

Matematyka *wokół nas*

podręcznik do szkoły podstawowej

Oznaczono
zmiany
i wykreślenia

E-book
na eduranga.pl

**PODSTAWA
2024**



8

Drogi WSiP,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby być zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regulame książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę, w której papier nie jest bezczelnie marnowany dla pieniędzy.

Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

SPIS TREŚCI

Jak korzystać z podręcznika	6
-----------------------------------	---

I. Potęgi i pierwiastki

1. Mnożenie i dzielenie potęg o tej samej podstawie	7
2. Mnożenie i dzielenie potęg o tym samym wykładniku	12
3. Potęga potęgi	16
4. Notacja wykładnicza	19
5. Pierwiastek z iloczynu, iloczyn pierwiastków	26
6. Wylączanie czynnika przed pierwiastek, włączanie czynnika pod pierwiastek	30
7. Pierwiastek z ilorazu, iloraz pierwiastków	34
8. Szacowanie wartości wyrażeń zawierających pierwiastki	38
Zadania utrwalające	42
Zadania sprawdzające	44
Matematyka a kryptologia – infografika	46

II. Własności figur płaskich

1. Przekątna kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego	48
2. Pola wielokątów foremnych	55
3. Współliniowość punktów kratowych	59
Zadania utrwalające	64
Zadania sprawdzające	66
Matematyka w architekturze – infografika	68

III. Rachunek algebraiczny i równania

1. Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian	70
2. Mnożenie sum algebraicznych	74
3. Rozwiązywanie równań	78
4. Równania – zadania tekstowe	84
Zadania utrwalające	92
Zadania sprawdzające	94
Algebra w kinie – infografika	96

IV. Bryły

1. Graniastopy – pole powierzchni i objętość	98
2. Ostrostopy	106
3. Pole powierzchni ostrostupa	111
4. Objętość ostrostupa	115
Zadania utrwalające	120
Zadania sprawdzające	122
Bryły w architekturze – infografika	124

V. Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa

1. Proste metody zliczania obiektów	126
2. Doświadczenia losowe	129
3. Zdarzenia losowe	133
4. Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego	138
Zadania utrwalające	143
Zadania sprawdzające	145

POWTÓRZENIE	147
I. Liczby i działania	
Przypomnij sobie	148
1. Liczby naturalne	153
Zadania sprawdzające	155
2. Działania w zbiorze liczb wymiernych	157
Zadania sprawdzające	161
3. Działania na pierwiastkach	163
Zadania sprawdzające	165
4. Obliczenia procentowe	167
Zadania sprawdzające	170
II. Wyrażenia algebraiczne i równania	
Przypomnij sobie	172
1. Wyrażenia algebraiczne	175
Zadania sprawdzające	178
2. Równania	180
Zadania sprawdzające	182
III. Figury płaskie	
Przypomnij sobie	184
1. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie	189
Zadania sprawdzające	193
2. Pola wielokątów	195
Zadania sprawdzające	200
IV. Bryły	
Przypomnij sobie	202
1. Graniastopy	205
Zadania sprawdzające	209
2. Ostrostopy	211
Zadania sprawdzające	214
3. Bryły obrotowe	217
V. Elementy statystyki opisowej, kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa	
Przypomnij sobie	219
1. Odczytywanie danych statystycznych	223
Zadania sprawdzające	227
2. Zliczanie obiektów	229
Zadania sprawdzające	230
3. Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego	232
Zadania sprawdzające	234
VI. Przed egzaminem	
Zestaw zadań nr 1	236
Zestaw zadań nr 2	240
Zestaw zadań nr 3	244

VI. Okrąg, koło i pierścień kołowy



1. Długość okręgu	248
2. Pole koła	253
3. Pierścień kołowy, pole pierścienia	256
Zadania utrwalające	261
Zadania sprawdzające	263
Matematyka w pizzerii – infografika	266



VII. Symetrie

1. Symetralna odcinka i dwusieczna kąta	268
2. Symetria osiowa	275
3. Figury osiowosymetryczne	282
4. Symetria środkowa	287
5. Figury środkowosymetryczne	292
Zadania utrwalające	296
Zadania sprawdzające	298

VIII. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

1. Reguła mnożenia	301
2. Reguła dodawania	307
3. Zdarzenia w doświadczeniach losowych	311
4. Prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych	315
Zadania utrwalające	320
Zadania sprawdzające	322
Jaką masz szansę? – infografika	324
Odpowiedzi	326
Indeks	340



JAK KORZYSTAĆ Z PODRĘCZNIKA

Przypomnij, przeczytaj, zrozum, zapamiętaj

Przypomnij sobie

- co nazywamy potęgą o wykładniku naturalnym,
- kiedy potęga liczby ujemnej jest liczbą dodatnią, a kiedy ujemną,
- jaka jest kolejność wykonywania działań, jeśli potęgowanie występuje w wyrażeniu z innymi działaniami.

odwołania do poznanych treści



Pierwiastkiem kwadratowym z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b , która podniesiona do kwadratu jest równa liczbie podpierwiastkowej a .

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a, \text{ dla } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

ważne definicje, wnioski, wzory

Ćwicz i rozwiązuj zadania

Przykład 3.

Wykonajmy mnożenie.

a) $2^3 \cdot 2^2$ b) $(-3) \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^3$

Takie mnożenie można wykonać wieloma sposobami.

a) **Sposób I** $2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32$

Sprawdź się!

- Przedstaw iloczyn potęg w postaci potęgi.
 $(-20)^2 \cdot (-20)^4 \cdot (-20)^3$, $(-1)^{12} \cdot (-1)$, $(-x)^2 \cdot (-x)^2 \cdot (-x)^3$
- Zapisz w postaci potęgi:
a) trzecią część liczby 3^{12} , b) jedną szesnastą liczby 4^{24} .

wzorcowo rozwiązane zadania

różnego typu zadania na zakończenie każdego tematu

Utrwal i sprawdź swoje umiejętności

123

I. Potęgi i pierwiastki

Zadania utrwalające

- 1 Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) 2^3 i 3^2 b) 4^2 i 2^4 c) 3^3 i 9^1 d) 7^2 i 3^3

VI. Przed egzaminem

Powtórzenie

Zestaw zadań nr 1

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

- 1 Ile cyfr w zapisie dziesiętnym ma liczba $(0,2)^8 \cdot 5^{11}$?
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

utrwalenie materiału przed sprawdzianem

powtórzenie przed egzaminem

Zwróć uwagę na infografiki i Wyzwania

Bryły w architekturze

Przjrzyj się różnym budowlom, które kształtem nawiązują do brył znanych z lekcji matematyki.



Sala kinowa La Geode (czytaj: la żeo) (Paryż, Francja)

Sala ma kształt kuli. Jej średnica to 36 m.



Sala może pomieścić 375 osób.

Pokryta jest wypolerowaną blachą stalową.

1



przykładowe zastosowania matematyki

Wyzwanie

Znajdź liczby ukryte pod literami, jeśli wiadomo, że ta sama litera zastępuje tę samą liczbę oraz że sumę liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie wskazuje odpowiednia strzałka: $\rightarrow$ lub $\downarrow$.

				$\rightarrow$ 23
				$\rightarrow$ 2
				$\rightarrow$ 16
				$\rightarrow$ 20
$\downarrow$ 7	$\downarrow$ 19	$\downarrow$ 11	$\downarrow$ 6	

nietypowe zadania

Zwróć uwagę na piktogramy

15

W kwadracie narysuj trójkąt, którego wierzchołki leżą na bokach kwadratu, w taki sposób, aby cały rysunek stanowił siatkę ostrosłupa.



10

Największa pizza na świecie (stan na rok 2020) powstała w 2006 roku we Włoszech. Jej średnica miała 39,6 m. Powierzchnia średniej pizzy wynosi ok. 768 cm^2 . Powierzchnia ilu takich średnich pizz jest równa powierzchni największej pizzy na świecie? Do obliczeń przyjmij $\pi = 3$.

Zadania problemowe i trudne oraz zadania, które można rozwiązywać z kalkulatorem, zostały oznaczone piktogramami.

Pamiętaj: Odpowiedzi do wszystkich zadań zamieszczonych w podręczniku zapisuj w zeszycie przedmiotowym.

1. Mnożenie i dzielenie potęg o tej samej podstawie

Przypomnij sobie

- co nazywamy potęgą o wykładniku naturalnym,
- kiedy potęga liczby ujemnej jest liczbą dodatnią, a kiedy ujemną,
- jaka jest kolejność wykonywania działań, jeśli potęgowanie występuje w wyrażeniu z innymi działaniami.

podstawa potęgi $\longrightarrow$ a^n $\longleftarrow$ wykładnik potęgi

Potęgą liczby a o wykładniku naturalnym $n \geq 2$ nazywamy iloczyn n czynników a .
 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$. Dla każdej liczby a : $a^1 = a$. Dla każdej liczby $a \neq 0$: $a^0 = 1$.

Przykład 1.

Obliczmy wartości poniższych potęg.

a) 4^3 b) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ c) $\left(325\frac{1}{5}\right)^0$ d) 0^5 e) $(-1)^4$ f) $(-0,5)^3$

a) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

c) $\left(325\frac{1}{5}\right)^0 = 1$ d) $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

e) $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$

f) $(-0,5)^3 = (-0,5) \cdot (-0,5) \cdot (-0,5) = -0,125$

- Potęga liczby dodatniej jest liczbą dodatnią.
- Potęga liczby ujemnej jest liczbą dodatnią, gdy wykładnik jest liczbą parzystą.
- Potęga liczby ujemnej jest liczbą ujemną, gdy wykładnik jest liczbą nieparzystą.
- Potęga liczby 0 jest równa 0, gdy wykładnik jest liczbą naturalną większą od zera. Symbol 0^0 nie ma sensu liczbowego.
- Potęga liczby 1 jest równa 1 dla dowolnego wykładnika.

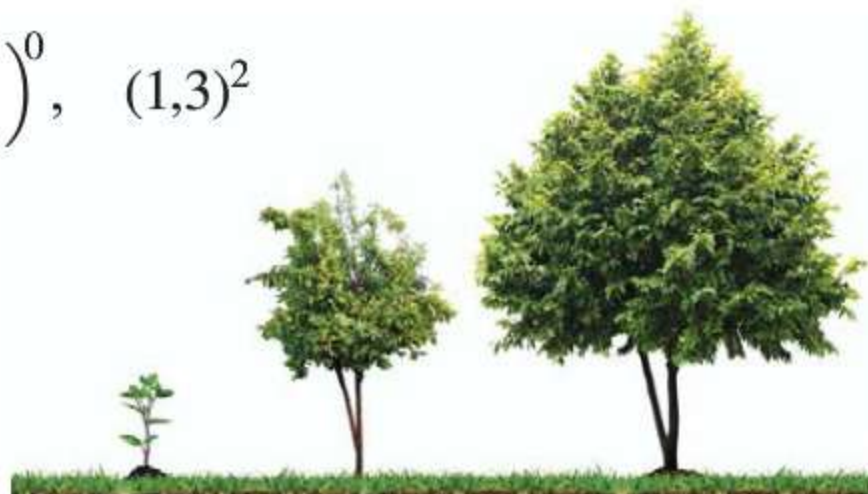


1 Oblicz.

$$3^3, \quad 0^{250}, \quad 11^2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad \left(-2\frac{1}{4}\right)^2, \quad (-0,6)^3, \quad \left(3\frac{1}{3}\right)^0, \quad (1,3)^2$$

2 Uporządkuj malejąco poniższe liczby.

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^3, \quad -\left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad -5^2, \quad (-5)^2, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^2, \quad -\left(-\frac{1}{3}\right)^3$$

**Przykład 2.**

Obliczmy wartości wyrażeń.

a) $2 \cdot (-3)^3 - (-2)^2$

b) $4 \cdot \left|-\frac{1}{2}\right|^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3$

a) $2 \cdot (-3)^3 - (-2)^2 = 2 \cdot (-27) - 4 = -54 - 4 = -58$

b) $4 \cdot \left|-\frac{1}{2}\right|^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{8}\right) = 4 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Dla $a > 0$ zachodzi
 $|a| = |-a| = a$.



Jeśli w wyrażeniu występują potęgowanie i inne działania, to potęgowanie wykonujemy w pierwszej kolejności.

3 Oblicz wartość wyrażenia.

a) $3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-2)^3$

b) $|-3|^2 + 2^3 - 1^6 - 4^3 + 1$

c) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-4)^3$

d) $5 \cdot (-0,5)^2 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot \left|-\frac{1}{2} - (-1)\right|$

4 Porównaj wyrażenia. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $(-3)^2$ i $\frac{6^2}{2}$

b) $3^4 - 2^4$ i $(-6)^0 + 4^3$

c) $\left(\frac{5}{2}\right)^3 \cdot 0^9$ i $\left(-\frac{3}{2}\right)^1$

d) $-4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ i $-|-0,3|^0$

5 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczbą przeciwną do $(-2)^6$ jest -64 .	P	F
Liczba 49 jest odwrotnością liczby $-\left(\frac{1}{7}\right)^2$.	P	F
Suma liczb 2^3 i -3^2 wynosi 17.	P	F
Iloraz liczb $(-4)^8$ i 6^9 jest liczbą dodatnią.	P	F

Przykład 3.

Wykonajmy mnożenie.

a) $2^3 \cdot 2^2$ b) $(-3) \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^3$

Takie mnożenie można wykonać wieloma sposobami.

a) **Sposób I** $2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32$

Sposób II $2^3 \cdot 2^2 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ liczby}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{2 \text{ liczby}} = 2^5 = 32$

Sposób III $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

b) **Sposób I** $(-3) \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^3 = -3 \cdot 9 \cdot (-27) = -27 \cdot (-27) = 729$

Sposób II $(-3) \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^3 = \underbrace{(-3)}_{1 \text{ liczba}} \cdot \underbrace{(-3) \cdot (-3)}_{2 \text{ liczby}} \cdot \underbrace{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}_{3 \text{ liczby}} = (-3)^6 = 729$

Sposób III $(-3) \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{1+2+3} = (-3)^6 = 729$

Aby pomnożyć potęgi o tej samej podstawie, należy dodać ich wykładniki, a podstawę pozostawić bez zmian.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \text{ gdzie } a \neq 0, m, n - \text{liczby naturalne}$$

**6** Przedstaw iloczyn potęg w postaci potęgi.

a) $3^1 \cdot 3^3$, $(-2)^2 \cdot (-2)^1 \cdot (-2)^2$, $1^3 \cdot 1^4 \cdot 1^9$

b) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$, $(-0,5)^2 \cdot (-0,5)$, $10^2 \cdot 10 \cdot 10^3$

c) $a^2 \cdot a$, $c^4 \cdot c^6 \cdot c \cdot c^7$, $(-y)^a \cdot (-y)^b \cdot (-y)$

7 Przedstaw potęgi w postaci iloczynu potęg o tej samej podstawie. Wykonaj to na dwa sposoby.

a) 12^8 , $(-8)^6$, $\left(\frac{1}{5}\right)^5$, $(-a)^6$, b^{x+y+z}

b) 3^{15} , $(1,6)^2$, $(-0,2)^4$, x^5 , y^{a+b+1}

8 Przedstaw wynik w postaci potęgi liczby dwucyfrowej.

a) $10^3 \cdot 5 \cdot 2$

b) $4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 12^5$

c) $4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 24$

d) $3 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 18$

9 Zapisz w postaci potęgi:

a) trzykrotność liczby 3^5 ,

b) siedmiokrotność liczby 7^{14} .

10 Uzasadnij, że ośmiokrotność liczby 2^{15} jest równa 2^{18} .

Przykład 4.

Wykonajmy dzielenie na dwa sposoby.

a) $3^4 : 3^2$

b) $(-2)^6 : (-2)^3$

c) $x^3 : x^2, x \neq 0$

a) **Sposób I** $3^4 : 3^2 = \frac{\cancel{3}^1 \cdot \cancel{3}^1 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3}_1 \cdot \cancel{3}_1} = \frac{3^2}{1} = 9$

Sposób II $3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2 = 9$

b) **Sposób I** $(-2)^6 : (-2)^3 = \frac{(\cancel{-2})^1 \cdot (\cancel{-2})^1 \cdot (\cancel{-2})^1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}{(\cancel{-2})_1 \cdot (\cancel{-2})_1 \cdot (\cancel{-2})_1} = \frac{(-2)^3}{1} = -8$

Sposób II $(-2)^6 : (-2)^3 = (-2)^{6-3} = (-2)^3 = -8$

c) **Sposób I** $x^3 : x^2 = \frac{\cancel{x}^1 \cdot \cancel{x}^1 \cdot x}{\cancel{x}_1 \cdot \cancel{x}_1} = x$

Sposób II $x^3 : x^2 = x^{3-2} = x^1 = x$



Aby podzielić potęgi o tej samej podstawie, należy odjąć ich wykładniki, a podstawę pozostawić bez zmian.

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ gdzie } a \neq 0, m, n - \text{liczby naturalne i } m \geq n$$

11 Przedstaw ilorazy w postaci potęg i oblicz.

a) $4^5 : 4^3, (-2)^7 : (-2)^1, (-3)^0 : (-3)^0$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 : \frac{1}{4}, \left(-1\frac{1}{3}\right)^9 : \left(-1\frac{1}{3}\right)^7, (-1,5)^3 : (-1,5)^0$

12 Zapisz iloraz w postaci potęgi.

a) $x^6 : x^4, x \neq 0$

b) $y^2 : y, y \neq 0$

c) $z^5 : z^0, z \neq 0$

d) $(-a)^4 : (-a), a \neq 0$

e) $(-b)^3 : (-b)^0, b \neq 0$

f) $(-c)^5 : (-c)^5, c \neq 0$

13 Zapisz w postaci potęgi:

a) połowę liczby 2^{100} ,

b) dziewiątą część liczby 3^{16} .

14 Oblicz.

a) $\frac{3^4 \cdot 3^5}{3^7}$

b) $\frac{4^5 \cdot 4^7}{4^6 \cdot 4^4}$

c) $\frac{5^8 : 5^5}{5^2}$

d) $\frac{6^{12} \cdot 6}{6^8 \cdot 6^3}$

15 Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, przy założeniu, że x, y, a, d są różne od 0.

a) $(x^8 : x^4 \cdot x) : (x^3 : x)$

b) $[(y^6 \cdot y^3) : (y^{15} : y^{12})] : y^3$

c) $a^{10} : [(a^3 \cdot a^5) : a]$

d) $(d^8 : d) : (d^{15} : d^{10})$

e) $b^2 \cdot b \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot a^6$

f) $z^3 \cdot e \cdot z \cdot e^3 \cdot z^2 \cdot e^5$

16 Zapisz liczby w postaci potęg o tej samej podstawie i wykonaj działania.

a) $2 \cdot 2^2 \cdot 8 : 16$

b) $(-3)^2 \cdot (-27) \cdot (-3)^5 : 3^7$

- 17** Dane są dwie liczby: $x = 3 \cdot 9 \cdot 3^3 \cdot 27$ oraz $y = 3^5 \cdot 3$. Czy liczba x jest 9 razy większa od liczby y ? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$3^9 : 3^6 = 3^3 = 9$.
B.	Nie,		2.	$27^3 : 27^2 = 27$.

- 18** Podaj, jaką liczbę należy wpisać zamiast n .

- a) $7^5 \cdot 7^n \cdot 7^6 = 7^{15}$ b) $4^n : 4^8 = 4^{10}$
 c) $9 \cdot 3^n \cdot 27 = 3^8$ d) $169 \cdot 13^5 : 13^n = 13^3$
 e) $5^n : 25 \cdot 5^4 : 5^2 = 5^3 \cdot 25$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot (0,5)^n : \left(\frac{4}{8}\right)^3 = \frac{1}{8}$

- 19** Zapisz w postaci potęgi.

- a) $9^2 + 2 \cdot 3^4$ b) $3 \cdot 25^2 + 5^3 \cdot 10$

- 20** Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba:

- a) $10^n + 5$ jest podzielna przez 3, b) $10^n + 17$ jest podzielna przez 9.

Wyzwanie

Wyznacz x , jeśli wiadomo, że:

- a) $7^{2x-6} = 1$, b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+5} - (0,2)^{3x+5} = 0$.

Sprawdź się!

- Przedstaw iloczyny potęg w postaci potęgi.
 $(-20)^2 \cdot (-20)^1 \cdot (-20)^3$, $(-1)^{12} \cdot (-1)$, $(-x)^2 \cdot (-x)^2 \cdot (-x)^3$
- Zapisz w postaci potęgi:
 a) trzecią część liczby 3^{12} , b) jedną szesnastą liczby 4^{24} .
- Dane są liczby: $k = (0,1)^4$ i $l = 0,1$. Która z liczb jest większa i ile razy?
 Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
 A. Liczba k jest 4 razy większa od l .
 B. Liczba l jest 1000 razy większa od k .
 C. Liczba l jest 4 razy większa od k .
 D. Liczba k jest 1000 razy większa od l .
- Zapisz liczby w postaci potęg o tej samej podstawie i wykonaj działania.
 a) $8 : 2^2 \cdot 2^5 : 32 \cdot 2^3$ b) $-125 : (-5)^2 \cdot (-5)^4 : (-5)^2 \cdot (-5) : 5^4$
- Podaj, jaką liczbę należy wpisać zamiast n , aby równość
 $(0,25)^{12} : \left(\frac{1}{4}\right)^n : \left(\frac{3}{12}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = (0,25)^4$ była prawdziwa.

2. Mnożenie i dzielenie potęg o tym samym wykładniku

Przykład 1.

Zapiszmy iloczyn potęg w postaci jednej potęgi.

a) $2^2 \cdot 3^2$ b) $x^3 \cdot y^3 \cdot z^3$ c) $a^n b^n, a \neq 0, b \neq 0$

a) $2^2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = (2 \cdot 3)^2 = 6^2$

b) $x^3 \cdot y^3 \cdot z^3 = x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z = (x \cdot y \cdot z) \cdot (x \cdot y \cdot z) \cdot (x \cdot y \cdot z) = (x \cdot y \cdot z)^3$

c) $a^n b^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ czynników } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{n \text{ czynników } b} = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot \dots \cdot (ab)}_{n \text{ czynników } ab} = (ab)^n$



Potęga iloczynu liczb a i b jest równa iloczynowi potęg tych liczb

$$(ab)^n = a^n b^n$$

potęga iloczynu iloczyn potęg

dla dowolnych liczb a, b , takich że $a \neq 0, b \neq 0$, i liczby naturalnej n .

1 Przedstaw iloczyn potęg w postaci potęgi iloczynu i oblicz.

a) $2^2 \cdot 25^2, 16^2 \cdot 5^2, 2^4 \cdot 50^4, 4^3 \cdot 25^3, 35^2 \cdot 2^2$

b) $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 16^2, \left(-2\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (-4)^3, (-0,1)^5 \cdot 10^5, (-1,5)^2 \cdot (-8)^2$

c) $\left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot 12^5, 7,5^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3, \left(\frac{2}{7}\right)^8 \cdot 3,5^8, 0,75^5 \cdot \left(2\frac{2}{3}\right)^5, 10^3 \cdot 0,01^3$

d) $2^3 \cdot 3^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3, \left(\frac{5}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot 4^4, 2,5^5 \cdot 4^5 \cdot 0,2^5, \left(1\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{14}{3}\right)^2$

Przykład 2.

Przedstawmy potęgę w postaci iloczynu potęg.

a) $(4ab)^2$ b) $(-0,5mn)^3$

a) $(4ab)^2 = 4^2 a^2 b^2$ b) $(-0,5mn)^3 = (-0,5)^3 m^3 n^3$

2 Przedstaw potęgę w postaci iloczynu potęg.

a) $(4x)^2$ b) $\left(-1\frac{1}{2}bc\right)^4$ c) $(-0,3abc)^3$

Przykład 3.

Zapiszmy iloraz potęg w postaci potęgi.

$$\text{a) } \frac{2^3}{3^3} \quad \text{b) } \frac{(-2m)^2}{(3n)^2}, n \neq 0 \quad \text{c) } a^n : b^n, a \neq 0, b \neq 0$$

$$\text{a) } \frac{2^3}{3^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\text{b) } \frac{(-2m)^2}{(3n)^2} = \frac{(-2m) \cdot (-2m)}{3n \cdot 3n} = \left(-\frac{2m}{3n}\right) \cdot \left(-\frac{2m}{3n}\right) = \left(-\frac{2m}{3n}\right)^2$$

$$\text{c) } a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ czynników } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ czynników } b}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ czynników } \frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a : b)^n$$

Potęga ilorazu liczb a i b jest równa ilorazowi potęg tych liczb

$$(a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n : b^n$$

potęga ilorazu iloraz potęg

dla dowolnych liczb a, b , takich że $a \neq 0, b \neq 0$, i liczby naturalnej n .



3 Przedstaw iloraz potęg w postaci potęgi ilorazu i oblicz.

$$\text{a) } \frac{(-4)^2}{8^2}, \quad \frac{(0,55)^2}{(0,11)^2}, \quad \frac{121^2}{11^2}, \quad (-4,8)^6 : \left(-4\frac{4}{5}\right)^6$$

$$\text{b) } (-2,56)^3 : \left(\frac{16}{25}\right)^3, \quad (-0,9)^2 : \left(\frac{3}{8}\right)^2, \quad \left(1\frac{2}{3}\right)^4 : \left(-2\frac{7}{9}\right)^4$$

Przykład 4.

Przedstawmy potęgę w postaci ilorazu potęg.

$$\text{a) } (4 : 7)^3 \quad \text{b) } (-5x : y)^2 \text{ dla } y \neq 0 \quad \text{c) } [-0,1ab : (2c)]^4 \text{ dla } c \neq 0$$

$$\text{a) } (4 : 7)^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4^3}{7^3} = 4^3 : 7^3$$

$$\text{b) } (-5x : y)^2 = \left(\frac{-5x}{y}\right)^2 = \frac{(-5x)^2}{y^2} = (-5x)^2 : y^2$$

$$\text{c) } [-0,1ab : (2c)]^4 = \left(\frac{-0,1ab}{2c}\right)^4 = \frac{(-0,1ab)^4}{(2c)^4} = (-0,1ab)^4 : (2c)^4$$

- 4 Przedstaw potęgę w postaci ilorazu potęg. Załóż, że mianownik jest liczbą różną od zera.

a) $\left(\frac{ab}{c}\right)^6$ b) $\left(\frac{-2xy}{3z}\right)^2$ c) $(0,2 : a)^4$
 d) $\left(\frac{1,5c}{d}\right)^2$ e) $\left(\frac{-0,1ac}{mn}\right)^3$ f) $\left(-\frac{5x}{3y}\right)^2$

- 5 Oblicz jak najprostszym sposobem.

a) $4^2 \cdot 12^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$ b) $(-1,5)^3 \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)^3 \cdot (-2)^3$

- 6 Oblicz.

a) $\left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot 14^2 - 10^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5$ b) $35^2 : (-7)^2 + (-6)^3 : (-2)^3$
 c) $4^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot 5^3$ d) $\left(\frac{3}{7}\right)^3 : \left(-\frac{6}{7}\right)^3 - 15^4 : (-5)^4$

- 7 Oblicz.

a) $\left(\frac{1}{42}\right)^3 : \left(-\frac{1}{21}\right)^3 - 100^3 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^3$ b) $(1,2)^3 : 12^3 - (0,6)^5 \cdot \left(-1\frac{2}{3}\right)^5$
 c) $-(-27)^3 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^3 - 12^3 : (-3)^3$ d) $\left(-2\frac{2}{3}\right)^{15} \cdot (0,375)^{15} + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot (0,75)^2$

- 8 Skorzystaj z tabeli i oblicz jak najprostszym sposobem.

n	4	5	6	7	8	9	10
2^n	16	32	64	128	256	512	1024
5^n	625	3125	15 625	78 125	390 625	1 953 125	9 765 625

a) $32 \cdot 3125$ b) $128 \cdot 390 625$ c) $625 \cdot 512$
 d) $1024 \cdot 15 625$ e) $9 765 625 \cdot 64$ f) $16 \cdot 78 125$

- 9 Oceń prawdziwość podanych zapisów. Wybierz P, jeśli zapis jest prawdziwy, albo F – jeśli jest fałszywy.

$(-12,8)^0 : 2^0 = -1$	P	F
$-2,2 + \left(-1\frac{2}{3}\right)^6 \cdot (0,6)^6 = -3\frac{1}{5}$	P	F
$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} : (0,5)^2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \left(\frac{2}{4}\right)^5$	P	F
$\left(\frac{-4m}{n}\right)^3 : \left(\frac{2m}{3n}\right)^3 = -216$	P	F

- 10** Dane są dwa wyrażenia: $k = (-45)^3 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^3 + 25^2 : (-5)^2 + 10$
i $l = \left(-1\frac{1}{3}\right)^{21} \cdot (0,75)^{21} - (0,5)^0 : 2^0$.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wartość wyrażenia k jest **A** / **B** od wartości wyrażenia l .

A. o 10 mniejsza **B.** o 10 większa

Iloczyn wyrażen k i l jest równy **C** / **D**.

C. -4^2 **D.** 24

- 11** Udowodnij, że iloraz potęg $\left(-\frac{2ab}{c}\right)^4$ oraz $\left(\frac{6ab}{75c}\right)^4$ można przedstawić w postaci potęgi liczby 5.

Wyzwanie

Przedstaw iloczyn potęg $(2^2)^2 \cdot (5^3)^2 \cdot (2^3)^2 \cdot (5^2)^2$ w postaci potęgi.

Sprawdź się!

- Przedstaw potęgę w postaci iloczynu potęg.
a) $(-3a)^5$ b) $\left(\frac{2}{5}xz\right)^3$ c) $(1,2mn)^7$
- Przedstaw iloraz potęg w postaci potęgi ilorazu i oblicz.
 $\frac{196^2}{14^2}$, $(-2,5)^3 : 0,5^3$, $\left(-1\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^4$
- Oblicz jak najprostszym sposobem.
a) $(-8)^2 \cdot \left(-2\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^2$ b) $(7,2)^3 \cdot \left(-\frac{5}{18}\right)^3 : (-0,8)^3$
- Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wartość wyrażenia $\left(-\frac{1}{9}\right)^2 : \left(\frac{1}{72}\right)^2 - \left(-\frac{1}{36}\right)^3 : \left(\frac{1}{108}\right)^3$ jest równa
A. -91 **B.** 37 **C.** -37 **D.** 91
- Skorzystaj z tabeli podanej w zadaniu 8. na stronie 14 i oblicz najprostszym sposobem iloczyn $256 \cdot 1\,953\,125$.

3. Potęga potęgi

Przykład 1.

Przekształćmy potęgę potęgi.

a) $(3^2)^3$ b) $(a^3)^4$ c) $(a^m)^n, a \neq 0$

a) $(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$

b) $(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$

c) $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ czynników } a^m} = a^{\overbrace{m+m+m+m+\dots+m}^{n \text{ składników } m}} = a^{m \cdot n}$



Aby obliczyć potęgę potęgi danej liczby, należy pomnożyć wykładniki, a podstawę pozostawić bez zmian.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \text{ gdzie } a \neq 0, m, n - \text{liczby naturalne}$$

1 Oblicz potęgę.

a) $[(-1)^2]^{31}, [-(-1)^7]^4, [-(-0,1)^2]^3$

b) $(-3a^2b)^3, (-a^2b^3c^4)^5, \left[\left(\frac{1}{2}ab \right)^3 \cdot (2ab^2)^2 \right]^3$

Przykład 2.

Przedstawmy liczbę jako potęgę potęgi.

a) 3^8 b) $(-2)^6$ c) a^{12} d) 27^2

Liczbę można przedstawić jako potęgę potęgi na wiele sposobów. Podajemy wybrane z nich.

a) $3^8 = 3^{2 \cdot 4} = (3^2)^4 = (3^4)^2$

b) $(-2)^6 = (-2)^{2 \cdot 3} = [(-2)^2]^3 = [(-2)^3]^2$

c) $a^{12} = (a^3)^4 = (a^4)^3 = (a^2)^6 = (a^6)^2$

d) $27^2 = (3^3)^2 = (3^2)^3$

2 Przedstaw liczbę jako potęgę potęgi.

a) $(-2)^{10}$ b) -2^{20} c) $(3-a)^{32}$

- 3 Uzasadnij, że:
 a) $81^4 = 9^8$, b) $32^{12} = 2^{60}$, c) $64^3 = 4^9$.
- 4 Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.
 a) 4^5 i 2^{12} b) $0,36^4$ i $(-0,6)^8$ c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^6$ i $\left(-\frac{8}{125}\right)^3$

Przykład 3.

Obliczmy wartość wyrażenia $\frac{(x^8 : x^6)^3 + 3 \cdot (x^2 \cdot x^4)}{x^2 \cdot 4 \cdot (x^6 : x^5)}$ dla $x = -1\frac{2}{3}$.

Najpierw doprowadzimy wyrażenie do najprostszej postaci:

$$\frac{(x^8 : x^6)^3 + 3 \cdot (x^2 \cdot x^4)}{x^2 \cdot 4 \cdot (x^6 : x^5)} = \frac{(x^2)^3 + 3x^6}{4x^2 \cdot x} = \frac{x^6 + 3x^6}{4x^3} = \frac{4x^6}{4x^3} = x^3$$

Po podstawieniu liczby $-1\frac{2}{3}$ w miejsce x otrzymujemy:

$$\left(-1\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 = -\frac{5^3}{3^3} = -\frac{125}{27} = -4\frac{17}{27}$$

- 5 Przekształć wyrażenie $\frac{y^{12} \cdot y^{120} \cdot y^{13}}{y^{18} \cdot (y^2)^{50} \cdot y^{24}}$ do prostszej postaci i oblicz jego wartość dla $y = -1\frac{1}{2}$.
- 6 Uporządkuj liczby: 27^4 , 9^7 , 243^2 , 81^5 , 9^8 , 3^{18} od najmniejszej do największej.
- 7 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
 Liczby $(16^6)^3$ **nie można** przedstawić w postaci potęgi
 A. 2^{72} B. 64^{12} C. 8^{18} D. 4^{36}
- 8 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczbę -16^4 można przedstawić w postaci -2^{16} .	P	F
Największą spośród liczb: 81^3 , 9^7 , 27^5 jest 81^3 .	P	F
Wyrażenie $(a^5)^5 \cdot (a^4)^4 : (a^3)^3 : (a^2)^2$ po uproszczeniu jest równe a^{28} .	P	F
Liczba $(2^4)^2$ jest o $(2^2)^3$ większa od liczby $3 \cdot 4^3$.	P	F

- 9 Zapisz wyrażenie w postaci potęgi.
 a) $8 \cdot 3^6 + 9^3$ b) $6 \cdot 5^6 - 25^3$ c) $5 \cdot 2^9 + 6 \cdot 8^3 - 3 \cdot 512$

- 10** Uzasadnij, że liczba $x = 16^5 + 2^{15}$ jest podzielna przez 33.
- 11** Uporządkuj dane liczby x, y, z od najmniejszej do największej.
- a) $x = (25^2)^{2^5}, y = (5^2)^{5^2}, z = (100^8)^4$
- b) $x = 2^{4^3}, y = 3^{2^6}, z = 4^{3^3}$

Wyzwanie

Zapisz największą liczbę za pomocą:

- a) trzech dwójek, b) trzech cyfr.

Sprawdź się!

- Oblicz potęgi.
 $(1^3)^{15}, [(-0,1)^2]^3, (0,2^3)^2, (-ab^2cd^2)^5$
- Przedstaw liczbę jako potęgę potęgi.
 a) 12^6 b) $(-0,5)^8$ c) $(x+y)^{15}$
- Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.
 a) $\left(\frac{1}{3}\right)^7$ i $\left(\frac{1}{9}\right)^3$ b) -5^4 i 25^2 c) $-0,1^{10}$ i $(-0,01)^5$
- Dane są liczby: $64^3, 32^2, 4^{10}, 2^{25}$. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
 Największą spośród danych liczb jest liczba **A** / **B**.
A. 2^{25} **B.** 64^3
 Najmniejszą spośród danych liczb jest liczba **C** / **D**.
C. 32^2 **D.** 4^{10}
- Przekształć wyrażenie $\frac{x^{100} \cdot x^{43} \cdot x^{15}}{(x^5)^{24} \cdot (x^5)^2 \cdot x^{25}}$ do prostszej postaci i oblicz jego wartość dla $x = -\frac{4}{3}$.

4. Notacja wykładnicza

Potęgi wykorzystujemy często do zapisu bardzo dużych liczb. Wiemy na przykład, że światło porusza się z prędkością ok. 300 milionów m/s. Wygodnie jest zapisać tę wartość następująco:

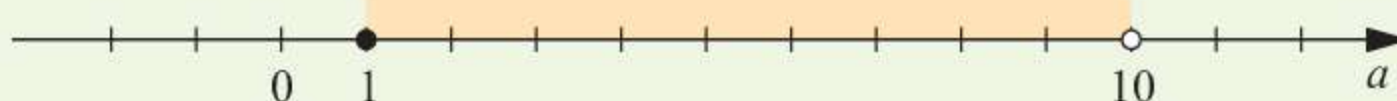
$$300\,000\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3 \cdot 100\,000\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Taki sposób zapisu nazywa się **notacją wykładniczą**.

Zapis dużej liczby w notacji wykładniczej polega na przedstawieniu jej w postaci iloczynu $a \cdot 10^n$. Wykładnik n potęgi liczby 10 jest liczbą naturalną. Liczba a spełnia jednocześnie dwa warunki:

$$a \geq 1 \text{ i } a < 10.$$

Liczby spełniające te warunki (np. 1; 1,23; 2,7; 8,94) należą do zbioru liczb od 1 do 10, bez liczby 10. Można je przedstawić na osi liczbowej.



Przykład 1.

Zapiszmy liczbę w notacji wykładniczej.

a) $1\,200\,000\,000\,000\,000$

b) $8\,510\,000\,000\,000$

a) $1\,200\,000\,000\,000\,000 = 1,2 \cdot 1\,000\,000\,000\,000\,000 = 1,2 \cdot 10^{15}$

b) $8\,510\,000\,000\,000 = 8,51 \cdot 1\,000\,000\,000\,000 = 8,51 \cdot 10^{12}$

1 Przedstaw liczbę w notacji wykładniczej.

a) 230

b) 3600

c) 18 000

d) 195 000

e) 120 000

f) 13 400 000

2 Zapisz wynik w notacji wykładniczej.

a) $1,3 \cdot 10\,000\,000$

b) $0,58 \cdot 100\,000$

c) $0,0024 \cdot 1\,000\,000$

d) $10,2 \cdot 10^5$

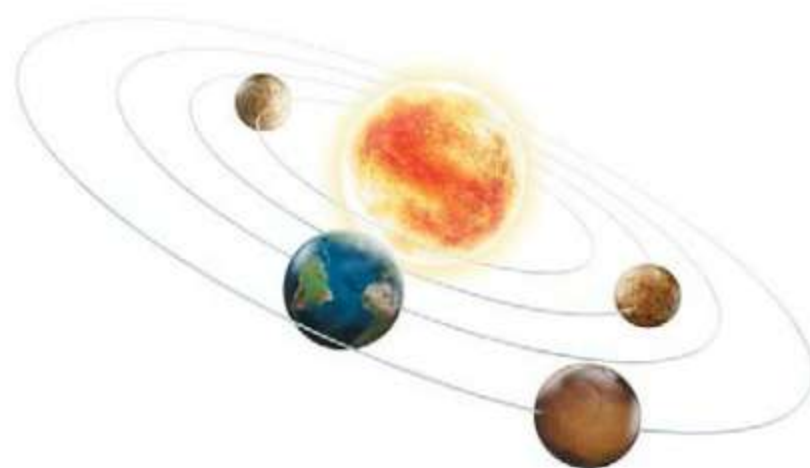
e) $3000 \cdot 10^4$

f) $0,0012 \cdot 10^9$

3 W każdym wierszu tabeli wskaż tę samą liczbę, która figuruje w pierwszej kolumnie.

$3,1 \cdot 10^5$	310	3100	31 000	310 000
$0,05 \cdot 10^3$	0,005	0,5	5	50
$0,49 \cdot 10^4$	4,9	4900	490	49 000
$0,008 \cdot 10^8$	800 000	8000	800	8

- 4 Określ, czy liczba została przedstawiona w notacji wykładniczej. Uzasadnij odpowiedź.
a) $12\,000 = 1,2 \cdot 10^4$ b) $3000 = 30 \cdot 10^2$
- 5 Temperatura wnętrza Słońca jest równa 14 milionów stopni Celsjusza, wnętrza Ziemi ok. 5000°C , a wnętrza Księżyca ok. 1300°C . Każdą z wartości zapisz w notacji wykładniczej.
- 6 Średnia odległość Słońca od Ziemi podana w notacji wykładniczej to ok. $1,5 \cdot 10^8$ km. Zapisz tę liczbę w postaci dziesiętnej.
- 7 Zamień jednostki. Użyj notacji wykładniczej.
a) $12\text{ t} = \text{ } \text{kg}$ b) $510\text{ dag} = \text{ } \text{g}$ c) $125\text{ km} = \text{ } \text{m}$
- 8 Wyraż wartość w postaci potęgi liczby 10:
a) jeden kilometr w milimetrach,
b) jeden metr kwadratowy w centymetrach kwadratowych,
c) jeden metr sześcienny w centymetrach sześciennych.
- 9 Niektóre z najmniejszych znanych gwiazd nazywa się białymi karłami. Astronomowie twierdzą, że 1 cm^3 materii białego karła waży ok. 10^6 g. Czy można unieść kostkę sześcienną o krawędzi 1 cm utworzoną z materii pochodzącej z białego karła? Odpowiedź uzasadnij.



Przykład 2.

Wykonajmy działanie $2^3 : 2^5$.

$$2^3 : 2^5 = \frac{2^3}{2^5} = \frac{\cancel{2}^1 \cdot \cancel{2}^1 \cdot \cancel{2}^1}{\cancel{2}_1 \cdot \cancel{2}_1 \cdot \cancel{2}_1 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1^2}{2^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Wobec tego: $2^3 : 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

$$\begin{array}{ccc} \text{wykładnik ujemny} & & \text{wykładnik dodatni} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2^{-2} & = & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{podstawa} & & \text{odwrotność podstawy} \end{array}$$

Potęę o wykładniku całkowitym ujemnym określamy następująco:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}, \text{ gdy } a \neq 0 \text{ i } n - \text{dodatnia liczba naturalna.}$$

Przykład 3.

Obliczmy potęgi.

a) 6^{-2} b) $(-2)^{-3}$ c) $(-1,5)^{-3}$ d) 10^{-4}

a) $6^{-2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

b) $(-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

c) $(-1,5)^{-3} = \left(-1\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$

d) $10^{-4} = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1^4}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = 0,0001$

10 Zapisz liczbę w postaci potęgi o wykładniku naturalnym.

a) 2^{-8}

b) 5^{-1}

c) $(-8)^{-5}$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}$

e) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$

f) $(0,3)^{-4}$

11 Oblicz.

a) 2^{-4}

b) $(-3)^{-2}$

c) 10^{-5}

d) $(-1)^{-21}$

e) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{-3}$

f) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-4}$

12 Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

$3^{-3}, \quad 3^0, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{9}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, \quad 2^{-3}$

13 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Odwrotnością 2^{-6} jest 64.	P	F
Liczba 25 jest liczbą przeciwną do $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}$.	P	F
Jeśli od 2^{-3} odejmiemy -3^{-2} , to otrzymamy liczbę ujemną.	P	F
Wartość bezwzględna sumy liczb -3^{-4} i $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ jest większa od 1.	P	F

Bardzo małe liczby również można zapisywać za pomocą notacji wykładniczej. Wiemy, że masa wirusa grypy jest równa 0,00000000000007 grama. Wygodnie jest zapisać tę wartość jako $7 \cdot 10^{-13}$ g.

$$0,00000000000007 = 7 \cdot 0,00000000000001 = 7 \cdot \frac{1}{10^{13}} = 7 \cdot 10^{-13}$$

W zapisie małych liczb w notacji wykładniczej wykładnik potęgi liczby 10 jest liczbą całkowitą ujemną.



