

Egzamin ósmoklasisty

ZGODNE
Z WYTYCZNYMI
CKE

Zadania z odpowiedziami

- teoria w skrócie
- rozwiązania krok po kroku #PlatformaOperon
- rozwiązany arkusz



REPETYTORIUM
Matematyka

REPETYTORIUM

Egzamin
ósmoklasisty

MATEMATYKA

wzory • zadania • rozwiązany arkusz

Małgorzata Pająk
Anna Konstantynowicz

Projekt okładki: Paweł Kwacz
Redaktor prowadzący: Barbara Budny
Redakcja językowa: Marlena Dobrowolska
Redakcja graficzna i skład: Maciej Laska, Danuta Jarzembek
Korekta: Marlena Dobrowolska

Zdjęcia: Shutterstock

Rysunki: Jan Kortas

© Copyright by OPERON Sp. z o.o. & Małgorzata Pająk, Anna Konstantynowicz
Gdynia 2023

Wszelkie prawa zastrzeżone. Kopiowanie w całości lub we fragmentach bez zgody wydawcy zabronione.
N8370

Wydawca:
OPERON Sp. z o.o.
81-212 Gdynia, ul. Hutnicza 3
tel. centrali 58 679 00 00
e-mail: info@operon.pl
www.operon.pl

ISBN 978-83-8197-373-1

SPIS TREŚCI

EGZAMIN ÓSMOKLASISTY

Twój pierwszy oficjalny egzamin na zakończenie szkoły podstawowej	4
Matematyka na egzaminie	6
Sprawdzone sposoby na skuteczną naukę	7

I. LICZBY

Tydzień I – 1. Działania na liczbach	8
Tydzień II – 2. Potęgi i pierwiastki	20
Tydzień III – 3. Procenty	32
Tydzień IV – 4. Oś liczbowa i układ współrzędnych	44
Tydzień V – 5. Statystyka	57
Tydzień VI – 6. Zadania egzaminacyjne – Testy	72

II. ALGEBRA

Tydzień VII – 1. Wyrażenia algebraiczne	76
Tydzień VIII – 2. Równania	88
Tydzień IX – 3. Zadania egzaminacyjne – Testy	100

III. GEOMETRIA

Tydzień X – 1. Kąty i trójkąty	104
Tydzień XI – 2. Czworokąty	118
Tydzień XII – 3. Twierdzenie Pitagorasa	131
Tydzień XIII – 4. Wielokąty, koła i okręgi	142
Tydzień XIV – 5. Graniastosłupy	156
Tydzień XV – 6. Ostrosłupy	168
Tydzień XVI – 7. Zadania egzaminacyjne – Testy	180

IV. OBLICZENIA PRAKTYCZNE

Tydzień XVII – 1. Obliczenia zegarowe i kalendarzowe	185
Tydzień XVIII – 2. W sklepie i w banku	195
Tydzień XIX – 3. Droga, prędkość, czas, skala	204
Tydzień XX – 4. Kombinatoryka i prawdopodobieństwo	215
Tydzień XXI – 5. Wykaż i udowodnij	225
Tydzień XXII – 6. Zadania egzaminacyjne – Testy	236

V. PRZYKŁADOWE ARKUSZE EGZAMINACYJNE

Arkusz I	241
Arkusz II	249
Arkusz III	257
Odpowiedzi i wskazówki	265

Uwaga! Pełne odpowiedzi do wszystkich zadań wraz z etapami dochodzenia do wyniku na www.platforma.operon.pl

EGZAMIN ÓSMOKLASISTY

TWÓJ PIERWSZY OFICJALNY EGZAMIN NA ZAKOŃCZENIE SZKOŁY PODSTAWOWEJ

- obowiązuje wszystkich uczniów
- ma formę pisemną
- nie ma wpływu na ukończenie szkoły
- wynik to punkty zdobyte z danego przedmiotu przeliczone na procenty
- wynik ma znaczenie przy wyborze szkoły średniej

■ TERMIN I PRZEBIEG EGZAMINU



zwykle II połowa kwietnia



Dokładna data jest podawana
1 września na **www.cke.gov.pl**



język polski



matematyka



język obcy



dotychczas 120 minut



długopis



legitymacja szkolna



dotychczas 100 minut



długopis



linijka



legitymacja szkolna



dotychczas 90 minut



długopis



legitymacja szkolna

PRZEDMIOT DODATKOWY (PLANOWANY W PRZYSZŁOŚCI)



biologia



chemia



fizyka



geografia



historia

Dodatkowy czas na sprawdzenie arkusza

- na każdym przedmiocie masz dodatkowe 5 minut na sprawdzenie poprawności przeniesienia odpowiedzi na kartę odpowiedzi



Zakaz wnoszenia na egzamin

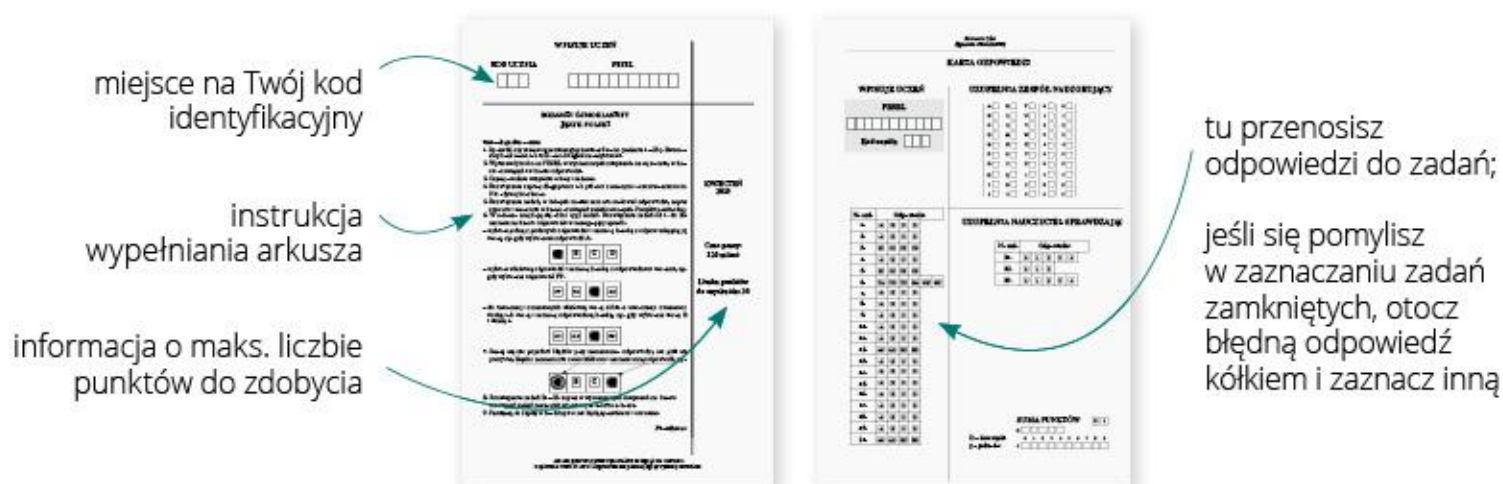
- kalkulatora
- słownika
- odtwarzacza mp3
- smartwatcha
- telefonu



ARKUSZ EGZAMINACYJNY – W NIM ROZWIĄZUJESZ ZADANIA

Na egzaminie z każdego przedmiotu otrzymasz do rozwiązania arkusz egzaminacyjny, a także kartę odpowiedzi. Na niej umieszczasz odpowiedzi do zadań. Arkusz:

- ma wielkość broszury w formacie A4
- może zawierać nawet 20 stron, w tym **brudnopis**
- jest czarno-biały



■ RODZAJE ZADAŃ W ARKUSZU

Arkusze z każdego przedmiotu będzie zawierać różnorodne zadania. Łączna liczba wszystkich zadań do rozwiązania zależy od przedmiotu.

JĘZYK POLSKI 17–20 zadań	MATEMATYKA 19–23 zadania	JĘZYK OBCY 45–55 zadań
------------------------------------	------------------------------------	----------------------------------

Zadania zamknięte – wybierasz jedną odpowiedź z kilku podanych.

- wielokrotnego wyboru

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 2 cm C. 5 cm
B. 4 cm D. 8 cm

- typu prawda-fałsz

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.
Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe,
albo F – jeśli jest fałszywe.

W utworze przedstawiona jest refleksja na temat natury ludzkiej.	P	F
Z utworu wynika, że ludzie nie mają wpływu na decyzje innych.	P	F

- na dobieranie

Wybierz odpowiedź T lub N i jej uzasadnienie spośród A lub B.

T	Tak,	ponieważ	A.	Każdy z wykładników jest liczbą nieparzystą.
N	Nie,		B.	Wykładnik potęgi 2^6 nie jest podzielny przez 8.
			C.	Wartość tego wyrażenia można zapisać w postaci $8 \cdot 23$.

Zadania otwarte – musisz samodzielnie sformułować wypowiedź, nie masz odpowiedzi do wyboru.

- z luką

Podaj autora i tytuł utworu, z którego pochodzi powyższy fragment.

Autor: _____

Tytuł:

- krótkiej lub rozszerzonej odpowiedzi

Jakie pole ma część paska wskazana na rysunku? Zapisz obliczenia.

A blank coordinate plane grid. The horizontal x-axis is labeled with values from -50 to 50 in increments of 10. The vertical y-axis is labeled with values from -10 to 10 in increments of 2. The grid consists of 10 columns and 10 rows of squares.

Arkusz nie jest podzielony na części. Może mieć maksymalnie 23 zadania. Jako pierwsze zamieszczone są zadania zamknięte (14–16 zadań). Po nich umieszczone są zadania otwarte (5–7 zadań).

Zadania zamknięte

- każde dobrze rozwiązane **zadanie zamknięte to 1 pkt**
- jeśli dobrze rozwiążesz **wszystkie zadania zamknięte**, masz już ok. 50% punktów z egzaminu z matematyki

Zadania otwarte

- są punktowane **wyżej** od zamkniętych
- w zależności od zadania **możesz dostać od 2 do 4 pkt** za poprawną odpowiedź
- jeśli dobrze rozwiążesz **wszystkie zadania otwarte**, masz kolejne 50% punktów z egzaminu z matematyki

Nawet jeśli pomylisz się w obliczeniach, **masz szansę na otrzymanie części punktów za zadanie**. Wystarczy, że Twoje obliczenia pokazują, że droga do uzyskania wyniku była prawidłowa.

■ EGZAMIN Z MATEMATYKI – DOBRZE ZAPLANUJ 100 MINUT

Przygotowanie

- Pamiętaj, że **wiesz i umiesz dużo** – masz za sobą powtórki i wiele rozwiązanych zadań.
- Spokojnie przeczytaj pierwszą stronę arkusza egzaminacyjnego i instrukcje.

Najpierw zadania zamknięte

- Rozwiązuj je **po kolei**. Jeśli nie umiesz rozwiązać danego zadania, przejdź do następnego. Do nierozwiązanego wrócisz na koniec.
- Dokładnie przeczytaj polecenie i wszystkie warunki, jakie musi spełnić odpowiedź.
- Jeśli nie znasz odpowiedzi na zadanie zamknięte – zaznacz najbardziej prawdopodobną.

Rozwiąż zadania otwarte

- Przy konkretnym zadaniu **przypomnij sobie podobne**, rozwiązywane podczas powtórek. Wykonaj zadanie z arkusza według tamtego schematu.
- Jeśli uważasz, że do wykonania zadania potrzeba niestandardowej metody – zastosuj ją.
- Jeśli ułatwi Ci to pracę – wykonuj rysunki pomocnicze.
- Pamiętaj, że etapy rozwiązywania zadania są także punktowane.
- Jeśli jedna metoda rozwiązania się nie sprawdzi i masz jeszcze czas – spróbuj drugiej.
- Pisz czytelnie, dobrze zaplanuj miejsce na odpowiedź.

Ostatnie minuty

- Jeszcze raz przeczytaj **wszystkie polecenia** i sprawdź, czy Twoje obliczenia uwzględniają wszystkie dane z zadania.
- Sprawdź, czy na karcie odpowiedzi rozwiązania są dobrze zaznaczone.

SPRAWDZONE SPOSOBY NA SKUTECZNĄ NAUKĘ

Czy wiesz, że najszybciej zapamiętujesz, jeśli uczysz się aktywnie? Przyswajasz zaledwie 10% tego, co czytasz, ale aż 90% tego, co mówisz i robisz! Podczas nauki matematyki angażuj więc całe ciało.



OBSERWUJ

- analizuj tworzenie wypowiedzi krok po kroku
- czytaj lektury



SŁUCHAJ

- słuchaj wyjaśnień nauczyciela



MÓW

- powtarzaj najważniejsze informacje na głos
- opowiadaj treść lektur komuś lub sobie



NOTUJ

- trenuj pisanie wypracowań
- rób odręczne notatki
- twórz mapy myśli

■ TWÓJ PLAN NAUKI DO EGZAMINU

Powtórz niezbędne wiadomości.

Poćwicz na przykładach i rozwiąż zadania

Zdaj egzamin ósmoklasisty

START

wrzesień

październik

START

listopad

grudzień

styczeń

START

luty

marzec

kwiecień

EGZAMIN

Powtarzaj działy po kolei. Przeczytaj niezbędne reguły. Przeanalizuj zadania krok po kroku, rozwiąż podobne. Rozwiąż serię zadań do działu. Od ferii rozwiązuj arkusze. Staraj się zmieścić w 100 min.

Zacznij od działów, które są dla Ciebie najtrudniejsze – powtórz wzory i rozwiąż zadania krok po kroku do tych działów. Potem rozwiąż test podsumowujący dział. Od lutego rozwiązuj arkusze.

Rozpocznij od zadań na koniec każdego działu i arkuszy egzaminacyjnych. Sprawdź, które działy i zadania wyszły najłatwiej. Powtórz wzory i reguły z tego działu. Przeanalizuj zadania krok po kroku. Wróć do arkuszy.

■ W WOLNEJ CHWILI

ĆWICZ KONCENTRACJĘ I TRENUJ PAMIĘĆ

○ „Zobacz to”, czyli wizualizacja

Usiądź wygodnie. Zamknij oczy. Oddychaj głęboko. Wyobraź sobie siebie na plaży. Zastanów się, jak ona wygląda, jaka jest pogoda i jakie słyszysz dźwięki. Możesz nawet dotknąć piasku! Pozostań z tym obrazem przez chwilę. Powoli otwórz oczy.

○ Policz w myślach od 100 do 1.

Jeśli przyszło Ci to z łatwością, spróbuj policzyć od 100 do 1, ale co 3 liczby: 100, 97, 94 itp.

○ Skojarzenia

Wypisz 5 numerów telefonów swoich znajomych i spróbuj je zapamiętać metodą skojarzeń. Podziel je na części i połącz w myśli z konkretnymi przedmiotami lub faktami, np. 66 – wiek dziadka, 37 – wiek mamy; 15 – numer domu, 007 – James Bond.

○ „W dwuszeregu zbiórka”

Weź kartkę. Napisz na niej 10 dowolnych liter ale tak, by nie tworzyły wyrazu. Zapamiętaj je: przez 2-3 minuty powtarzaj na głos i układaj kolejność w pamięci. Zagnij kartkę, zakrywając napisane litery. Teraz spróbuj je odtworzyć. Odegnij kartkę i sprawdź, czy wszystko się zgadza. Kolejnym razem spróbuj z 20 literami lub kształtami.

TEORIA

■ Zbiory liczbowe

Liczby naturalne: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...

Liczby całkowite: 0, 1, 2, 3, ... oraz $-1, -2, -3, \dots$

Liczby wymierne: liczby, które można zapisać w postaci ułamka zwykłego, np. $-7, -2\frac{3}{7}, -0,25, 0, \frac{1}{3}, 1,43, 12\frac{6}{11}$

Liczby niewymierne: liczby, których nie można zapisać w postaci ułamka zwykłego, np.: $\sqrt{2}, -\sqrt[3]{11}, \pi$

■ Cechy podzielności liczb

Liczba naturalna
dzieli się przez:

- 10** gdy cyfrą jedności tej liczby jest **0**, np. 45 230
- 2** gdy cyfrą jedności tej liczby jest: **0, 2, 4, 6** lub **8**, np. 976, 10 458
- 5** gdy cyfrą jedności tej liczby jest **0** lub **5**, np. 3645, 48 610
- 4** jeśli jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez **4**, np. 73 048
- 3** gdy suma cyfr jest liczbą podzielną przez **3**, np. 45 762
- 9** gdy suma cyfr jest liczbą podzielną przez **9**, np. 123 102

■ Liczby pierwsze i liczby złożone

Liczba pierwsza	Liczba złożona
Jest to liczba naturalna dodatnia, która dzieli się tylko przez 1 i samą siebie. Początkowe liczby pierwsze: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...	To liczba naturalna większa od 1, która ma więcej niż dwa dzielniki, np. 4, 32.

■ Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność

Największy wspólny dzielnik	Najmniejsza wspólna wielokrotność
Każda para liczb ma największy wspólny dzielnik, czyli największą liczbę, która jest jednocześnie dzielnikiem obu liczb. PRZYKŁAD: NWD (12, 18) = 6	Każda para liczb ma najmniejszą wspólną wielokrotność, czyli liczbę, która dzieli się przez jedną oraz drugą liczbę bez reszty. PRZYKŁAD: NWW (12, 18) = 36

Liczby w systemie rzymskim

I – 1 V – 5 X – 10 L – 50 C – 100 D – 500 M – 1000

PRZYKŁADY: CCLI = 251 CMXLVII = 947

Ułamki zwykłe

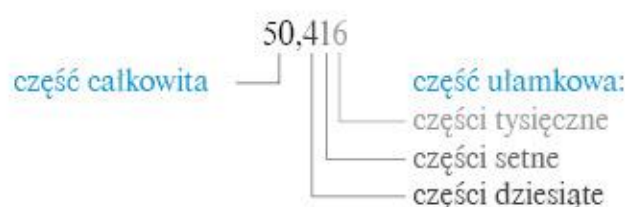


Działania na ułamkach zwykłych

Dodawanie	$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$	Dodając lub odejmując ułamki zwykłe, sprowadzamy je do wspólnego mianownika, następnie wykonujemy działania na licznikach, a mianownik pozostawiamy bez zmian.
Odejmowanie	$\frac{7}{12} - \frac{4}{9} = \frac{21}{36} - \frac{16}{36} = \frac{5}{36}$	
Mnożenie	$2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{5} = \frac{7}{3} \cdot \frac{6^2}{5} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$	Gdy to możliwe, skracamy ułamki zwykłe, następnie wykonujemy mnożenie na liczniku i mianowniku.
Dzielenie	$\frac{3}{5} : \frac{9}{25} = \frac{3^1}{5^1} \cdot \frac{25^5}{9^3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$	Aby podzielić ułamek, mnożymy dzielną przez odwrotność dzielnika.

Ułamki dziesiętne

W ułamkach dziesiętnych wyróżniamy część całkowitą i część ułamkową.



■ Działania na ułamkach dziesiętnych

Dodawanie	$\begin{array}{r} 0,20 \\ + 0,37 \\ \hline 0,57 \end{array}$ uzupełniamy zerem	Aby dodać lub odjąć ułamki dziesiętne sposobem pisemnym, należy zapisać je w taki sposób, aby przecinki oddzielające część całkowitą od części ułamkowej znajdowały się jeden nad drugim, a następnie wykonać działanie.
Odejmowanie	$\begin{array}{r} 311,910 \\ - 41,200 \\ \hline 270,710 \end{array}$ uzupełniamy zerami	
Mnożenie	$\begin{array}{r} 7,42 \\ \cdot 4,5 \\ \hline 3710 \\ + 2968 \\ \hline 33,390 \end{array}$ ← dwa miejsca po przecinku ← jedno miejsce po przecinku ← trzy miejsca po przecinku	Mnożąc dwa ułamki dziesiętne sposobem pisemnym, zapisujemy je w taki sposób, by ostatnie cyfry znalazły się jedna pod drugą. W liczbie otrzymanej po wykonaniu mnożenia wstawiamy przecinek w takim miejscu, aby znajdowało się po nim tyle cyfr, ile było ich łącznie w czynnikach iloczynu.
Dzielenie	$\begin{array}{r} 3,2 \\ 102,4 : 32 \\ - 96 \\ \hline 64 \\ - 64 \\ \hline 0 \end{array}$	Gdy dzielimy ułamki dziesiętne, należy w dzielnej i dzielniku przesunąć przecinek w prawo o tyle miejsc, aby dzielnik był liczbą całkowitą.

■ Zamiana ułamków zwykłych na dziesiętne i dziesiętnych na zwykłe

ułamek zwykły → ułamek dziesiętny	ułamek dziesiętny → ułamek zwykły
$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10} = 0,6$ – rozszerzamy mianownik do 10, 100, 1000, ... lub $\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0,625$ – dzielimy licznik przez mianownik	$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ zapisujemy ułamek dziesiętny w postaci ułamka o mianowniku 10, 100, 1000, ..., a następnie przedstawiamy go w postaci nieskracalnej

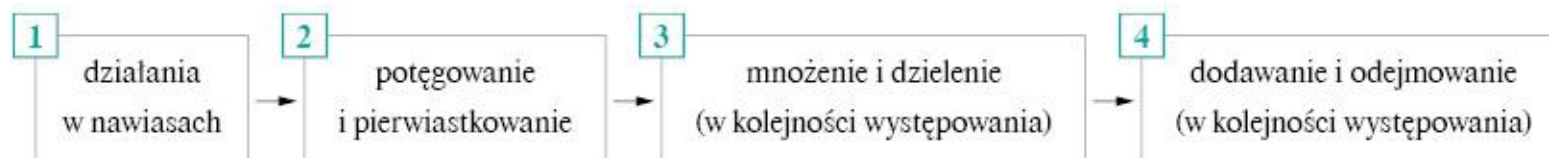
Ułamek zwykły, którego nie da się rozszerzyć do ułamka o mianowniku 10, 100, 1000, ..., ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe: $\frac{4}{9} = 4 : 9 = 0,444... = 0,(4)$.

■ Działania na liczbach całkowitych

Dodawanie i odejmowanie	$2 + 5 = 7$	Suma dwóch liczb dodatnich jest liczbą dodatnią, a suma dwóch liczb ujemnych jest liczbą ujemną.
	$(-2) + (-5) = -7$	
	$(-2) + 5 = 3$	Suma dwóch liczb o różnych znakach może być liczbą dodatnią albo liczbą ujemną.
	$2 + (-5) = -3$	
	$(-2) + 2 = 0$	Suma dwóch liczb przeciwnych jest równa 0.
Iloczyn	Każde odejmowanie liczby można zastąpić dodawaniem liczby do niej przeciwnej, np.: $(-2) - 5 = (-2) + (-5) = -7$	
	$3 \cdot 4 = 12$	Iloczyn dwóch liczb o takich samych znakach jest liczbą dodatnią.
	$(-3) \cdot (-4) = 12$	
	$3 \cdot (-4) = -12$	Iloczyn dwóch liczb o różnych znakach jest liczbą ujemną.

Iloraz	$8 : 2 = 4$ $(-8) : (-2) = 4$	iloraz dwóch liczb o takich samych znakach jest liczbą dodatnią.
	$(-8) : 2 = -4$ $8 : (-2) = -4$	iloraz dwóch liczb o różnych znakach jest liczbą ujemną.

■ Wyrażenia arytmetyczne – kolejność wykonywania działań



PRZYKŁAD: $\frac{2}{3} \cdot (2^3 - 15 : (\sqrt{4} + 1)) = \frac{2}{3} \cdot (8 - 15 : (2 + 1)) = \frac{2}{3} \cdot (8 - 15 : 3) = \frac{2}{3} \cdot (8 - 5) = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$

Jeżeli w wyrażeniu występuje tylko dodawanie i odejmowanie albo tylko mnożenie i dzielenie, to wykonujemy je w kolejności ich występowania od lewej do prawej.

Zastępując znak dzielenia kreską ułamkową, traktujemy wyrażenia w liczniku i mianowniku tak, jakby były ujęte w nawiasy.

PRZYKŁADY: $7 - 2 + 8 - 11 = 5 + 8 - 11 = 13 - 11 = 2$
 $10 : 2 \cdot 3 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$

PRZYKŁADY: $(7 \cdot 2 + 1) : (6 - 4) = \frac{7 \cdot 2 + 1}{6 - 4} = \frac{15}{2} = 7,5$

■ Zaokrąglanie liczb

Zaokrąglenie w dół	Zaokrąglenie w górę
$136, \underline{4}87 \approx 136$ Jeśli pierwsza odrzucona cyfra to: 0, 1, 2, 3 lub 4, to nie zmieniamy ostatniej pozostawionej cyfry.	$136, \underline{4}87 \approx 136,5$ Jeśli pierwsza odrzucona cyfra to: 5, 6, 7, 8 lub 9, to zwiększamy o 1 ostatnią pozostawioną cyfrę.

■ Wartość bezwzględna liczby

$ 7 = 7$	$ 0 = 0$	$ -3 = 3$
Wartość bezwzględna z liczby dodatniej to ta sama liczba dodatnia.		Wartość bezwzględna z liczby ujemnej to liczba do niej przeciwna.

■ Liczby przeciwne i liczby odwrotne

Liczba przeciwna do a	$-a$	$-6,2 \Rightarrow 6,2$ mają taką samą wartość bezwzględną $ -6,2 = 6,2$ i $ 6,2 = 6,2$
Liczba odwrotna do a	$\frac{1}{a}$	$2\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{9} = 1$ iloczyn obu tych liczb jest równy 1

Przykład 4.

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczby 2, 15, 3, 684, 0 są liczbami naturalnymi.	P	F
Liczby $8, 1\frac{3}{4}, -3, 27, -1,2$ są liczbami całkowitymi.	P	F
Liczby -6 i 6 to liczby przeciwne.	P	F
Liczbą odwrotną do liczby $2,5$ jest liczba $0,4$.	P	F

Rozwiązanie:

Liczby 2, 15, 3, 684, 0 są liczbami naturalnymi.

Liczby $1\frac{3}{4}$ i $-1,2$ nie są liczbami całkowitymi.

Liczby -6 i 6 to liczby przeciwne.

Liczbą odwrotną do liczby 2,5 jest liczba 0,4, ponieważ $2,5 = \frac{5}{2}$, zaś $0,4 = \frac{2}{5}$.

Odpowiedź: PFPP

Ćwiczenie do przykładu 4.

Rozwiąż samodzielnie

Kasia napisała na tablicy liczby: $-\frac{27}{9}$; $15,2$; $\frac{196}{14}$; 0 ; $\frac{1}{8}$; $2,(3)$; $-\frac{49}{6}$; $4\frac{3}{4}$; -2 .

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Największą wypisaną liczbą naturalną jest liczba $\frac{196}{14}$.	P	F
Wśród wypisanych liczb najmniejszą liczbą całkowitą jest liczba -2 .	P	F
Wśród wypisanych przez Kasię liczb, tylko liczby $15, 2, \frac{1}{8}, 2, (3), 4\frac{3}{4}$ są liczbami nieujemnymi.	P	F
Liczba 0 nie jest liczbą ani dodatnią, ani ujemną.	P	F

Przykład 5.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Liczbę MCDLXXVI zapisaną w systemie rzymskim odczytamy w systemie dziesiątkowym jako

D. 1466

Rozwiązanie:

Liczbę MCDLXXVI zapisujemy w systemie dziesiętkowym:

$$\text{MCDLXXVI} = 1000 + (500 - 100) + 50 + 10 + 10 + 5 + 1 = 1476$$

Odpowiedź: B

Ćwiczenie do przykładu 5.

Rozwiąż samodzielnie

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Grecki matematyk i filozof Pitagoras urodził się ok. roku DLXXII p.n.e., a zmarł ok. roku CDXCVII p.n.e. żył

- A. ok. 75 lat B. ok. 105 lat C. ok. 90 lat D. ok. 60 lat

Przykład 6.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba 3 nie jest wynikiem działania

- A. $1\frac{1}{4}:2,4$ B. $2\frac{4}{7}:1\frac{1}{6}$ C. $6\frac{1}{3}:2\frac{1}{9}$ D. $1\frac{1}{5}:3,6$

Rozwiązanie:

Obliczamy wartości wyrażeń:

A. $1\frac{1}{4} \cdot 2,4 = \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{4}_1} \cdot \frac{\cancel{12}^3}{\cancel{5}_1} = 3$

$$\text{B. } 2\frac{4}{7} \cdot 1\frac{1}{6} = \frac{18}{7} \cdot \frac{7}{6} = 3$$

C. $6\frac{1}{3} : 2\frac{1}{9} = \frac{\cancel{10}^1}{\cancel{3}^1} \cdot \frac{\cancel{9}^3}{\cancel{10}^1} = 3$

D. $1\frac{1}{5}:3,6 = \frac{\cancel{6}^1}{\cancel{5}_1} \cdot \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{18}^3} = \frac{1}{3}$

Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 6.

Rozwiąż samodzielnie

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $11,2 : 3,5$ nie jest równa wartości wyrażenia

- A. $160 \cdot 0,02$ B. $0,8 \cdot \frac{2}{5}$ C. $4 : 1\frac{1}{4}$ D. $3,52 : 1,1$

Przykład 7.

Pani Wanda rozdzieliła po równo między swoje koleżanki 36 sadzonek pomidorów, 24 sadzonki papryki i 48 sadzonek sałaty.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pani Wanda mogła obdzielić sadzonkami co najwyżej

- A. 6 koleżanek B. 24 koleżanki C. 18 koleżanek D. 12 koleżanek

Rozwiązanie:

Rozkładamy liczby na czynniki pierwsze:

$$\begin{array}{r|l} 36 & \underline{2} \\ 18 & \underline{2} \\ 9 & \underline{3} \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 24 & \underline{2} \\ 12 & \underline{2} \\ 6 & 2 \\ 3 & \underline{3} \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 48 & \underline{2} \\ 24 & \underline{2} \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & \underline{3} \\ 1 & \end{array}$$

Obliczamy największy wspólny dzielnik liczb 36, 24 i 48:

$$\text{NWD}(36, 24, 48) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 7.

Rozwiąż samodzielnie

Agata gra w tenisa ziemnego co 3 dni, a Ula – co 4 dni. W środę przyszły na trening jednocześnie.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Aqata i Ula spotkają się znów na treningu za

- A. 4 dni w sobotę B. 6 dni we wtorek C. 12 dni w poniedziałek D. 8 dni w środę

Przykład 8.

Zapisz polecenie w postaci wyrażenia arytmetycznego, a następnie oblicz jego wartość.

- a) Od sumy liczb $5\frac{1}{3}$ i $-1,8$ odejmij liczbę $1\frac{2}{15}$.

- b) Do iloczynu liczb $-\frac{4}{9}$ i $1\frac{1}{8}$ dodaj liczbę 10.

- c) Od różnicy liczb $0,5$ i $\frac{1}{6}$ odejmij iloraz tych liczb.

Rozwiązanie:

Zapisujemy polecenia w postaci wyrażeń arytmetycznych, a następnie obliczamy ich wartości:

$$\text{a) } \left(5\frac{1}{3} + (-18) \right) - 1\frac{2}{15} = 5\frac{5}{15} - 1\frac{12}{15} - 1\frac{2}{15} = 2\frac{6}{15} = 2\frac{2}{5}$$

$$\text{b) } -\frac{4}{9} \cdot 1\frac{1}{8} + 10 = -\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{8} + 10 = 9\frac{1}{2}$$

$$c) \left(0,5 - \frac{1}{6}\right) - 0,5 : \frac{1}{6} = \left(\frac{3}{6} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{1}{3} - 3 = -2\frac{2}{3}$$

Odpowiedź: a) $2\frac{2}{5}$, b) $9\frac{1}{2}$, c) $-2\frac{2}{3}$

Ćwiczenie do przykładu 8.

Rozwiąż samodzielnie

Zapisz polecenie w postaci wyrażenia arytmetycznego, a następnie oblicz:

- a) sumę liczb -27 i 23 , b) różnicę liczb 18 i -5 , c) iloczyn liczb $-2\frac{1}{8}$ i 24 , d) iloraz liczb $\frac{7}{8}$ i $-3,5$.

Przykład 9.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba o 1 mniejsza od wartości wyrażenia $\left(3\frac{4}{9} - 4\frac{5}{6}\right) \cdot |-3,6|$ wynosi:

- A. -4 B. 6 C. -6 D. 4

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość wyrażenia:

$$\left(3\frac{4}{9}-4\frac{5}{6}\right)\cdot|-3,6|=\left(3\frac{4}{9}-4\frac{5}{6}\right)\cdot3,6=\left(3\frac{8}{18}-4\frac{15}{18}\right)\cdot\frac{18}{5}=-\frac{25}{18}\cdot\frac{18}{5}=-5$$

Obliczamy liczbę o 1 mniejszą od wartości wyrażenia: $-5 - 1 = -6$

Odpowiedź: C

Ćwiczenie do przykładu 9.

Rozwiąż samodzielnie

Dane są liczby: $a = -3 + \left(-1\frac{1}{3} + 2 \cdot 1\frac{1}{5}\right)$ oraz $b = \left(\frac{1}{5} - (-0,3)\right) \cdot \left(-2\frac{1}{4} - (-3,25)\right)$.

O ile liczba b jest większa od liczby a ?

ZADANIA

10. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kwota 9,56 zł w zaokrągleniu do pełnych złotych to

- A. 10 zł B. 9,50 zł C. 9,60 zł D. 9 zł

11. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Śliwki o masie 1,6 kg podczas suszenia straciły $\frac{11}{20}$ swojej masy. Po suszeniu śliwki te ważą

- A. 72 dag B. 88 dag C. 1,2 kg D. 1,3 kg

12. Zeszyt i książka kosztują 36,40 zł.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Książka, która jest sześć razy droższa od zeszytu, kosztuje A/B.

- A. 5,20 zł B. 31,20 zł

Za 4 takie zeszyty i 2 takie książki zapłacimy C/D.

- C. 135,20 zł D. 83,20 zł

13. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zaokrąglając ułamek 14,6(92) do części tysięcznych, otrzymamy

- A. 14,69 B. 14,692 C. 14,693 D. 14,6929

14. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba dodatnia to wynik działania

- A. $-4,5 - (-2,15)$ B. $-6,23 - 4,32$ C. $-8,1 - (-9,4)$ D. $7,26 - 7,62$

15. Dane są liczby: $-0,2$; $-(-0,00005)$; $-0,0007$; $-0,009$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Najmniejszą spośród tych liczb jest liczba A/B.

- A. $-0,2$ B. $-0,0007$

Różnica między największą a najmniejszą spośród tych liczb wynosi C/D.

- C. 0,20005 D. 2,0007

16. Natalia kupiła 85 dag orzechów włoskich po 48 zł za 1 kg, a Karolina kupiła 1,2 kg orzechów laskowych po 35 zł za 1 kg.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Karolina zapłaciła za orzechy o 1,20 zł więcej od Natalii.	P	F
0,3 kg orzechów włoskich kosztuje tyle samo, co 40 dag orzechów laskowych.	P	F

17. O godzinie 5.00 temperatura powietrza wynosiła -6°C , a średnia arytmetyczna temperatur powietrza odczytanych o godzinie 10.00 i 15.00 była równa 6°C .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Średnia arytmetyczna temperatur odczytanych o godzinie 5.00, 10.00 oraz 15.00 wynosiła

- A. 6°C B. 0°C C. 4°C D. 2°C

18. Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczba 537 jest podzielna przez 2, bo w rzędzie jedności ma cyfrę podzielną przez 2.	P	F
Liczba 67 803 jest wielokrotnością liczby 3, bo suma jej cyfr jest podzielna przez 3.	P	F
Liczba 401 280 nie jest podzielna przez 4, bo jej dwie ostatnie cyfry nie tworzą liczby podzielnej przez 4.	P	F
Liczba 39 285 jest wielokrotnością liczby 5, bo w rzędzie jedności ma cyfrę podzielną przez 5.	P	F

19. Czy liczba 10 101 jest liczbą pierwszą? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	w rzędzie jedności ma cyfrę 1.
N		B.	ma dokładnie dwa dzielniki (liczbę 1 i samą siebie).
		C.	ma więcej niż dwa dzielniki (oprócz liczby 1 i samej siebie, dzieli ją liczba 3).

20. Działkę o powierzchni 12 a obsadzono iglakami, krzewami ozdobnymi, a resztę obsiano trawą. Iglaki zajęły 0,35 powierzchni działki, a krzewy ozdobne zajęły $\frac{1}{3}$ powierzchni.

Ile metrów kwadratowych działki obsiano trawą?

21. Oblicz odwrotność liczby $a = \left| 2\frac{1}{2} - 1,4 \right| - 2\frac{2}{7}$.

22. Kinga kupiła trzy czwarte kilograma winogron po 8,80 zł za kilogram, pół kilograma cytryn po 4,30 zł za kilogram i półtora kilograma mandarynek po 5,40 zł za kilogram.

Oblicz, ile reszty otrzyma, płacąc banknotem pięćdziesięciotowym.

23. Dane są liczby: $a = -\frac{2+3\frac{1}{2}}{2+(-3)}$ oraz $b = 2,1 \cdot (6 - (-1))$.

Ile razy liczba b jest mniejsza od liczby a ?

24. Paweł napisał 320 wyrazów w 4 minuty, a Piotr – 492 wyrazów w ciągu 6 minut.

Który z nich, pisząc w swoim tempie, zanotuje więcej wyrazów w ciągu kwadransa i o ile?

25. Spośród liczb: $-\frac{5}{6}, -\frac{5}{8}, -\frac{5}{12}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$ wybierz te, które są większe od liczby $-\frac{3}{4}$ i jednocześnie mniejsze od liczby $-\frac{7}{12}$.

26. Zapisz podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$$a = |7 - 15|, b = |7| - |15|, c = -|-12| - |8|, d = |12| + |-8|, e = |5| - |-5|$$

27. Samochód zużywa 7,3 litra benzyny na 100 km.

Ile litrów benzyny potrzeba na przebycie drogi z Wrocławia do Gdańska liczącej 550 km? Jaki będzie koszt tego paliwa, jeżeli litr benzyny kosztuje 4,98 zł?

TEORIA

■ Potęga o podstawie a i wykładniku n

a^n
 ← wykładnik potęgi
 ← podstawa potęgi

$$a^0 = 1 \text{ dla } a \neq 0$$

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a \cdot a$$

...

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

dla dowolnej liczby a i liczby naturalnej $n > 1$

PRZYKŁADY:

$$\left(2\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} = 5\frac{1}{16}$$

$$(-16,301)^0 = 1$$

$$\frac{-2^2}{(-3)^3} = \frac{-2 \cdot 2}{-3 \cdot (-3) \cdot (-3)} = \frac{4}{27}$$

■ Działania na potęgach

Dla dowolnych liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dla liczb naturalnych n i m

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

PRZYKŁAD: $(-3)^6 \cdot (-3) \cdot (-3)^4 = (-3)^{11}$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \text{ gdy } n \geq m$$

PRZYKŁAD: $\frac{(17)^8}{(17)^5} = (17)^3$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

PRZYKŁAD: $(2^4)^5 = 2^{20}$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

PRZYKŁAD: $\left(1\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5 = \left(\frac{7}{4} \cdot \frac{2}{7}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

PRZYKŁAD: $(7,7)^{11} : (0,77)^{11} = \left(\frac{7,7}{0,77}\right)^{11} = 10^{11}$

■ Określanie znaku potęg o wykładniku naturalnym

Dla $a \neq 0$ i n – liczba naturalna

• gdy $a > 0$, to $a^n > 0$

PRZYKŁAD: $(0,3)^{12} > 0$

• gdy $a < 0$ i n – liczba parzysta, to $a^n > 0$

PRZYKŁAD: $(-5)^{12} > 0$, $(-4)^0 > 0$

• gdy $a < 0$ i n – liczba nieparzysta, to $a^n < 0$

PRZYKŁAD: $(-6)^7 < 0$, $(-3,4)^1 < 0$

■ Notacja wykładnicza

Notacja wykładnicza liczby dodatniej – zapis liczby $a \cdot 10^k$, gdzie k jest liczbą całkowitą oraz liczba a spełnia warunek $1 \leq a < 10$.

PRZYKŁADY: $37\,000\,000 = 3,7 \cdot 10^7$

$$102 \cdot 10^{-5} = 0,0000102$$

Działania na liczbach w notacji wykładniczej

Dodawanie	$(3,6 \cdot 10^7) + (3 \cdot 10^6) = 3,6 \cdot 10^7 + 0,3 \cdot 10^7 = (3,6 + 0,3) \cdot 10^7 = 3,9 \cdot 10^7$
Odejmowanie	$(4,2 \cdot 10^5) - (3,8 \cdot 10^5) = (4,2 - 3,8) \cdot 10^5 = 0,4 \cdot 10^5 = 4 \cdot 10^4$
Mnożenie	$(2,5 \cdot 10^6) \cdot (12 \cdot 10^4) = (2,5 \cdot 12) \cdot (10^6 \cdot 10^4) = 3 \cdot 10^{10}$
Dzielenie	$\frac{4,5 \cdot 10^8}{15 \cdot 10^4} = \frac{4,5}{15} \cdot \frac{10^8}{10^4} = 3 \cdot 10^4$
Potęgowanie	$(11 \cdot 10^3)^2 = (11)^2 \cdot (10^3)^2 = 121 \cdot 10^6$

Pierwiastek kwadratowy i sześcienny

Pierwiastek kwadratowy	Pierwiastek sześcienny
Pierwiastkiem kwadratowym (drugiego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy taką nieujemną liczbę b , dla której $b^2 = a$.	Pierwiastkiem sześciennym (trzeciego stopnia) z liczby a nazywamy taką liczbę b , dla której $b^3 = a$.
$\sqrt{a} = b$	$\sqrt[3]{a} = b$
dla dowolnej liczby a : $(\sqrt{a})^2 = a$ oraz $\sqrt{a^2} = a $	dla dowolnej liczby a : $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ oraz $\sqrt[3]{a^3} = a$
PRZYKŁADY: $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1,5$, $(\sqrt{123})^2 = 123$, $\sqrt{(3,4)^2} = 3,4 = 3,4$, $\sqrt{(-2,1)^2} = -2,1 = 2,1$	PRZYKŁADY: $\sqrt[3]{0} = 0$, $\sqrt[3]{-1} = -1$, $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}} = -\frac{3}{4}$, $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$, $\sqrt[3]{(-14)^3} = -14$

Szacowanie wartości pierwiastków

Z niektórych liczb nie można obliczyć pierwiastków, np. $\sqrt{21}$ czy $-\sqrt[3]{25}$. Można jednak podać wartości przybliżone tych pierwiastków.

PRZYKŁADY: $4 < \sqrt{21} < 5$, bo $\sqrt{16} < \sqrt{21} < \sqrt{25}$
 $-3 < -\sqrt[3]{25} < -2$, bo $-\sqrt[3]{27} < -\sqrt[3]{25} < -\sqrt[3]{8}$

Działania na pierwiastkach

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

PRZYKŁAD: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{100} = 10$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$$

PRZYKŁAD: $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{125} = 5$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b > 0$$

PRZYKŁAD: $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \sqrt{98:2} = \sqrt{49} = 7$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad \text{dla } b \neq 0$$

PRZYKŁAD: $\sqrt[3]{5\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{\frac{1}{12}} = \sqrt[3]{\frac{16}{3} : \frac{1}{12}} = \sqrt[3]{\frac{16}{3} \cdot 12} = \sqrt[3]{64} = 4$

Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka i włączanie czynnika pod znak pierwiastka

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b} \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

PRZYKŁADY: $\sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = 6\sqrt{5}$, $\frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 24} = \sqrt{6}$

$$a \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 \cdot b}$$

PRZYKŁADY: $\sqrt[3]{-54} = \sqrt[3]{-27 \cdot 2} = -3\sqrt[3]{2}$, $6\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{6^3 \cdot \frac{1}{9}} = \sqrt[3]{24}$

Egzamin 8-klasisty CKE

5^6	5	5^8
5^7	5^5	
5^2		

P

F

P

22 2. POTĘGI I PIERWIASTKI

Przykład 29.

Egzamin 8-klasisty CKE

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Liczba $a = \sqrt{125}$ jest A/B.

- A. mniejsza od 10 B. większa od 10

Liczba $b = 4\sqrt{6} - 10$ jest C/D.

- C. ujemna D. dodatnia

Rozwiązanie:

Aby oszacować liczbę a , najpierw szacujemy wartość $\sqrt{125}$:

$$\sqrt{121} < \sqrt{125} < \sqrt{144}$$

$$11 < \sqrt{125} < 12 \quad | -1, \text{odejmujemy liczbę } 1$$

$$11-1 < \sqrt{125}-1 < 12-1$$

$$10 < \sqrt{125} - 1 < 11$$

Liczba a jest większa od 10, a mniejsza od 11.

Aby oszacować wartość liczby b , włączamy liczbę 4 pod pierwiastek: $4\sqrt{6} = \sqrt{96}$:

$$\sqrt{81} < \sqrt{96} < \sqrt{100}$$

$$9 < \sqrt{125} < 10 \quad | -10$$

$$9 - 10 < \sqrt{96} - 10 < 10 - 10$$

$$-1 < \sqrt{96} - 10 < 0$$

$$-1 < 4\sqrt{6} - 10 < 0$$

Liczba b jest większa od -1 , a mniejsza od 0 .

Odpowiedź: BC

Ćwiczenie do przykładu 29.

Rozwiąż samodzielnie

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub F – jeśli jest fałszywe.

Liczba $2\sqrt{6}$ jest mniejsza niż $3\sqrt{3}$.	P	F
Wszystkie liczby: $\sqrt{10}$, $7\sqrt{2}$, $2\sqrt[3]{50}$, $2\sqrt[3]{125}$ są mniejsze od liczby 10.	P	F

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Czy wartość tego wyrażenia jest liczbą podzielną przez 8? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	każdy z wykładników jest liczbą nieparzystą.
N		B.	wykładnik potęgi 2^6 nie jest podzielny przez 8.
		C.	wartość tego wyrażenia można zapisać w postaci $8 \cdot 2^3$.

Wyrażenie jest podzielne przez 8, ponieważ można zapisać je jako iloczyn liczby 8 i liczby 2^3 .

Ćwiczenie do przykładu 30.

Rozwiąż samodzielnie

Czy największą wśród tych liczb jest liczba 32^3 ? Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A, B lub C.

T	ponieważ	A.	jest mniejsza od liczby 2^{20} .
N		B.	jest większa od liczby $(4^3)^2$.
		C.	liczba ta ma największą podstawę.

[illegible]

Przykład 31.

A. 19^0 B. $\left(-\frac{7}{8}\right)^3$ C. $(-3)^6$ D. $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$

B. $\left(-\frac{7}{8}\right)^3 < 0$, bo wykładnik nieparzysty dla ujemnej podstawy

C. $(-3)^6 > 0$, bo wykładnik parzysty dla ujemnej podstawy

D. $\left(\frac{3}{2}\right)^2 > 0$, bo podstawa jest dodatnia

24 2. POTĘGI I PIERWIASTKI

Ćwiczenie do przykładu 31.

Rozwiąż samodzielnie

Dane są liczby: $(-12,7)^0$, $\left(\left(\frac{7}{9}\right)^5\right)^2$, $\left(1\frac{1}{3}\right)^3$, $(-10)^4$, $\left(\frac{21}{7}\right)^3$, $-2,5^2$.

Ile spośród podanych liczb to liczby całkowite? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. cztery B. pięć C. dwie D. trzy

Przykład 32.

Podstawą pewnej potęgi o wykładniku naturalnym jest liczba 10, a jej wartość jest równa 0,00000001.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykładnik tej potęgi wynosi

- A. -6 B. -7 C. -8 D. -9

Rozwiązanie:

Zapisujemy liczbę 0,00000001 jako potęgę liczby 10:

$$0,000000001 = 10^{-8}$$

Odpowiedź: C

Ćwiczenie do przykładu 32.

Rozwiąż samodzielnie

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba 0,000008 zapisana w notacji wykładniczej to

- A. $0,8 \cdot 10^{-5}$ B. $8 \cdot 0,1^6$ C. $0,8 \cdot 0,1^6$ D. $8 \cdot 10^{-8}$

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. A vertical margin line is present on the right side, creating a narrow column. There are also horizontal margin lines at the top and bottom, creating narrow rows. The central area is a large rectangle of squares suitable for drawing or writing.

Ćwiczenie do przykładu 34.

Rozwiąż samodzielnie

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $2 \cdot 2^7 + 2^3 \cdot 2^5$ wynosi

- A. 2^9 B. 2^{64} C. 2^{16} D. 2^{105}

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Przykład 35.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Najmniejszą liczbą jest

- A. -1^4 B. $\sqrt{4}$ C. $(-1)^6$ D. $\sqrt[3]{-8}$

Rozwiązanie:

Zapisujemy liczby w prostszej postaci i wybieramy odpowiedź.

- A. $-1^4 = -1$ B. $\sqrt{4} = 2$ C. $(-1)^6 = 1$ D. $\sqrt[3]{-8} = -2$

Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 35.

Rozwiąż samodzielnie

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Parą równych liczb jest

- A. $3^7 : 3 \text{ i } (-9)^3$ B. $(-2)^8 \text{ i } (-5)^6 : (-2,5)^6$
C. $2^7 - 2 \text{ i } 32 \cdot \sqrt[3]{-8}$ D. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} + \sqrt{64} \text{ i } \sqrt[3]{250} \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{64}$

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Przykład 36.

W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych wynoszą $2\sqrt{15}$ oraz $3\sqrt{5}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole tego trójkąta jest równe

- A. $15\sqrt{3}$ B. $18\sqrt{5}$ C. $9\sqrt{5}$ D. $6\sqrt{5}$

Rozwiązanie:

Obliczamy pole trójkąta i wybieramy poprawną odpowiedź.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{15} \cdot 3\sqrt{5} = 3\sqrt{75} = 3\sqrt{25 \cdot 3} = 15\sqrt{3}$$

Odpowiedź: A

Ćwiczenie do przykładu 36.**Rozwiąż samodzielnie**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość rombu o polu $15\sqrt{3}$ i boku długości 5 wynosi

- A. $3\sqrt{3}$ B. 3 C. $75\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

**Przykład 37.**

Uzupełnij zadania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Liczbą, która jest większa od 4 i jednocześnie mniejsza od 5 jest A/B.

- A. $4\sqrt{5}$ B. $2\sqrt[3]{9}$

Spośród liczb $-\sqrt{21}$ i $\sqrt[3]{-29}$ liczbą mniejszą jest C/D.

- C. $-\sqrt{21}$ D. $\sqrt[3]{-29}$

Rozwiązanie:

Szacujemy wartość każdego pierwiastka:

A. włączamy czynnik pod znak pierwiastka $4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = \sqrt{80}$

$$\sqrt{64} < \sqrt{80} < \sqrt{81}$$

$$8 < \sqrt{80} < 9$$

B. włączamy czynnik pod znak pierwiastka $2\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 9} = \sqrt[3]{72}$

$$\sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{72} < \sqrt[3]{125}$$

$$4 < \sqrt[3]{72} < 5$$

Liczba $2\sqrt[3]{9}$ jest większa od 4 i mniejsza od 5.

$$C. -\sqrt{25} < -\sqrt{21} < -\sqrt{16}$$

$$-5 < -\sqrt{21} < -4$$

$$D. \sqrt[3]{-64} < \sqrt[3]{-29} < \sqrt[3]{-27}$$

$$-4 < \sqrt[3]{-29} < -3$$

Porównujemy liczby: $-\sqrt{21} < \sqrt[3]{-29}$

Odpowiedź: BC

Ćwiczenie do przykładu 37.

Rozwiąż samodzielnie

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Parą liczb równych jest

A. $\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt{\frac{1}{25}}$ i $\sqrt{\frac{24}{25}} : \sqrt{\frac{49}{625}}$

B. $\sqrt{2^2 \cdot 5^2}$ i $\sqrt[3]{10^3 : 5^3}$

$$c. 2^3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \quad \text{d. } 2^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}$$

D. $\sqrt{32} : \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{8}$ i $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{25-9}$

Przykład 38.

Uzupełnij zadania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wartość wyrażenia $\sqrt[3]{4} \cdot (\sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{250})$ jest równa **A/B**.

A. $2\sqrt[3]{234}$

B. 6

Wartość wyrażenia $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) : \sqrt{3}$ jest równa C/D.

$C_2 = -\sqrt{3}$

D.1

Rozwiązanie:

Opuszczamy nawiasy w każdym z wyrażeń.

$$\sqrt[3]{4} \cdot (\sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{250}) = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{-64} + \sqrt[3]{1000} = -4 + 10 = 6$$

$$(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{4} + \sqrt{9} - \sqrt{16} = 2 + 3 - 4 = 1$$

Odpowiedź: BD

Ćwiczenie do przykładu 38.

Rozwiąż samodzielnie

Uzupełnij zadania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wartość wyrażenia $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + \sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ jest równa **A/B**.

A.10

B. $\sqrt{2}$

Wartość wyrażenia $0,5 \cdot (\sqrt{20})$ jest równa **C/D**.

C. $2\sqrt{5}$

D. 10

ZADANIA

39. Dane jest wyrażenie $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{8} = a\sqrt{3}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba a jest równa

- A. 4 B. 2 C. 8 D. 16

40. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość liczbową wyrażenia $\frac{(a^2)^7 : a^4}{a^6 \cdot a}$ dla $a = -0,2$ wynosi

- A. $-0,8$ B. $0,8$ C. $-0,08$ D. $-0,008$

41. Uzupełnij zdania. Wybierz liczbę spośród oznaczonych literami A i B oraz liczbę spośród oznaczonych literami C i D.

Różnica liczb $5 \cdot 10^{20}$ i $8 \cdot 10^{18}$ zapisana w notacji wykładniczej wynosi A/B.

- A. $4,92 \cdot 10^{18}$ B. $4,92 \cdot 10^{20}$

Iloczyn liczb $2,5 \cdot 10^4$ oraz $9,4 \cdot 10^8$ zapisany w notacji wykładniczej ma postać C/D.

- C. $2,35 \cdot 10^{11}$ D. $2,35 \cdot 10^{13}$

42. Odcinek o długości $7,8 \cdot 10^4$ mm przedłużono o 0,104 km. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Otrzymany odcinek ma długość

- A. $182 \cdot 10^5$ mm B. $182 \cdot 10^4$ mm C. $8,84 \cdot 10^4$ mm D. $8,84 \cdot 10^5$ mm

43. Który zapis jest fałszywy? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\sqrt[3]{5^3 \cdot 2^6} = 5 \cdot 2^2$ B. $\sqrt{7^2 \cdot 1^8} = 7 \cdot 1^8$ C. $\sqrt{6^2 + 1^8} = 6 + 1$ D. $\sqrt[3]{250} = 5\sqrt[3]{2}$

44. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub F – jeśli jest fałszywe.

Suma $5^6 + 5^6 + 5^6 + 5^6 + 5^6$ zapisana w najprostszej postaci to 5^{30} .	P	F
Wartość wyrażenia $\frac{28^7 : 4^7}{(7 \cdot 7^2)^2}$ wynosi 7.	P	F
Odległości 17 600 km i $176 \cdot 10^7$ m są równe.	P	F
Liczba $(9^2)^4$ jest 27 razy większa od liczby $(3^4)^3$.	P	F

45. Czy różnica $\sqrt{64} - \sqrt[3]{64}$ jest równa 0? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród odpowiedzi oznaczonych literami A, B lub C.

T	ponieważ	A.	$\sqrt[3]{64} - 64 = 0$
		B.	$8 - 4 = 4$
N		C.	liczby pod pierwiastkami kwadratowym i sześciennym są równe.

46. W którym przykładzie błędnie wyłączono liczbę przed znak pierwiastka? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\sqrt[3]{40} = 2\sqrt[3]{5}$

B. $\sqrt[3]{128} = 4\sqrt[3]{2}$

C. $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

D. $\sqrt{18} = 2\sqrt{3}$

47. Wykaż, że liczba $10^n + 8$ jest podzielna przez 9. Przyjmij, że n jest liczbą naturalną.

48. Wykorzystując odpowiednie prawa działań na potęgach i pierwiastkach, doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci.

a) $(0,035)^7 : (0,005)^7$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot (4,5)^5$

c) $\frac{15^8 \cdot 15^4}{3^2 \cdot 3^8}$

d) $(3^4 \cdot 3^5)^2 : 3^7$

e) $(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt[3]{7})^3$

f) $\sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{1}{18}}$

g) $\sqrt[3]{\frac{3}{16}} : \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt{4} - \sqrt{100}}$

49. Uzupełnij luki tak, aby podane równości były prawdziwe.

a) $(4^{\square})^3 = 32^6 = (\square^6)^2$

b) $\frac{\sqrt[3]{\square} + \sqrt[3]{125}}{\sqrt{25+144}} = \frac{9}{\sqrt{\square}} = \square$

50. Zapisz odpowiednie wzory, a następnie oblicz:

a) pole trapezu równoramiennego o podstawach długości $6\sqrt{2}$ cm i $2\sqrt{2}$ cm i wysokości $3\sqrt{3}$ cm,

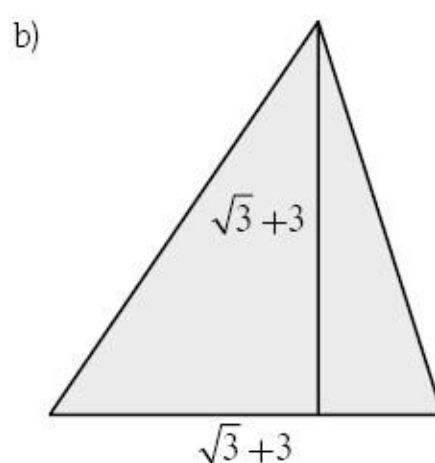
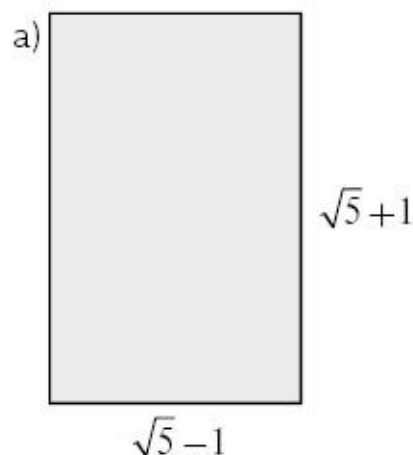
b) pole powierzchni sześcianu o krawędzi długości $3\sqrt{5}$ dm,

c) objętość prostopadłościanu o krawędziach długości $2\sqrt{3}$ cm, $3\sqrt{2}$ cm i $2\sqrt{6}$ cm.

51. Oblicz 1% wartości wyrażenia $\frac{(3 \cdot 100)^2 \cdot 300^4}{(3 \cdot 10^2)^5}$.

52. Uporządkuj rosnąco liczby $a = 2\sqrt{125}$, $b = \sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$, $c = (\sqrt[3]{11})^2 \cdot \sqrt[3]{11}$.

53. Oblicz pole prostokąta i trójkąta. Potrzebne wymiary odczytaj z rysunku.



54. Rozwiąż równania.

a) $2x - 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

b) $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) + x = x^2$

c) $4^5 \cdot x = (2^2)^{10}$

d) $27^3 + 25^3 = 3^9 + 5^4 x$

55. Oblicz wartość wyrażen, nie stosując kalkulatora i obliczeń pisemnych.

a) $\sqrt{36 \cdot 16 + 36 \cdot 4 + 36 \cdot 5}$

b) $\sqrt{3^2 \cdot 17^2 - 3^2 \cdot 8^2}$

c) $\frac{7^{15} + 7^{17}}{7^{14} + 7^{16}}$

d) $\frac{3^3 \cdot 3^6 + 6 \cdot 3^8}{27^3}$

56. Oblicz, która z liczb 3^{3^3} oraz $(3^3)^3$ jest większa i ile razy.

57*. Przedstaw w prostszej postaci wyrażenie $(10^{4m-1} : 10^{2-m}) \cdot (10^{1-2m})^2$ i oblicz jego wartość dla $m = 3$.

TEORIA

■ Procent

Jeden procent (1%) danej wielkości, to jej setna część.

$$1\% \text{ liczby } x \text{ to } \frac{1}{100} \cdot x$$

$$p\% \text{ liczby } x \text{ to } \frac{p}{100} \cdot x$$

■ Zamiana procentu na ułamek i liczby na procent

procent → ułamek	liczba → procent
Zamieniając procent na ułamek, należy podzielić przez 100 liczbę, która określa ten procent. $p\% = \frac{p}{100}$ PRZYKŁADY: $12\% = 0,12$ $33\frac{1}{3}\% = \frac{100^1}{3} \cdot \frac{1}{100^1} = \frac{1}{3}$	Przedstawiając liczbę jako procent, należy pomnożyć ją przez 100 i dopisać symbol %. $p = p \cdot 100\%$ PRZYKŁADY: $0,06 = 0,06 \cdot 100\% = 6\%$ $0,3 = 0,3 \cdot 100\% = 30\%$

■ Obliczanie procentu danej liczby

Obliczając procent danej liczby, należy przedstawić procent w postaci ułamka, a następnie pomnożyć go przez tę liczbę.

PRZYKŁAD: 40% liczby 60 to:

$$\frac{40}{100} \cdot 60 = 24$$

Czasami wygodnie jest obliczyć np. 1% lub 10% danej wielkości, a potem żądany procent.

PRZYKŁAD: 40% liczby 60 to cztery razy tyle, ile wynosi 10% liczby 60, czyli $4 \cdot 6 = 24$

■ Obliczanie liczby na podstawie jej procentu

Aby obliczyć liczbę na podstawie jej procentu, możemy zamienić procent na ułamek i ułożyć odpowiednie równanie.

PRZYKŁAD: Liczba, której 25% wynosi 7:

$$25\% = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}x = 7$$

$$x = 28$$

Można również, mając dany procent liczby, obliczyć jej, np. 1%, a następnie 100% tej liczby.

PRZYKŁAD: Liczbę, której 25% wynosi 7, można obliczyć jako $4 \cdot 7 = 28$.

■ Obliczanie, jaki procent jednej liczby stanowi druga liczba

Aby obliczyć, jaki procent jednej liczby stanowi druga liczba, ustalamy, jakim ułamkiem jednej liczby jest druga, i zamieniamy ten ułamek na procent.

PRZYKŁAD: Jakim procentem liczby 30 jest liczba 6?

$$\frac{6}{30} \cdot 100\% = 20\%$$

■ Promile

Jeden promil (1‰) danej wielkości to jej tysięczna część.

$$1\text{‰} = 0,001 = \frac{1}{1000}$$

$$p\text{‰} = p : 1000 \text{ lub } p\text{‰} = \frac{p}{1000}$$

■ Zamiana promila na ułamek i liczby na promil

promil → ułamek	liczba → procent
Zamieniając promil na ułamek, należy podzielić przez 1000 liczbę, która określa ten promil.	Przedstawiając liczbę jako promil, należy pomnożyć ją przez 1000 i dopisać symbol ‰.
$p\text{‰} = \frac{p}{1000}$	$p = p \cdot 1000\text{‰}$
PRZYKŁADY: $3\text{‰} = 3 \cdot \frac{1}{1000} = 0,003$	PRZYKŁADY: $0,004 = 0,004 \cdot 1000\text{‰} = 4\text{‰}$
$500\text{‰} = 500 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{2}$	$0,07 = 0,07 \cdot 1000\text{‰} = 70\text{‰}$

Przykład 59.

Egzamin 8-klasisty CKE

W każdej z dwóch torebek znajdują się 32 cukierki: 17 pomarańczowych, 10 jabłkowych i 5 truskawkowych.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Do pierwszej torebki należy dołożyć **A/B** cukierki truskawkowe, aby wszystkie znajdujące się w niej cukierki truskawkowe stanowiły 25% wszystkich cukierków w tej torebce.

A.3

B. 4

Liczba cukierków pomarańczowych, które należy wyjąć z drugiej torebki, aby wśród pozostałych w niej cukierków było 40% pomarańczowych, jest **C/D**.

C. mniejsza niż 5

D. większa niż 5

Rozwiązanie:

Dokładamy 3 cukierki truskawkowe:

$$\frac{5+3}{32+3} = \frac{8}{35} \cdot 100\% \approx 23\%$$

$23\% \neq 25\%$

Dokładamy 4 cukierki truskawkowe:

$$\frac{5+4}{32+4} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$$

Należy dołożyć 4 cukierki truskawkowe.

Liczba wyjętych cukierków x

$$\frac{17-x}{32-x} \cdot 100\% = 40\%$$

$$\frac{17-x}{32-x} = \frac{2}{5}, 85 - 5x = 64 - 2x, x = 7$$

Należy wyjąć 7 cukierków pomarańczowych.

Odpowiedź: BD

Ćwiczenie do przykładu 59.

Rozwiąż samodzielnie

W pewnej szkole podstawowej liczącej 440 uczniów są dwie klasy siódme. W klasie 7a jest 10 dziewcząt i 18 chłopców, a w 7b jest 12 dziewcząt i 15 chłopców.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe.

W klasie 7a będzie dwa razy mniej dziewcząt niż chłopców, gdy do innej klasy siódmej przeniesie się

A. $33\frac{1}{3}\%$ chłopców

B. 50% chłopców

c. 60% dziewcząt

D. 10% dziewcząt

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Rok	Liczba krzeseł
2015	250
2016	350

T	ponieważ	A.	drugi słupek na wykresie jest 2 razy wyższy od pierwszego.
N		B.	liczba krzeseł wyprodukowanych w 2016 roku jest o 40% większa niż liczba krzeseł wyprodukowanych w 2015 roku.
		C.	w 2016 roku wyprodukowano o 150 krzeseł więcej niż w 2015 roku.

Odpowiedź: NB

Rozwiąż samodzielnie

D. ok. 19%

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

**Przykład 61.**

Jakim procentem całości jest liczba $\frac{2}{5}$? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 20%

B. 4%

C. 2%

D. 40%

Rozwiązanie:

$$\frac{2}{5} \cdot 100\% = 40\%$$

Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 61.**Rozwiąż samodzielnie**

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

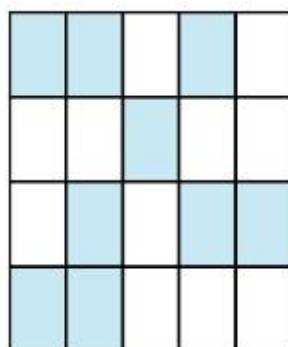
5% z 200 złotych to 10 zł.	P	F
Liczba 160 zwiększona o 40% jest równa liczbie 220.	P	F
6 godzin stanowi 25% doby.	P	F
Liczba, której 60% wynosi 36 to 60.	P	F



Przykład 62.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Na poniższym rysunku niezamalowane jest



A. 45% figury

B. 55% figury

C. 11% figury

D. 9% figury

Rozwiązanie:

Niezamalowano 11 prostokątów z 20.

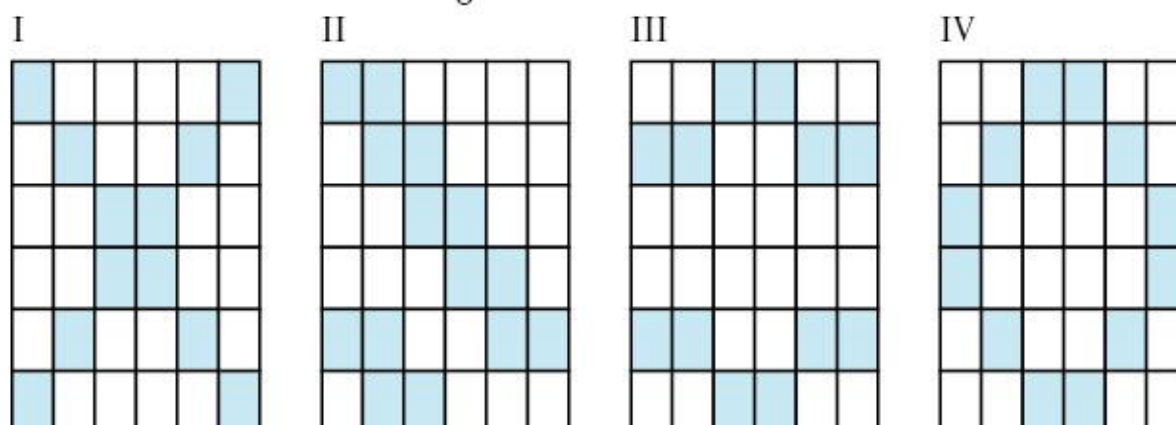
$$\frac{11}{20} \cdot 100\% = 55\%$$

Odpowiedź: B

Ćwiczenie do przykładu 62.

Rozwiąż samodzielnie

Na którym rysunku zamalowano więcej niż $33\frac{1}{3}\%$ całej figury?



Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. na I i III

B. na III i IV

C. tylko na II

D. tylko na III

**Przykład 63.**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po zamianie 9% na ułamek otrzymamy

A. 0,09

B. 0,9

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{1}{90}$

Rozwiązanie:

$$9\% = 9 \cdot \frac{1}{100} = 0,09$$

Odpowiedź: A

Ćwiczenie do przykładu 63.

Rozwiąż samodzielnie

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zamieniając ułamek $\frac{3}{7}$ na procenty, otrzymamy

- A. 42% B. 37% C. $42\frac{6}{7}\%$ D. $42\frac{7}{2}\%$

Przykład 64.

Śmietana zawiera 22% tłuszczu.

Ile gramów tłuszczu jest w 250 g śmietany? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 50 g B. 100 g C. 55 g D. 125 g

Rozwiązanie:

1 sposób

100% – 250 g

10% – 25 q

20%–50 g

2%–5 g

22% – 55 q

II sposób

Obliczamy procent danej wielkości:

$$22\% = 0,22$$
$$0,22 \cdot 250 = 55 \text{ (q)}$$

Odpowiedź: C

Ćwiczenie do przykładu 64.

Rozwiąż samodzielnie

Wody Morza Martwego mają średnie zasolenie 33%, natomiast wody Morza Kaspijskiego 12‰.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

W jednym kilogramie wody Morza Kaspijskiego jest średnio **A/B** gramów soli.

- A. 0,012 kq B. 0,033 kq

W 1 kg wody Morza Martwego jest **C/D** razy więcej soli niż w 1 kg wody Morza Kaspijskiego.

- C. 2,75 D. 275

Przykład 65.

Cenę laptopa obniżono o 12%. Klient kupił laptop po obniżonej cenie i dzięki temu zapłacił o 252 zł mniej, niż zapłaciłby przed obniżką.

Jaka była cena tego laptopa przed obniżką? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 2100 zł B. 2822,40 zł C. 3070 zł D. 2863 zł

Rozwiązanie:

1 sposób

12% – 252 zł

1% - 21 zł

100% – 2100 zł

II sposób

Obliczamy wielkość na podstawie jej procentu:

$$12\% = 0,12$$
$$252 : 0,12 = 2100 \text{ zł}$$

Odpowiedź: A

Ćwiczenie do przykładu 65.

Rozwiąż samodzielnie

Cenę deski snowboardowej obniżono o 15% i wówczas jej cena wynosiła 544 zł.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Cena deski snowboardowej przed obniżką wynosiła

- A. 625,60 zł B. 529 zł C. 462,40 zł D. 640 zł

Przykład 66.

W drużynie harcerskiej jest 12 dziewcząt i 18 chłopców.

Jaki procent drużyny stanowią chłopcy, a jaki dziewczęta?

Rozwiązanie:

1 sposób

Obliczamy liczbę wszystkich osób w drużynie:

$$12 + 18 = 30$$

Obliczamy, jakim procentem drużyny są chłopcy:

$$\frac{18}{30} = \frac{3}{5} \cdot 100\% = 60\%$$

Obliczamy, jakim procentem drużyny są dziewczęta:

$$\frac{12}{30} = \frac{2}{5} \cdot 100\% = 40\%$$

Odpowiedź: Chłopcy stanowią 60%, a dziewczęta 40% drużyny.

Ćwiczenie do przykładu 66.

Rozwiąż samodzielnie

W pewnej szkole podstawowej liczącej 440 uczniów są dwie klasy siódme. W klasie 7a jest 10 dziewcząt i 18 chłopców, a w 7b jest 12 dziewcząt i 15 chłopców.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Uczniowie klas siódmych stanowią 12,5% wszystkich uczniów tej szkoły.	P	F
W klasie 7b liczba chłopców jest równa 125% liczby dziewcząt.	P	F

Przykład 67.

Pensja pana Tomasza wzrosła o 20% i wynosi obecnie 4200 zł.

Ile zarabiał pan Tomasz przed podwyżką?

Rozwiązanie:

Obliczamy, jaki procent ceny początkowej wynosi pensja pana Tomasza po podwyżce:

$$100\% + 20\% = 120\%$$

Zamieniamy procent na ułamek:

$$120\% = 1,2$$

Określamy niewiadomą:

x – pensja pana Tomasza przed podwyżką

Układamy równanie i rozwiązujemy je:

$$1.2x = 4200$$

$$x = 4200 : 1,2$$

$$x = 42000 : 12$$

$$x = 3500$$

Odpowiedź: Pan Tomasz zarabiał przed podwyżką 3500 zł.

Ćwiczenie do przykładu 67.

Rozwiąż samodzielnie

Wynagrodzenie pana Jana wynosi 4800 brutto. Z wynagrodzenia potrącono 36% na podatek i inne zobowiązania.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Po potrąceniu pensja netto pana Jana równa jest

- A. 1728 zł B. 3072 zł C. 2400 zł D. 4080 zł

ZADANIA

68. Odpowiedz na pytania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Która z obniżek ceny towaru jest większa: o $\frac{8}{25}$ ceny czy o 30% ceny?

A. o $\frac{8}{25}$ ceny

B. o 30% ceny

Ula dostała 15% całej czekolady, Agata $\frac{1}{10}$ tej samej czekolady. Która z dziewcząt dostała mniejszy kawałek czekolady?

C. Ula

D. Agata

69. Na sprawdzianie z matematyki Paweł rozwiązał błędnie $\frac{1}{6}$ wszystkich zadań, a Piotr – $17\frac{5}{6}\%$.

Który z chłopców rozwiązał poprawnie więcej zadań? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. obaj rozwiązyli po tyle samo zadań

B. Paweł

C. za mało danych, aby odpowiedzieć na pytanie

D. Piotr

70. W tabeli przedstawiono przybliżone powierzchnie dwóch jezior w Polsce.

Nazwa jeziora	Powierzchnia w km ²
Śniardwy	113
Wigry	21

Jakim procentem powierzchni jeziora Śniardwy jest powierzchnia jeziora Wigry? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. ok. 20%

B. ok. 19%

C. ok. 18%

D. ok. 17%

71. Z 4 g cukru i pewnej ilości wody chcemy sporządzić 5-procentowy roztwór.

Czy masa tego roztworu wyniesie 60 g? Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	5% masy roztworu to 4 g cukru, czyli 100% masy roztworu to 80 g.
N		B.	wody powinno być 5 razy więcej, czyli 20 g.
		C.	5% masy roztworu to 4 g cukru, czyli 100% masy roztworu to 60 g.

72. Książka, która kosztowała 28 zł, zdrożała o 20%, a następnie staniała o 25%.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Cena tej książki po pierwszej zmianie wynosiła

A. 22,40 zł

B. 33,60 zł

Po obu zmianach książka kosztowała

C. 25,20 zł

D. 28 zł

73. Bilet normalny kosztował 68,50 zł i był o 37% droższy od biletu ulgowego.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Za dwa bilety normalne i trzy bilety ulgowe zapłacimy

A. 113 zł

B. 287 zł

C. 118,50 zł

D. 359 zł

74. W 2,4 litrach napoju malinowego jest 600 mililitrów czystego soku.

Czy zawartość procentowa czystego soku w tym napoju malinowym wynosi 25%? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	czystego soku jest więcej niż napoju malinowego.
		B.	stosunek ilości czystego soku do ilości napoju malinowego wyrażony w procentach jest równy 25.
N		C.	stosunek ilości czystego soku do ilości napoju malinowego wyrażony w procentach nie jest równy 25.

75. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

30% z 230 zł wynosi 69 zł.	P	F
$16\frac{2}{3}\%$ z 13,2 kg to 0,22 kg.	P	F
10,8% z 250 m ² jest równe 27 m ² .	P	F

76. Turysta przejechał autobusem 12,5% zaplanowanej trasy, $\frac{4}{5}$ całej trasy przeszedł i do celu pozostało mu jeszcze 15 km. Ile kilometrów już przebył ten turysta?

77. Sprawdzian z języka polskiego pisało 30 uczniów. $\frac{1}{6}$ klasy otrzymała ocenę bardzo dobrą, $3\frac{1}{3}\%$ otrzymało ocenę celującą, 20% uczniów uzyskało ocenę dobrą, a połowa klasy otrzymała oceny dostateczne. Ilu uczniów otrzymało oceny dopuszczające, jeżeli tylko jeden uczeń otrzymał ocenę niedostateczną?

78. Działka ma powierzchnię 25 arów. 40% powierzchni tej działki zajmują drzewa, $\frac{2}{3}$ pozostałej powierzchni obsiano trawą. Resztę powierzchni działki zajmują dom i pomieszczenia gospodarcze. Ile metrów kwadratowych zajmują dom i pomieszczenia gospodarcze?

79. W ciągu 12 sekund program antywirusowy sprawdził 7,5% zawartości dysku komputera. Ile minut potrwa pełne skanowanie tego dysku, jeśli odbywać się będzie w tym samym tempie?

80. Na sesji giełdowej cena jednej akcji firmy A spadła z 60 zł o 10%. Na następnej sesji cena jednej akcji tej samej firmy wzrosła o 10%. Oblicz cenę akcji firmy A po obu tych sesjach.

81. Liczba dziewcząt stanowi 60% liczby uczniów całej klasy. Jaki procent liczby dziewcząt stanowią chłopcy, a jaki procent liczby chłopców stanowią dziewczęta?

82. Cena spodni wynosiła 240 złotych. Najpierw obniżono tę cenę o 10%, a następnie tę obniżoną cenę zmniejszono jeszcze raz o 20%. Oblicz cenę towaru po obu promocjach. Jaka byłaby cena towaru, gdyby dokonano jednokrotnej obniżki o 30%?

83. Cenę rakiety tenisowej obniżono o 30% i kosztuje ona teraz 49 zł. Jaka była cena rakiety przed obniżką?

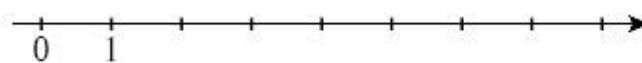
84*. Świeżo skoszona trawa zawiera 60% wody, a wysuszone siano zawiera tylko 15% wody.

Ile kilogramów siana można otrzymać z 2,5 tony skoszonej trawy? Wynik podaj z dokładnością do jedności.

TEORIA

Oś liczbowa

Prosta, o ustalonym zwrocie, punkcie zerowym i jednostce odległości.



Współrzędna punktu

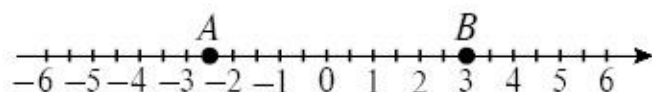
Każdemu punktowi na osi liczbowej przyporządkowana jest liczba, zwana jego współrzędną. I odwrotnie – każdej liczbie przyporządkowany jest punkt na osi liczbowej, dla którego liczba ta jest współrzędną.



Odległość punktów

Odległość pomiędzy dwoma punktami leżącymi na osi liczbowej możemy obliczać, odejmując od większej współrzędnej mniejszą.

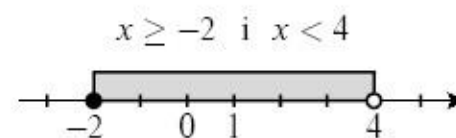
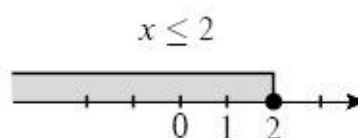
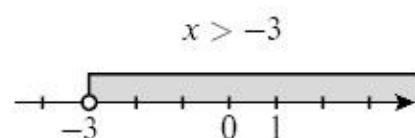
PRZYKŁAD:



$$AB = 3 - (-2,5) = 5,5$$

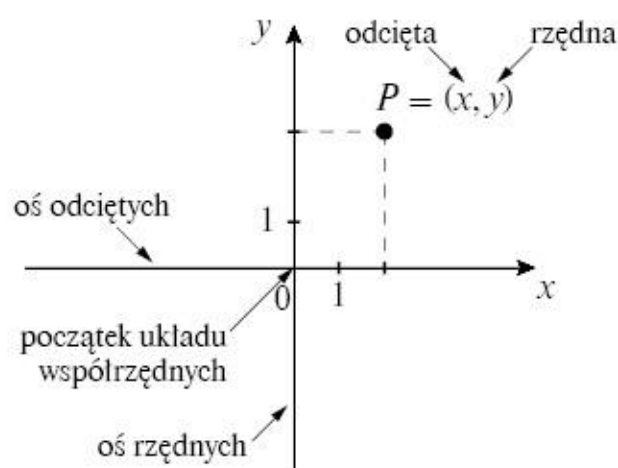
Zbiory na osi liczbowej

PRZYKŁADY:



■ Prostokątny układ współrzędnych

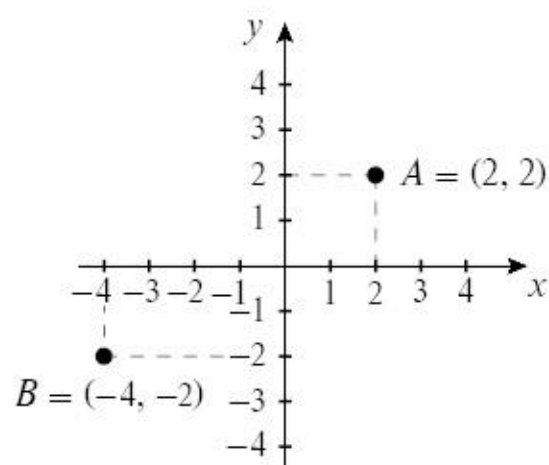
Prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie wyznaczają dwie prostopadłe osie liczbowe przecinające się pod kątem prostym w punkcie zerowym dla obu osi.



■ Współrzędne punktu

Położenie każdego punktu w układzie współrzędnych określa para liczb, które nazywamy współrzędnymi punktu.

Pierwszą liczbę – współrzędną x (odciętą) – odczytujemy na osi poziomej, a drugą – współrzędną y (rzedną) – na osi pionowej. Współrzędne punktu zapisujemy w nawiasach, np. $A = (x, y)$.



■ Środek odcinka

Środkiem odcinka AB , gdzie $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest punkt:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

PRZYKŁAD: Punkt $S = (2, -4)$ jest środkiem odcinka CD , gdzie $C = (7, -2)$ i $D = (-3, -6)$.

ZADANIA EGZAMINACYJNE KROK PO KROKU

Przykład 85.

Egzamin 8-klasisty CKE

Marta zapisała w systemie rzymskim cztery liczby: CLXX, CXC, CCLXX oraz CCL.

Która z nich znajduje się na osi liczbowej najbliższej liczby 200? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. CLXX

B. CXC

C. CCLXX

D. CCL

Rozwiązanie:

$$\text{CLXX} = 170$$

$$\text{CXC} = 190$$

$$\text{CCLXX} = 270$$

$$\text{CCL} = 250$$

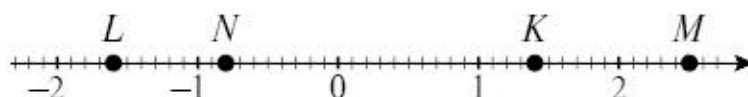
Spośród tych liczb na osi liczbowej najbliższej liczby 200 leży liczba 190, czyli CXC.

Odpowiedź: B

Ćwiczenie do przykładu 85.

Rozwiąż samodzielnie

Dopasuj podane liczby do odpowiednich punktów zaznaczonych na osi: $-0,8$, $1,4$, $-1\frac{3}{5}$, $\frac{5}{2}$.



Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $K = -0,8$, $L = 1,4$, $M = -1\frac{3}{5}$, $N = \frac{5}{2}$

B. $K = 1,4$, $L = -1\frac{3}{5}$, $M = \frac{5}{2}$, $N = -0,8$

C. $K = -1\frac{3}{5}$, $L = 1,4$, $M = \frac{5}{2}$, $N = -0,8$

D. $K = -0,8$, $L = \frac{5}{2}$, $M = -1\frac{3}{5}$, $N = 1,4$

Przykład 86.**Egzamin 8-klasisty CKE**

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie dane są punkty: $K = (-2, 8)$ i $M = (4, 6)$. Podaj współrzędne punktu P takiego, że jeden z trzech punktów P, K, M jest środkiem odcinka o końcach w dwóch pozostałych punktach. Podaj wszystkie możliwości.

Rozwiązanie:

Są trzy możliwości położenia punktów P, K i M .

– Punkt $P = (x, y)$ jest środkiem odcinka KM .

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1 \qquad y = \frac{8+6}{2} = 7$$

$$P = (1, 7)$$

– Punkt K jest środkiem odcinka PM , gdzie $P = (x, y)$.

$$-2 = \frac{x+4}{2} \qquad 8 = \frac{y+6}{2}$$

$$x + 4 = -4 \qquad y + 6 = 16$$

$$x = -8 \qquad y = 10$$

$$P = (-8, 10)$$

– Punkt M jest środkiem odcinka PK , gdzie $P = (x, y)$.

$$4 = \frac{x-2}{2} \qquad 6 = \frac{y+8}{2}$$

$$x - 2 = 8 \qquad y + 8 = 12$$

$$x = 10 \qquad y = 4$$

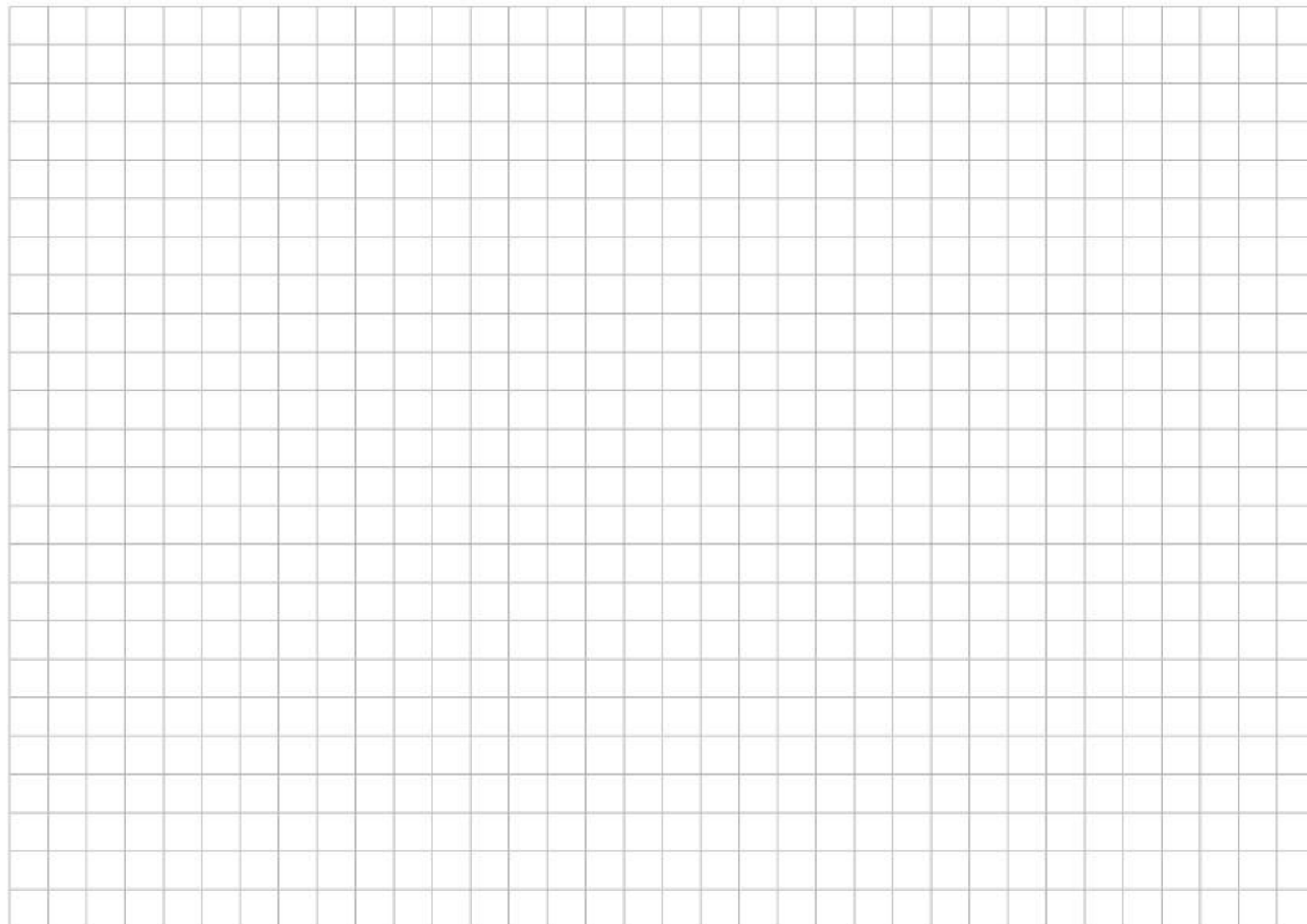
$$P = (10, 4)$$

Odpowiedź: Punkt P może mieć współrzędne $(1, 7)$, $(-8, 10)$ lub $(10, 4)$.

