NOWOŚĆ
2023

MATEMATYKA W PUNKT



Oznaczono zmiany i wykreślenia

E-book na eduranga.pl

PODSTAWA 2024

WSiP

Podręcznik
Szkoła podstawowa

7

Drogi WSiP,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby być zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to,
- że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regulame książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę, w której papier nie jest bezczelnie marnowany dla pieniędzy.
Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

Spis treści

I. Liczby i działania

1. Dodawanie i odejmowanie liczb wymiernych 8
2. Rozwinięcia dziesiętne ułamków 13
3. Zaokrąglanie liczb 17
4. Mnożenie i dzielenie liczb wymiernych 22
5. Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych 28

Podsumowanie działu I 32

II. Obliczenia procentowe

1. Proporcje 38
2. Procenty i ułamki 44
3. Diagramy procentowe 48
4. Obliczanie procentu danej liczby 54
5. Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent 60
6. Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba 64
7. O ile procent więcej, o ile procent mniej 68
8. Zastosowanie procentów w praktyce 74

Podsumowanie działu II 80

III. Potęgi

1. Potęga o wykładniku naturalnym 88
2. Iloczyn i iloraz potęg o jednakowych podstawach 93
3. Potęgowanie iloczynu i ilorazu 96
4. Potęgowanie potęgi 99
5. Działania na potęgach 102
6. Notacja wykładnicza 105

Podsumowanie działu III 110

IV. Pierwiastki

1. Pierwiastek kwadratowy 116
2. Działania na pierwiastkach kwadratowych 120
3. Pierwiastek sześcienny 127
4. Działania na pierwiastkach sześciennych 131
5. Szacowanie pierwiastków 136
6. Działania na potęgach i pierwiastkach 140

Podsumowanie działu IV 144

V. Wyrażenia algebraiczne

1. Jednomian i suma algebraiczna 150
2. Redukcja wyrazów podobnych 155
3. Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych 160
4. Mnożenie jednomianów przez sumy algebraiczne 164
5. Mnożenie sum algebraicznych 169

Podsumowanie działu V 172

VI. Równania

1. Liczby spełniające równanie 178
2. Rozwiązywanie równań 182
3. Zadania tekstowe z wykorzystaniem równań 188
4. Przekształcanie wzorów 193

Podsumowanie działu VI 196

VII. Figury płaskie

1. Proste i odcinki 202
2. Kąty i ich rodzaje 205
3. Trójkąty i ich własności 210
4. Cechy przystawania trójkątów 216
5. Twierdzenie Pitagorasa 221
6. Trójkąt o kątach 45°, 45°, 90° 226
7. Trójkąt o kątach 30°, 60°, 90° 230
8. Dowody w geometrii 234

Podsumowanie działu VII 238

VIII. Wielokąty

1. Prostokąt i kwadrat, jednostki pola 246
2. Pole trójkąta 251
3. Równoległobok i romb 257
4. Trapez 263
5. Kąty w wielokątach, pola wielokątów 269
6. Wielokąty foremne 276

Podsumowanie działu VIII 282

Odpowiedzi do zadań 287

treści usunięte wg podstawy programowej 2024

Jak korzystać z podręcznika

W trakcie lekcji

- Pod każdym tematem znajdziesz cele lekcji.

A to ciekawe

Dodatkowe informacje poszerzą twoją wiedzę na dany temat.

Tu znajdziesz najważniejsze wzory, definicje i twierdzenia.

Dobre rady pomogą ci uniknąć błędów podczas rozwiązywania zadań.

Rozwiąż zadania

1. Zadania o podwyższonym stopniu trudności.
2. Zadania, które można rozwiązać z użyciem kalkulatora.
3. Zadania typu egzaminacyjnego.

Sprawdź, co umiesz!

1. Zadania sprawdzające na koniec tematu.
2. Zadania zamknięte i otwarte.

Pamiętaj!
Rozwiązania zadań zapisuj w zeszycie przedmiotowym.

Na koniec działu

Powtórz wiadomości

Krótkie powtórzenie całego działu.

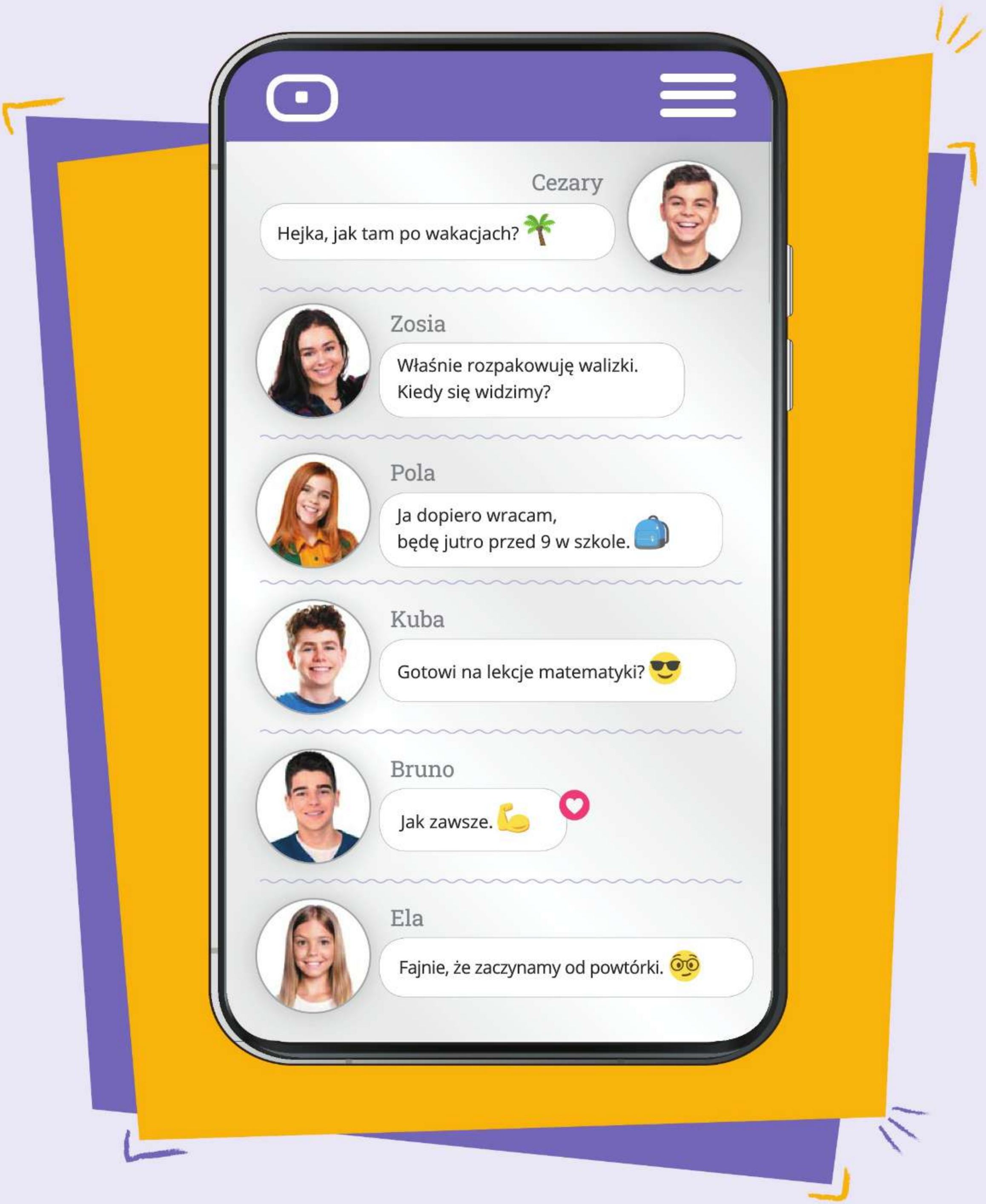
Sprawdź umiejętności

Zadania sprawdzające z całego działu.

Potrenuj – zadania uzupełniające

Zadania uzupełniające do wszystkich tematów z działu.

Wracamy po wakacjach



DZIAŁ I

LICZBY I DZIAŁANIA

1 | 0,875

$\frac{7}{8}$ | $\frac{5}{4}$

1,25 | $\frac{1}{3}$

0,(3) | 2+2·2

To ci się przyda!

Ułamki zwykłe

Ułamki dziesiętne

Kolejność wykonywania działań

1. Dodawanie i odejmowanie liczb wymiernych

- Skracanie i rozszerzanie ułamków zwykłych
- Dodawanie i odejmowanie liczb wymiernych
- Porównywanie ułamków zwykłych

Do zbioru liczb naturalnych N należą liczby: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, a do zbioru liczb całkowitych Z liczby: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ Można zauważyć, że na przykład liczby, które mają postać ułamka właściwego, nie należą ani do zbioru liczb naturalnych, ani do zbioru liczb całkowitych. Do jakiego zbioru należą zatem liczby tej postaci? Liczby te należą do zbioru liczb wymiernych, który będziemy oznaczać jako Q.

Liczbą wymierną nazywamy każdą liczbę, którą można przedstawić w postaci ułamka zwykłego, czyli: $\frac{a}{b}$, gdzie a jest dowolną liczbą całkowitą i b jest liczbą całkowitą różną od zera. Przykłady liczb wymiernych: $0;\ 3;\ -2;\ \frac{1}{7};\ -5\frac{2}{3};\ 0{,}28;\ 3{,}21$.



Każda liczba:
- **naturalna** jest **całkowita**,
- **całkowita** jest **wymierna**,
- **naturalna** jest **wymierna**.

Przykład 1.

Przedstaw ułamek $\frac{306}{432}$ w postaci nieskracalnej.

Skrócimy ułamek przez 2, ponieważ licznik i mianownik ułamka są liczbami parzystymi. Następnie skrócimy ułamek przez 9, ponieważ suma cyfr liczby w liczniku ułamka oraz suma cyfr liczby w mianowniku ułamka są podzielne przez 9.

$$\frac{306}{432} \overset{:2}{=} \frac{153}{216} \overset{:9}{=} \frac{17}{24}$$

Ćwiczenie 1.

Przedstaw ułamek w postaci nieskracalnej.

a) $\frac{80}{144}$ **b)** $\frac{108}{288}$ **c)** $\frac{98}{504}$ **d)** $\frac{378}{630}$

Przykład 2.

Oblicz. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{7}$

Sprowadzimy ułamki do wspólnego mianownika. Następnie wykonamy dodawanie.

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{7}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}+\frac{4\cdot 3}{7\cdot 3}=$$
$$=\frac{14}{21}+\frac{12}{21}=\frac{26}{21}=1\frac{5}{21}$$

Aby **dodać (odjąć) ułamki zwykłe o różnych mianownikach**, najpierw sprowadzamy te ułamki do wspólnego mianownika, następnie dodajemy (odejmujemy) ich liczniki, a mianownik przepisujemy.

b) $\frac{5}{6}-\frac{1}{9}=\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3}-\frac{1\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{15}{18}-\frac{2}{18}=\frac{13}{18}$

Ćwiczenie 2.

Oblicz. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}$ **b)** $\frac{5}{6}+\frac{4}{15}$ **c)** $\frac{9}{11}-\frac{4}{5}$ **d)** $\frac{2}{13}+\frac{1}{2}-\frac{7}{12}$

Przykład 3.

Oblicz. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

a) $1\frac{1}{4}+3\frac{4}{5}$

Sprowadzimy części ułamkowe do wspólnego mianownika, a następnie wykonamy dodawanie.

$$1\frac{1}{4}+3\frac{4}{5}=1\frac{1\cdot 5}{4\cdot 5}+3\frac{4\cdot 4}{5\cdot 4}=$$
$$=1\frac{5}{20}+3\frac{16}{20}=4\frac{21}{20}=5\frac{1}{20}$$

Aby obliczyć wartość tego wyrażenia, mogliśmy również zamienić liczby mieszane na ułamki niewłaściwe, a następnie sprowadzić je do wspólnego mianownika i wykonać dodawanie.

b) $6\frac{1}{6}-3\frac{2}{3}$

Zamienimy liczby mieszane na ułamki niewłaściwe i sprowadzimy je do wspólnego mianownika, a następnie wykonamy odejmowanie.

$$6\frac{1}{6}-3\frac{2}{3}=\frac{37}{6}-\frac{11}{3}=\frac{37}{6}-\frac{11\cdot 2}{3\cdot 2}=$$
$$=\frac{37}{6}-\frac{22}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$

Aby obliczyć wartość tego wyrażenia, mogliśmy również sprowadzić do wspólnego mianownika części ułamkowe i wykonać odejmowanie.

Aby dodać (odjąć) liczby mieszane:

części ułamkowe liczb sprowadzamy do wspólnego mianownika, a następnie wykonujemy dodawanie (odejmowanie)

lub

zamieniamy liczby mieszane na ułamki niewłaściwe, potem sprowadzamy je do wspólnego mianownika, a następnie wykonujemy dodawanie (odejmowanie).

Ćwiczenie 3.

Oblicz. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

a) $3\frac{2}{5}+9\frac{3}{4}$ **b)** $6\frac{5}{8}-3\frac{1}{4}$ **c)** $4\frac{2}{13}-2\frac{2}{3}$ **d)** $1\frac{3}{4}+2\frac{6}{7}-3\frac{11}{14}$

Przykład 4.

Porównaj ułamki zwykłe $\frac{3}{5}$ i $\frac{5}{9}$.

Aby porównać ułamki, sprowadzimy je do wspólnego mianownika.

$$\frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{27}{45} \qquad \frac{5 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{25}{45}$$

Jeżeli mianowniki są takie same, to większy jest ten ułamek, którego licznik jest większy.

$\frac{27}{45} > \frac{25}{45}$, więc $\frac{3}{5} > \frac{5}{9}$.

Ćwiczenie 4.

Porównaj ułamki zwykłe. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{8}$ **b)** $\frac{5}{6}$ i $\frac{7}{9}$ **c)** $\frac{6}{11}$ i $\frac{5}{9}$ **d)** $1\frac{2}{7}$ i $1\frac{3}{8}$

Przykład 5.

Oblicz.

a) $0{,}29 + 3{,}8$

Wykonamy dodawanie sposobem pisemnym.

	1		
	0,	2	9
+	3,	8	0
	4,	0	9

Otrzymaliśmy $0{,}29 + 3{,}8 = 4{,}09$.

b) $4{,}01 - 2{,}19$

Wykonamy odejmowanie sposobem pisemnym.

		9	
	3	10	11
	4,	0	1
−	2,	1	9
	1,	8	2

Otrzymaliśmy $4{,}01 - 2{,}19 = 1{,}82$.

Dodawanie (odejmowanie) liczb sposobem pisemnym polega na dodawaniu (odejmowaniu) cyfr w poszczególnych rzędach, dlatego bardzo ważne jest odpowiednie zapisanie: jedności pod jednościami, części dziesiątych pod częściami dziesiątymi itd.

Ćwiczenie 5.

Oblicz.

a) $0{,}56 + 2{,}3$ **b)** $3{,}87 - 2{,}79$ **c)** $18{,}01 - 9{,}71$ **d)** $24{,}257 + 3{,}601 - 5{,}92$

Przykład 6.

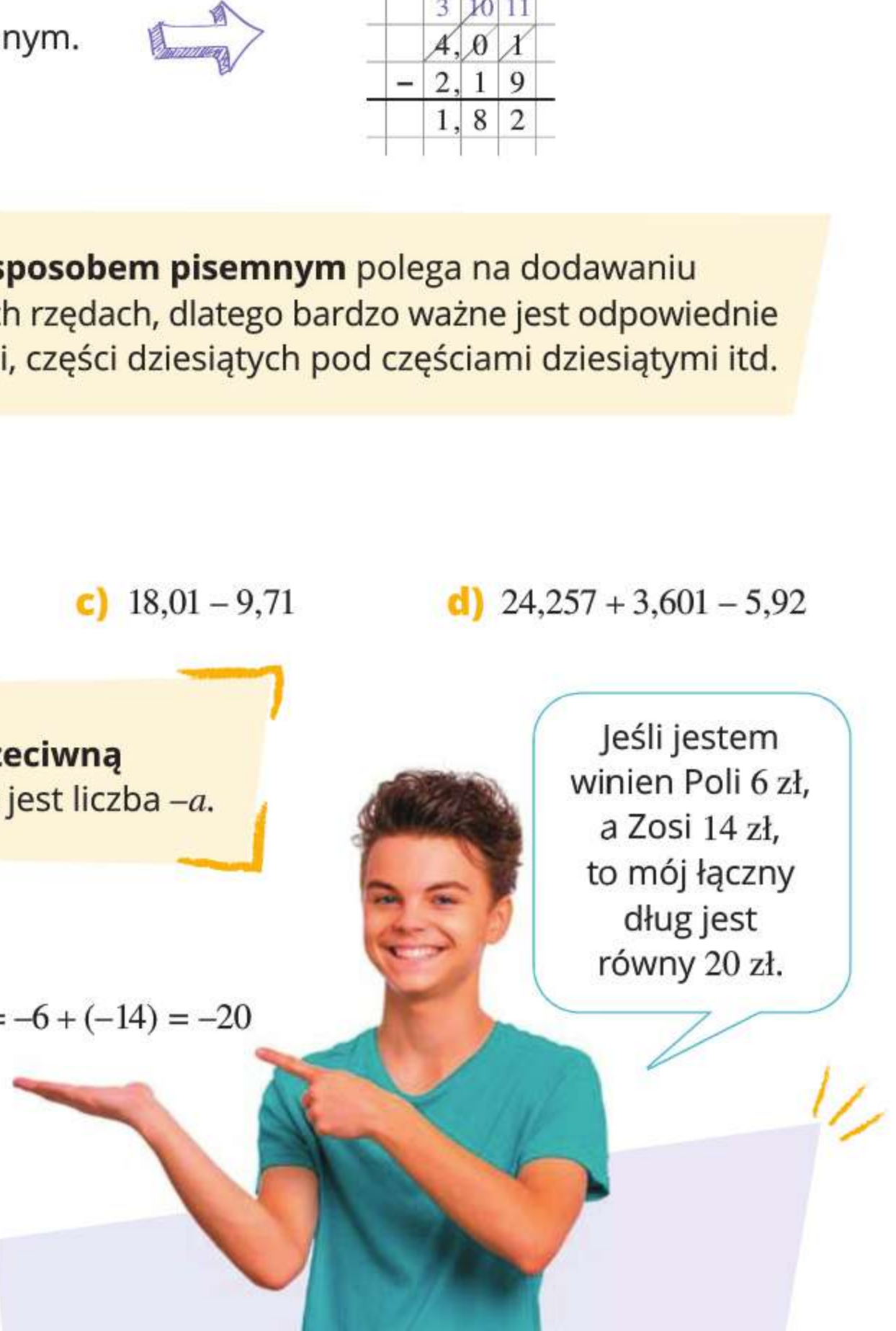
Oblicz.

a) $-6 - 14$

Odejmowanie liczby można zapisać jako dodawanie liczby do niej przeciwnej.
Liczba przeciwna do 14 to (-14).

$$-6 - 14 = -6 + (-14) = -20$$

Liczbą przeciwną do liczby a jest liczba $-a$.



b) $-8{,}2 + 14{,}5$

Skorzystamy z prawa przemienności dodawania: $a + b = b + a$.

$-8{,}2 + 14{,}5 = 14{,}5 + (-8{,}2) = 14{,}5 - 8{,}2 = 6{,}3$



c) $-3\frac{1}{2} - \left(-2\frac{1}{4}\right)$

Odejmowanie liczby można zapisać jako dodawanie liczby do niej przeciwnej.

Liczba przeciwna do $\left(-2\frac{1}{4}\right)$ to $2\frac{1}{4}$.

$-3\frac{1}{2} - \left(-2\frac{1}{4}\right) = -3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = -3\frac{2}{4} + 2\frac{1}{4}$

Skorzystamy z prawa przemienności dodawania.

$-3\frac{2}{4} + 2\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4} + \left(-3\frac{2}{4}\right) = 2\frac{1}{4} - 3\frac{2}{4} = \frac{9}{4} - \frac{14}{4} = -\frac{5}{4} = -1\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 6.

Oblicz.

a) $-9 - 8$ **b)** $-2 + 5$ **c)** $-9 + 3$ **d)** $4{,}3 - 5{,}32$ **e)** $-6\frac{2}{7} - \left(-2\frac{3}{14}\right)$

Rozwiąż zadania

1. Przedstaw ułamek w postaci ułamka nieskracalnego.

a) $\frac{24}{30}$ **b)** $\frac{420}{480}$ **c)** $\frac{125}{1000}$ **d)** $\frac{210}{252}$

2. Oblicz. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

a) $\frac{11}{23} + \frac{8}{23}$ **b)** $\frac{3}{11} + \frac{8}{11}$ **c)** $\frac{17}{45} - \frac{8}{45}$ **d)** $\frac{39}{80} - \frac{27}{80}$

3. Oblicz. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

a) $\frac{7}{9} + \frac{4}{27}$ **b)** $\frac{3}{4} - \frac{8}{13}$ **c)** $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{7}{24}$ **d)** $\frac{11}{6} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$

4. Oblicz. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

a) $3\frac{3}{8} + 1\frac{5}{6}$ **b)** $4 - 1\frac{1}{6}$ **c)** $2\frac{2}{3} + 3\frac{2}{5}$ **d)** $5\frac{5}{6} - 4\frac{5}{18}$

e) $1\frac{5}{12} - 1\frac{1}{8} + 2\frac{1}{6}$ **f)** $3\frac{2}{9} + 2\frac{5}{6} - 4\frac{1}{3}$ **g)** $1\frac{1}{4} + 2\frac{5}{9} - 1\frac{7}{18}$ **h)** $4\frac{1}{9} - 2\frac{5}{12} + 1\frac{1}{8}$

5. Porównaj ułamki zwykłe. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{5}{12}$ i $\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{5}{14}$ i $\frac{13}{35}$ **d)** $\frac{11}{13}$ i $\frac{5}{6}$

6. Oblicz.

a) $3{,}73 + 2{,}1$ **b)** $14{,}327 + 5{,}118$ **c)** $5 - 3{,}49$ **d)** $26{,}255 + 2{,}412 - 6{,}321$

7. Oblicz.

a) $-10 - 11$ **b)** $-12 + 15$ **c)** $-19 + 13$ **d)** $2 - 6\frac{1}{2}$

e) $3\frac{1}{4} - \left(-1\frac{2}{3}\right)$ **f)** $-5{,}05 + (-1{,}4)$ **g)** $-2\frac{3}{4} - \left(-5\frac{5}{6}\right)$ **h)** $-6{,}25 - (-3{,}4)$

8. Na pendrivie Kuby zdjęcia zajmują $\frac{1}{2}$ pamięci, a filmy $\frac{1}{7}$ pamięci. Czy więcej niż $\frac{1}{4}$ pamięci na pendrivie Kuby jest pusta? Uzasadnij swoją odpowiedź.

9. Pola wraz z rodzicami chce zamówić w aplikacji dania obiadowe. Koszt dostawy to 5,99 zł. Jeśli koszt zamówienia wynosi co najmniej 100 zł, to dostawa jest darmowa.

a) Czy dostawa tego zamówienia będzie darmowa? Uzasadnij swoją odpowiedź.

b) Ile złotych Pola wraz z rodzicami zapłaci za zamówienie?



10. Podaj przykład liczby wymiernej, która znajduje się na osi liczbowej między liczbami $\frac{1}{7}$ oraz $\frac{2}{7}$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Zapisz ułamek $\frac{240}{264}$ w postaci nieskracalnej.

2. Uporządkuj liczby w kolejności od największej do najmniejszej.

$\frac{3}{8}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{2}$

3. Oblicz wartość wyrażenia $2\frac{1}{4} + 1\frac{4}{9} - 3\frac{7}{18}$.

4. Dane są liczby $x = -3{,}25 - (-3{,}625)$ oraz $y = 6{,}75 + (-4{,}5)$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Liczba przeciwna do liczby x to $-0{,}375$.	**P**	**F**
Różnica $y - x$ jest równa $1{,}875$.	**P**	**F**

2. Rozwinięcia dziesiętne ułamków

- Zapisywanie ułamków zwykłych w postaci ułamków dziesiętnych
- Zapisywanie ułamków dziesiętnych w postaci ułamków zwykłych
- Porównywanie liczb

Kreska ułamkowa zastępuje znak dzielenia, ale nie od zawsze była stosowana w zapisie ułamków zwykłych. Już około 1800 r. p.n.e. starożytni Babilończycy zapisywali pismem klinowym różnorodne obliczenia na glinianych tabliczkach. Przed naszą erą ułamków zwykłych używali również Egipcjanie, Grecy czy Chińczycy. Dopiero matematycy hinduscy zaczęli zapisywać ułamki zwykłe w postaci jednej liczby nad drugą. Nie używali jednak kreski ułamkowej. Została ona wprowadzona przez Arabów. W XIII w. włoski matematyk Fibonacci (czyt. fibonaczi) rozpowszechnił ten sposób zapisu w Europie.

Ułamek zwykły ma **rozwinięcie dziesiętne skończone**, jeśli można go rozszerzyć lub skrócić, tak aby w jego mianowniku była potęga liczby 10, np.

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0{,}2; \qquad \frac{50}{200} = \frac{25}{100} = 0{,}25; \qquad \frac{3}{40} = \frac{75}{1000} = 0{,}075.$$

Przykład 1.

Zamień ułamek zwykły na ułamek dziesiętny. Ustal, jakie jest jego rozwinięcie dziesiętne.

a) $\frac{7}{8}$

Sposób I

Ułamek $\frac{7}{8}$ możemy zapisać jako $7 : 8$.

Podzielimy liczbę 7 przez liczbę 8 sposobem pisemnym.

$$\begin{array}{rrrrr} & 0, & 8 & 7 & 5 \\ \hline & 7 & : & 8 & \\ - & 0 & & & \\ \hline & 7 & 0 & & \\ - & 6 & 4 & & \\ \hline & & 6 & 0 & \\ & - & 5 & 6 & \\ \hline & & & 4 & 0 \\ & & - & 4 & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

Sposób II

Ułamek $\frac{7}{8}$ rozszerzymy, tak aby jego mianownik był równy 1000, a następnie zapiszemy go w postaci ułamka dziesiętnego.

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{875}{1000} = 0{,}875$$

Zatem $\frac{7}{8} = 0{,}875$. Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{7}{8}$ jest skończone.

Ułamek zwykły ma **rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe**, jeśli w jego postaci dziesiętnej od pewnego miejsca po przecinku powtarza się cyfra lub grupa cyfr.

$$\frac{4}{15} = 0{,}2666\ldots = 0{,}2(6)$$

rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe

okres równy 6

Cyfrę tę lub grupę cyfr nazywamy **okresem** i zapisujemy w nawiasie. Ułamek, który ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe, nazywamy **ułamkiem okresowym**.

Ułamek zwykły ma rozwinięcie dziesiętne skończone albo nieskończone okresowe.

b) $\frac{3}{11}$

Ułamek $\frac{3}{11}$ możemy zapisać jako $3 : 11$.

Podzielimy liczbę 3 przez liczbę 11 sposobem pisemnym.

```
  0,2727...
 -3 : 11
 -0
  30
 -22
   80
  -77
    30
   -22
     80
    -77
      30
```

Otrzymaliśmy $\frac{3}{11} = 0{,}2727\ldots$

Powtarzającą się grupę cyfr zapisujemy w nawiasie i nazywamy okresem, czyli $\frac{3}{11} = 0{,}(27)$.

Ułamek $\frac{3}{11}$ ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe.

Ćwiczenie 1.

Zamień ułamek zwykły na ułamek dziesiętny. Ustal, czy jego rozwinięcie dziesiętne jest skończone czy nieskończone okresowe.

a) $\frac{9}{20}$ **b)** $\frac{21}{40}$ **c)** $\frac{5}{6}$ **d)** $\frac{4}{33}$

Przykład 2.

Zamień ułamek dziesiętny na ułamek zwykły lub liczbę mieszaną.

a) $0{,}28$

Zapiszemy ułamek $0{,}28$ w postaci ułamka zwykłego o mianowniku 100, a następnie go skrócimy.

$$0{,}28 = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$$

b) $3{,}012 = 3\frac{12}{1000} = 3\frac{3}{250}$

Ćwiczenie 2.

Zamień ułamek dziesiętny na ułamek zwykły lub liczbę mieszaną.

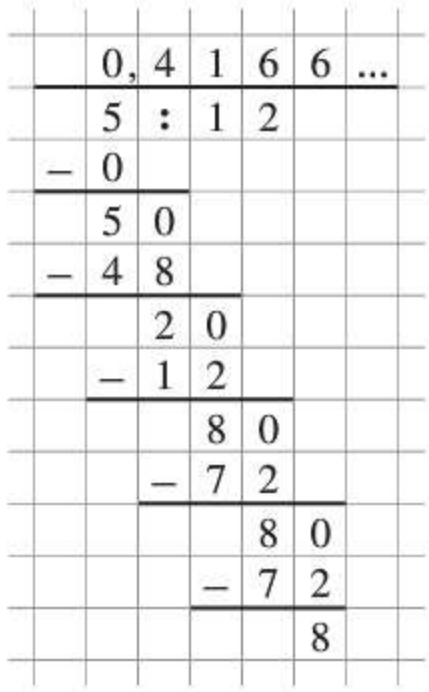
a) $0{,}6$ **b)** $0{,}46$ **c)** $2{,}55$ **d)** $16{,}004$

Przykład 3.

Porównaj liczby $\frac{5}{12}$ i $0{,}41(67)$.

Aby porównać liczby $\frac{5}{12}$ oraz $0{,}41(67)$, ułamek zwykły $\frac{5}{12}$ zamienimy na ułamek dziesiętny.





	0,	4	1	6	6	...
	5	:	1	2		
–	0					
	5	0				
–	4	8				
		2	0			
	–	1	2			
			8	0		
		–	7	2		
				8		

Otrzymaliśmy $\frac{5}{12} = 0{,}41(6)$.

Aby porównać liczby, zapiszemy kilka początkowych cyfr ich rozwinięć dziesiętnych.



$$0{,}41(6) = 0{,}416666\ldots$$
$$0{,}41(67) = 0{,}416767\ldots$$

Porównamy liczby $0{,}41(6)$ i $0{,}41(67)$.



$$0{,}416666\ldots < 0{,}416767\ldots$$
$$0{,}41(6) < 0{,}41(67)$$

Zatem $\frac{5}{12} < 0{,}41(67)$.

Ćwiczenie 3.

Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $2\frac{3}{8}$ i $2{,}37(49)$ **b)** $4\frac{2}{125}$ i $4{,}016(5)$ **c)** $5\frac{4}{9}$ i $5{,}(39)$ **d)** $7\frac{6}{55}$ i $7{,}10(91)$

Rozwiąż zadania

1. Zamień ułamek zwykły na ułamek dziesiętny. Ustal, czy jego rozwinięcie dziesiętne jest skończone czy nieskończone okresowe.

a) $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{36}{300}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{4}{125}$

e) $\frac{7}{15}$ **f)** $\frac{3}{16}$ **g)** $\frac{5}{18}$ **h)** $\frac{2}{7}$

2. Przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej.

a) $3\frac{3}{4}$ **b)** $-12\frac{21}{24}$ **c)** $-17\frac{9}{11}$ **d)** $-15\frac{8}{15}$

3. Zamień ułamek dziesiętny na ułamek zwykły lub liczbę mieszaną.

a) $0{,}58$ **b)** $0{,}06$ **c)** $2{,}12$ **d)** $3{,}135$

4. Wskaż ułamki zwykłe, które mają rozwinięcie dziesiętne skończone.

I. $\frac{2}{5}$ **II.** $\frac{8}{9}$ **III.** $\frac{7}{12}$ **IV.** $\frac{72}{80}$ **V.** $\frac{121}{125}$ **VI.** $\frac{5}{13}$

5. Oblicz.

a) $3\frac{4}{7}+5\frac{6}{7}-7{,}1$ **b)** $5{,}125-3\frac{3}{8}+2\frac{1}{3}$ **c)** $1{,}2+1\frac{3}{4}-1\frac{1}{3}$

d) $3\frac{3}{4}-\left(-2\frac{1}{8}\right)-1{,}1$ **e)** $5{,}25+(-3{,}125)+3\frac{2}{3}$ **f)** $-3{,}75-2\frac{3}{20}+2\frac{11}{30}$

6. Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $1\frac{5}{8}$ i $1{,}62(49)$ **b)** $3\frac{2}{3}$ i $3{,}(59)$ **c)** $4\frac{5}{9}$ i $4{,}(54)$ **d)** $5\frac{5}{11}$ i $5{,}4(5)$

7. Uporządkuj liczby w kolejności malejącej.

$0{,}04$ $0{,}(404)$ $0{,}00(40)$ $0{,}00(4)$ $0{,}(40)$

8. Podaj dwie przykładowe liczby wymierne, które znajdują się na osi liczbowej między podanymi liczbami.

a) $0{,}1$ i $\frac{1}{9}$ **b)** $0{,}11$ i $\frac{1}{9}$ **c)** $2{,}(3)$ i $2{,}(4)$ **d)** $5{,}0(23)$ i $5{,}02(3)$

E **9.** Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Cyfra 5 znajduje się na siódmym miejscu po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby | **A** | **B** |.

A. $2\frac{5}{11}$ **B.** $2\frac{5}{9}$

Na 2023. miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{1}{7}$ jest cyfra | **C** | **D** |.

C. 1 **D.** 4

Sprawdź, co umiesz!

1. Wskaż, która z liczb jest większa.

a) $1{,}545454$ i $1{,}(54)$ **b)** $2{,}(78)$ i $2{,}(787)$ **c)** $8{,}8(123)$ i $8{,}8(1238)$

E **2.** Dane są liczby: $3{,}234(6)$; $3{,}23(46)$; $3{,}2(346)$; $3{,}(2346)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Najmniejszą z podanych liczb jest

A. $3{,}234(6)$ **B.** $3{,}23(46)$ **C.** $3{,}2(346)$ **D.** $3{,}(2346)$

E **3.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Ułamek $\frac{11}{400}$ ma rozwinięcie dziesiętne skończone.	**P**	**F**
Rozwinięciem dziesiętnym liczby $\frac{2}{9}$ jest liczba $0{,}222$.	**P**	**F**

3. Zaokrąglanie liczb

- Zaokrąglanie liczb całkowitych
- Zaokrąglanie ułamków dziesiętnych
- Szacowanie wartości wyrażeń arytmetycznych

W codziennym życiu często zaokrąglamy liczby, np. odległości między miastami zazwyczaj podajemy z dokładnością do jednego kilometra lub do dziesięciu kilometrów. Kiedy mówimy o cenach towarów, także często je zaokrąglamy.



Zaokrąglenie

do dziesiątek

1234,768

Znajdujemy cyfrę w rzędzie, do którego zaokrąglamy.

1234,768

Patrzymy na kolejną cyfrę.

$4 < 5$

1230,000

Jeśli ta cyfra jest **mniejsza od 5**, to cyfrę w rzędzie, do którego zaokrąglamy, pozostawiamy bez zmian, a kolejne cyfry zastępujemy zerami.

do części dziesiątych

1234,768

Jeśli ta cyfra jest **większa od 5** lub **równa 5**, to cyfrę w rzędzie, do którego zaokrąglamy, zwiększamy o 1, a kolejne cyfry zastępujemy zerami.

$6 > 5$

1234,800

W ten sposób wyznaczyliśmy **zaokrąglenie liczby**.

$1234{,}768 \approx 1230$

Jeśli zaokrąglenie jest mniejsze od liczby, którą zaokrąglamy, to jest to **zaokrąglenie z niedomiarem**.

$1234{,}768 \approx 1234{,}8$

Jeśli zaokrąglenie jest większe od liczby, którą zaokrąglamy, to jest to **zaokrąglenie z nadmiarem**.

Przykład 1.

Zaokrąglij liczbę $27\,361{,}499$ do podanego rzędu. Określ, czy jest to zaokrąglenie z nadmiarem czy z niedomiarem. Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) tysięcy

$27\,361{,}499 \approx 27\,000$ – zaokrąglenie z niedomiarem, bo $27\,361{,}499 > 27\,000$

b) setek

$27\,361{,}499 \approx 27\,400$ – zaokrąglenie z nadmiarem, bo $27\,361{,}499 < 27\,400$

c) dziesiątek

$27\,361{,}499 \approx 27\,360$ – zaokrąglenie z niedomiarem, bo $27\,361{,}499 > 27\,360$

d) jedności

$27\,361{,}499 \approx 27\,361$ – zaokrąglenie z niedomiarem, bo $27\,361{,}499 > 27\,361$

e) części dziesiątych

$27\,361{,}499 \approx 27\,361{,}5$ – zaokrąglenie z nadmiarem, bo $27\,361{,}499 < 27\,361{,}5$

f) części setnych

$27\,361{,}499 \approx 27\,361{,}5$ – zaokrąglenie z nadmiarem, bo $27\,361{,}499 < 27\,361{,}5$

Zaokrąglenie do części dziesiątych jest również nazywane **zaokrągleniem do jednego miejsca po przecinku** lub **do $0{,}1$**.
Podobnie zaokrąglenie do części setnych jest nazywane **zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku** lub **do $0{,}01$**.

Ćwiczenie 1.

Zaokrąglij liczbę $3798{,}427$ do podanego rzędu. Określ, czy jest to zaokrąglenie z nadmiarem czy z niedomiarem. Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) tysięcy **b)** setek **c)** dziesiątek

d) jedności **e)** części dziesiątych **f)** części setnych

A to ciekawe

Zaokrąglenie liczby $999{,}99$ do setek, do dziesiątek, do jedności oraz do części dziesiątych jest takie samo – równe 1000.

Aby **oszacować wartość wyrażenia arytmetycznego**, wykonujemy działania na zaokrągleniach liczb, które występują w danym wyrażeniu.

Przykład 2.

Oszacuj wartość wyrażenia.

a) $6{,}96 \cdot 5 - 2{,}8$

Aby oszacować wartość podanego wyrażenia, zaokrąglimy do jedności liczby $6{,}96$ oraz $2{,}8$. ⇒ $6{,}96 \approx 7$, $2{,}8 \approx 3$

Oszacujemy wartość wyrażenia. ⇨ $6{,}96 \cdot 5 - 2{,}8 \approx 7 \cdot 5 - 3 = 35 - 3 = 32$

b) $6 \cdot 0{,}52 + 17\frac{8}{9} : 2$

Aby oszacować wartość podanego wyrażenia, zaokrąglimy liczbę $0{,}52$ do części dziesiątych, a liczbę $17{,}(8)$ do jedności. ⇨ $0{,}52 \approx 0{,}5$

$17\frac{8}{9} = 17{,}(8) \approx 18$

Oszacujemy wartość wyrażenia. ⇨ $6 \cdot 0{,}52 + 17\frac{8}{9} : 2 \approx 6 \cdot 0{,}5 + 18 : 2 =$

$= 3 + 9 = 12$

Ćwiczenie 2.

Oszacuj wartość wyrażenia.

a) $28 : 0{,}9 - 1{,}8 \cdot 4$ **b)** $36{,}1 \cdot 1{,}9 + 3 \cdot 4{,}9$ **c)** $4\frac{1}{10} \cdot 5 - 2\frac{6}{7} \cdot 3$

Rozwiąż zadania

1. Zaokrąglij liczby do podanego rzędu. Określ, czy jest to zaokrąglenie z nadmiarem czy z niedomiarem. Uzasadnij swoją odpowiedź.

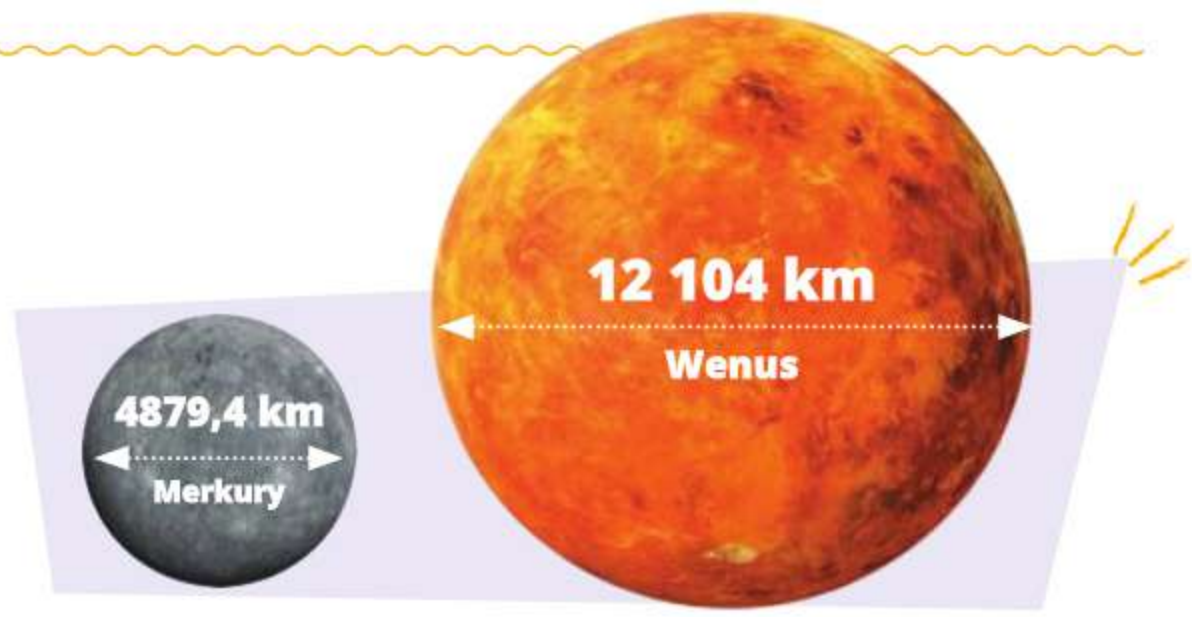
a) 67; 212; 74; 99 do dziesiątek

b) 7856; 5428; 10 074; 99 899 do setek

c) 23 898; 213 450; 67 342; 19 999 do tysięcy

d) 103 200; 518 298; 1 287 035; 3 995 565 do dziesiątek tysięcy

2. Na ilustracji przedstawiono planety Merkury i Wenus. Zaokrąglij długości ich średnic do setek kilometrów.



3. Zaokrąglij liczbę do jedności.

a) 68,28 **b)** 43,751 **c)** 34,171 **d)** 121,75 **e)** 91,618 **f)** 2,99

4. Zaokrąglij podane liczby do części:

a) dziesiątych: 11,38; 12,412; 82,19; 117,93, **b)** setnych: 8,128; 15,292; 72,281; 88,1983.

5. Oszacuj wartość wyrażenia arytmetycznego.

a) $6 \cdot 2{,}97 - 4{,}02 \cdot 2$ **b)** $25 : 5{,}1 + 4{,}99 \cdot 3$ **c)** $1{,}92 \cdot 3 - 0{,}01 \cdot 10$

6. Odczytaj z ilustracji, co chce kupić Zosia. Oszacuj, czy na te zakupy wystarczy jej 27 zł. Uzasadnij swoją odpowiedź.



E Informacje do zadań 7.–9.

Dane są liczby $a = 21{,}6573$ oraz $b = 67{,}7432$.

7. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Liczby a i b zaokrąglone do części dziesiątych są równe odpowiednio | **A** | **B** |.

A. $21{,}6$ i $67{,}8$ **B.** $21{,}7$ i $67{,}7$

Suma $a + b$ zaokrąglona do $0{,}01$ jest równa | **C** | **D** |.

C. $89{,}4$ **D.** $89{,}41$

8. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma zaokrąglonych do dwóch miejsc po przecinku liczb a i b jest równa

A. $89{,}39$ **B.** $89{,}4$ **C.** $89{,}41$ **D.** $89{,}5$

9. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Różnica liczb $b - a$ zaokrąglona do jedności to

A. 40 **B.** 41 **C.** 45 **D.** 46

10. Podaj wszystkie cyfry, które można wstawić w miejsce ♣, tak aby przybliżenie było zgodne z regułami zaokrąglania liczb.

a) $3{,}68♣6 \approx 3{,}69$ **b)** $4{,}76♣ \approx 4{,}76$ **c)** $2{,}4♣6 \approx 2{,}43$

11. Zaokrąglij liczbę $a = 0{,}599999$ do części dziesiątych. Zapisz trzy liczby większe od liczby a, które mają takie samo zaokrąglenie do jednego miejsca po przecinku jak liczba a.

12. Podaj zaokrąglenie:

a) $\frac{7}{11}$ do dwóch miejsc po przecinku, **b)** $\frac{45}{99}$ do części dziesiątych,

c) $\frac{13}{30}$ do części setnych, **d)** $\frac{16}{33}$ do $0{,}1$.

☆ **13.** Pole trójkąta jest równe $211\ \text{cm}^2$. Jego podstawa ma długość $7\ \text{dm}$. Czy wysokość poprowadzona do tej podstawy ma mniej niż $6\ \text{cm}$ długości? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Sprawdź, co umiesz!

1. Zaokrąglij liczbę:

a) 2146 do setek,

b) 10 672 391 do setek tysięcy,

c) 21,89 do 0,1,

d) 3,014 do dwóch miejsc po przecinku.

2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba 0,62 jest zaokrągleniem do części setnych liczby

A. 0,6(62) **B.** 0,(626) **C.** 0,(62) **D.** 0,(622)

E

3. Podczas wyprzedaży posezonowej rodzice kupili Cezaremu bluzę z kapturem, bieliznę termoaktywną oraz bezrękawnik puchowy. Cezary oszacował koszt zakupów. Zaokrąglił ceny do 1 zł i je dodał.

E



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Cezary oszacował koszt zakupów z niedomiarem.	**P**	**F**
Różnica między oszacowanym przez Cezarego kosztem zakupów a ich rzeczywistym kosztem była równa 3 gr.	**P**	**F**

4. Sok marchewkowy kosztuje 5,02 zł, a cena soku jabłkowego to 4,01 zł. Czy na zakup 4 soków marchewkowych i 6 soków jabłkowych wystarczą 44 zł? Uzasadnij swoją odpowiedź.

4. Mnożenie i dzielenie liczb wymiernych

- Mnożenie i dzielenie ułamków zwykłych oraz liczb mieszanych
- Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych
- Wykonywanie działań na ułamkach zwykłych i dziesiętnych

Przykład 1.

Oblicz.

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{9} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 9} = \frac{14}{45}$

Aby **pomnożyć dwa ułamki zwykłe**, mnożymy licznik pierwszego ułamka przez licznik drugiego ułamka oraz mianownik pierwszego ułamka przez mianownik drugiego ułamka.

b) $\frac{7}{12} \cdot \frac{24}{35}$

Skrócimy ułamki, a następnie wykonamy mnożenie.

$\frac{{}^{1}\cancel{7}}{{}_{1}\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{24}^{2}}{\cancel{35}_{5}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{2}{5}$

c) $2\frac{3}{4} \cdot 6$

Zamienimy liczbę mieszaną $2\frac{3}{4}$ na ułamek niewłaściwy, a liczbę 6 zapiszemy w postaci ułamka $\frac{6}{1}$. Następnie skrócimy ułamki i wykonamy mnożenie.

$2\frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{11}{\cancel{4}_{2}} \cdot \frac{\cancel{6}^{3}}{1} = \frac{11}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{11 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{33}{2} = 16\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 1.

Oblicz.

a) $\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{15}$ **b)** $\frac{12}{15} \cdot \frac{9}{36}$ **c)** $1\frac{9}{14} \cdot 7$ **d)** $1\frac{2}{11} \cdot 5\frac{1}{13}$ **e)** $4\frac{2}{5} \cdot 6\frac{1}{4}$

Odwrotnością liczby całkowitej a jest liczba $\frac{1}{a}$, gdzie a jest liczbą całkowitą różną od zera.
Odwrotnością ułamka $\frac{a}{b}$ jest ułamek $\frac{b}{a}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi różnymi od zera.

Przykład 2.

Oblicz.

a) $\frac{2}{5} : \frac{4}{25}$

Wykonamy mnożenie pierwszego ułamka przez odwrotność drugiego ułamka.

$\frac{2}{5} : \frac{4}{25} = \frac{{}^{1}\cancel{2}}{{}_{1}\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{4}_{2}} = \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

Aby **podzielić dwa ułamki zwykłe**, należy pierwszy ułamek pomnożyć przez odwrotność drugiego ułamka.

b) $14 : 2\frac{1}{3}$

Liczbę 14 zapiszemy w postaci ułamka $\frac{14}{1}$, a liczbę mieszaną $2\frac{1}{3}$ zamienimy na ułamek niewłaściwy. Następnie pomnożymy pierwszy ułamek przez odwrotność drugiego ułamka.

$$14 : 2\frac{1}{3} = \frac{14}{1} : \frac{7}{3} = \\ = \frac{{}^{2}\cancel{14}}{1} \cdot \frac{3}{\cancel{7}_{1}} = \frac{6}{1} = 6$$

Ćwiczenie 2.

Oblicz.

a) $\frac{5}{8} : \frac{5}{12}$ **b)** $\frac{6}{11} : \frac{8}{33}$ **c)** $\frac{6}{22} : 3$ **d)** $10 : \frac{5}{63}$ **e)** $8\frac{1}{7} : 4\frac{1}{14}$

Przykład 3.

Oblicz.

a) $2{,}41 \cdot 1{,}2$

Wykonamy mnożenie sposobem pisemnym.

			2,	4	1
		·		1,	2
			4	8	2
	+	2	4	1	
		2,	8	9	2

Otrzymaliśmy $2{,}41 \cdot 1{,}2 = 2{,}892$.

W wyniku mnożenia pisemnego oddzielamy przecinkiem tyle cyfr końcowych, ile łącznie było cyfr po przecinkach w obu ułamkach dziesiętnych.

b) $3{,}21 : 0{,}8$

Przesuniemy przecinek w obu liczbach o tyle miejsc w prawo, aby dzielnik był liczbą całkowitą.

$$3{,}21 : 0{,}8 = 32{,}1 : 8$$

Wykonamy dzielenie sposobem pisemnym.

			4,	0	1	2	5
		3	2,	1	:	8	
	−	3	2				
			0	1			
			−	0			
				1	0		
			−		8		
					2	0	
				−	1	6	
						4	0
					−	4	0
							0

Otrzymaliśmy $3{,}21 : 0{,}8 = 4{,}0125$.

Ćwiczenie 3.

Oblicz.

a) $3{,}26 : 0{,}2$ **b)** $3{,}27 \cdot 1{,}2$ **c)** $21{,}5 : 0{,}43$ **d)** $22{,}4 \cdot 3{,}5$

Przykład 4.

Uzasadnij, że wynikiem działania jest liczba całkowita.

a) $2{,}45 \cdot \frac{40}{49}$

Zamienimy ułamek dziesiętny na liczbę mieszaną, a następnie na ułamek niewłaściwy i wykonamy mnożenie ułamków zwykłych.

$$2{,}45 \cdot \frac{40}{49} = 2\frac{\cancel{45}^{9}}{\cancel{100}_{20}} \cdot \frac{40}{49} =$$

$$= 2\frac{9}{20} \cdot \frac{40}{49} = \frac{\cancel{49}^{1}}{\cancel{20}_{1}} \cdot \frac{\cancel{40}^{2}}{\cancel{49}_{1}} = 2$$

Wynikiem działania $2{,}45 \cdot \frac{40}{49}$ jest liczba 2, która jest liczbą całkowitą.

b) $4\frac{2}{5} : 1{,}1$

Sposób I

Zamienimy ułamek dziesiętny na liczbę mieszaną, a następnie wykonamy dzielenie ułamków zwykłych.

$$4\frac{2}{5} : 1{,}1 = 4\frac{2}{5} : 1\frac{1}{10} = \frac{22}{5} : \frac{11}{10} =$$

$$= \frac{\cancel{22}^{2}}{\cancel{5}_{1}} \cdot \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{11}_{1}} = \frac{4}{1} = 4$$

Sposób II

Zamienimy liczbę mieszaną na ułamek dziesiętny, a następnie wykonamy dzielenie ułamków dziesiętnych.

$$4\frac{2}{5} : 1{,}1 = 4\frac{4}{10} : 1{,}1 =$$

$$= 4{,}4 : 1{,}1 = 44 : 11 = 4$$

Wynikiem działania $4\frac{2}{5} : 1{,}1$ jest liczba 4, która jest liczbą całkowitą.

Ćwiczenie 4.

Uzasadnij, że wynik działania jest liczbą mniejszą od 3,5.

a) $6\frac{1}{4} : 2{,}5$ **b)** $2{,}25 \cdot 1\frac{1}{18}$ **c)** $1\frac{1}{25} \cdot 3{,}25$ **d)** $4{,}8 : 2\frac{1}{5}$

Podczas wykonywania działań na liczbach ujemnych należy pamiętać, że:

- iloczyn oraz iloraz dwóch liczb **o tych samych znakach** jest liczbą dodatnią,
  np. $(-6) \cdot (-8) = 48$, $(-21) : (-3) = 7$;
- iloczyn oraz iloraz dwóch liczb **o różnych znakach** jest liczbą ujemną,
  np. $10 \cdot (-6) = -60$, $(-50) : 5 = -10$.

Przykład 5.

Wykonaj działanie.

a) $-8\frac{1}{3} \cdot 9 = -\frac{\cancel{25}}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{9}^{3}}{1} = -\frac{25 \cdot 3}{1 \cdot 1} = -75$

W wyniku mnożenia liczby ujemnej przez liczbę dodatnią otrzymaliśmy liczbę ujemną.

b) $-10\frac{2}{5} : \left(-2\frac{1}{6}\right) = -\frac{52}{5} : \left(-\frac{13}{6}\right) = -\frac{\cancel{52}^{4}}{5} \cdot \left(-\frac{6}{\cancel{13}_{1}}\right) = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 1} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$

W wyniku dzielenia dwóch liczb ujemnych otrzymaliśmy liczbę dodatnią.

Ćwiczenie 5.

Wykonaj działanie.

a) $-2\frac{1}{3} \cdot \left(-3\frac{1}{7}\right)$ **b)** $-9{,}4 \cdot 6{,}5$ **c)** $20{,}48 : (-3{,}2)$ **d)** $-4\frac{3}{5} : \left(-2\frac{1}{2}\right)$

Rozwiąż zadania

1. Oblicz.

a) $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{16}$ **b)** $\frac{11}{12} \cdot \frac{15}{44}$ **c)** $\frac{24}{35} \cdot \frac{13}{12}$ **d)** $\frac{27}{13} \cdot \frac{26}{18}$

e) $8 \cdot 2\frac{1}{16}$ **f)** $4\frac{1}{2} \cdot 12$ **g)** $2\frac{1}{3} \cdot 2\frac{4}{7}$ **h)** $6\frac{2}{3} \cdot 1\frac{2}{7}$

2. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Liczba		2			$\frac{3}{4}$		$-\frac{2}{5}$		$1\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{10}$			$6\frac{2}{3}$	$-8\frac{1}{3}$
Odwrotność liczby	$\frac{1}{5}$		3	1		$\frac{5}{7}$		$-\frac{3}{8}$			$-2\frac{1}{7}$	$1\frac{3}{4}$		

3. Oblicz.

a) $\frac{6}{7} : \frac{9}{14}$ **b)** $\frac{5}{13} : \frac{15}{26}$ **c)** $\frac{8}{27} : \frac{4}{9}$ **d)** $\frac{13}{22} : \frac{5}{66}$

e) $1\frac{5}{16} : 14$ **f)** $23 : 4\frac{1}{17}$ **g)** $3\frac{3}{5} : 1\frac{1}{5}$ **h)** $2\frac{3}{14} : 8\frac{6}{7}$

4. Oblicz.

a) $11{,}1 \cdot 0{,}5$ **b)** $3{,}07 \cdot 1{,}4$ **c)** $4{,}22 \cdot 2{,}2$ **d)** $253 \cdot 3{,}4$

e) $4{,}26 : 0{,}3$ **f)** $52{,}4 : 0{,}2$ **g)** $2{,}64 : 0{,}08$ **h)** $2{,}2 : 0{,}033$

5. Wykonaj działanie.

a) $2\frac{1}{4} \cdot 1{,}5$ **b)** $2\frac{1}{2} \cdot 4{,}02$ **c)** $3{,}25 \cdot 2\frac{1}{26}$ **d)** $5{,}2 \cdot 2\frac{1}{39}$

e) $6\frac{3}{4} : 2{,}25$ **f)** $3{,}375 : 1\frac{3}{8}$ **g)** $3\frac{6}{25} : 0{,}162$ **h)** $10{,}08 : 2\frac{4}{5}$

6. Mama Brunona przygotowała 3,5 l soku malinowego.

Czy mamie Brunona wystarczy 14 butelek o pojemności 0,25 l, aby rozlać cały przygotowany sok malinowy?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	$35 : 25 = 1{,}4$.
B.	Nie,		**2.**	$35 : 2{,}5 = 14$.
			3.	$35 : 0{,}25 = 140$.



E

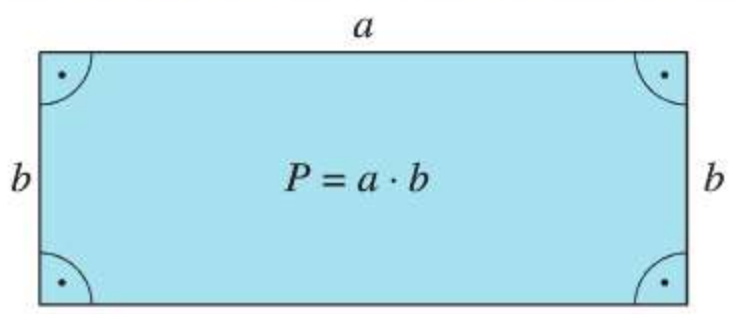
7. Cezary i Kuba zamieścili w muzycznym serwisie internetowym swoje kompozycje gitarowe. Utwór Cezarego ma 2,8 tys. odsłuchań, a kompozycja Kuby 1,5 raza więcej odtworzeń. Ile odtworzeń ma utwór Kuby?



8. Jeden bok prostokąta ma długość $7\frac{1}{2}$ cm, a pole tego prostokąta jest równe $18\ \text{cm}^2$.

a) Oblicz długość drugiego boku tego prostokąta.

b) Sprawdź, czy obwód prostokąta ma długość równą 19,9 cm.



9. Oblicz.

a) $-8{,}4 \cdot 3{,}5$ **b)** $2\frac{2}{3} \cdot \left(-2\frac{2}{5}\right)$ **c)** $8{,}4 : (-2{,}1)$ **d)** $-5\frac{2}{5} : \left(-2\frac{4}{25}\right)$

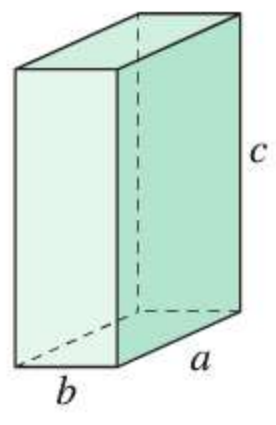
e) $3{,}4 \cdot (-5{,}5)$ **f)** $-3\frac{1}{3} \cdot \left(-3\frac{3}{5}\right)$ **g)** $-2{,}24 : (-6{,}72)$ **h)** $5{,}6 : (-0{,}224)$

10. Oblicz.

a) $-2{,}7 : (-0{,}09) : (-3)$ **b)** $-3\frac{1}{8} : (-25) \cdot 6$ **c)** $-4\frac{2}{3} : \frac{7}{22} \cdot (-2{,}25)$

d) $2\frac{8}{11} : 1\frac{7}{8} \cdot \left(-4\frac{2}{5}\right)$ **e)** $\dfrac{-5{,}5 : \left(-\frac{11}{16}\right)}{-8{,}7 : 11{,}6}$ **f)** $\dfrac{4\frac{4}{15} : \left(-\frac{16}{25}\right)}{-2\frac{1}{10} \cdot 1\frac{1}{7}}$

11. Na rysunku przedstawiono prostopadłościan, w którym krawędź a ma długość $\frac{3}{4}$ dm, krawędź b jest dwa razy krótsza od krawędzi a, a krawędź c jest trzy razy dłuższa od krawędzi a. Ile razy pole największej ściany tego prostopadłościanu jest większe od pola jego najmniejszej ściany?



12. Oblicz.

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9}$ **b)** $\frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{14}{13}$ **c)** $\frac{19}{18} \cdot \frac{15}{14} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{16}{15}$

13. Jaką liczbę należy wstawić w miejsce x, aby otrzymać równość?

a) $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{3}{5}$ **b)** $\frac{5}{8} : x = \frac{7}{8}$ **c)** $-\frac{3}{4} : x = -1\frac{1}{5}$

Sprawdź, co umiesz!

1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odwrotnością liczby $5\frac{1}{5}$ jest liczba

A. $-5\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{26}{5}$ **C.** $\frac{5}{26}$ **D.** $-\frac{5}{26}$

2. Oblicz.

a) $5\frac{4}{9} \cdot 2\frac{4}{7}$ **b)** $3\frac{1}{5} : 4$ **c)** $12 : 3\frac{3}{7}$ **d)** $0{,}46 \cdot 2{,}7$ **e)** $36{,}6 : 0{,}6$

3. Oblicz wartość wyrażenia: $1\frac{2}{9} : \left(-2\frac{1}{5}\right) : \left(-1\frac{2}{3}\right)$.

4. W sklepie internetowym można kupić aplikacje.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Aplikacja *Pogoda* jest 3,5 razy tańsza od aplikacji *Kalendarz*.	**P**	**F**
Za aplikacje *Kalendarz* oraz *Muzyka* należy zapłacić 18,79 zł.	**P**	**F**



5. Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych

- Kolejność wykonywania działań
- Działania na liczbach wymiernych

Podczas obliczania wartości wyrażeń arytmetycznych należy pamiętać o **kolejności wykonywania działań**:

I **działania w nawiasach** — zaczynamy od działań w nawiasach,

$7 + (14 - 8)^2 : 4 =$

II **potęgowanie** — następnie wykonujemy potęgowanie,

$= 7 + 6^2 : 4 =$

III **mnożenie i dzielenie** — potem wykonujemy mnożenie lub dzielenie (działania te wykonujemy od lewej do prawej strony),

$= 7 + 36 : 4 =$

IV **dodawanie i odejmowanie** — jako ostatnie wykonujemy dodawanie lub odejmowanie (działania te wykonujemy od lewej do prawej strony).

$= 7 + 9 = 16$

Przykład 1.

Oblicz.

a) $21 \cdot 9 - 23 \cdot 4$

Najpierw wykonamy mnożenie, a następnie odejmowanie.

$21 \cdot 9 - 23 \cdot 4 = 189 - 92 = 97$

b) $6 \cdot 7 : 3 + 4 - 24 : 6 \cdot 3 = 42 : 3 + 4 - 4 \cdot 3 = 14 + 4 - 12 = 18 - 12 = 6$

c) $[8 - (6 \cdot 3 - 7)] - (-5 \cdot 4 - 16)$

Najpierw wykonamy działania w nawiasach okrągłych, a następnie w nawiasie kwadratowym.

$[8 - (6 \cdot 3 - 7)] - (-5 \cdot 4 - 16) =$

$= [8 - (18 - 7)] - (-20 - 16) =$

$= (8 - 11) - (-36) = -3 + 36 = 33$

Ćwiczenie 1.

Oblicz.

a) $32 \cdot 6 + 13 \cdot 5$ **b)** $15 \cdot 8 : 5 - 12 + 33 : 11 \cdot 2$ **c)** $[3 + (4 \cdot 5 - 9)] + [8 \cdot (6 - 2 \cdot 7) - 13]$

Przykład 2.

Oblicz.

a) $1\frac{3}{4}+2\frac{6}{7}-3\frac{11}{14}:\frac{2}{5}=1\frac{21}{28}+2\frac{24}{28}-\frac{53}{14}\cdot\frac{5}{2}=1\frac{21}{28}+2\frac{24}{28}-\frac{265}{28}=3\frac{45}{28}-\frac{265}{28}=\frac{129}{28}-\frac{265}{28}=-\frac{136}{28}=$

$=-4\frac{24}{28}=-4\frac{6}{7}$

b) $\left(2\frac{3}{4}-1\frac{5}{9}\right)-\left(5\frac{2}{3}-6\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{2}{3}=\left(2\frac{27}{36}-1\frac{20}{36}\right)-\left(5\frac{16}{24}-6\frac{9}{24}\right)\cdot\frac{2}{3}=1\frac{7}{36}-\left(-\frac{17}{12\,24}\right)\cdot\frac{\cancel{2}^{1}}{3}=$

$=1\frac{7}{36}+\frac{17}{36}=1\frac{24}{36}=1\frac{2}{3}$

Ćwiczenie 2.

Oblicz.

a) $2\frac{1}{3}-1\frac{4}{5}:\frac{3}{25}$ **b)** $4\frac{2}{3}:\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot 3$ **c)** $\left(5\frac{3}{4}-2\frac{1}{12}\right)-\left(4\frac{1}{9}+2\frac{1}{6}\right)$

Przykład 3.

Oblicz.

$$\frac{\frac{1}{15}-\left(1\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)}{\left(2\frac{2}{3}-1\frac{2}{9}\right)^2}=\frac{\frac{1}{15}-\left(1\frac{2}{6}-\frac{5}{6}\right)}{\left(2\frac{6}{9}-1\frac{2}{9}\right)^2}=\frac{\frac{1}{15}-\left(\frac{8}{6}-\frac{5}{6}\right)}{\left(1\frac{4}{9}\right)^2}=\frac{\frac{1}{15}-\frac{3}{6}}{\left(\frac{13}{9}\right)^2}=\frac{\frac{1}{15}-\frac{1}{2}}{\frac{169}{81}}=\frac{\frac{2}{30}-\frac{15}{30}}{\frac{169}{81}}=\frac{-\frac{13}{30}}{\frac{169}{81}}=$$

$$=-\frac{\cancel{13}^{1}}{\cancel{30}_{10}}\cdot\frac{\cancel{81}^{27}}{\cancel{169}_{13}}=-\frac{27}{130}$$

Ćwiczenie 3.

Oblicz.

a) $\dfrac{\left(0{,}9-\frac{1}{4}\right)^2}{0{,}8-0{,}4\cdot\frac{3}{8}}$ **b)** $\dfrac{-2+0{,}6\cdot 9}{-11+4:0{,}25}$ **c)** $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^4-\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{9}}{1{,}1+\frac{4}{25}\cdot\frac{15}{8}}$

Rozwiąż zadania

1. Oblicz.

a) $36:9+3\cdot 5$ **b)** $36:(9+3)\cdot 5$ **c)** $12\cdot 15-18:6$ **d)** $12\cdot(15-18):6$

e) $120-75:3\cdot 5$ **f)** $120-75:(3\cdot 5)$ **g)** $64:2+2^3$ **h)** $64:\left(2+2^3\right)$

2. Oblicz.

a) $[5-(3\cdot 5-9)]-[7\cdot(5-3\cdot 3)-15]$

b) $[3\cdot(-9)-15]+[(-23\cdot 2-24)\cdot(-10)+42]$

c) $[121+12\cdot(-3)]\cdot[13\cdot(-3\cdot 12+35)+(-21)\cdot(-3)]$

3. Zapisz zdanie w postaci wyrażenia arytmetycznego, a następnie oblicz wartość tego wyrażenia.

a) Do sumy liczb 25 i 32 dodaj podwojoną różnicę liczb 25 i 32.

b) Od sumy liczb 82 i 48 odejmij połowę różnicy liczb 48 i 82.

4. Oblicz.

a) $1\frac{3}{8} - 3\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{28} \cdot \frac{7}{10}$ **b)** $3\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} : \frac{1}{4}$ **c)** $3\frac{1}{5} : \frac{8}{25} - \frac{1}{4} : \frac{1}{3}$ **d)** $3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} + 4\frac{2}{5} : \frac{11}{25}$

5. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $-1\frac{3}{5} \cdot 3\frac{3}{4} + 4\frac{1}{2} : (-1{,}5)$

b) $-\frac{1{,}44}{1{,}2} - 2\frac{1}{6} \cdot 1\frac{3}{13}$

c) $1{,}12 : (-0{,}4) + 9\frac{1}{2} : (-19)$

d) $-1{,}6 \cdot 1{,}2 : (-0{,}6)$

e) $-2{,}7 : (-0{,}09) : (-5) - 1{,}6 : (-0{,}8)$

f) $-3\frac{1}{8} : (-25) \cdot 16 - 4{,}8 : (-0{,}3)$

6. Oblicz.

a) $\left(-1\frac{1}{4} + 0{,}25\right) \cdot 2\frac{1}{2}$ **b)** $\left(2\frac{1}{4} - 1{,}75\right) : \frac{3}{4}$ **c)** $\left(2\frac{2}{5} - 1\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} + 0{,}75\right)$

d) $\left(-1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3}\right) : 1\frac{1}{6}$ **e)** $\left(-1\frac{5}{6} - \frac{3}{8}\right) \cdot 4\frac{4}{5}$ **f)** $2\frac{9}{20} : \left(-3\frac{3}{5} + 1{,}125\right)$

7. Sprawdź, który z wyników podanych działań jest najmniejszy.

I. $1{,}5 \cdot \left(-2\frac{3}{11}\right) \cdot 3\frac{2}{3} : 5$ **II.** $\left(1 - \frac{1}{8} : 2\right) : \left(\frac{7}{8} - 0{,}75\right)$ **III.** $-\frac{1}{11} : \frac{2}{3} \cdot 2\frac{3}{4} : \frac{3}{4}$

8. Oblicz.

a) $1\frac{1}{7} : \frac{9}{14} \cdot 2{,}4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ **b)** $12\frac{4}{5} : \left(\frac{4}{5}\right)^3 - 10\frac{4}{5} : \left(\frac{3}{10}\right)^3$ **c)** $\frac{\left(-1\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)^2}{0{,}4 - 0{,}5 \cdot \frac{3}{5}}$

d) $\frac{\left(3\frac{2}{3} - 2{,}5\right)^2}{1{,}75} - \left(-1\frac{5}{12} + 1\frac{1}{9}\right)$ **e)** $\frac{2}{\left(1{,}5 - \frac{2}{3}\right)^3} \cdot \left(\frac{4}{15} : 1\frac{3}{5}\right)$ **f)** $\frac{\left(\frac{2}{5} + 1\frac{2}{3} \cdot 4\right) \cdot (-2)^2}{\left(2{,}75 - 3\frac{1}{2}\right) \cdot (-2^4)}$

E

9. Mikołaj zaprosił na swoje urodziny 12 przyjaciół. Dla siebie i swoich gości przygotował deser z $1\frac{3}{4}$ kg obranych bananów, 250 g czekolady oraz $3\frac{1}{5}$ kg jogurtu naturalnego.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jedna porcja tego deseru miała masę

A. 0,4 kg **B.** 0,4(3) kg

C. 0,57 kg **D.** 0,6 kg



10. Na występ słynnego zespołu rockowego przygotowano 640 biletów. W czasie pierwszej godziny sprzedano $\frac{5}{8}$ wszystkich biletów, a w ciągu następnej godziny $\frac{2}{3}$ reszty biletów. Ile biletów pozostało do sprzedania?

11. Oblicz, o ile decymetrów kwadratowych pole kwadratu o obwodzie $5\frac{1}{3}$ dm jest mniejsze od pola kwadratu o obwodzie 56 cm.

12. Oblicz liczbę $2\frac{2}{5}$ razy mniejszą od różnicy odwrotności liczby $\frac{1}{8}$ i odwrotności liczby $\frac{5}{16}$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $-20-\left(-5\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}\cdot 2\right)$ **b)** $4\frac{2}{3}:5\frac{3}{5}+3\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{21}$ **c)** $-0{,}6\cdot 4:3-0{,}3:(-0{,}25)$

2. Pola kupiła $\frac{4}{5}$ kg pomidorów, $3\frac{1}{2}$ kg jabłek i $2{,}2$ kg gruszek. Cezary kupił 3 razy więcej pomidorów, 2 razy mniej jabłek oraz o $\frac{3}{4}$ kg więcej gruszek niż Pola.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zakupy Cezarego ważyły

A. $5{,}4$ kg **B.** $5{,}8$ kg **C.** $6{,}5$ kg **D.** $7{,}1$ kg

3. Zapisz zdanie w postaci wyrażenia arytmetycznego, a następnie oblicz wartość tego wyrażenia.

a) Do różnicy liczb 16 i 7 dodaj potrojoną sumę liczb 7 i 16.

b) Od różnicy liczb 22 i 34 odejmij połowę sumy liczb 34 i 22.

4. Liczba k jest równa wartości wyrażenia $5\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{2}\right)^2-11:\frac{11}{16}$, a liczba m jest wartością wyrażenia $0{,}9-3\frac{1}{2}:10\frac{1}{2}\cdot 0{,}3$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Liczba k jest równa 5.	**P**	**F**
Dla podanych k i m zachodzi równość: $m=6\frac{1}{4}k$.	**P**	**F**

PODSUMOWANIE DZIAŁU I
Liczby i działania

Powtórz wiadomości

Ułamki zwykłe

Dodawanie i odejmowanie

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika.

$$2\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = 2\frac{21}{35} + \frac{10}{35} = 2\frac{31}{35}$$

$$3\frac{1}{2} - \frac{2}{5} = 3\frac{5}{10} - \frac{4}{10} = 3\frac{1}{10}$$

Mnożenie

Zamieniamy liczby mieszane na ułamki niewłaściwe.

$$1\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \cdot \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{3}_{1}} = 4$$

Dzielenie

Pierwszy ułamek mnożymy przez odwrotność drugiego ułamka.

$$5\frac{2}{3} : \frac{17}{18} = \frac{\overset{1}{\cancel{17}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \cdot \frac{\cancel{18}^{6}}{\cancel{17}_{1}} = 6$$

Ułamki dziesiętne

Dodawanie i odejmowanie

Zapisujemy jedności pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami itd.

$$\begin{array}{r} 2{,}46 \\ +\ 3{,}5 \\ \hline 5{,}96 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}20 \\ -\ 1{,}14 \\ \hline 0{,}06 \end{array}$$

Mnożenie

W wyniku oddzielamy przecinkiem tyle cyfr końcowych, ile łącznie było cyfr po przecinkach w obu ułamkach dziesiętnych.

$$1{,}23 \cdot 0{,}2 = 0{,}246$$

2 miejsca — 1 miejsce — 3 miejsca

Dzielenie

Przesuwamy przecinki w dzielnej i dzielniku, tak aby dzielnik był liczbą całkowitą.

$$5{,}25 : 0{,}5 = 52{,}5 : 5 = 10{,}5$$

Rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych

Ułamek zwykły ma rozwinięcie dziesiętne:

– skończone, np.

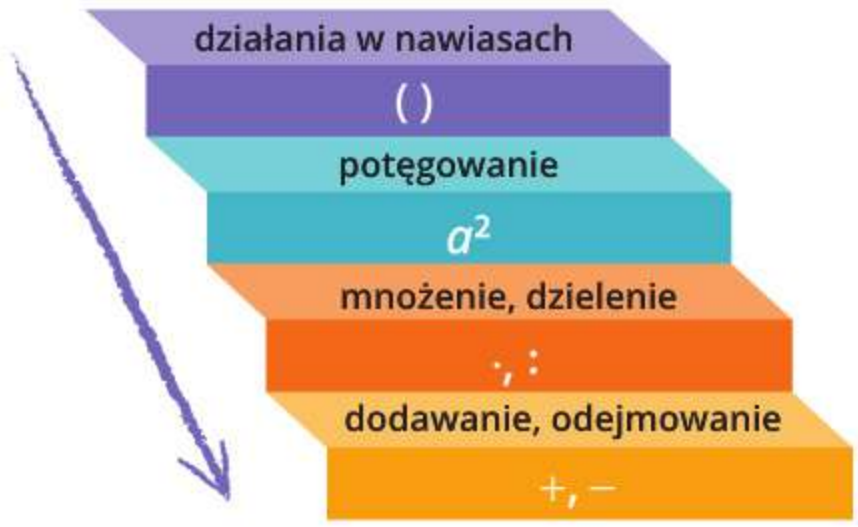
$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

– nieskończone okresowe, np.

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}(3)$$

okres

Kolejność wykonywania działań



Zaokrąglanie liczb

1. Znajdujemy **cyfrę w rzędzie, do którego zaokrąglamy**.

2. Patrzymy na kolejną cyfrę.

- Jeśli jest mniejsza od 5, to cyfrę w rzędzie, do którego zaokrąglamy, pozostawiamy bez zmian, a kolejne cyfry zastępujemy zerami.

Np. zaokrąglenie do części setnych

$135{,}352 \approx 135{,}35$

Kolejna cyfra jest równa 2, więc cyfrę części setnych pozostawiamy bez zmian.

- Jeśli jest większa od 5 lub równa 5, to cyfrę w rzędzie, do którego zaokrąglamy, zwiększamy o 1, a kolejne cyfry zastępujemy zerami.

Np. zaokrąglenie do dziesiątek

$135{,}352 \approx 140$

Kolejna cyfra jest równa 5, więc do cyfry dziesiątek dodajemy 1.

Sprawdź umiejętności

1. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**. E

Postać nieskracalna ułamka $\frac{128}{250}$ to | **A** | **B** |.

A. $\frac{64}{125}$ **B.** $\frac{13}{25}$

Ułamek $0{,}48$ po zamianie na ułamek zwykły nieskracalny jest równy | **C** | **D** |.

C. $\frac{24}{50}$ **D.** $\frac{12}{25}$

2. Przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{4}{5}$ **b)** $13\frac{23}{50}$ **c)** $7\frac{9}{40}$ **d)** $4\frac{3}{22}$

3. Oblicz.

a) $5\frac{2}{3}-4\frac{1}{9}+\frac{7}{36}$ **b)** $-1{,}44+(-2{,}56)+3{,}29$ **c)** $3{,}25-\left(-2\frac{3}{5}\right)-1\frac{1}{4}$

4. Dane są liczby: $a=1{,}75-\frac{3}{5}$, $b=1{,}6:1\frac{1}{3}$, $c=3{,}8-2\frac{3}{4}$, $d=3\frac{1}{3}\cdot 0{,}2$. E

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Podane liczby uporządkowane w kolejności od najmniejszej do największej spełniają zależność

A. $b<d<a<c$ **B.** $b<d<c<a$ **C.** $d<c<a<b$ **D.** $d<c<b<a$

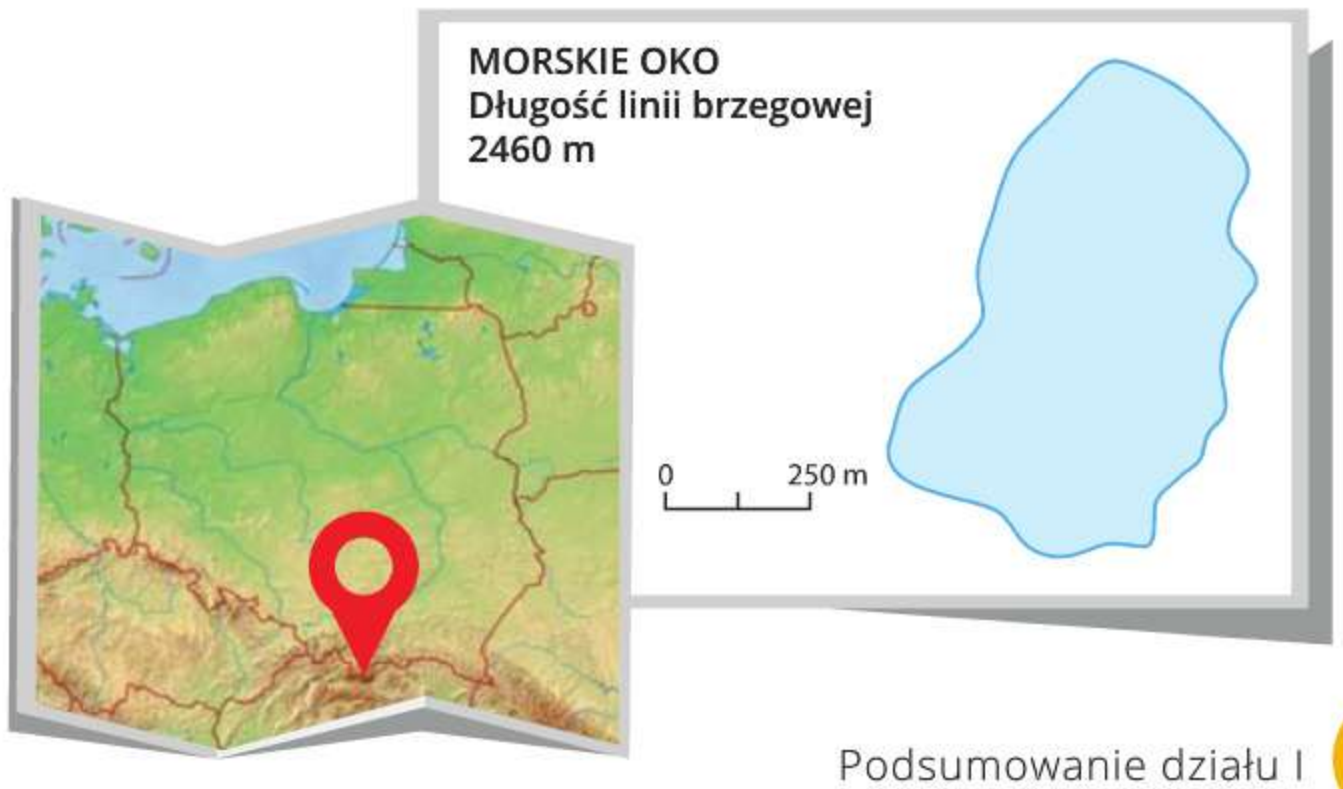
5. Zaokrąglij liczbę do setek. Określ, czy jest to zaokrąglenie z nadmiarem czy z niedomiarem.

a) 25 061 **b)** 4520 **c)** 32 151 **d)** 923 975

6. Zaokrąglij liczbę do $0{,}01$. Określ, czy jest to zaokrąglenie z nadmiarem czy z niedomiarem.

a) 0,2527 **b)** 3,1852 **c)** 2,0072 **d)** 12,195

7. Na rysunku przedstawiono kształt Morskiego Oka – największego jeziora w Tatrach. Uzasadnij, że długość linii brzegowej Morskiego Oka zaokrąglona do tysięcy metrów jest mniejsza od jej zaokrąglenia do dziesiątek metrów.



8. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $-5 \cdot 30 : (-6)$ **b)** $2\frac{1}{4} : (-0{,}5) : \left(-3\frac{3}{8}\right)$ **c)** $-3\frac{1}{5} \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right) \cdot (-15)$

9. Oszacuj wartość wyrażenia arytmetycznego.

a) $13{,}9 : 7 + 20 \cdot 0{,}53$ **b)** $7\frac{9}{10} : 2 - 32 : 3{,}9$ **c)** $2{,}98 \cdot (-7) + 2\frac{4}{5} \cdot 3\frac{19}{20}$

10. Michał chce położyć panele na podłodze w salonie. Obliczył, że powinien kupić panele o łącznej powierzchni $26\ \text{m}^2$. Panele, które wybrał, sprzedawane są w paczkach po $2{,}2\ \text{m}^2$. Oblicz, ile co najmniej paczek paneli powinien kupić Michał, żeby położyć panele w salonie.

E **11.** Dane są liczby: $a = 1{,}101$, $b = 1{,}(101)$, $c = 1{,}1001$, $d = 1{,}(1001)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Największą z podanych liczb jest liczba

A. a **B.** b **C.** c **D.** d

E **Informacje do zadań 12. i 13.**

W pewnym sklepie karmę dla kota można kupić w opakowaniach $0{,}45\ \text{kg}$ w cenie $8{,}28\ \text{zł}$ i $1{,}8\ \text{kg}$ w cenie $22{,}50\ \text{zł}$.

12. Pola chce kupić $3{,}6\ \text{kg}$ karmy dla kota.

Czy Pola zapłaci mniej, jeśli kupi karmę dla kota w dużych opakowaniach, a nie w małych?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	musi kupić więcej małych opakowań niż dużych.
B.	Nie,		**2.**	koszt zakupu karmy dla kota w małych opakowaniach jest o $21{,}24\ \text{zł}$ większy niż w dużych opakowaniach.
			3.	cena małego opakowania karmy jest niższa od ceny dużego opakowania.

13. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cena za $1\ \text{kg}$ karmy dla kota sprzedawanej w dużych opakowaniach jest równa

A. $12{,}50\ \text{zł}$ **B.** $13{,}40\ \text{zł}$ **C.** $18{,}40\ \text{zł}$ **D.** $22{,}50\ \text{zł}$

14. Pan Janusz ma działkę w kształcie prostokąta o wymiarach $25{,}2\ \text{m} \times 36\ \text{m}$. Na $\frac{1}{3}$ powierzchni działki jest trawnik. Warzywa zasadzone na działce zajmują 6 razy mniejszą powierzchnię niż trawnik. Na pozostałej części działki jest sad. Ile metrów kwadratowych zajmuje sad na działce pana Janusza? Wynik zaokrąglij do setek metrów kwadratowych.

15. Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $\left(3\frac{1}{7} - 2\frac{5}{7}\right) : \frac{2}{3}$ **b)** $6\frac{1}{3} : 4\frac{2}{3} - 5 \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right)$ **c)** $-3\frac{1}{5} : \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} - 0{,}1 \cdot 0{,}5$

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Podaj liczbę, która jest większa od $\frac{11}{13}$ i jednocześnie mniejsza od $\frac{12}{13}$. Czy taka liczba jest tylko jedna? Uzasadnij swoją odpowiedź.

2. Dane są liczby: $a = \frac{1}{3} - \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$ oraz $c = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2$. Uzasadnij, że suma liczb a i c jest mniejsza od liczby b.

3. Przedstaw ułamek $\frac{1}{2}$ w postaci sumy ułamków zwykłych o różnych mianownikach oraz licznikach równych 1.

4. Ile cyfr po przecinku ma rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{32}$? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. E

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

5. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. E

Liczbą większą od $\frac{1}{6}$ jest

A. $\frac{100}{600}$ **B.** $\frac{100}{600-1}$ **C.** $\frac{100}{600+1}$ **D.** $\frac{100-1}{600}$

6. Dane są liczby:

I. $0{,}2(9)$ **II.** $0{,}298$ **III.** $0{,}2(5)$

Sprawdź, dla których z podanych liczb zaokrąglenie do części setnych jest równe $0{,}3$.

7. Podaj zaokrąglenie liczby:

a) $12\,557{,}281$ do setek,

b) $12{,}(345)$ do siedmiu miejsc po przecinku,

c) $\frac{5}{8}$ do części setnych,

d) $1\frac{7}{125}$ do $0{,}1$.

8. Powierzchnia Włoch jest równa $301\,230\ \text{km}^2$, a powierzchnia Monako to $2\ \text{km}^2$. Oszacuj, ile razy powierzchnia Włoch jest większa od powierzchni Monako.



9. Pola, Ela i Zosia chcą uzbierać razem 5 l borówek amerykańskich. Pola zebrała $2\frac{2}{3}$ l borówek, Ela 4 razy mniej niż Pola, a Zosia 1,5 raza więcej niż Ela. Ile litrów borówek amerykańskich muszą jeszcze uzbierać dziewczęta, aby osiągnąć zamierzony cel? Wynik przedstaw w postaci dziesiętnej.



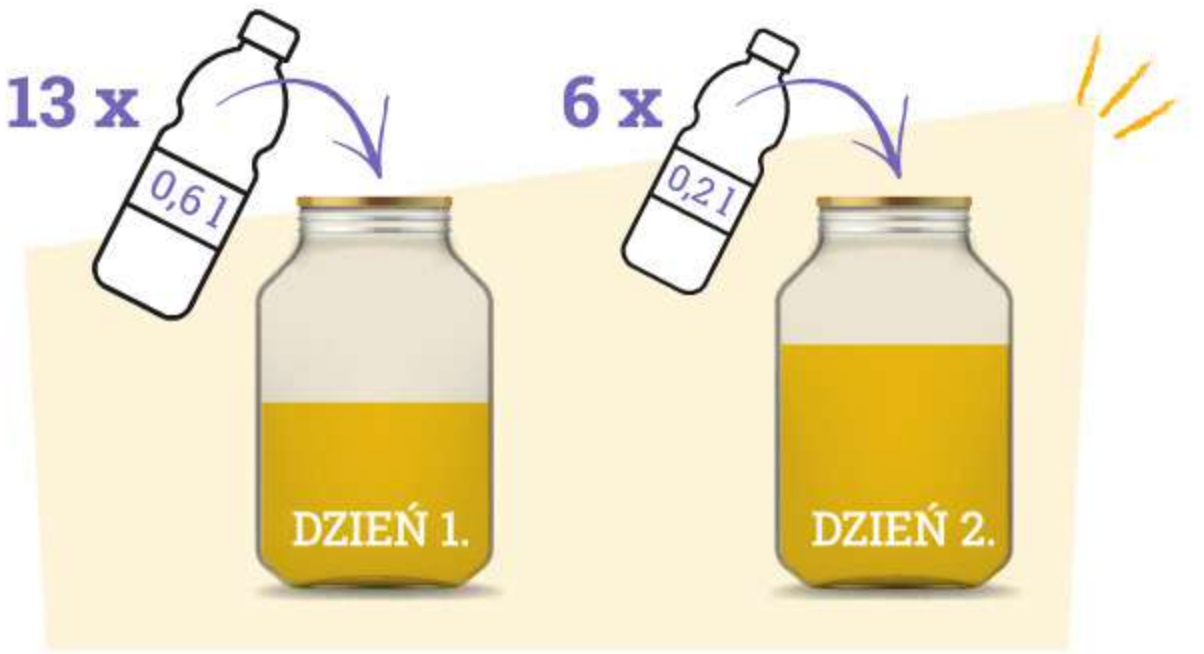
E **10.** Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Wynik działania $179{,}2 : (-2{,}24)$ jest liczbą [**A** | **B**].

Wynik działania $3{,}78 \cdot (-2{,}53)$ jest [**C** | **D**] od (-10).

A. całkowitą **B.** naturalną **C.** mniejszy **D.** większy

11. Pojemność pewnego zbiornika jest równa 12,5 l. Na początku pojemnik był pusty. Odczytaj z ilustracji, ile litrów płynu laborant wlał do tego pojemnika pierwszego dnia, a ile drugiego. Oblicz, ile butelek płynu o pojemności 0,25 l zmieści się jeszcze w tym pojemniku.



E **12.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\left(2\frac{3}{4} - 1\frac{5}{9}\right) - \left(5\frac{2}{3} - 6\frac{3}{8}\right)$ jest równa

A. $\frac{35}{72}$ **B.** $1\frac{35}{72}$ **C.** $1\frac{65}{72}$ **D.** $2\frac{13}{72}$

13. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $[23 + (12 \cdot 4 - 48 : 3 \cdot 2) \cdot 2] : 11$

b) $(8 \cdot 14 + 12 \cdot 14) - [(2 \cdot 51 - 140 : 2) \cdot (24 + 4 \cdot 6) - 5] : 1531$

14. Oblicz.

a) $\dfrac{\left(3\frac{1}{3} - 1{,}2\right) : \left(3 - \frac{1}{4}\right)}{\left(6\frac{1}{3} - 5\right)^2}$ **b)** $(1 - 0{,}5) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$

15. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{5} - \frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{9} + \frac{1}{6}}{3{,}5 : 1{,}4 - \left(4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{6}\right) : 0{,}5}.$$

DZIAŁ II

OBLICZENIA PROCENTOWE

Proporcje

Obniżki i podwyżki

Diagramy procentowe







To ci się przyda!

1. Proporcje

- Rozpoznawanie wielkości wprost proporcjonalnych
- Pojęcie proporcji
- Zastosowanie podziału proporcjonalnego

Wielkości wprost proporcjonalne

Przykład 1.

Bruno, jadąc na rowerze ze stałą prędkością, pokonał trasę o długości 20 km. W aplikacji, w której dane aktualizują się co 15 min, odczytał informacje dotyczące długości drogi i czasu przejazdu. Zostały one przedstawione w tabeli. Oblicz, z jaką prędkością Bruno pokonał: 5 km, 10 km, 15 km, 20 km.



Droga (s)	5 km	10 km	15 km	20 km
Czas (t)	0,25 h	0,5 h	0,75 h	1 h

Aby obliczyć prędkości, z jakimi jechał Bruno na poszczególnych odcinkach trasy, skorzystamy ze wzoru $v = \frac{s}{t}$, gdzie v oznacza prędkość, s – drogę, t – czas.

Jeśli $s = 5\text{ km}$, $t = 0{,}25\text{ h}$, to $v = \frac{5\text{ km}}{0{,}25\text{ h}} = 5\text{ km} : 0{,}25\text{ h} = 500\text{ km} : 25\text{ h} = 20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

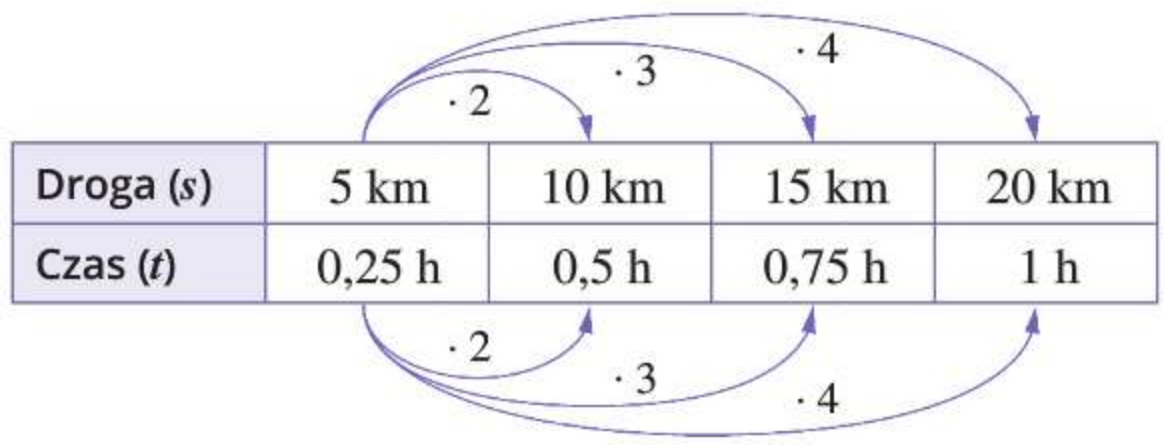
Jeśli $s = 10\text{ km}$, $t = 0{,}5\text{ h}$, to $v = \frac{10\text{ km}}{0{,}5\text{ h}} = 10\text{ km} : 0{,}5\text{ h} = 100\text{ km} : 5\text{ h} = 20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Jeśli $s = 15\text{ km}$, $t = 0{,}75\text{ h}$, to $v = \frac{15\text{ km}}{0{,}75\text{ h}} = 15\text{ km} : 0{,}75\text{ h} = 1500\text{ km} : 75\text{ h} = 20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Jeśli $s = 20\text{ km}$, $t = 1\text{ h}$, to $v = \frac{20\text{ km}}{1\text{ h}} = 20\text{ km} : 1\text{ h} = 20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Odp. Bruno jechał ze stałą prędkością 20 km/h.

Przy stałej prędkości jazdy, jeśli długość drogi zwiększa się dwukrotnie, to również czas potrzebny na jej pokonanie wzrasta dwukrotnie. Podobnie, jeśli długość drogi zwiększa się trzykrotnie, to również czas potrzebny na jej pokonanie wzrasta trzykrotnie itd. W takim przypadku mówimy, że przebyta droga jest **wprost proporcjonalna** do czasu jej pokonania.



Dwie dodatnie wielkości są wprost proporcjonalne, gdy wraz

ze **wzrostem** jednej wielkości druga **rośnie tyle samo razy**

lub

ze **zmniejszeniem** jednej wielkości druga **maleje tyle samo razy**.

Warto zauważyć, że iloraz długości przebytej drogi i czasu potrzebnego na jej pokonanie (czyli prędkość) w tym przykładzie jest zawsze równy 20 km/h.

$$\frac{5\text{ km}}{0{,}25\text{ h}} = \frac{10\text{ km}}{0{,}5\text{ h}} = \frac{15\text{ km}}{0{,}75\text{ h}} = \frac{20\text{ km}}{1\text{ h}} = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Iloraz wielkości wprost proporcjonalnych jest stały, np. w ruchu ze stałą prędkością (v) długość przebytej drogi (s) jest wprost proporcjonalna do czasu jazdy (t), a dana prędkość jest ilorazem tych wielkości.

$$v = \frac{s}{t}$$

Ćwiczenie 1.

Motocyklista jechał ze stałą prędkością. Przebył drogę długości 50 km w ciągu pół godziny.

Droga (s)		25 km	50 km
Czas (t)	0,1 h		0,5 h

a) Oblicz prędkość, z jaką jechał motocyklista.

b) Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Proporcja

Gdy porównujemy ilorazy liczb $\frac{10}{2}$ i $\frac{15}{3}$, zauważamy, że $\frac{10}{2} = 5$ oraz $\frac{15}{3} = 5$, czyli ilorazy te są równe. Zatem $\frac{10}{2} = \frac{15}{3}$. Równość dwóch ilorazów nazywamy proporcją.

Proporcja to równość dwóch ilorazów:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{lub} \quad a : b = c : d$$

wyrazy skrajne

wyrazy środkowe

gdzie $b \neq 0$, $d \neq 0$.

W proporcji iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych.

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Przykład 2.

Na mapie Polski zaznaczono drogę z Krakowa do Kielc oraz drogę z Krakowa do Warszawy. Podczas podróży z Krakowa do Kielc samochód pana Piotra spalił 14,25 l benzyny. Ile litrów benzyny spali samochód pana Piotra na trasie Kraków–Warszawa, jeśli średnie spalanie benzyny będzie takie samo jak na trasie Kraków–Kielce?



Oznaczymy przez x liczbę litrów benzyny, którą spali samochód pana Piotra podczas jazdy z Krakowa do Warszawy.

Zastosujemy metodę proporcji. Zapiszemy w jednej kolumnie liczbę kilometrów, a w drugiej ilość benzyny, która im odpowiada.

$$\begin{aligned} &114 \text{ km} - 14{,}25 \text{ l benzyny} \\ &290 \text{ km} - x \text{ l benzyny} \end{aligned}$$

Odległość między miastami i ilość zużytej benzyny są wielkościami wprost proporcjonalnymi. Ułożymy proporcję.

$$\frac{114}{290} = \frac{14{,}25}{x}$$

Iloczyn wyrazów skrajnych przyrównamy do iloczynu wyrazów środkowych.

$$\begin{aligned} &114 \cdot x = 290 \cdot 14{,}25 \\ &114 \cdot x = 4132{,}5 \end{aligned}$$

Aby obliczyć x, należy podzielić 4132,5 przez 114.

$$\begin{aligned} x &= \frac{4132{,}5}{114} = \frac{41\,325}{1140} \\ x &= 36{,}25 \text{ [l]} \end{aligned}$$

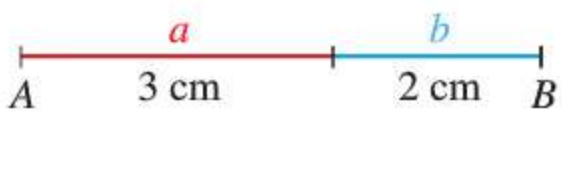
Odp. Na trasie Kraków–Warszawa samochód pana Piotra spali 36,25 l benzyny.

Ćwiczenie 2.

Właściciel sklepu kupił w hurtowni 30 kg jabłek i zapłacił za nie 78 zł. Ile kilogramów takich jabłek mógłby kupić za 117 zł?

Podział proporcjonalny

Odcinek AB długości 5 cm został podzielony w stosunku $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$.



Taki stosunek możemy również zapisać jako $a : b = 3 : 2$. Zapis $3 : 2$ czytamy: *trzy do dwóch*.

Odcinek CD długości 10 cm również został podzielony w stosunku $a : b = 3 : 2$, ponieważ $\frac{a}{b} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.



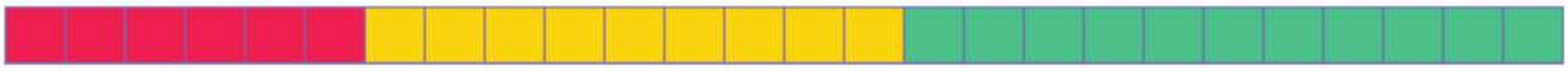
Stosunkiem wielkości a i b nazywamy iloraz tych wielkości, czyli $\frac{a}{b}$.

Przykład 3.

Asia ma 6 lat, jej brat Bartek – 9 lat, a siostra Oliwia – 11 lat. Łącznie otrzymują od swoich rodziców 130 zł kieszonkowego, które dzielą między siebie proporcjonalnie do wieku, tzn. w stosunku $6 : 9 : 11$. Oblicz, jaką kwotę kieszonkowego otrzymuje każde z dzieci.

Dzieci mają łącznie: $6 + 9 + 11 = 26$ lat.

Sposób I



Asia dostaje $\frac{6}{26}$ całej kwoty kieszonkowego, Bartek otrzymuje $\frac{9}{26}$ całej kwoty, a Oliwia $\frac{11}{26}$ całej kwoty.

- Asia: $\frac{6}{26} \cdot 130 = 30$ [zł]
- Bartek: $\frac{9}{26} \cdot 130 = 45$ [zł]
- Oliwia: $\frac{11}{26} \cdot 130 = 55$ [zł]

Sposób II

Kwota kieszonkowego podzielona na 26 takich samych części jest równa 130 zł $: 26 = 5$ zł.

Imię dziecka	Asia	Bartek	Oliwia
Wiek (w latach)	6	9	11
Kwota kieszonkowego (w złotych)	30	45	55

$\cdot 5$

Odp. Asia otrzymuje 30 zł kieszonkowego, Bartek dostaje 45 zł, a Oliwia – 55 zł.

Ćwiczenie 3.

W bukiecie składającym się z 49 kwiatów stosunek liczby tulipanów do liczby róż i do liczby goździków jest odpowiednio równy $1 : 2 : 4$. Oblicz liczbę każdego rodzaju kwiatów w tym bukiecie.

Rozwiąż zadania

1. Czy podane wielkości są wprost proporcjonalne? Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) wiek człowieka i jego wzrost

b) długość drogi i czas jazdy w ruchu ze stałą prędkością

c) długość boku trójkąta równobocznego i jego obwód

d) długość boku rombu i jego pole

e) długość odcinka narysowanego w danej skali i długość rzeczywista tego odcinka

2. Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij brakujące dane, tak aby wielkości x i y były wprost proporcjonalne.

x		44	5,5	
y	3	4		0,6

3. Czy podane w tabelach wielkości a i b są wprost proporcjonalne? Uzasadnij swoją odpowiedź.

a)

a	3	4	5	6
b	9	12	15	18

b)

a	$1\frac{1}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$
b	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

4. Ela kupiła $2\ \text{kg}$ śliwek i zapłaciła $7{,}20\ \text{zł}$. Kuba kupił takie same śliwki i zapłacił $25{,}20\ \text{zł}$. Ile kilogramów śliwek kupił Kuba?

5. Ściany w pokoju Michała mają powierzchnię $36\ \text{m}^2$ (po odliczeniu powierzchni okna i drzwi). Na pomalowanie $1{,}8\ \text{m}^2$ potrzeba $0{,}3\ \text{l}$ farby. Sprawdź, czy $6\ \text{l}$ farby wystarczy Michałowi, aby pomalować ściany w swoim pokoju.

6. Mama udostępniła Zosi przepis na babeczki czekoladowe.



a) Oblicz, ile poszczególnych składników potrzebuje Zosia, jeśli chce upiec 45 babeczek według tego przepisu.

b) Ustal, ile babeczek z przepisu mamy można przygotować, mając $250\ \text{g}$ masła i odpowiednią ilość pozostałych składników.

c) Oblicz, ile mąki potrzeba do wypieku 8 babeczek.

7. Rzeka Kamienna płynąca przez województwo świętokrzyskie ma długość $138\ \text{km}$. Oblicz długość tej rzeki na mapie sporządzonej w skali $1 : 250\,000$.

8. Dwaj turyści wybrali się na wycieczkę wzdłuż brzegu morza. Jeden z nich, idąc plażą, przeszedł w ciągu $2{,}5\ \text{h}$ drogę o długości $10\ \text{km}$. Drugi turysta przejechał tę samą drogę rowerem w ciągu godziny. Ile czasu zajmie każdemu z turystów pokonanie trasy długości $22\ \text{km}$, jeśli każdy z nich będzie przemierzał ją w dotychczasowym, właściwym dla siebie tempie?

9. Pani Bożena podzieliła kwotę przeznaczoną na sfinansowanie urlopu w stosunku $2 : 3$. Mniejsza część otrzymana w wyniku takiego podziału, zarezerwowana na noclegi, była równa $1300\ \text{zł}$. Oblicz, jaką kwotę pani Bożena przeznaczyła na urlop.

10. Stosunek długości krawędzi prostopadłościanu wynosi $2 : 3 : 5$. Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest równa $120\ \text{cm}$. Uzasadnij, że objętość tego prostopadłościanu wynosi $810\ \text{cm}^3$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij brakujące dane, tak aby wielkości x i y były wprost proporcjonalne.

x		1,2	3
y	0,3	4	

2. Pan Adam planuje podróż z Krakowa do Gdyni. Jego samochód spala przeciętnie $7{,}2\ \text{l}$ oleju napędowego na $100\ \text{km}$. Litr oleju kosztuje $5{,}90\ \text{zł}$. Odległość drogowa między Krakowem a Gdynią jest równa $618\ \text{km}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Olej napędowy wykorzystany przez pana Adama w trakcie podróży z Krakowa do Gdyni w zaokrągleniu do części setnych będzie kosztował

A. 255,23 zł **B.** 255,20 zł **C.** 262,53 zł **D.** 262,50 zł

3. Pola chce przygotować na przyjęcie urodzinowe swojej siostry lemoniadę. Znalazła przepis, według którego do wody trzeba dodać cukier oraz sok z cytryny i dokładnie wymieszać. Wlała do naczynia 8 szklanek wody, wsypała $1{,}5$ szklanki cukru, a następnie dolała sok ze świeżo wyciśniętych cytryn. Otrzymała napój, w którym stosunek wody do cukru i do soku z cytryn był równy $16 : 3 : 2$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Pola dolała 1 szklankę soku z cytryn.	**P**	**F**
Jeśli Pola przygotowywałaby lemoniadę z 20 szklanek wody, to potrzebowałaby $3{,}75$ szklanki cukru.	**P**	**F**



2. Procenty i ułamki

- Pojęcie procentu
- Zamiana procentu na ułamek
- Zamiana ułamka na procent

Z pojęciem procentu (%) spotykamy się praktycznie codziennie. Za pomocą procentów określamy między innymi podwyżki i obniżki cen, ilość poszczególnych składników w kupowanych produktach, poziom naładowania baterii telefonu. Sprawne wykonywanie obliczeń procentowych jest przydatne m.in. podczas obliczania frekwencji w szkole czy wyników testów i egzaminów.



Słowo **procent** pochodzi od łacińskiego wyrażenia **pro centum** i oznacza **na sto.**

Jeden procent (1 %) pewnej wielkości to **jedna setna** tej wielkości.
Sto procent (100 %) pewnej wielkości to **jedna całość**.
p % pewnej wielkości to $\frac{p}{100}$ tej wielkości.

Aby sprawnie posługiwać się procentami, należy opanować umiejętność zamiany:
- procentu na ułamek zwykły nieskracalny oraz na ułamek dziesiętny,
- ułamka zwykłego oraz ułamka dziesiętnego na procent.

Przykład 1.

Zamień procent na ułamek zwykły nieskracalny lub liczbę mieszaną.

a) $70\,\% = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$

b) $128\,\% = \frac{128}{100} = 1\frac{28}{100} = 1\frac{7}{25}$

c) $31{,}5\,\% = \frac{31{,}5}{100} = \frac{315}{1000} = \frac{63}{200}$

d) $2\frac{1}{5}\,\% = \frac{2\frac{1}{5}}{100} = \frac{\frac{11}{5}}{100} = \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{100} = \frac{11}{500}$

Ćwiczenie 1.

Zamień procent na ułamek zwykły nieskracalny lub liczbę mieszaną.

a) $15\,\%$ **b)** $46\,\%$ **c)** $136\,\%$ **d)** $42{,}5\,\%$ **e)** $54{,}5\,\%$ **f)** $5\frac{1}{25}\,\%$

Przykład 2.

Zamień procent na ułamek dziesiętny.

a) $20\,\% = \frac{20}{100} = 0{,}2$ **b)** $112\,\% = \frac{112}{100} = 1{,}12$ **c)** $17{,}5\,\% = \frac{17{,}5}{100} = \frac{175}{1000} = 0{,}175$

Aby zamienić **procent na ułamek dziesiętny**, wystarczy liczbę procentów podzielić przez 100 (czyli przesunąć przecinek o dwa miejsca w lewo) i usunąć znak %.

$$21{,}5\,\% = 0{,}215$$

Ćwiczenie 2.

Zamień procent na ułamek dziesiętny.

a) $30\,\%$ **b)** $67\,\%$ **c)** $148\,\%$ **d)** $22{,}3\,\%$ **e)** $0{,}7\,\%$ **f)** $0{,}83\,\%$

Przykład 3.

Zamień ułamek zwykły lub liczbę mieszaną na procent.

a) $\frac{5}{25} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\,\%$ **b)** $\frac{7}{8} = \frac{875}{1000} = \frac{87{,}5}{100} = 87{,}5\,\%$

c) $4\frac{13}{20} = \frac{93}{20} = \frac{465}{100} = 465\,\%$ **d)** $5\frac{2}{17} = \frac{87}{17} \cdot 100\,\% = \frac{8700}{17}\,\% = 511\frac{13}{17}\,\%$

Gdy ułamka zwykłego nie da się rozszerzyć ani skrócić, tak aby jego mianownik był równy 100, wystarczy pomnożyć ten ułamek przez 100 %.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 100\,\% = \frac{100}{3}\,\% = 33\frac{1}{3}\,\%$$

Ćwiczenie 3.

Zamień ułamek zwykły lub liczbę mieszaną na procent.

a) $\frac{18}{25}$ **b)** $5\frac{1}{10}$ **c)** $2\frac{3}{8}$ **d)** $\frac{2}{7}$ **e)** $\frac{5}{11}$ **f)** $2\frac{4}{27}$

Przykład 4.

Zamień ułamek dziesiętny na procent.

a) $0{,}26 = \frac{26}{100} = 26\,\%$ **b)** $0{,}017 = \frac{17}{1000} = \frac{1{,}7}{100} = 1{,}7\,\%$ **c)** $12 = \frac{1200}{100} = 1200\,\%$

Aby zamienić **ułamek dziesiętny na procent**, wystarczy pomnożyć ten ułamek przez 100 % (czyli przesunąć przecinek o dwa miejsca w prawo i dopisać znak %).

$$5{,}26 = 526\,\%$$

Ćwiczenie 4.

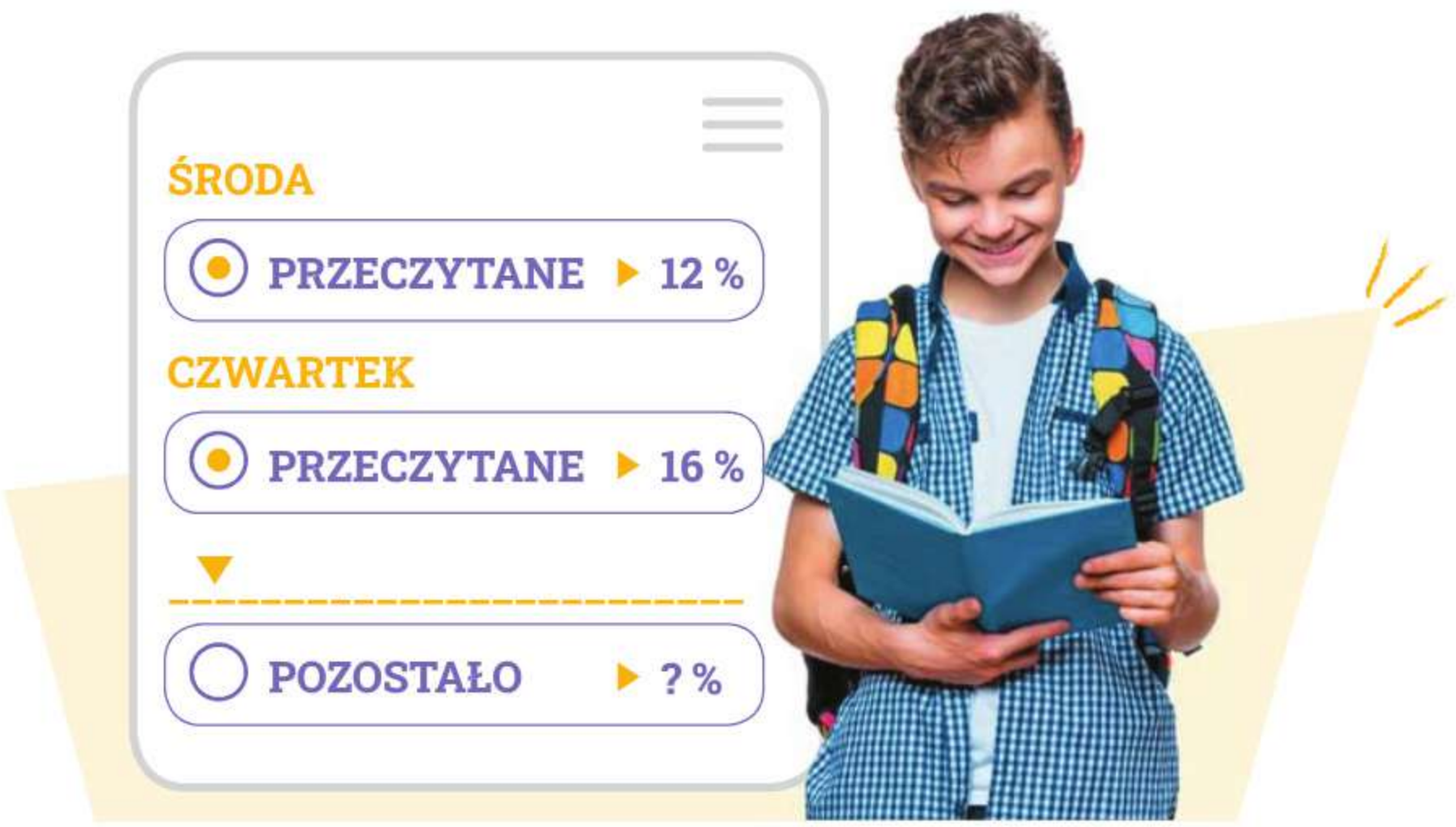
Zamień ułamek dziesiętny na procent.

a) $0{,}35$ **b)** $0{,}8$ **c)** $0{,}034$ **d)** $0{,}0076$ **e)** $2{,}047$ **f)** 24

Rozwiąż zadania

1. Zuzia kupiła sok z wyciskanych pomarańczy i jabłek. Sok z pomarańczy stanowi 65 % tego soku. Jaką część zawartości tego soku stanowi sok z pomarańczy, a jaką sok z jabłek? Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

2. Cezary rozpoczął czytanie lektury w środę. Zanotował, jaki procent lektury przeczytał w środę i w czwartek. Ustal, jaki procent lektury pozostał Cezaremu do przeczytania.



3. Zamień procent na ułamek zwykły nieskracalny lub liczbę mieszaną.

a) 6 % **b)** 12 % **c)** 142 % **d)** 220 % **e)** 0,2 %

f) 25,5 % **g)** 120,4 % **h)** 0,04 % **i)** $\frac{4}{125}$ % **j)** $3\frac{2}{7}$ %

4. Zamień procent na ułamek dziesiętny.

a) 15 % **b)** 8 % **c)** 110 % **d)** 332 % **e)** 0,5 %

f) 1,24 % **g)** 5,218 % **h)** 0,004 % **i)** $2\frac{3}{4}$ % **j)** $\frac{7}{40}$ %

5. Zamień ułamek zwykły lub liczbę mieszaną na procent.

a) $\frac{17}{25}$ **b)** $\frac{12}{5}$ **c)** $6\frac{5}{20}$ **d)** $\frac{1}{8}$ **e)** $\frac{31}{40}$ **f)** $\frac{41}{125}$

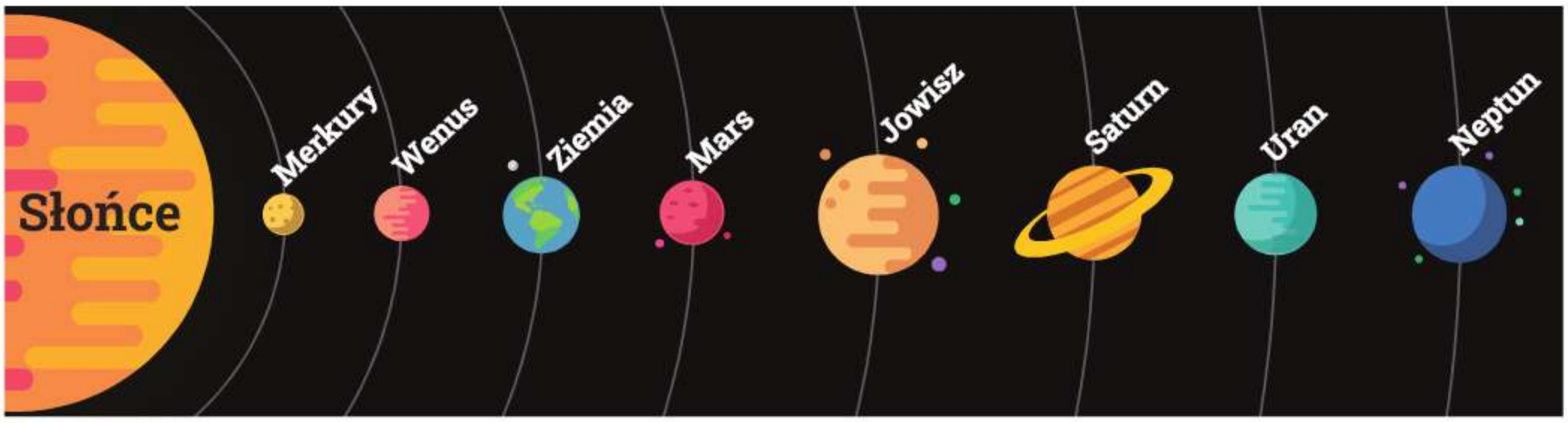
g) $7\frac{3}{200}$ **h)** $2\frac{13}{250}$ **i)** $5\frac{3}{30}$ **j)** $\frac{4}{9}$ **k)** $\frac{5}{3}$ **l)** $\frac{1}{12}$

6. Zamień ułamek dziesiętny na procent.

a) 0,23 **b)** 2,06 **c)** 3,57 **d)** 0,005 **e)** 0,325

f) 2,4 **g)** 11,28 **h)** 0,0021 **i)** 52,34 **j)** 33

7. Rysunek przedstawia planety w Układzie Słonecznym. Oblicz, jaki procent liczby wszystkich planet stanowią te, które krążą po orbitach bardziej oddalonych od Słońca niż Ziemia.



8. Ze sprawdzianu z matematyki Zosia uzyskała około 95,65 % możliwych do zdobycia punktów. Bruno z tego samego sprawdzianu zdobył 22 na 23 punkty. Ustal, kto miał lepszy wynik, jeśli liczba zdobytych ze sprawdzianu punktów jest zawsze liczbą naturalną.

☆

Sprawdź, co umiesz!



E

1. Podczas transportu 8 % jabłek zostało uszkodzonych.
Ile procent jabłek pozostało nieuszkodzonych?
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 88 % **B.** 92 % **C.** 62 % **D.** 90 %

2. Zamień procent na ułamek zwykły nieskracalny lub liczbę mieszaną oraz na ułamek dziesiętny.

a) 36 % **b)** 180 % **c)** 12,5 % **d)** $4\frac{5}{18}$ %

3. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

E

Po zamianie ułamka 2,8 na procent otrzymamy | **A** | **B** |. **A.** 28 % **B.** 280 %

Liczba $4\frac{4}{21}$ wyrażona w postaci procentu to | **C** | **D** |. **C.** $419\frac{1}{21}$ % **D.** $409\frac{1}{21}$ %

3. Diagramy procentowe

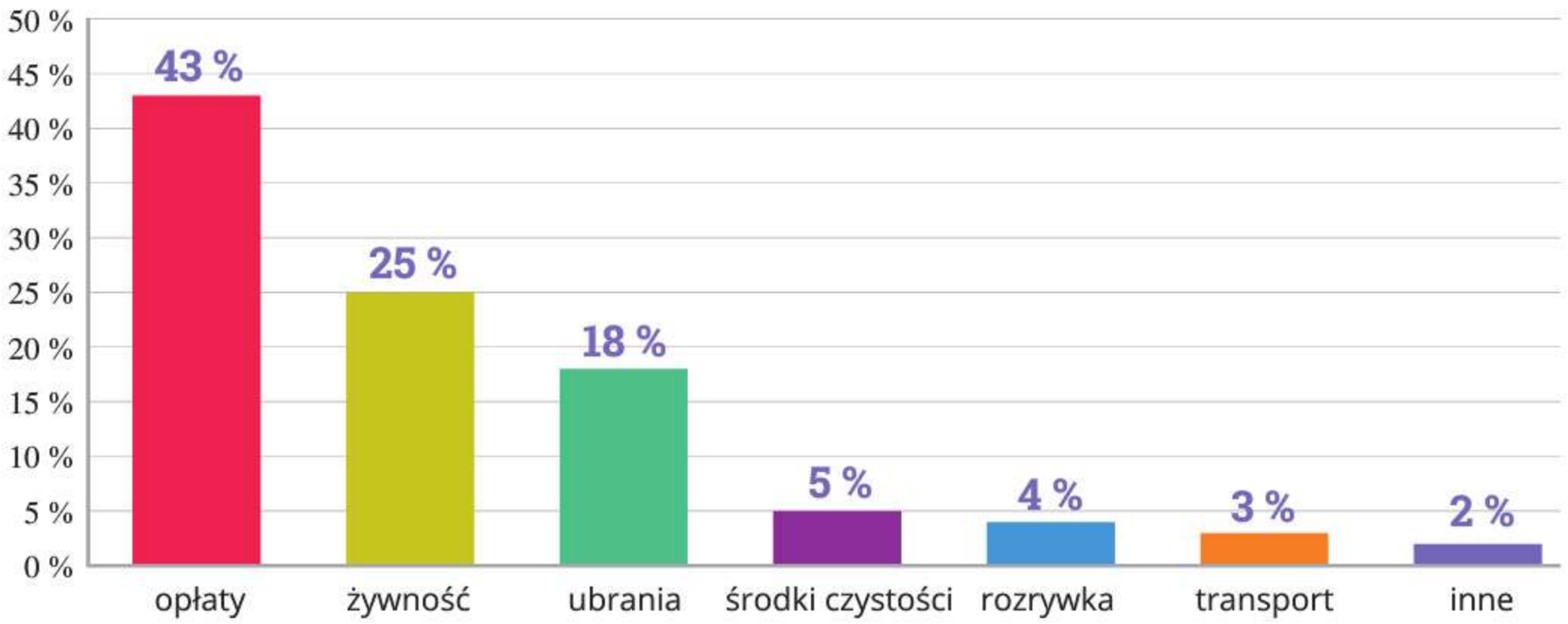
- Odczytywanie danych z diagramów
- Przedstawianie danych na procentowych diagramach słupkowych

Diagramy procentowe przedstawiają graficznie dane statystyczne. Diagramy wykorzystywane są w wielu sytuacjach życia codziennego, np. w przedstawieniu szkolnej frekwencji w poszczególnych klasach, prezentowaniu wyników sondaży. Najczęściej wykorzystujemy diagramy słupkowe oraz diagramy kołowe.

Diagram procentowy słupkowy

Przykład 1.

Na diagramie słupkowym przedstawiono procentowy rozkład miesięcznych wydatków w rodzinie państwa Kowalskich. Wydatki pochłaniają całość ich dochodów.



Z podanego diagramu możemy odczytać wiele informacji, np.

- państwo Kowalscy 25 % miesięcznego dochodu przeznaczają na żywność,
- rodzina Kowalskich przeznacza na opłaty taką samą kwotę jak na żywność i ubrania łącznie.

Ćwiczenie 1.

Skorzystaj z diagramu słupkowego przedstawionego w Przykładzie 1. i odpowiedz na pytanie.

a) Jaki procent dochodów państwo Kowalscy przeznaczają na zakup odzieży?

b) Na co państwo Kowalscy przeznaczają największą część dochodów?

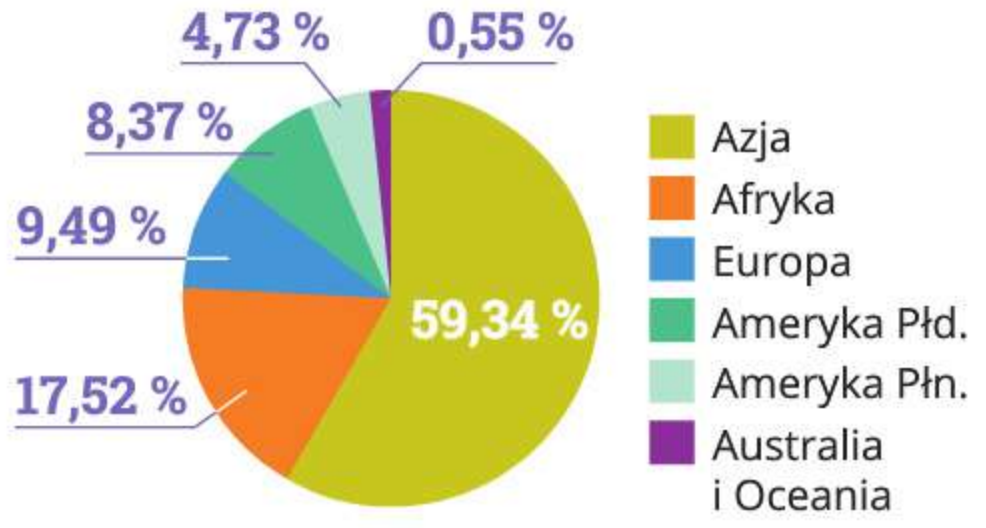
c) Czy na opłaty i ubrania wystarcza połowa dochodów rodziny Kowalskich?

d) Jakie jeszcze informacje można odczytać z tego diagramu? Podaj 3 przykłady.

Diagram procentowy kołowy

Przykład 2.

Na diagramie kołowym przedstawiono procentowy rozkład ludności zamieszkującej w 2022 r. poszczególne kontynenty.



Z podanego diagramu możemy odczytać wiele informacji, np.

- prawie 60 % mieszkańców kuli ziemskiej zamieszkuje Azję,
- mieszkańców Azji jest ponad 3 razy więcej niż mieszkańców Afryki.

Ćwiczenie 2.

Skorzystaj z diagramu kołowego przedstawionego w Przykładzie 2. i odpowiedz na pytanie.

a) Czy w Europie jest ponad 2 razy więcej obywateli niż w Ameryce Północnej?

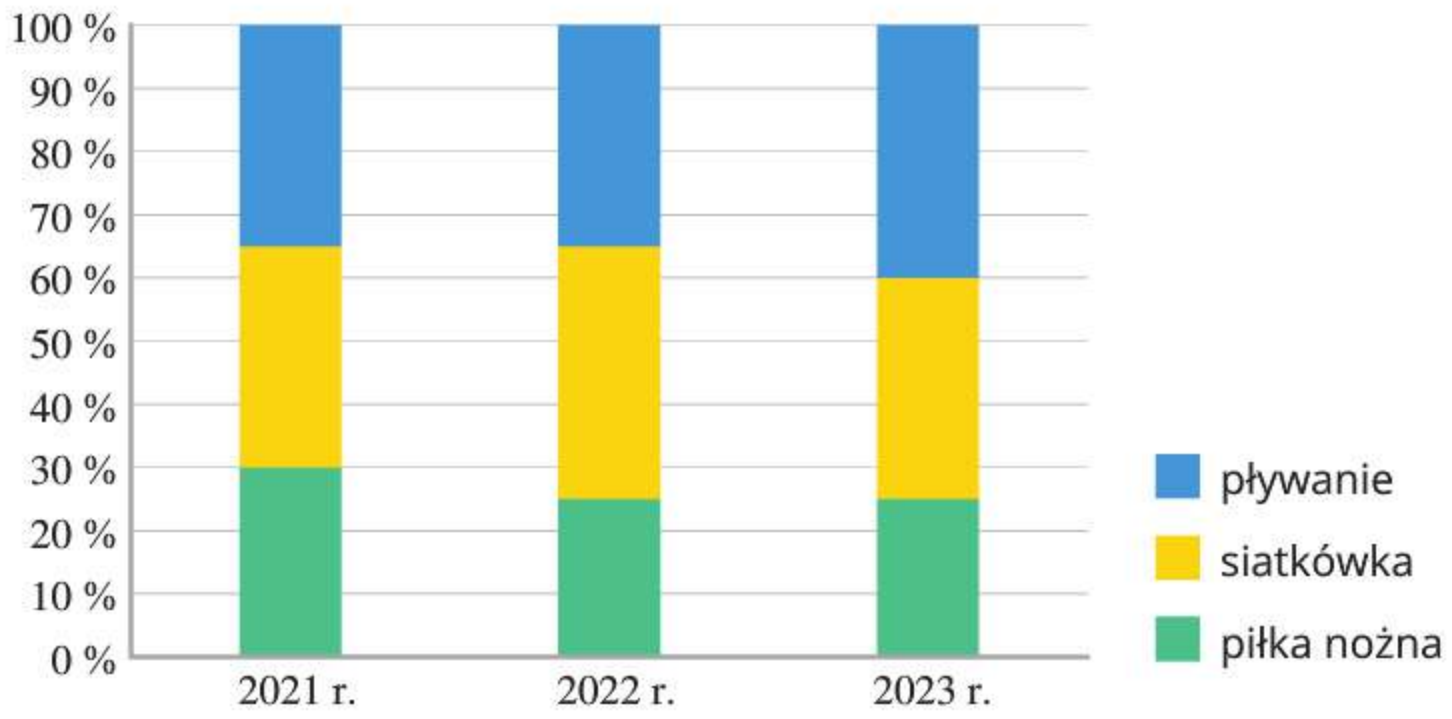
b) Jaką część ludności świata stanowią mieszkańcy obu Ameryk? Wynik przedstaw w postaci ułamka dziesiętnego.

c) Jakie jeszcze informacje można odczytać z tego diagramu? Podaj 3 przykłady.

Diagram procentowy prostokątny

Przykład 3.