Przykład 4.

Zapiszmy liczbę w notacji wykładniczej.

a) 0,000125 b) 0,00000000047

a) $0,000125 = 1,25 \cdot 0,0001 = 1,25 \cdot 10^{-4}$ ← wykładnik -4

przecinek przesuwamy
o 4 miejsca w prawo 4 cyfry
po przecinku

b) $0,00000000047 = 4,7 \cdot 0,000000001 = 4,7 \cdot 10^{-9}$ ← wykładnik -9

przecinek przesuwamy
o 9 miejsc w prawo 9 cyfr
po przecinku

14 Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) 0,4 b) 0,006 c) 0,000058 d) 0,00000183

15 Wykorzystaj dane z tabeli, przepisz poniższe równości i uzupełnij miejsca oznaczone $\square$. Użyj notacji wykładniczej.

- a) 1 ml = $\square$ l
b) 1 nm = $\square$ m
c) 1 pg = $\square$ g
d) $\square$ nm = 1 cm
e) $\square$ ps = 1 s
f) $\square$ ml = 1 hl

Przedrostek	Symbol	Mnożnik
kilo-	k	10^3
hekto-	h	10^2
deka-	da	10^1
decy-	d	10^{-1}
centy-	c	10^{-2}
mili-	m	10^{-3}
mikro-	μ	10^{-6}
nano-	n	10^{-9}
piko-	p	10^{-12}

16 Użyj notacji wykładniczej i wyraż:

- a) 295 g w kilogramach, b) 15 mm w metrach,
c) 10 dm w kilometrach, d) 135 ml w hektolitrach.

17 Skorzystaj z tabeli i wyraż w bajtach (B) oraz zapisz w notacji wykładniczej pojemność nośników elektronicznych.

- a) pendrive – 4 GB
b) CD-R – 700 MB
c) dysk twardy w laptopie – 500 GB

Nazwa	Symbol	Liczba bajtów w przybliżeniu
kilobajt	kB	10^3
megabajt	MB	10^6
gigabajt	GB	10^9



- 18** Skorzystaj z tabeli wielkich liczb i zapisz za pomocą potęgi liczby 10:

- a) miliard oktylionów,
- b) milion nonilionów,
- c) ile razy bilion jest mniejszy od decyliona,
- d) ile razy sekstylion jest większy od tryliona.

Trylion to 10^{18} , czyli
1 000 000 000 000 000 000.

Wielkie liczby	
milion	10^6
bilion	10^{12}
trylion	10^{18}
kwadrylion	10^{24}
kwintylion	10^{30}
sekstylion	10^{36}
septylion	10^{42}
oktylion	10^{48}
nonilion	10^{54}
decylion	10^{60}
googol (czytaj: gugol)	10^{100}

W systemie amerykańskim niektóre spośród wielkich liczb są nazywane inaczej niż w systemie przyjętym w Europie.

	System europejski	System amerykański
10^9	miliard	bilion
10^{12}	bilion	trylion
10^{15}	biliard	kwadrylion
10^{18}	trylion	kwintylion
10^{21}	tryliard	sekstylion
10^{24}	kwadrylion	septylion

- 19** Zapisz słowami nazwy liczb.

- a) 10^7
- b) 10^{11}
- c) 10^{13}
- d) 10^{20}

- 20** Wyznacz niewiadomą liczbę x .

- a) $18\,000\,000 = 1,8 \cdot 10^x$
- b) $400\,000 = 4 \cdot 10^x$
- c) $0,00125 = x \cdot 10^{-3}$
- d) $0,00018 = 1,8 \cdot 10^x$
- e) $0,000004 = 4 \cdot 10^x$
- f) $10^{-5} \cdot x = 0,000048$
- g) $x = 6,123 \cdot 10^{-4}$
- h) $1\,986\,000 = x \cdot 10^6$
- i) $3\,789\,450 \cdot (10^{-3})^x = 3,78945$
- j) $4\,150\,000\,000 \cdot (10^x)^3 = 4,15$

- 21** Oblicz pole kwadratu o podanej długości boku i zapisz je w notacji wykładniczej.

- a) $3 \cdot 10^3$ cm
- b) $5 \cdot 10^5$ mm
- c) $1,2 \cdot 10^6$ dm

- 22** Oblicz objętość prostopadłościanu o podanych wymiarach i zapisz ją w notacji wykładniczej.

- a) $2 \cdot 10^3$ cm $\times$ $5 \cdot 10^5$ cm $\times$ $7 \cdot 10^6$ cm
- b) $1,2 \cdot 10^4$ dm $\times$ $0,5 \cdot 10^5$ dm $\times$ $0,2 \cdot 10^7$ dm
- c) $0,05 \cdot 10^3$ m $\times$ $0,6 \cdot 10^2$ m $\times$ $0,008 \cdot 10^4$ m
- d) $1200 \cdot 10^{-2}$ mm $\times$ $50\,000 \cdot 10^{-3}$ mm $\times$ $1\,500\,000 \cdot 10^{-5}$ mm

Przykład 5.

Betonowy słup waży 2,3 tony, a średnia masa płytki klinkierowej to ok. 250 gramów. Obliczmy:

- ile razy betonowy słup jest cięższy od płytki,
- o ile mniej od słupa waży płytka.

Zapiszmy obie wielkości w gramach, w notacji wykładniczej.

$$2,3 \text{ t} = 2,3 \cdot 1000 \text{ kg} = 2300 \cdot 1000 \text{ g} = 2\,300\,000 \text{ g} = 2,3 \cdot 10^6 \text{ g}$$

$$250 \text{ g} = 2,5 \cdot 10^2 \text{ g}$$

- $2,3 \cdot 10^6 : (2,5 \cdot 10^2) = (2,3 : 2,5) \cdot 10^{6-2} = 0,92 \cdot 10^4 = 9,2 \cdot 10^3$
- $2,3 \cdot 10^6 - 2,5 \cdot 10^2 = 2,3 \cdot 10^4 \cdot 10^2 - 2,5 \cdot 10^2 = 23\,000 \cdot 10^2 - 2,5 \cdot 10^2 =$
 $= 22\,997,5 \cdot 10^2 = 2,29975 \cdot 10^6$

ODPOWIEDŹ: Betonowy słup jest cięższy od płytki $9,2 \cdot 10^3$ razy, a płytka waży o $2,29975 \cdot 10^6 \text{ g}$ mniej od słupa.

- 23** W tabeli przedstawiono przybliżone masy różnych obiektów. Oblicz:

- ile razy kometa Halleya jest cięższa od wieży Eiffla,
- z ilu bloków o przeciętnej masie składa się piramida Cheopsa.

Obiekt	Masa [kg]
piramida Cheopsa	$6 \cdot 10^9$
kometa Halleya	$2 \cdot 10^{14}$
wieża Eiffla	10^7
przeciętny blok z piramidy	2500

- 24** Masa Słońca jest równa $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, masa Ziemi wynosi $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, a masa Księżyca $7 \cdot 10^{22} \text{ kg}$.

- Ile razy większa jest masa Ziemi od masy Księżyca?
- O ile kilogramów Słońce ma większą masę od Ziemi?

- 25** W tabeli podano masy niektórych zwierząt.

Zwierzę	ryjówka etruska	żyrafa	anakonda	gekon
Masa	1,2 g	1,4 t	200 kg	64 g

- Zapisz za pomocą notacji wykładniczej masy ryjówki etruskiej i żyrafy w kilogramach, a masy anakondy i gekona w miligramach.



ryjówka etruska



anakonda



gekon



żyrafa

- b) Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Żyrafa ma ok. **A** / **B** razy większą masę od ryjówki etruskiej.

A. $1,17 \cdot 10^6$ **B.** $8,6 \cdot 10^5$

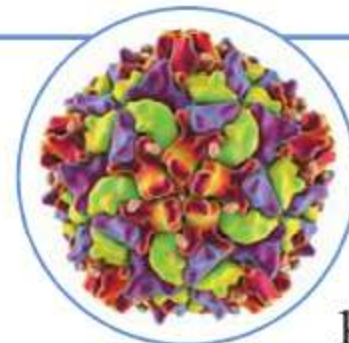
Anakonda ma ok. **C** / **D** razy większą masę od gekona.

C. $3,1 \cdot 10^5$ **D.** $3,1 \cdot 10^3$

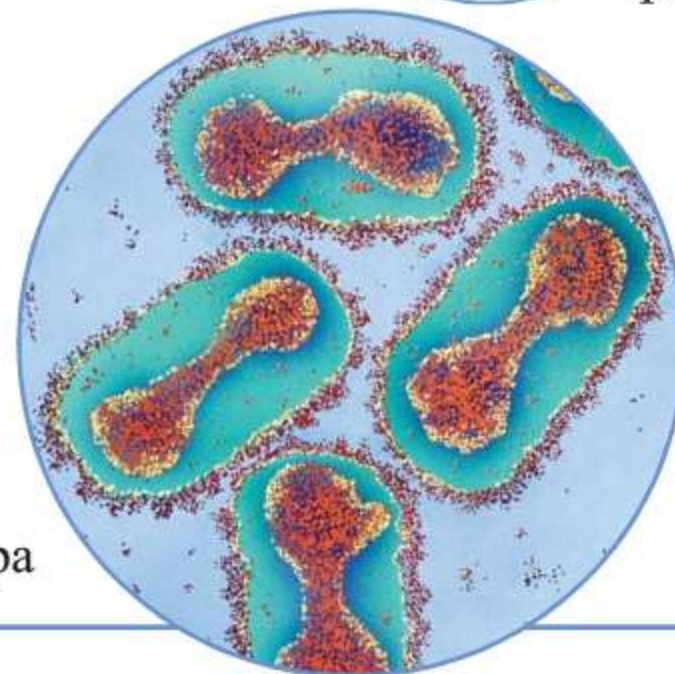
- 26** Włos człowieka rośnie przeciętnie z szybkością ok. $4 \cdot 10^{-4}$ m na dobę. Ile centymetrów urosną włosy w ciągu:
a) 6 tygodni, b) 1 roku?

Wyzwanie

Jednym z najmniejszych wirusów jest polio, patogen powodujący chorobę Heinego-Medina. Ma on średnicę równą ok. 28 nm. Jednym z największych wirusów jest wirus ospy – średnica wynosi ok. $3 \cdot 10^{-7}$ m. Ile razy wirus ospy jest większy od wirusa polio?



polio



ospa

Sprawdź się!

- Zapisz wynik w notacji wykładniczej.
a) $12,4 \cdot 100\,000\,000$ b) $235 \cdot 10^7$ c) $0,00001 \cdot 100\,000$
- Zamień jednostki. Użyj notacji wykładniczej.
a) $17\text{ kg} = \square \text{ g}$ b) $15\text{ m} = \square \text{ mm}$ c) $18\text{ km} = \square \text{ dm}$
- Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wielkość 135 mikrometrów wyrażona w decymetrach i zapisana w notacji wykładniczej jest równa
A. $13,5 \cdot 10^{-6} \text{ dm}$ **B.** $1,35 \cdot 10^{-9} \text{ dm}$
C. $1,35 \cdot 10^{-7} \text{ dm}$ **D.** $1,35 \cdot 10^{-3} \text{ dm}$
- Prostopadłościan ma wymiary $3 \cdot 10^7 \text{ cm} \times 0,5 \cdot 10^5 \text{ dm} \times 0,2 \cdot 10^5 \text{ m}$. Oblicz jego objętość i zapisz ją w notacji wykładniczej.
- Średnia masa kolibra wynosi 2 g, a płetwala błękitnego $1,38 \cdot 10^5 \text{ kg}$. Ile kolibrów zrównoważy masę tego wieloryba?

5. Pierwiastek z iloczynu, iloczyn pierwiastków

Przypomnij sobie

- co nazywamy pierwiastkiem kwadratowym,
- co nazywamy pierwiastkiem sześciennym,
- kiedy potęga pierwiastka kwadratowego lub sześciennego z danej liczby jest równa tej liczbie.

Przykład 1.

Obliczmy wartości pierwiastków.

a) $\sqrt{0,64}$ b) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ c) $\sqrt[3]{27}$ d) $\sqrt[3]{-8}$

a) $\sqrt{0,64} = 0,8$, bo $(0,8)^2 = 0,64$

b) $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$, bo $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$

c) $\sqrt[3]{27} = 3$, bo $3^3 = 27$

d) $\sqrt[3]{-8} = -2$, bo $(-2)^3 = -8$



Pierwiastkiem kwadratowym z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b , która podniesiona do kwadratu jest równa liczbie podpierwiastkowej a .

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a, \text{ dla } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$



Pierwiastkiem sześciennym z dowolnej liczby a nazywamy taką liczbę b , która podniesiona do potęgi trzeciej jest równa liczbie podpierwiastkowej a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

1 Oblicz.

a) $\sqrt{1}$, $\sqrt{\frac{25}{49}}$, $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, $\sqrt{0,01}$

b) $\sqrt{289}$, $\sqrt{\frac{36}{121}}$, $\sqrt{4\frac{21}{25}}$, $\sqrt{2,89}$

2 Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$, $\sqrt[3]{0,008}$, $\sqrt[3]{-0,125}$

b) $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$, $\sqrt[3]{0,064}$, $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

Przykład 2.Obliczmy: a) $(\sqrt{25})^2$ b) $(\sqrt[3]{-64})^3$

a) $(\sqrt{25})^2 = 5^2 = 25$, czyli $(\sqrt{25})^2 = 25$

b) $(\sqrt[3]{-64})^3 = (-4)^3 = -64$, czyli $(\sqrt[3]{-64})^3 = -64$

$$(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0 \qquad (\sqrt[3]{a})^3 = a$$

**3** Oblicz wartość wyrażenia.

a) $(\sqrt{16})^2 - (\sqrt{25})^2$

b) $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{125}}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)^3$

c) $(-2) \cdot (\sqrt{4})^2 + \sqrt[3]{-1}$

d) $\left[\sqrt{400} - (\sqrt{16})^2\right] : \sqrt[3]{-\frac{1}{64}}$

4 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczba $(\sqrt{5})^2$ jest równa $\sqrt[3]{125}$.	P	F
Każda z liczb: $(-\sqrt{2})^2$, $(\sqrt[3]{-3})^3$, $(-\sqrt[3]{5})^3$ jest ujemna.	P	F
Liczby: $\sqrt{2 + \sqrt{4}}$, $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{125}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ są równe.	P	F
Liczba $2\sqrt{3}$ jest większa od $3\sqrt{2}$.	P	F
Liczba $\sqrt{9 + 16}$ jest równa sumie $\sqrt{9} + \sqrt{16}$.	P	F

5 Dane są liczby: $a = 5 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{729}} + \sqrt{\sqrt{64}}$ i $b = -\sqrt[3]{-\sqrt{64}} + \sqrt{\sqrt{625}}$. Czy 30% liczby a jest większe od 0,9 liczby b ? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	liczba a jest większa od liczby b .
			2.	liczba b stanowi $\frac{1}{3}$ liczby a .
B.	Nie,		3.	30% liczby a jest równe 0,9 liczby b .

6 Jaką liczbę należy wpisać zamiast litery, aby zachodziła podana równość?

a) $\sqrt{c - 0,05} = 2,5$

b) $\sqrt{d^2 - 4} = \sqrt{12}$

c) $\sqrt[3]{-e^3 + 19} = -2$

Przykład 3.

Sprawdźmy, czy zachodzi równość.

$$\text{a) } \sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} \qquad \text{b) } \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$$

$$\text{a) } L = \sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6, \quad P = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6, \quad L = P$$

$$\text{b) } L = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216} = 6, \quad P = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6, \quad L = P$$



Pierwiastek z iloczynu liczb a i b jest równy iloczynowi pierwiastków tych liczb.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \quad \text{dla dowolnych } a \text{ i } b$$

7 Oblicz.

$$\text{a) } \sqrt{25 \cdot 64}, \sqrt{81 \cdot 16}, \sqrt{9 \cdot 100}, \sqrt[3]{27 \cdot 64}, \sqrt[3]{8 \cdot 1000}, \sqrt[3]{125 \cdot (-64)}$$

$$\text{b) } \sqrt{121 \cdot 0,04}, \sqrt{169 \cdot 0,09}, \sqrt{289 \cdot 0,25}, \sqrt[3]{0,001 \cdot 1000}, \sqrt[3]{0,008 \cdot (-8)}$$

Przykład 4.

Wykonajmy działania: a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{12}$ b) $\sqrt[3]{-5} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{4}$

$$\text{a) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{2 \cdot 6 \cdot 12} = \sqrt{12 \cdot 12} = \sqrt{12^2} = 12$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{-5} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{-5 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 4} = \sqrt[3]{-10 \cdot 100} = \sqrt[3]{-1000} = -10$$

8 Oblicz.

$$\text{a) } \sqrt{4} \cdot \sqrt{25}, \sqrt{2} \cdot \sqrt{50}, \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{32}$$

$$\text{b) } \sqrt{27} \cdot \sqrt{3}, \sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{-0,02} \cdot \sqrt[3]{1350}$$

9 Dane są liczby: $a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36}$, $b = -\sqrt{16 \cdot 25}$, $c = \sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125}$, $d = \sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{7}$, $e = (-\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{10})^2$. Który zapis jest poprawny? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

$$\text{A. } e < b < a < d < c$$

$$\text{B. } b < d < a < c < e$$

$$\text{C. } b < a < d < c < e$$

$$\text{D. } a < d < b < c < e$$

Przykład 5.

Obliczmy: a) $\sqrt{1\,690\,000}$ b) $\sqrt[3]{-125\,000\,000}$

$$\text{a) } \sqrt{1\,690\,000} = \sqrt{169 \cdot 100 \cdot 100} = 13 \cdot 10 \cdot 10 = 1300$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{-125\,000\,000} = \sqrt[3]{-125 \cdot 1000 \cdot 1000} = -5 \cdot 10 \cdot 10 = -500$$

- 10** Oblicz: $\sqrt{3600}$, $\sqrt{1\,440\,000}$, $\sqrt[3]{-64\,000}$.
- 11** Jaką liczbę należy wpisać zamiast gwiazdki?
- a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{*} = 4$ b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{121} \cdot \sqrt{\frac{1}{*}} = 11$
- c) $\sqrt[3]{*} \cdot \sqrt[3]{9} = 3$ d) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{*} \cdot \sqrt[3]{4} = 4$
- 12** Ile centymetrów ma bok kwadratu, jeśli jego pole jest równe:
- a) 4900 cm^2 , b) $0,0036 \text{ m}^2$, c) $0,0004 \text{ km}^2$?
- 13** Ile centymetrów ma krawędź sześcianu, jeśli jego objętość jest równa:
- a) $0,125 \text{ m}^3$, b) $216\,000 \text{ cm}^3$, c) $0,064 \text{ m}^3$?
- 14** Wykaż, że pole prostokąta o podanych wymiarach jest wyrażone liczbą naturalną.
- a) $\sqrt{1,2 \cdot 10^4} \text{ cm}$ i $\sqrt{3 \cdot 10^5} \text{ cm}$ b) $\sqrt[3]{2 \cdot 10^7} \text{ dm}$ i $\sqrt[3]{1,35 \cdot 10^9} \text{ dm}$
- 15** Średnią geometryczną dwóch liczb nieujemnych a i b nazywamy $\sqrt{ab}$. Oblicz średnią geometryczną liczb:
- a) $8 \cdot 10^5$ i $1,8 \cdot 10^8$, b) $8 \cdot 10^8$ i $5 \cdot 10^{13}$.

Wyzwanie

Podaj przynajmniej dwa przykłady liczb, przez które można pomnożyć daną liczbę, aby otrzymać liczbę naturalną.

- a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[3]{-20}$ d) $\sqrt{\frac{2}{15}}$

Sprawdź się!

- 1** Oblicz: $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{54}$, $\sqrt{0,72} \cdot \sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{-4}$.
- 2** Oblicz: $\sqrt[3]{-8000}$, $\sqrt[3]{-27\,000\,000}$, $\sqrt{64\,000\,000}$.
- 3** Jaką liczbę należy wpisać zamiast gwiazdki?
- a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{*} \cdot \sqrt{12} = 12$ b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{*}} = -3$
- 4** Czy 20% wartości wyrażenia $-\sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{400} + \sqrt{20} \cdot \sqrt{80}$ jest liczbą całkowitą? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	jest liczbą naturalną.
			2.	wynosi -12 .
B.	Nie,		3.	jest równa 4.

- 5** W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych są równe $\sqrt{10} \text{ cm}$ i $\sqrt{14,4} \text{ cm}$. Oblicz pole tego trójkąta.

6. Wyłączanie czynnika przed pierwiastek, włączanie czynnika pod pierwiastek

Na pytanie, czy dwie liczby są równe, często nie da się odpowiedzieć od razu. Konieczne jest przekształcenie ich zapisu lub przeprowadzenie rozumowania, które umożliwi ich porównanie.

Liczby $\sqrt{20}$ i $2\sqrt{5}$ są równe, ponieważ są dodatnie i ich kwadraty są równe.

$$(\sqrt{20})^2 = 20$$

$$(2\sqrt{5})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20$$

Liczby $\sqrt[3]{32}$ i $2\sqrt[3]{4}$ są równe, ponieważ ich sześciiany są równe.

$$(\sqrt[3]{32})^3 = 32$$

$$(2\sqrt[3]{4})^3 = 2^3 \cdot (\sqrt[3]{4})^3 = 8 \cdot 4 = 32$$

Równości $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$ oraz $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = 2\sqrt[3]{4}$ interpretujemy jako **wyłączanie czynnika przed pierwiastek**.

Równości $2\sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$ oraz $2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = \sqrt[3]{32}$ interpretujemy jako **włączanie czynnika pod pierwiastek**.

Przykład 1.

Wyłączmy czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt[3]{81}$ c) $\sqrt[3]{-\frac{3}{8}}$ d) $\sqrt{\frac{5}{144}}$

a) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[3]{-\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{8} \cdot 3} = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[3]{3} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt{\frac{5}{144}} = \sqrt{\frac{1}{144} \cdot 5} = \sqrt{\frac{1}{144}} \cdot \sqrt{5} = \frac{1}{12}\sqrt{5}$

1 Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{32}, \sqrt{75}$

b) $\sqrt{200}, \sqrt{108}$

c) $\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{2}{25}}$

d) $\sqrt[3]{40}, \sqrt[3]{96}$

e) $\sqrt[3]{-24}, \sqrt[3]{-250}$

f) $\sqrt[3]{\frac{5}{27}}, \sqrt[3]{\frac{7}{64}}$

Przykład 2.

Wyłączmy czynnik całkowity przed pierwiastek.

a) $\sqrt{15 \cdot 12}$

b) $\sqrt[3]{12 \cdot 24 \cdot 36}$

a) $\sqrt{15 \cdot 12} = \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{12 \cdot 24 \cdot 36} = \sqrt[3]{12 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 12} = \sqrt[3]{12^3 \cdot 6} = 12\sqrt[3]{6}$

2 Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{12 \cdot 24}$

b) $\sqrt{22 \cdot 11}$

c) $\sqrt{30 \cdot 10 \cdot 15}$

d) $\sqrt[3]{24 \cdot 18 \cdot 12}$

e) $\sqrt[3]{-24 \cdot 54}$

f) $\sqrt[3]{-15 \cdot 25}$

3 Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{125 \cdot 216}$

b) $\sqrt{135 \cdot 192}$

c) $\sqrt{810 \cdot 180}$

d) $\sqrt[3]{128 \cdot 250}$

e) $\sqrt[3]{-270 \cdot 200}$

f) $\sqrt[3]{-512 \cdot 320}$

Przykład 3.

Włączmy czynnik pod pierwiastek.

a) $3\sqrt{5}$

b) $3\sqrt[3]{2}$

c) $-2\sqrt[3]{3}$

a) $3\sqrt{5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$

b) $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$

c) $-2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{-8 \cdot 3} = \sqrt[3]{-24}$

4 Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $4\sqrt{8}$

b) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$

c) $3\sqrt[3]{7}$

d) $-2\sqrt[3]{10}$

e) $0,4\sqrt{5}$

f) $0,1\sqrt[3]{300}$

5 Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

a) $-\sqrt{32}, 3\sqrt{8}, \sqrt{98}, 3\sqrt{18}, -2\sqrt{72}$

b) $-2\sqrt[3]{16}, \sqrt[3]{250}, -\sqrt[3]{54}, 4\sqrt[3]{128}, \sqrt[3]{432}$

6 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczba $5\sqrt{48}$ jest większa od liczby $7\sqrt{27}$.	P	F
Liczba $4\sqrt{12}$ jest równa liczbie $\sqrt{48}$.	P	F
Liczba $\sqrt[3]{990}$ jest mniejsza od liczby $2\sqrt[3]{128}$.	P	F

7 Rozwiąż równanie.

a) $3\sqrt{x} = 4\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{4,5} = x\sqrt{2}$

c) $x\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{16}$

Przykład 4.

Wykonajmy działania.

a) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54}$

c) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{40})$

a) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} =$
 $= \sqrt{3} \cdot (2 + 3 - 1) = 4\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} - \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{40}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{40} = \sqrt{20} + \sqrt{80} =$
 $= \sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{16 \cdot 5} = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = \sqrt{5} \cdot (2 + 4) = 6\sqrt{5}$

8 Wykonaj działania.

a) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3}$

b) $4\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}$

c) $3\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{2}$

d) $2\sqrt[3]{-2} + 4 - 4\sqrt{5} - 3\sqrt[3]{-2} + 6\sqrt{5}$

9 Oblicz sumę liczb.

a) $\sqrt{12}, \sqrt{48}, \sqrt{75}$

b) $\sqrt[3]{24}, \sqrt[3]{81}, \sqrt[3]{192}$

c) $\sqrt{45}, \sqrt{20}, \sqrt{80}$

d) $\sqrt[3]{54}, \sqrt[3]{16}, \sqrt[3]{250}$

10 Oblicz różnicę.

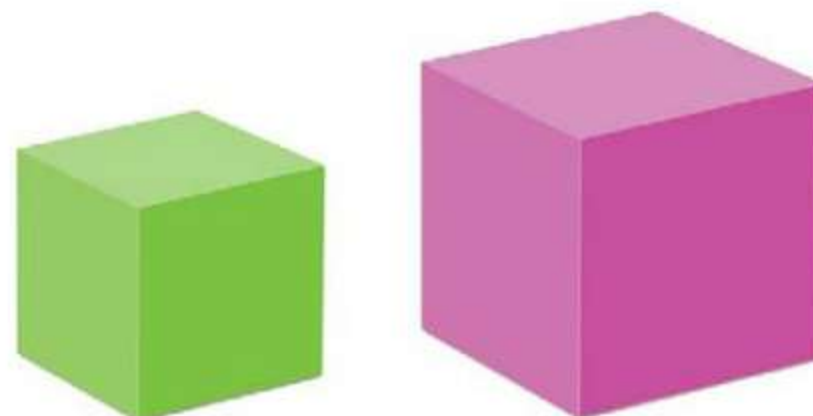
a) $\sqrt{125} - \sqrt{500}$

b) $\sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{256}$

c) $\sqrt{175} - \sqrt{112}$

d) $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{648}$

11 Sześciany mają objętości 432 dm^3 i 128 dm^3 . Oblicz różnicę długości ich krawędzi.



12 Zapisz krócej wyrażenie.

a) $\sqrt{98} - \sqrt{45000}$

b) $7\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{80}$

c) $\sqrt{27 \cdot 125 \cdot 108} - 139\sqrt{5}$

13 Wykonaj działania.

a) $\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{48}$

b) $4\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{128}$

c) $-2\sqrt{72} + 4\sqrt{32} + 5\sqrt{18}$

d) $5\sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{24} + 3\sqrt[3]{81}$

14 Wyznacz liczbę a .

a) $4\sqrt{63} - 8\sqrt{28} + \sqrt{700} = a\sqrt{7}$

b) $\sqrt{27} + \sqrt{108} - \sqrt{12} + \sqrt{75} = a\sqrt{3}$

15 Wykonaj działania.

a) $\sqrt{3} \cdot (3\sqrt{24} - 4\sqrt{6} + 5\sqrt{54})$

b) $\sqrt{10} \cdot (2\sqrt{20} - 7\sqrt{8} - 4\sqrt{5} - 2\sqrt{18})$

Wyzwanie

Sprawdź, czy zachodzi równość.

a) $\sqrt{2+10} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{45} = 5\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{120-40} = 2\sqrt[3]{10}$

d) $(\sqrt{5} + \sqrt{8}) \cdot \sqrt{10} = \sqrt{130}$

Sprawdź się!

1 Wyłącz czynnik przed każdy z podanych pierwiastków.

a) $\sqrt{40}, \sqrt{810}, \sqrt{\frac{5}{49}}$

b) $\sqrt[3]{243}, \sqrt[3]{-128}, \sqrt[3]{\frac{11}{125}}$

2 Dane są liczby:

$a = \sqrt[3]{-10 \cdot 12 \cdot (-9)}, b = \sqrt[3]{15 \cdot 18 \cdot 4}, c = \sqrt[3]{-12 \cdot 6 \cdot (-18)}.$

Która z tych liczb jest największa? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. a

B. b

C. c

D. Liczby są równe.

3 Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$

b) $3\sqrt[3]{5}$

c) $0,2\sqrt[3]{100}$

4 Kwadraty mają pola 32 cm^2 i 8 cm^2 . Oblicz sumę ich obwodów.

5 Wykonaj działania.

a) $2\sqrt{32} + 3\sqrt{18} - \sqrt{72}$

b) $2\sqrt[3]{24} + 4\sqrt[3]{81} - 14\sqrt[3]{3}$

7. Pierwiastek z ilorazu, iloraz pierwiastków

Przykład 1.

Sprawdźmy, czy zachodzi równość.

$$\text{a) } \sqrt{16 : 4} = \sqrt{16} : \sqrt{4} \quad \text{b) } \sqrt[3]{64 : 8} = \sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{8}$$

$$\text{a) } L = \sqrt{16 : 4} = \sqrt{4} = 2, \quad P = \sqrt{16} : \sqrt{4} = 4 : 2 = 2, \quad L = P$$

$$\text{b) } L = \sqrt[3]{64 : 8} = \sqrt[3]{8} = 2, \quad P = \sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{8} = 4 : 2 = 2, \quad L = P$$



Pierwiastek z ilorazu liczb a i b jest równy ilorazowi pierwiastków tych liczb.

$$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b} \quad \text{lub} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b > 0$$

$$\sqrt[3]{a : b} = \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} \quad \text{lub} \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad \text{dla dowolnej liczby } a \text{ i } b \neq 0$$

Przykład 2.

Obliczmy.

$$\text{a) } \sqrt{25 : 169}$$

$$\text{b) } \sqrt{2\frac{1}{4}}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{125 : 8}$$

$$\text{a) } \sqrt{25 : 169} = \sqrt{25} : \sqrt{169} = 5 : 13 = \frac{5}{13}$$

$$\text{b) } \sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{125 : 8} = \sqrt[3]{125} : \sqrt[3]{8} = 5 : 2 = 2\frac{1}{2}$$

1 Oblicz.

$$\text{a) } \sqrt{81 : 16}$$

$$\text{b) } \sqrt{1\frac{7}{9} : \frac{16}{25}}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{0,216 : \frac{8}{27}}$$

2 Wykonaj działania.

$$\text{a) } \sqrt{225 : 9} - \sqrt{2\frac{7}{9} : 1\frac{9}{16}}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{-27 : 64} + \sqrt[3]{0,125 : \frac{1}{8}}$$

$$\text{c) } \sqrt{1,96 : 0,04} - \sqrt[3]{-8 : 2\frac{10}{27}}$$

$$\text{d) } \sqrt[3]{0,008 : \left(-15\frac{5}{8}\right)} + \sqrt{81 : 1,44}$$

Przykład 3.

Obliczmy.

a) $\sqrt{32} : \sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[3]{\frac{2}{9}} : \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

a) $\sqrt{32} : \sqrt{2} = \sqrt{32 : 2} = \sqrt{16} = 4$

b) $\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{81 : 3} = \sqrt[3]{27} = 3$

c) $\sqrt[3]{\frac{2}{9}} : \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{2}{9} : \frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$

3 Oblicz.

a) $\sqrt{90} : \sqrt{10}$

b) $\sqrt{\frac{3}{4}} : \sqrt{12}$

c) $\sqrt[3]{135} : \sqrt[3]{5}$

4 Porównaj wyrażenia. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

a) $\sqrt{\frac{25}{64}}$ i $\sqrt{25} : \sqrt{64}$ b) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ i $\sqrt{18} : \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$ i $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}} : \sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$ i $\sqrt[3]{250} : \sqrt[3]{-54}$

5 Dane są liczby: $j = \sqrt{50}$, $k = \sqrt{2}$, $l = \sqrt[3]{2}$, $m = \sqrt[3]{16}$. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.Liczba j jest **A** / **B** razy większa od liczby k . **A.** 25 **B.** 5Liczba l jest **C** / **D** razy mniejsza od liczby m . **C.** 8 **D.** 2**6** Uporządkuj liczby od największej do najmniejszej. Z przypisanych im liter odczytaj nazwisko wybitnego polskiego matematyka, profesora uniwersytetu we Lwowie. Sprawdź w internecie, kiedy żył.

$\sqrt{\frac{4}{625}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{1000}}$	$\sqrt{1\frac{7}{9}}$	$\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$	$\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$
C	N	A	A	H	B

**7** Znajdź liczbę, której 10% jest równe wartości wyrażenia $\frac{\sqrt{\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{6}{25} + \frac{1}{4}}}}{\sqrt{\frac{5}{7}}}$.**8** Rozwiąż równanie.

a) $\sqrt{20} = x\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{40} = x\sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt{20} + \sqrt{45} = x\sqrt{5}$

9 Uzasadnij, że:

a) $\sqrt{1,25} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, b) $\sqrt[3]{0,75} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$.

10 Oblicz.

a) $(3\sqrt{50} + 2\sqrt{8} - \sqrt{32}) : \sqrt{2}$ b) $(6\sqrt{24} - 2\sqrt{54} + \sqrt{96}) : \sqrt{3}$
 c) $(8\sqrt[3]{-16} + 2\sqrt[3]{-54} - 3\sqrt[3]{-128}) : \sqrt[3]{-2}$ d) $(4\sqrt[3]{625} - 3\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{320}) : \sqrt[3]{5}$

Przykład 4.

Mianowniki ułamków: $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{5}}$, $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$ są liczbami niewymiernymi. Przekształćmy każdy ułamek na ułamek mu równy, w którym mianownik będzie liczbą wymierną.

W tym celu pomnożymy licznik i mianownik ułamka przez tę samą liczbę różną od zera.

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{3}} &= \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} &= \frac{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{4 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{10}}{8} \\ \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{5}} &= \frac{(\sqrt{2}+3) \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}+3\sqrt{5}}{5} \\ \frac{5}{\sqrt[3]{4}} &= \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{2}\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 2}$. Licznik i mianownik należy pomnożyć przez $\sqrt[3]{2}$.

Ten sposób przekształcania ułamków nazywamy **usuwaniem niewymierności z mianowników** tych ułamków.

11 Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{5\sqrt{2}}$

12 Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{3\sqrt{6}-3}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{4}+3}{\sqrt[3]{10}}$

13 Wykonaj działania.

a) $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{2\sqrt[3]{9}+1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{9}\sqrt[3]{243}$

14 Wykaż, że liczba $\frac{5}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ jest liczbą naturalną.

Wyzwanie

Jakie liczby należy wpisać zamiast $\square$, aby zachodziła równość?

a) $\sqrt{1\frac{\square}{25}} = \frac{6}{\square}$

b) $\sqrt{\square\frac{4}{9}} = \frac{7}{\square}$

c) $\sqrt[3]{3\frac{\square}{8}} = \frac{3}{\square}$

Sprawdź się!

1 Oblicz.

a) $\sqrt{1,96 : 196}$

b) $\sqrt[3]{(-1) : 125}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8} : \frac{64}{27}}$

2 Oblicz.

a) $\sqrt{0,18} : \sqrt{2}$

b) $\sqrt{14} : \sqrt{\frac{7}{8}}$

c) $\sqrt[3]{72} : \sqrt[3]{9}$

3 O ile liczba $\sqrt{48}$ jest większa od liczby $\sqrt{3}$?

4 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczba $3\sqrt{5}$ jest mniejsza od liczby $5\sqrt{3}$.	P	F
Różnica liczb $\sqrt{80}$ i $\sqrt{45}$ jest równa $\sqrt{35}$.	P	F
Liczba $\sqrt[3]{81}$ jest 1,5 raza większa od liczby $\sqrt[3]{24}$.	P	F
Liczba $2\sqrt[3]{12}$ jest większa od liczby $3\sqrt[3]{4}$.	P	F

5 Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{3}{\sqrt{15}}$

b) $\frac{10}{\sqrt{5}}$

c) $\frac{9}{2\sqrt{3}}$

d) $\frac{8}{\sqrt[3]{2}}$

8. Szacowanie wartości wyrażeń zawierających pierwiastki

Przypomnij sobie

- czy pierwiastek z dowolnej liczby naturalnej jest zawsze liczbą naturalną,
- jaka jest przybliżona wartość liczby $\sqrt{2}$,
- jaka jest najmniejsza liczba naturalna większa od $\sqrt{3}$.

Wiemy, że $\sqrt{2} \approx 1,41$ i $\sqrt{3} \approx 1,73$. Przybliżenia te stosujemy w szacowaniu wartości wyrażeń zawierających pierwiastki.

Przykład 1.

Między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej znajduje się liczba:

a) $\sqrt{13}$, b) $\sqrt[3]{95}$?

a) $(\sqrt{13})^2 = 13$ $3^2 = 9$ $4^2 = 16$

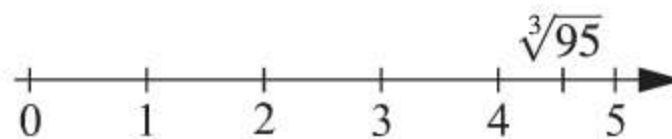
Ponieważ $9 < 13 < 16$, to $3 < \sqrt{13} < 4$.



ODPOWIEDŹ: Liczba $\sqrt{13}$ znajduje się na osi liczbowej między liczbami 3 i 4.

b) $(\sqrt[3]{95})^3 = 95$ $4^3 = 64$ $5^3 = 125$

Ponieważ $64 < 95 < 125$, to $4 < \sqrt[3]{95} < 5$.



ODPOWIEDŹ: Liczba $\sqrt[3]{95}$ znajduje się na osi liczbowej między liczbami 4 i 5.

1 Oszacuj, między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi znajduje się podana liczba.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{540}$ c) $\sqrt[3]{100}$ d) $\sqrt[3]{500}$

2 Znajdź najmniejszą liczbę naturalną większą od podanej.

a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{43}$ c) $\sqrt{56}$ d) $\sqrt{109}$

3 Znajdź największą liczbę naturalną mniejszą od podanej.

a) $\sqrt{300}$ b) $\sqrt[3]{50}$ c) $\sqrt[3]{150}$ d) $\sqrt[3]{600}$

4 Wskaż kilka liczb naturalnych n , jeśli $\sqrt{n}$ jest liczbą leżącą na osi liczbowej między:

a) 4 i 5, b) 10 i 11, c) 13 i 14, d) 30 i 31.

5 Oszacuj, bez używania kalkulatora, przybliżone wartości pierwiastków. Ustal, który ze znaków: $<$, $>$ lub $=$ należy wpisać w miejsce oznaczone $\blacksquare$.

a) $10 \blacksquare \sqrt{101}$ b) $4 \blacksquare \sqrt[3]{60}$ c) $\sqrt{200} + \sqrt{500} \blacksquare \sqrt{700}$

Przykład 2.

Oceńmy, która liczba jest największa: $a = 3\sqrt{8}$, $b = 4\sqrt{6}$ czy $c = 9$.

Sposób I

Zapiszmy każdą z tych liczb w postaci pierwiastka kwadratowego.

$$a = 3\sqrt{8} = \sqrt{9 \cdot 8} = \sqrt{72}$$

$$b = 4\sqrt{6} = \sqrt{16 \cdot 6} = \sqrt{96}$$

$$c = 9 = \sqrt{81}$$

$$\sqrt{96} > \sqrt{81} > \sqrt{72}, \text{ czyli } b > c > a$$

Sposób II

Wszystkie liczby są dodatnie, więc możemy porównać ich kwadraty.

$$a^2 = (3\sqrt{8})^2 = 9 \cdot 8 = 72$$

$$b^2 = (4\sqrt{6})^2 = 16 \cdot 6 = 96$$

$$c^2 = 9^2 = 81$$

$$96 > 81 > 72, \text{ czyli } b^2 > c^2 > a^2$$

Z dwóch liczb dodatnich większa jest ta, której kwadrat jest większy, czyli $b > c > a$.

ODPOWIEDŹ: Wśród liczb a , b , c największa jest liczba b .

- 6** Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

a) $2\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$, $4\sqrt{7}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$

b) $-10\sqrt{11}$, $2\sqrt{3}$, $-3\sqrt{11}$, $5\sqrt{3}$, $-\sqrt{11}$

- 7** Wybierz liczbę najmniejszą i największą.

a) $2\sqrt{18}$, $4\sqrt{5}$, $3\sqrt{7}$

b) $3\sqrt[3]{5}$, $2\sqrt[3]{12}$, $6\sqrt[3]{2}$

- 8** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczby: $0,5\sqrt[3]{32}$; $3\sqrt[3]{2}$; $0,1\sqrt[3]{20\,000}$ uszeregowane malejąco to

A. $0,1\sqrt[3]{20\,000}$; $0,5\sqrt[3]{32}$; $3\sqrt[3]{2}$

B. $3\sqrt[3]{2}$; $0,1\sqrt[3]{20\,000}$; $0,5\sqrt[3]{32}$

C. $0,1\sqrt[3]{20\,000}$; $3\sqrt[3]{2}$; $0,5\sqrt[3]{32}$

D. $0,5\sqrt[3]{32}$; $0,1\sqrt[3]{20\,000}$; $3\sqrt[3]{2}$

Przykład 3.

Oszacujmy, między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi znajduje się liczba:

a) $4\sqrt{2}$, b) $2\sqrt[3]{3}$.

a) $(4\sqrt{2})^2 = 16 \cdot 2 = 32$ $5^2 = 25$ $6^2 = 36$

Ponieważ $25 < 32 < 36$, to $5 < 4\sqrt{2} < 6$.

b) $(2\sqrt[3]{3})^3 = 8 \cdot 3 = 24$ $2^3 = 8$ $3^3 = 27$

Ponieważ $8 < 24 < 27$, to $2 < 2\sqrt[3]{3} < 3$.

- 9 Oceń prawdziwość podanych nierówności. Wybierz P, jeśli nierówność jest prawdziwa, albo F – jeśli jest fałszywa.

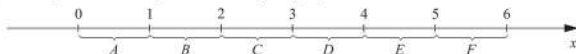
$2\sqrt{3} > 4$	P	F
$\frac{1}{2}\sqrt{8} < 2$	P	F
$5 < 2\sqrt{7} < 6$	P	F

$2\sqrt[3]{7} > 4$	P	F
$1 < \frac{1}{3}\sqrt[3]{9} < 2$	P	F
$3 < 2\sqrt[3]{5} < 4$	P	F

- 10 Oszacuj, między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi znajduje się podana liczba.

- a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{15}$ c) $4\sqrt[3]{2}$ d) $3\sqrt[3]{10}$

- 11 Oszacuj wartość wyrażenia i określ, w którym przedziale (A , B , C , D , E czy F) na poniższej osi liczbowej ta wartość się znajduje.



- a) $2\sqrt{20} - 2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{45} - \sqrt{20}$ c) $\sqrt{3} + \sqrt{12}$
 d) $\sqrt[3]{135} : 3$ e) $\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} : \frac{1}{\sqrt{7}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{32}}{3} + \sqrt[3]{4}$

Przykład 4.