Ćwiczenie do przykładu 86.**Rozwiąż samodzielnie**

Punkty $K = (-3, 0)$, $L = (1, -5)$, $M = (2, 3)$ są wierzchołkami trójkąta KLM .

Oblicz współrzędne punktów, które są środkami boków tego trójkąta.



Przykład 87.

Egzamin 8-klasisty CKE

Punkt $S = (3, 2)$ jest środkiem odcinka AB , w którym $A = (5, 5)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Punkt B ma współrzędne

A. $(8, 7)$ B. $(7, 8)$ C. $(-1, 1)$ D. $(1, -1)$

Rozwiązanie:

$$B = (x, y)$$

$$\frac{5+x}{2} = 3, x = 1$$

$$\frac{5+y}{2} = 2, y = -1$$

$$B = (1, -1)$$

Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 87.

Rozwiąż samodzielnie

Punkt $S = (-3, 4)$ jest środkiem odcinka PR , w którym $P = (1, -2)$.

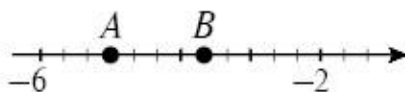
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Punkt R ma współrzędne

A. $(-2, 2)$ B. $(-7, 10)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-4, 6)$ 

Przykład 88.

Na osi liczbowej zaznaczono punkty A i B .



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Odległość między liczbami -6 i -2 na osi liczbowej jest równa 4 .	P	F
Współrzędna punktu A jest równa -5 .	P	F
Współrzędna punktu B jest równa -4 .	P	F
Odległość między punktami A i B jest równa $1\frac{1}{3}$.	P	F

Rozwiązanie:

Odległość między liczbami -6 i -2 na osi liczbowej jest równa 4 , ponieważ $-2 - (-6) = 4$.

Odcinek o długości 4 został podzielony na 12 równych odcinków. Każdy z tych odcinków ma długość $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Odczytujemy współrzędne punktów A i B:

$$A = -5 \text{ i } B = -3\frac{2}{3}$$

Wyznaczamy długość odcinka AB :

$$AB = -3\frac{2}{3} - (-5) = -3\frac{2}{3} + 5 = 1\frac{1}{3}$$

Odpowiedź: PPFP

Ćwiczenie do przykładu 88.

Rozwiąż samodzielnie

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odległość między punktami, które na osi liczbowej odpowiadają liczbom $-3\frac{1}{6}$ i $1,6$, jest równa

- A. $-3\frac{1}{6} - 16$ B. $-3\frac{1}{6} + 16$ C. $3\frac{1}{6} - 16$ D. $3\frac{1}{6} + 16$

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Przykład 89.

Punkty A i B mają odpowiednio współrzędne $(2, -10)$ i $(-4, 6)$.

Wyznacz współrzędne środka S odcinka AB .

Rozwiązanie:

Obliczamy współrzędne środka S odcinka AB , gdzie $A = (2, -10)$ i $B = (-4, 6)$:

$$S = (x, y)$$

$$x = \frac{2 + (-4)}{2} = -1, y = \frac{-10 + 6}{2} = -2$$

Odpowiedź: $S = (-1, -2)$

Ćwiczenie do przykładu 89.

Rozwiąż samodzielnie

Punkty $K = (-3, 8)$ i $M = (5, -12)$ są końcami odcinka KM .

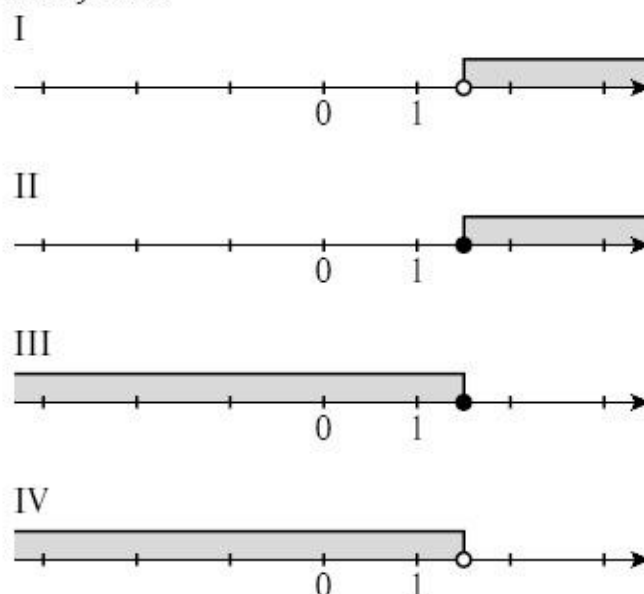
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Punkt S , który jest środkiem odcinka KM ma współrzędne

- A. $(1, -2)$ B. $(-1, 2)$ C. $(4, 10)$ D. $(-4, -10)$

Przykład 90.

Na osiach liczbowych zaznaczono zbiory liczb.



Na której osi liczbowej zaznaczono zbiór liczb spełniających warunek $x > 1,5$? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. na I B. na II C. na III D. na IV

Rozwiązanie:

Zapisujemy warunki, jakie spełniają zbiory liczb na osiach I, II, III i IV:

I: $x > 1,5$

II: $x \geq 1,5$

III: $x \leq 1,5$

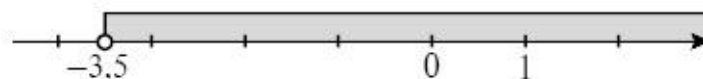
IV: $x < 1,5$

Odpowiedź: A

Ćwiczenie do przykładu 90.

Rozwiąż samodzielnie

Na poniższej osi liczbowej zaznaczono zbiór liczb spełniających pewien warunek.



Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Warunek zaznaczony na osi liczbowej spełniają liczby

- A. $x < -3,5$ B. $x \leq -3,5$ C. $x > -3,5$ D. $x \geq -3,5$

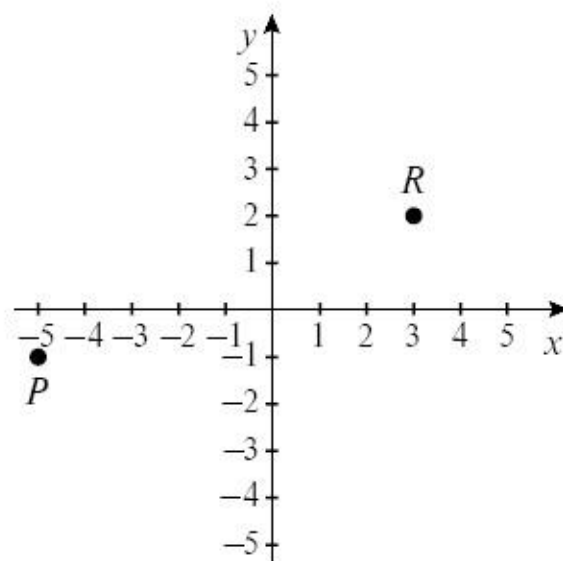


Przykład 91.

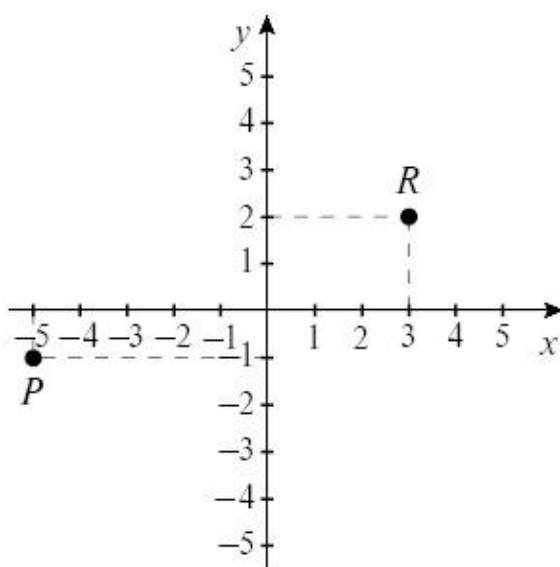
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Punkty P i R zaznaczone na rysunku mają współrzędne

- A. $P = (-3, -2)$ i $R = (5, 1)$
- B. $R = (-2, -3)$ i $P = (-1, 5)$
- C. $P = (-2, 3)$ i $R = (1, -5)$
- D. $R = (3, 2)$ i $P = (-5, -1)$



Rozwiązanie:



Odczytujemy współrzędne punktów R i P :
 $R = (3, 2)$ i $P = (-5, -1)$

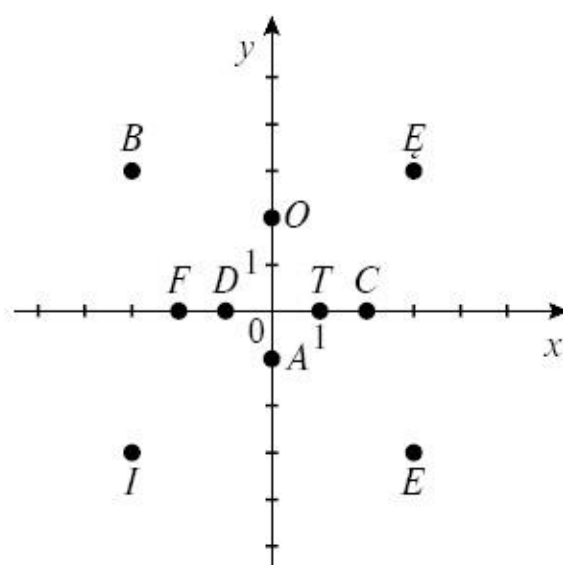
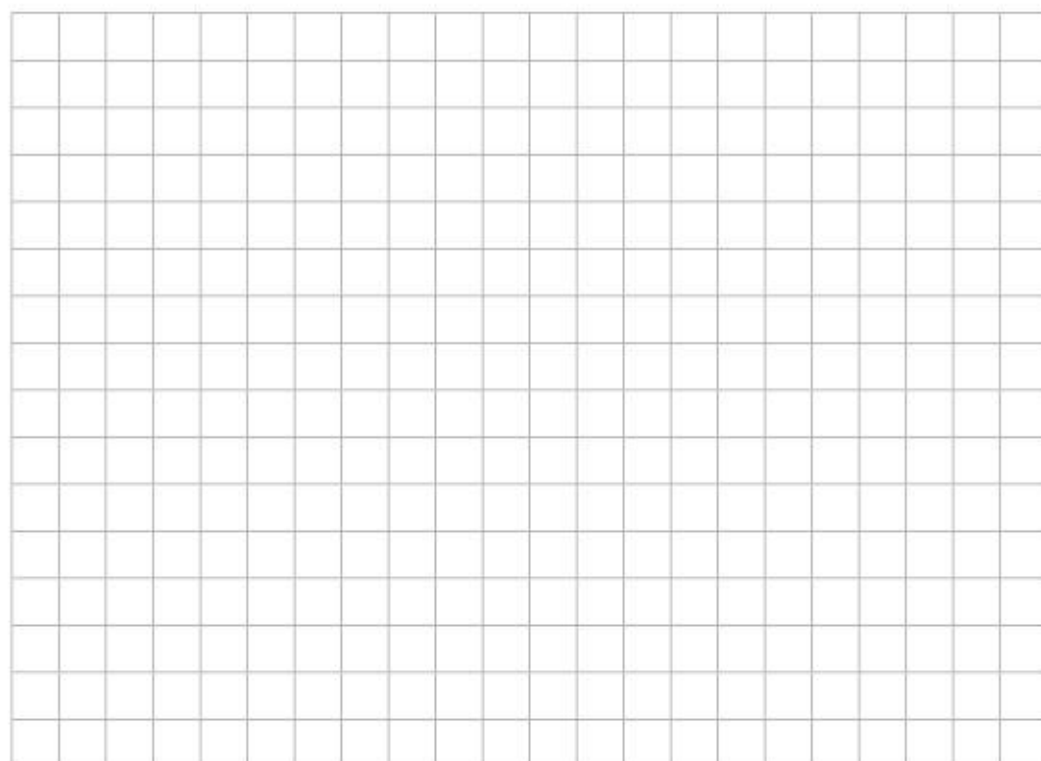
Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 91.

Rozwiąż samodzielnie

W układzie współrzędnych zaznaczono punkty.

Przyporządkuj litery współrzędnym: $(0, 2)$, $(-1, 0)$, $(2, 0)$, $(-3, -3)$, $(3, 3)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$ i odczytaj hasło.

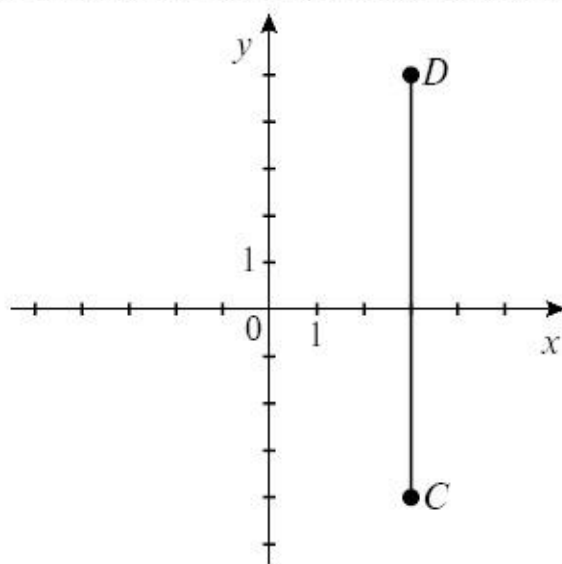


Przykład 92.

Jaką długość ma odcinek CD , jeśli $C = (3, -4)$ i $D = (3, 5)$?

Rozwiązanie:

Zaznaczamy w układzie współrzędnych punkty C i D , a następnie rysujemy odcinek CD .



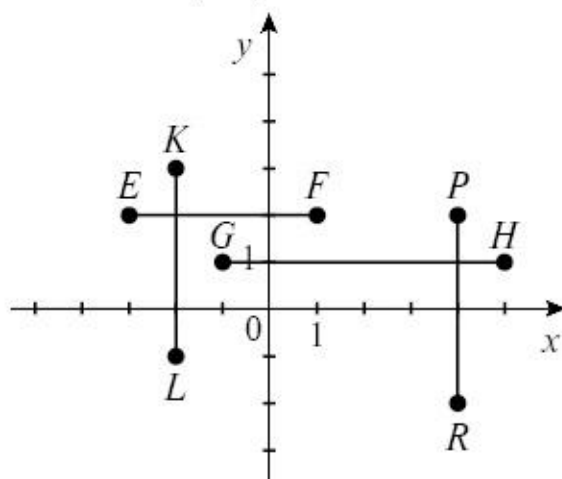
Odczytujemy długość odcinka CD :

$$CD = 9 \text{ j.}$$

Odpowiedź: Długość odcinka CD wynosi 9 j.

Ćwiczenie do przykładu 92.**Rozwiąż samodzielnie**

W układzie współrzędnych narysowano odcinki EF , GH , KL i PR .



Który z odcinków zaznaczonych na rysunku nie ma długości równej 4 j.? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. EF B. GH C. KL D. PR 

Przykład 93.

Punkty $L = (4, -2)$ i $N = (1, 2)$ są wierzchołkami prostokąta $KLMN$, którego boki są równoległe do osi układu współrzędnych.

Wyznacz współrzędne punktów K i M .

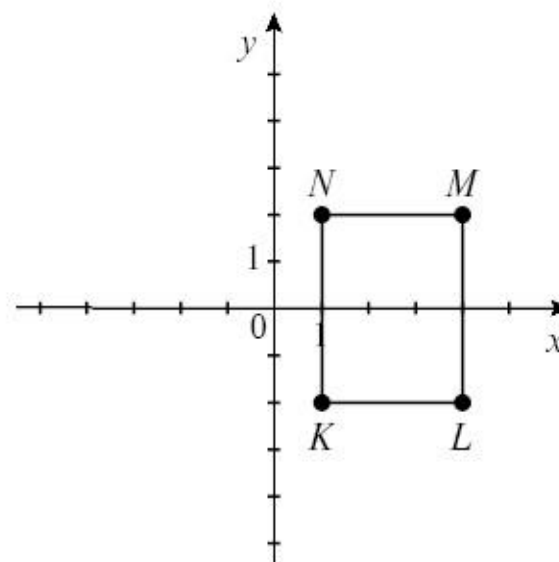
Rozwiązanie:

Zaznaczamy w układzie współrzędnych punkty L i N , a następnie zgodnie z warunkami zadania rysujemy prostokąt $KLMN$.

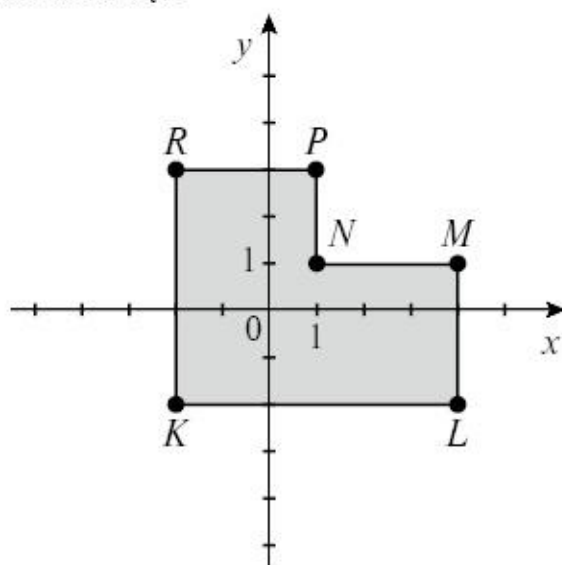
Odczytujemy współrzędne punktów K i M :

$K = (1, -2)$, $M = (4, 2)$

Odpowiedź: Punkty K i M mają odpowiednio współrzędne $(1, -2)$ i $(4, 2)$.

**Ćwiczenie do przykładu 93.****Rozwiąż samodzielnie**

W układzie współrzędnych narysowano wielokąt.

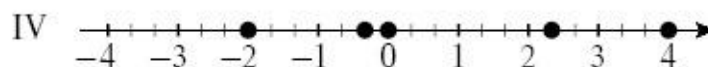
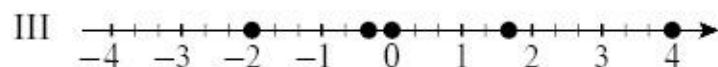
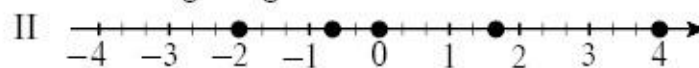
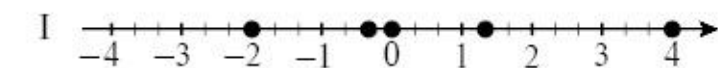


Oblicz obwód przedstawionego wielokąta.



ZADANIA

94. Na której osi liczbowej zaznaczono punkty o współrzędnych: $-2, -\frac{1}{3}, 0, 1\frac{2}{3}, 4$?



Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. na I

B. na II

C. na III

D. na IV

95. Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

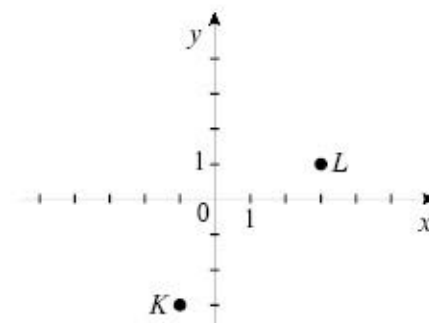
Punkty K i L mają odpowiednio współrzędne

A. $K = (-1, 3)$ i $L = (3, -1)$

B. $K = (1, -3)$ i $L = (3, -1)$

C. $K = (-1, -3)$ i $L = (3, 1)$

D. $K = (-1, 3)$ i $L = (-3, 1)$



96. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Liczba $\sqrt{75}$ znajduje się na osi liczbowej między liczbami A/B.

A. 5 i 7

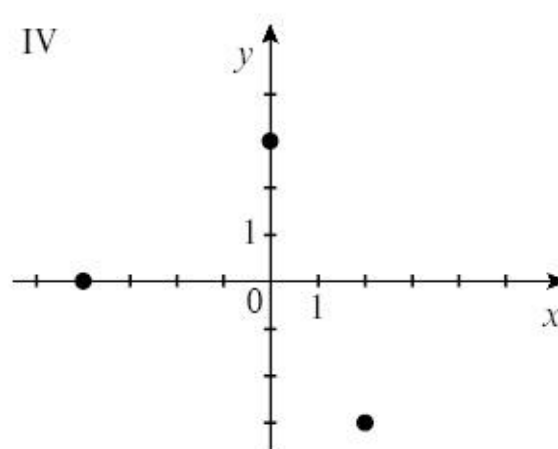
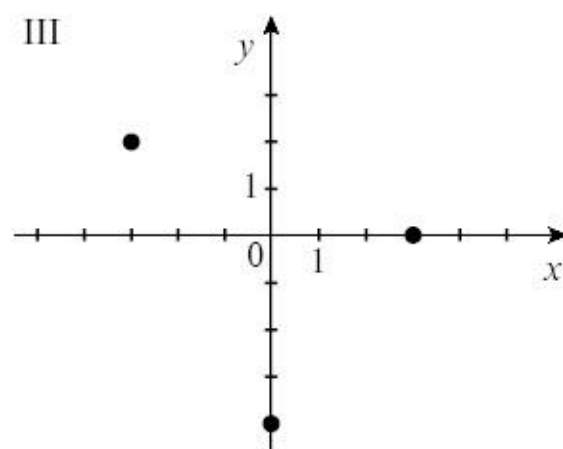
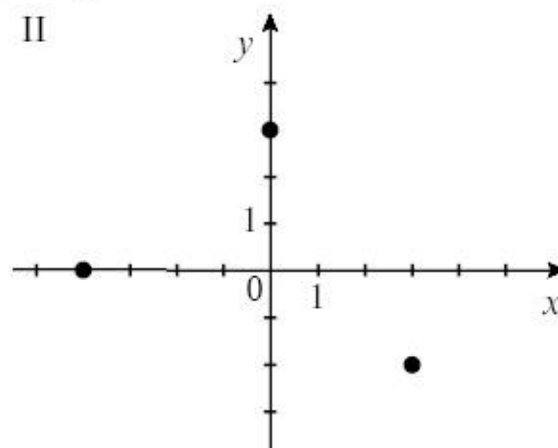
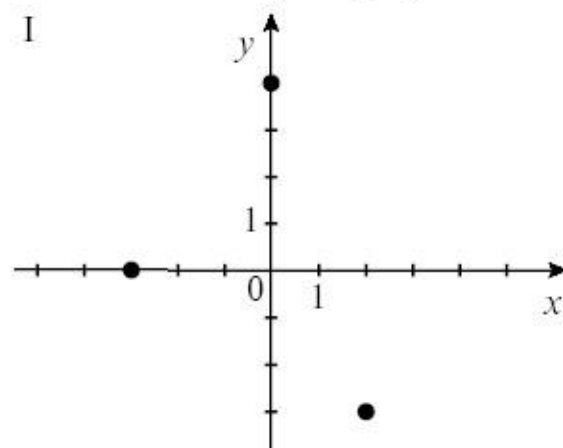
B. 8 i 9

Liczbę $\sqrt{75}$ możemy zapisać w postaci C/D.

C. $5\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{5}$

97. W układach współrzędnych zaznaczono po trzy punkty.



Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Punkty o współrzędnych $(-4, 0)$, $(0, 3)$, $(2, -3)$ poprawnie zaznaczono na rysunku

A. I

B. II

C. III

D. IV

98. Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Liczba $-\frac{5}{6}$ leży na osi liczbowej między

- A. $-\frac{3}{4}$ i $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{2}{3}$ i $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{5}{12}$ i $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{11}{12}$ i $-\frac{3}{4}$

99. Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Odległość na osi liczbowej między najmniejszą i największą spośród liczb: $-1,5$; $\frac{7}{2}$; 0 ; $-\frac{7}{3}$ jest równa

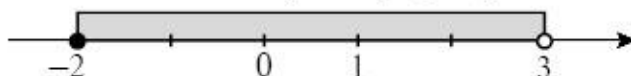
- A. $\frac{5}{6}$ B. $5\frac{5}{6}$ C. $1\frac{1}{6}$ D. $2\frac{5}{6}$

100. Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Liczba odległa na osi liczbowej o 6 jednostek od liczby przeciwnej do liczby 5 to

- A. tylko -11 B. tylko 1 C. -11 lub 1 D. -1 lub 11

101. Na poniższej osi liczbowej zaznaczono zbiór liczb spełniających pewien warunek.



Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Warunek zaznaczony na osi liczbowej spełniają liczby A/B.

- A. $x > -2$ i $x \leq 3$ B. $x \geq -2$ i $x < 3$

Do zaznaczonego na osi liczbowej zbioru należy liczba C/D.

- C. 3 D. -2

102. Czy punkt $S = (1, 0)$ jest punktem przecięcia przekątnych rombu $ABCD$, gdzie $A = (0, -3)$, $B = (4, -1)$, $C = (2, 3)$ i $D = (-2, 1)$? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	punkt S nie jest środkiem odcinków AC i BD .
		B.	punkt S jest środkiem odcinków AB i CD .
N		C.	punkt S jest środkiem przekątnych rombu $ABCD$.

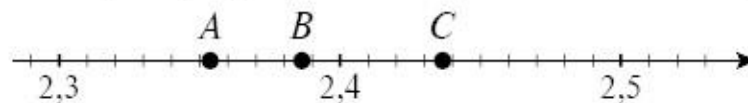
103. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Osie układu współrzędnych przecinają się punkcie $O = (0, 0)$.	P	F
Punkty o obu współrzędnych dodatnich leżą w I ćwiartce.	P	F
Punkty o obu współrzędnych ujemnych leżą w IV ćwiartce.	P	F
Punkty, których współrzędne są liczbami przeciwnymi leżą w II lub IV ćwiartce.	P	F

104. Zaznacz na osi liczbowej liczby. Napisz, ile jest takich liczb.

- a) naturalne mniejsze od $7,45$
 b) całkowite ujemne większe od -7
 c) całkowite większe od -8 i mniejsze od 5
 d) całkowite niedodatnie większe od $-6\frac{3}{4}$
 e) całkowite dodatnie nie większe od 9

105. Podaj poprawne przybliżenia współrzędnych punktów A , B i C z dokładnością do części setnych.



106. Punkty $A = (5a + 1, 4)$ i $B = (5 - a, 2b)$ są końcami odcinka AB , którego środkiem jest punkt $S = (-3, 2)$. Oblicz współrzędne punktów A i B .

107. Narysuj oś liczbową. Zaznacz na niej liczbę 2, a następnie: liczbę o 4 mniejszą od liczby 2, liczbę 4 razy większą i 4 razy mniejszą od 2.

108. Zaznacz podane liczby na osi liczbowej, a następnie uporządkuj je malejąco.

$$9, -3\frac{1}{2}, 0, 3, -2,5, 1\frac{3}{5}, 4\frac{1}{3}, -1$$

109. Zaznacz na osi liczbowej zbiory liczb spełniających określone warunki.

a) $x > -3$

b) $x < 4$

c) $x \geq 2$

d) $x \leq -1$

110. Zaznacz w układzie współrzędnych odcinki o podanych końcach. Odczytaj długości tych odcinków.

a) $A = (-2, 3)$ i $B = (-2, -5)$

b) $C = (-2, -1)$ i $D = (3, -1)$

c) $E = (-3,5, 1,2)$ i $F = (-3,5, 2,7)$

d) $G = (4,2, -3)$ i $H = (1,1, -3)$

TEORIA

Średnia arytmetyczna

Średnią arytmetyczną liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ otrzymujemy, dodając te liczby do siebie i dzieląc otrzymaną sumę przez liczbę składników:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

PRZYKŁAD: Średnia arytmetyczna liczb: 7, -5, 6

$$\frac{7 + (-5) + 6}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Sposoby przedstawiania danych statystycznych

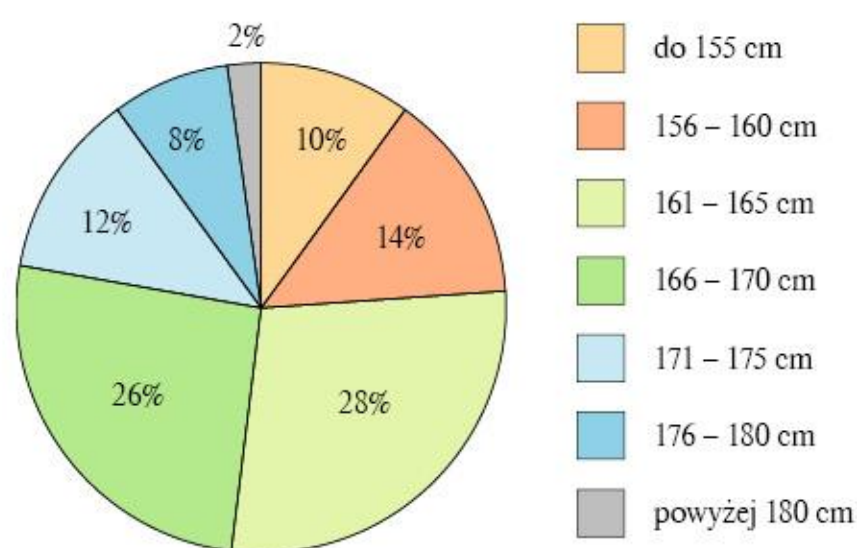
Dane statystyczne można prezentować w formie tabel, diagramów słupkowych, diagramów kołowych i wykresów. Zbiór danych w tabeli jest bardziej szczegółowy, ale to diagramy i wykresy ułatwiają interpretację tych danych.

PRZYKŁAD: Dane dotyczące wzrostu zebrane wśród 50 uczniów z klas ósmych pewnej szkoły podstawowej

Tabela

Wzrost	Liczba uczniów
do 155 cm	5
156 – 160 cm	7
161 – 165 cm	14
166 – 170 cm	13
171 – 175 cm	6
175 – 180 cm	4
więcej niż 180 cm	1

Diagram kołowy



Wykres

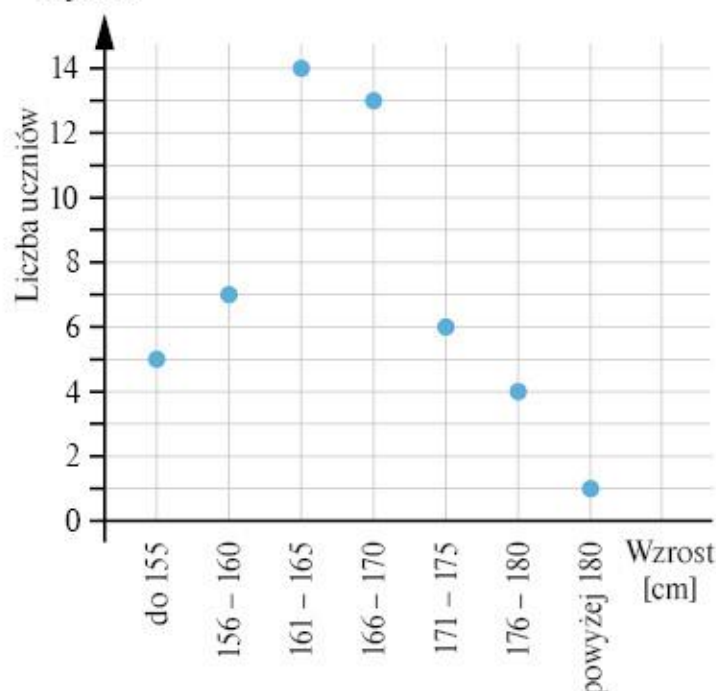
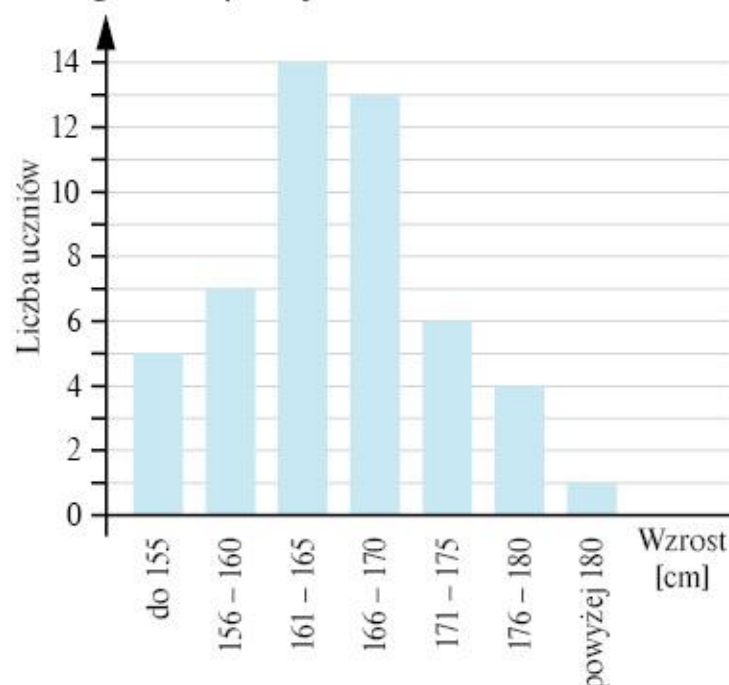


Diagram słupkowy



Egzamin 8-klasisty CKE

- A. 40% B. 32%
- C. 28% D. 8%

Rozwiązanie:

Obliczamy, ile procent uczniów zaliczyło test na I, II i III poziomie:

$$4\% + 12\% + 16\% = 32\%$$

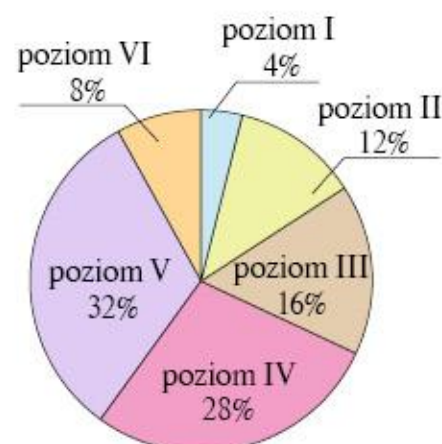
Ponieważ wiemy, że na poziomach niższych niż Asia quiz zakończyło dokładnie

32% uczniów biorących w nim udział, stąd wnioskujemy, że Asia zakończyła test na poziomie IV.

Obliczamy, ile procent uczniów zaliczyło test poziomie wyższym niż IV:

$$32\% + 8\% = 40\%$$

Odpowiedź: A



Wynik quizu (w %)

Rozwiąż samodzielnie

Procentowy diagram kołowy przedstawia kalkulację ceny sprzedaży słoika dżemu z żurawiny.

Oblicz, jaki będzie zysk producenta dżemu, jeśli sprzeda on 500 słoików. Przyjmij, że cena sprzedaży jednego słoika to 8 zł.



Cena sprzedaży (w %)

Przykład 112.

Egzamin 8-klasisty CKE

Informacja do zadania

Mateusz mieszka w odległości 4 km od szkoły. Część drogi do szkoły pokonuje pieszo, idąc do przystanku autobusowego. Tam czeka na autobus, następnie wsiada do niego i jedzie do szkoły. Pewnego dnia, gdy był już na przystanku, stwierdził, że zapomniał zabrać zeszyt, więc wrócił po niego do domu. Wykres przedstawia, jak tego dnia zmieniała się odległość Mateusza od domu w zależności od czasu.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Od momentu, gdy Mateusz zawrócił z przystanku do domu, do momentu, gdy dotarł ponownie na przystanek, upłynęło

- A. 11 minut B. 13 minut
C. 14 minut D. 16 minut

Rozwiązanie:

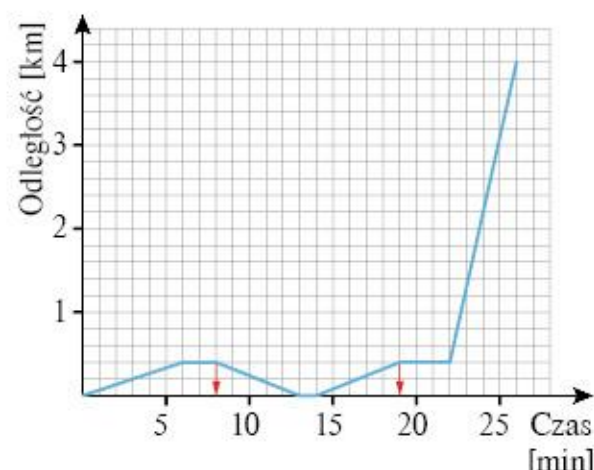
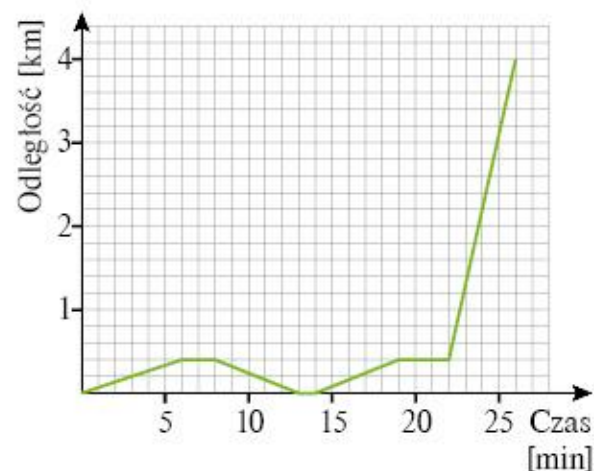
Na osi czasu odczytujemy, ile upłynęło minut od momentu wyjścia z domu do chwili, gdy Mateusz zawrócił z przystanku autobusowego – 8 minut.

Na osi czasu odczytujemy, ile upłynęło minut od momentu pierwszego wyjścia z domu do chwili, gdy Mateusz wrócił na przystanek autobusowy – 19 minut.

Obliczamy różnicę:

$$19 \text{ min} - 8 \text{ min} = 11 \text{ min}$$

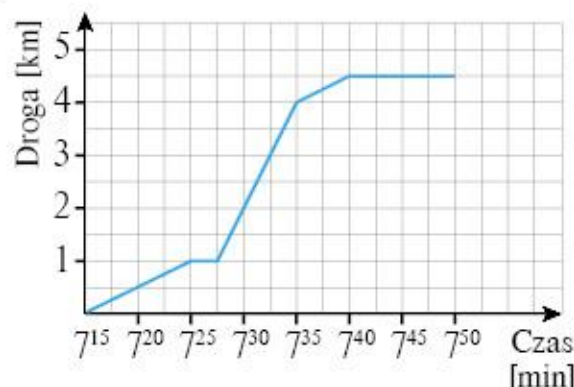
Odpowiedź: A



Ćwiczenie do przykładu 112.

Rozwiąż samodzielnie

Droga Olka do szkoły codziennie wygląda w ten sam sposób. Z domu udaje się on pieszo na przystanek autobusowy, jedzie autobusem, po czym znów pieszo idzie do szkoły. Na wykresie przedstawiono zależność drogi przebytej przez Olka od czasu trwania podróży.



- Po ilu minutach od momentu wyjścia z domu Olek jest w szkole?
- Ile kilometrów Olek jedzie autobusem, a ile idzie pieszo?
- Z jaką prędkością jechał autobus?

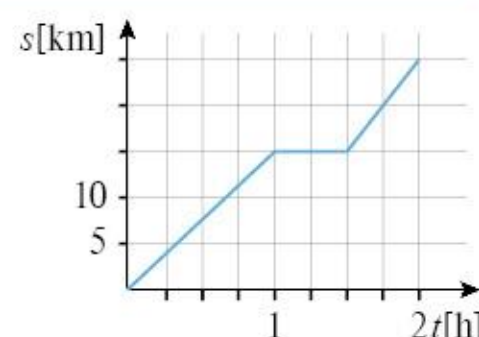


**Przykład 114.**

Rafał i Ola pojechali rowerami do swojego kolegi Tomka, który mieszka w sąsiedniej miejscowości. Z domu wyruszyli o godzinie 8 rano i po drodze jeden raz odpoczywali. Wykres pokazuje, jak zmieniała się odległość Rafała i Oli od ich domu w zależności od czasu, jaki spędzili w drodze.

Wybierz zdanie fałszywe spośród zapisanych.

- A. Tomek mieszka w odległości 25 kilometrów od domu Rafała i Oli.
- B. Rafał i Ola przyjechali do Tomka o godzinie 10.
- C. Prędkość, z jaką Rafał i Ola przejechali pierwszą godzinę, wynosiła 15 km/h.
- D. Rafał i Ola jechali rowerami przez 8 kwadransów, nie licząc odpoczynku.



Rozwiązanie:

A. Odczytujemy na osi s odległość, w jakiej mieszka Tomek od domu Rafała i Oli – jest to 25 km. – zdanie prawdziwe

B. Odczytujemy na osi t , ile czasu trwała podróż – trwała 2 godziny. Obliczamy, o której godzinie Rafał i Ola dotarli do domu Tomka:

$$8 + 2 = 10 \text{ – zdanie prawdziwe}$$

C. Odczytujemy, ile kilometrów przejechali Rafał i Ola w ciągu pierwszej godziny – przejechali 15 km. Obliczamy prędkość:

$$V = \frac{s}{t} = \frac{15 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ – zdanie prawdziwe}$$

D. Podróż Rafała i Oli trwała 2 godziny, czyli 8 kwadransów, ale razem z odpoczynkiem, który trwał pół godziny. – zdanie fałszywe

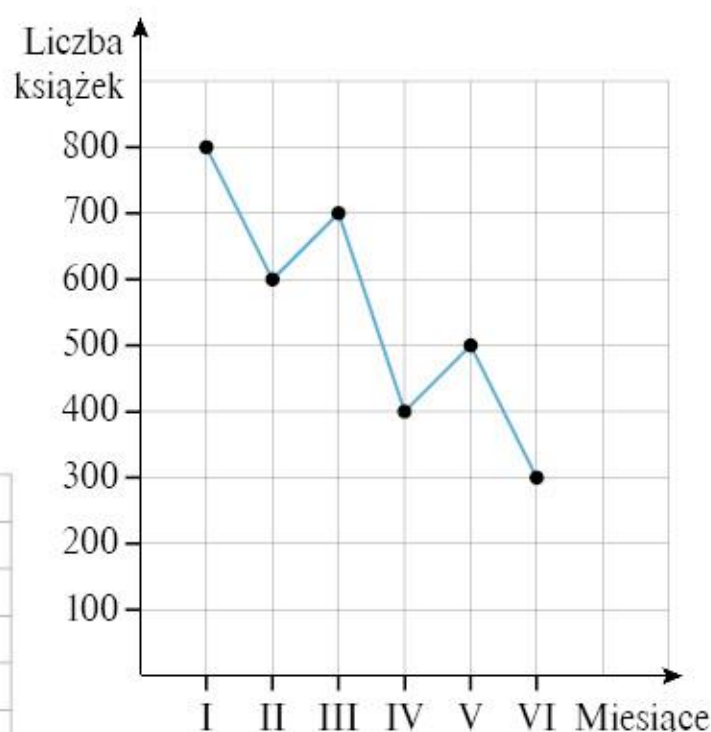
Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 114.

Rozwiąż samodzielnie

Na wykresie przedstawiono, jak kształtował się stan czytelnictwa w bibliotece osiedlowej w pierwszym półroczu 2016 roku. Które z poniższych zdań jest prawdziwe? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. Liczba wypożyczanych książek wzrosła tylko w jednym miesiącu.
- B. Co czwarta książka wypożyczona w pierwszym półroczu była wypożyczona w styczniu.
- C. W czerwcu wypożyczono dwa razy mniej książek niż w lutym.
- D. W tej bibliotece wypożyczano średnio 540 książek miesięcznie.



Przykład 115.

Wśród wszystkich uczniów SP 9 przeprowadzono ankietę na temat ulubionego rodzaju aktywności fizycznej uprawianej poza lekcjami wychowania fizycznego. Uczniowie mogli wskazać tylko jeden rodzaj sportu. Wyniki ankiety przedstawiono w tabelce.

Rodzaj sportu	Liczba uczniów
gra w piłkę nożną	60
jazda na rowerze	114
pływanie	15
tenis ziemny i stołowy	75
jazda na rolkach	36

Uzupełnij zdania. Wybierz liczbę spośród oznaczonych literami A i B oraz spośród oznaczonych literami C i D.

Jazdę na rolkach lub jazdę na rowerze **A/B** tego osiedla.

A. wskazała $\frac{1}{2}$ uczniów B. wskazało $\frac{36}{114}$ uczniów

Tenis ziemny i stołowy wskazało o **C/D** więcej uczniów niż pływanie.

C. 400% D. 500%

Rozwiązanie:

Obliczamy, ilu uczniów chodzi do SP 9:

$$60 + 114 + 15 + 75 + 36 = 300$$

Obliczamy, jakim ułamkiem liczby wszystkich uczniów osiedla jest liczba uczniów, którzy wskazali jazdę na rol-

kach i jazdę na rowerze: $\frac{114+36}{300} = \frac{1}{2}$

Obliczamy, o ile procent więcej uczniów wskazało tenis ziemny i stołowy niż pływanie:

$$\frac{75-15}{15} \cdot 100\% = 400\%$$

Odpowiedź: AC

Ćwiczenie do przykładu 115.

Rozwiąż samodzielnie

Uczniom klasy VII pewnej szkoły podstawowej zadano pytanie: „Ile SMS-ów dziennie wysyłasz?”. Odpowiedzi przedstawiono w tabeli.

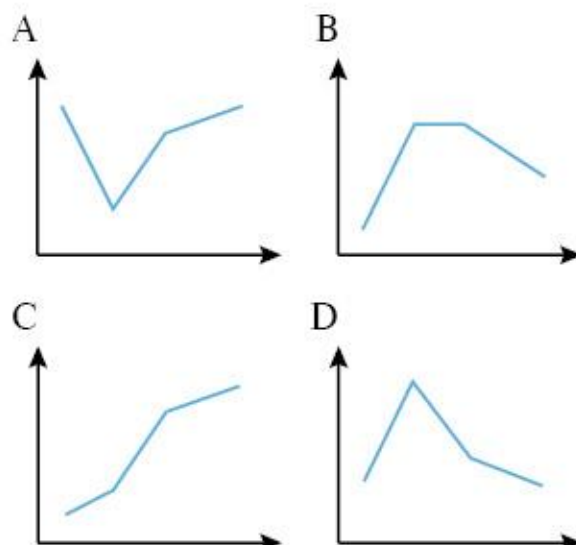
Liczba SMS-ów	Liczba uczniów wysyłających daną liczbę SMS-ów
mniej niż 11	5
od 11 do 20	8
od 21 do 30	6
powyżej 30	6

Które z poniższych zdań jest fałszywe? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. W ankiecie brało udział 25 uczniów.
B. Co piąty ankietowany wysyła mniej niż 11 SMS-ów dziennie.
C. 80% ankietowanych wysyła co najmniej 11 SMS-ów dziennie.
D. Połowa ankietowanych wysyła powyżej 20 SMS-ów dziennie.

Przykład 116.

Podczas zebrania zarządu spółdzielni mieszkaniowej przedstawiono wykres dotyczący liczby sprzedawanych mieszkań oraz następującą interpretację: Po okresie wzrostu liczba sprzedanych mieszkań spadła. **Który wykres został przedstawiony na zebraniu? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**



Rozwiązanie:

Zapisujemy interpretację każdego wykresu.

Wykres A – po okresie spadku liczba sprzedanych mieszkań rosła.

Wykres B – po okresie wzrostu liczba sprzedanych mieszkań ustabilizowała się, a później spadła.

Wykres C – liczba sprzedanych mieszkań ciągle rośnie.

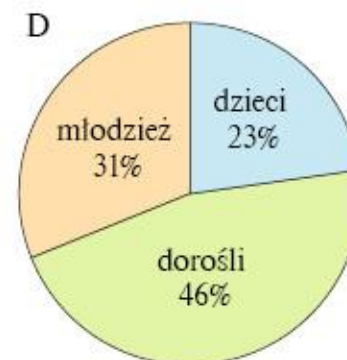
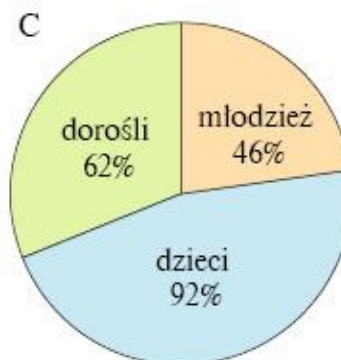
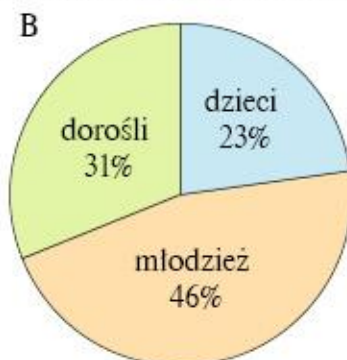
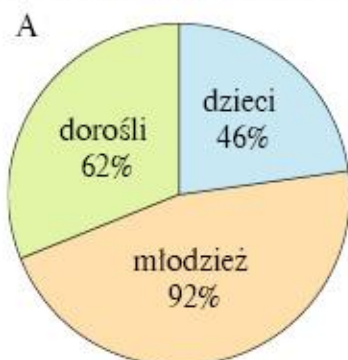
Wykres D – po okresie wzrostu liczba sprzedanych mieszkań spadła.

Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 116.

Rozwiąż samodzielnie

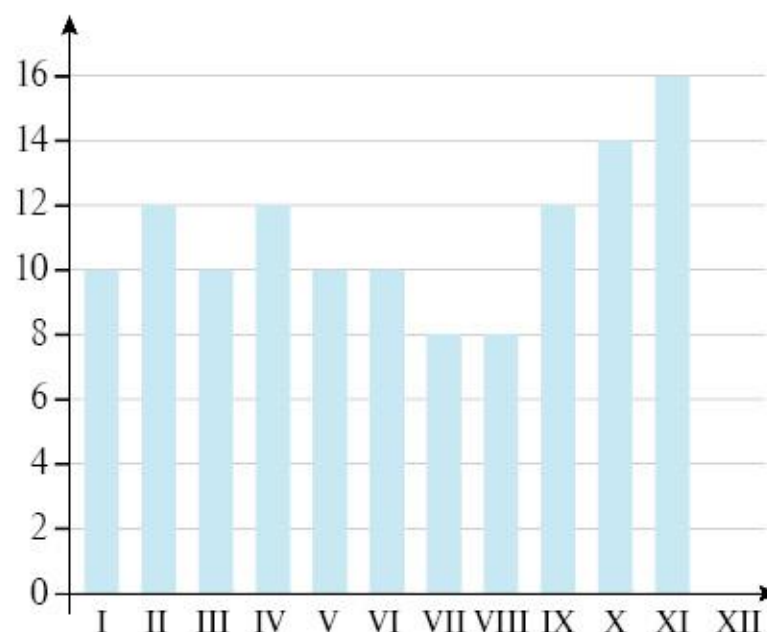
W biegach ulicznych wzięło udział 200 osób podzielonych na trzy kategorie: dzieci (46 osób), młodzież (92 osoby) i dorośli (62 osoby). **Który z diagramów przedstawia procentowy udział sportowców w zależności od kategorii? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines forming small squares across the entire page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Przykład 117.

Na wykresie przedstawiono liczbę dni z opadami deszczu lub śniegu w poszczególnych miesiącach 2017 roku w pewnej miejscowości. Niestety nie zaznaczono na wykresie słupka odpowiadającego liczbie dni deszczu lub śniegu w grudniu. Wiadomo jednak, że w 2017 roku w tej miejscowości były 132 dni z opadami deszczu lub śniegu.

- Oblicz, ile było dni z deszczem lub śniegiem w grudniu.
- W jakich miesiącach liczba dni z deszczem lub śniegiem była większa niż średnia miesięczna liczba dni z deszczem lub śniegiem w 2017 roku w tej miejscowości?
- W którym kwartale było najwięcej, a w którym najmniej dni z deszczem lub śniegiem?

**Rozwiązanie:**

- Obliczamy, ile dni było z deszczem lub śniegiem w grudniu:
 $132 - (10 + 12 + 10 + 12 + 10 + 10 + 8 + 8 + 12 + 14 + 16) = 10$

Odpowiedź: W grudniu było 10 dni z deszczem lub śniegiem.

- Obliczamy średnią liczbę dni z deszczem lub śniegiem: $\frac{132}{12} = 11$

Odszukujemy, w których miesiącach liczba dni z deszczem lub śniegiem jest większa od 11.

Odpowiedź: Są to miesiące: luty, kwiecień, wrzesień, październik i listopad.

- Obliczamy, ile było dni z deszczem lub śniegiem w kolejnych kwartałach:

I kwartał: $10 + 12 + 10 = 32$

II kwartał: $12 + 10 + 10 = 32$

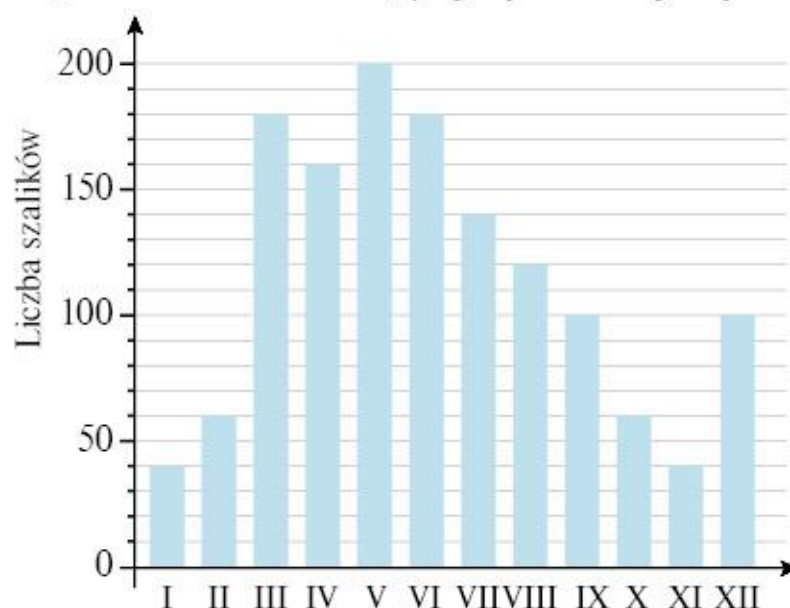
III kwartał: $8 + 8 + 12 = 28$

IV kwartał: $14 + 16 + 10 = 40$

Odpowiedź: Najwięcej dni z deszczem lub śniegiem było w IV kwartale, a najmniej – w III.

Ćwiczenie do przykładu 117.**Rozwiąż samodzielnie**

Wykres przedstawia liczbę sprzedanych szalików przez fanklub drużyny piłkarskiej w poszczególnych miesiącach 2017 roku. Szaliki sprzedawane są w cenie 25 zł za sztukę, przy czym 20% tej ceny stanowi zysk fanklubu.



- W którym kwartale sprzedano najwięcej szalików?
- W których miesiącach sprzedano więcej szalików niż wynosi średnia miesięczna liczba sprzedanych szalików?
- Ile wyniósł roczny zysk fanklubu ze sprzedaży szalików?

Przykład 118.

Średnia arytmetyczna wieku 12 pracowników pewnej firmy wynosi 40 lat. Po przyjęciu nowego pracownika średnia wieku pracowników zwiększyła się o rok.

Ile lat ma nowy pracownik tej firmy? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 27 B. 52 C. 28 D. 53

Rozwiązanie:

Obliczamy sumę lat 12 pracowników firmy:

$$12.40 = 480$$

Po przyjęciu jednego pracownika w firmie jest 13 pracowników, a średnia ich lat wynosi 41 lat.

Obliczamy sumę lat 13 pracowników firmy:

$13.41 = 533$

Obliczamy wiek przyjętego pracownika:

$$533 - 480 = 53$$

Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 118.

Rozwiąż samodzielnie

Tabela przedstawia maksymalne temperatury w miesiącach jesiennych i zimowych w pewnej miejscowości. Średnia tych temperatur jest równa 1°C . W tabeli pominięto maksymalną temperaturę z lutego, która była najniższa w podanym okresie.

miesiąc	X	XI	XII	I	II	III
temperatura maks. °C	10	5	1	−4	?	3

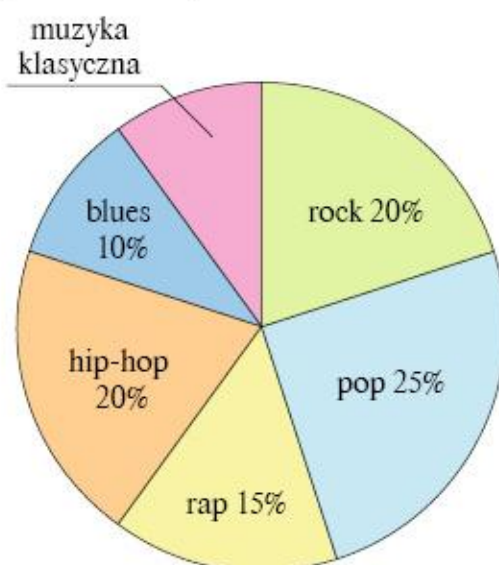
Ile wynosi maksymalna temperatura lutego? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 3°C B. -9°C C. -6°C D. 16°C

[illegible]

Przykład 119.

Wśród 60 uczniów ogniska muzycznego przeprowadzono ankietę dotyczącą ulubionego gatunku muzycznego. Wyniki tej ankiety przedstawiono na wykresie kołowym.



Wiedząc, że każdy z ankietowanych wybrał tylko jeden rodzaj muzyki, odpowiedz na pytania.

- Ile procent uczniów wskazało jako ulubiony gatunek muzykę klasyczną?
- Ilu uczniów wybrało hip-hop?
- O ilu uczniów mniej wskazało rap niż pop?

Rozwiązanie:

a) Obliczamy, ile procent uczniów wskazało muzykę klasyczną:

$$100\% - (20\% + 25\% + 15\% + 20\% + 10\%) = 10\%$$

Odpowiedź: Muzykę klasyczną wskazało 10% uczniów.

b) Obliczamy, ilu uczniów wskazało hip-hop:

$$20\% \cdot 60 = 0,2 \cdot 60 = 12$$

Odpowiedź: Hip-hop wskazało 12 uczniów.

c) Obliczamy, ilu uczniów wskazało rap:

$$15\% \cdot 60 = 9$$

Obliczamy, ilu uczniów wskazało pop:

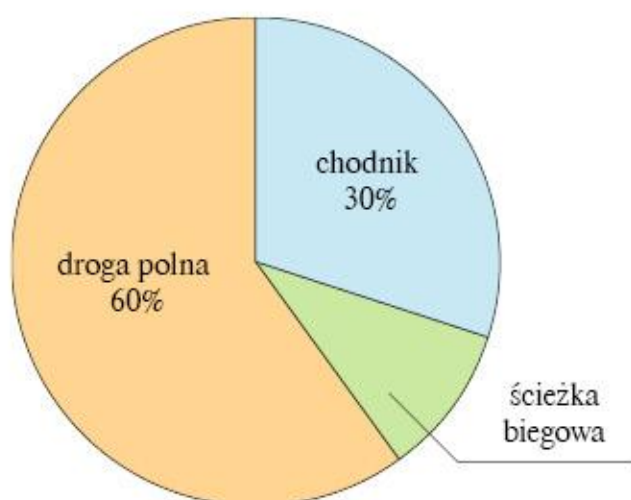
$$25\% \cdot 60 = 15$$

Obliczamy, o ilu uczniów mniej wskazało rap niż pop: $15 - 9 = 6$

Odpowiedź: O 6 uczniów mniej wskazało rap niż pop.

Ćwiczenie do przykładu 119.**Rozwiąż samodzielnie**

Pani Kasia codziennie trenuje nordic walking przez 1 godzinę 30 minut. Trasa, którą pokonuje, prowadzi chodnikiem, ścieżką biegową i drogą polną. Diagram przedstawia w procentach czas, w jakim pani Kasia porusza się po każdej z dróg.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A i B oraz spośród C i D.

Przez **A/B** czasu treningu pani Kasia szła ścieżką biegową.

A. 90%

B. 10%

Pani Kasia szła o **C/D** krócej chodnikiem niż drogą polną.

C. 30 min

D. 27 min

Przykład 120.

Ustal, czy średnia arytmetyczna dwóch liczb zmieni się i o ile, gdy

a) każdą liczbę zwiększymy o 5,

b) jedną z liczb zwiększymy o 10, a drugą zmniejszymy o 10.

Rozwiązanie:

Średnia arytmetyczna dwóch liczb a i b wynosi:

$$\frac{a+b}{2}$$

a) Obliczamy średnią arytmetyczną dla liczb $a + 5$ i $b + 5$:

$$\frac{a+5+b+5}{2} = \frac{a+b+10}{2} = \frac{a+b}{2} + 5$$

Odpowiedź: Średnia arytmetyczna wzrosła o 5.

b) Obliczamy średnią arytmetyczną dla liczb $a + 10$ i $b - 10$:

$$\frac{a+10+b-10}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Odpowiedź: Średnia arytmetyczna nie zmieni się.

Ćwiczenie do przykładu 120.

Rozwiąż samodzielnie

Podczas zawodów w strzelaniu do tarczy z łuku Robert uzyskał następujące wyniki: 9, 10, 8, 10, 4, 8, 9, 6, 5, 7.

Ile wynosi średnia arytmetyczna wyników, jakie uzyskał Robert podczas tych zawodów? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A.7

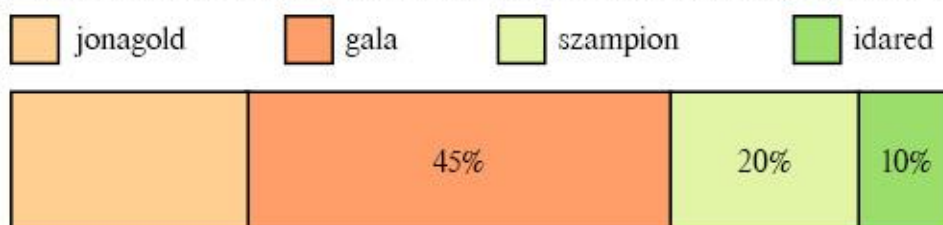
B.7.6

C. 8

D. 10

ZADANIA

121. W gospodarstwie sadowniczym zebrano jabłka następujących odmian: jonagold, gala, szampion i idared, łącznie 20 ton. Z diagramu można odczytać, jak kształtował się procentowy zbiór jabłek w tym gospodarstwie.



Ile ton jabłek odmiany jonagold zebrano w tym gospodarstwie? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 5 B. 2,5 C. 25 D. 2

122. Dane są dwa zbiory liczbowe: 1, 6, 3, 10 i 3, 0, 9, x, 5, które mają jednakową średnią arytmetyczną.

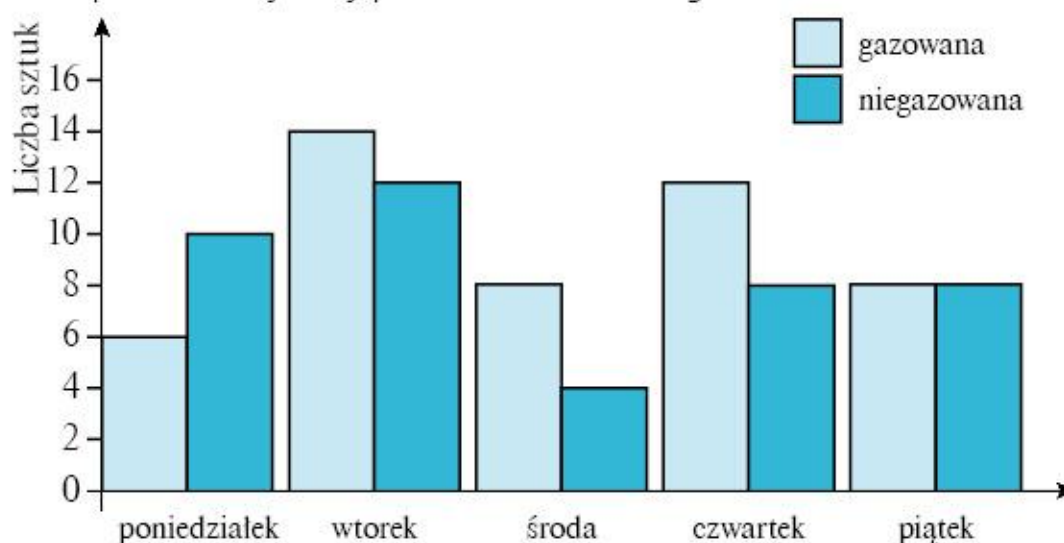
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W miejsce x należy wpisać liczbę

- A. 20 B. 4 C. 5 D. 8

Informacja do zadań 123. i 124.

W sklepiu szkolnym sprzedawano w butelkach półlitrowych wodę mineralną: niegazowaną i gazowaną. Dane dotyczące liczby butelek sprzedawanej wody przedstawiono na diagramie.



123. Które z poniższych zdań jest fałszywe? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. Tylko w jednym dniu sprzedano jednakową liczbę butelek wody gazowanej i niegazowanej.
 B. We środę sprzedano dwa razy więcej butelek wody gazowanej niż niegazowanej.
 C. Czwartek był dniem, kiedy sprzedano najwięcej butelek wody.
 D. Tylko w poniedziałek sprzedano więcej butelek wody niegazowanej niż gazowanej.

124. Uzupełnij zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A i B oraz spośród C i D.

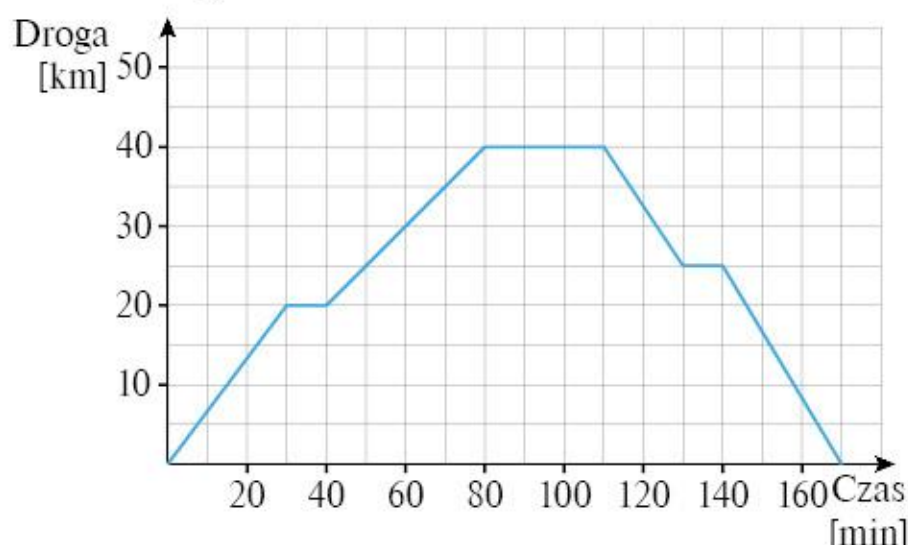
W ciągu tygodnia sprzedano o A/B wody gazowanej więcej niż niegazowanej.

- A. 6 l B. 3 l

Średnia dzienna sprzedaż wody wynosi C/D butelek.

- C. 18 D. 9

125. Robert odbył wycieczkę rowerową z Tomaszowa do Rawy. Po dotarciu na miejsce chłopiec przeznaczył trochę czasu na odpoczynek i ruszył w drogę powrotną. Wykres pokazuje, jak zmieniała się odległość Roberta od jego domu w zależności od czasu trwania wycieczki.



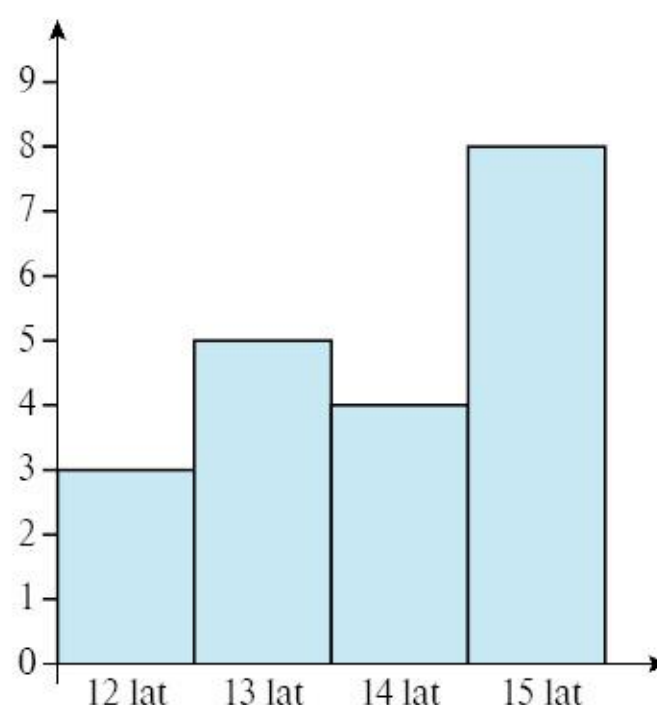
Korzystając z wykresu, oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Pierwszy odpoczynek Roberta nastąpił po przejechaniu 20 kilometrów.	P	F
Robert w obie strony przejechał 170 km.	P	F
W Rawie Robert spędził pół godziny.	P	F
Czas, w jakim Robert pokonał drogę z Tomaszowa do Rawy, był o 20 minut krótszy niż czas drogi z Rawy do Tomaszowa.	P	F

126. Na diagramie słupkowym przedstawiono informacje dotyczące wieku wszystkich uczniów należących do szkolnego koła szachowego.

Jaki procent wszystkich członków koła stanowią uczniowie w wieku 12 i 13 lat? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 40%
B. 15%
C. 25%
D. 8%



127*. Czy średnia arytmetyczna dwóch liczb a i b zmieni się, jeśli pierwszą z nich zmniejszymy dwa razy, a drugą zwiększymy również dwa razy? Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A, B lub C.

T	ponieważ	A.	jedną zmniejszamy, a drugą zwiększamy tyle samo razy.
		B.	różnica między otrzymaną średnią a średnią liczb a i b wyniesie $\frac{a+b}{4}$.
N		C.	różnica między otrzymaną średnią a średnią liczb a i b wyniesie $\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a$.

128. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się średnia miesięczna temperatura w Krakowie i w Gdańsku w pewnym roku kalendarzowym.

Uzupełnij zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A i B oraz spośród C i D.

Średnia miesięczna temperatura była wyższa w Krakowie niż w Gdańsku przez **A/B**.

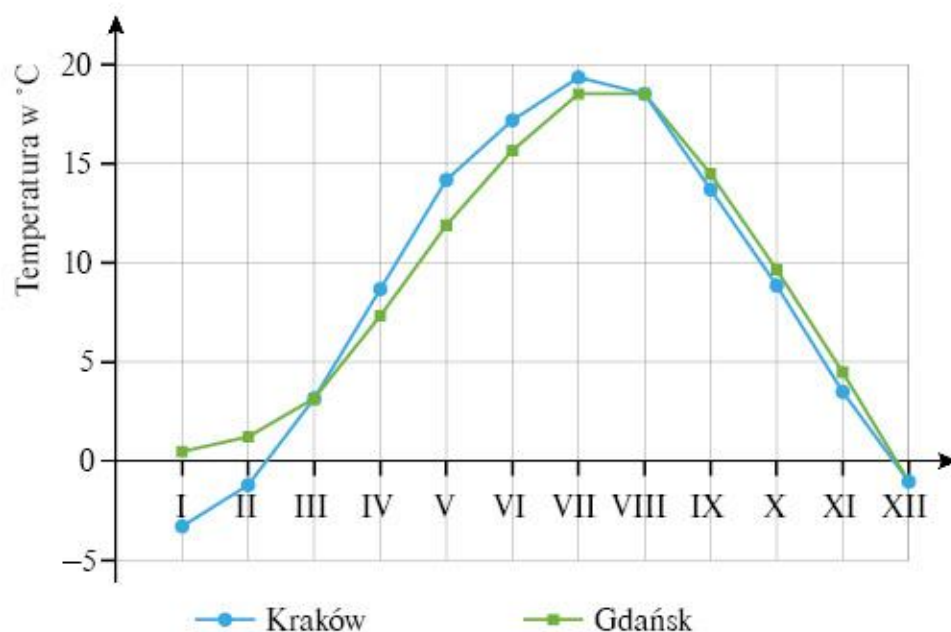
A. 6 miesięcy

B. 4 miesiące

W **C/D** średnia miesięczna temperatura w Krakowie była ujemna, a w Gdańsku była dodatnia.

C. styczniu, lutym i grudniu

D. styczniu i lutym



129. Wśród przedszkolaków przeprowadzono ankietę na temat: Kim będę, gdy dorosnę? Każdy przedszkolak mógł wskazać tylko jeden zawód. Wyniki zebrano w tabeli.

Przedstaw je na diagramie słupkowym. Oblicz, ile procent przedszkolaków chce być strażakiem.

Zawód	strażak	policjant	piłkarz	nauczyciel	piosenkarz	kierowca	aktor
Liczba	14	7	9	13	9	6	12

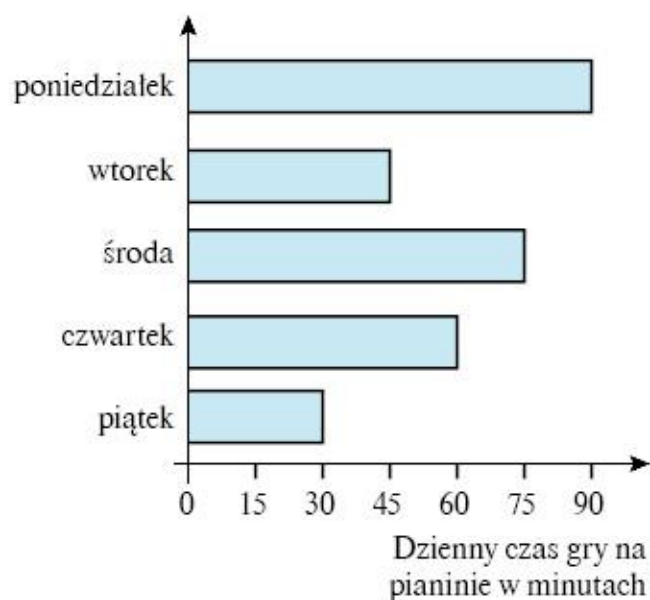
130. Zosia ćwiczy grę na pianinie przez 5 dni w tygodniu. Diagram przedstawia, ile minut dziennie dziewczyna poświęca na lekcje gry na pianinie

Na podstawie informacji z diagramu odpowiedz na pytania i wykonaj polecenie.

a) Ile godzin tygodniowo Zosia przeznaczą na lekcje gry na pianinie?

b) Jaki procent tygodniowego czasu przeznaczonego na grę, stanowi czas lekcji w poniedziałek?

c) Sporządź procentowy diagram kołowy przedstawiający rozkład czasu, jaki Zosia poświęca na lekcje gry na pianinie każdego dnia.



131. W tabeli przedstawiono zestawienie wysokości miesięcznej pensji netto w pewnej firmie.

Płaca netto	2000 zł	2500 zł	3000 zł	7500 zł
Liczba pracowników	2	18	3	2

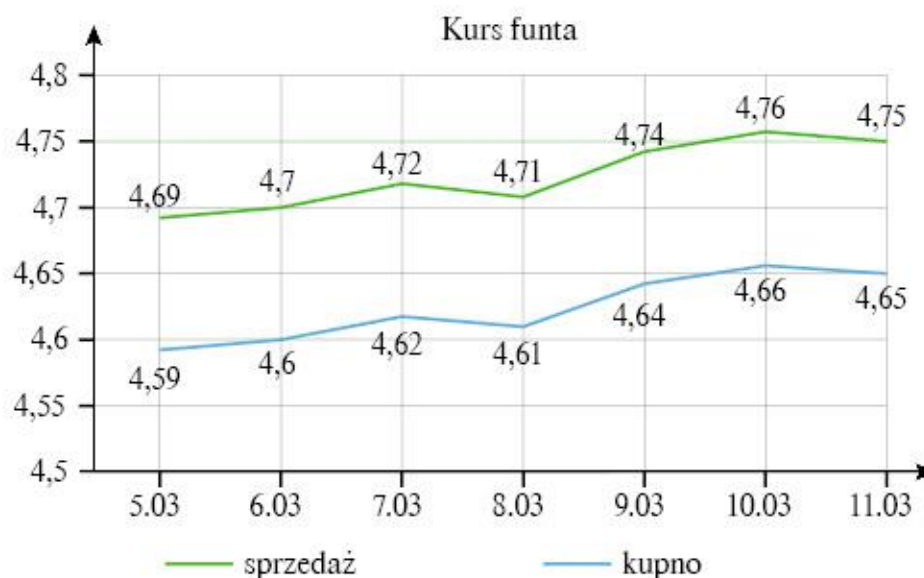
a) Oblicz, ile wynosi średnia arytmetyczna wysokości pensji w tej firmie.

b) Jaki procent załogi stanowią pracownicy, którzy zarabiają poniżej średniej?

132. Wykres przedstawia zmiany kursu funta w okresie tygodnia w kantorze „Złoty interes”. Kurs kupna to kwota, jaką kantor płaci, kupując 1 funta, a kurs sprzedaży, to kwota, za jaką kantor sprzedaje 1 funta.

Odpowiedz na pytania.

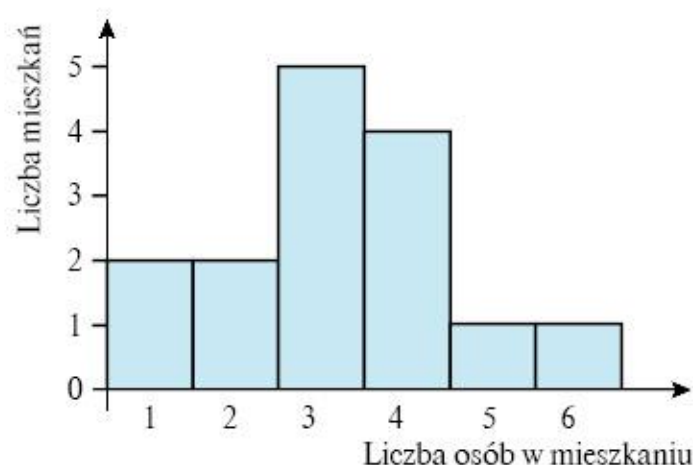
- W jakim dniu był najniższy kurs sprzedaży funta, a w jakim dniu kurs kupna był najwyższy?
- Ile złotych zapłacił klient, który kupił w dniu 5.03 kwotę 500 funtów?
- Jaką kwotę otrzymał klient, który 10.03 sprzedał 500 funtów?



133. Zosia mieszka z rodzicami w trzypiętrowym bloku. Na parterze tego bloku zlokalizowane są sklepy, a na każdym z pozostałych pięter jest jednakowa liczba lokali mieszkalnych. Na diagramie Zosia przedstawiła, jak kształtuje się liczba osób w poszczególnych mieszkaniach jej bloku.

Korzystając z tych danych, odpowiedz na pytania.

- Ile mieszkań znajduje się w tym bloku i ile mieszkań jest na każdym piętrze?
- Ile osób mieszka w tym bloku?
- Ile wynosi średnia liczba lokatorów przypadających na jedno mieszkanie? Wynik podaj po zaokrągleniu do jedności.
- Jaki procent mieszkań w tym bloku zajmują rodziny trzyosobowe?



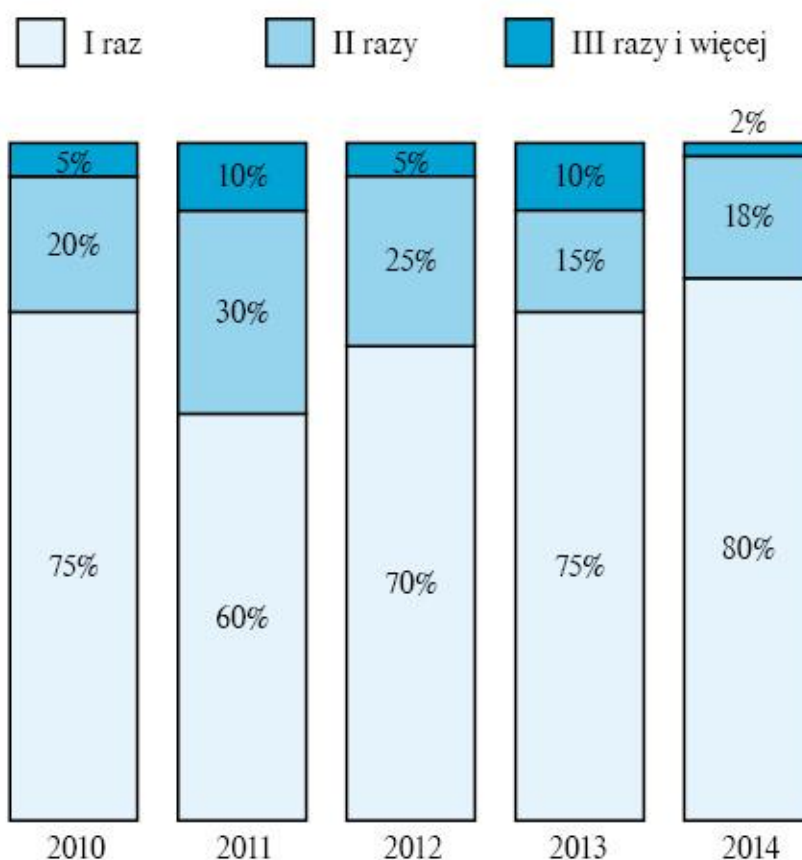
134. Średnia wieku 11 zawodników drużyny piłkarskiej wynosi 19 lat. Natomiast średnia wieku zawodników tej drużyny bez bramkarza jest o pół roku mniejsza.

Oblicz, ile lat ma bramkarz tej drużyny.

135. Po ukończeniu szkolenia w pewnej szkole nauki jazdy kursanci zdają egzamin na prawo jazdy, przystępując do niego jeden raz, dwa razy lub trzy i więcej razy. Diagram przedstawia zdawalność egzaminu na prawo jazdy w tej szkole na przestrzeni 5 lat.

Korzystając z diagramu, odpowiedz na pytania.

- W którym roku zdało egzamin na prawo jazdy, przystępując do niego tylko raz, więcej niż $\frac{3}{4}$ kursantów tej szkoły?
- Ile osób zdało egzamin w 2012 roku, przystępując do niego raz lub dwa razy, jeśli wiadomo, że w tym roku uczęszczało do tej szkoły 1200 osób?
- Czy w 2010 roku i 2013 roku tyle samo osób zdało egzamin, przystępując do niego tylko raz?



D. CMXL

F

D. 52

D. $\sqrt{3}, -\sqrt{6}, \sqrt{12}$ [illegible]

141. Dany jest iloczyn dwóch liczb $735 \cdot 28 = 20\,580$.

1 pkt

Korzystając z tej zależności, uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wartość wyrażenia $7,35 \cdot 2,8$ jest równa A/B.

A. 20,58

B. 2,058

Wartość wyrażenia $205,8 : 73,5$ jest równa C/D.

C. 28

D. 2,8

142. Opakowanie zawierające 30 dag suszonych moreli kosztuje 9,75 zł, a opakowanie 0,5 kg takich samych suszonych moreli kosztuje 15,75 zł. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1 pkt

Za 1,5 kg tych moreli zapłacimy mniej, kupując opakowania po 0,5 kg.	P	F
Za dwa mniejsze i dwa większe opakowania moreli zapłacimy 50 zł.	P	F

143. Z zestawu liczb: 524, 111, 315, 605 Piotr wykreślił wszystkie liczby podzielne przez 3, a następnie wszystkie liczby podzielne przez 4. Pozostała jedna liczba.

1 pkt

Która liczba pozostała? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 524

B. 111

C. 315

D. 605

144. Dane jest wyrażenie $\frac{9^5 + 9^5 + 9^5}{3^3 \cdot 3^3}$. Czy wartość tego wyrażenia jest wielokrotnością liczby 9?

1 pkt

Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	iloczyn wszystkich wykładników jest liczbą podzielną przez 9.
N		B.	wykładnik potęgi 3^5 nie jest podzielny przez 9.
		C.	wartość tego wyrażenia można zapisać w postaci $9 \cdot 3^3$.

145. Zapisano sumę 81 jednakowych składników, z których każdy równy jest $\frac{1}{3}$.

1 pkt

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3}}_{81 \text{ składników}}$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość tej sumy jest liczbą

A. równą 27

B. większą od 27

C. równą $\left(\frac{1}{3}\right)^{81}$

D. podzielną przez 81

146. Odcinek AB jest średnicą koła o środku O , a współrzędne punktów A i B są odpowiednio równe $(3, 1)$ i $(-5, 2)$. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

1 pkt

Punkt O ma współrzędne

A. $(-1, 1,5)$ B. $(8, -0,5)$ C. $(2, -1,5)$ D. $(1,5, -1)$

147. Masa Ziemi wynosi $6 \cdot 10^{24}$ kg, a masa Księżyca to $7 \cdot 10^{22}$ kg. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

1 pkt

Masa Ziemi jest większa od masy Księżyca o

A. $5,93 \cdot 10^{22}$ kgB. $5,93 \cdot 10^{24}$ kgC. $6,07 \cdot 10^{24}$ kgD. $13 \cdot 10^{46}$ kg

148. W sklepie osiedlowym jogurt sprzedawany jest w kubeczkach o pojemności 300 ml w cenie 2,70 zł. W supermarkecie opakowanie takiego samego jogurtu o pojemności o 10% większej kosztuje 2,99 zł. **Czy jogurt w sklepie osiedlowym jest tańszy od tego w supermarkecie? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.**

T	ponieważ	A.	ceny 100 ml jogurtu w sklepie osiedlowym i supermarkecie są takie same.
		B.	cena 100 ml jogurtu w sklepie osiedlowym jest mniejsza niż w supermarkecie.
N		C.	cena 100 ml jogurtu w supermarkecie jest mniejsza niż w sklepie osiedlowym.

149. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Iloczyn liczby $2\frac{1}{5}$ i jej odwrotności jest równy 1.	P	F
Suma liczby 1,7 i liczby do niej przeciwnej wynosi 0.	P	F

150. W szkolnych rozgrywkach w piłkę ręczną każda drużyna mogła otrzymać 2 punkty za zwycięstwo, 0 punktów za remis oraz traciła 1 punkt za przegrany mecz. Jeśli drużyna nie przystąpiła do meczu, wówczas traciła 2 punkty. Drużyna Orłów zdobyła 17 punktów, przy czym 4 razy zremisowała oraz 5 razy przegrała. Ponadto wiadomo, że rozegrała wszystkie zaplanowane mecze. **Oblicz, jaki procent wszystkich meczów drużyny Orłów stanowiły mecze przez nią wygrane.**

[illegible]

151. Kwadrat ma taki sam obwód jak prostokąt o bokach długości $3\sqrt{7}$ cm i $5\sqrt{7}$ cm. Oblicz, o ile centymetrów kwadratowych pole kwadratu jest większe od pola tego prostokąta. Zapisz obliczenia.

