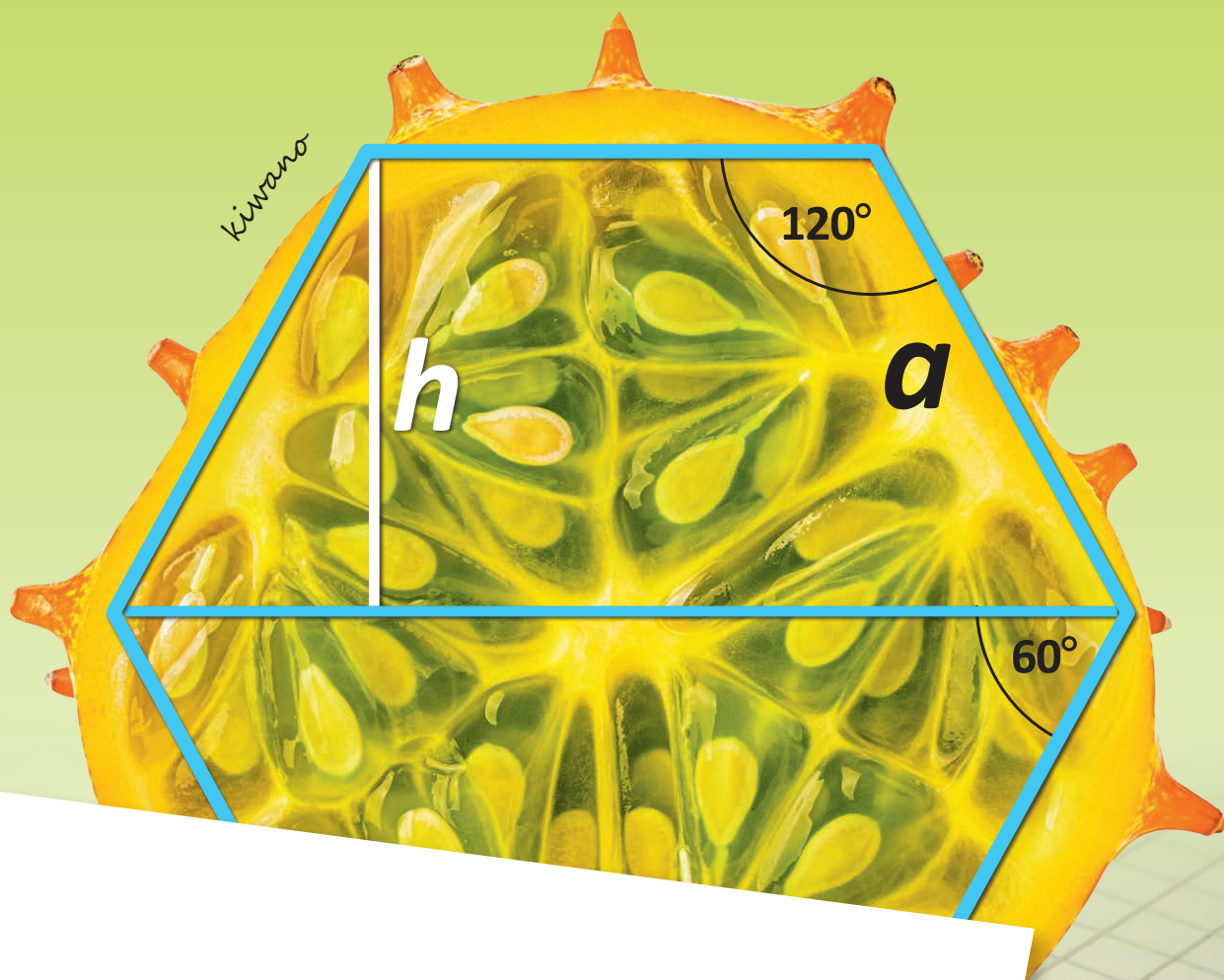




PODREĆCZNIK NAUCZYCIELA

Matematyka
wokół nas



Oznaczono
zmiany
i wykreślenia

E-book
na eduranga.pl

**PODSTAWA
2024**

5

szkoła podstawowa

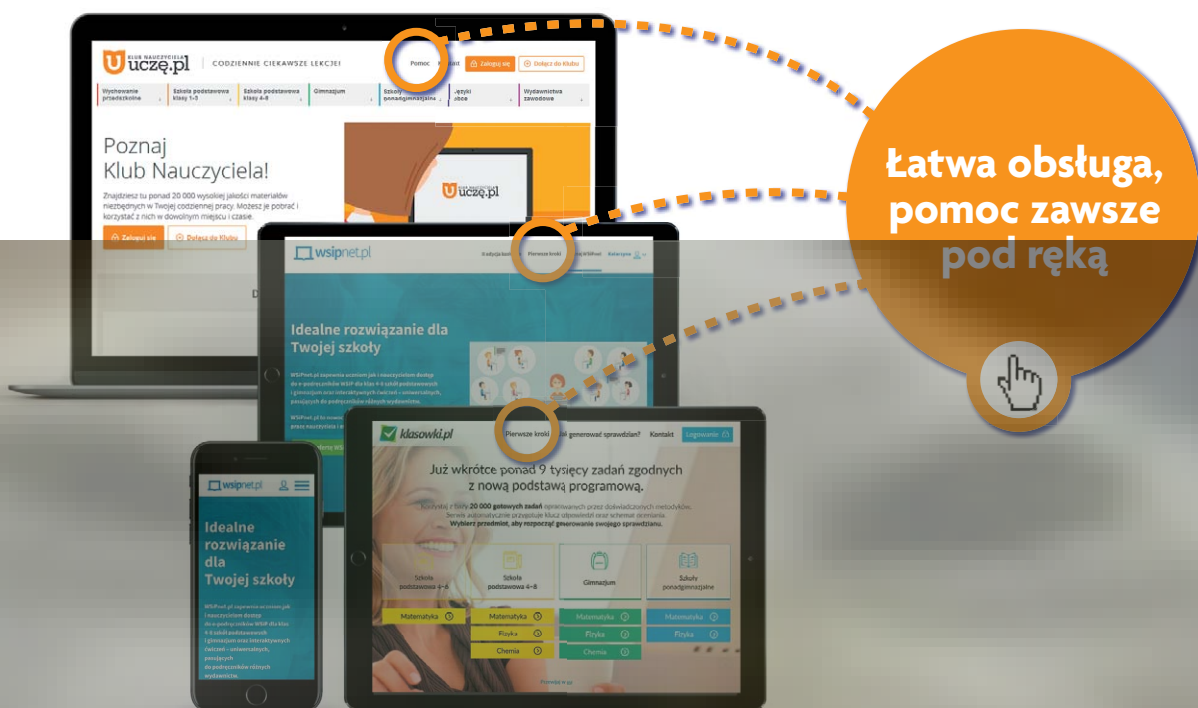
Już dziś skorzystaj z najlepszych zasobów edukacyjnych!

Dołącz do Klubu Nauczyciela Uczę.pl i zyskaj dostęp do tysięcy wysokiej jakości materiałów dydaktycznych pomocnych w Twojej pracy.



- KROK 1** Załóż konto. Wejdź na stronę Uczę.pl, kliknij Dołącz do Klubu i wypełnij formularz rejestracyjny*.
- KROK 2** Zaloguj się. Po zakończeniu rejestracji i aktywowaniu konta zaloguj się do serwisu – wpisz login (adres e-mail użyty w trakcie rejestracji) oraz hasło.
- KROK 3** Wyszukaj interesujące Cię zasoby. Skorzystaj z górnego menu (wybierz z rozwijanej listy interesujący Cię segment i przedmiot) lub wpisz w wyszukiwarkę serwisu, jakiego materiału szukasz.
- KROK 4** Pobieraj materiały do przedmiotu, którego uczysz. Zawsze masz do nich dostęp – możesz z nich korzystać w dowolnym miejscu i czasie, także na urządzeniach mobilnych.

* Jeśli masz już konto w innym serwisie WSiP (np. WSiPnet.pl lub Klasówki.pl), możesz pominąć ten krok – wystarczy, że się zalogujesz. Jeżeli nie pamiętasz hasła, skorzystaj z opcji **Przypomnij hasło**.



 wsipnet.pl

 klasowki.pl



Nauka Zdalna

Jedno konto daje dostęp do wszystkich serwisów internetowych WSiP!

PODREČZNIK NAUCZYCIELA

Matematyka *wokół nas*

Odpowiedzi do zadań i ćwiczeń,
wskazówki metodyczne



5

Autorzy: **Helena Lewicka, Marianna Kowalczyk**

© Copyright by Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne
Warszawa 2021

Wydanie I

ISBN 978-83-02-19769-7

Opracowanie merytoryczne i redakcyjne: **Ewa Połys, Aniela Zdun**

Redakcja i korekta językowa: **Jolanta Kucharska**

Redakcja techniczna: **Janina Soboń**

Projekt okładki: **Ewa Pawińska**

Projekt graficzny: **Joanna Plakiewicz, Dominik Krajewski**

Skład i łamanie: **Shift_Enter**

Źródła ilustracji i fotografii

Okładka: s. 1 (kiwano) Olga Guchek/iStock Photo/Getty Images, (kratka) Valerio Rosati/EyeEm/Getty Images

Tekst główny: s. 56 (oko) AngeliqueD/Shutterstock.com, (pszczoła) irin-k/Shutterstock.com, (monitor) ESB Professional/Shutterstock.com, (obraz na monitorze) Ash Pollard/Shutterstock.com; s. 57 (serce) Good Job/Shutterstock.com, (Ziemia) Triff/Shutterstock.com, (statek) Denis Belitsky/Shutterstock.com; s. 128 (pierogi) bergamont/Shutterstock.com, (kawałki czekolady) baibaz/Shutterstock.com; s. 129 (muffina) David Franklin/Shutterstock.com, (pizza) Fanfo/Shutterstock.com; s. 198 (błazenek) bluehand/Shutterstock.com; s. 199 (świnka morska) Grigorita Ko/Shutterstock.com, (pies z kotem) Chendongshan/Shutterstock.com; s. 217 (latawiec) grmarc/Shutterstock.com; s. 238 (kromka chleba) Mut Hardman/Shutterstock.com, (ser żółty) Karamazov Brother/Shutterstock.com; s. 238-239 (proporczyki) Elena Kudryavtseva/Shutterstock.com

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne Spółka Akcyjna
00-807 Warszawa, Aleje Jerozolimskie 96
KRS: 0000595068
Infolinia: 801 220 555
www.wsip.pl

Publikacja, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.



Szanujmy cudzą własność i prawo.
Więcej na www.legalnakultura.pl
Polska Izba Książki

SPIS TREŚCI

O podręczniku nauczyciela	IV
Wakacje, wakacje i... po wakacjach	7
I. Liczby naturalne	12
II. Figury geometryczne	58
III. Ułamki zwykłe	90
IV. Wyrażenia algebraiczne	130
V. Trójkąty	146
VI. Ułamki dziesiętne	168
VII. Czworokąty	200
VIII. Pola figur płaskich	221
IX. Liczby całkowite	240
X. Graniastopy	254

Komplet materiałów metodycznych
znajduje się w **Klubie Nauczyciela**



Zapraszamy do korzystania!

- program nauczania
- opinia o programie nauczania
- rozkład materiału nauczania
- plan wynikowy
- katalog wymagań na poszczególne stopnie
- plansze edukacyjne
- diagnozy
- inne materiały

O podręczniku nauczyciela

Tematy lekcji i liczba godzin potrzebna na ich realizację

Umiejętności, które uczeń powinien zdobyć podczas lekcji

Wskazówki metodyczne dotyczące realizacji tematu

Tytuł planszy interaktywnej do wykorzystania podczas lekcji

Materiały pomocne w realizacji tematu

Odwołania do zeszytu ćwiczeń i zbioru zadań

Odpowiedzi do zadań oraz zeszytu ćwiczeń

Komentarze metodyczne do przykładów i zadań

Na wybranych stronach zamieściliśmy ilustracje (zrzuty ekranów) z naszych dodatkowych publikacji.

Podczas lekcji zachęcamy do korzystania z naszych publikacji:

- multibooka,
- serwisów wsipnet.pl oraz klasowki.pl.

I. LICZBY NATURALNE

Tematy lekcji:
1. Systemy zapisywania liczb (1 h)
2. Systemy zapisywania liczb – zadania i ćwiczenia (1 h)

Cele lekcji:

- zapisuje słownie i czyta duże liczby zapisane w systemie dziesiętnym,
- stosuje w sytuacjach praktycznych zapisywanie liczb w systemach dziesiętnym i rzymskim,
- porównuje i porządkuje liczby naturalne rosnąco albo malejąco lub za pomocą znaków $<$, $>$, $=$,
- odczytuje liczby zaznaczone na osi liczbowej,
- umieszcza liczby naturalne na osi liczbowej i odpowiednio dobrać jednostkę,
- odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach i na diagramach,
- czyta ze zrozumieniem tekst zawierający informacje liczbowe i dostrzega zależności między podanymi informacjami,
- określa liczebność zbioru, np. od 15 do 20.

Wskazówki metodyczne

- Na lekcji posługujemy się dwiema liczbami, większymi niż w klasie 4. Zachęcamy do przeprowadzenia gry polegającej na układaniu liczb wielocyfrowych. Najlepiej przeprowadzić ją w zespołach dwuosobowych. Spośród uczniów poprosimy narysowanych duże liczby należy wybrać dwóch asystentów, którzy będą arbitrami w sytuacjach spornych. Każdy zespół otrzymuje 10 karteczek, na każdej z nich widnieje inna cyfra. Uczniowie na przemian układają liczby: najpierw 5-cyfrowe, następnie 6-cyfrowe itd. Gdy jedna osoba ułoży liczbę, druga ją odczytuje. Jeżeli liczba zostanie poprawnie odczytana, osoba odczytująca otrzymuje punkt. Wątpliwości rozstrzygają asystenci lub nauczyciel. Ćwiczenie można wykonać w inny sposób: jedna osoba podaje liczbę, druga ją ułoży, po czym następuje zmiana. Za poprawne ułożenie liczby jest przyznawany punkt. Wygrywa ta osoba, która zdobyła najwięcej punktów.
- Grę można przeprowadzić również z wykorzystaniem znaków rzymskich.
- Podczas omawiania systemów zapisywania liczb należy wspomnieć o nazwach określających zbiory liczb, takich jak: tuzin, mendel, kopa.
- Aby ułatwić uczniom posługiwanie się dużymi liczbami, można również zapoznać z wykonaniem prezentacji, plakatu lub innej pracy plastycznej na temat: „Duże liczby wokół nas”. Jako podsumowanie prelekcji proponujemy zorganizowanie wystawy prac uczniów. Nagrodą może być najwyższa cena i prezentacja najlepszej pracy na stronie internetowej szkoły.

1. Systemy zapisywania liczb

Słowa przestrogi
Do zapisywania liczb służą cyfry: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

System dziesiętny
Jest to **dziesiętny** system zapisu liczb, ponieważ wartości cyfr zależą od jej miejsca (pozycji) w liczbie.

Grupa: **miliony** **tysiące** **jednostki**

Rzecz: **dziesiątki** **setki** **tysięczniki**

System rzymski
Jest 7 znaków, za pomocą których zapisujemy liczby:
MDCCLX = 1000 + 500 + 100 + 50 + 10 = 1610

Jeśli znak liczby mniejszy poprzedza znak liczby większej, to wykonujemy odjęcie, np.
 $XL = 50 - 10 = 40$ $XC = 100 - 10 = 90$
 $XLV = (50 - 10) + 5 = 45$ $CD = 500 - 100 = 400$

Osi liczbowe
Na osi liczbowej można zaznaczyć liczby. Tu plementy zaznaczonej liczby na prawej od zera jest liczba 100, a na lewej 200, 300, ...

Materiały dydaktyczne

Liczy online	Liczy naturalne	Liczy offline	System zapisywania liczb
Inne			
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1			s. 9-10
Zbiór zadań			s. 12-15

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- a) 1000; 100; 10; 1; 44 000 000; 4 400 000 000; c) 97; 307; 107
- a) 3407; b) 2960; c) 150 000 000; d) 42 195
- kolejno: sześćdziesiąt cztery miliony, osiemnaście milionów, dwieście milionów, trzysta pięćset milionów, czterdzieści cztery miliony, siedem milionów sześćset tysięcy, czterdzieści milionów
- 680 579; 32 703; 800 402; 3 000 050

II. Figury geometryczne

Przykład 2
Trójkąt ABC o bokach długości: 3 cm, 4 cm, 5 cm skonstruujemy w skali 1 : 2.

Skala 1 : 2 oznacza, że każdy bok trójkąta zostanie zmniejszony 2 razy. Narysujemy odcinek 2 razy krótszy niż bok trójkąta ABC:

5 cm : 2 = 2 cm 5 mm 4 cm : 2 = 2 cm 3 cm : 2 = 1 cm 5 mm

Konstrukcja z wykorzystaniem otrzymanych odcinków wykonujemy według punktów podanych w **Przykładzie 1**. Otrzymujemy trójkąt DEF.

Trójkąt DEF to narysowany w skali 1 : 2 trójkąt ABC.

- Skonstruuj trójkąt o bokach 4 cm, 6 cm i 8 cm w skali 1 : 1 i w skali 1 : 2. Oblicz obwód każdego z tych trójkątów.
- Wykorzystaj kartkę w zeszytach i narysuj przedstawiony obok wielokąt w skali 1 : 1 i 2 : 1. Co to za wielokąt?
- Prostokąt ma wymiary 25 cm × 30 cm. W skali 1 : 5 prostokąt ten ma wymiary:
A. 4 cm × 6 cm B. 5 cm × 6 cm
C. 12 cm 5 mm × 15 cm D. 5 cm × 7 cm
- Działka ma kształt prostokąta o wymiarach 30 m × 70 m. Uzupełnij zdania. Wylicz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
W skali 1 : 250 działka ma wymiary A i B. A. 15 cm × 35 cm
B. 12 cm × 28 cm
C. 100 cm D. 80 cm

W skali 1 : 250 obwód działki jest równy C i D. C. 100 cm D. 80 cm

a) Narysuj koło o promieniu 15 mm w skali 1 : 1 oraz w skali 2 : 1.
b) Napisz, jakie są długości średnic narysowanych kół.

Odpowiedzi do zadań

1. 8 cm, 9 cm
2. czworokąt
3. B
4. B
5. b) 3 cm, 6 cm

Komentarz do Przykładu 2.
W tym przykładzie uczniowie utrwalają umiejętność konstruowania trójkąta z 3 danych odcinków oraz rysowania figury w skali. Jeśli będą wykonywać to zadanie w zeszycie, powinni zastosować kolory (jak w Przykładzie 1).

Komentarz do zadania 1.
Uczniowie powinni samodzielnie skonstruować trójkąt o podanych długościach boków, używając kolorów. W razie potrzeby mogą szukać pomocy w przedstawionych wcześniej przykładach.

Komentarz do zadania 2.
W tym zadaniu uczniowie powinni zauważyć, że boki czworokąta są przekątnymi pewnych prostokątów. Zatem rysowanie boków czworokąta będzie się wiązało z policzeniem liczby kwadratów z zacięzionego kwadratu o boku 6 kwadratów (w skali 2 : 1 – 12 kwadratów) i na jego bokach zaznaczenie wierszów kwadratów, parując, jak zmienia się odległość w danej skali. W zadaniu można także wykorzystać konstrukcję trójkąta. Wystarczy poprowadzić prostą kąta czworokąta, a następnie skonstruować odpowiednio 2 trójkąty o danych bokach. Możemy powiedzieć uczniom, że użyję cyfry 1 i linijki ułatwia rysowanie niektórych figur geometrycznych, a taki sposób rysowania jest dokładniejszy od rysowania za pomocą jedynie linijki z podziałką.

Komentarz do zadania 4.
Wskazane jest porównanie obwodów działki w skali 1 : 1 i 1 : 250 oraz zwrócenie uwagi na to, że razy dłuższy jest obwód boki działki w skali 1 : 1 niż w skali 1 : 250.

Helena Lewicka, Marianna Kowalczyk

Matematyka *wokół nas*

podręcznik do szkoły podstawowej



5

W podręczniku wykorzystano materiały z publikacji *Matematyka wokół nas. Podręcznik. Klasa 5* autorstwa Heleny Lewickiej i Elżbiety Rosłon.

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: **dr Marii Borowskiej, prof. dr. hab. Tadeusza Stanisza, dr Izabeli Kraśnickiej-Wilk.**

Etap edukacyjny: II

Typ szkoły: szkoła podstawowa

Rok dopuszczenia: 2021

Numer ewidencyjny w wykazie: 787/2/2021/z1

Podręcznik wpisany do wykazu podręczników MEN dopuszczonych do użytku szkolnego, uwzględniających podstawę programową kształcenia ogólnego określoną w rozporządzeniu z dnia 14 lutego 2017 r. (Dz.U. poz. 356 i z 2018 r., poz. 1679).

© Copyright by Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne
Warszawa 2021

Wydanie VII (2024)

ISBN 978-83-02-19578-5

Opracowanie merytoryczne i redakcyjne: **Ewa Polys** (redaktor koordynator, redaktor merytoryczny), **Iza Gołuchowska, Marzena Korycka, Anna Krymska** (redaktorzy merytoryczni)
Redakcja językowa: **Jolanta Kucharska**

Redakcja techniczna: **Janina Soboń**

Projekt okładki i strony tytułowej: **zespół grafików WSiP**

Projekt graficzny: **Ewa Pawińska**

Opracowanie graficzne: **Ewa Pawińska, Małgorzata Heine**

Koncepcja infografik: **Elżbieta Mrożek**

Opracowanie infografik i wykonanie: **Tomasz Korwin-Szymanowski**

Fotoedycja: **Natalia Marszałek, Ignacy Składowski**

Skład i łamanie: **Shift_ENTER**

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne Spółka Akcyjna
00-807 Warszawa, Aleje Jerozolimskie 96
KRS: 0000595068
Infolinia: 801 220 555
www.wsip.pl

Druk i oprawa: ArtDruk Zakład Poligraficzny Andrzej Łuniewski

Publikacja, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.



Szanujmy cudzą własność i prawo.
Więcej na www.legalnakultura.pl
Polska Izba Książki

SPIS TREŚCI

Jak korzystać z podręcznika	6
Wakacje, wakacje i... po wakacjach	7

I. Liczby naturalne

1. Systemy zapisywania liczb	12
2. Pamięciowe dodawanie i mnożenie	18
3. Pamięciowe odejmowanie i dzielenie	23
4. Kolejność wykonywania działań	28
5. Droga, prędkość i czas	32
6. Pisemne dodawanie i odejmowanie	35
7. Pisemne mnożenie i dzielenie	39
8. Podzielność liczb	44
9. Zaokrąglanie liczb	49
Zadania utrwalające	53
Zadania sprawdzające	55
Rekordy prędkości – infografika	56

II. Figury geometryczne

1. Punkt, prosta, półprosta, odcinek	58
2. Kąty przyległe i kąty wierzchołkowe	65
3. Własności wielokątów	71
4. Obwód wielokąta	77
5. Figury w skali	81
Zadania utrwalające	86
Zadania sprawdzające	88

III. Ułamki zwykłe

1. Iloraz dwóch liczb	90
2. Rozszerzanie i skracanie ułamków	93
3. Porównywanie ułamków	96
4. Dodawanie i odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach	99
5. Dodawanie i odejmowanie ułamków o różnych mianownikach	103
6. Mnożenie ułamków	108
7. Obliczanie ułamka danej liczby	111
8. Dzielenie ułamków	114
9. Obliczanie liczby z danego jej ułamka	119
10. Działania na ułamkach	122
Zadania utrwalające	125
Zadania sprawdzające	127
Matematyka w kuchni – infografika	128

IV. Wyrażenia algebraiczne

1. Zapisywanie wyrażeń algebraicznych	130
2. Obliczanie wartości liczbowych wyrażeń algebraicznych	135
3. Rozwiązywanie równań	138
Zadania utrwalające	144
Zadania sprawdzające	145

V. Trójkąty

1. Trójkąt różnoboczny	146
2. Trójkąt równoramienny	150
3. Trójkąt równoboczny	152
4. Podział trójkątów ze względu na kąty	154
5. Wysokości trójkątów	157
6. Klasyfikacja trójkątów	161
Zadania utrwalające	165
Zadania sprawdzające	167

VI. Ułamki dziesiętne

1. Ułamki o mianowniku 10, 100, 1000... ..	168
2. Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych	172
3. Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000... ..	175
4. Mnożenie ułamków dziesiętnych przez liczbę naturalną	178
5. Mnożenie ułamków dziesiętnych	180
6. Dzielenie ułamków dziesiętnych przez liczbę naturalną	182
7. Dzielenie ułamków dziesiętnych	184
8. Ułamki dziesiętne o mianowniku 100	187
9. Diagramy procentowe	191
Zadania utrwalające	195
Zadania sprawdzające	197
Zwierzęta domowe – infografika	198

VII. Czworokąty

1. Prostokąt	200
2. Równoległobok	203
3. Trapez	208
4. Klasyfikacja czworokątów – zadania	212
Czworokąty na czacie – infografika	216
Zadania utrwalające	218
Zadania sprawdzające	219

VIII. Pola figur płaskich

1. Pole prostokąta i kwadratu	221
2. Pole równoległoboku i rombu	225
3. Pole trójkąta	229
4. Pole trapezu	232
Zadania utrwalające	235
Zadania sprawdzające	237
Figury na plaży – infografika	238

IX. Liczby całkowite

1. Liczby ujemne	240
2. Dodawanie liczb całkowitych	244
3. Odejmowanie liczb całkowitych	248
Zadania utrwalające	252
Zadania sprawdzające	253

X. Graniastosłupy

1. Prostopadłościan	254
2. Graniastosłup prosty	257
3. Pole powierzchni graniastosłupa	262
Zadania utrwalające	267
Zadania sprawdzające	268
Odpowiedzi do zadań	270

JAK KORZYSTAĆ Z PODRĘCZNIKA

Przeczytaj, zrozum, zapamiętaj

Sowa uczy

Aby znaleźć odwrotność liczby, należy tę liczbę zapisać w postaci ułamka zwykłego i zamienić miejscami licznik z mianownikiem.

Liczba	Odwrotność liczby	Iloczyn liczb
$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{1} = 5$	$\frac{1}{5} \cdot 5 = 1$
$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8} = 1$
$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{1} = 4$	$\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$
$10 = \frac{10}{1}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{10}{1} \cdot \frac{1}{10} = 1$

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° .

ważne informacje do zapamiętania

wprowadzenie nowych treści

Ćwicz i rozwiąż zadania

Przykład 1.

Rano temperatura była równa $(-5)^\circ\text{C}$. Do południa wzrosła o 8°C . Jaka była temperatura w południe?
Termometr wskazywał $(-5)^\circ\text{C}$.
Temperatura wzrosła o 8°C .
 $(-5) + 8 = 3$

Odpowiedź: W południe temperatura była równa 3°C .



Sprawdź się!

- Oblicz.
a) $14 + (-14)$ b) $(-3) + (-6)$ c) $7 + (-11)$ d) $(-12) + 18$
- W którym wyrażeniu suma **nie** jest równa (-12) ?
A. $(-7) + (-5)$ B. $(-8) + 20$
C. $(-6) + (-6)$ D. $(-22) + 10$

wzorcowo rozwiązane zadania

zadania na zakończenie każdego tematu

Utrwal i sprawdź swoje umiejętności

Zadania utrwalające

- Podaj nazwę wyrażenia.
a) $\frac{1}{2} \cdot 3x$ b) $p + t + z$ c) $c - d$ d) a^2 e) $\frac{m}{6}$
- Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:
a) iloraz liczb 11 i a , b) czwartą potęgę liczby m .

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

- Termometr wskazuje temperaturę
A. 7°C B. -7°C C. -6°C D. -8°C
- Wyróżnionym punktom odpowiadają liczby

powtórzenie wiadomości

sprawdzenie umiejętności

Zwróć uwagę na ciekawostki i wyzwania

A to ciekawe!

Na termometrach temperatura jest czasem podana w dwóch skaliach:

Celcjusza: 0°C – to temperatura zamarzania wody
C – to temperatura wrzenia wody
Kelvina: 0 K – to tak zwane zero bezwzględne
K – $0\text{ K} = -273^\circ\text{C}$



Wyzwanie

Stas napisał dwie liczby złożone. Każda z nich ma cztery dzielniki oraz:
• jedna jest sumą dwóch jednocyfrowych liczb pierwszych i jednym z jej dzielników jest liczba 4,
• druga jest dwucyfrowym, parzystym iloczynem dwóch jednocyfrowych liczb pierwszych.
Jakie liczby napisał Stas? Ile rozwiązań ma to zadanie?

interesujące wiadomości matematyczne

zadania dla dociekliwych

Pamiętaj!

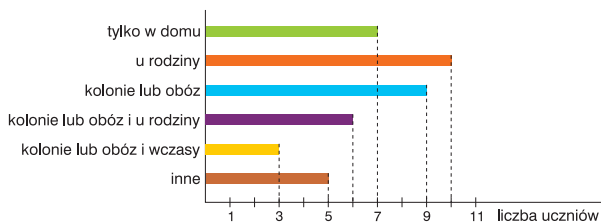
Odpowiedzi do wszystkich zadań zamieszczonych w podręczniku zapisuj w zeszycie przedmiotowym.

Wakacje, wakacje i... po wakacjach

Rozpoczynamy nowy rok pracy. Wciąż wspominając wakacje, sprawdźcie, ile zostało w waszej pamięci najważniejszych wiadomości z klasy 4.

Przykład 1.

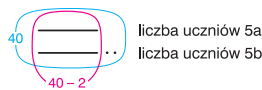
W pewnej szkole wszyscy uczniowie klas 5a i 5b wzięli udział w ankiecie dotyczącej sposobów spędzania wakacji. Wyniki tej ankiety przedstawiono na diagramie.



- a) Ilu uczniów było w każdej z tych klas, jeżeli w klasie 5a było o dwóch uczniów mniej niż w klasie 5b?

Obliczmy na podstawie diagramu, ilu uczniów było łącznie w klasach 5a i 5b.

$$7 + 10 + 9 + 6 + 3 + 5 = 40$$



W klasie 5a liczba uczniów była równa: $(40 - 2) : 2 = 19$.

W klasie 5b liczba uczniów była równa: $19 + 2 = 21$.

Sprawdźmy rozwiązanie z warunkami zadania.

$21 - 19 = 2$, czyli w klasie 5a było o dwóch uczniów mniej niż w klasie 5b.

$19 + 21 = 40$, czyli łącznie było 40 uczniów.

- b) Jaka część uczniów spędzała wakacje tylko w domu?

Wszystkich uczniów było 40, a 7 z nich było tylko w domu.

Zatem $\frac{7}{40}$ to część uczniów spędzających w ten sposób wakacje.

7

Tematy lekcji:

1. Wspomnienia z wakacji w zadaniach (1 h)
2. Przypomnienie wiadomości z klasy 4 (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- wykonuje proste obliczenia zegarowe na godzinach, minutach i sekundach,
- zamienia i stosuje jednostki masy i długości,
- wykonuje obliczenia pieniężne,
- czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe,
- dostrzega zależności między podanymi informacjami,
- oblicza obwód prostokąta,
- wykonuje proste działania dodawania i odejmowania ułamków o jednakowych mianownikach,
- rozpoznaje kąty,
- odczytuje i rysuje diagramy,
- rozpoznaje kształt prostopadłościanu i sześcianu.

Wskazówki metodyczne

- Na lekcjach wspominamy wakacje, a jednocześnie przypominamy wiadomości i umiejętności, które będą uczniom pomocne podczas pisania pracy klasowej diagnozującej.
- W tym temacie prezentujemy nowy rodzaj zadań zamkniętych wraz ze strategią ich rozwiązywania.
- Podczas rozwiązywania zadań z tego tematu zachęcamy do częstego zadawania uczniom pytań zaczynających się od słów: *Skąd?*, *Dlaczego?*
- Ważne, by w trakcie lekcji zorientować się, które umiejętności sprawiają uczniom najwięcej problemów, aby na kolejnych zajęciach poświęcić im więcej czasu i uwagi.

Komentarz do Przykładu 1.

Odczytywanie danych z diagramów i zaznaczanie ich na diagramach zazwyczaj nie sprawia problemów uczniom klasy 4. Aby ta umiejętność nie została zapomniana, w klasie 5 należy często do niej wracać. W podpunkcie a) tego przykładu przypominamy pojęcie porównywania różnicowego. Na rysunku pomocniczym zostały umieszczone dane z zadania. Wspólnie z uczniami analizujemy te dane i przypominamy sposób rozwiązywania tego typu zadań. Zachęcamy uczniów do ułożenia pytań do diagramu innych niż podane.

Materiały dydaktyczne

	Obliczenia praktyczne → Obliczenia zegarowe i kalendarzowe Obliczenia praktyczne → Mierzenie i ważenie Geometria na płaszczyźnie → Kąty Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
	Karta pracy. Czas Plansza edukacyjna. Jednostki Plansza edukacyjna. Kąty i ich rodzaje Plansza edukacyjna. Pola i obwody wielokątów Plansza edukacyjna. Ułamki zwykłe
	Inne
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	wsipnet.pl
Zbiór zadań	s. 4–8
	s. 16–18

Komentarz do Przykładu 2.

Przed przystąpieniem do omówienia przykładu przypominać uczniom, czym różni się obwód od pola prostokąta i w jaki sposób je obliczamy. Podczas powtarzania tych wiadomości uczniowie powinni korzystać z modeli prostokątów.

Komentarz do zadania 1.

Rozwiązanie zadania poprzedzamy przypomnieniem zasad tworzenia i przeprowadzania ankiety. Zwracamy uwagę, aby pytania w ankiecie były krótkie, a osoba przeprowadzająca ją miała kartkę z pytaniami i długopis do zaznaczania odpowiedzi. Przypominamy również, że niezależnie od tego, czy znamy osobę, z którą chcemy rozmawiać, powinniśmy się przedstawić, podać temat ankiety i poprosić o możliwość jej przeprowadzenia.

Komentarz do zadań 2.–4.

Zadania można rozwiązać ustnie, wyjaśniając stosowany sposób.



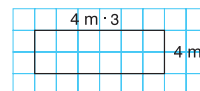
Przykład 2.

Pani Danusia ogrodziła prostokątną rabatę kwiatową płotkiem. Jeden bok tej rabaty ma 4 m długości, a drugi jest 3 razy dłuższy. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Pole powierzchni rabaty jest równe A / B. A. 12 m² B. 48 m²
Płotek ma długość C / D. C. 32 m D. 16 m

Wykonajmy rysunek pomocniczy.

Ponieważ długość drugiego boku prostokąta jest równa 12 m, a pole prostokąta to iloczyn długości jego boków (12 m i 4 m), więc w pierwszym zdaniu eliminujemy odpowiedź A i wybieramy odpowiedź B.

Ponieważ długość płotka wokół rabaty jest równa obwodowi prostokąta, czyli sumie długości wszystkich czterech jego boków, a suma długości dwóch sąsiednich boków tego prostokąta jest równa 16 m, to w drugim zdaniu eliminujemy odpowiedź D i wybieramy odpowiedź C.



- Przeprowadź w swojej klasie ankietę podobną do opisanej w **Przykładzie 1**. Wykonaj diagram ilustrujący jej wyniki.
Odpowiedz na pytania:
a) Ilu uczniów brało udział w ankiecie?
b) Jaka część uczniów spędzała wakacje tylko w domu?
Wykorzystaj dane z ankiety, ułóż 2 pytania i odpowiedz na nie.

- Oblicz obwód i pole:
a) kwadratu o boku 6 dm,
b) prostokąta o wymiarach 7 m × 10 m,
c) prostokąta, którego jeden bok ma 3 cm, a drugi jest 2 razy dłuższy.
- Wiktor był na jednym z najwspanialszych XVI-wiecznych placów w Europie – Rynku Wielkim w Zamościu. Rynek ma kształt kwadratu o boku 100 m. Oblicz powierzchnię i obwód tego rynku.



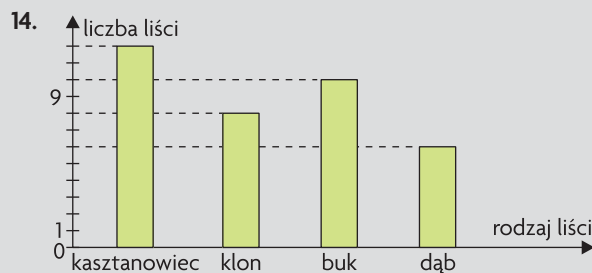
Rynek Wielki w Zamościu

- Ile czasu upłyne:
a) od godziny 8:00 do godziny 9:15,
b) od godziny 11:20 do godziny 12:45,
c) od godziny 7:30 do godziny 11:05?

8

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- a) 60; 60; 4 b) 4; 2; 24 c) 54; 114; 127
d) 1 h 45 min; 2 min 3 s; 3 h
- pół godz. i 30 min; 240 min i 4 h; 1 kwadrans i 15 min;
2 min i 120 s; 45 min i 3 kwadrans
- P; P; P; P
1. 16:55; 2. 16:03; 3. 11:05; 4. 11:05; 5. 96 min
- a) 725; 3128 b) 26 dm 3 cm; 40 m 6 dm
- a) <; > b) <; <
- B; C
- a) 400; 2400; 2000 b) 7; 645; 400
- a) $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$
- a) F b) F c) P d) F 11. A
- 1 zł 70 gr + 4 zł 55 gr = 6 zł 25 gr;
7 zł 30 gr – 95 gr = 6 zł 35 gr,
5 zł 12 gr + 86 gr + 67 gr = 6 zł 65 gr,
9 zł 48 gr – 3 zł 43 gr = 6 zł 5 gr
- a) 4 h 40 min; 30 min b) 153 dag; 2 kg 50 dag
c) 4 m 30 cm; 40 cm



- b) liście kasztanowca $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$; liście klonu $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$;
liście buku $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$; liście dębu $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; c) 2 razy
15. 34 zł; 22 zł 16. a) I; II; III b) V; VI; VIII c) I; IV; VII
17. 4 cm; 1 cm; L = 10 cm; P = 4 cm²
18. a) np. b) np.



- 5 Franek w czasie wakacji, od poniedziałku do piątku, korzystał z zajęć w ramach akcji „Lato w mieście”. Odbywały się one w jego szkole w godzinach od 9.00 do 15.00.
- a) Jaką część doby Franek przebywał na zajęciach „Lato w mieście”? Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.
- b) Ile godzin w ciągu tygodnia Franek spędzał na tych zajęciach?
- 6 W każdą środę Tomek rozpoczyna zajęcia o godzinie 8.55. Oto jego plan lekcji na środę:

PLAN LEKCJI	
ŚRODA	
1	
2	język polski
3	historia
4	WSF
5	matematyka
6	plastyka
7	technika

przerwa 20 min

przerwa 5 min

pozostałe przerwy trwają 10 min

- a) O której godzinie kończy się lekcja języka polskiego?
- b) O której godzinie się zaczyna, a o której kończy duża przerwa?
- c) Ile czasu trwają razem wszystkie lekcje i przerwy?
- 7 Odpowiedz na pytania.
- a) Trzy dni – ile to godzin?
- b) Sześć tygodni – ile to dni?
- c) Czterdzieści osiem godzin – ile to dni?
- d) Dwadzieścia osiem dni – ile to tygodni?
- 8 Pierwszym dniem wakacji Jurka był 24 czerwca, a ostatnim 31 sierpnia. Ile dni trwały wakacje Jurka?
- 9 Karolina, Wiktoria i Janek byli z babcią w ogrodzie zoologicznym. Cena biletu dla jednej osoby wynosiła 16 zł. W zoo babcia kupiła każdemu z wnucząt frytki za 5 zł i lody za 4 zł.
- Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
- Za bilety babcia zapłaciła A / B. A. 48 zł B. 64 zł
- Za frytki i lody babcia zapłaciła C / D. C. 23 zł D. 27 zł



Komentarz do zadania 5.

Obliczanie, jaką częścią jednej liczby jest druga liczba, zwykle sprawia uczniom trudność, dlatego przed przystąpieniem do rozwiązywania tego zadania prosimy uczniów o ustne odpowiedzi na dodatkowe pytania: *Jaką częścią uczniów naszej klasy jest jeden uczeń? Jaką częścią uczniów naszej klasy są dziewczęta, a jaką chłopcy?*

Komentarz do zadania 6.

W ramach ćwiczeń umiejętności określonych w punkcie XIV. 7) wymagań szczegółowych podstawy programowej uczniowie powinni ułożyć pytania dodatkowe do przedstawionego w zadaniu planu lekcji.

Komentarz do zadania 7.

Jednym ze sposobów utrwalania dzielenia z resztą jest zmiana liczb w treści zadania. Proponujemy również przeznaczyć 3 minuty na opisaną poniżej zabawę. Nauczyciel zadaje pytanie, podobne do wymienionych w treści zadania, i wskazuje osobę do odpowiedzi. Jeśli udzieli ona poprawnej odpowiedzi, to zadaje kolejne pytanie i wybiera osobę do odpowiedzi.

Komentarz do zadania 8.

Podczas rozwiązywania tego zadania uczniowie mogą posilkować się zawieszonym w klasie kalendarzem. Można również poprosić uczniów o oszacowanie wyniku.

Odpowiedzi do zadań

2. a) 24 dm, 36 dm² b) 34 m, 70 m² c) 18 cm, 18 cm²
3. 10 000 m², 400 m
4. a) 1 h 15 min b) 1 h 25 min c) 3 h 35 min
5. a) $\frac{1}{4}$ b) 30
6. a) 9.40 b) 10.35, 10.55 c) 5 h 25 min
7. a) 72 b) 42 c) 2 d) 4
8. 69
9. BD

Komentarz do zadania 10.

Tego zadania nie można pominąć. Podczas jego rozwiązywania utrwalamy umiejętności opisane w punkcie II. 15) wymagań szczegółowych podstawy programowej. Gdyby uczniowie mieli problem z poprawnym rozwiązaniem zadania, warto napisać na tablicy liczby od 1 do 19 i skreślić te, które odpowiadają numerom miejsc niezajętych przez grupę Karola. Po rozwiązaniu tego zadania proponujemy wykonać ustnie kilka podobnych.

Komentarz do zadania 13.

Podczas rozwiązywania tego zadania przydadzą się modele różnych brył. Każdy uczeń powinien potrafić wybrać spośród nich prostopadłościan oraz sześcian i opisać te bryły.

Komentarz do zadania 14.

Po dokładnym przypomnieniu własności prostopadłościanu i sześcianu podczas rozwiązywania zadania wcześniejszego to zadanie można rozwiązać z uczniami ustnie.

Komentarz do zadania 15.

Przedstawiony na tablicy rysunek ilustrujący treść zadania pomoże uczniom dostrzec, że do rozwiązania zadania nie jest potrzebne wykonywanie obliczeń.



- 10 Podczas kolonii grupa Karola była w kinie. Dzieci zajęły miejsca w jednym rzędzie od numeru 5. do 19. Ile miejsc zajęły dzieci z grupy Karola?
- 11 Ania i Ula chcą upiec ciasto. Według przepisu potrzebują 200 g masła. Ula przyniosła 25 dag masła. Ile masła powinny dolożyć lub odjąć, by było zgodnie z przepisem?
- 12 Marcin odczytał z mapy długości boków trójkątnego Nowego Rynku w Łowiczu: 152 m, 148 m, 145 m i miary jego kątów: 58° , 52° i 70° .
a) Oblicz obwód tego rynku.
b) Narysuj kąt, którego miara jest taka, jak miara największego kąta w trójkątnym rynku. Jaki to rodzaj kąta?
- 13 Wiele obiektów i przedmiotów, które widział Rafał podczas wakacji, miało kształt znanych mu brył. Wskaż w swoim otoczeniu po jednym przykładzie przedmiotu w kształcie prostopadłościanu i w kształcie sześcianu. Narysuj takie bryły i o każdej z nich napisz 2 zdania.
- 14 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Sześcian ma A / B wierzchołków. A. 6 B. 8
Prostopadłościan ma C / D krawędzi. C. 12 D. 16
- 15 Czy potrafisz bez wykonywania obliczeń podać różnicę liczby 126 i liczby o 59 od niej mniejszej? Podaj tę różnicę.



UWAGA. W kolejnych zadaniach podano więcej informacji, niż potrzeba do ich rozwiązania. Zadania z nadmiarem informacji będą pojawiać się również w kolejnych rozdziałach podręcznika i wówczas, podczas ich rozwiązywania, musisz zdecydować, z których danych skorzystać, aby udzielić właściwej odpowiedzi.

- 16 Pan Adam położył się spać, gdy zegar wskazywał godzinę XI, i spał 7 godzin. Gdy się przebudził, przez 3 kwadranse przygotowywał się do wyjścia z domu i wyjazdu do Bydgoszczy. Dojechał do Bydgoszczy, gdy zegar wskazywał godzinę VIII. Od godziny 12.00 do godziny 12.30 był w kawiarni. Do domu wrócił o godzinie III po południu.
a) Ile czasu nie było pana Adama w domu?
b) Jakie pytanie związane z tym zadaniem możesz jeszcze zadać? Odpowiedz na nie po wykonaniu odpowiednich obliczeń.

10

Odpowiedzi do zadań

10. 15
11. odłożyć 50 g
12. a) 445 m b) ostry
14. BC
15. 59
16. a) 8 h 15 min



- 17 Marysia i Patrycja miały po 12 maskotek i po 7 gier. Marysia podarowała Patrycji 3 maskotki. O ile mniej maskotek niż Patrycja ma teraz Marysia?
- 18 Na trzydniową wycieczkę pojechało 20 uczniów z opiekunem. Za nocleg jednej osoby płacono 18 zł. Po powrocie z wycieczki okazało się, że nie wykorzystano wszystkich pieniędzy. Opiekun wycieczki zwrócił każdemu uczniowi 22 zł i zostało jeszcze 14 zł. Ile pieniędzy nie wykorzystano podczas wycieczki?
- 19 Zuzia robiła z babcią zakupy na przetwory zimowe. Kupiły:
10 kg ogórków po 3 zł 40 gr za 1 kg,
2 kg cebuli po 1 zł 60 gr za 1 kg,
6 kg pomidorów po 2 zł 80 gr za 1 kg.
Ile łącznie ważyły kupione produkty?



Sprawdź się!

- Pan Jan kupił 1 kg 40 dag rodzynek, a pani Ania 1300 g orzechów. Co ważyło więcej: rodzynek czy orzechy? Odpowiedź uzasadnij.
- Ile czasu upływa od godziny 7:07 do godziny 9:13?
- Ile pełnych tygodni minęło od 1 stycznia 2020 r. do 30 kwietnia 2020 r.?
- W czasie wycieczki rowerowej osoba jadąca na czele grupy zmieniała się co kilka kilometrów. Patryk prowadził grupę od 23 do 29 kilometra. Przez ile kilometrów Patryk prowadził grupę?
- Kwadrat i prostokąt mają taki sam obwód równy 28 cm. Jeden z boków prostokąta jest o 2 cm dłuższy od boku kwadratu. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Długości boków prostokąta są równe A / B.
A. 9 cm i 19 cm B. 9 cm i 5 cm
Pole prostokąta jest równe C / D.
C. 45 cm² D. 49 cm²



11

Komentarz do zadania 17.

Zadanie zawiera nadmiar danych, co może niektórym uczniom utrudnić jego rozwiązanie. Część uczniów może mieć również problem z przypomnieniem sobie sposobu rozwiązywania tego typu zadań. Ci uczniowie powinni mieć możliwość skorzystania z liczmanów, aby na konkretnych sprawdzić, jak zmienia się liczba maskotek Patrycji i Marysi. Wykonanie rysunku pomocniczego również ułatwi rozwiązanie zadania.

Komentarz do zadań 18. i 19.

Te zadania także zawierają nadmiar danych. Proponujemy, aby uczniowie zastanowili się, jakie pytania można zadać, aby wykorzystać wszystkie podane informacje. Takie ćwiczenia pomagają uczniom rozwijać i utrwalać umiejętności opisane w punkcie XIV. 7) wymagań szczegółowych podstawy programowej.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadanie 4., podobnie jak zadanie 10. pod tematem lekcji, dotyczy liczebności zbiorów. W razie potrzeby można wykonać czynności opisane w komentarzu do zadania 10.

Zadanie 5. należy do zadań trudniejszych. Uczniowie mający problem z jego rozwiązaniem mogą pracować w parach, operując patyczkami, z których układają najpierw kwadrat, a później prostokąt o podanych własnościach.

Odpowiedzi do zadań

17. o 6

18. 454 zł

19. 18 kg

Sprawdź się!

1. rodzynek

2. 2 h 6 min

3. 17

4. 7 km

5. BC

Marek waży 40 kg 500 g, a Franek 40 kg 51 dag. Waga Janka to 4005 dag, a Roberta 40505 g. Który z chłopców waży najwięcej?

☐ A. Marek
☐ B. Franek
☐ C. Janek
☐ D. Robert

Sprawdź

Multibook ➔ Ćwiczenie interaktywne: Kto waży najwięcej?

Tematy lekcji:

1. Systemy zapisywania liczb (1 h)
2. Systemy zapisywania liczb – zadania i ćwiczenia (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- zapisuje słownie i czyta duże liczby zapisane w systemie dziesiątkowym,
- stosuje w sytuacjach praktycznych zapisywanie liczb w systemach dziesiątkowym i rzymskim,
- porównuje i porządkuje liczby naturalne rosnąco albo malejąco lub za pomocą znaków $<$, $>$, $=$,
- odczytuje liczby zaznaczone na osi liczbowej,
- umieszcza liczby naturalne na osi liczbowej i odpowiednio dobiera jednostkę,
- odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach i na diagramach,
- czyta ze zrozumieniem tekst zawierający informacje liczbowe i dostrzega zależności między podanymi informacjami,
- określa liczebność zbioru, np. od 15 do 20.

Wskazówki metodyczne

- Na lekcji posługujemy się dużymi liczbami, większymi niż w klasie 4. Zachęcamy do przeprowadzenia gry polegającej na układaniu liczb wielocyfrowych. Najlepiej przeprowadzić ją w zespołach dwuosobowych. Spośród uczniów poprawnie nazywających duże liczby należy wybrać dwóch asystentów, którzy będą arbitrami w sytuacjach spornych. Każdy zespół otrzymuje 10 karteczek, na każdej z nich widnieje inna cyfra. Uczniowie na przemian układają liczby: najpierw 5-cyfrowe, następnie 6-cyfrowe itd. Gdy jedna osoba układa liczbę, druga ją odczytuje. Jeżeli liczba zostanie poprawnie odczytana, osoba odczytująca otrzymuje punkt. Wątpliwości rozstrzygają asystenci lub nauczyciel. Ćwiczenie można wykonać w inny sposób: jedna osoba podaje liczbę, druga ją układa, po czym następuje zmiana. Za poprawne ułożenie liczby jest przyznawany punkt. Wygrywa ta osoba, która zdobędzie najwięcej punktów.
- Grę można przeprowadzić również z wykorzystaniem znaków rzymskich.
- Podczas omawiania systemów zapisywania liczb należy wspomnieć o nazwach określających zbiory liczb, takich jak: tuzin, mendel, kopa.
- Aby ułatwić uczniom posługiwanie się dużymi liczbami, można również zaproponować wykonanie prezentacji, plakatu lub innej pracy plastycznej na temat *Duże liczby wokół nas*. Jako podsumowanie pracy uczniów proponujemy zorganizowanie wystawy prac uczniowskich. Nagrodą może być najwyższa ocena i prezentacja najlepszych prac na stronie internetowej szkoły.

I. Liczby naturalne

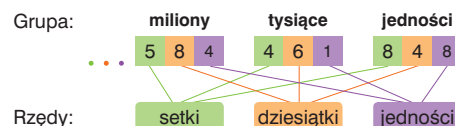
1. Systemy zapisywania liczb

Sowa przypomina

System dziesiątkowy

Do zapisywania liczb służą cyfry: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**.

Jest to **pozycyjny system** zapisu liczb, ponieważ wartość cyfry zależy od jej miejsca (pozycji) w liczbie.



System rzymski

Jest 7 znaków, za pomocą których zapisujemy liczby:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Wartość liczby może być sumą wartości znaków, np.

$$\text{MDCX} = 1000 + 500 + 100 + 10 = 1610$$

Jeśli znak liczby mniejszej poprzedza znak liczby większej, to wykonujemy odejmowanie, np.

$$\text{IV} = 5 - 1 = 4$$

$$\text{IX} = 10 - 1$$

$$\text{XL} = 50 - 10$$

$$\text{XLIX} = (50 - 10) + (10 - 1) = 49$$

$$\text{CD} = 500 - 100 = 400$$

Oś liczbowa

Na osi liczbowej można zaznaczać liczby. Tu pierwszą zaznaczoną liczbą na prawo od zera jest liczba 100, a następną 200, 300, ...



12

Materiały dydaktyczne

	Liczby całkowite → Liczby naturalne Liczby całkowite → Sposoby zapisywania liczb
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. I	s. 9–13
Zbiór zadań	s. 12–15

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

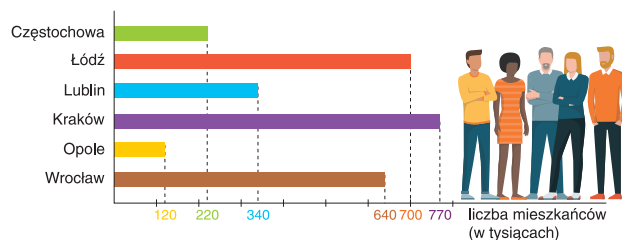
1. a) 1000; 100; 10 b) 44 000 000; 4 400 000 000 c) 97; 107; 117
2. a) 3407 b) 2500 c) 150 000 000 d) 42 195
3. kolejno: dwadzieścia cztery miliony, osiemnaście milionów, dziesięć milionów, trzydzieści milionów, czterdzieści cztery miliony, siedem milionów sześćset tysięcy, czternaście milionów
4. 680; 5079; 32 703; 800 402; 3 000 050

I. Liczby naturalne

123

Przykład 1.

Na diagramie przedstawiono liczbę mieszkańców w wybranych miastach Polski w 2016 roku. Każdemu miastu przyporządkowano słupkę. W którym mieście było najwięcej, a w którym najmniej mieszkańców? Jaka była liczba mieszkańców w tych miastach?



Dane podane przez GUS na koniec 2016 r. (w przybliżeniu do 10 tysięcy)

Najwięcej mieszkańców było w Krakowie – 770 000 (siedemset siedemdziesiąt tysięcy), przyporządkowany im słupkę jest najdłuższy, a najmniej w Opolu – 120 000 (sto dwadzieścia tysięcy), przyporządkowany im słupkę jest najkrótszy.

Przykład 2.

Ile jest liczb nieparzystych większych od 250 i mniejszych od 286?

Ustawmy liczby naturalne większe od 250 i mniejsze od 286 w kolejności rosnącej, a następnie za pomocą koloru połączmy je w pary (liczba parzysta – liczba nieparzysta).

251, 252, 253, 254...279, 280, 281, 282, 283, 284, 285

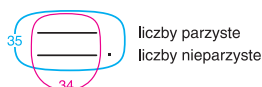
Obliczmy, ile jest tych liczb.

$$285 - 250 = 35$$

Liczb nieparzystych jest o jedną więcej.

$$34 : 2 = 17 - \text{tyle jest liczb parzystych}$$

$$17 + 1 = 18 - \text{tyle jest liczb nieparzystych}$$



Odpowiedź. Jest 18 liczb nieparzystych większych od 250 i mniejszych od 286.

13

Komentarz do Przykładu 1.

W tym zadaniu po raz kolejny ćwiczymy umiejętność odczytywania danych z diagramu słupkowego. Tym razem posługujemy się dużymi liczbami. Diagramy wykorzystujemy w wielu tematach lekcji, dlatego powinno się je dokładnie omówić, aby nie sprawiały uczniom kłopotów.

Komentarz do Przykładu 2.

Warto bardzo dokładnie przeanalizować z uczniami rozwiązanie tego zadania. Zwracamy uwagę na liczebność liczb parzystych i nieparzystych w danym zbiorze. Rysunek pomocniczy przedstawiający dane z zadania pomaga w jego rozwiązaniu.

5. MCMXX; MMIV; MXXXIX, MDXCVI; MMI

6. 1918, XX; 1798, XVIII; 1138, XII

7. a) F b) F c) P d) P

8. a) 15; 51; 24; 42; 33; 60 b) 300; 210; 120; 201; 102; 111

9. B

10. a) CXXXII; $1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 1$ b) 79; $7 \cdot 10 + 9 \cdot 1$ c) 562; DLXII

11. C i D; B; A i E

12. a) 7560; 7620; 7650; 7740; 7800 b) 8400; 8800; 9000; 9400; 9600; 10 200 c) 1497; 1501; 1507; 1509; 1515; 1517

14. 1905; po 18 latach

15. a) P b) F c) P d) F

16. 80; 40; 120

Komentarz do zadań 3. i 4.

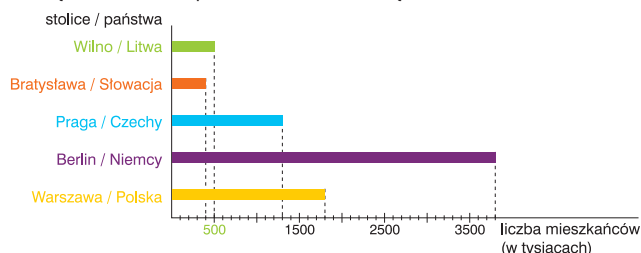
Zadania można wykonać ustnie w formie zabawy. Wskazany przez nauczyciela uczeń wybiera jedną spośród podanych w obu zadaniach liczbę i wyjaśnia, jaka to liczba w systemie dziesiętkowym, jeżeli wybrał liczbę z zadania 3., lub jak ją zapisać w systemie rzymskim, jeżeli wybrana liczba pochodziła z zadania 4. Za poprawną odpowiedź otrzymuje np. plusa. Następnie wskazuje kolejną osobę do odpowiedzi. Ponieważ wybór liczb przez odpowiadających jest dowolny, a liczby nie mogą się powtarzać, uczniowie muszą uważnie słuchać, co mówią inni. Takie rozwiązywanie zadań wymaga od nich maksymalnego skupienia.

Komentarz do zadania 5.

Rozwiązanie zadania proponujemy rozpocząć od uzgodnienia z uczniami jednostki obowiązującej na danej osi liczbowej. Niektóre liczby można zapisać dodatkowo w systemie rzymskim.

123

- 1 Na podstawie diagramu z **Przykładu 1.** wymień miasta, w których było więcej mieszkańców niż w Lublinie. Liczbę mieszkańców tych miast napisz słownie.
- 2 Na diagramie słupkowym przedstawiono liczbę mieszkańców Warszawy oraz stolic państw sąsiadujących z Polską i należących do Unii Europejskiej w 2019 roku. Liczbę mieszkańców podano z dokładnością do 100 000.



- a) Odczytaj liczbę mieszkańców wymienionych stolic.
- b) Największą i najmniejszą liczbę ludności zapisz słownie.
- c) W stolicach których państw liczba ludności jest mniejsza niż 1 500 000?
- d) Ułóż 2 pytania do tego diagramu i odpowiedz na nie.

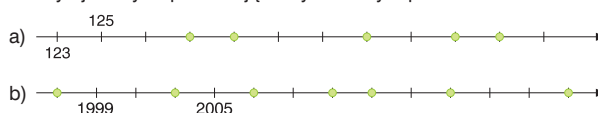
- 3 Zapisz liczby w systemie dziesiętkowym.

- a) XX XIV
- b) LV XC
- c) XLVIII XXXIX
- d) CMLIII DCXCVI

- 4 Zapisz liczby w systemie rzymskim.

- a) 12, 15, 19, 20, 24, 26, 29, 30
- b) 38, 39, 40, 49, 50, 90, 120, 145

- 5 Odczytaj liczby odpowiadające wyróżnionym punktom.



14

Odpowiedzi do zadań

- 1 Wrocław, sześćset czterdzieści tysięcy; Łódź, siedemset tysięcy; Kraków, siedemset siedemdziesiąt tysięcy
2. a) Wilno 500 000, Bratysława 400 000, Praga 1 300 000, Berlin 3 800 000, Warszawa 1 800 000
b) trzy miliony osiemset tysięcy, czterysta tysięcy
c) Litwy, Słowacji i Czech
3. a) 20, 14 b) 55, 90 c) 48, 39 d) 953, 696
4. a) XII, XV, XIX, XX, XXIV, XXVI, XXIX, XXX
b) XXXVIII, XXXIX, XL, XLIX, L, XC, CXX, CXLV
5. a) 129, 131, 137, 141, 143 b) 1997, 2003, 2007, 2011, 2013, 2017, 2023

I. Liczby naturalne

123

- 6 Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej podane liczby.
a) 945, 960, 975, 1005, 1050
b) 1821, 1827, 1833, 1845, 1863
- 7 Na rysunku przedstawiono liczbę IV ułożoną z trzech jednakowych patyczków i liczbę VII ułożoną z czterech takich patyczków.



Jaką najmniejszą, a jaką największą liczbę dwucyfrową zapisaną znakami rzymskimi można ułożyć:

- a) z trzech patyczków, b) z czterech patyczków?
- 8 Przelóż 2 patyczki tak, aby zapis był prawdziwy.
a) VII – II = VII b) XXXI – VIII = XXVII
- 9 Ułóż zadanie o układaniu za pomocą patyczków liczb zapisanych znakami rzymskimi.
- 10 Która z liczb: DXXX, CDLV, DXV, CDXC jest położona na osi liczbowej najdalej od liczby 500?
- 11 Zapisz cyframi liczbę, która składa się z 6 tysięcy, 9 setek, 5 dziesiątek, 2 jedności.
- 12 Zapisz cyframi arabskimi podane liczby.
a) dwadzieścia pięć tysięcy osiemdziesiąt dwa
b) czterdzieści tysięcy dziewięćset sześćdziesiąt
c) pięć milionów pięćset sześć
- 13 Liczba 3 402 042 zapisana słowami to
A. trzy tysiące czterysta dwa.
B. trzydzieści cztery miliony dwa tysiące czterdzieści dwa.
C. trzy miliony czterysta tysięcy dwieście czterdzieści dwa.
D. trzy miliony czterysta dwa tysiące czterdzieści dwa.
- 14 Liczba jeden miliard siedemdziesiąt milionów dziewięćdziesiąt to
A. 1 700 090 B. 1 070 000 090 C. 1 700 000 090 D. 1 070 000 900



Komentarz do zadania 6.

Rozwiązanie zadania proponujemy rozpocząć dyskusją o tym, jak przy danych liczbach najłatwiej ustalić jednostkę na osi liczbowej. Uczniowie powinni zauważyć, że różnica między kolejnymi liczbami w przykładzie a) jest równa 15 lub wielokrotności liczby 15, a w przykładzie b) 6 lub wielokrotności cyfry 6. Takie spostrzeżenia pomogą uczniom poprawnie zaznaczyć liczby na osi liczbowej.

Komentarz do zadania 7.

Zadanie można rozwiązać poprzez zabawę. Zamiast patyczków uczniowie używają np. kredek, mazaków. Dzielimy klasę na dwa rzędy: A i B. Uczniowie siedzący w rzędzie A układają z trzech patyczków liczbę najmniejszą, a siedzący w rzędzie B – liczbę największą, po czym następuje wzajemne sprawdzenie poprawności ułożenia liczb. W przypadku czterech patyczków tym razem rząd A układa liczbę największą, a rząd B najmniejszą.

Komentarz do zadań 13. i 14.

Podczas rozwiązywania tych zadań należy przypomnieć strategię rozwiązywania zadań zamkniętych.

15

Odpowiedzi do zadań

6. a)



b)



7. a) XI, LI b) XII, LX

8. a) VII – III = IV b) XXXIII – VIII = XXV

10. CDLV

11. 6952

12. a) 25 082 b) 40 960 c) 5 000 506

13. D

14. B

Komentarz do zadania 17.

Zadanie ma więcej niż 4 rozwiązania, dlatego proponujemy, aby uczniom uzdolnionym matematycznie polecić wypisanie wszystkich liczb spełniających podane w zadaniu warunki.

Do wykonania tego zadania może się okazać pomocna tabelka, która w przykładzie a) będzie miała dwie kolumny (cyfra dziesiątek, cyfra jedności), w przykładzie b) trzy kolumny (cyfra setek, cyfra dziesiątek, cyfra jedności). Do tak przygotowanych tabelk uczniowie wpisują odpowiednie cyfry. Jeśli będą je wstawiać losowo, prosimy, by zastanowili się nad sposobem, który wprowadzi porządek w tym działaniu. Uczniów, którzy każdą z zapisanych liczb przedstawiają w postaci odpowiedniej sumy, nagradzamy dodatkową oceną, np. liczbę 43 powinni zapisać: $4 \cdot 10 + 3$.

Komentarz do zadania 20.

Rozwiązanie tego zadania proponujemy rozpocząć od zastanowienia się z uczniami, ile jest liczb trzycyfrowych, które w rzędzie setek mają cyfrę 9, a następnie, jaka jest najmniejsza, a jaka największa z nich. Pomoże to w ustaleniu, czy liczb parzystych i nieparzystych jest tyle samo.

Komentarz do zadania 22.

Ułatwieniem są odpowiedzi na pytania: *Ile jest liczb w każdej dziesiątce, które w rzędzie jedności mają cyfrę 7? Ile jest liczb od 1 do 100, które w rzędzie dziesiątek mają cyfrę 7?*

Uczniowie powinni zauważyć, że cyfra 7 występuje 10 razy zarówno w rzędzie jedności: 7, 17... 97, jak i w rzędzie dziesiątek: 70, 71... 79.

Uczniowie z pewnością zauważą także, że podobnie jak w pierwszej setce, również w drugiej i w trzeciej jest tyle samo liczb, w których zapisie występuje cyfra 7.

W zadaniu interesują nas liczby do 288, dlatego w trzeciej setce nie liczymy cyfry 7 w liczbie 297.

Komentarz do A to ciekawe!

Informacje tutaj zawarte mogą zainspirować uczniów do szukania ciekawostek o wielkich liczbach. Zwróćmy uwagę na niejednorodność nazw i zapisów wielkich liczb. Nie we wszystkich krajach liczby, np. trylion, kwadrylion, mają tyle samo cyfr.

123

15. Liczba CMXCIX zapisana w systemie dziesiętkowym to
A. 1199 B. 999 C. 1009 D. 909
16. Napisz cyframi liczby: połowa miliarda, połowa miliona.
17. Zapisz po 4 przykłady liczb:
a) dwucyfrowych, których suma cyfr jest równa 7,
b) trzycyfrowych, których suma cyfr jest równa 9.
18. Czy 200 miliardów to więcej czy mniej niż połowa biliona?
19. Ile jest liczb dwucyfrowych nieparzystych?
A. 50 B. 45 C. 49 D. 46
20. Ile jest liczb trzycyfrowych parzystych, które mają w rzędzie setek cyfrę 9? Odpowiedź uzasadnij.
21. Ile razy cyfra 7 występuje w zapisie liczb naturalnych od 0 do 100? Odpowiedź uzasadnij.
22. Podręcznik ma 288 stron. Ile razy użyto cyfry 7 w numeracji wszystkich stron tego podręcznika?

A to ciekawe!

Nazwy kilku kolejnych, większych od miliarda, grup liczb w systemie dziesiętkowym to:

Grupa	bilion	trylion	kwadrylion	kwintylion	seksylion	septylion
Liczba	10^{12}	10^{18}	10^{24}	10^{30}	10^{36}	10^{42}

W niektórych polskich publikacjach można znaleźć pojęcia: biliard, tryliard, kwadryliard. Są to nazwy grup liczb odpowiednio między: bilionem a trylionem, trylionem a kwadrylionem, kwadrylionem a kwintylionem.

W praktyce naukowcy nie używają nazw wielkich liczb, posługują się odpowiednią potęgą liczby 10.

Ogromną liczbą jest googol (czyt. gugol) – liczba równa 10^{100} , w zapisie dziesiętnym to jedynka i sto zer! Nazwę tej liczby wymyślił w 1938 roku dziewięcioletni chłopiec Milton Sirota, a spopularyzował ją jego wuj, amerykański matematyk Edward Kasner.

16

Odpowiedzi do zadań

15. B
16. 500 000 000, 500 000
17. a) np. 16, 25, 34, 43 b) np. 108, 270, 333, 621
18. mniej
19. B
20. 50
21. 20
22. 59

Wyzwanie

- Masa Ziemi to około 6 kwadrylionów kilogramów. Tę liczbę można zapisać jako $6 \cdot 10^{24}$.
- Masa Księżyca to około 70 000 000 000 000 000 000 000 kg. Zapisz ją w postaci iloczynu liczby 7 i potęgi liczby 10. Ilucyfrową liczbą jest masa Ziemi, a ilucyfrową – masa Księżyca?



Sprawdź się!

- Zapisz liczbę, która w rzędzie jedności ma cyfrę 4, w rzędzie dziesiątek – cyfrę 8, w rzędzie setek – cyfrę 2, w rzędzie jedności i dziesiątek tysięcy – cyfrę 5.
- Liczba 253 zapisana w systemie rzymskim to
A. DCLIII B. CCIII C. CCLIII D. CCLII
- Napisz 5 kolejnych liczb naturalnych takich, aby największa z nich była najmniejszą liczbą pięciocyfrową. Najmniejszą z nich zapisz słownie.
- Dane są liczby:
A. 54 808 B. 34 504 C. 36 310 D. 36 000

Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż litery przypisane poprawnej odpowiedzi.

W której z liczb cyfra jedności jest równa cyfrze jedności tysięcy?	A	B	C	D
Która z liczb jest wielokrotnością liczby 10?	A	B	C	D
W której z liczb tylko jedna cyfra jest nieparzysta?	A	B	C	D
Która liczba jest 1000 razy większa od XXXVI?	A	B	C	D

- Które zdania są fałszywe, a które prawdziwe?
a) Jest 50 liczb dwucyfrowych parzystych.
b) Największą trzycyfrową liczbą parzystą jest 998.
c) Jest 90 liczb dwucyfrowych.
d) Liczb trzycyfrowych jest 899.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadania 4. i 5. ćwiczą umiejętność czytania ze zrozumieniem, dlatego w trakcie ich rozwiązywania prosimy uczniów o ustne uzasadnienie wyboru danej odpowiedzi.

Zadanie 4. jest zadaniem zamkniętym nowego typu. Takie zadania zostały umieszczone w przykładowym arkuszu egzaminacyjnym CKE. Więcej tego typu zadań zawierają zeszyty ćwiczeń i zbiór zadań.

Odpowiedzi do zadań

Wyzwanie

masa Księżyca: $7 \cdot 10^{22}$ kg;

masa Ziemi: liczba dwudziestopięciocyfrowa;

masa Księżyca: liczba dwudziestotrzycyfrowa

Sprawdź się!

1. 55 284

2. C

3. 10 000, 9999, 9998, 9997, 9996; dziewięć tysięcy dziewięćset dziewięćdziesiąt sześć

4. B, CD, AD, D

5. fałszywe: a), d); prawdziwe: b), c)

Tematy lekcji:

1. Pamięciowe dodawanie i mnożenie (1 h)
2. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem pamięciowego dodawania i mnożenia (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- wskazuje składnik, czynnik, sumę i iloczyn,
- stosuje prawa działań,
- porównuje różnicowo i ilorazowo liczby naturalne i wykorzystuje te umiejętności w zadaniach,
- zna rolę liczby 0 w dodawaniu i mnożeniu oraz liczby 1 w mnożeniu,
- czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe,
- dostrzega zależności między podanymi informacjami,
- rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym z zastosowaniem jednostek czasu i jednostek monetarnych,
- odczytuje i interpretuje dane z diagramów i stosuje je podczas rozwiązywania zadań,
- układa treść zadania na określony temat i rozwiązuje je.

Wskazówki metodyczne

- Na realizację tego tematu proponujemy dwie godziny lekcyjne. Dodawanie i mnożenie mają podobne własności. Oba działania są przemienne, łączne i mają elementy neutralne. Warto przypomnieć uczniom, że sumę jednakowych składników można zapisać w postaci odpowiedniego iloczynu, a iloczyn takich samych czynników można zapisać w postaci odpowiedniej potęgi.
- Istotne jest zwrócenie uczniom uwagi, że wyrażenie *o ile* wskazuje na dodawanie lub odejmowanie, natomiast *ile razy* – na mnożenie lub dzielenie.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 1.

123

2. Pamięciowe dodawanie i mnożenie

Sowa przypomina

DODAWANIE

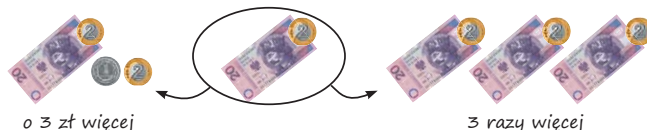
suma liczb 7 i 8

$$7 + 8 = 15$$

składniki suma

- W dodawaniu można zmieniać kolejność liczb i dowolnie je łączyć.
 $57 + 28 + 43 = (57 + 43) + 28$
- Liczba 0 w dodawaniu
 $79 + 0 = 79$
Suma jest równa składnikowi.
- Sumę jednakowych składników można zapisać w postaci mnożenia.
 $2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$

- Liczba **o 6 większa** od liczby 3
Dana liczba $\overset{3}{\rule{1.5cm}{0.4pt}}$
Liczba o 6 większa $\overset{3}{\rule{1.5cm}{0.4pt}} \overset{+6}{\rule{1.5cm}{0.4pt}}$



18

MNOŻENIE

iloczyn liczb 7 i 8

$$7 \cdot 8 = 56$$

czynniki iloczyn

- W mnożeniu można zmieniać kolejność liczb i dowolnie je łączyć.
 $25 \cdot 5 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 5$
- Liczby 0 i 1 w mnożeniu
 $79 \cdot 0 = 0$, $86 \cdot 0 \cdot 34 = 0$
Iloczyn jest równy 0.
 $79 \cdot 1 = 79$
Iloczyn jest równy czynnikowi.
- Iloczyn jednakowych czynników można zapisać w postaci potęgi.
 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ – potęgowanie

podstawa potęga wykładnik

- Liczba **6 razy większa** od liczby 3
Dana liczba $\overset{3}{\rule{1.5cm}{0.4pt}}$
Liczba 6 razy większa $\overset{3}{\rule{1.5cm}{0.4pt}} \overset{6 \cdot 3}{\rule{1.5cm}{0.4pt}}$

Materiały dydaktyczne

	Liczby całkowite → Liczby naturalne Liczby całkowite → Działania na liczbach naturalnych
	Kartkówka 1 Karta pracy. Porównywanie ilorazowe Karta pracy. Porównywanie różnicowe
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 14–16
Zbiór zadań	s. 19–21

- Mnożenie przez 10, 100, 1000

$$87 \cdot 10 = 870$$

$$87 \cdot 100 = 8700$$

$$87 \cdot 1000 = 87\,000$$

$$870 \cdot 100 = 87\,000$$

Do 87 dopisujemy odpowiednią liczbę zer.

Sowa uczy

- W dodawaniu można zmieniać kolejność składników i dowolnie je łączyć, a w mnożeniu można zmieniać kolejność czynników i dowolnie je łączyć:

$$25 + 18 = 18 + 25 \quad 12 + 45 + 148 + 105 = (12 + 148) + (45 + 105)$$

$$6 \cdot 5 = 5 \cdot 6 \quad 2 \cdot 9 \cdot 50 \cdot 7 = (2 \cdot 50) \cdot (9 \cdot 7)$$

Mówimy, że dodawanie i mnożenie są **przemienne** i **łączne**.

- Gdy mnożenie wykracza poza tabliczkę mnożenia, możemy obliczać tak:

$$17 \cdot 5 = (10 + 7) \cdot 5 = 10 \cdot 5 + 7 \cdot 5 = 50 + 35 = 85$$

$$17 \cdot 5 = (20 - 3) \cdot 5 = 20 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = 100 - 15 = 85$$

Korzystamy z **rozdzielności mnożenia względem dodawania** lub z **rozdzielności mnożenia względem odejmowania**.

Komentarz do Sowa przypomina

Umiejętność mnożenia przez 10, 100, 1000 proponujemy utrwalić w rachunku pamięciowym, np. podczas zabawy **HASŁO–ODZEW**. Nauczyciel wypisuje bądź wyświetla na tablicy kolumnę liczb naturalnych. Hasłem jest czynnik 10 lub 100, lub 1000. Odzew to iloczyn wskazanej, spośród wypisanych, liczby i hasła.

Komentarz do Sowa uczy

Proponujemy, aby razem z uczniami zastanowić się, w jakich działaniach wygodniej będzie zastosować rozdzielność mnożenia względem dodawania, a w jakich względem odejmowania. Uczniom z trudnościami w uczeniu się matematyki rysowanie odpowiednich strzałek (jak w podręczniku) ułatwi obliczanie tego typu przykładów.

Komentarz do zadań 1.–4.

Te zadania proponujemy na lekcji rozwiązać ustnie. Ze względu na uczniów mających trudności w nauce matematyki sugerujemy, aby każdą odpowiedź uzasadnić. Zapis w zeszycie odpowiedzi do tych zadań polecamy zlecić jako pracę domową uczniom słabszym z matematyki, a pozostałym uczniom proponujemy wskazać do rozwiązania inne zadania. W ten sposób indywidualizujemy proces nauczania.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- a) kolejno wierszami: 230; 600; 60; 1800; 1200; 2000
b) 72; 75; 150; 200; 600; 640; 6400
- a) P b) F c) F d) P
- C
- A; D; F
- a) 40 b) 300
- a) 28 000 b) 19 000 c) 48 000
- a) 136 b) 344 c) 325
- kolejno wierszami: 96; 35; 55; 48; 64; 21
- a) 60; 75; 90 b) 81; 243; 729 c) 31; 63; 127

Odpowiedzi do zadań

- A
- B
- C
- C

Komentarz do zadań 6. i 7.

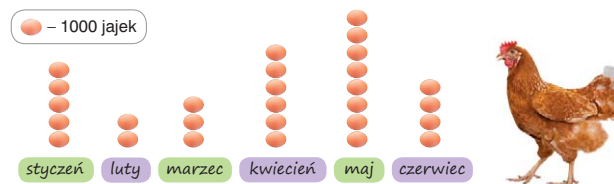
Te dwa zadania można wykonać ustnie i poprosić, aby uczniowie poza wynikami podawali również swoje sposoby obliczania przykładów.

Komentarz do zadania 10.

W zadaniu utrwalamy mnożenie przez 1000. Mnożenie przez 10 i 100 możemy uwzględnić w rachunku pamięciowym. Proponujemy, aby uczniowie układali dodatkowe pytania do diagramu.

123

- 5 Oblicz z zastosowaniem przemienności i łączności dodawania lub mnożenia.
a) $19 + 13 + 11$ b) $15 + 16 + 45$ c) $16 \cdot 5 \cdot 0$ d) $25 \cdot 18 \cdot 40$
 $26 + 34 + 17$ $53 + 27 + 18$ $4 \cdot 27 \cdot 5$ $50 \cdot 36 \cdot 20$
- 6 Oblicz w pamięci.
a) $28 + 34$ b) $7 \cdot 6$ c) $70 \cdot 60$ d) $3 \cdot 20 \cdot 5$
 $280 + 340$ $70 \cdot 6$ $700 \cdot 6$ $50 \cdot 3 \cdot 20$
 $2800 + 3400$ $7 \cdot 60$ $7 \cdot 600$ $30 \cdot 2 \cdot 50$
- 7 Oblicz.
a) $30 \cdot 300$ b) $200 \cdot 300$ c) $12 \cdot 500$ d) $50 \cdot 30 \cdot 80$
 $7 \cdot 1600$ $50 \cdot 800$ $200 \cdot 50$ $400 \cdot 7 \cdot 50$
- 8 Oblicz dwoma sposobami: raz zastosuj rozdzielność mnożenia względem dodawania lub odejmowania, drugi raz – kolejność wykonywania działań.
a) $10 \cdot (17 + 13)$ b) $10 \cdot (25 - 13)$ c) $(23 + 17) \cdot 100$
- 9 Oblicz z zastosowaniem rozdzielności mnożenia względem dodawania lub odejmowania.
a) $8 \cdot 17$ b) $23 \cdot 5$ c) $4 \cdot 57$ d) $64 \cdot 8$
- 10 Pan Malinowski ma fermę kur niosek. Tak przedstawił na diagramie sprzedaż jajek w pierwszym półroczu:



Odczytaj z diagramu:

- a) Ile jajek sprzedał pan Malinowski w każdym miesiącu?
- b) Ile jajek sprzedał przez pół roku?
- c) W którym miesiącu pan Malinowski sprzedał najwięcej jajek?
- d) Podaj przykład takich dwóch miesięcy, w których liczba sprzedanych jajek w jednym miesiącu była dwukrotnością liczby sprzedanych jajek w innym. Ile par takich miesięcy możesz podać?

20

Odpowiedzi do zadań

5. a) 43, 77 b) 76, 98 c) 0, 540 d) 18 000, 36 000
6. a) 62, 620, 6200 b) 42, 420, 420 c) 4200, 4200, 4200
d) 300, 3000, 3000
7. a) 9000, 11 200 b) 60 000, 40 000 c) 6000, 10 000
d) 120 000, 140 000
8. a) 300 b) 120 c) 4000
9. a) 136 b) 115 c) 228 d) 512
10. a) styczeń: 5000, luty: 2000, marzec: 3000, kwiecień: 6000,
maj: 8000, czerwiec: 4000 b) 28 000 c) w maju d) marzec i kwiecień,
czerwiec i maj, luty i czerwiec; 3 pary

I. Liczby naturalne

123

- 11 Wiadomo, że $125 \cdot 4 = 500$. Wybierz poprawne wartości poniższych iloczynów spośród A i B oraz C i D.

$$4 \cdot 6 \cdot 125 = A / B \quad A. 2400 \quad B. 3000$$

$$20 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 125 = C / D \quad C. 0 \quad D. 10\,000$$

- 12 Skorzystaj z informacji, że $8 \cdot 125 = 1000$ i oblicz w pamięci iloczyny.

$$a) 125 \cdot 13 \cdot 8 \quad b) 2 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 30 \quad c) 125 \cdot 4 \cdot 63 \cdot 2$$

$$2 \cdot 125 \cdot 4 \quad 4 \cdot 73 \cdot 125 \cdot 2 \quad 8 \cdot 24 \cdot 125 \cdot 1$$

- 13 Oblicz.

$$a) 9^2, 6^2, 10^2, 11^2, 30^2, 100^2 \quad b) 0^3, 1^3, 10^3, 3^3, 20^3, 100^3$$

- 14 Na straganie pan Wojtek kupił 14 kg ogórków, a pani Ala 16 kg ogórków. Kto zapłacił więcej i o ile?



- 15 W pewnej szkole jest 152 uczniów. W klasie piątej jest 20 uczniów. Wszyscy uczniowie tej szkoły poszli do kina, a wraz z nimi 6 osób dorosłych. Bilet dla ucznia kosztował 15 zł, a dla osoby dorosłej był dwa razy droższy. Ile zapłacono za wszystkie bilety?

- 16 Odgadnij regułę i podaj 4 kolejne liczby.

$$a) 2, 4, 8, \dots \quad b) 1, 3, 6, 10, \dots \quad c) 1, 3, 7, 15, \dots$$

- 17 W gospodarstwie pana Jana są następujące zwierzęta: 12 krów, 9 świń, 28 kur, 17 gęsi, 2 koty i pies. Ile łącznie nóg mają czworonożne zwierzęta?

- 18 W sklepie zoologicznym na przyjaciół zwierząt czekało 16 królików, 3 razy więcej papug i chomiki, których było o 27 więcej niż królików. Ile łącznie królików, papug i chomików było w tym sklepie?



- 19 Hania, Jola i Antek odrabiali w świetlicy szkolnej pracę domową z matematyki. Wszyscy rozpoczęli o 13.55. Jola skończyła najszybciej, bo już po 18 minutach, Antek pracował o 13 minut dłużej, a Hania zajęło to 2 razy więcej czasu niż Joli. O której godzinie każde z dzieci skończyło pracę?

Komentarz do zadań 11. i 12.

Podobne zadania znajdują się w arkuszach CKE. Pomagają one rozwijać myślenie logiczne. Proponujemy zachęcić uczniów do ułożenia podobnych przykładów, wymienienia się nimi, rozwiązywania, a następnie wspólnego sprawdzenia i ocenienia.

Komentarz do zadań 14. i 15.

W zadaniach jest nadmiar danych i uczeń musi wybrać te, które wykorzysta do rozwiązania zadań.

Komentarz do zadania 19.

Jest to zadanie rozszerzonej odpowiedzi. Proponujemy ustnie ułożyć plan jego rozwiązania. Po rozwiązaniu zadania zadajemy dodatkowe pytania, np. *Ile minut przed 15.00 Hania zakończyła pracę? O ile minut dłużej pracowała Hania niż Antek?*

Można też poprosić uczniów o ułożenie pytań do treści tego zadania.

21

Odpowiedzi do zadań

11. BC
 12. a) 13 000, 1000 b) 30 000, 73 000 c) 63 000, 24 000
 13. a) 81, 36, 100, 121, 900, 10 000 b) 0, 1, 1000, 27, 8000, 1 000 000
 14. pani Ala, o 6 zł
 15. 2460 zł
 16. a) 16, 32, 64, 128 b) 15, 21, 28, 36 c) 31, 63, 127, 255
 17. 96
 18. 107
 19. Jola: 14.13, Antek: 14.26, Hania: 14.31

Komentarz do *A to ciekawe!*

Są tu zawarte informacje o liczbie ludności Krakowa na przestrzeni kilku wieków. Na ich podstawie zastanawiamy się, co wpłynęło na rozwój Krakowa, a tym samym na wzrost liczby jego mieszkańców. Uczniowie zainteresowani historią mogą na ten temat przygotować krótką informację. Możemy również zaproponować przygotowanie projektu *Moje miasto, moja miejscowość w liczbach*.

Diagram nie jest trudny do odczytania. Podczas tej czynności utrwalamy mnożenie przez liczby zakończone zerami.

Komentarz do *Sprawdź się!*

Zadania tu zawarte można wykorzystać pod koniec drugiej lekcji z tego tematu, jako diagnozę podstawowych umiejętności z zakresu pamięciowego dodawania i mnożenia. Uczniowie w określonym czasie (np. od 3 do 5 minut) powinni spróbować samodzielnie rozwiązać wszystkie zadania, a ich wyniki zapisać w zeszycie. Sprawdzenie poprawności wykonujemy w parach (uczniowie siedzący w jednej ławce wymieniają się zeszytami) pod kontrolą nauczyciela. Wcześniej ustalamy zasady nagradzania za poprawne obliczenia.

123

A to ciekawe!

Na diagramie przedstawiono liczbę mieszkańców Krakowa:



Podaj liczbę mieszkańców Krakowa w XV wieku, w 1937 r. i w 2016 r.



Sprawdź się!

- Oblicz z zastosowaniem przemienności i łączności dodawania lub mnożenia.
 - a) $57 + 16 + 33 + 64$ b) $5 \cdot 38 \cdot 2$ c) $80 \cdot 300 \cdot 5 \cdot 10$
- Skorzystaj z informacji, że $8 \cdot 25 = 200$, i oblicz w pamięci iloczyny.
 - a) $25 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1$ b) $2 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 3 \cdot 2$ c) $2 \cdot 25 \cdot 35 \cdot 4$
- Oblicz z zastosowaniem rozdzielności mnożenia względem dodawania lub odejmowania.
 - a) $5 \cdot 36$ b) $21 \cdot 4$ c) $8 \cdot 55$ d) $38 \cdot 5$
- Które wyrażenie jest większe?
 - a) 3^2 czy 2^3 b) 4^2 czy 2^4 c) 3^3 czy 5^2
- Uczniowie ułożyli z kamyczków trójkolorowy herb swojego miasta. Wykorzystali 29 białych kamyczków i 3 razy więcej zielonych. W mozaice znalazły się także kamyczki pomarańczowe, których było o 17 więcej niż białych. Ile łącznie kamyczków użyto do wykonania herbu?

22

Odpowiedzi do zadań

A to ciekawe!

XV w. → 15 000 mieszkańców, 1937 r. → 250 000 mieszkańców, 2016 r. → 770 000 mieszkańców

Sprawdź się!

- a) 170 b) 380 c) 1 200 000
- a) 1200 b) 600 c) 7000
- a) 180 b) 84 c) 440 d) 190
- a) 3^2 b) są równe c) 3^3
- 162

3. Pamięciowe odejmowanie i dzielenie

 Sowa przypomina

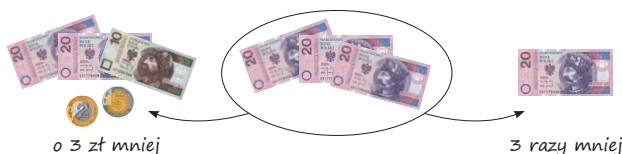
ODEJMOWANIE

różnica liczb 15 i 7

$$\begin{array}{r} 15 \\ - 7 \\ \hline 8 \end{array}$$

odjemna odjemnik różnica

- Odejmowanie i dodawanie to działania odwrotne:
 $8 + 7 = 15$
 $15 - 7 = 8$ i $15 - 8 = 7$
- Liczba 0 jako odjemnik
 $15 - 0 = 15$
 Liczba 0 jako różnica
 $15 - 15 = 0$
- Liczba **o 3 mniejsza** od liczby 12
 Dana liczba $\overbrace{\hspace{2cm}}^{12}$
 Liczba o 3 mniejsza $\overbrace{\hspace{2cm}}^{3}$
 $12 - 3$



- Dzielenie przez 10, 100, 1000
 $250 : 10 = 25$ $8100 : 100 = 81$ $420\,000 : 7000 = 60$
 W dzielnej i dzielniku możemy skreślić taką samą liczbę końcowych zer, a wynik się nie zmieni.

DZIELENIE

iloraz liczb 60 i 12

$$\begin{array}{r} 60 : 12 = 5 \end{array}$$

dzielnia dzielnik iloraz

- Dzielenie i mnożenie to działania odwrotne:
 $5 \cdot 12 = 60$
 $60 : 12 = 5$ i $60 : 5 = 12$
- Liczba 1 jako dzielnik $15 : 1 = 15$
 Liczba 1 jako iloraz $15 : 15 = 1$
 Liczba 0 jako dzielnia $0 : 15 = 0$
NIE MOŻNA DZIELIĆ PRZES 0!
- Liczba **3 razy mniejsza** od liczby 18
 Dana liczba $\overbrace{\hspace{2cm}}^{18}$
 Liczba 3 razy mniejsza $\overbrace{\hspace{2cm}}^{18 : 3}$

Tematy lekcji:

1. Pamięciowe odejmowanie i dzielenie (1 h)
2. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem pamięciowego odejmowania i dzielenia (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- stosuje prawa działań,
- w obliczeniach korzysta z własności dzielenia dotyczącej zmniejszenia dzielnej i dzielnika tyle samo razy,
- oblicza niewiadome: składnik, odjemną, odjemnik, czynnik, dzielną lub dzielnik,
- porównuje różnicowo i ilorazowo liczby naturalne i wykorzystuje te umiejętności w zadaniach,
- zna rolę liczby 0 w odejmowaniu i dzieleniu, wie, że dzielenie przez liczbę 0 jest działaniem niewykonalnym,
- czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe,
- dostrzega zależności między podanymi informacjami,
- rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym z zastosowaniem jednostek czasu i jednostek monetarnych,
- odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach i na diagramach,
- rozwiązuje zadania na podstawie informacji zawartych w tekstach i na diagramach,
- oblicza liczebność zbioru, np. od nr. 5 do nr. 10,
- układa treść zadania na określony temat i rozwiązuje je.

Wskazówki metodyczne

- Na realizację tego tematu przewidzieliśmy dwie godziny lekcyjne. Podczas tych zajęć podkreślaliśmy, że odejmowanie jest działaniem odwrotnym do dodawania, a dzielenie jest działaniem odwrotnym do mnożenia. Należy zwrócić szczególną uwagę na nazewnictwo w różnicy i ilorazie. Częste powtarzanie tych pojęć pozwoli uczniom je zapamiętać. W rachunku pamięciowym uwzględniamy liczbę 0 w różnicy i w ilorazie. Uzasadnienie, że liczba 0 nie może być dzielnikiem, przypominamy na podstawie treści zawartych w podręczniku do klasy 4. Uczniowie powinni je zapamiętać i uzasadnić niewykonalność takiego dzielenia swoimi słowami. Trzeba dbać o poprawne formułowanie przez uczniów wyjaśnień związanych z porównywaniem różnicowym i ilorazowym. Uczniowie powinni wiedzieć, że błędne jest powiedzenie *o 2 razy więcej*. Wszystkie wymienione tutaj umiejętności włączamy do rachunku pamięciowego.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 2.

Materiały dydaktyczne

	Liczby całkowite → Liczby naturalne Liczby całkowite → Działania na liczbach naturalnych
	Kartkówka 2 Karta pracy. Porównywanie ilorazowe Karta pracy. Porównywanie różnicowe
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 17–20
Zbiór zadań	s. 22–24

Komentarz do Przykładu 1.

Dokładna analiza tego przykładu pomoże zrozumieć uczniom ważną własność dzielenia, która ma duże znaczenie dla poprawy sprawności obliczeń pamięciowych. Ważne, aby uczniowie zauważyli, że zamiast działania, np. $80 : 16$, mogą wykonać działanie $40 : 8$. Należy często wracać do tej własności i odwoływać się do niej w przykładach, np. $800 : 40 = 80 : 4 = 40 : 2 = 20 : 1$. Wykorzystuje się ją również podczas skracania ułamków.

Komentarz do zadania 1.

Zadanie można wykonać w pamięci. Przed przystąpieniem do jego rozwiązywania proponujemy przypomnieć poznany w klasie 4 sposób odejmowania liczb polegający na równoczesnym zwiększeniu lub zmniejszeniu odjemnej i odjemnika o taką liczbę, aby odjemnik był liczbą mającą w rzędzie jedności cyfrę 0. W przykładach d) przypominamy z klasy 4 zadania uzasadniające równość wyrażeń arytmetycznych: $72 - 39 - 11 = 72 - (39 + 11)$.

Komentarz do zadania 2.

W wybranych przykładach tego zadania warto zastosować rozdzielność dzielenia względem dodawania lub odejmowania. Trzeba wówczas zapytać uczniów o przedstawienie wskazanej dzielnej w postaci sumy lub różnicy liczb. Najczęściej uczniowie zamieniają dzielną na sumę dziesięciokrotności dzielnika i dopełnienia do dzielnej, np. $92 : 4 = (40 + 40 + 12) : 4$.

Komentarz do zadania 3.

Podczas obliczeń tych przykładów korzystamy z własności dzielenia omówionej w Przykładzie 1.

Komentarz do zadania 6.

Przed przystąpieniem do rozwiązywania tego zadania proponujemy ćwiczenia z zegarem, podczas których uczniowie powinni zauważyć, że kwadrans to czwarta część godziny, zatem $60 : 15 = 4$, $60 : 4 = 15$, a $4 \cdot 15 = 60$ oraz że tarcza zegara jest podzielona na 12 części po 5 min, więc $60 : 12 = 5$, $60 : 5 = 12$, a $12 \cdot 5 = 60$. Po takim wstępie uczniowie powinni szybko liczyć w pamięci i z łatwością odpowiadać na postawione w zadaniu pytania.

Proponujemy również zachęcić uczniów do układania nowych pytań do treści tego zadania i udzielania na nie odpowiedzi.

123

• Gdy dzielenie wykracza poza tabliczkę dzielenia, obliczamy tak:

$$42 : 3 = (30 + 12) : 3 = 30 : 3 + 12 : 3 = 10 + 4 = 14$$

$$42 : 3 = (45 - 3) : 3 = 45 : 3 - 3 : 3 = 15 - 1 = 14$$

Przykład 1.

Obliczmy ilorazy: $24 : 4$, $144 : 24$. Zwróćmy uwagę, jak zmieniają się w nich dzielna i dzielnik.

$$24 : 4 = 72 : 12 = 6$$

$$144 : 24 = 72 : 12 = 6$$



Jeżeli dzielną i dzielnik zwiększymy lub zmniejszymy tyle samo razy, to wynik się nie zmienia.

1 Oblicz i sprawdź.

- a) $67 - 14$ b) $95 - 40$ c) $93 - 48$ d) $72 - 39 - 11$
 $130 - 37$ $120 - 65$ $142 - 97$ $164 - 79 - 21$

2 Oblicz i sprawdź.

- a) $0 : 18$ b) $75 : 5$ c) $56 : 4$ d) $85 : 5$
 $308 : 308$ $66 : 11$ $91 : 7$ $108 : 9$

3 Oblicz.

- a) $400 : 10$ b) $3800 : 100$ c) $600 : 15$ d) $3600 : 900$
 $9000 : 100$ $102\,060 : 10$ $960 : 8$ $6000 : 1500$

4 Oblicz i wyjaśnij, dlaczego wyniki wszystkich przykładów są takie same.

- $64 : 8$ $32 : 4$ $16 : 2$ $128 : 16$ $80 : 10$

5 Oblicz, jaką liczbę zastępuje litera.

- a) $65 - a = 26$ b) $b + 72 = 100$ c) $15 \cdot c = 60$ d) $d : 7 = 12$

6 Tuzin to 12 sztuk, gros – 12 tuzinów, mendel – 15 sztuk, kopa – 60 sztuk.

- a) Ile razy kopa jest większa niż mendel?
 b) O ile sztuk tuzin jest mniejszy od grosza?

24

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. a) 208; 192; 176 b) 300; 150; 75 c) 865; 795; 725
 2. kolejno: 300; 3; 82; 54; 9
 3. I chmurka 0; 1009 – 1009; II chmurka 1; 460 : 460;
 III chmurka 1; 141 : 1; IV chmurka 0; 2786 – 0
 4. a) P b) F c) P d) F 5. D 6. B
 7. kolejno w wierszach: a) 23; 12; 17; 14; 15; 25; 13 b) 11; 20; 14; 9; 12; 7; 17
 8. np. 194 zostało 6 zł; $38 + 68 + 19 = 125$ zostało 75 zł; $38 + 159 = 197$ zostało 3 zł
 9. $1 + 5 + 3 = 3 + 4 + 2 = 2 + 6 + 1 = 9$ 10. A 11. C 12. A; D 13. B
 15. a) po 39 b) po 26 c) po 13 16. 54

Odpowiedzi do zadań

1. a) 53, 93 b) 55, 55 c) 45, 45 d) 22, 64
 2. a) 0, 1 b) 15, 6 c) 14, 13 d) 17, 12
 3. a) 40, 90 b) 38, 10 206 c) 40, 120 d) 4, 4
 4. 8, 8, 8, 8, 8 5. a) 39 b) 28 c) 4 d) 84
 6. a) 4 b) o 132

I. Liczby naturalne

123

7. Jeżeli w ilorazie $75 : 15$ dzielną i dzielnik zmniejszymy 5 razy, to wynik
A. zmniejszy się 15 razy. B. pozostanie bez zmian.
C. zwiększy się 15 razy. D. zmniejszy się 5 razy.
8. Podczas zawodów łuczniczych zawodniczki oddają do tarcz 144 strzały z odległości: 70 m, 60 m, 50 m i 30 m. Do każdej tarczy oddaje się po tyle samo strzałów. Po ile strzałów oddaje się z każdej z tych odległości?
9. Karolina miała 364 zł. Zapłaciła za wycieczkę 180 zł i kupiła prezent dla brata za 49 zł. Ile pieniędzy jej zostało?
10. Emisja filmu trwała 108 minut i zakończyła się 13 minut po północy. O której godzinie się rozpoczęła?
A. O 23.25. B. O 22.20. C. O 22.25. D. O 22.15.
11. Po urodzinach babci Helenki rodzina rozjechała się do swoich domów. Wszyscy wyruszyli w podróż o 9.15 rano. Sebastian z rodzicami jechał 4 h 50 min, wuj Stefan o 3 kwadransy krócej, a ciocia Zosia 2 razy krócej niż Sebastian. O której godzinie każdy z nich dotarł do swojego domu?
12. Paweł zapłacił za pendrive 93 zł, a jego siostra Zosia – 3 razy mniej. O ile tańszy był pendrive Zosi od pendrive'a Pawła?
13. Spódnica jest 3 razy tańsza od żakietu. Za spódnice oraz żakiet zapłacono razem 320 zł. Ile kosztuje spódnica, a ile żakiet?
14. Sebastian ma przeczytać lekturę o 210 stronach. W ciągu 1 godziny chłopiec czyta 30 stron.
a) Ile godzin zajmie mu przeczytanie lektury?
b) Którego z kolei dnia skończy czytanie tej książki, jeżeli będzie ją czytał przez 2 godziny dziennie?
c) Ile stron przeczytał we wtorek, jeżeli zaczął od 92. strony, a skończył po przeczytaniu 119. strony?
15. Asia, Basia i Danusia wybrały się na grzybobranie. Asia zebrała 36 grzybów, Basia o 4 grzyby mniej, a Danusia zebrała 4 razy mniej grzybów niż Asia. Ile grzybów razem zebrały dziewczynki?



Komentarz do zadania 8.

Podczas rozwiązywania tego zadania proponujemy zapytać uczniów o sprytny sposób dzielenia przez 4 (dzielimy przez 2 i ponownie przez 2). Warto w rachunku pamięciowym utrwaląć tę umiejętność. Uczniowie powinni mieć możliwość decydowania, kiedy zastosować ten sposób dzielenia, a kiedy rozdzielną mnożenia względem dodawania, np.

$$144 : 4 = 72 : 2 = 36$$

lub

$$144 : 4 = (100 + 44) : 4 = 100 : 4 + 44 : 4 = 25 + 11 = 36.$$

Komentarz do zadania 14.

W tym zadaniu są 3 pytania. Aby odpowiedzieć na pytanie z punktu b), można wykonać obliczenia dwoma sposobami. W pierwszym sposobie korzystamy z obliczeń wykonanych w punkcie a), w drugim zaczynamy od obliczenia liczby stron, które każdego dnia czyta Sebastian, a następnie obliczamy liczbę dni potrzebnych na przeczytanie lektury. Jeżeli uczniowie będą mieli problem z udzieleniem poprawnej odpowiedzi na pytanie z punktu c), trzeba wrócić do zadania 10. na s. 10 w podręczniku.

25

Odpowiedzi do zadań

7. B
8. 36
9. 135 zł
10. C
11. Sebastian z rodzicami: 14.05, wuj Stefan: 13.20, ciocia Zosia: 11.40
12. o 62 zł
13. spódnica: 80 zł, żakiet: 240 zł
14. a) 7 b) czwartego c) 28
15. 77

Komentarz do zadania 17.

To trudne zadanie zamknięte. Proponujemy zachęcić uczniów do szacowania wyników, a następnie poprosić kilku wybranych uczniów o wyjaśnienie swojej propozycji szacowania.

Aby obliczyć koszt noclegu, trzeba obliczyć iloraz liczb 980 i 28, więc szacując iloraz liczb 980 i 30, uczeń powinien wyciągnąć wniosek, że wynik jest większy niż 30.

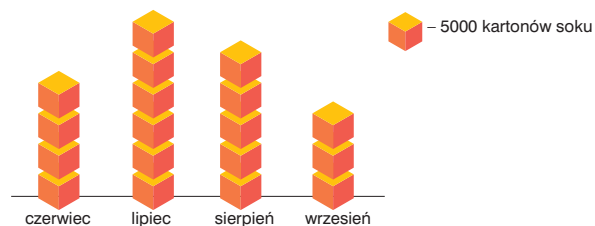
W drugim zdaniu do uzupełnienia uczeń powinien zauważyć, że koszt śniadań będzie wyrażony liczbą, która w rzędzie jedności ma cyfrę 6. Ponieważ dzielnikiem jest liczba 28, więc w rzędzie jedności ilorazu powinna wystąpić cyfra 2.

Komentarz do zadania 19.

Wypełnienie kwadratu wybranego spośród zaproponowanych można przeprowadzić w formie konkursu na czas. Po przeczytaniu polecenia i przerysowaniu do zeszytu wskazanego kwadratu wraz z liczbami w nim zapisanymi na dany znak uczniowie uzupełniają ołówkiem puste pola. Po wykonaniu zadania przez wszystkich uczniów osoba, która wykonała je jako pierwsza, przedstawia na forum klasy swój sposób. Pozostali uczniowie, po zasygnalizowaniu chęci zabrania głosu, mają możliwość komentowania prezentowanego sposobu oraz zaproponowania własnej strategii wpisywania liczb. Nauczyciel koryguje ewentualne błędy. Pozostałe dwa kwadraty mogą zostać wypełnione np. podczas pracy w parach.

123

- 16 W pewnym mieście obliczono, ile kartonów soku sprzedano w miesiącach letnich. Wyniki przedstawiono na diagramie:



Na podstawie diagramu odpowiedz na pytania.

- Ile kartonów soku sprzedano w każdym z czterech miesięcy?
- O ile mniej kartonów soków sprzedano w czerwcu niż w lipcu?
- Ile razy mniej kartonów sprzedano we wrześniu niż w lipcu?
- Na który miesiąc przyszłego roku należy zamówić najwięcej kartonów soków, a na który najmniej?

- 17 W pewnym pensjonacie 7 noclegów dla czteroosobowej rodziny kosztowało 980 zł, a koszt tygodniowego pobytu ze śniadaniem był równy 1316 zł.

Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

Jeden nocleg kosztował A / B. A. 35 zł B. 27 zł

Jedno śniadanie kosztowało C / D. C. 15 zł D. 12 zł

- 18 Ułóż zadanie o zakupach i rozwiąż je.

- 19 Przerysuj do zeszytu poniższe kwadraty. Zamiast  wpisz odpowiednie liczby wybrane spośród: 1, 2, 3, 4 tak, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczby się nie powtarzały. Czy wszyscy uczniowie w klasie mają taką samą odpowiedź?

a)

	4	3	
1	3	4	2
		2	
		1	

b)

1			
	1		
		1	
3			1

c)

			2
	3	2	
	2		
2			

26

Odpowiedzi do zadań

16. a) czerwiec: 20 000, lipiec: 30 000, sierpień: 25 000, wrzesień: 15 000 b) o 10 000 c) 2 d) najwięcej na lipiec, najmniej na wrzesień
17. AD

A to ciekawe!

W jaki sposób można obliczyć $24 \cdot 36$?

$$24 = 100 : 2 : 2 - 1$$

$$100 : 2 \quad \text{połowa } 100 \quad 50 \cdot 36 = 1800 \quad \text{połowa } 3600$$

$$(100 : 2) : 2 \quad \text{połowa } 50 \quad 25 \cdot 36 = 900 \quad \text{połowa } 1800$$

$$(100 : 2) : 2 - 1 \quad 25 - 1 \quad 24 \cdot 36 = 864 \quad 900 - 36$$

$$24 \cdot 36 = (25 - 1) \cdot 36 = \underbrace{25 \cdot 36}_{900} - 1 \cdot 36 = 900 - 36 = 864$$

Wymyśl sposób mnożenia $26 \cdot 36$.

**Sprawdź się!**

- Oblicz.
a) $86 - 35$ b) $93 - 59$ c) $84 : 7$ d) $9600 : 80$
- W klasowym konkursie rachunku pamięciowego Krysia zdobyła 83 punkty, a Maja o 38 punktów mniej. Ile punktów zdobyła Maja?
A. 55 B. 45 C. 65 D. 121
- W sklepie były ciastka po 4 zł za paczkę za łączną kwotę 112 zł i batony po 3 zł za sztukę za kwotę 108 zł. Czego było więcej: paczek ciastek czy batonów?
- Pociąg z Gdyni do Warszawy miał planowo przyjechać o godzinie 14:26. Spóźnił się o 218 minut. O której godzinie przyjechał ten pociąg?
- Na podstawie ilustracji oblicz cenę miseczki i dzbanka.

**Komentarz do A to ciekawe!**

Warto porozmawiać z uczniami, dlaczego obliczamy iloczyn liczb 36 i 100, a nie iloczyn liczb 24 i 100. Uczniowie powinni zauważyć, że wybór iloczynu jest uwarunkowany działaniem: $25 \cdot 4 = 100$. Kolejne kroki prowadzące do obliczenia iloczynu liczb 24 i 36 są bardzo czytelnie opisane. Wspólnej analizy może wymagać jedynie zapis ostatniego iloczynu liczb 24 i 36. Trzeba wówczas zwrócić uwagę na zastosowanie rozdzielności mnożenia względem odejmowania.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadania te pozwalają ocenić podstawowe umiejętności w zakresie pamięciowego odejmowania i dzielenia. Grupujemy je na zadania łatwe (z. 1 i z. 2) i nieco trudniejsze (z. 3, z. 4 i z. 5). Pamięciowe dzielenie, ze względu na występujące w nim duże liczby, może przysporzyć słabszym matematycznie uczniom nieco kłopotów. Wówczas mogą oni zgłosić się po pomoc do innej osoby, np. siedzącej w tej samej ławce. Uczeń, który udzielił wsparcia, powinien otrzymać od nauczyciela dodatkowy punkt. Za poprawne rozwiązanie dwóch początkowych zadań proponujemy przyznać plus, a za rozwiązanie co najmniej trzech zadań wstawić ocenę odpowiednią do liczby zadań i poprawności rozwiązań. W ten sposób każde dziecko ma szansę osiągnąć sukces.

Odpowiedzi do zadań**Sprawdź się!**

- a) 51 b) 34 c) 12 d) 120
- B
- batonów
- 18:04
- miseczka: 26 zł, dzbanek: 18 zł

Tematy lekcji:

1. Kolejność wykonywania działań (1 h)
2. Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych i rozwiązywanie zadań z uwzględnieniem kolejności wykonywania działań (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- stosuje prawa działań i reguły dotyczące kolejności wykonywania działań,
- oblicza wartość wyrażenia arytmetycznego z zastosowaniem kolejności wykonywania działań,
- stosuje nawiasy okrągły i kwadratowy,
- rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym z zastosowaniem jednostek monetarnych,
- czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe, dostrzega zależności między danymi informacjami.

Wskazówki metodyczne

- W klasie 4 uczniowie uczyli się obliczania wartości wyrażeń arytmetycznych, w których występuje więcej niż jedno działanie oraz nawias okrągły. Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych bardziej rozbudowanych należy wprowadzić, gdy uczeń pozna prawa działań, opanuje technikę rachunkową i zrozumie zależności między działaniami. Obliczanie wartości prostych wyrażeń arytmetycznych można wyćwiczyć dzięki włączaniu ich do rachunku pamięciowego.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 3.

Komentarz do Sowa przypomina

Podczas przypominania poznanej w klasie 4 kolejności wykonywania działań należy podkreślić, że działania równorzędne wykonuje się w kolejności ich występowania.

Jeżeli pracą domową z poprzedniej lekcji było przypomnienie sobie informacji zamieszczonych w Sowa przypomina, lekcję można rozpocząć konkursem rachunku pamięciowego na czas. Każdy uczeń otrzymuje wówczas zestaw przykładów na zastosowanie kolejności wykonywania działań. Informujemy uczniów o czasie pracy, np. 3 min. Po jego upływie uczniowie wymieniają się pracami i sprawdzają poprawność wyników. Ci, którzy nie zdążyli wykonać wszystkich przykładów, muszą poświęcić więcej czasu na ćwiczenie rachunku pamięciowego. Kompletne i poprawne wyniki nagradzamy.

123

4. Kolejność wykonywania działań

Sowa przypomina

- Jeżeli w wyrażeniu arytmetycznym nie ma nawiasów i jest:
 - tylko dodawanie lub odejmowanie,
 - tylko mnożenie lub dzielenie,
 to działania wykonujemy w kolejności występowania, od lewej do prawej.

$$58 + 12 - 23 = 70 - 23 = 47$$

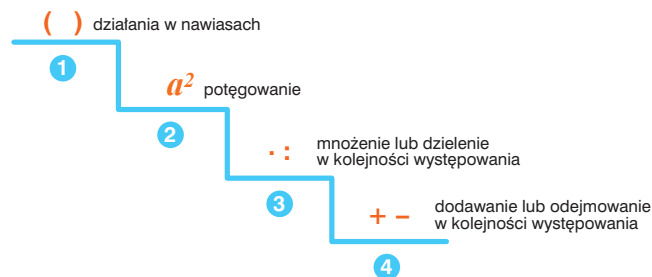
$$62 - 13 + 55 = 49 + 55 = 104$$

$$15 : 3 : 5 = 45 : 5 = 9$$

$$63 : 7 \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18$$

Działanie, które wykonujemy w pierwszej kolejności, można podkreślić.

- Jeżeli w wyrażeniu arytmetycznym występują różne działania i nawiasy, to działania wykonujemy w kolejności:



$$45 : (32 - 17) \cdot 5 = 45 : 15 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$$

$$(78 - 2^3 + 5) \cdot 2 = (78 - 8 + 5) \cdot 2 = (70 + 5) \cdot 2 = 150$$

$$155 + (9 \cdot 9 + 19) : 2^2 - 5^3 =$$

$$= 155 + (81 + 19) : 2^2 - 5^3 = 155 + 100 : 2^2 - 5^3 =$$

$$= 155 + 100 : 4 - 125 = 155 + 25 - 125 = 55$$

28

Materiały dydaktyczne

	Liczby całkowite → Liczby naturalne
	Liczby całkowite → Działania na liczbach naturalnych
Inne	Kartkówka 3 Praca klasowa diagnozująca
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	wsipnet.pl klasowki.pl
Zbiór zadań	s. 21
	s. 25–28

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. a) 71 b) 24 c) 470 d) 10 e) 14 f) 7 g) 5 h) 108 i) 4 j) 57
2. a) 91 b) 100
3. a) 341 b) 20 c) 3 d) 80
4. a) $8 \cdot (7 + 3) - 6^2 : 9 = 76$ b) $(5 + 6) \cdot (4^2 - 3^2) = 77$

Przykład 1.

Obliczmy wartość wyrażenia arytmetycznego, w którym występują dwa różne nawiasy (okrągły i kwadratowy).

$$\begin{aligned} \text{a) } [(3 + 7) \cdot 5 + 10] : 2^2 &= && \text{Najpierw wykonujemy działanie w nawiasie} \\ &= (10 \cdot 5 + 10) : 2^2 = && \text{okrągłym, a po jego wykonaniu nawias} \\ &= (50 + 10) : 4 = && \text{kwadratowy zastępujemy okrągłym.} \\ &= 60 : 4 = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2^3 \cdot [24 : (4 \cdot 3 - 6)] &= && \text{W tym przykładzie można jednocześnie} \\ &= 8 \cdot [24 : (12 - 6)] = && \text{z działaniami w nawiasie wykonać} \\ &= 8 \cdot (24 : 6) = && \text{potęgowanie.} \\ &= 8 \cdot 4 = 32 \end{aligned}$$

Jeżeli w wyrażeniu arytmetycznym występuje kilka nawiasów, to najpierw wykonujemy działania w tym nawiasie, który nie zawiera innych nawiasów.



1 Oblicz.

$$\begin{aligned} \text{a) } 32 + 17 + 28 \\ 2 \cdot 9 \cdot 50 : 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 92 - 13 - 39 \\ 46 - (26 + 13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 140 : 7 : 4 \\ 250 : 5 : 2 \end{aligned}$$

2 Oblicz.

$$\begin{aligned} \text{a) } 280 - 50 + 52 \\ 57 + 16 - 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 4 \cdot 25 \cdot 12 \\ 15 \cdot 4 : 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 72 - 2 \cdot 5^2 \\ 95 + 5 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

3 Oblicz.

$$\begin{aligned} \text{a) } 96 - 7 \cdot 8 \\ 3 \cdot 6 - 28 : 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 5 \cdot (48 : 6) \\ 90 : (3^2 \cdot 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 5 \cdot (85 + 115) \\ 64 : (100 - 6^2) \end{aligned}$$

4 Oblicz.

$$\begin{aligned} \text{a) } 70 \cdot 3 + 20 \cdot 40 \\ 81 - 44 : 2^2 + 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 340 - 4 \cdot (34 + 36) \\ 9 + 480 : (94 - 34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 66 - 6 \cdot (59 - 7 \cdot 8) \\ (6 \cdot 7 + 12 \cdot 4) : 10 \end{aligned}$$

Komentarz do Przykładu 1.

W tym przykładzie wprowadzamy w wyrażeniu arytmetycznym nawias kwadratowy. Ważne, aby uczniowie zwrócili uwagę i zapamiętali komentarze napisane obok działań. Powinni kontynuować sposób zapisu obliczeń poznany w klasie 4, czyli podkreślać działania wykonywane jako pierwsze, a każdą przekształconą wersję danego wyrażenia zapisywać w nowym wierszu. Zapisywanie wyników częściowych pod działaniami ułatwi obliczanie, szczególnie uczniom słabszym z matematyki.

Komentarz do zadań 1.–3.

Wartości zapisanych tu wyrażen arytmetycznych można obliczyć w pamięci, korzystając z własności działań. Uczeń podający wynik danego wyrażenia powinien przedstawić kolejność swoich obliczeń oraz wyniki częściowe. Nauczyciel powinien wybierać do odpowiedzi uczniów, dostosowując jednocześnie przykłady do ich możliwości, czyli stosując indywidualizację pracy z uczniem.

Odpowiedzi do zadań

1. a) 77, 2700 b) 40, 7 c) 5, 25
2. a) 282, 53 b) 1200, 10 c) 22, 230
3. a) 40, 14 b) 40, 2 c) 1000, 1
4. a) 1010, 100 b) 60, 17 c) 48, 9

Komentarz do zadania 8.

To zadanie zawiera wyrażenia arytmetyczne, w których występują wprowadzone na tej lekcji nawiasy kwadratowe. Część uczniów może w pamięci obliczyć wartości tych wyrażeń. W każdym z przykładów istotne jest ustalenie na forum klasy kolejności wykonywania działań. Uczniom mającym problemy z rozwiązywaniem tego typu zadań proponujemy podkreślanie działań, które wykonujemy w pierwszej kolejności, i zapisywanie wyników częściowych. Uczniom, którzy samodzielnie i w krótkim czasie rozwiążą to zadanie, proponujemy wykonanie zadań *A to ciekawe!* oraz *Wyzwanie*.

123

- 5 Które zdanie jest **falsywne**?
- A. Sumą liczb: 21, 3, 0, 9, 17 jest liczba 50.
 B. Zapis: $12 \cdot (2 + 8) = 120$ jest prawdziwy.
 C. Liczba 17 jest wartością wyrażenia: $13 - 3 \cdot (22 - 5 \cdot 4)$.
 D. Liczbą 8 razy mniejszą od $(48 + 24)$ jest liczba 9.
- 6 Liczba 55 jest wartością wyrażenia
- A. $23 \cdot 0 + 15 \cdot 4 - 32 : 8$
 B. $(56 + 77 : 11) - 8$
 C. $(45 + 5 \cdot 3) : (33 - 28)$
 D. $32 + (28 - 3 \cdot 7)$
- 7 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
- a) $6 \cdot 12 - 52 : 4$ b) $(125 : 25 + 50) : 11$ c) $126 - 10 \cdot 2^3$
 $(25 + 75) : (53 - 48)$ $(8 \cdot 7 - 50) \cdot 6 : 4$ $2500 : 10^2 - 5^2$
 $53 - 3 \cdot (43 - 19) : 6$ $98 + 2 \cdot (38 + 31 \cdot 2)$ $2^4 \cdot 4 : (71 - 39)$
- 8 Oblicz.
- a) $[(7^2 + 61) : 11 + 50] : 12$ b) $[2 \cdot (62 - 20) + 15] : 3^2$
 c) $3 \cdot 90 - 130 : [5 \cdot (81 - 68)]$ d) $48 + [(10^3 - 320) : 20 + 11] : 5$
- 9 W tabelce przedstawiono informacje dotyczące zadań ze sprawdzianu z matematyki.
- | Liczba zadań | Liczba punktów za zadanie |
|--------------|---------------------------|
| 5 | 1 p. |
| 4 | 2 p. |
| 3 | 3 p. |
- Ile co najwyżej punktów można było uzyskać na tym sprawdzianie?
- A. 23 punkty. B. 6 punktów. C. 22 punkty. D. 21 punktów.
- 10 Komisja przygotowująca Szkolny Konkurs Matematyczny oszacowała czas pracy uczestnika. Ustaliła, że na rozwiązanie każdego zadania za 1 punkt potrzeba 1 minutę, za 2 punkty – 2 minuty, a za 3 punkty – 4 minuty. Uczestnicy konkursu musieli rozwiązać 8 zadań za 1 punkt, 10 zadań za 2 punkty i 7 zadań za 3 punkty. Jaki minimalny czas powinna wyznaczyć komisja na rozwiązanie zadań?
- 11 Ułóż zadanie, które można rozwiązać za pomocą wyrażenia: $100 - 5 \cdot 16$, a następnie rozwiąż je.



30

Odpowiedzi do zadań

5. C
 6. B
 7. a) 59, 20, 41 b) 5, 9, 298 c) 46, 0, 2
 8. a) 5 b) 11 c) 268 d) 57
 9. C
 10. 56 min
 11. 20

A to ciekawe!

W języku arabskim zero określano nazwą *sifr*, czyli pusty. W zapisie liczby, w miejscu, w którym obecnie wstawiamy zero, czasem pozostawiano puste miejsce. Proces kształtowania się zera trwał ponad 1000 lat. W Europie zero zostało rozpowszechnione w XIII w. dzięki włoskiemu matematykowi Leonardowi z Pizy, zwanemu Fibonacci (czyt. fibonaczi). Jaką rolę odgrywa zero w: dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu i dzieleniu?

**Wyzwanie**

Przepisz przykłady do zeszytu. Zamiast $\blacklozenge$ napisz znak działania lub nawias tak, aby zapisy były prawdziwe.

- a) $625 \blacklozenge 25 \blacklozenge 10 \blacklozenge 1 = 251$ b) $100 \blacklozenge 1000 \blacklozenge 8 \blacklozenge 0 = 225$

Sprawdź się!

- W którym wyrażeniu przy obliczaniu jego wartości trzeba wykonać kolejno: dodawanie, mnożenie, odejmowanie?
A. $3 + 7 \cdot 4 - 5$ B. $50 - 2 \cdot (9 + 8)$
C. $7 \cdot 2 - 3 + 8$ D. $5 + 8 - 9 \cdot 2$
- Oblicz.
a) $6 \cdot 24 - 39 : 3 + 2^3$ b) $[(97 + 63) : 20 + 8] : 2$
- Agnieszka kupiła 3 bloki rysunkowe po 7 zł, 4 zeszyty po 6 zł, 2 słowniki po 8 zł i ołówek za 1 zł. Ile zapłaciła za zakupy? Treść zadania przedstaw w postaci wyrażenia arytmetycznego.
- Sebastian ma 3 monety po 5 zł, 2 banknoty po 20 zł i monetę 2 zł. Chce kupić smartwatcha za 105 zł. Ile pieniędzy mu zabraknie?
- Napisz wyrażenie i oblicz jego wartość.
a) Liczba 5 razy większa od sumy liczb 27 i 15.
b) Liczba o 7 mniejsza od ilorazu liczb 72 i 8.



31

Komentarz do A to ciekawe!

Podczas udzielania odpowiedzi na zadane pytanie uczniowie ćwiczą samodzielną wypowiedź i formułowanie wniosków. Powinni podać przykłady liczbowe potwierdzające ich wypowiedź.

Przy okazji tego zadania przypominamy, dlaczego dzielnik nie może być zerem. Zachęcamy uczniów do poszukiwania w różnych źródłach informacji i innych ciekawostek dotyczących cyfry 0 i przedstawiania ich w wybrany przez siebie sposób.

Komentarz do Wyzwania

Zadanie dotyczy kolejności wykonywania działań. Uczniowie mogą je rozwiązać metodą prób i błędów, ale możemy też skłonić ich do dokładnego przeanalizowania zapisów i zwrócenia uwagi na występujące w nich liczby.

Komentarz do Sprawdź się!

Proponujemy, aby podczas rozwiązywania zadań 3. i 4. uczniowie słabsi matematycznie wykonali rysunki pomocnicze ilustrujące treść zadania. Ułatwi im to rozwiązanie tych zadań i zachęci do rozwiązywania następnych.

Odpowiedzi do zadań**A to ciekawe!**

W dodawaniu liczba 0 jest składnikiem neutralnym, czyli nie wpływa na wynik dodawania.

W odejmowaniu, jeżeli odjemnik jest równy 0, to różnica jest równa odjemnej.

W mnożeniu, jeżeli przynajmniej jeden czynnik jest równy 0, to iloczyn wynosi 0.

W dzieleniu dzielnik nie może być 0. Jeżeli dzielna jest równa 0, to iloraz wynosi 0.

Wyzwanie

Na przykład:

- a) $625 : 25 \cdot 10 + 1 = 251$ b) $100 + 1000 : 8 - 0 = 225$

Sprawdź się!

- B 2. a) 139 b) 8
- $3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 1 = 62$ [zł]
- 48 zł
- a) $5 \cdot (27 + 15) = 210$ b) $72 : 8 - 7 = 2$

Tematy lekcji:

1. Obliczanie prędkości i drogi (1 h)
2. Obliczanie prędkości i drogi w zadaniach praktycznych (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- oblicza drogę przy danej prędkości i czasie, prędkość przy danej drodze i czasie,
- stosuje jednostki prędkości km/h i m/s,
- porównuje liczby naturalne,
- czyta ze zrozumieniem tekst zadania i dostrzega zależności między podanymi informacjami,
- ocenia sensowność rozwiązania, np. poprzez szacowanie, sprawdzanie wszystkich warunków zadania,
- stosuje obliczanie drogi i prędkości w zadaniach tekstowych.

Wskazówki metodyczne

- W klasie 5 wprowadzamy jednostki prędkości. Część proponowanych przez nas zadań można wykonać ustnie, a później wprowadzić do rachunku pamięciowego zadania typu:

Pojazd jechał przez ... godziny z prędkością średnią ... Ile kilometrów przejechał ten pojazd?

Z jaką prędkością jechał pojazd, jeżeli ... kilometrów pokonał w ciągu ... godzin?

W tych zadaniach trzeba tak dobrać dane, by obliczenia były wykonywane na liczbach naturalnych, ponieważ chcemy, aby uczniowie zrozumieli i wyćwiczyli schematy rozwiązywania tego typu zadań, a nie wykonywali żmudne rachunki.

- Na tych lekcjach można zaproponować uczniom bicie rekordu pod względem liczby rozwiązanych zadań. Należy zadbać o to, aby wszyscy uczniowie byli zaangażowani w pracę na lekcji, dlatego też trzeba przygotowywać zadania o różnym stopniu trudności.
- Pod koniec drugiej lekcji uczniowie mogą zapoznać się z infografiką zamieszczoną na s. 56–57. Warto zaproponować uczniom, aby na jej podstawie przygotowali pracę długoterminową. Przedstawienie wyników pracy i ich ocenę można przeprowadzić na lekcji powtórzeniowej z tego działu.

Komentarz do Sowa uczy

Sowa uczy to nie tylko intuicyjne wprowadzanie pojęcia prędkości, ale również opisanie różnych jednostek prędkości. Wspólnie z uczniami szukamy przykładów zastosowania różnych jednostek prędkości. Podejmujemy próbę oceny, czy podany przez ucznia przykład jest realny, np. *Czy jest możliwe, aby człowiek biegł z prędkością $6 \frac{m}{s}$?*

123

5. Droga, prędkość i czas

Sowa uczy

Jeżeli w czasie 1 godziny samochód przejechał 50 km, choć czasami jechał wolniej, czasami szybciej, to mówimy, że jechał **z prędkością średnią** 50 kilometrów na godzinę, i w skrócie zapisujemy $50 \frac{km}{h}$.

Jeżeli samolot przeleciał 12 000 m w czasie 1 minuty, to mówimy, że leciał z prędkością 12 000 metrów na minutę, i zapisujemy $12\,000 \frac{m}{min}$. W czasie jednej sekundy głos rozchodzi się na odległość około 340 m. Przyjmujemy, że prędkość głosu jest równa $340 \frac{m}{s}$.



Przykład 1.

Pan Mateusz jechał samochodem z prędkością średnią $60 \frac{km}{h}$ od godziny 6.00 do godziny 9.00. Jaką odległość pokonał?

Obliczmy czas jazdy: $9 - 6 = 3$. Jazda trwała 3 godziny.

Obliczmy drogę: $\frac{60 km}{1 h} + \frac{60 km}{1 h} + \frac{60 km}{1 h} \quad 3 \cdot 60 = 180$.

Odpowiedź. Pan Mateusz pokonał 180 km.

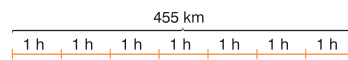
Przykład 2.

Pani Zofia wyjechała z domu samochodem o godzinie 6.00. Po trzech godzinach zatrzymała się na 2-godzinny postój. O godzinie 15.00 zakończyła podróż po przejechaniu 455 km. Z jaką prędkością średnią jechała samochodem pani Zofia?

Obliczmy czas jazdy: $(15 - 6) - 2 = 7$. Jazda trwała 7 godzin.