Oszacujmy, jaka liczba naturalna na osi liczbowej jest najbliższa liczbie:

- a) $2\sqrt{5}$, b) $3\sqrt[3]{2}$.

Na początku określmy, między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi znajduje się podana liczba.

$$\text{a) } (2\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20 \qquad 4^2 = 16 \qquad 5^2 = 25$$

Wobec tego $4 < 2\sqrt{5} < 5$.

W środku odcinka wyznaczonego przez liczby 4 i 5 leży 4,5.

Sprawdźmy, czy liczba $2\sqrt{5}$ jest większa czy mniejsza od 4,5.

Ponieważ $4,5^2 = 20,25$, to $4 < 2\sqrt{5} < 4,5$.

Wobec tego liczba $2\sqrt{5}$ na osi liczbowej leży bliżej liczby 4 niż 5.

ODPOWIEDZ: Liczba naturalna na osi liczbowej najbliższa liczbie $2\sqrt{5}$ to 4.

$$\text{b) } (3\sqrt[3]{2})^3 = 27 \cdot 2 = 54 \qquad 3^3 = 27 \qquad 4^3 = 64$$

Wobec tego $3 < 3\sqrt[3]{2} < 4$.

W środku odcinka wyznaczonego przez liczby 3 i 4 leży 3,5.

Sprawdźmy, czy liczba $3\sqrt[3]{2}$ jest większa czy mniejsza od 3,5.

Ponieważ $3,5^3 = 42,875$, to $3,5 < 3\sqrt[3]{2} < 4$.

Wobec tego liczba $3\sqrt[3]{2}$ na osi liczbowej leży bliżej liczby 4 niż 3.

ODPOWIEDZ: Liczbą naturalną na osi liczbowej najbliższą liczbie $3\sqrt[3]{2}$ jest 4.

- 12** Oszacuj, jaka liczba naturalna na osi liczbowej jest najbliższa podanej liczbie.
 a) $2\sqrt{35}$ b) $3\sqrt{30}$ c) $5\sqrt[3]{2}$ d) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{200}$
- 13** Pole kwadratu jest sumą pól prostokątów o bokach długości $2\sqrt{13}$ cm i $2\sqrt{3\frac{1}{4}}$ cm oraz $2\sqrt{2}$ cm i $2\sqrt{8}$ cm. Oszacuj długość boku kwadratu z dokładnością do jednego centymetra.
- 14** Oszacuj, bez używania kalkulatora, wartości pierwiastków. Porównaj wyrażenia. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.
 a) $\sqrt{25+4}$ i $\sqrt{25} + \sqrt{4}$ b) $\sqrt[3]{0,064-0,008}$ i $\sqrt[3]{0,064} - \sqrt[3]{0,008}$

Wyzwanie

Oszacuj, bez używania kalkulatora, wartości pierwiastków. Porównaj wyrażenia. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.

- a) $2\sqrt{20} + 3\sqrt{10}$ i $5\sqrt{30}$ b) $3\sqrt{51} - 2\sqrt{15}$ i $\sqrt{143}$
 c) $4\sqrt[3]{50}$ i $2\sqrt[3]{24} + 2\sqrt[3]{26}$ d) $6\sqrt[3]{45}$ i $10\sqrt[3]{95} - 4\sqrt[3]{40}$

Sprawdź się!

- 1** Oszacuj, między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi znajduje się podana liczba.
 a) $\sqrt{13}$ b) $\sqrt{73}$ c) $\sqrt{132}$ d) $\sqrt[3]{20}$
- 2** Oszacuj, bez używania kalkulatora, wartości pierwiastków. Ustal, który ze znaków: $<$, $>$ lub $=$ należy wpisać w miejsce oznaczone $\square$.
 a) $\sqrt{30} + \sqrt{40} \square \sqrt{70}$ b) $\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{30} \square \sqrt[3]{40}$
- 3** Dane są dwie liczby: $a = 2\sqrt{5}$ i $b = 5\sqrt{2}$. Czy $a < b$? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$\sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{5 \cdot 2}$.
B.	Nie,		2.	$\sqrt{20} < \sqrt{50}$.

- 4** Dane jest wyrażenie $\sqrt{10} - \sqrt{6}$. Oszacuj jego wartość i określ, między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi się ona znajduje.
- 5** Oszacuj, bez używania kalkulatora, wartości pierwiastków. Porównaj wyrażenia. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.
 a) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}$ i $\sqrt[3]{8+27}$ b) $\sqrt{0,36} + \sqrt{0,81}$ i $\sqrt{0,36+0,81}$

Zadania utrwalające

- 1 Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $<$, $>$ lub $=$.
 a) 2^3 i 3^2 b) 4^2 i 2^4 c) 3^3 i 9^1 d) 7^2 i 3^3
- 2 Oblicz.
 a) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^2$ b) -8^2 c) $\left(\frac{43}{59}\right)^0$ d) $(-0,0004)^3$
- 3 Oblicz.
 a) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ b) $\sqrt{1,21}$ c) $(\sqrt[3]{5})^3$ d) $\sqrt[3]{-\frac{64}{125}}$
- 4 Wykonaj działania.
 a) $(-2)^2 \cdot (-2)^3$ b) $(-0,2)^7 \cdot 5^7$ c) $(0,002)^3 \cdot (-0,5)^3$
 d) $\sqrt{2\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1,6}$ e) $\sqrt[3]{1\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{4,5}$ f) $\left(\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{\frac{5}{12}}\right)^6$
- 5 Podaj wartość wykładnika n .
 a) $1\,000\,000\,000 = 10^n$ b) $12\,345,6 = 1,23456 \cdot 10^n$
 c) $6^2 \cdot 6^4 \cdot 6^{12} \cdot 6 = 6^n$ d) $12^{12} : 12^4 : 12^8 = 12^n$
 e) $a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^n = a^{10}$, $a > 1$ f) $a \cdot b \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot a^n \cdot b^n = a^7 b^8$, $a > 1$ i $b > 1$
- 6 Uzasadnij podaną równość, jeśli wiesz, że $a \cdot b \cdot c = 1$.
 a) $a^3 \cdot b \cdot c = a^2$ b) $a^2 \cdot b^3 \cdot c^2 = b$ c) $a^3 \cdot b^3 \cdot c^4 = c$
- 7 Wyznacz najprostszym sposobem najmniejszą liczbę naturalną n , dla której $2^n > 1\,000\,000$.
- 8 Oblicz wartość liczbową wyrażenia.
 a) $\frac{(x^6 : x^4)^5 \cdot x^2}{x \cdot x^5}$ dla $x = -\left|-\frac{1}{2}\right|$ b) $\frac{(y^4 \cdot y^2)^3 : y^{12}}{y^2 \cdot y}$ dla $y = -\left|\frac{1}{3}\right|$
- 9 Wyznacz liczbę n , jeżeli:
 a) $15 \cdot 10^{-2} = 1,5 \cdot 10^n$, b) $2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 5,6 \cdot 10^{-2} = 1,4 \cdot 10^n$.
- 10 Jajo strusie ma masę $1,7 \cdot 10^3$ g, a jajo kurze – masę $6 \cdot 10^{-2}$ kg. Ile razy jajo kurze jest lżejsze od jaja strusia?
- 11 Zapisz w notacji wykładniczej.
 a) 0,3 kg – masa serca człowieka b) 0,000005 kg – masa mrówki





- 12** Długość jednego kroku olbrzyma z literatury science fiction jest równa odległości Księżyca od Ziemi, która wynosi w przybliżeniu $3,8 \cdot 10^5$ km.
- a) Średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi ok. 150 milionów kilometrów. Ile kroków powinien wykonać olbrzym, aby pokonać tę odległość?
- b) Gwiazda Syriusz A z konstelacji Wielkiego Psa znajduje się w odległości $8 \cdot 10^{13}$ km od Ziemi. Ile kroków musi wykonać olbrzym, by pokonać odległość od Ziemi do Syriusza A?



- 13** Elektron ma masę ok. $9 \cdot 10^{-31}$ kg, a proton – ok. $1,7 \cdot 10^{-27}$ kg. Jaka jest łączna masa tych cząstek?

- 14** Uporządkuj rosnąco liczby:

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^0, \sqrt[3]{27}, -4^2, -\sqrt{1,21}, \left(-\frac{1}{3}\right)^2, (-4)^2, -\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

- 15** Oblicz.

a) $(\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{27}) \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{5} - \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt{1\frac{3}{4}} : \sqrt{3\frac{15}{16}} + \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$

d) $\left[2^2 - \sqrt{1\frac{9}{16}} : \left(-1\frac{1}{4}\right)^2\right] \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right)^3$

- 16** Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $\sqrt{8} + 2\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{300}$

b) $4\sqrt[3]{54} + 8\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{250}$

- 17** Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{4}{3\sqrt{6}}$

c) $\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}}$

d) $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{10}}$

- 18** Podaj, między jakimi kolejnymi liczbami całkowitymi znajduje się każda z liczb:

$$\sqrt[3]{3}, \sqrt{17}, -\sqrt{0,02}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, -\sqrt{1,2}, \sqrt[3]{62}.$$

- 19** Jaką liczbę zastępuje gwiazdka?

a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{15}}{*}$

b) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{*}{\sqrt{20}}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{*} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{24}}$

- 20** Zapisz liczbę 50 wyłącznie za pomocą potęg liczby 7 i znaków działań. Czy jest tylko jeden taki zapis?

- 21** Udowodnij, że suma $3^9 + 3^{10} + 3^{11}$ jest podzielna przez 13.

- 22** Wykaż, że wyrażenie $\frac{6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{98} + 6^{99} + 6^{100}}{1 + 2 + 4}$ jest liczbą całkowitą.

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–9. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Suma potęg $3^{10} + 3^{10} + 3^{10}$ jest równa
 A. 9^{30} B. 3^{30} C. 3^{11} D. 9^{20}
- 2 Wartość wyrażenia $\sqrt{81} - \sqrt[3]{125} : \sqrt{225}$ jest równa
 A. $8\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{15}$ C. 6 D. $\frac{44}{5}$
- 3 Po wykonaniu działań w wyrażeniu $\frac{(x^2)^3 \cdot (x^4)^6}{(x^3)^5 \cdot (x^6)^2}$, gdzie $x \neq 0$, otrzymuje się
 A. x B. x^2 C. x^3 D. x^4
- 4 Wartość wyrażenia $(\sqrt{6})^3$ **nie** jest równa
 A. $\sqrt{6^3}$ B. $\sqrt{216}$ C. $6\sqrt{6}$ D. $\sqrt[3]{6^2}$
- 5 Wartością wyrażenia $\sqrt{a-5} + \sqrt[3]{b^2+25}$ dla $a = 30$ i $b = 10$ jest
 A. 25 B. 5 C. $\sqrt{15}$ D. 10
- 6 Wartość wyrażenia $\left[\left| -\sqrt{2\frac{1}{4}} \right| + (-2)^3 : \left| -1\frac{3}{5} \right| \right] \cdot \sqrt{16}$ jest równa
 A. 26 B. -14 C. -10 D. 3
- 7 Ośmiokrotność liczby 32^{25} to
 A. 8^{42} B. 256^{12} C. 16^{32} D. 4^{62}
- 8 $\frac{1}{27}$ liczby 9^{24} to
 A. $\left(\frac{1}{3}\right)^{24}$ B. 3^{23} C. 3^{45} D. 9^{21}
- 9 Różnica pól kwadratów o bokach długości $3 \cdot 10^6$ cm i $4 \cdot 10^5$ cm jest równa
 A. $2,6 \cdot 10^6 \text{ cm}^2$ B. $7 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$
 C. $8,84 \cdot 10^{12} \text{ cm}^2$ D. $7,4 \cdot 10^{11} \text{ cm}^2$

W zadaniach 10.–12. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 10 Która liczba jest największa?
 A. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{12}$ B. $\sqrt{242} : \sqrt{2}$ C. $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{0,5}$ D. $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{\frac{1}{24}}$

- 11 Która z podanych liczb jest mniejsza niż 7 i większa niż 6?
 A. $\sqrt{63}$ B. $3\sqrt{11}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $\sqrt{75}$

- 12 Która spośród poniższych wartości jest najmniejsza?
 A. Grubość włosa ludzkiego równa 0,00007 m.
 B. Średnica czerwonego ciała krwi równa $7,5 \cdot 10^{-6}$ m.
 C. Średnica ciała ameby równa 0,00062 m.
 D. Średnica ziarenka pyłku kwiatowego równa $1,5 \cdot 10^{-5}$ m.

- 13 Oceń prawdziwość podanych zapisów. Wybierz P, jeśli zapis jest prawdziwy, albo F – jeśli jest fałszywy.

$2^4 \cdot 3^2 = 12^2$	P	F
$2^4 \cdot 3^4 = 5^4$	P	F

$2^4 \cdot 3^4 = 6^4$	P	F
$2^4 \cdot 3^2 = 5^6$	P	F

- 14 Dane są dwie liczby: $a = \sqrt[3]{1\frac{1}{3}} \sqrt[3]{-216} \cdot \sqrt{10}$ i $b = -\sqrt{128} + \sqrt{18}$. Czy liczba a jest większa od liczby b ?

Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$-11\sqrt{2} < -2\sqrt{10}$.
			2.	$-\sqrt{20} < -\sqrt{10}$.
B.	Nie,		3.	$-\sqrt{40} > -\sqrt{50}$.

- 15 Dane są liczby: $x = 4^4 + 3 \cdot 2^8$ i $y = 2^9 + 2^9$. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Suma liczb x i y jest równa A / B.

A. 2^{28} B. 2^{11}

Podwojony iloczyn liczb x i y wynosi C / D.

C. 4^{20} D. 2^{21}

- 16 W rejonie austriackiego miasta Graz teren obniża się średnio o $4 \cdot 10^{-3}$ m na rok. O ile centymetrów obniży się ten teren w ciągu wieku? Zapisz obliczenia.

- 17 Ile razy pole prostokąta o bokach długości $\sqrt{5}$ cm i $\sqrt{10}$ cm jest większe od pola prostokąta o bokach długości 1 cm i $\sqrt{2}$ cm? Zapisz obliczenia.

- 18 Udowodnij, że suma $100^{23} + 5^0 + 2^2$ jest podzielna przez 15.

Matematyka a kryptologia*

Przez lata szyfrowanie miało zapewnić tajność komunikacji – głównie między szpiegami, wojskowymi, a także dyplomatami. W dzisiejszych czasach trudno jest wyobrazić sobie codzienne życie bez kryptografii. Zapewnia ona bezpieczeństwo użytkownikom banków, telefonii komórkowej, internetu.

Skytale

To jedna z najstarszych metod szyfrowania wiadomości. Używali jej głównie Spartanie w starożytnej Grecji. Na drewniany kołek nawijano pas ze skóry lub pergaminu. Nadawca pisał wiadomość wzdłuż kołka, po czym odwijał pas. Widniała na nim pozornie bezsensowna sekwencja liter. Aby rozszyfrować wiadomość, należało nawinąć pas na kołek tej samej grubości.



Skórzany pas posłaniec owijał sobie wokół bioder, literami do wewnątrz, żeby nie wzbudzał żadnych podejrzeń.



Szyfr Cezara

Za pomocą tego szyfru porozumiewali się Cezar z Cyncerem. To szyfr przesuwający. Polega na zastąpieniu każdej litery inną, leżącą o 3 pozycje w prawo w alfabecie. Przykładowo, jeśli chcemy zaszyfrować słowo WOJNA, to zapiszemy je jako ZSMRD.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	R

* Kryptologia to nauka o szyfrowaniu i łamaniu szyfrów.

Enigma (z łaciny *aenigma*, czytaj: enigma – zagadka)

Ta przenośna maszyna szyfrująca, zbudowana w Niemczech, była stosowana przez tamtejsze siły zbrojne od 1926 roku. Zapewniała bardzo wysokie bezpieczeństwo przekazu meldunków. Niemcy stosowali różne typy Enigmy i stale ją udoskonalali, dlatego jej szyfr był tak trudny do złamania.

Wpisywany tekst był w Enigmie wielokrotnie szyfrowany za pomocą obracających się bębenków. Każdą literę zamieniano na inną według ustalonego klucza, który ulegał modyfikacjom podczas wpisywania kolejnej litery wraz z obrotem bębenków o zadaną liczbę pozycji.



Pogromcy Enigmy

W 1932 roku trzech polscy matematycy, zatrudnieni w Biurze Szyfrów Sztabu Głównego Wojska Polskiego, **złamali szyfr Enigmy**.

W 1939 roku, tuż przed wybuchem wojny, polscy kryptolodzy przekazali swą wiedzę wywiadowi brytyjskiemu. Niestety, Niemcy wciąż pracowali nad ulepszeniem mechanizmów szyfrowania Enigmy, więc prace nad odczytywaniem przechwyconych wiadomości trzeba było kontynuować. Zajęli się tym brytyjscy kryptolodzy.



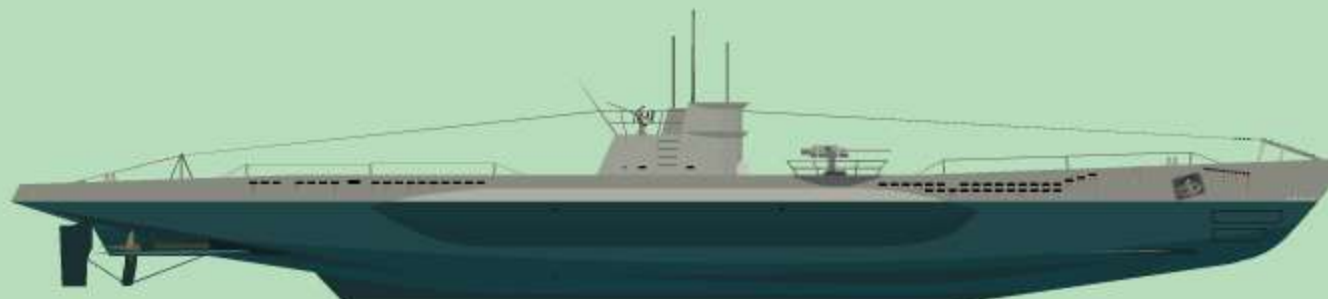
Marian Rejewski



Jerzy Różycki



Henryk Zygalski



Niemiecki okręt podwodny (U-Boot). Na takich okrętach powszechnie używano maszyn Enigma do szyfrowania wiadomości.

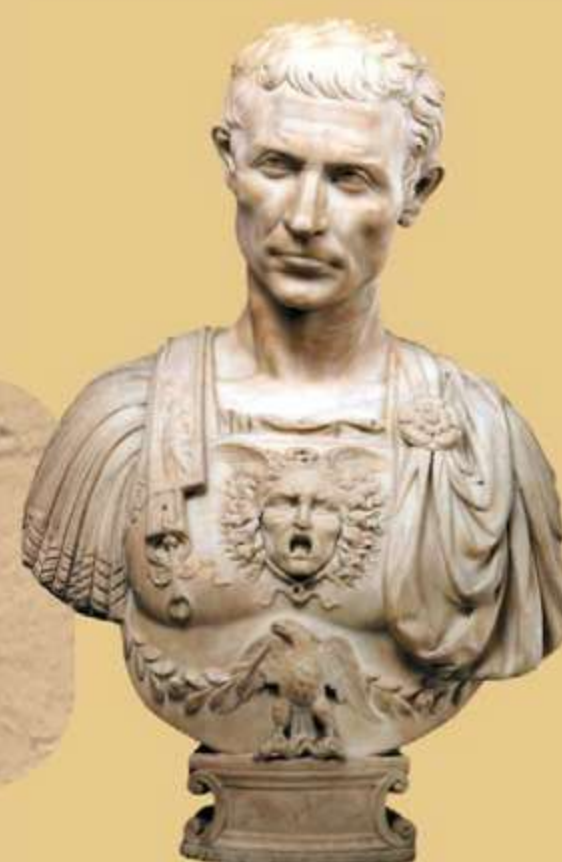


Jeśli chcesz się wczuć w rolę kryptologa, możesz skorzystać z symulatorów Enigmy w internecie.

Juliusz Cezar (100–44 p.n.e.)

– rzymski wojskowy, polityk i przywódca.

O	P	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

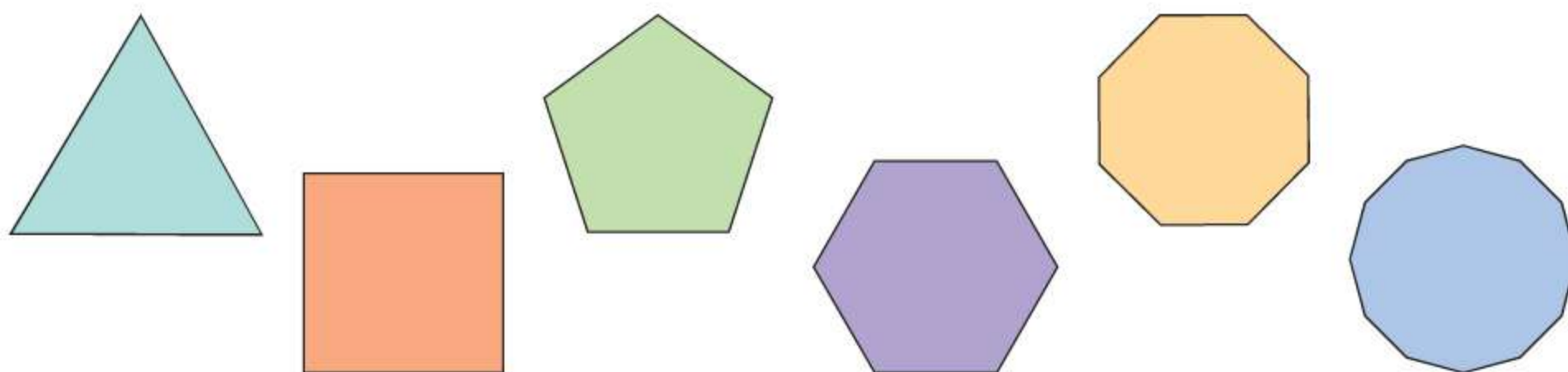


1. Przekątna kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego

Przypomnij sobie

- jakie wielokąty nazywamy foremnymi,
- jakie własności mają kwadrat i trójkąt równoboczny,
- o czym mówi twierdzenie Pitagorasa.

Kwadrat i trójkąt równoboczny są wielokątami foremnymi, ponieważ mają boki równej długości i kąty jednakowej miary. Na rysunku przedstawiono jeszcze inne wielokąty foremne.



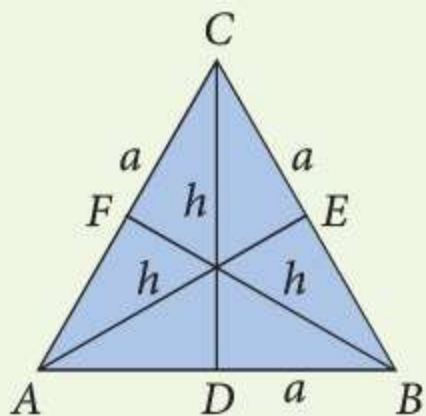
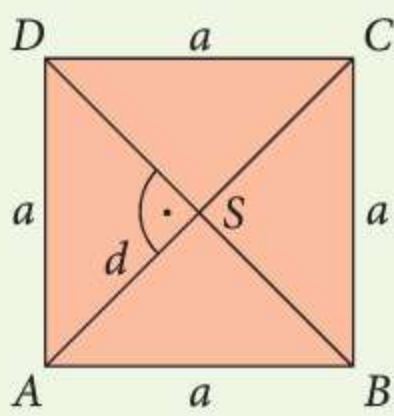
Wielokątem foremnym nazywamy wielokąt, w którym jednocześnie spełnione są dwa warunki:

- boki są równej długości,
- kąty wewnętrzne mają równe miary.

- 1** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Romb jest czworokątem foremnym, gdyż ma wszystkie boki równej długości.	P	F
Trójkąt równoboczny jest wielokątem foremnym, gdyż wszystkie jego boki są równej długości, a kąty mają po 60° .	P	F
Prostokąt jest wielokątem foremnym, bo jego kąty wewnętrzne mają równe miary.	P	F
Wśród czworokątów tylko kwadrat jest wielokątem foremnym.	P	F

W tabeli podano własności trójkąta równobocznego i kwadratu.

Trójkąt równoboczny	Kwadrat
	
Wszystkie boki mają jednakowe długości. $ AB = BC = CA = a$	Wszystkie boki mają jednakowe długości. $ AB = BC = CD = DA = a$
Wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary. $ \sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 60^\circ$	Wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary. $ \sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = 90^\circ$
Wysokości CD , AE , BF przecinają się w jednym punkcie S i są równe. $ CD = AE = BF = h$ Każda wysokość dzieli na połowy bok i kąt wewnętrzny trójkąta. Np. $ AD = DB = \frac{1}{2}a$, $ \sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = 30^\circ$	Przekątne są prostopadłe i równej długości. $AC \perp BD$, $ AC = BD = d$ Przekątne dzielą się na połowy oraz dzielą na połowy kąty wewnętrzne. Np. $ AS = SC $, $ \sphericalangle DAC = \sphericalangle CAB = 45^\circ$
Obwód $L = 3a$	Obwód $L = 4a$
Pole $P = \frac{a \cdot h}{2}$	Pole $P = a^2$ lub $P = \frac{d^2}{2}$

- 2 W kwadracie narysowano przekątną, a w trójkącie równobocznym wysokość. Jakie miary mają kąty w otrzymanych trójkątach? Odpowiedź uzasadnij.

- 3 W kwadracie narysowano przekątne. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Trójkątów równoramiennych, które w ten sposób otrzymano, jest **A / B**.

A. 4

B. 8

Wszystkie otrzymane trójkąty są **C / D**.

C. prostokątne

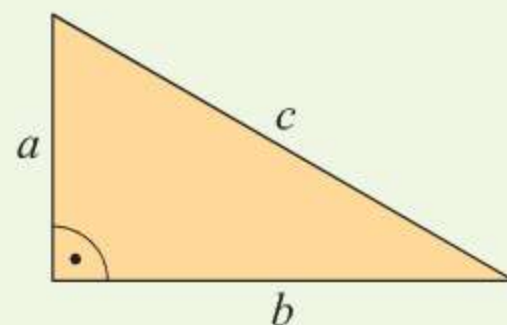
D. równoboczne

Do wyznaczenia wzorów na długość przekątnej kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego będziemy korzystać z twierdzenia Pitagorasa:



Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



- 4 Przeciwnprostokątna trójkąta ma długość $2\sqrt{5}$, a jedna z przyprostokątnych ma długość $\sqrt{2}$. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Trzeci bok trójkąta ma długość
- A. 18 B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $\sqrt{22}$

- 5 Powierzchnia kwadratowego parku wynosi 1 ha. Najdłuższa alejka w tym parku biegnie wzdłuż przekątnej. Czy jej długość jest większa niż 150 m? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	długość przekątnej kwadratu jest równa $\sqrt{(100 \text{ m})^2 + (100 \text{ m})^2} = 100\sqrt{2} \text{ m}$.
B.	Nie,		2.	długość boku kwadratu wynosi $\sqrt{1000 \text{ m}^2} = 10\sqrt{10} \text{ m}$.

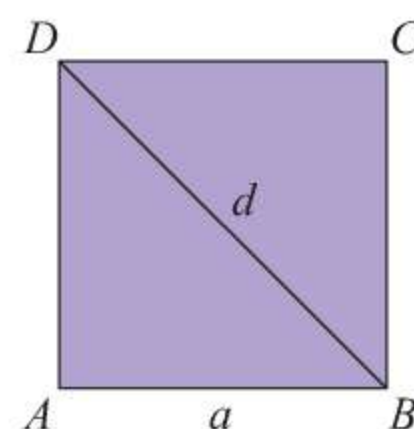
Przykład 1.

Obliczmy długość przekątnej kwadratu o boku a .

- a) $a = 3 \text{ cm}$
 b) $a = 1,3 \text{ dm}$
 c) $a = \frac{2}{3} \text{ m}$

Przekątna BD podzieliła kwadrat $ABCD$ na dwa przystające równoramienne trójkąty prostokątne BAD i BCD . Skorzystajmy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BAD (połowy kwadratu).

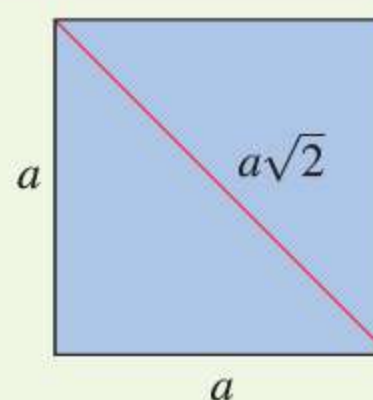
- a) $d^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$, $d = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \text{ [cm]}$
 b) $d^2 = 1,3^2 + 1,3^2 = 1,69 + 1,69 = 2 \cdot 1,69$, $d = \sqrt{1,69 \cdot 2} = 1,3\sqrt{2} \text{ [dm]}$
 c) $d^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 2 \cdot \frac{4}{9}$, $d = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 2} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \text{ [m]}$



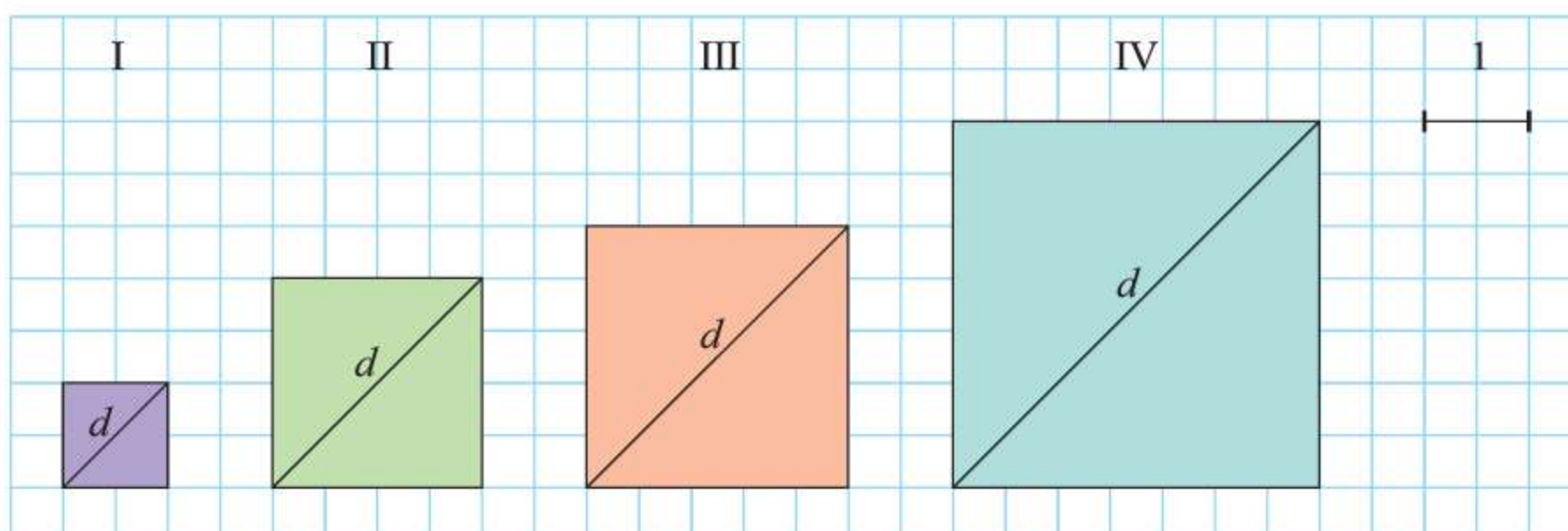
Zwróćmy uwagę na związek między długością a boku kwadratu a długością d jego przekątnej. Widzimy, że długość tej przekątnej jest w każdym przypadku iloczynem długości boku kwadratu i $\sqrt{2}$.

Długość d przekątnej kwadratu o boku a wyraża się wzorem:

$$d = a\sqrt{2}$$



- 6 Zapisz pary: numer kwadratu i literę odpowiadającą długości jego przekątnej.



- A. $2\sqrt{2}$ B. $2,5\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3,5\sqrt{2}$ E. $\sqrt{2}$

- 7 Oblicz długość przekątnej kwadratu o boku a .

- a) $a = 0,75$ b) $a = \frac{3}{7}$ c) $a = \sqrt{2}$ d) $a = 2\sqrt{3}$ e) $a = 3\sqrt{5}$

- 8 Oblicz długość przekątnej kwadratu o podanym obwodzie.

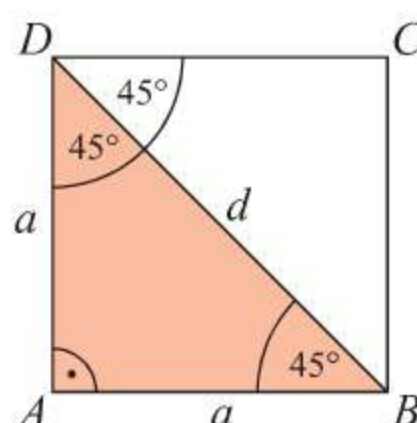
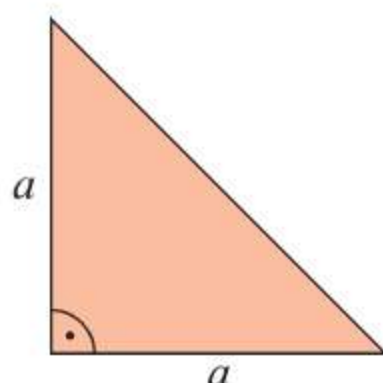
- a) 10 b) $\frac{4}{9}$ c) $8\sqrt{2}$ d) $12\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{5}$

- 9 Oblicz obwód kwadratu o przekątnej d .

- a) $d = \sqrt{2}$ b) $d = \frac{3}{7}$ c) $d = 0,75$ d) $d = 2\sqrt{3}$ e) $d = 3\sqrt{5}$

Przykład 2.

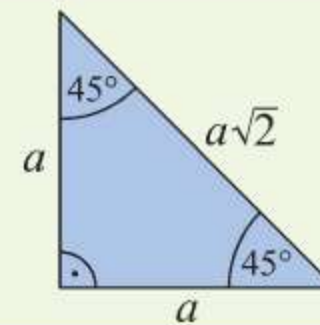
Wyznamy długości boków trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego przyprostokątna ma długość a .



Taki trójkąt stanowi połowę kwadratu przedstawionego na rysunku. W kwadracie o boku a obliczamy jego przekątną d za pomocą wzoru $d = a\sqrt{2}$. Wobec tego trójkąt prostokątny równoramienny ma boki długości: a , a , $a\sqrt{2}$.



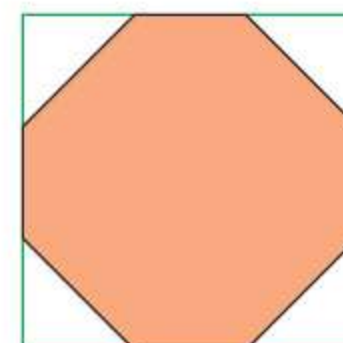
Długości boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych 45° i 45° oraz przyprostokątnej a wynoszą: $a, a, a\sqrt{2}$.



- 10** Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego, w którym najdłuższy bok ma podaną długość.

a) 8 b) 0,15 c) $2\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{6}$ e) $x\sqrt{3}$

- 11** Boki kwadratu podzielono na trzy części równej długości i punkty podziału połączono odcinkami jak na rysunku. Czy otrzymany ośmiokąt jest foremny? Odpowiedź uzasadnij.



Przykład 3.

Obliczmy wysokość trójkąta równobocznego o boku a .

a) $a = 4$ cm b) $a = 1,6$ dm c) $a = \frac{2}{3}$ m

Wysokość CD podzieliła trójkąt ABC na dwa przystające trójkąty prostokątne ADC i BDC . W trójkącie ABC :

$$|AC| = a, |AD| = \frac{1}{2}a.$$

Zastosujmy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ADC (połowy trójkąta równobocznego).

a) $h^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12, \quad h = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ [cm]

b) $h^2 = 1,6^2 - 0,8^2 = 2,56 - 0,64 = 1,92, \quad h = \sqrt{1,92} = \sqrt{0,64 \cdot 3} = 0,8\sqrt{3}$ [dm]

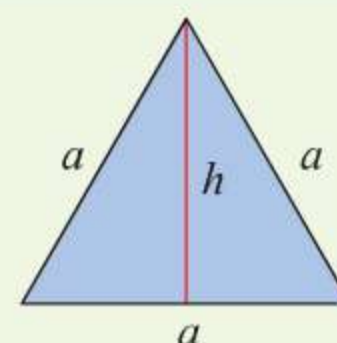
c) $h^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9}, \quad h = \sqrt{\frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ [m]

Zwróćmy uwagę na związek między długością a boku trójkąta równobocznego a jego wysokością h . Widzimy, że wysokość jest w każdym przypadku iloczynem połowy długości boku trójkąta i $\sqrt{3}$.



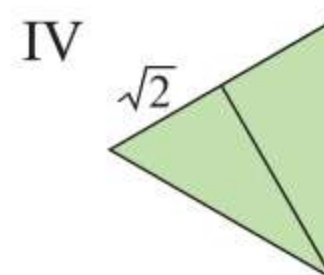
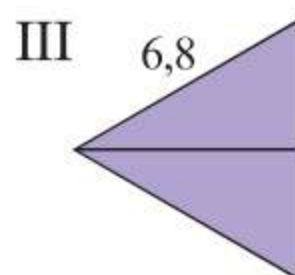
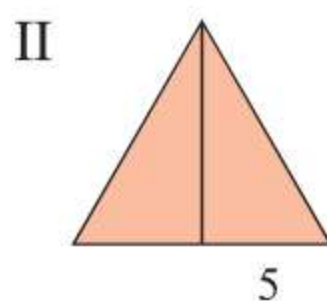
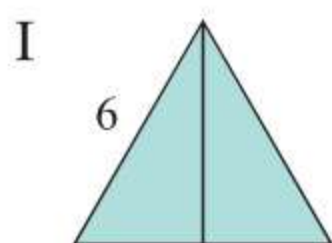
Wysokość h trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$





- 12** Zapisz pary: numer trójkąta równobocznego i literę odpowiadającą jego wysokości.



A. $5\sqrt{3}$

B. $3\sqrt{3}$

C. $3,4\sqrt{3}$

D. $3,4\sqrt{2}$

E. $\sqrt{6}$

- 13** Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o boku a .

a) $a = 0,56$ b) $a = \frac{4}{7}$ c) $a = 4\sqrt{2}$ d) $a = 2\sqrt{3}$ e) $a = 3\sqrt{5}$

- 14** Oblicz obwód trójkąta równobocznego o wysokości h .

a) $h = \sqrt{3}$ b) $h = \frac{4}{7}$ c) $h = 0,56$ d) $h = 2\sqrt{2}$ e) $h = 3\sqrt{5}$

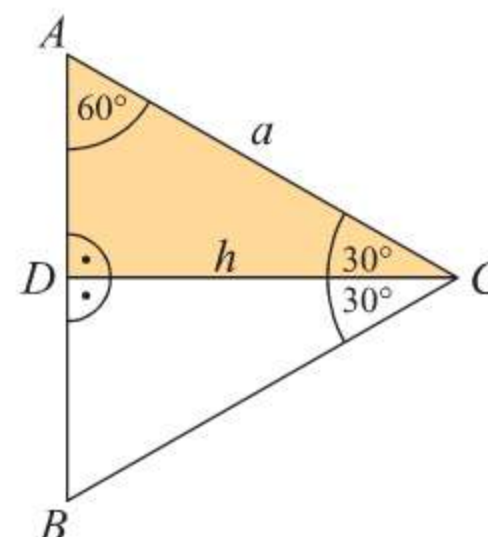
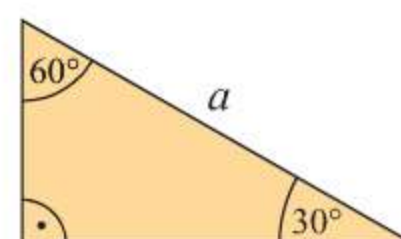
Przykład 4.

Wyznamy długości boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych 30° i 60° , którego przeciwprostokątna ma długość a .

Taki trójkąt prostokątny stanowi połowę trójkąta równobocznego ABC , przedstawionego na rysunku.

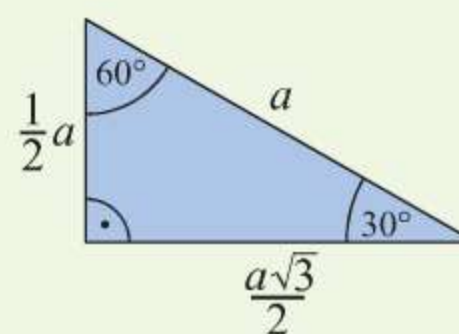
W trójkącie równobocznym o boku a obliczamy wysokość h za pomocą wzoru $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Długość boku AD jest równa połowie długości boku AB , czyli $|AD| = \frac{1}{2}a$.

Długości boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych 30° i 60° oraz przeciwprostokątnej a wynoszą: a , $\frac{1}{2}a$ oraz $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



W trójkącie prostokątnym o kątach ostrych 30° i 60° oraz przeciwprostokątnej a :

- krótsza przyprostokątna leży naprzeciw najmniejszego kąta i ma długość $\frac{1}{2}a$,
- dłuższa przyprostokątna ma długość $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



- 15** Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, w którym najmniejszy kąt jest równy 30° , a najdłuższy bok ma daną długość.

a) 8 cm b) 0,36 dm c) $2\sqrt{2}$ cm d) $4\sqrt{6}$ dm e) $x\sqrt{3}$ m

- 16** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

W trójkącie prostokątnym równoramiennym stosunek długości przeciwprostokątnej do przyprostokątnej jest równy $\sqrt{2}$.	P	F
Jeśli przekątna prostokąta jest dwa razy dłuższa od krótszego boku tego prostokąta, to kąt, jaki tworzy ta przekątna z dłuższym bokiem, ma 60° .	P	F

- 17** Na boku DC kwadratu $ABCD$ zbudowano trójkąt równoboczny CDE tak, że punkt E leży na zewnątrz kwadratu. Co ma większy obwód: kwadrat czy czworokąt $ACED$? O ile większy? Przyjmij, że $|DC| = a$.
- 18** Jeden z boków trójkąta o kątach 30° i 60° ma długość k . Jakie długości mają pozostałe boki tego trójkąta? Podaj wszystkie możliwości.

Wyzwanie

W trójkącie rozwartokątnym dwa kąty mają miary 30° i 135° , a najdłuższy bok ma długość 18 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

Sprawdź się!

- Podaj w centymetrach długość przekątnej kwadratu o boku danej długości.
a) 5 dm b) $2\sqrt{2}$ mm
- Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego, w którym najdłuższy bok jest równy $x\sqrt{2}$.
- Uzasadnij, że wysokość trójkąta równobocznego o boku długości $\sqrt{6}$ nie jest liczbą całkowitą.
- W wyniku przecięcia trójkąta równobocznego o boku długości 6,8 cm wzdłuż jego wysokości powstały dwa trójkąty. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
W jednym z powstałych trójkątów bok o długości 3,4 cm leży naprzeciw kąta, którego miara wynosi **A / B**.
A. 60° **B.** 30°
Średni bok w jednym z powstałych trójkątów ma długość **C / D**.
C. $3,4\sqrt{3}$ cm **D.** $6,8\sqrt{2}$ cm
- W kwadracie poprowadzono przekątne oraz odcinki łączące środki sąsiednich boków. Podaj długości boków i miary kątów najmniejszych trójkątów powstałych w wyniku takiego podziału kwadratu. Przyjmij, że przekątna wyjściowego kwadratu ma długość 10 cm.