[illegible]

152. Pan Józef jest właścicielem plantacji borówki amerykańskiej. W ostatnim roku zbiór wyniósł 2 tony tych owoców. Pan Józef sprzedał 25% zebranych borówek po 9 zł za kilogram, 40% – po 7,5 zł za kilogram, a pozostałą część zbioru – po 6 zł za kilogram. **Oblicz, ile pieniędzy uzyskał pan Józef ze sprzedaży borówki. Zapisz obliczenia.**

[illegible]

153. Adam kupił drożdżówkę za 2 zł. Dwa tygodnie później płacąc za taką samą drożdżówkę, otrzymał z 4 zł resztę w wysokości 1,50 zł. **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

1 pkt

Cena tej drożdżówki w ciągu dwóch tygodni

- A. wzrosła o 25% B. zmalała o 25% C. wzrosła o 20% D. zmalała o 20%

154. Tomek zapisał następującą równość $1^m \cdot 11 \cdot 1^m = 1^p \cdot (1^q)^2$. **Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.**

1 pkt

Prawą stronę tej równości można zapisać prościej jako 1^p .	P	F
Równość jest prawdziwa dla $m = 3$.	P	F

155. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

1 pkt

Dla liczby $a = 4\sqrt{10}$ najbliższą położoną na osi liczbowej liczbą naturalną jest A/B.

- A. 40 B. 13

Liczba $b = 10 - 7\sqrt{2}$ jest liczbą C/D.

- C. większą od 1 D. dodatnią, ale mniejszą od 1

156. W klasie 8a jest 10 dziewcząt i 15 chłopców. Średnia wzrostu dziewcząt wynosi 162 cm, a średnia wzrostu chłopców to 172 cm. **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

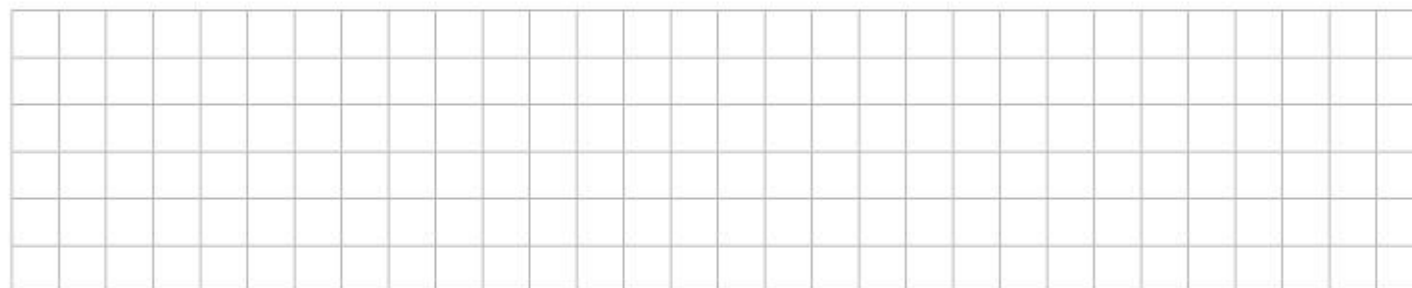
1 pkt

Średnia wzrostu uczniów tej klasy wynosi

- A. 167 cm B. 168 cm C. 166 cm D. 169 cm

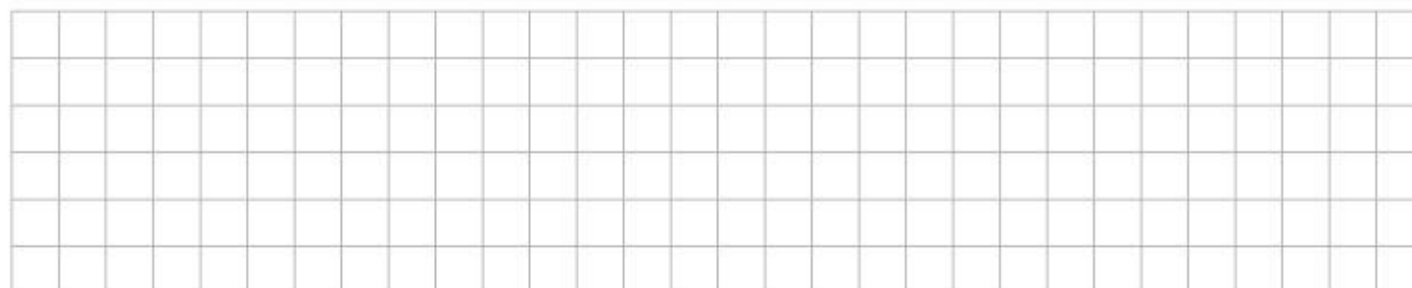
157. W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A = (2, -2)$ i $B = (4, 2)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $O = (0, 0)$ to środek przekątnych AC i BD tego równoległoboku. **Oblicz współrzędne wierzchołków C i D tego równoległoboku. Wykonaj odpowiedni rysunek w układzie współrzędnych. Zapisz obliczenia.**

3 pkt



158. Iloczyn cyfr pewnej liczby dwucyfrowej wynosi 18. **Uzasadnij, że są dokładnie 4 liczby dwucyfrowe spełniające ten warunek.**

2 pkt



___ / 35 pkt

___ %

TEORIA

■ Wyrażenie algebraiczne i jego wartość liczbową

Wyrażenie algebraiczne	Wartość liczbową wyrażenia
Wyrażenie algebraiczne to wyrażenie, które zawiera liczby, litery, znaki działań i nawiasy.	Obliczenie wartości liczbowej wyrażenia algebraicznego polega na podstawieniu liczb w miejsce liter i wykonaniu podanych działań zgodnie z ich kolejnością.
PRZYKŁADY: $8x$, $-0,2xy^4$, $a+2b$, $\frac{2z}{3}$ $(x-y) \cdot (x+y)$, $\frac{(a+b) \cdot h}{2}$	PRZYKŁADY: $-3x + 2y^2$ dla $x = -1$ i $y = 0,5$ $-3 \cdot (-1) + 2 \cdot (0,5)^2 = 3,5$

■ Zapisywanie i nazywanie wyrażeń algebraicznych

Nazwę wyrażenia, w którym występuje kilka działań, określa to działanie, które wykonujemy jako ostatnie, zgodnie z obowiązującą kolejnością działań.

PRZYKŁADY: $2a + b^3$	– suma podwojonej liczby a oraz sześcianu liczby b
$3 - c^2$	– różnica liczby 3 i kwadratu liczby c
$(x - y)(x + y)$	– iloczyn różnicy liczb x i y oraz sumy tych liczb
$\frac{a+b}{6}$	– iloraz sumy liczb a i b przez liczbę 6

Wyrażenia algebraiczne umożliwiają zapisywanie zależności matematycznych oraz treści zadań.

PRZYKŁADY: $(2x + 3y)$ złotych – koszt zakupu 2 kg jabłek po x złotych za kilogram oraz 3 kg gruszek po y złotych za kilogram

■ Jednomiany. Działania na jednomianach

Jednomian – wyrażenie algebraiczne, które jest pojedynczą liczbą, literą lub iloczynem liczb i liter. Iloczyn jednomianów to też jednomian. Jednomiany zapisujemy w postaci uporządkowanej kolejno: znak → czynnik liczbowy → czynniki literowe w kolejności alfabetycznej

Jednomiany podobne – jednomiany, które różnią się tylko współczynnikami liczbowymi.

Jednomiany przeciwne – dwa jednomiany podobne, których współczynniki liczbowe są liczbami przeciwnymi. Suma dwóch jednomianów przeciwnych jest równa 0.

PRZYKŁADY: 6 , -7 , a , y^3 , $9abc$, x^2y , $3a \cdot \frac{1}{2}b$

PRZYKŁAD: $\frac{2}{7}x^2y$ i $-5x^2y$

PRZYKŁAD: $-7,3y + 7,3y = 0$

Współczynnik liczbowy – liczba występująca na początku uporządkowanego jednomianu.

PRZYKŁADY: dla jednomianu $-2ab$ współczynnik liczbowy wynosi -2
dla jednomianu xyz współczynnik liczbowy wynosi 1

Redukcja jednomianów podobnych polega na zapisaniu w postaci jednego jednomianu sumy lub różnicy jednomianów podobnych.

PRZYKŁAD: $4x + 3x - 5x = 2x$

■ Sumy algebraiczne. Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

Sumą algebraiczną nazywamy sumę jednomianów; jednomiany, które dodajemy, to wyrazy sumy. Sumą algebraiczną jest także wyrażenie powstałe z odejmowania jednomianów, ponieważ odejmowanie można zastąpić dodawaniem liczby przeciwnej.

PRZYKŁAD: $0,3x + 5,5y, 2a - \frac{3}{7}ab = 2a + \left(-\frac{3}{7}ab\right)$

Aby dodać sumy algebraiczne, należy opuścić nawiasy, w których te sumy się znajdują. Jeśli przed nawiasem jest plus lub nie występuje żaden znak, to każdy wyraz sumy z nawiasu po opuszczeniu go pozostawiamy bez zmian. Następnie, jeśli to możliwe, przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych.

PRZYKŁAD: $(-2x^2 + x - 1) + (x^2 - x + 3) =$
 $= -2x^2 + x - 1 + x^2 - x + 3 = -x^2 + 2$

Aby odjąć sumy algebraiczne, należy opuścić nawiasy, w których znajdują się te sumy. Jeśli przed nawiasem jest minus, to zmieniamy znak każdego wyrazu sumy z nawiasu na przeciwny. Następnie przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych, jeśli takie wyrazy występują.

PRZYKŁAD: $(7a - 2b + 1) - (4a - b + 1) =$
 $= 7a - 2b + 1 - 4a + b - 1 = 3a - b$

■ Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

Aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, należy każdy wyraz sumy pomnożyć przez ten jednomian.

PRZYKŁAD: $3\left(\frac{1}{2}a - b\right) = 3 \cdot \frac{1}{2}a + 3 \cdot (-b) = 1,5a - 3b$

Aby podzielić sumę algebraiczną przez liczbę, możemy sumę pomnożyć przez odwrotność tej liczby.

PRZYKŁAD: $(6x + 3y - 12z) : 3 = (6x + 3y - 12z) \cdot \frac{1}{3} =$
 $= 2x + y - 4z$

■ Wyłączanie czynnika poza nawias

Jeżeli wszystkie wyrazy sumy algebraicznej mają wspólny czynnik liczbowy, to tę sumę możemy przedstawić w postaci iloczynu tego czynnika liczbowego przez pewną sumę.

PRZYKŁAD: $15x - 5 = 5 \cdot 3x - 5 \cdot 1 = 5(3x - 1)$

■ Mnożenie sum algebraicznych

Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, mnożymy każdy wyraz jednej sumy przez każdy wyraz drugiej sumy, a otrzymane iloczyny dodajemy.

PRZYKŁAD: $(3 + a) \cdot (b - c) = 3 \cdot b + 3 \cdot (-c) + a \cdot b + a \cdot (-c) = 3b - 3c + ab - ac$

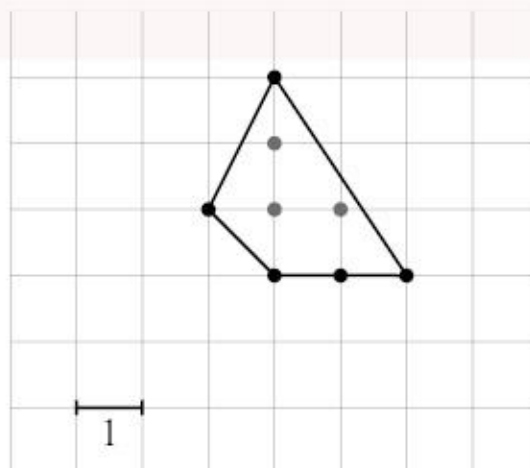
ZADANIA EGZAMINACYJNE KROK PO KROKU

Informacje do przykładów 159. i 160.

Punkt kratowy to miejsce przecięcia się linii kwadratowej siatki. Pole wielokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach kratowych kwadratowej siatki na płaszczyźnie, można obliczyć ze wzoru Picka: $P = W + \frac{1}{2}B - 1$,

gdzie P oznacza pole wielokąta, W – liczbę punktów kratowych leżących wewnątrz wielokąta, a B – liczbę punktów kratowych leżących na brzegu tego wielokąta.

W wielokącie przedstawionym na rysunku $W = 3$ oraz $B = 5$, zatem $P = 4,5$.



Przykład 159.

Egzamin 8-klasisty CKE

Wewnątrz pewnego wielokąta znajduje się 5 punktów kratowych, a na jego brzegu jest 6 punktów kratowych. **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Pole tego wielokąta jest równe

A. 6

B. 6,5

C. 7

D. 7,5

Rozwiązanie:

Z informacji podanych przed zadaniem ustalamy, że $W = 5$ oraz $B = 6$.

Obliczamy dla tych danych P , korzystając ze wzoru Picka: $P = 5 + \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 7$

Odpowiedź: C

Ćwiczenie do przykładu 159.

Rozwiąż samodzielnie

Pewnego październikowego dnia zanotowano temperatury: 15°C w Warszawie i 68°F w Chicago.

Oceń prawdziwość każdego zdania. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Temperatura w Chicago była o 5°C wyższa niż temperatura w Warszawie.	P	F
Różnice temperatur wyrażone w stopniach Celsjusza i w stopniach Fahrenheita były równe.	P	F



Przykład 160.

Egzamin 8-klasisty CKE

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wielokąt, którego pole jest równe 15, może mieć **A/B** punktów kratowych leżących na brzegu wielokąta.

- A.7 B.8

Pole wielokąta, który ma dwukrotnie więcej punktów kratowych leżących na brzegu wielokąta niż punktów leżących wewnątrz, wyraża się liczbą C/D .

- C. parzysta D. nieparzysta

Rozwiązanie:

Przekształcamy wzór Picka, wyznaczając z niego B :

$$P = W + \frac{1}{2}B - 1 \qquad P - W + 1 = \frac{1}{2}B$$

$$B = 2(P - W + 1)$$

Liczba B jest liczbą podzielną przez 2, ponieważ zapisaliśmy ją w postaci iloczynu liczby 2 i liczby $P - W + 1$. Stąd wynika, że $B = 8$.

Na podstawie informacji z zadania zapisujemy, że liczba punktów kratowych leżących wewnątrz wielokąta jest równa W , a liczba punktów kratowych leżących na brzegu wielokąta jest równa $2 \times W$.

Wstawiamy te liczby do wzoru Picka: $P = W + \frac{1}{2} \cdot 2W - 1$ i doprowadzamy do najprostszej postaci: $P = 2W - 1$. Liczba P jest liczbą nieparzystą.

Odpowiedź: BD

Ćwiczenie do przykładu 160.

Rozwiąż samodzielnie

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeśli n jest liczbą naturalną dodatnią, to liczba $7n+4$

- A. przy dzieleniu przez 4 daje resztę 7.
B. dzieli się bez reszty przez 11.
C. dzieli się bez reszty przez 7.
D. przy dzieleniu przez 7 daje resztę 4.

Egzamin 8-klasisty CKE

Dane są trzy wyrażenia:

$$F = x - (2x + 5), \quad G = 6 - (-3x + 2), \quad H = 5 - (2x + 4).$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej wartości x prawdziwa jest równość

A. $F + G = H$

B. $F + H = G$

$$C, G + H = F$$

D. $F + G + H = 0$

Rozwiązanie:

Każde wyrażenie doprowadzamy do najprostszej postaci, opuszczając nawias i redukując wyrazy podobne:

$$F = x - (2x + 5) = x - 2x - 5 = -x - 5$$

$$G = 6 - (-3x + 2) = 6 + 3x - 2 = 3x + 4$$

$$H = 5 - (2x + 4) = 5 - 2x - 4 = -2x + 1$$

Sprawdzamy, czy prawdziwa jest równość zapisana w punkcie A:

$$F+G=-x-5+3x+4=2x-1, F+G \neq H$$

Sprawdzamy, czy prawdziwa jest równość zapisana w punkcie B:

$$F+H=-x-5+(-2x+1)=-3x-4, F+H \neq G$$

Sprawdzamy, czy prawdziwa jest równość zapisana w punkcie C:

$$G+H=3x+4+(-2x+1)=x+5, G+H \neq F$$

Sprawdzamy, czy prawdziwa jest równość zapisana w punkcie D:

$$F+G+H=-x-5+3x+4+(-2x+1)=2x-1-2x+1=0, F+G+H=0$$

Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 161.

Rozwiąż samodzielnie

Dane są wyrażenia: $A=3x^2-2x$, $B=-x^2+5$ i $C=x^2-2x+1$. Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne.

a) $A - B$

b) $C - 2A$

c) $(A + B) - C$

d) $A \times B$

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Przykład 162.

Tomek kupił 2 kartony soku po a złotych oraz 3 butelki wody mineralnej po b złotych. Za zakupy zapłacił banknotem 50 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażeniem opisującym, ile reszty otrzymał Tomek, jest

A. $50 - 2a + 3b$

B. $50 - 3a + 2b$

C. $50 - 2a - 3b$

D. $50 - (2a - 3b)$

Rozwiązanie:

Zapisujemy w postaci wyrażenia algebraicznego kwotę, jaką Tomek zapłacił za swoje zakupy: $2a + 3b$

Zapisujemy, ile reszty otrzymał Tomek z kwoty 50 zł:

$$50 - (2a + 3b) = 50 - 2a - 3b$$

Odpowiedź: C

Ćwiczenie do przykładu 162.

Rozwiąż samodzielnie

Cenę samochodu, który początkowo kosztował a zł, dwukrotnie podwyższono o 10% procent. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Nowa cena tego samochodu wynosi

- A. $1,21a$ B. $1,1a + 0,1$ C. $1,2a$ D. $a + 0,2$

Przykład 163.

Które wyrażenie algebraiczne przyjmuje dla $x = -2$ wartość dodatnią? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $2x^3 + 3x^2 - x$ B. $2x^3 - 3x^2 - x$ C. $2x^3 + 3x^2 + x$ D. $-2x^3 + 3x^2 - x$

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość liczbową każdego wyrażenia spośród podanych:

A. $2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - (-2) = -16 + 12 + 2 = -2$

$$\text{B. } 2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - (-2) = -16 - 12 + 2 = -26$$

$$\text{C. } 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + (-2) = -16 + 12 - 2 = -6$$

D. $-2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - (-2) = 16 + 12 + 2 = 30$

Wybieramy wyrażenie, którego wartość jest liczbą dodatnią.

Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 163.

Rozwiąż samodzielnie

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla $x = -1$ wartość równą 0 przyjmuje wyrażenie

- A. $x^3 + x^2 + x$ B. $-3x^3 + 2x^2 - x$ C. $-x^3 - x^2 - x$ D. $2x^3 + 3x^2 + x$

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Rozwiązanie:

$$2(a-3b)+4a=2a-6b+4a=6a-6b \neq 6a-3b, \text{ zdanie fałszywe}$$

Zapisujemy w postaci wyrażenia połowę różnicy kwadratów liczb x i y : $\frac{1}{2}(x^2 - y^2) \cdot \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = \frac{(x - y)^2}{2}$, zdanie fałszywe

Sprawdzamy, czy jednomiany mają współczynniki liczbowe, które są liczbami przeciwnymi, oraz czy liczby x i y w obu jednomianach mają jednakowe potęgi. W jednomianach $5,5xy^2$ oraz $-5,5x^2y$ potęgi przy liczbach x są różne oraz potęgi przy liczbach y są różne, zdanie fałszywe

Ćwiczenie do przykładu 164.

Rozwiąż samodzielnie

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Przykład 165.

Książka jest 10 razy droższa od długopisu, a ołówek jest o 3 złote tańszy od długopisu.

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile wynosi koszt łączny wszystkich przedmiotów, przyjmując jako niewiadomą:

- a) x – cenę długopisu b) y – cenę książki c) z – cenę ołówka

Rozwiązanie:

- a) Ustalamy zależności, o których mowa w zadaniu, przyjmując za x – cenę długopisu

Wówczas: $10x$ – cena książki,

$x - 3$ – cena ołówka

Zapisujemy łączny koszt tych przedmiotów: $x + 10x + x - 3$

- b) Ustalamy zależności, o których mowa w zadaniu, przyjmując za y – cenę książki.

Wówczas: $\frac{y}{10}$ – cena długopisu,

$$\frac{y}{10} - 3 - \text{cena ołówek}$$

Zapisujemy łączny koszt tych przedmiotów: $\frac{y}{10} + y + \frac{y}{10} - 3$

- c) Ustalamy zależności, o których mowa w zadaniu, przyjmując za z – cenę ołówka.

Wówczas: $z+3$ – cena długopisu,

 $10(z+3)$ – cena książki

Zapisujemy łączny koszt tych przedmiotów:

$$z + 3 + 10(z + 3) + z$$

Ćwiczenie do przykładu 165.

Rozwiąż samodzielnie

Kasia ma x banknotów 10 zł i y banknotów 20 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kwota pieniędzy, która ma Kasia, wynosi

- A. $10(x + 2y)$ zł B. $30(x + y)$ zł C. $(20x + 10y)$ zł D. $(x + y)$ zł

Przykład 166.

Czy prawdą jest, że wartość wyrażenia $(x^2 + 1)^2 - (x^4 + 1)$ dla dowolnej liczby x jest równa 0? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A, B lub C.

T	ponieważ	A. $(x^2 + 1)^2 = x^4 + 1$
N		B. jest równa 0 tylko dla $x = 0$.
		C. jest zawsze liczbą dodatnią.

Rozwiązanie:

Przekształcamy wyrażenie $(x^2 + 1) - (x^4 + 1)$ do najprostszej postaci, opuszczając nawiasy i redukując wyrazy podobne:

$$(x^2 + 1)(x^2 + 1) - (x^4 + 1) = x^4 + x^2 + x^2 + 1 - x^4 - 1 = 2x^2$$

Wyrażenie $2x^2$ jest równe 0, tylko dla $x = 0$.

Odpowiedź: NB

Ćwiczenie do przykładu 166.

Rozwiąż samodzielnie

Czy wyrażenie $(x-2)(x-3)$ przyjmuje wartość ujemną dla liczby $x = \sqrt{3}$? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A, B lub C.

T	ponieważ	A.	jeden z czynników tego iloczynu jest dodatni, a drugi ujemny.
N		B.	liczba $9 - 5\sqrt{3}$ jest dodatnia.
		C.	oba czynniki tego iloczynu są dodatnie.

Przykład 167.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Cenę nart równą x dwukrotnie obniżono o 20%. Wyrażenie A/B opisuje cenę nart po obu obniżkach.

B. 0,64x

Cenę hulajnoży równą x podwyższono o 20%, a następnie tę nową cenę obniżono też o 20%. Wyrażenie C/D opisuje cenę hulajnoży po obu zmianach.

D. $0.96x$

Rozwiązanie:

Zapisujemy cenę nart po pierwszej obniżce o 20%, jest to $0,8x$.

Zapisujemy cenę nart po drugiej obniżce o 20%, jest to $0,8 \times 0,8x = 0,64x$.

Zapisujemy cenę hulajnoqi po podwyżce o 20%, jest to $1,2x$.

Zapisujemy cenę hulajnogi po obniżce o 20%, jest to $0,8 \times 1,2x = 0,96x$.

Odpowiedź: BD

ZADANIA

169. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $3x^4 - 2x^2 - 1$ przyjmuje wartość dodatnią dla

- A. $x = 0$ B. $x = 1$ C. $x = -1$ D. $x = -2$

170. Dziadek podarował Asi 26 znaczków jako początek jej kolekcji. Co tydzień Asi przybywa x nowych znaczków, a po t tygodni ma już ich 278.

Które wyrażenie pozwala obliczyć, ile tygodni Asia zbierała znaczki? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\frac{278}{x}$ B. $\frac{252}{x}$ C. $\frac{278}{t}$ D. $278 - 26 - x$

171. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz spośród oznaczonych literami C i D.

Wyrażenie algebraiczne postaci $\left(\frac{1}{2}a + b\right)^3$ to A/B.

- A. sześcián połowy liczby a i liczby b B. sześcián sumy połowy liczby a i liczby b
Sumę kwadratu liczby x i ilorazu liczby y przez liczbę 10 zapiszemy jako C/D.

- C. $x^2 + \frac{y}{10}$ D. $\frac{x^2 + y}{10}$

172. Rysunki pokazują, ile zapalek potrzeba do budowy jednego pięciokąta i dwóch pięciokątów. Odpowiedz na pytanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Które wyrażenie pozwala obliczyć liczbę zapalek potrzebnych do budowy n pięciokątów według pokazanego sposobu?

- A. $5n + 2$ B. $7n$ C. $\left(\frac{7+12}{3}\right) \cdot n$ D. $\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 12$



173. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Błędnie wyłączono wspólny czynnik przed nawias w przykładzie

- A. $2x^2 + 4x + 6 = 2(x^2 + 2x + 3)$ B. $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}a + 2\frac{1}{3}b = \frac{1}{3}(2 - 5a + 7b)$
C. $a\sqrt{2} - b\sqrt{2} + 2c = \sqrt{2}(a - b + c\sqrt{2})$ D. $2^{10} + 2^{12} \cdot x - 2^{14} \cdot y = 2^{10}(1 + 4x + 16y)$

174*. Ada z sumy algebraicznej $2ab - 8a^2$ wyłączyła poza nawias jednomian $2a$. Tomek z sumy algebraicznej $3b^3 - 12ab^2$ wyłączył czynnik w ten sposób, że w nawiasie pozostało takie same wyrażenie, jak w przykładzie wykonanym przez Adę.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tomek wyłączył przed nawias

- A. $3b^2$ B. $-3b^2$ C. $3b$ D. $-3b$

175. Jeden z kątów trójkąta ma miarę 2α , a drugi miarę $\alpha + 30^\circ$.

Ile wynosi miara trzeciego kąta tego trójkąta? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

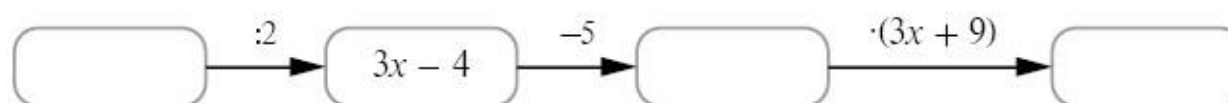
- A. $3\alpha + 30^\circ$ B. 150° C. $150^\circ - 3\alpha$ D. $180^\circ - 3\alpha$

176. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Inną wartością dla $x = 5$ niż dla $x = -5$ przyjmuje wyrażenie

- A. $|x| - 2$ B. $x^2 - 1$ C. $1 - 0,2x$ D. $(5 - x)(5 + x)$

177. Uzupełnij graf.



178. Zapisz w postaci sumy algebraicznej:

- a) pole rombu o przekątnych długości $a + 4$ i $a + 10$,
 b) pole trapezu o podstawach długości $x + 1$ i $x + 5$ oraz wysokości $x + 3$.

179. Dane są wyrażenia: $K = a^2 - 2a$, $L = -3a^2 + 5$ i $M = 2a^2 - a - 1$

Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $K + M$ b) $L - 2K$ c) $(K + L) - M$ d) $K \cdot L$

180. Zapisz liczbę naturalną:

- a) podzielną przez 3,
 b) taką, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3,
 c) większą o 8 od liczby będącej wielokrotnością 11.

181. Trójkąt równoboczny ma taki sam obwód, jak kwadrat o boku $3x + 1,5y$. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego długość boku tego trójkąta.

182. Zapisz w postaci sumy algebraicznej:

- a) pole powierzchni sześcianu o krawędzi $x + 3$,
 b) objętość prostopadłościanu o krawędziach długości x , $x + 2$ i $2x - 1$.

183. Podczas testu uczniowie otrzymali do rozwiązania 100 zadań, przy czym x zadań stanowiły zadania zamknięte, a pozostałe zadania, których było y , to zadania otwarte. Uczeń rozwiązał 80% zadań zamkniętych i połowę zadań otwartych.

- a) Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie algebraiczne, które opisuje liczbę zadań pozostałych do rozwiązania.
 b) Oblicz, ile zadań zamkniętych, a ile otwartych rozwiązał uczeń, jeśli wiadomo, że zadań zamkniętych było 70.

184. Uzasadnij, że liczba zapisana za pomocą wyrażenia $(n - 5)(n + 3) - (1 - n)(3 + n) + 1$, gdzie n jest liczbą całkowitą, jest zawsze nieparzysta.

185. Koszt udziału jednego ucznia w szkolnej wycieczce można obliczyć ze wzoru $K = \left(\frac{3000}{n} + 40 \right)$ złotych, gdzie n to liczba uczniów jadących na wycieczkę. Początkowo w wycieczce miało wziąć udział 40 uczniów, jednak ostatecznie pojechało na nią 10 uczniów mniej.

Oblicz, ile złotych wynosi różnica między planowanym a rzeczywistym kosztem tej wycieczki dla jednego ucznia.

186. Wykaż, że suma każdych dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest liczbą parzystą.

TEORIA

■ Równanie

Równanie tworzą dwa wyrażenia algebraiczne połączone znakiem równości:

jedna niewiadoma w pierwszej potęgze

$$\underbrace{-2(x+3)}_{\text{lewa strona}} = \underbrace{1-x}_{\text{prawa strona}}$$

Za pomocą równania opisujemy zależności między wielkościami, które nazywamy niewiadomymi.

Równanie, w którym występuje jedna niewiadoma w pierwszej potęgze, to równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

■ Liczby spełniające równanie

Liczba spełnia równanie, jeżeli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej, po obu stronach równania otrzymujemy te same wartości liczbowe.

Każdą liczbę, która spełnia równanie, nazywamy **rozwiązaniem równania** lub **pierwiastkiem równania**.

PRZYKŁAD: $1 - 4x = 2x + 3(x + 2,4)$ spełnia liczba -1 , ponieważ:

$$L = 1 - 4 \cdot (-1) = 5$$

$$P = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1 + 2,4) = 5$$

$$L = P$$

■ Rozwiązanie równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą

Aby rozwiązać równanie, zapisujemy coraz prostsze równania równoważne danemu. Możemy:

- przekształcić którąś stronę równania, opuszczając nawiasy lub redukując wyrazy podobne,
- to samo wyrażenie dodać do obydwu stron równania lub od nich odjąć,
- obie strony równania pomnożyć lub podzielić przez taką samą liczbę różną od 0,
- po rozwiązaniu równania sprawdzić, czy otrzymana liczba spełnia to równanie.

■ Liczba rozwiązań równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą

- dokładnie jedno rozwiązanie
- nieskończenie wiele rozwiązań
- nie mieć rozwiązania

PRZYKŁAD: $4x + 1 = 9$

$$x = 2$$

liczba 2 jest jedynym rozwiązaniem

PRZYKŁAD: $7(x - 2) = 7x - 14$

$$0 = 0$$

jest nieskończenie wiele liczb spełniających to równanie: $x = 3, x = 0, x = -2, \dots$

PRZYKŁAD: $-5x + 2 = 7 - 5x$

$$2 = 7$$

równania nie spełnia żadna z liczb

■ Równania równoważne

Jeśli dwa równania mają takie same rozwiązania, nazywamy je równaniami równoważnymi.

PRZYKŁAD: $1 - 3x = -2$ i $0,25x = \frac{1}{4}$

$$\begin{array}{l} -3x = -2 - 1 \\ -3x = -3 \\ x = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{4}x = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}x = \frac{1}{4} : 4 \\ x = 1 \end{array}$$

■ Przekształcanie wzorów

Przekształcanie wzorów polega na wyznaczeniu jednej zmiennej, która występuje we wzorze jako niewiadoma.

PRZYKŁAD: Wyznacz wielkość f ze wzoru $P = \frac{ef}{2}$.

$$\begin{array}{l} P = \frac{ef}{2} \quad | \cdot 2 \\ 2P = ef \quad | : e \\ f = \frac{2P}{e} \end{array}$$

■ Rozwiązywanie zadań tekstowych

Zadania tekstowe należy rozwiązywać zgodnie z następującą kolejnością etapów:

1. Dokładnie przeczytać i przeanalizować treść zadania, aby określić niewiadomą i ustalić zależności między wielkościami opisanymi w zadaniu.
2. Zapisać w postaci równania związek między niewiadomą a wielkościami występującymi w treści zadania.
3. Rozwiązać równanie.
4. Sprawdzić, czy rozwiązanie równania spełnia warunki zadania.
5. Sformułować odpowiedź.

■ Proporcja

Proporcją nazywamy równość dwóch ilorazów:

wyrazy skrajne: a, d

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ gdzie } b \neq 0 \text{ i } d \neq 0$$

wyrazy środkowe b, c

W każdej proporcji iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

PRZYKŁAD: Proporcja $\frac{12}{9} = \frac{0,4}{3}$ jest prawdziwa, ponieważ $12 \cdot 3 = 9 \cdot 0,4$.

■ Wielkości wprost proporcjonalne

Jeżeli wraz ze wzrostem jednej wielkości, druga wielkość rośnie tyle samo razy, to wielkości te nazywamy wprost proporcjonalnymi.

PRZYKŁAD: Droga i czas jej przejechania przy stałej prędkości jazdy są wielkościami wprost proporcjonalnymi.

Rozwiązanie:

x – liczba dni wypożyczenia gry planszowej

$$8 + 2,5(x - 3) = 12 + 2(x - 3)$$

$$8 + 2.5x - 7.5 = 12 + 2x - 6$$

$x = 11$

$$8 \text{ zł} + 8 \cdot 2,5 \text{ zł} = 28 \text{ zł} - \text{koszty wypożyczenia gry planszowej w wypożyczalni Gierka}$$

$$12z + 8 \cdot 2z = 28z$$

Odpowiedź: Przy 11 dniach koszty wypożyczenia tej gry w jednej i drugiej wypożyczalni są jednakowe.

Ćwiczenie do przykładu 188.

Rozwiąż samodzielnie

Agata jest trzy razy starsza od Wojtka. Za sześć lat będzie tylko dwa razy starsza od niego. **Oblicz, ile lat ma teraz Wojtek.**

[illegible]

Przykład 189.

Egzamin 8-klasisty CKE

W pierwszym zbiorniku było czterokrotnie więcej wody niż w drugim. Po wleciu 6 litrów wody do każdego z nich, w pierwszym jest dwukrotnie więcej wody niż w drugim.

Ile łącznie wody jest teraz w obu zbiornikach?

Rozwiązanie:

x – początkowa ilość wody w drugim zbiorniku (w litrach)

$4x$ – początkowa ilość wody w pierwszym zbiorniku (w litrach)

$$4x + 6 = 2(x + 6)$$

$x = 3$

W pierwszym zbiorniku było na początku $4 \cdot 3 = 12$ litrów wody, a w drugim były 3 litry. Po dolaniu:

$12 + 6 = 18$ – w pierwszym zbiorniku jest 18 litrów wody

$3 + 6 = 9$ – w drugim zbiorniku jest 9 litrów wody

$$18 + 9 = 27$$

Odpowiedź: Razem w obu zbiornikach jest 27 litrów wody.

Ćwiczenie do przykładu 189.

Rozwiąż samodzielnie

Weronika przygotowywała się do egzaminu. Rozwiązywała zadania w ciągu 3 dni. Pierwszego dnia rozwiązała $\frac{1}{5}$ wszystkich zadań i jeszcze 6. Drugiego dnia zrobiła połowę pozostałych i jeszcze 3 zadania. Trzeciego dnia rozwiązała pozostałe 18 zadań. **Oblicz, ile zadań Weronika rozwiązała w ciągu 3 dni.**

Przykład 190.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Rozwiązaniem równania $0,2x - 0,7 = 0,8 - 0,3x$ jest liczba 0,3.	P	F
Rozwiązaniem równania $-(4 - x) = 2 + 5x$ jest liczba $\frac{1}{2}$.	P	F
Rozwiązaniem równania $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 2$ jest liczba 2,4.	P	F
Rozwiązaniem równania $\frac{x+1}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{5}{6}$ jest liczba 3.	P	F

Rozwiązanie:

Rozwiązujemy równania:

$$0,2x - 0,7 = 0,8 - 0,3x \quad | \cdot 10$$

$$2x - 7 = 8 - 3x$$

$$2x + 3x = 8 + 7$$

$$5x = 15 \quad | : 5$$

$x = 3$ – zdanie pierwsze jest fałszywe

$$-(4 - x) = 2 + 5x$$

$$-4 + x = 2 + 5x$$

$$x - 5x = 2 + 4$$

$$-4x = 6$$

$x = -1\frac{1}{2}$ – zdanie drugie jest fałszywe

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 2 \quad | \cdot 6$$

$$3 \cdot \frac{x}{2} + 2 \cdot \frac{x}{3} = 6 \cdot 2$$

$$3x + 2x = 12$$

$$5x = 12 \quad | : 5$$

$x = 2,4$ – zdanie trzecie jest prawdziwe

$$\frac{x+1}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{5}{6} \quad | \cdot 12$$

$$4 \cdot \frac{x+1}{3} - 3 \cdot \frac{x-3}{4} = 2 \cdot 5$$

$$4x + 4 - 3x + 9 = 10$$

$$4x - 3x = 10 - 4 - 9$$

$x = -3$ – zdanie czwarte jest fałszywe

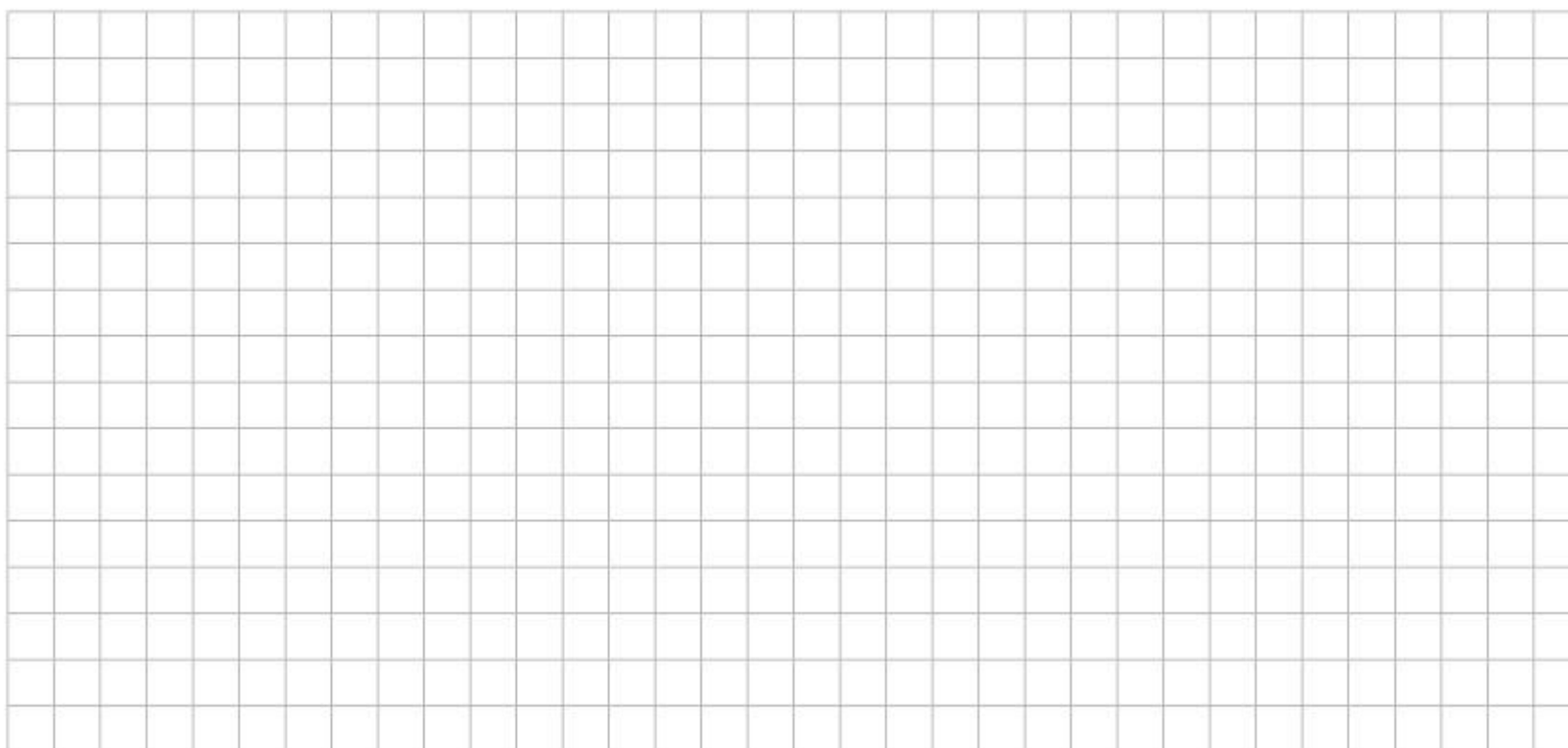
Odpowiedź: FFPF

Ćwiczenie do przykładu 190.

Rozwiąż samodzielnie

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Rozwiązaniem równania $x - (1 - 3x) = 2 + (7x - 15)$ jest liczba $x = 4$.	P	F
Rozwiązaniem równania $x - \frac{3}{2} = 1\frac{3}{4} + \frac{x}{2}$ jest liczba $x = 5$.	P	F
Rozwiązaniem równania $\frac{x+1}{3} = \frac{2x-1}{2}$ jest liczba $x = 1,25$.	P	F
Rozwiązaniem równania $1,4x - 6 + 2,2x = -6(0,7x - 0,3)$ jest $x = -1$.	P	F

**Przykład 191.**

Ze wzoru $P = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$ wyznacz r , jeśli $P > 0$, $r > 0$ i $h > 0$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy wzór

$$P = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} \quad | \cdot 3$$

$$3P = \pi r^2 \cdot h \quad | : \pi h$$

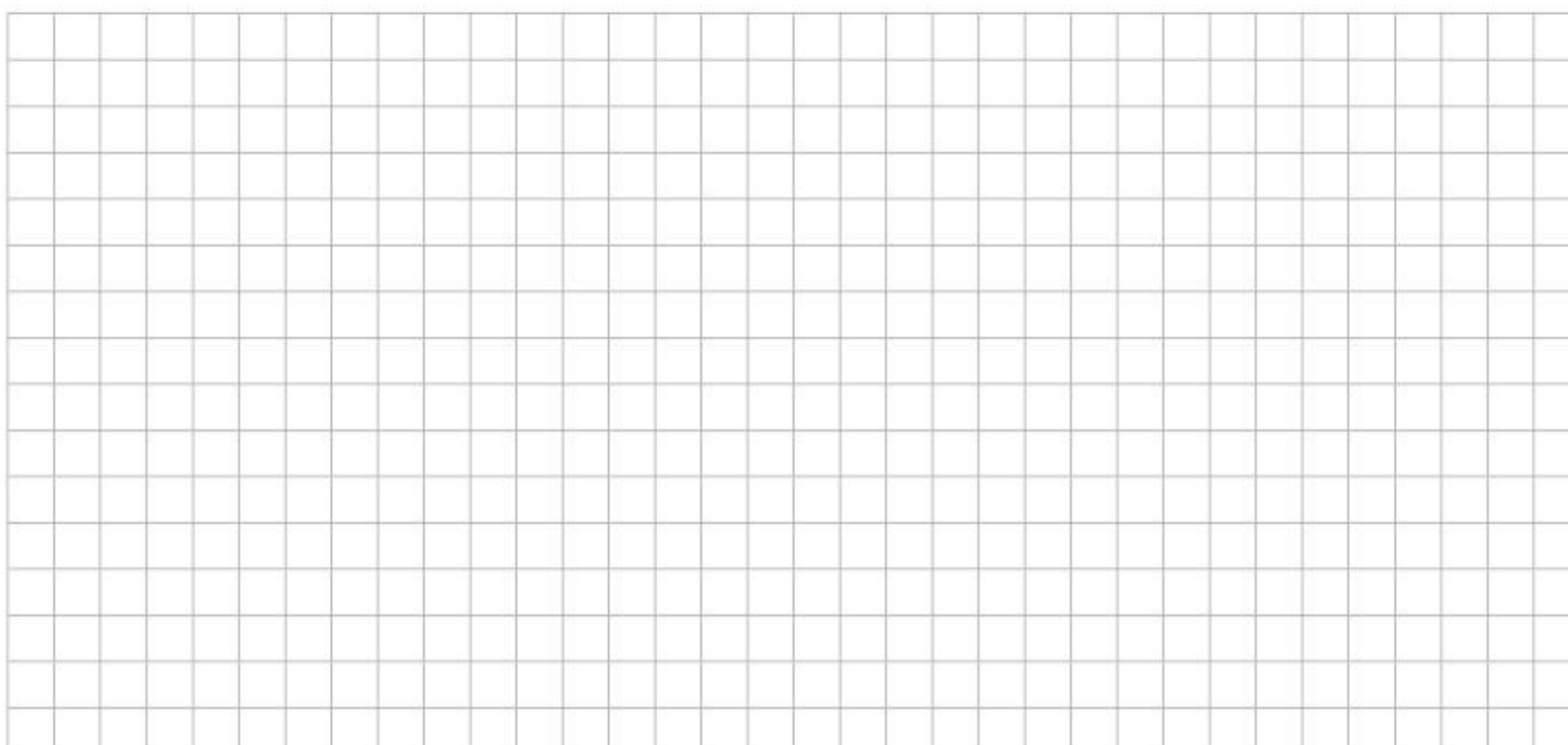
$$\frac{3P}{\pi h} = r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{3P}{\pi h}}$$

Odpowiedź: $r = \sqrt{\frac{3P}{\pi h}}$

Ćwiczenie do przykładu 191.**Rozwiąż samodzielnie**

Wyznacz c ze wzoru $\frac{2}{c} = \frac{a}{3} + \frac{b}{3}$.



Przykład 192.

Która z liczb jest rozwiązaniem równania $(x-5)^2 - 2 = x(x-2) - \frac{x-1}{2}$? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 3

B. -3

C. 0,3

D. -0,3

Rozwiązanie:

Rozwiązujemy równanie:

$$(x-5)^2 - 2 = x(x-2) - \frac{x-1}{2}$$

$$(x-5) \cdot (x-5) - 2 = x^2 - 2x - \frac{x-1}{2}$$

$$x^2 - 5x - 5x + 25 - 2 = x^2 - 2x - \frac{x-1}{2}$$

$$x^2 - 10x + 23 = x^2 - 2x - \frac{x-1}{2} \quad | -x^2$$

$$-10x + 23 = -2x - \frac{x-1}{2} \quad | \cdot 2$$

$$-20x + 46 = -4x - x + 1$$

$$-20x + 4x + x = 1 - 46$$

$$-15x = -45$$

$$x = 3$$

Odpowiedź: A**Ćwiczenie do przykładu 192.****Rozwiąż samodzielnie**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwiązaniem równania $2(x-3,5) = 5 - 0,4x$ jest liczba

A. 0,3

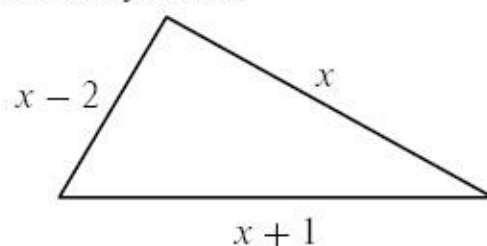
B. 3

C. 0,5

D. 5

Przykład 193.

Obwód trójkąta przedstawionego na rysunku wynosi 17.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Sytuację podaną na rysunku opisuje równanie $3x - 1 = 17$.	P	F
Długość najkrótszego boku tego trójkąta wynosi 6.	P	F

Rozwiązanie:

Układamy równanie, a następnie je rozwiązujemy:

$$x + 1 + x + x - 2 = 17$$

$$3x - 1 = 17 - \text{zdanie pierwsze jest prawdziwe}$$

$$3x = 17 + 1$$

$$3x = 18 \quad | :3$$

$$x = 6$$

Obliczamy długości boków trójkąta:

$$x = 6$$

$$x + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$x - 2 = 6 - 2 = 4$$

Najkrótszy bok trójkąta ma długość 4 – zdanie drugie jest fałszywe.

Odpowiedź: PF

Ćwiczenie do przykładu 193.

Rozwiąż samodzielnie

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole prostokąta przedstawionego na rysunku jest równe

A. 63 cm^2

B. 56 cm^2

C. 7 cm^2

D. 9 cm^2



Ćwiczenie do przykładu 195.

Rozwiąż samodzielnie

Marysia i Zosia zbierają widokówki. Marysia ma o 27 widokówek więcej niż Zosia. **Oblicz, ile widokówek ma Zosia, jeżeli razem mają ich 111.**

Przykład 196.

Ewa kwotę 360 zł podzieliła na dwie części w stosunku 5 : 4. Większą część tej kwoty przeznaczyła na zakup książek, a pozostałą na zakup zeszytów. **Oblicz, ile złotych wydała na książki, a ile na zeszyty.**

Rozwiązanie:

Określamy niewiadome:

x – wspólna miara

$5x$ – część na zakup książek

4x – część na zakup zeszytów

Układamy równanie i rozwiązujemy je:

$$5x + 4x = 360$$

$$9x = 360 \quad |:9$$

$$x = 40$$

$$5 \cdot 40 = 200 \text{ zł} - \text{część na zakup książek}$$

$$4 \cdot 40 = 160 \text{ zł} - \text{część na zakup zeszytów}$$

Sprawdzamy rozwiązanie równania z warunkami zadania:

$$200 \text{ zł} + 160 \text{ zł} = 360 \text{ zł}$$

Odpowiedź: Jedna część tej kwoty to 200 zł, a druga 160 zł.

Ćwiczenie do przykładu 196.

Rozwiąż samodzielnie

Czekoladę, złożoną z 24 kostek, podzielono na dwie części w stosunku 3 : 5. **Oblicz, ile kostek jest w każdej części.**

ZADANIA

197. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{1}{3}$ jest rozwiązaniem równania

A. $5 - 6x = 3(x + 1)$

B. $\frac{1}{2}x + \frac{5}{6} = 2 - \frac{3}{4}x$

C. $-x + 4(x - 1) = -1 - 6x$

D. $1\frac{1}{2}x - 2 = -0,5(5 - 3x)$

198. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $2(x - 3) + 1 = 3x - 4 - (x + 2)$

A. nie ma rozwiązań

B. ma jedno rozwiązanie

C. ma dwa rozwiązania

D. ma nieskończenie wiele rozwiązań

199. Które wyrażenie należy wpisać w lukę w równaniu $7 - 2x = \dots$, aby liczba 4 była rozwiązaniem otrzymanego równania? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $5 - \frac{1}{4}x$

B. $0,5(x - 6)$

C. $-5(x - 3)$

D. $1 - (x + 2)$

200. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wartości wyrażen $6x - 1$ i $-2x + 3$ są równe dla A/B.

A. $x = 0,5$

B. $x = 1$

Wartość połowy wyrażenia $4 - 10x$ jest o 3 mniejsza od wyrażenia $x + 1$ dla C/D.

C. $x = -\frac{1}{2}$

D. $x = \frac{2}{3}$

201. Średnia wieku pięciu członków drużyny wynosi 14 lat. Gdy do drużyny dołączył nowy trener, średnia wieku wzrosła o rok.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wiek trenera oznaczony jako x możemy obliczyć, rozwiązując równanie

A. $5 \cdot 14 + x = 15 \cdot 6$

B. $\frac{5x + 14}{6} = 15$

C. $\frac{14x - x}{5 - 6} = 15$

D. $\frac{14 + x}{6} = 15$

202. Rozwiązaniem równania $2a(x + 4) - 5(x - 3) = -3x + a$ z niewiadomą x jest liczba 2.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba a jest równa

A. 1

B. -1

C. -11

D. 11

203. Dane są równania:

I. $0,6(2y + 50) = 14,4 - 1,8y$

II. $\frac{3}{8}x + 6 = \frac{3}{4}x - 12$

Czy istnieje liczba x , która spełnia oba równania? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	rozwiązaniami tych równań są takie same liczby.
N		B.	równanie I ma dokładnie jedno rozwiązanie, a równanie II nie ma rozwiązań.
		C.	rozwiązaniami tych równań są różne liczby.

204. Które równanie otrzymamy, przekształcając równanie zapisane w postaci proporcji $\frac{3}{7} = \frac{x+1}{x}$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $3(x+1) = 7x$ B. $3x = 7(x+1)$ C. $3+x = 7+x+1$ D. $3 \cdot 7 = x(x+1)$

205. Która z liczb spełnia równanie: $1,7x - 3,3 + 1,9x = -5,4x + 1,2$? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 1 B. $-\frac{1}{2}$ C. -1 D. $\frac{1}{2}$

206. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwiązaniem równania $\frac{x-3}{2} - \frac{2x+1}{3} = 1$ jest liczba:

- A. naturalna B. odwrotna do $-\frac{10}{17}$ C. całkowita D. przeciwna do 1,7

207. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wielkość $b = \frac{2P}{h} - a$ wyznaczono ze wzoru

- A. $\frac{1}{2}P = h(a+b)$ B. $P = \frac{ah}{2} + b$ C. $P = \frac{2(a+b)}{h}$ D. $P = \frac{1}{2}h(a+b)$

208. Kwotę 750 zł bankomat wypłacił banknotami 50 zł i 20 zł, przy czym pierwszych banknotów było o 8 więcej niż drugich.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Banknotów 50 zł było A/B.

A. 8

B. 13

C/D złotych wypłacono banknotami 20 zł.

C. 100

D. 200

209. Kuba dodał cztery kolejne liczby naturalne podzielne przez 6 i otrzymał wynik równy 156. Wyznacz te liczby i zapisz obliczenia.

210. Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej wynosi 8. Jeśli między cyfrę dziesiątek a cyfrę jedności wstawimy 0, to otrzymamy liczbę o 270 większą. Zapisz, jaka to liczba.

211. W kawiarni „Sówka” stosunek liczby stolików dwuosobowych do liczby stolików czteroosobowych wynosi 5 : 2. Oblicz, ile jest stolików dwuosobowych, a ile czteroosobowych, jeżeli w kawiarni przy wszystkich stolikach może usiąść 90 osób.

212. W piekarni stosunek ceny jednej bułeczki do ceny jednego rogała i do ceny jednej bagietki ma się jak 1 : 3 : 5. Za 3 bułeczki i 2 rogałe należy zapłacić 7,65 zł. Oblicz, ile trzeba zapłacić za 2 bułeczki, 3 rogałe i 2 bagietki.

213. W cukierni za 6 pączków zapłacono 11,40 zł. Oblicz, ile trzeba w tej cukierni zapłacić za 15 takich pączków.

214. Cena dwóch książek wynosiła 76 zł. Po podwyżce ceny jednej z książek o 10%, a drugiej o 20% cena obu książek wzrosła o 11,60 zł. Oblicz cenę każdej książki przed podwyżką.

D. $\frac{a^3 + b^3}{2}$

$$D. x^3 + x^2 + x$$

F

D. 8 lat i 18 lat

D. 80

221. Na ognisku z klas 8a i 8b było x osób, przy czym połowa uczestników ogniska to uczennice, 40% uczestników to uczniowie, a pozostałych 6 osób to opiekunowie.

1 pkt

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Równanie $\frac{1}{2}x + 0,4x + 6 = x$ pozwala obliczyć, ile osób uczestniczyło w tym ognisku.	P	F
W tym ognisku wzięło udział o 10 więcej uczennic niż uczniów.	P	F

222. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

1 pkt

Wynikiem przekształcenia do najprostszej postaci wyrażenia algebraicznego $(x - y)(x - y) + 2xy$ jest suma A/B.

A. $x^2 + y^2$

B. $x^2 - y^2$

Po wyłączeniu wspólnego czynnika z sumy C/D w nawiasie zostanie wyrażenie $x - 2y$.

C. $x^2 - 2xy$

D. $xy - x^2$

223. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

1 pkt

Równanie $0,2x - 0,1 = 0,4 + 0,1x$ spełnia liczba 5.	P	F
Rozwiązaniem proporcji $\frac{2x-5}{3} = \frac{x+2}{4}$ jest liczba przeciwna do $-5,2$.	P	F

224*. Dane jest wyrażenie $7^n + 7^{n+1}$.

1 pkt

Czy wartość tego wyrażenia jest liczbą podzielną przez 8? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	podstawa potęgi jest liczbą nieparzystą.
N		B.	suma wykładników równa $2n + 1$ nie dzieli się przez 8.
		C.	wartość tego wyrażenia można zapisać w postaci $8 \cdot 7^n$.

225. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

1 pkt

Liczba, która jest rozwiązaniem równania $3 - \frac{x+3}{2} = \frac{3x+1}{4}$, nie jest liczbą

A. naturalną

B. całkowitą

C. nieparzystą

D. pierwszą

226. Dopisując do prawej strony pewnej liczby naturalnej cyfrę 3, powiększamy ją o 1128.

1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeśli przez x oznaczmy szukaną liczbę, to równaniem pozwalającym ją wyznaczyć jest

A. $10x = x + 1128$

B. $x + 1128 = 10x - 3$

C. $10x + 3 = x + 1128$

D. $9x = 1128$

227. Pole prostokąta o bokach a i b jest równe polu trójkąta o podstawie c i wysokości poprowadzonej na tę podstawę h . Ponadto wiadomo, że długości odcinków a i c są równe.

1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość h trójkąta jest

A. równa odcinkowi b B. 2 razy dłuższa od odcinka b C. 2 razy krótsza od odcinka b D. równa odcinkowi a

228. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

1 pkt

Poprawnie wyznaczona liczba a ze wzoru $2b - a = a + 5$ to

A. $a = b - 2,5$

B. $a = \frac{5+2b}{2}$

C. $a = 2,5 - 2b$

D. $a = 2,5 - b$

D. 210 kg

[illegible][illegible]

druga i kolejne godziny – po 25 zł

[illegible]

233. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

1 pkt

Równość $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{12}$ nie jest prawdziwa dla

- A. $a = 4, b = 6$ B. $a = 3, b = 4$ C. $a = 6, b = 4$ D. $a = 6, b = 12$

234. Średnia arytmetyczna czterech kolejnych liczb parzystych wynosi 41. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

1 pkt

Najmniejszą wśród tych liczb jest 38.	P	F
Suma tych liczb jest wielokrotnością liczby 40.	P	F

235. W kwiaciarni wysyłkowej cena jednego irysa jest o 50% niższa niż cena jednej róży. Pani Kasia za bukiet składający się z 3 róż i 2 irysów zapłaciła 48 zł. W tej samej kwiaciarni pan Robert kupił bukiet z 2 róż i 3 irysów, a pan Zbyszek – z 5 róż i 4 irysów.

1 pkt

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Pan Robert zapłacił za bukiet **A/B**.

- A. 42 zł B. 48 zł
Pan Zbyszek zapłacił za kwiaty o **C/D** więcej niż pani Kasia.
C. 36 zł D. 42 zł

236. Linia produkcyjna w pewnej mleczarni paczkuje ser w opakowania typu blister z wydajnością 90 sztuk na minutę. Następnie pracownicy pakują blistry w pudełka kartonowe po 18 sztuk do jednego kartonu. Ile pudełek zostanie zapakowanych w ciągu godziny? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

1 pkt

- A. 1080 B. 5400 C. 300 D. 240

237. Uzasadnij, że różnica kwadratu liczby nieparzystej i liczby 1 jest podzielna przez 4.

2 pkt

[illegible]

238. W klasie 8a stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców wynosi 4 : 5. Liczba chłopców jest o 9 większa od połowy liczby dziewcząt. **Oblicz, ilu uczniów liczy klasa 8a. Zapisz obliczenia.**

3 pkt

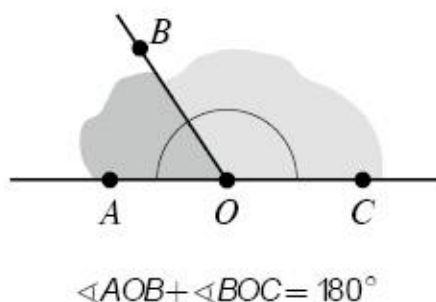
[illegible]

TEORIA

Rodzaje kątów

Kąty przyległe

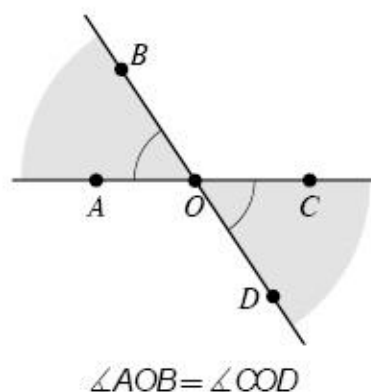
To dwa kąty, które mają jedno ramię wspólne, a pozostałe ramiona tworzą prostą.



PRZYKŁAD: Kąty o miarach 63° i 117° są przyległe, ponieważ $63^\circ + 117^\circ = 180^\circ$.

Kąty wierzchołkowe

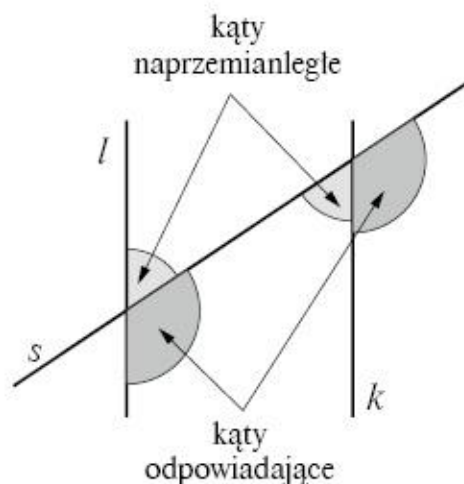
To dwa kąty, które mają wspólny wierzchołek, a ich ramiona leżą na przecinających się prostych.



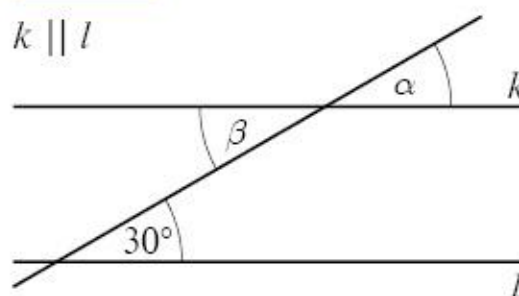
PRZYKŁAD: Jeśli suma miar dwóch kątów wierzchołkowych wynosi 70° , to miara każdego z tych kątów wynosi 35° .

Kąty odpowiadające i kąty naprzemianległe

Dwie równoległe proste przecięte trzecią prostą wyznaczają kąty odpowiadające o równych miarach oraz kąty naprzemianległe, które także mają równe miary.



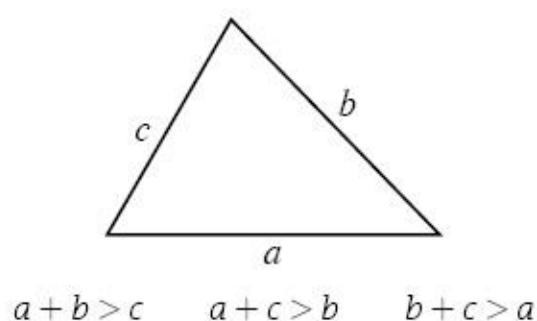
PRZYKŁAD:



$\alpha = 30^\circ$ (z własności kątów odpowiadających)
 $\beta = 30^\circ$ (z własności kątów naprzemianległych)

Nierówność trójkąta

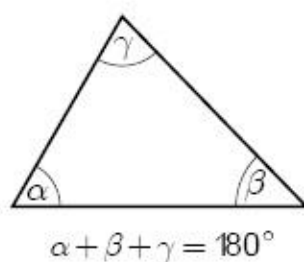
Suma długości każdych dwóch boków trójkąta jest większa od długości trzeciego boku.



PRZYKŁAD: Odcinki o długościach 6 cm, 4 cm i 3 cm mogą być bokami trójkąta, ponieważ:
 $6 \text{ cm} + 4 \text{ cm} > 3 \text{ cm}$
 $6 \text{ cm} + 3 \text{ cm} > 4 \text{ cm}$
 $4 \text{ cm} + 3 \text{ cm} > 6 \text{ cm}$

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° .



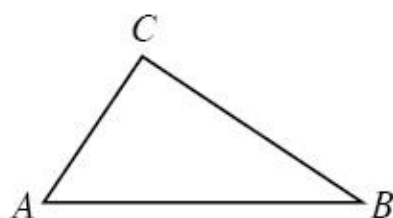
PRZYKŁAD: Kąty o miarach 46° , 57° i 67° nie mogą być miarami kątów trójkąta, ponieważ:
 $46^\circ + 57^\circ + 67^\circ = 170^\circ \neq 180^\circ$

Rodzaje trójkątów

Ze względu na zależność między długościami boków wyróżniamy trójkąty:

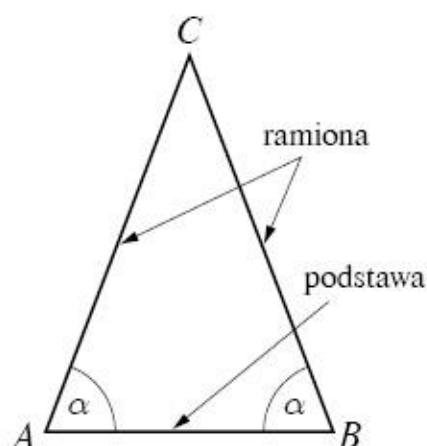
trójkąt różnoboczny

$$AB \neq BC \neq AC$$



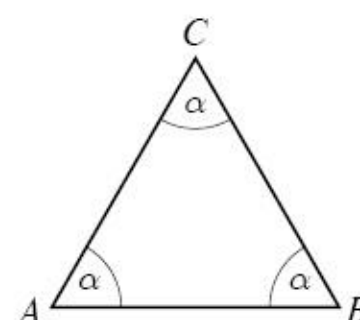
trójkąt równoramienny

$$BC = AC$$



trójkąt równoboczny

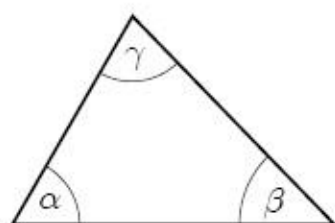
$$AB = BC = AC$$



Ze względu na zależności miar kątów wewnętrznych wyróżniamy trójkąty:

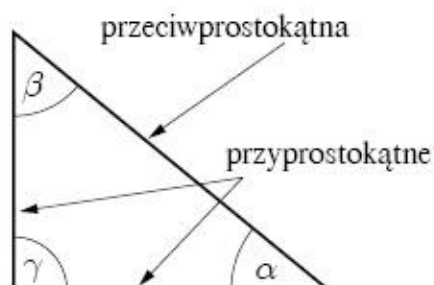
trójkąt ostrokątny

$$\alpha < 90^\circ \text{ i } \beta < 90^\circ \text{ i } \gamma < 90^\circ$$



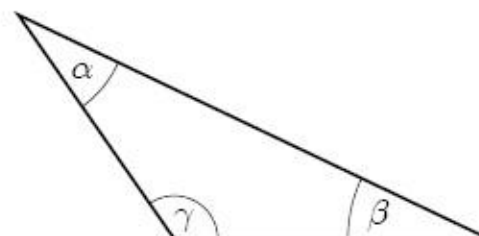
trójkąt prostokątny

$$\gamma = 90^\circ \text{ i } \alpha < 90^\circ \text{ i } \beta < 90^\circ$$



trójkąt rozwartokątny

$$\gamma > 90^\circ \text{ i } \alpha < 90^\circ \text{ i } \beta < 90^\circ$$



Jednostki długości i pola

Jednostki długości

Do najczęściej używanych jednostek długości należą: milimetry (mm), centymetry (cm), decymetry (dm), metry (m), kilometry (km).

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$$

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

PRZYKŁADY: $15 \text{ mm} = 1,5 \text{ cm} = 0,15 \text{ dm}$
 $320 \text{ km} = 3,2 \cdot 10^5 \text{ m}$

Jednostki pola

Pola figur mierzymy w różnych jednostkach, np.: milimetrach kwadratowych (mm^2), centymetrach kwadratowych (cm^2), decymetrach kwadratowych (dm^2), metrach kwadratowych (m^2).

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 = 1\,000\,000 \text{ mm}^2$$

PRZYKŁAD: $48 \text{ dm}^2 = 0,48 \text{ m}^2$

Do **wyrażania powierzchni** kontynentów, państw, pól uprawnych, lasów, sadów, działek używamy większych jednostek: arów (a), hektarów (ha) i kilometrów kwadratowych (km^2).

$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$$

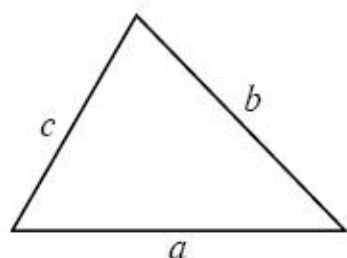
$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha} = 1\,000\,000 \text{ m}^2$$

PRZYKŁAD: $16,2 \text{ ha} = 1620 \text{ a}$

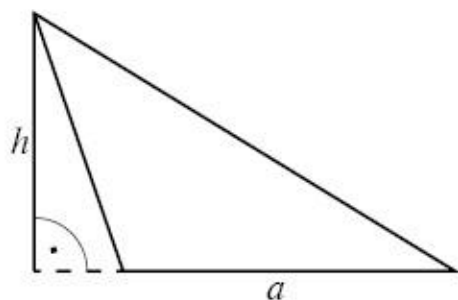
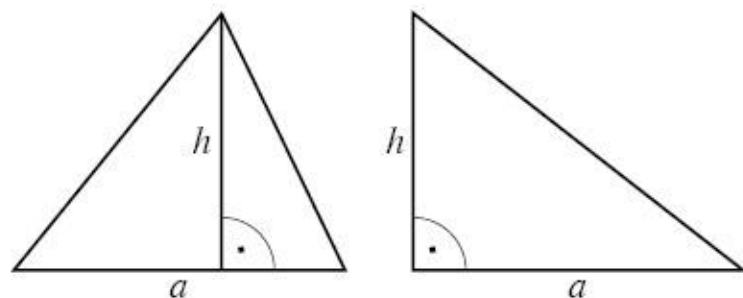
Pole i obwód trójkąta

Obwód trójkąta jest równy sumie długości wszystkich jego boków.



$$\text{Obwód} = a + b + c$$

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości odpowiadającej temu bokowi.



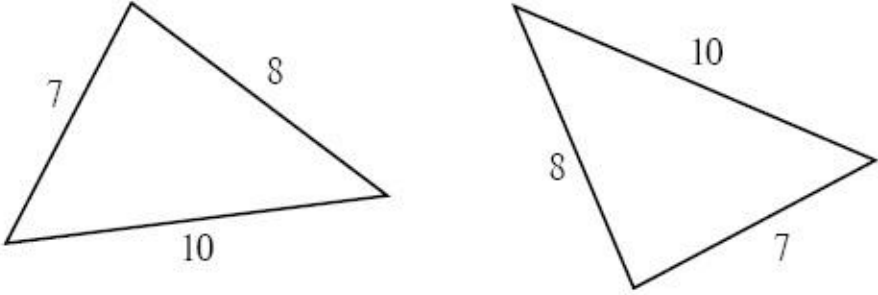
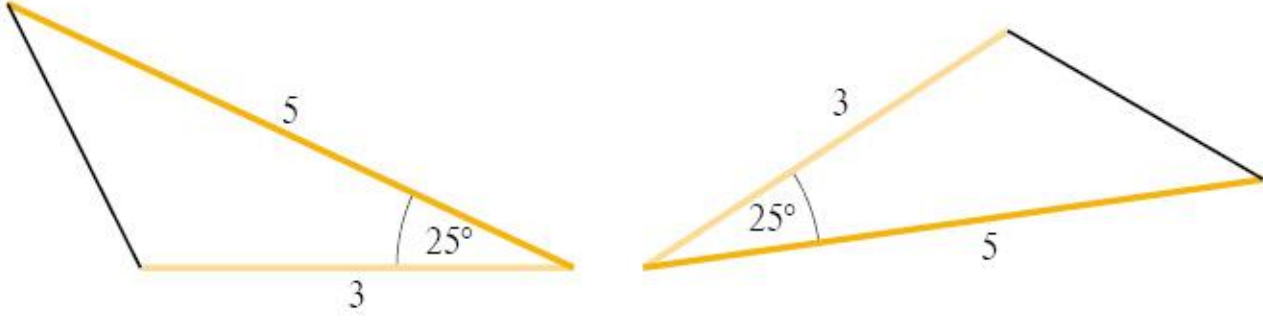
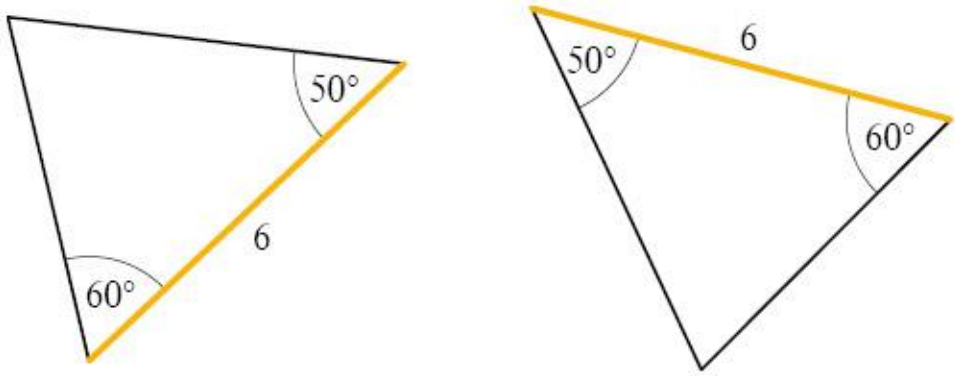
$$P = \frac{1}{2} a \cdot h$$

PRZYKŁAD: Obwód trójkąta o bokach długości 2,3 cm, 8,6 cm i 7,2 cm wynosi:
 $2,3 \text{ cm} + 8,6 \text{ cm} + 7,2 \text{ cm} = 18,1 \text{ cm}$

PRZYKŁAD: Pole trójkąta o boku długości 3,4 dm i wysokości odpowiadającej temu bokowi równej 2,5 dm jest równe
 $P = \frac{3,4 \cdot 2,5}{2} \text{ dm}^2 = 4,25 \text{ dm}^2$.

■ Trójkąty przystające

Trójkąty, które mają taki sam kształt i wielkość to trójkąty przystające.

Cechy przystawania trójkątów	
bbb	Jeżeli boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta, to te trójkąty są przystające (<i>bbb</i> – <i>bok, bok, bok</i>).
	PRZYKŁAD: 
bkb	Jeżeli dwa boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta oraz kąt zawarty między tymi bokami mają równe miary, to te trójkąty są przystające (<i>bkb</i> – <i>bok, kąt, bok</i>).
	PRZYKŁAD: 
kbb	Jeżeli bok jednego trójkąta ma taką samą długość jak bok drugiego trójkąta, a kąty jednego trójkąta leżące przy tym boku mają takie same miary jak odpowiednie kąty drugiego trójkąta, to te trójkąty są przystające (<i>kbb</i> – <i>kąt, bok, kąt</i>).
	PRZYKŁAD: 

ZADANIA EGZAMINACYJNE KROK PO KROKU

Przykład 239.

Egzamin 8-klasisty CKE

Przekątne prostokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku przecinają się pod kątem 140° .

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Kąt DCA ma miarę 40° .	P	F
Kąt DAC ma miarę 70° .	P	F

Rozwiązanie:

Trójkąt DOC jest równoramienny, więc:

$$\sphericalangle OCD = \sphericalangle ODC = (180^\circ - 140^\circ) : 2 = 20^\circ$$

Wobec tego $\sphericalangle DCA = 20^\circ$.

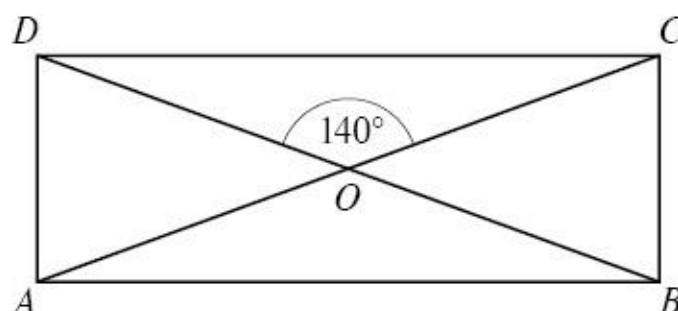
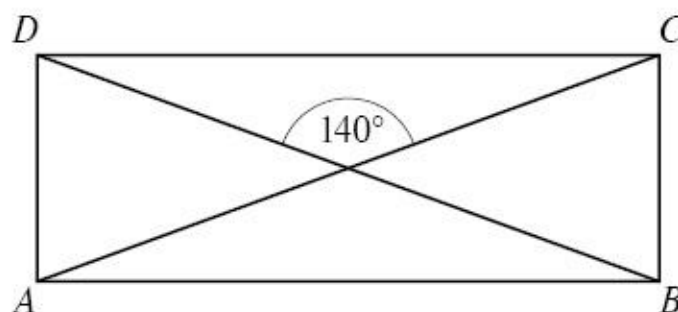
Pierwsze zdanie jest fałszywe.

Trójkąt ACD jest prostokątny i $\sphericalangle DCA = 20^\circ$, więc:

$$\sphericalangle DAC = 180^\circ - (90^\circ + 20^\circ) = 70^\circ$$

Drugie zdanie jest prawdziwe.

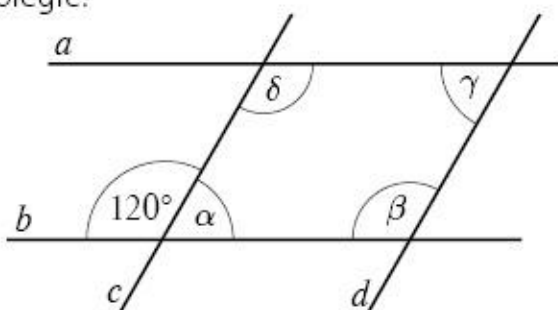
Odpowiedź: FP



Ćwiczenie do przykładu 239.

Rozwiąż samodzielnie

Proste a i b oraz c i d są parami równoległe.



Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

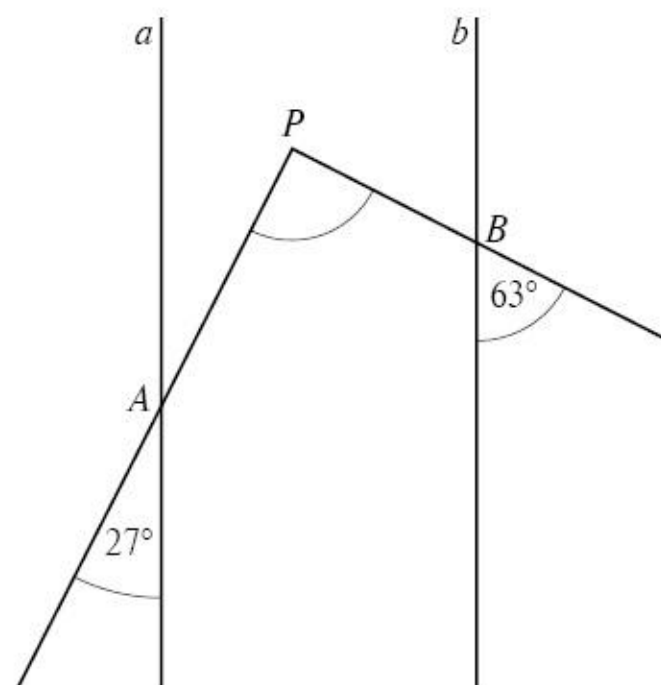
Kąt α jest równy połowie kąta o mierze 120° .	P	F
Kąty β i δ nie mają takich samych miar.	P	F
Każdy z kątów α i γ ma miarę równą 60° .	P	F
Suma miar kątów δ i γ jest taka sama jak miara kątów α i β .	P	F



Przykład 240.**Egzamin 8-klasisty CKE**

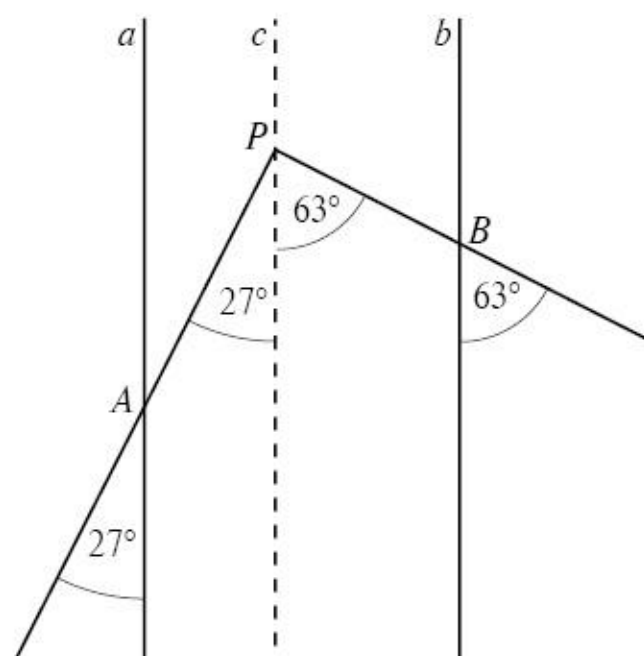
Proste a i b są równoległe.

Półproste PA i PB przecinają te proste, w wyniku czego tworzą z nimi kąty ostre o miarach podanych na rysunku. Uzasadnij, że kąt APB jest prosty.

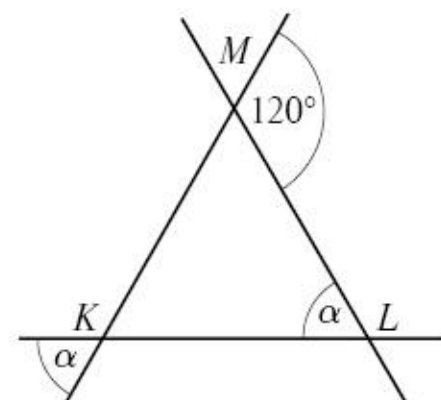
**Rozwiązanie:**

Przez punkt P prowadzimy prostą c równoległą do a i b . Dzieli ona kąt APB na dwie części, z których jedna jest kątem odpowiadającym do 27° , a druga – do 63° , zatem $\angle APB = 27^\circ + 63^\circ = 90^\circ$.

Odpowiedź: Kąt APB jest kątem prostym.

**Ćwiczenie do przykładu 240.****Rozwiąż samodzielnie**

Trzy proste przecinające się w sposób przedstawiony na rysunku tworzą trójkąt. Uzasadnij, że trójkąt KLM jest równoboczny.



Przykład 241.

Dwie proste przecinające się wyznaczają dwie pary kątów wierzchołkowych. Kąty jednej pary mają po 45° . Po ile stopni mają kąty drugiej pary?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- D. 315°

Rozwiązanie:

Dwie przecinające się proste wyznaczają dwie pary kątów wierzchołkowych, a ich suma miar jest równa 360° . Kąty wierzchołkowe mają równe miary. Skoro kąty jednej pary mają po 45° , to ich suma wynosi $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.

Suma miar kątów drugiej pary jest równa $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$, czyli każdy z kątów drugiej pary ma po $270^\circ : 2 = 135^\circ$.

Odpowiedź: B

Ćwiczenie do przykładu 241.

Rozwiąż samodzielnie

Dwie przecinające się proste wyznaczają kąty α i β .

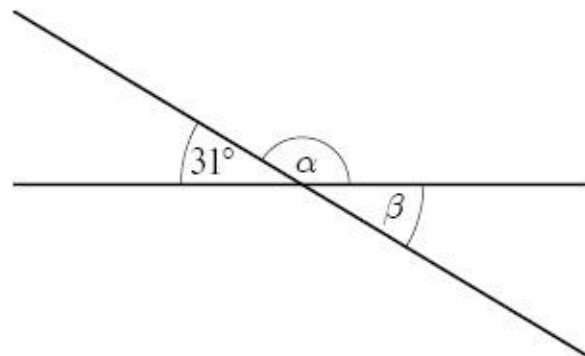
Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Kat β ma miarę A/B .

- B.
- 149°

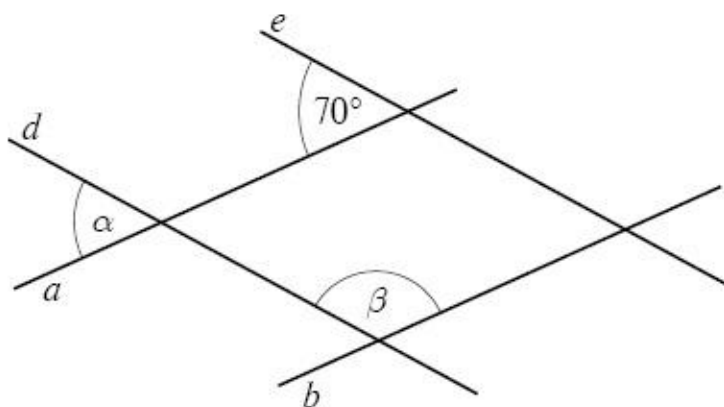
Różnica miar kątów α i β wynosi **C/D**.

- D. 169°



Przykład 242.

Rysunek przedstawia dwie pary prostych równoległych: a i b oraz d i e . Proste a i b przecinają proste d i e .



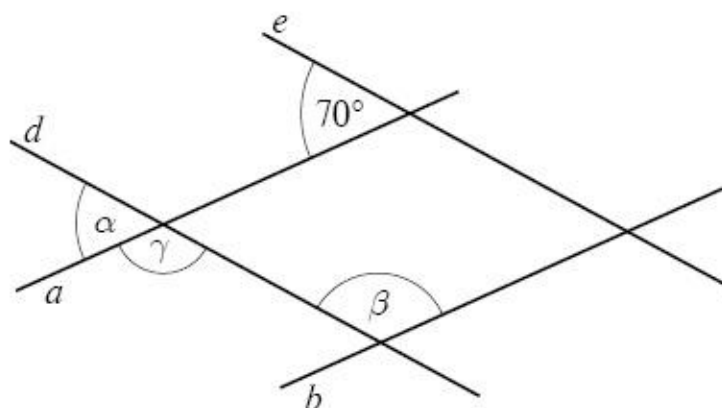
Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Kąt α i kąt o mierze 70° są kątami odpowiadającymi.	P	F
Miara kąta α wynosi 70° .	P	F
Kąt β i kąt przyległy do kąta α mogą być kątami naprzemianległymi.	P	F
Kąt β ma miarę 70° .	P	F

Rozwiązanie:

Pierwsze zdanie jest prawdziwe.

Drugie zdanie jest prawdziwe.



Na rysunku kąt γ jest kątem przyległym do kąta α . Kąty γ i β są kątami naprzemianległymi.

Trzecie zdanie jest prawdziwe.

$$\gamma = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ, \beta = \gamma = 110^\circ$$

Czwarte zdanie jest fałszywe.

Odpowiedź: PPPF

Ćwiczenie do przykładu 242.**Rozwiąż samodzielnie**

Jakie miary mają kąty α, β, γ zaznaczone na rysunku?