Na diagramie prostokątnym przedstawiono procentowy udział ulubionych dyscyplin sportowych uczniów pewnej szkoły podstawowej w poszczególnych latach.



Z podanego diagramu możemy odczytać wiele informacji, np.

- W 2021 r. piłka nożna była ulubioną dyscypliną sportową 30 % uczniów, siatkówka – 35 %, pływanie – 35 %.
- Zainteresowanie uczniów pływaniem w 2022 r. nie zmieniło się w stosunku do 2021 r.

Ćwiczenie 3.

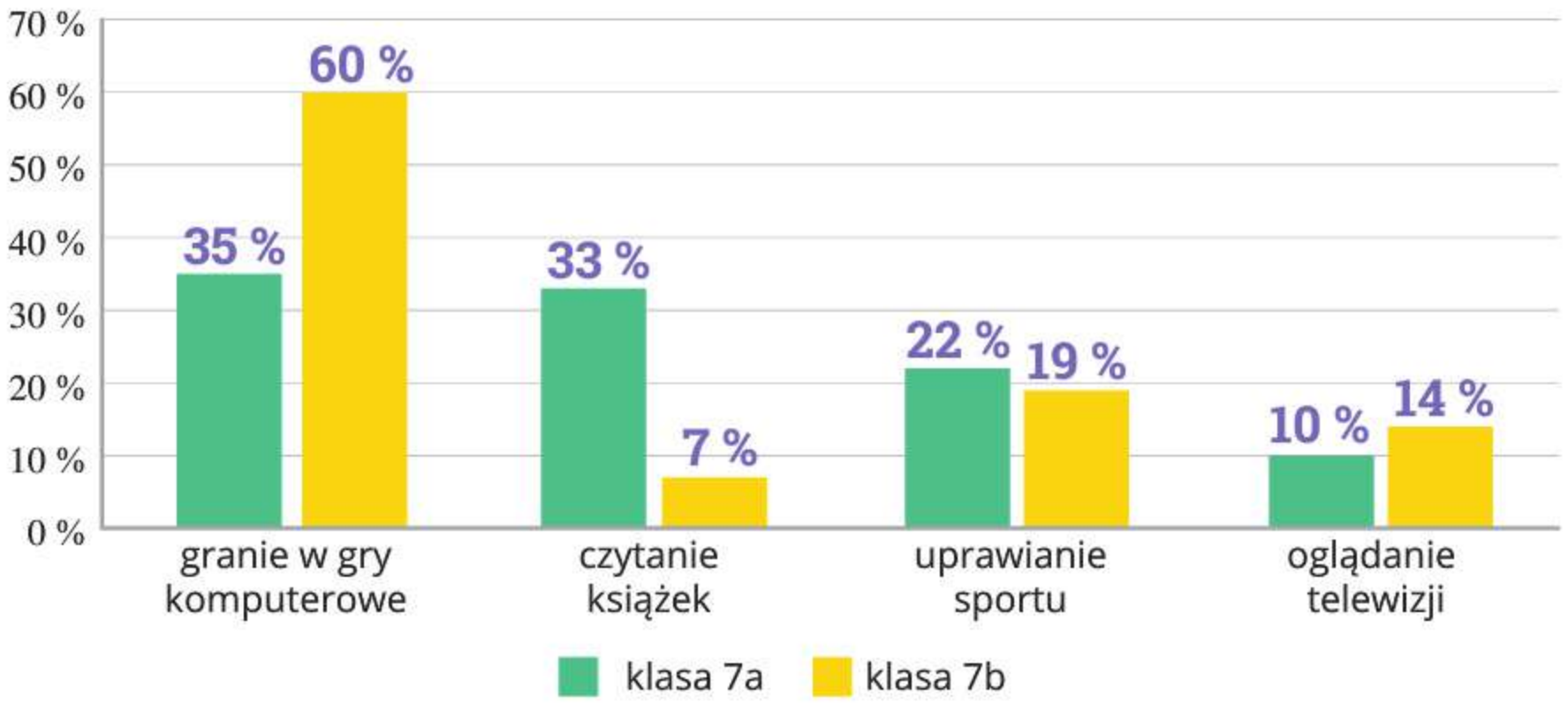
Skorzystaj z diagramu prostokątnego przedstawionego w Przykładzie 3. i odpowiedz na pytanie.

a) Która dyscyplina sportowa była najbardziej lubiana przez uczniów w 2022 r.?

b) Jakie jeszcze informacje można odczytać z tego diagramu? Podaj 2 przykłady.

Rozwiąż zadania

1. W pewnej szkole podstawowej przeprowadzono ankietę na temat ulubionego sposobu spędzania wolnego czasu. Wyniki przedstawiono na procentowym diagramie słupkowym.



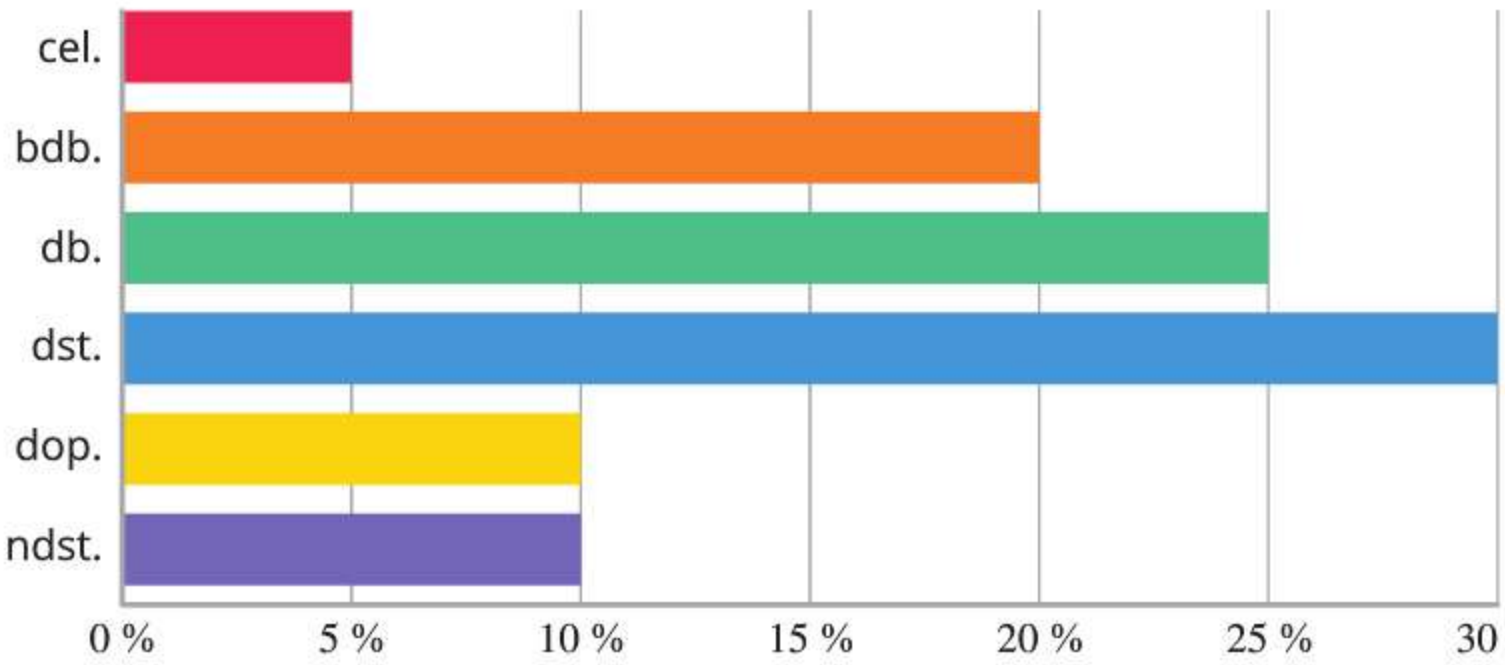
Skorzystaj z przedstawionego diagramu i odpowiedz na pytanie.

a) Który ze sposobów spędzania wolnego czasu najmniej różni te klasy?

b) Czy więcej niż $\frac{1}{3}$ liczby uczniów klasy 7a najbardziej lubi grać w gry komputerowe?

c) Jakie jeszcze informacje można odczytać z tego diagramu? Podaj 3 przykłady.

2. Na procentowym diagramie słupkowym przedstawione zostały wyniki ze sprawdzianu z matematyki w klasie 7d.



Skorzystaj z przedstawionego diagramu i odpowiedz na pytanie.

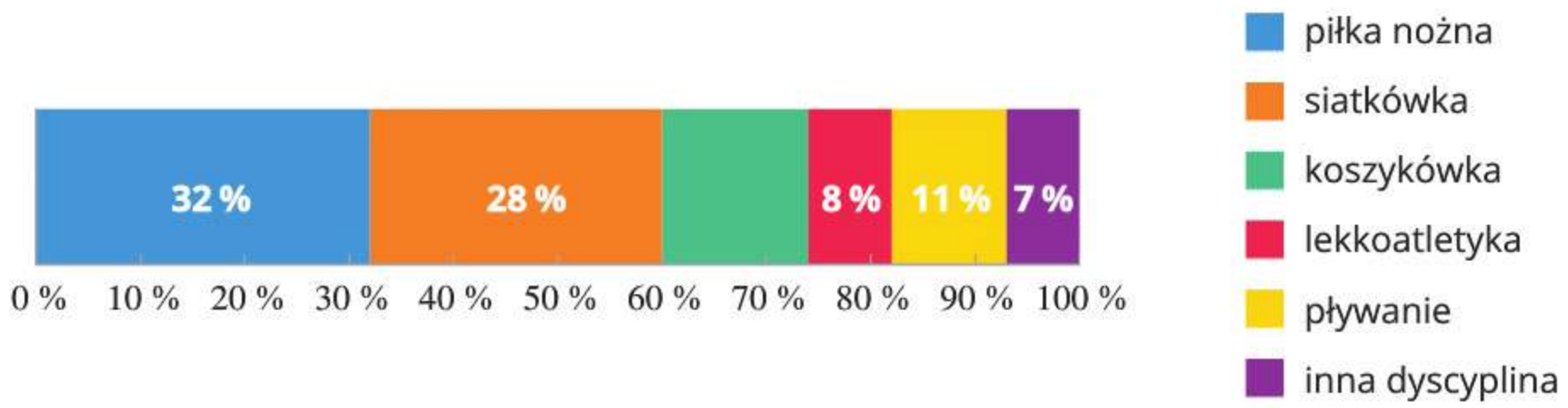
a) Ile procent uczniów uzyskało ocenę wyższą od oceny dopuszczającej?

b) Jaką część wszystkich uczniów stanowią uczniowie, którzy otrzymali ocenę co najmniej dobrą? Odpowiedź zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

c) Ile procent uczniów uzyskało ocenę co najwyżej dobrą? Czy jest to mniej niż $\frac{3}{4}$ wszystkich uczniów tej klasy?

d) Czy więcej niż $\frac{1}{3}$ uczniów otrzymała ocenę dostateczną?

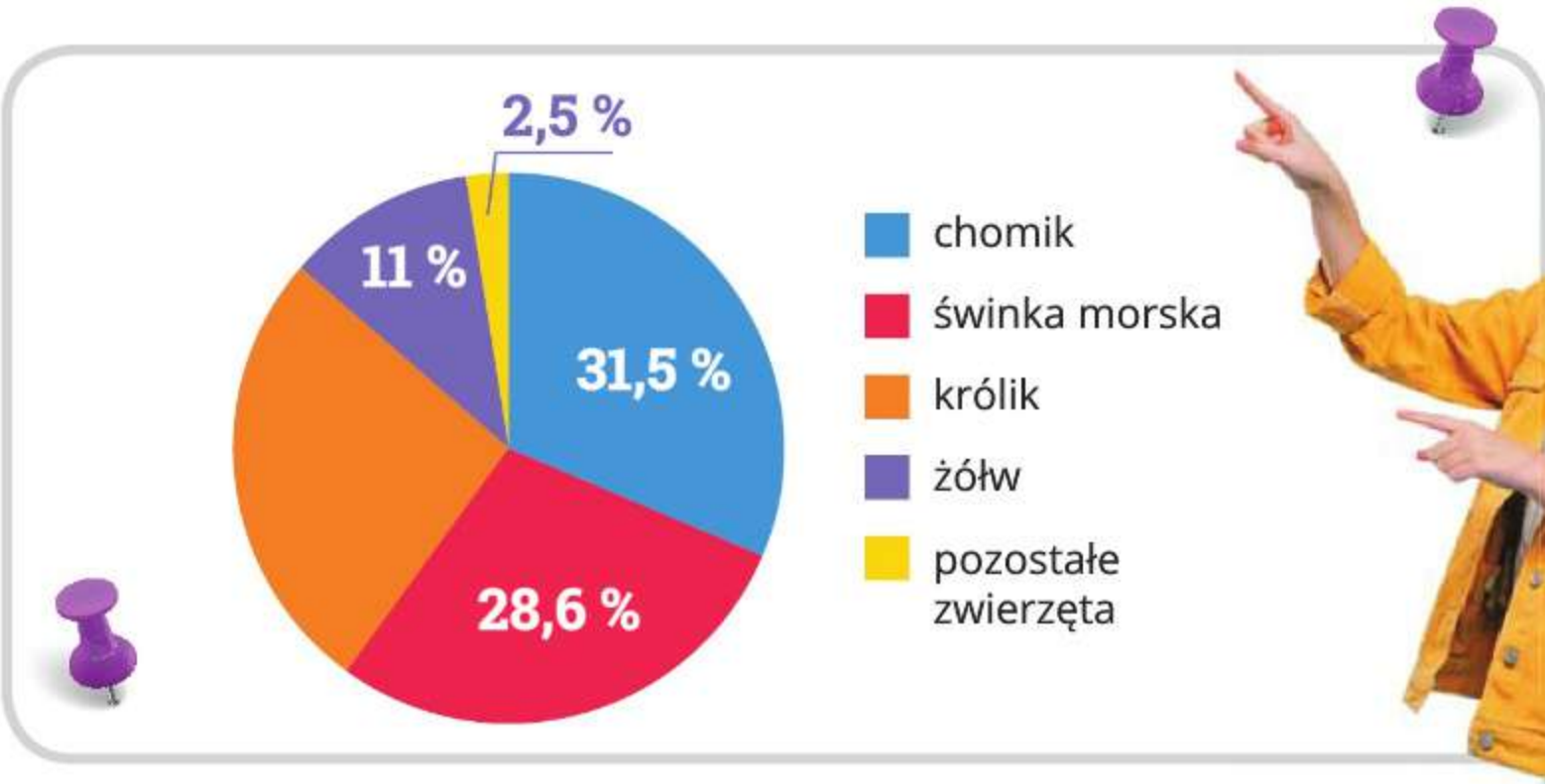
3. Na procentowym diagramie prostokątnym przedstawiono wyniki ankiety, w której zapytano uczniów o ulubioną dyscyplinę sportu. E



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Piłkę nożną i siatkówkę łącznie wybrała dokładnie połowa uczniów.	**P**	**F**
Koszykówkę wybrało $\frac{7}{50}$ uczniów.	**P**	**F**
Mniej niż $\frac{1}{6}$ ankietowanych lubi pływanie.	**P**	**F**

4. Na diagramie kołowym przedstawiono udział procentowy liczby zwierząt, które można kupić w sklepie zoologicznym.





Skorzystaj z przedstawionego diagramu i odpowiedz na pytanie.

a) Których zwierząt jest najwięcej w tym sklepie zoologicznym?

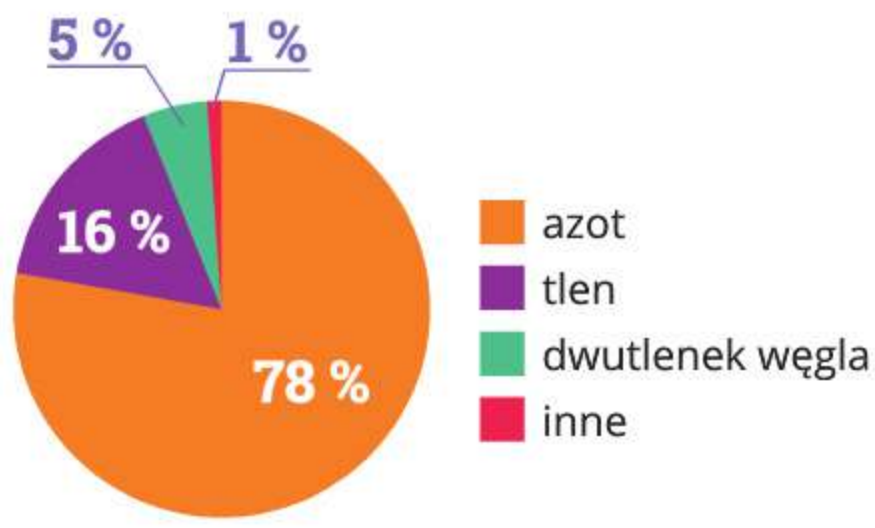
b) Czy żółwie stanowią mniej niż $\frac{3}{25}$ liczby wszystkich zwierząt w tym sklepie?

c) Czy chomiki oraz króliki stanowią razem ponad połowę liczby wszystkich zwierząt w tym sklepie?

d) Które zwierzęta stanowią więcej niż $\frac{7}{40}$ liczby wszystkich zwierząt w tym sklepie zoologicznym?

E

5. Na procentowym diagramie kołowym przedstawiono udział procentowy gazów wchodzących w skład powietrza wydychanego przez człowieka.



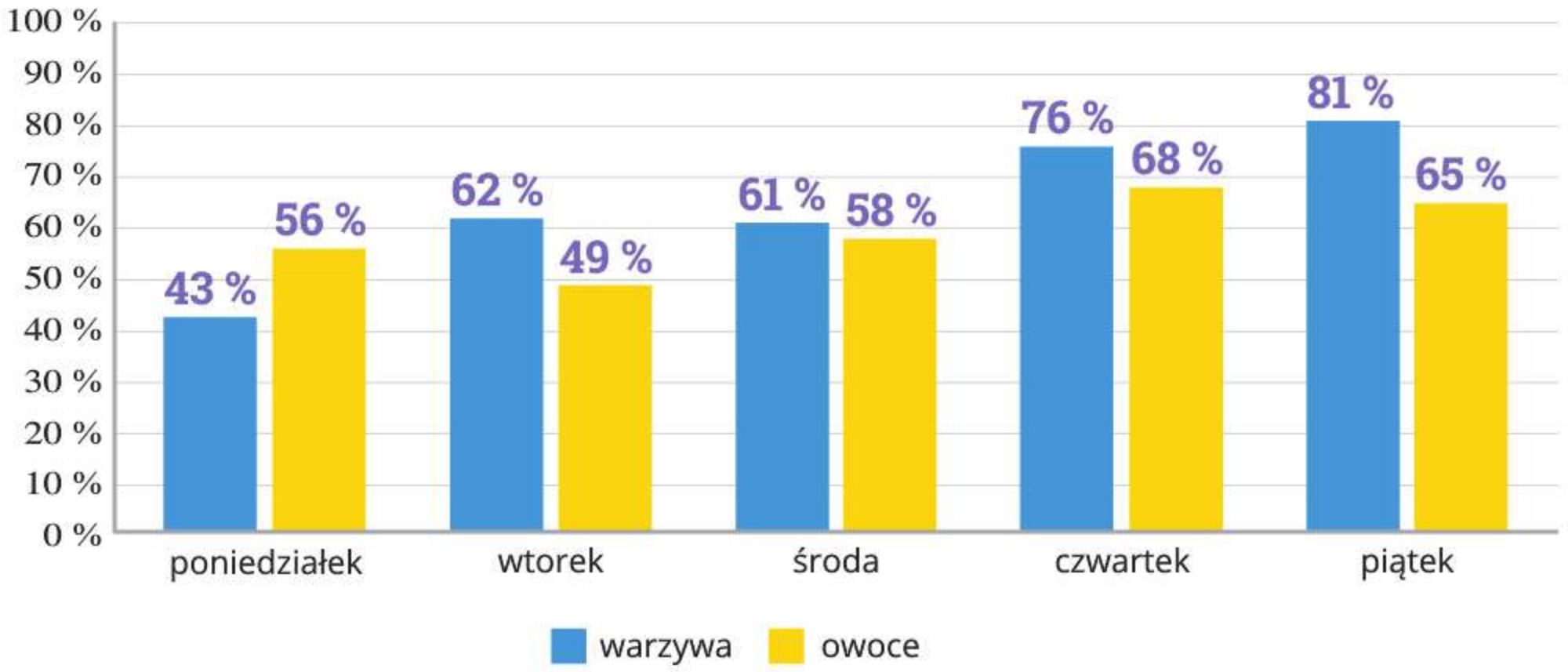
Źródło: https://zpe.gov.pl/a/na-czym-polega-oddychanie/D18FhL8mS.

Czy azot stanowi $\frac{19}{25}$ składu powietrza wydychanego przez człowieka?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	$76\ \% = \frac{76}{100} = \frac{19}{25}$.
			2.	$78\ \% = \frac{78}{100} = \frac{39}{50}$.
B.	Nie,		**3.**	$16\ \% = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$.

6. Zgodnie z zasadami piramidy żywieniowej podstawą w naszej codziennej diecie powinny być warzywa i owoce. Przeprowadzono ankietę wśród 1000 osób. Ankietowanym zadano pytanie: *Czy jadłaś/jadłeś warzywa/owoce w poszczególnych dniach roboczych w ciągu poprzedniego tygodnia?* Na diagramie słupkowym przedstawiono, ile procent badanych osób jadło warzywa i owoce w poszczególnych dniach roboczych poprzedniego tygodnia.



Skorzystaj z diagramu i odpowiedz na pytanie.

a) Czy mniej niż czwarta część badanych nie zjadła warzyw w czwartek? Uzasadnij swoją odpowiedź.

b) Którego dnia najwięcej osób zjadło warzywa, a którego dnia owoce?

c) Czy mniej niż $\frac{5}{8}$ badanych zjadło warzywa w środę? Uzasadnij swoją odpowiedź.

d) Czy więcej niż $\frac{5}{9}$ badanych zjadło owoce w poniedziałek? Uzasadnij swoją odpowiedź.

7. W klasach siódmych zadano uczniom pytanie: *Jaki przedmiot szkolny najbardziej lubisz?* Wyniki ankiety przeprowadzonej wśród 200 uczniów przedstawiono w tabeli.

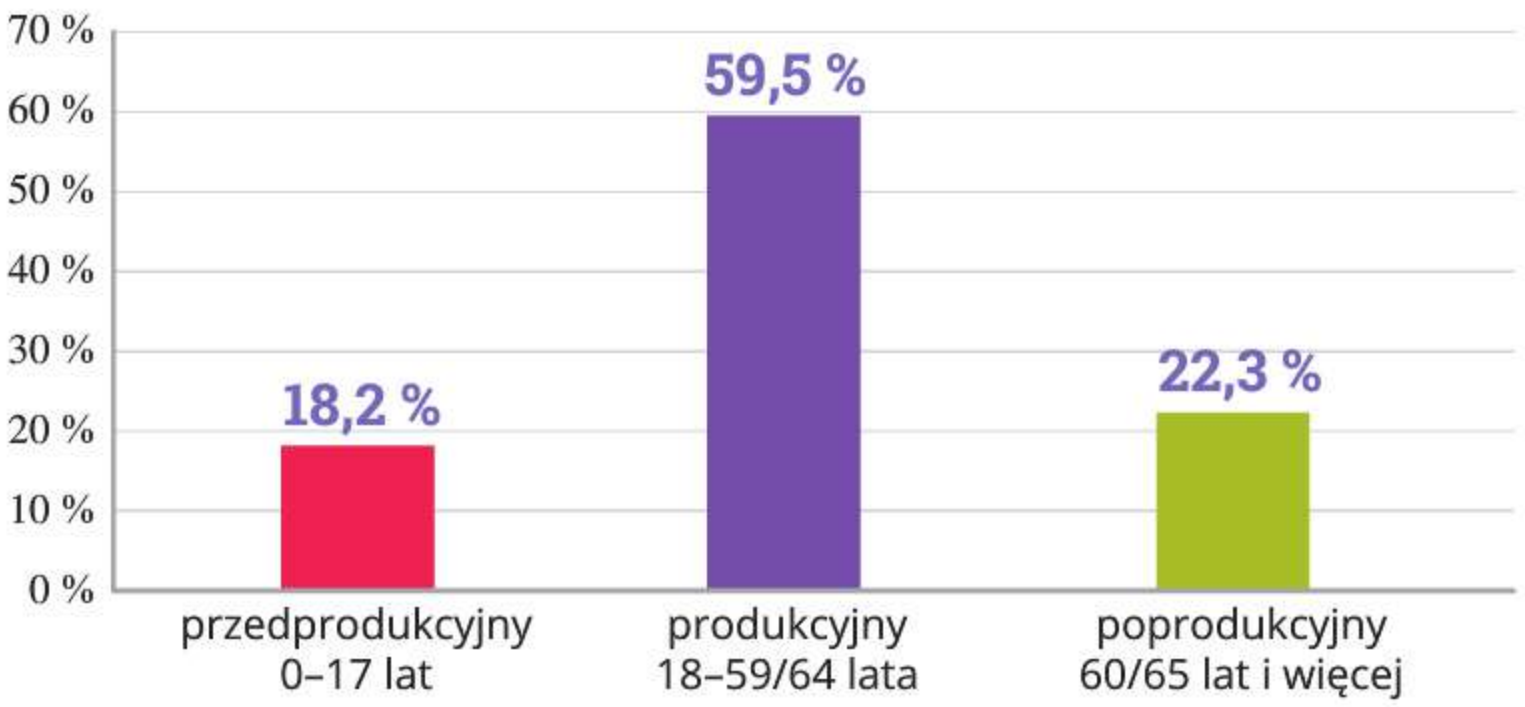
WF	Matematyka	Język polski	Język angielski	Geografia	Fizyka	Inny przedmiot
68	44	36	20	16	10	6

Narysuj procentowy diagram słupkowy ilustrujący dane przedstawione w tabeli.

Sprawdź, co umiesz!

1. Na podstawie informacji udostępnionych przez Główny Urząd Statystyczny (GUS) utworzono procentowy diagram słupkowy przedstawiający strukturę ludności w zależności od wieku w Polsce w 2020 r. W tym czasie wiek emerytalny dla kobiet wynosił 60 lat, a dla mężczyzn – 65 lat.

E



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Ponad połowa ludności w Polsce w 2020 r. była w przedziale wiekowym 18–59/64 lata.	**P**	**F**
Dzieci i młodzież w przedziale wiekowym 0–17 lat stanowili mniej niż $\frac{3}{20}$ wszystkich ludzi w Polsce w 2020 r.	**P**	**F**

2. W tabeli przedstawiono liczbę poszczególnych ocen, które uzyskały Ola i Marysia na koniec roku szkolnego.

	Dop.	Dst.	Db.	Bdb.	Cel.
Ola	0	1	2	4	3
Marysia	1	2	4	2	1

Na podstawie tabeli sporządź procentowe diagramy słupkowe przedstawiające oceny Oli oraz Marysi.

4. Obliczanie procentu danej liczby

- Udział procentowy poszczególnych składników w produkcie
- Obliczanie ceny produktu po obniżce lub podwyżce
- Obliczanie podatku VAT

W życiu codziennym często określamy nie tylko ułamek danej wielkości, ale i procent tej wielkości, np. ile procent stanowi białko zawarte w jogurcie naturalnym. Z etykiety jogurtu możemy odczytać, że w $100\ \text{g}$ jogurtu są $4\ \text{g}$ białka. Oznacza to, że białko stanowi $\frac{4}{100} = 4\ \%$ masy jogurtu. Jogurt waży jednak nie $100\ \text{g}$, a $200\ \text{g}$. Jak zatem obliczyć, ile gramów białka jest w jednym opakowaniu tego jogurtu? Z pomocą przychodzi nam umiejętność obliczania procentu danej liczby.



Procent pewnej wielkości to **ułamek** tej wielkości.

$p\ \%$ liczby a jest równe $\frac{p}{100} \cdot a$.

Przykład 1.

Oblicz podany procent każdej z zapisanych liczb.

a) $1\ \%$ liczby 14

$1\ \%$ pewnej wielkości to $\frac{1}{100}$ tej wielkości.

$\frac{1}{100} \cdot 14 = \frac{14}{100} = 0{,}14$, czyli $1\ \%$ liczby 14 to $0{,}14$.

b) $10\ \%$ liczby $21{,}15$

$10\ \%$ pewnej wielkości to $\frac{10}{100}$ tej wielkości.

$\frac{10}{100} \cdot 21{,}15 = \frac{211{,}5}{100} = 2{,}115$, czyli $10\ \%$ liczby $21{,}15$ to $2{,}115$.

c) $25\ \%$ liczby $\frac{4}{5}$

$25\ \%$ pewnej wielkości to $\frac{25}{100}$ tej wielkości.

$\frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{25}{\cancel{100}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, czyli $25\ \%$ liczby $\frac{4}{5}$ to $\frac{1}{5}$.

d) $50\ \%$ liczby $2\frac{2}{3}$

$50\ \%$ pewnej wielkości to $\frac{50}{100}$ tej wielkości.

$\frac{\overset{1}{\cancel{50}}}{\underset{2}{\cancel{100}}} \cdot 2\frac{2}{3} = \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} \cdot \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, czyli $50\ \%$ liczby $2\frac{2}{3}$ to $1\frac{1}{3}$.

Ćwiczenie 1.

Oblicz podany procent każdej z zapisanych liczb.

a) $10\ \%$ liczb: 6 i 57 **b)** $25\ \%$ liczb: 216 i $49{,}2$ **c)** $50\ \%$ liczb: $4\frac{1}{8}$ i $108{,}24$

Przykład 2.

Oblicz 45 % liczby 86.

Sposób I

Zamienimy procent na ułamek, a następnie pomnożymy go przez 86.

$45\,\% = 0{,}45$

45 % liczby 86 to $0{,}45 \cdot 86 = 38{,}7$.

Aby **obliczyć procent danej liczby**, należy zamienić procent na ułamek zwykły lub dziesiętny i pomnożyć go przez tę liczbę.

Sposób II

Obliczymy 1 % liczby 86, czyli podzielimy ją przez 100. Następnie wynik pomnożymy przez 45.

$86 - 100\,\%$; $: 100$; $0{,}86 - 1\,\%$; $\cdot 45$; $38{,}7 - 45\,\%$

Sposób III

Oznaczymy przez x szukaną liczbę i zastosujemy metodę proporcji.

Zapiszemy w jednej kolumnie liczby, a w drugiej kolumnie procenty, które im odpowiadają.

$86 - 100\,\%$
$x - 45\,\%$

Iloczyn wyrazów skrajnych przyrównamy do iloczynu wyrazów środkowych.

$100\,\% \cdot x = 86 \cdot 45\,\%$

$1 \cdot x = 86 \cdot \frac{45^{9}}{\cancel{100}_{20}}$

Obliczymy wartość x, czyli 45 % liczby 86.

$x = {}^{43}\cancel{86} \cdot \frac{9}{\cancel{20}_{10}} = \frac{43 \cdot 9}{10} = \frac{387}{10} = 38{,}7$

Ćwiczenie 2.

Oblicz.

a) 35 % liczby 80 **b)** 230 % liczby 3,5 **c)** 4,5 % liczby 9 **d)** 15 % liczby $3\frac{1}{3}$

Przykład 3.

Na ilustracji przedstawione jest opakowanie śmietany. Ile gramów tłuszczu znajduje się w śmietanie zawartej w tym opakowaniu?

Zadanie rozwiążemy jednym z poznanych sposobów.



Zamienimy procent na ułamek, a następnie pomnożymy go przez masę śmietany.

$12\,\% = \frac{12}{100}$ $\frac{12}{\cancel{100}_{2}} \cdot \cancel{450}^{9} = \frac{108}{2} = 54$ [g]

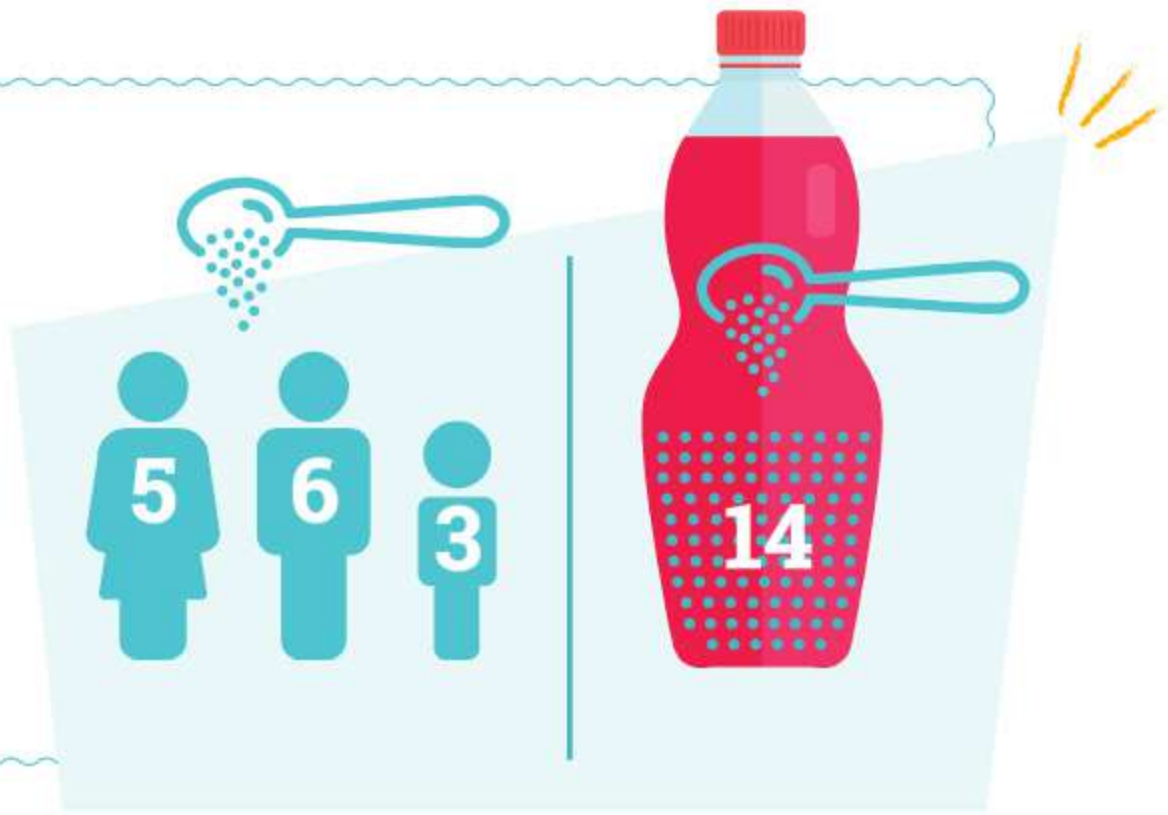
Odp. W śmietanie zawartej w tym opakowaniu znajdują się 54 g tłuszczu.

Ćwiczenie 3.

Średniej wielkości pomarańcza waży około 320 g. Witamina C stanowi 5,1 % masy tego owocu. Ile gramów witaminy C zawiera średniej wielkości pomarańcza?

A to ciekawe

W 2014 r. Światowa Organizacja Zdrowia (WHO) zaleciła, aby ilość cukru, którą możemy bezpiecznie spożywać, zmniejszyć z 10 % do tylko 5 % zapotrzebowania energetycznego: 5 łyżeczek dla kobiet, 6 łyżeczek dla mężczyzn i 3 łyżeczki dla dzieci w ciągu jednego dnia. Okazuje się, że wypijając 1,5 l wody smakowej, spożywamy około 70,5 g cukru (14 łyżeczek), czyli przekraczamy normy ponaddwukrotnie.



Przykład 4.

Deskorolka kosztowała 189 zł. Jej cenę podwyższono o 26 %. Oblicz cenę deskorolki po podwyżce.

Sposób I

Na początku ustalimy, o ile złotych podwyższono początkową cenę. W tym celu obliczymy 26 % liczby 189.

$$26\,\% = 0{,}26$$
$$0{,}26 \cdot 189 = 49{,}14 \text{ [zł]}$$

Do ceny początkowej deskorolki dodamy kwotę podwyżki.

$$189 + 49{,}14 = 238{,}14 \text{ [zł]}$$

Sposób II

Jeśli cenę deskorolki podwyższono o 26 %, to jej obecna cena stanowi $100\,\% + 26\,\% = 126\,\%$ ceny początkowej.

Obliczymy 126 % ceny początkowej deskorolki.

$$126\,\% = 1{,}26$$
$$1{,}26 \cdot 189 = 238{,}14 \text{ [zł]}$$

Odp. Cena deskorolki po podwyżce jest równa 238,14 zł.

Ćwiczenie 4.

W sklepie sportowym jest promocja. Oblicz ceny artykułów po obniżce.



Podatek VAT jest podatkiem od towarów i usług. Zawsze jest opłacany przez konsumenta, który jako ostatni nabył dany towar lub usługę. W Polsce podstawowa stawka VAT-u jest równa 23 %. Występują również obniżone stawki: 8 %, 5 % oraz 0 %.

cena netto + podatek VAT (od ceny netto) = cena brutto

Przykład 5.

Cena netto klawiatury jest równa 140 zł. Uzasadnij, że cena brutto klawiatury, uwzględniająca podatek VAT w wysokości 23 %, jest równa 172,20 zł.

Obliczymy 23 % kwoty 140 zł, a następnie cenę brutto klawiatury.

23 % kwoty 140 zł to $0{,}23 \cdot 140$ zł $= 32{,}20$ zł.
$140 + 32{,}20 = 172{,}20$ [zł]

Uzasadniliśmy, że cena brutto klawiatury, uwzględniająca podatek VAT w wysokości 23 %, jest równa 172,20 zł.

Ćwiczenie 5.

Cena netto samochodu jest równa 140 500 zł. Uzasadnij, że cena brutto tego samochodu, uwzględniająca podatek VAT w wysokości 23 %, jest równa 172 815 zł.

Rozwiąż zadania

1. Oblicz.

a) 11 % liczby 200 **b)** 55 % liczby 0,6 **c)** 140 % liczby 32 **d)** 12 % liczby 120

e) 60 % liczby $\frac{5}{12}$ **f)** 7,5 % liczby 420 **g)** 0,05 % liczby 8 **h)** 0,026 % liczby 1200

2. Przepisz wyrażenia do zeszytu, a następnie połącz te, które mają takie same wartości.

I. 24 % liczby 50 **II.** 25 % liczby 400 **III.** 3 % liczby 200 **IV.** 50 % liczby 24

V. 400 % liczby 25 **VI.** 5 % liczby 240 **VII.** 2,4 % liczby 500 **VIII.** 30 % liczby 20

3. W klasie 7a jest 25 uczniów. Dziewczęta stanowią 64 % liczby wszystkich uczniów tej klasy. Oblicz, ilu chłopców jest w tej klasie.

4. Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) 12 % liczby 40 oraz $\frac{1}{25}$ liczby 120 **b)** 7 % liczby 2000 oraz 0,07 % liczby 20 000

c) $\frac{9}{20}$ % liczby 2 oraz 1,2 % liczby 120 **d)** 133 % liczby 44 oraz 131 % liczby 46

5. Na zdjęciu przedstawiono porcję łososia, którą Olek kupił w sklepie. Ile gramów białka znajduje się w tej porcji?



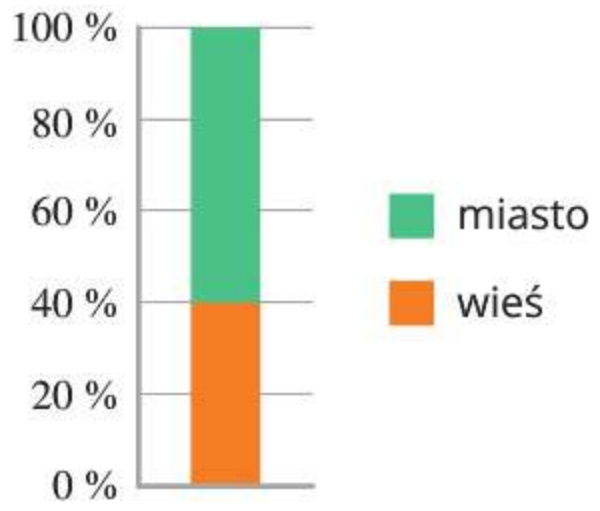
6. Jogurt naturalny zawiera 2,5 % tłuszczu. Sprawdź, czy w jogurcie o masie 400 g jest 20 g tłuszczu.

7. Najnowsza konsola przedpremierowo kosztowała 3850 zł. W dzień premiery jej cenę podwyższono o 14 %. Oblicz cenę konsoli po podwyżce.

8. Według danych Głównego Urzędu Statystycznego (GUS) w drugiej połowie 2020 r. ludność w Polsce liczyła około 38,35 mln osób. Skorzystaj z danych przedstawionych na procentowym diagramie prostokątnym i oblicz:

a) ile osób mieszkało w tamtym okresie na wsi,

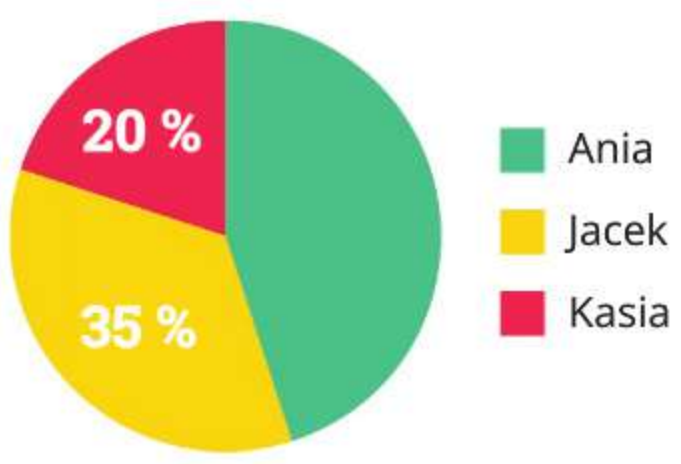
b) ile osób mieszkało w tamtym okresie w mieście.



9. W szkole liczącej 540 uczniów przeprowadzono wybory na przewodniczącego samorządu szkolnego. Na procentowym diagramie kołowym przedstawiono wyniki głosowania.

a) Oblicz, ile głosów zdobyła Ania.

b) Ustal, o ile głosów więcej powinien dostać Jacek, aby zdobyć 50 % poparcia w wyborach.



10. Pan Wojciechowski jechał samochodem z prędkością 60 km/h. Po pewnym czasie zwiększył prędkość o 20 %, a potem zmniejszył ją o 25 %. Cały czas jechał zgodnie z przepisami ruchu drogowego. Czy pan Wojciechowski przejeżdżał przez obszar zabudowany, jeśli dopuszczalna prędkość w tym obszarze wynosi 50 km/h?

11. Sprawdź, w której butelce mleka jest najmniej gramów tłuszczu, a w której najwięcej. Przyjmij, że 1 ml to 1 g.



12. Każdy bok kwadratu K_1 o obwodzie 32 cm zwiększono o 15 % i uzyskano kwadrat K_2. Oblicz, o ile centymetrów kwadratowych jest większe pole kwadratu K_2 od pola kwadratu K_1.

13. Kwadrat ma bok długości 5 cm. O ile centymetrów zwiększy się długość boku tego kwadratu, jeżeli zwiększymy jego pole o 44 %?

Sprawdź, co umiesz!

1. Na koncert znanego zespołu rockowego przybyło 1200 osób. Mężczyźni stanowili 35 % wszystkich uczestników wydarzenia. Oblicz, ile kobiet było na koncercie.

2. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

55 % liczby 20 to | **A** | **B** | niż 0,2 % liczby 550.

$\frac{5}{8}$ liczby 160 to | **C** | **D** | niż 63 % tej samej liczby.

A. mniej **B.** więcej

C. mniej **D.** więcej

3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

20 % liczby $3^3 \cdot 2$ jest równe

A. 3,6 **B.** 43,2 **C.** 10,8 **D.** 5,4

4. Pola chce kupić za swoje oszczędności wodę perfumowaną. W skarbonce ma kwotę odpowiadającą cenie netto wybranej przez siebie wody perfumowanej. Ile złotych powinna jeszcze odłożyć Pola, jeśli podatek VAT na kosmetyki wynosi 23 %?



5. Łóżko kosztowało 1560 zł. Jego cenę podwyższono o 15 %, a następnie obniżono o 15 %. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Cena łóżka po podwyżce wynosiła 1794 zł.	**P**	**F**
Cena końcowa łóżka jest równa 1560 zł.	**P**	**F**

5. Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent

- Obliczanie ceny produktu przed obniżką lub podwyżką
- Obliczanie ceny produktu przed podwójną obniżką lub podwójną podwyżką

Przykład 1.

Wyznacz liczbę, której 28 % jest równe 112.

Sposób I

28 % szukanej liczby to 112.
1 % szukanej liczby to 4.
100 % szukanej liczby to 400.

$$\begin{array}{l} \\ :28 \\ \\ \cdot 100 \\ \end{array}\left(\begin{array}{c} 28\,\% - 112 \\ 1\,\% - 4 \\ 100\,\% - 400 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :28 \\ \\ \cdot 100 \\ \end{array}$$

Aby **wyznaczyć liczbę x, której p % jest równe a**:
1. obliczamy wartość 1 % liczby x, dzieląc a przez p,
2. mnożymy otrzymaną wartość przez 100.

Sposób II

Oznaczymy przez x szukaną liczbę.

Zastosujemy metodę proporcji.
Zapiszemy w jednej kolumnie liczby, a w drugiej kolumnie procenty, które im odpowiadają.

$$\begin{array}{r} 112 - 28\,\% \\ x - 100\,\% \end{array}$$

Ułożymy proporcję, a następnie iloczyn wyrazów skrajnych przyrównamy do iloczynu wyrazów środkowych.

$$\frac{112}{x} = \frac{28\,\%}{100\,\%}$$
$$28\,\% \cdot x = 112 \cdot 100\,\%$$

Zamienimy 28 % oraz 100 % na liczby.

$$\frac{{}^{7}\cancel{28}}{{}_{25}\cancel{100}} \cdot x = 112 \cdot 1$$
$$\frac{7}{25} \cdot x = 112$$

Aby obliczyć wartość x, podzielimy 112 przez $\frac{7}{25}$.

$$x = 112 : \frac{7}{25}$$
$$x = {}^{16}\cancel{112} \cdot \frac{25}{\cancel{7}_{1}} = 16 \cdot 25 = 400$$

Ćwiczenie 1.

Wyznacz liczbę, której:

a) 64 % jest równe 16, **b)** 70 % jest równe 5, **c)** 0,8 % jest równe 200.

Przykład 2.

Cena roweru została obniżona.
Ile kosztował ten rower przed obniżką?



Cenę początkową roweru obniżono o $12\ \%$, zatem 836 zł stanowi $100\ \% - 12\ \%$, czyli $88\ \%$ ceny początkowej roweru.

836 zł stanowi $88\ \%$ ceny początkowej roweru, zatem $9{,}50$ zł stanowi $1\ \%$ ceny początkowej roweru. Obliczymy, ile wynosiła cena początkowa.

$$\begin{array}{ccc} & 836\text{ zł} - 88\ \% & \\ :88 \swarrow & & \searrow :88 \\ & 9{,}50\text{ zł} - 1\ \% & \\ \cdot 100 \searrow & & \swarrow \cdot 100 \\ & 950\text{ zł} - 100\ \% & \end{array}$$

Odp. Rower przed obniżką kosztował 950 zł.

Ćwiczenie 2.

Cenę biletu na koncert podwyższono o $4\ \%$. Obecna cena jest równa 143 zł. Oblicz cenę początkową biletu.

Przykład 3.

Cena komputera po dwóch podwyżkach, za każdym razem o $10\ \%$, jest równa 4235 zł. Oblicz cenę początkową komputera.

Oznaczymy przez x cenę początkową komputera, a przez y cenę komputera po pierwszej podwyżce.

Sposób I

Jeśli cenę początkową komputera podwyższono dwukrotnie, za każdym razem o $10\ \%$, to 4235 zł stanowi $110\ \% = 1{,}1$ ceny komputera po pierwszej podwyżce.

Obliczymy cenę komputera po pierwszej podwyżce.

$$1{,}1 \cdot y = 4235$$
$$y = \frac{4235}{1{,}1} = \frac{42\,350}{11} = 3850\ [\text{zł}]$$

Obliczymy cenę początkową komputera.

$$1{,}1 \cdot x = 3850$$
$$x = \frac{3850}{1{,}1} = \frac{38\,500}{11} = 3500\ [\text{zł}]$$

Sposób II

Cena komputera po pierwszej podwyżce wynosi $1{,}1 \cdot x$.

Cena komputera po drugiej podwyżce stanowi $110\ \%$ ceny po pierwszej podwyżce.

$$1{,}1 \cdot (1{,}1 \cdot x) = 4325$$

Obliczymy cenę początkową komputera.

$$1{,}21 \cdot x = 4235$$
$$x = \frac{4235}{1{,}21} = \frac{423\,500}{121} = 3500\ [\text{zł}]$$

Odp. Cena początkowa komputera wynosiła 3500 zł.

Ćwiczenie 3.

Cena telefonu po dwóch kolejnych obniżkach, za każdym razem o $20\ \%$, jest równa 480 zł. Oblicz początkową cenę telefonu.

Rozwiąż zadania

1. Wyznacz liczbę, której:

a) 35 % jest równe 70,
b) 25 % jest równe 60,
c) 200 % jest równe 150,
d) 24 % jest równe 84,
e) 9 % jest równe 216,
f) 15 % jest równe $7\frac{1}{2}$,
g) 3,5 % jest równe 0,14,
h) 32,2 % jest równe 644,
i) 62,5 % jest równe 25.

2. W ramach posezonowej promocji biuro podróży obniżyło cenę czterodniowej wycieczki do Grecji. Oblicz cenę wycieczki przed obniżką.



3. W poniedziałek w klasie 7b nieobecne były 4 osoby, co stanowi 12,5 % liczby wszystkich uczniów tej klasy. Ilu uczniów było obecnych tego dnia w klasie 7b?

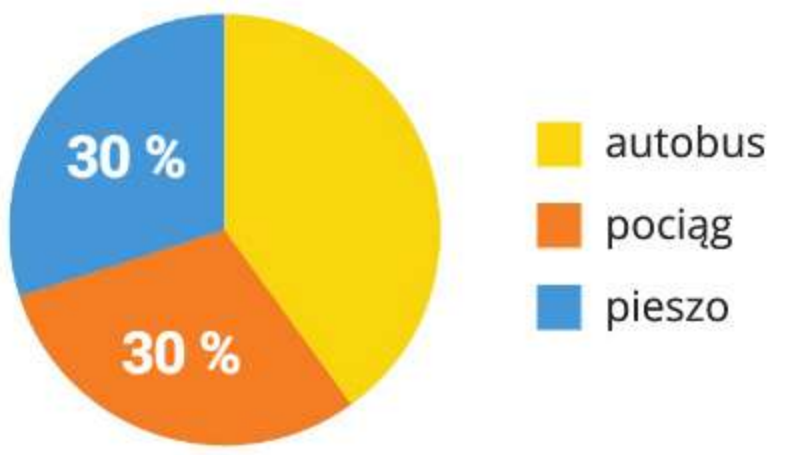
4. Oblicz:

a) 20 % liczby, jeżeli jej 6 % jest równe 120,
b) 55 % liczby, jeżeli jej 12 % jest równe 72,
c) 120 % liczby, jeżeli jej 13 % jest równe 26,
d) 5 % liczby, jeżeli jej 80 % jest równe 20.

5. Pani Anna ponosi comiesięczne wydatki związane z samochodem w wysokości 374 zł, co stanowi 11 % kwoty wpływającej miesięcznie na jej konto. Na wydatki związane z mieszkaniem przeznacza 18 % miesięcznych wpływów. Odpowiedz na pytania.

a) Ile pieniędzy wpływa co miesiąc na konto pani Anny?
b) Ile są równe comiesięczne wydatki pani Anny związane z mieszkaniem?

6. Na diagramie przedstawiono informacje, jaki procent uczniów z klasy 7c dociera do szkoły autobusem, jaki – pociągiem, a jaki – pieszo. 12 osób dojeżdża do szkoły autobusem. Uzasadnij, że 9 osób z tej klasy dociera do szkoły pieszo.



7. Słuchawki kosztują 246 zł. W tej cenie został uwzględniony podatek VAT w wysokości 23 %. Oblicz cenę netto tych słuchawek.

8. Cena deskorolki elektrycznej po dwóch kolejnych obniżkach, za każdym razem o 30 %, jest równa 441 zł. Oblicz początkową cenę tej deskorolki.

9. Długość każdego boku rombu zwiększono dwukrotnie, za każdym razem o $40\ \%$. Oblicz obwód rombu przed dwukrotnym zwiększeniem długości jego boków, jeśli obecnie bok rombu ma długość $98\ \text{mm}$.

10. Klasa Zosi i Cezarego zaplanowała jednodniową wycieczkę do Krakowa. W wycieczce wzięło udział 21 uczennic, co stanowiło $70\ \%$ wszystkich uczestników wycieczki. Ile dzieci z klasy Zosi i Cezarego pojechało na wycieczkę, jeśli grupą opiekowało się trzech nauczycieli?



11. Grupa składająca się z 9 znajomych wybrała się na tygodniowy obóz kajakowy. Stanowili oni $15\ \%$ liczby wszystkich uczestników obozu. Z powodu niekorzystnych warunków pogodowych po pierwszych trzech dniach wyjechało $20\ \%$ uczestników turnusu, a po dwóch kolejnych $25\ \%$ pozostałych. Oblicz, ilu uczestników pozostało na obozie.

12. Wyznacz liczbę, której $16\ \%$ jest równe wartości wyrażenia $\dfrac{1+\left[\left(3\frac{1}{2}\right)^2-0{,}25\right]:3}{0{,}5}$.

13. Cenę konsoli najpierw obniżono o $20\ \%$, a następnie podwyższono o $20\ \%$. Ustal, czy obecna cena konsoli jest taka sama jak jej cena początkowa. Uzasadnij swoją odpowiedź.

Sprawdź, co umiesz!

1. Wyznacz liczbę, której:

a) $30\ \%$ jest równe 63, **b)** $11\ \%$ jest równe $2\frac{16}{25}$, **c)** $6{,}4\ \%$ jest równe 260.

2. $18\ \%$ pewnej liczby jest równe 72. Sprawdź, czy $32\ \%$ tej liczby jest równe 144.

3. Cena masła zwiększyła się o $5\ \%$ i teraz wynosi $6{,}30\ \text{zł}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Początkowa cena masła była równa $5{,}99\ \text{zł}$.	**P**	**F**
Cena masła wzrosła o $\frac{1}{25}$ jego ceny początkowej.	**P**	**F**
Obecna cena masła stanowi $105\ \%$ jego początkowej ceny.	**P**	**F**

4. Koło matematyczne Sto Procent liczy 27 członków. W ciągu ostatniego roku szkolnego liczba członków koła wzrosła: w pierwszym półroczu o $20\ \%$, a w drugim o $50\ \%$ w stosunku do pierwszego półrocza. Ilu członków liczyło koło Sto Procent rok temu?

6. Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

- Obliczanie, jakim procentem pewnej wielkości jest inna wielkość
- Utrwalenie umiejętności zamiany liczby na procent

Przykład 1.

Oblicz, jaki procent liczby wszystkich kredek przedstawionych na ilustracji stanowią kredki czerwone.



Kredki czerwone stanowią $\frac{3}{16}$ wszystkich kredek.

Aby obliczyć, jaki procent liczby wszystkich kredek stanowią kredki czerwone, wystarczy ułamek $\frac{3}{16}$ zamienić na procent.

$$\frac{3}{\cancel{16}_{4}} \cdot \cancel{100}^{25}\,\% = \frac{75}{4}\,\% = 18\frac{3}{4}\,\% = 18{,}75\,\%$$

Odp. Czerwone kredki stanowią $18{,}75\,\%$ liczby wszystkich kredek.

Ćwiczenie 1.

Ela przeprowadziła w swojej klasie ankietę dotyczącą miesiąca urodzenia każdego ucznia. Wyniki przedstawiła w tabeli poniżej.

Miesiąc	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Liczba uczniów	2	5	3	1	0	2	4	3	1	5	2	2

Skorzystaj z danych zapisanych w tabeli i odpowiedz na pytanie.

a) Jaki procent uczniów całej klasy stanowią uczniowie urodzeni w marcu?

b) Jaki procent uczniów całej klasy stanowią uczniowie, którzy urodzili się w czwartym kwartale?

Przykład 2.

Oblicz, jakim procentem liczby 200 jest liczba 56.

Zapiszemy, jakim ułamkiem liczby 200 jest liczba 56, i zamienimy ten ułamek na procent.

$$\frac{56}{\cancel{200}_{2}} \cdot \cancel{100}^{1}\,\% = \frac{56}{2}\,\% = 28\,\%$$

Aby obliczyć, **jakim procentem jednej liczby jest druga liczba**, należy kolejno:

1. ustalić, jakim ułamkiem pierwszej liczby jest druga liczba,
2. wyrazić otrzymany wynik w procentach.

Ćwiczenie 2.

Oblicz, jakim procentem:

a) liczby 120 jest liczba 48,

b) liczby 25 jest liczba $62\frac{1}{2}$,

c) liczby 8 jest liczba $4{,}2$.

Przykład 3.

Oblicz, jakim procentem długości równej $400\ \text{m}$ jest $3{,}2\ \text{km}$.

Pamiętaj, aby przed wykonaniem obliczeń ujednolicić jednostki.

Zamienimy kilometry na metry.
Zapiszemy, jakim ułamkiem liczby 400 jest liczba 3200, i zamienimy ten ułamek na procent.

$$3{,}2\ \text{km} = 3200\ \text{m}$$

$$\frac{3200}{\cancel{400}_{4}} \cdot \cancel{100}^{1}\,\% = \frac{3200}{4}\,\% = 800\,\%$$

Odp. $3{,}2\ \text{km}$ to $800\,\%$ długości równej $400\ \text{m}$.

Ćwiczenie 3.

Oblicz, jakim procentem:

a) $240\ \text{m}$ jest $60\ \text{cm}$, **b)** $15\ \text{min}$ jest $6\ \text{h}$, **c)** $20\ \text{kg}$ jest $8\ \text{dag}$.

Przykład 4.

Cena tabletu została obniżona.
Jakim procentem ceny początkowej tabletu jest jego cena po obniżce?



Sposób I

Podzielimy cenę końcową przez cenę początkową, a otrzymany wynik pomnożymy przez $100\,\%$.

$$\frac{\overset{7}{\cancel{252}}}{\cancel{288}_{8}} \cdot 100\,\% = \frac{700}{8}\,\% = 87{,}5\,\%$$

Sposób II

Zastosujemy metodę proporcji.

$$\begin{aligned} 288\ \text{zł} &- 100\,\% \\ 252\ \text{zł} &- x \end{aligned}$$

Ułożymy proporcję.

$$\frac{288}{252} = \frac{100\,\%}{x}$$

Iloczyn wyrazów skrajnych przyrównamy do iloczynu wyrazów środkowych.

$$288 \cdot x = 252 \cdot 100\,\%$$

Aby obliczyć wartość x, podzielimy iloczyn $252 \cdot 100\,\%$ przez 288.

$$x = \frac{\overset{7}{\cancel{252}} \cdot 100\,\%}{\cancel{288}_{8}} = \frac{700}{8}\,\%$$

$$x = 87{,}5\,\%$$

Odp. Cena tabletu po obniżce stanowi $87{,}5\,\%$ jego ceny początkowej.

Ćwiczenie 4.

Cenę spodni podwyższono z $90\ \text{zł}$ na $108\ \text{zł}$. Jakim procentem ceny początkowej spodni jest ich cena po podwyżce?

Rozwiąż zadania

1. Oblicz, jakim procentem:

a) liczby 60 jest liczba 12,
b) liczby 220 jest liczba 11,
c) liczby 15 jest liczba 225,
d) liczby $1{,}5$ jest liczba 21,
e) liczby 3 jest liczba $1{,}44$,
f) liczby $2\frac{2}{3}$ jest liczba $1\frac{1}{3}$.

2. Oblicz, jakim procentem liczby k jest liczba m oraz jakim procentem liczby m jest liczba k, jeśli:

a) $k = 125$ oraz $m = 5$,
b) $k = 0{,}09$ oraz $m = 0{,}144$,
c) $k = 3\frac{4}{7}$ oraz $m = 2\frac{5}{7}$.

3. Oblicz, jakim procentem:

a) 200 dag jest 80 g,
b) 25 gr jest 3 zł,
c) 5 h są 4 kwadranse,
d) 35 km jest 70 m,
e) jednej doby są 3 h,
f) 16 t jest 120 kg.

4. Do Szkolnego Klubu Turystyczno-Krajoznawczego Tropiciel należy 18 chłopców i 22 dziewcząt. Oblicz, jaki procent wszystkich uczniów należących do klubu stanowią chłopcy.

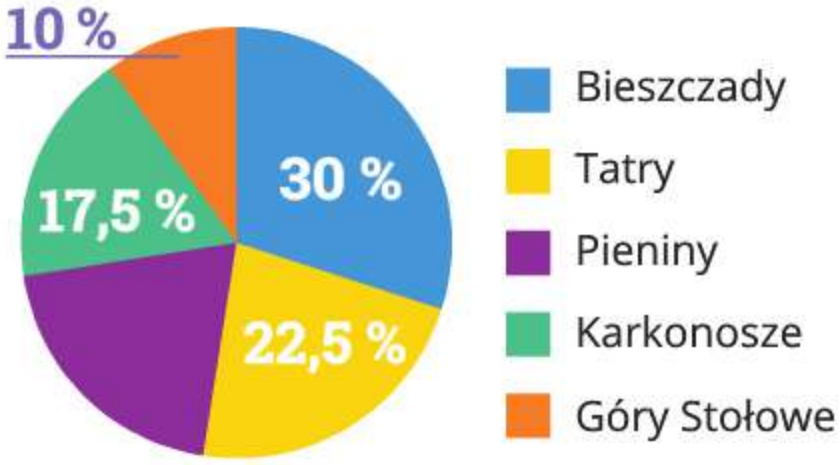
5. Cena deskorolki została obniżona. Jakim procentem początkowej ceny deskorolki jest jej nowa cena?



E

Informacje do zadań 6. i 7.

W klasach siódmych organizowana jest wycieczka w polskie góry. Pytanie: *Dokąd chciałbyś/chciałabyś pojechać na jesienną wycieczkę szkolną?* zadano 40 uczniom. Na procentowym diagramie kołowym przedstawiono wyniki ankiety.



6. Jaki procent uczniów chce jechać w Pieniny? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $6\,\%$ **B.** $8\,\%$ **C.** $12\,\%$ **D.** $20\,\%$

7. Czy uczniowie, którzy chcą pojechać na wycieczkę w Pieniny, stanowią $150\,\%$ uczniów, którzy chcą pojechać w Bieszczady?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	$\frac{8}{12} \cdot 100\,\% = 66{,}(6)\,\%$.
B.	Nie,		**2.**	$\frac{3}{2} \cdot 100\,\% = 150\,\%$.
			3.	$\frac{3}{4} \cdot 100\,\% = 75\,\%$.

8. W tabeli podano informacje o liczbie sprzedanych biletów w ostatnim dniu wakacji na najpopularniejsze atrakcje wesołego miasteczka.



	Liczba biletów ulgowych	Liczba biletów normalnych
Diabelski Młyn	120	60
Zjeżdżalnia Wodna	60	80
Kolejka Górska	180	100

a) Oblicz, jaki procent sprzedanych tego dnia biletów stanowiły bilety ulgowe.

b) Wyznacz, jaki procent liczby biletów ulgowych stanowiły bilety ulgowe na Kolejkę Górską.

c) Uzasadnij, że liczba biletów na Zjeżdżalnię Wodną stanowiła $23\frac{1}{3}$ % liczby wszystkich biletów.

9. W księgarni książka kosztuje $34{,}65$ zł. Jej cena netto jest równa 33 zł. Oblicz, ile procent ceny netto książki stanowi podatek VAT.

10. Marcin rozpuścił łyżeczkę cukru w szklance, w której było 75 g wody, a jego siostra Sandra wsypała 3 łyżeczki cukru do kubka z 225 g wody. Oblicz, w którym naczyniu jest większa zawartość procentowa cukru. Przyjmij, że łyżeczka cukru waży 5 g.

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz, jaki procent liter wyrazu **MATEMATYKA** stanowią:

a) litery A, **b)** samogłoski, **c)** spółgłoski.

2. Oblicz, jakim procentem połowy liczby 210 jest liczba 420.

3. Pola pokonała $1{,}5$ km z trasy liczącej 2250 m. Uzasadnij, że Pola musi jeszcze pokonać $33\frac{1}{3}$ % trasy.

4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Jeśli cena netto aparatu fotograficznego jest równa 1700 zł, a cena brutto 2091 zł, to cena brutto stanowi $1{,}21$ ceny netto.	**P**	**F**
Jeśli cena telefonu komórkowego została obniżona z 4700 zł na 4465 zł, to wartość obniżki stanowi 5 % ceny początkowej telefonu komórkowego.	**P**	**F**

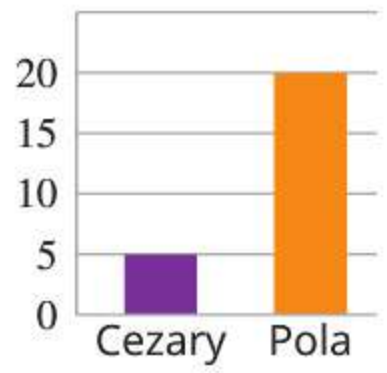
7. O ile procent więcej, o ile procent mniej

- Obliczanie, o ile procent wzrosła lub zmalała początkowa wielkość
- Obliczanie punktów procentowych

Gdy porównujemy dwie wielkości, często chcemy ustalić nie tylko, o ile jedna jest większa (mniejsza) od drugiej, ale także o ile procent jedna jest większa (mniejsza) od drugiej.

Przykład 1.

Na diagramie przedstawiono, ile głosów otrzymał Cezary, a ile Pola w głosowaniu na przewodniczącego klasy.

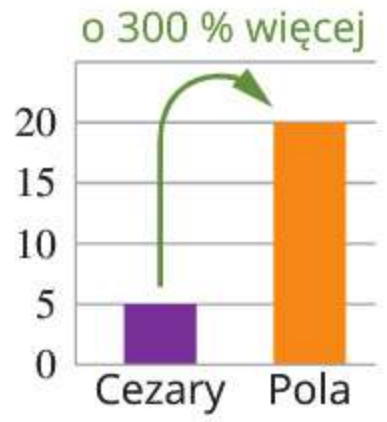


a) Oblicz, o ile więcej głosów zdobyła Pola niż Cezary oraz o ile głosów mniej zdobył Cezary niż Pola.

Z wykresu można odczytać, że Cezary zdobył 5 głosów, a Pola 20.
Różnica liczby zdobytych przez nich głosów wynosi $20 - 5 = 15$.

Odp. Pola zdobyła o 15 głosów więcej niż Cezary, tym samym Cezary zdobył o 15 głosów mniej niż Pola.

b) Oblicz, o ile procent więcej głosów zdobyła Pola niż Cezary.



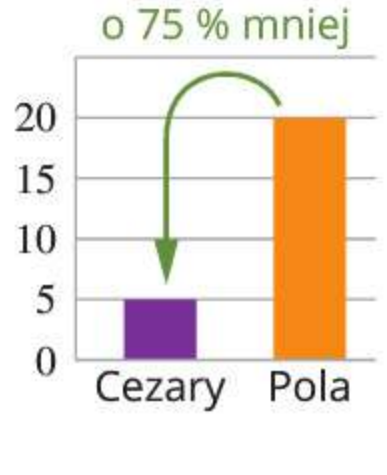
Z diagramu możemy odczytać, że Pola zdobyła o $300\ \%$ więcej głosów niż Cezary.

Możemy to również obliczyć. Wystarczy, że różnicę liczby głosów Poli i Cezarego podzielimy przez liczbę głosów Cezarego i wynik wyrazimy w postaci procentu.

$$\frac{20-5}{5} \cdot 100\ \% = \frac{15}{5} \cdot 100\ \% = 3 \cdot 100\ \% = 300\ \%$$

Odp. Pola zdobyła o $300\ \%$ głosów więcej niż Cezary.

c) Oblicz, o ile procent mniej głosów zdobył Cezary niż Pola.



Z diagramu możemy odczytać, że Cezary zdobył o $75\ \%$ mniej głosów niż Pola.

Możemy to także obliczyć. Różnicę liczby głosów Poli i Cezarego podzielimy przez liczbę głosów Poli i wynik wyrazimy w postaci procentu.

$$\frac{20-5}{20} \cdot 100\ \% = \frac{15}{\cancel{20}_{1}} \cdot \cancel{100}^{5}\ \% = 15 \cdot 5\ \% = 75\ \%$$

Odp. Cezary zdobył o $75\ \%$ głosów mniej niż Pola.

Aby obliczyć, o ile procent

liczba a jest większa od liczby b, wykonujemy następujące działanie:

$$\frac{a-b}{b} \cdot 100\ \%.$$

liczba a jest mniejsza od liczby b, wykonujemy następujące działanie:

$$\frac{b-a}{b} \cdot 100\ \%.$$

Ćwiczenie 1.

Dane są powierzchnie dwóch miast: Radomia i Paryża. Powierzchnia Radomia wynosi około $112\ \text{km}^2$, natomiast powierzchnia Paryża jest równa około $105\ \text{km}^2$. Oblicz, o ile procent:

a) powierzchnia Radomia jest większa od powierzchni Paryża,

b) powierzchnia Paryża jest mniejsza od powierzchni Radomia.

Punkt procentowy (skrót: pp.) to różnica dwóch wielkości wyrażonych w procentach.

Przykład 2.

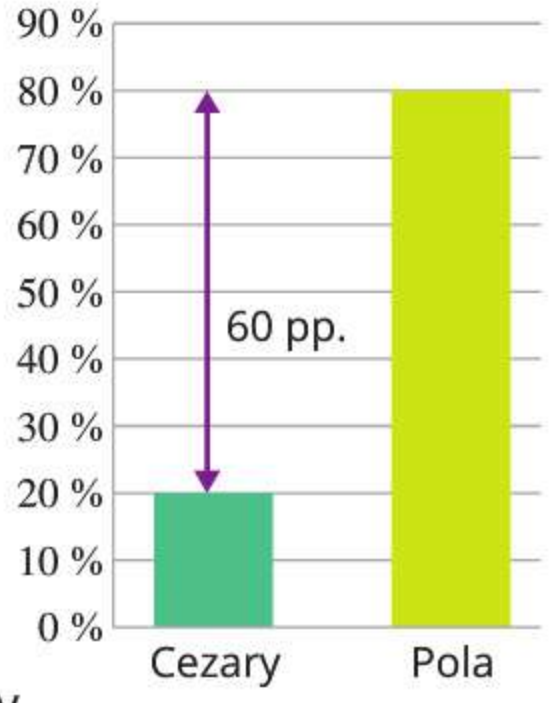
Skorzystaj z danych przedstawionych na diagramie w Przykładzie 1. Oblicz, o ile punktów procentowych więcej głosów zdobyła Pola niż Cezary.

Z diagramu możemy odczytać, że liczba osób biorących udział w głosowaniu jest równa 25.

Obliczymy, ile procent głosów zdobyła Pola. ⇒ $\frac{20}{\cancel{25}_{1}} \cdot \cancel{100}^{4}\ \% = 20 \cdot 4\ \% = 80\ \%$

Pola zdobyła $80\ \%$ głosów, a Cezary $100\ \% - 80\ \%$, czyli $20\ \%$ głosów.

Obliczymy, o ile punktów procentowych więcej głosów zdobyła Pola niż Cezary. ⇒ $80 - 20 = 60$



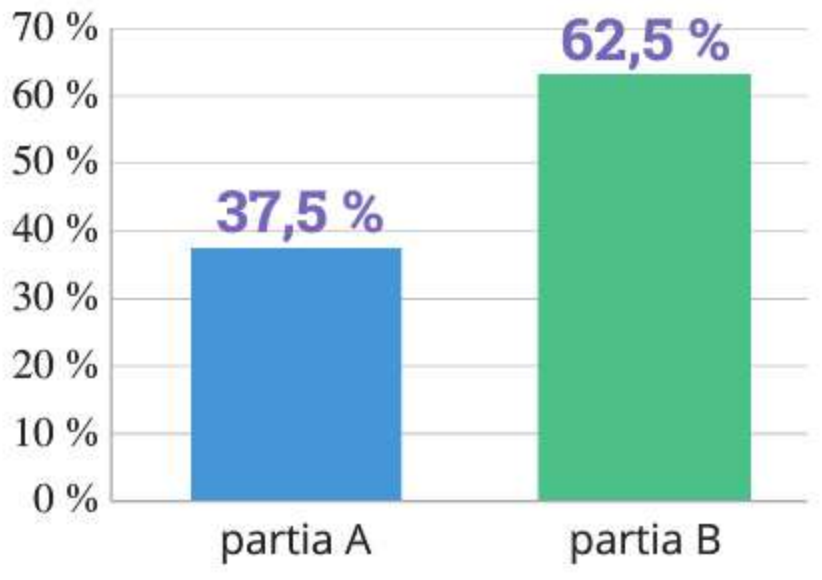
Odp. Pola zdobyła o 60 punktów procentowych więcej głosów niż Cezary.

Ćwiczenie 2.

Wśród 1000 osób przeprowadzono sondaż dotyczący poparcia dla partii A oraz dla partii B. Na podstawie zebranych danych wykonano procentowy diagram słupkowy.

a) Oblicz, o ile procent mniej osób popiera partię A niż partię B.

b) Określ, o ile punktów procentowych mniej osób popiera partię A niż partię B.



Przykład 3.

Cenę butów, równą 300 zł, obniżono dwukrotnie, za każdym razem o 30 %. O ile procent zmieniła się cena butów po dwóch obniżkach?



Sposób I

Cena butów po pierwszej obniżce: ⇨ 70 % kwoty 300 zł to $0{,}7 \cdot 300$ zł = 210 zł.

Cena butów po drugiej obniżce: ⇨ 70 % kwoty 210 zł to $0{,}7 \cdot 210$ zł = 147 zł.

Obliczymy, o ile procent zmieniła się cena butów po dwóch obniżkach, czyli o ile procent wyższa jest cena 300 zł od ceny 147 zł.

⇨ $\frac{300-147}{300} \cdot 100\,\% = \frac{153}{\cancel{300}_{3}} \cdot \cancel{100}^{1}\,\% = \frac{153\,\%}{3} = 51\,\%$

Sposób II

Oznaczymy przez x początkową cenę butów. Zapiszemy cenę butów po pierwszej obniżce. ⇨ $0{,}7 \cdot x$

Zapiszemy cenę butów po drugiej obniżce. ⇨ $0{,}7 \cdot (0{,}7 \cdot x) = 0{,}49 \cdot x = 49\,\% \cdot x$

Końcowa cena butów stanowi $100\,\% - 49\,\%$, czyli 51 % ceny początkowej.

Odp. Po dwóch obniżkach cena butów zmniejszyła się o 51 %.

Ćwiczenie 3.

Cenę rolek, równą 250 zł, podwyższono dwukrotnie, za każdym razem o 20 %. O ile procent zmieniła się cena rolek po dwóch podwyżkach?

Rozwiąż zadania

1. Oblicz, o ile procent liczba:

a) 9 jest mniejsza od liczby 12,

b) 31,5 jest większa od liczby 9,

c) 300 jest większa od 40 % liczby 200,

d) 20 jest mniejsza od 30 % liczby 80.

2. Odczytaj z ilustracji ceny biletów do Londynu i Paryża. Oblicz, o ile procent jest droższy bilet do Paryża od biletu do Londynu.



3. Do Szkolnego Klubu Turystyczno-Krajoznawczego Tropiciel należy 25 chłopców i 10 dziewcząt.

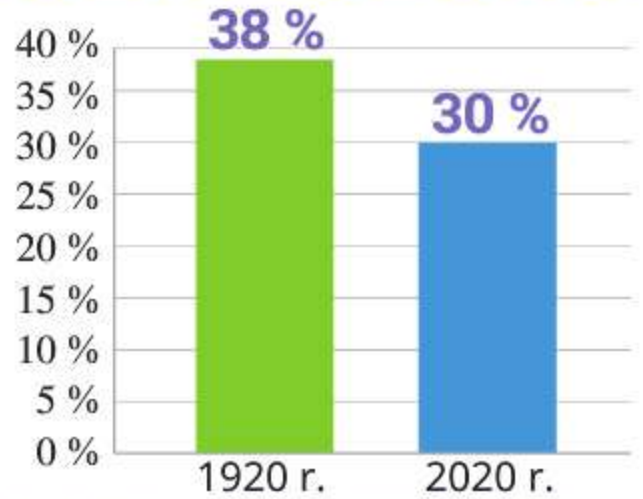
a) O ile procent więcej chłopców niż dziewcząt należy do klubu Tropiciel?

b) O ile procent mniej dziewcząt niż chłopców należy do klubu Tropiciel?

4. Na diagramie słupkowym przedstawiono udział procentowy lasów w powierzchni Polski w 1920 r. i 100 lat później.

a) Oblicz, o ile procent więcej powierzchni Polski stanowiły lasy w 1920 r. niż w 2020 r.

b) Określ, o ile więcej punktów procentowych powierzchni Polski stanowiły lasy w 1920 r. niż 100 lat później.

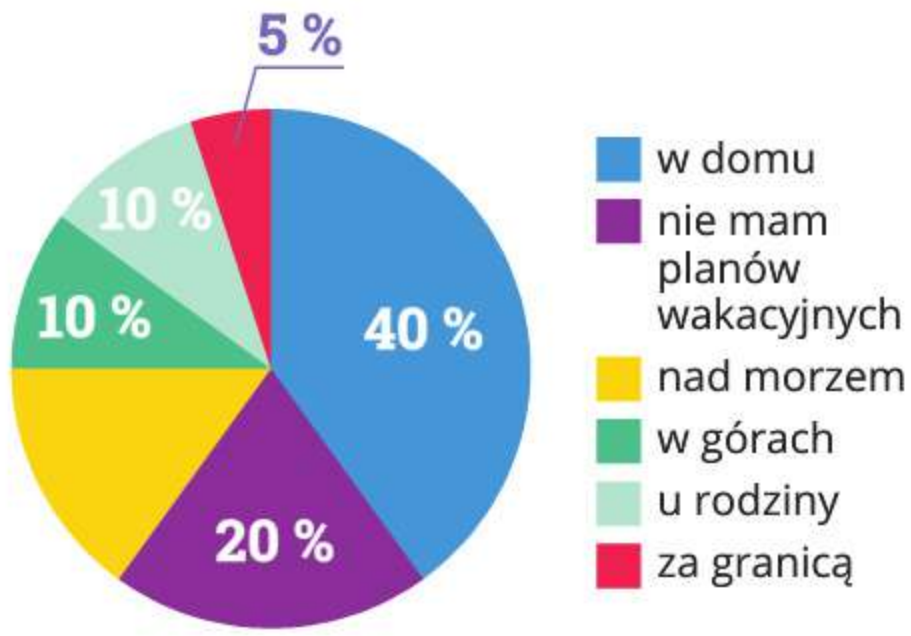


5. Wśród uczniów pewnej szkoły podstawowej przeprowadzono ankietę na temat planów wakacyjnych. Wyniki przedstawiono na diagramie kołowym. Planów wakacyjnych nie miało jeszcze 32 uczniów.

a) Oblicz, ilu uczniów wzięło udział w ankiecie.

b) Wyznacz, o ilu uczniów więcej planuje wyjazd nad morze niż do rodziny.

c) Oblicz, o ile procent mniej uczniów wyjedzie za granicę, niż zostanie w domu.



6. Pani Anna planuje zakup mieszkania w Warszawie. Ceny zależą głównie od lokalizacji mieszkania. W jednej z dzielnic mieszkanie o powierzchni $40\ \text{m}^2$ oferowane jest po $10\,000\ \text{zł/m}^2$, a w drugiej, ze względu na lepszą lokalizację, po $16\,000\ \text{zł/m}^2$.

a) Oblicz, o ile procent więcej zapłaci pani Anna za mieszkanie, kupując je w lepszej lokalizacji.

b) Oblicz, o ile procent mniej zapłaci pani Anna za mieszkanie, kupując je w gorszej lokalizacji.

7. W tabeli przedstawiono skład chemiczny organizmu człowieka*.

Pierwiastki [%]	
tlen [O]	65
węgiel [C]	18
wodór [H]	10
azot [N]	3
wapń [Ca]	1,5

Związki mineralne [%]	
woda	62
białko	17
tłuszcze	13
składniki mineralne	7
węglowodany	1

*W skład organizmu człowieka wchodzą także takie pierwiastki jak: potas [K], fosfor [P], sód [Na], siarka [S], magnez [Mg] w ilościach mniejszych niż 1 %.

Źródło: https://zpe.gov.pl/a/zwiazki-chemiczne-budujace-organizm/D13d21g0b.

Zapoznaj się z tabelą i odpowiedz na pytanie.

a) Ile kilogramów poniżej podanych pierwiastków zawiera ciało człowieka o masie $70\ \text{kg}$?
- tlen
- węgiel
- wodór
- azot

b) O ile procent więcej tlenu niż wodoru jest w organizmie człowieka?

c) O ile procent mniej jest białka niż wody w organizmie człowieka? Wynik zaokrąglij do $0{,}01\ \%$.

8. Drukarka kosztowała 400 zł. Jej cenę podwyższono dwukrotnie, za każdym razem o 10 %. Oblicz, o ile procent zwiększyła się cena drukarki po dwóch podwyżkach.

9. Zegarek w styczniu kosztował 1850 zł. Jego cenę obniżono w lutym o 20 %, a następnie w marcu o 15 % Oblicz, o ile procent została obniżona cena tego zegarka.



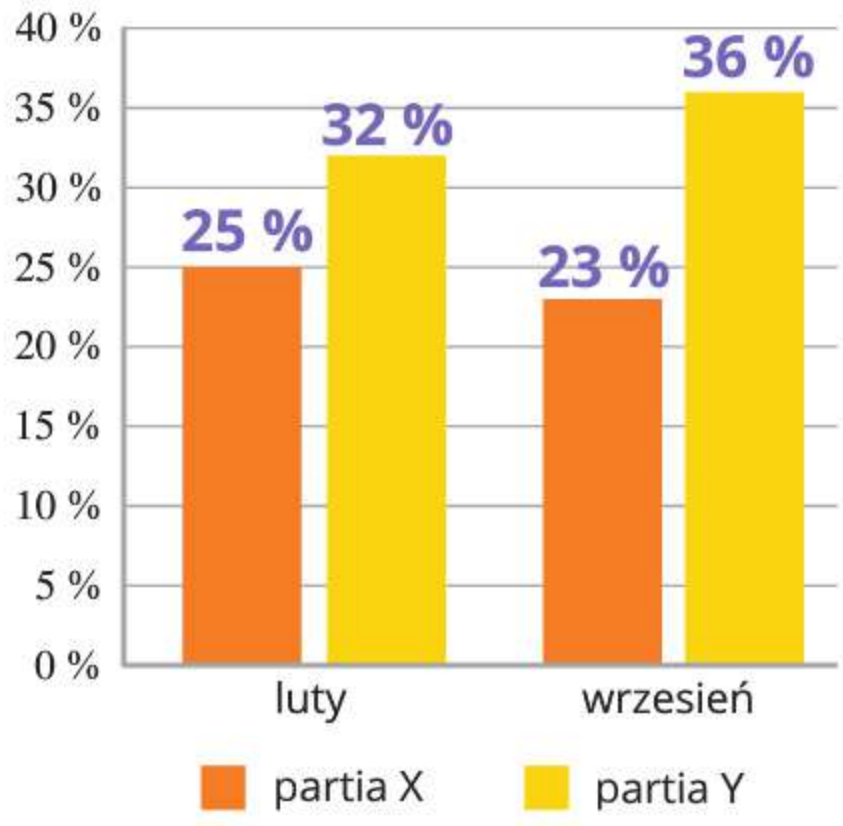
10. W domu państwa Kamińskich opłaty za prąd zmalały z 8 % do 7 % ich stałych miesięcznych dochodów netto. Odpowiedz na pytanie.

a) O ile punktów procentowych zmalały wydatki miesięczne na prąd w rodzinie państwa Kamińskich?

b) O ile procent zmalały miesięczne wydatki na prąd w tej rodzinie?

c) Ile złotych miesięcznie mniej rodzina państwa Kamińskich płaci za prąd, jeśli ich wszystkie dochody netto w ciągu miesiąca wynoszą 7520,30 zł? Wynik zaokrąglij do 1 gr.

11. Wśród 1200 osób przeprowadzono dwukrotnie sondaż (w lutym i we wrześniu) dotyczący poparcia dla partii X oraz partii Y. Na podstawie zebranych danych wykonano procentowy diagram słupkowy.



a) Oblicz, o ile procent zmieniło się poparcie dla każdej partii.

b) Wyraź w punktach procentowych zmianę poparcia dla każdej partii.

c) Oblicz, o ile więcej osób wybrało partię Y niż partię X w lutym.

12. W banku obniżono oprocentowanie kredytu.

a) Oblicz, o ile punktów procentowych zmniejszono oprocentowanie kredytu.

b) Oblicz, o ile procent obniżono oprocentowanie kredytu.



13. Każdy bok kwadratu o obwodzie równym $16\ \text{cm}$ zwiększono o $125\ \%$.

a) O ile procent zwiększył się obwód tego kwadratu?

b) O ile procent zwiększyło się pole tego kwadratu?

14. Cenę lodówki podwyższono o $35\ \%$, a następnie podczas letniej wyprzedaży obniżono. Po tych zmianach cena lodówki stanowi $112{,}5\ \%$ jej ceny początkowej. Uzasadnij, że podczas letniej wyprzedaży cenę lodówki obniżono o mniej niż $17\ \%$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Liczba a jest równa 75, a liczba b jest równa 60.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Liczba b jest o | **A** | **B** | mniejsza od liczby a.

Liczba a jest o | **C** | **D** | większa od liczby b.

A. $20\ \%$ **B.** $25\ \%$ **C.** $20\ \%$ **D.** $25\ \%$

2. Telewizor kosztuje 2400 zł. Rok temu jego cena była równa 3000 zł.

O ile procent obniżono cenę telewizora? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. o $30\ \%$ **B.** o $35\ \%$ **C.** o $20\ \%$ **D.** o $25\ \%$

3. Nadleśnictwo zarządza 4000 ha lasu. Na 3000 ha rośnie las iglasty, a na pozostałej powierzchni las mieszany. O ile procent więcej powierzchni lasu zajmuje las iglasty niż las mieszany?

4. Hulajnoga kosztowała 400 zł. Jej cenę obniżono o $15\ \%$, a następnie podwyższono o $15\ \%$.

Czy cena hulajnogi po obniżce i podwyżce była wyższa niż 400 zł?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	$115\ \% \cdot (115\ \% \cdot 400) > 400.$
			2.	$115\ \% \cdot (85\ \% \cdot 400) < 400.$
B.	Nie,		**3.**	$85\ \% \cdot (85\ \% \cdot 400) < 400.$



8. Zastosowanie procentów w praktyce

- Obliczanie odsetek od kredytów i lokat
- Obliczanie stężenia procentowego roztworu

Jeśli weźmiemy kredyt w banku, po ustalonym okresie musimy oddać pożyczone pieniądze wraz z odsetkami. Natomiast gdy chcemy oszczędzać, zakładamy lokatę w banku. W przypadku lokat banki najpierw naliczają odsetki od wpłaconego kapitału, a następnie wypłacają klientowi kapitał wraz z odsetkami pomniejszonymi o podatek od odsetek, który w Polsce wynosi 19 %. Aby ułatwić obliczenia w zadaniach, czasami odnosimy się tylko do momentu naliczania odsetek przez bank.



Bierzemy kredyt w banku

Kredyt to kwota pożyczona z banku na określony czas przy ustalonym oprocentowaniu określanym w skali roku.

Podpisujemy umowę z bankiem.



Bank pożycza nam 10 000 zł. Oprocentowanie w skali roku wynosi 12 %.

PO ROKU

Zwracamy pożyczony kapitał 10 000 zł oraz odsetki w wysokości 12 % kwoty 10 000 zł, czyli $0{,}12 \cdot 10\,000$ zł = 1200 zł.

Zakładamy lokatę w banku

Lokata to kwota wpłacona do banku na określony czas przy ustalonym oprocentowaniu określanym w skali roku.

UMOWA

Wpłacamy do banku 6000 zł na lokatę roczną. Oprocentowanie w skali roku wynosi 0,5 %.

PO ROKU

Bank zwraca nasz kapitał 6000 zł.

Nalicza odsetki w wysokości 0,5 % kwoty 6000 zł, czyli $0{,}005 \cdot 6000$ zł = 30 zł.

Odsetki pomniejsza o podatek od odsetek równy 19 % kwoty 30 zł, czyli $0{,}19 \cdot 30$ zł = 5,70 zł.

Wypłacone odsetki wynoszą 30 zł – 5,70 zł = 24,30 zł.

Przykład 1.



Pani Adamowska wzięła w banku kredyt w wysokości 30 000 zł na jeden rok. Oprocentowanie tego kredytu jest równe 4 % w skali roku. Oblicz, jaką kwotę pani Adamowska będzie musiała po roku zwrócić do banku.

Sposób I

Obliczymy odsetki od kredytu. ⇨ 4 % kwoty 30 000 zł to $0{,}04 \cdot 30\,000$ zł $= 1200$ zł.

Do kwoty kredytu doliczymy odsetki: $30\,000$ zł $+ 1200$ zł $= 31\,200$ zł.

Sposób II

Obliczymy, jaki procent kredytu pani Adamowska będzie musiała po roku zwrócić do banku. ⇨ $100\,\% + 4\,\% = 104\,\%$

Obliczymy 104 % kwoty kredytu. ⇨ 104 % kwoty 30 000 zł to $1{,}04 \cdot 30\,000$ zł $= 31\,200$ zł

Odp. Po roku pani Adamowska będzie musiała zwrócić do banku 31 200 zł.

Ćwiczenie 1.

Pani Bednarska wzięła w banku kredyt w wysokości 25 000 zł na rok. Oprocentowanie kredytu w tym banku jest równe 4,5 % w skali roku. Oblicz, jaką kwotę pani Bednarska będzie musiała po roku zwrócić do banku.

Przykład 2.



Pan Kowalski wpłacił do banku na roczną lokatę 6000 zł. Oprocentowanie w tym banku jest równe 0,3 % w skali roku. Oblicz, ile będą równe odsetki naliczone od tej lokaty przez bank po upływie roku. Ustal, jaką kwotę otrzyma pan Kowalski po odliczeniu podatku od odsetek w wysokości 19 %.

Obliczymy kwotę odsetek od lokaty po upływie roku. ⇨ 0,3 % kwoty 6000 zł to $\frac{0{,}3}{\cancel{100}_{1}} \cdot \cancel{6000}^{60}$ zł $= 18$ zł.

Podatek od odsetek jest równy 19 %, więc panu Kowalskiemu zostanie wypłacone $100\,\% - 19\,\% = 81\,\%$ odsetek. ⇨ 81 % kwoty 18 zł to $0{,}81 \cdot 18$ zł $= 14{,}58$ zł.

Do kwoty lokaty dodamy odsetki pomniejszone o podatek: 6000 zł $+ 14{,}58$ zł $= 6014{,}58$ zł.

Odp. Odsetki naliczone od tej lokaty po roku będą równe 18 zł. Pan Kowalski po odliczeniu podatku otrzyma 6014,58 zł.

Ćwiczenie 2.

Pan Nowak wpłacił do banku na roczną lokatę 5000 zł. Stopa procentowa w tym banku jest równa 0,5 % w stosunku rocznym. Oblicz, jaką kwotę otrzyma pan Nowak po upływie roku, uwzględniając 19 % podatku od odsetek.

Przykład 3.

Pani Wiśniewska wpłaciła do banku $12\,000$ zł na lokatę jednoroczną. Po roku bank naliczył jej 48 zł odsetek. Jakie było oprocentowanie tej lokaty?

Aby obliczyć oprocentowanie lokaty, podzielimy kwotę odsetek przez kwotę wpłaconą na lokatę, a następnie pomnożymy przez $100\,\%$.

$$\frac{48}{\cancel{12\,000}_{120}} \cdot \cancel{100}^{1}\,\% = \frac{\cancel{48}^{2}}{\cancel{120}_{5}}\,\% = \frac{2}{5}\,\% = 0{,}4\,\%$$

Odp. Oprocentowanie lokaty wynosiło $0{,}4\,\%$.

Ćwiczenie 3.

Pani Kowalska wpłaciła do banku 9000 zł na lokatę jednoroczną. Po roku bank naliczył jej 27 zł odsetek. Jakie było oprocentowanie tej lokaty?

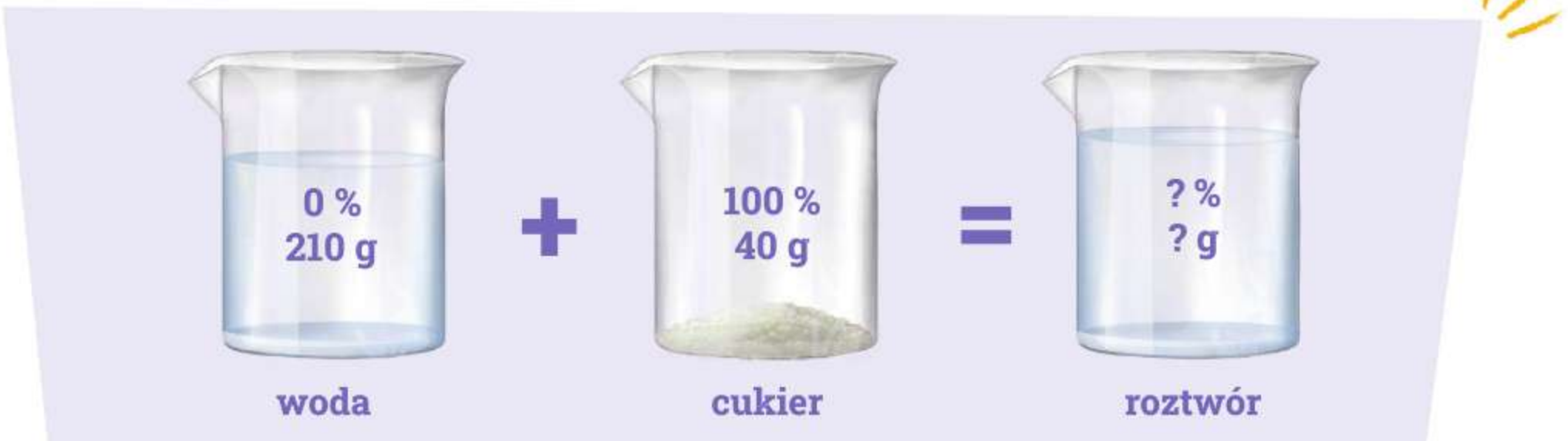
Roztwór jest mieszaniną dwóch lub więcej związków chemicznych. Ich skład określa się procentowo. Przykładowo w roztworze wodnym cukru o stężeniu $12\,\%$ (12-procentowym) cukier stanowi $12\,\%$ masy roztworu, a woda $88\,\%$.

Aby **obliczyć stężenie procentowe** (C_p), należy podzielić masę substancji m_s przez masę roztworu m_r, a następnie otrzymany wynik pomnożyć przez $100\,\%$.

$$C_\mathrm{p} = \frac{m_\mathrm{s}}{m_\mathrm{r}} \cdot 100\,\%$$

Przykład 4.

Do 210 g wody dosypano 40 g cukru. Oblicz stężenie procentowe otrzymanego roztworu.



Masa roztworu jest równa $210\ \mathrm{g} + 40\ \mathrm{g} = 250\ \mathrm{g}$.

Aby obliczyć stężenie procentowe roztworu, masę cukru podzielimy przez masę roztworu, a następnie pomnożymy przez $100\,\%$.

$$\frac{40}{\cancel{250}_{5}} \cdot \cancel{100}^{2}\,\% = \frac{80}{5}\,\% = 16\,\%$$

Odp. Otrzymany roztwór ma stężenie $16\,\%$.

Ćwiczenie 4.

Do 112 kg wody dosypano 13 kg soli. Oblicz stężenie procentowe otrzymanego roztworu.

Przykład 5.

Do 30 g roztworu wodnego soli kuchennej o stężeniu 8 % dodano 10 g soli. Sprawdź, czy stężenie procentowe otrzymanego roztworu wynosi 30 %.



Masa nowego roztworu jest równa $30\text{ g} + 10\text{ g} = 40\text{ g}$.

Obliczymy, ile jest soli w 8-procentowym roztworze. ⇨ $8\ \% \cdot 30 = 0{,}08 \cdot 30 = 2{,}4\ [\text{g}]$

Po dosypaniu soli w otrzymanym roztworze jest $10\text{ g} + 2{,}4\text{ g} = 12{,}4\text{ g}$ soli.

Obliczymy, jakie stężenie ma otrzymany roztwór. ⇨ $\frac{12{,}4}{40} \cdot 100\ \% = \frac{124}{4}\ \% = 31\ \%$

$31\ \% \neq 30\ \%$, zatem pokazaliśmy, że stężenie procentowe otrzymanego roztworu nie wynosi 30 %.

Ćwiczenie 5.

Z 420 g roztworu wodnego soli o stężeniu 15 % odparowano 70 g wody. Sprawdź, czy stężenie procentowe otrzymanego roztworu wynosi 18 %.

Rozwiąż zadania

1. Pan Kowalczyk wziął w banku kredyt w wysokości $14\,500$ zł na jeden rok. Oblicz, jaką kwotę pan Kowalczyk będzie musiał po roku zwrócić do banku, jeśli oprocentowanie w skali roku jest równe:

a) $3{,}8$ %, **b)** $4{,}1$ %, **c)** $4{,}02$ %, **d)** $5{,}03$ %.

2. Pani Wójcik wpłaciła do banku $20\,000$ zł na lokatę o rocznym oprocentowaniu $0{,}6$ %. Oblicz, jaką kwotę odsetek bank naliczy pani Wójcik po upływie roku.

3. Wpłacamy do banku na lokatę roczną kwotę 8000 zł. Oblicz wysokość odsetek po odliczeniu podatku od odsetek w wysokości 19 %, jeśli oprocentowanie lokaty w skali roku jest równe:

a) $0{,}2$ %, **b)** $0{,}6$ %, **c)** $0{,}8$ %, **d)** $0{,}9$ %.

4. Pani Krystyna wzięła w banku A kredyt w wysokości $26\,000$ zł. Po roku będzie musiała zwrócić do banku $27\,014$ zł. Pani Jadwiga wzięła kredyt w banku B w wysokości $26\,500$ zł i po roku będzie musiała zwrócić $27\,507$ zł.

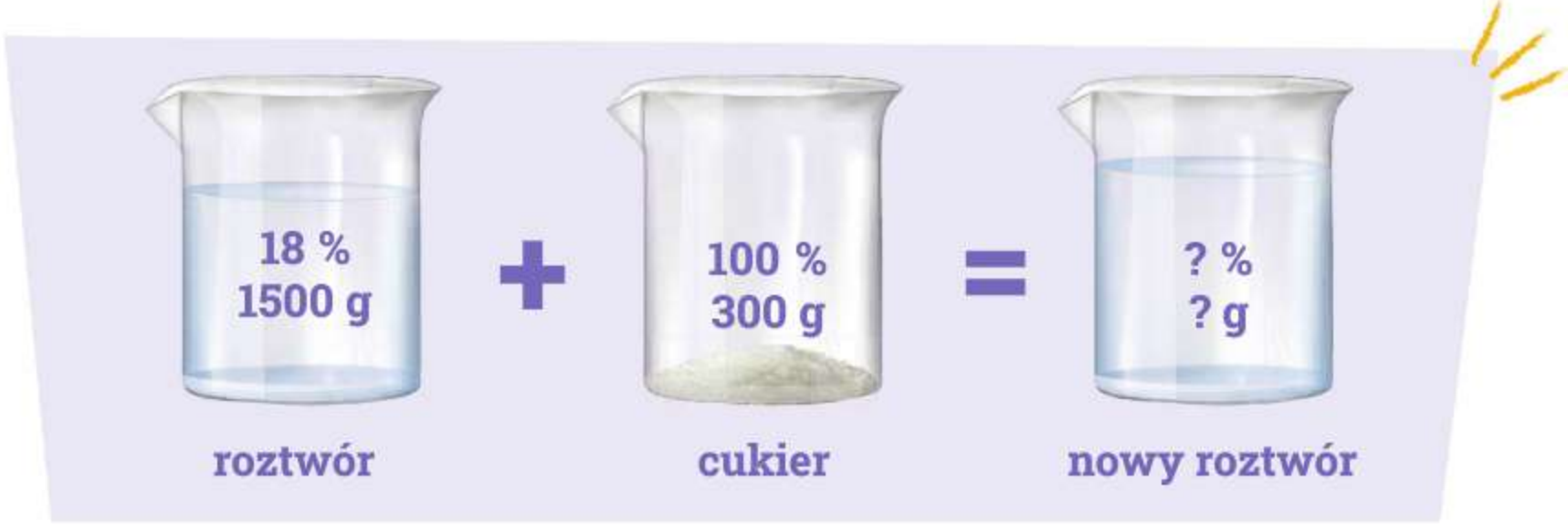
a) Ustal, w którym banku było niższe oprocentowanie kredytu. Uzasadnij swoją odpowiedź.

b) Oblicz, jakiej wysokości kredyt należałoby wziąć w banku, w którym było niższe oprocentowanie, aby odsetki po roku były równe 1045 zł.

5. Klient zdecydował się umieścić swoje oszczędności w wysokości $15\,000$ zł na lokacie. Po roku bank naliczył mu odsetki w wysokości 48 zł. Oblicz, jakie było oprocentowanie tej lokaty.

6. Oprocentowanie lokaty w pewnym banku jest równe $0{,}8$ % w skali roku. Jaką kwotę trzeba wpłacić na tę lokatę, aby po roku otrzymać odsetki w wysokości 243 zł? Uwzględnij podatek od odsetek równy 19 %.

7. Do 1500 g roztworu wodnego cukru o stężeniu 18 % dodano 300 g cukru. Oblicz stężenie procentowe otrzymanego roztworu.



8. Do 320 g zalewy octowej o stężeniu 6 % dolano 80 g wody. Oblicz stężenie procentowe otrzymanego roztworu.

9. Z 80 l roztworu soli o stężeniu 15 % odparowano 5 l wody. Oblicz, jakie jest stężenie procentowe otrzymanego roztworu.

10. Do szklanki ze 190 g wody wsypano 2 łyżeczki cukru. Przyjmij, że 1 łyżeczka cukru waży 5 g.

a) Oblicz stężenie otrzymanego roztworu.

b) Ustal, jakie będzie stężenie roztworu, jeśli dosypiemy jeszcze 10 łyżeczek cukru.

11. Do dzbanka wlano 2 szklanki mleka o pojemności 200 ml każda. Mleko w pierwszej szklance zawierało 2 % tłuszczu, a w drugiej $0{,}5$ %. Jaki procent tłuszczu ma mleko znajdujące się w dzbanku?

12. Zmieszano dwa roztwory solne: pierwszy o stężeniu 10 % i masie 600 g oraz drugi o stężeniu 2 % i masie 200 g. Uzasadnij, że stężenie procentowe otrzymanego roztworu wynosi 8 %.



Sprawdź, co umiesz!

1. Pani Emilia wzięła w banku kredyt w wysokości 32 000 zł na jeden rok. Oprocentowanie tego kredytu było równe 3,9 % w skali roku. E

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Pani Emilia będzie musiała po roku zwrócić do banku mniej niż 33 000 zł.	**P**	**F**
Pani Emilia musiałaby zwrócić po roku do banku 33 184 zł, gdyby oprocentowanie kredytu było równe 3,7 %.	**P**	**F**

2. Pan Tomasz wpłacił dwie kwoty na dwie różne roczne lokaty. W tabeli przedstawiono informacje dotyczące lokat wybranych przez pana Tomasza.

	Lokata A	**Lokata B**
Oprocentowanie	0,25 %	0,4 %
Wpłacona kwota	10 000 zł	20 000 zł

Odpowiedz na pytanie.

a) Ile są równe odsetki naliczone przez bank po roku na lokacie A?

b) Jaką kwotę pan Tomasz otrzyma po roku z lokaty A? Uwzględnij 19 % podatku od naliczonych odsetek.

c) Ile jest równa kwota podatku od odsetek po roku na lokacie B? Uwzględnij 19 % podatku od naliczonych odsetek.

3. Do 494 g wody dosypano 26 g cukru. E

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Stężenie procentowe otrzymanego roztworu wynosi

A. 0,06 % **B.** 6 % **C.** 0,05 % **D.** 5 %

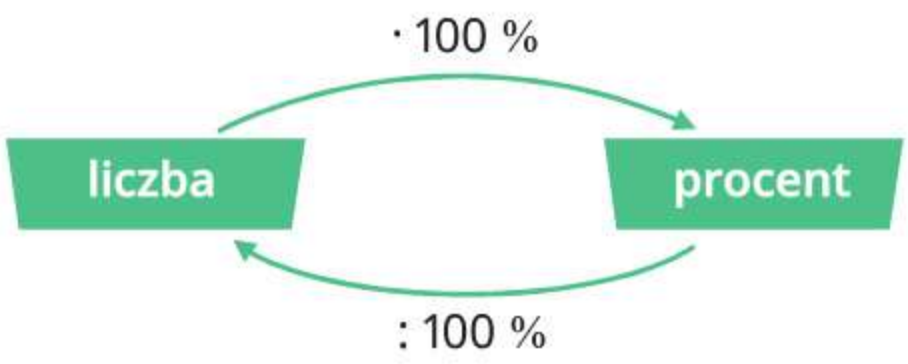
4. Do 200 g roztworu soli o stężeniu 6 % dodano 50 g soli. Oblicz stężenie procentowe otrzymanego roztworu.

PODSUMOWANIE DZIAŁU II
Obliczenia procentowe

Powtórz wiadomości

Procenty

1 % to jedna setna część całości.
100 % to całość.



Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Jakim procentem liczby a jest liczba b?

$$\frac{b}{a} \cdot 100\ \%$$

Jakim procentem liczby 30 jest liczba 6?

$$\frac{6}{30} \cdot 100\ \% = \frac{6}{3} \cdot 10\ \% = 20\ \%$$

Obliczanie procentu danej liczby

p % liczby a jest równe $\frac{p}{100} \cdot a$.

5 % liczby 240 jest równe $\frac{5}{100} \cdot 240 = 12$.

O ile procent więcej

O ile procent liczba a jest większa od liczby b?

$$\frac{a-b}{b} \cdot 100\ \%$$

O ile procent liczba 60 jest większa od liczby 15?

$$\frac{60-15}{15} \cdot 100\% = \frac{45}{15} \cdot 100\ \% = 300\ \%$$

Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Wyznacz liczbę, której 10 % jest równe 12.

x – szukana liczba

$10\ \% - 12$

$100\ \% - x$

$$\frac{10\ \%}{100\ \%} = \frac{12}{x}$$

$$10\ \% \cdot x = 12 \cdot 100\ \%$$

Iloczyn wyrazów skrajnych przyrównamy do iloczynu wyrazów środkowych.

$$x = \frac{12 \cdot 100\ \%}{10\ \%}$$

$$x = 120$$

O ile procent mniej

O ile procent liczba a jest mniejsza od liczby b?

$$\frac{b-a}{b} \cdot 100\ \%$$

O ile procent liczba 15 jest mniejsza od liczby 60?

$$\frac{60-15}{60} \cdot 100\% = \frac{45}{60} \cdot 100\ \% = 75\ \%$$

Sprawdź umiejętności

1. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij, tak aby wielkości a i b były wprost proporcjonalne.

a		3	0,2	
b	4		1,6	$1\frac{1}{3}$

2. Rowerzysta przebył drogę o długości $30\ \text{km}$ w ciągu $72\ \text{min}$. Prędkość średnia motocyklisty na tej samej trasie wyniosła $60\ \text{km/h}$. O ile dłuższy był czas przejazdu tej trasy rowerem niż motocyklem?

3. Pola, Zosia i Bruno przygotowali zaproszenia na przedstawienie szkolne dla 180 gości. Liczby zaproszeń wykonanych przez Polę, Zosię i Brunona były odpowiednio w stosunku $2 : 3 : 4$. E

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Zosia przygotowała [**A** | **B**] liczby wszystkich zaproszeń.

Bruno wykonał [**C** | **D**] zaproszeń.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** 60 **D.** 80

E

Informacje do zadań 4. i 5.

W przepisie na surówkę z marchewki i jabłka stosunek masy marchewek do masy jabłek jest równy $25 : 12$. Porcja surówki wykonana przez mamę według przepisu ma masę $740\ \text{g}$.

4. Jaką masę miały marchewki, które mama zużyła do wykonania surówki? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $24\ \text{dag}$ **B.** $240\ \text{dag}$ **C.** $50\ \text{dag}$ **D.** $500\ \text{dag}$

5. Czy $0{,}9\ \text{kg}$ jabłek wystarczy do zrobienia 4 porcji surówki według podanego przepisu? Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	$\frac{25}{37} \cdot 0{,}74 = 0{,}5 < 0{,}9.$
B.	Nie,		**2.**	$\frac{12}{25} \cdot 2{,}96 = 1{,}4208 > 0{,}9.$
			3.	$\frac{12}{37} \cdot 2{,}96 = 0{,}96 > 0{,}9.$

6. Przyporządkuj każdemu ułamkowi odpowiadający mu procent.

A. $\frac{9}{25}$ **B.** $\frac{13}{40}$ **C.** $\frac{3}{8}$ **D.** $\frac{17}{50}$ **E.** $\frac{39}{125}$

I. $34\,\%$ **II.** $36\,\%$ **III.** $37{,}5\,\%$ **IV.** $31{,}2\,\%$ **V.** $32{,}5\,\%$

7. Biurko kosztowało 850 zł. Jego cenę obniżono o $30\ \%$. Uzasadnij, że cena biurka po obniżce jest równa 595 zł.

8. Oblicz ceny brutto towarów przedstawionych w tabeli.

Towar			
Cena netto	32 zł	1,50 zł	60 zł
Stawka podatku VAT	5 %	8 %	23 %

E **9.** Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Liczba **A** **B** jest o 15 % większa od liczby 80.

Liczba **C** **D** jest o 10 % mniejsza od liczby 30.

A. 92 **B.** 95 **C.** 3 **D.** 27

10. Wyznacz liczbę, której:

a) 75 % jest równe 60, **b)** 30,5 % jest równe 1830, **c)** 0,16 % jest równe 84.

E **11.** Pani Katarzyna zapłaciła za obiad 88 zł wraz z napiwkiem w wysokości 10 % ceny posiłku. Ile był równy napiwek? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 12 zł **B.** 4,50 zł **C.** 8 zł **D.** 8,80 zł

E **12.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

8 % liczby 120 to 15.	**P**	**F**
Liczba 5 stanowi 12 % liczby 80.	**P**	**F**
Liczba $1\frac{2}{5}$ stanowi $2\frac{1}{3}$ % liczby 60.	**P**	**F**

13. Przepisz zdania do zeszytu i uzupełnij luki tak, aby otrzymać zdania prawdziwe.

a) Cenę książki zwiększono z 25 zł do 35 zł, zatem książka zdrożała o ▒▒ %.

b) Cenę pary butów zmniejszono ze 120 zł do 105 zł, zatem buty staniały o ▒▒ %.

14. Odczytaj dane przedstawione w tabeli. Oblicz, o ile procent wzrosły ceny dań w restauracji.

	Styczeń	Maj
Makaron pomidorowy	32 zł	40 zł
Łosoś w sosie cytrynowym	48 zł	50,40 zł

15. Uczniom zadano pytanie: *Czy lubisz jeść warzywa?* Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie kołowym. 48 osób odpowiedziało, że lubi warzywa.

a) Oblicz, ile osób w tej grupie nie lubi warzyw.

b) Oblicz, o ile punktów procentowych mniej osób nie lubi warzyw, niż je lubi.

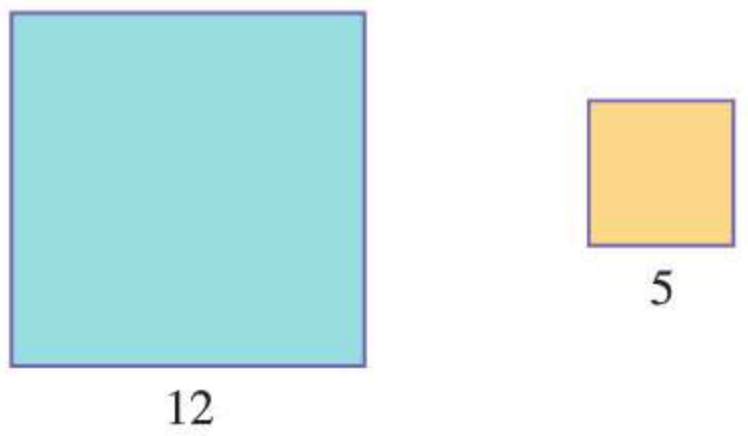
c) O ile procent mniej osób nie lubi warzyw, niż je lubi?



16. Sweter kosztował 125 zł. Jego cenę najpierw podwyższono o 20 %, a następnie obniżono o 20 %. Oblicz ostateczną cenę swetra. O ile procent zmieniła się jego cena?

17. Skorzystaj z informacji podanych na rysunkach przedstawiających kwadraty.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.



Obwód dużego kwadratu jest o 140 % większy od obwodu małego kwadratu.	**P**	**F**
Obwód małego kwadratu jest o 40 % mniejszy od obwodu dużego kwadratu.	**P**	**F**
Pole dużego kwadratu jest o 476 % większe od pola małego kwadratu.	**P**	**F**
Pole małego kwadratu jest o 76 % mniejsze od pola dużego kwadratu.	**P**	**F**

18. W sadzie rośnie 320 drzew: 64 jabłonie, 96 śliw, 48 gruszy, 16 moreli i 32 brzoskwinie. Pozostałe drzewa to orzechy. Wykonaj procentowy diagram słupkowy ilustrujący udział procentowy różnych gatunków drzew rosnących w tym sadzie.

19. Pani Kowalska wpłaciła do banku na roczną lokatę kwotę 50 000 zł, którą wraz z odsetkami wypłaciła po tym czasie. Roczne oprocentowanie wynosiło 1,2 %. Oblicz, jaką kwotę wypłaciła po roku pani Kowalska. Uwzględnij podatek od odsetek w wysokości 19 %.

20. Pan Majewski zaciągnął w banku kredyt na rok. Oprocentowanie kredytu wynosiło 5,5 % w skali roku. Po roku pan Majewski zwrócił do banku 52 750 zł. Oblicz, jaką kwotę pan Majewski pożyczył z banku.

21. Do 288 g wody wsypano 32 g soli. Oblicz stężenie procentowe otrzymanego roztworu.

22. Do 6 l zalewy octowej o stężeniu procentowym równym 6 % dodano 2 l zalewy octowej o stężeniu 4 %. Oblicz stężenie procentowe otrzymanego roztworu.

E

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Cezary i Zosia mieli spotkać się przed szkołą. Cezary miał do przejścia $1200\ \text{m}$. Wyruszył z domu o godzinie 7.30 i pokonał trasę z domu do szkoły ze średnią prędkością $4\ \text{km/h}$. Zosia miała do przejechania rowerem $3\ \text{km}$. Wyruszyła z domu o godzinie 7.39. Z jaką średnią prędkością pokonała trasę do szkoły, jeśli dotarła do niej o tej samej godzinie co Cezary?



E

Informacje do zadań 2. i 3.

W tabeli przedstawiono informacje z etykiety serka wiejskiego o masie $180\ \text{g}$.

Wartość odżywcza	w 100 g
Wartość energetyczna	406 kJ/97 kcal
Tłuszcz w tym kwasy tłuszczowe nasycone	5,0 g 3,5 g
Węglowodany w tym cukry	2,0 g 1,5 g
Białko	11 g
Sól	0,70 g

2. Ile gramów tłuszczu dostarcza organizmowi cały serek wiejski? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $3,5\ \text{g}$ **B.** $5\ \text{g}$ **C.** $6,3\ \text{g}$ **D.** $9\ \text{g}$

3. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Dwa serki wiejskie dostarczają organizmowi [**A** | **B**] soli.

A. $1,4\ \text{g}$ **B.** $2,52\ \text{g}$

Aby dostarczyć organizmowi $39,6\ \text{g}$ białka, należy zjeść [**C** | **D**] serki wiejskie.

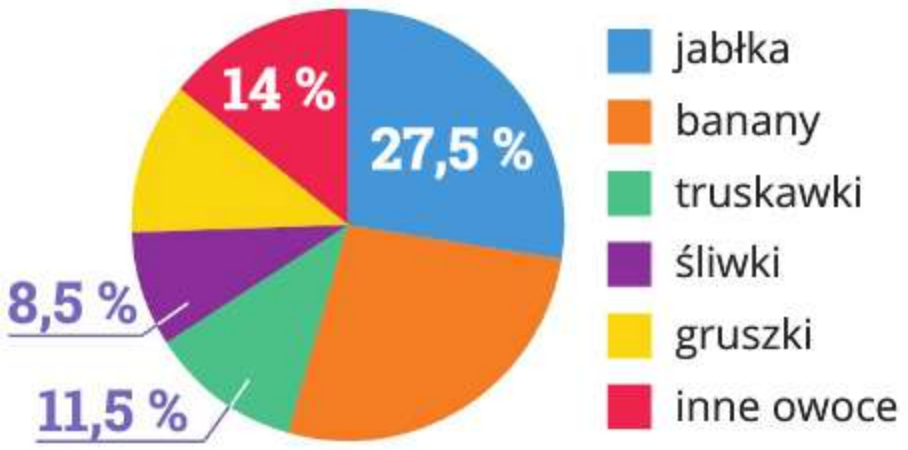
C. 2 **D.** 3

4. Mama sporządziła syrop z wody i cukru. Stosunek masy wody do masy cukru w tym syropie jest równy $11 : 7$. Sprawdź, czy cukier stanowi więcej niż $38,8\ \%$ masy syropu.

5. Grupę uczniów zapytano, jak spędzili wakacje. Wśród nich $23\ \%$ osób wyjechało za granicę, $0,12$ było w górach, $\frac{2}{9}$ zostało w domu. Pozostała część grupy spędziła wakacje nad morzem. Czy więcej niż $40\ \%$ uczniów tej grupy było podczas wakacji nad morzem? Uzasadnij swoją odpowiedź.

6. Oblicz $0{,}05\ \%$ wartości wyrażenia $\frac{2}{5}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$.

7. W pewnej grupie osób przeprowadzono ankietę dotyczącą ulubionych owoców. Banany wybrało 108 ankietowanych. Gruszki i truskawki są ulubionym owocem takiej samej liczby osób. Na diagramie kołowym przedstawiono wyniki ankiety.



a) Oblicz, ile osób brało udział w ankiecie.

b) Ustal, o ile więcej osób wybrało gruszki niż śliwki.

8. Równoległobok ma wymiary $a \times b$, gdzie $a > b$. Jego dłuższy bok skrócono o $25\ \%$, a krótszy wydłużono o $20\ \%$. W ten sposób powstał romb o obwodzie równym $48\ \text{cm}$. Oblicz obwód równoległoboku o wymiarach $a \times b$.

9. Zestaw długopisów kosztował 20 zł. W grudniu i styczniu obniżono jego cenę każdorazowo o $p\ \%$. Po obu obniżkach cena tego produktu była równa $16{,}20$ zł. Oblicz p.

10. Tuzin, mendel, kopa i gros to jednostki dawniej używane do określenia liczebności. Oblicz, jakim procentem:

a) kopy jest mendel,

b) grosa jest tuzin,

c) $2{,}5$ kopy są 2 tuziny.

1 tuzin to 12 sztuk
1 mendel to 15 sztuk
1 kopa to 60 sztuk
1 gros to 144 sztuki

11. Na wiosennej rabacie pani Marty rozkwitły kwiaty: goździki, hiacynty i tulipany. Goździki, których jest 24, stanowią $12{,}5\ \%$ procent wszystkich kwiatów. Hiacyntów jest o $100\ \%$ więcej niż goździków. Jaki procent wszystkich kwiatów na rabacie stanowią tulipany?

12. Do ceny netto towaru równej 540 zł doliczono $124{,}20$ zł podatku VAT. Oblicz, ile procent podatku VAT doliczono.

13. Cenę suszarki do włosów podwyższono o $20\ \%$, a następnie obniżono o $25\ \%$. Po tych dwóch zmianach jej cena jest równa 81 zł.



a) Oblicz cenę początkową tej suszarki.

b) Ustal, o ile procent po podwyżce i obniżce zmieniła się cena suszarki względem jej ceny początkowej.

c) Oblicz, jaki procent końcowej ceny suszarki stanowi jej cena początkowa.

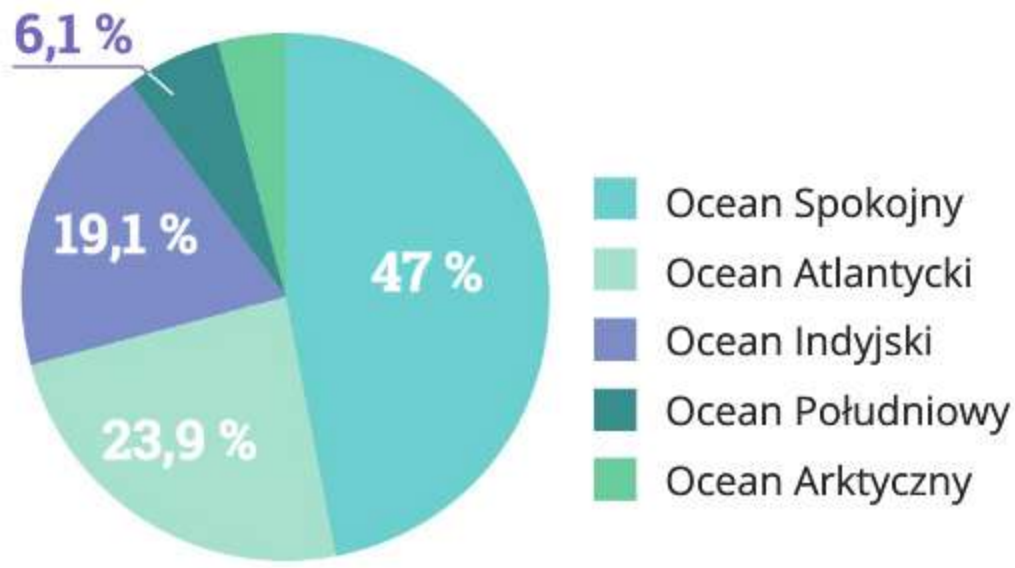
14. Oceany zajmują $361\ \text{mln km}^2$ (70,8 %) całkowitej powierzchni kuli ziemskiej, natomiast lądy $149\ \text{mln km}^2$ (29,2 %). Na podstawie informacji przedstawionych na procentowych diagramach kołowych odpowiedz na pytania (wyniki podaj w zaokrągleniu do 0,1 %).

a) Jaki procent powierzchni kuli ziemskiej zajmuje Ocean Spokojny?

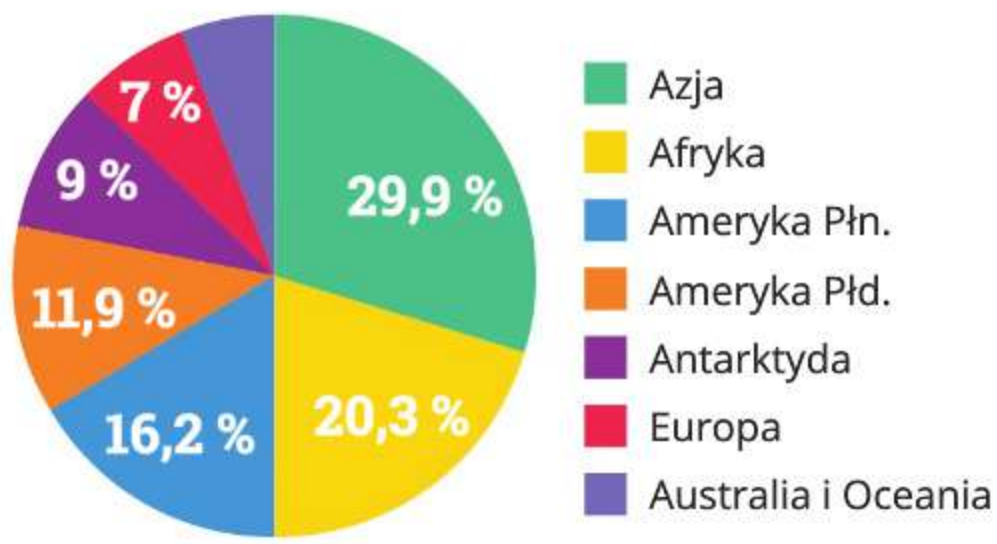
b) O ile procent powierzchnia Europy jest mniejsza od powierzchni największego kontynentu na kuli ziemskiej?

c) O ile procent powierzchnia Oceanu Arktycznego jest większa od powierzchni najmniejszego kontynentu na kuli ziemskiej?

Źródło: *Wielki atlas świata*, oprac. zbiorowe, Demart, Warszawa 2022.



▲ Udział poszczególnych oceanów w ogólnej powierzchni wód



▲ Udział poszczególnych kontynentów w ogólnej powierzchni lądów

E Informacje do zadań 15. i 16.

W pewnym banku oprocentowanie lokaty rocznej Oszczędzaj z nami to 0,5 %. Uwzględnij podatek od odsetek równy 19 %.

15. Pani Aneta wpłaciła do banku 32 000 zł na lokatę roczną Oszczędzaj z nami.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pani Aneta po roku otrzyma

A. 32 129,60 zł **B.** 32 160,60 zł **C.** 33 296,20 zł **D.** 33 600,40 zł

16. Pan Michał chce wpłacić do banku na lokatę roczną Oszczędzaj z nami pewną kwotę.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Oprocentowanie lokaty powinno być równe [**A** | **B**], aby po wpłaceniu 150 000 zł otrzymać po roku 729 zł odsetek.

A. 0,6 % **B.** 0,7 %

Pan Michał powinien wpłacić na lokatę Oszczędzaj z nami [**C** | **D**], aby odsetki, które otrzyma po roku, były równe 1458 zł.

C. 180 000 zł **D.** 360 000 zł

17. Do naczynia, w którym znajdowało się 450 g solanki o stężeniu 8 %, dodano solankę o innym stężeniu procentowym. Otrzymano 550 g roztworu o stężeniu 8,5 %. Oblicz, jakie stężenie procentowe miała solanka, która została dodana do naczynia.



DZIAŁ III

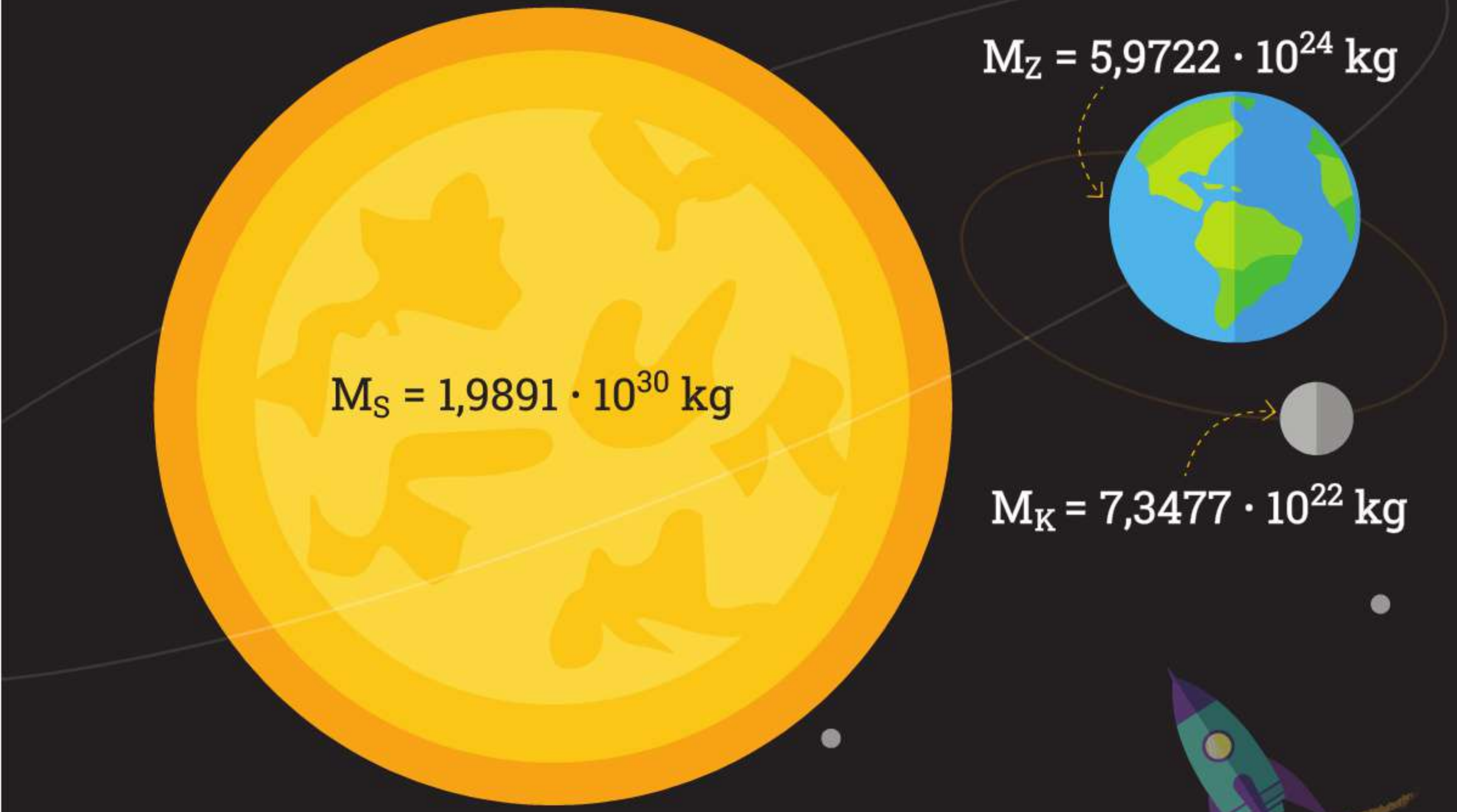
POTĘGI

Działania na potęgach

Notacja wykładnicza







$M_Z = 5{,}9722 \cdot 10^{24}$ kg

$M_K = 7{,}3477 \cdot 10^{22}$ kg



To ci się przyda!