Obliczmy, ile kilometrów przejeżdżał samochód w czasie 1 godziny.

$455 : 7 = (420 + 35) : 7 = 420 : 7 + 35 : 7 = 60 + 5 = 65$



Odpowiedź. Pani Zofia jechała z prędkością średnią $65 \frac{km}{h}$.

32

Materiały dydaktyczne

	Obliczenia praktyczne ➔ Prędkość, droga, czas
	Plansza edukacyjna. Prędkość, droga, czas
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 22–25
Zbiór zadań	s. 28–31

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. a) 45 b) 3400 c) 8 2. B
3. kolejno wierszami: 32; 248; 4; 35; 600; 50; 20 4. TAK; TAK
5. a) gepard, wąż b) 58 c) 2 d) 175 e) 162
6. a) A; D b) 105 zł
8. zaczynając od samochodu, w prawo: 320 km; 28 km; 3200 km; 240 km; 280 km; 80 km; 200 km

I. Liczby naturalne

123

1. Pociąg jechał 3 godziny z prędkością średnią $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką drogę przejechał ten pociąg?
2. Robert pojechał pociągiem do rodziny na wakacje. Pociąg jechał przez 4 godziny z prędkością średnią $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jak długą trasę pokonał Robert pociągiem?
3. Młodzież wyjechała autokarem na obóz o godzinie 7.00. Dojechali na miejsce o godzinie 12.00. Autokar jechał z prędkością średnią $55 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jak długą trasę pokonał autokar?
4. Adam usłyszał grzmot po 6 sekundach od zobaczenia błyskawicy. Jak daleko była wtedy burza, jeżeli dźwięk rozchodzi się z prędkością $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$? O ile to więcej niż 2 km?
5. Ania przeszła 8 km w czasie 2 godzin, a Kinga 2500 m w ciągu pół godziny. Z jaką prędkością średnią szła każda z dziewcząt?
6. Adam i Wiktoria mieszkają w odległości 720 m od szkoły. Lekcje rozpoczynają o godz. 8.00. Dzieci wyszły z domu o godz. 7.35. Adam przyszedł do szkoły o 7.44, a Wiktoria przyjechała rowerem 7 minut wcześniej. Ile minut przed rozpoczęciem lekcji przyjechała do szkoły Wiktoria? O ile szybciej poruszała się Wiktoria? Wynik podaj w $\frac{\text{m}}{\text{min}}$.
7. Które zdanie jest **fałszywe**?
 - A. W czasie 4 godzin pan Julian przejechał rowerem 120 km, więc jechał z prędkością średnią $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
 - B. Pani Anna przejechała 100 km w czasie od 6.30 do 8.30, więc jechała z prędkością średnią $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
 - C. Jeśli kolarze będą jechać z prędkością średnią $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, to w czasie 3 godzin przejadą 120 km.
 - D. W czasie 30 minut samochód przejechał 40 km, więc jechał z prędkością średnią $20 \frac{\text{km}}{\text{min}}$.
8. Z Radomia, o tej samej godzinie, w przeciwnych kierunkach wyruszyli pani Karolina i pan Jacek. Pani Karolina jechała z prędkością średnią $55 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a pan Jacek – $52 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jakiej długości była droga dzieląca ich samochody po 2 godzinach jazdy?



Komentarz do zadań 1.–6.

Zadania te można rozwiązać ustnie. Poza podaniem wyników uczniowie przedstawiają na forum klasy sposoby ich rozwiązywania. Kierując się indywidualizacją pracy z uczniem, proponujemy, aby w ramach pracy domowej uczniowie słabsi z matematyki rozwiązyali pisemnie dowolnie wybrane 2 lub 3 zadania spośród omówionych. Pozostali uczniowie, jako pracę domową, otrzymują inne, wskazane przez nauczyciela zadania.

Komentarz do zadania 4.

Przyda się uczniom informacja, że wypowiedzenie liczby dwucyfrowej trwa 1 s. Dzięki niej powinni zauważyć, że w czasie wypowiadania trzech liczb dwucyfrowych głos pokona odległość ok. 1 km. Znajomość tej zależności jest przydatna w życiu codziennym, pozwala bowiem określić, np. w jakiej odległości od nas znajduje się burza. Tego typu informacje wpływają na podejmowanie właściwych decyzji.

Komentarz do zadania 7.

Podczas określania, czy dane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe, prosimy uczniów, aby ustnie uzasadniali swoje wybory, czyli odpowiadali na pytanie: *Dlaczego?*

Komentarz do zadania 8.

Do tego zadania proponujemy wykonać rysunek pomocniczy ilustrujący jego treść, który posłuży uczniom do przygotowania planu rozwiązywania zadania.

33

Odpowiedzi do zadań

1. 135 km
2. 240 km
3. 275 km
4. 2040 m; o 40 m
5. Ania: 4 km/h, Kinga: 5 km/h
6. 23 minuty; o 280 m/min
7. D
8. 214 km

Komentarz do zadania 9.

To zadanie rozszerzonej odpowiedzi. Zawiera wiele informacji, które trzeba przeczytać ze zrozumieniem. Proponujemy, aby wspólnie z uczniami wykonać rysunek pomocniczy, na którym dobę przedstawimy jako odcinek podzielony na 24 równe części. Na rysunku zmianę każdego kierowcy warto oznaczyć innym kolorem.

2h 2h

Dzięki tym krokom zadanie stanie się bardziej zrozumiałe i żadne informacje nie zostaną pominięte.

Komentarz do zadania 10.

To zadanie uczniowie powinni wykonać samodzielnie w określonym przez nauczyciela czasie. Proponujemy ok. 3 min. Następnie sprawdzamy rozwiązania i dyskutujemy z uczniami na temat poprawności jego wykonania.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadanie 5. zawiera nadmiar danych. Uczniowie powinni to sami zauważyć i wyjaśnić, które dane są zbędne i dlaczego.

123

- 9 W wyścigu samochodowym 24h Le Mans startują drużyny 3-osobowe. Kierowcy zmieniają się co 2 godziny. W ciągu godziny samochód przejeżdża średnio 200 km.

- a) Ile godzin w ciągu doby samochód prowadzi jeden kierowca i ile kilometrów przejeżdża w ciągu jednej zmiany?
b) Ile kilometrów przejeżdża samochód w ciągu doby?



- 10 Które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe? W każdym zdaniu fałszywym zmień jedną liczbę tak, by zdanie stało się prawdziwe.

- a) Pan Franciszek przejechał rowerem 57 km w czasie 3 godzin, więc jechał z prędkością średnią $19 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
b) Pan Grzegorz jechał autostradą przez 2 godziny z prędkością średnią $122 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, więc przejechał 222 km.
c) Podczas treningu jazdy na rolkach pan Andrzej przejechał 9 km w czasie 20 minut, jechał więc z prędkością średnią $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

🐦 Sprawdź się!

- 1 Autobus dalekobieżny jechał 6 godzin z prędkością średnią $55 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką drogę przejechał ten autobus?
2 Hania pojechała z rodzicami i bratem na wakacje do Włoch. Podróżowali samolotem, który leciał z prędkością średnią $650 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Lot trwał 2 godziny, więc przelecieli
A. 1950 km B. 652 km C. 1300 km D. 650 km
3 W czasie 2-godzinnego treningu kolarze przejechali trasę o długości 70 km. Z jaką prędkością średnią jechali kolarze podczas tego treningu?
4 Pan Arek przejechał 26 km w czasie 30 minut, a pani Agata 174 km w czasie 3 godzin. Kto jechał z większą prędkością średnią i o ile większą?
5 Na obozie zorganizowano wycieczkę rowerową. Pojechało na nią 16 osób. Uczestnicy ruszyli o godzinie 8:00. O godzinie 10:00, po przejechaniu 38 km, zatrzymali się na pierwszy postój. Z jaką prędkością średnią jechali uczestnicy wycieczki?

34

Odpowiedzi do zadań

9. a) 8 godzin, 400 km b) 4800 km
10. prawdziwe: a), fałszywe: b), c)

Sprawdź się!

1. 330 km
2. C
3. 35 km/h
4. pani Agata, o 6 km/h
5. 19 km/h

6. Pisemne dodawanie i odejmowanie

 Sowa przypomina

	1			
	6	8	0	5
+		9	7	6
	7	7	8	1

	7	11		
	8	2	9	10
-	5	7	3	9
	2	4	6	1

W dodawaniu i odejmowaniu zwracamy uwagę na sposób podpisywania liczb:

- jednostki pod jednostkami,
- dziesiątki pod dziesiątkami...

Zaczynamy dodawać i odejmować od rzędu jednostki.

Przykład 1.

Pan Sebastian kupił bilety lotnicze do Toronto w Kanadzie dla siebie oraz syna Mateusza i zapłacił 3706 zł. Bilet dla dorosłej osoby kosztował 2119 zł. Ile kosztował bilet Mateusza?

Treść zadania można zapisać tak:

cena biletu pana Sebastiana

2119

+

cena biletu Mateusza

a

=

wartość dwóch biletów

3706

Cenę biletu Mateusza zastąpiono literą a .

Obliczmy cenę biletu Mateusza: $a = 3706 - 2119$

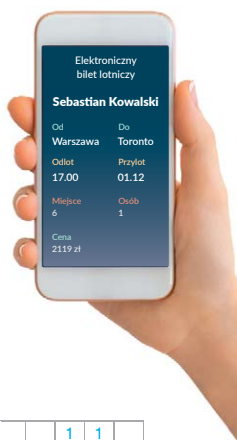
		6	9	16
	3	7	0	8
-	2	1	1	9
	1	5	8	7

$a = 1587$

Sprawdzenie.

		1	1
	1	5	8
+	2	1	1
	3	7	0

Odpowiedź. Bilet Mateusza kosztował 1587 zł.



35

Tematy lekcji:

1. Pisemne dodawanie i odejmowanie (1 h)
2. Zadania z zastosowaniem pisemnego dodawania i odejmowania (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- właściwie podpisuje liczby w pisemnym dodawaniu i odejmowaniu,
- stosuje algorytmy pisemnego dodawania i odejmowania,
- wykorzystuje pisemne dodawanie i odejmowanie w rozwiązywaniu prostych zadań otwartych i zamkniętych,
- uzupełnia brakujące cyfry w pisemnym dodawaniu i odejmowaniu,
- oblicza niewiadome: składnik, odjemną lub odjemnik,
- rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym i stosuje w nich porównywanie różnicowe,
- planuje strategię rozwiązania zadania i weryfikuje wynik zadania tekstowego,
- dzieli rozwiązanie zadania na etapy i stosuje własne poprawne i wygodne dla siebie strategie rozwiązania.

Wskazówki metodyczne

- Podczas wykonywania działań sposobem pisemnym należy zwracać uwagę uczniom na staranne zapisywanie liczb. Każdą cyfrę muszą zapisywać w osobnej kratce bez odstępów między wierszami, by nie dopuścić do popełniania błędów.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 4.

Materiały dydaktyczne

	Liczby całkowite → Liczby naturalne Liczby całkowite → Działania na liczbach naturalnych
	Kartkówka 4 Karta pracy. Porównywanie różnicowe
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 26–30
Zbiór zadań	s. 31–33

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. kolejno wierszami: 39 949; 570 980; 26 122; 51 251; 21 392; 282 124
2. a) 162 963 b) 9 244 202 c) 42 155 3. a) 711 b) 822 c) 332
4. a) Warszawa, Katowice b) $292\,774 < 470\,907 < 534\,813 < 642\,869 < 779\,115 < 1\,790\,658$
c) B d) o 136 246 e) A f) o 36 514 342
5. a) $<$ b) $>$ c) $>$ d) $>$
6. a) 741 km b) 606 km c) 497 km
7. A 8. a) P b) F c) P
9. I trasa: Koszalin–Poznań–Łódź–Kraków–Zakopane – 788 km; II trasa: Koszalin–Poznań–Wrocław–Katowice–Zakopane – 756 km; III trasa: Koszalin–Warszawa–Kraków–Zakopane – 843 km
Najdłuższa jest trasa III – 843 km, a najkrótsza II – 756 km.
Różnica długości – 87 km.
10. kolejno: 2010 r.; 1952 r.; 1958 r.; 1976 r.; 18 lat
11. a) 4; 1; 5 b) 1; 2; 8; 6; 7 c) 4; 2; 1; 0 d) 2; 4; 4
12. P; F; P; P; F

Komentarz do zadania 2.

To zadanie można rozwiązać poprzez otwarcie, ale naszym celem jest nauczenie uczniów metody eliminowania błędnych odpowiedzi. Po przyjrzeniu się cyfrom jedności obu składników zauważamy, że ich suma w rzędzie jedności powinna mieć cyfrę 5. Ten warunek spełniają odpowiedzi B i C, zatem odpowiedzi A i D odrzucamy. Następnie widzimy, że suma liczb 15 000 i 142 000 jest mniejsza od 200 000, i na tej podstawie odrzucamy odpowiedź C.

Komentarz do zadania 3.

Uczniowie powinni poznać metodę obliczania różnicy liczb na zasadzie dopełniania do większej z nich, czyli udzielania odpowiedzi na pytanie: *Ile brakuje do ...?* Takie obliczenia warto włączyć do rachunku pamięciowego. W tym celu ponownie proponujemy zabawę **HASŁO–ODZEW**. Wypisujemy bądź wyświetlamy na tablicy kolumnę liczb dwucyfrowych, które w rzędzie jedności mają cyfrę 0. Hasłem w tej grze będzie liczba wypowiedziana przez nauczyciela lub ucznia, a odzewem liczba, która jest dopełnieniem wypowiedzianej liczby do liczby wybranej spośród widocznych na tablicy.

Przykładowo: *Nauczyciel wskazuje na tablicy liczbę 60 i podaje hasło: 44. Uczeń powinien odpowiedzieć: 16.*

W tym zadaniu widzimy, że tacie brakuje mniej niż 300 zł, odpowiedzi A i B nie bierzemy więc pod uwagę. Po zwróceniu uwagi na cyfrę jedności odjemnej i odjemnika wybieramy odpowiedź D.

Komentarz do zadania 9.

Zadanie ma nadmiar danych.

Komentarz do zadania 10.

Przy okazji rozwiązywania tego zadania proponujemy zapytać uczniów o rolę liter w tych równościach oraz przypomnieć i utrwalić nazewnictwo działań, a także ich części składowych: sumy, różnicy, składnika, odjemnej, odjemnika.

Komentarz do zadań 11. i 12.

W tych zadaniach powtarzamy i utrwalamy porównywanie różnicowe. Proponujemy zachęcić uczniów do wykonania rysunków pomocniczych i naniesienia na nie danych.

123

- Oblicz sposobem pisemnym.

a) $1594 + 315$	b) $4393 - 1874$	c) $16\,405 + 8685$
$3786 - 1573$	$2070 - 1069$	$3016 - 847$
$3040 + 2060$	$512 + 698$	$2000 - 1526$
- Sumą liczb 15 039 i 142 476 jest liczba
A. 127 437 B. 157 515 C. 257 515 D. 157 513
- Tata Jarka chce kupić meble za 9010 zł. Ma 8727 zł. Brakuje mu
A. 383 zł B. 17 737 zł C. 280 zł D. 283 zł
- Oblicz sumę liczb 2678, 950 i 12 870.
- Oblicz różnicę liczb 16 000 i 9421.
- Rodzice Andrzeja kupili dom. Wydali na niego 134 500 zł oszczędności oraz 290 000 zł pożyczonych z banku. Jaka była cena tego domu?
- Zakład przetwórstwa owocowego kupił 21 000 t jabłek. Do produkcji soków użyto 19 054 t jabłek, resztę stanowiły odpady. Jaka była masa odpadów w kilogramach?
- W szkółce leśnej posadzono wiosną 5600 sadzonek świerków. Zwierzęta i mróz zniszczyły 2950 sadzonek. Ile sadzonek przetrwało?
- W hurtowni było 4300 kg owoców cytrusowych i 3 t jabłek. Do sklepów rozwieziono 568 kg grejpfrutów i 418 kg pomarańczy. Ile kilogramów owoców cytrusowych pozostało w hurtowni?
- Oblicz, jaką liczbę zastępuje litera. Sprawdź otrzymany wynik.
a) $d + 463 = 5010$ b) $p - 12\,641 = 8779$ c) $7001 - b = 456$
- W pewnej szkole w klasach 4–8 uczy się 503 uczniów, a w klasach 1–3 o 98 uczniów mniej. Ilu uczniów uczęszcza do tej szkoły?
- W konkursie matematycznym KANGUR w kategorii „Beniamin” w 2018 r. brało udział 87 884 uczniów, a rok później o 21 423 uczniów więcej. Ilu uczniów uczestniczyło w tej kategorii w konkursie w 2019 r.?



świerk

36

Odpowiedzi do zadań

- a) 1909, 2213, 5100 b) 2519, 1001, 1210 c) 25 090, 2169, 474
- B
- D
- 16 498
- 6579
- 424 500 zł
- 1 946 000 kg
- 2650
- 3314 kg
- a) 4547 b) 21 420 c) 6545
- 908
- 109 307

I. Liczby naturalne

123

- 13 Według danych z czerwca 2019 roku w Siemianowicach Śląskich było 66 963 mieszkańców, a w Świętochłowicach – 49 762. O ile więcej ludności mieszkało w Siemianowicach Śląskich?
- 14 Wczasy w pensjonacie nad morzem kosztują 1260 zł od osoby, a w gospodarstwie agroturystycznym na Mazurach są o 470 zł tańsze.
- a) Ile kosztują wczasy agroturystyczne dla jednej osoby?
b) O ile więcej kosztują wczasy w pensjonacie niż wczasy agroturystyczne na Mazurach dla czteroosobowej rodziny?
- 15 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
- a) $15\,647 + 7816 - 8709$
b) $25\,801 - (8801 + 7945)$
c) $9300 - [4006 - (2149 + 536)]$



A to ciekawe!

Napisz 4 różne cyfry. Utwórz z nich największą i najmniejszą liczbę czterocyfrową. Od większej odejmij mniejszą. Otrzymasz nową liczbę. Przetwórz jej cyfry tak, aby utworzyły liczbę największą i najmniejszą. Oblicz różnicę tych liczb. Wykonuj czynności dotąd, aż zauważysz, że różnica będzie zapisana tymi samymi cyframi co odjemna i odjemnik.

Weźmy np. cyfry: 1, 3, 7, 8. Największą liczbą utworzoną z tych cyfr jest liczba 8731, a najmniejszą 1378. Wykonajmy odejmowanie.

Największą liczbą utworzoną z cyfr: 7, 3, 5, 3 jest 7533, a najmniejszą 3357.

	8	7	3	1
-	1	3	7	8
	7	3	5	3

	7	5	3	3
-	3	3	5	7
	4	1	7	6

Największą liczbą utworzoną z cyfr: 4, 1, 7, 6 jest 7641, a najmniejszą 1467.

	7	6	4	1
-	1	4	6	7
	6	1	7	4

Utwórz liczby z cyfr: 2, 7, 3, 8 oraz z cyfr: 2, 4, 5, 9 i postępuj podobnie jak w przykładzie powyżej. Sprawdź tę zasadę dla innej dowolnie wybranej czwórki cyfr.

Komentarz do zadania 13.

Zadanie powinno zachęcić uczniów do zainteresowania się swoją miejscowością. Przy okazji możemy zrealizować projekt *Moja miejscowość opisana liczbami*.

Komentarz do zadania 15.

To zadanie uczniowie powinni rozwiązać za pomocą działań pisemnych. Istotna jest kolejność ich wykonywania. Należy zwrócić na nią uwagę.

Komentarz do A to ciekawe!

Tutaj znajdują się ćwiczenia aktywizujące całą klasę, dlatego ważne jest zachęcenie uczniów do ich wykonania. Proponujemy podać w wątpliwość każdorazowe uzyskanie takiego samego rezultatu i zaproponować uczniom znalezienie przykładu, który nie spełni opisanej zasady (kontrprzykładu). Uczniowie, szukając kontrprzykładu, wielokrotnie wykonują odejmowanie sposobem pisemnym, a tym samym ćwiczą tę umiejętność.

Odpowiedzi do zadań

13. o 17 201
14. a) 790 zł b) o 1880 zł
15. a) 14 754 b) 9055 c) 7979

Komentarz do Wyzwania

Warto zwrócić uwagę na te zadania.

1. Podobnie jak w *A to ciekawe!* zachęcamy uczniów do sprawdzenia, czy na pewno każda para liczb spełniająca warunki zadania ma różnicę 9. Proponujemy uczniów podzielić na grupy, aby każda z nich dokonała sprawdzenia w innym przedziale liczbowym. Odbywa się to szybko, bo działania są wykonywane w pamięci.

2. W tym zadaniu są nieznanne: cyfra dziesiątek liczby dwucyfrowej i cyfra setek liczby trzycyfrowej (to ta sama cyfra). Jeżeli uczniowie nie wpadną na pomysł rozwiązania zadania, można im podpowiedzieć, by zapisali różnicę tych liczb w pokazany poniżej sposób.

s.	dz.	j.
●	0	3
—	●	3
4	5	0

Zadanie można też rozwiązać metodą prób i błędów. Wówczas trzeba się zastanowić, od jakiej liczby rozpocząć sprawdzanie, jeżeli różnica wynosi 450.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadania tu zawarte pozwalają ocenić poziom umiejętności uczniów w zakresie pisemnego dodawania i odejmowania. Na ich rozwiązanie nie wystarczy 5 min, dlatego można je zadać jako pracę domową, a następną lekcję rozpocząć od ich sprawdzenia. Oprócz skontrolowania wyników obliczeń ważne jest także poznanie opinii uczniów na temat skali trudności poszczególnych zadań. Jeżeli większość wskaże, że wystąpiły problemy z jakąś umiejętnością, nauczyciel powinien wyjaśnić tę kwestię, omawiając ją ponownie.

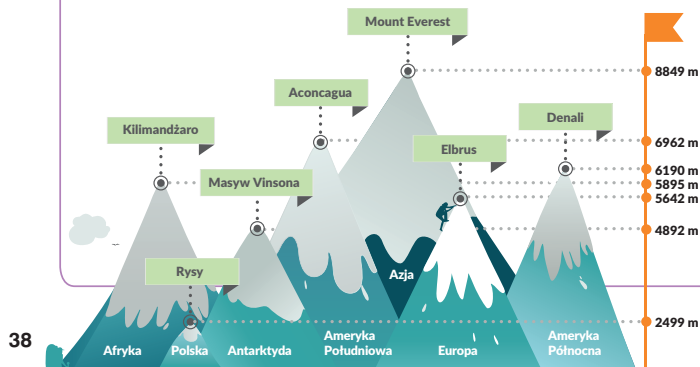
123

Wyzwanie

1. Napisz liczbę dwucyfrową, w której cyfra dziesiątek jest o 1 większa od cyfry jedności, i liczbę zapisaną tymi samymi cyframi w odwrotnej kolejności. Jaka jest różnica tych liczb?
2. Cyfrą jedności pewnej liczby dwucyfrowej jest 3. Jeżeli między cyfry tej liczby wstawimy 0, to nowo otrzymana liczba będzie o 450 większa od liczby początkowej. Znajdź początkową liczbę.

Sprawdź się!

1. Oblicz sposobem pisemnym.
 - a) $5704 + 32\,419$
 - b) $9367 - 7329$
2. Pan Jan otrzymał premię w wysokości 2350 zł. Kupił kino domowe za 1699 zł. Ile pieniędzy mu zostało?
3. Najwyższy szczyt świata to Mount Everest, a najwyższy szczyt górski w Polsce – to Rysy. Skorzystaj z ilustracji na dole strony i oblicz, o ile metrów Mount Everest jest wyższy od Rysów.
4. Oblicz, jaką liczbę zastępuje litera, i sprawdź otrzymany wynik.
 - a) $2359 - d = 1293$
 - b) $2305 + p = 6000$
5. Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
 - a) $(31\,000 - 6508) + (11\,496 - 8377)$
 - b) $25\,020 - (4206 + 7983) - 173$
 - c) $(16\,573 + 3718) - (746 + 1519) + 1974$



Odpowiedzi do zadań

Wyzwanie

1. Różnica zawsze jest równa 9.
2. 53

Sprawdź się!

1. a) 38 123 b) 2038
2. 651 zł
3. o 6350 m
4. a) 1066 b) 3695
5. a) 27 611 b) 12 658 c) 20 000

7. Pisemne mnożenie i dzielenie

Sowa przypomina

- Mnożenie liczb zakończonych zerami

		4	3	8	0		
.				9	0	0	
	3	9	4	2	0	0	0

Mnożymy 438 przez 9 i dopisujemy tyle zer, ile jest na końcu w obu czynnikach razem.

- Mnożenie liczb wielocyfrowych

				6	2	5	
			.	3	4	7	
				4	3	7	5
				2	5	0	0
+	1	8	7	5			
	2	1	6	8	7	5	

Stosujemy oznaczenia:
j – jednostki, dz – dziesiątki, s – setki, t – tysiące

Mnożenie liczb wielocyfrowych rozpoczynamy od mnożenia przez jednostki:

7 j · 625 = 4375 – zapisujemy od rzędu jednostki
4 dz · 625 = 2500 – zapisujemy od rzędu dziesiątek
3 s · 625 = 1875 – zapisujemy od rzędu setek

- Dzielenie liczb

		3	0	7			
-	4	9	1	4	:	1	6
		1	1				
-		0					
		1	1	4			
-		1	1	2			
				2			

Dzielenie rozpoczynamy od lewej strony, tu od tysięcy:

$$4 \text{ t} + 9 \text{ s} = 49 \text{ s}$$

$$49 \text{ s} : 16 = 3 \text{ s reszta } 1 \text{ s}$$

Nad rzędem setek piszemy 3.

$$1 \text{ s} + 1 \text{ dz} = 11 \text{ dz}$$

$$11 \text{ dz} : 16 = 0 \text{ dz reszta } 11 \text{ dz}$$

Nad rzędem dziesiątek piszemy 0.

$$11 \text{ dz} + 4 \text{ j} = 114 \text{ j}$$

$$114 \text{ j} : 16 = 7 \text{ j reszta } 2 \text{ j}$$

Nad rzędem jednostki piszemy 7.

Sprawdzenie. $307 \cdot 16 + 2 = 4912 + 2 = 4914$

39

Tematy lekcji:

1. Pisemne mnożenie i dzielenie (1 h)
2. Zadania z zastosowaniem pisemnego mnożenia i dzielenia (1 h)
3. Zastosowanie mnożenia i dzielenia do rozwiązywania zadań i obliczania wartości liczbowej wyrażeń arytmetycznych (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- stosuje pisemne mnożenie i dzielenie do rozwiązywania prostych zadań otwartych i zamkniętych,
- właściwie podpisuje liczby w mnożeniu pisemnym,
- stosuje algorytmy pisemnego mnożenia i dzielenia,
- uzupełnia brakujące cyfry w mnożeniu pisemnym,
- mnoży i dzieli pisemnie liczbę naturalną przez liczbę jednocyfrową i wielocyfrową,
- oblicza niewiadomy czynnik, dzielną lub dzielnik,
- wykorzystuje mnożenie i dzielenie sposobem pisemnym w rozwiązywaniu prostych zadań otwartych i zamkniętych,
- w rozwiązywaniu zadań tekstowych stosuje własne poprawne metody,
- rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym i stosuje w nich porównywanie różnicowe oraz ilorazowe.

Wskazówki metodyczne

- W działaniach pisemnych trzeba pamiętać, by każda cyfra znajdowała się w osobnej kratce. Trzeba o tym stale uczniom przypominać. Przed realizacją tematów dotyczących algorytmów pisemnego mnożenia i dzielenia oraz w trakcie wykonywania tych działań powinno się utrzymywać tabliczkę mnożenia i dzielenia w rachunku pamięciowym. Na początku lekcji zalecamy wykonanie kilku przykładów ustnie z uwzględnieniem dzielenia z resztą i porównywania ilorazowego.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 5.

Materiały dydaktyczne

	Liczby całkowite → Liczby naturalne Liczby całkowite → Działania na liczbach naturalnych
	Kartkówka 5 Karta pracy. Porównywanie ilorazowe Karta pracy. Porównywanie różnicowe
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 31–37
Zbiór zadań	s. 34–37

Komentarz do Przykładu 1.

Treść tego zadania została przedstawiona w postaci równania. Ważną częścią rozwiązania jest oszacowanie wyniku, a tym samym realizacja punktu XIV. 6) wymagań szczegółowych podstawy programowej. Należy zwrócić uwagę i dokładnie omówić z uczniami sposób dzielenia, w którym dzielna jest liczbą zakończoną zerami.

Komentarz do zadania 1.

W tym przypadku pytamy uczniów o podstawę wyeliminowania błędnej odpowiedzi. Uczniowie powinni zauważyć, że w iloczynie decydująca jest liczba zer na końcu wybranej liczby, a w ilorazie – liczba cyfr w wyniku.

123

Przykład 1.

Urząd wojewódzki dofinansował obóz naukowy dla 208 uczestników finałów konkursów przedmiotowych kwotą 26 000 zł. Jaką kwotę przeznaczono na każdego uczestnika finału?

Nieznana jest kwota przeznaczona na jednego uczestnika. Zastąpmy ją literą a . Zapiszmy:

$$\begin{array}{ccc} \text{liczba uczestników finałów} & \cdot & \text{kwota przeznaczona na jednego uczestnika} & = & \text{dofinansowanie} \\ 208 & \cdot & a & = & 26\,000 \end{array}$$

$$a = 26\,000 : 208$$

Oszacujmy wynik dzielenia.

Jeżeli dzielnik zmniejszymy do 200, to wynik dzielenia będzie większy:

$$26\,000 : 208 < 26\,000 : 200$$

$$26\,000 : 200 = 130$$

Zatem iloraz $26\,000 : 208$ powinien być nieco mniejszy od 130.

Wykonajmy dzielenie.

			1	2	5						
	2	6	0	0	0	:	2	0	8		
-	2	0	8								
		5	2	0							
-		4	1	6							
			1	0	4	0					
-			1	0	4	0					
					0						

$$a = 125$$

Wynik dzielenia jest zgodny z wynikiem szacunkowym: $125 < 130$.

Odpowiedź. Na każdego uczestnika finału konkursu przedmiotowego urząd wojewódzki przeznaczył 125 zł.

1. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
 Iloczynem liczb 2300 i 450 jest A / B. A. 1 035 000 B. 103 500
 Ilorazem liczb 68 500 i 50 jest C / D. C. 13 700 D. 1370

40

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- a) 1640 b) 137 781 c) 60 084 d) 95 165 e) 1 050 000 f) 112 182 400
g) 238 000 h) 4 231 854 i) 162 526
- 2368; 12 100; 83 018; 3485; 1 277 712; 913 500
- a) 39 706 b) 2032 c) 3694 d) 362 e) 370 f) 209
- 60 rat po 106 zł; 12 rat po 530 zł; 30 rat po 212 zł; 24 raty po 265 zł
- 435; 725; 870; 1305 a) 46 b) 203 c) 327 d) 456
- 364; 257; 351; 2003; 242; 108
- $340\,221 : 7 = 48\,603$; $55\,080 : 15 = 3672$; $3303 \cdot 9 = 29\,727$;
 $55\,660 : 92 = 605$; $2040 \cdot 74 = 150\,960$; $570 \cdot 38 = 21\,660$;
 $25\,042 : 38 = 659$; $33\,136 : 109 = 304$
- reszta: 1, 2, 3, 4, 5, 6; dzielna: 48, 47, 46, 45 9. a) 24 047 b) 6660
- a) 17 529 b) 10 029 11. a) $d = 2121$ b) $a = 621$ c) $n = 2215$ d) $b = 12$
- 48 szt.; 47 zł; 828 zł; 2768 zł
- kolejno w wierszach: $56 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $68 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; 798 km; 688 km; $109 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; 392 km
- a) 4; 5 b) 0; 8; 6 c) 6; 1; 0

I. Liczby naturalne

123

- 2 Wykonaj działania. Dzielenie sprawdź za pomocą mnożenia.
- | | | |
|-------------------|---------------|--------------------|
| a) $230 \cdot 40$ | b) $2056 : 4$ | c) $521 \cdot 312$ |
| $302 \cdot 26$ | $3760 : 20$ | $406 \cdot 130$ |
| $200 \cdot 330$ | $9300 : 300$ | $23\,178 : 103$ |
| $415 \cdot 121$ | $4623 : 200$ | $69\,800 : 340$ |
- 3 Z Warszawy do Aten jest 1600 km. Samolot leciał z prędkością średnią $800 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile czasu trwała podróż tym samolotem?
- 4 Przedsiębiorca budowlany płaci elektrykowi 16 zł za godzinę pracy. Jaką kwotę otrzyma ten elektryk za 20 dni pracy po 7 godzin dziennie?
- 5 Działka pod budowę domu nad morzem kosztuje 156 800 zł, a działka tej samej wielkości znajdująca się daleko od morza jest 8 razy tańsza. Ile kosztuje tańsza działka?
- 6 Na paletach ułożono 15 904 sztuki kostki brukowej, po 56 sztuk na każdej paletce. Ile palet wykorzystano?
- 7 Kanapa z obiciem materiałowym kosztuje 1528 zł, a taki sam model kanapy z obiciem skórzanym kosztuje 6112 zł. Ile razy droższa jest kanapa z obiciem skórzanym od kanapy z obiciem materiałowym? Zanim wykonasz obliczenia, oszacuj wynik.
- 8 Państwo Nowakowie spłacają w równych miesięcznych ratach sprzęt AGD, który kosztował 11 052 zł. Wysokość jednej raty to 307 zł. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Liczba rat jest A / B niż 35. A. mniejsza B. większa
Spłatę należności rozłożono na C / D. C. 36 rat D. 32 raty
- 9 Basia pojechała z rodzicami na wczasy do Chorwacji. Ze swojego domu do granicy w Cieszynie przejechali 156 km, a od granicy do miejsca ich wypoczynku było 7 razy dalej. Ile kilometrów przejechała rodzina Basi?
- 10 Oszacuj, jakie liczby zastępują litery, a następnie oblicz te liczby i sprawdź otrzymane wyniki.
- a) $a \cdot 430 = 159\,100$ b) $c : 680 = 320$ c) $252\,000 : g = 400$



Komentarz do zadania 2.

Przed przystąpieniem do obliczeń wspólnie z uczniami typujemy te działania, których wynik znajdziemy łatwiej i szybciej, zmniejszając dzielną i dzielnik tyle samo razy. W tym zadaniu są przykłady na dzielenie z resztą i to one mogą sprawić trudność uczniom z problemami w nauce matematyki.

Komentarz do zadań 5. i 7.

Do tych zadań proponujemy wykonać rysunek pomocniczy i nanieść na nim dane, co ułatwi ich rozwiązanie.

Komentarz do zadania 9.

Jest to zadanie rozszerzonej odpowiedzi. W tym przypadku również warto wykonać rysunek pomocniczy. Uczniów uzdolnionych matematycznie proponujemy zachęcić do zapisania obliczeń w postaci jednego wyrażenia arytmetycznego.

41

Odpowiedzi do zadań

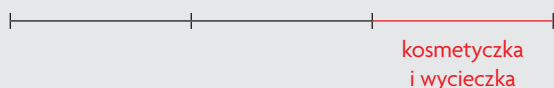
1. AD
2. a) 9200, 7852, 66 000, 50 215 b) 514, 188, 31, 23 r 23
c) 162 552, 52 780, 225 r 3, 205 r 100
3. 2 h
4. 2240 zł
5. 19 600 zł
6. 284
7. 4
8. BC
9. 1248 km
10. a) 370 b) 217 600 c) 630

Komentarz do zadania 12.

Rozwiązywanie zadań na podstawie informacji umieszczonych w dodatkowym tekście, tabeli, wykresie wymaga od uczniów świadomego wyboru danych. Pomocne będzie sprawdzenie, czy uczniowie właściwie odczytują informacje i poprawnie stosują je w obliczeniach.

Komentarz do zadania 15.

Do tego zadania niezbędny jest rysunek pomocniczy. Oto jego propozycja:



Uczniowie porównują wielkość wydatków i nagrody. Można zadać pytanie dodatkowe: *Ile razy większa jest nagroda niż wydatki?*

Komentarz do zadania 16.

W wyrażeniach występują różne działania, które w większości trzeba obliczać pisemnie. Przypomnienie kolejności wykonywania działań ułatwi uczniom wykonanie tego zadania. Obliczanie wartości tych wyrażen jest doskonałym ćwiczeniem działań pisemnych.

123

- 11 Państwo Wiśniewscy ubezpieczyli dom o wartości 511 000 zł i zapłacili za to ubezpieczenie 3500 zł. Ile razy większa jest wartość domu niż kwota jego ubezpieczenia?
- 12 Właściciel restauracji „Jak u mamy” organizuje imprezy okolicznościowe. Oto jego oferta:

Jak u mamy		
WESELA	PRZYJĘCIA	OBIADY
DOROŚLI 134 zł od osoby	DOROŚLI 93 zł od osoby	DOROŚLI 37 zł od osoby
DZIECI 67 zł od osoby	DZIECI 46 zł od osoby	DZIECI 26 zł od osoby

- a) Na której uroczystości stawka za uczestnictwo dziecka jest 2 razy mniejsza od stawki za uczestnictwo osoby dorosłej?
- b) Ile zapłaci państwo Kowalscy za organizację w tej restauracji wesela dla 73 osób, w tym 16 dzieci?
- c) Ilu dorosłych, a ile dzieci uczestniczyło w przyjęciu okolicznościowym, jeżeli za dorosłych zapłacono 2511 zł, a za dzieci 874 zł?
- 13 W zakładach mleczarskich rozlano kefir do 718 kubeczków. Kubeczki z kefirem pakowane są do skrzynek, do każdej po 20 kubeczków. Ile skrzynek trzeba przygotować do zapakowania kefiru?
- 14 Do stołówek przywieziono w skrzynkach 148 kg jabłek. W 4 skrzynkach było po 13 kg jabłek, a w pozostałych – po 12 kg.
- a) Ile zapłacono za jabłka, jeżeli 1 kg jabłek kosztował 3 zł?
- b) Ile było mniejszych skrzynek z jabłkami?
- 15 Kwotę równą trzeciej części swojej nagrody pani Ela przeznaczyła na wizytę u kosmetyczki i wycieczkę dla Janka. Za wizytę u kosmetyczki zapłaciła 160 zł, a za wycieczkę 264 zł. Ile złotych nagrody otrzymała pani Ela?
- 16 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
- a) $2544 : 4 + 99 \cdot 18 - 108 \cdot 7$ b) $(12\,406 + 754) : 5 \cdot 6$
 $25^2 \cdot 6 : (302 - 287)$ $8 \cdot (9640 - 7826) : 4$
 $306 - 306 : (3405 - 847 \cdot 4)$ $9300 - (639 + 546) : 15$



42

Odpowiedzi do zadań

11. 146
 12. a) na weselu b) 8710 zł c) 27 dorosłych, 19 dzieci
 13. 36
 14. a) 444 zł b) 8
 15. 1272 zł
 16. a) 1662, 250, 288 b) 15 792, 3628, 9221

 A to ciekawe!

Jak inaczej pomnożyć liczbę dwucyfrową przez liczbę dwucyfrową? Można to zrobić tak jak w przykładzie mnożenia liczb $37 \cdot 45$.

.	30	7
40	1200	280
5	150	35
$1350 + 315 = 1665$		

Liczby 37 i 45 zapisujemy w postaci sumy:

$$37 = 30 + 7 \quad 45 = 40 + 5$$

W tabelce wykonujemy mnożenia częściowe i wyniki dodajemy.

 Wyzwanie

Jeżeli do liczby dwucyfrowej **21** dopiszemy jej liczbę lustrzaną **12**, to liczba 11 jest dzielnikiem utworzonej liczby **2112**.

Utwórz w ten sposób kilka innych liczb czterocyfrowych i sprawdź, czy każda z nich dzieli się przez 11.

 Sprawdź się!

- Która para liczb jest kolejno ilorazem i iloczynem 18 430 i 38?
A. 475, 702 340 B. 475, 700 340
C. 485, 700 430 D. 485, 700 340
- Tomek ma 197 zł oszczędności. Na zakup sprzętu narciarskiego potrzebuje 8 razy więcej pieniędzy. Ile kosztuje ten sprzęt?
- Oszacuj, a następnie oblicz nieznaną liczbę. Sprawdź wynik.
a) $78 \cdot b = 24\,882$ b) $d : 256 = 47$ c) $33\,781 : p = 407$
- Pan Rafał otrzymał nagrodę w wysokości 1920 zł. Kupił 2 wycieczki, za które zapłacił kwotę równą czwartej części nagrody. Jedna z wycieczek była 2 razy droższa od drugiej. Ile kosztowała droższa wycieczka?
- Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
a) $15\,282 - (936 - 116) \cdot 9$ b) $(5028 - 3719) \cdot 18 : 187$
 $404 - 204 : (3^2 + 5^2)$ $(2000 - 782) : 6 + 49 \cdot 54$

Komentarz do A to ciekawe!

Mnożenie liczby jednocyfrowej przez dwucyfrową i trzycyfrową uczniowie potrafią wykonać, stosując rozdzielność mnożenia względem dodawania i odejmowania. Mnożenie liczb dwucyfrowych zwykle wykonują pisemnie lub korzystają z kalkulatora. Tutaj pokazałyśmy sposób mnożenia w pamięci dwóch liczb dwucyfrowych. Chętnym uczniom proponujemy jeszcze inny sposób pisemnego mnożenia liczb, który znajduje się w zbiorze zadań na s. 34.

Komentarz do Wyzwania

W tym zadaniu zachęcamy uczniów do zbadania podzielności przez 11 liczby utworzonej z dwóch liczb lustrzanych. Problem tutaj poruszony jest podobny do tego z *A to ciekawe!*, s. 37. Ponownie możemy zadać pytania: *Czy tak jest dla każdej liczby dwucyfrowej? Czy dopisanie do liczby trzycyfrowej jej liczby lustrzanej też jest wielokrotnością liczby 11?* To zadanie nie jest trudne, ponieważ wykonuje się w nim tylko dzielenie przez 11. Proponujemy zachęcić uczniów do próby znalezienia kontrprzykładu. Przykłady liczb czterocyfrowych dobrze jest zapisywać w tabelce.

Odpowiedzi do zadań**Wyzwanie**

Każda liczba utworzona w opisany sposób dzieli się przez 11.

Sprawdź się!

- D
- 1576 zł
- a) 319 b) 12 032 c) 83
- 320 zł
- a) 7902, 398 b) 126, 2849

Tematy lekcji:

1. Cechy podzielności liczb (1 h)
2. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem podzielności liczb (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- wskazuje dzielniki i wielokrotności liczb naturalnych,
- rozpoznaje liczby pierwsze i liczby złożone,
- stosuje cechy podzielności liczb przez 2, 3, 4, 5, 9, 10, 100,
- rozpoznaje liczby złożone, gdy na istnienie dzielnika wskazują cechy podzielności,
- rozkłada liczby dwucyfrowe na czynniki pierwsze,
- znajduje dzielniki liczb,
- czyta ze zrozumieniem tekst zawierający informacje liczbowe i dostrzega zależności między podanymi informacjami,
- rozwiązuje zadania zamknięte i otwarte z zastosowaniem podzielności liczb.

Wskazówki metodyczne

W szkole podstawowej uczniowie powinni dochodzić do wszystkich wniosków intuicyjnie. Przykłady, które dobieramy, mają za zadanie rozbudzać ich wyobraźnię, stymulować myślenie i prowadzić do kojarzenia faktów. W tym wieku uczniowie potrzebują konkretnych, najlepiej obrazowych argumentów, aby zrozumieć i utrwalić trudne pojęcia. Proponujemy wykonanie poniższego ćwiczenia w parach lub pojedynczo.

Każdy uczeń przygotowuje 10 prostokątnych kartoników, na których zapisuje cyfry: 0, 1, 2... 9 – na jednym kartoniku jedną cyfrę. Pod każdą cyfrą stawia tyle kropek, ile wynosi reszta z dzielenia tej cyfry przez 3. Uczniowie używają kartoników do tworzenia liczb dwucyfrowych, trzycyfrowych itd. Suma kropek na wszystkich kartonikach użytych do ułożenia liczby wskazuje resztę z dzielenia tej liczby przez 3.

Komentarz do Sowa przypomina

Sowa przypomina to powtórzenie poznanych w klasie 4 pojęć i cech podzielności przydatnych podczas realizacji tego tematu. Proponujemy zapoznać uczniów również z inną, niż podana w tabelce, metodą sprawdzania podzielności przez 4. W tym celu wystarczy przyjrzeć się odpowiednim cyfrom liczb podzielnych przez 4. Jeżeli cyfrą jedności jest 2 lub 6, to cyfrą dziesiątek jest cyfra nieparzysta, np. 12, 16, 36. Jeżeli cyfrą jedności jest 0 lub 4, lub 8, to cyfrą dziesiątek jest cyfra parzysta, np. 20, 24, 28.

123

8. Podzielność liczb

Sowa przypomina

- To są kolejne, większe od 0, **wielokrotności** liczby 12:

$$\begin{array}{cccccc} 12 & 24 & 36 & 48 & 60 & 72 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 \cdot 12 & 2 \cdot 12 & 3 \cdot 12 & 4 \cdot 12 & 5 \cdot 12 & 6 \cdot 12 \end{array} \quad \dots$$

- Liczby: 1, 2, 3 i 6 są **dzielnikami** liczby 6.
 $6 : 1 = 6$, $6 : 2 = 3$, $6 : 3 = 2$, $6 : 6 = 1$
 Liczba 6 jest **wielokrotnością** każdego swego dzielnika.
- Liczby: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23... mają tylko dwa dzielniki: 1 i samą siebie. Są to **liczby pierwsze**.
- Liczby: 4, 6, 8, 9, 10... mają więcej niż dwa dzielniki. Są to **liczby złożone**.
- Liczby 0 i 1 nie są **ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi**.
 Liczba 1 ma tylko jeden dzielnik, a liczba 0 – nieskończenie wiele.
- **Cechy podzielności**

Liczba jest podzielna przez	tylko wtedy, gdy
2	jej ostatnia cyfra to 0, 2, 4, 6, 8
3	suma jej cyfr dzieli się przez 3
4	jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4
5	jej ostatnia cyfra to 0 lub 5
9	suma jej cyfr dzieli się przez 9
10	jej ostatnią cyfrą jest 0
100	jej ostatnie dwie cyfry są zerami

44

Materiały dydaktyczne

	<i>Liczby całkowite → Liczby naturalne</i>
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 38–41
Zbiór zadań	s. 38–40

Przykład 1.

Zapiszmy liczbę 30 w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Sposób I

Zapiszmy liczbę 30 w postaci iloczynu dowolnych dwóch liczb, a następnie iloczynu liczb pierwszych, np.

$$30 = 3 \cdot 10 = 3 \cdot 2 \cdot 5$$

liczba pierwsza liczba złożona
liczby pierwsze

Liczba 30 jest zapisana jako iloczyn liczb pierwszych: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Mówimy, że **liczba 30 jest rozłożona na czynniki pierwsze**.

Sposób II

Można znaleźć czynniki pierwsze liczby 30 w następujący sposób.

Po prawej stronie pionowej linii piszemy najmniejszą liczbę pierwszą, która jest dzielnikiem liczby umieszczonej po lewej stronie.

30 | 2 30 to liczba parzysta, dzielimy ją przez 2 (liczba pierwsza).
15 | $30 : 2 = 15$ Wynik dzielenia 15 zapisujemy pod liczbą 30.

30 | 2
15 | 3 Liczba 15 nie jest podzielna przez 2, ale jest podzielna
5 | przez 3 (liczba pierwsza).
15 : 3 = 5 Iloraz 5 zapisujemy pod liczbą 15.

30 | 2
15 | 3
5 | 5 Liczbę 5 dzielimy przez 5 (liczba pierwsza).
1 | $5 : 5 = 1$ Iloraz równy 1 zapisujemy pod liczbą 5.

Po prawej stronie pionowej linii są tylko liczby pierwsze. Ich iloczyn jest równy 30.

Odpowiedź. Zapiszmy liczbę 30 w postaci iloczynu liczb pierwszych to:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Komentarz do Przykładu 1.

W tym przykładzie przedstawiamy uczniom nową umiejętność – rozkład liczby na czynniki pierwsze. Uczniowie powinni poznać oba prezentowane sposoby. Zapewne każdy z nich będzie miał zwolenników. Przykład ten proponujemy omówić z uczniami, korzystając z metody pracy z podręcznikiem. Uczniowie w określonym przez nas czasie samodzielnie zapoznają się z treścią tego zadania, a następnie wyjaśniają na forum klasy przedstawione w nim sposoby. Sprawdzeniem stopnia zrozumienia tematu będzie samodzielne rozłożenie na czynniki pierwsze liczby 48.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. dzielniki liczby 16: 1, 2, 4, 8; dzielniki liczby 11: 1; dzielniki liczby 28: 1, 2, 4, 7; dzielniki liczby 25: 1, 5
2. 6: 12, 18, 24, 30; 15: 30, 45, 60, 75; 20: 40, 60, 80, 100; 150: 300, 450, 600, 750; 125: 250, 375, 500, 625; 200: 400, 600, 800, 1000
3. przez 2: 1200; 344; 5668; 2340; 2654; 6264; przez 4: 1200; 344; 5668; 2340; 6264; przez 5: 1200; 375; 1825; 2340; przez 3: 1200; 375; 2340; 6264; przez 9: 2340; 6264
4. kolejno brakujące liczby: 6; 18; 45; 5; 20; 1
5. kolejno brakujące liczby: a) 120; 132; 144; 148; 152
b) 175; 200; 300; 325; 350; 375 c) 189; 216; 225; 252
d) 182; 189; 210; 224
6. kolejno: 35, 5, 25, 125, 100, 25; 7, 65, 22, 50, 2, 25;
podzielne przez 2: 2, 22, 50, 72, 100; przez 10: 50, 100;
przez 9: 72; przez 3: 72; przez 5: 5, 25, 35, 50, 65, 100, 125, 175;
przez 4: 72, 100

7. a) 2, 5, 8; 0, 3, 6, 9 b) 0, 9; 6
c) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 0, 5 d) 1, 7; 0, 6, 9
8. P: 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 20;
F: 1, 2, 7, 16, 18, 19, 21
9. b) P; zależy od wypisanych liczb; P; P
10. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$; $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
11. kolejno: 45, 15, 5; 3, 5, 5; 90, 45, 15, 5
12. $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $56 = 2^3 \cdot 7$; $54 = 2 \cdot 3^3$; $40 = 2^3 \cdot 5$;
 $75 = 3 \cdot 5^2$; $80 = 2^4 \cdot 5$

123

Przykład 2.

Rozłóżmy na czynniki pierwsze liczbę 60 i znajdziemy wszystkie jej dzielniki.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Dzielnikami liczby 60 są liczby pierwsze zapisane po prawej stronie pionowej linii, czyli 2, 3 i 5.

Nie są to jednak wszystkie dzielniki. Liczba 1 oraz iloczyny czynników pierwszych też są dzielnikami liczby 60.

**Wszystkie iloczyny
złożone z 2 czynników**

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 &= 4 \\ 2 \cdot 3 &= 6 \\ 2 \cdot 5 &= 10 \\ 3 \cdot 5 &= 15 \end{aligned}$$

**Wszystkie iloczyny
złożone z 3 czynników**

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 \cdot 3 &= 12 \\ 2 \cdot 2 \cdot 5 &= 20 \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 &= 30 \end{aligned}$$

**Iloczyn złożony
z 4 czynników**

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Odpowiedź. Dzielnikami liczby 60 są: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Komentarz do zadania 5.

Rozwiązanie tego zadania proponujemy zacząć od przedstawienia przez uczniów swoich pomysłów na znalezienie liczb spełniających warunki zadania. Jednym ze sposobów jest wybranie dowolnej dwucyfrowej liczby pierwszej i w punkcie a) dopisanie do niej dwóch kolejnych liczb, a w punkcie b) dopisanie dwóch poprzedzających ją liczb. Ta metoda nie jest jednak niezawodna, gdyż nie każda tak wybrana trójka liczb będzie spełniać warunki zadania, np. w punkcie a) poprawnym wyborem są liczby: 19, 20, 21, a błędnym: 41, 42, 43, z kolei w punkcie b) poprawnym wyborem są liczby: 17, 16, 15, a błędnym: 13, 12, 11. Podczas rozwiązywania tego zadania dopuszczamy również możliwość wyszukania przez uczniów liczb pierwszych w Internecie i wybranie spośród nich odpowiednich trójek liczb.

Komentarz do zadania 6.

Zadanie warto rozwiązać w parach w formie zabawy. Proponujemy, aby wskazane przez nauczyciela pary układały liczby podzielne przez 2, 5, 10, kolejne pary – liczby podzielne przez 3 i 9, następne – liczby podzielne przez 4. Podczas zabawy każda osoba układa 4 liczby. Sprawdzenie poprawności następuje w parach. Po upływie wyznaczonego czasu wskazani uczniowie wymieniają głośno ułożone przez parę liczby i przypominają odpowiednią cechę podzielności. Zabawa jest okazją do uporządkowania i utrwalenia poznanych cech podzielności.

1. Wszystkie dzielniki liczby 18 to
A. 1, 3, 4, 8, 9 B. 1, 2, 3, 6, 9, 18
C. 1, 2, 4, 6, 9, 18 D. 1, 3, 6, 8, 9, 18
2. Podaj 6 kolejnych, większych od 50, wielokrotności każdej z liczb: 4, 7, 9, 12, 15, 20, 25.
3. Podaj przykład jednocyfrowej liczby, która ma 4 dzielniki.
4. Która liczba ma więcej dzielników i o ile więcej?
a) 18 czy 28 b) 24 czy 34 c) 20 czy 30
5. Znajdź takie 3 kolejne liczby dwucyfrowe, aby liczbą pierwszą była tylko:
a) najmniejsza z tych liczb, b) największa z tych liczb.
6. Przygotuj kartki z cyframi: 3, 4, 5, 6, 0. Ułóż po dwie liczby, co najmniej trzycyfrowe, podzielne przez: 2, 3, 4, 5, 9, 10.

46

Odpowiedzi do zadań

1. B
2. 4: 52, 56, 60, 64, 68, 72; 7: 56, 63, 70, 77, 84, 91;
9: 54, 63, 72, 81, 90, 99; 12: 60, 72, 84, 96, 108, 120;
15: 60, 75, 90, 105, 120, 135; 20: 60, 80, 100, 120, 140, 160;
25: 75, 100, 125, 150, 175, 200
3. 6 lub 8
4. a) mają po 6 dzielników b) 24, o 4 c) 30, o 2
5. a) np. 13, 14, 15 b) np. 15, 16, 17

I. Liczby naturalne

123

- 7 Dane są liczby: 52, 78, 128, 225, 270, 1452, 1545, 2800, 2871, 333 000. Wypisz liczby podzielne przez:
a) 2, b) 3, c) 4, d) 5, e) 9, f) 10.
- 8 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Jednocyfrowe liczby pierwsze to A / B.
A. 2, 3, 5, 7 B. 1, 2, 3, 5, 7
Wszystkie liczby złożone większe od 30, ale mniejsze od 40 to C / D.
C. 32, 34, 35, 36, 38 D. 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39
- 9 Przedstaw w postaci iloczynu liczb pierwszych liczbę 24 i liczbę 30.
- 10 Rozłóż na czynniki pierwsze liczby: 21, 25, 45, 81, 105.
- 11 Jaka liczba ma rozkład na czynniki pierwsze $2 \cdot 2 \cdot 3$, a jaka $2 \cdot 3 \cdot 3$?
Podaj wszystkie dzielniki każdej z tych liczb.
- 12 Który iloczyn jest rozkładem liczby 42 na czynniki pierwsze?
A. $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ B. $42 = 6 \cdot 7$
C. $42 = 1 \cdot 2 \cdot 21$ D. $42 = 1 \cdot 3 \cdot 14$
- 13 Do każdego poniższego zdania podaj przykład pokazujący, że jest ono fałszywe.
a) Wszystkie wielokrotności liczby 3 są nieparzyste.
b) Każda wielokrotność liczby 9 jest wielokrotnością liczby 6.
c) W każdej dziesiątce liczb dwucyfrowych jest tyle samo liczb pierwszych.

A to ciekawe!

Niektóre liczby pierwsze to palindromy, np. 11, 757, 111 181 111. Palindromy to liczby lub wyrazy, które czytane od lewej strony do prawej i odwrotnie są jednakowe.

Napisz trzycyfrową liczbę złożoną, która jest palindromem.
Podaj 3 dzielniki tej liczby.

Wśród liczb pierwszych są też liczby lustrzane, np. 17 i 71, 113 i 311. Znajdź dwie inne liczby pierwsze, które są liczbami lustrzanymi.



47

Komentarz do zadania 7.

Zadanie można rozwiązać ustnie. Każdy z wyznaczonych uczniów wskazuje liczby do kolejnych podpunktów i podaje odpowiednią cechę podzielności. Podczas rozwiązywania tego zadania dopuszczamy, aby niektórzy uczniowie (np. z orzeczeniami) posilkowali się podręcznikiem i korzystali z cech podzielności umieszczonych w *Sowa przypomina*.

Komentarz do zadania 8.

Przed rozwiązaniem zadania przypominamy definicję zarówno liczby pierwszej, jak i liczby złożonej, a następnie rozmawiamy o dzielnikach liczb 1 i 0. Uczniowie powinni zauważyć, że wśród liczb pierwszych jest tylko jedna liczba parzysta, czyli wszystkie liczby parzyste, poza liczbą 2, są liczbami złożonymi, a liczby złożone nieparzyste mają tylko dzielniki nieparzyste.

Komentarz do zadania 10.

Proponujemy, aby uczniowie sami zdecydowali, którym sposobem rozłożą liczby na czynniki pierwsze. Uczniów dobrych i bardzo dobrych zachęcamy do wykonania zadania dwoma sposobami.

Komentarz do zadania 12.

Zrozumienie pojęcia *czynniki pierwsze* pozwala od razu wykluczyć 3 błędne odpowiedzi i szybko rozwiązać zadanie.

Komentarz do zadania 13.

To zadanie jest bardzo ważne, ponieważ przygotowuje uczniów do szukania argumentów, a także kształci umiejętność logicznego myślenia, wnioskowania i uzasadniania. Proponujemy wykonać je z całą klasą i zachęcić uczniów do podawania przykładów liczb spełniających warunki zadania. Punkty a) i b) mają więcej niż jedną odpowiedź.

Komentarz do A to ciekawe!

Podanie liczby złożonej trzycyfrowej i jej trzech dzielników nie jest trudne, gdyż dzielnikami takiej liczby zawsze są 2, 1 i dana liczba. Proponujemy zatem, aby to zadanie rozwiązywali wszyscy uczniowie z klasy. Uczniów uzdolnionych matematycznie zachęcamy do szukania większej liczby dzielników.

Odpowiedzi do zadań

7. a) 52, 78, 128, 270, 1452, 2800, 333 000
b) 78, 225, 270, 1452, 1545, 2871, 333 000
c) 52, 128, 1452, 2800, 333 000 d) 225, 270, 1545, 2800, 333 000
e) 225, 270, 2871, 333 000 f) 270, 2800, 333 000
8. AD
9. $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
10. $21 = 3 \cdot 7$, $25 = 5 \cdot 5$, $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
11. 12, 18; dzielniki 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12; dzielniki 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18
12. A
13. a) np. 12 b) np. 81 c) np. w pierwszej: 4, w drugiej: 2

A to ciekawe!

np. 232; Dzielniki liczby 232 to np. 2, 4, 8.

Komentarz do Wyzwania

Uczniowie mogą rozwiązać to zadanie metodą prób i błędów albo przeprowadzając opisane niżej rozumowanie.

Jeżeli 4 jest dzielnikiem sumy, to składnikami powinny być liczby nieparzyste.

$$3 + 5 = 8; D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$$

Jeżeli iloczyn jest liczbą parzystą, to jednym z czynników musi być liczba 2. Trzeba wykluczyć liczbę 3, bo nie byłaby to liczba dwucyfrowa.

$$2 \cdot 5 = 10; D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$$

lub

$$2 \cdot 7 = 14; D(14) = \{1, 2, 7, 14\}$$

Komentarz do Sprawdź się!

Zadanie 5. nie jest łatwe. Aby uczeń je zrozumiał i nauczył się rozwiązywać tego typu zadania, powinien napisać np. 28 kolejnych liczb, zakładając, że są to kolejne dni tygodnia, a pierwszym z nich jest poniedziałek. Następnie różnymi kolorami powinien zaznaczyć liczby podzielne przez 3, 4, 6 i 8. Rozwiązaniem jest liczba będąca wielokrotnością każdej z czterech liczb. Zadajemy pytanie dodatkowe: *Który następny dzień będzie spełniał warunki zadania?*

123

Wyzwanie

Staś napisał dwie liczby złożone. Każda z nich ma cztery dzielniki oraz:

- jedna jest sumą dwóch jednocyfrowych liczb pierwszych i jednym z jej dzielników jest liczba 4,
- druga jest dwucyfrowym, parzystym iloczynem dwóch jednocyfrowych liczb pierwszych.

Jakie liczby napisał Staś? Ile rozwiązań ma to zadanie?

Sprawdź się!

- Dane są liczby: 84, 96, 135, 275, 810, 1300.
Które zdanie jest **falszywe**?
A. Przez 10 i 5 podzielne są tylko liczby 810 i 1300.
B. Tylko liczby 810 i 135 są podzielne przez 9.
C. Liczby 84, 96, 1300 są podzielne przez 4.
D. Każda z liczb jest podzielna przez 3.
- Najmniejszą dwucyfrową liczbą pierwszą jest
A. 15 B. 11 C. 13 D. 7
- Wypisz wszystkie liczby pierwsze większe od 20, ale mniejsze od 60. Czy liczb pierwszych większych od 40 i mniejszych od 80 jest tyle samo?
- Liczby 64 i 84 rozłóż na czynniki pierwsze i napisz wszystkie dzielniki liczby 64.
- Dziadek Janka postanowił, że od poniedziałku co trzeci dzień będzie chodził na długie spacery, co czwarty dzień będzie grał w szachy z przyjacielem, co szósty dzień spotka się ze znajomymi, a co ósmy dzień będzie uczestniczył w kursie komputerowym. W którym kolejnym dniu po raz pierwszy wykona wszystkie te postanowienia? Jaki to będzie dzień tygodnia?



Odpowiedzi do zadań

Wyzwanie

Liczby Stasia to: 8 i 10 lub 8 i 14.

Sprawdź się!

- D
- B
- 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59; nie
- $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; dzielniki 64: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64
- w 24; środa

123

9. Zaokrąglanie liczb

Sowa przypomina

W życiu codziennym często dokonujemy **szacowania**.

- Przed zakupami szacujemy, ile pieniędzy trzeba przygotować.
Na przykład:
Pieczywo około 5 zł, owoce około 10 zł, nabiał około 13 zł, więc na zakupy potrzeba 30 zł.
- Podczas zakupów szacujemy, jaki rachunek zapłacimy w kasie.
Na przykład:
Mleko – 2,95 zł to prawie 3 zł, ser – 8,75 zł to prawie 9 zł, masło – 8,20 zł to około 8 zł, zatem rachunek nie powinien być wyższy niż 20 zł.
- Przed wykonaniem obliczeń szacujemy, jakiego rzędu będzie wynik.
Na przykład:
 $69 \cdot 19$ to mniej niż $70 \cdot 20 = 1400$ (zwiększone są czynniki),
 $210 : 72$ to mniej niż $210 : 70 = 3$ (zmniejszony jest dzielnik).

Sowa uczy

Na tablicach kierunkowych odległość do wymienionych miejscowości jest podana w kilometrach.

Tak naprawdę nie jest ważne, czy do danej miejscowości jest o 100 metrów dalej, czy o 223 metry bliżej. Przyjęto umownie, że:

- liczbę metrów mniejszą niż pół kilometra (czyli mniejszą niż 500 m) **pomija się**, np. 20 km 234 m zaokrąglamy do 20 km i zapisujemy $20 \text{ km } 234 \text{ m} \approx 20 \text{ km}$, $105 \text{ km } 499 \text{ m} \approx 105 \text{ km}$;
- liczbę metrów równą lub większą niż pół kilometra **pomija się, ale jednocześnie zwiększa się liczbę kilometrów o 1**, np. $20 \text{ km } 500 \text{ m} \approx 21 \text{ km}$, $104 \text{ km } 568 \text{ m} \approx 105 \text{ km}$.

W takiej sytuacji mówimy **o zaokrągleniu liczby kilometrów do 1 kilometra**.

Symbol $\approx$ czytamy: **w zaokrągleniu**.

Od miejsca, w którym stoi powyższy znak drogowy, do Warszawy może być więc najmniej 19 km 500 m, a najwięcej 20 km 499 m.

Jabłonna 2
Warszawa 20

49

Materiały dydaktyczne

	Kartkówka 6
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 41–42
Zbiór zadań	s. 41–43

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- a) 640; 430 b) 1230; 880 c) 2580; 6460
- a) 11 000; 56 000 b) 7000; 8000 c) 8000; 9000
- liczby przybliżone do 1400: 1372, 1350, 1380, 1410, 1439, 1449; do 1500: 1450, 1480, 1501, 1549
- a) 4; 10; 9 b) 120; 200; 102 5. a) 26; 4; 2 b) 10; 11; 6
- a) 13; 55; 36 b) 9; 27; 12 7. F; F; F

Tematy lekcji:

1. Zaokrąglanie liczb (1 h)
2. Stosowanie zaokrąglania liczb w zadaniach (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- szacuje wyniki działań,
- zapisuje zaokrąglenia liczb naturalnych z dokładnością do wskazanych rzędów,
- interpretuje zaokrąglenie liczb na osi liczbowej,
- zaokrągla liczby naturalne w sytuacjach praktycznych,
- rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

Wskazówki metodyczne

- Z szacowaniem i zaokrągleniem liczb mamy bardzo często do czynienia. Dokładne przeanalizowanie i zrozumienie przez uczniów wszystkich przedstawionych w temacie przykładów jest ważne, gdyż tłumaczą one istotę przybliżeń. Warto przynieść na lekcję *Rocznik statystyczny* i wspólnie z uczniami sprawdzić, które z podanych w zadaniach informacji są dokładne, a które szacunkowe. Jeżeli przyjrzymy się danym dotyczącym liczby mieszkańców kraju czy poszczególnych miast, zauważymy, że są one podawane w zaokrągleniu do tysięcy lub milionów. Liczby ginących zwierząt czy ptaków są natomiast liczbami dokładnymi. Proponujemy podyskutować z uczniami, kiedy należy stosować obliczenia szacunkowe, a kiedy przybliżenia w obliczeniach oraz kiedy w życiu codziennym dokonujemy szacowania.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 6.

Komentarz do Sowa przypomina

Szacowanie to w nauczaniu matematyki i w życiu codziennym bardzo przydatna umiejętność. Warto zatem wspólnie z uczniami przypomnieć jej podstawowe zasady i zastosowanie.

Komentarz do Sowa uczy

Zapoznajemy uczniów z pojęciem zaokrąglania, jego symbolem i zasadami zaokrąglania liczb. Po wspólnych wyjaśnieniach prosimy o zaokrąglenie do 1 metra kilku wyrażeń, np. 4 m 16 cm.

Proponujemy również zabawę w *HASŁO–ODZEW*. Tym razem hasłem jest wyrażenie dwumianowane podane przez nauczyciela, odzewem – przybliżenie tego wyrażenia do całości. Proponujemy uczniom, aby osoba, która poda poprawny odzew, wskazała kolejne hasło. Sugerujemy, aby czas zabawy wynosił ok. 3 min.

Komentarz do Przykładu 1.

W tym przykładzie tłumaczymy zasady zaokrąglania jednostek masy.

Komentarz do Przykładu 2.

W tym przykładzie pokazujemy i tłumaczymy, w jaki sposób oś liczbowa ułatwia zrozumienie zaokrąglania liczb. Warto zwrócić uwagę na zaokrąglanie liczb, których ostatnią cyfrą, w rzędzie bezpośrednio niższym od rzędu, do którego dokonujemy zaokrąglenia, jest 5. W takim przypadku kierujemy się zasadą, że takie liczby zaokrąglamy w górę.

123

Przykład 1.

Zaokrąglamy podane masy do 1 kilograma.

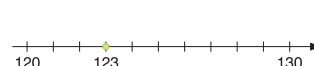
1 kg = 100 dag
pół kilograma to 50 dag

6 kg 29 dag $\approx$ 6 kg 29 dag to mniej niż pół kilograma
2 kg 50 dag $\approx$ 3 kg 50 dag to pół kilograma
83 dag $\approx$ 1 kg 83 dag to więcej niż pół kilograma

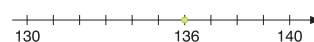
Przykład 2.

Zaokrąglamy liczby: 123, 136, 115 do dziesiątek.

Zaznaczmy podane liczby na osi liczbowej:



Liczba 123 znajduje się na osi liczbowej między liczbami 120 i 130. Jest bliżej liczby 120 niż 130. Mówimy, że liczba 123 w zaokrągleniu do dziesiątek jest równa 120 i zapisujemy: $123 \approx 120$.



Liczba 136 znajduje się na osi liczbowej między liczbami 130 i 140, bliżej liczby 140, więc w zaokrągleniu do dziesiątek jest równa 140, co zapisujemy: $136 \approx 140$.

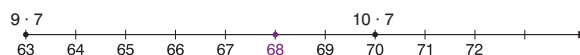


Liczba 115 znajduje się na osi liczbowej między liczbami 110 i 120, w takiej samej odległości od każdej z nich. Umówiono się, że jeżeli w rzędzie jednostki jest cyfra 5, to taką liczbę zaokrąglamy do liczby większej, czyli $115 \approx 120$.

Przykład 3.

Iloraz liczby 68 przez 7 zaokrąglamy do jednostki.

$68 : 7 = 9 \text{ r } 5$ $68 : 7$ to więcej niż 9, ale mniej niż 10



Liczba 68 jest bliżej liczby 70 niż liczby 63. Mówimy, że iloraz $68 : 7$ w zaokrągleniu do jednostki jest równy 10, co zapisujemy $68 : 7 \approx 10$.

I. Liczby naturalne

123

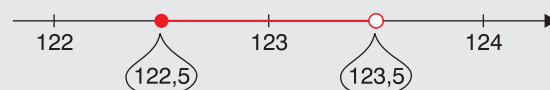
- 1 Oszacuj, jaką kwotę w banknotach dziesięciozłotowych trzeba przygotować, aby zapłacić łącznie za produkty o wartości: 14,30 zł, 15,92 zł i 16,80 zł.
- 2 Oszacuj wynik działania. Zamiast $\diamond$ napisz odpowiedni znak $>$ lub $<$.
a) $285 + 396 \diamond 700$ b) $1835 - 799 \diamond 1000$ c) $3280 - 2300 \diamond 1000$
- 3 Oszacuj, jaką największą cyfrę można wpisać zamiast $\diamond$, aby nierówność była prawdziwa.
a) $468 + 1259 > 1 \diamond 00$ b) $21 \cdot 35 > \diamond 00$ c) $5230 : 50 > \diamond 00$
 $1820 - 456 > 1 \diamond 00$ $29 \cdot 25 > \diamond 00$ $1013 : 25 > \diamond 0$
- 4 Napisz, jaka może być rzeczywista odległość od poniższych znaków drogowych do wymienionych na nich miast.
a) Warszawa 246 km b) Katowice 16 km c) Gdańsk 540 km
- 5 Na znaku informacyjnym widnieje napis: Warszawa 123 km. Od miejsca, gdzie stoi ten znak, do Warszawy może być
A. 122 km 400 m B. 122 km 600 m
C. 123 km 900 m D. 123 km 600 m
- 6 Zaokrąglj do 1 km:
35 km 35 m, 20 km 47 m, 13 km 801 m, 32 km 9 m, 43 km 760 m.
- 7 Zaznacz na osi liczbowej liczby: 253, 259, 265, a następnie zaokrąglj je do dziesiątek.
- 8 Zaokrąglj do jednościlorazy liczb.
a) $25 : 6$ b) $20 : 3$ c) $41 : 8$ d) $57 : 7$
 $34 : 8$ $34 : 4$ $94 : 10$ $93 : 20$
- 9 Liczby: 1308, 7535, 68 598, 563 451 zaokrąglj do:
a) dziesiątek, b) setek, c) jednościlorazy.
- 10 Do każdego poniższego zdania podaj przykład pokazujący, że jest ono fałszywe.
a) Jeżeli liczba ma w rzędzie jedności cyfrę 5, to zaokrąglenie tej liczby do dowolnego rzędu jest liczbą od niej większą.
b) Jeżeli liczba ma w rzędzie setek cyfrę 2, to zaokrąglenie tej liczby do dowolnego rzędu jest liczbą od niej mniejszą.

Komentarz do zadania 3.

W tym zadaniu ćwiczymy umiejętność szacowania. Nie oczekujemy od uczniów wyników poszczególnych działań, a jedynie właściwego oszacowania i na jego podstawie dokonania wyboru odpowiedniej cyfry.

Komentarz do zadania 5.

Sytuację z tego zadania można zobrazować uczniom na osi liczbowej.



Powinni oni zauważyć, że 123 jest przybliżeniem do jedności każdej liczby znajdującej się na osi liczbowej pomiędzy liczbami 122,5 a 123,5 wraz z liczbą 122,5. Gdyby uczniowie w dalszym ciągu mieli trudności z rozwiązaniem tego zadania, proponujemy ponowne przeczytanie informacji z *Sowa uczy*.

Komentarz do zadania 8.

To zadanie uczniowie powinni rozwiązać samodzielnie. Uczniom mającym problem z rozwiązaniem proponujemy poszukanie odpowiednich informacji w przykładach. W ten sposób podejmują oni próby samodzielnej nauki.

Komentarz do zadania 10.

Zadanie wymaga bardzo dokładnego i ze zrozumieniem przeczytania treści. Uczniowie mają za zadanie znaleźć przykłady pokazujące nieprawdziwość podanych stwierdzeń. Zachęcamy do rozwiązywania tego zadania, tym bardziej że zadań tego typu nie ma dużo.

Podobnych zadań można szukać w zbiorze zadań.

Odpowiedzi do zadań

1. 50 zł
2. a) $<$ b) $>$ c) $<$
3. a) 7, 3 b) 7, 7 c) 1, 4
5. B
6. 35 km, 20 km, 14 km, 32 km, 44 km
7. 250, 260, 270
8. a) 4, 4 b) 7, 9 c) 5, 9 d) 8, 5
9. a) 1310, 7540, 68 600, 563 450 b) 1300, 7500, 68 600, 563 500
c) 1000, 8000, 69 000, 563 000
10. a) np. 1005 w zaokrągleniu do setek to 1000
b) np. 228 w zaokrągleniu do dziesiątek to 230

Komentarz do A to ciekawe! i Wyzwania!

Pokazujemy rozbieżności pomiędzy zasadami matematycznymi a ustaleniami w życiu codziennym.

W zadaniu z mostem uczniowie powinni zauważyć, że jeżeli nośność mostu wynosi 9860 kg, to na ten most nie może wjechać samochód, którego masa przekracza nośność. Zatem podając całkowitą liczbę ton, którą należy umieścić na znaku, nie można zastosować przybliżenia matematycznego i napisać 10 t, należy zaokrąglić liczbę odpowiadającą nośności mostu w dół do 9 t.

Komentarz do Sprawdź się!

Większość zadań nie jest trudna, dlatego proponujemy albo wykonać je wspólnie z uczniami ustnie, albo zlecić je uczniom do samodzielnego rozwiązania w określonym czasie pod koniec drugiej lekcji.

Po zakończonej pracy uczniowie mogą wymienić się zeszytami i pod kierunkiem nauczyciela sprawdzić poprawność rozwiązań oraz przyznać odpowiednią liczbę punktów.

Proponujemy następujący przydział punktów:

Nr zadania	1	2	3	4	5
Liczba punktów	3	3	1	1	6

Punkty możemy przełożyć na oceny bądź plusy.

123

A to ciekawe!

W życiu codziennym czasami stosuje się inne przybliżenia. Na przykład, na pewnym parkingu za każdą rozpoczętą godzinę parkowania samochodu płaci się 5 zł. Za 1 godzinę i 1 minutę zapłaci się więc tyle samo, ile za 1 godzinę i 49 minut, czyli 10 zł, mimo że 1 godzina i 1 minuta to w zaokrągleniu 1 godzina. Ile trzeba zapłacić za parkowanie na tym parkingu za:

- a) 30 min, b) 2 h 5 min, c) 2 h 56 min?



Wyzwanie

Konstruktorzy mostu obliczyli, że nośność mostu jest równa 9860 kg, czyli że wytrzyma on takie obciążenie. Jaką liczbę naturalną należy umieścić na znaku zakazu, aby było wiadomo, o jakiej maksymalnej masie pojazdy mogą **bezpiecznie** przejechać przez most?



Sprawdź się!

- Zaznacz na osi liczbowej liczby: 53, 55, 57, a następnie zaokrąglaj je do dziesiątek.
- Zaokrąglaj liczbę 11 652 do:

a) dziesiątek, b) setek, c) jednośc tysięcy.
- Jak daleko jest do Białegostoku od miejsca, w którym ustawiono ten znak?

A. 140 km 500 m B. 139 km 490 m **Białystok 140 km**
 C. 140 km 480 m D. 139 km 149 m
- W którym dzieleniu **niepoprawnie** zaokrąglono wynik do jedności?

A. $17 : 3 \approx 6$ B. $28 : 5 \approx 6$ C. $42 : 5 \approx 9$ D. $60 : 8 \approx 8$
- Zaokrąglaj podane wielkości do 1 kg.

a) 4 kg 9 dag, 45 dag, 52 dag
 b) 10 kg 70 dag, 5 kg 77 dag, 52 kg 50 dag

52

Odpowiedzi do zadań

A to ciekawe!

- a) 5 zł b) 15 zł c) 15 zł

Wyzwanie

Na znaku należy umieścić liczbę 9.

Sprawdź się!

- 50, 60, 60
- a) 11 650 b) 11 700 c) 12 000
- C
- C
- a) 4 kg, 0 kg, 1 kg b) 11 kg, 6 kg, 53 kg

Zadania utrwalające

- Oblicz w pamięci:
 - iloczyn liczb 25, 39 i 4,
 - różnicę liczb 134 i 69,
 - iloraz liczby 5600 przez 700,
 - sumę liczb 399 i 2306.
- Zapisz w systemie rzymskim liczby 104 i 95 oraz liczby 10 razy od nich większe.
- Oblicz w pamięci, a następnie podaj wynik w zaokrągleniu do dziesiątek.
 - $87 - 58 + 62$
 - $138 : 6$
 - $5 \cdot 73 : 2 : 5$
- Oblicz sposobem pisemnym.
 - $5078 + 569 + 10\,427$
 - $36\,074 - 8745$
 - $2019 \cdot 239$
 - $63 + 27\,519 + 4316$
 - $9003 - 576$
 - $144\,901 : 47$
- Ile minut trwał koncert muzyczny, który rozpoczął się o godz. 18.10, a zakończył o 19.45?
- Spośród liczb: 56, 66, 92, 180, 275, 360, 1530, 4500 wypisz liczby podzielne przez:
 - 2,
 - 3,
 - 4,
 - 5,
 - 9,
 - 10.
- Rozłóż na czynniki pierwsze liczby 96 i 81.
- Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę 72 i podaj jej wszystkie dzielniki.
- Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
 - $3020 - 26 \cdot 75 + 4800 : 60$
 - $[5 \cdot (17\,230 - 15\,160) - 10\,000] : 70$
- Wymień większe od 70, a mniejsze od 115 wielokrotności liczby:
 - 6,
 - 15,
 - 20.
- Wieża Zamku Królewskiego w Warszawie ma 60 metrów wysokości. Gdyby była ona o 60 decymetrów wyższa, to byłaby akurat 3 razy wyższa od najstarszego i najwyższego świeckiego pomnika w Warszawie – kolumny Zygmunta III Wazy. Oblicz wysokość tej kolumny.



Kolumna Zygmunta w Warszawie

53

Tematy lekcji:

- 1.–2. Powtórzenie wiadomości i utrwalenie umiejętności: Liczby naturalne (2 h)
3. Praca klasowa 1 (1 h)
4. Omówienie wyników i poprawa pracy klasowej (1 h)

Cele lekcji

Wybrane cele lekcji z danego rozdziału odpowiednie do rozwiązywanych zadań.

Wskazówki metodyczne

Podczas omawiania klasówek należy podkreślać nawet najmniejsze postępy uczniów, a tym samym wspierać tych, którzy mają problemy z nauką matematyki. Warto przygotować tabelkę na wzór poniższej.

Uwagi dotyczące	
stopnia opanowania umiejętności z zakresu...	indywidualnych osiągnięć ucznia
Zadanie 1 Większość uczniów wiedziała, jak... Najwięcej błędów popełniliście przy..., więc rozwiążmy (powtórzmy) jeszcze raz...	Jaś znalazł inny sposób rozwiązania... Ola sporządziła rysunek pomocniczy, który pomógł jej znaleźć rozwiązanie. Tomek rozwiązał poprawnie... Brawo! Tak trzymaj! itp.

Omawianie wyników pracy klasowej ze zwróceniem uwagi na osiągnięcia poszczególnych uczniów to połączenie indywidualizacji nauczania z indywidualizacją wychowania.

Materiały dydaktyczne

	Liczby całkowite → Liczby naturalne Liczby całkowite → Działania na liczbach naturalnych
	Praca klasowa 1
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 9–42
Zbiór zadań	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 12–43

Odpowiedzi do zadań

1. a) 3900 b) 65 c) 8 d) 2705
2. CIV, XCV; MXL, CML
3. a) 91, 90 b) 23, 20 c) 146, 150
4. a) 16 074, 31 898 b) 27 329, 84 27 c) 482 541, 3083
5. 95 minut
6. a) 56, 66, 92, 180, 360, 1530, 4500
b) 66, 180, 360, 1530, 4500
c) 56, 92, 180, 360, 4500 d) 180, 275, 360, 1530, 4500
e) 180, 360, 1530, 4500 f) 180, 360, 1530, 4500
7. $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
8. $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$;
dzielniki 72: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72
9. a) 1150 b) 5
10. a) 72, 78, 84, 90, 96, 102, 108, 114 b) 75, 90, 105
c) 80, 100
11. 22 m

Komentarz do zadania 13.

Zadaniem uczniów jest udzielenie odpowiedzi na pytania na podstawie diagramu. Proponujemy zachęcić uczniów do samodzielnego układania kolejnych pytań oraz zasugerować, aby dotyczyły one porównywania różnicowego i ilorazowego.

Komentarz do zadań 14.–18.

Zadania te obejmują porównywanie różnicowe i ilorazowe. Przy niektórych zadaniach są rysunki pomocnicze ułatwiające zapamiętanie i zrozumienie podanych zależności. W pozostałych warto zachęcić uczniów do ich narysowania i opisanie.

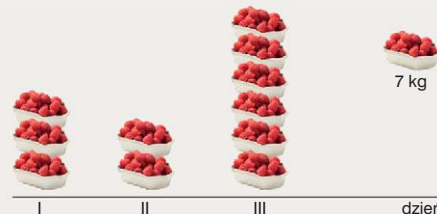
Komentarz do zadania 18.

To trudne zadanie, ale z rysunku można wiele wyczytać, dzięki czemu staje się ono łatwiejsze do rozwiązania. Uczniowie powinni dobrze przyjrzeć się rysunkowi i wyciągnąć z niego właściwe wnioski.

123

- 12 Uczniowie klasy 5 pojechali na wycieczkę autokarem. Jechali 2 godziny z prędkością średnią $65 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile kilometrów przejechali?

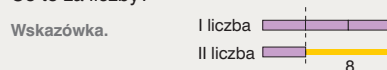
- 13 Na diagramie przedstawiono zbiór malin na plantacji pana Nowaka.



- a) Ile kilogramów malin zebrano trzeciego dnia?
b) Ile kilogramów malin zebrano w ciągu trzech dni?
c) Porównaj zbiór malin drugiego i trzeciego dnia.

- 14 Krzys zapłacił za album i słownik 75 zł. Album był o 19 zł droższy od słownika. Ile kosztował słownik?

- 15 Jedna liczba jest 3 razy większa od drugiej. Ich różnica jest równa 8. Co to za liczby?

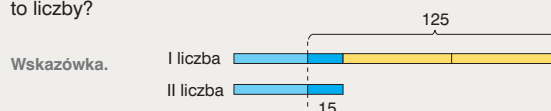


- 16 Hodowca kotów miał 12 kotów trzech ras: sfinksy, persy i norweskie leśne. Persów było 2 razy więcej niż sfinksów, a norweskich leśnych – 3 razy więcej niż sfinksów. Po ile kotów każdej rasy miał hodowca?



- 17 Oblicz liczbę 3 razy mniejszą od liczby 8754. O ile trzeba zwiększyć otrzymaną liczbę, aby była ona podzielna przez 4?

- 18 Z dwóch liczb jedna jest 3 razy większa od drugiej. Jeżeli od większej odejmiemy 125, a od mniejszej 15, to otrzymamy liczby równe. Jakie to liczby?



54

Odpowiedzi do zadań

12. 130 km
13. a) 42 kg b) 77 kg c) 14 kg < 42 kg
14. 28 zł
15. 12 i 4
16. 2 sfinksy, 4 persy, 6 norweskich leśnych
17. 2918; o 2
18. 165 i 55

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszytach.

1. Iloraz liczb 12 i 6 to
A. $12 + 6$ B. $12 - 6$ C. $12 \cdot 6$ D. $12 : 6$
2. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Liczba podzielna przez 2, 4 i 5 jest A / B. A. 660 B. 658
Liczba podzielna przez 3, 9 i 10 jest C / D. C. 1590 D. 990
3. Które zdanie jest **falszywe**?
A. 3 m 98 mm w zaokrągleniu do 1 m to 3 m.
B. Trzecia potęga liczby 5 w zaokrągleniu do dziesiątek jest równa 130.
C. Jeżeli suma dwóch liczb jest równa 95, a jeden ze składników wynosi 95, to drugi składnik jest równy 1.
D. Kolarze, którzy jadą z prędkością średnią $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, w czasie 3 godzin przejadą 120 km.
4. Samolot wystartował o godzinie 10⁴⁷ i wylądował po 46 minutach. Lądowanie samolotu odbyło się o godzinie
A. 12³³ B. 11²³ C. 11⁴³ D. 11³³
5. Rowerzysta, który jedzie z prędkością średnią $27 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, w czasie 3 godzin przejedzie trasę długości
A. 54 km B. 81 km C. 9 km D. 91 km
6. Z Siemianowic Śląskich do Zakopanego jest 186 km. Samochód pokonał tę trasę w czasie 3 godzin. Z jaką prędkością średnią jechał?
A. $63 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ B. $62 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ C. $558 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ D. $92 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
7. Odległość między domami Oli i Marka jest równa 1750 m, a odległość między domami Oli i Basi jest 5 razy mniejsza i wynosi
A. 350 m B. 1745 m C. 360 m D. 450 m
8. Mieszkanie kosztuje 195 000 zł, a dom jest o 285 000 zł droższy. Ile kosztuje dom?
A. 495 000 zł B. 470 000 zł C. 90 000 zł D. 480 000 zł
9. Wartością wyrażenia $4200 : 70 + 5 \cdot 84 - 71$ jest
A. 401 B. 409 C. 4009 D. 419

Komentarz do zadania 2.

Wybór odpowiedzi w tym zadaniu uczniowie powinni uzasadnić odpowiednimi cechami podzielności.

Komentarz do zadań 5. i 6.

Warto przypomnieć uczniom o sposobie rozwiązywania zadań zamkniętych polegającym na odrzuceniu odpowiedzi niemożliwych. Proponujemy, aby uczniowie uzasadnili swój wybór.

Odpowiedzi do zadań

1. D
2. AD
3. C
4. D
5. B
6. B
7. A
8. D
9. B

Wskazówki metodyczne

- Na podstawie tej infografiki pokazujemy, że matematyka pomaga opisywać otaczający nas świat. Zawarte w niej ciekawostki przyczyniają się do zainteresowania uczniów matematyką.

- Infografikę możemy wykorzystać w pracy zespołowej. Uczniowie podzieleni na kilkusobowe zespoły mają ułożyć 2 zadania do wskazanych przez nauczyciela informacji. W zadaniach uczniowie powinni uwzględnić:

- porównywanie ilorazowe lub różnicowe przedstawionych prędkości,

- ciekawostki dotyczące opisanych zwierząt i przedmiotów,

- historię badań przyrodniczych lub technicznych.

Następnie zespoły mogą wymienić się zadaniami, a otrzymane zadania rozwiązać jako pracę domową.

Milisekunda – jednostka czasu w układzie SI, równa jednej tysięcznej sekundy.

od 300 do 400 milisekund – czas potrzebny ludzkiemu oku na mrugnięcie



5 milisekund – czas potrzebny pszczole na wykonanie jednego uderzenia skrzydłami



od 1 do 5 milisekund – standardowy czas reakcji matrycy w monitorach LCD



Rekordy prędkości

Marlin czarny może popłynąć z prędkością **130 km/h**.



Bolidy Formuły 1 poruszają się na torze z prędkością około **380 km/h**.

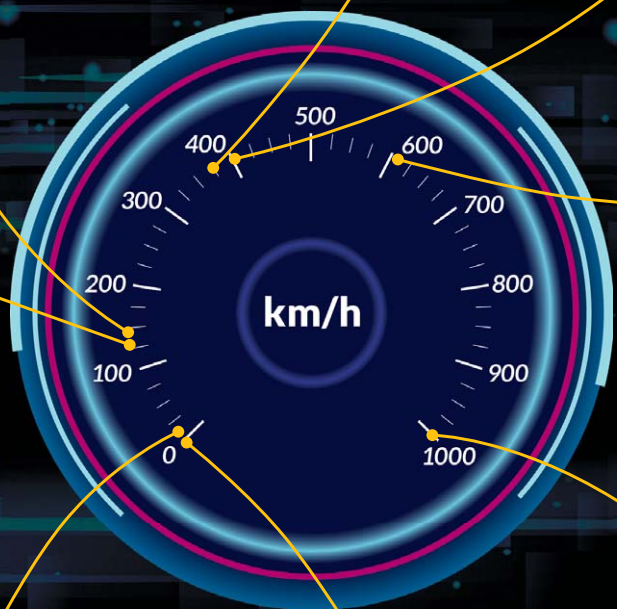


Gepard potrafi w ciągu kilku sekund osiągnąć prędkość **75 km/h**. W pogoni za zdobyczą biegnie z prędkością nawet **120 km/h**.

Leniwiec trójpalczasty to najwolniejszy ssak na Ziemi. Wszystko robi rekordowo wolno. Powoli oddycha – zaledwie 6–8 razy na minutę. Porusza się z prędkością do 7 metrów na minutę, czyli **0,42 km/h**.



Ślimak afrykański porusza się z prędkością 5 metrów na godzinę, czyli **0,005 km/h**.



Nie wszystkie prędkości mieszczą się na naszej skali...

Około **340 m/s**, czyli **1224 km/h** to prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu. Prędkość ta zwana **1 mach (1 Ma)** jest stosowana głównie w lotnictwie.



Sokół wędrowny jest najszybszym zwierzęciem na świecie. Podczas lotu poziomego utrzymuje prędkość 100 km/h. W locie nurkowym w kierunku zdobyczy osiąga niemal **400 km/h**.



Superszybki japoński pociąg Maglev podczas jazdy testowej w 2015 roku osiągnął prędkość **603 km/h**. Pojazd ten wykorzystuje zjawisko lewitacji magnetycznej, dzięki któremu pociąg unosi się nawet na 10 cm.



Samoloty wojskowe mogą poruszać się z prędkością **2–2,5 Ma**, czyli ponad dwa razy szybciej niż dźwięk.

Statki kosmiczne przemieszczają się z istic kosmicznymi prędkościami. Załoga Apollo 10 osiągnęła największą prędkość, z jaką kiedykolwiek podróżował człowiek: **39 896 km/h** (11,1 km/s).

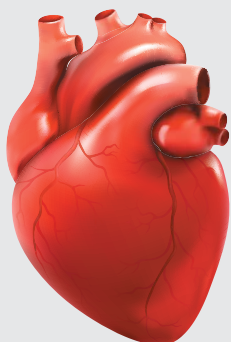


Odrzutowe samoloty pasażerskie latają z prędkością **800–1000 km/h** (220–280 m/s).

- Po zapoznaniu się uczniów z infografiką proponujemy porozmawiać z uczniami na tematy związane z prędkością. Zadajemy pytanie: *Z jakimi prędkościami mieliście dotychczas do czynienia?* W dyskusji korzystamy z zadań zawartych w zeszytce ćwiczeń.

- Warto również zachęcić uczniów, aby na podstawie informacji podanych w podręczniku, zeszytce ćwiczeń lub innych źródłach przygotowali jedną z form: plakat, prezentację multimedialną, informator-broszurkę na temat prędkości.

Węzeł – jednostka miary, równa jednej mili morskiej na godzinę. Stosowana do określania prędkości morskich jednostek pływających, a w części państw i w ruchu międzynarodowym także statków powietrznych (samolotów, śmigłowców, szybowców, balonów). Ponadto w meteorologii – pomocniczo do określania prędkości wiatrów i prądów morskich (zasadniczą jednostką jest m/s). W żegludze śródlądowej używa się kilometrów na godzinę.



860 milisekund – średni czas spoczynku ludzkiego serca



134 milisekundy – czas potrzebny światłu na okrążenie ziemskiego równika

Temat lekcji:

Punkt, prosta, półprosta, odcinek (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- rozróżnia i rysuje punkty, proste, półproste oraz odcinki i nadaje im nazwy,
- rozpoznaje łamaną lub rysuje ją zgodnie z przedstawionymi danymi,
- oblicza długość łamanej lub jej bok, gdy dane są długości łamanej i część jej boków,
- zamienia i poprawnie stosuje jednostki długości,
- rozwiązuje zadania z zastosowaniem prostych i odcinków równoległych oraz prostych i odcinków prostopadłych, używa symboli $\parallel$ i $\perp$,
- rozpoznaje odcinki prostopadłe leżące na prostych prostopadłych oraz odcinki równoległe leżące na prostych równoległych,
- wyznacza odległość punktu od prostej,
- wyznacza długość odpowiedniego odcinka prostopadłego do prostych równoległych, będącego odległością między tymi prostymi.

Komentarz do Sowa przypomina

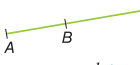
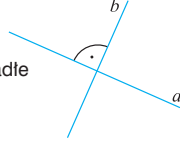
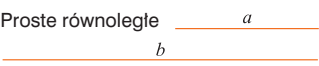
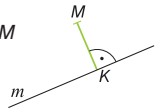
Podstawowe figury geometryczne zostały wprowadzone w klasie 4. Są to pojęcia abstrakcyjne, dlatego należy poświęcić czas na ich przypomnienie i powtórzenie podstawowych własności. Z klasy 4 uczniowie znają tylko szczególne przypadki położenia prostych prostopadłych i prostych równoległych. Warto poszukać przykładów odcinków równoległych i odcinków prostopadłych w klasie. Trzeba zwrócić uwagę na rysowanie i mierzenie odległości punktu od prostej.

II. Figury geometryczne

1. Punkt, prosta, półprosta, odcinek



Sowa przypomina

- Punkt A, punkt B  Punkty oznaczamy wielkimi literami alfabetu.
- Odcinek CD  Odcinek CD ma długość 2 cm 3 mm, co zapisujemy: $|CD| = 2 \text{ cm } 3 \text{ mm}$.
- Prosta a  Proste oznaczamy małymi literami alfabetu.
- Proste przechodzące przez punkt A  Przez jeden punkt przechodzi nieskończenie wiele prostych.
- Półprosta AB  Półprostą oznaczamy dwiema literami. Punkt A oznacza początek półprostej, punkt B jest dowolnym punktem tej półprostej, różnym od A.
- Proste prostopadłe  Proste przecinają się pod kątem prostym, co zapisujemy: $a \perp b$.
- Proste równoległe  Proste nie przecinają się (nie mają punktu wspólnego), co zapisujemy: $a \parallel b$.
- Odległość punktu M od prostej m  To długość odcinka MK. Odcinek MK jest prostopadły do prostej m. Jest to najkrótszy odcinek łączący punkt M z prostą m.

58

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Proste i odcinki Plansza edukacyjna. Jednostki
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 43–45
Zbiór zadań	s. 44–47

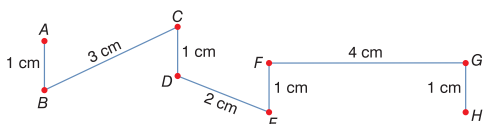
II. Figury geometryczne

● Jednostki długości

Nazwa jednostki	Skrót	Zależność między jednostkami		
1 milimetr	1 mm			
1 centymetr	1 cm	1 cm = 10 mm		
1 decymetr	1 dm	1 dm = 10 cm	1 dm = 100 mm	
1 metr	1 m	1 m = 10 dm	1 m = 100 cm	1 m = 1000 mm
1 kilometr	1 km	1 km = 1000 m	1 km = 10 000 dm	
		1 km = 100 000 cm	1 km = 1 000 000 mm	

Przykład 1.

Patrycja narysowała figurę złożoną z odcinków. Koniec jednego odcinka jest początkiem następnego.



Taka figura to **łamana**. Wyróżnione czerwonym kolorem punkty to jej **wierzchołki**. Kolejne odcinki to **boki łamanej**.

Ala i Zosia obliczyły **długość** łamanej ABCDEFGH.

Obliczenia Ali:

Dodałam po kolei długości wszystkich boków:

$$1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 4 + 1 = 13 \text{ [cm]}$$

Boki łamanej są wyrażone w tej samej jednostce, więc w trakcie obliczeń Ala nie zapisywała jej i podała ją tylko w wyniku – w nawiasie.

Obliczenia Zosi:

Widzę, że są 4 boki jednakowej długości, więc mogę zapisać:

$$4 \cdot 1 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 13 \text{ cm}$$

Odpowiedź. Długość łamanej ABCDEFGH jest równa 13 cm.

Komentarz do Sowa przypomina

Jednostki pomiarów, zarówno długości, jak i powierzchni, zawsze sprawiają kłopoty. Uczniowie powinni zatem samodzielnie narysować w zeszytach odcinki o długościach: 1 mm, 1 cm, 1 dm i zapisać zależności między nimi, a następnie, korzystając z podręcznika, sprawdzić poprawność wykonania tego zadania. Zależności między jednostkami długości proponujemy włączyć do rachunku pamięciowego ćwiczonego na początku lekcji i często do niego wracać.

Komentarz do Przykładu 1.

Łamana to figura, którą uczniowie poznali już w klasie 3, jednak wówczas nie omawiali jej budowy i własności. Z pojęciami *wierzchołek* i *bok* uczniowie spotkali się na lekcjach dotyczących prostokąta, dlatego można do nich nawiązać podczas opisu łamanej.

W przykładzie przedstawiamy dwa sposoby wykonywania obliczeń na liczbach mianowanych. Proponujemy uczniom zapisywanie obliczeń z pominięciem jednostki, co znacznie skróci ich czas pracy. Należy jednak zwrócić uwagę uczniów na dopisanie jednostki w nawiasie przy wyniku końcowym. Trzeba również uczulić uczniów, by przed przystąpieniem do obliczeń sprawdzili, czy wszystkie podane wymiary są zapisane w takiej samej jednostce.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

2. $|AB| = 3 \text{ cm } 5 \text{ mm}$, $|BC| = 10 \text{ cm } 5 \text{ mm}$, $|CD| = 6 \text{ cm}$, $|DE| = 2 \text{ cm}$; kolejno: 3, dłuższy; 1 cm 5 mm; dłuższy; AB, krótszy; 22 cm
3. a) 40, 90, 140, 4250 b) 7, 10, 34, 60 c) 20, 50, 110, 530
4. a) NIE b) NIE c) NIE d) TAK e) TAK
6. C
7. hasła: 1. kilogram, 2. odcinek, 3. łokieć, 4. suma, 5. metr,
6. prosta, 7. półprosta, 8. tysiąc, 9. dwa
8. hasła: 1. cztery, 2. dwa, 3. długości, 4. sto, 5. jeden

Komentarz do Sowa uczy

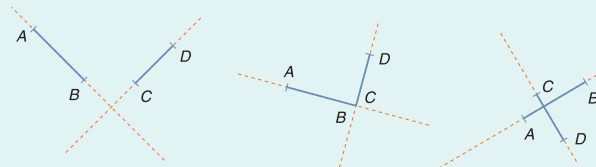
Przedstawione tutaj pojęcia *odcinki prostopadłe*, które nie mają punktu wspólnego, i *odcinki równoległe*, które leżą na jednej prostej, są dla uczniów trudne. Warto w najbliższym otoczeniu poszukać przykładów ilustrujących je.



Sowa uczy

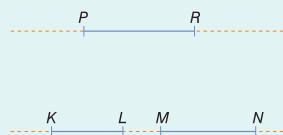
- Na rysunkach są przedstawione odcinki prostopadłe i odcinki równoległe.

Odcinki AB i CD są prostopadłe.



$AB \perp CD$ – mówimy, że odcinki są prostopadłe, jeżeli leżą na prostych prostopadłych.

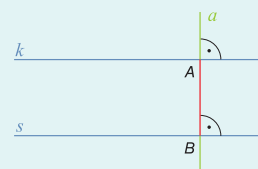
Odcinki KL , MN , PR są równoległe.



$KL \parallel PR$, $MN \parallel PR$ – mówimy, że odcinki są równoległe, jeżeli leżą na prostych równoległych.

$KL \parallel MN$ – mówimy, że odcinki są równoległe, jeżeli leżą na jednej prostej.

- Na rysunku są przedstawione dwie proste równoległe k i s oraz prosta a prostopadła do nich.



Możemy zapisać:
 $k \parallel s$, $a \perp k$, $a \perp s$

Prosta a przecina prostą k w punkcie A , a prostą s w punkcie B .

Długość odcinka AB to odległość między prostymi k i s .

II. Figury geometryczne

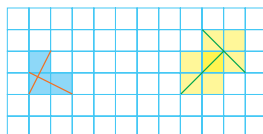


- Wypisz pary boków równoległych i pary boków prostokątnych łamanej z **Przykładu 1**.
- Na prostej s zaznacz punkt K . Znajdź na tej prostej punkty odległe o 2 cm 5 mm od punktu K .
- Narysuj prostą i zaznacz na niej trzy punkty A , B i C . Ile jest wszystkich dwuliterowych nazw powstałych półprostych?
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
- Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

Dwa odcinki leżące na jednej prostej są równoległe.	P	F
Proste, które nie są prostokątne, są równoległe.	P	F
Dwa odcinki prostokątne zawsze mają punkt wspólny.	P	F
Przez jeden punkt można przeprowadzić tylko jedną prostą.	P	F

- Zapisz wyrażenia w podanych jednostkach.
a) w centymetrach: 5 dm, 2 m, 34 m, 3 dm 8 cm
b) w milimetrach: 5 cm, 42 cm, 11 cm 9 mm
c) w decymetrach: 70 cm, 130 cm, 6 m, 8 m 4 dm
d) w metrach: 4 km, 5 km 200 m, 2300 dm
- Który zapis jest **nieprawdziwy**?
A. 2 m = 200 cm B. 9 dm 5 cm = 95 cm
C. 70 cm = 7 m D. 4004 m = 4 km 4 m
- Przepisz przykłady, zamiast $\blacklozenge$ napisz odpowiedni znak $>$, $<$ lub $=$.
a) 16 cm 1 mm $\blacklozenge$ 99 mm 320 mm $\blacklozenge$ 33 cm
b) 18 dm 9 cm $\blacklozenge$ 1799 mm 7 m 4 cm $\blacklozenge$ 7040 mm
c) 800 000 cm $\blacklozenge$ 6 km 4 km 3 m $\blacklozenge$ 4030 m
- Narysuj 2 proste prostokątne:
a) za pomocą linijki i ekierki,
b) korzystając z kratki w zeszyście, ale nie rysuj po liniach. Sprawdź za pomocą ekierki poprawność wykonania.

Wskazówka.



61

Komentarz do zadania 4.

Zobrazowanie, np. za pomocą kredek zastępujących odcinki, sytuacji opisanych w zdaniach z ramki pomoże w ocenie ich prawdziwości. W przypadku niepoprawnej oceny przez uczniów dowolnego zdania odsyłamy ich do treści zawartych w *Sowa uczy* lub w *Sowa przypomina*.

Takie działanie nauczyciela jest ważnym elementem nauki samodzielnego uczenia się.

Komentarz do zadań 5. i 7.

Każde z tych zadań w inny sposób przyczynia się do utrwalania i udoskonalania umiejętności zamiany jednostek długości. Te ćwiczenia wykonujemy ustnie na lekcji. Proponujemy, aby wskazany przez nauczyciela uczeń wykonał pierwszy przykład. Jeżeli zrobi to poprawnie, wyznacza osobę do następnego przykładu. Aby każdy uczeń miał szansę zabrać głos, proponujemy dopisać na tablicy kolejne przykłady.

Komentarz do zadania 8.

Analizujemy dołączoną do zadania wskazówkę. Uczniowie powinni zauważyć, że każdy z rysunków składa się z dwóch prostokątów o takich samych wymiarach, położonych tak, że boki takiej samej długości są do siebie prostokątne. Odpowiednie przekątne w tych prostokątach są wówczas prostokątne. Zachęcamy uczniów do posługiwania się przyrządami przy sprawdzaniu położenia narysowanych odcinków.

Odpowiedzi do zadań

- $AB \parallel CD$, $AB \parallel EF$, $AB \parallel GH$, $CD \parallel EF$, $CD \parallel GH$, $EF \parallel GH$
 $AB \perp FG$, $CD \perp FG$, $FE \perp FG$, $GH \perp FG$
- D
- P, F, F, F
- a) 50 cm, 200 cm, 3400 cm, 38 cm b) 50 mm, 420 mm, 119 mm
c) 7 dm, 13 dm, 60 dm, 84 dm d) 4000 m, 5200 m, 230 m
- C
- a) $>$, $<$ b) $>$, $=$ c) $>$, $<$

Komentarz do zadania 9.

Analiza dołączonej do zadania wskazówki ułatwi jego rozwiązanie. Uczniowie powinni przeprowadzić tę analizę samodzielnie i w jej wyniku stwierdzić, że rysowanie odcinków równoległych na kartce w kratkę, bez rysowania po linii, trzeba zacząć od narysowania dwóch identycznych prostokątów lub trójkątów prostokątnych położonych tak, aby odpowiednie boki były równoległe. Odpowiednie przekątne tych prostokątów lub odpowiednie boki takich trójkątów są równoległe. Proponujemy, aby po określonym przez nauczyciela czasie wskazani uczniowie przedstawili wnioski z analizy rysunków na forum klasy.

Komentarz do zadania 11.

Rysowanie prostej w danej odległości od drugiej prostej jest trudnym zadaniem. Proponujemy, aby uczniowie najpierw wykonali odręcznie rysunek pomocniczy, po czym odpowiedzieli na pytanie: *W jaki sposób sprawdzamy odległość między prostymi?* Będzie wówczas czas na dyskusję dotyczącą odległości między prostymi i jej wyznaczania. Uczniowie powinni zauważyć, że rysowanie prostych równoległych w danej odległości sprowadza się do rysowania prostych prostopadłych, gdyż albo trzeba narysować prostą prostopadłą do danej prostej i do tej narysowanej prostej w odmierzonej odległości narysować kolejną prostą prostopadłą, albo należy narysować dwie proste prostopadłe do danej prostej, na nich odmierzyć podaną odległość, po czym narysować prostą przechodzącą przez wyznaczone punkty.

Komentarz do zadania 13.

To zadanie proponujemy rozwiązać wspólnie z uczniami. Należy przeanalizować jego treść i rysunek. Przedstawiona łamana ma boki, które są prostopadłe, chociaż nie mają punktów wspólnych. Są to np. BC i FG , AB i EF .

Komentarz do zadania 14.

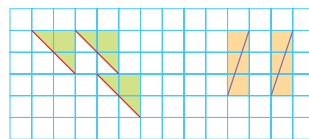
Po dokonaniu oceny prawdziwości każdego ze zdań uczniowie powinni ustnie uzasadnić swój wybór.



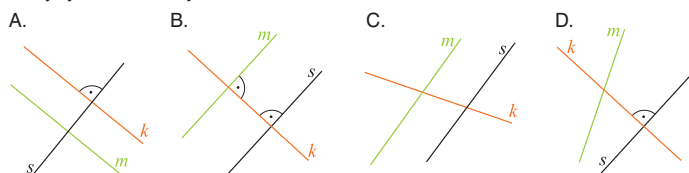
9 Narysuj 3 proste równoległe:

- za pomocą ekierki i linijki,
- korzystając z kratki w zeszytce, ale nie rysuj po liniach.

Wskazówka.



10 Który rysunek ilustruje zależności: $m \parallel s$ i $k \perp s$?



11 Narysuj proste równoległe a i s tak, aby odległość między nimi była równa 2 cm.

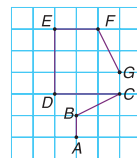
12 Narysuj prostą a i prostą b prostopadłą do niej. Następnie narysuj prostą p równoległą do prostej a oraz prostą l równoległą do prostej b . Jak względem siebie leżą proste b i p oraz proste l i a ?

13 Na rysunku przedstawiono narysowaną w skali łamaną $ABCDEFG$ o wymiarach:

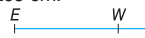
$$|AB| = 2 \text{ cm } 5 \text{ mm}, |CD| = |DE| = 3 \cdot |AB|, |EF| = 2 \cdot |AB|, |FG| = |BC|.$$

Długość łamanej jest równa 33 cm 7 mm.

- Oblicz długości boków BC i FG .
- Wymień pary boków równoległych i pary boków prostopadłych.



14 Które zdanie jest **falszywe**?

- Przez jeden punkt przechodzi nieskończenie wiele prostych.
- Odcinek SO o długości 2 m 9 cm jest równy odcinkowi WA o długości 209 cm.
- Na rysunku  przedstawiono półprostą WE .
- Jeżeli $|SE| = 4 \text{ cm}$, $|ER| = 5 \text{ cm}$, to $|SR| = 9 \text{ cm}$.



Odpowiedzi do zadań

10. B

12. $b \perp p$, $a \perp l$

13. a) 5 cm 6 mm b) $EF \parallel DC$, $DE \parallel AB$; $EF \perp ED$, $EF \perp AB$, $DC \perp DE$, $DC \perp AB$, $FG \perp BC$

14. C

II. Figury geometryczne



- 15 W ogrodzie Hortulus w Dobrzycy rośnie żywopłot tworzący labirynt.



- a) Napisz, dlaczego nie można powiedzieć, że ma on kształt łamanej.
b) Zaprojektuj żywopłot w kształcie łamanej.

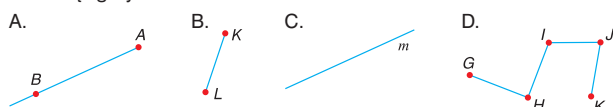
- 16 Na kartce w kratkę narysuj łamaną zgodnie z poniższą instrukcją:

- zaznacz punkt A ,
- narysuj odcinek AB o długości jednej kratki skierowany w dół,
- narysuj odcinek BC o długości jednej kratki skierowany w prawo,
- narysuj odcinek CD o długości dwóch kretek skierowany w górę,
- narysuj odcinek DE o długości dwóch kretek skierowany w lewo,
- narysuj odcinek EF o długości trzech kretek skierowany w dół.

- a) Przyjrzyj się narysowanej łamanej, zauważ prawidłowość i dorysuj 4 kolejne boki.
b) Ile boków miałaby łamana narysowana według tej samej zasady, której ostatnie boki miałyby długość 12 kretek?

- 17 Punkty A , B , C leżą na prostej s . Odległość punktu A od punktu B jest równa 8 cm, a odległość między punktami B i C wynosi 3 cm. Wykonaj rysunek. Zmierz lub oblicz długość odcinka AC . Rozpatrz dwie możliwości: punkt C leży na lewo lub na prawo od punktu B .

- 18 Dane są figury:



Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż litery przypisane poprawnej odpowiedzi.

Długości której figury nie można zmierzyć?	A	B	C	D
Która figura nie jest prostą, ale jest jej częścią?	A	B	C	D

Komentarz do zadania 16.

Na to zadanie warto zwrócić uwagę. Rozwiązaniem jest narysowanie łamanej zgodnie z podaną instrukcją, dostrzeżenie pewnej prawidłowości i udzielenie poprawnej odpowiedzi na podstawie wcześniejszych obserwacji i wniosków z nich wyciągniętych. Można zadać pytania dodatkowe: *Ile kretek długości miała-by narysowana łamana? Ile boków tej łamanej byłoby równoległych do boku AB ?*

Na podstawie tego zadania uczniowie mogą sami układać podobne instrukcje. Umiejętność korzystania z instrukcji jest ważna i potrzebna w codziennym życiu.

Komentarz do zadania 18.

To zadanie zamknięte nowego typu. Takie zadania mogą pojawić się na egzaminach, a uczniowie powinni być do nich przygotowani. Uczniowie muszą zapamiętać, że w poleceniach tego typu zadań występuje zwrot *wskaż literę* lub *wskaż litery*, który zawiera ważną informację dotyczącą liczby odpowiedzi na zadane pytanie (jedna lub kilka).

Odpowiedzi do zadań

16. b) 24
17. 11 cm lub 5 cm
18. AC, AB

Komentarz do Sprawdź się!

W zadaniu 1. uczniowie mogą rysować łamaną, korzystając z kratek w zeszyte na podstawie umiejętności przedstawionych na s. 61 i s. 62. Na kartce bez linii należy korzystać z liniału i ekierki. Przy okazji tego zadania trzeba przypomnieć uczniom, że odcinek i prosta nie mają grubości, więc ołówek, którym wykonują rysunki, powinien być dobrze zatemperowany. Zadanie 5. jest trudne. Trzeba bardzo uważnie przeczytać tekst zadania, wykonać odręczny rysunek pomocniczy i zaznaczyć na nim odpowiednie dane i odległości. Poprawność wykonania rysunku uczniowie mogą sprawdzić w parach. Proponujemy poprosić jednego z uczniów o wykonanie rysunku na tablicy i wyjaśnienie wzajemnego położenia opisanych w zadaniu prostych. Pozostali uczniowie mogą włączyć się do dyskusji lub ocenić wypowiedź.

Wyzwanie

Zaznacz 4 punkty: A, B, C, D . Ile odcinków o końcach w tych punktach możesz narysować?

Rozważ przypadki:

- wszystkie punkty leżą na jednej prostej,
- punkty nie leżą na jednej prostej.

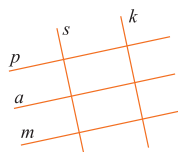
Sprawdź, czy inne osoby w klasie rozwiązały to zadanie tak samo.

Sprawdź się!

- 1 Narysuj łamaną o pięciu bokach tak, by jedna para boków była prostopadła, a jedna – równoległa. Zmierz długości boków łamanej i oblicz jej długość.

- 2 Narysuj odcinek JE o długości 5 cm 2 mm, a następnie odcinek SP krótszy o 1 cm 8 mm od odcinka JE i równoległy do niego oraz odcinek EN dwa razy dłuższy od odcinka SP i prostopadły do niego. Jak względem siebie są położone odcinki JE i EN ?

- 3 Przyjrzyj się rysunkowi, przepisz umieszczone obok niego przykłady, zamiast $\diamond$ napisz odpowiedni znak $\parallel$ lub $\perp$.



$p \diamond a$	$a \diamond m$
$p \diamond m$	$p \diamond s$
$s \diamond m$	$a \diamond k$

- 4 Narysuj prostą a . Zaznacz na niej punkty R i O oddalone od siebie o 2 cm 5 mm, a następnie – punkt K tak, aby odcinek RK był 2 razy dłuższy od odcinka RO . Jaka jest długość odcinka OK ?
- 5 Narysuj dwie proste równoległe s i m oddalone od siebie o 3 cm. Następnie narysuj dowolną prostą a prostopadłą do prostej s , prostą b równoległą do prostej a w odległości 3 cm od niej i prostą c równoległą do prostej b w odległości 2 cm od prostej b . Określ położenie prostych b i m oraz prostych c i s . Podaj odległość prostej a od prostej c .

64

Odpowiedzi do zadań

Wyzwanie

Jeżeli wszystkie punkty leżą na jednej prostej, to wyznaczono 6 odcinków. Jeśli punkty nie leżą na jednej prostej, to również wyznaczono 6 odcinków.

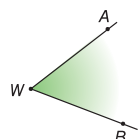
Sprawdź się!

2. są prostopadłe
3. $p \parallel a, p \parallel m, s \perp m, a \parallel m, p \perp s, a \perp k$
4. 2 cm 5 mm lub 7 cm 5 mm
5. są prostopadłe; 5 cm lub 1 cm

2. Kąty przyległe i kąty wierzchołkowe

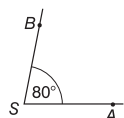
Sowa przypomina

- Kąty oznaczamy trzema wielkimi literami. Litera środkowa oznacza wierzchołek kąta.



Kąt $\sphericalangle AWB$ lub $\sphericalangle BWA$
Półproste WB i WA są **ramionami kąta**,
a punkt W jest **wierzchołkiem kąta**.

- Miary kątów podajemy w stopniach.



$\sphericalangle ASB = 80^\circ$
czytamy: **kąt ASB ma miarę 80°**

- Rodzaje kątów

kąt ostry		$\sphericalangle MWN < 90^\circ$ i $\sphericalangle MWN > 0^\circ$
kąt prosty		$\sphericalangle BSC = 90^\circ$
kąt rozwarty		$\sphericalangle MLK > 90^\circ$ i $\sphericalangle MLK < 180^\circ$
kąt półpełny		$\sphericalangle AOB = 180^\circ$
kąt pełny		$\sphericalangle AWA = 360^\circ$

65

Tematy lekcji:

1. Kąty przyległe i kąty wierzchołkowe (1 h)
2. Rozwiązywanie zadań utrwalających pojęcia kątów przyległych i kątów wierzchołkowych (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- rozpoznaje i nazywa poznane rodzaje kątów,
- porównuje kąty,
- rozpoznaje, nazywa i rysuje kąty wierzchołkowe oraz kąty przyległe,
- stosuje w zadaniach własności kątów wierzchołkowych i przyległych,
- oznacza kąty literami alfabetu greckiego,
- wybiera poprawne uzasadnienie odpowiedzi,
- rozwiązuje zadania otwarte i zamknięte osadzone w kontekście praktycznym i stosuje w nich umiejętności z arytmetyki i geometrii.

Wskazówki metodyczne

- Definicja kąta, zasady jego nazywania i podział kątów ze względu na ich rozwartość to wiadomości i umiejętności z klasy 4. Podczas ich przypomnienia proponujemy skorzystać z kolorowych kartek. Uczniowie, składając kartki, otrzymują różne rodzaje kątów, o których opowiadają i podają ich nazwy. Po zakończeniu zabawy kolorowe kąty powinny zostać wklejone do zeszytów i podpisane. Z pewnością uczniowie je zapamiętają. Następnie przechodzimy do treści zawartych w podręczniku (*Sowa przypomina*) i omawiamy je, tym samym podsumowując pracę uczniów.
- W celu usystematyzowania i utrwalenia wiadomości o kątach wierzchołkowych i przyległych polecamy zadanie 11. s. 49 w zeszycie ćwiczeń. Proponujemy również, by uczniowie zagraли w parach w grę *Znam kąty*. Jeden z uczniów rysuje 3 kąty przyległe i 3 kąty wierzchołkowe. Na każdym rysunku wpisuje miarę jednego, wybranego przez siebie kąta. Będą to rysunki pomocnicze. Drugi uczeń wpisuje innym kolorem długopisu miary pozostałych kątów przedstawionych na rysunkach. Za każdą poprawnie wpisaną miarę kąta otrzymuje 1 punkt. Później następuje zmiana ról.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 7.

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie ➔ Kąty
Klub Nauczyciela uczeń.pl	Kartkówka 7 Plansza edukacyjna. Kąty i ich rodzaje
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 46–49
Zbiór zadań	s. 48–50

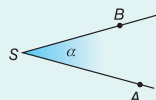
Komentarz do Sowa uczy

Zachęcamy do zapoznania uczniów z literami alfabetu greckiego, które zarówno w klasie 5, jak i w klasach starszych są stosowane do oznaczania kątów. Odnalezienie na rysunku kąta oznaczonego jedną literą z alfabetu greckiego jest łatwiejsze niż zlokalizowanie kąta oznaczonego trzema literami. Temat lekcji nie jest trudny, lecz występuje w nim sporo nowych nazw, które trzeba zapamiętać. Należy dokładnie go omówić, ponieważ informacje w nim zawarte będą potrzebne podczas realizacji tematów dotyczących figur płaskich.

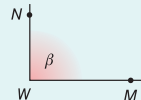
Sowa uczy

- Nazwę kąta lub jego miarę można oznaczać jedną z liter alfabetu greckiego, np. α – alfa, β – beta, γ – gamma, δ – delta, ε – epsilon, η – eta, θ – teta.

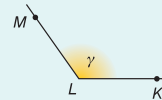
Na przykład:



$\sphericalangle ASB$ lub α
 α – kąt ostry

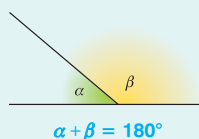


$\sphericalangle MWN = 90^\circ$
 $\beta = 90^\circ$

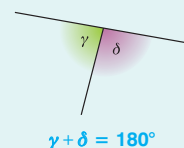


$\sphericalangle KLM$ lub γ
 γ – kąt rozwarty

- Na rysunkach są zaznaczone po dwa kąty, które mają jedno ramię wspólne, a ich dwa pozostałe ramiona tworzą prostą. Są to **kąty przyległe**.



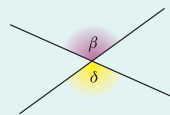
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



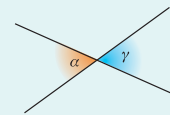
$$\gamma + \delta = 180^\circ$$

Suma miar kątów przyległych jest równa 180° .

- Na rysunkach są zaznaczone po dwa kąty, które mają wspólny wierzchołek, a ich ramiona tworzą proste. Są to **kąty wierzchołkowe**.



$$\beta = 120^\circ \text{ i } \delta = 120^\circ$$



$$\alpha = 60^\circ \text{ i } \gamma = 60^\circ$$

Kąty wierzchołkowe mają równe miary.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

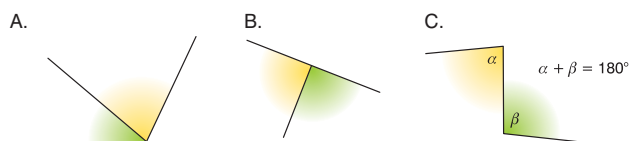
- kąty ostre: $\sphericalangle CBD$, $\sphericalangle BDC$, $\sphericalangle DBE$, $\sphericalangle BDE$; kąty proste: $\sphericalangle BED$; kąty rozwarte: $\sphericalangle BCD$, kąty półpełne: $\sphericalangle ABC$
- D
- 4:00, 120° ; 6:00, 180° ; 11:00, 30° ; 3:00, 90°
- kąt ostry, kąt prosty, kąt rozwarty, kąt półpełny
- kąt o mierze 70°
- a) wierzchołkowymi b) przyległymi c) półpełnym, 180°
- D
- A; D
- a) $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC = 60^\circ$ – kąty wierzchołkowe, $\sphericalangle FBA = \sphericalangle GBC = 130^\circ$ – kąty wierzchołkowe, $\sphericalangle KCH = 70^\circ$; kąty przyległe, np. $\sphericalangle DAC$ i $\sphericalangle CAB$
b) $\sphericalangle PSW = 45^\circ$, $\sphericalangle PSR = \sphericalangle LSW = 135^\circ$, $\sphericalangle ARZ = 135^\circ$, $\sphericalangle ARS = \sphericalangle ZRE = 45^\circ$ – kąty wierzchołkowe, kąty przyległe, np. $\sphericalangle ARS$ i $\sphericalangle SRE$
- F; P; P; P; P

II. Figury geometryczne

Przykład 1.

Na którym rysunku przedstawiono kąty przyległe?

Wskaż poprawną odpowiedź A, B lub C i jej uzasadnienie I, II lub III.



A,		I. mają jedno ramię wspólne.
B,	ponieważ	II. mają jedno ramię wspólne i wspólny wierzchołek.
C,		III. mają jedno ramię wspólne, a dwa pozostałe ramiona tworzą prostą.

Przyjrzyjmy się rysunkom kątów. Na podstawie informacji z **Sowa uczy** wiemy, że kąty przyległe przedstawiono na rysunku B.

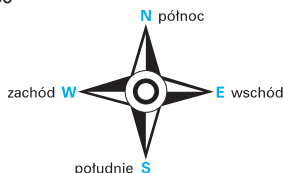
Zastanówmy się nad uzasadnieniem:

- I. Na każdym z trzech rysunków kąty mają wspólne ramię, czyli takie uzasadnienie to za mało, aby stwierdzić, że kąty są przyległe.
- II. Wspólne ramię i wspólny wierzchołek mają kąty na rysunkach A i B. Przedstawione na rysunku A kąty nie są przyległe, więc również to uzasadnienie nie jest wystarczające.
- III. To uzasadnienie w pełni opisuje kąty przyległe, czyli kąty przedstawione tylko na rysunku B.

Gdy rozwiązujemy zadania tego typu, podajemy samą odpowiedź. Przedstawione rozważania przeprowadzamy w myślach.

- 1 Kątem rozwartym **nie jest** kąt o mierze
A. 91° B. 150° C. 179° D. 180°

- 2 Tosia stanęła twarzą w kierunku północy. W którą stronę świata będzie zwrócona, jeżeli obróci się w prawą stronę o kąt:
a) półpełny, b) prosty?



67

Komentarz do Przykładu 1.

To bardzo ważne zadanie. Prezentujemy w nim nową formę zadania zamkniętego. Zanim wspólnie z uczniami przeanalizujemy rozwiązanie, proponujemy pozwolić im na wybranie swoich odpowiedzi. Prosimy uczniów o uzasadnienie wyboru odpowiedzi i porównujemy je z tekstem pod tabelką.

Komentarz do zadania 2.

Proponujemy wyznaczyć w sali lekcyjnej strony świata i wykonać z uczniami podobne ćwiczenie. Może prowadzić je uczeń.

Odpowiedzi do zadań

1. D
2. a) na południe b) na wschód

Komentarz do zadania 4.

Sugerujemy przyniesienie do klasy modelu zegara, który pozwoli na zilustrowanie na nim każdego zdania. W ten sposób ułatwimy uczniom ocenę prawdziwości poszczególnych zdań. Zdanie fałszywe proponujemy zmienić tak, aby stało się prawdziwe, a następnie przedstawić jego treść na zegarze. Za pomocą zegara można praktycznie i skutecznie utrwalać wiadomości o kątach.

Komentarz do zadania 5.

Uczniowie powinni zauważyć, że wystarczy zmierzyć miarę tylko jednego kąta ostrego i egierek sprawdzić, że miara kąta DSB jest równa 90° .

Komentarz do zadania 6.

Proponujemy zainicjować dyskusję z uczniami na temat tego, którą własność kątów wierzchołkowych spełniają kąty na rysunkach A, B i C oraz dlaczego nie są to kąty wierzchołkowe. Podobne zadania występują też w zbiorze zadań i warto z nich korzystać.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

- | | | |
|-----|---|-------|
| I | O godzinie 15:00 wskazówki minutowa i godzinowa są względem siebie prostopadłe. | P / F |
| II | O godzinie 18:00 wskazówki minutowa i godzinowa tworzą kąt półpełny. | P / F |
| III | O godzinie 21:30 miara kąta ostrego między wskazówką godzinową a wskazówką minutową jest większa niż 45° . | P / F |

Sprawdź

Multibook → Ćwiczenie interaktywne: Do zadania 4.

- 3 Narysuj 3 zegary tak, by ich wskazówki tworzyły kąty: 30° , 60° , 150° . Odczytaj godziny.

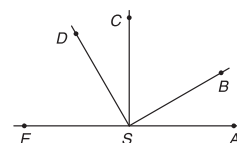
- 4 Na podstawie rysunku zegara odpowiedz na pytanie. Które zdanie jest **fałszywe**?

- A. Kąt między wskazówkami ma miarę 180° .
B. Mała i duża wskazówka zegara są prostopadłe.
C. Wskazówki tworzą kąt 4 razy mniejszy od kąta pełnego.
D. Zegar wskazuje godzinę 9:00 lub 21:00.

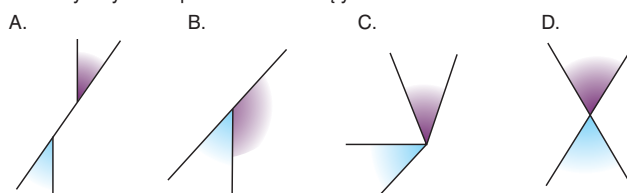


- 5 Zmierz narysowane kąty i odpowiedz na pytania.