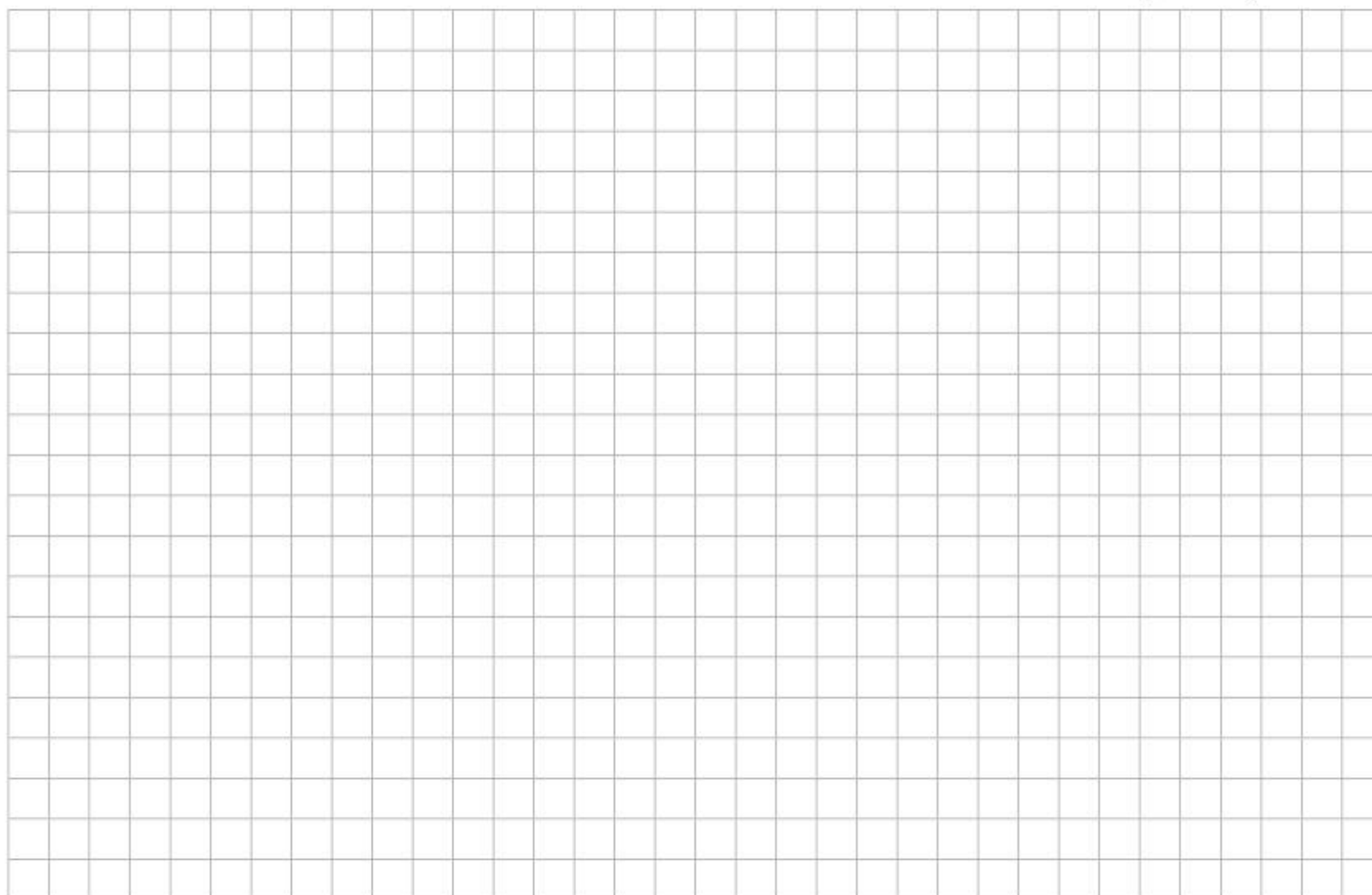
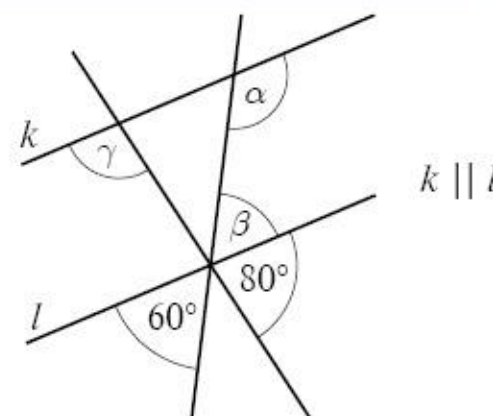
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\alpha = 120^\circ, \beta = 100^\circ, \gamma = 60^\circ$

B. $\alpha = 100^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 100^\circ$

C. $\alpha = 120^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 100^\circ$

D. $\alpha = 100^\circ, \beta = 100^\circ, \gamma = 60^\circ$



Przykład 243.

Długości dwóch boków trójkąta wynoszą 4 cm i 11 cm. Ile może wynosić długość trzeciego boku?
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 2 cm B. 7 cm C. 12 cm D. 5 cm

Rozwiązanie:

Suma długości każdych dwóch boków trójkąta musi być większa od długości trzeciego boku.

A. $4\text{ cm} + 11\text{ cm} > 2\text{ cm}$, $2\text{ cm} + 11\text{ cm} > 4\text{ cm}$, ale $2\text{ cm} + 4\text{ cm} < 11\text{ cm}$

Długość trzeciego boku nie może wynosić 2 cm.

B. $4\text{ cm} + 11\text{ cm} > 7\text{ cm}$, $11\text{ cm} + 7\text{ cm} > 4\text{ cm}$, ale $7\text{ cm} + 4\text{ cm} = 11\text{ cm}$

Długość trzeciego boku nie może wynosić 7 cm.

C. $12\text{ cm} + 4\text{ cm} > 11\text{ cm}$, $12\text{ cm} + 11\text{ cm} > 4\text{ cm}$, $11\text{ cm} + 4\text{ cm} > 12\text{ cm}$

Długość trzeciego boku może wynosić 12 cm.

D. $4\text{ cm} + 11\text{ cm} > 5\text{ cm}$, $5\text{ cm} + 11\text{ cm} > 4\text{ cm}$, ale $4\text{ cm} + 5\text{ cm} < 11\text{ cm}$

Długość trzeciego boku nie może wynosić 5 cm.

Odpowiedź: C

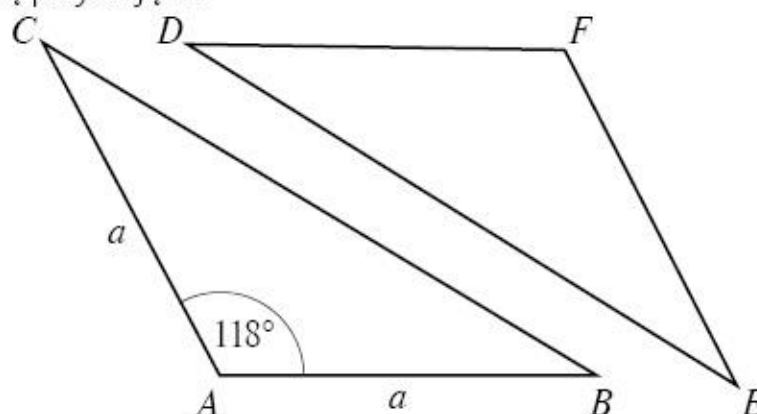
Ćwiczenie do przykładu 243.

Rozwiąż samodzielnie

Obwód trójkąta wynosi 45 cm, a jego boki są kolejnymi wielokrotnościami liczby 3. Jakie długości mają boki tego trójkąta?

Przykład 244.

Narysowane poniżej trójkąty są przystające.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta FDE wynosi:

A. 31°

B. 62°

C. 41°

D. 72°

Rozwiązanie:

Obliczamy kąty przy podstawie trójkąta ABC , który jest równoramienny.

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = (180^\circ - 118^\circ) : 2 = 31^\circ$$

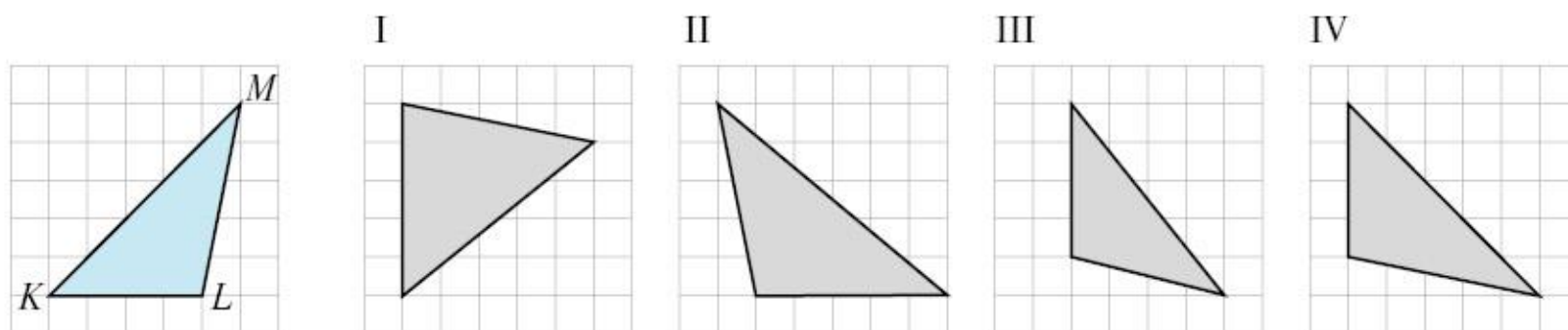
$$\sphericalangle FDE = 31^\circ$$

Odpowiedź: A

Ćwiczenie do przykładu 244.

Rozwiąż samodzielnie

Rysunki przedstawiają trójkąt KLM oraz trójkąty I, II, III i IV.



Który z trójkątów I, II, III, IV jest trójkątem przystającym do trójkąta KLM ? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. I

B. II

C. III

D. IV



Przykład 245.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Park krajobrazowy ma powierzchnię 0,74 ha. Powierzchnia ta nie jest równa

- A. 74 a B. 0,0074 km² C. 7400 m² D. 740 dm²

Rozwiązanie:

$$0,74 \text{ ha} = 74 \text{ a} = 7400 \text{ m}^2 = 740\,000 \text{ dm}^2$$

$$7400 \text{ m}^2 = 0,0074 \text{ km}^2$$

$$740\,000 \text{ dm}^2 \neq 740 \text{ dm}^2$$

Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 245.**Rozwiąż samodzielnie**

Jezioro Łebsko ma powierzchnię równą 702 000 a, a jezioro Dąbaj – 9,75 km².

Które z nich ma większą powierzchnię i o ile hektarów? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. Dąbaj o 273 ha B. Łebsko o 604,5 ha C. Dąbaj o 904,8 ha D. Łebsko o 6045 ha

Przykład 246.

Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC obrano punkty K i M tak, że $AK = AC$ oraz $BM = BC$. Uzasadnij, że miara kąta MCK wynosi 45° .

Rozwiązanie:

Trójkąt CAK jest równoramienny, więc $\angle AKC = \angle ACK = \alpha$.

Trójkąt CMB jest równoramienny, więc $\angle BCM = \angle BMC = \beta$.

W trójkącie CAK : $\angle CAK = 180^\circ - 2\alpha$.

W trójkącie CMB : $\angle CBM = 180^\circ - 2\beta$.

W trójkącie ABC , który jest prostokątny:

$$180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta + 90^\circ = 180^\circ$$

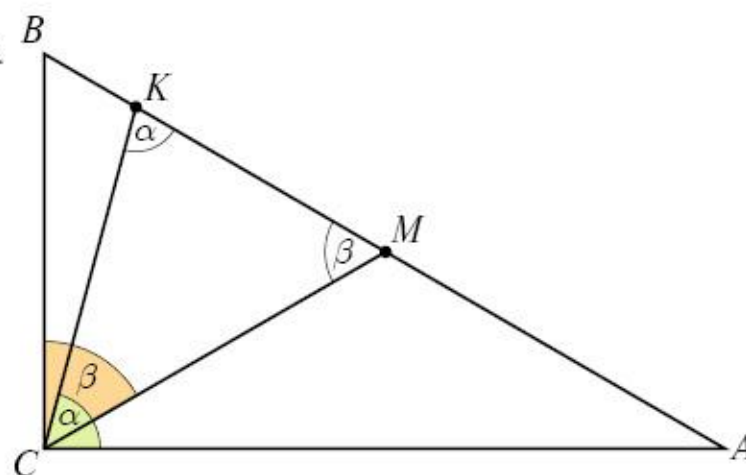
$$2\alpha + 2\beta = 270^\circ$$

$$\alpha + \beta = 135^\circ$$

W trójkącie KCM :

$$\angle KCM = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ,$$

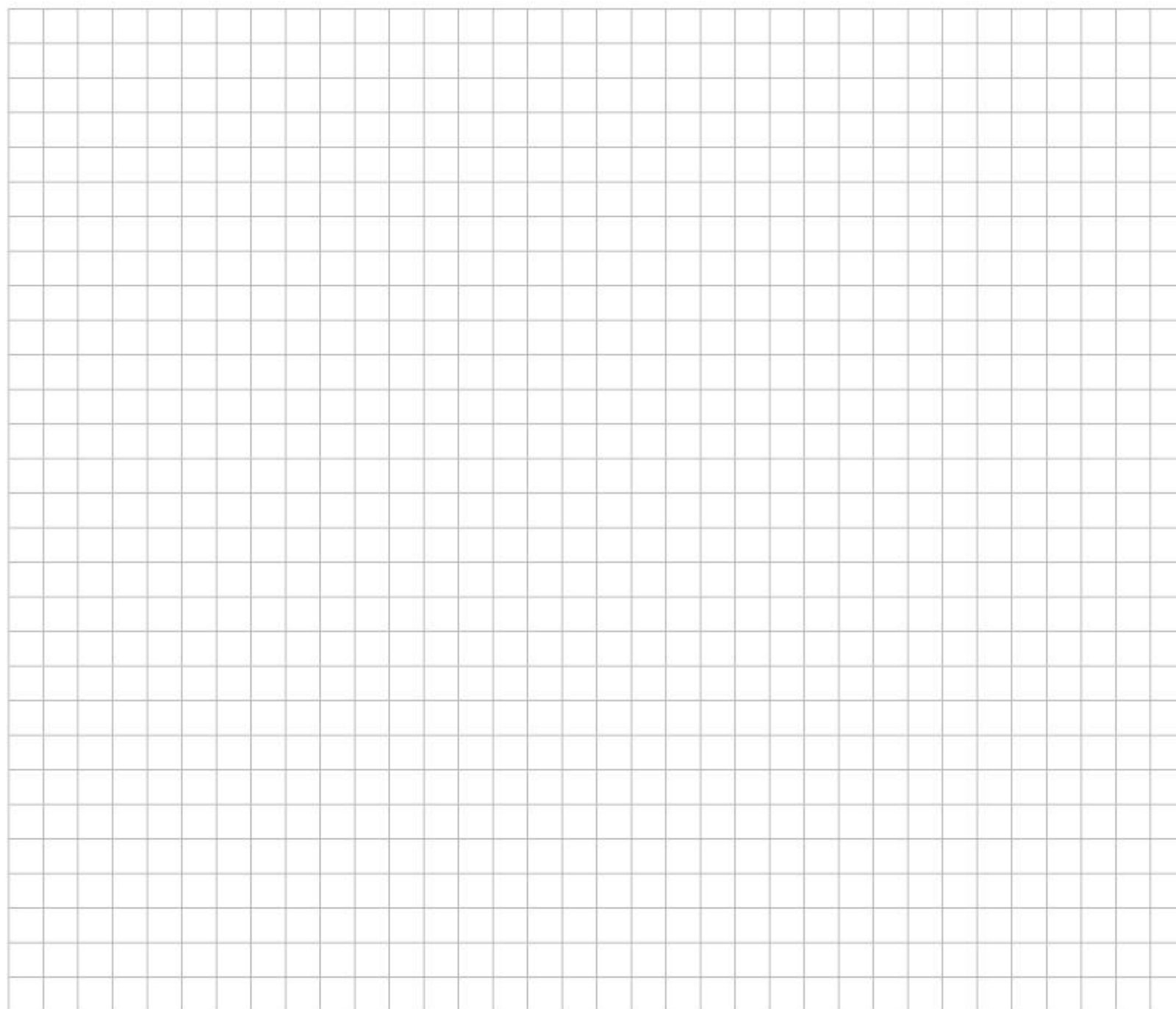
co kończy uzasadnienie.



Odpowiedź: Miara kąta MCK wynosi 45° .

Ćwiczenie do przykładu 246.**Rozwiąż samodzielnie**

Uzasadnij, że jeżeli suma miar dwóch kątów trójkąta jest równa mierze trzeciego kąta, to trójkąt ten jest prostokątny.



ZADANIA

247. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąty wewnętrzne pewnego trójkąta mogą mieć miary

- A. $25^\circ, 90^\circ, 55^\circ$ B. $107^\circ, 49^\circ, 23^\circ$ C. $3^\circ, 5^\circ, 172^\circ$ D. $40^\circ, 41^\circ, 100^\circ$

248. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

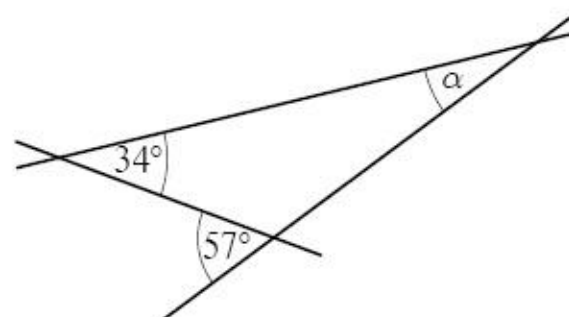
Kąty wierzchołkowe to takie, które mają

- A. wspólny wierzchołek, a ich ramiona pokrywają się.
 B. wspólny wierzchołek, a ich ramiona wzajemnie się przedłużają.
 C. wspólne ramiona będące prostymi o tym samym początku.
 D. wierzchołek w tym samym miejscu, a ich ramiona są czterema różnymi prostymi.

249. Dwie przecinające się proste przecięto trzecią prostą tak jak pokazano na rysunku.

Czy kąt α ma miarę 23° ? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T		A.	jeden z kątów trójkąta ma miarę 34° , a drugi jest przyległy do kąta o mierze 57° i ma miarę 23° .
	ponieważ	B.	suma miar kątów tego trójkąta nie wynosiłaby 180° .
N		C.	jeden z kątów trójkąta ma miarę 34° , a drugi jest przyległy do kąta o mierze 57° i ma miarę 123° .



250. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Jeśli miary dwóch kątów trójkąta wynoszą odpowiednio 24° i 60° , to trójkąt ten jest **A/B**.

- A. ostrokątny B. rozwartokątny

W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę 56° , a kąt przy wierzchołku **C/D**.

- C. 56° D. 68°

251. Jeden z boków trójkąta ma długość 8 cm, a każdy następny jest o 2 cm dłuższy.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obwód tego trójkąta wynosi

- A. 24 cm B. 28 cm C. 30 cm D. 32 cm

252. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W trójkącie prostokątnym o bokach długości 24 cm, 32 cm i 40 cm wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość

- A. 24 cm B. 19,2 cm C. 32 cm D. 9,6 cm

253. Różnica miar kątów przyległych stanowi 40% miary kąta prostego.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Większy z tych kątów ma miarę

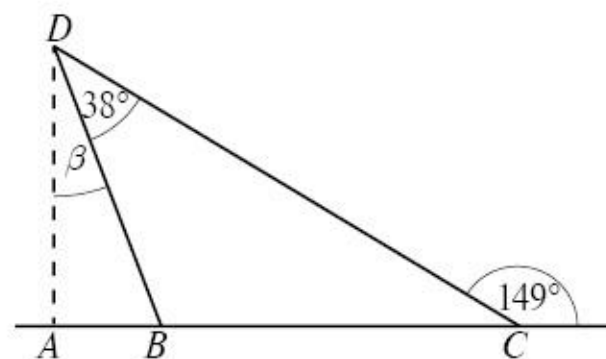
- A. 108° B. 72° C. 36° D. 144°

254. Odcinek AD jest prostopadły do prostej BC .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta β wynosi

- A. 21°
 B. 59°
 C. 31°
 D. 39°



255. W trójkącie równoramiennym jeden z kątów ma miarę o 90° większą od miary drugiego.

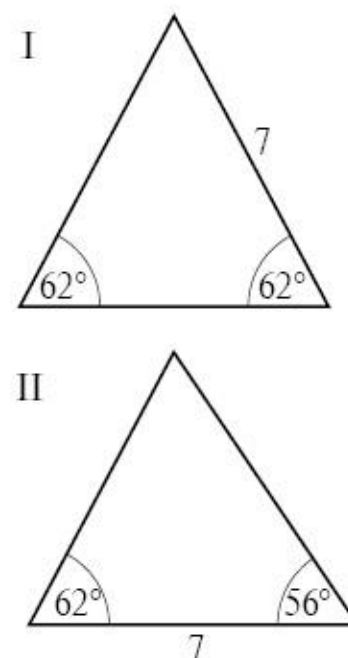
Jakie miary mają kąty tego trójkąta? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $0^\circ, 90^\circ, 90^\circ$ B. $20^\circ, 50^\circ, 110^\circ$ C. $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ D. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

256. Dane są trójkąty I i II.

Czy trójkąty I i II są przystające? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T		A.	boki trójkąta I mają takie same długości jak odpowiednie boki trójkąta II.
		B.	dwa boki trójkąta I mają takie same długości jak odpowiednie boki trójkąta II oraz kąty zawarte między tymi bokami mają równe miary.
N	ponieważ	C.	bok trójkąta I ma taką samą długość jak bok trójkąta II, a kąty trójkąta I leżące przy tym boku mają takie same miary jak odpowiednie kąty trójkąta II.

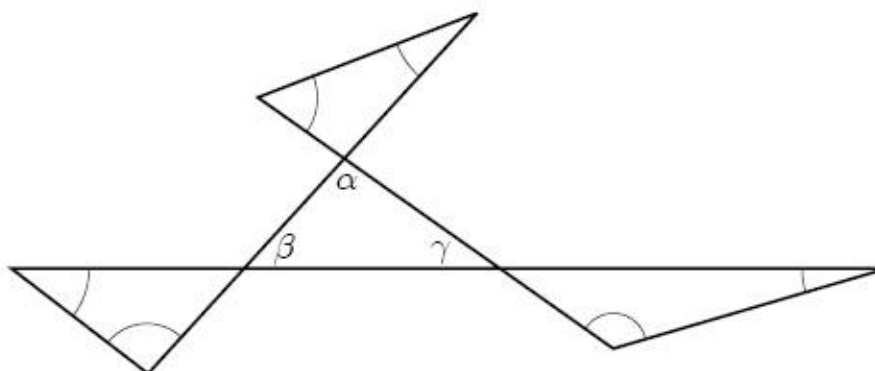


257. Kąt β ma miarę 7 razy większą od miary kąta do niego przyległego. Jaką miarę ma kąt β ? Zapisz obliczenia.

258. Pole trójkąta wynosi $16,4 \text{ cm}^2$, a jeden z boków ma długość 41 mm . Oblicz, jaką długość ma wysokość, która została opuszczona na ten bok?

259. Jeden z kątów przyległych ma miarę o 40° większą od miary drugiego. Oblicz miary tych kątów.

260. Wykaż, że suma miar wszystkich zaznaczonych na rysunku kątów wynosi 360° .



261. Oblicz miary kątów trójkąta, w którym stosunek miar dwóch kątów jest równy $2 : 5$, a ich różnica jest równa mierze trzeciego kąta.

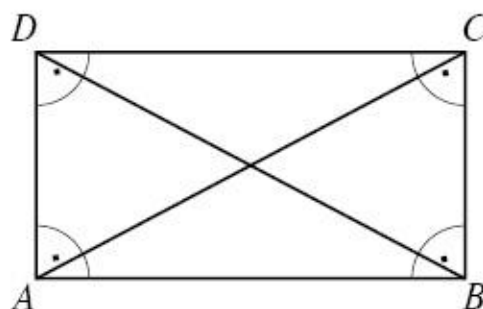
262. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $AC = BC$, narysowano wysokość CD . Oblicz długość tej wysokości, jeżeli obwód trójkąta ABC jest równy 48 cm , a obwód trójkąta ADC jest o 9 cm mniejszy.

263. Podstawę AB trójkąta ABC podzielono na trzy równe odcinki: AD , DE i EB . Uzasadnij, że trójkąty ADC , DEC i EBC mają równe pola.

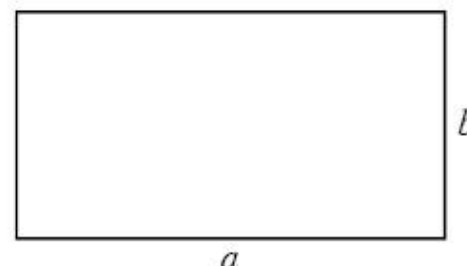
TEORIA

Prostokąt

- Prostokąt to czworokąt, który ma cztery kąty proste.
- Każdy z kątów: ABC , BCD , CDA , DAB ma miarę 90° .
- Przekątne prostokąta są równej długości i dzielą się na połowy.
 $AC = BD$



Pole i obwód

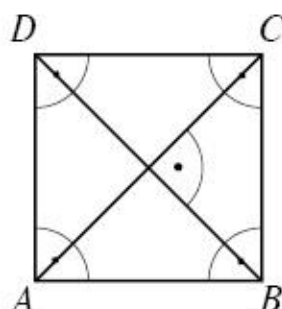


$$P = a \cdot b$$

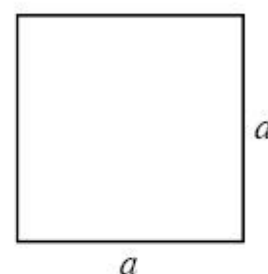
$$\text{Obwód} = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

Kwadrat

- Kwadrat to prostokąt, którego wszystkie boki są równej długości.
 $AB = BC = CD = DA$
- Przekątne kwadratu są prostopadłe i dzielą się na połowy.
 $AC \perp BD$



Pole i obwód

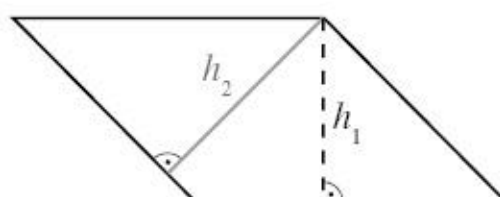
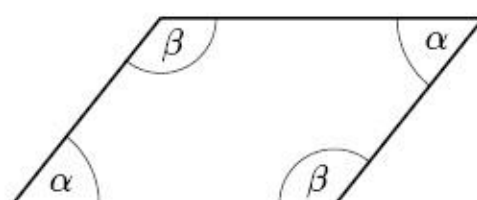
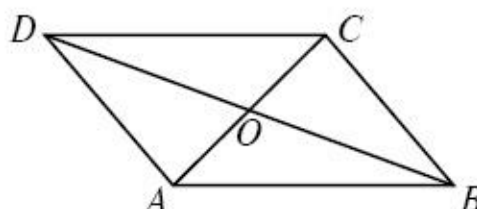


$$P = a^2$$

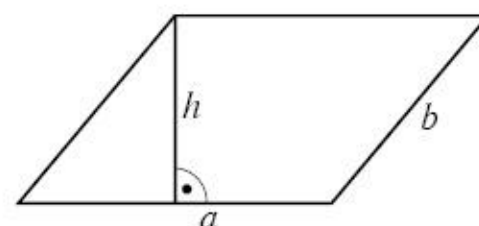
$$\text{Obwód} = 4 \cdot a$$

Równoległobok

- Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych równej długości.
 $AB \parallel DC$ i $AD \parallel BC$
- Przekątne dzielą się na połowy.
 $AO = OC$ i $OB = OD$
 $AB = DC$ i $AD = BC$
- Przeciwległe kąty są równe.
Suma miar dwóch kolejnych kątów wynosi 180° .
 $\alpha + \beta = 180^\circ$
- Suma miar kątów wynosi 360° .
 $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$
- Wysokość to odcinek, który łączy proste zawierające jego przeciwległe boki i jest do nich prostopadły. Każdy równoległobok ma dwie wysokości.



Pole i obwód

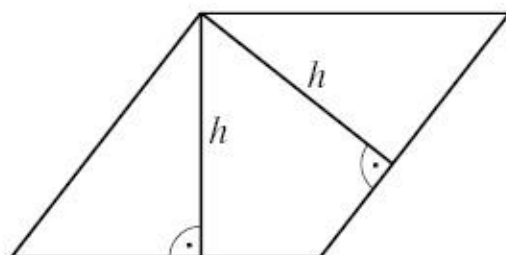
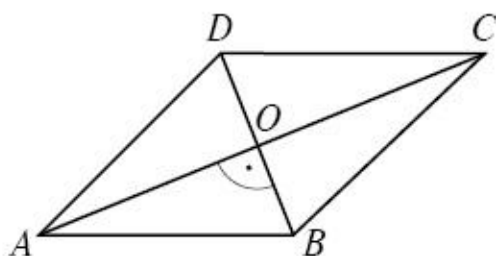


$$P = a \cdot h$$

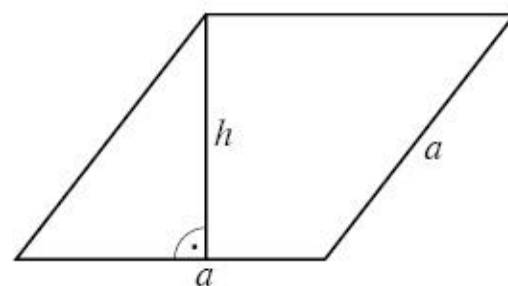
$$\text{Obwód} = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

Romb

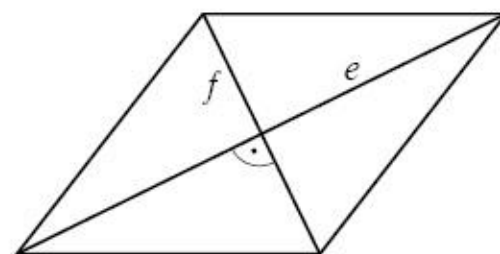
- Równoległobok, w którym wszystkie boki są równej długości to romb.
 $AB = BC = CD = DA$
- Przekątne rombu dzielą się na połowy i są prostopadłe.
 $AO = OC$ i $BO = OD$
 $AC \perp BD$
- W rombie wysokości są równej długości.



Pole i obwód



$$P = a \cdot h$$

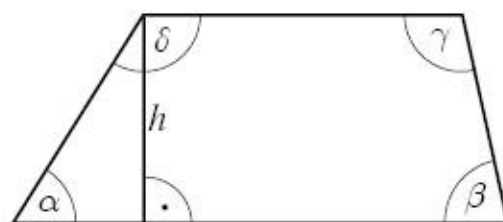
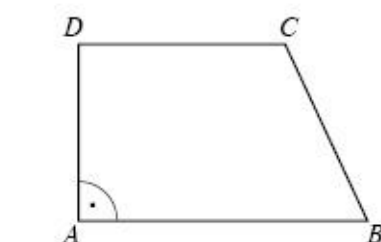
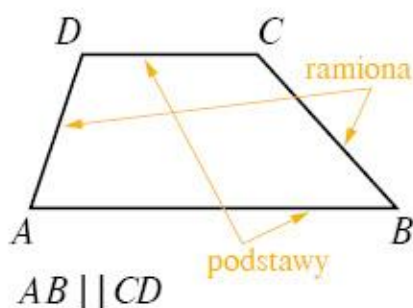


$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

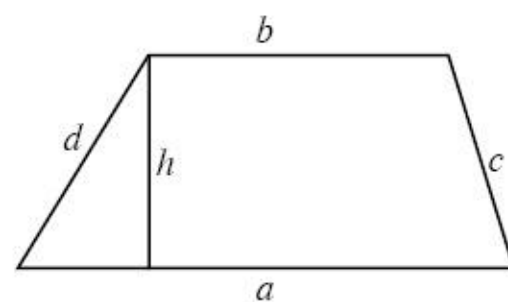
$$\text{Obwód} = 4 \cdot a$$

Trapez

- Trapez ABCD jest równoramienny, gdy $AD = BC$, $AC = BD$.
- Trapez ABCD jest prostokątny.
 $DA \perp AB$
- W trapezie suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu wynosi 180° .
- Wysokość trapezu to odcinek, który łączy podstawy i jest do nich prostopadły.



Pole i obwód



$$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

$$\text{Obwód} = a + b + c + d$$

ZADANIA EGZAMINACYJNE KROK PO KROKU

Przykład 264.

Egzamin 8-klasisty CKE

Prosta EF dzieli prostokąt $ABCD$ na kwadrat $EFCD$ o obwodzie 32 cm i prostokąt $ABFE$ o obwodzie o 6 cm mniejszym od obwodu kwadratu $EFCD$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość odcinka AE jest równa

A. 2 cm

B. 4 cm

C. 5 cm

D. 8 cm

Rozwiązanie:

Obliczamy długość boku kwadratu $ABCD$:

$$EF = 32 \text{ cm} : 4 = 8 \text{ cm}$$

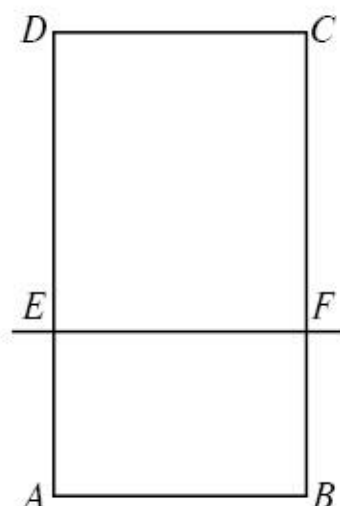
Obliczamy obwód prostokąta $ABFE$:

$$32 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 26 \text{ cm}$$

Obliczamy długość odcinka AE , który jest bokiem prostokąta $ABFE$:

$$AE = (26 - 2 \cdot 8) : 2 = 5 \text{ cm}$$

Odpowiedź: C



Ćwiczenie do przykładu 264.

Rozwiąż samodzielnie

Obwód prostokąta jest równy 39 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeśli szerokość tego prostokąta jest krótsza o 4,5 cm od jego długości, to pole prostokąta jest równe

A. $71,5 \text{ cm}^2$ B. 54 cm^2 C. 90 cm^2 D. $58,5 \text{ cm}^2$ 

Przykład 265.**Egzamin 8-klasisty CKE**

Prostokąt o bokach długości 12 i 6 podzielono na dwa prostokąty (patrz rysunek). Obwód jednego z prostokątów otrzymanych w wyniku podziału jest 2 razy większy od obwodu drugiego.

Podaj wymiary prostokąta o mniejszym obwodzie. Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

Dzielimy prostokąt na dwa prostokąty. Dwa boki otrzymanych prostokątów oznaczamy tak, jak pokazano na rysunku.

Obwód mniejszego prostokąta jest równy:

$$2 \cdot x + 2 \cdot 6 = 2x + 12$$

Obwód większego prostokąta jest równy:

$$2 \cdot (12 - x) + 2 \cdot 6 = 36 - 2x$$

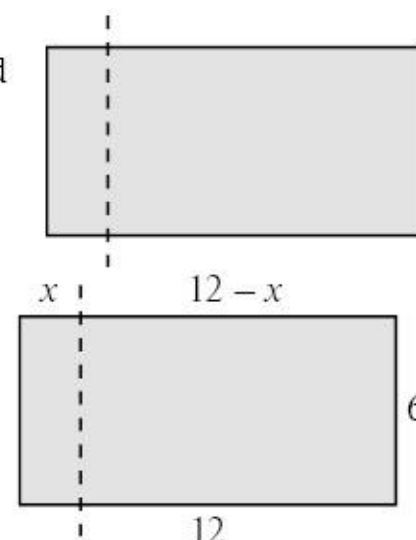
Obwód jednego prostokąta jest 2 razy większy od obwodu drugiego, co zapisujemy za pomocą równania:

$$36 - 2x = 2 \cdot (2x + 12)$$

$$36 - 2x = 4x + 24$$

$$12 = 6x$$

$$x = 2$$



Odpowiedź: Prostokąt o mniejszym obwodzie ma wymiary 6 i 2.

Ćwiczenie do przykładu 265.**Rozwiąż samodzielnie**

Przekątna dzieli prostokąt o obwodzie równym 14 cm na dwa trójkąty, każdy o obwodzie 12 cm.

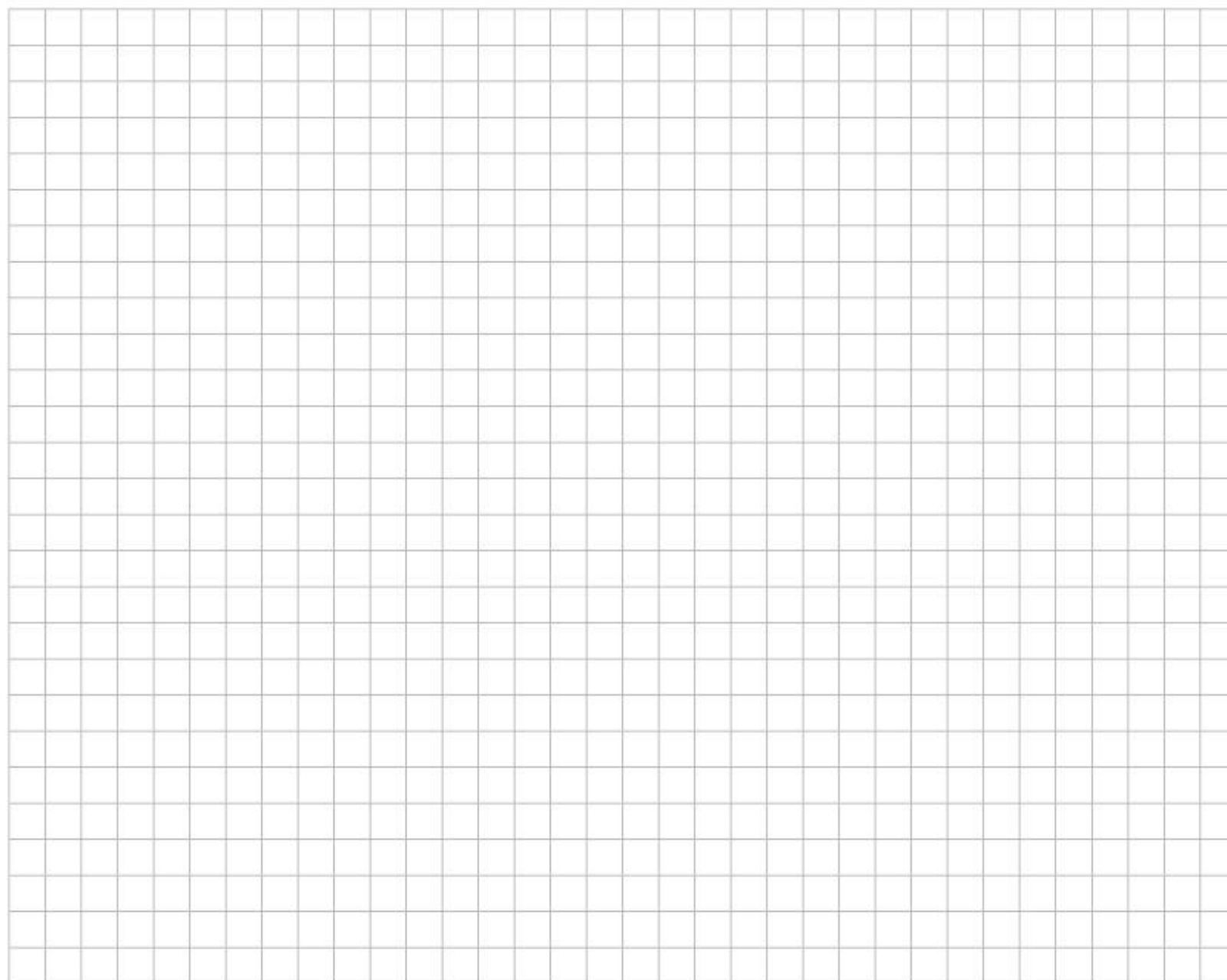
Jaka jest długość przekątnej prostokąta? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 2 cm

B. 7 cm

C. 13 cm

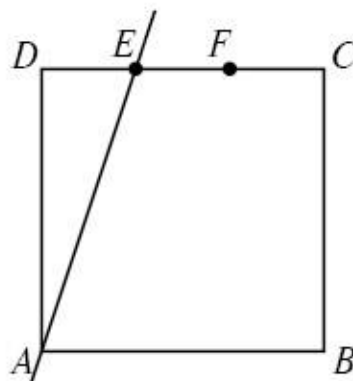
D. 5 cm



Przykład 266.

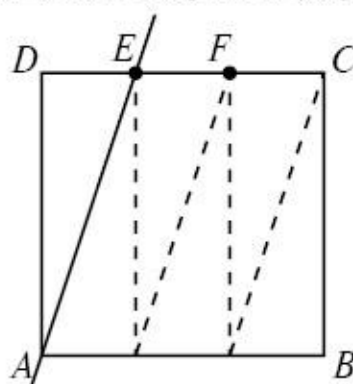
Egzamin 8-klasisty CKE

Bok CD kwadratu $ABCD$ podzielono punktami E i F na trzy odcinki równej długości. Przez wierzchołek A kwadratu i przez punkt E poprowadzono prostą. Pole trójkąta AED wynosi 24 cm^2 . Oblicz pole kwadratu $ABCD$. Zapisz obliczenia.



Rozwiązanie:

Zauważmy, że kwadrat $ABCD$ można podzielić na 6 trójkątów przystających do trójkąta AED .



$$P = 6 \cdot 24 = 144 \text{ cm}^2$$

Odpowiedź: Pole kwadratu $ABCD$ jest równe 144 cm^2 .

Ćwiczenie do przykładu 266.

Rozwiąż samodzielnie

Kwadrat ma takie samo pole jak prostokąt o wymiarach 8 cm i $12,5 \text{ cm}$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Pole kwadratu wynosi **A/B**.

A. $20,5 \text{ cm}^2$

B. 100 cm^2

Kwadrat i prostokąt mają **C/D** obwody.

C. takie same

D. różne



Przykład 267.

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Prostokąt to równoległobok, w którym przekątne są równej długości.	P	F
Prostokąt to czworokąt, który ma dwie pary boków równej długości.	P	F
Prostokąt to czworokąt, którego przekątna dzieli go na dwa trójkąty prostokątne.	P	F
Prostokąt to czworokąt, którego wszystkie kąty są proste.	P	F

Rozwiązanie:

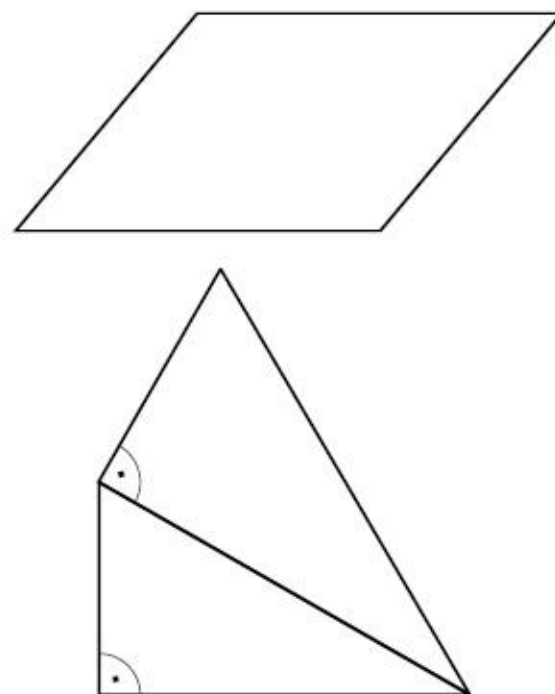
Pierwsze zdanie jest prawdziwe.

Drugie zdanie jest fałszywe – np. równoległobok, którego jeden z kątów jest ostry, ma dwie pary boków równej długości, nie jest prostokątem.

Trzecie zdanie jest fałszywe – np. czworokąt, w którym przekątna jest prostopadła do boku.

Czwarte zdanie jest prawdziwe.

Odpowiedź: PFFP

**Ćwiczenie do przykładu 267.**

Rozwiąż samodzielnie

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Każdy romb jest kwadratem.	P	F
Niektóre równoległoboki są rombami.	P	F
Nie każdy równoległobok jest trapezem.	P	F
Każdy równoległobok, który ma kąt prosty, jest kwadratem.	P	F



Przykład 268.

Rysunek przedstawia równoległobok.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Kąt β ma miarę A/B.

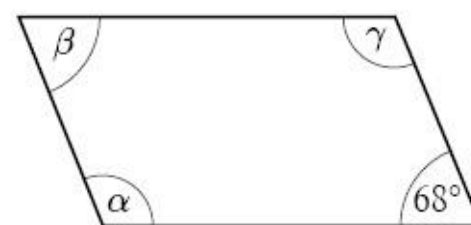
A. 68°

B. 136°

Suma miar kątów α i γ wynosi C/D.

C. 112°

D. 224°



Rozwiązanie:

W równoległoboku przeciwległe kąty są równe, więc $\beta = 68^\circ$.

W równoległoboku suma miar dwóch kolejnych kątów wynosi 180° , czyli:

$$\gamma = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ \text{ i } \gamma = \alpha$$

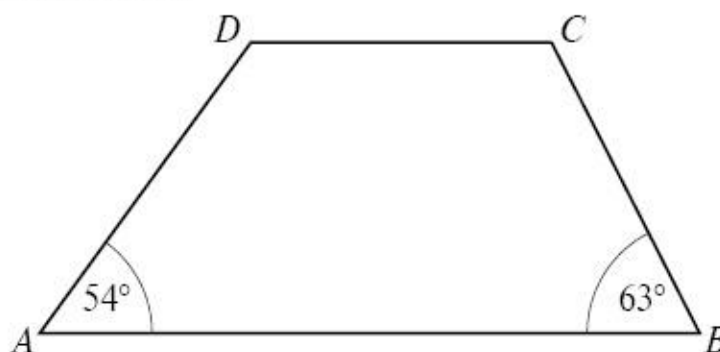
$$\alpha + \gamma = 112^\circ + 112^\circ = 224^\circ$$

Odpowiedź: AD

Ćwiczenie do przykładu 268.

Rozwiąż samodzielnie

W trapezie $ABCD$ boki AB i CD są równoległe.



Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Miara kąta ADC tego trapezu wynosi 116° .	P	F
Różnica miar kątów ADC i BCD jest taka sama jak różnica miar kątów CBA i DAB .	P	F

**Przykład 269.**

Działki pana Tomasz i pan Łukasza mają równe obwody. Działka pana Tomasz ma kształt prostokąta o wymiarach $0,084$ km i 450 dm, zaś działka pana Łukasza jest w kształcie kwadratu.

Jakie wymiary ma działka pana Łukasza. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $32,25$ m $\times$ $32,25$ m

B. $64,5$ m $\times$ $64,5$ m

C. $42,5$ m $\times$ $42,5$ m

D. $22,5$ m $\times$ $22,5$ m

Rozwiązanie:

Wyrażamy wymiary działki pana Tomasz w metrach:

$$0,084 \text{ km} = 84 \text{ m}, 450 \text{ dm} = 45 \text{ m}$$

Obliczamy obwód działki pana Tomasz:

$$\text{Obwód} = 2 \cdot 84 + 2 \cdot 45 = 258 \text{ m}$$

Obliczamy wymiary działki pana Łukasza, która ma kształt kwadratu. Wszystkie boki kwadratu mają taką samą długość, więc $258 \text{ m} : 4 = 64,5 \text{ m}$.

Odpowiedź: B

Ćwiczenie do przykładu 269.

Rozwiąż samodzielnie

Oblicz, ile wynosi powierzchnia prostokątnej działki leśnej o obwodzie 800 m, której szerokość jest 3 razy mniejsza od długości.



Przykład 270.

Jedna z przekątnych rombu ma długość 10 cm. Ile wynosi suma długości przekątnych rombu, jeżeli jego pole powierzchni równa się 18 cm^2 ?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 13,6 cm

B. 3,6 cm

C. 27, 2 cm

D. 7,2 cm

Rozwiązanie:

Obliczamy długość drugiej przekątnej, korzystając ze wzoru na pole rombu.

$$\frac{10 \cdot f}{2} = 18$$

$$f = 3,6 \text{ cm}$$

Obliczamy sumę długości przekątnych.

$$10 \text{ cm} + 3,6 \text{ cm} = 13,6 \text{ cm}$$

Odpowiedź: A

Ćwiczenie do przykładu 270.

Rozwiąż samodzielnie

Romb ma takie samo pole jak kwadrat o boku długości 3 cm.

Odpowiedz na pytanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Które pary wielkości mogą wyrażać długość boku (a) i wysokość (h) tego rombu?

A. $a = 0,6 \text{ dm}$, $h = 1,5 \text{ cm}$

B. $a = 0,6 \text{ cm}$, $h = 15 \text{ mm}$

C. $a = 6 \text{ cm}$, $h = 1,5 \text{ dm}$

D. $a = 6 \text{ mm}$, $h = 1,5 \text{ cm}$



Przykład 271.

Punkty $A = (-3, -4)$, $B = (2, 0)$, $C = (2, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Punkt D ma współrzędne $(-3, 1)$.	P	F
Pole tego równoległoboku wynosi 15.	P	F

Rozwiązanie:

Zaznaczamy w układzie współrzędnych punkty A, B, C , następnie rysujemy równoległobok $ABCD$ i odczytujemy współrzędne punktu D .

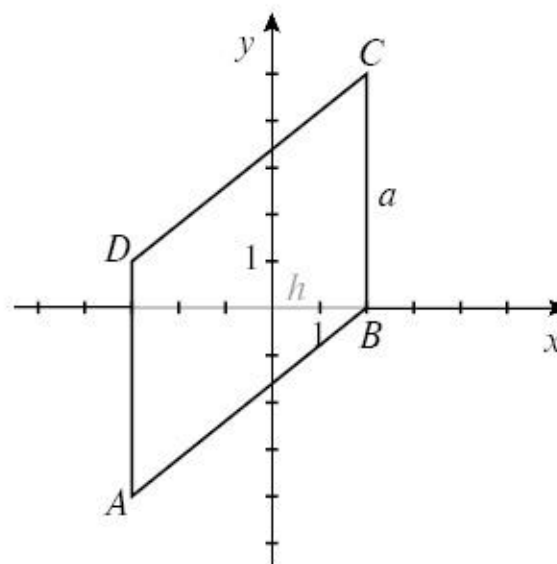
$D = (-3, 1)$ – pierwsze zdanie jest prawdziwe

Odczytujemy z rysunku dane i obliczamy pole równoległoboku.

$a = 5$ j., $h = 5$ j.

$P = 5 \cdot 5 = 25$ j². – drugie zdanie jest fałszywe

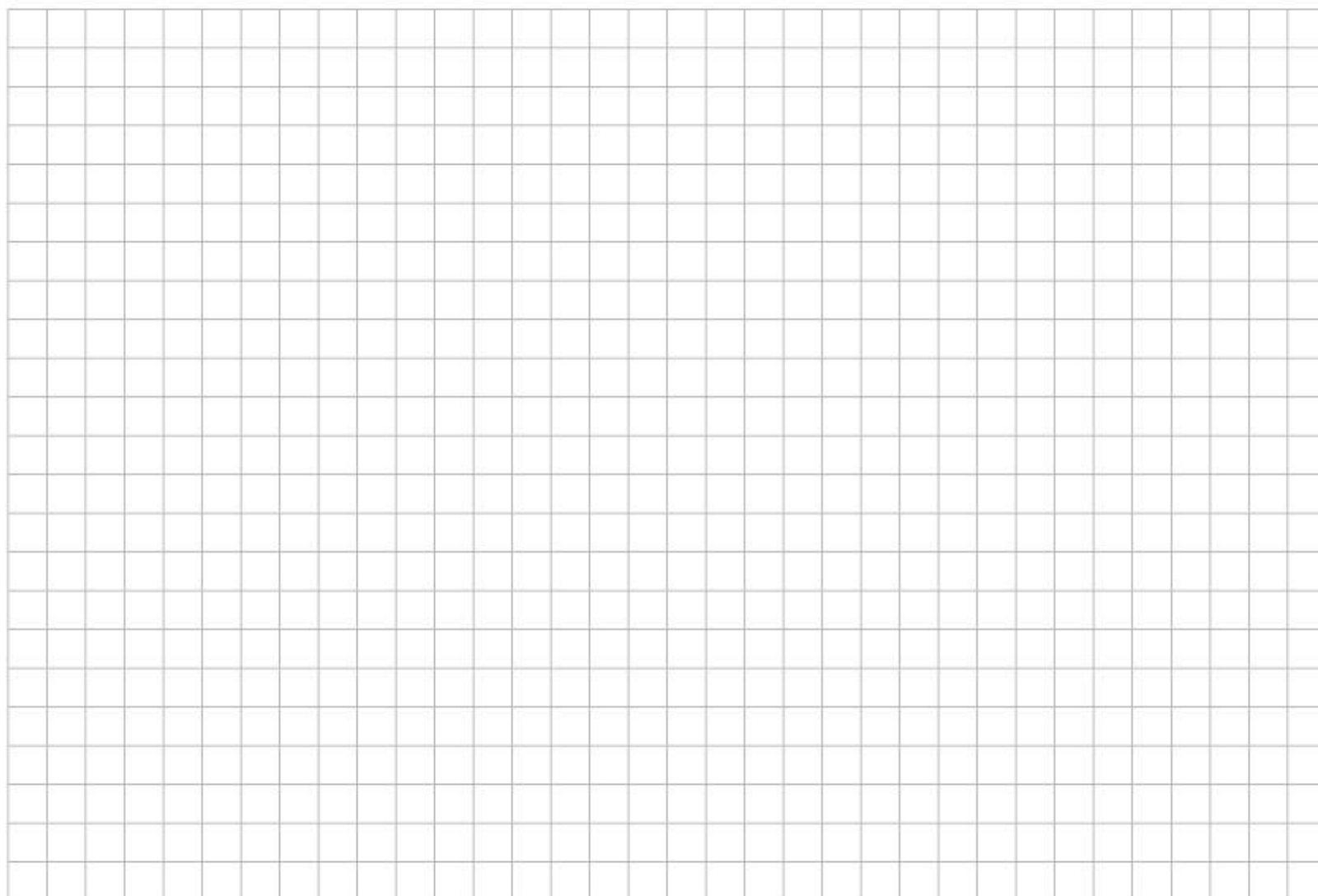
Odpowiedź: PF

**Ćwiczenie do przykładu 271.****Rozwiąż samodzielnie**

Długość dłuższego boku równoległoboku o obwodzie 6,4 dm wynosi 20 cm. Wysokość opuszczona na krótszy bok ma 17 cm.

Oceń prawdziwość zdań zaznaczając P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub F, jeśli zdanie jest fałszywe.

Krótszy boku tego równoległoboku ma długość 1,6 cm.	P	F
Długość drugiej wysokości jest równa 12 cm.	P	F



Przykład 272.

Prostokątne zdjęcie ma wymiary:

180 mm × 210 mm.

Naklejono je na karton w kształcie prostokąta o wymiarach 25 cm × 20 cm.

Oblicz, jaki procent powierzchni kartonu zajmuje powierzchnia zdjęcia.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Wyrażamy wymiary zdjęcia w centymetrach:

180 mm = 18 cm 210 mm = 21 cm

Obliczamy pole powierzchni zdjęcia:

$$18 \cdot 21 = 378 \text{ cm}^2$$

Obliczamy pole powierzchni kartonu:

$$25 \cdot 20 = 500 \text{ cm}^2$$

Obliczamy, jakim procentem powierzchni kartonu jest powierzchnia zdjęcia:

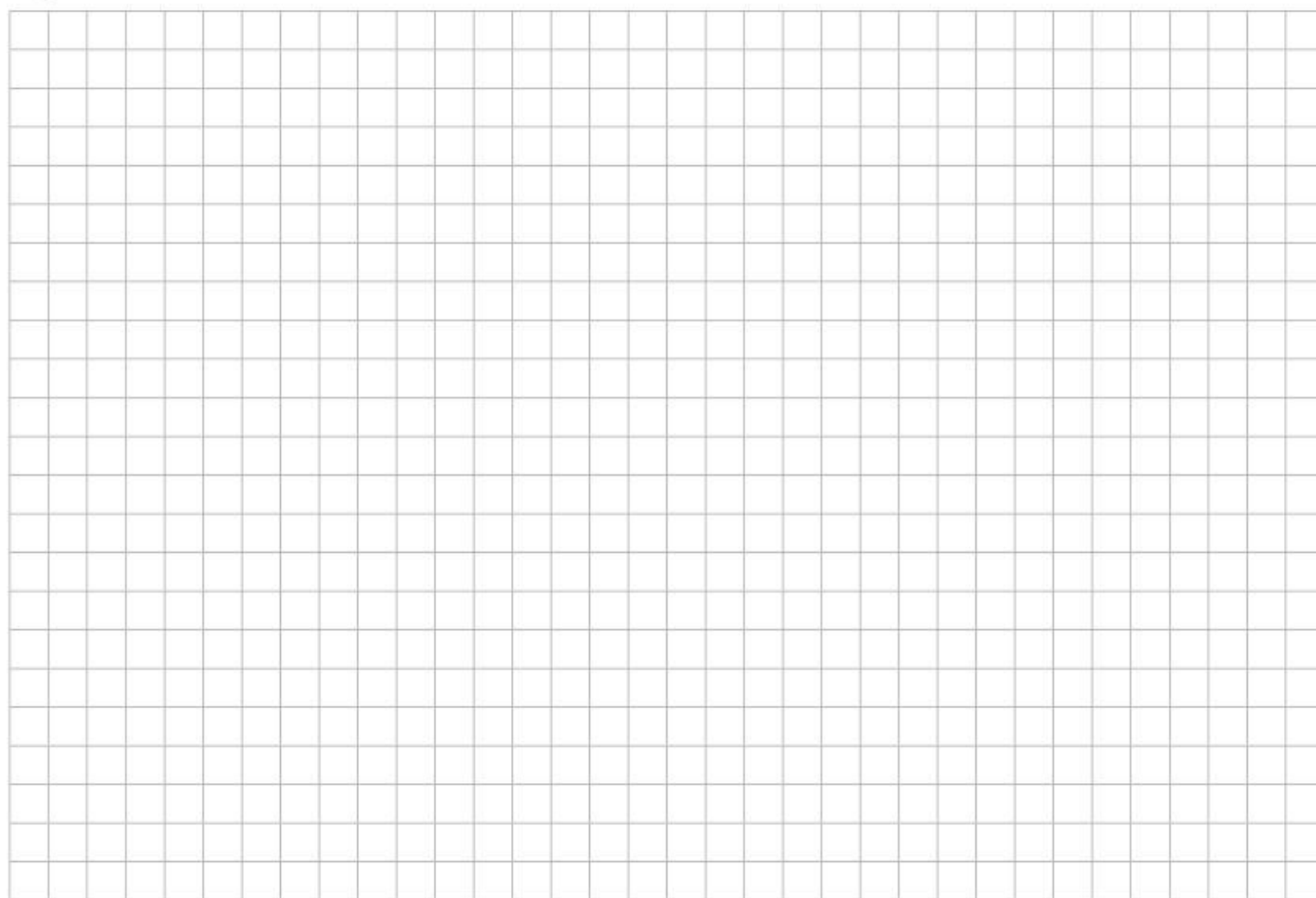
$$\frac{378}{500} \cdot 100\% = 75,6\%$$

Odpowiedź: Powierzchnia zdjęcia zajmuje 75,6% powierzchni kartonu.

Ćwiczenie do przykładu 272.

Rozwiąż samodzielnie

Podłoga w łazience ma wymiary 4,5 m × 3,8 m. Wysokość łazienki wynosi 2,5 m. Ile najmniej kwadratowych płytek o boku długości 40 cm potrzeba na wyłożenie ścian tej łazienki? Odlicz powierzchnię drzwi o szerokości 75 cm i wysokości 2 m.

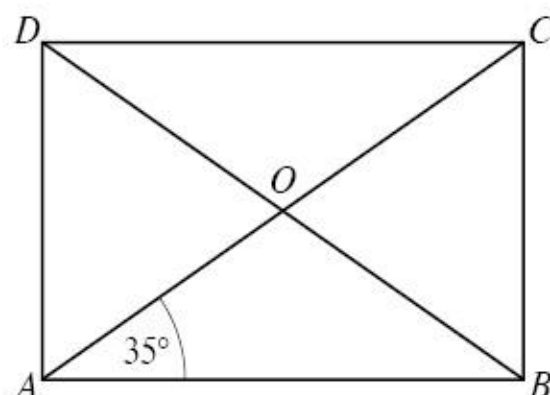


ZADANIA

273. W prostokącie $ABCD$ poprowadzono przekątne, które przecięły się w punkcie O .

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Miary kątów trójkąta DOC wynoszą 35° , 35° i 110° .	P	F
Suma miar kątów OBC i COB w trójkącie BOC jest równa 125° .	P	F



274. W rombie wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego tworzy z bokiem rombu kąt o mierze 32° .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt rozwarty tego rombu ma miarę

A. 22°

B. 158°

C. 58°

D. 122°

275. Lustro w aluminiowej ramce ma kształt równoległoboku.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Na wykonanie tego lustra zużyto A/B szkła.

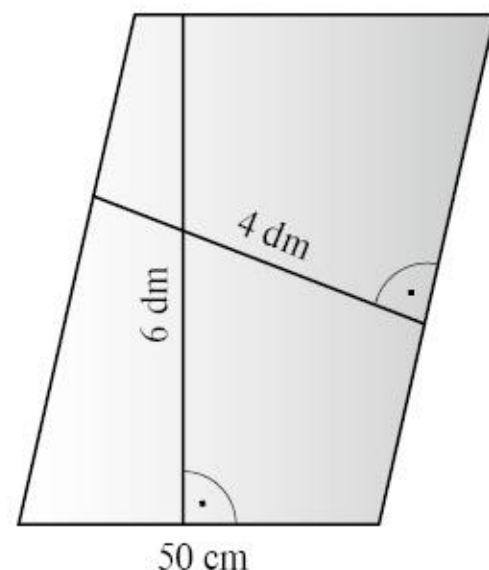
A. 300 cm^2

B. 30 dm^2

Na wykonanie ramki do tego lustra zużyto C/D aluminiowej listwy.

C. 250 cm

D. $2,5 \text{ dm}$



276. Pole kwadratu wynosi 18 cm^2 .

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Długość przekątnej tego kwadratu wynosi 6 cm .	P	F
Obwód tego kwadratu jest równy $12\sqrt{2} \text{ cm}$.	P	F

277. Czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

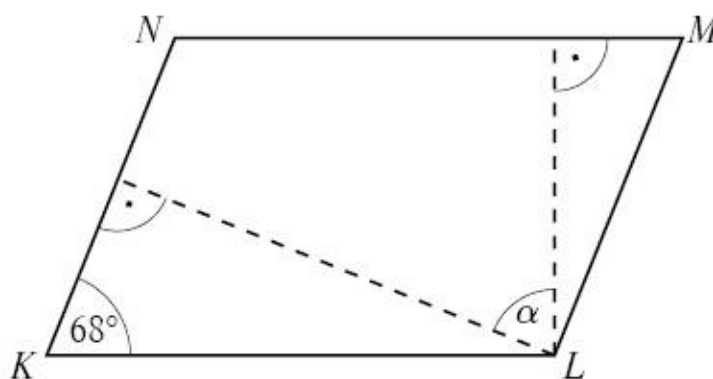
Miara kąta α zaznaczonego na rysunku wynosi

A. 22°

B. 68°

C. 44°

D. 78°



278. W trapezie prostokątnym kąt ostry ma miarę trzy razy mniejszą od miary kąta rozwartego.

Czy miara kąta ostrego tego trapezu wynosi 45° , a rozwartego – 135° ? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	suma miar kątów leżących przy jednym ramieniu trapezu wynosi 180° .
		B.	miara kąta rozwartego jest większa od miary kąta ostrego.
N		C.	różnica miar kąta rozwartego i ostrego tego trapezu wynosi 90° .

279. Na rysunku przedstawiono równoległobok, którego wymiary są opisane za pomocą wyrażeń algebraicznych.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Jeden z boków tego równoległoboku ma długość A/B.

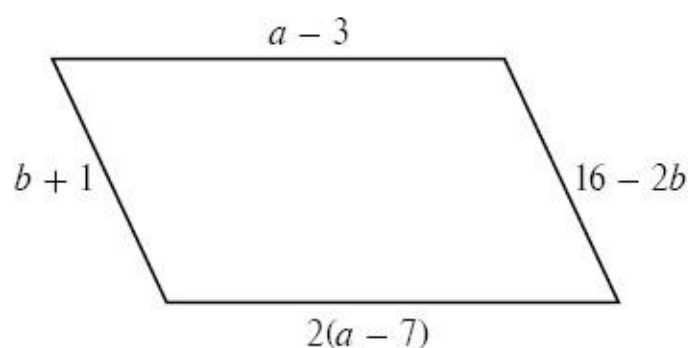
A. 5

B. 6

Obwód tego równoległoboku jest równy C/D.

C. 28

D. 32



280. Miara kąta ostrego równoległoboku o krótszym boku równym $6\sqrt{2}$ cm wynosi 45° . Krótsza przekątna dzieli ten równoległobok na dwa trójkąty prostokątne.

Ile wynosi pole tego równoległoboku? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 72 cm^2

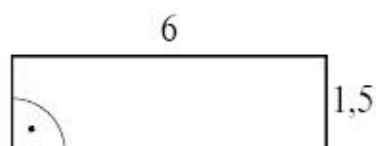
B. 36 cm^2

C. $36\sqrt{2} \text{ cm}^2$

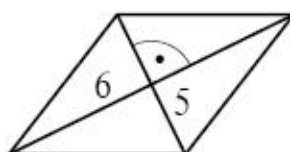
D. $72\sqrt{2} \text{ cm}^2$

281. Rysunki przedstawiają prostokąt, romb, równoległobok i trapez.

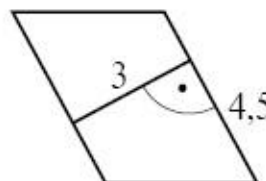
I



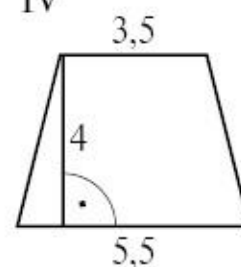
II



III



IV



Która spośród figur I, II, III, IV ma najmniejsze pole? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. I

B. II

C. III

D. IV

282. Obwód trapezu prostokątnego wynosi 32 cm, a długości jego ramion są równe 5 cm i 9 cm. Oblicz pole tego trapezu.

283. Oblicz pole trapezu o podstawach długości 14,5 cm i 8 cm, wiedząc, że wysokość jest o 20% dłuższa od krótszej podstawy.

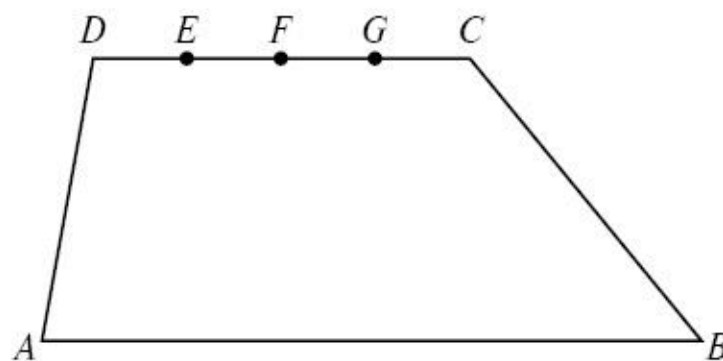
284. Rabatka kwiatowa w ogrodzie ma kształt rombu, którego przekątne mają długości 0,8 m i 150 cm.

Ile trzeba kupić sadzonek stokrotek, aby obsadzić nimi tę rabatę? Przyjmij, że na jedną sadzonkę potrzeba $2,5 \text{ dm}^2$ powierzchni.

285. Pole trapezu, którego wysokość wynosi 7,2 cm jest równe $64,8 \text{ cm}^2$. Oblicz sumę długości podstaw tego trapezu.

286. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem, a odcinki DE , EF , FG i GC mają równe długości.

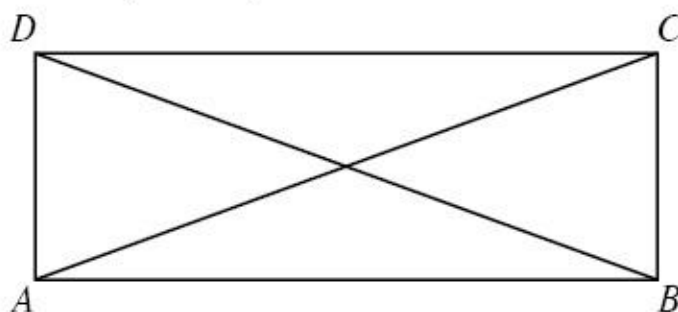
Uzasadnij, że pola trapezów $ABCF$, $ABGE$, $ABFD$ są równe.



287. W trapezie równoramiennym miara kąta zawartego między przekątną a dłuższą podstawą wynosi 26° , a miara kąta zawartego między przekątną a ramieniem trapezu to 25° . Oblicz miary kątów tego trapezu.

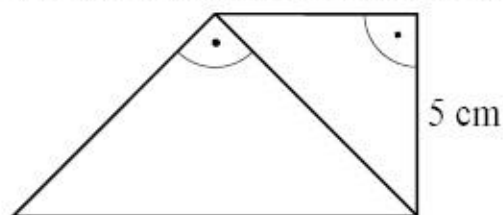
288. Z dwóch listewek o długościach 65 cm i 48 cm Kacper i Adaś chcą wykonać latawiec w kształcie rombu. Oblicz, ile decymetrów kwadratowych papieru potrzebują do oklejenia tego latawca, jeżeli na zakładki potrzebują 0,1 powierzchni latawca.

289. Czworokąt $ABCD$ jest prostokątem o przekątnych AC i BD .



Uzasadnij, że przekątne AC i BD dzielą prostokąt $ABCD$ na cztery trójkąty o równych polach.

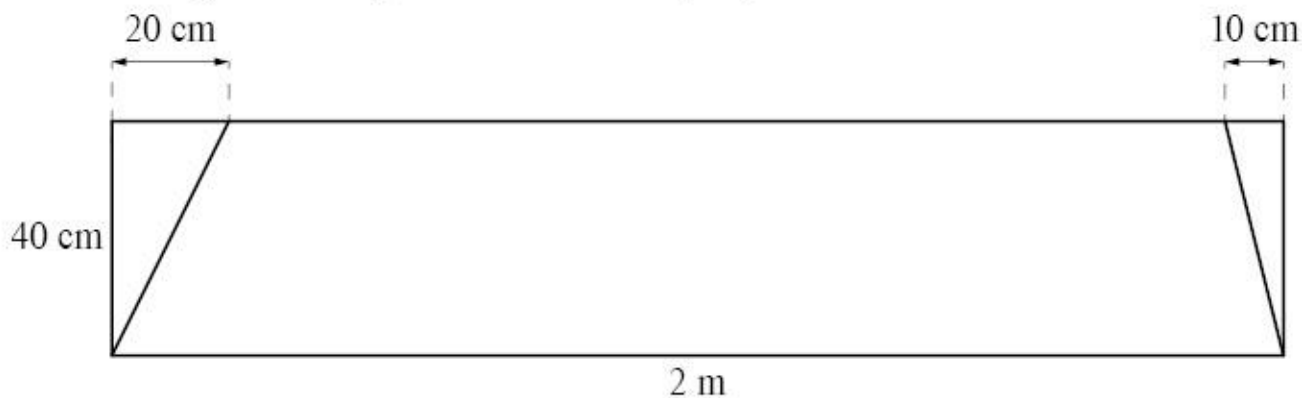
290. Krótsza przekątna trapezu dzieli go na dwa trójkąty prostokątne równoramienne.



Oblicz pole tego trapezu, jeśli jego wysokość wynosi 5 cm.

291. Boki równoległoboku mają długości 0,3 m i 0,2 m. Wysokość odpowiadająca krótszemu bokowi jest równa 15 cm. Oblicz wysokość odpowiadającą dłuższemu bokowi.

292. Stolarz z drewnianej prostokątnej deski odciął dwa trójkąty.



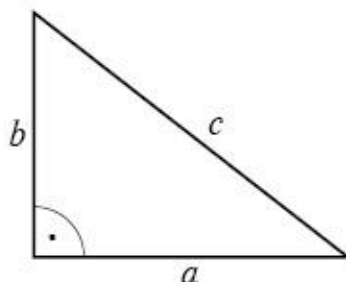
Oblicz, ile metrów kwadratowych ma przycięta deska.

TEORIA

Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

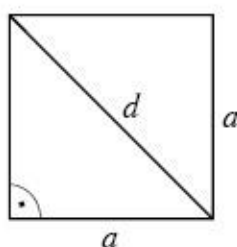


PRZYKŁAD:

Jeżeli $a = 6$ cm, $b = 8$ cm:
 $c^2 = 6^2 + 8^2$
 $c^2 = 100$
 $c = 10$ cm

Przekątna kwadratu

$$d = a\sqrt{2}$$

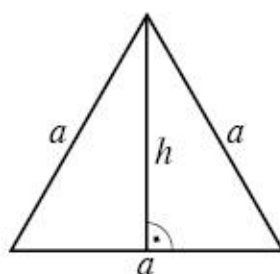


PRZYKŁAD: Długość przekątnej kwadratu o boku długości 5 cm wynosi $d = 5\sqrt{2}$ cm.

Wysokość i pole trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

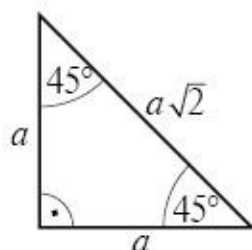
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



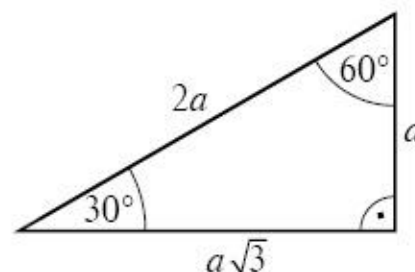
PRZYKŁAD: Wysokość i pole trójkąta równobocznego o boku długości 6 cm wynosi:
 $h = \frac{6\sqrt{3}}{2}$ cm = $3\sqrt{3}$ cm
 $P = \frac{6^2\sqrt{3}}{4}$ cm² = $9\sqrt{3}$ cm²

Trójkąty o miarach kątów 90°, 45°, 45° oraz 90°, 60°, 30°

W trójkącie prostokątnym o miarach kątów ostrych 45° i 45° lub 60° i 30° wystarczy znać długość jednego z boków, aby obliczyć długości dwóch pozostałych.



PRZYKŁAD: Jeśli długość jednej przyprostokątnej w trójkącie prostokątnym o miarach kątów ostrych 45° i 45° jest równa 3 cm, to długość drugiej przyprostokątnej też jest równa 3 cm, a długość przeciwprostokątnej to $3\sqrt{2}$ cm.



PRZYKŁAD: Jeśli długość jednej przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta o mierze 30° w trójkącie prostokątnym jest równa 9 cm, to długość drugiej przyprostokątnej wynosi $9\sqrt{3}$ cm, a długość przeciwprostokątnej to $2 \cdot 9$ cm = 18 cm.

ZADANIA EGZAMINACYJNE KROK PO KROKU

Przykład 293.

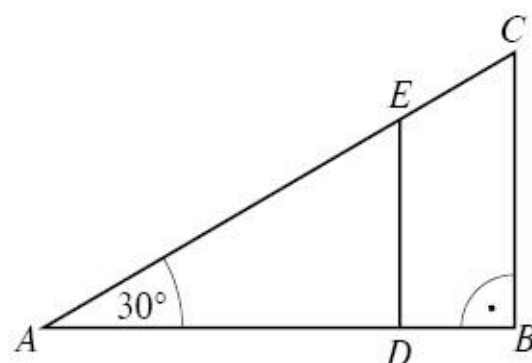
Egzamin 8-klasisty CKE

Na bokach trójkąta prostokątnego ABC zaznaczono punkty D i E . Odcinek DE podzielił trójkąt ABC na dwa wielokąty: trójkąt prostokątny ADE i czworokąt $DBCE$, jak na rysunku. Odcinek AB ma długość $4\sqrt{3}$ cm, a odcinek DE ma długość 3 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość odcinka EC jest równa

- A. 1 cm B. $\sqrt{3}$ cm C. 2 cm
D. 4 cm E. $3\sqrt{3}$ cm



Rozwiązanie:

Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym o miarach kątów ostrych 30° i 60° .

$$BC = 4 \text{ cm}$$

$$AC = 8 \text{ cm}$$

Trójkąt ADE jest trójkątem prostokątnym o miarach kątów ostrych 30° i 60° .

$$AE = 6 \text{ cm}$$

Obliczamy długość odcinka EC :

$$EC = AC - AE$$

$$EC = 8 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$

Odpowiedź: C

Ćwiczenie do przykładu 293.

Rozwiąż samodzielnie

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 13 cm, a jedna z przyprostokątnych 5 cm.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Druga przyprostokątna ma długość **A/B**.

A. 8 cm

B. 12 cm

Pole tego trójkąta wynosi **C/D**.

C. 30 cm^2

D. $32,5 \text{ cm}^2$



Przykład 294.

Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 0,6 dm, a jego obwód 0,16 m.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole tego trójkąta wynosi

A. 12 cm^2

B. 24 cm^2

C. 15 cm^2

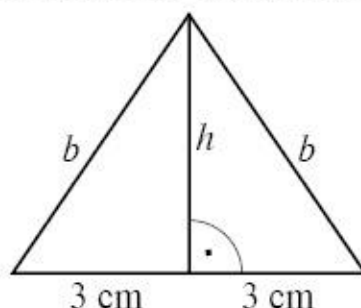
D. 20 cm^2

Rozwiązanie:

Wyrażamy długości w tych samych jednostkach:

$$0,6 \text{ dm} = 6 \text{ cm} \quad 0,16 \text{ m} = 16 \text{ cm}$$

Wykonujemy rysunek pomocniczy. Długość ramienia trójkąta oznaczamy przez b , a wysokość przez h .



Obliczamy długość ramienia trójkąta.

$$2b + 6 = 16 \Rightarrow b = 5 \text{ cm}$$

Zapisujemy równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy wysokość trójkąta.

$$h^2 + 3^2 = 5^2$$

$$h^2 = 25 - 9 \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Obliczamy pole trójkąta: } P = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

Odpowiedź: A

Ćwiczenie do przykładu 294.

Rozwiąż samodzielnie

W trójkącie równoramiennym długość ramienia jest równa b , a wysokość h , $b > h$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość podstawy tego trójkąta jest równa

A. $b^2 - h^2$

B. $\sqrt{b^2 - h^2}$

C. $2(b^2 - h^2)$

D. $2\sqrt{b^2 - h^2}$



Przykład 295.

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Pole trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa $\sqrt{3}$ cm wynosi $\sqrt{3}$ cm ² .	P	F
Obwód trójkąta równobocznego o polu $16\sqrt{3}$ cm ² jest równy $8\sqrt{3}$ cm.	P	F

Rozwiązanie:

Obliczamy długość boku trójkąta, korzystając ze wzoru $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ cm.

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow a = 2 \text{ cm}$$

Obliczamy pole trójkąta równobocznego korzystając ze wzoru $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$:

$$P = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \text{ cm}^2 - \text{pierwsze zdanie jest prawdziwe}$$

Obliczamy długość boku trójkąta, korzystając ze wzoru $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$$

$$\frac{a^2}{4} = 16 \Rightarrow a = 8 \text{ cm}$$

$Obwód = 3 \cdot 8 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$ – drugie zdanie jest fałszywe

Odpowiedź: PF

Ćwiczenie do przykładu 295.

Rozwiąż samodzielnie

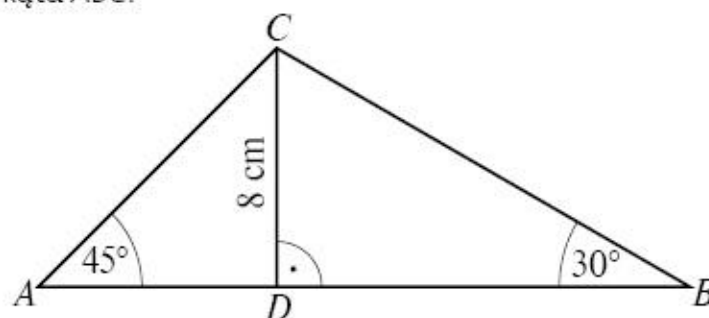
Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Trójkąt równoboczny o obwodzie 24 dm ma pole równe $36\sqrt{3}$ dm ² .	P	F
Obwód trójkąta równobocznego o polu $64\sqrt{3}$ cm ² wynosi 16 cm.	P	F



Przykład 296.

Odcinek CD jest wysokością trójkąta ABC .



Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Suma długości odcinków AC i CB jest równa **A/B**. A. $(8\sqrt{2} + 16)$ cm B. $(8\sqrt{2} + 8)$ cm

Pole trójkąta ABC wynosi **C/D**. C. $32(1 + \sqrt{3})$ cm² D. $256\sqrt{3}$ cm²

Rozwiązanie:

Trójkąt DBC jest trójkątem prostokątnym o miarach kątów ostrych 30° i 60° .

$$CB = 2 \cdot 8 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$$

$$DB = 8\sqrt{3} \text{ cm}$$

Trójkąt ADC jest trójkątem prostokątnym równoramiennym o miarach kątów ostrych 45° i 45° .

$$AD = DC = 8 \text{ cm}$$

$$AC = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

Obliczamy sumę długości odcinków AC i CB :

$$AC + CB = (8\sqrt{2} + 16) \text{ cm}$$

Obliczamy pole trójkąta ABC :

$$P = \frac{(8 + 8\sqrt{3}) \cdot 8}{2} = 32(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

Odpowiedź: AC

Ćwiczenie do przykładu 296.

Rozwiąż samodzielnie

Rysunek przedstawia trójkąt KLM .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

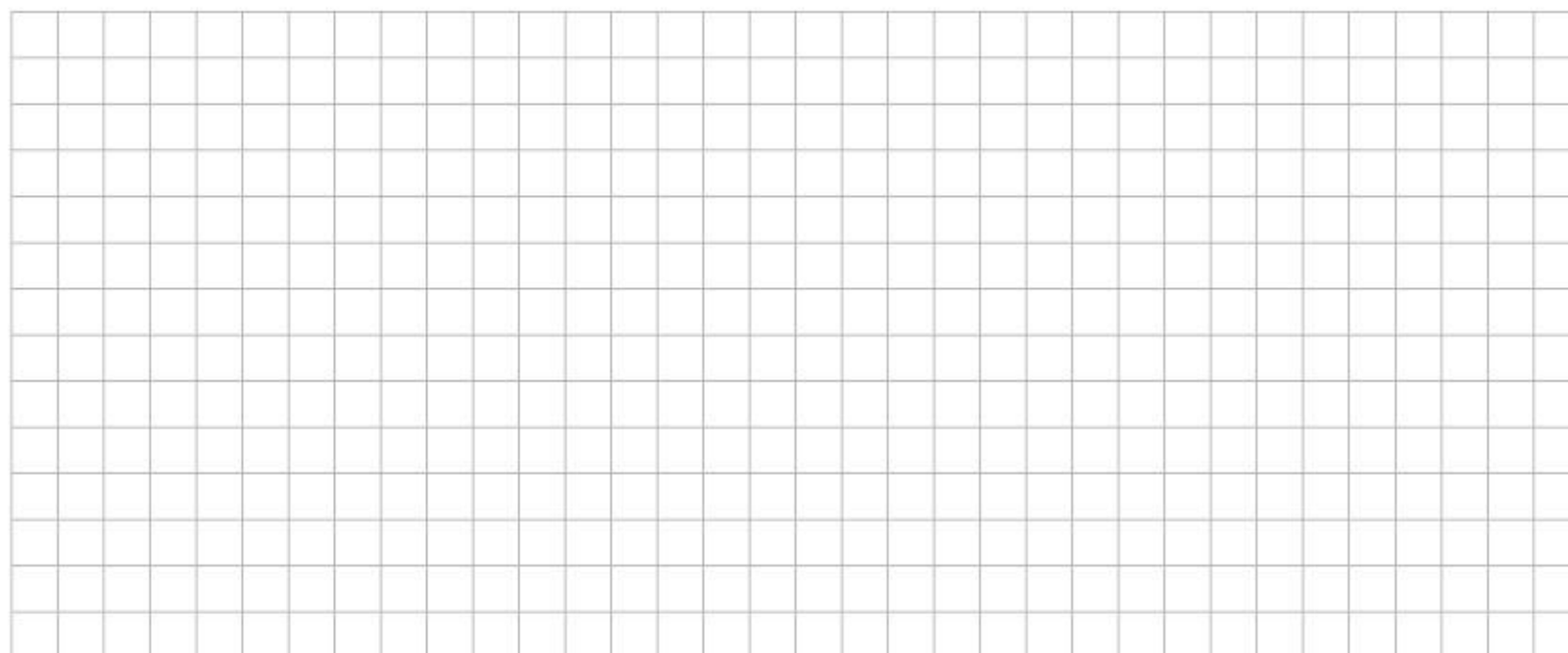
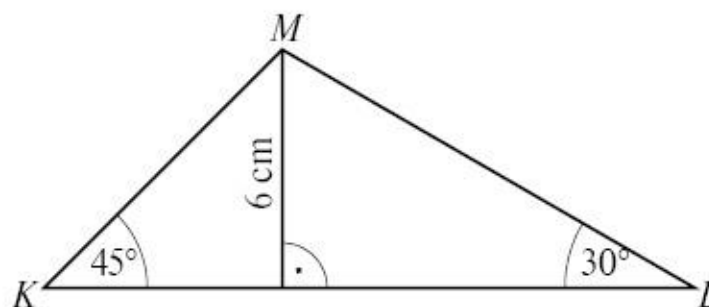
Różnica długości najdłuższego i najkrótszego boku trójkąta KLM wynosi

A. $6(\sqrt{3} - 1)$ cm

B. 6 cm

C. $6\sqrt{5}$ cm

D. $6(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2})$ cm



Przykład 297.

Punkty $A = (-4, -2)$, $B = (1, -2)$, $C = (3, 2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Punkt D ma współrzędne $(-2, 1)$.	P	F
Obwód tego równoległoboku wynosi $14\sqrt{5}$.	P	F

Rozwiązanie:

W układzie współrzędnych rysujemy równoległobok $ABCD$:

Odczytujemy współrzędne punktu D :

$D = (-2, 2)$ – pierwsze zdanie jest fałszywe

Odczytujemy długości odcinków AB i CD

$AB = CD = 5$ j.

Obliczamy długość odcinka BC :

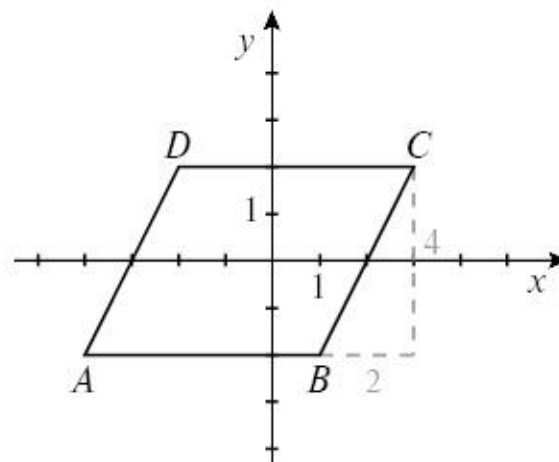
$$BC^2 = 2^2 + 4^2$$

$$BC^2 = 20$$

$$BC = 2\sqrt{5}$$

Obliczamy obwód równoległoboku $ABCD$:

$$\text{Obwód} = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2\sqrt{5} = 10 + 4\sqrt{5} \text{ – drugie zdanie jest fałszywe}$$



Odpowiedź: FF

Ćwiczenie do przykładu 297.

Rozwiąż samodzielnie

W układzie współrzędnych narysowano trójkąt ABC .