2. Pola wielokątów foremnych

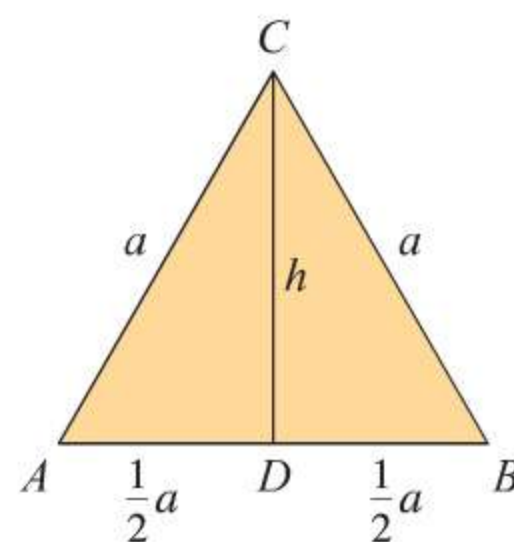
Przykład 1.

Ustalmy, jaki związek zachodzi między bokiem a trójkąta równobocznego a jego polem.

Pole dowolnego trójkąta obliczamy ze wzoru $P = \frac{1}{2}ah$, gdzie a – długość podstawy trójkąta, h – wysokość opuszczona na tę podstawę.

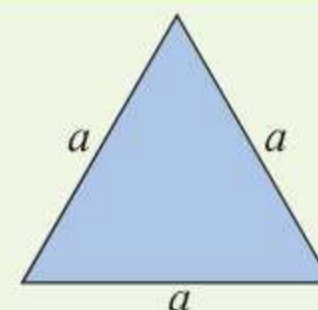
Wiemy już, że w trójkącie równobocznym $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Wobec tego $P = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

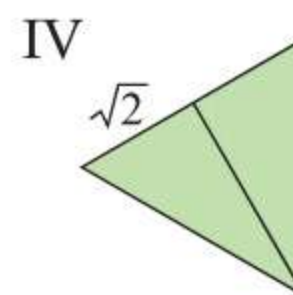
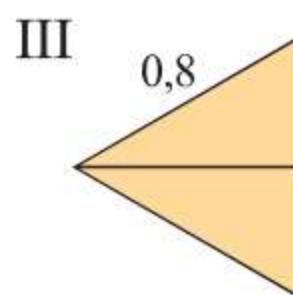
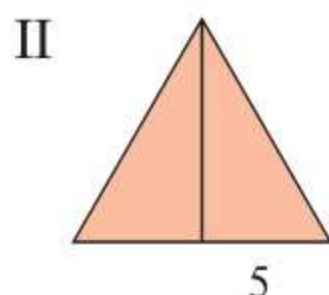
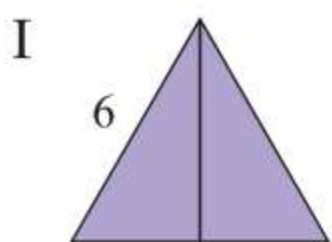


Pole P trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



- 1 Zapisz pary: numer trójkąta równobocznego i literę odpowiadającą jego polu.



- A. $0,16\sqrt{3}$ B. $9\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $1,6\sqrt{2}$ E. $25\sqrt{3}$

- 2 Oblicz pole trójkąta równobocznego o boku a .

- a) $a = 0,6$ b) $a = 1\frac{3}{5}$ c) $a = 2\sqrt{2}$ d) $a = 3\sqrt{3}$ e) $a = 4\sqrt{5}$

- 3 Oblicz długość boku trójkąta równobocznego o danym polu P .

- a) $P = 4\sqrt{3}$ b) $P = \frac{\sqrt{3}}{16}$ c) $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$

- 4 Pole trójkąta równobocznego wynosi $\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Obwód tego trójkąta wynosi A / B.

A. $2\sqrt{3} \text{ cm}$

B. 6 cm

Wysokość tego trójkąta jest równa C / D.

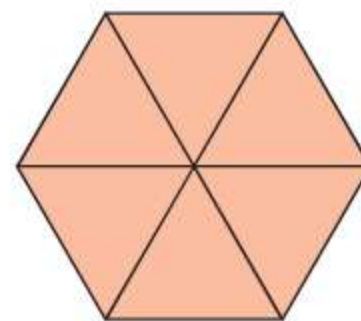
C. $\sqrt{3} \text{ cm}$

D. 2 cm

- 5 Oblicz pole trójkąta równobocznego o podanej wysokości h .

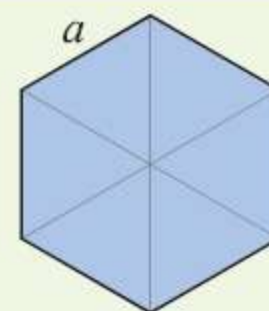
- a) $h = 6\sqrt{3}$ b) $h = 6$ c) $h = 1,5$

Zauważmy, że sześciokąt foremny można podzielić na sześć przystających trójkątów równobocznych, których bok ma taką samą długość jak bok sześciokąta. Wobec tego, aby obliczyć pole sześciokąta foremnego, wystarczy wyznaczyć pole trójkąta równobocznego i pomnożyć je przez 6.



Pole P sześciokąta foremnego o boku a wyraża się wzorem:

$$6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad \text{czyli} \quad P = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$$



Przykład 2.

Obliczmy pole sześciokąta foremnego o boku długości:

a) 8, b) $b\sqrt{2}$.

$$\text{a) } P = 6 \cdot \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{64\sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3}$$

$$\text{b) } P = 6 \cdot \frac{(b\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{2b^2\sqrt{3}}{4} = 3b^2\sqrt{3}$$

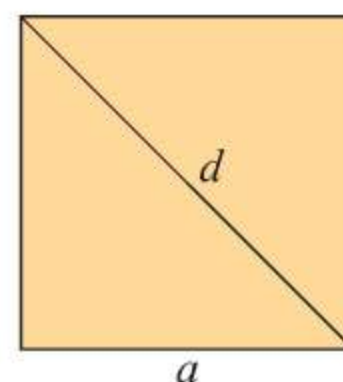
6 Oblicz pole sześciokąta foremnego o boku a .

a) $a = 1,2$ b) $a = 2\frac{1}{5}$ c) $a = 3\sqrt{2}$ d) $a = 2\sqrt{3}$ e) $a = \sqrt{5}$

Przykład 3.

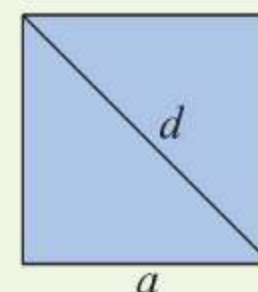
Wyznaczymy pole kwadratu, którego przekątna ma długość d .

Oznaczmy przez a długość boku kwadratu. Wiemy, że $d = a\sqrt{2}$ oraz pole kwadratu $P = a^2$. Wobec tego $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$, więc $P = \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{d^2}{2}$.



Pole P kwadratu o przekątnej d wyraża się wzorem:

$$P = \frac{d^2}{2}$$

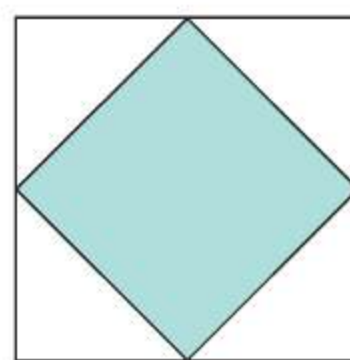
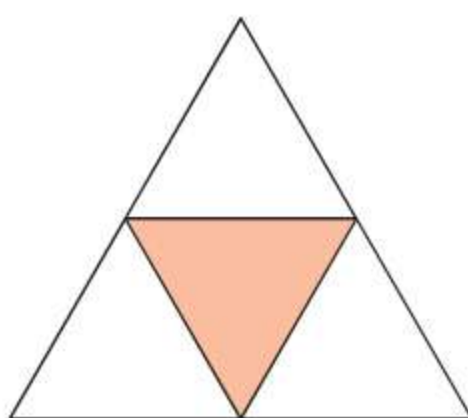




- 7 Oblicz pole kwadratu, którego przekątna ma długość:
 a) $3\sqrt{2}$, b) 6, c) $\sqrt{6}$, d) 2,4, e) d .
- 8 Pole czworokąta foremnego jest równe 32 cm^2 . Udowodnij, że jego przekątna ma długość 8 cm.
- 9 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeśli wysokość trójkąta równobocznego wynosi $3\sqrt{3}$, to jego pole jest równe $9\sqrt{2}$.	P	F
Długość przekątnej kwadratu o polu równym 8 wynosi 4.	P	F
Jeśli pole sześciokąta foremnego wynosi $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$, to jego obwód jest równy 24 cm.	P	F

- 10 Trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny mają taki sam obwód równy 24 cm. Oblicz pole każdej z tych figur. Która z nich ma największe pole, a która – najmniejsze?
- 11 Pole trójkąta równobocznego wynosi 20 cm^2 , a długość przekątnej kwadratu jest równa $2\sqrt{5} \text{ cm}$. Pole którego wielokąta jest większe i ile razy?
- 12 Długość boku trójkąta równobocznego i kwadratu jest równa 2 cm. Środki boków tych wielokątów połączono ze sobą tak, jak na rysunku. Oblicz pola zamalowanych figur.



- 13 W trójkącie równobocznym zmniejszono o 20% długość każdego boku, a w kwadracie zmniejszono długość obu przekątnych, też o 20%. Ile razy zmniejszyło się pole tych wielokątów? Odpowiedź uzasadnij.
- 14 Krótsza przekątna dzieli trapez prostokątny na dwa trójkąty, z których jeden jest równoboczny. Wysokość trapezu wynosi $1,5\sqrt{3} \text{ cm}$. Wykaż, że pole tego trapezu jest równe $\frac{6,75\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$.

- 15** Długość boku kwadratu jest dwa razy mniejsza od długości boku trójkąta równobocznego. Oblicz, ile razy pole trójkąta jest większe od pola kwadratu.
- 16** Na boku DC kwadratu $ABCD$ zbudowano trójkąt równoboczny CDE tak, że punkt E leży wewnątrz kwadratu. Co ma większe pole: trójkąt czy pięciokąt $ABCED$? Ile razy większe?
- 17** W sześciokącie foremnym odległość między dwoma przeciwległymi bokami jest równa 12 cm. Oblicz pole tego sześciokąta.

Wyzwanie

W sześciokącie foremnym połączono środki sąsiednich boków i w ten sposób otrzymano ponownie sześciokąt foremny. Oblicz stosunek pól sześciokątów: otrzymanego i wyjściowego.

Sprawdź się!

- Oblicz pole trójkąta równobocznego, którego wysokość wynosi $18\sqrt{3}$ cm.
- Uzasadnij, że pole sześciokąta foremnego, którego obwód jest równy 4,8 dm, wynosi $96\sqrt{3}$ cm².
- Czy istnieje kwadrat, którego długość przekątnej wynosi 8 cm, a pole jest równe 0,64 dm²? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$P = (8 \text{ cm})^2 = 64 \text{ cm}^2 = 0,64 \text{ dm}^2$.
B.	Nie,		2.	$P = \frac{1}{2} \cdot (8 \text{ cm})^2 = 32 \text{ cm}^2 = 0,32 \text{ dm}^2$.

- W kwadracie o polu 4 cm² poprowadzono przekątne i odcinki łączące środki przeciwległych boków. Oblicz obwód najmniejszego trójkąta powstałego w wyniku podziału kwadratu tymi odcinkami.
- Na przekątnej kwadratu o boku długości 4 cm zbudowano trójkąt równoboczny. Oblicz pole otrzymanego czworokąta wypukłego.

3. Współliniowość punktów kratowych

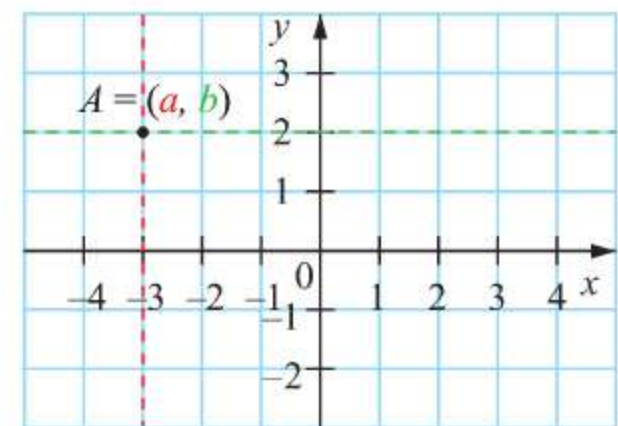
Przypomnij sobie

- jak odczytujemy punkty w układzie współrzędnych,
- jak zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych,
- jak obliczamy współrzędne środka odcinka.

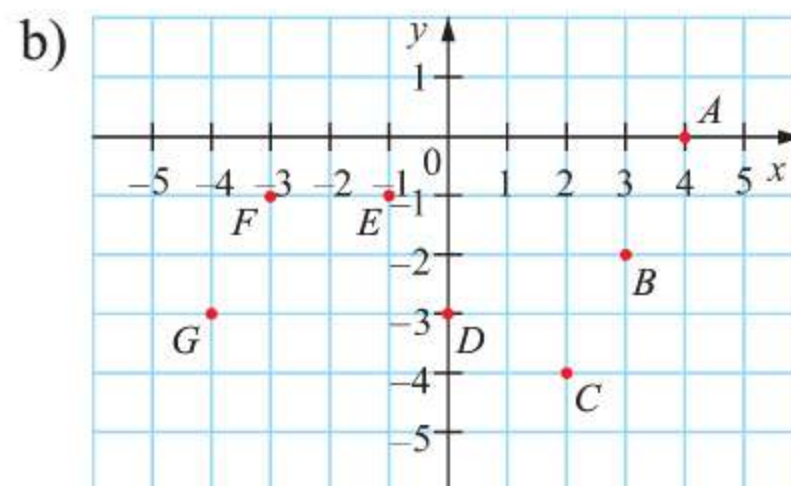
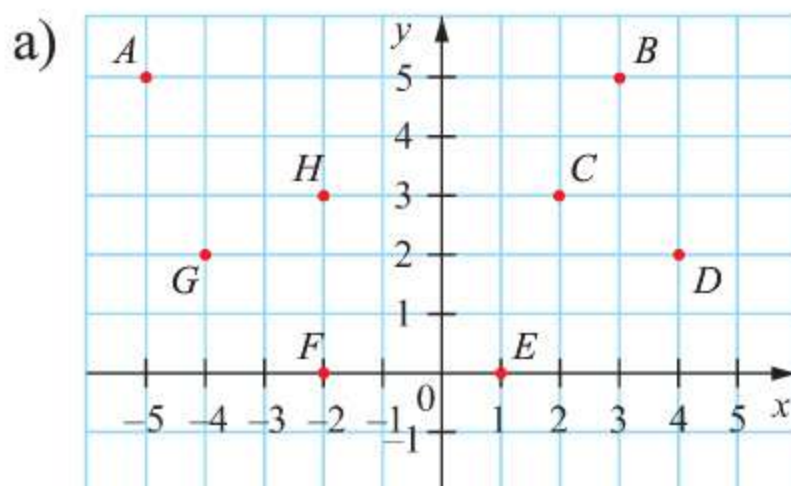
Przykład 1.

Odczytajmy współrzędne punktu A umieszczonego w układzie współrzędnych.

Z punktu A rysujemy proste prostopadłe do obu osi układu. Punkty przecięcia tych prostych z osiami x i y określają współrzędne punktu A , co zapisujemy $A = (-3, 2)$.



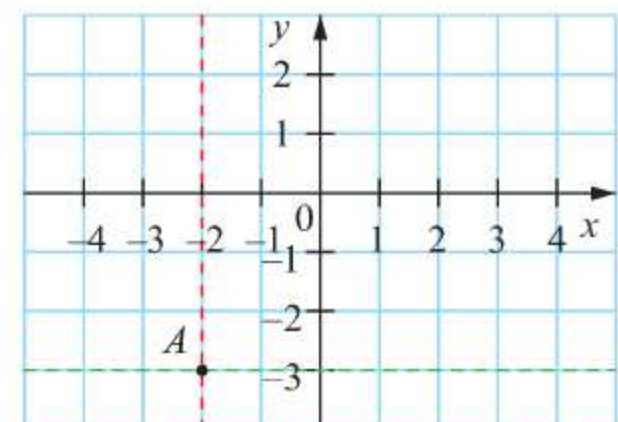
1 Odczytaj współrzędne zaznaczonych punktów.



Przykład 2.

Zaznaczmy w układzie współrzędnych punkt $A = (-2, -3)$.

Na osi x odnajdujemy współrzędną -2 , a na osi y współrzędną -3 i rysujemy proste prostopadłe do osi, przechodzące przez punkty odpowiadające tym współrzędnym. Punkt przecięcia narysowanych prostych jest szukany punktem.



2 Zaznacz w układzie współrzędnych punkty:

$A = (-3, 5)$, $B = (2, -4)$, $C = (-5, 4)$, $D = (-3, -3)$, $E = (0, -3)$, $F = (4, 0)$.

Przykład 3.

Obliczmy współrzędne środka S odcinka KL , jeśli $K = (2, 5)$, $L = (6, 1)$.

Współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi współrzędnych końców tego odcinka, zatem $S = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (4, 3)$.

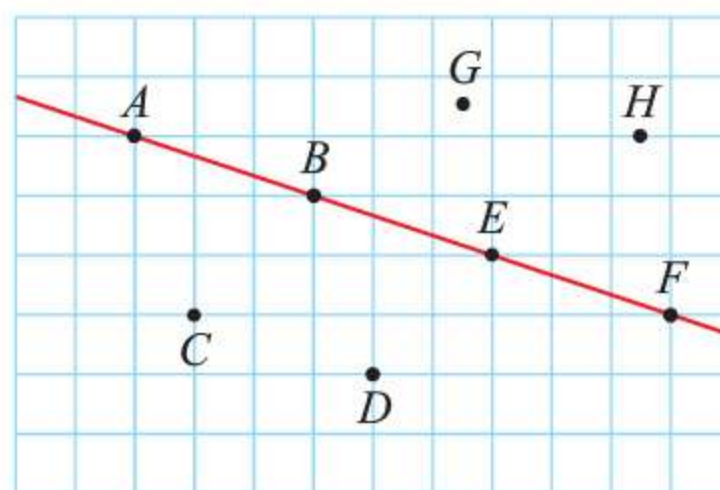


Środkiem odcinka AB , gdzie $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$, jest punkt

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

- 3** Oblicz współrzędne środka S odcinka AB , jeśli $A = (-5, 8)$, $B = (10, -3)$.

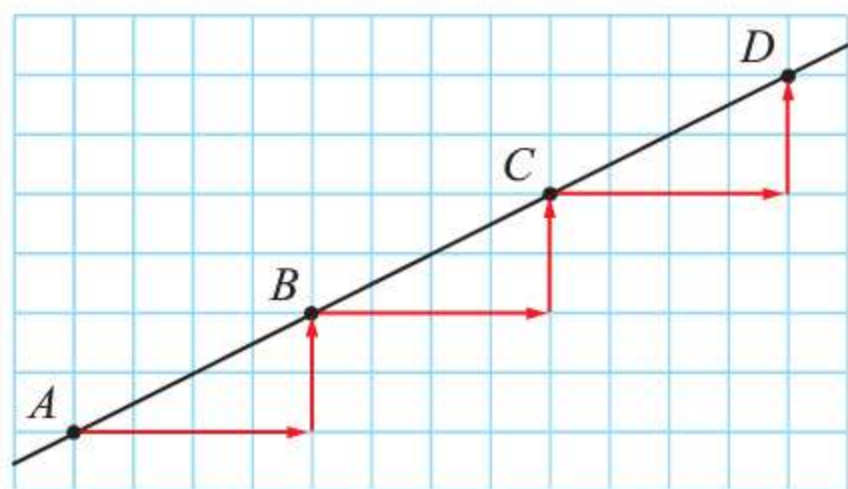
Na papierze w kratkę punkty przecięcia linii nazywamy **punktami kratowymi**. Na rysunku są nimi punkty A, B, C, D, E, F , a nie są nimi G i H . Zwróćmy uwagę, że żadne trzy spośród punktów A, B, C, D nie leżą na jednej prostej. Natomiast punkty A, B, E, F leżą na jednej prostej. Nazywamy je **punktami współliniowymi**.

**Przykład 4.**

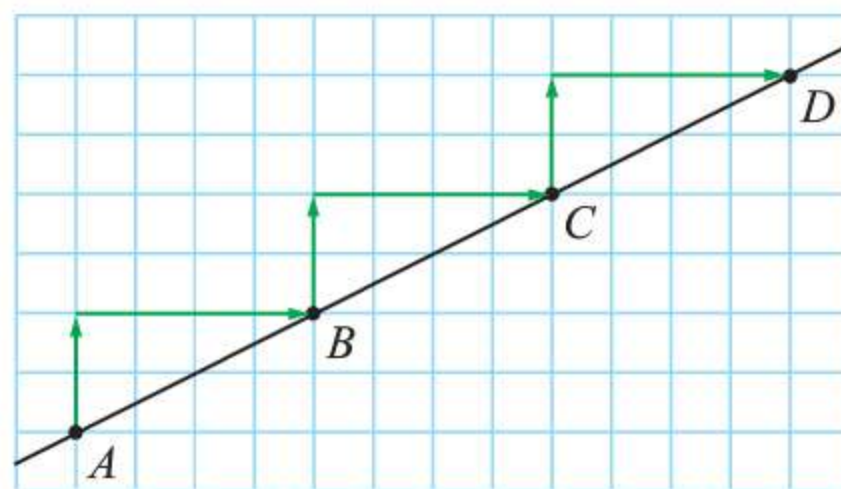
Na kratce zaznaczmy punkt kratowy A , a następnie znajdziemy takie trzy punkty kratowe B, C, D , aby te punkty i punkt A były współliniowe.

Poniżej przedstawiamy jedno z rozwiązań.

Punkt kratowy B zaznaczamy dowolnie. Wiemy, że przez dwa punkty przechodzi tylko jedna prosta, więc ją rysujemy. Aby „dojść” z punktu A do B po liniach kratki, mamy w tym układzie dwie możliwości: przesunąć się o 4 kratki w prawo i 2 do góry lub o 2 do góry i 4 w prawo. Gdy przesuniemy się tak samo z punktu B , otrzymamy punkt C , a z punktu C – punkt D .



lub



Zwróćmy uwagę, że to zadanie ma wiele rozwiązań, bo punkty A i B zaznaczyliśmy na kratce dowolnie.

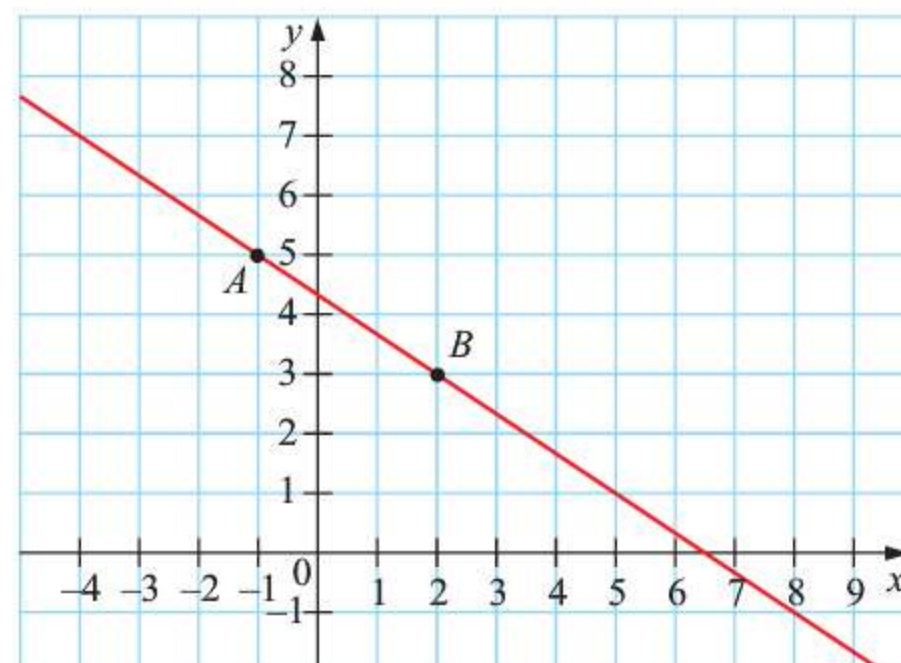


- 4 Na kratce zaznacz punkt kratowy A , a następnie znajdź takie cztery punkty kratowe B, C, D, E , aby te punkty i punkt A były współliniowe. Opisz sposób znajdowania tych punktów. Sprawdź, czy twoi koledzy mają takie same rozwiązania.

Przykład 5.

W układzie współrzędnych dana jest prosta AB . Znajdźmy współrzędne dziesięciu innych punktów kratowych należących do tej prostej.

Z rysunku możemy odczytać współrzędne najwyżej trzech innych punktów kratowych tej prostej. Zastanówmy się, jaką własność mają współrzędne tych punktów.



Kolejne punkty kratowe na półprostej AB powstają przez przesunięcie o 3 kratki w prawo i 2 w dół lub o 2 kratki w dół i 3 w prawo, czyli przez zwiększenie pierwszej współrzędnej o 3 i zmniejszenie drugiej współrzędnej o 2.

Wobec tego punktami kratowymi na tej półprostej są punkty o współrzędnych: $(5, 1), (8, -1), (11, -3), (14, -5), (17, -7)$.

Kolejne punkty kratowe na półprostej BA powstają przez przesunięcie o 3 kratki w lewo i 2 w górę lub o 2 kratki w górę i 3 kratki w lewo, czyli przez zmniejszenie pierwszej współrzędnej o 3 i zwiększenie drugiej współrzędnej o 2. Wobec tego punktami kratowymi na tej półprostej są punkty o współrzędnych: $(-4, 7), (-7, 9), (-10, 11), (-13, 13), (-16, 15)$. Zwróćmy uwagę, że współrzędne wyznaczonych punktów są liczbami całkowitymi.

Punkt w układzie współrzędnych nazywamy **punktem kratowym**, gdy ma obie współrzędne całkowite.



- 5 W układzie współrzędnych zaznacz punkty $A = (-2, -3)$ i $B = (0, -1)$. Narysuj kwadrat i podaj współrzędne jego wierzchołków, jeśli wiesz, że:
- punkt A jest wierzchołkiem kwadratu, a punkt B punktem przecięcia przekątnych tego kwadratu,
 - punkt B jest wierzchołkiem kwadratu, a punkt A punktem przecięcia przekątnych tego kwadratu.
- 6 W układzie współrzędnych narysuj prostą AB , gdzie $A = (0, 5)$, $B = (-2, 2)$. Znajdź współrzędne pięciu punktów kratowych należących do półprostych AB i BA , różnych od punktów A i B .

- 7 Bez wykonywania rysunku ustal, czy punkty kratowe $A = (-4, -6)$, $B = (-1, 2)$, $C = (5, 6)$ są współliniowe. Odpowiedź uzasadnij.
- 8 Uzasadnij, że środek odcinka KL , gdzie $K = (-2, 7)$, a $L = (-4, -1)$, jest punktem kratowym.



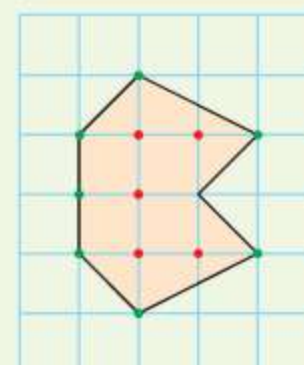
Pole P wielokąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach kratowych, można obliczyć ze wzoru

$$P = W + 0,5B - 1,$$

gdzie

W – liczba punktów kratowych wewnątrz wielokąta,

B – liczba punktów kratowych na brzegu wielokąta.

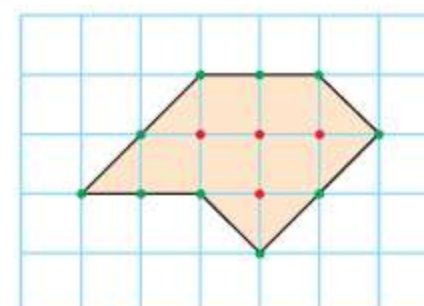


Przykład 6.

Obliczmy pole wielokąta przedstawionego na rysunku.

Na początku zliczamy punkty kratowe **wewnątrz** (W) wielokąta oraz punkty kratowe **na brzegu** (B) wielokąta. Otrzymujemy: $W = 4$, $B = 10$.

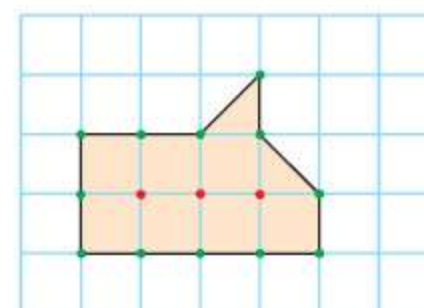
Liczby podstawiamy do wzoru na pole wielokąta $P = W + 0,5B - 1$ i otrzymujemy $P = 4 + 0,5 \cdot 10 - 1 = 8$.



- 9 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

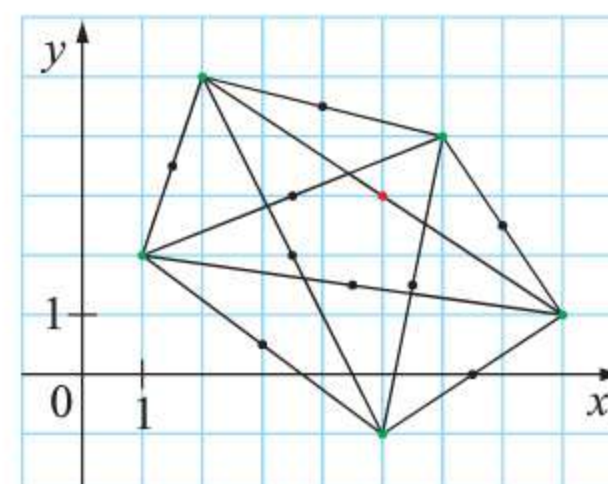
Pole wielokąta na rysunku wynosi

- A. 9,5 B. 8
C. 7 D. 10



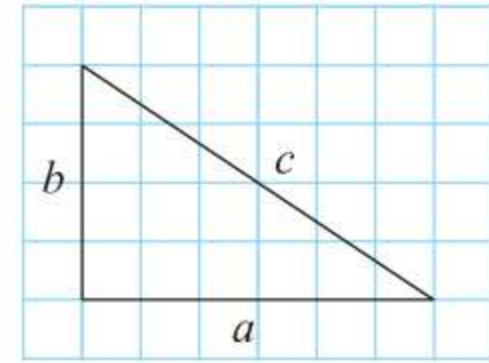
- 10 Wojtek zaznaczył w układzie współrzędnych pięć różnych punktów kratowych, a następnie połączył każde dwa odcinkiem i wyznaczył współrzędne środków tych odcinków. Okazało się, że środek jednego odcinka jest punktem kratowym. Rysunek Wojtka przedstawiono obok.

- a) Wybierz pięć innych punktów i wykonaj czynności opisane wyżej.
b) Powtórz to zadanie dla innej piątki punktów.
c) Porównaj swoje wyniki z wynikami innych uczniów.



Wyzwanie

Wierzchołki trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c są punktami kratowymi, przyprostokątne a i b leżą na liniach, np. tak jak na rysunku. Ustal, czy na przeciwprostokątnej tego trójkąta jest jeszcze co najmniej jeden punkt kratowy, jeśli:



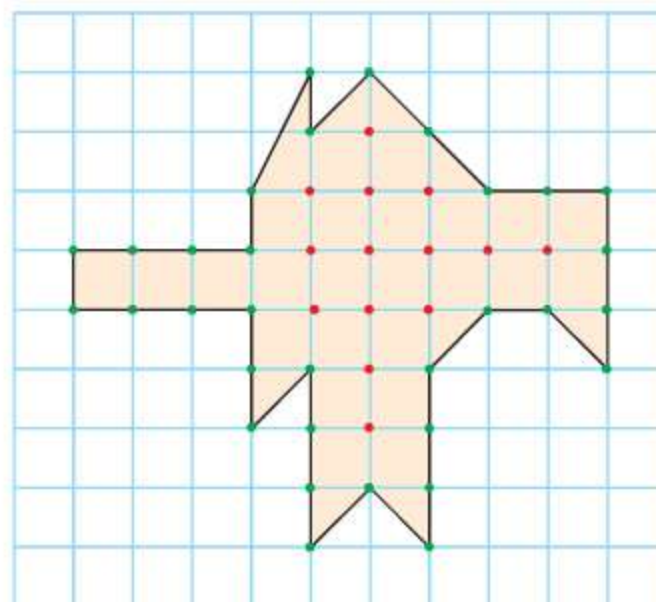
- a) $a = 6$, $b = 8$, b) $a = 6$, $c = 2\sqrt{13}$.

Sprawdź się!

- 1 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Współrzędne punktów kratowych w układzie współrzędnych są liczbami całkowitymi.	P	F
Punkty kratowe $A = (2, -3)$, $B = (-1, 2)$, $C = (-4, 6)$ leżą na jednej prostej.	P	F

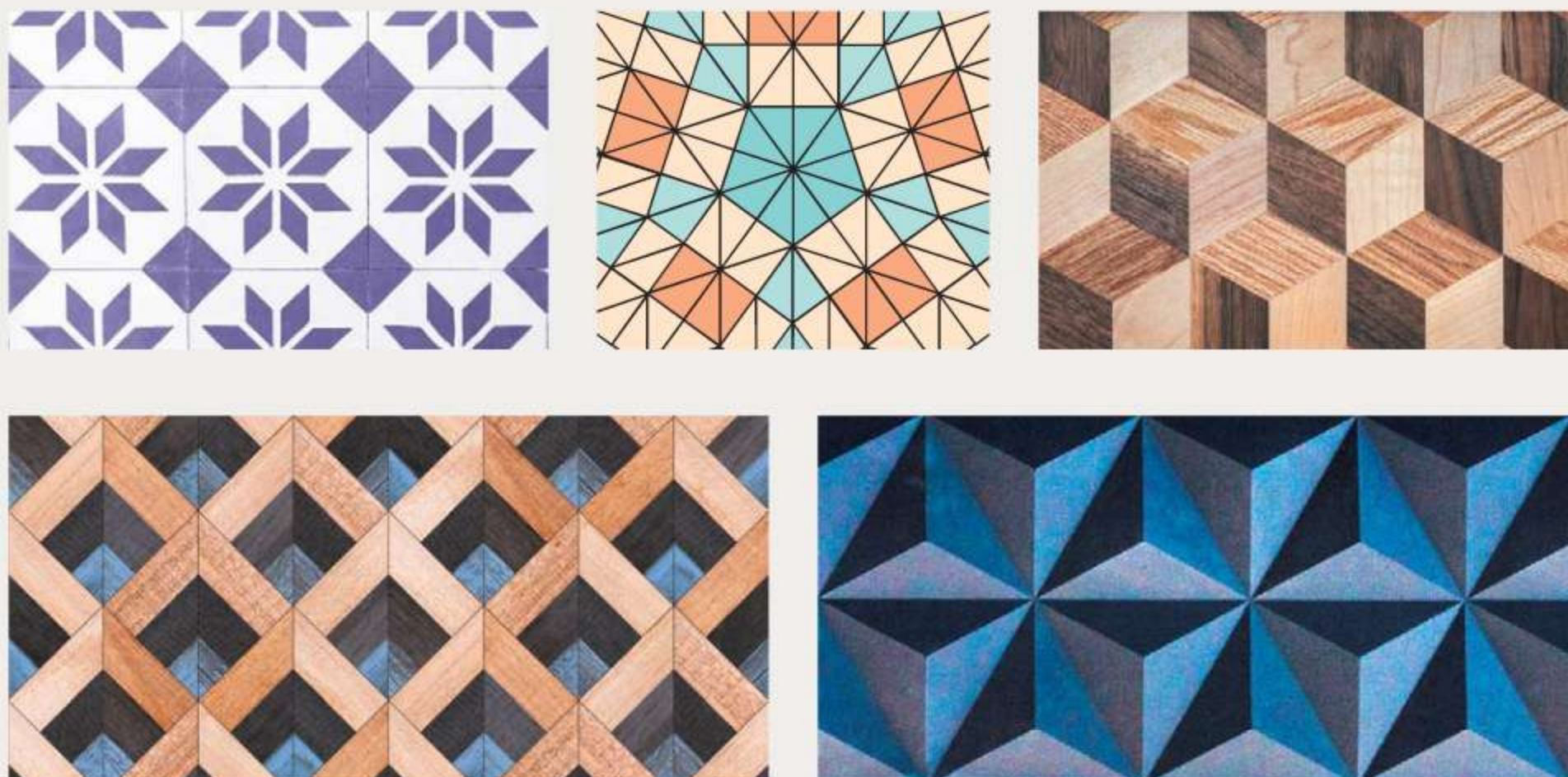
- 2 Dane są punkty $K = (4, 6)$ i $L = (-3, -1)$. Uzasadnij, że środek odcinka KL nie jest punktem kratowym.
- 3 Zaznacz na papierze w kratkę punkty kratowe A i B , a następnie zaznacz na półprostej AB punkt kratowy C , a na półprostej BA punkt kratowy D tak, aby odległość punktów C i D od punktu A była różna. Sprawdź, czy inni uczniowie mają takie samo rozwiązanie.
- 4 Oblicz pole wielokąta przedstawionego na rysunku.



- 5 Podaj przykład takich współrzędnych punktów L i M , aby punkty K , L , M były współliniowe, jeśli $K = (-2, 0)$.

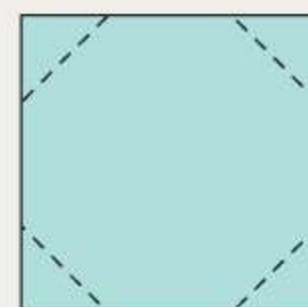
Zadania utrwalające

- 1 Jakie wielokąty foremne można wyróżnić na przedstawionych parkietach?



- 2 Z kwadratowego kartonika o boku długości $(3\sqrt{2} + 6)$ cm odcięto naroża, tak jak pokazano na rysunku, i otrzymano ośmiokąt foremny. Oblicz:

- a) obwód ośmiokąta,
b) sumę pól odciętych naroży.

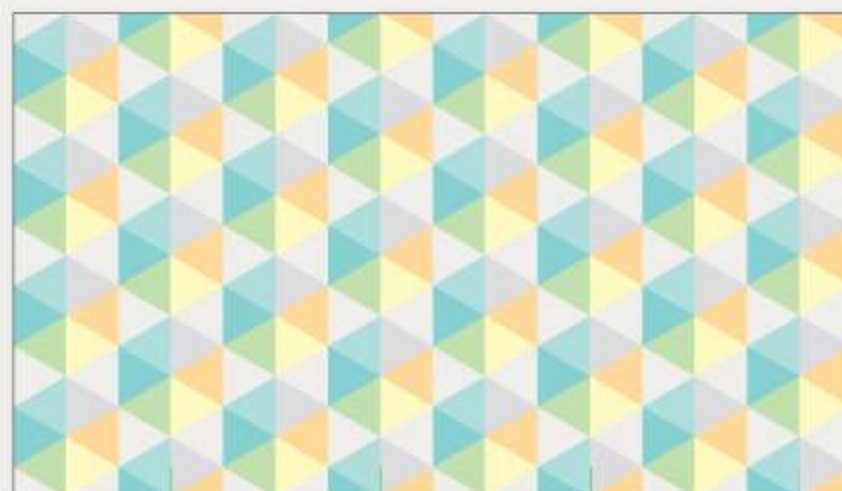


- 3 Przekątna prostokąta ma 14 cm, a miara jednego z kątów między przekątnymi wynosi 120° . Oblicz obwód prostokąta.

- 4 Krótszy bok równoległoboku ma 4 cm, a wysokość poprowadzona do dłuższego boku wynosi $2\sqrt{3}$ cm. Jaką miarę mają kąty tego równoległoboku? Odpowiedź uzasadnij.



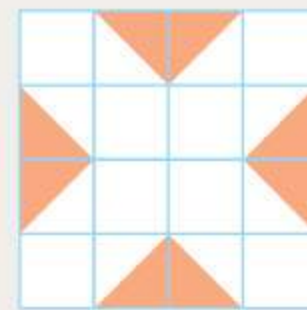
- 5 Na rysunku przedstawiono płytki ułożone na balkonie. Obwód trójkątnej płytki wynosi 60 cm. Jaką powierzchnię ma ten balkon?





- 6 Która figura ma większy obwód, a która większe pole: kwadrat o przekątnej długości $3\sqrt{2}$ czy trójkąt równoboczny o wysokości $2\sqrt{3}$? Odpowiedź uzasadnij.

- 7 Zapisz za pomocą wyrażeń algebraicznych pole i obwód białego wielokąta, jeśli bok największego kwadratu ma długość a .



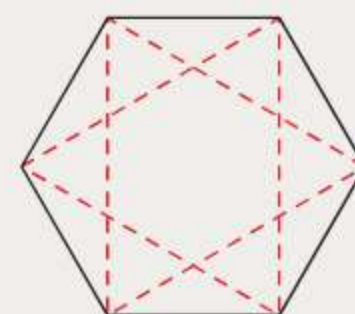
- 8 Współrzędne wierzchołków trapezu $EFGH$ wynoszą: $E = (-6, 3)$, $F = (10, 3)$, $G = (8, 7)$, $H = (-1, 7)$. Czy poza końcami odcinka istnieją punkty kratowe na:

a) ramieniu FG , b) ramieniu EH , c) przekątnej EG , d) przekątnej FH ?

Odpowiedzi uzasadnij.

- 9 Bez wykonywania rysunku ustal, czy punkty kratowe $A = (-4, -6)$, $B = (-1, 2)$, $C = (2, 10)$ są współliniowe. Odpowiedź uzasadnij.

- 10 Klomb ma kształt sześciokąta foremnego o boku długości $2\sqrt{3}$ m. Wzdłuż krótszych przekątnych, na rysunku narysowanych przerywanymi liniami, posadzono krzewy róż, co 2 m. Czy do obsadzenia wykorzystano 18 krzewów róż? Odpowiedź uzasadnij.



- 11 Narysuj kwadrat i trójkąt równoboczny o takim samym boku. Na bokach kwadratu dorysuj trójkąty równoboczne, a na bokach trójkąta – kwadraty. Która z otrzymanych figur ma większe pole, a która ma większy obwód? Odpowiedź uzasadnij.

- 12 Gra odbywa się na planszy $10 \text{ kratek} \times 10 \text{ kratek}$. Jednym z etapów tej gry jest przeprowadzenie pionka z kratki znajdującej się w lewym dolnym rogu planszy do kratki w prawym górnym rogu.

Zasady tego etapu są następujące:

- Gracz rzuca kostką maksymalnie 4 razy.
- Liczba wyrzuconych oczek w jednym rzucie określa, o ile kratek w prawo i w górę trzeba przesunąć pionek.
- Do następnego etapu przechodzi ten gracz, który umieści pionek w kratce znajdującej się w prawym górnym rogu.

Wyniki graczy przedstawiono w tabeli.

Gracz	Wyniki rzutów			
Wojtek	6	4	–	–
Kuba	3	4	1	3
Bartek	1	2	3	4
Mateusz	5	2	1	4

- a) Kto przechodzi do następnego etapu gry?
- b) Podaj trzy przykłady wyników rzutów, które pozwolą na przejście do kolejnego etapu gry, i trzy przykłady wyników rzutów, które nie pozwolą na przejście do kolejnego etapu.
- c) Zaproponuj inne zasady na przeprowadzenie pionka z dolnego rogu planszy do górnego po przekątnej, tak aby każdy postój pionka był na przekątnej planszy.