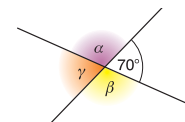
- a) Ile razy miara kąta BSA jest mniejsza od miary kąta CSA ?
b) O ile stopni kąt DSA jest większy od kąta CSA ?
c) Ile kątów prostych jest na rysunku?



- 6 Na którym rysunku przedstawiono kąty wierzchołkowe?



- 7 Podaj miary kątów α , β , γ i uzasadnij swoje obliczenia.



- 8 Kąty α i β są kątami przyległymi. Kąt β jest o 30° większy od kąta α . Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D. Suma miar kątów α i β jest równa mierze kąta A / B.

- A. prostego B. półpełnego
Kąty α i β mają odpowiednio miary C / D.
C. 75° , 105° D. 80° , 110°

68

Odpowiedzi do zadań

4. A

5. a) 3 b) o 30° c) 3

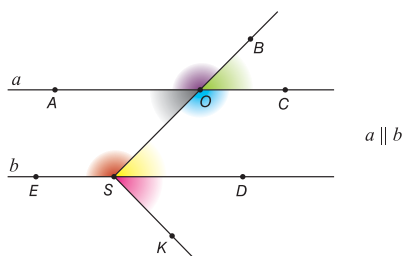
6. D

7. $\alpha = 110^\circ$ (przyległy do 70°), $\beta = 110^\circ$ (wierzchołkowy do α), $\gamma = 70^\circ$ (wierzchołkowy do 70°)

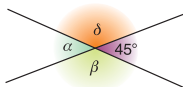
8. BC

II. Figury geometryczne

Na podstawie poniższego rysunku rozwiąż zadania 9.–11.



9. Kątami wierzchołkowymi są $\angle AOS$ oraz
 A. $\angle AOB$ B. $\angle BOC$ C. $\angle ESO$ D. $\angle SOC$
10. Kątem przyległym do kąta $\angle ESO$ jest
 A. $\angle AOS$ B. $\angle SOC$ C. $\angle AOB$ D. $\angle OSD$
11. Które zdanie jest **falszywe**?
 A. Jeżeli $\angle SOC = 130^\circ$, to $\angle AOB = 130^\circ$.
 B. $\angle SOC$ i $\angle BOC$ to kąty przyległe, suma ich miar jest równa 180° .
 C. $\angle KSD$ i $\angle ESO$ to kąty wierzchołkowe.
 D. Jeżeli $\angle AOS = 55^\circ$, to $\angle AOB = 125^\circ$.
12. Jakie miary mają kąty α i δ ?
 Wskaż poprawną odpowiedź A, B lub C i jej uzasadnienie I lub II.



A. $\alpha = 135^\circ$, $\delta = 135^\circ$,	ponieważ	I. α i δ są kątami wierzchołkowymi.
B. $\alpha = 45^\circ$, $\delta = 135^\circ$,		
C. $\alpha = 45^\circ$, $\delta = 45^\circ$,		II. α i δ są kątami przyległymi.

Komentarz do zadania 11.

Do rozwiązania zadania potrzebny jest kątomierz. Proponujemy, aby uczniowie wspólnie zastanowili się, ile kątów należy zmierzyć, aby rozwiązać to zadanie.

Komentarz do zadania 12.

To zadanie zamknięte przygotowujące do uzasadniania, a następnie dowodzenia.

Po rozwiązaniu zadania warto zadać uczniom następujące pytania:

Jakimi kolorami oznaczono na rysunku pary kątów przyległych, a jakimi pary kątów wierzchołkowych? Ile jest par kątów przyległych?

Odpowiedzi do zadań

9. B
 10. D
 11. C
 12. B, II

Komentarz do Sprawdź się!

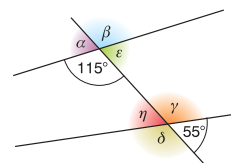
Podczas rozwiązywania zadania 2. korzystamy z zegara, by pokazać drogę, którą pokona duża wskazówka na tarczy w danym czasie.

W zadaniu 4. można dodatkowo zapytać o miarę kąta CAD i poprosić o jej uzasadnienie. Po omówieniu własności wielokątów wracamy do tego zadania i obliczamy miary wszystkich utworzonych kątów.

W zadaniu 5. warto zapytać uczniów o konieczność mierzenia kąta rozwartego. Może ktoś zauważy, że jeżeli prosta m tworzy z prostą a kąt 70° , to taki sam kąt powinna ona tworzyć z prostą b , podobnie jak prosta prostopadła do prostej a jest również prostopadła do prostej b . Taki schemat rozumowania nie jest jednak wymagany od uczniów.

- 13 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

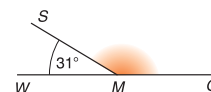
Kąt α jest kątem przyległym do kąta β .	P	F
Kąt γ ma miarę 65° .	P	F
Kąty α i ε oraz δ i γ to kąty wierzchołkowe.	P	F
Kąt η ma miarę 55° .	P	F



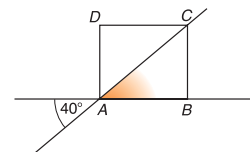
Sprawdź się!

- Kątem ostrym **nie** jest
 - połowa kąta prostego.
 - czwarta część kąta pełnego.
 - trzecia część kąta półpełnego.
 - szósta część kąta półpełnego.
- Podaj miarę i rodzaj kąta, jaki zakresli duża wskazówka zegara:
 - od godz. 8:15 do 8:30,
 - od godz. 16:20 do 16:45.

- $\angle SMO$ ma miarę
 - 149°
 - 159°
 - 139°
 - 180°



- Podaj miarę kąta BAC , jaki tworzy przekątna AC z bokiem AB w prostokącie $ABCD$.



- Narysuj proste równoległe a i b oraz prostą m , która przecina prostą a pod kątem 70° . Podaj miary pozostałych kątów, które tworzą proste a i m . Zmierz jeden z kątów rozwartych, jaki utworzyła prosta m z prostą b , i podaj miary pozostałych kątów. Sprawdź swoje wyniki z wynikami innych osób w klasie.

70

Odpowiedzi do zadań

13. P, F, P, P

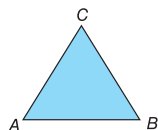
Sprawdź się!

- B
- a) 90° , prosty b) 150° , rozwarty
- A
- 40°
- 110° , 70° , 110°

3. Własności wielokątów

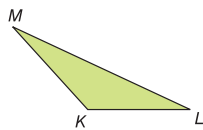
Sowa przypomina

- To są **trójkąty**. Każdy ma 3 wierzchołki i 3 boki.



Wierzchołki: A, B, C

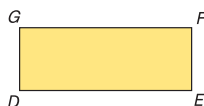
Boki to odcinki: AB, BC, CA



Wierzchołki: K, L, M

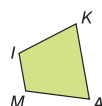
Boki to odcinki: KL, LM, MK

- To są **czworokąty**. Każdy ma 4 wierzchołki i 4 boki.



Wierzchołki: D, E, F, G

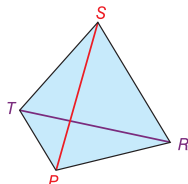
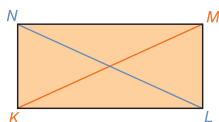
Boki to odcinki: DE, EF, FG, GD



Wierzchołki: M, A, K, I

Boki to odcinki: MA, AK, KI, IM

- Odcinki łączące przeciwległe wierzchołki **KM** i **LN** oraz **PS** i **RT** to **przekątne** czworokątów.



W czworokącie z każdego wierzchołka wychodzi tylko jedna przekątna.

71

Tematy lekcji:

1. Własności wielokątów (1 h)
2. Suma miar kątów wewnętrznych wielokątów (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- nazywa i rysuje wielokąty o podanej nazwie,
- wskazuje i liczy przekątne w wielokącie,
- stosuje twierdzenie o sumie kątów trójkąta,
- korzysta w zadaniach z wiedzy o sumie kątów w czworokącie,
- rozwiązuje zadania z zastosowaniem własności wielokątów,
- rozumie i interpretuje odpowiednie pojęcia matematyczne, zna podstawową terminologię,
- czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe.

Wskazówki metodyczne

Ten temat lekcji jest obszerny, obfitujący w nowe, istotne pojęcia i wiadomości, takie jak: kąt wewnętrzny wielokąta, nazwy wielokątów i ich przekątne, suma miar kątów wewnętrznych trójkąta i czworokąta. Własności omawianych figur płaskich uczniowie poznają z wykorzystaniem geometrii kartki. Jeżeli uczeń po odpowiednim złożeniu kolorowej kartki otrzyma omawianą figurę, a później wskaże jej własności, to temat ten będzie mu bliski, a kolorowe figury wklejone do zeszytu pomogą w jego zapamiętaniu.

Komentarz do Sowa przypomina

Przypominając wyróżnione w tekście pojęcia, uczniowie powinni pokazywać je na modelach odpowiednich wielokątów. Na tej lekcji każdy uczeń powinien mieć na ławce kartkę w kształcie kwadratu, ponieważ przekątną czworokąta łatwiej pokazać, składając kwadrat niż prostokąt.

Materiały dydaktyczne

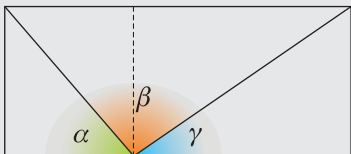
	Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności Geometria na płaszczyźnie → Kąty
	Plansza edukacyjna. Kąty i ich rodzaje
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 50–53
Zbiór zadań	s. 51–54

Komentarz do Sowa uczy

Wiedzę o figurach geometrycznych porządkują zawarte tutaj rysunki i ich opisy. Po wspólnym ich omówieniu proponujemy, aby każdy uczeń narysował odręcznie dowolny wielokąt i ustnie go opisał, wskazując na rysunku omawiane własności.

Komentarz do Przykładu 1.

W przykładzie pokazujemy sposób obliczania sumy miar kątów wewnętrznych trójkąta. Proponujemy, aby każdy uczeń otrzymał wycięty z papieru trójkąt, oznaczył poszczególne jego kąty wewnętrzne innym kolorem i złożył trójkąt tak, by otrzymać odcinek prostopadły do najdłuższego boku i wychodzący z wierzchołka kąta o największej mierze (to wysokość trójkąta opuszczona na najdłuższy bok, ale nie należy używać pojęcia, które nie zostało jeszcze wprowadzone). Po zaznaczeniu na najdłuższym boku trójkąta punktu będącego drugim końcem odcinka prostopadłego rozkładamy trójkąt i składamy go tak, aby każdy jego wierzchołek znalazł się w zaznaczonym punkcie. W ten sposób kąty wewnętrzne utworzą kąt półpełny. Złożony prostokąt uczniowie powinni wkleić do zeszytu. Posłuży on później podczas wprowadzania wzoru na pole trójkąta.



Sowa uczy

- Sąsiednie boki trójkąta tworzą kąt.

Wierzchołek A trójkąta to wierzchołek kąta BAC .

Kąty: $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ to **kąty wewnętrzne trójkąta ABC**.

W tym trójkącie $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ABC$ są kątami ostrymi, a $\sphericalangle BCA$ jest kątem prostym.

- Nazwa wielokąta zależy od liczby kątów wewnętrznych.

Pięciokąt mają 5 boków i 5 kątów wewnętrznych.

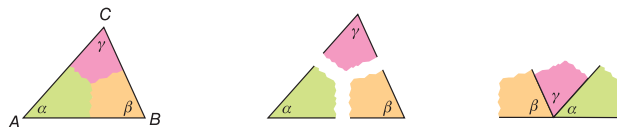
Sześciokąt mają 6 boków i 6 kątów wewnętrznych.

Możemy narysować jeszcze inne wielokąty o większej liczbie kątów i boków. Liczba kątów wewnętrznych jest taka sama jak liczba boków. Czasami nazwę wielokąta podaje się ze względu na liczbę boków: czworoboki, pięcioboki, sześcioboki itd.

Przykład 1.

Obliczmy sumę miar kątów wewnętrznych trójkąta.

Narysujmy na kartce trójkąt ABC i wycinajmy go. Każdy kąt wewnętrzny zaznaczmy innym kolorem. Podzielmy ten trójkąt na 3 części, a powstałe kąty ułożmy tak, aby wierzchołki znalazły się w jednym punkcie, jak na rysunku poniżej.



Kąty wewnętrzne trójkąta tworzą kąt półpełny: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.



Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° .

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- P; P; P
- kolejno: czworokąt, trójkąt, czworokąt, pięciokąt, czworokąt, sześciokąt
- B; C; E; G
- a) 55° b) 80° c) 65°
- a) 120° b) 35° , 35° c) 160° , 160° , 140° d) 30° , 60° , 120° e) 90° , 135° , 135° f) 60° , 130° , 60°
- kąty wierzchołkowe
- C
- a) 115° , 70° , 80° , 85° , 95° b) 70° , 50° , 90° , 110° , 110°
- a) P b) P c) F d) P

II. Figury geometryczne

Przykład 2.

Obliczmy sumę miar kątów wewnętrznych czworokąta.

W czworokącie $SEBA$ zaznaczymy przekątną SB .

Przekątna SB podzieliła czworokąt $SEBA$ na dwa trójkąty: $\triangle SEB$ i $\triangle BAS$.

Ponieważ suma miar kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi 180° , zatem:
w $\triangle SEB$: $\sphericalangle BSE + \sphericalangle SEB + \sphericalangle EBS = 180^\circ$,
w $\triangle BAS$: $\sphericalangle ASB + \sphericalangle BAS + \sphericalangle SBA = 180^\circ$.

Dodajmy kąty wewnętrzne trójkątów:

$$\underbrace{\sphericalangle BSE + \sphericalangle ASB}_{\alpha} + \underbrace{\sphericalangle SEB + \sphericalangle SBA}_{\beta} + \underbrace{\sphericalangle EBS + \sphericalangle SBA}_{\gamma} + \sphericalangle BAS = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360° .

**Przykład 3.**

W czworokącie dane są takie miary kątów, jakie zaznaczono na rysunku. Obliczmy miary kątów wewnętrznych: α , β , γ , δ .

$\sphericalangle MNO$ i $\sphericalangle ONA$ to kąty przyległe.

$$\beta + 85^\circ = 180^\circ, \beta = 95^\circ$$

$\sphericalangle EPD = \sphericalangle OPM$ to kąty wierzchołkowe.

$$\delta = 90^\circ$$

$\sphericalangle NOP$ i $\sphericalangle NOB$ to kąty przyległe.

$$\gamma + 100^\circ = 180^\circ, \gamma = 80^\circ$$

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta wynosi:

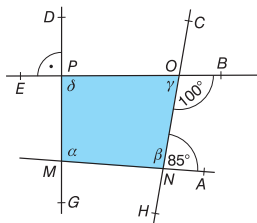
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

$$\alpha + 95^\circ + 80^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\alpha + 265^\circ = 360^\circ$$

$$\alpha = 95^\circ$$

Odpowiedź. Kąty wewnętrzne czworokąta mają miary: 95° , 95° , 80° , 90° .

**Komentarz do Przykładu 2.**

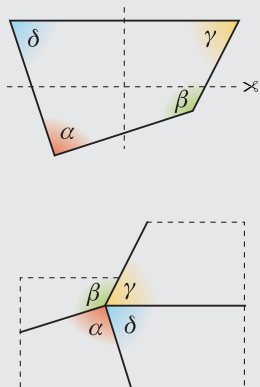
W tym przykładzie pokazujemy, jak w prosty sposób uzasadnić, że suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa kątowi pełnemu. Warto również zapytać uczniów o ich pomysły na wykazanie tej własności kątów wewnętrznych czworokąta. Można też wspólnie zastanowić się, czy na podstawie tego przykładu uda się obliczyć sumę miar kątów wewnętrznych, np. sześciokąta.

Komentarz do Przykładu 3.

W tym zadaniu podczas obliczania miar brakujących kątów wewnętrznych czworokąta korzystamy z wiadomości dotyczących kątów przyległych i wierzchołkowych. Zadanie pozwala uczniom utrwalić wiadomości o kątach, a także przygotowuje ich do wprowadzenia równań.

Komentarz do zadania 4.

Sposób rozcięcia i ułożenia otrzymanych części czworokąta przedstawiamy na rysunkach poniżej.



Komentarz do zadania 6.

To zadanie nie powinno sprawiać uczniom problemu. Swoją odpowiedź powinni oni uzasadnić i wykonać odpowiednie działanie. Próby uzasadniania są nauką dowodzenia. Dobrze, aby uczniowie potrafili to zrobić. Zadanie ma 2 rozwiązania: kwadrat lub prostokąt.

Komentarz do zadania 9.

Proponujemy, aby uczniowie uzasadniali wybór odpowiedzi, przytaczając odpowiednią własność czworokąta. Wskazani uczniowie mogą również podawać propozycje miar kątów wewnętrznych czworokąta, a pozostali oceniać, czy podane miary kątów są poprawne i dlaczego.



- 1 W trójkącie DEF miary dwóch kątów wewnętrznych są równe 10° i 70° . Trzeci kąt tego trójkąta ma miarę
A. 80° B. 10° C. 100° D. 20°
- 2 W trójkącie jeden kąt ma miarę 110° . Kąty ostre są równe i mają po
A. 70° B. 35° C. 45° D. 55°
- 3 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Jeżeli jeden kąt wewnętrzny trójkąta ma miarę 18° , a drugi jest o 106° większy, to trzeci kąt tego trójkąta ma miarę A / B. A. 48° B. 38°
Jeżeli jeden kąt wewnętrzny trójkąta ma miarę 30° , a drugi jest 2 razy większy, to trzeci kąt tego trójkąta ma miarę C / D. C. 90° D. 60°
- 4 Narysuj dowolny czworokąt. Oznacz i pokoloruj jego kąty. Skorzystaj ze sposobu zaprezentowanego w **Przykładzie 1.** i pokaż, że suma miar jego kątów wewnętrznych jest równa 360° .
- 5 Narysuj 2 różne czworokąty. Zmierz ich kąty wewnętrzne i oblicz ich sumę.
- 6 Czworokąt ma wszystkie kąty wewnętrzne równe. Ile stopni ma jeden kąt wewnętrzny czworokąta? Narysuj taki czworokąt i podaj jego nazwę.
- 7 Narysuj czworokąt, który ma:
a) 2 kąty proste, b) 2 kąty rozwarte.
- 8 Oblicz miarę czwartego kąta czworokąta, jeżeli miary pozostałych kątów wewnętrznych tego czworokąta są równe:
a) $60^\circ, 80^\circ, 100^\circ$, b) $110^\circ, 50^\circ, 90^\circ$.
- 9 Tomek narysował 2 czworokąty: *MOPS* oraz *KURS* i zmierzył ich kąty wewnętrzne. Sprawdź, czy wyniki pomiarów Tomka były prawidłowe. Zaznacz TAK lub NIE.
a) Kąty wewnętrzne czworokąta *MOPS* mają miary:
 $60^\circ, 100^\circ, 80^\circ, 120^\circ$. TAK / NIE
b) Kąty wewnętrzne czworokąta *KURS* mają miary:
 $95^\circ, 105^\circ, 50^\circ, 110^\circ$. TAK / NIE

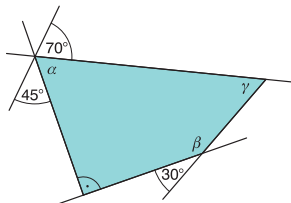
74

Odpowiedzi do zadań

1. C
2. B
3. BC
6. 90° ; prostokąt
8. a) 120° b) 110°
9. a) TAK b) TAK

II. Figury geometryczne

- 10 Narysuj pięciokąt $KWIAT$. Z każdego wierzchołka innym kolorem narysuj wszystkie przekątne. Co można zauważyć? Ile wszystkich przekątnych ma pięciokąt? Czy pamiętasz, że przekątna KA i AK to ta sama przekątna?
- 11 Narysuj wielokąt, który nie ma przekątnych. Podaj jego nazwę.
- 12 Zosia narysowała czworokąt $ABCD$. Kąt przyległy do kąta DAB ma miarę 100° , a kąt przyległy do kąta $ABC - 110^\circ$. Kąt wewnętrzny czworokąta o wierzchołku C jest o 30° większy od kąta prostego. Wykonaj rysunek pomocniczy i napisz na nim miary kątów wewnętrznych czworokąta.
- 13 Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta.



- 14 Narysuj sześciokąt i wszystkie przekątne wychodzące z jednego wybranego wierzchołka. Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

Z jednego wierzchołka wychodzą 3 przekątne.	P	F
Narysowane przekątne podzieliły sześciokąt na 4 trójkąty.	P	F
Suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta jest równa 720° .	P	F

- 15 Czy czworokąt może mieć 2 kąty wewnętrzne proste i 1 kąt rozwarty? Odpowiedź uzasadnij.
- 16 W czworokącie $ABCD$ kąt przy wierzchołku B ma miarę 2 razy większą, kąt przy wierzchołku $C - 4$ razy większą, a przy wierzchołku $D - 3$ razy większą niż kąt przy wierzchołku A . Podaj miary kątów tego czworokąta i narysuj go.

Komentarz do zadania 10.

Po przeczytaniu treści zadania warto zapytać o zasadność ostatniego pytania. Podczas rozwiązywania zadania proponujemy zwrócić uwagę na prawidłowość, że liczba przekątnych wychodzących z jednego wierzchołka dowolnego wielokąta jest o 3 mniejsza od liczby jego boków. Do tego wniosku uczniowie mogą dojść sami na podstawie rysunków kilku różnych wielokątów i ich przekątnych.

Komentarz do zadania 13.

Uczniowie powinni ustnie uzasadnić obliczenia miar poszczególnych kątów. Zadanie można podsumować pytaniem: *Z których własności kątów korzystaliśmy podczas rozwiązywania tego zadania?*

Takimi samymi umiejętnościami musi wykazać się uczeń podczas rozwiązywania zadań 6. i 9. z zeszytu ćwiczeń, s. 52 i s. 53. Inne ciekawe zadania dotyczące tego tematu znajdują się w zbiorze zadań.

Komentarz do zadania 15.

Jeżeli uczniowie mają problem z uzasadnieniem odpowiedzi, można zaproponować im narysowanie opisanego w zadaniu czworokąta.

Komentarz do zadania 16.

W zrozumieniu treści zadania, a następnie jego rozwiązaniu przyda się rysunek pomocniczy. Uczniowie powinni dostrzec, że miara kąta przy wierzchołku A jest miarą, do której odnosimy miary pozostałych kątów. Możemy zatem ją przyjąć jako jednostkową i dla jej oznaczenia użyć odcinka jednostkowego. Miary pozostałych kątów będziemy wówczas oznaczać odpowiednią wielokrotnością odcinka jednostkowego. Miara kąta przy wierzchołku:



Po wykonaniu odpowiednich obliczeń wyniki zapisujemy obok rysunków i sprawdzamy, czy spełniają one warunki zadania.

Odpowiedzi do zadań

10. 5
 11. trójkąt
 12. 80° , 70° , 120° , 90°
 13. $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 55^\circ$
 14. P, P, P
 15. tak
 16. 36° , 72° , 108° , 144°

Komentarz do A to ciekawe!

Wprowadziliśmy tutaj nowe pojęcie *wielokąt foremny*. Stosowanie tego określenia w odniesieniu do wielokątów o pewnych własnościach jest wygodniejsze niż opisywanie tych własności. Proponujemy pokazać uczniom, jak należy rysować sześciokąt foremny, a także zaprezentować, jak otrzymać ośmiokąt foremny. W tym celu przygotowujemy dla każdego ucznia koło. Po jego trzykrotnym złożeniu na pół, tak aby wcześniejsze linie zgięć się pokrywały, otrzymujemy na okręgu 8 punktów, które po połączeniu wyznaczają ośmiokąt foremny.

Komentarz do Wyzwania

Rysując sześciokąt w kole i prowadząc średnice łączące wierzchołki sześciokąta foremnego, dzielimy ten wielokąt na 6 identycznych trójkątów równobocznych. Każdy kąt wewnętrzny sześciokąta foremnego jest równy: $2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$. Można też skorzystać z zadania 14., w którym ocenialiśmy prawdziwość zdania dotyczącego sumy miar kątów wewnętrznych sześciokąta, i wykonać działanie: $720^\circ : 6 = 120^\circ$. Sześciokąt dzielimy na 2 czworokąty, prowadząc tylko jedną średnicę. W ośmiokącie foremnym przekątne przechodzące przez środek koła dzielą wielokąt na 8 trójkątów równoramiennych, zatem miara kąta wewnętrznego jest równa $(8 \cdot 180^\circ - 360^\circ) : 8$. Można też w ośmiokącie foremnym poprowadzić dwie prostopadłe przekątne, które podzielią go na 4 czworokąty. W każdym z nich kąt prosty nie jest kątem wewnętrznym ośmiokąta.

Uczniów mających problemy z nauką matematyki możemy zachęcić do obliczenia miary kąta wewnętrznego trójkąta i czworokąta foremnego oraz uzasadnienia swojego toku myślenia.

Komentarz do Sprawdź się!

W zadaniu 4. warto każdy wierzchołek wielokąta zaznaczyć innym kolorem, a następnie tym samym kolorem co wierzchołek zaznaczyć przekątną z niego wychodzącą. Po narysowaniu wszystkich przekątnych okazuje się, że każda jest narysowana dwoma kolorami. Zatem liczba wszystkich przekątnych jest równa połowie iloczynu liczby wierzchołków i liczby przekątnych wychodzących z jednego wierzchołka.



A to ciekawe!

Wśród wielokątów wyróżnijmy te, które mają **wszystkie kąty takiej samej miary i boki takiej samej długości**, np.



Są to **wielokąty foremne**.

Wokół siebie możesz poszukać figur, które mają kształt wielokątów foremnych. Zwróć uwagę na płytki w posadzkach lub niektóre okna w starych budynkach. A może przedmioty w kształcie wielokątów foremnych znajdziesz w swoim domu?

Odszukaj znaki drogowe mające kształt wielokąta foremnego. Jak nazywają się te znaki?

Wyzwanie

Oblicz sumę miar kątów wewnętrznych ośmiokąta foremnego przedstawionego w **A to ciekawe!** oraz miarę jednego kąta wewnętrznego sześciokąta foremnego.

Sprawdź się!

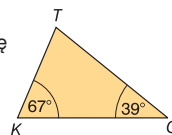
1. Narysuj 2 różne trójkąty. Zmierz ich kąty wewnętrzne. Oblicz sumę miar kątów wewnętrznych.

2. W trójkącie *KOT* kąt wewnętrzny *KTO* ma miarę
A. 64° B. 90° C. 76° D. 74°

3. W czworokącie *SOWA* miary trzech kątów wewnętrznych są równe: 105° , 70° , 83° . Oblicz miarę czwartego kąta tego czworokąta.

4. Narysuj dowolny czworokąt i pięciokąt. W każdym z nich narysuj wszystkie przekątne.

5. Czy trójkąt może mieć jeden kąt wewnętrzny prosty, a drugi rozwarty? Odpowiedź uzasadnij.



76

Odpowiedzi do zadań

A to ciekawe!

Trójkąt równoboczny – znaki ostrzegawcze; kwadrat – znaki informacyjne; ośmiokąt foremny – znak STOP.

Wyzwanie

Suma miar kątów wewnętrznych ośmiokąta foremnego wynosi 1080° ; a miara kąta wewnętrznego sześciokąta foremnego – 120° .

Sprawdź się!

2. D 3. 102° 5. nie

4. Obwód wielokąta

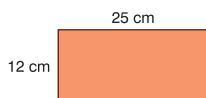
Sowa przypomina

Obwodem wielokąta nazywamy sumę długości wszystkich jego boków.

- Obliczanie obwodu prostokąta

Sposób I

$$\text{obwód} = 2 \cdot (25 \text{ cm} + 12 \text{ cm}) = 74 \text{ cm}$$



Sposób II

$$\text{obwód} = 2 \cdot 25 \text{ cm} + 2 \cdot 12 \text{ cm} = 74 \text{ cm}$$

- Obliczanie obwodu kwadratu

$$\text{obwód} = 4 \cdot 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$



Przykład 1.

Obliczmy obwód czworokąta KORA, w którym:

- $|KA| = 10 \text{ cm}$,
- bok AR jest 5 razy krótszy od boku KA,
- bok KO jest 3 razy dłuższy od boku AR,
- bok OR jest o 3 cm dłuższy od boku KO.

Uwaga. Literą L zastąpimy wyraz „obwód”.

Wykonajmy rysunek pomocniczy i obliczenia:

$$|KA| = 10 \text{ cm}$$

$$|AR| = 10 : 5 = 2 \text{ [cm]}$$

$$|KO| = 3 \cdot 2 = 6 \text{ [cm]}$$

$$|OR| = 6 + 3 = 9 \text{ [cm]}$$

$$\begin{aligned} L &= |KA| + |AR| + |KO| + |OR| = \\ &= 10 + 2 + 6 + 9 = 27 \text{ [cm]} \end{aligned}$$



Odpowiedź. Obwód czworokąta KORA jest równy 27 cm.

Tematy lekcji:

- Obliczanie obwodu wielokąta (1 h)
- Zastosowanie obliczeń obwodu wielokąta w zadaniach (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- zna pojęcie obwodu wielokąta i stosuje je w zadaniach,
- oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków,
- oblicza obwód wielokąta na podstawie podanych zależności między bokami,
- zamienia i poprawnie stosuje jednostki długości do obliczenia obwodu wielokąta,
- czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe,
- rozwiązuje zadania tekstowe na obliczanie obwodów wielokątów.

Komentarz do Przykładu 1.

Podczas rozwiązywania tego zadania trzeba uwzględnić zależności między bokami wielokąta i skorzystać z porównywania różnicowego i ilorazowego.

W tym przykładzie po raz pierwszy pojawia się oznaczenie obwodu za pomocą litery L. W ten sposób zapisuje się go w klasach starszych i w tablicach matematycznych. Przez pewien czas warto zwracać uwagę uczniom na taki zapis obwodu.

77

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
	Plansza edukacyjna. Pola i obwody wielokątów Plansza edukacyjna. Jednostki
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 54–56
Zbiór zadań	s. 54–56

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- $L_{\text{trójkąta } ATU} = 53 \text{ cm}$, $L_{\text{czworokąta } CARO} = 99 \text{ cm}$
- a) P b) F c) P d) P e) P
- a) boki trójkąta 2 cm; 2,6 cm; 2,6 cm, $L = 7,2 \text{ cm}$
b) boki trójkąta 3,3 cm; 1,9 cm; 2,7 cm, $L = 7,9 \text{ cm}$
c) boki trójkąta 2,5 cm; 2,7 cm; 4,3 cm, $L = 9,5 \text{ cm}$
- a) boki czworokąta 2,5 cm; 1,9 cm; 2,4 cm; 1,4 cm, $L = 8,2 \text{ cm}$ b) boki czworokąta 2,2 cm; 3 cm; 1,4 cm; 3,7 cm; $L = 10,3 \text{ cm}$
- a) 7 cm b) 10 cm c) 10 cm, 10 cm
- a) $|WI| = 14 \text{ cm}$; $|TI| = 28 \text{ cm}$; $|WT| = 15 \text{ cm}$ 5 mm; $L = 57 \text{ cm}$ 5 mm b) $|AM| = 120 \text{ cm}$; $|MO| = 60 \text{ cm}$; $|AR| = 40 \text{ cm}$; $L = 295 \text{ cm}$
- C; B; A i D; B i C

Komentarz do Przykładu 2.

Dobrze byłoby, aby na początku podać uczniom tylko treść zadania. Uczniowie powinni zastanowić się, od czego należy zacząć jego rozwiązywanie. Ponieważ dane w tym zadaniu są wyrażone w różnych jednostkach, dlatego najpierw trzeba je ujednolicić. Uczniowie powinni pamiętać, żeby rozwiązywanie zadania rozpoczynać od zwrócenia uwagi na jednostki. Rozwiązanie zadania jest przedstawione w postaci równości. Proponujemy przeanalizować wspólnie z uczniami jego rozwiązanie lub zlecić uczniom samodzielne rozwiązanie zadania dowolnym sposobem.

Komentarz do zadania 2.

Zadanie ma wiele rozwiązań. Uczniowie mogą je znajdować metodą prób i błędów lub zauważyć, że w punkcie b) suma długości dwóch boków prostokąta jest równa 11 cm (połowa obwodu). Łatwiej bowiem znaleźć długości boków, gdy znamy ich sumę. W zadaniu wystarczy, że uczniowie podadzą jedną parę liczb spełniających warunki zadania i wykonają odpowiedni rysunek. Można jednak zachęcić ich do podania wszystkich rozwiązań punktu b), przy założeniu że długości boków wyrażone w centymetrach są liczbami naturalnymi. Powinni wówczas otrzymać 5 odpowiedzi, które zapisujemy w tabelce (jak poniżej).

I bok	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
II bok	10 cm	9 cm	8 cm	7 cm	6 cm



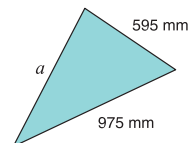
Przykład 2.

Jeden bok trójkąta ma 9 dm 75 mm długości, drugi jest od niego o 3 dm 8 cm krótszy. Obwód tego trójkąta jest równy 24 dm 15 mm. O ile centymetrów krótszy jest drugi bok trójkąta od trzeciego boku?

Rozwiązanie zadania zaczniemy od wyrażenia danych w milimetrach:
 długość pierwszego boku: 9 dm 75 mm = 975 mm
 obwód (L): 24 dm 15 mm = 2415 mm
 3 dm 8 cm = 380 mm

Obliczmy długość drugiego boku trójkąta:
 975 mm – 380 mm = 595 mm

Wykonajmy rysunek pomocniczy, na którym długość trzeciego boku oznaczmy literą a .



Obliczmy długość trzeciego boku ze wzoru na obwód trójkąta:

$$975 + 595 + a = 2415 \quad \text{Dodajemy długości dwóch boków.}$$

$$1570 + a = 2415 \quad \text{Obliczamy drugi składnik sumy.}$$

$$a = 2415 - 1570$$

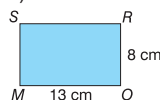
$$a = 845 \text{ [mm]}$$

Obliczmy, o ile krótszy jest drugi bok trójkąta od trzeciego boku:
 845 – 595 = 250 [mm] 250 mm = 25 cm

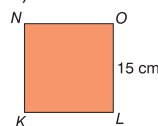
Odpowiedź. Drugi bok trójkąta jest o 25 cm krótszy od trzeciego boku.

1 Oblicz obwód wielokąta.

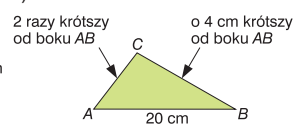
a)



b)



c)



2 Narysuj:

- kwadrat o obwodzie 14 cm,
- prostokąt o obwodzie 22 cm.

3 Działka ma kształt prostokąta. Jeden bok ma długość 22 m, a drugi jest o 6 m dłuższy. Jaki jest obwód działki?

78

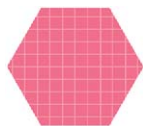
Odpowiedzi do zadań

- a) 42 cm b) 60 cm c) 46 cm
- a) bok kwadratu: 3 cm 5 mm
b) wymiary prostokąta, np. 4 cm × 7 cm
- 100 m

II. Figury geometryczne

- 4 Obwód prostokąta ma 80 cm, a szerokość 18 cm. Długość jest równa
A. 22 cm B. 62 cm C. 18 cm D. 20 cm

- 5 Maciek wyciął sześciokąt foremny, czyli sześciokąt o równych bokach i kątach równej miary. Bok sześciokąta miał 15 cm 5 mm długości. Oblicz obwód tej figury.



- 6 Obwód trójkątnej działki jest równy 1150 dm. Jeden bok ma 41 m długości, a drugi jest od niego o 7000 mm krótszy. Oblicz długość trzeciego boku trójkąta.

- 7 Jeden z boków trójkąta ma długość 55 dm, a drugi jest od niego 2 razy dłuższy. Trzeci bok tego trójkąta jest o 2500 mm krótszy od drugiego boku.
Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Trzeci bok trójkąta ma długość A / B. A. 75 dm B. 85 dm
Obwód trójkąta ma długość C / D. C. 25 m D. 19 m

- 8 Obwód trójkąta KOT jest równy 17 dm. Bok KO jest równy 700 mm, a bok OT jest od niego o 30 cm krótszy. Oblicz długość boku KT .

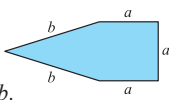
- 9 Na ogrodzenie kwadratowej działki zużyto 176 metrów bieżących siatki. Szerokość furtki i bramy jest równa 4 m. Długość jednego boku tej działki wynosi
A. 44 m B. 86 m C. 88 m D. 45 m



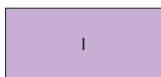
- 10 Obwód prostokąta jest równy 32 cm. Jeden bok jest 3 razy dłuższy od drugiego. Boki tego prostokąta są równe
A. 15 cm, 5 cm B. 7 cm, 9 cm
C. 12 cm, 4 cm D. 6 cm, 10 cm



- 11 Suma długości trzech jednakowych boków pięciokąta oznaczonych na rysunku literą a jest równa 24 cm i jest ona 2 razy mniejsza od obwodu tej figury. Dwa pozostałe boki pięciokąta, oznaczone na rysunku literą b , też są równe. Oblicz długości boków tego pięciokąta.



- 12 Która figura ma większy obwód? Odpowiedź uzasadnij.



Komentarz do zadań 6.–8.

W tych zadaniach szczególnie trzeba zwrócić uwagę, czy uczniowie prawidłowo zamieniają jednostki długości. Można zachęcić ich do wykonania rysunku pomocniczego, na którym zapiszą długości boków w jednakowych, wybranych przez siebie, jednostkach.

Komentarz do zadań 9. i 10.

Gdyby uczniowie mieli problem z rozwiązaniem tych zadań, powinni poszukać pomocy w przedstawionych wcześniej przykładach.

Komentarz do zadania 11.

W tym zadaniu wprowadziliśmy oznaczenia literowe po to, aby uczniowie przyzwyczaili się do takich oznaczeń. Nie wymagamy od uczniów zapisywania wyrażenia algebraicznego ani sami go nie stosujemy. Na to jest stanowczo za wcześnie. Trzeba zachęcić uczniów, aby po narysowaniu w zeszytach rysunków pomocniczych, obok boków wielokąta zapisali ich długości, a następnie sprawdzili, czy spełniają one warunki zadania.

Komentarz do zadania 12.

Proponujemy zapytać uczniów, kto z nich uważa, że obwód figury I jest większy. W celu wykazania równości obwodów uczniowie powinni ułożyć z patyczków figurę II i zastanowić się, w jaki sposób utworzyć z niej figurę I. Przesuwając patyczki w bok i do góry, zweryfikują pierwsze błędne wrażenie lub upewnią się, że intuicja ich nie zawiodła.

Odpowiedzi do zadań

4. A
5. 93 cm
6. 40 m
7. BC
8. 6 dm
9. D
10. C
11. $a = 8$ cm, $b = 12$ cm
12. są równe

Komentarz do zadania 13.

Przed przystąpieniem do rysowania pięciokąta foremnego należy omówić rysunek z podręcznika. Zaznaczone w narysowanym pięciokącie przekątne podzieliły go na 3 trójkąty równoramienne. Rysowanie trójkątów należy rozpocząć od narysowania kąta 108° . Warto wrócić do rysowania pięciokąta, gdy uczeń pozna konstrukcję trójkąta z 3 danych odcinków.

Komentarz do zadań 14. i 15.

W tych zadaniach uczniowie obliczają prędkość lub drogę, korzystając z umiejętności obliczania obwodu pięciokąta. Widzą, jak kolejne wiadomości i umiejętności matematyczne wzajemnie się uzupełniają, pomagając w rozwiązywaniu problemów i zadań, jakie towarzyszą nam na co dzień.

Komentarz do Sprawdź się!

Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań 3. i 4. przeprowadzamy ćwiczenia rachunku pamięciowego w zakresie zamiany jednostek długości. Po przeczytaniu treści zadania 4. uczniowie powinni zauważyć, że dane występują w różnych jednostkach. Podczas rozwiązywania tych zadań należy korzystać z wykonanych wcześniej rysunków pomocniczych.



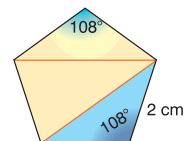
Na podstawie poniższej informacji rozwiąż zadania 13.–15.

Siedziba Departamentu Obrony USA mieści się w budynku nazywanym Pentagonem. Budynek ten w podstawie ma pięciokąt o równych bokach oraz kątach tej samej miary. Taki pięciokąt nazywa się pięciokątem foremnym. Jego bok ma 280 m długości. Czy wiesz, co oznacza cząstka *penta*?

- 13 Narysuj pięciokąt foremny, którego każdy bok ma 2 cm, a każdy kąt wewnętrzny – 108° .

- 14 Adam planuje przejść w czasie 28 min drogę równą obwodowi podstawy Pentagonu. Z jaką prędkością średnią musi iść Adam? Wynik podaj w $\frac{m}{min}$.

- 15 Robert obliczył, że przejście drogi równej długości wszystkich korytarzy w budynku Pentagonu zajęłoby mu 420 min, gdyby szedł z prędkością średnią $4 \frac{km}{h}$. Jaką długość mają wszystkie korytarze w tym budynku?



Sprawdź się!

- Jeden bok trójkąta ma 8 cm długości, a pozostałe boki są równe i mają po 15 cm. Obwód tego trójkąta jest równy
A. 38 cm B. 15 cm C. 23 cm D. 8 cm
- Pan Adam wyznaczył na działce miejsce w kształcie kwadratu, aby posadzić tam warzywa. Wokół postawił płotek o długości 42 m. Oblicz długość boku tego warzywnika.
- Jeden bok prostokąta ma długość 65 cm, a drugi jest 2 razy dłuższy. Oblicz obwód tego prostokąta. Zapisz ten obwód w mm, cm, dm.
- Prostokąt o wymiarach 6 dm i 420 mm oraz kwadrat i sześciokąt o jednakowych bokach mają taki sam obwód. Oblicz długości boków kwadratu i sześciokąta.
- W czworokącie MEWA długość boku ME jest równa 3 cm, bok EW jest o 2 cm dłuższy od boku ME, bok MA jest połową boku EW, a bok WA jest o 1 cm krótszy od boku EW. Wykonaj rysunek pomocniczy i oblicz obwód czworokąta MEWA.

Odpowiedzi do zadań

14. 50 m/min

15. 28 km

Sprawdź się!

1. A

2. 10 m 50 cm

3. 3900 mm, 390 cm, 39 dm

4. bok kwadratu: 51 cm, bok sześciokąta: 34 cm

5. obwód: 14 cm 5 mm

5. Figury w skali

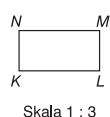
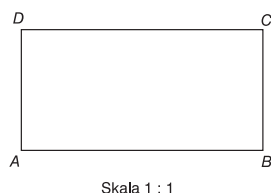
Sowa przypomina

- Skala 1 : 1 Skala 2 : 1



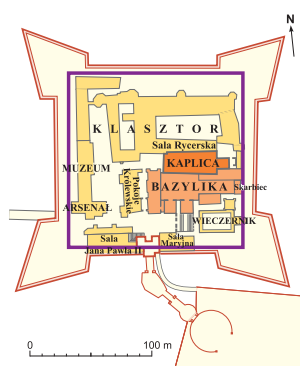
Wymiary drugiej igły są 2 razy większe niż pierwszej.

- Wymiary prostokąta $ABCD$ zostały zmniejszone 3 razy. Prostokąt $ABCD$ został narysowany w skali 1 : 3 i nazwano go prostokątem $KLMN$.



- Na planie przedstawiono Jasną Górę* w Częstochowie. Wyróżniony obszar ma kształt kwadratu.

Plan wykonano w skali 1 : 4000. Oznacza to, że każdy przedstawiony element na planie jest w rzeczywistości 4000 razy większy. Przekątna wyróżnionego kwadratu jest odcinkiem o długości około 5 cm. W rzeczywistości jest to odległość równa około:
 $4000 \cdot 5 \text{ cm} = 20\,000 \text{ cm} = 200 \text{ m}$



* Główny ośrodek kultu maryjnego w Polsce, dawniej także twierdza z czterema narożnymi bastionami – miejsce, gdzie znajduje się cudowny obraz Matki Boskiej Częstochowskiej.

Tematy lekcji:

- Figury w skali (1 h)
- Zastosowanie w zadaniach figury w skali (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- rysuje prostokąty w podanej skali,
- konstruuje trójkąty w podanej skali,
- oblicza długości boków wielokąta w podanej skali,
- oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali, i odwrotnie,
- stosuje wiadomości i umiejętności dotyczące skali do czytania informacji na planie i mapie,
- czyta ze zrozumieniem tekst zawierający informacje liczbowe i dostrzega zależności między podanymi informacjami,
- ustala możliwość zbudowania trójkąta (na podstawie nierówności trójkąta),
- konstruuje trójkąty o danych bokach,
- rozwiązuje zadania tekstowe z zastosowaniem skali.

Wskazówki metodyczne

- Skala jest tematem trudnym. Łączy się z zamianą jednostek i wykonywaniem działań na dużych liczbach. Jeżeli uczniowie będą pracować systematycznie i często wracać do tego zagadnienia, znacznie łatwiej przyswoją ten temat. W klasie 5 skala jest tematem powtórzeniowym. Wszystkie proponowane przez nas zadania powinny zostać wykonane. Część z nich można wykonać ustnie.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 8.

81

Materiały dydaktyczne



Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
 Obliczenia praktyczne → Skala i wielkości proporcjonalne



Kartkówka 8
 Karta pracy. Skala
 Plansza edukacyjna. Skala
 Plansza edukacyjna. Pola i obwody wielokątów
 Plansza edukacyjna. Jednostki

Inne

wsipnet.pl
 klasowki.pl

Zeszyt ćwiczeń, cz. 1

s. 57–59

Zbiór zadań

s. 57–59

Komentarz do Przykładu 1.

W przykładzie pokazujemy konstrukcję trójkąta z 3 danych odcinków. Zastosowane w konstrukcji i opisach kolory powinny ułatwić jej zrozumienie i zapamiętanie. Po analizie przykładu proponujemy narysować pięciokąt foremny z zadania 16., s. 80, by pokazać sposób wykorzystania poznanej w tym przykładzie umiejętności.

Po narysowaniu kąta o mierze 108° przeprowadzamy konstrukcję, do której uczniowie sami wyznaczają kolejne kroki.

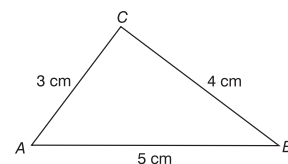
1. Na ramionach kąta odkładamy cyrklem odcinki o długości 2 cm i otrzymane punkty łączymy odcinkiem d .

2. Konstruujemy trójkąt o podstawie d oraz ramionach o długości 2 cm i d .

3. Konstruujemy trójkąt, którego podstawą jest odcinek d , a ramiona to odcinki o długości 2 cm każdy.

Przykład 1.

Trójkąt, taki jak na rysunku obok, narysujmy za pomocą cyrkla i linijki w skali 1 : 1.



1. Kreślimy odcinek AB o długości 5 cm

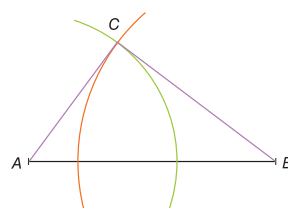


2. Kreślimy łuk okręgu o środku w punkcie B i promieniu 4 cm.



3. Kreślimy łuk okręgu o środku w punkcie A i promieniu 3 cm. Punkt przecięcia łuków oznaczamy C .

Zwróćmy uwagę, by po odmierzeniu odcinka i rozstawieniu nóżek cyrkla na odpowiednią odległość nie zmienić ich położenia.



4. Punkt C łączymy z punktami A i B .



Rysowanie figury z użyciem cyrkla i linijki bez podziałki nazywa się konstrukcją.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- a) skale, w których rysunki są pomniejszone, to 1 : 7; 1 : 10; 1 : 50 000; 1 : 1 000 000; skale, w których rysunki są powiększone, to 5 : 1; 15 : 1; 20 : 1 b) B; D
- od największego kwadratu 2 : 1; 1 : 1; 1 : 2; 1 : 3
- skale kolejno wierszami 3 : 1; 2 : 1; 1 : 1; 1 : 2; 1 : 3
- skale kolejno do podanych wymiarów 1 : 1; 5 : 1; 1 : 3; 1 : 4; 50 : 1; 1 : 6
- wymiary trójkąta: 3 cm $\times$ 2 cm $\times$ 3 cm
- a) 1 : 5000 b) 5000 c) 50 d) 5 e) 25
- B
- A; D; F

Komentarz do zadań 7.–11.

Rozpoczynając rozwiązywanie tego bloku zadań, należy zwrócić uwagę uczniów na fakt, że na początku musimy ustalić, jakiej rzeczywistej odległości odpowiada 1 cm na tej mapie. Po rozwiązaniu zadania 10. porównujemy odpowiedzi różnych uczniów i zadajemy pytanie: *Co łączy wszystkie odpowiedzi?*

Komentarz do zadania 12.

To najtrudniejszy typ zadania ze skalą. Przy danym odcinku na mapie i rzeczywistej odległości trzeba ustalić skalę. Proponujemy omówić z uczniami różne sposoby rozwiązania tego zadania.



- 6 Brzoza wydziela substancje, które powodują niszczenie szkodliwych bakterii w powietrzu w odległości 3 m od pnia. Piotr chce posadzić 5 brzoź na działce w kształcie kwadratu o boku 20 m. Wykonaj plan działki w skali 1 : 200. Zaznacz na planie punkty, w których można posadzić brzozy. Pokoloruj obszar wokół brzoź, gdzie są niszczone bakterie.

Skorzystaj z mapy województwa podlaskiego i rozwiąż zadania 7.–11.

- 7 Skala 1 : 2 500 000 oznacza, że 1 cm na mapie to w rzeczywistości
A. 2 km 500 m B. 250 km
C. 25 km D. 250 m
- 8 Zmierz na mapie odległość w linii prostej między Białymstokiem a Wysokiem Mazowieckim. Jaka to odległość w rzeczywistości?
- 9 Jaka jest rzeczywista odległość w linii prostej między Łomżą a Mońkami?
- 10 Znajdź na mapie 2 miasta, które w rzeczywistości są oddalone o 25 km. Porównaj swoją odpowiedź z odpowiedzią innych osób w klasie.
- 11 Wyszukaj na mapie 2 miasta oddalone od siebie o 3 cm. Ile to kilometrów w rzeczywistości?



- 12 Rzeczywista odległość w linii prostej między Łomżą a Sokółką jest równa 100 km. Na pewnej mapie odległość ta jest równa 5 cm. W jakiej skali jest wykonana ta mapa?

Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

A. 1 : 200 000,	ponieważ	I. 1 cm na tej mapie to 20 km w terenie.
B. 1 : 2 000 000,		II. $1\ 000\ 000 : 5 = 200\ 000$.

Odpowiedzi do zadań

6. bok działki w skali: 10 cm
7. C
8. 50 km
9. 55 km
10. np. Łomża i Zambrów
11. np. Augustów i Białystok; 75 km
12. B, I

II. Figury geometryczne

Na podstawie poniższej informacji rozwiąż zadania 13.–15.

Półwysep Helski, którego długość jest równa 35 km, przedstawiono na mapie w skali 1 : 500 000.

- 13 Długość Półwyspu Helskiego na tej mapie wynosi
A. 10 cm B. 7 cm
C. 5 cm D. 3 cm

- 14 Na półwyspie w odległości 10 km od siebie leżą Kuźnica i Jurata. Jaka jest odległość między tymi miejscowościami na tej mapie?

- 15 Odcinek łączący Chalupy i Hel na tej mapie jest równy 6 cm. Jaka jest w rzeczywistości odległość w linii prostej między tymi miejscowościami?



Półwysep Helski

 Sprawdź się!

- Kwadrat o boku 8 dm narysuj w skali 1 : 10. Oblicz obwód narysowanego kwadratu.
- Prostokąt ma wymiary 750 cm × 375 cm. Jego obwód w skali 2 : 1 jest równy
A. 1125 cm B. 45 m C. 220 dm D. 225 dm
- Trójkąt MAK ma wymiary: 8 cm, 6 cm, 5 cm. Skonstruuj trójkąt MAK w skali 1 : 2.
- Harcerze schowali list w odległości 4 m od drzewa. Wykonaj rysunek w skali 1 : 200. Zaznacz miejsca, w których można szukać listu. Jak nazywa się narysowana figura?
- Tatrzarska trasa z Hali Ornak do Smreczyńskiego Stawu ma długość 1 km 300 m. Na planie Tomka długość tej trasy jest równa 20 cm, a na planie Ali – 26 cm.
a) W jakiej skali wykonał plan Tomek, a w jakiej wykonała plan Ala?
b) Tomek z Alą przeszli tę trasę w ciągu 30 min. Z jaką prędkością średnią się poruszali?
O której godzinie rozpoczęli wędrówkę, jeżeli do Smreczyńskiego Stawu doszli o godz. 10.16?



Ornak

85

Komentarz do zadań 13.–15.

Ten blok zadań umożliwia sprawdzenie opanowania umiejętności obliczania długości rzeczywistej i długości odcinka na mapie przy danej skali. Dzielimy klasę na 3 grupy (np. rzędy ławek). Każda grupa rozwiązuje jedno z zadań w określonym przez nauczyciela czasie. Później wybrany uczeń przedstawia swoje rozwiązanie na forum klasy, a pozostali oceniają poprawność oraz weryfikują swoje wyniki.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadanie 5. jest zadaniem rozszerzonej odpowiedzi. Pozwala sprawdzić umiejętności uczniów dotyczące nie tylko skali, lecz także prędkości i czasu. Jest zadaniem trudnym i wymaga ustalenia kolejnych kroków jego rozwiązywania.

W punkcie b) wspólnie z uczniami ustalamy, że odpowiednią do obliczeń jednostką prędkości będzie $\frac{\text{m}}{\text{min}}$, a wynik można oszacować.

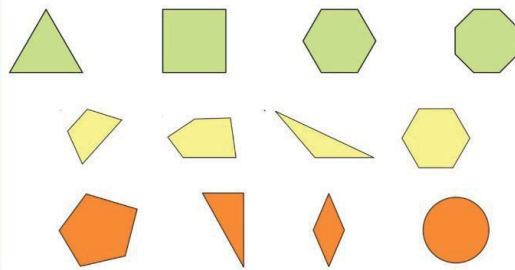
Odpowiedzi do zadań

13. B
14. 2 cm
15. 30 km

Sprawdź się!

1. 32 cm
2. B
3. wymiary trójkąta w skali: 4 cm, 3 cm, 2 cm 5 mm
4. okrąg
5. a) Tomek: 1 : 6500, Ala: 1 : 5000 b) 2600 m/h; o 9.46

Jakie to wielokąty?



Multibook ➔ Ilustracja interaktywna: Rozpoznawanie wielokątów

Tematy lekcji:

- 1.–2. Powtórzenie wiadomości i utrwalenie umiejętności: Figury geometryczne (2 h)
3. Praca klasowa 2 (1 h)
4. Omówienie wyników i poprawa pracy klasowej (1 h)

Cele lekcji

Wybrane cele lekcji z danego rozdziału odpowiednie do rozwiązywanych zadań.

Wskazówki metodyczne

- Podczas planowania lekcji powtórzeniowej z tego działu warto wziąć pod uwagę potencjał intelektualny klasy i wypracowaną samodzielność uczniów. Uczniowie powinni wykonać jak najwięcej ćwiczeń z wykorzystaniem przyrządów.
- Pojęcia związane z wielokątami i ich własnościami zostaną dobrze opanowane, gdy będziemy korzystali z geometrii kartki. Dużą część proponowanych przez nas zadań można wykonać w pamięci.

Komentarz do zadania 2.

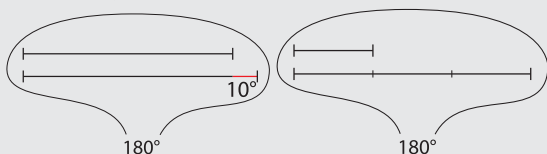
Podczas omawiania tego zadania warto odwołać się do zadania 9. ze s. 60, gdyż umiejętność rysowania z wykorzystaniem kartek odcinków i prostych zarówno równoległych, jak i prostopadłych przydaje się w nauce matematyki.

Komentarz do zadań 9. i 10.

Podczas rozwiązywania tych zadań zachęcamy uczniów do wykonania rysunków pomocniczych, podobnych do tych, które wykonywaliśmy podczas obliczeń różnicowych i ilorazowych.

(zadanie 9.)

(zadanie 10.)



Komentarz do zadania 12.

Zadanie ma wiele rozwiązań. Należy zwrócić uwagę na rozwiązania uczniów, gdyż mogą się one różnić zarówno długością odcinków, jak i wzajemnym ich położeniem.

Zadania utrwalające

1. Dane są punkty B , U , K , które nie leżą na jednej prostej. Narysuj wszystkie proste, które przechodzą przez każde 2 wymienione punkty, a następnie prostą a prostopadłą do prostej UK oraz prostą b równoległą do prostej UK . Określ wzajemne położenie prostych a i b .
2. Narysuj półprostą AB , odcinek CD oraz proste a , b , takie że $a \parallel b$.
3. Narysuj proste przecinające się tak, by jeden z utworzonych kątów miał miarę 40° . Jakie są miary pozostałych kątów? Wyjaśnij, dlaczego.
4. Narysuj prostą a oraz punkt B poza tą prostą, a następnie odcinek BC o długości równej odległości punktu B od prostej a .
5. Narysuj kąty o miarach: 65° , 135° , 90° , 170° . Nazwij te kąty. Pod każdym z nich napisz, jaki to rodzaj kąta.
6. Narysuj proste równoległe odległe od siebie o 1 cm 5 mm.
7. Zapisz wyrażenia w podanych jednostkach.
a) w metrach: 700 cm, 2 km, b) w centymetrach: 230 mm, 19 dm.
8. Narysuj kąty przyległe, z których jeden ma miarę 75° . Podaj miarę drugiego kąta.
9. Dane są kąty przyległe, z których jeden jest o 10° większy od drugiego. Jakie miary mają te kąty?
10. Dane są kąty przyległe, z których jeden jest 3 razy większy od drugiego. Jakie miary mają te kąty? Narysuj te kąty.
11. Narysuj dowolny trójkąt i czworokąt, a następnie zaznacz kolorem:
a) niebieskim – boki każdej figury, b) żółtym – wierzchołki,
c) czerwonym – kąty wewnętrzne, d) brązowym – przekątne.
12. Narysuj łamaną o pięciu bokach i długości 10 cm 5 mm.

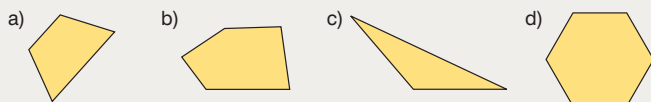
86

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie ➔ Wielokąty i ich własności Geometria na płaszczyźnie ➔ Kąty Geometria na płaszczyźnie ➔ Proste i odcinki Obliczenia praktyczne ➔ Skala i wielkości proporcjonalne
	Praca klasowa 2 Plansza edukacyjna. Kąty i ich rodzaje Plansza edukacyjna. Pola i obwody wielokątów Plansza edukacyjna. Skala Plansza edukacyjna. Jednostki Karta pracy. Skala
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 43–59
Zbiór zadań	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 44–59

II. Figury geometryczne

13 Podaj nazwę każdego wielokąta.



14 Czy te kąty mogą być kątami wewnętrznymi trójkąta?

- a) $30^\circ, 90^\circ, 60^\circ$ b) $126^\circ, 31^\circ, 23^\circ$ c) $85^\circ, 45^\circ, 55^\circ$

15 Czy te kąty mogą być kątami wewnętrznymi czworokąta?

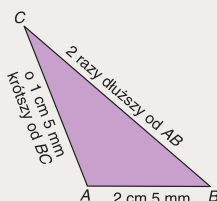
- a) $45^\circ, 110^\circ, 35^\circ, 170^\circ$ b) $90^\circ, 120^\circ, 40^\circ, 120^\circ$ c) $58^\circ, 130^\circ, 72^\circ, 100^\circ$

16 Skonstruuj trójkąt o podanych bokach.

- a) 4 cm, 4 cm, 7 cm
b) 5 cm, 5 cm, 5 cm
c) 3 cm, 4 cm, 5 cm

17 Na rysunku obok przedstawiono trójkąt ABC.

- a) Oblicz obwód tego trójkąta.
b) Jakie wymiary będzie miał ten trójkąt w skali 4 : 1?



18 Dany jest kwadrat o boku 6 cm i prostokąt o bokach 6 cm i 9 cm. Narysuj te figury w skali 1 : 3. Oblicz obwody narysowanych figur.

19 Prostokątna działka ma wymiary 50 m $\times$ 120 m.

- a) Jaki jest obwód tej działki?
b) Jakie wymiary ma ta działka na planie w skali 1 : 500?

20 Na planie wykonanym w skali 1 : 200 taras w kształcie prostokąta ma wymiary 12 cm $\times$ 9 cm. Oblicz rzeczywiste wymiary i obwód tego tarasu.

21 Plac zabaw ma kształt kwadratu o boku 40 m. Jaką długość ma bok tego placu na planie w skali 1 : 250?

22 Działka ma kształt prostokąta o bokach 60 m i 80 m. Na planie długości boków tej działki są równe 15 cm i 20 cm. W jakiej skali został wykonany ten plan?

Komentarz do zadań 14. i 15.

Uczniowie powinni ustnie uzasadnić swoje odpowiedzi. W razie potrzeby szukają pomocy, analizując Przykład 1., s. 72, i Przykład 2., s. 73.

Komentarz do zadań 20. i 21.

Po rozwiązaniu tych zadań zachęcamy uczniów bardzo dobrych i dobrych, aby w zadaniu 21. wybrali inną realną skalę i rozwiązali je w takiej skali, z kolei w zadaniu 22. ponownie obliczyli skalę dla zaproponowanych przez nich długości boków.

Odpowiedzi do zadań

1. $a \perp b$ 3. $140^\circ, 40^\circ, 140^\circ$

5. ostry, rozwarty, prosty, rozwarty

7. a) 7 m, 2000 m b) 23 cm, 190 cm

8. 105° 9. $85^\circ, 95^\circ$ 10. $45^\circ, 135^\circ$

13. a) czworokąt b) pięciokąt c) trójkąt d) sześciokąt

14. a) tak b) tak c) nie

15. a) tak b) nie c) tak

17. a) 11 cm b) 10 cm, 20 cm, 14 cm

18. obwód kwadratu: 8 cm, obwód prostokąta: 10 cm

19. a) 340 m b) 10 cm $\times$ 24 cm20. 24 m $\times$ 18 m, obwód tarasu: 84 m

21. 16 cm

22. 1 : 400



Komentarz do zadania 1.

W tym zadaniu zwracamy uwagę na to, że jeżeli $AB \perp BC$, to każdy odcinek równoległy do odcinka AB jest prostopadły do odcinka BC , a każdy odcinek prostopadły do odcinka AB jest równoległy do odcinka BC . W sprawdzaniu, czy odcinki są prostopadłe lub równoległe, przydatne są rysunki umieszczone przy zadaniach 8. i 9., s. 61–62.

Komentarz do zadania 2.

Aby wskazać poprawną odpowiedź, czyli parę wielkości, które nie są równe, uczniowie muszą wyrazić obie wielkości w takiej samej jednostce. Zamianę jednostek powinni wykonać w pamięci.

Komentarz do zadania 3.

Jeżeli zadanie będzie rozwiązywane ustnie, proponujemy, aby po wskazaniu poprawnej odpowiedzi wspólnie z uczniami zastanowić się, jaką cechą kątów przyległych mają kąty przedstawione na pozostałych rysunkach, a jakiej im brakuje.

Komentarz do zadań 5.–7.

Te dwa zadania pomagają doskonalić u uczniów strategię rozwiązywania zadań zamkniętych. Dzięki szacowaniu w obliczeniach możemy odrzucać odpowiedzi, które na pewno są błędne.

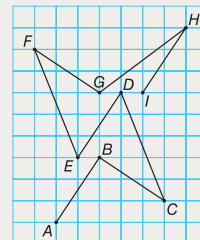


Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

- 1 Na podstawie rysunku odpowiedz na pytania.

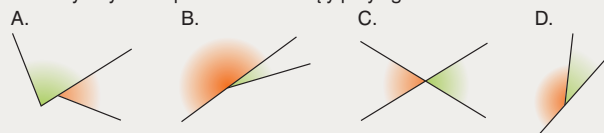
- a) Który zapis jest **błędny**?
 A. $AB \parallel IH$ B. $AB \parallel ED$
 C. $BC \parallel GH$ D. $BC \parallel FG$
 b) Ile par odcinków prostopadłych jest na rysunku?
 A. 7 B. 6 C. 5 D. 4



- 2 W której parze wielkości **nie są** równe?

- A. 22 dm i 2200 mm B. 7 km 6 m i 7006 m
 C. 5800 cm i 58 m D. 4700 mm i 47 cm

- 3 Na którym rysunku przedstawiono kąty przyległe?



- 4 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

Jeżeli jeden z kątów przyległych ma miarę 99° , to miara drugiego kąta jest równa A / B. A. 91° B. 81°

Jeżeli jeden z kątów przyległych ma miarę 2 razy większą od drugiego, to kąt rozwarty ma miarę C / D. C. 120° D. 100°

- 5 W trójkącie MAK kąty ostre mają miary 28° i 49° . Jaką miarę ma trzeci kąt tego trójkąta?

- A. 103° B. 93° C. 113° D. 105°

- 6 Kątami wewnętrznymi trójkąta **nie mogą** być kąty o miarach

- A. $115^\circ, 65^\circ, 10^\circ$ B. $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ C. $91^\circ, 82^\circ, 7^\circ$ D. $70^\circ, 30^\circ, 80^\circ$

- 7 Jeżeli trzy kąty wewnętrzne czworokąta mają miary: $170^\circ, 46^\circ, 124^\circ$, to czwarty kąt wewnętrzny tego czworokąta ma miarę

- A. 30° B. 100° C. 120° D. 20°

88

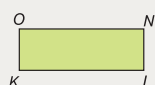
Odpowiedzi do zadań

1. a) C b) B
2. D
3. D
4. BC
5. A
6. A
7. D

II. Figury geometryczne



- 8 Obwód kwadratu jest równy 22 m, więc bok tego kwadratu jest równy
A. 5 m 50 cm B. 4 m 50 cm C. 5 m D. 5 m 25 cm
- 9 Jaki jest obwód prostokąta o wymiarach 25 mm $\times$ 53 cm?
A. 78 mm B. 11 dm C. 111 cm D. 156 cm
- 10 Obwód prostokątnej działki ma 86 m. Jeden bok działki jest o 7 m dłuższy od drugiego. Dłuższy bok działki ma długość
A. 8 m 50 cm B. 39 m 50 cm C. 25 m D. 50 m
- 11 Obwód prostokąta jest równy 82 cm, a jego szerokość jest o 9 cm krótsza od długości. Długość prostokąta jest równa
A. 32 cm B. 365 mm C. 25 cm D. 16 cm
- 12 Prostokąt KINO narysowano w pewnej skali i otrzymano prostokąt SZYB. Jaka to skala?



- A. 3 : 1 B. 2 : 1 C. 1 : 2 D. 1 : 1
- 13 Od wsi Kluski do wsi Dalachów jest 8 km. Na mapie w skali 1 : 50 000 odległość ta jest równa
A. 16 mm B. 8 cm C. 16 cm D. 160 cm
- 14 Na mapie wykonanej w skali 1 : 5 000 000 odległość w linii prostej Gdańska od Wrocławia jest równa 7 cm 5 mm. Rzeczywista odległość w linii prostej Gdańska od Wrocławia wynosi
A. 325 km B. 255 km C. 375 km D. 425 km

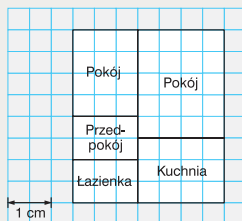
- 15 Na podstawie planu mieszkania wykonanego w skali 1 : 200 uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

Większy pokój ma wymiary A / B.

A. 3 m $\times$ 4 m B. 4 m $\times$ 5 m

Obwód podłogi w kuchni jest równy C / D.

C. 14 m D. 10 m



Komentarz do zadań 10. i 11.

W tych zadaniach pomocne będzie obliczenie połowy obwodu, a następnie porównanie go z sumą dwóch sąsiednich boków działki lub prostokąta, np. w zadaniu 10. wystarczy odjąć 7 m od podanych odpowiedzi i porównać sumę długości boków z połową obwodu równą 43 m. Nie trzeba wykonywać obliczeń, wystarczy szacowanie. W ten sposób można wyeliminować odpowiedzi niepoprawne. Podobne rozważania przeprowadzamy w zadaniu 11. Wskazane, aby uczniowie mający trudności w nauce matematyki wykonali rysunki pomocnicze do tych zadań.

Komentarz do zadania 15.

Po rozwiązaniu tego zadania przez uczniów sprawnych rachunkowo proponujemy zachęcić ich do obliczenia wymiarów pozostałych pomieszczeń. Mogą oni także układać dodatkowe pytania do zamieszczonego w zadaniu planu mieszkania.

Odpowiedzi do zadań

8. A
9. C
10. C
11. C
12. B
13. C
14. C
15. BC

Tematy lekcji:

1. Iloraz dwóch liczb (1 h)
2. Iloraz dwóch liczb – zadania i ćwiczenia (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- interpretuje ułamek zwykły jako część całości i przedstawia go na rysunku,
- przedstawia iloraz dwóch liczb naturalnych w postaci ułamka zwykłego i odwrotnie,
- interpretuje ułamki na osi liczbowej,
- rozróżnia ułamki właściwe i niewłaściwe oraz liczby mieszane,
- zamienia ułamki niewłaściwe na liczby mieszane i odwrotnie,
- odczytuje dane z diagramów, na których znajdują się ułamki zwykłe.

Wskazówki metodyczne

- Realizację tego tematu zaczynamy od przeanalizowania wszystkich pojęć zawartych w *Sowa przypomina*. Jeżeli uczniowie mają jakikolwiek problem z nazywaniem, odczytywaniem lub rozpoznawaniem ułamków, należy wrócić do ćwiczeń wykonywanych w klasie 4.
- Warto także wykonać początkowe zadania z zeszytu ćwiczeń.
- Trzeba kłaść nacisk na umiejętność wykonywania przez uczniów rysunków pomocniczych do zadań i znajdowania odpowiedniej części figury, np. poprzez składanie kartki.

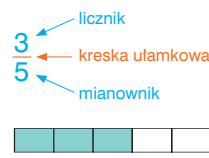
III. Ułamki zwykłe

1. Iloraz dwóch liczb



Sowa przypomina

- Ułamek zwykły to iloraz dwóch liczb.



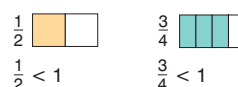
Licznik wskazuje, ile jednakowych części wzięto (wyróżniono).

Kreska ułamkowa zastępuje znak dzielenia: $\frac{3}{5} = 3 : 5$.

Mianownik wskazuje, na ile równych części podzielono całość.

- Ułamki zwykłe dzielimy na:

właściwe



niewłaściwe

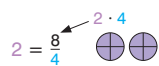


Licznik jest mniejszy od mianownika.

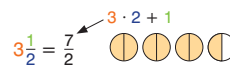
Licznik jest większy od mianownika lub licznik jest równy mianownikowi.

- W postaci ułamka niewłaściwego można zapisać:

liczbę naturalną



liczbę mieszaną



- Każdy ułamek zwykły ma swoje miejsce na osi liczbowej.



Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. 3, 8
2. I tabela: $\frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{11}{20}, \frac{9}{20}, \frac{10}{24}, \frac{14}{24}$
II tabela: $\frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{8}{16}, \frac{8}{16}, \frac{8}{16}, \frac{8}{16}$
3. 1 : 4; 2 : 3; 5 : 9; 4 : 7; 3 : 4; 1 : 6; 9 : 10
4. b) $\frac{14}{15}$ c) $\frac{11}{6}$ d) $\frac{5}{3}$
5. kolejno wierszami: 18, 10, 20, 16, 5; 4, 5, 12, 6, 10
6. $6\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}$ 7. $\frac{7}{3}, \frac{9}{5}, \frac{7}{2}$ 8. B, C, A i D
9. a) kolejno: $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{2}{4}, 1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}$
b) kolejno: $\frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}, 1\frac{1}{6}, 1\frac{3}{6}, 2$
11. kolejno: $1\frac{5}{8}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{3}{5}, 1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 2\frac{3}{5}, 1\frac{1}{5}, 3\frac{2}{3}, 2\frac{4}{5}, \frac{13}{3}, \frac{9}{5}, \frac{7}{3}, \frac{7}{4}, \frac{7}{5}, 3\frac{3}{4}, \frac{10}{3}, \frac{11}{5}, 4\frac{1}{2}, \frac{5}{3}$
12. a) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ c) $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$
13. a) np. $\frac{5}{3}$ b) np. $\frac{5}{8}$ c) np. $\frac{2}{6}$ d) np. $\frac{3}{8}$ e) np. $\frac{7}{7}$

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Ułamki zwykłe i dziesiętne. Przybliżanie i zaokrąglanie Obliczenia praktyczne → Obliczenia zegarowe i kalendarzowe Obliczenia praktyczne → Mierzenie i ważenie
	Karta pracy. Czas Karta pracy. Masa Plansza edukacyjna. Jednostki Plansza edukacyjna. Ułamki zwykłe
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 60–64
Zbiór zadań	s. 60–62

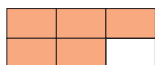
III. Ułamki zwykłe

123

- 1 Zapisz w postaci ułamka liczbę:
a) jedna druga, b) trzy piąte, c) jedna dziesiąta.

- 2 Zapisz słowami: $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{8}$, $1\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{5}$, $3\frac{5}{8}$, $1\frac{3}{10}$.

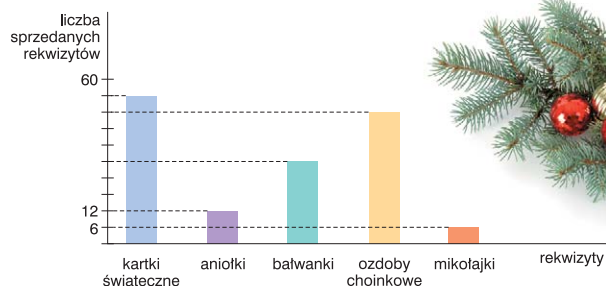
- 3 Jaką część prostokąta zamalowano kolorem pomarańczowym?



- A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

- 4 Narysuj 5 prostokątów o wymiarach 4 kratki na 6 kretek. Pokoloruj odpowiednio: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$ prostokąta.

- 5 Przed mikołajkami uczniowie klas piątych zorganizowali kiermasz świąteczny. Liczbę sprzedanych rekwizytów zilustrowano na diagramie.



- a) Ile sztuk każdego rekwizytu sprzedano na kiermaszu?
b) Ile rekwizytów sprzedano łącznie?
c) Jaką część wszystkich sprzedanych rekwizytów były aniołki, jaką mikołajki, a jaką bałwanki?
d) Ułóż pytanie do diagramu i odpowiedz na nie.
- 6 Spośród ułamków $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{18}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{5}$ wypisz:
a) ułamki właściwe, b) ułamki niewłaściwe.
- 7 Liczby mieszane: $3\frac{5}{7}$, $1\frac{2}{3}$, $4\frac{3}{5}$ zapisz w postaci ułamków niewłaściwych.

91

Komentarz do zadania 4.

To zadanie uczniowie mogą rozwiązać, pracując w grupach. W tym celu dzielimy klasę na 5 grup. Każda z nich wyjaśnia sposób pokolorowania jednego prostokąta. Warto zacząć od zadania pytań: *Na ile równych części można podzielić narysowany prostokąt? Jak przedstawić na prostokącie dany ułamek?*

Ułamki $\frac{1}{2}$ i $\frac{5}{6}$ łatwo zilustrować, dlatego można je przydzielić grupom słabszym matematycznie. W ten sposób indywidualizujemy pracę z uczniami.

Komentarz do zadania 5.

W tym zadaniu utrwalamy umiejętności czytania ze zrozumieniem informacji przedstawionych na diagramie oraz rozumienie pojęcia ułamka jako części całości. Zadanie to, dzięki poleceniu zawartemu w punkcie d), jest także okazją do samodzielnej twórczej pracy ucznia.

Komentarz do zadań 6. i 7.

Zadania można rozwiązać w pamięci. Warto, aby uczniowie wyjaśnili sposoby rozwiązywania zadań i kolejność wykonywanych kroków.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{1}{10}$

2. trzy czwarte, dwie drugie, cztery trzecie, pięć ósmych, jeden i jedna trzecia, dwa i dwie piąte, trzy i pięć ósmych, jeden i trzy dziesiąte

3. A

5. a) kartki świąteczne: 54, aniołki: 12, bałwanki: 30, ozdoby choinkowe: 48, mikołajki: 6 b) 150 c) aniołki: $\frac{12}{150}$, mikołajki: $\frac{6}{150}$, bałwanki: $\frac{30}{150}$

6. a) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ b) $\frac{4}{4}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{18}{6}$, $\frac{13}{5}$

7. $\frac{26}{7}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{23}{5}$



Komentarz do zadania 9.

Aby poprawnie odczytać wyróżnione na osi liczbowej ułamki, uczniowie muszą dokładnie policzyć, na ile równych części został podzielony odcinek jednostkowy. Trzeba na to zwrócić szczególną uwagę.

Komentarz do zadania 10.

Dla uczniów mających problem z doбором odpowiedniego odcinka jednostkowego i zaznaczeniem ułamków na osi liczbowej polecamy wykonanie następującego ćwiczenia. Wycinamy pasek papieru o ustalonej długości odcinka jednostkowego i składamy go na pół, tak otrzymujemy $\frac{1}{2}$. Po rozłożeniu paska i przyłożeniu go do osi liczbowej zaznaczamy punkt wyznaczony przez zgięcie paska. Następnie każdą połówkę paska składamy ponownie na pół i jeszcze raz na pół – kolejne zagięcia paska papieru wyznaczają ułamki $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{8}$.

Komentarz do *Sprawdź się!*

Zaproponowaną tutaj diagnozę osiągnięć z tego tematu można przeprowadzić w formie konkursu, np. 5-minutowego. Zadaniem uczniów jest wykonanie obliczeń w pamięci i zapisanie w zeszytach tylko numerów zadań i odpowiedzi. Po upływie uzgodnionego czasu uczniowie wymieniają się zeszytami i pod kierunkiem nauczyciela sprawdzają poprawność wyników. Nagradzamy osiągnięcia zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami.

123

- 8 Liczby naturalne: 1, 2, 4, 5, 10 zapisz w postaci ułamków niewłaściwych:
 - a) o mianowniku 4,
 - b) o mianowniku 6.
- 9 Odczytaj i zapisz liczby odpowiadające wyróżnionym punktom.
 - a)
 - b)
- 10 Narysuj dwie osie liczbowe. Obierz odpowiednią jednostkę na każdej z nich i zaznacz liczby.
 - a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$
 - b) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$
- 11 Zapisz, jaką częścią:
 - a) kilograma jest 20 g,
 - b) metra jest 40 cm,
 - c) godziny jest 45 minut,
 - d) złotówki jest 25 groszy.

Sprawdź się!

- 1 W szkolnej loterii fantowej na 10 losów 3 losy wygrywają. Jaką częścią wszystkich losów są losy wygrywające?
- 2 Zapisz, jaką częścią:
 - a) godziny jest kwadrans,
 - b) kilometra jest 750 m.
- 3 Który zapis jest **nieprawdziwy**?
 - A. $1\frac{9}{10} = \frac{19}{10}$
 - B. $\frac{10}{8} = 1\frac{2}{8}$
 - C. $2\frac{1}{6} = \frac{13}{6}$
 - D. $\frac{12}{4} = 1\frac{2}{4}$
- 4 Które zdanie jest **fałszywe**?
 - A. Ułamek niewłaściwy $\frac{15}{7}$ w postaci liczby mieszanej to $2\frac{1}{7}$.
 - B. Iloraz liczby 3 przez 5 można zapisać jako ułamek $\frac{3}{5}$.
 - C. Ułamek niewłaściwy jest równy 1 lub jest większy od 1.
 - D. Ułamek $\frac{1}{3}$ jest ilorazem liczby 3 przez liczbę 1.
- 5 Zapisz liczby odpowiadające wyróżnionym punktom.

92

Odpowiedzi do zadań

8. a) $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{16}{4}$, $\frac{20}{4}$, $\frac{40}{4}$ b) $\frac{6}{6}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{24}{6}$, $\frac{30}{6}$, $\frac{60}{6}$
9. a) $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{7}{9}$, $1\frac{2}{9}$, $1\frac{5}{9}$, $2\frac{1}{9}$, $2\frac{3}{9}$, $2\frac{7}{9}$
- b) $\frac{1}{15}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{13}{15}$, $1\frac{2}{15}$, $1\frac{5}{15}$, $1\frac{11}{15}$, $1\frac{14}{15}$
11. a) $\frac{20}{1000}$ b) $\frac{40}{100}$ c) $\frac{45}{60}$ d) $\frac{25}{100}$

Sprawdź się!

1. $\frac{3}{10}$
2. a) $\frac{15}{60}$ b) $\frac{750}{1000}$
3. D
4. D
5. $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{7}{8}$, $1\frac{4}{8}$

123

2. Rozszerzanie i skracanie ułamków

Sowa przypomina

Rozszerzanie ułamków

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \quad \frac{1}{2} = \frac{4}{8} \quad \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

Ułamek można **rozszerzyć**:
jego licznik i mianownik mnożymy
przez tę samą liczbę różną od zera.

Skracanie ułamków

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \frac{4}{8} = \frac{2}{4}$$

Ułamek można **skrócić (uproszczyć)**:
jego licznik i mianownik dzielimy
przez tę samą liczbę różną od zera.

Ułamki nieskracalne

$$\frac{5}{7} \quad \frac{9}{10}$$

liczby pierwsze → 5, 7
liczba pierwsza → 3
liczby złożone → 9, 10
liczba złożona → 4

Licznik i mianownik każdego
z tych ułamków nie mają
wspólnego dzielnika
większego od 1.

Przykład 1.

Przedstawimy iloraz $\frac{8:2}{6+8}$ w postaci ułamka nieskracalnego.

Najpierw musimy wykonać dzielenie w liczniku i dodawanie w mianowniku.

$$\frac{8:2}{6+8} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

Ułamek $\frac{2}{7}$ jest nieskracalny.

Temat lekcji:

Rozszerzanie i skracanie ułamków (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- skraca i rozszerza ułamki zwykłe,
- skraca ułamek, gdy w liczniku lub mianowniku ułamka jest iloczyn.

Wskazówki metodyczne

- Podczas analizy informacji zawartych w *Sowa przypomina* warto skorzystać z jednakowej wielkości kartek lub papierowych kół, które składamy odpowiednio na 2, 4, 8, 16 równych części, następnie na 3, 6, 12 równych części, po czym zamalowujemy różne części i je porównujemy.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 9.

Komentarz do Przykładu 1.

Dotychczas uczniowie nie spotykali się z zapisem ilorazu w postaci ułamka zwykłego. Należy zwrócić im uwagę, że podczas zastępowania kreski ułamkowej znakiem dzielenia wyrażenia występujące w liczniku i mianowniku ujmujemy w nawias. W tym przykładzie chodzi o to, by uczniowie zauważyli, że chociaż w liczniku i mianowniku występują liczby mające wspólne dzielniki, czasem nie można ich skrócić przed wykonaniem występujących w liczniku i mianowniku działań.

93

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Ułamki zwykłe i dziesiętne. Przybliżanie i zaokrąglanie Liczby wymierne → Oś liczbową
	Kartkówka 9 Plansza edukacyjna. Ułamki zwykłe
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 64–66
Zbiór zadań	s. 61–62

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- $\frac{8}{10}, \frac{6}{20}, \frac{4}{6}$
- $\frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{7}{8}, \frac{1}{5}, \frac{9}{20}, \frac{2}{6}$
- 6, 12, 15
- $\frac{20}{24}, \frac{9}{24}, \frac{12}{24}$
- a) P b) P c) F d) F
- a) $\frac{9}{18} = \frac{1}{2}, \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ b) $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}, \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ c) $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \frac{88}{11} = 8$
- a) 5, 5 b) 25, 9 c) 5, 4 d) 56, 1
- B, C
- kolejno wierszami: $\frac{28}{42}, \frac{4}{6}, \frac{4}{6}, \frac{20}{30}, \frac{2}{3}, \frac{16}{24}, \frac{6}{9}, \frac{32}{48}, \frac{64}{96}$
- a) $\frac{2}{3}, \frac{7}{8}$ b) $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}$ c) $\frac{5}{3}, \frac{5}{3}$ d) $\frac{9}{10}, \frac{11}{15}$



Komentarz do Przykładu 2.

W tym przykładzie pokazujemy ważną umiejętność skracania ułamków, które w liczniku lub w mianowniku mają iloczyn. Uczniowie powinni dojść do wniosku, że skracanie ułamków ułatwia obliczenia, gdyż nie trzeba ich wykonywać na dużych liczbach, a jeżeli w liczniku lub w mianowniku występuje iloczyn, to skracanie jest możliwe. Opanowanie tej umiejętności ułatwi uczniom obliczenia na lekcjach zarówno matematyki, jak i fizyki. Warto wykonać wszystkie zadania proponowane w podręczniku dotyczące takiego skracania.

Komentarz do zadań 1.–6.

Wszystkie te zadania można rozwiązać w pamięci, i otrzymane wyniki tylko uzasadnić.

123

Przykład 2.

Przedstawmy iloraz $\frac{12 \cdot 5}{15 \cdot 6}$ w postaci ułamka nieskracalnego.

Sposób I

Wykonajmy mnożenie w liczniku i mianowniku.

$$\frac{12 \cdot 5}{15 \cdot 6} = \frac{60}{90} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

skróćmy przez 10 skróćmy przez 3

Sposób II

Skróćmy ułamek, zanim wykonamy mnożenie. Jeden czynnik w liczniku i jeden czynnik w mianowniku podzielmy przez tę samą liczbę.

$$\frac{12 \cdot 5}{15 \cdot 6} = \frac{12}{3 \cdot 6} = \frac{2}{3} \text{ lub } \frac{12 \cdot 5}{15 \cdot 6} = \frac{2}{3}$$

skróćmy przez 5 skróćmy przez 6

Gdy w liczniku lub mianowniku ułamka jest tylko mnożenie, to można przed obliczeniem iloczynu odpowiednio podzielić czynniki w liczniku i mianowniku ułamka przez tę samą liczbę.

Gdy w liczniku lub mianowniku ułamka są inne działania niż mnożenie, to najpierw trzeba wykonać te działania, a potem skrócić ułamek.

- 1 Rozszerz przez 3 ułamki: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{2}{9}$.
- 2 Rozszerz ułamki: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{8}$ tak, by każdy z nich miał mianownik 24.
- 3 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Ułamek $\frac{7}{8}$ rozszerzony przez 4 jest równy A / B. A. $\frac{11}{12}$ B. $\frac{28}{32}$
Aby ułamek $\frac{1}{6}$ miał mianownik 30, trzeba go rozszerzyć przez C / D.
C. 6 D. 5
- 4 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Ułamki nieskracalne to A / B. A. $\frac{8}{9}, \frac{14}{15}, \frac{20}{13}$ B. $\frac{10}{15}, \frac{21}{49}, \frac{18}{81}$
Liczby równe to C / D. C. $\frac{17}{7}, 2\frac{3}{7}, \frac{34}{21}$ D. $\frac{4}{3}, 1\frac{2}{6}, \frac{12}{9}$
- 5 Skróć ułamki: $\frac{2}{4}, \frac{4}{6}, \frac{2}{8}, \frac{4}{8}, \frac{6}{8}, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{9}$ tak, aby były nieskracalne.
- 6 Napisz 4 ułamki nieskracalne.

94

Odpowiedzi do zadań

1. $\frac{3}{6}, \frac{6}{9}, \frac{9}{12}, \frac{6}{15}, \frac{12}{15}, \frac{3}{18}, \frac{15}{18}, \frac{6}{27}$
2. $\frac{12}{24}, \frac{16}{24}, \frac{18}{24}, \frac{4}{24}, \frac{15}{24}$
3. BD
4. AD
5. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}$

III. Ułamki zwykłe

123

7. Które zdanie jest **falszywe**?
- A. Ułamek $\frac{18}{24}$ można skrócić przez 6.
 B. $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$
 C. Ułamek $\frac{12}{15}$ jest ułamkiem skracalnym.
 D. Ułamek $\frac{6}{15}$ jest ułamkiem nieskracalnym.
8. Przedstaw ilorazy w postaci ułamków nieskracalnych.
- a) $\frac{15 \cdot 12}{12 \cdot 17}$ b) $\frac{3 \cdot 7 \cdot 5}{9 \cdot 7 \cdot 5}$ c) $\frac{8 \cdot 10}{2 \cdot 4 \cdot 20}$ d) $\frac{3 + 5}{15 - 3}$

Wyzwanie

Czy można skrócić ułamek $\frac{333}{10^5 - 1}$?

Oceń prawdziwość poniższych odpowiedzi.

- a) Nie można powiedzieć przed wykonaniem obliczeń w mianowniku, czy taki ułamek można skrócić.
 b) Wspólnym dzielnikiem liczb występujących w liczniku i mianowniku jest tylko liczba 1, więc ułamka nie można skrócić.
 c) Ułamek można skrócić przez 9 po wykonaniu odejmowania w mianowniku.



Sprawdź się!

1. Rozszerz ułamki: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$ do mianownika 20.
 2. Skróć ułamki: $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{15}{25}$ tak, aby otrzymać ułamki nieskracalne.
 3. Ułamek $\frac{24}{36}$ **nie jest** równy ułamkowi
 A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{4}{6}$ C. $\frac{12}{18}$ D. $\frac{8}{12}$
 4. Zapisz ułamek właściwy, którego licznik i mianownik są liczbami pierwszymi. Rozszerz ten ułamek przez 4.
 5. Przedstaw ilorazy w postaci ułamków nieskracalnych.
 a) $\frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 10}$ b) $\frac{27 \cdot 49}{18 \cdot 21}$ c) $\frac{10 - 4}{18}$



Komentarz do zadania 8.

W przykładach a)–c) dzięki skróceniu ułamków, przed wykonaniem mnożenia, szybko otrzymuje się wynik. W przykładzie d) najpierw trzeba obliczyć sumę i różnicę. Można zaproponować uczniom do rozwiązania dodatkowe przykłady, np. $\frac{3 \cdot 4 + 6 \cdot 2}{2 \cdot 15}$, $\frac{5 \cdot 4 \cdot 12}{2 \cdot 16 - 20}$.

Komentarz do Wyzwania

Warto porozmawiać z uczniami o przedstawionym ilorazie. Powinni oni zauważyć, że licznik (liczba 333) jest podzielny przez 3 i 9, a liczba 10 podniesiona do 5 potęgi to liczba sześciocyfrowa zapisana cyfrą 1 z pięcioma zerami, ale pomniejszona o 1, jest liczbą zapisaną tylko cyframi 9. Mianownik jest więc także podzielny przez 3 i 9.

Przeprowadzenie z uczniami takiego rozumowania pokazuje, że nie trzeba wykonywać działań, aby odpowiedzieć na zadane pytanie.

Komentarz do Sprawdź się!

Proponujemy, aby zadania 1. i 3. uczniowie wykonali ustnie.

Zadanie 5. przykłady a) i b) uczniowie powinni wykonać dwoma sposobami (bez skracania iloczynów i z ich skracaniem), odmierzając czas potrzebny na ich wykonanie. W przypadku wątpliwości uczniów co do możliwości skracania w konkretnym przykładzie proponujemy zachęcić uczniów do ponownej, tym razem samodzielnej, analizy *Przykładu 1*. Będzie to nauka samodzielnego uczenia się.

Odpowiedzi do zadań

7. D
 8. a) $\frac{15}{17}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

Wyzwanie

Tak, można skrócić. a) prawda b) fałsz c) prawda

Sprawdź się!

1. $\frac{10}{20}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{16}{20}$, $\frac{14}{20}$
 2. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$
 3. A
 5. a) $\frac{3}{10}$ b) $3\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$



Tematy lekcji:

1. Porównywanie ułamków (1 h)
2. Zastosowanie porównywania ułamków w zadaniach (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- porównuje ułamki o jednakowych mianownikach lub jednakowych licznikach,
- sprowadza ułamki zwykłe do jednakowego mianownika,
- porównuje ułamki o różnych mianownikach i licznikach z użyciem symboli $<$, $>$, $=$,
- porządkuje ułamki rosnąco lub malejąco,
- stosuje porównywanie ułamków w sytuacjach praktycznych.

Wskazówki metodyczne

Na początku lekcji warto przypomnieć następującą zasadę: jeżeli ułamki są równe, to iloczyn licznika pierwszego ułamka i mianownika drugiego ułamka jest równy iloczynowi mianownika pierwszego ułamka i licznika drugiego.

Komentarz do Przykładu 1.

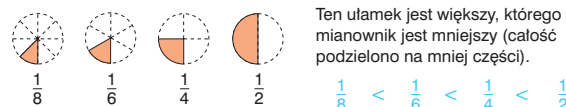
Ten przykład proponujemy zwizualizować. W tym celu uczniowie przygotowują na lekcję po 15 jednakowych kwadratów. Następnie pracując w parach, układają z kwadratów 2 takie same prostokąty, które w zadaniu zastąpią batony. Podczas pracy muszą zdecydować, z ilu kwadratów będzie zbudowany każdy baton. Na gotowych batonach kolorują odpowiednie części i podają odpowiedź. Analiza przykładu z podręcznika powinna potwierdzić jej prawidłowość.

123

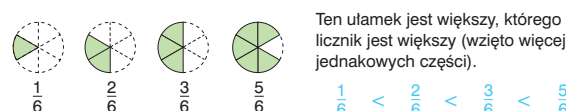
3. Porównywanie ułamków

Sowa przypomina

- Porównywanie ułamków o jednakowych licznikach



- Porównywanie ułamków o jednakowych mianownikach



Przykład 1.

Karol zjadł $\frac{2}{3}$, a Zosia $\frac{3}{4}$ takiego samego batona. Kto zjadł większą część batona?

Ułamki $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$ mają różne liczniki i różne mianowniki.

Rozszerzmy je tak, by miały jednakowe mianowniki. Liczba 12 jest wielokrotnością liczb 3 i 4, więc rozszerzmy je do mianownika 12.

Ponieważ $12 : 3 = 4$, więc ułamek $\frac{2}{3}$ trzeba rozszerzyć przez 4, a $12 : 4 = 3$, więc ułamek $\frac{3}{4}$ trzeba rozszerzyć przez 3.

Karol $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ Zosia $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ Ułamki $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$ sprowadziliśmy do jednakowego mianownika.

$$\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$$

Zatem $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

Odpowiedź. Większą część batona zjadła Zosia.



96

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Ułamki zwykłe i dziesiętne. Przybliżanie i zaokrąglanie
	Plansza edukacyjna. Ułamki zwykłe
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 66–68
Zbiór zadań	s. 60–62

Przykład 2.

Porównajmy ułamki $\frac{2}{3}$ i $\frac{10}{12}$.

Sposób I

Rozszerzmy ułamek $\frac{2}{3}$ tak, aby miał mianownik 12.

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} \quad \text{Ułamek rozszerzamy przez 4.}$$

$$\frac{8}{12} < \frac{10}{12}, \text{ zatem } \frac{2}{3} < \frac{10}{12}.$$

Sposób II

Rozszerzmy ułamek $\frac{2}{3}$ tak, aby miał licznik 10.

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} \quad \text{Ułamek rozszerzamy przez 5.}$$

$$\frac{10}{15} < \frac{10}{12}, \text{ zatem } \frac{2}{3} < \frac{10}{12}.$$

Odpowiedź. Ułamek $\frac{2}{3}$ jest mniejszy od ułamka $\frac{10}{12}$.



Jeżeli ułamki mają różne liczniki i mianowniki, to aby je porównać, trzeba sprowadzić je do jednakowego mianownika lub jednakowego licznika.

Przykład 3.

Porównajmy ułamki $\frac{4}{6}$ i $\frac{6}{9}$, sprowadzając je do jednakowego mianownika.

Sposób I

Nie można rozszerzyć ułamka $\frac{4}{6}$ tak, aby miał mianownik 9, ale obydwie ułamki można skrócić.

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Sposób II

Rozszerzmy ułamki do mianownika, który jest wielokrotnością liczb 6 i 9. Może to być ich iloczyn: $6 \cdot 9 = 54$.

$$\frac{4}{6} = \frac{4 \cdot 9}{6 \cdot 9} = \frac{36}{54} \quad \frac{6}{9} = \frac{6 \cdot 6}{9 \cdot 6} = \frac{36}{54}$$

Odpowiedź. Ułamki $\frac{4}{6}$ i $\frac{6}{9}$ są równe: $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$.



Aby sprowadzić ułamki do jednakowego mianownika, można je skrócić lub rozszerzyć.

Komentarz do Przykładu 2.

Jeżeli w poleceniu do zadania nie ma informacji, jakim sposobem uczeń ma porównać ułamki, wybór sposobu zawsze zostawiamy uczniowi.

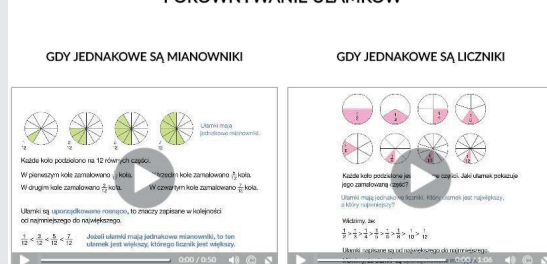
Komentarz do Przykładu 3.

Warto powiedzieć uczniom, że nie zawsze trzeba dążyć do znalezienia najmniejszego wspólnego mianownika. W podręczniku znajdują się ułamki o niewielkich mianownikach i wówczas nie ma większego znaczenia, jaki jest wspólny mianownik. Znajdowanie wspólnego mianownika, jako iloczynu mianowników, jest poprawne i łatwe.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. a) 1 lub 2; 4, 3, 2 lub 1; 1, 2 lub 3
- b) liczba większa od 4; liczba większa od 11; liczba mniejsza od 16
- c) 26; liczba mniejsza od 10; 4
2. $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{9}{9}, \frac{11}{9}, \frac{13}{9}, \frac{18}{9}$
3. $\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{9}, \frac{3}{10}$
4. liczniki kolejno: 30, 40, 36, 50, 27, 16, 34; $\frac{50}{60}, \frac{40}{60}, \frac{36}{60}, \frac{34}{60}, \frac{30}{60}, \frac{27}{60}, \frac{16}{60}$
5. a) $\frac{4}{9} > \frac{3}{9}$ b) $\frac{15}{25} > \frac{14}{25}$ c) $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$ d) $\frac{15}{18} > \frac{14}{18}$ e) $\frac{17}{24} < \frac{18}{24}$ f) $\frac{11}{22} > \frac{10}{22}$
- g) $\frac{64}{80} > \frac{25}{80}$ h) $\frac{25}{30} < \frac{26}{30}$
6. A, D, F
7. P, F, P, P
8. A

PORÓWNYWANIE UŁAMKÓW



Plansze interaktywne ➔ Liczby wymierne ➔ Ułamki zwykłe i dziesiętne. Przybliżanie i zaokrąglanie ➔ Ułamki zwykłe ➔ Porównywanie ułamków



Komentarz do zadania 2.

Wskazanie poprawnej odpowiedzi w tym zadaniu jest dobrą okazją do doskonalenia strategii rozwiązywania tego typu zadań zamkniętych. Można odwrócić pytanie i zastanowić się, które ułamki na pewno są równe i dlaczego, a następnie sprawdzić, że w parze, która pozostała, nie zachodzi równość. Równość ułamków możemy sprawdzać, wykorzystując przypomnianą na początku lekcji zależność między odpowiednimi iloczynami (iloczyn licznika jednego ułamka przez mianownik drugiego). Zapamiętanie tej zasady ułatwi uczniom porównywanie ułamków o różnych mianownikach i licznikach.

Komentarz do zadania 6.

W zadaniu warto zadać dodatkowe pytanie: *Dlaczego?* Uczniowie powinni zapisać odpowiednie ułamki, skrócić je i dopiero wtedy udzielić odpowiedzi.

Komentarz do *Sprawdź się!*

Wspólnym rozwiązaniem zadań 4. i 5. można zakończyć realizację tego tematu. Zadania wymagają umiejętności zapisywania ułamka jako części całości i porównywania ułamków w sytuacjach praktycznych. Wskazane jest uzasadnianie przez uczniów odpowiedzi.

123

- Przepisz przykłady, zamiast $\blacklozenge$ napisz odpowiedni znak $>$, $<$ lub $=$.
 a) $\frac{7}{8} \blacklozenge \frac{5}{8}$ b) $\frac{1}{6} \blacklozenge \frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{2} \blacklozenge \frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{6} \blacklozenge \frac{1}{9}$
 $\frac{7}{3} \blacklozenge 2\frac{2}{3}$ $2\frac{3}{4} \blacklozenge \frac{11}{3}$ $1\frac{1}{2} \blacklozenge \frac{4}{3}$ $\frac{6}{10} \blacklozenge \frac{9}{15}$
- W której parze ułamki **nie** są równe?
 A. $\frac{4}{8}, \frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}, \frac{16}{20}$ C. $\frac{2}{3}, \frac{8}{12}$ D. $\frac{7}{10}, \frac{14}{20}$
- Uporządkuj podane ułamki.
 a) rosnąco: $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, 1\frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{7}{4}, \frac{3}{2}$ b) malejąco: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{5}{18}, \frac{2}{6}, \frac{5}{9}$
- Uzupełnij zdanie. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B.
 Ułamki większe od $\frac{2}{5}$, a mniejsze od $\frac{7}{10}$, to A / B.
 A. $\frac{9}{20}, \frac{10}{20}, \frac{11}{20}, \frac{4}{5}, \frac{14}{20}$ B. $\frac{9}{20}, \frac{1}{2}, \frac{11}{20}, \frac{3}{5}, \frac{13}{20}$
- Które zdanie jest prawdziwe?
 A. Liczbami równymi są $\frac{6}{5}$ i $1\frac{2}{5}$. B. $\frac{7}{20}$ metra to mniej niż $\frac{8}{25}$ metra.
 C. $\frac{5}{6}$ doby to więcej niż $\frac{7}{8}$ doby. D. Ułamek $\frac{2}{3}$ jest większy od ułamka $\frac{3}{5}$.
- Ula zapisała 45 kartek w 60-kartkowym zeszytce, a Ala 48 kartek w zeszytce 80-kartkowym. Która z dziewcząt zapisała większą część zeszytu?



Sprawdź się!

- Przepisz przykłady, zamiast $\blacklozenge$ napisz odpowiedni znak $>$, $<$ lub $=$.
 a) $1\frac{4}{5} \blacklozenge \frac{9}{5}$ b) $1\frac{1}{2} \blacklozenge \frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{3} \blacklozenge \frac{5}{6}$ d) $\frac{2}{8} \blacklozenge \frac{6}{7}$
- Napisz 2 ułamki właściwe większe od $\frac{4}{9}$:
 a) o liczniku 4, b) o mianowniku 9.
- Uporządkuj rosnąco ułamki: $\frac{4}{9}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}$.
- Kasia zrobiła dwa bukiety. W pierwszym było 9 kwiatów, a wśród nich 6 róż, w drugim na 12 kwiatów było 8 róż. W którym bukiecie róże stanowiły jego mniejszą część?
- Beata rozlała 1 l soku po równo do 5 szklanek, a Darek rozlał 2 l soku po równo do 12 kubków. Czy więcej soku było w szklance, czy w kubku? Odpowiedź uzasadnij.

98

Odpowiedzi do zadań

- a) $>$, $<$ b) $>$, $<$ c) $<$, $>$ d) $>$, $=$
- B
- a) $\frac{5}{16}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}$ b) $\frac{8}{9}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{1}{2}, \frac{2}{6}, \frac{5}{18}$
- B
- D
- Ula

Sprawdź się!

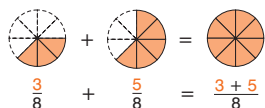
- a) $=$ b) $>$ c) $<$ d) $<$
- $\frac{4}{9}, \frac{4}{8}, \frac{4}{7}, \frac{4}{5}$
- $\frac{6}{9} = \frac{8}{12}$
- w szklance

123

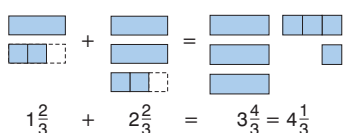
4. Dodawanie i odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach

Sowa przypomina

- Dodawanie ułamków o jednakowych mianownikach

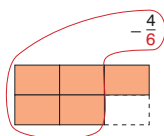


Dodajemy liczniki,
mianownik pozostaje
bez zmian.



Dodajemy całości,
potem dodajemy
ułamki.

- Odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach



$$\frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5-4}{6} = \frac{1}{6}$$

Odejmujemy liczniki,
mianownik pozostaje
bez zmian.

$$3 - 1\frac{1}{3} = 2\frac{3}{3} - 1\frac{1}{3} = 1\frac{2}{3} \quad \text{Jedną całość zamieniamy na ułamek niewłaściwy.}$$

$$3 - 1\frac{1}{3} = (3 + \frac{2}{3}) - (1\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) = 3\frac{2}{3} - 2 = 1\frac{2}{3} \quad \text{Do obu liczb dodajemy } \frac{2}{3}, \text{ aby odjemnik był liczbą naturalną.}$$

$$4\frac{2}{5} - 1\frac{4}{5} = 3\frac{7}{5} - 1\frac{4}{5} = 2\frac{3}{5} \quad \text{Jedną całość zamieniamy na ułamek niewłaściwy.}$$

$$4\frac{2}{5} - 1\frac{4}{5} = (4\frac{2}{5} + \frac{1}{5}) - (1\frac{4}{5} + \frac{1}{5}) = 4\frac{3}{5} - 2 = 2\frac{3}{5} \quad \text{Do obu liczb dodajemy } \frac{1}{5}, \text{ aby odjemnik był liczbą naturalną.}$$

99

Temat lekcji:

Dodawanie i odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- dodaje i odejmuje ułamki o jednakowych mianownikach,
- planuje strategię rozwiązania zadania zamkniętego i zadania otwartego oraz weryfikuje jego wynik,
- szacuje wyniki działań,
- oblicza niewiadomy składnik, odjemną lub odjemnik, gdy co najmniej jedna wielkość jest wyrażona ułamkiem,
- w rozwiązywaniu zadań tekstowych stosuje własne poprawne metody.

Wskazówki metodyczne

- Dodawanie ułamków o jednakowych mianownikach zwykle nie sprawia uczniom problemów, szczególnie gdy przykłady są odpowiednio zilustrowane. Znacznie trudniejsze jest odejmowanie ułamków od liczby całkowitej lub liczby mieszanej. Często zilustrowanie takich przykładów jest konieczne i dlatego warto dla przypomnienia zapoznać uczniów z ilustracjami przedstawionymi w *Sowa przypomina*. Odejmowanie liczb mieszanych możemy wykonywać na kilka sposobów. Dwa z nich zawarliśmy w *Sowa przypomina*. Proponujemy, aby kilka pierwszych przykładów rozwiązać dwoma sposobami, aby uczeń mógł wybrać najbardziej mu odpowiadający.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 10.

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Działania na ułamkach zwykłych
	Kartkówka 10 Plansza edukacyjna. Ułamki zwykłe
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 69–72
Zbiór zadań	s. 63–65

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- a) $\frac{4}{4} = 1$ b) $\frac{6}{4} = 1\frac{2}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$
- a) 1; 1; 1; $1\frac{4}{8}$ b) $1\frac{15}{55}$; $1\frac{15}{16}$; $1\frac{10}{36}$; $1\frac{11}{12}$
- $\frac{5}{12}$; $\frac{8}{12}$; $\frac{13}{12}$; $\frac{21}{12}$; $\frac{34}{12}$; $\frac{55}{12}$; $\frac{89}{12}$; $\frac{144}{12}$
- a) $\frac{6}{8} < \frac{7}{8}$ b) $\frac{12}{11} = \frac{12}{11}$ c) $\frac{3}{9} < \frac{4}{9}$ d) $1\frac{2}{5} > \frac{3}{5}$ e) $\frac{8}{20} = \frac{8}{20}$
- f) $\frac{15}{13} > \frac{12}{13}$ g) $1\frac{2}{4} > \frac{3}{4}$ h) $\frac{25}{100} > \frac{24}{100}$
- A, D, F
- a) $\frac{6}{7}$; $\frac{2}{5}$; 2 b) $\frac{3}{4}$; 2; 0
- a) $5\frac{1}{2}$; $4\frac{3}{5}$; $\frac{1}{10}$ b) $1\frac{2}{7}$; $4\frac{6}{13}$; $3\frac{2}{3}$
- a) $\frac{4}{5}$; $6\frac{5}{9}$ b) $2\frac{3}{5}$; $3\frac{4}{7}$; $5\frac{2}{8}$
- a) A. $3\frac{2}{6}$ B. $3\frac{4}{6}$ C. $3\frac{2}{3}$ D. $3\frac{1}{6}$ b) B i C; B i C; A i D



Komentarz do Przykładu 1.

W podstawie programowej w punkcie XIV. 6) wymagań szczegółowych jest mowa o umiejętności szacowania i oceniania rzędu wielkości otrzymanego wyniku. W tym przykładzie przedstawiliśmy, w jaki sposób szacować wyniki działań. Podczas rozwiązywania zadań warto ćwiczyć tę umiejętność. Jeżeli uczniowie nauczą się szacowania, to na jego podstawie mogą ocenić, czy uzyskany wynik jest poprawny, czy trzeba szukać błędu w rozwiązaniu. W prezentowanym przykładzie szacujemy, od jakiej liczby wynik jest większy. Chętni uczniowie mogą zastanowić się nad szacowaniem, aby odpowiedzieć na pytanie: *Od jakiej liczby wynik będzie mniejszy?* Aby na nie odpowiedzieć, należałoby liczbę mieszaną podać w przybliżeniu do większej od niej liczby całkowitej.

Komentarz do zadań 1.–3.

Te zadania warto rozwiązać ustnie. Proponujemy, aby odpowiedzi do kolejnych przykładów podawali wskazani uczniowie. Każdy uczeń ma prawo w dowolnym momencie powiedzieć STOP, co oznacza, że nie zgadza się z podanym wynikiem i nie wie, dlaczego wynik ma być taki. Uczeń, który podał wynik, powinien wyjaśnić sposób swojego liczenia. Zadania, które były podczas lekcji rozwiązywane ustnie, można zadać jako pracę domową słabszym matematycznie uczniom.

Komentarz do zadania 4.

Przy okazji tego zadania warto porozmawiać z uczniami o szybkim rozwiązaniu takiego zadania. W tym przypadku wystarczy oszacować, która z podanych liczb jest najbliższa liczbie $2\frac{1}{5}$. Można też zauważyć, że do liczby $2\frac{3}{5}$ trzeba dodać trochę mniej niż 3, i wówczas odpowiedź jest natychmiastowa.

123

Przykład 1.

Oszacujmy wyniki, a następnie wykonajmy działania.

a) $3\frac{6}{7} + 4\frac{4}{7}$ b) $5\frac{2}{5} - 2\frac{4}{5}$

a) Ułamki $\frac{6}{7}$ i $\frac{4}{7}$ zastąpmy ułamkiem $\frac{1}{2}$, mniejszym od każdego z nich.

Jeżeli zmniejszamy składniki, to suma maleje, więc:

$$3\frac{6}{7} + 4\frac{4}{7} > 3 + \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2} = 8.$$

Zatem wynik dodawania powinien być nieco większy od 8.

Obliczmy sumę: $3\frac{6}{7} + 4\frac{4}{7} = 7\frac{10}{7} = 8\frac{3}{7}$.

b) Zaokrąglimy odjemnik do całości: $2\frac{4}{5} \approx 3$.

Jeżeli zwiększamy odjemnik, to różnica maleje, więc:

$$5\frac{2}{5} - 2\frac{4}{5} > 5\frac{2}{5} - 3 = 2\frac{2}{5}.$$

Zatem wynik odejmowania powinien być nieco większy od $2\frac{2}{5}$.

Obliczmy różnicę: $5\frac{2}{5} - 2\frac{4}{5} = 4\frac{7}{5} - 2\frac{4}{5} = 2\frac{3}{5}$.

Szacowanie wyniku pomaga weryfikować poprawność naszych obliczeń.

Zanim przystąpisz do obliczeń, spróbuj oszacować wyniki działań.

1 Oblicz.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ b) $3\frac{5}{8} + \frac{7}{8}$ c) $4\frac{2}{5} + 3\frac{4}{5}$ d) $6\frac{2}{5} + 3\frac{1}{5} + 2\frac{4}{5}$

2 Oblicz.

a) $4\frac{5}{6} - \frac{4}{6}$ b) $5\frac{5}{6} - 4$ c) $5 - \frac{2}{5}$ d) $5\frac{1}{6} - 2\frac{5}{6}$

3 Przepisz działania, zamiast $\diamond$ napisz odpowiednią liczbę.

a) $2\frac{3}{5} + \diamond = 3$ b) $1\frac{1}{3} + \diamond = 5\frac{1}{3}$ c) $6 - \diamond = 5\frac{2}{3}$ d) $4\frac{2}{3} - \diamond = 2$
 $\diamond + \frac{5}{8} = 1$ $\diamond + 2\frac{2}{5} = 6\frac{2}{5}$ $2 - \diamond = 1\frac{3}{4}$ $8\frac{1}{2} - \diamond = 5$

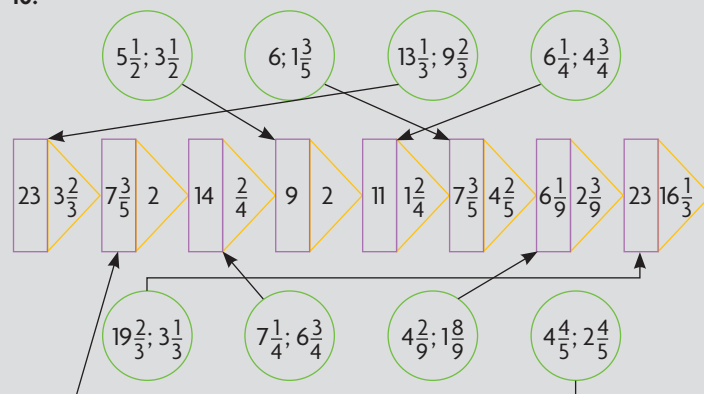
4 Aby otrzymać $5\frac{1}{5}$, do liczby $2\frac{3}{5}$ trzeba dodać

A. $3\frac{3}{5}$ B. $7\frac{4}{5}$ C. $2\frac{3}{5}$ D. $1\frac{3}{5}$

100

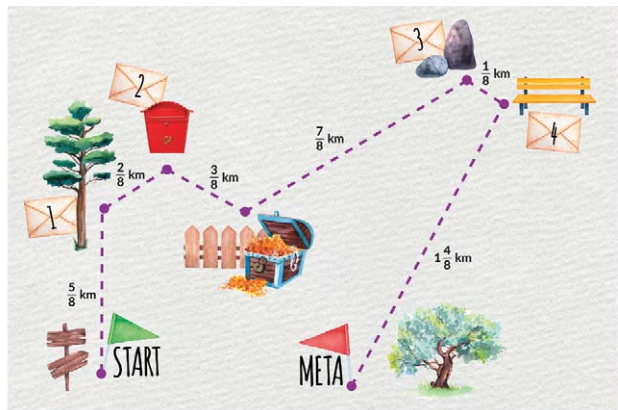
Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

10.



11. P, F

Harcerze bawili się w podchody. Na podstawie rysunku trasy podchodów rozwiąż zadania 5.–8.



5. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
 Trasa podchodów miała długość A / B. A. $3\frac{5}{8}$ km B. $3\frac{3}{4}$ km
 Skarb ukryto w odległości C / D od STARTU. C. $1\frac{1}{4}$ km D. $1\frac{1}{8}$ km
6. Między drugim a czwartym listem trasa miała długość:
 A. $1\frac{3}{4}$ km B. $1\frac{3}{8}$ km C. $1\frac{1}{8}$ km D. $1\frac{1}{4}$ km
7. Między którymi kolejnymi listami trasa była najkrótsza, a między którymi – najdłuższa?
8. Harcerze wyruszyli na trasę o 10.35. W pierwszym liście znaleźli informację o skarbie i zaczęli go szukać o 12.10. Znaleźli go po 12 minutach. Na mecie byli o 13.23.
 a) Jak długo trwały podchody?
 b) Po jakim czasie od startu harcerze zaczęli szukać skarbu?
 c) Ile czasu upłynęło od znalezienia skarbu do dojścia do mety?
9. Asia, Krysia i Marysia kupiły takie same czekolady. Asia zjadła $\frac{3}{8}$ swojej czekolady, Krysia $\frac{7}{8}$, a Marysia $\frac{5}{8}$. Czy z kawałków, które zostały dziewczynkom, można złożyć całą tabliczkę czekolady?

101

Komentarz do zadań 5.–7.

Rozwiązanie tego bloku zadań wymaga czytania ze zrozumieniem informacji przedstawionych na rysunku. Trzeba więc przy każdym zadaniu pytać uczniów o dane, z których skorzystaliśmy podczas jego rozwiązywania.

Komentarz do zadania 8.

Obliczenia czasowe mają dużą wartość praktyczną, stąd powrót do nich w temacie związanym z działaniami na ułamkach. Przy okazji rozwiązywania tego zadania proponujemy zadać uczniom dodatkowe pytania związane z obliczeniami czasowymi, np. *Jaką część godziny jest 12 minut? Ile minut to $\frac{7}{12}$ godziny?*

Komentarz do zadania 9.

Warto zapytać o taką strategię rozwiązania tego zadania, która pozwoli sprytnie i szybko odpowiedzieć na zadane pytanie. Uczniowie powinni zauważyć, że Asia i Marysia zjadły razem całą czekoladę.

Odpowiedzi do zadań

1. a) 1 b) $4\frac{1}{2}$ c) $8\frac{1}{5}$ d) $12\frac{2}{5}$
 2. a) $4\frac{1}{6}$ b) $1\frac{5}{6}$ c) $4\frac{3}{5}$ d) $2\frac{1}{3}$
 3. a) $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}$ b) 4, 4 c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ d) $2\frac{2}{3}, 3\frac{1}{2}$
 4. C
 5. BC
 6. B
 7. najkrótsza: między 3 i 4, najdłuższa: między 2 i 3
 8. a) 2 h 48 min b) 1 h 35 min c) 1 h 1 min
 9. tak



Komentarz do zadania 11.

Uczniowie powinni zapisać rozwiązanie zadania w postaci jednego wyrażenia arytmetycznego.

Komentarz do Sprawdź się!

W zadaniach 1.–3. występuje tylko dodawanie lub odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach. Można więc zachęcić uczniów do wykonania w pamięci obliczeń do tych zadań.

W zadaniu 4. warto zaproponować uczniom ułożenie dodatkowych pytań do treści tego zadania, co pozwoli zrealizować punkt XIV. 7) wymagań szczegółowych podstawy programowej.

Treść zadania 5. zachęca do dyskusji o dużych grzybach i grzybobraniu. Proponujemy, aby uczniowie poszukali dodatkowych informacji na ten temat i wykorzystali je w ułożonych przez siebie zadaniach.

123

- 10 Jeden z największych jadowitych węży, kobra królewska, ma $5\frac{14}{20}$ m długości, a żyjąca w Polsce żmija zygzakowata – $\frac{15}{20}$ m. O ile metrów żmija jest krótsza od kobry?
- 11 Kinga ma zestaw płyt. Płyty z muzyką pop stanowią $\frac{9}{22}$ zbioru, płyty z muzyką rap – $\frac{7}{22}$, a reszta to płyty z muzyką klasyczną. Jaką część zestawu stanowią płyty z muzyką klasyczną? Wynik zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.
- 12 Oblicz nieznanne liczby. Która z nich leży na osi liczbowej najdalej od liczby 3?
- a) $3\frac{4}{5} + a = 6\frac{2}{5}$ b) $b - 1\frac{4}{5} = 3$ c) $5 - c = 1\frac{3}{5}$ d) $d + 4\frac{4}{5} = 6\frac{1}{5}$

🐿 Sprawdź się!

- 1 Oblicz.
- a) $3\frac{2}{9} + 1\frac{5}{9} + \frac{4}{9}$ b) $3\frac{7}{10} - 2\frac{5}{10}$
 c) $2 - 1\frac{3}{8}$ d) $3\frac{1}{6} - 1\frac{5}{6}$
- 2 Liczbą o $\frac{3}{8}$ mniejszą od liczby $2\frac{3}{8}$ jest
 A. 2 B. $1\frac{1}{4}$ C. $1\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{4}$
- 3 Które zdanie jest **falszywe**?
- A. Sumą liczb $1\frac{5}{6}$ i $2\frac{3}{6}$ jest liczba $4\frac{1}{3}$.
 B. Liczba $1\frac{5}{8}$ jest różnicą liczb $2\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{8}$.
 C. Różnicą liczb $3\frac{1}{3}$ i $1\frac{2}{3}$ jest liczba $1\frac{2}{3}$.
 D. Liczbę 2 można przedstawić jako sumę liczb: $\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$ i $\frac{1}{4}$.
- 4 Kasia zbierała truskawki. W jednym koszyczku było $\frac{4}{5}$ kg truskawek, a w drugim o $1\frac{2}{5}$ kg truskawek więcej. Ile kilogramów truskawek było w drugim koszyczku?
- 5 Podczas grzybobrania Ania znalazła borowika, który ważył $2\frac{1}{4}$ kg, a Bartek podgrzybka o $\frac{3}{4}$ kg lżejszego. Ile razem ważyły te dwa grzyby?



102

Odpowiedzi do zadań

10. o $4\frac{19}{20}$ m

11. $\frac{3}{11}$

12. a) $2\frac{3}{5}$ b) $4\frac{4}{5}$ c) $3\frac{2}{5}$ d) $1\frac{2}{5}$; najdalej $4\frac{4}{5}$

Sprawdź się!

1. a) $5\frac{2}{9}$ b) $1\frac{1}{5}$ c) $\frac{5}{8}$ d) $1\frac{1}{3}$

2. A

3. B

4. $2\frac{1}{5}$ kg

5. $3\frac{3}{4}$ kg

5. Dodawanie i odejmowanie ułamków o różnych mianownikach

Przykład 1.

Obliczmy sumę $\frac{3}{5} + \frac{1}{3}$.

Ponieważ możemy dodawać ułamki, które mają jednakowe mianowniki, dlatego najpierw trzeba znaleźć liczbę, która jest wielokrotnością obu mianowników.

Dla liczb 5 i 3 jest to na przykład ich iloczyn, czyli liczba 15.

Rozszerzmy ułamki tak, aby mianownik był równy 15, i wykonajmy dodawanie ułamków o jednakowych mianownikach.

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{9}{15} + \frac{5}{15} = \frac{14}{15}$$

Przykład 2.

W bibliotece domowej państwa Kwiatkowskich $\frac{2}{3}$ liczby wszystkich książek to książki historyczne, $\frac{1}{4}$ to tomiki poezji, a pozostałe książki to albumy. Jaką część liczby wszystkich książek jest liczba albumów?

Wykonajmy rysunek pomocniczy.

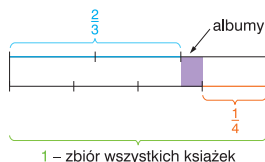
Obliczmy, jaką część liczby wszystkich książek w bibliotece jest liczba książek historycznych i tomików poezji.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

Obliczmy, jaką część liczby wszystkich książek jest liczba albumów.

$$1 - \frac{11}{12} = \frac{12}{12} - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

Odpowiedź. Liczba albumów to $\frac{1}{12}$ liczby wszystkich książek.



Tematy lekcji:

1. Różne sposoby dodawania i odejmowania ułamków o różnych mianownikach (1 h)
2. Zastosowanie w zadaniach dodawania i odejmowania ułamków o różnych mianownikach (1 h)
3. Dodawanie i odejmowanie ułamków o różnych mianownikach w zadaniach (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- sprowadza ułamki zwykłe do jednakowego mianownika,
- dodaje i odejmuje ułamki o różnych mianownikach,
- oblicza niewiadomy składnik, odjemną lub odjemnik, gdy co najmniej jedna wielkość wyrażona jest ułamkiem,
- w rozwiązywaniu zadań tekstowych stosuje porównywanie różnicowe i ilorazowe,
- wykonuje wstępne czynności ułatwiające rozwiązanie zadania, w tym rysunek pomocniczy lub wygodne dla siebie zapisanie informacji i danych z treści zadania,
- dostrzega zależności między podanymi informacjami,
- do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu ułamków o różnych mianownikach,
- odczytuje i interpretuje dane przedstawione na diagramach, w których występują ułamki.

Wskazówki metodyczne

- Lekcję warto rozpocząć od działań na konkretach. Uczniowie powinni przynieść na zajęcia wycięte z papieru koła, których wykonanie zlecamy na poprzedniej lekcji, jako zadanie domowe.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 11.

Komentarz do Przykładu 2.

Bardzo ważna i przydatna jest ilustracja do zadania. Gdyby uczeń miał pokazać sumę podanych części na odcinku, to musiałby się zastanowić, jakiej długości odcinek trzeba narysować (na ile kratek) i jaką długość ma mieć każda część. Przedstawiony rysunek można zastąpić paskiem papieru. Należy złożyć go na 3 równe części i zaznaczyć złożenia, a następnie złożyć go na 4 równe części i złożenia zaznaczyć innym kolorem. Wówczas łatwo znaleźć szukaną część zbioru. Należy sprawdzić, czy uczniowie rozumieją, dlaczego zbiór wszystkich książek jest oznaczony liczbą 1.

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Działania na ułamkach zwykłych
	Kartkówka 11 Plansza edukacyjna. Ułamki zwykłe
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 73–77
Zbiór zadań	s. 65–68



Komentarz do Przykładu 3.

Aby obliczyć sumę lub różnicę ułamków, muszą one mieć jednakowy mianownik. Jednakowym mianownikiem nie musi być najmniejsza wspólna wielokrotność mianowników. Uczniowie najczęściej na jednakowy mianownik wybierają iloczyn mianowników. Nie ma to znaczenia. Warto jednak przyzwyczajać uczniów do sprawdzania, czy wynik końcowy jest ułamkiem nieskracalnym.

Komentarz do zadania 1.

Zwracamy uczniom uwagę, że podczas obliczania iloczynu kilku mianowników w celu znalezienia wspólnego mianownika możemy pominąć w iloczynie ten mianownik, który jest dzielnikiem jednego z pozostałych. Jeśli np. szukamy wspólnego mianownika dla ułamków: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{8}$, to trzeba zauważyć, że 2 i 4 są dzielnikami 8. Zatem wspólnym mianownikiem może być liczba 8, chociaż liczba 64 też jest poprawna.

123

Przykład 3.

Obliczmy różnicę liczb $2\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{6}$.

Sposób I

Wspólnym mianownikiem dla tych ułamków może być iloczyn mianowników, czyli liczba 48 lub dowolna jej wielokrotność.

$$2\frac{3}{8} - \frac{5}{6} = 2\frac{3 \cdot 6}{8 \cdot 6} - \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 8} = 2\frac{18}{48} - \frac{40}{48} = 2\frac{18-40}{48} = 2\frac{-22}{48} = 2\frac{22}{48} = 2\frac{11}{24}$$

Te obliczenia możemy wykonać w pamięci i pominąć zapis.

Wynik skracamy.

Sposób II

Można zauważyć, że liczby 6 i 8 mają mniejszą od ich iloczynu wspólną wielokrotność równą 24, i rozszerzyć ułamki do mianownika 24.

Ułamek $\frac{5}{6}$ trzeba rozszerzyć przez 4, bo $24 : 6 = 4$.

Ułamek $\frac{3}{8}$ trzeba rozszerzyć przez 3, bo $24 : 8 = 3$.

$$2\frac{3}{8} - \frac{5}{6} = 2\frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = 2\frac{9}{24} - \frac{20}{24} = 2\frac{9-20}{24} = 2\frac{-11}{24} = 2\frac{11}{24}$$

Aby dodać lub odjąć ułamki o różnych mianownikach, trzeba najpierw sprowadzić je do jednakowego mianownika.