1. Potęga o wykładniku naturalnym

- Zapisywanie iloczynu w postaci potęgi
- Obliczanie potęg o wykładniku naturalnym

Potęgi stosujemy w zapisie bardzo dużych oraz bardzo małych liczb, m.in. wielkości fizycznych, jednostek pól i objętości. Możemy się z nimi spotkać na lekcjach fizyki, biologii, informatyki. Potęgowanie pozwala krócej zapisać iloczyn jednakowych czynników, np.
$15 \cdot 15 = 15^2$ (czytamy: *piętnaście do potęgi drugiej* lub *kwadrat liczby piętnaście*);
$15 \cdot 15 \cdot 15 = 15^3$ (czytamy: *piętnaście do potęgi trzeciej* lub *sześcian liczby piętnaście*).

Potęgą liczby a o wykładniku naturalnym n, gdzie $n > 1$, nazywamy iloczyn n czynników, z których każdy jest równy a.

wykładnik potęgi

podstawa potęgi

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Dla każdej liczby a przyjmujemy, że $a^1 = a$.
Dla każdej liczby $a \neq 0$ przyjmujemy, że $a^0 = 1$.
Liczba 1^n, gdzie n jest liczbą naturalną, zawsze jest równa 1.

Przykład 1.

Oblicz.

a) $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$ **b)** $(-5)^5 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -3125$
c) $1^{32} = 1$ **d)** $(-375{,}5)^1 = -375{,}5$ **e)** $2023^0 = 1$

Ćwiczenie 1.

Oblicz.

a) 7^2 **b)** $(-2)^5$ **c)** 26^1 **d)** $(-14)^0$ **e)** 1^{2023}

Przykład 2.

Oblicz.

a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
c) $(-2)^3 = \underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}_{\text{nieparzysta liczba czynników}} = -8$
d) $(-2)^4 = \underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}_{\text{parzysta liczba czynników}} = 16$

Znak wartości potęgi

Potęga liczby dodatniej jest zawsze liczbą dodatnią.

Jeżeli wykładnik potęgi jest nieparzysty, to potęga liczby ujemnej jest ujemna.

Jeżeli wykładnik potęgi jest parzysty, to potęga liczby ujemnej jest dodatnia.

Ćwiczenie 2.

Oblicz.

a) 5^2 **b)** 5^3 **c)** $(-5)^2$ **d)** $(-5)^3$

Przykład 3.

Dane są liczby $a = (-3)^4$ i $b = -3^4$. Sprawdź, czy liczby a i b są różne.

Liczbę (-3) podniesiemy do potęgi 4. ⇒ $a = (-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

Liczbę 3 podniesiemy do potęgi 4, a minus przepiszemy. ⇒ $b = -3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$

Otrzymaliśmy $a = 81$ oraz $b = -81$, zatem liczby a i b są różne.

Ćwiczenie 3.

Dane są liczby $x = 4^3$ oraz $y = -(-4)^3$. Sprawdź, czy liczby x i y są różne.

Przykład 4.

Oblicz.

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

Aby podnieść do potęgi ułamek zwykły, należy podnieść do danej potęgi zarówno jego licznik, jak i mianownik.

b) $\left(2\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{11}{5} \cdot \frac{11}{5} = \frac{121}{25} = 4\frac{21}{25}$

Aby podnieść do potęgi liczbę mieszaną, należy zamienić ją na ułamek niewłaściwy, a następnie wykonać potęgowanie.

Ćwiczenie 4.

Oblicz.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^4$ **b)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$ **c)** $\left(1\frac{2}{3}\right)^3$ **d)** $\left(-3\frac{1}{2}\right)^2$

A to ciekawe

Podczas obliczania kolejnych potęg o wykładniku naturalnym liczby większej od 1 otrzymujemy coraz większe wartości. Natomiast jeśli obliczamy kolejne potęgi o wykładniku naturalnym ułamka właściwego, otrzymujemy wartości coraz mniejsze.

$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$
$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

Przykład 5.

Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 10.

a) $10\,000 = 10^4$ **b)** $1\,000\,000\,000 = 10^9$

Gdy podnosimy liczbę 10 do potęgi o wykładniku naturalnym, to w wyniku liczba zer znajdujących się za cyfrą 1 jest równa wykładnikowi.

pierwsza potęga — jedno zero; druga potęga — dwa zera; piąta potęga — pięć zer

$10^1 = 10$ $\quad 10^2 = 100$ $\quad 10^5 = 100\,000$

Ćwiczenie 5.

Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 10.

a) $100\,000\,000$ **b)** $10\,000\,000\,000$ **c)** $1\,000\,000\,000\,000$

Przykład 6.

Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie $0{,}1$.

a) $0{,}0001 = (0{,}1)^4$ **b)** $0{,}000000001 = (0{,}1)^9$

Gdy podnosimy liczbę $0{,}1$ do potęgi o wykładniku naturalnym, to w wyniku liczba miejsc po przecinku jest równa wykładnikowi.

pierwsza potęga — jedno miejsce po przecinku; druga potęga — dwa miejsca po przecinku; piąta potęga — pięć miejsc po przecinku

$(0{,}1)^1 = 0{,}1$ $\quad (0{,}1)^2 = 0{,}01$ $\quad (0{,}1)^5 = 0{,}00001$

Ćwiczenie 6.

Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie $0{,}1$.

a) $0{,}0000001$ **b)** $0{,}00000000001$ **c)** $0{,}0000000000001$

Przykład 7.

Zapisz podane wielkości w postaci 10^n lub $(0,1)^n$, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1.

a) $1\text{ kg} = 10^n\text{ g}$ ⇒ $1\text{ kg} = 1000\text{ g} = 10^3\text{ g}$

b) $1\text{ m} = (0,1)^n\text{ km}$ ⇒ $1\text{ m} = 0{,}001\text{ km} = (0,1)^3\text{ km}$

Ćwiczenie 7.

Zapisz podane wielkości w postaci 10^n lub $(0,1)^n$, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1.

a) $100\text{ kg} = 10^n\text{ g}$ **b)** $10\text{ t} = 10^n\text{ kg}$ **c)** $10\text{ cm} = (0,1)^n\text{ m}$ **d)** $1\text{ mm} = (0,1)^n\text{ dm}$

Rozwiąż zadania

1. Zapisz iloczyn w postaci potęgi.

a) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ **b)** $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$

c) $(-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9) \cdot (-9)$ **d)** $(-1,2) \cdot (-1,2) \cdot (-1,2) \cdot (-1,2) \cdot (-1,2) \cdot (-1,2)$

2. Oblicz.

a) 2^9 **b)** $(45,2)^0$ **c)** $(-5)^1$ **d)** 1^{52} **e)** $(-2)^6$

f) $(-1)^{11}$ **g)** $(-1,1)^3$ **h)** -3^6 **i)** $-(0,3)^2$ **j)** $-(-0,2)^4$

k) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ **l)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ **m)** $\left(-2\frac{1}{4}\right)^2$ **n)** $-(-6^3)$ **o)** $-\left(-3\frac{1}{3}\right)^2$

3. Zapisz w postaci potęgi, a następnie oblicz:

a) czwartą potęgę liczby (-6), **b)** potęgę o podstawie (-3) i wykładniku 3,

c) trzecią potęgę połowy liczby 5, **d)** kwadrat czwartej części liczby (-7).

4. Zapisz podane wielkości w postaci 10^n lub $(0,1)^n$, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1.

a) $10\text{ kg} = 10^n\text{ g}$ **b)** $100\text{ t} = 10^n\text{ kg}$ **c)** $10\text{ km} = 10^n\text{ m}$ **d)** $100\text{ m} = 10^n\text{ mm}$

e) $1\text{ g} = (0,1)^n\text{ kg}$ **f)** $10\text{ dag} = (0,1)^n\text{ t}$ **g)** $10\text{ m} = (0,1)^n\text{ km}$ **h)** $100\text{ mm} = (0,1)^n\text{ km}$

5. Ustal, jakie liczby należy podnieść do kwadratu, aby otrzymać:

a) 25, **b)** 121, **c)** $\frac{16}{49}$, **d)** $3\frac{6}{25}$, **e)** $0{,}16$, **f)** $1{,}69$.

6. Ustal, jaką liczbę należy podnieść do sześcianu, aby otrzymać:

a) 27, **b)** $-\frac{1}{8}$, **c)** $0{,}125$, **d)** $-1\frac{91}{125}$, **e)** $-0{,}064$, **f)** $0{,}343$.

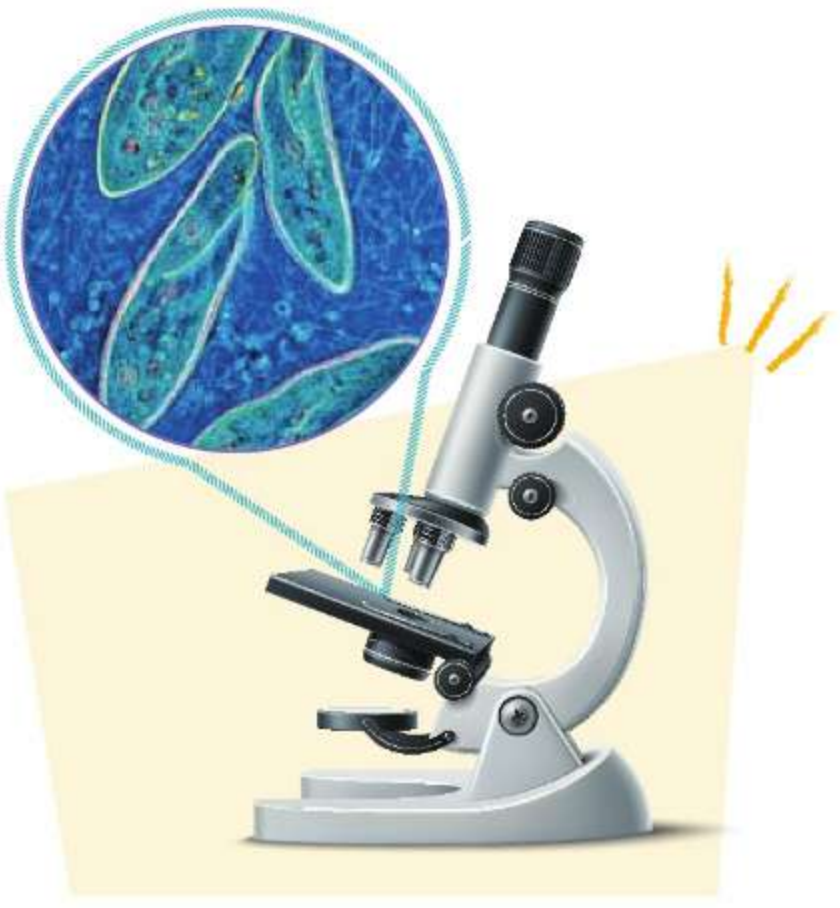
7. Oblicz wartości wyrażeń, a następnie je porównaj. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $5^2 + 7^2$ i $(5+7)^2$ **b)** $10^3 - 6^3$ i $(10-6)^3$ **c)** $4^2 - 9^2$ i $(4-9)^2$

E

Informacje do zadań 8. i 9.

Pantofelki są jednokomórkowymi organizmami zaliczanymi do orzęsków. Rozmnażają się przez podział. W sprzyjających warunkach po upływie doby z jednego pantofelka będą dwa pantofelki.



8. Ile osobników może powstać z jednego pantofelka po 120 h? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 6 **B.** 10 **C.** 32 **D.** 62

9. Po ilu godzinach z jednego osobnika może powstać 256 osobników? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 128 **B.** 144 **C.** 168 **D.** 192

10. Zuzia we wtorek wysłała do czterech przyjaciółek taką samą wiadomość. Każda z przyjaciółek następnego dnia wysłała tę samą wiadomość do czterech kolejnych osób. W kolejnych dniach każda osoba, która dostała tę wiadomość dzień wcześniej, wysyłała ją czterem innym osobom. Oblicz, ile osób otrzymało tę wiadomość do piątku wieczorem.

☆

11. Ustal, jaka jest ostatnia cyfra liczby:

a) 5^{72}, **b)** 91^{67}, **c)** 97^{9}, **d)** 23^{14}.

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

a) 9^3 **b)** $\left(\frac{1}{2023}\right)^1$ **c)** 1^{1000} **d)** $\left(-1\frac{1}{7}\right)^3$ **e)** $(0{,}01)^3$

2. Oblicz iloczyn trzeciej potęgi liczby (-3) i czwartej potęgi liczby (-2).

E

3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Liczby -6^4 oraz $(-6)^4$ są równe.	**P**	**F**
Liczby $(-33)^0$ oraz -33^0 są równe.	**P**	**F**

E

4. Z jednej komórki bakteryjnej po 20 min będą 2 komórki bakteryjne, po 40 min będą 4, czyli 2^2 komórek bakteryjnych, po 60 min będzie 8, czyli 2^3 komórek bakteryjnych itd.

Ile komórek bakteryjnych będzie po 120 min? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 2^3 **B.** 16 **C.** 32 **D.** 2^6

2. Iloczyn i iloraz potęg o jednakowych podstawach

- Mnożenie potęg o tej samej podstawie
- Dzielenie potęg o tej samej podstawie

Przykład 1.

Zapisz iloczyn potęg w postaci jednej potęgi.

a) $5^4 \cdot 5^2 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4 \text{ czynniki}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{2 \text{ czynniki}} = 5^{4+2} = 5^6$

b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^6 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^7 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)^{6+7+1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{14} = \left(\frac{2}{5}\right)^{14}$

Aby pomnożyć potęgi, które mają taką samą podstawę, należy podstawę pozostawić bez zmian i dodać ich wykładniki.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

gdzie $a \neq 0$ oraz m, n są liczbami naturalnymi.

Ćwiczenie 1.

Zapisz iloczyn potęg w postaci jednej potęgi.

a) $9^6 \cdot 9^5$ **b)** $\left(-\frac{1}{7}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^4$ **c)** $(0{,}8)^7 \cdot (0{,}8)^0 \cdot (0{,}8)^9$ **d)** $\left(-3\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(-3\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{2}\right)^8$

Przykład 2.

Zapisz iloraz potęg w postaci jednej potęgi.

a) $3^7 : 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{3^1} \cdot \cancel{3^1} \cdot \cancel{3^1} \cdot \cancel{3^1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{7-4} = 3^3$

b) $(-6)^{19} : (-6)^9 : (-6)^0 = (-6)^{19-9-0} = (-6)^{10} = 6^{10}$

Aby podzielić potęgi, które mają taką samą podstawę, należy podstawę pozostawić bez zmian i odjąć ich wykładniki.

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

gdzie $a \neq 0$, m, n są liczbami naturalnymi oraz $m \geqslant n$.

Ćwiczenie 2.

Zapisz iloraz potęg w postaci jednej potęgi.

a) $5^{23} : 5^{12}$ **b)** $\frac{(0{,}5)^{12}}{(0{,}5)^7}$ **c)** $\left(1\frac{1}{9}\right)^{15} : \left(1\frac{1}{9}\right)^3$ **d)** $\left(\frac{1}{11}\right)^6 : \left(\frac{1}{11}\right)^0 : \frac{1}{11}$

Przykład 3.

Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $\frac{4^8 \cdot 4^2}{4^3} = \frac{4^{8+2}}{4^3} = \frac{4^{10}}{4^3} = 4^{10-3} = 4^7$

b) $\frac{3^6 \cdot 3^7}{3^4 \cdot 3} = \frac{3^{6+7}}{3^{4+1}} = \frac{3^{13}}{3^5} = 3^{13-5} = 3^8$

Ćwiczenie 3.

Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $\frac{2^{12} \cdot 2^3}{2^4}$

b) $\frac{5^4 \cdot 5^{12}}{5^6 \cdot 5^2}$

c) $\frac{(-0{,}3)^{15} \cdot (-0{,}3)^4 \cdot (-0{,}3)^{12}}{(-0{,}3)^6 \cdot (-0{,}3)^2 \cdot (-0{,}3)^{11}}$

Przykład 4.

Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi. Przyjmij założenie, że $x \neq 0$.

a) $x^3 \cdot x^5 : x^2 = x^{3+5} : x^2 = x^8 : x^2 = x^{8-2} = x^6$

b) $\frac{x^4 \cdot x^5}{(-x)^7} = \frac{x^{4+5}}{-x^7} = -\frac{x^9}{x^7} = -x^{9-7} = -x^2$

Ćwiczenie 4.

Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi. Przyjmij założenie, że $x \neq 0$.

a) $x^8 : x^5 \cdot x^3$

b) $\frac{x^{12} \cdot x^7}{(-x)^5}$

c) $\frac{-x^4 \cdot x^9}{(-x)^4 \cdot x^2}$

Rozwiąż zadania

1. Zapisz iloczyn potęg w postaci jednej potęgi.

a) $2^6 \cdot 2^4$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7$

c) $(-2)^3 \cdot (-2)^4$

d) $(0{,}24)^5 \cdot (0{,}24)^2$

e) $3^6 \cdot 3 \cdot 3^2$

f) $\left(2\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(2\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(2\frac{1}{4}\right)^5$

g) $(-3)^3 \cdot (-3)^4 \cdot (-3)^5$

h) $(1{,}3)^6 \cdot (1{,}3)^4 \cdot (1{,}3)^2$

i) $(0{,}5)^4 \cdot (0{,}5)^0 \cdot (0{,}5)^6$

2. Zapisz iloraz potęg w postaci jednej potęgi.

a) $12^{10} : 12^4$

b) $(0{,}4)^{15} : (0{,}4)^9$

c) $(-7)^{13} : (-7)^8$

d) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^7 : \left(-1\frac{1}{2}\right)^5$

e) $\frac{15^8}{15}$

f) $10^{16} : 10^0 : 10^2 : 10$

3. Przedstaw wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $\frac{2^8 \cdot 2^4}{2^3}$

b) $(5^6 : 5^4 \cdot 5^7) : (5 \cdot 5^4)$

c) $\frac{(-3)^9 : (-3)^3 \cdot (-3)^2}{(-3)^2 \cdot (-3)^0}$

4. Oblicz.

a) $(-10)^5 \cdot (-10)^0 \cdot (-10)$

b) $\left(2\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(2\frac{1}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{4}\right)^5$

c) $(5^3 \cdot 5^2 : 5^5) \cdot (5^4 : 5^2)$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3$

5. Oblicz:

a) połowę liczby $2^5 \cdot 2^2$,

b) trzecią część liczby $\frac{3^8 : 3}{3^2}$,

c) 0,25 liczby $\frac{16^5}{16^3 \cdot 16^0}$,

d) $\frac{1}{8}$ liczby $\frac{(-12)^3 \cdot (-12)^5}{12^7}$.

6. Zapisz wyrażenie w postaci a^n. Przyjmij założenie, że $a \neq 0$.

a) $a^6 \cdot a^5 \cdot a^2$

b) $(-a)^3 \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^5$

c) $a^5 : a^2 \cdot a^8$

d) $a^6 \cdot a^4 : (-a)^2 \cdot a^2$

e) $\frac{a^7 \cdot a^4 : a^5}{a^2}$

f) $\frac{(-a)^7 : (-a)^5 \cdot (-a)^4}{(-a)^0 \cdot (-a)^6}$

7. Podaj wartość x, tak aby otrzymać równość.

a) $2^{10} = 2^x \cdot 2^6$

b) $3^8 = 3^5 \cdot 3^x$

c) $5^{12} = 5^x \cdot 5^2$

d) $4^9 = 4^x \cdot 4^5 \cdot 4^4$

e) $6^{10} = 6^x \cdot (6^{10} : 6^4)$

f) $7^9 = 7^x \cdot 7^5 \cdot 7^x$

8. Podaj wartość x, tak aby otrzymać równość. Przyjmij założenie, że $x \neq 0$.

a) $\frac{x^4 \cdot x^7}{x^8} = 8$

b) $\frac{x^6 \cdot x^2}{x^3} = \frac{1}{243}$

c) $\frac{x^5 \cdot x^2}{x^5} = \frac{81}{25}$

9. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $a = \frac{2}{3}$ i $b = \frac{3}{4}$.

a) $\frac{(ab)^{10} \cdot (ab)^7}{(ab)^{15}}$

b) $\frac{(-ab)^{12} \cdot (-ab)^8}{(-ab)^{17}}$

c) $\frac{(-a)^{15} \cdot (-b)^6}{a^{13} \cdot b^4}$

Sprawdź, co umiesz!

1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloczyn liczb 2^{22} i 2^2 jest równy

A. 2^{44} **B.** 2^{20} **C.** 2^{24} **D.** 4^{24}

2. Oblicz:

a) iloraz liczb 5^{10} i 5^8,

b) iloczyn liczb $(-2)^4$ i (-2),

c) iloraz liczb 10^8 i 10.

3. Wskaż liczbę równą ilorazowi $\frac{3^{66}}{3 \cdot 3^0}$.

A. 3^{22} **B.** 3^{63} **C.** 3^{65} **D.** 3^{66}

4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Wartość wyrażenia $(-3)^6 \cdot (-3)^4 : (-3)^8 \cdot (-3)^2$ jest równa 1.	**P**	**F**
Równość $7^{10} = 7^x \cdot (7^8 : 7^4)$ jest prawdziwa dla $x = 6$.	**P**	**F**

3. Potęgowanie iloczynu i ilorazu

- Mnożenie potęg o tym samym wykładniku
- Dzielenie potęg o tym samym wykładniku

Przykład 1.

Zapisz iloczyn potęg $2^3 \cdot 9^3$ w postaci jednej potęgi.

iloczyn potęg — potęga iloczynu

$$2^3 \cdot 9^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 9 = (2 \cdot 9) \cdot (2 \cdot 9) \cdot (2 \cdot 9) = (2 \cdot 9)^3 = 18^3$$

Aby pomnożyć potęgi o takich samych wykładnikach, należy pomnożyć podstawy, a wykładnik przepisać.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz n jest liczbą naturalną.

Ćwiczenie 1.

Zapisz iloczyn potęg w postaci jednej potęgi.

a) $3^6 \cdot 5^6$ **b)** $5^4 \cdot 9^4$ **c)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^5$ **d)** $(2{,}3)^7 \cdot (0{,}2)^7$

Przykład 2.

Zapisz iloraz potęg $6^3 : 8^3$ w postaci jednej potęgi.

iloraz potęg — potęga ilorazu

$$6^3 : 8^3 = (6 \cdot 6 \cdot 6) : (8 \cdot 8 \cdot 8) = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{8} = \left(\frac{6}{8}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

Aby podzielić potęgi o takich samych wykładnikach, należy podzielić podstawy, a wykładnik przepisać.

$$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a : b)^n$$

gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz n jest liczbą naturalną.

Ćwiczenie 2.

Zapisz iloraz potęg w postaci jednej potęgi.

a) $12^4 : 3^4$ **b)** $6^3 : 7^3$ **c)** $(-2)^5 : (-8)^5$ **d)** $(3{,}6)^8 : 4^8$

Przykład 3.

Oblicz.

a) $\left(2\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^3 = \left(2\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{5}{4}\right)^3 = \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{10^3}{3^3} = \frac{1000}{27} = 37\frac{1}{27}$

b) $\frac{(-27)^2}{3^2} = \left(\frac{-27}{3}\right)^2 = (-9)^2 = 9^2 = 81$

c) $10^4 : 5^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 = (10 : 5)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 = 2^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \left(2 \cdot \frac{1}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$

Ćwiczenie 3.

Oblicz.

a) $\left(3\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-2\frac{2}{7}\right)^3$ **b)** $\frac{(-64)^3}{(-16)^3}$ **c)** $125^4 : 25^4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4$

Rozwiąż zadania

1. Zapisz iloczyn potęg w postaci jednej potęgi.

a) $(-4)^4 \cdot (-6)^4$ **b)** $(2{,}5)^9 \cdot 4^9$ **c)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{10} \cdot 20^{10}$ **d)** $\left(-1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(-7\frac{1}{2}\right)^7$

2. Zapisz iloraz potęg w postaci jednej potęgi.

a) $28^{16} : 14^{16}$ **b)** $\frac{(-7)^6}{(-3{,}5)^6}$ **c)** $3^5 : \left(\frac{1}{2}\right)^5$ **d)** $\left(2\frac{1}{4}\right)^8 : \left(3\frac{3}{8}\right)^8$

3. Oblicz.

a) $25^3 : 5^3$ **b)** $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^6$ **c)** $5^{10} \cdot (0{,}2)^{10}$ **d)** $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(\frac{1}{8}\right)^2$

e) $(0{,}6)^3 \cdot (0{,}5)^3$ **f)** $(2{,}43)^3 : (-0{,}81)^3$ **g)** $(0{,}4)^2 \cdot 250^2$ **h)** $\left(-2\frac{1}{5}\right)^4 : \left(\frac{22}{25}\right)^4$

4. Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi, a następnie oblicz jego wartość.

a) $3^5 \cdot 2^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$ **b)** $(-3)^4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^4 : \left(\frac{3}{2}\right)^4$ **c)** $6^6 : 3^6 \cdot (-0{,}25)^6$

5. Uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość.

a) $\frac{5^{10} \cdot 2^{10}}{10^3}$ **b)** $\frac{3^{12} \cdot 5^{12}}{15^{10}}$ **c)** $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot 24^8}{6^4}$ **d)** $\frac{(-4)^6 \cdot (-3)^6}{12^{16} : 12^{10}}$

6. Zapisz wyrażenie w najprostszej postaci. Zastosuj wzór na potęgę iloczynu lub potęgę ilorazu. Przyjmij założenia, że $k \neq 0$ oraz $m \neq 0$.

a) $5^9 \cdot k^9$ **b)** $\frac{m^{16}}{7^{16}}$ **c)** $6^{12} \cdot k^{12} \cdot 2^{12}$

d) $\left(-\frac{m}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{5}{m}\right)^{12}$ **e)** $\left(-\frac{m}{2}\right)^7 : \left(\frac{5}{16}\right)^7$ **f)** $\left(3\frac{2}{3}\right)^8 : \left(\frac{k}{6}\right)^8$

7. Wyznacz wartość x, tak aby otrzymać równość. Przyjmij, że x jest liczbą dodatnią.

a) $12^3 = x^3 \cdot 4^3$ **b)** $70^{10} = 10^{10} \cdot x^{10}$ **c)** $2^{12} = 10^{12} : x^{12}$

d) $7^{15} = \frac{x^{15}}{6^{15}}$ **e)** $20^{11} = x^{11} \cdot 2{,}5^{11}$ **f)** $64^6 = 4^6 : x^6$

8. Dane są liczby: $a = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot 4^3$, $b = \left(\frac{1}{4}\right)^3 : (0{,}75)^3$ oraz $c = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(-2\frac{1}{4}\right)^2$. Uporządkuj liczby a, b, c w kolejności od najmniejszej do największej.

9. Zapisz wyrażenie w postaci $k \cdot a^n$, gdzie k i n są liczbami naturalnymi.

a) $2^{30} \cdot 3^{25}$ **b)** $120^4 : 40^2$ **c)** $14^9 : 7^6$

10. Dane są dwie liczby: $a = 2^{25} \cdot 3^{20}$ oraz $b = 12^{20}$. Czy iloraz $\frac{b}{a}$ można zapisać w postaci potęgi 2^n? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Sprawdź, co umiesz!

1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $\left(-\frac{3}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{10}$ zapisane w postaci jednej potęgi to

A. -8^{10} **B.** -2^{10} **C.** -4^{10} **D.** 4^{10}

2. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Wartość wyrażenia $\left(-2\frac{1}{4}\right)^3 : \left(-\frac{9}{16}\right)^3$ jest równa 64.	**P**	**F**
Równość $13^{12} = \frac{x^{12}}{3^{12}}$ jest prawdziwa dla $x = 36$.	**P**	**F**

3. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{10^4 \cdot (-0{,}25)^4}{5^4}$.

4. Czy iloczyn liczby 3^5 i jej odwrotności jest liczbą ujemną?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	$3^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 1$.
			2.	$3^5 : (-3)^5 = (-1)^5$.
B.	Nie,		**3.**	$3^5 \cdot (-3)^5 = (-9)^5$.

4. Potęgowanie potęgi

- Potęgowanie liczb podniesionych do potęgi



Przykład 1.

Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $\left((-2)^3\right)^2 = \underbrace{(-2)^3 \cdot (-2)^3}_{\text{2 czynniki}} = (-2)^{3+3} = (-2)^{3 \cdot 2} = (-2)^6 = 2^6$

b) $\left(\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^3\right)^5 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2 \cdot 3 \cdot 5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{30}$

Aby podnieść potęgę do potęgi, należy pomnożyć wykładniki, a podstawę pozostawić bez zmian.

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

gdzie $a \neq 0$ oraz m, n są liczbami naturalnymi.

Ćwiczenie 1.

Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $\left(4^2\right)^7$ **b)** $\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^7\right)^{11}$ **c)** $\left(\left((-4)^2\right)^4\right)^6$ **d)** $\left(\left(\left(\frac{5}{9}\right)^3\right)^3\right)^4$

Przykład 2.

Zapisz wyrażenie $\frac{\left(5^5 \cdot 5^4\right)^2}{\left(5^2 \cdot 5^3\right)^2}$ w postaci jednej potęgi.

Najpierw wykonamy działania w nawiasach, stosując wzór na mnożenie potęg o tych samych podstawach: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$\frac{\left(5^5 \cdot 5^4\right)^2}{\left(5^2 \cdot 5^3\right)^2} = \frac{\left(5^{5+4}\right)^2}{\left(5^{2+3}\right)^2} = \frac{\left(5^9\right)^2}{\left(5^5\right)^2}$$

Skorzystamy ze wzoru na potęgowanie potęgi: $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$, a następnie ze wzoru na dzielenie potęg o tych samych podstawach: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

$$\frac{\left(5^9\right)^2}{\left(5^5\right)^2} = \frac{5^{9 \cdot 2}}{5^{5 \cdot 2}} = \frac{5^{18}}{5^{10}} = 5^{18-10} = 5^8$$

Ćwiczenie 2.

Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $\frac{\left(3^4 \cdot 3^5\right)^4}{\left(3^2 \cdot 3^3\right)^4}$ **b)** $\frac{\left(2^9 \cdot 2^3\right)^5}{\left(2^4 \cdot 2^3\right)^5}$ **c)** $\frac{\left(5^2\right)^3 \cdot \left(5^3\right)^4}{\left(5^9 : 5^3\right)^2}$ **d)** $\frac{\left(7^{12} : 7^9\right)^9}{7^{14} : \left(7^2 \cdot 7^3\right)^2}$

Przykład 3.

Dane są liczby $a = (5^2)^3$ oraz $b = (5^4)^2$. Ustal, która z podanych liczb jest większa i ile razy większa.

Obliczymy wartości a i b, korzystając ze wzoru na potęgowanie potęgi.

$$a = (5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$$
$$b = (5^4)^2 = 5^{4 \cdot 2} = 5^8$$

$5^8 > 5^6$, zatem $b > a$.

Aby obliczyć, ile razy liczba b jest większa od liczby a, podzielimy liczbę b przez liczbę a.

$$5^8 : 5^6 = 5^{8-6} = 5^2 = 25$$

Odp. Liczba b jest 25 razy większa od liczby a.

Ćwiczenie 3.

Dane są liczby $x = (11^3)^5$ oraz $y = (11^6)^2$. Ustal, która z podanych liczb jest mniejsza i ile razy mniejsza.

Przykład 4.

Uzasadnij, że wartość wyrażenia $(3^2)^3$ nie jest równa wartości wyrażenia 3^{2^3}.

Obliczymy wartość wyrażenia $(3^2)^3$, korzystając ze wzoru na potęgowanie potęgi.

$$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$$

Obliczymy wartość wyrażenia 3^{2^3}.

$$2^3 = 8$$
$$3^{2^3} = 3^8 = 6561$$

$729 \neq 6561$, zatem uzasadniliśmy, że $(3^2)^3 \neq 3^{2^3}$.

Ćwiczenie 4.

Uzasadnij, że wartość wyrażenia $(10^5)^2$ nie jest równa wartości wyrażenia 10^{5^2}.

Rozwiąż zadania

1. Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)^6$ **b)** $((0{,}36)^2)^4$ **c)** $\left(\left(-2\frac{1}{3}\right)^7\right)^5$ **d)** $\left((3^2)^3\right)^5$ **e)** $\left(\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^2\right)^4$

2. Zapisz liczbę w postaci a^n, a następnie ją oblicz.

a) $((-2)^2)^4$ **b)** $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right)^1$ **c)** $\left(\left(\frac{7}{7}\right)^5\right)^0$ **d)** $((-1)^{20})^3$ **e)** $((0{,}2)^2)^2$

3. Ustal, która z podanych liczb jest mniejsza i ile razy mniejsza.

a) $(10^3)^4$ i $(10^5)^2$ **b)** $(2^5)^2$ i 2^{2^4} **c)** $((-8)^3)^5$ i $(-8)^{13}$

4. Zapisz wyrażenie w postaci potęgi o podstawie a. Przyjmij założenie, że $a \neq 0$.

a) $(a^3)^6 : a^{10}$ **b)** $\frac{(a^3)^2 \cdot (a^2)^3}{a^6 : a^4}$ **c)** $\frac{(a^5 \cdot a^4)^2}{(a^3 : a^2)^4}$ **d)** $\frac{(a^9 \cdot a^3 : a^4)^3}{a \cdot (a^3)^5}$

5. Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi, a następnie oblicz jego wartość.

a) $\frac{(4^2)^2 \cdot (4^3)^2}{(4^8 : 4^4)^2}$ **b)** $\frac{(5^{10} : 5^8)^6}{5^4 \cdot (5^3 \cdot 5)^2}$ **c)** $\frac{((1{,}4)^3 \cdot (1{,}4)^7)^2}{((1{,}4)^{20} : (1{,}4)^{14})^3}$ **d)** $\frac{(4^6 \cdot 3^6)^3}{(2^4 \cdot 6^4)^4}$

6. Dane są liczby: $x = (24^2)^4$, $y = (6^3 \cdot 4^3)^4$ oraz $z = (72^5 : 3^5)^2$. Uporządkuj liczby x, y, z w kolejności od największej do najmniejszej.

7. Kiedy wartość $(a^n)^2$, gdzie n jest liczbą naturalną, jest dodatnia, a kiedy – ujemna? Uzasadnij swoją odpowiedź. ☆

Sprawdź, co umiesz!

1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. E

Wyrażenia $\left(\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^8\right)^2\right)^4$ nie można zapisać w postaci

A. $\left(\frac{1}{3}\right)^{64}$ **B.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{2^6}$ **C.** $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{32}$ **D.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{8^2}$

2. Zapisz wyrażenie $\frac{(10^3 \cdot 10^2)^4}{(10^2 \cdot 10^3)^2}$ w postaci jednej potęgi.

3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe. E

Liczba $a = (5^4)^8$ jest większa od liczby $b = 5^{2^5}$.	**P**	**F**
Liczby $a = 16^{2^3}$ oraz $b = (2^4 \cdot 8^4)^2$ są równe.	**P**	**F**

4. Czy czterokrotność drugiej potęgi liczby 2^3 jest większa od liczby 256? E

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	$4 \cdot 2^3 = 32 < 256.$
			2.	$\left((2^3)^2\right)^4 = 2^{24} > 256.$
B.	Nie,		**3.**	$4 \cdot (2^3)^2 = 256.$

5. Działania na potęgach

- Zastosowanie wzorów dotyczących działań na potęgach w obliczeniach

Znasz już wzory dotyczące działań na potęgach. Dzięki nim można uprościć złożone obliczenia.
Dla $a \neq 0$ i $b \neq 0$ zachodzą poniższe równości.

Jednakowe podstawy potęg

Iloczyn potęg

Jeśli podstawy w iloczynie są jednakowe, to dodajemy wykładniki.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2^{10} \cdot 2^4 = 2^{10+4} = 2^{14}$$

Iloraz potęg

Jeśli podstawy w ilorazie są jednakowe, to odejmujemy wykładniki.

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad m \geqslant n$$

$$2^{10} : 2^4 = 2^{10-4} = 2^6$$

Jednakowe wykładniki potęg

Jeśli wykładniki w iloczynie są jednakowe, to mnożymy podstawy.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$6^5 \cdot 2^5 = (6 \cdot 2)^5 = 12^5$$

Jeśli wykładniki w ilorazie są jednakowe, to dzielimy podstawy.

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

$$6^5 : 2^5 = (6 : 2)^5 = 3^5$$

Potęgowanie potęgi

Jeśli potęgujemy potęgę, to mnożymy wykładniki. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ $\left(7^2\right)^3 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$

Przykład 1.

Zapisz wyrażenie $\frac{32^3 \cdot 8^4}{16^5}$ w postaci jednej potęgi, a następnie oblicz jego wartość.

Zastąpimy liczby 32, 8 i 16 potęgami o podstawie 2. $32 = 2^5 \quad 8 = 2^3 \quad 16 = 2^4$

$$\frac{32^3 \cdot 8^4}{16^5} = \frac{\left(2^5\right)^3 \cdot \left(2^3\right)^4}{\left(2^4\right)^5} = \frac{2^{15} \cdot 2^{12}}{2^{20}} = \frac{2^{15+12}}{2^{20}} = \frac{2^{27}}{2^{20}} = 2^{27-20} = 2^7 = 128$$

Ćwiczenie 1.

Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi, a następnie oblicz jego wartość.

a) $\frac{36^4}{6^5}$ b) $\frac{25^3 : 5^4}{125^2 : 25^2}$ c) $\frac{7^{12} : 49^3}{343}$ d) $\frac{81^3 \cdot 9^5}{27^6}$

Przykład 2.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{3^4+3^4+3^4}{3^2\cdot 3^3}$.

Wyrażenie w liczniku zapiszemy w postaci jednej potęgi.

$$\underbrace{3^4+3^4+3^4}_{3 \text{ składniki}} = 3\cdot 3^4 = 3^{1+4} = 3^5$$

Wyrażenie w mianowniku również zapiszemy w postaci jednej potęgi.

$$3^2\cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$$

Obliczymy wartość wyrażenia.

$$\frac{3^4+3^4+3^4}{3^2\cdot 3^3} = \frac{3^5}{3^5} = 3^{5-5} = 3^0 = 1$$

Ćwiczenie 2.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{4\cdot 4^6}{4^3+4^3+4^3+4^3}$.

Przykład 3.

Uzasadnij, że liczba $2^{2023}-2^{2021}$ jest podzielna przez 3.

Zapiszemy liczbę 2^{2023} w postaci iloczynu potęg liczby 2, korzystając z faktu, że $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$.

$$2^{2023}-2^{2021} = 2^{2021}\cdot 2^2 - 2^{2021}$$

Zauważmy, że liczba $2^{2021} = 2^{2021}\cdot 1$.

$$2^{2021}\cdot 2^2 - 2^{2021} = 2^{2021}\cdot 2^2 - 2^{2021}\cdot 1$$

Skorzystamy z prawa rozdzielności mnożenia względem odejmowania, czyli $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$.

$$2^{2021}\cdot 2^2 - 2^{2021}\cdot 1 = 2^{2021}\cdot\left(2^2-1\right) =$$
$$= 2^{2021}\cdot(4-1) = 2^{2021}\cdot 3$$

Otrzymaliśmy $2^{2023}-2^{2021}=2^{2021}\cdot 3$. W ten sposób uzasadniliśmy, że liczba $2^{2023}-2^{2021}$ jest równa iloczynowi liczb 2^{2021} i 3, więc jest podzielna przez 3.

Ćwiczenie 3.

Uzasadnij, że liczba $2^{2023}+2^{2025}$ jest podzielna przez 5. Skorzystaj z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Rozwiąż zadania

1. Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $2^3\cdot 8^5$ **b)** $81^2\cdot 3^7$ **c)** $32^6 : 16^2$ **d)** $\left(27^3 : 9^2\right)\cdot 243^2$

2. Oblicz.

a) $\left(\frac{8}{125}\right)^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^3$ **b)** $\left(\left(\frac{4}{9}\right)^2\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^3$ **c)** $3^2\cdot(0{,}3)^3\cdot 10^3$ **d)** $\frac{2^{12}\cdot 27^4}{6^{12}}$

3. Uporządkuj liczby a, b, c w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $a=\left(27^2\right)^3, b=-81^4, c=(-9)^7$ **b)** $a=(-2)^4, b=\left(4^2\right)^5 : \left(8^3\right)^2, c=-2^4\cdot 2^2$

4. Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $6^4+6^4+6^4+6^4+6^4+6^4$ **b)** $2^6+2^6+2^6+2^6$ **c)** $\left(5^2+5^2+5^2+5^2+5^2\right)\cdot\left(5^5:5^3\right)$

5. Uzasadnij, że wartość wyrażenia $11^{11}-11^{10}$ jest liczbą parzystą.

6. Wykorzystaj poznane prawa działań na potęgach i uzasadnij, że wartość wyrażenia

a) $\frac{2^{11}+4^5}{2^{13}:8}$ jest liczbą naturalną, **b)** $\frac{9^3:3^2-3^3}{243:3}$ nie jest liczbą naturalną.

7. W międzyszkolnym turnieju szachowym wzięło udział 16 uczniów i 16 uczennic. W pierwszym etapie wszyscy uczestnicy brali udział w grze. Każdy z nich dysponował szesnastoma bierkami szachowymi. Zapisz łączną liczbę bierek, która była potrzebna do przeprowadzenia pierwszego etapu turnieju. Wynik przedstaw w postaci potęgi liczby 2.



8. Zapisz wartość wyrażenia w postaci $k\cdot a^n$, gdzie n jest liczbą naturalną.

a) $2^7-2^5+2^4$ **b)** $5^6-5^5-5^4$ **c)** $\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

Wskazówka: $3^6+3^5+3^4=3^2\cdot3^4+3^1\cdot3^4+1\cdot3^4=9\cdot3^4+3\cdot3^4+1\cdot3^4=(9+3+1)\cdot3^4=13\cdot3^4$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\frac{16^6:4^4}{256^2:64}$ jest równa

A. 4^{13} **B.** 4^8 **C.** 4^5 **D.** 4^3

2. Oblicz wartość wyrażenia $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^3\right)^2:\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\frac{4}{25}$.

3. Wskaż, które z wyrażeń jest równe wartości wyrażenia $\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5$.

A. 2^5 **B.** $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ **C.** $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$ **D.** 2^{20}

4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Wartość wyrażenia $\frac{3^5\cdot9^2}{27^3}$ jest liczbą naturalną.	**P**	**F**
Dla $n=10$ wartość wyrażenia 2^n+2^{n+1} jest podzielna przez 2.	**P**	**F**

6. Notacja wykładnicza

- Rozpoznawanie liczb zapisanych w postaci notacji wykładniczej
- Zapisywanie liczb za pomocą notacji wykładniczej

Zapisywanie dużych liczb w notacji wykładniczej

Przybliżona odległość Wenus od Słońca jest równa $110\,000\,000\ \text{km}$. Można tę liczbę zapisać następująco: $1{,}1 \cdot 10^8\ \text{km}$. Taki skrócony sposób zapisu liczb nazywany jest notacją wykładniczą.

Liczbę dodatnią a można przedstawić w postaci **notacji wykładniczej**, czyli

$$a = k \cdot 10^n$$

gdzie k jest liczbą mniejszą od 10, ale nie mniejszą od 1, natomiast n jest liczbą całkowitą.

Przykład 1.

Sprawdź, czy liczba została zapisana w notacji wykładniczej. Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $5 \cdot 10^{12}$ – liczba **jest** zapisana w notacji wykładniczej, ponieważ 5 jest liczbą mniejszą od 10 i jednocześnie nie mniejszą od 1.

b) $835 \cdot 10^{25}$ – liczba **nie jest** zapisana w notacji wykładniczej, ponieważ 835 jest liczbą większą od 10.

c) $0{,}4 \cdot 10^{13}$ – liczba **nie jest** zapisana w notacji wykładniczej, ponieważ $0{,}4$ jest liczbą mniejszą od 1.

Ćwiczenie 1.

Sprawdź, czy liczba została zapisana w notacji wykładniczej. Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $21 \cdot 10^{11}$ **b)** $3 \cdot 10^5$ **c)** $4{,}6 \cdot 10^8$ **d)** $0{,}2 \cdot 10^{17}$

Przykład 2.

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) $\underbrace{400\,000\,000}_{\text{8 zer}} = 4 \cdot 100\,000\,000 = 4 \cdot 10^{8}$ (wykładnik równy 8)

b) $\underbrace{27\,900\,000}_{\text{7 cyfr}} = 2{,}79 \cdot 10\,000\,000 = 2{,}79 \cdot 10^{7}$ (wykładnik równy 7)

Ćwiczenie 2.

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) $223\,000\,000$ **b)** $123\,000\,000\,000$ **c)** $7\,680\,000\,000$ **d)** $100\,000$

Przykład 3.

Zapisz liczbę bez użycia notacji wykładniczej.

a) $2{,}24 \cdot 10^{13} = 2{,}24 \cdot \underbrace{10\,000\,000\,000\,000}_{13 \text{ zer}} = 22\,400\,000\,000\,000$

b) $3{,}101 \cdot 10^{6} = 3{,}101 \cdot 1\,\underbrace{000\,000}_{6 \text{ zer}} = 3\,101\,000$

Ćwiczenie 3.

Zapisz liczbę bez użycia notacji wykładniczej.

a) $3{,}56 \cdot 10^{3}$ **b)** $2{,}135 \cdot 10^{8}$ **c)** $1{,}0002 \cdot 10^{4}$ **d)** $1 \cdot 10^{6}$

Zapisywanie małych liczb w notacji wykładniczej

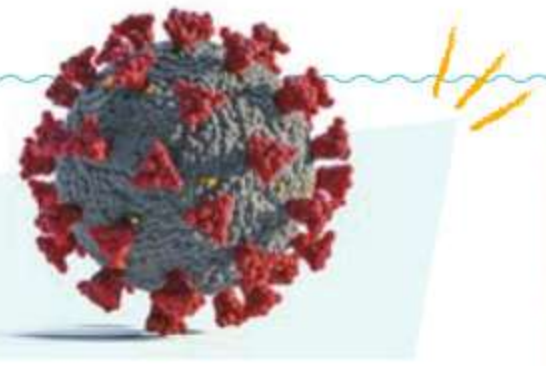
Okazuje się, że bardzo małe liczby także możemy zapisywać w notacji wykładniczej. W tym celu będziemy posługiwać się potęgą o wykładniku całkowitym ujemnym.

Dla dowolnej liczby $a \neq 0$ oraz dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$

A to ciekawe

Znany nam wszystkim koronawirus (SARS-CoV-2) wywołujący chorobę COVID-19 ma kształt kuli o średnicy równej około $0{,}00000013$ m.
Możemy zapisać: $0{,}00000013 \text{ m} = 1{,}3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.



Przykład 4.

Zapisz potęgę 10^{-4} w postaci ułamka zwykłego oraz ułamka dziesiętnego.

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{\underbrace{10\,000}_{4 \text{ zera}}} = \underbrace{0{,}0001}_{4 \text{ miejsca po przecinku}}$$

Ćwiczenie 4.

Zapisz potęgę w postaci ułamka zwykłego oraz ułamka dziesiętnego.

a) 10^{-3} **b)** 10^{-7} **c)** 10^{-8} **d)** 10^{-10}

Przykład 5.

Zapisz ułamek dziesiętny $0{,}000000001$ w postaci ułamka zwykłego oraz potęgi liczby 10.

$$\underbrace{0{,}000000001}_{\substack{9 \text{ miejsc} \\ \text{po przecinku}}} = \frac{1}{1\,\underbrace{000\,000\,000}_{9 \text{ zer}}} = \frac{1}{10^9} = 10^{-9}$$

Ćwiczenie 5.

Zapisz ułamek dziesiętny w postaci ułamka zwykłego oraz potęgi liczby 10.

a) $0{,}00001$ **b)** $0{,}0000001$ **c)** $0{,}0000000001$ **d)** $0{,}1$

Przykład 6.

Zapisz ułamek dziesiętny w notacji wykładniczej.

a) $\underbrace{0{,}007}_{\text{Przesuwamy przecinek o 3 miejsca w prawo.}} = 7 \cdot \underbrace{0{,}001}_{\text{3 miejsca po przecinku}} = 7 \cdot \frac{1}{10^3} = 7 \cdot 10^{-3}$

b) $\underbrace{0{,}000000023}_{\text{Przesuwamy przecinek o 8 miejsc w prawo.}} = 2{,}3 \cdot \underbrace{0{,}00000001}_{\text{8 miejsc po przecinku}} = 2{,}3 \cdot \frac{1}{10^8} = 2{,}3 \cdot 10^{-8}$

Ćwiczenie 6.

Zapisz ułamek dziesiętny w notacji wykładniczej.

a) $0{,}0008$ **b)** $0{,}00000012$ **c)** $0{,}000000034$ **d)** $0{,}000721$

Przykład 7.

Zapisz liczbę $4{,}23 \cdot 10^{-5}$ bez użycia notacji wykładniczej.

$$4{,}23 \cdot 10^{-5} = 4{,}23 \cdot \frac{1}{10^5} = 4{,}23 \cdot \underbrace{0{,}00001}_{\text{5 miejsc po przecinku}} = 0{,}0000423$$

Ćwiczenie 7.

Zapisz liczbę bez użycia notacji wykładniczej.

a) $1 \cdot 10^{-2}$ **b)** $4 \cdot 10^{-3}$ **c)** $1{,}43 \cdot 10^{-6}$ **d)** $2{,}002 \cdot 10^{-5}$

Rozwiąż zadania

1. Sprawdź, czy liczba została zapisana w notacji wykładniczej. Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $0{,}11 \cdot 10^7$ **b)** $8 \cdot 10^4$ **c)** $3{,}5 \cdot 10^{10}$ **d)** $15 \cdot 10^3$

2. Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) $60\,000\,000$ **b)** $524\,000\,000$ **c)** $42\,100\,000\,000$

d) $111\,000\,000\,000$ **e)** $65\,000\,000\,000$ **f)** $2\,524\,000\,000\,000\,000$

3. Zapisz w notacji wykładniczej przybliżoną:

a) prędkość światła w próżni: $300\,000\,000$ m/s,

b) powierzchnię Polski: $312\,700$ km^2,

c) prędkość dźwięku w powietrzu: 340 m/s.

4. Podane w zdaniach wielkości przedstaw w notacji wykładniczej.

a) Człowiek podczas całego życia potrafi wytworzyć około 24 000 l śliny.

b) Jelito cienkie ma około 6000 mm długości.

c) Osoba o blond włosach ma w przybliżeniu 146 000 włosów. Szatyni posiadają około 100 000 włosów, natomiast najmniej mieszków włosowych mają osoby o rudym kolorze włosów – około 86 000.



5. Zapisz liczbę bez użycia notacji wykładniczej.

a) $2 \cdot 10^6$ **b)** $3{,}112 \cdot 10^7$ **c)** $5{,}8 \cdot 10^8$

d) $8{,}41 \cdot 10^9$ **e)** $5{,}0001 \cdot 10^{10}$ **f)** $2{,}0302 \cdot 10^4$

6. Zapisz ułamek dziesiętny w notacji wykładniczej.

a) 0,00005 **b)** 0,0017 **c)** 0,000101

d) 0,0000046 **e)** 0,0000000301 **f)** 0,0000001372

7. Zapisz w notacji wykładniczej przybliżoną:

a) masę kolibra (najmniejszego ptaka na świecie): 0,002 kg,

b) prędkość wzrostu włosa ludzkiego: 0,000004 mm/s,

c) masę wirusa grypy: 0,00000000000000007 g,

d) masę atomu wodoru: 0,000000000000000000000167 kg.



8. Dopasuj do wyrażenia jego wynik.

$2{,}1 \cdot 10^6$	$21 \cdot 10^{-3}$	$2{,}1 \cdot 10^{-5}$	$0{,}21 \cdot 10^5$	$0{,}0021 \cdot 10^5$
210	2 100 000	21 000	0,000021	0,021

E **Informacje do zadań 9. i 10.**

Działka budowlana ma kształt kwadratu o boku długości $1{,}8 \cdot 10^2$ m.

9. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość siatki potrzebnej do ogrodzenia całej działki jest równa

A. $7{,}2 \cdot 10^2$ m **B.** $7{,}2 \cdot 10^3$ m **C.** $7{,}2 \cdot 10^4$ m **D.** $7{,}2 \cdot 10^5$ m

10. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

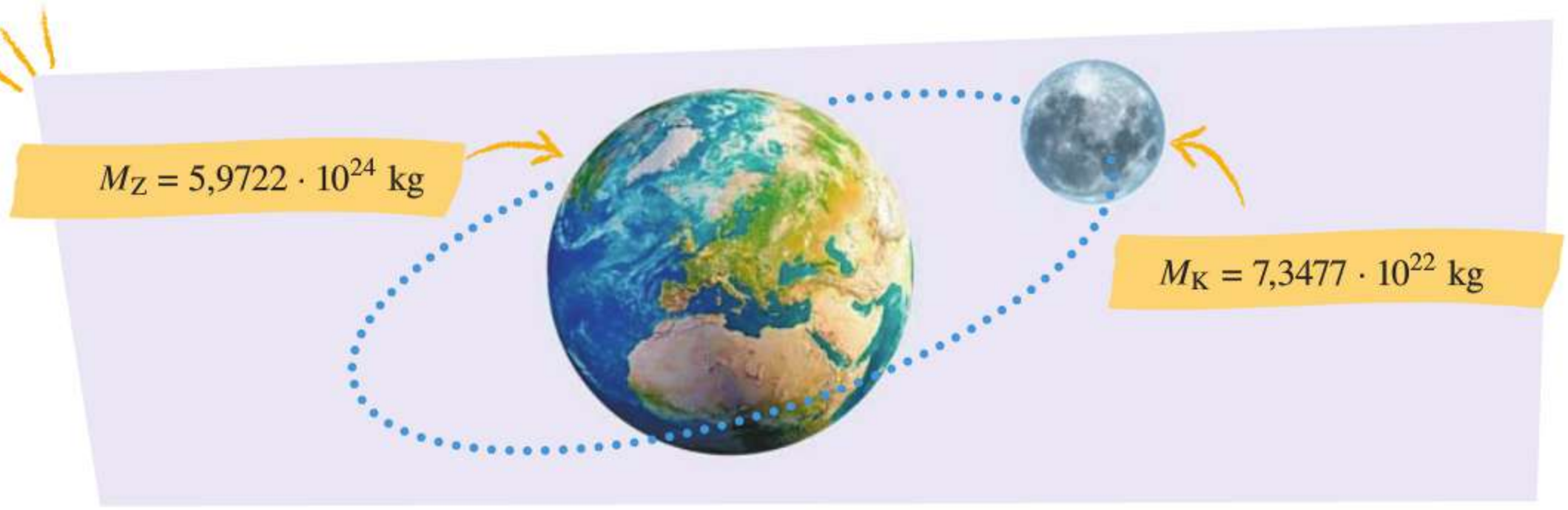
Powierzchnia tej działki – zapisana w notacji wykładniczej – jest równa

A. $1{,}8 \cdot 10^4$ m^2 **B.** $3{,}24 \cdot 10^2$ m^2 **C.** $3{,}24 \cdot 10^4$ m^2 **D.** $7{,}2 \cdot 10^2$ m^2

11. Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) $35{,}5 \cdot 10^5$ **b)** $100{,}01 \cdot 10^3$ **c)** $0{,}012 \cdot 10^9$

12. Na ilustracji przedstawione są Ziemia oraz Księżyc. Oblicz, ile razy masa Ziemi jest większa od masy Księżyca. Wynik zaokrąglij do $0{,}01$.



13. Przepisz przykład do zeszytu i uzupełnij lukę liczbą zapisaną w notacji wykładniczej, tak aby otrzymać równość.

a) 55 cm = ▒▒▒ mm **b)** 12 m = ▒▒▒ mm **c)** 25 km = ▒▒▒ cm

d) 52 g = ▒▒▒ kg **e)** 22 cm = ▒▒▒ km **f)** 0,4 g = ▒▒▒ t

Sprawdź, co umiesz!

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

E

Liczba $41\,100\,000$ zapisana w notacji wykładniczej ma postać $4{,}11 \cdot 10^6$.	**P**	**F**
Zapis liczby $5{,}2 \cdot 10^{-3}$ bez użycia notacji wykładniczej to $0{,}052$.	**P**	**F**

2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

E

Jeżeli liczba $a = 3{,}2 \cdot 10^5$, a liczba $b = 1{,}6 \cdot 10^2$, to iloraz $\frac{a}{b}$ jest równy

A. $2 \cdot 10^7$ **B.** $2 \cdot 10^3$ **C.** $5 \cdot 10^2$ **D.** $5 \cdot 10^8$

3. Oblicz pole kwadratu o boku długości $4 \cdot 10^2$ cm. Wynik przedstaw w notacji wykładniczej.

4. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

E

Liczba $0{,}521 \cdot 10^5$ jest równa

A. $5{,}21 \cdot 10^3$ **B.** $52\,100$ **C.** $521\,000$ **D.** $0{,}5210000 \cdot 10^7$

PODSUMOWANIE DZIAŁU III
Potęgi

Powtórz wiadomości

Potęga o wykładniku naturalnym

a^n ← wykładnik potęgi

a^n ↑ podstawa potęgi

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

Iloczyn i iloraz potęg o jednakowych podstawach

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

gdzie $a \neq 0$ oraz m, n są liczbami naturalnymi

$$2^3 \cdot 2^2 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ czynniki}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{2 \text{ czynniki}} = 2^{3+2} = 2^5$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

gdzie $a \neq 0$, m, n są liczbami naturalnymi oraz $m \geqslant n$

$$\frac{5^6}{5^4} = \frac{5 \cdot 5 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}} = \underbrace{5 \cdot 5}_{2 \text{ czynniki}} = 5^2$$

Potęgowanie iloczynu i ilorazu

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz n jest liczbą naturalną

$$2^2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = \underbrace{(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)}_{2 \text{ czynniki}} = (2 \cdot 3)^2$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz n jest liczbą naturalną

$$\frac{5^4}{2^4} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \underbrace{\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}}_{4 \text{ czynniki}} = \left(\frac{5}{2}\right)^4$$

Potęgowanie potęgi

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

gdzie $a \neq 0$ oraz m, n są liczbami naturalnymi

$$(4^2)^3 = 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{6 \text{ czynników}} = 4^6$$

Notacja wykładnicza

$$a = k \cdot 10^n$$

gdzie k jest liczbą mniejszą niż 10 i jednocześnie nie mniejszą od 1 oraz n jest liczbą całkowitą

$2{,}3 \cdot 10^6 = 2{,}3 \cdot 1\,000\,000 = 2\,300\,000$

$4{,}12 \cdot 10^{-4} = 4{,}12 \cdot 0{,}0001 = 0{,}000412$

$24\,500 = 2{,}45 \cdot 10\,000 = 2{,}45 \cdot 10^4$

$0{,}0062 = 6{,}2 \cdot 0{,}001 = 6{,}2 \cdot 10^{-3}$

Sprawdź umiejętności

1. Oblicz.

a) 15^0 **b)** $(3{,}6)^1$ **c)** 17^3 **d)** $\left(2\frac{2}{3}\right)^2$ **e)** $(-2{,}5)^2$

2. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**. E

Wartość wyrażenia $6^3 - 6^2$ jest równa | **A** | **B** |.

A. 6 **B.** 180

Trzecia część sześcianu liczby 3 jest równa | **C** | **D** |.

C. 3 **D.** 9

3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe. E

Liczba $a = -\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ jest mniejsza od liczby $b = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$.	**P**	**F**
Szósta potęga liczby $\left(-2\frac{1}{6}\right)$ jest liczbą dodatnią.	**P**	**F**

4. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. E

Najmniejszą liczbą całkowitą większą od liczby $\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$ jest

A. -2 **B.** -1 **C.** 1 **D.** 2 **E.** 3

5. Oblicz, ile razy liczba $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ jest mniejsza od liczby 6^3.

6. Przedstaw wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $\frac{(1{,}5)^7 \cdot (1{,}5)^2}{(1{,}5)^3 : (1{,}5)^0}$ **b)** $\left(8^3 \cdot 8^4 : 8^5\right)^3 \cdot \left(8^0 \cdot 8\right)$ **c)** $\frac{\left(5^4\right)^2 \cdot 5^5}{5^0 \cdot \left(5^6\right)^2}$

7. Wyznacz wartość x, tak aby otrzymać równość.

a) $3^{12} = 3^x \cdot 3^5$ **b)** $6^4 = \frac{6^x}{6^{14}}$ **c)** $\left(5^3\right)^5 = 5^4 \cdot 5 \cdot \left(5^2\right)^x$

8. Zapisz w postaci jednej potęgi:

a) pięciokrotność liczby 5^{12},

b) trzykrotność liczby 3^{24},

c) szesnastokrotność liczby 2,

d) siedmiokrotność liczby 343.

9. Oblicz.

a) $\left(\frac{9}{11}\right)^3 \cdot 11^3$ **b)** $\frac{\left(6^3 : 2^3\right)^2}{3^4}$ **c)** $\left(2\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2$

10. Liczby: 4^3, $(4^0)^3$, 2^8, 16^3 zapisz w postaci potęg o podstawie 2, a następnie uporządkuj je w kolejności od największej do najmniejszej.

11. Zapisz wyrażenie w postaci potęgi jednej liczby.

a) $\frac{2^3}{2^2} \cdot 8$ **b)** $\frac{3^4 \cdot 27}{81}$ **c)** $5^4 \cdot 125 : (5^2)^3$ **d)** $\frac{1}{8} \cdot 2^3 \cdot 2^3$

12. Uzasadnij, że wartość wyrażenia $9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4$ jest równa 3^{10}.

E **13.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Liczba odwrotna do liczby: -7^2 to 49.	**P**	**F**
Liczby $\left(\frac{1}{125}\right)^7$ oraz $\left(-\frac{1}{5}\right)^{21}$ są równe.	**P**	**F**

14. Oblicz.

a) $(-24)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 - 16^2 : 2^3$ **b)** $\left(\frac{1}{44}\right)^4 : \left(\frac{1}{22}\right)^4 + 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$

c) $\left(\frac{5}{3}\right)^{21} \cdot (0{,}6)^{21} + 1000 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^2$ **d)** $(0{,}25)^4 : \left(\frac{1}{2}\right)^6 - (1{,}8)^2 : 18^2$

15. Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) $1\,000\,000\,000$ **b)** $3\,450\,000\,000\,000$ **c)** $10\,100\,000\,000\,000\,000$

d) $0{,}0000003$ **e)** $0{,}00000274$ **f)** $0{,}0000000093$

16. Zapisz liczbę bez użycia notacji wykładniczej.

a) $1{,}2 \cdot 10^7$ **b)** $3{,}54 \cdot 10^5$ **c)** 10^{-12} **d)** $5{,}23 \cdot 10^{-8}$

17. Największym jeziorem na świecie jest Morze Kaspijskie. Jezioro Górne jest największym jeziorem w kompleksie pięciu Wielkich Jezior Ameryki Północnej. Zapisz podane na ilustracji wielkości w notacji wykładniczej. Oblicz, ile razy Morze Kaspijskie jest większe od Jeziora Górnego. Wynik zaokrąglij do $0{,}01$.



Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Jaki procent liczb naturalnych od 1 do 1000 stanowią kwadraty liczb naturalnych?

2. Uzasadnij, że kwadrat wyrażenia $2^{50}+1$ jest liczbą nieparzystą.

3. Googol jest liczbą równą 10^{100}. E

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloczyn miliarda oraz 10 milionów jest mniejszy od googola

A. 10^{14} razy. **B.** 10^{16} razy. **C.** 10^{84} razy. **D.** 10^{86} razy.

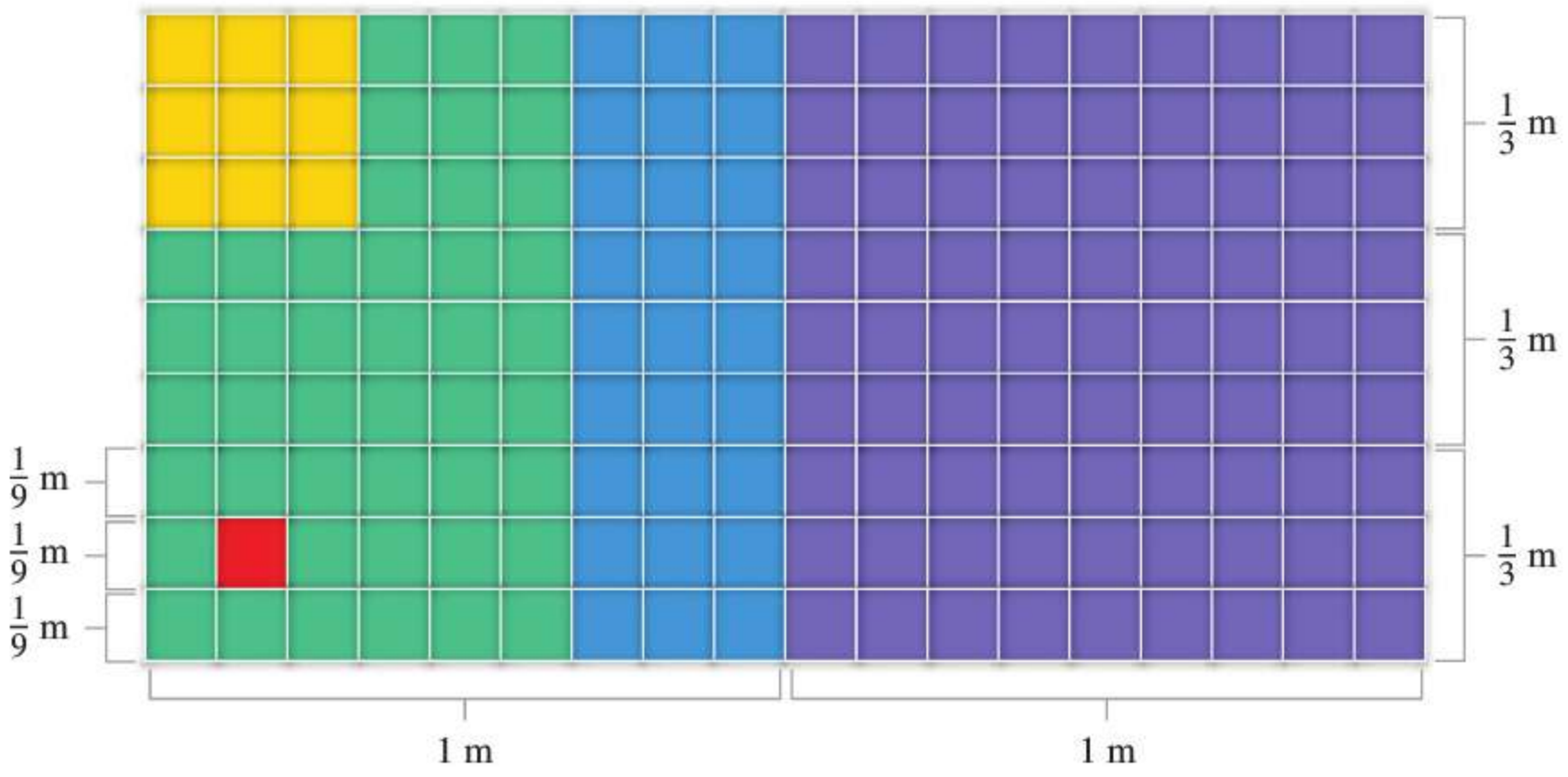
4. Dane są liczby: $a = 3^5 + 3^5 + 3^5$, $b = 3^{15}$ oraz $c = \left(3^3\right)^2$. E

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Liczby a i b są równe.	**P**	**F**
Liczba a jest większa od liczby c.	**P**	**F**

5. Wyznacz wartość x, tak aby otrzymać równość: $4^x + 4^x + 4^x + 4^x = 4^{16}$.

6. Uczniowie na zajęciach artystycznych ułożyli kolorową mozaikę w kształcie prostokąta o wymiarach $2\ \text{m} \times 1\ \text{m}$. Na rysunku przedstawiono projekt tej mozaiki.



a) Oblicz, jaką powierzchnię będą miały płytki niebieskie, jaką – żółte, a jaką – płytki czerwone. Wyniki zapisz w metrach kwadratowych w postaci potęgi liczby $\frac{1}{3}$.

b) Oblicz, jaką powierzchnię będą miały płytki fioletowe. Wynik przedstaw w metrach kwadratowych w postaci potęgi liczby 2023.

E

7. Dane są liczby $a = 6^4$ oraz $b = 12^2$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Sumę liczb a i b można zapisać w postaci iloczynu $10 \cdot 2^4 \cdot 3^2$.	**P**	**F**
Różnicę $a - b$ można zapisać w postaci iloczynu $2^7 \cdot 3^2$.	**P**	**F**
Iloczyn liczb a i b można zapisać w postaci potęgi 6^8.	**P**	**F**
Iloraz $\frac{a}{b}$ jest równy 9.	**P**	**F**

8. Podaj cyfrę jedności w liczbie będącej wartością wyrażenia $100^{50} : 50^{100}$.

9. Dane są liczby: $x = 121^{24}$, $y = 216^{16}$ oraz $z = 64^8$. Uporządkuj je w kolejności od największej do najmniejszej.

10. Uzasadnij, że liczba $8^{15} + 3 \cdot 8^{16} + 5 \cdot 8^{17}$ jest wielokrotnością liczby 5.

11. Czy liczba 3^{339} jest mniejsza od liczby 4^{113}? Uzasadnij swoją odpowiedź.

12. Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) 32^{16} i 9^{40} **b)** 27^{48} i 64^{24} **c)** 25^{20} i 1024^{10} **d)** 8^{40} i 81^{30}

13. Oblicz wartość wyrażenia. Wynik zapisz w notacji wykładniczej.

a) $2 \cdot 10^{10} \cdot 9 \cdot 10^7$ **b)** $30^5 \cdot 10^8$ **c)** $7 \cdot 10^{-9} \cdot 40 \cdot 10^{50}$

d) $6 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-4}$ **e)** $2 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{14}$ **f)** $5 \cdot 10^{11} - 5 \cdot 10^9$

14. Wyznacz wartość x, tak aby otrzymać równość.

a) $3{,}2 \cdot 10^x = 32\,000$ **b)** $0{,}02 \cdot 10^x = 2 \cdot 10^{-6}$ **c)** $0{,}006 \cdot 10^x = 6 \cdot 10^{-30}$

15. Przedstaw podane wielkości we wskazanej jednostce. Wynik zapisz w notacji wykładniczej.

a) kg: 115 t, 2 g, 3 dag **b)** g: 25 kg, 3 t, 1200 dag

c) cm: 0,3 mm, 990 m, 23 km **d)** m: 240 mm, 36 cm, 6 km

DZIAŁ IV

PIERWIASTKI

Pierwiastek kwadratowy

Działania na potęgach i pierwiastkach



To ci się przyda!

Pierwiastek sześcienny

1. Pierwiastek kwadratowy

- Pojęcie pierwiastka kwadratowego
- Obliczanie pierwiastków kwadratowych

Na kalkulatorze oprócz przycisków odpowiadających dodawaniu, odejmowaniu i mnożeniu mamy przycisk z symbolem pierwiastka kwadratowego $\sqrt{\ }$. Czy wiesz, co spowoduje jego użycie? Aby się o tym przekonać, wybierz następujące sekwencje klawiszy:

I. 4 $\sqrt{\ }$ II. 9 $\sqrt{\ }$ III. 1 6 $\sqrt{\ }$

Czy wiesz już, na czym polega pierwiastkowanie liczb?

Pierwiastek kwadratowy (stopnia drugiego) z liczby nieujemnej a jest równy nieujemnej liczbie b, której kwadrat jest równy a.

symbol pierwiastka kwadratowego

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a.$$

liczba podpierwiastkowa

$\sqrt{25}$ czytamy: *pierwiastek kwadratowy z dwudziestu pięciu* lub *pierwiastek drugiego stopnia z dwudziestu pięciu*.

Przykład 1.

Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt{16}$

Jeśli chcemy obliczyć pierwiastek kwadratowy z liczby 16, szukamy odpowiedzi na pytanie: *Jaka liczba nieujemna podniesiona do potęgi drugiej jest równa 16?*

$\sqrt{16} = 4$, bo $4^2 = 16$.

b) $\sqrt{36} = 6$, bo $6^2 = 36$. **c)** $\sqrt{1} = 1$, bo $1^2 = 1$. **d)** $\sqrt{144} = 12$, bo $12^2 = 144$.

Przy obliczaniu pierwiastków kwadratowych możemy wykorzystać podane w tabeli kwadraty liczb.

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

b	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b^2	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

Ćwiczenie 1.

Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt{9}$ **b)** $\sqrt{49}$ **c)** $\sqrt{0}$ **d)** $\sqrt{121}$ **e)** $\sqrt{169}$

Wiesz już, w jaki sposób obliczać pierwiastki kwadratowe z liczb. Ile zatem są równe liczby $\sqrt{2}$ lub $\sqrt{5}$? Gdy próbujemy obliczyć ich wartości za pomocą kalkulatora, otrzymujemy odpowiednio:





Gdybyśmy wyznaczyli te wartości, używając kalkulatora wyświetlającego większą liczbę cyfr po przecinku, to moglibyśmy zobaczyć, jakie są kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego tych liczb. Wartości te są nieskończone nieokresowe, czyli $\sqrt{2}$ i $\sqrt{5}$ nie są liczbami wymiernymi. Liczby o rozwinięciu dziesiętnym nieskończonym nieokresowym nazywamy liczbami niewymiernymi. Przy omawianiu tematu 5. tego rozdziału nauczysz się szacować takie liczby.

Przykład 2.

Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt{\frac{4}{81}}$

Znajdziemy taką liczbę nieujemną, która podniesiona do kwadratu jest równa $\frac{4}{81}$.

$\sqrt{\frac{4}{81}} = \frac{2}{9}$, bo $\left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{4}{81}$.

b) $\sqrt{5\frac{19}{25}}$

Zamienimy liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy i obliczymy pierwiastek.

$\sqrt{5\frac{19}{25}} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$,

bo $\left(2\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{144}{25} = 5\frac{19}{25}$.

Aby obliczyć pierwiastek z liczby mieszanej, najpierw zamieniamy tę liczbę na ułamek niewłaściwy.

Ćwiczenie 2.

Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt{\frac{1}{25}}$ **b)** $\sqrt{\frac{9}{100}}$ **c)** $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ **d)** $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ **e)** $\sqrt{3\frac{13}{36}}$

Przykład 3.

Oblicz $\sqrt{2{,}25}$ i uzasadnij swoją odpowiedź.

Zamienimy ułamek dziesiętny na ułamek zwykły i obliczymy pierwiastek.

$\sqrt{2{,}25} = \sqrt{2\frac{25}{100}} = \sqrt{\frac{225}{100}} =$

$= \frac{15}{10} = 1\frac{5}{10} = 1\frac{1}{2}$, bo $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$

$= \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} = 2{,}25.$

Ćwiczenie 3.

Oblicz $\sqrt{3{,}61}$ i uzasadnij swoją odpowiedź.

Znak mnożenia między liczbą a pierwiastkiem możemy pominąć. $3 \cdot \sqrt{100} = 3\sqrt{100}$

Przykład 4.

Oblicz.

a) $3\sqrt{49} - 2\sqrt{16}$

Najpierw obliczymy pierwiastki, a następnie obliczymy wartość wyrażenia.

$3\sqrt{49} - 2\sqrt{16} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 4 =$

$= 21 - 8 = 13$

b) $\dfrac{\sqrt{256} - 3\sqrt{\frac{1}{9}}}{\sqrt{289}} = \dfrac{16 - 3 \cdot \frac{1}{3}}{17} = \dfrac{16 - 1}{17} = \dfrac{15}{17}$

Ćwiczenie 4.

Oblicz.

a) $5\sqrt{169} - 4\sqrt{\frac{1}{4}}$ **b)** $\sqrt{121} - 5\sqrt{1\frac{7}{9}}$ **c)** $\dfrac{4\sqrt{400} + 2\sqrt{100}}{\sqrt{36}}$

Rozwiąż zadania

1. Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt{81}$ **b)** $\sqrt{196}$ **c)** $\sqrt{3600}$ **d)** $\sqrt{14\,400}$ **e)** $\sqrt{22\,500}$

2. Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ **b)** $\sqrt{\frac{36}{121}}$ **c)** $\sqrt{\frac{64}{169}}$ **d)** $\sqrt{\frac{81}{100}}$ **e)** $\sqrt{\frac{144}{196}}$

f) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$ **g)** $\sqrt{2\frac{23}{49}}$ **h)** $\sqrt{2\frac{14}{25}}$ **i)** $\sqrt{5\frac{1}{16}}$ **j)** $\sqrt{1\frac{31}{225}}$

3. Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt{0{,}09}$ **b)** $\sqrt{0{,}81}$ **c)** $\sqrt{1{,}69}$ **d)** $\sqrt{0{,}0121}$ **e)** $\sqrt{0{,}000004}$

4. Uporządkuj liczby: $\sqrt{1\frac{7}{9}}$, $\sqrt{\frac{4}{25}}$, $\sqrt{0{,}25}$, $\sqrt{1\frac{17}{64}}$, $\sqrt{0{,}1225}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

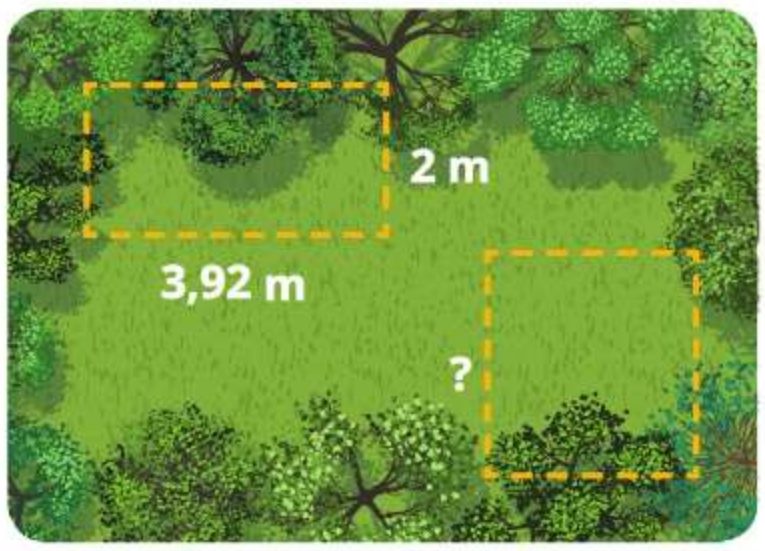
5. Oblicz długość boku kwadratu o podanym polu.

a) $16\ \text{mm}^2$ **b)** $0{,}36\ \text{cm}^2$ **c)** $2\frac{14}{121}\ \text{dm}^2$ **d)** $0{,}0004\ \text{m}^2$ **e)** $0{,}0361\ \text{km}^2$

6. Jaką liczbę należy wstawić w miejsce x, aby otrzymać równość?

a) $\sqrt{x} = 6$ **b)** $\sqrt{x} = 8$ **c)** $\sqrt{x} = \frac{3}{7}$ **d)** $\sqrt{x} = 0{,}2$ **e)** $\sqrt{x} = 1\frac{1}{2}$

7. Pani Basia planuje zrobić w ogródku dwie rabaty kwiatowe o takiej samej powierzchni. Jedna z nich jest w kształcie prostokąta przedstawionego na ilustracji. Druga rabata ma kształt kwadratu. Oblicz długość boku kwadratowej rabaty.



8. Oblicz.

a) $\sqrt{16} + \sqrt{81} - \sqrt{121}$ **b)** $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{144} + 3\sqrt{16}}$ **c)** $\sqrt{1\frac{17}{64}} - 2\sqrt{3\frac{1}{16}} - \sqrt{6\frac{1}{4}}$

d) $\frac{\sqrt{4} - \sqrt{36}}{\sqrt{81} + \sqrt{225}}$ **e)** $\frac{3\sqrt{0{,}0004} - \sqrt{1{,}69}}{2\sqrt{0{,}36}}$ **f)** $\sqrt{0{,}25} + 3\sqrt{1{,}44} - 2\sqrt{3{,}24} + 4\sqrt{6{,}25}$

9. Uzasadnij, że liczba $\sqrt{12 + \sqrt{8\sqrt{2\sqrt{\sqrt{16}}}}}$ jest liczbą naturalną.

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt{256}$ **b)** $\sqrt{\frac{25}{196}}$ **c)** $\sqrt{2\frac{47}{121}}$ **d)** $\sqrt{0{,}0169}$

2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. E

Wartość wyrażenia $10\sqrt{0{,}000036} + \sqrt{\frac{121}{625}}$ jest równa

A. $1\frac{1}{25}$ **B.** $\frac{17}{125}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $60\frac{11}{125}$

3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe. E

Obwód kwadratu o polu $0{,}0064\ \text{dm}^2$ jest równy $0{,}08\ \text{dm}$.	**P**	**F**
Równość $\sqrt{x} = 0{,}9$ zachodzi dla $x = 0{,}3$.	**P**	**F**

2. Działania na pierwiastkach kwadratowych

- Własności pierwiastków kwadratowych
- Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka kwadratowego
- Włączanie czynnika pod znak pierwiastka kwadratowego
- Dodawanie i odejmowanie pierwiastków kwadratowych

Przykład 1.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt{25 \cdot 4}$

Wykonamy mnożenie liczb pod pierwiastkiem, a następnie obliczymy otrzymany pierwiastek.

$$\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10$$

b) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$

Obliczymy pierwiastki, a następnie wykonamy mnożenie otrzymanych liczb.

$$\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$$

Pierwiastek kwadratowy z iloczynu nieujemnych liczb a i b jest równy **iloczynowi pierwiastków kwadratowych** z tych liczb.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

c) $\sqrt{\frac{100}{25}}$

Wykonamy dzielenie liczb pod pierwiastkiem, a następnie obliczymy otrzymany pierwiastek.

$$\sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$$

d) $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}}$

Obliczymy pierwiastki, a następnie wykonamy dzielenie otrzymanych liczb.

$$\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

Pierwiastek kwadratowy z ilorazu nieujemnej liczby a i dodatniej liczby b jest równy **ilorazowi pierwiastków kwadratowych** z tych liczb.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Ćwiczenie 1.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{\frac{5}{8}} \cdot \sqrt{\frac{2}{125}}$ **c)** $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$ **d)** $\sqrt{1\frac{2}{3}} : \sqrt{4\frac{17}{27}}$

A to ciekawe

Zauważmy, że wartość wyrażenia $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ można obliczyć, lecz tylko z pewnym przybliżeniem, wyznaczając oddzielnie wartość $\sqrt{2}$ i oddzielnie wartość $\sqrt{8}$. Zarówno $\sqrt{2}$, jak i $\sqrt{8}$ są liczbami niewymiernymi. Z pomocą przychodzi wzór na iloczyn pierwiastków kwadratowych: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, zgodnie z którym $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$. Przykład ten pokazuje, że **iloczyn liczb niewymiernych może być liczbą wymierną**.

Przykład 2.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$ **b)** $(\sqrt{4})^2 = 2^2 = 4$ **c)** $\sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4$

Dla nieujemnej liczby a prawdziwe są równości:

$$\sqrt{a^2} = a, \qquad (\sqrt{a})^2 = a, \qquad \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a.$$

Ćwiczenie 2.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $(\sqrt{12})^2$ **b)** $\sqrt{1\frac{6}{7}} \cdot \sqrt{1\frac{6}{7}}$ **c)** $\sqrt{20^2} \cdot \sqrt{7^2}$ **d)** $\left(\sqrt{1\frac{3}{4}}\right)^2 : \left(\sqrt{6\frac{1}{8}}\right)^2$

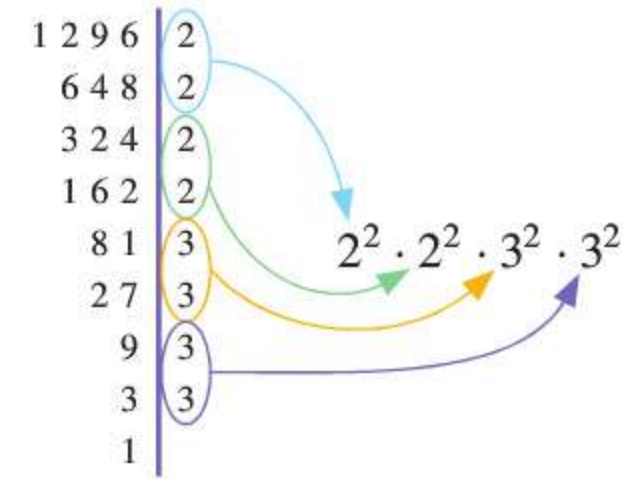
Liczby pierwsze to liczby naturalne większe od 1, które mają dokładnie dwa dzielniki: liczbę 1 i samą siebie. Liczby pierwsze to: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$

Rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze polega na zapisaniu tej liczby w postaci iloczynu liczb pierwszych. Rozkład liczby na czynniki pierwsze jest przydatny przy obliczaniu pierwiastków.

Przykład 3.

Oblicz $\sqrt{1296}$ i uzasadnij swoją odpowiedź.

Rozłożymy liczbę 1296 na czynniki pierwsze i połączymy w pary takie same liczby. Liczby pierwsze łączymy w pary („dwójki"), ponieważ pierwiastek jest stopnia drugiego.



Obliczymy $\sqrt{1296}$, a następnie wykonamy sprawdzenie.

$$\begin{aligned}\sqrt{1296} &= \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2} = \\ &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3^2} = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36, \text{ bo } 36^2 = 1296.\end{aligned}$$

Ćwiczenie 3.

Oblicz $\sqrt{1764}$ i uzasadnij swoją odpowiedź.

Przykład 4.

Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka $\sqrt{160}$.

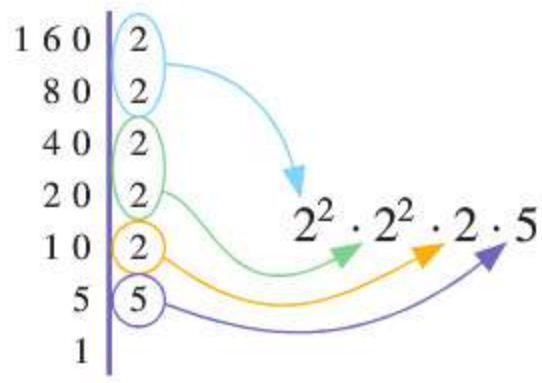
Sposób I

Skorzystamy z własności pierwiastków dotyczącej ich iloczynu.

$$\sqrt{160} = \sqrt{16 \cdot 10} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$

Sposób II

Skorzystamy z rozkładu liczby na czynniki pierwsze znajdującej się pod pierwiastkiem.



Otrzymaliśmy $\sqrt{160} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 5} = 4\sqrt{10}$.

Podczas wyłączania liczby przed znak pierwiastka powinniśmy zadbać o to, aby pod pierwiastkiem została najmniejsza możliwa liczba naturalna.

Dla nieujemnych liczb a i b prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}.$$

Ćwiczenie 4.

Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{50}$ **b)** $\sqrt{54}$ **c)** $\sqrt{240}$ **d)** $\sqrt{2450}$

Przykład 5.

Włącz czynnik pod znak pierwiastka $4\sqrt{3}$.

Skorzystamy z równości $a = \sqrt{a^2}$, gdzie $a \geqslant 0$.

$$4\sqrt{3} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{48}$$

Włączanie czynnika pod znak pierwiastka wykorzystujemy, gdy chcemy np. porównać liczby $3\sqrt{2}$ i $2\sqrt{3}$.

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$
$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

Ponieważ

$$\sqrt{18} > \sqrt{12},$$

to

$$3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}.$$

Ćwiczenie 5.

Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $5\sqrt{3}$ i $3\sqrt{5}$ **b)** $4\sqrt{10}$ i $10\sqrt{2}$ **c)** $8\sqrt{2}$ i $9\sqrt{3}$ **d)** $6\sqrt{7}$ i $7\sqrt{6}$

Przykład 6.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt{16+9}$

Wykonamy dodawanie liczb pod pierwiastkiem, a następnie obliczymy otrzymany pierwiastek. ⇨ $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

b) $\sqrt{16}+\sqrt{9}$

Obliczymy pierwiastki, a następnie dodamy otrzymane liczby. ⇨ $\sqrt{16}+\sqrt{9} = 4+3 = 7$

Pierwiastek kwadratowy z sumy dodatnich liczb a i b **nie jest** równy sumie pierwiastka kwadratowego z liczby dodatniej a i pierwiastka kwadratowego z liczby dodatniej b, np.

$$\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16}+\sqrt{9}.$$

Ta zasada dotyczy również odejmowania, np.

$$\sqrt{100-36} \neq \sqrt{100}-\sqrt{36}.$$

c) $2\sqrt{5}+4\sqrt{5}$

Dodamy liczby, które są przed pierwiastkami, a pierwiastek pozostawimy bez zmian. ⇨ $2\sqrt{5}+4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

Możemy dodawać lub odejmować tylko te pierwiastki, które są **tego samego stopnia** i mają **tę samą liczbę podpierwiastkową**.

d) $3\sqrt{108}-2\sqrt{3}$

Wyłączymy czynnik przed znak pierwiastka. ⇨ $\sqrt{108} = \sqrt{36\cdot 3} = 6\sqrt{3}$

Pierwiastki są tego samego stopnia, a liczby podpierwiastkowe równe, więc wykonamy odejmowanie. ⇨ $3\sqrt{108}-2\sqrt{3} = 3\cdot 6\sqrt{3}-2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}-2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

e) $\sqrt{48}+3\sqrt{6}+5\sqrt{3}-\sqrt{24}$

Wyłączymy czynniki przed znaki pierwiastków. ⇨ $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Pierwiastki tego samego stopnia o równych liczbach podpierwiastkowych odpowiednio dodamy i odejmiemy. ⇨ $\sqrt{48}+3\sqrt{6}+5\sqrt{3}-\sqrt{24} = 4\sqrt{3}+3\sqrt{6}+5\sqrt{3}-2\sqrt{6} = 9\sqrt{3}+\sqrt{6}$

Ćwiczenie 6.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $6\sqrt{2}+4\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{98}-4\sqrt{2}+\sqrt{18}$ **c)** $5\sqrt{63}-3\sqrt{5}-\sqrt{28}+8\sqrt{20}$

Przykład 7.

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

Pomnożymy licznik i mianownik ułamka przez $\sqrt{6}$. ⇨ $\frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6_2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Przekształcanie wyrażenia zapisanego w postaci ułamka, tak aby w mianowniku nie występował niewymierny pierwiastek, nazywamy **usuwaniem niewymierności z mianownika**.

b) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10 \cdot 6}}{\sqrt{6 \cdot 6}} = \frac{\sqrt{60}}{6} = \frac{\sqrt{4 \cdot 15}}{6} = \frac{2\sqrt{15}}{6} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

c) $\frac{9}{4\sqrt{3}} = \frac{9}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{4 \cdot 3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Ćwiczenie 7.

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ **b)** $\frac{12}{\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{15}{\sqrt{6}}$ **d)** $\frac{15}{2\sqrt{5}}$

Rozwiąż zadania

1. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ **b)** $\sqrt{3{,}2} \cdot \sqrt{20}$ **c)** $\sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{\frac{12}{50}}$ **d)** $\sqrt{50} : \sqrt{\frac{2}{81}}$

e) $\sqrt{121^2}$ **f)** $(-\sqrt{3})^2$ **g)** $\sqrt{\frac{27}{75}} : \sqrt{\frac{48}{75}}$ **h)** $\sqrt{\frac{0{,}04}{0{,}0169}}$

i) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}$ **j)** $4\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}$ **k)** $-\sqrt{625^2}$ **l)** $-2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

2. Oblicz pierwiastek.

a) $\sqrt{1024}$ **b)** $\sqrt{1089}$ **c)** $\sqrt{2704}$

3. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{32}$ **b)** $\sqrt{27}$ **c)** $\sqrt{300}$ **d)** $\sqrt{150}$

e) $\sqrt{108}$ **f)** $\sqrt{540}$ **g)** $\sqrt{396}$ **h)** $\sqrt{\frac{128}{169}}$

4. Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

a) $3\sqrt{10}$ **b)** $4\sqrt{3}$ **c)** $0{,}2\sqrt{2}$ **d)** $\frac{2}{3}\sqrt{27}$

5. Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $4\sqrt{2}$ i $2\sqrt{7}$ **b)** $6\sqrt{3}$ i $3\sqrt{6}$ **c)** $4\sqrt{3}$ i $3\sqrt{5}$ **d)** $5\sqrt{10}$ i $10\sqrt{3}$

6. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt{169-144}$ **b)** $\sqrt{169}-\sqrt{144}$ **c)** $\sqrt{1{,}44}+\sqrt{0{,}25}$ **d)** $\sqrt{1{,}44+0{,}25}$

7. Wykonaj działania.

a) $3\sqrt{10}+\sqrt{10}-8\sqrt{10}$ **b)** $-2\sqrt{13}+4\sqrt{13}-5\sqrt{13}$ **c)** $3\sqrt{17}-5\sqrt{17}+2\sqrt{17}$

d) $3\sqrt{75}-2\sqrt{3}+2\sqrt{48}$ **e)** $4\sqrt{2}-\sqrt{32}-3\sqrt{18}$ **f)** $2\sqrt{5}+3\sqrt{45}-3\sqrt{125}$

g) $-4\sqrt{112}-3\sqrt{7}+2\sqrt{700}$ **h)** $3\sqrt{2}-5\sqrt{3}+2\sqrt{12}$ **i)** $-2\sqrt{8}+2\sqrt{27}-5\sqrt{2}+\sqrt{3}$

8. Oblicz pole prostokąta o wymiarach:

a) $\sqrt{2}$ cm $\times$ $2\sqrt{2}$ cm, **b)** $3\sqrt{3}$ cm $\times$ $2\sqrt{3}$ cm,

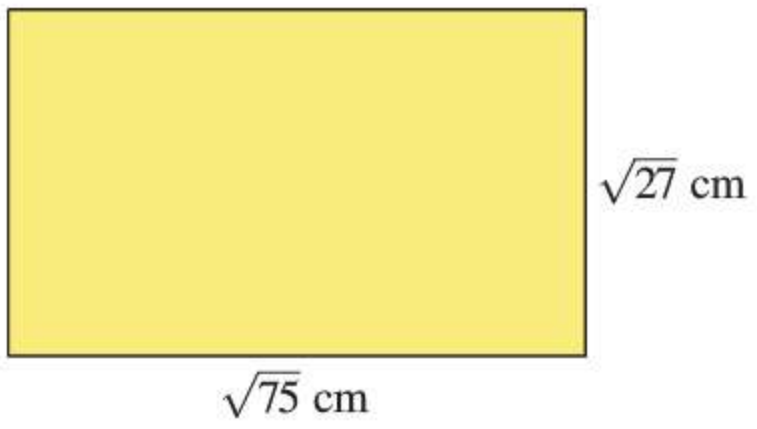
c) $3\sqrt{6}$ cm $\times$ $\sqrt{2}$ cm, **d)** $4\sqrt{5}$ cm $\times$ $3\sqrt{15}$ cm.

9. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{4}{\sqrt{6}}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{21}}$ **c)** $\frac{7}{2\sqrt{14}}$ **d)** $\frac{9\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}$

Informacje do zadań 10. i 11. **E**

Na rysunku przedstawiono prostokąt.



10. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Boki prostokąta mają długości

A. $3\sqrt{3}$ cm i $3\sqrt{5}$ cm.

B. $3\sqrt{3}$ cm i $5\sqrt{3}$ cm.

C. $3\sqrt{5}$ cm i $9\sqrt{3}$ cm.

D. $5\sqrt{3}$ cm i $9\sqrt{3}$ cm.

11. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Pole tego prostokąta jest równe | **A** | **B** |.

A. 45 cm^2 **B.** 135 cm^2

Obwód kwadratu, którego pole jest takie samo jak pole prostokąta, jest równy | **C** | **D** |.

C. $12\sqrt{5}$ cm **D.** $16\sqrt{3}$ cm

12. Oblicz.

a) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{48}:\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{32}\cdot 2\sqrt{8}-5\sqrt{242}:\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{288}+5\sqrt{32}}$ **d)** $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{108}}{\sqrt{192}+\sqrt{243}}$

13. Uporządkuj wartości wyrażeń: $\frac{1}{2}$, $-\sqrt{16 \cdot \sqrt{16}}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$, $\sqrt{\frac{6}{9}} : \sqrt{\frac{1}{6}}$, $-\sqrt{3\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{15}$ w kolejności rosnącej.

14. Wyznacz wartość x, tak aby otrzymać równość.

a) $x\sqrt{2} = \sqrt{72}$ **b)** $x\sqrt{3} = \sqrt{75}$ **c)** $x\sqrt{3} = \sqrt{0{,}03}$

d) $\sqrt{5x} = 0{,}02\sqrt{5}$ **e)** $\sqrt{2x} = \frac{2}{5}\sqrt{2}$ **f)** $6\sqrt{6x} = 30\sqrt{6}$

☆ **15.** Uzasadnij, że wartość wyrażenia $\frac{6\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{147}}{\sqrt{3}}$ jest liczbą podzielną przez 5.

Sprawdź, co umiesz!

E **1.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $2\sqrt{162}$ jest równa

A. $4\sqrt{9}$ **B.** $9\sqrt{2}$ **C.** $18\sqrt{2}$ **D.** $14\sqrt{2}$

2. Oblicz pole i obwód prostokąta o bokach długości $\sqrt{48}$ dm i $3\sqrt{3}$ dm.

3. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ **b)** $-\frac{6}{\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{26}{\sqrt{13}}$ **d)** $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ **e)** $\frac{-18\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

E **4.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Wartości wyrażeń $\sqrt{16+25}$ i $\sqrt{16}+\sqrt{25}$ są równe.	**P**	**F**
Wartości wyrażeń $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot 2\frac{1}{4}}$ i $\sqrt{1\frac{7}{9}} \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}}$ są równe.	**P**	**F**
Wartość wyrażenia $\sqrt{6\frac{2}{5}} : \sqrt{1\frac{3}{125}}$ jest liczbą wymierną.	**P**	**F**

E **5.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równość $x\sqrt{2} = \sqrt{98}$ zachodzi dla

A. $x = 0{,}7$ **B.** $x = 0{,}25$ **C.** $x = 49$ **D.** $x = 7$

3. Pierwiastek sześcienny

- Pojęcie pierwiastka sześciennego
- Obliczanie wartości pierwiastków sześciennych

Znasz już pojęcie pierwiastka kwadratowego. Podczas omawiania tego tematu dowiesz się, na czym polega obliczanie pierwiastków sześciennych, czyli pierwiastków stopnia trzeciego.

Pierwiastek sześcienny (stopnia trzeciego) z liczby a jest równy liczbie b, której sześcian jest równy a.

stopień pierwiastka równy 3

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a.$$

liczba podpierwiastkowa

$\sqrt[3]{8}$ czytamy: *pierwiastek sześcienny z ośmiu* lub *pierwiastek trzeciego stopnia z ośmiu*.

Przykład 1.

Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt[3]{8}$

Jeśli chcemy obliczyć pierwiastek sześcienny z 8, szukamy odpowiedzi na pytanie: *Jaka liczba podniesiona do potęgi trzeciej jest równa 8?*

$\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$.

b) $\sqrt[3]{-27} = -3$, bo $(-3)^3 = -27$.

c) $\sqrt[3]{216} = 6$, bo $6^3 = 216$.

Jeśli stopień pierwiastka jest równy 3, to liczba podpierwiastkowa może być ujemna.

Przy obliczaniu pierwiastków sześciennych możemy wykorzystać podane w tabeli sześciany liczb.

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Ćwiczenie 1.

Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt[3]{125}$ **b)** $\sqrt[3]{-1}$ **c)** $\sqrt[3]{-64}$ **d)** $\sqrt[3]{1000}$

Przykład 2.

Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$

Znajdziemy taką liczbę, która podniesiona do sześcianu jest równa $\frac{27}{64}$.

$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$, bo $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$.

b) $\sqrt[3]{-4\frac{12}{125}}$

Zamienimy liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy i obliczymy pierwiastek.

$\sqrt[3]{-4\frac{12}{125}} = \sqrt[3]{-\frac{512}{125}} = -\frac{8}{5} = -1\frac{3}{5}$,

bo $\left(-1\frac{3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{8}{5}\right)^3 = -\frac{512}{125} = -4\frac{12}{125}$.

Ćwiczenie 2.

Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt[3]{-\frac{1}{216}}$ **b)** $\sqrt[3]{\frac{343}{512}}$ **c)** $\sqrt[3]{-\frac{8}{729}}$ **d)** $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$ **e)** $\sqrt[3]{-37\frac{1}{27}}$

Przykład 3.

Oblicz $\sqrt[3]{0{,}343}$ i uzasadnij swoją odpowiedź.

Zamienimy ułamek dziesiętny na ułamek zwykły i obliczymy pierwiastek.

$\sqrt[3]{0{,}343} = \sqrt[3]{\frac{343}{1000}} = \frac{7}{10} = 0{,}7$,

bo $(0{,}7)^3 = \left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{343}{1000} = 0{,}343$.

Ćwiczenie 3.

Oblicz $\sqrt[3]{3{,}375}$ i uzasadnij swoją odpowiedź.

Przykład 4.

Oblicz.

a) $3\sqrt[3]{-27} - 5\sqrt[3]{729}$

Najpierw obliczymy pierwiastki, a następnie obliczymy wartość otrzymanego wyrażenia.

$3\sqrt[3]{-27} - 5\sqrt[3]{729} = 3 \cdot (-3) - 5 \cdot 9 =$

$= -9 - 45 = -54$

b) $\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}} - 3\sqrt{9}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{\frac{1}{2} - 3 \cdot 3}{10} = \frac{\frac{1}{2} - 9}{10} = \frac{-8\frac{1}{2}}{10} = \frac{-\frac{17}{2}}{10} = -\frac{17}{2} \cdot \frac{1}{10} = -\frac{17}{20}$

Ćwiczenie 4.

Oblicz.

a) $\frac{\sqrt[3]{1000} + \sqrt{100}}{\sqrt[3]{-125}}$ **b)** $7\sqrt{169} - 36\sqrt[3]{-\frac{1}{216}}$ **c)** $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}} - 6\sqrt{2\frac{7}{9}}$

Rozwiąż zadania

1. Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt[3]{0}$ **b)** $\sqrt[3]{-125}$ **c)** $\sqrt[3]{512}$ **d)** $\sqrt[3]{-729}$

2. Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ **b)** $\sqrt[3]{-\frac{216}{1000}}$ **c)** $\sqrt[3]{\frac{64}{729}}$ **d)** $\sqrt[3]{-\frac{27}{216}}$ **e)** $\sqrt[3]{-\frac{64}{125}}$

f) $\sqrt[3]{-\frac{343}{8000}}$ **g)** $\sqrt[3]{1\frac{122}{128}}$ **h)** $\sqrt[3]{3\frac{81}{216}}$ **i)** $\sqrt[3]{18\frac{26}{27}}$ **j)** $\sqrt[3]{-10\frac{710}{729}}$

3. Oblicz pierwiastek i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $\sqrt[3]{0{,}001}$ **b)** $\sqrt[3]{-0{,}008}$ **c)** $\sqrt[3]{0{,}064}$ **d)** $\sqrt[3]{-0{,}027}$

4. Porównaj wartości wyrażeń. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $\sqrt[3]{27}+6$ i $-\sqrt[3]{-27}+6$

b) $-\sqrt[3]{-8}-2$ i $-\sqrt[3]{-2^3}$

c) $\sqrt[3]{-729}-7$ i $-\sqrt[3]{-7^3}-\sqrt{49}$

d) $\sqrt[3]{-125}-5$ i $-\sqrt[3]{-5^3}-\sqrt{25}$

5. Wyznacz wartość x, tak aby otrzymać równość.

a) $\sqrt[3]{x}=8$ **b)** $\sqrt[3]{x}=-6$ **c)** $\sqrt[3]{x}=\frac{3}{4}$ **d)** $\sqrt[3]{x}=-0{,}3$ **e)** $\sqrt[3]{x}=1{,}4$

6. Oblicz długość krawędzi sześcianu, którego objętość jest równa:

a) $64\ \text{mm}^3$, **b)** $0{,}008\ \text{cm}^3$, **c)** $1{,}331\ \text{dm}^3$, **d)** $4\frac{17}{27}\ \text{m}^3$.

7. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-125}+\sqrt[3]{8}-11\sqrt[3]{-64}$

b) $-\sqrt[3]{-64}+\sqrt[3]{8000}-10\sqrt[3]{216}$

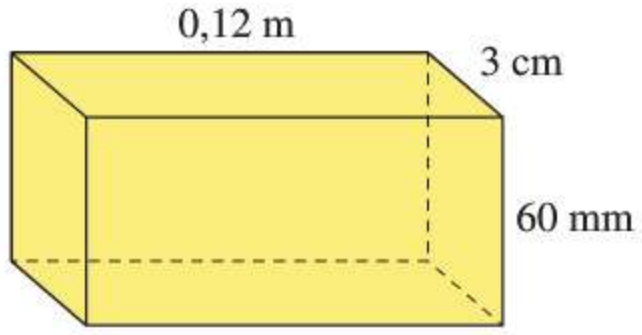
c) $-5\sqrt{144}-9\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{8}-2\sqrt{16}}{2\sqrt[3]{-1000}}$

e) $\sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}-3\sqrt{3\frac{1}{16}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{-125}-\sqrt{64}}{\sqrt[3]{-729}}$

8. Na rysunku przedstawiono prostopadłościan. Objętość tego prostopadłościanu jest równa objętości pewnego sześcianu. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.



9. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{15^2-10^2}$

b) $\sqrt[3]{-1+\sqrt{81}}$

c) $-\sqrt[3]{3^3+4^3+5^3}$

d) $-\sqrt[3]{\frac{37}{64}-1}$

e) $-\sqrt[3]{\sqrt[3]{216}+\sqrt{4}}$

f) $\sqrt[3]{-\sqrt[3]{125}-\sqrt{484}}$

10. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\left(\sqrt[3]{-2\sqrt{16}}\right)^0$ **b)** $\left(\left(-\sqrt[3]{3\sqrt{9}}\right)^3\right)^0$

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{0{,}125}+\sqrt[3]{-8}$ **b)** $-\sqrt[3]{-0{,}027}-\sqrt[3]{-27}$

c) $-\sqrt{5\frac{1}{16}}+\sqrt[3]{-0{,}008}$ **d)** $\sqrt{13^2}-\sqrt[3]{-\left(\frac{2}{3}\right)^3}$

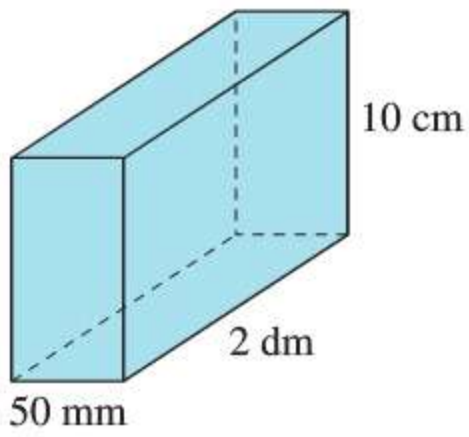
E **2.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\dfrac{\sqrt[3]{-216}-\sqrt{3\frac{1}{16}}}{\sqrt[3]{\frac{64}{125}}}$ jest równa

A. $6\frac{1}{4}$ **B.** $-6\frac{9}{16}$ **C.** $-9\frac{11}{16}$ **D.** $9\frac{11}{16}$

3. Dane są liczby: $a=3\sqrt[3]{-27}$, $b=\frac{1}{3}\sqrt[3]{729}$ oraz $c=-3\sqrt{64}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a\cdot b}{c}$.

E **4.** Objętość sześcianu jest 8 razy mniejsza od objętości prostopadłościanu przedstawionego na rysunku.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Długość krawędzi tego sześcianu jest równa $10\ \text{cm}$.	**P**	**F**
Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu wynosi $150\ \text{cm}^2$.	**P**	**F**

4. Działania na pierwiastkach sześciennych

- Własności pierwiastków sześciennych
- Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka sześciennego
- Włączanie czynnika pod znak pierwiastka sześciennego
- Dodawanie i odejmowanie pierwiastków sześciennych

Przykład 1.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$

Wykonamy mnożenie liczb pod pierwiastkiem, a następnie obliczymy otrzymany pierwiastek.

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216} = 6$$

b) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$

Obliczymy pierwiastki, a następnie wykonamy mnożenie otrzymanych liczb.

$$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$$

Pierwiastek sześcienny z iloczynu liczb a i b jest równy **iloczynowi pierwiastków sześciennych** z tych liczb.

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

c) $\sqrt[3]{\frac{64}{8}}$

Wykonamy dzielenie liczb pod pierwiastkiem, a następnie obliczymy otrzymany pierwiastek.

$$\sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

d) $\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}}$

Obliczymy pierwiastki, a następnie wykonamy dzielenie otrzymanych liczb.

$$\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4}{2} = 2$$

Pierwiastek sześcienny z ilorazu liczby a i liczby b różnej od 0 jest równy **ilorazowi pierwiastków sześciennych** z tych liczb.

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Ćwiczenie 1.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$ **b)** $\sqrt[3]{4\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{32}}$ **c)** $\sqrt[3]{625} : \sqrt[3]{5}$ **d)** $\sqrt[3]{8\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{1\frac{4}{5}}$

Przykład 2.

Uzasadnij, że prawdziwa jest równość $\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$.

Zauważmy, że $-5 = -1 \cdot 5$, więc $\sqrt[3]{-5} = \sqrt[3]{-1 \cdot 5}$.

Skorzystamy ze wzoru na pierwiastek sześcienny z iloczynu, a następnie obliczymy $\sqrt[3]{-1}$.

$$\sqrt[3]{-5} = \sqrt[3]{-1 \cdot 5} = \sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{5} =$$
$$= -1 \cdot \sqrt[3]{5} = -\sqrt[3]{5}$$

Dla dowolnej liczby a prawdziwa jest równość

$$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}.$$

Ćwiczenie 2.

Sprawdź, czy prawdziwa jest równość $-\sqrt[3]{-11} = -\sqrt[3]{11}$.

Przykład 3.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt[3]{8^3} = \sqrt[3]{512} = 8$ **b)** $\left(\sqrt[3]{8}\right)^3 = 2^3 = 8$ **c)** $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Dla dowolnej liczby a prawdziwe są równości:

$$\sqrt[3]{a^3} = a, \qquad \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a, \qquad \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a.$$

Ćwiczenie 3.

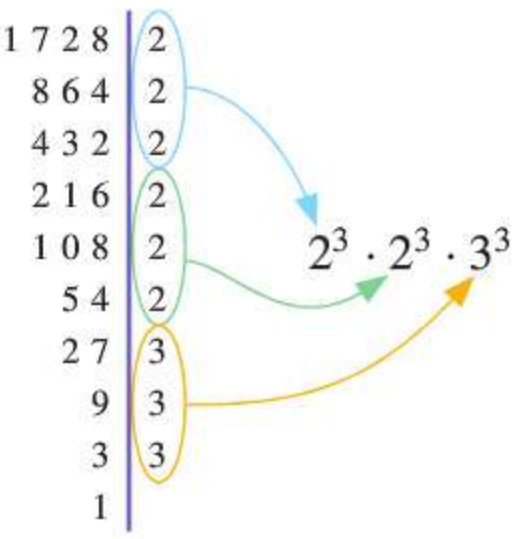
Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt[3]{18^3}$ **b)** $\sqrt[3]{22} \cdot \sqrt[3]{22} \cdot \sqrt[3]{22}$ **c)** $\left(\sqrt[3]{17}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ **d)** $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{6}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{10}\right)^3$

Przykład 4.

Oblicz $\sqrt[3]{-1728}$ i uzasadnij swoją odpowiedź.

Rozłożymy liczbę 1728 na czynniki pierwsze i połączymy w „trójki” takie same liczby, ponieważ pierwiastek jest stopnia trzeciego.



Obliczymy $\sqrt[3]{-1728}$, a następnie wykonamy sprawdzenie.

$$\sqrt[3]{-1728} = -\sqrt[3]{1728} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3} =$$
$$= -2 \cdot 2 \cdot 3 = -12, \text{ bo } (-12)^3 = -1728.$$

Ćwiczenie 4.

Oblicz $\sqrt[3]{2744}$ i uzasadnij swoją odpowiedź.

A to ciekawe



Wiesz już, jak obliczać pierwiastki kwadratowe i sześcienne.
A czy wiesz, jak obliczyć pierwiastek czwartego stopnia?
Pierwiastek czwartego stopnia z liczby nieujemnej a jest równy nieujemnej liczbie b, której czwarta potęga jest równa a.

$$\sqrt[4]{a} = b, \text{ gdy } b^4 = a.$$

Na przykład $\sqrt[4]{16} = 2$, ponieważ $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Czy domyślasz się, w jaki sposób obliczamy pierwiastki piątego lub wyższego stopnia? Ile wynosi $\sqrt[5]{-32}$, a ile $\sqrt[6]{1\,000\,000}$?

Przykład 5.

Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka $\sqrt[3]{2700}$.

Sposób I

Skorzystamy z własności pierwiastków dotyczącej ich iloczynu.

$$\sqrt[3]{2700} = \sqrt[3]{27 \cdot 100} = \\ = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{100} = 3\sqrt[3]{100}$$

Sposób II

Skorzystamy z rozkładu na czynniki pierwsze liczby znajdującej się pod pierwiastkiem.

2700	2
1350	2
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

Otrzymaliśmy $\sqrt[3]{2700} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5^2 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{5^2 \cdot 2^2} = 3\sqrt[3]{25 \cdot 4} = 3\sqrt[3]{100}$.

Podczas wyłączania liczby przed znak pierwiastka powinniśmy zadbać o to, aby pod pierwiastkiem została najmniejsza możliwa liczba naturalna.

$$\sqrt[3]{a^3 \cdot b} = a\sqrt[3]{b}$$

Ćwiczenie 5.

Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt[3]{16}$ **b)** $\sqrt[3]{48}$ **c)** $\sqrt[3]{54}$ **d)** $\sqrt[3]{320}$

Przykład 6.

Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

a) $5\sqrt[3]{2}$

Skorzystamy z równości $a = \sqrt[3]{a^3}$. $5\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{125 \cdot 2} = \sqrt[3]{250}$

b) $-3\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{(-3)^3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{-27 \cdot 4} = \sqrt[3]{-108}$

Ćwiczenie 6.

Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $4\sqrt[3]{2}$ i $3\sqrt[3]{3}$ **b)** $3\sqrt[3]{10}$ i $10\sqrt[3]{2}$ **c)** $5\sqrt[3]{6}$ i $7\sqrt[3]{-5}$ **d)** $-6\sqrt[3]{7}$ i $-8\sqrt[3]{6}$

Przykład 7.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $6\sqrt[3]{7}+4\sqrt[3]{-7}$

Skorzystamy z własności $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$. ⇒ $\sqrt[3]{-7}=-\sqrt[3]{7}$

Obliczymy wartość wyrażenia. ⇒ $6\sqrt[3]{7}+4\sqrt[3]{-7}=6\sqrt[3]{7}-4\sqrt[3]{7}=2\sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[3]{250}-3\sqrt[3]{2}$

Wyłączymy czynnik przed znak pierwiastka. ⇒ $\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{125\cdot 2}=5\sqrt[3]{2}$

Pierwiastki są tego samego stopnia, a liczby podpierwiastkowe równe, więc wykonamy odejmowanie. ⇒ $\sqrt[3]{250}-3\sqrt[3]{2}=5\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$

Ćwiczenie 7.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt[3]{-6}-4\sqrt[3]{6}$ **b)** $3\sqrt[3]{5}-6\sqrt[3]{-5}+7\sqrt[3]{-5}+9\sqrt[3]{5}$ **c)** $-5\sqrt[3]{32}+3\sqrt[3]{108}$

Rozwiąż zadania

1. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{81}$ **b)** $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{-5}$ **c)** $\sqrt[3]{-16}\cdot\sqrt[3]{32}$ **d)** $\frac{\sqrt[3]{320}}{\sqrt[3]{-40}}$

e) $\frac{\sqrt[3]{-375}}{\sqrt[3]{-3}}$ **f)** $\sqrt[3]{1\frac{3}{5}}:\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ **g)** $\frac{\sqrt[3]{2048}}{\sqrt[3]{4}}$ **h)** $\sqrt[3]{200^3}$

i) $(\sqrt[3]{7})^3$ **j)** $3\sqrt[3]{343}\cdot\sqrt[3]{729}$ **k)** $-\sqrt[3]{-216}$ **l)** $3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3}$

2. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-8\cdot 125}$ **b)** $\sqrt[3]{-64\cdot(-512)}$ **c)** $\sqrt[3]{27:(-343)}$ **d)** $\sqrt[3]{\frac{1}{216}}$

3. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt[3]{5000}$ **b)** $\sqrt[3]{375}$ **c)** $\sqrt[3]{-297}$ **d)** $\sqrt[3]{\frac{192}{343}}$

4. Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

a) $3\sqrt[3]{5}$ **b)** $6\sqrt[3]{6}$ **c)** $0{,}1\sqrt[3]{-5}$ **d)** $\frac{1}{3}\sqrt[3]{15}$

5. Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $3\sqrt[3]{6}$ i $4\sqrt[3]{5}$ **b)** $7\sqrt[3]{2}$ i $2\sqrt[3]{7}$ **c)** $-5\sqrt[3]{2}$ i $-2\sqrt[3]{5}$ **d)** $-2\sqrt[3]{11}$ i $4\sqrt[3]{-11}$

6. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $3\sqrt[3]{-12}+5\sqrt[3]{12}$ **b)** $5\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{-5}-5\sqrt[3]{-4}$

c) $-2\sqrt[3]{-13}-4\sqrt[3]{13}$ **d)** $2\sqrt[3]{10}-5\sqrt[3]{-10}+5\sqrt[3]{10}-3\sqrt[3]{-10}$

7. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-375}-\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{3}$ **b)** $-\sqrt[3]{3000}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{-192}$

c) $-\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{108}$ **d)** $-\sqrt[3]{2000}-\sqrt[3]{-128}+\sqrt[3]{-1024}$

8. Uporządkuj liczby: $4\sqrt[3]{3}$; $2\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[3]{1}$; $2\frac{1}{2}\sqrt[3]{32}$; $20\sqrt[3]{0{,}0002}$; $0{,}2\sqrt[3]{2000}$ w kolejności malejącej.

9. Oblicz objętość prostopadłościanu o krawędziach długości:

a) $\sqrt[3]{4}$ cm, $\sqrt[3]{2}$ cm, 20 mm, **b)** $\sqrt[3]{3}$ cm, $20\sqrt[3]{9}$ mm, $\sqrt[3]{0{,}064}$ dm.

10. Wyznacz wartość x, tak aby zachodziła równość $2\sqrt[3]{54}+x\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2000}$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-8\cdot 64}$ **b)** $\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}\right)^3$ **c)** $-4\cdot\sqrt[3]{-5}\cdot\sqrt[3]{-5}\cdot\sqrt[3]{-5}$ **d)** $\frac{\sqrt[3]{540}}{\sqrt[3]{20}}$

2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $-2\sqrt[3]{-250}+\sqrt[3]{686}+5\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{54}$ jest równa

A. $-40\sqrt[3]{2}$ **B.** $-14\sqrt[3]{2}$ **C.** $14\sqrt[3]{2}$ **D.** $40\sqrt[3]{2}$

3. Oblicz sześcian wartości wyrażenia $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{192}$.

4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Wartość wyrażenia $2\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{48}$ stanowi 50 % liczby $8\sqrt[3]{6}$.	**P**	**F**
Kwadrat wartości wyrażenia $\sqrt[3]{3000}-2\sqrt[3]{375}$ jest równy 0.	**P**	**F**

5. Szacowanie pierwiastków

- Pojęcie liczby niewymiernej
- Szacowanie pierwiastków kwadratowych i sześciennych

Przy omawianiu tematu 1. zauważyliśmy, że nie wszystkie pierwiastki są liczbami wymiernymi.

Liczby wymierne

- to liczby, które można przedstawić w postaci ułamka zwykłego,
- mają rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe.

Liczby niewymierne

- to liczby, których nie można przedstawić w postaci ułamka zwykłego,
- mają rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe.

Pierwiastek jest liczbą wymierną albo liczbą niewymierną.

Pierwiastek kwadratowy (sześcienny) jest liczbą niewymierną, jeśli nie jest możliwe wskazanie takiej liczby wymiernej, której kwadrat (sześcian) jest równy liczbie podpierwiastkowej.

$\sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots \qquad \sqrt[3]{5} = 1{,}7099759\ldots$

Przykład 1.

Oszacuj wartość $\sqrt{3}$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Podniesiemy liczbę $\sqrt{3}$ do kwadratu. ⇒ $(\sqrt{3})^2 = 3$

Znajdziemy kwadraty dwóch kolejnych liczb naturalnych takich, że pierwszy z nich jest mniejszy niż 3, a drugi – większy niż 3. ⇒ $1^2 = 1$ i $1 < 3$, więc $\sqrt{1} < \sqrt{3}$.
$2^2 = 4$ i $4 > 3$, więc $\sqrt{4} > \sqrt{3}$.

Liczba $\sqrt{3}$ znajduje się na osi liczbowej między liczbami 1 i 2. ⇒



Obliczymy drugie potęgi kilku ułamków dziesiętnych, które są większe od 1 oraz mniejsze od 2. ⇒

$(1{,}5)^2 = 2{,}25 \qquad 2{,}25 < 3$
$(1{,}6)^2 = 2{,}56 \qquad 2{,}56 < 3$
$(1{,}7)^2 = 2{,}89 \qquad 2{,}89 < 3$
$(1{,}8)^2 = 3{,}24 \qquad 3{,}24 > 3$

Zachodzi nierówność: $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$.

Skorzystamy z kalkulatora i obliczymy drugie potęgi kilku ułamków dziesiętnych, które są większe od $1{,}7$ i mniejsze od $1{,}8$.

$(1{,}75)^2 = 3{,}0625 \qquad 3{,}0625 > 3$

$(1{,}74)^2 = 3{,}0276 \qquad 3{,}0276 > 3$

$(1{,}73)^2 = 2{,}9929 \qquad 2{,}9929 < 3$

Zachodzi nierówność: $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$. Zatem możemy zapisać, że $\sqrt{3} \approx 1{,}7$. Liczba $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną, ponieważ nie ma rozwinięcia dziesiętnego skończonego ani nieskończonego okresowego. Możemy jedynie przybliżać jej wartość z dokładnością do $0{,}1$; $0{,}01$ itd.

Ćwiczenie 1.

Oszacuj wartość $\sqrt{7}$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Przykład 2.

Określ, między którymi kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej znajduje się podana liczba.

a) $\sqrt{5}$

Podniesiemy liczbę $\sqrt{5}$ do potęgi drugiej.

$(\sqrt{5})^2 = 5$

Znajdziemy kwadraty dwóch kolejnych liczb naturalnych takich, że pierwszy z nich jest mniejszy niż 5, a drugi – większy niż 5.

$2^2 = 4$ i $4 < 5$, więc $\sqrt{4} < \sqrt{5}$.

$3^2 = 9$ i $9 > 5$, więc $\sqrt{9} > \sqrt{5}$.

Zatem $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$, więc $2 < \sqrt{5} < 3$.



b) $\sqrt[3]{35}$

Podniesiemy liczbę $\sqrt[3]{35}$ do potęgi trzeciej.

$(\sqrt[3]{35})^3 = 35$

Znajdziemy sześciany dwóch kolejnych liczb naturalnych takich, że pierwszy z nich jest mniejszy niż 35, a drugi – większy niż 35.

$3^3 = 27$ i $27 < 35$, więc $\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{35}$.

$4^3 = 64$ i $64 > 35$, więc $\sqrt[3]{64} > \sqrt[3]{35}$.

Zatem $\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{35} < \sqrt[3]{64}$, więc $3 < \sqrt[3]{35} < 4$.



Ćwiczenie 2.

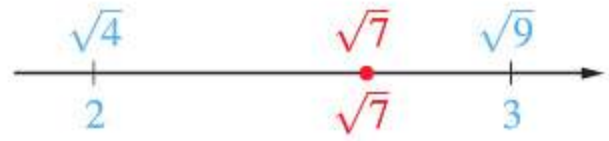
Określ, między którymi kolejnymi liczbami całkowitymi na osi liczbowej znajduje się liczba:

a) $\sqrt{28}$, **b)** $\sqrt{454}$, **c)** $\sqrt[3]{91}$, **d)** $\sqrt[3]{-877}$.

Przykład 3.

Wyznacz liczbę całkowitą a, tak aby spełniony był warunek $a < \sqrt{7} + 6 < a + 1$.

Określimy, między którymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej znajduje się $\sqrt{7}$. Zatem $2 < \sqrt{7} < 3$.



Do otrzymanej nierówności dodamy liczbę 6, aby otrzymać nierówność podaną w treści zadania.

$2 < \sqrt{7} < 3$

$2 + 6 < \sqrt{7} + 6 < 3 + 6$

$8 < \sqrt{7} + 6 < 9$

Odp. Liczba a jest równa 8.

Ćwiczenie 3.

Wyznacz liczbę całkowitą a, tak aby spełniony był warunek $a < \sqrt{115} - 4 < a + 1$.

Przykład 4.

Oblicz wartość wyrażenia. Przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ oraz $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

a) $5\sqrt{2} \approx 5 \cdot 1{,}41 = 7{,}05$ **b)** $\sqrt{3} + 4 \approx 5{,}73$

c) $2\sqrt{2} - \sqrt{3} \approx 2 \cdot 1{,}41 - 1{,}73 = 2{,}82 - 1{,}73 = 1{,}09$

$\sqrt{2} \approx 1{,}41 \quad \sqrt{3} \approx 1{,}73$

Ćwiczenie 4.

Oblicz wartość wyrażenia. Przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ oraz $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

a) $3\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{3} - 1$ **c)** $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ **d)** $7\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

Rozwiąż zadania

1. Określ, między jakimi kolejnymi liczbami całkowitymi na osi liczbowej znajduje się liczba:

a) $\sqrt{7}$, **b)** $\sqrt{145}$, **c)** $\sqrt[3]{81}$, **d)** $\sqrt[3]{-200}$.

2. Wyznacz liczbę całkowitą a, tak aby spełniony był warunek $a < \sqrt{138} < a + 1$.

3. Podaj liczbę całkowitą, która leży na osi liczbowej najbliżej liczby:

a) $2\sqrt{3}$, **b)** $5\sqrt{2}$, **c)** $\sqrt{3} + 2$, **d)** $2 + \sqrt{48}$,

e) $\sqrt{162} + 3$, **f)** $3\sqrt{2} - 1$, **g)** $3\sqrt{3} + 2$, **h)** $-3\sqrt{2} - 1$.

4. Znajdź wszystkie liczby całkowite leżące na osi liczbowej między liczbami:

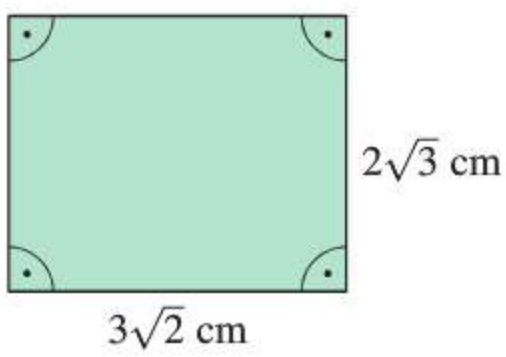
a) $2\sqrt{2}$ i $\sqrt{32}$, **b)** $-5\sqrt{3}$ i $\sqrt{65}$, **c)** $-2\sqrt[3]{26}$ i $\sqrt{101}$, **d)** $2\sqrt{7}$ i $\sqrt[3]{264}$.

5. Oblicz wartość wyrażenia. Przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, $\sqrt{7} \approx 2{,}65$ oraz $\sqrt{10} \approx 3{,}16$.

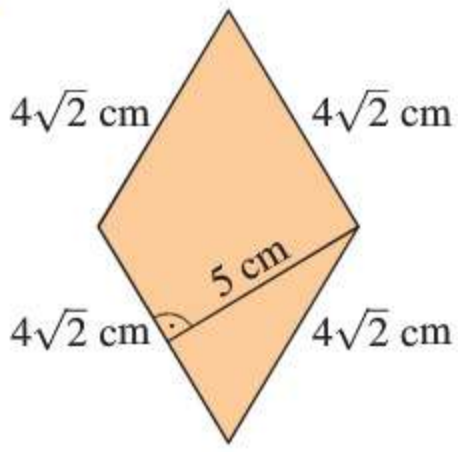
a) $3\sqrt{7}$ **b)** $4\sqrt{3} - 4$ **c)** $-2\sqrt{10} + 2$ **d)** $-4\sqrt{7} - 2\sqrt{2}$

6. Oblicz pole i obwód figury przedstawionej na rysunku. Przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ oraz $\sqrt{3} \approx 1{,}73$. Wyniki zaokrąglij do jedności.

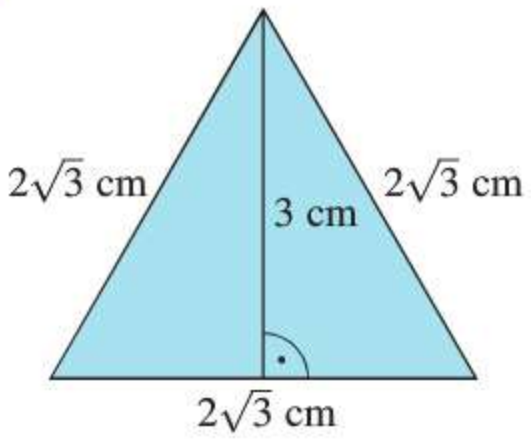
a)



b)



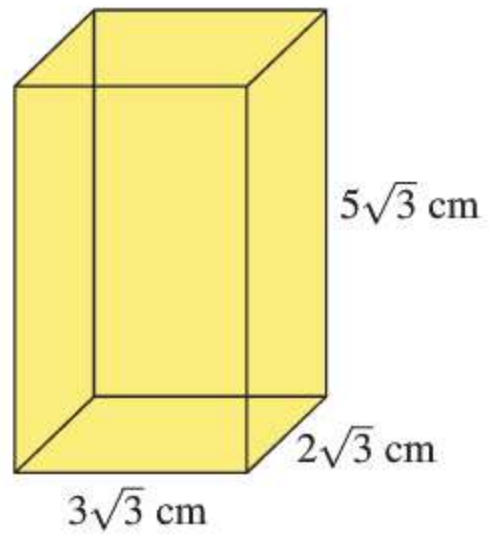
c)



E

Informacje do zadań 7. i 8.