Zadania sprawdzające

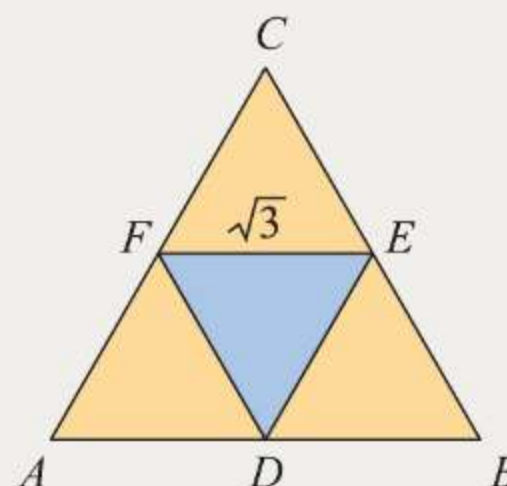
Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–2. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

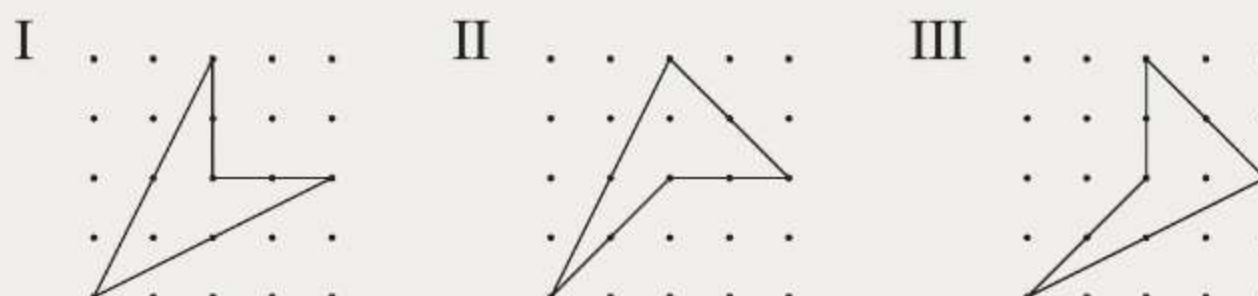
- 1 W którym wielokącie foremnym kąty wewnętrzne są ostre?
 A. W trójkącie. B. W czworokącie. C. W pięciokącie. D. W sześciokącie.
- 2 Jaką długość ma przekątna kwadratu, którego pole wynosi $1,69 \text{ cm}^2$?
 A. $1,3\sqrt{3} \text{ cm}$ B. $1,3 \text{ cm}$ C. 13 mm D. $1,3\sqrt{2} \text{ cm}$

W zadaniach 3.–5. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 3 Wysokość trójkąta równobocznego ABC , przedstawionego na rysunku, wynosi
 A. $2\sqrt{3}$ B. $1,5$
 C. 3 D. $1,5\sqrt{3}$
- 4 Wielokątem foremnym jest każdy
 A. pięciokąt. B. sześciokąt.
 C. ośmiokąt. D. kwadrat.
- 5 Współliniowymi punktami kratowymi są punkty
 A. $K = (-1, -2)$, $L = (2, 3)$, $M = (5, 8)$
 B. $K = (-1, -6)$, $L = (-1, 2)$, $M = (2, 10)$
 C. $K = (-4, 6)$, $L = (6, 2)$, $M = (4, 0)$
 D. $K = (4, -6)$, $L = (-1, 2)$, $M = (2, 0)$



- 6 Skorzystaj z rysunku i oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Tylko wielokąt I można podzielić na dwa trójkąty foremne.

P

F

Pola wielokątów I, II i III są równe.

P

F



- 7 Bok rombu ma 6 cm długości, a jeden z jego kątów ma miarę 60° . Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Krótsza przekątna rombu ma **A / B** długości.

A. $2\sqrt{3}$ cm **B.** 0,6 dm

Pole rombu wynosi **C / D**.

C. $18\sqrt{3}$ cm² **D.** $36\sqrt{2}$ cm²

- 8 W tabeli przedstawiono współrzędne punktów kratowych K , L , M , O i P .

	K	L	M	O	P
x	-5	2	-2	0	1
y	7	4	3	2	-1

Czy spośród tych punktów tylko punkty K , M , P leżą na jednej prostej? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

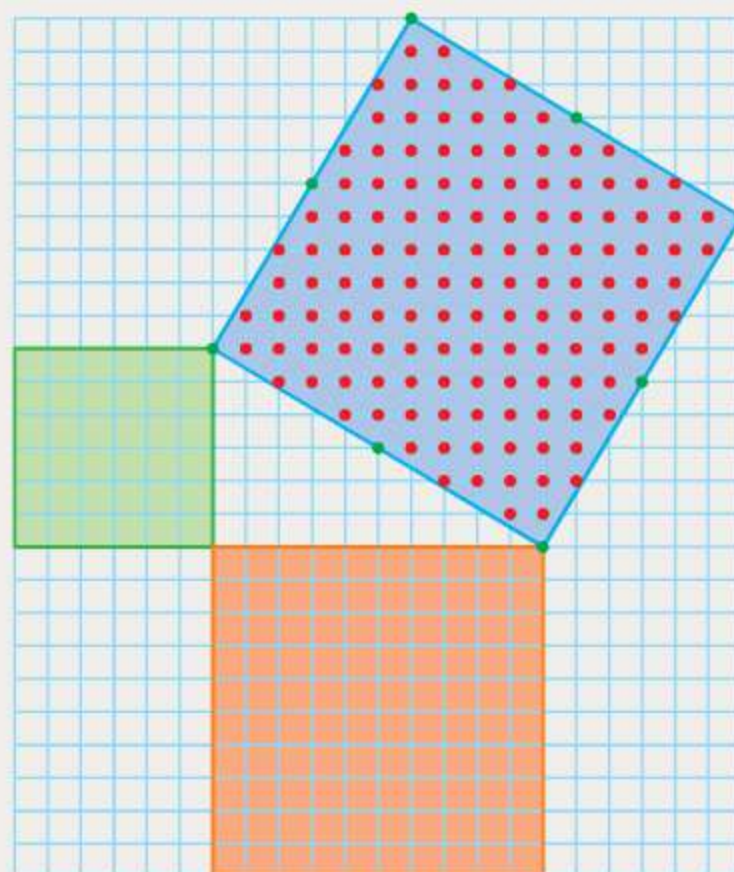
A.	Tak,	ponieważ	1.	pierwsza współrzędna tych punktów zmienia się o 3, a druga o 4, a dla punktów L i O ta regularność nie zachodzi.
B.	Nie,		2.	znaki pierwszych i drugich współrzędnych tych punktów są różne.

- 9 O ile centymetrów kwadratowych mniejsze pole ma sześciokąt foremny o boku równym 3 cm od kwadratu o przekątnej równej 9 cm? Odpowiedź uzasadnij.

- 10 Oblicz pola sześciokąta foremnego i trójkąta równobocznego, których obwody wynoszą $24\sqrt{3}$ cm.

- 11 Różnica długości boku i wysokości trójkąta równobocznego wynosi $(2 - \sqrt{3})$ cm i jest równa długości boku kwadratu. Ile centymetrów kwadratowych wynosi suma pól tych wielokątów? Zapisz obliczenia.

- 12 Skorzystaj z rysunku znajdującego się obok oraz ze wzoru $P = W + 0,5B - 1$, gdzie P – pole wielokąta, W – liczba punktów kratowych leżących wewnątrz wielokąta, B – liczba punktów kratowych leżących na brzegu wielokąta, i sprawdź, czy prawdziwa jest teza twierdzenia Pitagorasa dla tego przypadku.



Matematyka w

Wielokąty foremne od wieków znajdowały zastosowanie w sztuce i architekturze. Dzięki wykorzystaniu własności figur foremnych powstawały piękne formy.

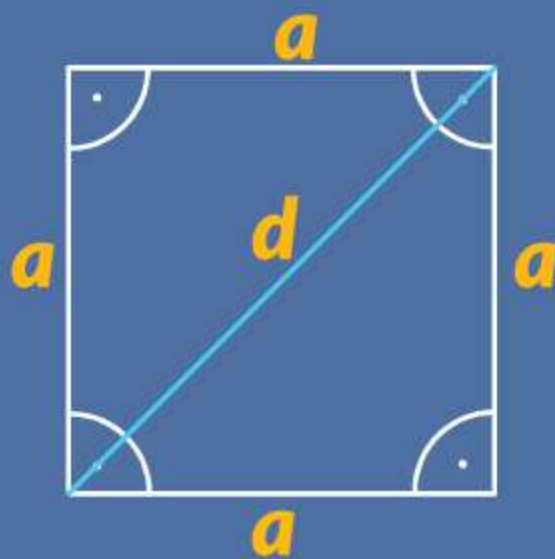
Kumiko

To japońska technika rzemieślnicza znana od VII wieku. Polega na układaniu geometrycznych wzorów z pojedynczych drewnianych listewek bez użycia gwoździ.

Cienkie kawałki drewna są cięte precyzyjnie pod różnymi kątami i dopasowywane pod naciskiem, by mogły stworzyć złożoną geometryczną siatkę. Istnieje około 200 różnych tradycyjnych wzorów, z motywami symbolizującymi między innymi siłę, zdrowie, urodę i długowieczność.

Kumiko było najczęściej wykorzystywane do dekoracji ekranów shoji – ścianek działowych w japońskich domach i firmach.

Kwadrat



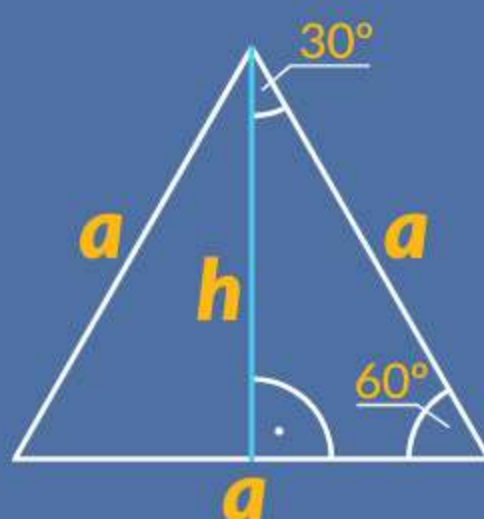
Kwadrat to czworokąt foremny. Wszystkie jego boki są jednakowej długości, a kąty jednakowej miary (po 90°). Ma dwie przekątne, które przecinają się w połowie pod kątem prostym.

$$d = a\sqrt{2}$$

$$L = 4a$$

$$P = a^2$$

Trójkąt równoboczny



Trójkąt równoboczny to wielokąt foremny o najmniejszej liczbie boków. Wszystkie jego boki są tej samej długości, wszystkie kąty mają po 60° .

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$L = 3a$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

architekturze

Twierdzenie plastra miodu

Okolo 300 roku n.e. Pappus z Aleksandrii zajmował się problemem wypełniania płaszczyzny figurami geometrycznymi.

Poszukiwał on figury o możliwie największej liczbie boków, zdolną pokryć całą płaszczyznę w taki sposób, aby nie powstawały w niej żadne dziury.

Dość szybko zauważył, że nadają się do tego trójkąty i kwadraty, a koła są bezużyteczne – zostawiają spore luki.

Być może to **pszczoły i konstrukcje plastrów miodu** miały swój wpływ na późniejsze odkrycie Pappusa, który uznał, że właśnie **sześciokąt foremny** jest figurą o możliwie największej liczbie boków, którą można by pokryć całą płaszczyznę.

Fakt ten został uzasadniony dopiero 1700 lat później – w 1999 roku Thomas Hales udowodnił, że Pappus miał rację.



Sześciokąt foremny



Sześciokąt foremny to wielokąt foremny o sześciu bokach równej długości. Posiada trzy przekątne długości $2a$ oraz sześć przekątnych długości $a\sqrt{3}$. Miara kąta wewnętrznego wynosi 120° , więc suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta jest równa 720° .

$$\begin{aligned}d_1 &= 2a & d_2 &= a\sqrt{3} \\ L &= 6a & P &= \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

1. Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

Przypomnij sobie

- co to są: jednomian, suma algebraiczna oraz wyrazy sumy,
- co to są wyrazy podobne i na czym polega redukcja wyrazów podobnych,
- jak obliczamy wartość liczbową wyrażenia algebraicznego.

Przykład 1.

Dane są wyrażenia algebraiczne: $12x$, $-3y$, 32 , $-4x$, $15y$, $-xy$, -44 .

- a) Jak nazywamy te wyrażenia?
- b) Utwórzmy z nich sumę algebraiczną.
- c) Zapiszmy utworzoną sumę w najprostszej postaci.
- d) Obliczmy wartość liczbową sumy dla $x = 1$, $y = -1$.

a) Te wyrażenia to **jednomiany**. Tak nazywamy pojedyncze liczby lub litery oraz ich iloczyny.

b) Aby utworzyć **sumę algebraiczną** danych jednomianów, wystarczy je dodać: $12x + (-3y) + 32 + (-4x) + 15y + (-xy) + (-44)$. Sumą algebraiczną jest również wyrażenie $12x - 3y + 32 - 4x + 15y - xy - 44$, które powstało z poprzedniego przez opuszczenie nawiasów. Dodane jednomiany nazywają się **wyrazami sumy algebraicznej**.

c) Aby zapisać utworzoną sumę w najprostszej postaci, trzeba dodać **wyrazy podobne** (czyli wyrazy różniące się co najwyżej współczynnikiem liczbowym):

$$12x - 3y + 32 - 4x + 15y - xy - 44 = 8x + 12y - xy - 12.$$

Taki sposób postępowania nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.

d) Aby obliczyć wartość liczbową sumy $8x + 12y - xy - 12$, należy wstawić zamiast liter x i y odpowiednio liczby 1 i -1 :

$$8 \cdot 1 + 12 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) - 12 = 8 - 12 + 1 - 12 = 9 - 24 = -15.$$

1 Z podanych jednomianów utwórz sumę algebraiczną i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $3a$, $4b$, $5a$, $-7b$, -8
- b) $3x^2$, $2y^3$, -1 , $-x^2$, -4 , y^3
- c) $1,5x^2y$; $-\frac{3}{4}x^2$; -12 ; $-\frac{2}{5}x^2y$; $2,5$; $\frac{1}{8}x^2$

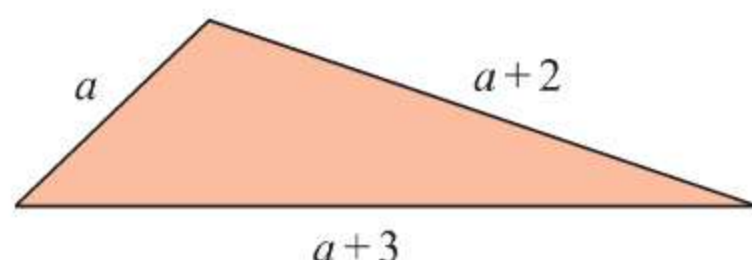
- 2 Zapisz obwody wielokątów I i II w postaci wyrażeń algebraicznych. Oblicz ich wartości liczbowe dla:

a) $a = 2$,

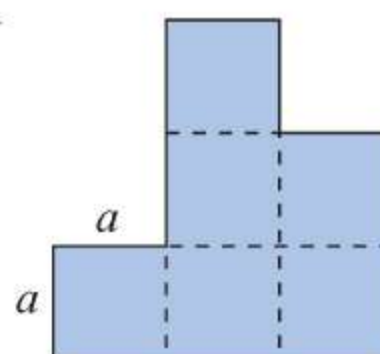
b) $a = \frac{5}{4}$,

c) $a = 5,8$.

I



II



Przykład 2.

Wykonajmy działania.

a) $-5(x - y + 2z)$

b) $4a(5b - a) - 5b(4a - b)$

c) $-2a\sqrt{2} \cdot (a^2\sqrt{2} - \sqrt{8})$

d) $(a^m - 3a^2) \cdot a^n$, $a > 0$, m, n – liczby naturalne

a) $-5(x - y + 2z) = -5 \cdot x - 5 \cdot (-y) - 5 \cdot 2z = -5x + 5y - 10z$

$$\begin{aligned} \text{b) } 4a(5b - a) - 5b(4a - b) &= 4a \cdot 5b + 4a \cdot (-a) - 5b \cdot 4a - 5b \cdot (-b) = \\ &= 20ab - 4a^2 - 20ab + 5b^2 = -4a^2 + 5b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } -2a\sqrt{2} \cdot (a^2\sqrt{2} - \sqrt{8}) &= -2a\sqrt{2} \cdot a^2\sqrt{2} - 2a\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{8}) = \\ &= -2a^3 \cdot \sqrt{4} + 2a \cdot \sqrt{16} = -4a^3 + 8a \end{aligned}$$

$$\text{d) } (a^m - 3a^2) \cdot a^n = a^m \cdot a^n - 3a^2 \cdot a^n = a^{m+n} - 3a^{2+n}$$

Aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, należy każdy składnik sumy pomnożyć przez ten jednomian, a następnie (jeśli to możliwe) przeprowadzić redukcję wyrazów podobnych.

$$a(b + c) = ab + ac$$



- 3 Wykonaj działania.

a) $3(x - y)$

b) $4(a + b)$

c) $(2x - y) \cdot (-2)$

d) $-5(-3a + 2 + b)$

e) $(-2x + y - 1) \cdot 4$

f) $-3(3 - 2xy + 5y)$

- 4 Zapisz iloczyn w postaci sumy.

a) $2x(y - x)$

b) $-4y(y - 2x)$

c) $(2xy + 3x) \cdot 3x$

d) $3m(4 + 5p - 2q)$

e) $(x - 2y + 2) \cdot (-5x)$

f) $-4a(-5a + 5ab - 3b)$

- 5 Dane są wyrażenia $K = 3a - 5b - 1$ i $L = -2a$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Iloczyn $-5K$ jest równy $-15a + 25b + 5$.	P	F
Iloczyn wyrażeń K i L jest równy $-6a^2 + 10ab + 2a$.	P	F

- 6 Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci.
- a) $-3(2y - 3x) + 2(3y + 2x)$ b) $-4(x - 5y) - 3(-2y - x)$
 c) $-x(z - y) - z(-x + y)$ d) $4(x + y) - 2(x - y) - 3x(1 + y)$
- 7 Udowodnij, że suma $-5x(2 - y) - y(5x + 1) + 10x(-y + 1)$ jest równa $-y - 10xy$.
- 8 Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne.
- a) $-3ab(-6a^2 - 2ab - b^2) - (3ab^3 + 6a^2b^2)$
 b) $6a(5a^2 - 8b) - 10a(6b + 7a^2) - 3ab$
- 9 Dane są wyrażenia $E = 3a\sqrt{2}(\sqrt{32} - \sqrt{8})$ i $K = (2a\sqrt{12} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}$. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
- Wyrażenie K jest równe **A / B**.
A. $12a - 3$ **B.** $12a$
- Wyrażenie $K - E$ po redukcji wyrazów podobnych jest równe **C / D**.
C. -3 **D.** 3
- 10 Do wyrażenia $2x(3y - z + 3x)$ dodaj trzykrotność wyrażenia $x(-2x - z - 2y)$ i uzasadnij, że wartość liczbową otrzymanej sumy dla $x = -\frac{1}{5}$ i $z = -\sqrt{4}$ jest liczbą ujemną.
- 11 Dane jest wyrażenie $-7x(-3y + 4 - x) - 4x(-2x + 4y - 5)$. Które wyrażenie otrzymasz po doprowadzeniu go do najprostszej postaci? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
- A.** $37xy - 48x - x^2$ **B.** $5xy - 8x + 15x^2$
C. $-37xy - 8x - 15x^2$ **D.** $5xy + 8x - 15x^2$

Przykład 3.

Działkę w kształcie prostokąta, którego jeden bok ma długość $15a$ m, a drugi jest o b m dłuższy, ogrodzono siatką w cenie x zł za metr bieżący. Zapiszmy w postaci sumy algebraicznej, ile złotych zapłacono za ogrodzenie dwóch takich działek, jeżeli brama wjazdowa do każdej z nich ma szerokość 3 m.

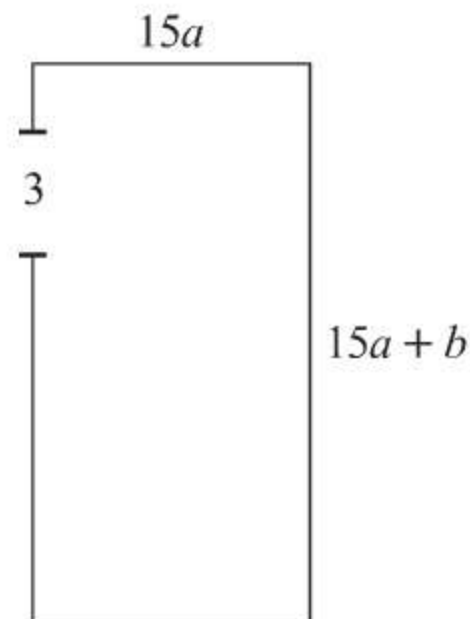
Wykonajmy rysunek pomocniczy ogrodzenia działki.

Na ogrodzenie jednej działki potrzeba

$[2(15a + b) + 2 \cdot 15a - 3]$ metrów bieżących siatki.

Koszt zakupu siatki w złotych na ogrodzenie dwóch takich działek jest równy:

$$2x[2(15a + b) + 2 \cdot 15a - 3] = 2x(30a + 2b + 30a - 3) = \\ = 2x(60a + 2b - 3) = 120ax + 4bx - 6x.$$



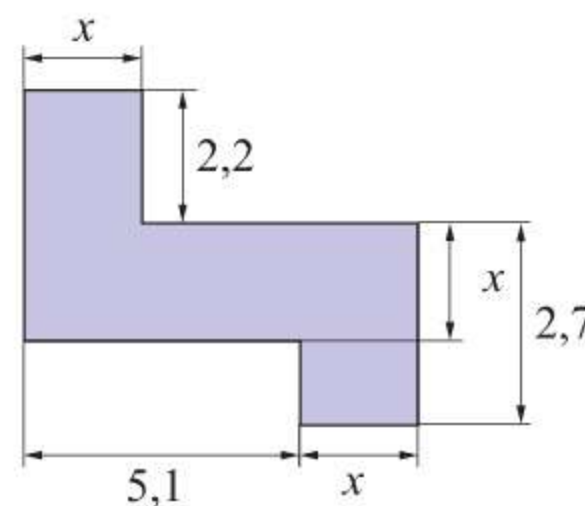
- 12** W rombie jedna przekątna ma długość $10a$ dm, druga jest o 5 dm dłuższa. Zapisz wyrażenie algebraiczne, za pomocą którego obliczysz pole tego rombu w centymetrach kwadratowych.
- 13** Ewelina kupiła w kwiaciarni dwa tulipany, trzy róże i a goździków. Tulipany kosztowały $(x + 6)$ zł za sztukę, róże były o 4 zł droższe, zaś goździki o n zł tańsze od róż. Ile złotych Ewelina zapłaciła za kwiaty? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- 14** W prostokącie jeden bok ma długość x dm, a drugi jest o 4 cm dłuższy. Czy pole tego prostokąta zapisane za pomocą wyrażenia algebraicznego i wyrażone w centymetrach kwadratowych jest równe $10x^2 + 40x$? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	obwód tego prostokąta jest równy $(22x + 8)$ cm.
B.	Nie,		2.	pole tego prostokąta jest równe $(100x^2 + 40x)$ cm ² .

Wyzwanie

Łukasz potrafi obliczyć w pamięci pole figury przedstawionej na rysunku dla każdej wartości x .

Jeśli podasz mu $x = 3,98$ cm, to on natychmiast odpowie, że pole jest równe $39,8$ cm². Skąd Łukasz to wie? Jak to oblicza? Wymiary na rysunku są podane w centymetrach.



Sprawdź się!

- Zamień iloczyn $7(x^2 - 3x - 2)$ na sumę.
- Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Iloczyn $-4x(x - y - z)$ zapisany w postaci sumy jest równy
 A. $-4x + 4y + 4z$ B. $-4x^2 + 4xy + 4xz$
 C. $4x^2 - 4xy - 4xz$ D. $4x^2 + 4xy + 4xz$
- Zapisz dwukrotność wyrażenia $x(7 - 3x)$ w postaci sumy, a następnie oblicz jej wartość liczbową dla $x = -1$.
- Wykonaj działania, a następnie zredukuj wyrazy podobne w wyrażeniu $2x(x + 2y) - x(2x + y)$.
- W prostokącie jeden bok ma długość x dm, a drugi jest o 3 dm krótszy. Zapisz wyrażenie algebraiczne, za pomocą którego obliczysz pole tego prostokąta w centymetrach kwadratowych.

2. Mnożenie sum algebraicznych

Przykład 1.

Na rysunku poniżej przedstawiono prostokąt.

- a) Obliczmy jego pole dla $a = 1$, $b = 1,5$, $c = 1,2$, $d = 2,8$.
 b) Zapiszmy pole prostokąta w postaci wyrażenia algebraicznego.

- a) Pole prostokąta można obliczyć dwoma sposobami.

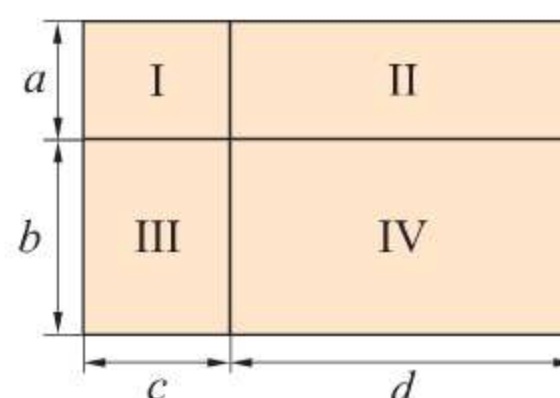
Sposób I

$$P = (1 + 1,5) \cdot (1,2 + 2,8) = 2,5 \cdot 4 = 10 \text{ [j}^2\text{]}$$

Sposób II

Pole P prostokąta jest równe sumie pól czterech mniejszych prostokątów.

$$P = P_I + P_{II} + P_{III} + P_{IV} = 1 \cdot 1,2 + 1 \cdot 2,8 + 1,5 \cdot 1,2 + 1,5 \cdot 2,8, \text{ czyli } P = 10 \text{ [j}^2\text{]}$$



- b) Pole P prostokąta można przedstawić dwoma sposobami.

Sposób I

$$P = (a + b) \cdot (c + d)$$

A zatem:

Sposób II

$$P = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 iloczyn dwóch suma iloczynów składników
 sum algebraicznych pierwszej i drugiej sumy

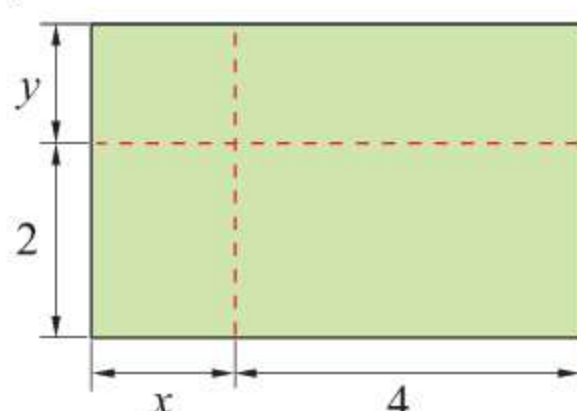


Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy pomnożyć każdy składnik jednej sumy przez każdy składnik drugiej sumy i dodać otrzymane iloczyny.

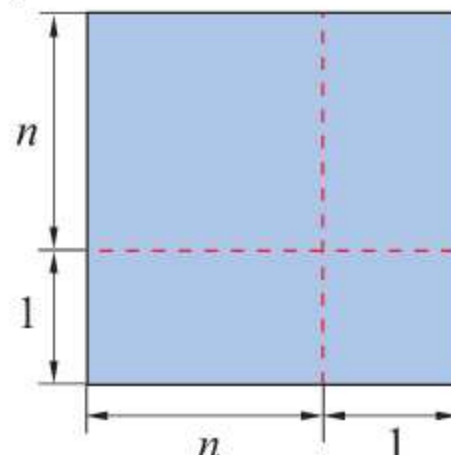
$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

- 1 Skorzystaj z oznaczeń na rysunku i wyraż pole prostokąta dwoma sposobami. Sprawdź dla $x = 2$, $y = 1,5$, $n = 3$, że niezależnie od sposobu obliczania wynik będzie taki sam.

a)



b)



Przykład 2.

Wykonajmy mnożenie.

$$\text{a) } (a-2)(a+5) \quad \text{b) } \frac{1}{2}(2a^2+4b)(a+b) \quad \text{c) } (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{8}-\sqrt{3})$$

$$\text{a) } (a-2)(a+5) = (a+(-2))(a+5) = a \cdot a + a \cdot 5 + (-2) \cdot a + (-2) \cdot 5 = \\ = a^2 + 5a - 2a - 10 = a^2 + 3a - 10$$

$$\text{b) } \frac{1}{2}(2a^2+4b)(a+b) = \left(\frac{1}{2} \cdot 2a^2 + \frac{1}{2} \cdot 4b\right)(a+b) = (a^2+2b)(a+b) = \\ = a^2 \cdot a + a^2 \cdot b + 2b \cdot a + 2b \cdot b = a^3 + a^2b + 2ab + 2b^2$$

$$\text{c) } (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{8}-\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{8} + \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{3}) = \\ = \sqrt{24} - \sqrt{9} + \sqrt{16} - \sqrt{6} = 2\sqrt{6} - 3 + 4 - \sqrt{6} = \sqrt{6} + 1$$

2 Wykonaj mnożenie.

a) $(a+1)(a-1)$

b) $(x-15)(x-1)$

c) $2(b-3c)(b+3c)$

d) $(\sqrt{7}+4)(4+\sqrt{7})$

3 Uzasadnij, że iloczyn $(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)$ jest liczbą nieujemną.**4** Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.Iloczyn $(x-5)(y-2)$ jest równy

A. $xy - 5y + 10 + 2x$

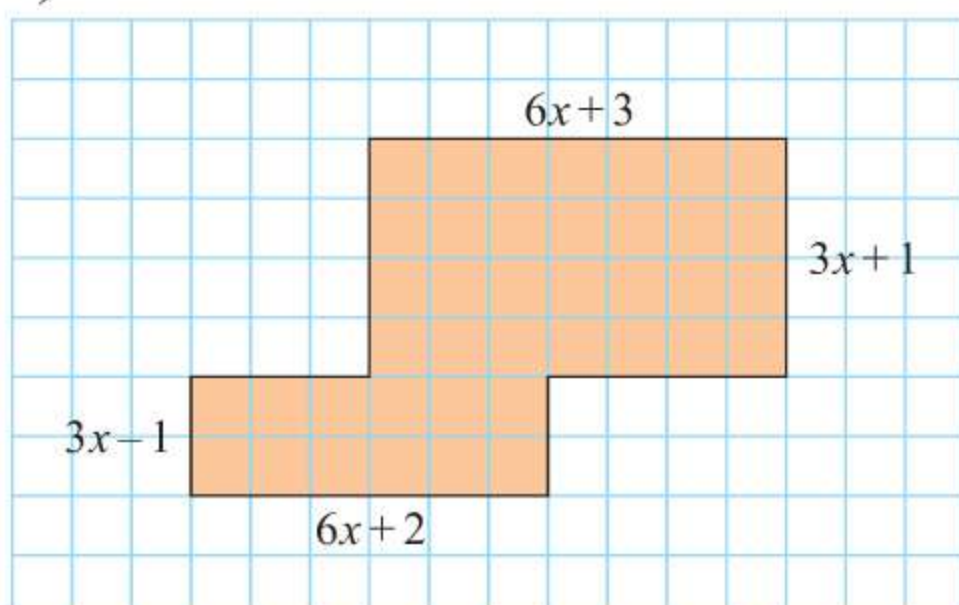
B. $xy - 5y - 2x - 10$

C. $xy - 2x - 5y + 10$

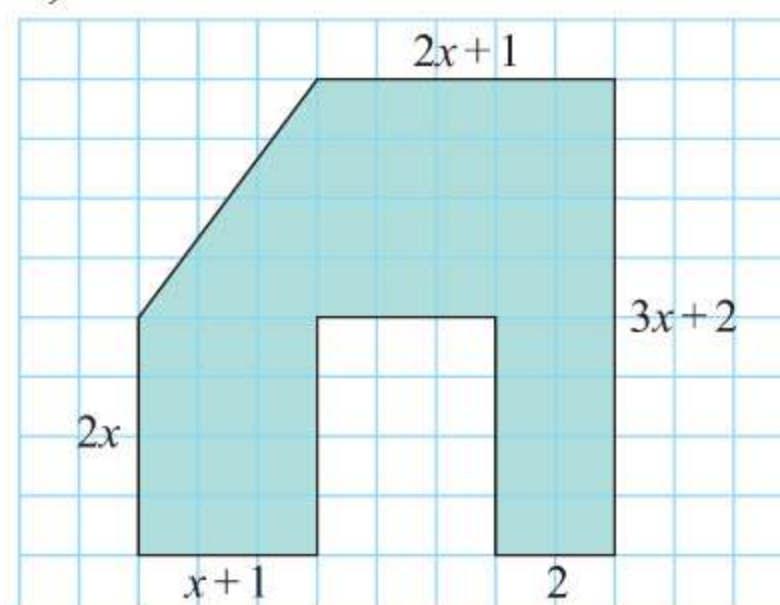
D. $xy + 5y - 2x + 10$

5 Zapisz wyrażenie algebraiczne, za pomocą którego obliczysz pole narysowanego wielokąta. Wykonaj obliczenia dla $x = 2$.

a)



b)

**6** Wyraż za pomocą sumy algebraicznej odpowiedź na postawione pytanie.a) Długość każdego z boków prostokąta o wymiarach a cm $\times$ b cm zwiększono o 2 cm. O ile zwiększy się pole tego prostokąta?b) Bok rombu jest o 3 cm dłuższy od jego wysokości równej x cm. O ile zmniejszy się pole tego rombu, jeśli długość każdego boku i wysokość zmniejszymy o 1 cm?

- 7 Bok kwadratu o długości x cm zwiększono o 2 cm. Czy pole tego kwadratu zwiększyło się o 4 cm^2 ? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	zwiększyło się o $(4x + 4) \text{ cm}^2$.
B.	Nie,		2.	$2 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$.

- 8 W trapezie jedna z podstaw ma długość $(x + 1)$ dm, a druga jest o 5 cm dłuższa. Wysokość trapezu jest o 2 cm krótsza od krótszej podstawy. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wyrażenie algebraiczne, za pomocą którego można obliczyć pole tego trapezu w centymetrach kwadratowych, ma postać **A** / **B**.

A. $100x^2 + 205x + 100$ **B.** $x^2 + 20,5x + 100$

Jeśli obliczenia wykonasz dla $x = 1$, to pole tego trapezu będzie równe **C** / **D**.

C. $121,5 \text{ cm}^2$ **D.** 405 cm^2

- 9 Wewnątrz prostokąta o jednym z boków długości x cm i obwodzie wynoszącym 60 cm narysowano drugi prostokąt w taki sposób, że jego boki są równoległe do boków pierwszego prostokąta i odległe od nich o 3 cm. Zapisz wyrażenie algebraiczne, za pomocą którego obliczysz pole powstałej w ten sposób ramki. Co zauważasz?

Przykład 3.

Wykonajmy potęgowanie:

a) sumy $(x + 1)^2$, b) różnicy $(x - 1)^2$.

a) $(x + 1)^2 = (x + 1) \cdot (x + 1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$

b) $(x - 1)^2 = (x - 1) \cdot (x - 1) = x^2 + x \cdot (-1) - 1 \cdot x - 1 \cdot (-1) = x^2 - x - x + 1 = x^2 - 2x + 1$

- 10 Wykonaj potęgowanie.

a) $(y + 1)^2$ b) $(x^2 + 1)^2$ c) $(a + b)^2$

d) $(2x - 3)^2$ e) $(\sqrt{32} - \sqrt{2})^2$ f) $(a - b)^2$

- 11 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeśli każdy bok kwadratu długości a cm zwiększymy o 5 cm, to jego pole zwiększy się o $(25 + 10a) \text{ cm}^2$.	P	F
Jeśli każdy bok kwadratu długości b cm ($b > 5$) zmniejszymy o 5 cm, to jego pole zmniejszy się o 25 cm^2 .	P	F

Przykład 4.

Wykonajmy mnożenie: $(a - 2)(a + 2)$.

$$(a - 2)(a + 2) = a \cdot a + a \cdot 2 - 2 \cdot a - 2 \cdot 2 = a^2 + 2a - 2a - 4 = a^2 - 4 = a^2 - 2^2$$

12 Wykonaj działania.

a) $(x - 1)(x + 1)$

b) $(1 + 3ab)(1 - 3ab)$

c) $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$

d) $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$

e) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})$

f) $(a + b)(a - b)$

13 Ustal, który zapis jest poprawny dla dowolnych liczb x i y .

I. $-(x + y)^2 = (-x - y)^2$

II. $(x - y)^2 = -(y - x)^2$

III. $(x - y)^2 = (y - x)^2$

IV. $-(x - y)^2 = (x + y)^2$

V. $-(x - y)^2 = (y - x)^2$

VI. $-(x + y)^2 = (y - x)^2$

14 Czy różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą parzystą? Odpowiedź uzasadnij.

15 Liczba a jest o tyle mniejsza od dziesięciu, o ile liczba b jest większa od dziesięciu. Suma kwadratów tych liczb jest równa 208. Wyznacz te liczby.

Wyzwanie

Czy liczba $(2a + 1)^2 - 1$ jest podzielna przez 8, jeśli liczba a jest liczbą całkowitą? Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdź się!

1 Ile wynosi pole prostokąta przedstawionego na rysunku?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $y^2 + 1$ B. $1 - y^2$ C. $y^2 - 2y + 1$ D. 2

2 Dane są wyrażenia:

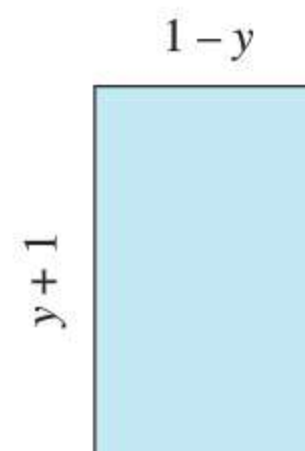
$$E = (x - 3)(y + 2) \text{ i } F = x(y + 2) - 3(y + 2).$$

Sprawdź, czy wyrażenia E i F są równe.

3 Wykonaj mnożenie $(a^2 + b^2)(a - b) \cdot 5$.

4 Uzasadnij, że iloczyn $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ jest liczbą parzystą.

5 Długości boków prostokąta o wymiarach $x \text{ cm} \times y \text{ cm}$, gdzie $x > 5$ i $y > 5$, zmniejszono o 5 cm. O ile centymetrów kwadratowych zmniejszy się pole tego prostokąta? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.



3. Rozwiązywanie równań

Przypomnij sobie

- co to jest równanie i co to znaczy je rozwiązać,
- jakie operacje można wykonywać, aby rozwiązać równanie,
- jak sprawdzić, czy liczba spełnia równanie, i co to jest pierwiastek równania.

Przykład 1.

Wśród podanych zapisów wskażmy równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą i je rozwiążmy.

$$10 - x = x^2 \qquad x + 2x - 8 \qquad 3xy \qquad 3\left(x - \frac{1}{3}x^2\right) + x^2 - 3 = x - 1$$

Wśród podanych zapisów znajdują się dwa równania. Pierwsze $10 - x = x^2$ jest równaniem drugiego stopnia (czyli równaniem kwadratowym) z jedną niewiadomą, ponieważ występuje jedna niewiadoma x i jest ona w drugiej potęgze.

Drugie równanie $3\left(x - \frac{1}{3}x^2\right) + x^2 - 3 = x - 1$ należy na początku uporządkować.

Otrzymujemy $3x - x^2 + x^2 - 3 = x - 1$, czyli $3x - 3 = x - 1$. Jest to równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

Aby rozwiązać równanie, należy znaleźć liczbę, która spełnia to równanie, czyli po wstawieniu jej w miejsce niewiadomej otrzymamy równość. Do znajdowania tej liczby stosuje się **metodę równań równoważnych**. Polega ona na zastępowaniu danego równania kolejnymi równaniami mającymi to samo rozwiązanie. Postępuje się tak, aż do otrzymania rozwiązania.

$$3\left(x - \frac{1}{3}x^2\right) + x^2 - 3 = x - 1 \quad \text{Wykonujemy mnożenie po lewej stronie równania.}$$

$$3x - x^2 + x^2 - 3 = x - 1 \quad \text{Przenosimy na prawą stronę równania liczbę ze zmienionym znakiem, a na lewą niewiadomą ze zmienionym znakiem.}$$

$$3x - x^2 + x^2 - x = -1 + 3 \quad \text{Wykonujemy redukcję wyrazów podobnych po obu stronach równania.}$$

$$2x = 2 \quad \text{Dzielimy obie strony równania przez 2.}$$

$$x = 1$$

SPRAWDZENIE: $L = 3\left(1 - \frac{1}{3} \cdot 1\right) + 1 - 3 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 2 - 2 = 0$, $P = 1 - 1 = 0$,
a zatem $L = P$.

ODPOWIEDŹ: Rozwiązaniem równania, czyli pierwiastkiem równania, jest liczba 1.

- 1** Wśród podanych zapisów wskaż równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą i je rozwiąż.

I. $1 - 2x = x^3$

II. $3xy + y = 2x$

III. $12y - (y - 5) = 10y - 1$

IV. $x + 2x - 8 = 1$

V. $1 - a = 14a + 3(a - 1)$

VI. $4x^3y - y = -3xy^3$

Przykład 2.

Sprawdźmy, ile rozwiązań ma dane równanie.

$$\text{a) } -6x(x-2) = 6(-x^2 + 4) \quad \text{b) } \frac{x}{3} - \frac{3(x-1)}{2} = -1\frac{1}{6}x + 1,5 \quad \text{c) } \frac{3x-4}{-3} = \frac{5-2x}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } -6x(x-2) &= 6(-x^2 + 4) \\ -6x^2 + 12x &= -6x^2 + 24 \\ 12x &= 24 \quad | : 12 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

ODPOWIEDŹ: Równanie ma jedno rozwiązanie – jest nim liczba 2.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x}{3} - \frac{3(x-1)}{2} &= -1\frac{1}{6}x + 1,5 \\ \frac{x}{3} - \frac{3(x-1)}{2} &= -\frac{7}{6}x + \frac{3}{2} \quad | \cdot 6 \\ \cancel{2} \cdot \frac{x}{\cancel{3}_1} - \cancel{3} \cdot \frac{3(x-1)}{\cancel{2}_1} &= \cancel{1} \cdot \left(-\frac{7}{\cancel{6}_1}\right)x + \cancel{3} \cdot \frac{3}{\cancel{2}_1} \\ 2x - 9(x-1) &= -7x + 9 \\ 2x - 9x + 9 &= -7x + 9 \\ -\cancel{7}x + \cancel{7}x &= \cancel{9} - \cancel{9} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

To równanie spełnia każda liczba.

ODPOWIEDŹ: Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań i każda liczba jest pierwiastkiem tego równania. Jest to **równanie tożsamościowe**.

Równanie, które spełnia każda liczba podstawiona w miejsce niewiadomej, nazywamy **tożsamością** lub **równaniem tożsamościowym**.



$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{3x-4}{-3} &= \frac{5-2x}{2} \quad | \cdot (-6) \\ \frac{(\cancel{-6})^2 \cdot (3x-4)}{\cancel{-3}_1} &= \frac{(\cancel{-6})^{-3} \cdot (5-2x)}{\cancel{2}_1} \\ 2 \cdot (3x-4) &= -3 \cdot (5-2x) \\ 6x - 8 &= -15 + 6x \\ \cancel{6}x - \cancel{6}x &= -15 + 8 \\ 0 &= -7 \end{aligned}$$

Tego równania nie spełnia żadna liczba.

ODPOWIEDŹ: Równanie nie ma rozwiązania, czyli żadna liczba nie jest pierwiastkiem tego równania. Jest to **równanie sprzeczne**.

Równanie, które nie ma rozwiązania, nazywamy **równaniem sprzecznym**.





Równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą może:

- mieć jedno rozwiązanie,
- mieć nieskończenie wiele rozwiązań,
- nie mieć żadnego rozwiązania.

2 Czy równanie jest równaniem sprzecznym?

- a) $x = x - 2$ b) $2x = 3x$ c) $\frac{0}{x} = 0$ d) $x + 1 = x - 1$

3 Czy równanie jest tożsamością?

- a) $\frac{1}{x} = 1$ b) $1 - x = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right)$ c) $2(x - 4) = 2x - 4$

4 Ile rozwiązań ma dane równanie?

- a) $2 + x = \frac{1}{2}(4 + 2x)$ b) $2x - 1 = 5 + 2x$
 c) $x - x - x = x - x$ d) $3x - 1 = 2(x + 2) - 5 + x$

5 Dane są równania: $x + 8 = -4$, $x - 8 = -4$, $8x = -4$, $\frac{x}{8} = -4$.

Pierwiastek którego z nich jest największy? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $x + 8 = -4$ B. $x - 8 = -4$ C. $8x = -4$ D. $\frac{x}{8} = -4$

6 Dane są równania: $0,5x = 0,05$; $20x = 0,2$; $0,03x = 30$; $6,66x = 66,6$.

Pierwiastek którego z nich jest najmniejszy? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $0,5x = 0,05$ B. $20x = 0,2$ C. $0,03x = 30$ D. $6,66x = 66,6$

7 Rozwiąż równanie.

- a) $3(2x - 1) - 5(x - 3) = 0$ b) $2x + 5(5x - 1) = 22$
 c) $3(4x - 1) = 2(x + 5) - 3$ d) $-3(2x + 3) + 5(x - 2) = -4x - 31$

8 Ile rozwiązań ma dane równanie?

- a) $2a + 10 = 2(a + 5)$ b) $-8(5 - 2x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$
 c) $x - 4x^2 = 4x(1 - x)$ d) $2x^3 - x(8 + x^2) = 4 - (8x - x^3)$

9 Sprawdź, czy liczba -1 jest rozwiązaniem danego równania.

- a) $2x(x + 1) + x^2 = 1$ b) $-4(x + 2) - 5x = 4 + x(x + 1)$
 c) $-x(x^2 + 1) + 10(x^2 - 1) = 2$ d) $x^2 - (x + 3) = -x(x + 20) - 2x^3$

10 Wykaż, że rozwiązaniem równania jest podana obok liczba.

- a) $3x - 3(2x - 2) = 3(x - 2)$ $|-2|$
 b) $-5x^2 + 2(1 - x) = -x - 5(x^2 + 1)$ $\sqrt{49}$

- 11** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Równanie $4x^2 - 2x = 0$ spełniają liczby 0 i $\frac{1}{2}$.	P	F
Liczba -2 jest rozwiązaniem równania $3x - 6x^3 = -2$.	P	F
Równanie $5x^6 - x^3 = x^3(5x^3 - 1)$ spełnia każda liczba.	P	F

- 12** Sprawdź, które liczby całkowite nieujemne i mniejsze od 5 spełniają dane równanie.

a) $x^4 + 6x = 28$ b) $\frac{5x^3}{4} - \frac{3x^2}{2} = -\frac{1}{4}$
 c) $\frac{x^5}{2} - x^4 = 0$ d) $-\frac{x^3}{3} + x = -\frac{2x^2}{3}$

- 13** Sprawdź, które liczby całkowite niedodatnie i większe od -6 spełniają dane równanie.

a) $x^2 + 2x = 0$ b) $\frac{x^3}{5} + \frac{x^2}{3} = \frac{2}{15}$
 c) $4x^3 + 5x^2 = 1$ d) $\frac{x^4}{6} - 4 = -\frac{x^2}{3}$

- 14** Rozwiąż równanie.

a) $1 - \frac{3x-88}{7} = 5x$ b) $-\frac{x}{2} = 3x - \frac{3+2x}{4}$
 c) $3 - \frac{3x}{2} = \frac{5}{8} - \frac{4x-3}{6}$ d) $\frac{3-2x}{5} + 8 = \frac{5x+2}{2} - x$

- 15** Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{15} = \frac{4}{3}$ b) $\frac{3-2x}{12} = \frac{3}{2}$
 c) $\frac{6}{2-3x} = \frac{3}{7}, x \neq \frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{1-x} = \frac{3}{1+x}, x \neq 1, x \neq -1$

- 16** Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Rozwiązaniem równania $2x^2 - \frac{x}{2} = 2(x^2 - 3)$ jest liczba **A** / **B**.

A. 6 **B.** 12

Wyrażenie $K = \frac{x+4}{3}$ jest równe wyrażeniu $L = \frac{x-2}{2}$ dla **C** / **D**.

C. $x = 14$ **D.** $x = 6$

- 17** Wyznacz liczbę a , gdy masz dany pierwiastek równania.

a) $3x - (2x - 8) + a = 2(x - 5), x = 0$
 b) $2(2y - 3) - 4(3y + 2) = 4 - a, y = -1$
 c) $2(z - 1) - az = -12 - (5 + 2z), z = 1$
 d) $12x + 2(x + 1) = a(x + 2) + 14, x = \sqrt{4}$

Przykład 3.

Rozwiążmy równanie.

a) $2x(x-5) - 4x(2-x) = -3x(5-2x) + 9$

b) $\frac{x(3x-2)}{2} = \frac{6x^2+5}{4}$

a) $2x(x-5) - 4x(2-x) = -3x(5-2x) + 9$

$2x^2 - 10x - 8x + 4x^2 = -15x + 6x^2 + 9$

$6x^2 - 18x = -15x + 6x^2 + 9$

$\cancel{6x^2} - 18x + 15x - \cancel{6x^2} = 9$

$-3x = 9 \quad | : (-3)$

$x = -3$

b) $\frac{x(3x-2)}{2} = \frac{6x^2+5}{4} \quad | \cdot 4$

$\frac{\cancel{4}^2 \cdot x(3x-2)}{\cancel{2}_1} = \frac{\cancel{4}^1 \cdot (6x^2+5)}{\cancel{4}_1}$

$2x(3x-2) = 6x^2 + 5$

$6x^2 - 4x = 6x^2 + 5$

$\cancel{6x^2} - 4x - \cancel{6x^2} = 5$

$-4x = 5 \quad | : (-4)$

$x = -\frac{5}{4}$

$x = -1\frac{1}{4}$

18 Rozwiąż równanie.

a) $x(3x-2) - 18x^2 = 5x(2-3x) + 6$

b) $2x(3x-4) = 10 - 3x(1-2x)$

19 Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x(x+4)}{2} = \frac{1,5x^2+2}{3}$

b) $\frac{5x^2+1}{5} = \frac{x(2x+1)}{2}$

c) $\frac{x(x-1)}{4} = \frac{\frac{1}{2}x^2+2}{2}$

Przykład 4.Rozwiążmy równanie $(x+1)(x-2) = x^2$.

$(x+1)(x-2) = x^2$

$x^2 - 2x + x - 2 = x^2$

$-x - 2 = 0$

$-x = 2$

$x = -2$

20 Rozwiąż równanie. Czy spełnia je liczba całkowita?

a) $(x+5)(x-1) = x^2$

b) $(2+x)(1-x) + x^2 = 0$

c) $(x-4)(x+3) = x^2 + 9$

d) $(x+2)(x-1) = x(x-2)$

21 Rozwiąż równanie.

a) $(x+1)(x-2) = (x-3)(x+4)$

b) $1 - (x-2)(x+2) = (2-x)(x-1)$

- 22 Czy rozwiązanie równania $-3x + (x - 2)(x + 2) = (x + 4)(x - 4)$ jest liczbą parzystą? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	rozwiązaniem tego równania jest liczba $6\frac{2}{3}$.
B.	Nie,		2.	liczba 4 jest parzysta.

Wyzwanie

Znajdź liczby ukryte pod literami, jeśli wiadomo, że:

- ta sama litera zastępuje tę samą liczbę,
- sumę liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie wskazuje odpowiednia strzałka: $\rightarrow$ lub $\downarrow$.

a	b	a	c	$\rightarrow$	23
d	e	d	a	$\rightarrow$	2
c	c	c	c	$\rightarrow$	-16
d	e	b	a	$\rightarrow$	20
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		
-7	19	11	6		

Sprawdź się!

- 1 Rozwiąż równanie $3x + 11 = 3\left(\frac{1}{3}x + 2\right) + 1$.
- 2 Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
Wartości wyrażeń $K = 2(x + 4)$ i $L = 3x + 2$ są równe dla **A** / **B**.
A. $x = 10$ **B.** $x = 6$
Wartość wyrażenia $3x + 5$ jest o 4 większa od wartości wyrażenia $2x - 1$ dla **C** / **D**.
C. $x = 1$ **D.** $x = -2$
- 3 Sprawdź, które liczby całkowite nieujemne i mniejsze od 4 spełniają równanie $x^3 - 4x = 0$.
- 4 Czy rozwiązaniem równania $(x - 3)(x + 1) = x^2 + 21$ jest liczba całkowita? Odpowiedź uzasadnij.
- 5 Rozwiąż równanie $\frac{2x(x-1)}{3} = 2x\left(\frac{x}{3} + 1\right) - 2$.

4. Równania – zadania tekstowe

Przykład 1.

Pan Jan zakupił lodówkę za 1845 zł. Jaka była jej cena netto, jeżeli VAT na sprzęt AGD wynosi 23%?

Analiza zadania

x – cena lodówki bez VAT-u, czyli cena netto

23% z x , czyli $0,23x$ – VAT

$x + 0,23x$ – cena lodówki z VAT-em, czyli cena brutto

1845 zł – cena lodówki brutto

Równanie i jego rozwiązanie

$$x + 0,23x = 1845$$

$$1,23x = 1845 \quad | : 1,23$$

$$x = 1500$$

cena brutto
cena netto + VAT od ceny netto

ODPOWIEDŹ: Cena netto lodówki była równa 1500 zł.

- 1 Pan Jacek wykonuje remonty lokali mieszkalnych. Ostatnio wystawił fakturę za usługę na 7776 zł z VAT. Ile złotych zarobił pan Jacek po odprowadzeniu 8-procentowego VAT-u?
- 2 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Cena 1 kg mięsa wieprzowego bez VAT-u wynosi 15 zł, a z VAT-em 15,75 zł, czyli VAT wynosi 5%.	P	F
Szkoła zakupiła pięć telewizorów za kwotę 7380 zł. Cena jednego telewizora bez VAT-u to 1200 zł, czyli VAT wynosi 23%.	P	F

Przykład 2.

W liczbie dwucyfrowej cyfra dziesiątek jest 4 razy większa od cyfry jedności. Po przestawieniu cyfr otrzymamy liczbę o 54 mniejszą. Znajdźmy tę liczbę.

Analiza zadania

x – cyfra jedności szukanej liczby

$4x$ – cyfra dziesiątek szukanej liczby

$4x \cdot 10 + x$ – szukana liczba dwucyfrowa

$x \cdot 10 + 4x$ – liczba dwucyfrowa po przestawieniu cyfr

$x \cdot 10 + 4x + 54$ – szukana liczba dwucyfrowa

$4x$	x
------	-----

x	$4x$
-----	------

Równanie i jego rozwiązanie

$$4x \cdot 10 + x = x \cdot 10 + 4x + 54$$

$$40x + x = 14x + 54$$

$$41x - 14x = 54$$

$$27x = 54 \quad | : 27$$

$$x = 2$$

Sprawdzenie, czy rozwiązanie spełnia warunki zadania

2 – cyfra jedności szukanej liczby

$4 \cdot 2 = 8$ – cyfra dziesiątek szukanej liczby

$8 \cdot 10 + 2 = 82$ – szukana liczba dwucyfrowa

$2 \cdot 10 + 8 = 28$ – liczba dwucyfrowa po przestawieniu cyfr

$28 + 54 = 82$ – szukana liczba dwucyfrowa

ODPOWIEDŹ: Szukaną liczbą jest 82.

- 3 W liczbie dwucyfrowej cyfra jedności jest 2 razy mniejsza od cyfry dziesiątek. Jeżeli przestawimy cyfry tej liczby, to otrzymamy liczbę o 18 mniejszą. Znajdź tę liczbę dwucyfrową.
- 4 Asia pomyślała o jakiejś liczbie. Pomnożyła ją przez -2 , dodała 3, wynik pomnożyła przez 5 i na końcu odjęła 14. O jakiej liczbie pomyślała Asia, jeżeli końcowy wynik wynosił:
- a) 61, b) -74 ?

Odgadywanie, o którym mowa w zadaniu 4, było popularną rozrywką matematyczną w XVII i XVIII wieku. Zdolność odgadywania pomyślanej liczby uważano wówczas za przejaw czarnoksięstwa. Dzisiaj taka umiejętność jest uznawana za doskonałe ćwiczenie umysłowe.



- 5 Jeśli do pewnej liczby dodamy jej dwukrotność i trzykrotność, to otrzymamy 102. Co to za liczba?
- 6 Jeśli pewną liczbę podwoimy, to otrzymamy o 28 więcej niż 25% tej liczby. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Jeżeli przez x oznaczymy szukaną liczbę, to równaniem pozwalającym ją wyznaczyć jest
- A. $x + 2 = x + 25\% \cdot x + 28$ B. $2x + 28 = 125\% \cdot x$
C. $2x = 25\% + 28$ D. $2x = 0,25x + 28$
- 7 Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 87. Wyznacz te liczby.

Przykład 3.

Mama ma dziesięć razy więcej lat od córki. Dwa lata temu miały razem 29 lat. Ile lat ma każda z nich? Ile lat będzie miała każda z nich za 10 lat?

Analiza zadania

Informacje z zadania przedstawmy w tabeli.

	Wiek 2 lata temu	Wiek obecny	Wiek za 10 lat
Córka	$x - 2$	x	$x + 10$
Mama	$10x - 2$	$10x$	$10x + 10$

29 – suma wieku córki i mamy 2 lata temu

Równanie i jego rozwiązanie

$$x - 2 + 10x - 2 = 29$$

$$11x - 4 = 29$$

$$11x = 33$$

$$x = 3$$

Sprawdzenie, czy rozwiązanie spełnia warunki zadania

3 – obecny wiek córki

$10 \cdot 3 = 30$ – obecny wiek mamy

$3 - 2 = 1$ – wiek córki 2 lata temu

$10 \cdot 3 - 2 = 28$ – wiek mamy 2 lata temu

$1 + 28 = 29$ – suma wieku córki i mamy 2 lata temu

$3 + 10 = 13$ – wiek córki za 10 lat

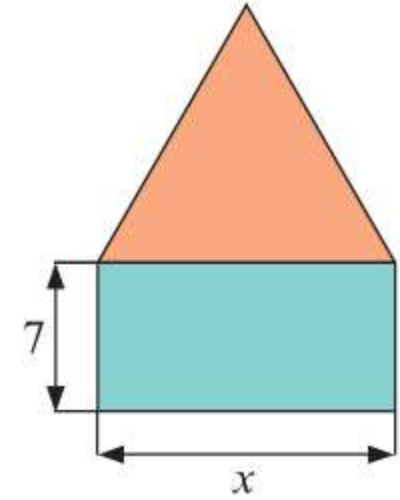
$30 + 10 = 40$ – wiek mamy za 10 lat

ODPOWIEDŹ: Córka ma 3 lata, a mama 30 lat. Za 10 lat córka będzie miała 13 lat, a mama 40 lat.



- 8 Mama ma 42 lata, a jej dzieci 12 i 8 lat. Za ile lat wiek mamy będzie równy sumie lat jej dzieci?
- 9 Obecnie Mateusz ma dwa razy więcej lat od Weroniki. Za 5 lat będą mieli razem 40 lat. Ile lat ma każde z nich?
- 10 Basia jest o 6 lat młodsza od Kasi. Za 8 lat będą miały razem 84 lata. Ile lat ma obecnie każda z nich?
- 11 Przed rokiem mama była dwa razy starsza od córki. Za 9 lat obie będą miały razem 110 lat. Ile lat ma obecnie każda z nich?
- 12 Pani Ewa z panią Ewelina mają razem 95 lat. Osiem lat temu pani Ewa była o 27 lat starsza od pani Eweliny. Ile lat ma obecnie każda z nich?

- 13 W trzech drużynach było razem 227 harcerzy. W pierwszej i drugiej drużynie było razem 151 harcerzy, a w pierwszej i trzeciej – 139 harcerzy. Ilu harcerzy było w każdej z drużyn?
- 14 Klient założył w banku lokatę oprocentowaną 2% w skali roku. Po roku otrzymał odsetki pomniejszone o 20-procentowy podatek, które wynosiły 80 zł. Jaką kwotę wpłacił na lokatę?
- 15 Firma uzyskała kredyt w banku, oprocentowany 6% w skali roku. Po roku spłaciła dług wraz z odsetkami, w sumie 127 200 zł. Ile złotych kredytu uzyskała firma?
- 16 Obwód trójkąta równobocznego przedstawionego na rysunku jest równy obwodowi prostokąta. Znajdź pole tego prostokąta.
- 17 Stosunek wieku bliźniaczek do wieku ich mamy jest równy 3 : 3 : 14. Siostry mają razem 12 lat. Ile lat będzie miała mama za 4 lata?
- 18 Stosunek długości boków trójkąta prostokątnego jest równy 13 : 12 : 5. Średni bok jest dłuższy od najkrótszego o 3,5 cm. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.



Obwód tego trójkąta jest równy **A / B**.

A. 15 cm

B. 30 cm

Pole tego trójkąta jest równe **C / D**.

C. 15 cm²

D. 7,5 cm²

- 19 Do uzyskania brązu potrzeba miedzi, cyny i ołowiu, odpowiednio w stosunku 17 : 2 : 1. Ile każdego ze składników należy wziąć, aby otrzymać 160 kg stopu?

Do określania zmian wielkości wyrażanych w procentach, takich jak np. inflacja, stopa procentowa, używamy pojęcia **punkt procentowy**.

Przykład 4.

Bank podniósł oprocentowanie kredytu z 5% do 6%. Obliczmy:

- a) o ile procent wzrosło oprocentowanie kredytu,
b) o ile punktów procentowych bank podwyższył oprocentowanie kredytu.

a) Odsetki stanowiące 5% kwoty x , pożyczonej z banku, to $0,05x$.

Odsetki stanowiące 6% kwoty x to $0,06x$.

Odsetki wzrosły o $0,06x - 0,05x = 0,01x$.

Obliczmy, jakim procentem liczby $0,05x$ jest liczba $0,01x$: $\frac{0,01x}{0,05x} = 0,2 = 20\%$

b) $6 - 5 = 1$ [p.proc.]

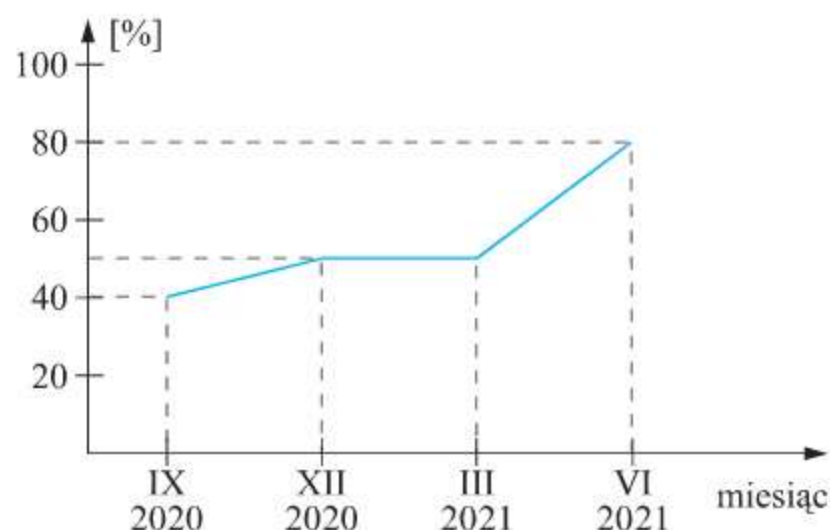
ODPOWIEDŹ: a) Oprocentowanie kredytu wzrosło o 20%.

b) Bank podwyższył oprocentowanie kredytu o 1 punkt procentowy.



Punkty procentowe (w skrócie p.proc.) to różnica między dwiema wartościami pewnej wielkości podanymi w procentach. Na przykład informacja: „W bieżącym roku bezrobocie spadło z 11% do 8%” oznacza, że bezrobocie na końcu roku jest o 3 punkty procentowe niższe niż na początku roku.

- 20 Bank podniósł oprocentowanie kredytu z 5% do 8%.
- O ile procent wzrosło oprocentowanie tego kredytu?
 - O ile punktów procentowych wzrosło oprocentowanie tego kredytu?
- 21 Pan Piotr miał 5% akcji spółki Deltoid SA. Wykupił kolejne akcje, co spowodowało, że jego udział w spółce wzrósł o 15 p.proc.
- Ile procent akcji spółki Deltoid SA ma obecnie pan Piotr?
 - O ile procent pan Piotr zwiększył swój udział w spółce Deltoid SA?
- 22 W pewnej szkole raz na kwartał uczniowie biorą udział w ankiecie, której celem jest zbadanie, jaki procent uczniów szkoły dobrze ocenia pracę samorządu szkolnego. Na wykresie przedstawiono wyniki ankiet przeprowadzonych w roku szkolnym 2020/2021. Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania.
- O ile punktów procentowych wzrósł odsetek uczniów dobrze oceniających pracę samorządu w tym okresie?
 - O ile procent wzrósł odsetek uczniów dobrze oceniających pracę samorządu w tym roku szkolnym?



Przykład 5.

Bank podniósł oprocentowanie lokaty terminowej o 1,8 p.proc., w wyniku czego oprocentowanie wzrosło o 40%. Jakie było pierwotne oprocentowanie tej lokaty?

Analiza zadania

x – pierwotne oprocentowanie lokaty

$x + 0,4x$ – oprocentowanie lokaty po wzroście o 40%

$x + 1,8\%$ – oprocentowanie lokaty po wzroście o 1,8 p.proc.

Równanie i jego rozwiązanie

$$x + 0,4x = x + 1,8\%$$

$$0,4x = 1,8\% \quad | : 0,4$$

$$x = 4,5\%$$



Sprawdzenie, czy rozwiązanie spełnia warunki zadania

4,5% – pierwotne oprocentowanie lokaty

$4,5\% + 0,4 \cdot 4,5\% = 4,5\% + 1,8\% = 6,3\%$ – oprocentowanie lokaty po wzroście o 40%

Wzrost oprocentowania w p.proc. wynosi $6,3 - 4,5 = 1,8$, co jest zgodne z warunkami zadania.

ODPOWIEDŹ: Pierwotne oprocentowanie lokaty wynosiło 4,5%.

- 23** Oprocentowanie kredytu bankowego zmalało o 2 p.proc., co oznacza, że zmniejszyło się o 25%. Jakie było pierwotne oprocentowanie tego kredytu? A jakie jest obecnie?

Przykład 6.

Samochód przejechał 195 km w ciągu 2 godzin 10 minut. Ile kilometrów przejedzie w tych samych warunkach w ciągu 1 godziny 20 minut?

Analiza zadania

$$2 \text{ h } 10 \text{ min} = \left(2 + \frac{10}{60}\right) \text{ h} = 2\frac{1}{6} \text{ h} = \frac{13}{6} \text{ h}$$

$$1 \text{ h } 20 \text{ min} = \left(1 + \frac{20}{60}\right) \text{ h} = 1\frac{1}{3} \text{ h} = \frac{4}{3} \text{ h}$$

x – tyle kilometrów przejedzie samochód w ciągu 1 godziny i 20 minut

Zapisujemy proporcję.

$$195 \text{ km} \text{ — } \frac{13}{6} \text{ h}$$

$$x \text{ km} \text{ — } \frac{4}{3} \text{ h}$$

Równanie i jego rozwiązanie

$$\frac{195}{x} = \frac{\frac{13}{6}}{\frac{4}{3}}$$

Korzystamy z własności proporcji: iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych.

$$\frac{13}{6}x = 195 \cdot \frac{4}{3}$$

$$\frac{13}{6}x = 260 \quad \left| : \frac{13}{6} \right.$$

$$x = 120 \text{ [km]}$$



ODPOWIEDŹ: W ciągu 1 h 20 min samochód przejedzie 120 km.

- 24** Rowerzysta przejechał 45 km w ciągu 1 godziny i 30 minut. Ile kilometrów przejedzie w tych samych warunkach w ciągu 50 minut?
- 25** Marek na hulajnodze przejechał 14 km w ciągu 1 godziny i 10 minut. Ile kilometrów przejedzie w tych samych warunkach w ciągu 40 minut?

- 26 Motocyklista przejechał w ciągu 2 godzin i 20 minut odległość 177 km, co stanowi $\frac{2}{3}$ całej trasy. W jakim czasie pokona pozostałą część trasy, jeśli będzie jechał z taką samą prędkością?
- 27 Na mapie sporządzonej w skali 1 : 1 000 000 odległość od domu pana Grzegorza do parku rozrywki jest równa 4,5 cm. Jaka jest rzeczywista odległość między tymi obiektami?
- 28 Mapa jest sporządzona w skali 1 : 2 000 000. Odległość między dwoma miastami na tej mapie jest równa 4 cm. Jaka jest rzeczywista odległość między tymi miastami?
- 29 W jednej łyżce mieści się 10 g żelatyny. W szklance mieści się 230 g żelatyny. Ile to łyżek? W ilu szklankach zmieści się 1,15 kg żelatyny?
- 30 W jednej łyżce mieści się 15 ml wody. W szklance mieści się 255 ml wody. Ile to łyżek? W ilu szklankach zmieści się 2,04 l wody?
- 31 W dwóch skrzynkach są 54 pomarańcze. Po przełożeniu 9 owoców z jednej skrzynki do drugiej w obu skrzynkach jest ich tyle samo. Ile pomarańczy było początkowo w każdej skrzynce?
- 32 W dwóch bańkach znajduje się mleko. W pierwszej bańce jest dwa razy więcej mleka niż w drugiej. Jeśli z każdej bańki odlejemy po 20 l, to w pierwszej pozostanie 3 razy więcej niż w drugiej. Ile mleka jest w tych bańkach?
- 33 Iloczyn pewnej liczby i tej liczby powiększonej o 2 jest równy iloczynowi tej liczby pomniejszonej o 4 i tej samej liczby powiększonej o 10. Wyznacz tę liczbę.
- 34 Iloczyn pewnej liczby i tej samej liczby pomniejszonej o 1 jest równy iloczynowi tej liczby powiększonej o 2 i tej samej liczby pomniejszonej o 2. Wyznacz tę liczbę.
- 35 Jeden bok prostokąta ma długość x cm, a drugi jest o 4 cm dłuższy. Pole tego prostokąta jest o 4 cm^2 większe od pola kwadratu o boku długości x cm. Oblicz obwód prostokąta i pole kwadratu.
- 36 Ile wody należy dolać do 1 litra 10% octu jabłkowego, aby otrzymać ocet jabłkowy o stężeniu 3%?
- 37 Ile należy wziąć śmietany o zawartości tłuszczu 12%, a ile o zawartości tłuszczu 22%, aby otrzymać pół litra śmietany o zawartości tłuszczu 18%? Odpowiedź podaj w mililitrach.
- 38 Ile trzeba wziąć octu o stężeniu 3%, a ile octu o stężeniu 5%, aby otrzymać 2 litry octu o stężeniu 3,5%?



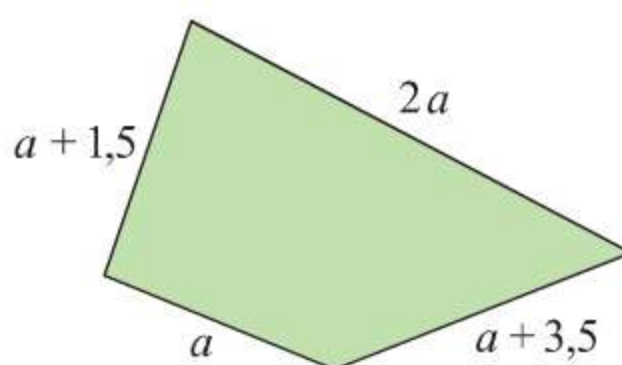
- 39** Gdy do roztworu soli o stężeniu 10% dodano 0,5 kg soli, to otrzymano roztwór o stężeniu 15%. Ile kilogramów soli i ile kilogramów wody było w roztworze dziesięcioprocentowym?
- 40** Przed trzema laty Olek był trzy razy starszy od Bolka, a za cztery lata Bolek będzie dwa razy młodszy od Olka. Ile lat obecnie ma Olek, a ile Bolek?

Wyzwanie

Olek dodał pięć kolejnych liczb naturalnych, ale nie pamięta, czy otrzymał 354, 345 czy 534. Pomóż Olkowi znaleźć tę sumę.

Sprawdź się!

- Suma trzech kolejnych liczb, z których każda jest o 3 większa od poprzedniej, wynosi 48. Wyznacz te liczby.
- Oblicz długości boków czworokąta, jeśli wiadomo, że jego obwód jest równy 20.



- Stosunek długości boków prostokąta jest równy 2 : 3. Obwód prostokąta wynosi 30 cm. Oblicz pole tego prostokąta.
- Iloczyn liczby pomniejszonej o 2 i tej samej liczby pomniejszonej o 1 jest równy kwadratowi tej liczby pomniejszonemu o 7. Wyznacz tę liczbę.
- Bank podniósł oprocentowanie kredytu z 4% do 6%. Czy oprocentowanie kredytu wzrosło o 2% pierwotnego oprocentowania? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$\frac{0,06x - 0,04x}{0,04x} = \frac{0,02x}{0,04x} = 0,5 = 50\%$, gdzie x oznacza kwotę kredytu.
B.	Nie,		2.	$6\% - 4\% = 2\%$.

Zadania utrwalające



- 1 Od sumy $3x^2 + y^2 - 2xy$ odejmij podwojone wyrażenie $-xy - 2y^2 + 2x^2$, a następnie oblicz wartość liczbową otrzymanego wyrażenia dla $x = -2$, $y = \sqrt{5}$.
- 2 Ewa kupiła w sklepie dwie pary skarpet po $(4a - b)$ zł za parę oraz rajstopy o 9 zł droższe od jednej pary skarpet. Ile złotych reszty zostało jej ze 100 zł?
- 3 Spośród trzech kolejnych liczb nieparzystych największą jest $2n + 3$. Oblicz sumę tych trzech liczb.
- 4 Dobierz w pary wyrażenia równe dla dowolnego x .

A. $4(2x - 3) - 2(3x - 7)$	I. $2x - 3$
B. $-2x + 3 + 4x - 5$	II. $2x + 3$
C. $3(4x + 1) - 10x$	III. $2x - 2$
D. $(x + 3)(x - 1) - x^2$	IV. $2x + 2$
- 5 Oblicz wartość wyrażenia, jeśli wiadomo, że $a + b = 1$ i $ab = -6$.

a) $(a + 1)(b + 1)$	b) $(a - 1)(b - 1)$	c) $(a + 4)(b + 4)$
---------------------	---------------------	---------------------
- 6 Połowa obwodu prostokąta jest równa $(x + 5y)$ dm. Jeden bok prostokąta ma długość $3y$ dm. Zapisz wyrażenie algebraiczne, za pomocą którego obliczysz pole tego prostokąta w centymetrach kwadratowych.
- 7 Długość x każdego boku kwadratu zwiększono o 3. O ile są większe obwód i pole tego kwadratu?
- 8 Długość każdego boku prostokąta zmniejszono o 20%. O ile procent zmniejszyło się pole tego prostokąta?
- 9 Sprawdź, które liczby całkowite nieujemne mniejsze od 4 spełniają dane równanie.

a) $-x^3 + 5x^2 = 4$	b) $6x^2 - 10x = 6x + 6$
c) $-x^6 + 2x^5 = 0$	d) $x^4 - \frac{5}{7} = \frac{2x^3}{7}$
- 10 Rozwiąż równanie.

a) $3(4x - 2) - 2(x - 3) = 10$	b) $(3x + 4)x + 3x = 11 + 3x^2 - 4$
c) $x + \frac{5 - 4x}{3} = \frac{-x + 5}{3}$	d) $\frac{c + 2}{5} - 3 = \frac{4 + 2c}{10} + 30$
e) $\frac{x}{4} - \frac{x}{3} = \frac{x}{2} - 7$	f) $\frac{x - 3}{2} - \frac{2x + 1}{3} = -1$
g) $(x - 3)(x + 1) = x(x - 5)$	h) $\frac{x - 4}{2} = \frac{2(x + 3)}{3}$

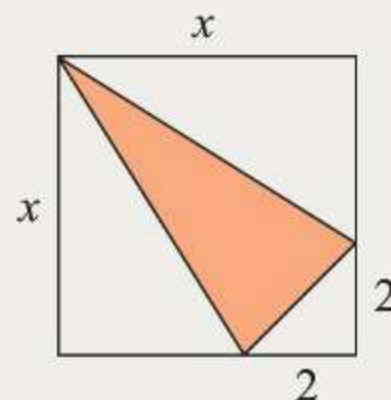
- 11** Trzy hektary lasu liściastego pochłaniają około 180 t pyłów w ciągu roku. Ile co najmniej hektarów lasu trzeba posadzić wokół zakładów produkcyjnych, które rocznie emitują 480 t pyłów, aby lasy w całości pochłonęły te pyły?
- 12** Stopiono dwie bryłki dwóch różnych metali i otrzymano 135 g stopu. Pierwszy metal pozornie traci po zanurzeniu w wodzie 20% początkowej masy, a drugi 25%. Ile gramów każdego metalu było w stopie, jeśli po zanurzeniu stop pozornie stracił 30 g?
- 13** Zmieszano pewną liczbę kilogramów 4-procentowego roztworu soli z dwa razy większą liczbą kilogramów 10-procentowego roztworu tej soli. Iluprocentowy roztwór soli otrzymano?
- 14** Na wycieczkę szkolną zapisało się $\frac{2}{3}$ uczniów klasy ósmej. Z powodu choroby pojechało o 10% uczniów mniej, niż się zapisało. Na wycieczce było 18 uczniów. Ilu uczniów jest w tej klasie?
- 
- 15** Dwie świnki ważyły łącznie 165 kg. Po pewnym czasie masa jednej z nich wzrosła o 10%, a drugiej tylko o 4%. Przyrost masy pierwszej świnki był trzy razy większy od przyrostu masy drugiej. Ile kilogramów przybyło na wadze każdej ze świnek?
- 16** Cenę towaru obniżono o 25%, a następnie nową cenę obniżono jeszcze o 20%. Po dwóch obniżkach cena towaru jest równa 6 zł. Oblicz cenę towaru przed obniżkami i podaj, o ile procent zmniejszyła się cena w wyniku obydwu obniżek.
- 17** Liczbę 5797 rozłóż na sumę dwóch składników tak, aby jeden ze składników miał na końcu zero i aby po skreśleniu tego zera otrzymać drugi składnik tej sumy.
- 18** Maria ma 24 lata. Maria ma dwa razy więcej lat niż miała Anna wtedy, gdy Maria miała tyle lat, ile teraz ma Anna. Ile lat ma Anna?

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–6. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Po uproszczeniu wyrażenia $3x(4y - x) + 12$ otrzymasz
 A. $12xy - x + 12$ B. $7x^2y + 12$ C. $7xy - x + 12$ D. $12xy - 3x^2 + 12$
- 2 Liczba -1 jest rozwiązaniem równania
 A. $6(x - 4) = 30$ B. $x^3 - 4x = 3$ C. $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = -\frac{1}{3}$ D. $\frac{x}{5} = \frac{1}{10}$
- 3 Rozwiązaniem równania $3(2x^2 + 15) = -9 - 6x(1 - x)$ jest liczba przeciwna do
 A. $|-9|$ B. -9 C. $\frac{1}{9}$ D. $-\frac{1}{9}$
- 4 Pierwiastkiem równania $100 - 100x = 2,022 \cdot 10^5$ jest
 A. 2021 B. 2022 C. 2020 D. -2021
- 5 Najmniejszą liczbą całkowitą niedodatnią spełniającą równanie $-4x^2 - 10x = 4$ jest liczba
 A. 0 B. -2 C. 2 D. -1
- 6 Bok kwadratu przedstawionego na rysunku ma długość x . Pole zamalowanego trójkąta można zapisać za pomocą wyrażenia
 A. $x(x - 2) + 2$ B. $2(x - 1)$
 C. $x^2 - 2x + 2$ D. $-2x + 2$



W zadaniach 7.–9. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 7 Która spośród liczb jest rozwiązaniem równania $(x + 1)(x - 5) = x(x - 3)$?
 A. -5 B. 2,5 C. 1,25 D. 2
- 8 W pierwszym pojemniku było 30 kulek, a w drugim 75 kulek. Do każdego pojemnika dołożono po tyle samo kulek. Wtedy okazało się, że w drugim pojemniku jest dwa razy więcej kulek niż w pierwszym. Przyjmij, że x oznacza liczbę kulek dołożonych do każdego pojemnika. Które równanie umożliwi obliczenie x ?
 A. $30 + x = 2(75 + x)$ B. $2(30 + x) = 75 + x$
 C. $2x + 30 = 75 + x$ D. $2x + 75 = 30 + x$

- 9 W ciągu 1 godziny 20 minut motocyklista przejechał 80 km. Ile kilometrów przejedzie w czasie 2 godzin 25 minut, jeśli będzie jechał z tą samą prędkością co wcześniej?
 A. 150 km B. Mniej niż 130 km. C. 145 km D. Więcej niż 150 km.

- 10 Dane jest wyrażenie $(a - 1)(a + 1) - a^2$. Czy wartość tego wyrażenia jest ujemna dla dowolnej liczby a ? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	dla $a = -200$ wartość tego wyrażenia jest nieujemna.
			2.	dla dowolnej liczby ujemnej a zachodzi $a - 1 < a$.
B.	Nie,		3.	wartość wyrażenia jest równa -1 .

- 11 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczba -1 spełnia równanie $x^5 - 10x^4 = -11$.	P	F
Rozwiązaniem równania $x^3 - 3x = \sqrt[3]{3}$ jest liczba $\sqrt[3]{3}$.	P	F
Równanie $6x^4 - 10x^2 = 2x^2(3x^2 - 5)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.	P	F

- 12 Środek przedziorkobójczy jest używany do spryskiwania truskawek jako 0,06-procentowy roztwór wodny. Sześć litrów tego roztworu wystarcza na spryskanie 100 m^2 pola truskawek. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Jeśli środek przedziorkobójczy byłby sprzedawany w pięciolitrowych pojemnikach, to do spryskania półhektarowego pola truskawek należałoby zakupić A / B takich pojemników. A. 50 B. 60

45 pięciolitrowych pojemników tego roztworu wystarczyłoby na spryskanie C / D pola truskawek. C. 0,25 ha D. 3750 m^2

- 13 Stosunek długości boków czworokąta jest równy $8 : 7 : 5 : 2$. Różnica długości między najdłuższym i najkrótszym bokiem wynosi 3 cm. Oblicz obwód tego czworokąta. Zapisz obliczenia.

- 14 Za pewną kwotę można było kupić 12 kg moreli po 8 zł za kilogram. O ile procent obniżono cenę kilograma moreli, jeśli obecnie za tę samą kwotę można kupić 16 kg moreli? Zapisz obliczenia.

- 15 Zosia jest o 8 lat młodsza od Oli. Za 3 lata Ola będzie dwa razy starsza od Zosi. Ile lat ma każda z nich obecnie? Ile lat łącznie będą miały za 5 lat? Zapisz obliczenia.

- 16 Wiadomo, że $a + b = 2$ i $ab = -5$. Udowodnij, że wartość liczbową wyrażenia $(a - 5)(b - 5)$ jest równa $|-10|$.

Algebra w kinie

Marek i Jarek wybrali się do kina. Przed rozpoczęciem seansu kupili dwa bilety ulgowe, dwie butelki soku pomarańczowego oraz nachos. Chłopcy zapłacili niestandardowo – użyli karty, na której zgromadzili punkty za wcześniejsze wizyty w kinie.



Ile punktów pobrano chłopcom z karty za bilety, dwie butelki soku i nachos?

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} 20 \cdot (2 \cdot 14 + 2 \cdot 6 + 18) &= \\ &= 20 \cdot (28 + 12 + 18) = \\ &= 20 \cdot 58 = 1160 \text{ [punktów]} \end{aligned}$$

Ile punktów musieliby przeznaczyć na taki sam zakup, jeśli bilet kosztowałby a zł, sok c zł, a nachos b zł?

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} 20 \cdot (2 \cdot a + 2 \cdot c + b) &= \\ &= 20 \cdot 2a + 20 \cdot 2c + 20 \cdot b = \\ &= 40a + 40c + 20b \end{aligned}$$

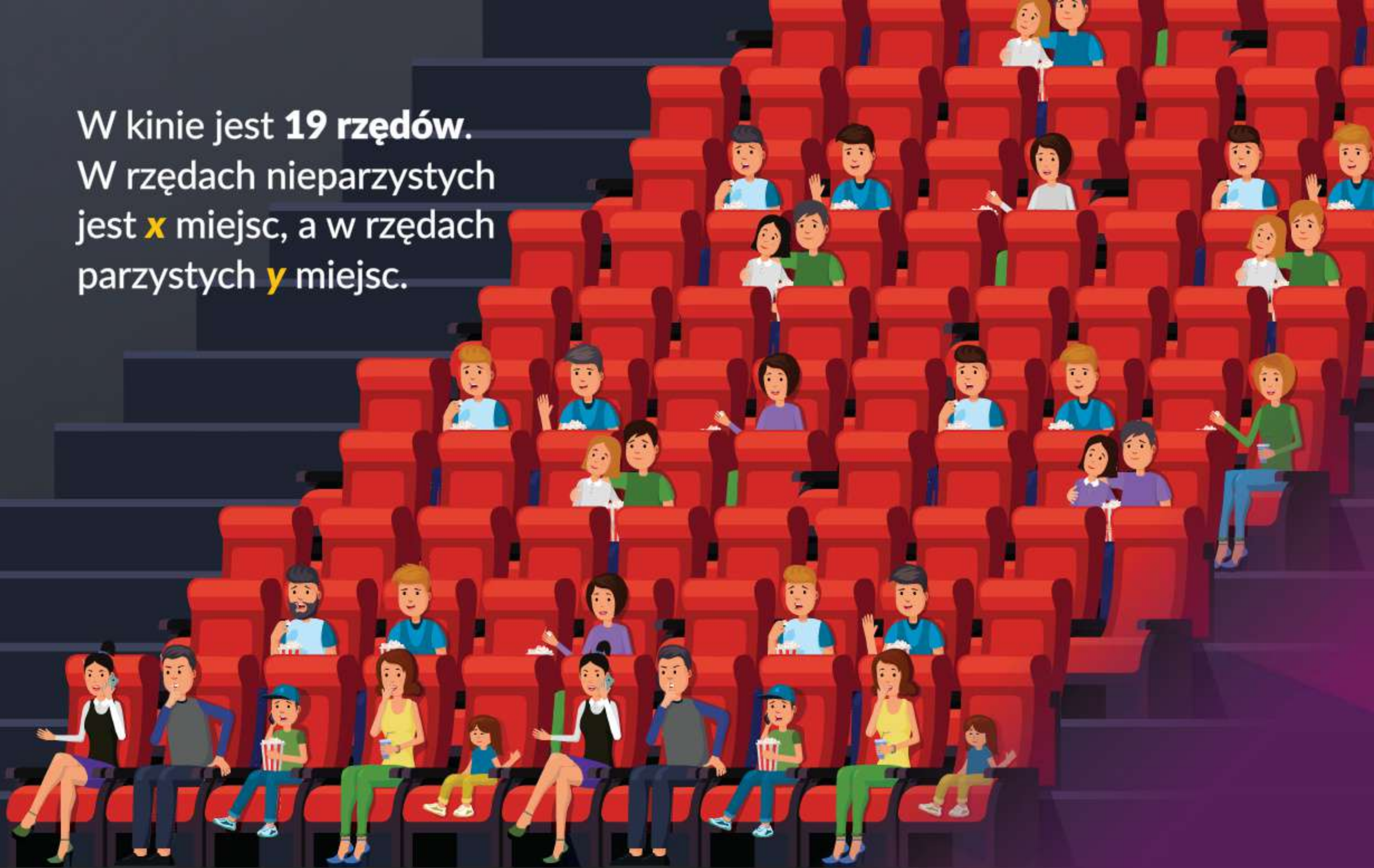
A ile punktów by im pobrano, gdyby za każdą złotówkę pobierano nie 20 punktów, a x punktów?