1 Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{1}{2} + \frac{3}{4} & \text{b) } 1\frac{3}{5} + 2\frac{4}{15} & \text{c) } \frac{7}{10} + \frac{4}{5} + \frac{1}{2} & \text{d) } 2\frac{1}{6} + \frac{7}{10} + 1\frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} + \frac{7}{9} & 2\frac{1}{4} + 1\frac{2}{3} & \frac{3}{4} + \frac{5}{7} + 1\frac{1}{2} & 1\frac{7}{8} + \frac{1}{3} + 2\frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} + 1\frac{1}{4} & 1\frac{5}{6} + \frac{7}{9} & \frac{7}{8} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} & 2\frac{7}{12} + 1\frac{1}{15} + \frac{1}{2} \end{array}$$

2 Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{1}{2} - \frac{1}{4} & \text{b) } 3\frac{5}{9} - \frac{1}{6} & \text{c) } \frac{7}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} & \text{d) } 3\frac{11}{12} - \frac{5}{9} - 1\frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} - \frac{2}{3} & 1\frac{3}{4} - \frac{5}{6} & 2\frac{3}{7} - \frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} & 10 - 3\frac{1}{4} - 1\frac{3}{5} \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{8} & 2\frac{1}{9} - 1\frac{5}{6} & 2\frac{5}{6} - \frac{7}{8} - 1\frac{1}{4} & 7 - 2\frac{1}{2} - 1\frac{4}{5} \end{array}$$

104

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{16}{24}$
- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{9}$
- a) $\frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{9}{20}$ b) $\frac{13}{15}, \frac{11}{12}, \frac{29}{35}$ c) $5\frac{11}{20}, 4\frac{5}{16}, 5\frac{31}{36}$
- a) $0, \frac{1}{8}, \frac{1}{25}$ b) $\frac{13}{15}, \frac{4}{6}, \frac{4}{8}$ c) $5\frac{7}{8}, \frac{5}{10}, \frac{7}{21}$ d) $1\frac{11}{18}, 1\frac{27}{30}, \frac{23}{60}$
- D
- kolejno górna ścieżka: $1\frac{1}{6}, 2\frac{1}{6}, 3\frac{13}{24}, 10\frac{1}{8}$; kolejno dolna ścieżka: $13\frac{1}{8}, 12\frac{1}{4}, 10\frac{1}{2}$
- a) P b) P c) F d) P e) F
- a) $4\frac{1}{10}, 6\frac{3}{10}, 7\frac{1}{5}$ b) $1\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}$
- a) kolejno: $\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}$ b) kolejno: $\frac{1}{36}, \frac{3}{36}, \frac{7}{36}, \frac{9}{36}, \frac{2}{36}$
- $\frac{11}{100}$

- $1\frac{2}{5}, 3\frac{5}{12}, 9\frac{16}{35}, \frac{2}{5}$
- a) $\frac{6}{35}$ b) $10\frac{1}{5}$ c) $1\frac{3}{4}$ d) $10\frac{1}{5}$
- a) $2\frac{11}{18}$ b) $2\frac{13}{21}$
- kolejno wierszami od dołu:
 - $1\frac{5}{12}, 2\frac{2}{3}, 2\frac{11}{12}, 5\frac{7}{12}$ b) $1\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, 4\frac{5}{8}, 3, 7\frac{5}{8}$
 - kolejno wierszami od góry: $8\frac{11}{18}, 5\frac{5}{9}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 1\frac{5}{6}, \frac{2}{3}$

Odpowiedzi do zadań

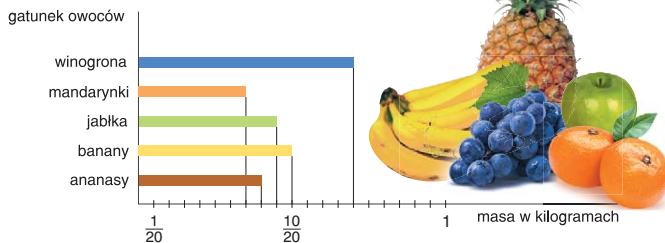
- a) $1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{9}, 2\frac{1}{12}$ b) $3\frac{13}{15}, 3\frac{11}{12}, 2\frac{11}{18}$ c) $2, 2\frac{27}{28}, 1\frac{7}{8}$
- a) $4\frac{4}{15}, 5\frac{1}{24}, 4\frac{3}{20}$
- a) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}$ b) $3\frac{7}{18}, \frac{11}{12}, \frac{5}{18}$ c) $\frac{1}{8}, \frac{5}{28}, \frac{17}{24}$
- $1\frac{11}{18}, 5\frac{3}{20}, 2\frac{7}{10}$

III. Ułamki zwykłe

123

- 3 Sławek posegregował zebrane grzyby: $\frac{1}{5}$ częścią wszystkich grzybów były borowiki, $\frac{4}{15}$ – podgrzybki, a $\frac{1}{3}$ – maślaki. Pozostałe grzyby to kozaki czerwone. Jaką częścią wszystkich zebranych grzybów były kozaki czerwone? Których grzybów było najwięcej?
- 4 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Liczba $6\frac{1}{2}$ jest większa od liczby $4\frac{5}{6}$ o A / B. A. $1\frac{2}{3}$ B. $2\frac{4}{6}$
Liczba $7\frac{4}{5}$ jest mniejsza od liczby $10\frac{1}{4}$ o C / D. C. $2\frac{9}{20}$ D. $3\frac{11}{20}$

Skorzystaj z poniższych informacji i rozwiąż zadania 5.–7.
Na przyjęcie imieninowe Kasia zrobiła pyszną sałatkę owocową. Jej skład przedstawiono na diagramie.



- 5 Których owoców było w sałatce najwięcej, a których najmniej?
- 6 O jaką część kilograma mniej było ananasów niż winogron?
- 7 Ile kilogramów wszystkich owoców zużyto do tej sałatki? Podaj ułamek w postaci nieskracalnej.
- 8 Państwo Janiszewscy mają sad wiśniowy. Na sprzedaż przeznaczili $\frac{3}{5}$ zebranych wiśni, na przetwory zimowe – $\frac{1}{3}$, a resztę wiśni zostawili do bieżącego spożycia. Jaką część zebranych wiśni przeznaczili:
a) razem – na sprzedaż i przetwory na zimę,
b) do bieżącego spożycia?

105

Odpowiedzi do zadań

3. $\frac{1}{5}$; maślaków
4. AC
5. najwięcej: winogron, najmniej: mandarynek
6. o $\frac{3}{10}$ kg
7. $2\frac{2}{5}$ kg
8. a) $\frac{14}{15}$ b) $\frac{1}{15}$

Komentarz do zadania 3.

Warto zaproponować uczniom zapisanie danych w tabelce:

Rodzaj grzybów	Borowiki	Podgrzybki	Maślaki	Kozaki czerwone	Razem
Jaka to część wszystkich grzybów?	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	■	1 cały zbiór grzybów Sławka

Podobnie jak w *Przykładzie 2*, s. 103, liczbą 1 opisujemy cały zbiór grzybów Sławka. Sprowadzając ułamki do jednakowego mianownika, warto zauważyć, że jeden z mianowników jest wielokrotnością pozostałych.

Komentarz do zadań 5.–7.

Aby rozwiązać te zadania, uczniowie muszą skorzystać z danych przedstawionych na diagramie. Rozwiązywanie warto rozpocząć od ustalenia, na ile równych części podzielono jednostkę na osi poziomej. Podczas odczytywania poszczególnych ułamków z diagramu uczniowie powinni podawać jego rodzaj (ułamek właściwy, niewłaściwy, skracalny, nieskracalny).

Komentarz do zadania 8.

Wskazane jest, aby kolejny raz zwrócić uwagę na zapis całego zbioru za pomocą liczby 1. Proponujemy, aby uczniowie dobrzy i bardzo dobrzy zapisali rozwiązanie punktu b) w postaci jednego wyrażenia arytmetycznego.



Komentarz do zadania 9.

W kolejnych przykładach tego zadania litery zastępują składniki, odjemne lub odjemniki. W celu utrwalenia tych pojęć proponujemy podczas rozwiązywania zadania operować tymi nazwami.

Komentarz do zadania 10.

Proponujemy, aby uczniowie zilustrowali treść zadania na prostokącie, którego wymiary muszą wcześniej przedyskutować.

Komentarz do A to ciekawe!

Warto, aby chętni uczniowie, korzystając z zawartych tutaj informacji, ułożyli kolejny przykład i wyjaśnili sposób jego rozwiązania.

123

9 Oblicz, jakie liczby zastępują litery, i sprawdź otrzymane wyniki.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a + \frac{4}{5} = 1\frac{1}{4} & \text{b) } c - \frac{5}{6} = \frac{7}{9} & \text{c) } \frac{1}{2} - p = \frac{3}{7} \\ 1\frac{4}{7} + b = 3\frac{1}{3} & d - 1\frac{1}{4} = 2\frac{2}{3} & 1\frac{1}{5} - u = \frac{5}{6} \end{array}$$

10 Pan Kunicki ma pole w kształcie prostokąta. Na $\frac{3}{8}$ powierzchni pola posadził ziemniaki, a na $\frac{1}{3}$ – buraki cukrowe. Resztę pola przeznaczył na pszenicę.

- a) Na co przeznaczył większą część pola: na buraki cukrowe czy na ziemniaki?
b) Jaką część powierzchni pola przeznaczył na pszenicę?



11 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

Różnicą liczb $2\frac{4}{9}$ i $1\frac{5}{9}$ jest A / B. A. $\frac{8}{9}$ B. 4

Sumą liczb $3\frac{1}{2}$ i $2\frac{2}{3}$ jest C / D. C. $5\frac{3}{5}$ D. $6\frac{1}{6}$

12 Liczbę $2\frac{5}{6}$ przedstaw w postaci sumy ułamków o różnych mianownikach.

A to ciekawe!

Każdy ułamek można przedstawić jako sumę ułamków o licznikach równych 1 i równych mianownikach, np.

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \quad \frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

Ułamki można też przedstawić w postaci sumy ułamków o licznikach równych 1 i różnych mianownikach. Taki sposób przedstawiania ułamków znajduje się w dokumencie matematycznym – papirusie Rhinda – który poznaliście w klasie czwartej. Prawdopodobnie jest to najstarszy dokument matematyczny znaleziony w Egipcie. Przedstawione są tam różne ułamki w postaci sumy ułamków o liczniku 1, np.

$$\frac{11}{18} = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \quad \frac{5}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \quad \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Oblicz, jaki ułamek został przedstawiony jako suma ułamków.

$$\text{a) } \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} \quad \text{b) } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}$$

106

Odpowiedzi do zadań

9. a) $\frac{9}{20}$, $1\frac{16}{21}$ b) $1\frac{11}{18}$, $3\frac{11}{12}$ c) $\frac{1}{14}$, $\frac{11}{30}$

10. a) na ziemniaki b) $\frac{7}{24}$

11. AD

A to ciekawe!

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{41}{42}$

Wyzwanie

Przedstaw ułamki $\frac{3}{4}$ i $\frac{13}{12}$ w postaci sumy ułamków o licznikach równych 1 i różnych mianownikach.

Sprawdź się!

- 1 Oblicz.
a) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ b) $1\frac{5}{7} + 2\frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$ d) $2\frac{1}{3} - 1\frac{3}{5}$
- 2 Które zdanie jest **falszywe**?
A. Sumą liczb $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{6}$ jest $1\frac{1}{2}$.
B. Liczba $1\frac{1}{4}$ jest różnicą liczb $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{2}$.
C. Różnicą liczb $1\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{3}$ jest $\frac{11}{12}$.
D. Krawcowa z kawałka materiału o długości $6\frac{1}{2}$ m odcięła $4\frac{3}{4}$ m, więc zostało $1\frac{3}{4}$ m materiału.
- 3 Uczniowie klasy piątej ustalali, gdzie pojechać na wycieczkę. Do Krakowa chciała jechać $\frac{1}{2}$ klasy, w góry $-\frac{3}{8}$ klasy, reszta nie miała propozycji. Jaka część klasy nie miała propozycji, dokąd jechać na wycieczkę?
- 4 Aby równość $a + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{8}$ była prawdziwa, literę a należy zastąpić liczbą
A. $1\frac{1}{24}$ B. $1\frac{17}{24}$ C. $\frac{19}{24}$ D. $\frac{17}{24}$
- 5 Karolina przyniosła z ogródka kwiaty i ułożyła je według kolorów. Okazało się, że $\frac{1}{5}$ wszystkich kwiatów to kwiaty czerwone, $\frac{3}{10}$ – białe, a pozostałe kwiaty były koloru żółtego. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Kwiaty żółte stanowiły A / B wszystkich kwiatów. A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{2}$
Najwięcej było kwiatów C / D. C. żółtych D. białych

Komentarz do *Sprawdź się!*

Zadanie 1. jest łatwe. Proponujemy, aby uczniowie rozwiązali je samodzielnie, a sprawdzenia dokonali w parach. Aby jeszcze bardziej je ułatwić, możemy poprosić wskazanych uczniów o podanie dla kolejnych punktów jednakowych mianowników.

W rozwiązaniu zadania 2. umiejętność szacowania ma zasadnicze znaczenie. Pozwala ono na szybkie wskazanie zdania fałszywego. Prosimy uczniów o uzasadnienie swoich decyzji. W ten sposób uczą się uzasadniania, obrony własnego zdania i wypowiedziania się z użyciem pojęć matematycznych.

Zadanie 3. jest ważne, ponieważ ćwiczy umiejętność znajdowania ułamka, który jest uzupełnieniem danego do całości. Do tego typu zadań warto często wracać.

Odpowiedzi do zadań

Wyzwanie

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \frac{13}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Sprawdź się!

1. a) $1\frac{1}{12}$ b) $4\frac{13}{28}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{11}{15}$
2. B
3. $\frac{1}{8}$
4. C
5. BC



Tematy lekcji:

1. Mnożenie ułamków (1 h)
2. Zastosowanie mnożenia ułamków w zadaniach (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- mnoży ułamki zwykłe,
- oblicza kwadraty i sześciany ułamków zwykłych oraz liczb mieszanych,
- czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe,
- stosuje mnożenie ułamków w zadaniach tekstowych.

Wskazówki metodyczne

Realizację tego tematu rozpoczynamy od przypomnienia, jak mnożymy ułamek przez liczbę naturalną. Warto kontynuować zapis mnożenia ułamka przez liczbę naturalną w sposób przedstawiony w klasie 4. Zapobiegnie to niepoprawnemu skracaniu.

Komentarz do Sowa uczy

Na tych przykładach pokazałyśmy sposoby mnożenia ułamków i liczb mieszanych. Warto je wszystkie dokładnie omówić. Na ich podstawie większość uczniów będzie potrafiła samodzielnie sformułować, zawartą w ramce z wykrzyknikiem, regułę mnożenia ułamków. W razie potrzeby w czasie rozwiązywania zadań, do tych przykładów trzeba odsyłać uczniów.

123

6. Mnożenie ułamków

Sowa przypomina

$$4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Takie mnożenie możemy zastąpić dodawaniem jednakowych ułamków.

lub

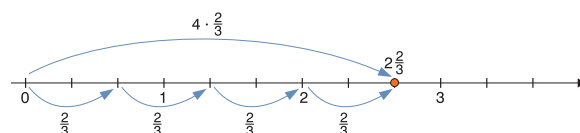
$$4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Liczbę mnożymy przez licznik ułamka. Mianownik pozostaje bez zmian.

$$4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 4$$

Mnożenie jest przemienne.

Można zilustrować to działanie na osi liczbowej.



Sowa uczy

Ułamki i liczby mieszane mnożymy tak:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

$$2\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5} \quad \text{lub} \quad 2\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

$$3\frac{3}{4} \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{15 \cdot 10}{4 \cdot 3} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$$

Można skrócić czynniki przed wykonaniem mnożenia.

Aby pomnożyć dwa ułamki, mnożymy licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik.

Gdy w mnożeniu występują liczby mieszane, to zamieniamy je na ułamki niewłaściwe.

108

Materiały dydaktyczne

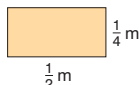
	Liczby wymierne → Działania na ułamkach zwykłych
	Plansza edukacyjna. Ułamki zwykłe
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 78–81
Zbiór zadań	s. 68–70

III. Ułamki zwykłe

123

Przykład 1.

Obliczmy pole prostokąta, którego jeden bok ma $\frac{1}{2}$ m, a drugi – $\frac{1}{4}$ m.



Pole prostokąta jest iloczynem jego długości i szerokości.

Podczas wykonywania obliczeń na wyrażeniach mianowanych możemy nie pisać jednostek. Na końcu podajemy jednostkę w nawiasie.

Sposób I

$$\frac{1}{2} \text{ m} = 50 \text{ cm}, \frac{1}{4} \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

$$P = 50 \cdot 25 = 1250 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

$$P = \frac{1250}{10\,000} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} \text{ [m}^2\text{]}$$

Sposób II

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$$

$$P = \frac{1}{8} \text{ [m}^2\text{]}$$

Odpowiedź. Pole prostokąta jest równe $\frac{1}{8} \text{ m}^2$.

Przykład 2.

Obliczmy drugą potęgę liczby $\frac{3}{4}$ i trzecią potęgę liczby $2\frac{1}{2}$.

Druga potęga liczby $\frac{3}{4}$:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{9}{16}$$

Trzecia potęga liczby $2\frac{1}{2}$:

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^3 = 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8}$$

1. Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{3}{4} \cdot 6 & \text{b) } 4 \cdot \frac{5}{6} & \text{c) } 2\frac{1}{2} \cdot 6 & \text{d) } 10 \cdot 1\frac{1}{4} \\ 3 \cdot \frac{2}{3} & \frac{5}{14} \cdot 21 & 5 \cdot 1\frac{3}{10} & 2\frac{3}{8} \cdot 4 \end{array}$$

2. Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} & \text{b) } \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} & \text{c) } \frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{3} & \text{d) } 1\frac{2}{3} \cdot 1\frac{4}{5} \\ \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} & \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} & 3\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{10} & 2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{3}{5} \end{array}$$

109

Komentarz do Przykładu 1.

To zadanie dotyczące obliczania pola prostokąta, którego długości boków są wyrażone ułamkami zwykłymi, rozwiązyaliśmy dwoma sposobami. Podczas rozwiązywania podobnych zadań uczeń może wybrać sposób dla niego łatwiejszy. Proponujemy, by poznał oba, bo nie zawsze będzie miał możliwość takiego wyboru.

Komentarz do Przykładu 2.

Analizę tego przykładu powinno poprzedzić krótkie przypomnienie definicji drugiej i trzeciej potęgi. Po takim wstępie przykład jest łatwy i zrozumiały.

Komentarz do zadania 1.

W czasie zapisywania mnożenia liczby naturalnej przez ułamek należy zwrócić szczególną uwagę na zapis ułamka i liczby. Proponujemy, aby rozwiązywanie tego zadania dostosować do możliwości uczniów. W tym celu część uczniów samodzielnie rozwiązuje zadania w pamięci i zapisuje w zeszycie tylko wyniki, tymczasem reszta klasy rozwiązuje zadanie na tablicy. Taki sposób pracy z uczniami wymaga od nauczyciela dobrego przygotowania do lekcji. Musi on mieć w zanadrze kolejne przykłady, które otrzymują do rozwiązania uczniowie pracujący szybciej.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. a) $\frac{3}{7}$ b) 6 c) $3\frac{1}{2}$ d) 1 e) $7\frac{1}{2}$ f) 2 g) $6\frac{2}{3}$ h) $12\frac{1}{2}$

2. a) $\frac{3}{20}, \frac{3}{16}, \frac{5}{6}, 1\frac{1}{6}$ b) $3\frac{5}{7}, 4\frac{2}{3}, 4\frac{5}{7}, 8\frac{1}{8}$

3. $\frac{4}{3}, 4, \frac{4}{5}, \frac{12}{5}, \frac{24}{5}, 24, 9, 1\frac{1}{2}$ 4. B

5. kolejno wierszami: $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{10}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{20}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{7}{15}, \frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{3}{5}, \frac{12}{25}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}, \frac{14}{25}$

6. $3\frac{3}{4}, 7, 6\frac{3}{4}, 7\frac{1}{2}, 5\frac{3}{11}$

7. a) 72 b) 18

8. I kolumna: $1\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{9}, \frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}$; II kolumna: $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{7}{8}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{9}$

9. kolejno wierszami: $\frac{4}{25}, 4\frac{17}{27}, \frac{16}{121}, \frac{27}{64}, 42\frac{7}{8}, 11\frac{38}{121}$

10. a) P b) P c) F 11. B, D

12. a) $\frac{3}{4}, 4\frac{1}{2}$ b) $6\frac{1}{6}, 37$ c) $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{12}$ d) $3\frac{1}{3}, 6, 2\frac{1}{6}, 13$ 13. B

Odpowiedzi do zadań

1. a) $4\frac{1}{2}, 2$ b) $3\frac{1}{3}, 7\frac{1}{2}$ c) $15, 6\frac{1}{2}$ d) $12\frac{1}{2}, 9\frac{1}{2}$

2. a) $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{12}, \frac{3}{4}$ c) $1\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ d) $3, 3\frac{3}{5}$



Komentarz do zadania 8.

W zadaniu obliczamy wartości wyrażeń arytmetycznych. Wskazane jest wcześniejsze przypomnienie zasad kolejności wykonywania działań.

Komentarz do Wyzwania

Opisaną tutaj zabawę proponujemy przeprowadzić w małych grupach. Każdy osoba w grupie rzuca 3 razy kostką, zapisuje iloczyn i oblicza go. W tym czasie pozostałe osoby w grupie sprawdzają poprawność wykonania zadania. Przed rozpoczęciem zabawy warto ustalić zasady przyznawania punktów i możliwe do zdobycia nagrody.

Komentarz do Sprawdź się!

Proponujemy, aby drugą godzinę lekcyjną zakończyć samodzielnym rozwiązaniem przez uczniów tych zadań w określonym czasie. Ocenę poprawności rozwiązania zadań uczniowie również mogą wykonać samodzielnie, wymieniając się w parach zeszytami. Ważne, aby sprawdzenie poprawności poprzedziło omówienie i rozwiązanie tych zadań pod kierunkiem nauczyciela.

123

- 3 Oblicz: $(\frac{2}{3})^2$, $(\frac{1}{4})^3$, $(1\frac{1}{2})^3$, $(2\frac{2}{5})^2$.
- 4 Pani Agata kisi ogórki w słojach. Do każdego z nich wkłada po $3\frac{2}{5}$ kg ogórków. Ile kilogramów ogórków potrzeba do pięciu takich słoików?
- 5 Na treningu sportowcy jechali rowerami przez 3 godziny z prędkością średnią $25\frac{1}{2}$ $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile kilometrów przejechali?
- 6 Która liczba jest większa: $\frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3})^2$ czy $(\frac{1}{2})^3$?
- 7 Oblicz pole prostokąta:
 - a) o wymiarach $1\frac{2}{5}$ dm $\times$ $2\frac{1}{2}$ dm,
 - b) którego jeden bok ma długość $3\frac{3}{5}$ m, a drugi jest o $2\frac{13}{20}$ m dłuższy.
- 8 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
 - a) $\frac{2}{3} \cdot 1\frac{4}{5} + 2\frac{1}{2}$
 - b) $[(1\frac{1}{2})^2 + 1\frac{1}{6}] \cdot 3$
 - c) $4\frac{7}{8} - 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{8}$

Wyzwanie

Ala rzuciła trzy razy kostką sześcienną. Po każdym rzucie zapisywała ułamek, którego licznikiem była wyrzucona liczba, a mianownikiem liczba o 1 większa. Jaki najmniejszy iloczyn trzech ułamków mogła otrzymać, jeżeli za każdym razem wyrzuciła inną liczbę?



Sprawdź się!

- 1 Oblicz.
 - a) $\frac{7}{8} \cdot 12$
 - b) $2 \cdot 1\frac{1}{6}$
 - c) $\frac{5}{7} \cdot 1\frac{1}{6}$
 - d) $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{5}$
- 2 Za 4 m koronki po $5\frac{1}{2}$ zł za metr zapłacono
 - A. 20 zł
 - B. $22\frac{1}{2}$ zł
 - C. $21\frac{1}{2}$ zł
 - D. 22 zł
- 3 Oblicz drugą potęgę liczby $\frac{3}{4}$.
- 4 Oblicz obwód kwadratu o boku $6\frac{1}{2}$ m.
- 5 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
 - a) $2\frac{1}{5} \cdot 10 + 1\frac{3}{4}$
 - b) $3\frac{3}{4} + 2\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4}$
 - c) $2\frac{2}{5} \cdot 1\frac{2}{3} - 1\frac{5}{6}$

110

Odpowiedzi do zadań

3. $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{64}$, $3\frac{3}{8}$, $5\frac{19}{25}$
4. 17 kg
5. $76\frac{1}{2}$ km
6. pierwsza
7. a) $3\frac{1}{2}$ dm² b) $22\frac{1}{2}$ m²
8. a) $3\frac{7}{10}$ b) $10\frac{1}{4}$ c) $3\frac{3}{8}$

Wyzwanie

Najmniejszy iloczyn to: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Sprawdź się!

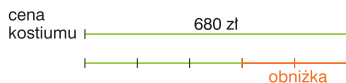
1. a) $10\frac{1}{2}$ b) $2\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{6}$ d) 3
2. D
3. $\frac{9}{16}$
4. 26 m
5. a) $23\frac{3}{4}$ b) $9\frac{3}{4}$ c) $2\frac{1}{6}$

7. Obliczanie ułamka danej liczby

Przykład 1.

Kostium kosztował 680 zł. W czasie wyprzedaży jego cenę zmniejszono o $\frac{2}{5}$ wartości. O jaką kwotę zmniejszono cenę kostiumu?

Przedstawmy treść zadania na rysunku pomocniczym.



Sposób I

$$\frac{1}{5} \text{ z } 680 \text{ to } 680 : 5 = 136$$

$$\frac{2}{5} \text{ to } 2 \text{ razy więcej niż } \frac{1}{5}, \text{ czyli}$$

$$\frac{2}{5} \text{ z } 680 \text{ to } 2 \cdot 136 = 272$$

Sposób II

$$\frac{1}{5} \text{ z } 680 \text{ to } \frac{1}{5} \cdot 680 = \frac{680}{5} = 136$$

$$\frac{2}{5} \text{ z } 680 \text{ to } \frac{2}{5} \cdot 680 = \frac{2 \cdot 680}{5} = 272$$

Odpowiedź. Cenę kostiumu zmniejszono o 272 zł.

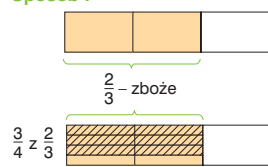


Aby obliczyć ułamek danej liczby, mnożymy ułamek przez tę liczbę.

Przykład 2.

Pan Rybicki $\frac{2}{3}$ swojego pola obsiał zbożem, w tym na $\frac{3}{4}$ powierzchni pszenicą. Jaką część całego pola zajmuje pszenica?

Sposób I



Z rysunku odczytujemy, że $\frac{3}{4} \text{ z } \frac{2}{3}$ to $\frac{6}{12}$, czyli $\frac{1}{2}$ pola.

Sposób II

Korzystamy z informacji zawartej w ramce pod **Przykładem 1.** i wykonujemy odpowiednie mnożenie:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Przed wykonaniem mnożenia warto skrócić ułamki.

Odpowiedź. Pszenica zajmuje $\frac{1}{2}$ powierzchni pola.

111

Temat lekcji:

Obliczanie ułamka danej liczby (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- mnoży ułamki zwykłe,
- oblicza ułamek danej liczby w kontekście praktycznym,
- wykonuje wstępne czynności ułatwiające rozwiązanie zadania, w tym rysunek pomocniczy,
- dostrzega zależności między podanymi informacjami i stosuje je w rozwiązywaniu zadań,
- rozwiązuje zadania praktyczne na obliczanie ułamka z danej liczby.

Wskazówki metodyczne

- Umiejętność obliczania ułamka danej liczby jest istotna w życiu codziennym. Będzie również potrzebna do obliczania procentu danej liczby. Warto włączyć to zagadnienie do rachunku pamięciowego, który można przeprowadzić w następujący sposób. Zapisujemy na tablicy odpowiednio dobrane liczby i prosimy uczniów o podanie $\frac{1}{2}$, później $\frac{1}{4}$ czy $\frac{1}{3}$ wskazanej liczby. Gdy uczniowie opanują tę umiejętność, na kolejnych lekcjach można zwiększać trudność zadania, zwiększając licznik ułamka.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 12.

Komentarz do Przykładu 1.

W tym przykładzie warto zwrócić uwagę na sposób wykonywania rysunków pomocniczych.

Komentarz do Przykładu 2.

W sposobie I przedstawiamy rozwiązanie na podstawie rysunku. Całość dzielimy na 3 równe części, a następnie $\frac{2}{3}$ z nich dzielimy na 4 równe części i zaznaczamy $\frac{3}{4}$ tych części. Trzeba sprawdzić, czy uczniowie potrafią podać liczbę prostokątów, które znajdują się w białej części oraz w całym prostokącie (w całości). Warto, by po analizie zadania, w celu utrwalenia pojęcia ułamka danej części, uczniowie, wykonując odpowiedni rysunek, przedstawili np. $\frac{1}{2} \text{ z } \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2} \text{ z } \frac{1}{3}$.

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Działania na ułamkach zwykłych
	Kartkówka 12 Plansza edukacyjna. Ułamki zwykłe
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 82–84
Zbiór zadań	s. 70–73



Komentarz do zadań 1.–5.

Zadania te można wykonać ustnie, ponieważ ich obliczenia są proste. Służą one przede wszystkim do wyćwiczenia mechanizmu obliczania ułamka danej liczby. Proponujemy również skorzystać z zadań 5. i 7., s. 71, oraz z zadania 9., s. 73, zamieszczonych w zbiorze zadań.

Komentarz do zadań 6.–10.

W tych zadaniach pokazujemy zastosowanie w życiu codziennym umiejętności obliczania ułamka danej liczby. Po ich rozwiązaniu można poprosić uczniów o ułożenie własnego zadania ćwiczącego tę umiejętność. Uczniom słabszym matematycznie proponujemy zasugerowanie tematu zadania, np. zakupy.

123

- Oblicz w pamięci $\frac{1}{3}$, a następnie $\frac{2}{3}$, każdej z liczb: 30, 60, 120.
- Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
 $\frac{1}{6}$ doby to A / B godziny. A. 2 B. 4
 $\frac{3}{4}$ doby to C / D godzin. C. 16 D. 18
- Oblicz:
 a) $\frac{2}{7}$ liczb 14, 42 i 140, b) $\frac{3}{5}$ liczb 35, 210 i 600.
- Oblicz:
 a) $\frac{2}{3}$ doby – ile to godzin, b) $\frac{2}{5}$ cm – ile to milimetrów,
 c) $\frac{3}{4}$ km – ile to metrów, d) $\frac{1}{3}$ lekcji – ile to minut.
- Napisz działania i oblicz:
 a) $\frac{1}{2}$ liczb $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{6}$,
 b) $\frac{1}{3}$ liczb $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{6}$.



- Każdego dnia przez $\frac{1}{24}$ doby Adam czyta książki. Dwa razy więcej czasu w ciągu dnia poświęca na sport. Ile godzin w ciągu dnia Adam czyta książki, a ile poświęca na zajęcia sportowe?
- Pociąg, który miał planowy przyjazd o godzinie 23:26, spóźnił się o $\frac{2}{3}$ godziny. O której godzinie przyjechał ten pociąg?
- W klasie piątej jest 30 uczniów. Na wycieczkę pojechało $\frac{5}{6}$ wszystkich uczniów. Ilu uczniów pojechało na wycieczkę, a ilu nie?
- Zimą kurtka kosztowała 320 zł. Na wiosnę cenę tę zmniejszono o $\frac{1}{4}$ ceny zimowej. Cena kurtki wiosną była równa
 A. 80 zł B. 240 zł C. $320\frac{1}{4}$ zł D. 400 zł
- Dziewczynki miały posadzić 60 sadzonek porzeczek. Kinga posadziła $\frac{5}{12}$ wszystkich sadzonek, a Ola $\frac{3}{7}$ tych, które zostały. Resztą zajęła się Marta. Ile sadzonek porzeczek posadziła każda dziewczynka?



112

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- 160, 475, 70, 75
- a) P b) P c) F d) P
- B, C, F
- A, C
- c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{1}{7}$
- 72; 18; $\frac{1}{4}$
- B, I

Odpowiedzi do zadań

- 10, 20, 40; 20, 40, 80
- BD
- a) 4, 12, 40 b) 21, 126, 360
- a) 16 b) 4 c) 750 d) 15
- a) $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{18}$
- książka: 1 h, sport: 2 h
- 00:06
- pojechało: 25, nie pojechało: 5
- B
- Kinga: 25, Ola: 15, Marta: 20

III. Ułamki zwykłe

123

- 11 W klasie 5a uczy się 24 uczniów, w 5b – 28, a w 5c – 25. W klasie 5a rodzeństwo ma $\frac{3}{4}$ uczniów, w 5b – $\frac{5}{7}$ uczniów, w 5c – $\frac{4}{5}$ uczniów. Oblicz liczbę jedynaków w poszczególnych klasach.
- 12 Z dwóch różnych miast oddległych o 110 km wyjechali naprzeciw siebie dwaj koledzy, Piotr i Andrzej. Piotr jechał ze średnią prędkością $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a Andrzej – $56 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. W jakiej odległości od siebie będą koledzy po $\frac{3}{4}$ h?

Wyzwanie

Ola zmieszała $\frac{2}{3}$ szklanki soku pomarańczowego i $\frac{1}{3}$ szklanki soku cytrynowego. Wypiła pół szklanki napoju i dopełniła ją sokiem cytrynowym. Potem wypiła $\frac{1}{3}$ szklanki napoju i dopełniła ją sokiem pomarańczowym. Następnie wypiła $\frac{1}{6}$ szklanki napoju, ale jeszcze jej nie smakował, więc dopełniła szklankę sokiem cytrynowym. Napój okazał się wspaniały. Ola wypiła go do dna. Ile szklanek napoju wypiła Ola i którego soku wypiła więcej: cytrynowego czy pomarańczowego?



Sprawdź się!

- Oblicz:
a) $\frac{5}{6}$ liczby 15, b) $1\frac{1}{3}$ liczby $1\frac{1}{5}$.
- Ile to minut: $\frac{3}{4}$ godziny?
A. 75 min B. 60 min C. 45 min D. 15 min
- W klasie piątej uczy się 24 uczniów. Do teatru pojechało $\frac{5}{8}$ uczniów tej klasy. Ilu uczniów pojechało, a ilu nie pojechało do teatru?
- Japoński pociąg na poduszce magnetycznej osiągnął prędkość $603 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką drogę pokonałby pociąg poruszający się z tą prędkością przez $\frac{2}{3}$ h?
- Krem w czasie promocji kosztował 80 zł. Później jego cena wzrosła o $\frac{1}{5}$ ceny promocyjnej. Ile kosztował krem po zakończeniu promocji?



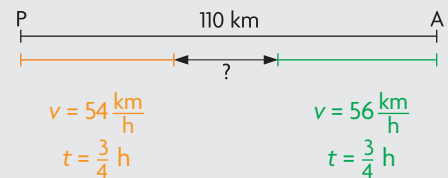
113

Komentarz do zadania 11.

Proponujemy, aby dane z zadania uporządkować w tabelce. W pierwszym wierszu wpisujemy nazwę klasy, w drugim – liczbę uczniów w poszczególnych klasach, w trzecim wierszu – ułamek opisujący, jaka część uczniów w danej klasie ma rodzeństwo. Uczniowie mogą zaproponować kolejne wiersze w tabelce, np. *liczba jedynaków, ułamek opisujący liczbę jedynaków, liczba uczniów mających rodzeństwo*.

Komentarz do zadania 12.

Rozwiązanie tego zadania proponujemy uzupełnić poniższym rysunkiem pomocniczym.



Komentarz do Wyzwania

Uczniowie powinni zwrócić uwagę na ilość soku, którą dolewała Ola. Ola wypiła cały napój, więc do rozwiązania zadania wystarczy policzyć, ile soku pomarańczowego i ile cytrynowego wlała łącznie do szklanki.

Odpowiedzi do zadań

11. 5a: 6, 5b: 8, 5c: 5
12. 27 km 500 m

Wyzwanie

Ola wypiła łącznie 2 szklanki napoju: jedną szklankę soku pomarańczowego i jedną szklankę soku cytrynowego w takiej samej ilości.

Sprawdź się!

- a) $12\frac{1}{2}$ b) $1\frac{3}{5}$
- C
- pojechało: 15, nie pojechało: 9
- 402 km
- 96 zł



Tematy lekcji:

1. Dzielenie ułamków (1 h)
2. Dzielenie ułamków w zadaniach (1 h)
3. Zastosowanie dzielenia ułamków w zadaniach tekstowych (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- podaje odwrotności liczb,
- dzieli ułamki zwykłe i liczby mieszane,
- oblicza niewiadomy czynnik, dzielną lub dzielnik, gdy co najmniej jedna wielkość jest wyrażona ułamkiem,
- wykonuje wstępne czynności ułatwiające rozwiązanie zadania, w tym rysunek pomocniczy lub wygodne dla siebie zapisanie informacji i danych z treści zadania,
- dostrzega zależności między podanymi informacjami,
- stosuje dzielenie ułamków do rozwiązywania zadań otwartych i zamkniętych.

Wskazówki metodyczne

- W ramach wstępu do tego tematu warto poszukać w życiu codziennym sytuacji wzajemnie odwrotnych. Proponujemy zabawę, którą zaczyna nauczyciel, wypowiadając słowo, np. *jasno*, i wskazując ucznia, który podaje wyraz określający sytuację odwrotną. Jeżeli robi to poprawnie, to teraz on podaje kolejne słowo i wyznacza osobę do odpowiedzi.
- Dzielenie ułamków rozpoczynamy od zadań na dzielenie ułamka przez liczbę naturalną. Warto do nich wykonać odpowiednie rysunki pomocnicze lub przedstawić działania na kartce w kształcie prostokąta lub koła. Proponujemy następujące zadania:
Ile osób otrzymało kawałek pizzy, jeżeli każdą z pięciu pizz podzielono na taką samą liczbę równych części, a każda osoba dostała po $\frac{1}{3}$ pizzy?
Ile potrzeba torebek, aby rozważyć 3 kg soli po pół kilograma w każdej torebce?

Komentarz do Przykładu 1.

Sposób I jest bliższy uczniom, ponieważ opiera się na obliczaniu ułamka danej liczby i zamianie jednostek masy. Sposób II uczy dzielenia ułamka przez liczbę całkowitą. Warto zwrócić uwagę uczniom na napisany kolorem niebieskim komentarz.

123

8. Dzielenie ułamków

Sowa uczy

Aby znaleźć odwrotność liczby, należy tę liczbę zapisać w postaci ułamka zwykłego i zamienić miejscami licznik z mianownikiem.

Liczba	Odwrotność liczby	Iloczyn liczb
$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$
$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7} = 1$
$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{1} = 4$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{1} = 1$
$10 = \frac{10}{1}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{10}{1} \cdot \frac{1}{10} = 1$

Iloczyn liczby (różnej od zera) i jej odwrotności jest równy 1.

Przykład 1.

W jednym opakowaniu było $\frac{3}{4}$ kg chili (czytaj: czili) – przyprawy do potraw. Rozsypano ją po równo do 10 torebek. Po ile chili było w każdej torebce? Wynik podaj w kilogramach.



Sposób I

Masę chili, $\frac{3}{4}$ kg, przedstawmy w gramach.

$$\frac{3}{4} \cdot 1000 = \frac{3 \cdot 1000}{4} = 750 \text{ [g]} \quad 1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$$

Obliczmy masę chili w 1 torebce.

$$750 : 10 = 75 \text{ [g]}$$

Wyraźmy tę masę w kilogramach.

$$75 \text{ g} = \frac{75}{1000} \text{ kg} = \frac{3}{40} \text{ kg}$$

Sposób II

$\frac{3}{4}$ kg rozsypano do 10 torebek.

Podzielić przez 10, to znaczy wziąć $\frac{1}{10}$ całości.

$$\frac{3}{4} : 10 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{40} \text{ [kg]}$$

Mnożenie przez odwrotność liczby 10.

Odpowiedź. W każdej torebce było $\frac{3}{40}$ kg chili.

114

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Działania na ułamkach zwykłych
	Plansza edukacyjna. Ułamki zwykłe
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. I	s. 84–87
Zbiór zadań	s. 73–76

III. Ułamki zwykłe

123

Przykład 2.

Rozważono 4 kg orzechów do torebek po $\frac{1}{5}$ kg w każdej. Ile torebek potrzebowano?

W 1 kg jest 5 części po $\frac{1}{5}$ kg.

W 4 kg takich części jest 4 razy więcej,

więc $4 : \frac{1}{5} = 4 \cdot 5 = 20$.

Mnożenie przez odwrotność $\frac{1}{5}$.



Odpowiedź. Potrzebowano 20 torebek.



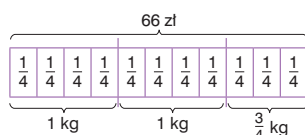
Dzielenie dwóch liczb można zastąpić mnożeniem pierwszej przez odwrotność drugiej.

Przykład 3.

Za $2\frac{3}{4}$ kg cukierków Robert zapłacił 66 zł. Ile trzeba zapłacić za $6\frac{1}{2}$ kg takich cukierków?

Ponieważ $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$, więc

$\frac{11}{4}$ kg to 11 części po $\frac{1}{4}$ kg.



Sposób I

Obliczmy, ile kosztuje jedna taka część, czyli $\frac{1}{4}$ kg cukierków.

$66 : 11 = 6$ [zł]

Ponieważ 1 kg to 4 razy więcej niż $\frac{1}{4}$ kg, więc 1 kg cukierków kosztuje: $4 \cdot 6 = 24$ [zł].

Obliczmy, ile kosztuje $6\frac{1}{2}$ kg cukierków.

$$6\frac{1}{2} \cdot 24 = \frac{13}{2} \cdot 24 = \frac{13 \cdot 24}{2 \cdot 1} = 156 \text{ [zł]}$$

Sposób II

Aby obliczyć cenę 1 kg cukierków, podzielmy wartość zakupów przez masę cukierków.

$$66 : \frac{11}{4} = 66 \cdot \frac{4}{11} = \frac{66 \cdot 4}{11 \cdot 1} = 24 \text{ [zł]}$$

Za $6\frac{1}{2}$ kg cukierków trzeba zapłacić: $6\frac{1}{2} \cdot 24 = 156$ [zł].

Odpowiedź. Za $6\frac{1}{2}$ kg cukierków trzeba zapłacić 156 zł.



Komentarz do Przykładu 2.

Po przeanalizowaniu tego przykładu warto zapytać uczniów o inny niż przedstawiony sposób rozwiązania. Jedną z propozycji powinno być wyrażenie danych w dekagramach i wykonanie dzielenia na liczbach naturalnych.

Wniosek pod przykładem znajdujący się w ramce z wykrzyknikiem może doprowadzić uczniów do zadania następującego pytania: Czy dotyczy on także dzielenia liczb naturalnych? Wykonanie przykładu: $7 : 2 = 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ powinno dać uczniom odpowiedź na to pytanie, a tym samym po raz kolejny utwierdzić w przekonaniu, że znak dzielenia można zastąpić kreską ułamkową.

Komentarz do Przykładu 3.

Przed rozwiązaniem zadania warto oszacować wynik. Robert zapłacił 66 zł za prawie 3 kg cukierków, zatem 1 kg cukierków kosztował trochę więcej niż 22 zł. Można zapytać uczniów, dlaczego trochę więcej. Ważne jest utrwalanie informacji, co dzieje się z ilorazem, gdy zwiększamy bądź zmniejszamy dzielnik. Szacunkowa wartość $6\frac{1}{2}$ kg cukierków jest więc większa od $6 \cdot 22 \text{ zł} + 11 \text{ zł} = 143 \text{ zł}$. Po analizie przedstawionego w przykładzie rozwiązania zadania porównujemy wyniki szacunkowy i dokładny.

115

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- kolejno kolumnami: $1\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{3}{10}$, $3\frac{1}{2}$, 12
- kolejno kolumnami: $\frac{1}{2}$, 5, $1\frac{1}{2}$, 4, 3, 1, $1\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$
- D
- C; B; A i D; A i B
- kolejno wg strzałek: I – $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, 2; II – $\frac{4}{5}$, 2; III – $\frac{3}{10}$, 2; IV – $\frac{2}{11}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{14}$, 2
- $378 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
- 1200
- a) $22\frac{1}{2}$ b) 12 c) $1\frac{1}{4}$ d) $18\frac{1}{2}$
- $1\frac{1}{10}$, $\frac{5}{6}$, $3\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{2}$
- A; C; A i B
- a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{36}{49}$ d) $2\frac{1}{2}$



Komentarz do Przykładu 4.

Szacowanie wyniku to umiejętność szczegółowa wymieniona w podstawie programowej, bardzo przydatna w życiu codziennym. W tym przykładzie kształcimy tę umiejętność, prosząc o podanie wyniku zarówno szacunkowego, jak i dokładnego. Proponujemy, aby przy okazji rozwiązywania kolejnych zadań szacować ich wyniki. Jeżeli któryś z uczniów otrzyma błędny wynik, warto, by najpierw go oszacował, a dopiero potem szukał błędu w rozwiązaniu.

Komentarz do zadania 1.

Warto, by to zadanie uczniowie wykonali ustnie, np. w formie zabawy. Wybrany przez nauczyciela uczeń czyta liczbę z pierwszego przykładu i wyznacza osobę, która podaje odwrotność tej liczby. Jeśli udzieli poprawnej odpowiedzi, czyta kolejną liczbę i wybiera osobę do odpowiedzi. Możemy również zwiększyć liczbę przykładów o propozycje uczniów. Wówczas osoba, która udzieliła poprawnej odpowiedzi, nie tylko wskazuje kolejną do odpowiedzi, ale także podaje swój przykład.

123

Przykład 4.

W czasie 1 godziny Ola zebrała $3\frac{3}{4}$ kg truskawek. Ile czasu potrzebowałaby, aby zebrać 20 kg tych owoców w takich samych warunkach? Podaj wynik:
a) szacunkowy, b) dokładny.



a) Aby podać wynik szacunkowy, zaokrąglamy jedną z liczb. W ciągu każdej godziny Ola zbiera $3\frac{3}{4}$ kg truskawek, czyli prawie 4 kg. Przy takim zaokrągleniu liczba godzin, którą potrzebuje Ola na zebranie 20 kg truskawek jest równa:

$$20 : 4 = 5.$$

Ponieważ zwiększyliśmy dzielnik, to iloraz otrzymaliśmy nieco mniejszy. Zatem na zebranie 20 kg Ola potrzebowałaby nieco więcej niż 5 godzin.

b) Policzmy teraz dokładnie.

Literą a zastąpmy liczbę godzin. Możemy więc zapisać:

$$a \cdot 3\frac{3}{4} = 20.$$

Obliczmy a .

$$20 : 3\frac{3}{4} = 20 : \frac{15}{4} = 20 \cdot \frac{4}{15} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}, \quad a = 5\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \text{ h} = 20 \text{ min, więc } 5\frac{1}{3} \text{ h to } 5 \text{ h } 20 \text{ min.}$$



Odpowiedź. Na zebranie 20 kg truskawek Ola potrzebowałaby 5 godzin i 20 minut.

1 Podaj odwrotności liczb.

a) $\frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{5}$ b) 2, 4, 12 c) $1\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}, 3\frac{5}{6}$

2 Oblicz.

a) $\frac{5}{8} : 10$ b) $\frac{1}{2} : 2$ c) $1\frac{1}{3} : 6$ d) $4\frac{2}{3} : 7$
 $\frac{3}{4} : 3$ $\frac{2}{3} : 4$ $2\frac{1}{5} : 22$ $5\frac{5}{6} : 5$

3 Oblicz.

a) $3 : \frac{1}{2}$ b) $2 : \frac{2}{5}$ c) $3 : 1\frac{1}{2}$ d) $8 : 1\frac{2}{5}$
 $4 : \frac{1}{5}$ $6 : \frac{9}{10}$ $10 : 3\frac{1}{3}$ $12 : 2\frac{2}{3}$

116

Odpowiedzi do zadań

- a) $\frac{4}{3}, 6, \frac{5}{3}$ b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}$ c) $\frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{6}{23}$
- a) $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{9}, \frac{1}{10}$ d) $\frac{2}{3}, 1\frac{1}{6}$
- a) 6, 20 b) $5, 6\frac{2}{3}$ c) 2, 3 d) $5\frac{5}{7}, 4\frac{1}{2}$

III. Ułamki zwykłe

123

4 Oblicz.

a) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$

$\frac{4}{5} : \frac{6}{7}$

$\frac{5}{8} : \frac{3}{10}$

b) $\frac{5}{7} : 1\frac{2}{5}$

$\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$

$\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$

c) $1\frac{2}{9} : 1\frac{5}{6}$

$4\frac{2}{3} : 4\frac{1}{3}$

$3\frac{1}{8} : 3\frac{3}{4}$

d) $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{5}$

$1\frac{2}{3} : 1\frac{1}{9}$

$2\frac{3}{4} : 2\frac{1}{5}$

5 Pani Ania $\frac{3}{4}$ kg ziół rozważyła po równo do 15 torebek. Po ile gramów ziół było w jednej torebce?6 Pani Ewa 3 kg pierniczków rozważyła do torebek po $\frac{1}{4}$ kg w każdej. Do ilu torebek pani Ewa rozważyła pierniczki?

7 Na ilustracji przedstawiono napoje stojące na półce w spiżarni babci Zosi.



- a) Do ilu najmniej kubków o pojemności $\frac{1}{5}$ l można rozlać sok pomarańczowy?
 b) Ile razy więcej jest soku malinowego niż soku cytrynowego?
 c) Ile najmniej kubków o pojemności $\frac{1}{10}$ l potrzeba, aby rozlać sok wiśniowy?

8 Za $3\frac{1}{4}$ kg mandarynek pan Marek zapłacił 26 zł. Ile kosztował 1 kg mandarynek?

9 Oblicz nieznaną liczbę.

a) $a : \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

b) $c : \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$

c) $\frac{7}{8} : p = \frac{5}{6}$

$b : 1\frac{1}{4} = \frac{5}{6}$

$d : 2\frac{2}{3} = 2\frac{1}{4}$

$1\frac{1}{3} : u = 1\frac{1}{6}$

10 Adaś pomyślał pewną liczbę. Pomnożył ją przez $2\frac{2}{3}$ i otrzymał wynik równy 16. Jaka liczbę pomyślał Adaś?

117

Komentarz do zadań 5. i 6.

W zadaniach przedstawiliśmy praktyczne zastosowanie dzielenia ułamków i zamianę jednostek masy. Można je wykonać w pamięci i ustnie podać odpowiedzi. Mogą one być również zadaniem domowym dla uczniów z problemami w nauce matematyki.

Komentarz do zadania 7.

Aby odpowiedzieć na zadane tu pytania, należy skorzystać z informacji zamieszczonych na ilustracji. Wymagamy od uczniów wykonywania działań i uzasadniania odpowiedzi.

Komentarz do zadania 9.

Wskazane jest, aby uczniowie nazywali w działaniach liczby niewiadome, co pozwoli im utrwalić pojęcia związane z iloczynem i ilorazem.

Komentarz do zadania 10.

Zachęcamy uczniów do zapisania kolejnych czynności Adasia w formie jednego wyrażenia, w którym pomyślaną liczbę zastąpi litera lub okienko. Z pewnością ułatwi to rozwiązanie zadania.

Odpowiedzi do zadań

4. a) $\frac{2}{3}, \frac{14}{15}, 2\frac{1}{12}$ b) $\frac{25}{49}, \frac{9}{10}, 6$ c) $\frac{2}{3}, 1\frac{1}{13}, \frac{5}{6}$ d) $1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}$

5. 50 g

6. 12

7. a) 10 b) 3 c) 5

8. 8 zł

9. a) $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{5}, 6$ c) $1\frac{1}{20}, 1\frac{1}{7}$

10. 6



Komentarz do zadania 11.

Podczas rozwiązywania tego zadania uczniowie powtórzą sposób obliczenia prędkości przy danej drodze i czasie. Powinni zauważyć, że im dłużej będzie jechał motocyklista, tym dłuższą pokona trasę. Zwracanie uwagi na takie informacje ułatwi im w przyszłości zrozumienie wielkości wprost proporcjonalnych.

Komentarz do zadań 13. i 14.

Rozumienie i rozwiązanie takich zadań kształci umiejętność logicznego myślenia. Przed przystąpieniem do rozwiązywania każdego z tych zadań najpierw szacujemy jego wynik.

Komentarz do *Sprawdź się!*

Trzecią lekcję z tego tematu warto rozpocząć od zaproponowanej diagnozy osiągnięć uczniów. Zadania można zlecić uczniom do samodzielnego rozwiązania w ciągu 5–8 minut (w zależności od poziomu klasy). Po upływie wyznaczonego czasu sprawdzamy poprawność obliczeń i analizujemy stopień opanowania przez uczniów umiejętności dzielenia ułamków. Jeżeli zauważymy, że znaczna część uczniów nie radzi sobie z rozwiązywaniem zadań, powinniśmy wrócić do proponowanych w tym temacie ćwiczeń w trakcie tej lekcji lub lekcji powtórzeniowej.

123

- 11 Motocyklista przejechał $128\frac{1}{2}$ km w czasie 2 godzin. Z jaką prędkością średnią jechał motocyklista? Ile kilometrów przejechałby ten motocyklista w czasie 5 godzin, gdyby jechał z tą samą prędkością średnią?



- 12 Za $2\frac{1}{2}$ m materiału pani Ania zapłaciła 75 zł. Pani Jola kupiła $1\frac{1}{2}$ m takiego materiału. Ile zapłaciła pani Jola?

- 13 Kasia zrywała wiśnie i w czasie 1 godziny wypełniła nimi $2\frac{1}{3}$ pojemnika. Ile czasu będzie potrzebowała Kasia, zrywając wiśnie w takim samym tempie, aby nappełnić 9 takich samych pojemników? Podaj wyniki szacunkowy i dokładny.



- 14 Sok jabłkowy rozlewano do kartonów o pojemności $1\frac{1}{2}$ l. Ile takich kartonów wypełniono sokiem z trzech pojemników po 20 l każdy?

Sprawdź się!

- Oblicz.
a) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ b) $4 : \frac{6}{10}$ c) $\frac{3}{7} : 6$ d) $1\frac{7}{8} : 1\frac{1}{2}$
- W mieszance cukierków było: $1\frac{1}{2}$ kg galaretek i 3 razy mniej cukierków owocowych. Ile było cukierków owocowych?
A. $\frac{1}{3}$ kg B. $\frac{1}{2}$ kg C. $\frac{2}{3}$ kg D. 1 kg
- W ilu najmniej butelkach o pojemności $\frac{1}{4}$ l zmieści się 5 l wody mineralnej?
- Za $2\frac{1}{2}$ kg cukierków trzeba zapłacić 50 zł. Za 1 kg takich cukierków trzeba zapłacić
A. 25 zł B. 20 zł C. 10 zł D. 125 zł
- Za $1\frac{1}{2}$ kg tortu zapłacono 90 zł. Ile trzeba zapłacić za 2 kg takiego tortu?



118

Odpowiedzi do zadań

11. $64\frac{1}{4}\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $321\frac{1}{4}$ km
12. 45 zł
13. szacunkowy: 4 h, dokładny: $3\frac{6}{7}$ h
14. 40

Sprawdź się!

1. a) $1\frac{1}{5}$ b) $6\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{14}$ d) $1\frac{1}{4}$
2. B
3. 20
4. B
5. 120 zł

9. Obliczanie liczby z danego jej ułamka

Sowa uczy



Jeżeli $\frac{1}{2}$ kwoty to 9 zł, wówczas cała kwota jest 2 razy większa, czyli jest równa $9 \cdot 2 = 18$ [zł].



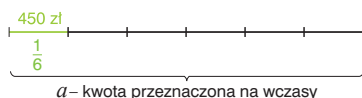
Jeżeli $\frac{1}{4}$ pewnej liczby to 10, wówczas szukana liczba jest 4 razy większa, czyli jest równa $10 \cdot 4 = 40$.

Przykład 1.

Pani Justyna podczas pobytu na wczasach często wyjeżdżała na różne wycieczki, które kosztowały łącznie 450 zł.

Była to $\frac{1}{6}$ wszystkich pieniędzy przeznaczonych na wczasy. Jaką kwotę przeznaczyła pani Justyna na wczasy?

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



Sposób I

$1 = \frac{6}{6}$, a więc takich części po 450 zł jest 6.

Cała kwota jest więc równa $450 \cdot 6 = 2700$, czyli 2700 zł.

Sposób II

Nie znamy całej kwoty przeznaczonej na wczasy. Zastąpmy ją literą a .

$\frac{1}{6}$ całej kwoty (a) jest równa 450 zł, co zapisujemy:

$\frac{1}{6} \cdot a = 450$ Aby obliczyć ułamek danej liczby, ułamek ten mnożymy przez daną liczbę.

$$450 : \frac{1}{6} = 450 \cdot 6$$

$$a = 2700 \text{ [zł]}$$

Odpowiedź. Na wczasy pani Justyna przeznaczyła 2700 zł.

119

Temat lekcji:

Obliczanie liczby z danego jej ułamka (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- oblicza liczbę na podstawie jej ułamka,
- analizuje rysunki do treści zadania,
- wykonuje samodzielnie rysunki do treści zadania,
- czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe,
- planuje strategię rozwiązywania zadania zamkniętego i otwartego oraz weryfikuje jego wynik,
- rozwiązuje zadania tekstowe i w ich rozwiązywaniu stosuje własne poprawne metody.

Wskazówki metodyczne

Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 13.

Komentarz do Sowa uczy

Temat lekcji idealnie obrazują zawarte tutaj rysunki i umieszczone obok nich komentarze. Warto wykonać w pamięci kilka podobnych zadań. Treść niektórych z nich można zademonstrować, składając i rozkładając taśmę, kartkę, papierowe koło.

Proponowane zadania:

Do oklejenia drzwiczek szafki tata wykorzystał połowę taśmy. Ile metrów miała taśma, jeżeli zużyta przez tatę część miała długość $4\frac{1}{2}$ m?

Czterech kolegów kupiło pizzę, której cenę równo podzielili pomiędzy siebie. Ile kosztowała pizza, jeżeli za jej $\frac{1}{4}$ część Janek zapłacił 7 zł?

Komentarz do Przykładu 1.

Analizujemy rysunek i oba sposoby rozwiązania tego zadania. Uczniowie wyrażają swoje opinie na temat tego, który sposób uważają za łatwiejszy i dlaczego.

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Działania na ułamkach zwykłych
Klub Nauczycieli uczyć.pl	Kartkówka 13 Plansza edukacyjna. Ułamki zwykłe
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 88–89
Zbiór zadań	s. 76–79

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. a) 72 b) 72 c) 60 d) 49
2. 80
3. a) P b) F c) P d) P
4. 190, 96, 81, 330

Komentarz do Przykładu 2.

W tym przykładzie pokazujemy 2 sposoby obliczenia liczby na podstawie jej ułamka. Pierwszy z nich opiera się na porównaniu ilorazowym i są to działania na liczbach naturalnych. Po analizie drugiego sposobu proponujemy, aby uczniowie sformułowali i zapisali w zeszytach wniosek: *Aby obliczyć liczbę na podstawie danego jej ułamka, liczbę dzielimy przez ułamek.*

Komentarz do zadań 1. i 2.

Zadania te można wykonać ustnie. Ważne, aby do każdego przykładu podać uzasadnienie podobne do zamieszczonego w Sowa uczy lub sposób obliczeń, np. *Ponieważ $\frac{2}{3}$ liczby to 22, więc $\frac{1}{3}$ tej liczby to połowa, czyli 11. Szukana liczba jest 3 razy większa, zatem wynosi 33. W ten sposób uczniowie będą uczyli się wypowiadania i uzasadniania swoich wyborów.*

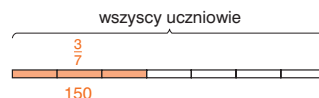
123

Przykład 2.

W pewnej szkole 150 uczniów uczęszcza na dodatkowe zajęcia sportowe i jest to $\frac{3}{7}$ wszystkich uczniów.

Ilu uczniów jest w tej szkole?

Wykonajmy rysunek pomocniczy:



Sposób I

Skoro $\frac{3}{7}$ wszystkich uczniów to 150 uczniów, a $\frac{1}{7}$ to 3 razy mniej, więc $\frac{1}{7}$ wszystkich uczniów jest równa $150 : 3$, czyli 50 uczniów. Liczba uczniów w tej szkole jest 7 razy większa, bo $1 = \frac{7}{7}$, więc jest równa $7 \cdot 50$, czyli 350 uczniów.

Sposób II

Literą u zastąpmy liczbę wszystkich uczniów w tej szkole.

$\frac{3}{7}$ wszystkich uczniów (u) to 150 uczniów, więc:

$$\begin{aligned} \frac{3}{7} \cdot u &= 150 \\ 150 : \frac{3}{7} &= 150 \cdot \frac{7}{3} \\ u &= 350 \end{aligned}$$

Odpowiedź. W tej szkole jest 350 uczniów.



- 1 Podaj liczbę, której:
 - a) $\frac{1}{3}$ jest równa 9,
 - b) $\frac{1}{5}$ jest równa 12,
 - c) $\frac{1}{10}$ jest równa 15.
- 2 Podaj liczbę, której:
 - a) $\frac{2}{3}$ jest równe 22,
 - b) $\frac{3}{4}$ jest równe 36,
 - c) $\frac{4}{9}$ jest równe 80.
- 3 Podaj liczbę, której:
 - a) $1\frac{1}{3}$ jest równe 32,
 - b) $2\frac{1}{6}$ jest równe 39,
 - c) $1\frac{1}{10}$ jest równe 55.

120

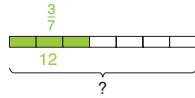
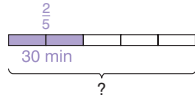
Odpowiedzi do zadań

1. a) 27 b) 60 c) 150
2. a) 33 b) 48 c) 180
3. a) 24 b) 18 c) 50

III. Ułamki zwykłe

123

- 4 Elektryk montował gniazda elektryczne w nowym mieszkaniu państwa Kowalskich i $\frac{2}{5}$ pracy wykonał w czasie 30 minut. W ciągu ilu minut elektryk wykona całą pracę?
- 5 Z klasówki z matematyki 12 uczniów, czyli $\frac{3}{7}$ wszystkich uczniów w klasie, otrzymało stopień dobry. Ilu uczniów było w tej klasie?
- 6 Około $\frac{1}{10}$ powierzchni lądów na Ziemi jest stale pokryta lodem. Lodem pokryte jest 15 000 000 km² lądów. Jaka jest powierzchnia lądów? Liczbę tę zapisz słownie.



Wyzwanie

W oceanarium badano liczbę uderzeń serca wieloryba. Pierwsze wyniki odczytano po 21 minutach, czyli $\frac{3}{7}$ czasu całego pomiaru. Podczas badania serce wieloryba uderzyło 441 razy.

- a) Ile minut prowadzono badanie?
b) Ile razy na minutę uderzało serce wieloryba?
Porównaj tę liczbę z liczbą uderzeń twojego serca.



Sprawdź się!

- 1 Podaj liczbę, której:
a) $\frac{1}{7}$ jest równa 12, b) $\frac{2}{3}$ jest równe 12, c) $\frac{5}{6}$ jest równe 35.
- 2 Janek za $\frac{1}{3}$ swoich oszczędności kupił kwiaty dla mamy, za które zapłacił 15 zł. Ile oszczędności miał Janek?
- 3 Liczba, której $\frac{5}{8}$ to 20, jest równa
A. 25 B. 32 C. 36 D. 28
- 4 Na obóz sportowy pojechało 72 uczniów, czyli $\frac{4}{5}$ wszystkich uczniów w szkole sportowej. Ilu uczniów jest w tej szkole?
- 5 Krzys na klasówce rozwiązał poprawnie 8 zadań i było to $\frac{2}{3}$ wszystkich zadań. Błędy popełnił w $\frac{1}{4}$ zadań, a resztę nie rozwiązał. Ile zadań było na klasówce? Ilu zadań nie rozwiązał?

121

Komentarz do zadań 4. i 5.

Analiza rysunków ułatwi ułożenie odpowiednich działań i rozwiązanie zadań jednym z poznanych sposobów.

Komentarz do zadania 6.

Proponujemy, aby to uczniowie wykonali rysunek pomocniczy do tego zadania.

Komentarz do Wyzwania

Rozwiązanie zadania pozwoli odkryć ciekawostkę przyrodniczą. Zadanie pokazuje korelację matematyki z innymi dziedzinami nauki. Można zachęcić uczniów do zbadania, ile uderzeń wykonuje serce mamy lub taty, i porównania z liczbą uderzeń swojego serca.

Odpowiedzi do zadań

4. 75
5. 28
6. 150 000 000 km², sto pięćdziesiąt milionów

Wyzwanie

- a) Badanie prowadzono 49 minut.
b) Serce wieloryba uderzało 9 razy na minutę.

Sprawdź się!

1. a) 84 b) 18 c) 42
2. 45 zł
3. B
4. 90
5. 12; 1

Tematy lekcji:

1. Zastosowanie działań na ułamkach do obliczania wartości wyrażeń arytmetycznych (1 h)
2. Zastosowanie działań na ułamkach w zadaniach praktycznych (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- wykonuje działania na ułamkach zwykłych,
- stosuje działania na ułamkach do obliczania liczby niewiadomej w równaniu,
- czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe,
- zna kolejność wykonywania działań i oblicza wartość wyrażenia arytmetycznego, w którym występują ułamki zwykłe,
- planuje strategię rozwiązania zadania zamkniętego i otwartego oraz weryfikuje jego wynik,
- w rozwiązywaniu zadań tekstowych stosuje własne poprawne metody.

Wskazówki metodyczne

Lekcja jest utrwaleniem wiadomości dotyczących działań na ułamkach i kolejności ich wykonywania. W jej trakcie należy podkreślać ważność wykonywania rysunków pomocniczych do zadań. Warto zwrócić uwagę uczniów na sposób zapisywania rozwiązania zadania w postaci równania. Będzie to dobre przygotowanie do wprowadzenia równań.

Komentarz do Przykładu 1.

Obliczenie wartości tego wyrażenia bazuje na znajomości kolejności wykonywania działań. Uczniowie mający problemy z nauką matematyki powinni zapisywać każde przekształcenie w następnym wierszu. Mogą też podkreślać działanie, które będzie wykonywane w pierwszej kolejności. Po rozwiązaniu zadania możemy zadać dodatkowe pytania, np. *Jaką część liczbby ___ jest otrzymany wynik?* Umiejętność takich obliczeń jest często sprawdzana w zadaniach, także egzaminacyjnych.

Komentarz do Przykładu 2.

Tego typu zadania znajdują się wśród zadań egzaminacyjnych CKE. Na rysunku pomocniczym są przedstawione w sposób czytelny zależności między danymi.

123

10. Działania na ułamkach

Przykład 1.

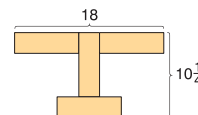
Obliczmy wartość wyrażenia $6\frac{1}{4} - (2\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6}) : 3\frac{7}{9}$.

Wykonajmy obliczenia pamiętając o kolejności wykonywania działań.

$$\begin{aligned} 6\frac{1}{4} - (2\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6}) : 3\frac{7}{9} &= && \text{Najpierw wykonujemy działanie w nawiasie.} \\ = 6\frac{1}{4} - (2\frac{4}{6} + 5\frac{5}{6}) : 3\frac{7}{9} &= \\ = 6\frac{1}{4} - 8\frac{1}{2} : 3\frac{7}{9} &= && \text{Potem wykonujemy dzielenie.} \\ = 6\frac{1}{4} - \frac{17}{2} \cdot \frac{9}{34} &= \\ = 6\frac{1}{4} - \frac{9}{4} = 6\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} &= 4 && \text{Ostatnie wykonujemy odejmowanie.} \end{aligned}$$

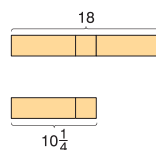
Przykład 2.

Z czterech jednakowych prostokątów Janek ułożył figurę, której kształt i wymiary podane w centymetrach są na rysunku. Podaj wymiary prostokąta.



Zauważmy, że suma dwóch długości i jednej szerokości prostokąta jest równa 18 cm, a suma jednej długości i jednej szerokości prostokąta jest równa $10\frac{1}{4}$ cm.

Przedstawmy te informacje na rysunku i wykonajmy potrzebne obliczenia.



Obliczmy długość prostokąta.

$$18 - 10\frac{1}{4} = 7\frac{3}{4} \text{ [cm]}$$

Obliczmy szerokość prostokąta.

$$10\frac{1}{4} - 7\frac{3}{4} = 2\frac{2}{4} = 2\frac{1}{2} \text{ [cm]}$$

Odpowiedź. Prostokąt ma wymiary $7\frac{3}{4}$ cm $\times$ $2\frac{1}{2}$ cm.

122

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Działania na ułamkach zwykłych
	Plansza edukacyjna. Ułamki zwykłe
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. I	s. 90–94
Zbiór zadań	s. 60–79

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. poziomo: A. ułamek B. licznik C. dzielenie D. niewłaściwy E. równe F. większy; pionowo: 1. mianownik 2. właściwy 3. jedności 4. kreska 5. mniejszy 6. mieszana
2. kolejno wierszami: a) 24, 4, 6, 96, 6, 8, 1, 8 b) 21, 45, 12, 30, 20, 15, 9, 10

III. Ułamki zwykłe

123

- 1 Oblicz wartość wyrażenia.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2}{3} + \frac{7}{9} - \frac{5}{6} & \text{b)} 1\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{8} & \text{c)} \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} : \frac{1}{2} \\ \text{d)} \frac{7}{9} : \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} & \text{e)} 3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{5} - 4\frac{3}{8} & \text{f)} 10 - 1\frac{5}{6} \cdot 4\frac{1}{2} \end{array}$$

- 2 Pani Marta kupiła na wyprzedaży kurtkę, której cena została zmniejszona o 180 zł, czyli o
- $\frac{2}{5}$
- ceny sprzed wyprzedaży. Ile kosztowała kurtka przed obniżką, a ile po obniżce?

- 3 Jurek wszedł na szczyt Trzy Korony z Polany Kosarzyska w czasie
- $\frac{1}{3}$
- h. Ze szczytu zszedł na Przełęcz Szopka w czasie
- $\frac{1}{2}$
- h. O ile dłużej schodził z góry, niż na nią wchodził?
-
- Czas wyraż w godzinach i minutach.



Trzy Korony

- 4 Jaka jest wartość wyrażenia
- $(\frac{1}{2})^3$
- oraz wyrażenia
- $(\frac{2}{3})^2$
- ?
-
- A.
- $\frac{1}{4}$
- oraz
- $\frac{8}{27}$
- B.
- $\frac{1}{4}$
- oraz
- $\frac{4}{9}$
- C.
- $\frac{1}{8}$
- oraz
- $\frac{4}{3}$
- D.
- $\frac{1}{8}$
- oraz
- $\frac{4}{9}$

- 5 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
-
- Inny zapis liczby
- $(\frac{13}{4})^3$
- to A / B. A.
- $1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4}$
- B.
- $1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{4}$
-
- Liczba
- $(\frac{13}{4})^3$
- jest równa C / D. C.
- $5\frac{1}{4}$
- D.
- $5\frac{23}{64}$

- 6 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 1\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{10} & \text{b)} (2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{3}) : (\frac{1}{6} + \frac{2}{9}) & \text{c)} \frac{5}{7} \cdot 4\frac{2}{3} + \frac{5}{6} : 1\frac{1}{9} \\ \text{d)} (\frac{1}{2})^3 + 1\frac{1}{2} : \frac{3}{4} & \text{e)} \frac{5}{7} \cdot 1\frac{3}{4} - (\frac{1}{2})^2 & \text{f)} (\frac{1}{3})^2 \cdot 1\frac{1}{8} + 1\frac{1}{2} \end{array}$$

- 7 Na imieniny do Basi przyszło 9 koleżanek i 8 kolegów. Basia przygotowała:
- $4\frac{1}{2}$
- kg mandarynek,
- $2\frac{1}{4}$
- kg bananów,
- $1\frac{4}{5}$
- kg nektarynek. Kupiła też słodycze:
- $2\frac{1}{2}$
- kg mieszanki czekoladowej i
- $1\frac{1}{4}$
- kg wafli.
-
- a) Ile mieszanki czekoladowej było na 1 talerzyku, jeżeli rozsypało ją po równo na 5 talerzyków?
-
- b) Jaka była masa przygotowanych owoców?

123

Komentarz do zadania 1.

W zadaniu trzeba zwrócić uwagę na kolejność wykonywania działań i skracanie ułamków podczas wykonywania mnożenia. Przy obliczaniu sumy i różnicy warto zauważyć, że jeden z mianowników jest dzielnikiem innego z pozostałych mianowników, więc można go pominąć w poszukiwaniach jednakowego mianownika.

Komentarz do zadania 6.

Zadanie można rozwiązać w klasie w formie pracy w grupach. W tym celu dzielimy uczniów na 3 zespoły. Każdy zespół ma za zadanie obliczenie wartości trzech wskazanych wyrażeń arytmetycznych. Wszystkie grupy powinny mieć przykłady o takiej samej skali trudności. Przydział przykładów dla grup może być następujący:

grupa I: a), e),

grupa II: b), d),

grupa III: c), f).

Po wykonanej pracy wybrani uczniowie z poszczególnych grup omawiają sposób obliczeń, wskazując trudności, jeśli takie się pojawiły, oraz podają wyniki.

Komentarz do zadania 7.

Jest to zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi. Zwykle takie zadania sprawiają uczniom sporo trudności. Wymagają one nie tylko czytania ze zrozumieniem, ale także ułożenia planu rozwiązania i obrania własnej poprawnej metody dochodzenia do celu. Warto porozmawiać o strategii rozwiązania tego zadania. Dobrzy uczniowie mogą ułożyć dodatkowe pytania do zadania i odpowiedzieć na nie.

3. wartości: $7\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{3}$, $5\frac{1}{2}$ 4. kolejno wierszami: $3\frac{3}{5}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{5}$, $3\frac{3}{5}$, $3\frac{3}{5}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{5}$, $3\frac{3}{5}$, $3\frac{3}{5}$

5. kolejno: 69, 12, 140, 45, 75, 18, 57, 27

6. a) 3 b) $2\frac{2}{3}$ c) $5\frac{4}{9}$ d) $\frac{43}{72}$ e) $4\frac{2}{7}$ f) $2\frac{1}{3}$ g) $\frac{5}{12}$ h) $1\frac{14}{15}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{11}{18}$ b) $1\frac{3}{8}$ c) $1\frac{1}{4}$ d) 1 e) $4\frac{5}{8}$ f) $1\frac{3}{4}$

2. 450 zł, 270 zł

3. o $\frac{1}{6}$ h, o 10 min

4. D

5. BD

6. a) $1\frac{3}{4}$ b) $1\frac{1}{2}$ c) $4\frac{1}{12}$ d) $2\frac{1}{8}$ e) 1 f) $1\frac{5}{8}$ 7. a) $\frac{1}{2}$ kg b) $8\frac{11}{20}$ kg

Komentarz do zadania 9.

Po przyjrzeniu się rysunkowi można zauważyć, że występująca tutaj zależność pomiędzy danymi jest taka sama jak w *Przykładzie 2*. Warto zachęcić uczniów do wykonania dodatkowych rysunków zaprezentowanych przez nas w rozwiązaniu przykładu. Zadanie uczniowie powinni rozwiązać samodzielnie. Podczas jego rozwiązywania mogą korzystać z wyjaśnień zamieszczonych w *Przykładzie 2*.

Komentarz do zadania 10.

Podczas rozwiązywania tego zadania zachęcamy uczniów do wybierania odpowiedzi bez wykonywania zbędnych obliczeń. Wystarczy zauważyć, że kur jest więcej niż połowa wszystkich zwierząt, zatem odpowiedź A odrzucamy. Przy wyborze odpowiedzi C lub D warto skorzystać z szacowania.

Komentarz do *Sprawdź się!*

W zadaniu 2., aby szybko podać odpowiedź, wystarczy liczbę mieszaną $1\frac{3}{4}$ zapisać w postaci ułamka niewłaściwego i sprawdzić, z ilu części czwartych się składa.

W zadaniach 3. i 4. warto, aby po przeczytaniu treści, uczniowie określili, jaki rodzaj obliczeń na ułamkach występuje w każdym z nich.

W rozwiązaniu zadania 3. pomoże dołączony rysunek pomocniczy.

W zadaniu 4. proponujemy, aby uczniowie samodzielnie wykonali rysunek pomocniczy.

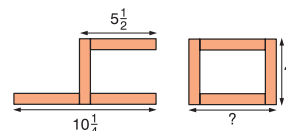
123

- 8 Jaką częścią liczby 35 jest wartość wyrażenia?

a) $3\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} : \frac{5}{6} + 1\frac{3}{4}$

b) $(2\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot 1\frac{7}{9}) : 3\frac{1}{9}$

- 9 Ania z ośmiu jednakowych prostokątów ułożyła figury, takie jak na rysunku obok. Podaj wymiary drugiej figury.



- 10 W gospodarstwie agroturystycznym państwa Nowaków żyją 32 zwierzęta: konie, kozy i kury. Kury stanowią $\frac{9}{16}$ wszystkich zwierząt, a kozy $\frac{2}{3}$ wszystkich kur.

Uzupełnij zdanie. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B, C i D, oraz E i F.

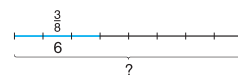
W gospodarstwie jest A / B kur, C / D kóz i E / F konie.

- A. 16 B. 18
C. 12 D. 10
E. 2 F. 4



Sprawdź się!

- 1 Oblicz. a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + 2\frac{4}{5}$ b) $(2\frac{1}{3} - 1\frac{3}{4}) : \frac{7}{8}$
- 2 Rozważono $1\frac{3}{4}$ kg suszonych śliwek do torebek po $\frac{1}{4}$ kg w każdej. Ile torebek potrzebowano?
A. 7 B. 3 C. 8 D. 2
- 3 Paweł jest fanem gier komputerowych. Ma 6 gier sportowych, które stanowią $\frac{3}{8}$ wszystkich jego gier. Ile gier komputerowych ma Paweł?
- 4 Ula i Karol umówili się, że na prezent dla babci każde z nich przeznaczy $\frac{2}{3}$ swoich oszczędności. Ula miała 72 zł, a Karol 45 zł. Ile pieniędzy razem przeznaczyły dzieci na prezent?
- 5 Długość prostokąta jest równa $2\frac{1}{2}$ m, a jego szerokość jest 5 razy krótsza. Oblicz obwód i pole tego prostokąta.



124

Odpowiedzi do zadań

8. a) $\frac{4}{35}$ b) $\frac{1}{35}$

9. $4\frac{3}{4} \times 6\frac{1}{4}$

10. BCE

Sprawdź się!

1. a) $3\frac{3}{10}$ b) $\frac{2}{3}$

2. A

3. 16

4. 78 zł

5. $L = 6$ m, $P = 1\frac{1}{4}$ m²

123

Zadania utrwalające

- 1 Narysuj 2 prostokąty o wymiarach $6\text{ cm} \times 3\text{ cm}$. Podziel każdy z nich odpowiednio na równe części i pokoloruj:

a) $\frac{1}{2}$ prostokąta, b) $\frac{2}{3}$ prostokąta.

- 2 Zamień ułamek niewłaściwy na liczby mieszane lub odwrotnie.

a) $\frac{5}{4}$ b) $1\frac{1}{7}$ c) $2\frac{4}{5}$ d) $\frac{11}{8}$ e) $\frac{22}{7}$ f) $3\frac{2}{3}$

- 3 Przepisz przykłady, zamiast $\blacklozenge$ napisz odpowiedni znak $>$, $<$ lub $=$.

a) $\frac{7}{5} \blacklozenge 1\frac{1}{5}$ b) $\frac{4}{9} \blacklozenge \frac{4}{3}$ c) $\frac{3}{4} \blacklozenge \frac{2}{3}$
 $\frac{11}{12} \blacklozenge \frac{7}{12}$ $1\frac{2}{5} \blacklozenge \frac{7}{3}$ $1\frac{2}{3} \blacklozenge 1\frac{5}{6}$

- 4 Na osi liczbowej zaznacz liczby: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $1\frac{5}{12}$, $1\frac{1}{3}$.

- 5 Jakie liczby odpowiadają zaznaczonym punktom?



- 6 Na zabawę dzieci przygotowały losy: 16 pełnych i 40 pustych. Jaką część wszystkich losów stanowiły losy pełne, a jaką – puste?

- 7 Najdłuższa noc na biegunie północnym trwa 176 dob. Przez jaką część roku przestępnego trwa noc na biegunie północnym?



zorza polarna

- 8 Oblicz. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

a) $3\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2} + 2\frac{7}{8}$ b) $(\frac{3}{4})^2$ c) $6 : 2\frac{1}{4}$
 $21 \cdot 1\frac{1}{14}$ $(1\frac{1}{2})^3$ $3\frac{3}{10} : 11$
 $1\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{3}$ $\frac{5}{6} : \frac{2}{9}$ $3\frac{1}{3} : 4\frac{1}{3}$

- 9 Oblicz sumy, a następnie uporządkuj je malejąco.

a) $3\frac{2}{15} + 4\frac{14}{15}$ b) $5\frac{1}{15} + 2\frac{11}{15}$ c) $2\frac{7}{12} + 4\frac{9}{12}$ d) $6\frac{5}{12} + \frac{11}{12}$

125

Tematy lekcji:

1.–2. Powtórzenie wiadomości i utrwalenie umiejętności: Ułamki zwykłe (2 h)

3. Praca klasowa 3 (1 h)

4. Omówienie wyników i poprawa pracy klasowej (1 h)

Cele lekcji

Wybrane cele lekcji z danego rozdziału odpowiednie do rozwiązywanych zadań.

Komentarz do zadań 2. i 3.

Ponieważ te zadania nie są trudne, prosimy o odpowiedzi uczniów z problemami w nauce matematyki. Będzie to dla nich okazja do osiągnięcia sukcesu.

Komentarz do zadania 4.

Warto porozmawiać o doborze odpowiedniej jednostki na osi liczbowej. Uczniowie powinni zauważyć, że każda wielokrotność liczby 12 może być liczbą kratek w jednostce.

Komentarz do zadania 5.

Warto, aby uczniowie wskazali ułamki nieskracalne i skracalne oraz by ułamki skracalne zapisali w najprostszej postaci.

Materiały dydaktyczne



Liczby wymierne → Działania na ułamkach zwykłych
 Liczby wymierne → Ułamki zwykłe i dziesiętne.
 Przybliżanie i zaokrąglanie



Praca klasowa 3
 Plansza edukacyjna. Ułamki zwykłe

Inne

wsipnet.pl
 klasowki.pl

Zeszyt ćwiczeń, cz. 1

Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 60–94

Zbiór zadań

Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 60–79

Odpowiedzi do zadań

2. a) $1\frac{1}{4}$ b) $\frac{8}{7}$ c) $\frac{14}{5}$ d) $1\frac{3}{8}$ e) $3\frac{1}{7}$ f) $\frac{11}{3}$

3. a) $>$, $>$ b) $<$, $<$ c) $>$, $<$



4. od lewej: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{10}$

6. pełne: $\frac{2}{7}$, puste: $\frac{5}{7}$

7. $\frac{88}{183}$

8. a) $4\frac{5}{8}$, $22\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{3}$ b) $\frac{9}{16}$, $3\frac{3}{8}$, $3\frac{3}{4}$ c) $2\frac{2}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{10}{13}$

9. a) $8\frac{1}{15}$ b) $7\frac{4}{5}$ c) $7\frac{1}{3}$ d) $7\frac{1}{3}$; $8\frac{1}{15} > 7\frac{4}{5} > 7\frac{1}{3}$



Komentarz do zadania 12.

Warto zachęcić uczniów do zapisania treści zadania w postaci jednego wyrażenia arytmetycznego.

Komentarz do zadania 15.

To zadanie można rozwiązać dwoma sposobami. W pierwszym najpierw obliczamy liczbę kartonów poszczególnych soków, a następnie różnicę liczby 56 i sumy obliczonych wcześniej liczb. Drugi sposób polega na obliczeniu, jaką część wszystkich kartonów z sokami były łącznie kartony z wymienionymi trzema rodzajami soków, a następnie odjęciu otrzymanej liczby od 1 i obliczeniu otrzymanej części z liczby 56. Warto porównać sposoby obliczeń uczniowskich. Realizując punkt XIV. 7) wymagań szczegółowych podstawy programowej, można polecić uczniom ułożenie dodatkowych pytań do zadania i wykonanie odpowiednich obliczeń.

Przykładowe pytanie: *Których soków było najwięcej?* Aby odpowiedzieć na nie, uczniowie mogą porównać albo ułamki, albo liczby kartonów soków.

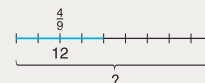
Do zadania można również wykonać diagram słupkowy i do niego ułożyć pytania.

Komentarz do zadań 18. i 19.

Do tych zadań wskazane jest wykonanie rysunków pomocniczych i ustne wyjaśnienie, jaki rodzaj obliczeń występuje w danym zadaniu.

123

- 10 W hurtowni były 4 tony mąki. Mąkę rozwieziono do trzech sklepów. Pierwszy otrzymał $1\frac{3}{5}$ t mąki, drugi $1\frac{1}{4}$ t, a trzeci $\frac{1}{2}$ t. Ile ton mąki zostało w hurtowni?
- 11 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
a) $(2\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} - 1\frac{1}{2}) : \frac{4}{9}$ b) $5\frac{1}{6} : [12 \cdot (1\frac{5}{6} + \frac{3}{4})]$
- 12 Krzys zebrał w ogródku $2\frac{3}{4}$ kg malin i o $\frac{3}{5}$ kg mniej jeżyn. Ile kilogramów jeżyn i malin zebrał razem?
- 13 Obwód prostokątnej działki jest równy $\frac{57}{500}$ km. Jeden bok tej działki ma 3300 cm długości. Oblicz wymiary działki w metrach.
- 14 Oblicz, jaką część:
a) godziny jest 1 min, 5 min, 20 min i 30 min,
b) centymetra jest 1 mm, 5 mm i 9 mm.
- 15 Na półkach w sklepie stało 56 kartonów różnych soków. $\frac{2}{7}$ wszystkich soków to soki pomarańczowe, $\frac{3}{8}$ to soki grejpfrutowe, $\frac{3}{14}$ to gruszkowe, a reszta to soki jabłkowe. Ile było kartonów poszczególnych soków?
- 16 Ilu uczniów należy do drużyny szachowej, skoro 12 chłopców stanowi $\frac{4}{9}$ drużyny?
- 17 Pan Wojtek na codzienne wydatki przeznacza $\frac{3}{5}$ pensji, czyli 1680 zł. Ile zarabia pan Wojtek? Wykonaj rysunek pomocniczy.
- 18 W klasie piątej jest 24 uczniów, w tym 9 dziewczynek. Na koncert do filharmonii pojechało $\frac{5}{6}$ wszystkich uczniów. Ilu uczniów nie było na koncercie?
- 19 Pani Monika kupiła materiał na kostium. Na żakiet przeznaczyła $1\frac{7}{20}$ m materiału, a na spódnicę resztę, czyli $\frac{2}{5}$ kupionego materiału. Ile materiału kupiła pani Monika na kostium? Ile materiału przeznaczyła na uszycie spódnicy?



126

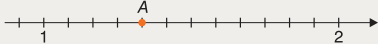
Odpowiedzi do zadań

10. $\frac{13}{20}$ t
11. a) $1\frac{7}{8}$ b) $\frac{1}{6}$
12. $4\frac{9}{10}$ kg
13. $33 \text{ m} \times 24 \text{ m}$
14. a) $\frac{1}{60}, \frac{1}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}$
15. pomarańczowe: 16, grejpfrutowe: 21, gruszkowe: 12, jabłkowe: 7
16. 27
17. 2800 zł
18. 4
19. $2\frac{1}{4}$ m; $\frac{9}{10}$ m

123

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszytach.

1. Zamalowana część prostokąta to
 A. $\frac{11}{18}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
2. Ułamekowi $\frac{4}{9}$ jest równy ułamek
 A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{8}{20}$ C. $\frac{10}{18}$ D. $\frac{12}{27}$
3. Który ułamek leży najdalej od punktu A na osi liczbowej?

 A. $\frac{14}{12}$ B. $\frac{9}{6}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{11}{12}$
4. Drugą potęgą liczby $\frac{3}{5}$ jest
 A. $2\frac{7}{9}$ B. $\frac{9}{25}$ C. $\frac{27}{125}$ D. $\frac{6}{10}$
5. Uzębienie stałe u dorosłego człowieka składa się z 32 zębów.
 $\frac{1}{4}$ zębów to tzw. siekacze. Dorosły człowiek ma
 A. 8 siekaczy. B. 4 siekacze. C. 16 siekaczy. D. 12 siekaczy.
6. Pani Natalia kupiła 30 kg jabłek za 75 zł i 16 kg ogórków za 104 zł.
 Oddała sąsiadce $\frac{2}{5}$ jabłek i $\frac{2}{5}$ ogórków. Jaka była wartość
 przekazanych zakupów?
 A. 71 zł 60 gr B. 18 zł 40 gr C. 41 zł 60 gr D. 90 zł
7. Kręgosłup człowieka składa się z 7 kręgów szyjnych i jest to $\frac{7}{24}$
 wszystkich kręgów. Z ilu kręgów składa się kręgosłup człowieka?
 A. 23 B. 12 C. 24 D. 18
8. Po sprzedaniu bluzek w cenie promocyjnej dostarczono do sklepu
 nową partię 125 takich samych bluzek, których cena była wyższa
 od ceny promocyjnej o $\frac{1}{5}$, czyli o 22 zł.
 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
 Promocyjna cena bluzki była równa A / B. A. 110 zł B. 125 zł
 Cena bluzki z nowej partii była równa C / D. C. 147 zł D. 132 zł



127

Komentarz do zadania 3.

W tym zadaniu trzeba nie tylko znaleźć położenie na osi liczbowej podanych w odpowiedziach ułamków, ale także określić, który z nich leży najdalej od punktu A. Punkt A odpowiada na osi liczbowej liczbie $1\frac{4}{12} = 1\frac{1}{3}$. Warto zauważyć, że liczby podane w odpowiedziach A, B i C są ułamkami niewłaściwymi i leżą na osi liczbowej pomiędzy liczbami 1 a 2. Liczba $\frac{11}{12}$ (odpowiedź D) jest ułamkiem właściwym mniejszym od 1, zatem jego odległość od punktu A jest największa.

Komentarz do zadania 7.

Rysunek pomocniczy wykonany do tego zadania przyspieszy jego rozwiązanie. Można też przyrzeć się podanemu ułamkowi, skorzystać z informacji, że 1 (całość) to $\frac{24}{24}$, i odpowiedzieć na pytanie.

Komentarz do zadania 8.

W tym zadaniu dobrym uczniom można zadać dodatkowe pytanie:

O ile więcej pieniędzy uzyskano ze sprzedaży nowej partii bluzek? E. 2750 zł F. 2500 zł
 Poprawną odpowiedzią jest E.

Odpowiedzi do zadań

1. C
2. D
3. D
4. B
5. A
6. A
7. C
8. AD

Wskazówki metodyczne

Infografikę można wykorzystać na lekcji powtórzeniowej oraz zajęciach dodatkowych lub jako pracę domową.

Przedstawiamy propozycję pracy w grupach. Uczniów dzielimy na grupy 3–4-osobowe. Każda grupa otrzymuje instrukcję pracy. W zależności od liczebności klasy to samo zadanie może otrzymać kilka grup.



Matematyka w kuchni

Trzecia część pierogów ma być z kapustą.
Hm, jedna trzecia, czyli ile?

Ciasto na pierogi (36 sztuk):

- 300 g mąki
- 1 jajko
- 150 ml ciepłej wody

ROZWIĄZANIE:

$\frac{1}{3}$ z 36 pierogów
to $\frac{1}{3} \cdot 36$,
czyli 12 pierogów.

Przykładowa instrukcja pracy

1. Odszukajcie w tabelce numer swojej grupy i przeczytajcie przydzielone wam zadanie.
2. Przeczytajcie informacje umieszczone na rysunku infografiki odpowiadające waszemu zadaniu i ustawcie je w odpowiedniej kolejności.
3. Ułóżcie 2 dodatkowe pytania do podanych informacji i zapiszcie odpowiedzi wraz z uzasadnieniem.
4. Przygotujcie prezentację swojej pracy w taki sposób, aby każdy członek grupy brał w niej udział.
5. Przedstawcie klasie swoje zadanie i sposób jego rozwiązania.

Czy mogę od każdego z was dostać po takim samym kawałku czekolady?

Ja mam 24 kostki czekolady. Ile kostek powinienam dać?

Moja czekolada ma 6 kawałków. Proszę, odłóżcie mi jeden.

ROZWIĄZANIE:

$\frac{1}{6}$ to tyle samo, co $\frac{4}{24}$,
więc dziewczyna
powinna dać 4 kostki
czekolady.





Muffiny (18 sztuk):

- 3 szklanki mąki
- $\frac{3}{4}$ szklanki cukru
- 3 jajka
- $\frac{3}{8}$ szklanki oleju
- $\frac{3}{4}$ szklanki jogurtu
- 2 łyżeczki proszku do pieczenia
- szczypta soli

Ile produktów potrzebuję, aby upiec 24 muffiny?

ROZWIĄZANIE:

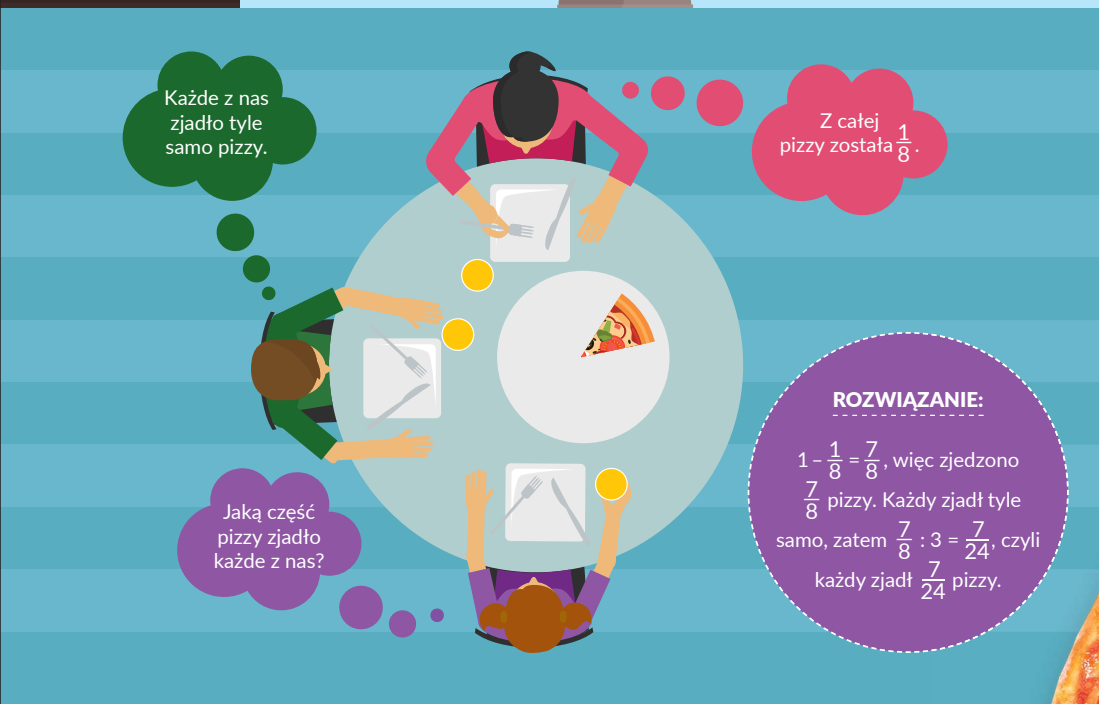
24 muffiny to o $\frac{1}{3}$ więcej niż w przepisie. Zatem trzeba zwiększyć składniki o $\frac{1}{3}$.

$3 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 4$ szklanki mąki

$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$ szklanka cukru...

Pozostałe obliczenia wykonajcie sami.

- Przed rozpoczęciem pracy należy zapoznać uczniów z kryteriami jej oceny.
- Kryteria powinny zawierać ocenę:
 - poprawności wykonanych zadań,
 - oryginalności i twórczej pracy uczniów,
 - zaangażowania wszystkich członków zespołu,
 - sposobu prezentacji wykonanego zadania.



Każde z nas zjadło tyle samo pizzy.

Z całej pizzy została $\frac{1}{8}$.

Jaką część pizzy zjadło każde z nas?

ROZWIĄZANIE:

$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, więc zjedzono $\frac{7}{8}$ pizzy. Każdy zjadł tyle samo, zatem $\frac{7}{8} : 3 = \frac{7}{24}$, czyli każdy zjadł $\frac{7}{24}$ pizzy.

Numer grupy	Zadanie do wykonania
I	Gracie rolę kucharki, która lepi i gotuje pierogi.
II	Gracie rolę trójki przyjaciół, którzy dzielą się czekoladą.
III	Gracie rolę kucharza, który przygotował i upiekł muffiny.
IV	Gracie rolę trójki przyjaciół, którzy jedzą pizzę.



Tematy lekcji:

1. Rozpoznawanie i zapisywanie wyrażeń algebraicznych (1 h)
2. Zapisywanie wyrażeń algebraicznych – zadania i ćwiczenia (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- rozpoznaje wyrażenia algebraiczne,
- zapisuje i czyta proste wyrażenia algebraiczne, zamienia wzór na formę słowną,
- stosuje wyrażenia algebraiczne do zapisywania obwodów trójkątów i czworokątów,
- zapisuje w postaci wyrażeń algebraicznych wzory na pola i obwody kwadratu oraz prostokąta,
- rozpoznaje wyrazy podobne,
- sumę jednakowych wyrażeń podobnych zastępuje iloczynem,
- czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje liczbowe,
- zapisuje treść zadania tekstowego w postaci wyrażenia algebraicznego.

Wskazówki metodyczne

Wprowadzanie symboli do algebry trwało kilka wieków. Przyczynili się do tego René Descartes (1596–1650), znany jako Kartezjusz, i Isaac Newton (1643–1727). Obecna postać algebra osiągnęła dopiero w początkach XVIII wieku. Wyrażenia algebraiczne to pojęcia szczególnie trudne dla uczniów, bo są abstrakcyjne. W latach pięćdziesiątych i sześćdziesiątych XX wieku mówiono o nich dopiero w klasach licealnych. Trzeba sobie zdawać sprawę z trudności, z jakimi spotyka się uczeń. W klasach 4, 5 i 6 zdobywa on tylko niezbędne umiejętności z zakresu algebry.

Komentarz do Sowa przypomina

Oprócz wymienionych tutaj pojęć trzeba przypomnieć nazewnictwo działań.

Komentarz do Sowa uczy

Aby pokazać uczniom, jak nadajemy nazwy wyrażeniom algebraicznym, można napisać na tablicy wyrażenia arytmetyczne i niektóre liczby zasłonić kartką z literą lub kolorową kredą tak napisać literę, by liczba była w nią wpisana. Nazwy powstałych w ten sposób wyrażeń algebraicznych będą takie same jak nazwy wyrażeń arytmetycznych. Warto zwrócić uwagę, że niektóre wyrażenia algebraiczne mają więcej niż jedną nazwę.

IV. Wyrażenia algebraiczne

1. Zapisywanie wyrażeń algebraicznych

Sowa przypomina

- Takie zapisy: $15 \cdot 60$, 5^3 , $100 - 15 \cdot 2$, $(13 + 12) \cdot 4$ to **wyrażenia arytmetyczne**.
 $15 \cdot 60 = 900$ $5^3 = 125$ $100 - 15 \cdot 2 = 70$ $(13 + 12) \cdot 4 = 100$
- Wyróżnione liczby: **900, 125, 70, 100** to **wartości** podanych **wyrażeń arytmetycznych**.

Sowa uczy

Najprostszymi **wyrażeniami algebraicznymi** są litery, np. a , b , c , d , x , y , a także liczby, np. $6\frac{1}{4}$, $7,84$, 19 , $33\frac{1}{2}$. Litera zastępuje liczbę. Gdy liczby i litery połączymy znakami działań, to również otrzymamy wyrażenia algebraiczne. Takim wyrażeniom nadajemy nazwy, np.

Wyrażenie	Nazwa
$5 + a + b$	suma liczb 5, a i b
$x - y$	różnica liczb x i y
$3 \cdot b$	iloczyn liczb 3 i b lub trzykrotność liczby b
$a : b = \frac{a}{b}$	iloraz liczby a przez liczbę b , $b \neq 0$ (b nie może być równe 0)
x^2	kwadrat liczby x
$\frac{1}{2} \cdot m = \frac{m}{2}$	iloczyn liczb $\frac{1}{2}$ i m lub połowa liczby m , lub iloraz liczby m przez liczbę 2

130

Materiały dydaktyczne

	Elementy algebry ➔ Wyrażenia algebraiczne
	
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 95–99
Zbiór zadań	s. 80–82

Przykład 1.

Do pieniędzy, które były w skarbonce, Ola dołożyła 20 zł. Zapiszmy wyrażenie algebraiczne opisujące kwotę, wyrażoną w złotych, która jest teraz w skarbonce, i podajmy jego nazwę.

Kwotę, która była w skarbonce, w złotych, oznaczmy literą p .

Kwota, która jest teraz w skarbonce, to suma 20 zł i kwoty, która już tam była, czyli $20 + p$.

Wyrażenie $20 + p$ to suma liczb 20 i p .



Sowa uczy

- W iloczynie liczby i liter możemy opuszczać znaki mnożenia, np. $3 \cdot a = 3a$, $\frac{1}{2} \cdot m \cdot x = \frac{1}{2}mx$, $b \cdot c = bc$.
- Nie można** opuścić znaku mnożenia między liczbami, bo $6 \cdot 4 \neq 64$.
- Iloczyn liczb i liter zapisujemy tak, by najpierw była liczba, a później litery w kolejności alfabetycznej, np. $3 \cdot d \cdot a \cdot 5 \cdot x = 15adx$. Mówimy, że tak zapisane **wyrażenia są uporządkowane**.
- W iloczynie, którego jednym z czynników jest liczba 1, możemy pominąć czynnik 1, np. $1 \cdot a = 1a = a$.
- Jeżeli w iloczynach litery są te same i każda w tej samej potęgzie, to mówimy, że są to **wyrazy podobne**.

Przykłady wyrazów podobnych:

$$3a \text{ i } a, \quad \frac{1}{2}a \text{ i } 5a, \quad \frac{1}{3}a^2b \text{ i } 4a^2b.$$

Przykłady wyrażeń, które **nie są** wyrazami podobnymi:

$$3a \text{ i } 3a^2, \quad a^2b \text{ i } ab^2, \quad 3ab \text{ i } 3ab^3.$$

Przykład 2.

Przedstawimy w prostszej postaci wyrażenie $8 + 7a + a - 3a + 2$.

Podkreślimy wyrazy podobne i zmierzmy kolejność liczb.

$$8 + 2 + \underline{7a} + \underline{a - 3a} = 10 + 5a$$

Dodajemy
liczby.

Wykonujemy działania
na wyrazach podobnych.

131

Komentarz do Przykładu 1.

W celu zobrazowania tego przykładu warto przynieść do klasy skarbonkę lub narysować ją symbolicznie na tablicy. Mówimy uczniom, że jest w niej 32 zł, i dokładamy do niej 20 zł. Uczniowie na pewno będą potrafili napisać, ile pieniędzy znajduje się w skarbonce po wykonaniu tej czynności. Można zmieniać liczby i prosić o podanie działania, które będzie obliczeniem do zadanego pytania. Następnie jedną z liczb zastępujemy literą, a zawartość skarbonki wyrażamy działaniem liczby i litery.

Komentarz do Sowa uczy

W tej części podręcznika wprowadziliśmy podstawowe pojęcia dotyczące wyrażeń algebraicznych. Ponieważ mają one istotne znaczenie dla dalszej nauki, należy dokładnie zapoznać z nimi uczniów i w następnych tematach do nich się odwoływać. Proponujemy zachęcić uczniów, aby do każdej z informacji z *Sowa uczy* podali swoje przykłady. W ten sposób sprawdzimy, czy zrozumieli te trudne pojęcia.

Komentarz do Przykładu 2.

Przypomnienie przemienności i łączności dodawania ułatwi uczniom zrozumienie kolejnych przekształceń w przedstawionym wyrażeniu. Warto zaproponować uczniom zabawę np. klockami w różnych kolorach i o różnej długości, które zastąpią wyrazy podobne. Dokładając i odkładając klocki, możemy ilustrować wykonywanie działań na wyrazach podobnych.

Dzieląc ułamek przez liczbę naturalną, postępujemy tak, jak gdyby to było dzielenie liczb naturalnych. Przecinek w ilorazie wstawiamy nad przecinkiem dzielnej.

Plansze interaktywne → Liczby wymierne → Działania na ułamkach dziesiętnych → Dzielenie ułamka dziesiętnego przez liczbę naturalną

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- $\frac{a}{b}$ – iloraz; $a + b$ – suma; $2a$ – dwukrotność; $a + 1$ – liczba o 1 większa; $\frac{1}{2}a$ – połowa; ab – iloczyn; $a - 1$ – liczba o 1 mniejsza
- a) suma liczb k i 1 b) różnica liczb 12 i c c) suma liczb 2, a i b d) czterokrotność liczby b e) iloraz liczby c przez 3 f) kwadrat liczby a g) różnica podwojonej liczby b i liczby 4 h) iloczyn liczb 6, a i b i) suma kwadratów liczb a i b
- a) gh b) $5p$ c) $\frac{1}{3}a$ d) $b + \frac{1}{2}a$ e) $b - 7$ f) $c^2 + 3d$
- $\frac{3}{4}a$: $3a, \frac{1}{2}a, a, 10a$; ab : $\frac{1}{2}ab, 3ab, 7ab, ab$; a^2 : $5a^2, \frac{2}{3}a^2, \frac{1}{2}a^2, a^2$
- a) P b) F c) F d) P
- kolejno: $3c$; $\frac{c}{3}$; $c + 3$; $3 - c$; $c - 3$
- a) $m + t + p$ b) $2d + e + f$ 8. $P = kl$
- a) $m, m - 2, L = 3m - 2$ b) $d + 5, 2d, L = 4d + 5$ c) $a, \frac{1}{2}a, d + 1\frac{1}{2}, L = 2\frac{1}{2}a + 2d + 1\frac{1}{2}$
- a) $a + b$ b) $3a$ c) $9 + a$ d) $2 + 2a + b$
- a) $d = 12 - 7$ b) $p = 9\frac{3}{4} - 5\frac{1}{2}$ c) $m = 8\frac{1}{3} - (4 + 2\frac{3}{4})$ d) $c = 15 - (8 + 3\frac{3}{4})$
- a) $L = 4a$; $P = a^2$; $P = \frac{1}{2}p^2$ b) $L = 2d + 2k$; $P = dk$

Komentarz do Przykładu 3.

Na lekcjach geometrii w klasie 5 i w klasach starszych korzystamy ze wzorów na obliczanie obwodu i pola figury, później pola powierzchni i objętości prostopadłościanu zapisanych w postaci wyrażenia algebraicznego. W tym przykładzie wprowadzamy zapis algebraiczny na obwód trójkąta, prostokąta i kwadratu oraz na pole prostokąta i kwadratu. W klasie 4 uczniowie nie stosowali wzorów, a obwody figur obliczali, dodając długości boków, natomiast pola, wypełniając figury kwadratami jednostkowymi.

We wzorach na oznaczenie obwodu, tak jak w klasach starszych, stosujemy literę L . Podczas zapisywania w najprostszej postaci obwodu kwadratu i obwodu prostokąta pokazałyśmy redukcję wyrazów podobnych (bez użycia tej nazwy). Na tym etapie nauki wystarczające jest zastępowanie sumy jednakowych składników iloczynem. Warto, aby zapisane wzory uczniowie zamieniali na formę słowną.

123

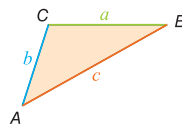
Przykład 3.

Zapiszmy za pomocą wyrażen algebraicznych obwody każdego z narysowanych wielokątów i pola narysowanych prostokątów.

Przypomnijmy:

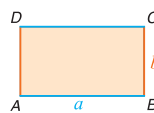
Obwód (L) wielokąta to suma długości jego boków.

Pole (P) prostokąta to iloczyn długości prostokąta przez jego szerokość.



$$L = a + b + c$$

Każdy bok trójkąta może mieć inną długość, dlatego przy każdym boku jest napisana inna litera oznaczająca jego długość.



$$L = a + b + a + b$$

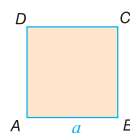
$$L = 2a + 2b$$

Prostokąt ma boki równoległe równej długości. Wystarczy więc na rysunku podać tylko długości dwóch boków prostokąta.

Tak samo wyróżnione są wyrazy podobne.

Sumę jednakowych składników można zastąpić iloczynem.

Obwód prostokąta jest 2 razy dłuższy od sumy długości sąsiednich boków.



$$L = a + a + a + a$$

$$L = 4a$$

$$P = a \cdot a = a^2$$

Wszystkie boki kwadratu mają taką samą długość, dlatego można oznaczyć literą tylko długość jednego boku.

Dodawanie takich samych składników można zapisać w postaci iloczynu.

Mnożenie takich samych czynników można zapisać za pomocą potęgi.

IV. Wyrażenia algebraiczne

123

1. Podaj nazwę wyrażenia algebraicznego.
a) $16 + x$ b) $y - a$ c) $m : 5$ d) $8 \cdot c$
2. Wyrażenie algebraiczne opisujące iloraz liczby n przez liczbę 15 to
A. $15 : n$ B. $a : 15$ C. $n \cdot 15$ D. $n : 15$
3. Napisz wyrażenie algebraiczne:
a) iloczyn liczb 7, m , x , b) różnica liczb p i 12,
c) trzecia potęga liczby b , d) liczba o 9 większa od a .
4. Napisz w prostszej postaci.
a) $a + b + b$ b) $3x + 5x$ c) $4a + 3 + a$
 $z \cdot z \cdot z$ $7b - 4b$ $2xy - 3 - xy$
5. Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące wartość 2 kg malin po x zł za 1 kg.
6. Karol miał b zł. Za zakupy zapłacił 13 zł. Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące, jaka jest reszta z zakupów Karola.
7. Patrycja kupiła książkę i album. Dała kasjerce 100 zł i otrzymała y zł reszty. Które wyrażenie algebraiczne opisuje wartość jej zakupów?
A. $100 + y$ B. $100 \cdot y$ C. $y : 100$ D. $100 - y$
8. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego długość odcinka AB .

9. Obwód trójkąta jest równy 30 dm. Jeden bok ma długość 12 dm, drugi b dm. Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące długość trzeciego boku trójkąta.
10. Obwód kwadratu jest równy t cm. Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące długość boku kwadratu.
11. Jeden bok prostokąta ma k cm, a drugi 13 cm. Które wyrażenie algebraiczne opisuje obwód tego prostokąta?
A. $13k$ B. $2(k + 13)$ C. $k + 13$ D. $2k + 13$
12. Jeden bok prostokąta ma 8 dm, a drugi m dm. Które wyrażenie algebraiczne opisuje pole tego prostokąta?
A. $8 : m$ B. $m - 8$ C. $8m$ D. $m + 8$



133

Komentarz do zadań 1.–3.

Zadania można rozwiązać ustnie. Znajdziemy wtedy czas na uzasadnienie przez uczniów swoich odpowiedzi.

Komentarz do zadań 5.–7.

Przed przystąpieniem do rozwiązywania tych zadań wykonujemy podobne zadania na liczbach i zapisujemy odpowiednie wyrażenia arytmetyczne. Wykonanie takich zadań ułatwi zapisywanie wyrażeń algebraicznych.

Komentarz do zadania 8.

Na początku nauki algebry bardzo często długość odcinka AB składającego się z dwóch odcinków o długościach a i b uczniowie zapisują w postaci iloczynu ab . Aby uniknąć takich błędów, warto wcześniej rozwiązać w pamięci kilka zadań na liczbach, a dopiero później zastąpić niektóre liczby literami.

Komentarz do zadań 9.–12.

Rozwiązywanie tych zadań warto poprzedzić ustnym rozwiązaniem kilku zadań o podobnej treści tylko na liczbach.

Odpowiedzi do zadań

1. a) suma liczb 16 i x b) różnica liczb y i a c) iloraz liczby m przez liczbę 5 d) iloczyn liczb 8 i c
2. D
3. a) $7mx$ b) $p - 12$ c) b^3 d) $a + 9$
4. a) $a + 2b, z^3$ b) $8x, 3b$ c) $5a + 3, xy - 3$
5. $2x$
6. $b - 13$
7. D
8. $a + b + 4$
9. $30 - 12 - b$
10. $t : 4$
11. B
12. C

Komentarz do zadania 13.

Zapisanie wyrażeń opisujących obwody i pola narysowanych prostokątów nie powinno być dla uczniów trudne, jeżeli potrafią słownie opisać sposób ich obliczania. W razie problemów uczniowie powinni skorzystać z Przykładu 3.

Komentarz do zadania 14.

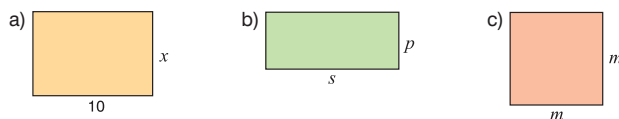
W tym zadaniu uczniowie ćwiczą umiejętność uzasadniania wyboru i utrwalają wiadomości związane ze skalą. Ponieważ dopiero rozpoczęli naukę algebry, warto sprawdzić, czy rozumieją użyte w zadaniu zapisy. Wykonanie na kartce w kratkę odręcznych rysunków kwadratu w skali 1 : 1 i 2 : 1 oraz naniesienie na nich długości boków obu kwadratów pomoże im w wyborze poprawnej odpowiedzi. Po rozwiązaniu zadania można zapytać uczniów, jak zmienić pytanie, aby odrzucone odpowiedzi były prawdziwe.

Komentarz do Sprawdź się!

Podczas rozwiązywania zadań 2. i 4. uczniowie powinni uzasadnić wybór swojej odpowiedzi i podać powody, dla których odrzucili pozostałe.

123

- 13 Zapisz wyrażenia algebraiczne opisujące obwody i pola figur.



- 14 Jaką długość ma obwód kwadratu o boku m w skali 2 : 1? Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

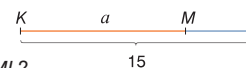
A. $4m$,	ponieważ obwód kwadratu jest	I. czterokrotnością boku o długości m .
B. $8m$,		II. czterokrotnością boku o długości $2m$.

- 15 Na domu państwa Nowaków monterzy instalowali ekologiczne panele słoneczne. Pierwsze 2 dni pracowali po k godzin, a przez następne 3 dni po m godzin. Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące liczbę godzin pracy tej ekipy.



🐶 Sprawdź się!

- Napisz wyrażenie algebraiczne:
a) różnica liczb p i m , b) iloczyn liczb: a , 6 , b .
- Wyrazem podobnym do $5c$ jest
A. $2c^2$ B. $5ac$ C. $5xc$ D. c
- Basia kupiła książkę za 35 zł i zakładkę za a zł. Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące wartość jej zakupów.
- Odcinek KL podzielono na dwie części, jak na rysunku. Które wyrażenie opisuje długość odcinka ML ?
A. $a - 15$ B. $a + 15$ C. $15a$ D. $15 - a$
- Zapisz wyrażenia algebraiczne opisujące obwód i pole narysowanego prostokąta.



134

Odpowiedzi do zadań

13. a) $L = 20 + 2x$, $P = 10x$ b) $L = 2p + 2s$, $P = ps$ c) $L = 4m$, $P = m^2$

14. B, II

15. $2k + 3m$

🐶 Sprawdź się!

1. a) $p - m$ b) $6ab$

2. D

3. $35 + a$

4. D

5. $L = 24 + 2c$, $P = 12c$

2. Obliczanie wartości liczbowych wyrażeń algebraicznych

Sowa uczy

Jeżeli w wyrażeniu opisującym obwód kwadratu $4a$ napiszemy zamiast a liczbę 15 i wykonamy wskazane działanie, to otrzymamy: $4 \cdot 15 = 60$.

Liczbę 60 nazywamy **wartością liczbową wyrażenia** $4a$ dla $a = 15$.

W miejsce litery a można wpisać inną dowolną liczbę (w tym przykładzie większą od zera, bo długość odcinka nie może być liczbą ujemną) i wtedy wartość wyrażenia się zmieni, np. dla $a = 10$, $4a = 4 \cdot 10 = 40$.



Przykład 1.

Obliczmy wartość liczbową wyrażenia $2a + 2b$ dla:

a) $a = 12$ i $b = 17$, b) $a = 3\frac{1}{2}$ i $b = 5\frac{3}{4}$

a) $2a + 2b = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 17 = 24 + 34 = 58$

Liczba 58 jest **wartością liczbową wyrażenia** $2a + 2b$ dla $a = 12$ i $b = 17$.

b) $2a + 2b = 2 \cdot 3\frac{1}{2} + 2 \cdot 5\frac{3}{4} = 7 + 11\frac{1}{2} = 18\frac{1}{2}$

Liczba $18\frac{1}{2}$ jest **wartością liczbową wyrażenia** $2a + 2b$ dla $a = 3\frac{1}{2}$ i $b = 5\frac{3}{4}$.

Jedno wyrażenie może przyjmować różne wartości liczbowe.



135

Tematy lekcji:

1. Obliczanie wartości liczbowych wyrażeń algebraicznych (1 h)
2. Zastosowanie obliczania wartości liczbowych wyrażeń algebraicznych w zadaniach (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- oblicza wartość wyrażenia algebraicznego,
- zapisuje wyrażenie algebraiczne w najprostszej postaci i oblicza jego wartość liczbową,
- zapisuje wyrażenie algebraiczne opisujące proste zależności, np. zakupy, obwód lub pole figury, i oblicza ich wartość liczbową,
- rozwiązuje zadania tekstowe na obliczanie wartości liczbowej wyrażeń algebraicznych.

Wskazówki metodyczne

- Ułatwieniem w opanowywaniu umiejętności obliczania wartości liczbowych wyrażeń algebraicznych może być wpisywanie liczb do środka litery, tak jak pokazano w *Przykładzie 1*. Można również literę zasłonić kartonikiem z napisaną na nim liczbą. Proponujemy przeprowadzenie lekcji dotyczącej obliczania wartości liczbowej wyrażeń algebraicznych w grupach 2-, 3- lub 4-osobowych. W tym celu trzeba przygotować dla każdej grupy kartki z wypisanymi na nich liczbami, literami i znakami działań oraz kilka pustych kartek tej samej wielkości. Każda grupa otrzymuje takie same polecenia:

– Utwórzcie wyrażenie algebraiczne, wykorzystując dwie kartki z liczbami i jedną z literą oraz dowolnymi znakami działań.

– Podajcie nazwę tego wyrażenia.

– Kartkę z literą zastąpcie liczbą 10 i obliczcie wartość otrzymanego wyrażenia.

– W tym samym wyrażeniu zamiast liczby 10 wstawcie dowolną inną liczbę.

Wyrażenia napisane przez grupy można zapisać na tablicy i obliczyć ich wartość liczbową.

Możemy oczekiwać, że z ćwiczenia uczniowie wyciągną następujące wnioski:

- z tych samych liczb i litery można utworzyć różne wyrażenia z wykorzystaniem innych znaków działań,
- wartość dwóch różnych wyrażeń może być inna, mimo że są zapisane tymi samymi liczbami,
- wartość wyrażenia zależy od liczby, którą podstawiamy zamiast litery.

- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 14 lub 14a.

Materiały dydaktyczne

	Elementy algebry → Wyrażenia algebraiczne
	Kartkówka 14 lub 14a
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 100–102
Zbiór zadań	s. 83–85

IV. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

Komentarz do zadania 1.

Zadanie można wykonać tylko ustnie. Proponujemy, aby każdy uczeń najpierw podał nazwę słowną wyrażenia (np. $\frac{1}{2}a$ to połowa liczby a), a następnie obliczył i podał jego wartość liczbową. Można także ustalić, że uczeń, który poprawnie wykona zadanie, wyznacza osobę do kolejnego przykładu z zadania lub przykładu wymyślonego przez siebie.

Komentarz do zadania 2.

Wybrane przykłady z zadania (np. d, e, f) można wykonać na tablicy wspólnie z klasą. Przed podstawieniem liczb uczniowie powinni podać nazwę wyrażenia i wyjaśnić, jakie działanie trzeba wykonać w danym wyrażeniu. We wszystkich zaproponowanych w tym zadaniu wyrażeniach powtarzamy działania na ułamkach zwykłych z zastosowaniem kolejności wykonywania działań. Warto, aby wartości liczbowe najłatwiejszych wyrażen (a, b, c) uczniowie obliczyli samodzielnie, a pod kierunkiem nauczyciela sprawdzili ich poprawność.

Komentarz do zadań 3.–5.

Ten zestaw zadań zawiera praktyczne zastosowanie wyrażen algebraicznych. Uczniowie ćwiczą zarówno rozwiązywanie zadań na podstawie informacji podanych w tekście i na schemacie, jak i umiejętność czytania ze zrozumieniem. Warto, aby za każdym razem uzasadniali wybór odpowiedzi danymi wybranymi z tekstu lub rysunku. Można także zaproponować uczniom ułożenie do przedstawionych tutaj danych innego zadania tekstowego.

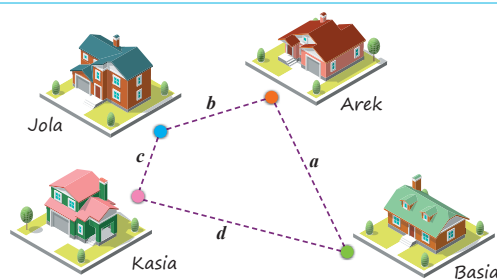
W zadaniu 5. uczniowie obliczają wartości liczbowe zapisanych przez siebie wyrażen algebraicznych, a wyniki podają w kilometrach i metrach. Można także porównać obie drogi i wskazać występujące między nimi różnice.

123

- Oblicz wartości liczbowe wyrażen dla $a = 12$.
 a) $a + 6$ b) $18 - a$ c) $a : 4$ d) $\frac{1}{2}a$
 $a - 8$ $2a$ $48 : a$ $4\frac{4}{5} : a$
- Oblicz wartość liczbową wyrażenia.
 a) $4a$, dla $a = \frac{3}{4}$ b) $2y$, dla $y = 1\frac{1}{5}$
 c) $2a + b$, dla $a = 1\frac{1}{2}$ i $b = 3$ d) $3a : 4$, dla $a = 2\frac{2}{5}$
 e) $m - 1\frac{1}{2}$, dla $m = 4\frac{1}{6}$ f) $3b + 2\frac{5}{6}$, dla $b = 1\frac{1}{9}$

Na podstawie poniższych informacji rozwiąż zadania 3.–5.

Domy Kasi, Joli, Arka i Basi znajdują się w wierzchołkach czworokąta. Dzieci oznaczyły literami długości dróg łączących ich domy. Odległość domu Basi od domu Arka jest równa 600 m, domu Arka od domu Joli – $\frac{2}{5}$ km, domu Joli od domu Kasi – $\frac{1}{4}$ km, a domu Kasi od domu Basi – 750 m.



- Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
 Odległość domu Basi od domu Arka jest równa A / B.
 A. $\frac{3}{5}$ km B. $\frac{2}{5}$ km
 Odległość domu Arka od domu Joli jest równa C / D.
 C. 600 m D. 400 m
- Dom Joli dzieli od domu Kasi odległość
 A. 250 m B. $\frac{1}{5}$ km C. 300 m D. 200 m
- Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące długość drogi, którą musi przejść Kasia, idąc do Arka, odwiedzając po drodze Basię lub Jolę. Rozważ 2 przypadki.

136

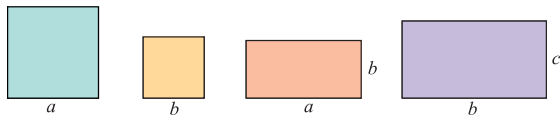
Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- a) 15 b) $5\frac{1}{2}$ c) 6 d) $4\frac{1}{2}$
- A, C
- 6; $\frac{24}{25}$; 4; $1\frac{5}{9}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{19}{20}$; $\frac{1}{9}$; 0
- kolumnami: 18; $32\frac{1}{2}$; $25\frac{1}{3}$; $6\frac{5}{6}$; 14; $7\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{3}$; $1\frac{5}{6}$; 32; 250; 160; $10\frac{5}{6}$; 8; $1\frac{3}{5}$; $1\frac{1}{9}$; $1\frac{11}{15}$
- a) $a + 2$; 7 b) $3\frac{3}{4} + a$; $8\frac{3}{4}$ c) $3a$; 15 d) $a + 3$; 8
- a) $P = y^2$, 64 b) $P = xy$, 36
- a) $2x + 10$; 23 b) $5x$; $32\frac{1}{2}$ c) $3x + 8$; $27\frac{1}{2}$ d) $2x + 16$; 29
- a) F b) F c) F d) F

IV. Wyrażenia algebraiczne

123

- 6 Napisz wyrażenia algebraiczne opisujące obwody i pola figur. Oblicz wartości liczbowe tych wyrażeń dla: $a = 6$, $b = 5\frac{3}{4}$, $c = 4$.



- 7 Jaka liczba jest wartością wyrażenia $15m + n$ dla $m = 3$, $n = 6\frac{1}{2}$? Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

A. $51\frac{1}{2}$,	ponieważ jest	I. iloczynem liczby 15 i sumy liczb 3 i $6\frac{1}{2}$.
B. $142\frac{1}{2}$,		II. sumą iloczynu 3 i 15 oraz liczby $6\frac{1}{2}$.

- 8 Pani Marta kupiła 4 doniczki mięty po a zł i 3 doniczki bazylii po b zł. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D. Wyrażenie algebraiczne A / B opisuje, ile reszty otrzymała z 50 zł.
 A. $50 - 4a + 3b$ B. $50 - (4a + 3b)$
 Wartość zakupów dla $a = 4$, $b = 6$ była równa C / D.
 C. 34 zł D. 70 zł



Sprawdź się!

- Oblicz wartość liczbową wyrażenia $1 + 2b$ dla $b = 3\frac{2}{5}$.
- Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące obwód narysowanego kwadratu. Oblicz obwód dla $u = 1\frac{3}{4}$ dm.
- Wartością liczbową wyrażenia $15\frac{1}{2} - a$ dla $a = 5\frac{1}{4}$ jest
 A. $20\frac{3}{4}$ B. $9\frac{3}{4}$ C. $10\frac{1}{4}$ D. $10\frac{3}{4}$
- Wojtek kupił n kg bananów po 4 zł za 1 kg. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące wartość zakupu Wojtka. Oblicz wartość liczbową tego wyrażenia dla $n = 5\frac{1}{2}$.
- Pomyśl pewną liczbę. Dodaj do niej taką samą liczbę i liczbę 12. Wynik podziel przez 2. Oznacz pomyślaną liczbę literą m i napisz wyrażenie algebraiczne opisujące wykonane działania.



137

Komentarz do zadania 6.

Uczniowie powinni podać formę słowną opisującą obwód i pole każdej figury.

Komentarz do zadania 8.

W tym zadaniu ważne jest uzasadnienie poprawnego wyboru odpowiedzi oraz wyjaśnienie, dlaczego odpowiedź A jest niepoprawna. Dopóki uczniowie nie poznają odejmowania liczb ujemnych, warto wracać do przykładów pokazujących, że odejmowanie kilku liczb można zastąpić odjęciem sumy tych liczb. Proponujemy następujący przykład: *Jeżeli od taśmy o długości 15 cm odetniemy kawałek o długości 4 cm, a następnie odetniemy kawałek o długości 5 cm, to zostanie nam tyle taśmy jak wtedy, gdy od razu odetniemy kawałek o długości 9 cm.* Nieznajomość różnych sposobów wykonywania takich obliczeń to często powtarzający się uczniowski błąd.

Komentarz do Sprawdź się!

Proponujemy, aby zadania tu zawarte rozwiązać w formie konkursu na czas. Nagroda będzie zależała od poprawności obliczeń i odpowiedzi oraz czasu pracy. Można np. ustalić, że uczniowie zapisują w zeszyty tylko wyniki, i trzy pierwsze osoby otrzymują ocenę bardzo dobrą. Następni uczniowie, którzy zmieszczą się w wyznaczonym czasie i nie popełnią błędów, zostaną nagrodzeni plusami. W przypadku klas, w których sporo uczniów ma problemy z nauką matematyki, można modyfikować podaną propozycję nagradzania i dostosowywać ją do możliwości uczniów.

Odpowiedzi do zadań

- a) 18, 4 b) 6, 24 c) 3, 4 d) $6\frac{2}{5}$
- a) 3 b) $2\frac{2}{5}$ c) 6 d) $1\frac{4}{5}$ e) $2\frac{2}{3}$ f) $6\frac{1}{6}$
- AD 4. A
- $a + d$ lub $b + c$
- obwody: $4a$, 24; $4b$, 23; $2a + 2b$, $23\frac{1}{2}$; $2b + 2c$, $19\frac{1}{2}$ pola: $a \cdot a$, 36;
 $b \cdot b$, $\frac{529}{16} = 33\frac{1}{16}$; $a \cdot b$, $34\frac{1}{2}$; $b \cdot c$, 23
- A, II 8. BC

Sprawdź się!