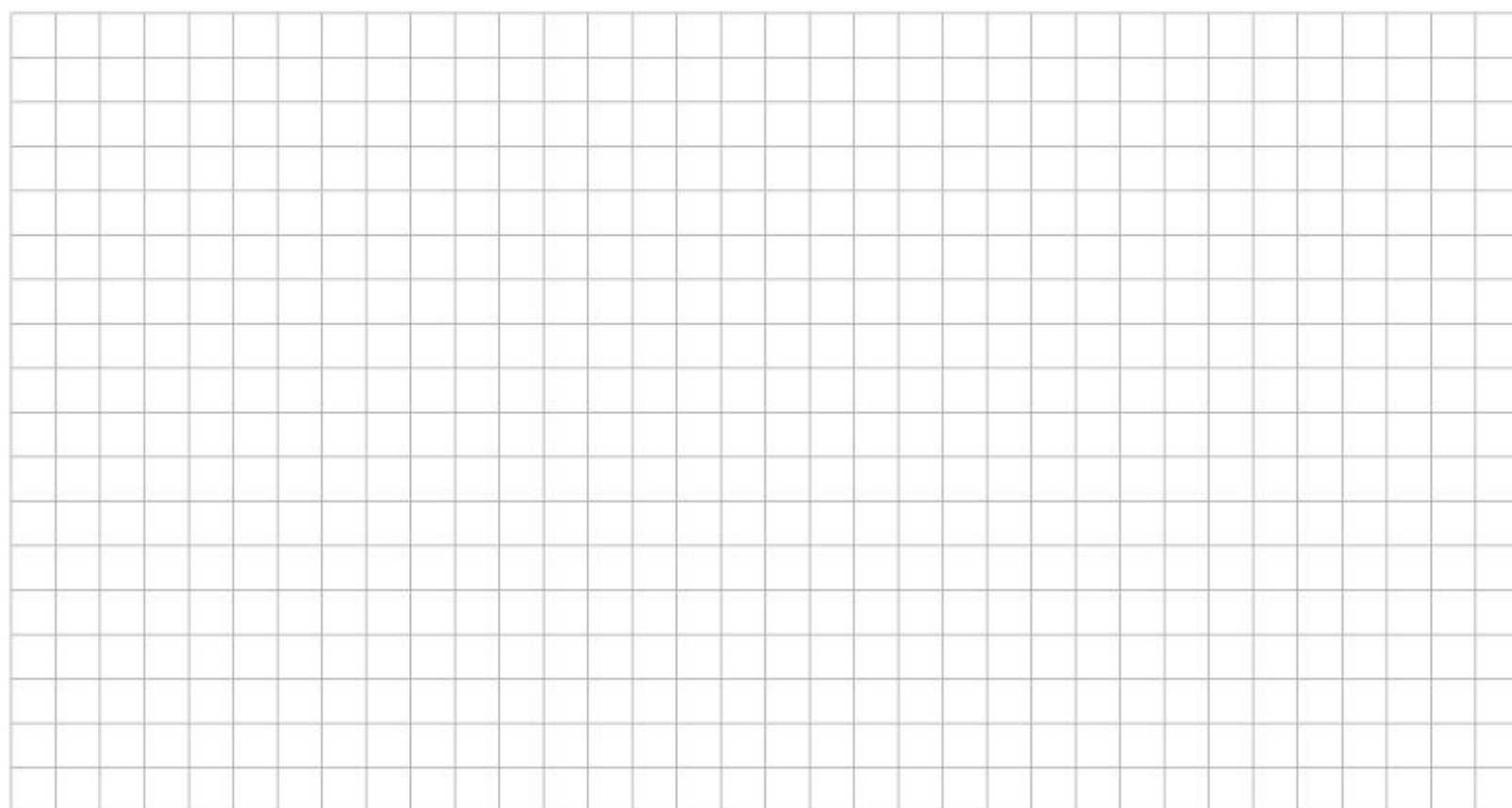
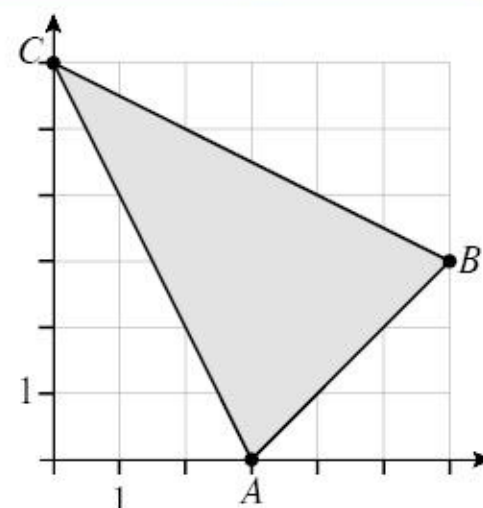
Ile wynosi obwód trójkąta ABC ? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $3\sqrt{2} + 6\sqrt{10}$

B. $3\sqrt{2} + 6\sqrt{5}$

C. $12\sqrt{3}$

D. $12\sqrt{5}$



Przykład 298.

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 6 cm, a jedna z przyprostokątnych $2\sqrt{2}$ cm. Jaką długość ma druga przyprostokątna? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $4\sqrt{7}$ cm B. $2\sqrt{7}$ cm C. $7\sqrt{2}$ cm D. $4\sqrt{2}$ cm

Rozwiązanie:

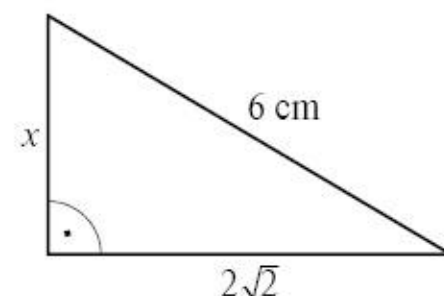
Wykonujemy rysunek pomocniczy. Szukaną długość przyprostokątnej oznaczamy przez x . Zapisujemy równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy długość przyprostokątnej.

$$x^2 + (2\sqrt{2})^2 = 6^2$$

$$x^2 + 8 = 36$$

$$x^2 = 28$$

$$x = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$



Odpowiedź: B

Ćwiczenie do przykładu 298.

Rozwiąż samodzielnie

W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 40 cm i 9 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość przeciwprostokątnej wynosi

- A. 40 cm B. 49 cm C. 41 cm D. 31 cm



Przykład 299.

Przekątne rombu mają długości 12 cm i 16 cm. Oblicz, jaką wysokość ma ten romb.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy. Długość boku tego rombu oznaczamy przez a , a wysokość przez h .

Obliczamy pole rombu:

$$P = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96 \text{ cm}^2$$

Wiemy, że przekątne w rombie są prostopadłe i dzielą się na połowy, więc zapisujemy równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy długość boku rombu:

$$a^2 = 6^2 + 8^2$$

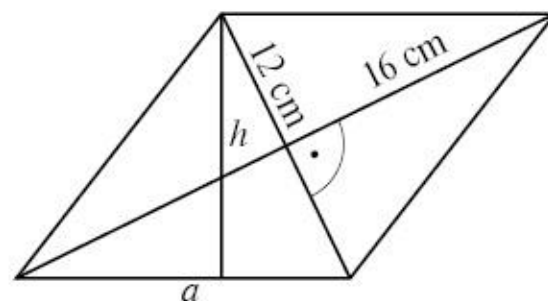
$$a^2 = 36 + 64$$

$$a^2 = 100 \Rightarrow a = 10 \text{ cm}$$

Obliczamy wysokość rombu, korzystając ze wzoru $P = a \cdot h$:

$$10 \cdot h = 96$$

$$h = 9,6 \text{ cm}$$



Odpowiedź: Wysokość rombu wynosi 9,6 cm.

Ćwiczenie do przykładu 299.**Rozwiąż samodzielnie**

Oblicz pole rombu, którego obwód wynosi 100 cm, a długość jednej z przekątnych ma 40 cm.



Przykład 300.

W trapezie równoramiennym, którego obwód ma długość 100 cm, różnica długości podstaw jest równa 30 cm. **Oblicz pole powierzchni tego trapezu, jeżeli jego ramię ma długość 25 cm.**

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy. Długości boków tego trapezu oznaczamy przez a , b i c , a wysokość przez h .

Obliczamy sumę długości podstaw:

$$a + b = 100 - 2c$$

$$a + b = 100 - 50$$

$$a + b = 50$$

Obliczamy długości podstaw:

$$a - b = 30, \text{ czyli } a = 30 + b$$

$$30 + b + b = 50$$

$$b = 10 \text{ cm i } a = 40 \text{ cm}$$

Obliczamy długość odcinka AE : $AE = (40 - 10) : 2 = 15 \text{ cm}$

Zapisujemy równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy wysokość trapezu.

$$15^2 + h^2 = 25^2$$

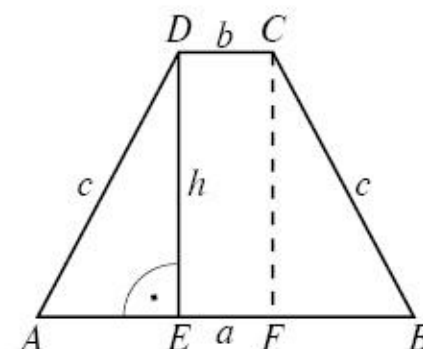
$$225 + h^2 = 625$$

$$h^2 = 400$$

$$h = 20 \text{ cm}$$

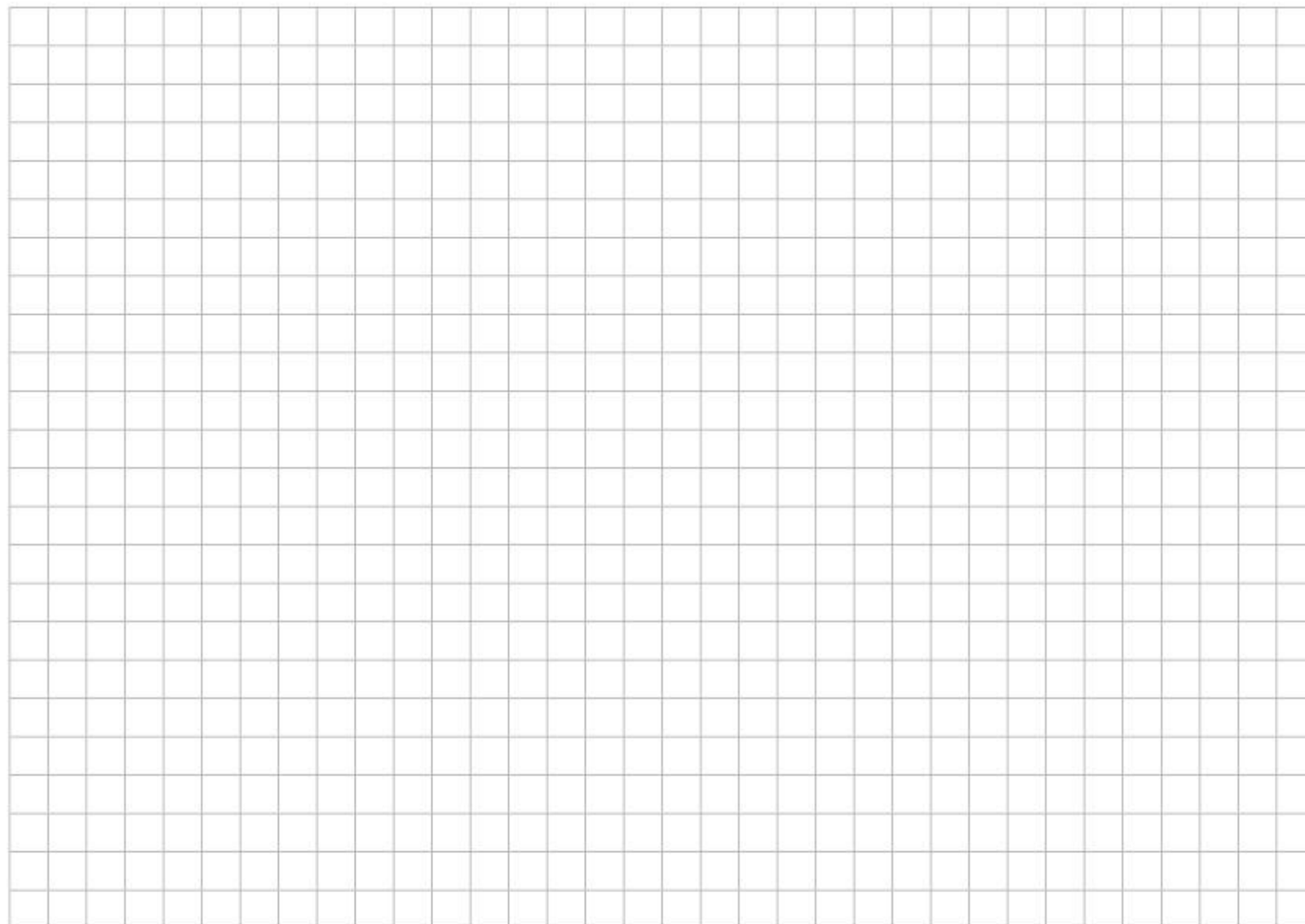
$$\text{Obliczamy pole trapezu: } P = \frac{(10 + 40) \cdot 20}{2} = 500 \text{ cm}^2$$

Odpowiedź: Pole trapezu wynosi 500 cm^2 .

**Ćwiczenie do przykładu 300.****Rozwiąż samodzielnie**

Wysokość trapezu równoramiennego poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego podzieliła podstawę na odcinki o długościach 5 cm i 15 cm.

Wiedząc, że obwód tego trapezu wynosi 46 cm, oblicz jego pole.



ZADANIA

301. Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

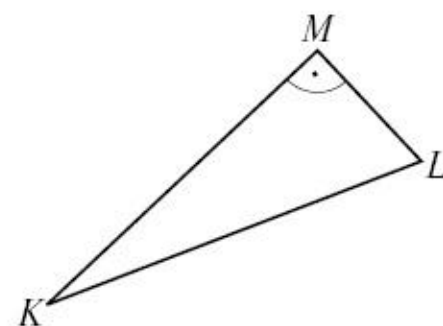
Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości 6 cm wynosi $3\sqrt{3}$ cm.	P	F
Przekątna kwadratu o boku 8 cm jest równa $4\sqrt{2}$ cm.	P	F
Pole trójkąta równobocznego o boku długości 12 cm wynosi $36\sqrt{3}$ cm ² .	P	F
Przekątna prostokąta o bokach długości 12 cm i 9 cm ma długość 15 cm.	P	F

302. Przedstawiony na rysunku trójkąt KLM jest prostokątny.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

- A. $KM^2 - KL^2 = LM^2$
- B. $ML^2 = KL^2 + KM^2$
- C. $KM^2 = KL^2 + ML^2$
- D. $KL^2 - ML^2 = KM^2$



303. Na bokach trójkąta prostokątnego KLM zbudowano kwadraty.

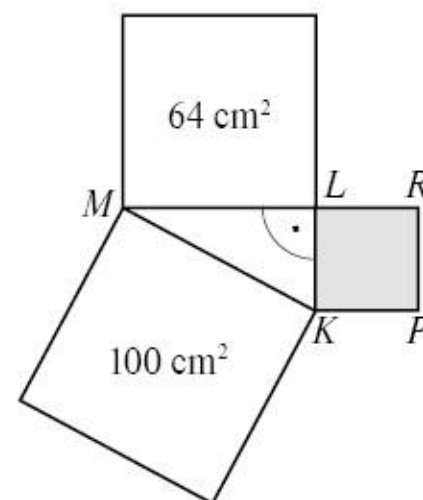
Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Pole kwadratu $KPRL$ wynosi A/B.

- A. 36 cm^2
- B. 164 cm^2

Obwód trójkąta prostokątnego KLM wynosi C/D.

- C. 19 cm
- D. 24 cm



304. Ramiona trapezu i krótsza podstawa mają po 13 cm długości, a wysokość 12 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych

Dłuższa podstawa tego trapezu ma długość

- A. 18 cm
- B. 26 cm
- C. 21 cm
- D. 23 cm

305. Czy wąską linijkę o długości 5,2 dm można zmieścić w płaskiej teczce o wymiarach 300 mm na 400 mm? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	przekątna teczki jest dłuższa od linijki.
N		B.	suma długości boków teczki jest większa od długości przekątnej.
		C.	przekątna teczki jest krótsza od linijki.

306. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

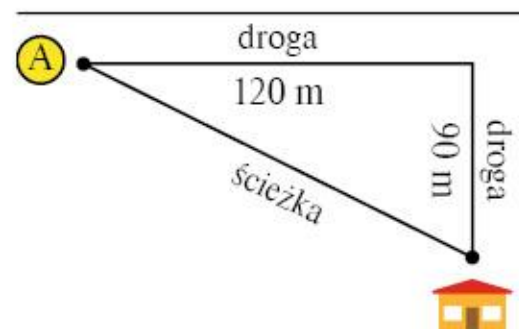
Długość betonowej ścieżki poprowadzonej wzdłuż przekątnej kwadratowej działki, która ogrodzona jest płotem o długości 120 m wynosi około

- A. 60 m
- B. 36 m
- C. 42 m
- D. 30 m

307. O ile metrów skraca sobie drogę Tomek, idąc ścieżką do przystanku?

Wybierz odpowiedź spośród podanych.

- A. o 30 m
- B. o 150 m
- C. o 60 m
- D. o 90 m



308. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej długości 3 cm i przeciwprostokątnej równej $3\sqrt{5}$ cm wynosi

- A. $(1+2\sqrt{5})$ cm B. $(9+3\sqrt{5})$ cm C. $(12+\sqrt{5})$ cm D. $(3+9\sqrt{5})$ cm

309. Miara kąta ostrego rombu wynosi 60° , a jego wysokość jest równa $2\sqrt{3}$ cm.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Bok rombu ma długość równą A/B.

A. $4\sqrt{3}$ cm

B. 4 cm

Iloczyn długości przekątnych tego rombu wynosi C/D.

C. 48 cm^2

D. $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$

310. Oblicz obwód rombu o przekątnych równych 2,4 m i 3,2 m.

311. Oblicz obwód i pole prostokąta, którego jeden z boków ma długość 15 cm, a przekątna ma 25 cm.

312. Punkty $A = (-3, -4)$, $B = (3, -4)$ oraz $C = (4, 3)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Oblicz obwód i pole tego trójkąta.

313. Wejście do domku na drzewie znajduje się na wysokości 4 m nad ziemią. Oblicz, jak daleko od pnia drzewa należy przystawić dolny koniec drabiny mającej długość 4,1 m, aby górny jej koniec mógł dosięgnąć wejścia.

314. Dwaj rowerzyści wyruszyli z tego samego miejsca, jeden pojechał na południe i przejechał 5 km, drugi pojechał na zachód i przejechał 12 km. Oblicz, ile wynosi teraz odległość między nimi w linii prostej.

315. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 3,6 dm, ramię ma długość 1 dm, a różnica długości podstaw wynosi 10 cm. Oblicz pole tego trapezu.

316. W równoległoboku ABCD kąt ostry jest równy 45° , a bok AD ma długość $3\sqrt{2}$ cm. Oblicz obwód i pole tego równoległoboku, jeżeli wysokość poprowadzona z wierzchołka D dzieli bok AB na połowy.

317. Odcinki o długościach 3 cm i 4 cm są przyprostokątnymi trójkąta prostokątnego. Uzasadnij, że pole trójkąta równobocznego zbudowanego na przeciwprostokątnej tego trójkąta jest równe sumie pól trójkątów równobocznych zbudowanych na przyprostokątnych tego trójkąta.

318. Kąt ostry rombu ma miarę 45° , a wysokość rombu jest równa 12 cm. Oblicz pole tego rombu.

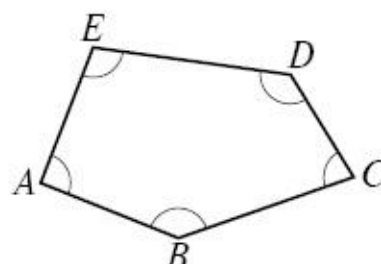
TEORIA

Wielokąt

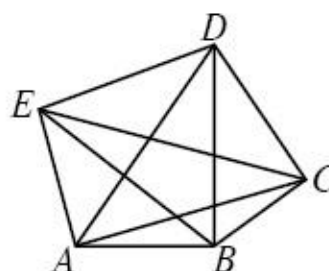
Wielokąt jest figurą płaską ograniczoną łamaną zamkniętą. Boki tej łamanej są bokami wielokąta, a jej wierzchołki – wierzchołkami wielokąta. W zależności od liczby boków oraz kątów wielokąty nazywamy trójkątami, czworokątami, pięciokątami, sześciokątami itd.

- W pięciokącie $ABCDE$ punkty A, B, C, D i E są jego wierzchołkami, odcinki AB, BC, CD, DE i EA – bokami, a zaznaczone łukami kąty – kątami wewnętrznymi tego pięciokąta.
- Każdy odcinek, który łączy dwa niekolejne wierzchołki wielokąta, nazywa się przekątną wielokąta, np. AC, AD, BE, BD, CE są przekątnymi pięciokąta $ABCDE$.

PRZYKŁAD:



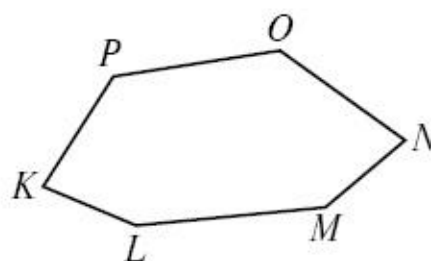
PRZYKŁAD:



Obwód wielokąta

Obwód wielokąta jest sumą długości wszystkich jego boków.

PRZYKŁAD:



$$\text{Obwód} = KL + LM + MN + NO + OP + PK$$

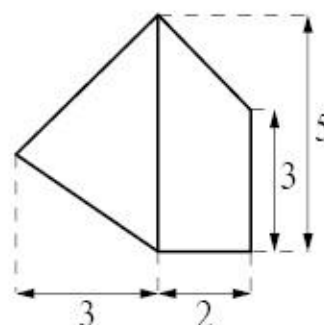
Pole wielokąta

Aby obliczyć pola niektórych wielokątów, możemy podzielić je na części.

Ważne! Zaplanuj podział na takie figury, których pola potrafisz obliczać.

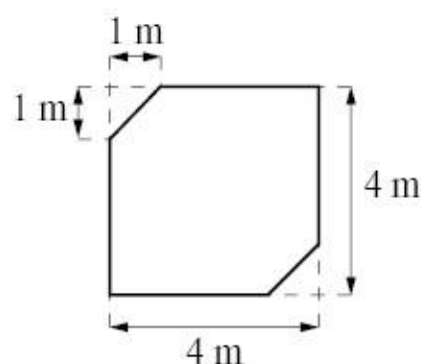
Pole pięciokąta obliczymy jako sumę pól trójkąta i trapezu prostokątnego o wspólnej podstawie równej 5 jednostek. Wysokość trójkąta wynosi 3 jednostki, wysokość trapezu – 2 jednostki, a druga podstawa tego trapezu ma długość 3 jednostki.

PRZYKŁAD:



Pole sześciokąta obliczymy, odejmując od pola kwadratu o boku 4 m pola dwóch trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych 1 m.

PRZYKŁAD:



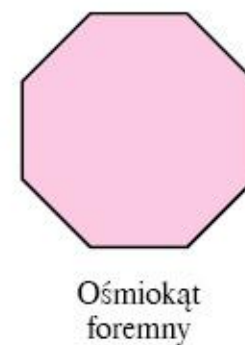
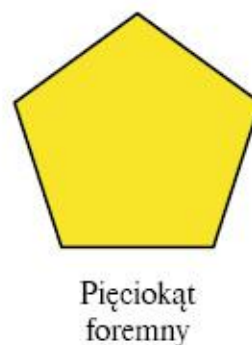
Suma miar kątów w wielokącie

$180^\circ \cdot (n-2)$ w dowolnym n -kącie,
gdzie $n \geq 3$

PRZYKŁAD: Suma miar kątów w trójkącie wynosi 180° , w czworokącie – 360° , w pięciokącie – 540° , w sześciokącie – 720° itd.

Wielokąt foremny

Wielokąt, który ma wszystkie boki tej samej długości i wszystkie kąty wewnętrzne jednakowej miary, nazywamy wielokątem foremnym.

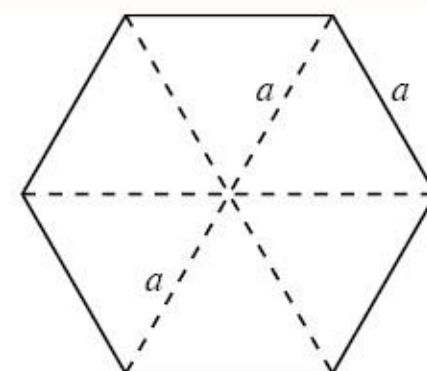


Sześciokąt foremny

- Miara kąta wewnętrznego sześciokąta foremnego wynosi 120° .

• Pole: $P = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

• Obwód: $Obwód = 6a$

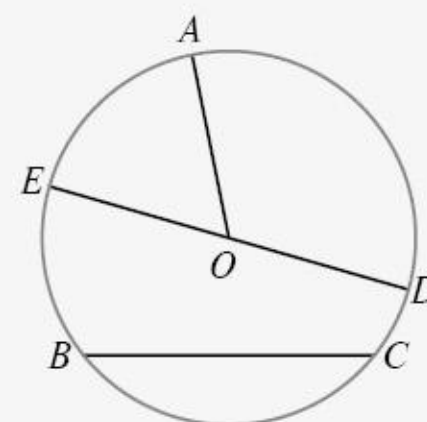


Okrąg

Okrąg o środku O i promieniu r to figura geometryczna utworzona z wszystkich punktów płaszczyzny, które leżą w tej samej odległości r od punktu O .

- **Cięciwa** – odcinek łączący dwa punkty okręgu, np. odcinek BC .
- **Średnica okręgu** (d) – odcinek łączący dwa punkty okręgu i przechodzący przez jego środek. Średnica okręgu jest najdłuższą cięciwą, np. odcinek DE .
- **Promień** – odcinek łączący dowolny punkt okręgu ze środkiem, np. odcinki OA , OE , OD .
- **Długość okręgu** o promieniu r : $L = 2\pi r$ lub $L = \pi d$

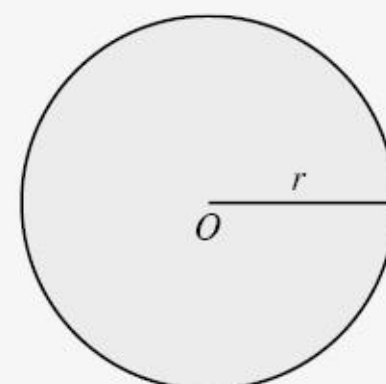
Liczba π ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone i nieokresowe. W obliczeniach przyjmujemy zwykle $\pi \approx 3,14$.



Koło

Koło o środku O i promieniu r to figura geometryczna utworzona z wszystkich punktów płaszczyzny ograniczonych okręgiem o środku O i promieniu r wraz z tym okręgiem. Okrąg jest brzegiem koła. Środek, promień, średnica i cięciwa okręgu są jednocześnie środkiem, promieniem, średnicą i cięciwą koła.

Pole koła o promieniu r wyraża się wzorem: $P = \pi r^2$



ZADANIA EGZAMINACYJNE KROK PO KROKU

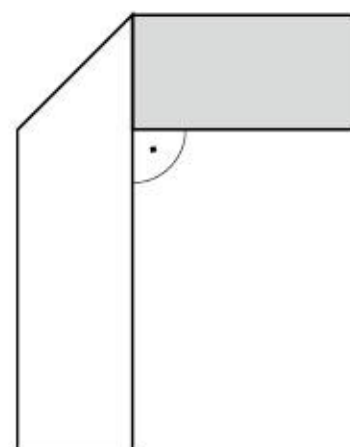
Przykład 319.

Egzamin 8-klasisty CKE

Prostokątny pasek papieru o wymiarach 12 cm na 2 cm jest z jednej strony biały, a z drugiej – szary. Ten pasek złożono w sposób pokazany na rysunku.

Pole widocznej szarej części paska jest równe 8 cm^2 .

Jakie pole ma widoczna biała część paska? Zapisz obliczenia.



Rozwiązanie:

Szara część paska jest prostokątem, a jeden z jego boków ma długość 2 cm. Obliczamy długość drugiego boku prostokąta:

$$8 \text{ cm}^2 : 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

Biała część paska jest trapezem prostokątnym o wysokości $h = 2 \text{ cm}$

Obliczamy długości podstaw tego trapezu:

$$a = 12 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

$$b = 8 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

Obliczamy pole białej części paska:

$$P = \frac{(8+6) \cdot 2}{2} = 14 \text{ cm}^2$$

Odpowiedź: Pole białej części paska wynosi 14 cm^2 .

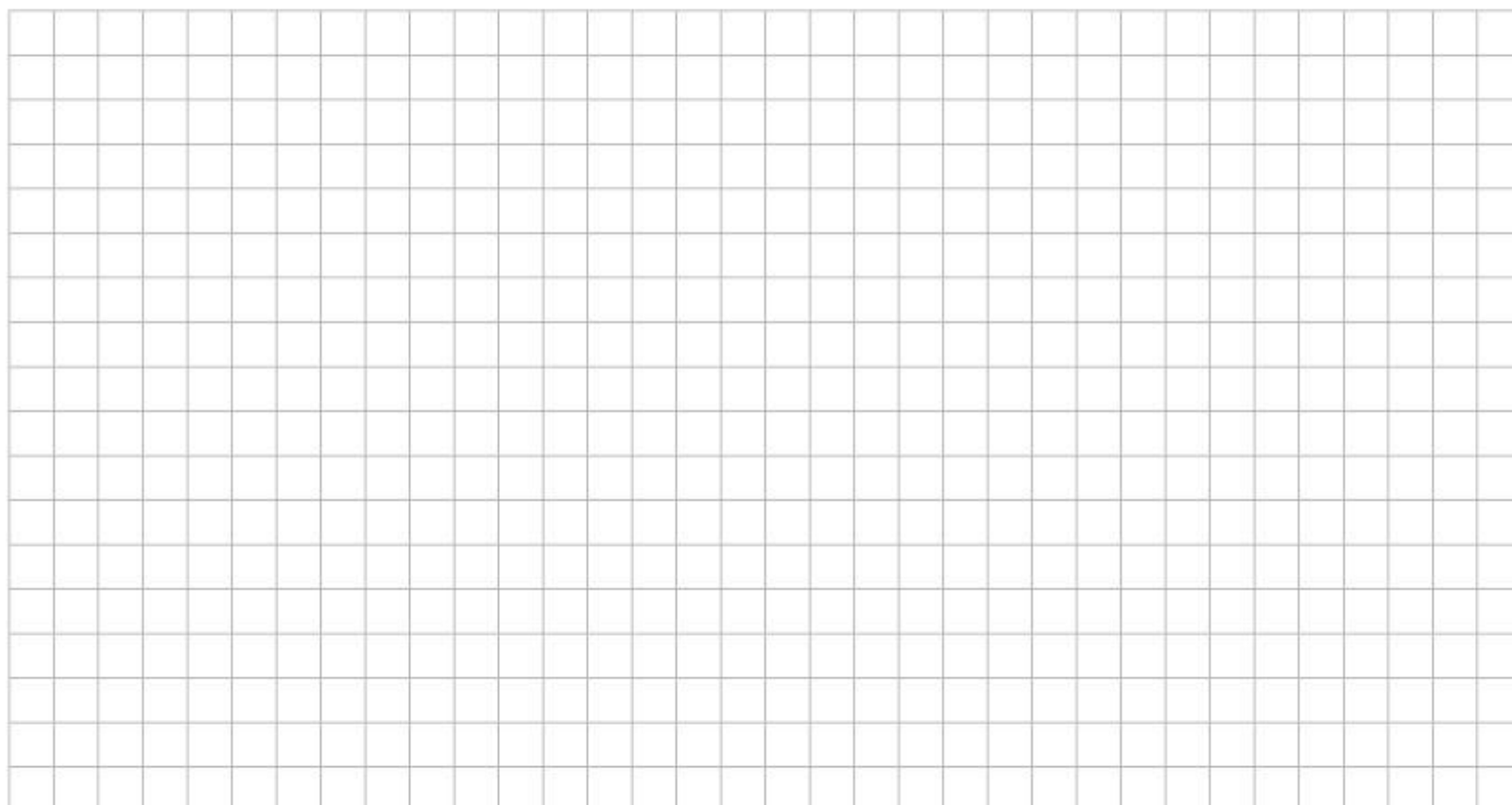
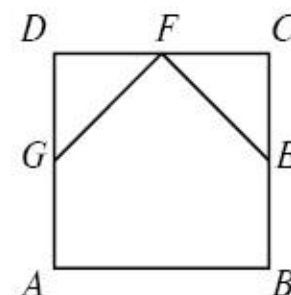
Ćwiczenie do przykładu 319.

Rozwiąż samodzielnie

W kwadracie $ABCD$ o boku długości a połączono środki boków BC i CD oraz CD i DA . Następnie odcięto dwa trójkąty prostokątne i w ten sposób otrzymano pięciokąt $ABEFG$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli jest prawdziwe lub F – jeśli jest fałszywe.

Otrzymany pięciokąt $ABEFG$ jest pięciokątem foremnym.	P	F
Pole otrzymanego pięciokąta $ABEFG$ stanowi 75% pola kwadratu o boku a .	P	F
Najdłuższy bok pięciokąta ma długość $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.	P	F
Obwód pięciokąta wynosi $(2a + a\sqrt{2})$.	P	F

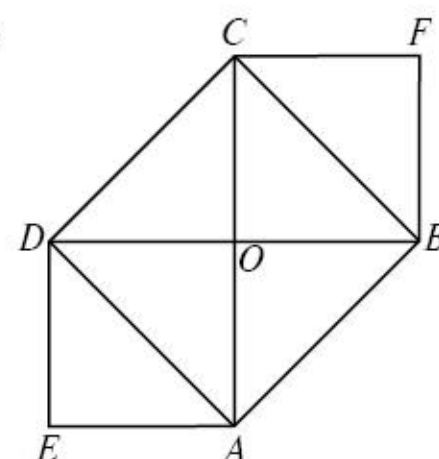


Przykład 320.

Egzamin 8-klasisty CKE

Na rysunku przedstawiono kwadraty $ABCD$, $EAOD$ i $BFCO$. Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $ABCD$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Pole kwadratu $ABCD$ jest równe sumie pól kwadratów $EAOD$ i $BFCO$.	P	F
Obwód kwadratu $ABCD$ jest równy sumie długości wszystkich przekątnych kwadratów $EAOD$ i $BFCO$.	P	F

Rozwiązanie:

Oznaczmy bok kwadratu $ABCD$ przez a . Obliczmy pole tego kwadratu: $P = a^2$
 Odcinki DA i BC , które są bokami kwadratu $ABCD$, są jednocześnie przekątnymi

kwadratów $EAOD$ i $BFCO$. Obliczamy sumę pól tych kwadratów: $P = 2 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2$

Pole kwadratu $ABCD$ jest równe sumie pól kwadratów $EAOD$ i $BFCO$, zdanie prawdziwe.

Obliczamy obwód kwadratu $ABCD$:

$$\text{Obwód} = 4a$$

Obliczamy sumę długości wszystkich przekątnych kwadratów $EAOD$ i $BFCO$: $4 \cdot a$

Obwód kwadratu $ABCD$ jest równy sumie długości wszystkich przekątnych kwadratów $EAOD$ i $BFCO$, zdanie prawdziwe

Odpowiedź: PP

Ćwiczenie do przykładu 320.

Rozwiąż samodzielnie

Kwadrat i trójkąt równoboczny mają jednakowe obwody.

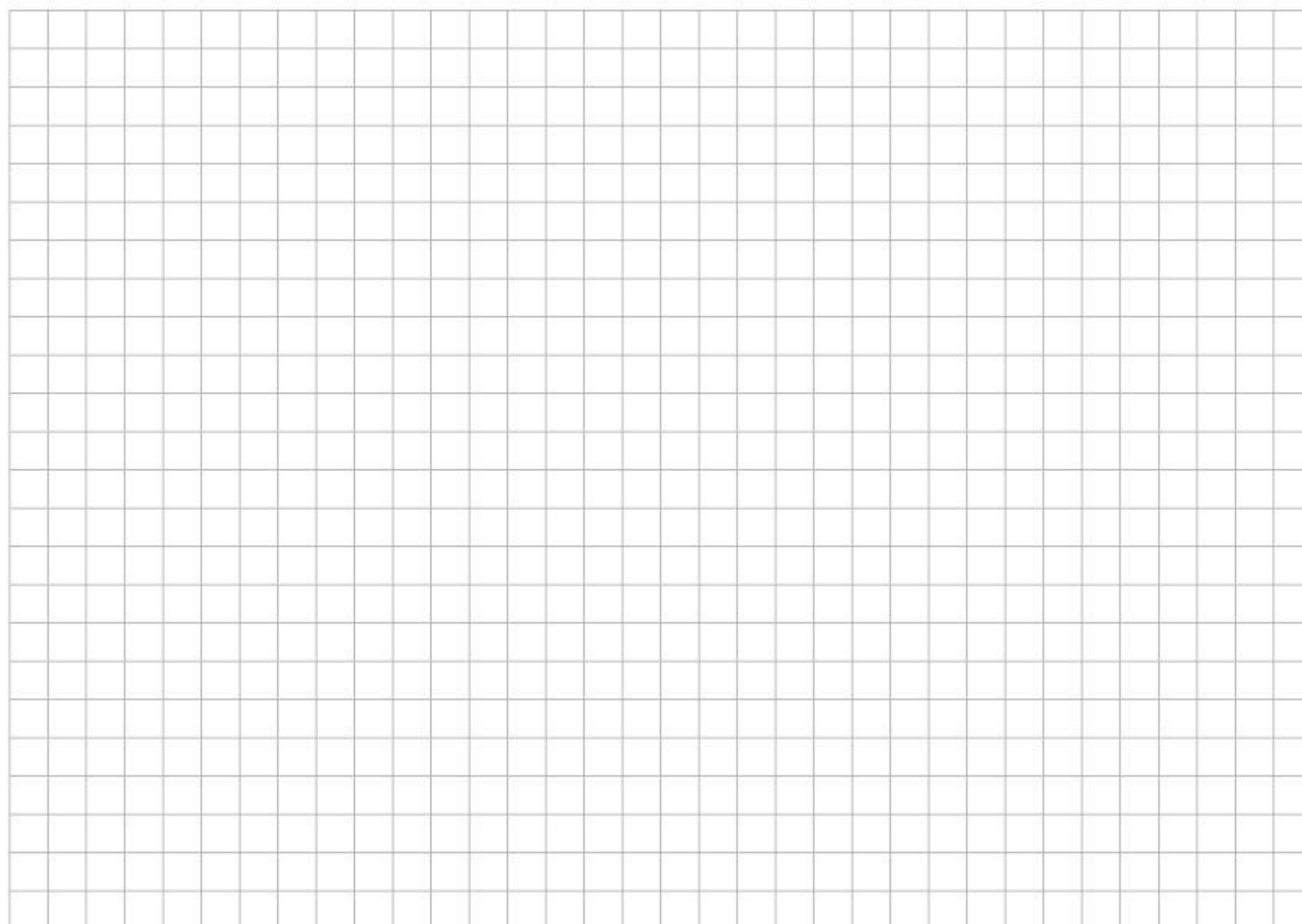
Która z tych figur ma mniejsze pole? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. kwadrat

B. pola tych figur są jednakowe

C. trójkąt równoboczny

D. za mało danych, żeby porównać pola tych figur



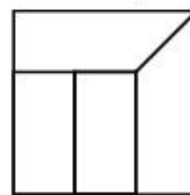
Przykład 321.

Egzamin 8-klasisty CKE

Prostokątny pasek papieru pocięto na cztery części w sposób przedstawiony na rysunku 1. Z tych części ułożono figurę w kształcie kwadratu tak, jak pokazano na rysunku 2. Pole tego kwadratu jest równe 36 cm^2 .



Rysunek 1



Rysunek 2

Oblicz obwód paska papieru przed pocięciem. Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

Obliczamy długość boku kwadratu:

$$\sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

Na długość boku kwadratu składają się 3 szerokości paska – obliczamy szerokość paska:

$$6 \text{ cm} : 3 = 2 \text{ cm}$$

Pole paska jest równe polu kwadratu – obliczamy długość paska:

$$36 \text{ cm}^2 : 2 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

Obliczamy obwód paska:

$$2 \cdot 2 \text{ cm} + 2 \cdot 18 \text{ cm} = 40 \text{ cm}$$

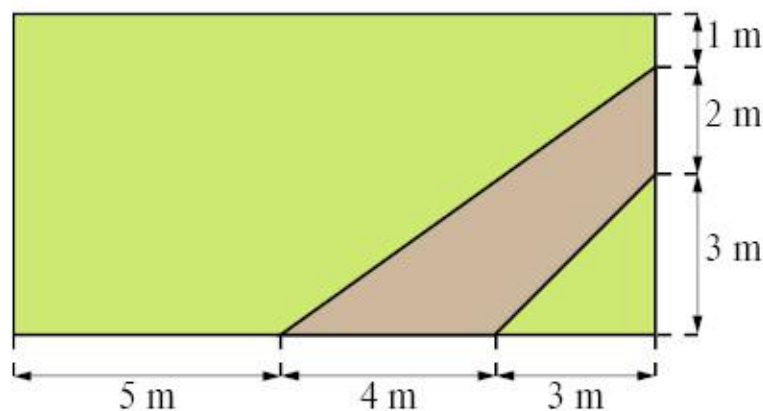
Odpowiedź: Obwód paska papieru przed pocięciem był równy 40 cm.

Ćwiczenie do przykładu 321.

Rozwiąż samodzielnie

Rysunek przedstawia projekt ścieżki, jaką zaplanowano wykonać na trawniku w parku miejskim.

Oblicz pole powierzchni ścieżki.



Przykład 322.

Oblicz obwód i pole pierścienia kołowego.

Rozwiązanie:

Obliczamy pole małego koła o promieniu $r = \frac{7}{2}$ cm:

$$P = \pi \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \pi \text{ cm}^2$$

Obliczamy promień dużego koła: $r = \frac{7}{2} + 3 = \frac{13}{2}$ cm

Obliczamy pole dużego koła o promieniu $r = \frac{13}{2}$ cm:

$$P = \pi \cdot \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{169}{4} \pi \text{ cm}^2$$

Obliczamy pole pierścienia kołowego jako różnicę pól dużego i małego koła:

$$P = \frac{169}{4} \pi - \frac{49}{4} \pi = 30\pi \text{ cm}^2$$

Obliczamy obwód małego koła o średnicy $d = 7$ cm:

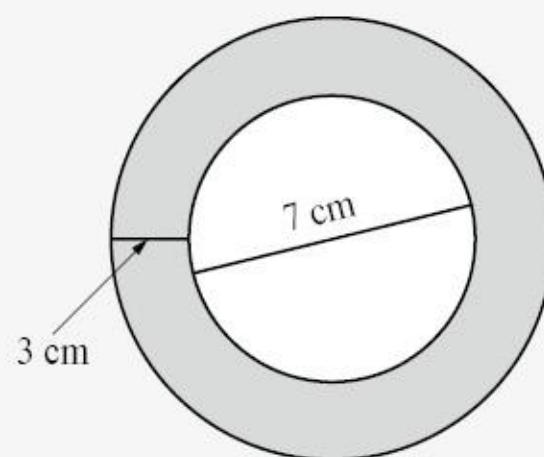
$$L = \pi \cdot 7 = 7\pi \text{ cm}$$

Obliczamy obwód dużego koła o średnicy $d = 13$ cm:

$$L = \pi \cdot 13 = 13\pi \text{ cm}$$

Obliczamy obwód pierścienia kołowego jako sumę obwodów dużego i małego koła:

$$L = 13\pi + 7\pi = 20\pi \text{ cm}$$



Odpowiedź: Pole pierścienia kołowego wynosi $30\pi \text{ cm}^2$, a jego obwód wynosi $20\pi \text{ cm}$.

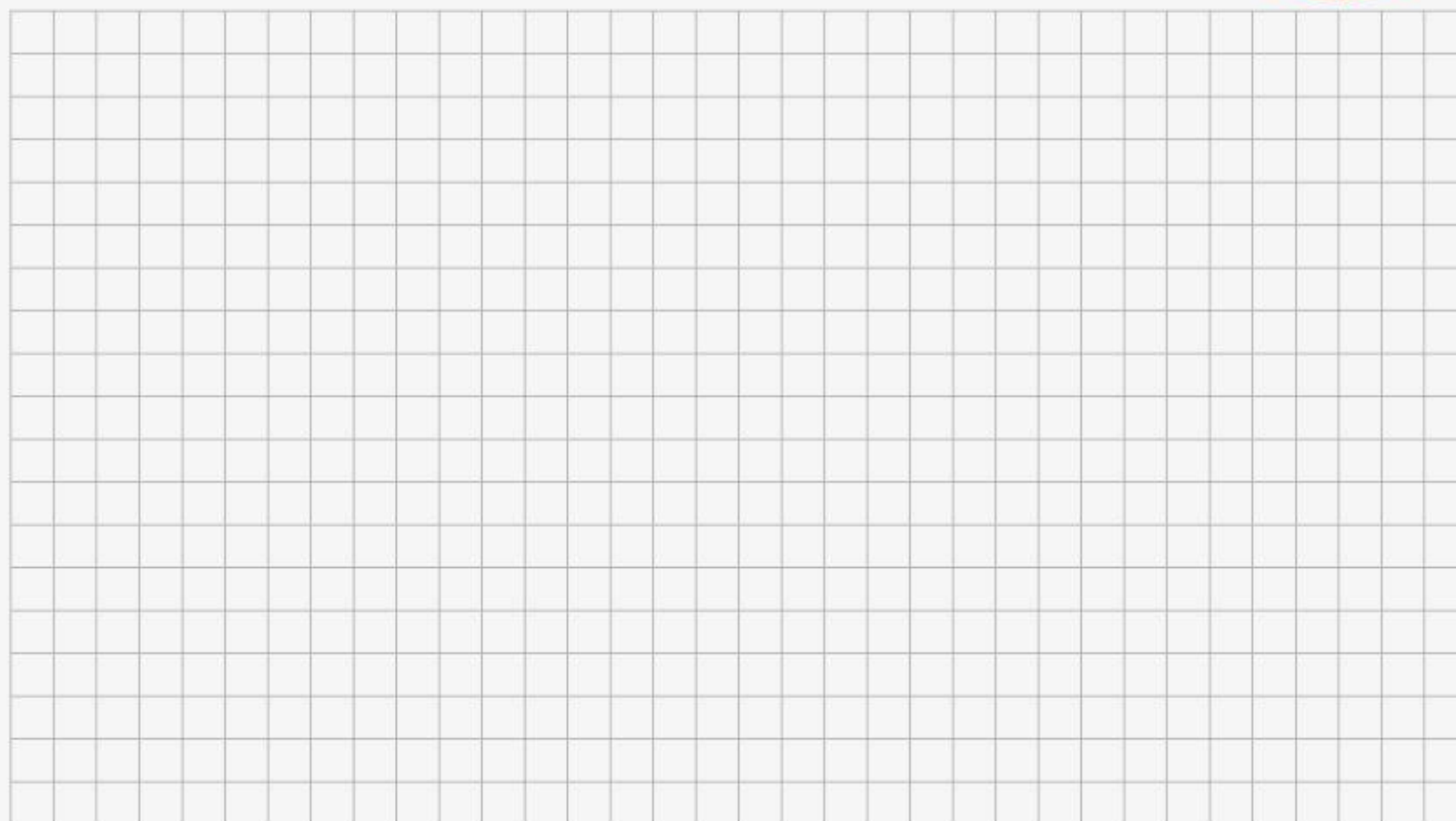
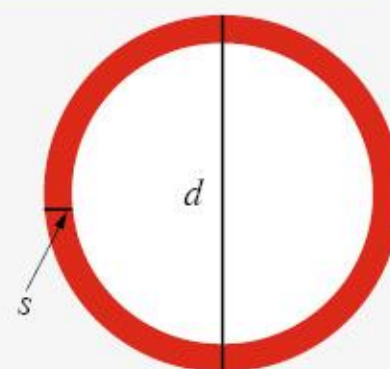
Ćwiczenie do przykładu 322.

Rozwiąż samodzielnie

Rysunek przedstawia znak „Zakaz ruchu w obu kierunkach”.

Dla grupy znaków wielkich zaznaczone na rysunku wymiary są równe: $d = 1000$ mm, $s = 100$ mm.

Oblicz, jaki procent powierzchni znaku drogowego przedstawionego na rysunku stanowi powierzchnia zamalowana kolorem czerwonym.



Przykład 323.

Z prostokąta wycięto w rogach kwadraty tak, jak pokazano to na rysunku.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz spośród oznaczonych literami C i D.

Obwód powstałego w ten sposób dwunastokąta jest **A/B**.

A. równy obwodowi prostokąta

B. większy od obwodu prostokąta

Pole dwunastokąta jest o **C/D** mniejsze od pola prostokąta.

C. 4 cm^2

D. 100 mm^2

Rozwiązanie:

Wyrażamy wszystkie wymiary w tych samych jednostkach:

$10 \text{ mm} = 1 \text{ cm}$, $0,6 \text{ dm} = 6 \text{ cm}$

Obliczamy obwód prostokąta: $2(6 + 4) = 20 \text{ cm}$

Obliczamy obwód dwunastokąta:

$2(6 - 2 \cdot 1) + 2(4 - 2 \cdot 1) + 8 \cdot 1 = 8 + 4 + 8 = 20 \text{ cm}$

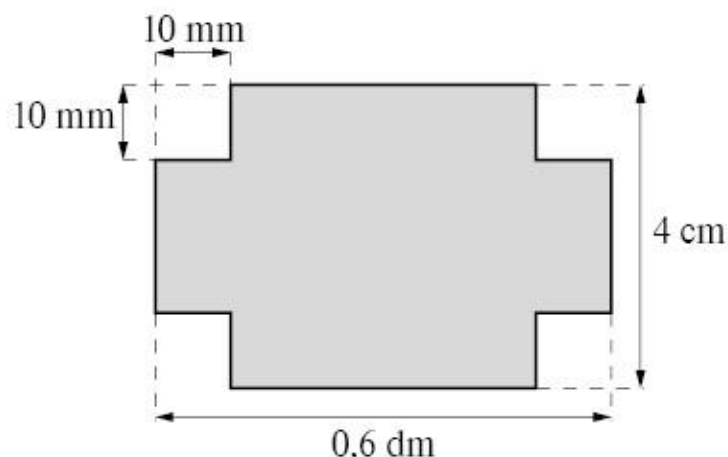
Obwód dwunastokąta jest równy obwodowi prostokąta.

Pole dwunastokąta jest mniejsze od pola prostokąta o sumę pól odciętych kwadratów.

Obliczamy sumę pól czterech kwadratów:

$4 \cdot 1 = 4 \text{ cm}^2$

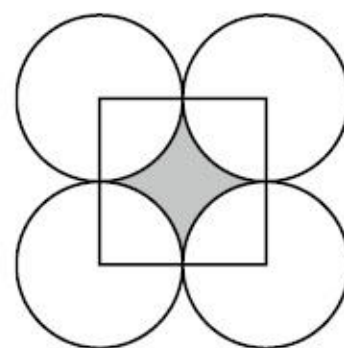
Odpowiedź: AC

**Ćwiczenie do przykładu 323.**

Rozwiąż samodzielnie

Z każdego wierzchołka kwadratu o boku długości $6\sqrt{2} \text{ cm}$ narysowano koło o promieniu dwa razy mniejszym niż bok kwadratu.

Oblicz pole i obwód figury zawartej między tymi kołami.



Przykład 324.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Średnica okręgu o długości 15π dm wynosi 15 dm.	P	F
Pole koła o obwodzie 4π cm jest równe 4π cm ² .	P	F
Obwód koła o polu 25π dm ² wynosi 5π dm.	P	F

Rozwiązanie:

Obliczamy średnicę okręgu, którego długość wynosi 15π :

$$\pi d = 15\pi \quad | : \pi, \text{ stąd } d = 15 \text{ dm, zdanie prawdziwe}$$

Obliczamy promień koła, którego obwód wynosi 4π :

$$2\pi r = 4\pi \quad | : 2\pi, \text{ stąd } r = 2 \text{ cm}$$

Obliczamy pole koła:

$$P = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ cm}^2, \text{ zdanie prawdziwe}$$

Obliczamy promień koła, którego pole wynosi 25π :

$$\pi r^2 = 25\pi \quad | : \pi, \text{ stąd } r^2 = 25 \text{ cm}^2, \text{ czyli } r = 5 \text{ cm}$$

Obliczamy obwód koła:

$$L = 2\pi \cdot 5 \text{ cm} = 10\pi \text{ cm}, 10\pi \neq 5\pi, \text{ zdanie fałszywe}$$

Odpowiedź: PPF

Ćwiczenie do przykładu 324.

Rozwiąż samodzielnie

Pole koła jest równe $0,64\pi$ dm².

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość promienia tego koła wynosi

A. 8 cm

B. 1,6 dm

C. 0,8 m

D. 1,6 cm

Przykład 325.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wielokątem foremnym, którego suma miar kątów wewnętrznych wynosi 1440° jest

- A. sześciokąt B. ośmiokąt C. dziesięciokąt D. dwunastokąt

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru na sumę kątów w n -kącie:

$$180^\circ \cdot (n-2) = 1440^\circ : 180^\circ$$

$$n - 2 = 8, \text{ stąd } n = 10$$

Odpowiedź: C

Ćwiczenie do przykładu 325.**Rozwiąż samodzielnie**

Wybierz zdanie fałszywe wśród podanych.

- A. Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta foremnego wynosi 720° .
 B. Miara kąta wewnętrznego pięciokąta foremnego wynosi 108° .
 C. Pole sześciokąta foremnego o boku długości a jest sześć razy większe od pola trójkąta równobocznego o boku tej samej długości.
 D. Romb jest czworokątem foremnym.



Przykład 326.

Trójkąt równoboczny narysowano w taki sposób, że jego wysokość jest bokiem kwadratu o obwodzie $20\sqrt{3}$ cm. Jaką długość ma bok tego trójkąta? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $5\sqrt{3}$ cm B. 10 cm C. 5 cm D. 20 cm

Rozwiązanie:

Obliczamy długość boku kwadratu:

$$20\sqrt{3} \text{ cm} : 4 = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

Wysokość trójkąta równobocznego jest równa:

$$h = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

Obliczamy długość boku trójkąta równobocznego – a , korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$a = 10 \text{ cm}$$

Odpowiedź: B

Ćwiczenie do przykładu 326.

Rozwiąż samodzielnie

Dziewięciokąt $ABCDEFGHIJ$ jest zbudowany z trójkąta równobocznego o boku długości a oraz trzech kwadratów.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz spośród oznaczonych literami C i D.

Dziewięciokąt $ABCDEFGHIJ$ A/B wielokątem foremnym.

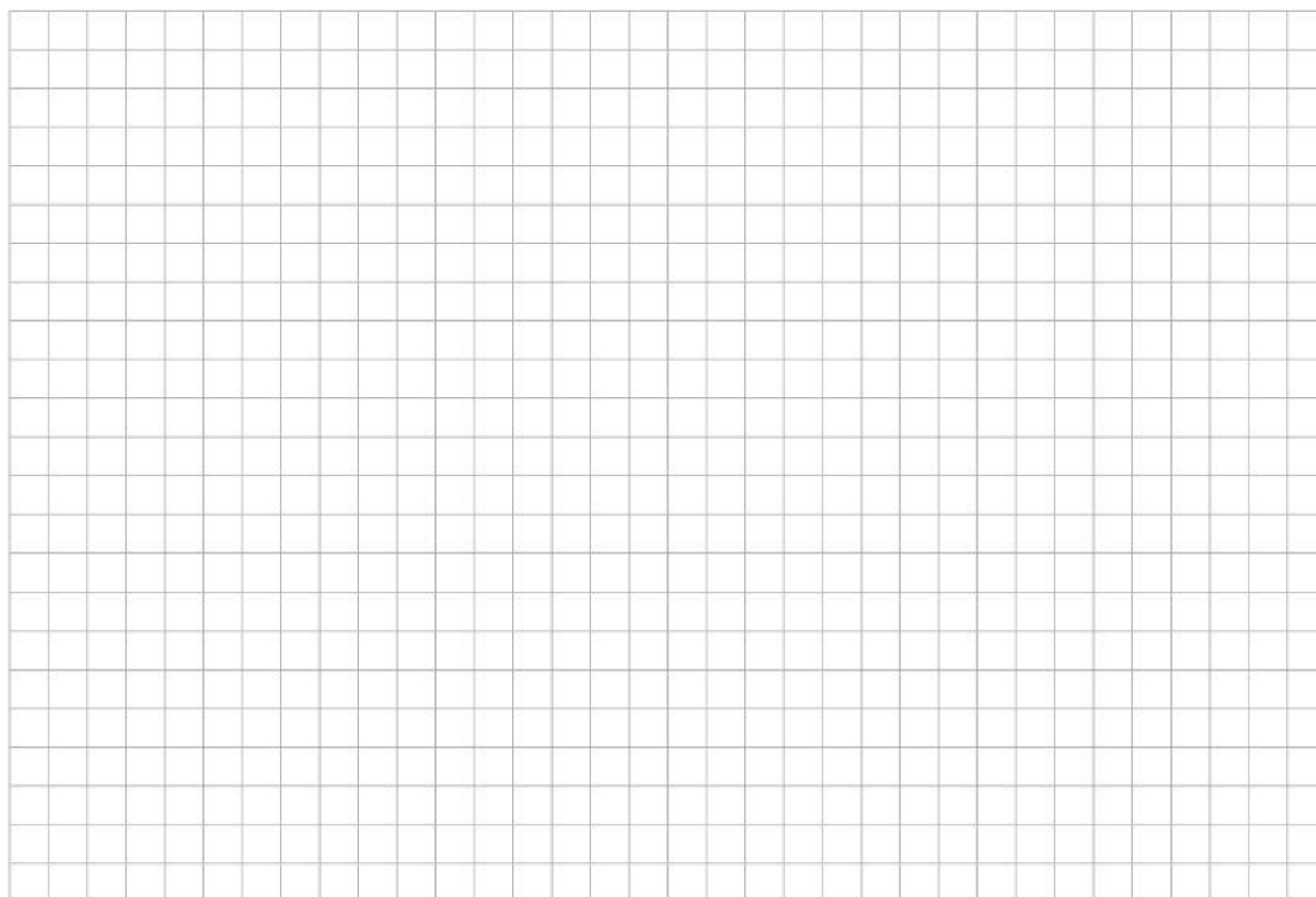
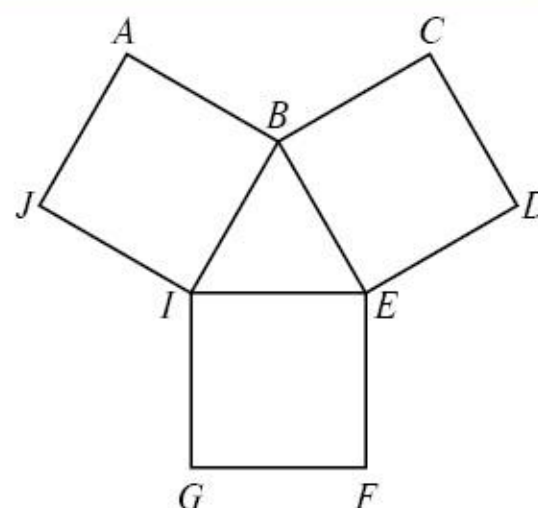
A. jest

B. nie jest

Suma miar kątów wewnętrznych tego dziewięciokąta wynosi C/D.

C. 1260°

D. 1080°



Przykład 327.

Dno pojemnika jest prostokątem o wymiarach 6 cm na 12 cm.

Czy do tego pojemnika można wstawić dwa słoiki o obwodach 18 cm? W obliczeniach przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy

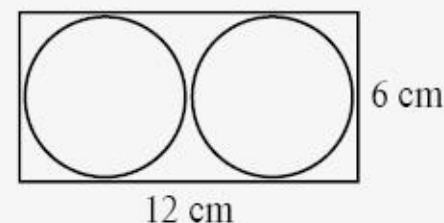
Obliczamy średnicę słoika: $18 = \pi d$

$$d = \frac{18}{\pi} = \frac{18}{\frac{22}{7}} = \frac{63}{11} = 5\frac{8}{11} \text{ cm}$$

Porównujemy liczby:

$$5\frac{8}{11} \text{ cm} < 6 \text{ cm} \text{ oraz } 2 \cdot 5\frac{8}{11} \text{ cm} < 12 \text{ cm}$$

Odpowiedź: Do pojemnika można wstawić dwa słoiki o obwodzie 18 cm.

**Ćwiczenie do przykładu 327.****Rozwiąż samodzielnie**

Zosia narysowała trzy koła stykające się ze sobą, tak jak pokazano na rysunku. Najmniejsze koło ma promień równy 2 cm, a największe – 5 cm.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz spośród oznaczonych literami C i D.

Promień trzeciego narysowanego przez Zosię koła jest równy **A/B**.

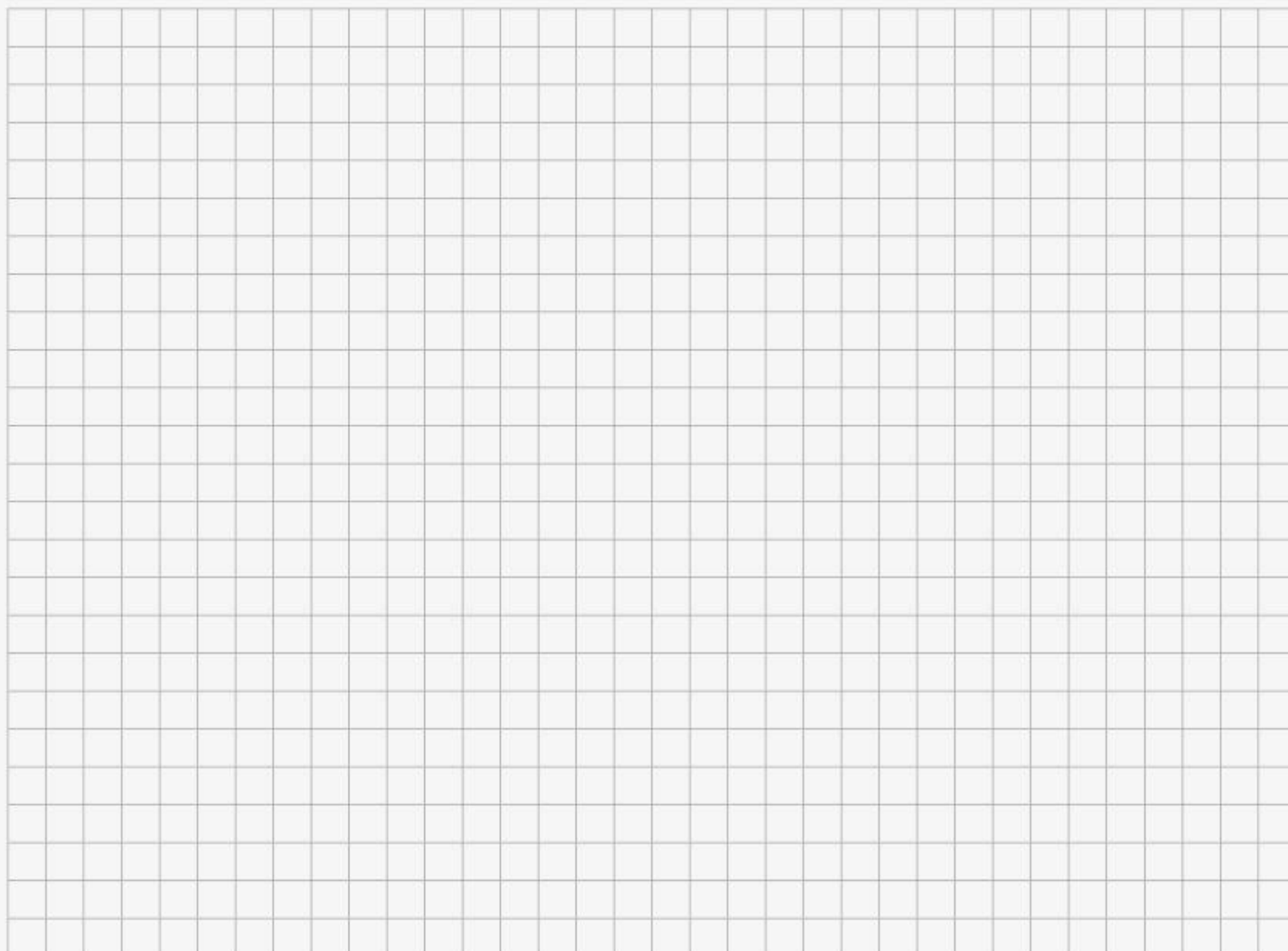
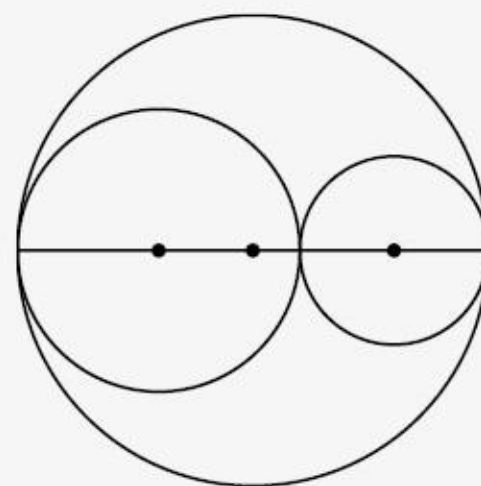
A. 7 cm

B. 3 cm

Obwód najmniejszego koła jest o **C/D** krótszy od obwodu największego koła.

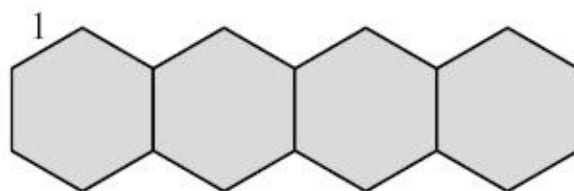
C. 3π cm

D. 6π cm



Przykład 328.

Ile wynosi obwód figury zbudowanej z czterech sześciokątów foremnych?



Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 36 j.

B. 33 j.

C. 21 j.

D. 18 j.

Rozwiązanie:

Obwód figury jest sumą 18 odcinków, z których każdy ma długość 1 j.

$$\text{Obwód} = 18 \cdot 1 \text{ j.} = 18 \text{ j.}$$

Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 328.

Rozwiąż samodzielnie

Która suma algebraiczna jest obwodem narysowanej figury? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $4r + q + p$

B. $4r + 2q + p$

C. $6r + 2q + 2p$

D. $4r + 2q + 2p$



ZADANIA

329. Długości boków ośmiokąta foremnego, sześciokąta foremnego, kwadratu i trójkąta równobocznego wynoszą odpowiednio 2 cm, 30 mm, 0,4 dm i 0,05 m.

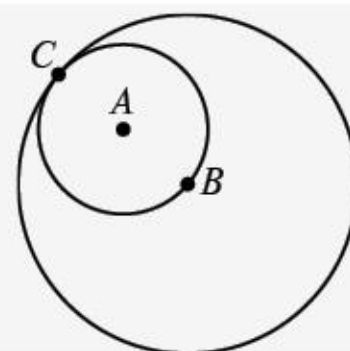
Który wielokąt ma największy obwód? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. ośmiokąt foremny B. sześciokąt foremny C. kwadrat D. trójkąt równoboczny

330. W okrąg o środku B wrysowano okrąg o środku A w taki sposób, że punkt B należy do okręgu o środku A . Ponadto okręgi te mają punkt wspólny C (patrz rysunek). Długość promienia okręgu o środku A wynosi 4 cm.

Ile wynosi długość okręgu o środku B ? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 8π cm B. 16π cm C. 32π cm D. 64π cm



331. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wielokątem foremnym, którego miara kąta wewnętrznego wynosi 120° jest

- A. sześciokąt B. ośmiokąt C. dziesięciokąt D. dwunastokąt

332. Na rysunku przedstawiono plan przedpokoju, którego podłoga ma być wyłożona płytkami ceramicznymi. Wymiary podane są w metrach.

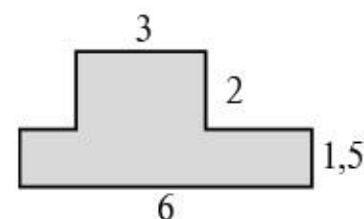
Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz spośród oznaczonych literami C i D.

Pole powierzchni tego przedpokoju wynosi A/B.

- A. 15 m^2 B. $12,5 \text{ m}^2$

Koszt zakupu płytek, których 1 m^2 kosztuje 60 zł, wynosi C/D.

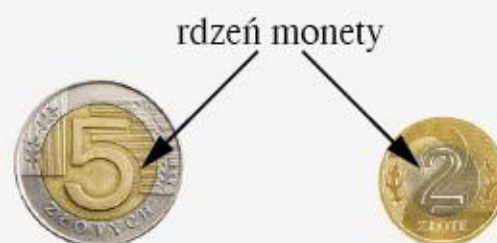
- C. 900 zł D. 750 zł



333. Monety o nominałach 5 zł i 2 zł są wykonane z dwóch rodzajów stopu miedzioniklu i brązalu. Moneta pięcioletowa ma średnicę 24 mm, w tym średnicę „rdzenia” (czyli środkowej części monety) 16 mm, a moneta dwuzłotowa odpowiednio: 20 mm i 12 mm.

Dla której z monet stosunek pola powierzchni rdzenia do pola powierzchni całej monety jest większy od $\frac{2}{5}$? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

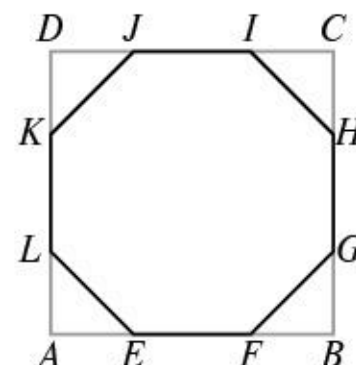
- A. dla obu monet B. za mało danych, nie można tego obliczyć
C. dla monety 2 zł D. dla monety 5 zł



334. Na rysunku przedstawiono kwadrat $ABCD$ i ośmiokąt foremny $EFGHIJKL$.

Czy prawdą jest, że bok kwadratu $ABCD$ jest trzy razy dłuższy od boku ośmiokąta foremnego $EFGHIJKL$? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A, B lub C.

T	ponieważ	A.	przeciwprostokątna w każdym z trójkątów AEL , FBG , HCI , JDK jest równa długości boku ośmiokąta foremnego.
		B.	kwadrat ma wszystkie kąty proste, a kąty wewnętrzne ośmiokąta mają miarę równą 135° .
N		C.	ośmiokąt foremny ma wszystkie boki równej długości oraz kwadrat ma wszystkie boki równej długości.



335. Obwód wielokąta foremnego wynosi 12 cm, a suma miar jego kątów wewnętrznych jest równa 540° .

Ile wynosi długość boku tego wielokąta? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 2,4 cm

B. 4 cm

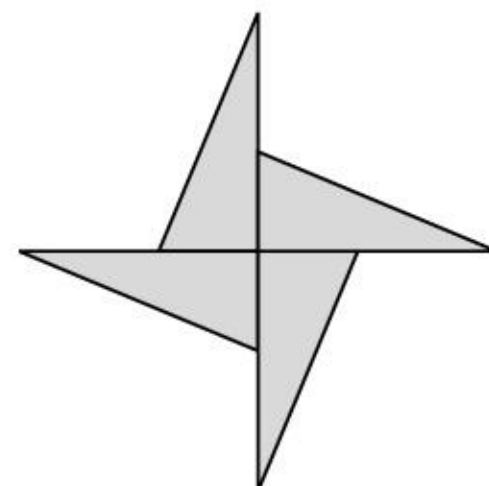
C. 1,2 cm

D. 2 cm

336. Z czterech jednakowych trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych długości $a = 5$ cm i $b = 12$ cm zbudowano ośmiokąt, tak jak pokazano na rysunku.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli jest prawdziwe lub F – jeśli jest fałszywe.

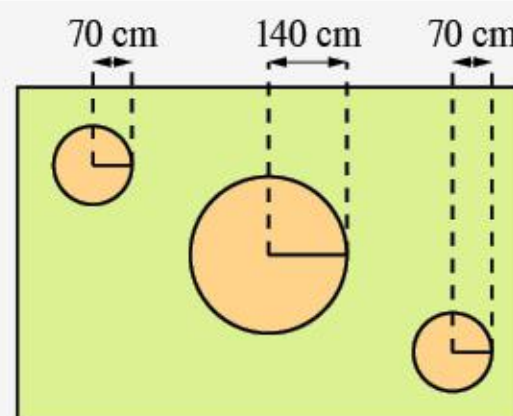
Pole otrzymanego ośmiokąta wynosi 120 cm^2 .	P	F
Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 5 cm i 12 cm ma długość 13 cm.	P	F
Obwód otrzymanego ośmiokąta jest cztery razy większy od obwodu trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 5 cm i 12 cm.	P	F
Obwód ośmiokąta wynosi 80 cm.	P	F



337. Na prostokątnym trawniku o wymiarach 6 m na 9 m zaplanowano rozmieszczenie trzech klombów, na których zostaną posadzone kwiaty.

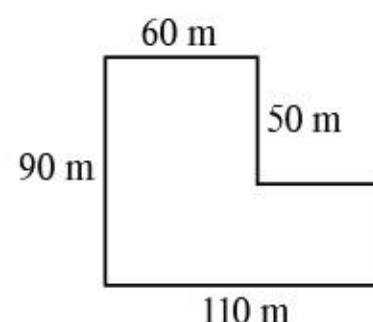
Oblicz, ile wynosi pole powierzchni obszaru obsianego trawą. Przyjmij, że

$$\pi = \frac{22}{7}.$$



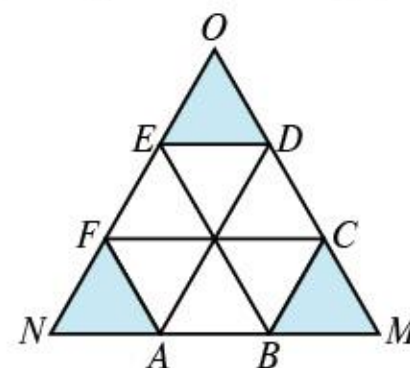
338. W okręgu o promieniu 5 cm narysowano cięciwę o długości 8 cm. Oblicz odległość środka okręgu od tej cięciwy.

339. Rolnik zakupił grunty rolne w kształcie sześciokąta przedstawionego na rysunku. Cena za 1 hektar gruntu wynosi 40 tys. zł. Oblicz, ile zapłacił rolnik za te grunty.



340. W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ o boku długości 8 cm narysowano przekątne AC , CE i EA , otrzymując w ten sposób trójkąt równoboczny. Oblicz, ile razy pole sześciokąta foremnego $ABCDEF$ jest większe od pola trójkąta równobocznego ACE .

341. Trójkąt równoboczny MNO o boku długości 9 cm podzielono na dziewięć przystających trójkątów równobocznych. Oblicz obwód i pole sześciokąta $ABCDEF$.



5. GRANIASTOSŁUPY

TEORIA

Jednostki objętości i pojemności

Jednostki objętości	Jednostki objętości – zapis potęgowy	Jednostki długości
$1 \text{ km}^3 = 1\,000\,000\,000 \text{ m}^3$	$1 \text{ km}^3 = 1000^3 \text{ m}^3$	$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$
$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$	$1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ dm}^3$	$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$
$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$	$1 \text{ m}^3 = 100^3 \text{ cm}^3$	$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$
$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$	$1 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3$	$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$
$1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$	$1 \text{ cm}^3 = 10^3 \text{ mm}^3$	$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$

Jednostki pojemności stosowane zwyczajowo to mililitr (ml), litr (l) i hektolitr (hl).

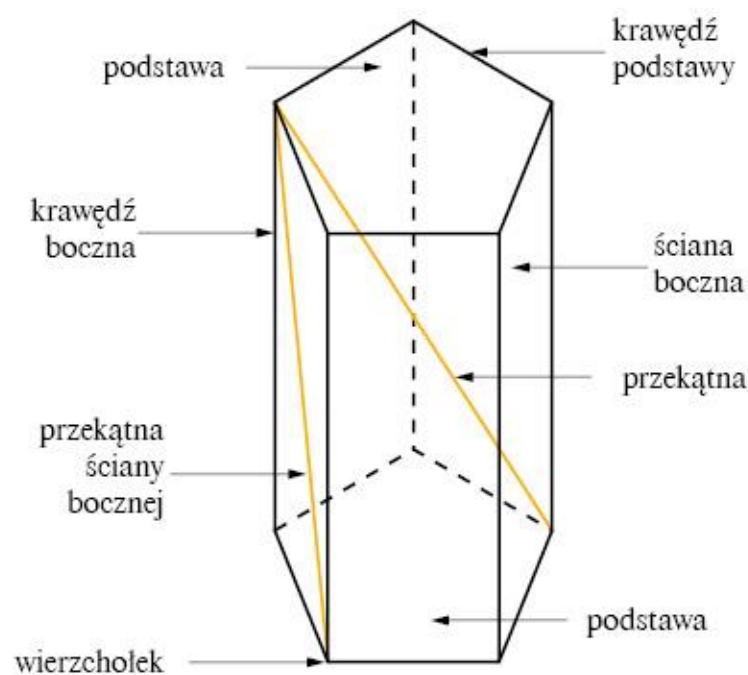
$$1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ ml}$$

$$1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$$

Graniastosłup prosty

- Graniastosłup prosty to wielościan, który ma dwie równoległe podstawy będące przystającymi wielokątami, oraz ściany boczne będące prostokątami.
- Nazwa graniastosłupa zależy od tego, jaki wielokąt znajduje się w jego podstawie.
- Graniastosłup prosty n -kątny ma: $(n + 2)$ ściany, $2n$ wierzchołków i $3n$ krawędzi.
- Wysokość graniastosłupa prostego to dowolny odcinek, którego końce należą do podstaw graniastosłupa i który jest prostopadły do tych podstaw. Krawędź boczna graniastosłupa prostego jest równa jego wysokości.
- Graniastosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym, nazywamy graniastosłupem prawidłowym.



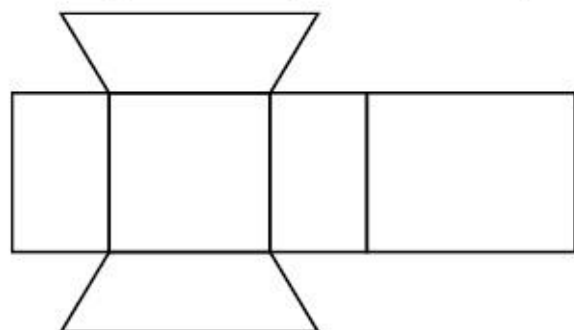
PRZYKŁADY: Graniastosłup prosty o podstawie trójkąta – to graniastosłup prosty trójkątny, graniastosłup prosty o podstawie czworokąta – to graniastosłup prosty czworokątny itd. Graniastosłup prosty pięciokątny ma 7 ścian (5 ścian bocznych i 2 podstawy), 10 wierzchołków i 15 krawędzi. Graniastosłup prosty o podstawie trójkąta równobocznego to graniastosłup prawidłowy trójkątny.

• Siatka graniastosłupa

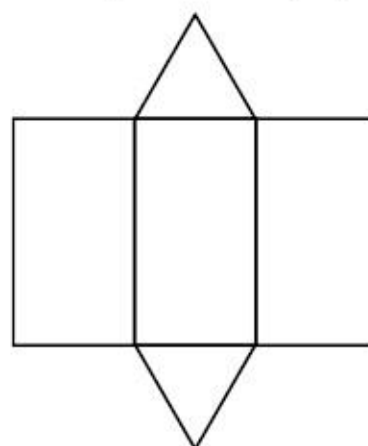
Siatka każdego graniastosłupa prostego składa się z dwóch przystających wielokątów, które są podstawami oraz z prostokątów będących ścianami bocznymi.

PRZYKŁADY:

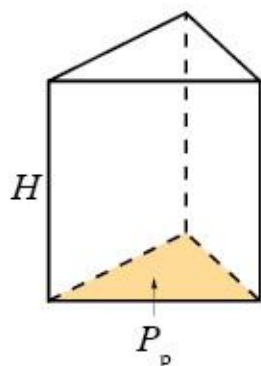
Siatka graniastosłupa czworokątnego:



Siatka graniastosłupa prawidłowego trójkątnego:



• Pole i objętość powierzchni graniastosłupa



$$P_c = 2P_p + P_b$$

$$V = P_p \cdot H$$

Oznaczenia:

P_c – pole powierzchni całkowitej

P_p – pole podstawy

P_b – pole powierzchni bocznej

H – wysokość graniastosłupa

V – objętość graniastosłupa

■ Prostopadłościan

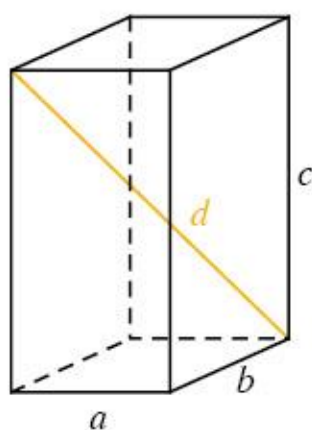
Graniastosłup czworokątny, którego wszystkie ściany są prostokątami nazywamy prostopadłościanem.

Pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = 2ab + 2bc + 2ac$$

Objętość:

$$V = a \cdot b \cdot c$$



a, b – krawędzie podstawy

c – krawędź boczna

d – przekątna prostopadłościanu

■ Sześcian

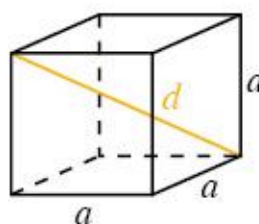
Prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami nazywamy sześcianem. Sześcian jest szczególnym przypadkiem prostopadłościanu.

Pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = 6a^2$$

Objętość sześcianu:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$



a – krawędź sześcianu

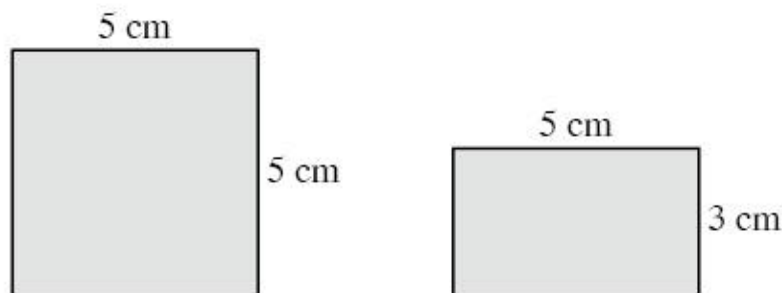
d – przekątna sześcianu

ZADANIA EGZAMINACYJNE KROK PO KROKU

Przykład 342.

Egzamin 8-klasisty CKE

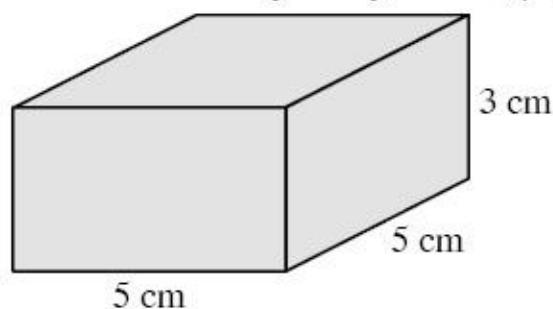
Na rysunku przedstawiono dwie różne ściany prostopadłościanu. Jedna jest kwadratem o boku 5 cm, a druga prostokątem o bokach 3 cm i 5 cm.



Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu o takich wymiarach.

Rozwiązanie:

Prostopadłościan ma dwie ściany kwadratowe i cztery ściany, które są przystającymi do siebie prostokątami.



W prostopadłościanie tym 8 krawędzi ma długość 5 cm, a 4 krawędzie mają długość 3 cm. Suma długości wszystkich krawędzi jest równa: $8 \cdot 5 \text{ cm} + 4 \cdot 3 \text{ cm} = 52 \text{ cm}$

Odpowiedź: Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu wynosi 52 cm.

Ćwiczenie do przykładu 342.

Rozwiąż samodzielnie

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź spośród podanych.

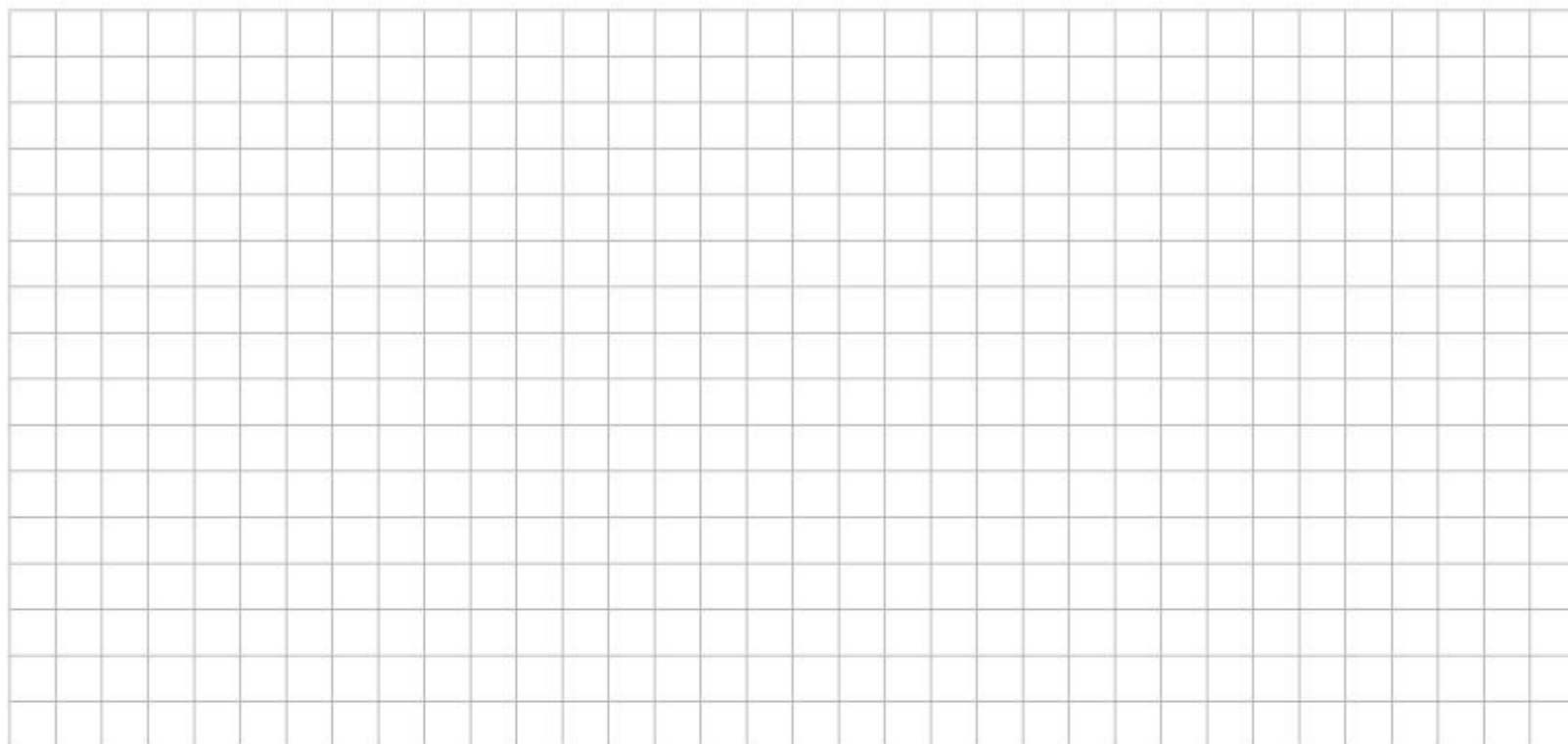
Sumę długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o długościach krawędzi podstawy a i długościach krawędzi bocznych b zapiszemy

A. $8a + 4b$

B. $12a + 6b$

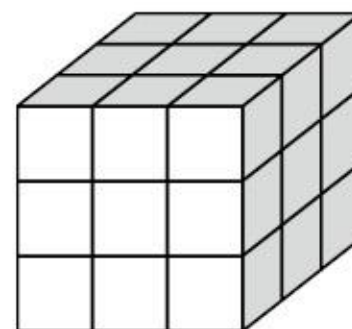
C. $6a + 12b$

D. $4a + 8$



Przykład 343.**Egzamin 8-klasisty CKE**

Drewnianą kostkę sześcienną o krawędzi długości 30 cm rozcięto na 27 jednakowych mniejszych sześciennych kostek. Z 8 takich małych kostek ułożono nowy sześcian. **Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.**



Pole powierzchni nowego sześcianu jest równe 4800 cm^2 .	P	F
Objętość nowego sześcianu jest równa 8000 cm^3 .	P	F

Rozwiązanie:

Ustalamy, jak obliczyć długość krawędzi sześciennych kostek, na jakie został pocięty pierwotny sześcian. Ponieważ został on pocięty na 27 mniejszych sześcianów, oznacza to, że każda krawędź została podzielona na 3 równe części ($27 = 3^3$).