Na rysunku przedstawiono prostopadłościan.
Przyjmij, że $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.



7. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest w przybliżeniu równa | **A** | **B** |.

A. $34{,}6$ cm **B.** $69{,}2$ cm

Pole najmniejszej ściany tego prostopadłościanu jest równe | **C** | **D** |.

C. 18 cm^2 **D.** 30 cm^2

8. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość tego prostopadłościanu jest w przybliżeniu równa

A. $17{,}3$ cm^3 **B.** $51{,}9$ cm^3 **C.** $155{,}3$ cm^3 **D.** $155{,}7$ cm^3

9. Dane są wyrażenia: $\sqrt{8}+\sqrt{2}$; $2+\sqrt{17}$; $3\sqrt{27}-2\sqrt{3}$; $2\sqrt{24}-\sqrt{6}$; $\sqrt{18}+2$. Uporządkuj ich wartości w kolejności od największej do najmniejszej.

10. Uzasadnij, że liczba $\sqrt{112}$ jest mniejsza od liczby $\sqrt[3]{2240}$. Nie korzystaj z kalkulatora.

Sprawdź, co umiesz!

1. Ustal, ile liczb całkowitych znajduje się na osi liczbowej między liczbami: $-\sqrt{5}$ i $\sqrt[3]{65}$.

2. Trójkąt równoboczny ma bok długości $4\sqrt{3}$ cm. Oblicz obwód tego trójkąta. Wynik zaokrąglij do $0{,}1$ cm. Przyjmij, że $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

3. Krawędź sześcianu ma długość $3\sqrt{2}$ dm. Przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu zaokrąglona do jednego centymetra jest równa

A. 253 cm **B.** 254 cm **C.** 507 cm **D.** 508 cm

4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Wartość wyrażenia $2\sqrt{3}-3{,}46$ jest równa 0.	**P**	**F**
Wartość wyrażenia $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{23}$ jest większa od liczby $\sqrt[3]{27}$.	**P**	**F**

6. Działania na potęgach i pierwiastkach

- Utrwalenie wiadomości o potęgach i pierwiastkach
- Zastosowanie własności potęg oraz własności pierwiastków w obliczeniach

Pierwiastek kwadratowy

Iloczyn

Pierwiastek kwadratowy z iloczynu liczb a i b jest równy iloczynowi pierwiastków kwadratowych z tych liczb.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$$

$a \geqslant 0, b \geqslant 0$

Iloraz

Pierwiastek kwadratowy z ilorazu liczb a i b jest równy ilorazowi pierwiastków kwadratowych z tych liczb.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$$

$a \geqslant 0, b > 0$

Potęgowanie

$$\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

$$\sqrt{7^2} = \left(\sqrt{7}\right)^2 = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7$$

$a \geqslant 0$

Pierwiastek sześcienny

Iloczyn

Pierwiastek sześcienny z iloczynu liczb a i b jest równy iloczynowi pierwiastków sześciennych z tych liczb.

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{27}$$

Iloraz

Pierwiastek sześcienny z ilorazu liczb a i b jest równy ilorazowi pierwiastków sześciennych z tych liczb.

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \qquad \sqrt[3]{\frac{-8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}$$

$b \neq 0$

Potęgowanie

$$\sqrt[3]{a^3} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$$

$$\sqrt[3]{5^3} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = 5$$

Przykład 1.

Oblicz.

a) $\sqrt{2^6}$

Liczbę podpierwiastkową zapiszemy w postaci $\left(a^m\right)^n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi. ⇒ $\sqrt{2^6} = \sqrt{\left(2^3\right)^2}$

Skorzystamy z faktu, że $\sqrt{a^2} = a$ dla $a \geqslant 0$. ⇒ $\sqrt{\left(2^3\right)^2} = 2^3 = 8$

b) $\sqrt[3]{(-5)^{12}}$

Liczbę podpierwiastkową zapiszemy w postaci $\left(a^m\right)^n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi. ⇒ $\sqrt[3]{(-5)^{12}} = \sqrt[3]{\left((-5)^4\right)^3}$

Skorzystamy z faktu, że $\sqrt[3]{a^3} = a$ ⇒ $\sqrt[3]{\left((-5)^4\right)^3} = (-5)^4 = 5^4 = 625$

Ćwiczenie 1.

Oblicz.

a) $\sqrt{5^4}$ **b)** $\sqrt{3^{10}}$ **c)** $\sqrt[3]{2^{15}}$ **d)** $\sqrt[3]{(-4)^9}$

Przykład 2.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\left(3\sqrt{7}\right)^2$

Skorzystamy ze wzoru $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz n jest liczbą naturalną, a następnie z własności $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

$$\left(3\sqrt{7}\right)^2 = 3^2 \cdot \left(\sqrt{7}\right)^2 = 9 \cdot 7 = 63$$

b) $\left(2\sqrt{5}\right)^4$

Skorzystamy ze wzorów $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ i $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$, gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz m, n są liczbami naturalnymi.

$$\left(2\sqrt{5}\right)^4 = 2^4 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^4 = 16 \cdot \left(\left(\sqrt{5}\right)^2\right)^2 = 16 \cdot 5^2 = 16 \cdot 25 = 400$$

c) $\left(2\sqrt[3]{2}\right)^6$

Skorzystamy ze wzorów $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ i $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$, gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz m, n są liczbami naturalnymi.

$$\left(2\sqrt[3]{2}\right)^6 = 2^6 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = 64 \cdot \left(\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\right)^2 = 64 \cdot 2^2 = 64 \cdot 4 = 256$$

Ćwiczenie 2.

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\left(4\sqrt{5}\right)^2$ **b)** $\left(2\sqrt{2}\right)^4$ **c)** $\left(4\sqrt[3]{3}\right)^3$ **d)** $\left(2\sqrt[3]{3}\right)^6$

Przykład 3.

Oblicz.

a) $\left(\sqrt[3]{6}\right)^4 : \sqrt[3]{6}$

Skorzystamy ze wzoru $a^m : a^n = a^{m-n}$, gdzie $a \neq 0$, m, n są liczbami naturalnymi oraz $m \geqslant n$, a następnie z własności $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

$$\left(\sqrt[3]{6}\right)^4 : \sqrt[3]{6} = \left(\sqrt[3]{6}\right)^{4-1} = \left(\sqrt[3]{6}\right)^3 = 6$$

b) $2 \cdot \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \cdot 7\sqrt[3]{5}$

Zastosujemy prawo przemienności mnożenia.

$$2 \cdot \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \cdot 7\sqrt[3]{5} = 2 \cdot 7 \cdot \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{5} = 14 \cdot \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{5}$$

Skorzystamy ze wzoru $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, gdzie $a \neq 0$ oraz m, n są liczbami naturalnymi, a następnie z własności $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

$$14 \cdot \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{5} = 14 \cdot \left(\sqrt[3]{5}\right)^{2+1} = 14 \cdot \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 14 \cdot 5 = 70$$

Ćwiczenie 3.

Oblicz.

a) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^4 : \sqrt[3]{7}$ **b)** $\sqrt[3]{-4} \cdot \left(\sqrt[3]{-4}\right)^2$ **c)** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} \cdot 6 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$ **d)** $8 \cdot \left(\sqrt[3]{0{,}1}\right)^5 : \left(\sqrt[3]{0{,}1}\right)^2$

Rozwiąż zadania

1. Oblicz.

a) $\sqrt{12^4}$ **b)** $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$ **c)** $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^{15}}$ **d)** $-\sqrt[3]{(-0{,}3)^9}$

2. Oblicz.

a) $(3\sqrt{6})^2$ **b)** $\left(\frac{1}{6}\sqrt{12}\right)^2$ **c)** $(3\sqrt[3]{7})^3$ **d)** $(2\sqrt{3})^6$

e) $(2\sqrt[3]{4})^6$ **f)** $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{4}\right)^3$ **g)** $\left(\frac{\sqrt[3]{-5}}{2}\right)^6$ **h)** $\left(\frac{-\sqrt[3]{3}}{2}\right)^9$

3. Oblicz.

a) $(\sqrt[3]{-11})^4 : \sqrt[3]{-11}$ **b)** $\sqrt[3]{0{,}2} \cdot (\sqrt[3]{0{,}2})^2$

c) $0{,}25\sqrt[3]{3} \cdot 8 \cdot (\sqrt[3]{3})^2$ **d)** $10 \cdot \left(\sqrt[3]{-2\frac{1}{2}}\right)^5 : \left(\sqrt[3]{-2\frac{1}{2}}\right)^2$

4. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt{9^2} + 3\sqrt{25^2}$ **b)** $4\sqrt{7^2} - 2\sqrt{16^2}$ **c)** $-2\sqrt[3]{12^3} + 5\sqrt[3]{5^3}$

d) $-2\sqrt[3]{10^3} - 3\sqrt{3^2}$ **e)** $(\sqrt{13})^2 + 2(\sqrt[3]{6})^3$ **f)** $3\sqrt{100} - 5\sqrt[3]{(-4)^3}$

g) $(-2\sqrt[3]{2})^3 + 6(\sqrt[3]{-9})^3$ **h)** $\sqrt{64^3} + \sqrt{64^2}$ **i)** $2\sqrt{25^3} - 3\sqrt[3]{(-27)^2}$

5. Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $\frac{25}{\sqrt{5}}$ i $5\sqrt{5}$ **b)** $-\frac{64}{\sqrt{2}}$ i $-32\sqrt{2}$ **c)** $\frac{72}{\sqrt{6}}$ i $10\sqrt{6}$

6. Kuba i Ela kupili koszulki z wybranymi przez siebie nadrukami. Z przodu koszulek nadrukowano owoce, a z tyłu ich nazwy zapisane w postaci wyrażeń.

a) Jaki owoc Kuba ma nadrukowany na koszulce?

b) Zaproponuj wyrażenie, które może widnieć na koszulce Eli. Użyj symboli pierwiastków.



E

Informacje do zadań 7. i 8.

Dane jest wyrażenie: $\sqrt{a-4}+\sqrt[3]{b^3+56}$, gdzie $a \geqslant 4$.

7. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia dla $a = 200$ i $b = 2$ jest równa

A. 16 **B.** 18 **C.** 22 **D.** 24

8. Czy wartość wyrażenia dla $a = 8$ i $b = -4$ jest liczbą ujemną?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	4 jest liczbą dodatnią.
			2.	0 nie jest liczbą ujemną.
B.	Nie,		**3.**	–58 jest liczbą ujemną.

9. Porównaj wartości wyrażeń $\frac{\sqrt[3]{64}}{4}-\frac{4}{\sqrt[3]{64}}$ i $\frac{\sqrt{27}}{3}-\frac{2}{\sqrt{12}}$. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

a) $(\sqrt{15})^4$ **b)** $(\sqrt[3]{-1{,}4})^6$ **c)** $(5\sqrt{0{,}2})^2$ **d)** $\left(-\frac{1}{10}\sqrt[3]{-100}\right)^3$

2. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Wartość wyrażenia $\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5})^2\cdot\sqrt{3}$ jest liczbą [**A** | **B**].

A. wymierną **B.** niewymierną

Wartości wyrażeń $27\sqrt[3]{3}\cdot\frac{1}{3}(\sqrt[3]{3})^2$ i $81\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^5:\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^2$ są [**C** | **D**].

C. równe **D.** różne

3. Oblicz wartość wyrażenia $\left(-\frac{1}{4}\sqrt[3]{16}\right)^3-2\sqrt{64}$.

4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Wartość wyrażenia $\frac{3}{\sqrt{3}}$ jest mniejsza od liczby $\sqrt{3}$.	**P**	**F**
Wartości wyrażeń $\frac{12}{\sqrt{6}}$ i $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ są równe.	**P**	**F**

PODSUMOWANIE DZIAŁU IV
Pierwiastki

Powtórz wiadomości

Pierwiastek

stopień pierwiastka → $\sqrt[n]{a}$ ← liczba podpierwiastkowa

Pierwiastek kwadratowy

$\sqrt{a} = b$, gdy $b^2 = a$, gdzie $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

$\sqrt{16} = 4$, bo $4^2 = 16$.

$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$, gdzie $a \geqslant 0$

$(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5^2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$

Pierwiastek sześcienny

$\sqrt[3]{a} = b$, gdy $b^3 = a$

$\sqrt[3]{-27} = -3$, bo $(-3)^3 = -27$.

$(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$

$(\sqrt[3]{7})^3 = \sqrt[3]{7^3} = \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7} = 7$

Dodawanie i odejmowanie pierwiastków

Możemy dodawać lub odejmować tylko te pierwiastki, które są tego samego stopnia i mają tę samą liczbę podpierwiastkową.

$\underline{\sqrt{3}} + \underline{2\sqrt{3}} - 5\sqrt[3]{3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt[3]{3}$

Mnożenie i dzielenie pierwiastków

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, gdzie $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$

$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$

$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, gdzie $a \geqslant 0$, $b > 0$

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$

$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, gdzie $b \neq 0$

$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

Usuwanie niewymierności z mianownika

Przekształcamy wyrażenie, tak aby w mianowniku nie występował niewymierny pierwiastek.

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Sprawdź umiejętności

1. Oblicz.

a) $\sqrt{576}$ **b)** $\sqrt{\frac{100}{121}}$ **c)** $\sqrt{0{,}0144}$ **d)** $\sqrt{3\frac{6}{25}}$

e) $\sqrt[3]{125\,000}$ **f)** $\sqrt[3]{\frac{1}{216}}$ **g)** $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$ **h)** $\sqrt[3]{-0{,}729}$

2. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{112}$ **b)** $\sqrt{276}$ **c)** $\sqrt[3]{162}$ **d)** $\sqrt[3]{-448}$

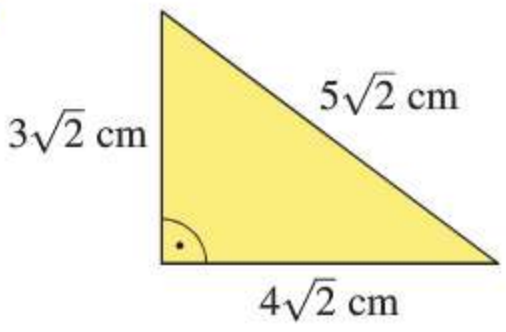
3. Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

a) $3\sqrt{17}$ **b)** $\frac{1}{2}\sqrt{22}$ **c)** $2\sqrt[3]{9}$ **d)** $-1\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

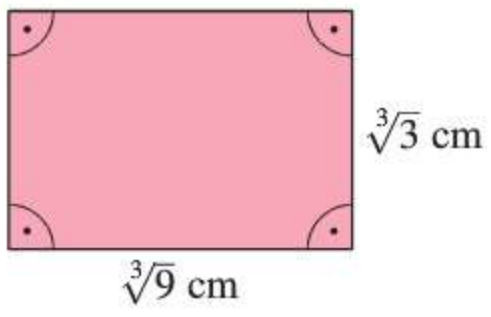
4. Uporządkuj liczby: $2\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{-8}$, $-2\sqrt{2}$, $3\sqrt[3]{0}$, $-\sqrt{1}$, $\sqrt{1}$ w kolejności rosnącej.

5. Oblicz pole i obwód figury.

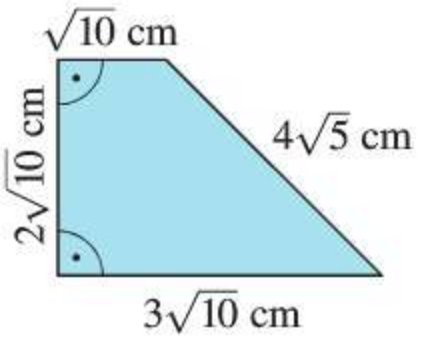
a)



b)



c)



6. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach $2\sqrt{3}$ cm $\times$ $4\sqrt{3}$ cm $\times$ $\sqrt[3]{27}$ cm.

7. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Ułamek $\frac{26\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$ po usunięciu niewymierności z mianownika ma postać | **A** | **B** |.

A. $2\sqrt{26}$ **B.** $26\sqrt{26}$

Ułamek $\frac{34\sqrt{2}}{2\sqrt{34}}$ po usunięciu niewymierności z mianownika ma postać | **C** | **D** |.

C. $\sqrt{17}$ **D.** $\sqrt{34}$

8. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\frac{\sqrt{25}\cdot\sqrt{4}}{\sqrt{36}:\sqrt{16}}$ **b)** $\frac{\sqrt{10^2}}{\sqrt[3]{64}}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$

d) $(4\sqrt{3})^2+\sqrt{7^2}$ **e)** $(\sqrt[3]{128}\cdot\sqrt[3]{2}):\sqrt[3]{32}$ **f)** $\frac{(2\sqrt{5})^2\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$

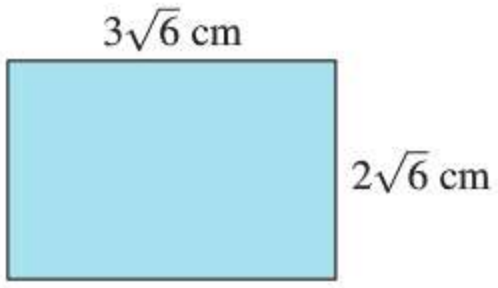
E

9. Zapisz liczbę $\sqrt[3]{135 \cdot 200}$ w najprostszej postaci.

E

Informacje do zadań 10. i 11.

Na rysunku przedstawiono prostokąt.



10. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole tego prostokąta jest równe

A. $5\sqrt{6}\ \text{cm}^2$ **B.** $6\sqrt{6}\ \text{cm}^2$ **C.** $30\ \text{cm}^2$ **D.** $36\ \text{cm}^2$

11. Prostokąt podzielono na sześć jednakowych kwadratów.

Czy obwód jednego takiego kwadratu jest większy niż $16\ \text{cm}$?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	bok tego kwadratu ma długość $\sqrt{6}\ \text{cm}$.
B.	Nie,		**2.**	obwód prostokąta jest równy $10\sqrt{6}\ \text{cm}$.
			3.	pole tego kwadratu jest mniejsze niż $16\ \text{cm}^2$.

12. Dane są wyrażenia: $a = 10 - \sqrt{20}$, $b = \sqrt{2} + 4$, $c = \sqrt[3]{4} + 1$, $d = 10 - \sqrt{5}$. Które z wyrażeń mają wartość mniejszą niż 7? Uzasadnij swoją odpowiedź.

E

13. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Liczba $a = 12$ spełnia warunek $a + 1 < \sqrt{200} < a + 2$.	**P**	**F**
Jeśli $\sqrt{11} \approx 3{,}32$, to $\frac{3\sqrt{11}}{2} \approx 4{,}98$.	**P**	**F**

14. Oblicz.

a) $4 \cdot \left(\sqrt[3]{-3}\right)^6$ **b)** $-8 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$ **c)** $\sqrt{10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^7}$

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Odpowiedz na pytanie i uzasadnij swoją odpowiedź.

a) Czy suma dwóch liczb wymiernych może być liczbą niewymierną?

b) Czy różnica dwóch liczb niewymiernych może być liczbą wymierną?

c) Czy iloczyn dwóch liczb wymiernych może być liczbą niewymierną?

d) Czy iloraz liczby niewymiernej przez liczbę wymierną może być liczbą wymierną?

e) Czy iloraz liczby wymiernej przez liczbę niewymierną może być liczbą wymierną?

2. Oblicz.

a) $\sqrt{784}$ **b)** $\sqrt{1089}$ **c)** $\sqrt[3]{5832}$ **d)** $\sqrt[3]{-13\,824}$

e) $\sqrt{9\frac{100}{125}}$ **f)** $\sqrt{0{,}0729}$ **g)** $\sqrt[3]{-0{,}000001}$ **h)** $\sqrt[3]{1{,}728}$

3. Ile jest równa reszta z dzielenia kwadratu liczby 49 przez pierwiastek kwadratowy z liczby 49?

4. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{6^3}:2}\cdot\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$ **b)** $\sqrt{(-4)\cdot\sqrt[3]{-64}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ **c)** $\sqrt{20\cdot\sqrt[3]{8000}}:\sqrt[3]{\frac{1}{1000}}$

5. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. E

25 % liczby $2\sqrt[3]{4}$ jest równe

A. 1 **B.** $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ **C.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{1}$ **D.** 2

6. Wyznacz wartość x, tak aby otrzymać równość.

a) $3\sqrt{x}=\sqrt{33}$ **b)** $2\sqrt{x}=\frac{24}{5}$

7. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe. E

Wartość wyrażenia $(\sqrt{5}\cdot\sqrt{3})^2+2\sqrt{15}$ jest równa $3\sqrt{15}$.	**P**	**F**
Liczba $\sqrt[3]{\sqrt{16^3}}$ jest wymierna.	**P**	**F**

8. Sprawdź, czy wartość wyrażenia $\frac{2^3\cdot\left(2\sqrt[3]{-250}-\sqrt[3]{-128}\right)}{\sqrt[3]{2}}$ jest liczbą przeciwną do liczby $-\frac{1}{48}$.

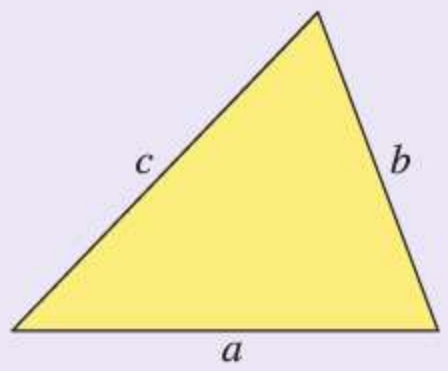
9. Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie równej $4\sqrt{5}$ cm i ramieniu długości $3\sqrt{5}$ cm. Oblicz pole tego trójkąta, korzystając ze wzoru Herona.

Aby obliczyć pole trójkąta o bokach długości: a, b, c, możemy skorzystać ze wzoru Herona.

WZÓR HERONA

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$.



10. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{11^3 : 121}{\sqrt{11}}$.

11. Uzasadnij, że suma $\sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{\frac{5}{4}}$ jest równa $\frac{9\sqrt{5}}{10}$.

E **12.** Dane są przybliżenia $\sqrt{5} \approx 2{,}236$ oraz $\sqrt[3]{10} \approx 2{,}154$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Liczba $\sqrt{500}$ jest równa około | **A** | **B** |.

A. 22,36 **B.** 223,6

Liczba $\sqrt[3]{7\,290\,000}$ jest równa około | **C** | **D** |.

C. $9 \cdot 2{,}154$ **D.** $90 \cdot 2{,}154$

E **13.** Dana jest liczba $a = \sqrt{\frac{2003}{10\,000}}$.

Która z liczb jest położona na osi liczbowej najbliżej liczby a? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 0,4 **B.** 0,42 **C.** 0,45 **D.** 0,47

14. Uzasadnij, że wartość wyrażenia $\left(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7}\right)^3$ jest podzielna przez 9.

15. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sqrt{36 \cdot 9 + 10 \cdot 36 + 6 \cdot 36}$

b) $\sqrt{11^2 \cdot 2 + 11^2 \cdot 7}$

c) $\sqrt[3]{125 \cdot 6 + 9 \cdot 125 + 12 \cdot 125}$

d) $\sqrt[3]{12^3 \cdot 3 + 12^3 \cdot 10 - 12^3 \cdot 5}$

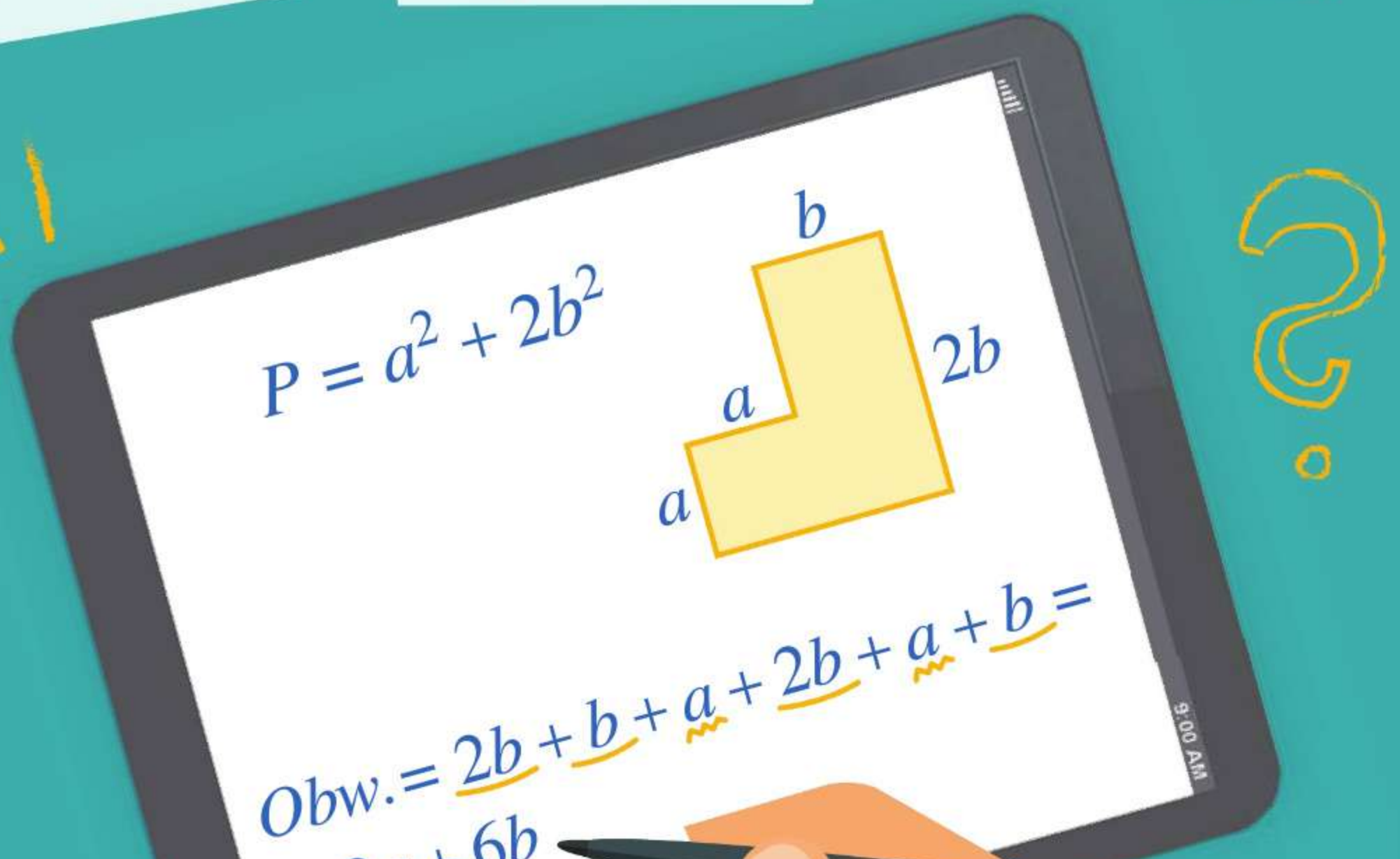
DZIAŁ V

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

Jednomian

Suma algebraiczna

Wyrazy podobne



To ci się przyda!

1. Jednomian i suma algebraiczna

- Odczytywanie i zapisywanie wyrażeń algebraicznych
- Pojęcie jednomianu
- Pojęcie sumy algebraicznej
- Odczytywanie wyrazów sumy algebraicznej

Wyrażenia algebraiczne

Wiesz już, że pojedynczą liczbę lub kilka liczb połączonych znakami działań oraz nawiasami nazywamy wyrażeniami arytmetycznymi. Jak zatem nazwiemy wyrażenia, w których pojawiają się nie tylko liczby, lecz także litery?

Wyrażenia, w których występują liczby i litery połączone znakami działań oraz nawiasami, nazywamy **wyrażeniami algebraicznymi**. Litery w takich wyrażeniach są nazywane **zmiennymi**, np.

$2 \cdot x - 16$ lub $8 : w \cdot (m^2 \cdot n - 3)$.

zmienne

W zapisie wyrażeń algebraicznych możemy pominąć znak mnożenia, jeśli znajduje się on:

- przed symbolem zmiennej, np. $2 \cdot a \cdot b = 2ab$,
- przed nawiasem, np. $4 \cdot (x - y) = 4(x - y)$,
- pomiędzy nawiasem a zmienną, np. $(2 - w) \cdot y = (2 - w)y$.

Przykład 1.

Nazwij wyrażenie algebraiczne.

a) $x + 8$ to **suma** liczby x i liczby 8

b) $4 - b$ to **różnica** liczby 4 i liczby b

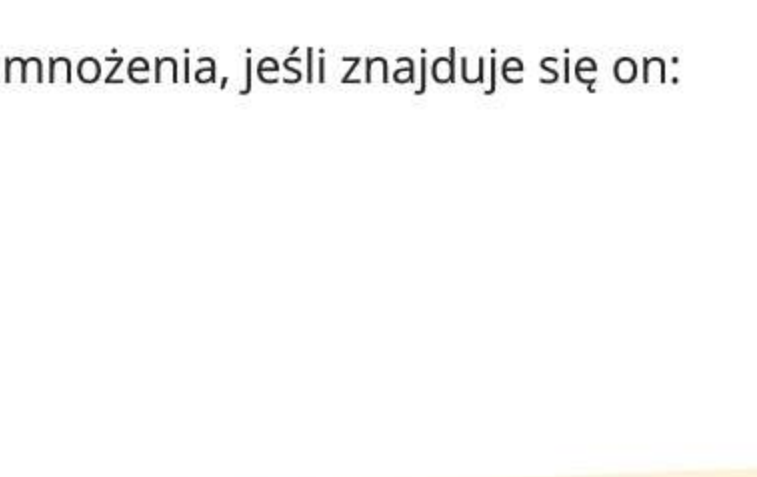
c) $11a$ to **iloczyn** liczby 11 i liczby a
lub jedenastokrotność liczby a

d) $\frac{x}{6}$ to **iloraz** liczby x i liczby 6
lub szósta część liczby x

e) $(y - 2)^2$ to **kwadrat** różnicy liczby y i liczby 2

f) $a^2 + b^2$ to **suma** kwadratu liczby a i kwadratu liczby b

Nazwa wyrażenia algebraicznego pochodzi od działania, które jest wykonywane jako ostatnie.



Ćwiczenie 1.

a) Nazwij wyrażenie algebraiczne.

I. $y - 10$ **II.** $\frac{1}{2}xy$ **III.** $\frac{b-2}{8}$ **IV.** $(3x+4)^2$ **V.** $(5a)^2 - b^2$

b) Zapisz wyrażenie algebraiczne.

I. iloraz liczby 7 oraz różnicy liczby 2 i liczby x

II. kwadrat sumy ilorazu liczby a i liczby 5 oraz liczby b

III. suma kwadratu iloczynu liczby 7 i liczby x oraz kwadratu trzeciej części liczby y

Jednomian

Jednomianem nazywamy wyrażenie algebraiczne, które jest liczbą, literą lub iloczynem liczb i liter.
Jednomian jest **uporządkowany**, jeżeli jego pierwszym czynnikiem jest liczba, a następnymi litery w kolejności alfabetycznej.

$$2x \qquad 4x^2y \qquad -3ab \qquad \frac{2}{3}w^3xy^2$$

Przykład 2.

Przedstaw jednomian *matematyka* w postaci uporządkowanej.

Litery w jednomianie uporządkujemy alfabetycznie, a następnie iloczyny tych samych czynników zapiszemy w postaci potęg.

$matematyka = aaaekmmtty = a^3ekm^2t^2y$



Ćwiczenie 2.

Przedstaw jednomian w postaci uporządkowanej.

a) *kajak*

b) *ananas*

c) *rabarbar*

Liczbę, która występuje na początku uporządkowanego jednomianu, nazywamy **współczynnikiem liczbowym** tego jednomianu.



Każdy jednomian ma współczynnik liczbowy.

- Współczynnikiem liczbowym jednomianu $xy^3 = 1 \cdot xy^3$ jest liczba 1.
- Współczynnikiem liczbowym jednomianu $-a^2b = -1 \cdot a^2 \cdot b$ jest liczba -1.

Przykład 3.

Przedstaw jednomian w postaci uporządkowanej i podaj jego współczynnik liczbowy.

a) $3x \cdot 2x^2$

Wykonamy mnożenie liczb i wynik zapiszemy na początku jednomianu, natomiast iloczyny takich samych czynników przedstawimy w postaci potęgi.

$$3x \cdot 2x^2 = 3 \cdot 2 \cdot x \cdot x^2 = 6x^3$$

Współczynnik liczbowy tego jednomianu jest równy 6.

b) $-4a \cdot 2b \cdot \frac{1}{8}c$

Uporządkujemy jednomian, a następnie wykonamy mnożenie.

$$-4a \cdot 2b \cdot \frac{1}{8}c = -4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot a \cdot b \cdot c =$$
$$= -8 \cdot \frac{1}{8} \cdot a \cdot b \cdot c = -1abc = -abc$$

Współczynnik liczbowy tego jednomianu jest równy -1.

Ćwiczenie 3.

Przedstaw jednomian w postaci uporządkowanej i podaj jego współczynnik liczbowy.

a) $-3x \cdot \frac{1}{6}y$ **b)** $-\frac{1}{7}z^3 \cdot 14x \cdot \left(-\frac{1}{2}y^2\right)$ **c)** $-6ab \cdot (-5ac) \cdot \left(-\frac{1}{3}bc\right)$

Suma algebraiczna

Wyrażenie algebraiczne, które powstaje poprzez dodanie jednomianów, nazywamy **sumą algebraiczną**, np.

$3a + 4b$ lub $-2x^2 + (-4xy)$.

wyrazy sum algebraicznych

Przykład 4.

Wypisz wyrazy sumy algebraicznej.

a) $-3ab + 4c + 7$

Wyrazy sumy algebraicznej to: $-3ab$, $4c$ oraz 7.

b) $-11x^3 + \left(-4x^2\right) + 3x - 7\sqrt{3}$

Wyrazy sumy algebraicznej to: $-11x^3$, $-4x^2$, $3x$ oraz $-7\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 4.

Wypisz wyrazy sumy algebraicznej.

a) $2ab - 3ac + 4bc$ **b)** $-0{,}2xy + 0{,}4x - 2y$ **c)** $-4\frac{1}{2}z^3 + \left(-7z^2\right) - 8z + 1$

Przykład 5.

Agata ma x lat, jej siostra Iwona jest od niej dwa razy starsza, a brat Kacper jest od Agaty młodszy o 4 lata. Zapisz sumę algebraiczną określającą, ile lat mają razem Agata, Iwona i Kacper.

Oznaczymy wiek rodzeństwa za pomocą zmiennych. ⇒

x – wiek Agaty
$2x$ – wiek Iwony (jest dwa razy starsza od Agaty)
$x-4$ – wiek Kacpra (jest młodszy od Agaty o 4 lata)

Dodamy wiek rodzeństwa. ⇒ $x+2x+x-4$

Odp. Agata, Iwona i Kacper mają razem $(x+2x+x-4)$ lat.

Ćwiczenie 5.

Przyjaciele Kuba, Zosia i Pola sprzedali na aukcjach internetowych swoje stare rowery. Kuba na sprzedaży roweru zarobił x zł, Zosia – kwotę o 10 zł większą niż Kuba, a Pola – kwotę o 5 zł mniejszą niż Kuba. Zapisz sumę algebraiczną określającą, ile złotych zarobili razem na aukcjach.



Rozwiąż zadania

1. Nazwij wyrażenie algebraiczne.

a) $2y-8$ **b)** $\frac{2}{3}x^2$ **c)** $\frac{10+d}{17}$ **d)** $x^2-(9y)^2$ **e)** $\left(3+\frac{1}{7}a\right)^2$

2. Zapisz wyrażenie algebraiczne.

a) iloczyn liczby -2 i sześcianu liczby b
b) iloraz liczby 7 oraz iloczynu liczby c i liczby d
c) suma połowy liczby d i kwadratu liczby x
d) różnica kwadratu iloczynu liczby 6 i liczby a oraz kwadratu czwartej części liczby c
e) sześcian sumy ilorazu liczby 4 i liczby x oraz potrojonej liczby y
f) iloczyn jednej trzeciej sześcianu liczby h i połowy kwadratu potrojonej liczby h

3. Przedstaw jednomian w postaci uporządkowanej i podaj jego współczynnik liczbowy.

a) $-2x\cdot\frac{1}{4}y$ **b)** $9x\cdot\frac{2}{3}y^2$ **c)** $\frac{1}{6}z^3\cdot(-12x)\cdot\left(-\frac{1}{2}y^2\right)$
d) $\frac{1}{5}x^2\cdot 10y^2\cdot 3z^2$ **e)** $-8ef\cdot(-2eg)\cdot\left(-\frac{1}{16}fg\right)$ **f)** $-10\sqrt{3}ab\cdot(-bc)\cdot\left(-\sqrt{3}ab\right)$

4. Wypisz wyrazy sumy algebraicznej.

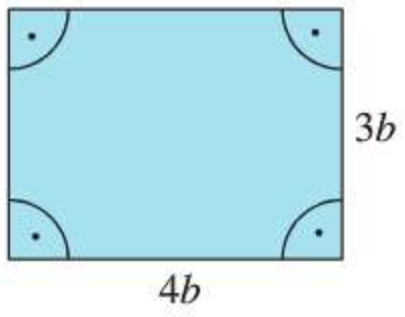
a) $24x^3+\left(-15x^2\right)+14x-15$ **b)** $-5xy+33x^2y-45xy^2$
c) $-0{,}1cd+5{,}4c+\sqrt{2}d$ **d)** $-5\frac{3}{4}a^3+10a^2+5{,}2a-7\frac{5}{7}$

5. Zapisz w postaci jednomianu pole:

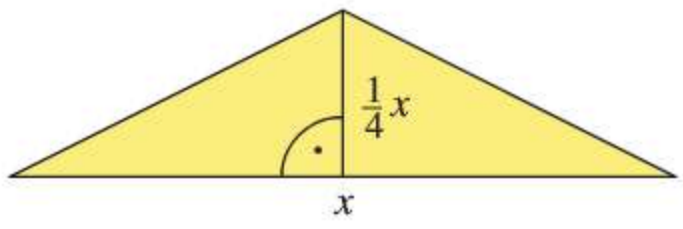
a) kwadratu o boku długości a, **b)** kwadratu o boku długości $3b$,
c) prostokąta o bokach długości 5 i $3c$, **d)** prostokąta o bokach długości $4d$ i $\frac{3}{4}d$.

6. Zapisz w postaci jednomianu pole figury.

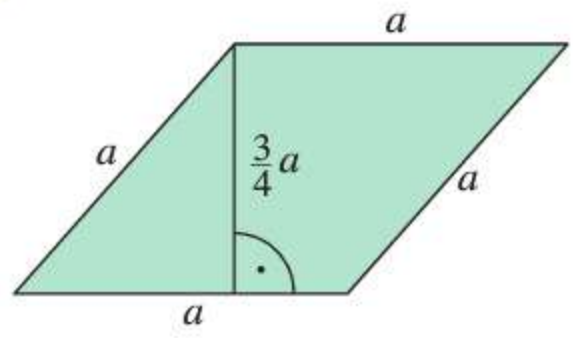
a)



b)



c)



7. Kilogram cukru kosztuje x zł, a kilogram mąki jest tańszy o 70 gr. Zapisz w postaci sumy algebraicznej, ile zapłacimy za zakup 3 kg cukru i 1 kg mąki.

8. Tata Eli zbiera punkty za zakupione paliwo. W kwietniu uzbierał y punktów, w maju o 20 punktów mniej niż w kwietniu, a w czerwcu dwa razy mniej niż w kwietniu. Zapisz w postaci sumy algebraicznej, ile punktów łącznie uzbierał tata Eli za paliwo zakupione w drugim kwartale roku.

9. Janek i Franek grają w komputerową grę drużynową, w której zbierają punkty. W piątek Janek zdobył y punktów, a Franek o 150 punktów więcej. W sobotę Janek powiększył liczbę swoich punktów dwukrotnie, Franek natomiast zdobył 1200 punktów. Zapisz sumę algebraiczną opisującą łączną liczbę punktów zdobytych przez chłopców.

10. Zapisz w postaci jednomianów liczbę naturalną podzielną przez 2 oraz liczbę naturalną podzielną przez 3. Uzasadnij, że iloczyn tych liczb jest wielokrotnością liczby 6.

Sprawdź, co umiesz!

1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kwadrat sumy połowy ilorazu liczby x i liczby y oraz iloczynu liczby 3 i liczby y to

A. $\left(\frac{2 \cdot x}{y} + 3y\right)^2$ **B.** $\left(\frac{x}{2y} + 3y\right)^2$ **C.** $\left(0{,}5 \cdot \frac{x}{y}\right)^2 + (3y)^2$ **D.** $\left(0{,}5 \cdot \frac{x}{y}\right)^2 + 3y$

2. Zapisz w postaci jednomianu pole:

a) prostokąta o bokach długości $4x$ i $2y$, **b)** kwadratu o boku długości $\sqrt{6}x$.

3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Wyrazy sumy algebraicznej $-2x^2 + 7x - 11$ to: $-2x^2$, $7x$ i 11.	**P**	**F**
Uporządkowany jednomian *ballada* ma postać a^3bdl^2.	**P**	**F**

2. Redukcja wyrazów podobnych

- Rozpoznawanie jednomianów podobnych
- Upraszczanie sum algebraicznych
- Obliczanie wartości liczbowych wyrażeń algebraicznych

Przymiotnik *podobny* według słowników języka polskiego oznacza: mający pewne cechy wspólne z czymś, kimś.

Jednomiany nazywamy **podobnymi**, jeżeli zawierają te same czynniki literowe i są one w takiej samej potędze.

Jednomiany podobne mogą się różnić tylko współczynnikiem liczbowym lub kolejnością czynników.

Jednomiany $3x^2$ i $-2x^2$ **są podobne** – różnią się tylko współczynnikiem liczbowym.

Jednomiany $-4xy^2z$ i $-4xzy^2$ **są podobne** – różnią się tylko kolejnością czynników.

Jednomiany $7ab^3$ i $8ab^2$ **nie są podobne** – zmienna b występuje w różnych potęgach.

Jednomiany a^2 i $a \cdot a$ **są podobne**, ponieważ $a^2 = a \cdot a$.

Przykład 1.

Wskaż jednomiany podobne.

$-6xyx$ $\quad 3y^2x$ $\quad 2xy$ $\quad 0{,}3x^2y$ $\quad -0{,}1xy$ $\quad yxy$

Wśród podanych jednomianów możemy wskazać trzy pary jednomianów podobnych:

$-6xyx$ i $0{,}3x^2y$, $3y^2x$ i yxy oraz $2xy$ i $-0{,}1xy$.

Ćwiczenie 1.

Na koszulkach nadrukowano jednomiany. Wskaż, na których z czterech koszulek są jednomiany podobne.



Tylko jednomiany podobne możemy dodawać i odejmować.
Taką operację nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**, np.

$$4x + 2xy + 10x - xy = 14x + xy.$$

Przykład 2.

Zredukuj wyrazy podobne.

a) $3x - 2y + 7xy - 5x + 6y - 8xy$

Redukcję wyrazów podobnych rozpoczniemy od zaznaczenia jednomianów podobnych.

$$3x - 2y + 7xy - 5x + 6y - 8xy$$

Przeprowadzimy redukcję wyrazów podobnych.

$$3x - 5x = -2x$$
$$-2y + 6y = 4y$$
$$7xy - 8xy = -1xy = -xy$$

Ostatecznie otrzymaliśmy $3x - 2y + 7xy - 5x + 6y - 8xy = -2x + 4y - xy$.

b) $2a - 4a^2 - 6a + 5 + 9a^2 - 8a$

Zaznaczymy jednomiany podobne, przeprowadzimy redukcję wyrazów podobnych, a następnie uporządkujemy sumę algebraiczną.

$$2a - 4a^2 - 6a + 5 + 9a^2 - 8a =$$
$$= -12a + 5a^2 + 5 =$$
$$= 5a^2 - 12a + 5$$

c) $6a + 7ab - 8bc + 4ac - 6a + 8cb$

Zaznaczymy jednomiany podobne, a następnie przeprowadzimy redukcję wyrazów podobnych.

$$6a + 7ab - 8bc + 4ac - 6a + 8cb =$$
$$= 7ab + 4ac$$

Suma jednomianów podobnych, których współczynniki liczbowe są liczbami przeciwnymi, jest równa 0, np.

$$6a + (-6a) = 0, \qquad -8bc + 8bc = 0.$$

Ćwiczenie 2.

Zredukuj wyrazy podobne.

a) $-9k + 6l - 8kl - 6l + 14k$

b) $3x + 4x^2 - 3x + 9 - 4x^2$

c) $4m^2n + 8mn^2 - 2 - 9m^2n - 11mn^2$

d) $-8abc - 12bc + 9bca + 12 - 8bc$

Aby obliczyć **wartość liczbową wyrażenia algebraicznego**, w miejsce zmiennych wstawiamy odpowiednie liczby i wykonujemy działania.

Przykład 3.

Oblicz wartość liczbową wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $3x^2 - 5x + 7$ dla $x = 3$

W miejsce x wstawimy liczbę 3 i obliczymy wartość wyrażenia.

$$3 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 7 =$$
$$= 3 \cdot 9 - 15 + 7 = 27 - 15 + 7 = 19$$

b) $2x^2y^2 - 3$ dla $x = 5$ i $y = -1$

W tym wyrażeniu występują dwie zmienne: x i y.

W miejsce zmiennej x wstawimy liczbę 5, w miejsce zmiennej y – liczbę (-1), a następnie obliczymy wartość wyrażenia.

$$2 \cdot 5^2 \cdot (-1)^2 - 3 =$$
$$= 2 \cdot 25 \cdot 1 - 3 = 50 - 3 = 47$$

Ćwiczenie 3.

Oblicz wartość liczbową wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $3x^2 - 7x - 8$ dla $x = -2$

b) $-2x^2 + 5x + 3$ dla $x = -4$

c) $-x^2 - x(1 - 2x)$ dla $x = -1$

d) $3xy^2 - 4y$ dla $x = \frac{1}{2}$ i $y = \sqrt{3}$

Przykład 4.

Uprość sumę algebraiczną $3xy^2 - 8xy - 2 - 4xy^2$, a następnie oblicz jej wartość liczbową dla $x = -1$ oraz $y = -3$.

Wykonamy redukcję wyrazów podobnych.

$$\underline{3xy^2} - 8xy - 2 \underline{- 4xy^2} = -xy^2 - 8xy - 2$$

W miejsce zmiennej x wstawimy liczbę (-1), a w miejsce zmiennej y – liczbę (-3).

$$-(-1) \cdot (-3)^2 - 8 \cdot (-1) \cdot (-3) - 2 =$$
$$= 1 \cdot 9 + 8 \cdot (-3) - 2 = 9 - 24 - 2 = -17$$

Ćwiczenie 4.

Uprość sumę algebraiczną, a następnie oblicz jej wartość liczbową dla podanych wartości zmiennych.

a) $8kl - 4 + 7k - 9lk$ dla $k = 4$ i $l = -5$

b) $-9a^2 - 15 + 8b^2 - 6a^2$ dla $a = -1$ i $b = -0,25$

Rozwiąż zadania

1. Spośród podanych jednomianów wybierz jednomiany podobne i zapisz je w zeszycie.

$34a^3$	$9a^2b^2c$	$-15a^2b$	a^3	$-18a^2cb$
$-5a^2b^2$	$\frac{1}{3}b^2a^2$	$12a^2b^2$	$-21a^2b$	$11a^2bc^2$	$-25c^3$
$-0,5a^2cb^2$	$-0,25a^3$	$8a^2bc$	$-0,25a^2bc^2$	$-0,54c^3$

2. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $14x + 3y - 5x + 7y - x$

b) $7x + 2y - 20x - 11y - x$

c) $-12p + 7s + 12p - s + p - 10$

d) $-5x + 10x^2 - 8x + 13$

e) $-9k + 2\frac{3}{4}l - 8kl - 0{,}75l + 14k$

f) $-\frac{2}{3}abc - 12ab^2 + 1\frac{1}{3}abc + 18 - 10b^2a$

g) $0{,}4bc - 12ab^2 + 2\frac{4}{5}bc + 18 + 10ab^2$

h) $\frac{1}{2}n^2m + \frac{3}{7}nm^2 - 6 - \frac{3}{4}mn^2 - \frac{3}{14}nm^2$

3. Oblicz wartość liczbową wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $2a^2 + 8a - 10$ dla $a = -3$

b) $-3b^2 + 1{,}2b + 1$ dla $b = -5$

c) $-2c^2 - 3c(3 - 5c)$ dla $c = -2$

d) $5dy^3 - 15d$ dla $d = -\frac{1}{2}$ i $y = 2$

e) $-3eg^3 - 18e^2$ dla $e = -\frac{1}{3}$ i $g = \sqrt[3]{4}$

f) $-f^2y^3 + 9yf^3$ dla $f = -1$ i $y = \frac{1}{3}$

4. Zapisz w najprostszej postaci sumę algebraiczną, a następnie oblicz jej wartość liczbową dla podanych wartości zmiennych.

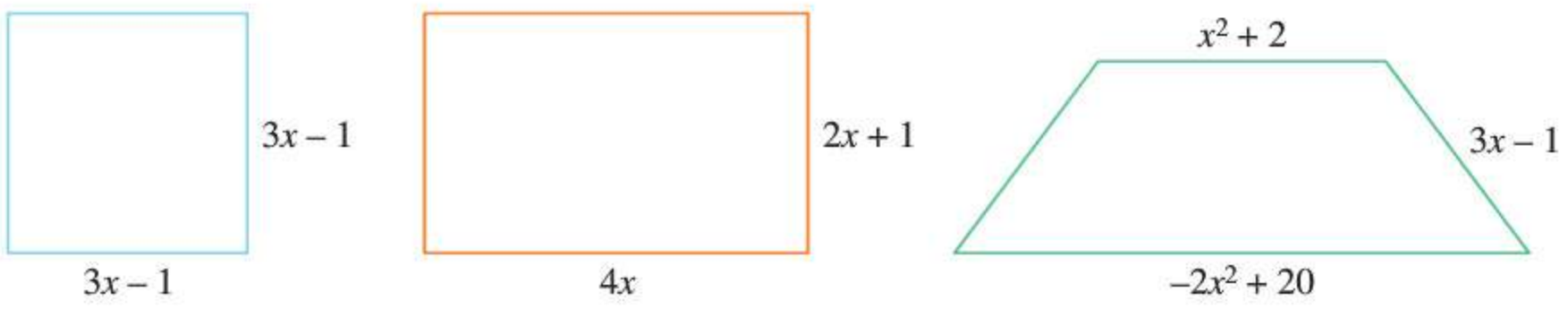
a) $-2ab - 6 + 8a - 7ab$ dla $a = -2$ i $b = -3$

b) $5b^2 - 10 + 4c^2 + 6b^2$ dla $b = -1$ i $c = 1{,}5$

c) $-3cy^2 - 10c^2y + 10c - 5 + 3c$ dla $c = -3$ i $y = \frac{1}{3}$

d) $26kl^3 + l^3k - 8k^3 + 20 - 9l$ dla $k = -\frac{1}{2}$ i $l = -1\frac{1}{3}$

5. Dane są: kwadrat, prostokąt i trapez równoramienny. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące sumę ich obwodów. Przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

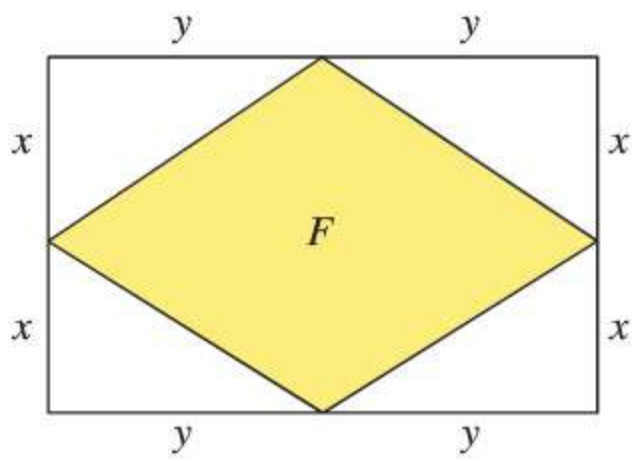


6. W jednej beczce jest x litrów wody, a w drugiej y litrów wody. Zapisz wyrażenia algebraiczne opisujące, ile litrów wody będzie w każdej z beczek, jeśli z drugiej beczki przelejemy do pierwszej $\frac{2}{3}$ zawartości drugiej beczki i do każdej z nich dolejemy po 5 l wody.



7. Trzy różne krawędzie prostopadłościanu mają długości: pierwsza $12a$, druga jest cztery razy dłuższa od pierwszej, a trzecia stanowi połowę długości drugiej. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego sumę długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu i oblicz jego wartość dla $a = 1{,}5$.

8. Zosia wycięła z prostokątnej kartki papieru figurę F przedstawioną na rysunku. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące pole tej figury. Pamiętaj o redukcji wyrazów podobnych.



Sprawdź, co umiesz!

1. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $-22x + 12y - 10x - 12y$

b) $\frac{3}{4}klm - \frac{7}{8}klm^2 + 1\frac{3}{8}mlk$

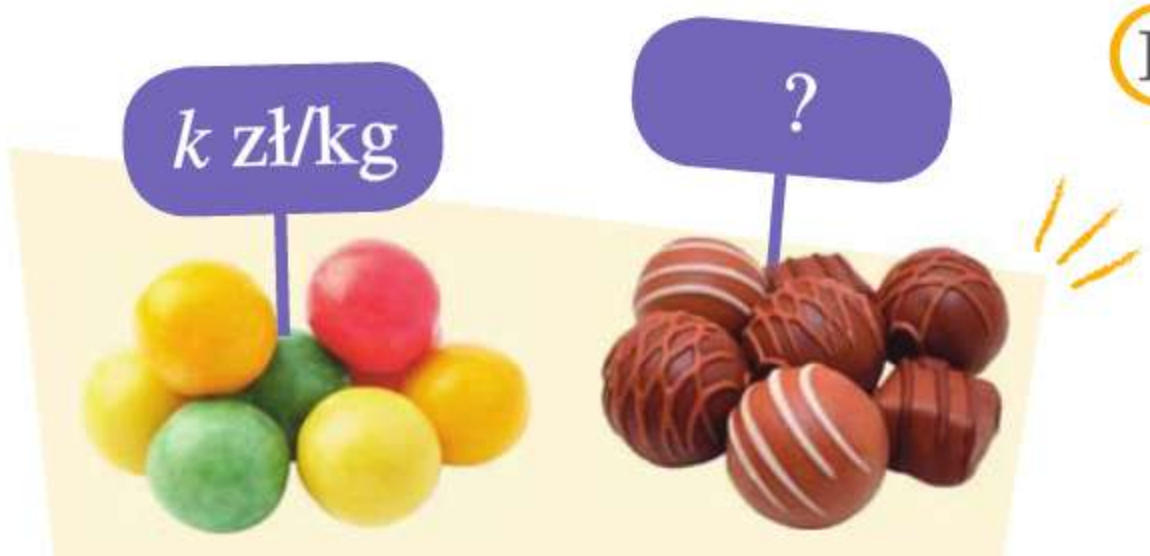
c) $25ab^2 - 45 + ab^2 + 12$

d) $-5x^2 + 4{,}75x + 10{,}5x^2 + 19 - 12x$

2. Cena za 1 kg cukierków owocowych jest równa k zł, a cena za 1 kg cukierków czekoladowych jest o 12 zł wyższa. Zmieszano 1 kg cukierków czekoladowych z 2 kg cukierków owocowych.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Za 3 kg tej mieszanki należy zapłacić



A. $(3k + 12)$ zł **B.** $(k + 3)$ zł **C.** $(k + 4)$ zł **D.** $(3k + 3)$ zł

3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Na ogrodzenie skweru o szerokości x m i długości $(x + 12)$ m potrzeba $(2x + 12)$ m płotu.	**P**	**F**
Obwód równoległoboku o bokach długości $3x^2 + 7$ i $2x^2 - 1$ jest równy $10x^2 + 12$.	**P**	**F**

4. Dane są liczby: $x = \frac{1}{4}$, $y = 2\frac{1}{6}$ oraz $z = \frac{7}{36}$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Wartość liczbowa sumy połowy liczby x i dwunastokrotności liczby y jest równa | **A** | **B** |.

A. $4\frac{1}{12}$ **B.** $26\frac{1}{8}$

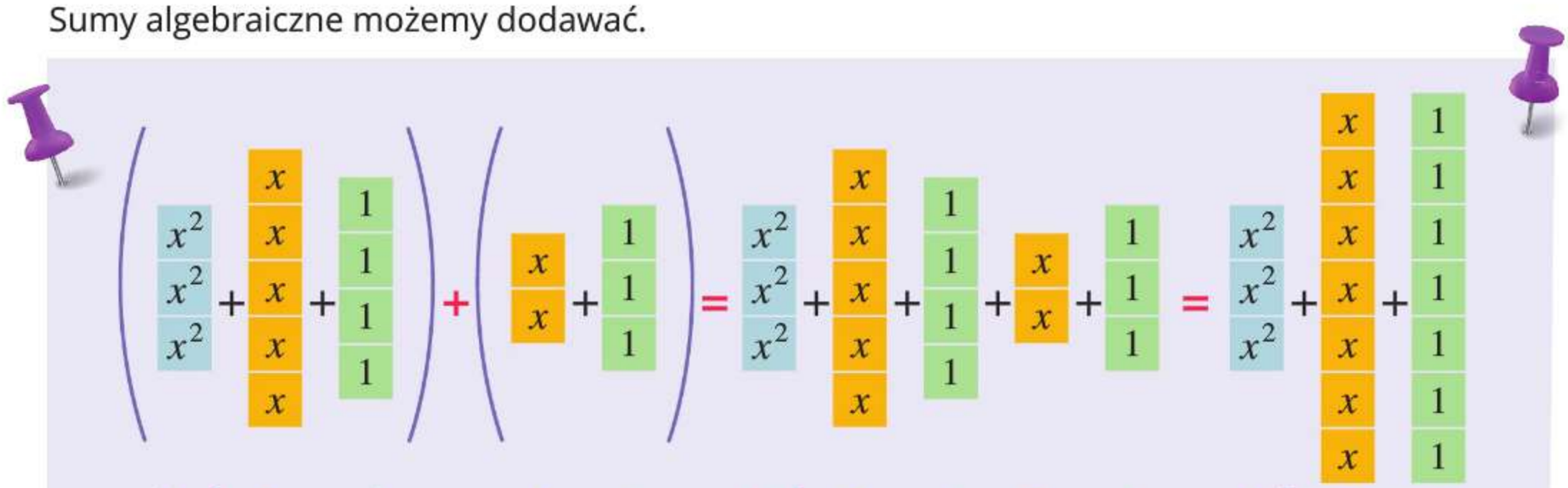
Wartość liczbowa wyrażenia $\sqrt{1\frac{1}{2}y - 2z - \frac{1}{2}y}$ jest równa | **C** | **D** |.

C. $1\frac{1}{3}$ **D.** $1\frac{7}{9}$

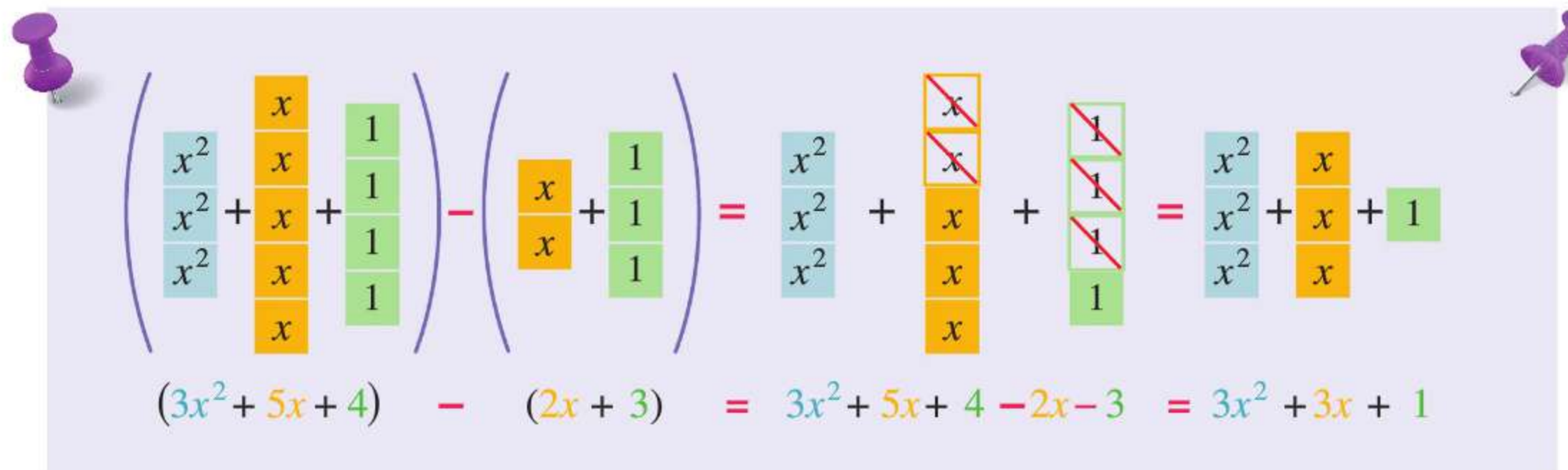
3. Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

- Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych
- Reguły opuszczania nawiasów w wyrażeniach algebraicznych

Sumy algebraiczne możemy dodawać.



Sumy algebraiczne możemy odejmować.



Aby uprościć wyrażenie powstałe w wyniku dodawania lub odejmowania sum algebraicznych, musimy najpierw pozbyć się nawiasów.

Przykład 1.

Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

a) $-2x+(4x-4y+7)$

Opuścimy nawias bez zmiany znaków przed poszczególnymi jednomianami, a następnie wykonamy redukcję wyrazów podobnych.

$$\begin{aligned}&-2x+(4x-4y+7)=\\&=-2x+4x-4y+7=\\&=2x-4y+7\end{aligned}$$

Składniki w dodawaniu możemy dodawać w dowolnej kolejności.
Nawias opuszczamy bez jakichkolwiek zmian, jeśli przed nawiasem:

występuje znak dodawania, np. $x^2+(x-1)=x^2+x-1$, lub nie występuje żaden znak, np. $(x+y)+3=x+y+3$.

b) $4x-(x-5y+7)$

Opuścimy nawias i zmienimy znak na przeciwny przed każdym jednomianem w nawiasie. Wykonamy redukcję wyrazów podobnych.

$$\begin{aligned}&4x-(x-5y+7)=\\&=4x-x+5y-7=\\&=3x+5y-7\end{aligned}$$

Jeśli przed nawiasem występuje znak odejmowania, to opuszczamy nawias i zmieniamy znak każdego wyrazu znajdującego się w nawiasie na przeciwny, np.

$$-(x^2+6x-1)=-x^2-6x+1.$$

c) $(-2x+8y-9)-(-3x-7y-9)=-2x+8y-9+3x+7y+9=x+15y$

Ćwiczenie 1.

Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

a) $2x+(6x-9y)$ **b)** $9z-(4y-8z)$ **c)** $(2a+7b-c)+(-4b-c)$ **d)** $-(8b-1)-(-2b+c-9)$

Przykład 2.

Zosia ma x monet pięciozłotowych i dwie monety jednozłotowe. Pożyczyła Asi y monet pięciozłotowych i 1 zł. Zosia dostała od babci x monet dwuzłotowych i y monet jednozłotowych. Przyjmujemy, że x i y to liczby naturalne takie, że $x>y$. Napisz wyrażenie algebraiczne określające kwotę wyrażoną w złotych, którą ma Zosia. Wykonaj redukcję wyrazów podobnych.

Zosia ma: $(5x+2)$ zł

Zosia pożyczyła Asi: $(5y+1)$ zł

Zosia dostała od babci: $(2x+y)$ zł

Zapiszemy wyrażenie określające kwotę, którą ma Zosia, a następnie przeprowadzimy redukcję wyrazów podobnych.

$$\begin{aligned}&(5x+2)-(5y+1)+(2x+y)=\\&=5x+2-5y-1+2x+y=\\&=7x-4y+1\end{aligned}$$

Odp. Zosia ma teraz $(7x-4y+1)$ zł.

Ćwiczenie 2.

Pan Leszek miał w portfelu a banknotów 100-złotowych i 3 banknoty 20-złotowe. Wydał b banknotów 20-złotowych i 4 zł. Z bankomatu wypłacił a banknotów 50-złotowych i b banknotów 10-złotowych. Przyjmujemy, że a i b to liczby naturalne takie, że $b \leqslant 3$. Zapisz wyrażenie algebraiczne określające kwotę wyrażoną w złotych, którą ma pan Leszek w gotówce. Wykonaj redukcję wyrazów podobnych.

Rozwiąż zadania

1. Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

a) $-2a+(-6a+9k-12)$

b) $-9b-(-3b+8m-25)$

c) $(5c-b)-(6c+2b)$

d) $-(3d+4z-11)+(-12d+z+16)$

e) $-(-12e+5f-4)-(20e-4f+7)$

f) $-(3x-6)-\left(-3x+\sqrt{5}\right)-\left(8x-2\sqrt{5}\right)$

2. Zapisz wyrażenie bez użycia nawiasów i zredukuj wyrazy podobne.

a) $\left(3a^2+4a-2\right)+(-2a+6)$

b) $\left(-b^2+2b-12\right)-\left(-3b^2+27b-16\right)$

c) $\left(-3c^3-5c-72\right)+\left(-5c^3+36\right)$

d) $\left(13d^3-5d^2-32d\right)-\left(-5d^3-3d^2+6d\right)$

e) $\left(-7{,}5e^2-2{,}42e\right)+\left(-3{,}5e^2+2{,}08e-6\right)$

f) $\left(3{,}4f^3-2{,}42f+\sqrt{3}\right)-\left(-1{,}4f^3-4{,}12f^2+\sqrt{3}\right)$

g) $-\left(-1\frac{1}{2}g^3+\frac{5}{6}g-\sqrt{7}x\right)+\left(-\frac{3}{10}g^3+\frac{4}{15}g-\sqrt[3]{7}x\right)$

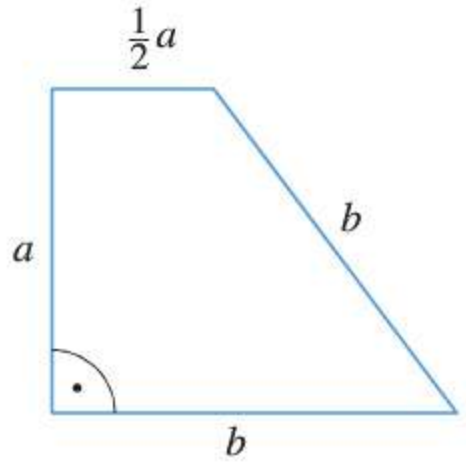
3. Zapisz wyrażenie algebraiczne i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

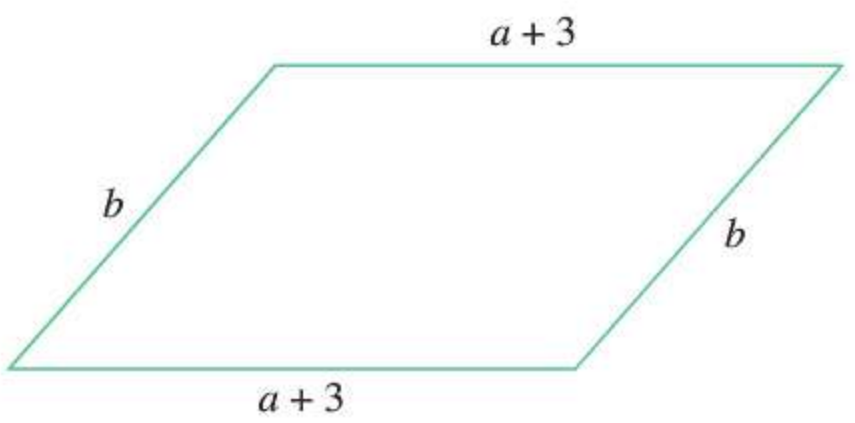
a) Do sumy liczb k, l i m dodaj różnicę liczb k i l.

b) Do wyrażenia $2x-3y$ dodaj sumę liczb $1{,}5x$ i $3{,}5y$.

c) Do liczby $-\frac{1}{2}x^2$ dodaj sumę liczb $2{,}5x^2$ i $5y$ oraz odejmij różnicę liczb $2x^2$ i $12y$.

4. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego sumę obwodów czworokątów przedstawionych na rysunkach: trapezu prostokątnego i równoległoboku. Wykonaj redukcję wyrazów podobnych. Oblicz wartość sumy obwodów tych figur dla $a=4$ i $b=5$.





5. Do sumy algebraicznej $3xy^3+2xy-5xy^2+2$ dodaj taką sumę algebraiczną, aby otrzymać wyrażenie:

a) $7xy^3+10xy-4xy^2+8$, **b)** xy^3+xy^2-3, **c)** $-4xy^2-3xy$.

6. Od sumy algebraicznej $2k^3+\frac{3}{4}k^2-2kl+\frac{7}{8}l^2$ odejmij taką sumę algebraiczną, aby otrzymać wyrażenie $k^3-\frac{1}{4}k^2+2kl-\frac{1}{8}l^2$.

E

Informacje do zadań 7. i 8.

Pola i Michasia razem z mamą pieką ciastka na święta. Pola w ciągu 15 min przygotowuje do upieczenia x ciastek. Michasia w tym samym czasie wykonuje o połowę więcej ciastek niż Pola, a mama robi ich dwa razy więcej niż obie dziewczynki razem. Po upływie 30 min od rozpoczęcia pracy dołączył tata, który w ciągu 15 min wykonuje tyle samo ciastek co Pola.



7. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie algebraiczne opisujące liczbę ciastek, jaką wykonała rodzina w ciągu pierwszych trzech godzin, to

A. $25{,}5x$. **B.** $90x$.

C. $100x$. **D.** $102x$.

8. Pola wykonuje 2 ciastka w ciągu 15 min. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rodzina w ciągu pierwszych czterech godzin od rozpoczęcia pracy przygotuje

A. 268 ciastek. **B.** 272 ciastka.

C. 304 ciastka. **D.** 404 ciastka.

☆

9. Liczbę trzycyfrową o cyfrze setek a, cyfrze dziesiątek b i cyfrze jedności c można zapisać w postaci sumy algebraicznej $100a + 10b + c$. Zapisz liczbę trzycyfrową, w której cyfrę setek pozostawimy bez zmian, a cyfry dziesiątek i jedności zamienimy miejscami. Czy różnica tych dwóch liczb jest podzielna przez 9? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Sprawdź, co umiesz!

1. Zapisz wyrażenie bez nawiasów. Przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

a) $(-a^2 - 2a + 10) - (-3a^2 + 7a - 6)$ **b)** $-(-3b^3 - 4b - 2) + (-3b^3 - 3b + 16)$

2. Oblicz różnicę między obwodem kwadratu o boku długości $5x + 1$ i obwodem trapezu równoramiennego o podstawach długości $2x$ i $8x - 5$, którego ramię ma długość $3x + 1$.

3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie algebraiczne: $-(-2x^2 - x + 2) + 9 - (6x^2 - 4x - 1)$ po opuszczeniu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych jest równe wyrażeniu

A. $-8x^2 - 3x - 3$ **B.** $-4x^2 + 5x + 8$ **C.** $-8x^2 - x + 3$ **D.** $-4x^2 - 3x - 3$

E

4. Mnożenie jednomianów przez sumy algebraiczne

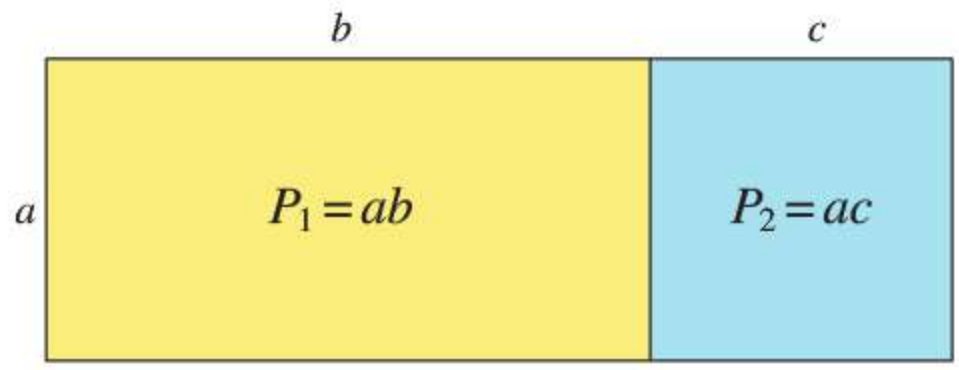
- Sposób mnożenia jednomianów przez sumy algebraiczne
- Dzielenie sum algebraicznych przez liczbę
- Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias

Pole prostokąta o bokach długości a oraz $(b+c)$ można obliczyć dwoma sposobami.

Sposób I: $P = a(b+c)$

Sposób II: Pole prostokąta o bokach długości a oraz $(b+c)$ jest równe sumie pól prostokątów o wymiarach $a \times b$ oraz $a \times c$, czyli $P = ab + ac$.

Zatem $a(b+c) = ab + ac$.



Aby pomnożyć jednomian przez sumę algebraiczną, należy skorzystać z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania lub z prawa rozdzielności mnożenia względem odejmowania.

$$a(b+c) = ab + ac \qquad a(b-c) = ab - ac$$

Przykład 1.

Wykonaj mnożenie.

a) $3(2x+4y)$

Pomnożymy jednomian 3 przez każdy składnik sumy algebraicznej.

$$3(2x+4y) = 3 \cdot 2x + 3 \cdot 4y = 6x + 12y$$

Aby pomnożyć jednomian przez sumę algebraiczną, należy go przez każdy składnik tej sumy i otrzymane iloczyny dodać.

b) $\left(\frac{2}{3}x + 16y\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

Pomnożymy jednomian $\left(-\frac{3}{4}\right)$ przez każdy składnik sumy algebraicznej.

$$\left(\frac{2}{3}x + 16y\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = {}^{1}\!\!\cancel{\frac{2}{3}}x \cdot \left(-\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{2}}\right) + {}^{4}\!\cancel{16}y \cdot \left(-\frac{3}{\cancel{4}_{1}}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}x - 12y$$

Ćwiczenie 1.

Wykonaj mnożenie.

a) $7(2x-7y)$ **b)** $(4c+2d)\cdot(-2)$ **c)** $-\frac{5}{6}\left(-12a+\frac{3}{4}b\right)$ **d)** $\left(\frac{7}{11}w-1\frac{1}{4}z\right)\cdot 1\frac{1}{7}$

Przykład 2.

Wykonaj mnożenie $2a(3b-4a)$.

Jednomian $2a$ pomnożymy przez każdy wyraz w nawiasie.

$$2a(3a-4b)=2a\cdot 3a+2a\cdot(-4b)=$$
$$=6a^2-8ab$$

Ćwiczenie 2.

Wykonaj mnożenie.

a) $a(2a-5b)$ **b)** $-2b(-3a+7b)$ **c)** $-\frac{1}{8}y^2(-4x-2y)$

Aby podzielić sumę algebraiczną przez liczbę różną od 0, każdy jej wyraz dzielimy przez tę liczbę.

$$(b+c):a=b:a+c:a \qquad (b-c):a=b:a-c:a \qquad a\neq 0$$

Przykład 3.

Wykonaj dzielenie.

a) $(10a-5b+20):5$

Każdy składnik sumy algebraicznej podzielimy przez liczbę 5.

$$(10a-5b+20):5=10a:5-5b:5+20:5=$$
$$=2a-b+4$$

b) $(24x+16y-5):8$

Każdy składnik sumy algebraicznej podzielimy przez liczbę 8.

$$(24x+16y-5):8=24x:8+16y:8-5:8=$$
$$=3x+2y-\frac{5}{8}$$

c) $\frac{12a-6b+1}{6}$

Każdy składnik sumy algebraicznej z licznika podzielimy przez liczbę 6.

$$\frac{12a-6b+1}{6}=\frac{12a}{6}-\frac{6b}{6}+\frac{1}{6}=$$
$$=2a-b+\frac{1}{6}$$

Pamiętaj, że kreska ułamkowa zastępuje znak dzielenia.

Ćwiczenie 3.

Wykonaj dzielenie.

a) $(20x-4y+12):4$ **b)** $(21k-14l+30):7$ **c)** $\frac{9a-18b+60}{9}$

Przykład 4.

Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne.

a) $(-2a+5b)-3(5a+b)+4(6a+2b)=\underline{-2a}\underline{+5b}\underline{-15a}\underline{-3b}\underline{+24a}\underline{+8b}=7a+10b$

b) $5a-\frac{18a-9b}{3}+\frac{4a+16b}{2}=5a-\left(\frac{18a}{3}-\frac{9b}{3}\right)+\left(\frac{4a}{2}+\frac{16b}{2}\right)=5a-(6a-3b)+(2a+8b)=$

$=\underline{5a}\underline{-6a}\underline{+3b}\underline{+2a}\underline{+8b}=a+11b$

Ćwiczenie 4.

Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne.

a) $-2(a+6b)-4(8a-9b)+3(a+b)$

b) $3k-\frac{2k+1}{2}+\frac{4k+16}{4}$

Przykład 5.

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $30x+20y$

Liczba 10 jest największym wspólnym dzielnikiem jednomianów $30x$ oraz $20y$.

Sumę algebraiczną zapiszemy w postaci iloczynu. ⇨ $30x+20y=10\cdot 3x+10\cdot 2y=10(3x+2y)$

Sprawdzenie: $10(3x+2y)=10\cdot 3x+10\cdot 2y=30x+20y$

Jeśli w każdym z wyrazów sumy algebraicznej występuje taki sam czynnik, to można ten wspólny czynnik wyłączyć przed nawias. Gdy wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, zamieniamy sumę na iloczyn.

b) $\frac{4y+6z}{2}$

Liczba 2 jest największym wspólnym dzielnikiem jednomianów $4y$ i $6z$.

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, a następnie wykonujemy skracanie. ⇨ $\frac{4y+6z}{2}=\frac{2(2y+3z)}{2}=2y+3z$

c) $-4x^2y-2xy-6xy^2$

Jednomian $-2xy$ jest wspólnym dzielnikiem wszystkich wyrazów sumy algebraicznej.

Sumę algebraiczną zapiszemy w postaci iloczynu. ⇨ $-4x^2y-2xy-6xy^2=-2xy(2x+1+3y)$

Sprawdzenie: $-2xy(2x+1+3y)=-2xy\cdot 2x-2xy\cdot 1-2xy\cdot 3y=-4x^2y-2xy-6xy^2$

Ćwiczenie 5.

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $45a^2+9a$ **b)** $\frac{6x-10y}{2}$ **c)** $5ab^2-15ab+30a^2b^3$ **d)** $-8k^4l^2-4k^2l-16k^3$

Rozwiąż zadania

1. Wykonaj mnożenie.

a) $4(-x+2y)$ **b)** $-3(-ab+5b)$ **c)** $(3d-7)\cdot(-5)$ **d)** $\frac{2}{7}\left(1\frac{1}{6}x+14\right)$

e) $-\frac{1}{2}(d+3e)$ **f)** $-5\cdot\left(\frac{3}{5}k+9l\right)$ **g)** $\left(\sqrt{3}x+4\right)\cdot\sqrt{2}$ **h)** $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}a+\sqrt{27}\right)$

i) $2a(3a-7b)$ **j)** $-5b(5a-9b)$ **k)** $(-3c+2)\cdot 4c^2$ **l)** $5d(-a+b-c+2d)$

2. Wykonaj podane działania.

a) $(-10x+2y+14):2$ **b)** $(12k-6l+24):(-6)$ **c)** $(-15c-10k+45):5$

d) $(-d+8k-12):2$ **e)** $(16k+12l+3):\left(-\frac{1}{2}\right)$ **f)** $\frac{3x-6y+12}{3}$

g) $\frac{-8x-16y+32}{4}+\frac{-21x+3}{3}$ **h)** $\frac{-10x-25y+35}{5}-\frac{6x-12z}{3}$ **i)** $\frac{64a+20b-4}{-4}-(14b-7):7$

3. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $2a+3(2a-1)$ **b)** $-2b-5(2b-6)$ **c)** $-3(c-5)+2(5c-3)$

d) $6(2d+2)-2(3d-10)$ **e)** $-3(-2e-4)+(-3e+12)\cdot 2$ **f)** $m\left(n^2-n\right)-n\left(m^2-m\right)$

g) $(2+x)\cdot\sqrt{2}x-\sqrt{2}(2x-5)$ **h)** $\frac{3}{4}\left(-4h^3-2\frac{2}{3}h^2-8k\right)-\frac{1}{12}\left(-4h^3+\frac{12}{15}h^2+24k\right)$

4. Maja ma x lat, a jej brat Filip jest od niej o 5 lat młodszy. Mama jest 8 razy starsza od Filipa. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące wiek mamy za 2 lata. Zredukuj wyrazy podobne.



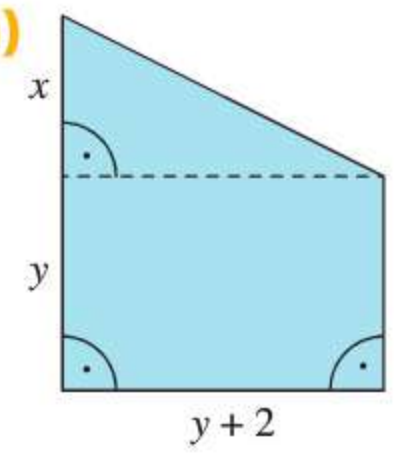
5. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $8x-12$ **b)** $15a+45b$ **c)** $-12c-10$ **d)** $\frac{4x+16y}{4}$

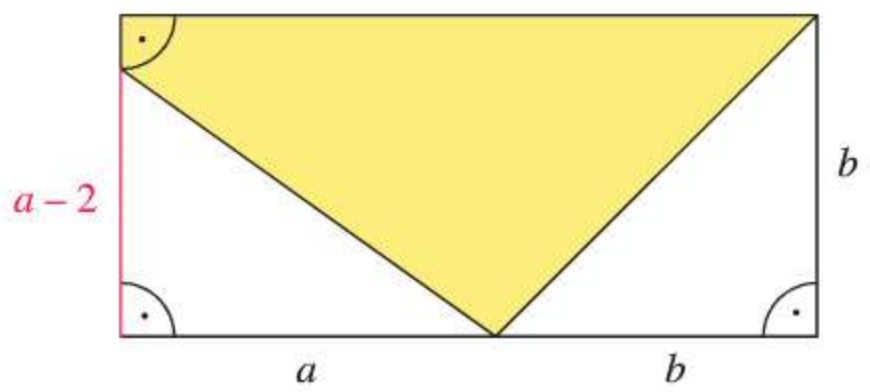
e) $\frac{24-32x}{2}$ **f)** $-21x^2-7x$ **g)** $x^3y^2+2x^2y-x^2y^5$ **h)** $-\sqrt{3}a^2-2\sqrt{3}b^2-\sqrt{6}$

6. Przedstaw w postaci sumy algebraicznej pole zacieniowanej figury. Pamiętaj o redukcji wyrazów podobnych.

a)



b)



7. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego sumę długości krawędzi oraz objętość prostopadłościanu o krawędziach długości $a+1$, $2a$ i $3a$. Oblicz te wielkości dla $a = 3\ \text{dm}$.

8. Przez jaki jednomian należy pomnożyć sumę algebraiczną $12x^2y - 6xy + 18y^2$, aby otrzymać podane wyrażenie?

a) $24x^3y - 12x^2y + 36xy^2$ **b)** $6x^3y - 3x^2y + 9xy^2$

c) $-4x^2y^2 + 2xy^2 - 6y^3$ **d)** $-2x^3y^2 + x^2y^2 - 3xy^3$

☆ **9.** Uzasadnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych nieparzystych jest podzielna przez 3.

Wskazówka: kolejne liczby naturalne nieparzyste możemy zapisać w postaci $2k+1$, $2k+3$, ..., gdzie k jest liczbą naturalną.

Sprawdź, co umiesz!

1. Wykonaj podane działania.

a) $(-4k + 6z) \cdot (-2)$ **b)** $-3xy(-4xy + x)$ **c)** $(25x^2 + 100x - 6) : 5$

E **2.** Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Wyrażenie $-2x(5x+5) + 10(x + 3x^2 - 3)$ przyjmuje postać | **A** | **B** |.

A. $20x^2 + 30x + 20$ **B.** $20x^2 - 30$

Wyrażenie $2m(-n^2 + n) - 3m(-n^2 + 8n)$ przyjmuje postać | **C** | **D** |.

C. $mn^2 + 10mn$ **D.** $mn^2 - 22mn$

E **3.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Pole trapezu o podstawach długości a i $3a+2$ oraz wysokości h wyraża się wzorem $(4a+2)h$.	**P**	**F**
Jeśli do podwojonej różnicy liczb a i b dodamy połowę sumy liczb a i b, to otrzymamy $2\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{2}b$.	**P**	**F**

E **4.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $\frac{-18x - 6y}{3} - \frac{-25x + 15}{5}$ po uproszczeniu przyjmuje postać

A. $-11x - 2y + 3$ **B.** $-11x - 2y + 3$ **C.** $-x - 2y - 3$ **D.** $-x - 2y + 3$

5. Mnożenie sum algebraicznych

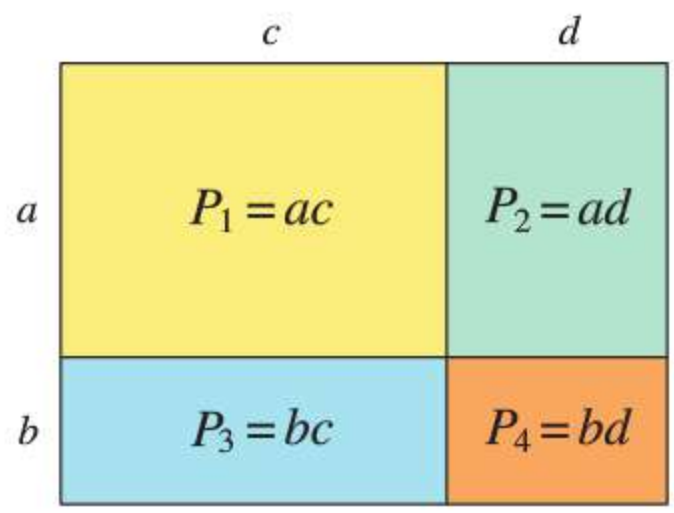
- Sposób mnożenia sum algebraicznych
- Potęgowanie sum algebraicznych

Pole prostokąta o bokach długości $(a+b)$ oraz $(c+d)$ można obliczyć dwoma sposobami.

Sposób I: $P = (a+b)(c+d)$

Sposób II: $P = ac + ad + bc + bd$

Zatem $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.



Aby pomnożyć sumy algebraiczne, należy każdy składnik jednej sumy pomnożyć przez każdy składnik drugiej sumy.

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Przykład 1.

Wykonaj mnożenie i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

a) $(a+2b)(3a+4b)$

Pomnożymy każdy składnik pierwszej sumy przez każdy składnik drugiej sumy, a następnie przeprowadzimy redukcję wyrazów podobnych.

$$(a+2b)(3a+4b) =$$
$$= a \cdot 3a + a \cdot 4b + 2b \cdot 3a + 2b \cdot 4b =$$
$$= 3a^2 + 4ab + 6ab + 8b^2 =$$
$$= 3a^2 + 10ab + 8b^2$$

b) $-2(a+5b)(4a+8b)$

Pomnożymy liczbę -2 przez pierwszą sumę, a następnie pomnożymy przez siebie sumy algebraiczne i przeprowadzimy redukcję wyrazów podobnych.

$$-2(a+5b)(4a+8b) =$$
$$= \big(-2 \cdot a + (-2) \cdot 5b\big)(4a+8b) =$$
$$= (-2a - 10b)(4a+8b) =$$
$$= -2a \cdot 4a - 2a \cdot 8b - 10b \cdot 4a - 10b \cdot 8b =$$
$$= -8a^2 - 16ab - 40ab - 80b^2 =$$
$$= -8a^2 - 56ab - 80b^2$$

Ćwiczenie 1.

Wykonaj mnożenie i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

a) $(x+2y)(y+3x)$ **b)** $(3a-b)(3a+4b)$ **c)** $-(a+b)(-2a+b)$ **d)** $-6(y+z)(3y-z)$

Przykład 2.

Wykonaj potęgowanie sumy algebraicznej i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

a) $(2x+1)^2$

Potęgę zamienimy na iloczyn, pomnożymy sumy algebraiczne, a następnie przeprowadzimy redukcję wyrazów podobnych.

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 &= (2x+1)(2x+1) = \\ &= 2x \cdot 2x + 2x \cdot 1 + 1 \cdot 2x + 1 \cdot 1 = \\ &= 4x^2 + 2x + 2x + 1 = \\ &= 4x^2 + 4x + 1\end{aligned}$$

b) $(-7-x)^2 = (-7-x)(-7-x) = (-7)\cdot(-7) - 7\cdot(-x) - x\cdot(-7) - x\cdot(-x) = 49 + 7x + 7x + x^2 =$
$= x^2 + 14x + 49$

Ćwiczenie 2.

Wykonaj potęgowanie sumy algebraicznej i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

a) $(2a+6)^2$ **b)** $(2-3z)^2$ **c)** $(3a+6c)^2$ **d)** $(-1-11b)^2$

Rozwiąż zadania

1. Wykonaj mnożenie i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

a) $(x+3y)(x-3y)$ **b)** $(-3k+2l)(5k+2l)$ **c)** $(c-4d)(-c+9d)$

d) $(-3z+2s)(5z-4s)$ **e)** $(5k-3m)(-5k+m)$ **f)** $(-4p+2r)(-6r-2p)$

2. Wykonaj potęgowanie sumy algebraicznej i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

a) $(a+3)^2$ **b)** $(b-c)^2$ **c)** $(2c+1)^2$

d) $(3d-2)^2$ **e)** $(-3-m)^2$ **f)** $\left(-2k+2l^2\right)^2$

3. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a) $(2a+b)(a-3b)+3\left(2a^2+b^2\right)$ **b)** $(-4k+2l)(6k+3l)-2(kl-1)$

c) $6(2y-z)(2y+z)+3y(1-y)$ **d)** $-\left(3k^2+2l^2\right)-(3l+4k)(-4k+l)$

e) $m(3m+2l)-\frac{1}{4}(2m+4l)(2m+4l)$ **f)** $-(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)+\left(2x-y^3\right)$

4. Oblicz wartość wyrażenia $2(x+3)\left(x^2-3x+9\right)-2x^3$ dla $x=2$ oraz dla $x=-3$. Czy wynik zależy od wartości zmiennej x? Uzasadnij swoją odpowiedź.

5. Zapisz w postaci sumy algebraicznej:

a) pole prostokąta o bokach długości $2x+1$ i $x+2$,

b) pole kwadratu o boku długości $a+3$,

c) pole trójkąta o podstawie długości $4x+6$ i wysokości równej $6x-10$ poprowadzonej do tej podstawy,

d) objętość prostopadłościanu o krawędziach długości: k, $2k+1$ i $2k+1$.

E

Informacje do zadań 6. i 7.

Siostry Kasia i Pola spędziły podczas wakacji x dni nad morzem i o 5 dni więcej w górach. Nad morzem każda z dziewczynek dostawała codziennie od rodziców po k zł kieszonkowego, a w górach o 5 zł mniej. Na pamiątki z wakacji wydały razem n zł.



6. Który iloczyn opisuje kwotę kieszonkowego Poli, otrzymanego przez cały pobyt w górach? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. kx zł **B.** $k(x-5)$ zł

C. $(x-5)(k+5)$ zł **D.** $(x+5)(k-5)$ zł

7. Które wyrażenie algebraiczne opisuje łączną kwotę, jaka pozostała siostrom po wakacjach? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $(4kx-10x+10k-50-n)$ zł **B.** $(4kx-10x-10k-50-2n)$ zł

C. $(2kx-5x+5k-25-n)$ zł **D.** $(2kx-5x-10k-25-2n)$ zł

8. Sprawdź, czy suma kwadratów dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.

Sprawdź, co umiesz!

1. Wykonaj mnożenie i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych.

a) $(x-5y)(-x+8y)$ **b)** $(-3c+2d)(6c-2d)$ **c)** $(-3x+4y)(5x+2y)-4(xy-2)$

2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po uproszczeniu wyrażenia $(-2x+1)^2-4(x+1)(x-1)$ otrzymamy

A. $8x^2+4x+5$ **B.** $-4x-3$ **C.** $-8x^2-4x+5$ **D.** $-4x+5$

3. Zapisz w postaci sumy algebraicznej pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości $2a+1$ i $6a+2$.

4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Pole prostokąta o bokach długości $2x+3$ i $4x-1$ jest równe $8x^2+14x-3$.	**P**	**F**
Wyrażenie $-(3x+5)(-5+3x)+9x^2$ ma taką samą wartość dla dowolnej liczby x.	**P**	**F**

PODSUMOWANIE DZIAŁU V
Wyrażenia algebraiczne

Powtórz wiadomości

Jednomian

Jednomian jest liczbą, literą lub iloczynem liczb i liter.

$4x^2y,\ 12abc,\ 1xy,\ 2a^2b^3$

współczynniki liczbowe jednomianu

Suma algebraiczna

Suma algebraiczna powstaje poprzez dodanie jednomianów.

$2a^3b + 0{,}5a$

$5xy + (-3x^2)$

Jednomiany podobne

Jednomiany nazywamy podobnymi, jeżeli zawierają te same czynniki literowe i są one w takiej samej potędze.

Jednomiany $4x^2$, $5x^2$, $0{,}4x^2$ są podobne.

Mnożenie jednomianów przez sumy algebraiczne

Aby pomnożyć jednomian przez sumę algebraiczną, należy pomnożyć go przez każdy wyraz tej sumy.

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$2x(5x+3+2y) = 2x \cdot 5x + 2x \cdot 3 + 2x \cdot 2y =$$
$$= 10x^2 + 6x + 4xy$$

$$(a - 0{,}2b) \cdot 5a = a \cdot 5a - 0{,}2b \cdot 5a = 5a^2 - ab$$

Redukcja wyrazów podobnych

$$5x^3 - 2x^2 + 15x^3 - 7x^2 + 12 =$$
$$= 20x^3 - 9x^2 + 12$$

$5 + 15 = 20$ $\quad -2 - 7 = -9$

Mnożenie sum algebraicznych

Aby pomnożyć sumy algebraiczne, mnożymy każdy składnik pierwszej sumy przez każdy składnik drugiej sumy.

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(2x-3)(x^2+5x) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot 5x - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 5x = 2x^3 + 10x^2 - 3x^2 - 15x = 2x^3 + 7x^2 - 15x$$

Sprawdź umiejętności

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe. E

Czwartą część ilorazu liczb c i d zapisujemy w postaci $\frac{1}{4}cd$.	**P**	**F**
Iloraz sumy kwadratu liczby x i kwadratu liczby y oraz liczby 5 zapisujemy w postaci $\frac{(x+y)^2}{5}$.	**P**	**F**

2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. E

Jednomiany podobne to

A. a^2bc i a^2b^2c **B.** $0{,}5a^2b^2c$ i $0{,}5a^2c^2b$ **C.** a^2b^2c i $-2b^2a^2c$ **D.** $4a^2b^2c$ i $-5a^2bc$

3. Dane są cztery kolejne liczby naturalne. Najmniejsza z nich jest równa $2y$. E

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Suma pierwszej i trzeciej liczby jest równa **A** **B**.

Różnica czwartej i drugiej liczby jest równa **C** **D**.

A. $4y+1$ **B.** $4y+2$ **C.** 2 **D.** 4

4. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $3m-5-2m+4$

b) $2x-4x^2-\frac{1}{2}x+7-x^2$

c) $\frac{1}{3}n^2m+1\frac{2}{3}m^2n-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}mn^2-m^2n$

d) $-(-\sqrt{7})abc+\sqrt{7}ab+2\sqrt{7}bca-2\sqrt{7}$

5. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P** – jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe. E

Suma podwojonej różnicy liczby k i liczby l oraz sumy liczby: k, l i m jest równa wyrażeniu $k-l+m$.	**P**	**F**
Kwadrat różnicy potrojonej liczby x oraz iloczynu liczby x i liczby y jest równy wyrażeniu $9x^2-x^2y^2$.	**P**	**F**

6. Uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych.

a) $5(x-3)+2x$ dla $x=-3$

b) $x(2x+y)-(y+2)\cdot 3x-5xy$ dla $x=2$ i $y=-5$

7. Kasia kupiła 12 długopisów po k zł oraz o 8 więcej mazaków po $(k-1)$ zł. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące, ile Kasia zapłaciła za zakupy.

E Informacje do zadań 8. i 9.

Cezary przeczytał przez ostatni rok x książek, a jego siostra Ania o 4 książki więcej. Przez ten sam czas mamie udało się przeczytać o 50 % więcej książek niż Cezaremu i Ani łącznie.



8. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie algebraiczne opisujące liczbę książek, które przeczytała mama przez ostatni rok, ma postać

A. $x+2$ **B.** $1{,}5x^2+6$

C. $3x+6$ **D.** $3x^2+3$

9. Które wyrażenie algebraiczne opisuje, ile książek przeczytali razem mama, Cezary i Ania przez ostatni rok? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $3x+6$ **B.** $1{,}5x^2+2x+10$

C. $3x^2+2x+6$ **D.** $5x+10$

10. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $36x+42y$ **b)** $-15a+45b$ **c)** $-7a-49a^2$

d) $3\sqrt{2}x^2+6\sqrt{2}y$ **e)** $\frac{8x+12y}{4}$ **f)** $9xy^2-3x^2y+27xy$

11. Dany jest prostokąt o bokach długości a i b, gdzie $a>2$ oraz $b>2$. O ile zmieni się pole tego prostokąta, jeśli jeden bok zwiększymy o 2, a drugi zmniejszymy o 2? Rozpatrz dwa przypadki.

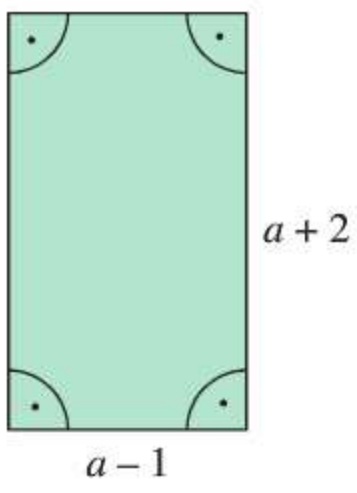
12. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(z-3)(2z+1)$ **b)** $(4b-1)(-b-3)$ **c)** $-(y+6)(2x+0{,}5)$

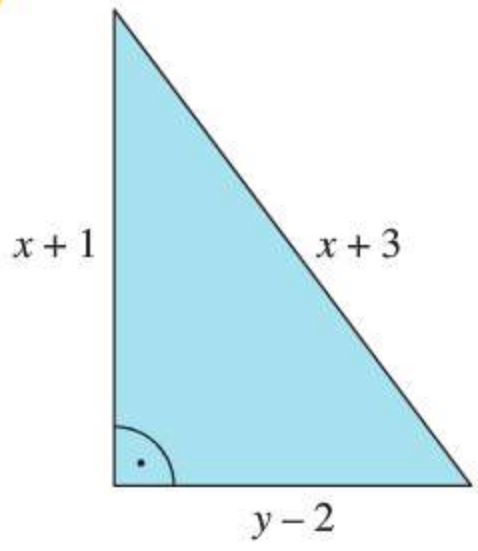
d) $\frac{1}{2}(-2c+1)(-c-3d)$ **e)** $(2a+5b)^2$ **f)** $\left(y-9\sqrt{3}\right)^2$

13. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego obwód i pole figury. Pamiętaj o redukcji wyrazów podobnych.

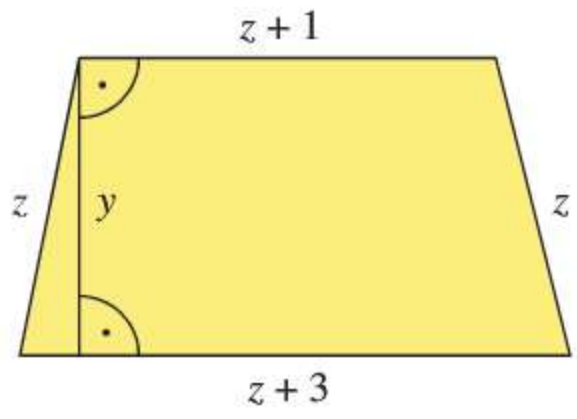
a)



b)



c)



Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Przedstaw jednomian w postaci uporządkowanej.

a) $-\frac{\sqrt{2}}{4}a^3 \cdot \left(-8\sqrt{2}a^2\right)$ **b)** $-15k^3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}m^2k^2$ **c)** $-2^2 \cdot 8a^2b \cdot \left(-2\frac{3}{16}ab^3\right)$

2. Na mapie w skali $1 : 200\,000$ odległość między leśniczówką i sklepem jest równa b cm. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile jest równa ta odległość w rzeczywistości.

3. W tabeli podano wymiary czterech prostokątów.

I	II	III	IV
$-a, (2-a)$	$2a, 2a+2$	$2, a-1$	$a, 4(a+1)$

Które z tych prostokątów mają równe pola? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. Tylko I i III. **B.** Tylko II i IV. **C.** Tylko I, II i IV. **D.** Tylko II, III i IV.

4. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego.

a) Liczba dwucyfrowa, której cyfra dziesiątek jest równa $x+1$, a cyfrą jedności jest $x-2$.

b) Liczba trzycyfrowa, której cyfra setek jest równa y, cyfra dziesiątek $y+x$, a cyfra jedności x.

c) Liczba trzycyfrowa, której cyfra setek jest równa a, cyfra dziesiątek jest dwa razy większa od cyfry setek, a cyfra jedności jest o 2 mniejsza od cyfry dziesiątek.

5. Janek i Kasia grają w grę *Zgadnij*. Za poprawną odpowiedź uzyskuje się $2k$ punktów, a za błędną traci $k+1$. Janek odpowiedział poprawnie na 10 pytań i błędnie na trzy, Kasia udzieliła 9 poprawnych odpowiedzi i 4 błędnych. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ile punktów na koniec gry miał Janek, a ile – Kasia.



6. Jeden z boków prostokąta ma długość $3x+6$, a drugi jest pięć razy dłuższy. Zapisz różnicę długości dłuższego boku i trzeciej części krótszego boku. Wykonaj redukcję wyrazów podobnych.

7. Uzasadnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest wielokrotnością liczby 3.

8. Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne.

a) $-(x+3) - 2x(4-3x) \cdot 6$ **b)** $(x-2y)(2x+3y)\left(-x^3\right)$ **c)** $(9a-11b)^2$

d) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)^2$ **e)** $\left(\sqrt{5}x-3y\right)^2$ **f)** $\left(2\sqrt{3}a+5\sqrt{9}\right)^2$

9. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej, a następnie oblicz jego wartość dla podanych zmiennych.

a) $2xy^2 - (x^2 + xy^2)$ dla $x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ i $y = \sqrt{2}$

b) $\frac{y(y-1)}{2} + \frac{2y(y+1)}{2}$ dla $y = 0{,}5$

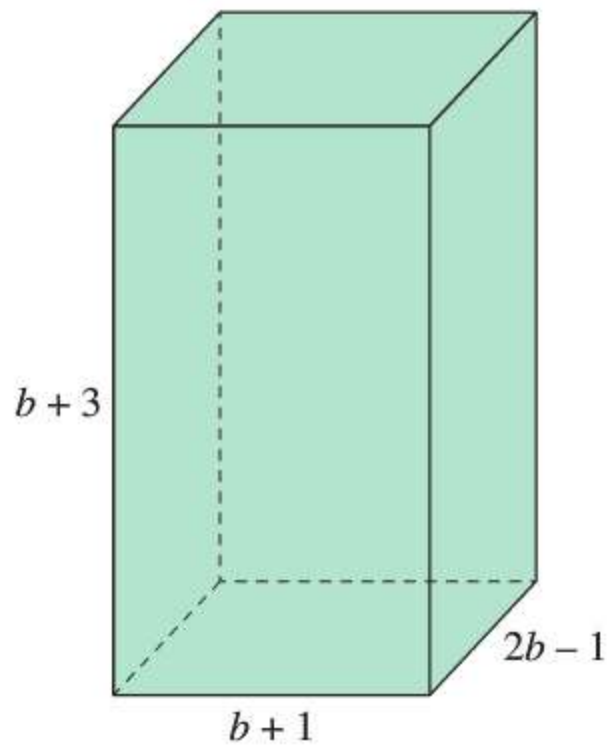
c) $\frac{1}{2}(6x - 2y) + 5x$ dla $x = \sqrt[3]{4}$ i $y = 2\sqrt[3]{4}$

d) $\frac{3(x-1)(x+1)}{2} - x^2$ dla $x = \sqrt{10}$

E

Informacje do zadań 10. i 11.

Na rysunku przedstawiono prostopadłościan.



10. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Obwód podstawy prostopadłościanu możemy zapisać w postaci | **A** | **B** |.

A. $3b$ **B.** $6b$

Pole podstawy prostopadłościanu jest równe | **C** | **D** |.

C. $2b^2 + 3b + 1$ **D.** $2b^2 + b - 1$

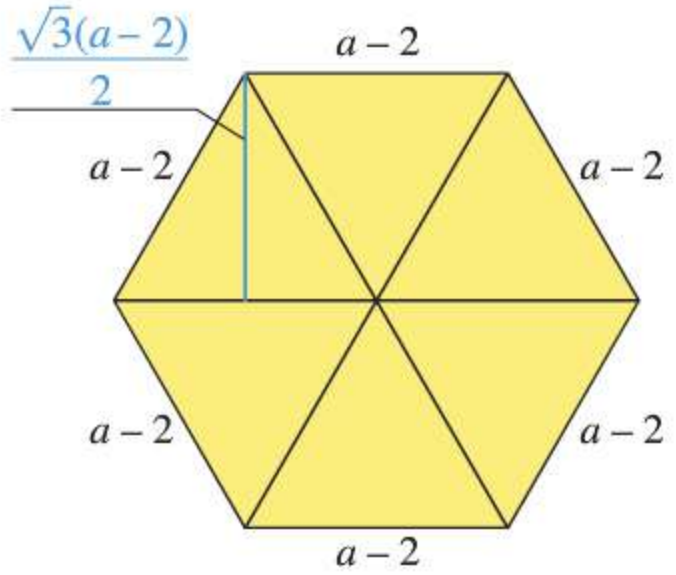
11. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość prostopadłościanu jest równa

A. $2b^3 + 6b^2 + 4b - 3$ **B.** $2b^3 + 5b^2 - 4b - 3$ **C.** $2b^3 + 7b^2 + 2b - 3$ **D.** $2b^3 + 6b^2 - 2b + 3$

12. Uzasadnij, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych parzystych jest liczbą podzielną przez 4.

13. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego obwód i pole figury przedstawionej na rysunku, która składa się z 6 trójkątów równobocznych.



14. Dane jest wyrażenie $(b-1)(b+1) - (2b-1)(-2b+1) + 4b$. Sprawdź, czy wartością tego wyrażenia jest zawsze liczba dodatnia.

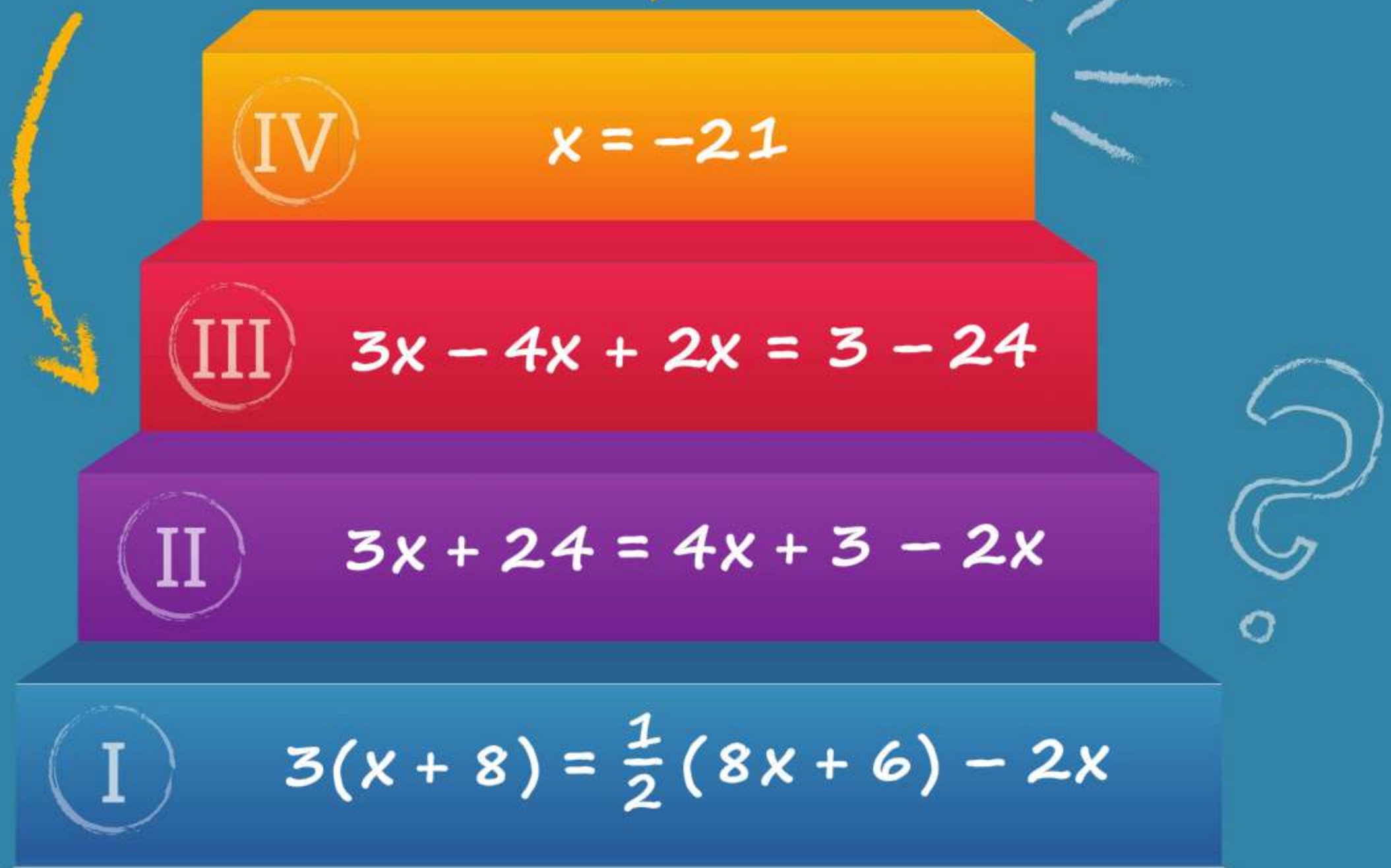
DZIAŁ VI

RÓWNANIA

Równania równoważne

Rozwiązywanie równań

Przekształcanie wzorów



To ci się przyda!

1. Liczby spełniające równanie

- Pojęcie równania
- Sprawdzanie, czy dana liczba spełnia równanie

Matematyka stawia często przed nami problemy na miarę zagadek detektywistycznych. Szukamy np. nieznanej liczby x, opierając się na danych wskazówkach – słownych lub algebraicznych.



Dwa wyrażenia algebraiczne, w których występuje przynajmniej jedna litera, połączone znakiem równości nazywamy **równaniem**, np.

$$2x + 3 = 7$$

lewa strona równania: L — prawa strona równania: P

Litery występujące w równaniu to **niewiadome**.

Równanie z jedną niewiadomą to równanie, w którym występuje tylko jedna niewiadoma, np. $4 + 2x = 5$, $x^3 = 8$.

Jeśli w równaniu jedyna niewiadoma występuje tylko w pierwszej potędze, to jest to **równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą**, np. $6x = 12$, $5x + 7 = 9$.

Przykład 1.

Określ, czy dane równanie jest równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą. Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $3x + 1 = 10$ – to **jest** równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, ponieważ jedyną niewiadomą jest x i występuje ona w pierwszej potędze.

b) $2x^2 - 5x = 1$ – to **nie jest** równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, ponieważ niewiadoma x występuje w drugiej potędze.

c) $10x + 3y = 9$ – to **nie jest** równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, ponieważ w równaniu występują dwie niewiadome: x oraz y.

Ćwiczenie 1.

Określ, czy dane równanie jest równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą. Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $7y^3 + 8y = 0$ **b)** $9 - 4w = 8$ **c)** $5a = 9 + 6b$ **d)** $2x^2 = 8$

Liczba spełnia dane równanie, jeżeli po podstawieniu tej liczby w miejsce niewiadomej lewa strona równania jest równa prawej stronie tego równania.

Każdą liczbę spełniającą dane równanie nazywamy **rozwiązaniem równania** (**pierwiastkiem równania**).

Zbiorem rozwiązań równania nazywamy zbiór wszystkich liczb spełniających dane równanie.

Przykład 2.

Sprawdź, która z trzech liczb: -1, 2, 7 jest rozwiązaniem równania $-2x - 4 = 3x - 39$.

$$\underbrace{-2x - 4}_{\text{lewa strona równania: L}} = \underbrace{3x - 39}_{\text{prawa strona równania: P}}$$

- Sprawdzimy, czy liczba (-1) jest rozwiązaniem tego równania.

Obliczymy wartość lewej strony równania dla $x = -1$ oraz wartość prawej strony równania dla $x = -1$.

$$\text{L} = -2 \cdot (-1) - 4 = 2 - 4 = -2$$
$$\text{P} = 3 \cdot (-1) - 39 = -3 - 39 = -42$$

Ponieważ $-2 \neq -42$, więc $\text{L} \neq \text{P}$. Zatem liczba -1 nie jest rozwiązaniem tego równania.

- Sprawdzimy, czy liczba 2 jest rozwiązaniem tego równania.

Obliczymy wartość lewej strony równania dla $x = 2$ oraz wartość prawej strony równania dla $x = 2$.

$$\text{L} = -2 \cdot 2 - 4 = -4 - 4 = -8$$
$$\text{P} = 3 \cdot 2 - 39 = 6 - 39 = -33$$

Ponieważ $-8 \neq -33$, więc $\text{L} \neq \text{P}$. Zatem liczba 2 nie jest rozwiązaniem tego równania.

- Sprawdzimy, czy liczba 7 jest rozwiązaniem tego równania.

Obliczymy wartość lewej strony równania dla $x = 7$ oraz wartość prawej strony równania dla $x = 7$.

$$\text{L} = -2 \cdot 7 - 4 = -14 - 4 = -18$$
$$\text{P} = 3 \cdot 7 - 39 = 21 - 39 = -18$$

Ponieważ $-18 = -18$, więc $\text{L} = \text{P}$. Zatem liczba 7 jest rozwiązaniem (pierwiastkiem) danego równania, czyli spełnia to równanie.

Odp. Liczba 7 jest rozwiązaniem równania.

Ćwiczenie 2.

Sprawdź, która z trzech liczb: -2, 3, 9 spełnia podane równanie.

a) $4 - 3x = 5x - 20$ **b)** $x^2 - 9 = 8x$ **c)** $3x - x^3 = -2x^2$

Przykład 3.

Zestaw piłek tenisowych kosztuje 25 zł. Cezary zapłacił za dwa takie zestawy i rakietę tenisową 210 zł. Ile kosztowała rakieta tenisowa? Ułóż równanie opisujące daną sytuację.

Jako x oznaczymy cenę rakiety tenisowej.
Z treści zadania wiemy, że zestaw piłek tenisowych kosztuje 25 zł. Dwa zestawy piłek i rakieta kosztują 210 zł, zatem możemy zapisać równanie:

$$2 \cdot 25 \text{ zł} + x = 210 \text{ zł},$$

czyli $50\,\text{zł} + x = 210\,\text{zł}$.



Ćwiczenie 3.

Pan Marek ćwiczył na siłowni $1{,}5$ h. Jego rozgrzewka trwała 18 min, a ćwiczenia siłowe trzy razy dłużej niż rozgrzewka. Pozostały czas wykorzystał na ćwiczenia rozciągające. Ile minut pan Marek wykonywał te ćwiczenia? Ułóż równanie opisujące daną sytuację.

Rozwiąż zadania

1. Określ, czy dane równanie jest równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą. Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $5x + 6 = 7x - 2$ **b)** $3y + z = 1$ **c)** $a^2 - a = 0$ **d)** $y^4 = 16$

2. Sprawdź, czy podana liczba spełnia równanie.

a) $-1 - 12x = -5x$, 2 **b)** $2x = -5x + 20$, 3

c) $3x + 2 = -12$, $-4\frac{2}{3}$ **d)** $0{,}5 - 2x = 1{,}3 - 2x$, $\frac{1}{5}$

e) $8x + 2 = -2x + 20$, $-1{,}8$ **f)** $2\sqrt{2} - 5x = 5x + 12\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$

3. Sprawdź, które z trzech liczb: -3, 9, 0 spełniają równanie $\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{3} = 0$.

4. Czy któraś z podanych liczb spełnia równanie? Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $-3x - (x + 2) = 6$, $x = 1$, $x = -2$ **b)** $x^3 - x^2 = 4x - 4$, $x = 0$, $x = 1$

c) $(x - 2)^2 + 2 = 0$, $x = 3$, $x = -4$ **d)** $x^{2023} - x = 2x - 2$, $x = -1$, $x = 1$

E **5.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Liczba $-\frac{1}{3}$ spełnia równanie $x^3 + \frac{10}{27} = 2x^2 - x$.	**P**	**F**
Liczba $0{,}75$ spełnia równanie $-x^3 + x = -0{,}75x^2 + \frac{3}{4}$.	**P**	**F**

6. Ułóż równanie opisujące daną sytuację.

a) Trzecia część pewnej liczby jest równa 25. Jaka to liczba?

b) Michasia jest starsza od siostry o 3 lata. Razem mają 17 lat. Ile lat ma siostra Michasi?

c) W klasie liczącej 27 osób pewna liczba uczniów dojeżdża do szkoły rowerem. Dwa razy więcej osób dociera do szkoły pieszo, a 3 osoby przyjeżdżają autobusem. Ile osób dojeżdża do szkoły rowerem?

d) Podczas czterodniowej wycieczki rowerowej uczestnicy przejechali 133 km. Drugiego dnia pokonali dwa razy więcej kilometrów niż pierwszego dnia. Trzeciego dnia przejechali o 5 km więcej niż pierwszego dnia, a czwartego pokonali 32 km. Jaką trasę pokonali uczestnicy wycieczki rowerowej pierwszego dnia?

e) Cezary kupił w sklepie 3 kg truskawek. Dał kasjerce dwa banknoty: 10-złotowy oraz 20-złotowy i otrzymał $1{,}50$ zł reszty. Ile kosztował kilogram truskawek kupionych przez Cezarego?

7. Znajdź liczbę, którą można zastąpić literą a, tak aby liczba -9 spełniała równanie.

a) $3x + 11 = a$ **b)** $0{,}5x^2 + 3x - 1 = a$ **c)** $-x^3 + 4x - 6 = a$

8. Uzasadnij, że żadna liczba nie spełnia równania $x^2 + 4 = 0$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Czy któraś z podanych liczb spełnia równanie? Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $-2x - (x + 1) = -8$, $x = 3$, $x = -2$ **b)** $x^3 + x^2 = 4x + 4$, $x = 2$, $x = -1$

2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba -2 jest rozwiązaniem równania

A. $2x - 4 = 3$ **B.** $x^3 - x + 2 = 0$ **C.** $-2(x - 1) + 2 = 8$ **D.** $-2(x - 1) + 2 = 4$

3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Równanie $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ jest równaniem z jedną niewiadomą.	**P**	**F**
Liczba -1 spełnia równanie $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.	**P**	**F**

4. Kuba kupił szorty, koszulkę i buty. Koszulka kosztowała o 50 zł mniej niż szorty, a buty dwa razy więcej niż szorty. Ile kosztowały szorty kupione przez Kubę? Ułóż równanie opisujące tę sytuację.



2. Rozwiązywanie równań

- Rozwiązywanie równań metodą równań równoważnych
- Pojęcie równania tożsamościowego i równania sprzecznego

Rozwiązanie równania polega na znalezieniu wszystkich liczb, które spełniają to równanie, lub stwierdzeniu, że takie liczby nie istnieją.

Przykład 1.

Rozwiąż równanie $3x + 1 = 7$ i sprawdź otrzymane rozwiązanie.

Sposób I

Rozwiązanie równania przedstawimy na rysunku.



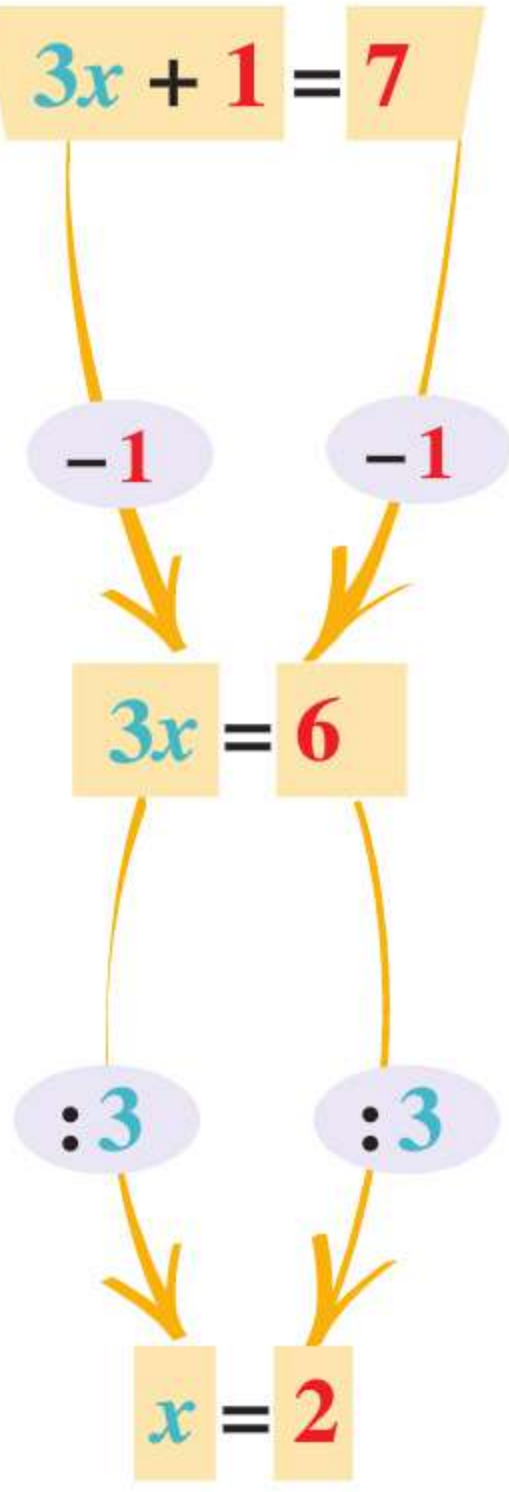
Waga jest w stanie równowagi. Dążymy do tego, aby na lewej szalce wagi pozostały tylko odważniki o masie x.



Zdejmujemy z obu szalek wagi po jednym odważniku o masie 1. Waga nadal pozostaje w równowadze. Dążymy do tego, aby na lewej szalce wagi pozostał tylko jeden odważnik o masie x.



Jeśli zdejmiemy z lewej szalki dwa odważniki o masie x, to zmniejszymy masę na lewej szalce trzykrotnie. Aby waga pozostała w położeniu równowagi, musimy również na prawej szalce pozostawić trzykrotnie mniej odważników.



Otrzymaliśmy $x = 2$, więc liczba 2 jest rozwiązaniem tego równania.

Sposób II

Dążymy do tego, aby po lewej stronie równania pozostały tylko niewiadome, a po drugiej liczby.

Od obu stron równania odejmiemy liczbę 1. ⇒

$$\begin{aligned} 3x+1 &= 7 \quad |-1 \\ 3x+1-1 &= 7-1 \end{aligned}$$

Obie strony równania podzielimy przez liczbę 3. ⇒

$$\begin{aligned} 3x &= 6 \quad |:3 \\ 3x:3 &= 6:3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Sprawdzenie

$\mathrm{L} = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$, $\mathrm{P} = 7$, zatem $\mathrm{L} = \mathrm{P}$.

Zapisane równania: $3x + 1 = 7$, $3x = 6$ oraz $x = 2$ są równoważne, tzn. mają takie samo rozwiązanie, którym jest liczba 2. W tabeli pokazujemy, że liczba 2 spełnia każde z tych równań.

Równanie	Lewa strona równania	Prawa strona równania	Podsumowanie
$3x+1=7$	$\mathrm{L} = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$	$\mathrm{P} = 7$	$\mathrm{L} = \mathrm{P}$
$3x=6$	$\mathrm{L} = 3 \cdot 2 = 6$	$\mathrm{P} = 6$	$\mathrm{L} = \mathrm{P}$
$x=2$	$\mathrm{L} = 2$	$\mathrm{P} = 2$	$\mathrm{L} = \mathrm{P}$

Możemy zatem zauważyć, że jeśli odejmiemy od obu stron równania tę samą liczbę lub podzielimy obie strony równania przez tę samą liczbę różną od zera, to otrzymamy równanie równoważne. Podobnie jest w przypadku dodawania i mnożenia.

Aby otrzymać równanie równoważne do danego równania, możemy:

- do obu stron równania dodać tę samą liczbę lub to samo wyrażenie,
- od obu stron równania odjąć tę samą liczbę lub to samo wyrażenie,
- obie strony równania pomnożyć przez tę samą liczbę różną od zera,
- obie strony równania podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Ćwiczenie 1.

Rozwiąż równanie i sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $2x - 3 = 7$ **b)** $10 = 4x + 18$ **c)** $9 - 6x = 3$ **d)** $\frac{1}{2}x - 8 = -2$

Odejmowanie od obu stron równania lub dodawanie do obu stron równania tej samej liczby lub tego samego wyrażenia możemy także opisać jako przenoszenie liczby lub wyrażenia ze zmienionym znakiem na drugą stronę równania.

Sposób I

$$\begin{aligned} 3x+1 &= 7 \quad |-1 \\ 3x+1-1 &= 7-1 \\ 3x &= 6 \end{aligned}$$

lub

Sposób II

$$\begin{aligned} 3x+1 &= 7 \\ 3x &= 7-1 \\ 3x &= 6 \end{aligned}$$

Sposób I

$$\begin{aligned} 4x-3 &= 5 \quad |+3 \\ 4x-3+3 &= 5+3 \\ 4x &= 8 \end{aligned}$$

lub

Sposób II

$$\begin{aligned} 4x-3 &= 5 \\ 4x &= 5+3 \\ 4x &= 8 \end{aligned}$$

Przykład 2.

Rozwiąż równanie.

a) $6-3a=-2a+8$

Od obu stron równania odejmiemy liczbę 6.

$$6-3a=-2a+8 \quad |-6$$
$$6-3a-6=-2a+8-6$$

Do obu stron równania dodamy $2a$.

$$-3a=-2a+2 \quad |+2a$$
$$-3a+2a=-2a+2+2a$$

Obie strony równania pomnożymy przez liczbę (-1).

$$-a=2 \quad |\cdot(-1)$$
$$-a\cdot(-1)=2\cdot(-1)$$
$$a=-2$$

Równanie $6-3a=-2a+8$ jest równoważne równaniu $a=-2$, więc jego rozwiązaniem jest liczba -2.

b) $2(3x-4)-6=7-(x+4)$

Najpierw uprościmy lewą stronę oraz prawą stronę równania.

$$2(3x-4)-6=7-(x+4)$$
$$6x-8-6=7-x-4$$
$$6x-14=3-x$$

Do obu stron równania dodamy liczbę 14.

$$6x-14=3-x \quad |+14$$
$$6x-14+14=3-x+14$$

Do obu stron równania dodamy x.

$$6x=17-x \quad |+x$$
$$6x+x=17-x+x$$

Obie strony równania podzielimy przez liczbę 7.

$$7x=17 \quad |:7$$
$$\frac{7x}{7}=\frac{17}{7}$$
$$x=2\frac{3}{7}$$

Równanie $2(3x-4)-6=7-(x+4)$ jest równoważne równaniu $x=2\frac{3}{7}$, więc jego rozwiązaniem jest liczba $2\frac{3}{7}$.

c) $\frac{3t-4}{4}=\frac{5t}{8}$

Obie strony równania pomnożymy przez liczbę 8, czyli przez wspólny mianownik ułamków znajdujących się po lewej stronie i po prawej stronie równania. Następnie uprościmy lewą stronę równania.

$$\frac{3t-4}{4}=\frac{5t}{8} \quad |\cdot 8$$
$$\overset{2}{\cancel{8}}\cdot\frac{3t-4}{\cancel{4}_1}=\overset{1}{\cancel{8}}\cdot\frac{5t}{\cancel{8}_1}$$
$$2(3t-4)=5t$$
$$6t-8=5t$$

Do obu stron równania dodamy liczbę 8.

$$6t-8=5t \quad |+8$$
$$6t-8+8=5t+8$$

Od obu stron równania odejmiemy $5t$.

$$6t=5t+8 \quad |-5t$$
$$6t-5t=5t+8-5t$$
$$t=8$$

Równanie $\frac{3t-4}{4}=\frac{5t}{8}$ jest równoważne równaniu $t=8$, więc jego rozwiązaniem jest liczba 8.

Ćwiczenie 2.

Rozwiąż równanie.

a) $9-2y=3y+4$ **b)** $5(2x-1)+8=6-(4x+2)$ **c)** $\frac{2k+5}{3}=\frac{4-k}{2}$

Równania sprzeczne i tożsamościowe

Równanie, którego nie spełnia żadna liczba, nazywamy **równaniem sprzecznym.**

Równanie, które spełniają wszystkie liczby, nazywamy **równaniem tożsamościowym.**

Przykład 3.