- $7\frac{4}{5}$ 2. $4u$; 7 [dm]
- C 4. $4n$; 22 [zł]
- $\frac{2m+12}{2} = m + 6$

Tematy lekcji:

1. Rozwiązywanie równań (1 h)
2. Zastosowanie rozwiązywania równań w zadaniach (1 h)
3. Zadania z zastosowaniem równań (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- oblicza niewiadome: składnik, odjemną, odjemnik, czynnik, dzielną, dzielnik,
- wyjaśnia, co to znaczy rozwiązać równanie,
- rozwiązuje równania I stopnia z jedną niewiadomą występującą po jednej stronie przez zgadywanie, dopełnianie lub działania odwrotne,
- sprawdza poprawność rozwiązania równania,
- rozwiązuje równania, w których występują liczby naturalne, ułamki zwykłe lub dziesiętne,
- dostrzega zależności między podanymi informacjami,
- zapisuje treść zadania krótkiej odpowiedzi w postaci równania i rozwiązuje je,
- rozwiązuje zadania tekstowe zamknięte i otwarte z zastosowaniem równań.

Wskazówki metodyczne

- W klasie 5 uczniowie rozwiązują bardzo proste równania głównie poprzez zgadywanie niewiadomej liczby lub stosowanie działań odwrotnych. Takie równania pojawiały się już na I etapie edukacji, ale wówczas niewiadomą zastępowała kratka (okienko), w którą uczniowie wpisywali odpowiednią liczbę. W klasie 5 wprowadzamy pojęcie równania. Rozwiązywanie równań jest znane prawie od czterech tysięcy lat. W papirusie Rhinda (ok. 1650 r. p.n.e.) kilka zadań prowadzi do równań postaci $ax = b$. Znak równości został prawdopodobnie zastosowany po raz pierwszy w książce walijskiego matematyka Roberta Recorde'a w 1557 roku.
- Rozwiązywanie równań sprawia uczniom trudności, ponieważ wiążą się one z myśleniem abstrakcyjnym. Podczas ich zapisu nie sposób odwołać się do przeżyć dziecka i jego doświadczeń. Zamiana kratki (okienka), która była stosowana w młodszych klasach na oznaczenie literowej niewiadomej, zmienia nastawienie ucznia do problemu i powoduje, że rozwiązywanie, nawet prostych równań, sprawia uczniom kłopoty. Napisanie niewiadomej na tyle dużą literą i o takim kształcie, żeby można było wpisać w nią liczbę, ułatwia uczniom rozwiązywanie równań.

123

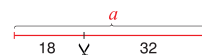
3. Rozwiązywanie równań

Sowa przypomina

Nieznaną liczbę w równościach zastępowaliśmy kwadracikiem lub dowolną literą.

- Obliczanie niewiadomej, gdy jest ona **odjemną**.

$$\begin{aligned} a - 32 &= 18 \\ a &= 18 + 32 \\ a &= 50 \end{aligned}$$

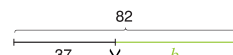


Sprawdzenie.

$$50 - 32 = 18$$

- Obliczanie niewiadomej, gdy jest ona **odjemnikiem**.

$$\begin{aligned} 82 - b &= 37 \\ 37 + b &= 82 \\ b &= 82 - 37 \\ b &= 45 \end{aligned}$$

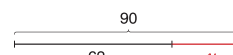


Sprawdzenie.

$$82 - 45 = 37$$

- Obliczanie niewiadomej, gdy jest ona **składnikiem**.

$$\begin{aligned} 62 + u &= 90 \\ u &= 90 - 62 \\ u &= 28 \end{aligned}$$

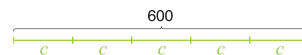


Sprawdzenie.

$$62 + 28 = 90$$

- Obliczanie niewiadomej, gdy jest ona **czynnikiem**.

$$\begin{aligned} 5 \cdot c &= 600 \\ c &= 600 : 5 \\ c &= 120 \end{aligned}$$

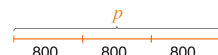


Sprawdzenie.

$$5 \cdot 120 = 600$$

- Obliczanie niewiadomej, gdy jest ona **dzielną**.

$$\begin{aligned} p : 800 &= 3 \\ p &= 3 \cdot 800 \\ p &= 2400 \end{aligned}$$

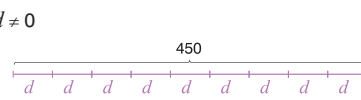


Sprawdzenie.

$$2400 : 800 = 3$$

- Obliczanie niewiadomej, gdy jest ona **dzielnikiem**.

$$\begin{aligned} 450 : d &= 9, d \neq 0 \\ 9 \cdot d &= 450 \\ d &= 450 : 9 \\ d &= 50 \end{aligned}$$



Sprawdzenie.

$$450 : 50 = 9$$

138

Materiały dydaktyczne

	Elementy algebry ➔ Wyrażenia algebraiczne Elementy algebry ➔ Równania z jedną niewiadomą
	Plansza edukacyjna. Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	s. 103–106
Zbiór zadań	s. 86–89



Sowa uczy

Zapisy: $15 - 7 = 8$, $6 \cdot 2 = 10 + 2$, $10 : 2 = 5$ to **równości**.

Z kolei zapis: $5 + \blacksquare = 7$ to **równanie**.

Równaniami są też zapisy: $5 + x = 7$, $15 + 3b - 2b = 5$, w których litery x , b to **niewiadome**.

Takie równania to **równania z jedną niewiadomą**.

Wyrażenie algebraiczne stojące po lewej stronie znaku równości nazywamy lewą stroną równania, a wyrażenie stojące po prawej stronie znaku równości – prawą stroną równania.

Np. $\underbrace{5 + x}_{\text{lewa strona równania}} = \underbrace{7}_{\text{prawa strona równania}}$
 $L = 5 + x$ $P = 7$

Przykład 1.

Rozwiążmy równanie $2a - 4 = 10$, a następnie sprawdzmy, czy to rozwiązanie jest poprawne.

$$\underbrace{2a}_{\text{odjemna}} - \underbrace{4}_{\text{odjemnik}} = \underbrace{10}_{\text{różnica}}$$

$$2a = 14$$

$$a = 14 : 2$$

$$a = 7$$

Liczba 7 jest rozwiązaniem tego równania.

Mówimy też, że **liczba 7 spełnia to równanie**.

Sprawdzenie. $L = 2 \cdot 7 - 4 = 14 - 4 = 10$ $P = 10$ $L = P$

Rozwiązać równanie to znaczy znaleźć taką liczbę, aby po podstawieniu jej zamiast niewiadomej wartość liczbową wyrażenia po lewej stronie równania była równa wartości liczbowej wyrażenia po prawej stronie równania.



Komentarz do Sowa uczy

Uczniowie poznają nowe pojęcia związane z równaniem. Wszystkie powinny być wprowadzane ostrożnie i intuicyjnie. Jest to bardzo ważne dla zrozumienia i wykorzystania nowych informacji w dalszej edukacji. Nadal jednak uczniowie będą rozwiązywać równania poprzez wykonywanie działań odwrotnych lub zgadywanie bez podawania uzasadnienia.

Komentarz do Przykładu 1.

Na ilustracji pokazałyśmy, jak obliczyć odjemną. Dobrze, by uczniowie to zauważyli i potrafili narysować odcinek o długości $2a$ oraz obliczyć liczbę, którą zastępuje litera a . Ważne, aby rozumieli kolejne kroki, które trzeba wykonać podczas szukania niewiadomej. W tym przykładzie pojawiają się nowe pojęcia: *strona równania*; *liczba, która spełnia równanie*. Podczas rozwiązywania kolejnych równań uczniowie powinni wskazywać te pojęcia i używać ich.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- a) $6\frac{1}{3}$ b) $2\frac{1}{4}$ c) $2\frac{2}{3}$ d) $5\frac{7}{10}$ e) $\frac{1}{2}$ f) 6
- kolejno wierszami równania i odpowiednie liczby: $3\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 10; $\frac{1}{8}$; $3\frac{3}{4}$; 16
- a) $a = 35$ b) $p + 48 = 100$; 52 c) $8d = 72$; 9 d) $36 + b = 100$; 64
- $a + 2$; 15; 31; 7, 9, 15
- kolejno wierszami: Marta, dziadek, ciocia; x zł, x zł, 40 zł; 55 zł
- kolejno w kolumnach: $s = vt$, 300 km; $s = vt$, 140 km; $v = \frac{s}{t}$, $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $v = \frac{s}{t}$, $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
- a) $a = 7$ b) $c = 2\frac{1}{2}$ c) $p = \frac{6}{7}$ d) $a = \frac{2}{9}$
- a) F b) F c) P d) P
- a) $1\frac{3}{5} + a = 3\frac{1}{8}$; $a = 1\frac{21}{40}$ b) $a - 2\frac{5}{7} = 1\frac{3}{5}$; $a = 4\frac{11}{35}$ c) $4p = 52$, $p = 13$
- $\frac{2a + 14}{2} - a = 7$

Komentarz do Przykładu 2.

Umiejętność sprawdzania, czy liczba jest rozwiązaniem równania, bardzo często ma zastosowanie zwłaszcza w zadaniach zamkniętych na egzaminach zewnętrznych. Warto skojarzyć ją z poznaną wcześniej umiejętnością obliczania wartości liczbowej wyrażenia algebraicznego. Przed sprawdzeniem, czy dana liczba spełnia równanie, zalecane jest oszacowanie niewiadomej.

Komentarz do Przykładu 3.

Treść zadania zapisałyśmy w tabelce, a później w formie równania, aby ułatwić uczniom zrozumienie układania równania do podanej treści. W trakcie wykonywania kolejnych przekształceń równania pojawia się zapis sumy dwóch jednakowych składników w postaci iloczynu. Uczniowie powinni zwrócić na to uwagę.

123

Przykład 2.

Która liczba: 2 czy $3\frac{1}{2}$ jest rozwiązaniem równania $4x + 5\frac{1}{6} = 19\frac{1}{6}$?

Lewa strona równania to wyrażenie $4x + 5\frac{1}{6}$. Obliczmy jego wartość liczbową dla:

$$x = 2$$

$$L = 4 \cdot 2 + 5\frac{1}{6} = 13\frac{1}{6}$$

$$P = 19\frac{1}{6} \quad L \neq P$$

Liczba 2 **nie jest** rozwiązaniem równania, czyli **nie spełnia** równania $4x + 5\frac{1}{6} = 19\frac{1}{6}$.

$$x = 3\frac{1}{2}$$

$$L = 4 \cdot 3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{6} = 19\frac{1}{6}$$

$$P = 19\frac{1}{6} \quad L = P$$

Liczba $3\frac{1}{2}$ jest rozwiązaniem równania $4x + 5\frac{1}{6} = 19\frac{1}{6}$, czyli liczba $3\frac{1}{2}$ spełnia to równanie.

Przykład 3.

Adam pomyślał pewną liczbę i dodał do niej tę samą liczbę. Do wyniku dodał 21, a następnie odjął 17. Otrzymał 50. Jaką liczbę pomyślał Adam?

Literą p zastąpmy liczbę, którą pomyślał Adam i przedstawmy treść zadania w tabelce.

Pomyślana liczba	Dodał pomyślaną liczbę	Dodał 21	Odjął 17	Otrzymał 50
p	$+ p$	$+ 21$	$- 17$	$= 50$

Zapiszmy równanie.

$$p + p + 21 - 17 = 50 \quad \text{Wykonajmy możliwe działania.}$$

$$2p + 4 = 50 \quad \text{Obliczmy pierwszy składnik } 2p.$$

$$2p = 46 \quad \text{Obliczmy nieznaną czynnik.}$$

$$p = 46 : 2$$

$$p = 23$$

Sprawdzenie warunków zadania.

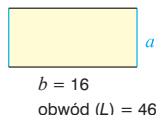
$$23 + 23 = 46, \quad 46 + 21 = 67, \quad 67 - 17 = 50$$

Odpowiedź. Adam pomyślał liczbę 23.

Przykład 4.

Obwód prostokąta jest równy 46 dm. Jeden bok ma długość 16 dm. Jaką długość ma drugi bok tego prostokąta?

Wykonajmy rysunek pomocniczy i zapiszmy dane.
Boki prostokąta oznaczmy przez a i b .

**Sposób I**

Suma dwóch boków prostokąta to połowa jego obwodu: $a + b = \frac{1}{2}L$.

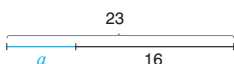
Zatem:

$$a + 16 = 46 : 2$$

$$a + 16 = 23$$

$$a = 23 - 16$$

$$a = 7$$

**Sposób II**

We wzorze $L = 2a + 2b$ litery zastępujemy danymi z zadania i wykonujemy obliczenia.

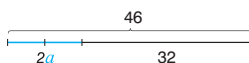
$$46 = 2a + 2 \cdot 16$$

$$2a + 32 = 46$$

$$2a = 46 - 32$$

$$2a = 14$$

$$a = 7$$



Odpowiedź. Długość drugiego boku prostokąta jest równa 7 dm.

- 1 Informację zapisz w postaci równania.
 - a) Suma liczb a i 5 jest równa 15.
 - b) Podwojona liczba b jest równa 18.
 - c) Liczba a pomniejszona o 12 jest równa 35.
 - d) Za dwie bułki po x zł zapłacono 5 zł.

- 2 Która liczba jest rozwiązaniem równania $2a - 6 = 15$?
 - A. 21
 - B. $10\frac{1}{2}$
 - C. $4\frac{1}{2}$
 - D. 11

Komentarz do Przykładu 4.

W starszych klasach, a zwłaszcza w szkole średniej, uczniowie lubią rozwiązywać zadania tekstowe za pomocą równań. Zadanie tu omówione pomoże zrozumieć tę umiejętność. Ponadto uczniowie zauważą, że można ułożyć 2 różne równania prowadzące do tej samej odpowiedzi. Istotny jest także rysunek, który w dużym stopniu ułatwi zapisanie równania. Proponujemy, by uczniowie ocenili, który sposób jest dla nich łatwiejszy, i uzasadnili to.

Komentarz do zadania 1.

Zadanie można rozwiązywać ustnie pod warunkiem, że uczniowie rozumieją występujące w nim pojęcia.

Komentarz do zadania 2.

Tego typu zadania zamknięte rozwiązuje się szybciej przez podstawianie podanych wyników do równania i szacowanie. Stosując ten sposób, można od razu wyeliminować liczby największą i najmniejszą.

Odpowiedzi do zadań

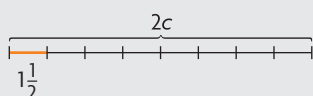
1. a) $a + 5 = 15$ b) $2b = 18$ c) $a - 12 = 35$ d) $2x = 5$
2. B

Komentarz do zadania 3.

W tym zadaniu wskazane jest określenie przez uczniów roli niewiadomej w działaniu. Uczniowie mogą odgadnąć niektóre niewiadome lub zapisać działanie, za pomocą którego ją obliczą.

Komentarz do zadania 4.

W tych równaniach należy zauważyć, że najpierw trzeba obliczyć wielokrotność niewiadomej. Pierwsze równanie z punktu a) można zilustrować następująco:



Na podstawie rysunku łatwo stwierdzić, że iloczyn ilorazu i dzielnika jest dwukrotnością niewiadomej.

Komentarz do zadania 8.

Jeżeli uczeń dokładnie i ze zrozumieniem przeczyta treść zadania oraz potrafi powiedzieć, z jakich elementów składa się ogrodzenie działki, to bez kłopotu obliczy jej obwód. Zapisanie równania nie będzie problematyczne po ustnym rozwiązaniu wcześniejszego zadania.

Komentarz do zadania 9.

Zadanie, którego elementem odpowiedzi jest jej uzasadnianie, przygotowuje ucznia do dowodzenia. Po znalezieniu poprawnej odpowiedzi proponujemy zapytać uczniów o błąd zawarty w uzasadnieniu II.

123

3 Rozwiąż równania i wykonaj sprawdzenia.

a) $2x = 5$ b) $15 - x = 7\frac{1}{3}$ c) $25 : b = 6$
 $a + a + a = 9$ $m - 1\frac{5}{6} = 2\frac{2}{3}$ $d : 4 = 5\frac{1}{2}$
 $c \cdot c \cdot c = 27$ $8\frac{5}{8} + \frac{1}{2}b = 15\frac{1}{4}$ $6 : c = 1\frac{1}{2}$

4 Rozwiąż równania.

a) $2c : 8 = 1\frac{1}{2}$ b) $3\frac{3}{4} \cdot 2x = 30$ c) $1\frac{2}{3} - 5c = 1\frac{1}{4}$
 $3d : 2 = 2\frac{1}{4}$ $3a + 1\frac{3}{4} = 2\frac{1}{5}$ $\frac{1}{2}p : 1\frac{3}{4} = 8$

5 Które zdanie jest **falszywe**?

- A. Rozwiązaniem równania $2a - 1 = 17$ jest $a = 9$.
 B. Liczba $b = 9$ jest rozwiązaniem równania $26 + 3b = 53$.
 C. Iloczyn liczb 24 i 4 spełnia równanie $4x = 24$.
 D. Równanie $16 + m = 25\frac{1}{2}$ spełnia różnica liczb $25\frac{1}{2}$ i 16.

6 Sprawdź, która z liczb: $\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $1\frac{1}{4}$, $\frac{7}{10}$ spełnia równanie.

a) $\frac{1}{2}a + 1\frac{3}{4} = 2$ b) $10p - 5\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}d = 2 - \frac{3}{4}$ d) $\frac{2}{3} : b = \frac{5}{6}$

7 Skorzystaj z rysunku i wskaż równanie, które opisuje obwód (L) kwadratu.

- A. $z^2 = 13$ B. $4z = 13$
 C. $2z = 13$ D. $z = 13$



8 Działka ma kształt kwadratu o boku a . Do jej ogrodzenia użyto 60 dwumetrowej długości pręseł ogrodzeniowych. Łączenia pręseł miały razem 6 m długości. Ułóż równanie i oblicz długość boku działki.

9 Działka ma kształt prostokąta o obwodzie 150 m, a jeden z boków ma 30 m długości. Jaką długość ma drugi bok?

Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

A. 45 m,	ponieważ liczba określająca długość drugiego boku jest rozwiązaniem równania	I. $60 + 2d = 150$.
B. 60 m,		II. $2d + 30 = 150$.

142

Odpowiedzi do zadań

3. a) $x = 2\frac{1}{2}$, $a = 3$, $c = 3$ b) $x = 7\frac{2}{3}$, $m = 4\frac{1}{2}$, $b = 13\frac{1}{4}$ c) $b = 4\frac{1}{6}$, $d = 22$, $c = 4$

4. a) $c = 6$, $d = 1\frac{1}{2}$ b) $x = 4$, $a = \frac{3}{20}$ c) $c = \frac{1}{12}$, $p = 28$

5. C

6. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{10}$ c) $2\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{5}$

7. B

8. $120 + 6 = 4a$, $a = 31\frac{1}{2}$ [m]

9. A, I

10. Suma pewnej liczby i jej połowy jest równa $\frac{5}{8}$. Co to za liczba?
11. W 2015 r. superszybki japoński pociąg osiągnął prędkość $603 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile kilometrów przejechałby pociąg jadący z taką prędkością przez $\frac{t}{60}$ godziny? Oszacuj wynik i wykonaj obliczenia dla $t = 20$.

12. Dane są liczby:

- A. $6\frac{3}{4}$ B. $1\frac{1}{4}$
C. $5\frac{1}{3}$ D. $6\frac{2}{3}$



Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce.

Przy każdym z nich wskaż literę przypisaną poprawnej odpowiedzi.

Która liczba spełnia równanie $3x + 4 = 7\frac{3}{4}$?	A	B	C	D
Która liczba spełnia równanie $4\frac{1}{2}a - 3 = 27$?	A	B	C	D

13. Ewa otrzymywała stypendium o połowę większe od stypendium Tomka. Odkładała miesięcznie $\frac{1}{3}$ otrzymywanej kwoty. Przez pół roku uzbierała 1200 zł. Ile wynosiło stypendium Tomka?

Sprawdź się!

1. Która liczba spełnia równanie $4x - 3\frac{1}{3} = 18\frac{2}{3}$?
A. 2 B. $5\frac{1}{2}$ C. $3\frac{3}{4}$ D. 4
2. Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.
a) $4z + 6 = 18$ b) $3p : 5 = 12$
3. Pani Zofia kupiła 10 kg jabłek. Ile kilogramów jabłek zużyła pani Zofia na szarlotkę, jeżeli zostało $7\frac{2}{5}$ kg jabłek? Napisz równanie do zadania i je rozwiąż.
4. Powierzchnia działki w kształcie prostokąta jest równa 300 m^2 . Jeden bok działki ma 25 m długości, a drugi b metrów. Ułóż odpowiednie równanie i oblicz wymiary działki.
5. Pan Marek $\frac{3}{5}$ swojej pensji przeznaczą na wyżywienie. Jaka jest jego pensja, jeżeli na wyżywienie wydaje 1500 zł? Napisz równanie do zadania i je rozwiąż.



143

Komentarz do zadania 10.

Poza trudnością przedstawienia treści zadania w formie równania w tym zadaniu pojawia się kolejny problem polegający na zastąpieniu dwóch wyrazów podobnych – jednym (redukcja wyrazów podobnych).

Komentarz do zadania 12.

W poszukiwaniu rozwiązań obu równań duże znaczenie ma szacowanie. Dzięki niemu w pierwszym równaniu można od razu wykluczyć odpowiedzi A, C, D.

Komentarz do zadania 13.

Ułatwieniem w rozwiązaniu zadania będzie wykonanie odpowiedniego rysunku.

Tomek

Ewa

Uczniowie powinni zauważyć, że trzecia część stypendium Ewy stanowi połowę stypendium Tomka. Po zapisaniu równania każdy z uczniów może go rozwiązać swoim sposobem.

Komentarz do Sprawdź się!

Wszystkie sprawdzane w tym podsumowaniu umiejętności są dla uczniów nowe i dla wielu trudne. Warto więc wspólnie rozwiązać zadania, pytając uczniów o ocenę poziomu trudności każdego z zadań. Jeżeli zauważymy, że wielu uczniów ma kłopoty z jakąś umiejętnością, trzeba do niej wrócić na lekcjach powtórzeniowych.

Odpowiedzi do zadań

10. $\frac{5}{12}$
11. $\frac{t}{60} \cdot 603$; 201 km
12. BD
13. 400 zł

Sprawdź się!

1. B
2. a) $z = 3$ b) $p = 20$
3. $7\frac{2}{5} + x = 10$, $x = 2\frac{3}{5}$ [kg]
4. $25b = 300$, $25 \text{ m} \times 12 \text{ m}$
5. $\frac{3}{5}x = 1500$, $x = 2500$ [zł]

IV. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

Tematy lekcji:

1.–2. Powtórzenie wiadomości i utrwalenie umiejętności: Wyrażenia algebraiczne i równania (2 h)

Cele lekcji

Wybrane cele lekcji z danego rozdziału są odpowiednie do rozwiązywanych zadań.

Wskazówki metodyczne

- Podczas tej lekcji, poza zadaniami z podręcznika i niewykorzystanymi zadaniami z zeszytu ćwiczeń, warto wykorzystać zadania ze zbioru zadań. Na szczególną uwagę zasługują: zadanie 5. (s. 84), zadanie 4. (s. 85), zadanie 10. (s. 87) oraz zadania 9. i 10. (s. 89).
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 15.

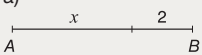
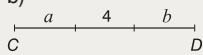
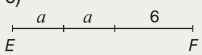
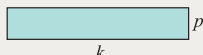
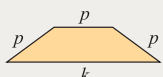
Komentarz do zadania 8.

Propozycje rozwiązania równań:

- a) Iloraz przedstawiamy w postaci ułamka zwykłego, a ułamek $\frac{3}{2}$ rozszerzamy tak, by miał licznik 15, wówczas otrzymamy równość: $\frac{15}{a} = \frac{15}{10}$, stąd $a = 10$.
- b) Obliczamy w pamięci odjemną i wykonujemy rysunek pomocniczy, a następnie obliczamy w pamięci liczbę, której $\frac{2}{5}$ wynosi 40.
- c) Obliczamy wartość wyrażenia z prawej strony równania i przedstawiamy ją w postaci ułamka niewłaściwego, stąd łatwo otrzymujemy liczbę równą a .

123

Zadania utrwalające

- Podaj nazwę wyrażenia.
a) $\frac{1}{2}xyz$ b) $p + t + z$ c) $c - d$ d) a^2 e) $\frac{m}{6}$
- Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:
a) iloraz liczb 11 i a , b) czwartą potęgę liczby m .
- Napisz w prostszej postaci.
a) $m + m + m + m$ b) $2a + 6a + 3a$ c) $3b + b - 4$
- Zapisz wyrażenia algebraiczne opisujące długości odcinków.
a)  b)  c) 
- Napisz wyrażenia algebraiczne opisujące obwody wielokątów. Oblicz wartość liczbową tych wyrażeń dla $p = 3\frac{1}{2}$ i $k = 6$.
a)  b)  c) 
- Podaj odpowiedź na każde pytanie w postaci wyrażenia algebraicznego.
a) Ania miała d gier. Oddała 7 z nich. Ile gier jej zostało?
b) Ile pieniędzy zostanie ze 100 zł po kupnie płyty za a zł i książki za b zł?
c) Ile zapłacimy za c kg sera po 17 zł za kilogram?
d) Jaka jest długość boku kwadratu o obwodzie k ?
- Która z liczb: 2, 8, $1\frac{1}{2}$ jest rozwiązaniem równania $\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$?
- Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.
a) $15 : a = \frac{3}{2}$ b) $\frac{2}{5}a - 16 = 24$ c) $7a = 3 - 1\frac{5}{6}$
- Jaką liczbę pomyślał Ada, jeżeli od jej połowy odjął 15 i otrzymał 45?
- Łamana $ABCDE$ ma boki o długościach: $|AB| = a$ cm, BC jest o 2 cm dłuższy od AB , CD jest 2 razy dłuższy od AB , a DE jest o 2 cm krótszy od AB . Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące długość łamanej i oblicz jego wartość liczbową dla $a = 5\frac{1}{2}$.

144

Odpowiedzi do zadań

- a) połowa iloczynu liczb x, y, z b) suma liczb p, t, z
c) różnica liczb c i d d) kwadrat liczby a
e) iloraz liczby m przez liczbę 6
- a) $11 : a$ b) m^4
- a) $4m$ b) $11a$ c) $4b - 4$
- a) $x + 2$ b) $a + b + 4$ c) $2a + 6$
- a) $2k + p$; $15\frac{1}{2}$ b) $2k + 2p$; 19 c) $3p + k$; $16\frac{1}{2}$
- a) $d - 7$ b) $100 - a - b$ lub $100 - (a + b)$ c) $17c$ d) $k : 4$
- 8
- a) $a = 10$ b) $a = 100$ c) $a = \frac{1}{6}$
- 120
- $a + a + 2 + 2a + a - 2 = 5a$; $27\frac{1}{2}$

Materiały dydaktyczne

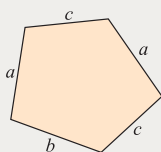
	Elementy algebry ➔ Równania z jedną niewiadomą Elementy algebry ➔ Wyrażenia algebraiczne
	Kartkówka 15 Plansza edukacyjna. Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 1	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 95–106
Zbiór zadań	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 80–89

123

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszytach.

- 1 Suma dwukrotności liczby a i liczby 5 to
A. $2a - 5$ B. $2a + 5$ C. $\frac{1}{2}a + 5$ D. $2a : 5$
- 2 Wyrażenie $10 : a$ to
A. iloczyn liczby 10 i liczby a . B. suma liczby 10 i liczby a .
C. iloraz liczby a przez liczbę 10. D. iloraz liczby 10 przez liczbę a .
- 3 Wyrazem podobnym do $3z$ jest
A. z^2 B. $3zz$ C. $3m$ D. $2z$
- 4 Wyrażenie $a + 5 + 4a - 1 + 3a$ przedstawione w prostszej postaci to
A. $7a + 5$ B. $7a + 4$ C. $8a + 5$ D. $8a + 4$
- 5 Które wyrażenie opisuje obwód pięciokąta?
A. $2a + b + 2c$ B. $8a + 2b + c$
C. $a + b + c$ D. $a + 2b + c$
- 6 Liczbą 2 razy większą od liczby a jest
A. 2 B. $\frac{1}{2}a$ C. $\frac{a}{2}$ D. $2a$
- 7 Wartość liczbową wyrażenia $15 - \frac{1}{2}a$ dla $a = 12$ jest równa
A. 9 B. 3 C. 12 D. 11
- 8 Rozwiązaniem równania $3a - \frac{4}{5} = 1$ jest liczba
A. $1\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{15}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $1\frac{3}{5}$
- 9 Mateusz miał 55 zł oszczędności. Za b zł kupił grę komputerową i zostało mu 29 zł. Które równanie opisuje treść tego zadania?
A. $b - 29 = 55$ B. $55 - b = 29$
C. $b + 55 = 29$ D. $29b = 55$
- 10 Julia miała 25 zł, dostała a zł. Ile złotych ma teraz?
A. $25 + a$ B. $25 \cdot a$ C. $a - 25$ D. $25 - a$



145

Komentarz do zadań 1.–10.

Wszystkie te zadania można rozwiązać w pamięci, prosząc o uzasadnienie odpowiedzi niektórych z nich. To świetne ćwiczenie pamięci oraz używania języka matematycznego podczas uzasadniania wyboru swojej odpowiedzi.

Komentarz do zadania 6.

Po wyborze poprawnej odpowiedzi można zapytać uczniów o nazwę wyrażeń zapisanych w odpowiedziach B i C.

Komentarz do zadania 8.

Zwracamy uwagę na rolę szacowania, które pomoże od razu odrzucić odpowiedzi A i D.

Komentarz do zadania 9.

Po wskazaniu poprawnej odpowiedzi można wykorzystać pozostałe równania i poprosić uczniów o ułożenie do nich treści zadań. Warto wskazać autora najciekawszego zadania.

Odpowiedzi do zadań

1. B
2. D
3. D
4. D
5. A
6. D
7. A
8. C
9. B
10. A

Tematy lekcji:

1. Trójkąt różnoboczny, nierówność trójkąta (1 h)
2. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem własności trójkąta różnobocznego (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- wyróżnia trójkąt różnoboczny, podaje rodzaje kątów wewnętrznych i porównuje długości boków,
- ustala możliwość zbudowania trójkąta, stosując nierówność trójkąta,
- konstruuje trójkąty o danych bokach,
- zna i stosuje własności trójkąta różnobocznego,
- rozwiązuje zadania z zastosowaniem własności trójkąta różnobocznego.

Komentarz do Sowa uczy

Jeżeli podczas rozwiązywania zadań będziemy często odwoływać się do wprowadzonych tu pojęć, to uczniowie szybko zaczną ich używać. Zachęcamy, by na modelu trójkąta w różnym położeniu uczniowie wskazywali ramiona i podstawę. Zauważą wówczas, że każdy bok trójkąta może być jego podstawą.

Komentarz do Przykładu 1.

Proponujemy wykonanie ćwiczenia, w którym uczniowie samodzielnie sprawdzają możliwość zbudowania trójkąta. Do jego wykonania będą potrzebne zestawy patyczków różnej długości. Liczba zestawów powinna być równa liczbie ławek w klasie. W przygotowanych zestawach powinny się znaleźć patyczki o takich długościach, aby można było ułożyć z nich wszystkie rodzaje trójkątów, oraz zestawy o takich długościach patyczków, aby nie było to możliwe. Uczniowie losują jeden zestaw na ławkę i starają się ułożyć trójkąt. Nie wszystkim uda się wykonać to zadanie. Na rysunku uczniowie przedstawiają efekt swojej pracy i omawiają wyniki. Powinni wyciągnąć wniosek, że nie ze wszystkich trzech odcinków można zbudować trójkąt. Na zakończenie ćwiczenia należy przeanalizować *Przykład 1*. Uczniowie porównują opisane działania dziewczynek ze swoimi.

V. Trójkąty

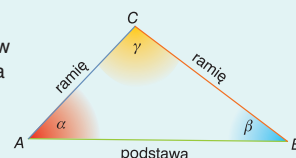
1. Trójkąt różnoboczny



Sowa uczy

Trójkąt to wielokąt o najmniejszej liczbie boków. Często jeden z boków trójkąta nazywamy **podstawą**, a dwa pozostałe – **ramionami** trójkąta.

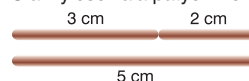
α , β , γ to **kąty wewnętrzne** tego trójkąta.



Przykład 1.

Kinga, Ola i Marta przygotowały patyczki różnej długości. Każda dziewczynka losowała 3 patyczki, z których miała ułożyć trójkąt. Czy każdej z nich to się udało?

Ola wylosowała patyczki o długości: 3 cm, 2 cm, 5 cm.

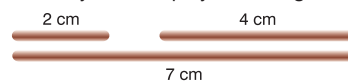


Z patyczków o takiej długości nie można ułożyć trójkąta.

Suma długości dwóch krótszych patyczków jest równa długości trzeciego.

$$2 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

Marta wylosowała patyczki o długości: 2 cm, 4 cm, 7 cm.



Z patyczków o takiej długości nie można ułożyć trójkąta.

Suma długości dwóch krótszych patyczków jest mniejsza od długości trzeciego.

$$2 \text{ cm} + 4 \text{ cm} < 7 \text{ cm}$$

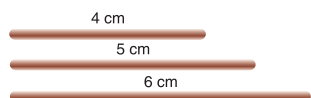
146

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 4–6
Zbiór zadań	s. 90–93

V. Trójkąty

Kinga wylosowała patyczki o długości: 4 cm, 5 cm, 6 cm.



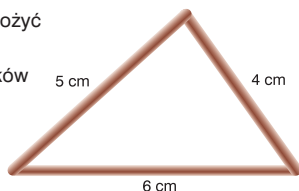
Z patyczków o takiej długości można ułożyć trójkąt.

Suma długości każdego dwóch patyczków jest większa od długości trzeciego.

$$4 \text{ cm} + 6 \text{ cm} > 5 \text{ cm}$$

$$4 \text{ cm} + 5 \text{ cm} > 6 \text{ cm}$$

$$6 \text{ cm} + 5 \text{ cm} > 4 \text{ cm}$$



Aby z trzech odcinków dało się zbudować trójkąt, to suma długości każdego dwóch odcinków musi być większa od długości trzeciego z tych odcinków.



Przykład 2.

Skonstruujemy trójkąt o bokach: 4 cm, 3 cm, $2\frac{1}{2}$ cm.

Narysujmy odcinki o danych długościach, np. $|KS| = 2\frac{1}{2}$ cm, $|OS| = 3$ cm, $|KO| = 4$ cm.



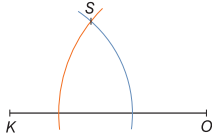
Wykonajmy konstrukcję trójkąta, którego bokami będą narysowane odcinki.

1. Rysujemy odcinek KO o długości 4 cm.

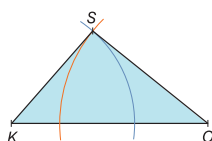


2. Rysujemy łuk okręgu o środku w punkcie K i promieniu $2\frac{1}{2}$ cm oraz łuk okręgu o środku w punkcie O i promieniu 3 cm.

Punkt przecięcia łuków oznaczamy S.



3. Kreślimy odcinki KS i OS i otrzymujemy trójkąt KOS o bokach: 4 cm, 3 cm, $2\frac{1}{2}$ cm.



Trójkąt KOS to trójkąt różnoboczny.

147

Komentarz do Przykładu 1.

Ważny jest wniosek podany w zielonej ramce pod przykładem. Jeżeli uczniowie podczas zabawy z patyczkami zauważą, że wystarczy porównać sumę długości dwóch krótszych odcinków z miarą najdłuższego odcinka, to szybko zapamiętają nierówność trójkąta.

Na drugiej godzinie lekcyjnej proponujemy przeprowadzenie ćwiczeń odwrotnych do przedstawionych w tym przykładzie. Można je wykonać na 2 sposoby. Pierwszy z nich polega na poproszeniu uczniów, aby narysowali 3 odcinki, z których będą mogli skonstruować trójkąt, oraz 3 odcinki, z których skonstruowanie trójkąta jest niemożliwe. Uczniowie powinni uzasadnić swój wybór, wykonując konstrukcję trójkąta. Drugim sposobem przeprowadzenia ćwiczenia jest rozdanie na każdą ławkę kompletu patyczków różnej wielkości. Uczniowie wybierają patyczki, z których można ułożyć trójkąt, i takie, z których jest to niemożliwe. Wybór powinni uzasadnić.

Komentarz do Przykładu 2.

Trzeba zwrócić uwagę, aby uczniowie prawidłowo wykonywali konstrukcję. W przykładzie są zastosowane kolory, aby zamiast obszernych opisów kolejnych punktów konstrukcji tym samym kolorem połączyć krótki opis z odpowiednim fragmentem konstrukcji. Proponujemy, aby również uczniowie, podczas wykonywania konstrukcji w zeszytach, stosowali kolory.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- Nie można narysować trójkąta a) i d).
- $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|CD| = 2,5 \text{ cm}$, $|EF| = 5,5 \text{ cm}$, $|GH| = 5 \text{ cm}$, $|LM| = 2 \text{ cm}$, $|JK| = 7 \text{ cm}$
- a) tak b) tak c) nie d) nie e) tak f) tak
- zielony trójkąt: 60° , 90° , 30° ; żółty trójkąt: 30° , 90° ; największy, najkrótszego
- a) $L = 163 \text{ cm}$ b) $L = 17\frac{4}{5} \text{ m}$
- A, D

Komentarz do zadania 1.

Jeżeli po rozwiązaniu tego zadania uczniowie otrzymają polecenie obliczenia sumy zmierzonych kątów, to wykonanie przez nich tego polecenia pozwoli sprawdzić, czy odpowiednio korzystali z kątomierza, i powtórzyć wiadomości o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta.

Komentarz do zadań 3.–8.

W zadaniach 3. i 8. konieczne jest przypomnienie reguły wykonywania konstrukcji trójkąta.

Komentarz do zadania 8.

Zadanie ma wiele rozwiązań. Trzeba sprawdzić długość trzeciego boku podanego przez różne osoby. Dobrzy uczniowie mogą dodatkowo określić, od jakiej liczby długość trzeciego boku (c) musi być mniejsza, a od jakiej większa. Ponieważ trójkąt ma być różnoboczny, powinni otrzymać zależność: $c < 12$, $c > 4$ i $c \neq 8$. Można również zastanowić się nad liczbą rozwiązań tego zadania przy założeniu, że długości boków będą wyrażone liczbami naturalnymi.

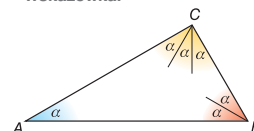
Komentarz do zadania 11.

Proponujemy zachęcić uczniów, by na podstawie treści tego zadania i umieszczonej obok wskazówki zapisali odpowiednie równanie. Zastąpienie sumy wyrazów podobnych iloczynem nie powinno być już dla nich trudne.



- 1 Narysuj 2 dowolne trójkąty. Oznacz literami ich wierzchołki. Napisz nazwy boków i kątów wewnętrznych tych trójkątów. Zmierz miary ich kątów wewnętrznych.
- 2 Narysuj 2 różne trójkąty, w których jeden bok ma 8 cm. Zmierz pozostałe boki tych trójkątów. W każdym trójkącie porównaj sumę długości każdego dwóch boków z długością trzeciego boku.
- 3 Skonstruuj trójkąt o bokach: 7 cm, 5 cm, 6 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.
- 4 Oblicz obwód trójkąta o bokach:
a) $12\frac{1}{4}$ dm, $13\frac{3}{5}$ dm, $8\frac{3}{4}$ dm, b) $10\frac{4}{5}$ cm, $14\frac{3}{4}$ cm, $16\frac{7}{10}$ cm.
- 5 Trójkąta **nie można** zbudować z odcinków o długości
A. 3 cm, 4 cm, 5 cm B. 1 dm, 2 dm, 3 dm
C. 7 cm, 7 cm, 12 cm D. 8 dm, 5 dm, 4 dm
- 6 Z których trzech odcinków o podanych długościach **nie można** zbudować trójkąta? Zwróć uwagę na jednostki.
A. 23 cm, 17 cm, 46 cm B. 12 cm, 3 dm, 19 cm
C. $5\frac{1}{2}$ dm, $1\frac{1}{2}$ dm, $4\frac{3}{4}$ dm D. $9\frac{1}{4}$ m, $5\frac{1}{2}$ m, 100 dm
- 7 Bez wykonywania pomiarów narysuj 3 odcinki różnej długości. Skonstruuj trójkąt o takich bokach jak narysowane odcinki. Uzasadnij, dlaczego udało się wykonać to zadanie lub dlaczego się nie udało wykonać zadania.
- 8 Długości dwóch boków trójkąta są równe 4 cm i 8 cm. Jaką długość może mieć trzeci bok, aby był to trójkąt różnoboczny? Narysuj te odcinki. Skonstruuj trójkąt o podanych bokach w skali 1 : 2.
- 9 Jeden z kątów wewnętrznych trójkąta KLM ma miarę równą 35° , a drugi jest 3 razy większy. Oblicz miary kątów tego trójkąta.
- 10 Jeden z kątów wewnętrznych trójkąta KOS ma miarę 52° , a drugi jest o 46° większy. Oblicz miary kątów tego trójkąta.
- 11 W trójkącie ABC kąt ABC ma miarę 2 razy większą od miary kąta BAC , a kąt BCA ma miarę 3 razy większą od miary kąta BAC . Oblicz miary kątów wewnętrznych tego trójkąta. Który bok jest najdłuższy?

Wskazówka.



148

Odpowiedzi do zadań

3. $L = 18$ cm
4. a) $34\frac{3}{5}$ dm b) $42\frac{1}{2}$ cm
5. B
6. A
8. więcej niż 4 cm i mniej niż 12 cm, z wyjątkiem 8 cm
9. 35° ; 105° ; 40°
10. 52° ; 98° ; 30°
11. 30° ; 60° ; 90° ; AB

V. Trójkąty

A to ciekawe!

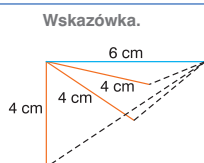
Wiele elementów budowli ma kształt trójkąta. Inżynierowie wiedzą, że trójkąt jest figurą sztywną i wzmacnia konstrukcję. Trójkąty możemy zauważyć na przykład w słupach elektrycznych wysokiego napięcia oraz w podpórkach podtrzymujących na płaskim dachu ogniwa fotowoltaiczne.

Narysuj prostokąt składający się z co najmniej ośmiu trójkątów.



Wyzwanie

Dwa boki trójkąta różnobocznego mają 4 cm i 6 cm. Jakiej długości może być trzeci bok?



Sprawdź się!

- Podane są długości trzech odcinków. Które z nich mogą być bokami trójkąta? Zwróć uwagę na jednostki.
A. 14 cm, 6 cm, 3 cm B. 6 cm, 10 cm, 7 dm
C. 9 m, 11 m, 10 m D. $8\frac{1}{2}$ cm, 4 dm, $5\frac{1}{2}$ cm
- Narysuj dowolny trójkąt różnoboczny i oblicz jego obwód.
- Skonstruuj trójkąt o bokach długości: 5 cm, 4 cm, 3 cm.
- Jeden bok trójkąta ma 12 cm, a drugi jest o 30 mm dłuższy. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Drugi bok trójkąta ma długość A / B. A. 42 cm B. 15 cm
Trzeci bok może mieć długość C / D. C. 14 cm D. 30 cm
- W trójkącie LOS kąt LOS ma miarę 102° , a kąt OLS ma miarę 2 razy mniejszą.
a) Oblicz miary kątów wewnętrznych tego trójkąta.
b) Który bok tego trójkąta jest najkrótszy, a który najdłuższy?

149

Komentarz do A to ciekawe!

Po wykonaniu rysunku można zadać uczniom pytania:
Czy otrzymali trójkąty o takich samych kątach?
Jakiego rodzaju są otrzymane trójkąty?
Ile różnych trójkątów jest na ich rysunku?
Można też zachęcić uczniów do ułożenia dodatkowego pytania do rysunku.

Komentarz do Wyzwania

Wskazówka sugeruje różne możliwości zbudowania takiego trójkąta.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadania tu zawarte można rozwiązać wspólnie z uczniami na koniec drugiej lekcji. W zależności od poziomu klasy nauczyciel wyznacza tempo pracy przy poszczególnych zadaniach. Warto, aby rozwiązanie każdego zadania omawiał inny uczeń, a pozostali mogli ocenić poprawność i sposób wyjaśnień.

Odpowiedzi do zadań

Wyzwanie

Suma długości dwóch danych boków trójkąta jest równa 10 cm, a ich różnica to 2 cm. Trzeci bok musi mieć zatem długość mniejszą od 10 cm i większą od 2 cm, ale różną od 4 cm i różną od 6 cm, gdyż ma to być trójkąt różnoboczny.

Sprawdź się!

- C
- BC
- a) 51° , 27° b) najkrótszy: LO, najdłuższy: LS

Temat lekcji:

Trójkąt równoramienny (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- wyróżnia trójkąt równoramienny, podając jego własności,
- w trójkącie równoramiennym podaje rodzaje kątów wewnętrznych, wskazuje kąty o równych miarach i boki równej długości,
- ustala możliwość zbudowania trójkąta na podstawie nierówności trójkąta,
- konstruuje trójkąt równoramienny o danej podstawie i określonym ramieniu,
- wymienia i stosuje własności trójkąta równoramiennego,
- rozwiązuje zadania z zastosowaniem własności trójkąta równoramiennego.

Komentarz do Przykładu 1.

Po omówieniu tego przykładu proponujemy wykonanie ćwiczenia z wykorzystaniem kartki. W tym celu każdy uczeń przygotowuje prostokątną kartkę dowolnych rozmiarów. Składa ją na pół tak, aby linia zgięcia była równoległa do jednego boku. W złożonym prostokącie rysuje przekątną i wzdłuż niej przecina kartkę. W ten sposób otrzymuje trójkąt równoramienny i 2 jednakowe trójkąty prostokątne. Korzystając z otrzymanego modelu, utrwalamy własności trójkąta równoramiennego.

Komentarz do zadań 1. i 2.

Podczas wspólnego rozwiązywania tych zadań proponujemy wyznaczyć jednego ucznia (do każdego zadania innego ucznia), który będzie podawał kolejne kroki konstrukcji trójkąta. Pozostali uczniowie wykonują te polecenia, używając różnych kolorów w kolejnych krokach.

Komentarz do zadania 4.

Uczniowie powinni uzasadnić, dlaczego od razu można odrzucić odpowiedzi A i B. Ćwiczymy w ten sposób skuteczną strategię rozwiązywania zadań zamkniętych.

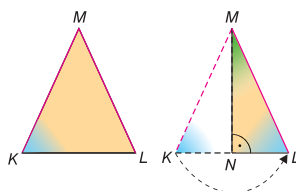
Komentarz do zadania 5.

W rozwiązaniu zadania pomoże wykonanie rysunku pomocniczego, na którym warto nanieść dane w postaci wyrażeń algebraicznych.

2. Trójkąt równoramienny

Przykład 1.

Skonstruujmy trójkąt KLM , którego $|KL| = 3$ cm, $|KM| = 4$ cm, $|ML| = 4$ cm. Wytnijmy go i złożmy tak, aby nałożyły się na siebie równe boki.



Zauważmy, że:

- ramiona są równej długości: $|KM| = |LM|$,
- kąty przy podstawie są równej miary: $\sphericalangle MKL = \sphericalangle KLM$,
- linia złożenia jest prostopadła do podstawy: $MN \perp KL$,
- punkt N jest środkiem odcinka KL .

Taki trójkąt nazywamy **trójkątem równoramiennym**.



W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie mają taką samą miarę.

- Skonstruuj dowolny trójkąt równoramienny. Oznacz literami jego wierzchołki. Nazwij jego ramiona. Zmierz kąty przy podstawie.
- Podstawa trójkąta równoramiennego ma 2 cm 4 mm. Ramię jest 3 razy dłuższe. Skonstruuj ten trójkąt w skali 1 : 2 i oblicz obwód obu trójkątów.
- Narysuj taki trójkąt równoramienny, który ma przy podstawie kąt 70° . Podstawa ma 4 cm. Podaj miary pozostałych kątów tego trójkąta.
- W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę 70° . Kąty przy podstawie mają po
A. 70° B. 110° C. 40° D. 55°
- Ramię trójkąta równoramiennego jest 3 razy dłuższe od jego podstawy, a obwód tego trójkąta wynosi 140 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

150

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 7–8
Zbiór zadań	s. 93–95

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- B, D 2. $30^\circ, 30^\circ, 3$ cm
- trójkąty równoramienne
- a) $L = 10$ cm b) $L = 13$ cm
- a) $65^\circ, 65^\circ, 50^\circ$ b) $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$ c) $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ d) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$
- a) P b) P c) F d) P
- TAK, NIE, TAK

V. Trójkąty



6. Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 29 cm. Jeden bok ma 12 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta. Rozpatrz 2 przypadki.
7. Karol narysował trójkąt równoramienny o bokach 6 cm i 10 cm. Oblicz obwód tego trójkąta. Rozpatrz 2 przypadki.
8. Ramię trójkąta równoramiennego ma 15 cm. Jaką długość może mieć podstawa tego trójkąta?
9. Podstawa trójkąta równoramiennego jest równa 3 cm. Jaką długość mogą mieć ramiona tego trójkąta?

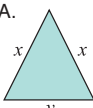
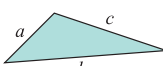
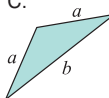
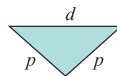


Wyzwanie

Mieszkańcy dwóch miejscowości leżących po tej samej stronie rzeki chcą zbudować most na tej rzece, aby z obu miejscowości do mostu była jednakowa odległość. Jak znaleźć takie miejsce?



Sprawdź się!

1. Na rysunku boki jednakowej długości oznaczono taką samą literą. Trójkątem równoramiennym **nie jest**
 - A. 
 - B. 
 - C. 
 - D. 
2. Skonstruuj trójkąt równoramienny, którego podstawa ma 6 cm, a ramiona mają po 8 cm.
3. Podstawa trójkąta równoramiennego ma $4\frac{1}{2}$ dm. Ramię jest o 1 dm dłuższe. Oblicz obwód tego trójkąta.
4. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma 50° . Oblicz miarę kąta między ramionami.
5. Narysuj taki trójkąt równoramienny, w którym kąt między równymi bokami ma miarę 130° . Oblicz miary pozostałych kątów tego trójkąta.

151

Komentarz do zadań 6. i 7.

W tych zadaniach należy rozważyć 2 przypadki: dany odcinek jest podstawą lub dany odcinek jest ramieniem trójkąta. Trzeba zachęcić uczniów do wykonania rysunków pomocniczych i naniesienia na nich danych z zadania.

Komentarz do zadań 8. i 9.

Zadania utrwalają wiadomości dotyczące nierówności trójkąta. Można zastanowić się z uczniami, jakiego rodzaju trójkąty można otrzymać, zmniejszając lub zwiększając długość ramion.

Komentarz do Wyzwania

Kluczem do odpowiedzi na zawarte tutaj pytanie będzie odwołanie się do tej własności trójkąta równoramiennego, która mówi, że jego wierzchołek jest równo oddalony od końców podstawy. Ponieważ uczniowie mogą mieć trudność z wyznaczeniem wierzchołka, dlatego proponujemy odwołać się do składania kartki w celu otrzymania trójkąta równoramiennego (komentarz do *Przykładu 1.*). Uczniowie powinni zauważyć, że nakładając na siebie ramiona, ślad po zgięciu kartki jest prostopadły do podstawy. Wierzchołek trójkąta trzeba zatem szukać na prostej prostopadłej przechodzącej przez środek podstawy. Odległość każdej z miejscowości od mostu będzie zawierać się w ramionach tego trójkąta.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadania można rozwiązać w formie pracy w parach w wyznaczonym przez nauczyciela czasie. Po jego upływie uczniowie wspólnie z nauczycielem oceniają i nagradzają poprawne rozwiązania.

Odpowiedzi do zadań

2. 16 cm 8 mm, w skali: 8 cm 4 mm
3. 70° , 40°
4. D
5. podstawa: 20 cm, ramiona: 60 cm
6. 12 cm, 5 cm lub 8 cm 5 mm, 8 cm 5 mm
7. 22 cm lub 26 cm
8. mniej niż 30 cm
9. więcej niż 1 cm 5 mm

Sprawdź się!

1. B
3. $15\frac{1}{2}$ dm
4. 80°
5. 25° , 25°

Temat lekcji:

Własności trójkąta równobocznego (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- konstruuje trójkąt równoboczny,
- wyróżnia trójkąt równoboczny spośród innych trójkątów,
- opisuje własności trójkąta równobocznego,
- rozwiązuje zadania z zastosowaniem własności trójkąta równobocznego.

Wskazówki metodyczne

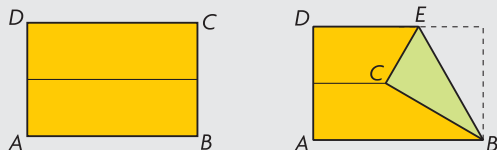
Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 16.

Komentarz do Przykładu 1.

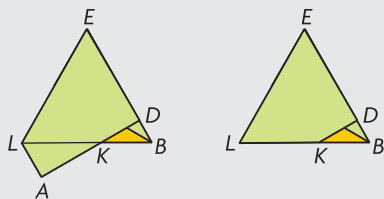
Po omówieniu tego przykładu uczniowie powinni wykonać trójkąt równoboczny, odpowiednio składając prostokątną kartkę.

Kolejne polecenia dla uczniów:

– Złóż prostokątną kartkę na pół – nałóż na siebie jej dłuższe boki tak, aby otrzymać dwa identyczne prostokąty, a następnie rozłóż kartkę i złóż ją zgodnie z poniższymi rysunkami.



– Zagnij kartkę wzdłuż krótszej przyprostokątnej otrzymanego trójkąta BCE, a w otrzymanym pięciokącie AKBEL zagnij trójkąt prostokątny AKL tak, jak pokazano na rysunkach poniżej.

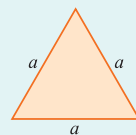


Otrzymany trójkąt równoboczny warto przechowywać w zeszyte i w razie potrzeby z niego korzystać. Z wykorzystaniem trójkąta równobocznego proponujemy przeprowadzić ćwiczenie, w którym składowaliśmy go na pół, otrzymujemy trójkąt prostokątny o kątach 30° i 60° i omawiamy jego własności. Z tego ćwiczenia uczniowie powinni wyciągnąć wniosek, że jeżeli w trójkącie prostokątnym przyprostokątna jest 2 razy krótsza od przeciwprostokątnej, to kąty ostre tego trójkąta mają miary 30° i 60° .

3. Trójkąt równoboczny

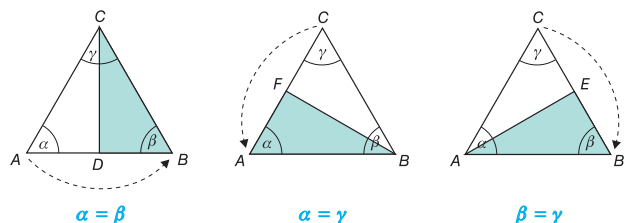
Sowa uczy

Trójkąt równoramienny, którego wszystkie boki mają taką samą długość, to **trójkąt równoboczny**.



Przykład 1.

Skonstruujmy trójkąt równoboczny ABC. Wytnijmy go i składajmy tak, aby nakładały się na siebie dwa boki.



Ponieważ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (jako suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie), więc: $\alpha = \beta = \gamma = 180^\circ : 3 = 60^\circ$.

! Kąty wewnętrzne trójkąta równobocznego są równe i każdy ma miarę 60° .
Trójkąt równoboczny jest trójkątem foremnym.

- 1 Skonstruuj trójkąt równoboczny o boku długości 3 cm.
- 2 Oblicz obwód trójkąta równobocznego o boku:
 - a) 5 cm,
 - b) 6 cm,
 - c) $4\frac{2}{5}$ cm.

152

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
	Kartkówka 16
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 9–10
Zbiór zadań	s. 95–97

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. C, A, D
2. $L = 10$ cm 5 mm 3. $L = 3a$
4. a) $a = 4$ cm 5 mm b) $a = 3$ cm 5 mm 5. B
6. w $\triangle ABS$: $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$; w $\triangle BSC$: $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$; w $\triangle CSE$: $30^\circ, 90^\circ, 60^\circ$

V. Trójkąty



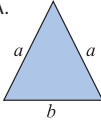
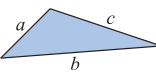
- 3 Obwód trójkąta równobocznego ma $61\frac{1}{2}$ dm. Bok trójkąta ma długość
A. $20\frac{1}{2}$ cm B. $20\frac{1}{2}$ dm C. $31\frac{1}{2}$ dm D. $21\frac{1}{2}$ dm
- 4 Skonstruuj trójkąt równoboczny o boku 2 cm 5 mm. Na każdym boku tego trójkąta skonstruuj trójkąt równoboczny. Jakim wielokątem jest figura, która powstała? Oblicz jej obwód i miary kątów wewnętrznych.
- 5 Bok trójkąta równobocznego ma długość 18 cm. Skonstruuj ten trójkąt w skali 1 : 3 i oblicz jego obwód.

Wyzwanie

Mateusz narysował trójkąt równoboczny MNO o boku 9 cm. Każdy jego bok podzielił na 3 równe części. Wyznaczone punkty podziału boków łączył tak, by odcinek łączący te punkty był równoległy do jednego z boków. Powstały trójkąty.

- a) Ile trójkątów powstało?
b) Co to za trójkąty?
c) Jaką część trójkąta MNO jest jeden najmniejszy trójkąt?
d) Jaka figura powstanie, jeżeli odetniesz najmniejsze trójkąty o wierzchołkach: M, N, O ? Oblicz miary jej kątów wewnętrznych.

Sprawdź się!

- 1 Na rysunku boki jednakowej długości oznaczono taką samą literą. Trójkątem równobocznym jest
A.  B.  C.  D. 
- 2 Narysuj odcinek AB . Skonstruuj trójkąt równoboczny o boku AB .
- 3 Oblicz obwód trójkąta równobocznego o boku długości $4\frac{1}{2}$ dm.
- 4 Obwód trójkąta równobocznego jest równy $19\frac{1}{2}$ cm. Bok tego trójkąta ma długość
A. 4 cm B. $5\frac{1}{2}$ cm C. $6\frac{1}{2}$ cm D. $8\frac{1}{2}$ cm
- 5 Obwód trójkąta równobocznego jest równy 84 cm. Skonstruuj go w skali 1 : 7 i oblicz jego obwód.

153

Komentarz do zadania 3.

Zadanie można rozwiązać ustnie. Łatwo wskazać odpowiedź B, jeżeli przez szacowanie odrzucimy odpowiedzi C i D, a z powodu innej jednostki – odpowiedź A.

Komentarz do zadania 4.

Rozwiązując to zadanie, uczniowie ćwiczą umiejętności czytania ze zrozumieniem, konstruowania figury, logicznego myślenia, wnioskowania. Podczas obliczania obwodu i miary kątów wewnętrznych otrzymanego wielokąta powtarzają pojęcia i czynności związane z obliczeniem obwodu oraz miar kątów wewnętrznych innych figur.

Komentarz do Sprawdz się!

Zadania tu zawarte sprawdzają podstawowe wiadomości i umiejętności dotyczące trójkąta równobocznego. Proponujemy zadać je jako pracę domową, a rozwiązania sprawdzić na początku następnej lekcji. Uczniowie z trudnościami w nauce matematyki mogą osiągnąć sukces, jeżeli podczas sprawdzania poprawności tych zadań włączymy ich do tych czynności.

Odpowiedzi do zadań

2. a) 15 cm b) 18 cm c) $13\frac{1}{5}$ cm
3. B
4. trójkątem równobocznym; 15 cm; 60° , 60° , 60°
5. bok w skali: 6 cm; $L = 18$ cm

Wyzwanie

- a) 9 b) trójkąty równoboczne c) $\frac{1}{9}$
d) sześciokąt foremny, miara kąta wewnętrznego to 120°

Sprawdź się!

1. D
3. $13\frac{1}{2}$ dm
4. C
5. bok w skali: 4 cm; $L = 12$ cm

Tematy lekcji:

1. Podział trójkątów ze względu na kąty (1 h)
2. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem własności trójkątów (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- rozpoznaje i nazywa trójkąty ze względu na boki i kąty,
- ustala możliwość zbudowania trójkąta, stosując nierówność trójkąta,
- konstruuje trójkąty o danych bokach,
- wymienia i stosuje własności trójkątów,
- rozwiązuje zadania z zastosowaniem własności trójkątów.

Wskazówki metodyczne

Podczas omawiania własności trójkąta prostokątnego warto posłużyć się ekierkami (model trójkąta prostokątnego równoramiennego i trójkąta prostokątnego różnobocznego). Wskazane, aby pokazywać trójkąt prostokątny w różnym położeniu, a także by uczniowie wskazywali lub nazywali w każdym z tych położeń przyprostokątne i przeciwprostokątną oraz kąt prosty.

Komentarz do Przykładu 1.

Warto, by uczniowie badali własności trójkątów przez składanie papierowych figur. W ten sposób uporządkują swoje wiadomości o trójkątach ostrokątnych i utrwala poznane własności ich kątów. Można również umieścić na tablicy modele trójkątów ostrokątnych rozmieszczone w inny sposób niż w przykładzie (bez nazw i miar kątów wewnętrznych). Po wskazaniu trójkąta w podręczniku wybrany uczeń powinien odnaleźć na tablicy trójkąt o tych samych własnościach i opisać jego własności.

4. Podział trójkątów ze względu na kąty

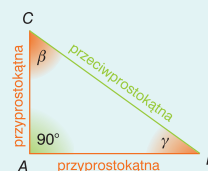


Sowa uczy

- Tak dzielimy trójkąty ze względu na ich kąty wewnętrzne.



- W trójkącie prostokątnym boki mają swoje nazwy.



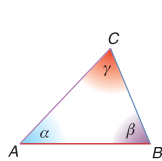
Boki AB i AC to **przyprostokątne**, leżą na ramionach kąta prostego.

Bok BC to **przeciwprostokątna**, leży naprzeciw kąta prostego i jest najdłuższym bokiem trójkąta prostokątnego.

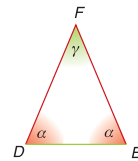
Przykład 1.

Skonstruujmy i wytnijmy różne trójkąty ostrokątne, a następnie zbadajmy, jakie kąty wewnętrzne może mieć **trójkąt ostrokątny**:

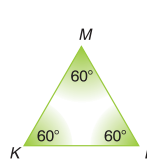
- a) **różnoboczny**, b) **równoramienny**, c) **równoboczny**.



Każdy kąt ma inną miarę.



Kąty przy podstawie mają taką samą miarę.



Wszystkie kąty mają taką samą miarę.

154

Materiały dydaktyczne

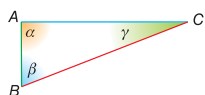
	Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 11–13
Zbiór zadań	s. 98–101

V. Trójkąty

Przykład 2.

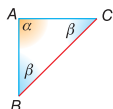
Zbadajmy kąty wewnętrzne **trójkąta prostokątnego**:

a) **różnobocznego**,



$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ i $\alpha = 90^\circ$,
więc $\beta + \gamma = 90^\circ$.

b) **równoramiennego**.



$\alpha + 2\beta = 180^\circ$ i $\alpha = 90^\circ$,
więc $2\beta = 90^\circ$, a $\beta = 45^\circ$.

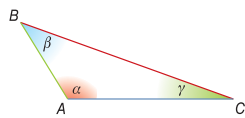
Suma miar kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa 90° .



Przykład 3.

Zbadajmy kąty wewnętrzne **trójkąta rozwartokątnego**:

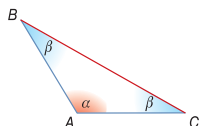
a) **różnobocznego**,



Każdy kąt wewnętrzny ma inną miarę.

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ i $\alpha > 90^\circ$,
więc $\beta + \gamma < 90^\circ$.

b) **równoramiennego**.



Kąty przy boku BC mają taką samą miarę.

$\alpha + 2\beta = 180^\circ$ i $\alpha > 90^\circ$,
więc $2\beta < 90^\circ$.

Suma miar kątów ostrych w trójkącie rozwartokątnym jest mniejsza od 90° .



Komentarz do Przykładu 2.

Są tylko dwa rodzaje trójkątów prostokątnych. Do omawiania ich własności można posłużyć się ekiemkami jako modelami.

Wniosek podany w zielonej ramce możemy utrwalić w czasie zabawy w parach, podczas której jedna osoba podaje miarę kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, a druga oblicza miarę brakującego kąta. Jeżeli jej odpowiedź jest poprawna, to teraz ona podaje miarę kąta ostrego. Za każdą poprawną odpowiedź uczniowie otrzymują 1 punkt.

Komentarz do Przykładu 3.

Po analizie tego przykładu proponujemy ćwiczenie w parach. W tym celu uczniowie biorą 2 różnej długości ołówki i kładą je na kartce tak, by utworzyły kąt rozwarty. Do końców ołówków przykładają linijkę, która będzie pełnić funkcję trzeciego boku. W ten sposób otrzymają trójkąt rozwartokątny różnoboczny. Warto, aby zastanowili się, co się stanie, gdy będą zmieniać miarę kąta między ołówkami. Powinni zauważyć, że najdłuższy bok trójkąta zawsze leży naprzeciw kąta o największej mierze.

Komentarz do zadań 1. i 2.

Zadania można rozwiązać ustnie. Istotne jest uzasadnienie wyboru poprawnej odpowiedzi.

155

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- kolejno: trójkąt różnoboczny prostokątny, trójkąt równoramienny prostokątny, trójkąt równoboczny ostrokątny, trójkąt różnoboczny rozwartokątny, trójkąt równoramienny rozwartokątny, trójkąt różnoboczny ostrokątny, trójkąt równoramienny ostrokątny
- a) ostrokątne: *DKC, FCK, EFK*; prostokątne: *GHF, GBE, BFE, GEL, GFL*; rozwartokątne: *EKD* b) D
- a) $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ b) $\triangle MBK$ – różnoboczny, ostrokątny, $\triangle MKC$ – różnoboczny, prostokątny,
I przypadek $|BK| = 6$ cm, $|CK| = 2$ cm: $\triangle MKB$ – trójkąt różnoboczny ostrokątny, $\triangle MKC$ – różnoboczny prostokątny, $\triangle MCL$ – różnoboczny prostokątny, $\triangle MLB$ – różnoboczny rozwartokątny, $\triangle MCB$ – różnoboczny prostokątny
II przypadek $|BK| = 2$ cm, $|CK| = 6$ cm: $\triangle MKB$ – różnoboczny prostokątny, $\triangle MBL$ – różnoboczny prostokątny, $\triangle MLC$ – różnoboczny rozwartokątny, $\triangle MBC$ – trójkąt różnoboczny prostokątny, $\triangle MKC$ – trójkąt różnoboczny ostrokątny
- a) $70^\circ, 40^\circ, 70^\circ$ b) $60^\circ, 120^\circ, 90^\circ$ c) $75^\circ, 65^\circ, 40^\circ$ d) $100^\circ, 40^\circ, 40^\circ$

Odpowiedzi do zadań

- D
- C

Komentarz do zadania 3.

W tym zadaniu uczniowie odkryją, że trójkąt o bokach 12 cm, 5 cm, 13 cm jest trójkątem prostokątnym. Jako ciekawostkę można powiedzieć, że trójkąt prostokątny, którego długości boków są wyrażone liczbami naturalnymi, nazywa się trójkątem pitagorejskim. Warto zachęcić uczniów do sprawdzenia, czy trójkąt o bokach 2 razy krótszych lub 2 razy dłuższych też jest trójkątem prostokątnym.

Komentarz do zadania 5.

Trzeba zachęcić uczniów do wykonania rysunków pomocniczych i ustnego uzasadnienia nazwy trójkątów.

Komentarz do zadania 6.

Ważne w tym zadaniu jest zrozumienie określenia *najbliżej prostej*. Podkreślamy również znaczenie takich pojęć matematyczne jak: *odległość, najbliżej, punkt A leży na prostej prostopadłej do prostej p*.

Komentarz do Sprawdź się!

Podsumowanie tematu nie jest trudne. Przedstawione tutaj zadania uczniowie mogą rozwiązać samodzielnie w ustalonym przez nauczyciela i dostosowanym do poziomu klasy czasie. Proponujemy, aby po wykonanej pracy uczniowie wymienili się zeszytami i pod kierunkiem nauczyciela sprawdzili poprawność rozwiązań.



- 3 Skonstruuj trójkąt o bokach:
 - a) 4 cm, 5 cm, 6 cm, b) 12 cm, 5 cm, 13 cm,
 - c) 4 cm, 6 cm, 8 cm, d) 5 cm, 12 cm, 12 cm.
 Podaj jego nazwę ze względu na kąty.
- 4 Narysuj trójkąt równoboczny ABC o boku 6 cm. Środki jego boków oznacz punktami K, L, M i połącz je odcinkami.
 - a) Podaj nazwy otrzymanych figur i miary ich kątów wewnętrznych.
 - b) Ile razy obwód trójkąta ABC jest większy od obwodu figury KLM ?
- 5 Narysuj trójkąt równoramienny, którego jeden z kątów ma miarę 45° . Podaj jego nazwę ze względu na kąty. Rozważ 2 przypadki.
- 6 Narysuj prostą p i punkt A w odległości 3 cm od tej prostej. Na prostej p zaznacz punkt B , który leży najbliżej punktu A oraz punkty C i D w odległości 3 cm od punktu B . Połącz wszystkie wyznaczone punkty. Ile trójkątów powstało? Podaj ich nazwy ze względu na kąty i boki.

🦋 Sprawdź się!

- 1 Na którym rysunku jest trójkąt równoramienny rozwartokątny?

A.

B.

C.

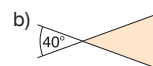
D.
- 2 Skonstruuj trójkąt równoramienny, którego podstawa ma 5 cm, a ramię ma 3 cm. Podaj nazwę tego trójkąta ze względu na kąty.
- 3 Skonstruuj trójkąt o bokach: 3 cm, 5 cm, 5 cm. Podaj jego nazwę ze względu na kąty.
- 4 Trójkąt, którego kąty wewnętrzne mają miary 40° i 50° , to trójkąt

A. różnoboczny ostrokątny.

C. równoramienny rozwartokątny.

B. różnoboczny prostokątny.

D. równoramienny prostokątny.
- 5 Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta równoramiennego.



156

Odpowiedzi do zadań

3. a) ostrokątny b) prostokątny c) rozwartokątny d) ostrokątny
4. a) trójkąty równoboczne o kątach wewnętrznych 60° ; czworokąty o kątach wewnętrznych: $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ b) 2
5. ostrokątny o kątach: $45^\circ, 67\frac{1}{2}^\circ, 67\frac{1}{2}^\circ$ lub prostokątny o kątach: $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$
6. 3; prostokątne równoramienne

Sprawdź się!

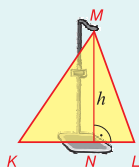
1. C
2. rozwartokątny
3. ostrokątny
4. B
5. a) $15^\circ, 15^\circ, 150^\circ$ b) $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$

5. Wysokości trójkątów

Sowa uczy

Z wierzchołka M poprowadzono odcinek MN prostopadły do przeciwległego boku – podstawy KL . Odcinek MN lub jego długość h nazywamy **wysokością trójkąta KLM**. Wysokość jest równa odległości wierzchołka od podstawy.

Każdy trójkąt ma 3 wierzchołki, więc **każdy trójkąt ma 3 wysokości**.



Przykład 1.

Za pomocą ekerki i linijki narysujmy wysokości trójkąta ostrokatnego ABC .

Do boku AB przyłożmy linijkę, a do niej ekerkę, jak pokazano na rysunku. Przesuńmy ekerkę po linijce tak, aby wierzchołek C trójkąta znalazł się przy ramieniu ekerki prostopadłym do linijki. Z wierzchołka C narysujmy odcinek prostopadły do boku AB – wysokość h_1 .

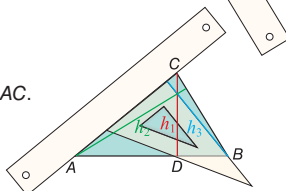
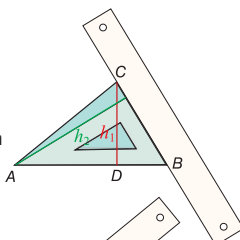
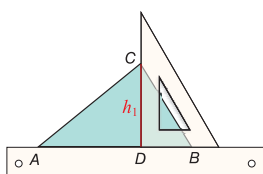
Zapisujemy: $h_1 \perp AB$.

Przyłożmy linijkę do boku BC i do niej ekerkę. Przesuńmy ekerkę po linijce tak, aby wierzchołek A trójkąta znalazł się przy ramieniu ekerki prostopadłym do linijki. Z wierzchołka A narysujmy wysokość h_2 . Jest ona prostopadła do boku BC .

Zapisujemy: $h_2 \perp BC$.

W taki sam sposób kreślimy wysokość h_3 z wierzchołka B . Jest ona prostopadła do boku AC . Zapisujemy: $h_3 \perp AC$.

Wysokości przecięły się w jednym punkcie, wewnątrz trójkąta.



157

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie ➔ Wielokąty i ich własności
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 13–15
Zbiór zadań	s. 101–104

Tematy lekcji:

1. Wysokości trójkątów (1 h)
2. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem własności wysokości trójkątów (1 h)

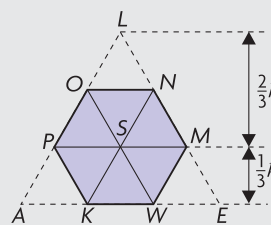
Cele lekcji

Uczeń:

- rysuje wysokości dowolnego trójkąta,
- podaje własności wysokości różnych trójkątów,
- rozwiązuje zadania dotyczące wysokości trójkąta,
- operuje przyrządami i kreśli odcinek prostopadły do prostej, przechodzący przez dany punkt (wysokość trójkąta).

Wskazówki metodyczne

- Podczas realizacji tego tematu warto skorzystać z geometrii kartki.



Jeżeli położymy wierzchołki trójkąta równobocznego w punkcie przecięcia wysokości, powstanie sześciokąt foremny. Uczniowie powinni opisać jego własności.

- Można również przeprowadzić ćwiczenie, w którym nauczyciel trzyma w dłoniach trójkąt równoboczny złożony na pół i pokazuje go w różnym położeniu. Wskazuje krótszą przyprostokątną lub przeciwprostokątną, podając jej długość. Wybrany uczeń ma za zadanie podać długość boku, którą może obliczyć. Jeżeli uczeń poda niewłaściwą liczbę, wystarczy rozłożyć trójkąt, by mógł poprawić swoją odpowiedź.

Komentarz do Sowa uczy

Wysokość trójkąta warto pokazać także na dużym przypiętym do tablicy modelu trójkąta. Następnie można narysować na nim pozostałe dwie wysokości. W celu lepszego zrozumienia zagadnienia należy tak ustawiać trójkąt, aby bok, na który prowadzimy wysokość, był równoległy do podłogi.

Komentarz do Przykładu 1.

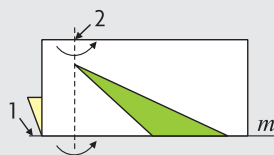
Temat tej lekcji to wyzwanie dla uczniów. Opanowanie posługiwania się ekerką i linijką jest ważną i trudną umiejętnością. Przedstawione rysunki na pewno okażą się pomocne. Umiejętność tę należy ćwiczyć.

Komentarz do Sowa uczy

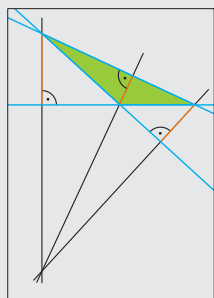
Można użyć ekierki jako modelu trójkąta, aby pokazać wysokości figury. Układając ekierkę za każdym razem innym bokiem równoległe do dolnej krawędzi tablicy, prosimy uczniów o wskazywanie wysokości trójkąta. Takie ćwiczenie będzie pomocne w zrozumieniu informacji podanych w Sowa uczy.

Komentarz do Przykładu 2.

Po analizie przykładu warto narysować różne rodzaje trójkątów rozwartokątnych, każdy na środku innej kartki A4, aby uczniowie wyznaczali wysokości tych trójkątów przez składanie kartki. Najpierw trzeba złożyć kartkę wzdłuż boku trójkąta i starać się wyznaczyć następne złożenie prostopadłe do poprzedniego tak, aby przechodziło przez wierzchołek (ten, który nie należy do boku).



Czarne linie zawierają wysokości trójkąta (tu pomarańczowe odcinki). Linie niebieskie to ślad po złożeniu wzdłuż boków trójkąta.

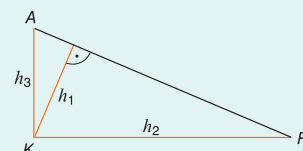


Sowa uczy

W trójkącie prostokątnym KRA wysokościami są odcinki: h_1, h_2, h_3 .

Wysokość h_1 – to odcinek prostopadły do boku AR , czyli przeciwprostokątnej. Dwie wysokości h_3 i h_2 pokrywają się z bokami tego trójkąta – jego przyprostokątnymi.

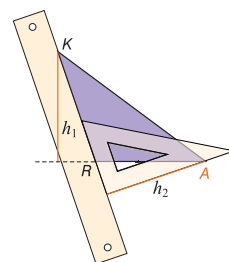
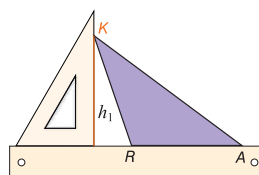
Wysokości: h_1, h_2, h_3 mają punkt wspólny K – wierzchołek kąta prostego.



Przykład 2.

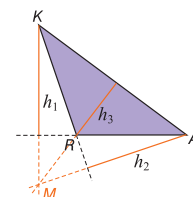
Wykreślmy wysokości w trójkącie rozwartokątnym RAK .

Narysujmy trójkąt rozwartokątny. Przyłóżmy linijkę do kolejnych boków, przesuwamy ekierkę po linijkę tak, jak pokazano na rysunkach, i narysujmy dwie wysokości h_1 i h_2 .



Podobnie kreślimy wysokość h_3 . Przedłużamy narysowane wysokości.

Przedłużenia tych wysokości przecięły się w jednym punkcie M , na zewnątrz trójkąta.



158

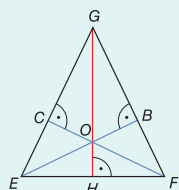
Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

3. a) B b) C c) $\frac{1}{2}a$
4. a) $|\angle CAD| = 45^\circ$, $|\angle ACD| = 45^\circ$, $|\angle ABC| = 40^\circ$, $\triangle ABC$ – różnoboczny, rozwartokątny
b) $|\angle ABC| = 140^\circ$, $|\angle BAC| = |\angle BCA| = 20^\circ$, $\triangle ABC$ – równoramienny, rozwartokątny
5. $\triangle ABC$ – równoboczny i ostrokątny; $\triangle LOK$ – równoramienny i ostrokątny; $\triangle ROP$ – różnoboczny i ostrokątny; $\triangle UOF$ – równoramienny i prostokątny; $\triangle ROK$ – różnoboczny i prostokątny; $\triangle CRE$ – równoramienny i rozwartokątny; $\triangle BZE$ – różnoboczny i rozwartokątny



Sowa uczy

• Trójkąt równoramienny



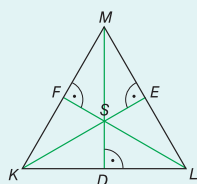
Wysokość poprowadzona z wierzchołka łączącego ramiona dzieli podstawę na dwie równe części.

$$|EH| = |HF|$$

Dwie pozostałe wysokości mają taką samą długość.

$$|FC| = |EB|$$

• Trójkąt równoboczny



Każda wysokość dzieli podstawę na dwie równe części.

$$|KD| = |DL|, |LE| = |EM|, |MF| = |FK|$$

Wszystkie wysokości mają taką samą długość.

$$|KE| = |LF| = |MD|$$

- 1 Narysuj trójkąt ostrokątny i jego wysokości.
- 2 Narysuj trójkąt prostokątny równoramienny i jego wysokości.
 - a) Porównaj, używając cyrkla, wysokość poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego z długością przeciwprostokątnej.
 - b) Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła trójkąt na dwie części. Podaj miary kątów wewnętrznych powstałych trójkątów. Podaj nazwy tych trójkątów ze względu na boki.
- 3 Narysuj trójkąt rozwartokątny i jego wysokości.
- 4 Skonstruuj trójkąt równoboczny o boku 4 cm. Narysuj jego wysokości i napisz o nich 2 zdania.
- 5 Wysokości są równe w trójkącie

A. ostrokątnym różnobocznym.	B. prostokątnym.
C. rozwartokątnym równoramiennym.	D. równobocznym.

159

Komentarz do Sowa uczy

Za pomocą lusterka ustawionego wzdłuż czerwonej wysokości w trójkącie równoramiennym i dowolnej w trójkącie równobocznym uczniowie stwierdzą, że jedna część trójkąta jest odbiciem lustrzanym drugiej części.

Komentarz do zadania 2.

Przed rysowaniem trójkątów można zastosować geometrię kartki. Każdy uczeń składa kwadrat wzdłuż przekątnej i przecina go wzdłuż linii zgięcia. W tak otrzymanych trójkątach wskazuje dwie wysokości (przyprostokątne). Linia złożenia trójkąta na pół jest trzecią wysokością poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego. Na tak przygotowanych modelach uczeń może wykonać polecenia z punktów a) i b), korzystając z cyrkla lub składając kartkę.

Komentarz do zadania 3.

Zwykle rysowanie wysokości w trójkącie rozwartokątnym sprawia uczniom najwięcej kłopotu, dlatego wskazane jest sprawdzenie, czy każdy uczeń zrobił to poprawnie. Można skorzystać z pomocy uczniów sprawnie operujących liniałem i eierką. Proponujemy, aby po wykonaniu zadania pomogli osobom nie-radzającym sobie z tym ćwiczeniem.

Odpowiedzi do zadań

2. a) wysokość jest połową przeciwprostokątnej
- b) 45°, 45°, 90°; równoramiennie
5. D

Komentarz do zadania 6.

Do rozwiązania tego zadania uczeń powinien znać własności trójkątów i ich wysokości. Można pozwolić uczniom na korzystanie z podręcznika, a tym samym rozwijać umiejętność samodzielnej nauki. Szczególną uwagę trzeba zwrócić na punkt b) ze względu na liczbę odpowiedzi. Dobrzy uczniowie mogą podać wszystkie odpowiedzi: trójkąt prostokątny równoramienny, trójkąt równoramienny ostrokątny, trójkąt równoramienny rozwartokątny, trójkąt równoboczny.

Komentarz do zadania 8.

W tym zadaniu bardzo ważne jest to, by najpierw wykonać rysunek pomocniczy i nanieść na nim nazwy punktów. Na podstawie rysunku uczniowie powinni wywnioskować, że w zadaniu jest mowa o trójkącie prostokątnym. Od tego momentu proponujemy, aby uczniowie zadanie wykonali samodzielnie w określonym czasie (np. 3 minuty). Do obliczenia obwodu trzeba zmierzyć długość przeciwprostokątnej. Taką decyzję powinni podjąć samodzielnie.

Komentarz do Wyzwania

Rozwiązanie zadania warto zacząć od narysowania dwóch prostych równoległych, odległych od siebie o 2 cm. Następnie na jednej z prostych wystarczy narysować podstawę, a na drugiej w odpowiednim miejscu wyznaczyć wierzchołek. Jest nieskończenie wiele trójkątów o wysokości 2 cm i podstawie długości 4 cm. Trzeba zwrócić uwagę na rysowanie trójkąta prostokątnego. Może to być trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 cm i 2 cm (tak narysuje większość uczniów) oraz trójkąt równoramienny o podstawie 4 cm. Wysokość poprowadzona na podstawę trójkąta równoramiennego dzieli go na 2 trójkąty prostokątne równoramienne. Wysokość ta jest równa połowie przeciwprostokątnej.

Komentarz do Sprawdź się!

Podczas rozwiązywania zadań 1. i 2. można poprosić uczniów o podanie nazw ze względu na boki i kąty wszystkich występujących tu trójkątów.



6. Podaj nazwy trójkątów ze względu na boki i kąty, których wysokości są opisane poniżej.
 - a) Wysokości przecinają się w wierzchołku jednego z kątów.
 - b) Co najmniej dwie wysokości mają równą długość.
 - c) Wysokości są różnej długości, a ich punkt przecięcia leży poza trójkątem.
7. Narysuj trójkąt równoramienny ostrokątny i trójkąt równoboczny. Poprowadź w nich wszystkie wysokości i porównaj odległość punktu ich przecięcia od wierzchołków i boków trójkąta.
8. Wysokości trójkąta *KOT* przecinają się w punkcie *K*. Dwie z nich są do siebie prostopadłe, a ich długości są równe 8 cm i 6 cm. Narysuj ten trójkąt i oblicz jego obwód.

Wyzwanie

Narysuj taki trójkąt o podstawie 4 cm i wysokości poprowadzonej na tę podstawę równej 2 cm, by był to trójkąt:

- a) ostrokątny, b) rozwartokątny, c) prostokątny.

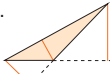
Porównaj, jak to zrobiły inne osoby w klasie. Czy otrzymaliście jednakowe trójkąty? Czy wiesz, dlaczego tak się stało?

Sprawdź się!

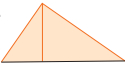
1. Skonstruuj trójkąt o bokach: 3 cm, 4 cm, 5 cm. Narysuj jego wysokości.
2. Pomarańczowe odcinki **nie są** wysokościami trójkąta na rysunku.



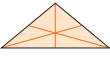
A.



B.



C.



D.
3. Trójkąt, który ma dokładnie dwie wysokości równe, to trójkąt

A. ostrokątny różnoboczny.
B. prostokątny różnoboczny.

C. rozwartokątny równoramienny.
D. równoboczny.
4. Narysuj trójkąt rozwartokątny różnoboczny i poprowadź w nim wysokości. Napisz 2 własności tych wysokości.
5. Jak nazywa się trójkąt, którego dwie wysokości mają taką samą długość jak dwa jego boki? Narysuj ten trójkąt i jego wysokości.

160

Odpowiedzi do zadań

6. a) trójkąty prostokątne b) trójkąty równoramienne lub równoboczne c) trójkąty rozwartokątne różnoboczne

8. $L = 24$ cm

Sprawdź się!

2. D
3. C
5. prostokątny

6. Klasyfikacja trójkątów



Sowa uczy

Na wcześniejszych lekcjach badaliśmy własności trójkątów, biorąc pod uwagę długości ich boków i rodzaje kątów wewnętrznych.

W poniższej tabelce zostały zebrane i uporządkowane wszystkie omawiane własności, a trójkąty podzielone ze względu na długości boków i rozwartości kątów wewnętrznych.

	Ostrokątne	Prostokątne	Rozwartokątne
Różnoboczne			
Równoramienne			
Równoboczne		nie istnieje	nie istnieje

Taki podział trójkątów to **klasyfikacja trójkątów**.

161

Tematy lekcji:

1. Klasyfikacja trójkątów (1 h)
2. Zadania o trójkątach (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- wyróżnia i nazywa trójkąty ze względu na boki i kąty,
- podaje własności trójkątów i ich wysokości,
- rozpoznaje trójkąty na podstawie ich własności,
- konstruuje trójkąt z trzech odcinków i ustala możliwość jego zbudowania, stosując nierówność trójkąta,
- rozwiązuje zadania z zastosowaniem własności trójkątów.

Wskazówki metodyczne

- Na początek lekcji proponujemy 10–15-minutowe ćwiczenie dramatyczne dotyczące klasyfikacji trójkątów. W tym celu należy przygotować:
 - kartki z rysunkami wszystkich rodzajów trójkątów (powinno ich być tyle, ilu jest uczniów w klasie);
 - taśmę klejącą lub agrafki do przytwierdzenia kartek z trójkątami do ubrań;
 - 3 kartki z nazwami trójkątów: trójkąty ostrokątne, trójkąty prostokątne i trójkąty rozwartokątne.
- Na początku ćwiczenia nauczyciel powtarza z uczniami wiadomości o trójkątach, a w tym czasie 2 lub 3 wybranych uczniów przyklepia rysunki trójkątów do ubrań na plecach pozostałych osób w klasie. Po tych przygotowaniach rozpoczynamy zabawę *Kim jestem?*

Nauczyciel podaje informację:

Od tej chwili każdy z was jest taką figurą, której rysunek ma na plecach. Bez patrzenia na kartkę, a jedynie zadając koleżankom i kolegom pytania o własności tej figury, musicie dowiedzieć się, jaką figurą jesteście. Możecie zadawać tylko takie pytania, na które można odpowiedzieć TAK lub NIE. Jeżeli ktoś zada pytanie: Jaką figurą jestem?, nie powinien otrzymać odpowiedzi.

W czasie, gdy uczniowie starają się odgadnąć nazwę swojej figury, nauczyciel umieszcza kartki z nazwami trójkątów w trzech miejscach w klasie.

Następnie wydaje polecenia:

- Niech każdy trójkąt znajdzie swoje miejsce przy odpowiedniej nazwie i weźmie do ręki rysunek figury, aby sprawdzić, czy podjął dobrą decyzję.
- Zastanówcie się, jakie są wspólne cechy trójkątów zebranych w waszej grupie.
- Połączcie się w mniejsze grupy trójkątów mające wspólną cechę i określcie ją.
- Czy wśród tych grup są jeszcze trójkąty, które wyróżniają się inną cechą?

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
	Kartkówka 17 lub 17a
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 16–18
Zbiór zadań	s. 98–104

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

2. P, P, P, F
3. A, D
4. 6 cm lub 3 cm 5 mm
6. A, C, D
7. b) 60°, 8 cm, 4 cm, 7 cm

Wskazówki metodyczne

Po dyskusji odsłania przygotowaną tabelkę do klasyfikacji trójkątów.

Każdy uczeń przyczepia swój trójkąt w odpowiedniej rubryce tabelki i zajmuje miejsce w swojej ławce.

Nauczyciel zadaje pytania:

– Czy wszystkie rysunki zostały poprawnie umieszczone?

– Dlaczego brakuje rysunków w okienkach odpowiadających trójkątom równobocznym prostokątnym i równobocznym rozwartokątnym?

• W dalszej części lekcji można wykonywać zadania z podręcznika, zeszytu ćwiczeń czy ze zbioru zadań.

• Na drugą godzinę lekcyjną polecamy ćwiczenie dramatowe *Gorące krzesło* (wywiad).

Dzielimy uczniów na pary. Jeden z uczniów w każdej parze jest dziennikarzem, drugi odgrywa rolę wybranego trójkąta, który udziela wywiadu. Po przeprowadzonym wywiadzie następuje zmiana ról. Role można wyznaczyć uczniom w drodze losowania.

Zarówno dziennikarz, jak i figura, z którą przeprowadza się wywiad, mają czas na przygotowanie się (ok. 3 minut). Przed przystąpieniem do ćwiczenia trzeba przypomnieć uczniom zasady przeprowadzania wywiadu.

Przykład początku wywiadu:

Dzień dobry. Nazywam się ... Moim zadaniem jest przeprowadzenie wywiadu na temat własności ... Czy mogę prosić o przedstawienie się? (tutaj powinna paść nazwa trójkąta). Czym wyróżniasz się wśród innych figur?

• Na lekcjach dotyczących innych wielokątów również można przeprowadzić takie ćwiczenie.

• Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 17 lub 17a

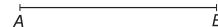
Komentarz do Przykładu 1.

Podczas wykonywania rysunku trójkąta w zeszytach warto sprawdzić umiejętność używania przez uczniów przyrządów. Można też zachęcić uczniów do narysowania trójkąta, gdy dane będą 2 boki i kąt zawarty między nimi.

Przykład 1.

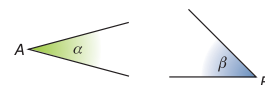
Narysujmy trójkąt ABC , jeśli mamy jego:

– bok AB

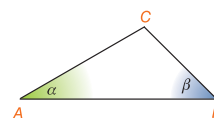


i

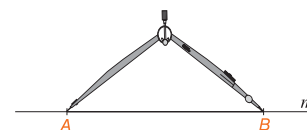
– kąty wewnętrzne α, β przyległe do boku AB .



Wykonajmy rysunek pomocniczy. Wyróżnijmy na rysunku dane.

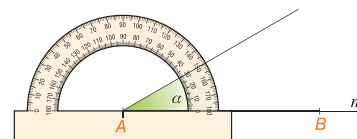


1. Rysujemy prostą m i odmierzamy na niej cyrklem odcinek AB .

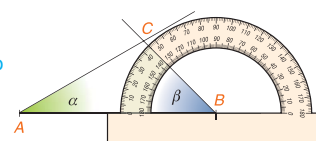


2. Mierzmy kątomierzem kąt α .

Rysujemy przy prostej m ten kąt tak, aby wierzchołek był w punkcie A , a ramieniem była półprosta AB .



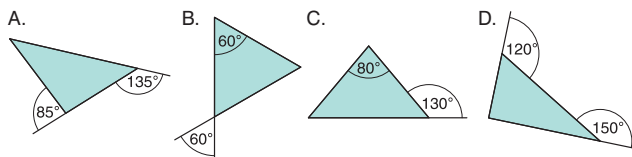
3. Budujemy kąt β o wierzchołku w punkcie B , o takiej samej mierze jak drugi dany kąt. Jedno ramię kąta to półprosta BA . Punkt przecięcia ramion kąta α i β to wierzchołek C trójkąta ABC .



V. Trójkąty

Na podstawie tabelki z części *Sowa uczy* rozwiąż zadania 1.–4.

1. Wypisz trójkąty ostrokątne. Jaką nazwę, ze względu na boki, nadano tym trójkątom?
2. Wypisz trójkąty równoramienne. Jaką nazwę, ze względu na kąty, nadano tym trójkątom?
3. Podaj nazwę trójkąta prostokątnego różnobocznego.
4. Trójkąt *MOL* jest trójkątem
A. rozwartokątnym różnobocznym. B. prostokątnym równoramiennym.
C. rozwartokątnym równoramiennym. D. ostrokątnym równoramiennym.
5. W których trójkątach suma miar dwóch kątów ostrych jest równa 90° ?
6. Dlaczego nie można narysować trójkąta prostokątnego lub trójkąta rozwartokątnego o równych bokach?
7. Dane są trójkąty:



Oblicz miary ich kątów wewnętrznych i odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż litery przypisane poprawnej odpowiedzi.

Który trójkąt jest ostrokątny?	A	B	C	D
Który trójkąt jest prostokątny?	A	B	C	D
Który trójkąt jest równoramienny?	A	B	C	D
Który trójkąt jest rozwartokątny?	A	B	C	D

8. Narysuj trójkąt *KOT*, którego $|KO| = 6$ cm, a kąty *TKO* i *KOT* są równe i mają po 30° . Podaj jego nazwę ze względu na boki i kąty.
9. Określ rodzaj trójkąta ze względu na boki i kąty, jeżeli jego 2 kąty wewnętrzne mają miary:
a) $20^\circ, 140^\circ$, b) $30^\circ, 60^\circ$, c) $60^\circ, 45^\circ$, d) $30^\circ, 50^\circ$.

163

Komentarz do zadań 1.–4.

Warto zwrócić uwagę na te zadania. Pomagają one ćwiczyć umiejętność odczytywania danych zamieszczonych w tabeli. Można je wykonać ustnie.

Komentarz do zadania 6.

Po przeczytaniu zadania można ogłosić konkurs na ustne uzasadnienie odpowiedzi na zadane pytanie. Uczniowie oceniają, które wyjaśnienia były najbardziej zrozumiałe i odnosiły się do odpowiednich własności trójkątów.

Komentarz do zadania 7.

Przed rozwiązaniem zadania trzeba przypomnieć wiadomości o kątach przyległych i wierzchołkowych lub pozwolić uczniom na odszukanie potrzebnych informacji w podręczniku. Aby odpowiedzieć na pytania, uczniowie muszą obliczyć miary kątów wewnętrznych trójkątów. Szybko rozwiążą zadanie, jeżeli wykonają w zeszycie odręczne rysunki trójkątów, na których nanoszą miary ich kątów wewnętrznych.

Komentarz do zadania 9.

Po rozwiązaniu zadania można poprosić uczniów o podanie kilku własności każdego trójkąta.

Odpowiedzi do zadań

1. *TOK* różnoboczny, *TOR* równoramienny, *TES* równoboczny
2. *TOR* ostrokątny, *KOS* prostokątny, *MOL* rozwartokątny
3. *KIT*
4. C
5. prostokątnych
7. BC, D, BC, A
8. równoramienny rozwartokątny
9. a) równoramienny rozwartokątny b) różnoboczny prostokątny
c) różnoboczny ostrokątny d) różnoboczny rozwartokątny

Komentarz do zadań 10. i 12.

W każdym z tych zadań uczniowie mają narysować odpowiedni trójkąt, a następnie wskazać poprawne odpowiedzi. Warto zapytać o to, w którym zadaniu wybór odpowiedzi nie wymagał narysowania trójkąta.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadania sprawdzają podstawowe wiadomości i umiejętności dotyczące trójkątów. Proponujemy, aby na koniec drugiej lekcji uczniowie rozwiązali je samodzielnie. Po upływie wyznaczonego czasu (5–8 minut) uczniowie siedzący w tej samej ławce wymieniają się zeszytami i pod kierunkiem nauczyciela sprawdzają poprawność rozwiązań. Wcześniej można uzgodnić sposób nagrodzenia za wykonaną pracę.

Klasyfikacja trójkątów

	ze względu na boki		
	równoboczny	równoramienny	różnoboczny
ze względu na kąty	ostrokątny	ostrokątny	ostrokątny
	prostokątny	prostokątny	prostokątny
rozwartokątny	rozwartokątny	rozwartokątny	rozwartokątny

TRÓJKĄTY:

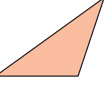
RÓWNOBOCZNY	RÓWNOBOKOWY	RÓWNOBOKOWY
OSTROKĄTNY	ROZWARTOKĄTNY	PROSTOKĄTNY

Plansze interaktywne ➔ Geometria na płaszczyźnie ➔ Wielokąty i ich własności ➔ Klasyfikacja trójkątów



- Narysuj trójkąt o bokach 4 cm, 6 cm, 9 cm. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Ze względu na boki jest to trójkąt A / B.
A. różnoboczny
B. równoramienny
Ze względu na kąty jest to trójkąt C / D.
C. prostokątny
D. rozwartokątny
- Narysuj trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 cm i 4 cm. Zmierz długość przeciwprostokątnej i oblicz obwód tego trójkąta.
- Narysuj trójkąt rozwartokątny różnoboczny i jego wysokości. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Wysokości tego trójkąta są A / B długości.
A. równej B. różnej
Wysokości tego trójkąta przecinają się C / D.
C. w punkcie, który jest przecięciem przedłużeń wysokości
D. w wierzchołku kąta rozwartego

🦋 Sprawdź się!

- Narysuj trójkąt, którego boki mają długości: 6 cm, 10 cm, 8 cm. Jaki to trójkąt ze względu na boki i kąty?
- W którym trójkącie każdy kąt jest innej miary?
A.  B.  C.  D. 
- Dwa kąty wewnętrzne pewnego trójkąta mają miary 80° i 20° . Jaki to trójkąt ze względu na boki i kąty?
- Narysuj trójkąt, którego jeden bok ma 5 cm, a kąty do niego przyległe mają 60° i 50° . W którym okienku tabelki z części **Sowa uczy** powinien być umieszczony ten trójkąt?
- W trójkącie rozwartokątnym kąty ostre **nie mogą** być równe
A. 45° , 40° B. 75° , 10° C. 30° , 30° D. 60° , 50°

164

Odpowiedzi do zadań

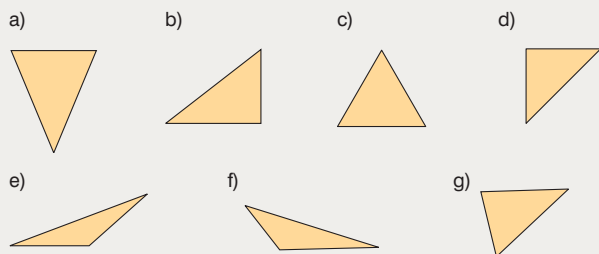
- AD
- przeciwprostokątna: 5 cm; $L = 12$ cm
- BC

Sprawdź się!

- różnoboczny prostokątny
- D
- równoramienny ostrokątny
- różnoboczny ostrokątny
- D

Zadania utrwalające

- 1 Podaj nazwy trójkątów ze względu na boki i kąty.



- 2 Podaj nazwy ze względu na boki i kąty opisanych poniżej trójkątów.
- Ma wszystkie boki równe.
 - Ma boki różnej długości, a suma miar dwóch kątów jest równa 90° .
 - Ma kąty o mierze 20° i 40° .
 - Ma 2 boki równej długości, a jeden z kątów ma miarę 90° .
- 3 Narysuj trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm w skali 1 : 1 oraz w skali 1 : 2. Zmierz, jaką długość ma przeciwprostokątna każdego narysowanego trójkąta. Oblicz obwody narysowanych trójkątów.
- 4 Narysuj trójkąty o podanych własnościach. Podaj ich nazwy ze względu na boki i kąty.
- Ma 2 kąty wewnętrzne o mierze 45° każdy.
 - Ma 2 boki o długościach 5 cm i 7 cm, a kąt rozwarty między tymi bokami ma miarę 110° .
 - Ma 2 boki równej długości, a jeden z kątów ma 50° .
- 5 Czy odcinki o podanych długościach mogą być bokami trójkąta?
- 9 cm, 7 cm, 12 cm
 - 10 m, 8 m, 2 m
 - $1\frac{1}{2}$ m, 8 dm, 90 cm
- 6 Czy kąty o podanych miarach mogą być kątami wewnętrznymi trójkąta?
- 100° , 90° , 20°
 - 72° , 84° , 24°
 - 17° , 63° , 100°
 - 75° , 85° , 30°
- 7 Narysuj wysokości w trójkącie:
- równoramiennym ostrokątnym,
 - różnobocznym,
 - rozwartokątnym.

165

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie ➔ Wielokąty i ich własności
	Praca klasowa 4
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 4–18
Zbiór zadań	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 90–104

Odpowiedzi do zadań

1. a) równoramienny ostrokątny b) różnoboczny prostokątny c) równoboczny d) równoramienny prostokątny e) równoramienny rozwartokątny f) różnoboczny rozwartokątny g) różnoboczny ostrokątny
2. a) równoboczny b) różnoboczny prostokątny c) różnoboczny rozwartokątny d) równoramienny prostokątny

Tematy lekcji:

- Powtórzenie wiadomości i utrwalenie umiejętności: Trójkąty (1 h)
- Praca klasowa 4 (1 h)
- Omówienie wyników i poprawa pracy klasowej (1 h)

Cele lekcji

Wybrane cele lekcji z danego rozdziału odpowiednie do rozwiązywanych zadań.

Wskazówki metodyczne

• Ciekawą propozycją powtórzenia wiadomości z tego tematu jest przeprowadzenie dwóch ćwiczeń dramowych. W tym celu trzeba przygotować 3 lub 4 stoliki i różnokolorowe modele wszystkich rodzajów trójkątów (mogą być przystające i podobne, ale trzeba pamiętać, aby figur było o 2, 3 więcej niż uczniów w klasie).

Podczas pierwszego ćwiczenia uczniowie siadają obok siebie na krzesłach ustawionych na obwodzie koła. Jedno krzesło powinno być wolne (uczniowie mogą też siedzieć na podłodze i wówczas krzesła można zastąpić kartką, gazetą itp.). W środku koła układamy przygotowane figury. Osoba siedząca na prawo od wolnego miejsca mówi: *Po mojej lewej stronie jest wolne miejsce. Zajmie je (np.) zielony trójkąt (może też powiedzieć np. trójkąt równoramienny o najdłuższych ramionach). Będzie nim Ania* (w ten sposób wyznacza osobę do wykonania zadania). Wskazana osoba wybiera odpowiednią figurę i zajmuje wolne miejsce, a następnie podaje jedną cechę wybranej figury. Teraz wolne miejsce jest tam, gdzie przedtem siedziała Ania. Ponownie osoba, która ma wolne miejsce po swojej lewej stronie, mówi: *Po mojej lewej stronie ...* i wskazuje osobę, która jeszcze nie wybierała trójkąta. Ćwiczenie trwa do momentu, aż wszyscy uczniowie będą mieli w ręku trójkąt. Podczas zabawy trzeba zwracać uwagę, czy uczniowie poprawnie się wypowiadają, i pilnować, aby nie powtarzały się podawane przez nich informacje. Jeżeli uczeń nie wie, co powiedzieć o swoim trójkącie, nauczyciel może mu pomóc, zadając dodatkowe pytanie.

W drugim ćwiczeniu każdy uczeń ma w ręku jedną figurę z poprzedniej zabawy. Nauczyciel dzieli uczniów na tyle zespołów, ile jest przygotowanych stolików (3 lub 4). Uczniowie stają wokół stolików. Nauczyciel zwraca uwagę na to, by w jednej grupie nie było uczniów, którzy mają przystające figury. Każdy uczeń kładzie swoją figurę na stoliku i zamyka oczy. Nauczyciel zmienia miejsca figur w obrębie danego stolika.

Wskazówki metodyczne

Uczniowie szukają swojej figury (oczywiście z zamkniętymi oczami). Następnie zajmują miejsca w ławkach, a nauczyciel wydaje polecenie: *Narysuj figurę, którą trzymasz w ręku, i napisz jej własności.* Opisane powyżej ćwiczenia powinny trwać nie dłużej niż 20 minut.

- W dalszej części lekcji warto zachęcić dobrych uczniów do rozwiązywania zadań ze zbioru, s. 90–104. Ze względu na wiele rozwiązań ciekawe jest zadanie 9., s. 95. Warto też omówić z uczniami zadanie 5., s. 100, w którym należy podać przykłady pokazujące, że podane informacje są fałszywe. Tego typu zadania przygotowują uczniów do uzasadniania wyborów i podanych informacji. Na s. 103 pokazałyśmy, jak narysować wielokąt foremny i w jaki sposób obliczyć miary jego kątów wewnętrznych. Interesujące są też zadania dotyczące trójkątnego dywanu Sierpińskiego.

Komentarz do zadania 9.

Podczas obliczania miar kątów wewnętrznych uczniowie powinni ustnie uzasadniać swoje obliczenia.

Komentarz do zadania 11.

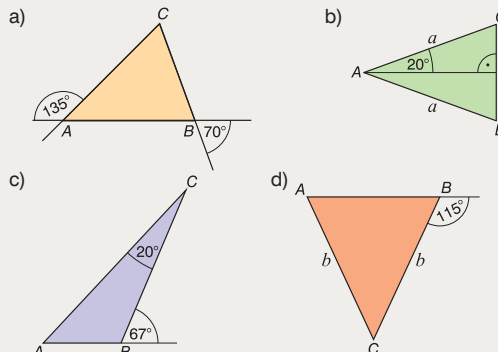
Wskazane, aby w przykładzie b) uczniowie wykonali rysunek pomocniczy, zaznaczyli na nim dane i zastanowili się, jaka powinna być kolejność rysowania trójkąta. Chętni uczniowie mogą podzielić się swoimi pomysłami wykonania rysunku trójkąta.

Komentarz do zadania 15.

W tym zadaniu istotne jest czytanie ze zrozumieniem. Najpierw uczeń powinien wykonać rysunek pomocniczy i nanieść na nim dane. Dobrze, by także narysował podane w zadaniu odcinki, a dopiero później wykonał konstrukcję trójkąta. Wskazane, aby wyznaczył wysokość otrzymanego trójkąta.



- Narysuj trójkąt, w którym tylko dwie wysokości są równej długości.
- Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC . Na rysunku boki jednakowej długości oznaczono taką samą literą.



- Miara jednego kąta wewnętrznego trójkąta równoramiennego jest równa 50° . Oblicz miary pozostałych kątów. Rozważ 2 przypadki.
- Narysuj:
 - odcinek AB i skonstruuj trójkąt, którego wszystkie boki mają długość $|AB|$,
 - odcinek AB , kąt ostry α i kąt rozwarty β . Skonstruuj trójkąt, którego jednym bokiem jest odcinek AB , kąty α i β mają wierzchołki odpowiednio w punktach A i B , a odcinek AB jest ich wspólnym ramieniem.
- Czy z odcinków o długościach 9 m, 12 dm, 14 m można zbudować trójkąt? Odpowiedź uzasadnij.
- Jaką miarę ma trzeci kąt trójkąta, którego pozostałe kąty są równe 55° i 26° ? Jaki to trójkąt ze względu kąty? Napisz po jednej własności dotyczącej jego boków, kątów, wysokości.
- Jakie są miary kątów wewnętrznych trójkąta, którego wszystkie wysokości są równe? Narysuj taki trójkąt i poprowadź w nim wysokości.
- Narysuj trójkąt KOT , którego $|KO| = 6$ cm, a $|KT| = |OT| = 5$ cm. Poprowadź wysokość TN i zaznacz na niej punkty R i A . Połącz zaznaczone punkty z wierzchołkami K i O . Napisz po 2 zdania o trójkątach KOA i KOR .

166

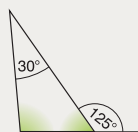
Odpowiedzi do zadań

- w skali 1 : 1 przeciwprostokątna: 10 cm, $L = 24$ cm; w skali 1 : 2 przeciwprostokątna: 5 cm, $L = 12$ cm
- a) równoramienny prostokątny b) różnoboczny rozwartokątny c) równoramienny ostrokątny
- a) tak b) nie c) tak
- a) nie b) tak c) tak d) nie
- a) $70^\circ, 45^\circ, 65^\circ$ b) $70^\circ, 70^\circ, 40^\circ$ c) $20^\circ, 113^\circ, 47^\circ$ d) $65^\circ, 65^\circ, 50^\circ$
- $50^\circ, 65^\circ, 65^\circ$ lub $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$
- nie
- 99° ; rozwartokątny
- $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszytach.

- 1 Z których odcinków można zbudować trójkąt?
 - A. 12 cm, 9 m, 14 m
 - B. 12 cm, 9 cm, 5 cm
 - C. $5\frac{1}{2}$ cm, 3 cm, $1\frac{1}{2}$ cm
 - D. 12 dm, 9 cm, 14 m
- 2 Kątami wewnętrznymi trójkąta **nie mogą** być kąty o miarach
 - A. 45° , 90° , 45°
 - B. 20° , 140° , 30°
 - C. 101° , 15° , 64°
 - D. 80° , 70° , 30°
- 3 W jakim trójkącie każda wysokość jest innej długości?
 - A. Równoramiennym.
 - B. Różnobocznym.
 - C. Nie ma takiego trójkąta.
 - D. Równobocznym.
- 4 Jaki trójkąt ma tylko 2 równe boki i tylko 2 równe kąty?
 - A. Równoramienny.
 - B. Równoboczny.
 - C. Różnoboczny.
 - D. Nie ma takiego trójkąta.
- 5 Trójkąt, którego miary kątów wewnętrznych są równe: 10° , 105° , 65° , to trójkąt
 - A. równoramienny rozwartokątny.
 - B. prostokątny różnoboczny.
 - C. ostrokątny różnoboczny.
 - D. różnoboczny rozwartokątny.
- 6 Kąty wewnętrzne trójkąta obok mają miary
 - A. 30° , 125° , 25°
 - B. 30° , 55° , 105°
 - C. 90° , 45° , 30°
 - D. 55° , 30° , 95°
- 7 Narysowany obok trójkąt jest równoramienny. Kąty przy podstawie mają miary
 - A. 70° , 55°
 - B. 30° , 30°
 - C. 55° , 55°
 - D. 45° , 45°
- 8 Ile trójkątów równoramiennych powstanie, jeżeli w kwadracie narysujemy obydwie jego przekątne?
 - A. 2
 - B. 4
 - C. 6
 - D. 8



Komentarz do zadań 1.–8.

Te zadania można wykorzystać do krótkiego sprawdzianu. Uczniowie, w ok. 10 minut, będą musieli napisać numery zadań i litery odpowiadające wybranym odpowiedziom. Po uzgodnionym czasie wspólnie sprawdzamy wyniki. Warto, by wówczas uczniowie uzasadniali wybór dobrych odpowiedzi lub podawali podstawę wyeliminowania niepoprawnych. W ten sposób zmobilizujemy uczniów do aktywności.

Odpowiedzi do zadań

1. B
2. B
3. B
4. A
5. D
6. D
7. C
8. D

Temat lekcji:

Ułamki o mianowniku 10, 100, 1000... (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- czyta i zapisuje ułamki dziesiętne,
- zapisuje ułamki dziesiętne skończone w postaci ułamków zwykłych i skraca je,
- zapisuje ułamki zwykłe, których mianowniki są dzielnikami liczby 10, 100, 1000 lub 10 000, w postaci ułamka dziesiętnego dowolnym sposobem: przez rozszerzanie lub skracanie ułamka zwykłego, dzielenie licznika przez mianownik (może używać też kalkulatora),
- wskazuje cyfry całości, części dziesiąte, części setne, części tysięczne w zapisie liczby, np. 104 027,
- porównuje ułamki dziesiętne z użyciem symboli <, >, =, porządkuje je rosnąco lub malejąco,
- ułamki dziesiętne zaznacza na osi liczbowej i odczytuje ułamki dziesiętne zaznaczone na osi liczbowej,
- skraca i rozszerza ułamki dziesiętne,
- zapisuje wyrażenia dwumianowane w postaci dowolnych ułamków dziesiętnych, i odwrotnie, oraz umiejętności te wykorzystuje w zadaniach.

Wskazówki metodyczne

- Jest to lekcja powtórzeniowa. Ułamki dziesiętne zostały wprowadzone już w klasie 4. Z pewnością część uczniów nadal będzie miała problemy z ich odczytywaniem i zapisywaniem.
- Podczas rozwiązywania zadań powtórzeniowych należy obserwować uczniów, aby wychwycić wszystkie braki. W ramach powtórki proponujemy następujące ćwiczenie. Wypisujemy lub wyświetlamy na tablicy kolumnę ułamków dziesiętnych, a uczniowie (według ustalonej kolejności) odczytują widoczne liczby. Następnie uczniowie mogą podawać, w którym rzędzie liczby znajduje się cyfra wskazana przez nauczyciela. Warto również wskazywać po dwie liczby spośród widocznych na tablicy i prosić uczniów o przeczytanie większej z nich.
- Po wykonaniu tych ćwiczeń nauczyciel na pewno zdobędzie informację o zapamiętanych z klasy 4 wiadomościach i umiejętnościach. Będzie wiedział, czy szukać dodatkowych zadań ćwiczących te umiejętności, np. w zbiorze zadań.
- Skracanie i rozszerzanie oraz porównywanie ułamków zapisanych w postaci dziesiętnej jest ważną umiejętnością, chociaż w podstawie programowej jej nie wymieniono. Ze względu jednak na jej przydatność i zastosowanie w działaniach pisemnych uczniowie powinni znać i stosować te umiejętności.

VI. Ułamki dziesiętne

1. Ułamki o mianowniku 10, 100, 1000...

Sowa przypomina

- Ułamki o mianowniku 10, 100, 1000... to ułamki dziesiętne.
- Wyróżnione liczby to postać dziesiętna danych ułamków zwykłych.
 $\frac{2}{10} = 0,2$ $\frac{9}{100} = 0,09$ $\frac{28}{1000} = 0,028$ $3\frac{1}{10} = 3,1$
- Liczbę dziesiętną można zapisać w postaci sumy.



$$12,502 = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,01 + 2 \cdot 0,001 = 12 + 0,5 + 0,002$$

- Liczby w postaci dziesiętnej można:
 - **skracać** (upraszczać), pomijając końcowe zera po przecinku,
 $7,5000 = 7,5$ $4,0600 = 4,06$
 - **rozszerzać**, dopisując zera za ostatnią cyfrą ułamka, a w liczbie naturalnej – dopisując przecinek i zera po przecinku.
 $3,9 = 3,90000$ $83,2 = 83,2000$ $5 = 5,00$
- Porównując liczby zapisane w postaci dziesiętnej, najpierw porównujemy całości, później kolejno poszczególne cyfry: części dziesiątych, części setnych...

takie same cyfry $\begin{matrix} \rightarrow 15,029 \\ \leftarrow 15,031 \end{matrix}$ $2 < 3$ $15,029 < 15,031$

- Wyrażenia dwumianowane można zapisać w postaci dziesiętnej.

$6\text{ m } 4\text{ cm} = 6,04\text{ m}$ $1\text{ m} = 100\text{ cm}$ $1\text{ cm} = 0,01\text{ m}$
 dwa miana

168

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Ułamki zwykłe i dziesiętne. Przybliżanie i zaokrąglanie Liczby wymierne → Oś liczbową
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 19–21
Zbiór zadań	s. 105–107

Przykład 1.

Ułamki $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{8}$ zapiszmy w postaci dziesiętnej.

Zastanówmy się, czy wśród wielokrotności liczb, które są mianownikami ułamków, znajduje się liczba 10 lub 100, lub 1000, lub 10 000...

Wielokrotnością liczby 4 jest 100, więc $\frac{1}{4}$ można rozszerzyć do ułamka o mianowniku 100.

$$\frac{1}{4} = \frac{?}{100}$$

$100 : 4 = 25$, więc ułamek rozszerzamy przez 25:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{25}{100} = 0,25$$

Wielokrotnością liczby 8 jest 1000, więc $\frac{7}{8}$ można rozszerzyć do ułamka o mianowniku 1000.

$$1000 : 8 = 125, \text{ więc } \frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{875}{1000} = 0,875$$

1 Przeczytaj liczby.

- a) 0,27 b) 3,045 c) 43,6936 d) 5,7903
2,64 17,928 5,9002 0,0397

2 Zapisz w postaci dziesiętnej.

- a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{554}{1000}$ c) $1\frac{305}{1000}$ d) $\frac{12\,375}{100\,000}$
 $\frac{5}{100}$ $2\frac{3}{1000}$ $5\frac{8}{10\,000}$ $2\frac{345\,708}{1\,000\,000}$

3 Zapisz w postaci ułamków zwykłych i skróć.

- a) 0,8 b) 0,75 c) 0,625 d) 1,450
3,5 5,68 1,025 0,888

4 Rozszerz i zapisz w postaci dziesiętnej.

- a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{7}{50}$ c) $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{21}{40}$, $\frac{100}{125}$

5 Zaznacz na osi liczbowej: 2,25; 2,38; 2,01; 2,6; 2,09.**6** Skróć.

- a) 0,3500; 6,200; 18,40; 0,0090; 1,01010
b) 46,0420; 0,004600; 2,4000; 5,0400; 0,0070

Komentarz do Przykładu 1.

Po wspólnej analizie tego przykładu warto poprosić uczniów o samodzielne przedstawienie w postaci dziesiętnej kilku ułamków zwykłych, np. $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{1}{50}$.

Komentarz do zadań 2. i 3.

Te zadania można rozwiązywać na tablicy w ten sposób, że kolejni uczniowie rozwiązują po jednym przykładzie. Nauczyciel powinien dobierać przykłady do możliwości uczniów. Dzięki temu praca ma charakter zindywidualizowany.

Komentarz do zadania 4.

To zadanie uczniowie mogą rozwiązać w parach. W czasie przedstawiania przez uczniów rozwiązania trzeba wymagać, aby przy zamianie ułamka zwykłego na dziesiętny opisywali kolejne czynności, np. *Ułamek $\frac{7}{25}$ rozszerzam przez 4 do mianownika 100.*

Komentarz do zadania 6.

Uczniowie powinni nabrać pewności, że dopisanie lub opuszczenie zer na końcu ułamka dziesiętnego nie zmienia jego wartości, np. $2,3400 = 2,34$.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. a) 0,15 b) 0,003 c) 0,101 d) 0,0005 e) 0,00198
2. a) 8,26 b) 94,02 c) 52,342 d) 18,00018 e) 2,3 f) 0,056
3. a) $7\frac{6}{10}$, $10\frac{4}{10}$, $7\frac{4}{100}$, $8\frac{56}{100}$ b) $1\frac{1}{1000}$, $5\frac{8}{1000}$, $3\frac{24}{1000}$, $11\frac{11}{1000}$ c) $\frac{302}{10000}$, $93\frac{72}{10000}$, $\frac{31}{100000}$, $2\frac{603}{100000}$
4. a) 0,19 b) 0,087 c) 0,0028 d) 23,07 e) 1,7 f) 80,2 g) 3,52 h) 10,5
i) 1,0005 j) 0,00307 k) 0,1825 l) 3,18
5. $1,9 = 1,90 = 1,900 = 1,9000$; $1,09 = 1,09000 = 1,0900 = 1,090$;
 $1,00900 = 1,009 = 1,0090 = 1,009000$
6. a) 0,2; 0,4; 0,5; 0,8; 1,1; 1,4; 1,5; 1,9 b) 0,1; 0,25; 0,5; 0,6; 0,8; 0,85; 0,95
c) 2,5; 2,8; 2,9; 3,2; 3,4; 3,7; 3,8 d) 50,5; 52,5; 53; 53,5; 55; 56,5; 58,5; 59,5
7. B, C, E, H
8. a) < b) > c) < d) > e) < f) < g) < h) = i) >
9. 0,222; 0,2; 2,0202; 2,0222; 2,222; 2,223; 2,2231; 2,2312; 2,2321
10. a) P b) F c) F

Odpowiedzi do zadań

1. a) dwadzieścia siedem setnych, dwa i sześćdziesiąt cztery setne
b) trzy i czterdzieści pięć tysięcznych, siedemnaście i dziewięćset dwadzieścia osiem tysięcznych
c) czterdzieści trzy i sześć tysięcy dziewięćset trzydzieści sześć tysięcznych, pięć i dziewięć tysięcy dwie tysięczne
d) pięć i siedem tysięcy dziewięćset trzy tysięczne, trzysta dziewięćdziesiąt siedem tysięcznych
2. a) 0,7; 0,05 b) 0,554; 2,003 c) 1,305; 5,0008
d) 0,12375; 2,345708
3. a) $\frac{4}{5}$, $3\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$, $5\frac{17}{25}$ c) $\frac{5}{8}$, $1\frac{1}{40}$ d) $1\frac{9}{20}$, $\frac{111}{125}$
4. a) 0,5; 0,2; 0,4; 0,8 b) 0,25; 0,75; 0,28; 0,14 c) 0,125; 0,375; 0,525; 0,4
6. a) 0,35; 6,2; 18,4; 0,009; 1,0101 b) 46,042; 0,0046; 2,4; 5,04; 0,007

Komentarz do zadań 8. i 9.

Zadania te można wykonać ustnie i w czasie rozwiązywania doskonalić czytanie ułamków dziesiętnych.

Komentarz do zadań 10. i 11.

Ćwiczone w tych zadaniach umiejętności są niezbędne w wielu sytuacjach życiowych, np. podczas zakupów. Uczniowie mogą podawać własne przykłady zastosowania liczb dziesiętnych w życiu codziennym. Na lekcjach geometrii często konieczna jest zamiana jednostek długości. Do gry PRAWDA? FAŁSZ? można wykonać samodzielnie lub z uczniami zestaw przykładów z ułamkami dziesiętnymi.

Przykładowe karty: $0,75 = \frac{3}{4}$, $0,5400 = 0,54$,

$4,052 < 4,502$, $4 \text{ m } 3 \text{ cm} = 4,03 \text{ m}$.

Wśród przykładów powinny też być informacje fałszywe, np. $0,07$ to 7 tysięcznych, $2,070 = 2,7$; $2 + 8 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,01 + 5 \cdot 0,001 = 2,85$.

Komentarz do zadania 12.

To zadanie ma duże znaczenie praktyczne. Warto znać długość swojego kroku czy rozpiętości dłoni, bo zdarza się, że nie mamy przy sobie miary, a potrzebujemy wiedzieć, ile kupić np. metrów płotka na ogrodzenie rabaty. Jej obwód można zmierzyć krokami i przeliczyć je na metry.

123

7. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Rozszerzony ułamek 2,043 to A / B. A. 2,0043 B. 2,0430
Skrócony ułamek 5,0030500 to C / D. C. 5,00305 D. 5,35
8. Przepisz przykłady, zamiast $\diamond$ napisz odpowiedni znak $>$, $<$ lub $=$.
a) $0,2 \diamond 0,02$ b) $3,408 \diamond 3,4018$ c) $14,005 \diamond 14,0051$
 $0,461 \diamond 0,459$ $0,999 \diamond 1,1$ $2,306 \diamond 2,30600$
9. Przepisz wyrażenia, zamiast $\diamond$ napisz odpowiednią cyfrę.
a) $7,238 < 7,23 \diamond$ b) $0,52 \diamond > 0,525$ c) $0,7 \diamond 3 < 0,713$
d) $5,532 < 5, \diamond 32$ e) $1, \diamond 23 > 1,23$ f) $10,99 \diamond < 10, \diamond 999$
10. Masę każdego produktu zapisz:
a) w dekagramach,



b) w kilogramach.



86 dag



1 kg 26 dag



2 kg 45 dag

11. Długości odcinków zapisz w podanych jednostkach.
a) w milimetrach: 3 cm 2 mm, 10 cm 6 mm, 1 cm 26 mm, 1 dm 4 cm
b) w decymetrach: 28 cm, 175 mm, 4 dm 9 cm, 8 dm 3 mm
c) w metrach: 130 cm, 45 mm, 5 dm 7 cm, 4 m 8 cm
d) w kilometrach: 1600 m, 56 m, 6 km 345 m, 1 km 26 m
12. Kuba zmierzył, że średnia długość jego kroku wynosi 42 cm. Policzył także, że aby pokonać odległość dzielącą jego dom od domu babci, musi przejść 2150 kroków. W jakiej odległości, wyrażonej w kilometrach, leżą domy babci i Kuby?

170

Odpowiedzi do zadań

7. BC

8. a) $>$, $>$ b) $>$, $<$ c) $<$, $=$

9. a) 9 b) 6 lub 7, lub 8, lub 9 c) 0 d) 6 lub 7, lub 8, lub 9 e) 3 lub 4, lub 5, lub 6 lub 7, lub 8, lub 9 f) w pierwszej liczbie dowolna cyfra, w drugiej 9

10. a) 4 dag; 2 dag; 0,8 dag; 1,6 dag b) 0,86 kg; 1,26 kg; 2,45 kg

11. a) 32 mm; 106 mm; 36 mm; 140 mm

b) 2,8 dm; 1,75 dm; 4,9 dm; 8,03 dm

c) 1,3 m; 0,045 m; 0,57 m; 4,08 m

d) 1,6 km; 0,056 km; 6,345 km; 1,026 km

12. 0,903 km

VI. Ułamki dziesiętne

123

- 13 Liczba zapisana w postaci $3 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,01 + 0 \cdot 0,001 + 1 \cdot 0,0001$ to
 A. 32,401 B. 3,241
 C. 3,2401 D. 32,41

- 14 W Polsce stare lasy (powyżej 80 lat) zajmują około 0,23 powierzchni zalesionej, a młode lasy (do 20 lat) – $\frac{2}{23}$ powierzchni zalesionej. Które z wymienionych lasów zajmują większą powierzchnię?



- 15 Dane są ułamki:
 A. 0,75 B. 0,8 C. 0,075 D. $\frac{4}{5}$
 Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż litery przypisane poprawnej odpowiedzi.

Które ułamki są równe?	A	B	C	D
Którą część 1 kg jest 75 g?	A	B	C	D
Która liczba jest równa $\frac{3}{4}$?	A	B	C	D
Która liczba jest najmniejsza?	A	B	C	D

Sprawdź się!

- 1 Ułamek $3\frac{508}{10\,000}$ zapisany w postaci dziesiętnej to
 A. 3,508 B. 3,0508 C. 3,5008 D. 3,0058
- 2 Zapisz w postaci ułamków zwykłych i skróć.
 a) 0,75 b) 1,350 c) 2,4050
- 3 Zaznacz na osi liczbowej: 1,2; 1,75; 1,55; 1,46.
- 4 Spośród liczb: $\frac{13}{25}$; $\frac{9}{40}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{17}{50}$; 0,375; 0,520; 0,225; 0,340; 0,052 wypisz pary liczb równych.
- 5 Przepisz wyrażenia, zamiast każdego $\blacklozenge$ napisz taką cyfrę, aby otrzymać liczbę największą z możliwych.
 a) $\blacklozenge 2,6 < 32,6$ b) $5,38 > 5, \blacklozenge 7$ c) $21,3 > \blacklozenge \blacklozenge, \blacklozenge$
 34, $\blacklozenge \blacklozenge < 34,2$ 17, $\blacklozenge < 17,39$ 4 $\blacklozenge, \blacklozenge \blacklozenge < 45,36$

171

Komentarz do zadania 15.

To zadanie nowego typu i dlatego warto na nie zwrócić uwagę. Rozwiązując je, uczniowie ćwiczą umiejętność czytania ze zrozumieniem. Wskazane, aby uczniowie uzasadniali ustnie wybory swoich odpowiedzi.

Komentarz do Sprawdź się!