Długość krawędzi kostki jest równa:

$$30 \text{ cm} : 3 = 10 \text{ cm}$$

Nowy sześcian jest zbudowany z 8 kostek. Skoro $8 = 2^3$, to długość krawędzi nowego sześcianu jest 2 razy dłuższa od długości krawędzi kostki.

Długość krawędzi nowego sześcianu wynosi: $2 \cdot 10 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$.

Obliczamy pole powierzchni nowego sześcianu: $6 \cdot 20^2 = 2400 \text{ cm}^2$

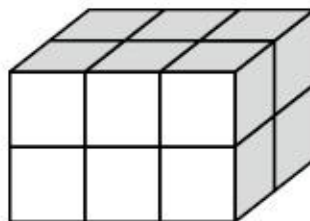
Obliczamy objętość nowego sześcianu:

$$20^3 = 8000 \text{ cm}^3$$

Odpowiedź: FP

Ćwiczenie do przykładu 343.**Rozwiąż samodzielnie**

Z 12 jednakowych sześciennych klocek o krawędzi długości 5 cm ułożono prostopadłościan, tak jak pokazuje to rysunek.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli zadanie jest fałszywe.

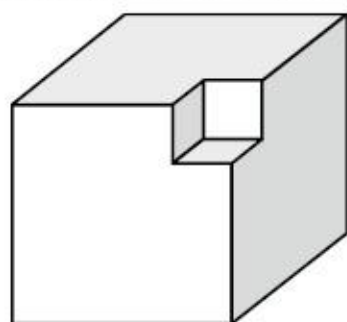
Objętość zbudowanego prostopadłościanu wynosi $1,5 \text{ dm}^3$.	P	F
Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest równe 650 cm^2 .	P	F
Długości przekątnych ścian bocznych tego prostopadłościanu wynoszą $10\sqrt{2} \text{ cm}$ i $5\sqrt{13} \text{ cm}$.	P	F
Aby otrzymać sześcian, należy zabrać 4 klocki.	P	F



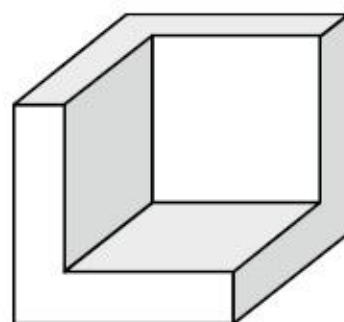
Przykład 344.

Egzamin 8-klasisty CKE

Z każdej z dwóch jednakowych kostek sześciennych wycięto sześcian i otrzymano bryły przedstawione na rysunku.



Bryła 1



Bryła 2

Czy całkowite pole powierzchni bryły I jest większe od całkowitego pola powierzchni bryły II? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	z pierwszej kostki usunięto mniejszy sześcian niż z drugiej kostki.
N		B.	całkowite pole powierzchni każdej z otrzymanych brył jest równe całkowitemu polu powierzchni początkowej kostki.
		C.	pole powierzchni „wnęki” w II bryle jest większe niż pole powierzchni „wnęki” w I bryle.

Rozwiązanie:

Oznaczmy krawędź początkowego sześcianu przez a , krawędź sześcianu wyciętego w bryle I przez b , a krawędź sześcianu wyciętego w bryle II – przez c .

Pole powierzchni początkowej sześcienniej kostki o krawędzi a jest równe $6a^2$.

Po wycięciu sześcianu o krawędzi b pole powierzchni trzech ścian początkowej kostki zmniejszy się o pole kwadratu o boku b . Należy więc odjąć od pola powierzchni sześcianu $3b^2$.

Jednocześnie w początkowej kostce pojawia się „wnęka”, której pole jest równe $3b^2$. Ponieważ „wnęka” zwiększa pole powierzchni początkowej kostki, więc $3b^2$ należy dodać do pola powierzchni sześcianu.

Pole powierzchni bryły I obliczymy następująco: $6a^2 - 3b^2 + 3b^2 = 6a^2$

Pole powierzchni bryły I jest równe polu powierzchni początkowej kostki.

Podobne jest w przypadku bryły II – należy dodać i odjąć pole trzech kwadratów o boku długości c .

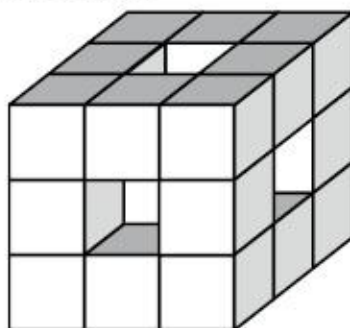
Pole powierzchni bryły II obliczymy następująco: $6a^2 - 3c^2 + 3c^2 = 6a^2$

Pole powierzchni bryły II jest równe polu powierzchni początkowej kostki.

Odpowiedź: NB

Ćwiczenie do przykładu 344.**Rozwiąż samodzielnie**

Sześcian o krawędzi 15 cm zbudowany jest z 27 mniejszych sześciennych kostek. Z sześcianu usunięto środkowe kostki znajdujące się na ścianach i w środku sześcianu.



Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz spośród oznaczonych literami C i D.

Z sześcianu usunięto **A/B**.

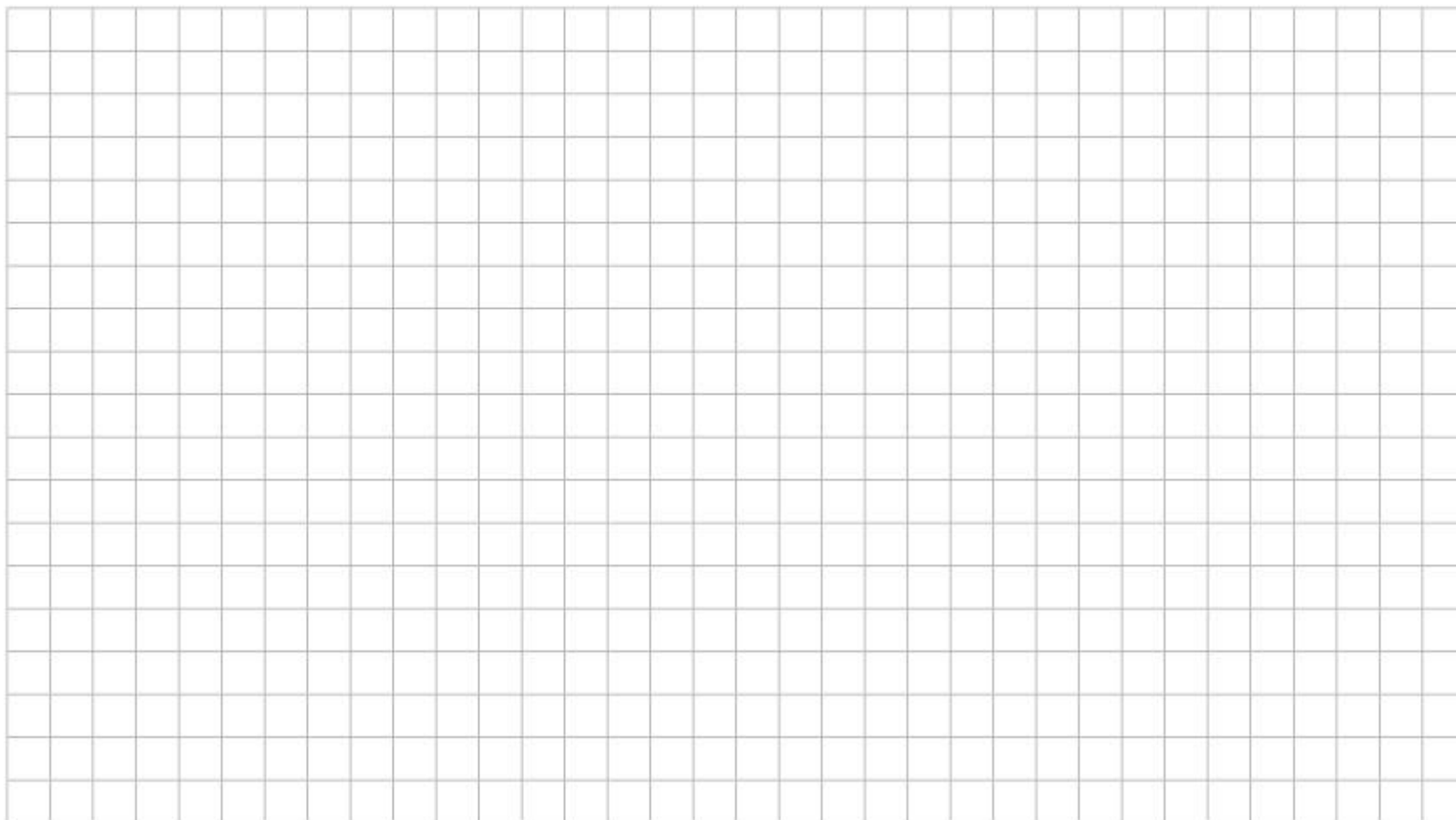
A. 7 kostek

B. 3 kostki

Objętość powstałej w ten sposób bryły wynosi **C/D**.

C. 2500 cm^3

D. 300 cm^3

**Przykład 345.**

Ile sześciąt o krawędzi długości 2 cm użyto do budowy prostopadłościanu o wymiarach: 8 cm, 12 cm i 20 cm? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 240

B. 1920

C. 960

D. 480

Rozwiązanie:

Ustalamy, po ile sześciąt zostało ustawionych wzdłuż każdej krawędzi prostopadłościanu:

$$8 \text{ cm} : 2 \text{ cm} = 4 \text{ sześciąt}$$

$$12 \text{ cm} : 2 \text{ cm} = 6 \text{ sześciąt}$$

$$20 \text{ cm} : 2 \text{ cm} = 10 \text{ sześciąt}$$

Obliczamy, z ilu sześciąt zbudowano prostopadłościan:

$$4 \cdot 6 \cdot 10 = 240$$

Odpowiedź: A

Ćwiczenie do przykładu 345.**Rozwiąż samodzielnie**

Ze 150 jednakowych sześciennych kostek o krawędzi długości 2 dm zbudowano graniastosłup prawidłowy czworokątny, przy czym jedną warstwę tego graniastosłupa tworzyło 25 kostek. Ile jest równa wysokość tego graniastosłupa? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 12 dm

B. 6 dm

C. 3 dm

D. 15 dm



Przykład 346.

Graniastosłup prawidłowy trójkątny i graniastosłup prawidłowy sześciokątny mają jednakowe objętości oraz krawędzie podstawy tej samej długości.

Wykaż, że wysokość graniastosłupa trójkątnego jest 6 razy dłuższa od wysokości graniastosłupa sześciokątnego.

Rozwiązanie:

a – krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego oraz prawidłowego sześciokątnego

H_1 – wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego

H_2 – wysokość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego

Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego:

$$V_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H_1$$

Objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego:

$$V_2 = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H_2$$

Objętości graniastosłupów są równe, więc zapisujemy równanie:

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H_1 = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H_2 \quad \left| : \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right.$$

$$H_1 = 6H_2$$

Odpowiedź: Wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest 6 razy większa od wysokości graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego.

Ćwiczenie do przykładu 346.**Rozwiąż samodzielnie**

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy jest o 100% dłuższa od krawędzi bocznej. Ponadto wiadomo, że suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa wynosi 60 cm. **Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.**

**Przykład 347.**

Synoptycy zapowiedzieli opady śniegu – 20 cm na metr kwadratowy. Śnieg spadł zgodnie z zapowiedzią. **Oblicz, jaka jest masa puchu śnieżnego, który należy odgarnąć z chodnika o długości 15 metrów i szerokości 1 metr, jeśli wiadomo, że 1 m³ takiego śniegu waży 200 kg.**

Rozwiązanie:

Wyrażamy wszystkie wymiary w tych samych jednostkach

$$20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}, 15 \text{ m}, 1 \text{ m}$$

Obliczamy objętość śniegu, który należy odgarnąć:

$$V = 15 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 0,2 \text{ m} = 3 \text{ m}^3$$

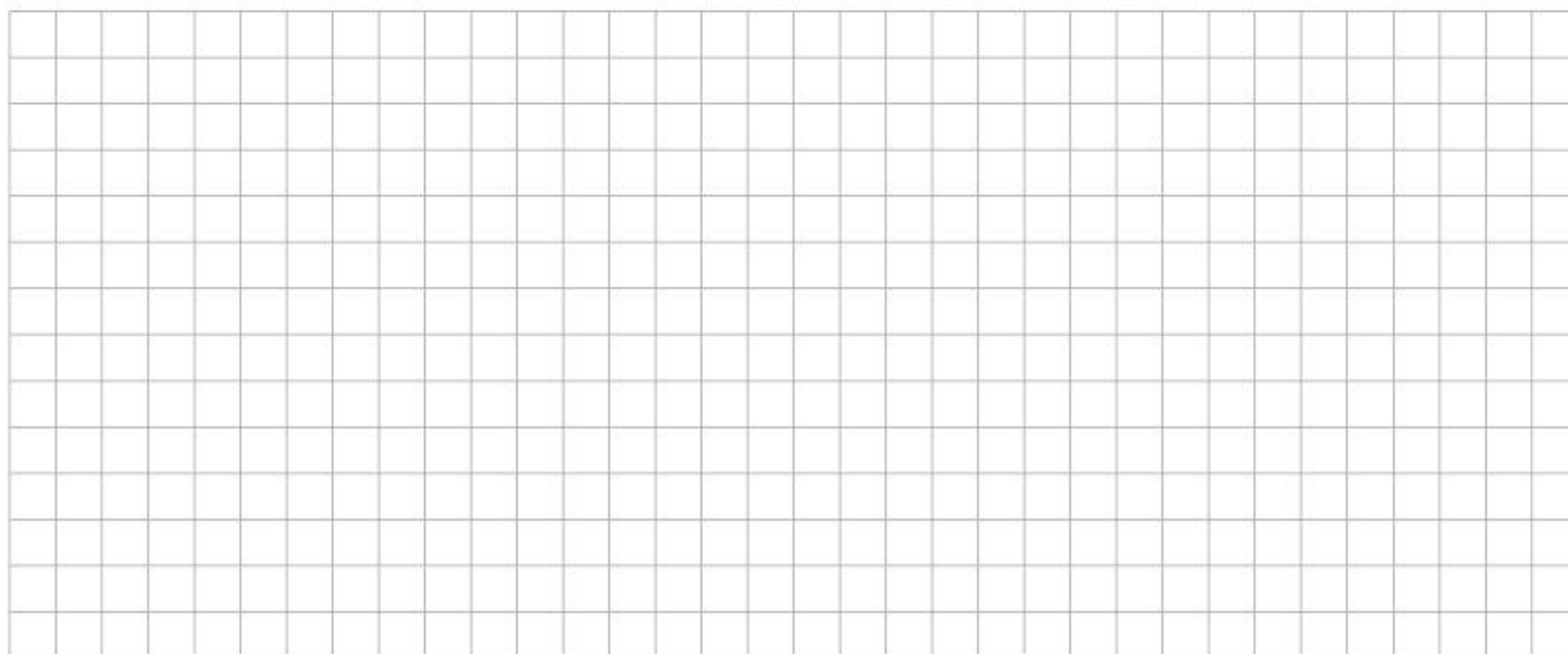
Obliczamy wagę tego śniegu:

$$3 \text{ m}^3 \cdot 200 \text{ kg/m}^3 = 600 \text{ kg}$$

Odpowiedź: Masa śniegu wynosi 600 kg.

Ćwiczenie do przykładu 347.**Rozwiąż samodzielnie**

Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 cm i 12 cm, a największa ściana boczna tego graniastosłupa jest kwadratem. **Oblicz objętość tego graniastosłupa.**

**Przykład 348.**

Które pojemności spośród następujących: 2500 ml, $0,25 \text{ dm}^3$, 0,25 hl, 250 000 mm^3 są równe? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 2500 ml i $0,25 \text{ dm}^3$

B. 2500 ml i 0,25 hl

C. $0,25 \text{ dm}^3$ i 250 000 mm^3 D. 2500 ml i 250 000 mm^3 **Rozwiązanie:**

Wszystkie pojemności wyrażamy w tych samych jednostkach

$$2500 \text{ ml} = 2,5 \text{ l}$$

$$0,25 \text{ dm}^3 = 0,25 \text{ l}$$

$$0,25 \text{ hl} = 25 \text{ l}$$

$$250\,000 \text{ mm}^3 = 250 \text{ cm}^3 = 0,25 \text{ dm}^3 = 0,25 \text{ l}$$

Odpowiedź: C

Ćwiczenie do przykładu 348.**Rozwiąż samodzielnie**

Prostopadłościenny karton o wymiarach 3 cm, 6 cm i 10 cm w 90% swojej pojemności wypełniony jest sokiem jabłkowym.

Ile mililitrów soku znajduje się w tym kartonie? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 180 ml

B. 16,2 ml

C. 162 ml

D. 1,8 ml



Przykład 349.

Pole powierzchni bocznej graniastopu prawidłowego trójkątnego wynosi 294 dm^2 , a krawędź boczna tego graniastopu jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli jest prawdziwe lub F – jeśli jest fałszywe.

Suma długości krawędzi bocznych tego graniastopu wynosi 21 dm.	P	F
Każda ściana boczna tego graniastopu jest prostokątem o wymiarach 21 dm na 14 dm.	P	F
Długość przekątnej ściany bocznej tego graniastopu wynosi $7\sqrt{5}\text{ dm}$.	P	F

Rozwiązanie:
Zapisujemy zależności między krawędziami graniastopu
 a – długość krawędzi podstawy
 $b = 2a$ – długość krawędzi bocznej
Z informacji dotyczących pola powierzchni bocznej tego graniastopu zapiszemy równanie:
 $3 \cdot a \cdot 2a = 294$
 $a^2 = 49$
 $a = 7\text{ dm}$
 $2 \cdot 7\text{ dm} = 14\text{ dm}$
Suma długości krawędzi bocznych graniastopu:
 $3 \cdot 14 = 42\text{ dm}$
Każda ściana boczna jest prostokątem, o bokach długości 7 dm i 14 dm
Obliczamy długość przekątnej z tw. Pitagorasa:
 $7^2 + 14^2 = d^2$, stąd $d = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}\text{ cm}$

Odpowiedź: FFP

Ćwiczenie do przykładu 349.

Rozwiąż samodzielnie

Graniastop prawidłowy trójkątny ma wszystkie krawędzie równe, a suma ich długości wynosi 45 cm.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli jest prawdziwe lub F – jeśli jest fałszywe.

Długość każdej krawędzi tego graniastopu wynosi 5 cm.	P	F
Siatkę tego graniastopu tworzą dwa trójkąty równoboczne i trzy kwadraty.	P	F
Pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól obu podstaw graniastopu.	P	F
Objętość graniastopu wynosi $\frac{125\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^3$.	P	F

Przykład 350.

Pole powierzchni całkowitej graniastopu prawidłowego czworokątnego jest równe 312 dm^2 . Pole podstawy tej bryły stanowi 60% pola powierzchni jednej ściany bocznej. **Oblicz objętość tego graniastopu. Zapisz obliczenia.**

Rozwiązanie:

a – długość krawędzi podstawy graniastopu prawidłowego czworokątnego

b – długość krawędzi bocznej graniastopu prawidłowego czworokątnego

Pole podstawy: $P_p = a^2$

Pole jednej ściany bocznej: $P_1 = ab$

Zapisujemy zależność, że pole podstawy tej bryły stanowi 60% pola powierzchni jednej ściany bocznej:

$$P_p = 0,6P_1$$

$$a^2 = 0,6ab \quad | : a$$

$a = 0,6b$, jest to zależność między długościami krawędzi tego graniastopu

Zapisujemy pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = 2a^2 + 4ab$$

$$312 = 2 \cdot (0,6b)^2 + 4 \cdot 0,6b \cdot b$$

$$312 = 3,12b^2$$

$$b = 10 \text{ dm}$$

$$a = 0,6 \cdot 10 = 6 \text{ dm}$$

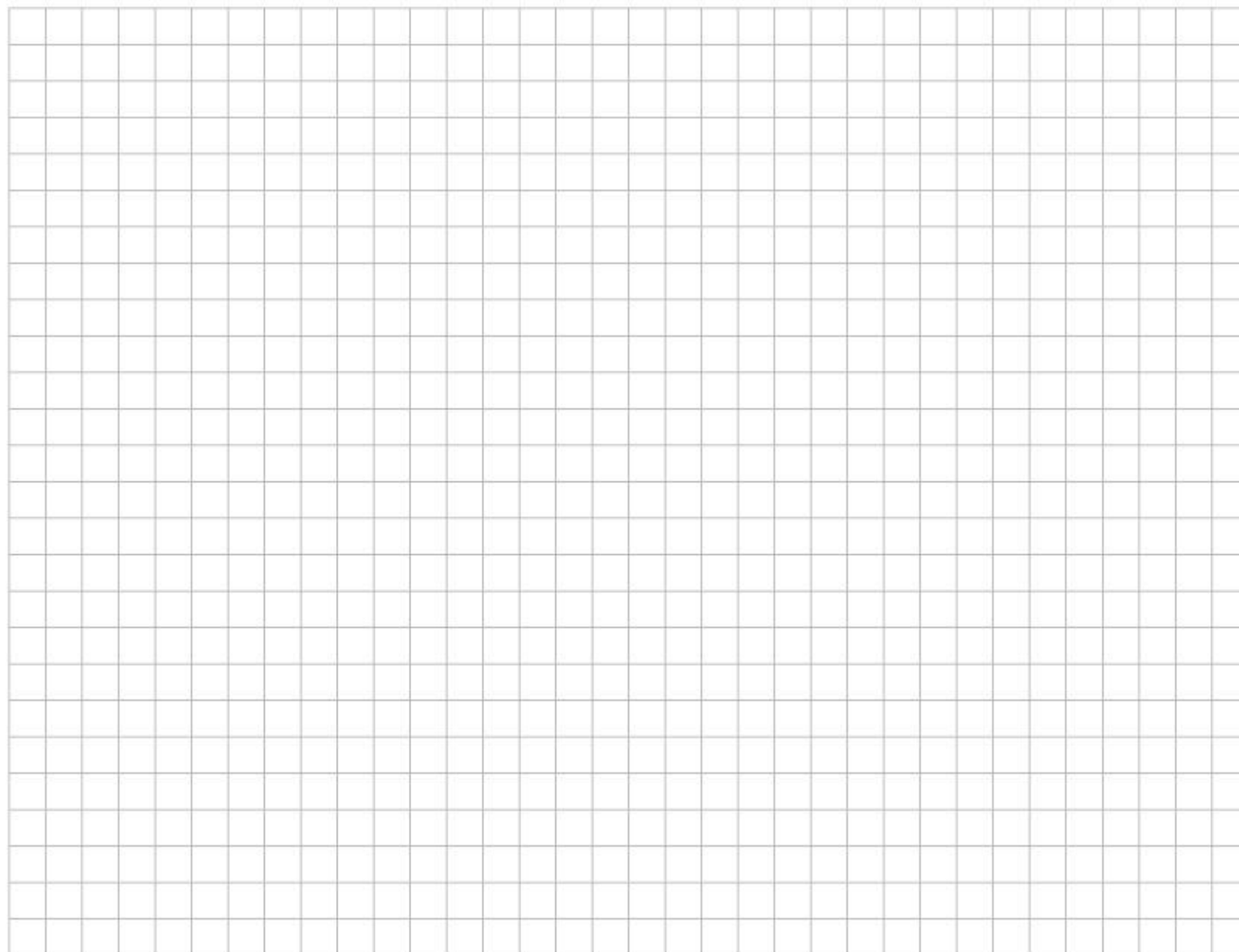
Obliczamy objętość graniastopu:

$$V = 6^2 \cdot 10 = 360 \text{ dm}^3$$

Odpowiedź: Objętość graniastopu prawidłowego czworokątnego wynosi 360 dm^3 .

Ćwiczenie do przykładu 350.**Rozwiąż samodzielnie**

Pole powierzchni podstawy graniastopu prawidłowego trójkątnego jest równe $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$, a pole powierzchni bocznej tego graniastopu jest 7,5 razy większe od pola podstawy. **Oblicz wysokość graniastopu.**

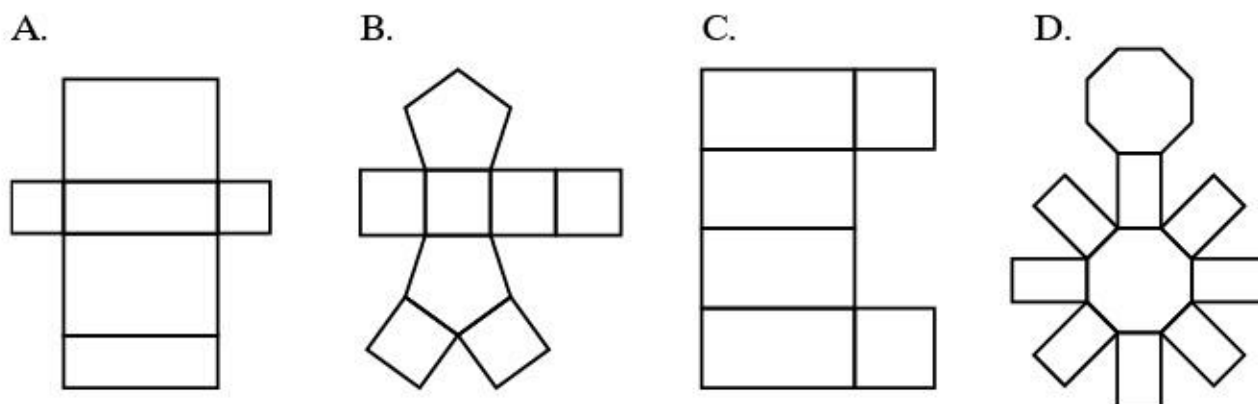


ZADANIA

351. Ile jest wierzchołków w graniastosłupie, który ma 17 ścian? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 30 B. 34 C. 45 D. 51

352. Na którym rysunku jest przedstawiona siatka graniastosłupa? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.



353. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Graniastosłup, który ma 24 wierzchołki, ma

- A. 12 ścian i 36 krawędzi B. 14 ścian i 36 krawędzi
C. 8 ścian i 16 krawędzi D. 10 ścian i 16 krawędzi

354. Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 7 cm jest równe 406 cm^2 .

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz spośród oznaczonych literami C i D.

Wysokość tego graniastosłupa jest równa A/B.

A. 12,75 cm

B. 11 cm

Objętość tego graniastosłupa wynosi C/D.

C. 77 cm^3

D. 539 cm^3

355. Pola trzech różnych ścian prostopadłościanu są odpowiednio równe 12 cm^2 , 16 cm^2 i 48 cm^2 , a długości krawędzi prostopadłościanu są liczbami naturalnymi. Która trójka liczb to długości krawędzi tego prostopadłościanu? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 3 cm, 4 cm, 4 cm B. 3 cm, 4 cm, 12 cm C. 2 cm, 6 cm, 8 cm D. 4 cm, 4 cm, 8 cm

356. Długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 6 cm, a długość przekątnej ściany bocznej tego graniastosłupa wynosi $2\sqrt{34} \text{ cm}$. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Krawędź boczna tego graniastosłupa prawidłowego ma długość

- A. $3\sqrt{3} \text{ cm}$ B. $2\sqrt{43} \text{ cm}$ C. $6\sqrt{2} \text{ cm}$ D. 10 cm

357. Wiemy, że jedna ze ścian prostopadłościanu jest kwadratem.

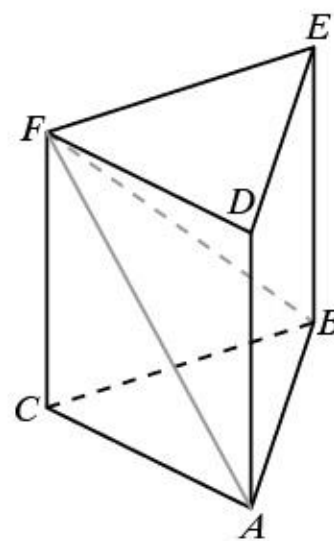
Wybierz zdanie prawdziwe spośród podanych.

- A. Ten prostopadłościan może mieć cztery ściany, które są kwadratami i dwie które nie są kwadratami.
B. Ten prostopadłościan może mieć trzy ściany, które są kwadratami i trzy które nie są kwadratami.
C. W tym prostopadłościanie mogą być dwie ściany, które są kwadratami i cztery, które nie są kwadratami.
D. W tym prostopadłościanie tylko ta jedna ściana może być kwadratem, a wszystkie pozostałe pięć ścian nie są kwadratami.

358*. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCDEF$ poprowadzono dwie przekątne ścian bocznych wychodzące z wierzchołka F . Przekątne te wraz z krawędzią AB utworzyły trójkąt ABF (patrz rysunek).

Czy trójkąt ABF jest trójkątem równoramiennym? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A, B lub C.

T	ponieważ	A.	odcinki AF i BF są równe.
		B.	odcinek AF jest dłuższy od odcinka AB .
N		C.	odcinek AB jest krótszy od odcinka BF .



359. Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz spośród oznaczonych literami C i D.

Liczba A/B wyraża pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego o długości krawędzi podstawy 3 cm i wysokości 8 cm.

A. 24 cm^2 B. 120 cm^2

Pole podstawy graniastosłupa prostego czworokątnego o objętości 294 cm^3 i krawędzi bocznej równej 7 cm wynosi C/D.

C. 42 cm^2 D. 84 cm^2

360. Sześciennie pudełko o krawędzi 22 cm przewiązano wstążką wzdłuż każdej ściany. Oblicz, ile wstążki należy kupić, jeśli na zawiązanie kokardy potrzeba o 20% więcej wstążki. Wynik podaj z dokładnością do 1 cm.



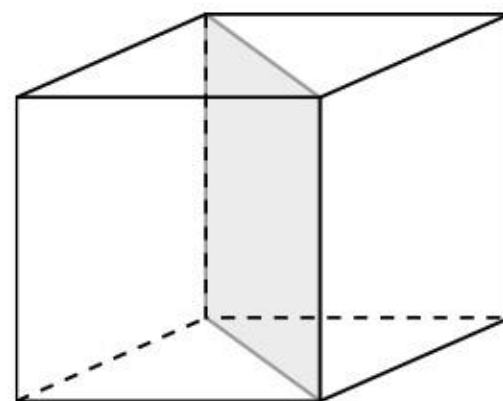
361. Oblicz objętość:

- graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 4 cm i krawędzi bocznej o 2 cm dłuższej,
- graniastosłupa prostego czworokątnego, którego podstawą jest romb o przekątnych 6 cm i 8 cm, a wysokość graniastosłupa wynosi 10 cm.

362. Długości krawędzi dwóch sześciątów pozostają do siebie w stosunku 2 : 3. Oblicz, w jakim stosunku pozostają do siebie pola powierzchni tych sześciątów oraz ich objętości.

363. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie krawędzie są jednakowej długości, a ich suma wynosi 36 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

364. Sześciąt rozcięto na dwa przystające graniastosłupy trójkątne tak jak pokazuje to rysunek. Pole powierzchni największej ściany bocznej każdego z tych graniastosłupów wynosi $16\sqrt{2} \text{ cm}^2$. Oblicz objętość każdego z tych graniastosłupów.

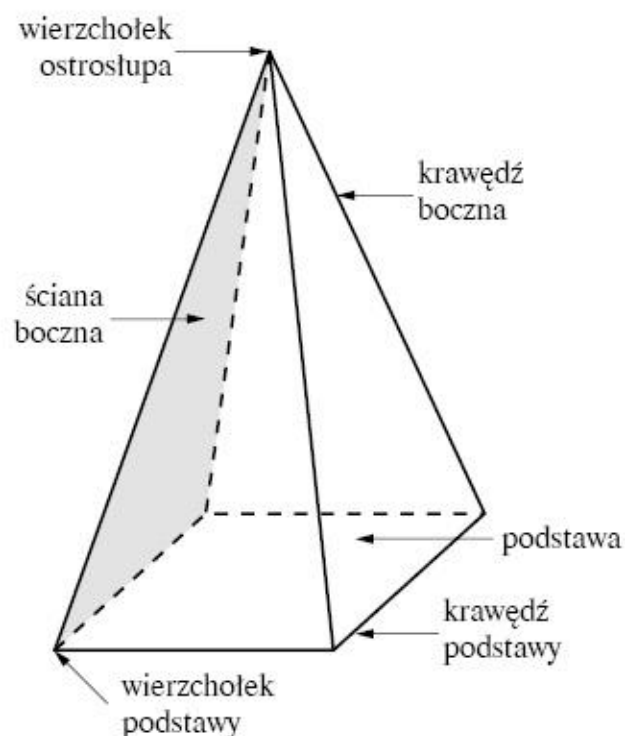


365*. Podstawą graniastosłupa prostego czworokątnego jest romb, którego krótsza przekątna jest równa krawędzi podstawy. Ponadto wiadomo, że wysokość tego graniastosłupa jest równa 6 cm, a objętość wynosi $75\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

366. Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest o 25% dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz, ile razy pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest większe od jego pola powierzchni bocznej.

TEORIA

Ostrośłupy

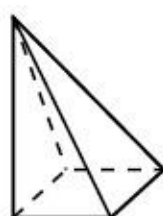


- Ostrosłup jest wielościanem, którego jedna ściana jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany są trójkątami o wspólnym wierzchołku.
- Liczba ścian bocznych ostrosłupa zależy od liczby wierzchołków jego podstawy.
- Nazwę ostrosłupa określa wielokąt znajdujący się w jego podstawie.
- Ostrosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym, nazywamy ostrosłupem prawidłowym.
- Ostrosłup trójkątny nazywa się też czworościanem, a taki, w którym wszystkie krawędzie mają jednakowe długości, to czworościan foremny.

PRZYKŁADY:



Ostrosłup prosty trójkątny – jego podstawą jest trójkąt, wszystkie krawędzie boczne mają taką samą długość.



Ostrosłup pochyły czworokątny – jego podstawą jest czworokąt, krawędzie boczne nie mają takiej samej długości.



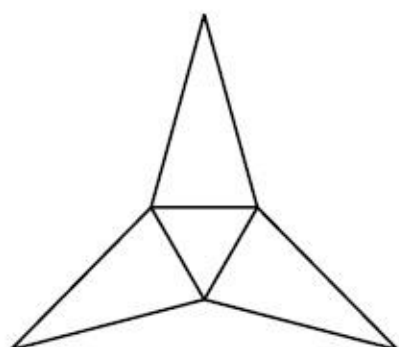
Ostrosłup prosty sześciokątny – jego podstawą jest sześciokąt, wszystkie krawędzie boczne mają taką samą długość.

Siatka ostrosłupa

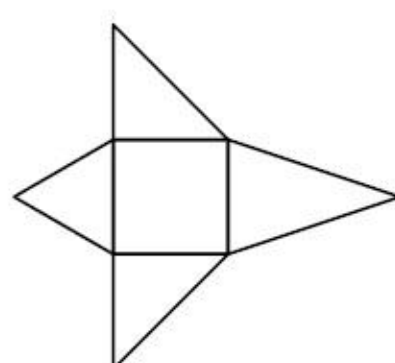
Po rozcięciu ostrosłupa i rozłożeniu go na płaszczyźnie otrzymujemy siatkę ostrosłupa.

PRZYKŁADY:

Siatka ostrosłupa trójkątnego prawidłowego:

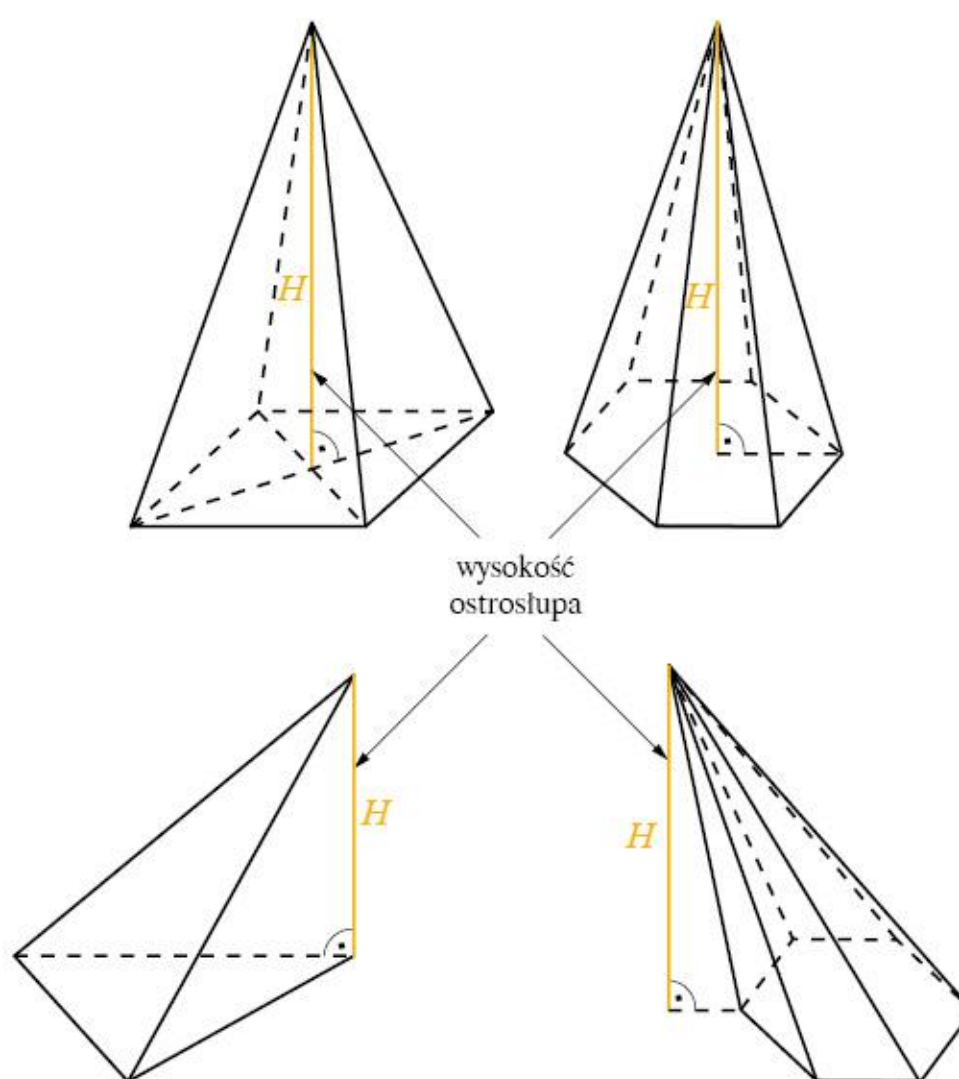


Siatka ostrosłupa czworokątnego pochyłego:



■ Wysokość ostrosłupa

Wysokość ostrosłupa to odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z płaszczyzną podstawy i prostopadły do tej podstawy.



■ Pole powierzchni ostrosłupa

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe polu powierzchni jego siatki, czyli sumie pól wszystkich jego ścian bocznych i podstawy.

$$P_c = P_p + P_b$$

gdzie: P_c – pole powierzchni całkowitej
 P_p – pole podstawy
 P_b – pole powierzchni bocznej

■ Objętość ostrosłupa

Objętość ostrosłupa jest trzy razy mniejsza niż objętość graniastoslupa o takiej samej podstawie i wysokości.

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

gdzie: P_p – pole podstawy ostrosłupa
 H – wysokość ostrosłupa

ZADANIA EGZAMINACYJNE KROK PO KROKU

Przykład 367.

Egzamin 8-klasisty CKE

Trójkąt przedstawiony na rysunku jest ścianą boczną ostrosłupa prawidłowego trójkątnego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

Podstawa ostrosłupa jest trójkątem równobocznym o boku 2 cm.

h – wysokość trójkąta będącego podstawą ostrosłupa

$$h^2 + 1^2 = 2^2$$

$$h = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Pole podstawy: } P_p = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

w – wysokość ściany bocznej opuszczona na bok o długości 2 cm

$$w^2 + 1^2 = 7^2$$

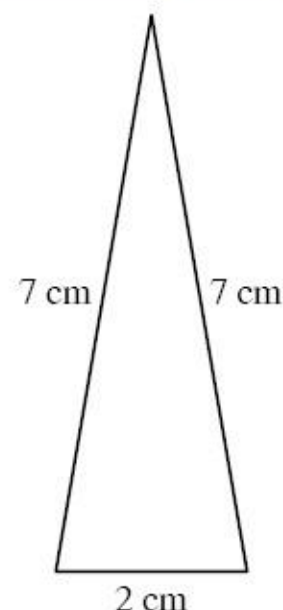
$$w^2 = 48$$

$$w = \sqrt{48}$$

$$w = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$P_{sb} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$P_c = P_p + 3 \cdot P_{sb} = \sqrt{3} + 3 \cdot 4\sqrt{3} = 13\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe $13\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Ćwiczenie do przykładu 367.

Rozwiąż samodzielnie

Figura przedstawiona na rysunku jest ścianą boczną ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

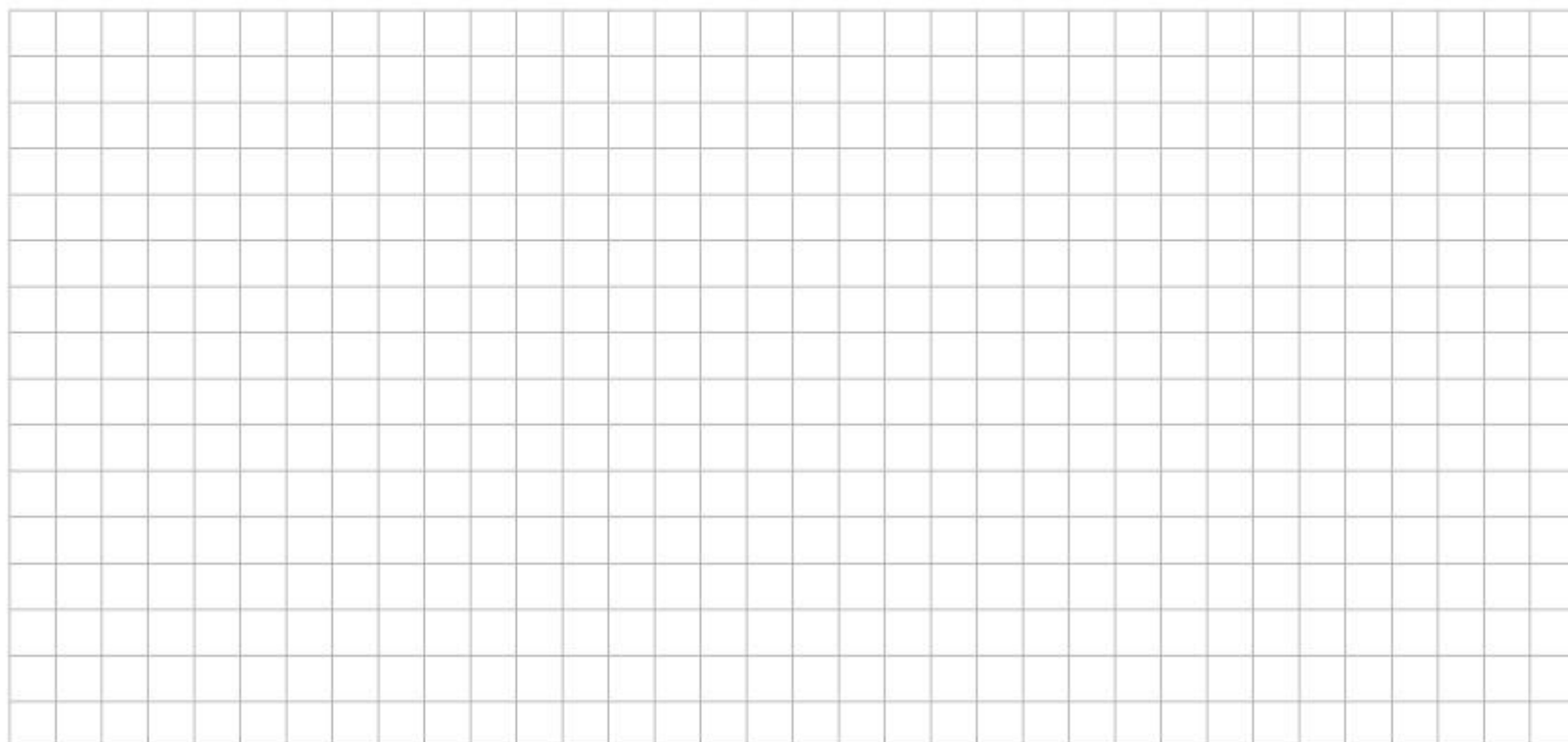
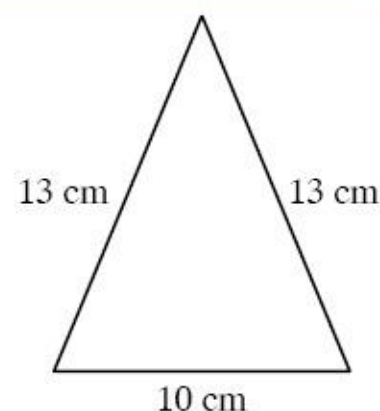
Pole powierzchni całkowitej tej bryły jest równe

A. $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$

B. 180 cm^2

C. $205\sqrt{3} \text{ cm}^2$

D. $(25\sqrt{3} + 180) \text{ cm}^2$



Przykład 368.

Oblicz objętość narysowanego ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.

Rozwiązanie:

Ostrosłup prawidłowy trójkątny ma w podstawie trójkąt równoboczny.

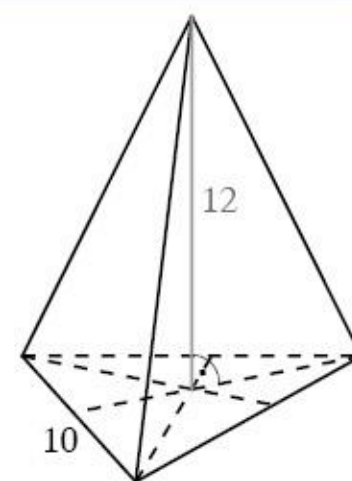
Obliczamy pole podstawy ostrosłupa:

$$P_p = \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$

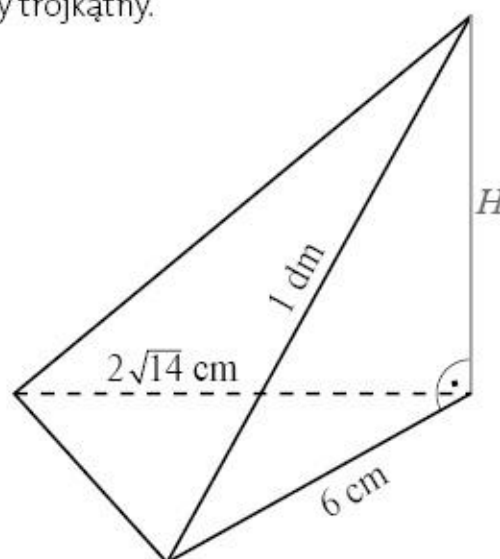
Obliczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 25\sqrt{3} \cdot 12 = 100\sqrt{3}$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi $100\sqrt{3}$.

**Ćwiczenie do przykładu 368.****Rozwiąż samodzielnie**

Rysunek przedstawia ostrosłup pochyły trójkątny.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

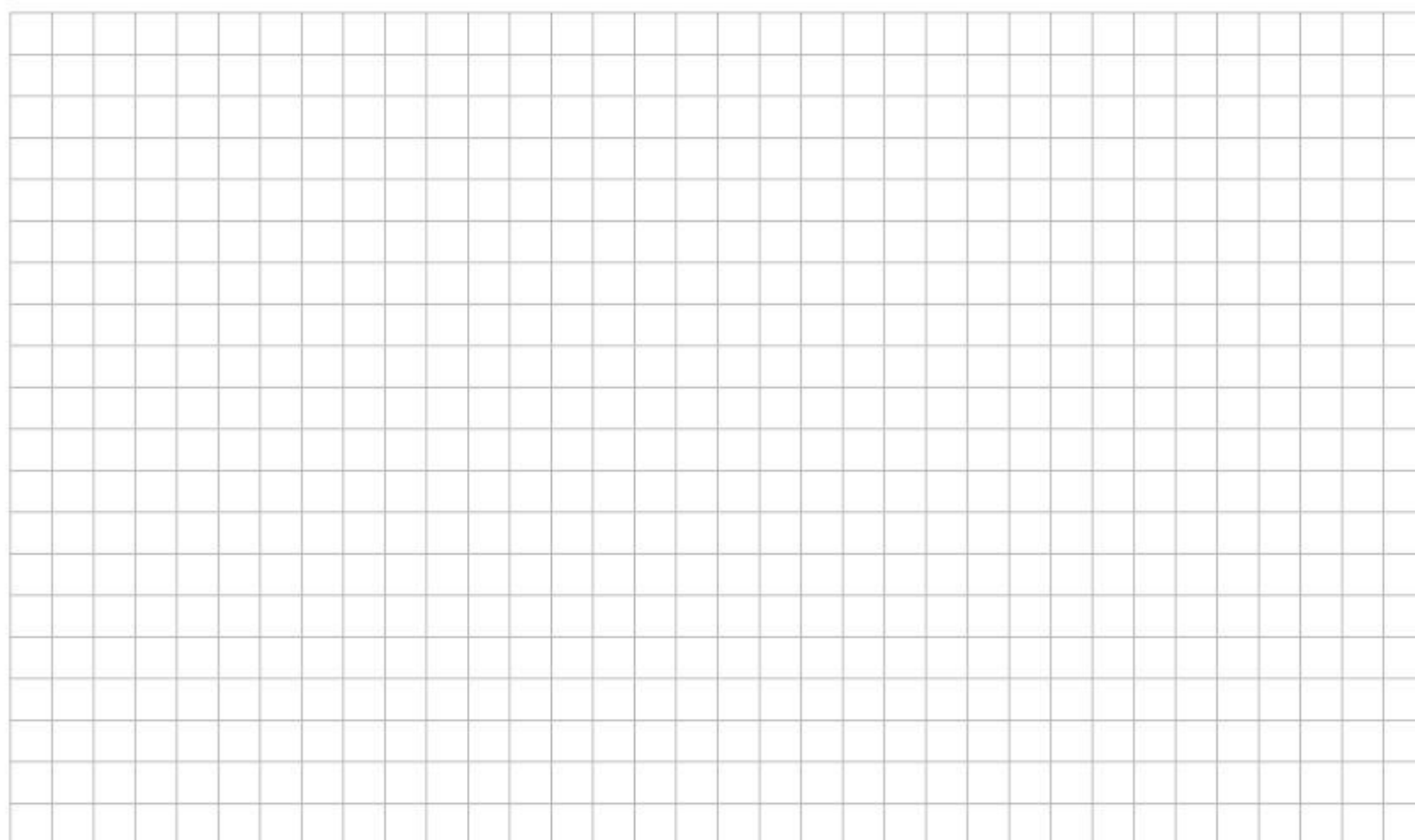
Wysokość tego ostrosłupa wynosi

A. 8 cm

B. $\sqrt{5}$ cm

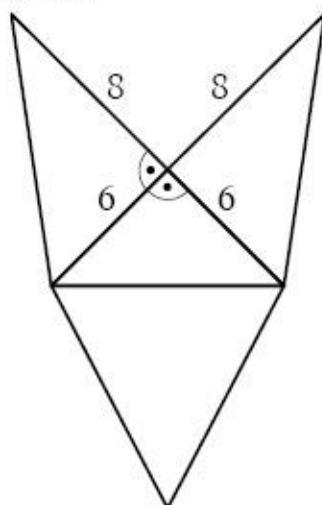
C. 4 cm

D. $8\sqrt{3}$ cm



Przykład 369.

Rysunek przedstawia siatkę ostrosłupa trójkątnego.



Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa wynosi

A. $48\sqrt{2}$

B. $48 + 41\sqrt{6}$

C. $48 + 6\sqrt{41}$

D. $48 + 6\sqrt{5}$

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Pola trójkątów prostokątnych FDE i BDC są równe.

Obliczamy pole trójkąta FDE : $P = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$

Trójkąt ABF jest równoramienny.

Obliczamy długości odcinków:

$BF, GB, BA = BC$ (BA – przeciwprostokątna w trójkącie BDC) oraz GA (wysokość trójkąta ABF – przyprostokątna w trójkącie prostokątnym ABG)

$$BF = 6\sqrt{2}, GB = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10, BA = 10$$

$$GA = \sqrt{10^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{100 - 18} = \sqrt{82}$$

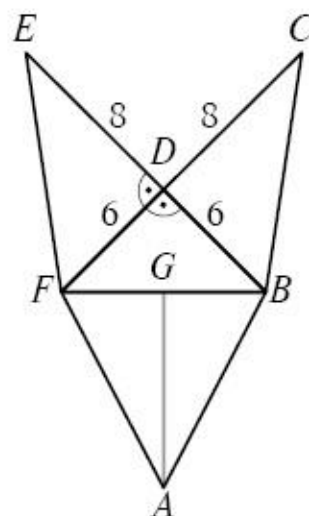
Obliczamy pole trójkąta FBA :

$$P = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{82}}{2} = 3\sqrt{164} = 6\sqrt{41}$$

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa:

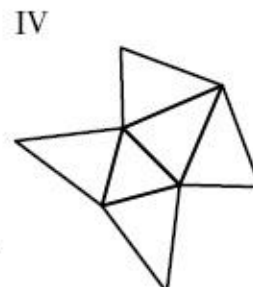
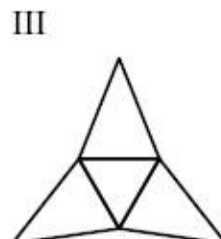
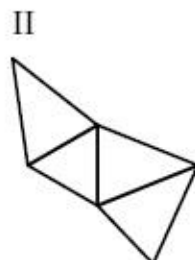
$$P = 2 \cdot 24 + 6\sqrt{41} = 48 + 6\sqrt{41}$$

Odpowiedź: C

**Ćwiczenie do przykładu 369.**

Rozwiąż samodzielnie

Która z siatek nie jest siatką ostrosłupa? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

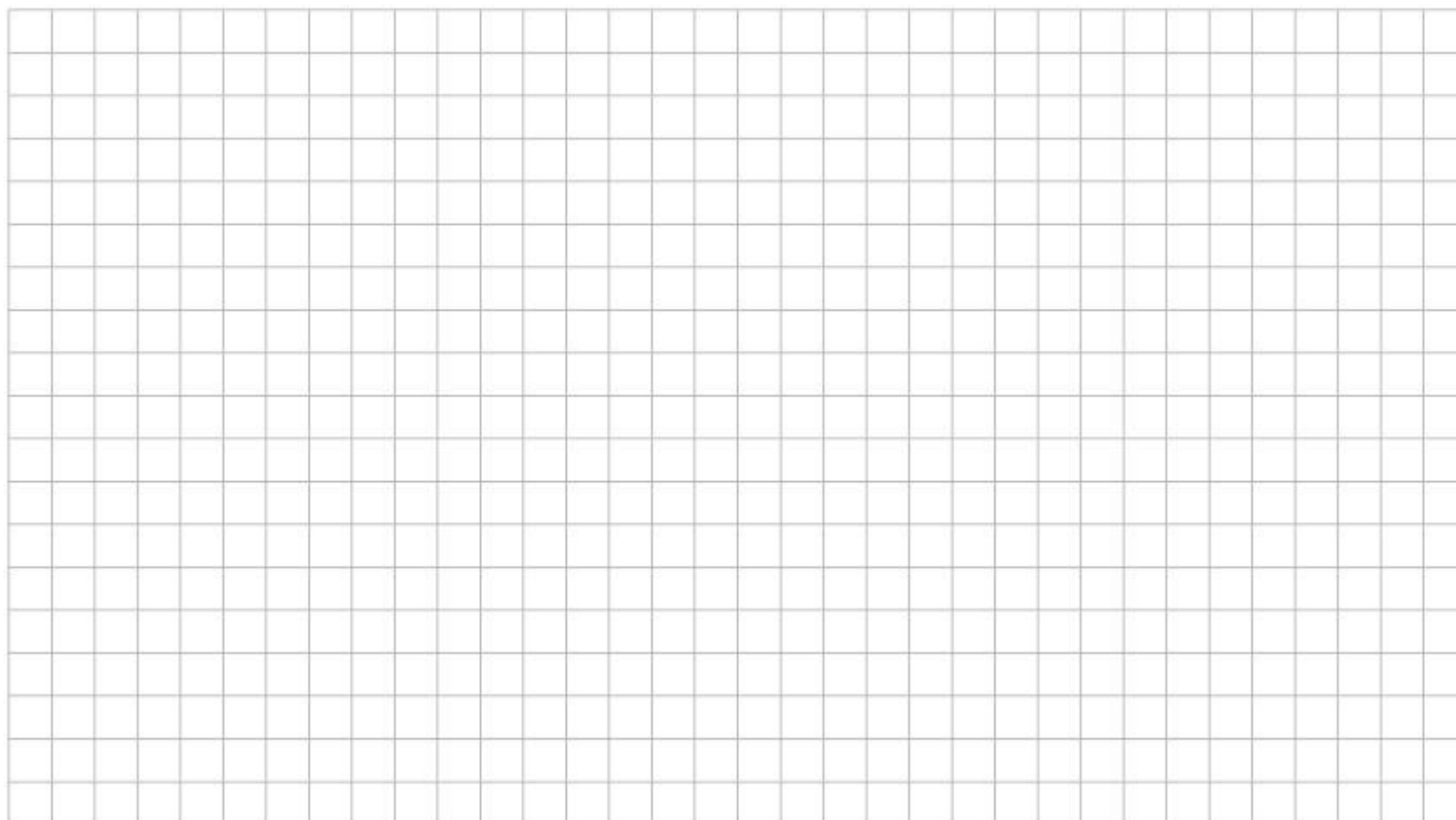


A. I

B. II

C. III

D. IV

**Przykład 370.**

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Ostrosłup o czterech ścianach to ostrosłup

A. trójkątny B. czworokątny C. pięciokątny D. sześciokątny

W ostrosłupie o czterech ścianach jedna ściana jest podstawą, a trzy pozostałe są ścianami bocznymi. Wobec tego jest to ostrosłup trójkątny.

Odpowiedź: A

Ćwiczenie do przykładu 370.**Rozwiąż samodzielnie**

Które z narysowanych figur nie mogą być podstawą ostrosłupa? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. I i II

B. tylko II

C. III i IV

D. tylko IV

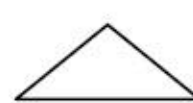
I



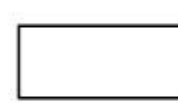
II



III



IV



Przykład 371.

Na wykonanie modelu szkieletowego ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego o krawędzi podstawy równej 0,4 dm zużyto 0,8 m drutu.

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Ostrosłup ten ma 10 krawędzi.	P	F
Suma długości krawędzi bocznych tego ostrosłupa wynosi 60 mm.	P	F

Rozwiązanie:

Ostrosłup pięciokątny ma 5 krawędzi podstawy i 5 krawędzi bocznych, czyli łącznie 10 krawędzi. Pierwsze zdanie jest prawdziwe.

Ostrosłup jest pięciokątny prawidłowy, więc suma długości krawędzi podstawy jest równa:

$$5 \cdot 0,4 \text{ dm} = 2 \text{ dm}$$

Obliczamy sumę długości krawędzi bocznych tego ostrosłupa.

$$0,8 \text{ m} = 8 \text{ dm}$$

$$8 \text{ dm} - 2 \text{ dm} = 6 \text{ dm} = 600 \text{ mm}$$

Drugie zdanie jest fałszywe.

Odpowiedź: PF

Ćwiczenie do przykładu 371.**Rozwiąż samodzielnie**

Podstawa ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadratem o polu 144 cm^2 . Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa, jeżeli krawędź boczna jest równa krawędzi podstawy.

**Przykład 372.**

Rysunek przedstawia siatkę czworościanu foremnego.

Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi A/B.

A. 64 cm

B. 48 cm

Pole powierzchni całkowitej tej bryły jest równe C/D.

C. $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$

D. $64\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Rozwiązanie:

Czworościan foremny ma 6 krawędzi jednakowej długości.

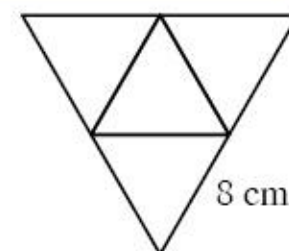
$$6 \cdot 8 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$$

Siatkę czworościanu foremnego tworzą cztery przystające trójkąty równoboczne o boku długości 8 cm.

Obliczamy pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = 4 \cdot \frac{8^2 \sqrt{3}}{4} = 64\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Odpowiedź: BD



Przykład 374.

Przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16 cm, a jego wysokość jest o 7 cm krótsza.

Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma w podstawie kwadrat.

Obliczamy pole podstawy:

$$P_p = \frac{16 \cdot 16}{2} = 128 \text{ cm}^2$$

Obliczamy wysokość ostrosłupa:

$$16 \text{ cm} - 7 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$$

Obliczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 128 \cdot 9 = 384 \text{ cm}^3$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa 384 cm³.

Ćwiczenie do przykładu 374.**Rozwiąż samodzielnie**

Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCD$ jest prostokąt o boku długości 15 cm i przekątnej równej 25 cm. Krawędź boczna AS o długości 18 cm jest prostopadła do podstawy tego ostrosłupa. **Oblicz objętość tego ostrosłupa.**



Przykład 375.

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi $1,92 \text{ dm}^2$, a wysokość ściany bocznej – 12 cm .

Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma w podstawie kwadrat, cztery jego ściany są przystającymi trójkątami.

Obliczamy pole powierzchni jednej ściany bocznej:

$$1,92 \text{ dm}^2 : 4 = 0,48 \text{ dm}^2$$

Wyrażamy wysokość ściany bocznej w decymetrach:

$$12 \text{ cm} = 1,2 \text{ dm}$$

Oznaczamy przez a długość krawędzi podstawy.

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a \cdot 1,2}{2} = 0,48 \Rightarrow a = 0,8 \text{ dm}$$

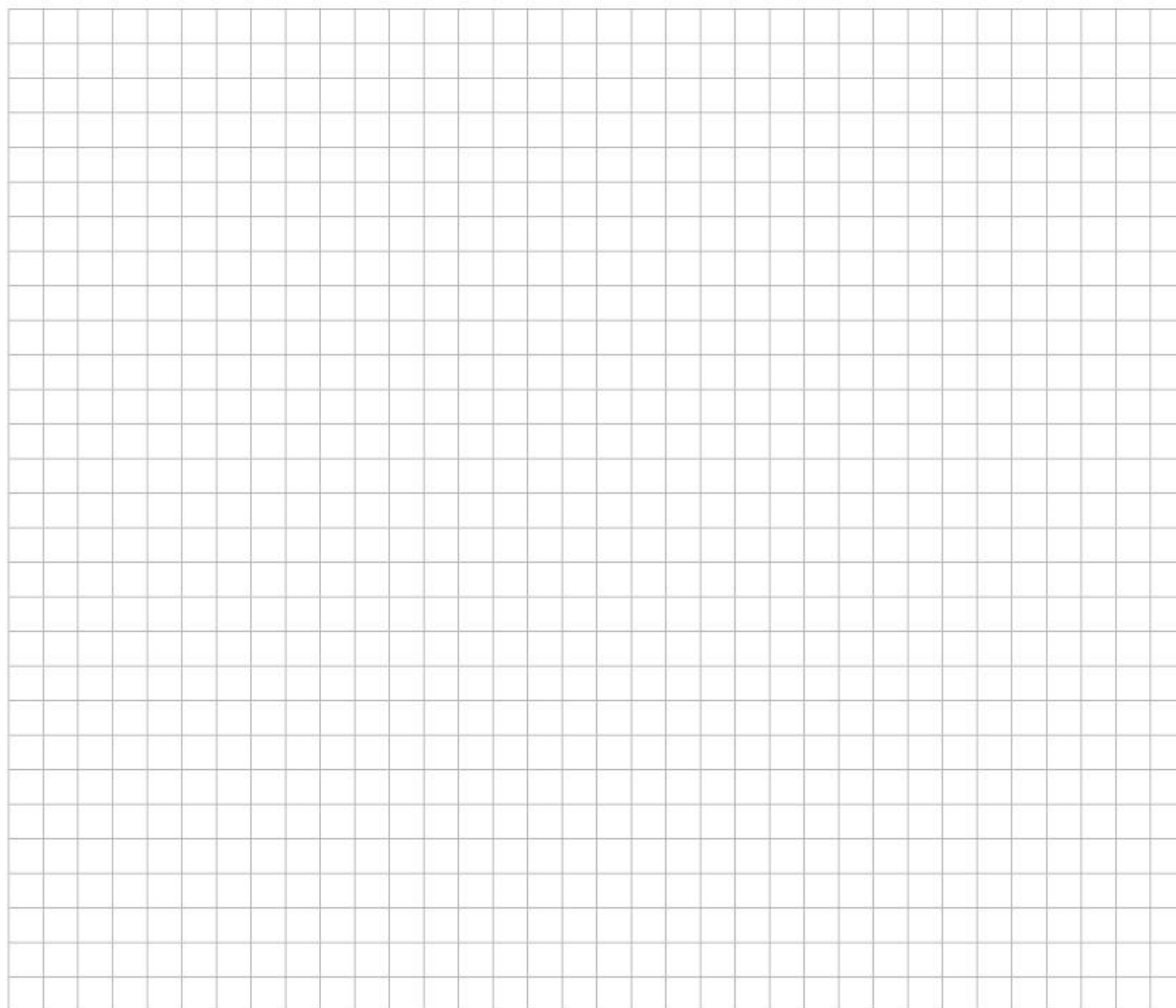
Obliczamy pole podstawy:

$$P_p = 0,8^2 = 0,64 \text{ dm}^2$$

Odpowiedź: Pole podstawy wynosi $0,64 \text{ dm}^2$.

Ćwiczenie do przykładu 375.**Rozwiąż samodzielnie**

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym obwód podstawy jest równy 24 dm , a wysokość ściany bocznej jest o 10 cm krótsza od krawędzi podstawy. **Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.**



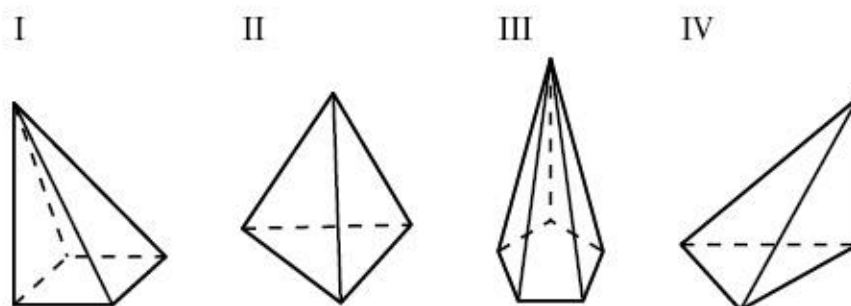
ZADANIA

376. Rysunki przedstawiają modele brył.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Spośród narysowanych modeli ostrosłupami pochyłymi są

- A. I i III
B. II i IV
C. I i IV
D. żaden



377. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Ostrosłup siedmiokątny ma A/B wierzchołków.

- A. 7
B. 8
C. ośmiokąt
D. piętnastokąt

378. W ostrosłupie suma liczby wszystkich ścian, wierzchołków i krawędzi jest równa 38.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeśli ten ostrosłup ma n wierzchołków w podstawie, to liczbę n można obliczyć, rozwiązując równanie

- A. $n + n + 2n = 38$
B. $3n + 3 = 38$
C. $4(n + 1) = 38$
D. $4n + 2 = 38$

379. Ile wynosi łączna długość prętów potrzebnych do wykonania modelu szkieletowego ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 0,7 dm, a krawędź boczna ma 15 cm?

Wybierz odpowiedź spośród podanych.

- A. 78,5 cm
B. 220 cm
C. 110 cm
D. 87,5 cm

380. Długość krawędzi czworościanu foremnego wynosi $6\sqrt{6}$ cm.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

- Pole powierzchni bocznej tego czworościanu jest równe A/B.
Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa wynosi C/D.
- A. $81\sqrt{3}$ cm²
B. $162\sqrt{3}$ cm²
C. $108\sqrt{3}$ cm²
D. $216\sqrt{3}$ cm²

381. Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wszystkich krawędzi ostrosłupa jest tyle, ile jego ścian bocznych.	P	F
Z każdego wierzchołka ostrosłupa wychodzą zawsze 3 krawędzie.	P	F
Istnieje ostrosłup, którego wysokość jest równa długości jednej z jego krawędzi bocznych.	P	F
Ostrosłup prawidłowy, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, jest czworościanem foremnym.	P	F

382. Kostka do gry w kształcie czworościanu foremnego ma pole powierzchni równe $16\sqrt{3}$ cm².

Jaką długość ma krawędź tej kostki? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

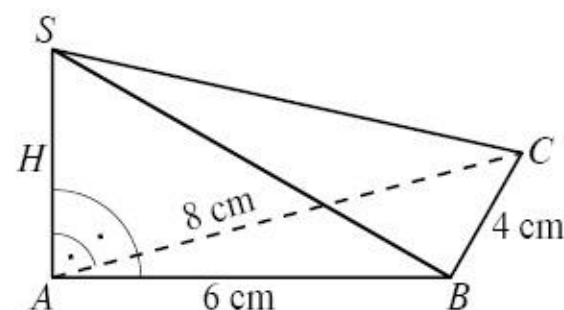
- A. 4 cm
B. 16 cm
C. $4\sqrt{3}$ cm
D. $6\sqrt{3}$ cm

383. W ostrosłupie $ABCS$ jedna z krawędzi bocznych jest jednocześnie wysokością bryły i ma długość 8 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa wynosi

- A. 44 cm
B. $(36 + 8\sqrt{2})$ cm
C. $(36\sqrt{2} + 8)$ cm
D. $44\sqrt{2}$ cm



384. Czy istnieje ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego przekątna podstawy jest równa $10\sqrt{2}$ cm, a krawędź boczna ma 5 cm? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T		A.	suma długości dwóch krawędzi bocznych musi być większa od długości krawędzi podstawy.
	ponieważ	B.	suma długości dwóch krawędzi bocznych musi być równa długości krawędzi podstawy.
N		C.	suma długości dwóch krawędzi bocznych musi być mniejsza od długości krawędzi podstawy.

385. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku długości 6 cm.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Jeśli wysokość ściany bocznej wynosi 5 cm, to pole powierzchni bocznej tej bryły ma A/B.

- A. 15 cm^2
B. 60 cm^2

Jeśli wysokość tej bryły jest równa 4 cm, to jej objętość wynosi C/D.

- C. 12 cm^3
D. 48 cm^3

386. Podstawą ostrosłupa o wysokości $5\sqrt{3}$ cm jest kwadrat o boku długości 6 cm. Oblicz, jaką objętość ma ten ostrosłup.

387. Mieszanka herbat pakowana jest w saszetki o kształcie czworokątnym foremnym o krawędzi długości 3 cm. Oblicz, ile centymetrów kwadratowych bibułki potrzeba na wyprodukowanie 25 torebek znajdujących się w jednym pudełku herbaty. Do obliczeń przyjmij $\sqrt{3} \approx 1,7$.

388. Czapeczka karnawałowa ma kształt ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego bez podstawy o krawędzi podstawy równej 12 cm i krawędzi bocznej długości 22 cm.

Ile centymetrów kwadratowych kartonu potrzeba na wykonanie takiej czapeczki? Na zakładki dolicz 5% powierzchni czapeczki. Do obliczeń przyjmij $\sqrt{7} \approx 2,6$.

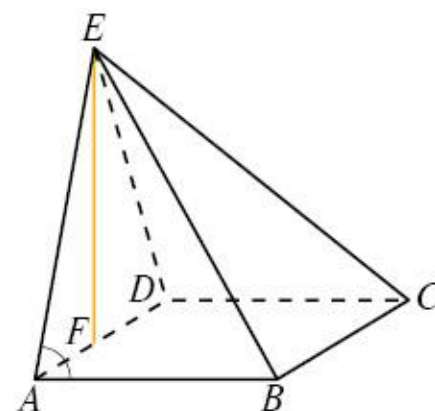
389. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 128 cm^2 , a wysokości ściany bocznej – 8 cm. Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa.

390. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnej równej 4 cm. Najkrótsza krawędź boczna długości 8 cm jest prostopadła do podstawy i wychodzi z wierzchołka kąta prostego.

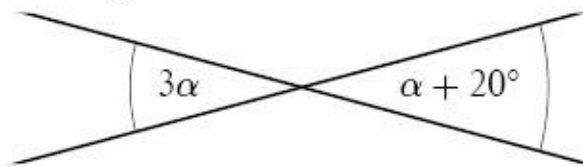
Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa oraz jego objętość.

391. Podstawą ostrosłupa $ABCDE$ jest kwadrat $ABCD$. Punkt F jest środkiem krawędzi AD , odcinek EF jest wysokością ostrosłupa.

Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że odcinek AE ma długość 6 cm, odcinek $BE = 10$ cm, kąt EAB jest prosty.



- 1 pkt 392. Na rysunku zaznaczono dwa kąty.



Jaką miarę ma kąt α ? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

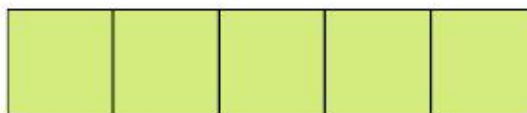
- A. 30° B. 10° C. 20° D. 40°

- 1 pkt 393. Podstawę AB trójkąta ABC podzielono na trzy równe odcinki: AD , DE i EB .

Czy prawdą jest, że stosunek pól trójkątów AEC i ABC wynosi $4 : 6$? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T		A.	trójkąty ADC , DEC i EBC mają różne pola.
N	ponieważ	B.	pole trójkąta AEC jest różne od pola trójkąta EBC .
		C.	trójkąty ADC , DEC i EBC mają równe pola.

- 1 pkt 394. Pięć połączonych bokami kwadratowych płytek ściennych tworzy prostokąt o polu $0,8 \text{ dm}^2$.



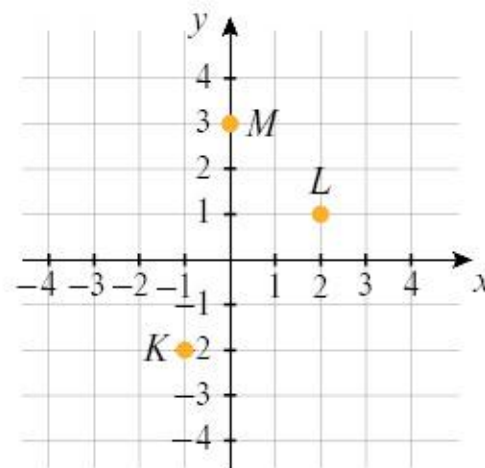
Ile takich płytek ułożonych obok siebie potrzebujemy na ułożenie pasa długości $3,2 \text{ m}$? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 8 B. 80 C. 4 D. 40

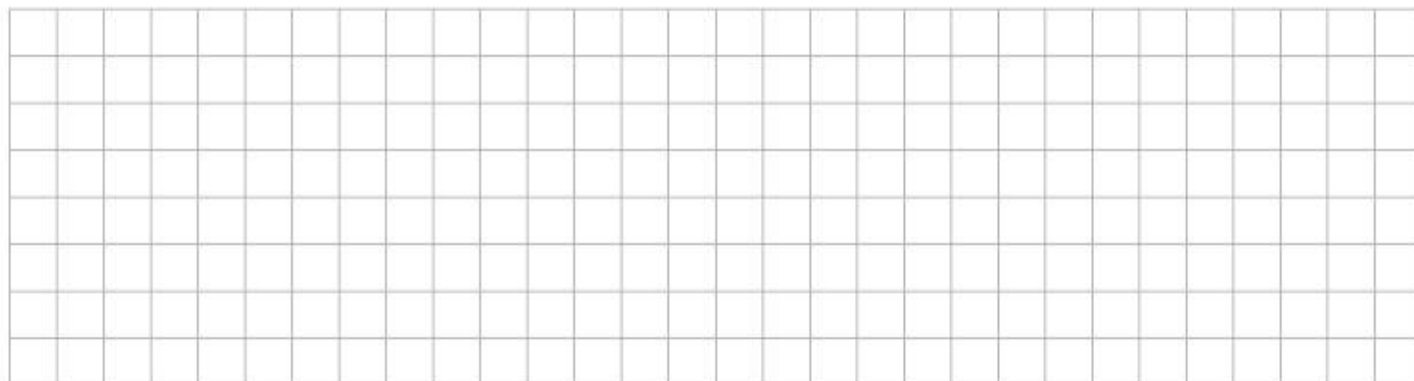
- 1 pkt 395. W układzie współrzędnych zaznaczono trzy kolejne wierzchołki prostokąta $KLMN$.

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Punkt N ma współrzędne $(-3, 0)$.	P	F
Dłuższy bok prostokąta $KLMN$ ma długość $2\sqrt{3}$ j.	P	F



- 2 pkt 396. Wysokość trójkąta jest o 4 cm krótsza od podstawy, na którą jest poprowadzona. Oblicz pole tego trójkąta, jeżeli suma długości podstawy i wysokości wynosi 16 cm .



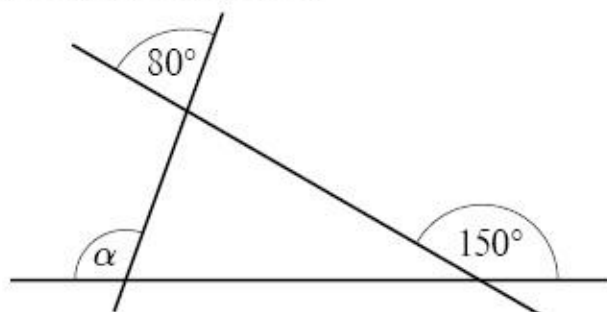
397. Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1 pkt

Suma miar kątów w trójkącie jest równa mierze kąta półpełnego.	P	F
Trójkąt rozwartokątny nie może być równoramienny.	P	F

398. Rysunek przedstawia przecinające się proste.

1 pkt



Ile wynosi miara kąta α ? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 30° B. 80° C. 70° D. 110°

399. Dane są dwa przystające trójkąty prostokątne ABC i KLM . W trójkącie ABC kąt ostry ma miarę 55° .

1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź spośród podanych.

W trójkącie KLM

A. jeden z kątów ostrych ma miarę 45° B. oba kąty ostre mają po 55° C. jeden z kątów ostrych ma miarę 35° D. oba kąty ostre mają po 45°

400. Ile wynosi długość podstawy trójkąta równoramiennego, którego obwód ma 6 dm, a ramię jest o 50% dłuższe od podstawy? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

1 pkt

A. 2,4 cm

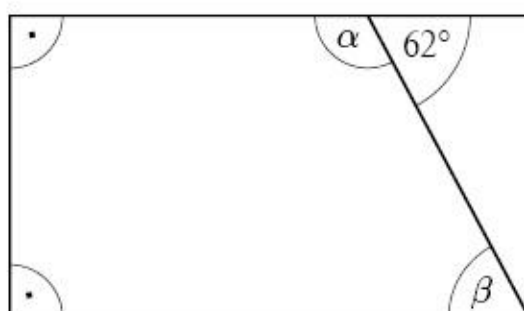
B. 2 dm

C. 1,5 dm

D. 1,8 dm

401. Rysunek przedstawia trapez.

1 pkt



Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Kąt α ma miarę A/B.

A. 118° B. 28°

Miara kąta α jest o C/D większa od miary kąta β .

C. 62° D. 56°

402. Obwód rombu $ABCD$ wynosi 40 cm, a obwód trójkąta ACD – 32 cm.

1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź spośród podanych.

Pole rombu $ABCD$ jest równe

A. 96 cm^2 B. 64 cm^2 C. 36 cm^2 D. 98 cm^2

1 pkt

403. Na rysunku przedstawiono dwie figury. Figura I powstała przez wycięcie trójkąta równobocznego z prostokąta, a figura II przez dołożenie trójkąta równobocznego do prostokąta.



Figura I

Figura II

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Obwód figury I jest równy obwodowi figury II.	P	F
Różnica pól figury II i figury I jest równa polu wyciętego trójkąta równobocznego.	P	F

1 pkt

404. Z drutu długości 7,2 dm zbudowano szkielet sześcianu.

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Pole powierzchni całkowitej tak otrzymanego sześcianu wynosi 216 cm^2 .	P	F
Objętość tego sześcianu jest równa 216 cm^3 .	P	F

1 pkt

405. Basen ma kształt prostopadłościanu, którego podstawa (dno basenu) ma wymiary 15 m na 12 m. Do basenu wiano 360 m^3 wody, która wypełniła go do $\frac{4}{5}$ głębokości.

Jaka jest głębokość basenu? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 2 m

B. 1,8 m

C. 2,5 m

D. 2,2 m

1 pkt

406. Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa.

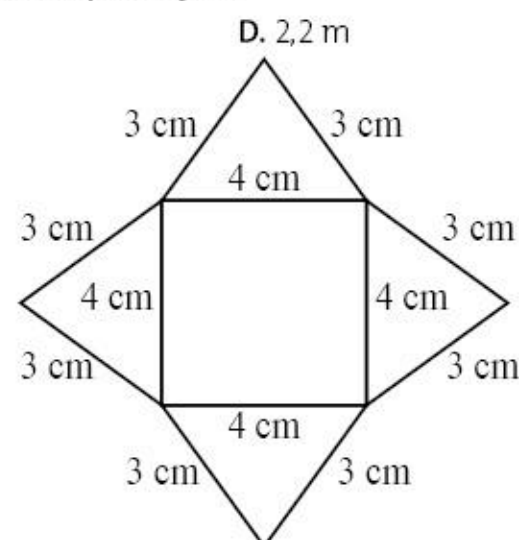
Ile wynosi suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 40 cm

B. 16 cm

C. 24 cm

D. 28 cm



1 pkt

407. Trójkąt równoramienny o obwodzie 16 cm jest ścianą boczną ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa wynosi

A. $32\sqrt{2} \text{ cm}^2$ B. $16\sqrt{2} \text{ cm}^2$ C. $32\sqrt{3} \text{ cm}^2$ D. $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$ 

2 pkt

408. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ zbudowano na zewnątrz dwa trójkąty równoboczne BEC i CFD . Uzasadnij, że $AE = AF$.



409. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 36 cm, ramię ma długość 10 cm, a różnica długości podstaw wynosi 12 cm. **Oblicz pole tego trapezu.**

3 pkt



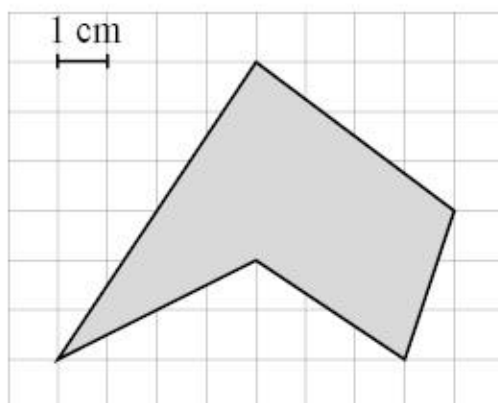
410. Z prostokątnego kartonu o wymiarach 50 cm na 70 cm w każdym narożniku wycięto cztery jednakowe kwadraty o boku długości 15 cm. **Jaką objętość będzie miało pudełko, które powstanie po złożeniu kartonu? Wynik podaj w decymetrach sześciennych.**

3 pkt



411. Na kwadratowej siatce narysowano pewien wielokąt. Jego wierzchołki znajdują się w punktach przecięcia linii siatki.

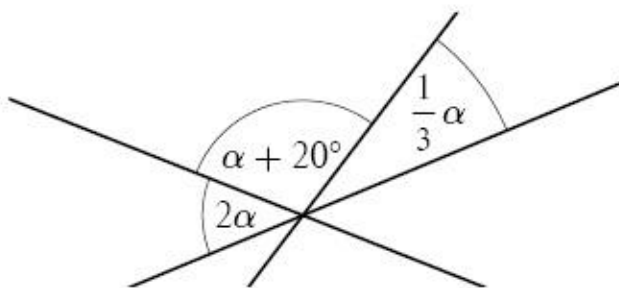
4 pkt



Odczytaj potrzebne wielkości i oblicz pole tego wielokąta. Zapisz obliczenia.



412. Rysunek przedstawia trzy przecinające się proste.



Wartość α można obliczyć, rozwiązując równanie

- A. $\frac{10}{3}\alpha = 160^\circ$ B. $3\alpha + 20^\circ + \frac{1}{3}\alpha = 360^\circ$ C. $20^\circ + 2\frac{1}{3}\alpha = 180^\circ$ D. $3\alpha + 20^\circ = 90^\circ$

413. Stosunek miar kątów pewnego czworokąta jest równy 2:3:4:6.

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Miara najmniejszego kąta tego czworokąta wynosi 18° .	P	F
Różnica między miarą największego i najmniejszego kąta tego czworokąta jest równa 69° .	P	F

414. Namiot ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy równej 6 m i krawędzi bocznej – 5 m. Oblicz, ile metrów kwadratowych tkaniny potrzeba na uszycie ścian bocznych i podłogi tego namiotu. Na zakładki dolicz 10% powierzchni ścian bocznych.

_____ %

TEORIA

Jednostki zegarowe czasu

1 doba = 24 godziny

1 godzina = 60 minut = 3600 sekund

1 minuta = 60 sekund

1 kwadrans = 15 minut

Jednostki kalendarzowe czasu

Rok dzielimy na 12 miesięcy, a także na 4 kwartały. Rok zwykły ma 365 dni, a rok przestępny, który przypada zazwyczaj co 4 lata, ma 366 dni. W roku przestępnym luty ma 29 dni. W kalendarzu gregoriańskim, który został wprowadzony w życie w 1582 roku, liczba wyrażająca rok przestępny jest podzielna przez 4, ale nie jest podzielna przez 100, chyba że jest podzielna przez 400.

I kwartał	styczeń	31 dni
	luty	28 lub 29 dni
	marzec	31 dni
II kwartał	kwiecień	30 dni
	maj	31 dni
	czerwiec	30 dni
III kwartał	lipiec	31 dni
	sierpień	31 dni
	wrzesień	30 dni
IV kwartał	październik	31 dni
	listopad	30 dni
	grudzień	31 dni

Wiek i tysiąclecie

- Wiek to 100 lat liczone od roku kończącego się cyframi „01” do najbliższego roku kończącego się dwoma zerami.
- W odniesieniu do lat przed naszą erą wiek zaczyna się rokiem z dwoma zerami, a kończy cyframi „01”.
- Tysiąclecie lub milenium obejmuje 1000 lat czyli 10 wieków. W kalendarzu gregoriańskim tysiąclecia liczone są od roku kończącego się cyframi „001” do najbliższego roku kończącego się trzema zerami, a więc II tysiąclecie trwało od roku 1001 do 2000.

PRZYKŁAD: Lata od 1301 do 1400 to wiek XIV, a od 2101 do 2200, to XXII wiek.

PRZYKŁAD: Lata od 600 p.n.e. do 501 p.n.e. to wiek VI p.n.e.

PRZYKŁAD: Wraz z rokiem 2001 rozpoczęło się III tysiąclecie.

ZADANIA EGZAMINACYJNE KROK PO KROKU

Przykład 415.

Egzamin 8-klasisty CKE

Tata Bartka przed wyjazdem z Krakowa do Warszawy analizuje niektóre bezpośrednie połączenia między tymi miastami. Do wyboru ma cztery połączenia przedstawione w poniższej tabeli.