Rozwiąż równanie.

a) $4(3x-1)=2-(8-12x)$

$12x-4=2-8+12x$

$12x-4=-6+12x \quad |+4$

$12x-4+4=-6+12x+4$

$12x=-2+12x \quad |-12x$

$12x-12x=-2+12x-12x$

$0=-2$

Liczba 0 nie jest równa liczbie -2, więc otrzymaliśmy równanie sprzeczne. Oznacza to, że równanie nie ma rozwiązania (żadna liczba nie spełnia tego równania).

b) $5(3x-1)+2=3\left(5x+6\frac{2}{3}\right)-23$

$15x-5+2=3\left(5x+\frac{20}{3}\right)-23$

$15x-5+2=15x+20-23$

$15x-3=15x-3 \quad |+3$

$15x-3+3=15x-3+3$

$15x=15x \quad |-15x$

$15x-15x=15x-15x$

$0=0$

Liczba 0 jest równa liczbie 0, więc otrzymaliśmy równanie tożsamościowe. Oznacza to, że równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba spełnia to równanie).

Ćwiczenie 3.

Rozwiąż równanie.

a) $4(x-5)+3=-1+4(x-4)$ **b)** $\frac{6b-3}{4}=\frac{3b+1}{2}$ **c)** $\frac{y-1}{5}=\frac{2y+5}{10}$

A to ciekawe

Zbiór liczb rzeczywistych to zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych. Równanie $x^2=9$ ma dokładnie dwa rozwiązania: 3 oraz -3, ponieważ

$$3^2=9 \text{ oraz } (-3)^2=9.$$

Równanie kwadratowe $x^2=-9$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, ponieważ każda liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu jest liczbą większą od zera lub równą zero.

Rozwiąż zadania

1. Rozwiąż równanie i sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $2x-5=7$ **b)** $3x-7=20$ **c)** $-4x+5=17$ **d)** $-9x+15=-8$

e) $12x-10=-4$ **f)** $5-2x=8$ **g)** $17=-22x+17$ **h)** $2\sqrt{3}+\sqrt{3}x=4\sqrt{3}$

2. Rozwiąż równanie.

a) $3x-9=x+17$ **b)** $25+10x=9x+3$ **c)** $12x-9=13x+4$

d) $4x-17=x-20$ **e)** $-10x+3=5x+15$ **f)** $-5x+22=-8+21x$

3. Rozwiąż równanie.

a) $2(x-4)=3x-2$ **b)** $-x-(1-x)=26$

c) $-9(x+2)+4=-(8x-1)-8$ **d)** $9-(-2x-3)=8+2(-x+2)$

e) $3\left(\frac{2}{3}x-2\right)=14-3x$ **f)** $2x-4\left(-\frac{1}{4}x+2\right)=\frac{1}{2}(2x-10)-3$

g) $6\left(\frac{5}{6}x-1\right)-10=-\frac{2}{7}(7+14x)$ **h)** $-0{,}75(x-1)+1{,}25=0{,}25(x+8)-12$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}x$ **b)** $1\frac{3}{5}-\frac{7}{10}x=2\frac{4}{5}-0{,}7x$ **c)** $\frac{5-x}{3}=\frac{x+2}{6}$

d) $\frac{x+4}{7}=2x-1$ **e)** $\frac{-x-5}{3}=\frac{-2x+3}{5}$ **f)** $\frac{-6x-2}{8}=\frac{3}{4}\left(-x-\frac{1}{3}\right)$

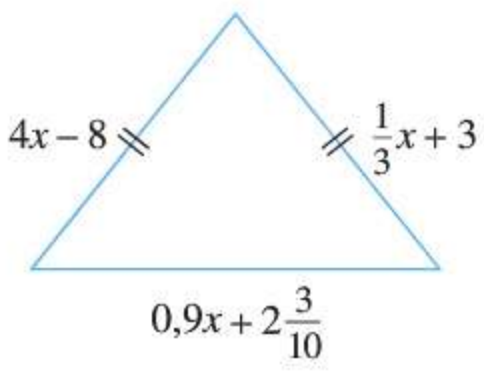
5. Wskaż pary równań równoważnych.

I. $-3x-2=5-4x$ **II.** $\frac{-10-x}{2}=0$ **III.** $\frac{2-x}{2}=\frac{x+2}{6}$

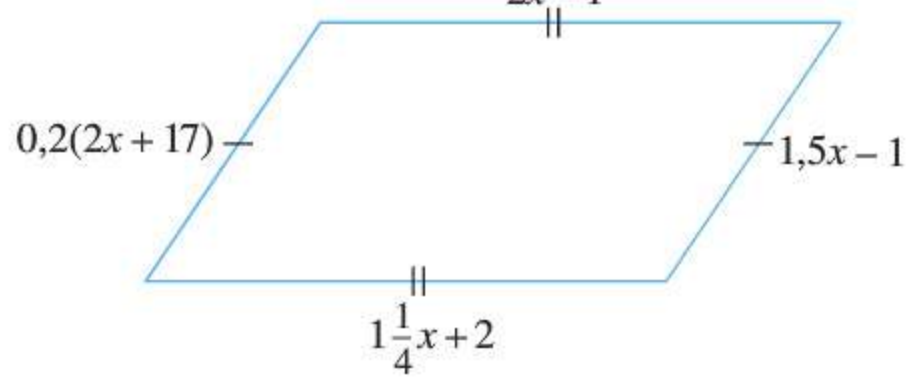
IV. $9x-15=10x-5$ **V.** $-(x-5)=8(2-x)+38$ **VI.** $-2(x-6)=5(3-x)$

6. Skorzystaj z własności przedstawionej na rysunku figury i wyznacz x, a następnie oblicz obwód tej figury.

a)



b)



7. Rozwiąż równanie.

a) $2x(2x+2)-3=4x(x-1)+9$ **b)** $-2x(x-2)=-3x(x-1)+x^2$

c) $(x+2)(x-2)-2x=x(x-2)+11$ **d)** $5x(x-4)-10x=-4x(x-1)+9x^2$

8. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2(x+1)-2x=x\left(2x^2+2x\right)+8$

b) $-x\left(2x^2-2\right)-2x^2=-3x(x-1)+x^2-2x^3$

c) $(x+2)\left(3x^2-1\right)+x^3-2x=6x(x+1)+4x^3+15$

d) $-2x\left(2x^2-4\right)+10x=-x\left(x^2-18\right)-3x^3$

9. Ustal, jaką liczbę należy wstawić w lukę, aby otrzymać równania równoważne.

a) $2(x+2)=6$ oraz $4x=3x-$ ▢

b) $1-2(x-1)=11$ oraz $-5x=$ ▢

10. Ile rozwiązań ma podane równanie?

a) $(x-3)\left(x^2+3x+9\right)-x^3=9$

b) $-2(x+1)\left(x^2-x+1\right)+2x^3=x^2-27$

Sprawdź, co umiesz!

1. Rozwiąż równanie i sprawdź otrzymane rozwiązanie.

a) $-2(x-1)=-3x-2$

b) $15x-(-1+x)=15$

c) $-3(x+2)+4=-(3x-1)-10$

d) $-6\left(\frac{1}{3}x-\frac{5}{6}\right)=20-x$

2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwiązaniem równania $\frac{2-x}{2}=\frac{5x-10}{10}$ jest liczba

A. 10 **B.** –2 **C.** 2 **D.** 5

3. Wskaż równanie, które nie jest równoważne równaniu $1-2(x+1)=9$.

A. $2x=-10$ **B.** $2(x-5)=-20$ **C.** $-2x=-10$ **D.** $\frac{x+5}{2}=0$

4. Rozwiąż równanie.

a) $-2x(2x-2)-8=-4x(x+1)+8$

b) $3x(x-1)=x(4x-1)-x^2$

c) $(x-1)(x+1)-2x=x(x-2)-1$

d) $2x\left(x^2-2x\right)-10x=-4x(x-1)+2x^3+20$

5. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Równanie $(x+3)(x-3)=x^2-9$ jest równaniem tożsamościowym.	**P**	**F**
Równanie $x^2-2x+3=x^2+2x+3$ jest równaniem sprzecznym.	**P**	**F**

3. Zadania tekstowe z wykorzystaniem równań

- Układanie równania na podstawie treści zadania
- Rozwiązywanie zadań tekstowych za pomocą równań

Przykład 1.

Bruno i Zosia rozwiązali quiz. Zosia zdobyła o 15 punktów więcej niż Bruno. Łącznie zdobyli 55 punktów. Ile punktów zdobył Bruno?



Analiza zadania

Niewiadomą jest liczba punktów, którą zdobył Bruno. Oznaczymy ją literą x.

x – liczba punktów, które zdobył Bruno

$x+15$ – liczba punktów, które zdobyła Zosia

Zosia i Bruno zdobyli łącznie 55 punktów.

Ułożenie i rozwiązanie równania

Ułożymy odpowiednie równanie uwzględniające dane z analizy zadania i je rozwiążemy.

$$\begin{aligned} x+x+15&=55\\ 2x+15&=55 \quad |-15\\ 2x&=40 \quad |:2\\ x&=20 \end{aligned}$$

Sprawdzenie

Bruno zdobył 20 punktów, a Zosia $20+15=35$ punktów. Łącznie zdobyli $20+35=55$ punktów.

Odp. Bruno zdobył 20 punktów.

Ćwiczenie 1.

Pola i Cezary byli wolontariuszami podczas zbiórki charytatywnej. Pola zebrała trzy razy mniej pieniędzy niż Cezary. Łącznie zebrali 628 zł. Ile złotych zebrała Pola?

Przykład 2.

Długości boków czworokąta są kolejnymi liczbami naturalnymi. Obwód czworokąta jest równy 150. Oblicz długość każdego boku tego czworokąta.

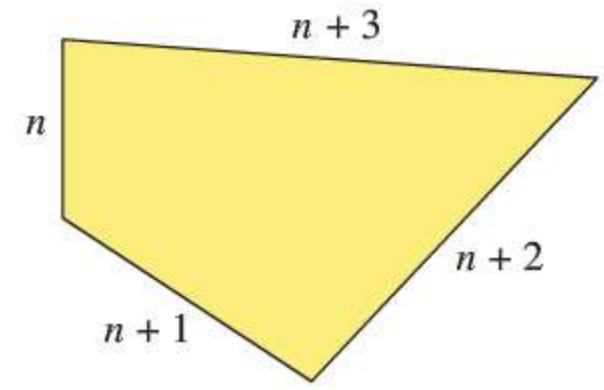
Analiza zadania

n – długość najkrótszego boku czworokąta

$n+1$, $n+2$, $n+3$ } długości kolejnych boków czworokąta

Obwód czworokąta jest równy 150.

Zapiszemy sumę długości boków czworokąta.



$$n+n+1+n+2+n+3=4n+6$$

Ułożenie i rozwiązanie równania

Przyrównamy sumę długości boków czworokąta do jego obwodu, a następnie rozwiążemy otrzymane równanie.

$$\begin{aligned} 4n+6 &= 150 \quad |-6 \\ 4n &= 144 \quad |:4 \\ n &= 36 \end{aligned}$$

Obliczymy długości pozostałych boków czworokąta.

$$\begin{aligned} n+1 &= 36+1 = 37 \\ n+2 &= 36+2 = 38 \\ n+3 &= 36+3 = 39 \end{aligned}$$

Sprawdzenie

$Obw. = 36+37+38+39 = 150$

Odp. Długości boków tego czworokąta są równe: 36, 37, 38, 39.

Ćwiczenie 2.

Długości boków pięciokąta są kolejnymi liczbami parzystymi. Obwód pięciokąta jest równy 160. Oblicz długość każdego boku tego pięciokąta.

Przykład 3.

Tata ma 41 lat, jego starszy syn ma 14 lat, córka – 11 lat, a młodszy syn – 6 lat. Oblicz, za ile lat tata będzie miał tyle samo lat, ile wszystkie jego dzieci razem.

Analiza zadania

Niewiadomą jest liczba lat, które muszą minąć, aby tata miał tyle lat, ile wszystkie jego dzieci razem. Oznaczymy ją literą x.

Dane z zadania zapiszemy w tabeli.

	Wiek obecnie	Wiek za x lat
Tata	41 lat	$(41+x)$ lat
Starszy syn	14 lat	$(14+x)$ lat
Córka	11 lat	$(11+x)$ lat
Młodszy syn	6 lat	$(6+x)$ lat

Ułożenie i rozwiązanie równania

Ułożymy odpowiednie równanie zgodnie z warunkami podanymi w zadaniu, a następnie je rozwiążemy.

$$\underbrace{41+x}_{\text{wiek taty za } x \text{ lat}} = \underbrace{14+x+11+x+6+x}_{\text{łączny wiek dzieci za } x \text{ lat}}$$

$$\begin{aligned} 41+x &= 31+3x \quad |-41 \\ x &= -10+3x \quad |-3x \\ -2x &= -10 \quad |:(-2) \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Sprawdzenie

Wiek starszego syna za 5 lat: $14+5=19$ lat, wiek córki za 5 lat: $11+5=16$ lat, wiek młodszego syna za 5 lat: $6+5=11$ lat.
Wiek taty za 5 lat to 46 lat. Suma wieku wszystkich dzieci za 5 lat jest równa $19+16+11=46$ lat.

Odp. Za 5 lat tata będzie miał tyle samo lat, ile jego wszystkie dzieci razem.

Ćwiczenie 3.

Mama ma 42 lata. Jej córka jest od niej 3 razy młodsza. Oblicz, ile lat temu mama była 5 razy starsza od córki.

Przykład 4.

Kasia przygotowała bukiet kwiatów na imieniny swojej babci. Miała do dyspozycji taką samą liczbę tulipanów w każdym z pięciu kolorów. Do skomponowania bukietu Kasia zużyła $80\ \%$ posiadanych czerwonych tulipanów, $50\ \%$ żółtych, $65\ \%$ różowych oraz $10\ \%$ fioletowych. Kompozycja składa się z 41 kwiatów. Oblicz, z ilu tulipanów każdego koloru Kasia ułożyła bukiet dla babci.

Analiza zadania

x – liczba tulipanów w każdym z kolorów
$80\ \%$ liczby x to $0{,}8x$ – liczba czerwonych tulipanów
$50\ \%$ liczby x to $0{,}5x$ – liczba żółtych tulipanów
$65\ \%$ liczby x to $0{,}65x$ – liczba różowych tulipanów
$10\ \%$ liczby x to $0{,}1x$ – liczba fioletowych tulipanów

Ułożenie i rozwiązanie równania

Z treści zadania wiemy, że bukiet składa się z 41 kwiatów. Ułożymy równanie, a następnie je rozwiążemy.

$$0{,}8x + 0{,}5x + 0{,}65x + 0{,}1x = 41$$
$$2{,}05x = 41 \quad | : 2{,}05$$
$$x = 20$$

Obliczymy, z ilu tulipanów każdego koloru Kasia ułożyła bukiet dla babci.

- czerwone tulipany: $0{,}8 \cdot 20 = 16$
- żółte tulipany: $0{,}5 \cdot 20 = 10$
- różowe tulipany: $0{,}65 \cdot 20 = 13$
- fioletowe tulipany: $0{,}1 \cdot 20 = 2$

Sprawdzenie

$16 + 10 + 13 + 2 = 41$

Odp. Kasia ułożyła bukiet dla babci z 16 czerwonych, 10 żółtych, 13 różowych i 2 fioletowych tulipanów.

Ćwiczenie 4.

Trzej bracia: Dominik, Łukasz i Filip otrzymali od rodziców taką samą kwotę pieniędzy na zakupy. Podczas zakupów Dominik wydał $70\ \%$ otrzymanych pieniędzy, Łukasz wydał $85\ \%$ otrzymanych pieniędzy, a Filip – $90\ \%$ otrzymanej kwoty. Łącznie bracia wydali $122{,}50$ zł. Oblicz, jaką kwotą dysponował każdy z braci przed zakupami.

Rozwiąż zadania

1. Liczbę x zmniejszono o 25. Otrzymany wynik stanowił trzecią część liczby 120. Wyznacz liczbę x.

2. Czterokrotność pewnej liczby jest o 20 większa od dwukrotności liczby 24. Jaka to liczba?

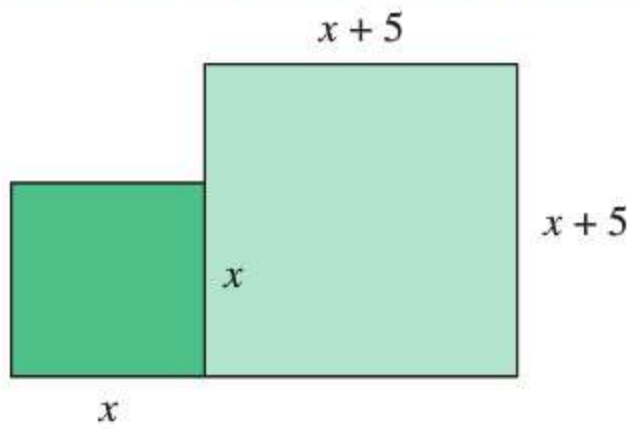
3. Na wycieczkę klasową pojechało 35 uczniów. Liczba chłopców była cztery razy mniejsza od liczby dziewcząt biorących udział w wycieczce. Oblicz, ile dziewcząt oraz ilu chłopców pojechało na wycieczkę.

4. Pola kupiła do swojego pokoju 3 plakaty, każdy w takiej samej cenie, i lampkę nocną. Lampka była droższa od plakatu o 26 zł. Za zakupy zapłaciła 222 zł. Ile kosztował jeden plakat?

5. Kuba chciał kupić w sklepie 6 batonów owsianych, ale brakowało mu $2{,}70$ zł. Kupił więc 5 batonów owsianych i otrzymał resztę równą 50 gr. Oblicz, ile kosztował jeden baton owsiany.

6. Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 20 cm. Ramię trójkąta jest o 4 cm dłuższe od jego podstawy. Oblicz długość podstawy trójkąta.

7. Figura przedstawiona na rysunku powstała z dwóch kwadratów. Obwód otrzymanej figury jest równy 80. Oblicz pole tej figury.



8. Suma miar kątów wewnętrznych w czworokącie jest równa $360°$. Najmniejszy z kątów czworokąta ma miarę α. Każdy kolejny kąt jest dwa razy większy od poprzedniego. Oblicz miary kątów tego czworokąta.

9. Córka jest dwa razy młodsza od swojej mamy. Ile lat ma córka, jeśli razem mają 72 lata?

10. Piotr jest o 10 lat starszy od Pawła. Pięć lat temu Paweł był 3 razy młodszy od Piotra. Oblicz, ile lat mają obecnie Piotr oraz Paweł.

11. W 1490 r. król Polski Kazimierz IV Jagiellończyk i jego syn Jan I Olbracht mieli łącznie 94 lata. Dwadzieścia trzy lata wcześniej król Kazimierz IV Jagiellończyk był 5 razy starszy od swojego syna. Oblicz, ile lat miał król Kazimierz IV Jagiellończyk w 1490 r.



Kazimierz IV Jagiellończyk

12. Do szkolnej biblioteki kupiono nowe podręczniki do matematyki oraz do języka polskiego. Podręczniki do matematyki stanowiły $\frac{2}{5}$ zakupionych książek. Podręczników do języka polskiego było o 12 więcej niż podręczników do matematyki. Oblicz, ile książek kupiono do szkolnej biblioteki.

13. Turyści wybrali się na trzydniową wyprawę pieszą. Pierwszego dnia przeszli $\frac{1}{3}$ zaplanowanej trasy. Następnego dnia udało im się przebyć $\frac{1}{2}$ długości drogi, która im pozostała. Trzeciego dnia turyści chcieli przejść zaplanowaną trasę do końca. Obliczyli, że pozostało im jeszcze 15 km do przebycia. Oblicz, ile kilometrów przeszli turyści pierwszego dnia, a ile – drugiego.

14. Liczba 6 jest o 12 mniejsza od $150\ \%$ liczby x. Wyznacz liczbę x.

15. W styczniu pensja pani Kamińskiej wzrosła o $20\ \%$. Pod koniec roku jej pensja wzrosła o kolejne $20\ \%$ i wtedy była równa 5904 zł. Oblicz, ile zarabiała pani Kamińska przed podwyżkami pensji.

16. Cenę kurtki obniżono o $20\ \%$, a następnie o $10\ \%$. Obecnie kurtka kosztuje 216 zł. Oblicz cenę tej kurtki przed obniżkami.

17. Dla finalistów konkursu nagrody ufundowało trzech sponsorów. Pierwszy z nich wpłacił $\frac{1}{4}$ kwoty przeznaczonej na nagrody, a drugi $30\ \%$ tej kwoty. Trzeci ze sponsorów na początku dał o $40\ \%$ mniej niż dwaj pierwsi sponsorzy razem. Jednak później dołożył do puli przeznaczonej na nagrody brakujące 1200 zł. Oblicz, jaką kwotę przeznaczoną na nagrody organizatorzy konkursu otrzymali od sponsorów.

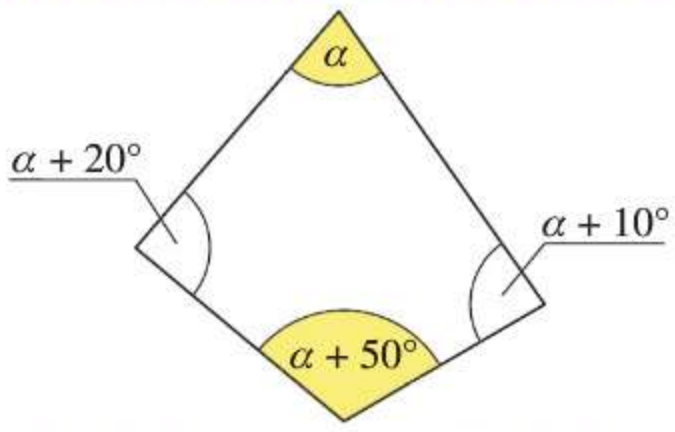


18. Oblicz, ile soli należy wsypać do 340 dag wody, aby otrzymać roztwór o stężeniu $15\ \%$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Liczbę x zwiększono 4 razy, a następnie do uzyskanego iloczynu dodano 14. Otrzymano liczbę 30. Wyznacz liczbę x.

2. Oblicz miarę kąta α. Pamiętaj o tym, że suma miar kątów wewnętrznych w czworokącie to $360°$.



E **3.** Nina i Kinga mają razem 63 lata. Za trzy lata Nina będzie miała tyle lat, ile Kinga teraz. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kinga ma

A. 29 lat. **B.** 31 lat. **C.** 30 lat. **D.** 33 lata.

E **4.** W warsztatach z programowania wzięło udział 21 uczniów z klasy 7a oraz pewna liczba uczniów z klasy 7b. Uczniowie z klasy 7a stanowili $60\ \%$ wszystkich uczestników tych warsztatów.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

W warsztatach uczestniczyło | **A** | **B** | uczniów. **A.** 32 **B.** 35

W warsztatach wzięło udział | **C** | **D** | niż 12 uczniów z klasy 7b. **C.** mniej **D.** więcej

4. Przekształcanie wzorów

- Wyznaczanie wskazanej wielkości ze wzoru

Prędkość możemy obliczyć ze wzoru: $v = \frac{s}{t}$, gdzie s oznacza drogę, a t – czas. Wzór ten możemy tak przekształcić, aby wyznaczyć z niego drogę $s = vt$ lub czas $t = \frac{s}{v}$.

Przy przekształcaniu wzorów, tak samo jak przy rozwiązywaniu równań, możemy

do obu stron równości dodać lub od obu stron równości odjąć tę samą liczbę lub to samo wyrażenie algebraiczne,

obie strony równości pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę lub to samo wyrażenie algebraiczne, różne od zera.

Przykład 1.

Wyznacz wysokość trójkąta ze wzoru na pole trójkąta.

Zapiszemy wzór na pole trójkąta. ⇨ $P = \frac{1}{2}ah$

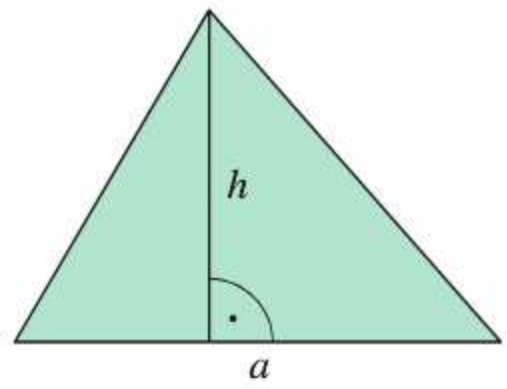
Pomnożymy obie strony równości przez liczbę 2, a następnie podzielimy je przez niewiadomą a.

$P = \frac{1}{2}ah \quad | \cdot 2$

⇨

$2P = ah \quad | : a$

$\frac{2P}{a} = h$



Zamienimy ze sobą miejscami lewą stronę i prawą stronę równości. ⇨ $h = \frac{2P}{a}$

Pamiętaj, że równanie $a = b$ jest równoważne równaniu $b = a$, dlatego wysokość h wyznaczona w Przykładzie 1. może być zapisana zarówno po lewej stronie, jak i po prawej stronie równości.

Ćwiczenie 1.

Wyznacz ze wzoru na pole trójkąta długość podstawy a trójkąta przedstawionego w Przykładzie 1.

Przykład 2.

Z podanego wzoru wyznacz niewiadomą a. Załóż, że $m \neq 0$, $k \neq 0$, $a \geqslant 0$, $c^2 \geqslant b^2$.

a) $b = \frac{a+b}{2} - 3$

$b = \frac{a+b}{2} - 3 \quad | +3$

$b + 3 = \frac{a+b}{2} \quad | \cdot 2$

$2(b+3) = a+b \quad | -b$

$2b + 6 - b = a$

$b + 6 = a$

$a = b + 6$

b) $a = \frac{1}{m} + \frac{a}{2} - \frac{3}{k}$

$a = \frac{1}{m} + \frac{a}{2} - \frac{3}{k} \quad | -\frac{a}{2}$

$a - \frac{a}{2} = \frac{1}{m} - \frac{3}{k} \quad | \cdot 2$

$2\left(a - \frac{a}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{m} - \frac{3}{k}\right)$

$2a - a = \frac{2}{m} - \frac{6}{k}$

$a = \frac{2}{m} - \frac{6}{k}$

c) $a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + b^2 = c^2 \quad | -b^2$

$a^2 = c^2 - b^2$

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Ćwiczenie 2.

Z podanego wzoru wyznacz niewiadomą a gdzie $a \geqslant 0$.

a) $k = \sqrt{5}b + 3a$ **b)** $k = 3(a+b)$ **c)** $y = \frac{a}{x} + 3, \ x \neq 0$ **d)** $\frac{a^2}{6} + x = 3y, \ 3y \geqslant x$

Rozwiąż zadania

1. Z podanego wzoru wyznacz wskazaną niewiadomą.

a) $y = 0{,}5x, \quad x$ **b)** $w = \frac{3}{5}r, \quad r$ **c)** $x = z\sqrt{3}, \quad z$

2. Ze wzoru matematycznego wyznacz wskazaną wielkość.

a) $P = ab, \quad b$ **b)** $V = abc, \quad c$ **c)** $P = \frac{ef}{2}, \quad f$

d) $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad a$ **e)** $P = 6a^2, \quad a$ **f)** $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad a$

3. Z podanych wzorów wyznacz każdą wielkość, która w nich występuje.

$E = mgh$

E – energia potencjalna

g – przyspieszenie ziemskie

m – masa

h – wysokość

$C_p = \frac{m_s}{m_r} \cdot 100\,\%$

C_p – stężenie procentowe roztworu

m_s – masa substancji

m_r – masa roztworu

4. Pole trapezu o podstawach długości $2x$ i $4x$ oraz wysokości h jest równe $6p$. Wyznacz ze wzoru na pole tego trapezu wysokość h.

E

Informacje do zadań 5. i 6.

Wzór na pole trapezu ma postać:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

a, b – długości podstaw trapezu
h – wysokość trapezu

5. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po wyznaczeniu a ze wzoru na pole trapezu otrzymamy

A. $a = \frac{2P-b}{h}$ **B.** $a = \frac{2P}{h} - b$ **C.** $a = \frac{Ph}{2} - b$ **D.** $a = 2P - h - b$

6. Pole trapezu jest równe $21\ \text{cm}^2$. Podstawa b ma długość $4\ \text{cm}$, a wysokość jest o $50\ \%$ dłuższa od długości podstawy b.
Czy podstawa a ma długość $3\ \text{cm}$?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

1.	Tak,	ponieważ	**1.**	$h = \frac{3}{2}b$.
			2.	podstawa a jest krótsza od podstawy b.
B.	Nie,		**3.**	$4 + a = 7$.

7. Liczby m i n są różne od zera. Przekształć równość tak, aby wyznaczyć iloraz $\frac{m}{n}$.

a) $m = 4n$ **b)** $4m = 9n$ **c)** $\frac{2m}{3} - \frac{4n}{5} = 0$ **d)** $\frac{m+3n}{m} = 7$

Sprawdź, co umiesz!

1. Ze wzoru fizycznego wyznacz wskazane wielkości.

a) $m = Vd, \quad V$ **b)** $E = mc^2, \quad m,\ c$ **c)** $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad v_0,\ a$

2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po wyznaczeniu wielkości a ze wzoru $v = v_0 - at$ otrzymamy

A. $a = \frac{v - v_0}{t}$ **B.** $a = \frac{v_0 + v}{t}$ **C.** $a = t(v_0 - v)$ **D.** $a = \frac{v_0 - v}{t}$

3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Po wyznaczeniu z równości $2x = \sqrt{2}y$ niewiadomej y otrzymamy $y = \sqrt{2}x$.	**P**	**F**
Po wyznaczeniu ze wzoru $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ wielkości c otrzymamy $c = 2p - (a+b)$.	**P**	**F**

PODSUMOWANIE DZIAŁU VI
Równania

Powtórz wiadomości

Liczby spełniające równanie

Liczba spełniająca równanie jest rozwiązaniem tego równania.

Sprawdźmy, czy liczba 2 spełnia równanie $2x + 2 = 4x - 2$.

$L = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

$P = 4 \cdot 2 - 2 = 6$

L = P, a więc liczba 2 spełnia to równanie.

Liczba rozwiązań równania

Równanie może mieć jedno rozwiązanie.

$3x + 6 = 3$

$x = -1$

Równanie może mieć nieskończenie wiele rozwiązań (równanie tożsamościowe).

$2x + 4 = 2(x + 2)$

$0 = 0$

Równanie może nie mieć rozwiązań (równanie sprzeczne).

$3x - 1 = 3x + 6$

$-1 = 6$

Przekształcanie wzorów

Przekształcanie wzoru polega na przedstawieniu jednej niewiadomej za pomocą pozostałych.

Ze wzoru $v = \frac{s}{t}$ wyznaczamy s.

$v = \frac{s}{t} \quad | \cdot t \quad v, s, t > 0$

$s = v \cdot t$

Rozwiązywanie równań

Podczas rozwiązywania równania możemy:

- dodać do obu stron równania lub odjąć od obu stron równania tę samą liczbę lub to samo wyrażenie,
- pomnożyć lub podzielić obie strony równania przez tę samą liczbę różną od zera.

$3x + 13 = 28 \quad | -13$ ← Od obu stron równania odejmiemy 13.

$3x + 13 - 13 = 28 - 13$

$3x = 15 \quad | : 3$ ← Obie strony równania podzielimy przez liczbę 3.

$3x : 3 = 15 : 3$

$x = 5$

Zastosowanie równań

Dwa lata temu Ania była trzy razy młodsza od mamy. Obecnie mają razem 44 lata. Oblicz, ile lat miała Ania dwa lata temu.

1. Analiza zadania

	Wiek 2 lata temu	Wiek obecnie
Ania	x lat	$(x + 2)$ lata
Mama	$3x$ lat	$(3x + 2)$ lata

2. Ułożenie i rozwiązanie równania

$x + 2 + 3x + 2 = 44$

$4x + 4 = 44 \quad | -4$

$4x = 40 \quad | : 4$

$x = 10$

3. Sprawdzenie

$L = 10 + 2 + 3 \cdot 10 + 2 = 44$

$P = 44$ $\qquad$ $L = P$

4. Odpowiedź

Dwa lat temu Ania miała 10 lat.

Sprawdź umiejętności

E

1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwiązaniem równania $3x - 5 = x$ jest liczba

A. 2 **B.** 2,5 **C.** 1,25 **D.** 1,5

2. Rozwiąż równanie.

a) $13x - 6 = 5x + 2$ **b)** $-4 + 10x = -2x - 1$ **c)** $\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{3} = \frac{1}{3}x + 1$

d) $x + 1{,}6 = 2\frac{3}{100} + 0{,}14x$ **e)** $-0{,}75x - 1\frac{1}{5} = 3{,}8 + \frac{1}{4}x$ **f)** $2\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} = \sqrt{3}x - 7\sqrt{3}$

3. Które z podanych równań są równaniami tożsamościowymi? Uzasadnij swoją odpowiedź.

I. $3(x-1) = 3x - 3$ **II.** $1 - x = -1 - x$ **III.** $2(x-3) = -6 + 2x$

4. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

E

Równanie $x + 3 = 3$ jest sprzeczne.	**P**	**F**
Równanie $2x = 3 + 2x$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.	**P**	**F**
Równanie $2x + 1{,}5 = x + 1{,}5$ nie ma rozwiązań.	**P**	**F**

5. Wskaż parę równań równoważnych.

I. $4x - 4 = 2x$ **II.** $4 = x - 2$ **III.** $5(x-1) = 4x$

IV. $(x-1)(x+2) = x^2$ **V.** $\frac{x-1}{3} = \frac{2x+2}{4}$ **VI.** $x - \frac{x-1}{2} = 3x$

6. Rozwiąż podane równania. Wskaż, które z nich są spełnione przez liczby całkowite.

I. $3(x+2) - x = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$ **II.** $\frac{1}{2}(x^2 - x + 1) = x\left(\frac{1}{2}x - 1{,}5\right)$

III. $4 - 5(3 - x) = -x - 2(3 - 2x)$ **IV.** $2\left(2x + 2\frac{1}{2}\right) - 3(x+2) = -4 + 2(x+2)$

7. Rozwiąż równanie.

a) $5 + \frac{7+x}{2} = 3x + 11$ **b)** $\frac{x+1}{4} - \frac{x-3}{2} = -(4+x)$ **c)** $\frac{3x-4}{6} - \frac{2-x}{9} = \frac{x-1}{18}$

8. Liczbę a podzielono przez 2 i do otrzymanego ilorazu dodano 4. Otrzymano 16. Wyznacz liczbę a.

9. Jeden bok prostokąta ma długość $6\left(\frac{1}{3}x + 1{,}5\right)$ cm. Jego drugi bok jest równy $\left(\sqrt[3]{8}x + 3^2\right)$ cm. Uzasadnij, że ten prostokąt jest kwadratem.

10. Kasia miała 120 zł. Kupiła 4 bilety do kina i dwa duże opakowania popcornu. Zostało jej 15,90 zł. Oblicz, ile kosztował jeden bilet do kina.



11. W klasie 7a połowa uczniów ma niebieskie oczy, a czwarta część uczniów ma zielone oczy. Pozostałe osiem osób z tej klasy ma brązowe oczy. Oblicz, ilu uczniów liczy klasa 7a.

E **12.** Jacek kupił blok i węgiel rysunkowy. Za zakupy zapłacił 30 zł. Blok był o 50 % droższy niż węgiel.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Węgiel kosztował | **A** | **B** |.

Blok był o | **C** | **D** | droższy od węgla.

A. 6 zł **B.** 12 zł **C.** 3 zł **D.** 6 zł

13. W klasie 7c jest o 10 % uczniów więcej niż w klasie 7d. Oblicz, ilu uczniów jest w każdej z tych klas, jeśli w obu klasach łącznie jest 42 uczniów.

E **Informacje do zadań 14. i 15.**

Bilety normalne na koncert pewnego popularnego zespołu muzycznego były o 25 % droższe od biletów ulgowych.

14. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wzór opisujący cenę biletów ulgowych x w zależności od ceny biletów normalnych y ma postać

A. $y = \frac{5}{4}x$ **B.** $y = \frac{3}{2}x$ **C.** $x = \frac{3}{4}y$ **D.** $x = \frac{4}{5}y$

15. Pan Kacper kupił 2 bilety normalne oraz 4 bilety ulgowe i zapłacił 390 zł. Pani Joanna kupiła 3 bilety normalne i 4 bilety ulgowe na ten sam koncert.

Ile zapłaciła pani Joanna za bilety? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 450 zł **B.** 465 zł **C.** 620 zł **D.** 660 zł

16. W XIX w. wybudowane zostały Tower Bridge (czyt. tałer bridż) – most zwodzony w Londynie oraz wieża Eiffla (czyt. ajfla) – obiekt uznawany za symbol Paryża. W 1899 r. wieża Eiffla istniała dwa razy dłużej niż Tower Bridge. Czterdzieści lat później Tower Bridge miał o 10 % mniej lat niż wieża Eiffla. W którym roku wybudowano Tower Bridge, a w którym – wieżę Eiflla?

17. Wyznacz ze wzoru podaną niewiadomą. Załóż, że wszystkie niewiadome są liczbami dodatnimi.

a) $\frac{b-4c}{k} = d, \quad b$ **b)** $x(a-c) = b, \quad a$ **c)** $P = \frac{(a+b)}{2} \cdot h, \quad b$

d) $c = \frac{1}{h+k}, \quad h$ **e)** $\frac{at^2}{2} = s, \quad t$ **f)** $y + 2 = \frac{\sqrt{6x}}{2}, \quad x$

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Sprawdź, które z podanych czterech liczb: -2, $-1\frac{1}{4}$, 0, 6 są pierwiastkami równania $x^2 - 4x - 12 = 0$.

2. Wskaż, które z podanych czterech liczb: -3, -2, 3, 6 spełniają równanie $\frac{x^2}{27} - \frac{1}{3} = 0$.

3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pierwiastkiem równania $\frac{x}{12} : \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$ jest liczba

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 3 **C.** $3\frac{1}{3}$ **D.** 48

4. Rozwiąż równanie.

a) $(x+3)^2 - 3 = -x(x-1) + 2x^2$

b) $-2x(x-7) + 10 = 4(x-1)^2 - 6x^2 - 14$

c) $x(x-1)(x+3) = x\left(x^2 - x\right) + 3x^2$

d) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} - \frac{x-2}{5} = -\frac{1}{30}x$

e) $\frac{-(x+2)}{8} + x^2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{x+3}{2} + \frac{1}{2}x(x-3)$

f) $(x-2)(x+2) - \frac{3x+1}{2} = (x-1)^2 + \frac{1{,}5x-3}{3} + \frac{2}{3}$

5. Ile rozwiązań ma podane równanie? Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $x^2 + 8 = 0$ **b)** $x^2(x+1) - x^2 = x^3$ **c)** $x^4 - 81 = 0$

6. Trapez równoramienny i kwadrat mają taki sam obwód. Dłuższa podstawa tego trapezu ma długość $\frac{3\left(x - 8\frac{5}{6}\right)}{2{,}5}$ cm. Krótsza podstawa tego trapezu ma taką samą długość jak jego ramię i jest równa $0{,}25(x+2)$ cm. Bok kwadratu jest równy $\frac{13}{36}x$ cm. Oblicz pole kwadratu.

7. Cenę bluzki obniżono o $12{,}5\ \%$, a następnie o $17{,}5\ \%$. Obecnie bluzka kosztuje $115{,}50$ zł. Oblicz cenę bluzki przez obniżkami.

8. Krzysztof ma w swoim czytniku e-booki (książki elektroniczne): historyczne, przygodowe oraz naukowe. E-booków historycznych jest o $15\ \%$ mniej niż przygodowych, a przygodowych o 12 więcej niż naukowych. W czytniku Krzysztofa znajduje się łącznie 45 książek elektronicznych. Oblicz, ile e-booków historycznych ma Krzysztof.



9. Długość dłuższego boku prostokąta jest o $20\ \%$ większa od potrojonej długości krótszego boku. Oblicz pole tego prostokąta, jeżeli jego obwód jest równy $36{,}8$ cm.

E Informacje do zadań 10. i 11.

Do szkolnej sali komputerowej zakupiono 7 klawiatur i 12 myszek komputerowych. Każda klawiatura kosztowała x zł. Myszka komputerowa była tańsza o 64 % od klawiatury. Za zakupiony sprzęt zapłacono 2830 zł.



10. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cenę myszki komputerowej można wyznaczyć za pomocą równania

A. $7x + 12(x - 64) = 2830$

B. $7x + 12 \cdot 0{,}64x = 2830$

C. $7x + 12(x - 36) = 2830$

D. $7x + 12 \cdot 0{,}36x = 2830$

11. Czy myszka kosztowała 90 zł?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ koszt klawiatury można obliczyć z równania	**1.**	$14{,}64x = 2830.$
B.	Nie,		**2.**	$11{,}32x = 2830.$
			3.	$19x = 2398.$

12. Jedna z podstaw trapezu jest trzy razy dłuższa od drugiej. Wysokość trapezu stanowi 240 % długości krótszej podstawy tego trapezu, a jego pole jest równe 345,6 cm^2. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

13. Ile łyżeczek cukru należy wsypać do 280 g wody, aby otrzymać roztwór o stężeniu 20 %? Przyjmij, że 1 łyżeczka cukru waży 5 g.

14. Wyznacz ze wzoru podaną niewiadomą. Załóż, że wszystkie niewiadome są liczbami dodatnimi.

a) $\frac{4v - t}{k} = p, \quad v$ **b)** $\frac{2m(k - l)}{c + b} = h, \quad m$ **c)** $\frac{-x + 2t^2 - 5k}{x} = z, \quad t$

15. Dany jest wzór $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, gdzie niewiadome f, x, y są różne od zera, $x \neq f$, $y \neq f$ oraz $x \neq -y$. Wyznacz z tego wzoru każdą z występujących w nim niewiadomych.

DZIAŁ VII

FIGURY PŁASKIE

Własności trójkątów

Twierdzenie Pitagorasa

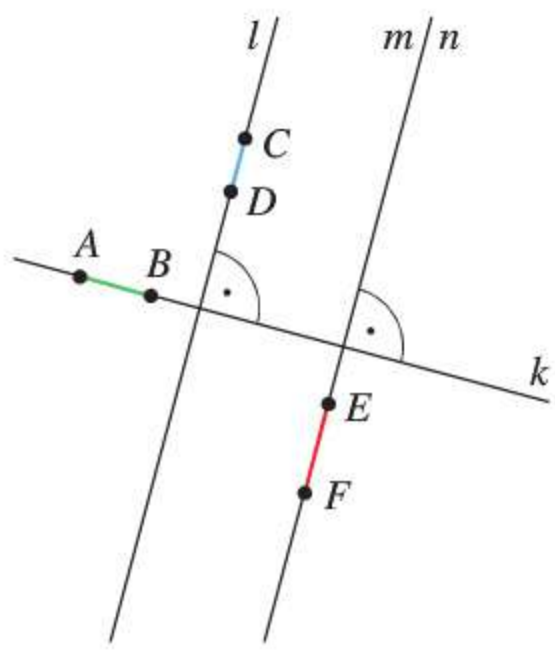


To ci się przyda!

1. Proste i odcinki

- Wzajemne położenie prostych i odcinków na płaszczyźnie
- Zastosowanie własności prostych równoległych oraz prostych prostopadłych

Proste k i l przecinają się pod kątem prostym, więc są prostopadłe ($k \perp l$ i $l \perp k$).
Odcinki AB oraz CD są prostopadłe ($AB \perp CD$ i $CD \perp AB$), ponieważ zawierają się w prostych prostopadłych k i l.



Proste l i m są prostopadłe do prostej k, więc są równoległe ($l \parallel m$ i $m \parallel l$). Różne od siebie proste równoległe nie mają punktów wspólnych.
Odcinki CD oraz EF są równoległe ($CD \parallel EF$ i $EF \parallel CD$), ponieważ zawierają się w prostych równoległych l i m.

Proste m i n pokrywają się, więc są równoległe ($m \parallel n$ i $n \parallel m$). Proste pokrywające się mają nieskończenie wiele punktów wspólnych.

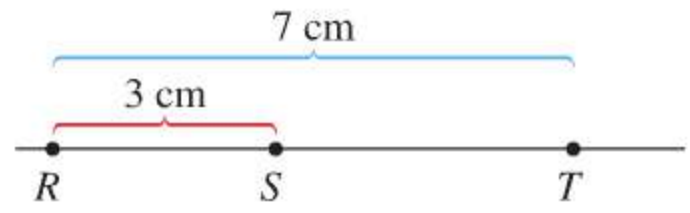
Przykład 1.

Punkt R leży na prostej ST. Oblicz odległość między punktami S i T, jeśli $|RS| = 3$ cm oraz $|RT| = 7$ cm.

Rozpatrzymy dwa przypadki.

Przypadek I

Punkt S leży pomiędzy punktami R i T. ⇒



Obliczymy odległość między punktami S i T. ⇒

$$|ST| = |RT| - |RS| = 7 - 3 = 4 \text{ [cm]}$$

Przypadek II

Punkt R leży pomiędzy punktami S i T. ⇒



Obliczymy odległość między punktami S i T. ⇒

$$|ST| = |RT| + |RS| = 7 + 3 = 10 \text{ [cm]}$$

Odp. Odległość między punktami S i T jest równa 4 cm lub 10 cm.

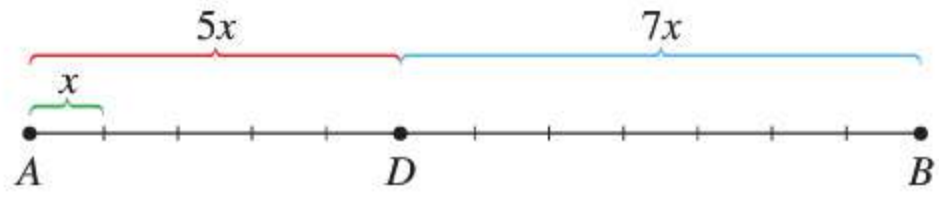
Ćwiczenie 1.

Punkt K leży na prostej LM. Oblicz odległość między punktami L i M, jeśli $|KL| = 5$ cm oraz $|KM| = 9$ cm.

Przykład 2.

Punkt D podzielił odcinek AB o długości $60\ \text{cm}$ na dwa odcinki: AD i DB, których stosunek długości jest równy $5 : 7$. Oblicz długości odcinków AD oraz DB.

Odcinek AB podzielimy na $5 + 7$, czyli 12 równych części, i przyjmiemy, że x to jedna z części tego odcinka.



Odcinek AB o długości $60\ \text{cm}$ składa się z odcinków AD i DB takich, że $|AD| = 5x$, $|DB| = 7x$. Ułożymy i rozwiążemy równanie.

$$5x + 7x = 60$$

$$12x = 60 \quad | : 12$$

$$x = 5\ [\text{cm}]$$

Obliczymy długości odcinków: $|AD| = 5x = 5 \cdot 5\ \text{cm} = 25\ \text{cm}$ oraz $|DB| = 7x = 7 \cdot 5\ \text{cm} = 35\ \text{cm}$.

Odp. Odcinek AD ma długość $25\ \text{cm}$, a odcinek DB – długość $35\ \text{cm}$.

Ćwiczenie 2.

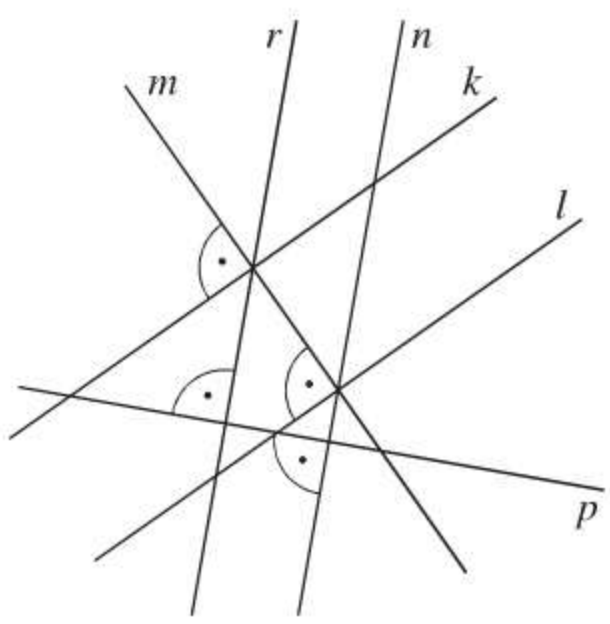
Punkt K podzielił odcinek EF o długości $72\ \text{cm}$ na dwa odcinki: EK i KF, których stosunek długości jest równy $1 : 8$. Oblicz długości odcinków EK i KF.

Rozwiąż zadania

1. Na rysunku przedstawiono proste: k, l, m, n, p, r.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Proste k i l są równoległe.	**P**	**F**
Na rysunku przedstawiono cztery pary prostych prostopadłych.	**P**	**F**

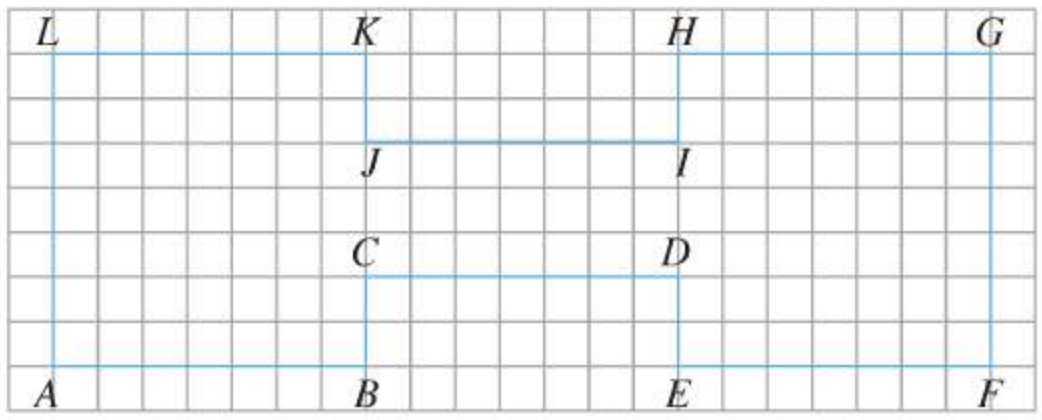


E

2. Na rysunku przedstawiono dwunastokąt $ABCDEFGHIJKL$. Wskaż odcinki:

a) równoległe do odcinka AB,

b) prostopadłe do odcinka CD.



3. Narysuj dwie figury (inne niż prostokąt), które składają się tylko z odcinków prostopadłych i odcinków równoległych.

4. Punkt R leży na prostej PQ. Oblicz odległość między punktami P i Q, jeśli $|PR| = 6{,}5\ \text{cm}$ oraz $|RQ| = 7{,}8\ \text{cm}$. Rozpatrz dwa przypadki.

5. Punkt S dzieli odcinek RQ na dwa odcinki: RS i SQ, których stosunek długości jest równy $2 : 3$. Odcinek SQ ma długość $30\ \text{cm}$. Oblicz długości odcinków RS oraz RQ.

6. Punkty K i L dzielą kolejno odcinek MN na trzy odcinki, których stosunek długości jest równy $1 : 2 : 3$. Oblicz długości odcinków:

a) MK, KL i LN, jeśli $|MN| = 36\ \text{cm}$,

b) MK, LN i MN, jeśli $|KL| = 10\ \text{cm}$.

7. Odległość między dwiema prostymi równoległymi: k i l jest równa $8\ \text{cm}$. Punkt P znajduje się w odległości $3\ \text{cm}$ od prostej k. Oblicz, w jakiej odległości od prostej l może znajdować się punkt P.

8. Punkty: A, B i C leżą na jednej prostej. Ustal, który z tych punktów leży pomiędzy dwoma pozostałymi punktami, jeśli $|BC| - |AC| = |AB|$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Prosta AB jest prostopadła do prostej CD. Narysuj prostą EF, która będzie prostopadła do prostej AB. Ustal, jak położone są względem siebie proste CD i EF.

2. Punkt C podzielił odcinek AB o długości $42\ \text{cm}$ na dwa odcinki: AC i CB, których stosunek długości jest równy $2 : 7$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Odcinek CB ma długość | **A** | **B** |.

A. $30\ \text{cm}$ **B.** $32\frac{2}{3}\ \text{cm}$

Odcinek CB jest o | **C** | **D** | dłuższy od odcinka AC.

C. $250\ \%$ **D.** $350\ \%$

3. Punkty: P, Q, R i S leżą w podanej kolejności na jednej prostej. Długości odcinków: PS, PR i QS są równe odpowiednio: $10\ \text{cm}$, $5\ \text{cm}$ i $7\ \text{cm}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Długość odcinka PQ jest równa $2\ \text{cm}$.	**P**	**F**
Odcinki PR i RS mają taką samą długość.	**P**	**F**

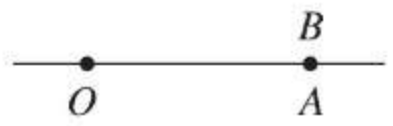
2. Kąty i ich rodzaje

- Podział kątów ze względu na ich miarę
- Zastosowanie własności kątów wierzchołkowych, przyległych, odpowiadających oraz naprzemianległych

Dwie półproste o wspólnym początku dzielą płaszczyznę na dwie części. Każdą z tych części wraz z tymi półprostymi nazywamy **kątem**. Ich wspólny początek to **wierzchołek kąta**.

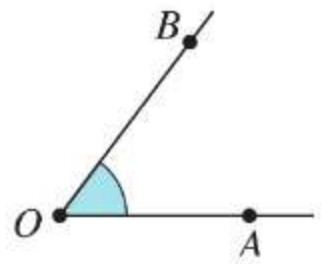
Podział kątów ze względu na miarę

Kąt zerowy



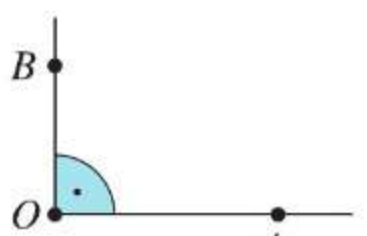
$|\sphericalangle AOB| = 0^\circ$

Kąt ostry



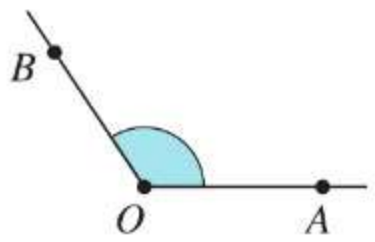
$0^\circ < |\sphericalangle AOB| < 90^\circ$

Kąt prosty



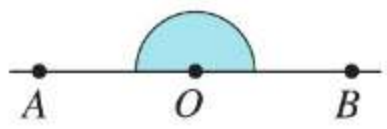
$|\sphericalangle AOB| = 90^\circ$

Kąt rozwarty



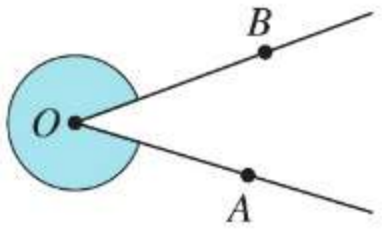
$90^\circ < |\sphericalangle AOB| < 180^\circ$

Kąt półpełny



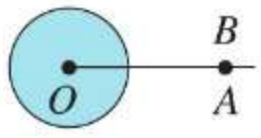
$|\sphericalangle AOB| = 180^\circ$

Kąt wklęsły



$180^\circ < |\sphericalangle AOB| < 360^\circ$

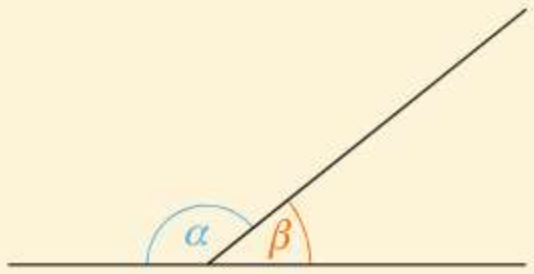
Kąt pełny



$|\sphericalangle AOB| = 360^\circ$

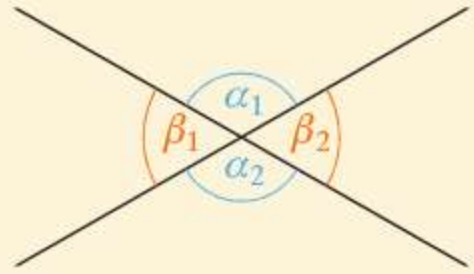
Kąt jest **wypukły**, jeśli ma miarę nie mniejszą niż 0° i jednocześnie nie większą niż 180°.
Kąt pełny jest zaliczany do kątów wypukłych.

Dwa kąty nazywamy **kątami przyległymi**, jeśli mają wspólne ramię, a ich dwa pozostałe ramiona tworzą prostą.



Kąty α i β są kątami przyległymi.
$\alpha + \beta = 180^\circ$

Kąty wierzchołkowe to kąty tej samej miary, utworzone przez przecinające się proste.



Kąty α_1 i α_2 oraz kąty β_1 i β_2 są kątami wierzchołkowymi.
$\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$

Przykład 1.

Uzasadnij, że w ciągu $\frac{1}{6}$ h minutowa wskazówka zegara zakreśla kąt wypukły.

W ciągu godziny minutowa wskazówka zegara zakreśla kąt o mierze 360°.

Obliczymy miarę kąta, jaki zakreśla minutowa wskazówka zegara w ciągu $\frac{1}{6}$ h. ⇒ $\frac{1}{\cancel{6}_1} \cdot \cancel{360^\circ}^{60^\circ} = 1 \cdot 60^\circ = 60^\circ$

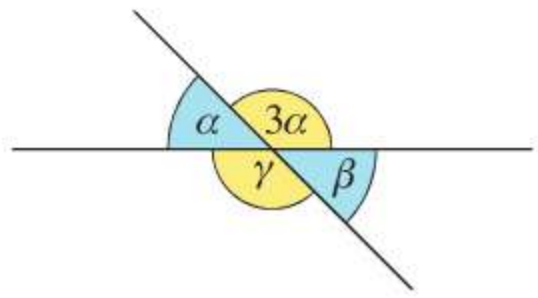
Kąt 60° jest kątem wypukłym, więc w ciągu $\frac{1}{6}$ h minutowa wskazówka zegara zakreśla kąt wypukły.

Ćwiczenie 1.

Uzasadnij, że w ciągu $\frac{5}{8}$ h minutowa wskazówka zegara zakreśla kąt wklęsły.

Przykład 2.

Oblicz miary kątów: α, β oraz γ.



Skorzystamy z tego, że suma miar kątów przyległych jest równa 180°, i obliczymy miarę kąta α. ⇒

$\alpha + 3\alpha = 180^\circ$
$4\alpha = 180^\circ \quad | : 4$
$\alpha = 45^\circ$

Miara kąta przyległego do kąta α jest równa $3\alpha = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$.

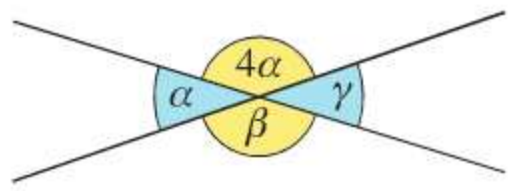
Skorzystamy z tego, że kąty wierzchołkowe mają równe miary. ⇒

$\alpha = \beta = 45^\circ$
$3\alpha = \gamma = 135^\circ$

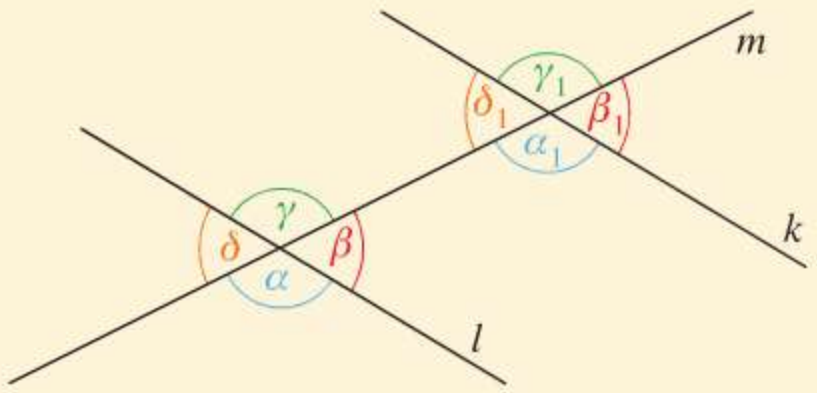
Wobec tego $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$ oraz $\gamma = 135^\circ$.

Ćwiczenie 2.

Oblicz miary kątów: α, β oraz γ.



Dwie proste równoległe k i l przecięto prostą m.



$k \parallel l$

Powstały kąty:

- odpowiadające:

α i α_1, β i β_1, γ i γ_1, δ i δ_1;

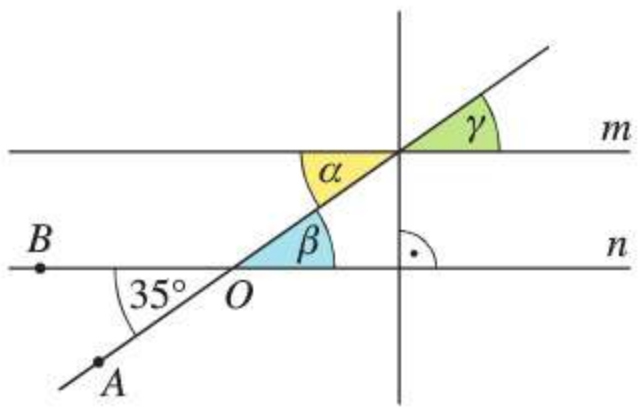
- naprzemianległe:

α i γ_1, β i δ_1, γ i α_1, δ i β_1.

Zarówno **kąty odpowiadające**, jak i **kąty naprzemianległe** mają równe miary.

Przykład 3.

Oblicz miary kątów: α, β i γ.



$m \parallel n$

Kąt AOB ma miarę $35°$. Kąty AOB i β są wierzchołkowe, więc mają równe miary, zatem $\beta = 35°$.

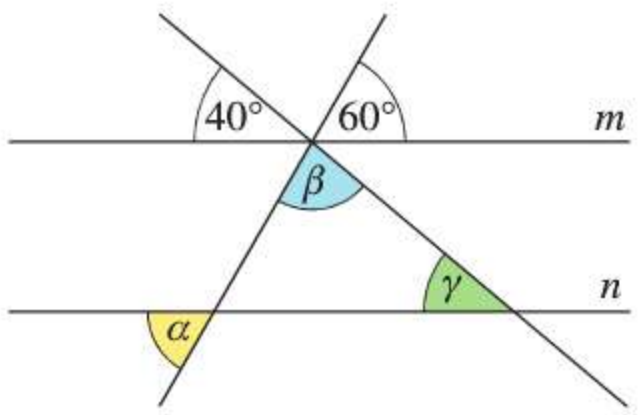
Kąty AOB i α są odpowiadające, więc mają równe miary, zatem $\alpha = 35°$.

Kąty AOB i γ są naprzemianległe, więc mają równe miary, zatem $\gamma = 35°$.

Odp. Kąty: α, β i γ mają taką samą miarę równą $35°$.

Ćwiczenie 3.

Oblicz miary kątów: α, β i γ.

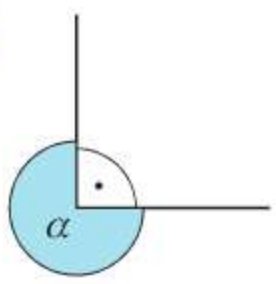


$m \parallel n$

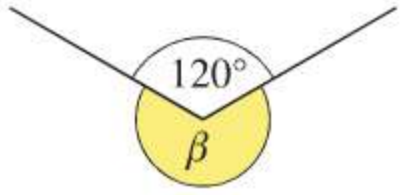
Rozwiąż zadania

1. Oblicz miarę kąta oznaczonego literą grecką.

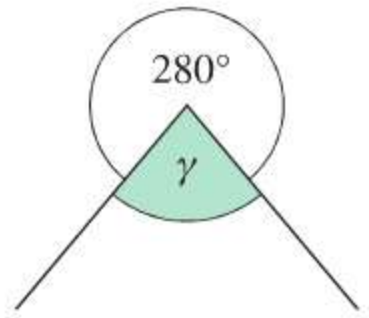
a)



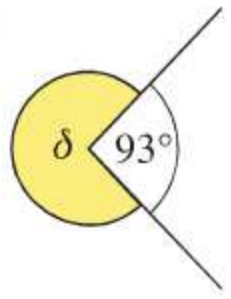
b)



c)



d)



2. Oblicz miarę kąta, którego miara stanowi $\frac{1}{18}$ miary kąta pełnego.

3. Podaj miarę kąta, jaki zakreśla minutowa wskazówka zegara w ciągu:

a) minuty, **b)** kwadransa, **c)** $\frac{3}{4}$ godziny, **d)** godziny.

4. Podaj miarę kąta, jaki zakreśla godzinowa wskazówka zegara w ciągu:

a) godziny, **b)** 3 godzin, **c)** 6 godzin, **d)** 12 godzin.

5. Oblicz miarę kąta przyległego do kąta o mierze 99°.

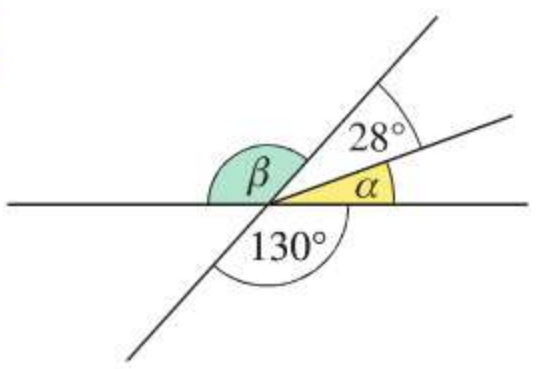
6. Miara jednego z kątów przyległych jest pięć razy mniejsza od miary drugiego kąta. Oblicz miarę każdego z tych kątów.

7. Różnica miar dwóch kątów przyległych jest równa 60°. Oblicz miarę każdego z tych kątów.

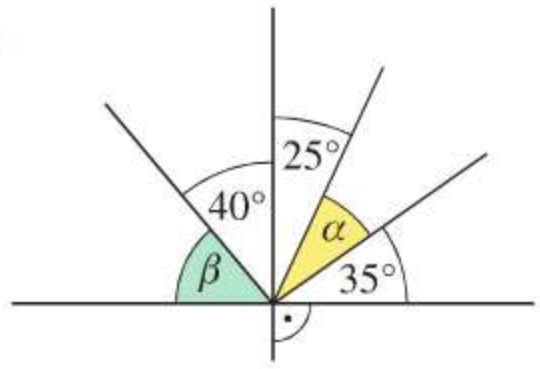
8. Jeden z kątów wyznaczonych przez dwie przecinające się proste ma miarę 35°. Oblicz miary pozostałych kątów wyznaczonych przez te proste.

9. Oblicz miary kątów α i β.

a)



b)



10. Na rysunku przedstawiono dwie proste przecinające się. Oblicz miarę kąta α.

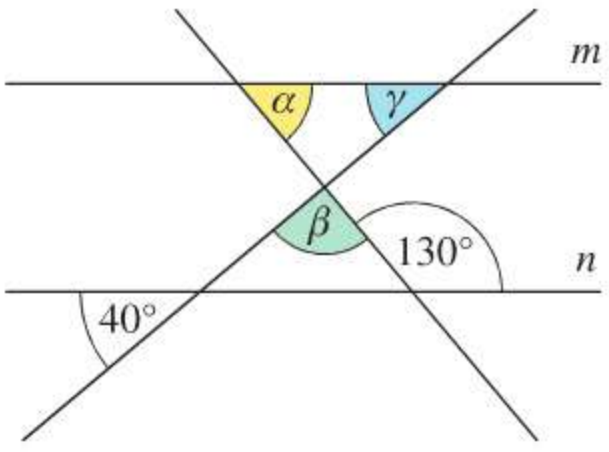
a)



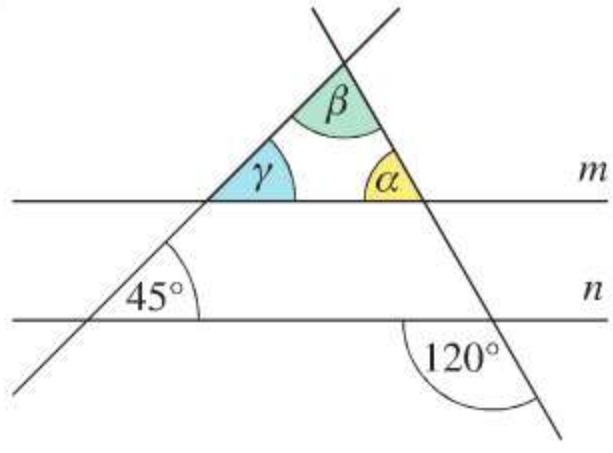
b)

11. Proste m i n są równoległe. Oblicz miary kątów: α, β oraz γ.

a)



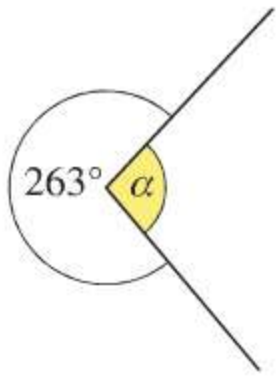
b)



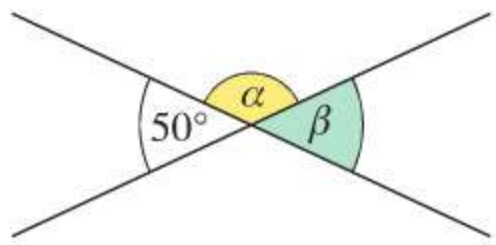
Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz miary kątów oznaczonych literami greckimi.

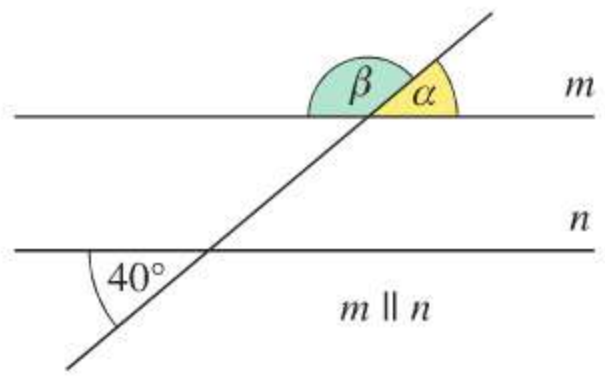
a)



b)



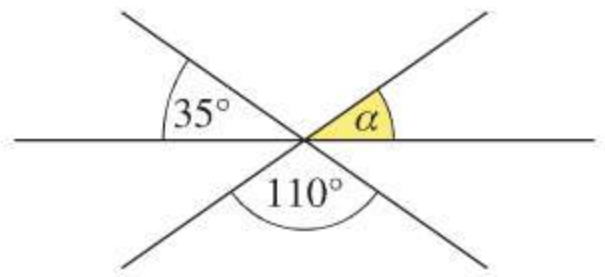
c)



2. Na rysunku przedstawiono trzy przecinające się proste.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

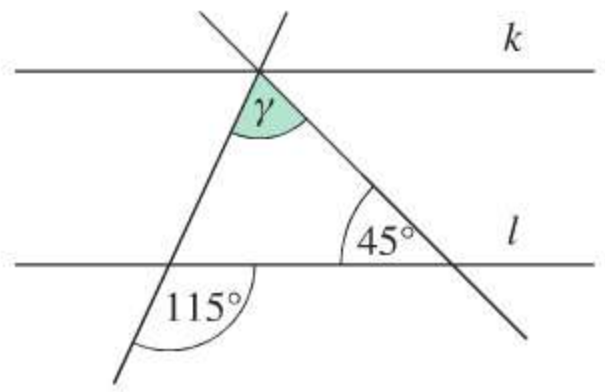
Miara kąta α jest równa



A. $25°$ **B.** $35°$ **C.** $45°$ **D.** $55°$

E

3. Proste k i l są równoległe. Uzasadnij, że miara kąta γ jest o $20°$ mniejsza od miary kąta prostego.



4. Kąty α i β są kątami przyległymi. Miara kąta α jest 14 razy mniejsza od miary kąta β.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

E

Kąt α jest kątem ostrym.	**P**	**F**
Miara kąta β jest równa $168°$.	**P**	**F**

3. Trójkąty i ich własności

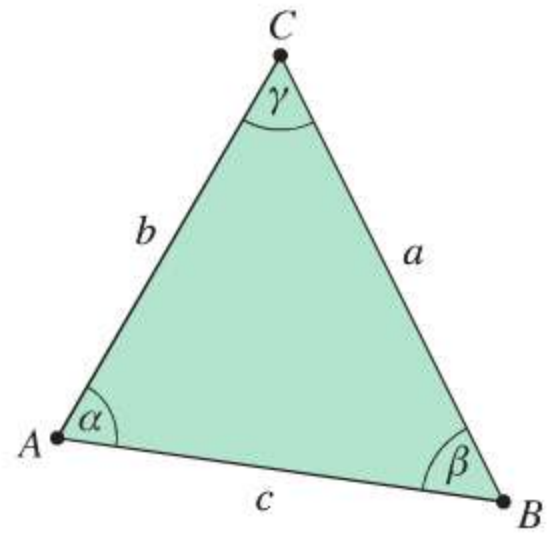
- Podział trójkątów ze względu na miary kątów oraz na długości boków
- Stosowanie nierówności trójkąta

Na rysunku przedstawiono trójkąt ABC.

Punkty A, B, C nazywamy wierzchołkami trójkąta, natomiast odcinki AB, BC, AC – bokami trójkąta.
Długości boków tego trójkąta to: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$.

Obwód tego trójkąta jest równy $a + b + c$.

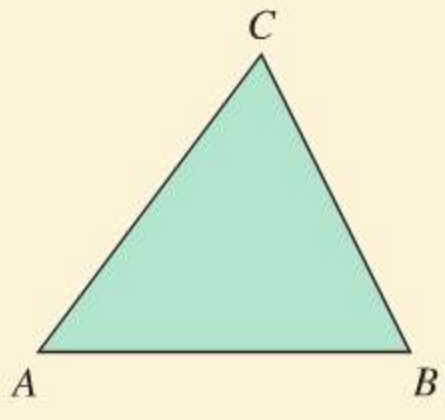
Kąty α, β oraz γ są kątami wewnętrznymi tego trójkąta.
Zamiast wyrażenia *trójkąt* ABC możemy używać zapisu ΔABC.



Podział trójkątów ze względu na miary kątów

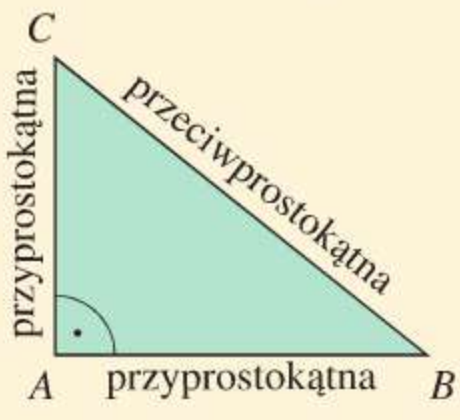
Trójkąt ostrokątny

Wszystkie kąty wewnętrzne trójkąta są ostre.



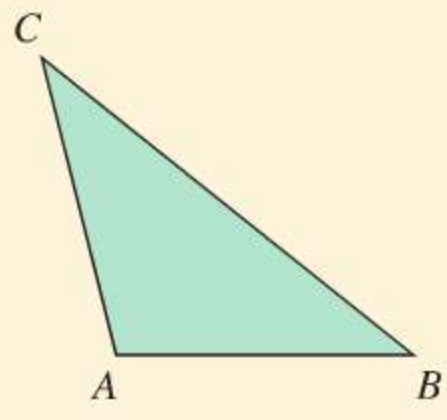
Trójkąt prostokątny

Jeden z kątów wewnętrznych trójkąta jest prosty, a dwa pozostałe są ostre.



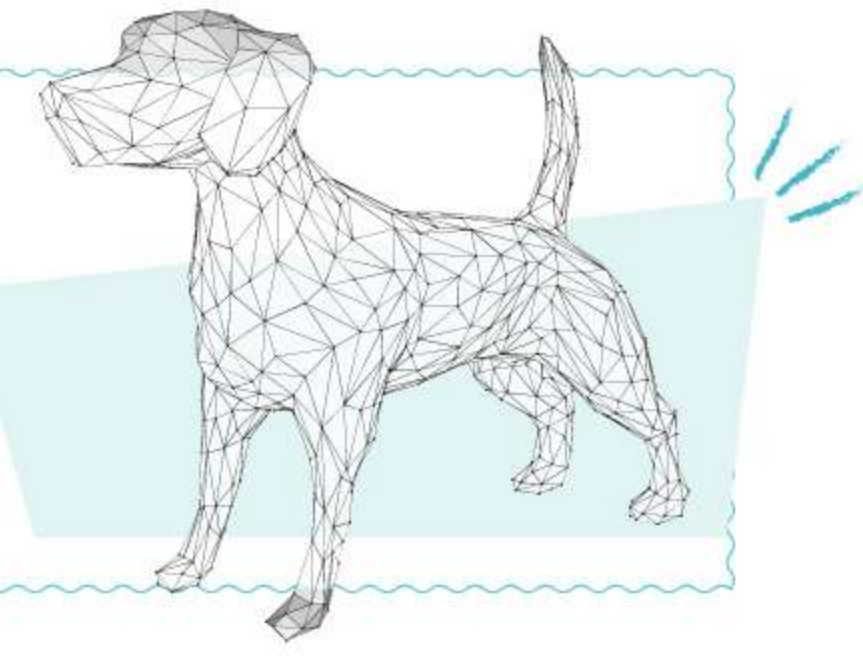
Trójkąt rozwartokątny

Jeden z kątów wewnętrznych trójkąta jest rozwarty, a dwa pozostałe są ostre.



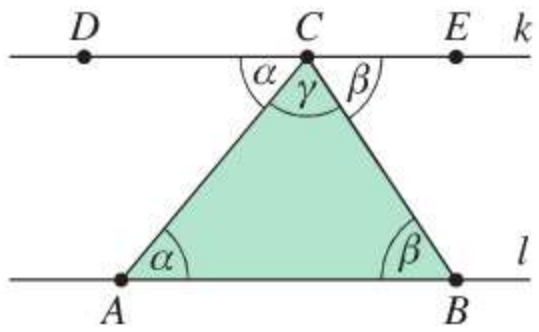
A to ciekawe

Grafika trójwymiarowa (3D) to dziedzina grafiki komputerowej zajmująca się głównie wizualizacją obiektów trójwymiarowych. Obiekty te mogą być reprezentowane m.in. jako siatka wielokątów (najczęściej trójkątów lub czworokątów), które mają wspólne wierzchołki i krawędzie.



Proste k i l przedstawione na rysunku są równoległe.

Kąty BAC i DCA oraz kąty ABC i ECB są kątami naprzemianległymi.
Kąt ECD jest kątem półpełnym, więc jego miara jest równa 180°.
Wobec tego $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.



Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°.

Przykład 1.

Czy istnieje trójkąt, którego kąty wewnętrzne mają miary: 43°, 68°, 79°? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Obliczymy sumę miar podanych kątów. ⇒

$$43^\circ + 68^\circ + 79^\circ = 190^\circ$$

$$190^\circ > 180^\circ$$

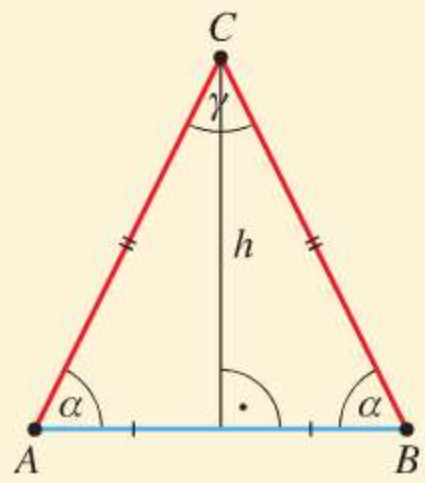
Odp. Taki trójkąt nie istnieje, ponieważ suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°.

Ćwiczenie 1.

Czy istnieje trójkąt, którego kąty wewnętrzne mają miary: 19°, 70° i 91°? Uzasadnij swoją odpowiedź.

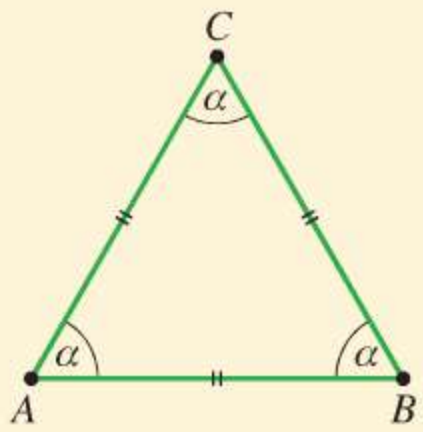
Podział trójkątów ze względu na długości boków

Trójkąt równoramienny



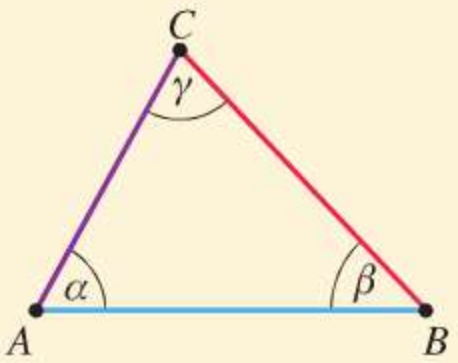
- Boki AC i BC nazywamy ramionami, a bok AB – podstawą.
- Ramiona są równej długości.
- Kąty przy podstawie mają równe miary.
- Wysokość poprowadzona do podstawy dzieli ją na połowy.

Trójkąt równoboczny



- Wszystkie boki są równej długości.
- Wszystkie kąty mają równe miary.
- Każdy trójkąt równoboczny jest także trójkątem równoramiennym.

Trójkąt różnoboczny

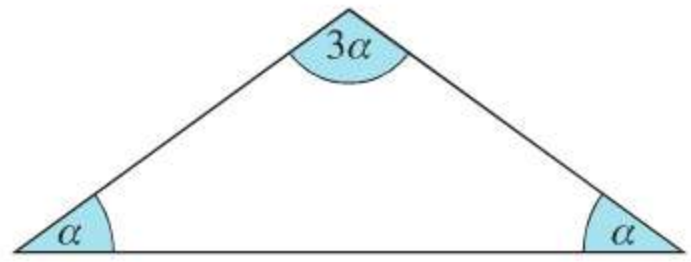


- Każdy bok ma inną długość.
- Każdy kąt ma inną miarę.

Przykład 2.

Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta równoramiennego, w którym miara kąta między ramionami jest trzy razy większa od miary kąta przy podstawie.

Wykonamy rysunek pomocniczy i przyjmiemy odpowiednie oznaczenia.



Ułożymy równanie i obliczymy miarę kąta α.

$$\alpha + \alpha + 3\alpha = 180^\circ$$
$$5\alpha = 180^\circ \quad | : 5$$
$$\alpha = 36^\circ$$

Obliczymy miarę kąta między ramionami.

$$3\alpha = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$$

Odp. Miary kątów wewnętrznych tego trójkąta są równe: 36°, 36°, 108°.

Ćwiczenie 2.

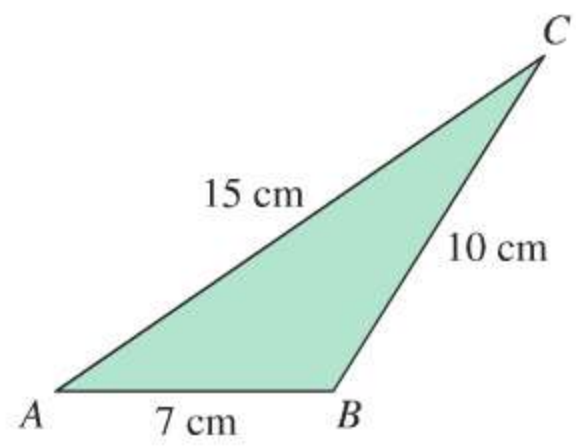
Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta równoramiennego, w którym miara kąta między ramionami jest cztery razy mniejsza od miary kąta przy podstawie.

W każdym trójkącie kąt o największej mierze leży naprzeciw najdłuższego boku trójkąta, a kąt o najmniejszej mierze – naprzeciw najkrótszego boku trójkąta.

Przykład 3.

Dany jest trójkąt ABC taki, że: $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|AC| = 15$ cm. Ustal, który kąt wewnętrzny w tym trójkącie ma największą miarę, a który – najmniejszą.

Wykonamy rysunek pomocniczy.



Naprzeciw najdłuższego boku, czyli AC, leży kąt ABC, zatem ma on największą miarę. Naprzeciw najkrótszego boku, czyli AB, leży kąt ACB, zatem ma on najmniejszą miarę.

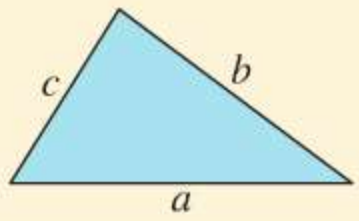
Odp. Największą miarę w tym trójkącie ma kąt ABC, a najmniejszą – kąt ACB.

Ćwiczenie 3.

Dany jest trójkąt ABC taki, że: $|AB| = 20$ cm, $|BC| = 12$ cm, $|AC| = 17$ cm. Ustal, który kąt wewnętrzny w tym trójkącie ma największą miarę, a który – najmniejszą.

Długość każdego boku trójkąta jest mniejsza od sumy długości dwóch pozostałych boków.

$a < b + c \qquad b < a + c \qquad c < a + b$



Przykład 4.

Sprawdź, czy z odcinków długości: $3\ \text{cm}$, $5\ \text{cm}$ oraz $7\ \text{cm}$ można zbudować trójkąt.

Sprawdzimy, czy każdy odcinek ma długość mniejszą od sumy długości dwóch pozostałych odcinków.

$3 + 5 = 8 \qquad 8 > 7$

$3 + 7 = 10 \qquad 10 > 5$

$5 + 7 = 12 \qquad 12 > 3$

Odp. Z odcinków długości: $3\ \text{cm}$, $5\ \text{cm}$ oraz $7\ \text{cm}$ można zbudować trójkąt.

Jeśli znamy długości trzech odcinków, to aby ustalić, czy da się z nich zbudować trójkąt, wystarczy sprawdzić, czy suma długości dwóch krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

Ćwiczenie 4.

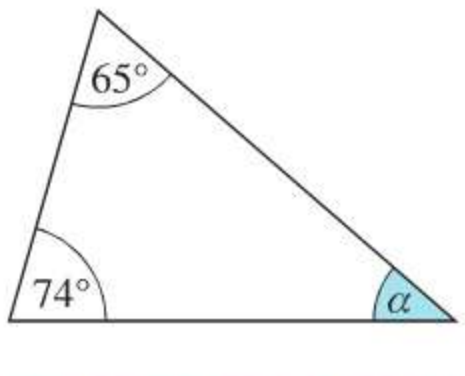
Sprawdź, czy z odcinków podanej długości można zbudować trójkąt.

a) $6\ \text{cm}, 8\ \text{cm}, 15\ \text{cm}$ **b)** $9\ \text{cm}, 110\ \text{mm}, 1{,}6\ \text{dm}$ **c)** $3\sqrt{5}\ \text{cm}, \sqrt{5}\ \text{cm}, 4\sqrt{5}\ \text{cm}$

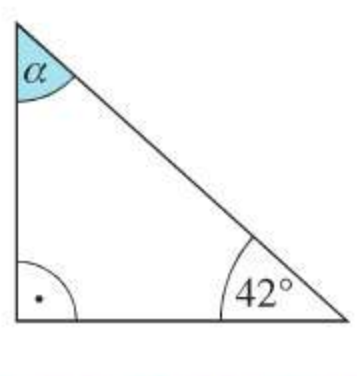
Rozwiąż zadania

1. Oblicz miarę kąta α.

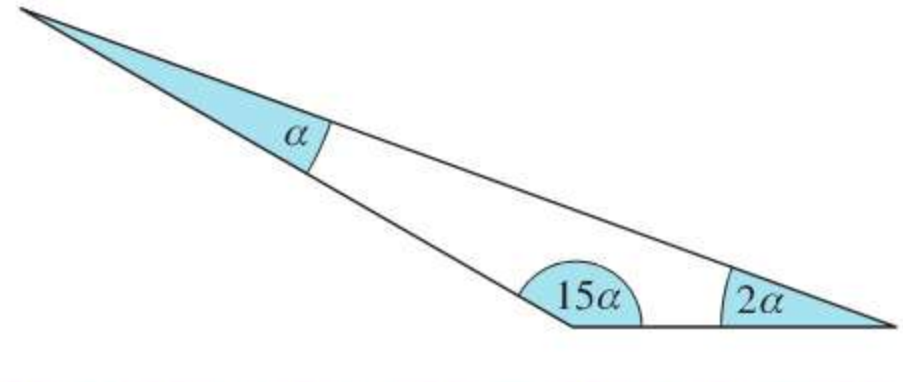
a)



b)



c)



2. Oblicz miary kątów trójkąta równoramiennego, jeżeli miara kąta między ramionami trójkąta jest o $60\ \%$ większa od miary kąta przy podstawie.

3. Jeden z kątów trójkąta ma miarę równą $60°$. Stosunek miar pozostałych dwóch kątów jest równy $2 : 1$. Zapisz miary wszystkich kątów tego trójkąta.

4. Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma miarę równą 30°. Zapisz miary wszystkich kątów tego trójkąta. Czy jest tylko jedno rozwiązanie? Uzasadnij swoją odpowiedź.

5. Dany jest trójkąt ABC taki, że: $|AB| = 16$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 12$ cm. Ustal, który kąt tego trójkąta ma największą miarę, a który – najmniejszą.

6. Sprawdź, czy z odcinków podanej długości można zbudować trójkąt.

a) 6 cm, 6 cm, 12 cm
b) 8 cm, 5 cm, 12 cm
c) 2,6 cm, 1,5 cm, 3,7 cm
d) 5,6 cm, 67 mm, 1,21 dm
e) $2\frac{1}{2}$ dm, $\sqrt{169}$ cm, 15,5 m
f) 3^3 dm, $\sqrt{25}$ m, $\sqrt[3]{8000}$ cm

7. Odcinek AB ma długość 2 dm, a odcinek BC ma długość 1 cm. Czy istnieje odcinek, z którego wraz z odcinkami AB i BC można zbudować trójkąt ABC? Uzasadnij swoją odpowiedź.

8. Stosunek miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równy $7 : 9 : 20$. Oblicz miary kątów wewnętrznych tego trójkąta.

E **Informacje do zadań 9. i 10.**

Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 3 dm, a jego podstawa jest krótsza od ramienia o 10,5 cm. Trójkąt równoboczny ma taki sam obwód jak trójkąt równoramienny.

9. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 1,95 dm.	**P**	**F**
Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 69 cm.	**P**	**F**

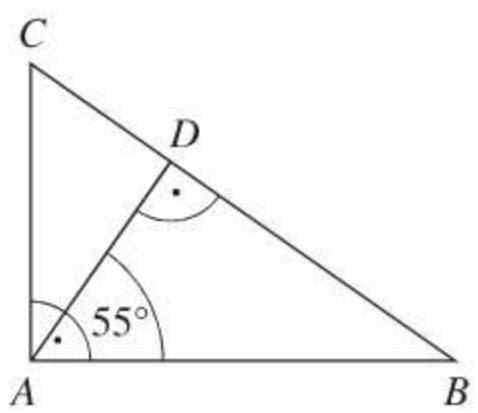
10. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Bok trójkąta równobocznego ma długość

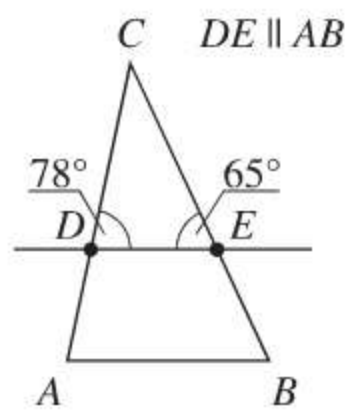
A. 1,3 dm **B.** 2,3 dm **C.** 2,65 dm **D.** 3 dm

11. Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC.

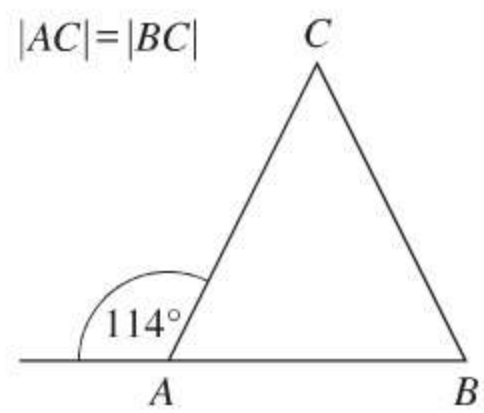
a)



b)



c)



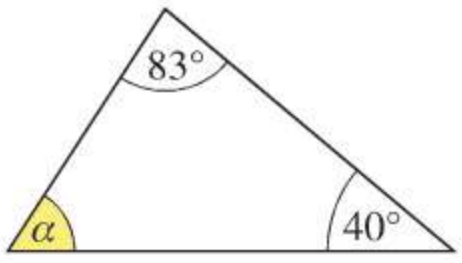
12. Miara jednego z kątów trójkąta jest o 50° większa od miary najmniejszego kąta. Miara trzeciego kąta jest trzykrotnie większa od miary najmniejszego kąta. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

13. Suma miar dwóch kątów trójkąta jest równa mierze trzeciego kąta. Uzasadnij, że jest to trójkąt prostokątny.

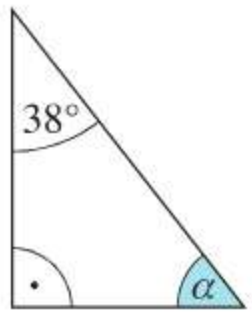
Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz miarę kąta α.

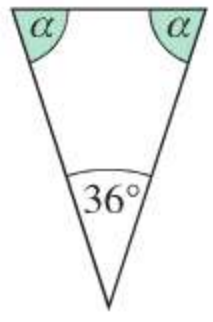
a)



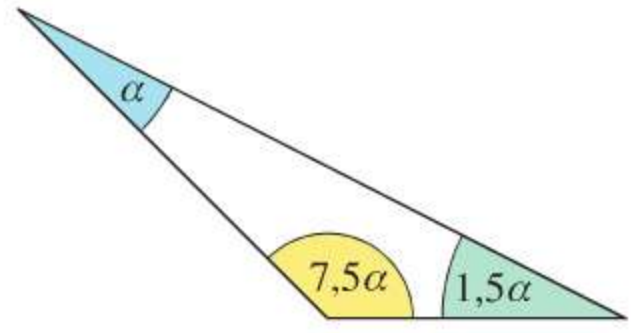
b)



c)



d)



2. Dany jest trójkąt równoramienny, w którym kąt przy podstawie ma miarę 45°. Wyznacz miarę kąta między ramionami tego trójkąta.

3. Jeden z kątów trójkąta ma miarę 80°. Różnica miar dwóch pozostałych kątów jest równa 20°. E

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Najmniejszy kąt tego trójkąta ma miarę

A. 20° **B.** 40° **C.** 60° **D.** 80°

4. Dwa boki trójkąta równoramiennego mają długości $0{,}8$ dm i 30 mm. E

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Podstawa trójkąta ma długość 8 cm.	**P**	**F**
Obwód trójkąta jest równy 19 cm.	**P**	**F**

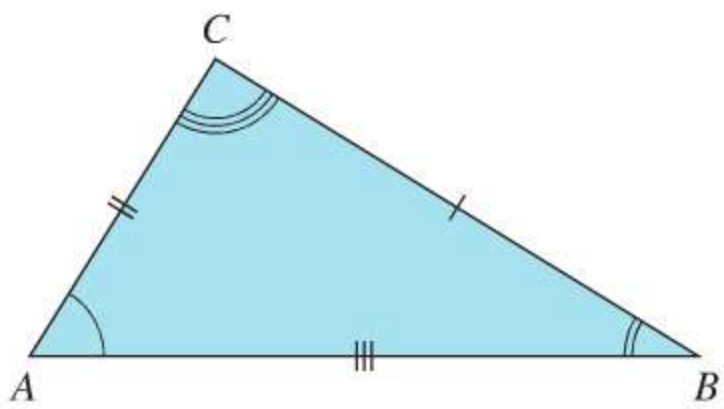
4. Cechy przystawania trójkątów

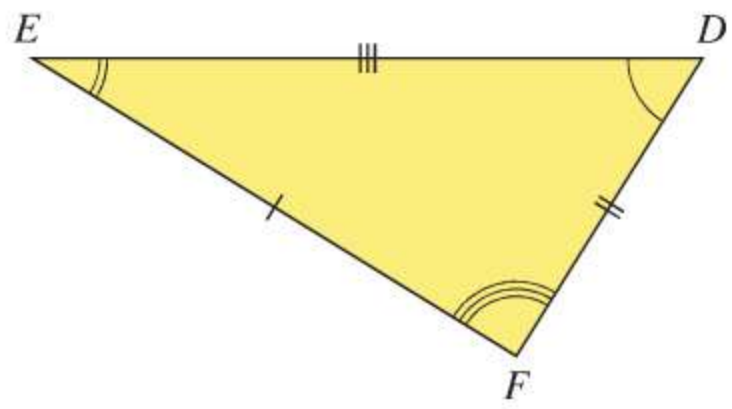
- Znajomość cech przystawania trójkątów
- Zastosowanie cech przystawania trójkątów w zadaniach tekstowych

Figury, które mają ten sam kształt i taką samą wielkość, nazywamy figurami przystającymi.

Po wycięciu figur przystających z papieru możemy przyłożyć je do siebie, tak aby się pokryły.

Dwa trójkąty są przystające, jeśli ich odpowiadające boki są równe, a kąty mają równe miary.





Na rysunkach zaznaczono odpowiadające boki oraz kąty trójkątów przystających.

Trójkąty ABC i DEF są przystające, co zapisujemy jako: $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

Dwa trójkąty są przystające, jeśli spełniony jest jeden z trzech warunków, które nazywamy cechami przystawania trójkątów.

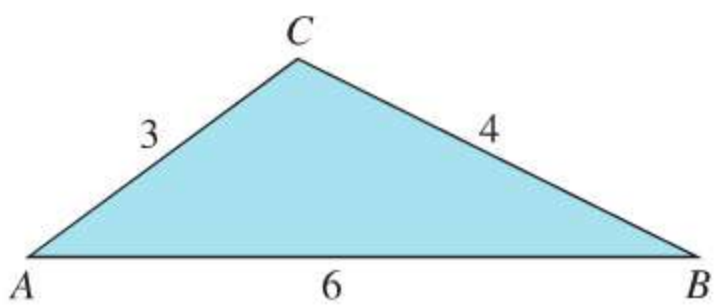
Cecha bok–bok–bok

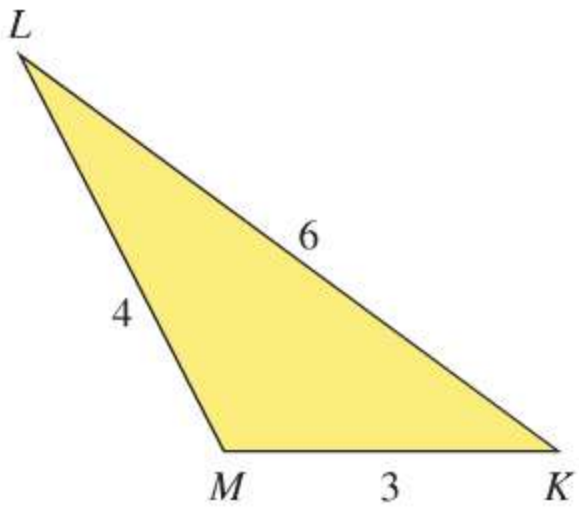
Cecha przystawania trójkątów bok–bok–bok (bbb)

Jeżeli dwa trójkąty mają odpowiednie boki równej długości, to trójkąty te są przystające.

Przykład 1.

Uzasadnij, że trójkąty ABC i KLM są przystające.





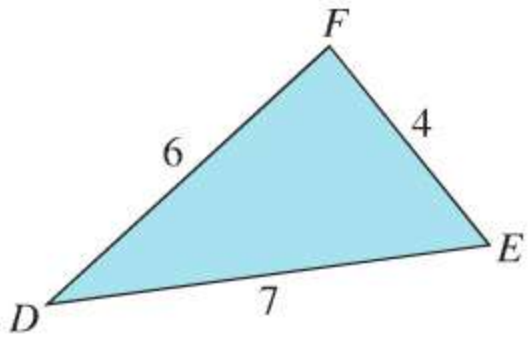
Porównamy długości boków trójkątów ABC i KLM.

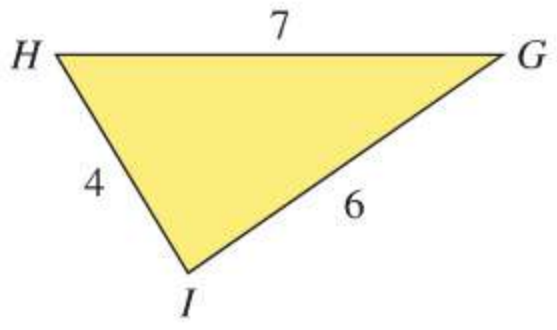
$$|AB| = |KL| = 6$$
$$|BC| = |LM| = 4$$
$$|AC| = |KM| = 3$$

Odpowiadające boki trójkątów ABC i KLM są równej długości, zatem zgodnie z cechą bbb: $\Delta ABC \equiv \Delta KLM$.

Ćwiczenie 1.

Uzasadnij, że trójkąty DEF i GHI są przystające.





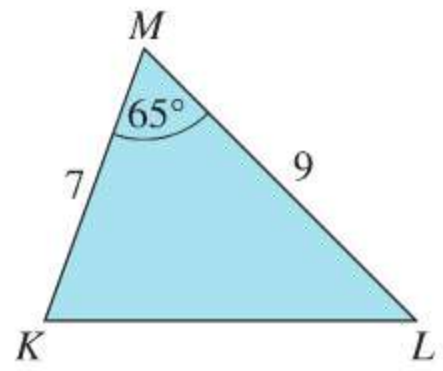
Cecha bok–kąt–bok

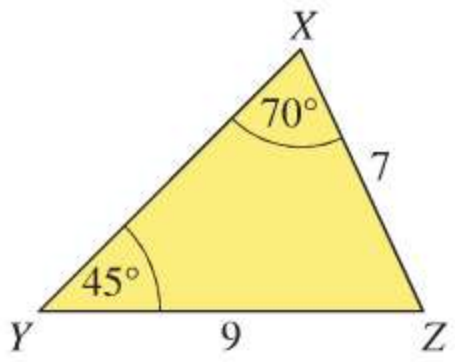
Cecha przystawania trójkątów bok–kąt–bok (bkb)

Jeżeli długości dwóch boków jednego trójkąta są równe długościom dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąty zawarte między tymi bokami w obu trójkątach mają taką samą miarę, to trójkąty te są przystające.

Przykład 2.

Uzasadnij, że trójkąty KLM oraz XYZ są przystające.





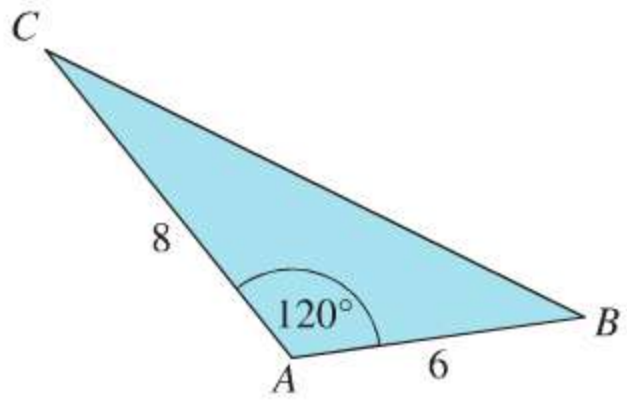
Obliczymy miarę kąta XZY.

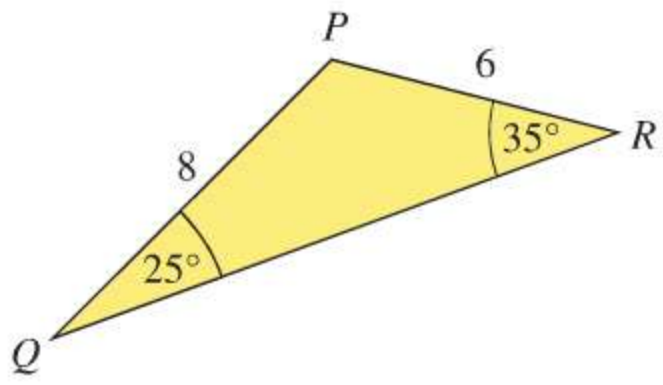
$$|\sphericalangle XZY| = 180^\circ - (70^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

Wiemy, że $|KM| = |XZ| = 7$, $|LM| = |YZ| = 9$ oraz $|\sphericalangle KML| = |\sphericalangle XZY| = 65^\circ$, zatem zgodnie z cechą bkb: $\Delta KLM \equiv \Delta XYZ$.

Ćwiczenie 2.

Uzasadnij, że trójkąty ABC i PQR są przystające.





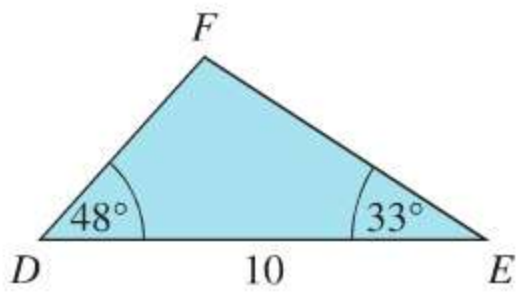
Cecha kąt–bok–kąt

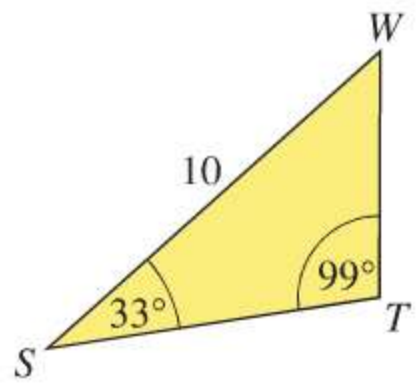
Cecha przystawania trójkątów kąt–bok–kąt (kbk)

Jeżeli długość boku i miary dwóch kątów do niego przyległych jednego trójkąta są odpowiednio równe długości boku i miarom dwóch kątów do niego przyległych drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

Przykład 3.

Uzasadnij, że trójkąty DEF i STW są przystające.



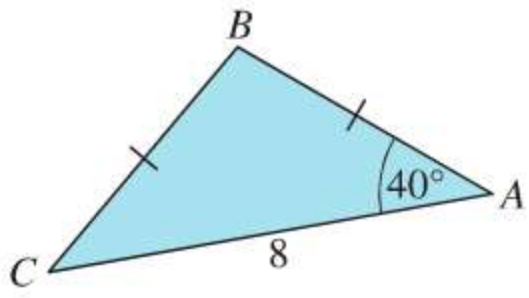


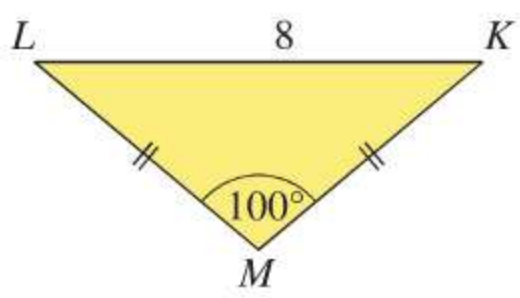
Obliczymy miarę kąta SWT. $\Rightarrow$ $|\sphericalangle SWT| = 180° - (33° + 99°) = 180° - 132° = 48°$

Wiemy, że $|DE| = |SW| = 10$, $|\sphericalangle DEF| = |\sphericalangle TSW| = 33°$ oraz $|\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle SWT| = 48°$, zatem zgodnie z cechą kbk: $\Delta DEF \equiv \Delta STW$.

Ćwiczenie 3.

Uzasadnij, że trójkąty ABC i KLM są przystające.

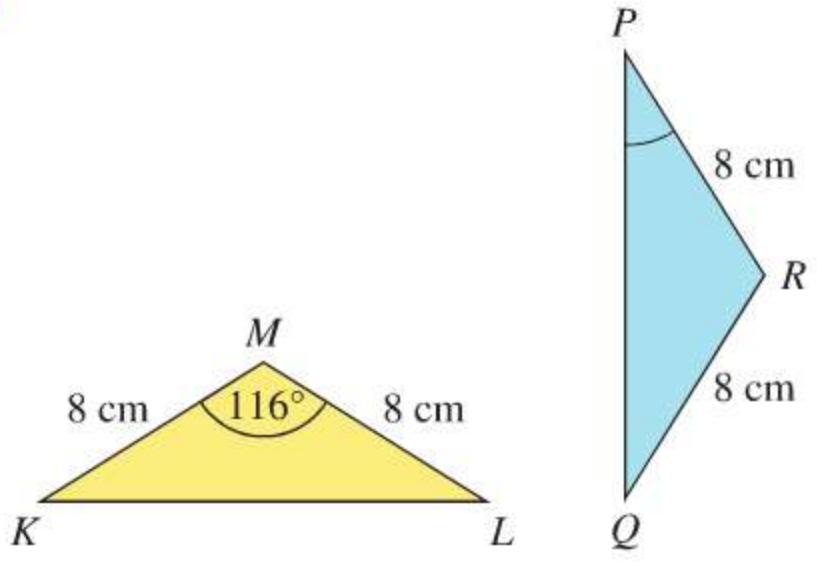




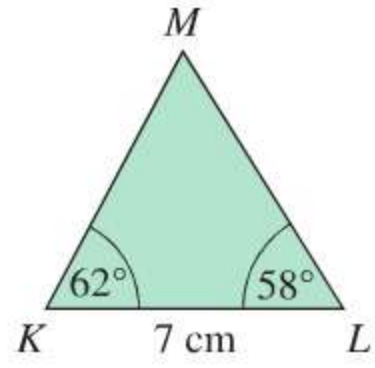
Rozwiąż zadania

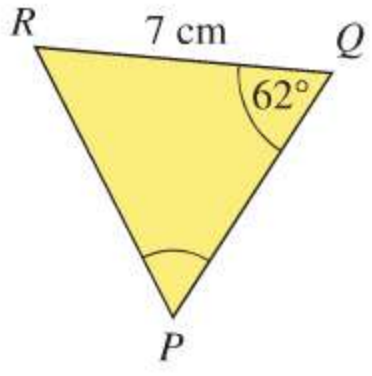
1. Trójkąty KLM i PQR są przystające. Wyznacz miarę kąta przy wierzchołku P.

a)



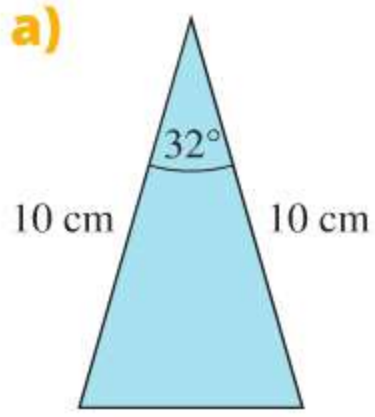
b)

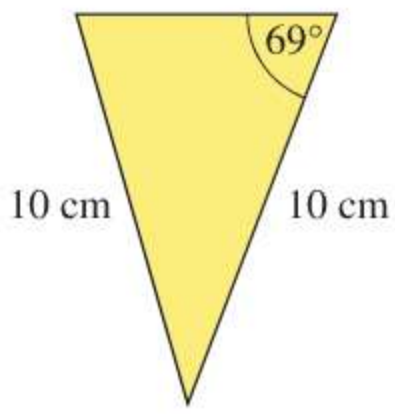




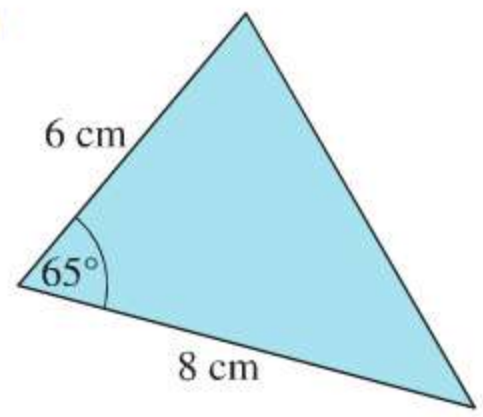
2. Ustal, czy trójkąty są przystające.

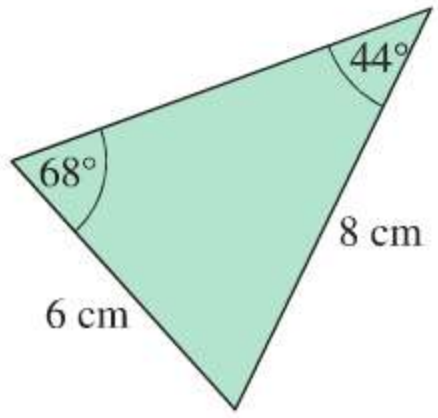
a)





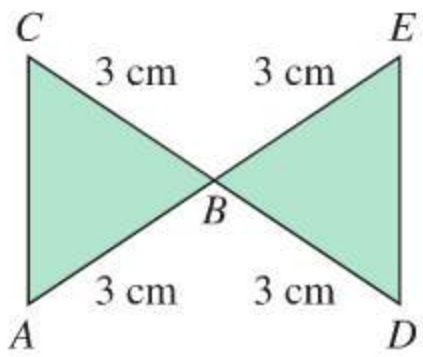
b)



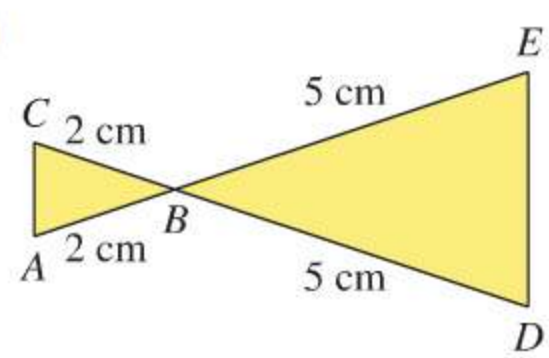


3. Odcinki AC i DE są równoległe. Czy trójkąty przedstawione na rysunku są przystające? Uzasadnij swoją odpowiedź.

a)

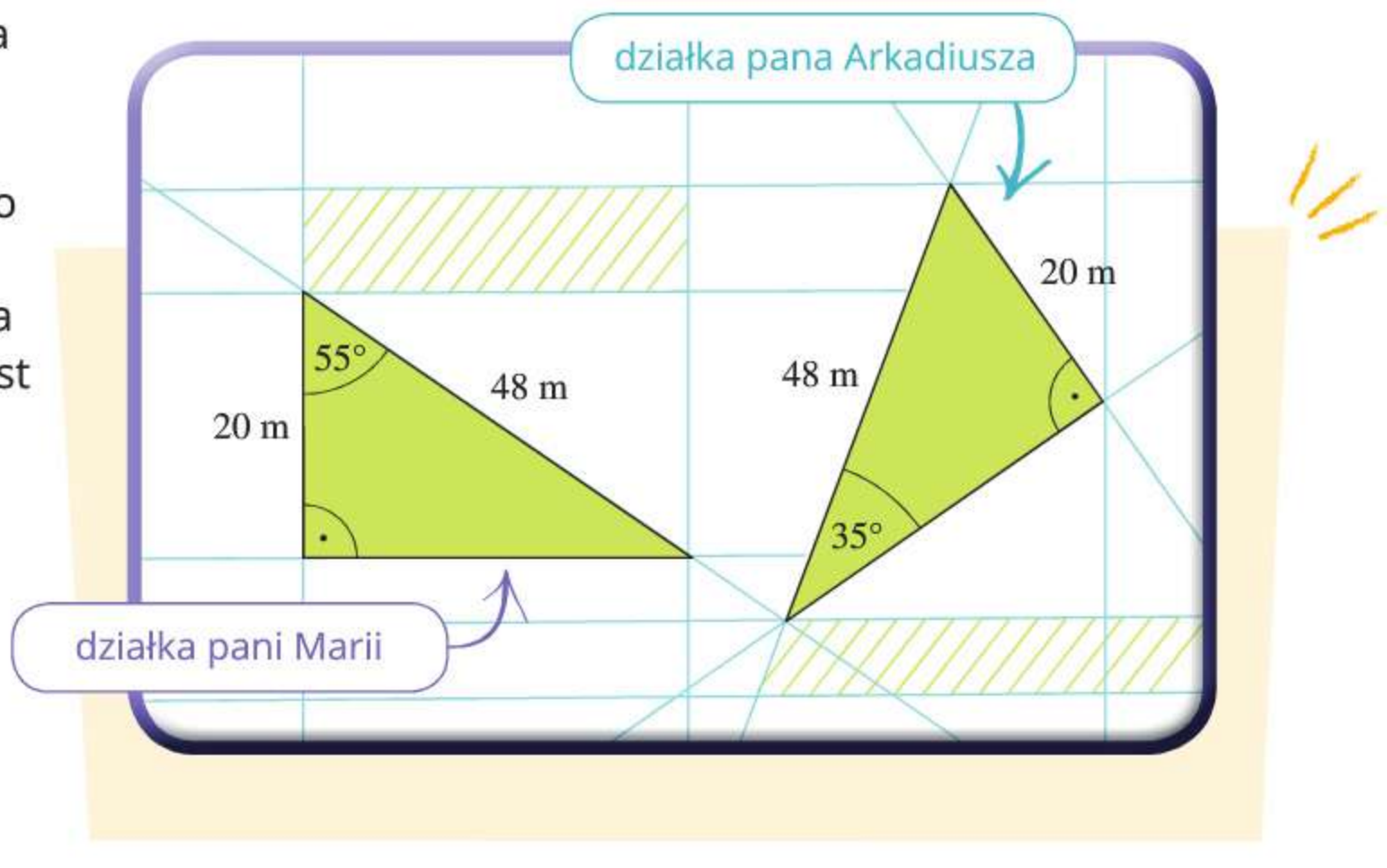


b)



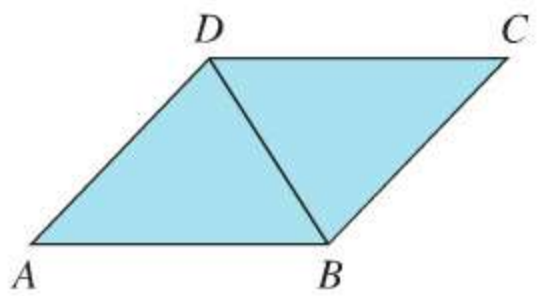
4. Dane są dwa trójkąty prostokątne: ABC i DEF. Przyprostokątne AB i DE są równej długości. Kąty przy wierzchołkach C i F mają równe miary. Czy trójkąty ABC i DEF są przystające? Uzasadnij swoją odpowiedź.

5. Pan Arkadiusz i pani Maria mają działki w kształcie trójkątów prostokątnych. Na rysunku przedstawiono plany tych działek. Sprawdź, czy powierzchnia działki pana Arkadiusza jest większa od powierzchni działki pani Marii.



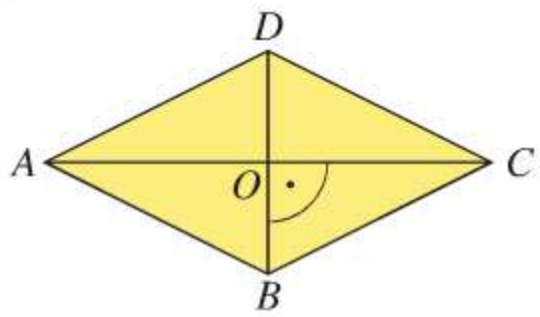
6. Wskaż trójkąty przystające.

a)



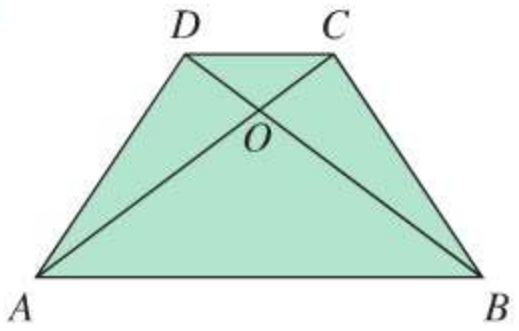
$AB \parallel CD, BC \parallel AD,$
$|AB| = |DC|, |AD| = |BC|$

b)



$AB \parallel CD, BC \parallel AD$

c)



$AB \parallel CD, |AD| = |BC|$

7. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny KLM. Przez środek jego ramienia KM poprowadzono prostą NR równoległą do prostej KL, a przez środek ramienia KL prostą PR prostopadłą do prostej KL. Wskaż trójkąty przystające.

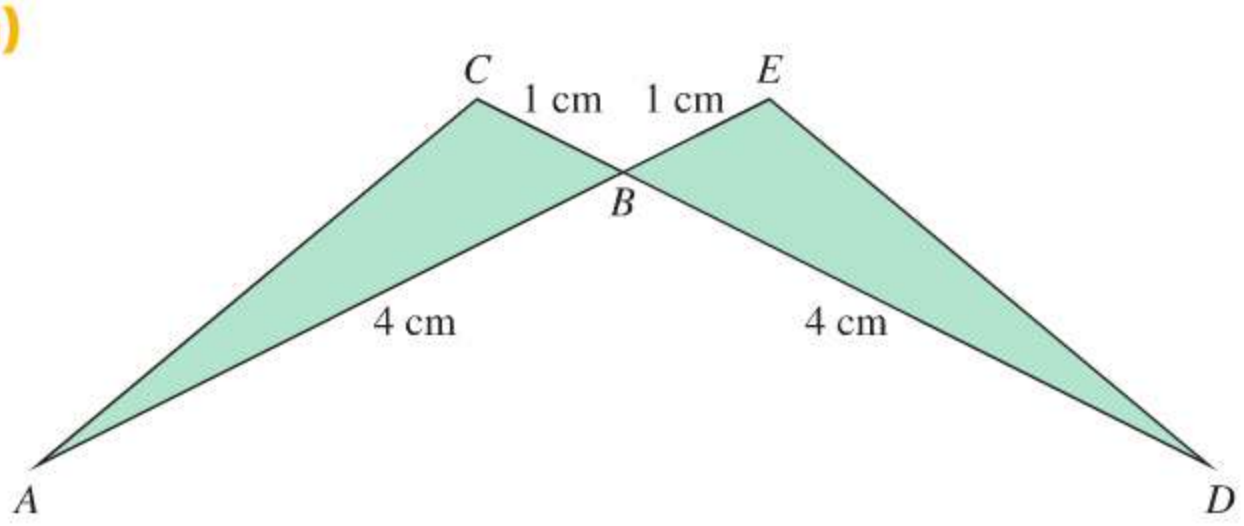
8. W prostokącie $KLMN$ poprowadzono przekątne KM i LN, które przecięły się w punkcie O. Wskaż pary trójkątów przystających.

9. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym odcinek AB jest podstawą, poprowadzono wysokości AD i BE. Czy te wysokości mają taką samą długość? Uzasadnij swoją odpowiedź.

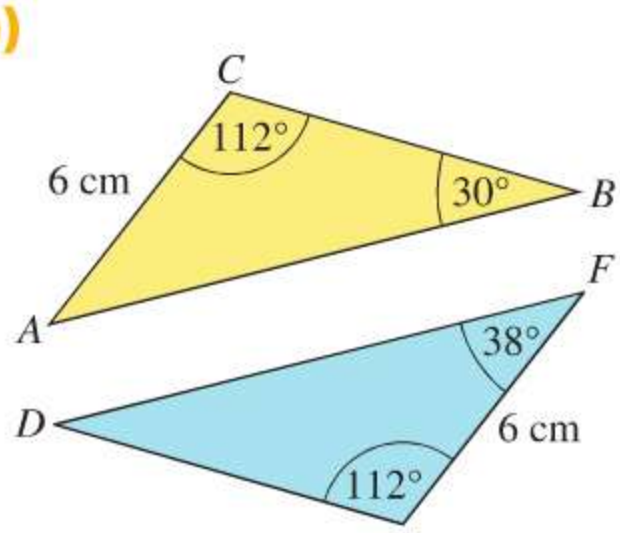
Sprawdź, co umiesz!

1. Czy trójkąty są przystające? Uzasadnij swoją odpowiedź. Powołaj się na jedną z cech przystawania trójkątów.

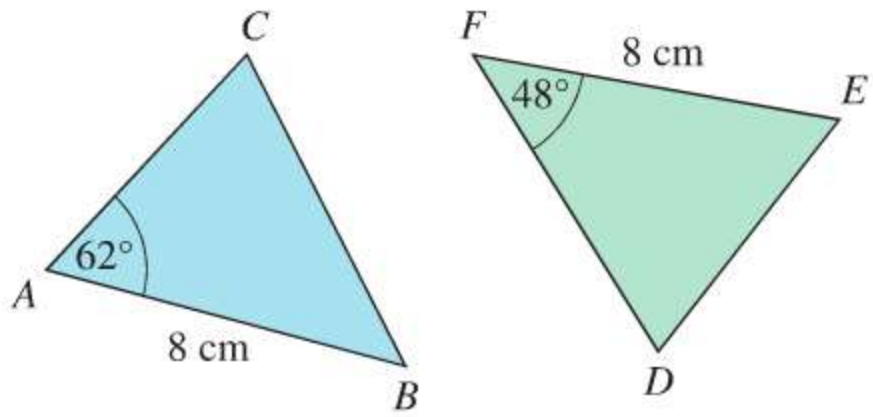
a)



b)



E **2.** Trójkąty ABC i DEF są przystające.



Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Miara kąta przy wierzchołku E jest równa | **A** | **B** |.

A. $48°$ **B.** $62°$

Miara kąta przy wierzchołku C jest równa | **C** | **D** |.

C. $48°$ **D.** $70°$

E **3.** Dane są dwa trójkąty prostokątne: ABC i KLM. Przyprostokątne trójkąta KLM mają taką samą długość jak przyprostokątne trójkąta ABC. Miara jednego z kątów ostrych trójkąta ABC jest równa $41°$, a jednego z kątów ostrych trójkąta KLM wynosi $49°$.

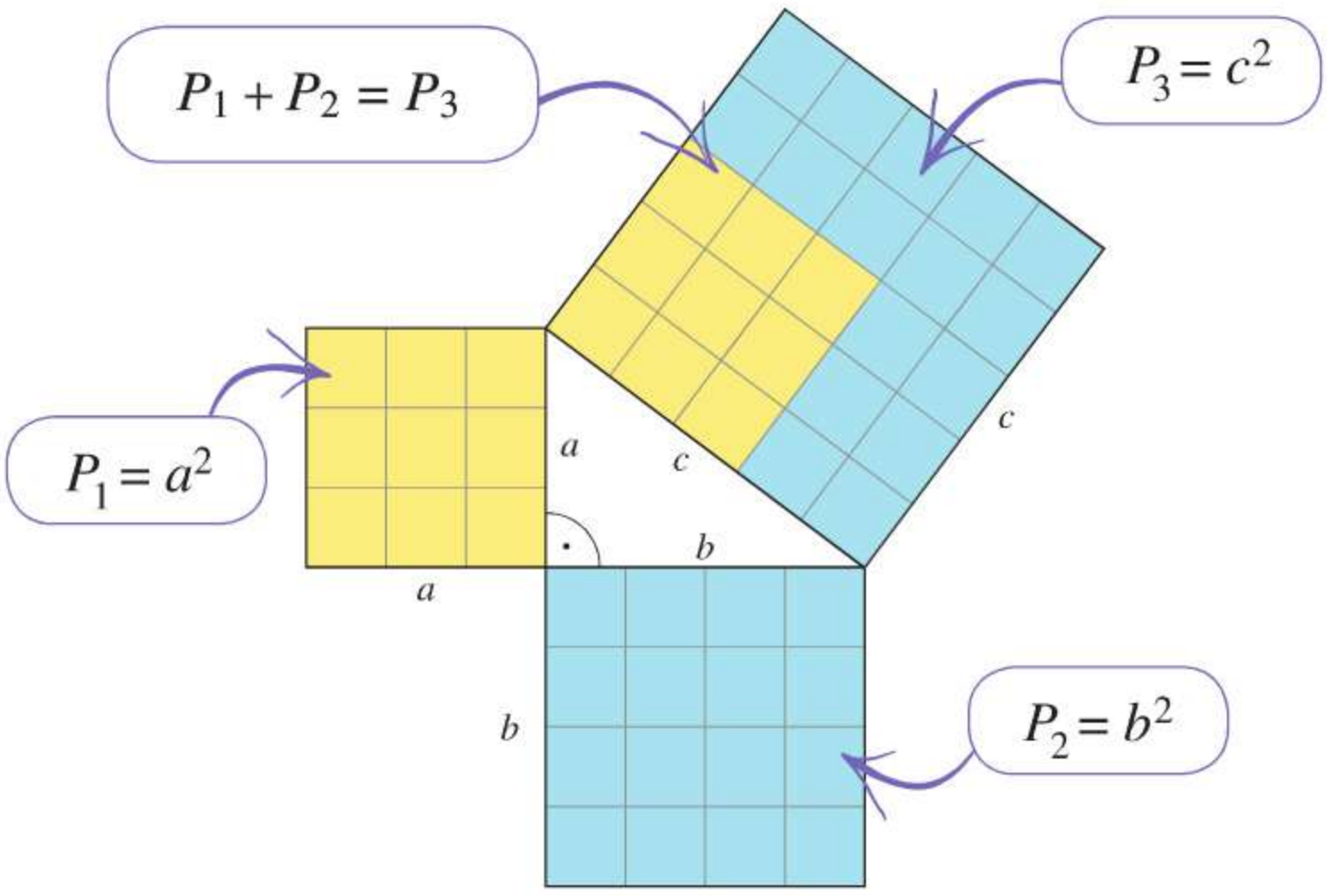
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Miara drugiego kąta ostrego trójkąta ABC jest równa $49°$.	**P**	**F**
Trójkąty ABC i KLM są przystające.	**P**	**F**

5. Twierdzenie Pitagorasa

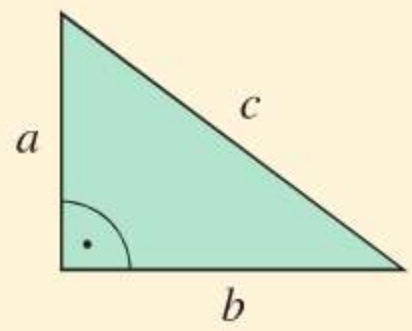
- Znajomość twierdzenia Pitagorasa
- Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa w rozwiązywaniu zadań

W trójkącie prostokątnym suma pól kwadratów zbudowanych na jego przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na jego przeciwprostokątnej. Własność tę ilustruje poniższy rysunek. Nosi ona nazwę twierdzenia Pitagorasa.