Poprawne wykonanie zadania 3., zwłaszcza uczniom z problemami w nauce matematyki, znacznie ułatwi użycie papieru milimetrowego. Jeżeli za jednostkę na osi liczbowej przyjmiemy 10 cm, łatwo zaznaczymy części setne.

W zadaniu 5., w każdej liczbie z brakującymi cyframi trzeba dopisać co najmniej jedną cyfrę. Uczniowie mogą powiedzieć, że jest wiele rozwiązań tych przykładów. Wówczas należy zwrócić ich uwagę na polecenie, w którym prosimy o wpisanie takich cyfr, aby powstały liczby największe z możliwych. Przy takim warunku każdy przykład ma tylko jedno rozwiązanie.

Odpowiedzi do zadań

13. C
 14. stare lasy
 15. BD, C, A, C

Sprawdź się!

1. B
 2. a) $\frac{3}{4}$ b) $1\frac{7}{20}$ c) $2\frac{81}{200}$
 4. $\frac{13}{25} = 0,520$; $\frac{9}{40} = 0,225$; $\frac{3}{8} = 0,375$; $\frac{17}{50} = 0,340$
 5. a) 2; od lewej: 1, 9 b) 3; 3 c) od lewej: 2, 1, 2; 5, 3, 5

Tematy lekcji:

1. Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych (1 h)
2. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem dodawania i odejmowania ułamków dziesiętnych (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- dodaje i odejmuje ułamki dziesiętne w pamięci (w najprostszych przykładach), pisemnie i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach),
- porównuje różnicowo ułamki dziesiętne,
- weryfikuje wynik zadania tekstowego, oceniając sensowność rozwiązania.

Wskazówki metodyczne

- Algorytm dodawania i odejmowania ułamków dziesiętnych sposobem pisemnym został wprowadzony w klasie 4. Działania te nie sprawiają uczniom większych kłopotów. Należy zwracać uwagę na zapis cyfr w liczbie – ważne, aby jedna cyfra zajmowała jedną kratkę. Taki zapis jest nie tylko czytelny, ale także zmniejsza ryzyko popełnienia błędu w obliczeniach. Ponadto liczby powinny mieć te same mianowniki, tzn. w zapisie dziesiętnym tyle samo cyfr po przecinku. Przyda się więc umiejętność rozszerzania ułamków zapisanych w postaci dziesiętnej.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 18.

Komentarz do Przykładu 1.

Na lekcji wprowadzamy nowe pojęcia: brutto, netto oraz tara. Są one przydatne w życiu. Warto porozmawiać o tym, gdzie i po co używa się tych pojęć.

123

2. Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych

Sowa przypomina

- W dodawaniu i odejmowaniu ułamków dziesiętnych ważny jest sposób podpisywania liczb: całości pod całościami, przecinek pod przecinkiem, części dziesiąte pod częściami dziesiątymi itd.
- Ułamki dziesiętne dodajemy i odejmujemy sposobem pisemnym tak jak liczby naturalne, nie zwracamy uwagi na przecinek w czasie wykonywania działania. Odjemna i odjemnik muszą mieć tyle samo cyfr po przecinku.

$$15,7 + 3,58 + 105,025$$

$$120,7 - 89,675$$

$$\begin{array}{r} 11 \quad 1 \\ 15,700 \\ + 3,580 \\ + 105,025 \\ \hline 124,305 \end{array}$$

Przecinek jest pod przecinkiem.

$$\begin{array}{r} 11 \quad 10 \quad 6 \quad 9 \quad 10 \\ 120,700 \\ - 89,675 \\ \hline 31,025 \end{array}$$

Przecinek jest pod przecinkiem.

Przykład 1.

Masa skrzynki ze śliwkami (**masa brutto**) jest równa 11,3 kg, masa śliwek (**masa netto**) to 10,25 kg. Oblicz masę skrzynki (**tara**).

Zauważmy, że:

$$\text{masa brutto} = \text{masa netto} + \text{tara}$$

Obliczmy, ile waży pusta skrzynka.

$$\text{tara} = \text{masa brutto} - \text{masa netto}$$

$$11,3 \text{ kg} - 10,25 \text{ kg} = 1,05 \text{ kg}$$

Odpowiedź. Tara jest równa 1,05 kg.



172

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Ułamki zwykłe i dziesiętne. Przybliżanie i zaokrąglanie
	Liczby wymierne → Działania na ułamkach dziesiętnych
Inne	Kartkówka 18
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	wsipnet.pl klasowki.pl
Zbiór zadań	s. 22–25
	s. 107–110

VI. Ułamki dziesiętne

123

1 Oblicz pisemnie.

- | | | |
|--------------------|----------------------|-----------------|
| a) $48,24 + 123,5$ | b) $51,007 + 13,899$ | c) $20 + 98,38$ |
| $66,53 + 9,047$ | $112,06 + 38,9$ | $15,72 + 0,987$ |
| $72,307 + 0,59$ | $0,405 + 85,947$ | $129,3 + 0,509$ |

2 Sumą liczb 26,45 i 7,014 jest

- A. 19,436 B. 20,436 C. 33,454 D. 33,464

3 Oblicz i sprawdź za pomocą dodawania.

- | | | |
|--------------------|-------------------|-------------------|
| a) $25,76 - 12,72$ | b) $8,53 - 0,856$ | c) $350 - 197,82$ |
| $96,38 - 36,29$ | $18,753 - 17,86$ | $800 - 645,93$ |
| $65,473 - 0,53$ | $37,8 - 18,921$ | $70,05 - 15,128$ |

4 Skrzynka z pomidorami waży 14,3 kg. Pusta skrzynka waży 2,1 kg. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.



- | | | |
|-------------------------------|------------|------------|
| Masa brutto jest równa A / B. | A. 16,4 kg | B. 14,3 kg |
| Masa netto jest równa C / D. | C. 12,2 kg | D. 2,1 kg |

5 Na puszcze z pasztetem był napis: *Masa brutto 538 g*. Pusta puszka miała masę 4,1 dag. Jaka była masa pasztetu? Zapisz masę pasztetu w gramach, dekagramach, kilogramach.

6 Liczba 40,86 jest mniejsza od liczby 51,07

- A. o 9,21. B. o 10,21. C. o 11,21. D. o 10,27.

7 Jedną ciężarówką przewieziono 2 t owoców, a drugą o 300 kg więcej. Ile ton owoców przewieziono razem?



8 Rozwiąż równanie.

- a)
- $b + 34,8 = 73,45$
- b)
- $x - 0,12 = 90$
- c)
- $46,4 - p = 35$

9 Oblicz.

- a)
- $10,3 + 89,405 - 87,82 - 11,45$
- b)
- $523,125 - (89,3 + 9,72 + 250)$

173

Komentarz do zadań 1.–3.

Przed rozwiązywaniem tych zadań należy w rachunku pamięciowym uwzględnić dodawanie i odejmowanie liczb zapisanych w postaci dziesiętnej, np. $7,4 + 3,5$; $4,7 + 3,05$; $9,8 - 3,4$...

Uczniowie powinni głośno przeczytać występujące w przykładach liczby. Będzie to ćwiczenie sprawdzające umiejętność czytania ułamków dziesiętnych.

Komentarz do zadania 6.

Uczniom mającym problemy w nauce matematyki szukanie poprawnej odpowiedzi ułatwi pytanie: *Jaką liczbę trzeba dodać do 40,86, aby otrzymać 51,07?* Uczniowie mogą wtedy szacować sumy liczby 40,86 i liczb podanych w kolejnych odpowiedziach.

Komentarz do zadania 7.

Uczniowie mogą wykonać obliczenia w pamięci. Należy zwrócić uwagę, czy prawidłowo zamienia jednostki.

Komentarz do zadania 8.

Tam, gdzie jest to możliwe, obliczenia można wykonać w pamięci. Wskazane, aby uczniowie określili, jaką funkcję w działaniu pełni niewiadoma, używając określeń: składnik, odjemna, odjemnik, suma, różnica.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- kolejno wierszami: 0,9; 1,4; 0,78; 1,27; 8,9; 14,37; 7,66; 14,83; 144,0883; 1,73; 11,59; 13,3; 25,2; 43,4; 18,124
- kolejno wierszami: 1,05; 2,08; 16,75; 0,39; 17,65; 46,61; 39,86; 8,67; 4,677
- 205,985; 86,2488; 21,4555; 21,4; 1167,5; 594,48
- a) 10,25 kg b) tara, netto, brutto
- $x = 13,05$; $y = 83,187$; $a = 95,41$; $c = 52,97$
- kolejno wierszami: 0,15; 0,45; 0,81; 0,95; 1,2; 1,6; 1,76; 2,15; 2,8; 3,91; 4,95
- kolejno wierszami: 1,89; 0,94; 0,37; 2,92; 2,55; 5,48
- a) TAK b) NIE c) TAK d) NIE
- kolejno wierszami: 204,959; 28,44; 95,041; 28,34; 5,6; 204,959; 5,6; 204,959; 1,116; 114,74; 28,34
- kolejno wierszami: $<$, $>$, $<$, $>$, $>$, $<$

Odpowiedzi do zadań

- a) 171,74; 75,577; 72,897 b) 64,906; 150,96; 86,352
c) 118,38; 16,707; 129,809
- D
- a) 13,04; 60,09; 64,943 b) 7,674; 0,893; 18,879
c) 152,18; 154,07; 54,922
- BC
- $497 \text{ g} = 49,7 \text{ dag} = 0,497 \text{ kg}$
- B
- 4,3 t
- a) $b = 38,65$ b) $x = 90,12$ c) $p = 11,4$
- a) 0,435 b) 174,105

Komentarz do zadań 10.–11.

Zadania dotyczą porównywania różnicowego. Do treści tych zadań dobrzy uczniowie mogą ułożyć dodatkowe pytania i wykonać do nich obliczenia.

Komentarz do zadania 12.

Można polecić uczniom samodzielne rozwiązanie zadania w wyznaczonym czasie (ok. 5 min). Po jego upływie uczniowie prezentują swoje zadania i nagradzają to, które będzie miało najciekawszą treść i poprawne rozwiązanie.

Komentarz do *Sprawdź się!*

Zadania tu zawarte mogą być podsumowaniem lekcji. Wykonanie obliczeń powinno odbyć się w parach: uczeń sprawny matematycznie z kolegą z problemami w nauce matematyki. Na rozwiązanie poszczególnych zadań nauczyciel wyznacza czas, a po jego upływie uczniowie podają wyniki i wyjaśniają sposoby obliczeń. Rozwiązanie zadania powinna przedstawiać osoba o mniejszych umiejętnościach matematycznych, a nagrodę w postaci np. plusa mogą otrzymać obie osoby z pary.

123

- 10 Jeden pręt metalowy ma długość 67 cm, a drugi 48 cm. Oblicz różnicę ich długości wyrażonych w metrach.



- 11 Kilogram szynki kosztuje 25,60 zł, a kilogram kielbasy szynkowej jest o 3,95 zł tańszy. Ile kosztuje kilogram kielbasy szynkowej?
- 12 Ułóż zadanie, które można rozwiązać za pomocą działania $16,2 - 1,45$. Rozwiąż je.

Sprawdź się!

- 1 Oblicz.
a) $12,07 + 151,9$ b) $2348,6 - 157,9$
256,9 + 74,05 2010,3 - 243,04
- 2 Państwo Kwiatkowscy zapłacili w restauracji za obiad bez deseru 132,45 zł. Później zamówili jeszcze deser i zapłacili za niego o 96,02 zł mniej niż za obiad. Za deser zapłacili
A. 36,43 zł B. 218,47 zł
C. 45,43 zł D. 46,53 zł
- 3 Pani Zosia kupiła skrzynkę jabłek ważącą 12,55 kg. Na skrzynce była informacja: *Tara 1,95 kg*. Jaka była masa netto jabłek, które kupiła pani Zosia?
- 4 Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.
a) $12,07 + a = 40,1$
b) $57 - b = 19,87$
c) $c - 49,3 = 16,84$
- 5 Oblicz.
a) $450,02 - (175,3 + 39,94) - 79,8$
b) $42,608 - (8,46 - 2,623) + 6,213$



174

Odpowiedzi do zadań

10. 0,19 m
11. 21,65 zł

Sprawdź się!

1. a) 163,97; 330,95 b) 2190,7; 1767,26
2. A
3. 10,6 kg
4. a) $a = 28,03$ b) $b = 37,13$ c) $c = 66,14$
5. a) 154,98 b) 42,984

3. Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000...



Sowa przypomina

$$10 \cdot 12,4 = 124$$

$$0,72 \cdot 10 = 7,2$$

$$100 \cdot 0,2 = 20$$

$$4,726 \cdot 100 = 472,6$$

$$1000 \cdot 0,2 = 200$$

$$4,726 \cdot 1000 = 4726$$

Jeżeli liczbę mnożymy przez 10, przecinek przesunąć się o jedną cyfrę w prawo, przez 100 – o dwie cyfry w prawo, a przez 1000 – o trzy cyfry w prawo.

$$125 : 10 = 12,5$$

$$4,5 : 10 = 0,45$$

$$125 : 100 = 1,25$$

$$4,5 : 100 = 0,045$$

$$125 : 1000 = 0,125$$

$$4,5 : 1000 = 0,0045$$

Jeżeli liczbę dzielimy przez 10, przecinek przesunąć się o jedną cyfrę w lewo, przez 100 – o dwie cyfry w lewo, a przez 1000 – o trzy cyfry w lewo. Brakujące cyfry uzupełniamy zerami.

Przykład 1.

Obliczmy iloczyny.

a) $46,095 \cdot 10\,000$

b) $0,27 \cdot 1\,000\,000$

$$\begin{aligned} \text{a) } 46,095 \cdot 10\,000 &= \\ &= (46,095 \cdot 1000) \cdot 10 = \\ &= 46\,095 \cdot 10 = 460\,950 \end{aligned}$$

$$10\,000 = 1000 \cdot 10$$

Przecinek przesunął się o cztery cyfry w prawo.

$$\begin{aligned} \text{b) } 0,27 \cdot 1\,000\,000 &= \\ &= (0,27 \cdot 100) \cdot 10\,000 = \\ &= 27 \cdot 10\,000 = 270\,000 \end{aligned}$$

$$1\,000\,000 = 100 \cdot 10\,000$$

Przecinek przesunął się o sześć cyfr w prawo.

175

Temat lekcji:

Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem mnożenia i dzielenia ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000... (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- mnoży i dzieli ułamki dziesiętne przez 10, 100, 1000,
- porównuje ilorazowo ułamki dziesiętne typu: 10 (100, 1000) razy większe (mniejsze),
- rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym.

Wskazówki metodyczne

- Lekcję warto zacząć od mnożenia i dzielenia liczb naturalnych przez 10, 100, 1000 i zwrócenia uwagi na otrzymywane iloczyny i ilorazy.
- Na kolejnych lekcjach mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000 powinno być włączone do rachunku pamięciowego. Ćwiczenie tych umiejętności można przeprowadzić następująco: zapisujemy na tablicy 5 liczb w postaci dziesiętnej i wskazując jedną z nich, oczekujemy od uczniów podania iloczynu tej liczby i np. liczby 100. Ważne, aby uczniowie widzieli liczby, które mnożą lub dzielą przez 10, 100, 1000.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 19.

Komentarz do Sowa przypomina

Podczas mnożenia lub dzielenia ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000... trudności pojawiają się przy ustalaniu kierunku przesunięcia przecinka. Wystarczy wówczas uświadomić uczniom, że kiedy mnożymy liczbę, zwiększamy ją tyle razy, ile wskazuje drugi czynnik, a kiedy dzielimy – zmniejszamy tyle razy, ile wynosi dzielnik. Zatem podczas mnożenia należy liczbę powiększyć, czyli przesunąć przecinek w prawo, a podczas dzielenia – zmniejszyć, zatem przesunąć przecinek w lewo.

Komentarz do Przykładu 1.

W tym przykładzie warto zwrócić uwagę na zaznaczoną kolorem niebieskim liczbę zer w czynnikach, bo to one decydują, o ile miejsc w prawo należy przesunąć przecinek.

Materiały dydaktyczne



Liczby wymierne → Ułamki zwykłe i dziesiętne.
Przybliżanie i zaokrąglanie

Liczby wymierne → Działania na ułamkach dziesiętnych



Kartkówka 19

Inne

wsipnet.pl
klasowki.pl

Zeszyt ćwiczeń, cz. 2

s. 26–27

Zbiór zadań

s. 110–112

Komentarz do Przykładu 2.

Podczas analizy tego przykładu należy zwrócić uwagę na czytanie liczb z dużą liczbą cyfr po przecinku.

Komentarz do zadań 1.–3.

Zadania można wykonywać ustnie. Poza przedstawionymi wcześniej przykładami proponujemy również takie:

Ile razy mniejsza jest liczba 15,26 niż liczba 1526?

Przez jaką liczbę podzielono 7,5, aby otrzymać 0,075?

Zgadnij, jaka liczba powinna być wpisana w okienko: $\square \cdot 0,45 = 450$?

Komentarz do zadania 4.

Przed rozwiązaniem tego zadania proponujemy, aby uczniowie wymienili pary liczb, których iloczyn jest równy 10, 100 lub 1000. Dzięki temu łatwiej będzie zastosować przemienność i łączność mnożenia oraz wykonać obliczenia w pamięci.

Komentarz do zadania 5.

Dobrych uczniów warto zachęcić do zapisania rozwiązania zadania w postaci jednego wyrażenia arytmetycznego.

123

Przykład 2.

Obliczmy ilorazy.

a) $12,56 : 100\ 000$

b) $1,43 : 1\ 000\ 000$

$$\begin{aligned} \text{a) } 12,56 : 100\ 000 &= \\ &= (12,56 : 100) : 1\ 000 = \\ &= 0,1256 : 1\ 000 = 0,0001256 \end{aligned}$$

$$100\ 000 = 100 \cdot 1\ 000$$

Przecinek przesunął się o pięć cyfr w lewo.

$$\begin{aligned} \text{b) } 1,43 : 1\ 000\ 000 &= \\ &= (1,43 : 10) : 100\ 000 = \\ &= 0,143 : 100\ 000 = 0,00000143 \end{aligned}$$

$$1\ 000\ 000 = 10 \cdot 100\ 000$$

Przecinek przesunął się o sześć cyfr w lewo.

1. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Iloczynem liczb 10 000 i 1,009 jest A / B. A. 10 090 B. 100 900
Ilorazem liczb 7,06 i 10 000 jest C / D. C. 0,000706 D. 0,00706

2. Oblicz.

a) $10 \cdot 23,15$
 $100 \cdot 1,354$
 $65,24 \cdot 1000$

b) $94,87 \cdot 10\ 000$
 $10\ 000 \cdot 0,789$
 $10\ 000 \cdot 0,03845$

c) $85,6198 \cdot 100\ 000$
 $1\ 000\ 000 \cdot 0,6258$
 $0,0073 \cdot 100\ 000$

3. Oblicz.

a) $473 : 10$
 $753 : 100$
 $473 : 1000$

b) $91,5 : 1000$
 $15,6 : 100$
 $240,1 : 10$

c) $5070 : 10\ 000$
 $10\ 603,1 : 100\ 000$
 $0,3 : 1\ 000\ 000$

4. Połącz odpowiednio czynniki i oblicz.

a) $5 \cdot 3,8 \cdot 2$
 $2 \cdot 26,08 \cdot 5$
 $5 \cdot 2,78 \cdot 20$

b) $25 \cdot 7,3 \cdot 4$
 $5 \cdot 0,12 \cdot 20$
 $250 \cdot 0,625 \cdot 4$

c) $125 \cdot 27,8 \cdot 8$
 $8 \cdot 0,1009 \cdot 125$
 $200 \cdot 4,0031 \cdot 5$

5. Klasa 5a wybiera się z przewodnikiem na 10-godzinną wycieczkę autokarową. Za każdą godzinę wynajęcia autokaru trzeba zapłacić 464,40 zł, za godzinę pracy przewodnika – 22,50 zł, a za wstęp do muzeów dla wszystkich uczestników – 420,50 zł. Ile pieniędzy trzeba przygotować, aby opłacić tę wycieczkę?



176

Odpowiedzi do zadań

- AC
- a) 231,5; 135,4; 65 240 b) 948 700; 7890; 384,5
c) 8 561 980; 625 800; 730
- a) 47,3; 7,53; 0,473 b) 0,0915; 0,156; 24,01
c) 0,507; 0,106031; 0,0000003
- a) 38; 260,8; 278 b) 730; 12; 625
c) 27 800; 100,9; 4003,1
- 5289,50 zł

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- a) kolejno wierszami: 900; 9000; 90000; 7; 70; 7000; 10,3; 103; 1030; 10300; 77,07; 770,7; 7707; 77070; 0,06; 0,6; 6; 400,444; 4004,44; 40044,4; 400444
b) kolejno wierszami: 0,17; 0,017; 0,0017; 2,35; 0,235; 0,0235; 0,00235; 18,02; 1,802; 0,01802; 203,05; 20,305; 2,0305; 0,20305; 0,005; 0,00005; 0,000005
- kolejno wierszami: 3020; 3,8; 0,832; 132,32; 2020; 0,0105; 403; 240; 0,0001; 2,3601; 0,01852; 60,52
- 0,58; 5,8; 58; 0,58; 0,0058; 0,058; 0,58; 5,8; 0,058; 0,00058; start, 100 razy; 0,00058; 0,0058; 0,058; 0,58; 5,8; 58
- 8 kg
- D
- B, D

VI. Ułamki dziesiętne

123

- 6 Wartość kaloryczna 100 g pieczywa chrupkiego jest równa 1701 kJ. Jaka jest wartość kaloryczna 1 g tego pieczywa?
(1 kJ = 1000 J, 1 dżul [1 J] – jednostka energii).



- 7 Która liczba spełnia równanie $14,6 : a = 0,0146$?
A. 100 B. 10 000 C. 1000 D. 10

- 8 Napisz, jakie liczby zastępują litery.
a) $0,0156 \cdot a = 1560$ b) $106,8 : b = 0,1068$ c) $z : 1000 = 25,36$

- 9 Jezioro Gopło, które leży na Pojezierzu Gnieźnieńskim, ma powierzchnię 10 razy mniejszą od powierzchni jeziora Karun w Egipcie. Powierzchnia jeziora Karun to 218 km². Jaka powierzchnię ma jezioro Gopło?



jezioro Gopło

Sprawdź się!

- 1 Oblicz.
a) $100 \cdot 4,7002$ b) $0,038 \cdot 10\ 000$
c) $150,1 : 1000$ d) $2,8 : 100\ 000$
- 2 Która liczba spełnia równanie $0,708 \cdot a = 7080$?
A. 100 B. 10 C. 1000 D. 10 000
- 3 W małym opakowaniu jest 0,175 kg rodzynek, a w dużym opakowaniu – 10 razy więcej. Ile kilogramów rodzynek znajduje się w dużym opakowaniu?
- 4 W trzech hurtowniach było łącznie 425,6 t cukru. W pierwszej było 136,4 t, a w drugiej 10 razy mniej niż w pierwszej. Ile cukru było w trzeciej hurtowni?
- 5 Rozpiętość skrzydeł jednosilnikowego samolotu VAN Aircraft wynosi 7,01 m, a jego długość to 6,15 m. Podaj w metrach wymiary modelu tego samolotu wykonanego w skali:
a) 1 : 10, b) 1 : 100.

177

Komentarz do zadania 7.

Uczniowie powinni przyrzeć się dzielnej i ilorazowi i na podstawie obserwacji wybrać poprawną odpowiedź.

Komentarz do zadania 8.

Uczniowie powinni odgadnąć rozwiązania równań bez wykonywania obliczeń.

Komentarz do zadania 9.

Z jeziorem Gopło wiąże się ciekawa legenda. Można polecić uczniom, aby poszukali w różnych źródłach informacji na jej temat, a następnie podzielili się zdobytą wiedzą.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadania 1. i 2. można wykonać w pamięci, ale uzasadnienie obliczeń uczniowie powinni podać ustnie.

Odpowiedzi do zadań

6. 17,01 kJ

7. C

8. a) $a = 100\ 000$ b) $b = 1000$ c) $z = 25\ 360$

9. B

Sprawdź się!

1. a) 470,02 b) 380 c) 0,1501 d) 0,000028

2. D

3. 1,75 kg

4. 275,56 t

5. a) 0,701 m; 0,615 m b) 0,0701 m; 0,0615 m

Temat lekcji:

Mnożenie ułamków dziesiętnych przez liczbę naturalną (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- mnoży ułamki dziesiętne przez liczbę naturalną w pamięci lub sposobem pisemnym,
- uzasadnia wstawienie przecinka w iloczynie ułamka dziesiętnego i liczby naturalnej,
- porównuje ilorazowo ułamki dziesiętne,
- rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym.

Wskazówki metodyczne

Przed przystąpieniem do nauki mnożenia ułamków dziesiętnych przez liczby naturalne trzeba przypomnieć uczniom, że jeżeli jeden z czynników zwiększymy 10 (100, 1000...) razy, to iloczyn zwiększy się tyle samo razy.

Stąd: $32,4 \cdot 6 = (324 \cdot 6) : 10$.

Komentarz do Przykładu 1.

Po zapoznaniu uczniów z treścią zadania dajemy im czas na zastanowienie, w jaki sposób najlepiej je rozwiązać. Po wysłuchaniu propozycji uczniów przeprowadzamy analizę przykładu.

Następnie wykonujemy ćwiczenia z rachunku pamięciowego, zaczynając od prostych przykładów. Liczby trzeba dobrać tak, aby liczenie nie było skomplikowane. Proponujemy wykorzystać przykłady: $10,2 \cdot 3$; $0,04 \cdot 6$; $1,12 \cdot 4$; $2,3 \cdot 3$.

Komentarz do zadań 1. i 2.

Przykłady z punktów a) i b) zadania 1. oraz zadanie 2. można obliczyć w pamięci i ustnie podać odpowiedzi. Podczas obliczeń utrwalamy metodę polegającą na tym, że mnożymy przez siebie liczby naturalne, a w iloczynie wstawiamy przecinek w odpowiednim miejscu.

123

4. Mnożenie ułamków dziesiętnych przez liczbę naturalną

Przykład 1.

Danusia kupiła 7 opakowań suszonych owoców, po 0,25 kg w każdym. Ile kilogramów suszonych owoców kupiła Danusia?

Wykonajmy rysunek pomocniczy:

0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

Sposób I

$0,25 \text{ kg} = 25 \text{ dag}$

$7 \cdot 25 \text{ dag} = 175 \text{ dag} = 1,75 \text{ kg}$

Sposób II

$7 \cdot \frac{25}{100} = \frac{7 \cdot 25}{100} = \frac{175}{100} = 1,75 \text{ [kg]}$

Sposób III (pisemny)

$$\begin{array}{r} 0,25 \\ \cdot 7 \\ \hline 1,75 \end{array}$$

← dwie cyfry po przecinku

← dwie cyfry po przecinku



Liczby mnożymy tak jak liczby naturalne. Podpisujemy, nie zwracając uwagi na przecinek. Miejsce przecinka ustalamy po wykonaniu mnożenia.

Odpowiedź. Danusia kupiła 1,75 kg suszonych owoców.

1 Oblicz.

- a) $0,06 \cdot 9$ b) $0,18 \cdot 8$ c) $2,46 \cdot 12$ d) $15 \cdot 13,6$
 $5 \cdot 0,12$ $0,306 \cdot 7$ $4,08 \cdot 25$ $0,028 \cdot 45$
 $25 \cdot 0,04$ $5 \cdot 0,143$ $7,608 \cdot 85$ $3,06 \cdot 14$

2 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

- Liczbą 2 razy większą od liczby 1,74 jest A / B. A. 3,48 B. 34,8
 0,8 liczby 3 jest równe C / D. C. 2,44 D. 2,4

178

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Ułamki zwykłe i dziesiętne. Przybliżanie i zaokrąglanie
Inne	Liczby wymierne → Działania na ułamkach dziesiętnych wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 28–29
Zbiór zadań	s. 113–115

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. wierszami: 0,8; 4,5; 0,8; 0,18; 8,8; 1,8; 2,6; 0,3; 20
 2. wierszami: 18,72; 50; 324,8; 51,72; 659,1; 984,9
 3. wierszami: 1,2; 0,27; 6,3; 42,18; 75,24; 12; 2,7; 63; 421,8; 752,4
 4. A i D, B, B i C
 5. wierszami: 39,2; 3,92; 39,2; 3,92; 39,2; 39,2 6. 1820 MB

VI. Ułamki dziesiętne

123

- 3 Pan Rafał przygotował 20 opakowań mielonych migdałów po 0,15 kg. Oblicz w kilogramach masę mielonych migdałów.
- 4 Kurtka kosztowała 230 zł. W marcu zmieniono jej cenę. Ile kosztowała ta kurtka po marcowej obniżce?
- 5 Marzena chce kupić 3 zeszyty po 3,20 zł, 4 arkusze kolorowego papieru po 1,80 zł i 2 gumki po 1,25 zł za sztukę. Ile reszty otrzyma z 20 zł?
- 6 Wartość kaloryczna 100 g jogurtu jest równa 379 kJ. Oblicz wartość kaloryczną 1 g jogurtu, a następnie 82 g jogurtu.



Sprawdź się!

- 1 Oblicz.
a) $11 \cdot 4,3$ b) $28 \cdot 0,05$ c) $14,9 \cdot 16$
 $2,4 \cdot 41$ $5,04 \cdot 36$ $2,06 \cdot 33$
- 2 Iloczyn liczb 23 i 3,54 zmniejsz 10 razy.
- 3 Tosia posegregowała bilon ze skarbonki. Miała 12 monet po 0,50 zł, 28 – po 0,20 zł, 42 – po 0,10 zł i 32 – po 0,05 zł. Ile pieniędzy w bilonie miała Tosia?
- 4 Sekretarka ma 500 zł. Chce zamówić w hurtowni materiały biurowe: 15 segregatorów po 7,85 zł za sztukę, 8 paczek markerów do białych tablic po 26,40 zł za paczkę oraz 12 ryz papieru po 11,34 zł za ryzę. Czy wystarczy jej pieniędzy na realizację zakupów? Ile złotych jej zabraknie lub zostanie?
- 5 Wartość kaloryczna 100 g pieczywa chrupkiego jest równa 1701 kJ. Jaka jest wartość kaloryczna 30 g pieczywa, a jaka 45 dag takiego pieczywa?



179

Komentarz do zadania 5.

To istotne i praktyczne zadanie. Podwyżki i promocje są bliskie każdemu. W dziale „Ułamki zwykłe” również były podobne przykłady. Warto o tym przypomnieć uczniom i zwrócić ich uwagę na to, że wykonywane obliczenia będą takie same, a różnica polega tylko na zapisie ułamków.

Komentarz do zadania 6.

Uczniowie mogą samodzielnie rozwiązać to zadanie. Dobrych uczniów warto zachęcić do zapisania rozwiązania w postaci jednego wyrażenia arytmetycznego. Można zasugerować uczniom, aby na lekcjach przyrody lub na zajęciach z wychowawcą porozmawiali o znaczeniu wartości kalorycznej poszczególnych potraw i produktów spożywczych.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadania tu zawarte mogą być pracą domową, wówczas od sprawdzenia poprawności rozwiązań należy rozpocząć następną lekcję.

Odpowiedzi do zadań

1. a) 0,54; 0,6; 1 b) 1,44; 2,142; 0,715 c) 29,52; 102; 646,68
d) 204; 1,26; 42,84
2. AD
3. 3 kg
4. 161 zł
5. 70 gr
6. 3,79 kJ; 310,78 kJ

Sprawdź się!

1. a) 47,3; 98,4 b) 1,4; 181,44 c) 238,4; 67,98
2. 8,142
3. 17,40 zł
4. wystarczy; zostało 34,97 zł
5. 510,3 kJ; 765,45 kJ

Temat lekcji:

Mnożenie ułamków dziesiętnych (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- mnoży ułamki dziesiętne w pamięci lub sposobem pisemnym,
- uzasadnia wstawienie przecinka w iloczynie ułamków dziesiętnych,
- rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym z zastosowaniem ułamków dziesiętnych.

Wskazówki metodyczne

- Na początku lekcji trzeba przypomnieć umiejętności poznane na poprzedniej lekcji. W tym celu prosimy uczniów o udzielenie odpowiedzi na przykładowe pytania:
– Ile wynosi iloczyn liczb: 20,4 i 2 oraz 3,04 i 3?
– Ile cyfr po przecinku jest w iloczynie liczb: 5,04 · 6 oraz 0,023 · 3?
– Jaka liczba pomnożona przez 7 ma cztery miejsca po przecinku?
- Warto również przypomnieć uczniom mnożenie liczb naturalnych wielocyfrowych.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 20.

Komentarz do Przykładu 1.

W sposobie Stefana warto zwrócić uwagę na mianowniki ułamków.

Komentarz do Przykładu 2.

Zanim uczniowie poznają treść zadania, warto przypomnieć, co oznacza zapis: 5^2 , 5^3 ... oraz jakim działaniem można zastąpić potęgowanie. Następnie w oparciu o Przykład 1. warto zastanowić się, ile cyfr po przecinku będzie w iloczynie $2,5 \cdot 2,5$, a ile w $6,25 \cdot 2,5$. Po takim wprowadzeniu analiza przykładu nie przysporzy problemów.

Komentarz do Przykładu 3.

W tym przykładzie pokazujemy szybki sposób pamięciowego obliczenia iloczynu dwóch prostych liczb dziesiętnych. Proponujemy, aby uczniowie sami przeanalizowali podany przykład i na jego podstawie wyjaśnili sposób obliczenia wyników przykładów z zadania 1.

123

5. Mnożenie ułamków dziesiętnych

Przykład 1.

Zadaniem Stefana i Bartka było obliczenie iloczynu liczb 0,3 i 2,17. Każdy z chłopców zrobił to inaczej. Przeanalizujmy obydwa sposoby.

Sposób Stefana

$$0,3 \cdot 2,17 = \frac{3}{10} \cdot \frac{217}{100} = \frac{651}{1000} = 0,651$$

Sposób Bartka

$$\begin{array}{r} 2,17 \\ \cdot 0,3 \\ \hline 0,651 \end{array}$$

← dwie cyfry po przecinku
← jedna cyfra po przecinku
← trzy cyfry po przecinku



Ułamki w postaci dziesiętnej mnożymy tak jak liczby naturalne. W iloczynie oddzielamy przecinkiem tyle cyfr końcowych, ile cyfr po przecinku było razem w obu czynnikach.

Przykład 2.

Obliczmy sposobem pisemnym drugą i третią potęgę liczby 2,5.

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ \cdot 2,5 \\ \hline 125 \\ + 50 \\ \hline 6,25 \end{array}$$

← jedna cyfra po przecinku
← jedna cyfra po przecinku
← dwie cyfry po przecinku

$$(2,5)^2 = 6,25$$

$$\begin{array}{r} 6,25 \\ \cdot 2,5 \\ \hline 3125 \\ + 1250 \\ \hline 15,625 \end{array}$$

← dwie cyfry po przecinku
← jedna cyfra po przecinku
← trzy cyfry po przecinku

$$(2,5)^3 = 15,625$$

Przykład 3.

Obliczmy w pamięci $0,04 \cdot 0,9$.

$$0,04 \cdot 0,9 = 0,036$$

części setne części dziesiąte części tysięczne

Obliczamy: $4 \cdot 9 = 36$.

Określamy, jakie części będą w iloczynie. W czynnikach są dwie cyfry po przecinku i jedna cyfra po przecinku, więc w wyniku są trzy cyfry po przecinku – części tysięczne.

180

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Ułamki zwykłe i dziesiętne. Przybliżanie i zaokrąglanie
	Liczby wymierne → Działania na ułamkach dziesiętnych
Inne	Kartkówka 20
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	wsipnet.pl klasowki.pl
Zbiór zadań	s. 29–31
	s. 113–115

VI. Ułamki dziesiętne

123

- 1 Oblicz w pamięci.

a) $0,8 \cdot 0,5$	b) $0,02 \cdot 0,12$	c) $0,7 \cdot 0,4$	d) $0,054 \cdot 0,2$
$0,04 \cdot 0,9$	$0,93 \cdot 0,1$	$0,8 \cdot 0,011$	$0,012 \cdot 0,03$
- 2 Oblicz.

a) $5,3 \cdot 1,1$	b) $0,8 \cdot 95,1$	c) $45,01 \cdot 0,5$	d) $15,0402 \cdot 0,09$
$4,86 \cdot 2,4$	$2,07 \cdot 1,03$	$0,006 \cdot 3,54$	$0,45 \cdot 13,004$
- 3 Oblicz.

a) $(0,1)^2$	b) $(0,3)^2$	c) $(2,1)^2$	d) $(0,05)^3$	e) $(1,1)^3$
--------------	--------------	--------------	---------------	--------------
- 4 Skorzystaj z informacji, że $35 \cdot 18 = 630$, i podaj wynik.

a) $3,5 \cdot 1,8$	b) $0,35 \cdot 1,8$	c) $0,18 \cdot 0,35$	d) $0,035 \cdot 0,18$
--------------------	---------------------	----------------------	-----------------------
- 5 Iloczyn liczb 1,75 i 2,8 większy 10 razy.
- 6 Mama kupiła 4,6 kg pomarańczy po 5,50 zł za 1 kg i 3,8 kg grejpfrutów po 6,30 zł za 1 kg. Czy wystarczyło jej 50 zł na zapłacenie za te zakupy? Ile pieniędzy jej zostało lub ile musiała dołożyć?



Sprawdź się!

- 1 Oblicz.

a) $2,3 \cdot 5,63$	b) $0,7 \cdot 0,02$	c) $0,16 \cdot 7,08$	d) $(1,3)^2$
---------------------	---------------------	----------------------	--------------
- 2 Oblicz, ile trzeba zapłacić za 3,4 kg jabłek, jeżeli 1 kg tych jabłek kosztuje 4,75 zł.
- 3 Kuba zebrał w ogrodzie 2,1 kg poziomek i 1,5 razy więcej truskawek. Jaka była masa zebranych truskawek?

A. 1,5 kg	B. 3,15 kg	C. 3,5 kg	D. 0,7 kg
-----------	------------	-----------	-----------
- 4 Pani Joanna zarabia 3216,24 zł miesięcznie. W kwietniu otrzymała premię, która była równa 0,25 miesięcznego wynagrodzenia. Jakie wynagrodzenie łącznie z premią otrzymała w kwietniu pani Joanna?
- 5 Kilogram miodu spadziowego kosztuje 67,75 zł, a miodu lipowego 32,65 zł. W sklepie obydwa gatunki miodu sprzedaje się w słoikach po 0,8 kg. O ile więcej trzeba zapłacić za słoik miodu spadziowego niż za słoik miodu lipowego?

181

Komentarz do zadań 2. i 3.

Przed rozwiązaniem tych zadań proponujemy określić, ile cyfr po przecinku będzie w kolejnych iloczynach.

Komentarz do zadania 4.

W tym zadaniu istotne jest, aby wyjaśnić, co oznacza podana informacja i jakie ma znaczenie przy ustaleniu wartości kolejnych iloczynów. Uczniowie powinni zauważyć, że podanie wyniku to odpowiednie postawienie przecinka w liczbie 00000630.

Komentarz do zadania 6.

Rozwiązanie tego zadania rozszerzonej odpowiedzi nie powinno sprawić uczniom kłopotu. Warto, by dobrzy uczniowie zapisali rozwiązanie w postaci jednego wyrażenia arytmetycznego.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadania 4. i 5. sprawdzają umiejętność obliczania ułamka danej liczby. Proponujemy zachęcić uczniów do wykonania rysunków pomocniczych. Podane w zadaniach kwoty można przedstawić jako odcinki, na których zaznaczamy dany ułamek.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. kolejno wierszami: 0,06; 0,28; 4; 0,1; 0,028; 0,4; 0,12; 0,012; 0,0045
2. D
3. kolejno wierszami: 26,15; 14,22; 1,09672; 416,104; 148,16; 1584,5365; 44,184; 115,80541; 1096,3425
4. a) 0,58; 0,29; 1,16; 1,45; 11,6; 14,5; 58; 29 b) B, D
5. a) 3,64 b) 3,64 c) 0,0364 d) 0,00364 e) 0,364 f) 0,000364
6. 0,6; 1,8; 1,08; 1,944
7. a) 0,21 b) 0,721 c) 0,09 d) 14,67 e) 0,055 f) 1,546

Odpowiedzi do zadań

1. a) 0,54; 0,6; 1 b) 1,44; 2,142; 0,715
c) 29,52; 102; 646,68 d) 204; 1,26; 42,84
2. AD
3. 3 kg
4. 161 zł
5. 70 gr
6. 3,79 kJ; 310,78 kJ

Sprawdź się!

1. a) 12,949 b) 0,014 c) 1,1328 d) 1,69
2. 16,15 zł
3. 3,15 kg
4. 4020,3 zł
5. o 28,08 kg

Temat lekcji:

Dzielenie ułamków dziesiętnych przez liczbę naturalną (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- dzieli ułamki dziesiętne przez liczbę naturalną w pamięci lub sposobem pisemnym,
- porównuje ilorazowo ułamki dziesiętne,
- rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym,
- w rozwiązywaniu zadań otwartych i zamkniętych stosuje własne poprawne metody.

Komentarz do Sowa przypomina

Należy przypomnieć uczniom i utrwalić przedstawioną w przykładach ważną własność dzielenia. Pomoże ona w sprawnym rachunku pamięciowym.

Komentarz do Przykładu 1.

Przed przystąpieniem do analizy zadania przypomniemy pisemny sposób dzielenia liczb naturalnych. Dzielenie pisemne ułamków dziesiętnych jest dla uczniów najtrudniejszym działaniem. Wykonywanie kolejnych kroków podczas dzielenia pisemnego opisujemy w sposobie II. W sposobie I natomiast pokazujemy, jak w niektórych przypadkach dzielenie ułamków dziesiętnych można zastąpić ilorazem liczb naturalnych.

123

6. Dzielenie ułamków dziesiętnych przez liczbę naturalną

Sowa przypomina

$$32\ 000 : 800 = \underline{320 : 8} = 40$$

$$60\ 050 : 50 = \underline{120\ 100 : 100} = 1201$$

Dzielną i dzielnik możemy zmniejszyć lub zwiększyć tyle samo razy, a iloraz się nie zmieni.

Przykład 1.

Dziadek Edek 1,82 kg suszonych grzybów podzielił na 5 równych części między swoich bliskich. Ile ważyła jedna taka część?

Sposób I

$$1,82\text{ kg} = 1820\text{ g}$$

$$1820\text{ g} : 5 = 364\text{ g} = 0,364\text{ kg}$$

Sposób II

Podzielimy 1,82 : 5 sposobem pisemnym.

Doraźnie, w celu objaśnienia dzielenia, zastosujemy skróty: jedności – j., części dziesiąte – cz. dz., części setne – cz. s., części tysięczne – cz. t.

Przecinek w ilorazie piszemy nad przecinkiem w dzielnej.

$$\begin{array}{r} 0, \underline{3} \ 6 \ 4 \\ 1, \ 8 \ 2 : 5 \\ - \ 1 \ 5 \quad \downarrow \\ \quad 3 \ 2 \\ - \quad 3 \ 0 \\ \quad \quad 2 \ 0 \\ - \quad \quad 2 \ 0 \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

- 1 j. : 5 = 0 reszta 1 j., piszemy 0 nad jednościami,
- 1 j. zamieniamy na cz. dz.
- 1 j. to 10 cz. dz. i jeszcze 8 cz. dz. to razem 18 cz. dz.
- 18 cz. dz. : 5 = 3 cz. dz. reszta 3 cz. dz.
- 3 cz. dz. + 2 cz. s. = 32 cz. s.
- 32 cz. s. : 5 = 6 cz. s. reszta 2 cz. s.
- 2 cz. s. to 20 cz. t., dopisujemy 0
- 20 cz. t. : 5 = 4 cz. t. – piszemy 4 w cz. t.



Odpowiedź. Jedna część grzybów ważyła 0,364 kg.

182

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Ułamki zwykłe i dziesiętne. Przybliżanie i zaokrąglanie
Inne	Liczby wymierne → Działania na ułamkach dziesiętnych wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 32
Zbiór zadań	s. 115–117

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- 1,411; 12,05; 10,03
- kolejno wierszami: 0,4; 2,1; 0,03; 0,1; 0,03; 12,01
- 3,6; 0,036; 0,36
- C
- 6,25 zł

VI. Ułamki dziesiętne

123

- 1 Oblicz.
a) $345,6 : 3$ b) $801,6 : 4$ c) $2,405 : 5$ d) $0,504 : 9$
- 2 Rozsypano 0,8 kg nasion po równo do 5 torebek. Ile ważą nasiona w jednej torebce?
- 3 Za 3 kg cukierków zapłacono 73,80 zł. Jeden kilogram takich cukierków kosztuje
A. 25,60 zł B. 24,60 zł C. 49,20 zł D. 23,60 zł
- 4 Sześciokilogramowe opakowanie proszku do prania kosztowało 35,28 zł, a czterokilogramowe opakowanie – 24,12 zł. W którym opakowaniu 1 kg proszku był droższy? O ile?
- 5 Pani Danusia kupiła śliwki za 55,50 zł i 3 kg cukru po 2,86 zł za 1 kg, z których przygotowała powidlą śliwkowe. Powidłami wypełniła 9 jednakowych słoików. Jaki był koszt produktów zużytych do przygotowania jednego słoika powidła śliwkowych?



- 6 Rozwiąż równanie.
a) $x \cdot 6 = 25,02$ b) $11 \cdot b = 902,44$ c) $2c : 76,8 = 2,5$
- 7 Za 1 kg szynki trzeba zapłacić 24,50 zł. Ile kosztuje 20 dag takiej szynki?

Sprawdź się!

- 1 Oblicz.
a) $945,27 : 9$ b) $804,05 : 5$ c) $73,012 : 4$ d) $108,72 : 9$
- 2 Pasek ze skóry naturalnej kosztuje 146,70 zł, a ze skóry ekologicznej jest 6 razy tańszy. Ile kosztuje pasek ze skóry ekologicznej?
- 3 Rozwiąż równanie $a \cdot 7 = 187,74$.
- 4 Za 7 dag sera trzeba zapłacić 3,92 zł. Ile kosztuje 1 kg tego sera?
- 5 Wojtek został przewodniczącym szkoły. Głosowało na niego 63 uczniów i było to 0,7 wszystkich oddanych głosów. Ilu uczniów brało udział w głosowaniu?
A. 70 B. 81 C. 80 D. 90

183

Komentarz do zadań 1.–3.

Są to zadania o podstawowym stopniu trudności, dlatego można polecić uczniom ich samodzielne rozwiązanie. Do przedstawienia odpowiedzi wyznaczamy uczniów, którzy mają problemy z nauką matematyki. Rozwiązując proste zadania, mogą osiągnąć sukces na miarę swoich możliwości.

Komentarz do zadania 5.

Proponujemy, aby chętni uczniowie najpierw zapisali rozwiązanie zadania w postaci jednego wyrażenia arytmetycznego i dopiero potem wykonali obliczenia.

Komentarz do zadania 7.

To zadanie ma znaczący kontekst praktyczny. Podczas jego rozwiązywania utrwalamy sposób postępowania, którego ważnym elementem jest zamiana jednostek.

Komentarz do *Sprawdź się!*

Zestaw tych zadań może pełnić funkcję sprawdzianu podsumowującego lekcję. Uczniowie rozwiązują samodzielnie zadania i po uzgodnionym czasie sprawdzają poprawność rozwiązań wspólnie z nauczycielem. Poprawne rozwiązania powinny być nagradzane.

Odpowiedzi do zadań

1. a) 115,2 b) 200,4 c) 0,481 d) 0,056
2. 0,16 kg
3. B
4. w mniejszym; o 15 gr
5. 7,12 zł
6. a) $x = 4,17$ b) $b = 82,04$ c) $c = 96$
7. 4,90 zł

Sprawdź się!

1. a) 105,03 b) 160,81 c) 18,253 d) 12,08
2. 24,45 zł
3. $a = 26,82$ zł
4. 56 zł
5. D

Tematy lekcji:

1. Dzielenie ułamków dziesiętnych (1 h)
2. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem dzielenia ułamków dziesiętnych (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- dzieli ułamki dziesiętne przez ułamki dziesiętne w pamięci lub sposobem pisemnym,
- porównuje ilorazowo ułamki dziesiętne,
- oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych, w których występują ułamki dziesiętne, stosując kolejność wykonywania działań (w zakresie poznanych działań),
- rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym,
- rozwiązuje równania z zastosowaniem działań na ułamkach dziesiętnych,
- w rozwiązywaniu zadań otwartych i zamkniętych stosuje własne poprawne metody.

Wskazówki metodyczne

- Lekcję trzeba rozpocząć od przypomnienia i utrwalenia umiejętności mnożenia i dzielenia ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000... Następnie można przeprowadzić krótki trening pamięciowy z zastosowaniem poznanych zagadnień. Warto także powtórzyć zapisywanie dzielenia w postaci ułamka, czyli zastępowanie znaku dzielenia kreską ułamkową. Na ogół uczniowie nie mają kłopotów z dzieleniem ułamków dziesiętnych przez liczby naturalne. Należy im przypomnieć o zamianie jednostek wyższego rzędu na 10 jednostek rzędu bezpośrednio niższego.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 21.

Komentarz do Przykładu 1.

Dzielenie przez liczbę dziesiętną jest trudne. Przed analizą przykładu proponujemy wykonać ćwiczenie. Na tablicy wypisujemy kilka różnych liczb w postaci dziesiętnej. Nauczyciel wskazuje jedną z nich, a uczeń podaje, przez którą liczbę 10, 100 czy 1000 trzeba ją pomnożyć, aby wynik był najmniejszą liczbą naturalną. Następnie warto rozszerzyć kilka ułamków zwykłych. Ułatwi to zrozumienie podanego przykładu.

Komentarz do Przykładu 2.

W tym zadaniu stosujemy algorytm dzielenia ułamków dziesiętnych w kontekście praktycznym.

123

7. Dzielenie ułamków dziesiętnych

Przykład 1.

Obliczmy iloraz liczby 28,5 przez liczbę 0,03.

Ułamek dziesiętny umiemy już dzielić przez liczbę naturalną. Rozszerzamy więc ułamki tak, by w mianowniku była liczba naturalna.

$$28,5 : 0,03 = \frac{28,5}{0,03} = \frac{28,5 \cdot 100}{0,03 \cdot 100} = \frac{2850}{3} = 950$$

W mianowniku są części setne. Rozszerzamy ułamek przez 100.

Sprawdzenie. $950 \cdot 0,03 = 28,50 = 28,5$

Przykład 2.

Wiktor kupił 9,5 kg jabłek i zapłacił za nie 25,65 zł. Ile kosztują 4 kg takich jabłek?

Najpierw trzeba obliczyć, ile kosztuje 1 kg jabłek.

$25,65 : 9,5 = \frac{25,65}{9,5}$ Znak dzielenia zastąpiliśmy kreską ułamkową.

$$\frac{25,65}{9,5} = \frac{25,65 \cdot 10}{9,5 \cdot 10} = \frac{256,5}{95}$$

W mianowniku są części dziesiąte. Rozszerzamy ułamek przez 10.

Wykonajmy dzielenie sposobem pisemnym.

$$\begin{array}{r} 2,7 \\ 95 \overline{) 256,5} \\ \underline{190} \\ 665 \\ \underline{665} \\ 0 \end{array}$$

Sprawdzenie. $95 \cdot 2,7 = 256,5$

Zatem:

$25,65 \text{ zł} : 9,5 = 2,70 \text{ zł}$ – cena 1 kg jabłek.

Obliczamy, ile kosztują 4 kg jabłek.

$4 \cdot 2,70 \text{ zł} = 10,80 \text{ zł}$

Odpowiedź. 4 kg jabłek kosztują 10,80 zł.



184

Materiały dydaktyczne

	Liczby wymierne → Ułamki zwykłe i dziesiętne. Przybliżanie i zaokrąglanie
	Liczby wymierne → Działania na ułamkach dziesiętnych
Inne	Kartkówka 21
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	wsipnet.pl klasowki.pl
Zbiór zadań	s. 33–34
	s. 115–117

VI. Ułamek dziesiętny

123

1 Oblicz.

- a) $25,68 : 0,4$ b) $246 : 0,6$ c) $3,57 : 0,05$
 $34,02 : 0,9$ $473 : 1,1$ $14,5 : 0,25$
 $14,4 : 1,2$ $288 : 0,12$ $54,6 : 1,05$

2 Ilorazem liczby 0,48 przez liczbę 0,8 jest

- A. 60 B. 6 C. 0,6 D. 0,06

3 Maksymalna masa ciała świstaka na koniec jesieni może wynosić 8 kg, a na wiosnę 3,2 kg. Ile razy większa może być masa ciała świstaka jesienią niż wiosną?



4 W tabelce przedstawiono wyniki reprezentacji dziewcząt i chłopców pewnej szkoły na Międzyszkolnych Zawodach Lekkoatletycznych.

Imiona dzieci	Agnieszka	Kasia	Ania	Sebastian	Bartek	Karol
Konkurencje						
Skok w dal z rozbiegu	1,84 m	1,92 m	1,79 m	2,76 m	2,92 m	2,80 m
Rzut piłeczką palantową	13,5 m	14,6 m	14,2 m	19,3 m	22,72 m	18,9 m

a) Ile razy dłuższy był skok w dal z rozbiegu Sebastiana niż Agnieszki?

b) Ile razy bliżej niż Bartek rzuciła Ania piłeczką palantową?

5 Rozwiąż równanie.

- a)
- $2,5 \cdot c = 135,1$
- b)
- $1,2 \cdot b = 38,88$
- c)
- $4c : 6,2 = 5,4$

6 Za 3,5 kg mandarynek mama zapłaciła 23,80 zł. Ile trzeba zapłacić za 2 kg takich mandarynek?

7 Ile Ania zapłaciła za 15 dag twarogu, jeżeli 1 kg kosztował 12 zł?

- A. 1,60 zł B. 1,20 zł C. 60 gr D. 1,80 zł

8 Pan Konrad kupił dolary i zapłacił za nie 1728 zł. Kurs dolara w dniu zakupu wynosił 3,60 zł. Ile dolarów kupił pan Konrad?

9 Skorzystaj z informacji, że $60,8 : 16 = 3,8$ i uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

- Ilorazem liczb 6,08 i 1,6 jest liczba A / B. A. 0,38 B. 3,8
 Ilorazem liczb 60,8 i 1,6 jest liczba C / D. C. 38 D. 380

185

Komentarz do zadań 1. i 2.

Wskazane, aby uczniowie, doskonaląc umiejętność dzielenia ułamków dziesiętnych, pokazywali, że rozumieją algorytm tego działania. W tym celu warto, aby wykonując kolejne przykłady na tablicy, komentowali: *Dzielną i dzielnik mnożę przez 10, 100... czyli przesuwam przecinek o 1, 2 miejsca w prawo.*

Komentarz do zadania 4.

Rozwiązanie zadania na podstawie danych zawartych w tabelce wymaga uważnego czytania ze zrozumieniem i wyboru odpowiednich danych. Nie jest to zadanie trudne, pod warunkiem że do tego typu zadań często wracamy i ćwiczymy potrzebne umiejętności. Podczas rozwiązywania zadania uczeń powinien wskazywać, z których wielkości z tabelki skorzystał, aby odpowiedzieć na zadane pytania. Można także porozmawiać z uczniami o ich osiągnięciach sportowych.

Komentarz do zadania 7.

Rozwiązanie tego zadania uczniowie powinni rozpocząć od wyeliminowania odpowiedzi, które nie spełniają warunków zadania (B, C). Wielu uczniów od razu poprawnie oszacuje wynik i wskaże odpowiedź D. Warto również przedstawić uczniom sposób obliczenia, w którym przeprowadzamy następujące rozumowanie: *Jeżeli 1 kg twarogu kosztuje 12 zł, to za 10 dag zapłacimy 1,20 zł, a ponieważ 5 dag to połowa 10 dag, więc za 5 dag zapłacimy 0,60 zł. Zatem za 15 dag twarogu zapłacimy $1,20 + 0,60 = 1,80$ [zł].*

Komentarz do zadania 9.

To ważny typ zadania. Uczy obserwacji, logicznego myślenia, wyciągania wniosków. Uczeń powinien zauważyć, że wszystkie podane wyniki zapisane są takimi samymi cyframi z dopisaną ewentualnie cyfrą 0. Trzeba przypomnieć uczniom, że wynik dzielenia się nie zmienia, jeżeli dzielną i dzielnik pomnożymy przez tę samą liczbę, tak by dzielnik był liczbą naturalną.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. kolejno wierszami: 50; 13; 61; 2; 0,5; 5
 2. b) $\frac{188}{8}$ c) $\frac{21645}{9}$ d) $\frac{415,2}{12}$ e) $\frac{38570}{19}$ f) $\frac{667,7}{11}$;
 126,1; 23,5; 2405; 34,6; 2030; 60,7
 3. A, D 4. 0,53; 2,05; 13,9; 0,24
 5. a) 29 b) 28,5 c) 6,9 d) 342
 6. a) TAK b) NIE c) TAK d) NIE
 7. $a = 1,04$; $b = 0,0035$ 8. C

Odpowiedzi do zadań

1. a) 64,2; 37,8; 12 b) 410; 430; 2400 c) 71,4; 58; 52
 2. C 3. 2,5
 4. a) 1,5 b) 1,6
 5. a) $c = 54,04$ b) $b = 32,4$ c) $c = 8,37$
 6. 13,60 zł 7. D
 8. 480 9. BC

Komentarz do zadania 11.

Ważne, aby uczniowie dostrzegli, że jest to zadanie na obliczenie liczby na podstawie jej ułamka. Po sprawdzeniu treści ułożonych przez uczniów zadań warto porozmawiać o różnych sposobach jego rozwiązania.

I sposób: $24 : 0,6 = 40$

II sposób: $24 : 6 \cdot 10 = 40$

III sposób: $0,6 \cdot x = 24$

Komentarz do Wyzwania

W wagonach znajduje się 936 t towaru, który można przewieźć samochodami ciężarowymi na wiele sposobów. Jeżeli używa się tylko samochodów o ładowności 6 t, potrzeba 156 samochodów, a przy ładowności 8 t potrzeba 117 samochodów.

Uczniowie klasy 5 mogą dobierać inne wyniki metodą prób i błędów. Powinni zauważyć, że trzy samochody o ładowności 8 t można zastąpić czterema samochodami o ładowności 6 t.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadania można rozwiązać, pracując w grupach. Klasę dzielimy na zespoły 3–4-osobowe, każdy z nich otrzymuje do rozwiązania jeden z zestawów zadań. Nasza propozycja przydziału zadań jest następująca:

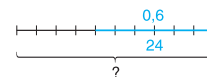
GRUPA I	GRUPA II	GRUPA III
zadanie 1a	zadanie 1b	zadanie 1c
zadanie 3a	zadanie 3b	zadanie 3c
zadanie 4	zadanie 2	zadanie 5

W zależności od liczby uczniów w klasie dany zestaw może rozwiązać więcej niż jeden zespół uczniów. Czas pracy to około 5 minut. Po uzgodnionym czasie uczniowie prezentują rozwiązania zadań. Dobrze, aby każdy członek grupy zabrał głos.

123

- 10 W szkolnym konkursie matematycznym 12 uczniów, czyli 0,4 wszystkich uczestników, uzyskało maksymalną liczbę punktów. Ilu uczniów brało udział w konkursie?

- 11 Ułóż zadanie do rysunku obok. Rozwiąż to zadanie i zapisz odpowiedź.



Wyzwanie



Pociąg towarowy składa się z trzech rodzajów wagonów, w których może zmieścić się 21,5 t lub 29,5 t, lub 42,6 t buraków cukrowych. Do samochodu ciężarowego można załadować 6 t lub 8 t buraków cukrowych. Ile samochodów ciężarowych i jakiego rodzaju potrzeba, aby przewieźć wszystkie buraki załadowane do pociągu, który ma w swoim składzie po 10 wagonów każdego rodzaju?

Sprawdź się!

- Oblicz.
a) $47,105 : 0,5$ b) $87,2 : 1,6$ c) $63,801 : 0,09$
- Za 1,50 kg mandarynek Krzyś zapłacił 7,20 zł. Ile kosztował 1 kg mandarynek?
- Rozwiąż równanie.
a) $p : 1,2 = 32,4$ b) $0,176 : m = 0,2$ c) $2a : 4,8 = 3,05$
- Pani Agata zrobiła na zimę 7,35 l soku malinowego i było to 0,3 wszystkich przygotowanych przez nią soków. Ile litrów soków przygotowała na zimę pani Agata?
- Samolot z Krakowa do Chicago przeleciał 7603 km. Wystartował o godz. 18.20, a lot trwał 10,3 h. Ile minut leciał ten samolot? Z jaką prędkością średnią leciał? Wynik podaj w zaokrągleniu do jedności.



186

Odpowiedzi do zadań

10. 30

Sprawdź się!

- a) 94,21 b) 54,5 c) 708,9
- 4,80 zł
- a) $p = 38,88$ b) $m = 0,88$ c) $a = 7,32$
- 24,5 l
- 618 minut; 738 km/h

8. Ułamki dziesiętne o mianowniku 100



Sowa uczy

Wśród ułamków dziesiętnych wyróżniamy te, których mianownikiem jest liczba 100.

I tak $\frac{1}{100} = 0,01$ pewnej wielkości to 1 procent tej wielkości.

Wyraz procent zastępujemy znakiem %, 1% czytamy: 1 procent.

Procent to inny zapis ułamka o mianowniku 100.

$$5\% \text{ to } \frac{5}{100} = 0,05 \quad 10\% \text{ to } \frac{10}{100} = 0,1 \quad 100\% \text{ to } \frac{100}{100} = 1$$

Przykład 1.

Zamieńmy liczby na procenty.

a) $\frac{25}{100}$, $\frac{7}{100}$ b) $\frac{1}{2}$, 3 c) $\frac{16}{200}$, $\frac{72}{600}$ d) $\frac{3}{4}$, 0,4

a) Ułamki o mianowniku 100 zapiszmy jako procent.

$$\frac{25}{100} = 25\% \quad \frac{7}{100} = 7\%$$

b) Rozszerzmy ułamki do mianownika 100.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 50}{2 \cdot 50} = \frac{50}{100} = 50\% \quad 3 = \frac{3}{1} = \frac{3 \cdot 100}{1 \cdot 100} = 300\%$$



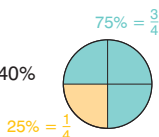
c) Skróćmy ułamki tak, aby miały mianownik 100.

$$\frac{16}{200} = \frac{16 : 2}{200 : 2} = \frac{8}{100} = 8\% \quad \frac{72}{600} = \frac{72 : 6}{600 : 6} = \frac{12}{100} = 12\%$$

d) Liczbę można też zamienić na procent, mnożąc ją przez 100%.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot \frac{25}{100}}{4 \cdot \frac{25}{100}} = 75\%$$

$$0,4 = 0,4 \cdot 100\% = 40\%$$



187

Materiały dydaktyczne

	Obliczenia praktyczne → Obliczenia procentowe
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 35–37
Zbiór zadań	s. 153–156

Tematy lekcji:

1. Ułamki dziesiętne o mianowniku 100 (1 h)
2. Ułamki dziesiętne o mianowniku 100 w zadaniach (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- zapisuje ułamki o mianowniku 100 w postaci procentu i odwrotnie,
- zaznacza 5%, 10%, 20%, 25%, 50%, 75%, 100% powierzchni dowolnych prostokątów,
- zaznacza 25%, 50%, 75%, 100% powierzchni koła,
- odczytuje wyróżniony procent prostokąta i koła,
- interpretuje 100% wielkości jako całość, 50% jako połowę, 10% jako $\frac{1}{10}$, 25% – jako $\frac{1}{4}$, 75% – jako $\frac{3}{4}$, 1% – jako 0,01 część danej wielkości liczbowej,
- dostrzega zależności między danymi informacjami,
- rozwiązuje zadania z zastosowaniem procentów.

Wskazówki metodyczne

- Pojęcie procentu i jego nazwa wywodzą się z łaciny. Pojęcie to stosowano wcześniej niż ułamki.

Obliczenia procentowe towarzyszą nam powszechnie w życiu codziennym, a mimo to są uznawane za trudne. Można zmienić nastawienie uczniów do procentów, pokazując ich zastosowanie w życiu codziennym: w środkach masowego przekazu, sklepach, bankach. Ważne, aby uczniowie zauważyli, że mają już wiele umiejętności związanych z obliczeniami procentowymi.

- Warto pokazać, że ułamki zwykle o mianownikach 10, 100... to ułamki dziesiętne i możemy je zapisywać w postaci dziesiętnej. Spośród tych ułamków wybieramy tylko te, których mianownikiem jest liczba 100, i to one określają procent.
- Doskonałą ilustracją procentów jest odcinek o długości 1 dm = 100 mm, wówczas 1 mm to 1% długości odcinka.

Komentarz do Przykładu 1.

Zamiana procentu na ułamek to świetne ćwiczenie dotyczące dzielenia przez 100 (przesuwanie przecinka). Warto omówić wszystkie prezentowane tutaj sposoby zamiany liczb na procenty.

Początkowo wystarczy ilustrować procenty na kwadratach o wymiarach 10 kratek × 10 krutek lub dowolnych prostokątach utworzonych ze 100 krutek. Część wielkości można też pokazać na odpowiednio składowanym kole.

Komentarz do Przykładu 2.

Warto zwrócić uwagę uczniów na informację, że sad to całość, czyli 100%. W tym zadaniu całość ilustruje odcinek. Uczniowie potrafią już zaznaczyć $\frac{1}{4}$ całości, czyli 25%. Potrafią też odczytać, jaką część sadu zajmują grusze. Taki jak w tym przykładzie sposób przedstawiania procentów ułatwi uczniom zrozumienie tematu.

Komentarz do Przykładu 3.

Podczas wykonywania rysunku do zadania uzgadniamy wspólnie z uczniami, jaka długość odcinka jednostkowego (ilustrującego całą grupę) będzie najlepsza w przedstawieniu danych. Możemy zasugerować odcinek o długości 1 dm i spytać, czym się kierowaliśmy, wybierając taką długość.

Warto podkreślić, że w tym zadaniu liczba 1 oznacza całą grupę dzieci przychodzącą na basen.

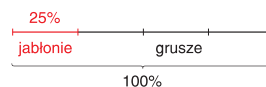
123

Przykład 2.

W sadzie rosły jabłonie i grusze. Jabłonie stanowiły 25% wszystkich drzew. Jaki procent drzew stanowiły grusze?

Wykonajmy rysunek pomocniczy.

Wszystkie drzewa to 100% – cały odcinek, a 25% to $\frac{1}{4}$ odcinka.



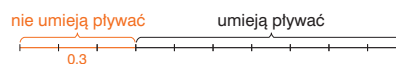
Jabłonie to 25% wszystkich drzew, a grusze to $100\% - 25\% = 75\%$.

Odpowiedź. Grusze to 75% wszystkich drzew w sadzie.

Przykład 3.

Ze wszystkich dzieci przychodzących na basen tylko 0,3 dzieci nie umiało pływać. Ile procent dzieci umiało już pływać?

Przedstawmy dane na rysunku.



Wszystkie dzieci przychodzące na basen to cała grupa, czyli $1 = 100\%$.

Sposób I

Zamieńmy ułamek 0,3 na procent:

$0,3 = 0,30 = 30\%$ – tyle procent dzieci nie umiało pływać.

Procent dzieci, które umiały pływać to:

$100\% - 30\% = 70\%$.

Sposób II

Ponieważ 0,3 dzieci nie umiało pływać, to pozostałe stanowią:

$1 - 0,3 = 0,7$ wszystkich dzieci.

Zamieńmy ten ułamek na procent.

$0,7 = 0,70 = 70\%$

Odpowiedź. Umiało już pływać 70% dzieci przychodzących na basen.



188

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. kolejno wierszami: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{1}{20}$;

1; 0,5; 0,75; 0,4; 0,9; 0,05;

100%, 25%, 75%, 35%, 1%

3. 5%

4. D

5. zamalowano kolejno: 1 część, 2 części i 3 części kwadratu

6. zamalowano: a) 1 cm b) 5 cm c) 2,5 cm d) 7,5 cm

7. $60\% = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} = \frac{30}{50} = \frac{12}{20}$;

$50\% = \frac{11}{20} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100}$

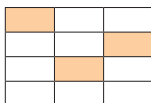
8. zamalowano: a) 10 części b) 5 części c) 15 części d) 8 części

9. a) 0,2 = 20% b) 0,6 = 60% c) 0,4 = 40% d) 0,04 = 4%

10. a) TAK b) NIE c) NIE d) NIE

Przykład 4.

Ile procent prostokąta jest zamalowane, a ile procent nie jest zamalowane?

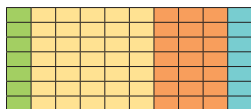


Prostokąt na rysunku jest podzielony na 12 jednakowych części. Zamalowane są 3 części. Jest to $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ prostokąta, $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$.

Ponieważ cały prostokąt to 100%, więc część niezamalowana to: $100\% - 25\% = 75\%$.

Odpowiedź. Zamalowane jest 25% prostokąta, a nie jest zamalowane 75% tego prostokąta.

1. Podaj przykłady stosowania w życiu codziennym procentów.
2. Zamień procenty na ułamki.
a) 25%, 50%, 75%, 90% b) 10%, 500%, 800%, 100%
3. Zamień liczby na procenty: 0,02; 0,10; $\frac{25}{500}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{12}{300}$; 3; 2,4.
4. Narysuj prostokąt. Zamaluj na zielono 25% tego prostokąta. Ile procent prostokąta jest niezamalowane?
5. Firma produkująca środek bakteriobójczy podała w ulotce, że usuwa on 95% wszystkich bakterii. Jaki ułamek wszystkich bakterii nie jest usuwany przez ten środek?
6. W pewnej klasie $\frac{2}{5}$ uczniów uprawia sport. Ile procent uczniów tej klasy nie uprawia sportu?
7. Na podstawie rysunku odpowiedz na pytania.
a) Jaka część prostokąta jest pomalowana na kolor: zielony, żółty, pomarańczowy, a jaka na niebieski?
b) Jakim procentem prostokąta jest każda z pomalowanych części?

**Komentarz do Przykładu 4.**

W tym przykładzie pokazujemy, że nie zawsze procent danej wielkości jest przedstawiony na prostokącie o 100 jednostkach. Uczeń powinien nabrać przekonania, że odczytywanie procentu lub jego zaznaczanie jest mu w pewnym stopniu znane, bo opiera się na zaznaczaniu lub odczytywaniu ułamka. Nową umiejętnością jest tylko zamiana ułamka na procent. Ważne, aby uczniowie zauważyli, że figura została podzielona na równe części, i najpierw zapisali odpowiedni ułamek, a później zamienili go na procent.

Komentarz do zadania 1.

To zadanie uczniowie mogą wykonać, pracując w grupach. Można też ogłosić konkurs na zrobienie najciekawszego plakatu ilustrującego różne zastosowania procentów. Wówczas ustalamy z uczniami termin wykonania pracy, a po jego upływie organizujemy prezentację prac. Po omówieniu prac wybieramy zwycięzców.

Komentarz do zadań 2. i 3.

Zadania można wykonać ustnie. Ważne, aby uczniowie nie tylko podawali wyniki, ale także wyjaśniali, jakie przekształcenia wykonywali w pamięci.

Komentarz do zadania 7.

Dobrych uczniów zachęcamy, aby ułożyli inne pytania do zamieszczonego tu rysunku i odpowiedzieli na nie.

Odpowiedzi do zadań

2. a) $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{3}{4} = 0,75$; $\frac{9}{10} = 0,9$ b) $\frac{1}{10} = 0,1$; 5; 8; 1
3. 2%; 10%; 5%; 50%; 80%; 4%; 300%; 240%
4. 75%
5. $\frac{1}{20} = 0,05$
6. 60%
7. a) zielony: $\frac{1}{10}$, żółty: $\frac{1}{2}$, pomarańczowy: $\frac{3}{10}$, niebieski: $\frac{1}{10}$
b) od lewej: 10%, 50%, 30%, 10%

Komentarz do zadania 9.

To ważne zadanie. Przed jego rozwiązaniem proponujemy narysować na tablicy bukiet kwiatów, w którym są 3 róże czerwone, 5 róż białych i 4 róże żółte. Następnie poprosić uczniów o podanie, jaką częścią tego bukietu są róże poszczególnych kolorów. Podobne zadania uczniowie już rozwiązywali, więc teraz powinni wykorzystać poznane umiejętności. Sami muszą zauważyć, że aby rozwiązać to zadanie, trzeba obliczyć sumę kwiatów w bukiecie (w zadaniu 9. sumę rozegranych meczów). Pojęcia występujące w pytaniu a) są powtórzeniem wcześniej poznanych. Nowe umiejętności (zamiana ułamków na procent) występują w pytaniu b).

Komentarz do zadania 10.

Rozwiązując to zadanie, uczniowie utrwalać wiadomości, że 50% to połowa, a 25% to ćwierć danej wielkości.

Komentarz do *Sprawdź się!*

Zadania sprawdzają podstawowe umiejętności z zakresu rozumienia pojęcia procentu oraz zamiany procentu na ułamek, i odwrotnie. Można je rozwiązać w formie konkursu na koniec drugiej lekcji. W ciągu 5 minut uczniowie rozwiązują zadania, a następnie wymieniają się zeszytami i pod kierunkiem nauczyciela sprawdzają poprawność uzyskanych wyników.

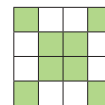
123

8. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
 Połowa zebranych przez Sławka grzybów to maślaki, więc pozostałe to A / B wszystkich grzybów. A. 50% B. 25%
 Ćwierć wszystkich ocen Kuby to stopnie bardzo dobre, więc pozostałe to C / D wszystkich ocen. C. 50% D. 75%
9. Drużyna koszykówki wygrała 5 meczów, przegrała 4 mecze, a 1 zremisowała.
 a) Jaką częścią wszystkich meczów są wygrane, a jaką zremisowane mecze?
 b) Ile procent wszystkich meczów wygrała ta drużyna, a ile procent meczów zremisowała?
10. Ile to jest:
 a) 50% metra, b) 25% godziny, c) 50% doby?
11. Za 140 zł Kuba kupił 3 samochodziki i 4 zwierzaki do swojej kolekcji. Cena zwierzaka była równa 50% ceny samochodzika. Ile trzeba zapłacić za 2 takie samochodziki i 3 zwierzaki?



Sprawdź się!

1. Zamień procenty na ułamki: 1%, 25%, 200%.
2. Ułamek $\frac{2}{5}$ to
 A. 10% B. 50%
 C. 60% D. 40%
3. Ile procent kwadratu zamalowano?
4. W sklepie dokonano posezonowej obniżki ceny obuwia letniego o $\frac{1}{5}$ pierwotnej ceny. O ile procent obniżono cenę obuwia?
5. Prostokąt podzielono na 24 równe części, z których 6 pokolorowano. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
 Pokolorowano A / B prostokąta. A. 6% B. 25%
 Nie pokolorowano C / D prostokąta. C. 18% D. 75%



190

Odpowiedzi do zadań

8. AD
 9. a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$ b) 50%, 10%
 10. a) 50 cm b) 15 minut c) 12 godzin
 11. 98 zł

Sprawdź się!

1. 0,01; 0,25; 2
 2. D
 3. 50%
 4. o 20%
 5. BD

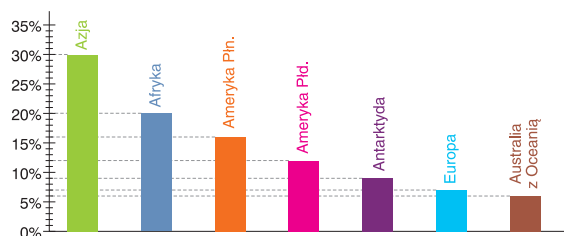
9. Diagramy procentowe

Sowa uczy

Jeżeli na diagramie słupkowym, prostokącie lub kole zależności pomiędzy danymi, zamiast w postaci ułamków, przedstawimy w postaci procentów, to otrzymamy diagram procentowy. Diagramy procentowe mają różnorodne zastosowanie, np. w bankach, w handlu, w reklamach, w zestawieniach statystycznych.

Przykład 1.

Przyjrzyjmy się diagramowi przedstawiającemu, ile procent wszystkich lądów na Ziemi zajmują w przybliżeniu poszczególne kontynenty.



Z diagramu można odczytać, że:

- Azja zajmuje około 30% lądów,
- Ameryka Północna – około 16%,
- Antarktyda – około 9%,
- Afryka – około 20%,
- Ameryka Południowa – około 12%,
- Europa zajmuje około 7% wszystkich lądów, a Australia z Oceanią tylko około 6% lądów,
- największym kontynentem jest Azja, a najmniejszym – Australia z Oceanią,
- Ameryka Północna jest większa od Ameryki Południowej,
- Europa jest mniejsza od Antarktydy.



191

Temat lekcji:

Diagramy procentowe (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- gromadzi i porządkuje dane,
- odczytuje dane z procentowych diagramów słupkowych, prostokątnych, kołowych,
- rysuje diagramy procentowe,
- interpretuje dane zawarte na diagramach procentowych,
- czyta ze zrozumieniem prosty tekst zawierający informacje wyrażone w procentach,
- rozwiązuje zadania tekstowe na podstawie danych zawartych na diagramach procentowych.

Wskazówki metodyczne

- Część zadań z tego tematu trzeba wykonać ustnie. Uczniów warto podzielić na grupy, aby podczas wykonywania ćwiczeń mogli wymieniać się wiadomościami. Ciekawym doświadczeniem będzie przedstawianie niektórych danych na diagramie prostokątnym, kołowym lub słupkowym.
- Warto z godzin dla nauczyciela przeznaczyć jeszcze jedną godzinę na realizację tego tematu. Wówczas na drugiej godzinie lekcyjnej uczniowie mogą pracować w grupach nad wykonaniem ankiety na określony temat (np. hobby, zwierzęta w moim domu, zajęcia pozalekcyjne), przeprowadzeniem jej, a następnie przedstawieniem jej wyników na diagramie prostokątnym.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 22.

Komentarz do Przykładu 1.

W tym przykładzie uczniowie uczą się odczytywania informacji z diagramu procentowego. Można polecić samodzielną analizę tekstu i diagramu, a następnie odpytać uczniów z informacji tam zawartych. Warto poprosić, aby uczniowie samodzielnie zadawali inne pytania dotyczące tego diagramu i wskazywali osoby, które na nie odpowiedzą.

Materiały dydaktyczne

	Obliczenia praktyczne → Obliczenia procentowe
	Kartkówka 22
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 38–40
Zbiór zadań	s. 159–164

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. a) SD – 20%, RP – 30%, BP – 10% b) BS – 40% c) BS
- d) BP – 10%, SD – 20%, RP – 30%, BS – 40%
2. 14, 7, 7
3. a) 5%, 20%, 75%
5. a) 5% b) 176, 44, 110, 22, 66, 22

Komentarz do Przykładu 2.

Warto omówić z uczniami, skąd wzięły się dane procentowe w treści zadania. Wynikiem przeprowadzonej ankiety nie są przecież dane przedstawione w procentach. Uczniowie powinni pamiętać, że tworząc diagramy ułamkowe, trzeba było obliczyć, jaka część ankietowanych osób odpowiadała twierdząc na dane pytanie. W tym przykładzie ułamki zostały zamienione na procenty.

Sposób przedstawiania danych z tego zadania jest podobny do przedstawiania danych w postaci ułamków na diagramie słupkowym. Nowością dla uczniów jest diagram prostokątny składający się ze 100 kratek. Można zachęcić uczniów do podania innych wymiarów prostokąta, który też będzie składał się ze 100 kratek. Można również narysować prostokąt o długości 1 dm i dowolnej szerokości i na nim przedstawić dane, przyjmując, że 1 mm długości prostokąta to 1%.

123

Przykład 2.

W szkole podstawowej w Warszawie przeprowadzono ankietę na temat tego, gdzie uczniowie spędzili wakacje. Oto wyniki tej ankiety:

30% uczniów wyjechało do rodziny pod Warszawę (R),

10% uczniów było nad morzem (M),

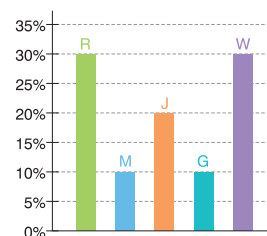
20% uczniów było nad jeziorami (J),

10% uczniów było w górach (G).

Pozostali uczniowie, czyli 30%, spędzili wakacje w Warszawie (W).

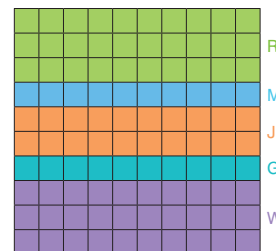
Dane przedstawmy na diagramach słupkowym i prostokątnym. Odczytajmy niektóre dane.

Na diagramie słupkowym tak przedstawimy dane:



Te same dane przedstawimy na diagramie prostokątnym tak:

Prostokąt składa się ze 100 kratek, więc jedna kratka to 1%. Zamalowujemy tyle kratek, ile procent odpowiada danej grupie uczniów.



Z obu diagramów można odczytać, że na wakacje do rodziny wyjechało tylu uczniów, ile zostało w mieście.

W górach i nad morzem wakacje spędziło też tyle samo uczniów.

Słupki na diagramie słupkowym są takiej samej wysokości, a na diagramie prostokątnym zamalowano tyle samo kratek.

Przykład 3.

W Szkolnym Klubie Sportowym 25% zawodników to lekkoatleci, 25% to członkowie drużyny piłki nożnej, a reszta to pływacy.

Przedstawmy te informacje na procentowym diagramie kołowym.

Wszyscy zawodnicy zrzeszeni w SKS to 100%.

Obliczmy, ile procent wszystkich zawodników stanowią pływacy.

Pływacy to:

$100\% - 25\% - 25\% = 50\%$, czyli jest to połowa wszystkich zawodników.

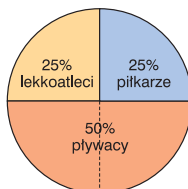
Wykonajmy diagram kołowy.

Podzielmy koło (100%) na 4 równe części.

Jedna część to $\frac{1}{4}$ koła, czyli 25%. Jednej części

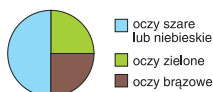
odpowiadają lekkoatleci, drugiej – piłkarze.

Pozostałe dwie części to połowa koła, której odpowiadają pływacy.



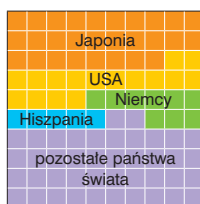
- 1 W lesie mieszanym drzewa iglaste stanowią 25% wszystkich drzew, a pozostałe to drzewa liściaste. Wykonaj diagram kołowy przedstawiający te dane.

- 2 Odczytaj z diagramu, jaki procent uczniów pewnej klasy ma szare lub niebieskie oczy, a jaki – brązowe. Dane z tego diagramu przedstaw na diagramie prostokątnym.



- 3 Na diagramie przedstawiono w procentach produkcję samochodów osobowych w różnych państwach świata. Są to dane przybliżone.

- a) Odczytaj z diagramu, ile procent światowej produkcji samochodów przypada na poszczególne kraje.
b) Dane te przedstaw na diagramie słupkowym.



- 4 Według danych z 1900 r. w Europie mieszkało około 20% ludności świata, w Azji – około 60%, w Afryce – około 10%, a w obu Amerykach, Australii i Oceanii – pozostała ludność. Oblicz, ile procent ludności świata mieszkało w obu Amerykach, Australii i Oceanii. Przedstaw te informacje na diagramach prostokątnym i słupkowym.

Komentarz do Przykładu 3.

W tym przykładzie dane przedstawiamy na kołowym diagramie procentowym. W klasie 5 możemy dokonać podziału koła tylko na połowy, czyli zaznaczyć 50% figury, oraz ćwiartki, czyli zaznaczyć 25% figury. Uczniowie powinni zauważyć, że jeżeli zaznaczą 2 razy po 25% powierzchni koła, to do zaznaczenia zostanie jego połowa, czyli 50%.

Komentarz do zadań 1. i 2.

To najłatwiejsze zadania. Warto pozwolić, aby przy ich rozwiązaniu sukces osiągnęli ci uczniowie, którzy zwykle na lekcjach matematyki są mało aktywni z powodu trudności w nauce tego przedmiotu.

Komentarz do zadań 3. i 4.

Poza tworzeniem różnych diagramów uczniowie mogą doskonalić umiejętność interpretacji zawartych na nich danych, czyli zadawać dodatkowe pytania do diagramu lub zamieszczonej treści, a chętni – udzielać na nie odpowiedzi.

Odpowiedzi do zadań

2. szare lub niebieskie: 50%, brązowe: 25%
3. a) Japonia: 28%, USA: 16%, Niemcy: 9%, Hiszpania: 5%, pozostałe państwa: 42%
4. 10%

Komentarz do zadania 5.

Na przedstawionym w tym zadaniu diagramie procenty są umieszczone na osi poziomej. W legendzie natomiast zostało wyjaśnione wykorzystanie gruntów w gospodarstwie rolnym. Uczniowie znający wieś nie będą mieli problemów z określeniem charakteru gospodarstwa. Ci, którzy udzielią poprawnej odpowiedzi, powinni ją uzasadnić.

Komentarz do zadania 6.

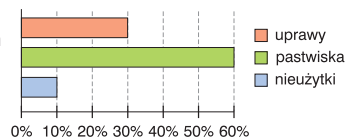
To zadanie wykonujemy wspólnie w klasie, gdyż stanowi ono podsumowanie wszystkich dotychczasowych umiejętności związanych z procentami. Dzielimy klasę na grupy, a każda z nich wykonuje inny diagram procentowy. Typ diagramu przydziela nauczyciel lub może wylosować, spośród zaproponowanych, przedstawiciel grupy.

Komentarz do Sprawdź się!

Rozwiązanie zadań tu zawartych można zadać jako pracę domową. Sprawdzenie rozwiązań powinno rozpocząć lekcję powtórzeniową.

123

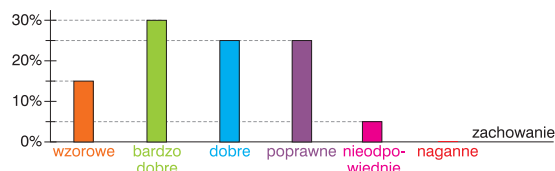
- 5 Na diagramie przedstawiono wykorzystanie gruntów w pewnym gospodarstwie rolnym. Czy na podstawie diagramu możesz określić charakter tego gospodarstwa?



- 6 Dzieci mają razem 1000 zł. Oszczędności Ani to $\frac{1}{20}$ tej kwoty, Bogdana – $\frac{1}{10}$, Zosi – $\frac{3}{20}$, Sebastiana – $\frac{9}{20}$, a Kasi – $\frac{1}{4}$. Przedstaw te dane na dowolnym diagramie procentowym. Ułóż do niego 2 pytania i odpowiedz na nie.

🐾 Sprawdź się!

Skorzystaj z diagramu, na którym przedstawiono śródroczne oceny z zachowania uczniów klasy 5, i rozwiąż zadania 1.–3.



- Podaj, jaki procent uczniów otrzymał każdą z ocen.
- Liczbę ocen wzorowych opisuje ułamek
A. $\frac{3}{20}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{20}$ D. $\frac{1}{5}$
- Przedstaw dane na diagramie prostokątnym.
- Piekarnia dostarczała pieczywo do trzech sklepów: do jednego 50% wytworzonego pieczywa, do drugiego 25%, a do trzeciego resztę. Wykonaj procentowy diagram kołowy przedstawiający dostawę pieczywa do poszczególnych sklepów.
- Na wsi w 1920 roku mieszkało 75% ludności Polski, w 1930 roku – 70%, w 1960 roku – 50%, a w 2015 roku – 40%. Wykonaj procentowe diagramy słupkowe przedstawiające zaludnienie wsi i zaludnienie miast.

194

Odpowiedzi do zadań

5. tak, gospodarstwo hodowlane
6. Ania: 5%, Bogdan: 10%, Zosia: 15%, Sebastian: 45%, Kasia: 25%

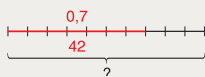
Sprawdź się!

- wzorowe: 15%, bardzo dobre: 30%, dobre: 25%, poprawne: 25%, nieodpowiednie: 5%, naganne: 0%
- A
- trzeci sklep: 25%
- miasto: 1920 r. – 25%, 1930 r. – 30%, 1960 r. – 50%, 2015 r. – 60%

123

Zadania utrwalające

- 1 Oblicz w pamięci.
 - a) $2,17 + 0,15 + 1,3$
 - b) $1,61 - 0,43$
 - c) $0,4 \cdot 0,15$
 - d) $0,84 : 0,12$
 - e) $25,009 \cdot 1000$
 - f) $536,1 : 10\,000$
- 2 Zamień:
 - a) procenty na ułamki: 20%, 45%, 80%, 600%,
 - b) liczby na procenty: 2,25, 1,5, 4, $\frac{128}{400}$, $\frac{16}{100}$, $\frac{3}{20}$.
- 3 Narysuj kwadrat o boku 5 kratek. Zamaluj 4 kratki na czerwono, 8 na zielono, a pozostałe na żółto. Oblicz, jakim procentem kwadratu są kratki poszczególnych kolorów.
- 4 Na ulicy Kwiatowej o długości 413 m trzeba położyć kostkę brukową. Wykonano już pracę na odcinku o długości 197,5 m. Na jakiej długości ulicy należy jeszcze położyć kostkę brukową?
- 5 W jednym kartonie mieści się 8,5 kg cukierków po 18,74 zł za 1 kg. Jaka jest wartość cukierków w 10 takich kartonach?
- 6 Na andrzejkę kupiono napoje za 142,25 zł, słodczyce za 259,86 zł i materiały dekoracyjne za 47,08 zł. Ile wydano na te zakupy?
- 7 W szkolnym sklepiu batony były po 1,14 zł za sztukę. Ile sprzedano takich batonów, jeśli uzyskano za nie 302,10 zł?
- 8 Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.
 - a) $0,5a + 2,4 = 3,2$
 - b) $2,4 - p = 1,2$
 - c) $0,5m : 3 = 0,9$
- 9 W konkursie na wystrój sali lekcyjnej klasa 5a zdobyła 216,8 punktu, klasa 5b o 29,3 punktu mniej, a klasa 5c o 9,6 punktu więcej niż klasa 5a. Ile punktów zdobyła 5b, a ile 5c?
- 10 Tona koks kosztuje 981 zł, a tona węgla jest 1,5 raza tańsza. Ile kosztuje tona węgla?
- 11 Uczniowie klasy 5 wykonali 42 celne rzuty do kosza i było to 0,7 wszystkich rzutów. Ile rzutów do kosza oddali uczniowie?
- 12 Na wycieczkę Kuba wydał część swoich oszczędności. Zostało mu 135,75 zł i było to 0,75 wszystkich jego pieniędzy. Ile pieniędzy miał Kuba na początku? Wykonaj rysunek pomocniczy.



195

Tematy lekcji:

- 1.–2. Powtórzenie wiadomości i utrwalenie umiejętności: Ułamki dziesiętne (1 h)
3. Praca klasowa 5 (1 h)
4. Omówienie wyników i poprawa pracy klasowej (1 h)

Cele lekcji

Wybrane cele lekcji z danego rozdziału odpowiednie do rozwiązywanych zadań.

Komentarz do zadań 1. i 2.

Zadania można wykonać tylko ustnie, a pisemne ich rozwiązanie zadać jako pracę domową uczniom mającym problemy z matematyką.

Komentarz do zadania 11.

Korzystając z rysunku pomocniczego, to zadanie można rozwiązać więcej niż jednym sposobem. Pozwoli to aktywizować dobrych uczniów.

Komentarz do zadania 12.

Jeżeli uczniowie zauważą, że 0,75 to $\frac{3}{4}$, będzie im łatwiej wykonać rysunek pomocniczy. To zadanie można rozwiązać dwoma sposobami.

Materiały dydaktyczne

	Obliczenia praktyczne → Obliczenia procentowe Liczby wymierne → Ułamki zwykłe i dziesiętne. Przybliżanie i zaokrąglanie Liczby wymierne → Oś liczbowa Liczby wymierne → Działania na ułamkach dziesiętnych
	Praca klasowa 5
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 19–40
Zbiór zadań	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 105–117, s. 153–156, s. 159–164

Odpowiedzi do zadań

1. a) 3,62 b) 1,18 c) 0,06 d) 7 e) 25 009 f) 0,05361
2. a) 0,2; 0,45; 0,8; 6 b) 225%; 150%; 400%; 32%; 16%; 15%
3. czerwone: 16%, zielone: 32%, żółte: 52%
4. 215,5 m
5. 1592,90 zł
6. 449,19 zł
7. 265
8. a) $a = 1,6$ b) $p = 1,2$ c) $m = 5,4$
9. 5b: 187,5 p.; 5c: 226,4 p.
10. 654 zł
11. 60
12. 181 zł

Komentarz do zadania 13.

Jeżeli uczniowie wskażą, jaką część ławek pomalował każdy z chłopców, to łatwo obliczą liczbę ławek pomalowanych przez każdego chłopca. To umiejętność znana uczniom, ponieważ dotyczy obliczania ułamka danej liczby.

Wskazówki metodyczne

Podczas przygotowywania się do klasówki można skorzystać z gry Bingo.

Przed rozpoczęciem gry każdy uczeń przygotowuje prostokąt podzielony na 6 (lub 9) okienek i w każde okienko prostokąta wpisuje jedną, dowolną liczbę naturalną od 9 do 20. Liczby w okienkach nie mogą się powtarzać.

Następnie nauczyciel czyta losowo wybrane zadanie i odznacza, że zostało ono rozwiązane. Numer zadania jest jego odpowiedzią.

Proponowane zadania:

9. Długopis kosztuje 5,50 zł. Ile długopisów kupiła Ola, jeśli zapłaciła 49,50 zł?

10. Ile kilogramów szynki można kupić za 234 zł, jeżeli 1 kg kosztuje 23,4 zł?

11. Ile wynosi suma liczb 6,4 i 4,6?

12. Kuba zamalował na czerwono 57% prostokąta, a na niebiesko 31%. Jaki procent figury pozostał niezamalowany?

13. Ile razy większa jest liczba 14,3 od liczby 1,1?

14. Podaj iloczyn liczb 0,14 i 100.

15. Wacek kupił 10 zeszytów po 3,50 zł każdy. Zapłacił banknotem 50 zł. Ile otrzymał reszty?

16. Ania kupiła 0,25 kg sera koziego. 1 kg sera kosztuje 64 zł. Ile zapłaciła Ania?

17. Patryk kupił 3 opakowania suszonych owoców. Zapłacił za nie kolejno: 4,60 zł, 7,25 zł i 5,15 zł. Ile zapłacił za wszystkie opakowania suszonych owoców?

(Uwaga. Liczby z treści zadania powinno się wypisać na tablicy).

18. Jaki to procent $\frac{9}{50}$?

19. Ile trzeba zapłacić za 5 ciastek, gdy cena jednego to 3,80 zł?

20. Ile zapłaciła Kasia za 5 gum po 2,50 zł i baton za 7,50 zł?

Wygrywa ten, kto pierwszy przekreśli wszystkie liczby w swoim prostokącie i zawoła: Bingo, aby to zasymulizować.

123

13. Jacek, Adam i Krzysz pomalowali 20 zniszczonych ławek w szkole. Adam pomalował 40% wszystkich zniszczonych ławek, a Krzysz 25%. Jaki procent wszystkich zniszczonych ławek pomalował Jacek? Przedstaw te dane na dowolnym diagramie procentowym. Oblicz, ile ławek pomalował każdy z chłopców.



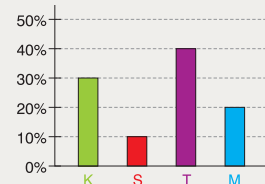
14. Na $\frac{3}{4}$ powierzchni ogrodu rośnie trawa, na $\frac{1}{5}$ kwiaty, a pozostała część to ścieżki. Jaki procent ogrodu to trawa, a jaki – kwiaty? Ile procent ogrodu zajmują ścieżki?

15. Karol (K), Sebastian (S), Tadek (T) i Maciek (M) kandydowali na przewodniczącego samorządu klasowego. Każdy uczeń mógł głosować tylko na jednego kandydata. Wyniki wyborów przedstawiono na procentowym diagramie słupkowym.

Na podstawie diagramu odpowiedz na pytania:

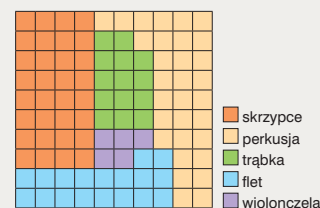
- a) Ile procent głosów otrzymali poszczególni kandydaci?
b) Kto wygrał wybory?
c) Kto otrzymał najmniej głosów?

Wykonaj diagram prostokątny.



16. W szkole muzycznej uczniowie klas piątych grają na różnych instrumentach.

Z procentowego diagramu prostokątnego odczytaj, jaki procent uczniów gra na wymienionych instrumentach. Wykonaj diagram słupkowy.



17. Na meczu siatkówki 50% wszystkich miejsc na widowni zajęli mężczyźni, 25% kobiety, a 20% dzieci. Pozostałe miejsca były wolne. Jaki procent miejsc na widowni stanowiły miejsca wolne? Przedstaw dane z zadania na diagramie słupkowym.

18. W kwietniu było 18 dni słonecznych, a reszta to dni pochmurne. Jaki procent wszystkich dni w kwietniu stanowiły dni słoneczne, a jaki pochmurne?

196

Odpowiedzi do zadań

13. 35%; Adam: 8, Krzysz: 5, Jacek: 7

14. trawa: 75%, kwiaty: 20%, ścieżki: 5%

15. a) Karol: 30%, Sebastian: 10%, Tadek: 40%, Maciek: 20%

b) Tadek c) Sebastian

16. skrzypce: 32%, perkusja: 31%, trąbka: 14%, wiolonczela: 5%, flet: 18%

17. 5%

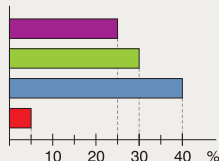
18. słoneczne: 60%, pochmurne: 40%

123

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

- 1 Która liczba **nie jest** równa 3,05?
A. 3,5 B. 3,0500 C. 3,050 D. 3,05000
- 2 Która nierówność jest prawdziwa?
A. $0,31 > 0,119$ B. $0,31 < 0,3$ C. $0,31 > 0,310$ D. $0,301 > 0,31$
- 3 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B, C i D oraz E i F.
Suma liczb 34,29 i 219,4 jest równa A / B. A. 252,69 B. 253,69
Liczba 48,16 jest mniejsza od 94,2 o C / D. C. 46,04 D. 142,36
Ilorazem liczb 227,01 i 2,3 jest E / F. E. 229,31 F. 98,7
- 4 Wyrażenie $(0,6)^3$ jest równe
A. 0,216 B. 0,18 C. 1,08 D. 0,36
- 5 Pluszak kosztuje 8,50 zł. Domino jest 1,5 raza droższe, więc kosztuje
A. 10 zł B. 7 zł C. 12,75 zł D. 13,90 zł
- 6 Kartkówkę pisało 28 uczniów. Ocenę co najmniej dobrą otrzymało 0,75 uczniów, więc ocenę niższą otrzymało
A. 21 uczniów. B. 14 uczniów. C. 24 uczniów. D. 7 uczniów.
- 7 Kuba przeczytał 24 strony lektury, czyli 0,3 całej książki. Książka ma
A. 86 stron. B. 80 stron. C. 60 stron. D. 90 stron.
- 8 Ułamek $\frac{11}{25}$ to
A. 44% B. 11% C. 22% D. 55%
- 9 Wynik szkolnej ankiety *Jaki kolor lubisz najbardziej?* przedstawiono na diagramie. Ile procent uczniów wskazało kolor zielony?
A. 5% B. 40%
C. 25% D. 30%
- 10 Jaś kupił 40 dag śliwek i 60 dag jabłek. Jaki procent łącznej masy tych owoców stanowiła masa śliwek?
A. 25% B. 50% C. 40% D. 75%



Komentarz do zadań 1.–10.

Wszystkie zawarte tutaj zadania zamknięte można rozwiązać ustnie. Dużą rolę w poszukiwaniu poprawnej odpowiedzi będzie miało szacowanie i odrzucanie odpowiedzi niemożliwych. Premiowane powinno być także logiczne myślenie, które ograniczy wykonywanie działań. Rozwiązanie wielu z tych zadań może być powodem do pochwały pracy uczniów. Z pewnością zasłużą też na nią uczniowie z problemami w nauce matematyki.

Komentarz do zadania 4.

Aby wskazać poprawną odpowiedź (A), wystarczy zauważyć, że wartość potęgi musi być ułamkiem dziesiętnym z trzema cyframi po przecinku. Taki wniosek powinni sformułować uczniowie.

Komentarz do zadań 6. i 7.

W tych zadaniach uczniowie powtórzą obliczanie ułamka danej liczby i liczby na podstawie jej ułamka. Warto więc, aby wykonali do nich rysunki pomocnicze.

197

Odpowiedzi do zadań

1. A
2. A
3. BCF
4. A
5. C
6. D
7. B
8. A
9. D
10. C

Wskazówki metodyczne

- Przy okazji analizy tej infografiki proponujemy rozmowę o statystyce.

Nazwa *statystyka* pochodzi od łacińskiego słowa *statisticus*, czyli stan rzeczy. Statystyka zajmuje się obserwacją otaczającego świata, zbieraniem danych, ich analizą i interpretacją. Narzędziami w rękach badacza są np. ankieta, diagram.

- Infografika pozwoli uczniowi wcielić się w rolę takiego badacza i przejść przez wszystkie etapy eksperymentu, którego efektem będzie opracowanie danych statystycznych i ich publikacja.

Etap I obejmuje wymyślenie ciekawego obiektu badania. Uczniowie lubią zwierzęta, opiekują się nimi, stąd pytanie o ich ulubieńców.

Kolejne etapy zostały opracowane i przedstawione w sposób przystępny dla dziecka. Uczeń może zapoznać się z nimi samodzielnie.

Zwierzęta domowe

Jak powstają dane statystyczne? Jak przygotować się do badania, przeprowadzić je, opracować i upublicznić uzyskane wyniki?

ETAP I Zdefiniowanie problemu

Zastanawiamy się, czego chcemy się dowiedzieć. Ustalamy treść pytania lub pytań i możliwych odpowiedzi.

PYTANIE:

Jakie jest twoje ulubione zwierzę domowe? Wybierz jedną odpowiedź.


☐

Kot


☐

Pies


☐

Chomik


☐

Rybki


☐

Patyczaki

ETAP II Zbieranie danych

Zbieramy odpowiedzi na przygotowane przez nas pytanie.

Kot |||||

Pies |||||

Chomik |||||

Rybki |||||

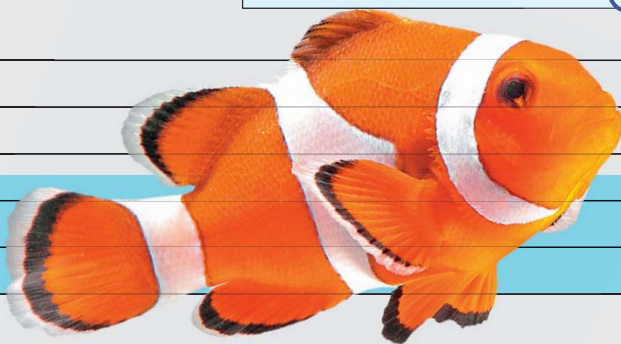
Patyczaki |||||

ETAP III Liczenie głosów

Obliczamy liczbę głosów oddanych na poszczególne zwierzęta. Dane zapisujemy, np. w tabeli. Jeśli będziemy chcieli narysować diagram procentowy, to również obliczamy procent głosów oddanych na poszczególne zwierzęta.

Rodzaj zwierzęcia	Liczba głosów	Procent głosów
Kot	24	24%
Pies	42	42%
Chomik	10	10%
Rybki	18	18%
Patyczaki	6	6%
łącznie	100	100%

30%
25%
20%
15%
10%
0%



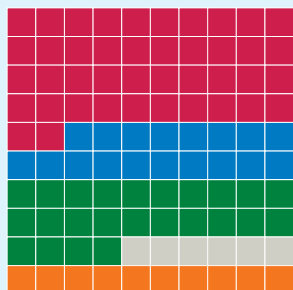


ETAP IV

Opracowanie danych

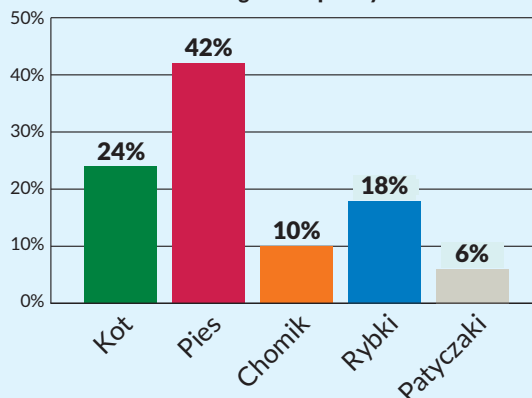
Aby wygodniej było czytać uzyskane informacje, przedstawiamy je w postaci diagramów. Ponieważ w badaniu wzięło udział **100 osób**, odpowiednią formą prezentacji będzie **diagram procentowy**.

Diagram prostokątny



■ Kot ■ Pies ■ Chomik
■ Rybki ■ Patyczaki

Diagram słupkowy



- Informacje przedstawione na infografice mogą być bodźcem do indywidualnej lub grupowej pracy uczniów, których zadaniem będzie do wyboru:

- wykonanie ankiety analogicznej do podanej i wykonanie diagramu procentowego,

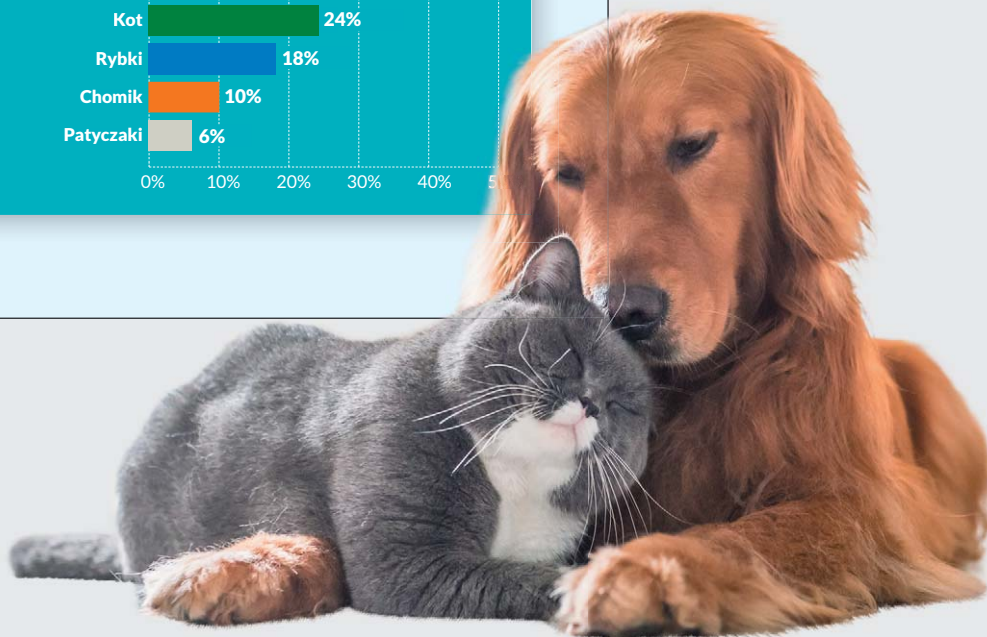
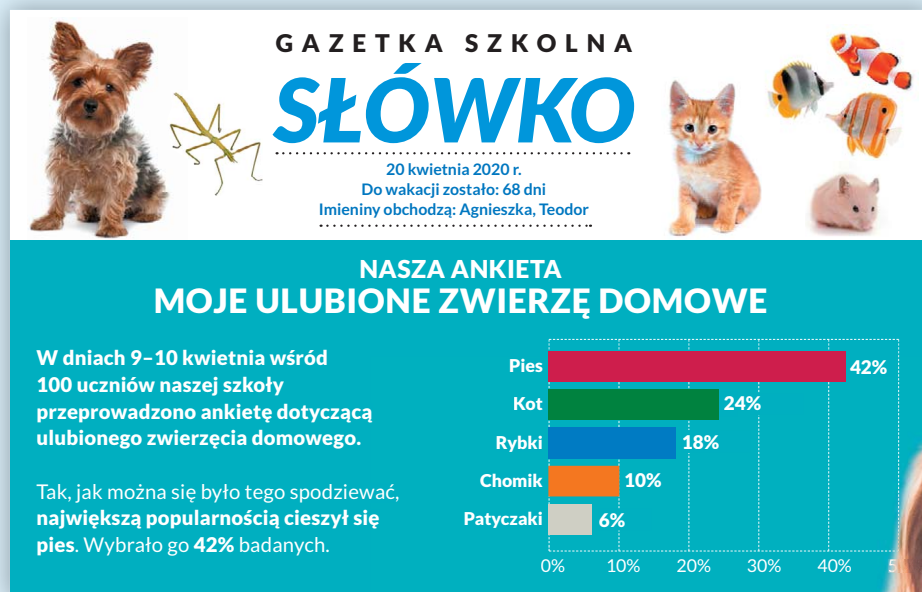
- wybranie ciekawego tematu badań, ułożenie ankiety, jej opracowanie, interpretacja i publikacja.

- Proponujemy ogłosić konkurs na najlepszą pracę.

ETAP V

Prezentacja wyników

Uzyskane podczas badania wyniki możemy zaprezentować innym osobom, np. w gazetce szkolnej.



Temat lekcji:

Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem własności prostokąta (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- wskazuje kwadrat i prostokąt wśród innych czworokątów,
- opisuje prostokąt: wskazuje boki, wierzchołki i przekątne kwadratu oraz prostokąta,
- mierzy długości boków prostokąta,
- zamienia jednostki długości i poprawnie je stosuje,
- wymienia własności kwadratu i prostokąta,
- rysuje prostokąt i kwadrat o danych bokach,
- rysuje kwadrat o danej przekątnej,
- rozwiązuje zadania tekstowe z zastosowaniem własności prostokątów.

Wskazówki metodyczne

- Przypomnienie i omówienie własności prostokąta można przeprowadzić, posługując się modelem tej figury. Nauczyciel przygotowuje dla siebie prostokąt, którego strony są w dwóch kolorach. Wydaje uczniom polecenia i zadaje pytania. Uczniowie wykonują polecenia nauczyciela, składając swój jednobarwny prostokąt, odpowiadają na pytania i uzasadniają swoje odpowiedzi.

Krótszy bok prostokąta zagnij tak, aby pokrył się z dłuższym górnym bokiem.

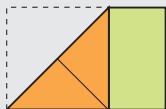
Dokończ zdanie: Otrzymana pomarańczowa figura to ...

Uzasadnij odpowiedź.



Odegnij złożony trójkąt i tym razem krótszy bok prostokąta zagnij tak, aby pokrył się z dłuższym dolnym bokiem.

Jaki trójkąt powstał? Porównaj go z poprzednim trójkątem.



Rozłóż kartkę.

Oba zagięcia wyznaczyły dwa odcinki. Jaka jest miara kąta między nimi? Uzasadnij odpowiedź.

Podaj nazwy widocznych na zielonej stronie kartki trójkątów. Odpowiedź uzasadnij.



Połącz końce wyznaczonych odcinków.

Jak nazywa się otrzymany czworokąt?

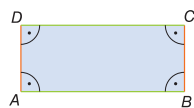
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 23.

VII. Czworokąty

1. Prostokąt



Sowa przypomina



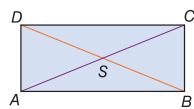
Prostokąt ma wszystkie kąty proste.

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = \sphericalangle DAB = 90^\circ$$

Boki są parami równe i równoległe.

$$|AD| = |BC| \quad |AB| = |DC|$$

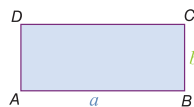
$$AD \parallel BC \quad AB \parallel DC$$



Przekątne prostokąta są równe: $|AC| = |BD|$.

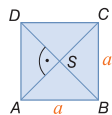
Punkt przecięcia przekątnych dzieli każdą z nich na połowy.

$$|AS| = |SC| = |BS| = |SD| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}|BD|$$



Obwód (L) prostokąta to suma długości wszystkich jego boków.

$$L = 2 \cdot a + 2 \cdot b \text{ lub } L = 2 \cdot (a + b)$$



Prostokąt o równych bokach to kwadrat.

Przekątne kwadratu przecinają się pod kątem prostym.

$$\text{Obwód kwadratu: } L = 4a.$$

- Wskaż 2 przedmioty, które mają kształt prostokąta. Narysuj prostokąt. Zaznacz kolorem jedną parę boków prostopadłych.
- Narysuj kwadrat o boku 4 cm i oblicz jego obwód.

200

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Proste i odcinki Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
	Kartkówka 23 Plansza edukacyjna. Jednostki Plansza edukacyjna. Pola i obwody wielokątów
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 41–42
Zbiór zadań	s. 118–120

VII. Czworokąty



3. Narysuj prostokąt, którego przekątne mają po 8 cm długości. Wytnij go i złóż tak, aby otrzymać dwie jednakowe części. Sprawdź, czy otrzymane części są swoimi lustrzanymi odbiciami względem linii złożenia. Rozpatrz wszystkie możliwości złożenia prostokąta w ten sposób.
4. Obwód prostokąta jest równy 28 cm. Oblicz długości jego boków, jeśli jeden bok jest 3 razy dłuższy od drugiego.
5. Działka ma kształt kwadratu o boku 25 m. Narysuj tę działkę w skali 1 : 1000. Oblicz obwód działki i narysowanego kwadratu. Ile razy mniejszy jest obwód narysowanego kwadratu?
6. Prostokąt i kwadrat mają taki sam obwód równy 16 cm. Jeden z boków prostokąta jest połową boku kwadratu. Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe wskaź P, jeżeli fałszywe – F.
- | | | |
|--|---|---|
| Bok kwadratu ma długość 50 mm. | P | F |
| Boki prostokąta mają 2 cm i 6 cm długości. | P | F |
| Obie figury mają równe kąty i boki. | P | F |
| Przekątne obu figur dzielą je na trójkąty równoramienne. | P | F |
7. Narysuj prostokąt o przekątnej 8 cm i kącie między przekątnymi 45° .
8. Z trzech kwadratów o boku równym 3,5 cm ułożono prostokąt. Oblicz jego obwód. Wykonaj rysunek.



A to ciekawe!

Zauważ, w jaki sposób tworzą się kwadraty układane z kółek. Liczby kółek tworzących kwadraty to liczby kwadratowe. Narysuj w zeszyte 3 następne kwadraty i podaj liczbę kółek, które je tworzą.

1

4

9

201

Komentarz do zadania 4.

Można przypomnieć uczniom, że suma długości dwóch sąsiednich boków prostokąta jest równa połowie obwodu. Jeżeli uczniowie przedstawiają na rysunku zależność długości boków prostokąta, to zauważą, że suma czterech jednakowej długości odcinków wynosi 14 cm.

Komentarz do zadania 5.

Jeżeli na początku lekcji powtórzy się zamianę jednostek długości oraz mnożenie i dzielenie przez 10, 100, 1000, przez włączenie tych umiejętności do rachunku pamięciowego, obliczenia do tego zadania uczniowie wykonają w pamięci.

Komentarz do zadania 7.

W tym zadaniu można posłużyć się odręcznym rysunkiem pomocniczym, na którym uczniowie zaznaczą dane. Ważne, by zauważyli, że przekątne w prostokącie tworzą trójkąty równoramienne. Dobrych uczniów można zachęcić do podania miar kątów wewnętrznych tych trójkątów.

Komentarz do A to ciekawe!

Liczby kwadratowe, których sposób tworzenia został przedstawiony na rysunku, są kwadratami kolejnych liczb naturalnych. Jeżeli uczniowie to zauważą, nie będzie to trudne zadanie.

Można pokazać uczniom, że suma dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest kwadratem liczby 2 ($1 + 3 = 2^2$), suma trzech kolejnych nieparzystych liczb naturalnych jest kwadratem liczby 3 ($1 + 3 + 5 = 3^2$), suma czterech kolejnych nieparzystych liczb naturalnych jest kwadratem liczby 4 ($1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$) itd. Zależność tę wykazał Pitagoras.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. kwadrat: $|LU| = |AP|$, $|LA| = |UP|$, $|LP| = |UA|$; prostokąt: $|ZE| = |OR|$, $|ZO| = |ER|$, $|ZR| = |EO|$
3. bok 3,6 cm $L = 14,4$ cm; boki 2,3 cm i 4,5 cm $L = 13,6$ cm; bok 4,8 dm $L = 192$ cm; boki 29 mm i 7,4 cm $L = 20$ cm 6 mm; bok $1\frac{4}{5}$ cm $L = 72$ mm; boki 0,3 m i 0,2 dm $L = 6,4$ dm
4. a) 12 cm b) 10,4 cm c) 10,8 cm
5. a) TAK b) TAK c) NIE d) NIE

Odpowiedzi do zadań

2. $L = 16$ cm
4. 3 cm 5 mm, 10 cm 5 mm
5. działka: $L = 100$ m, rysunek: $L = 10$ cm; 1000
6. F, P, F, P
8. $L = 28$ cm

Komentarz do Wyzwania

Podsumowując te zadania, uczniowie powinni uporządkować swoje obliczenia i wpisać je do tabelki, zaczynając od prostokąta o długości jednego boku równej 1 cm. Warto również zastanowić się, ile maksymalnie boków może mieć wielokąt, którego długości boków są wyrażone liczbami naturalnymi, a obwód wynosi 20 cm.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadania 1., 3. i 4. można rozwiązać w ustnie. Pozostałe zadania wymagają rysowania i operowania przyrządami.

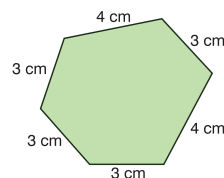
Rysunek do zadania 2. można wykonać, korzystając z linii kratowych.

Na rysunku pomocniczym do zadania 5. trzeba nanieść dane. Uczniowie powinni zastanowić się, jakie własności prostokąta są potrzebne do rozwiązania zadania. W razie potrzeby mogą poszukać niezbędnych informacji w *Sowa przypomina*, s. 200.



Wyzwanie

Na kartce w kratkę narysuj wszystkie możliwe prostokąty, z których każdy ma obwód równy 20 cm, a długości jego boków są wyrażone liczbami naturalnymi (w cm). Ile jest takich prostokątów? Narysuj 3 inne wielokąty, których obwód ma 20 cm, a długości ich boków są wyrażone liczbami naturalnymi.



Sprawdź się!

- Które zdanie jest **falszywe**?
 A. Przekątne kwadratu są równe i prostopadłe.
 B. Jeżeli boki prostokąta mają długość 1,5 dm i 8 cm, to obwód tego prostokąta jest równy 19 cm.
 C. Bok kwadratu ma 4,3 cm, gdy obwód jest równy 17,2 cm.
 D. Jeżeli boki prostokąta mają długości m i n , to jego obwód jest równy: $2 \cdot (m + n)$.
- Narysuj prostokąt $ABCD$ o bokach 8 cm i 6 cm oraz jego przekątne. Punkt przecięcia przekątnych oznacz S .
 a) Zmierz długości przekątnych.
 b) Wypisz trójkąty równoramienne. Podaj ich nazwy ze względu na kąty.
 c) Oblicz obwody trójkątów równoramiennych.
- W prostokącie jeden z jego boków ma długość 0,8 dm, a drugi jest 4 razy krótszy. Oblicz:
 a) długość drugiego boku, b) obwód prostokąta.
- Które wyrażenie opisuje obwód kwadratu o boku c ?
 A. $c + c + c$ B. $2c$ C. $3c$ D. $4c$
- Narysuj prostokąt o bokach m i n oraz kąt między bokiem a przekątną równym 40° .
 a) Oblicz miary kątów między przekątnymi tego prostokąta.
 b) Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące jego obwód.

202

Odpowiedzi do zadań

Wyzwanie

Można utworzyć 5 takich prostokątów o wymiarach: 1 cm i 9 cm, 2 cm i 8 cm, 3 cm i 7 cm, 4 cm i 6 cm oraz 5 cm i 5 cm.

Sprawdź się!

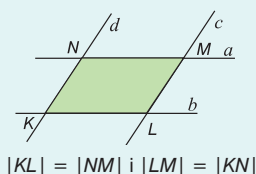
- B
- a) 10 cm b) 2 identyczne trójkąty rozwartokątne i 2 identyczne trójkąty ostrokątne c) 18 cm, 16 cm
- a) 2 cm b) 20 cm
- D
- a) $100^\circ, 80^\circ$ b) $2 \cdot (m + n)$

2. Równoległobok

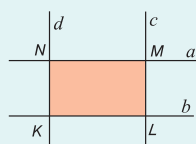


Sowa uczy

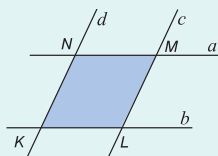
Dwie pary prostych równoległych przecinających się tak, jak pokazano na rysunku obok, tworzą czworokąt o przeciwległych bokach równoległych i równej długości. Utworzony czworokąt nazywamy **równoległobokiem**.



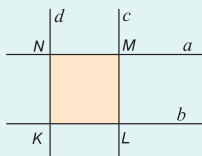
Jeżeli $|KL| = |NM|$ i $|LM| = |KN|$ oraz $\sphericalangle NKL = 90^\circ$, to ten równoległobok jest **prostokątem**.



Jeżeli $|KL| = |NM| = |LM| = |KN|$, to ten równoległobok jest **rombem**.



Jeżeli $|KL| = |NM| = |LM| = |KN|$ oraz $\sphericalangle NKL = 90^\circ$, to ten równoległobok jest **kwadratem**.



Czworokąty: prostokąt, romb i kwadrat to równoległoboki.



203

Tematy lekcji:

1. Własności równoległoboku (1 h)

2. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem własności równoległoboku (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- rysuje równoległobok o danej długości boków,
- rysuje romb o danej długości przekątnych,
- zna własności równoległoboku oraz rombu i stosuje te własności w zadaniach,
- opisuje romb i równoległobok,
- porównuje własności rombu i równoległoboku,
- rozwiązuje zadania tekstowe z zastosowaniem własności równoległoboków.

Wskazówki metodyczne

- W tym temacie jest wiele nowych i ważnych wiadomości. Zachęcamy uczniów, by podczas rozwiązywania zadań korzystali z *Sowa uczy* i *Przykładów*. W ten sposób przypomną sobie potrzebne informacje i utrwalać nowo poznane umiejętności.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 24.

Komentarz do Sowa uczy

Proponujemy wykonanie następującego ćwiczenia. Dzielimy uczniów na 4 grupy. Dwie z nich (pierwsza i druga) otrzymują paski tej samej szerokości, a pozostałe dwie (trzecia i czwarta) paski różnej szerokości. Pierwsza i trzecia grupa układają jeden pasek na drugim tak, by ich krawędzie były do siebie prostopadłe, druga i czwarta grupa tak, by krawędzie tworzyły kąt inny niż 90° . Następnie trzeba odciąć te części paszków, które nie są przykryte drugim paskiem. W ten sposób uczniowie otrzymują wszystkie wymienione w *Sowa uczy* równoległoboki.

Otrzymane figury trzeba opisać. Uczniowie powinni wskazać odcinki równoległe, prostopadłe, równej i różnej długości. Ważne, aby doszli do wniosku, że otrzymane figury to równoległoboki. Dwa z nich (prostokąt i kwadrat) już znają. Przy okazji podawania nazw warto odwołać się do informacji zamieszczonych w *Sowa uczy*.

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
	Kartkówka 24 Plansza edukacyjna. Jednostki Plansza edukacyjna. Pola i obwody wielokątów
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 43–46
Zbiór zadań	s. 120–124

Komentarz do Sowa uczy

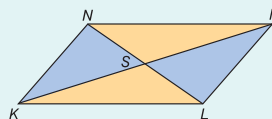
Do badania własności tych równoległoboków można wykorzystać figury otrzymane w opisanym wcześniej ćwiczeniu. Składając je, badamy i uzasadniamy własności tych równoległoboków, które nie są prostokątami.

Komentarz do Przykładu 1.

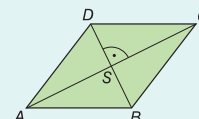
W tym przykładzie jest przedstawiony sposób rysowania rombu o danych bokach i kącie między nimi. Żeby narysować odpowiedni kąt, uczniowie muszą skorzystać z kątomierza. Od punktu drugiego opisu powinni korzystać tylko z cyrkla i liniału bez podziałki, czyli skonstruować równoległobok przy danym kącie.

Sowa uczy

W równoległoboku, który **nie jest** prostokątem:



$$|KL| = |NM| \text{ i } |LM| = |KN|$$



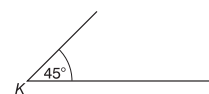
$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$$

- są 2 równe kąty ostre i 2 równe kąty rozwarte,
- suma miar kątów przy tym samym boku jest równa 180° ,
- przekątne są różnej długości,
- punkt przecięcia się przekątnych dzieli je na połowy,
- przekątne dzielą go na 4 pary identyczne trójkąty.
- przekątne są prostokątne,
- przekątne dzielą go na 4 identyczne trójkąty.

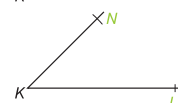
Przykład 1.

Narysujemy równoległobok $KLMN$ o bokach 2 cm i 3 cm i kącie ostrym między nimi równym 45° .

1. Za pomocą kątomierza rysujemy kąt 45° o wierzchołku K .

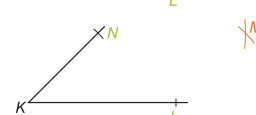


2. Na jednym ramieniu odmieramy odcinek 2 cm, na drugim 3 cm. Otrzymujemy punkty N i L .

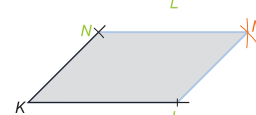


3. Kreślimy łuki okręgów:

- o środku w punkcie N i promieniu 3 cm,
 - o środku w punkcie L i promieniu 2 cm.
- Otrzymujemy punkt M .



4. Rysujemy odcinki LM i NM . Otrzymujemy równoległobok $KLMN$.



204

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

2. równoległobok $ABCD$: trójkąty różnoboczne, ostrokątne, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $AB = CD$, $AD = BC$; równoległobok $KLMN$: trójkąty różnoboczne, rozwartokątne, $KL \parallel MN$, $KN \parallel LN$, $KL = MN$, $KN = LN$

3. trójkąty różnoboczne, prostokątne

4. a) P b) F c) w zależności od rysunku d) F 5. MAKI 6. A, D

9. a) 60° ; 120° ; 120° b) 108° ; 108° ; 72° ; 72° c) 65° ; 65° ; 115° ; 115°

10. równoległobok: boki są parami równe i równoległe; sąsiednie boki są różnej długości; przekątne są różnej długości; przekątne dzielą się na połowy; krótsza przekątna dzieli figurę na dwa trójkąty ostrokątne, a dłuższa – na dwa trójkąty rozwartokątne; dwa kąty są ostre, a dwa rozwarte; suma miar dwóch sąsiednich kątów jest równa 180° ; romb: wszystkie boki są tej samej długości; przekątne są prostokątne; przekątne są różnej długości; przekątne dzielą figurę na 4 jednokątne trójkąty prostokątne; przekątne dzielą się na połowy; krótsza przekątna dzieli figurę na dwa trójkąty ostrokątne równoramienne, a dłuższa – na dwa trójkąty rozwartokątne równoramienne; dwa kąty są ostre, a dwa rozwarte; suma miar dwóch sąsiednich kątów jest równa 180°

Przykład 2.

Narysujmy romb, którego przekątne d_1 i d_2 mają długości 3 cm i 2 cm.

Przekątne przecinają się w swoich połowach i są prostopadłe. Narysujmy zatem proste prostopadłe $a \perp b$.

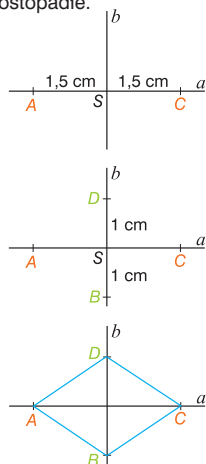
1. Odłóżmy na prostej a , po obu stronach punktu S – przecięcia prostych, połowę przekątnej d_1 , $\frac{1}{2}d_1 = 1,5$ cm.

Otrzymujemy punkty A i C .

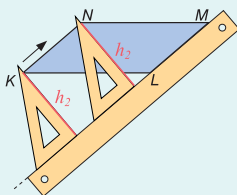
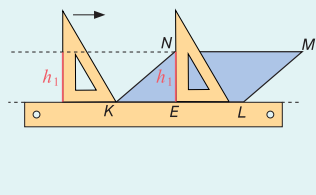
2. Odłóżmy na prostej b , po obu stronach punktu S , połowę przekątnej d_2 , $\frac{1}{2}d_2 = 1$ cm.