Godzina wyjazdu z Krakowa	Godzina przyjazdu do Warszawy	Środek transportu	Długość trasy	Cena biletu
1.35	6.30	autobus	298 km	27 zł
2.32	5.12	pociąg	293 km	60 zł
5.00	8.48	pociąg	364 km	65 zł
5.53	8.10	pociąg	293 km	49 zł

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Za przejazd w najkrótszym czasie należy zapłacić 49 zł.	P	F
Zgodnie z rozkładem jazdy tylko przejazd autobusem trwa dłużej niż 4 godziny.	P	F

Rozwiązanie:

Obliczamy czas przejazdu z Krakowa do Warszawy autobus:

6 godz. 30 min – 1 godz. 35 min = 4 godz. 55 min

I pociąg:

5 godz. 12 min – 2 godz. 32 min = 2 godz. 42 min

II pociąg:

8 godz. 48 min – 5 godz. = 3 godz. 38 min

III pociąg:

8 godz. 10 min – 5 godz. 53 min = 2 godz. 17 min

Najkrótszy czas jest dla przejazdu III pociągiem, dla którego bilet kosztuje 49 zł.

Tylko przejazd autobusem trwa dłużej niż 4 godziny.

Odpowiedź: PP

Ćwiczenie do przykładu 415.

Rozwiąż samodzielnie

W tabeli podano klasyfikację medalową w biegu masowym kobiet podczas XXIII Zimowych Igrzysk Olimpijskich w Pjongczangu.

Pozycja	Zawodnik	Kraj	Czas (godz. : min : s)
1.	Marit Bjorgen	Norwegia	1:22:17,6
2.	Krista Parmakoski	Finlandia	1:24:07,1
3.	Stina Nilsson	Szwecja	1:24:16,5

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz spośród oznaczonych literami C i D.

Rezultat zawodniczki ze Szwecji był gorszy od rezultatu zawodniczki z Finlandii o

A. 9,4 s

B. 9,4 min

Rezultat Marit Bjorgen był lepszy od wyniku Kristy Parmakoski o

C. 2 min 10,5 s

D. 1 min 49,5 s

**Przykład 416.**

Egzamin 8-klasisty CKE

Uzasadnij, że pierwszy dzień września i pierwszy dzień grudnia tego samego roku wypadają w tym samym dniu tygodnia.

Rozwiązanie:

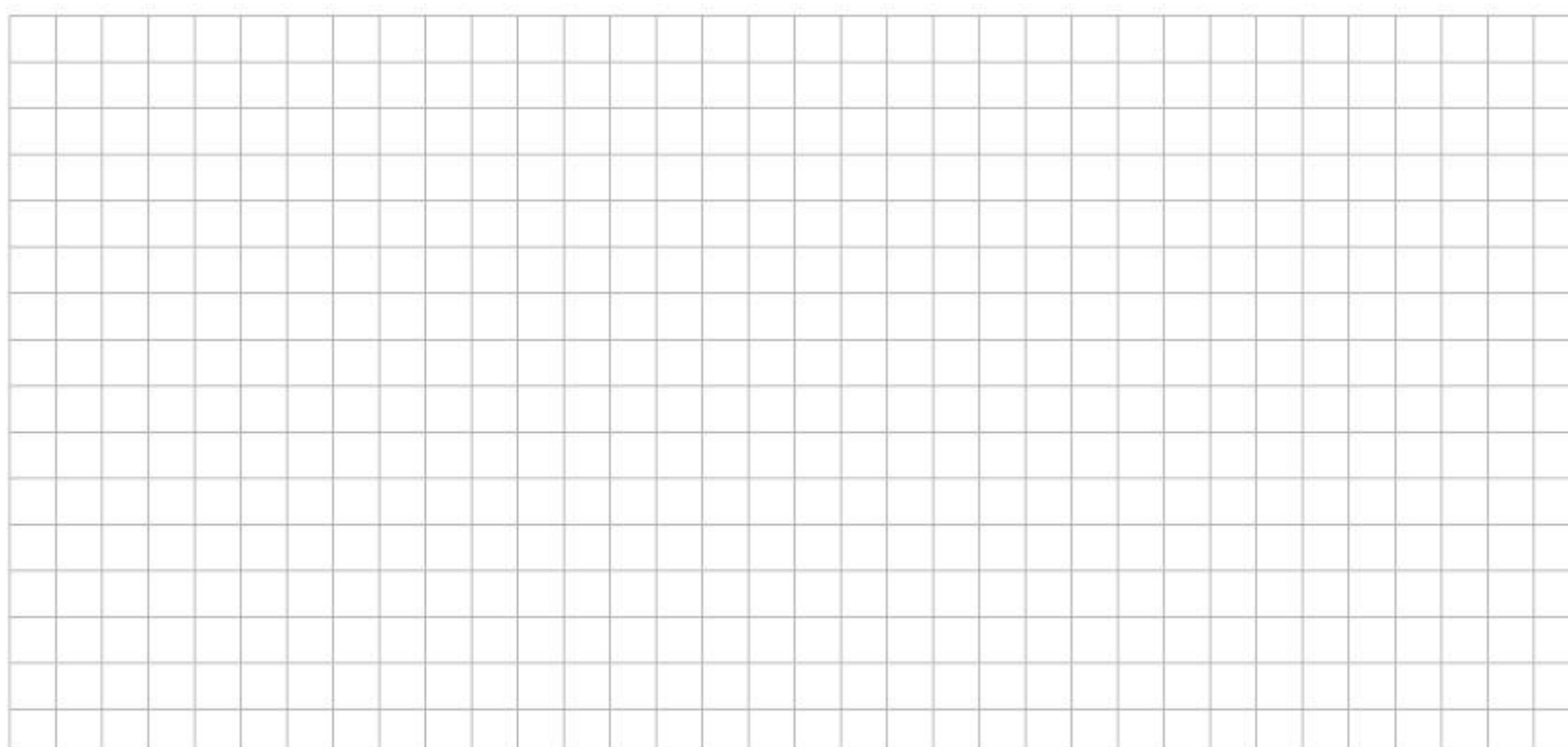
Przypuśćmy, że 1 września przypada w poniedziałek, zatem kolejne poniedziałki to: 8, 15, 22 i 28 września, 5, 12, 19 i 26 października, 2, 9, 16, 23 i 30 listopada oraz 1 grudnia. Wynika stąd, że 1 września i 1 grudnia przypadają w tym samym dniu tygodnia. Tak samo jest, gdy 1 września wypada we wtorek, w środę itd. – zawsze 1 grudnia przypada w tym samym dniu tygodnia, co 1 września.

Ćwiczenie do przykładu 416.**Rozwiąż samodzielnie**

Otwarcie XXIII Zimowych Igrzysk Olimpijskich odbyło się 9 lutego 2018 roku, a zakończenie miało miejsce w niedzielę 25 lutego 2018 roku.

Które zdanie jest fałszywe? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

- A. 9 lutego 2018 roku był piątkiem.
- B. Ceremonia zamknięcia olimpiady nastąpiła 16 dni po ceremonii otwarcia olimpiady.
- C. XXIII Zimowe Igrzyska Olimpijskie trwały 2,2 tygodnia.
- D. W lutym 2018 roku odbyły się 23 Zimowe Igrzyska Olimpijskie.



Egzamin 8-klasisty CKE

Jaskinię Książęcą może zwiedzać codziennie tylko dziesięć grup, które wchodzą po jednej w jednakowych odstępach czasu. Pierwsza grupa rozpoczęła zwiedzanie o 9.00, a ostatnia – o 16.30. Grupa harcerzy przyszła zwiedzać jaskinię o godzinie 13.25. **Ile co najmniej minut harcerze będą czekali na wejście do jaskini? Zapisz obliczenia.**

Rozwiązanie:

Od godziny 9.00 do 16.30 mija 7 godzin i 30 minut, czyli 450 minut. W tym okresie jest 9 wejść do jaskini, więc jedno zwiedzanie trwa $450 : 9 = 50$ minut.

Kolejne wejścia do jaskini przypadają w godzinach: 9.00, 9.50, 10.40, 11.30, 12.20, 13.10, 14.00.

Odpowiedź: Harcerze będą musieli poczekać co najmniej 35 minut.

Ćwiczenie do przykładu 417.

Rozwiąż samodzielnie

W Warszawie w czasie przesilenia letniego słońce wschodzi o godzinie 4.15, a zachodzi o 21.02. Dzień jest w tym dniu dłuższy od najkrótszego o 9 godzin i 6 minut.

a) Oblicz, jak długo trwa dzień w Warszawie w czasie przesilenia letniego.

b) Oblicz, jak długo trwa noc w Warszawie w czasie przesilenia zimowego (najkrótszy dzień).

Przykład 418.

Agatka ma dokładnie 7 lat, a jej starszy brat Jacek ma o 84 tygodnie więcej.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz spośród oznaczonych literami C i D.

Jacek jest o **A/B** starszy od Agatki.

A. 1,5 roku

B. 21 miesięcy

Za **C/D** Jacek będzie miał dwa razy więcej lat niż Agatka obecnie.

C. 5,5 roku

D. 7 lat

Rozwiązanie:

Rok ma 52 tygodnie.

Obliczamy, jaką częścią roku są 84 tygodnie:

$$\frac{84}{52} = 1,5 \text{ roku}$$

Obliczamy, ile lat ma obecnie Jacek:

$$7 \text{ lat} + 1,5 \text{ roku} = 8,5 \text{ lat}$$

Obliczmy, za ile lat Jacek będzie miał dwa razy więcej niż 7 lat:

$$14 \text{ lat} - 8,5 \text{ lat} = 5,5 \text{ roku}$$

Odpowiedź: AC

Ćwiczenie do przykładu 418.

Rozwiąż samodzielnie

Kasia ma 5 lat, a jej mama jest od niej sześć razy starsza. **Oblicz, za ile lat mama Kasi będzie dwa razy starsza od Kasi. Zapisz obliczenia.**

Przykład 419.

Napełnianie wodą prostopadłościennego akwarium o wymiarach 40 cm, 60 cm, 30 cm trwało 3 minuty. Ile będzie trwało napełnianie w takim samym tempie akwarium, którego wymiary wynoszą 30 cm, 80 cm, 40 cm? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 7 min B. 6 min C. 5 min D. 4 min

Rozwiązanie:

Obliczamy objętość pierwszego akwarium:

$$V_1 = 40 \cdot 60 \cdot 30 = 72\,000 \text{ cm}^3$$

Obliczamy objętość drugiego akwarium:

$$V_3 = 30 \cdot 80 \cdot 40 = 96\,000 \text{ cm}^3$$

Zapisujemy dane w tabeli:

Objętość akwarium	72 000 cm ³	96 000 cm ³
Czas napełniania w min	3	x

Układamy i rozwiązujemy równanie:

$$\frac{72000}{3} = \frac{96000}{x}$$

$x = 4 \text{ min}$

Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 419.

Rozwiąż samodzielnie

Podczas biegu maratońskiego zawodnicy systematycznie uzupełniają poziom wody w organizmie. Wytyczne lekkoatletyczne sugerują, aby podczas biegu zawodnik pił od 400 do 800 mililitrów wody na godzinę.

- a) Oblicz, ile wody potrzebuje zawodnik, który rozpoczął bieg o godz. 9.50, a zakończył o 12.20. W obliczeniach przyjmij maksymalną sugerowaną ilość wody na godzinę potrzebną dla zawodnika.
- b) Jak długo biegł zawodnik, który wypił podczas trwania biegu 1,6 litra wody? Obliczenia wykonaj dla minimalnej ilości sugerowanej wody na godzinę.

Przykład 420.

Osiem lat temu ojciec był trzy razy starszy od syna, a za cztery lata będzie od niego starszy dwukrotnie. **Oblicz, ile lat ma obecnie ojciec, a ile syn.**

Rozwiązanie:

Zapisujemy informacje podane w zadaniu w tabeli:

	8 lat temu	obecnie	za 4 lata
wiek ojca	$3x$	$3x + 8$	$3x + 12$
wiek syna	x	$x + 8$	$x + 12$

Układamy i rozwiązujemy równanie:

$$3x + 12 = 2(x + 12) \Rightarrow x = 12 \text{ lat}$$

$12 + 8 = 20$ lat – obecny wiek syna

$$3 \cdot 12 + 8 = 44 \text{ lat} - \text{obecny wiek ojca}$$

Odpowiedź: Obecnie ojciec ma 44 lata, a syn ma 20 lat.

Ćwiczenie do przykładu 420.

Rozwiąż samodzielnie

Krysia i Łukasz mają obecnie razem 28 lat. Dwa lata temu Łukasz był dwa razy starszy od Krysi.

- Oblicz, ile lat miał Łukasz dwa lata temu.
- Oblicz, ile lat ma obecnie Krysia.
- O ile lat Łukasz jest starszy od Krysi?

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Przykład 421.

Na zwiastuny reklamowe nowych filmów kino rezerwuje zwykle 5% czasu trwania filmu. Długość filmu „Harry Potter i Kamień Filozoficzny” wynosi 152 minuty. **Ile sekund przewidziano na zwiastuny reklamowe przed tym filmem? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

- A. 456 s B. 520 s C. 760 s D. 426 s

Rozwiązanie:

Obliczamy, ile minut przeznaczono na zwiastuny reklamowe: $0,05 \cdot 152 = 7,6$ min

Zamieniamy 7,6 minut na sekundy:

$$7,6 \cdot 60 = 456 \text{ s}$$

Odpowiedź: A

Ćwiczenie do przykładu 421.

Rozwiąż samodzielnie

Zwiastuny reklamowe w kinie trwają 5 minut, co stanowi 4% czasu trwania całego filmu. Jak długo trwa cały film? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 125 min B. 2,5 h C. 2,12 h D. 200 min

**Przykład 422.**

Zbiornik o pojemności 4 hl wody opróżniano z szybkością 3 litrów wody na minutę. Po opróżnieniu zbiornika do $\frac{1}{4}$ pojemności, zwiększono szybkość opróżniania zbiornika o 2 litry na minutę. **Oblicz, jak długo trwało całkowite opróżnianie zbiornika. Zapisz obliczenia.**

Rozwiązanie:

Zamieniamy hektolitry na litry: $4 \text{ hl} = 400 \text{ l}$

Obliczamy, ile litrów wody opróżniano ze zwiększoną prędkością: $\frac{1}{4} \cdot 400 = 100 \text{ l}$

Obliczamy, ile litrów wody opróżniano z prędkością początkową: $400 - 100 = 300 \text{ l}$

Obliczamy, ile czasu opróżniano zbiornik z początkową prędkością: $300 \text{ litrów} : 3 \text{ litrów/min} = 100 \text{ min}$

Obliczamy, ile wynosi zwiększona szybkość opróżniania zbiornika: $3 + 2 = 5 \text{ l/min}$

Obliczamy, ile czasu opróżniano zbiornik ze zwiększoną prędkością: $100 \text{ litrów} : 5 \text{ l/min} = 20 \text{ min}$

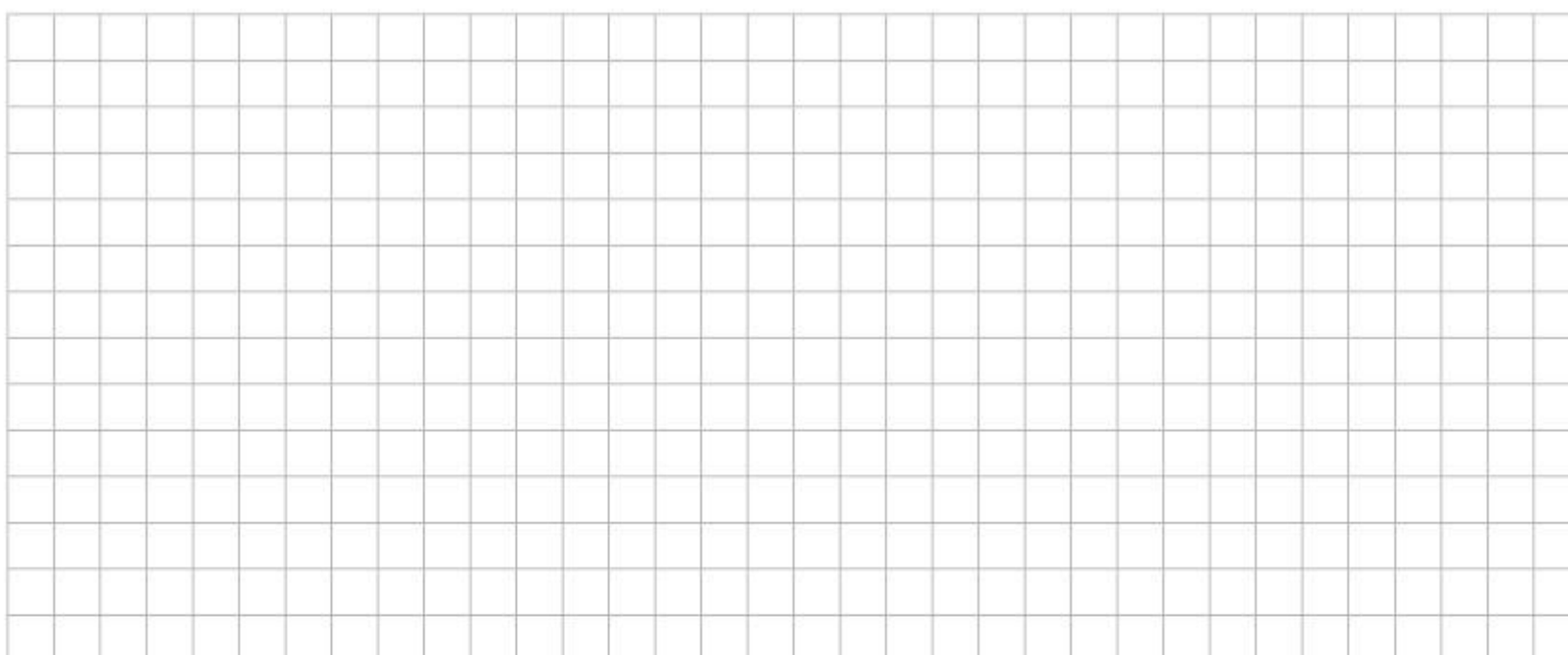
Obliczamy łączny czas opróżniania zbiornika:

$100 \text{ min} + 20 \text{ min} = 120 \text{ min} = 2 \text{ h}$

Odpowiedź: Całkowite opróżnianie zbiornika trwało 2 godziny.

Ćwiczenie do przykładu 422.**Rozwiąż samodzielnie**

Pięć pomp o jednakowej wydajności pracowało jednocześnie. Urządzenia wypompowały wodę znajdującą się w zbiorniku w czasie 12 godzin. **W ciągu jakiego czasu tę samą ilość wody może wypompować 8 pomp, pracując z taką samą wydajnością? Zapisz obliczenia.**



ZADANIA

423. Która z liczb nie jest równa pozostałym? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 7,6 min B. 7 min 6 s C. 7,1 min D. 426 s

Informacja do zadań 424. i 425.

W finale biegu na 10 kilometrów startowało 6 zawodników. Bieg rozpoczął się o godzinie 10.00. Zwycięzcą biegu został Janek, który pojawił się na mecie o 120 sekund wcześniej niż Robert, który zajął drugie miejsce. Trzecie miejsce przypadło Tomkowi, który przybiegł na metę po trzech kwadransach i który stracił do zwycięzcy 4 minuty. Kamil – czwarty na mecie zawodnik – uzyskał czas równy 0,8 godziny. Piąte miejsce zajął Michał z czasem 56 minut, a szóstym zawodnikiem na mecie, ze stratą do zwycięzcy wynoszącą $\frac{1}{3}$ godziny, był Antek. Zawody zakończyły się 540 sekund po tym, jak na mecie pojawił się ostatni zawodnik.

424. Tabela zawiera czasy wszystkich zawodników w kolejności zajmowanego na mecie miejsca, jednak nie wszystkie wpisy są poprawne.

Zawodnik	Janek	Robert	Tomek	Kamil	Michał	Antek
Czas biegu w minutach	39 minut	41 minut	45 minut	48 minut	56 minut	61 minut

Czas biegu których zawodników wpisano błędnie? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. Janka B. Janka i Roberta C. Janka i Antka D. Janka, Roberta i Antka

425. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli zadanie jest fałszywe.

Zwycięzca biegu pojawił się na mecie o godzinie 10.41.	P	F
Kwadrans wcześniej niż Michał przybiegł na metę Janek.	P	F
Zawody zakończyły się o godzinie 11.10.	P	F
Czas biegu Antka wynosi 1,1 godziny.	P	F

426. Polska i Korea Południowa leżą w różnych strefach czasowych. Zegary na rysunku wskazują czas obowiązujący w tym samym momencie w tych państwach.

Warszawa 16.00

Seul 24.00

Rozpoczęcie ceremonii otwarcia Zimowych Igrzysk Olimpijskich zaplanowano w Korei na godzinę 20.00.

Która godzina była wówczas w Polsce?

- A. 12.00 B. 4.00 C. 8.00 D. 20.00

427. Ola urodziła się w 2003 roku. W roku, kiedy będzie miała 15 lat, jej mama będzie od niej 3 razy starsza. Tata Oli jest starszy od mamy Oli o 4 lata.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz spośród oznaczonych literami C i D.

Mama Oli urodziła się w **A/B**.

A. 1973 r.

B. 1969 r.

Tata Oli jest starszy od Oli o **C/D**.

C. 34 lata

D. 30 lat

428. W sobotę państwo Zielińscy wybrali się na wycieczkę turystyczną. Rano wyruszyli z domu o godzinie 8.35, a wrócili 25 minut przed godziną 18.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Państwo Zielińscy byli poza domem

- A. 0,9 doby B. $\frac{3}{8}$ doby C. $\frac{5}{8}$ doby D. $\frac{3}{4}$ doby

429. W kalendarzu gregoriańskim liczba wyrażająca rok przestępny jest podzielna przez 4, ale nie jest podzielna przez 100, chyba że jest podzielna przez 400.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przestępny nie jest rok

- A. 2000 B. 1924 C. 2236 D. 1800

430. W kinie przez cały tydzień wyświetlano filmy o Harrym Potterze. Poniżej znajdują się niektóre informacje dotyczące wyświetlanych filmów.

Zaznacz tytuły filmów, które trwały dłużej niż 150 minut, ale krócej niż 180 minut.

1. „Harry Potter i Kamień Filozoficzny” – o 2 minuty dłużej niż 2,5 godziny
2. „Harry Potter i Komnata Tajemnic” – o 9 minut dłużej niż pierwszy film z serii
3. „Harry Potter i Więzień Azkabanu” – o $\frac{1}{6}$ godziny krócej niż pierwszy film z serii
4. „Harry Potter i Czara Ognia” – o 3 minuty krócej niż $2\frac{2}{3}$ godziny
5. „Harry Potter i Zakon Feniksa” – trwa od 11.30 do 13.48
6. „Harry Potter i Książę Półkrwi” – o 33 minuty dłużej niż 2 godziny
7. „Harry Potter i Insygnia Śmierci” – część I i II – łącznie 276 minut

431. Zosia idzie do szkoły kwadrans, Michał – 0,2 godziny, Tomek – 13 minut, a Ewa – 660 sekund. Które z nich najwcześniej będzie w szkole, jeśli wszyscy wyjdą z domu o tej samej godzinie? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. Zosia B. Michał C. Tomek D. Ewa

432. Pani Barbara urodziła się w drugiej połowie XX wieku. Dodatkowo wiadomo, że rok urodzenia pani Barbary jest liczbą podzielną przez 3 i przez 4. Ile jest liczb, które mogą być rokiem urodzenia tej pani? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

433. Czy prawdą jest, że o godzinie 12.15 kąt między wskazówkami godzinową i minutową na tarczy zegara wynosi 90° ? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A, B albo C.

T	ponieważ	A.	miara kąta między wskazówkami godzinową i minutową o godzinie 12.15 wynosi $82,5^\circ$.
		B.	kwadrans to $\frac{1}{4}$ godziny, a więc wskazówka minutowa obróci się w ciągu kwadransa o $\frac{1}{4}$ kąta pełnego, czyli o 90° .
N		C.	w ciągu godziny wskazówka godzinowa obróci się o kąt $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$, a więc w ciągu 15 minut obróci się o kąt 4 razy mniejszy.

434. Trójka przyjaciół planuje systematycznie korzystać z siłowni, która jest czynna przez 7 dni w tygodniu. Krzysiek postanowił przychodzić do siłowni co 2 dzień, Grzegorz będzie przychodził co 3 dzień, a Klara – co 5 dzień. Pierwszym dniem, kiedy wszyscy byli w siłowni, jest 2.05.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Następnym dniem, w którym wszyscy spotkają się na siłowni, będzie

- A. 31.05 B. 1.06 C. 2.06 D. 3.06

435. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe lub F – jeśli jest fałszywe.

1,5 doby to mniej niż 2000 minut.	P	F
12 000 sekund to 3 h 25 min.	P	F
Dwie godziny lekcyjne po 45 minut to więcej niż $1\frac{2}{5}$ godziny.	P	F
Pierwszy kwartał roku przestępnego liczy 90 dni.	P	F

436. W pewnym roku dzień 1 kwietnia przypadał w niedzielę. W jakim dniu w tym roku wypadnie dzień 1 lipca? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. w sobotę B. w niedzielę C. w poniedziałek D. we wtorek

437. Franek spędza każdą sobotę na treningu siatkarskim, który trwa 90 minut. W pewnej chwili Franek zauważył, że do końca treningu zostało mu o 38 minut więcej czasu, niż upłynęło do tego momentu od początku treningu. Ile minut Franek będzie jeszcze na treningu? Zapisz obliczenia.

438. Kasia, Kuba i Zuzia wyjeżdżają w dniu 20.06 na praktyki studenckie. Kasia spędzi poza domem 90 dni, Kuba – 13 tygodni, a Zuzia wraca w dniu 20.09.

Które z nich najdłużej będzie poza domem? Zapisz obliczenia.

439. Kuba chce kupić bilet, który uprawnia go do jazdy dowolnym środkiem komunikacji miejskiej. Do wyboru ma dwa rodzaje biletów: tańszy – siedemdziesięciminutowy i droższy – półtoragodzinny.

Czy Kuba może kupić tańszy bilet, jeśli będzie jechał metrem od 10.49 do 11.03, a autobusem trzy razy dłużej? Ponadto wiadomo, że 8 minut zajmie mu przesiadka z metra na autobus. Zapisz obliczenia.

440. Zbiornik o pojemności 3 hl wody napełniano z szybkością 6 litrów wody na minutę. Po napełnieniu zbiornika do $\frac{2}{5}$ pojemności, zmniejszono szybkość napełniania zbiornika o 1 litr na minutę.

Oblicz, jak długo trwało całkowite napełnienie zbiornika. Zapisz obliczenia.

441. Ewa zaczęła uczęszczać na kurs języka włoskiego. Kurs ten obejmuje 60 spotkań, przy czym każde spotkanie trwa 2 godziny lekcyjne po 45 minut każda. Dodatkowo każdy uczestnik kursu musi wykazać się obecnością na co najmniej 95% wszystkich spotkań.

a) Oblicz, ile godzin zegarowych trwa kurs.

b) Na ilu maksymalnie spotkaniach może być nieobecny uczestnik, aby spełnić wymaganie dotyczące frekwencji na zajęciach?

TEORIA

Jednostki masy

Zależności między jednostkami masy:

$$1\text{ t} = 1000\text{ kg}$$

$$1\text{ kg} = 100\text{ dag} = 1000\text{ g}$$

$$1\text{ dag} = 10\text{ g}$$

$$1\text{ g} = 1000\text{ mg}$$

Rabat

Przy zakupach większej ilości towaru klienci otrzymują specjalną obniżkę ceny, zwaną rabatem albo upustem.

PRZYKŁAD: Sklepy odzieżowe swoim stałym klientom udzielają obniżki ceny towaru o co najmniej 5%.

Podatek

Podatek to obowiązkowe świadczenie pieniężne pobierane przez państwo lub jednostkę samorządu terytorialnego. Jednym z podatków funkcjonujących w Polsce jest podatek VAT, czyli podatek od towarów i usług.

PRZYKŁAD: W Polsce podstawową stawką VAT jest 23%. Dla niektórych towarów określone są niższe stawki – 5% lub 8%, które obejmują m.in. leki, książki, żywność, usługi.

Cena brutto

Cena brutto towaru to cena netto towaru powiększona o wartość podatku VAT.

PRZYKŁAD: Jeśli cena netto 1 kg jabłek wynosi 3,50 zł, to ich cena brutto powiększona o 8-procentowy podatek VAT będzie równa 3,78 zł.

Zakupy ratalne

Kupując na raty, możemy rozłożyć wydatki w czasie, ponieważ koszt zakupu produktu zostaje rozłożony na określoną liczbę wpłat.

PRZYKŁAD: Kupując rower za 2000 zł, możemy przy jego zakupie wpłacić 100 zł, a pozostałą kwotę rozłożyć na 10 miesięcznych rat każda po 190 zł.

Lokata

Lokata to wpłata pieniędzy do banku na określony czas, po upływie którego bank wypłaca dodatkowo ustaloną wcześniej kwotę, tzw. odsetki.

PRZYKŁAD: Wpłacając do banku 5000 zł na lokatę, której oprocentowanie wynosi 3% w skali roku, po roku wraz z odsetkami otrzymasz kwotę 5150 zł.

Kredyt

Kredyt to udzielana przez bank na określony czas pożyczka, za którą bank pobiera ustaloną wcześniej opłatę.

PRZYKŁAD: Biorąc w banku kredyt na rok w wysokości 20 000 zł, przy oprocentowaniu 5% w skali roku, musisz zwrócić bankowi kwotę równą 21 000 zł.

196 2. W SKLEPIE I W BANKU

Przykład 445.

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

10 opakowań cukierków po 48 g każde waży mniej niż 0,5 kg.	P	F
2 palety kamieni do ogrodu każda o masie 400 kg ważą więcej niż 0,08 t.	P	F

Rozwiązanie:

Obliczamy masę 10 opakowań cukierków:

$$10 \cdot 48 \text{ g} = 480 \text{ g} = 0,48 \text{ kg}$$

$0,48 \text{ kg} < 0,5 \text{ kg}$, pierwsze zdanie jest prawdziwe.

Obliczamy masę dwóch palet:

$$2 \cdot 400 \text{ kg} = 800 \text{ kg} = 0,8 \text{ t}$$

$0,8\text{ t} > 0,08\text{ t}$, drugie zdanie jest prawdziwe.

Odpowiedź: PP

Ćwiczenie do przykładu 445.

Rozwiąż samodzielnie

Trzy paczki ważą łącznie 32,7 kg. Pierwsza i druga paczka ważą razem 19,2 kg, a druga i trzecia razem – 21,3 kg. **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Druqa paczka waży

- A. 7,8 kg B. 13,5 kg C. 11,4 kg D. 2,1 kg

[illegible]

Przykład 446.

Panu Piotrowi bank udzielił na rok kredytu samochodowego, którego oprocentowanie wynosi 9% w skali roku. Ile wyniosą odsetki przy wysokości kredytu 40 000 zł?

Rozwiązanie:

Zapisujemy procent w postaci ułamka: $9\% = 0,09$

Obliczamy wartość odsetek:

$$0,09 \cdot 40\,000 \text{ zł} = 3600 \text{ zł}$$

Odpowiedź: Odsetki wyniosą 3600 zł.

Ćwiczenie do przykładu 446.

Rozwiąż samodzielnie

Klient wziął w banku 10 000 zł kredytu na rok. Oprocentowanie kredytu wynosiło 10,5% w stosunku rocznym. **Oblicz, jaką kwotę klient musi zwrócić do banku.**

A blank sheet of graph paper with a light gray background and a uniform grid of thin gray lines. The grid consists of 20 columns and 10 rows of squares.

Przykład 447.

W hurtowni za 80 jednakowych opakowań herbaty ziołowej trzeba zapłacić 440 zł. Ile takich paczek herbaty można kupić w tej hurtowni za 660 zł, przy tej samej cenie za jedną paczkę? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

- A. 150 B. 180 C. 120 D. 100

Rozwiązanie:

Obliczamy cenę jednego opakowania herbaty:

$$440 \text{ zł} : 80 = 5,50 \text{ zł}$$

Obliczamy liczbę paczek herbaty, które można kupić za 660 zł:

$$660 \text{ zł} : 5,50 \text{ zł} = 120$$

Odpowiedź: C

Ćwiczenie do przykładu 447.

Rozwiąż samodzielnie

Ile maksymalnie paczek każda o masie 45 kg można załadować na ciężarówkę o ładowności 1,8 tony? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

- A. 400 B. 40 C. 4 D. 2.5

[illegible]

Przykład 448.

Zmywarke można kupić za gotówkę, płaciąc 1579 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Płacąc za zmywarke w 15 ratach po 132 zł zapłacisz

- A. mniej, o około 2,5% jej wartości
B. więcej, o około 30% jej wartości
C. mniej niż 2% jej wartości
D. więcej, o około 25% jej wartości

Rozwiązanie:

Obliczamy, ile zapłacimy za zmywarke, płacąc w ratach: $15 \cdot 132 \text{ zł} = 1980 \text{ zł}$

Obliczamy, o ile więcej zapłacimy za zmywarke płacąc w ratach: $1980 \text{ zł} - 1579 \text{ zł} = 401 \text{ zł}$

Obliczamy, jakim procentem kwoty 1579 zł jest kwota 401 zł:

$$\frac{401}{1579} \cdot 100\% \approx 25\%$$

Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 448.

Rozwiąż samodzielnie

Pani Marta kupiła telewizor na raty. Przy zakupie wpłaciła 40% jego wartości, pozostałą kwotę rozłożyła na dziesięć rat po 126 zł każda.

Ile złotych kosztował telewizor, jeśli raty były bez odsetek? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

- A. 2100 zł B. 1260 zł C. 1764 zł D. 2016 zł

[illegible]

Przykład 449.

W klubie sportowym przeznaczono 1000 zł na zakup piłek do koszykówki i piłek do siatkówki. Kupiono 8 piłek do siatkówki, za które zapłacono 432 zł. Piłka do koszykówki była o 25% droższa od piłki do siatkówki.

Ile maksymalnie piłek do koszykówki można było kupić za pozostałą kwotę?

Rozwiązanie:

Obliczamy cenę piłki do siatkówki.

$$432 \text{ zł} : 8 = 54 \text{ zł}$$

Obliczamy, jaki procent ceny piłki do siatkówki stanowi cena piłki do koszykówki.

$$100\% + 25\% = 125\%$$

Zapisujemy procent w postaci ułamka: $125\% = 1,25$

Obliczamy cenę piłki do koszykówki.

$$1,25 \cdot 54 \text{ zł} = 67,50 \text{ zł}$$

Obliczamy, ile pieniędzy pozostało na zakup piłek do koszykówki.

$$1000 \text{ zł} - 432 \text{ zł} = 568 \text{ zł}$$

Obliczamy, ile maksymalnie piłek do koszykówki można było kupić za pozostałą kwotę.

$$568 \text{ zł} : 67,50 \text{ zł} \approx 8,4$$

Odpowiedź: Maksymalnie można kupić 8 piłek do koszykówki.

Ćwiczenie do przykładu 449.

Rozwiąż samodzielnie

Panie Ewa, Marta i Ola kupowały sadzonki kwiatów. Pani Ewa za 6 sadzonek pelargonii i 12 sadzonek werbeny zapłaciła 96 zł. Pani Marta kupiła 8 sadzonek pelargonii oraz 8 sadzonek werbeny i również zapłaciła 96 zł. **Oblicz, czy pani Oli wystarczy 96 złotych na zakup 10 sadzonek pelargonii i 4 sadzonek werbeny? Zapisz obliczenia.**

Przykład 450.

Jaką kwotę wpłacił klient do banku na roczną lokatę, jeżeli po jej zakończeniu otrzymał wraz z odsetkami 16 400 zł? Oprocentowanie lokaty wynosiło 2,5% w stosunku rocznym.

Rozwiązanie:

Obliczamy, jaki procent kwoty wpłaconej na lokatę stanowi kwota wraz z odsetkami:

$$100\% + 2,5\% = 102,5\% = 1,025$$

Zapisujemy procent w postaci ułamka:

$$102,5\% = 1,025$$

x – kwota wpłacona przez klienta do banku

$$1,025 \cdot x = 16\,400$$

$$x = 16\,400 : 1,025 \Rightarrow x = 16\,000 \text{ zł}$$

Odpowiedź: Klient wpłacił 16 000 zł.

Ćwiczenie do przykładu 450.

Rozwiąż samodzielnie

Pan Tomasz wpłacił pewną kwotę do banku na 1 rok przy oprocentowaniu 3,5% w stosunku rocznym. Po tym okresie bank dopisał panu Tomaszowi 297,50 zł odsetek. **Jaką kwotę wpłacił pan Tomasz?**

Przykład 451.

Klient kupił 60 dag szynki. Podał ekspedientce x pięciozłotówek i 2 razy mniej dwuzłotówek. Otrzymał 60 groszy reszty.

Które wyrażenie przedstawia cenę jednego kilograma tej szynki? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. $\left(5x + \frac{1}{2}x \cdot 2 - 0,6\right)z$ B. $\frac{6x - 0,6}{0,6}z$ C. $\left(5x + \frac{1}{2}x \cdot 2\right)z$ D. $\frac{6x}{0,6}z$

Rozwiązanie:

Wyrażamy masę szynki w kilogramach: $60 \text{ dag} = 0,6 \text{ kg}$

Wyrażamy resztę w złotych: $60 \text{ gr} = 0,60 \text{ zł}$

x – liczba pięciozłotówek

 $\frac{1}{2}x$ – liczba dwuzłotówek
$$5x + \frac{1}{2}x \cdot 2 - 0,6 - \text{wartość zakupionej szynki}$$

$$5x + \frac{1}{2}x \cdot 2 - 0,6 = 6x - 0,6$$

$$\frac{6x-0,6}{0,6} - \text{cena 1 kg szynki w złotych}$$

Odpowiedź: B

Ćwiczenie do przykładu 451.

Rozwiąż samodzielnie

W cukierni 3 babeczki owocowe kosztują x groszy.

Które wyrażenie pozwoli obliczyć, ile takich babeczek można kupić za 25 zł? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. $\frac{25}{x}$ B. $\frac{2500}{x}$ C. $\frac{7500}{x}$ D. $\frac{75}{x}$

ZADANIA

452. Która masa nie jest równa masie 3,42 kg? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

- A. 3 kg 42 dag B. 342 dag C. 34,2 g D. 3420 g

453. Marysia, Kuba, Zosia i Paweł wybrali się do cukierni. Marysia miała 30 zł i wydała 16 zł i 40 gr, Kuba miał 20 zł i wydał 15,60 zł, Zosia miała 35 zł i wydała 22 zł i 5 gr, a Paweł miał 28 zł i wydał 16,80 gr.

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Marysia, Kuba, Zosia i Paweł w cukierni wydali łącznie 70,85 zł.	P	F
Najwięcej pieniędzy po wyjściu z cukierni ma Marysia.	P	F

454. Cena netto stugramowego opakowania orzechów laskowych wynosi 6,50 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź spośród podanych.

Cena opakowania tych orzechów wraz z 8-procentowym podatkiem VAT wynosi

- A. 6,90 zł B. 6,09 zł C. 7,02 zł D. 7,20 zł

455. Kacper co miesiąc dostaje od rodziców 55 zł kieszonkowego i odkłada 60% tej kwoty na zakup deskorolki.

Ile pieniędzy odłoży w ciągu kwartału? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

- A. 99 zł B. 33 zł C. 132 zł D. 75 zł

456. Usługa wymiany okna kosztuje netto 42 zł za 1 m², a stawka VAT na tę usługę wynosi 8%.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Za montaż 5 okien, o powierzchni 2,6 m² każde, zapłacimy

- A. 226,80 zł B. 589,68 zł C. 546 zł D. 225 zł

457. Odsetki od kwoty złożonej w banku na 2,5% na okres jednego roku wyniosły 250 zł.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Kwota złożona w tym banku wynosiła A/B.

A. 10 000 zł

B. 100 000 zł

Po roku z konta możemy wypłacić maksymalnie C/D.

C. 10 250 zł

D. 100 250 zł

458. Pan Tomasz, właściciel księgarni, na książce sprzedanej za 45 zł zarabia 9,45 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź spośród podanych.

Jeśli pan Tomasz sprzeda książkę posiadaczowi karty stałego klienta z rabatem 5%, to zarobi

- A. 4,22 zł B. 7,20 zł C. 8,98 zł D. 5,80 zł

459. Cena brutto (z 5-procentowym podatkiem VAT) podręcznika do matematyki jest równa 39,90 zł.

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Cena netto tego podręcznika wynosi 38,20 zł.	P	F
Cena brutto jest o 1,90 zł wyższa od ceny netto.	P	F

460. Cena netto 1 kg pomidorów jest równa 5,60 zł, a cena brutto wynosi 5,88 zł.

Czy podatek VAT na ten produkt wynosi 5%? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	$\frac{5,6}{5,88} \cdot 100\% \approx 95\%$
N		B.	$\frac{0,28}{5,6} \cdot 100\% = 5\%$
		C.	podatek VAT na ten produkt wynosi 15%.

461. W sklepie z żywnością stawka VAT na niektóre towary wynosi 5%.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Jeśli cena brutto wynosi 75,60 zł, to cena netto jest równa

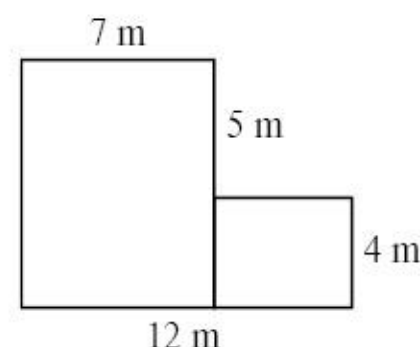
A. 72,20 zł B. 71,82 zł C. 73,78 zł D. 72 zł

462. Kupując rower na raty, należy wpłacić przy zakupie 20% jego wartości. Oblicz, ile wynosi kwota, którą trzeba wpłacić, jeżeli rower kosztuje 580 zł.

463. Sklep oferuje sprzedaż zestawów kina domowego za gotówkę lub na raty. Jeżeli nabywca chce kupić zestaw kina domowego w cenie 2650 zł na raty, to musi wpłacić 20% zaliczki oraz 12 miesięcznych rat po 190 zł. O ile procent więcej kosztuje zestaw kina domowego zakupiony w systemie ratałnym od zapłaty gotówką? Zapisz obliczenia. Wynik podaj z dokładnością do jedności.

464. Robiąc zakupy w hurtowni „Novi”, klienci mogą uzyskać rabat: 10% przy zakupie na kwotę powyżej 100 zł lub 8% przy zakupie na kwotę powyżej 50 zł. Oblicz, ile zapłaci klient za zakupiony towar, jeśli kupi 5 opakowań zawierających po 6 butelek wody mineralnej w cenie 2,80 zł za butelkę oraz 20 kartonów o pojemności 1,5 l soku jabłkowego w cenie 3,45 zł za litr.

465. Rysunek przedstawia plan tarasu. Taras wymaga remontu. Ofertę wykonania usługi złożyły dwie firmy. Firma I koszt wymiany płytek wyceniła na 110 zł brutto za remont 1 m² powierzchni. Firma II wyceniła koszt wymiany płytek na 95 zł netto za remont 1 m² powierzchni. Stawka podatku VAT na tego typu usługi wynosi 8% ceny netto. Oblicz, która z ofert jest tańsza i o ile. Zapisz obliczenia.



466. W ciągu roku cenę komputera obniżano trzykrotnie za każdym razem o 10%. Oblicz, jaka była początkowa cena komputera, jeśli po obniżkach kosztuje 2624,40 zł. Zapisz obliczenia.

467. Pan Michał wpłacił 6500 zł na lokatę A i 12 500 zł na lokatę B. Po roku, likwidując obie lokaty, otrzymał odpowiednio 6708 zł i 12 850 zł. Oblicz, ile wynosiło roczne oprocentowanie każdej z tych lokat. Zapisz obliczenia.

468. Opłata za abonament telefoniczny wraz z 23-procentowym podatkiem VAT wynosi 55,35 zł. Oblicz wartość tego abonamentu bez podatku VAT.

TEORIA

Droga, prędkość i czas

Droga, prędkość i czas są wielkościami związanymi ze sobą. Drogę zwykle oznaczamy literą s , prędkość – literą v , a czas – literą t .

Wzory pokazują, w jaki sposób możemy obliczyć każdą z tych wielkości:

$$s = v \cdot t \qquad v = \frac{s}{t} \qquad t = \frac{s}{v}$$

PRZYKŁAD:

Oblicz, z jaką prędkością jechał motocyklista, który w czasie 0,5 h przejechał 45 km.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{45 \text{ km}}{0,5 \text{ h}}$$

$$v = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Odpowiedź: Motocyklista jechał z prędkością $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Skala

Rysunek przedmiotu w jego rzeczywistych wymiarach, to rysunek w skali naturalnej, czyli 1:1. Mapy państw, plany miast czy budynków wykonujemy w skalach zmniejszających, np. 1:1 000 000, 1:500 000, 1:20 000 czy 1:1000.

Natomiast aby narysować przedmioty bardzo małe, musimy wykonać rysunek w skalach zwiększających, takich jak 5:1, 100:1 czy 1000:1.

PRZYKŁADY:



skala 1 : 1



skala 1 : 2



■ Sposoby zapisu skali

• skala liczbowa

Pokazuje, ile razy odległość rzeczywista została zmniejszona lub zwiększona.

PRZYKŁAD: 1:250 000, 5:1

• skala mianowana

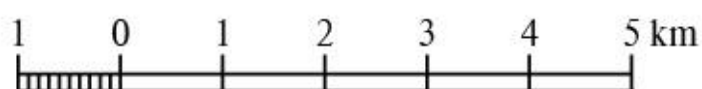
Skala ta podaje odległość na mapie i odpowiadającą jej odległość rzeczywistą.

PRZYKŁAD: 1 cm – 5 km

• skala liniowa

PRZYKŁAD:

Rysunek przedstawia odległość na mapie, zaś liczby na podziałce podają rzeczywistą odległość.



Przedstawioną na rysunku skalę liniową możemy inaczej zapisać jako:

– skalę mianowaną: 1 cm – 1 km

– skalę liczbową: 1:100 000

ZADANIA EGZAMINACYJNE KROK PO KROKU

Przykład 469.

Egzamin 8-klasisty CKE

Jacek i Ola testują swoje elektryczne deskorolki. W tym celu zmierzili czasy przejazdu na trasie 400 m. Ola pokonała tę trasę w czasie 160 s, a Jacek – w czasie 100 s.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Różnica średnich prędkości uzyskanych przez Jacka i przez Olę jest równa

A. $1,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

B. $5,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

C. $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

D. $14,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią prędkość, jaką uzyskała Ola:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{400}{160} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Obliczamy średnią prędkość, jaką uzyskał Jacek:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{400}{100} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Obliczamy różnicę średnich prędkości uzyskanych przez Jacka i przez Olę:

$$4 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{15}{1000} \frac{\text{km}}{\text{s}} = \frac{15}{3600} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Odpowiedź: B

Ćwiczenie do przykładu 469.

Rozwiąż samodzielnie

Dokończ zadanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Średnia prędkość samochodu, który w ciągu 90 min przejechał 90 km, jest równa

A. $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

B. $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

C. $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

D. $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

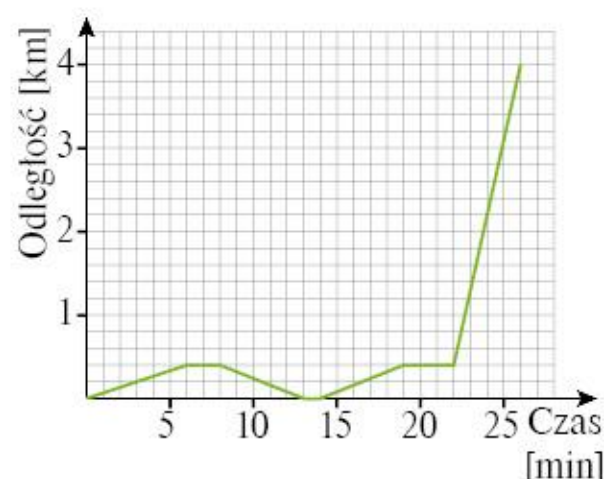
Przykład 470.

Egzamin 8-klasisty CKE

Mateusz mieszka w odległości 4 km od szkoły. Część drogi do szkoły pokonuje pieszo, idąc do przystanku autobusowego. Tam czeka na autobus, następnie wsiada do niego i jedzie do szkoły. Pewnego dnia, gdy był już na przystanku, stwierdził, że zapomniał zabrać zeszyt, więc wrócił po niego do domu. Wykres przedstawia, jak tego dnia zmieniała się odległość Mateusza od domu w zależności od czasu.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dom Mateusza znajduje się w odległości 400 m od przystanku autobusowego.	P	F
Autobus poruszał się ze średnią prędkością $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.	P	F

**Rozwiązanie:**

Pierwsze zdanie jest prawdziwe.

Obliczamy, w jakiej odległości od przystanku znajduje się dom Mateusza:

$$\frac{2}{5} \text{ z } 1 \text{ km} = 0,4 \cdot 1 \text{ km} = 0,4 \text{ km} = 400 \text{ m}$$

Drugie zdanie jest prawdziwe.

Odczytujemy z wykresu drogę, jaką Mateusz przejechał autobusem oraz czas jazdy:

$$s = 4 \text{ km} - 0,4 \text{ km} = 3,6 \text{ km}$$

$$t = 26 \text{ min} - 22 \text{ min} = 4 \text{ min} = \frac{4}{60} \text{ h} = \frac{1}{15} \text{ h}$$

Obliczamy prędkość, z jaką poruszał się autobus:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{3,6}{\frac{1}{15}} = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Odpowiedź: PP

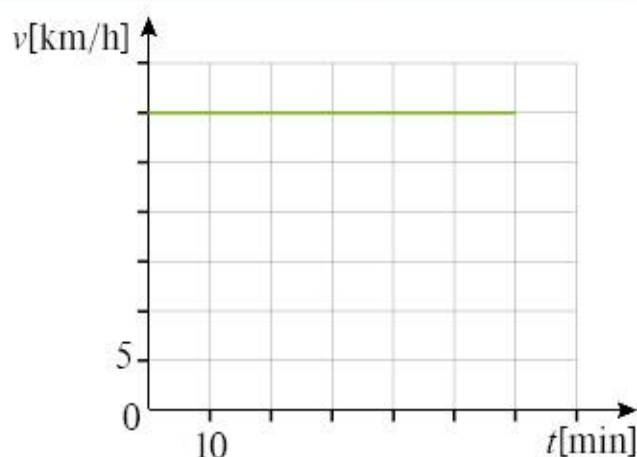
Ćwiczenie do przykładu 470.

Rozwiąż samodzielnie

Ewa poruszała się motorowerem ze stałą prędkością. Wykres przedstawia zależność prędkości motoroweru od czasu jazdy.

Oblicz i zapisz obliczenia.

- Z jaką prędkością poruszała się Ewa na motorowerze?
- Jaką odległość przejechała w ciągu 10 minut?
- W jakim czasie przebyła odległość wynoszącą 13,5 kilometra?



Przykład 471.

Robert jadąc rowerem na drodze o długości 100 m, rozwinął średnią prędkość równą $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

W jakim czasie pokonał tę odległość? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 10 s B. 20 s C. 0,5 min D. 2 min

Rozwiązanie:

Zapisujemy dane: $v = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $s = 100 \text{ m} = 0,1 \text{ km}$

Obliczamy czas, korzystając ze wzoru $t = \frac{s}{v}$:

$$t = \frac{0,1}{18} \text{ h} = \frac{1}{180} \cdot 3600 \text{ s} = 20 \text{ s}$$

Odpowiedź: B

Ćwiczenie do przykładu 471.

Rozwiąż samodzielnie

Pan Ryszard przejechał samochodem w ciągu 1,5 godziny drogę 120 kilometrów, a pani Judyta w czasie o 18 minut krótszym przebyła motorem drogę o 10% krótszą. **Uzasadnij, że pani Judyta jechała z większą prędkością.**

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Przykład 472.

Dokończ zadanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prędkość $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ wyrażona w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ jest równa

- A. $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ B. $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ C. $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ D. $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Rozwiązanie:

Zamieniamy metry na kilometry $1 \text{ m} = 0,001 \text{ km}$ i sekundy na godziny $1 \text{ s} = \frac{1}{3600} \text{ h}$:

$$5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{5 \cdot 0,001 \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Odpowiedź: C

Ćwiczenie do przykładu 472.

Rozwiąż samodzielnie

Dokończ zadanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prędkość $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ wyrażona w $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ jest równa

- A. $7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ B. $9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ C. $12,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ D. $45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

**Przykład 473.**

Rzeczywista długość odcinka, który na mapie ma długość 3,2 cm, wynosi 9,6 km.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Mapa została wykonana w skali

A. 1:30 000

B. 1 cm – 300 m

C. 1:3 000 000

D. 1 cm – 3 km

Rozwiązanie:

Zamieniamy jednostki:

$$9,6 \text{ km} = 9600 \text{ m} = 960\,000 \text{ cm}$$

Obliczamy, ile razy rzeczywista długość została zmniejszona: $960\,000 \text{ cm} : 3,2 \text{ cm} = 300\,000$

Skala mapy w zapisie liczbowym 1:300 000

Zapis skali liczbowej 1:300 000 oznacza 1 cm:300 000 cm

Zamieniamy jednostki:

$$300\,000 \text{ cm} = 3000 \text{ m} = 3 \text{ km}$$

Zapisujemy tę skalę w postaci mianowanej:

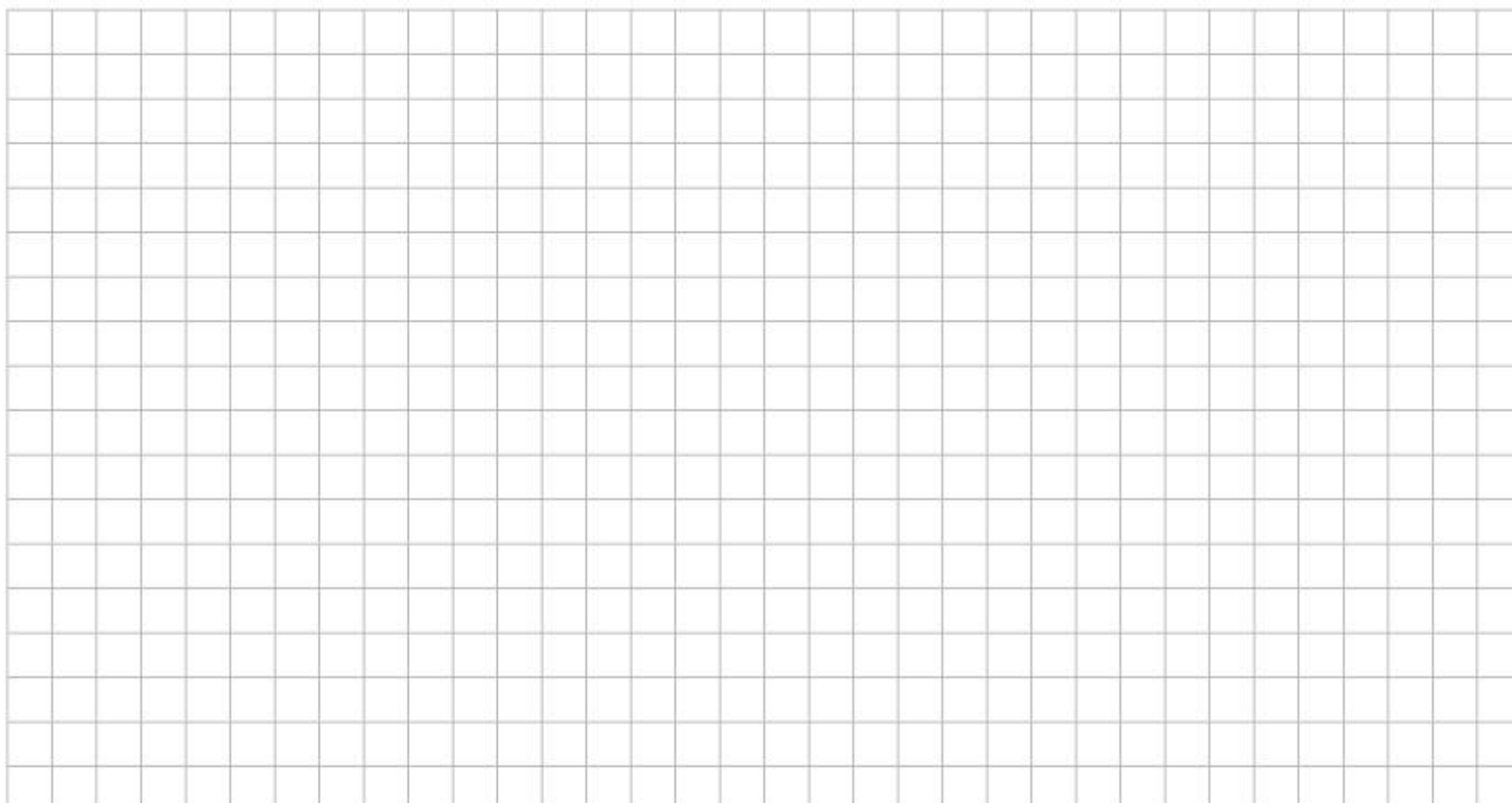
$$1 \text{ cm} - 3 \text{ km}$$

Odpowiedź: D

Ćwiczenie do przykładu 473.

Rozwiąż samodzielnie

Rzeczywiste wymiary kortu tenisowego wynoszą 35 m na 17 m. **Oblicz z dokładnością do 1 milimetra wymiary kortu na planie sporządzonym w skali 1:2000. Zapisz obliczenia.**



Przykład 474.

Na mapie w skali 1 cm – 700 m zaznaczono koło o promieniu 2 cm, określające obszar zasięgu nadajnika radiowego. Jaka jest rzeczywista powierzchnia tego obszaru? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Do obliczeń przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$.

- A. $4,4 \text{ km}^2$ B. $1,54 \text{ km}^2$ C. $6,16 \text{ km}^2$ D. $8,8 \text{ km}^2$

Rozwiązanie:

Obliczamy rzeczywistą długość promienia koła:

$$2 \cdot 700 \text{ m} = 1400 \text{ m} = 1,4 \text{ km}$$

Obliczamy obszar zasięgu nadajnika:

$$\pi \cdot 1,4^2 = \frac{22}{7} \cdot 196 = 6,16 \text{ km}^2$$

Odpowiedź: C

Ćwiczenie do przykładu 474.

Rozwiąż samodzielnie

Dorota miała narysować koło w skali 1:3, jednak pomyliła się i narysowała to koło w skali 3:1.

Ile razy promień koła narysowanego przez Dorotę jest większy od promienia koła, który Dorota powinna narysować? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 3 razy B. 6 razy C. 9 razy D. 81 razy

Przykład 475.

Odległość między dwoma miejscowościami pokonano w ciągu 2 godzin, jadąc ze średnią prędkością $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. O ile minut dłużej będzie trwała jazda samochodem na tej trasie, jeśli średnia prędkość zmniejszy się o 20%? Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

Obliczamy odległość między tymi miejscowościami:

$$s = v \cdot t = 75 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2 \text{ h} = 150 \text{ km}$$

Obliczamy, ile wynosi zmniejszona prędkość:

$$0,8 \cdot 75 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Obliczamy czas jazdy z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{150}{60} = 2,5 \text{ h}$$

Obliczamy, o ile minut wydłuży się czas jazdy:

$$2,5 \text{ h} - 2 \text{ h} = 0,5 \text{ h} = 30 \text{ min}$$

Odpowiedź: Czas jazdy wydłuży się o 30 minut.

ZADANIA

477. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeśli odcinek na rysunku jest 20 razy dłuższy niż w rzeczywistości, to znaczy, że został narysowany w skali 1:20.	P	F
Odległość między Warszawą i Gdańskiem narysowana na mapie w skali 1:350 000 jest mniejsza niż ta sama odległość narysowana w skali 1 cm – 3 km.	P	F

478. Trzech kolegów: Adam, Bartek i Czarek wyruszyło rowerami w tym samym momencie na trasę liczącą 60 kilometrów. Adam pokonał całą trasę w 3 godziny i 15 minut, Bartek przejechał tę trasę ze średnią prędkością $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a Czarek – z prędkością $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Czy prawdą jest, że najszybciej pokonał tę trasę Czarek? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A, B albo C.

T	ponieważ	A.	Czarek przyjechał później niż Adam.
N		B.	Czarek przejechał tę trasę szybciej niż Bartek.
		C.	wszyscy chłopcy jechali z jednakową prędkością.

479. Podczas XXIII Zimowych Igrzysk Olimpijskich złoto w łyżwiarstwie szybkim w biegu na 1500 metrów zdobył holenderski zawodnik Kjeld Nuis, osiągając czas 1 min i 44 sekund.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Średnia prędkość złotego medalisty tego biegu po zaokrągleniu do jedności była równa

- A. $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ B. $14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ C. $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ D. $9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

480. Pan Janusz w czasie dwóch pierwszych godzin podróży przejechał a kilometrów, natomiast w czasie kolejnej godziny b kilometrów.

Które wyrażenie pozwala obliczyć średnią prędkość (wyrażoną w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$), z jaką jechał pan Janusz? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\frac{a+b}{2}$ B. $\frac{2a+b}{2}$ C. $\frac{2a+b}{3}$ D. $\frac{a+b}{3}$

481. Kwadrat $ABCD$ o polu równym 25 mm^2 narysowano w skali 4:1.

Czy prawdą jest, że pole otrzymanego kwadratu jest większe od pola kwadratu $ABCD$ o 75 mm^2 ? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	pole narysowanego kwadratu jest 4 razy większe od pola kwadratu $ABCD$, więc różnica tych pól wynosi 75 mm^2 .
N		B.	pole narysowanego kwadratu wynosi 400 mm^2 , więc różnica tych pól wynosi 375 mm^2 .
		C.	bok narysowanego kwadratu wynosi 100 mm , więc różnica pól jest równa 75 mm^2 .

482. Prostokąt przedstawiający boisko szkolne na planie sporządzonym w skali 1:500 ma wymiary $8,8 \text{ cm}$ i $4,4 \text{ cm}$. Ile metrów wynosi rzeczywisty obwód tego boiska? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 132 m B. 66 m C. 88 m D. 44 m

Informacja do zadań 483. i 484.

Jard to anglosaska jednostka długości, przy czym 32 metry to 35 jardów. Kasia przebiegła 0,5 km w ciągu 3 minut i 20 sekund, a jej angielski kolega John przebiegł 700 jardów w ciągu 320 sekund.

483. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Droga, którą przebiegł John, jest o 140 metrów dłuższa niż ta, którą przebiegła Kasia.	P	F
Kasia biegła z prędkością $2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.	P	F
Jeśli Kasia będzie biegła z tą samą prędkością, to w ciągu pół godziny przebiegnie 4,5 km.	P	F
John biegnąc z tą samą prędkością, pokona drogę równą 2 km w ciągu kwadransa.	P	F

484. Czy prawdą jest, że w czasie, gdy Kasia przebiegnie 100 m, John pokona 87,5 jarda? Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

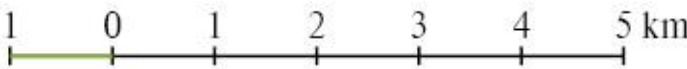
T	ponieważ	A.	w czasie 200 sekund John przebiegnie 437,5 jarda.
		B.	w czasie 40 sekund John przebiegnie $\frac{1}{8}$ drogi wynoszącej 700 jardów.
N		C.	John biegnie szybciej od Kasi o $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

485. Autobus jechał przez trzy kwadranse ze średnią prędkością $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Jaką odległość pokonał? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 54 km B. 36 km C. 18 km D. 216 km

486. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Skala liczbowa 1:500 000 zapisana w postaci mianowanej to 1 cm – 5 km.	P	F
430 metrów jest rzeczywistą długością mostu, który na planie w skali 1:20 000 ma długość 2,15 cm.	P	F
Skalę liniową  możemy zapisać w postaci mianowanej jako 1 cm – 200 m.	P	F
Skala liczbowa 1:100 000 i skala liniowa  to różne skale.	P	F

487. Prędkość światła jest równa $300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

W ciągu 0,5 sekundy światło pokona drogę długości A/B.

- A. $6 \cdot 10^5$ kilometra B. $1,5 \cdot 10^5$ kilometra

Odległość Ziemi od Słońca równą 149 600 000 kilometrów światło pokonuje w czasie równym około C/D.

- C. 8 min 18 s D. 8,18 s

488. Plac targowy przedstawiono na mapie w skali 1:4000 jako kwadrat o boku długości 2,5 cm. Oblicz długość boku kwadratu przedstawiającego ten plac na mapie wykonanej w skali 1:5000. Zapisz obliczenia.

489. Gepard jest jednym z najszybszych zwierząt i potrafi biec z maksymalną prędkością równą $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Natomiast maksymalna prędkość, jaką osiąga jaguar, jest równa $65 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

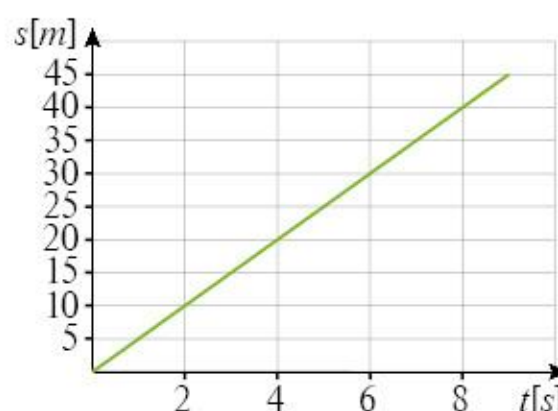
Oblicz i zapisz obliczenia.

a) Jaki odcinek przebiegnie jaguar w czasie 12 minut?

b) Ile czasu zajmie gepardowi pokonanie takiego samego odcinka drogi?

490. Pani Zosia i jej syn Kuba jechali z Miastka przez Kolonię do Siedliska przez 1,5 godziny ze średnią prędkością równą $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Pani Zosia powiedziała Kubie, że długość drogi pomiędzy Miastkiem a Kolonią jest o 15 kilometrów większa niż pomiędzy Kolonią a Siedliskiem. Uzasadnij, że Kuba miał rację, twierdząc na podstawie tych informacji, że odległość pomiędzy Miastkiem i Kolonią wynosi 45 km.

491. Kulka wprawiona w ruch poruszała się z jednakową prędkością przez $\frac{1}{4}$ minuty. Tomek sporządził wykres przedstawiający zależność drogi (w metrach), jaką przebyła ta kulka, od czasu (w sekundach), ale tylko dla pierwszych 8 sekund.



a) W jakim czasie kulka przebyła odległość wynoszącą 30 metrów?

b) Jaką drogę przebyła kulka w czasie 4 sekund, a jaką w czasie $\frac{1}{4}$ minuty?

c) Ile wynosiła prędkość tej kulki?

492. Tabela przedstawia zależność drogi od czasu dla samochodzika sterowanego drogą radiową, który poruszał się ze stałą prędkością.

$t \text{ (s)}$	0	2	4	6	8	10
$s \text{ (m)}$	0	1	2	3	4	5

Oblicz i zapisz obliczenia.

a) Jaką drogę przebył ten samochodzik w ciągu 5 sekund?

b) W jakim czasie samochodzik ten przebędzie odległość wynoszącą 8 metrów?

c) Z jaką prędkością poruszał się ten samochodzik?

493. Z jednego portu wypłynęły dwie łodzie – jedna płynie z prędkością $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w kierunku południowym, a druga z prędkością $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ – w kierunku wschodnim.

Oblicz odległość w linii prostej pomiędzy tymi łodziami po upływie 30 minut.

494. Malta jest główną wyspą archipelagu Wysp Maltańskich. Szerokość tej wyspy jest równa 10 km, jej maksymalna długość to około 28 km, a powierzchnia to 246 km^2 .

a) Oblicz skalę mapy, na której wymiary wyspy wynoszą odpowiednio 2 cm i 5,6 cm.

b*) Oblicz, ile centymetrów kwadratowych ma na tej mapie powierzchnia Malty.

495. Podczas rajdu pieszego harcerze pokonali trasę długości 18 kilometrów w czasie 5 godzin, przy czym część trasy przeszli z prędkością $4,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a drugą część z prędkością o $1,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejszą.

Jak długo harcerze maszerowali z prędkością $4,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

4. KOMBINATORYKA I PRAWDOPODOBIENSTWO

TYDZIEŃ XX

TEORIA

Doświadczenie losowe

Doświadczeniem losowym (zdarzeniem losowym) nazywamy takie doświadczenie, które można powtarzać wiele razy w takich samych warunkach, ale jego kolejnych wyników nie potrafimy przewidzieć.

PRZYKŁAD: Rzut monetą, rzut kostką do gry czy wyciąganie karty z talii.

W zdarzeniu losowym nie możemy przewidzieć konkretnego wyniku, ale możemy określić zbiór wszystkich możliwych wyników.

PRZYKŁAD: Przy jednokrotnym rzucie monetą może выпаść orzeł lub reszka.

Każdy możliwy wynik doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniem elementarnym**.

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia losowego.

$$p = \frac{n}{N}$$

n – liczba zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu
 N – liczba wszystkich zdarzeń elementarnych

Zdarzenie pewne

Zdarzenie, dla którego prawdopodobieństwo zajścia jest równe 1.

PRZYKŁAD:

Zdarzeniem pewnym jest wyrzucenie liczby oczek co najwyżej równej 6 w jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.

Zdarzenie niemożliwe

Zdarzenie, dla którego prawdopodobieństwo zajścia wynosi 0.

PRZYKŁAD:

Zdarzeniem niemożliwym jest wyrzucenie dokładnie 7 oczek w rzucie sześcienną kostką.

Sposoby zapisu wyników doświadczenia losowego

Wyniki doświadczenia losowego możemy zapisać na kilka sposobów: uporządkowane pary, tabela, drzewko.

PRZYKŁAD: Dwukrotny rzut monetą.

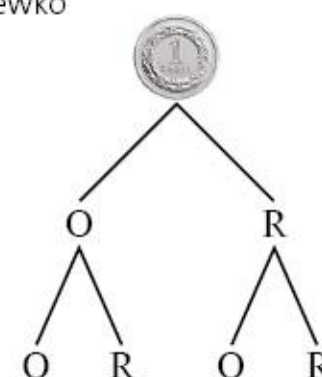
– uporządkowane pary

(O, O), (O, R), (R, O), (R, R)

– tabela

I rzut/II rzut	O	R
O	O, O	O, R
R	R, O	R, R

– drzewko



Rozwiązanie:

W rzucie kostką sześcienną kostką można otrzymać następujące wyniki: 1 oczko, 2 oczka, 3 oczka, 4 oczka, 5 oczek, 6 oczek. Liczba możliwych wyników wynosi: $N = 6$.

Zdarzeniu: wypadnie liczba oczek większa od 2, ale mniejsza od 6, sprzyjają następujące wyniki: 3 oczka, 4 oczka, 5 oczek. Liczba zdarzeń sprzyjających temu zdarzeniu wynosi: $n = 3$. Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia

zdarzenia: $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Przykład 500.

W loterii fantowej jest x losów, w tym 30 losów wygrywających. Prawdopodobieństwo wylosowania nagrody przez pierwszą osobę, która losuje jeden los, wynosi $\frac{1}{3}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Losów przegrywających w tej loterii jest

- A. 60 B. 90 C. 100 D. 30

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x liczbę wszystkich losów.

Wówczas w loterii jest $x - 30$ przegrywających losów. Liczba możliwych wyników przy losowaniu jednego losu wynosi $N = x$.

Wśród wszystkich losów jest 30 wygrywających. Liczba zdarzeń sprzyjających wylosowaniu nagrody przez pierwszą osobę wynosi $n = 30$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia:

$$p = \frac{30}{x}$$

Układamy i rozwiązujemy równanie:

$$\frac{30}{x} = \frac{1}{3}$$

$x = 90$

$$x - 30 = 90 - 30 = 60$$

Odpowiedź: A

Ćwiczenie do przykładu 500.

Rozwiąż samodzielnie

Na loterię przygotowano urnę z losami, przy czym losów wygrywających było dwa razy mniej niż przegrywających. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu losu przegrywającego.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Przykład 501.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że druga osoba, która ciągnie jeden los, wygra.

Rozwiązanie:

Liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięciu losu wygrywającego przez drugą osobę wynosi $n = 20$.

$$p = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wyciągnięciu losu wygrywającego przez drugą osobę wynosi $\frac{4}{9}$.

Ćwiczenie do przykładu 501.

Rozwiąż samodzielnie

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Losów wygrywających jest 16.	P	F
Prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego wynosi $\frac{1}{16}$.	P	F
Prawdopodobieństwo wylosowania losu przegrywającego jest większe niż prawdopodobieństwo wylosowania losu wygrywającego.	P	F
Jeśli pierwsza osoba wyciągnie 4 losy przegrywające, to prawdopodobieństwo wylosowania losu wygrywającego przez kolejną osobę będzie równe prawdopodobieństwu wylosowania losu przegrywającego.	P	F

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Przykład 502.

W kwaciarni są goździki tej samej odmiany w kolorze czerwonym, białym i różowym. Goździków czerwonych jest cztery razy więcej niż białych, a tych w kolorze różowym – trzy razy więcej niż białych. Wybieramy jednego goździka. **Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany goździk nie będzie koloru różowego.**

Rozwiązanie:

Zapisujemy zależności pomiędzy liczbą goździków w każdym kolorze:

x – liczba goździków białych

$4x$ – liczba goździków czerwonych

$3x$ – liczba goździków różowych

$x + 4x + 3x = 8x$ – liczba wszystkich goździków

Liczba możliwych wyników tego doświadczenia wynosi $N = 8x$.

W urnie jest $x + 4x = 5x$ goździków czerwonych lub białych, więc zdarzeniu polegającemu na wybraniu goździka innego koloru niż różowy sprzyja $n = 5x$ zdarzeń elementarnych.

Obliczamy prawdopodobieństwo wybrania goździka w innym kolorze niż różowy: $p = \frac{5x}{8x} = \frac{5}{8}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany goździk nie będzie koloru różowego wynosi $\frac{5}{8}$.

Ćwiczenie do przykładu 502.**Rozwiąż samodzielnie**

W urnie znajduje się 100 kul białych, czarnych i niebieskich, przy czym kul białych jest trzy razy więcej niż czarnych, a niebieskich jest o 5 mniej niż czarnych. Losujemy raz jedną kulę. **Oblicz, czy prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej jest większe od $\frac{1}{3}$.**

ZADANIA

503. Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie kostką sześcienną, której 2 ściany są białe, 2 czarne i 2 zielone.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia jest równa

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 6

504. Z wyrazów *Egzamin ósmoklasisty* wybieramy losowo jedną literę.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo wylosowania litery k wynosi $\frac{1}{19}$.	P	F
Prawdopodobieństwo wylosowania litery a jest równe prawdopodobieństwu wylosowania litery s .	P	F
Zdarzeniu polegającemu na wylosowaniu samogłoski sprzyja 9 zdarzeń elementarnych.	P	F
Zdarzeniem niemożliwym dla tego doświadczenia losowego jest zdarzenie polegające na wylosowaniu samogłoski u .	P	F

505. Rzucamy ośmiościenną kostką do gry. Kostka ta na każdej ze ścian ma zapisaną liczbę oczek od 1 do 8.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu polegającemu na tym, że wyrzucona liczba oczek jest liczbą złożoną, to

- A. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 B. 1, 2, 3, 5, 7 C. 2, 4, 6, 8 D. 4, 6, 8

506. Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie czworościenną kostką do gry, na której ścianach jest zaznaczone: 1 oczko, 2 oczka, 3 oczka i 4 oczka.

Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia losowego? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

507. W urnie znajdują się 24 kule ponumerowane liczbami od 1 do 24. Losujemy z urny jedną kulę.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli, której numer jest liczbą co najmniej równą 8, ale mniejszą od 16, wynosi

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{7}{12}$

508. Na loterię fantową przygotowano 100 losów. Nagrodę w postaci biletu do kina zapewnia 10 losów, 15 losów jest wejściówką na basen miejski, a 20 losów – wejściówką do siłowni. Pozostałe losy są puste.

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo wylosowania losu z nagrodą wynosi 0,45.	P	F
Szansa wylosowania biletu do kina wynosi $\frac{1}{10}$.	P	F
Prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu pustego jest większe niż 0,5.	P	F
Prawdopodobieństwo wylosowania wejściówki na basen jest większe od prawdopodobieństwa wylosowania wejściówki do siłowni.	P	F

509. Przeprowadzono dwa doświadczenia losowe. Pierwsze doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie kostką ośmiościenną, której 2 ściany są czerwone, 2 niebieskie, 2 białe i 2 zielone. Drugie doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie czworościenną kostką do gry, w której jest po jednej ścianie czerwonej, niebieskiej, białej i zielonej.

Uzupełnij zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A i B oraz spośród C i D.

Zbiór zdarzeń elementarnych pierwszego doświadczenia jest **A/B** doświadczenia drugiego.

A. taki sam jak B. inny niż

Prawdopodobieństwa wyrzucenia ściany w kolorze czerwonym w obu doświadczeniach są **C/D**.

C. równe D. różne

510. W pudełku było 20 kul białych i 30 kul czerwonych. Do pudełka dołożono jeszcze po 25 kul białych i czerwonych. Z pudełka losujemy jedną kulę.

Uzupełnij zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A i B oraz spośród C i D.

Prawdopodobieństwo wylosowania czerwonej kuli przed dołożeniem kul jest **A/B** niż wylosowanie kuli czerwonej po dołożeniu kul.

A. większe B. mniejsze

Przed dołożeniem kul bardziej prawdopodobne było wylosowanie kuli **C/D**.

C. czerwonej D. białej

511. Spośród kolejnych liczb naturalnych większych od 0 i co najwyżej równych 50 losujemy jedną liczbę.

Ile jest równe prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana liczba jest kwadratem liczby naturalnej? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\frac{7}{50}$

B. $\frac{3}{25}$

C. $\frac{1}{10}$

D. 1

512. Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie kostką sześcienną, której 3 ściany zawierają po 1 oczku i kolejne 3 ściany po 2 oczka.

Ile jest możliwych wyników tego doświadczenia losowego? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 6

513. W pudełku znajdują się kule: 15 czarnych, 23 białe i 12 zielonych. Z pudełka wylosowano jedną kulę.

Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli innej niż biała? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\frac{15}{50}$

B. $\frac{23}{50}$

C. $\frac{12}{50}$

D. $\frac{27}{50}$

514. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu jednej karty z talii 52 kart.

Czy prawdą jest, że prawdopodobieństwo wylosowania asa lub pika wynosi $\frac{17}{52}$? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A, B lub C.

T	ponieważ	A.	w talii są 4 asy i 13 pików, więc prawdopodobieństwo wylosowania asa lub pika wynosi $\frac{17}{52}$.
		B.	w talii jest po 1 asie w następujących kolorach: karo, kier i trefl oraz 13 pików, więc prawdopodobieństwo wylosowania asa lub pika wynosi $\frac{4}{13}$.
N		C.	w talii jest 1 as pik, więc prawdopodobieństwo wylosowania asa lub pika wynosi $\frac{1}{52}$.

515. Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie czworościenną kostką do gry, której dwie ściany są czerwone, a dwie zielone. **Wypisz w tabeli wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia. Wypisz także zdarzenia sprzyjające poniższym zdarzeniom. Które zdarzenie losowe jest bardziej prawdopodobne?**

A – wyrzucono dokładnie raz ścianę zieloną

B – wyrzucono dwa razy ścianę czerwoną

516. Wypisz wszystkie liczby będące dzielnikami liczby 24, a następnie oblicz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia polegającego na wylosowaniu z tego zbioru liczby nieparzystej.

517. W urnie jest 8 kul białych i 7 czarnych. Losujemy z urny dwa razy po jednej kuli bez zwracania. Za pierwszym razem wylosowano kulę białą.

Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że druga kula, którą wylosowano, jest czarna? Zapisz obliczenia.

518. W urnie jest 75 losów, w tym 25 wygrywających, 15 przegrywających, a pozostałe losy upoważniają do wyciągnięcia jeszcze jednego losu. Po wyciągnięciu los nie jest zwracany do urny.

a) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania losu wygrywającego przez pierwszą osobę.

b) Małgosia była pierwszą osobą, która brała udział w loterii i wyciągnęła los uprawniający do ponownego losowania. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego przy powtórnym losowaniu przez Małgosię. Zapisz obliczenia.

519. Rzucamy dwa razy symetryczną czworościenną kostką do gry (tzn. taką, która ma na ściankach liczby od 1 do 4). Zapisz w tabeli wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na otrzymaniu w obydwu rzutach tej samej liczby.

520*. Rzucamy trzy razy monetą. Narysuj drzewo tego doświadczenia losowego, a następnie oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wyrzuceniu co najmniej dwóch orłów.

521. Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie monetą. Narysuj drzewo tego doświadczenia i wypisz zdarzenia sprzyjające zdarzeniu: co najwyżej raz pojawiła się reszka. Czy prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest większe niż 0,5?

522. W każdej z dwóch urn znajduje się po 8 kul zielonych. Ponadto w pierwszej urnie jest jeszcze 12 kul niebieskich, a w drugiej urnie – 8 kul niebieskich. Losujemy z urny jedną kulę.

Którą z urn należy wybrać, aby szansa na wylosowanie kuli zielonej była największa? Zapisz obliczenia.

523. W talii są 52 karty, po 13 pików, trefli, kierów i kar. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu jednej karty z talii.

Oblicz prawdopodobieństwo zajścia poniższych zdarzeń.

A – wylosowanie karty, która jest kierem

B – wylosowanie karty, która nie jest asem

TEORIA

■ Hipoteza

Pojęcie hipoteza wywodzi się z greckiego „hypothesis” i oznacza m.in. domysł, przypuszczenie. Postawiona hipoteza wymaga weryfikacji, czyli sprawdzenia. W matematyce weryfikacji dokonujemy poprzez przeprowadzenie odpowiedniego rozumowania.

■ Czym jest dowód?

Dowód jest rozumowaniem, które pokazuje, że dana własność (hipoteza) jest zawsze prawdziwa. Na przykład, jeśli chcemy wykazać, że różnica liczby dwucyfrowej i liczby o przestawionych cyfrach jest podzielna przez 9, nie wystarczy sprawdzić tej własności dla kilku liczb ($87 - 78 = 9$, $92 - 29 = 63$, liczby 9, 63 są podzielne przez 9). Trzeba przeprowadzić rozumowanie, które pokaże prawdziwość tej własności dla każdej liczby dwucyfrowej.

■ Zadania na dowodzenie – podzielność liczb

Zadanie, w którym chcemy dowieść podzielności liczby, zazwyczaj polega na zapisaniu liczby w postaci iloczynu czynników.

PRZYKŁAD: Wykaż, że liczba $3^{22} + 3^{24}$ jest podzielna przez 30.

Zapisujemy tę liczbę w postaci iloczynu czynników, z których jeden jest równy 30:

$$3^{22} + 3^{24} = 3^{22} \cdot (1 + 3^2) = 3^{22} \cdot 10 = 3^{21} \cdot 3 \cdot 10 = 3^{21} \cdot 30$$

■ Zadania na dowodzenie – algebra

W zadaniach na dowodzenie często wykorzystujemy przekształcanie wyrażeń algebraicznych.

PRZYKŁAD: Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych jest liczbą podzielną przez 4.

Oznaczamy najpierw kolejne liczby parzyste: $2n$, $2n + 2$.

Zapisujemy różnicę kwadratów tych dwóch kolejnych liczb parzystych i przekształcamy ją:

$$(2n + 2)^2 - (2n)^2 = 4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 = 8n + 4 = 4(2n + 1)$$

W zapisie liczby $4(2n + 1)$ jednym z czynników jest liczba 4, a więc różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 4.

■ Zadania na dowodzenie – geometria

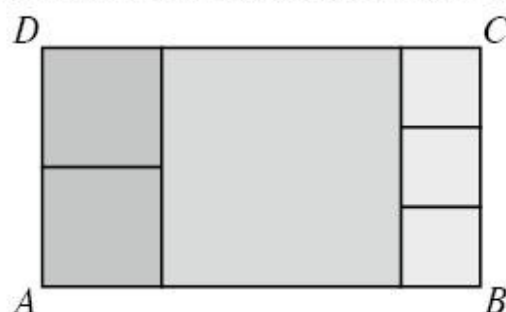
W zadaniach na dowodzenie bardzo często pojawiają się zadania o treści geometrycznej. W toku rozumowania korzystamy ze znanych nam własności figur, np. z własności kątów przyległych, naprzemianległych i odpowiadających, z twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie, z twierdzenia Pitagorasa, ze wzorów na pola figur.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Przykład 525.

Egzamin 8-klasisty CKE

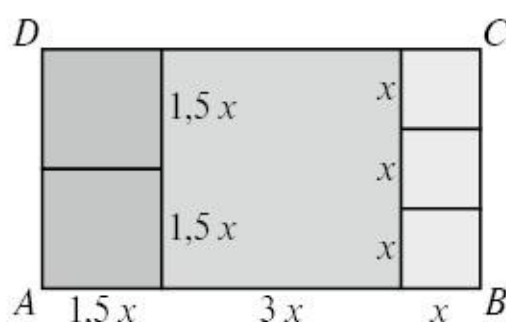
Prostokąt $ABCD$ podzielono na sześć kwadratów: jeden duży, dwa średnie i trzy małe, jak na rysunku.



Uzasadnij, że pole powierzchni dużego kwadratu jest większe niż połowa powierzchni prostokąta $ABCD$.

Rozwiązanie:

Jeśli długość boku małego kwadratu oznaczmy przez x , to duży kwadrat ma bok długości $3x$, a średni ma bok długości $1,5x$.



Pole prostokąta $ABCD$: $3 \cdot x^2 + (3x)^2 + 2 \cdot (1,5x)^2$

Pole dużego kwadratu: $(3x)^2 = 9x^2$

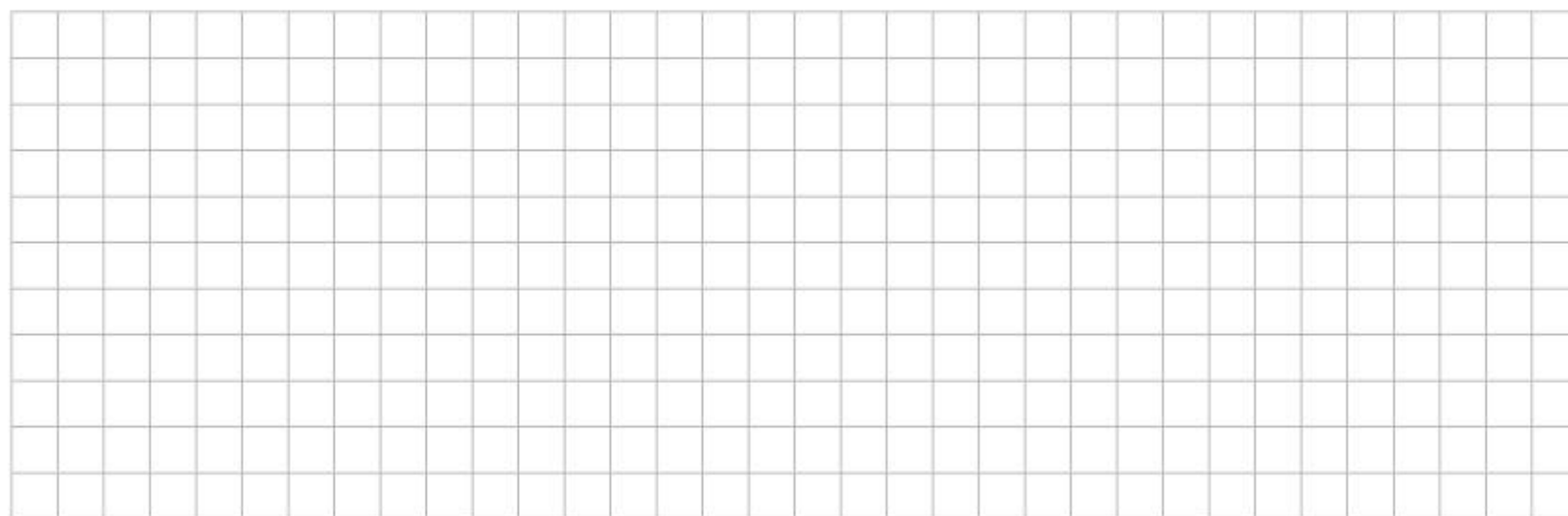
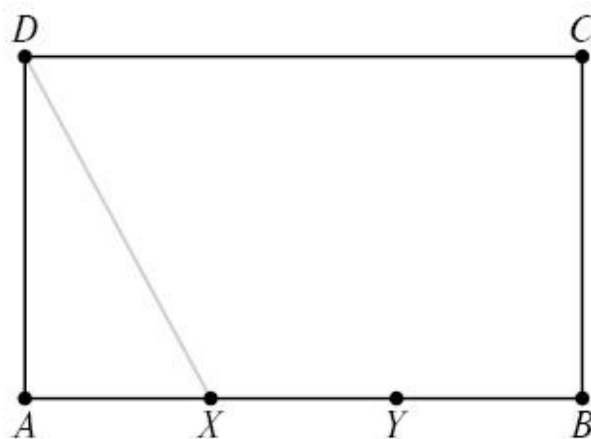
Półowa pola prostokąta $ABCD$ to $8,25x^2$.