Zauważmy, że kwadraty zbudowane na bokach trójkąta mają pola równe odpowiednio: $P_1 = a^2$, $P_2 = b^2$ oraz $P_3 = c^2$. Wobec tego prawdziwa jest równość: $a^2 + b^2 = c^2$.

Twierdzenie Pitagorasa
W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



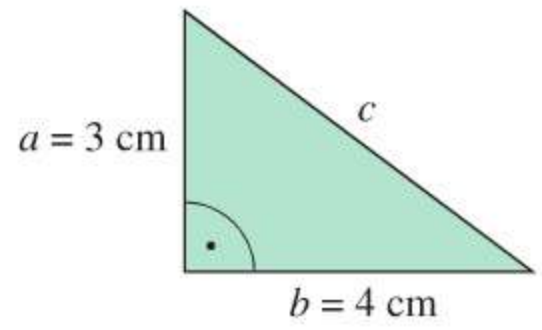
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Twierdzenie Pitagorasa najczęściej wykorzystujemy do obliczania długości jednego z boków trójkąta prostokątnego, gdy znamy długości jego dwóch pozostałych boków.

Przykład 1.

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości $3\ \text{cm}$ i $4\ \text{cm}$. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Wykonamy rysunek pomocniczy i przyjmiemy odpowiednie oznaczenia.



Aby obliczyć długość przeciwprostokątnej tego trójkąta, skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$3^2 + 4^2 = c^2$$
$$9 + 16 = c^2$$
$$c^2 = 25$$

Równanie $c^2 = 25$ ma dwa rozwiązania: $c = 5$ oraz $c = -5$. Należy jednak pamiętać o tym, że c jest długością boku trójkąta, więc musi wyrażać się za pomocą liczby dodatniej.

$$c^2 = 25$$
$$c = \sqrt{25}$$
$$c = 5\ [\text{cm}]$$

Odp. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość $5\ \text{cm}$.

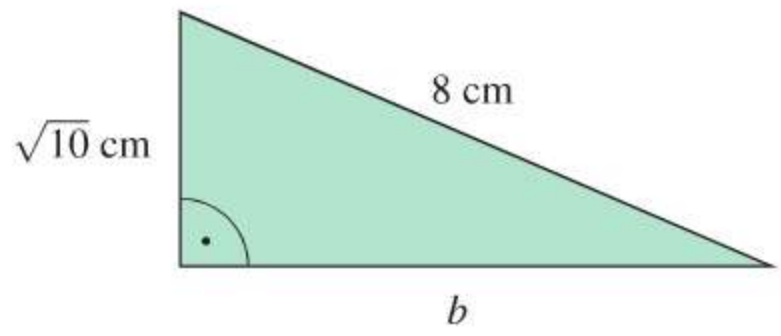
Ćwiczenie 1.

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości $15\ \text{cm}$ i $20\ \text{cm}$. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Przykład 2.

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość $8\ \text{cm}$, a jedna z przyprostokątnych ma długość $\sqrt{10}\ \text{cm}$. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej tego trójkąta.

Wykonamy rysunek pomocniczy i przyjmiemy odpowiednie oznaczenia.



Aby obliczyć długość przyprostokątnej b, skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$\left(\sqrt{10}\right)^2 + b^2 = 8^2$$
$$10 + b^2 = 64$$
$$b^2 = 64 - 10$$
$$b^2 = 54$$

Ponieważ b jest długością odcinka, to musi wyrażać się za pomocą liczby dodatniej.

$$b = \sqrt{54}$$
$$b = \sqrt{9 \cdot 6}$$
$$b = 3\sqrt{6}\ [\text{cm}]$$

Odp. Druga przyprostokątna tego trójkąta ma długość $3\sqrt{6}\ \text{cm}$.

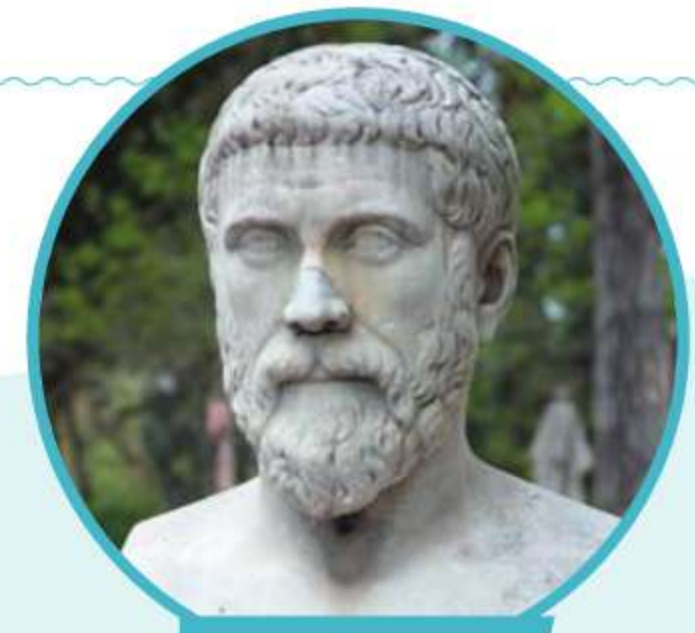
Ćwiczenie 2.

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość $\sqrt{39}\ \text{cm}$, a jedna z przyprostokątnych ma długość $6\ \text{cm}$. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej tego trójkąta.

A to ciekawe

Liczby pitagorejskie, zwane **trójkami pitagorejskimi**, to trzy liczby naturalne dodatnie spełniające tzw. równanie Pitagorasa: $a^2 + b^2 = c^2$.
Przykłady trójek pitagorejskich to:
$3, 4, 5;\quad 5, 12, 13;\quad 6, 8, 10.$

Dla liczb naturalnych m i n, gdzie $m > n$, $n \neq 0$, trójka liczb a, b, c taka, że:
$a = m^2 - n^2,\quad b = 2mn,\quad c = m^2 + n^2,$
jest trójką pitagorejską.

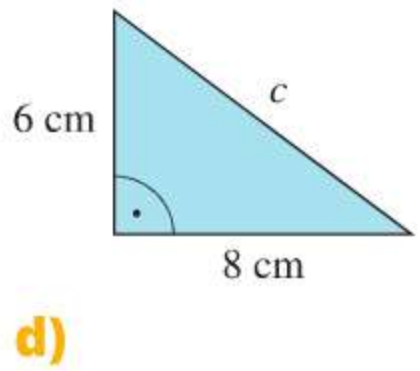


Pitagoras

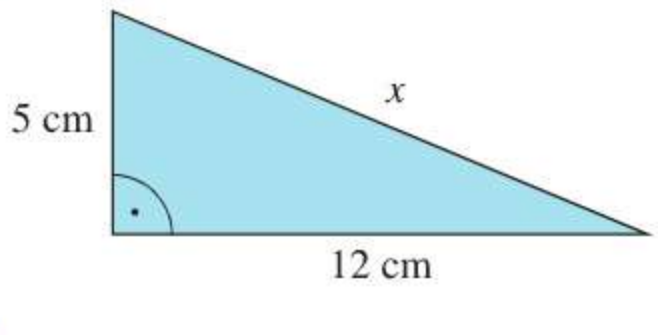
Rozwiąż zadania

1. Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta.

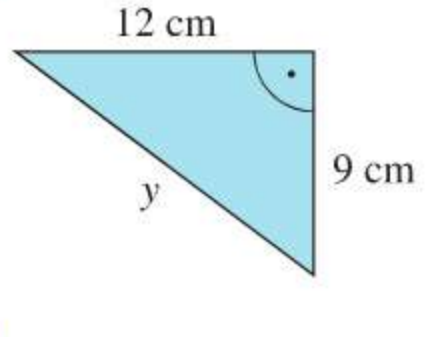
a)



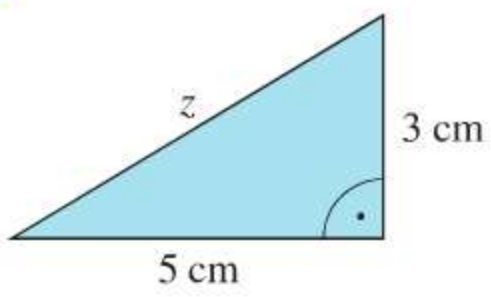
b)



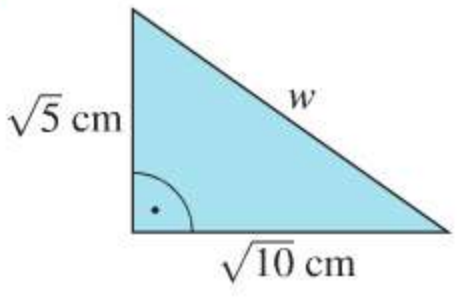
c)



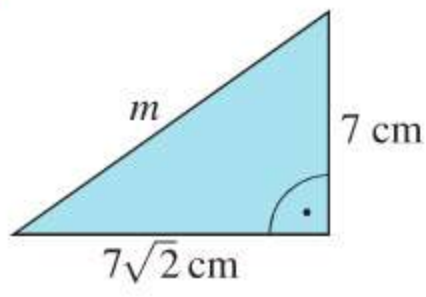
d)



e)

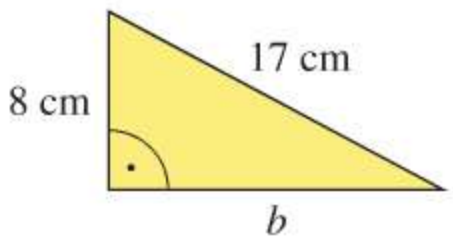


f)

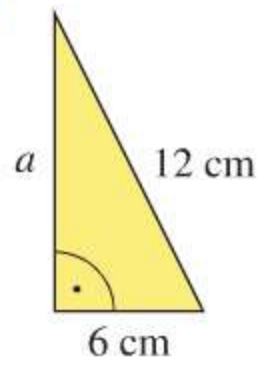


2. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej trójkąta.

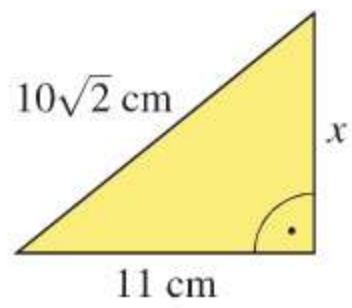
a)



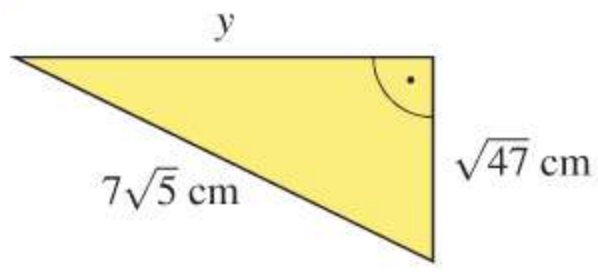
b)



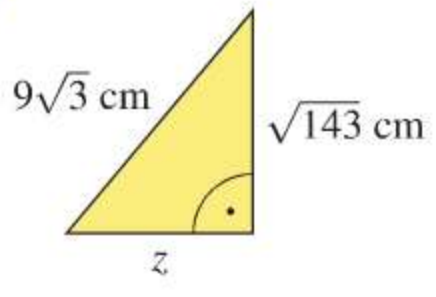
c)



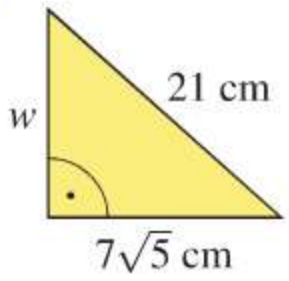
d)



e)



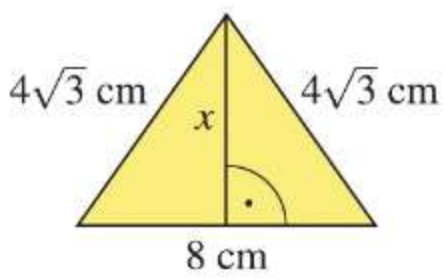
f)



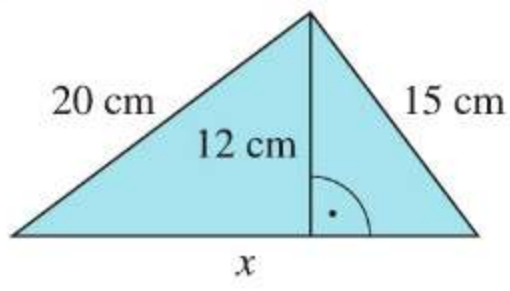
3. W trójkącie prostokątnym jedna przyprostokątna jest dwa razy krótsza od drugiej, a przeciwprostokątna ma długość 10 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

4. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą x.

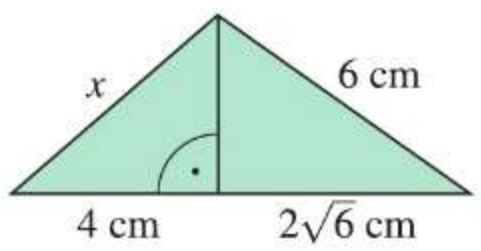
a)



b)



c)



5. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 8 cm, a ramię ma długość 10 cm. Oblicz wysokość trójkąta poprowadzoną do podstawy tego trójkąta.

6. Zaprojektowano osiedlowy park w kształcie prostokąta o wymiarach $120\ \text{m} \times 90\ \text{m}$. Wzdłuż przekątnych tego parku mają powstać główne ścieżki spacerowe. Oblicz łączną długość głównych ścieżek zaplanowanych w tym parku.

7. Drabina jest oparta o budynek na wysokości 6 m. Jej dolny koniec jest odsunięty od ściany o 3 m. Oblicz długość drabiny. Przyjmij, że $\sqrt{5} \approx 2{,}24$.

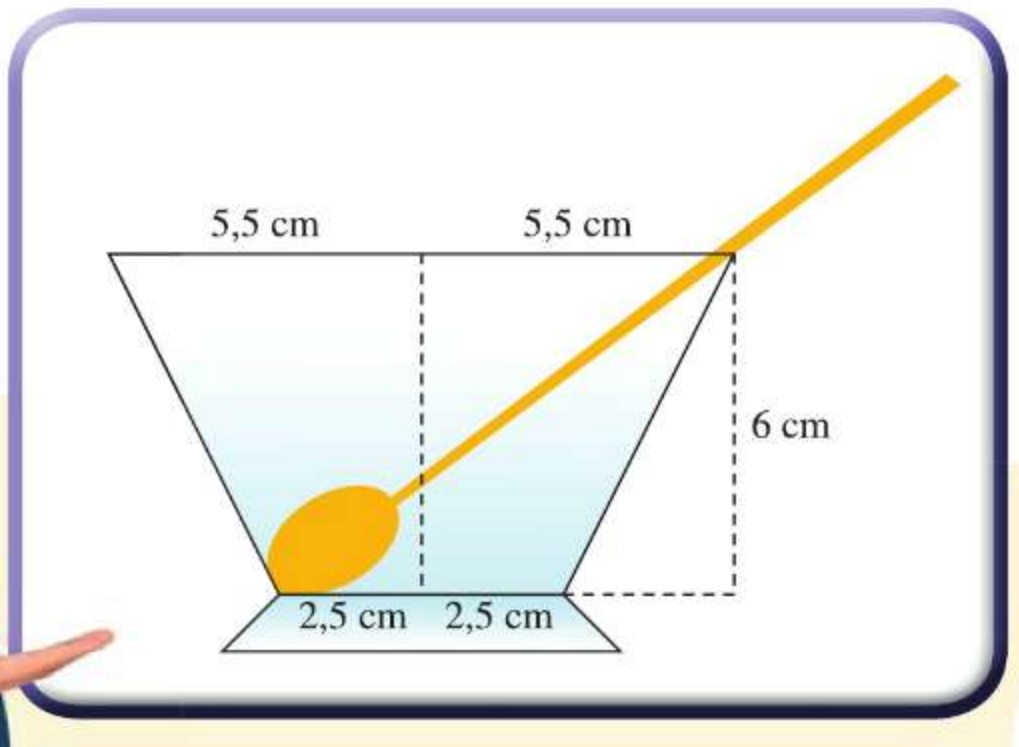
8. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 15 cm. Długości jego przyprostokątnych pozostają w stosunku $3 : 4$. Oblicz obwód tego trójkąta.

9. Czy kijki trekkingowe o regulowanej długości od 67 cm do 135 cm zmieszczą się na prostokątnym dnie walizki o wymiarach $53\ \text{cm} \times 38\ \text{cm}$? Uzasadnij swoją odpowiedź.

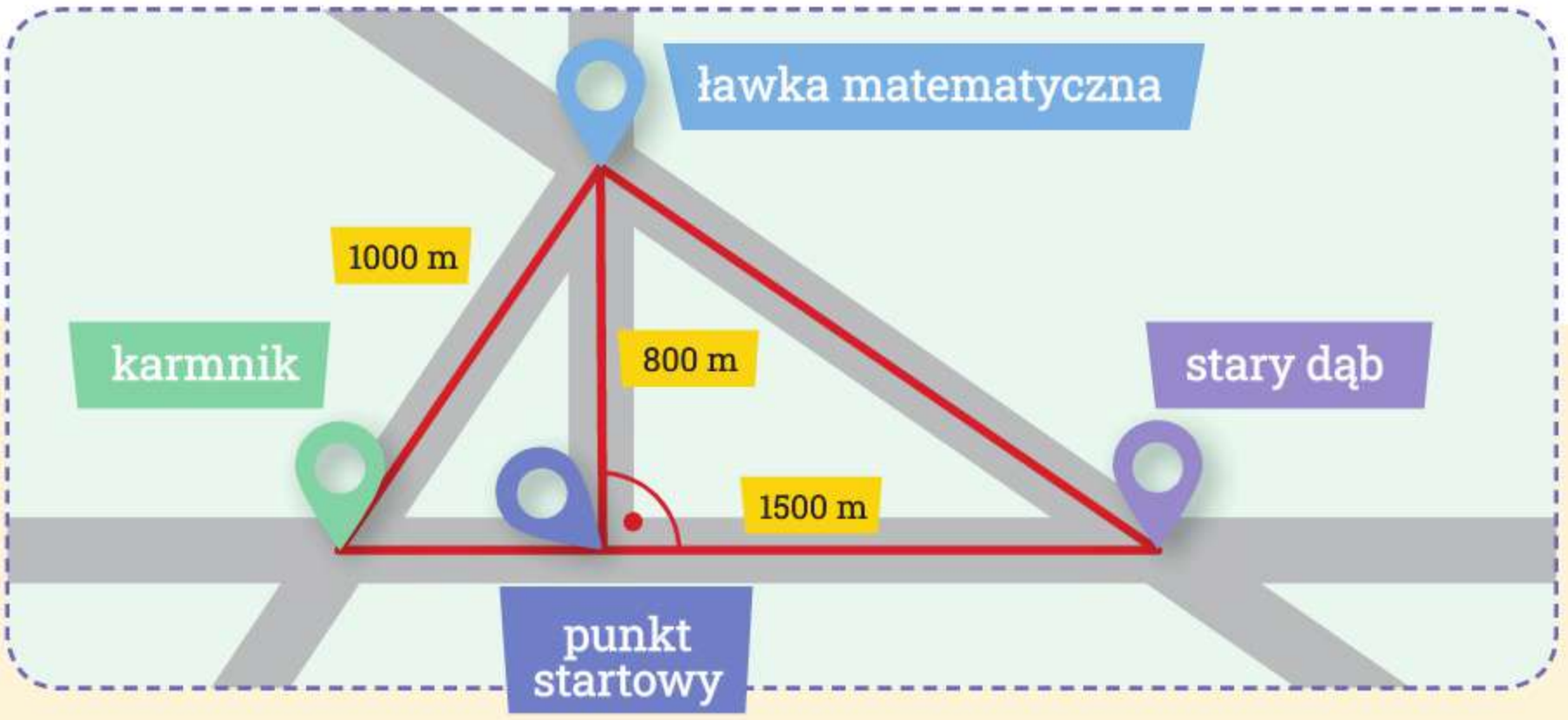
10. Dwaj harcerze wyruszyli z tego samego miejsca w różnych kierunkach. Jeden z nich udał się w kierunku południowym i przeszedł 4800 m, a drugi ruszył na zachód i przebył w tym samym czasie $6\frac{2}{5}$ km. Oblicz, w jakiej odległości od siebie znaleźli się harcerze.

11. Do pucharka na lody włożono łyżeczkę długości 15 cm. Oblicz długość tej części łyżeczki, która wystaje poza pucharek.





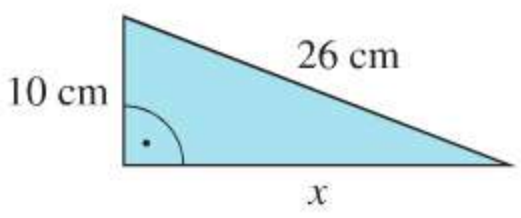
12. Na rysunku przedstawiono mapę matematycznej gry terenowej. Uczestnicy wyruszają z punktu startowego. Pierwsze zadanie czeka na nich pod starym dębem, a drugie przy ławce matematycznej. Ostatnie zadanie jest do wykonania obok karmnika. Po jego wykonaniu uczestnicy muszą wrócić do punktu startowego. Ile kilometrów pokonają uczestnicy podczas gry terenowej, zakładając, że poruszają się zgodnie z zaznaczonymi na mapie ścieżkami i wybierają najkrótszą drogę z możliwych?



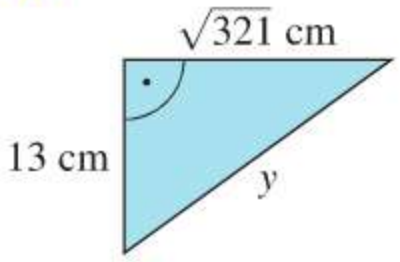
Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz nieznaną długość boku trójkąta.

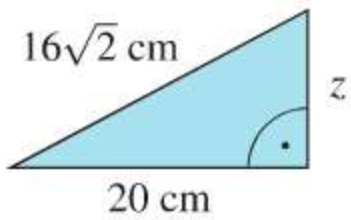
a)



b)



c)



2. Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 50 cm. Ramię tego trójkąta ma długość 13 cm. Oblicz, ile centymetrów długości ma wysokość tego trójkąta poprowadzona do jego podstawy.

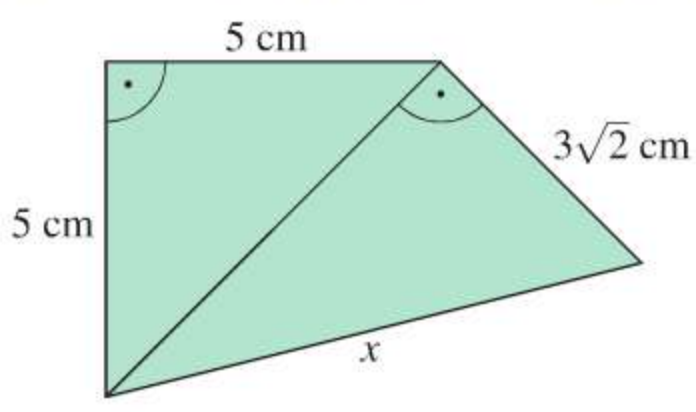
3. Na rysunku przedstawiono czworokąt.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odcinek x ma długość

A. $7\sqrt{2}$ cm **B.** $2\sqrt{17}$ cm

C. $5\sqrt{2}$ cm **D.** $2\sqrt{34}$ cm



E

4. Ekran ma wymiary 56 cm × 35 cm. Rozmiar ekranu określa się za pomocą długości jego przekątnej, wyrażonej w calach. Oblicz wielkość tego ekranu. Przyjmij, że 1 cal to 2,54 cm, a wynik zaokrąglij do jedności.

6. Trójkąt o kątach 45°, 45°, 90°

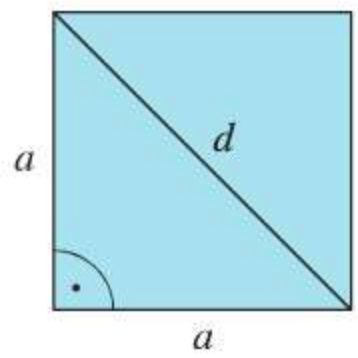
- Zastosowanie wzoru na przekątną kwadratu
- Znajomość własności trójkąta o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$

Przykład 1.

Oblicz długość przekątnej kwadratu:

a) o boku długości a,

Wykonamy rysunek pomocniczy. Przekątną kwadratu oznaczymy literą d.



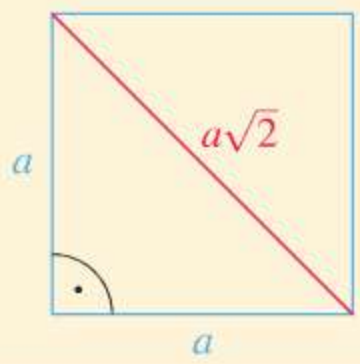
Przekątna kwadratu jest jednocześnie przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości a. Aby wyznaczyć długość przekątnej, skorzystamy zatem z twierdzenia Pitagorasa.

$$a^2 + a^2 = d^2$$
$$2a^2 = d^2$$
$$\sqrt{2}a = d$$

Otrzymaliśmy $d = a\sqrt{2}$.

Długość przekątnej d kwadratu o boku długości a wyraża się wzorem:

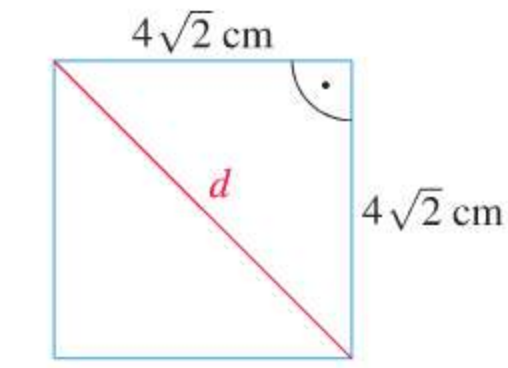
$$d = a\sqrt{2}.$$



b) o boku długości $4\sqrt{2}$ cm.

Sposób I

Wykonamy rysunek pomocniczy. Przekątną w kwadracie oznaczymy literą d.



Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczymy długość przekątnej d. Odcinek d jest przekątną, więc jego długość musi wyrażać się za pomocą liczby dodatniej.

$$(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = d^2$$
$$4^2 \cdot (\sqrt{2})^2 + 4^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = d^2$$
$$16 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = d^2$$
$$32 + 32 = d^2$$
$$d^2 = 64$$
$$d = 8 \text{ [cm]}$$

Sposób II

Skorzystamy ze wzoru na długość przekątnej kwadratu: $d = a\sqrt{2}$, gdzie a jest długością boku kwadratu.

$$d = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$
$$d = 4 \cdot 2$$
$$d = 8 \text{ [cm]}$$

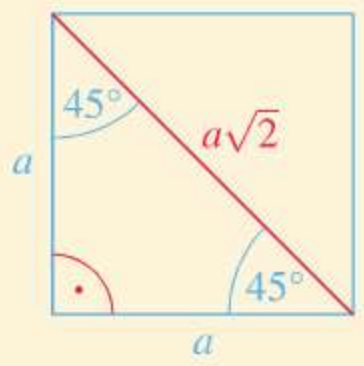
Otrzymaliśmy $d = 8$ cm.

Ćwiczenie 1.

Oblicz długość przekątnej kwadratu o boku długości:

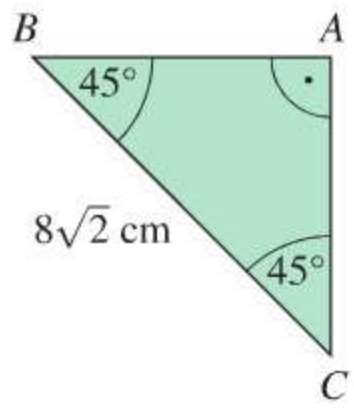
a) 10 cm, **b)** $\frac{1}{4}$ dm, **c)** $\sqrt{3}$ km, **d)** $3\sqrt{2}$ mm, **e)** $2\sqrt{6}$ cm.

Przekątna kwadratu o boku długości a dzieli go na dwa przystające trójkąty, których kąty mają miary: $45°$, $45°$, $90°$.
Boki tych trójkątów mają długości: a, a, $a\sqrt{2}$.



Przykład 2.

Oblicz nieznane długości boków trójkąta.



Trójkąt ABC jest prostokątny równoramienny, więc $|AB| = |AC| = a$.

Sposób I

Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczymy długości boków AB oraz AC.

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$
$$a^2 + a^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2$$
$$2a^2 = 8^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$2a^2 = 64 \cdot 2 \quad | : 2$$
$$a^2 = 64$$
$$a = 8 \text{ [cm]}$$

Sposób II

Skorzystamy z własności trójkąta o kątach: $45°$, $45°$, $90°$. Odcinek BC to przeciwprostokątna trójkąta ABC o przyprostokątnych długości a, więc $|BC| = a\sqrt{2}$.

$$|BC| = 8\sqrt{2}$$
$$a\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \quad | : \sqrt{2}$$
$$a = 8 \text{ [cm]}$$

Odp. Boki AB i AC mają długość po 8 cm.

Ćwiczenie 2.

Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny. Oblicz długość:

a) przeciwprostokątnej tego trójkąta, jeśli ramię ma 5 cm długości,

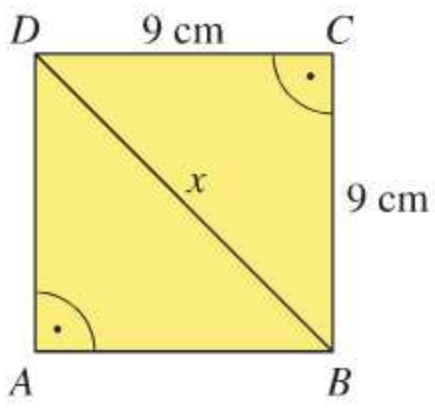
b) ramienia tego trójkąta, jeśli przeciwprostokątna ma $6\sqrt{2}$ cm długości,

c) przyprostokątnej tego trójkąta, jeśli przeciwprostokątna ma $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm długości.

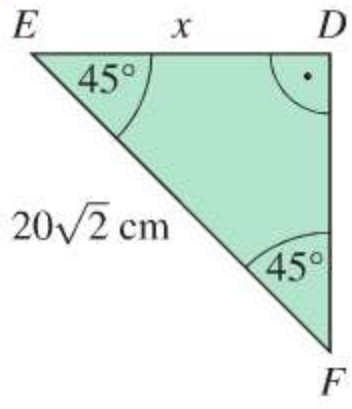
Rozwiąż zadania

1. Oblicz x.

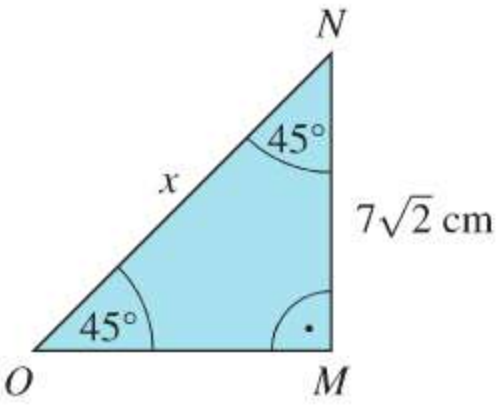
a)



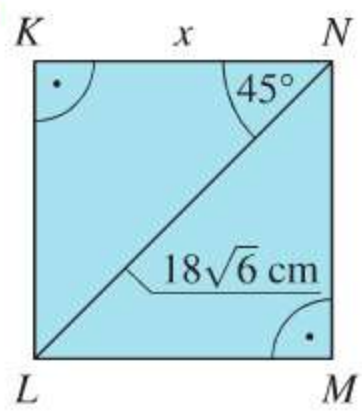
b)



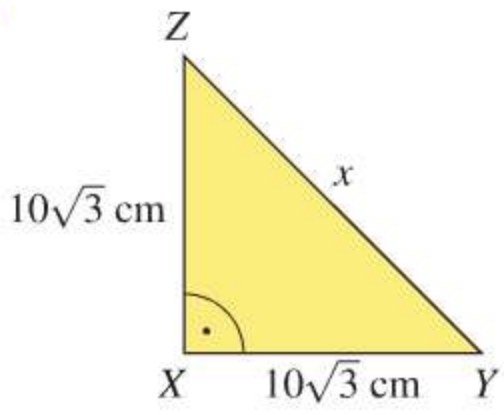
c)



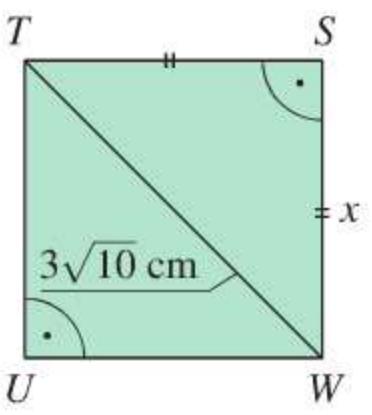
d)



e)



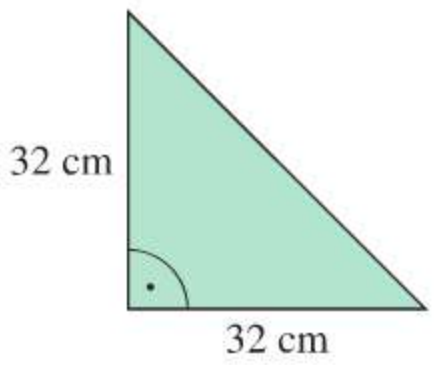
f)



2. Oblicz obwód i pole kwadratu o przekątnej długości:

a) $3\sqrt{2}$ mm, **b)** 4 dm, **c)** $3\frac{1}{2}$ cm, **d)** $0{,}5\sqrt{6}$ km.

3. Każdy uczestnik obozu otrzymał chustę w kształcie trójkąta przedstawionego na rysunku. Oblicz, ile centymetrów tasiemki potrzeba, aby obszyć brzeg chusty. Przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1{,}41$. Wynik zapisz w centymetrach i zaokrąglij go do dziesiątek.

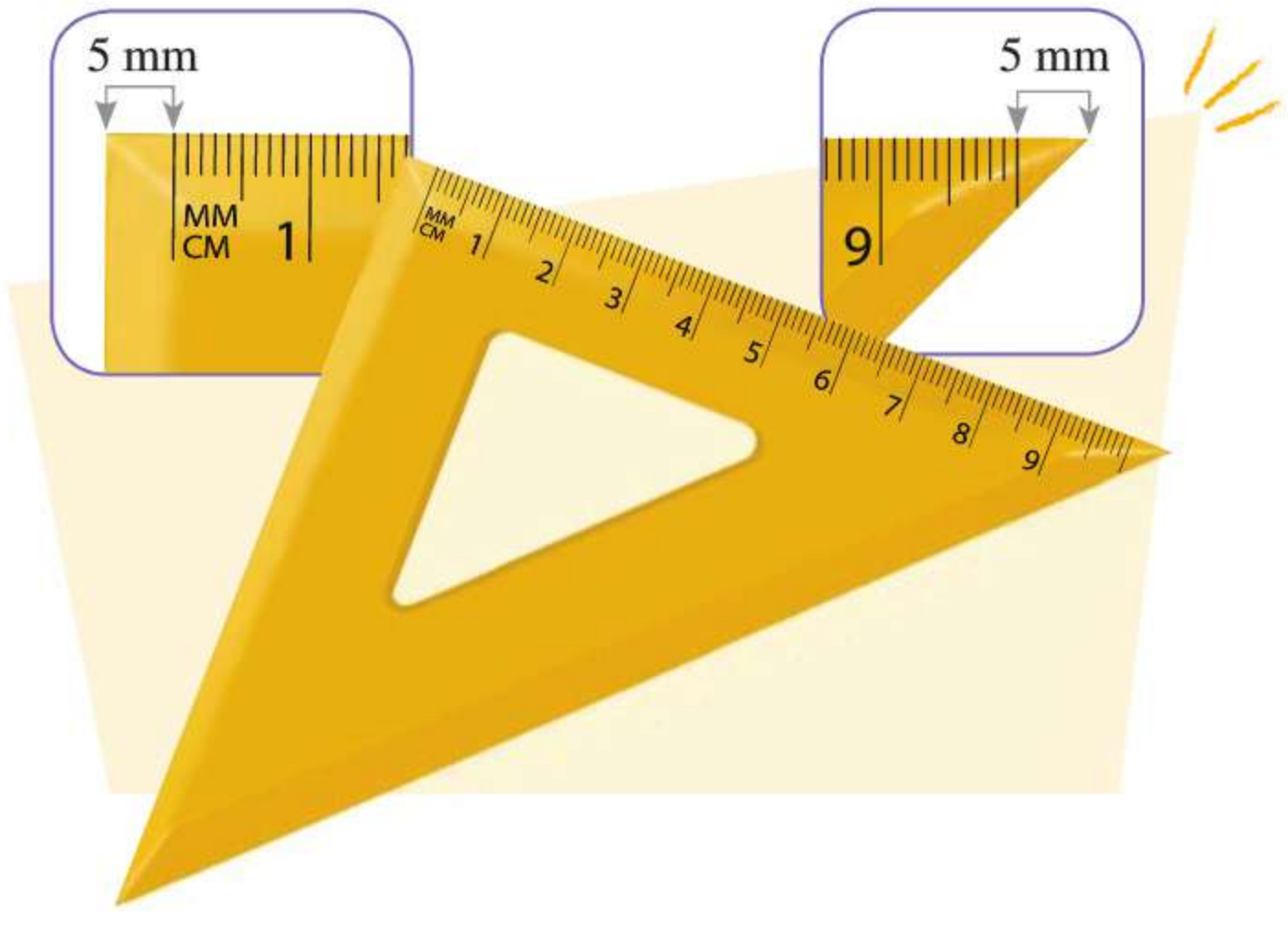


4. Piotrek kupił ekierkę w kształcie trójkąta równoramiennego.

a) Oblicz długość najdłuższego boku tej ekierki.

b) Ustal, jaki jest stosunek długości boków tej ekierki.

c) Czy stosunek długości boków w dowolnym trójkącie prostokątnym równoramiennym jest zawsze taki sam? Uzasadnij swoją odpowiedź.



E

Informacje do zadań 5. i 6.

Julka chce jechać rowerem z domu do kwiaciarni. Pierwsza z możliwych tras prowadzi ulicą J. Słowackiego przez $900\ \text{m}$, a następnie ulicą M. Kopernika przez kolejne $900\ \text{m}$. Druga trasa prowadzi ulicą W. Szymborskiej. Przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.



5. Julka pojechała rowerem do kwiaciarni ulicą W. Szymborskiej.

Jakiej długości drogę pokonała Julka? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. około $640\ \text{m}$ **B.** około $1269\ \text{m}$
C. około $1280\ \text{m}$ **D.** około $2583\ \text{m}$

6. Julka przejechała trasę ulicą W. Szymborskiej z domu do kwiaciarni w ciągu $5\ \text{min}\ 24\ \text{s}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

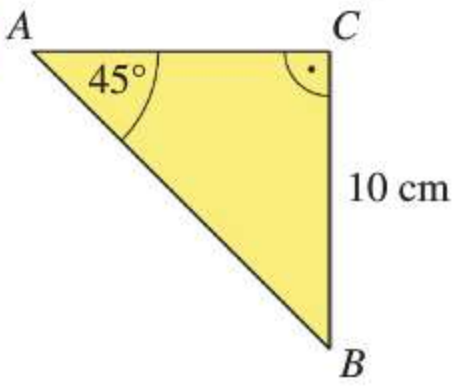
Średnia prędkość, z jaką Julka pokonała trasę z domu do kwiaciarni, wyniosła

A. $5{,}4\ \text{km/h}$ **B.** $10\ \text{km/h}$ **C.** $14{,}1\ \text{km/h}$ **D.** $20\ \text{km/h}$

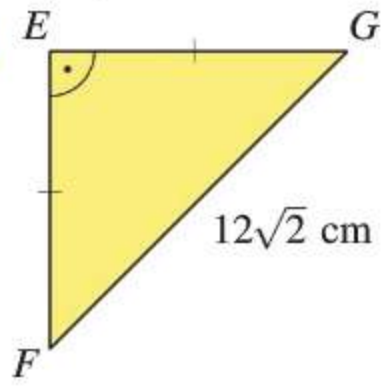
Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz nieznane długości boków trójkąta.

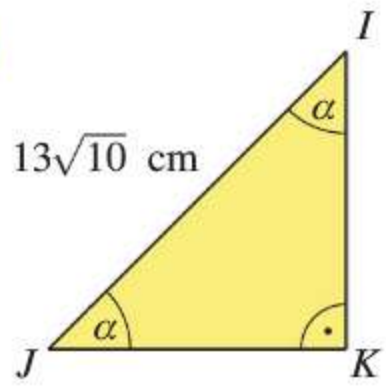
a)



b)



c)



E

2. Dany jest kwadrat o przekątnej długości $10\sqrt{6}\ \text{cm}$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

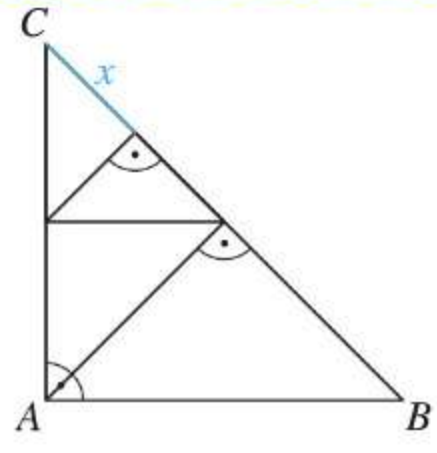
Pole tego kwadratu jest równe | **A** | **B** |. **A.** $300\ \text{cm}^2$ **B.** $600\ \text{cm}^2$

Obwód tego kwadratu wynosi | **C** | **D** |. **C.** $40\sqrt{3}\ \text{cm}$ **D.** $160\sqrt{3}\ \text{cm}$

3. Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny równoramienny ABC podzielony na mniejsze trójkąty prostokątne równoramienne. Bok AB ma długość $20\ \text{cm}$.

a) Oblicz obwód trójkąta ABC.

b) Oblicz x.



7. Trójkąt o kątach 30°, 60°, 90°

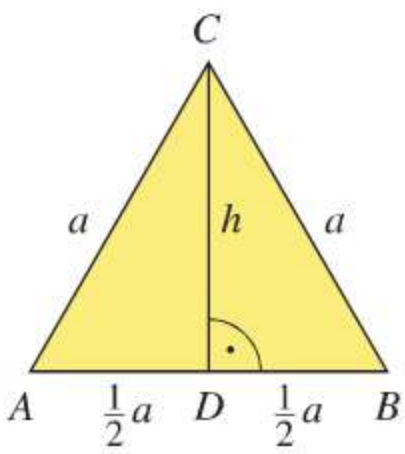
- Zastosowanie wzoru na wysokość trójkąta równobocznego
- Znajomość własności trójkąta o kątach 30°, 60°, 90°

Przykład 1.

Oblicz wysokość trójkąta równobocznego:

a) o boku długości a,

Wykonamy rysunek pomocniczy i przyjmiemy odpowiednie oznaczenia.



Trójkąt BCD jest prostokątny. Aby obliczyć wysokość h, zastosujemy twierdzenie Pitagorasa.

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2$$

$$h^2 + \frac{1}{4}a^2 = a^2$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

Obliczymy wysokość h. Ponieważ h jest wysokością, to musi wyrażać się za pomocą liczby dodatniej.

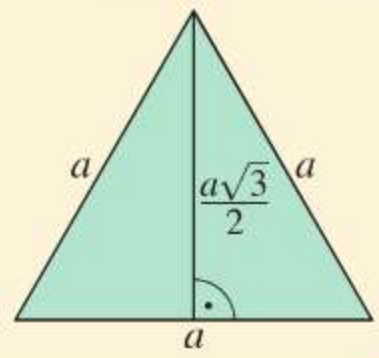
$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Otrzymaliśmy $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Wysokość h trójkąta równobocznego o boku długości a wyraża się wzorem:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



b) o boku długości 10 cm.

Aby obliczyć wysokość h, skorzystamy ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, gdzie a jest długością boku tego trójkąta.

$$h = \frac{10\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 5\sqrt{3}\ [\text{cm}]$$

Otrzymaliśmy $h = 5\sqrt{3}$ cm.

Ćwiczenie 1.

Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o boku długości:

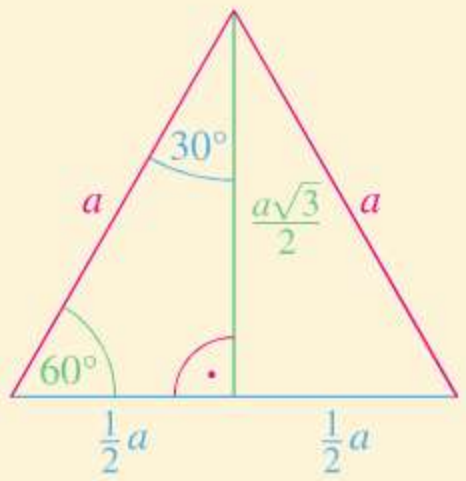
a) 8 cm, **b)** $7\sqrt{2}$ dm, **c)** $10\sqrt{10}$ m, **d)** $11\sqrt{3}$ km.

Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a dzieli go na dwa przystające trójkąty, których kąty mają miary: $30°$, $60°$, $90°$. Boki tych trójkątów mają długości: a, $\frac{1}{2}a$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bok a leży naprzeciw kąta o mierze $90°$.

Bok $\frac{1}{2}a$ leży naprzeciw kąta o mierze $30°$.

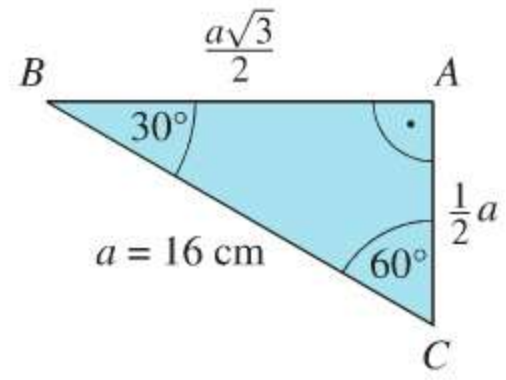
Bok $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ leży naprzeciw kąta o mierze $60°$.



Przykład 2.

Dany jest trójkąt, którego kąty mają miary: $30°$, $60°$, $90°$, a przeciwprostokątna ma długość 16 cm. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

Wykonamy rysunek pomocniczy i przyjmiemy odpowiednie oznaczenia.



Skorzystamy z własności trójkąta o kątach wewnętrznych: $30°$, $60°$, $90°$. Bok BC leży naprzeciw kąta $90°$, więc możemy przyjąć, że $a = 16$ cm. Najpierw obliczymy długość boku AC, a następnie długość boku AB.

$$a = 16$$

$$|AC| = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \text{ [cm]}$$

$$|AB| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

Odp. Jedna z przyprostokątnych ma długość 8 cm, a druga jest równa $8\sqrt{3}$ cm.

Ćwiczenie 2.

Dany jest trójkąt, którego kąty mają miary: $30°$, $60°$, $90°$. Oblicz długości:

a) przyprostokątnych tego trójkąta, jeśli przeciwprostokątna ma długość 12 cm,

b) przeciwprostokątnej oraz dłuższej przyprostokątnej tego trójkąta, jeśli jego krótsza przyprostokątna ma długość 7 cm,

c) przeciwprostokątnej oraz krótszej przyprostokątnej tego trójkąta, jeśli jego dłuższa przyprostokątna ma długość $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ cm.

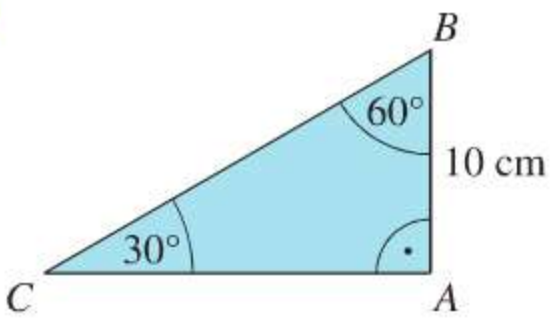
Rozwiąż zadania

1. Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o boku długości:

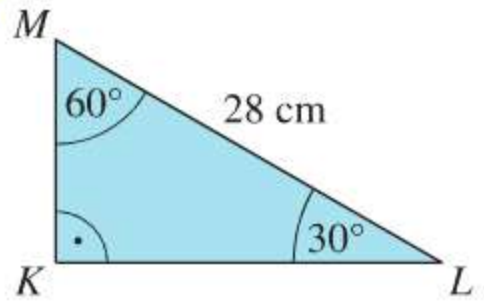
a) 12 cm, **b)** $5\sqrt{2}$ cm, **c)** $13\sqrt{7}$ cm, **d)** $8\sqrt{6}$ cm.

2. Oblicz nieznane długości boków trójkąta.

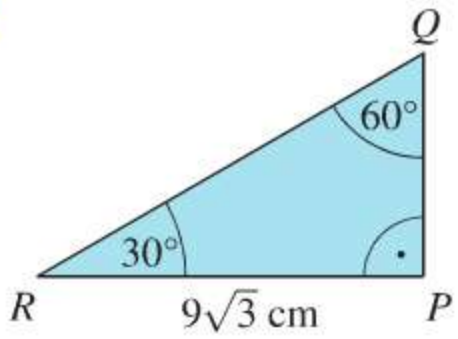
a)



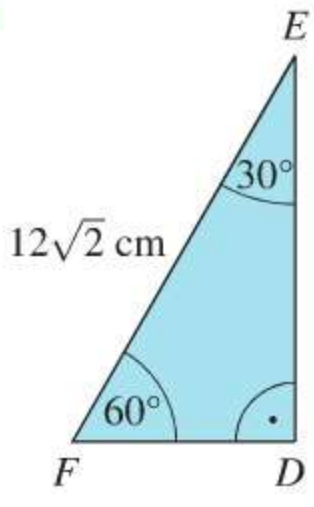
b)



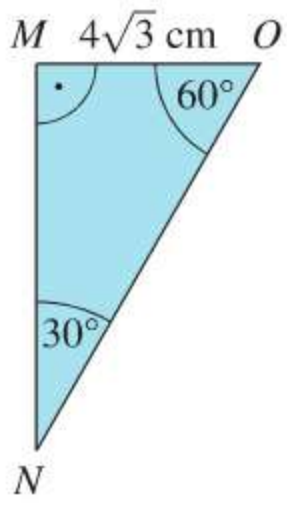
c)



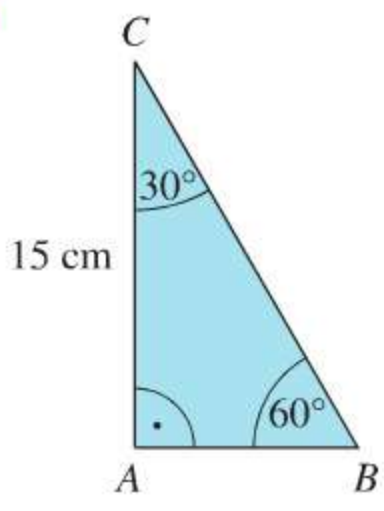
d)



e)



f)



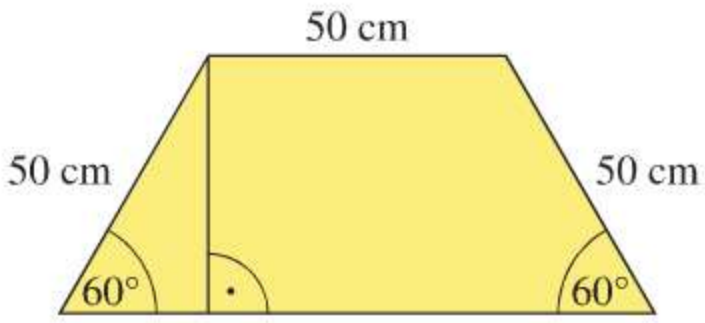
3. Oblicz obwód trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa:

a) $3\sqrt{3}$ cm, **b)** $4\sqrt{6}$ m, **c)** 12 dm, **d)** $4\sqrt{10}$ km.

4. Lustro jest oparte o ścianę pod kątem 30°. Jego dolna krawędź jest odsunięta od ściany o 54 cm. Oblicz wysokość tego lustra.

E **Informacje do zadań 5. i 6.**

Na rysunku przedstawiono trapez równoramienny.



5. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Najdłuższy bok tego trapezu ma długość 100 cm.	**P**	**F**
Wysokość tego trapezu wynosi $50\sqrt{3}$ cm.	**P**	**F**

6. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Miara kąta rozwartego trapezu jest o | **A** | **B** | większa od miary jego kąta ostrego.

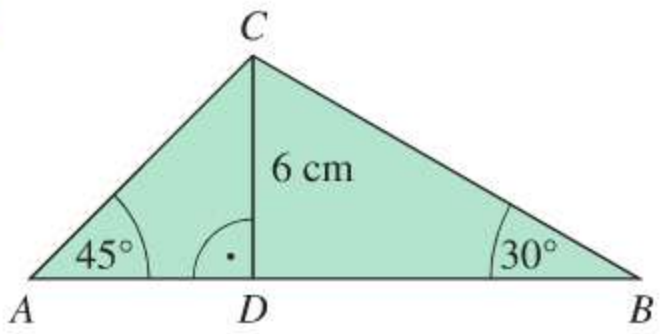
A. 100 % **B.** 200 %

Obwód tego trapezu wynosi | **C** | **D** | cm.

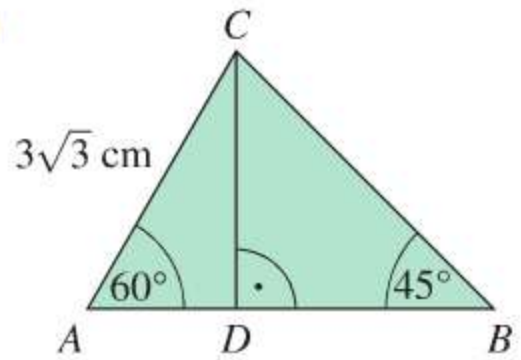
C. 225 **D.** 250

7. Oblicz obwód trójkąta ABC.

a)

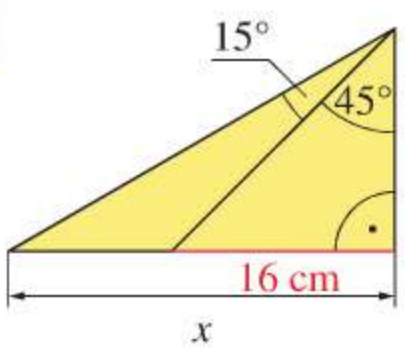


b)

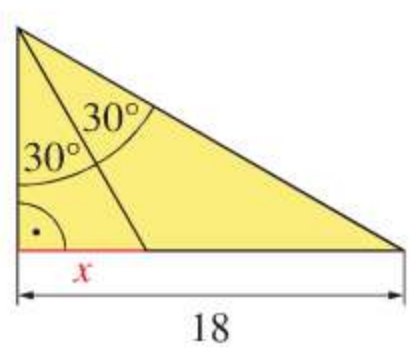


8. Oblicz x.

a)



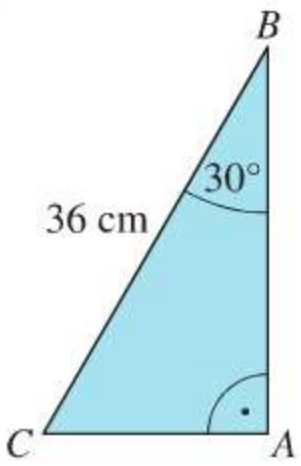
b)



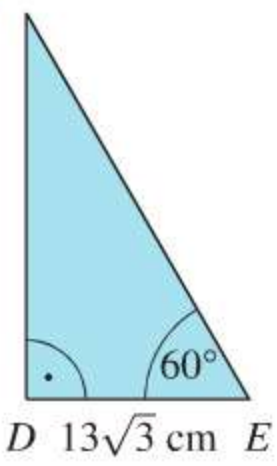
Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz nieznane długości boków trójkąta.

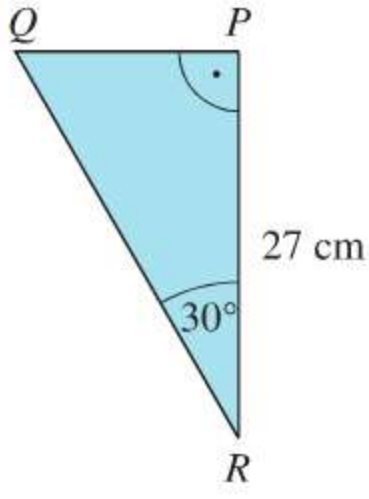
a)



b)



c)



2. Oblicz połowę obwodu trójkąta równobocznego o wysokości równej 24 cm.

3. Najwyższy budynek w Gdańsku (Olivia Star) ma wysokość 180 m.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

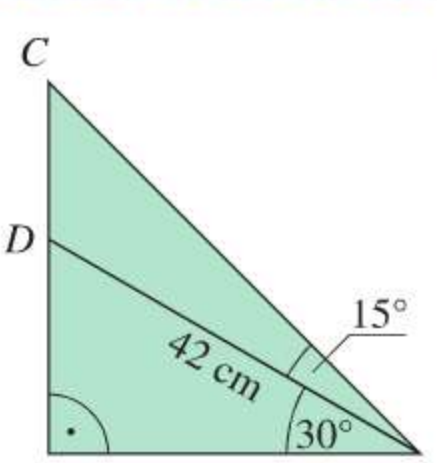
Długość cienia rzucanego przez budynek, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 60°, wynosi

A. 90 m **B.** 360 m **C.** $60\sqrt{3}$ m **D.** $120\sqrt{3}$ m

4. Na rysunku przedstawiono trójkąt ABC.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Długość przyprostokątnej AB jest równa $21\sqrt{3}$ cm.	**P**	**F**
Obwód trójkąta ABC jest równy $63\sqrt{3}$ cm.	**P**	**F**



8. Dowody w geometrii

- Przeprowadzanie dowodów geometrycznych
- Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa w dowodach geometrycznych

Podczas nauki matematyki poznajemy nowe pojęcia i ich własności. Własności te są często sformułowane w postaci twierdzeń. Twierdzenie w matematyce oznacza zdanie, które potrafimy udowodnić, tzn. uzasadnić, że jest prawdziwe.

Pojęcie	Twierdzenie
Trójkąt	Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa $180°$.
Kwadrat	Jeżeli czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, to jego przekątne mają równe długości.

Zauważmy, że twierdzenie dotyczące kwadratu jest zdaniem warunkowym, zbudowanym według schematu: *Jeżeli..., to...* Możemy w nim wyróżnić dwie charakterystyczne części: założenie i tezę.

Jeżeli czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, to jego przekątne mają równe długości.

Założenie

Część pomiędzy wyrazami *jeżeli* a *to* zawiera warunki, przy których twierdzenie jest spełnione.

Teza

Część po wyrazie *to* określa, co należy udowodnić z wykorzystaniem założenia.

Musimy pamiętać, że nie każde zdanie warunkowe jest twierdzeniem matematycznym. Jeśli nie jesteśmy przekonani o prawdziwości zdania, to nazywamy je hipotezą (przypuszczeniem).

Hipoteza

Aby uzasadnić, że hipoteza nie jest prawdziwa, wystarczy podać tylko jeden kontrprzykład, czyli przykład pokazujący, że przypuszczenie jest fałszywe.

Jeśli hipoteza nie jest prawdziwa, to zdanie nie jest twierdzeniem matematycznym.

Aby uzasadnić, że hipoteza jest prawdziwa, musimy przeprowadzić dowód matematyczny.

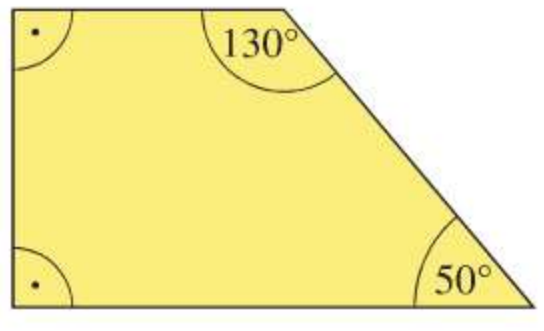
Jeśli hipoteza jest prawdziwa, to zdanie jest twierdzeniem matematycznym.

Przykład 1.

Uzasadnij, że hipoteza nie jest prawdziwa.

Hipoteza: *Jeżeli czworokąt ma dwa kąty proste, to jest prostokątem.*

Aby uzasadnić, że hipoteza nie jest prawdziwa, wskażemy **kontrprzykład**.



Podaliśmy przykład czworokąta, który ma dwa kąty proste i nie jest prostokątem.

W ten sposób uzasadniliśmy, że hipoteza nie jest prawdziwa, czyli zdanie: *Jeżeli czworokąt ma dwa kąty proste, to jest prostokątem* nie jest twierdzeniem matematycznym.

Ćwiczenie 1.

Uzasadnij, że podana hipoteza nie jest prawdziwa.

a) Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to jest równoramienny.

b) Jeżeli czworokąt ma wszystkie boki równej długości, to jest kwadratem.

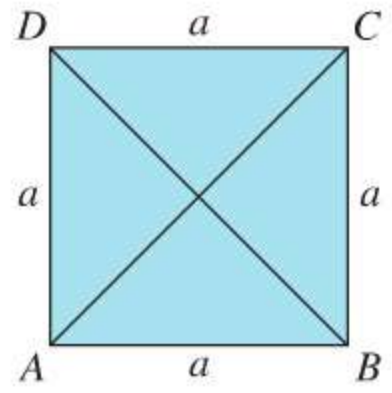
Przykład 2.

Udowodnij, że jeśli czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, to jego przekątne mają równe długości.

Założenie: *Czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.*
Teza: *Przekątne czworokąta $ABCD$ mają równe długości.*
Dowód:
Skorzystamy z założenia oraz ze znanych nam twierdzeń i własności, aby pokazać, że teza jest prawdziwa.

Z założenia wiemy, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

Wykonamy rysunek pomocniczy. Oznaczymy długości boków kwadratu jako a.



Trójkąty ABC oraz ABD są prostokątne, więc dla każdego z nich skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$
$$a^2 + a^2 = |AC|^2$$
$$|AD|^2 + |AB|^2 = |BD|^2$$
$$a^2 + a^2 = |BD|^2$$

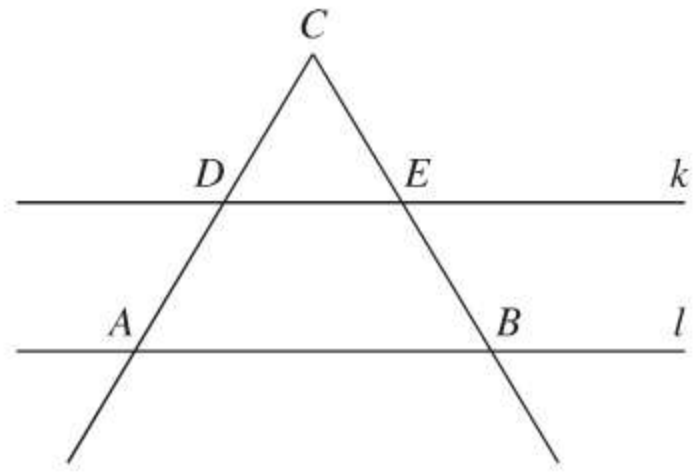
Otrzymaliśmy $|AC|^2 = |BD|^2$. Wobec tego pokazaliśmy, że $|AC| = |BD|$, co należało udowodnić.

Ćwiczenie 2.

Udowodnij, że długość przekątnej w prostokącie o bokach długości a i b jest równa $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Przykład 3.

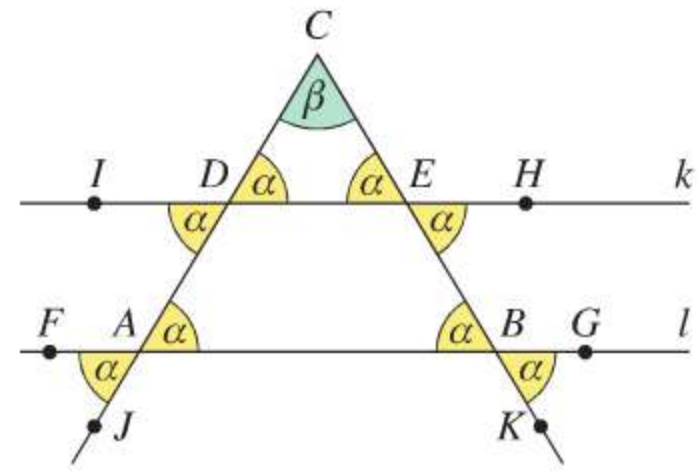
Proste k i l przedstawione na rysunku są równoległe. Trójkąt ABC o podstawie AB jest równoramienny. Udowodnij, że trójkąt CDE ma takie same miary kątów wewnętrznych jak trójkąt ABC.



Założenie: *Proste k i l są równoległe. Półproste o początku w punkcie C przecinają prostą k w punktach D i E oraz prostą l w punktach A i B. Trójkąt ABC jest równoramienny.*
Teza: *Trójkąt CDE ma takie same miary kątów wewnętrznych jak trójkąt ABC.*

Dowód:

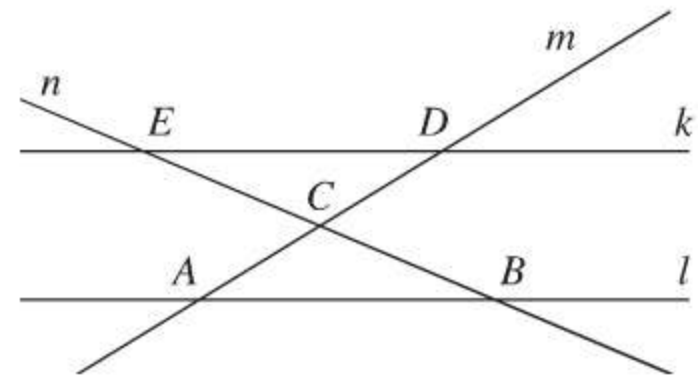
Wykonamy rysunek pomocniczy. Skorzystamy z własności kątów odpowiadających oraz naprzemianległych i oznaczymy na rysunku kąty o równych miarach jako α. Kąt ACB oznaczymy jako β.



Po porównaniu otrzymaliśmy: $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDC|$ oraz $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEC|$. Kąt ACB jest kątem wspólnym dla trójkątów ABC i CDE, jego miara jest równa β. Wówczas trójkąt CDE ma takie same miary kątów wewnętrznych jak trójkąt ABC, co należało udowodnić.

Ćwiczenie 3.

Proste k i l przedstawione na rysunku są równoległe. Udowodnij, że trójkąty ABC i CDE mają takie same miary kątów wewnętrznych.



Rozwiąż zadania

1. W twierdzeniu wskaż założenie i tezę.

a) Jeżeli kąty są naprzemianległe, to ich miary są równe.

b) Jeżeli trójkąt jest równoboczny, to każdy jego kąt wewnętrzny ma miarę 60°.

c) Jeżeli czworokąt jest kwadratem, to jest prostokątem.

2. Podaj kontrprzykład do hipotezy.

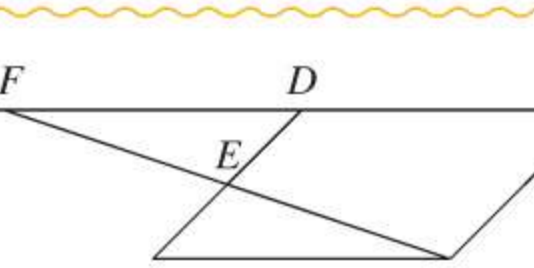
a) Jeżeli jeden z kątów trójkąta jest kątem ostrym, to trójkąt jest ostrokątny.

b) Jeżeli czworokąt ma dwa boki równej długości, to jest prostokątem.

3. Miara najmniejszego kąta wewnętrznego w trójkącie jest równa α. Drugi kąt w tym trójkącie jest dwa razy większy od najmniejszego kąta, a trzeci kąt ma miarę o 30° mniejszą niż drugi kąt. Udowodnij, że ten trójkąt jest ostrokątny.

4. W trójkącie ABC poprowadzono odcinek CD łączący wierzchołek C ze środkiem przeciwległego boku. Udowodnij, że trójkąty ADC i BCD mają równe pola.

5. W trójkącie KLM przedłużono bok KL poza wierzchołek L i utworzono trójkąt KNM taki, że $|LM| = |LN|$. Udowodnij, że miara kąta KLM jest dwa razy większa od miary kąta KNM.



6. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym bok AB jest podstawą, a kąt między ramionami jest kątem ostrym. W trójkącie poprowadzono wysokość AD z wierzchołka A oraz wysokość CE z wierzchołka C. Udowodnij, że kąty BCE i BAD mają równe miary.

7. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość $2\sqrt{5}$. Przeciwprostokątna w tym trójkącie jest równa 6. Udowodnij, że długość drugiej przyprostokątnej w tym trójkącie jest liczbą wymierną.

8. W czworokącie $ABCD$ boki AB i CD oraz BC i AD są parami równoległe. Z wierzchołka B poprowadzono przez środek E boku AD półprostą, która przecięła prostą CD w punkcie F. Udowodnij, że $|DF| = |AB|$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Czy hipoteza: *Jeżeli jeden z kątów trójkąta jest rozwarty, to pozostałe kąty w tym trójkącie są ostre* jest prawdziwa? E

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	taki trójkąt może być równoramienny.
			2.	taki trójkąt nie może być równoboczny.
B.	Nie,		**3.**	suma miar pozostałych kątów tego trójkąta jest mniejsza niż $90°$.

2. Miara największego kąta wewnętrznego trójkąta jest równa β. Drugi kąt tego trójkąta ma miarę o $60°$ mniejszą od miary największego kąta. Miara trzeciego kąta jest dwa razy mniejsza od miary drugiego kąta. Udowodnij, że ten trójkąt jest rozwartokątny.

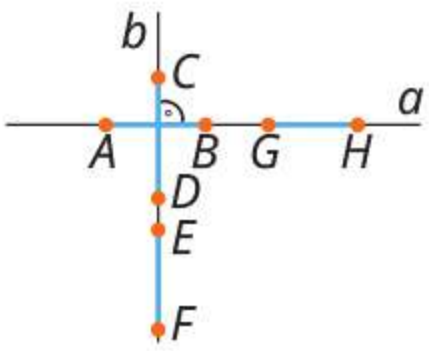
3. W kwadracie $KLMN$ środki boków LM i KL oznaczono odpowiednio O i P. Udowodnij, że trójkąty PLM oraz NOM są przystające.

PODSUMOWANIE DZIAŁU VII
Figury płaskie

Powtórz wiadomości

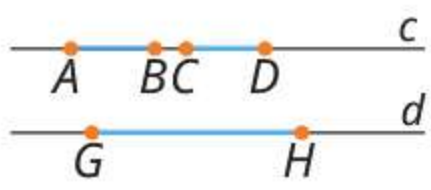
Odcinki równoległe i odcinki prostopadłe

Dwa **odcinki są prostopadłe**, gdy zawierają się w prostych prostopadłych.



$a \perp b$
$AB \perp CD$
$EF \perp GH$
$CD \perp GH$
$EF \perp AB$

Dwa **odcinki są równoległe**, gdy zawierają się w prostych równoległych lub zawierają się w tej samej prostej.



$c \parallel d$
$AB \parallel GH$
$CD \parallel GH$
$AB \parallel CD$

Rodzaje kątów

kąt zerowy $\alpha = 0°$	kąt ostry $0° < \alpha < 90°$	kąt prosty $\alpha = 90°$
kąt rozwarty $90° < \alpha < 180°$	kąt półpełny $\alpha = 180°$	
kąt wklęsły $180° < \alpha < 360°$	kąt pełny $\alpha = 360°$	
kąty przyległe	kąty wierzchołkowe	
kąty odpowiadające	kąty naprzemianległe	

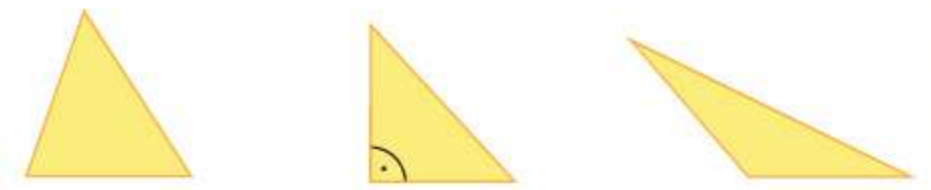
Trójkąty

Podział ze względu na boki



trójkąt równoboczny — trójkąt równoramienny — trójkąt różnoboczny

Podział ze względu na kąty

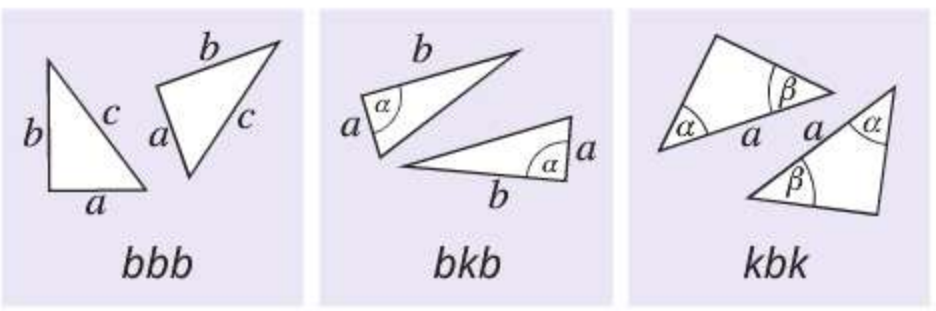


trójkąt ostrokątny — trójkąt prostokątny — trójkąt rozwartokątny

Suma miar kątów w trójkącie

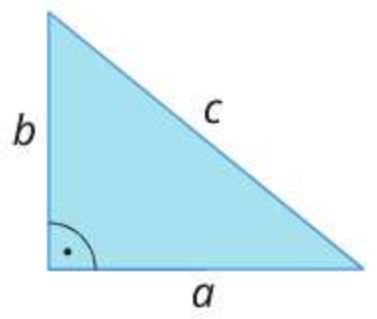
W każdym trójkącie suma miar kątów wewnętrznych wynosi 180°.

Cechy przystawania trójkątów



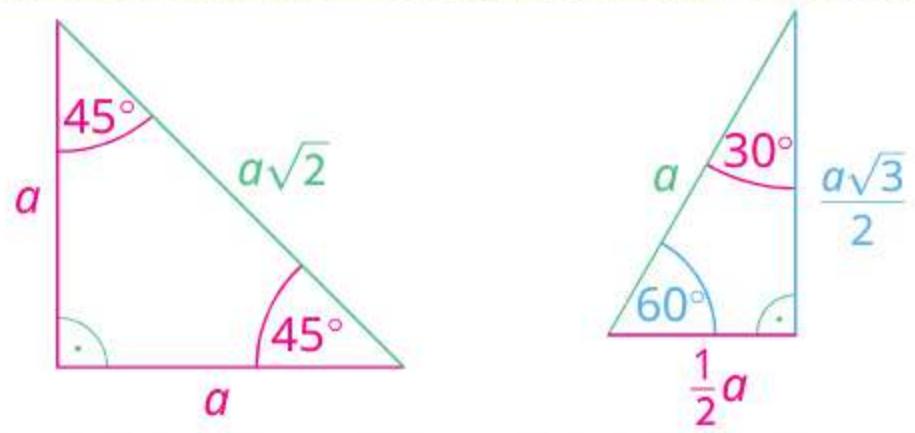
Twierdzenie Pitagorasa

W każdym trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



$a^2 + b^2 = c^2$

Trójkąty charakterystyczne



Sprawdź umiejętności

E

Informacje do zadań 1. i 2.

Odcinek AB ma długość $160\ \text{cm}$. Punkty D i E podzieliły kolejno odcinek AB w stosunku $7 : 9 : 16$.

1. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Odcinek AD jest [**A** | **B**] niż odcinek DE.

Długość odcinka BE jest [**C** | **D**] długości odcinka AE.

A. krótszy **B.** dłuższy

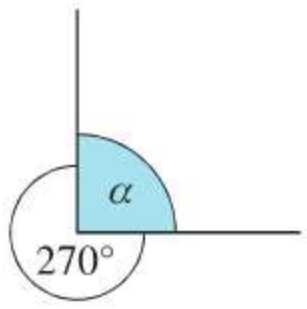
C. mniejsza od **D.** równa

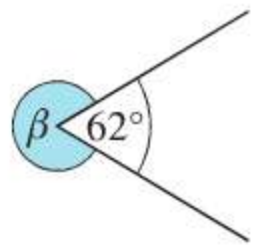
2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

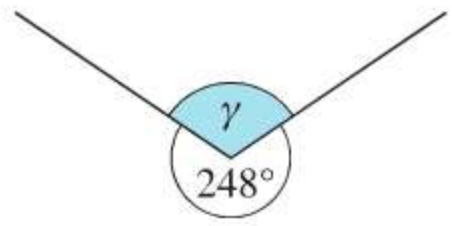
Odcinek DE ma długość

A. $35\ \text{cm}$ **B.** $45\ \text{cm}$ **C.** $75\ \text{cm}$ **D.** $80\ \text{cm}$

3. Oblicz miary kątów: α, β i γ.







4. Miara jednego z kątów przyległych jest o $72°$ większa od miary drugiego kąta. Oblicz miary tych kątów.

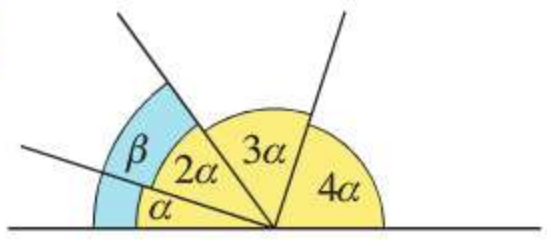
5. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Minutowa wskazówka zegara w ciągu $12\ \text{min}$ zakreśla kąt o mierze $60°$.	**P**	**F**
Godzinowa wskazówka zegara zakreśla kąt o mierze $120°$ w ciągu 4 godzin.	**P**	**F**

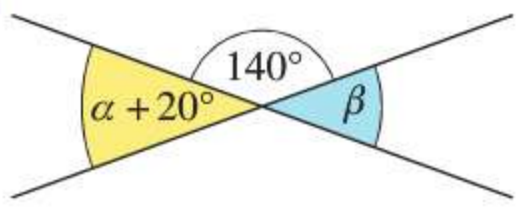
E

6. Oblicz miary kątów α i β.

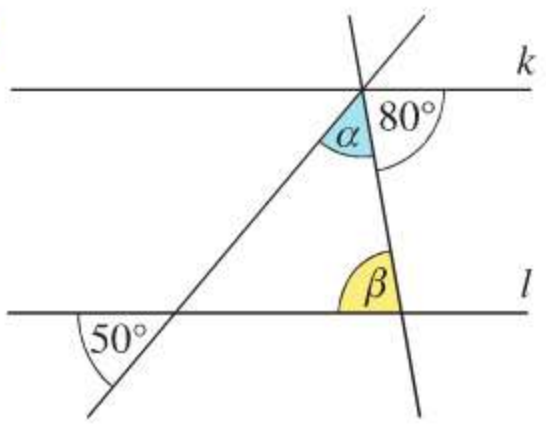
a)



b)

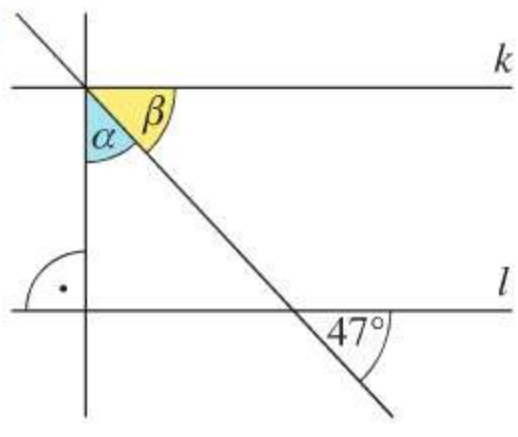


c)



$k \parallel l$

d)



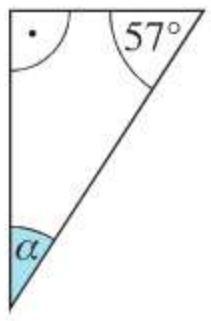
$k \parallel l$

7. Oblicz miary kątów trójkąta oznaczonych literami greckimi.

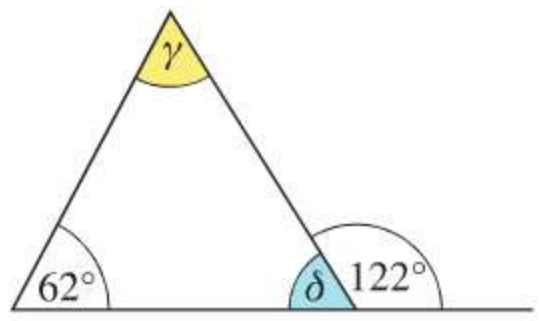
a)



b)



c)



8. Sprawdź, czy można zbudować trójkąt z odcinków o długościach:

a) $7\text{ cm}, 14\frac{1}{2}\text{ cm}, 22\text{ cm}$,

b) $3{,}9\text{ cm}, 48\text{ mm}, 0{,}86\text{ dm}$,

c) $\frac{1}{27}\text{ m}, \frac{1}{9}\text{ m}, \frac{1}{3}\text{ m}$,

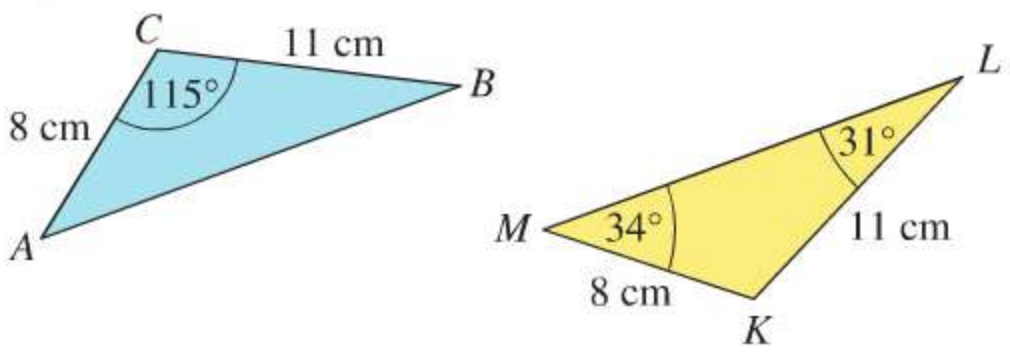
d) $13\sqrt{5}\text{ mm}, 12\sqrt{5}\text{ mm}, 26\sqrt{5}\text{ mm}$.

E **9.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

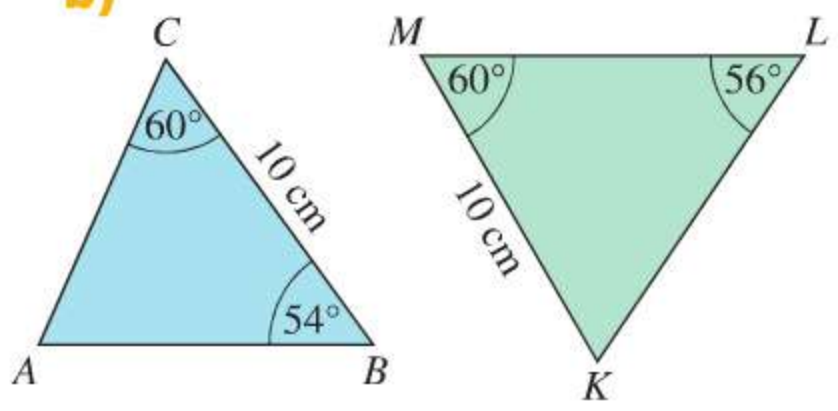
W trójkącie boki mogą mieć długości: 2 cm, 3 cm i 4 dm.	**P**	**F**
W trójkącie kąty wewnętrzne mogą mieć miary: 1°, 1° i 98°.	**P**	**F**

10. Czy trójkąty ABC i KLM są przystające? Uzasadnij swoją odpowiedź.

a)

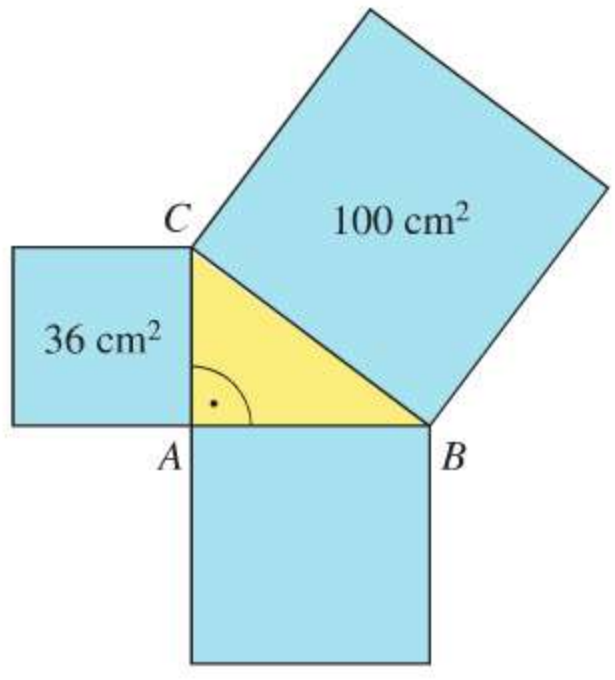


b)



E **Informacje do zadań 11. i 12.**

Na bokach trójkąta prostokątnego ABC zbudowano kwadraty.



11. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Przyprostokątna AC trójkąta ABC ma długość 6 cm.	**P**	**F**
Kwadrat zbudowany na przyprostokątnej AB trójkąta ABC ma pole równe 8 cm^2.	**P**	**F**

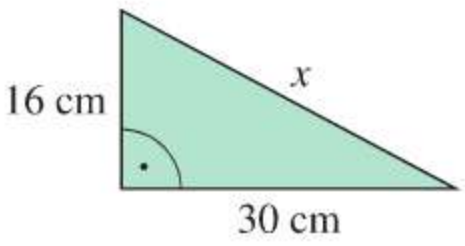
12. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obwód trójkąta ABC jest równy

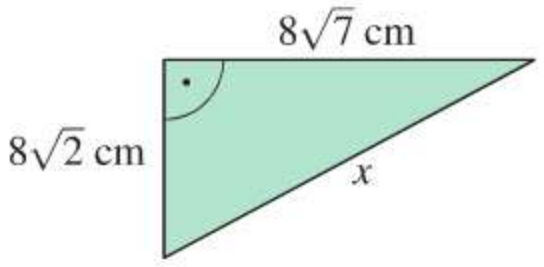
A. 20 cm **B.** 24 cm **C.** 64 cm **D.** 200 cm

13. Oblicz x.

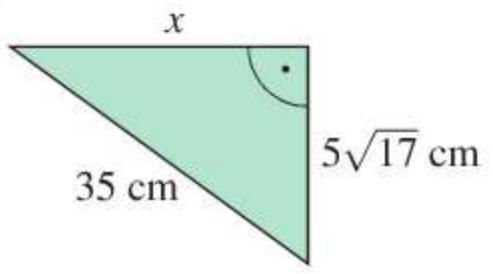
a)



b)



c)



14. Pan Karol chce wyłożyć dolną połowę prostokątnej ściany o wymiarach $4\text{ m} \times 2{,}6\text{ m}$ kwadratowymi płytkami. Przekątna takiej płytki jest równa $10\sqrt{2}\text{ cm}$. Cena za jedną płytkę wynosi $4{,}50$ zł. Uzasadnij, że pan Karol zapłaci za płytki mniej niż 2500 zł.

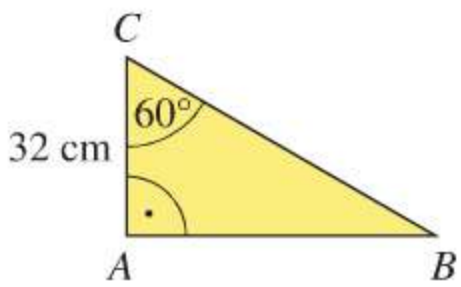
15. Oblicz:

a) wysokość trójkąta równobocznego o obwodzie równym 96 cm,

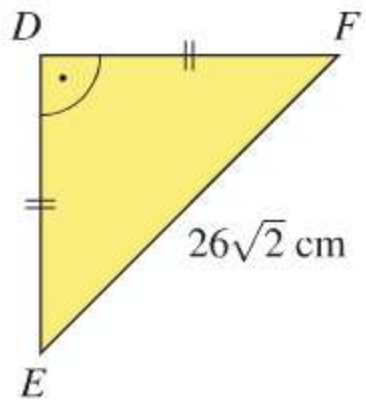
b) obwód trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa $2\sqrt{6}\text{ cm}$.

16. Oblicz nieznane długości boków trójkąta.

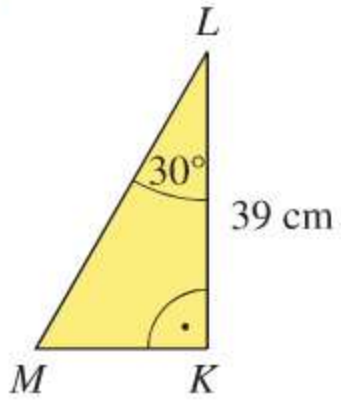
a)



b)



c)



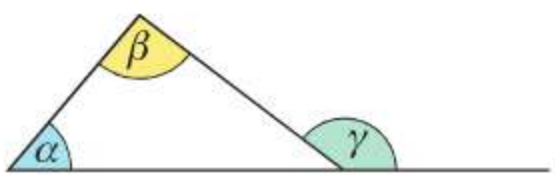
17. Dane są dwa trójkąty prostokątne: ABC i DEF. Trójkąt ABC jest równoramienny, a jego przeciwprostokątna ma długość $6\sqrt{6}\text{ cm}$. Miary kątów wewnętrznych trójkąta DEF są równe: $30°$, $60°$, $90°$. Najkrótszy bok trójkąta DEF ma długość $4\sqrt{3}\text{ cm}$.

Czy obwód trójkąta DEF jest większy od obwodu trójkąta ABC?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	przeciwprostokątna trójkąta ABC jest dłuższa od przeciwprostokątnej trójkąta DEF.
			2.	$12 < 6\sqrt{6}$.
B.	Nie,		**3.**	$60° > 45°$.

18. Udowodnij, że miary kątów przedstawionych na rysunku spełniają zależność: $\alpha + \beta = \gamma$.



19. Udowodnij, że suma miar kątów wewnętrznych leżących przy jednym boku rombu jest równa $180°$.

E

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Punkt B dzieli odcinek AC na dwa odcinki. Odcinek AB ma długość $14\sqrt{3}$ cm, a odcinek AC jest równy $30\sqrt{3}$ cm. Oblicz, ile jest równy stosunek długości $|AB| : |BC|$.

E **2.** Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

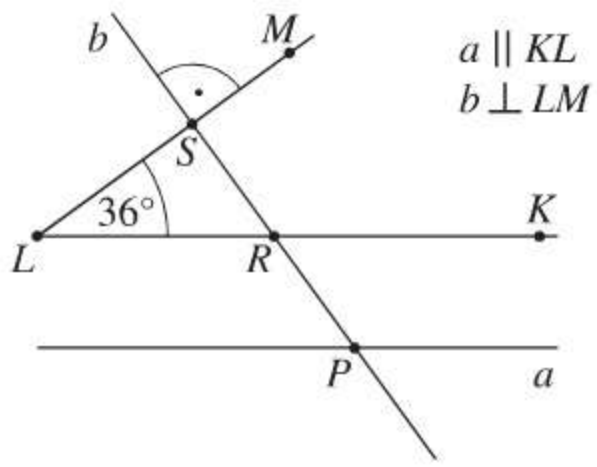
Miara kąta prostego stanowi | **A** | **B** | miary kąta pełnego.

A. 25 % **B.** 50 %

Minutowa wskazówka zegara w ciągu | **C** | **D** | godziny zakreśla kąt o mierze $288°$.

C. 80 % **D.** 86,(6) %

3. Oblicz miarę kąta rozwartego, pod jakim przecinają się proste a i b.



4. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę o $78°$ mniejszą niż suma miar dwóch pozostałych kątów w tym trójkącie. Zapisz miary wszystkich kątów wewnętrznych tego trójkąta.

5. Dany jest trójkąt równoramienny, którego kąt przy podstawie ma miarę α, a kąt między ramionami – miarę β. Wyznacz miarę kąta:

a) α w zależności od miary kąta β,

b) β w zależności od miary kąta α.

6. Miary kątów wewnętrznych trójkąta są w stosunku $7 : 9 : 20$. Oblicz miary tych kątów.

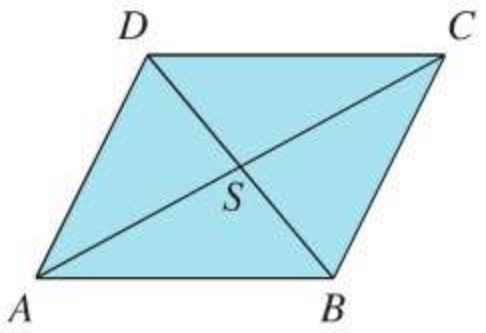
E **7.** Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 30. Długości boków tego trójkąta są liczbami naturalnymi.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

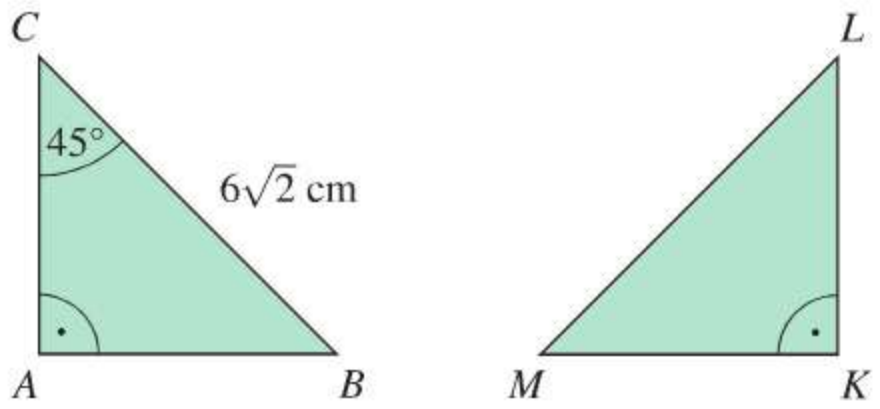
Długości boków tego trójkąta mogą być równe $16, 7$ i 7.	**P**	**F**
Taki trójkąt jest zawsze rozwartokątny.	**P**	**F**

8. Dane są dwa trójkąty prostokątne: ABC i DEF. Przyprostokątne AB i DE mają taką samą długość. Miara jednego z kątów ostrych w każdym trójkącie jest równa $58°$. Czy trójkąty ABC i DEF są przystające? Uzasadnij swoją odpowiedź.

9. Na rysunku przedstawiono równoległobok $ABCD$ niebędący rombem. Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie S. Wskaż trójkąty przystające.

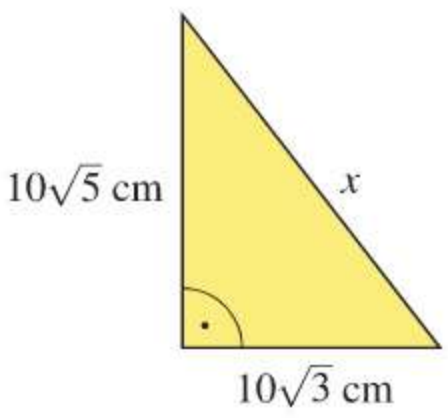


10. Trójkąty przedstawione na rysunkach są przystające. Podaj nieznane długości boków tych trójkątów.

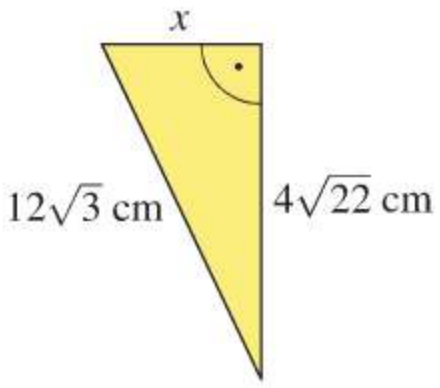


11. Oblicz x.

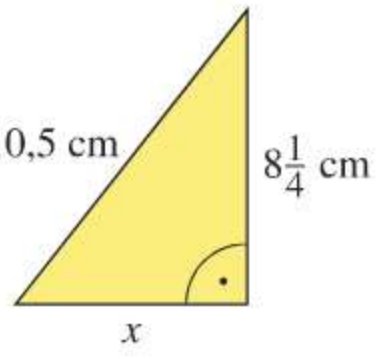
a)



b)



c)



12. Na działce w kształcie prostokąta o szerokości $15\ \text{m}$ i przekątnej równej $39\ \text{m}$ pani Joanna postanowiła posiać trawę. Oblicz, ile opakowań trawy musi kupić, jeśli jedno opakowanie wystarcza na obsianie $7\ \text{m}^2$ powierzchni.

13. Dany jest trójkąt równoboczny o polu równym $9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Obwód tego trójkąta jest równy | **A** | **B** |.

Wysokość tego trójkąta wynosi | **C** | **D** |.

A. $18\ \text{cm}$ **B.** $18\sqrt{3}\ \text{cm}$

C. $3\sqrt{3}\ \text{cm}$ **D.** $6\sqrt{3}\ \text{cm}$

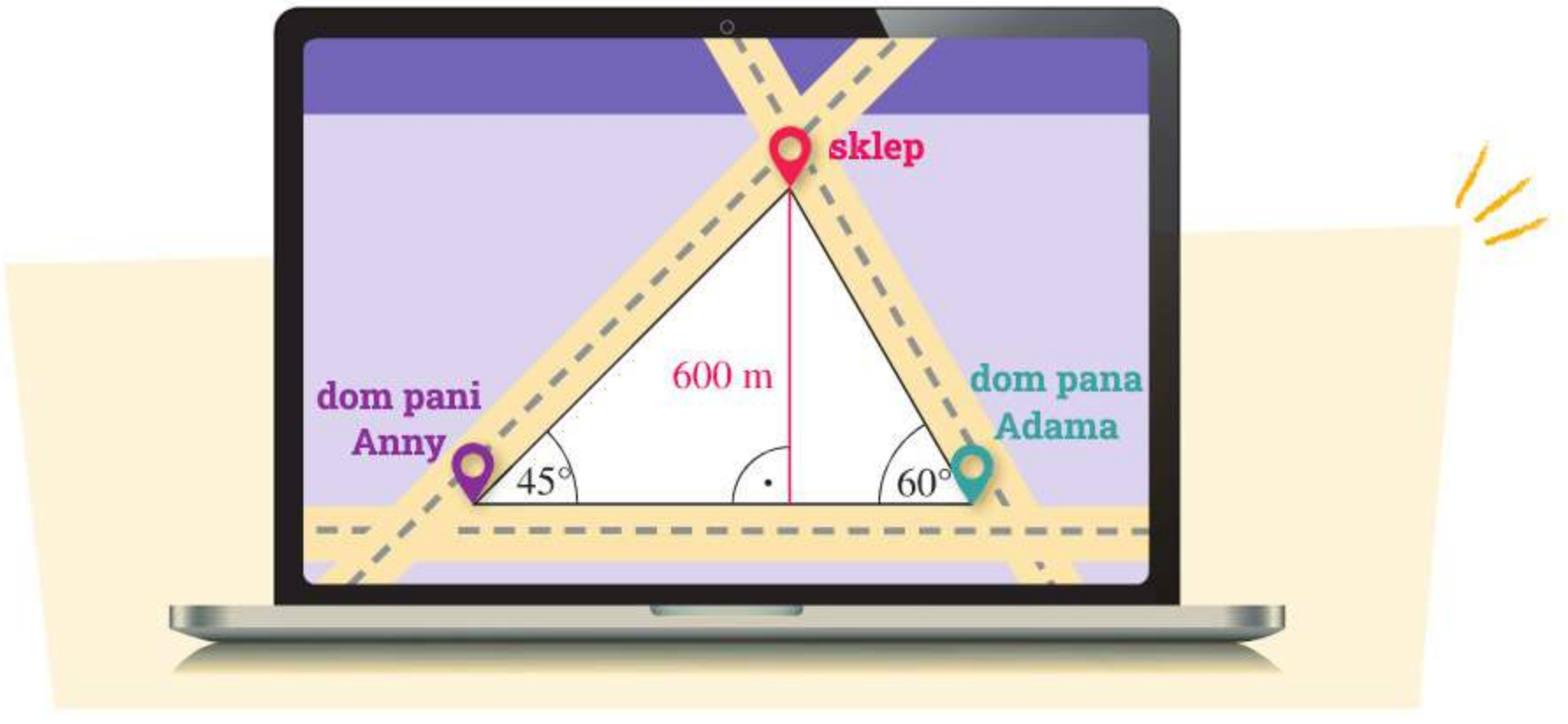
14. Kwadrat K_1 ma pole równe 144. Długość boku kwadratu K_2 jest równa długości przekątnej kwadratu K_1, a długość boku kwadratu K_3 jest równa długości przekątnej kwadratu K_2. Uzasadnij, że obwód kwadratu K_3 jest dwa razy większy od obwodu kwadratu K_1.

E

15. W prostokątnym trójkącie równoramiennym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa $9\ \text{cm}$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

16. Wejście do tipi ma kształt trójkąta równoramiennego o wymiarach $2{,}6\ \text{m} \times 2{,}6\ \text{m} \times 2\ \text{m}$. Oblicz, jaką długość ma suwak, który umieszczono pionowo u wejścia do tipi.

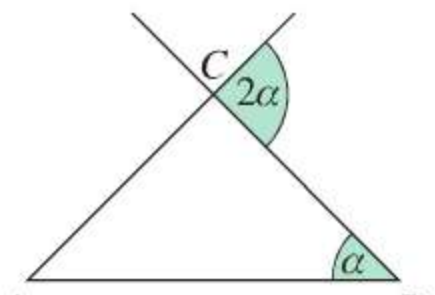
17. Na rysunku przedstawiono szkic planu miejscowości, w której mieszkają pani Anna i pan Adam.



Która z osób ma dalej do sklepu i o ile metrów? Przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ i $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

18. Państwo Majewscy chcą wyłożyć kostką brukową prostokątny teren przed garażem. Przekątna tego terenu ma długość $8\ \text{m}$ i z krótszym bokiem tworzy kąt o mierze $60°$. Oblicz, ile metrów kwadratowych kostki powinni kupić państwo Majewscy, aby wyłożyć kostką brukową teren przed garażem. Uwzględnij fakt, że powinni mieć o $11\ \%$ więcej kostki niż wynosi powierzchnia terenu. Przyjmij, że $\sqrt{3} \approx 1{,}73$. Wynik podaj w zaokrągleniu do $0{,}01\ \text{m}^2$.

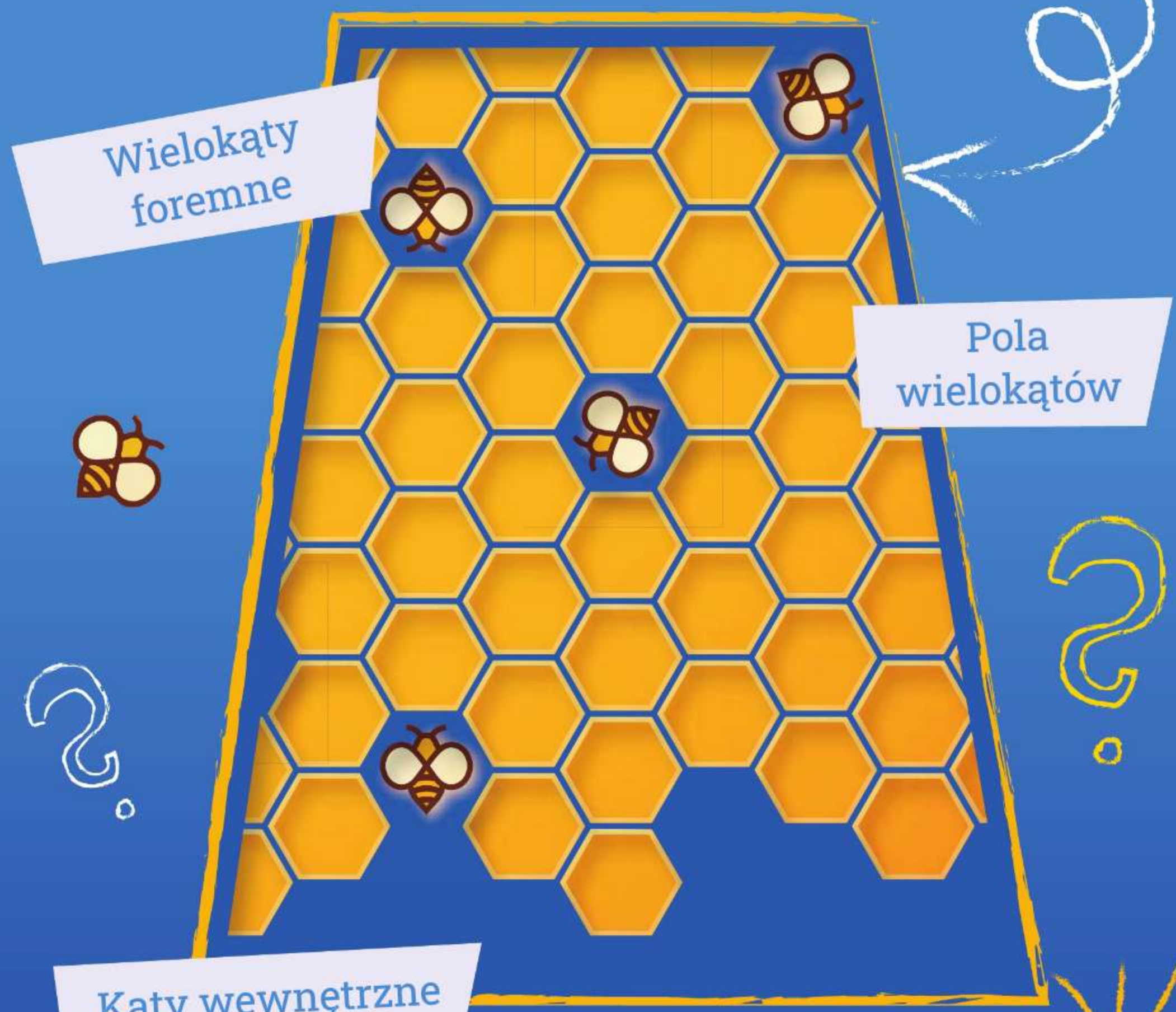
19. Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.



20. Kąt zewnętrzny trójkąta to każdy kąt, który jest przyległy do kąta wewnętrznego tego trójkąta. Udowodnij, że suma miar wszystkich kątów zewnętrznych każdego trójkąta jest równa $720°$.

DZIAŁ VIII

WIELOKĄTY



To ci się przyda!

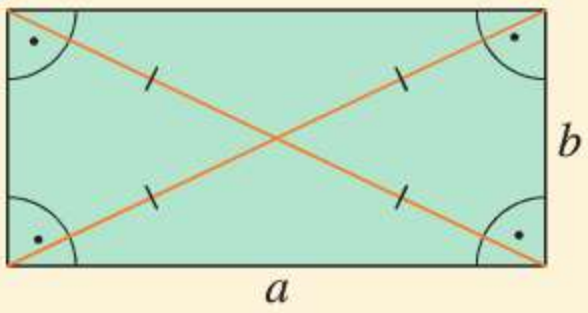
1. Prostokąt i kwadrat, jednostki pola

- Własności prostokąta i kwadratu
- Zamiana jednostek pola
- Obliczanie pola kwadratu i pola prostokąta

Umiejętność obliczania pola kwadratu i pola prostokąta jest bardzo często wykorzystywana w życiu codziennym, np. do obliczenia powierzchni ścian, gdy chcemy pomalować mieszkanie, lub do ustalenia powierzchni działki, gdy chcemy obliczyć, ile kilogramów nasion potrzebujemy do jej obsiania.

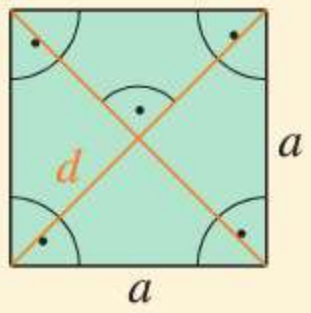
Własności prostokąta i kwadratu

Prostokąt



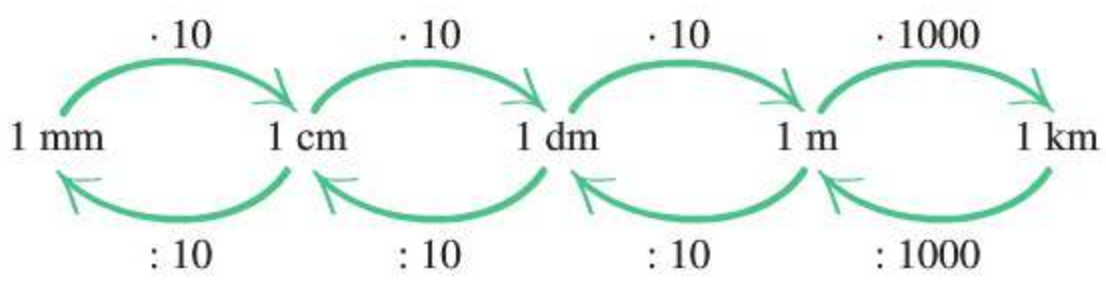
- Przeciwległe boki są równoległe i równej długości.
- Wszystkie kąty wewnętrzne są kątami prostymi.
- Przekątne są równej długości i dzielą się na połowy.
- $Obw. = 2a + 2b$
- $P = a \cdot b$

Kwadrat



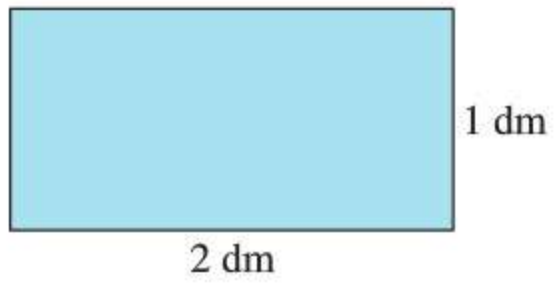
- Kwadrat jest to prostokąt, którego boki są równej długości.
- Przekątne przecinają się pod kątem prostym, czyli są prostopadłe.
- Przekątne dzielą kąty wewnętrzne kwadratu na połowy.
- $d = a\sqrt{2}$
- $Obw. = 4a$
- $P = a \cdot a = a^2$ lub $P = \frac{1}{2}d^2$

Aby sprawnie zamieniać jednostki pola, przypomnimy sobie zależności między jednostkami długości.



Przykład 1.

Na rysunku przedstawiono prostokąt. Zapisz jego pole w podanej jednostce.



a) mm^2 **b)** m^2

a) Zapiszemy pole prostokąta w milimetrach kwadratowych.

Skorzystamy z zależności:
$1\ dm = 10\ cm = 100\ mm$ oraz
$2\ dm = 20\ cm = 200\ mm$
i obliczymy pole prostokąta.

$$P = 1\ dm \cdot 2\ dm = 100\ mm \cdot 200\ mm = 20\,000\ mm^2$$

Odp. Pole prostokąta jest równe $20\,000\ mm^2$.

b) Zapiszemy pole prostokąta w metrach kwadratowych.

Skorzystamy z zależności:
$1\ dm = 0{,}1\ m$ oraz $2\ dm = 0{,}2\ m$
i obliczymy pole prostokąta.

$$P = 1\ dm \cdot 2\ dm = 0{,}1\ m \cdot 0{,}2\ m = 0{,}02\ m^2$$

Odp. Pole prostokąta jest równe $0{,}02\ m^2$.

Ćwiczenie 1.

Dany jest prostokąt o bokach długości $30\ cm$ i $40\ cm$. Zapisz jego pole w podanej jednostce.

a) mm^2 **b)** dm^2 **c)** m^2 **d)** km^2

Przykład 2.

Działka ma powierzchnię $21\,000\ m^2$. Zapisz pole tej działki w podanej jednostce.

a) a **b)** ha

a) Zapiszemy pole działki w arach.

Wiemy, że $1\ a = 100\ m^2$.

Zamienimy metry kwadratowe na ary.

$$1\ m^2 = 0{,}01\ a$$
$$21\,000\ m^2 = 21\,000 \cdot 1\ m^2 = 21\,000 \cdot 0{,}01\ a = 210\ a$$

Odp. Działka ma powierzchnię $210\ a$.

b) Zapiszemy pole działki w hektarach.

Wiemy, że $1\ ha = 10\,000\ m^2$.

Zamienimy metry kwadratowe na hektary.

$$1\ m^2 = 0{,}0001\ ha$$
$$21\,000\ m^2 = 21\,000 \cdot 1\ m^2 = 21\,000 \cdot 0{,}0001\ ha = 2{,}1\ ha$$

Odp. Działka ma powierzchnię $2{,}1\ ha$.

1 ar (1 a) to pole kwadratu o boku długości $10\ m$.

$$1\ a = 100\ m^2$$

1 hektar (1 ha) to pole kwadratu o boku długości $100\ m$.

$$1\ ha = 100\ a = 10\,000\ m^2$$

Ćwiczenie 2.

Działka ma powierzchnię $3500\ a$. Zapisz pole tej działki w hektarach i kilometrach kwadratowych.

Rozwiąż zadania

1. Oblicz obwód i pole kwadratu o boku długości:

a) $20\ \text{mm}$, **b)** $3\frac{1}{2}\ \text{cm}$, **c)** $0{,}6\ \text{dm}$, **d)** $2\sqrt{3}\ \text{m}$.

2. Oblicz obwód i pole kwadratu o przekątnej długości:

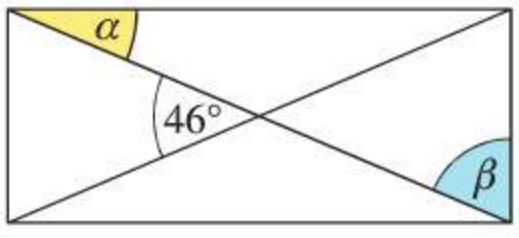
a) $\sqrt{2}\ \text{dm}$, **b)** $3\sqrt{6}\ \text{cm}$, **c)** $12\ \text{mm}$, **d)** $\frac{1}{2}\ \text{km}$.

3. Oblicz obwód i pole prostokąta, jeżeli jeden z jego boków ma długość $5\ \text{cm}$, a drugi jest:

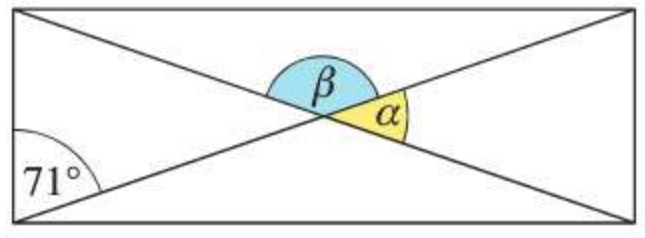
a) trzy razy dłuższy, **b)** o $3{,}5\ \text{cm}$ dłuższy, **c)** dwa razy krótszy, **d)** o $1\frac{1}{5}\ \text{cm}$ krótszy.

4. Oblicz miary kątów α oraz β w prostokącie.

a)



b)



5. Prostokątna działka ma wymiary $40\ \text{m} \times 120\ \text{m}$. Oblicz powierzchnię tej działki. Wynik podaj w metrach kwadratowych, arach oraz hektarach.

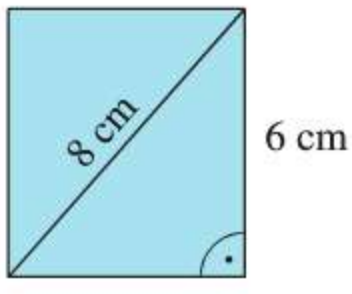
6. Obwód prostokąta jest równy $120\ \text{cm}$. Jeden z boków tego prostokąta jest o $75\ \%$ krótszy od drugiego. Oblicz obwód kwadratu, którego pole jest równe polu danego prostokąta.

7. Na planie w skali $1 : 1000$ pole uprawne jest prostokątem o wymiarach $40\ \text{cm} \times 15\ \text{cm}$. Jaka jest rzeczywista powierzchnia tego pola? Wynik podaj w arach i hektarach.

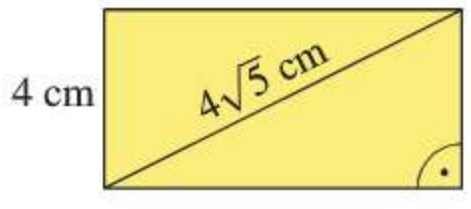
8. Ela ma do dyspozycji kawałek materiału w kształcie kwadratu o obwodzie równym $4\ \text{m}$. Czy z tego materiału można wyciąć prostokątną serwetkę o powierzchni $0{,}8\ \text{m}^2$? Uzasadnij swoją odpowiedź.

9. Oblicz pole prostokąta.

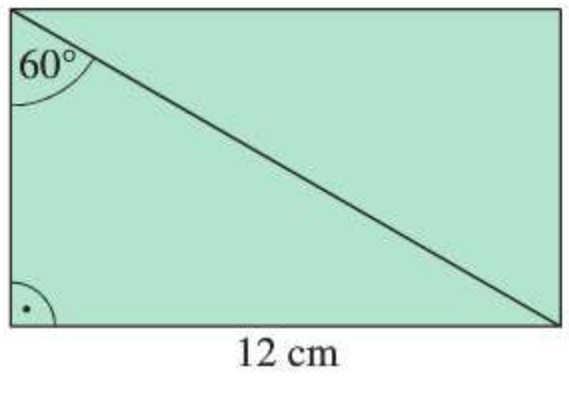
a)



b)



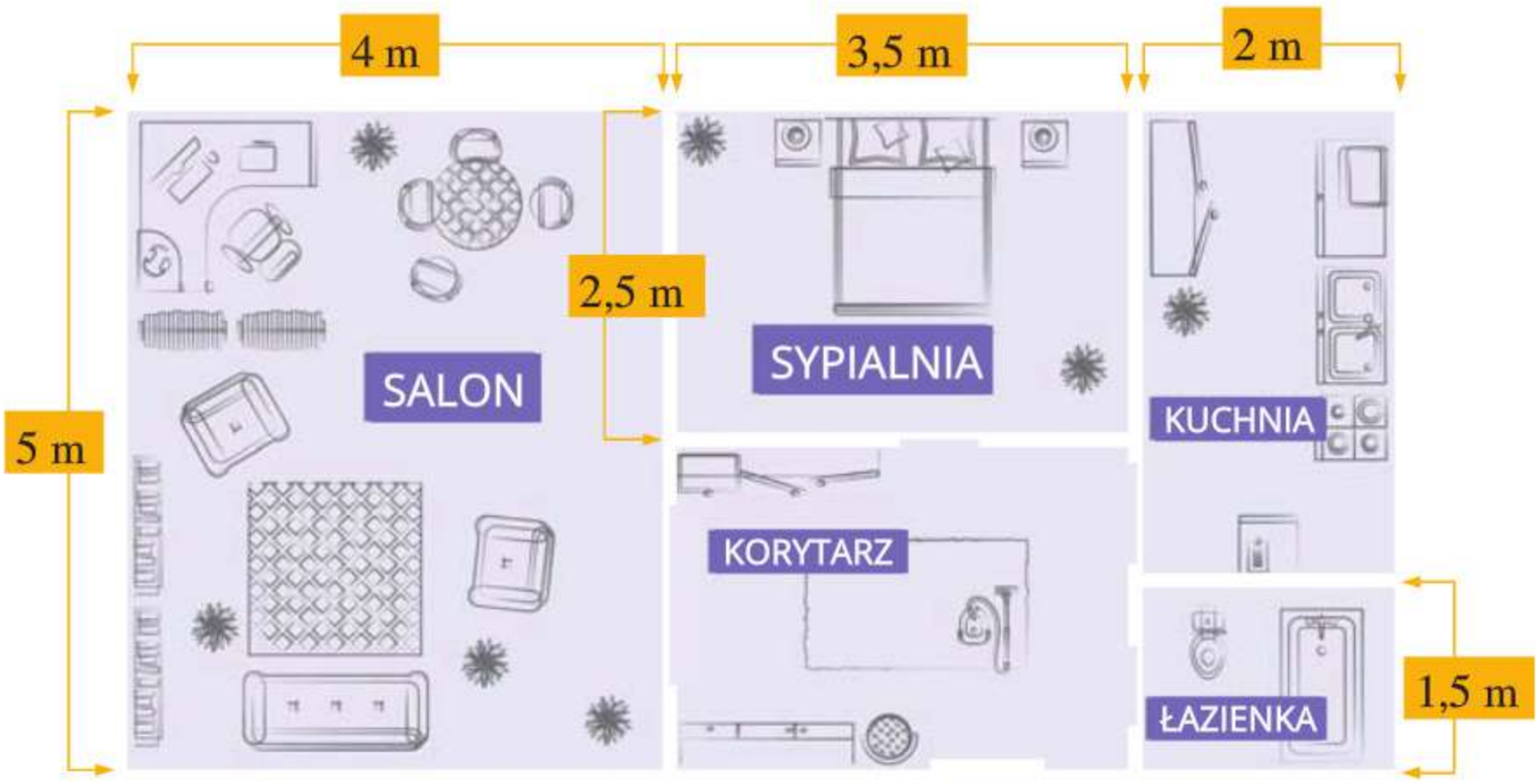
c)



E

Informacje do zadań 10. i 11.

Pani Anna kupiła nowe mieszkanie, którego plan został przedstawiony na rysunku. Pani Anna chciałaby położyć deski podłogowe w salonie, sypialni i korytarzu. Deski podłogowe sprzedawane są w paczkach po $3{,}2\ \text{m}^2$ w cenie 104 zł za $1\ \text{m}^2$.



10. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Pani Anna powinna kupić | **A** | **B** | paczek z deskami podłogowymi.

A. 11 **B.** 12

Koszt zakupu desek podłogowych do mieszkania pani Anny jest równy | **C** | **D** |.

C. 1248 zł **D.** 3993,60 zł

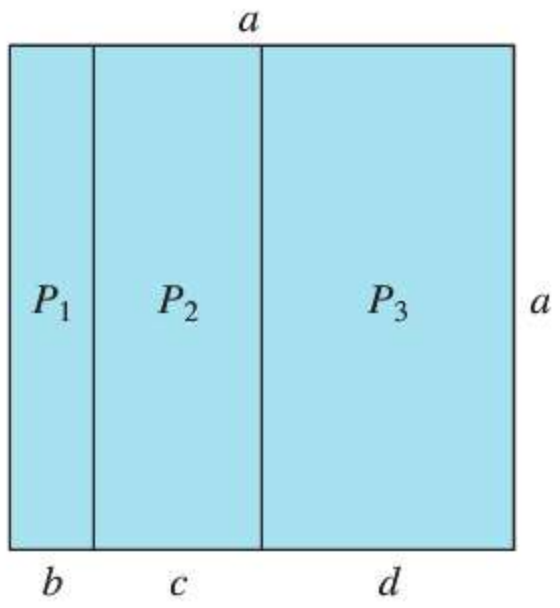
11. Pani Anna zdecydowała, że chce położyć deski podłogowe również w kuchni.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Koszt zakupu desek podłogowych wzrośnie

A. o 14,3 %. **B.** o 15,4 %. **C.** o 16,(6) %. **D.** o 18,(6) %.

12. Kwadrat o boku długości a podzielono na trzy prostokąty tak jak na rysunku poniżej. Długości odcinków b, c, d są w stosunku $1 : 2 : 3$. Pole prostokąta P_2 jest równe 27.



a) Oblicz pola prostokątów P_1 oraz P_3.

b) Oblicz długość przekątnej kwadratu przedstawionego na rysunku.

Sprawdź, co umiesz!

1. Zapisz pole prostokąta o wymiarach $2\ \text{cm} \times 0{,}3\ \text{dm}$ w podanej jednostce.

a) cm^2 **b)** dm^2 **c)** mm^2 **d)** m^2

2. Kwadratowa kartka papieru ma pole $484\ \text{cm}^2$. Czy z tej kartki można wyciąć prostokąt o wymiarach $21\ \text{cm} \times 23\ \text{cm}$? Uzasadnij swoją odpowiedź.

3. Z działki o powierzchni $20\ \text{a}$ babcia Poli wydzieliła grządkę warzywną o powierzchni $300\ \text{m}^2$ oraz dwie prostokątne rabatki o wymiarach $2\ \text{m} \times 10\ \text{m}$ każda. Oblicz, ile arów działki pozostało babci Poli do zagospodarowania.



E **4.** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole kwadratu o przekątnej długości $3\ \text{cm}$ jest równe

A. $9\ \text{cm}^2$ **B.** $12\ \text{cm}^2$ **C.** $4{,}5\ \text{cm}^2$ **D.** $18\ \text{cm}^2$

E **5.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Długość przekątnej kwadratu o polu $81\ \text{cm}^2$ jest równa $9\ \text{cm}$.	**P**	**F**
Obwód kwadratu o polu $36\ \text{cm}^2$ jest równy $12\ \text{cm}$.	**P**	**F**

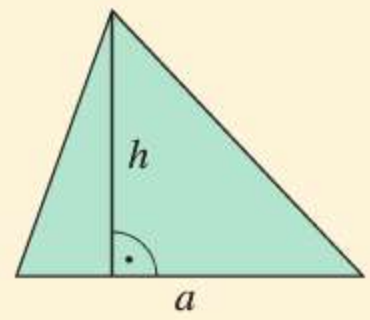
2. Pole trójkąta

- Obliczanie pola trójkąta
- Pole trójkąta równobocznego

Kształt trójkąta coraz częściej inspiruje projektantów przedmiotów codziennego użytku. Możemy spotkać trójkątne talerze, płytki ceramiczne czy panele ścienne.

Pole trójkąta o podstawie długości a i wysokości h poprowadzonej do tego boku wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a \cdot h}{2}.$$



Przykład 1.

Zapisz w podanej jednostce pole trójkąta, którego podstawa ma długość $1\ \text{km}$, a wysokość poprowadzona do tej podstawy jest równa $1\ \text{mm}$.

a) m^2 **b)** cm^2

Przyjmiemy następujące oznaczenia:
a – długość podstawy trójkąta
h – wysokość trójkąta poprowadzona do podstawy a

a) Skorzystamy z zależności:
$a = 1\ \text{km} = 1000\ \text{m}$ oraz $h = 1\ \text{mm} = 0{,}001\ \text{m}$
i obliczymy pole trójkąta.

$$P = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{1\ \text{km} \cdot 1\ \text{mm}}{2} = \frac{1000\ \text{m} \cdot 0{,}001\ \text{m}}{2} = \frac{1}{2}\ \text{m}^2$$

Odp. Pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{2}\ \text{m}^2$.

b) Skorzystamy z zależności:
$a = 1\ \text{km} = 100\,000\ \text{cm}$ oraz $h = 1\ \text{mm} = 0{,}1\ \text{cm}$
i obliczymy pole trójkąta.

$$P = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{1\ \text{km} \cdot 1\ \text{mm}}{2} = \frac{100\,000\ \text{cm} \cdot 0{,}1\ \text{cm}}{2} = \frac{10\,000\ \text{cm}^2}{2} = 5000\ \text{cm}^2$$

Odp. Pole tego trójkąta jest równe $5000\ \text{cm}^2$.

Ćwiczenie 1.

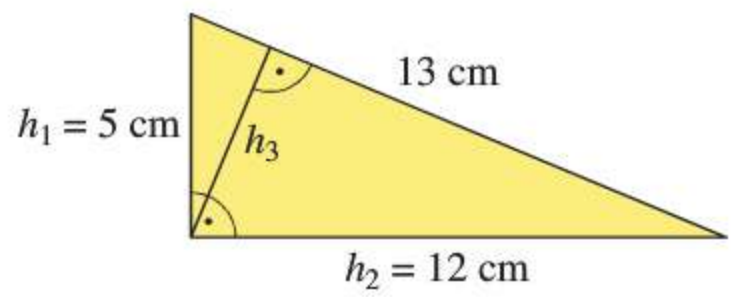
Zapisz w podanej jednostce pole trójkąta, którego podstawa ma długość $2\ \text{km}$, a wysokość poprowadzona do tej podstawy jest równa $2\ \text{mm}$.

a) m^2 **b)** cm^2 **c)** dm^2

Przykład 2.

Oblicz najkrótszą wysokość trójkąta prostokątnego o bokach długości: $5\ \text{cm}$, $12\ \text{cm}$ i $13\ \text{cm}$.

Wykonamy szkic trójkąta prostokątnego o podanych długościach boków i zaznaczymy jego wysokości: h_1, h_2, h_3.



Mamy zatem: $h_1 = 5\ \text{cm}$, $h_2 = 12\ \text{cm}$.

Będziemy mogli obliczyć wysokość h_3, jeśli wyznaczymy pole trójkąta, ponieważ $P = \frac{13 \cdot h_3}{2}$.

Obliczymy pole trójkąta, przyjmując za podstawę bok długości $12\ \text{cm}$, a za wysokość poprowadzoną do tego boku wysokość $h_1 = 5\ \text{cm}$.

$$P = \frac{12 \cdot 5}{2}$$

$$P = 30\ [\text{cm}^2]$$

Ułożymy równanie i obliczymy h_3.

$$P = \frac{13 \cdot h_3}{2}$$

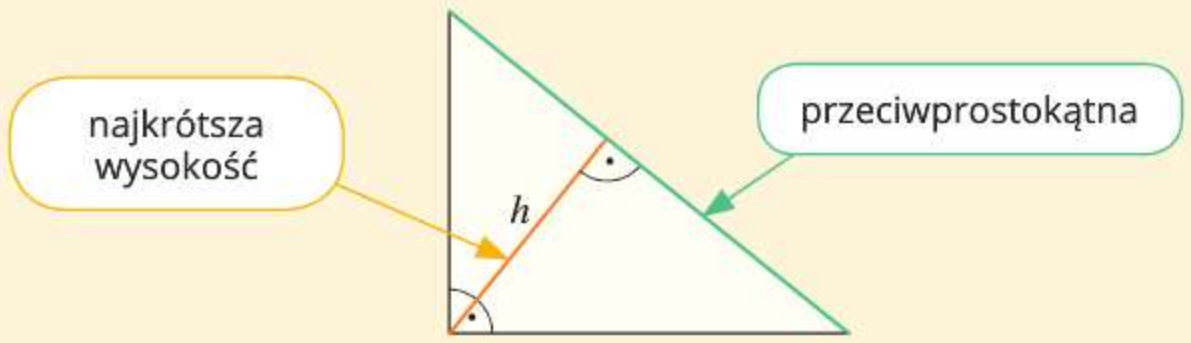
$$30 = \frac{13 \cdot h_3}{2} \quad | \cdot 2$$

$$60 = 13 \cdot h_3 \quad | : 13$$

$$h_3 = \frac{60}{13} = 4\frac{8}{13}\ [\text{cm}]$$

Odp. Najkrótsza wysokość tego trójkąta jest równa $4\frac{8}{13}\ \text{cm}$.