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} x \cdot (2a + 2c + b) &= \\ &= x \cdot 2a + x \cdot 2c + x \cdot b = \\ &= 2ax + 2cx + bx \end{aligned}$$



W kinie jest **19 rzędów**.
W rzędach nieparzystych
jest **x** miejsc, a w rzędach
parzystych **y** miejsc.



Podczas seansu zajętych było
60% wszystkich miejsc.
Okazało się, że **40%** sprzedanych
biletów stanowiły bilety normalne.

Jak obliczyć wpływy do kasy po tym seansie?

Rozwiązanie:

$10x + 9y$ – liczba wszystkich miejsc w kinie

$0,6 \cdot (10x + 9y)$ – liczba zajętych miejsc

$0,4 \cdot 0,6 \cdot (10x + 9y)$ – liczba biletów normalnych

$23 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot (10x + 9y)$ – wpływ do kasy za bilety normalne

$0,6 \cdot 0,6 \cdot (10x + 9y)$ – liczba biletów ulgowych

$14 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot (10x + 9y)$ – wpływ do kasy za bilety ulgowe

Do kasy po tym seansie wpłynie **$105,6x + 95,04y$** zł.



60%
wszystkich
miejsc było
zajętych.

$60\% = 0,6$

40%
sprzedanych
biletów to bilety
normalne.

$40\% = 0,4$



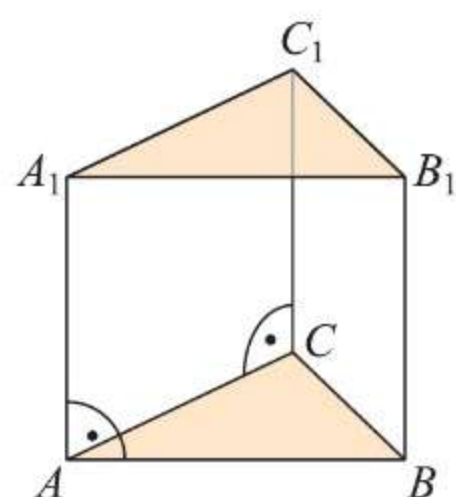
Ile pieniędzy wpłynęłoby do kasy kina za sprzedaż tych biletów, gdyby **x** było równe 15,
a **y** było równe 20?

1. Graniastopy – pole powierzchni i objętość

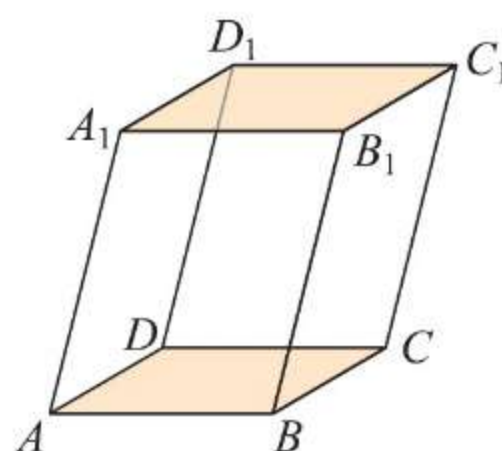
Przypomnij sobie

- jakie figury przestrzenne nazywamy graniastopami,
- kiedy graniastop jest prawidłowy,
- jak obliczamy pole powierzchni całkowitej i objętość graniastopa.

Graniastop to taki wielościan, który ma dwie przystające podstawy w kształcie dowolnego wielokąta, leżące w płaszczyznach równoległych. Wszystkie krawędzie boczne graniastopa są równej długości i równoległe do siebie. Wyróżniamy graniastopy proste i pochyłe. Ściany boczne graniastopów prostych są prostokątami, a graniastopów pochyłych równoległobokami.



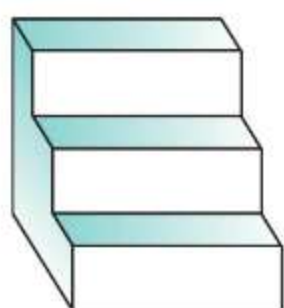
Graniastop prosty



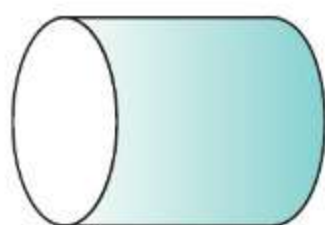
Graniastop pochyły

1 Na rysunku przedstawiono różne figury przestrzenne.

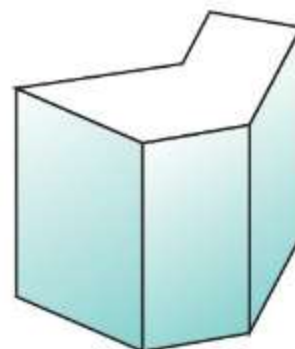
I



II



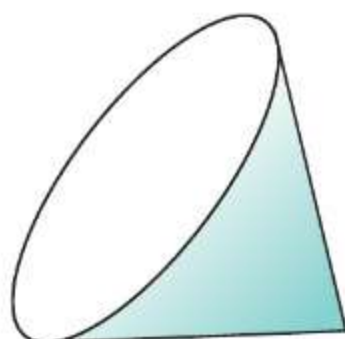
III



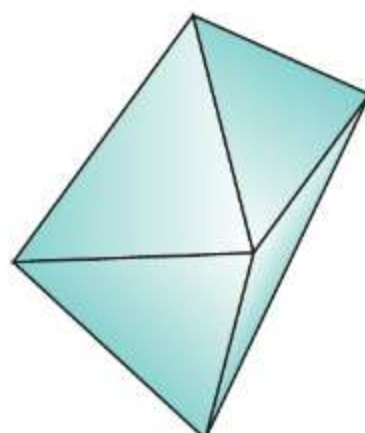
IV



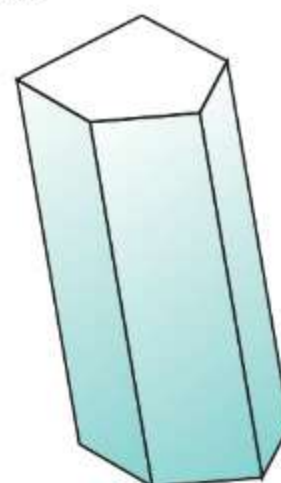
V



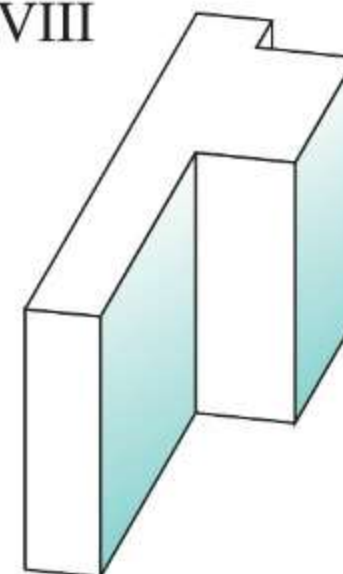
VI



VII



VIII



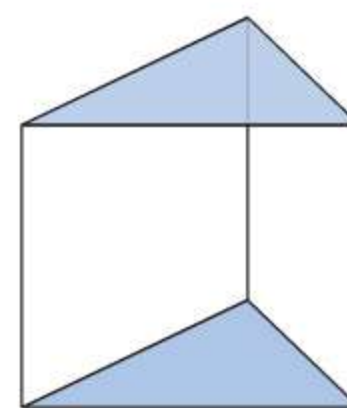
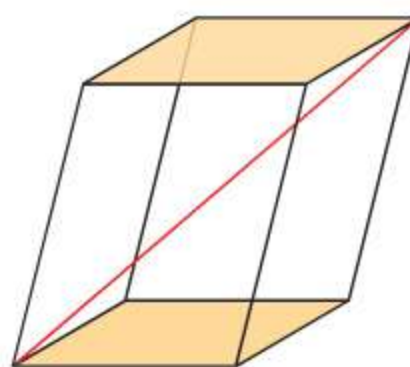
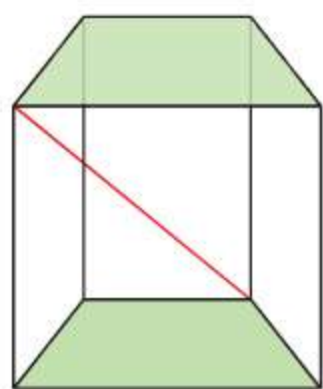
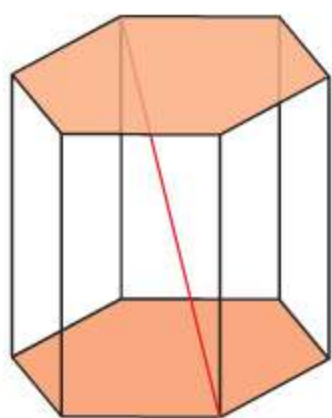
Które spośród narysowanych figur:

- a) **nie są** graniastopami,
- b) są graniastopami prostymi,
- c) są graniastopami pochyłymi?

- 2 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wśród graniastopów prostych czworokątnych tylko sześcian jest graniastopem prawidłowym.	P	F
Jeśli podstawą graniastopa prostego jest trójkąt, którego miary kątów wewnętrznych są równe, to jest to graniastop prawidłowy.	P	F

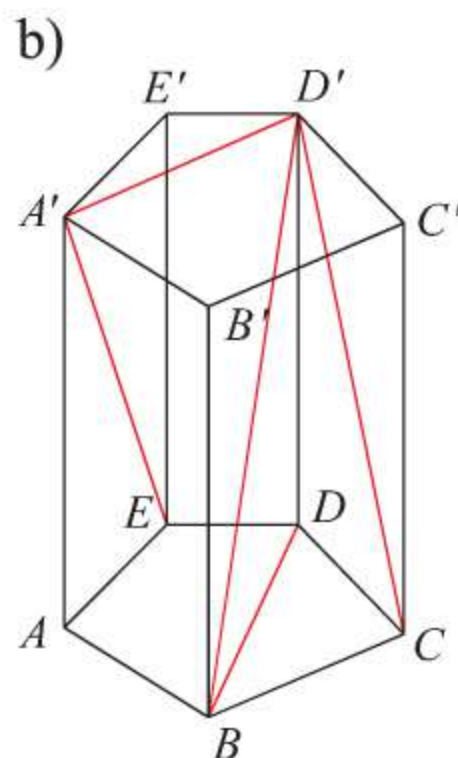
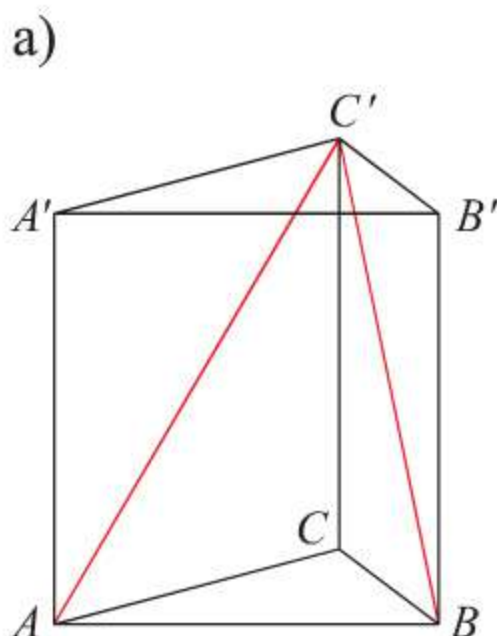
W graniastopie każdy odcinek, który łączy dwa wierzchołki i nie zawiera się w żadnej ze ścian graniastopa, nazywamy **przekątną graniastopa**.



Graniastop trójkątny nie ma przekątnych.



- 3 Ile przekątnych można poprowadzić w graniastopie:
- a) czworokątnym, b) pięciokątnym, c) sześciokątnym?
- 4 Ile przekątnych można poprowadzić w graniastopie, który ma w podstawie wielokąt o n kątach?
- 5 Które z odcinków zaznaczonych na rysunku są: przekątnymi podstaw, przekątnymi ścian bocznych, przekątnymi graniastopa?



Przykład 1.

Obliczmy długość przekątnej sześcianu o krawędzi a .

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, wówczas:

AC – przekątna kwadratu o boku a ,

AC' – przekątna sześcianu.

Wiemy, że długość przekątnej kwadratu o boku a jest równa $a\sqrt{2}$. Wobec tego $|AC| = a\sqrt{2}$.

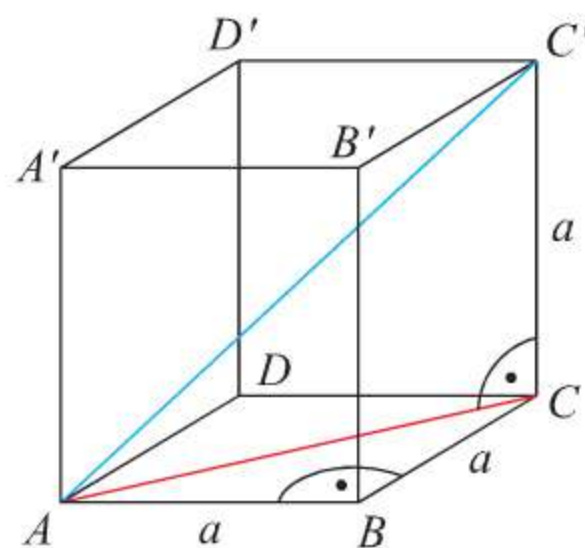
Trójkąt ACC' jest prostokątny, możemy więc skorzystać z twierdzenia Pitagorasa.

$$|AC'|^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$$

$$|AC'|^2 = 2a^2 + a^2$$

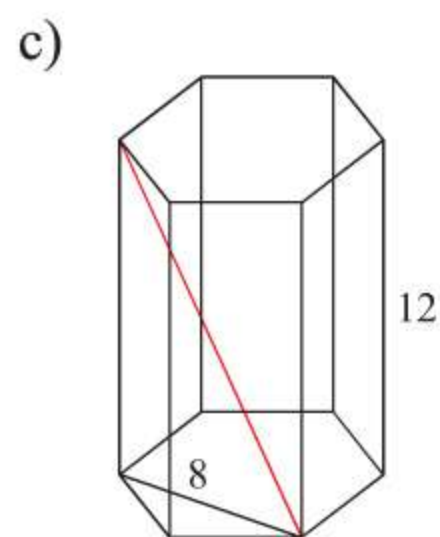
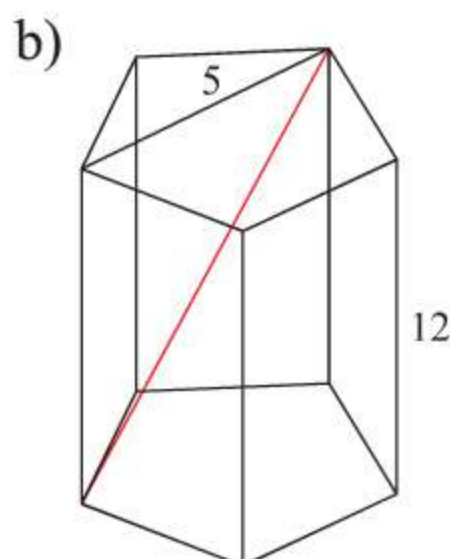
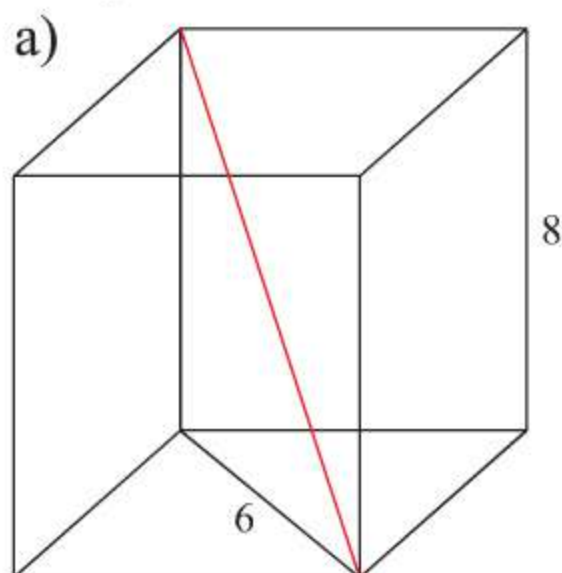
$$|AC'|^2 = 3a^2$$

$$|AC'| = a\sqrt{3}$$



- Długość przekątnej kwadratu o boku a jest równa $a\sqrt{2}$.
- Długość przekątnej sześcianu o krawędzi a jest równa $a\sqrt{3}$.

- 6 Oblicz długość przekątnej sześcianu o krawędzi:
a) 2 cm, b) 4,8 cm, c) $3\sqrt{2}$ cm.
- 7 Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach:
a) $3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$, b) $2\sqrt{2} \text{ cm} \times 3\sqrt{3} \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$.
- 8 Oblicz długość zaznaczonej przekątnej graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku.



- 9 Jaką długość ma przekątna d prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times c$?

Przykład 2.

Obliczmy pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu, w którym przekątna mniejszej ściany bocznej, o długości 10 cm, tworzy z krawędzią boczną kąt 30° . Stosunek długości krawędzi podstawy jest równy 2 : 1.

Wykonajmy odpowiedni rysunek.

Dane

$$|\angle BGC| = 30^\circ$$

$$|BG| = 10 \text{ cm}$$

$$|AB| : |BC| = 2 : 1$$

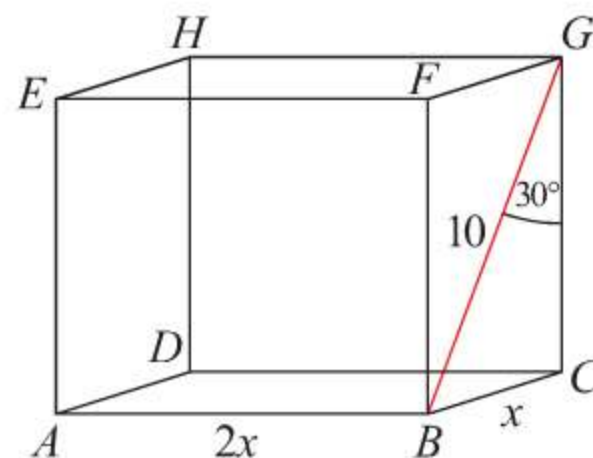
Szukane

$$P_c = ?$$

$$|BC| = x = ?$$

$$|AB| = 2x = ?$$

$$|CG| = h = ?$$



Rozwiązanie

Trójkąt BCG jest trójkątem prostokątnym o kątach ostrych 30° i 60° . Wobec tego $x = 10 \text{ cm} : 2 = 5 \text{ cm}$, czyli $2x = 10 \text{ cm}$.

$$h = \frac{2x\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$h = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

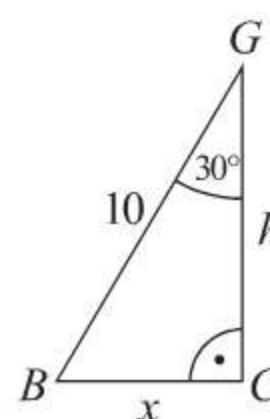
$$\text{Pole podstawy: } P_p = 10 \cdot 5 = 50 [\text{cm}^2]$$

Pole powierzchni bocznej:

$$P_b = 2(10 + 5) \cdot 5\sqrt{3} = 150\sqrt{3} [\text{cm}^2]$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = 2 \cdot 50 + 150\sqrt{3} = 50(2 + 3\sqrt{3}) [\text{cm}^2]$$



$$P_c = 2P_p + P_b$$

ODPOWIEDŹ: Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu wynosi $50(2 + 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

- 10** W graniastopie prawidłowym krawędź podstawy ma długość 20 cm, a krawędź boczna $5\sqrt{3}$ cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastopy, jeśli wiadomo, że jest on:
- a) trójkątny, b) czworokątny, c) sześciokątny.
- 11** Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastopy prawidłowego czworokątnego, którego pole podstawy jest równe 81 cm^2 , a kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy ma miarę 60° .
- 12** Podstawą graniastopy prostego jest równoległobok, w którym dłuższy bok ma długość n cm, a krótszy 22 cm. Wysokość graniastopy jest o 4 dm dłuższa od krótszej krawędzi podstawy.
- Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
- Pole powierzchni bocznej tego graniastopy jest równe
- A. $52(n + 22) \text{ cm}^2$ B. $62(n + 22) \text{ cm}^2$
 C. $124(n + 22) \text{ cm}^2$ D. $26(n + 22) \text{ cm}^2$

- 13** Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, jeśli wiadomo, że jego krawędź boczna ma długość 20 cm, a wysokość podstawy stanowi 90% wysokości graniastosłupa.

Przykład 3.

Obliczmy objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź boczna ma długość 20 cm, a wysokość podstawy jest równa 12 cm.

Naszkicujmy graniastosłup prawidłowy trójkątny. Jego podstawą jest trójkąt równoboczny.

Dane

$$|AA'| = 20 \text{ cm}$$

$$|AB| = |BC| = |CA| = a$$

$$|AD| = h_{\Delta} = 12 \text{ cm}$$

Szukane

$$V = ?$$

$$a = ?$$

Rozwiązanie

Aby obliczyć objętość graniastosłupa, musimy znać pole jego podstawy P_p i wysokość h . Wysokość jest dana, znajdziemy zatem pole podstawy.

Z własności trójkąta równobocznego wynika, że:

$$h_{\Delta} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$12 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad | \cdot 2$$

$$a\sqrt{3} = 24 \quad | \cdot \sqrt{3}$$

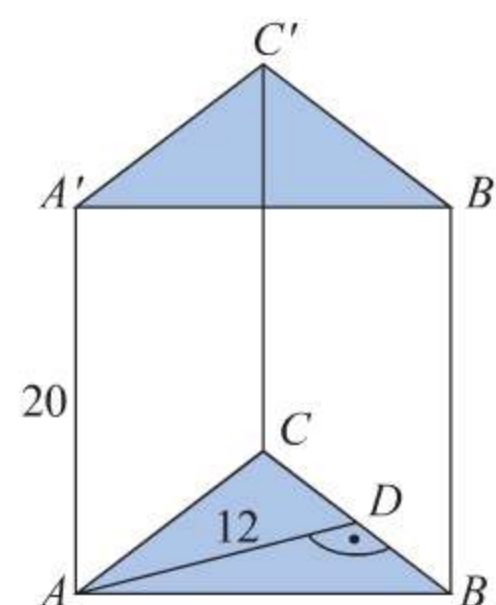
$$3a = 24\sqrt{3} \quad | : 3$$

$$a = 8\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

$$\text{Pole podstawy: } P_p = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 12 = 48\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{Objętość: } V = 48\sqrt{3} \cdot 20 = 960\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

ODPOWIEDŹ: Objętość graniastosłupa jest równa $960\sqrt{3} \text{ cm}^3$.



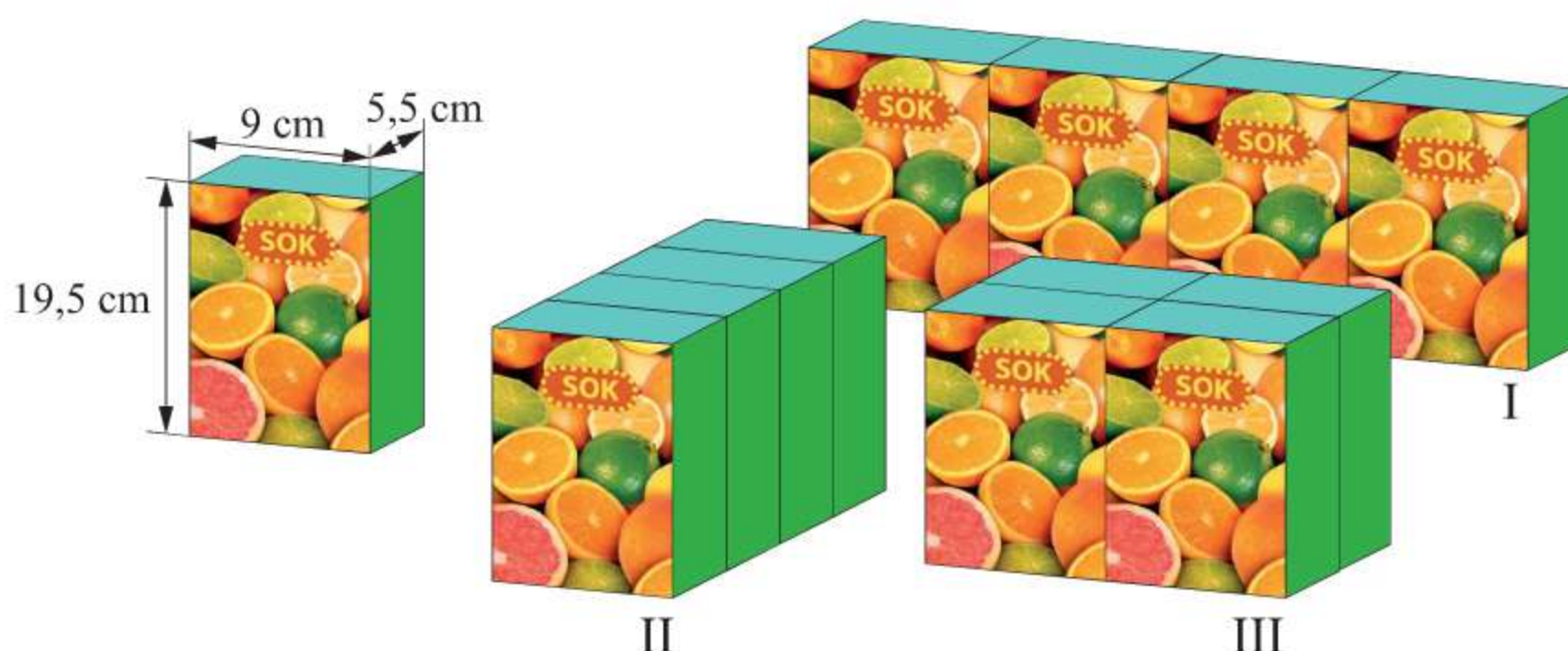
$$V = P_p \cdot h$$

- 14** Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu, którego objętość jest równa sumie objętości trzech sześcianów o polach powierzchni całkowitej równych odpowiednio 54 cm^2 , 96 cm^2 , 150 cm^2 .
- 15** Deskę długości 1,5 m wykonano z wysuszonego drewna jodły. Deska ma kształt prostopadłościanu o wymiarach podstawy $20 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$. Oblicz masę dziesięciu takich desek, jeśli wiadomo, że gęstość wysuszonego drewna jodłowego jest równa 410 kg/m^3 .

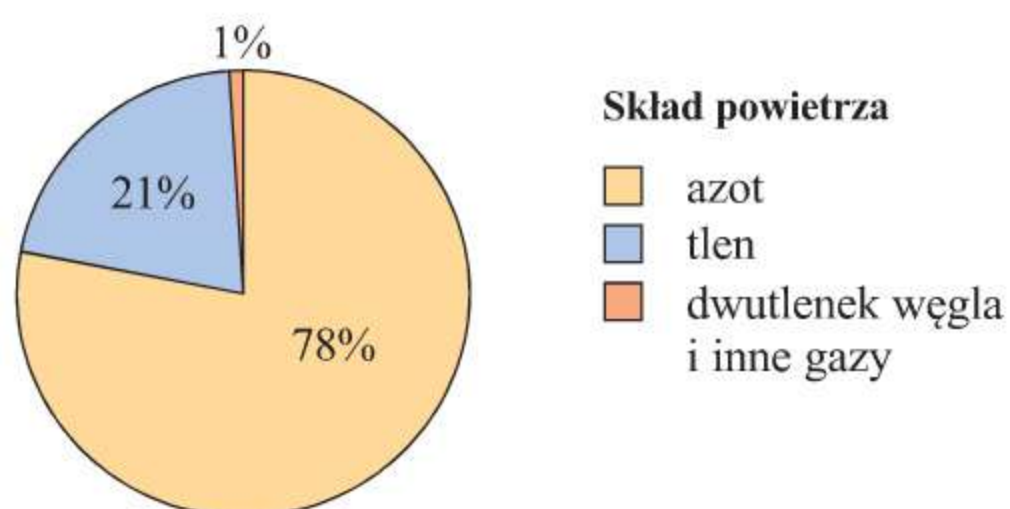
- 16** Objętość prostopadłościanu jest równa 30 cm^3 . Czy ulegnie ona zmianie, jeśli jedną z krawędzi podstawy wydłużymy czterokrotnie, drugą – skrócimy dwukrotnie, a wysokość prostopadłościanu skrócimy trzykrotnie? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$4 \cdot 2 \cdot 3 \neq 30$.
			2.	po zmianach długości krawędzi nowa objętość będzie stanowiła $\frac{2}{3}$ pierwotnej objętości.
B.	Nie,		3.	po zmianach długości krawędzi nowa objętość będzie stanowiła $\frac{3}{2}$ pierwotnej objętości.

- 17** Kartonowe pudełka z sokiem pakuje się w folię termokurczliwą po 4 sztuki na trzy różne sposoby pokazane na rysunku.
- a) Który sposób ustawienia soków zapewnia najmniejsze zużycie folii?
b) Ile litrów soku zawiera czteropak?

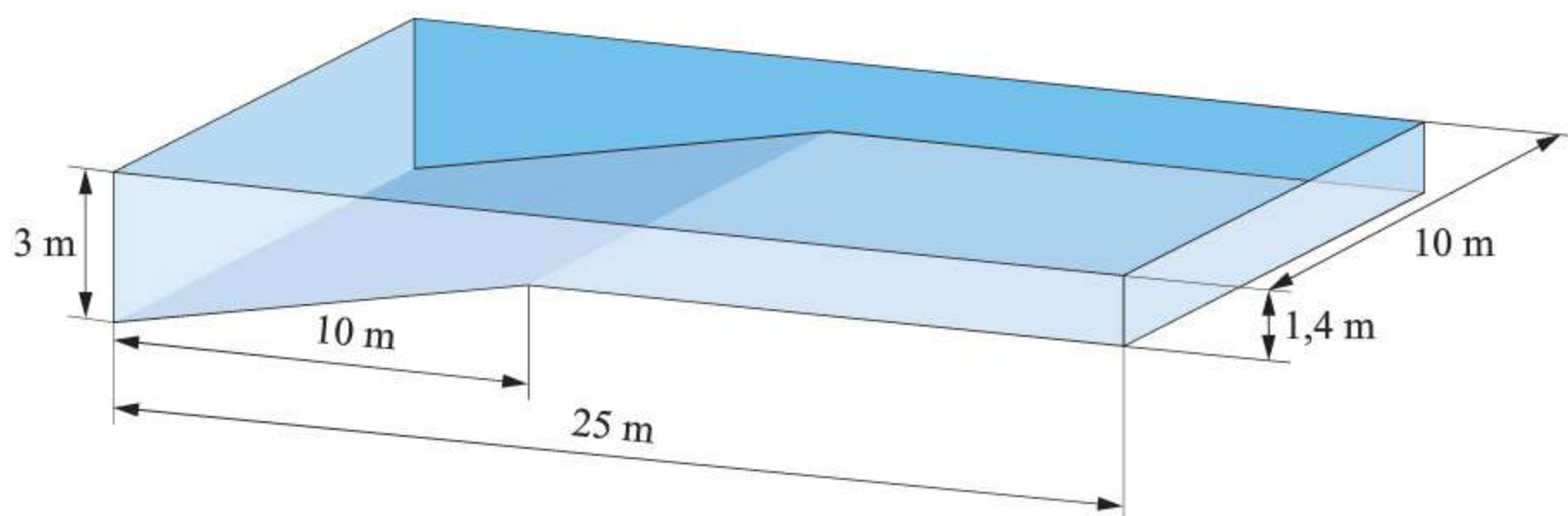


- 18** Ile metrów sześciennych tlenu znajduje się w schronie mającym kształt prostopadłościanu o wymiarach $15 \text{ m} \times 3,6 \text{ m} \times 2 \text{ m}$? Wykorzystaj dane przedstawione na poniższym diagramie.

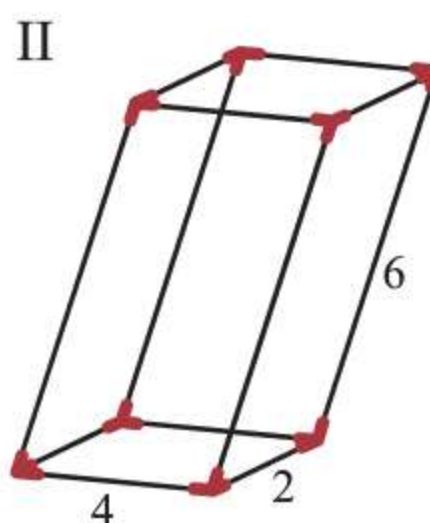
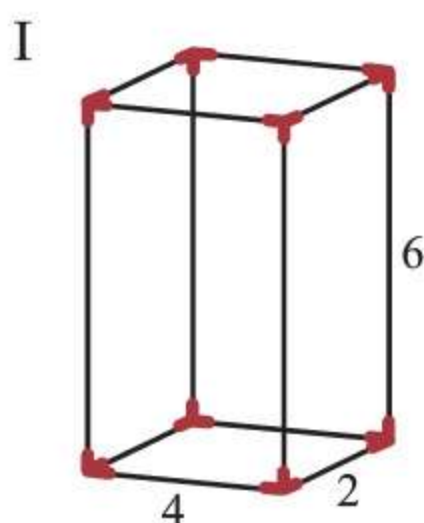


- 19** Akwarium w kształcie prostopadłościanu ma podstawę o wymiarach $40 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$ i wysokość równą 60 cm . Wypełnione jest wodą w 75%. O ile centymetrów podniesie się poziom wody w akwarium, jeśli wlejemy do niego jeszcze 32 l wody?

- 20** Skorzystaj z wymiarów basenu podanych na rysunku i oblicz:
- ile metrów kwadratowych kafelków trzeba kupić na wyłożenie wszystkich ścian basenu, jeśli chcemy mieć w zapasie 10% kafelków,
 - ile litrów wody należy nalać do basenu, aby go wypełnić po brzegi.



- 21** Pola trzech ścian prostopadłościanu są równe $6,5 \text{ m}^2$, 7 m^2 , $7,28 \text{ m}^2$. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.
- 22** Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 8 dm jest romb o przekątnych długości $x \text{ cm}$ i $(x + 1) \text{ cm}$. Wyraż w dm^3 różnicę objętości tego graniastosłupa i graniastosłupa prostego o wysokości 4 dm, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $x \text{ cm}$ i $(x + 1) \text{ cm}$.
- 23** Szkielet prostopadłościanu (rysunek I) zbudowano z dwunastu prętów połączonych przegubowymi trójknikami. Graniastosłup pokazany na rysunku II powstaje przez pochylenie krawędzi bocznych. Czy objętości tych dwóch graniastosłupów są równe? Odpowiedź uzasadnij.



- 24** Kontener samochodu ciężarowego ma wymiary: długość 10 m, szerokość 3 m, wysokość 4 m. Ile maksymalnie skrzyń o wymiarach $1,5 \text{ m} \times 1,5 \text{ m} \times 0,75 \text{ m}$ można załadować do takiego kontenera?

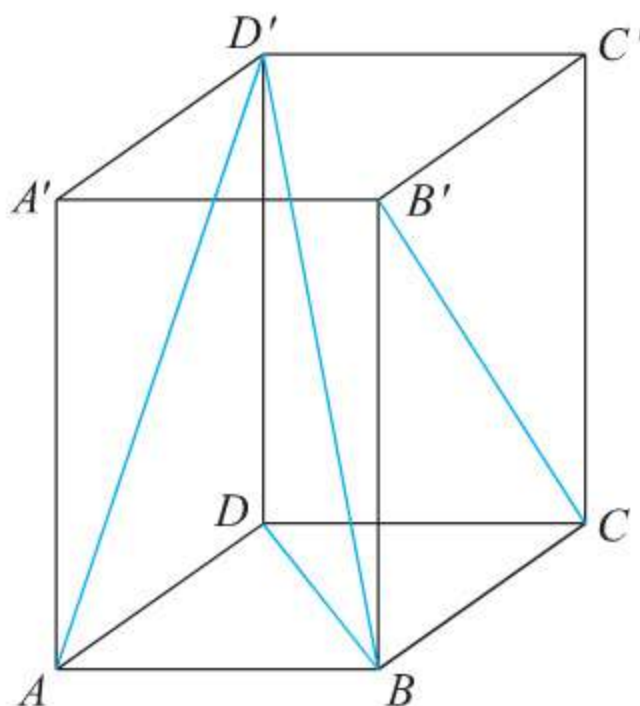


Wyzwanie

Pola trzech różnych ścian prostopadłościanu wynoszą odpowiednio 12, 16, 48. Wymiary tego prostopadłościanu są liczbami naturalnymi. Czy potrafisz znaleźć te wymiary? Jeśli tak, to podaj je.

Sprawdź się!

- 1 Które z odcinków zaznaczonych na rysunku są: przekątnymi podstaw, przekątnymi ścian bocznych, przekątnymi graniastopy?



- 2 Ile decymetrów ma długość przekątnej sześcianu o krawędzi:
a) 25 cm, b) $2\sqrt{3}$ m?
- 3 Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 5 cm. Jego pole powierzchni całkowitej jest równe 276 cm^2 . Ile wynosi objętość tego graniastosłupa? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. 280 cm^3 **B.** $282,5 \text{ cm}^3$ **C.** $256,5 \text{ cm}^3$ **D.** 226 cm^3
- 4 Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią boczną kąt 30° i ma długość 8 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.
- 5 W akwarium mającym kształt prostopadłościanu o wysokości 80 cm i wymiarach podstawy $1 \text{ m} \times 40 \text{ cm}$ woda sięgała do $\frac{3}{4}$ jego wysokości. Odlano 80 l wody. Do jakiej wysokości sięga teraz woda w akwarium?

2. Ostrosłupy

Przypomnij sobie

- jakie figury przestrzenne nazywamy ostrosłupami,
- jakimi figurami są ściany boczne ostrosłupów,
- jakie figury mogą być podstawami ostrosłupów.

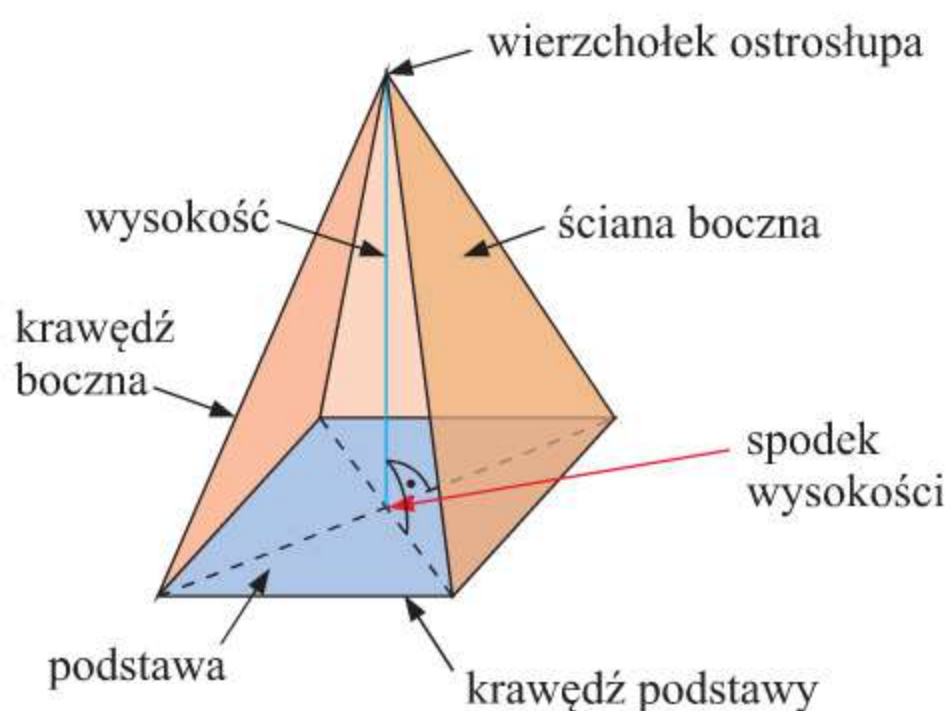


Piramidy egipskie mają kształt figur przestrzennych, które nazywamy **ostrosłupami**.

Ostrosłupy, tak jak graniastosłupy, należą do **wielościanów**.

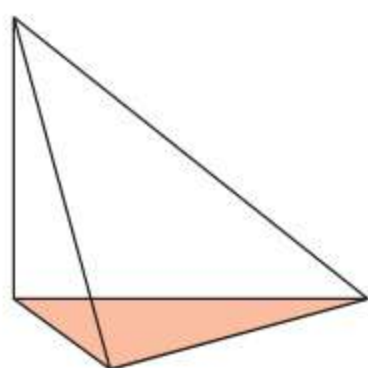
Podstawą ostrosłupa może być dowolny wielokąt. **Ściany boczne** są trójkątami mającymi wspólny punkt, który nazywamy **wierzchołkiem ostrosłupa**. Odcinek (lub jego długość) łączący wierzchołek ostrosłupa z płaszczyzną podstawy, prostopadły do tej płaszczyzny, jest **wysokością ostrosłupa**.

Spodkiem wysokości nazywamy punkt wspólny wysokości i płaszczyzny podstawy.



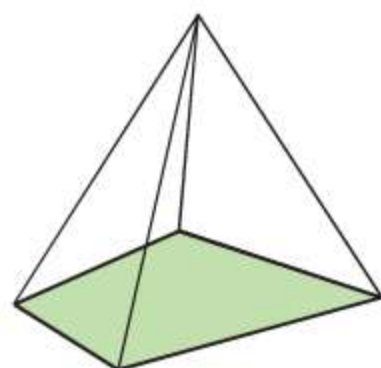
Ostrosłupy, w zależności od tego, jaki wielokąt mają w podstawie, mogą być: trójkątne, czworokątne, pięciokątne, sześciokątne itd.

I



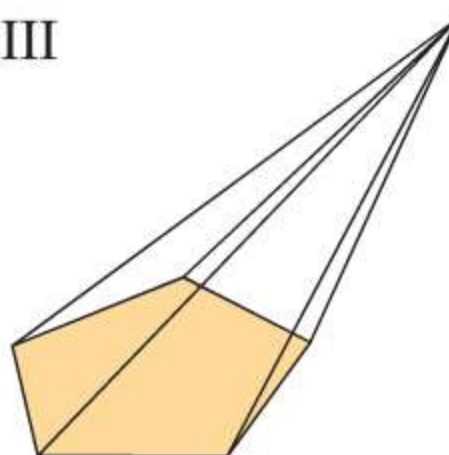
Ostrosłup trójkątny, zwany czworościanem, ma cztery ściany: podstawę i trzy ściany boczne.

II



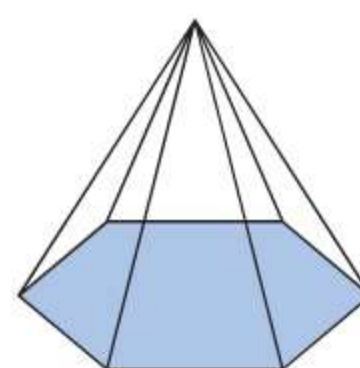
Ostrosłup czworokątny ma pięć ścian: podstawę i cztery ściany boczne.