Zatem duży kwadrat zajmuje ponad połowę pola prostokąta $ABCD$.

Ćwiczenie do przykładu 525.

Rozwiąż samodzielnie

W prostokącie $ABCD$ bok AB podzielono na trzy równe odcinki AX , XY i YB . Uzasadnij, że pole trójkąta AXD stanowi 20% pola trapezu $XBCD$.



Ile opakowań każdego rodzaju powinien zamówić trener, aby mieć dokładnie 25 nowych piłek? Podaj wszystkie możliwości. Zapisz rozwiązanie.

Sprawdzamy kolejno, po ile opakowań każdego rodzaju musi kupić trener, aby mieć 25 piłek. Liczba opakowań jest liczbą naturalną, dlatego odrzucamy te wyniki, które nie są liczbami naturalnymi.

Liczba opakowań po 4 sztuki	Liczba opakowań po 3 sztuki	Akceptacja
1	$\frac{25-4}{3} = 7$	Tak
2	$\frac{25-2 \cdot 4}{3} = 5\frac{2}{3}$	Nie
3	$\frac{25-3 \cdot 4}{3} = 4\frac{1}{3}$	Nie
4	$\frac{25-4 \cdot 4}{3} = 3$	Tak
5	$\frac{25-5 \cdot 4}{3} = 1\frac{2}{3}$	Nie
6	$\frac{25-6 \cdot 4}{3} = \frac{1}{3}$	Nie
7	$\frac{25-7 \cdot 4}{3} = -1$	Nie

Odpowiedź: Trener może kupić 1 opakowanie po 4 sztuki i 7 opakowań po 3 sztuki lub 4 opakowania po 4 sztuki i 3 opakowania po 3 sztuki.

Rozwiąż samodzielnie

Przed szkolnym turniejem badmintonu organizator planuje dokupić 30 lotek. Lotki są sprzedawane w opakowaniach po 4 sztuki i po 6 sztuk. Ile opakowań każdego rodzaju powinien kupić organizator? Podaj wszystkie możliwości. Zapisz rozwiązanie.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Przykład 527.

W liczbie czterocyfrowej cyfra tysięcy jest równa cyfrze dziesiątek oraz cyfra setek jest taka sama jak cyfra jedności. Wykaż, że ta liczba dzieli się przez 101.

Rozwiązanie:

Oznaczamy:

a – cyfra tysięcy oraz cyfra dziesiątek

b – cyfra setek oraz cyfra jedności

Dodatkowo zapisujemy założenie, że a jest jedną z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a b jest jedną z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Zapisujemy liczbę czterocyfrową w postaci wyrażenia algebraicznego i przekształcamy je:

$$1000a + 100b + 10a + b = 1010a + 101b = 101(10a + b)$$

W ten sposób wykazaliśmy, że liczba:

$1000a + 100b + 10a + b$ jest podzielna przez 101, ponieważ w zapisie wyrażenia algebraicznego w postaci iloczynowej jednym z czynników jest liczba 101.

Ćwiczenie do przykładu 527.

Rozwiąż samodzielnie

Udowodnij, że jeżeli od dowolnej liczby dwucyfrowej odejmiemy sumę jej cyfr, to otrzymana różnica jest wielokrotnością liczby 9.

Ćwiczenie do przykładu 528.

Rozwiąż samodzielnie

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Ostatnia cyfra liczby, która jest wynikiem działania $4^{15} + 11^6$, jest równa 5.	P	F
Liczba, która jest wynikiem działania $7^{17} - 5^{11}$, jest liczbą nieparzystą.	P	F

Obliczmy kolejne potęgi liczby 3:

$$3^9 = \dots 3$$

$$3^{10} = \dots 9$$

$$3^8 = 6561$$

$24 : 4 = 6$ – oznacza to, że 6 razy powtórzył się układ cyfr jedności: 3, 9, 7 i 1, a liczba 3^{24} ma cyfrę jedności równą 1.

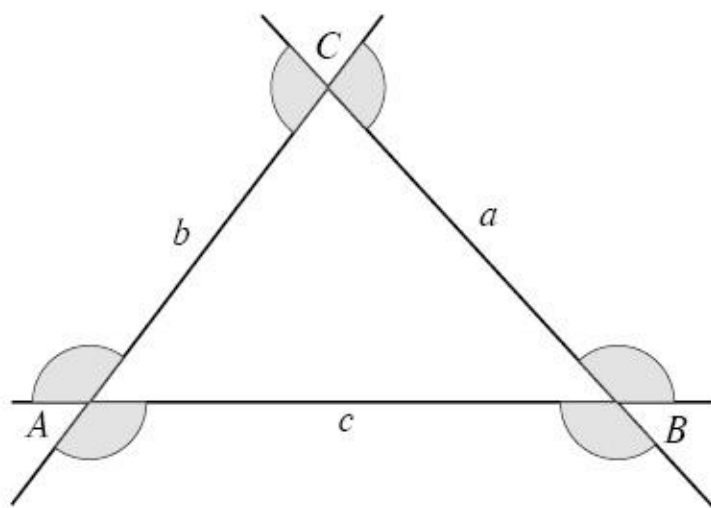
$$11^3 = 1331$$

$11^4 = \dots$, w tej liczbie cyfra jedności również jest 1.

230 5. WYKAŹ I UDOWODNIJ

Przykład 530.

Dla każdego kąta trójkąta ABC narysowano kąty zewnętrzne.
Wykaż, że suma miar wszystkich kątów zewnętrznych trójkąta jest równa 720° .

**Rozwiązanie:**

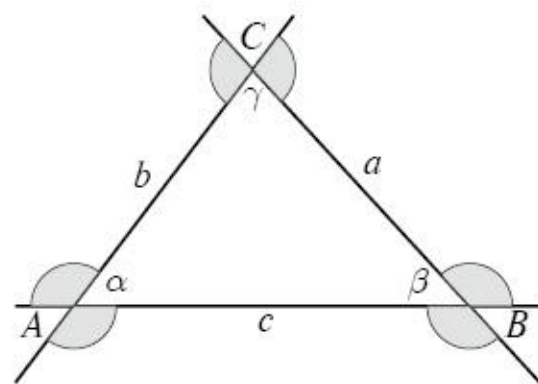
Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Niech α, β, γ oznaczają miary kątów wewnętrznych trójkąta. Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° ($\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$). Kąty zewnętrzne do kolejnych kątów wewnętrznych trójkąta mają odpowiednio miary: $180^\circ - \alpha, 180^\circ - \beta, 180^\circ - \gamma$, przy czym każdemu kątowi wewnętrznemu odpowiadają dwa kąty zewnętrzne.

Zapisujemy sumę miar wszystkich kątów zewnętrznych:

$$2(180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma) = 2(540^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)) = 2(540^\circ - 180^\circ) = 720^\circ$$

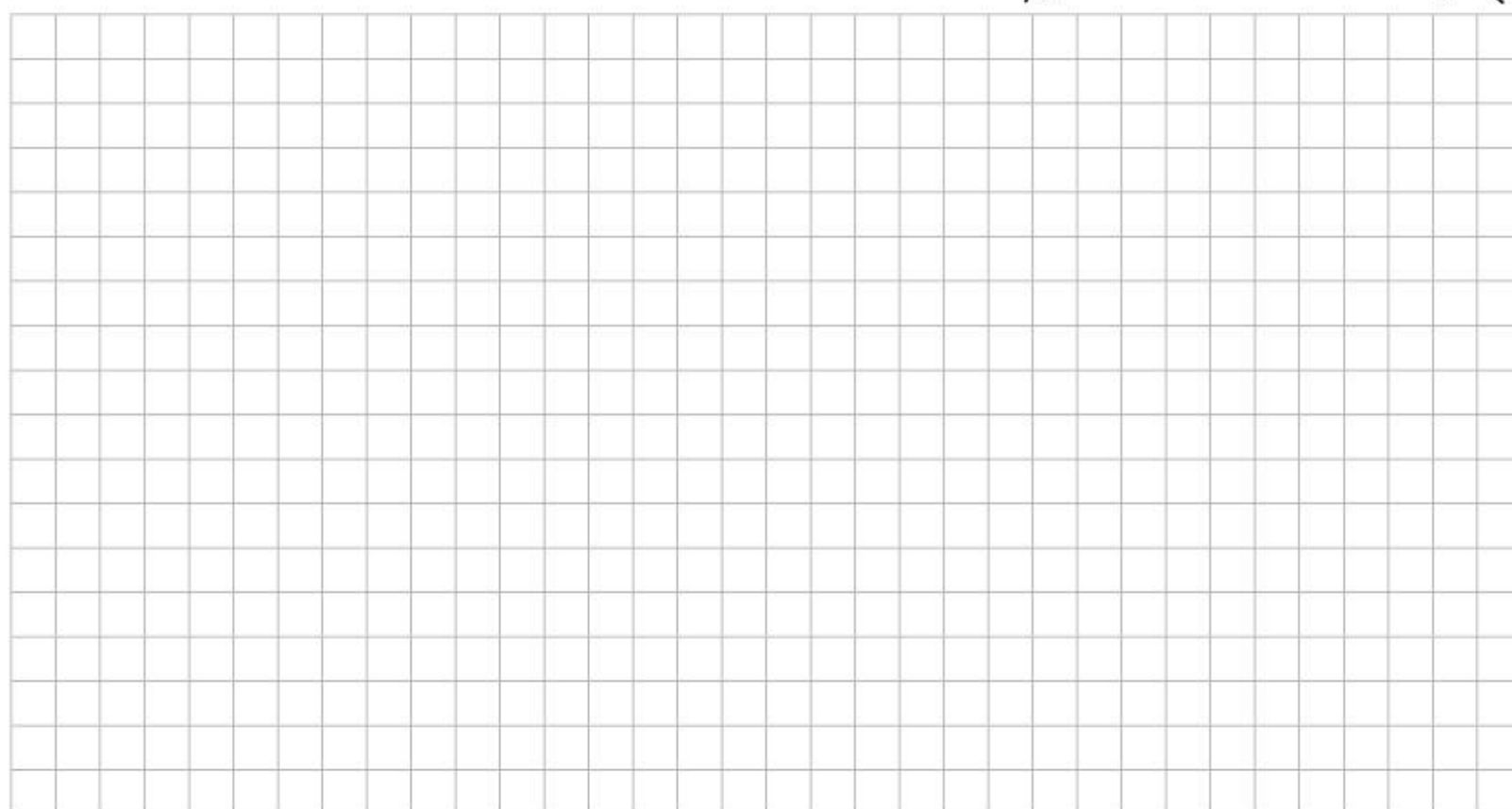
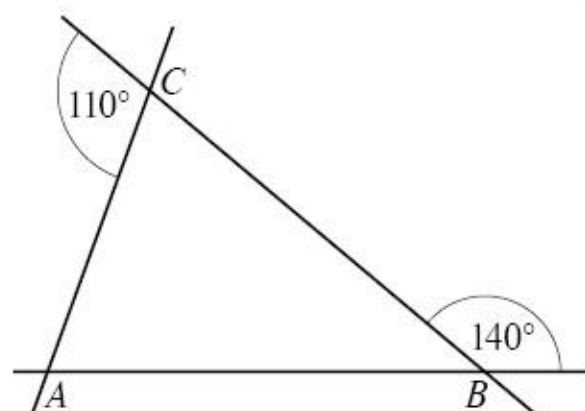
W ten sposób dowiedliśmy, że suma miar wszystkich kątów zewnętrznych trójkąta jest równa 720° .

**Ćwiczenie do przykładu 530.****Rozwiąż samodzielnie**

Trzy proste przecinają się w sposób przedstawiony na rysunku, tworząc trójkąt ABC .

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

W tym trójkącie najmniejszą miarę ma kąt CAB .	P	F
Odcinki AB i CB są równej długości.	P	F



Przykład 531.

Trójkąt równoboczny o boku długości a oraz sześciokąt foremny o boku długości b mają równe pola. Czy iloraz długości boku tego trójkąta przez długość boku tego sześciokąta jest równy $\sqrt{6}$? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	$b^2 = 6a^2$.
N		B.	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
		C.	$a^2 = 6b^2$.

Rozwiązanie:

Zapisujemy wzór na pole trójkąta równobocznego o boku długości a : $P_t = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

Zapisujemy wzór na pole sześciokąta foremnego równobocznego o boku długości b :

$$P_s = 6 \cdot \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$$

Pola tych figur są równe, co zapisujemy:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \mid : \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Stąd otrzymujemy, że: $a^2 = 6b^2$

$$\frac{a^2}{b^2} = 6$$

Czyli: $\frac{a}{b} = \sqrt{6}$

Odpowiedź: TC

Ćwiczenie do przykładu 531.

Rozwiąż samodzielnie

Kwadrat o boku długości a i trójkąt równoboczny o boku długości b mają równe obwody.
Czy pole tego kwadratu jest mniejsze od pola tego trójkąta? Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	długość boku tego kwadratu stanowi 75% długości boku tego trójkąta.
N		B.	pola obu figur są równe.
		C.	stosunek pola trójkąta do pola kwadratu jest mniejszy od 1.

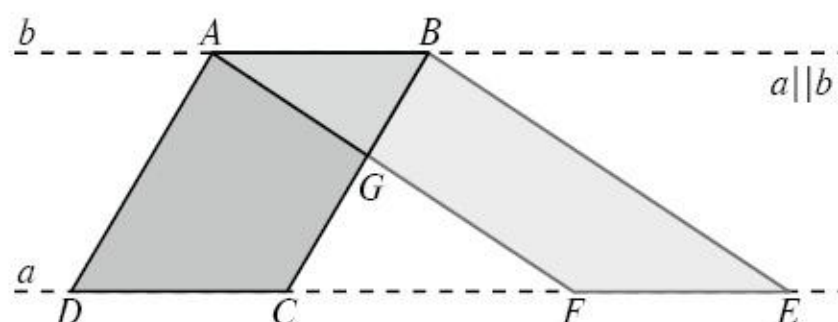
[illegible]

ZADANIA

532. Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wśród ułamków $\frac{1}{3}$, $\frac{101}{300}$ i $\frac{100}{299}$ największy jest ułamek $\frac{1}{3}$.	P	F
Ułamki $\frac{333}{10^6 - 1}$ i $\frac{1}{3003}$ są równe.	P	F

533. Na rysunku przedstawiono dwa równoległoki $ABCD$ i $ABEF$.



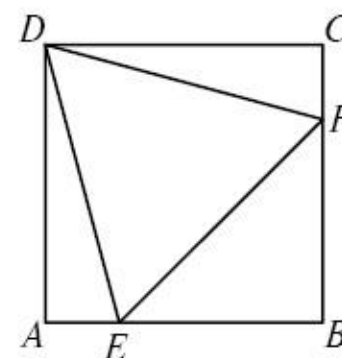
Czy czworokąty $CDAG$ oraz $EFGB$ mają równe pola? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	pole trójkąta CFG nie jest równe polu trójkąta ABG .
N		B.	pola równoległoboków $ABCD$ i $ABEF$ są równe.
		C.	suma pól trójkąta DFA i równoległoboku $FEBA$ jest równa polu trapezu $ABED$.

534. W kwadrat $ABCD$ wrysowano trójkąt równoboczny, tak jak pokazuje to rysunek.

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Miara kąta CFD wynosi 75° .	P	F
Największy kąt w czworokącie $AEFD$ ma miarę 150° .	P	F



535. W sześcianie o krawędzi długości 3 cm trzy krawędzie podzielono na trzy równe odcinki. Następnie na każdej z trzech ścian tego sześcianu pomalowano wielokąty w kolorach: białym, zielonym i żółtym tak, jak pokazuje to rysunek (boki tych wielokątów są równoległe do krawędzi sześcianu). Pozostałe trzy ściany tego sześcianu nie są pomalowane.

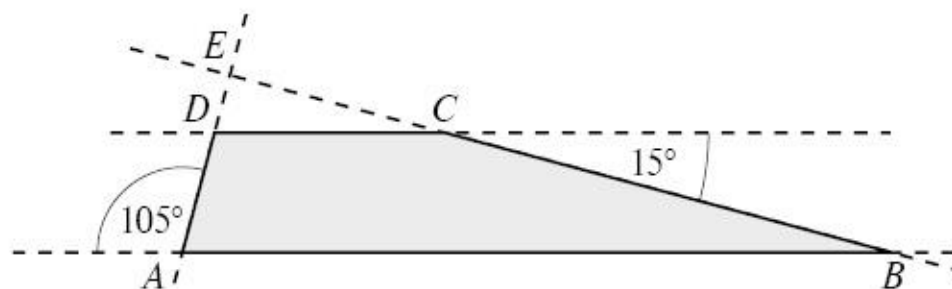
Uzasadnij, że stosunek pola powierzchni pomalowanej na biało do pola powierzchni pomalowanej na zielono i do pola powierzchni pomalowanej na żółto wynosi 1:3:5.



536. Niech n oznacza liczbę naturalną. Udowodnij, że suma czterech kolejnych liczb nieparzystych, z których najmniejsza to $2n + 1$, jest podzielna przez 8.

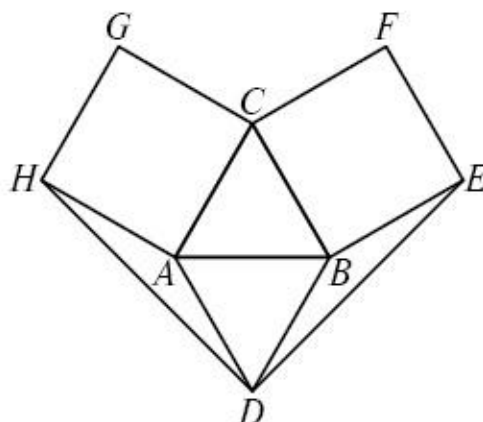
537. Wyjaśnij, dlaczego jeśli zachodzi równość: $(k + 1)(k + 2) = 5$, to k nie może być liczbą całkowitą.

538. W trapezie $ABCD$ przedłużenia ramion AD i BC przecięły się w punkcie E (rysunek). Uzasadnij, że kąt AEB jest kątem prostym.



539. Punkt E jest środkiem boku AB równoległoboku $ABCD$. Punkt ten połączono z wierzchołkiem C . Uzasadnij, że pole trójkąta EBC jest cztery razy mniejsze od pola równoległoboku $ABCD$.

540. Na bokach trójkąta równobocznego ABC na zewnątrz tego trójkąta zbudowano dwa kwadraty $ACGH$ i $BEFC$ oraz trójkąt równoboczny ABD (patrz rysunek). Wykaż, że trójkąty HAD i BED są przystające.



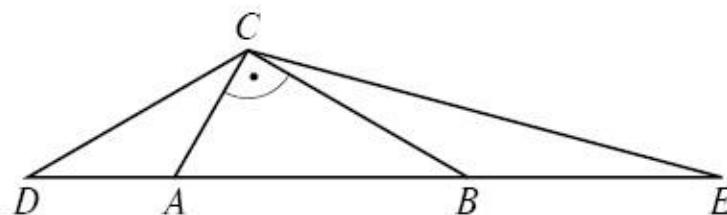
541. Dane są dwie różne cyfry, z których żadna nie jest zerem. Uzasadnij, że suma wszystkich liczb dwucyfrowych, które można zapisać za pomocą tych cyfr, jest podzielna przez 22.

542. Iloczyn cyfr pewnej liczby dwucyfrowej wynosi 12. Uzasadnij, że są dokładnie 4 liczby dwucyfrowe spełniające ten warunek.

543. Udowodnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

544. W trójkącie prostokątnym ABC przedłużono przeciwprostokątną AB , a następnie odłożono odcinki AD i BE takie, że $AD = AC$ oraz $BE = BC$.

Uzasadnij, że miara kąta DCE wynosi 135° .



545. Uzasadnij, że w trapezie prostokątnym różnica kwadratów długości podstaw jest równa różnicy kwadratów długości przekątnych.

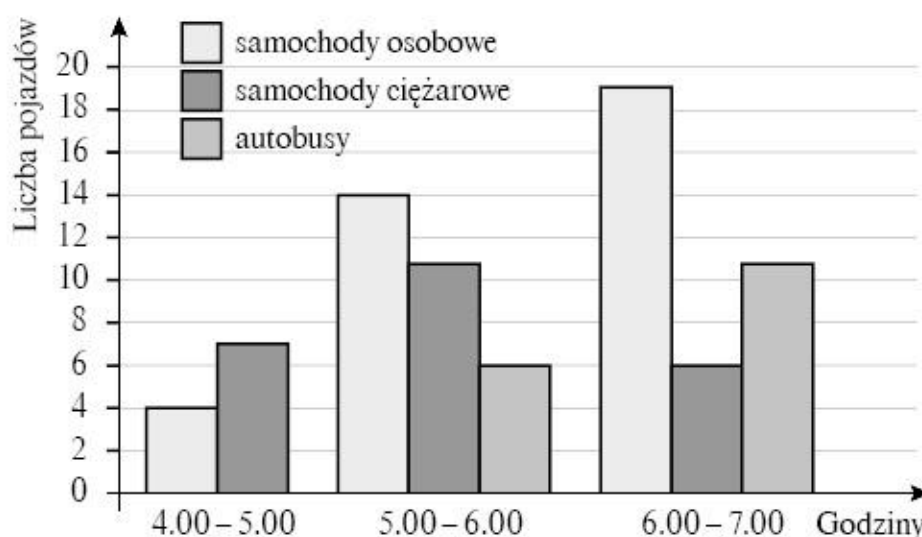
546*. Znajdź cztery najmniejsze kolejne liczby naturalne nieparzyste, których suma jest podzielna przez 15.

547*. Wykaż, że suma trzech kolejnych naturalnych potęg liczby 3 jest podzielna przez 13.

548*. Wykaż, że jeżeli do iloczynu dwóch kolejnych liczb naturalnych dodamy większą z tych liczb, to otrzymamy kwadrat liczby naturalnej.

555. Przez 3 godziny obserwowano ruch samochodów na moście. Zebrane dane przedstawiono za pomocą diagramu.

1 pkt



Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Średnia liczba samochodów korzystających z tego mostu przez jedną godzinę była równa 78.	P	F
Stosunek liczby samochodów ciężarowych, które korzystały z mostu między 5.00 a 7.00, do liczby samochodów osobowych wynosił $\frac{11}{26}$.	P	F

556. Podczas szkolnej wycieczki uczniowie chcieliby obejrzeć ruiny zamku, który został zbudowany pod koniec XIV wieku. **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

1 pkt

Ten zamek mógł powstać w

- A. 1298 roku B. 1392 roku C. 1348 roku D. 1407 roku

557. Druga prędkość kosmiczna wynosi $671400 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ i jest to najmniejsza prędkość, jaką należy

1 pkt

nadać ciału na Ziemi, aby mogło pokonać jej przyciąganie. **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Druga prędkość kosmiczna wyrażona w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ jest równa

- A. $44\,440 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ B. $43\,000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ C. $42\,700 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ D. $40\,284 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

558. Pani Iza wpłaciła do banku 3000 zł na roczną lokatę terminową. Proponowane oprocentowanie wynosiło 4,5% w stosunku rocznym.

1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po roku odsetki od tej kwoty wyniosą

- A. 1350 zł B. 350 zł C. 3135 zł D. 135 zł

559. Za precla z makiem należy zapłacić k zł, za precla z solą – o 30 gr mniej, a za precla z sezamem – o 50 gr więcej niż za precla z solą.

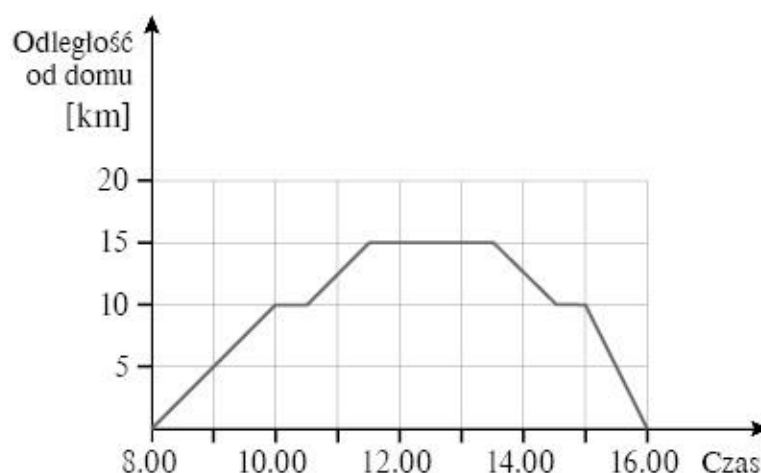
1 pkt

Które wyrażenie opisuje wartość zakupu 3 precli z solą, 2 z makiem i 5 z sezamem? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

- A. $(10k + 0,4)$ zł B. $(10k + 0,1)$ zł C. $(10k - 0,1)$ zł D. $(10k - 0,4)$ zł

1 pkt

560. Kamila z rodzicami była na wycieczce rowerowej. Plan przebiegu trasy wycieczki uwzględniający trzykrotny postój na odpoczynek przedstawiła na wykresie.



Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Na łączny czas odpoczynku przeznaczono 2,5 godziny.	P	F
Średnia prędkość jazdy rowerem podczas tej wycieczki wynosiła $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.	P	F

1 pkt

561. Cena towaru bez podatku VAT jest równa 60 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Towar ten wraz z podatkiem VAT w wysokości 23% kosztuje

A. 73,80 zł

B. 46,20 zł

C. 69,40 zł

D. 78 zł

1 pkt

562. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Średnia arytmetyczna wszystkich liczb pierwszych nie mniejszych niż 11 i nie większych niż 37 jest równa

A. 180

B. 22,5

C. 21

D. 18,5

1 pkt

563. Dane są liczby naturalne, które są większe od 3 i mniejsze od 50.

Oceń prawdziwość zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wśród tych liczb jest 6 takich, które są kwadratami liczb naturalnych.	P	F
Wśród tych liczb jest 16 takich, które nie są liczbami parzystymi ani wielokrotnościami liczby 3.	P	F

1 pkt

564. Czy prawdą jest, że suma czterech kolejnych liczb naturalnych jest liczbą pierwszą? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

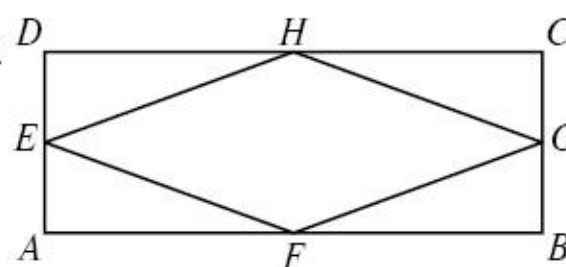
T	ponieważ	A.	dzieli się tylko przez liczbę 1 i przez samą siebie.
N		B.	nie da się jej zapisać w postaci iloczynu dwóch liczb.
		C.	ma więcej niż dwa dzielniki.

565. Z cyfr: 4, 5, 6 Maciek tworzy trzycyfrowe kody, które będą otwierać bramy wjazdowe, przy czym cyfry w kodzie nie mogą się powtarzać. Ile kodów będących liczbami parzystymi może utworzyć? Zapisz obliczenia.

2 pkt

A blank sheet of graph paper with a grid pattern. The grid consists of small squares formed by thin gray lines. There are 20 columns and 10 rows of squares. The entire sheet is covered by this grid, with no margins or other markings.

566. Punkty E, F, G, H są środkami boków prostokąta $ABCD$.
Uzasadnij, że czworokąt $EFGH$ jest rombem.

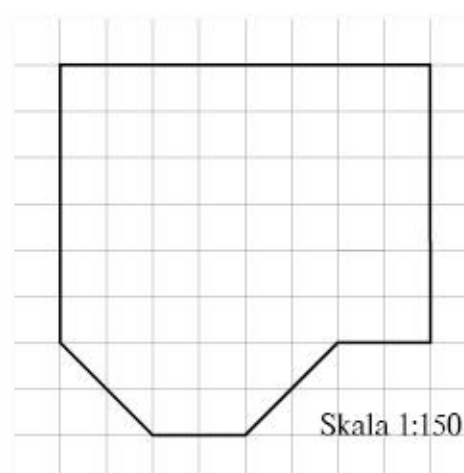


2 pkt

[illegible]

567. Pan Damian zamierza wybudować dom. Poniższy rysunek przedstawia plan salonu.

Ile metrów kwadratowych będzie miała podłoga w salonie? Odczytaj odpowiednie dane z rysunku. Do obliczeń przyjmij, że długość jednej kratki odpowiada 5 mm. Zapisz obliczenia.



4 pkt

[illegible]

B. 15
D. piątek

D. 25 cm $\times$ 6 cm

B. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{7}{36}$

[illegible][illegible]

_____ %

WPISUJE UCZEŃ

KOD UCZNIA

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

ARKUSZ I

PRZYKŁADOWY ARKUSZ EGZAMINACYJNY EGZAMIN ÓSMOKLASISTY Z OPERONEM MATEMATYKA

Instrukcja dla ucznia

1. Sprawdź, czy zestaw egzaminacyjny zawiera 8 stron (zadania 1.–22.). Ewentualny brak stron lub inne usterki zgłoś nauczycielowi.
2. Wpisz swój kod oraz PESEL w wyznaczonym miejscu.
3. Czytaj uważnie wszystkie teksty i zadania.
4. Rozwiązania zapisuj długopisem lub piórem z czarnym tuszem/atramentem. Nie używaj korektora.
5. Rozwiązania zadań, w których musisz samodzielnie sformułować odpowiedzi, zapisz czytelnie i starannie.
6. W arkuszu znajdują się różne typy zadań. Odpowiedzi do nich zaznacz lub zapisz w wyznaczonych miejscach.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą sprawdzane i oceniane.

Powodzenia!

**Czas pracy:
100 minut**

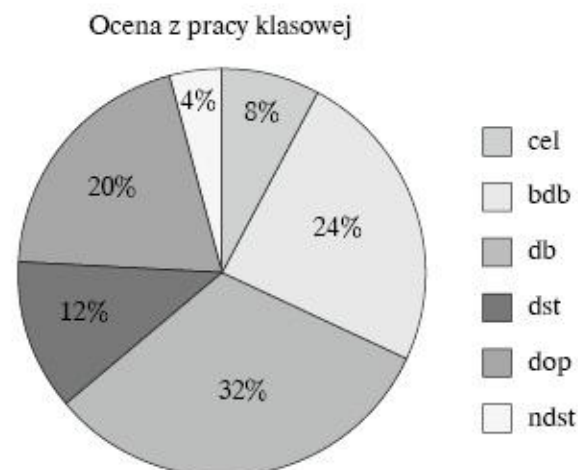
**Liczba punktów
do uzyskania: 32**

Zadanie 1. (0–1)

Na diagramie przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki. Niższą ocenę niż Kuba otrzymało dokładnie 36% uczniów piszących sprawdzian.

Ile procent uczniów otrzymało ocenę wyższą niż Kuba?
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 64% B. 30% C. 28% D. 32%

**Zadanie 2. (0–1)**

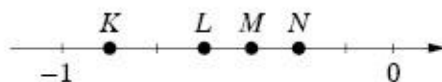
Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wartość wyrażenia $2\frac{1}{3} + 1,5$ jest równa A/B. A. $3\frac{5}{6}$ B. $3\frac{2}{5}$

Wartość wyrażenia $5,6 - 1\frac{3}{4}$ jest równa C/D. C. 3,85 D. 4,3

Zadanie 3. (0–1)

Który punkt wyróżniony na osi liczbowej ma współrzędną równą $-\frac{3}{7}$?



Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. K B. L C. M D. N

Zadanie 4. (0–1)

Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{3}{1010}$ jest równe 0,0(0297).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Na 147 miejscu po przecinku tego rozwinięcia znajduje się cyfra

- A. 0 B. 2 C. 9 D. 7

Zadanie 5. (0–1)

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Iloczyn liczb 2 , 2^6 i 2^9 jest równy 2^{16} .	P	F
Aby iloraz liczb $(-8)^{12}$ i $(-8)^{\blacksquare}$ był równy $(-8)^5$, w miejsce zaciemnienia należy wpisać liczbę 7.	P	F

Zadanie 6. (0–1)

Cenę tabletu obniżono o 18%. Klient kupił tablet po obniżonej cenie i dzięki temu zapłacił o 112,50 zł mniej, niż zapłaciłby przed obniżką.

Jaka była cena tego tabletu przed obniżką? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 2025 zł B. 622,40 zł C. 625 zł D. 863 zł

Zadanie 7. (0–1)

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

W dwóch rzutach standardową sześcienną kostką do gry można otrzymać iloczyn oczek równy 10.	P	F
W 11 rzutach standardową sześcienną kostką do gry można otrzymać iloczyn oczek równy 10^6 .	P	F

Zadanie 8. (0–1)

Stosunek miar kątów pewnego trójkąta jest równy 1:4:7.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Największy z tych kątów ma miarę

- A. 105° B. 60° C. 90° D. 135°

Zadanie 9. (0–1)

Obwód czworokąta $ABCD$ wynosi 28 cm. Przekątna AC dzieli go na trójkąt ABC o obwodzie 18 cm i trójkąt ACD o obwodzie o 4 cm większym.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość przekątnej AC jest równa

- A. 12 cm B. 10 cm C. 16 cm D. 6 cm

Zadanie 10. (0–1)

Punkt $S = (4, 3)$ jest środkiem odcinka PR , w którym $P = (7, 2)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Punkt R ma współrzędne

- A. $\left(5\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$ B. (4, 1) C. (1, 4) D. $\left(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Zadanie 11. (0–1)

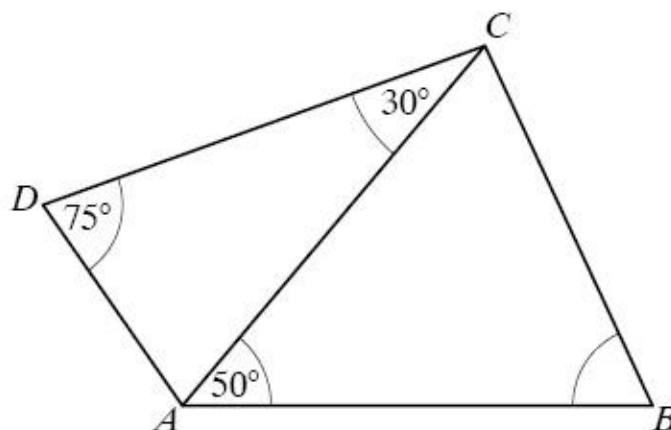
Średnia prędkość samochodu na trasie przebytej w czasie 5 godzin wyniosła $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Aby czas przejazdu był o 1 godzinę krótszy, średnia prędkość samochodu na tej trasie musiałaby wynosić $72\frac{\text{km}}{\text{h}}$.	P	F
Gdyby średnia prędkość samochodu na tej trasie była równa $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$, to czas przejazdu byłby równy 7 godzin.	P	F

Zadanie 12. (0–1)

Przekątna AC czworokąta $ABCD$ i bok AB mają taką samą długość.

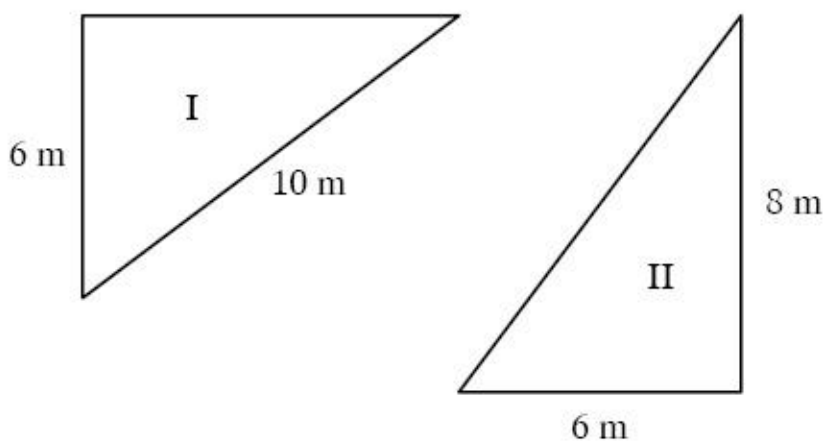


Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Kąt DAC ma miarę 125° .	P	F
Kąt ABC ma miarę 65° .	P	F

Zadanie 13. (0–1)

Na rysunkach dane są dwa trójkąty prostokątne.



Czy te trójkąty są przystające? Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	oba trójkąty są prostokątne.
N		B.	odpowiednie przyprostokątne w trójkącie I mają takie same długości jak przyprostokątne w trójkącie II.
		C.	Trójkąta II nie da się przesunąć w taki sposób, aby nałożyć go na trójkąt I.

Zadanie 14. (0–1)

Boki trójkąta prostokątnego mają długości 15 cm, 20 cm i 25 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość opuszczona na przeciwprostokątną tego trójkąta ma

A. 10 cm B. 12 cm C. 18,75 cm D. 33,3 cm

Wysokość trapezu prostokątnego jest równa długości krótszej podstawy i połowie długości dłuższej podstawy.

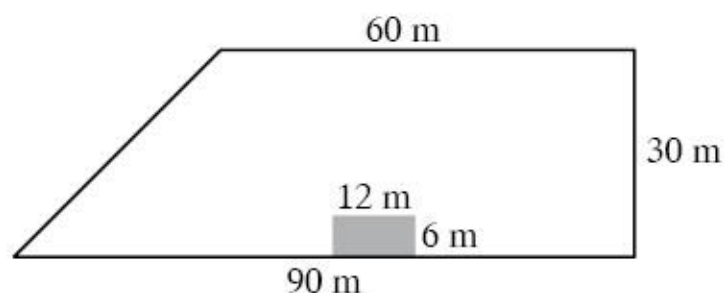
A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines forming small squares across the entire page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

W dwóch beczkach znajduje się 36 l wody. Jeśli z pierwszej beczki przelejemy 4 litry wody do drugiej, to w drugiej beczce będzie o połowę mniej wody niż w pierwszej.

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines forming small squares across the entire page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

246 ARKUSZ I

Zadanie 21. (0-3)



Na działce w kształcie trapezu prostokątnego postawiono altankę w kształcie prostokąta. **Jaki procent powierzchni działki zajmuje altanka? Zapisz obliczenia.**

[illegible]

Odpowiedź:

Zadanie 22. (0-4)

Z arkusza tektury o szerokości 28 cm i długości 42 cm wycięto w każdym rogu kwadrat o boku 6 cm. Przez zagięcie czterech prostokątów powstałych na bokach otrzymano otwarte pudełko. Ile najwięcej klocków sześciennych o krawędzi 2 cm zmieści się w tym pudełku? Zapisz obliczenia.

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Odpowiedź:

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



WPISUJE UCZEŃ

KOD UCZNIA

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

ARKUSZ II

PRZYKŁADOWY ARKUSZ EGZAMINACYJNY EGZAMIN ÓSMOKLASISTY Z OPERONEM MATEMATYKA

Instrukcja dla ucznia

1. Sprawdź, czy zestaw egzaminacyjny zawiera 8 stron (zadania 1.–22.). Ewentualny brak stron lub inne usterki zgłoś nauczycielowi.
2. Wpisz swój kod oraz PESEL w wyznaczonym miejscu.
3. Czytaj uważnie wszystkie teksty i zadania.
4. Rozwiązania zapisuj długopisem lub piórem z czarnym tuszem/atramentem. Nie używaj korektora.
5. Rozwiązania zadań, w których musisz samodzielnie sformułować odpowiedzi, zapisz czytelnie i starannie.
6. W arkuszu znajdują się różne typy zadań. Odpowiedzi do nich zaznacz lub zapisz w wyznaczonych miejscach.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą sprawdzane i oceniane.

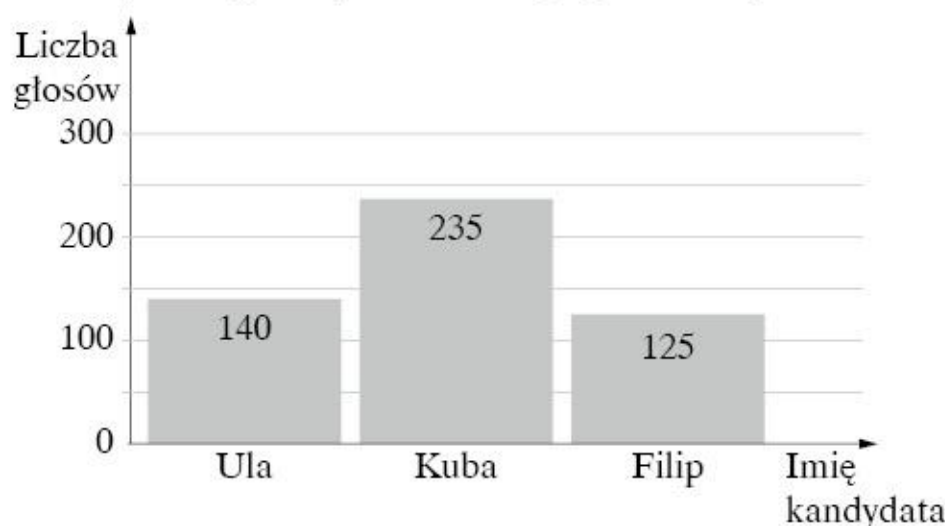
Powodzenia!

**Czas pracy:
100 minut**

**Liczba punktów
do uzyskania: 31**

Zadanie 1. (0–1)

Diagram przedstawia wyniki wyboru przewodniczącego samorządu uczniowskiego.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Ula uzyskała 28% wszystkich głosów.	P	F
Filip otrzymał o 15% mniej głosów niż Ula.	P	F

Zadanie 2. (0–1)

Uniwersytet Jagielloński został założony w MCCCLXIV roku, a Uniwersytet Warszawski w MDCCCXVI roku.

O ile lat później został założony Uniwersytet Warszawski od Uniwersytetu Jagiellońskiego? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. o 500 lat B. o 452 lata C. o 455 lat D. o 425 lat

Zadanie 3. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pomiędzy liczbami $-0,(3)$ i $-0,(1)$ na osi liczbowej leżą liczby

- A. $-\frac{1}{7}, -\frac{1}{3}$ i $-\frac{1}{5}$ C. $-\frac{1}{7}, -\frac{1}{4}$ i $-\frac{1}{5}$
 B. $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}$ i $-\frac{1}{5}$ D. $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$ i $-\frac{1}{25}$

Zadanie 4. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczbą odwrotną do wartości wyrażenia $2\frac{2}{3} + 2,2 \cdot \frac{5}{33}$ jest liczba

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. -3 D. $-\frac{1}{3}$

Informacje do zadań 5. i 6.

Trzyosobowa rodzina wybrała się do odległej o 210 km miejscowości wypoczynkowej. Matka z córką wyjechały o godzinie 6.25 pociągiem osobowym, a ojciec wyruszył 5 kwadransów później pociągiem pospiesznym. Pociąg osobowy jechał ze średnią prędkością $56 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a pociąg pospieszny – $84 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Zadanie 5. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Podróż matki z córką trwała

- A. 3 h 75 min B. 4 h 15 min C. 3 h 15 min D. 3 h 45 min

Zadanie 6. (0–1)

O której godzinie ojciec dojedzie na miejsce? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. o 10.10 B. o 10.30 C. o 9.50 D. o 10.20

Zadanie 7. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $(3^9 \cdot 3 : 3^2)^3$ jest większa od liczby $(12^5 : 4^5)^4$

- A. 3 razy B. 9 razy C. 27 razy D. 81 razy

Zadanie 8. (0–1)

Cenę rakiety do squasha podwyższono o 21,60 zł, co stanowi 18% ceny pierwotnej, a następnie podwyższono jeszcze o 18,40 zł.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Początkowa cena rakiety wynosiła 120 zł.	P	F
Po obu podwyżkach rakiet kosztowała 160 zł.	P	F

Zadanie 9. (0–1)

W pudełku było 5 kul białych i 10 czarnych. Dołożono jeszcze 15 kul białych i 5 czarnych.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Przed dołożeniem kul prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej było dwa razy mniejsze niż prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.	P	F
Po dołożeniu kul wylosowanie kuli białej jest trzy razy większe od wylosowania kuli czarnej.	P	F

Zadanie 10. (0–1)

Agata ma w skarbonce 85 zł w monetach o nominałach 2 zł i 5 zł. Monet dwuzłotowych jest o 11 więcej niż pięciozłotowych.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeżeli przez x oznaczymy liczbę monet pięciozłotowych, to podane zależności opisuje równanie

A. $2(11 + x) + 5x = 85$

C. $2x + 5(x + 11) = 85$

B. $2x + 5(x - 11) = 85$

D. $2(x - 11) + 5x = 85$

Zadanie 11. (0–1)

W piekarni stosunek ceny jednej bułki do ceny jednego rogalia i do ceny jednej bagietki ma się jak 1:3:5. Za 3 bułki i 2 rogalie należy zapłacić 7,65 zł.

Ile trzeba zapłacić za 2 bułki, 3 rogalie i 2 bagietki? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 18,60 zł

B. 21,35 zł

C. 17,85 zł

D. 16,15 zł

Zadanie 12. (0–1)

Uczniowie wyznaczali długość podstawy a trapezu ze wzoru na pole trapezu $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

I uczeń: $a = \frac{2P}{h} - b$

II uczeń: $a = \frac{2P-b}{h}$

III uczeń: $a = \frac{2P-bh}{h}$

IV uczeń: $a = \frac{2P}{b} - h$

Którzy uczniowie wykonali to zadanie poprawnie? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. III i IV

B. II i IV

C. I i III

D. I i IV

Zadanie 13. (0–1)

Czy prawdą jest, że środki boków dowolnego prostokąta są wierzchołkami rombu? Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

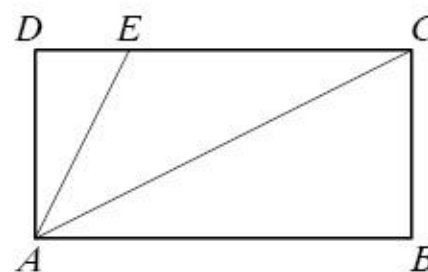
T	ponieważ	A.	boki utworzonego czworokąta są jednocześnie przeciwprostokątnymi czterech przystających trójkątów prostokątnych.
		B.	boki utworzonego czworokąta nie mają jednakowej długości.
N		C.	kąty utworzonego czworokąta nie mają jednakowych miar.

Zadanie 14. (0–1)

W prostokącie $ABCD$ odcinek DE jest cztery razy krótszy od odcinka DC .

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Pole trójkąta ACE jest trzy razy większe od pola trójkąta AED .	P	F
Pole trójkąta AED jest równe różnicy pól trójkątów ABC i AEC .	P	F

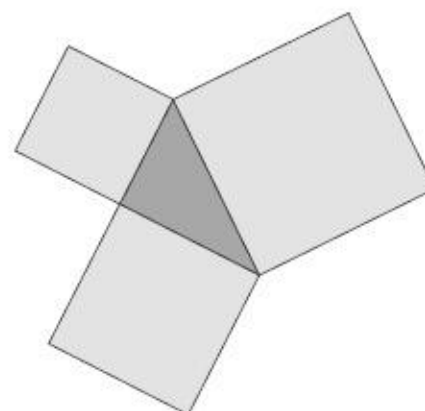


Zadanie 15. (0–1)

Trójkąt na rysunku jest prostokątny, a wszystkie trzy czworokąty są kwadratami.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczby 5, 12 i 13 opisują pola kwadratów (z rysunku) wyrażonych w tej samej jednostce.	P	F
Liczby 9, 12 i 21 opisują pola kwadratów (z rysunku) wyrażonych w tej samej jednostce.	P	F



Zadanie 16. (0–1)

Siatka ostrosłupa składa się z kwadratu i trójkątów równobocznych zbudowanych na bokach tego kwadratu.

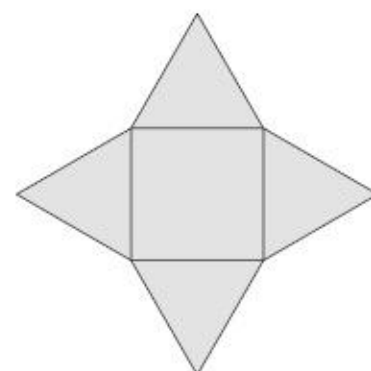
Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wszystkie krawędzie tego ostrosłupa mają A/B długość.

A. taką samą B. różną

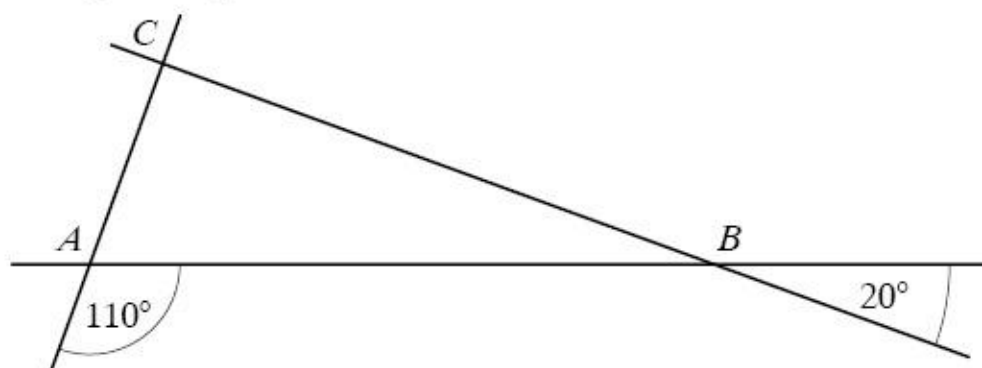
Wysokość tego ostrosłupa jest C/D niż wysokość jego ściany bocznej.

C. mniejsza D. większa

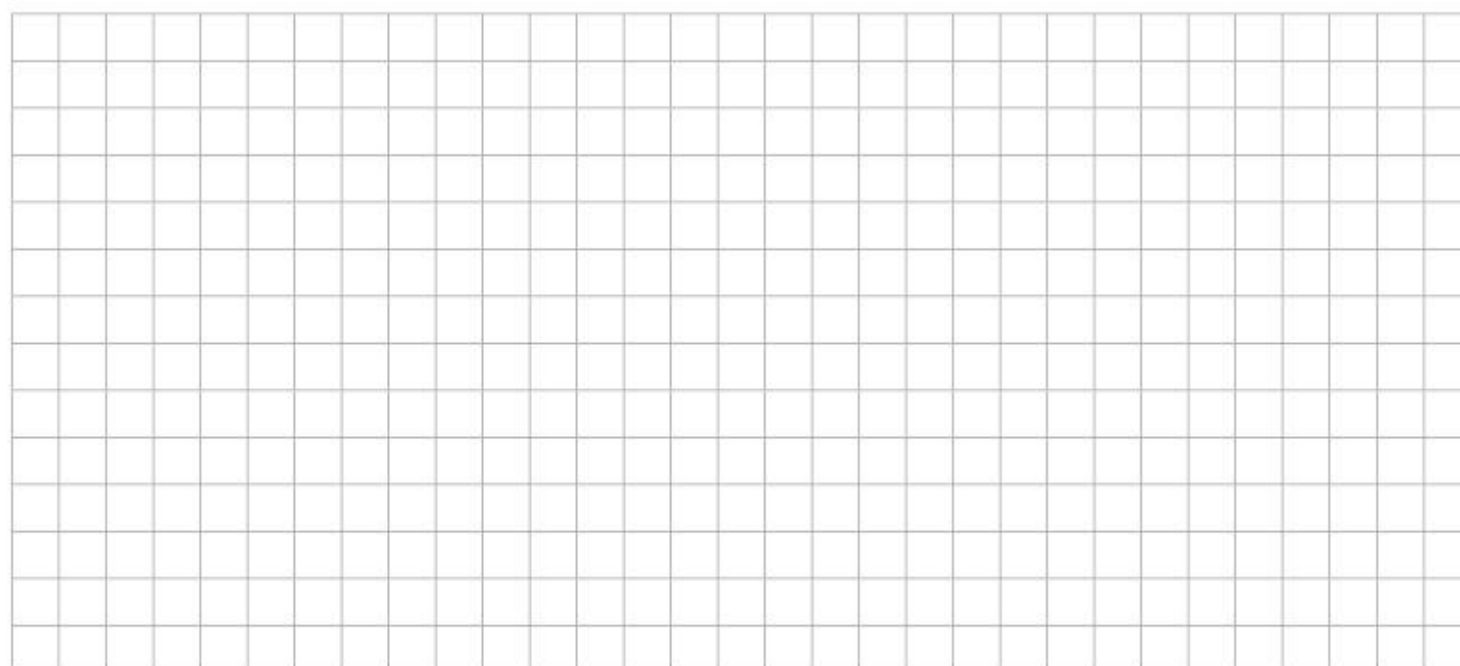


Zadanie 17. (0–2)

Trzy proste przecinają się w punktach A, B i C.



Uzasadnij, że trójkąt ABC jest prostokątny.



W pewnej klasie liczba chłopców stanowi 125% liczby dziewcząt. Gdyby do tej klasy doszły jeszcze trzy dziewczęta, to liczba chłopców byłaby równa liczbie dziewcząt.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 1 cm by 1 cm each. There are 20 columns and 15 rows of squares visible on the page.

W klasie jest więcej niż 20 uczniów. Agata rozdawała cukierki z okazji imienin. Kupiła 120 cukierków owocowych i 48 czekoladowych.

[illegible]

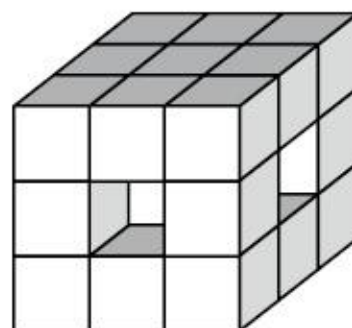
Średnia wieku pięciu pracowników wynosiła 36 lat. Gdy do zespołu dołączył nowy pracownik, średnia wieku zmalała o rok.

254 ARKUSZ II

Zadanie 21. (0-3)

Z 27 klocków w kształcie sześcianów o krawędzi równej 4 cm złożono duży sześcian, a następnie z każdej ściany bocznej wyjęto jeden środkowy klocek.

Ile wynosi pole powierzchni całkowitej tak powstałej bryły? Zapisz obliczenia.



Odpowiedź:

Zadanie 22. (0-4)

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 10 cm, a jej środek jest oddalony od jednej przyprostokątnej o 3 cm, a od drugiej – o 4 cm.

Oblicz pole tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź:

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



WPISUJE UCZEŃ

KOD UCZNIA

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

ARKUSZ III

PRZYKŁADOWY ARKUSZ EGZAMINACYJNY EGZAMIN ÓSMOKLASISTY Z OPERONEM MATEMATYKA

Instrukcja dla ucznia

1. Sprawdź, czy zestaw egzaminacyjny zawiera 8 stron (zadania 1.–22.). Ewentualny brak stron lub inne usterki zgłoś nauczycielowi.
2. Wpisz swój kod oraz PESEL w wyznaczonym miejscu.
3. Czytaj uważnie wszystkie teksty i zadania.
4. Rozwiązania zapisuj długopisem lub piórem z czarnym tuszem/atramentem. Nie używaj korektora.
5. Rozwiązania zadań, w których musisz samodzielnie sformułować odpowiedzi, zapisz czytelnie i starannie.
6. W arkuszu znajdują się różne typy zadań. Odpowiedzi do nich zaznacz lub zapisz w wyznaczonych miejscach.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą sprawdzane i oceniane.

Powodzenia!

**Czas pracy:
100 minut**

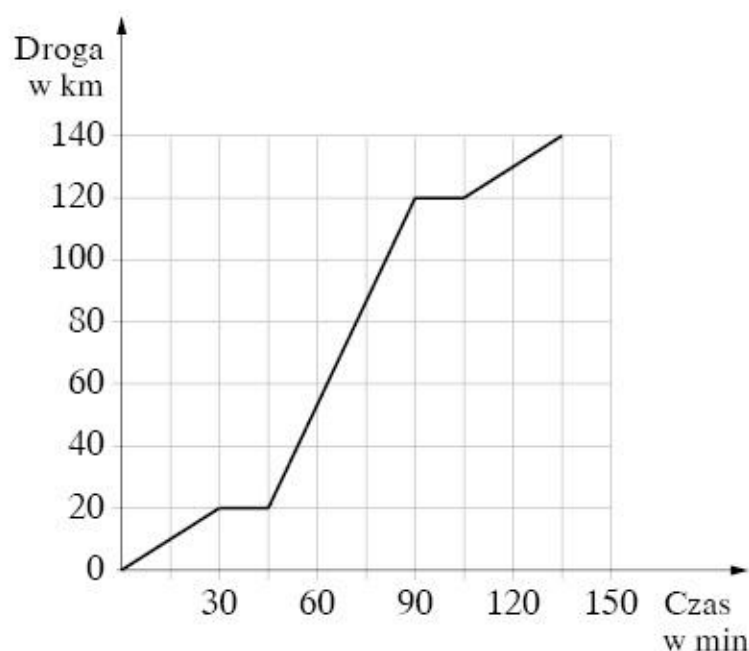
**Liczba punktów
do uzyskania: 31**

Zadanie 1. (0–1)

Na wykresie przedstawiono zależność drogi od czasu jazdy samochodem pana Kamila.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Przerwa w podróży trwała 0,5 h.	P	F
Średnia prędkość, z jaką jechał samochód, wynosiła $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.	P	F

**Zadanie 2. (0–1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeśli w zapisie liczby MMCDXXVI zamienimy miejscami znaki D i C, to otrzymana liczba jest

- A. o 200 mniejsza od danej liczby B. o 200 większa od danej liczby
C. o 2000 mniejsza od danej liczby D. o 2000 większa od danej liczby

Zadanie 3. (0–1)

Dla oznaczenia stron książki użyto 996 cyfr.

Ile stron ma książka? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 332 B. 369 C. 367 D. 368

Zadanie 4. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwinięciem dziesiętnym ułamka $\frac{2}{15}$ jest

- A. 0,13 B. 0,1(3) C. 0,(13) D. 0,(133)

Zadanie 5. (0–1)

Pierwotną cenę bluzki obniżono o 20%.

Czy podnosząc nową cenę o 25%, otrzymamy cenę pierwotną bluzki? Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	ponieważ	A.	po obu zmianach cena bluzki będzie wyższa o 5%.
		B.	po pierwszej zmianie cena bluzki wyniesie 0,8 jej wartości, a po drugiej zmianie $1,25 \cdot 0,8$ jej pierwotnej wartości.
N		C.	po pierwszej zmianie cena bluzki wyniesie 0,8 jej wartości, a po drugiej zmianie $0,25 \cdot 0,8$ jej pierwotnej wartości.

Zadanie 6. (0–1)

Pan Wiktor kupił bukiet złożony z 15 róż, w którym dodatki (wstążki, rośliny ozdobne) kosztowały 17 zł. Za cały bukiet zapłacił 137 zł.

Z ilu róż składałby się ten bukiet, za tę samą cenę, gdyby róża była o dwa złote tańsza? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 25 B. 18 C. 20 D. 24

Zadanie 7. (0–1)

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

- Wartość wyrażenia $(-2)^3 - (-3)^2$ jest równa A/B. A. -17 B. 1
Wynikiem dzielenia $4^6 \cdot 4^0$ przez liczbę $4^8 \cdot 4^2$ jest C/D. C. 4^5 D. 4^{38}

Zadanie 8. (0–1)

Na osi liczbowej zaznaczono zbiór liczb spełniających warunek $x < 4\frac{1}{6}$ i $x \geq -3$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczba 3,05 i liczba do niej przeciwna należą do zbioru zaznaczonego na osi.	P	F
Liczba $-\frac{4}{7}$ i liczba do niej odwrotna należą do zbioru zaznaczonego na osi.	P	F

Zadanie 9. (0–1)

Punkty $K = (5, -5)$, $L = (8, -5)$ i $N = (5, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami prostokąta.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Brakujący wierzchołek ma współrzędne

- A. (8, 4) B. (5, -8) C. (5, -4) D. (8, -4)

Zadanie 10. (0–1)

Z cyfr 1, 3 i 5 Magda utworzyła wszystkie liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wszystkie liczby utworzone przez Magdę są podzielne przez 9.	P	F
Dwie liczby utworzone przez Magdę są podzielne przez 5.	P	F

Zadanie 11. (0–1)

Jeden z kątów wewnętrznych trójkąta ma miarę α , drugi ma miarę o 30° większą niż kąt α , a trzeci ma miarę trzy razy większą niż kąt α .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Trójkąt ten jest

- A. równoboczny B. równoramienny C. rozwartokątny D. prostokątny

Zadanie 12. (0–1)

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Do otrzymania 6 kg pięcioprocentowego roztworu soli kuchennej potrzebujemy 20 dag soli kuchennej.	P	F
Po wsypaniu 15 g cukru do 235 g wody otrzymamy sześcioprocentowy roztwór.	P	F

Zadanie 13. (0–1)

Za 3 lata Zosia będzie miała 2 razy więcej lat niż 7 lat temu.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obecnie Zosia ma

- A. 12 lat B. 14 lat C. 17 lat D. 19 lat

Zadanie 14. (0–1)

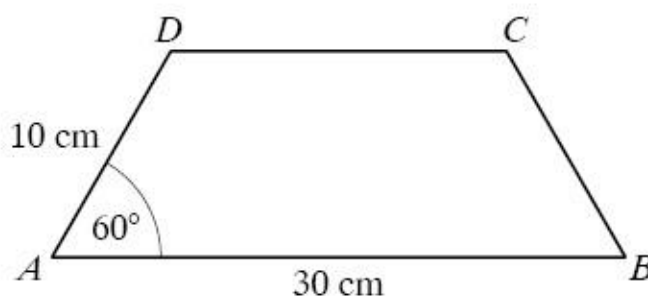
Równoległobok podzielono wzdłuż przekątnej o długości 11 cm na dwa przystające trójkąty. Obwód każdego z tych trójkątów jest równy 31 cm.

Jaki obwód ma ten równoległobok? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 40 cm B. 62 cm C. 20 cm D. 54 cm

Zadanie 15. (0–1)

Czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole trapezu $ABCD$ jest równe

- A. 150 cm^2 B. $125\sqrt{3} \text{ cm}^2$ C. 250 cm^2 D. $250\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Zadanie 16. (0–1)

Stosunek miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 2:3:5.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

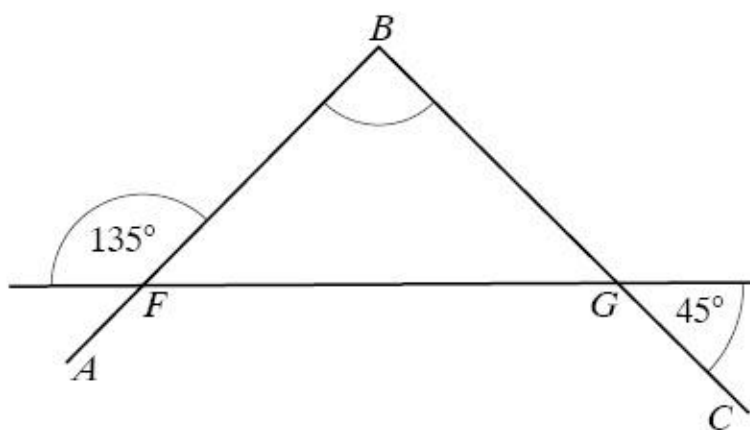
Różnica między miarą największego i najmniejszego z kątów tego trójkąta wynosi

- A. 36° B. 90° C. 18° D. 54°

Obwód czworokąta wynosi 60 cm, a długości jego boków wyrażają się kolejnymi liczbami parzystymi.

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines forming small squares across the entire page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Ramiona kąta ABC przecięto prostą FG .



A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines forming small squares across the entire page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



ODPOWIEDZI I WSKAZÓWKI

Uwaga! Pełne odpowiedzi do wszystkich zadań wraz z etapami dochodzenia do wyniku są dostępne na www.platforma.operon.pl

I. LICZBY

1. DZIAŁANIA NA LICZBACH

Ćwiczenie do przykładu

1. AC; 2. B; 3. D; 4. PFFP; 5. A; 6. B; 7. C; 8. a) $-27 + 23 = -4$, b) $18 - (-5) = 23$, c) $\left(-2\frac{1}{8}\right) \cdot 24 = -51$, d) $\frac{7}{8} : (-3,5) = -\frac{1}{4}$;
9. o $3\frac{1}{6}$.

Zadania

10. A; 11. A; 12. BD; 13. C; 14. C; 15. AC; 16. PF; 17. D; 18. FFPF; 19. NC; 20. 380 m^2 ; 21. $-1\frac{3}{7}$; 22. 33,15 zł; 23. 10;
24. Piotr, o 30 więcej; 25. $-\frac{5}{8}, -\frac{2}{3}$; 26. $c < b < e < a < d$; 27. 40,15 l, 199,95 zł.

2. POTĘGI I PIERWIĄSTKI

Ćwiczenie do przykładu

28. C; 29. PF; 30. NA; 31. D; 32. D; 33. C; 34. A; 35. B; 36. A; 37. D; 38. AD.

Zadania

39. C; 40. D; 41. BD; 42. A; 43. C; 44. FPPF; 45. NB; 46. D; 48. a) 7^7 , b) 3^5 , c) 5^{10} , d) 3^7 , e) 13, f) 3, g) $\frac{3}{4}$, h) -2; 49. a) 5, 8,
b) 64, 169, $\frac{9}{13}$; 50. a) $12\sqrt{6} \text{ cm}^2$, b) 270 dm^2 , c) 72 cm^3 ; 51. 3; 52. b, a, c; 53. a) 4, b) $6 + 3\sqrt{3}$; 54. a) $x = 5\sqrt{2}$, b) $x = 7$,
c) $x = 2^{10}$, d) $x = 25$; 55. a) 30, b) 45, c) 7, d) 3; 56. 3^{3^3} jest 3^{18} razy większa od liczby $(3^3)^3$; 57*. 10^{m-1} , 100.

3. PROCENTY

Ćwiczenie do przykładu

58. 31,6%; 59. D; 60. D; 61. PFFP; 62. C; 63. C; 64. AC; 65. D; 66. PP; 67. B.

Zadania

68. AD; 69. B; 70. B; 71. NA; 72. BC; 73. B; 74. TB; 75. PFP; 76. 185 km; 77. dwóch; 78. 500 m^2 ; 79. $2\frac{2}{3} \text{ min}$; 80. 59,40 zł;
81. dziewczęta stanowią 150%, chłopcy $66\frac{2}{3}\%$; 82. cena spodni 172,80 zł, po jednokrotnej obniżce 168 zł; 83. 70 zł;
84*. ok. 1176 kg.

4. OŚ LICZBOWA I UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

Ćwiczenie do przykładu

85. B; 86. $(-1, -2,5)$, $(1,5, -1)$, $(-0,5, 1,5)$; 87. B; 88. D; 89. A; 90. C; 91. ODCIĘTA; 92. B; 93. 22 j.

Zadania

94. C; 95. C; 96. BC; 97. D; 98. D; 99. B; 100. C; 101. BD; 102. TC; 103. PFPF; 104. a) 8 liczb, b) 6 liczb, c) 12 liczb,
d) 7 liczb, e) 9 liczb; 105. $A \approx 2,35$, $B \approx 2,39$, $C \approx 2,44$; 106. $A = (-14, 4)$, $B = (8, 0)$; 107. -2; 8; $\frac{1}{2}$; 108. 9; $4\frac{1}{3}$; $3; 1\frac{3}{5}$; 0;
-1; -2,5; $-3\frac{1}{2}$; 110. a) $AB = 8 \text{ j.}$, b) $CD = 5 \text{ j.}$, c) $EF = 1,5 \text{ j.}$, d) $GH = 3,1 \text{ j.}$

5. STATYSTYKA

Ćwiczenie do przykładu

111. 800 zł; 112. a) 25 min, b) jedzie 3 km, idzie 1,5 km, c) 24 km/h; 113. PFPF; 114. C; 115. D; 116. B; 117. a) II, b) marcu,
kwietniu, maju, czerwcu, lipcu i sierpniu; c) 6800 zł; 118. B; 119. BD; 120. B.

Zadania

121. A; 122. D; 123. C; 124. BC; 125. PFPF; 126. A; 127*. TC; 128. BD; 129. 20%; 130. a) 5 godz., b) 30%; 131. a) 2920 zł,
b) 80%; 132. a) najniższy 5.03, najwyższy 10.03, b) 2345 zł, c) 2330 zł; 133. a) 15, po 5 mieszkań, b) 48, c) 3, d) $33\frac{1}{3}\%$;
134. 24 lata; 135. a) 2014 rok, b) 1140, c) nie można stwierdzić.

6. ZADANIA EGZAMINACYJNE – TESTY

136. A; 137. FP; 138. AC; 139. B; 140. druga oferta, 7,50 zł; 141. AD; 142. PF; 143. D; 144. TC; 145. A; 146. A; 147. B;
148. TB; 149. PP; 150. 55%; 151. o 7 cm^2 ; 152. 14 700 zł; 153. A; 154. FP; 155. BD; 156. B; 157. $C = (-2, 2)$, $D = (-4, -2)$;
158. Tylko liczby 29, 92, 36 i 63.

II. ALGEBRA

1. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

Ćwiczenie do przykładu

159. PF; 160. D; 161. a) $4x^2 - 2x - 5$, b) $-5x^2 + 2x + 1$, c) $x^2 + 4$, d) $-3x^4 + 2x^3 + 15x^2 - 10x$; 162. A; 163. D; 164. FPFP; 165. A; 166. NB; 167. C; 168. $(10a + b) + (100a + b) = 2(55a + b)$.

Zadania

169. D; 170. B; 171. BC; 172. A; 173. D; 174*. A; 175. C; 176. C; 177. $6x - 8$, $3x - 9$, $9x^2 - 81$; 178. a) $0,5a^2 + 7a + 20$, b) $x^2 + 6x + 9$; 179. a) $3a^2 - 3a - 1$, b) $-5a^2 + 4a + 5$, c) $-4a^2 - a + 6$, d) $-3a^4 + 5a^2 + 6a^3 - 10a$; 180. a) $3n$, gdzie n liczba naturalna, b) $4n + 3$, gdzie n liczba naturalna, c) $11n + 8$, gdzie n liczba naturalna; 181. $4x + 2y$; 182. a) $6x^2 + 36x + 54$, b) $2x^3 + 3x^2 - 2x$; 183. a) $100 - 0,8x - 0,5y$, b) 56 zamkniętych, 15 otwartych; 184. Liczba jest nieparzysta, ponieważ jest to liczba postaci $2k + 1$, gdzie $k = n^2 - 9$; 185. 25 zł; 186. $2n + 1 + 2n + 3 = 4n + 4 = 2(2n + 2)$, gdzie n liczba naturalna.

2. RÓWNANIA

Ćwiczenie do przykładu

187. B; 188. 6 lat; 189. 60; 190. FPFP; 191. $c = \frac{6}{a+b}$; 192. D; 193. A; 194. $\frac{2}{4}$; 195. 42; 196. 9 i 15.

Zadania

197. C; 198. A; 199. B; 200. AD; 201. A; 202. B; 203. NC; 204. B; 205. D; 206. C; 207. D; 208. BC; 209. 30, 36, 42, 48; 210. 35; 211. 25, 10; 212. 17,85 zł; 213. 28,50 zł; 214. 36 zł i 40 zł.

3. ZADANIA EGZAMINACYJNE – TESTY

215. D; 216. B; 217. FP; 218. BC; 219. D; 220. 14 l, 1 l; 221. PF; 222. AC; 223. PP; 224*. TC; 225. D; 226. C; 227. B; 228. A; 229. B; 230. 105 zł, 0,40%; 231. 62; 232. 4 godz., 5 godz.; 233. C; 234. PF; 235. AC; 236. C; 237. $(2n+1)^2 - 1 = (2n+1)(2n+1) - 1 = 4n^2 + 2n + 2n + 1 - 1 = 4n^2 + 4n = 4(n^2 + n)$ (gdzie n liczba naturalna), jest to liczba podzielna przez 4, ponieważ w zapisie tej liczby w postaci iloczynu czynników jest czynnik 4; 238. 27.

III. GEOMETRIA

1. KĄTY I TRÓJKĄTY

Ćwiczenie do przykładu

239. FPFP; 240. Wszystkie kąty trójkąta KLM mają jednakowe miary równe 60° , więc trójkąt ten jest równoboczny; 241. AC; 242. C; 243. 12 cm, 15 cm, 18 cm; 244. D; 245. D.

Zadania

247. C; 248. B; 249. TC; 250. BD; 251. C; 252. B; 253. A; 254. A; 255. C; 256. TC; 257. $157,5^\circ$; 258. 8 cm; 259. 70° , 110° ; 261. 36° , 90° , 54° ; 262. 15 cm; 263. Skoro $AD = DE = EB$, więc $P_1 = P_2 = P_3$.

2. CZWOROKĄTY

Ćwiczenie do przykładu

264. C; 265. D; 266. BD; 267. FPFP; 268. FP; 269. 30 000 m²; 270. A; 271. FF; 272. 250 płytek.

Zadania

273. PP; 274. D; 275. BC; 276. PP; 277. B; 278. TA; 279. BC; 280. A; 281. A; 282. 45 cm²; 283. 108 cm²; 284. 24; 285. 18 cm; 287. 51° , 51° , 129° , 129° ; 288. 17,16 dm²; 290. 37,5 cm²; 291. 10 cm; 292. 0,74 m².

3. TWIERDZENIE PITAGORASA

Ćwiczenie do przykładu

293. BC; 294. D; 295. FF; 296. D; 297. B; 298. C; 299. 600 cm²; 300. $15\sqrt{39}$ cm².

Zadania

301. FPFP; 302. D; 303. AD; 304. D; 305. NC; 306. C; 307. C; 308. B; 309. BD; 310. 8 m; 311. 70 cm, 300 cm²; 312. $(6 + 12\sqrt{2})$ j., 21 j²; 313. 0,9 m; 314. 13 km; 315. $40\sqrt{3}$ cm²; 316. $(12 + 6\sqrt{2})$ cm, 18 cm²; 318. $144\sqrt{2}$ cm².

4. WIEŁOKĄTY, KOŁA I OKRĘGI

Ćwiczenie do przykładu

319. FPFP; 320. C; 321. 13 m²; 322. 36%; 323. $(72 - 18\pi)$ cm², $6\pi\sqrt{2}$ cm; 324. A; 325. D; 326. BC; 327. BD; 328. C.

Zadania

329. B; 330. B; 331. A; 332. AC; 333. D; 334. NA; 335. A; 336. FPFP; 337. 44,76 m²; 338. 3 cm; 339. 29 600 zł; 340. 2 razy;

341. 18 cm, $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm².

5. GRANIASTOSŁUPY

Ćwiczenie do przykładu

342. B; 343. PFPP; 344. AC; 345. A; 346. $(48\sqrt{3} + 48) \text{ cm}^2$; 347. 390 cm^3 ; 348. C; 349. PPFP; 350. $5\sqrt{3} \text{ cm}$.

Zadania

351. A; 352. D; 353. B; 354. BD; 355. C; 356. D; 357. C; 358*. TA; 359. BC; 360. 211 cm; 361. a) $24\sqrt{3} \text{ cm}^3$, b) 240 cm^3 ; 362. 4:9, 8:27; 363. $(8\sqrt{3} + 48) \text{ cm}^2$, $16\sqrt{3} \text{ cm}^3$; 364. 32 cm^3 ; 365*. $(25\sqrt{3} + 120) \text{ cm}^2$; 366. 1, 4.

6. OSTROSLUPY

Ćwiczenie do przykładu

367. D; 368. A; 369. D; 370. B; 371. $144\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 372. $31,5 \text{ cm}^3$; 373. B; 374. 1800 cm^3 ; 375. 96 dm^2 .

Zadania

376. C; 377. BC; 378. D; 379. C; 380. BD; 381. FFPP; 382. A; 383. B; 384. NA; 385. BD; 386. $60\sqrt{3} \text{ cm}^3$; 387. $382,5 \text{ cm}^2$; 388. $800,08 \text{ cm}^2$; 389. 64 cm^2 ; 390. $(16 + 4\sqrt{2} + 8\sqrt{5}) \text{ cm}$, $21\frac{1}{3} \text{ cm}^3$; 391. $\frac{128\sqrt{5}}{3} \text{ cm}^3$.

7. ZADANIA EGZAMINACYJNE – TESTY

392. B; 393. TC; 394. B; 395. PF; 396. 30 cm^2 ; 397. PF; 398. D; 399. C; 400. C; 401. AD; 402. A; 403. PF; 404. PP; 405. C; 406. D; 407. A; 408. trójkąty ABE i ADF są przystające, czyli $AE = AF$; 409. 64 cm^2 ; 410. 12 dm^3 ; 411. $21,5 \text{ cm}^2$; 412. A; 413. FF; 414. $88,8 \text{ m}^2$.

IV. OBLICZENIA PRAKTYCZNE

1. OBLICZENIA ZEGAROWE I KALENDARZOWE

Ćwiczenie do przykładu

415. AD; 416. C; 417. a) 16 godz. 47 min, b) 16 godz. 19 min; 418. 20 lat; 419. a) 2 l, b) 4 godz.; 420. a) 16 lat, b) 10 lat, c) o 8 lat; 421. A; 422. 7,5 godz.

Zadania

423. A; 424. B; 425. PPPF; 426. A; 427. AC; 428. B; 429. D; 430. 1, 2, 4, 6; 431. D; 432. D; 433. NA; 434. B; 435. FFPP; 436. B; 437. 64 min; 438. Zuzia; 439. tak; 440. 56 min; 441. a) 90 godz., b) 3.

2. W SKLEPIE I W BANKU

Ćwiczenie do przykładu

442. D; 443. PF; 444. 120 euro; 445. A; 446. 11 050 zł; 447. B; 448. A; 449. tak; 450. 8500 zł; 451. C.

Zadania

452. C; 453. PP; 454. C; 455. A; 456. B; 457. AC; 458. B; 459. FP; 460. TB; 461. D; 462. 116 zł; 463. o 6%; 464. 168,75 zł; 465. oferta II, o 614,20 zł; 466. 3600 zł; 467. oprocentowanie lokaty A – 3,2%, B – 2,8%; 468. 45 zł.

3. DROGA, PRĘDKOŚĆ, CZAS, SKALA

Ćwiczenie do przykładu

469. C; 470. a) $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; b) 5 km; c) 27 min; 471. ponieważ prędkość, z jaką jechała pani Judyta motorem, wynosiła $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, podczas gdy prędkość, z jaką jechał pan Ryszard samochodem, to $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; 472. C; 473. 18 mm na 9 mm; 474. C; 475. AC; 476. D.

Zadania

477. FP; 478. NA; 479. B; 480. D; 481. NB; 482. A; 483. PPPF; 484. TB; 485. A; 486. PPFF; 487. BC; 488. 2 cm; 489. a) 13 km, b) 6,5 min; 490. długość drogi z Miastka do Kolonii wynosiła 45 km, z Kolonii do Siedliska 30 km, a długość całej drogi to 75 km; 491. a) 6 s, b) 20 m, 75 m, c) $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; 492. a) 2,5 m, b) 16 s, c) $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; 493. 13 km; 494. a) 1:500 000, b*) $9,84 \text{ cm}^2$; 495. 2 h.

4. KOMBINATORYKA I PRAWDOPODOBIENSTWO

Ćwiczenie do przykładu

496. FPPF; 497. C; 498. B; 499. A; 500. $p = \frac{2}{3}$; 501. PFPP; 502. mniejsze niż $\frac{1}{3}$.

Zadania

503. C; 504. PFFP; 505. D; 506. D; 507. A; 508. PPPF; 509. AC; 510. AC; 511. A; 512. B; 513. D; 514. NB; 515. zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A – wyrzucenie dokładnie raz ściany zielonej: (c, z), (z, c); zdarzenia sprzyjające zdarzeniu B – wyrzucenie dwa razy ściany czerwonej: (c, c); z większym prawdopodobieństwem zachodzi zdarzenie A; 516. $p = \frac{1}{4}$; 517. $p = \frac{1}{2}$; 518. a) $p = \frac{1}{3}$, b) $p = \frac{25}{74}$; 519. $p = \frac{1}{4}$; 520*. $p = \frac{1}{2}$; 521. (O, R), (R, O), (O, O), tak; 522. II; 523. $p = \frac{1}{4}$, $p = \frac{12}{13}$.

5. WYKAŻ I UDOWODNIJ

Ćwiczenie do przykładu

524. możliwe sposoby to: 10 słoików o pojemności 0,5 litra lub 5 słoików o pojemności 0,9 litra i 1 słoik o pojemności 0,5 litra; 525. pole trójkąta AXD : $P_{AXD} = \frac{1}{6}ab$, pole trapezu $XBCD$: $P_{XBCD} = \frac{5}{6}ab$, pole trójkąta AXD stanowi 20% pola trapezu $XBCD$; 526. są trzy możliwości zakupu lotek: 5 opakowań po 6 sztuk, 3 opakowania po 4 sztuki i 3 opakowania po 6 sztuk, 6 opakowań po 4 sztuki i 1 opakowanie po 6 sztuk; 527. oznaczamy: a – cyfra dziesiątek, b – cyfra jedności; zapisujemy liczbę dwucyfrową: $10a + b$ od zapisanej liczby dwucyfrowej odejmujemy sumę jej cyfr: $10a + b - (a + b) = 9a$, otrzymana liczba $9a$ jest wielokrotnością liczby 9; 528. PF; 529. TB; 530. FP; 531. NC.

Zadania

532. FP; 533. TB; 534. PF; 535. stosunek pola powierzchni pomalowanej na białą do pola powierzchni pomalowanej na zielono i do pola powierzchni pomalowanej na żółto jest równy 1:3:5, ponieważ pola są odpowiednio równe 3 cm^2 , 9 cm^2 i 15 cm^2 ; 536. suma czterech kolejnych liczb nieparzystych: $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$, $2n + 7$ jest podzielna przez 8, ponieważ można ją zapisać w postaci $8(n + 2)$; 537. Przyjmijmy, że równość: $(k + 1)(k + 2) = 5$ zachodzi dla k będącego liczbą całkowitą. Oznacza to, że każda z liczb $k + 1$ i $k + 2$ jest liczbą całkowitą. Ponadto zauważamy, że liczby te są kolejnymi liczbami całkowitymi, gdyż różnią się od siebie o 1. Poszukujemy więc dwóch kolejnych liczb całkowitych, które w iloczynie dają 5. Liczbę 5 możemy zapisać tylko jako iloczyn liczb: 1 i 5 oraz -1 i -5 . Ale ani liczby 1 i 5, ani -1 i -5 nie są kolejnymi liczbami całkowitymi. Wobec tego nie ma liczb całkowitych, dla których prawdziwa jest równość: $(k + 1)(k + 2) = 5$; 538. miary dwóch kątów utworzonego trójkąta DCE wynoszą 75° i 15° , czyli trzeci kąt ma miarę 90° , kąt AEB jest kątem prostym; 539. oznaczamy długość boku EB trójkąta EBC przez x , a wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C na bok EB przez h ; wyznaczamy: $P_{EBC} = \frac{x \cdot h}{2}$ i $P_{ABCD} = 2xh$, zatem $P_{EBC} = \frac{1}{4}P_{ABCD}$; 540. trójkąty HAD i BED są przystające na mocy cechy bkb ; 541. wszystkie liczby dwucyfrowe, które utworzymy z cyfr a i b różnych od zera to: $10a + b$, $10b + a$, $11a$, $11b$; suma tych liczb jest podzielna przez 22, ponieważ możemy ją zapisać w postaci $22(a + b)$; 542. tylko liczby 26, 62, 34 i 43 spełniają warunki zadania; 543. sumę trzech kolejnych liczb naturalnych: n , $n + 1$, $n + 2$ możemy zapisać $3(n + 1)$, jest więc podzielna przez 3; 544. Oznaczmy $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ADC = \angle ACD$ oraz $\delta = \angle BEC = \angle BCE$, miara kąta DAC jest równa $180^\circ - \alpha = 180^\circ - 2\gamma$, stąd $\alpha = 2\gamma$, miara kąta EBC jest równa $180^\circ - \beta = 180^\circ - 2\delta$, stąd $\beta = 2\delta$, ponieważ $\alpha + \beta = 90^\circ$, więc $\gamma + \delta = 45^\circ$, miara kąta DCE : $\gamma + \delta + 90^\circ = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$; 545. Oznaczmy trapez $ABCD$ i odcinki $AB = a$, $AD = h$, $DB = f$, $DC = b$ oraz $AC = e$. Z twierdzenia Pitagorasa zapisujemy dla trójkątów ABD i ACD $h^2 + a^2 = f^2$ i $h^2 + b^2 = e^2$, z obu równań wyznaczamy h^2 , otrzymujemy równość $f^2 - a^2 = e^2 - b^2$ przekształcamy do postaci $f^2 - e^2 = a^2 - b^2$; 546*. szukane liczby to 27, 29, 31 i 33; 547*. zapisujemy kolejne potęgi liczby 3: 3^n , 3^{n+1} , 3^{n+2} , suma tych liczb jest równa $3^n \cdot 13$ i jest podzielna przez 13; 548*. oznaczamy dwie kolejne liczby naturalne: n , $n + 1$; po przekształceniu $n(n + 1) + (n + 1)$ otrzymaliśmy kwadrat liczby naturalnej $(n + 1)^2$.

6. ZADANIA EGZAMINACYJNE – TESTY

549. C; 550. A; 551. C; 552. C; 553. BC; 554. w pudełku jest 5 kul czerwonych; 555. FF; 556. B; 557. D; 558. D; 559. B; 560. FF; 561. A; 562. B; 563. PP; 564. NC; 565. takich liczb jest 4; 566. na podstawie cechy bkb trójkąty EAF , FBG , GCH , HDE są przystające, a więc czworokąt $EFGH$ ma wszystkie boki równe, czyli jest rombem; 567. powierzchnia podłogi wynosi $31,5 \text{ m}^2$; 568. BD; 569. A; 570. AC; 571. Maja może kupić 80 dag ciasteczek; 572. po 15 sekundach Kuba dogoni Franka.

V. PRZYKŁADOWE ARKUSZE EGZAMINACYJNE

Arkusz I

1. D; 2. AC; 3. C; 4. B; 5. PP; 6. C; 7. PP; 8. A; 9. D; 10. C; 11. FF; 12. FP; 13. TB; 14. B; 15. B; 16. D; 17. 30, 27, 24, 21; 19. 90° , 45° , 135° , 90° ; 20. 28 l, 8 l; 21. 3,2%; 22. co najwyżej 360 klocków.

Arkusz II

1. PF; 2. B; 3. C; 4. A; 5. D; 6. A; 7. D; 8. PP; 9. PF; 10. A; 11. C; 12. C; 13. TA; 14. PP; 15. FP; 16. AC; 18. 12; 19. 24; 20. 30 lat; 21. 1120 cm^2 ; 22. $P = 24 \text{ cm}^2$.

Arkusz III

1. PF; 2. B; 3. D; 4. B; 5. TB; 6. C; 7. AC; 8. FP; 9. A; 10. PP; 11. D; 12. FP; 13. C; 14. A; 15. B; 16. D; 17. 438 zł, 255,50 zł; 18. taka sama; 19. 18 cm; 21. 8 cm; 22. 50 dni.