Otrzymujemy punkty B i D .

3. Rysujemy odcinki: AB , BC , CD i DA . Otrzymujemy romb, którego przekątne mają długości 3 cm i 2 cm.

**Sowa uczy**

Wysokość równoległoboku to najkrótszy odcinek łączący boki równoległe lub ich przedłużenia. Równoległobok ma dwie pary boków równoległych, zatem ma dwie wysokości: h_1 i h_2 .



Przesuwając ekierkę po linijce, możemy narysować wiele takich odcinków, a każdy z nich będzie wysokością równoległoboku.

Komentarz do Przykładu 2.

Ważne, aby podczas lekcji geometrii uczniowie jak najczęściej posługiwali się przyrządami. Oprócz przedstawionego tutaj sposobu rysowania rombu warto pokazać uczniom, jak narysować romb z wykorzystaniem kratek w zeszyty. Podczas rozwiązywania zadań często trzeba będzie wykonać rysunki pomocnicze do zadań i wtedy umiejętność rysowania rombu po liniach kratowych okaże się bardzo pomocna.

Komentarz do Sowa uczy

Podczas rysowania wysokości równoległoboku warto zwrócić uwagę, jak uczniowie korzystają z przyrządów, bo to gwarantuje poprawność rysunku.

Komentarz do Sowa uczy

Poprawne narysowanie wysokości wychodzących z jednego wierzchołka równoległoboku lub rombu wymaga sprawnego posługiwania się przyrządami. Uczniowie muszą wiedzieć, że czasem jedna z wysokości będzie padała na przedłużenie boku. Trzeba zadbać o to, aby linijka i ekierka były dokładnie przyłożone, bo wtedy wysokości na pewno będą prostopadłe do odpowiednich boków. Należy podkreślić, że własności wysokości obu czworokątów różnią te figury. Aby zilustrować tę informację, proponujemy na pasku papieru narysować i wyciąć romb oraz równoległobok, tak aby jeden bok równoległoboku był takiej samej długości jak bok rombu. Obie figury powinny mieć kąty wewnętrzne tej samej miary i jedną wysokość równą szerokości paska. Na pozostałej po wycięciu figur części paska kładziemy romb tak, by bok figury i paska się pokrywały. Niezależnie od tego, jak ułożymy romb, zmieści się on w szerokości paska – wysokości są takie same. W przypadku równoległoboku już tak nie będzie – jeden bok figury będzie nad lub pod paskiem papieru, ponieważ wysokości nie są równe.

Komentarz do zadania 3.

Po narysowaniu rombu uczniowie mierzą długości boków i obliczają obwód figury.

Komentarz do zadania 5.

Wskazane, aby uczniowie przypomnieli formę słowną zapisanego wzoru.

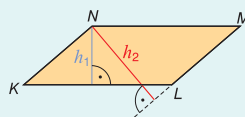
Komentarz do zadań 6. i 7.

Zadania można rozwiązać ustnie. Uczniowie powinni uzasadnić wybór odpowiedzi. Możemy zapytać, czy zamieniając w tych zadaniach romb na równoległobok, da się je rozwiązać.



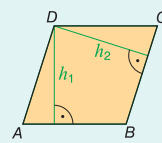
Sowa uczy

Równoległobok, który **nie jest** rombem ma wysokości różnej długości.



$$\begin{aligned} h_1 \perp KL & \quad i \quad h_1 \perp NM \\ h_2 \perp LM & \quad i \quad h_2 \perp KN \end{aligned}$$

Romb ma wysokości tej samej długości.



$$\begin{aligned} h_1 \perp AB & \quad i \quad h_1 \perp DC \\ h_2 \perp BC & \quad i \quad h_2 \perp AD \end{aligned}$$

- 1 Narysuj równoległobok o bokach 5 cm i 7 cm i kącie między nimi 50° .
- 2 Za pomocą linijki i ekierki narysuj dowolny równoległobok i obidwie jego wysokości.
- 3 Narysuj romb o przekątnych długości 8 cm i 6 cm.
- 4 Narysuj romb, którego jedna przekątna ma długość 0,4 dm, a druga $\frac{3}{4}$ jej długości. Zmierz długość boku rombu i oblicz jego obwód.
- 5 Narysuj równoległobok o bokach c i d oraz kącie wewnętrznym 70° . Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące obwód tej figury.
- 6 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Suma miar dwóch sąsiednich kątów rombu wynosi A / B. A. 180° B. 90°
Suma miar kątów wewnętrznych równoległoboku jest równa C / D. C. 360° D. 180°
- 7 Jeden z kątów wewnętrznych rombu ma miarę 100° . Pozostałe kąty wewnętrzne tego rombu mają miary
A. $100^\circ, 100^\circ, 80^\circ$ B. $100^\circ, 80^\circ, 80^\circ$
C. $80^\circ, 80^\circ, 80^\circ$ D. $100^\circ, 60^\circ, 60^\circ$
- 8 Obwód rombu jest równy $25\frac{1}{5}$ cm. Oblicz długość jego boku.

206

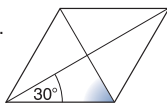
Odpowiedzi do zadań

4. $L = 10$ cm
5. $2 \cdot (c + d)$
6. AC
7. B
8. 6,3 cm

VII. Czworokąty



- 9 Obwód równoległoboku jest równy 59,6 dm. Jeden bok jest o $\frac{4}{5}$ dm dłuższy od drugiego. Oblicz długość dłuższego boku.
- 10 W rombie jedna przekątna tworzy z podstawą kąt 30° . Druga przekątna tworzy z podstawą rombu kąt
- A. 30° B. 120° C. 80° D. 60°
- 11 Jeden bok równoległoboku ma 2,5 cm długości, czyli $\frac{1}{8}$ obwodu. Oblicz długości pozostałych boków.



Wyzwanie

Narysuj równoległobok o wysokościach 4 cm i 2 cm. Ile takich równoległoboków możesz narysować? Jak będą zmieniały się boki równoległoboku, gdy kąt między sąsiednimi bokami będzie się zwiększał do 90° ? Przy jakim kącie boki będą miały najmniejsze długości?

Wskazówka. Wytnij z papieru dwa paski o szerokościach 4 cm i 2 cm.

Sprawdź się!

- Narysuj równoległobok *MOST* o bokach 6 cm i 4 cm. Poprowadź wysokości z wierzchołka *T*.
- Narysuj romb o obwodzie 10 cm i jego przekątne. Podaj nazwy powstałych trójkątów ze względu na kąty i boki.
- Które zdanie jest **falszywe**?
 A. Istnieje taki równoległobok, którego kąty wewnętrzne mają miary: 45° , 135° , 45° , 135° .
 B. Suma kątów sąsiednich w równoległoboku jest równa 180° .
 C. W każdym równoległoboku przekątne są prostopadłe.
 D. W rombie o kącie ostrym 50° przekątne są różnej długości.
- Równoległobok ma boki długości 20 m i $15\frac{1}{2}$ m. Oblicz jego obwód.
- Narysuj romb, którego obwód jest równy 20 cm, a kąt między bokami wynosi 30° . Podaj miary kątów wewnętrznych tego rombu.

207

Komentarz do zadania 9.

Dane w tym zadaniu są wyrażone w ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Trzeba więc zastanowić się, czy obliczenia wykonywać na ułamkach zwykłych, czy dziesiętnych, czy raczej dane wyrazić w centymetrach. Jeżeli uczniowie będą mieli możliwość wyboru i zdecydują się na skorzystanie z różnych sposobów obliczeń, warto porównać otrzymane przez nich wyniki.

Komentarz do zadania 10.

Zadanie rozwiązujemy ustnie i zachęcamy uczniów, by podali własności trójkątów, na które przekątna podzieliła romb. Uczniowie powinni zauważyć, że krótsza przekątna podzieliła romb na trójkąty równoboczne.

Komentarz do Wyzwania

Rozwiązanie tego zadania ułatwi wskazówka. Za pomocą nakładania na siebie pasków z cienkiego papieru łatwiej wyznaczyć szukane równoległoboki. Obserwację dobrze jest prowadzić pod światło.

Komentarz do Sprawdź się!

W zadaniu 3. warto nie tylko wskazać zdanie fałszywe i uzasadnić, dlaczego jest ono błędne, ale także posługując się własnościami rombu i równoległoboku, wykazać, że pozostałe zdania są prawdziwe.

W zadaniu 5. wskazane jest zaplanowanie rysowania rombu o podanych własnościach, posługując się rysunkiem pomocniczym. Uczniowie powinni zauważyć, że wystarczy narysować kąt o mierze 30° i na jego ramionach cyrklem odłożyć długości boków rombu, a następnie po narysowaniu przekątnej rombu skonstruować drugi taki sam trójkąt.

Odpowiedzi do zadań

9. 15,3 dm
 10. D
 11. 2,5 cm; 7,5 cm; 7,5 cm

Wyzwanie

Zadanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Jeżeli krawędzie pasków będą prostopadłe, to ich częścią wspólną będzie prostokąt.

Sprawdź się!

2. trójkąty: prostokątne różnoboczne, ostrokątne równoramienne i rozwartokątne równoramienne lub trójkąty prostokątne równoramienne
 3. C
 4. 71 m
 5. 30° , 150° , 30° , 150°

Tematy lekcji:

1. Własności trapezu (1 h)
2. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem własności trapezu (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- nazywa i rysuje trapezy o jednej parze boków równoległych,
- wskazuje trapez o jednej parze boków równoległych wśród innych czworokątów i podaje jego własności,
- wskazuje boki, wierzchołki, przekątną trapezu,
- zna własności trapezów,
- rysuje wysokości trapezów i zna własności tych wysokości,
- stosuje własności trapezów w zadaniach.

Wskazówki metodyczne

- Przed lekcją nauczyciel powinien przygotować dla każdego ucznia pasek papieru oraz nożyczki na każdą ławkę. Uczniowie mogą pracować samodzielnie, korzystając z podręcznika. Po analizie *Sowa uczy* powinni wyciąć przedstawione tam trapezy, wkleić je do zeszytu i opisać.

- Po analizie przedstawionych w przykładzie własności można sprawdzić zrozumienie tematu. W tym celu każdy uczeń dostaje kartkę z pytaniami. Każda prawidłowa odpowiedź to 1 punkt.

Proponowane pytania:

1. Jak nazywają się czworokąty, które mają jedną parę boków równoległych?
2. Jak nazywają się boki trapezu?
3. Jaką własność mają kąty wewnętrzne trapezu równoramiennego?
4. Który z trapezów ma równe przekątne?
5. W którym trapezie jego ramię jest wysokością?
6. Jakie miary mają kąty wewnętrzne trapezu prostokątnego, jeżeli jeden z nich ma miarę 25° ?
7. Ile trójkątów można wyróżnić w trapezie, jeżeli narysujemy jego przekątną?

- Do części proponowanych w tym temacie zadań można wykonać więcej niż jeden poprawny rysunek. Zachęcamy do porównania na forum klasy rysunków różnych uczniów.

- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 25.

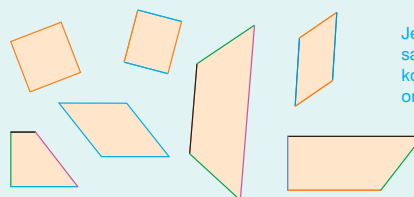
3. Trapez

Sowa uczy

Jeżeli prostokątny pasek papieru przetniemy tak, jak pokazano na rysunku:

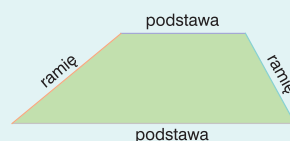


to otrzymane czworokąty będą miały **co najmniej** jedną parę boków równoległych. Są to **trapezy**.



Jeżeli w jednej figurze boki są zaznaczone takim samym kolorem, to znaczy, że mają one taką samą długość.

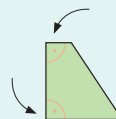
W trapezach wyróżniamy boki równoległe, które nazywają się **podstawami**, i pozostałe boki, które nazywają się **ramionami**.



Trapez, który ma równe ramiona, nazywa się **trapezem równoramiennym**.



Trapez, którego **co najmniej** jedno ramię tworzy kąty proste z podstawami, nazywa się **trapezem prostokątnym**.



208

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie ➔ Wielokąty i ich własności
	Kartkówka 25 Plansza edukacyjna. Jednostki Plansza edukacyjna. Pola i obwody wielokątów
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 47–48
Zbiór zadań	s. 124–127

Przykład 1.

Narysujmy i wytnijmy trapez równoramienny o jednej parze boków równoległych, a następnie składając go tak, aby ramiona nałożyły się na siebie, zbadajmy jego własności.

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC \text{ i } \sphericalangle ADC = \sphericalangle DCB$$

Kąty przy tej samej podstawie trapezu równoramiennego mają takie same miary.

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ, \text{ więc } \alpha + \beta = 180^\circ$$

Suma miar kątów wewnętrznych przy ramieniu trapezu równa jest 180° .

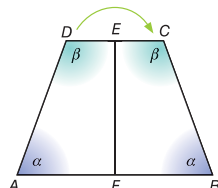
Linia zgięcia trapezu utworzyła odcinek EF .

$$EF \perp AB \text{ i } EF \perp DC$$

Odcinek EF wyznacza odległość między podstawami – jest to **wysokość trapezu**.

Odcinek EF podzielił trapez $ABCD$ na dwa **trapezy prostokątne**.

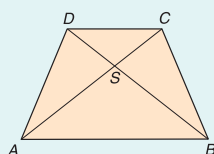
Trapez $AFED$ jest lustrzanym odbiciem trapezu $FBCE$ wzdłuż odcinka EF .



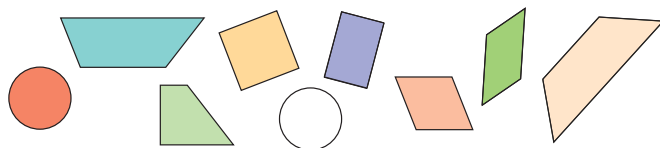
Sowa uczy

Przekątne trapezu równoramiennego o tylko jednej parze boków równoległych:

- są równej długości,
 $|AC| = |BD|$
- przecinają się, tworząc dwa trójkąty równoramiennie: trójkąt ABS i trójkąt DSC .
 $|AS| = |BS|, |DS| = |CS|$



1. Podaj nazwę każdej z narysowanych figur. Narysuj 2 figury, które mają tylko jedną parę boków równoległych.



Komentarz do Przykładu 1.

Każdy uczeń powinien wyciąć z papieru trapez równoramienny i badać jego własności. Nauczyciel kontroluje ćwiczenie i w miarę potrzeby pomaga uczniom. Otrzymane figury uczniowie powinni wkleić do zeszytu.

Badanie własności trapezów przez ich składanie jest pouczające i ułatwia zapamiętanie tych własności oraz stosowanie ich w zadaniach.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

2. a) $|\sphericalangle AMR| = 110^\circ, |\sphericalangle FAM| = 135^\circ$ b) $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle BEZ| = 75^\circ, |\sphericalangle BAZ| = |\sphericalangle AZE| = 105^\circ$

3. A

4. a) 32 cm b) 44 cm c) 42 cm

5. a) TAK b) zależy od obranej wysokości c) NIE d) TAK

6. 15,4 cm

Komentarz do zadania 4.

Jeżeli uczniowie nie mają kątomierzy, mogą używać egierek: równoramienną z kątem 45° i różnobioczną z kątami 30° i 60° . Po narysowaniu dwóch wysokości, wychodzących z obu wierzchołków przy krótszej podstawie można zwrócić uwagę na rodzaje powstałych trójkątów.

Komentarz do zadania 5.

Zadanie można rozwiązać ustnie. Warto, aby uczniowie uzasadnili wybór odpowiedzi i wyjaśnili, dlaczego pozostałe odpowiedzi nie są prawdziwe.

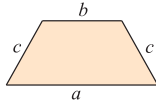
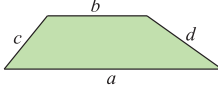
Komentarz do zadania 8.

Uczniowie powinni wykonać rysunek pomocniczy i nanieść na nim dane. Wszystkie obliczenia można wykonać w pamięci.

Komentarz do zadania 9.

Gdyby uczniowie mieli problem z podaniem odpowiedzi, mogą skorzystać z równej długości słomek lub ołówków i ułożyć je tak, by przecinały się pod kątem rozwartym. Można wtedy zastanowić się, gdzie należy wyznaczyć podstawy trapezu.



- 2 Narysuj trapez równoramienny o jednej parze boków równoległych i jego wysokość poprowadzoną z wierzchołka przy krótszej podstawie. Jakie figury można wyróżnić?
- 3 Narysuj trapez równoramienny i jego przekątną. Wypisz powstałe trójkąty. Podaj ich nazwy ze względu na kąty i boki.
- 4 Jedna z podstaw trapezu jest równa 9 cm, a kąty przy tej podstawie wynoszą odpowiednio 60° i 45° . Narysuj 2 różne trapezy o podanych własnościach i oblicz miary pozostałych kątów tych figur.
- 5 Kąty wewnętrzne trapezu równoramiennego mogą mieć miary
A. $30^\circ, 60^\circ, 150^\circ, 120^\circ$ B. $90^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$
C. $20^\circ, 160^\circ, 160^\circ, 20^\circ$ D. $20^\circ, 150^\circ, 150^\circ, 20^\circ$
- 6 Napisz wyrażenia algebraiczne opisujące obwody narysowanych trapezów. Oblicz wartość liczbową tych wyrażeń dla:
 $a = 8,5 \text{ cm}, b = 4\frac{3}{5} \text{ cm}, c = 3 \text{ cm}, d = 4,2 \text{ cm}.$
a)  b) 
- 7 Dany jest trapez, którego jedno ramię jest równe $c \text{ cm}$, a drugie jest od niego o 1 cm krótsze. Jedna podstawa jest o 3 cm dłuższa, a druga 2 razy dłuższa od dłuższego ramienia. Wykonaj rysunek pomocniczy. Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące obwód tego trapezu.
- 8 Obwód trapezu równoramiennego jest równy 48 cm, jedna podstawa ma 20 cm długości, a długość drugiej to $\frac{2}{5}$ długości pierwszej podstawy. Oblicz długość ramienia tego trapezu.
- 9 Narysuj trapez równoramienny, w którym każda z przekątnych jest równa 7 cm, a kąt między przekątnymi ma miarę 100° . Czy można narysować jeszcze inny trapez o takich samych przekątnych i kącie między nimi?

210

Odpowiedzi do zadań

4. $120^\circ, 135^\circ$
5. C
6. a) $a + b + 2c; 19,1 \text{ cm}$ b) $a + b + c + d; 20,3 \text{ cm}$
7. $5c + 2$
8. 10 cm
9. tak

VII. Czworokąty



- 10 Jedna z podstaw trapezu równoramiennego ma długość 8 cm i jest to $\frac{1}{4}$ obwodu figury. Ramię tego trapezu jest o 3 cm krótsze od danej podstawy. Oblicz długość drugiej podstawy.
- 11 Narysuj trapez równoramienny, którego podstawy mają długości 8 cm i 4 cm, a wysokość – 3 cm. Ułóż plan, według którego można narysować ten czworokąt.
- 12 Obwód trapezu równoramiennego jest równy 32 cm. Jedna podstawa trapezu ma 8 cm długości i stanowi $\frac{4}{7}$ długości drugiej podstawy. Ile razy ramię trapezu jest krótsze od dłuższej podstawy?

Sprawdź się!

- 1 Podaj nazwy narysowanych figur i napisz o nich po 2 zdania.
- a)  b) 
- 2 W trapezie równoramiennym jeden z kątów wewnętrznych ma miarę 75° . Pozostałe kąty wewnętrzne tego trapezu mają miary
 A. $105^\circ, 75^\circ, 105^\circ$ B. $75^\circ, 75^\circ, 105^\circ$
 C. $75^\circ, 100^\circ, 100^\circ$ D. $75^\circ, 75^\circ, 100^\circ$
- 3 Narysuj trapez, którego podstawy mają długości 9 cm i 5 cm, a wysokość trapezu jest równa 4 cm.
- 4 Które zdanie jest **falszywe**?
 A. Każdy trapez jest rombem.
 B. Wśród trapezów jest taki, którego przekątne są prostopadłe i przecinają się w połowie swoich długości.
 C. Wśród trapezów są takie, w których jeden bok jest prostopadły do boków równoległych.
 D. Każdy równoległobok jest trapezem.
- 5 Narysuj trapez równoramienny, w którym kąt przy podstawie jest równy 70° , a ramię ma 5 cm. Oblicz pozostałe kąty wewnętrzne tego trapezu. Narysuj odcinek, który dzieli figurę na dwie jednakowe części.

211

Komentarz do zadań 10.–12.

Zachęcamy do wykonania rysunków pomocniczych z naniesionymi na nich danymi i zależnościami między tymi danymi.

Komentarz do Sprawdź się!

Wskazane, aby po wykonaniu zadania 1. kilku uczniów przeczytało zapisane przez siebie własności trapezów. W ten sposób utrwalimy je.

W zadaniu 2. trzeba zachęcić uczniów do wymienienia własności trapezu. Powinni oni zauważyć, że nie ma trapezu, który ma 3 kąty ostre. Pozwoli to na wyeliminowanie odpowiedzi B i D.

W zadaniu 4. po wskazaniu zdania fałszywego (A) należy porównać sens logiczny zdań A i D oraz uzasadnić, dlaczego pierwsze z nich jest fałszywe, a drugie prawdziwe. Można także zapytać o inne czworokąty, które są trapezami.

W rozwiązaniu zadania 5. pomoże rysunek pomocniczy, na którym uczniowie zaznaczą dane. Zadanie ma wiele rozwiązań. Długość podstawy i wysokości uczniowie wybierają dowolnie. Z całą pewnością wysokość musi być mniejsza niż 5 cm. Ramię trapezu jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnej, która jest wysokością czworokąta poprowadzoną z wierzchołka trapezu.

Odpowiedzi do zadań

10. 14 cm
 12. 2,8

Sprawdź się!

1. a) trapez równoramienny b) trapez prostokątny
 2. A
 4. A
 5. $70^\circ, 110^\circ, 110^\circ$

Tematy lekcji:

1. Klasyfikacja czworokątów (1 h)
2. Klasyfikacja czworokątów – zadania (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- wskazuje w czworokątach różne rodzaje kątów,
- rozpoznaje i nazywa kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok, trapez,
- zna najważniejsze własności kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu,
- porównuje własności czworokątów,
- klasyfikuje trapezy: trapez o jednej parze boków równoległych oraz o dwóch parach boków równoległych: równoległobok, romb, prostokąt, kwadrat,
- rozwiązuje zadania tekstowe z zastosowaniem własności czworokątów,
- zna własności czworokątów i rysuje czworokąty o podanej nazwie,
- nazywa i rysuje czworokąty na podstawie ich własności,
- zapisuje wyrażenie algebraiczne opisujące obwód czworokąta.

Wskazówki metodyczne

- Przed rozwiązywaniem zadań warto przeprowadzić następujące ćwiczenie.

Nauczyciel przygotowuje rysunki wszystkich czworokątów i ich nazwy (według Sowa uczy, s. 203 i s. 208). Uczniowie po wejściu do klasy losują rysunki czworokątów i zajmują miejsca w swoich ławkach. Następnie nauczyciel pokazuje losowo wybraną kartkę z nazwą czworokąta lub podaje jego własności. Kartkę z nazwą umieszcza na tablicy. Uczniowie, którzy wylosowali czworokąty o tej nazwie lub mające podane przez nauczyciela własności, wstają i pokazują rysunki swoich figur.

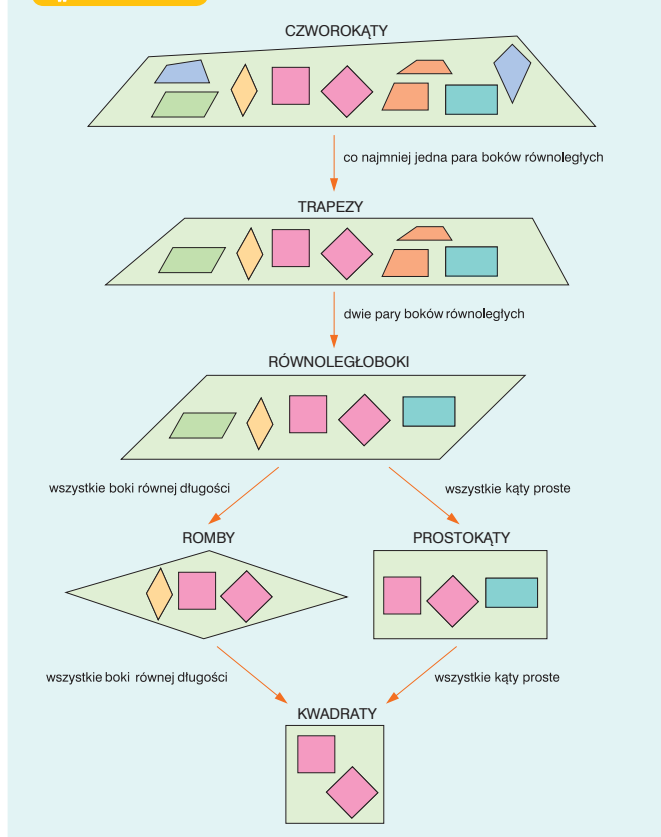
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 26 lub 26a.

Komentarz do Sowa uczy

Trzeba zwrócić uwagę i przeanalizować kolejne grupy czworokątów, z których pierwsza jest najliczniejsza. Uczniowie powinni zauważyć, że w każdej następnej grupie jest mniej czworokątów. W kolejnych grupach wszystkie figury, poza cechami figur z grupy wyżej, mają co najmniej jedną dodatkową wspólną cechę.

4. Klasyfikacja czworokątów – zadania

Sowa uczy



212

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
	Kartkówka 26 lub 26a Plansza edukacyjna. Jednostki Plansza edukacyjna. Pola i obwody wielokątów
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 49–52
Zbiór zadań	s. 128–131

VII. Czworokąty

Na podstawie *Sowa uczy* rozwiąż zadania 1.–4.

1. Narysuj 4 czworokąty należące do grupy równoległoboków.
2. Narysuj 2 różne czworokąty, które mają:
 - a) jedną parę boków równoległych, b) wszystkie boki równe.
 Co to za czworokąty?
3. Narysuj czworokąt, który nie jest trapezem.
4. Narysuj równoległobok o równych bokach i kątach tej samej miary.
5. Które zdanie jest **falszywe**?
 - A. Prostokąt ma dwie pary boków równych i równoległych oraz dwie przekątne równej długości.
 - B. Prostokątem o równych bokach jest kwadrat.
 - C. Jeżeli kąt ostry rombu ma miarę 80° , to kąt między dłuższą jego przekątną a bokiem ma miarę 40° .
 - D. We wszystkich czworokątach przekątne przecinają się w połowie swoich długości.
6. Podaj przykłady czworokątów, w których przekątne są:
 - a) równe,
 - b) przecinają się w połowie swoich długości,
 - c) przecinają się pod kątem prostym,
 - d) przecinają się pod kątem prostym i w połowie swoich długości.
7. Podaj nazwy czworokątów, które opisują poniższe zdania.
 - a) Ma dwie pary boków równych i równoległych oraz kąty wewnętrzne o miarach: 25° , 155° , 155° .
 - b) Ma jedną parę boków równoległych, a dwa pozostałe boki są równej długości.
 - c) Jego przekątne są różnej długości i przecinają się w połowie swoich długości.
 - d) Ma równe boki i kąty tej samej miary.
8. Narysuj trapez równoramienny o wysokości 3 cm i podstawach 5 cm i 3 cm.

213

Komentarz do zadań 1.–6.

Podczas wykonywania opisanego wcześniej ćwiczenia można omówić te zadania bez rysowania figur. Można też polecić uczniom samodzielne rozwiązanie tych zadań, co pozwoli ocenić umiejętności czytania ze zrozumieniem i uczenia się w trakcie pracy z podręcznikiem. Każde zadanie ma więcej niż jedno rozwiązanie, dlatego wskazane, aby kilkoro uczniów omówiło swój sposób rozwiązania. Można także zachęcić uczniów do ułożenia innych zadań do przedstawionej na s. 212 klasyfikacji czworokątów.

Komentarz do zadania 7.

Zadanie można rozwiązać ustnie. Uczniowie, którzy rozpoznają czworokąt na podstawie jego własności, powinni także wskazać grupę, do której on należy, i pokazać go na rysunku.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. a) romb b) prostokąt c) trapez d) kwadrat e) trapez prostokątny
 f) równoległobok g) trapez równoramienny h) czworokąt i) deltoid
 2. równoległobok: 5; trapez równoramienny: 4; prostokąt: 3; romb: 1, 2, 6; kwadrat: 2, 3, 6
 8. kolejno wierszami: 1 – kwadrat, prostokąt, trapez równoramienny;
 2 – romb, równoległobok, trapez równoramienny; 3 – romb, równoległobok, trapez, trapez prostokątny, deltoid, czworokąt; 4 – kwadrat, romb

Odpowiedzi do zadań

5. D
 6. a) prostokąt b) równoległoboki c) romby d) romby
 7. a) równoległobok b) trapez równoramienny c) równoległobok
 d) kwadrat

Komentarz do zadania 10.

To zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi. Trzeba tu wykorzystać umiejętność obliczania ułamka danej liczby oraz własności równoległoboku. Po wspólnym wykonaniu rysunku równoległoboku proponujemy podzielić uczniów na 4 grupy, aby każda z nich wymienila inne cechy figury. Jedna z grup zajmuje się bokami figury, inna – kątami, kolejna – przekątnymi, a ostatnia – wysokościami.

Komentarz do zadania 12.

Można zachęcić uczniów do wykonania rysunku pomocniczego pokazującego zależność między długością boku a obwodem figury. Następnie dobrzy uczniowie powinni napisać wyrażenie algebraiczne opisujące obwód figury, ułożyć odpowiednie równanie i rozwiązać je. Warto zauważyć, że długość drugiego boku łatwiej jest obliczyć, korzystając z połowy obwodu.

Komentarz do A to ciekawe!

Warto, aby uczniowie wskazali miejsce, w którym powinien znaleźć się deltoid w klasyfikacji czworokątów zawartej w *Sowa uczy*, s. 212. Omawiając własności deltoidu, uczniowie powinni zauważyć, że przekątne dzielą go na dwie pary jednakowych trójkątów prostokątnych.



9. Narysuj czworokąty, których obwody można opisać wyrażeniem: $2 \cdot (m + n)$. Oznacz odpowiednio boki tych czworokątów. Oblicz ich obwody dla $m = 3,8$ i $n = 5$.
10. Narysuj równoległobok, którego jeden bok ma 8 cm długości, długość drugiego boku jest równa 0,75 długości pierwszego, a kąt między tymi bokami wynosi 60° . Narysuj obydwie wysokości tego równoległoboku. Oblicz jego obwód.
11. Kąt przyległy do jednego z kątów wewnętrznych rombu ma miarę 125° . Oblicz kąty wewnętrzne tego rombu.
12. Bok równoległoboku ma 4 cm długości i jest to 0,2 obwodu tej figury. Oblicz długość drugiego boku równoległoboku.

A to ciekawe!

Latawiec przedstawiony na rysunku obok ma kształt **deltoidu**.

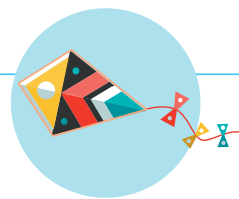
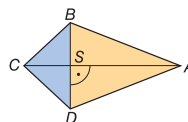


Figura $ABCD$ to deltoid.

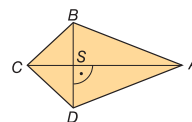
Ma dwie pary sąsiednich boków równych:

$$|AB| = |AD|, |CD| = |CB|.$$

Przekątne są prostopadłe: $DB \perp AC$. Punkt przecięcia przekątnych S dzieli jedną z nich na połowy: $|DS| = |SB|$.



Jedna z przekątnych dzieli deltoid na dwa trójkąty równoramienne o tej samej podstawie.



Druga przekątna dzieli deltoid na dwa identyczne trójkąty.

Boki deltoidu mają 3 cm i 6 cm, a przekątna łącząca ich końce ma 7 cm. Skonstruuj taki deltoid i oblicz jego obwód.

Odpowiedzi do zadań

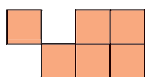
9. $L = 17,6$
10. $L = 28$ cm
11. $55^\circ, 125^\circ, 55^\circ, 125^\circ$
12. 6 cm

VII. Czworokąty

Wyzwanie

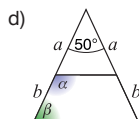
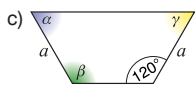
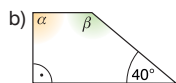
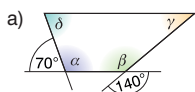
Wytnij z kartonu 6 kwadratów o boku 5 cm każdy i ułóż z nich dowolną figurę. Kwadraty można tak układać, aby stykały się bokami lub tylko wierzchołkami. Jak ułożyć kwadraty, żeby obwód otrzymanej figury był najmniejszy, a jak, aby był największy? Kolejno ułożone figury narysuj na papierze w kratkę.

Na przykład kwadraty można ułożyć tak, jak na rysunku obok.



Sprawdź się!

1. Uzupełnij zdanie. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B. Jeżeli w czworokącie trzy kąty wewnętrzne mają miary: 50° , 130° , 50° , to ten czworokąt **nie może** być A / B.
A. rombem B. trapezem prostokątnym
2. Narysuj romb, którego przekątne mają długości 12 cm i 5 cm. Zmierz długość boku i oblicz obwód tego rombu.
3. Narysuj odcinek MS , a następnie kwadrat $MAKI$, którego przekątne przecinają się w punkcie S . Wymień 2 własności tych przekątnych.
4. Oblicz miary zaznaczonych kątów.



5. Bok prostokąta ma długość 1,6 dm. Długość drugiego boku jest równa $\frac{3}{4}$ długości pierwszego. Oblicz obwód tego prostokąta i obwód prostokąta narysowanego w skali 1 : 2.

215

Komentarz do Wyzwania

Prostokąt o wymiarach $(2 \cdot 5) \text{ cm} \times (3 \cdot 5) \text{ cm}$ będzie miał najmniejszy obwód (50 cm). Z kolei figura zbudowana z kwadratów złożonych tylko wierzchołkami będzie miała największy obwód (120 cm). Uczniowie powinni dojść do takiego wniosku po wykonaniu kilku prób układania różnych figur.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadania tu zawarte podsumowują własności poznanych czworokątów. Nad rozwiązywaniem zadań uczniowie mogą pracować samodzielnie lub w parach przez 5–7 min. Następnie chętni uczniowie podają rozwiązania, a pozostali oceniają ich poprawność i dokonują korekty ewentualnych błędów. Warto też porozmawiać z uczniami o figurach z zadania 4.

Odpowiedzi do zadań

Sprawdź się!

1. B
2. $L = 26 \text{ cm}$
4. a) $\alpha = 110^\circ, \beta = 140^\circ, \gamma = 40^\circ, \delta = 70^\circ$ b) $\alpha = 90^\circ, \beta = 140^\circ$ c) $\beta = 120^\circ, \alpha = 60^\circ, \gamma = 60^\circ$ d) $\alpha = 115^\circ, \beta = 65^\circ$
5. $L = 56 \text{ cm}$, w skali: $L = 28 \text{ cm}$

Wskazówki metodyczne

- Uczniowie powinni zapoznać się z infografiką i przeprowadzić podobną rozmowę w klasie. Proponujemy, aby każdy z uczniów wybrał lub wylosował jeden z czworokątów i przedstawił go, podając co najwyżej dwie jego cechy. Opisy czworokątów powinny różnić się od tych z podręcznika.

- Uczniowie mogą również bawić się w zespołach 4–5-osobowych. Wówczas jeden z uczniów podaje cechy swojego czworokąta i wyznacza osobę z zespołu do podania nazwy. Jeżeli odpowiedź jest prawidłowa, to teraz ta osoba podaje cechy swojego czworokąta. Zabawa trwa dotąd, aż każdy w zespole zaprezentuje swój czworokąt.

- Doskonałą kontynuacją powtórzenia wiadomości o czworokątach jest ćwiczenie *Zgadnij, kim jestem*. Do jego przeprowadzenia potrzebne będą rysunki wszystkich omawianych czworokątów. Rysunków powinno być tyle, ilu jest uczniów w klasie. Uczeń losuje czworokąt i wciela się w jego rolę. Nie ujawnia, kim jest. Czworokąty dobierają się parami. Jeden z nich opisuje swoje własności, a drugi musi zgadnąć jego nazwę. Później następuje zamiana. Wygrywa ten czworokąt, który wymieni więcej swoich cech, zanim zostanie rozpoznany.

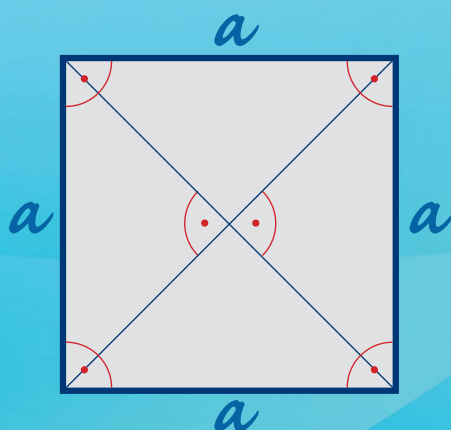
Czworokąty na czacie

Uczniowie klasy 5 utrwalali własności czworokątów. Zadaniem Maćka było podanie nazwy figury o wymienionych przez koleżankę lub kolegę własnościach.



Maciek

Cześć!
Jestem gotowy!

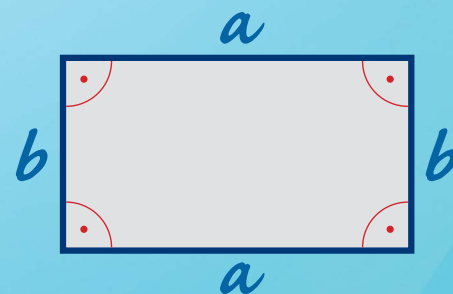


Jola

Cześć!
Mój czworokąt ma wszystkie boki tej samej długości i wszystkie kąty proste.

Wiem! To kwadrat!

Tak! To kwadrat. Ma on również przekątne równej długości, które przecinają się w połowie i pod kątem prostym!



Janek

Cześć!
Mój czworokąt ma wszystkie kąty proste oraz boki parami równe i równoległe!

Prostokąt!

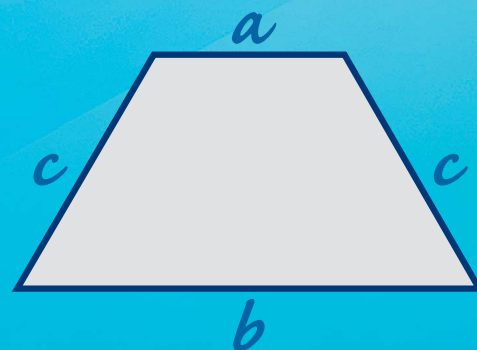
Tak!



Ola

Cześć!
Mój czworokąt ma jedną parę boków równoległych i dodatkowo ma ramiona równej długości.

To trapez równoramienny!



PRZYKŁADOWE CECHY DO PODANIA:

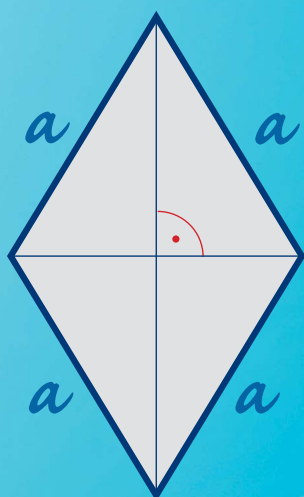
Mój obwód to suma długości moich 4 boków.

Mam 4 boki.

Mam 4 kąty wewnętrzne.

Mam 2 przekątne.

Suma miar moich kątów wewnętrznych jest równa 360° .



Zuza

Cześć!
Mój czworokąt ma wszystkie boki równe,
ale nie wszystkie jego kąty są równe.

Uuuuu, szkoda!

Ale za to ma przekątne, które
są do siebie prostopadłe!

To romb!

Tak jest!



Staś

Cześć!
Mój czworokąt
ma kąty ostre
i rozwarte.

Oooo, ciekawe!

Jego boki są parami równe
i równoległe.

Równoległobok :).

Zgadza się!

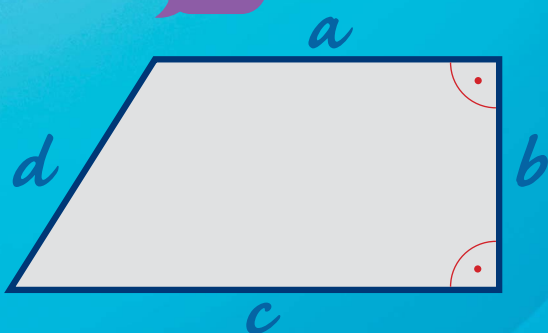


Tomek

Cześć!
Mój czworokąt ma tylko jedną parę
boków równoległych i aż dwa kąty proste.

Łatwizna! Trapez prostokątny!

Brawo!



Dzięki za fajną
powtórkę
własności
czworokątów.
Do zobaczenia!



Maciek

Moje przekątne mają różne długości.

Mam 2 kąty wewnętrzne ostre
i 2 kąty wewnętrzne rozwarte.

Moje przekątne są prostopadłe.

Punkt przecięcia moich przekątnych
dzieli każdą z nich na połowy.

- Taki sposób podawania własności figur, aby nie dać się szybko rozpoznać, może przedstawić uczniom nauczyciel, np. na podstawie opisu trójkąta.
- Czworokąty, które wymieniły najwięcej własności i nie zostały rozpoznane, powinny zostać nagrodzone zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami.



Tematy lekcji:

1. Powtórzenie wiadomości i utrwalenie umiejętności: Czworokąty (1 h)
2. Praca klasowa 6 (1 h)
3. Omówienie wyników i poprawa pracy klasowej (1 h)

Cele lekcji

Wybrane cele lekcji z danego rozdziału odpowiednie do rozwiązywanych zadań.

Komentarz do zadania 8.

Równoległoboki mogą mieć różne miary kątów, dlatego warto porozmawiać w klasie o różnicach w ich wyglądzie oraz o sposobach wykonania rysunku.

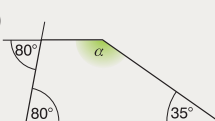
Komentarz do zadania 11.

To ważne zadanie, które uczy analitycznego myślenia oraz kojarzenia cech wspólnych i odrębnych poszczególnych czworokątów. Uczy także uzasadniania wyborów odpowiedzi. Po rozwiązaniu zadania można zadać dodatkowe pytania typu: *Które czworokąty są rombami? Które czworokąty są prostokątami?* W czasie szukania odpowiedzi uczniowie powinni mieć możliwość korzystania z *Sowa uczy*, s. 210.

Zadania utrwalające

1. Skonstruuj równoległobok *SUMA* o bokach 6,5 cm i 2,8 cm. Oblicz jego obwód.
2. Jeden bok prostokąta jest o 7,5 cm dłuższy od drugiego. Obwód prostokąta jest równy 9,9 dm. Oblicz długości boków tego prostokąta.
3. Skonstruuj romb *BLAT* o boku 3,6 cm. Poprowadź wysokości z wierzchołka *T*. Oblicz obwód tego rombu.
4. Obwód kwadratu jest taki sam jak prostokąta o bokach 0,6 dm i 4 cm. Narysuj te figury.
5. Oblicz miary zaznaczonych kątów.

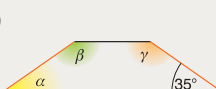
a)



b)



c)



6. Narysuj 2 trapezy. Jeden równoramienny, a drugi prostokątny. Zmierz długości boków i oblicz obwody tych trapezów.
7. Narysuj równoległobok o bokach 6 cm i 2 cm oraz romb o takim samym obwodzie. Narysuj wysokości tych figur.
8. Jeden bok równoległoboku ma długość 8 cm, a wysokość opuszczona na ten bok jest 4 razy krótsza. Narysuj równoległobok o takich własnościach. Sprawdź, czy wszyscy w klasie mają taki sam rysunek.
9. Narysuj trapez równoramienny, którego jedna podstawa ma 4 cm długości i jest to $\frac{1}{4}$ sumy długości obydwu podstaw. Wysokość trapezu jest równa połowie długości krótszej podstawy.
10. Narysuj 4 różne figury: romb, prostokąt, równoległobok i trapez w taki sposób, aby obwód każdej z tych figur był równy 20 cm. Na bokach każdej narysowanej figury napisz długości jej boków.
11. Czy kwadrat jest prostokątem, a prostokąt trapezem? Czy kwadrat jest trapezem równoramiennym? Odpowiedzi uzasadnij.

218

Odpowiedzi do zadań

1. $L = 18,6$ cm
2. 21 cm i 28,5 cm
3. $L = 14,4$ cm
4. bok kwadratu: 5 cm
5. a) $\alpha = 145^\circ$ b) $\alpha = 75^\circ, \beta = 90^\circ$ c) $\alpha = 35^\circ, \beta = \gamma = 145^\circ$
7. bok rombu: 4 cm
8. wysokość: 2 cm
9. druga podstawa: 12 cm, wysokość: 2 cm

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Proste i odcinki Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
	Praca klasowa 6 Plansza edukacyjna. Jednostki Plansza edukacyjna. Pola i obwody wielokątów
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 41–52
Zbiór zadań	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 118–131

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszytach.

1 Trapezem **nie** jest



2 Który czworokąt ma równe boki i kąty?

- A. Równoległobok. B. Romb.
C. Prostokąt. D. Kwadrat.

3 Który czworokąt ma prostopadłe przekątne?

- A. Prostokąt. B. Romb.
C. Trapez. D. Równoległobok.

4 Dwie pary boków równoległych mają

- A. trapezy. B. dowolne czworokąty.
C. równoległoboki. D. deltoidy.

5 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

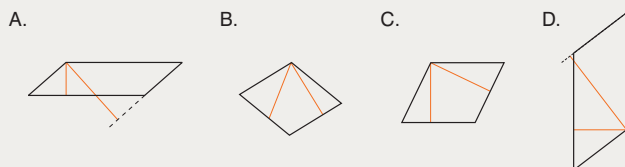
Przekątna dzieli kąt wewnętrzny A / B na dwa kąty o równej mierze.

- A. prostokąta B. rombu

Jeżeli kąt przyległy do jednego z kątów równoległoboku ma miarę 57° , to kąt ostry równoległoboku ma miarę C / D.

- C. 57° D. 67°

6 **Niepoprawnie** poprowadzono wysokości w równoległoboku



219

Komentarz do zadań 1.–6.

Wszystkie zadania można rozwiązać ustnie. Warto, aby uczniowie uzasadniali wybory swoich odpowiedzi. Zadania można też wykorzystać do przeprowadzenia opisanego niżej konkursu.

Każdy uczeń przygotowuje 6 małych kartek z numerami kolejnych zadań. Uczniowie śledzą wzrokiem tekst czytany przez nauczyciela zadania. Następnie w ciągu 20 s mają napisać na kartce z numerem zadania odpowiedź i zasygnalizować ukończenie pracy przez podniesienie ręki. Po podaniu przez wybranego ucznia odpowiedzi nauczyciel zbiera kartki z nieprawidłową odpowiedzią i czyta następne zadanie. Zakończeniem konkursu jest przyznanie uczniom ocen zgodnie z PSO.

Odpowiedzi do zadań

1. D
2. D
3. B
4. C
5. BC
6. B

Komentarz do zadań 9. i 10.

Uczniowie powinni szczególnie uważnie przeczytać polecenia tych zadań z powodu zapisanych w podręczniku pogrubioną czcionką zwrotów: *nie mogą*, *nie może*. Wybór odpowiedzi w zadaniu 9. będzie łatwiejszy, gdy uczniowie porównają sumę podanych boków z połową obwodu.

Komentarz do zadania 11.

Przy podobnych zadaniach można mobilizować uczniów do zwiększonej uwagi i aktywności na lekcji dodatkowymi pytaniami: *Jaką długość w skali 2 : 1 ma odcinek o długości 16 cm? Jaką długość ma bok kwadratu o obwodzie 12 cm w skali 1 : 1, jaką w skali 3 : 1, a jaką w skali 1 : 2?* Proponowane pytania sprawiają, że takie zadania będą zrozumiałe i zostaną szybko rozwiązane.

Komentarz do zadania 12.

Zadanie warto rozwiązać poprzez eliminowanie błędnych odpowiedzi. Uczniowie powinni pamiętać, że suma długości dwóch sąsiednich boków jest równa połowie obwodu, a dłuższy bok jest częścią obwodu.



- 7 Długości dwóch boków czworokąta oznaczono p , a długości dwóch pozostałych m oraz $p \neq m$. Wyrażenie $2m + 2p$ to obwód tego czworokąta. Ten czworokąt to
A. równoległobok. B. kwadrat.
C. romb. D. trapez równoramienny.
- 8 Którego czworokąta przekątne są równe, ale nie przecinają się w połowie swoich długości?
A. Rombu. B. Równoległoboku.
C. Trapezu równoramiennego. D. Prostokąta.
- 9 Obwód równoległoboku jest równy 26 cm. Boki równoległoboku **nie mogą** być równe
A. 10 cm i 4 cm. B. 8 cm i 5 cm.
C. 9 cm i 4 cm. D. 7 cm i 6 cm.
- 10 Kąty wewnętrzne czworokąta są równe: 26° , 154° , 154° , 26° . Który czworokąt **nie może** mieć kątów wewnętrznych o tych miarach?
A. Romb. B. Trapez prostokątny.
C. Równoległobok. D. Trapez równoramienny.
- 11 Obwód kwadratu ma długość 6 cm. Kwadrat ten narysowany w skali 3 : 1 ma obwód równy
A. 18 cm B. 72 cm C. 24 cm D. 1,5 cm
- 12 Jeden bok równoległoboku jest 4 razy dłuższy od drugiego, a obwód równoległoboku jest równy 18 cm.



Dłuższy bok równoległoboku ma długość

- A. 14,4 cm B. 7,2 cm C. 9 cm D. 10,8 cm

- 13 Na podstawie rysunku uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D. Obwód równoległoboku opisuje wyrażenie A / B.
A. $m + n$ B. $2(m + n)$



Dla $m = 5\frac{1}{2}$ cm i $n = 2\frac{2}{5}$ cm obwód jest równy C / D.

- C. 15,8 cm D. 7,9 cm

220

Odpowiedzi do zadań

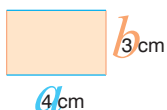
7. A
8. C
9. A
10. B
11. A
12. B
13. BC

VIII. Pola figur płaskich

1. Pole prostokąta i kwadratu

Sowa przypomina

• Prostokąt



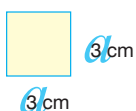
$$P - \text{pole}$$

$$P = 4 \cdot 3 = 12 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P = a \cdot b$$

a, b – długości boków prostokąta

• Kwadrat



$$P = 3 \cdot 3 = 9 \text{ [cm}^2\text{]}$$

lub

$$P = 3^2 = 9 \text{ [cm}^2\text{]}$$

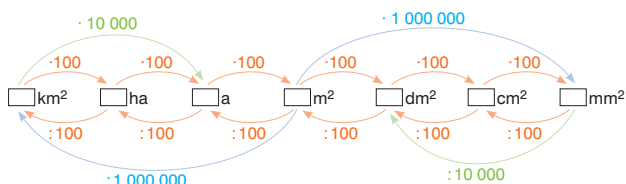
$$P = a^2$$

a – długość boku kwadratu

• Jednostki pola

- 1 milimetr kwadratowy (1 mm²) to pole kwadratu o boku 1 mm
 1 centymetr kwadratowy (1 cm²) to pole kwadratu o boku 1 cm
 1 decymetr kwadratowy (1 dm²) to pole kwadratu o boku 1 dm
 1 metr kwadratowy (1 m²) to pole kwadratu o boku 1 m
 1 ar (1 a) to pole kwadratu o boku 10 m
 1 hektar (1 ha) to pole kwadratu o boku 100 m
 1 kilometr kwadratowy (1 km²) to pole kwadratu o boku 1 km

• Zależności między jednostkami pola



221

Tematy lekcji:

1. Pole prostokąta i kwadratu. Jednostki pola (1 h)

2. Rozwiązywanie zadań praktycznych dotyczących pola prostokąta i kwadratu (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- oblicza pole kwadratu i prostokąta,
- objaśnia sposób obliczenia pola kwadratu i prostokąta,
- stosuje jednostki pola i zamienia je,
- w zadaniach na obliczanie pól kwadratu i prostokąta stosuje rysunek pomocniczy,
- rozwiązuje zadania na obliczanie pól kwadratu i prostokąta, w tym także w sytuacjach praktycznych.

Wskazówki metodyczne

- Pole prostokąta i jednostki pola były wprowadzone w klasie 4. Dotychczas uczniowie obliczali pole prostokąta, nie korzystając ze wzorów. W temacie „Zapisywanie wyrażeń algebraicznych” pokazaliśmy wzory na obliczanie obwodów i pól prostokątów. W tym temacie uczniowie powtarzają sposób obliczania pola prostokąta na liczbach oraz tworzenie wzorów.
- Przy powtarzaniu jednostek pola ćwiczeniem kształcącym i działającym na wyobraźnię jest narysowanie kwadratu o powierzchni 1 m² i częściowe wypełnienie go kwadratami o polu 1 dm². Na boisku szkolnym warto wyznaczyć kwadrat o polu 1 a. Praktyczne pokazanie jednostek pola pozwala lepiej zrozumieć pokazane na schemacie w *Sowa przypomina* zależności między nimi.
- Warto utrwalać umiejętność zamiany jednostek pola. W tym celu można skorzystać z planszy do gry *Prawda? Fałsz?* zamieszczonej w zeszyt ćwiczeń, cz. 1 (wkładka) oraz kart znajdujących się w zeszyt ćwiczeń, cz. 2, s. 101. Takie karty mogą również przygotować uczniowie, pracując w zespołach.
- W celu ułatwienia uczniom obliczania długości boku kwadratu przy danym polu proponujemy, aby w ramach pracy domowej uczniowie wykonali tabelkę z kwadratami kolejnych liczb naturalnych od 1 do 20. Wskazane jest, aby mogli z niej korzystać w obliczeniach rachunku pamięciowego, przy rozwiązywaniu zadań, a także podczas sprawdzianów.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 27.

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
	Kartkówka 27 Karta pracy. Pole prostokąta Plansza edukacyjna. Jednostki Plansza edukacyjna. Pola i obwody wielokątów
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 53–57
Zbiór zadań	s. 139–142

Komentarz do Przykładu 1.

Uświadomienie uczniom, że wszystkie figury ułożone z tych samych elementów mają równe pola, jest pomocne w porównywaniu i obliczaniu pól figur. Proponujemy ćwiczenie, które można wykonać w parach. Z czterech identycznych uczniowie układają dowolne figury oraz podają ich nazwy. Uczniowie jeszcze nie znają wzoru na pole trójkąta, ale wiedzą, jak obliczyć pole kwadratu (pole dwóch takich trójkątów). Jeżeli podamy długość przyprostokątnej trójkąta (liczbę parzystą), wtedy mogą obliczyć pola ułożonych figur. Warto również ułożyć kwadrat przedstawiony w tym przykładzie i przekładając 2 trójkąty, otrzymać prostokąt. Samodzielne układanie figur i tworzenie innych przez przekładanie trójkątów pomoże uczniom w wyciągnięciu wniosków i zrozumieniu przedstawionego w tym przykładzie wzoru. Warto zwrócić uwagę na różne sposoby zapisania tego samego wzoru.

Komentarz do zadań 1.–3.

W tych zadaniach uczniowie wykazują się umiejętnościami działań na ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Zadania można rozwiązać ustnie. Z uczniami, którzy mają problem z wykonywaniem działań na ułamkach zwykłych, można poszukać innych rozwiązań, np. ułamki zwykle zapisać w postaci dziesiętnej lub dokonać zamiany jednostek długości na milimetry.

Komentarz do zadań 5. i 6.

Te zadania również można rozwiązać ustnie. Przed podaniem odpowiedzi uczniowie powinni przedstawić sposób dochodzenia do wyniku, np.
 $100 \text{ dm}^2 = 1 \text{ m}^2$, to $400 \text{ dm}^2 = 4 \text{ m}^2$
 lub
 $10\,000 \text{ m}^2 = 1 \text{ ha}$, to $70\,000 \text{ m}^2$ to 7 ha .
 W czasie odpowiedzi powinni mieć możliwość korzystania z *Sowa przypomina*, s. 221.

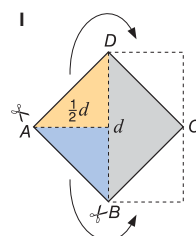
Komentarz do zadania 7.

Uczniowie powinni najpierw wyeliminować niepoprawną, ze względu na jednostkę, odpowiedź B, następnie zastanowić się, w jaki sposób oblicza się obwód, a w jaki pole kwadratu.



Przykład 1.

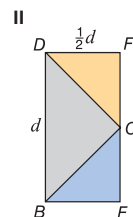
Obliczmy pole kwadratu, gdy mamy daną długość jego przekątnej d .



Narysujmy i wytnijmy kwadrat jak na rysunku I.

Przetnijmy kwadrat wzdłuż przerywanych linii i ułóżmy prostokąt jak na rysunku II.

$$P_{BEFD} = \left(\frac{1}{2}d\right) \cdot d = \frac{1}{2}d^2$$



Pole prostokąta $BEFD$ jest równe polu kwadratu $ABCD$.

$$\text{Stąd } P_{ABCD} = \frac{1}{2}d \cdot d = \frac{1}{2}d^2 = \frac{d^2}{2}.$$



Pole kwadratu jest równe połowie drugiej potęgi długości jego przekątnej.

- Narysuj prostokąt o bokach $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3\frac{1}{2} \text{ cm}$ i oblicz jego pole.
- Narysuj kwadrat o boku $4\frac{1}{2} \text{ cm}$ i oblicz jego pole.
- Obwód kwadratu jest równy $120,8 \text{ cm}$. Oblicz pole tego kwadratu.
- Narysuj kwadrat, którego przekątna $d = 5 \text{ cm}$, i oblicz jego pole.
- Zamień na metry kwadratowe.
a) 400 dm^2 b) 500 a c) 3 ha d) 3 km^2 e) $5 \text{ ha } 20 \text{ a}$
- Zamień na hektary.
a) $70\,000 \text{ m}^2$ b) $5\,000\,000 \text{ dm}^2$ c) 120 a d) 9 km^2 e) 2 km^2 600 a
- Obwód kwadratowej działki o powierzchni 900 m^2 jest równy
A. 120 m B. 1200 m C. 120 m^2 D. 90 m
- Pole prostokąta jest równe 64 cm^2 . Jeden bok ma długość 4 cm . Drugi bok ma
A. 8 cm B. 15 cm C. 16 cm D. 32 cm

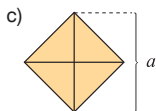
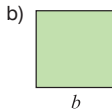
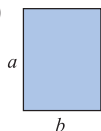
222

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- kolejno: $\frac{1}{100}, \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{57}{100}, \frac{7}{100}$
- pola kolejno wierszami: $18, 18, 16, 18, 21, 25, 8, 16, 8, 21$
- kolejno wierszami: $9 \text{ dm}, 7 \text{ cm}, 20 \text{ cm}, 25 \text{ cm}, 144 \text{ cm}^2, 49 \text{ cm}^2, 625 \text{ cm}^2, 324 \text{ dm}^2, 48 \text{ cm}, 36 \text{ dm}, 80 \text{ cm}, 72 \text{ dm}$
- kolejno wierszami: $10 \text{ cm}, 11 \text{ cm}, 7 \text{ cm}, 9 \text{ m}, 72 \text{ cm}^2, 6 \text{ dm}^2, 121 \text{ cm}^2, 54 \text{ m}^2, 34 \text{ cm}, 11 \text{ dm}, 28 \text{ cm}, 50 \text{ cm}$
- Prawda: $1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 24$; Fałsz: $4, 8, 9, 10, 14, 18, 20, 23$
- przykłady kolejno wierszami: $100 \text{ m}^2, 10\,000 \text{ dm}^2, 600 \text{ dm}^2, 60\,000 \text{ cm}^2, 100 \text{ dm}^2, 10\,000 \text{ cm}^2, 400 \text{ m}^2, 0,04 \text{ ha}, 1200 \text{ a}, 120\,000 \text{ m}^2, 100 \text{ a}, 1 \text{ ha}, 10\,000 \text{ a}, 100 \text{ ha}, 120\,000 \text{ m}^2, 12 \text{ ha}$
- a) bok 4 cm b) bok 7 cm c) $1 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}, 2 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ lub $4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ d) $1 \text{ cm} \times 36 \text{ cm}, 2 \text{ cm} \times 18 \text{ cm}, 3 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$ lub $4 \text{ cm} \times 9 \text{ cm}$
- a) NIE b) TAK c) TAK d) TAK
- a) $38\,000$ b) $70\,000$ c) 7500 d) $80\,000$ e) 6 f) 45
- A, D, F 11. a) $58,56 \text{ m}^2$ b) 366

VIII. Pola figur płaskich

- 9 Obwód prostokątnej działki ma 156 m. Jeden bok działki jest 2 razy dłuższy od drugiego. Jaka jest powierzchnia tej działki?
- 10 Droga ma 380 m długości i 8 m szerokości. Jaka jest jej powierzchnia?
A. 3140 m² B. 0,3 ha C. 30,4 a D. 3200 m²
- 11 Prostokątne boisko o wymiarach 72 m × 38 m wysypano żwirem. Jedna przyczepa żwiru wystarcza na 12 m² boiska. Ile przyczep żwiru zużyto?
- 12 Pan Stanisław ma do sprzedania dwie kwadratowe działki. Przekątna jednej działki ma 25 m, a bok drugiej – 20 m. Która działka ma większą powierzchnię?
- 13 Jedna puszka lakieru kosztuje 18,50 zł i wystarczy na polakierowanie 6 m², czyli $\frac{3}{8}$ powierzchni podłogi w altanie Kamila.
a) Ile takich puszek lakieru trzeba kupić, aby polakierować podłogę w altanie?
b) Ile trzeba zapłacić za te puszki?
- 14 Flaga Polski ma kształt prostokąta, którego szerokość jest równa $\frac{5}{8}$ długości. Biały kolor zajmuje 0,5 powierzchni flagi. Pani Jankowska uszyła flagę o długości 2 m. Jaka jest powierzchnia uszytej flagi? Narysuj tę flagę w skali 1 : 25.
- 15 Pokój ma wymiary 4 m × 4,5 m. Za położenie paneli na 1 m² podłogi pani Joanna zapłaciła 45 zł, co stanowiło $\frac{4}{5}$ ceny 1 m² paneli. Ile zapłaciła pani Joanna za panele i ich położenie w tym pokoju?
- 16 Napisz wyrażenia algebraiczne opisujące pola prostokątów i oblicz ich wartość liczbową dla: $a = 5$ cm, $b = 3,8$ cm.



223

Komentarz do zadania 10.

Warto, aby uczniowie najpierw zwrócili uwagę, że odpowiedzi są podane w różnych jednostkach pola. Następnie powinni sprawdzić, jakie będą dwie ostatnie cyfry w iloczynie (4 i 0), i w ten sposób wyeliminować odpowiedzi B i D.

Komentarz do zadania 12.

Po rozwiązaniu tego zadania warto dodatkowo odpowiedzieć na pytanie *O ile większą?* oraz wyrazić powierzchnię obu działek w arach i hektarach.

Komentarz do zadania 13.

To zadanie przedstawia praktyczne wykorzystanie matematyki w życiu codziennym. Jest to zadanie rozszerzonej odpowiedzi. Proponujemy zachęcić uczniów do wykonania rysunku pomocniczego i obliczenia powierzchni podłogi w altanie.

Komentarz do zadania 14.

Zadanie zawiera ważne informacje dotyczące rozmiarów polskiej flagi. Można skontaktować się z nauczycielem techniki i poprosić, by podczas jego lekcji uczniowie wykonali z papieru, w pewnej skali, flagi narodowe. Warto powiedzieć uczniom, że wymiary flagi nie są bez znaczenia i reguluje je ustawa z dnia 1 sierpnia 1919 r. o godłach i barwach Rzeczypospolitej Polskiej.

Odpowiedzi do zadań

1. $P = 17\frac{1}{2}$ cm²
 2. $P = 20\frac{1}{4}$ cm²
 3. $P = 912,04$ cm²
 4. $P = 12\frac{1}{2}$ cm²
 5. a) 4 m² b) 50 000 m² c) 30 000 m² d) 3 000 000 m² e) 52 000 m²
 6. a) 7 ha b) 5 ha c) 1,2 ha d) 900 ha e) 206 ha
 7. A 8. C 9. 1352 m²
 10. C 11. 228 12. druga
 13. a) 3 b) 55,50 zł
 14. $P = 2\frac{1}{2}$ m²
 15. 1822,50 zł
 16. a) $a \cdot b$; 19 cm² b) b^2 ; 14,44 cm² c) $\frac{a^2}{2}$; 12,5 cm²

Komentarz do zadania 17.

Papirus, o którym jest mowa w zadaniu, został sporządzony w Egipcie w XVII w. p.n.e. przez Ahmęsa i zawiera rozwiązywanie trudnych zadań z algebry i geometrii. Odkrył go brytyjski egiptolog Alexander Henry Rhinda i zakupił w 1858 r. Obecnie dwie części papirusu są przechowywane w Muzeum Brytyjskim w Londynie, a jego fragmenty w Brooklyn Museum w Nowym Jorku.

Ponieważ są 2 sposoby rozwiązania tego zadania, warto o nich porozmawiać.

Komentarz do Wyzwania

Warto przedstawić uczniom pokazany tutaj sposób obliczenia pola figury nieforemnej i na jego podstawie spróbować podać pole dowolnej plamy, np. kleksa, wyspy na mapie.

Komentarz do Sprawdź się!

Jeżeli w zadaniu 2. będziemy oczekiwać, aby wymiary prostokąta zostały wyrażone liczbami naturalnymi, to zadanie będzie miało aż 5 rozwiązań. Uczniowie, którzy podadzą wszystkie, powinni zostać nagrodzeni, np. plusami lub oceną.

Warto zachęcić uczniów do wykonania w zadaniu 3. rysunku pomocniczego i na jego podstawie ułożenia planu jego rozwiązania. Można również polecić narysowanie prostokąta w skali 1 : 5.

Przy wykonywaniu obliczeń uczeń może skorzystać z tabelki, w której ma wypisane kwadraty liczb naturalnych od 1 do 20.

Aby rozwiązać zadanie 5., uczniowie muszą zwrócić uwagę na to, że powierzchnia działki jest podana w hektarach, a wymiary działki w metrach. To powinno ich skłonić do zamiany 1 ha na metry kwadratowe ($10\,000\text{ m}^2$) i oszacowania iloczynu. Można również zachęcić uczniów do podania innych wymiarów działki o powierzchni 1 ha. Jeżeli uczniowie rozłożą na czynniki pierwsze liczbę $10\,000$ ($2^4 \cdot 5^4$), to z łatwością znajdą wiele par liczb, które spełniają warunki zadania.



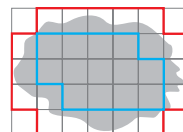
- 17 *Papirus Rhinda*, najstarszy dokument matematyczny, ma wymiary $525\text{ cm} \times 33\text{ cm}$. Kartka podręcznika ma wymiary $16\frac{1}{2}\text{ cm} \times 23\text{ cm}$. Oblicz powierzchnię papirusu i kartki podręcznika. Ile kartek do podręcznika można byłoby wyciąć z prostokątnego arkusza papieru o wymiarach tego papirusu? Ile razy, w zaokrągleniu do części dziesiątych, jest większa powierzchnia papirusu od powierzchni kartki?

Wyzwanie

Obliczmy przybliżoną powierzchnię plamy przedstawionej na rysunku.

Figura składająca się z całych kwadratów, mieszcząca się w plamie, jest obwiedziona linią niebieską, a figura składająca się z całych kwadratów, wewnątrz której jest plama, jest obwiedziona linią czerwoną. Zatem powierzchnia plamy jest większa od 13 kwadratów jednostkowych, a mniejsza od 31 kwadratów jednostkowych.

Narysuj plamę o powierzchni mniejszej niż 8 cm^2 , ale większej niż 5 cm^2 .



Sprawdź się!

- Prostokąt ma wymiary $15\text{ cm} \times 24\text{ cm}$. Pole tego prostokąta jest równe
A. 36 cm^2 B. 360 cm^2 C. 360 dm^2 D. $3,6\text{ m}^2$
- Kwadrat ma bok o długości 6 cm. Podaj wymiary dwóch prostokątów, których pole jest równe polu tego kwadratu.
- Prostokąt podzielono na 3 kwadraty, każdy o polu 25 cm^2 . Oblicz obwód tego prostokąta.
- Brama ma kształt prostokąta i wymiary $4,5\text{ m} \times 2\text{ m}$. Ile puszek farby, takich jak na rysunku, należy kupić na pomalowanie tej bramy z obu stron?
- Działka o powierzchni 1 ha ma kształt prostokąta. Działka **nie może** mieć wymiarów
A. $100\text{ m} \times 100\text{ m}$ B. $125\text{ m} \times 80\text{ m}$
C. $200\text{ m} \times 50\text{ m}$ D. $250\text{ m} \times 50\text{ m}$



224

Odpowiedzi do zadań

17. papirus: $17\,325\text{ cm}^2$, kartka: $379,5\text{ cm}^2$; 45 kartek; 45,7

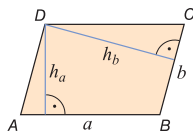
Sprawdź się!

- B
- np. $4\text{ cm} \times 9\text{ cm}$, $2\text{ cm} \times 18\text{ cm}$
- 40 cm
- 6
- D

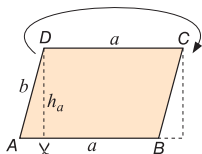
2. Pole równoległoboku i rombu

Przykład 1.

Obliczmy pole równoległoboku $ABCD$ o bokach a i b oraz o wysokościach h_a i h_b .



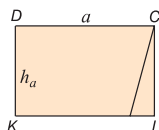
Narysujmy i wytnijmy równoległobok $ABCD$. Przetnijmy go wzdłuż wysokości h_a poprowadzonej z punktu D . Przełóżmy odcięty trójkąt, tak jak na rysunku.



Otrzymaliśmy prostokąt $KLCD$.

Pole prostokąta $KLCD$ jest równe polu równoległoboku $ABCD$.

Stąd $P_{ABCD} = a \cdot h_a$.



Równoległobok $ABCD$ można też przeciąć wzdłuż wysokości h_b i tym razem otrzymać prostokąt o polu $b \cdot h_b$.

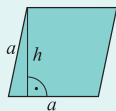
Stąd $P_{ABCD} = b \cdot h_b$.

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości poprowadzonej na ten bok.



Sowa uczy

Romb jest równoległobokiem, zatem jego pole można obliczyć ze wzoru: $P = a \cdot h$.



225

Tematy lekcji:

1. Pole równoległoboku i rombu (1 h)
2. Rozwiązywanie zadań dotyczących pola równoległoboku i rombu (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- oblicza pole równoległoboku i rombu,
- objaśnia sposób obliczenia pola równoległoboku i rombu,
- stosuje jednostki pola i zamienia je,
- w zadaniach tekstowych na obliczanie pól równoległoboku i rombu stosuje rysunek pomocniczy,
- rozwiązuje zadania na obliczanie pola równoległoboku i rombu, w tym także w sytuacjach praktycznych.

Wskazówki metodyczne

- Na tę lekcję nauczyciel powinien polecić uczniom przyniesienie wyciętych z papieru figur: równoległoboku i rombu lub we własnym zakresie przygotować takie figury na każdą ławkę. Opisane w tym temacie ćwiczenia mogą być wykonane w parach. Jeżeli uczniowie będą pracować sami, to ich wiedza będzie trwalsza. Jeżeli w przyszłości zapomną wzoru, z pewnością poradzą sobie w inny sposób.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 28.

Komentarz do Sowa uczy

Ten wzór nie jest dla uczniów zaskoczeniem. Wiedzą już bowiem, że romb to równoległobok o równych bokach, więc sposób obliczenia pola rombu powinien być taki sam jak w przypadku równoległoboku. Można jednak przeprowadzić takie samo doświadczenie z modelem rombu jak to, które było opisane w *Przykładzie 1*. Warto także wyjaśnić, dlaczego dla równoległoboku zapisano dwa wzory na pole, a dla rombu tylko jeden.

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
	Kartkówka 28 Plansza edukacyjna. Jednostki Plansza edukacyjna. Pola i obwody wielokątów
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 58–60
Zbiór zadań	s. 143–146

Komentarz do Przykładu 2.

Podobnie jak przy obliczaniu pola kwadratu (Przykład 1., s. 222,) uczniowie mogą układać figury, lecz tym razem z czterech identycznych trójkątów prostokątnych różnobocznych. Jedną z tak ułożonych figur powinien być romb. Tworząc wzór, uczniowie mogą kierować się przedstawionym w przykładzie opisem. Później możemy zasugerować dobrem uczniom, by boki trójkąta oznaczyli literami, np. a , b , c i nazywali przekątną rombu oraz napisali wyrażenie opisujące pole ułożonego rombu.

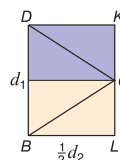
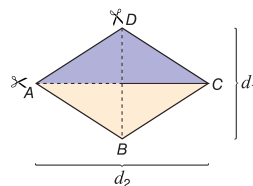
Komentarz do Przykładu 3.

W rozwiązaniu tego zadania przedstawiony jest sposób, w jaki można wykorzystać wzór do wpisania danych i ułożenia równania.

Przykład 2.

Obliczmy pole rombu o danych przekątnych d_1 i d_2 .

Narysujmy romb $ABCD$ i jego przekątne d_1 i d_2 . Wytnijmy go i przetnijmy wzdłuż przerywanych linii. Ułożmy tak jak na drugim rysunku.



Pola rombu $ABCD$ i prostokąta $BLKD$ są jednakowe.

$$\text{Stąd } P_{ABCD} = \frac{1}{2} d_2 \cdot d_1 = \frac{1}{2} d_1 d_2 = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$



Pole rombu jest równe połowie iloczynu długości przekątnych.

Przykład 3.

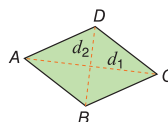
Pole rombu jest równe 6 dm^2 , a dłuższa przekątna AC ma długość 40 cm . Obliczmy długość krótszej przekątnej rombu $ABCD$.

Jednostki używane w obliczeniach muszą być jednakowe.

$$40 \text{ cm} = 4 \text{ dm}$$

Skorzystamy ze wzoru:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$



Litery we wzorze zastąpimy liczbami danymi w zadaniu: $d_1 = 4 \text{ dm}$, $P = 6 \text{ dm}^2$.

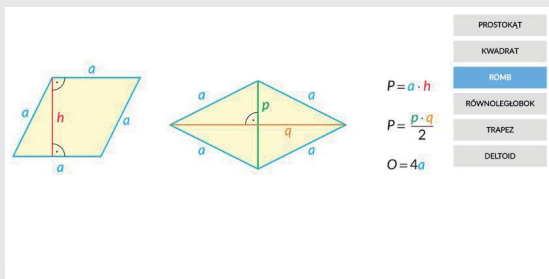
$$6 = \frac{4 \cdot d_2}{2}, \quad 6 = \frac{4 \cdot d_2}{2}, \quad 6 = 2 \cdot d_2, \quad d_2 = 3 \text{ [dm]}$$

Odpowiedź. Krótsza przekątna rombu ma długość 3 dm .

226

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. a) ah , 10 cm^2 b) ah , 32 cm^2 c) bh_1 , $13,8 \text{ cm}^2$ d) $\frac{1}{2} d_1 d_2$, 6 cm^2
2. kolejno wierszami: $3,6 \text{ m}$; 25 cm ; $2,5 \text{ m}$; $5,6 \text{ m}$; 215 cm^2 ; 84 dm^2
3. kolejno wierszami: 14 cm ; 34 cm ; 36 cm ; 26 cm ; 20 dm^2 ; $562,5 \text{ cm}^2$
4. 9 cm
5. B, C
6. $h_a = 5 \text{ cm}$, $P = 26 \text{ cm}^2$; $h_a = 3,2 \text{ cm}$, $P = 12,8 \text{ cm}^2$; $h_a = 4 \text{ cm}$, $P = 24,8 \text{ cm}^2$; $h_a = 4,5 \text{ cm}$, $P = 19,8 \text{ cm}^2$

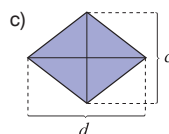
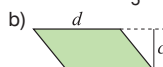
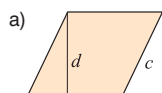


Plansze interaktywne → Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności → Obwody i pola czworokątów

VIII. Pola figur płaskich



1. Bok równoległoboku ma 12 cm długości, a wysokość poprowadzona na ten bok ma 5 cm. Pole tego równoległoboku jest równe
A. 30 cm² B. 60 cm² C. 60 dm² D. 34 cm²
2. Pole rombu o przekątnych długości 12 cm i 8 cm jest równe
A. 96 cm² B. 48 dm² C. 48 cm D. 48 cm²
3. Oblicz pole rombu o podstawie 6 cm i wysokości 3 razy krótszej.
4. Oblicz pole równoległoboku o podstawie 13 cm i opuszczonej na nią wysokości, krótszej od podstawy o 2,5 cm.
5. Oblicz długość boku równoległoboku, jeżeli wysokość poprowadzona na ten bok ma 8 cm, a pole figury to 96 cm².
6. Zapisz wyrażenia algebraiczne opisujące pola narysowanych figur i oblicz ich wartości liczbowe dla: $c = 7\frac{2}{5}$ cm i $d = 2,6$ cm.



7. Pole równoległoboku jest równe 24,8 cm², a wysokość poprowadzona na jeden z boków ma 62 mm. Długość tego boku jest równa
A. 4 cm² B. 4 cm C. 4 mm D. 0,4 cm
8. Narysuj równoległobok, którego jeden z boków ma 6 cm, a wysokość poprowadzona na ten bok jest równa $\frac{2}{3}$ jego długości. Oblicz jego pole. Narysuj inny równoległobok o takim samym polu.
9. Pole równoległoboku KLMN jest równe 60 cm², a bok MN ma 12 cm długości. Ile razy wysokość MP – poprowadzona na bok KL – jest krótsza od boku KL?
10. Narysuj romb o przekątnych 8 cm i 5 cm.
a) Oblicz pole tego rombu.
b) Przez każdy wierzchołek rombu narysuj prostą równoległą do przekątnej rombu. Podaj nazwę otrzymanej figury i oblicz jej pole.
11. Jeden bok równoległoboku ma 1,3 dm i jest to $\frac{1}{6}$ obwodu tej figury. Wysokość poprowadzona na dłuższy bok ma 12 cm. Oblicz pole tego równoległoboku.

227

Komentarz do zadań 1.–3.

Zadania można rozwiązać ustnie. Przy podawaniu odpowiedzi uczniowie powinni je uzasadniać. W ten sposób przygotowują się do dowodzenia.

Komentarz do zadań 5. i 7.

Gdyby któryś z uczniów miał problem z rozwiązaniem tych zadań, warto zachęcić go do poszukiwania odpowiedniego przykładu w podręczniku. To dobry sposób na naukę korzystania z podręcznika.

Komentarz do zadania 8.

Uczniowie powinni przypomnieć sobie sposób rysowania prostych równoległych w danej odległości. Zachęcając do poszukiwań różnych równoległoboków o tym samym polu, można wykonać ćwiczenie. Będą do niego potrzebne 2 równej długości ołówki, których końce zostaną połączone gumkami, oraz narysowane na tablicy proste równoległe. Jeżeli pierwszy ołówek umieścimy na jednej prostej, a drugi będziemy przesuwać wzdłuż drugiej prostej, to powstaną równoległoboki o tej samej wysokości i jednej parze boków tej samej długości (ołówek). Uczniowie powinni zauważyć, że pola tych równoległoboków są takie same.

Komentarz do zadania 9.

Zachęcamy uczniów do wykonania rysunku pomocniczego. Może się zdarzyć, że wysokość MP będzie poprowadzona do przedłużenia boku KL. Część uczniów może mieć problem z jej narysowaniem.

Komentarz do zadania 10.

Warto, by uczniowie uzasadnili ustnie swoją odpowiedź w punkcie b). To doskonała okazja, by porozmawiać o figurach i ich własnościach. Uzasadnienie odpowiedzi przygotowuje uczniów do dowodzenia.

Odpowiedzi do zadań

1. B
2. D
3. 12 cm²
4. 136,5 cm²
5. 12 cm
6. a) $c \cdot d$; 19,24 cm² b) $d \cdot c$; 19,24 cm² c) $\frac{c \cdot d}{2}$; 9,62 cm²
7. B
8. 24 cm²
9. 2,4
10. a) 20 cm² b) prostokąt; 40 cm²
11. 312 cm²

Komentarz do zadania 12.

Z własności trójkąta prostokątnego uczniowie powinni wyciągnąć wniosek, że w utworzonym trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna (najdłuższy bok trójkąta) jest krótszym bokiem równoległoboku (10 cm), a jedna z przyprostokątnych jest wysokością figury. Może mieć 6 cm lub 8 cm.

Zadanie ma 2 rozwiązania. Podanie jednego jest wystarczające i zasługuje na wyróżnienie w postaci oceny lub plusów, ponieważ wymaga od ucznia wielu umiejętności. Zdolnych uczniów warto zachęcić do szukania drugiego rozwiązania.

Komentarz do Wyzwania

Obliczenie wysokości równoległoboku nie jest trudne. Wystarczy obliczyć niewiadome w równaniach: $8h_1 = 16$, $4h_2 = 16$. Narysowanie równoległoboku może uczniom sprawić trudność. Pomocne będą 2 paski papieru: jeden o szerokości 4 cm, drugi – 2 cm. Układając je jeden na drugi tak, by ich boki przecinały się pod kątem innym niż 90° , i patrząc pod światło, można zobaczyć równoległobok. Na podstawie obserwacji można wykonać rysunek pomocniczy i za jego pomocą narysować równoległobok o podanych własnościach. Uczniowie z pewnością rozpoczną pracę od narysowania prostych równoległych w odległości 4 cm lub 2 cm. Trzeba zachęcić ich, by przy odmierzaniu odcinków korzystali z cyrkla.

Komentarz do Sprawdź się!

Rozwiązanie zadania 3. jest dobrą okazją do ćwiczenia umiejętności argumentowania. Warto nie tylko uzasadnić, dlaczego zdanie D jest fałszywe, ale także dlaczego pozostałe zdania są prawdziwe.

Rozwiązując zadanie 5., uczniowie muszą zdecydować, które boki to przyprostokątne, i w jaki sposób ułożyć z nich romb. Podczas tego ćwiczenia mogą korzystać z modeli takich trójkątów. Ułatwi to niektórym uczniom rozwiązanie zadania, gdyż zauważą, że otrzymali romb o prostopadłych przekątnych równych 48 cm i 14 cm.



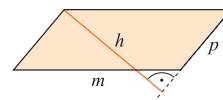
- 12 Wysokość równoległoboku poprowadzona z wierzchołka w kierunku dłuższego boku wyznacza trójkąt prostokątny o bokach wyrażonych w centymetrach kolejnymi liczbami parzystymi. Największa z tych liczb jest najmniejszą liczbą dwucyfrową. Długość krótszej przyprostokątnej to 0,4 długości dłuższego boku równoległoboku. Oblicz obwód i pole tego równoległoboku.

Wyzwanie

Pole równoległoboku o bokach 4 cm i 8 cm jest równe 16 cm^2 . Oblicz wysokości tego równoległoboku. Narysuj ten równoległobok.

Sprawdź się!

- Pole rombu o przekątnych długości 6 cm i 9 cm jest równe
A. 54 cm^2 B. 15 cm^2 C. 27 cm^2 D. 108 cm^2
- Oblicz pole równoległoboku, którego jeden bok ma długość 16 cm, a wysokość opuszczona na ten bok wynosi 7,5 cm.
- Które zdanie jest **fałszywe**?
A. Pole równoległoboku o boku 50 mm i wysokości 2 cm opuszczonej na ten bok jest równe 10 cm^2 .
B. Pole narysowanego równoległoboku opisuje wzór: $P = p \cdot h$.
C. Pole rombu, którego przekątne są równe 6 cm i 4 cm, jest równe polu równoległoboku o boku 6 cm i wysokości opuszczonej na ten bok równej 2 cm.
D. Jeżeli przekątne rombu mają długości d_1 i d_2 , to pole tego rombu obliczymy z wzoru: $P = d_1 \cdot d_2$.
- Jedna przekątna rombu jest równa 7,2 cm, a długość drugiej przekątnej to $\frac{5}{9}$ długości pierwszej. Oblicz pole tego rombu.
- Oblicz pole rombu ułożonego z czterech trójkątów prostokątnych o bokach 7 cm, 24 cm, 25 cm.



228

Odpowiedzi do zadań

12. $L = 50 \text{ cm}$, $P = 120 \text{ cm}^2$ lub $P = 90 \text{ cm}^2$

Wyzwanie

$h_1 = 2 \text{ cm}$, $h_2 = 4 \text{ cm}$

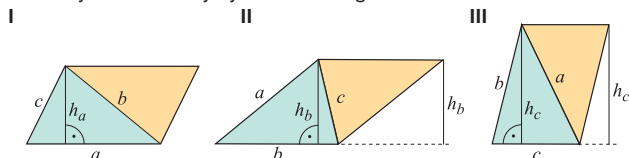
Sprawdź się!

- C
- 120 cm^2
- D
- $14,4 \text{ cm}^2$
- 336 cm^2

3. Pole trójkąta

Przykład 1.

Kasia zastanawiała się, jak obliczyć pole trójkąta. Wycięła 2 takie same trójkąty. Przykładała je równymi bokami, tak jak na rysunkach I, II i III. Za każdym razem otrzymywała równoległobok.



Stąd pole trójkąta, jako połowa pola równoległoboku, jest równe:

$$P = (a \cdot h_a) : 2 = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \text{ (rys. I)}$$

$$P = (b \cdot h_b) : 2 = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b \text{ (rys. II)}$$

$$P = (c \cdot h_c) : 2 = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \text{ (rys. III)}$$

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości poprowadzonej na ten bok.



Przykład 2.

W trójkącie prostokątnym boki mają długości: 4 cm, 5 cm i 3 cm. Obliczmy pole tego trójkąta i wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną.

Wykonajmy rysunek pomocniczy.

Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem trójkąta:

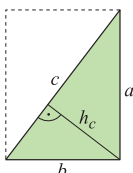
$a = 4$ cm, $b = 3$ cm i $c = 5$ cm.

Pole tego trójkąta to połowa pola prostokąta o bokach a i b .

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b, \quad P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3, \quad P = 6 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Obliczmy wysokość h_c opuszczoną na bok c .

$$P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c, \quad 6 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h_c, \quad 6 = 2,5 \cdot h_c, \quad h_c = 2,4 \text{ [cm]}$$



Odpowiedź. Pole trójkąta jest równe 6 cm², a wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość 2,4 cm.

229

Tematy lekcji:

1. Pole trójkąta (1 h)

2. Rozwiązywanie zadań dotyczących pola trójkąta (1 h)

3. Zadania tekstowe na obliczanie pola trójkąta (1 h)

Cele lekcji

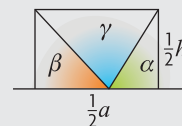
Uczeń:

- oblicza pole trójkąta,
- objaśnia sposób obliczania pola trójkąta,
- objaśnia sposób obliczania pola trójkąta prostokątnego,
- w zadaniach na obliczanie pól trójkątów stosuje rysunek pomocniczy,
- rozwiązuje zadania na obliczanie pól trójkątów, w tym także w sytuacjach praktycznych,
- stosuje jednostki pola i zamienia je.

Wskazówki metodyczne

- Można pokazać jeszcze inny sposób wyprowadzenia wzoru na pole trójkąta. Wycinamy dowolny trójkąt i przez składanie wyznaczamy jego wysokość poprowadzoną na najdłuższy bok. Teraz każdy wierzchołek trójkąta kładziemy na spodek wysokości.

Otrzymujemy prostokąt, którego pole jest równe $\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}h$. Ponieważ pole tego prostokąta jest 2 razy mniejsze od pola trójkąta, zatem pole trójkąta jest równe $\frac{1}{2}a \cdot h$.



- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 29.

Komentarz do Przykładu 1.

Na lekcję każdy uczeń powinien przynieść 2 identyczne trójkąty różnobożne, w których boki jednakowej długości powinny być oznaczone takim samym kolorem. Z tych trójkątów uczniowie układają równoległoboki, których pola są takie same. Trzeba zwrócić uwagę na różne sposoby zapisu pola trójkąta.

Komentarz do Przykładu 2.

Warto, aby uczniowie, pracując w parach, układali figury z dwóch identycznych trójkątów prostokątnych. Łącząc trójkąty przeciwprostokątnymi, otrzymają prostokąty. Możemy podawać uczniom pary liczb, które będą długościami przyprostokątnych, a uczniowie będą podawali pole utworzonego prostokąta.

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
	Kartkówka 29 Plansza edukacyjna. Jednostki Plansza edukacyjna. Pola i obwody wielokątów
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 61–64
Zbiór zadań	s. 146–149

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. B, C, D; A 2. a) $h = 3,5$ cm, $P = 7$ cm² b) $h = 3,5$ cm, $P = 5,25$ cm²
 3. kolejno wierszami: 15; 12; 9; 18; 10; 10,5; 15; 12; 12; 9; 12,5; 8
 4. około 7 cm² 5. $P = 3$ cm² 6. F, P, P 7. A
 8. a) $P = 72$ cm² b) $P = 96$ cm² c) $P = 192$ cm²
 9. a) P, F, P, P b) $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABD} = P_{\triangle EBD} = 52,5$ cm²

Komentarz do zadań 1. i 2.

Zadania można wykonać ustnie. W zadaniu 2. jest za dużo danych i każdy uczeń powinien uzasadnić swój wybór danych potrzebnych do obliczenia pola.

Komentarz do zadania 4.

To zadanie służy do pokazania sposobu rozwiązania zadania przez podstawianie. Szukając poprawnej odpowiedzi, trzeba sprawdzać, czy iloczyn odpowiedzi i połowy długości podstawy jest równy 24.

Komentarz do zadań 5., 6. i 8.

Uczniowie powinni przypomnieć sobie własności trójkąta prostokątnego: przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem, a przyprostokątne są wysokościami trójkąta.

Komentarz do zadania 7.

Zadanie zawiera polecenie obliczenia pola trójkąta przy nietypowych danych. Bok i wysokość na niego opuszczona są wyrażone w różnych jednostkach długości (km i mm). Trzeba wykonać to zadanie, ponieważ takie zadania znajdują się w komentarzu do podstawy programowej.

Komentarz do zadania 8.

To trudniejszy typ zadania, gdyż przy danym polu trójkąta prostokątnego i długości jednej przyprostokątnej uczniowie muszą obliczyć długość drugiej przyprostokątnej. W takim przypadku warto posłużyć się wzorem i do środka liter wpisać dane z zadania, a następnie korzystając z własności działań, obliczyć niewiadomy czynnik. Jeżeli uczniowie zamienią 11 m^2 na 1100 dm^2 , a $5\frac{1}{2} \text{ m}$ na 55 dm , łatwiej będzie im wykonać potrzebne obliczenia.

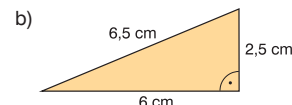
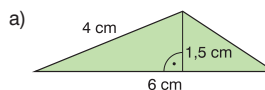
Komentarz do zadania 12.

Rozwiązanie tego zadania wymaga od uczniów umiejętności obliczania liczby na podstawie jej ułamka oraz ułamka danej liczby. Warto rozważyć jego rozwiązanie, posługując się rysunkiem pomocniczym. Można się zastanowić także nad tym, czy długość podstawy podana jako $0,1 \text{ m}$ ułatwia, czy utrudnia obliczenia.



- 1 Podstawa trójkąta ma 6 cm długości, a wysokość poprowadzona na nią – 5 cm . Oblicz pole tego trójkąta.

- 2 Oblicz pole trójkąta.



- 3 Narysuj trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $6\frac{1}{2} \text{ cm}$ i 3 cm . Oblicz jego pole.

- 4 Pole trójkąta jest równe 24 cm^2 . Podstawa ma długość 8 cm . Wysokość poprowadzona na tę podstawę jest równa

A. 3 cm B. 3 cm^2 C. 6 cm D. 96 cm

- 5 Oblicz pole trójkąta prostokątnego o bokach: 8 cm , 6 cm i 10 cm .

- 6 Pole trójkąta prostokątnego jest równe 18 cm^2 . Jedna przyprostokątna ma 9 cm . Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.

- 7 Długość podstawy trójkąta ma $0,5 \text{ km}$, a wysokość na nią poprowadzona 5 mm . Oblicz pole tego trójkąta.

- 8 Pole trójkąta prostokątnego jest równe 11 m^2 , a jedna przyprostokątna jest równa $5\frac{1}{2} \text{ m}$. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej i narysuj taki trójkąt w skali $1 : 100$.

- 9 Wysokość trójkąta jest równa $12\frac{1}{2} \text{ m}$, a podstawa, na którą ona pada, ma $0,4$ tej wysokości. Oblicz pole tego trójkąta i wyraż je w m^2 i dm^2 .

- 10 Podstawa trójkąta równoramiennego ma $(2 \cdot 3^2) \text{ cm}$ długości, wysokość $(2^3 \cdot 5) \text{ cm}$, a ramiona są o $0,1 \text{ dm}$ dłuższe od wysokości. Oblicz obwód i pole tego trójkąta.

- 11 Obwód trójkąta równoramiennego jest równy $38,4 \text{ dm}$. Podstawa jest o $2,4 \text{ dm}$ dłuższa od ramienia. Wysokość opuszczona na podstawę stanowi $0,8$ długości ramienia. Oblicz pole tego trójkąta.

- 12 Podstawa trójkąta równoramiennego jest równa $0,1 \text{ m}$ i jest to $\frac{5}{18}$ obwodu. Wysokość jest równa $1,2$ długości podstawy. Oblicz obwód i pole tego trójkąta.

230

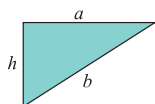
Odpowiedzi do zadań

1. 15 cm^2
2. a) $4,5 \text{ cm}^2$ b) $7,5 \text{ cm}^2$
3. $9\frac{3}{4} \text{ cm}^2$
4. C
5. 24 cm^2
6. 4 cm
7. $1,25 \text{ m}^2$
8. 4 m ; przyprostokątne w skali: $5,5 \text{ cm}$ i 4 cm
9. $31,25 \text{ m}^2 = 3125 \text{ dm}^2$
10. $L = 100 \text{ cm}$, $P = 360 \text{ cm}^2$
11. $69,12 \text{ dm}^2$
12. $L = 36 \text{ cm}$, $P = 60 \text{ cm}^2$

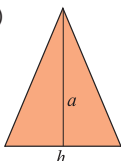
VIII. Pola figur płaskich

- 13 Zapisz wyrażenia algebraiczne opisujące pola trójkątów i oblicz ich wartości liczbowe dla: $a = 18$ cm, $b = 19,5$ cm, $c = 8,5$ cm i $h = 7,5$ cm.

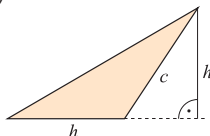
a)



b)



c)

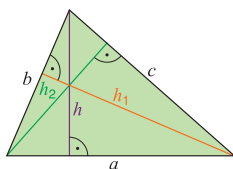


Wyzwanie

Wysokość trójkąta jest 3 razy dłuższa niż podstawa, na którą jest ona opuszczona. Pole trójkąta jest równe 24 cm². Oblicz podstawę i wysokość tego trójkąta. Narysuj taki trójkąt w skali 1 : 2.

Sprawdź się!

- Narysuj trójkąt, którego podstawa ma długość 5 cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę – 4 cm. Oblicz pole tego trójkąta.
- Który wzór poprawnie opisuje pole narysowanego obok trójkąta?
 A. $P = \frac{1}{2} ch$ B. $P = \frac{1}{2} bh_1$
 C. $P = \frac{1}{2} ah_1$ D. $P = \frac{1}{2} ah_2$
- Trójkąt prostokątny ma boki: 12 m, 5 m, 13 m. Oblicz pole tego trójkąta.
- Podstawa trójkąta ma 12 cm, a wysokość poprowadzona na tę podstawę jest równa $\frac{1}{4}$ długości podstawy. Pole tego trójkąta ma
 A. 18 cm² B. 36 cm² C. 48 cm² D. 45 cm
- Podstawa trójkąta KOS ma długość 6 cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę jest równa jej połowie. Oblicz pole trójkąta KOS i narysuj inny trójkąt o takim samym polu.



231

Komentarz do zadania 13.

Wskazane, aby zapisane wzory na pola trójkątów uczniowie przedstawili w formie słownej.

Komentarz do Wyzwania

Do tego zadania uczniowie powinni wykonać rysunek pomocniczy. Skoro pole każdego trójkąta o danej podstawie i wysokości jest takie samo, więc można narysować trójkąt prostokątny o przyprostokątnych, które oznaczamy: a i $3a$.

Po zapisaniu wyrażenia algebraicznego opisującego pole trójkąta lub 2 razy większego prostokąta oraz wykonaniu odpowiednich działań otrzymujemy $a^2 = 16$. Teraz wystarczy odgadnąć liczbę, której kwadrat jest równy 16.

Można również zachęcić uczniów, by powstały prostokąt podzielili na 3 kwadraty, każdy o boku a . Pole jednego kwadratu jest równe 48 cm² : $3 = 16$ cm², więc jego bok ma długość 4 cm. Można narysować też inny rodzaj trójkąta. Po wyznaczeniu jego wysokości trzeba dorysować 2 trójkąty prostokątne, aby otrzymać prostokąt.



Komentarz do Sprawdź się!

Warto porównać rozwiązania zadania 1. i zachęcić uczniów do uzasadnienia, dlaczego jest wiele trójkątów o podanych warunkach. Uczniowie powinni dojść do wniosku, że jeżeli narysują proste równoległe w odległości 4 cm i na jednej prostej odmierzą odcinek długości 5 cm, to na drugiej prostej w dowolnym miejscu mogą zaznaczyć wierzchołek. Pola wszystkich tak utworzonych trójkątów będą jednakowe. W zadaniu 2. wybór poprawnej odpowiedzi (B) należy uzasadnić. Uczniowie powinni wyjaśnić, dlaczego według nich pozostałe wzory są niewłaściwe. Warto porozmawiać o liczbie rozwiązań zadania 5. i o tym, czym różnią się narysowane trójkąty. Można także się zastanowić, jakie rodzaje trójkątów ze względu na boki i kąty narysowali uczniowie.

Odpowiedzi do zadań

13. a) $\frac{a \cdot h}{2}$; 67,5 cm² b) $\frac{a \cdot h}{2}$; 67,5 cm² c) $\frac{h^2}{2}$; 28,125 cm²

Wyzwanie

Podstawa ma długość 4 cm, a wysokość – 12 cm.

Sprawdź się!

- 10 cm²
- B
- 30 m²
- A
- 9 cm²

Tematy lekcji:

1. Pole trapezu (1 h)
2. Rozwiązywanie zadań praktycznych na obliczanie pola trapezu (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- oblicza pole trapezu,
- objaśnia sposób obliczenia pola trapezu,
- stosuje jednostki pola i zamienia je,
- w zadaniach na obliczanie pola trapezu stosuje rysunek pomocniczy,
- rozwiązuje zadania problemowe rozszerzonej odpowiedzi z zastosowaniem obliczania pól trapezu.

Wskazówki metodyczne

• Należy przygotować uczniów do wyprowadzenia wzoru na pole trapezu. We wzorze pojawia się trudne pojęcie *suma podstaw*. Jeżeli uczniowie widzą obok siebie 2 odcinki o długościach a i b , to na pytanie: *Jaka jest długość odcinka złożonego z tych dwóch?* najczęściej odpowiadają: ab . Warto zatem rozwiązać ustnie zadania, które pomogą im napisać odpowiednie wyrażenie. Proponowane zadania:

1. W jednej skarbonce jest 10 zł, a w drugiej 12 zł. Jak obliczysz, ile pieniędzy łącznie jest w skarbankach?
2. W jednej skarbonce jest a zł, a w drugiej 12 zł. Jak obliczysz, ile pieniędzy łącznie jest w skarbankach?
3. W jednej skarbonce jest 20 zł, a w drugiej b zł. Jak obliczysz, ile pieniędzy łącznie jest w skarbankach?
4. W jednej skarbonce jest a zł, a w drugiej b zł. Jak obliczysz, ile pieniędzy łącznie jest w skarbankach?
5. Jeden odcinek ma długość m cm, a drugi p cm. Jak obliczysz, jaką długość mają łącznie te 2 odcinki?

Uczniowie powinni podawać sposób obliczeń, a nie tylko wynik. Jeżeli błędnie podadzą obliczenia do zadania 4., warto wrócić do zadania 1., następnie 2. i 3. z podstawieniem innych wartości.

• Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 30.

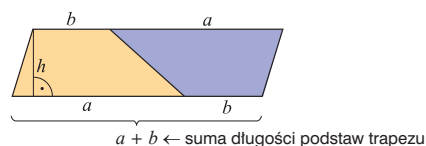
Komentarz do Przykładu 2.

Uczniowie mogą samodzielnie rozwiązać to zadanie, pracując z podręcznikiem. W ten sposób możemy ćwiczyć umiejętność uczenia się i korzystania z podręcznika. Po rozwiązaniu zadania wybrani uczniowie komentują obliczenia i na życzenie uczniów, którzy mają problemy ze zrozumieniem zadania, udzielają dodatkowych wyjaśnień.

4. Pole trapezu

Przykład 1.

Julia postanowiła obliczyć pole trapezu. Wycięła 2 identyczne trapezy i ułożyła z nich równoległobok, tak jak pokazano na rysunku.



Pole równoległoboku jest równe: $P = (a + b) \cdot h$.

Równoległobok składa się z dwóch jednakowych trapezów, więc pole trapezu jest równe:

$$P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h \quad \text{lub} \quad P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}, \quad \text{lub} \quad P = \frac{a + b}{2} \cdot h.$$

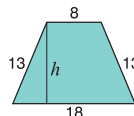


Pole trapezu jest równe połowie iloczynu sumy długości podstaw i jego wysokości.

Przykład 2.

Trapez równoramienny ma boki długości: 18 cm, 13 cm, 13 cm, 8 cm. Wysokość trapezu jest równa $\frac{2}{3}$ długości dłuższej podstawy. Jakie jest pole tego trapezu?

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



Ramiona są równej długości, więc mają po 13 cm.

$h = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12$ [cm] – wysokość równa $\frac{2}{3}$ długości dłuższej podstawy

$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2} = \frac{(8 + 18) \cdot 12}{2} = 156 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Odpowiedź. Pole trapezu jest równe 156 cm².

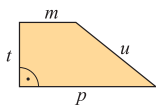
232

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
	Kartkówka 30 Plansza edukacyjna. Jednostki Plansza edukacyjna. Pola i obwody wielokątów
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 65–69
Zbiór zadań	s. 149–152

VIII. Pola figur płaskich



1. Podstawy trapezu mają długości 14 cm i 8 cm. Wysokość trapezu jest równa 4 cm. Pole tego trapezu to
A. 88 cm² B. 22 cm² C. 44 cm² D. 44 cm
2. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące pole narysowanego trapezu i oblicz jego wartość liczbową dla: $p = 8$ cm, $m = 4$ cm, $t = 3$ cm, $u = 5$ cm.
 
3. Wysokość trapezu podzieliła go na prostokąt o wymiarach 3 cm $\times$ 5 cm i trójkąt o bokach: 3 cm, 4 cm, 5 cm. Narysuj ten trapez i oblicz jego pole.
4. Pole trapezu jest równe 70 cm². Podstawy mają długości 8 cm i 6 cm. Oblicz wysokość tego trapezu.
5. Pole trapezu wynosi 24 cm². Wysokość ma 4 cm. Suma długości podstaw tego trapezu jest równa
A. 6 cm B. 24 cm C. 12 cm D. 8 cm
6. Pole trapezu jest równe 21 cm². Oblicz jego wysokość, jeśli jedna podstawa ma 8,3 cm, a druga jest o 4,6 cm krótsza.
7. Podstawy trapezu mają długości 8,4 cm i 2,5 cm. Wysokość jest równa tyle co 0,5 dłuższej podstawy. Pole tego trapezu wynosi
A. 22,89 cm² B. 45,78 cm² C. 29,89 cm² D. 2,89 cm²
8. Jedna podstawa trapezu jest równa 6 cm. Druga jest 2 razy dłuższa. Wysokość trapezu ma tyle co $\frac{3}{4}$ dłuższej podstawy. Oblicz pole tego trapezu.
9. Krótsza podstawa trapezu ma długość 8 m i jest to $\frac{2}{5}$ sumy długości podstaw. Wysokość trapezu jest równa 20 mm. Oblicz pole tego trapezu.
10. Ramiona trapezu równoramienne mają po 10 cm długości. Wysokość jest równa 0,8 długości ramienia, a obwód ma 42 cm. Oblicz pole tego trapezu.

233

Komentarz do zadania 2.

Rozwiązując to zadanie, utrwalamy umiejętność zapisywania wyrażeń algebraicznych i obliczania ich wartości liczbowych. Warto zapytać uczniów o nazwę otrzymanego wyrażenia.

Komentarz do zadania 4.

Obserwujemy pomysły uczniów podczas samodzielnego rozwiązywania przez nich tego zadania. W razie potrzeby uczniowie mogą wrócić do *Przykładu 2.*, s. 229, i napisać równanie w podobny jak tam sposób.

Komentarz do zadania 5.

Zadanie można wykonać ustnie. Aby je rozwiązać, wystarczy zauważyć, która z podanych odpowiedzi pomnożona przez połowę wysokości jest równa podanemu polu trapezu.

Komentarz do zadania 9.

Trzeba zachęcić uczniów do wykonania w tym zadaniu rysunku pomocniczego przedstawiającego zależności między podstawami trapezu. Uczniowie powinni zwrócić uwagę na różne jednostki w podanych wymiarach figury.

Komentarz do zadania 10.

Po analizie zadania i wpisaniu danych do wzoru uczniowie powinni dojść do wniosku, że nie muszą znać długości każdej podstawy, tylko ich sumę. Dobrze byłoby, aby napisali dane z zadania na rysunku pomocniczym.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. a) 18 cm² b) 16 cm² c) 6 cm² d) 18 cm² e) 18 cm² f) 10 cm²
2. a) $h = 6$ cm, $P = 36$ cm² b) $h = 4$ cm, $P = 26$ cm²
3. $a = 4,2$ cm, $P = 15,3$ cm² 4. b) 135° c) 3 cm, $P = 10$ cm²
5. $P_{TRAP} = 18$; podstawa trójkąta = 12 6. F, P, P, F, P 7. 66,30 zł
8. trapezu prostokątnego, 12, 16, 4, 56
9. kolejno: 9; lm ; 5; $\frac{1}{2}bh$; ah ; 3,6; a^2 ; $\frac{(c+d)m}{2}$; 8; 10; 550; 22,4; 45; 3,38; $\frac{1}{2}cl$; mx
10. a) A. $d + p$ B. $2d + p$ C. $3d + p$ b) A. $3d + p + c$; $L = 20$ cm
B. $2d + 2p + 2c$; $L = 24$ cm C. $3d + 3p + c + 10$; $L = 36$ cm c) B, A, B

Odpowiedzi do zadań

1. C 2. $\frac{(m+p) \cdot t}{2}$; 18 cm²
3. 21 cm² 4. 10 cm
5. C 6. $3\frac{1}{2}$ cm 7. A
8. 81 cm² 9. 0,2 m² 10. 88 cm²

Komentarz do zadania 11.

W tym zadaniu uczniowie mają narysować działkę w skali. Pojęcie skali i rysowania figur w skali to zagadnienia trudne i dlatego powinno się do nich często wracać. Przed rozwiązaniem zadania warto w rachunku pamięciowym uwzględnić dzielenie liczb naturalnych i ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000.

Komentarz do zadania 14.

Do rozwiązania zadania warto skorzystać z wyniku zadania 13. Uczniowie nie muszą wykonywać wszystkich obliczeń, wystarczy, że oszacują wyniki działań.

Komentarz do Sprawdź się!

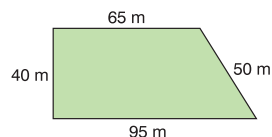
Zadanie 3. utrwała umiejętność obliczania wysokości trapezu przy danym polu i długościach podstaw. Można ocenić, który iloczyn połowy sumy długości podstaw (5 cm) i podanej w odpowiedziach wysokości jest równy 15 cm².

W zadaniu 4. trzeba obliczyć sumę długości podstaw, więc pole trapezu można przedstawić jako iloczyn połowy wysokości przez sumę podstaw. Takie równanie pozwala łatwo obliczyć szukaną wielkość. Wystarczy, żeby uczniowie podali dwie liczby spełniające warunek zadania. Dobrych uczniów można zachęcić do znalezienia wszystkich rozwiązań, uporządkować je w tabelce oraz wykonać rysunek przedstawiający jeden z trapezów. Można też zadać pytanie: *Jak inaczej można nazwać trapez, którego podstawy będą miały równe długości?*

W zadaniu 5. wskazane jest wykonanie rysunku pomocniczego i zaznaczenie na nim zależności między długościami podstaw. Po podstawieniu danych do wzoru i skróceniu ułamka otrzymujemy: $9 = (a + 2a)$.

Skorzystaj z poniższych informacji i rozwiąż zadania 11.–14.

Działka pana Jerzego ma kształt trapezu prostokątnego o wymiarach podanych na rysunku.



- 11 Narysuj działkę pana Jerzego w skali 1 : 1000.
- 12 Obwód tej działki ma długość
A. 245 m B. 250 m C. 245 m² D. 240 m
- 13 Oblicz powierzchnię tej działki.
- 14 Oblicz, ile kosztowała ta działka, jeżeli 1 m² działki kosztował 80 euro (€). To mniej czy więcej niż 1 000 000 zł, jeżeli w chwili kupna działki 1 € = 4,20 zł?
- 15 Adam narysował prostokąt ABCD o polu 120 cm². Na boku CD o długości 10 cm obral punkt M i połączył go z wierzchołkiem B. Otrzymał trójkąt BCM o bokach 12 cm, 5 cm i 13 cm oraz trapez ABMD. Oblicz pole i obwód otrzymanego trapezu.

🐾 Sprawdź się!

- 1 Podstawy trapezu mają 6 cm i 10 cm długości, a jego wysokość jest równa 5 cm. Oblicz pole tego trapezu.
- 2 Jedna podstawa trapezu ma długość 9 cm, a druga o 6 cm mniej. Wysokość jest równa 3,5 cm. Oblicz pole tego trapezu.
- 3 Pole trapezu wynosi 15 cm², a podstawy mają długości 6 cm i 4 cm. Wysokość tego trapezu jest równa
A. 6 cm B. 3 cm C. 1 cm D. 7,5 cm
- 4 Pole trapezu jest równe 40 cm². Wysokość ma 5 cm. Oblicz sumę długości podstaw tego trapezu. Podaj przykład długości podstaw wyrażonych liczbami naturalnymi.
- 5 Pole trapezu wynosi 9 dm², a wysokość figury jest równa 2 dm. Oblicz długości podstaw, jeżeli jedna z nich jest 2 razy dłuższa od drugiej.

234

Odpowiedzi do zadań

11. wymiary w skali: 9,5 cm; 5 cm; 6,5 cm; 4 cm
12. B
13. 3200 m²
14. 256 000 euro; więcej
15. $P = 90 \text{ cm}^2$, $L = 40 \text{ cm}$

Sprawdź się!

1. 40 cm²
2. 21 cm²
3. B
4. 16 cm; np. 6 cm i 10 cm
5. 6 dm i 3 dm

Zadania utrwalające

- 1 W prostokącie jeden bok jest równy 6,5 cm, a drugi jest o 2,9 cm krótszy. Oblicz pole tego prostokąta.
- 2 Narysuj 2 kwadraty: jeden o boku 6 cm, drugi o przekątnej 6 cm. Który z nich ma większe pole i o ile centymetrów kwadratowych?
- 3 W kwadracie o boku długości 5 cm wydłużono 2 równoległe boki o 3 cm każdy. O ile pole powstałego prostokąta jest większe od pola kwadratu?
- 4 Dłuższe boki prostokąta skrócono o 2 cm i powstał kwadrat o boku 7 cm. Jakie było pole tego prostokąta?
- 5 Kwadrat i prostokąt mają takie same pola. Bok kwadratu ma 6 cm. Jeden bok prostokąta jest o 3 cm dłuższy od boku kwadratu. Oblicz długość drugiego boku prostokąta. Narysuj te figury.
- 6 Narysuj 2 romby: jeden o przekątnych 8 cm i 4 cm, a drugi o boku 8 cm i wysokości 4 cm. Oblicz ich pola.
- 7 Trójkąt ma boki o długościach: 26 cm, 26 cm, 20 cm. Wysokość poprowadzona na najkrótszy bok ma 24 cm. Oblicz pole tego trójkąta.
- 8 Jeden bok równoległoboku ma 6,8 cm długości, a wysokość opuszczona na ten bok – 25 mm. Narysuj tę figurę i oblicz jej pole.
- 9 W trapezie równoramiennym podstawy mają długości 8 m i 5 m, a wysokość trapezu jest równa 4,2 m. Oblicz pole tego trapezu.
- 10 Podstawa trójkąta ma 12,6 cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę ma 5 cm. Oblicz pole tego trójkąta.
- 11 Skonstruuj trójkąt prostokątny o bokach: 3 cm, 4 cm, 5 cm. Na każdym jego boku narysuj kwadrat. Oblicz pole otrzymanej figury.

235

Materiały dydaktyczne

	Geometria na płaszczyźnie → Wielokąty i ich własności
	Praca klasowa 7 Karta pracy. Pole prostokąta Plansza edukacyjna. Jednostki Plansza edukacyjna. Pola i obwody wielokątów
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 53–69
Zbiór zadań	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 139–152

Odpowiedzi do zadań

1. $23,4 \text{ cm}^2$
2. pierwszy, o 18 cm^2
3. o 15 cm^2
4. 63 cm^2
5. 4 cm
6. 16 cm^2 , 32 cm^2
7. 240 cm^2
8. 17 cm^2
9. $27,3 \text{ m}^2$
10. $31,5 \text{ cm}^2$
11. 56 cm^2

Tematy lekcji:

1. Powtórzenie wiadomości i utrwalenie umiejętności: Pola figur płaskich (1 h)
2. Praca klasowa 7 (1 h)
3. Omówienie wyników i poprawa pracy klasowej (1 h)

Cele lekcji

Wybrane cele lekcji z danego rozdziału odpowiednie do rozwiązywanych zadań.

Wskazówki metodyczne

- Na lekcjach powtórzeniowych trzeba przypomnieć zależności między jednostkami pola zawarte w sekcji *Sowa przypomina*, s. 221.
- Warto zachęcać uczniów, by do każdego rozwiązywanego zadania wykonywali rysunki pomocnicze.
- Proponujemy przeprowadzenie zabawy *HASŁO–ODZEW*. Tym razem hasłem (podaje nauczyciel) jest pole kwadratu o boku długości od 1 do 20, odzew (podaje wyznaczony uczeń) to długość boku tego kwadratu. Przy podawaniu odpowiedzi uczniowie mogą korzystać z przygotowanej wcześniej tabelki z kwadratami liczb.

Komentarz do zadań 1.–3.

Zadania można rozwiązać w pamięci i ustnie podać odpowiedzi. Warto zaangażować do obliczeń uczniów z problemami w nauce matematyki, by w ten sposób ich zaktywizować i umożliwić osiągnięcie sukcesu.

Komentarz do zadania 7.

Podczas rozwiązywania tego zadania można zapytać o nazwę trójkąta ze względu na boki i kąty.

Komentarz do zadania 11.

Korzystając z własności trójkąta prostokątnego, uczniowie powinni wskazać, które z podanych boków są przyprostokątnymi. Skonstruowanie trójkąta powinno to potwierdzić.

Komentarz do zadania 14.

Warto, aby każdą zmianę jednostek uczniowie uzasadniali zależnością między tymi jednostkami odpowiednim działaniem. Można się umówić na następującą formę odpowiedzi:

$78\ 000\text{ cm}^2 = 7,8\text{ m}^2$, gdyż $1\text{ m}^2 = 10\ 000\text{ cm}^2$, więc $78\ 000$ podzielone przez $10\ 000$ równa się $7,8\text{ [m}^2\text{]}$.

Komentarz do zadania 15.

Ten typ zadania sprawia trudność wielu uczniom. Należy przeprowadzić z uczniami analizę rysunku. Powinni oni zauważyć, że pole równoległoboku można obliczyć dwoma sposobami: $P = b \cdot h_1$ lub $P = a \cdot h$.

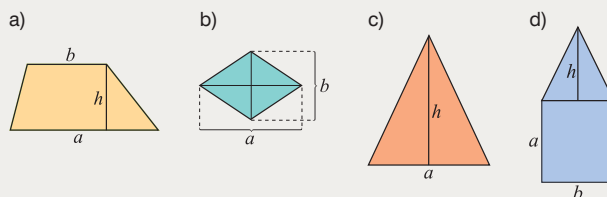
Komentarz do zadania 17.

Należy zauważyć, że dane na rysunku są wyrażone w różnych jednostkach, i na początku ustalić, w jakich jednostkach najłatwiej będzie wykonać obliczenia. Istotne jest, w jaki sposób uczniowie obliczą dłuższą podstawę. Powinni zwrócić uwagę na fakt, że po narysowaniu drugiej wysokości poprowadzonej przez drugi wierzchołek powstaną 2 identyczne trójkąty prostokątne i prostokąt.



- 12 Wytnij 5 identycznych trójkątów równoramiennych o podstawie 4 cm i wysokości 3 cm. Użyj wszystkich trójkątów, aby ułożyć z nich trapez lub inny wielokąt. Narysuj go i oblicz jego pole.

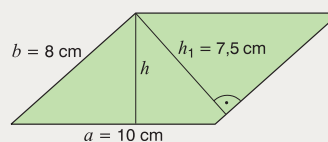
- 13 Napisz wyrażenia algebraiczne opisujące pola narysowanych figur. Oblicz wartości liczbowe tych wyrażeń dla: $a = 5\text{ cm}$, $b = 2,4\text{ cm}$, $h = 3,2\text{ cm}$.



- 14 Przepisz przykłady, zamiast $\blacklozenge$ napisz odpowiednią liczbę.

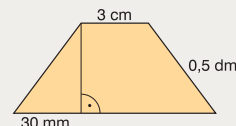
- a) $78\ 000\text{ cm}^2 = \blacklozenge\text{ m}^2$ b) $5,06\text{ ha} = \blacklozenge\text{ a}$
c) $4,1\text{ km}^2 = \blacklozenge\text{ ha}$ d) $0,3\text{ m}^2 = \blacklozenge\text{ dm}^2$
e) $540\text{ m}^2 = \blacklozenge\text{ a}$ f) $125\text{ a} = \blacklozenge\text{ m}^2$

- 15 Skorzystaj z rysunku i oblicz pole oraz wysokość h równoległoboku.



- 16 Pole równoległoboku jest równe $7,5\text{ cm}^2$, a jeden z boków ma długość 3 cm. Oblicz wysokość równoległoboku opuszczoną na dany bok.

- 17 Pole przedstawionego na rysunku trapezu równoramiennego jest równe 24 cm^2 . Oblicz jego wysokość.



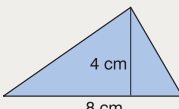
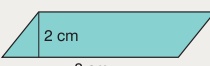
236

Odpowiedzi do zadań

12. 30 cm^2
13. a) $\frac{(a+b) \cdot h}{2}$; $11,84\text{ cm}^2$ b) $\frac{a \cdot b}{2}$; 6 cm^2
c) $\frac{a \cdot h}{2}$; 8 cm^2 d) $a \cdot b + \frac{b \cdot h}{2}$; $15,84\text{ cm}^2$
14. a) 7,8 b) 506 c) 410 d) 30 e) 5,4 f) 12 500
15. $P = 60\text{ cm}^2$, $h = 6\text{ cm}$
16. $2,5\text{ cm}$
17. 4 cm

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszytach.

1. Jeżeli przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 4,8 cm i 6 cm, to pole tego trójkąta jest równe
A. 14,4 cm² B. 28,8 cm² C. 14,4 dm² D. 12,4 cm²
2. Pole kwadratu, którego obwód ma długość 14,4 cm, jest równe
A. 7,2 cm² B. 12,96 cm² C. 207,36 cm² D. 12,76 cm²
3. Podstawa trójkąta ma 10 cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę wynosi 4,8 cm. Pole tego trójkąta jest równe
A. 48 cm² B. 2,4 cm² C. 24 cm² D. 14,8 cm²
4. Pole rombu jest równe 120 cm². Jedna przekątna ma 20 cm długości. Długość drugiej przekątnej to
A. 6 cm B. 60 cm C. 24 cm D. 12 cm
5. Obwód rombu jest równy 60 cm. Wysokość rombu ma 10 cm. Pole tego rombu wynosi
A. 150 cm² B. 75 cm² C. 600 cm² D. 300 cm²
6. Bok równoległoboku ma długość 5,4 cm, a wysokość opuszczona na ten bok jest 3 razy krótsza. Pole tego równoległoboku jest równe
A. 87,48 cm² B. 16,2 cm² C. 12,96 cm² D. 9,72 cm²
7. Której figury pole **nie jest** równe 16 cm²?
A.  B.  C.  D. 
8. Trapez ma podstawy o długościach 6,3 cm i 3,7 cm. Ramię prostopadłe do podstaw ma długość 5 cm. Pole tego trapezu jest równe
A. 15 cm² B. 50 cm² C. 25 cm² D. 12,5 cm²

237

Komentarz do zadań 1.–8.

Zadania można rozwiązać w formie konkursu par uczniów. Zaczyna para wskazana przez nauczyciela. Po przeczytaniu treści zadania uczniowie naradzają się, podają ustaloną odpowiedź oraz uzasadniają ją. Pozostali uczniowie oceniają jej poprawność. Jeżeli odpowiedź była prawidłowa, para typuje następnych odpowiadających. W taki sposób można rozwiązać wszystkie zadania. Warto ustalić dodatkową premię dla tych uczniów, którzy do eliminowania błędnych odpowiedzi będą stosowali szacowanie.

Komentarz do zadania 7.

Po rozwiązaniu zadania warto poprosić o nazwy figur i podanie działań, za pomocą których można obliczyć ich pola.

Odpowiedzi do zadań

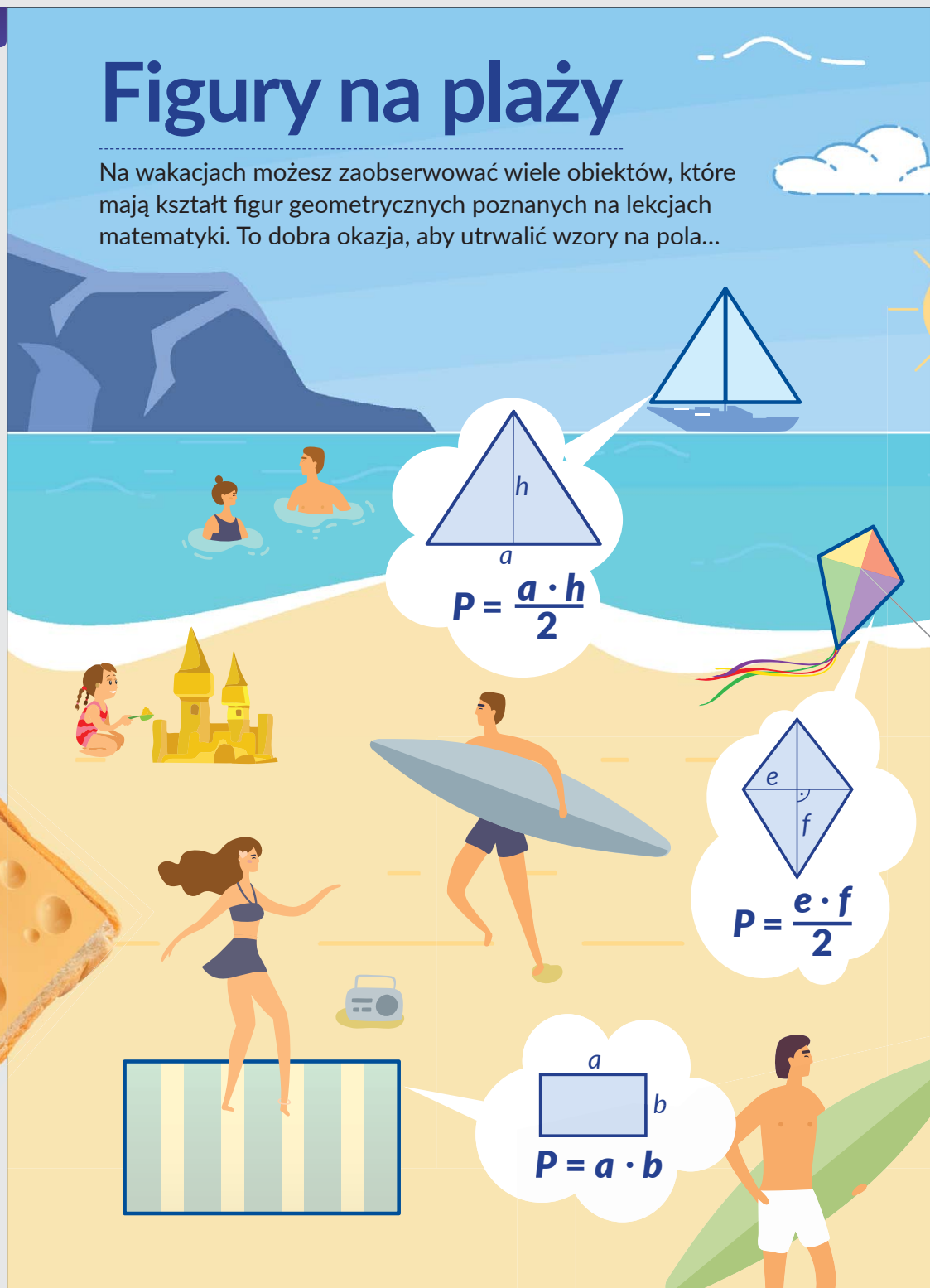
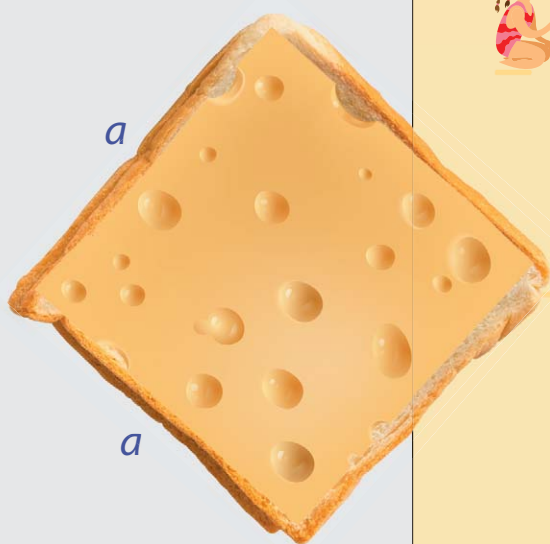
1. A
2. B
3. C
4. D
5. A
6. D
7. C
8. C

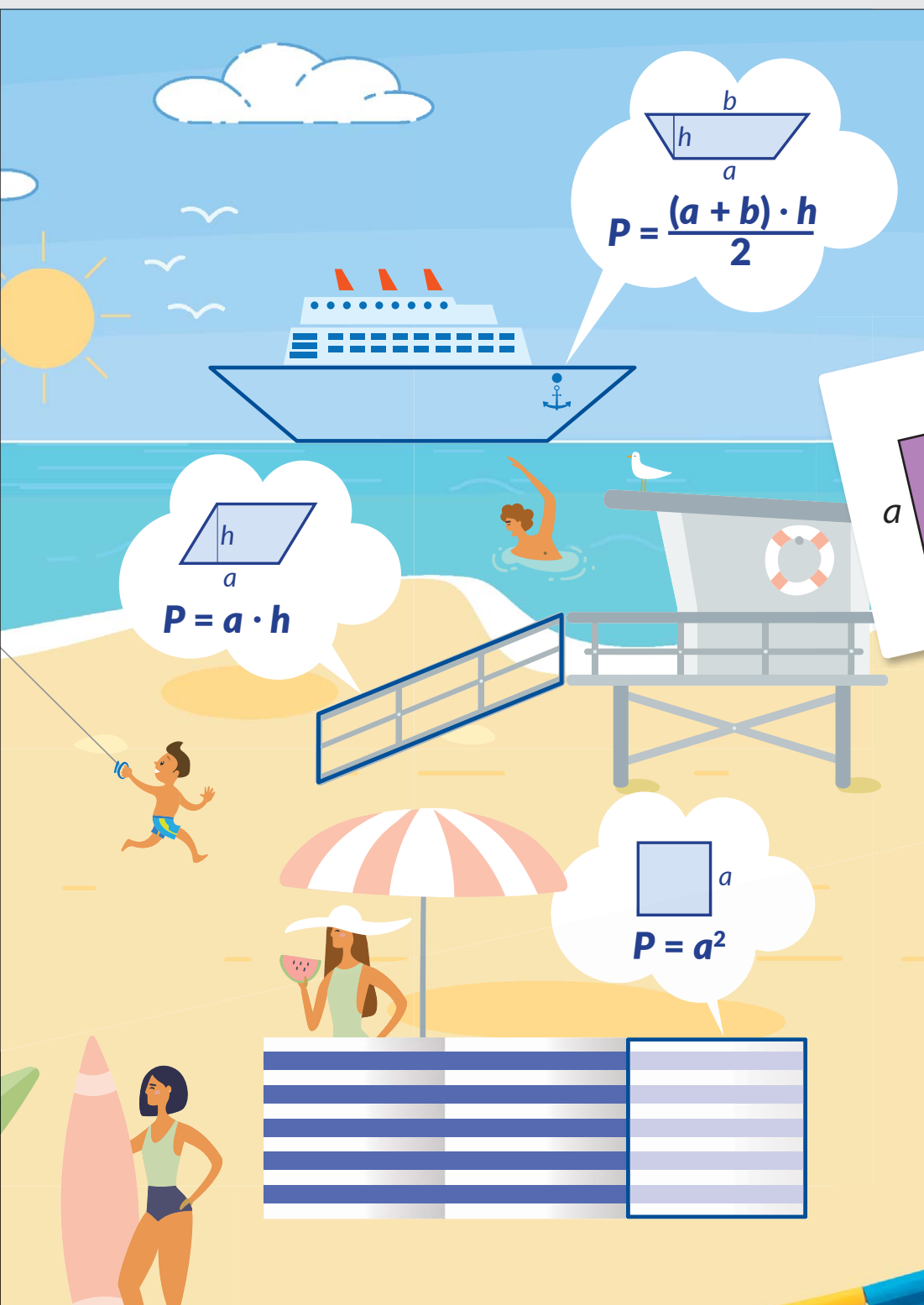
Wskazówki metodyczne

- Analiza tej infografiki może być początkiem rozmowy o figurach geometrycznych wokół nas. Uczniowie mogą wskazywać w klasie lub opisać miejsca, w których zauważyli przedmioty, obiekty lub ich fragmenty mające kształt znanych im figur geometrycznych. Proponujemy, aby do każdej wymienionej figury uczniowie napisali wyrażenia algebraiczne opisujące jej obwód oraz pole.