Najkrótsza wysokość w trójkącie prostokątnym jest poprowadzona do najdłuższego boku, czyli do przeciwprostokątnej.



Ćwiczenie 2.

W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość $7\ \text{cm}$, a długość przeciwprostokątnej jest równa $25\ \text{cm}$. Oblicz najkrótszą wysokość tego trójkąta.

Przykład 3.

Wyznacz wzór na pole trójkąta równobocznego.

Skorzystamy ze wzoru na pole trójkąta: $P = \frac{a \cdot h}{2}$, gdzie a to długość podstawy trójkąta, a h – wysokość poprowadzona do tej podstawy.

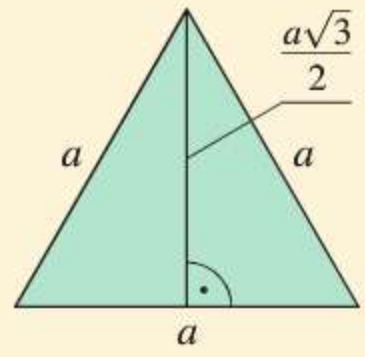
Wysokość h w trójkącie równobocznym o boku długości a jest wyrażona wzorem: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do wzoru na pole trójkąta w miejsce h podstawiamy $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$P = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}{2} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} : 2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Wzór na pole trójkąta równobocznego o boku długości a ma postać:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



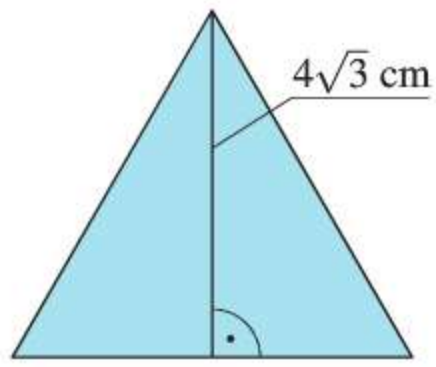
Ćwiczenie 3.

Oblicz pole trójkąta równobocznego o boku długości:

a) 6 cm, **b)** 12 mm, **c)** $8\sqrt{3}$ dm.

Przykład 4.

Oblicz pole trójkąta równobocznego przedstawionego na rysunku.



Oznaczymy długość boku tego trójkąta literą a, a jego wysokość literą h.

Obliczymy a, korzystając ze wzoru na wysokość w trójkącie równobocznym: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \quad | \cdot 2$$
$$a\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \quad | : \sqrt{3}$$
$$a = 8 \text{ [cm]}$$

Obliczymy pole trójkąta, korzystając ze wzoru na pole trójkąta równobocznego o boku długości a: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$P = \frac{8^2\sqrt{3}}{4}$$
$$P = \frac{64\sqrt{3}}{4}$$
$$P = 16\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Odp. Pole trójkąta równobocznego o wysokości $4\sqrt{3}$ cm jest równe $16\sqrt{3}$ cm^2.

Ćwiczenie 4.

Oblicz pole trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa $12\sqrt{3}$ cm.

Rozwiąż zadania

1. Oblicz pole trójkąta o podstawie a i wysokości h poprowadzonej do tej podstawy.

a) $a = 2$ km, $h = 400$ cm **b)** $a = 1{,}5$ m, $h = 80$ mm **c)** $a = 0{,}25$ km, $h = 60$ dm

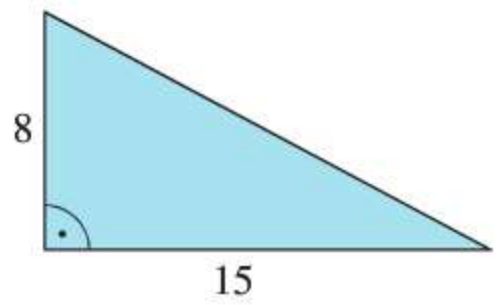
2. Oblicz pole trójkąta prostokątnego o podanych długościach boków.

a) 9 cm, 40 cm i 41 cm **b)** 2 m, 480 cm i 52 dm **c)** 0,84 m, 0,00085 km i 13 cm

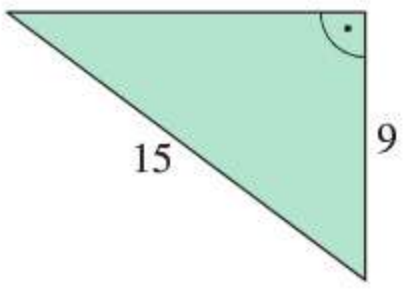
3. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym jedna z przyprostokątnych ma długość 10 cm, a przeciwprostokątna ma długość 26 cm.

4. Oblicz najkrótszą wysokość trójkąta przedstawionego na rysunku.

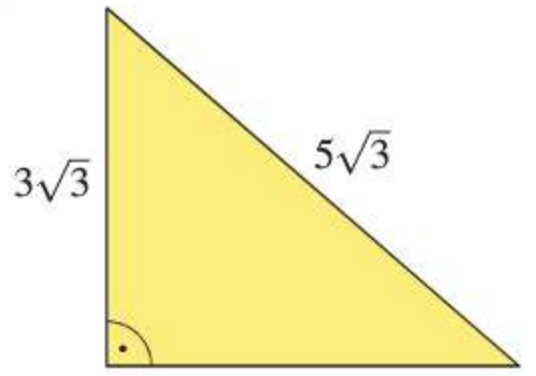
a)



b)

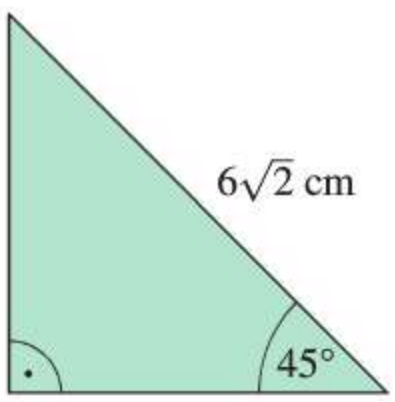


c)

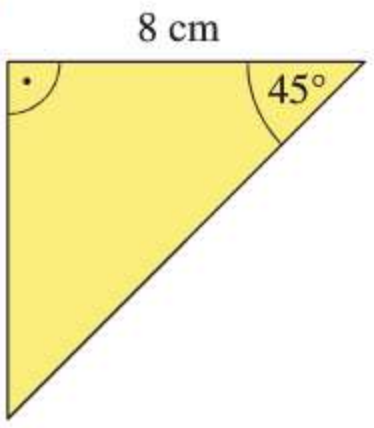


5. Oblicz pole trójkąta i jego wysokość poprowadzoną do przeciwprostokątnej.

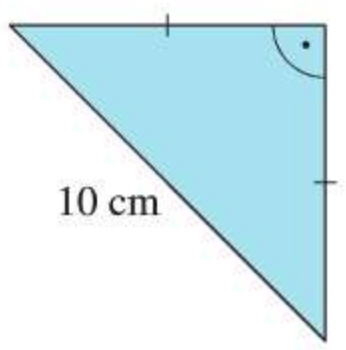
a)



b)



c)



6. Oblicz pole trójkąta równobocznego o boku długości:

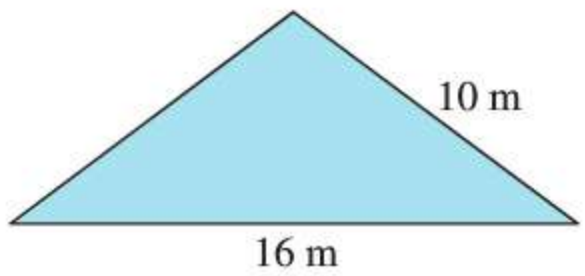
a) 4 cm, **b)** 10 cm, **c)** $14\sqrt{3}$ cm, **d)** $1\frac{2}{3}$ cm.

7. Oblicz pole trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa:

a) $18\sqrt{3}$ cm, **b)** 6 cm, **c)** 3 cm, **d)** $\frac{1}{4}$ cm.

8. Oblicz obwód oraz wysokość trójkąta równobocznego, którego pole jest równe $16\sqrt{3}$ cm^2.

9. Na rysunku przedstawiono trójkąt równoramienny.

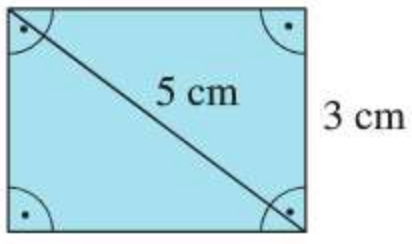


a) Oblicz pole tego trójkąta.

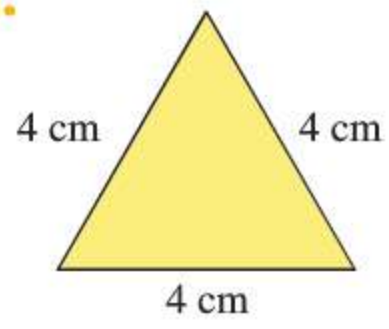
b) Oblicz wysokość poprowadzoną do przedłużenia ramienia tego trójkąta.

10. Wskaż figury, które mają równe pola.

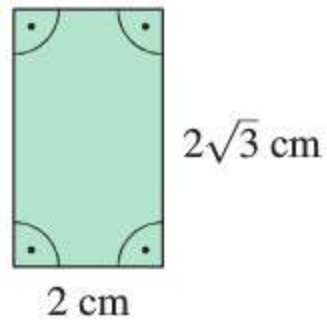
I.



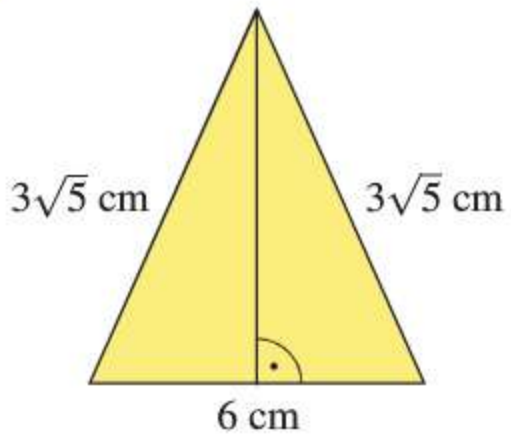
II.



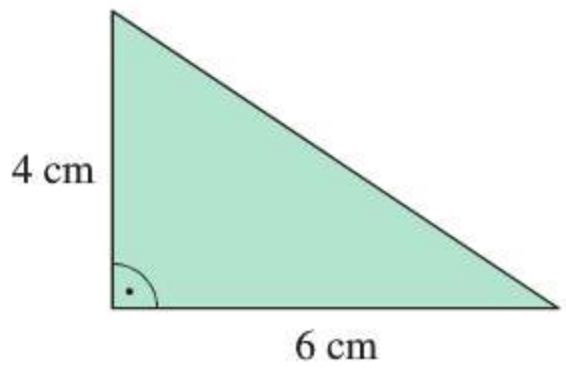
III.



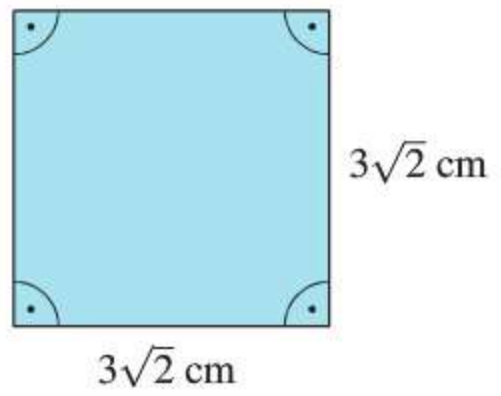
IV.



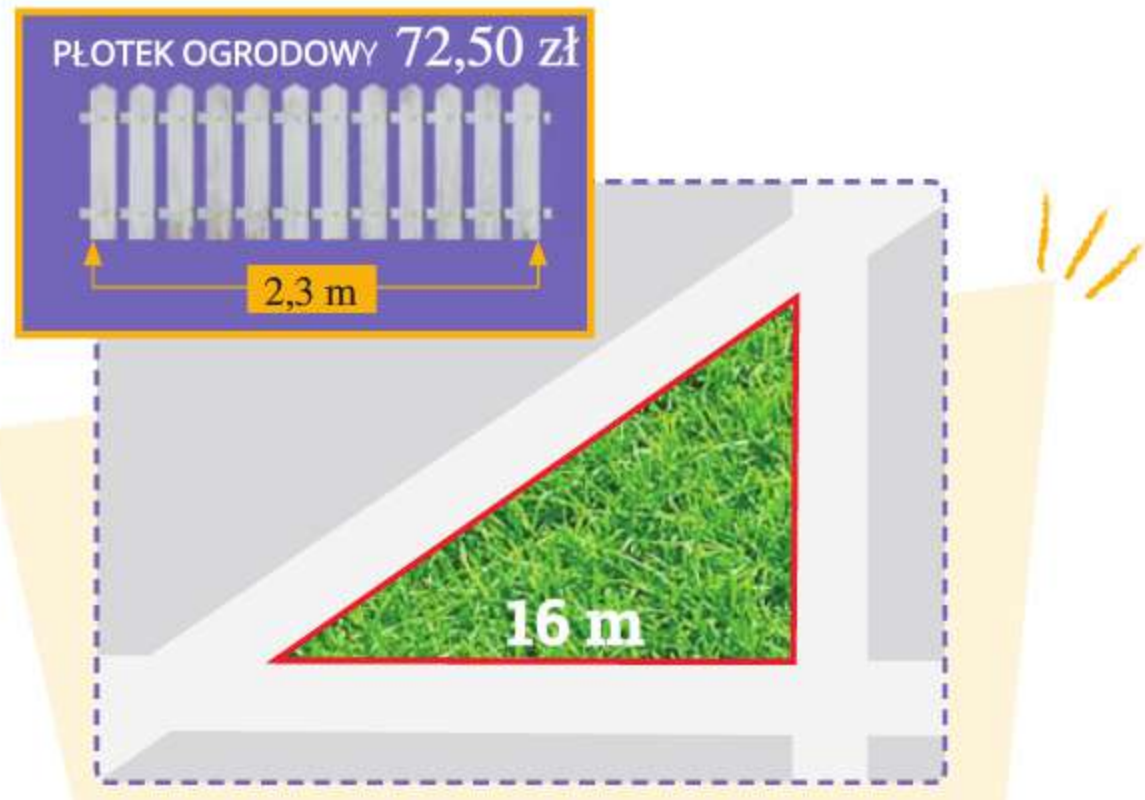
V.



VI.



11. Ilustracja przedstawia plan ogródka państwa Kowalskich, który ma kształt trójkąta prostokątnego. Powierzchnia ogródka wynosi $96\ \mathrm{m}^2$. Wzdłuż krótszych boków ma zostać posadzony wysoki żywopłot, aby ochronić rośliny od wiatru, natomiast wzdłuż najdłuższego boku zostanie zamontowany niski płotek ogrodowy.



a) Oblicz, ile metrów ma najdłuższy bok ogródka państwa Kowalskich.

b) Ustal, ile sztuk płotka ogrodowego o długości $2{,}3\ \mathrm{m}$ trzeba kupić i ile będzie to kosztować.

12. Z kwadratowej kartki papieru o boku długości $20\ \mathrm{cm}$ odcięto jeden róg w kształcie trójkąta równoramiennego o polu $8\ \mathrm{cm}^2$. Oblicz, jaką długość mają boki wielokąta, który powstał po odcięciu trójkąta.

13. Patchwork jest metodą szycia, w której zszywa się małe kawałki materiału w większą całość. Pola chce uszyć prostokątny koc składający się z kawałków materiału w kształcie trójkątów prostokątnych równoramiennych. Ma do wykorzystania 9 żółtych kawałków, 9 niebieskich kawałków oraz 6 zielonych kawałków. Krótszy bok każdego kawałka ma długość $48\ \mathrm{cm}$. Na rysunku przedstawiono projekt koca, który Pola chce uszyć.



a) Sprawdź, czy powierzchnia koca będzie miała mniej niż $2{,}9\ \mathrm{m}^2$.

b) Oblicz, jaki procent powierzchni koca będzie stanowiła łączna powierzchnia żółtych kawałków materiału.

c) Uzasadnij, że przekątna koca ma mniej niż $2{,}5\ \mathrm{m}$.

14. W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych są kolejnymi liczbami naturalnymi. Jakiej długości są boki tego trójkąta, jeśli jego pole jest równe 6? Uzasadnij swoją odpowiedź.

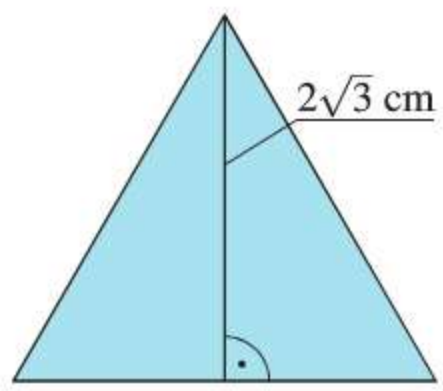
Wskazówka: rozwiązanie równania typu $n(n+1) = 12$ można znaleźć poprzez sprawdzenie, która z kolejnych liczba naturalnych pomnożona przez liczbę o jeden większą od siebie da w wyniku 12.

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz pole trójkąta o podstawie a i wysokości h poprowadzonej do tej podstawy.

a) $a = 2$ cm, $h = 4$ m **b)** $a = 0{,}8$ cm, $h = 200$ dm **c)** $a = 6$ mm, $h = 0{,}3$ km

2. Oblicz pole trójkąta równobocznego przedstawionego na rysunku.



3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Pole trójkąta o przyprostokątnej długości $6\sqrt{5}$ cm i przeciwprostokątnej długości $10\sqrt{5}$ cm jest równe 240 cm^2.	**P**	**F**
Wysokość trójkąta równobocznego o polu równym $64\sqrt{3}$ cm^2 ma długość $4\sqrt{3}$ cm.	**P**	**F**

4. Pole trójkąta prostokątnego równoramiennego jest równe 4 cm^2.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość

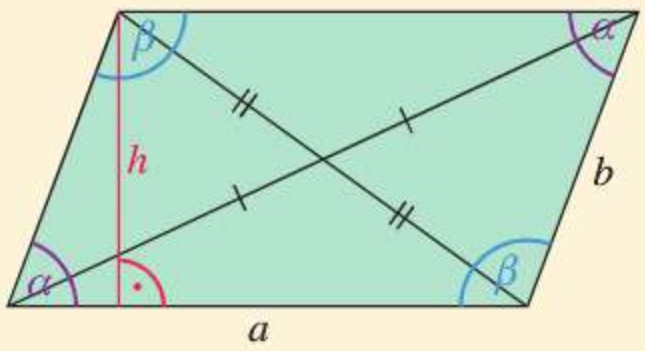
A. $2\sqrt{2}$ cm **B.** $2\sqrt{3}$ cm **C.** $4\sqrt{2}$ cm **D.** 4 cm

3. Równoległobok i romb

- Własności równoległoboku i rombu
- Obliczanie pola równoległoboku i pola rombu

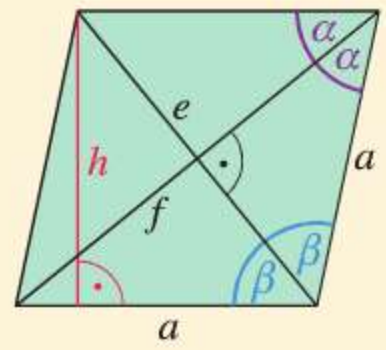
Własności równoległoboku i rombu

Równoległobok



- Przeciwległe boki są równoległe i równej długości.
- Przeciwległe kąty mają równe miary.
- Suma miar dwóch kolejnych kątów jest równa $180°$, zatem $\alpha + \beta = 180°$.
- Przekątne dzielą się na połowy.
- $Obw. = 2a + 2b$
- $P = a \cdot h$

Romb

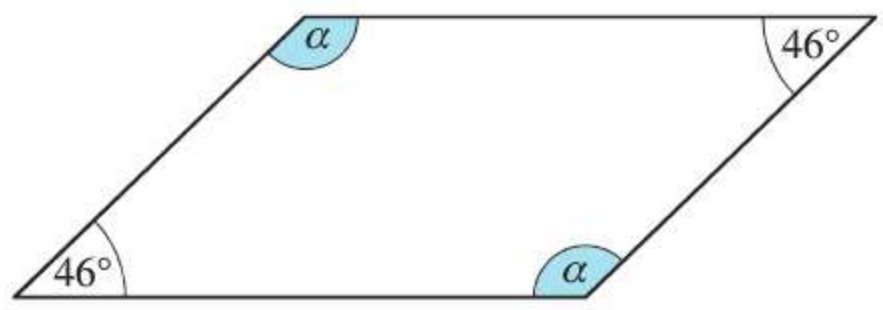


- Romb to równoległobok, którego boki mają równą długość.
- Przekątne przecinają się pod kątem prostym, czyli są prostopadłe.
- Przekątne dzielą kąty wewnętrzne na połowy.
- $Obw. = 4a$
- $P = a \cdot h$ lub $P = \frac{e \cdot f}{2}$

Przykład 1.

Kąt ostry równoległoboku ma miarę $46°$. Oblicz miarę kąta rozwartego tego równoległoboku.

Wykonamy rysunek pomocniczy.
Kąt rozwarty równoległoboku oznaczymy jako α.



Z własności równoległoboku wiemy, że suma miar dwóch kolejnych kątów jest równa $180°$.

Obliczymy miarę kąta α.

$$46° + \alpha = 180°$$
$$\alpha = 180° - 46° = 134°$$

Odp. Kąt rozwarty równoległoboku ma miarę $134°$.

Ćwiczenie 1.

Jeden z kątów równoległoboku ma miarę $127°$. Oblicz miarę kąta ostrego tego równoległoboku.

Przykład 2.

Boki równoległoboku mają długości $6\ \text{cm}$ i $12\ \text{cm}$. Wysokość poprowadzona do krótszego boku jest równa $8\ \text{cm}$. Oblicz wysokość poprowadzoną do dłuższego boku.

Obliczymy pole równoległoboku. ⇒ $P = 6 \cdot 8 = 48\ [\text{cm}^2]$

Wzór na pole równoległoboku, gdy jego podstawa ma długość $12\ \text{cm}$, a wysokość jest równa h, ma postać $P = 12 \cdot h$.

Obliczymy wysokość poprowadzoną do dłuższego boku. ⇒

$$P = 12 \cdot h$$
$$48 = 12 \cdot h \quad | : 12$$
$$h = 4\ [\text{cm}]$$

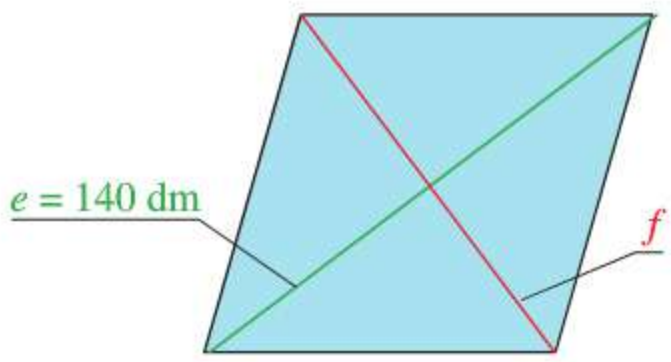
Odp. Wysokość poprowadzona do dłuższego boku jest równa $4\ \text{cm}$.

Ćwiczenie 2.

Boki równoległoboku mają długości $5\ \text{cm}$ i $14\ \text{cm}$. Wysokość poprowadzona do dłuższego boku jest równa $3\ \text{cm}$. Oblicz wysokość poprowadzoną do krótszego boku.

Przykład 3.

Pole rombu przedstawionego na rysunku jest równe $74\ \text{m}^2$. Oblicz długość krótszej przekątnej tego rombu.



Wyrazimy długość dłuższej przekątnej rombu w metrach. ⇒ $e = 140\ \text{dm} = 14\ \text{m}$

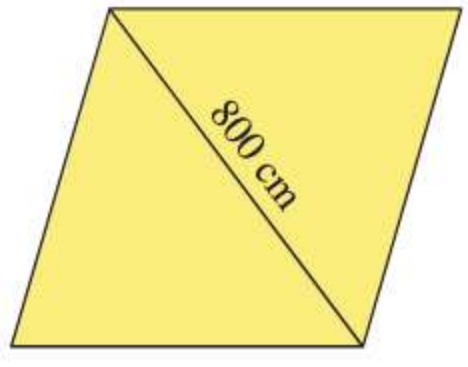
Skorzystamy ze wzoru na pole rombu, aby obliczyć długość krótszej przekątnej. ⇒

$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$
$$74 = \frac{14 \cdot f}{2}$$
$$74 = 7f \quad | : 7$$
$$f = \frac{74}{7} = 10\frac{4}{7}\ [\text{m}]$$

Odp. Krótsza przekątna rombu ma długość $10\frac{4}{7}\ \text{m}$.

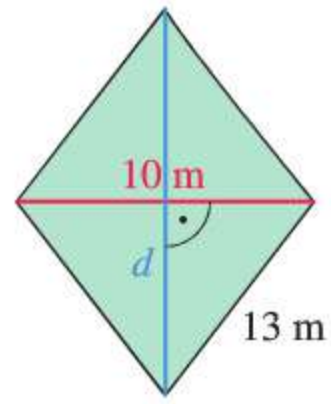
Ćwiczenie 3.

Pole rombu przedstawionego na rysunku jest równe $44\ \text{m}^2$. Oblicz długość dłuższej przekątnej tego rombu.



Przykład 4.

Na klombie w kształcie rombu przedstawionego na rysunku ogrodnik postanowił zasadzić róże. Aby rośliny mogły prawidłowo się rozwijać, liczba róż posadzonych na $1\ \text{m}^2$ powinna wynosić maksymalnie 5 sztuk. Ile róż ogrodnik powinien maksymalnie posadzić na tym klombie, aby rośliny mogły prawidłowo się rozwijać?



Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa, aby obliczyć połowę długości drugiej przekątnej.

Jedna z przekątnych ma długość $10\ \text{m}$, więc jej połowa jest równa $5\ \text{m}$.

$$5^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = 13^2$$

$$25 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = 169$$

$$\left(\frac{1}{2}d\right)^2 = 169 - 25$$

Obliczymy połowę długości drugiej przekątnej.

$$\left(\frac{1}{2}d\right)^2 = 144$$

$$\frac{1}{2}d = 12\ [\text{m}]$$

Skoro połowa długości drugiej przekątnej jest równa $12\ \text{m}$, to $d = 2 \cdot 12\ \text{m} = 24\ \text{m}$. Obliczymy powierzchnię klombu.

$$P = \frac{24 \cdot 10}{2}$$

$$P = 12 \cdot 10$$

$$P = 120\ [\text{m}^2]$$

Obliczymy, ile róż ogrodnik powinien posadzić maksymalnie na tym klombie.

$$120 \cdot 5 = 600$$

Odp. Aby rośliny prawidłowo się rozwijały, ogrodnik powinien posadzić na klombie maksymalnie 600 róż.

Ćwiczenie 4.

Pan Jacek chce skosić trawę na łące w kształcie rombu o boku długości $500\ \text{m}$ i dłuższej przekątnej o długości $800\ \text{m}$. Postanowił wykupić usługę skoszenia trawy. Koszt skoszenia $1\ \text{ha}$ wynosi 210 zł. Ile pan Jacek zapłaci za tę usługę?

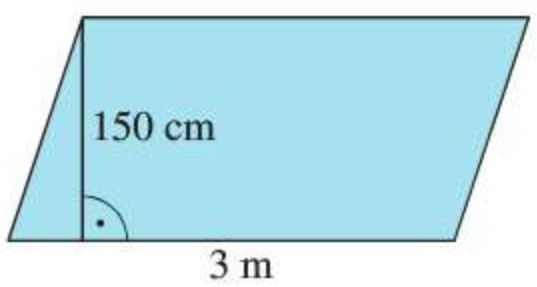
Rozwiąż zadania

1. Zapisz miary wszystkich kątów równoległoboku, jeśli jeden z jego kątów ma miarę:

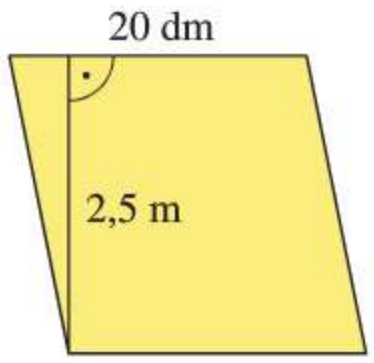
a) $28°$, **b)** $102°$, **c)** $6°$, **d)** $172°$.

2. Oblicz pole równoległoboku. Wynik podaj w metrach kwadratowych.

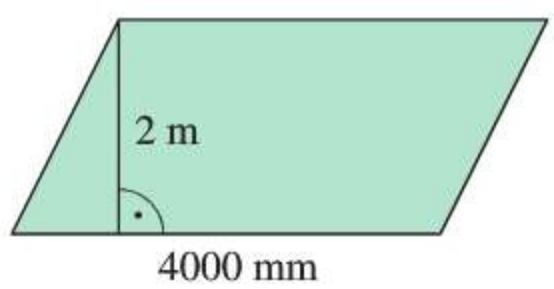
a)



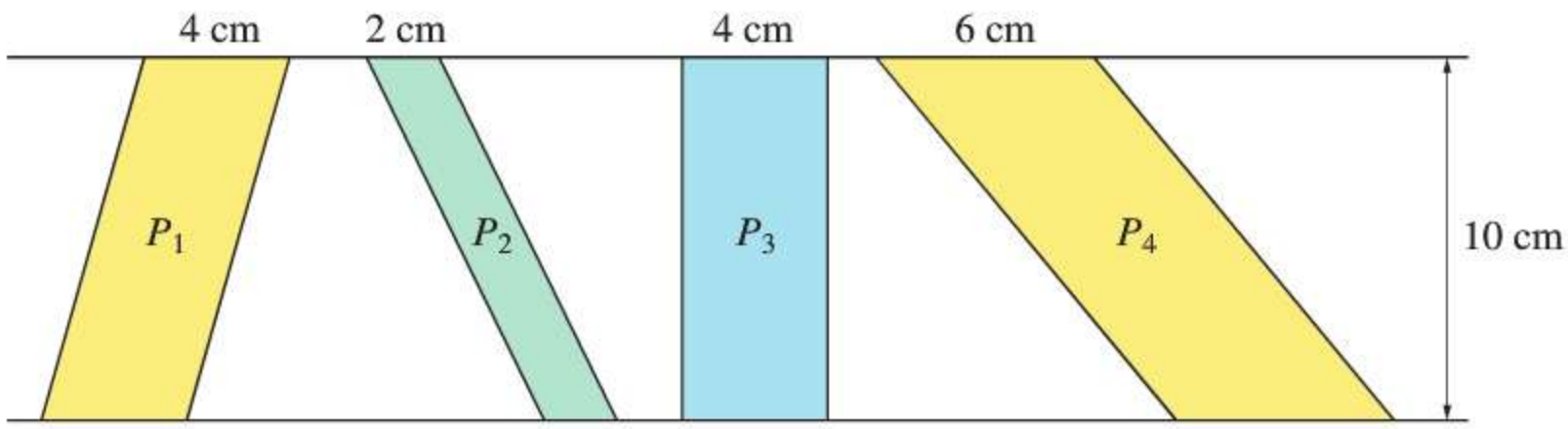
b)



c)



3. Odległość między krótszymi bokami równoległoboków przedstawionych na rysunku jest równa $10\ \text{cm}$. Oblicz pola równoległoboków.

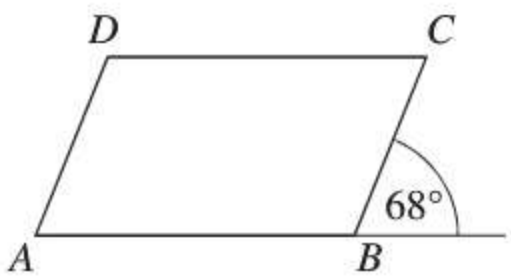


Porównaj pola równoległoboków P_1 i P_3. Czy zauważasz jakąś zależność?

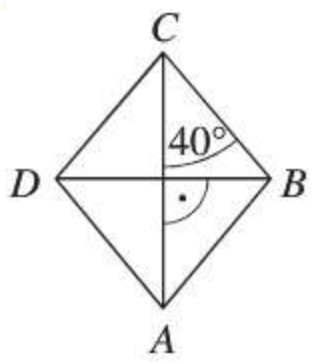
4. Miara kąta ostrego rombu jest osiem razy mniejsza od miary kąta rozwartego. Oblicz miarę kąta ostrego tego rombu.

5. Oblicz miary kątów wewnętrznych równoległoboku $ABCD$.

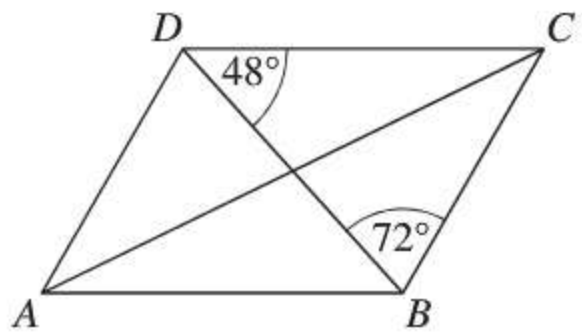
a)



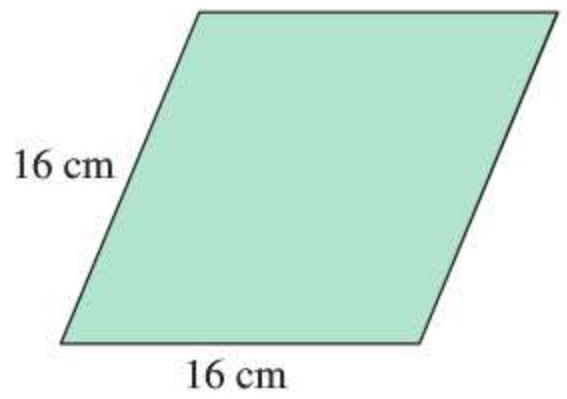
b)



c)



6. Na rysunku przedstawiono romb, którego pole jest równe $240\ \text{cm}^2$. Oblicz wysokość tego rombu.



7. Przekątne rombu mają długości $2{,}4\ \text{dm}$ i $100\ \text{mm}$. Oblicz pole i obwód tego rombu.

8. Przekątne rombu mają długości $6\ \text{cm}$ i $8\ \text{cm}$. Oblicz wysokość tego rombu.

9. Pole rombu, którego krótsza przekątna ma długość $8\ \text{cm}$, jest równe $32\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Oblicz długość boku tego rombu.

10. Równoległobok ma boki długości $5\ \text{m}$ i $10\ \text{m}$. Jedna z jego wysokości jest równa $4\ \text{m}$. Oblicz drugą wysokość tego równoległoboku. Czy zadanie ma tylko jedno rozwiązanie? Uzasadnij swoją odpowiedź.

11. Ogródek przed domem pani Katarzyny ma kształt prostokąta przedstawionego na rysunku. W części ogródka pani Katarzyna zasadziła hortensje. Resztę ogródka obsiała trawą.



a) Oblicz, na jakiej powierzchni pani Katarzyna zasadziła hortensje.

b) Sprawdź, czy $\frac{(3\sqrt{10})^2}{5}$ m płotka wystarczy pani Katarzynie na ogrodzenie powierzchni, na której zasadziła hortensje.

E

Informacje do zadań 12. i 13.

Kuba zaprojektował dla młodszej siostry latawiec na planie rombu o przekątnych długości 40 cm i 96 cm. Kupił materiał o szerokości 1,2 m i długości 50 cm na wycięcie kształtu latawca. Planuje wykończyć brzeg latawca wstążką.



12. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Latawiec Kuby będzie miał powierzchnię równą [A | B].

A. 960 cm^2 **B.** 1920 cm^2

Kubie pozostanie [C | D] materiału.

C. 40,8 dm^2 **D.** 50,4 dm^2

13. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kuba musi kupić wstążkę o długości

A. 52 cm **B.** 68 cm **C.** 136 cm **D.** 208 cm

14. Długości przekątnych rombu są kolejnymi liczbami naturalnymi parzystymi. Jaka jest długość boku rombu, jeśli jego pole jest równe 40? Uzasadnij swoją odpowiedź.

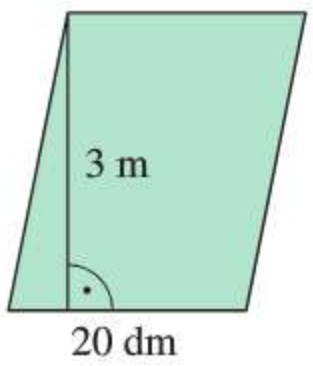
Sprawdź, co umiesz!

E **1.** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

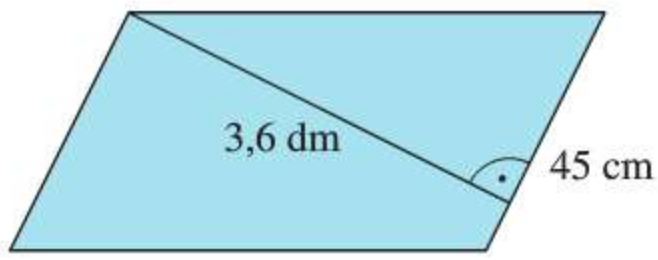
Jeśli kąt ostry rombu ma miarę 32°, to jego kąt rozwarty ma miarę 158°.	**P**	**F**
Suma miar trzech kątów równoległoboku jest zawsze równa 270°.	**P**	**F**

2. Oblicz pole równoległoboku.

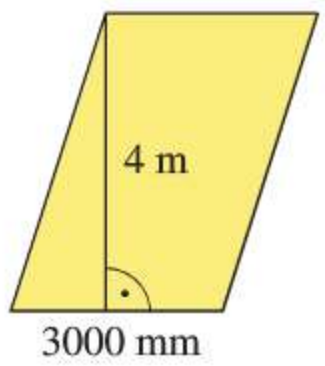
a)



b)



c)



E **3.** Boki równoległoboku mają długości 6 cm i $1{,}2$ dm. Wysokość poprowadzona do dłuższego boku ma długość 4 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość poprowadzona do krótszego boku jest równa

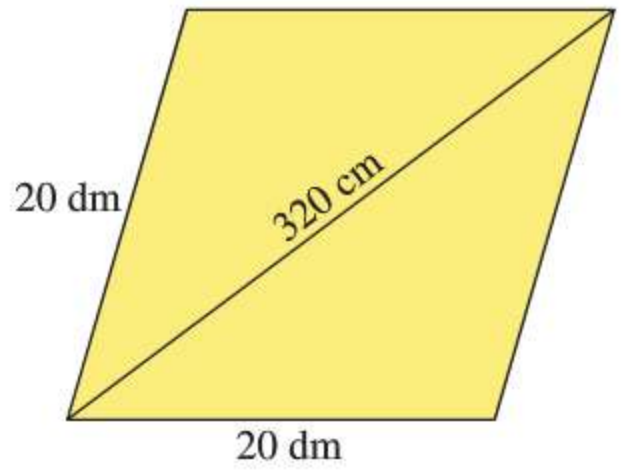
A. 2 cm **B.** 8 dm **C.** $0{,}8$ dm **D.** 2 dm

E **4.** Główne ścieżki spacerowe w części parku, która ma kształt rombu, wyznaczone są wzdłuż przekątnych i mają długości 40 m i 90 m.

Ile jest równa powierzchnia tej części parku? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 18 a **B.** $1{,}8$ ha **C.** 36 a **D.** $3{,}6$ ha

5. Na rysunku przedstawiono romb, którego długość boku wynosi 20 dm, a jedna z jego przekątnych ma długość 320 cm. Oblicz wysokość tego rombu.

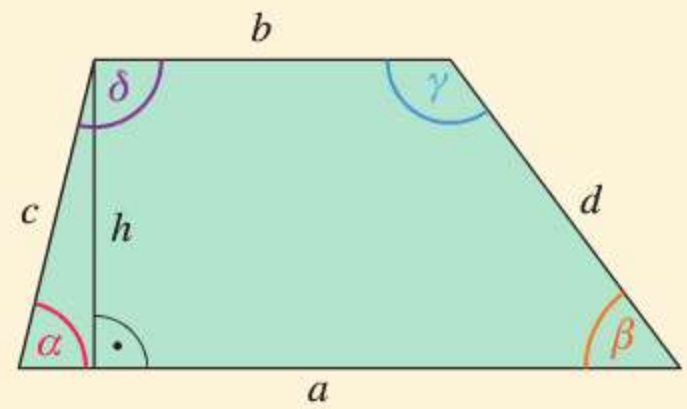


4. Trapez

- Własności trapezu
- Obliczanie pola trapezu

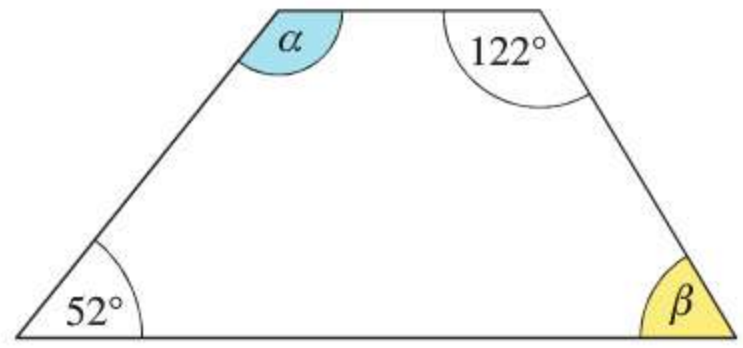
Własności trapezu

- Trapez jest czworokątem, w którym co najmniej jedna para boków jest równoległa.
- Boki równoległe to podstawy, a pozostałe boki to ramiona.
- Odległość między podstawami jest równa wysokości trapezu.
- Suma miar kątów trapezu leżących przy tym samym ramieniu jest równa 180°, czyli $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180^\circ$.
- $Obw. = a + b + c + d$
- $P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$



Przykład 1.

Oblicz miary kątów α i β trapezu przedstawionego na rysunku.



Skorzystamy z własności trapezu, że suma miar kątów trapezu, które leżą przy tym samym ramieniu, jest równa 180°.

Obliczymy miarę kąta α. ⇒

$$\alpha + 52^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$$

Obliczymy miarę kąta β. ⇒

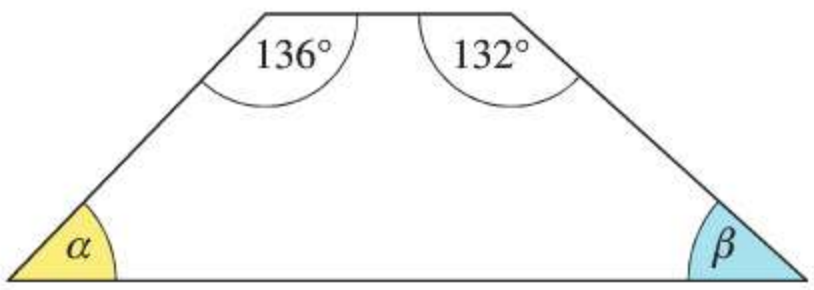
$$\beta + 122^\circ = 180^\circ$$
$$\beta = 180^\circ - 122^\circ = 58^\circ$$

Odp. Miary kątów α i β są równe odpowiednio 128° i 58°.

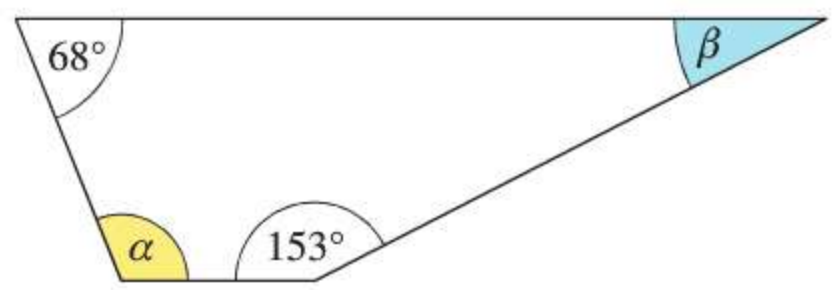
Ćwiczenie 1.

Oblicz miary kątów α i β trapezu.

a)



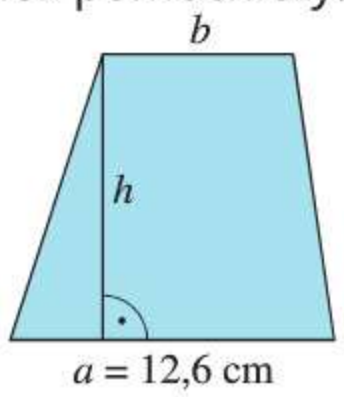
b)



Przykład 2.

Dłuższa podstawa trapezu ma długość $12{,}6\ \text{cm}$, a druga podstawa jest od niej o $5{,}2\ \text{cm}$ krótsza. Oblicz pole tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest dwa razy dłuższa od krótszej podstawy.

Oznaczymy: a – długość dłuższej podstawy trapezu, b – długość krótszej podstawy trapezu, h – wysokość trapezu i wykonamy rysunek pomocniczy.



Obliczymy długość krótszej podstawy, a następnie wysokość trapezu.

$$b = 12{,}6 - 5{,}2 = 7{,}4\ [\text{cm}]$$
$$h = 2 \cdot 7{,}4 = 14{,}8\ [\text{cm}]$$

Obliczymy pole trapezu, korzystając ze wzoru $P = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$.

$$P = \frac{(12{,}6 + 7{,}4)\cdot 14{,}8}{2}$$
$$P = \frac{^{10}\cancel{20}\cdot 14{,}8}{_{1}\cancel{2}}$$
$$P = 10 \cdot 14{,}8$$
$$P = 148\ [\text{cm}^2]$$

Odp. Pole trapezu jest równe $148\ \text{cm}^2$.

Ćwiczenie 2.

Jedna podstawa trapezu ma długość $11{,}4\ \text{cm}$, a druga podstawa jest od niej o $5{,}2\ \text{cm}$ dłuższa. Oblicz pole tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest trzy razy dłuższa od drugiej podstawy.

Przykład 3.

Pole trapezu jest równe $62\ \text{cm}^2$, jego wysokość jest równa $5\ \text{cm}$, a jedna z podstaw ma długość $12\ \text{cm}$. Oblicz długość drugiej podstawy tego trapezu.

Z treści zadania wiemy, że pole trapezu $P = 62\ \text{cm}^2$, jego podstawa ma długość $a = 12\ \text{cm}$, a wysokość $h = 5\ \text{cm}$. Skorzystamy ze wzoru na pole trapezu i obliczymy długość drugiej podstawy.

$$P = \frac{a+b}{2}\cdot h$$
$$62 = \frac{12+b}{2}\cdot 5 \quad |\cdot 2$$
$$124 = (12+b)\cdot 5$$
$$124 = 60 + 5b$$
$$124 - 60 = 5b$$
$$64 = 5b \quad |:5$$
$$b = \frac{64}{5} = 12\frac{4}{5}\ [\text{cm}]$$

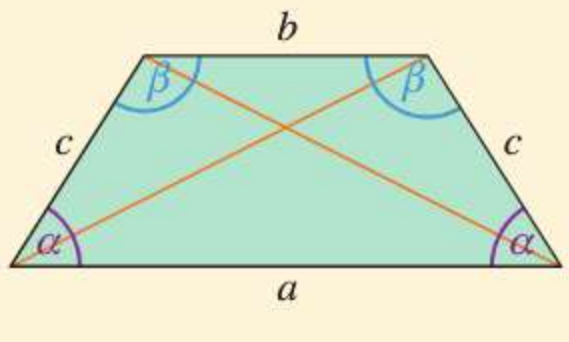
Odp. Druga podstawa trapezu ma długość $12\frac{4}{5}\ \text{cm}$.

Ćwiczenie 3.

Pole trapezu jest równe $150\ \text{cm}^2$. Jedna z podstaw trapezu ma długość $0{,}8\ \text{dm}$, a druga jest od niej dłuższa o $0{,}4\ \text{dm}$. Oblicz wysokość tego trapezu.

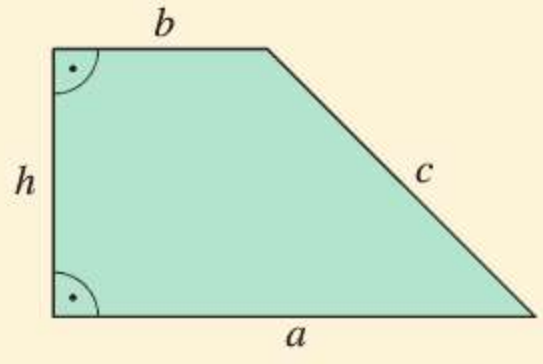
Trapez

równoramienny



- Ramiona mają równą długość.
- Kąty przy tej samej podstawie mają równe miary.
- Przekątne są równej długości.
- $Obw. = a + b + 2c$

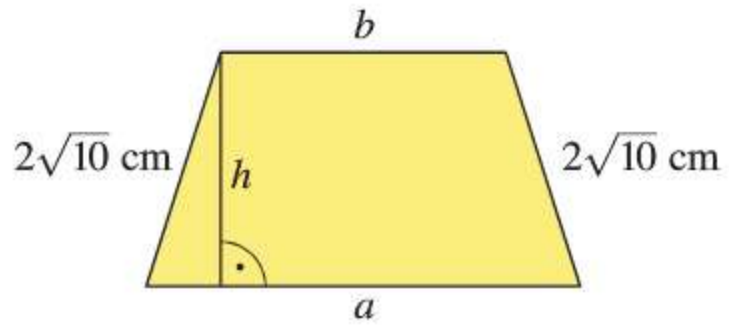
prostokątny



- Jedno ramię jest prostopadłe do podstaw, czyli jest wysokością trapezu.

Przykład 4.

Pole trapezu równoramiennego przedstawionego na rysunku jest równe $60\ \text{cm}^2$, a jego obwód wynosi $\left(20 + 4\sqrt{10}\right)\ \text{cm}$. Oblicz wysokość tego trapezu.



Wstawimy dane z zadania do wzoru $Obw. = a + b + 2c$, gdzie $c = 2\sqrt{10}$.

$$20 + 4\sqrt{10} = a + b + 2 \cdot 2\sqrt{10}$$
$$20 + 4\sqrt{10} = a + b + 4\sqrt{10}$$
$$20 + 4\sqrt{10} - 4\sqrt{10} = a + b$$
$$a + b = 20\ [\text{cm}]$$

Aby obliczyć wysokość h trapezu, wykorzystamy fakt, że pole trapezu jest równe $60\ \text{cm}^2$, a suma długości podstaw a i b trapezu wynosi $20\ \text{cm}$.

Obliczymy wysokość trapezu, korzystając ze wzoru $P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$.

$$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$
$$60 = \frac{20 \cdot h}{2}$$
$$60 = 10 \cdot h \quad | : 10$$
$$h = 6\ [\text{cm}]$$

Odp. Wysokość tego trapezu jest równa $6\ \text{cm}$.

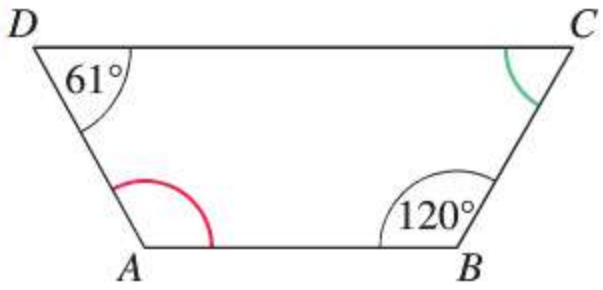
Ćwiczenie 4.

Pole trapezu równoramiennego jest równe $120\ \text{cm}^2$, a jego obwód wynosi $\left(30 + 4\sqrt{17}\right)\ \text{cm}$. Oblicz wysokość tego trapezu, jeżeli jego ramę ma długość $2\sqrt{17}\ \text{cm}$.

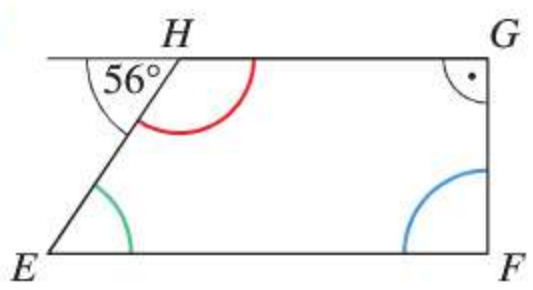
Rozwiąż zadania

1. Oblicz nieznane miary kątów trapezu.

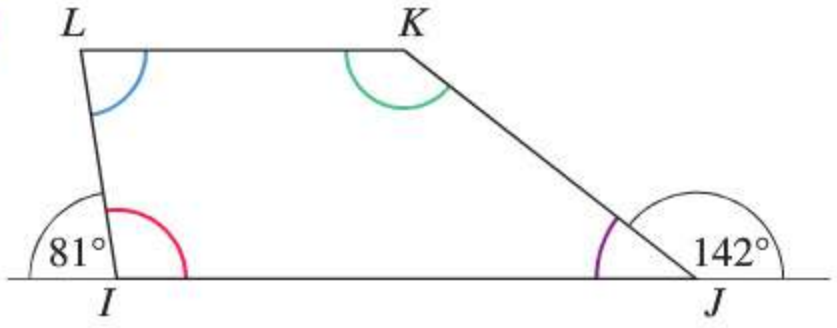
a)



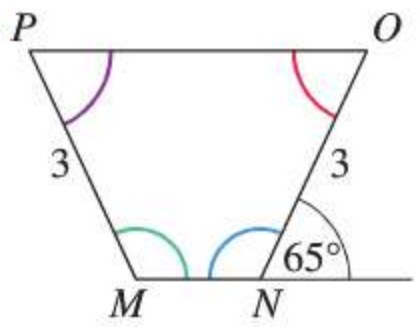
b)



c)



d)



2. W trapezie prostokątnym miara kąta ostrego jest dwa razy mniejsza od miary kąta rozwartego. Oblicz miary kątów tego trapezu.

3. W trapezie równoramiennym miara kąta rozwartego jest o 26° większa od miary kąta ostrego. Oblicz miary kątów tego trapezu.

4. Krótsza podstawa trapezu ma długość $12\ \text{cm}$, a druga podstawa jest od niej o $20\ \%$ dłuższa. Oblicz pole tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest dwa razy krótsza od krótszej podstawy.

5. Pole trapezu jest równe $15\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Oblicz:

a) wysokość trapezu, jeśli jego podstawy mają długości $2\sqrt{3}\ \text{cm}$ i $4\sqrt{3}\ \text{cm}$,

b) długość drugiej podstawy trapezu, jeśli jedna podstawa ma długość $\sqrt{3}\ \text{cm}$, a wysokość jest równa $10\ \text{cm}$.

6. Pole trapezu jest równe $72\ \text{cm}^2$, a wysokość tego trapezu to $9\ \text{cm}$. Oblicz długości podstaw trapezu, jeżeli jedna z nich jest:

a) trzy razy krótsza od drugiej,

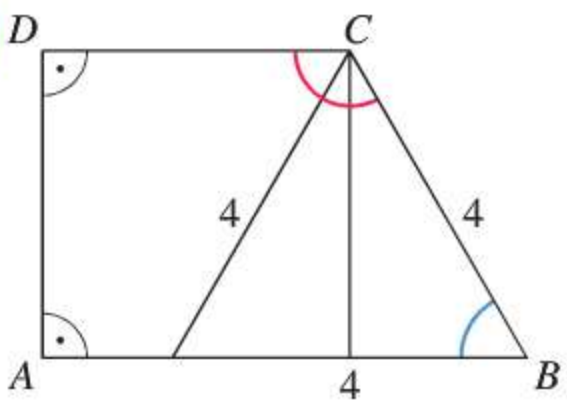
b) o $4\ \text{cm}$ dłuższa od drugiej,

c) o $120\ \%$ dłuższa od drugiej,

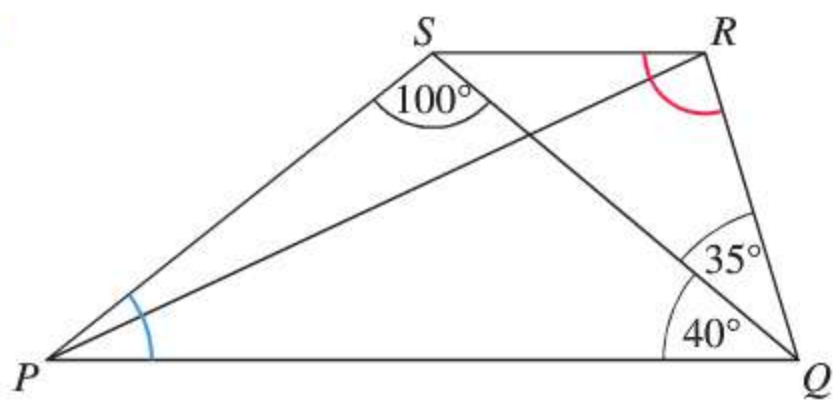
d) o $40\ \%$ krótsza od drugiej.

7. Oblicz nieznane miary kątów trapezu.

a)



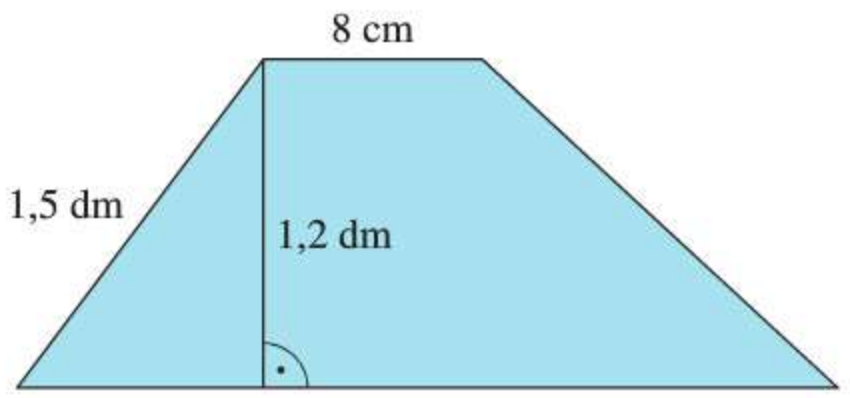
b)



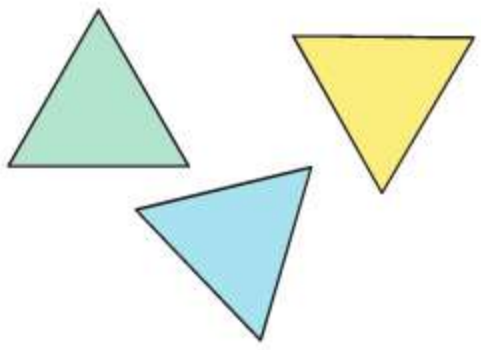
8. Oblicz pole trapezu równoramiennego, którego ramię ma długość $1{,}3\ \text{dm}$, a krótsza podstawa i wysokość mają po $5\ \text{cm}$ długości.

9. Ramiona trapezu i krótsza podstawa mają po $0{,}2\ \text{m}$ długości, a wysokość jest równa $1{,}6\ \text{dm}$. Oblicz pole tego trapezu.

10. Na rysunku przedstawiono trapez. Wysokość poprowadzona z wierzchołka jego kąta rozwartego podzieliła dłuższą podstawę w stosunku $3 : 7$. Oblicz pole tego trapezu.

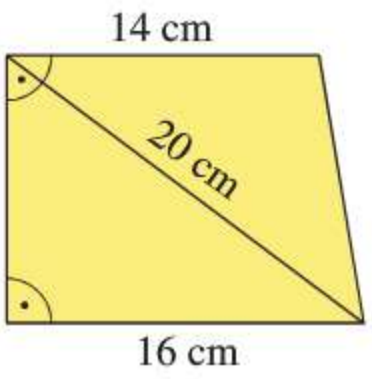


11. Bruno ułożył trapez z trzech przystających trójkątów równobocznych. Naszkicuj ten trapez i oblicz jego pole oraz obwód, jeśli długość boku trójkąta jest równa $12\ \text{cm}$.

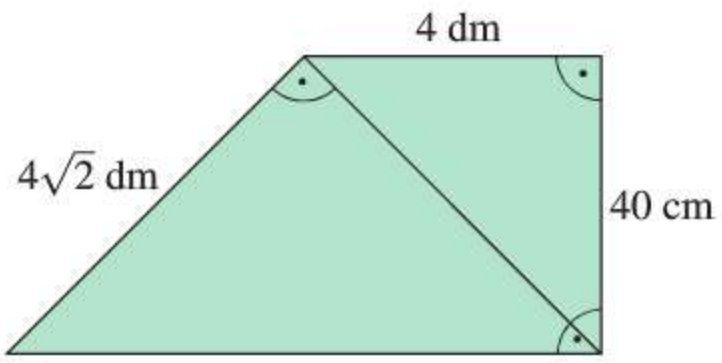


12. Oblicz pole trapezu prostokątnego.

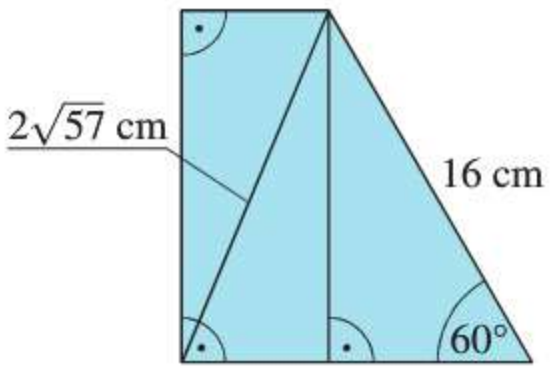
a)



b)



c)



13. Działka ma kształt prostokąta. Niewielka jej część, w kształcie trapezu prostokątnego (patrz rysunek), nie jest użytkowana. Oblicz, jaki procent powierzchni działki stanowią nieużytki.

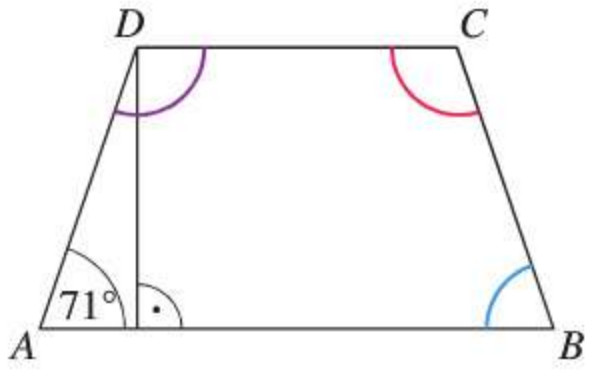


14. Wysokość trapezu jest równa sumie długości podstaw, a jego pole jest równe $32\ \text{cm}^2$. Oblicz wysokość tego trapezu.

15. Uzasadnij, że w trapezie równoramiennym o podstawach długości a i b $(a > b)$ wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli dłuższą podstawę na odcinki o długościach $\frac{a-b}{2}$ i $\frac{a+b}{2}$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Na rysunku przedstawiono trapez równoramienny.



Oblicz nieznane miary kątów tego trapezu.

2. W trapezie prostokątnym miara kąta rozwartego jest osiem razy większa od miary kąta ostrego. Oblicz miary kątów tego trapezu.

E **3.** Pole trapezu jest równe $128\ \text{cm}^2$. Jego wysokość ma $8\ \text{cm}$. Jedna z podstaw jest o $2\ \text{cm}$ dłuższa od drugiej podstawy.

Jaką długość ma krótsza podstawa? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $17\ \text{cm}$ **B.** $30\ \text{cm}$ **C.** $15\ \text{cm}$ **D.** $12\ \text{cm}$

4. Jedna z podstaw trapezu jest cztery razy dłuższa od drugiej. Różnica ich długości jest równa $9\ \text{cm}$. Oblicz wysokość tego trapezu, jeśli jego pole jest równe $40\ \text{cm}^2$.

E **5.** W trapezie równoramiennym ramiona i krótsza podstawa mają po $13\ \text{cm}$ długości, a dłuższa podstawa jest równa $23\ \text{cm}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole tego trapezu jest równe

A. $108\ \text{cm}^2$ **B.** $512\ \text{cm}^2$ **C.** $216\ \text{cm}^2$ **D.** $54\ \text{cm}^2$

E **6.** Krótsza przekątna trapezu prostokątnego dzieli ten trapez na trójkąt równoboczny o boku długości $4\ \text{cm}$ oraz trójkąt prostokątny.

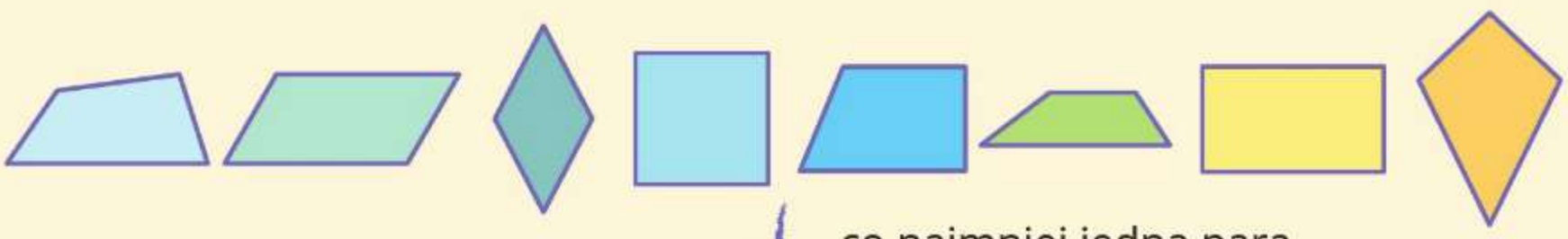
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Wysokość trapezu jest równa $2\sqrt{3}\ \text{cm}$.	**P**	**F**
Pole trapezu jest równe $12\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.	**P**	**F**

5. Kąty w wielokątach, pola wielokątów

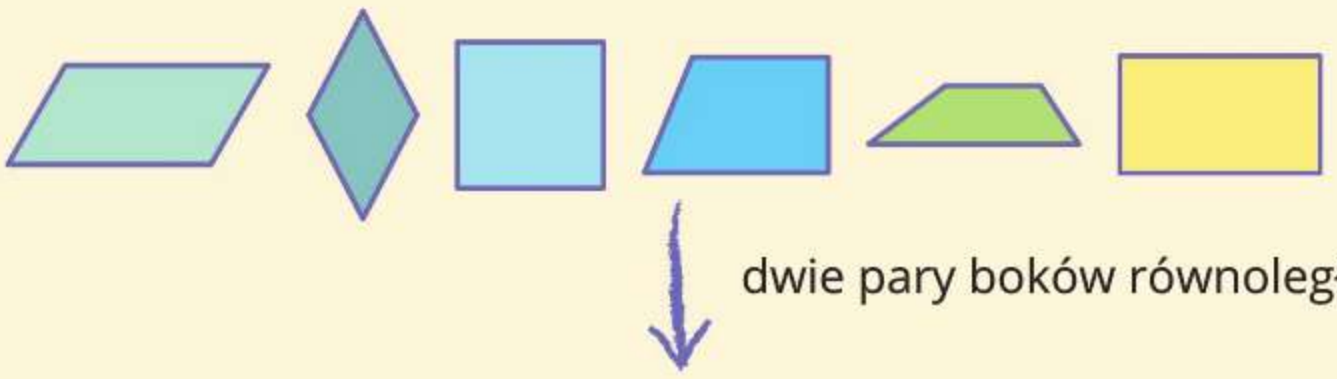
- Wyznaczanie miar kątów wewnętrznych w wielokątach
- Obliczanie pól wielokątów

Czworokąty



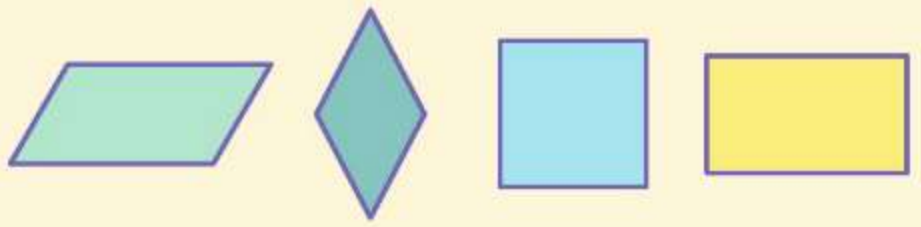
co najmniej jedna para boków równoległych

trapezy



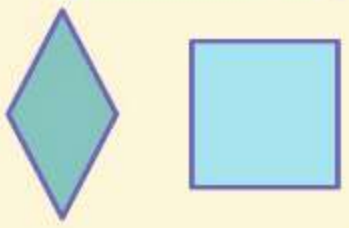
dwie pary boków równoległych

równoległoboki



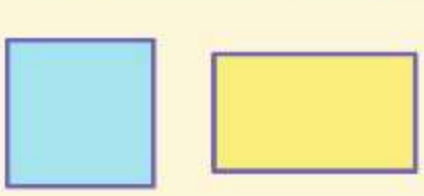
wszystkie boki równej długości

romby



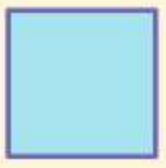
wszystkie kąty proste

prostokąty



wszystkie kąty proste

kwadraty

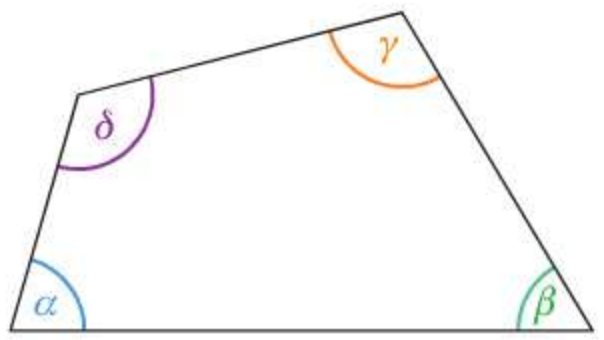


wszystkie boki równej długości

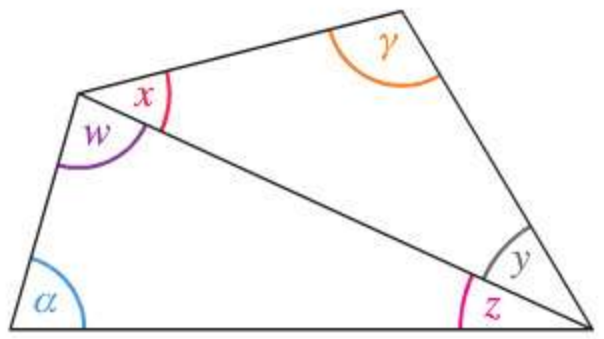
Przykład 1.

Uzasadnij, że suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa $360°$.

Narysujemy przykładowy czworokąt i oznaczymy jego kąty wewnętrzne.



Podzielimy czworokąt na dwa trójkąty i oznaczymy nowo powstałe kąty.



Widzimy, że $\beta = z + y$ oraz $\delta = w + x$.

Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa $180°$, więc $\alpha + z + w = 180°$ oraz $x + y + \gamma = 180°$.

Obliczymy sumę miar kątów wewnętrznych czworokąta.

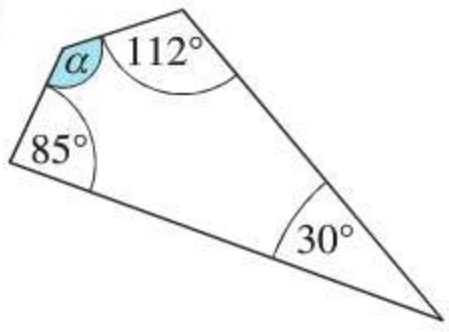
$$\alpha + \underbrace{z + w + x + y}_{\delta} + \gamma = 180° + 180°$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa $360°$.

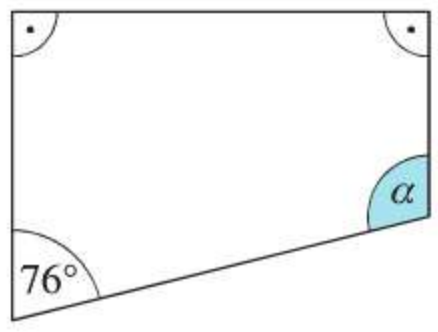
Ćwiczenie 1.

Oblicz miarę kąta α.

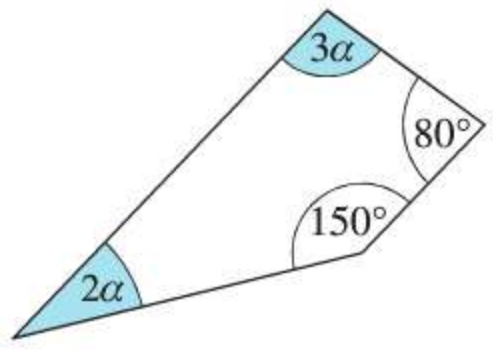
a)



b)



c)



Wielokąt o n bokach ma $\frac{n(n-3)}{2}$ przekątnych.

Przykład 2.

Uzasadnij, że siedmiokąt ma 14 przekątnych.

Aby uzasadnić, że siedmiokąt ma 14 przekątnych, skorzystamy ze wzoru na liczbę przekątnych w wielokącie o n bokach.

$$n = 7$$
$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{7 \cdot (7-3)}{2} = \frac{7 \cdot 4^{2}}{{}_{1}\cancel{2}} = 7 \cdot 2 = 14$$

Uzasadniliśmy, że siedmiokąt ma 14 przekątnych.

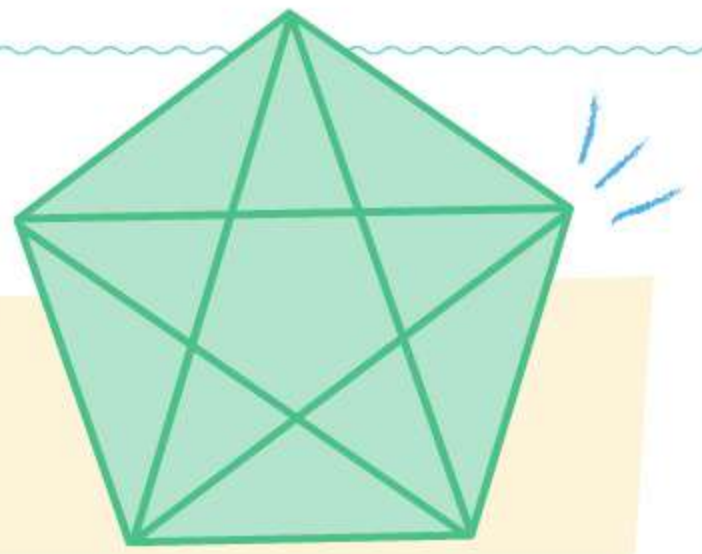
Ćwiczenie 2.

Sprawdź, jaki wielokąt ma 20 przekątnych.

A to ciekawe

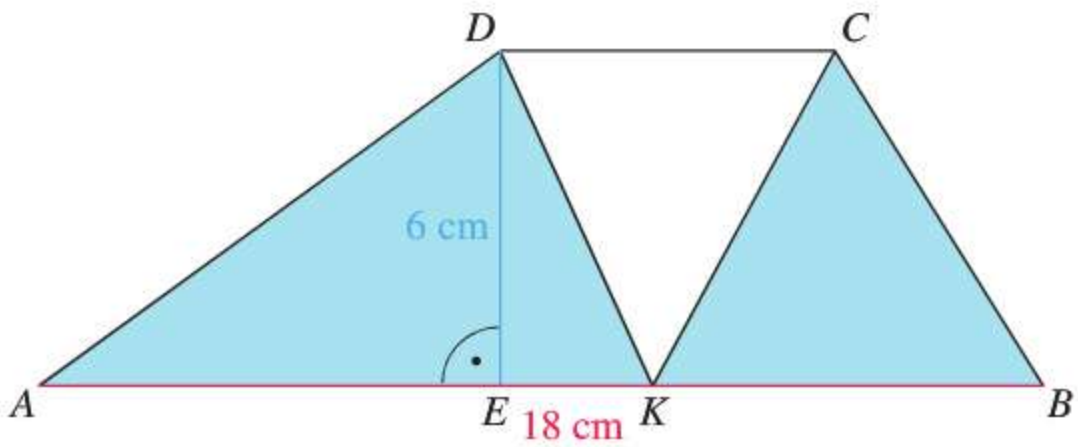
Pięciokąt jest jedynym wielokątem, którego liczba boków jest równa liczbie jego przekątnych.

Siedmiokąt jest jedynym wielokątem, którego liczba boków jest dwukrotnie mniejsza od liczby jego przekątnych.



Przykład 3.

Pole trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku jest równe $72\ \text{cm}^2$. Oblicz pole zacieniowanej figury.



Aby obliczyć pole zacieniowanej figury, należy od pola trapezu $ABCD$ odjąć pole trójkąta CDK.

Skorzystamy ze wzoru na pole trapezu, aby obliczyć długość podstawy CD.

$$P = \frac{(|AB| + |CD|) \cdot |DE|}{2}$$

$$72 = \frac{(18 + |CD|) \cdot 6^{3}}{{}_{1}\cancel{2}}$$

$$72 = (18 + |CD|) \cdot 3 \quad | : 3$$

$$24 = 18 + |CD|$$

$$|CD| = 6\ [\text{cm}]$$

Obliczymy pole trójkąta CDK.

$$P_{\Delta CDK} = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |DE|$$

$$P_{\Delta CDK} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6$$

$$P_{\Delta CDK} = 18\ [\text{cm}^2]$$

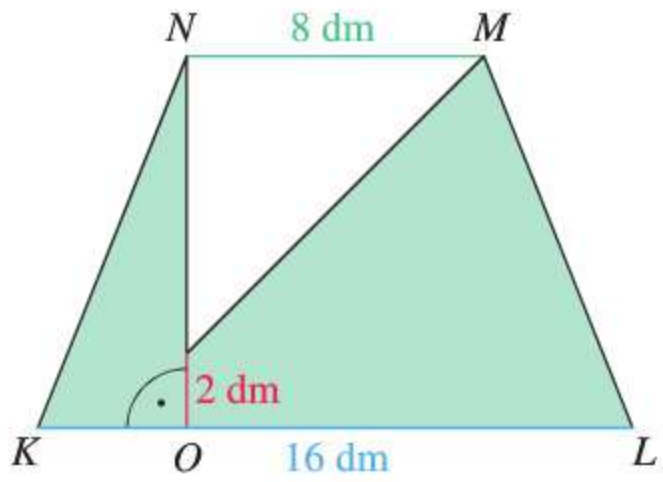
Obliczymy pole zacieniowanej figury.

$$72 - 18 = 54\ [\text{cm}^2]$$

Odp. Pole zacieniowanej figury jest równe $54\ \text{cm}^2$.

Ćwiczenie 3.

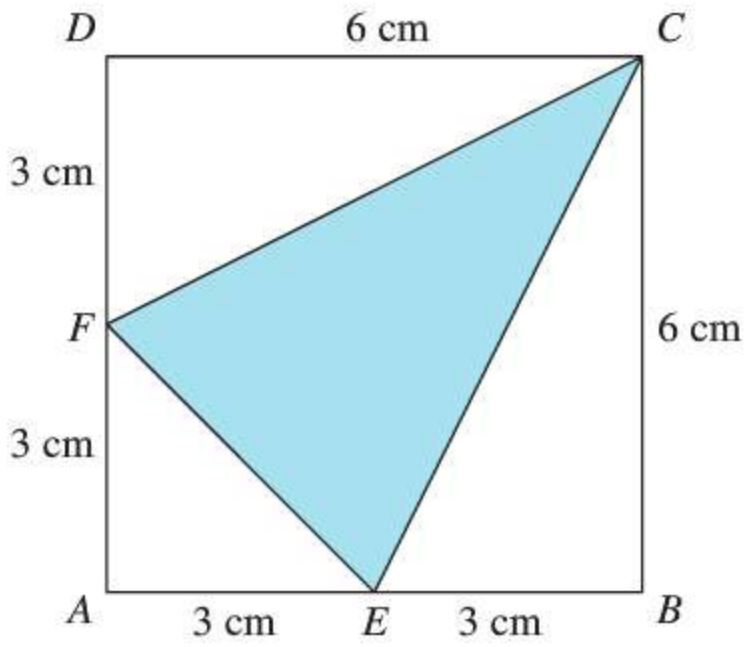
Pole trapezu $KLMN$ przedstawionego na rysunku jest równe $120\ \text{dm}^2$. Oblicz pole zacieniowanej figury.



Przykład 4.

W kwadracie $ABCD$ o boku długości $6\ \text{cm}$ oznaczono środki dwóch sąsiednich boków: AB i AD odpowiednio jako E i F. Oblicz pole trójkąta EFC.

Wykonamy rysunek pomocniczy.



Możemy zauważyć zależność: $P_{\Delta EFC} = P_{ABCD} - P_{\Delta AEF} - 2 \cdot P_{\Delta BCE}$, bo $P_{\Delta CDF} = P_{\Delta BCE}$.

Obliczymy pole kwadratu $ABCD$. ⇨

$$P_{ABCD} = 6^2$$
$$P_{ABCD} = 36\ [\text{cm}^2]$$

Obliczymy pole trójkąta AEF. ⇨

$$P_{\Delta AEF} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3$$
$$P_{\Delta AEF} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}\ [\text{cm}^2]$$

Obliczymy pole trójkąta BCE. ⇨

$$P_{\Delta BCE} = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot 3 \cdot \cancel{6}^3$$
$$P_{\Delta BCE} = 3 \cdot 3 = 9\ [\text{cm}^2]$$

Obliczymy pole trójkąta EFC. ⇨

$$P_{\Delta EFC} = 36 - 4\frac{1}{2} - 2 \cdot 9$$
$$P_{\Delta EFC} = 13\frac{1}{2}\ [\text{cm}^2]$$

Odp. Pole trójkąta EFC jest równe $13\frac{1}{2}\ \text{cm}^2$.

Ćwiczenie 4.

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości $9\ \text{cm}$. Na bokach AB i AD wybrano odpowiednio punkty E i F w taki sposób, że $|AE| = 2|EB|$ oraz $|AF| = 2|FD|$. Oblicz pole trójkąta EFC.

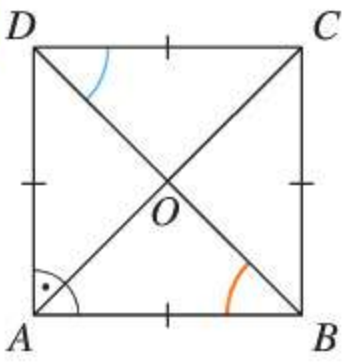
Rozwiąż zadania

1. Czy istnieje czworokąt o podanych miarach kątów wewnętrznych? Uzasadnij swoją odpowiedź.

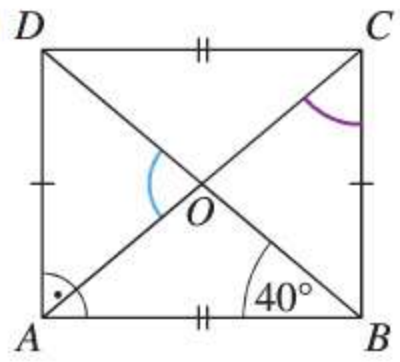
a) $53°, 27°, 121°, 169°$ **b)** $78°, 68°, 129°, 86°$ **c)** $47°, 59°, 117°, 117°$

2. Oblicz miary zaznaczonych kątów.

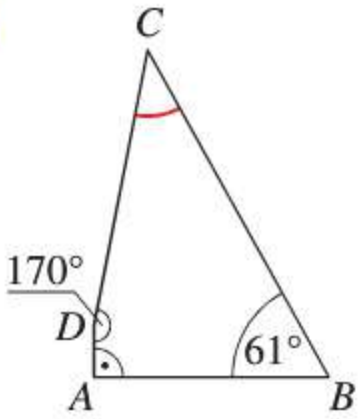
a)



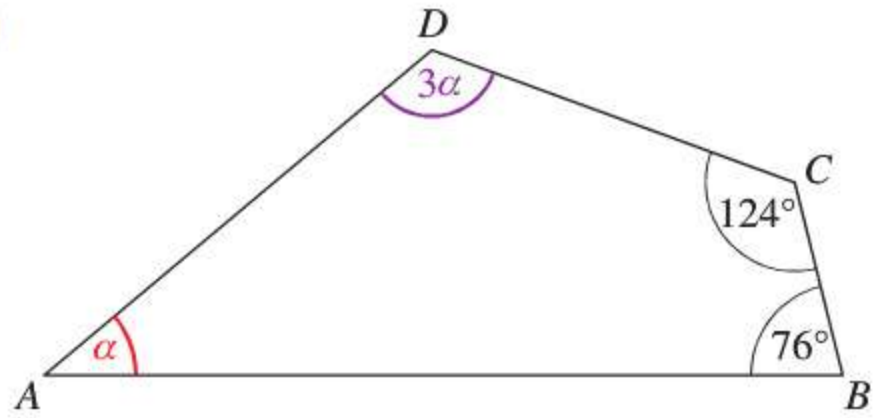
b)



c)

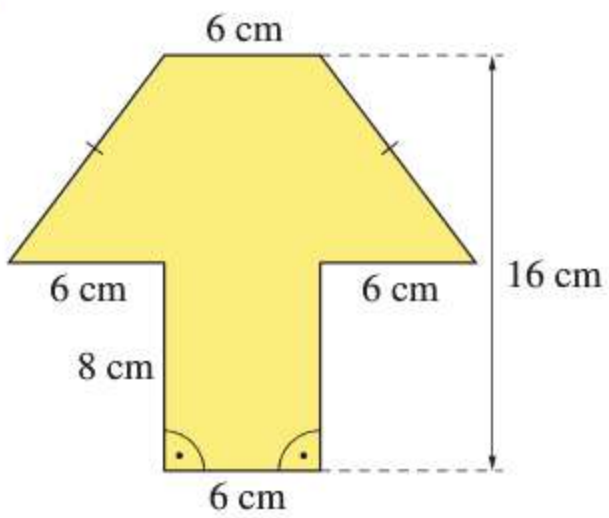


d)

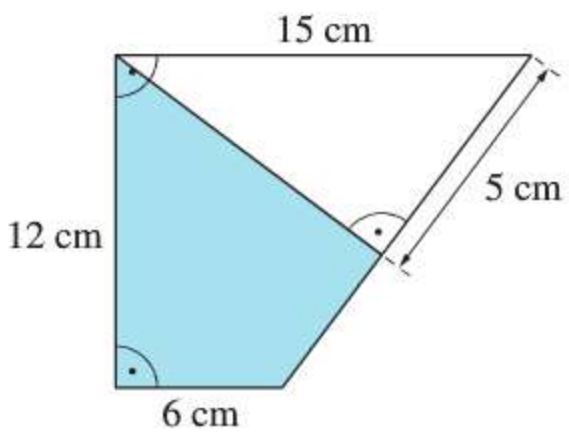


3. Oblicz pole zamalowanego wielokąta.

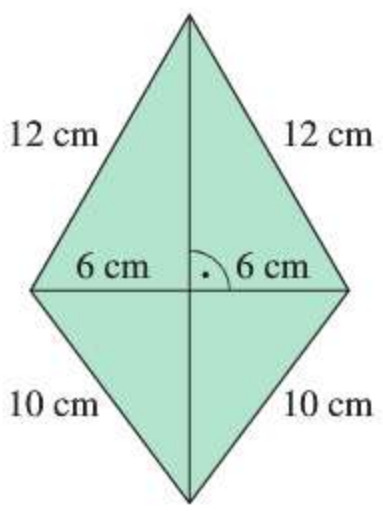
a)



b)



c)

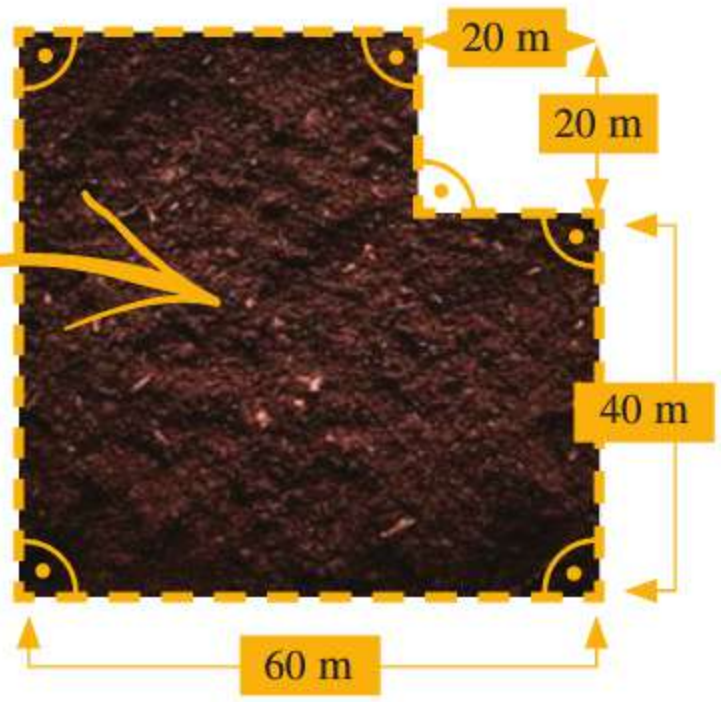


E

Informacje do zadań 4. i 5.

Na terenie, którego kształt przedstawiono na rysunku, zaplanowano kwietną łąkę. Aby uzyskać najbardziej naturalny efekt, przyjmuje się, że na $1\ m^2$ trzeba wysiać $1\ g$ mieszanki nasion kwiatów. Koszt jednej torebki, w której znajduje się $100\ g$ nasion, jest równy 26 zł.





4. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kwietna łąka ma powierzchnię równą

A. $320\ m^2$ **B.** 320 a **C.** $0{,}32$ ha **D.** $3{,}2$ ha

5. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

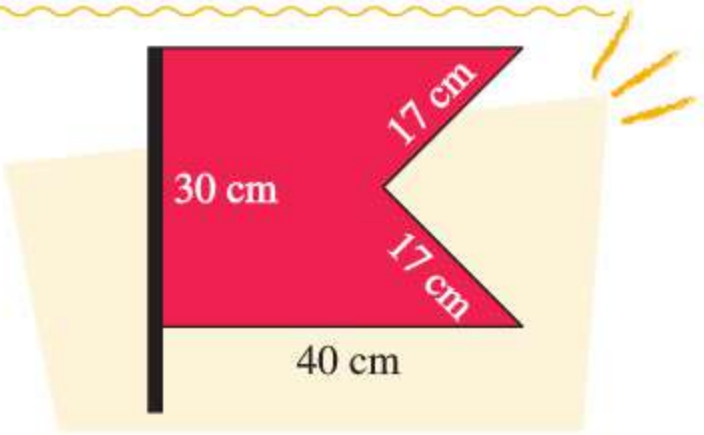
Nasiona do obsiania terenu, na którym zaplanowano kwietną łąkę, kosztują

A. $83{,}2$ zł **B.** 832 zł **C.** 8320 zł **D.** $83\ 200$ zł

6. Oblicz, ile przekątnych ma:

a) sześciokąt, **b)** dwudziestokąt.

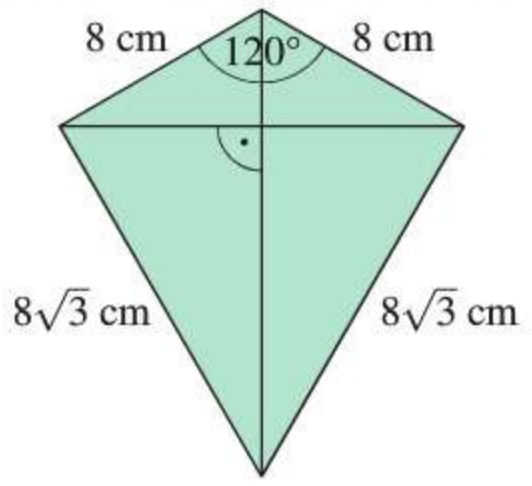
7. Na rysunku przedstawiono chorągiewkę wyciętą z prostokąta o bokach długości $40\ \text{cm}$ i $30\ \text{cm}$. Oblicz, jaką powierzchnię ma wykonana chorągiewka.



E

8. Na rysunku przedstawiono czworokąt, który nazywany jest deltoidem.

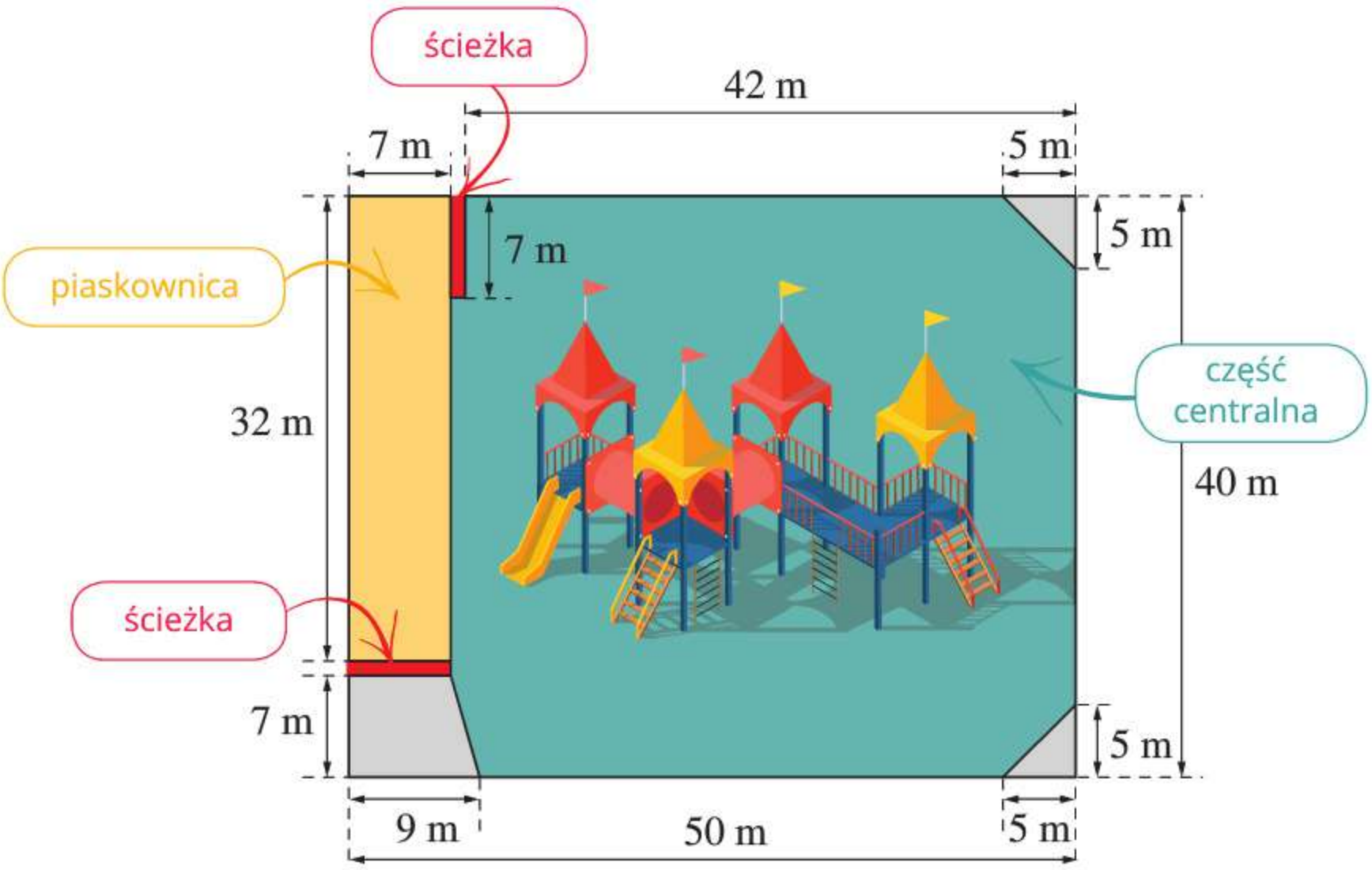
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.



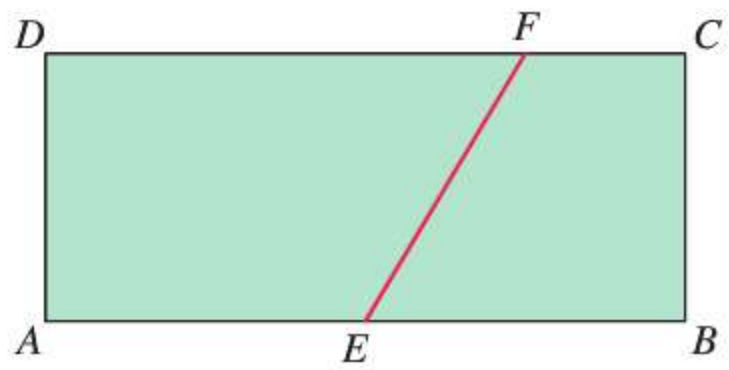
Długość dłuższej przekątnej deltoidu przedstawionego na rysunku jest równa $16\ \text{cm}$.	**P**	**F**
Pole deltoidu jest równe $64\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.	**P**	**F**

9. W rombie o boku długości $8\ \text{cm}$ i kącie rozwartym miary 120° połączono środki dwóch jego sąsiednich boków i odcięto trójkąt. Oblicz pole powstałego pięciokąta.

10. Miejski plac zabaw został zaprojektowany na planie prostokąta o wymiarach $50\ \text{m} \times 40\ \text{m}$. W centralnej jego części, do której prowadzą dwie ścieżki o wymiarach $1\ \text{m} \times 7\ \text{m}$, umieszczono urządzenia do zabawy. Zaprojektowano również piaskownicę. Na pozostałej części wysiano trawę. Oblicz, jaką powierzchnię zajmuje centralna część placu zabaw.



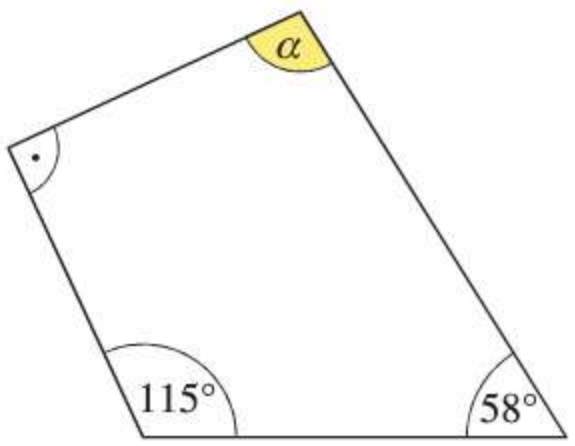
11. Na rysunku przedstawiono prostokąt $ABCD$. Punkt E dzieli bok AB na połowy. Punkt F dzieli bok CD w stosunku $1 : 3$. Uzasadnij, że pole czworokąta $BCFE$ stanowi $\frac{3}{8}$ pola prostokąta $ABCD$.



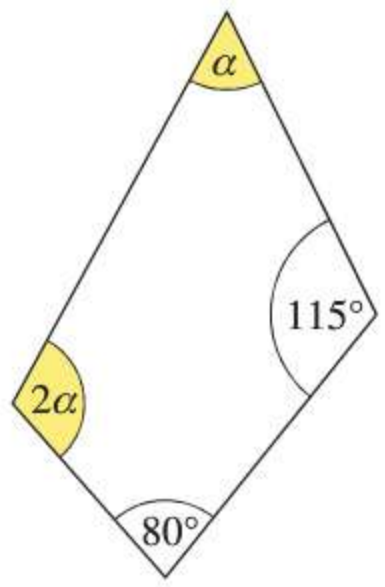
Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz miarę kąta α.

a)

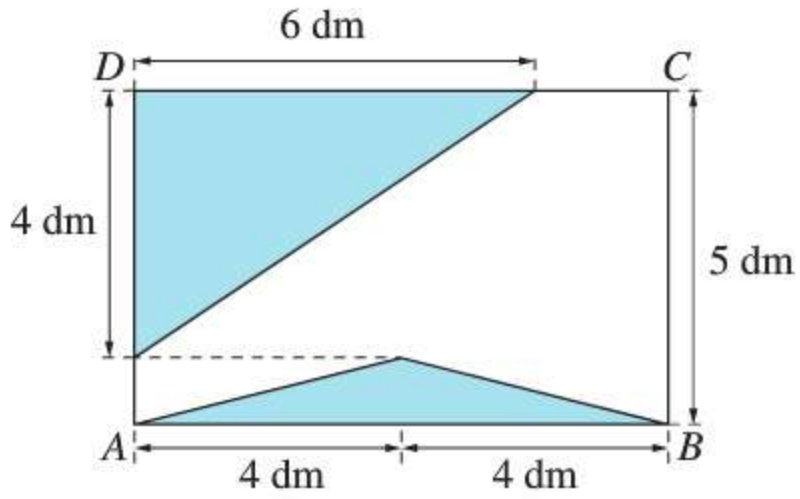


b)

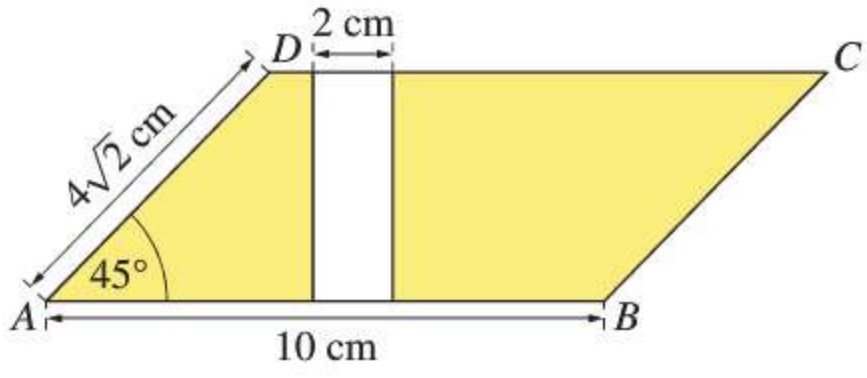


2. Sprawdź, czy dziewięciokąt ma trzy razy więcej przekątnych niż boków.

3. Na rysunku przedstawiono prostokąt $ABCD$. Oblicz pole niezamalowanej części tego prostokąta.



4. Na rysunku przedstawiono równoległobok $ABCD$, z którego wycięto prostokąt.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma pól zamalowanych figur jest równa

A. $(32\sqrt{2}-8)$ cm^2 **B.** $32\sqrt{2}$ cm^2 **C.** 32 cm^2 **D.** 36 cm^2

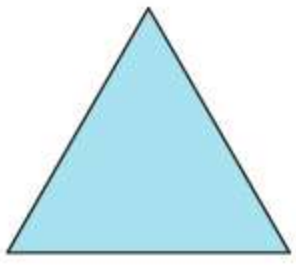
E

6. Wielokąty foremne

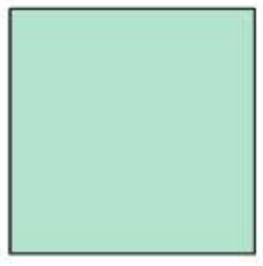
- Pojęcie wielokąta foremnego
- Obliczanie miar kątów wewnętrznych wielokątów foremnych
- Obliczanie obwodu i pola sześciokąta foremnego

Wśród trójkątów możemy wyróżnić trójkąty równoboczne. Mają one wszystkie boki tej samej długości oraz wszystkie kąty o mierze 60°. Wśród czworokątów możemy wyróżnić kwadraty. Mają one wszystkie boki tej samej długości oraz wszystkie kąty o mierze 90°.

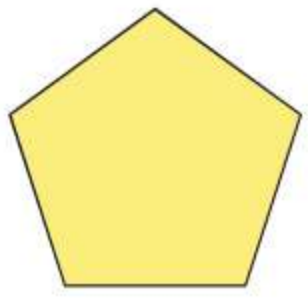
Wielokąt, którego wszystkie boki są tej samej długości, a kąty mają te same miary, nazywamy **wielokątem foremnym**.



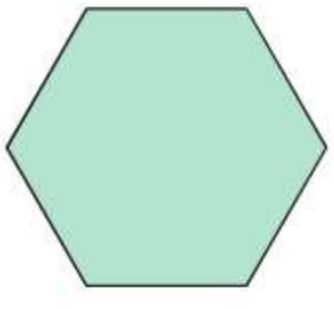
trójkąt foremny
(trójkąt równoboczny)



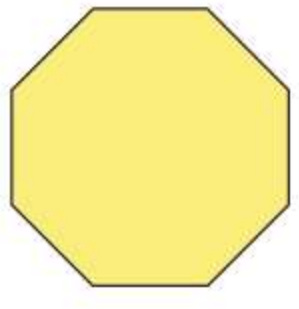
czworokąt foremny
(kwadrat)



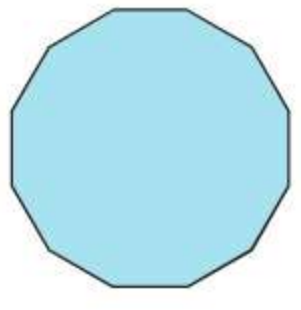
pięciokąt foremny



sześciokąt foremny

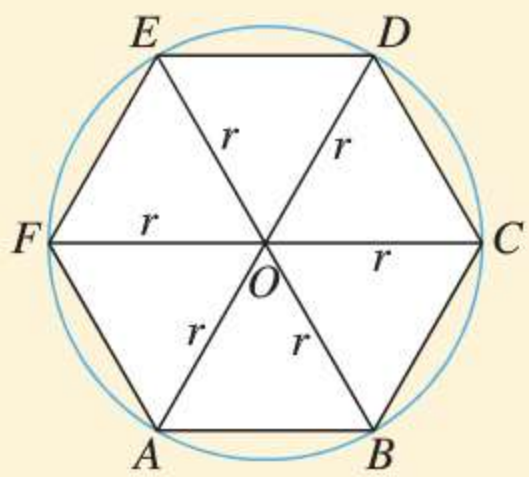


ośmiokąt foremny



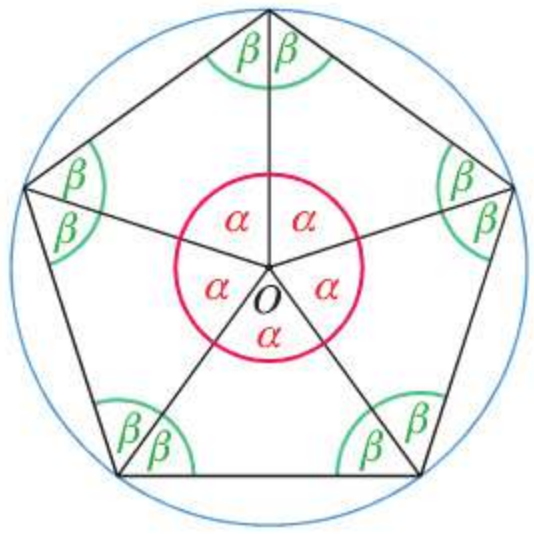
dwunastokąt foremny

Okrąg opisany na wielokącie to okrąg, na którym leżą wszystkie wierzchołki tego wielokąta.
Na każdym wielokącie foremnym możemy opisać okrąg.
Odcinek łączący środek okręgu z wierzchołkiem wielokąta to promień r okręgu.



Przykład 1.

Na rysunku przedstawiono pięciokąt foremny wraz z opisanym na nim okręgiem. Oblicz miary kątów α i β oraz miary kątów wewnętrznych pięciokąta foremnego.



Promienie poprowadzone ze środka okręgu O do wierzchołków pięciokąta dzielą go na pięć przystających trójkątów równoramiennych.

Obliczymy miarę kąta α.

$$5\alpha = 360^\circ \quad | : 5$$
$$\alpha = 72^\circ$$

Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa 180°. Obliczymy miarę kąta β.

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ$$
$$72^\circ + 2\beta = 180^\circ$$
$$2\beta = 180^\circ - 72^\circ$$
$$2\beta = 108^\circ \quad | : 2$$
$$\beta = 54^\circ$$

Możemy zauważyć, że miara kąta wewnętrznego w pięciokącie foremnym jest równa 2β. Obliczymy miarę kąta wewnętrznego w pięciokącie foremnym.

$$2\beta = 2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$$

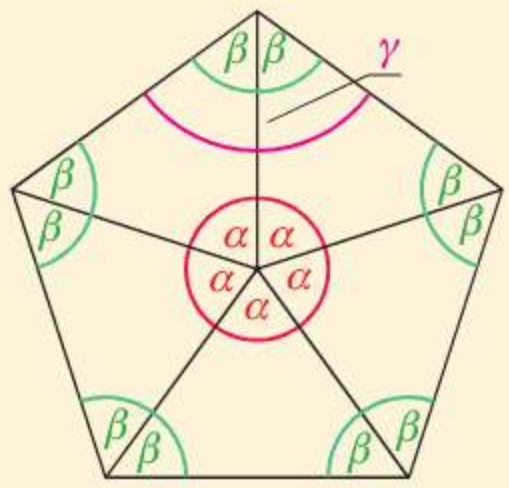
Odp. Kąt α ma miarę 72°, a kąt β – 54°. Miary kątów wewnętrznych pięciokąta foremnego są równe 108°.

Dla pięciokąta foremnego:

$$5 \cdot \alpha = 360^\circ$$
$$\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$
$$2 \cdot \beta + \alpha = 180^\circ$$
$$2\beta = 180^\circ - \alpha = 108^\circ$$
$$\gamma = 2\beta = 108^\circ$$

Dla wielokąta foremnego o n bokach:

$$n \cdot \alpha = 360^\circ$$
$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$
$$2 \cdot \beta + \alpha = 180^\circ$$
$$2\beta = 180^\circ - \alpha$$
$$\gamma = 2\beta = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$



Wzór na miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego o n bokach ma postać:

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

Wzór ten można przekształcić do następującej postaci:

$$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}.$$

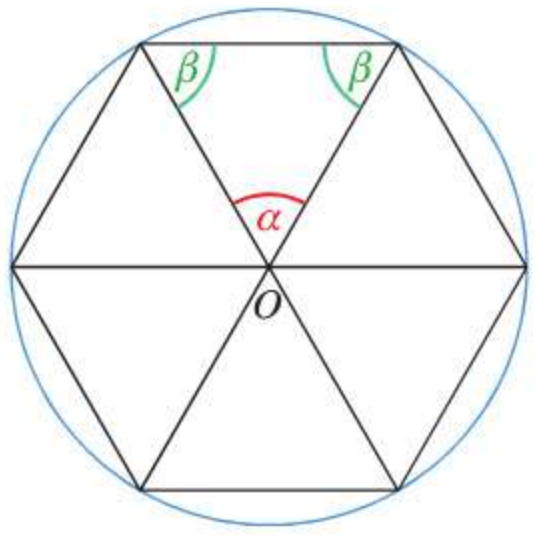
Ćwiczenie 1.

a) Oblicz miary kątów wewnętrznych ośmiokąta foremnego.

b) Ustal, ile boków ma wielokąt foremny, którego kąty wewnętrzne mają miarę 120°.

Przykład 2.

Uzasadnij, że sześciokąt foremny składa się z sześciu trójkątów równobocznych. Oblicz pole sześciokąta foremnego o boku długości $8\ \text{cm}$.



Wykonamy rysunek pomocniczy sześciokąta foremnego wraz z opisanym na nim okręgiem. Aby uzasadnić, że każdy z zaznaczonych na rysunku trójkątów jest równoboczny, pokażemy, że każdy jego kąt ma miarę 60°.

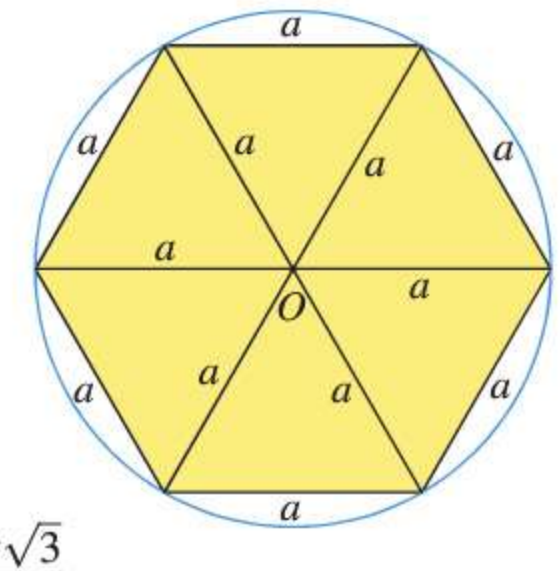
Obliczymy miarę kąta α.

$$6\alpha = 360^\circ \quad | : 6$$
$$\alpha = 60^\circ$$

Obliczymy miarę kąta β.

$$2\beta + 60^\circ = 180^\circ$$
$$2\beta = 180^\circ - 60^\circ$$
$$2\beta = 120^\circ$$
$$\beta = 60^\circ$$

Otrzymaliśmy $\alpha = \beta = 60^\circ$, zatem uzasadniliśmy, że sześciokąt foremny składa się z sześciu trójkątów równobocznych.



Aby obliczyć pole sześciokąta foremnego, którego bok ma długość $8\ \text{cm}$, wystarczy obliczyć pole trójkąta równobocznego o takiej długości boku i pomnożyć je przez 6.

Obliczymy pole trójkąta równobocznego o boku długości $8\ \text{cm}$.

$$P_\Delta = \frac{8^2\sqrt{3}}{4}$$
$$P_\Delta = \frac{64\sqrt{3}}{4}$$
$$P_\Delta = 16\sqrt{3}\ [\text{cm}^2]$$

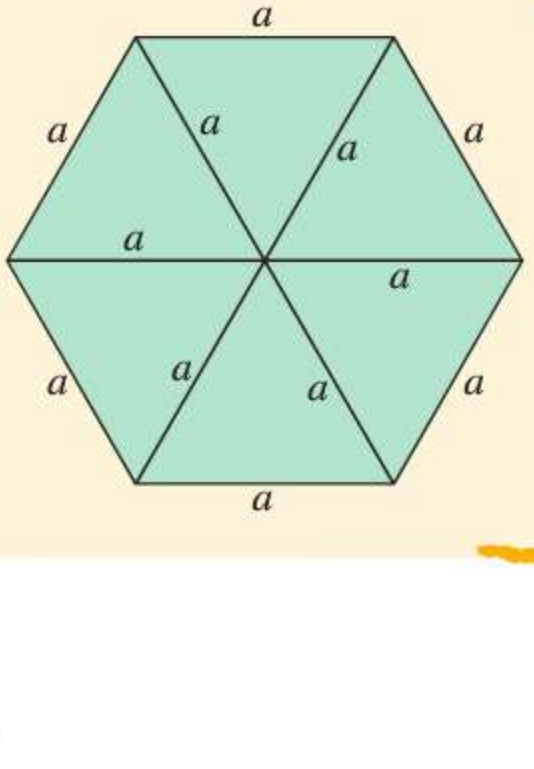
Obliczymy pole sześciokąta foremnego o boku długości $8\ \text{cm}$.

$$P = 6 \cdot 16\sqrt{3}$$
$$P = 96\sqrt{3}\ [\text{cm}^2]$$

Odp. Pole sześciokąta foremnego jest równe $96\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Wzór na pole sześciokąta foremnego o boku długości a ma postać:

$$P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



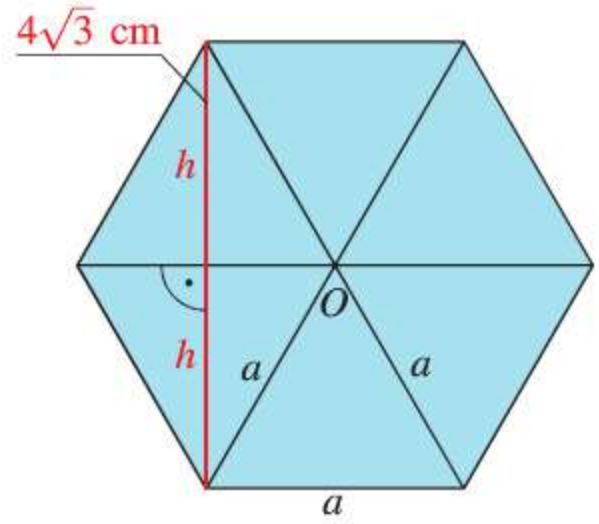
Ćwiczenie 2.

Oblicz pole sześciokąta foremnego o boku długości $10\ \text{cm}$.

Przykład 3.

Krótsza przekątna sześciokąta foremnego ma długość $4\sqrt{3}$ cm. Oblicz obwód oraz pole tego sześciokąta.

Wykonamy rysunek pomocniczy i przyjmiemy odpowiednie oznaczenia.



Długość krótszej przekątnej sześciokąta foremnego o boku długości a jest równa sumie długości dwóch wysokości h trójkąta równobocznego o boku długości a.

Obliczymy wysokość h trójkąta równobocznego.

$$h = 4\sqrt{3} : 2$$
$$h = 2\sqrt{3}\ [\text{cm}]$$

Skorzystamy ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego i obliczymy długość jego boku a.

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$2\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad | \cdot 2$$
$$4\sqrt{3} = a\sqrt{3} \quad | : \sqrt{3}$$
$$a = 4\ [\text{cm}]$$

Obliczymy obwód i pole sześciokąta foremnego.

$$Obw. = 6 \cdot 4 = 24\ [\text{cm}]$$
$$P = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4}$$
$$P = 6 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4}$$
$$P = 6 \cdot 4\sqrt{3}$$
$$P = 24\sqrt{3}\ [\text{cm}^2]$$

Odp. Obwód sześciokąta foremnego jest równy 24 cm, a jego pole wynosi $24\sqrt{3}$ cm^2.

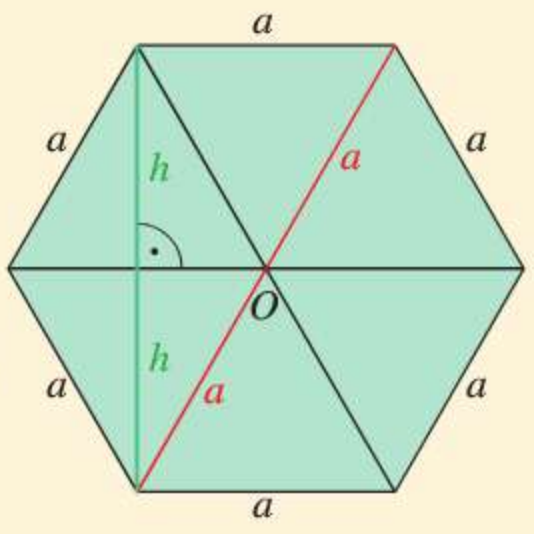
W sześciokącie foremnym o boku długości a:

- długość dłuższej przekątnej jest równa sumie długości dwóch boków sześciokąta

$$a + a = 2a$$

- długość krótszej przekątnej jest równa sumie dwóch wysokości h trójkąta równobocznego o boku długości a

$$h + h = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$



Ćwiczenie 3.

Dłuższa przekątna sześciokąta foremnego jest równa 28 cm. Oblicz obwód i pole sześciokąta.

Rozwiąż zadania

E

1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Romb jest wielokątem foremnym.	**P**	**F**
Istnieje trójkąt prostokątny, który jest wielokątem foremnym.	**P**	**F**
Prostokąt o wszystkich bokach równej długości jest wielokątem foremnym.	**P**	**F**
Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg.	**P**	**F**

2. Oblicz miary kątów wewnętrznych:

a) dziesięciokąta foremnego, **b)** piętnastokąta foremnego.

3. Ustal, ile boków ma wielokąt foremny, którego miara kąta wewnętrznego jest równa:

a) $140°$, **b)** $150°$, **c)** $165°$, **d)** $170°$.

4. Oblicz pole sześciokąta foremnego o boku długości:

a) 12 cm, **b)** 18 cm, **c)** $2\sqrt{3}$ cm, **d)** $3\sqrt{2}$ cm.

5. Oblicz obwód i pole sześciokąta foremnego, jeśli:

a) jego dłuższa przekątna ma długość 40 cm,

b) jego krótsza przekątna ma długość 12 cm.

6. Dany jest kwadrat o boku długości 4 cm. Połączono środki boków tego kwadratu i otrzymano czworokąt. Uzasadnij, że otrzymany czworokąt jest foremny, i oblicz jego pole.

7. W trójkącie równobocznym o boku długości 12 cm połączono środki wszystkich jego boków. Uzasadnij, że otrzymano wielokąt foremny, i oblicz jego pole.

8. Z trójkąta równobocznego o obwodzie 27 cm odcięto naroża w kształcie trójkątów równobocznych o boku długości 3 cm. Sprawdź, czy otrzymana figura jest wielokątem foremnym.

9. Trójkąt równoboczny i sześciokąt foremny mają takie same obwody, równe 30 cm. Ustal, ile razy pole sześciokąta jest większe od pola trójkąta.

10. W sześciokącie foremnym o boku długości 4 cm połączono co drugi wierzchołek i otrzymano trójkąt. Oblicz pole tego trójkąta.

11. Dany jest kwadrat o boku długości $12\ \text{cm}$. Każdy jego bok został podzielony na trzy równe części. Połączono punkty podziału tak, aby otrzymać ośmiokąt. Czy otrzymana figura jest ośmiokątem foremnym? Uzasadnij swoją odpowiedź.

12. Donica kwiatowa jest zaprojektowana na planie sześciokąta foremnego. Dłuższa przekątna wewnętrznego sześciokąta jest równa $106\ \text{cm}$. Oblicz powierzchnię wewnętrznego obszaru donicy w kształcie sześciokąta, na którym zasadzono kwiaty. Przyjmij, że $\sqrt{3} \approx 1{,}73$. Wynik zaokrąglij do $1\ \text{cm}^2$.



Sprawdź, co umiesz!

1. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

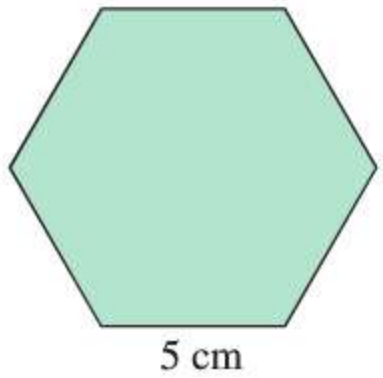
Wielokątem foremnym nie jest | **A** | **B** |.

A. romb o wszystkich kątach równej miary **B.** trójkąt różnoboczny

Miara kąta wewnętrznego dwudziestokąta foremnego wynosi | **C** | **D** |.

C. 152° **D.** 162°

2. Oblicz długości krótszej i dłuższej przekątnej sześciokąta foremnego przedstawionego na rysunku.



3. Dany jest kwadrat o boku długości $6\ \text{cm}$. Połączono środki boków tego kwadratu i otrzymano czworokąt. Następnie połączono środki otrzymanego czworokąta i otrzymano kolejny czworokąt.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

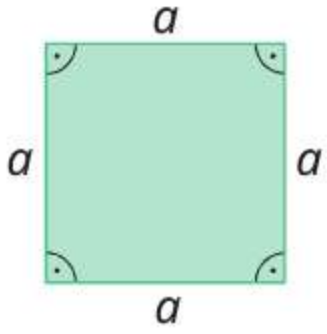
Otrzymane czworokąty są kwadratami.	**P**	**F**
Pole drugiej z otrzymanych figur jest równe $9\ \text{cm}^2$.	**P**	**F**

PODSUMOWANIE DZIAŁU VIII
Wielokąty

Powtórz wiadomości

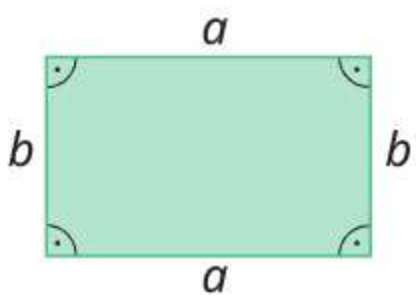
Czworokąty

Kwadrat



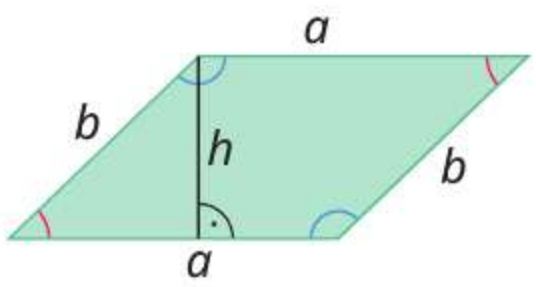
$P = a^2$

Prostokąt



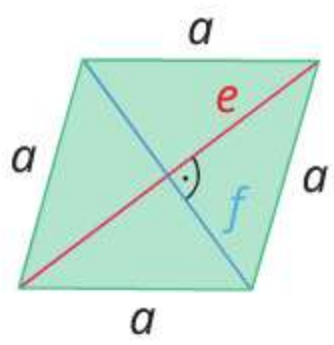
$P = a \cdot b$

Równoległobok



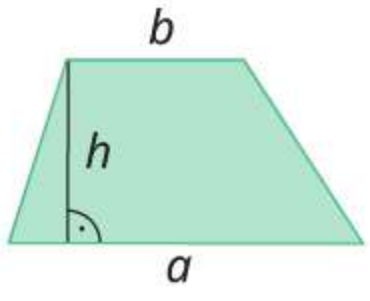
$P = a \cdot h$

Romb



$P = \frac{e \cdot f}{2}$

Trapez

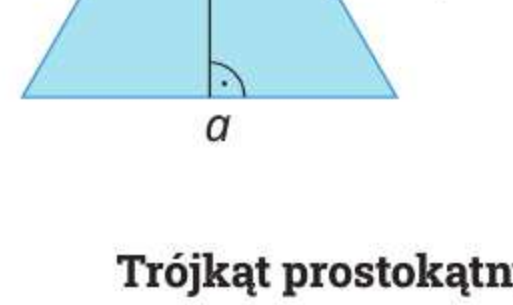


$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360°.

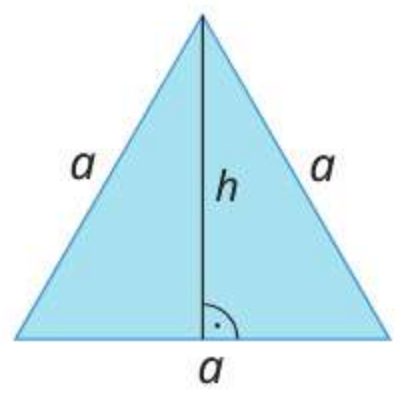
Trójkąty

Trójkąt



$P = \frac{a \cdot h}{2}$

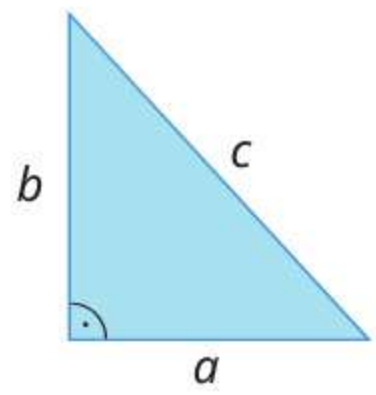
Trójkąt równoboczny



$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Trójkąt prostokątny



$P = \frac{a \cdot b}{2}$

Wielokąty foremne

Wielokąt, którego wszystkie boki są tej samej długości, a kąty mają te same miary, nazywamy **wielokątem foremnym**.

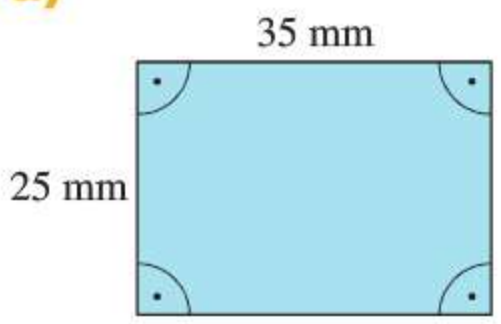


trójkąt równoboczny | kwadrat | sześciokąt foremny

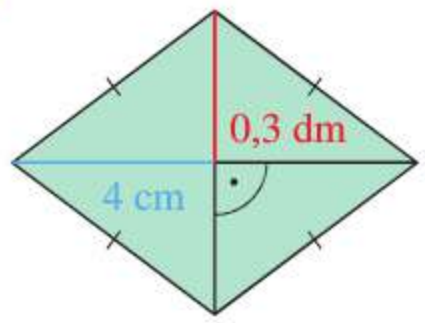
Sprawdź umiejętności

1. Oblicz pole wielokąta.

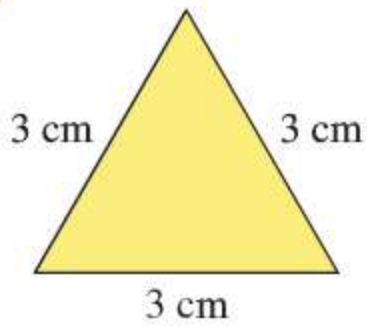
a)



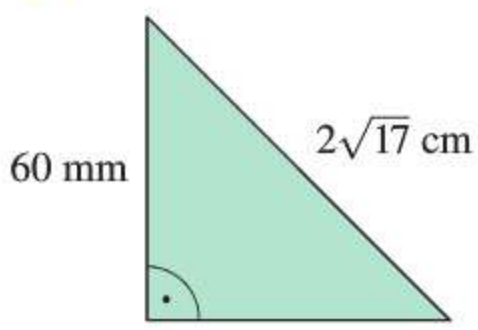
b)



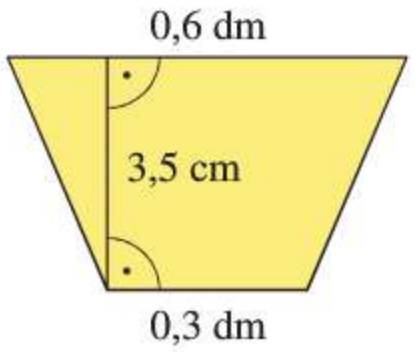
c)



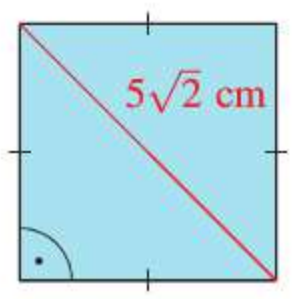
d)



e)



f)



2. Przepisz równość do zeszytu i wpisz w luki odpowiednie liczby.

a) $1{,}2\ \text{m}^2 = \square\ \text{cm}^2 = \square\ \text{mm}^2$

b) $14\ \text{a} = \square\ \text{ha} = \square\ \text{m}^2$

c) $15\ \text{km}^2 = \square\ \text{m}^2 = \square\ \text{dm}^2$

d) $0{,}6\ \text{mm}^2 = \square\ \text{cm}^2 = \square\ \text{m}^2$

3. Obwód działki w kształcie prostokąta jest równy $84\ \text{m}$. Oblicz powierzchnię działki, jeśli jej jeden bok jest dwa razy krótszy od jej drugiego boku.

