) 217 560 e) 961

28*. 400 **29.** a) $\frac{3}{14}$ b) $\frac{15}{28}$ b) $\frac{15}{32}$

30. a) $\frac{10}{81}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{1}{9}$ **31.** a) $\frac{5}{36}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{1}{6}$

32. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{5}{18}$ e) $\frac{1}{12}$ f) $\frac{17}{36}$

Indeks

C

cięciwa **46**

D

długość okręgu **55**
dwusieczna kąta **87**

F

figury
- osiowosymetryczne **100**
- symetryczne względem osi układu współrzędnych **105**
- symetryczne względem początku układu współrzędnych **110**
- symetryczne względem prostej **90**
- symetryczne względem punktu **101**
- środkowosymetryczne **103**

K

koło **46**

L

liczba pi (π) **54**
losowanie bez zwracania **121**
losowanie ze zwracaniem **120**

Ł

łuk okręgu **62**

O

obraz figury **104**
obwód koła **55**
okrąg **46**
okręgi
- przecinające się **47**
- rozłączne **47**
- styczne **47**

oś symetrii **96**

P

pierścień kołowy **65**
pole
- koła **59**
- pierścienia kołowego **65**
- wycinka koła **62**

półkole **61**
promień okręgu (koła) **46**
punkt styczności **50**

R

reguła dodawania **125**
reguła mnożenia **121**

S

sieczna okręgu **50**
styczna do okręgu **50**
symetralna boku trójkąta **85**
symetralna odcinka **84**
symetria **90**
symetria osiowa **91**
symetria środkowa **100**
symetria w układzie współrzędnych **105**

Ś

średnica okręgu (koła) **46**
środek okręgu (koła) **46**
środek symetrii **99**

W

wycinek koła **62**



Grupa MAC S.A.
ul. Witosa 76
25-561 Kielce

www.mac.pl

ISBN 978-83-8227-132-4



indeks 881448