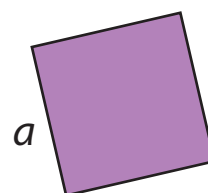
Figury na plaży

Na wakacjach możesz zaobserwować wiele obiektów, które mają kształt figur geometrycznych poznanych na lekcjach matematyki. To dobra okazja, aby utrwalić wzory na pola...





- Do kolejnego ćwiczenia utrwalającego własności figur płaskich i wzory na ich pola przygotowujemy rysunki znanych uczniom figur geometrycznych – każda figura na osobnej kartce i kartki z wzorami na pola tych figur.



$$P = a^2$$

Uczniowie losują po jednej kartce z rysunkiem figury i od tej pory grają rolę tej figury. Łączą się w zespoły kilkuosobowe i po kolei opowiadają, gdzie można spotkać daną figurę, oraz czym się ona wyróżnia spośród pozostałych. Następnie spośród kartek z wzorami na pola figur wybierają tę, która zawiera wzór na pole ich figury. Po zakończeniu ćwiczenia każdy uczeń wkleja do zeszytu obie kartki.

Temat lekcji:

Liczby ujemne (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- czyta i zapisuje liczby ujemne,
- podaje występowanie i zastosowanie liczb ujemnych,
- odczytuje liczby ujemne zapisane na osi liczbowej,
- zaznacza liczby ujemne na osi liczbowej,
- odczytuje temperaturę dodatnią i ujemną,
- rozróżnia liczby przeciwne i interpretuje je na osi liczbowej,
- porównuje liczby całkowite z użyciem znaków $<$, $>$, $=$,
- porządkuje liczby całkowite rosnąco i malejąco,
- rozwiązuje proste zadania tekstowe z zastosowaniem liczb całkowitych.

Wskazówki metodyczne

- Pojęcie liczby jest jednym z podstawowych pojęć matematycznych. Uczeń spotyka się z nim od pierwszych chwil swojej świadomej aktywności. Mimo to jest pojęciem abstrakcyjnym, trudnym, prowadzącym często do nieporozumień. Warto wskazać różnice między liczbami naturalnymi a całkowitymi.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 31 lub 31a.

Komentarz do Sowa uczy

Pamiętajmy, że wprowadzenie liczb ujemnych zmienia rolę zera. Przestaje ono być liczbą „nic nieznaczącą”, teraz oddziela liczby dodatnie od ujemnych, zysk od straty, temperaturę dodatnią (ciepłą) od temperatury ujemnej (od mrozu). Warto powołać się na sens fizyczny temperatury 0°C jako temperatury topnienia lodu i krzepnięcia wody oraz odgraniczającej temperatury, w których woda jest w stanie ciekłym, od tych, w których jest w stanie stałym.

Komentarz do Przykładu 1.

Uczniowie znają już i potrafią interpretować diagramy słupkowe. W tym przykładzie uczą się odczytywania i interpretacji diagramów, w których na osi pionowej zapisane są liczby całkowite dodatnie i ujemne oraz liczba 0. Można zachęcić uczniów, by do tego diagramu ułożyli dodatkowe pytania i udzielili na nie odpowiedzi.

IX. Liczby całkowite

1. Liczby ujemne



Sowa uczy

Liczb ujemnych używamy np. do oznaczania temperatury.

W naszym klimacie częściej występują temperatury wyższe od zera, czyli **dodatnie**, niż niższe od zera, czyli **ujemne**.

$(+10)^{\circ}\text{C}$ lub 10°C – czytamy: **dziesięć** stopni Celsjusza,

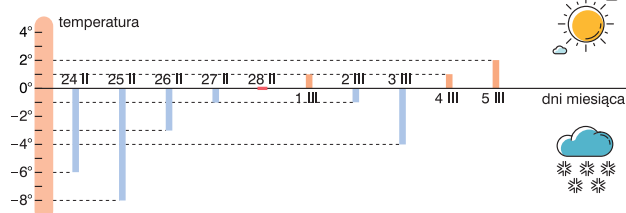
$(-4)^{\circ}\text{C}$ lub -4°C , czytamy: **minus cztery** stopnie Celsjusza,

$(-12)^{\circ}\text{C}$ lub -12°C , czytamy: **minus dwanaście** stopni Celsjusza.

Przed liczbą dodatnią możemy pisać znak $+$. Najczęściej pomijamy go.

Przykład 1.

Uczniowie klasy piątej odczytywali z termometru temperaturę powietrza o tej samej porze, w kolejnych dniach, na przełomie lutego i marca. Obserwacje przedstawili na diagramie.



Z diagramu możemy odczytać, że:

- Obserwacje prowadzono przez 10 dni.
- W kolejne dni temperatura była równa: -6°C , -8°C , -3°C , -1°C , 0°C , $+1^{\circ}\text{C}$, -4°C , $+1^{\circ}\text{C}$, $+2^{\circ}\text{C}$.
- Jednakowa temperatura była 27 II i 2 III oraz 1 III i 4 III.
- Od 25 II do 1 III i od 3 III do 5 III temperatura rosła.

240

Materiały dydaktyczne

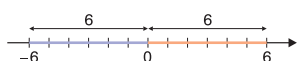
	Liczby całkowite → Liczby całkowite
	Kartkówka 31 lub 31a
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 70–73
Zbiór zadań	s. 132–135

IX. Liczby całkowite

123

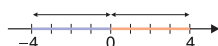
Przykład 2.

Zaznaczmy na osi liczbowej liczby 6 i 4 oraz liczby, które leżą po przeciwnej stronie zera i w takiej samej odległości od zera co liczby 6 i 4.



Po drugiej stronie zera, w tej samej odległości od zera co liczba 6, znajduje się liczba (-6) .

Liczbę (-6) nazywamy **liczbą przeciwną** do liczby 6.



Po drugiej stronie zera, w tej samej odległości od zera co liczba 4, znajduje się liczba (-4) .

Liczbę (-4) nazywamy **liczbą przeciwną** do liczby 4.

Liczbę przeciwną do liczby a zapisujemy jako liczbę $(-a)$.

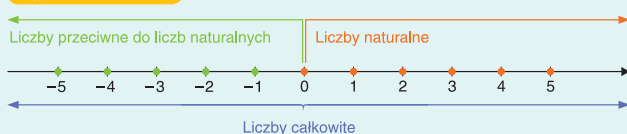
Liczbą przeciwną do liczby 6 jest liczba -6 i jest równa 6.

Liczbą przeciwną do liczby (-4) jest liczba 4, co zapisujemy $-(-4) = 4$.

Liczby przeciwne leżą na osi liczbowej po przeciwnych stronach zera i w takiej samej odległości od zera.
Liczby przeciwne mają różne znaki.
Liczbą przeciwną do liczby dodatniej jest liczba ujemna.
Liczbą przeciwną do liczby ujemnej jest liczba dodatnia.
Liczbą przeciwną do zera jest zero.



Sowa uczy



Liczby naturalne i liczby do nich przeciwne nazywamy liczbami całkowitymi.

Są to: ... $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$...

Liczba całkowita 0 nie jest ani dodatnia, ani ujemna.

241

Komentarz do Przykładu 2.

Poruszamy tutaj trudne pojęcie *liczb przeciwnych*. Są one położone na osi liczbowej symetrycznie względem punktu 0. Możemy to sprawdzić za pomocą lusterka. Do tej własności trzeba będzie odwoływać się w następnych tematach. Ważne i trudne zależności: $-(-6) = 6$, $-(-4) = 4$ należy zapisać kolorem w zeszyście i na okres pracy z liczbami ujemnymi umieścić na gazecie szkolnej w klasie. Tak przedstawione wyrażenie $(-a)$ z wpisaną w literę a liczbą ujemną, że $(-a)$ niekoniecznie jest liczbą ujemną, lecz jest liczbą przeciwną do wpisanej w literę a . Najważniejsze wiadomości dotyczące liczb przeciwnych i ich interpretacji na osi liczbowej porządkują zdania ujęte w zieloną ramkę, dlatego warto je przeczytać i odsyłać do nich w trakcie rozwiązywania zadań.

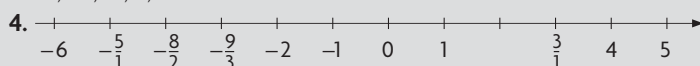
Komentarz do Sowa uczy

Na osi liczbowej jest zilustrowane pojęcie zbioru liczb całkowitych z podziałem na liczby całkowite dodatnie i całkowite ujemne oraz liczbę 0. Istotna jest informacja, że liczba 0 jest liczbą całkowitą, ale nie jest ani liczbą dodatnią, ani ujemną. Warto o tym przypominać.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. a) 25 b) -20 c) -15 d) -10

3. $-5, -2, -1, 2, 4$

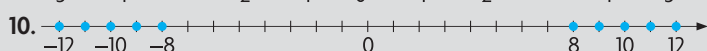
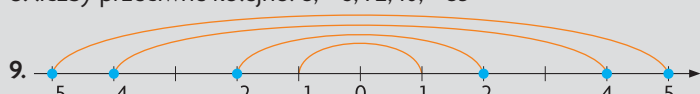


5. a) NIE b) TAK c) TAK

6. b) $0 > -3$ c) $-3 < -1$ d) $0 > -2$

7. pionowo: ciemny, biały, ujemny, mały, noc, matowy, wysoki, ciepły

8. liczby przeciwne kolejno: 8, -6 , 72, 10, -83



11. przeciwne, od zera, przeciwnych

12. kolejno wierszami: $-5, -6, -10, -35, 46, 50, 4, 12, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{35}, -\frac{1}{46}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{12}$

13. a) kolejno wg dat: $4^{\circ}\text{C}, 5^{\circ}\text{C}, 0^{\circ}\text{C}, -2^{\circ}\text{C}, 0^{\circ}\text{C}, -5^{\circ}\text{C}, -4^{\circ}\text{C}, 0^{\circ}\text{C}, 2^{\circ}\text{C}, 5^{\circ}\text{C}, 2^{\circ}\text{C}, 0^{\circ}\text{C}, -5^{\circ}\text{C}, 1^{\circ}\text{C}, 2^{\circ}\text{C}, 6^{\circ}\text{C}; 6^{\circ}, 16 \text{ III}; -5^{\circ}, 6 \text{ III i } 13 \text{ III};$ liczba dni: 4, 8, 4
b) od 1 III do 2 III, od 4 III do 5 III, od 6 III do 10 III i od 13 III do 16 III;
różnica między najwyższą a najniższą: 11° ;
jednakowa: 2 III i 10 III; 6 III i 13 III; 9 III, 11 III i 15 III oraz 3 III, 5 III, 8 III i 12 III

Komentarz do Przykładu 3.

Na osi liczbowej są przedstawione wszystkie przypadki porównywania liczb całkowitych. Uczniowie potrafią już porównywać liczby dodatnie oraz nie jest dla nich trudne porównanie liczb dodatniej z liczbą ujemną. Dla wielu uczniów najtrudniejsze jest porównywanie liczb ujemnych, dlatego tej umiejętności należy poświęcić więcej czasu. Wskazane, aby te ćwiczenia podsumować wnioskiem z zielonej ramki.

Komentarz do zadań 1.–4.

Zadania można wykonać tylko ustnie. Warto wymagać, aby uczniowie uzasadniali swoje odpowiedzi, a także aby posługiwali się poznanymi w przykładach wnioskami.

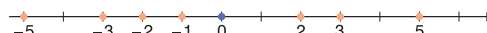
Komentarz do zadania 5.

Aby wykonać to zadanie, uczniowie muszą odpowiednio dobrać jednostkę na osi liczbowej. Warto o tym porozmawiać w klasie.

123

Przykład 3.

Porównajmy niektóre liczby zaznaczone na osi liczbowej.



Ponieważ na osi liczbowej liczby są uporządkowane rosnąco (zgodnie z kierunkiem zwrotu osi), więc:

$$-5 < -3 < -2 < -1 < 0 < 2 < 3 < 5.$$

Odczytujemy zatem, że:

$$-1 < 0 \quad -2 < 0 \quad -3 < 0$$

Każda liczba ujemna jest mniejsza od zera.

$$-2 < 2 \quad -3 < 2 \quad -5 < 3$$

Każda liczba ujemna jest mniejsza od każdej liczby dodatniej.



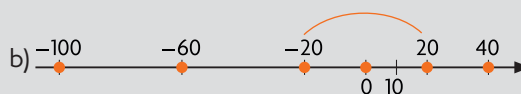
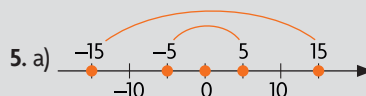
Z dwóch liczb ujemnych ta liczba jest mniejsza, która leży na osi liczbowej dalej od zera. (Odwrotnie niż liczby dodatnie).

- Podaj 2 przykłady zastosowania liczb ujemnych.
- Która liczba **nie jest** liczbą całkowitą?
A. -17 B. $-\frac{4}{1}$ C. $\frac{15}{3}$ D. $6,52$
- Napisz liczby przeciwne do liczb: -4 , -12 , 8 , -20 , 16 .
- Jakie liczby odpowiadają wyróżnionym punktom? Odczytaj pary liczb przeciwnych.
a)
b)
c)
5 Narysuj osi liczbową i zaznacz na niej podane liczby. Połącz linią liczby przeciwne.
a) 0 , 5 , 15 , -5 , -10 , -15 b) 0 , 20 , 40 , -20 , -60 , -100

242

Odpowiedzi do zadań

- D
- 4 , 12 , -8 , 20 , -16
- a) $A = -7$, $B = -5$, $C = -4$, $D = -2$, $E = 2$, $F = 4$; D i E oraz C i F
b) $F = -60$, $G = -50$, $H = -30$, $I = -10$, $J = 20$, $K = 30$; H i K
c) $K = -600$, $L = -500$, $M = -200$, $N = -100$, $O = 200$, $P = 400$, $R = 600$; K i R oraz M i O

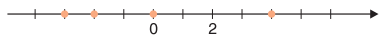
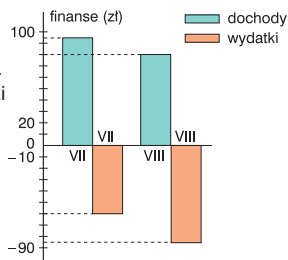


IX. Liczby całkowite

123

- 6 Uporządkuj rosnąco liczby: $-105, 9, -21, 12, -8, -39, -12, -30$.
- 7 Rafał notował temperaturę powietrza codziennie od 19 lutego: $-4^{\circ}\text{C}, -6^{\circ}\text{C}, -10^{\circ}\text{C}, -8^{\circ}\text{C}, -5^{\circ}\text{C}, -2^{\circ}\text{C}, 0^{\circ}\text{C}, +1^{\circ}\text{C}, +2^{\circ}\text{C}, -1^{\circ}\text{C}$. Narysuj diagram słupkowy przedstawiający odnotowane temperatury. W jakich dniach temperatura malała, a w jakich rosła?
- 8 Przepisz przykłady, zamiast $\blacklozenge$ napisz odpowiedni znak $>$, $<$ lub $=$.
- a) $-13 \blacklozenge -7$ b) $6 \blacklozenge -6$ c) $-1 \blacklozenge -95$ d) $-52 \blacklozenge -99$
 $-3 \blacklozenge -3$ $-32 \blacklozenge 23$ $-100 \blacklozenge 0$ $13 \blacklozenge -56$

Sprawdź się!

- 1 Liczbą ujemną jest
A. 0 B. $-(-1)$ C. -3 D. 3
- 2 Jakie liczby odpowiadają wyróżnionym punktom?
- 
- A. $-1, -3, 0, 4$ B. $-2, -3, 0, 3$
C. $2, 0, -2, -3$ D. $-2, -3, 4, 0$
- 3 Przepisz przykłady, zamiast $\blacklozenge$ napisz odpowiedni znak $>$, $<$ lub $=$.
- a) $-27 \blacklozenge -36$ b) $-8 \blacklozenge 1$ c) $-\frac{8}{2} \blacklozenge -4$
- 4 W czasie wakacji Piotrek i Małgosia zbierali jagody i grzyby. Sprzedawali je w skupie. Swoje wspólne dochody i wydatki w czasie wakacji przedstawili na diagramie słupkowym.
- 
- a) Jakie dochody mieli w lipcu, a jakie w sierpniu?
b) Ile wydali w lipcu, a ile w sierpniu?
- 5 Wymień 5 liczb całkowitych, które leżą na osi liczbowej dalej od zera niż liczba (-6) , i podaj liczbę przeciwną do najmniejszej z nich.

243

Komentarz do zadania 6.

Porządkowanie liczb rosnąco lub malejąco to umiejętność trudniejsza niż porównywanie par liczb. Rozwiązanie zadania można rozpocząć od przypomnienia, co to znaczy uporządkować liczby rosnąco lub malejąco. Wskazane, aby przy porządkowaniu, zwłaszcza liczb całkowitych ujemnych, uczniowie uzasadniali sposób porządkowania liczb.

Komentarz do zadania 7.

Po sporządzeniu diagramu i odpowiedzi na pytanie proponujemy, aby uczniowie zadawali inne pytania dotyczące tego diagramu i wskazywali osoby, które na nie odpowiadają.

Komentarz do *Sprawdź się!*

Wskazane, aby wykorzystać zawarte tu zadania do diagnozy osiągnięć. Nie są one trudne i można polecić ich samodzielne rozwiązanie w ciągu 3–5 minut. Po upływie tego czasu uczniowie z pomocą nauczyciela mogą sprawdzić poprawność odpowiedzi i otrzymać oceny lub plusy zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami.

Odpowiedzi do zadań

6. $-105 < -39 < -30 < -21 < -12 < -8 < 9 < 12$
7. malała: od 19 II do 21 II i od 27 II do 28 II rosła: od 21 II do 27 II
8. a) $<$, $=$ b) $>$, $<$ c) $>$, $<$ d) $>$, $>$

Sprawdź się!

1. C
2. D
3. a) $>$ b) $<$ c) $=$
4. a) lipiec: 95 zł, sierpień: 80 zł b) lipiec: 60 zł, sierpień: 85 zł
5. np. $-8, -7, 7, 9, 10; 8$



W termometrze rtęciowym temperaturę wskazuje rozszerzający się lub kurczący słupek rtęci. Na skali liczbowej termometru mierzącej temperaturę w skali Celsjusza oznaczone są temperatury powyżej zera (dodatnie) i poniżej zera (ujemne).

Plansze interaktywne → Liczby całkowite → Liczby całkowite – wprowadzenie → Liczby całkowite wokół nas

Temat lekcji:

Dodawanie liczb całkowitych (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- dodaje liczby całkowite w pamięci – proste przy-
padki,
- interpretuje dodawanie liczb całkowitych na osi
liczbowej,
- czyta ze zrozumieniem tekst zawierający informacje
liczbowe, dostrzega zależności między podanymi in-
formacjami i stosuje je do rozwiązywania zadań,
- rozwiązuje zadania osadzone w kontekście prak-
tycznym z zastosowaniem dodawania liczb całkowi-
tych.

Wskazówki metodyczne

W klasie 5 uczeń powinien intuicyjnie wykonywać dodawanie liczb całkowitych. Wskazane jest uza-
sadnianie poprawności wykonania dodawania na osi
liczbowej lub termometrze. Dobrym ćwiczeniem jest
zwrócenie uwagi na składniki, gdy suma wynosi 0, ma
wartość ujemną lub dodatnią.

Komentarz do Sowa uczy

Warto zwrócić uwagę na znaczenie znaku minus. Raz
jako znaku działania, a raz jako znaku liczby. Pozwo-
li to poprawnie odczytywać liczby oraz wykonywać
działania.

Komentarz do Przykładu 1.

W tym przykładzie jest pokazane w kontekście prak-
tycznym dodawanie liczby dodatniej do ujemnej.
Na jego podstawie możemy wykonać z uczniami
kolejne ćwiczenia w zakresie obliczania temperatury.

Komentarz do Przykładu 2.

Na osi liczbowej są pokazane liczby większe o 6 od
danej liczby ujemnej. Trzeba zwrócić uczniom uwa-
gę na odległość danej liczby ujemnej od liczby 0 i jej
wpływ na to, jaką liczbą jest suma: dodatnią, ujemną
czy równą 0.

123

2. Dodawanie liczb całkowitych

Sowa uczy

Zwróćmy uwagę, że w działaniu $(-2) + (-3) = (-5)$ znak „+” oznacza
znak działania (dodawania), natomiast „-” to znak liczby oznaczający,
że jest ona ujemna.

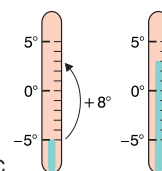
$(-2) + (-3)$ Czytamy: minus dwa dodać minus trzy.
↑ ↑
znak liczby znak działania znak liczby

Przykład 1.

Rano temperatura była równa $(-5)^{\circ}\text{C}$. Do południa
wzrosła o 8°C . Jaka była temperatura w południe?

Termometr wskazywał $(-5)^{\circ}\text{C}$.
Temperatura wzrosła o 8°C .
 $(-5) + 8 = 3$

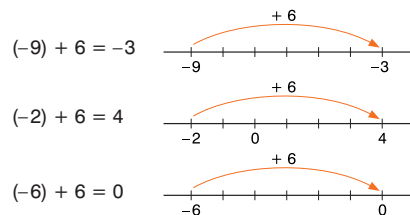
Odpowiedź. W południe temperatura była równa 3°C .



Przykład 2.

Znajdźmy liczby o 6 większe od liczb: -9 , -2 , -6 .

Znałeż liczbę o 6 większą to obliczyć sumę danej liczby i liczby 6.



Suma liczb przeciwnych jest równa 0.

244

Materiały dydaktyczne

	Liczby całkowite → Liczby całkowite Liczby całkowite → Działania na liczbach całkowitych
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 74–76
Zbiór zadań	s. 135–138

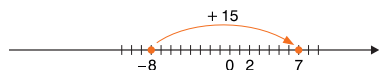
Przykład 3.

Obliczmy sumy liczb.

a) $(-8) + 15$ b) $18 + (-30)$ c) $(-4) + (-7)$

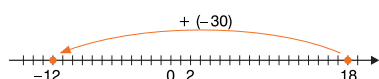
Sposób I

a) $(-8) + 15 = 7$



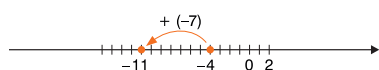
Jeżeli do danej liczby
dodajemy liczbę dodatnią,
to na osi liczbowej
przesuwamy się w prawo.

b) $18 + (-30) = -12$



Jeżeli do danej liczby
dodajemy liczbę ujemną,
to na osi liczbowej
przesuwamy się w lewo.

c) $(-4) + (-7) = -11$

**Sposób II**

a) $(-8) + 15 = (-8) + 8 + 7 = 0 + 7 = 7$

Suma liczb przeciwnych jest równa 0.

Suma jest dodatnia,
bo liczba dodatnia leży
na osi liczbowej dalej od
zera niż liczba ujemna.

b) $18 + (-30) = 18 + (-18) + (-12) = 0 + (-12) = -12$

Suma jest ujemna,
bo liczba ujemna leży
na osi liczbowej dalej od
zera niż liczba dodatnia.

c) $(-4) + (-7) = -(4 + 7) = -11$

Suma liczb ujemnych jest
liczbą ujemną.

Przykład 4.

Obliczmy sumę liczb: 5, -6, 7, -3, -8.

$5 + (-6) + 7 + (-3) + (-8) =$

Korzystamy z przemienności dodawania.

$= 5 + 7 + (-6) + (-3) + (-8) =$

Korzystamy z łączności dodawania.
Obliczamy sumę składników dodatnich
i sumę składników ujemnych.

$= 12 + (-17) = -5$

Obliczamy sumę składników o różnych
znakach.

Komentarz do Przykładu 3.

W tym przykładzie przedstawiamy 2 sposoby dodawania liczb całkowitych. Oba uczą intuicyjnego wykonywania tego działania.

Komentarz do Przykładu 4.

W przykładzie pokazujemy uczniom, jak usprawnić dodawanie kilku składników będących liczbami całkowitymi. Podczas tego typu obliczeń korzystamy z przemienności i łączności dodawania. Warto przyzwyczajać uczniów do grupowania składników dodatnich, a następnie ujemnych. Wykonywanie dodawania liczb o jednakowych znakach sprawia uczniom najmniej kłopotów. Ostatnie działanie to najczęściej dodawanie liczb o różnych znakach. Zwykle uczniowie zastanawiają się wówczas, która liczba jest dalej od zera na osi liczbowej, i najpierw ustalają znak sumy. Można zachęcić uczniów do napisania sumy pięciu lub sześciu składników, które będą liczbami jednocyfrowymi, całkowitymi dodatnimi i ujemnymi, oraz obliczenia jej.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. a) 5; 4; $-1 + 5 = 4$ b) -8, wzrosła, 6; -2 ; $-8 + 6 = -2$
2. a) 8 b) -4 c) 0 d) 3
3. 0 i 0, -100 i 100, 7 i -7, 2 i -2, -17 i 17, 13 i -13
4. kolumnami: +, +, -, -, +, -, -, +, -, -, -
5. B
6. a) -9, -5, 0 b) -28, -24, -19
7. kolejno wierszami: <, >, >; <, <, <; >, <, >; <, <, >
8. kolejno wierszami: 71, -6, -1; 9, -19, -5; 0, 3, -2
9. kolejno wierszami: a) -36, -31, -26, -21, -16, -11, -6, -1, 4; -24, -19, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16 b) 11, -5, 20, 4; -28, -24, -20, -15, -6; -22, -18, -14, 7, 16

Komentarz do zadań 1.–3.

Zadania można wykonać tylko ustnie. Proponujemy, aby wskazany przez nauczyciela uczeń przeczytał polecenie do zadania 1. i rozwiązał przykład a). Jeżeli poda poprawny wynik, wyznacza osobę do wykonania kolejnego przykładu. W ten sposób rozwiązujemy wszystkie trzy zadania.

Komentarz do zadania 4.

To zadanie ćwiczy umiejętność dodawania liczb o różnych znakach. Można wykonać je w formie gry na czas, np. 3 minuty. Grę przeprowadzamy w parach. Uczniowie mogą przynieść na lekcję kostki sześciennego w różnych kolorach. Tekst zadania jest instrukcją gry. Przed jej rozpoczęciem trzeba sprawdzić, czy wszyscy uczniowie zrozumieli zasady. Należy także uzgodnić sposób nagradzania bądź oceniania poprawnie wykonanych działań i zaangażowania uczniów.

Komentarz do zadania 5.

Po ustnym wykonaniu tego zadania warto poprosić uczniów o sformułowanie wniosku do przykładów a) i c).

Komentarz do zadania 7.

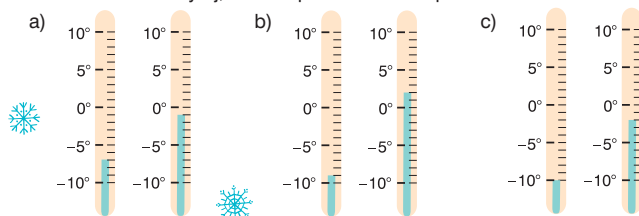
Proponujemy, aby przed rozwiązaniem tego zadania uczniowie odszukali w podręczniku przykład pokazujący obliczanie sumy kilku liczb całkowitych i podali kolejność poszczególnych czynności. Takie podejście uczy samodzielnego korzystania z podręcznika, czyli uczenia się. Należy oczekiwać, że uczniowie zastosują przemienność dodawania i wyjaśnią ustnie sposób wykonania obliczeń.

Komentarz do zadania 10.

To zadanie rozwijające kreatywność uczniów. Mogą oni korzystać w obliczeniach z osi liczbowej lub termometrów.

123

- 1 Napisz, jakie było początkowe, a jakie końcowe wskazanie termometru. Odczytaj, o ile stopni wzrosła temperatura.



- 2 Rano temperatura była równa $(-3)^{\circ}\text{C}$. Do południa wzrosła o 6°C . Jaka była temperatura w południe?

- 3 Podaj liczby o 5 większe od liczb: -8 , 0 , -10 , -5 , -2 .

- 4 Weź dwie różnokolorowe kostki do gry. Przyjmij, że na kostce jednego koloru są punkty dodatnie, a na drugiej ujemne. Rzucaj 5 razy obydwoma kostkami i obliczaj sumę punktów po każdym rzucie. Następnie oblicz sumę otrzymanych wyników.



- 5 Narysuj oś liczbową i przedstaw na niej działanie.

a) $(-9) + 9$ b) $(-4) + 8$ c) $11 + (-11)$ d) $(-2) + (-7)$

- 6 Oblicz.

a) $10 + (-6)$ b) $(-20) + (-6)$ c) $8 + (-12)$ d) $(-17) + 33$
 $6 + (-10)$ $(-7) + (-12)$ $(-17) + 20$ $99 + (-3)$

- 7 Oblicz.

a) $(-9) + 4 + (-5) + (-2) + 8$ b) $15 + (-7) + 10 + (-5) + (-3)$

- 8 W którym wyrażeniu suma jest równa (-2) ?

A. $4 + (-2)$ B. $2 + (-4)$ C. $(-2) + (-4)$ D. $(-6) + 8$

- 9 Kasia, z garażu znajdującego się 2 piętra niżej niż parter, przejechała windą do góry 5 pięter. Na którym piętrze wysiadła?

- 10 Napisz dwie takie liczby, aby ich suma była równa:

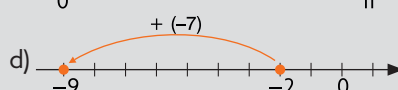
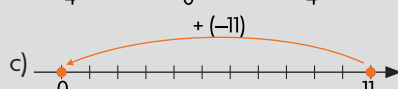
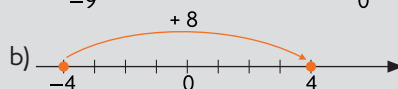
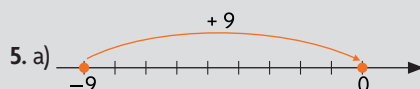
a) 3, b) 0, c) -4 , d) -10 .

246

Odpowiedzi do zadań

1. a) -7°C , -1°C ; wzrosła o 6°C b) -9°C , 2°C ; wzrosła o 11°C
 c) -10°C , -2°C ; wzrosła o 8°C

2. 3°C 3. -3 , 5 , -5 , 0 , 3



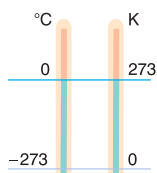
6. a) 4 , -4 b) -26 , -19 c) -4 , 3 d) 16 , 96 7. a) -4 b) 10 8. B

9. na trzecim 10. np. a) 3 i 0 b) 5 i -5 c) 4 i -8 d) -20 i 10

A to ciekawe!

Na termometrach temperatura jest czasem podana w dwóch skalach:

Celsjusza: 0°C – to temperatura zamarzania wody
 100°C – to temperatura wrzenia wody
 Kelvina: 0 K – to tak zwane zero bezwzględne
 $0\text{ K} = -273^{\circ}\text{C}$



- Oblicz, jaka jest temperatura w skali K, jeżeli w skali C jest:
 - 100°C ,
 - 1100°C (temperatura lawy wulkanicznej),
 - 700°C (topnienie szkła),
 - -192°C (skraplanie powietrza).
- Jaka jest temperatura w skali C, jeżeli w skali K zanotowano:
 - 216 K (temperatura na Marsie),
 - 1873 K (średnia temperatura w piecu hutniczym)?



Mars

Sprawdź się!

- Oblicz.
 - $14 + (-14)$
 - $(-3) + (-6)$
 - $7 + (-11)$
 - $(-12) + 18$
- W którym wyrażeniu suma **nie jest** równa (-12) ?
 - $(-7) + (-5)$
 - $(-8) + 20$
 - $(-6) + (-6)$
 - $(-22) + 10$
- Oblicz i przedstaw na osi liczbowej działanie.
 - $2 + (-9)$
 - $(-7) + 12$
- Pielęgniarka była na piątym piętrze szpitala. Zjechała windą siedem pięter. Na którym piętrze wysiadła?
- Podaj 8 kolejnych liczb takich, że każda następna jest o 3 większa od poprzedniej, a pierwszą z nich jest (-20) .



Komentarz do A to ciekawe!

Warto zapoznać uczniów z odczytywaniem i zapisywaniem temperatury w skali Kelvina, gdyż tę umiejętność wykorzystuje się np. na lekcjach fizyki. Zadania tu zawarte są ciekawostkami ze świata nauki, przyrody. Można zachęcić uczniów, aby poszukali w różnych źródłach informacji innych zastosowań skali Fahrenheita.

Komentarz do Sprawdź się!

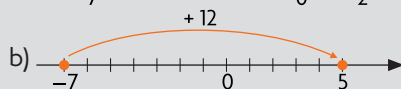
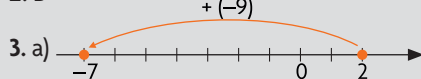
Zadania mają podstawowy stopień trudności i mogą być wykorzystane jako praca domowa. Przedstawienie ich rozwiązań na następnej lekcji warto polecić uczniom z problemami w nauce matematyki. Będą mieli wówczas okazję do osiągnięcia sukcesu na miarę swoich możliwości.

Odpowiedzi do zadań

Sprawdź się!

1. a) 0 b) -9 c) -4 d) 6

2. B



4. -2

5. $-20, -17, -14, -11, -8, -5, -2, 1$

Tematy lekcji:

1. Odejmowanie liczb całkowitych (1 h)
2. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem odejmowania liczb całkowitych (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- odejmuje liczby całkowite w pamięci – proste przypadki,
- interpretuje odejmowanie liczb całkowitych na osi liczbowej,
- czyta ze zrozumieniem tekst zawierający informacje liczbowe i dostrzega zależności między podanymi informacjami,
- rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym z zastosowaniem dodawania i odejmowania liczb całkowitych.

Wskazówki metodyczne

- Uczniowie powinni wykonywać odejmowanie liczb całkowitych intuicyjnie, podobnie jak to się odbywa przy dodawaniu.
- Na początku lekcji trzeba przypomnieć o liczbie przeciwnej do liczby ujemnej i zapisie: $-(-6) = 6$.

Komentarz do Przykładu 1.

Odejmowanie, podobnie jak dodawanie liczb całkowitych, można zilustrować na osi liczbowej. Wskazane, aby uczniowie zauważyli, że odejmowanie polega na poruszaniu się na osi liczbowej w lewo o tyle jednostek od punktu wyznaczonego przez odjemną, ile wskazuje odjemnik.

123

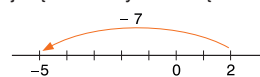
3. Odejmowanie liczb całkowitych

Przykład 1.

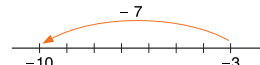
Znajdźmy liczby o 7 mniejsze od liczb: 2, -3.

Znaleźć liczbę o 7 mniejszą to obliczyć różnicę danej liczby i liczby 7.

$$2 - 7 = -5$$



$$(-3) - 7 = -10$$



Przykład 2.

W tabelce przedstawiono punktację klas piątych za udział w konkursie *Klasa twórcza*.

Punkty	Klasa	V a	V b	V c
dodatnie		•••••	•••••	•••••
ujemne (karne)		•••••	•••••	•••••

Dodatkowo za włączenie się do akcji charytatywnej każda z klas zasłużyła na skreślenie 5 punktów karnych.

Która klasa zdobyła najwięcej punktów i wygrała konkurs?

V a ••••• •••••

$$12 + (-5) - (-5) = 12 \text{ to znaczy, że } (-5) - (-5) = 0$$

punkty skreślone

$$\text{Ponieważ } (-5) + 5 = 0, \text{ zatem } (-5) - (-5) = (-5) + 5.$$

V b ••••• •••••

$$14 + (-6) - (-5) = 13 \text{ to znaczy, że } (-6) - (-5) = -1$$

$$\text{Ponieważ } (-6) + 5 = -1, \text{ zatem } (-6) - (-5) = (-6) + 5.$$

248

Materiały dydaktyczne

	Liczby całkowite → Liczby całkowite Liczby całkowite → Działania na liczbach całkowitych
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 76–79
Zbiór zadań	s. 135–138

V c

Klasa V c nie otrzymała punktów karnych. Jak w takim razie skreślić punkty ujemne, jeśli ich nie ma?

Wynik klasy V c nie zmieni się, jeśli jednocześnie dopiszemy 5 punktów dodatnich i 5 ujemnych.

Otrzymamy:

Po skreśleniu 5 punktów ujemnych zostaje 16 punktów dodatnich, czyli $11 - (-5) = 16$.

Ponieważ $11 + 5 = 16$, zatem $11 - (-5) = 11 + 5$.

Odpowiedź. Konkurs z wynikiem 16 punktów wygrała klasa V c.

Odejmowanie liczby można zastąpić dodawaniem liczby do niej przeciwnej.



Przykład 3.

Obliczmy różnice liczb.

- a) $3 - (-4)$ b) $(-2) - (-5)$ c) $(-4) - 8$ d) $5 - 13$

liczba przeciwna
do -4

a) $3 - (-4) = 3 + 4 = 7$

b) $(-2) - (-5) = (-2) + 5 = 3$

odejmowanie zastępujemy
dodawaniem

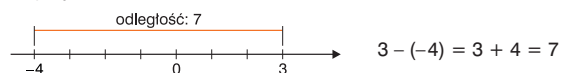
c) $(-4) - 8 = (-4) + (-8) = -12$

d) $5 - 13 = 5 + (-13) = -8$

Przykład 4.

Jaka była różnica temperatur między dniem a nocą, jeżeli w dzień było 3°C , a w nocy $(-4)^{\circ}\text{C}$?

Przedstawmy liczby z zadania na osi liczbowej i obliczmy odległość między nimi.



Odpowiedź. Między temperaturą w dzień a temperaturą w nocy było 7°C różnicy.

Komentarz do Przykładu 2.

W tym przykładzie jest przedstawiona metoda odejmowania punktów ujemnych – należy ją dokładnie przeanalizować. Jest to metoda zrozumiała i stosowana czasami w grach. Najtrudniejsza sytuacja dotyczy klasy V c. Trzeba odjąć punkty ujemne przez ich skreślenie, a tych punktów klasa V c nie ma. Przed analizą przykładu warto pokazać rolę zera w dodawaniu i wykonać kilka podobnych przykładów: $6 + 0$, $0 + 8$, $14 + (5 - 5)$, $4 - 4 + 7$. W obliczaniu liczby punktów zdobytych przez klasę V c można się do nich odwołać. Wskazane jest także, by zachęcić uczniów do częstego korzystania z wniosku zapisanego w zielonej ramce pod tym przykładem.

Komentarz do Przykładu 3.

W tym przykładzie jest pokazane zastosowanie informacji z powyższej ramki na konkretnych działaniach. Przykłady c) i d) proponujemy zilustrować na osi liczbowej.

Komentarz do Przykładu 4.

Na ilustracji jest przedstawione obliczenie odległości między dwiema liczbami. Trzeba zwrócić uwagę, że odległość zawsze jest liczbą dodatnią. Zatem obliczając różnicę między temperaturami, poziomami położenia, kapitałem i debetem, wynikami zawodników, od większej wielkości odejmujemy mniejszą. Jeżeli uczniowie będą mieli problemy przy rozwiązywaniu podobnych zadań, warto zachęcić ich do zilustrowania działania na osi liczbowej.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

- a) 4, 12; -8; $4 - 12 = -8$ b) -2, spadła, 8; -10; $-2 - 8 = -10$
- a) -8 b) -8 c) -10 d) -7
- a) > b) < c) > d) < e) > f) <
- kolejno: 15°C , 5°C , -4°C , -2°C , 1°C , -4°C
- a) 15 b) -23 c) 15 d) -6
- a) P b) F c) P d) F
- a) > b) < c) > d) =
- P; F; P; P; P; F
- B; C; F

Komentarz do zadań 1.–2.

Te zadania uczniowie powinni wykonać samodzielnie w wyznaczonym czasie. Po jego upływie sprawdzamy poprawność zapisanych działań i obliczeń.

Komentarz do zadania 3.

Podane i obliczone wartości temperatur warto uporządkować w tabelce. Przed wpisaniem ich do tabelki uczniowie powinni ustnie ułożyć działania prowadzące do obliczenia nieznanymi wartości temperatur. Po wstępnym omówieniu zadania nie będzie problemów z odpowiedziami na zadane pytania. Można także poprosić uczniów o ułożenie innych pytań do podanych informacji.

Komentarz do zadania 4.

Po przeczytaniu treści zadania i zapoznaniu się z danymi zawartymi w tabelce trzeba sprawdzić, jak uczniowie zrozumieli informację, że za osiągnięcie dobrego czasu pracy każdemu z chłopców ujęto 6 punktów ujemnych. W razie kłopotów ze zrozumieniem i wykonaniem obliczenia warto, by uczniowie odnaleźli analogiczny przykład i na jego podstawie rozwiązyli zadanie.

Komentarz do zadań 6.–7.

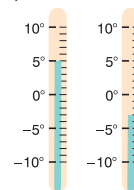
W tych zadaniach sprawdzamy umiejętność opisaną w *Przykładzie 4*. Ujęto ją w kontekst praktyczny, uczniowie powinni opisać sposób obliczeń. Trzeba sprawdzić, czy odległość została poprawnie obliczona. W razie potrzeby uczniowie powinni zilustrować dane na osi liczbowej.

Komentarz do zadania 8.

Rozwiązanie zadania wymaga wykazania się kreatywnością. Uczniowie mający kłopoty z nauką matematyki mogą poszukać w podręczniku rozwiązanych przykładów odejmowania, w których odjemna i odjemnik są liczbami mniejszymi od zera, i na ich podstawie wykonać zadanie. Chętni uczniowie mogą przedstawić swoje rozwiązanie, a pozostali ocenić jego poprawność.

123

1. Znajdź liczby o 10 mniejsze od liczb: -2 , 0 , 3 , 10 .
2. Oblicz temperaturę nad ranem, jeśli w nocy temperatura spadła o 5°C , a wieczorem termometr wskazywał:
 - a) 2°C
 - b) -5°C
 - c) -7°C
 - d) 0°C
3. Maciek zapisywał wzrost i spadek temperatury każdego dnia w porównaniu z dniem poprzednim:
 - pierwszego dnia było 5°C ,
 - drugiego dnia temperatura zmalała o 8°C ,
 - trzeciego dnia zmalała jeszcze o 2°C ,
 - czwartego dnia wzrosła o 4°C ,
 - piątego dnia zmalała o 5°C .
 - a) Którego dnia temperatura była najwyższa, a którego najniższa?
 - b) Narysuj diagram słupkowy ilustrujący wskazania termometru.
 - c) W jakich dniach temperatura malała?
4. W tabelce przedstawiono punkty uzyskane przez uczestników gry edukacyjnej.



	Adam	Mateusz	Wojtek	Kamil
Punkty dodatnie	16	12	15	17
Punkty ujemne	-7	0	-8	-6

Dodatkowo za osiągnięcie dobrego czasu pracy każdemu z chłopców ujęto 6 punktów ujemnych. Jakie wyniki końcowe uzyskali chłopcy?

5. Oblicz.
 - a) $6 - 12$
 - b) $(-6) - 12$
 - c) $(-6) - (-6)$
 - d) $(-4) - 7$
6. Oblicz różnicę temperatur między dniem a nocą, jeśli w dzień było $(-2)^{\circ}\text{C}$, a w nocy $(-5)^{\circ}\text{C}$.
7. Najwyższym miejscem na Ziemi jest Mount Everest i ma on 8849 m n.p.m. Najgłębsza depresja – Morze Martwe ma ok. 430 m p.p.m. Ile wynosi różnica poziomów między wymienionymi miejscami?
8. Napisz takie dwie liczby, aby ich różnica była równa:
 - a) -4 i były to liczby ujemne,
 - b) -7 i były to liczby różnych znaków.



Morze Martwe

250

Odpowiedzi do zadań

1. -12 , -10 , -7 , 0
2. a) -3°C b) -10°C c) -12°C d) -5°C
3. a) najwyższa: pierwszego dnia, najniższa: piątego dnia
c) od pierwszego do trzeciego i od czwartego do piątego
4. Adam: 15 p., Mateusz: 18 p., Wojtek: 13 p., Kamil: 17 p.
5. a) -6 , -6 , 11 b) -18 , -40 , -19 c) 0 , -5 , -11 d) -11 , 7 , -5
6. 3°C
7. 9279 m
8. a) np. -8 i -4 b) np. -1 i 6

9 Jaką liczbę zastępuje litera?

a) $a + (-5) = 10$

b) $(-6) + b = -15$

c) $(-4) - c = 2$

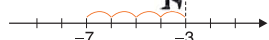
 A to ciekawe!

Dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych możemy zilustrować chodzeniem po osi liczbowej.

Wędrówkę rozpoczynamy w miejscu, które wskazuje pierwsza liczba. Zwracamy się w kierunku wzrastania liczb zgodnie ze zwrotem osi. Każdy minus zmienia kierunek wędrówki.

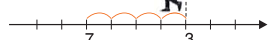
Na przykład:

a) $(-3) + (-4)$



W drugim składniku jest znak minus -, wykonujemy więc zwrot o 180° i idziemy do przodu.

b) $(-3) - 4$



Po liczbie (-3) jest minus, wykonujemy więc zwrot o 180° i idziemy do przodu.

c) $(-3) - (-4)$



Po liczbie (-3) są dwa minusy, wykonujemy więc dwukrotnie zwrot o 180° i idziemy do przodu.

Oblicz: $(-2) - (-3)$, $(-2) + (-3)$, a następnie przedstaw na osi liczbowej te działania i porównaj ich wyniki.

 Sprawdź się!

1 Oblicz.

a) $7 - (-5)$

b) $(-6) - 2$

c) $6 - (-15)$

2 W którym wyrażeniu różnica **nie jest** równa (-10) ?

A. $(-5) - (-5)$

B. $10 - 20$

C. $(-16) - (-6)$

D. $(-3) - 7$

3 Rano termometr wskazywał $(-3)^\circ\text{C}$, a po południu 9°C . Jaka była tego dnia różnica temperatur między popołudniem a raniem?4 Oblicz liczbę o 8 większą od różnicy liczb (-10) i (-3) .

5 Napisz dwie takie liczby ujemne, aby ich różnica była równa 6.

Komentarz do zadania 9.

Warto, aby uczniowie podawali wartość niewiadomej, stosując zgadywanie lub wykonywanie odpowiedniego działania, oraz by uzasadniali swoje wyniki. Sprawdzamy poprawność każdego rozwiązania.

Komentarz do A to ciekawe!

Jeżeli są w klasie uczniowie, którzy mają problem z wykonywaniem dodawania i odejmowania liczb całkowitych, powinni poćwiczyć chodzenie po osi liczbowej narysowanej na podłodze w opisany tutaj sposób. Poza podanymi można wykonać jeszcze kilka innych podobnych przykładów.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadaniami tu zawartymi warto podsumować drugą godzinę lekcji. W określonym czasie uczniowie samodzielnie rozwiązują zadania, a następnie pod kierunkiem nauczyciela sprawdzają poprawność rozwiązań. Jeżeli w którymś z zadań wielu uczniów popełniło błędy, trzeba do niego wrócić na lekcji powtórzeniowej.

Odpowiedzi do zadań

9. a) $a = 15$ b) $b = -9$ c) $c = -6$

Sprawdź się!

1. a) 12 b) -8 c) 21

2. A

3. 12°C

4. 1

5. np. -6 i -12

Temat lekcji:

Powtórzenie wiadomości i utrwalenie umiejętności: Liczby całkowite (1 h)

Cele lekcji

Wybrane cele lekcji z danego rozdziału odpowiednie do rozwiązywanych zadań.

Wskazówki metodyczne

- Zachęcamy do wykonania wszystkich *Zadań utrwalających* i *Zadań sprawdzających* z podręcznika oraz zadań ze zbioru zadań. Większość z nich można rozwiązać w pamięci.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 32.

Komentarz do zadań 1.–5.

Warto, aby uczniowie uzasadniali ustnie swoje odpowiedzi, posługując się poznanymi w rozdziale wnioskami lub regułami.

Komentarz do zadania 6.

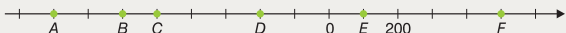
Przed pamięciowym wykonaniem poszczególnych działań proponujemy omówić przykłady typu: $(-91) + 47$; $47 + (-91)$; $47 - (-91)$; $(-91) - 47$ i zastanowić się, jaką rolę w tych działaniach odgrywają liczby (-91) i 47 oraz jakie ma to znaczenie dla ustalenia wyniku dodawania lub odejmowania.

Komentarz do zadania 10.

W razie problemów z poprawnym obliczaniem tego zadania warto wrócić do *Przykładu 4*, s. 249. Po rozwiązaniu zadania można zachęcić uczniów, aby znaleźli w różnych źródłach informacji dane dotyczące najcieplejszego i najzimniejszego dnia w ich miejscowości w ostatnim roku kalendarzowym i obliczyli różnicę znalezionych temperatur.

123

Zadania utrwalające

- Wypisz liczby całkowite spośród liczb: $-\frac{12}{4}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{6}{1}$, 4 , $-\frac{6}{2}$, $-\frac{14}{1}$, $\frac{10}{10}$, $1\frac{3}{4}$.
- Jakie liczby odpowiadają wyróżnionym punktom? Która liczba jest położona najdalej od punktu D ?

- Spśród liczb: 3 , -8 , -14 , -16 , 14 , 8 wypisz liczby:
 - mniejsze od (-10) ,
 - których suma jest równa (-5) ,
 - przeciwnie,
 - których różnica jest równa (-2) .
- Na osi liczbowej zaznacz liczby całkowite większe od (-7) i jednocześnie mniejsze od 3 . Ile jest liczb spełniających podany warunek?
- Przepisz przykłady, zamiast $\diamond$ napisz odpowiedni znak $>$, $<$ lub $=$.
 - $-84 \diamond 0$
 - $-199 \diamond 19$
 - $-4 \diamond -\frac{4}{1}$
 - $-(3) \diamond -3$
- Oblicz.

a) $8 + (-5)$	b) $0 - 6$	c) $7 - (-4)$	d) $(-51) - (-38)$
$(-11) + 9$	$(-2) + (-9)$	$(-3) - (-10)$	$(-46) - (-27)$
$99 + (-99)$	$(-8) + 8$	$(-91) + 47$	$0 - (-17)$
- Rozwiąż równanie.
 - $m + (-7) = -12$
 - $(-9) + p = -12$
 - $10 - h = 16$
- Podaj liczby o 9 większe od liczb: -1 , -5 , -8 , 0 , 18 .
- Podaj liczby o 7 mniejsze od liczb: 7 , 5 , 1 , -2 , -9 .
- W najcieplejszym dniu stycznia średnia temperatura była równa 4°C , a w najzimniejszym dniu tego miesiąca $(-16)^{\circ}\text{C}$. Jaka była różnica temperatur między wymienionymi dniami?
- Pierwszy składnik sumy jest liczbą przeciwną do (-11) , a drugi – liczbą o 8 mniejszą od (-5) . Zapisz tę sumę i oblicz ją.

252

Materiały dydaktyczne

	Liczby całkowite → Liczby całkowite
	Liczby całkowite → Działania na liczbach całkowitych
Inne	Kartkówka 32
	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 70–79
Zbiór zadań	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 132–138

Odpowiedzi do zadań

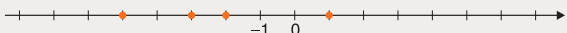
- $-\frac{12}{4}$, $\frac{6}{1}$, 4 , $-\frac{6}{2}$, $-\frac{14}{1}$, $\frac{10}{10}$
- $A = -800$, $B = -600$, $C = -500$, $D = -200$, $E = 100$, $F = 500$; F
- a) -14 , -16 b) 3 i -8 c) -8 i 8 , -14 i 14 d) -16 i -14
- 9
- a) $<$ b) $<$ c) $=$ d) $>$
- a) 3 , -2 , 0 b) -6 , -11 , 0 c) 11 , 7 , -44 d) -13 , -19 , 17
- a) $m = -5$ b) $p = -3$ c) $h = -6$
- 8 , 4 , 1 , 9 , 27
- 0 , -2 , -6 , -9 , -16
- 20°C
- $11 + (-13) = -2$

123

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.



- 1 Termometr wskazuje temperaturę
A. 7°C B. -7°C C. -6°C D. -8°C
- 2 Wyróżnionym punktom odpowiadają liczby

 A. $-5, -3, -2, 1$ B. $-5, -4, -2, 1$
 C. $-4, -3, -2, 1$ D. $-5, -3, -2, 2$
- 3 Liczbą przeciwną do liczby -12 jest liczba
A. $\frac{1}{12}$ B. -12 C. $-\frac{1}{12}$ D. 12
- 4 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
 Wynik działania: $3 + (-3)$ jest równy A / B. A. -6 B. 0
 Liczbą o 17 większą od (-28) jest C / D. C. 11 D. -11
- 5 Różnicą liczb 16 i (-20) jest liczba
A. -4 B. 36 C. 4 D. -36
- 6 **Nieprawdą** jest, że
A. $-101 > -102$ B. $1 > -7$ C. $0 < -6$ D. $-1999 < 99$
- 7 Temperatura w pokoju była równa 19°C , a na balkonie $(-4)^{\circ}\text{C}$.
Różnica temperatur była równa
A. 23°C B. 15°C C. 22°C D. 24°C
- 8 Pani Krystyna chce kupić pralkę za 1450 zł. Na koncie ma 1270 zł.
Po zakupie pralki stan jej konta będzie równy
A. -280 zł B. -380 zł C. -180 zł D. 80 zł
- 9 Wartość wyrażenia $(-12) - (-16)$ jest równa wartości wyrażenia
A. $12 + 16$ B. $12 - 16$ C. $(-12) - 16$ D. $(-12) + 16$
- 10 Liczba (-10) **nie jest** rozwiązaniem równania
A. $(-6) - a = 4$ B. $x + 3 = -7$ C. $(-18) - p = -9$ D. $y - (-8) = -2$

253

Komentarz do zadań 1.–10.

Wszystkie zadania można wykonać w formie próbnego testu sprawdzającego. W wyznaczonym przez nauczyciela czasie uczniowie indywidualnie czytają zadania i rozwiązują je. Zapisują w zeszycie tylko numer zadania i wybraną odpowiedź. Po uzgodnionym czasie wymieniają się zeszytami w parach i pod kierunkiem nauczyciela sprawdzają poprawność rozwiązań oraz zapisują liczbę uzyskanych punktów. Każde poprawnie rozwiązane zadanie to 1 punkt. Nauczyciel nagradza uczniów według wcześniejszych uzgodnień. Warto, aby nauczyciel w trakcie weryfikacji pracy przy każdym zadaniu wymagał ustnego uzasadnienia wybranej odpowiedzi lub wyjaśnienia wyeliminowania błędnych.

Komentarz do zadania 8.

Przy rozwiązaniu tego zadania przypominamy pojęcie debetu.

Komentarz do zadania 10.

Warto przypomnieć uczniom o strategii szukania poprawnej odpowiedzi polegającej na podstawieniu liczby (-10) do kolejnych równań i sprawdzeniu zgodności obliczenia z wynikiem.

Odpowiedzi do zadań

1. B
2. A
3. D
4. BD
5. B
6. C
7. A
8. C
9. D
10. C

Temat lekcji:

Prostopadłościan i jego siatka (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- opisuje prostopadłościan i sześcian,
- rozpoznaje sześcian oraz prostopadłościan, którego podstawą jest kwadrat lub prostokąt, wśród innych brył i uzasadnia swój wybór,
- rozpoznaje siatkę prostopadłościanu i sześcianu,
- rysuje siatki prostopadłościanów,
- rozwiązuje zadania z zastosowaniem własności prostopadłościanu i sześcianu,
- wykonuje rysunki pomocnicze do rozwiązywanych zadań.

Wskazówki metodyczne

- Na wszystkich lekcjach z tego działu uczniowie powinni mieć łatwy dostęp do modeli brył i korzystać z nich podczas rozwiązywania zadań i badania własności brył.
- Warto także rysować na tablicy siatki prostopadłościanów lub mieć je narysowane na kartkach A4 i A5 do wykorzystania w czasie rozwiązywania zadań.
- Przy realizacji tematu pomocne są pudełka w kształcie sześcianu i prostopadłościanu, które można rozciąć, by uzyskać siatkę lub odpowiednie prostokąty.
- Ciekawym i kształcącym ćwiczeniem jest układanie siatki sześcianu z sześciu jednakowych kwadratów i siatki prostopadłościanu z przygotowanych trzech par odpowiednich prostokątów. Uczniowie mogą je przygotować w ramach pracy domowej. Przy okazji warto zastanowić się nad odpowiedzią na pytanie: *Ile jest możliwości ułożenia różnych siatek?* Kwadraty i prostokąty można sklejać taśmą i sprawdzać, czy otrzymaliśmy oczekiwaną siatkę. W złożonej bryle warto pokazać wierzchołki, krawędzie, ściany. Na wykonanym w zeszycie rysunku bryły można zaznaczyć, po których krawędziach została ona rozcięta, by tę siatkę otrzymać.

Komentarz do Sowa przypomina

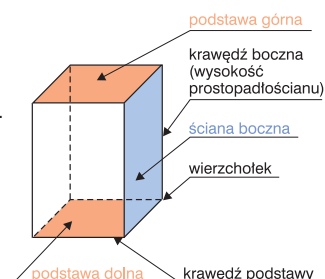
Podczas badania własności prostopadłościanu uczniowie powinni zauważyć, że krawędzie równoległe są tej samej długości, a liczba wszystkich krawędzi jest 3 razy większa od liczby krawędzi jednej podstawy.

X. Graniastosłupy

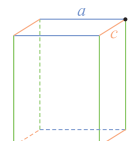
1. Prostopadłościan

Sowa przypomina

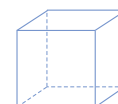
- Prostopadłościan ma 6 ścian. Każda ściana jest prostokątem. Ściany są parami równoległe, a wymiary ścian równoległych są takie same. Krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw. Prostopadłościan ma 12 krawędzi: 8 krawędzi podstawy i 4 krawędzie boczne.



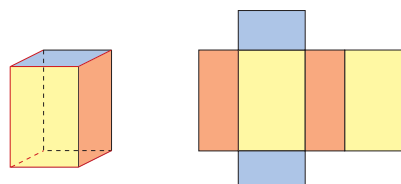
- Każde cztery krawędzie równoległe są oznaczone tym samym kolorem. Długości krawędzi: a , b , c wychodzących z jednego wierzchołka to wymiary prostopadłościanu.



- Prostopadłościan, który ma wszystkie krawędzie takiej samej długości, to **sześcian**. Każda ściana sześcianu jest kwadratem.



- Na rysunku prostopadłościan jest rozcięty wzdłuż zaznaczonych czerwonym kolorem krawędzi. To jest **siatka prostopadłościanu**. Na siatce tym samym kolorem wyróżniono prostokąty o tych samych wymiarach.



254

Materiały dydaktyczne

	Geometria w przestrzeni ➔ Graniastosłupy
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 80–82
Zbiór zadań	s. 165–169

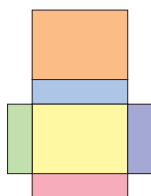
Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. kolejno wierszami: 6, 2, 4, 12, 8; równoległe; 3; prostopadłe; równoległe
3. D

X. Graniastosłupy



- 1 Wymień 3 przedmioty z twojego otoczenia, które mają kształt prostopadłościanu.
- 2 Narysuj prostopadłościan i napisz o nim 5 zdań. Równoległe krawędzie zaznacz takim samym kolorem.
- 3 Na rysunku przedstawiono siatkę prostopadłościanu. Które zdanie **falszywie** opisuje ten prostopadłościan?
 - A. Ściana różowa jest równoległa do ściany niebieskiej.
 - B. Ściana różowa jest równoległa do ściany pomarańczowej.
 - C. Ściany różowa i pomarańczowa mają wspólną krawędź.
 - D. Ściany fioletowa i pomarańczowa są prostopadłe.
- 4 Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu o wymiarach $1\frac{1}{2}$ cm $\times$ 2,5 cm $\times$ 3 cm. Ile jest krawędzi tej samej długości? Narysuj 2 różne siatki tej bryły.
- 5 Prostopadłościan ma w podstawie kwadrat, a jego ściany boczne nie są kwadratami. Narysuj siatkę tego prostopadłościanu, wytnij ją i sklej. (Pamiętaj o dorysowaniu skrzydełek potrzebnych do sklejenia prostopadłościanu). Z ilu jednakowych prostokątów składa się ta siatka?
- 6 Narysuj dwie różne siatki sześcienu o krawędzi 2,5 cm. Pokoloruj po jednej parze ścian prostopadłych. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego sześcienu.
- 7 Prostopadłościan ma wymiary 1,5 cm $\times$ 2 cm $\times$ 2,5 cm. Oblicz sumę długości jego krawędzi. Narysuj siatkę tego prostopadłościanu w skali 2 : 1. Wybierz prostokąty, które będą podstawami. Pokoloruj je.
- 8 Suma długości wszystkich krawędzi sześcienu jest równa 90 cm. Podaj długość jednej krawędzi.
- 9 Prostopadłościan ma wymiary 18 dm $\times$ 24 dm $\times$ 48 dm. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D. Suma długości wszystkich krawędzi jest równa A / B.
 A. 90 dm B. 360 dm
 Jego wymiary w skali C / D to 3 cm $\times$ 4 cm $\times$ 8 cm.
 C. 1 : 100 D. 1 : 60



Komentarz do zadania 1.

Zadanie można wykonać ustnie. Uczniowie powinni uzasadniać, co przemawia za tym, że dany przedmiot ma kształt prostopadłościanu lub sześcienu.

Komentarz do zadania 3.

Po wskazaniu zdania fałszywego uczniowie mogą ułożyć do przedstawionego rysunku siatki 2 zdania prawdziwe i 2 zdania fałszywe.

Komentarz do zadania 8.

Zadanie można wykonać ustnie. Przy znajomości liczby krawędzi sześcienu i sumy ich długości jego wykonanie jest łatwe.

Komentarz do zadania 9.

Zadanie można wykonać ustnie. Potrzebna jest umiejętność obserwacji i wiedza, że są po 4 krawędzie o długości każdego z podanych wymiarów. Uczniowie powinni zauważyć, że odpowiedź A jest fałszywa, gdyż dwukrotność najdłuższej z krawędzi jest większa od 90 dm. Odpowiedź C nie jest prawdziwa, ponieważ stukrotność najkrótszej krawędzi w skali nie jest równa 18 dm.

255

Odpowiedzi do zadań

3. B
4. 28 cm; 4
5. 4 prostokątów i 2 kwadratów
6. 30 cm
7. 24 cm; wymiary w skali: 3 cm $\times$ 4 cm $\times$ 5 cm
8. 7,5 cm
9. BD

Komentarz do Wyzwania

Wykonanie tego zadania nie będzie trudne, jeżeli wcześniej uczniowie zaznaczali na wykonanych przez siebie modelach krawędzie, wzdłuż których można było rozcinać bryły w celu uzyskania danej siatki. Można też dać uczniom modele prostopadłościanów, by zaznaczyli na nich krawędzie, tak jak na rysunkach, i wzdłuż nich rozcięli bryłę.

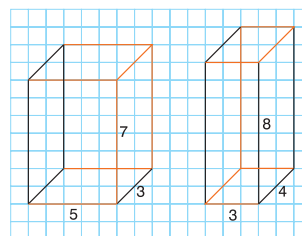
Komentarz do Sprawdź się!

Wskazane, aby sześcian z zadania 4. każdy uczeń narysował samodzielnie na dodatkowej kartce. Następnie wybieramy kilka prac przedstawiających różne siatki i umieszczamy je w wybranym miejscu klasy. Do prac uczniowskich dodajemy kilka układów prostokątów, które nie tworzą siatki. Zadaniem uczniów będzie wskazanie tych układów prostokątów, które nie są siatkami sześcianu, i uzasadnienie, dlaczego nie są. W zadaniu 5. ważne jest czytanie ze zrozumieniem. Krawędzie zostały podzielone na dwie grupy: dwóch krawędzi podstaw i krawędzi bocznych. Jeżeli uczniowie zdadzą sobie z tego sprawę i znają liczbę poszczególnych krawędzi, bez problemu udzielą odpowiedzi.



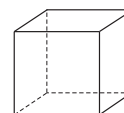
Wyzwanie

Narysuj siatki prostopadłościanów rozciętych wzdłuż krawędzi zaznaczonych kolorem pomarańczowym. Zaciemnij podstawy.



Sprawdź się!

- Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu jest równa 60 cm. Krawędź tego sześcianu jest równa
A. 12 cm B. 10 cm C. 5 cm D. 7,5 cm
- Narysuj siatkę prostopadłościanu o krawędziach: 3 cm, 4 cm, 3 cm. Napisz 2 zdania o tym prostopadłościanie.
- Które zdanie **falszywie** opisuje sześcian?
A. Ma 6 ścian o tych samych wymiarach.
B. Ma 6 wierzchołków.
C. Ma 12 krawędzi jednakowej długości.
D. Jest prostopadłościanem.
- Narysuj siatkę sześcianu o krawędzi 6 dm w skali 1 : 20.
- Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu, który w podstawie ma kwadrat, jest równa 96 cm. Suma długości krawędzi bocznych jest równa sumie długości krawędzi podstaw. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Krawędź podstawy ma długość A / B. A. 6 cm B. 8 cm
Wysokość prostopadłościanu wynosi C / D. C. 14 cm D. 12 cm



256

Odpowiedzi do zadań

Sprawdź się!

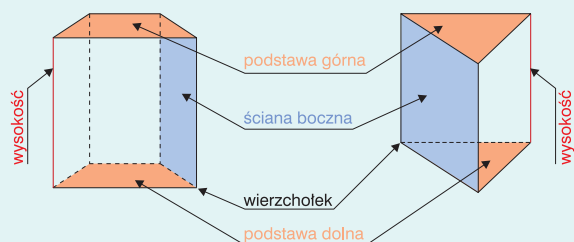
- C
- B
- długość krawędzi sześcianu w skali: 3 cm
- AD

2. Graniastosłup prosty



Sowa uczy

- Przedstawione na rysunkach figury przestrzenne, inaczej zwane bryłami, mają dwie równoległe podstawy. Podstawy te są identyczne. Wszystkie ściany boczne są prostokątami.



Podstawami takich brył mogą być dowolne wielokąty, np. trójkąty, czworokąty, pięciokąty. Ściany boczne są prostopadłe do podstaw. Wszystkie takie bryły nazywamy **graniastosłupami prostymi**. Każda krawędź boczna graniastosłupa prostego jest jego wysokością.

Jeżeli podstawą graniastosłupa prostego jest:

- trójkąt, to nazywamy go **graniastosłupem prostym trójkątnym**,
- czworokąt, to nazywamy go **graniastosłupem prostym czworokątnym**.

- Wokół nas jest wiele przedmiotów, których kształt przypomina graniastosłup prosty. Oto niektóre z nich.



257

Materiały dydaktyczne

	Geometria w przestrzeni → Graniastosłupy
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 82–87
Zbiór zadań	s. 165–169

Tematy lekcji:

1. Graniastosłup prosty (1 h)
2. Rozwiązywanie zadań dotyczących graniastosłupa prostego (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- rozpoznaje graniastosłupy proste,
- nazywa graniastosłupy proste,
- opisuje graniastosłupy proste,
- rysuje siatki graniastosłupów prostych,
- rozwiązuje zadania z zastosowaniem własności graniastosłupów prostych,
- stosuje skalę w rysowaniu siatek graniastosłupów prostych.

Wskazówki metodyczne

Lekcję można przeprowadzić w formie pracy w grupach. Pracą domową na tę lekcję, poza przyniesieniem przez każdego ucznia modeli brył, powinno być przygotowanie materiałów przez każdą z grup.

Grupa I – przynosi 2 trójkąty o bokach 3 cm, 4 cm, 5 cm i prostokąty o wymiarach: 3 cm × 7 cm, 4 cm × 7 cm i 5 cm × 7 cm,

Grupa II – przynosi 2 trójkąty o bokach 13 cm, 13 cm, 10 cm, 2 prostokąty o wymiarach 13 cm × 7 cm i prostokąt o wymiarach 10 cm × 7 cm,

Grupa III – przynosi 2 trapezy równoramienne o bokach 5 cm, 5 cm, 5 cm, 11 cm i wysokości 4 cm, 3 prostokąty o wymiarach 5 cm × 7 cm oraz prostokąt o wymiarach 11 cm × 7 cm,

Grupa IV – przynosi 2 romby o przekątnych 8 cm i 6 cm i 4 prostokąty o wymiarach 5 cm × 7 cm,

Grupa V – przynosi 2 równoległoboki o bokach 5 cm, 8 cm i wysokości 4 cm, 2 prostokąty o wymiarach 5 cm × 7 cm oraz 2 prostokąty o wymiarach 8 cm × 7 cm.

W czasie lekcji każda grupa układa różne siatki graniastosłupów prostych z przyniesionych figur, skleja je taśmą i sprawdza, czy ułożony zestaw figur jest siatką bryły. Następnie przedstawia efekty swojej pracy, opisuje siatki i powstałe bryły. Taka praca ułatwi późniejsze rysowanie siatek graniastosłupów.

Komentarz do Sowa uczy

Tu znajduje się dokładny opis graniastosłupa prostego. Warto go omówić na podstawie różnych, przyniesionych przez uczniów modeli. Rozmowa na temat budynków, przedmiotów i brył będących wokół nas pomoże w rozwijaniu wyobraźni.

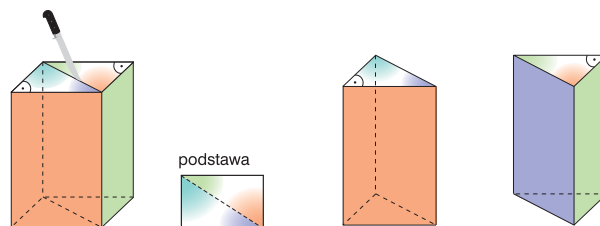
Komentarz do Przykładu 1.

Opisane w przykładzie czynności warto omówić zgodnie z opisem lub przynieść na lekcję kilka identycznych graniastosłupów, których podstawami są trójkąty prostokątne, i z nich tworzyć graniastosłupy o różnych podstawach.

Podczas rysowania siatek graniastosłupów zachęcamy uczniów do wykonania kilku rodzajów siatek tego samego graniastosłupa.

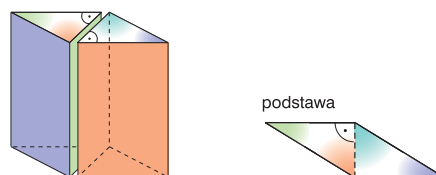
Przykład 1.

Wykonajmy bryłę w kształcie prostopadłościanu z modeliny lub ziemniaka. Przetnijmy ją nożem wzdłuż przekątnej podstawy, jak pokazano na rysunku:

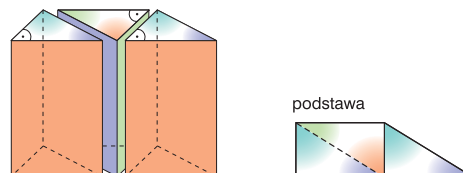


Otrzymaliśmy dwa graniastosłupy proste, których podstawami są trójkąty prostokątne.

Jeżeli przestawimy dwa otrzymane graniastosłupy, tak aby stykały się innymi ścianami, to otrzymamy inny graniastosłup prosty, którego podstawą jest równoległobok.



Gdy połączy się ze sobą odpowiednio trzy takie graniastosłupy, można otrzymać graniastosłup prosty, którego podstawą jest trapez.



258

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

2. kolejno wierszami: 6, 3, 9; równoległe
4. a) sześciian; 8, 4, 12 b) graniastosłup sześciokątny; 12, 6, 18
- c) graniastosłup trójkątny; 6, 3, 9
- d) graniastosłup czworokątny (podstawą jest trapez); 8, 4, 12
- e) graniastosłup czworokątny (podstawą jest romb); 8, 4, 12
- f) graniastosłup czworokątny (podstawą jest równoległobok); 8, 4, 12
5. a) II b) I, IV c) IV, VI d) III, IV e) V
6. graniastosłup trójkątny (podstawą jest trójkąt prostokątny); graniastosłup trójkątny (podstawą jest trójkąt równoboczny)
9. wszystkie ściany są trójkątami
11. A; D
12. graniastosłup pięciokątny
13. 29 cm
14. przeciwprostokątna podstawy 2,5 cm; suma krawędzi 21 cm

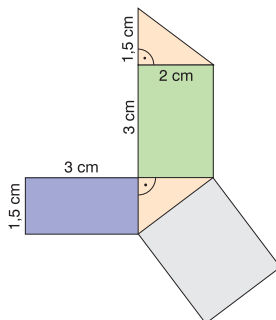
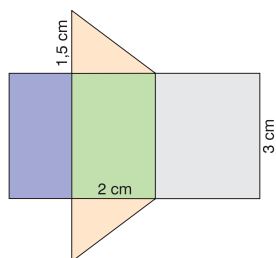
X. Graniastosłupy

Przykład 2.

Narysujmy siatkę graniastosłupa prostego, którego podstawą jest trójkąt prostokątny. Krawędzie podstawy są równe: 2 cm, 1,5 cm i 2,5 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa 3 cm.

Siatka składa się z dwóch identycznych trójkątów prostokątnych (dwie podstawy) i trzech prostokątów. Jeden bok każdego prostokąta jest równy 3 cm – jest to wysokość graniastosłupa.

Można narysować na przykład takie siatki tego graniastosłupa:



Uwaga. W dalszej części podręcznika, gdy będzie mowa o graniastosłupach prostych, będziemy pomijać wyraz „prosty”.

- 1 Wymień 2 przedmioty, które mają kształt graniastosłupa.
- 2 Narysuj graniastosłup o wysokości 3 cm i kwadratowej podstawie o boku $1\frac{1}{2}$ cm. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa. Jak inaczej nazywa się taka bryła?
- 3 Narysuj prostopadłościan o krawędziach: $1\frac{1}{2}$ cm, 3 cm, $3\frac{1}{2}$ cm.
- 4 Graniastosłup ma w podstawie trójkąt. Krawędzie podstawy są równe: 4 cm, 3 cm, 5 cm. Wysokość graniastosłupa ma 4,5 cm. Narysuj siatkę tego graniastosłupa, wytnij ją i sklej. Ile wierzchołków ma graniastosłup trójkątny? Ile krawędzi ma podstawa, a ile jest wszystkich krawędzi? Wskaż krawędzie równoległe.

259

Komentarz do Przykładu 2.

Po omówieniu siatki i modelu graniastosłupa przedstawionego w tym przykładzie warto zlecić uczniom narysowanie innej niż zaprezentowane siatki tej bryły.

Komentarz do zadania 4.

Po przeczytaniu treści zadania warto zwrócić uwagę uczniów na zależności między liczbą krawędzi podstawy (podstaw), liczbą krawędzi bocznych i liczbą wszystkich krawędzi bryły. Można te zależności przedstawić w postaci ułamków: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Ćwiczenie to będzie pomocne podczas rozwiązywania zadań, w których należy podać nazwę graniastosłupa na podstawie znajomości liczby wybranych krawędzi.

Odpowiedzi do zadań

2. 24 cm; prostopadłościan
4. 6 wierzchołków; 3 krawędzie podstawy, 9 wszystkich krawędzi

Komentarz do zadania 6.

Zadanie można wykonać ustnie. Wskazany przez nauczyciela uczeń powinien uzasadnić swoją odpowiedź, pokazując odpowiednie elementy na wybranym modelu graniastosłupa.

Komentarz do zadania 8.

Zadanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Przy rysowaniu siatki uczniowie muszą używać przyrządów. Zwracamy uwagę, aby wyznaczanie długości ramion trapezu i wysokości bryły uczniowie wykonywali cyrklem. Przy opisie bryły powinni zauważyć, że dwie ściany boczne są kwadratami.

Komentarz do zadania 9.

Nie wszyscy uczniowie dostrzegają, że dom przedstawiony na fotografii w zadaniu składa się z dwóch części: dolnej w kształcie prostopadłościanu i górnej – graniastosłupa, którego podstawą jest trójkąt równoramienny. Dobrze jest przygotować takie dwie bryły, by uczniowie złożyli z nich „dom” i wskazali podstawy graniastosłupa trójkątnego. Takie ćwiczenia kształcą wyobraźnię przestrzenną.

Komentarz do zadania 10.

Rysując siatkę tego graniastosłupa, uczniowie mogą skonstruować 6 odpowiednio ułożonych względem siebie trójkątów równobocznych lub od razu sześciokąt foremny. Podczas konstrukcji będą mieli możliwość operowania cyrklem. Umiejętność skonstruowania sześciokąta foremnego ułatwi im pracę.



- 5 Narysuj siatkę graniastosłupa o wysokości 5 cm, którego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku 3 cm.
- 6 Które zdanie jest **falszywe**?
A. Ścianami bocznymi graniastosłupa są prostokąty.
B. Każdy prostopadłościan jest sześcianiem.
C. Graniastosłup, którego podstawą jest trójkąt, ma 3 ściany boczne.
D. Graniastosłup pięciokątny ma 5 krawędzi bocznych.
- 7 Narysuj i wytnij siatkę graniastosłupa, którego podstawą jest równoległobok o bokach 3 cm i 2 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa 5 cm. Sklej model bryły. Ile wszystkich wierzchołków, a ile krawędzi ma ten graniastosłup? Wskaż na modelu krawędzie równoległe i ściany równoległe. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa.
- 8 Narysuj trapez równoramienny, a następnie siatkę graniastosłupa, którego podstawą jest ten trapez. Wysokość graniastosłupa ma taką samą długość jak ramię trapezu. Ile ścian bocznych ma ten graniastosłup? Czy ma ściany równoległe?
- 9 Kształt jakiej bryły ma część domu wyróżniona na rysunku? Ile krawędzi i ile wierzchołków ma taka bryła?



- 10 Narysuj siatkę graniastosłupa, którego podstawą jest sześciokąt foremny. Wytnij ją i sklej. Na podstawie modelu tego graniastosłupa napisz o nim 5 zdań.

Wskazówka. Sześciokąt foremny składa się z 6 trójkątów równobocznych.



260

Odpowiedzi do zadań

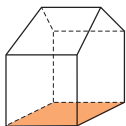
6. B
7. 8 wierzchołków, 12 krawędzi; długość wszystkich krawędzi: 40 cm
8. 4 ściany boczne; tak
9. graniastosłupa trójkątnego; 9 krawędzi i 6 wierzchołków

X. Graniastosłupy

- 11 Dziadek Sebastiana zrobił karmnik dla ptaków. Do jakiej bryły jest podobny kształt tego karmnika? Ile krawędzi bocznych ma ta bryła? Ile krawędzi ma podstawa bryły?



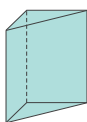
Wskazówka.



- 12 Podstawą graniastosłupa jest kwadrat. Suma długości krawędzi bocznych wynosi 24 cm, czyli $\frac{3}{7}$ sumy długości wszystkich krawędzi. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D. Suma długości wszystkich krawędzi wynosi A / B. A. 64 cm B. 56 cm Długość krawędzi podstawy jest równa C / D. C. 3 cm D. 4 cm
- 13 Graniastosłup ma 24 krawędzie jednakowej długości. Podaj nazwę tego graniastosłupa i zbuduj jego szkielet z patyczków (np. zapalek, słomek).

Sprawdź się!

- Narysuj siatkę graniastosłupa, którego podstawą jest trójkąt równoramienny.
- Bryła przedstawiona na rysunku obok to
A. prostopadłościan.
B. graniastosłup trójkątny.
C. graniastosłup, którego podstawą jest romb.
D. sześcián.
- Ile krawędzi bocznych ma graniastosłup, którego podstawą jest trapez?
- Nieprawdą** jest, że graniastosłup pięciokątny ma
A. 15 wierzchołków. B. 15 krawędzi.
C. 2 podstawy. D. 5 ścian bocznych.
- Graniastosłup ma 18 krawędzi. Jak nazywamy taki graniastosłup? Ile ma wierzchołków i ile ścian bocznych?



261

Komentarz do zadania 11.

Jeżeli w pracowni jest model graniastosłupa pięciokątnego, należy położyć go na jednej ścianie i pozwolić uczniom wymieniać obiekty oraz przedmioty, które mają kształt tej bryły. Po takim ćwiczeniu łatwiej będzie zauważyć podobieństwo pomiędzy karmnikiem a bryłą narysowaną obok. Można też wyciąć graniastosłup pięciokątny z zeszytu ćwiczeń, cz. 2, s. III.

Komentarz do zadania 13.

Do łączenia słomek i drutów można użyć plasteliny, modeliny, małych kostek wyciętych z ziemniaka.

Komentarz do *Sprawdź się!*

Proponujemy, aby porozmawiać z uczniami, od czego należy rozpocząć rysowanie siatki graniastosłupa opisanego w zadaniu 1. Warto, by uczniowie zaczęli pracę od narysowania trzech odcinków o różnych długościach (krawędzie bryły). Przy rysowaniu siatki powinni skonstruować trójkąty będące podstawą bryły. Zadania 2.–5. można rozwiązać ustnie. Wskazane, aby uczniowie uzasadniali swoje odpowiedzi. Podczas rozwiązywania zadań powinni mieć możliwość korzystania z modeli graniastosłupów o różnych podstawach.

Odpowiedzi do zadań

11. graniastosłupa pięciokątnego; 5 krawędzi bocznych; 5 krawędzi podstawy
12. BD
13. graniastosłup ośmiokątny

Sprawdź się!

2. B
3. 4
4. A
5. graniastosłup sześciokątny; 12 wierzchołków i 6 ścian bocznych

Tematy lekcji:

1. Pole powierzchni graniastostłupa (1 h)
2. Pole powierzchni graniastostłupa – zadania (1 h)
3. Rozwiązywanie zadań praktycznych z wykorzystaniem pola powierzchni graniastostłupa (1 h)

Cele lekcji

Uczeń:

- oblicza pole powierzchni prostopadłościanu na podstawie długości jego krawędzi z wykorzystaniem siatki prostopadłościanu,
- zamienia jednostki pola powierzchni,
- rozwiązuje zadania na obliczenie pola powierzchni prostopadłościanu,
- oblicza pole powierzchni graniastostłupa prostego,
- rozwiązuje zadania na obliczenie pola powierzchni prostopadłościanu osadzone w kontekście praktycznym i stosuje w nich umiejętności z arytmetyki.

Wskazówki metodyczne

- Z pojęciem pola powierzchni sześcianu i prostopadłościanu uczniowie spotkali się w klasie 4. Warto skorzystać z wykonanych na poprzednich lekcjach siatek prostopadłościanów i obliczyć, ile centymetrów kwadratowych ma papier zużyty na daną siatkę. Podczas obliczania pola powierzchni graniastostłupa uczniowie powinni opisywać dany graniastostłup i przez pewien czas rysować jego siatkę. Przekonają się wówczas, że siatki większości graniastostłupów występujących w podręczniku składają się z prostokątów i innych znanych im figur. Należy również pokazać uczniom, że pole powierzchni bocznej można obliczyć szybciej. Wystarczy zauważyć, że ściany boczne tworzą prostokąt, którego jeden bok jest wysokością graniastostłupa, a drugi jest równy obwodowi podstawy.
- Należy zwrócić uwagę na zadania, w których występuje skala.
- Po realizacji tego tematu proponujemy przeprowadzić Kartkówkę 33.

Komentarz do Sowa przypomina

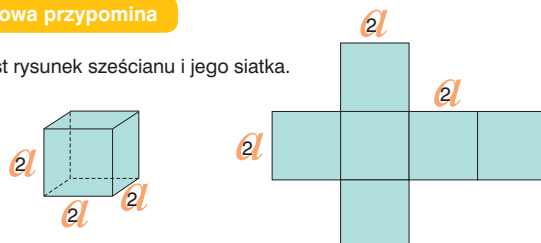
Oprócz przypomnienia rysunku prostopadłościanu i jego siatki ponownie pokazujemy, w jaki sposób otrzymujemy wzory na obliczanie pola powierzchni tych brył. Prosimy chętnych uczniów o wyjaśnienie tych przekształceń.

W celu sprawdzenia, czy uczniowie rozumieją zapis wzorów na pole powierzchni sześcianu i prostopadłościanu, można na rysunku wykonanym na tablicy wprowadzić inne oznaczenia krawędzi tych brył i poprosić, aby uczniowie napisali do nich wzory.

3. Pole powierzchni graniastostłupa

Sowa przypomina

- To jest rysunek sześcianu i jego siatki.



Oznaczamy:

P_p – pole podstawy,

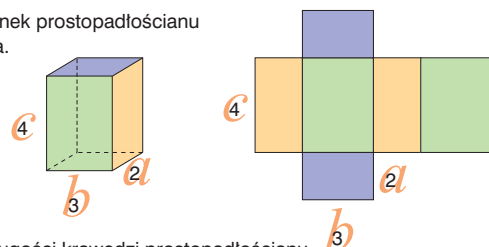
P_b – pole powierzchni bocznej (sumę pól ścian bocznych),

P_c – pole powierzchni całkowitej.

Sześcian ma 6 ścian, które są kwadratami o boku 2 cm, więc:

$$P_c = 6 \cdot 2^2 = 24 \quad P_c = 6a^2$$

- To jest rysunek prostopadłościanu i jego siatki.



a , b , c to długości krawędzi prostopadłościanu

Prostopadłościan ma 2 pary ścian bocznych równoległych o tych samych wymiarach i 2 identyczne podstawy, więc:

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b$$

$$P_p = 3 \cdot 2 = 6$$

$$P_b = 2 \cdot (3 \cdot 4) + 2 \cdot (2 \cdot 4) = 40$$

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b = 2 \cdot 6 + 40 = 52$$

$$P_c = 2ab + 2bc + 2ac$$

262

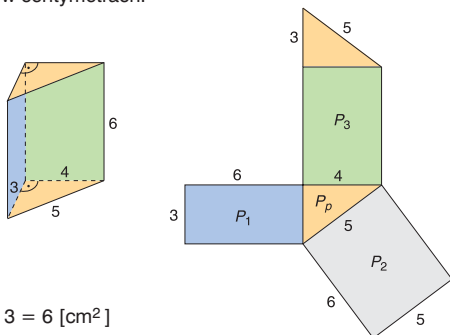
Materiały dydaktyczne

	Geometria w przestrzeni ➔ Graniastostłupy
	Kartkówka 33
Inne	wsipnet.pl klasowki.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	s. 88–94
Zbiór zadań	s. 170–173

X. Graniastoslup

Przykład 1.

Obliczmy pole powierzchni całkowitej graniastoslupa, którego podstawą jest trójkąt prostokątny. Wymiary na rysunku pomocniczym są podane w centymetrach.



Obliczmy:

$$P_p = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_b = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P_1 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ [cm}^2\text{]} \quad P_2 = 6 \cdot 5 = 30 \text{ [cm}^2\text{]} \quad P_3 = 6 \cdot 4 = 24 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_b = 18 + 30 + 24 = 72 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b$$

$$P_c = 2 \cdot 6 + 72 = 84 \text{ [cm}^2\text{]}$$

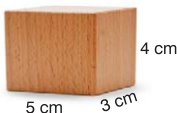
Odpowiedź. Pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa jest równe 84 cm².

Pole powierzchni całkowitej graniastoslupa jest sumą pól podstaw i wszystkich jego ścian bocznych.



Uwaga. W zadaniach, zamiast pisać „pole powierzchni całkowitej”, często będziemy stosować tożsamy zapis „pole powierzchni”.

1. Pole powierzchni sześcianu o krawędzi 11 cm jest równe
A. 121 cm² B. 726 cm² C. 7,26 cm² D. 1331 cm²
2. Kłosek ma kształt prostopadłościanu. Oblicz, ile kolorowego papieru trzeba zużyć na oklejenie tego kłosa. Narysuj siatkę takiego prostopadłościanu w skali 1 : 2.



263

Komentarz do Przykładu 1.

W tym przykładzie, krok po kroku, uczniowie uczą się obliczania pola powierzchni graniastoslupa, którego podstawą jest trójkąt prostokątny. Pomaga im w tym siatka, ale istotny jest także rysunek graniastoslupa w rzucie, gdyż kształtuje on wyobraźnię ucznia w sytuacji, gdy będzie obliczał pole powierzchni bez korzystania z siatki. Zapisany pod przykładem w zielonej ramce wniosek zachęci uczniów do opisywania słowami sposobu obliczania pola powierzchni bocznej lub całkowitej bryły.

Komentarz do zadania 1.

Zadanie można wykonać ustnie, eliminując błędne odpowiedzi. Warto również przeprowadzić krótkie ćwiczenie obliczania pola powierzchni sześcianu. Wybrany przez nauczyciela uczeń podaje długość krawędzi sześcianu wyrażoną jednocyfrową liczbą naturalną lub dwucyfrową liczbą naturalną, która w rzędzie jedności ma cyfrę 0, po czym wyznacza osobę, która podaje pole powierzchni jednej ściany sześcianu. Osoba wyznaczona do odpowiedzi, po jej udzieleniu, wskazuje kolejną osobę. Jej zadaniem jest podanie pola powierzchni tego sześcianu lub sposobu jego obliczenia i po udzieleniu odpowiedzi wybieranie osoby, która poda długość krawędzi kolejnego sześcianu. O czasie trwania zabawy decyduje nauczyciel.

Odpowiedzi do zadań z zeszytu ćwiczeń

1. a) prostopadłościan, $P_b = 13,2 \text{ cm}^2$, $P_c = 15,3 \text{ cm}^2$
b) sześcian, $P_b = 4 \text{ cm}^2$, $P_c = 6 \text{ cm}^2$ c) sześcian, $P_b = 9 \text{ cm}^2$, $P_c = 13,5 \text{ cm}^2$
d) graniastoslup, którego podstawą jest trójkąt równoboczny, $P_b = 9,1 \text{ cm}^2$, $P_c = 13,7 \text{ cm}^2$ e) graniastoslup, którego podstawą jest romb, $P_b = 18,7 \text{ cm}^2$, $P_c = 22,9 \text{ cm}^2$ f) graniastoslup, którego podstawą jest romb, $P_b = 10,64 \text{ cm}^2$, $P_c = 14,82 \text{ cm}^2$
2. B; A; C; B
3. a) $P_b = 460 \text{ cm}^2$, $P_c = 640 \text{ cm}^2$ b) $P_b = 36,4 \text{ cm}^2$, $P_c = 49,92 \text{ cm}^2$
4. A; C; F
5. a) 54 cm^2 b) 288 cm^2 c) 252 cm^2
6. a) graniastoslup trójkątny, $P_c = 160 \text{ cm}^2$ b) graniastoslup, którego podstawą jest romb, $P_c = 118 \text{ cm}^2$
7. $P_p = 96 \text{ cm}^2$, $P_c = 712 \text{ cm}^2$
8. a) 38 cm c) $P_c = 54 \text{ cm}^2$
9. $P_c = 42,9 \text{ m}^2$; 9 rolek
10. kolejno wierszami: 21 m², 13,5 m²; 46 m², 37,5 m²; farby białej 6 puszek, farby żółtej 14 puszek

Odpowiedzi do zadań

1. B
2. 94 cm²

Komentarz do zadania 3.

Przed rozwiązaniem zadania trzeba powtórzyć wiadomości o skali. Po jego rozwiązaniu warto, by uczniowie porównali, ile razy większe jest pole powierzchni graniastoslupa od pola powierzchni siatki w skali. Nie ma potrzeby wyjaśniania szczegółów, ważne, by uczniowie wiedzieli, że pola figur w skali np. 1 : 2 nie są 2 razy mniejsze od pól tych figur w skali 1 : 1. Wniosek ten jest pomocny podczas rozwiązywania zadania 10.

Komentarz do zadań 4.–8.

Uczniowie muszą wskazać na siatce, które krawędzie odpowiadają krawędziom o długościach rzeczywistych 25 cm, 15 cm, 11 cm. Warto także wyjaśnić, które odcinki zadecydują o wymiarach arkusza papieru. Dobrzy uczniowie mogą zastanowić się, czy przy innym układzie ścian arkusz papieru może mieć mniejsze wymiary.

Komentarz do zadania 9.

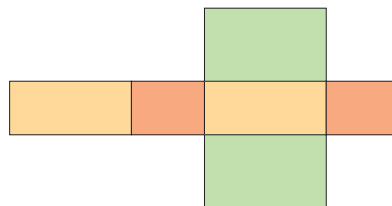
Można zachęcić dobrych uczniów do obliczenia pola powierzchni bocznej tego graniastoslupa dwoma sposobami: obliczając sześciokrotność pola powierzchni jednej ściany oraz obliczając pole prostokąta, którego jeden bok jest wysokością graniastoslupa, a drugi obwodem podstawy.



- 3 Podstawą graniastoslupa jest kwadrat o boku 10 cm. Wysokość graniastoslupa ma 20 cm. Wykonaj rysunek pomocniczy tej bryły. Narysuj jej siatkę w skali 1 : 4. Oblicz pole powierzchni graniastoslupa i narysowanej siatki.

Skorzystaj z poniższych informacji i rozwiąż zadania 4.–8.

Karol kupił prezent i postanowił jako opakowanie zrobić pudełko w kształcie prostopadłościanu. Po wykonaniu pomiarów stwierdził, że pudełko powinno mieć wymiary: 25 cm, 15 cm, 11 cm. Na rysunku pokazano siatkę tego pudełka w pewnej skali.



- 4 Oblicz pole powierzchni pudełka wykonanego przez Karola.

- 5 Siatka jest narysowana w skali

A. 10 : 1 B. 1 : 5
C. 1 : 10 D. 1 : 100

- 6 Narysowana siatka ma pole

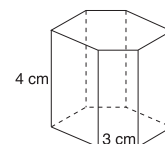
A. 163 cm² B. 16,3 cm²
C. 25,3 cm² D. 15,3 cm²



- 7 Ile razy większe jest pole powierzchni pudełka Karola od pola narysowanej powyżej siatki?

- 8 Jakie najmniejsze wymiary powinien mieć arkusz papieru, aby zmieściła się na nim siatka pudełka Karola?

- 9 Na rysunku pomocniczym jest przedstawiony graniastoslup sześciokątny. Każda krawędź podstawy ma długość 3 cm. Krawędź boczna jest równa 4 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastoslupa.



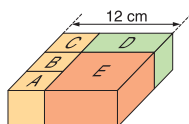
264

Odpowiedzi do zadań

3. wymiary w skali: 2,5 cm × 2,5 cm × 5 cm; 1000 cm², 62,5 cm²
4. 1630 cm²
5. C
6. B
7. 100
8. 41 cm × 80 cm
9. 72 cm²

X. Graniastoslupy

- 10 Czy arkusz papieru o wymiarach $20\text{ cm} \times 20\text{ cm}$ wystarczy do oklejenia graniastoslupa, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o bokach: 6 cm , 8 cm , 10 cm , a wysokość graniastoslupa jest 2 razy krótsza od najdłuższego boku podstawy? Narysuj siatkę tego graniastoslupa w skali $1 : 2$.
- 11 Jaś zbudował bryłę z 3 jednakowych sześcianów i 2 prostopadłościanów. Podstawa bryły jest kwadratem o boku 12 cm .



Oblicz wymiary każdej bryły i odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż litery przypisane poprawnej odpowiedzi.

W której bryle suma długości wszystkich krawędzi jest równa 48 cm ?	A	B	C	D	E
Pole powierzchni bocznej której bryły jest równe 96 cm^2 ?	A	B	C	D	E
Pole powierzchni której bryły jest równe 160 cm^2 ?	A	B	C	D	E
Który prostopadłościan ma tylko dwie ściany w kształcie kwadratu?	A	B	C	D	E

- 12 Pole powierzchni bocznej graniastoslupa, którego podstawą jest kwadrat, wynosi 204 dm^2 . Wysokość bryły jest równa 6 dm . Wykonaj rysunek pomocniczy. Podaj inną nazwę tej bryły. Oblicz długość krawędzi podstawy i pole powierzchni całkowitej tej bryły.
- 13 Podstawą graniastoslupa jest trójkąt równoramienny o obwodzie $20,8\text{ cm}$. Ramiona trójkąta mają długości po $6,2\text{ cm}$. Wysokość graniastoslupa jest równa podstawie trójkąta. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastoslupa.
- 14 Ile rolek tapety trzeba kupić, aby wytapetować ściany pokoju o wymiarach: 3 m szerokości, $2\text{ m } 50\text{ cm}$ długości i $2\text{ m } 50\text{ cm}$ wysokości (nie odliczamy miejsca na okna i drzwi)? Ile trzeba zapłacić za tę tapetę? Wykonaj rysunek pomocniczy.



265

Komentarz do zadania 11.

Jeżeli uczniowie będą mieli problemy z rozwiązaniem tego zadania, można zachęcić ich do narysowania podstawy bryły, która jest kwadratem o boku 12 kr tek, i podzielenia jej na prostokąty przedstawione na rysunku. Ułatwi im to podanie wymiarów prostopadłościanów. Aby odpowiedzieć na pytania, uczniowie powinni albo wykonać obliczenia, albo oszacować wyniki. Odpowiedzi na ostatnie pytanie można udzielić po przeanalizowaniu rysunku i wymiarów prostopadłościanów. Podobne zadania są proponowane w informatorze CKE.

Komentarz do zadania 13.

W tym zadaniu trzeba zachęcić uczniów do wykonania rysunku pomocniczego i naniesienia na nim danych. Chętni uczniowie mogą wykonać obliczenia dwoma sposobami.

Komentarz do zadania 14.

To zadanie pokazuje zastosowanie i przydatność matematyki w życiu codziennym. Uczniowie powinni wiedzieć, że kupuje się tylko całe rolki tapety.

Odpowiedzi do zadań

10. wystarczy; krawędzie podstawy w skali: 3 cm , 4 cm , 5 cm , wysokość w skali: $2,5\text{ cm}$
 11. ABC, D, D, DE
 12. prostopadłościan; $8,5\text{ dm}$, $348,5\text{ dm}^2$
 13. $174,72\text{ cm}^2$
 14. 6; 90 zł

Komentarz do zadania 15.

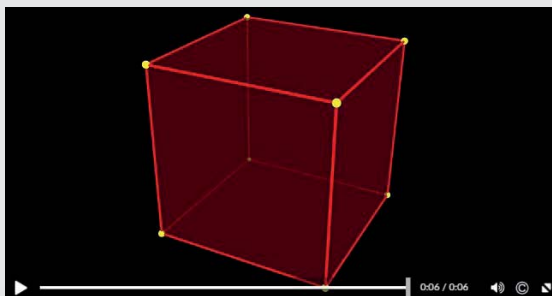
Rozwiązanie tego zadania będzie łatwiejsze po wykonaniu rysunku pomocniczego i zaznaczeniu na nim danych wielkości. Uczniowie powinni zauważyć, że aby obliczyć długość krawędzi podstawy, muszą obliczyć ułamek danej w zadaniu liczby. Warto, aby wyjaśnili sposób obliczenia pola powierzchni graniastoslupa.

Komentarz do Wyzwania

Aby ocenić wymiary kartonu, warto narysować różne siatki sześcianu.

Komentarz do Sprawdź się!

Zadania pozwalają na podsumowanie umiejętności obliczania pól powierzchni prostopadłościanów, także w kontekście praktycznym. Ponieważ zagadnienia poruszane w zadaniach są trudne, dlatego należy te zadania wspólnie przeanalizować i rozwiązać. Na czas pracy uczniów, którzy mają trudności w nauce matematyki, można połączyć w pary z uczniami mającymi dobre oceny z matematyki.



Plansze interaktywne → Geometria w przestrzeni
→ Graniastosłupy → Siatka graniastosłupa: Siatka sześcianu – Animacja



- 15 Graniastosłup, którego podstawą jest kwadrat, ma wysokość równą 10 cm. Długość krawędzi podstawy wynosi 0,75 wysokości. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły.

Wyzwanie

Jakie najmniejsze wymiary powinien mieć karton w kształcie prostokąta, żeby można było z niego wyciąć siatkę sześcianu o krawędzi 5 cm?

Sprawdź się!

- Narysuj siatkę graniastosłupa czworokątnego tak, by każda krawędź podstawy była równa 3 cm, a krawędź boczna 3,5 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.
- Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny o boku 8 cm. Wysokość bryły wynosi 12,5 cm. Wykonaj rysunek pomocniczy tego graniastosłupa i oblicz jego pole powierzchni bocznej.
- Krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka prostopadłościanu mają długości: 4 cm, 2,5 cm i 3 cm. Pole powierzchni tego prostopadłościanu jest równe
A. 29,5 cm² B. 59 cm² C. 59 cm D. 30 cm²
- Podłoga w łazience jest prostokątem o wymiarach $2\frac{1}{2}$ m $\times$ 2,6 m. Wysokość łazienki jest równa 2,6 m.
a) Wykonaj rysunek pomocniczy.
b) Ile kafelków o wymiarach 10 cm $\times$ 20 cm potrzeba na wyłożenie ścian łazienki, jeżeli mają być ułożone do wysokości 2 m? (Nie odliczamy otworu na drzwi).
- Krawędzie podstawy prostopadłościanu mają 5 dm i 9 dm. Jego wysokość jest równa $\frac{2}{3}$ długości dłuższej krawędzi podstawy. Oblicz pole powierzchni tej bryły.



266

Odpowiedzi do zadań

15. 412,5 cm²

Wyzwanie

15 cm $\times$ 20 cm

Sprawdź się!

- 42 cm²
- 300 cm²
- B
- b) 1020
- 258 dm²

Zadania utrwalające

- 1 Z drutu zbudowano szkielet sześcianu o krawędzi 15,5 cm. Ile drutu zużyto?
- 2 Ile krawędzi bocznych ma graniastosłup ośmiokątny?
- 3 Graniastosłup ma 9 krawędzi. Jaki wielokąt jest jego podstawą?
- 4 Prostopadłościan ma wymiary $2,3 \text{ cm} \times 5,8 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$. Ile drutu potrzeba na wykonanie jego szkieletu? Wykonaj rysunek pomocniczy.
- 5 Oblicz pole powierzchni sześcianu o krawędzi:
 - a) 4 dm,
 - b) 15 m,
 - c) 5,7 cm.
- 6 Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny. Krawędź podstawy jest równa 8,4 cm, a wysokość graniastosłupa wynosi 12,3 cm. Wykonaj rysunek pomocniczy tego graniastosłupa. Oblicz jego pole powierzchni bocznej.
- 7 Prostopadłościan ma wymiary $5 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 3,5 \text{ cm}$. Narysuj jego siatkę. Wykonaj rysunek pomocniczy i oblicz pole powierzchni tego prostopadłościanu.
- 8 Jedna krawędź podstawy prostopadłościanu ma 20 cm, druga jest 2 razy krótsza, a wysokość wynosi tyle, ile 0,75 dłuższej krawędzi. Oblicz pole powierzchni tego prostopadłościanu.
- 9 Narysuj siatkę sześcianu o krawędzi 4 cm i jego siatkę w skali 1 : 2. Ile razy pole powierzchni sześcianu w skali 1 : 2 jest mniejsze od pola powierzchni sześcianu o krawędzi 4 cm?
- 10 Elementami ogrodzenia działki pana Jana są cztery słupki w kształcie prostopadłościanów, których podstawami są kwadraty o boku 0,5 m. Ich wysokości są równe 1,8 m. Ściany boczne i górną podstawę każdego słupka wyłożono ozdobnymi płytkami, których 1 m^2 kosztował 28 zł. Ile co najmniej zapłacił pan Jan za płytki?
- 11 Podstawą graniastosłupa jest sześciokąt, którego wszystkie boki są równej długości. Suma długości krawędzi podstaw wynosi 60 cm i jest to $\frac{5}{11}$ sumy długości wszystkich krawędzi tej bryły. Jaka długość ma krawędź podstawy, a jaką wysokość?

267

Materiały dydaktyczne

	Geometria w przestrzeni → Graniastosłupy
Inne	wsipnet.pl
Zeszyt ćwiczeń, cz. 2	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 80–94
Zbiór zadań	Niewykorzystane zadania z rozdziału, s. 165–173

Odpowiedzi do zadań

1. 186 cm 2. 8
3. trójkąt 4. 60,4 cm
5. a) 96 dm^2 b) 1350 m^2 c) $194,94 \text{ cm}^2$
6. $309,96 \text{ cm}^2$
7. 69 cm^2 8. 1300 cm^2
9. 4 10. 431,20 zł
11. krawędź podstawy: 5 cm, wysokość: 12 cm

Temat lekcji:

Powtórzenie wiadomości i utrwalenie umiejętności: Graniastosłupy (1 h)

Cele lekcji

Wybrane cele lekcji z danego rozdziału odpowiednie do rozwiązywanych zadań.

Wskazówki metodyczne

- Na lekcji powtórzeniowej warto porozmawiać z uczniami o rodzajach zadań i strategiach ich rozwiązywania.
- Należy zwrócić uwagę na potrzebę uczenia się matematyki i jej zastosowania w życiu.
- W ramach podsumowania pracy przypominamy, gdzie w podręczniku należy szukać odpowiedzi, aby rozwiązać konkretne zadanie, oraz jak wykorzystać w życiu codziennym zdobyte umiejętności.

Komentarz do zadań 1. i 4.

Podczas rozwiązywania tych zadań trzeba zwrócić uwagę uczniom, że budujemy sześcian przez wyginanie drutu i lutowanie jego końców. Inny sposób łączenia nie jest brany pod uwagę. Uczniowie mają obliczyć sumę długości wszystkich krawędzi bryły.

Komentarz do zadania 5.

Zadania można wykonać ustnie. Warto przypomnieć podnoszenie do kwadratu liczb mających w rzędzie jedności cyfrę 5, np. 35^2 – dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę 25, a więc $35^2 = \square 25$, w miejsce okienka trzeba wpisać iloczyn liczby 3 i liczby o 1 od niej większej, otrzymujemy $3 \cdot 4 = 12$, więc $35^2 = 1225$. Taki sposób mnożenia przyda się w zadaniach 7. i 8. oraz kilku kolejnych zadaniach podsumowujących ten rozdział. Iloczyn $5,7 \cdot 5,7$ można obliczyć tak, jak przedstawiono na s. 43 podręcznika.

Komentarz do zadania 11.

Zachęcamy do przypomnienia definicji wielokąta foremnego oraz sprawdzenia, czy na podstawie informacji podanej w zadaniu można stwierdzić, że podstawa jest figurą foremną. Uczniowie powinni zauważyć, że kąty mogą być różnej miary. Warto zachęcić uczniów do wykonania rysunku pomocniczego przy obliczaniu liczby z danego jej ułamka.

Komentarz do zadania 1.

Większość sal lekcyjnych ma kształt prostopadłościanu. Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadania można określić w sali położenie ścian względem siebie oraz położenie podłogi względem sufitu. Uczniowie powinni mieć dostęp również do modeli prostopadłościanów.

Komentarz do zadań 2.–4.

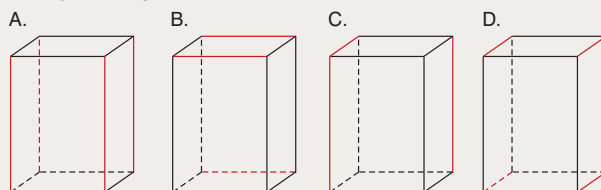
Zadania można wykonać ustnie. Uczniowie powinni podać sposób swojego rozumowania.



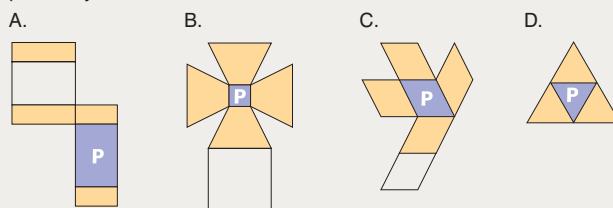
Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

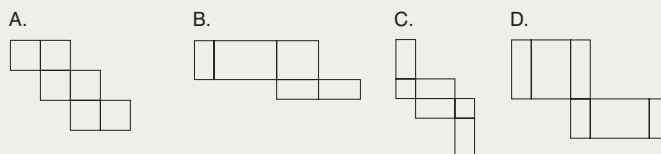
- 1 W którym prostopadłościanie wyróżnione na czerwono krawędzie **nie są** równoległe?



- 2 W której bryle po jej sklejeniu wyróżnione ściany są prostopadłe do podstawy P?

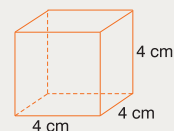


- 3 Siatką prostopadłościanu **nie jest**



- 4 Suma długości wszystkich krawędzi narysowanego obok sześcianu jest równa

- A. 12 cm B. 16 cm
C. 48 cm D. 4 dm

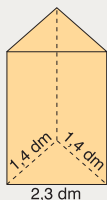


268

Odpowiedzi do zadań

1. C
2. A
3. B
4. C

X. Graniastosłupy



- 5 Suma długości wszystkich krawędzi narysowanego obok graniastosłupa wynosi 24,6 dm. Podstawą bryły jest trójkąt o wymiarach podanych na rysunku. Długość krawędzi bocznej tego graniastosłupa jest równa
A. 3,8 dm B. 4,8 cm
C. 4,8 dm D. 14,4 dm
- 6 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D. Graniastosłup, którego liczba wszystkich krawędzi jest równa 15, to graniastosłup A / B.
A. trójkątny B. pięciokątny
Graniastosłup sześciokątny ma C / D krawędzi.
C. 12 D. 18
- 7 Graniastosłup ma 8 identycznych prostokątnych ścian bocznych. Podstawą tego graniastosłupa jest
A. trójkąt. B. kwadrat. C. ośmiokąt. D. deltoid.
- 8 Pole powierzchni sześcianu o krawędzi 2,5 m jest równe
A. 375 dm² B. 3750 dm² C. 32,5 m² D. 15 m²
- 9 Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu wynosi 60 dm. Krawędzie podstawy są równe odpowiednio 30 cm i 4 dm. Krawędź boczna ma długość
A. 6 cm B. 8 dm C. 10 dm D. 12 cm
- 10 Pole powierzchni graniastosłupa, którego podstawą jest kwadrat, wynosi 130,5 dm². Krawędź podstawy ma 4,5 dm. Wysokość graniastosłupa jest równa
A. 7,125 dm B. 5,75 dm C. 5 dm D. 7,125 cm
- 11 Trójkąt prostokątny o bokach: 6 cm, 8 cm, 10 cm jest podstawą graniastosłupa o wysokości 6,7 cm. Ile wynosi pole podstawy tego graniastosłupa?
A. 24 cm² B. 48 cm² C. 60 cm² D. Nie da się obliczyć.

269

Komentarz do zadania 5.

Zadanie można wykonać ustnie. Wystarczy obliczyć sumę podanych na rysunku krawędzi i zwrócić uwagę na jednostki. Wyeliminowanie błędnych odpowiedzi będzie wówczas łatwe.

Komentarz do zadań 6. i 7.

Przy rozwiązywaniu tych zadań ustnie uczniowie powinni uzasadnić swoje odpowiedzi.

Komentarz do zadań 8. i 9.

W zadaniach należy zwrócić uwagę na różne jednostki. Ułatwi to wyeliminowanie błędnych odpowiedzi.

Komentarz do zadania 10.

Uczniowie powinni obliczyć wysokość graniastosłupa, korzystając z pola jego powierzchni. To umiejętność sprawiająca trudność wielu uczniom, dlatego zadanie należy rozwiązać wspólnie i dokładnie objaśnić sposób postępowania. Proponujemy skorzystać z umiejętności rozwiązywania równań. Po obliczeniu pola podstawy (odsłamy do komentarza do zadania 5., s. 267, w podręczniku) zapisujemy równanie: $(4,5 \cdot h) \cdot 4 = 130,5 - 40,5$. Teraz szacując można wskazać poprawną odpowiedź.

Odpowiedzi do zadań

5. C
6. BD
7. C
8. B
9. B
10. C
11. A

Źródła fotografii i ilustracji

Okladka: s. 1 (kiwano) Olga Guchek/iStock Photo/Getty Images, (kratka) Valerio Rosati/EyeEm/Getty Images

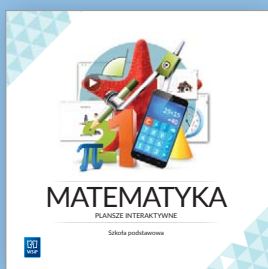
Tekst główny: s. 8 (Zamość) Curioso Photography/Alamy Stock Photo/BE&W; s. 9 (plan lekcyj) seamartini/iStock/Getty Images Plus, (kalendarz) Shendart/iStock/Getty Images Plus; s. 10 (wieżowce) Grand Warszawski/Shutterstock.com; s. 11 (pomidory) fcaftodigital/iStockphoto/Getty Images, (ogórki) Yasonya/iStockphoto/Getty Images, (cebula) popovaphoto/iStockphoto/Getty Images, (ludzie na rowerach) nullplus/Shutterstock.com; s. 12 (marmur) dogayusufdodok/E+/Getty Images; s. 13 (ludzie) elenabi/iStock/Getty Images Plus; s. 14 (Lublin) Patryk Kosmider/Shutterstock.com; s. 15 (patyczki) pikepicture/iStock/Getty Images Plus, (znaki rzymskie) Li Cook/Shutterstock.com; s. 17 (Księżyc) kdshtuterman/Shutterstock.com; s. 20 (jabłko) Nattika/Shutterstock.com, (kura) stockphoto mania/Shutterstock.com; s. 21 (ziemiaki) Africa Studio/Shutterstock.com, (ogórki, buraki) New Africa/Shutterstock.com, (królik) JIANG HONGYAN/Shutterstock.com, (chomik) Happy monkey/Shutterstock.com, (papuga) cynoclub/Shutterstock.com; s. 22 (Kraków) Tomeyk/iStockphoto/Getty Images; s. 25 (łuk) Sanit Fuangnakhorn/Shutterstock.com, (pendrive) nidwlv/iStockphoto/Getty Images; s. 27 (chłopiec) Francisco Martinez Saez/Shutterstock.com, (miski) Ivonne Wierink/Shutterstock.com, (dzbanki) volab/Shutterstock.com; s. 30 (dziewczynka) Syda Productions/Shutterstock.com; s. 31 (zero) Sabelskaya/Shutterstock.com, (smarwacz) Berg Dmitry/Shutterstock.com; s. 32 (samochód) DmytroPerov/Shutterstock.com; s. 33 (pociąg) Denis Belitsky/Shutterstock.com; s. 34 (samochód) Pierre Jean Durieu/Shutterstock.com; s. 35 (ręka z telefonem) Denys Prykhodov/Shutterstock.com; s. 36 (świek) Magdalena Bryk; s. 37 (Siemianowice Śląskie) gebus tomasz/BE&W; s. 38 (góry) jeraat/Shutterstock.com; s. 41 (Chorwacja) emperocosar/Shutterstock.com; s. 42 (patelnia z mięsem) VICUSCHKA/Shutterstock.com, (warzywa) Olef/Shutterstock.com, (jabłko) Maks Narodenko/Shutterstock.com; s. 47 (iustro) natalushka/Shutterstock.com; s. 48 (ludzie) GoodStudio/Shutterstock.com; s. 49 (znak) 32 pixels/Shutterstock.com; s. 51 (znak) 32 pixels/Shutterstock.com; s. 52 (znak parking) reprodukcja, (most) vectorlatu/Shutterstock.com; (znak) 32 pixels/Shutterstock.com; s. 53 (Kolumna Zygmuntowa) R. Piątkowski/WSIP; s. 54 (mainy) multiart/Shutterstock.com, (kot) mdmmikle/Shutterstock.com, (koty) Eric Isselee/Shutterstock.com; s. 56-57 (tło) Windows-7/Shutterstock.com, (samochód) ssuaphotos/Shutterstock.com, (sokół) Wang LiQiang/Shutterstock.com, (pociąg) cyo bo/Shutterstock.com, (samolot) Jag_cz/Shutterstock.com, (ślimak) r_silver/Shutterstock.com, (leniwiec) Lukas Kovarik/Shutterstock.com, (gepard) slowmotiongli/Shutterstock.com, (marlin) kelidalfall/Shutterstock.com, (rozbiyski) Agarin/Shutterstock.com, (rakieta) 3Dsculptor/Shutterstock.com, (samolot wojskowy) Andrew_Howe/E+/Getty Images; s. 63 (labrynt) Jerzy Undro/REPORTER; s. 68 (budzik) Grazyna Boz/Milum/Shutterstock.com, (Kozioł/WSIP; s. 79 (szeszełkoć) billberryphotography/iStockphoto/Getty Images; s. 95 (figury) ratselmeister/iStock/Getty Images Plus; s. 96 (bateria) Olga Guchek/Shutterstock.com; s. 98 (zeszyty) Hong Vo/Shutterstock.com; s. 101 (kartka) Tolga TEZCAN/E+/Getty Images, (proporczyk) Julia August/Shutterstock.com, (drogowoskaz) KseniaButakova/Shutterstock.com, (sosna) Katrinak/Shutterstock.com, (list) SvetlanaARTdreams/Shutterstock.com, (skrzynka) Johann Helgason/Shutterstock.com, (plot) Julia August/Shutterstock.com, (skrzynia) curiosity/Shutterstock.com, (kamienie) Natspace/Shutterstock.com, (ławka) Julia August/Shutterstock.com, (dab) Le Panda/Shutterstock.com; s. 102 (grzyby) Coffeemill/Shutterstock.com; s. 105 (banany) Ingram Publishing/ThETA, (winogrono) Kovaleva_Ka/Shutterstock.com, (ananas) Central Stock/ThETA, (jabłko) DiGiTouch, (mandarynki) Yeti studio/Shutterstock.com; s. 106 (burak) Luis Carlos Jimenez del rio/Shutterstock.com, (ziemiaki) Nattika/Shutterstock.com; s. 107 (tulipany) Kisialiou Yury/Shutterstock.com; s. 110 (kostka) David Stuart Productions/Shutterstock.com; s. 112 (pociąg) Oleksiy Mark/Shutterstock.com, (porzeczką) Maks Narodenko/Shutterstock.com; s. 113 (maski) Andrey Burmakin/Shutterstock.com; s. 114 (papryczki) Ingram Publishing/ThETA; s. 115 (orzeczy) Africa Studio/Shutterstock.com, (cukierni) Brian A Jackson/Shutterstock.com; s. 116 (truskawki) mario95/Shutterstock.com; s. 117 (butelka 2 l) Evgeny Karandaev/Shutterstock.com, (butelka 3/4 l) Africa Studio/Shutterstock.com, (butelka 1/4 l) Shablun/Shutterstock.com, (butelka 1/2 l) DenisMART/Shutterstock.com, (mandarynki) Adam Smigielski/E+/Getty Images; s. 118 (motocyklista) sweetmoments/iStockphoto/Getty Images, (wiśnie) Melica/Shutterstock.com, (woda) givaga/Shutterstock.com; s. 120 (sportowcy) Kiselev Andrey Valerevich/Shutterstock.com, (dzieci w szkole) Pressmaster/Shutterstock.com; s. 121 (wieloryb) Digital Storm/Shutterstock.com; s. 123 (Trzy Korony) Milosz Maslanka/Shutterstock.com; s. 124 (zwierzęta) Eric Isselee/Shutterstock.com; s. 125 (zorra) Kevin Schaefer/Alamy Stock Photo/BE&W; s. 126 (jeźdźcy) Nataly Studio/Shutterstock.com; s. 127 (szkieleci) Sebastian Kaulitzki/Shutterstock.com; s. 128-129 (czekolada) Mironova Lulija/Shutterstock.com, (dziewczyna i chłopak) tynnyk/Shutterstock.com, (piezochi) Yellow Dahlia/Shutterstock.com, (babeczki) Sudowood/Shutterstock.com, (tło pod przepisami) JRP Studio/Shutterstock.com, (ludzie przy stole) Oxy_gen/Shutterstock.com, (pizza) Danyliuk Konstantine/Shutterstock.com; s. 131 (świnka) anna-nt/Shutterstock.com; s. 133 (maliny) Nattika/Shutterstock.com; s. 134 (dom) OxfordSquare/Shutterstock.com, (książka) taa22/iStockphoto/Getty Images, (zakładka) Lexi Claus/Shutterstock.com; s. 136 (domki) Ivengo/Shutterstock.com; s. 137 (bazyli) Nattika/Shutterstock.com; s. 143 (pociąg) View Stock/Alamy Stock Photo/BE&W, (jabłko) Africa Studio/Shutterstock.com; s. 145 (laptop) Oleksiy Mark/Shutterstock.com; s. 149 (wieża Eiffla) RomanYa/Shutterstock.com; s. 151 (most) Maria Vonotna/Shutterstock.com; s. 170 (opakowanie) Rvector/Shutterstock.com, (cytryny) dangdumrong/Shutterstock.com, (jabłko) siriratsavett/Shutterstock.com, (mandarynki) Kedsirin.J/Shutterstock.com; s. 171 (łas) Stas Moroz/Shutterstock.com; s. 172 (skrzynka śliwek) Simic Vojislav/Shutterstock.com, (śliwki) 5 second Studio/Shutterstock.com; s. 173 (skrzynka pomidorów) mipan/Shutterstock.com, (cieżarówka) Nerthuz/Shutterstock.com; s. 174 (wiertła) marina.ua/Shutterstock.com, (rodzina) Monkey Business Images/Shutterstock.com, (skrzynka jabłek) Africa Studio/Shutterstock.com; s. 176 (autokar) Petr Student/Shutterstock.com; s. 177 (pieczywo chrupkie) chrisdorney/Shutterstock.com, (jeziro Goplo) MrMR/Shutterstock.com; s. 178 (owoce) Berner Andrey/Shutterstock.com; s. 179 (kurka) Karkas/Shutterstock.com, (flamastry) Pop_Studio/Shutterstock.com; s. 181 (owoce) MaraZe/Shutterstock.com; s. 182 (grzyby) Ndanko/Shutterstock.com; s. 183 (konfitura) Viktoria Hodos/Shutterstock.com; s. 184 (jabłko) Marek R. Swadźba/

Shutterstock.com; s. 185 (świstak) A-Stop/Shutterstock.com; s. 186 (wagony) John_Brueske/iStockphoto/Getty Images, (mandarynki) Africa Studio/Shutterstock.com; s. 188 (ludzie w basenie) ChrisVanLennepPhoto/Shutterstock.com; s. 190 (koszykówka) Fabrizio Andrea Bertani/Shutterstock.com; s. 191 (zebry) Lech Zielaskowski/WSIP; s. 192 (plaża) PAP/Lech Muszyński; s. 195 (lizaki) gresel/Shutterstock.com; s. 196 (ogród) Martin Wahlborg/E+/Getty Images; s. 198-199 (kot) nikitabarphoto/Shutterstock.com, (pies) Eric Isselee/Shutterstock.com, (chomik) stock shot/Shutterstock.com, (rybki) bluehand/Shutterstock.com, (patyczak) Cristina Romero Palma/Shutterstock.com; s. 201 (ogród) Pefkos/Shutterstock.com; s. 202 (linijka) Dragance137/Shutterstock.com; s. 208 (nożyczki) IB Photography/Shutterstock.com; s. 214 (latawiec) molotoka/Shutterstock.com; s. 215 (papier) Paladin12/Shutterstock.com, (nożyczki) Kozak Sergii/Shutterstock.com; s. 216-217 (Maciek) FabrikaSimf/Shutterstock.com, (Janek) VALUA STUDIO/Shutterstock.com, (Zuzia) Dean Drobot/Shutterstock.com, (Staś) Artsplav/Shutterstock.com, (Jola) Roman Samborskiy/Shutterstock.com, (Ola) fizkes/Shutterstock.com, (Tomek) LightField Studios/Shutterstock.com, (Ilo) Yongcharoen kittiyaporn/Shutterstock.com; s. 223 (boisko) Tinny Photo/Shutterstock.com, (flaga) Maxim Ermolenko/Shutterstock.com; s. 224 (farba) AlexLMX/Shutterstock.com; s. 226 (nożyczki) SmileStudio/Shutterstock.com; s. 238-239 (latawiec) Artisticco/Shutterstock.com, (osoby) robuart/Shutterstock.com, (plaża) Marina Podrez/Shutterstock.com; s. 240 (słońce, śnieg) bsd/Shutterstock.com; s. 246 (kostki) Javier Crespo/Shutterstock.com; s. 247 (Mars) manjk/Shutterstock.com, (panel) Magicleaf/Shutterstock.com; s. 250 (Morze Martwe) vvitta/Shutterstock.com; s. 251 (chłopiec) Ljupco Smokovski/Shutterstock.com, (słońce) Liashenko Iryna/Shutterstock.com; s. 253 (śnieg) zizi_mentos/Shutterstock.com; s. 257 (pustak) TAKAZAWA/Shutterstock.com, (pudelka) Digital Assets/Shutterstock.com, (tło za biurkiem) Yoska/Shutterstock.com, (blatt biurka) Evgeny Karandaev/Shutterstock.com, (kostka chodnikowa) Boonchai Samboon/Shutterstock.com, (budynek) trabantos/Shutterstock.com, (paczka) Vgstockstudio/Shutterstock.com; s. 260 (dom) Ingram Publishing/ThETA; s. 261 (karmnik) Viacheslav Voloshyn/Shutterstock.com; s. 263 (klocek) Laborant/Shutterstock.com; s. 264 (prezent) Duda Vasilii/Shutterstock.com; s. 265 (tapeta) Africa Studio/Shutterstock.com; s. 266 (łazienka) Who is Danny/Shutterstock.com

Mapa: s. 84 (województwo podlaskie) Adrian Bergiel

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że podjęły starania mające na celu dotarcie do właścicieli i dysponentów wszystkich zamieszczonych utworów. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, przystając w celach dydaktycznych utwory lub fragmenty, postępują zgodnie z art. 27¹ ustawy o prawie autorskim. Jednocześnie Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że są jedynym podmiotem właściwym do kontaktu autorów tych utworów lub innych podmiotów uprawnionych w wypadkach, w których twórcy przysługuje prawo do wynagrodzenia.

POZNAJ OFERTE WSIP!

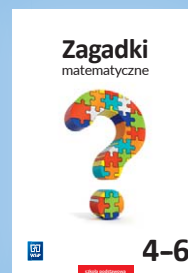


PLANSZE INTERAKTYWNE

Dzięki zasobom multimedialnym **pomogą** zwiększyć efektywność nauki.

PUBLIKACJE UZUPEŁNIAJĄCE

Udoskonalą umiejętności
i utrwalą wiedzę.



 wsipnet.pl

WSIPNET

Dostęp do podręczników, ćwiczeń,
testów i prac domowych na komputerze,
telefonie lub tablecie – tak jak **lubisz!**



WYDAWNICTWA
SZKOLNE
i PEDAGOGICZNE

wsip.pl
sklep.wsip.pl
infolinia: 801 220 555