4. Oblicz obwód i pole kwadratu, którego przekątna ma długość:

a) $12\sqrt{2}$ cm, **b)** $7\sqrt{6}$ cm, **c)** 10 cm, **d)** $5\frac{1}{5}$ cm.

5. Obwód trójkąta równobocznego jest równy $15\ \text{dm}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole trójkąta jest równe

A. $45\ \text{dm}^2$ **B.** $112{,}5\ \text{dm}^2$ **C.** $\frac{225\sqrt{3}}{4}\ \text{dm}^2$ **D.** $\frac{25\sqrt{3}}{4}\ \text{dm}^2$

E

6. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma $5\ \text{cm}$ długości, a długość przeciwprostokątnej jest równa $2\ \text{dm}$. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

7. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

E

Pole trójkąta równobocznego o boku długości $3\sqrt{3}$ jest | **A** | **B** | niż $13{,}5$.

A. mniejsze **B.** większe

Jeśli wysokość w trójkącie równobocznym ma $4\sqrt{3}$, to pole tego trójkąta wynosi | **C** | **D** |.

C. $8\sqrt{3}$ **D.** $16\sqrt{3}$

E

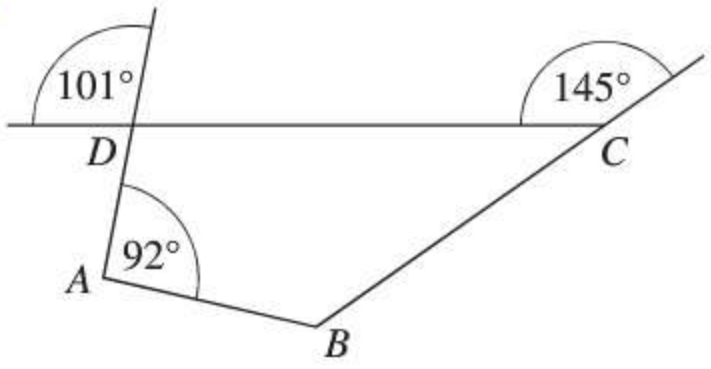
8. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeżeli kąt rozwarty równoległoboku ma miarę $127°$, to suma miar kątów ostrych w tym równoległoboku jest równa

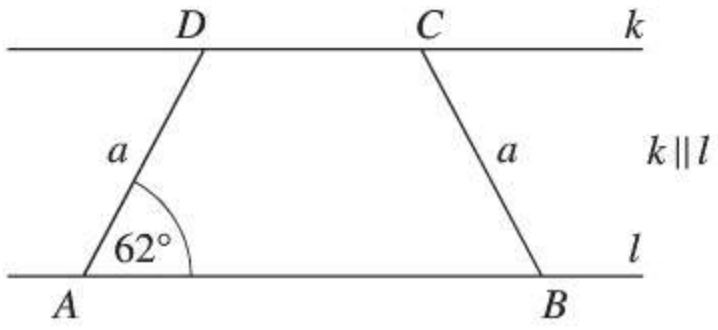
A. $53°$ **B.** $63°$ **C.** $106°$ **D.** $126°$

9. Oblicz nieznane miary kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$.

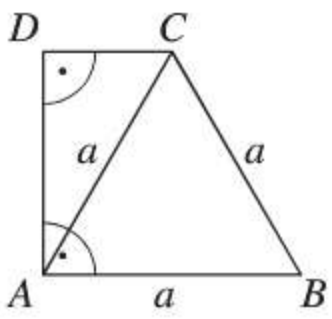
a)



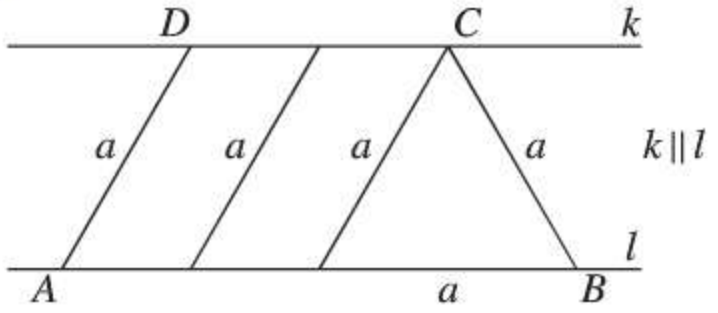
b)



c)



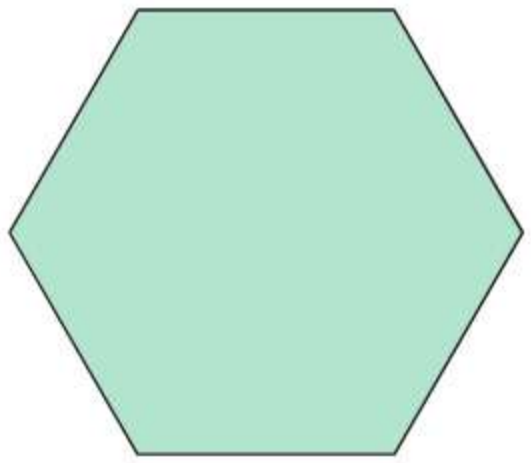
d)



10. W trapezie równoramiennym wysokość jest równa 8 cm, a różnica długości podstaw jest równa 6 cm. Oblicz pole trapezu, jeśli krótsza podstawa ma 4 cm długości.

11. Jedna z podstaw trapezu ma długość 20 cm, a druga jest od niej o 40 % krótsza. Oblicz pole tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest cztery razy krótsza od krótszej podstawy.

12. Na rysunku przedstawiono sześciokąt foremny.



a) Oblicz długości krótszej i dłuższej przekątnej tego sześciokąta.

b) Oblicz pole tego sześciokąta.

13. Oblicz miary kątów wewnętrznych:

a) dwunastokąta foremnego, **b)** osiemnastokąta foremnego.

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. Długości dwóch sąsiednich boków prostokąta są kolejnymi liczbami naturalnymi parzystymi, a długość boku kwadratu jest liczbą o 1 większą od długości dłuższego boku prostokąta. Różnica pól kwadratu i prostokąta jest równa 17. Oblicz pola prostokąta oraz kwadratu.

2. Wśród prostokątów o bokach wyrażonych liczbami naturalnymi oraz obwodzie równym $16\ \text{cm}$ wyznacz wymiary tego, który ma największe pole.

3. Oblicz pole trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa $\left[\left(3\sqrt[3]{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(4^2+62\right)\right]\ \text{dm}$.

4. Kwadrat ma obwód $80\ \text{cm}$. Środki dwóch kolejnych boków tego kwadratu połączono ze sobą odcinkiem. Końce tego odcinka połączono z wierzchołkiem kwadratu, który nie należy do żadnego z tych boków.

E

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Pole otrzymanego trójkąta jest równe | **A** | **B** |.

Dłuższa wysokość otrzymanego trójkąta ma | **C** | **D** |.

A. $150\ \text{cm}^2$ **B.** $250\ \text{cm}^2$

C. $15\ \text{cm}$ **D.** $15\sqrt{2}\ \text{cm}$

5. Połowa krótszej przekątnej rombu ma długość $\sqrt[3]{125}\ \text{cm}$. Druga przekątna tego rombu jest o $20\ \%$ dłuższa od krótszej przekątnej. Oblicz pole i obwód tego rombu.

6. W rombie kąt ostry ma miarę 60°, a bok ma długość $6\ \text{cm}$.

E

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

Miara kąta rozwartego rombu stanowi $200\ \%$ miary jego kąta ostrego.	**P**	**F**
Pole rombu jest równe $18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.	**P**	**F**

7. Oblicz pole trapezu równoramiennego, którego podstawy mają długości $40\ \text{cm}$ i $16\ \text{cm}$, a każde z ramion ma długość $15\ \text{cm}$.

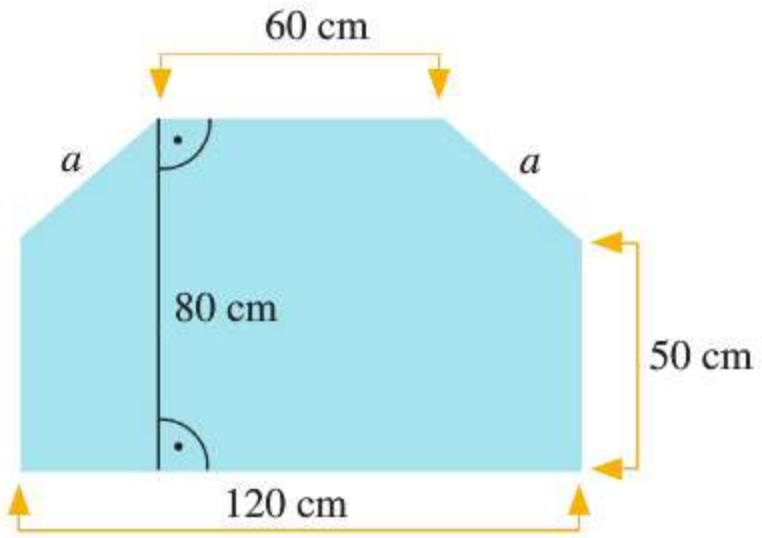
8. Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, w którym dłuższa podstawa ma długość $14\ \text{cm}$, krótsza $10\ \text{cm}$, a kąt rozwarty ma miarę 120°.

9. W trapezie równoramiennym o podstawach długości $24\ \text{cm}$ i $16\ \text{cm}$ przekątne przecinają się pod kątem prostym. Oblicz pole trapezu i zapisz je w decymetrach kwadratowych.

E

Informacje do zadań 10. i 11.

Na rysunku przedstawiono wymiary szyby w oknie.



10. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami **A** i **B** oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami **C** i **D**.

Szyba okienna ma powierzchnię | **A** | **B** | niż $8500\ \text{cm}^2$.

A. mniejszą **B.** większą

Obwód szyby jest równy | **C** | **D** |.

C. $60\left(4+\sqrt{2}\right)\ \text{cm}$ **D.** $20\left(14+3\sqrt{2}\right)\ \text{cm}$

11. Prostokątna tafla szkła, z której wycięto szybę okienną, miała wymiary $1345\ \text{mm} \times 860\ \text{mm}$. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Niewykorzystana tafla szkła ma powierzchnię równą

A. $2867\ \text{cm}^2$ **B.** $286{,}7\ \text{cm}^2$ **C.** $2867\ \text{mm}^2$ **D.** $2867\ \text{dm}^2$

12. Na sześciokącie foremnym opisano okrąg o promieniu $4\sqrt{2}\ \text{cm}$. Oblicz:

a) długość boku sześciokąta, **b)** obwód sześciokąta,

c) pole sześciokąta, **d)** długość krótszej przekątnej sześciokąta.

13. Oblicz długości wszystkich przekątnych sześciokąta foremnego o polu równym $54\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

E

14. Miara kąta wewnętrznego wielokąta foremnego jest równa $144°$. Czy ten wielokąt ma 10 boków?

Wybierz odpowiedź **A** albo **B** i jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

A.	Tak,	ponieważ	**1.**	$360° : 144° = 2{,}5$.
			2.	$360° : 10 = 36°$.
B.	Nie,		**3.**	$180° - \frac{360°}{10} = 144°$.

15. Pani Małgorzata zaprojektowała klomb, który ma kształt sześciokąta. Projekt został sporządzony w skali $1 : 100$ w następujący sposób: w trójkącie równobocznym o boku długości $12\ \text{cm}$ odcięto trzy naroża w kształcie trójkątów równobocznych o boku długości równej $\frac{1}{3}$ długości boku dużego trójkąta. Ustal, jaka jest rzeczywista powierzchnia klombu. Wyraź tę powierzchnię w metrach kwadratowych.

Odpowiedzi

Dział I. Liczby i działania

1. Dodawanie i odejmowanie liczb wymiernych

Ćwiczenia **1.** a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{7}{36}$ d) $\frac{3}{5}$ **2.** a) $\frac{19}{24}$ b) $1\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{55}$ d) $\frac{11}{156}$ **3.** a) $13\frac{3}{20}$ b) $3\frac{3}{8}$ c) $1\frac{19}{39}$ d) $\frac{23}{28}$ **4.** a) $>$ b) $>$ c) $<$ d) $<$ **5.** a) 2,86 b) 1,08 c) 8,3 d) 21,938 **6.** a) -17 b) 3 c) -6 d) $-1{,}02$ e) $-4\frac{1}{14}$

Rozwiąż zadania **1.** a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{5}{6}$ **2.** a) $\frac{19}{23}$ b) 1 c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{20}$ **3.** a) $\frac{25}{27}$ b) $\frac{7}{52}$ c) $1\frac{7}{24}$ d) $2\frac{1}{4}$ **4.** a) $5\frac{5}{24}$ b) $2\frac{5}{6}$ c) $6\frac{1}{15}$ d) $1\frac{5}{9}$ e) $2\frac{11}{24}$ f) $1\frac{13}{18}$ g) $2\frac{5}{12}$ h) $2\frac{59}{72}$ **5.** a) $<$ b) $>$ c) $<$ d) $>$ **6.** a) 5,83 b) 19,445 c) 1,51 d) 22,346 **7.** a) -21 b) 3 c) -6 d) $-4\frac{1}{2}$ e) $4\frac{11}{12}$ f) $-6{,}45$ g) $3\frac{1}{12}$ h) $-2{,}85$ **8.** Tak, ponieważ $\frac{5}{14} > \frac{1}{4}$. **9.** a) Nie, ponieważ $98{,}90\text{ zł} < 100\text{ zł}$. b) 104,89 zł **10.** np. $\frac{3}{14}$

Sprawdź, co umiesz! **1.** $\frac{10}{11}$ **2.** $\frac{5}{6} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2} > \frac{3}{8} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ **3.** $\frac{11}{36}$ **4.** PP

2. Rozwinięcia dziesiętne ułamków

Ćwiczenia **1.** a) 0,45 – skończone b) 0,525 – skończone c) $0{,}8\,(3)$ – nieskończone okresowe d) $0,\,(12)$ – nieskończone okresowe **2.** a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{23}{50}$ c) $2\frac{11}{20}$ d) $16\frac{1}{250}$ **3.** a) $>$ b) $<$ c) $>$ d) $<$

Rozwiąż zadania **1.** a) 0,6 – skończone b) 0,12 – skończone c) $0,\,(6)$ – nieskończone okresowe d) 0,032 – skończone e) $0{,}4\,(6)$ – nieskończone okresowe f) 0,1875 – skończone g) $0{,}2\,(7)$ – nieskończone okresowe h) $0,\,(285714)$ – nieskończone okresowe **2.** a) 3,75 b) $-12{,}875$ c) $-17{,}(81)$ d) $-15{,}5(3)$ **3.** a) $\frac{29}{50}$ b) $\frac{3}{50}$ c) $2\frac{3}{25}$ d) $3\frac{27}{200}$ **4.** I, IV, V **5.** a) $2\frac{23}{70}$ b) $4\frac{1}{12}$ c) $1\frac{37}{60}$ d) $4\frac{31}{40}$ e) $5\frac{19}{24}$ f) $-3\frac{8}{15}$ **6.** a) $>$ b) $>$ c) $>$ d) $<$ **7.** $0{,}(404) > 0{,}(40) > 0{,}04 > 0{,}00(4) > 0{,}00(40)$ **8.** a) np. $\frac{19}{180}$; 0,101 b) np. $\frac{199}{1800}$; 0,1101 c) np. $2{,}(34)$; 2,35 d) np. $5{,}0(2324)$; 5,02325 **9.** BC

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $1{,}(54)$ b) $2{,}(78)$ c) $8{,}8(1238)$ **2.** D **3.** PF

3. Zaokrąglanie liczb

Ćwiczenia **1.** a) 4000 – z nadmiarem b) 3800 – z nadmiarem c) 3800 – z nadmiarem d) 3798 – z niedomiarem e) 3798,4 – z niedomiarem f) 3798,43 – z nadmiarem **2.** a) 20 b) 87 c) 11

Rozwiąż zadania **1.** a) 70 – z nadmiarem; 210 – z niedomiarem; 70 – z niedomiarem; 100 – z nadmiarem b) 7900 – z nadmiarem; 5400 – z niedomiarem; 10 100 – z nadmiarem; 99 900 – z nadmiarem c) 24 000 – z nadmiarem; 213 000 – z niedomiarem; 67 000 – z niedomiarem; 20 000 – z nadmiarem d) 100 000 – z niedomiarem; 520 000 – z nadmiarem; 1 290 000 – z nadmiarem; 4 000 000 – z nadmiarem **2.** Merkury: 4900 km, Wenus: 12 100 km **3.** a) 68 b) 44 c) 34 d) 122 e) 92 d) 3 **4.** a) 11,4; 12,4; 82,2; 117,9 b) 8,13; 15,29; 72,28; 88,2 **5.** a) 10 b) 20 c) 6 **6.** Tak, wystarczy, ponieważ $2{,}99 \cdot 5 + 1{,}89 \cdot 6 < 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 27$. **7.** BC **8.** B **9.** D **10.** a) 5, 6, 7, 8, 9 b) 0, 1, 2, 3, 4 c) 2 **11.** $0{,}599999 \approx 0{,}6$, np. 0,5999991; 0,61; 0,5999999 **12.** a) 0,64 b) 0,5 c) 0,43 d) 0,5 **13.** Nie, ponieważ $\frac{1}{2} \cdot 70 \cdot 6 = 210$.

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) 2100 b) 10 700 000 c) 21,9 d) 3,01 **2.** D **3.** FF **4.** Nie, ponieważ $5{,}02 \cdot 4 + 4{,}01 \cdot 6 > 5 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 44$ [zł].

4. Mnożenie i dzielenie liczb wymiernych

Ćwiczenia **1.** a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $11\frac{1}{2}$ d) 6 e) $27\frac{1}{2}$ **2.** a) $1\frac{1}{2}$ b) $2\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{11}$ d) 126 e) 2 **3.** a) 16,3 b) 3,924 c) 50 d) 78,4 **4.** a) $2\frac{1}{2} < 3{,}5$ b) $2\frac{3}{8} < 3{,}5$ c) $3{,}38 < 3{,}5$ d) $2\frac{2}{11} < 3{,}5$ **5.** a) $7\frac{1}{3}$ b) $-61{,}1$ c) $-6{,}4$ d) $1\frac{21}{25}$

Rozwiąż zadania **1.** a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{16}$ c) $\frac{26}{35}$ d) 3 e) $16\frac{1}{2}$ f) 54 g) 6 h) $8\frac{4}{7}$ **2.** kolejno kolumnami: $5, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, 1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{5}, -2\frac{1}{2}, -2\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{10}{21}, -\frac{7}{15}, \frac{4}{7}, \frac{3}{20}, -\frac{3}{25}$ **3.** a) $1\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $7\frac{4}{5}$ e) $\frac{3}{32}$ f) $5\frac{2}{3}$ g) 3 h) $\frac{1}{4}$ **4.** a) 5,55 b) 4,298 c) 9,284 d) 860,2 e) 14,2 f) 262 g) 33 h) $66\frac{2}{3}$ **5.** a) $3\frac{3}{8}$ b) 10,05 c) $6\frac{5}{8}$ d) $10\frac{8}{15}$ e) 3 f) $2\frac{5}{11}$ g) 20 h) 3,6 **6.** A2 **7.** 4,2 tys. **8.** a) $2\frac{2}{5}$ cm b) Nie ma, ponieważ $19{,}8\text{ cm} < 19{,}9\text{ cm}$. **9.** a) –29,4 b) $-6\frac{2}{5}$ c) –4 d) $2\frac{1}{2}$ e) –18,7 f) 12 g) $\frac{1}{3}$ h) –25 **10.** a) –10 b) $\frac{3}{4}$ c) 33 d) $-6\frac{2}{5}$ e) $-10\frac{2}{3}$ f) $2\frac{7}{9}$ **11.** 6 razy **12.** a) $\frac{1}{3}$ b) $1\frac{3}{4}$ c) $1\frac{3}{7}$ **13.** a) $x = \frac{4}{5}$ b) $x = \frac{5}{7}$ c) $x = \frac{5}{8}$

Sprawdź, co umiesz! **1.** C **2.** a) 14 b) $\frac{4}{5}$ c) $3\frac{1}{2}$ d) 1,242 e) 61 **3.** $\frac{1}{3}$ **4.** PF

5. Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych

Ćwiczenia **1.** a) 257 b) 18 c) –63 **2.** a) $-12\frac{2}{3}$ b) $23\frac{5}{6}$ c) $-2\frac{11}{18}$ **3.** a) $\frac{13}{20}$ b) 0,68 c) $-\frac{5}{81}$

Rozwiąż zadania **1.** a) 19 b) 15 c) 177 d) –6 e) –5 f) 115 g) 40 h) 6,4 **2.** a) 42 b) 700 c) 4250 **3.** a) 43 b) 147 **4.** a) $1\frac{23}{80}$ b) $1\frac{7}{16}$ c) $9\frac{1}{4}$ d) $11\frac{1}{4}$ **5.** a) –9 b) $-3\frac{13}{15}$ c) –3,3 d) 3,2 e) –4 f) 18 **6.** a) $-2\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $1\frac{1}{5}$ d) $-\frac{1}{7}$ e) $-10\frac{3}{5}$ f) $-\frac{98}{99}$ **7.** I **8.** a) $4\frac{1}{60}$ b) –375 c) $6\frac{17}{18}$ d) $1\frac{1}{12}$ e) $\frac{72}{125}$ f) $2\frac{16}{45}$ **9.** A **10.** 80 **11.** o $\frac{41}{225}\text{ dm}^2$ **12.** 2

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $-23\frac{3}{4}$ b) $2\frac{1}{6}$ c) 0,4 **2.** D **3.** a) 78 b) –40 **4.** PF

Sprawdź umiejętności

1. AD **2.** a) 0,8 b) 13,46 c) 7,225 d) 4,1(36) **3.** a) $1\frac{3}{4}$ b) –0,71 c) $4\frac{3}{5}$ **4.** C **5.** a) 25 100 – z nadmiarem b) 4500 – z niedomiarem c) 32 200 – z nadmiarem d) 924 000 – z nadmiarem **6.** a) 0,25 – z niedomiarem b) 3,19 – z nadmiarem c) 2,01 – z nadmiarem d) 12,2 – z nadmiarem **7.** *Wskazówka*: $2000\text{ m} < 2460\text{ m}$. **8.** a) 25 b) $1\frac{1}{3}$ c) –64 **9.** a) 12 b) –4 c) –9 **10.** 12 paczek **11.** B **12.** A2 **13.** A **14.** 600 m^2 **15.** a) $\frac{9}{14}$ b) $1\frac{1}{42}$ c) $-4\frac{19}{60}$

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. *Wskazówka*: np. $\frac{23}{26}$, takich liczb jest nieskończenie wiele. **2.** *Wskazówka*: $a + c = \frac{35}{144} < \frac{5}{12} = b$ **3.** np. $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ **4.** C **5.** B **6.** I i II **7.** a) 12 600 b) 12,3453453 c) 0,63 d) 1,1 **8.** 150 000 razy (szacując przy założeniu, że powierzchnia Włoch ma $300\,000\text{ km}^2$) **9.** 0,(6) l **10.** AD **11.** 14 **12.** C **13.** a) 5 b) 279 **14.** a) $\frac{24}{55}$ b) $\frac{1}{2880}$ **15.** $-\frac{19}{55}$

Dział II. Obliczenia procentowe

1. Proporcje

Ćwiczenia **1.** a) 100 km/h b) 10 km; 0,25 h **2.** 45 kg **3.** 7 tulipanów, 14 róż, 28 goździków

Rozwiąż zadania **1.** a) nie b) tak c) tak d) nie e) tak **2.** kolejno kolumnami: 33; 0,5; 6,6 **3.** a) tak b) nie **4.** 7 kg **5.** tak **6.** a) 450 g masła, 450 g czekolady deserowej, 900 g mąki, 510 ml mleka, 6 jajek, 6 łyżeczek proszku do pieczenia, 1,5 łyżeczki sody oczyszczonej, 6 łyżek kakao, 3 szklanki cukru b) 25 babeczek c) 160 g **7.** 55,2 cm **8.** 5,5 h pieszo; 2,2 h rowerem **9.** 3250 zł **10.** *Wskazówka*: $120 : 4 = 30$, $30 : 10 = 3$.

Sprawdź, co umiesz! **1.** 0,09; 10 **2.** C **3.** PP

2. Procenty i ułamki

Ćwiczenia **1.** a) $\frac{3}{20}$ b) $\frac{23}{50}$ c) $1\frac{9}{25}$ d) $\frac{17}{40}$ e) $\frac{109}{200}$ f) $\frac{63}{1250}$ **2.** a) 0,3 b) 0,67 c) 1,48 d) 0,223 e) 0,007 f) 0,0083 **3.** a) 72 % b) 510 % c) 237,5 % d) $28\frac{4}{7}$ % e) $45\frac{5}{11}$ % f) $214\frac{22}{27}$ % **4.** a) 35 % b) 80 % c) 3,4 % d) 0,76 % e) 204,7 % f) 2400 %

Rozwiąż zadania **1.** $\frac{13}{20}$ – pomarańcze, $\frac{7}{20}$ – jabłka **2.** 72 % **3.** a) $\frac{3}{50}$ b) $\frac{3}{25}$ c) $1\frac{21}{50}$ d) $2\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{500}$ f) $\frac{51}{200}$ g) $1\frac{51}{250}$ h) $\frac{1}{2500}$ i) $\frac{1}{3125}$ j) $\frac{23}{700}$ **4.** a) 0,15 b) 0,08 c) 1,1 d) 3,32 e) 0,005 f) 0,0124 g) 0,05218 h) 0,00004 i) 0,0275 j) 0,00175 **5.** a) 68 % b) 240 % c) 625 % d) 12,5 % e) 77,5 % f) 32,8 % g) 701,5 % h) 205,2 % i) 510 % j) $44\frac{4}{9}$ % k) $166\frac{2}{3}$ % l) $8\frac{1}{3}$ % **6.** a) 23 % b) 206 % c) 357 % d) 0,5 % e) 32,5 % f) 240 % g) 1128 % h) 0,21 % i) 5234 % j) 3300 % **7.** 62,5 % **8.** 95,65 %, oboje mieli taki sam wynik.

Sprawdź, co umiesz! **1.** B **2.** a) $\frac{9}{25} = 0{,}36$ b) $1\frac{4}{5} = 1{,}8$ c) $\frac{1}{8} = 0{,}125$ d) $\frac{77}{1800} = 0{,}042(7)$ **3.** BC

3. Diagramy procentowe

Ćwiczenia **1.** a) 18 % b) opłaty c) nie **2.** a) tak b) 0,131 **3.** a) siatkówka

Rozwiąż zadania **1.** a) uprawianie sportu b) tak **2.** a) 80 % b) $\frac{1}{2}$ c) 75 %, nie d) nie **3.** FPP **4.** a) chomików b) tak c) tak d) chomiki, świnki morskie, króliki **5.** B2 **6.** a) tak b) warzywa – piątek, owoce – czwartek c) tak d) tak

Sprawdź, co umiesz! **1.** PF

4. Obliczanie procentu danej liczby

Ćwiczenia **1.** a) 0,6; 5,7 b) 54; 12,3 c) $2\frac{1}{16}$; 54,12 **2.** a) 28 b) 8,05 c) 0,405 d) $\frac{1}{2}$ **3.** 16,32 g **4.** piłka – 112 zł, kask – 138 zł, skakanka – 40,50 zł **5.** *Wskazówka*: Podatek VAT można obliczyć w następujący sposób 23 % · 140 500 zł.

Rozwiąż zadania **1.** a) 22 b) 0,33 c) 44,8 d) 14,4 e) $\frac{1}{4}$ f) 31,5 g) 0,004 h) 0,312 **2.** I = IV = VI = VII; II = V; III = VIII **3.** 9 **4.** a) = b) > c) < d) < **5.** 36,9 g **6.** 10 g < 20 g, nie ma. **7.** 4389 zł **8.** a) 15,34 mln osób b) 23,01 mln osób **9.** a) 243 b) o 81 **10.** Nie, najpierw jechał 72 km/h, a później 54 km/h. **11.** najmniej – III, najwięcej – I **12.** o 20,64 cm^2 **13.** o 1 cm

Sprawdź, co umiesz! **1.** 780 **2.** BC **3.** C **4.** 14,26 zł **5.** PF

5. Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Ćwiczenia **1.** a) 25 b) $7\frac{1}{7}$ c) 25 000 **2.** 137,50 zł **3.** 750 zł

Rozwiąż zadania **1.** a) 200 b) 240 c) 75 d) 350 e) 2400 f) 50 g) 4 h) 2000 i) 40 **2.** 4500 zł **3.** 28 **4.** a) 400 b) 330 c) 240 d) $1\frac{1}{4}$ **5.** a) 3400 zł b) 612 zł **6.** *Wskazówka*: 12 osób stanowi 40 % uczniów klasy 7c. **7.** 200 zł **8.** 900 zł **9.** 20 cm **10.** 27 **11.** 36 **12.** 62,5 **13.** Nie jest, bo $0{,}96 < 1$.

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) 210 b) 24 c) 4062,5 **2.** Nie jest, ponieważ 32 % tej liczby to 128. **3.** FFP **4.** 15

6. Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Ćwiczenia **1.** a) 10 % b) 30 % **2.** a) 40 % b) 250 % c) 52,5 % **3.** a) 0,25 % b) 2400 % c) 0,4 % **4.** 120 %

Rozwiąż zadania **1.** a) 20 % b) 5 % c) 1500 % d) 1400 % e) 48 % f) 50 % **2.** a) 4 %; 2500 % b) 160 %; 62,5 % c) 76 %; $131\frac{11}{19}$ % **3.** a) 4 % b) 1200 % c) 20 % d) 0,2 % e) 12,5 % f) 0,75 % **4.** 45 % **5.** 87,5 % **6.** D **7.** B1 **8.** a) 60 % b) 50 % c) *Wskazówka*: $\frac{60+80}{600} \cdot 100\ \%$. **9.** 5 % **10.** W obu naczyniach jest taka sama.

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) 30 % b) 50 % c) 50 % **2.** 400 % **3.** *Wskazówka*: 1 km = 1500 m, $\frac{1500}{2250} = \frac{2}{3}$.
4. FP

7. O ile procent więcej, o ile procent mniej

Ćwiczenia **1.** a) o $6\frac{2}{3}$ % b) o $6\frac{1}{4}$ % **2.** a) o 40 % b) o 25 pp. **3.** zwiększyła się o 44 %

Rozwiąż zadania **1.** a) o 25 % b) o 250 % c) o 275 % d) o $16\frac{2}{3}$ % **2.** o 28 % **3.** a) o 150 %
b) o 60 % **4.** a) o $26\frac{2}{3}$ % b) o 8 pp. **5.** a) 160 b) o 8 c) o 87,5 % **6.** a) o 60 % b) o 37,5 %
7. a) 45,5 kg tlenu; 12,6 kg węgla; 7 kg wodoru; 2,1 kg azotu b) o 550 % c) o 72,58 % **8.** o 21 %
9. o 32 % **10.** a) o 1 pp. b) o 12,5 % c) o 72,50 zł **11.** a) partia X – zmalało o 8 %; partia Y – wzrosło o 12,5 % b) partia X – zmalało o 2 pp.; partia Y – wzrosło o 4 pp. c) o 84 **12.** a) o 0,14 pp. b) o 2 %
13. a) o 125 % b) o 406,25 %

Sprawdź, co umiesz! **1.** AD **2.** C **3.** o 200 % **4.** B2

8. Zastosowanie procentów w praktyce

Ćwiczenia **1.** 26 125 zł **2.** 5020,25 zł **3.** 0,3 % **4.** 10,4 % **5.** tak, ponieważ $0{,}15 \cdot 420 = 63$;
$\frac{63}{420-70} \cdot 100\ \% = 18\ \%$

Rozwiąż zadania **1.** a) 15 051 zł b) 15 094,50 zł c) 15 082,90 zł d) 15 229,35 zł **2.** 120 zł
3. a) 12,96 zł b) 38,88 zł c) 51,84 zł d) 58,32 zł **4.** a) w banku B, 3,8 % b) 27 500 zł **5.** 0,32 %
6. 37 500 zł **7.** $31\frac{2}{3}$ % **8.** 4,8 % **9.** 16 % **10.** a) 5 % b) 24 % **11.** 1,25 %
12. *Wskazówka*: $m_s = 0{,}1 \cdot 600 + 0{,}02 \cdot 200 = 64$, $m_r = 600 + 200 = 800$.

Sprawdź, co umiesz! **1.** FP **2.** a) 25 zł b) 10 020,25 zł c) 15,20 zł **3.** D **4.** 24,8 %

Sprawdź umiejętności

1. kolejno kolumnami: 0,5; 24; $\frac{1}{6}$ **2.** o 42 min **3.** BD **4.** C **5.** B3 **6.** A–II, B–V, C–III, D–I, E–IV
7. *Wskazówka*: 30 % · 850 zł – kwota obniżki **8.** notes – 33,60 zł; bułka 1,62 zł; kalkulator – 73,80 zł
9. AD **10.** a) 80 b) 6000 c) 52 500 **11.** C **12.** FFP **13.** a) 40 % b) 12,5 % **14.** makaron pomidorowy o 25 %; łosoś w sosie cytrynowym o 5 % **15.** a) 3 b) o 75 pp. c) o 93,75 % **16.** 120 zł; zmalała o 4 %
17. PFPF **19.** 50 486 zł **20.** 50 000 zł **21.** 10 % **22.** 5,5 %

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. 20 km/h **2.** D **3.** BC **4.** Tak, stanowi. **5.** Tak, więcej. **6.** 0,0005 **7.** a) 400 b) o 12 **8.** 52 cm
9. $p = 10$ **10.** a) 25 % b) $8\frac{1}{3}$ % c) 16 % **11.** 62,5 % **12.** 23 % **13.** a) 90 zł b) zmalała o 10 %
c) $111\frac{1}{9}$ % **14.** a) 33,3 % b) o 76,6 % c) o 65,8 % **15.** A **16.** AD **17.** 10,75 %

Dział III. Potęgi

1. Potęga o wykładniku naturalnym

Ćwiczenia **1.** a) 49 b) –32 c) 26 d) 1 e) 1 **2.** a) 25 b) 125 c) 25 d) –125 **3.** Są równe. **4.** a) $\frac{1}{625}$
b) $-\frac{32}{243}$ c) $4\frac{17}{27}$ d) $12\frac{1}{4}$ **5.** a) 10^8 b) 10^{10} c) 10^{12} **6.** a) $(0{,}1)^7$ b) $(0{,}1)^{11}$ c) $(0{,}1)^{13}$ **7.** a) 10^5 g b) 10^4 kg
c) $(0{,}1)^1$ m d) $(0{,}1)^2$ dm

Rozwiąż zadania **1.** a) 8^6 b) $\left(\frac{1}{7}\right)^4$ c) $(-9)^5$ d) $(1{,}2)^6$ **2.** a) 512 b) 1 c) –5 d) 1 e) 64 f) –1 g) –1,331
h) –729 i) –0,09 j) –0,0016 k) $\frac{1}{81}$ l) $-\frac{1}{32}$ m) $5\frac{1}{16}$ n) 216 o) $-11\frac{1}{9}$ **3.** a) 1296 b) –27 c) $15\frac{5}{8}$ d) $3\frac{1}{16}$
4. a) 10^4 g b) 10^5 kg c) 10^4 m d) 10^5 mm e) $(0{,}1)^3$ kg f) $(0{,}1)^4$ t g) $(0{,}1)^2$ km h) $(0{,}1)^4$ km **5.** a) –5; 5
b) –11; 11 c) $-\frac{4}{7}; \frac{4}{7}$ d) $-1\frac{4}{5}; 1\frac{4}{5}$ e) –0,4; 0,4 f) –1,3; 1,3 **6.** a) 3 b) $-\frac{1}{2}$ c) 0,5 d) $-1\frac{1}{5}$ e) –0,4 f) 0,7
7. a) < b) > c) < **8.** C **9.** D **10.** 340 osób **11.** a) 5 b) 1 c) 7 d) 9

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) 729 b) $\frac{1}{2023}$ c) 1 d) $-1\frac{169}{343}$ e) 0,000001 **2.** –432 **3.** FF **4.** D

2. Iloczyn i iloraz potęg o jednakowych podstawach

Ćwiczenia **1.** a) 9^{11} b) $\left(-\frac{1}{7}\right)^{7}$ c) $(0{,}8)^{16}$ d) $\left(-3\frac{1}{2}\right)^{13}$ **2.** a) 5^{11} b) $(0{,}5)^{5}$ c) $\left(1\frac{1}{9}\right)^{12}$ d) $\left(\frac{1}{11}\right)^{5}$ **3.** a) 2^{11} b) 5^{8} c) $(0{,}3)^{12}$ **4.** a) x^6 b) $-x^{14}$ c) $-x^7$

Rozwiąż zadania **1.** a) 2^{10} b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{11}$ c) $(-2)^7$ d) $(0{,}24)^7$ e) 3^9 f) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{10}$ g) 3^{12} h) $(1{,}3)^{12}$ i) $(0{,}5)^{10}$ **2.** a) 12^6 b) $(0{,}4)^6$ c) $(-7)^5$ d) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{2}$ e) 15^7 f) 10^{13} **3.** a) 2^9 b) 5^4 c) 3^6 **4.** a) 1 000 000 b) 1 c) 25 d) $-\frac{1}{32}$ **5.** a) 64 b) 81 c) 64 d) $1\frac{1}{2}$ **6.** a) a^{13} b) a^{10} c) ^{11} d) a^{10} e) a^4 f) a^0 **7.** a) $x = 4$ b) $x = 3$ c) $x = 10$ d) $x = 0$ e) $x = 4$ f) $x = 2$ **8.** a) $x = 2$ b) $x = \frac{1}{3}$ c) $x = 1\frac{4}{5}$ lub $x = -1\frac{4}{5}$ **9.** a) $(ab)^2$; $\frac{1}{4}$ b) $(-ab)^3$; $-\frac{1}{8}$ c) $-(ab)^2$; $-\frac{1}{4}$

Sprawdź, co umiesz! **1.** C **2.** a) 25 b) –32 c) 10 000 000 **3.** C **4.** FP

3. Potęgowanie iloczynu i ilorazu

Ćwiczenia **1.** a) 15^6 b) 45^4 c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5}$ d) $(0{,}46)^7$ **2.** a) 4^4 b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3}$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{5}$ d) $(0{,}9)^8$ **3.** a) –512 b) 64 c) 81

Rozwiąż zadania **1.** a) 24^4 b) 10^9 c) 4^{10} d) 10^7 **2.** a) 2^{16} b) 2^6 c) 6^5 d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{8}$ **3.** a) 125 b) $\frac{1}{64}$ c) 1 d) 196 e) 0,027 f) –27 g) 10 000 h) $39\frac{1}{16}$ **4.** a) 32 b) 81 c) $\frac{1}{64}$ **5.** a) 10 000 000 b) 225 c) 1296 d) 1 **6.** a) $(5k)^9$ b) $\left(\frac{m}{7}\right)^{16}$ c) $(12k)^{12}$ d) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{12}$ e) $\left(-1\frac{3}{5}m\right)^{7}$ f) $\left(\frac{22}{k}\right)^{8}$ **7.** a) $x = 3$ b) $x = 7$ c) $x = 5$ d) $x = 42$ e) $x = 8$ f) $x = \frac{1}{16}$ **8.** $b < c < a$ **9.** a) $32 \cdot 6^{25}$ b) np. $1 \cdot 360^2$ c) np. $343 \cdot 2^9$ **10.** Tak, ponieważ $\frac{12^{20}}{2^{25} \cdot 3^{20}} = 2^{15}$.

Sprawdź, co umiesz! **1.** D **2.** PF **3.** $\frac{1}{16}$ **4.** B1

4. Potęgowanie potęgi

Ćwiczenia **1.** a) 4^{14} b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{77}$ c) 4^{48} d) $\left(\frac{5}{9}\right)^{36}$ **2.** a) 3^{16} b) 2^{25} c) 5^6 d) 7^{23} **3.** y jest 1331 razy mniejsza **4.** *Wskazówka*: $(10^5)^2 = 10^{10}$, $10^{5^2} = 10^{25}$.

Rozwiąż zadania **1.** a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{18}$ b) $(0{,}36)^8$ c) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^{35}$ d) 3^{30} e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{24}$ **2.** a) 256 b) $-\frac{1}{27}$ c) 1 d) 1 e) 0,0016 **3.** a) $(10^5)^2$, 100 razy b) $(2^5)^2$, 64 razy c) $(-8)^{15}$, 64 razy **4.** a) a^8 b) a^{10} c) a^{14} d) a^8 **5.** a) 16 b) 1 c) 1,96 d) 144 **6.** $y > z > x$ **7.** *Wskazówka*: $(a^n)^2 = a^{2n}$.

Sprawdź, co umiesz! **1.** C **2.** 10^{10} **3.** FP **4.** B3

5. Działania na potęgach

Ćwiczenia **1.** a) 216 b) 1 c) 343 d) 81 **2.** 64 **3.** *Wskazówka*: $2^{2023} + 2^{2025} = 1 \cdot 2^{2023} + 2^2 \cdot 2^{2023}$.

Rozwiąż zadania **1.** a) 2^{18} b) 3^{15} c) 2^{22} d) 3^{15} **2.** a) $\frac{8}{125}$ b) $\frac{32}{243}$ c) 243 d) 1 **3.** a) $b < c < a$ b) $c < b < a$ **4.** a) 6^5 b) 2^8 c) 5^5 **5.** *Wskazówka*: $11^{11} - 11^{10} = 11 \cdot 11^{10} - 1 \cdot 11^{10}$. **6.** a) *Wskazówka*: $\frac{2^{11} + 4^5}{2^{13} : 8} = \frac{2^{11} + 2^{10}}{2^{13} : 2^3} = \frac{2 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^{10}}{2^{10}}$. b) *Wskazówka*: $\frac{9^3 : 3^2 - 3^3}{243 : 3} = \frac{3^6 : 3^2 - 3^3}{3^5 : 3}$. **7.** 2^9 **8.** a) np. $7 \cdot 2^4$ b) np. $19 \cdot 5^4$ c) $1 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2$

Sprawdź, co umiesz! **1.** D **2.** $\frac{16}{625}$ **3.** C **4.** PP

6. Notacja wykładnicza

Ćwiczenia **1.** a) nie b) tak c) tak d) nie **2.** a) $2{,}23 \cdot 10^8$ b) $1{,}23 \cdot 10^{11}$ c) $7{,}68 \cdot 10^9$ d) $1 \cdot 10^5$
3. a) 3560 b) 213 500 000 c) 10 002 d) 1 000 000 **4.** a) $\frac{1}{1000} = 0{,}001$ b) $\frac{1}{10\,000\,000} = 0{,}0000001$
c) $\frac{1}{100\,000\,000} = 0{,}00000001$ d) $\frac{1}{10\,000\,000\,000} = 0{,}0000000001$ **5.** a) $\frac{1}{100\,000} = 10^{-5}$ b) $\frac{1}{10\,000\,000} = 10^{-7}$
c) $\frac{1}{10\,000\,000\,000} = 10^{-10}$ d) $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ **6.** a) $8 \cdot 10^{-4}$ b) $1{,}2 \cdot 10^{-7}$ c) $3{,}4 \cdot 10^{-8}$ d) $7{,}21 \cdot 10^{-4}$ **7.** a) 0,01
b) 0,004 c) 0,00000143 d) 0,00002002

Rozwiąż zadania **1.** a) nie b) tak c) tak d) nie **2.** a) $6 \cdot 10^7$ b) $5{,}24 \cdot 10^8$ c) $4{,}21 \cdot 10^{10}$ d) $1{,}11 \cdot 10^{11}$
e) $6{,}5 \cdot 10^{10}$ f) $2{,}524 \cdot 10^{15}$ **3.** a) $3 \cdot 10^8$ m/s b) $3{,}127 \cdot 10^5$ km^2 c) $3{,}4 \cdot 10^2$ m/s **4.** a) $2{,}4 \cdot 10^4$ l
b) $6 \cdot 10^3$ mm c) $1{,}46 \cdot 10^5$; $1 \cdot 10^5$; $8{,}6 \cdot 10^4$ **5.** a) 2 000 000 b) 31 120 000 c) 580 000 000 d) 8 410 000 000
e) 50 001 000 000 f) 20 302 **6.** a) $5 \cdot 10^{-5}$ b) $1{,}7 \cdot 10^{-3}$ c) $1{,}01 \cdot 10^{-4}$ d) $4{,}6 \cdot 10^{-6}$ e) $3{,}01 \cdot 10^{-8}$ f) $1{,}372 \cdot 10^{-7}$
7. a) $2 \cdot 10^{-3}$ kg b) $4 \cdot 10^{-6}$ mm/s c) $7 \cdot 10^{-19}$ kg d) $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g **8.** $2{,}1 \cdot 10^6 = 2\,100\,000$; $21 \cdot 10^{-3} = 0{,}021$;
$2{,}1 \cdot 10^{-5} = 0{,}000021$; $0{,}21 \cdot 10^5 = 21\,000$; $0{,}0021 \cdot 10^5 = 210$ **9.** A **10.** C **11.** a) $3{,}55 \cdot 10^6$ b) $1{,}0001 \cdot 10^5$
c) $1{,}2 \cdot 10^7$ **12.** 81,28 razy **13.** a) $5{,}5 \cdot 10^2$ b) $1{,}2 \cdot 10^4$ c) $2{,}5 \cdot 10^6$ d) $5{,}2 \cdot 10^{-2}$ e) $2{,}2 \cdot 10^{-4}$ f) $4 \cdot 10^{-7}$

Sprawdź, co umiesz! **1.** FP **2.** B **3.** $1{,}6 \cdot 10^5$ cm^2 **4.** B

Sprawdź umiejętności

1. a) 1 b) 3,6 c) 4913 d) $7\frac{1}{9}$ e) 6,25 **2.** BD **3.** FP **4.** E **5.** 864 razy **6.** a) $(1{,}5)^6$ b) 8^7 c) 5^1
7. a) $x = 7$ b) $x = 18$ c) $x = 5$ **8.** a) 5^{13} b) 3^{25} c) 2^5 d) 7^4 **9.** a) 729 b) 9 c) 1
10. $16^3 > 2^8 > 4^3 > (4^0)^3$ **11.** a) 2^4 b) 3^3 c) 5^1 d) 2^3
12. *Wskazówka*: $9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 + 9^4 = 9 \cdot 9^4$. **13.** FF **14.** a) –59 b) 1 c) 11 d) 0,24
15. a) $1 \cdot 10^9$ b) $3{,}45 \cdot 10^{12}$ c) $1{,}01 \cdot 10^{16}$ d) $3 \cdot 10^{-7}$ e) $2{,}74 \cdot 10^{-6}$ f) $9{,}3 \cdot 10^{-9}$
16. a) 12 000 000 b) 354 000 c) 0,000000000001 d) 0,0000000523
17. $P_{JG} = 8{,}2103 \cdot 10^4$ km^2; $P_{MK} = 3{,}718 \cdot 10^5$ km^2; 4,53 razy

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. 3,1 % **2.** *Wskazówka*: $(2^{50}+1)^2 = (2^{50}+1) \cdot (2^{50}+1)$, wartość wyrażenia $(2^{50}+1)$ jest liczbą nieparzystą. **3.** C **4.** FF **5.** $x = 15$ **6.** a) niebieskie: $\left(\frac{1}{3}\right)^1$ m^2; żółte: $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ m^2; czerwone: $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ m^2
b) fioletowe: 2023^0 m^2 **7.** PPFP **8.** 0 **9.** $x > y > z$
10. *Wskazówka*: $8^{15} + 3 \cdot 8^{16} + 5 \cdot 8^{17} = 1 \cdot 8^{15} + 3 \cdot 8^1 \cdot 8^{15} + 5 \cdot 8^2 \cdot 8^{15}$ **11.** Nie. *Wskazówka*: $4^{113} = 2^{226}$.
12. a) < b) > c) < d) < **13.** a) $1{,}8 \cdot 10^{18}$ b) $2{,}43 \cdot 10^{15}$ c) $2{,}8 \cdot 10^{43}$ d) $1{,}2 \cdot 10^{-10}$ e) $2{,}02 \cdot 10^{14}$
f) $4{,}95 \cdot 10^{11}$ **14.** a) $x = 4$ b) $x = -4$ c) $x = -27$ **15.** a) $1{,}15 \cdot 10^5$ kg; $2 \cdot 10^{-3}$ kg; $3 \cdot 10^{-2}$ kg
b) $2{,}5 \cdot 10^4$ g; $3 \cdot 10^6$ g; $1{,}2 \cdot 10^4$ g c) $3 \cdot 10^{-2}$ cm; $9{,}9 \cdot 10^4$ cm; $2{,}3 \cdot 10^6$ cm d) $2{,}4 \cdot 10^{-1}$ m; $3{,}6 \cdot 10^{-1}$ m; $6 \cdot 10^3$ m

Dział IV. Pierwiastki

1. Pierwiastek kwadratowy

Ćwiczenia **1.** a) 3 b) 7 c) 0 d) 11 e) 13 **2.** a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $3\frac{1}{2}$ d) $1\frac{2}{3}$ e) $1\frac{5}{6}$ **3.** 1,9 **4.** a) 63 b) $4\frac{1}{3}$
c) $16\frac{2}{3}$

Rozwiąż zadania **1.** a) 9 b) 14 c) 60 d) 120 e) 150 **2.** a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{6}{11}$ c) $\frac{8}{13}$ d) $\frac{9}{10}$ e) $\frac{6}{7}$ f) $1\frac{3}{4}$ g) $1\frac{4}{7}$
h) $1\frac{3}{5}$ i) $2\frac{1}{4}$ j) $1\frac{1}{15}$ **3.** a) 0,3 b) 0,9 c) 1,3 d) 0,11 e) 0,002 **4.** $\sqrt{0{,}1225} < \sqrt{\frac{4}{25}} < \sqrt{0{,}25} < \sqrt{1\frac{17}{64}} < \sqrt{1\frac{7}{9}}$
5. a) 4 mm b) 0,6 cm c) $1\frac{5}{11}$ dm d) 0,02 m e) 0,19 km **6.** a) $x = 36$ b) $x = 64$ c) $x = \frac{9}{49}$ d) $x = 0{,}04$
e) $x = 2\frac{1}{4}$ **7.** 2,8 m **8.** a) 2 b) $\frac{7}{24}$ c) $-4\frac{7}{8}$ d) $-\frac{1}{6}$ e) $-1\frac{1}{30}$ f) 10,5
9. *Wskazówka*: $\sqrt{12 + \sqrt{8\sqrt{2\sqrt{\sqrt{16}}}}} = \sqrt{12 + \sqrt{8\sqrt{2\sqrt{4}}}}$.

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) 16 b) $\frac{5}{14}$ c) $1\frac{6}{11}$ d) 0,13 **2.** C **3.** FF

2. Działania na pierwiastkach kwadratowych

Ćwiczenia **1.** a) 10 b) $\frac{1}{10}$ c) 8 d) $\frac{3}{5}$ **2.** a) 12 b) $1\frac{6}{7}$ c) 140 d) $\frac{2}{7}$ **3.** 42 **4.** a) $5\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{6}$ c) $4\sqrt{15}$ d) $35\sqrt{2}$ **5.** a) $>$ b) $<$ c) $<$ d) $<$ **6.** a) $10\sqrt{2}$ b) $6\sqrt{2}$ c) $13\sqrt{7}+13\sqrt{5}$ **7.** a) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ d) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

Rozwiąż zadania **1.** a) 9 b) 8 c) $\frac{3}{10}$ d) 45 e) 121 f) 3 g) $\frac{3}{4}$ h) $1\frac{7}{13}$ i) 20 j) 60 k) –625 l) –6 **2.** a) 32 b) 33 c) 52 **3.** a) $4\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $10\sqrt{3}$ d) $5\sqrt{6}$ e) $6\sqrt{3}$ f) $6\sqrt{15}$ g) $6\sqrt{11}$ h) $\frac{8\sqrt{2}}{13}$ **4.** a) $\sqrt{90}$ b) $\sqrt{48}$ c) $\sqrt{0{,}08}$ d) $\sqrt{12}$ **5.** a) $>$ b) $>$ c) $>$ d) $<$ **6.** a) 5 b) 1 c) 1,7 d) 1,3 **7.** a) $-4\sqrt{10}$ b) $-3\sqrt{13}$ c) 0 d) $21\sqrt{3}$ e) $-9\sqrt{2}$ f) $-4\sqrt{5}$ g) $\sqrt{7}$ h) $3\sqrt{2}-\sqrt{3}$ i) $7\sqrt{3}-9\sqrt{2}$ **8.** a) $P = 4\text{ cm}^2$ b) $P = 18\text{ cm}^2$ c) $P = 6\sqrt{3}\text{ cm}^2$ d) $P = 60\sqrt{3}\text{ cm}^2$ **9.** a) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ c) $\frac{\sqrt{14}}{4}$ d) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ **10.** B **11.** AC **12.** a) 6 b) –23 c) $\frac{3}{16}$ d) $-\frac{4}{17}$ **13.** $-\sqrt{16\sqrt{16}} < -\sqrt{3\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{15} < \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{6}{9}}:\sqrt{\frac{1}{6}} < \sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$ **14.** a) $x = 6$ b) $x = 5$ c) $x = 0{,}1$ d) $x = 0{,}0004$ e) $x = \frac{4}{25}$ f) $x = 25$ **15.** *Wskazówka*: $\frac{6\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{147}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{9\cdot 3}+\sqrt{16\cdot 3}-\sqrt{49\cdot 3}}{\sqrt{3}}$.

Sprawdź, co umiesz! **1.** C **2.** $P = 36\text{ dm}^2$; $Obw. = 14\sqrt{3}\text{ dm}$ **3.** a) $\sqrt{5}$ b) $-2\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{13}$ d) 2 e) –6 **4.** FPP **5.** D

3. Pierwiastek sześcienny

Ćwiczenia **1.** a) 5 b) –1 c) –4 d) 10 **2.** a) $-\frac{1}{6}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $-\frac{2}{9}$ d) $2\frac{1}{2}$ e) $-3\frac{1}{3}$ **3.** 1,5 **4.** a) –4 b) 97 c) $-11\frac{1}{3}$

Rozwiąż zadania **1.** a) 0 b) –5 c) 8 d) –9 **2.** a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{3}{5}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{4}{5}$ f) $-\frac{7}{20}$ g) $1\frac{1}{4}$ h) $1\frac{1}{2}$ i) $2\frac{2}{3}$ j) $-2\frac{2}{9}$ **3.** a) 0,1 b) –0,2 c) 0,4 d) –0,3 **4.** a) $=$ b) $<$ c) $<$ d) $<$ **5.** a) $x = 512$ b) $x = -216$ c) $x = \frac{27}{64}$ d) $x = -0{,}027$ e) $x = 2{,}744$ **6.** a) 4 mm b) 0,2 cm c) 1,1 dm d) $1\frac{2}{3}$ m **7.** a) 41 b) –36 c) –54 d) $\frac{3}{10}$ e) $-6\frac{1}{2}$ f) $1\frac{4}{9}$ **8.** $P_c = 216\text{ cm}^2$ **9.** a) 5 b) 2 c) –6 d) $\frac{3}{4}$ e) –2 f) –3 **10.** a) 1 b) 1

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) –1,5 b) 3,3 c) –2,45 d) $13\frac{2}{3}$ **2.** C **3.** $1\frac{1}{8}$ **4.** FP

4. Działania na pierwiastkach sześciennych

Ćwiczenia **1.** a) 7 b) $\frac{3}{4}$ c) 5 d) $1\frac{2}{3}$ **2.** Nie, ponieważ $-\sqrt[3]{-11} = \sqrt[3]{11} \neq -\sqrt[3]{11}$. **3.** a) 18 b) 22 c) 34 d) 30 **4.** 14 **5.** a) $2\sqrt[3]{2}$ b) $2\sqrt[3]{6}$ c) $3\sqrt[3]{2}$ d) $4\sqrt[3]{5}$ **6.** a) $>$ b) $<$ c) $>$ d) $>$ **7.** a) $-5\sqrt[3]{6}$ b) $11\sqrt[3]{5}$ c) $-\sqrt[3]{4}$

Rozwiąż zadania **1.** a) 9 b) –5 c) –8 d) –2 e) 5 f) 2 g) 8 h) 200 i) 7 j) 189 k) 6 l) 1 **2.** a) –10 b) 32 c) $-\frac{3}{7}$ d) $\frac{1}{6}$ **3.** a) $10\sqrt[3]{5}$ b) $5\sqrt[3]{3}$ c) $-3\sqrt[3]{11}$ d) $\frac{4\sqrt[3]{3}}{7}$ **4.** a) $\sqrt[3]{135}$ b) $\sqrt[3]{1296}$ c) $\sqrt[3]{-0{,}005}$ d) $\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$ **5.** a) $<$ b) $>$ c) $<$ d) $>$ **6.** a) $2\sqrt[3]{12}$ b) $3\sqrt[3]{4}$ c) $-2\sqrt[3]{13}$ d) $15\sqrt[3]{10}$ **7.** a) $-2\sqrt[3]{3}$ b) $-3\sqrt[3]{3}$ c) $-4\sqrt[3]{4}$ d) $-14\sqrt[3]{2}$ **8.** $2\frac{1}{2}\sqrt[3]{32} > 4\sqrt[3]{3} > 2\sqrt[3]{4} > 0{,}2\sqrt[3]{2000} > 20\sqrt[3]{0{,}0002} > \sqrt[3]{1}$ **9.** a) $V = 4\text{ cm}^3$ b) $V = 24\text{ cm}^3$ **10.** $x = 2$

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) –8 b) $-\frac{1}{27}$ c) 20 d) 3 **2.** D **3.** 3 **4.** PP

5. Szacowanie pierwiastków

Ćwiczenia **1.** 2,6 **2.** a) 5 i 6 b) 21 i 22 c) 4 i 5 d) –10 i –9 **3.** $a = 6$ **4.** a) 5,19 b) 0,73 c) –0,32 d) 6,41

Rozwiąż zadania **1.** a) 2 i 3 b) 12 i 13 c) 4 i 5 d) –6 i –5 **2.** $a = 11$ **3.** a) 3 b) 7 c) 4 d) 9 e) 16 f) 3 g) 7 h) –5 **4.** a) 3, 4, 5 b) –8, –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 c) –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 d) 6 **5.** a) 7,95 b) 2,92 c) –4,32 d) –13,42 **6.** a) $P = 15\ \text{cm}^2$; $Obw. = 15\ \text{cm}$ b) $P = 28\ \text{cm}^2$; $Obw. = 23\ \text{cm}$ c) $P = 5\ \text{cm}^2$; $Obw. = 10\ \text{cm}$ **7.** BC **8.** D

9. $3\sqrt{27} - 2\sqrt{3} > 2\sqrt{24} - \sqrt{6} > \sqrt{18} + 2 > 2 + \sqrt{17} > \sqrt{8} + \sqrt{2}$ **10.** *Wskazówka*: $10 < \sqrt{112} < 11$; $13 < \sqrt[3]{2240} < 14$.

Sprawdź, co umiesz! **1.** 7 **2.** $Obw. = 20{,}8\ \text{cm}$ **3.** D **4.** FP

6. Działania na potęgach i pierwiastkach

Ćwiczenia **1.** a) 25 b) 243 c) 32 d) –64 **2.** a) 80 b) 64 c) 192 d) 576 **3.** a) 7 b) –4 c) 6 d) 0,8

Rozwiąż zadania **1.** a) 144 b) $\frac{1}{64}$ c) $\frac{1}{243}$ d) 0,027 **2.** a) 54 b) $\frac{1}{3}$ c) 189 d) 1728 e) 1024 f) $\frac{3}{64}$ g) $\frac{25}{64}$ h) $-\frac{27}{512}$ **3.** a) –11 b) 0,2 c) 6 d) –25 **4.** a) 84 b) –4 c) 1 d) –29 e) 25 f) 50 g) –70 h) 576 i) 223

5. a) = b) = c) > **6.** a) ananas **7.** B **8.** B2 **9.** <

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) 225 b) 1,96 c) 5 d) $\frac{1}{10}$ **2.** BC **3.** $-16\frac{1}{4}$ **4.** FP

Sprawdź umiejętności

1. a) 24 b) $\frac{10}{11}$ c) 0,12 d) $1\frac{4}{5}$ e) 50 f) $\frac{1}{6}$ g) $-1\frac{1}{3}$ h) –0,9 **2.** a) $4\sqrt{7}$ b) $2\sqrt{69}$ c) $3\sqrt[3]{6}$ d) $-4\sqrt[3]{7}$

3. a) $\sqrt{153}$ b) $\sqrt{5\frac{1}{2}}$ c) $\sqrt[3]{72}$ d) $\sqrt[3]{-\frac{4}{27}}$ **4.** $-2\sqrt{2} < \sqrt[3]{-8} < -\sqrt{1} < 3\sqrt[3]{0} < \sqrt{1} < 2\sqrt{3}$ **5.** a) $P = 12\ \text{cm}^2$; $Obw. = 12\sqrt{2}\ \text{cm}$ b) $P = 3\ \text{cm}^2$; $Obw. = \left(2\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[2]{3}\right)\ \text{cm}$ c) $P = 40\ \text{cm}^2$; $Obw. = \left(6\sqrt{10} + 4\sqrt{5}\right)\ \text{cm}$

6. $V = 72\ \text{cm}^3$ **7.** AC **8.** a) $6\frac{2}{3}$ b) $2\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) 55 e) 2 f) $5\sqrt{2}$ **9.** 30 **10.** D **11.** B1 **12.** a, b, c **13.** FP **14.** a) 36 b) –2 c) 1 000 000

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. a) nie b) tak c) nie d) nie e) tak **2.** a) 28 b) 33 c) 18 d) –24 e) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ f) 0,27 g) –0,01 h) 1,2 **3.** 0

4. a) 4 b) 1 c) 200 **5.** B **6.** a) $x = 3\frac{2}{3}$ b) $x = 5\frac{19}{25}$ **7.** FP **8.** Nie jest. **9.** $P = 10\sqrt{5}\ \text{cm}^2$ **10.** $\sqrt{11}$

11. *Wskazówka*: $\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. **12.** AD **13.** C

14. *Wskazówka*: $\left(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7}\right)^3 = \left(3\sqrt[3]{7}\right)^3$. **15.** a) 30 b) 33 c) 15 d) 24

Dział V. Wyrażenia algebraiczne

1. Jednomian i suma algebraiczna

Ćwiczenia **1.** a) I. różnica liczby y i liczby 10, II. połowa iloczynu liczby x i liczby y, III. iloraz różnicy liczby b i liczby 2 oraz liczby 8, IV. kwadrat sumy trzykrotności liczby x i liczby 4, V. różnica kwadratu pięciokrotności liczby a i kwadratu liczby b b) I. $\frac{7}{2-x}$, II. $\left(\frac{a}{5} + b\right)^2$, III. $(7x)^2 + \left(\frac{1}{3}y\right)^2$ **2.** a) a^2jk^2 b) a^3n^2s c) $a^3b^2r^3$

3. a) $-\frac{1}{2}xy; -\frac{1}{2}$ b) $xy^2z^3; 1$ c) $-10a^2b^2c^2; -10$ **4.** a) $2ab; -3ac; 4bc$ b) $-0{,}2xy; 0{,}4x; -2y$ c) $-4\frac{1}{2}z^3; -7z^2; -8z; 1$

5. $(x + x + 10 + x - 5)$ zł

Rozwiąż zadania **1.** a) różnica podwojonej liczby y i liczby 8 b) iloczyn ilorazu liczby 2 i liczby 3 oraz kwadratu liczby x c) iloraz sumy liczby 10 i liczby d oraz liczby 17 d) różnica kwadratu liczby x i kwadratu dziewięciokrotności liczby y e) kwadrat sumy liczby 3 i siódmej części liczby a **2.** a) $-2b^3$ b) $\frac{7}{cd}$ c) $\frac{1}{2}d + x^2$ d) $\left(6a\right)^2 - \left(\frac{1}{4}c\right)^2$ e) $\left(\frac{4}{x} + 3y\right)^3$ f) $\frac{1}{3}h^3 \cdot \frac{1}{2}(3h)^2$ **3.** a) $-\frac{1}{2}xy; -\frac{1}{2}$ b) $6xy^2; 6$ c) $xy^2z^3; 1$ d) $6x^2y^2z^2; 6$ e) $-e^2f^2g^2; -1$ f) $-30a^2b^3c; -30$ **4.** a) $24x^3; -15x^2; 14x; -15$ b) $-5xy; 33x^2y; -45xy^2$ c) $-0{,}1cd; 5{,}4c; \sqrt{2}d$ d) $-5\frac{3}{4}a^3; 10a^2; 5{,}2a; -7\frac{5}{7}$ **5.** a) $P = a^2$ b) $P = 9b^2$ c) $P = 15c$ d) $P = 3d^2$

6. a) $P = 12b^2$ b) $P = \frac{1}{8}x^2$ c) $P = \frac{3}{4}a^2$ **7.** $(3x + x - 0{,}7)$ zł **8.** $y + y + \frac{1}{2}y - 20$ **9.** $2y + y + 1350$

10. *Wskazówka*: Liczba podzielna przez 2 to $2x$, a podzielna przez 3 to $3y$ gdzie x i y są liczbami naturalnymi.

Sprawdź, co umiesz! **1.** B **2.** a) $P = 8xy$ b) $P = 6x^2$ **3.** FP

2. Redukcja wyrazów podobnych

Ćwiczenia **1.** a) $y^2xzz^2 = yxzyz^2 = xy^2z^3$ **2.** a) $5k - 8kl$ b) 9 c) $-5m^2n - 3mn^2 - 2$ d) $abc - 20bc + 12$

3. a) 18 b) –49 c) 2 d) $4\frac{1}{2} - 4\sqrt{3}$ **4.** a) $-kl + 7k - 4$; 44 b) $-15a^2 + 8b^2 - 15$; $-29\frac{1}{2}$

Rozwiąż zadania **1.** $34a^3$, a^3, $-0{,}25a^3$; $9a^2b^2c$, $-0{,}5a^2cb^2$; $-15a^2b$, $-21a^2b$; $-18a^2cb$, $8a^2bc$; $-5a^2b^2$, $\frac{1}{3}b^2a^2$, $12a^2b^2$; $11a^2bc^2$, $-0{,}25a^2bc^2$; $-25c^3$, $-0{,}54c^3$ **2.** a) $8x + 10y$ b) $-14x - 9y$ c) $p + 6s - 10$ d) $10x^2 - 13x + 13$ e) $-8kl + 5k + 2l$ f) $\frac{2}{3}abc - 22ab^2 + 18$ g) $-2ab^2 + 3{,}2bc + 18$ h) $-\frac{1}{4}mn^2 + \frac{3}{14}m^2n - 6$ **3.** a) –16 b) –80 c) 70 d) $-12\frac{1}{2}$ e) 2 f) $-3\frac{1}{27}$ **4.** a) $-9ab + 8a - 6$; –76 b) $11b^2 + 4c^2 - 10$; 10 c) $-3cy^2 - 10c^2y + 13c - 5$; –73 d) $27kl^3 - 8k^3 - 9l + 20$; 65 **5.** $-x^2 + 30x + 18$ **6.** I. beczka: $\left(x + \frac{2}{3}y + 5\right)$ l II. beczka: $\left(\frac{1}{3}y + 5\right)$ l **7.** $336a$; 504 **8.** $P = 2xy$

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $-32x$ b) $-\frac{7}{8}klm^2 + 2\frac{1}{8}klm$ c) $26ab^2 - 33$ d) $5{,}5x^2 - 7{,}25x + 19$ **2.** A **3.** FP **4.** BC

3. Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

Ćwiczenia **1.** a) $8x - 9y$ b) $17z - 4y$ c) $2a + 3b - 2c$ d) $-6b - c + 10$ **2.** $(150a - 10b + 56)$ zł

Rozwiąż zadania **1.** a) $-8a + 9k - 12$ b) $-6b - 8m + 25$ c) $-3b - c$ d) $-15d - 3z + 27$ e) $-8e - f - 3$ f) $-8x + 6 + \sqrt{5}$ **2.** a) $3a^2 + 2a + 4$ b) $2b^2 - 25b + 4$ c) $-8c^3 - 5c - 36$ d) $18d^3 - 2d^2 - 38d$ e) $-11e^2 - 0{,}34e - 6$ f) $4{,}8f^3 + 4{,}12f^2 - 2{,}42f$ g) $1\frac{1}{5}g^3 - \frac{17}{30}g + \sqrt{7}x - \sqrt[3]{7}x$ **3.** a) $2k + m$ b) $3{,}5x + 0{,}5y$ c) $17y$ **4.** $3{,}5a + 4b + 6$; 40 **5.** a) $4xy^3 + 8xy + xy^2 + 6$ b) $-2xy^3 - 2xy + 6xy^2 - 5$ c) $-3xy^3 + xy^2 - 5xy - 2$ **6.** $k^3 + k^2 - 4kl + l^2$ **7.** C **8.** A

9. *Wskazówka*: liczba trzycyfrowa, w której cyfrę setek pozostawimy bez zmian, a cyfry dziesiątek i jedności zamienimy miejscami to $100a + 10c + b$.

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $2a^2 - 9a + 16$ b) $b + 18$ **2.** $4x + 7$ **3.** B

4. Mnożenie jednomianów przez sumy algebraiczne

Ćwiczenia **1.** a) $14x - 49y$ b) $-8c - 4d$ c) $10a - \frac{5}{8}b$ d) $\frac{8}{11}w - 1\frac{3}{7}z$ **2.** a) $2a^2 - 5ab$ b) $6ab - 14b^2$ c) $\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{4}y^3$ **3.** a) $5x - y + 3$ b) $3k - 2l + 4\frac{2}{7}$ c) $a - 2b + 6\frac{2}{3}$ **4.** a) $-31a + 27b$ b) $3k + 3\frac{1}{2}$ **5.** a) $9a(5a + 1)$ b) $3x - 5y$ c) $5ab\left(b - 3 + 6ab^2\right)$ d) $-4k^2\left(2k^2l^2 + l + 4k\right)$

Rozwiąż zadania **1.** a) $-4x + 8y$ b) $3ab - 15b$ c) $-15d + 35$ d) $\frac{1}{3}x + 4$ e) $-\frac{1}{2}d - 1\frac{1}{2}e$ f) $-3k - 45l$ g) $\sqrt{6}x + 4\sqrt{2}$ h) $3a + 9$ i) $6a^2 - 14ab$ j) $-25ab + 45b^2$ k) $-12c^3 + 8c^2$ l) $-5ad + 5bd - 5cd + 10d^2$ **2.** a) $-5x + y + 7$ b) $-2k + l - 4$ c) $-3c - 2k + 9$ d) $-\frac{1}{2}d + 4k - 6$ e) $-32k - 24l - 6$ f) $x - 2y + 4$ g) $-9x - 4y + 9$ h) $-4x - 5y + 4z + 7$ i) $-16a - 7b + 2$ **3.** a) $8a - 3$ b) $-12b + 30$ c) $7c + 9$ d) $6d + 32$ e) 36 f) $mn^2 - m^2n$ g) $\sqrt{2}x^2 + 5\sqrt{2}$ h) $-2\frac{2}{3}h^3 - 2\frac{1}{15}h^2 - 8k$ **4.** $8x - 38$ **5.** a) $4(2x - 3)$ b) $15(a + 3b)$ c) $-2(6c + 5)$ d) $x + 4y$ e) $4(3 - 4x)$ f) $-7x(3x + 1)$ g) $x^2y\left(xy + 2 - y^4\right)$ h) $-\sqrt{3}\left(a^2 + 2b^2 + \sqrt{2}\right)$ **6.** a) $P = x + \frac{1}{2}xy + y^2 + 2y$ b) $P = -\frac{1}{2}a^2 + a + ab + \frac{1}{2}b^2$ **7.** $24a + 4$; 76 dm; $V = 6a^3 + 6a^2$; 216 dm^3 **8.** a) $2x$ b) $\frac{1}{2}x$ c) $-\frac{1}{3}y$ d) $-\frac{1}{6}xy$

9. *Wskazówka*: $2k + 1 + 2k + 3 + 2k + 5 = 6k + 9$.

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $8k - 12z$ b) $12x^2y^2 - 3x^2y$ c) $5x^2 + 20x - 1\frac{1}{5}$ **2.** BD **3.** FF **4.** C

5. Mnożenie sum algebraicznych

Ćwiczenia **1.** a) $3x^2 + 7xy + 2y^2$ b) $9a^2 + 9ab - 4b^2$ c) $2a^2 + ab - b^2$ d) $-18y^2 - 12yz + 6z^2$

2. a) $4a^2 + 24a + 36$ b) $4 - 12z + 9z^2$ c) $9a^2 + 36ac + 36c^2$ d) $1 + 22b + 121b^2$

Rozwiąż zadania **1.** a) $x^2 - 9y^2$ b) $-15k^2 + 4kl + 4l^2$ c) $-c^2 + 13cd - 36d^2$ d) $-15z^2 + 22sz - 8s^2$ e) $-25k^2 + 20km - 3m^2$ f) $8p^2 + 20pr - 12r^2$ **2.** a) $a^2 + 6a + 9$ b) $b^2 - 2bc + c^2$ c) $4c^2 + 4c + 1$ d) $9d^2 - 12d + 4$ e) $9 + 6m + m^2$ f) $4k^2 - 8kl^2 + 4l^4$ **3.** a) $8a^2 - 5ab$ b) $-24k^2 - 2kl + 6l^2 + 2$ c) $21y^2 + 3y - 6z^2$ d) $13k^2 + 8kl - 5l^2$ e) $2m^2 - 2lm - 4l^2$ f) $-x^3 + 2x$ **4.** Nie, ponieważ zawsze przyjmuje wartość 54. **5.** a) $P = 2x^2 + 5x + 2$ b) $P = a^2 + 6a + 9$ c) $P = 12x^2 - 2x - 30$ d) $V = 4k^3 + 4k^2 + k$ **6.** D **7.** A **8.** *Wskazówka*: $(2k + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 4m^2 + 4m + 2$ gdzie k i m są liczbami całkowitymi.

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $-x^2 + 13xy - 40y^2$ b) $-18c^2 + 18cd - 4d^2$ c) $-15x^2 + 10xy + 8y^2 + 8$ **2.** D **3.** $P = 6a^2 + 5a + 1$ **4.** FP

Sprawdź umiejętności

1. FF **2.** C **3.** BC **4.** a) $m - 1$ b) $-5x^2 + 1\frac{1}{2}x + 7$ c) $\frac{2}{3}m^2n + \frac{2}{15}mn^2 - \frac{1}{3}$ d) $3\sqrt{7}abc + \sqrt{7}ab - 2\sqrt{7}$ **5.** FF **6.** a) $7x - 15$; -36 b) $2x^2 - 7xy - 6x$; 66 **7.** $(32k - 20)$ zł **8.** C **9.** D **10.** a) $6(6x + 7y)$ b) $-15(a - 3b)$ c) $-7a(1 + 7a)$ d) $3\sqrt{2}(x^2 + 2y)$ e) $2x + 3y$ f) $3xy(3y - x + 9)$ **11.** o $-2a + 2b + 4$ lub o $2a - 2b + 4$ **12.** a) $2z^2 - 5z - 3$ b) $-4b^2 - 11b + 3$ c) $-2xy - 0{,}5y - 12x - 3$ d) $c^2 + 3cd - 0{,}5c - 1{,}5d$ e) $4a^2 + 20ab + 25b^2$ f) $y^2 - 18\sqrt{3}y + 243$ **13.** a) $Obw. = 4a + 2$; $P = a^2 + a - 2$ b) $Obw. = 2x + y + 2$; $P = \frac{1}{2}xy - x + \frac{1}{2}y - 1$ c) $Obw. = 4z + 4$; $P = yz + 2y$

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. a) $4a^5$ b) $-6\sqrt{5}k^5m^2$ c) $70a^3b^4$ **2.** $2b$ km **3.** B **4.** a) $11x + 8$ b) $110y + 11x$ c) $122a - 2$ **5.** Janek: $17k - 3$; Kasia: $14k - 4$ **6.** $14x + 28$ **7.** *Wskazówka*: trzy kolejne liczby naturalne to: n, $n + 1$, $n + 2$. **8.** a) $36x^2 - 49x - 3$ b) $-2x^5 + x^4y + 6x^3y^2$ c) $81a^2 - 198ab + 121b^2$ d) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$ e) $5x^2 - 6\sqrt{5}xy + 9y^2$ f) $12a^2 + 60\sqrt{3}a + 225$ **9.** a) $xy^2 - x^2$; $\frac{7}{16}$ b) $1\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y$; $\frac{5}{8}$ c) $8x - y$; $6\sqrt[3]{4}$ d) $\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{2}$ **10.** BD **11.** C **12.** *Wskazówka*: dwie kolejne liczby naturalne parzyste to: $2n$, $2n + 2$. **13.** $Obw. = 6a - 12$; $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2 - 4a + 4)$ **14.** Nie. *Wskazówka*: sprawdzić wartość wyrażenia dla $b = 0$.

Dział VI. Równania

1. Liczby spełniające równanie

Ćwiczenia **1.** a) nie b) tak c) nie d) nie **2.** a) 3 b) 9 c) 3 **3.** x – czas wykonywania ćwiczeń rozciągających; $72 + x = 90$

Rozwiąż zadania **1.** a) tak b) nie c) nie d) nie **2.** a) nie b) nie c) tak d) nie e) nie f) tak **3.** -3 i 0 **4.** a) tak, $x = -2$ b) tak, $x = 1$ c) nie d) tak, $x = 1$ **5.** FP **6.** a) x – pewna liczba; $\frac{1}{3}x = 25$ b) x – wiek siostry Michasi; $2x + 3 = 17$ c) x – liczba uczniów dojeżdżających do szkoły rowerem; $3x + 3 = 27$ d) x – długość trasy, którą pokonali uczestnicy pierwszego dnia; $4x + 37 = 133$ e) x – cena za kilogram truskawek; $3x = 28{,}5$ **7.** a) $a = -16$ b) $a = 12{,}5$ c) $a = 687$ **8.** *Wskazówka*: ponieważ $x^2 \geqslant 0$, zatem $x^2 + 4 > 0$.

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) nie b) tak, $x = 2$, $x = -1$ **2.** C **3.** PP **4.** x – cena szortów; $4x - 50 = 462$

2. Rozwiązywanie równań

Ćwiczenia **1.** a) $x = 5$ b) $x = -2$ c) $x = 1$ d) $x = 12$ **2.** a) $y = 1$ b) $x = \frac{1}{14}$ c) $k = \frac{2}{7}$ **3.** a) każda liczba spełnia równanie b) żadna liczba nie spełnia równania c) żadna liczba nie spełnia równania

Rozwiąż zadania **1.** a) $x = 6$ b) $x = 9$ c) $x = -3$ d) $x = 2\frac{5}{9}$ e) $x = \frac{1}{2}$ f) $x = -1\frac{1}{2}$ g) $x = 0$ h) $x = 2$ **2.** a) $x = 13$ b) $x = -22$ c) $x = -13$ d) $x = -1$ e) $x = -\frac{4}{5}$ f) $x = 1\frac{2}{13}$ **3.** a) $x = -6$ b) żadna liczba nie spełnia równania c) $x = -7$ d) $x = 0$ e) $x = 4$ f) $x = 0$ g) $x = 1\frac{5}{9}$ h) $x = 12$ **4.** a) $x = 1$ b) żadna liczba nie spełnia równania c) $x = 2\frac{2}{3}$ d) $x = \frac{11}{13}$ e) $x = 34$ f) każda liczba spełnia równanie **5.** I i V, II i IV, III i VI **6.** a) $Obw. = 13$ b) $Obw. = 24$ **7.** a) $x = 1\frac{1}{2}$ b) $x = 0$ c) żadna liczba nie spełnia równania d) $x = 0$ **8.** a) $x = -4$ b) $x = 0$ c) $x = -1\frac{8}{9}$ d) każda liczba spełnia równanie **9.** a) -1 b) 20 **10.** a) 0 b) 2

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $x = -4$ b) $x = 1$ c) żadna liczba nie spełnia równania d) $x = -15$ **2.** C **3.** C **4.** a) $x = 2$ b) $x = 0$ c) każda liczba spełnia równanie d) $x = -1\frac{3}{7}$ **5.** PF

3. Zadania tekstowe z wykorzystaniem równań

Ćwiczenia **1.** 157 zł **2.** 28, 30, 32, 34, 36 **3.** 7 lat temu **4.** 50 zł

Rozwiąż zadania **1.** $x = 65$ **2.** 17 **3.** 28 dziewcząt i 7 chłopców **4.** 49 zł **5.** 3,20 zł **6.** 4 cm **7.** $P = 325$ **8.** 24°, 48°, 96°, 192° **9.** 24 lata **10.** Piotr – 20 lat, Paweł – 10 lat **11.** 63 lata **12.** 60 **13.** pierwszego i drugiego dnia po 15 km **14.** $x = 12$ **15.** 4100 zł **16.** 300 zł **17.** 10 000 zł **18.** 60 dag

Sprawdź, co umiesz! **1.** $x = 4$ **2.** $\alpha = 70°$ **3.** D **4.** BD

4. Przekształcanie wzorów

Ćwiczenia **1.** $a = \frac{2P}{h}$ **2.** a) $a = \frac{k - \sqrt{5}b}{3}$ b) $a = \frac{k}{3} - b$ c) $a = x(y - 3)$ d) $a = \sqrt{6(3y - x)}$

Rozwiąż zadania **1.** a) $x = 2y$ b) $r = 1\frac{2}{3}w$ c) $z = \frac{\sqrt{3}x}{3}$ **2.** a) $b = \frac{P}{a}$ b) $c = \frac{V}{ab}$ c) $f = \frac{2P}{e}$ d) $a = \frac{2\sqrt{3}h}{3}$ e) $a = \sqrt{\frac{P}{6}}$ f) $a = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}P}{3}}$ **3.** $m = \frac{E}{gh}$, $g = \frac{E}{mh}$, $h = \frac{E}{mg}$; $m_s = \frac{C_p \cdot m_r}{100\ \%}$, $m_r = \frac{m_s}{C_p} \cdot 100\ \%$ **4.** $h = \frac{2p}{x}$ **5.** B **6.** A3 **7.** a) $\frac{m}{n} = 4$ b) $\frac{m}{n} = 2\frac{1}{4}$ c) $\frac{m}{n} = 1\frac{1}{5}$ d) $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $V = \frac{m}{d}$ b) $m = \frac{E}{c^2}$, $c = \sqrt{\frac{E}{m}}$ c) $v_0 = \frac{2s - at^2}{2t}$, $a = \frac{2s - 2v_0t}{t^2}$ **2.** D **3.** PP

Sprawdź umiejętności

1. B **2.** a) $x = 1$ b) $x = \frac{1}{4}$ c) $x = -8$ d) $x = 0{,}5$ e) $x = -5$ f) $x = -10$ **3.** I i III **4.** FFF **5.** I i IV **6.** I. $x = 7$, II. $x = -\frac{1}{2}$, III. $x = 2\frac{1}{2}$, IV. $x = -1$; I i IV **7.** a) $x = -1$ b) $x = -7\frac{2}{3}$ c) $x = 1\frac{1}{2}$ **8.** 24 **9.** *Wskazówka*: należy uprościć wyrażenia opisujące długości boków prostokąta. **10.** 14,20 zł **11.** 32 **12.** BD **13.** 7c – 22 uczniów, 7d – 20 uczniów **14.** D **15.** B **16.** Tower Bridge 1894 r., wieża Eiffla 1889 r.

17. a) $b = dk + 4c$ b) $a = \frac{b}{x} + c$ c) $b = \frac{2P}{h} - a$ d) $h = \frac{1}{c} - k$ e) $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ f) $x = \frac{\sqrt{6}(y + 2)}{3}$

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. –2 i 6 **2.** –3 i 3 **3.** B **4.** a) $x = -1\frac{1}{5}$ b) $x = -\frac{10}{11}$ c) $x = 0$ d) żadna liczba nie spełnia równania e) $x = -\frac{2}{3}$ f) żadna liczba nie spełnia równania **5.** a) 0 b) nieskończenie wiele c) 2 **6.** $P = 42\frac{1}{4}\ \text{cm}^2$ **7.** 160 zł **8.** 17 **9.** $P = 57{,}6\ \text{cm}^2$ **10.** D **11.** A2 **12.** $6\sqrt{2}$ cm, $18\sqrt{2}$ cm **13.** 14 **14.** a) $v = \frac{kp + t}{4}$ b) $m = \frac{h(c + b)}{2(k - l)}$ c) $t = \sqrt{\frac{xz + 5k + x}{2}}$ **15.** $f = \frac{xy}{x + y}$, $x = \frac{fy}{y - f}$, $y = \frac{fx}{x - f}$

Dział VII. Figury płaskie

1. Proste i odcinki

Ćwiczenia

1. 4 cm lub 14 cm **2.** $|EK| = 8$ cm, $|KF| = 64$ cm

Rozwiąż zadania **1.** PP **2.** a) CD, EF, GH, IJ, KL b) BC, DE, FG, HI, KJ, AL **4.** 1,3 cm lub 14,3 cm **5.** $|RS| = 20$ cm, $|RQ| = 50$ cm **6.** a) $|MK| = 6$ cm, $|KL| = 12$ cm, $|LN| = 18$ cm b) $|MK| = 5$ cm, $|LN| = 15$ cm, $|MN| = 30$ cm **7.** 5 cm lub 11 cm **8.** punkt A

Sprawdź, co umiesz! **1.** $CD \parallel EF$ **2.** BC **3.** FP

2. Kąty i ich rodzaje

Ćwiczenia **1.** *Wskazówka*: w ciągu godziny minutowa wskazówka zegara zakreśla kąt o mierze 360°. **2.** $\alpha = 36°$, $\beta = 144°$, $\gamma = 36°$ **3.** $\alpha = 60°$, $\beta = 80°$, $\gamma = 40°$

Rozwiąż zadania **1.** a) $\alpha = 270°$ b) $\beta = 240°$ c) $\gamma = 80°$ d) $\delta = 267°$ **2.** $20°$ **3.** a) $6°$ b) $90°$ c) $270°$ d) $360°$ **4.** a) $30°$ b) $90°$ c) $180°$ d) $360°$ **5.** $81°$ **6.** $30°, 150°$ **7.** $60°, 120°$ **8.** $35°, 145°, 145°$ **9.** a) $\alpha = 22°, \beta = 130°$ b) $\alpha = 30°, \beta = 50°$ **10.** a) $\alpha = 15°$ b) $\alpha = 50°$ **11.** a) $\alpha = 50°, \beta = 90°, \gamma = 40°$ b) $\alpha = 60°, \beta = 75°, \gamma = 45°$

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $\alpha = 97°$ b) $\alpha = 130°, \beta = 50°$ c) $\alpha = 40°, \beta = 140°$ **2.** B **3.** *Wskazówka*: suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi $180°$. **4.** PP

3. Trójkąty i ich własności

Ćwiczenia **1.** Tak, ponieważ suma miar tych kątów wynosi $180°$. **2.** $20°, 80°, 80°$ **3.** największa miara – kąt ACB, najmniejsza miara – kąt BAC **4.** a) nie można b) można c) nie można

Rozwiąż zadania **1.** a) $\alpha = 41°$ b) $\alpha = 48°$ c) $\alpha = 10°$ **2.** $50°, 50°, 80°$ **3.** $40°, 60°, 80°$ **4.** $30°, 30°, 120°$ lub $30°, 75°, 75°$ **5.** największa miara – kąt ACB, najmniejsza miara – kąt BAC **6.** a) nie można b) można c) można d) można e) nie można f) nie można **7.** Tak, istnieje. **8.** $35°, 45°, 100°$ **9.** PF **10.** C **11.** a) $|\sphericalangle ABC| = 35°, |\sphericalangle BCA| = 55°$ b) $|\sphericalangle BAC| = 78°, |\sphericalangle ABC| = 65°, |\sphericalangle BCA| = 37°$ c) $|\sphericalangle BAC| = 66°, |\sphericalangle ABC| = 66°, |\sphericalangle BCA| = 48°$ **12.** $26°, 76°, 78°$ **13.** *Wskazówka*: suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi $180°$.

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $\alpha = 57°$ b) $\alpha = 52°$ c) $\alpha = 72°$ d) $\alpha = 18°$ **2.** $90°$ **3.** B **4.** FP

4. Cechy przystawania trójkątów

Ćwiczenia **1.** $|DE| = |GH| = 7, |EF| = |HI| = 4, |FD| = |IG| = 6$, cecha bbb **2.** $|AB| = |RP| = 6, |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle RPQ| = 120°, |CA| = |PQ| = 8$, cecha bkb **3.** $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle MKL| = 40°, |AC| = |KL| = 8, |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle KLM| = 40°$, cecha kbk

Rozwiąż zadania **1.** a) $32°$ b) $60°$ **2.** a) Nie są. b) Nie są. **3.** a) Są, zgodnie z cechą bkb. b) Nie są, bo $|BC| \neq |BD|, |AB| \neq |BE|$. **4.** Są, zgodnie z cechą kbk. **5.** Nie jest. **6.** a) $\Delta ABD \equiv \Delta BCD$ b) $\Delta ABC \equiv \Delta ACD, \Delta ABO \equiv \Delta BCO \equiv \Delta CDO \equiv \Delta ADO, \Delta ABD \equiv \Delta BCD$ c) $\Delta ADO \equiv \Delta BCO, \Delta ACD \equiv \Delta BCD, \Delta ABC \equiv \Delta ABD$ **7.** $\Delta LPR \equiv \Delta MNR$ **8.** $\Delta KNO \equiv \Delta LMO, \Delta KLO \equiv \Delta MNO, \Delta KLN \equiv \Delta LMN \equiv \Delta KLM \equiv \Delta KMN$ **9.** Tak, mają.

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) Są, zgodnie z cechą bkb. b) Są, zgodnie z cechą kbk. **2.** BD **3.** PP

5. Twierdzenie Pitagorasa

Ćwiczenia **1.** 25 cm **2.** $\sqrt{3}$ cm

Rozwiąż zadania **1.** a) $c = 10$ cm b) $x = 13$ cm c) $y = 15$ cm d) $z = \sqrt{34}$ cm e) $w = \sqrt{15}$ cm f) $m = 7\sqrt{3}$ cm **2.** a) $b = 15$ cm b) $a = 6\sqrt{3}$ cm c) $x = \sqrt{79}$ cm d) $y = 3\sqrt{22}$ cm e) $z = 10$ cm f) $w = 14$ cm **3.** $Obw. = \left(10 + 6\sqrt{5}\right)$ cm **4.** a) $x = 4\sqrt{2}$ cm b) $x = 25$ cm c) $x = 2\sqrt{7}$ cm **5.** $2\sqrt{21}$ cm **6.** 300 m **7.** $6{,}72$ m **8.** $Obw. = 36$ cm **9.** Nie, bo $\sqrt{4253} < 67$. **10.** 8 km **11.** 5 cm **12.** $4{,}8$ km

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $x = 24$ cm b) $y = 7\sqrt{10}$ cm c) $z = 4\sqrt{7}$ cm **2.** 5 cm **3.** B **4.** 26 cali

6. Trójkąt o kątach 45°, 45°, 90°

Ćwiczenia **1.** a) $10\sqrt{2}$ cm b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ dm c) $\sqrt{6}$ km d) 6 mm e) $4\sqrt{3}$ cm **2.** a) $5\sqrt{2}$ cm b) 6 cm c) $4\frac{1}{2}$ cm

Rozwiąż zadania **1.** a) $x = 9\sqrt{2}$ cm b) $x = 20$ cm c) $x = 14$ cm d) $x = 18\sqrt{3}$ cm e) $x = 10\sqrt{6}$ cm f) $x = 3\sqrt{5}$ cm **2.** a) $Obw. = 12$ mm, $P = 9$ mm^2 b) $Obw. = 8\sqrt{2}$ dm, $P = 8$ dm^2 c) $Obw. = 7\sqrt{2}$ cm, $P = 6\frac{1}{8}$ cm^2 d) $Obw. = 2\sqrt{3}$ km, $P = \frac{3}{4}$ km^2 **3.** 110 cm **4.** a) $11\sqrt{2}$ cm b) $1 : 1 : \sqrt{2}$ c) tak **5.** B **6.** C

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $|AB| = 10\sqrt{2}$ cm, $|AC| = 10$ cm b) $|EF| = 12$ cm, $|EG| = 12$ cm c) $|IK| = 13\sqrt{5}$ cm, $|JK| = 13\sqrt{5}$ cm **2.** AC **3.** a) $Obw. = \left(40 + 20\sqrt{2}\right)$ cm b) $x = 5\sqrt{2}$ cm

7. Trójkąt o kątach 30°, 60°, 90°

Ćwiczenia **1.** a) $4\sqrt{3}$ cm b) $\frac{7\sqrt{6}}{2}$ dm c) $5\sqrt{30}$ m d) $16\frac{1}{2}$ km **2.** a) 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm b) 14 cm, $7\sqrt{3}$ cm c) $12\frac{1}{2}$ cm, $6\frac{1}{4}$ cm

Rozwiąż zadania **1.** a) $6\sqrt{3}$ cm b) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ cm c) $\frac{13\sqrt{21}}{2}$ cm d) $12\sqrt{2}$ cm **2.** a) $|AC| = 10\sqrt{3}$ cm, $|BC| = 20$ cm b) $|KL| = 14\sqrt{3}$ cm, $|KM| = 14$ cm c) $|PQ| = 9$ cm, $|QR| = 18$ cm d) $|DF| = 6\sqrt{2}$ cm, $|DE| = 6\sqrt{6}$ cm e) $|MN| = 12$ cm, $|NO| = 8\sqrt{3}$ cm f) $|AB| = 5\sqrt{3}$ cm, $|BC| = 10\sqrt{3}$ cm **3.** a) $Obw. = 18$ cm b) $Obw. = 24\sqrt{2}$ m c) $Obw. = 24\sqrt{3}$ dm d) $Obw. = 8\sqrt{30}$ km **4.** 108 cm **5.** PF **6.** AD **7.** a) $Obw. = \left(18 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{3}\right)$ cm b) $Obw. = \left(4\frac{1}{2} + \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$ cm **8.** a) $x = 16\sqrt{3}$ cm b) $x = 6$ cm

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $|AB| = 18\sqrt{3}$ cm, $|AC| = 18$ cm b) $|DF| = 39$ cm, $|EF| = 26\sqrt{3}$ cm c) $|PQ| = 9\sqrt{3}$ cm, $|QR| = 18\sqrt{3}$ cm **2.** $24\sqrt{3}$ cm **3.** C **4.** PF

8. Dowody w geometrii

Ćwiczenia **1.** a) kontrprzykład: np. trójkąt o bokach 3 cm, 4 cm, 5 cm b) kontrprzykład: romb niebędący kwadratem **2.** *Wskazówka*: należy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa. **3.** *Wskazówka*: należy skorzystać z własności kątów wierzchołkowych i naprzemianległych.

Rozwiąż zadania **1.** a) Założenie: Kąty są naprzemianległe. Teza: Miary tych kątów są równe.
b) Założenie: Trójkąt jest równoboczny. Teza: Każdy kąt wewnętrzny tego trójkąta ma miarę 60°.
c) Założenie: Czworokąt jest kwadratem. Teza: Ten czworokąt jest prostokątem. **2.** a) np. trójkąt o kątach: $20^\circ, 30^\circ, 130^\circ$ b) np. trapez równoramienny **3.** *Wskazówka*: suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°. **4.** *Wskazówka*: należy zwróć uwagę na długości wysokości trójkątów ADC i BCD poprowadzonych z wierzchołka C. **5.** *Wskazówka*: należy skorzystać z własności kątów przyległych. **6.** *Wskazówka*: suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°. **7.** *Wskazówka*: należy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa. **8.** *Wskazówka*: należy skorzystać z własności kątów wierzchołkowych i naprzemianległych oraz z cech przystawania trójkątów.

Sprawdź, co umiesz! **1.** A3 **2.** *Wskazówka*: suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°. **3.** *Wskazówka*: należy skorzystać z cech przystawania trójkątów.

Sprawdź umiejętności

1. AD **2.** B **3.** $\alpha = 90^\circ, \beta = 298^\circ, \gamma = 112^\circ$ **4.** $54^\circ, 126^\circ$ **5.** FP **6.** a) $\alpha = 18^\circ, \beta = 54^\circ$ b) $\alpha = 20^\circ, \beta = 40^\circ$ c) $\alpha = 50^\circ, \beta = 80^\circ$ d) $\alpha = 43^\circ, \beta = 47^\circ$ **7.** a) $\beta = 80^\circ$ b) $\alpha = 33^\circ$ c) $\delta = 58^\circ, \gamma = 60^\circ$ **8.** a) nie można b) można c) nie można d) nie można **9.** FF **10.** a) Są, zgodnie z cechą bkb. b) Nie są. **11.** PF **12.** B **13.** a) $x = 34$ cm b) $x = 24$ cm c) $x = 20\sqrt{2}$ cm **14.** $2340 < 2500$ **15.** a) $h = 16\sqrt{3}$ cm b) $Obw. = 12\sqrt{2}$ cm **16.** a) $|AB| = 32\sqrt{3}$ cm, $|BC| = 64$ cm b) $|DE| = 26$ cm, $|DF| = 26$ cm c) $|KM| = 13\sqrt{3}$ cm, $|LM| = 26\sqrt{3}$ cm **17.** B2 **18.** *Wskazówka*: należy skorzystać z własności kątów przyległych. **19.** *Wskazówka*: należy skorzystać z własności kątów naprzemianległych i przyległych.

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. 7 : 8 **2.** AC **3.** 126° **4.** $39^\circ, 51^\circ, 90^\circ$ **5.** a) $\alpha = \frac{180^\circ - \beta}{2}$ b) $\beta = 180^\circ - 2\alpha$ **6.** $35^\circ, 45^\circ, 100^\circ$ **7.** FF **8.** Są, jeśli miary kątów przy wierzchołkach E i B są równe. **9.** $\Delta ACD \equiv \Delta ABC$, $\Delta ABD \equiv \Delta BCD$, $\Delta CDS \equiv \Delta ABS$, $\Delta BCS \equiv \Delta ASD$ **10.** $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|KL| = 6$ cm, $|KM| = 6$ cm, $|LM| = 6\sqrt{2}$ cm **11.** a) $x = 20\sqrt{2}$ cm b) $x = 4\sqrt{5}$ cm c) $x = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ cm **12.** 78 opakowań **13.** AC **14.** *Wskazówka*: należy rozpocząć od wyznaczenia długości przekątnej kwadratu K_1: $12\sqrt{2}$. **15.** 18 cm, $9\sqrt{2}$ cm, $9\sqrt{2}$ cm **16.** 2,4 m **17.** pani Anna, o 154 m. **18.** ok. 30,72 m^2 **19.** *Wskazówka*: należy skorzystać z własności kątów przyległych. **20.** *Wskazówka*: suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°.

Dział VIII. Wielokąty

1. Prostokąt i kwadrat, jednostki pola

Ćwiczenia **1.** a) $P = 120\,000$ mm^2 b) $P = 12$ dm^2 c) $P = 0{,}12$ m^2 d) $P = 0{,}00000012$ km^2
2. $P = 35$ ha $= 0{,}35$ km^2

Rozwiąż zadania **1.** a) $Obw. = 80$ mm, $P = 400$ mm^2 b) $Obw. = 14$ cm, $P = 12\frac{1}{4}$ cm^2 c) $Obw. = 2{,}4$ dm, $P = 0{,}36$ dm^2 d) $Obw. = 8\sqrt{3}$ m, $P = 12$ m^2 **2.** a) $Obw. = 4$ dm, $P = 1$ dm^2 b) $Obw. = 12\sqrt{3}$ cm, $P = 27$ cm^2

c) $Obw. = 24\sqrt{2}$ mm, $P = 72$ mm^2 d) $Obw. = \sqrt{2}$ km, $P = \frac{1}{8}$ km^2 **3.** a) $Obw. = 40$ cm, $P = 75$ cm^2 b) $Obw. = 27$ cm, $P = 42{,}5$ cm^2 c) $Obw. = 15$ cm, $P = 12{,}5$ cm^2 d) $Obw. = 17\frac{3}{5}$ cm, $P = 19$ cm^2 **4.** a) $\alpha = 23°$, $\beta = 67°$ b) $\alpha = 38°$, $\beta = 142°$ **5.** $P = 4800$ m$^2 = 48$ a $= 0{,}48$ ha **6.** $Obw. = 96$ cm **7.** $P = 600$ a $= 6$ ha
8. Tak, można. *Wskazówka*: należy wyznaczyć długość boku kwadratu o obwodzie 4 m.
9. a) $P = 12\sqrt{7}$ cm^2 b) $P = 32$ cm^2 c) $P = 48\sqrt{3}$ cm^2 **10.** BD **11.** C **12.** a) $P_1 = 13{,}5$, $P_3 = 40{,}5$ b) $9\sqrt{2}$

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $P = 6$ cm^2 b) $P = 0{,}06$ dm^2 c) $P = 600$ mm^2 d) $P = 0{,}0006$ m^2 **2.** Nie można. *Wskazówka*: należy wyznaczyć długość boku kwadratowej kartki. **3.** 16,6 a **4.** C **5.** FF

2. Pole trójkąta

Ćwiczenia **1.** a) $P = 2$ m^2 b) $P = 20\,000$ cm^2 c) $P = 200$ dm^2 **2.** $h = 6\frac{18}{25}$ cm **3.** a) $P = 9\sqrt{3}$ cm^2 b) $P = 36\sqrt{3}$ mm^2 c) $P = 48\sqrt{3}$ dm^2 **4.** $P = 144\sqrt{3}$ cm^2

Rozwiąż zadania **1.** a) $P = 4000$ m^2 b) $P = 600$ cm^2 c) $P = 750$ m^2 **2.** a) $P = 180$ cm^2 b) $P = 480$ dm^2 c) $P = 546$ cm^2 **3.** $P = 120$ cm^2 **4.** a) $h = 7\frac{1}{17}$ b) $h = 7\frac{1}{5}$ c) $h = \frac{12\sqrt{3}}{5}$ **5.** a) $P = 18$ cm^2, $h = 3\sqrt{2}$ cm b) $P = 32$ cm^2, $h = 4\sqrt{2}$ cm c) $P = 25$ cm^2, $h = 5$ cm **6.** a) $P = 4\sqrt{3}$ cm^2 b) $P = 25\sqrt{3}$ cm^2 c) $P = 147\sqrt{3}$ cm^2 d) $P = \frac{25\sqrt{3}}{36}$ cm^2 **7.** a) $P = 324\sqrt{3}$ cm^2 b) $P = 12\sqrt{3}$ cm^2 c) $P = 3\sqrt{3}$ cm^2 d) $P = \frac{\sqrt{3}}{48}$ cm^2 **8.** $Obw. = 24$ cm, $h = 4\sqrt{3}$ cm **9.** a) $P = 48$ m^2 b) $h = 9\frac{3}{5}$ m **10.** I i V, II i III, IV i VI **11.** a) 20 m b) 9 sztuk; 652,50 zł
12. 20 cm, 20 cm, 16 cm, $4\sqrt{2}$ cm, 16 cm **13.** a) tak b) 37,5 % c) *Wskazówka*: należy wyznaczyć długość i szerokość koca. **14.** 3 cm, 4 cm, 5 cm

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $P = 4$ dm^2 b) $P = 800$ cm^2 c) $P = 9000$ cm^2 **2.** $P = 4\sqrt{3}$ cm^2 **3.** FF **4.** D

3. Równoległobok i romb

Ćwiczenia **1.** 53° **2.** $h = 8\frac{2}{5}$ cm **3.** 11 m **4.** 5040 zł

Rozwiąż zadania **1.** a) 28°, 152°, 28°, 152° b) 102°, 78°, 102°, 78° c) 6°, 174°, 6°, 174° d) 172°, 8°, 172°, 8°
2. a) $P = 4{,}5$ m^2 b) $P = 5$ m^2 c) $P = 8$ m^2 **3.** $P_1 = 40$ cm^2, $P_2 = 20$ cm^2, $P_3 = 40$ cm^2, $P_4 = 60$ cm^2; $P_1 = P_3$ **4.** 20° **5.** a) 112°, 68°, 112°, 68° b) 80°, 100°, 80°, 100° c) 60°, 120°, 60°, 120° **6.** $h = 15$ cm
7. $P = 120$ cm^2, $Obw. = 52$ cm **8.** 4,8 cm **9.** 8 cm **10.** Są dwa możliwe rozwiązania: 8 m lub 2 m.
11. a) 24 m^2 b) Nie wystarczy. **12.** BC **13.** D **14.** $\sqrt{41}$

Sprawdź, co umiesz! **1.** FF **2.** a) $P = 6$ m^2 b) $P = 1620$ cm^2 c) $P = 12$ m^2 **3.** C **4.** A **5.** $h = 19\frac{1}{5}$ dm

4. Trapez

Ćwiczenia **1.** a) $\alpha = 44°$, $\beta = 48°$ b) $\alpha = 112°$, $\beta = 27°$ **2.** $P = 697{,}2$ cm^2 **3.** $h = 15$ cm **4.** $h = 8$ cm

Rozwiąż zadania **1.** a) $|\sphericalangle DAB| = 119°$, $|\sphericalangle BCD| = 60°$ b) $|\sphericalangle EFG| = 90°$, $|\sphericalangle GHE| = 124°$, $|\sphericalangle HEF| = 56°$ c) $|\sphericalangle LIJ| = 99°$, $|\sphericalangle KLI| = 81°$, $|\sphericalangle IJK| = 38°$, $|\sphericalangle JKL| = 142°$ d) $|\sphericalangle MNO| = 115°$, $|\sphericalangle NOP| = 65°$, $|\sphericalangle PMN| = 115°$, $|\sphericalangle OPM| = 65°$ **2.** 60°, 120°, 90°, 90° **3.** 77°, 77°, 103°, 103° **4.** $P = 79{,}2$ cm^2 **5.** a) $h = 5$ cm b) $2\sqrt{3}$ cm
6. a) 4 cm i 12 cm b) 10 cm i 6 cm c) 11 cm i 5 cm d) 6 cm i 10 cm **7.** a) $|\sphericalangle ABC| = 60°$, $|\sphericalangle BCD| = 120°$ b) $|\sphericalangle SPQ| = 40°$, $|QRS| = 105°$ **8.** $P = 85$ cm^2 **9.** $P = 512$ cm^2 **10.** $P = 228$ cm^2 **11.** $P = 108\sqrt{3}$ cm^2, $Obw. = 60$ cm
12. a) $P = 180$ cm^2 b) $P = 24$ dm^2 c) $P = 80\sqrt{3}$ cm^2 **13.** $1\frac{7}{8}$ % **14.** $h = 8$ cm **15.** *Wskazówka*: Należy rozważyć trójkąt prostokątny o przyprostokątnej będącej wysokością trapezu i przeciwprostokątnej będącej ramieniem trapezu. Długość drugiej przyprostokątnej tego trójkąta wynosi $\frac{a-b}{2}$.

Sprawdź, co umiesz! **1.** $|\sphericalangle CDA| = 109°$, $|\sphericalangle ABC| = 71°$, $|\sphericalangle BCD| = 109°$ **2.** 20°, 160°, 90°, 90° **3.** C
4. $h = 5\frac{1}{3}$ cm **5.** C **6.** PF

5. Kąty w wielokątach, pola wielokątów

Ćwiczenia **1.** a) $\alpha = 133^\circ$ b) $\alpha = 104^\circ$ c) $\alpha = 26^\circ$ **2.** ośmiokąt **3.** $P = 88\ \text{dm}^2$ **4.** $P_{\Delta EFC} = 36\ \text{cm}^2$

Rozwiąż zadania **1.** a) nie b) nie c) nie **2.** a) $|\sphericalangle ABO| = 45^\circ$, $|\sphericalangle CDO| = 45^\circ$ b) $|\sphericalangle AOD| = 80^\circ$, $|\sphericalangle BCO| = 50^\circ$ c) $|\sphericalangle BCD| = 39^\circ$ d) $|\sphericalangle DAB| = 40^\circ$, $|\sphericalangle CDA| = 120^\circ$ **3.** a) $P = 144\ \text{cm}^2$ b) $P = \left(126 - 25\sqrt{2}\right)\ \text{cm}^2$ c) $P = \left(48 + 36\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$ **4.** C **5.** B **6.** a) 9 b) 170 **7.** $1080\ \text{cm}^2$ **8.** PP **9.** $P = 28\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **10.** $1681\ \text{m}^2$ **11.** *Wskazówka* : należy zauważyć, że: czworokąt $BCFE$ jest trapezem, $|CF| = \frac{1}{4}|CD|$, $|BE| = \frac{1}{2}|AB|$, wysokość trapezu jest równa wysokości prostokąta.

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) $\alpha = 97^\circ$ b) $\alpha = 55^\circ$ **2.** Tak, ma. **3.** $P = 24\ \text{dm}^2$ **4.** C

6. Wielokąty foremne

Ćwiczenia **1.** a) 135° b) 6 **2.** $P = 150\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **3.** *Obw.* $= 84$ cm, $P = 294\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Rozwiąż zadania **1.** FFPP **2.** a) 144° b) 156° **3.** a) 9 b) 12 c) 24 d) 36 **4.** a) $P = 216\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ b) $P = 486\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ c) $P = 18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ d) $P = 27\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **5.** a) *Obw.* $= 120$ cm, $P = 600\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ b) *Obw.* $= 24\sqrt{3}$ cm, $P = 72\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **6.** Jest to kwadrat.; $P = 8\ \text{cm}^2$. **7.** Jest to trójkąt równoboczny. $P = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **8.** Tak, jest. **9.** 1,5 raza **10.** $P = 12\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **11.** Nie jest. *Wskazówka*: należy wyznaczyć długości boków otrzymanej figury. **12.** $P = 7289\ \text{cm}^2$

Sprawdź, co umiesz! **1.** BD **2.** $5\sqrt{3}$ cm i 10 cm **3.** PP

Sprawdź umiejętności

1. a) $P = 875\ \text{mm}^2$ b) $P = 24\ \text{cm}^2$ c) $P = \frac{9\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2$ d) $P = 12\sqrt{2}\ \text{cm}^2$ e) $P = 15\frac{3}{4}\ \text{cm}^2$ f) $P = 25\ \text{cm}^2$

2. a) 12 000; 1 200 000 b) 0,14; 1400 c) 15 000 000; 1 500 000 000 d) 0,006; 0,0000006 **3.** $P = 392\ \text{m}^2$

4. a) *Obw.* $= 48$ cm, $P = 144\ \text{cm}^2$ b) *Obw.* $= 28\sqrt{3}$ cm, $P = 147\ \text{cm}^2$ c) *Obw.* $= 20\sqrt{2}$ cm, $P = 50\ \text{cm}^2$ d) *Obw.* $= \frac{52\sqrt{2}}{5}$ cm, $P = 13\frac{13}{25}\ \text{cm}^2$ **5.** D **6.** $P = \frac{25\sqrt{15}}{2}\ \text{cm}^2$, *Obw.* $= \left(25 + 5\sqrt{15}\right)$ cm **7.** AD **8.** C

9. a) $|\sphericalangle BCD| = 35^\circ$, $|\sphericalangle CDA| = 101^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 132^\circ$ b) $|\sphericalangle ABC| = 62^\circ$, $|\sphericalangle BCD| = 118^\circ$, $|\sphericalangle CDA| = 118^\circ$ c) $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$, $|\sphericalangle BCD| = 120^\circ$ d) $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$, $|\sphericalangle BCD| = 120^\circ$, $|\sphericalangle CDA| = 120^\circ$, $|\sphericalangle DAB| = 60^\circ$

10. $P = 56\ \text{cm}^2$ **11.** $P = 48\ \text{cm}^2$ **12.** a) 18 cm i $9\sqrt{3}$ cm b) $P = \frac{243\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2$ **13.** a) 150° b) 160°

Potrenuj – zadania uzupełniające

1. prostokąt: $P = 8$, kwadrat: $P = 25$ **2.** 4 cm $\times$ 4 cm **3.** $P = 75\sqrt{3}\ \text{dm}^2$ **4.** AD **5.** $P = 60\ \text{cm}^2$, *Obw.* $= 4\sqrt{61}$ cm **6.** PP **7.** $P = 252\ \text{cm}^2$ **8.** $P = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, *Obw.* $= 32$ cm **9.** $P = 4\ \text{dm}^2$ **10.** BD **11.** A **12.** a) $4\sqrt{2}$ cm b) *Obw.* $= 24\sqrt{2}$ cm c) $P = 48\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ d) $4\sqrt{6}$ cm **13.** trzy przekątne długości $6\sqrt{3}$ cm i trzy przekątne długości 12 cm **14.** A3 **15.** $P = 24\sqrt{3}\ \text{m}^2$

Indeks

A
ar / 247

C
cecha przystawania trójkątów bbb / 216, 238
cecha przystawania trójkątów bkb / 217, 238
cecha przystawania trójkątów kbk / 218, 238
czworokąt / 269, 282

D
diagram procentowy / 48
diagram procentowy kołowy / 49
diagram procentowy prostokątny / 49
diagram procentowy słupkowy / 48
dodawanie pierwiastków / 123, 134, 144
dodawanie sum algebraicznych / 160
dowód / 234

F
figury przystające / 216

H
hektar / 247
hipoteza / 234

I
iloczyn potęg o jednakowych podstawach / 93, 102, 110
iloraz potęg o jednakowych podstawach / 93, 102, 110
iloraz wielkości wprost proporcjonalnych / 39

J
jednomian / 151, 172
jednomiany podobne / 155, 172
jednomian uporządkowany / 151
jednostki długości / 246

K
kąt / 205
kąt ostry / 205, 238
kąt pełny / 205, 238
kąt półpełny / 205, 238
kąt prosty / 205, 238
kąt rozwarty / 205, 238
kąt wewnętrzny trójkąta / 210
kąt wklęsły / 205, 238
kąt wypukły / 205
kąt zerowy / 205, 238
kąty naprzemianległe / 207, 238
kąty odpowiadające / 207, 238
kąty przyległe / 206, 238
kąty wierzchołkowe / 206, 238
klasyfikacja czworokątów / 269
kolejność wykonywania działań / 28, 32
kontrprzykład / 234
kredyt / 74
kwadrat / 246, 282

L
liczba całkowita / 8
liczba naturalna / 8
liczba niewymierna / 117, 136
liczba pierwsza / 121
liczba spełniająca równanie / 179, 196
liczba wymierna / 8, 136
liczby przeciwne / 10
lokata / 74

M
miara kąta wewnętrznego wielokąta foremnego / 277
mnożenie jednomianu przez sumę / 164, 172
mnożenie sum algebraicznych / 169, 172

N
notacja wykładnicza / 105, 110

O
obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba / 64, 80
obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent / 60, 80
obliczanie o ile procent jedna liczba jest większa/ mniejsza od drugiej / 69, 80
obliczanie procentu danej liczby / 55, 80
odcinki prostopadłe / 202, 238
odcinki równolegle / 202, 238
odejmowanie pierwiastków / 123, 134, 144
odejmowanie sum algebraicznych / 160
odsetki / 74
odwrotność liczby / 22
okrąg opisany na wielokącie / 276
okres rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego / 14
oprocentowanie / 74

P
pierwiastek kwadratowy / 116, 144
pierwiastek kwadratowy z iloczynu liczb nieujemnych / 120, 140, 144
pierwiastek kwadratowy z ilorazu liczb nieujemnych / 120, 140, 144

pierwiastek równania / 179
pierwiastek sześcienny / 127, 144
pierwiastek sześcienny z iloczynu liczb / 131, 140, 144
pierwiastek sześcienny z ilorazu liczb / 131, 140, 144
podatek VAT / 56
pole kwadratu / 246, 282
pole prostokąta / 246, 282
pole rombu / 257, 282
pole równoległoboku / 257, 282
pole trapezu / 263, 282
pole trójkąta / 251, 282
pole trójkąta prostokątnego / 282
pole trójkąta równobocznego / 253, 282
pole sześciokąta foremnego / 278
potęga o wykładniku całkowitym ujemnym / 106
potęga o wykładniku naturalnym / 88, 110
potęgowanie iloczynu / 96, 102, 110
potęgowanie ilorazu / 96, 102, 110
potęgowanie potęgi / 99, 102, 110
procent / 44, 80
procent pewnej wielkości / 54, 80
proporcja / 39
proste prostopadłe / 202
proste równoległe / 202
prostokąt / 246, 282
przekątna kwadratu / 226
przekątne sześciokąta foremnego / 279
przekształcanie wzorów / 193, 196
punkty procentowe / 69

R
redukcja wyrazów podobnych / 156, 172
romb / 257, 282
rozkład liczby na czynniki pierwsze / 121
rozwiązanie równania / 179, 196
rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe / 117
rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe / 14, 32
rozwinięcie dziesiętne skończone / 13, 32
równanie / 178, 196
równania równoważne / 183
równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą / 178
równanie sprzeczne / 185, 196
równanie tożsamościowe / 185, 196
równanie z jedną niewiadomą / 178
równoległobok / 257, 282

S
stężenie procentowe roztworu / 76
stosunek dwóch wielkości / 40
suma algebraiczna / 152, 172
suma miar kątów wewnętrznych czworokąta / 270, 282
suma miar kątów wewnętrznych trójkąta / 211, 238
szacowanie / 18

T
teza / 234
trapez / 263, 282
trapez prostokątny / 265
trapez równoramienny / 265
trójkąt / 210, 282
trójkąt o kątach 30°, 60°, 90° / 231, 238
trójkąt o kątach 45°, 45°, 90° / 227, 238
trójkąt ostrokątny / 210, 238
trójkąt prostokątny / 210, 238, 282
trójkąt rozwartokątny / 210, 238
trójkąt równoboczny / 211, 238, 282
trójkąt równoramienny / 211, 238
trójkąt różnoboczny / 211, 238
trójkąty przystające / 216, 238
twierdzenie / 234
twierdzenie Pitagorasa / 221, 238

U
usuwanie niewymierności z mianownika / 124, 144

W
wartość liczbowa wyrażenia algebraicznego / 156
warunek istnienia trójkąta / 213
wielkości wprost proporcjonalne / 39
wielokąt foremny / 276, 282
współczynnik liczbowy jednomianu / 151, 172
wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka / 122, 133
wyraz sumy algebraicznej / 152
wyrażenie algebraiczne / 150
wysokość trójkąta równobocznego / 230, 282

Z
założenie / 234
zamiana procentu na ułamek / 45, 80
zamiana ułamka na procent / 46, 80
zaokrąglenie z nadmiarem / 17
zaokrąglenie z niedomiarem / 17
zasada zaokrąglania / 17, 32
zbiór rozwiązań równania / 179

Źródła ilustracji i zdjęć:

Okładka: (chłopak) Master1305/Shutterstock.com; (abstrakcja) Matisson_ART/Shutterstock.com.

Tekst główny: s. 6 (telefon) ZinetroN/Shutterstock.com; s. 6 (Cezary) VaLiza/Shutterstock.com; s. 6 (Zosia) Jacek ChabraszewskiShutterstock.com; s. 6 (Pola) ViDI Studio/Shutterstock.com; s. 6 (Kuba) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 6 (Bruno) carballo/Shutterstock.com; s. 6 (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 10 (chłopak) VaLiza/Shutterstock.com; s. 11 (dziewczyna) ViDI Studio/Shutterstock.com; s. 12 (smartfon) ZinetroN/Shutterstock.com; s. 19 (Merkury) NASA images/Shutterstock.com; s. 19 (Wenus) Pike-28/Shutterstock.com; s. 20 (laptop) Chuenmanuse/Shutterstock.com; s. 20 (dziewczyna) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 21 (szara bluza) Dzha33/Shutterstock.com; s. 21 (bezrękawnik) Artem Avetisyan/Shutterstock.com; s. 21 (bielizna termoaktywna) gowithstock/Shutterstock.com; s. 25 (maliny) Artem Kutsenko/Shutterstock.com; s. 25 (butelka) mama_mia/Shutterstock.com; s. 26 (tablet) Vjom/Shutterstock.com; s. 26 (Cezary) VaLiza/Shutterstock.com; s. 26 (Kuba) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 27 (smartfon) ZinetroN/Shutterstock.com; s. 30 (deser bananowy) Davizro Photography/Shutterstock.com; s. 31 (dziewczyna) ViDI Studio/Shutterstock.com; s. 31 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 33 (mapa Polski) Schwabenblitz/Shutterstock.com; s. 35 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 35 (Monako) luma_art/Shutterstock.com; s. 35 (mapa Europy) Borhax/Shutterstock.com; s. 35 (Włochy) ORLY Design/Shutterstock.com; s. 36 (borówki amerykańskie) Vladislav Noseek/Shutterstock.com; s. 36 (butelka) Aranagraphics/Shutterstock.com; s. 36 (słoik) YummyBuum/Shutterstock.com; s. 38 (telefon) ZinetroN/Shutterstock.com; s. 38 (chłopak) carballo/Shutterstock.com; s. 40 (telefon) ZinetroN/Shutterstock.com; s. 42 (laptop) Chuenmanuse/Shutterstock.com; s. 42 (babeczka) Anton Starikov/Shutterstock.com; s. 43 (lemoniada) Sunflower Light Pro/Shutterstock.com; s. 43 (dziewczyna) ViDI Studio/Shutterstock.com; s. 44 (krem do rąk) Evgeny Zimin/Shutterstock.com; s. 46 (chłopak) VaLiza/Shutterstock.com; s. 47 (jabłka) Cherkasov/Shutterstock.com; s. 51 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 51 (dziewczyna) ViDI Studio/Shutterstock.com; s. 54 (jogurt) Tanya Sid/Shutterstock.com; s. 56 (łyżeczka) linear_design/Shutterstock.com; s. 56 (butelka) robuart/iStock/Getty Images Plus; s. 56 (ludziki) nelelena/Shutterstock.com; s. 56 (piłka) KP Photograph/Shutterstock.com; s. 56 (kask) Natalia Siverina/Shutterstock.com; s. 56 (skakanka) Africa Studio/Shutterstock.com; s. 57 (łosoś) Andrey Starostin/Shutterstock.com; s. 59 (skarbonka) MDigitalPixels/Shutterstock.com; s. 59 (dziewczyna) ViDI Studio/Shutterstock.com; s. 59 (perfumy) fuada_studio/Shutterstock.com; s. 59 (laptop) Chuenmanuse/Shutterstock.com; s. 61 (rower) ClassicVector/Shutterstock.com; s. 62 (Grecja) Granate Art/Shutterstock.com; s. 62 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 63 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 63 (Kraków) Nahlik/Shutterstock.com; s. 64 (kredki) Elena Belodedova/Shutterstock.com; s. 65 (dziewczyna) ViDI Studio/Shutterstock.com; s. 66 (deskorolka) Iconic Bestiary/Shutterstock.com; s. 67 (wesołe miasteczko) Manovector/Shutterstock.com; s. 67 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 70 (trampki) Dmitrij Skorobogatov/Shutterstock.com; s. 70 (akcesoria podróżnicze) olesia_g/Shutterstock.com; s. 72 (smartwatch) Jaromond/Shutterstock.com; s. 72 (bank) Vlad Kochelaevskiy/Shutterstock.com; s. 73 (dziewczyna) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 73 (hulajnoga) Kostsov/Shutterstock.com; s. 74 (długopis) Simply Amazing/Shutterstock.com; s. 74 (dokument) smx12/Shutterstock.com; s. 74 (bank) Vlad Kochelaevskiy/Shutterstock.com; s. 82 (kalkulator) graphics factory/Shutterstock.com; s. 82 (bułka) Karuka/Shutterstock.com; s. 82 (notes) PLST_4D/Shutterstock.com; s. 84 (dziewczyna) Jacek ChabraszewskiShutterstock.com; s. 84 (chłopak) VaLiza/Shutterstock.com; s. 84 (szkoła) tele52/Shutterstock.com; s. 85 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 85 (suszarka) CoolPhotoGirl/Shutterstock.com; s. 92 (pantofelki) blickwinkel/Alamy Stock Photo/BE&W; s. 92 (mikroskop) OrangeVector/Shutterstock.com; s. 99 (dymek) Tarchyshnik/iStock / Getty Images Plus; s. 99 (dziewczyna) ViDI Studio/Shutterstock.com; s. 102 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 104 (szachy) Andrey Armyagov/Shutterstock.com; s. 106 (koronawirus) tiero/iStock/Getty Images Plus; s. 108 (chłopak) carballo/Shutterstock.com; s. 108 (dziewczyna) ViDI Studio/Shutterstock.com; s. 108 (koliber) Kenneth Canning/Getty Images; s. 109 (kula ziemska) ixpert/Shutterstock.com; s. 109 (Księżyc) Hugo Felix/Shutterstock.com; s. 119 (działka) Shpadaruk Aleksei/Shutterstock.com; s. 133 (pierwiastek) america365/Shutterstock.com; s. 136 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 140 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 142 (chłopak) VaLiza/Shutterstock.com; s. 142 (dziewczyna) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 149 (dłoń z długopisem) vladwel/Shutterstock.com; s. 151 (ananas) Palokha Tetiana/Shutterstock.com; s. 153 (dziewczyna i chłopak) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 155 (chłopak) VaLiza/Shutterstock.com; s. 155 (koszulki) FabricioUZ/Shutterstock.com; s. 158 (beczki) Multigon/Shutterstock.com; s. 159 (cukierki owocowe) exopixel/Shutterstock.com; s. 159 (cukierki czekoladowe) Tiger Images/Shutterstock.com; s. 160 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 163 (pierniki) Pixel-Shot/Shutterstock.com; s. 163 (dziewczyna) ViDI Studio/Shutterstock.com; s. 167 (ramka) FabrikaSimf/Shutterstock.com; s. 167 (zdjęcie w ramce) Alena Ozerova/Shutterstock.com; s. 171 (plaża) tele52/Shutterstock.com; s. 171 (górskie wędrówki) Unitone Vector/Shutterstock.com; s. 171 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 174 (książki) Incomible/Shutterstock.com; s. 174 (chłopak) VaLiza/Shutterstock.com; s. 175 (laptop) Heleno4ka/Shutter-

Shutterstock.com; s. 180 (chłopak) VaLiza/Shutterstock.com; s. 180 (piłka tenisowa) Rost-9D/iStock/Getty Images Plus; s. 181 (szorty) jinjo0222988/iStock/Getty Images Plus; s. 181 (koszulka) YaroslavKryuchka/iStock/Getty Images Plus; s. 181 (buty) worldofstock/Shutterstock.com; s. 182 (waga) DG-Studio/Shutterstock.com; s. 188 (chłopak) carballo/Shutterstock.com; s. 188 (dziewczyna) Jacek ChabraszewskiShutterstock.com; s. 191 (król Kazimierz IV Jagiellończyk) reprodukcja; s. 192 (puchar) andiPAS/Shutterstock.com; s. 194 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 198 (popcorn) M. Unal Ozmen/Shutterstock.com; s. 198 (bilety) Alexander-Trou/Shutterstock.com; s. 199 (ręka z telefonem) DashaKos/Shutterstock.com; s. 200 (klawiatury i myszki) AmazeinDesign/Shutterstock.com; s. 205 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 210 (pies) Vikks/Shutterstock.com; s. 223 (Pitagoras) Tupungato/Shutterstock.com; s. 224 (chłopak) carballo/Shutterstock.com; s. 229 (smartfon) ZinetroN/Shutterstock.com; s. 243 (samolot) phive/Shutterstock.com; s. 244 (laptop) Chuenmanuse/Shutterstock.com; s. 245 (plaster miodu) Brandon Laufenberg/ filo/Getty Images; s. 249 (plan mieszkania) Shpadaruk Aleksei/Shutterstock.com; s. 250 (babcia i wnuczka) ViDI Studio/Shutterstock.com; s. 250 (łopatka) Iryna Tolmachova/iStock/Getty Images Plus; s. 255 (płotek) Manbetta/Shutterstock.com; s. 255 (trawa) photokup/Shutterstock.com; s. 255 (koc) Chief Crow Daria/Shutterstock.com; s. 261 (chłopak) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 261 (trawa) photokup/Shutterstock.com; s. 261 (ziemia) Nik Merkulov/Shutterstock.com; s. 267 (trawa) photokup/Shutterstock.com; s. 267 (ziemia) Nik Merkulov/Shutterstock.com; s. 269 (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 273 (ziemia) Nik Merkulov/Shutterstock.com; s. 273 (zestaw do sadzenia) Georgy Markov/Shutterstock.com; s. 273 (łopatka) goir/iStock/Getty Images Plus; s. 274 (plac zabaw) VectorPot/Shutterstock.com; s. 281 (kwiaty) akkara sookthip/Shutterstock.com.

Wydawnictwa Szkole i Pedagogiczne oświadczają, że podjęły starania mające na celu dotarcie do właścicieli i dysponentów praw autorskich wszystkich zamieszczonych utworów. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, przytaczając w celach dydaktycznych utwory lub fragmenty, postępują zgodnie z art. 27^1 ustawy o prawie autorskim. Jednocześnie Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że jedynym podmiotem właściwym do kontaktu autorów tych utworów lub innych podmiotów uprawnionych w wypadkach, w których twórcy przysługuje prawo do wynagrodzenia.

Aktualność linków, które występują w tym podręczniku i odsyłają do zewnętrznych stron internetowych, została sprawdzona przed ich opublikowaniem (dostęp z dnia 24.10.2022 r.). Wydawnictwo nie ponosi odpowiedzialności za aktualność oraz zawartość tych stron lub stron, do których linki się tam znajdują.

WYDAWNICTWA
SZKOLNE
i PEDAGOGICZNE

wsip.pl

sklep.wsip.pl

infolinia: 801 220 555

ISBN 978-83-02-20990-1