III



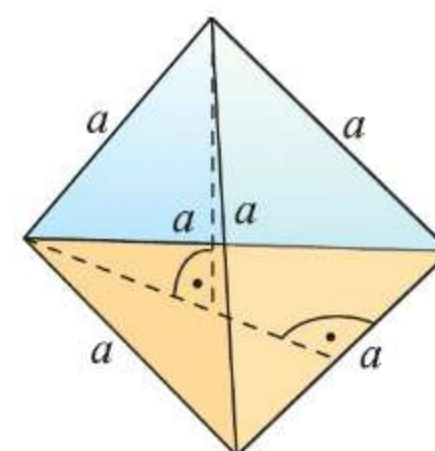
Ostrosłup pięciokątny ma sześć ścian.

IV



Ostrosłup sześciokątny ma siedem ścian.

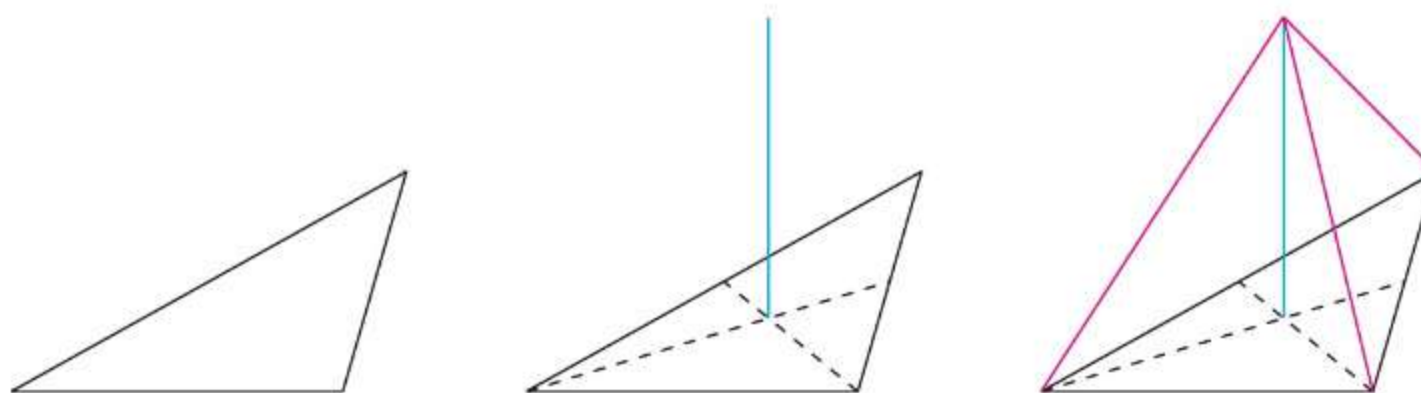
Ostrosłup, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**. Wszystkie krawędzie czworościanu foremnego są równej długości a .



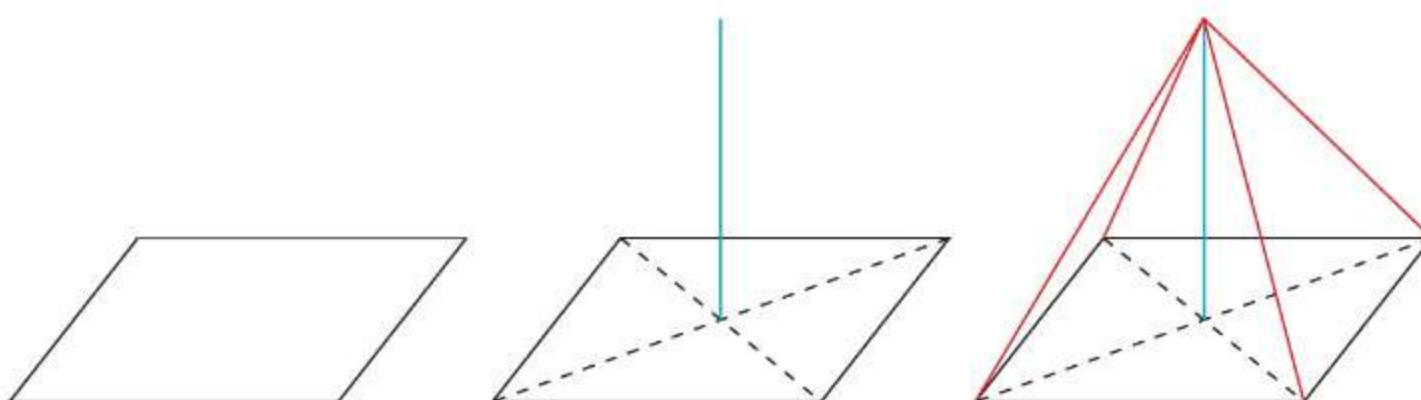
Ostrosłup, którego podstawa jest wielokątem foremnym, a ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi, nazywamy **ostrosłupem prawidłowym**.

Poniżej przedstawiono sposób rysowania ostrosłupów, w których spodek wysokości leży na podstawie (np. ostrosłupów prawidłowych).

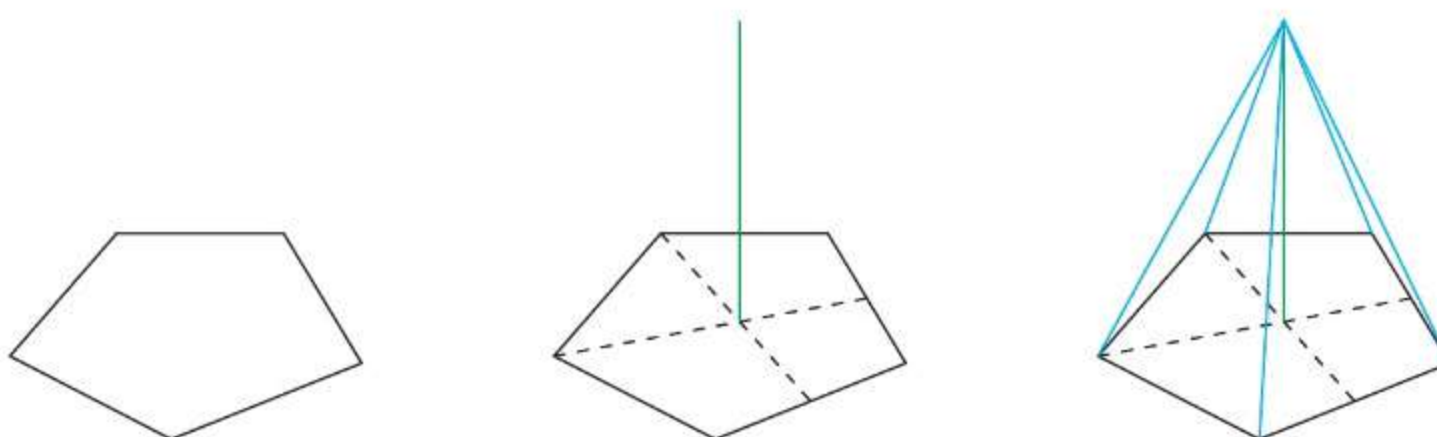
I



II



III



Istnieją również ostrosłupy, których spodek wysokości leży poza podstawą.



1 Skorzystaj z rysunków lub modeli ostrosłupów i odpowiedz na poniższe pytania.

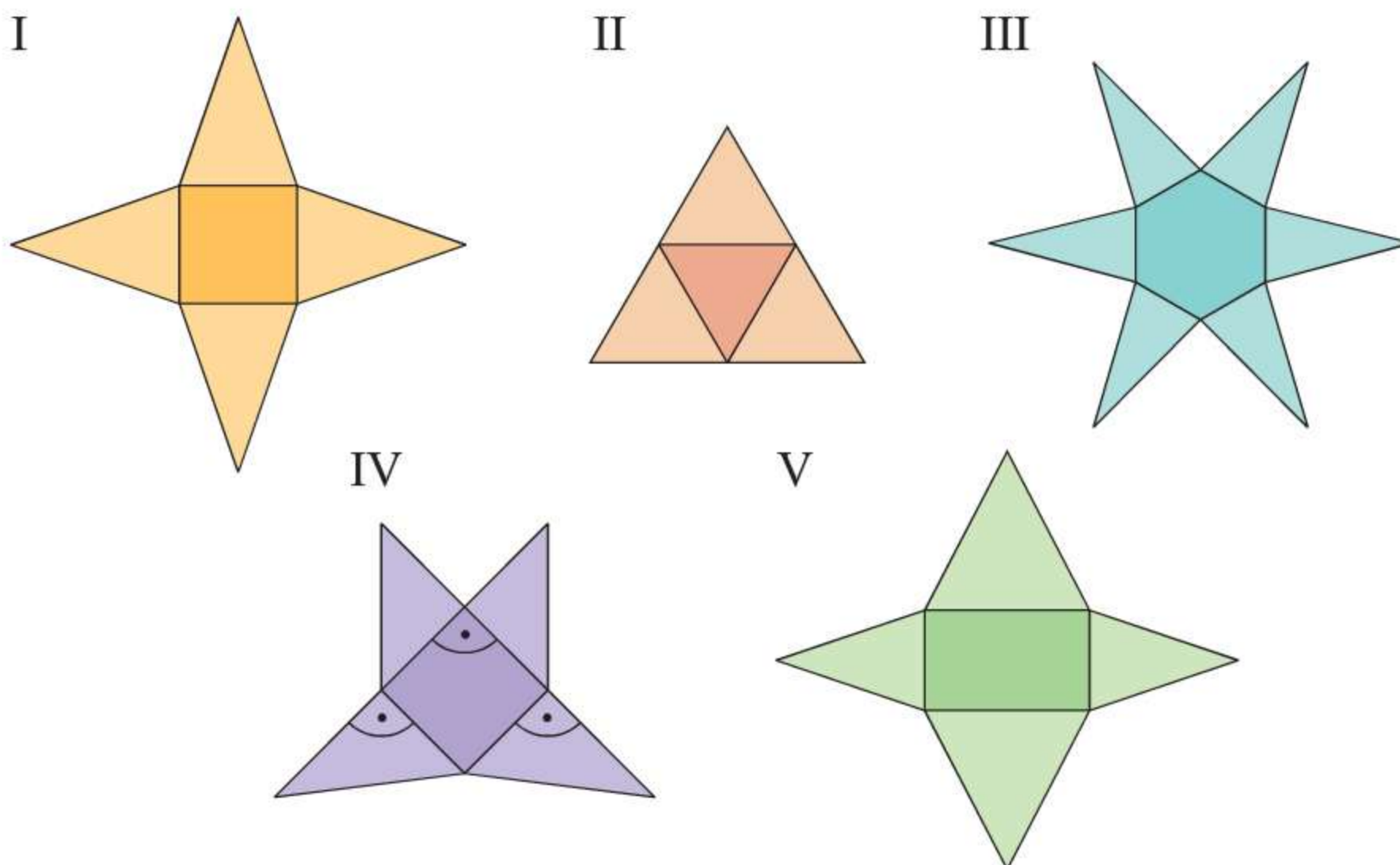
- Jaka figura może (a jaka nie może) być podstawą ostrosłupa?
- Jakimi figurami są ściany boczne ostrosłupa?
- Od czego zależy liczba ścian bocznych ostrosłupa?
- Ile krawędzi ma ostrosłup? Od czego to zależy?

- 2 Podaj nazwę ostrosłupa, o którym wiesz, że ma:
a) pięć ścian bocznych, b) dwanaście krawędzi, c) cztery wierzchołki.
- 3 Jaki wielokąt jest podstawą ostrosłupa prawidłowego, który ma:
a) trzy ściany boczne, b) osiem krawędzi, c) siedem wierzchołków?
- 4 Przepisz zdania i je uzupełnij.
I. Ściany boczne ostrosłupa są .
II. Podstawą ostrosłupa może być wielokąt.
III. Jeśli każda ściana ostrosłupa jest , to ostrosłup nazywamy czworościanem.
IV. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny w podstawie ma , a jego ściany boczne są .
V. Jeśli ostrosłup ma w podstawie kwadrat, a ściany boczne są , to jest ostrosłupem prawidłowym.
- 5 Jaka jest długość jednej krawędzi czworościanu foremnego, jeśli suma długości wszystkich krawędzi wynosi 144 cm?
- 6 Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 48 cm. Jaka jest długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa, jeśli krawędź podstawy jest dwa razy krótsza od krawędzi bocznej? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. 4 cm B. 6 cm C. 8 cm D. 12 cm
- 7 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

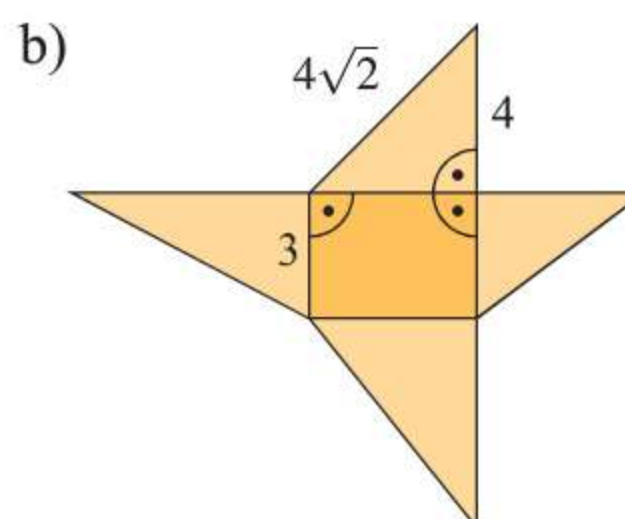
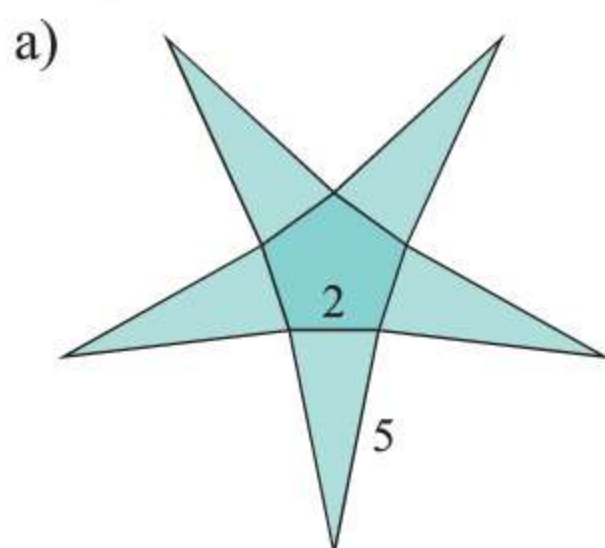
W każdym ostrosłupie liczba wierzchołków jest o 1 większa od liczby ścian.	P	F
W dowolnym ostrosłupie liczba krawędzi jest dwukrotnie większa od liczby ścian.	P	F
W każdym ostrosłupie jest parzysta liczba krawędzi.	P	F
W ostrosłupie dziesięciokątnym suma liczby wierzchołków i ścian jest o 2 większa od liczby krawędzi.	P	F

- 8 Czy wysokość ostrosłupa może być:
a) równa długości jednej z krawędzi bocznych,
b) mniejsza niż długość jednej z krawędzi bocznych,
c) większa niż długość jednej z krawędzi bocznych?
- 9 Podaj przykład ostrosłupa, w którym:
a) każda krawędź boczna jest tej samej długości,
b) liczba wierzchołków jest równa liczbie ścian,
c) tylko dwie krawędzie boczne mają jednakową długość.

Na rysunku przedstawiono przykłady siatek ostrosłupów.



- 10** Podaj nazwy ostrosłupów, których siatki przedstawiono na rysunku powyżej.
- 11** Narysuj siatkę czworościanu foremnego, którego krawędź ma długość 4 cm.
- 12** Narysuj siatkę ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, jeśli:
- krawędź podstawy ma długość 3 cm, a krawędź boczna 5 cm,
 - krawędź podstawy ma długość 2 cm, a wysokość ściany bocznej 4 cm.
- 13** Narysuj w skali 1 : 4 siatkę ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, jeżeli krawędź podstawy ma długość 12 cm, a krawędź boczna 20 cm.
- 14** Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa, którego siatkę przedstawiono na rysunku.



- 15** W kwadracie narysuj trójkąt, którego wierzchołki leżą na bokach kwadratu, w taki sposób, aby cały rysunek stanowił siatkę ostrosłupa.

Wyzwanie

Czy można narysować siatkę ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego przekątna podstawy ma długość $20\sqrt{2}$ cm, a krawędź boczna 10 cm? Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdź się!

- 1 Jak nazywa się ostrosłup, który ma:
a) czternaście krawędzi, b) sześć wierzchołków, c) siedem ścian?
- 2 Narysuj siatkę ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy ma długość 5 cm, a wysokość ściany bocznej jest równa 4 cm.
- 3 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Suma długości wszystkich krawędzi czworościanu foremnego, w którym wysokość ściany bocznej wynosi $\sqrt{3}$ cm, jest równa
A. 8 cm B. $12\sqrt{3}$ cm C. 12 cm D. $8\sqrt{3}$ cm
- 4 Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego jest równa 64 cm. Jaka jest długość krawędzi jego podstawy, jeśli krawędź boczna jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy?
- 5 Graniastosłup i ostrosłup mają tyle samo krawędzi. Jakimi wielokątami są podstawy tych brył? Podaj dwa przykłady.

3. Pole powierzchni ostrosłupa

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest sumą pól jego ścian, a więc jest polem siatki tego ostrosłupa.

Pole powierzchni całkowitej P_c ostrosłupa jest równe sumie pola podstawy P_p i pola powierzchni bocznej P_b ostrosłupa.

$$P_c = P_p + P_b$$

Przykład 1.

Obliczmy pole siatki ostrosłupa, którego podstawą jest prostokąt o wymiarach $16\text{ cm} \times 6\text{ cm}$, a krawędź boczna ma długość 10 cm .

Wykonajmy rysunek pomocniczy siatki tego ostrosłupa. Pole siatki ostrosłupa jest sumą pól prostokąta i czterech trójkątów.

$$P_c = P_1 + 2 \cdot P_2 + 2 \cdot P_3$$

$P_1 = 16 \cdot 6 = 96\text{ [cm}^2\text{]}$ – pole podstawy ostrosłupa

Aby obliczyć pola ścian bocznych P_2 i P_3 , należy najpierw wyznaczyć ich wysokości h_2 i h_3 . Ściany boczne są trójkątami równoramiennymi. Skorzystajmy z twierdzenia Pitagorasa.

$$h_2^2 + 3^2 = 10^2$$

$$h_2^2 = 100 - 9$$

$$h_2^2 = 91$$

$$h_2 = \sqrt{91}\text{ [cm]}$$

$$h_3^2 + 8^2 = 10^2$$

$$h_3^2 = 100 - 64$$

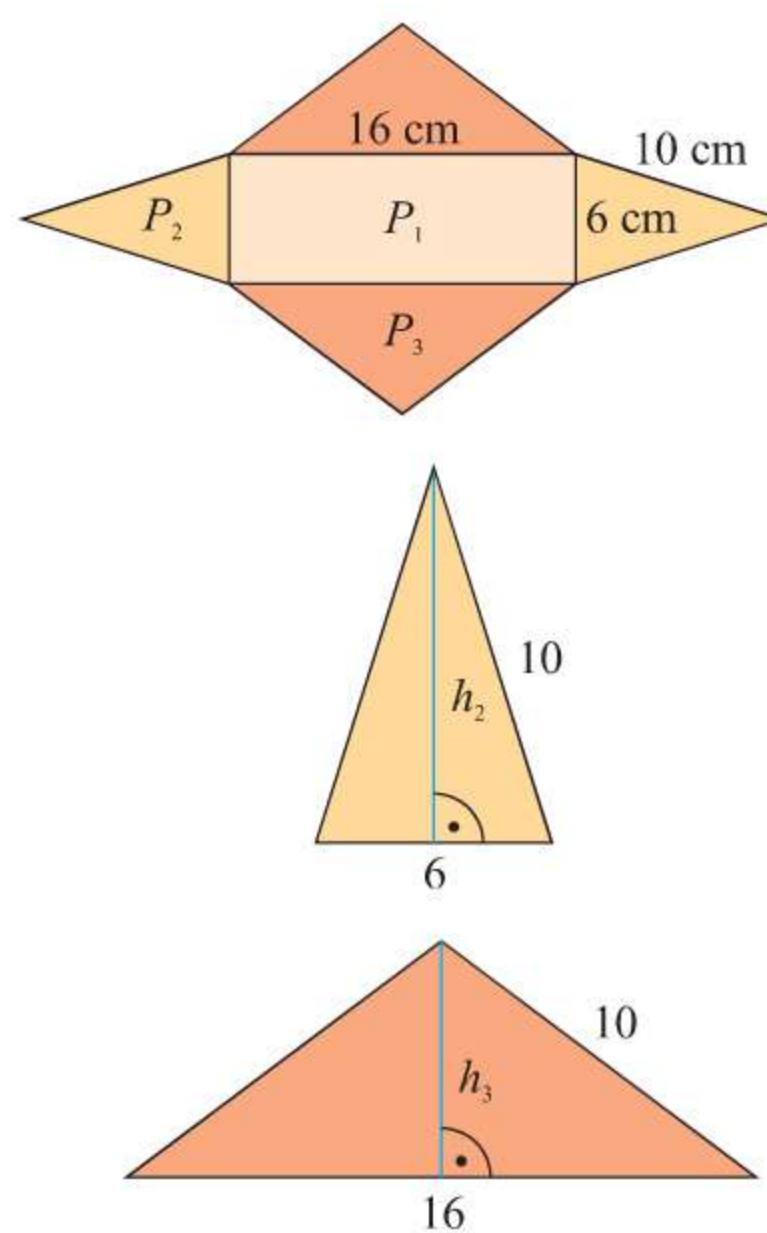
$$h_3^2 = 36$$

$$h_3 = \sqrt{36}$$

$$h_3 = 6\text{ [cm]}$$

$$P_c = 96 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{91} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6 = 96 + 6\sqrt{91} + 96 = 6(32 + \sqrt{91})\text{ [cm}^2\text{]}$$

ODPOWIEDŹ: Pole siatki tego ostrosłupa jest równe $6(32 + \sqrt{91})\text{ cm}^2$.

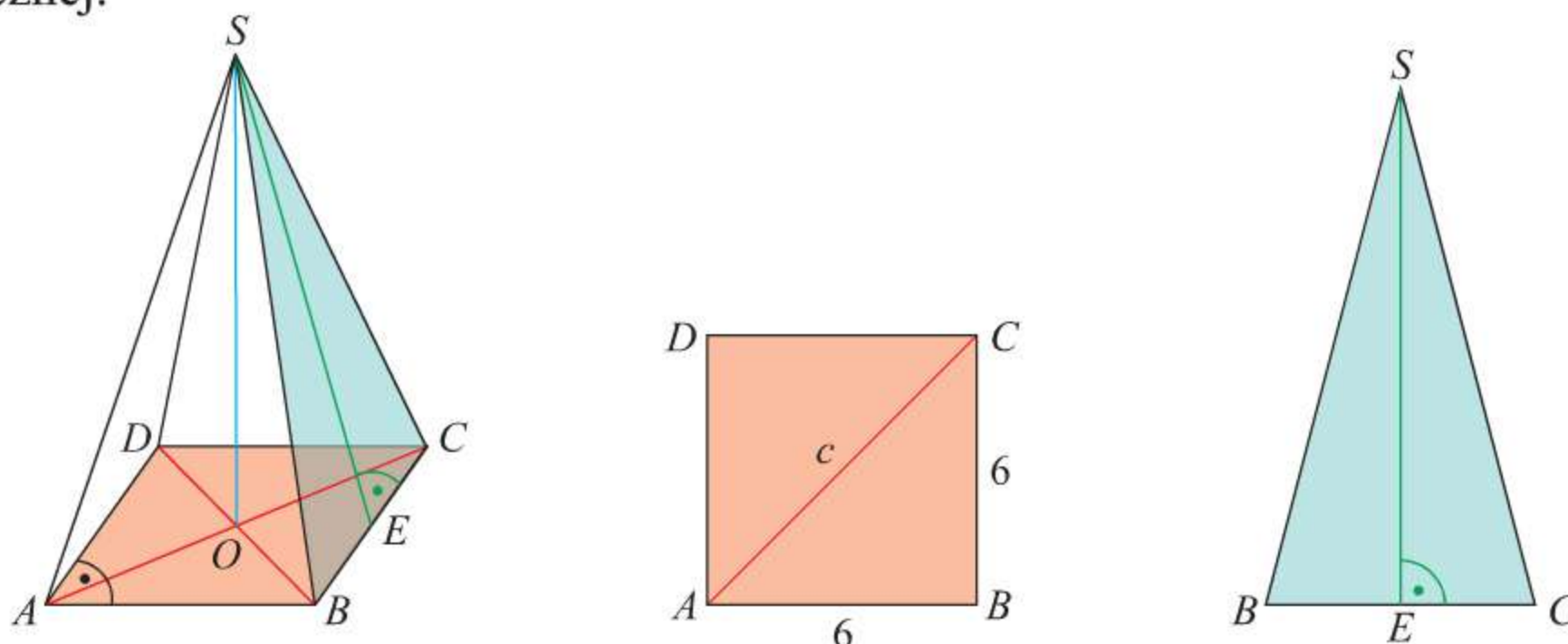


- 1 Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat o boku długości 4 cm , a wysokość każdej ściany bocznej wynosi 6 cm .
- 2 Oblicz pole siatki czworościanu foremnego, którego krawędź ma długość:
 - a) 6 cm ,
 - b) $2\sqrt{3}\text{ cm}$,
 - c) $a\text{ cm}$.

Przykład 2.

Obliczmy pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6 cm, a wysokość ściany bocznej jest $1\frac{1}{3}$ razy dłuższa od przekątnej podstawy.

Wykonajmy rysunek tego ostrosłupa oraz rysunki pomocnicze podstawy i ściany bocznej.



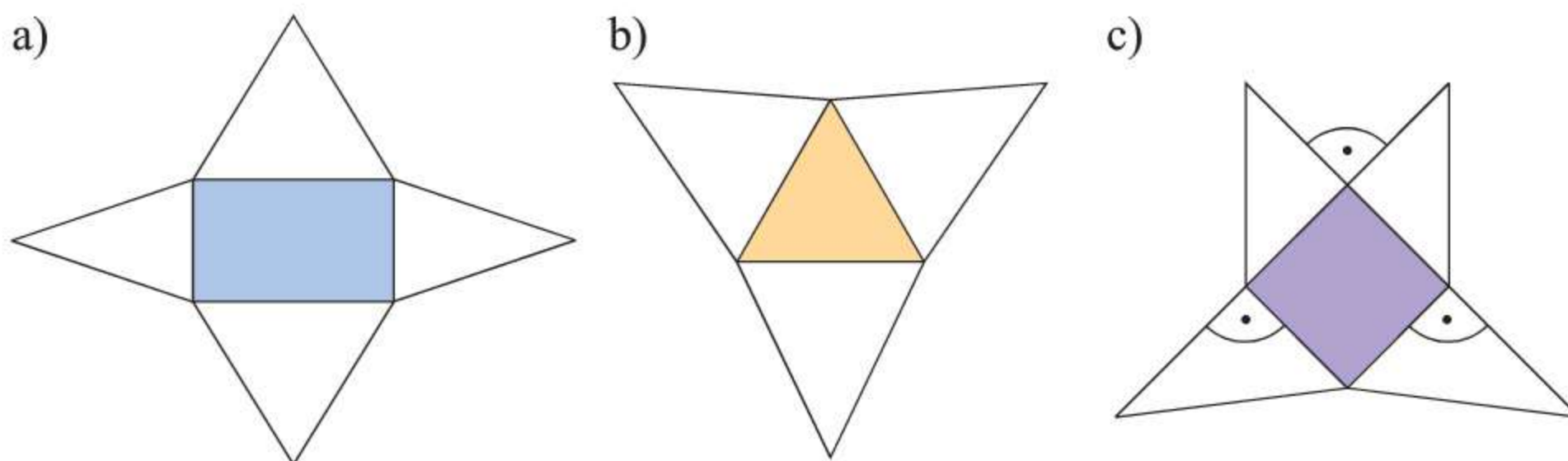
Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku 6 cm, a więc jego przekątna c ma długość $6\sqrt{2}$ cm. Z treści zadania wiemy, że $|SE| = 1\frac{1}{3}|AC|$. Obliczmy $|SE|$.

$$|SE| = 1\frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{2} = \frac{4 \cdot 6\sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |SE| = 2 \cdot 6 \cdot 8\sqrt{2} = 96\sqrt{2} \text{ [cm}^2\text{]}$$

ODPOWIEDŹ: Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe $96\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

- 3 Wykonaj odpowiednie pomiary na rysunku i oblicz pole siatki ostrosłupa. Wynik zaokrąglaj do 1 mm^2 .



- 4 Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe 120 cm^2 . Pole powierzchni bocznej jest pięć razy większe od pola jego podstawy.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe

A. 20 cm^2

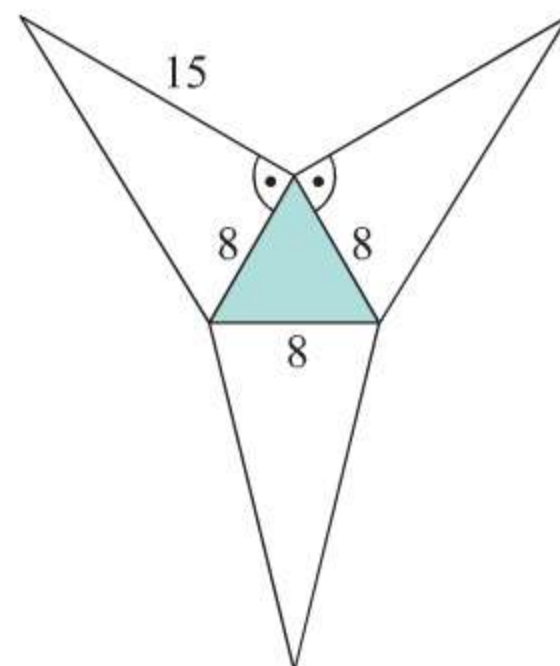
B. 96 cm^2

C. 24 cm^2

D. 100 cm^2

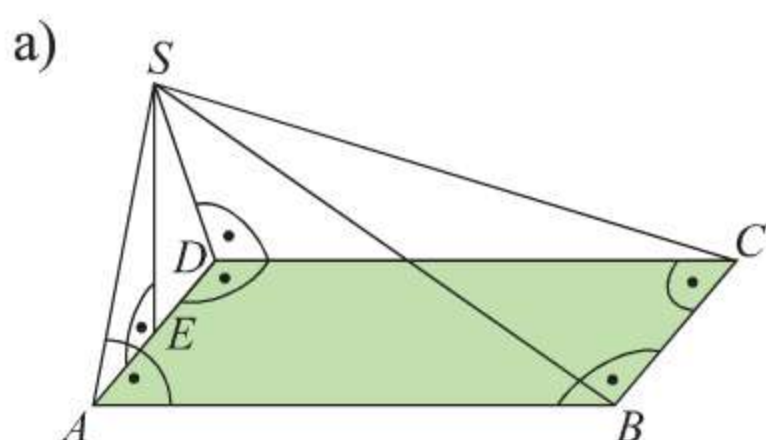


- 5 Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa trójkątnego, którego siatkę przedstawia rysunek obok.
- 6 Oblicz pole podstawy i pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 10 cm, a krawędź boczna jest równa 13 cm.
- 7 Jacek ma wykonać kartonowy model ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 10 cm, a wysokość ściany bocznej wynosi 15 cm. Ile centymetrów kwadratowych kartonu zużyje, jeśli na zakładki do sklejenia musi doliczyć 5% powierzchni bryły?
- 8 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym każda ściana boczna jest trójkątem równobocznym o wysokości $6\sqrt{3}$ cm. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

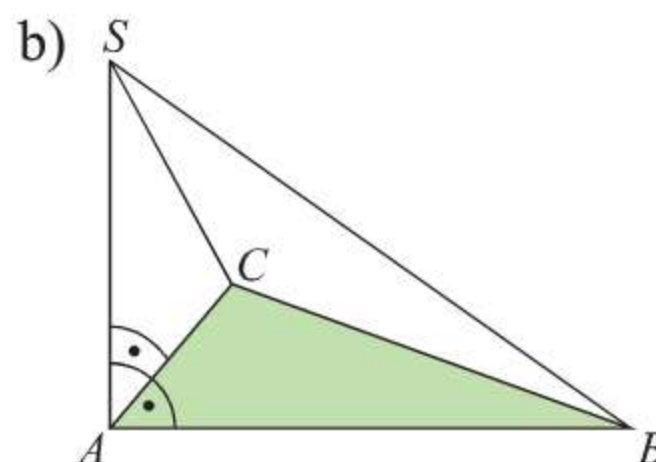


Ostrosłup ten jest czworościanem foremnym.	P	F
Krawędź boczna ostrosłupa ma długość 6 cm.	P	F
Różnica pól powierzchni bocznej i podstawy tego ostrosłupa jest równa $144(\sqrt{3} - 1) \text{ cm}^2$.	P	F

- 9 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość a , krawędź boczna jest 1,5 raza dłuższa. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
- 10 Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa przedstawionego na rysunku, jeśli wiadomo, że:



SE jest wysokością ostrosłupa oraz
 $|AE| = |ED| = 6 \text{ cm}$, $|AS| = 10 \text{ cm}$
 i $|AB| = 15 \text{ cm}$,



SA jest wysokością ostrosłupa
 oraz $|AB| = |BC| = |CA| = 8 \text{ cm}$
 i $|SB| = 10 \text{ cm}$.

Wyzwanie

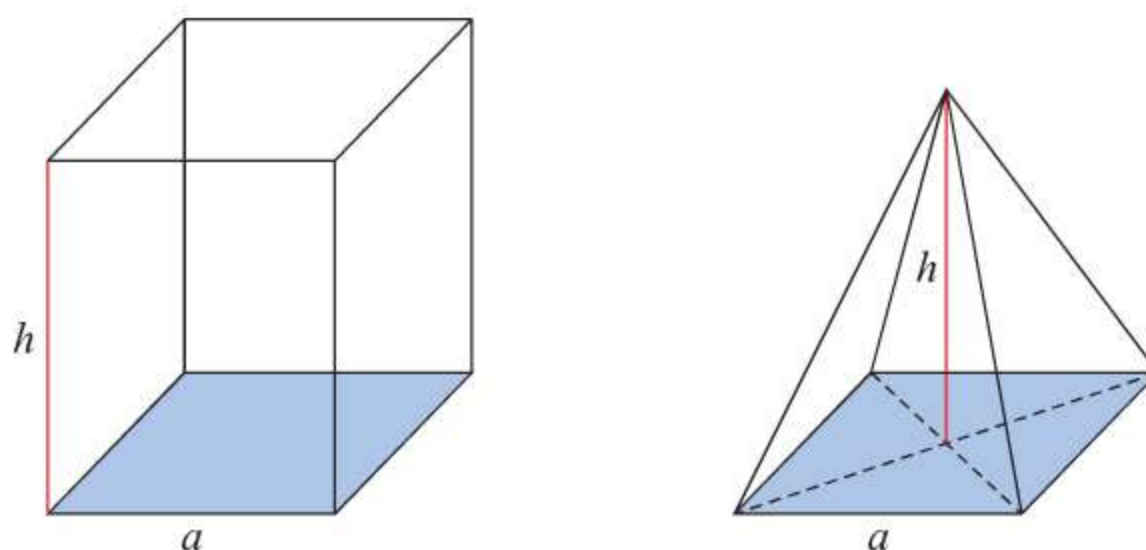
Siatka czworościanu foremnego po odcięciu jednej ze ścian tworzy czworokąt o przekątnej długości $\sqrt{3}$ cm. Wykaż, że pole powierzchni całkowitej tego czworościanu jest równe $\sqrt{3}$ cm².

Sprawdź się!

- 1 Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy jest równa 5 cm, a wysokość ściany bocznej wynosi 8 cm.
- 2 Co ma większe pole powierzchni: czworościan foremny o krawędzi 3 cm czy ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego krawędź podstawy ma 2 cm, a wysokość ściany bocznej $3\sqrt{3}$ cm? Odpowiedź uzasadnij.
- 3 Wysokość ściany bocznej czworościanu foremnego jest równa 12 cm. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
 Krawędź podstawy czworościanu jest równa **A / B**.
A. $12\sqrt{3}$ cm **B.** $8\sqrt{3}$ cm
 Pole podstawy czworościanu jest o **C / D** mniejsze od pola jego powierzchni bocznej.
C. 144 cm² **D.** $96\sqrt{3}$ cm²
- 4 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa x . Wysokość ściany bocznej stanowi 120% długości krawędzi podstawy. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
- 5 W ostrosłupie czworokątnym o podstawie kwadratowej jedna z krawędzi bocznych o długości 4 cm jest prostopadła do krawędzi podstawy równej 4 cm. Wykaż, że pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest większe od pola jego podstawy o $16\sqrt{2}$ cm².

4. Objętość ostrosłupa

Na rysunku przedstawiono graniastosłup i ostrosłup o takich samych podstawach i wysokościach.



Objętość V dowolnego graniastosłupa o wysokości h i polu podstawy P_p opisuje wzór $V = P_p \cdot h$.

Objętość ostrosłupa jest trzy razy mniejsza od objętości graniastosłupa o takiej samej podstawie i wysokości jak ostrosłup.

Objętość ostrosłupa V jest równa jednej trzeciej iloczynu pola podstawy P_p i wysokości h .

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$



Przykład 1.

Obliczmy objętość ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat o boku 7 cm, a wysokość wynosi 12 cm.

Dane

$$a = 7 \text{ cm}$$

$$h = 12 \text{ cm}$$

Szukane

$$V = ?$$

Rozwiązanie

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat, a zatem $P_p = 7 \cdot 7 = 49 \text{ [cm}^2\text{]}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 49 \cdot 12 = 196 \text{ [cm}^3\text{]}$$

ODPOWIEDŹ: Objętość ostrosłupa wynosi 196 cm^3 .

- 1** Podstawą ostrosłupa o wysokości 20 cm jest prostokąt, którego boki mają długości 12 cm i 8 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
- 2** Objętość ostrosłupa wynosi 272 cm^3 , a pole jego podstawy 68 cm^2 . Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

- 3 Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny $ABCD$, w którym boki AB i CD są równoległe oraz $|AD| = |DC| = |CB| = 5$ cm, a $|AB| = 13$ cm. Wysokość ostrosłupa stanowi 160% wysokości jego podstawy. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
- 4 Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 45 cm^3 . Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że jego wysokość wynosi $5\sqrt{3}$ cm.
- 5 Która bryła ma większą objętość: ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy równej 6 cm i wysokości 15 cm czy ostrosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy równej 3 cm i wysokości 10 cm?

Przykład 2.

Obliczmy objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy ma długość 6 cm, a wysokość ściany bocznej to 5 cm.

Wykonajmy rysunek ostrosłupa i zaznaczmy wysokość ściany bocznej.

Dane

$$|AB| = |BC| = 6 \text{ cm}$$

$$|SF| = 5 \text{ cm}$$

Szukane

$$V = ?$$

$$|SO| = h = ?$$

Rozwiązanie

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

Podstawa ostrosłupa jest kwadratem, a zatem

$$P_p = 6 \cdot 6 = 36 \text{ [cm}^2\text{]}.$$

Musimy jeszcze wyznaczyć wysokość h .

Zaznaczmy na rysunku odcinek EF równoległy do AB .

$$|EO| = |OF| = 3 \text{ cm}$$

Trójkąt SOF jest trójkątem prostokątnym.

Skorzystajmy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SOF .

$$h^2 + 3^2 = 5^2$$

$$h^2 = 25 - 9$$

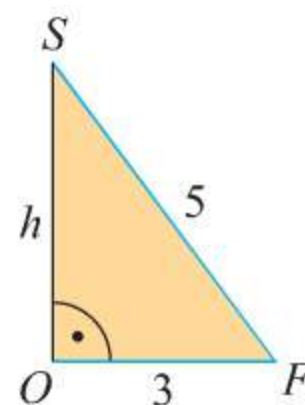
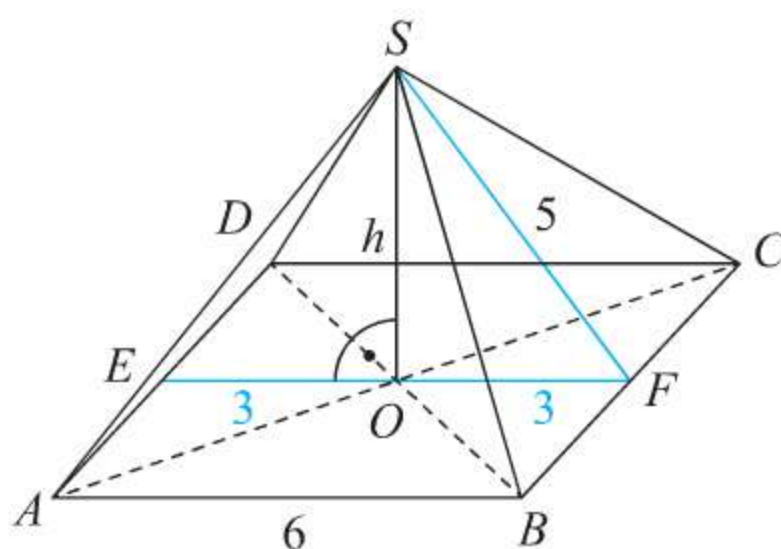
$$h^2 = 16$$

$$h = \sqrt{16}$$

$$h = 4 \text{ [cm]}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48 \text{ [cm}^3\text{]}$$

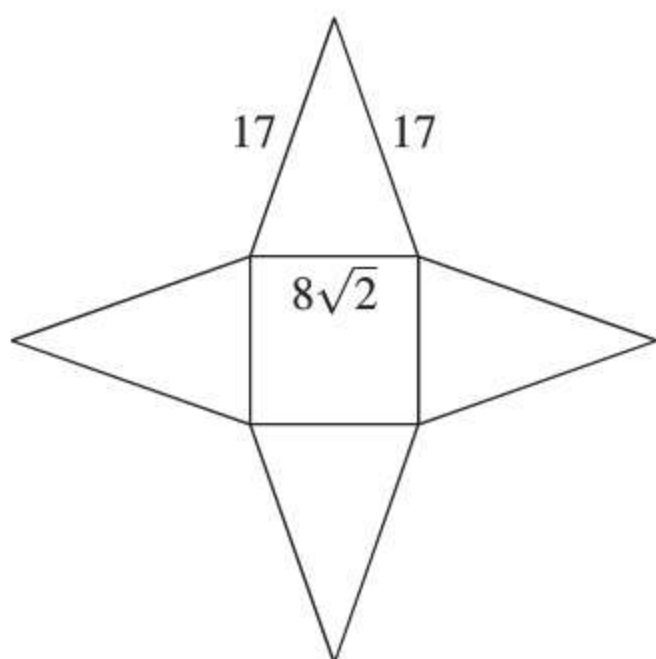
ODPOWIEDŹ: Objętość ostrosłupa jest równa 48 cm^3 .



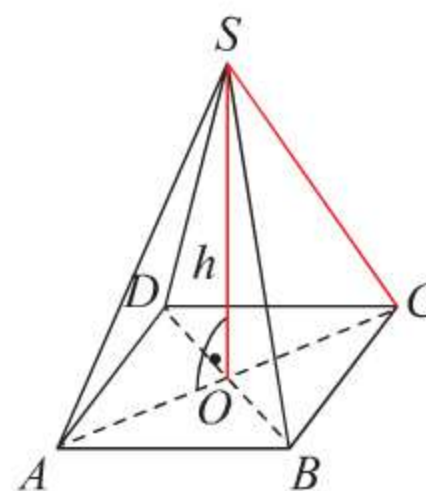
- 7 Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 10 cm i polu powierzchni bocznej 260 cm^2 .
- 8 Podstawą ostrosłupa jest romb. Wysokość rombu jest równa 9 cm, a kąt ostry rombu ma miarę 60° . Wysokość ostrosłupa jest dwa razy większa od długości boku rombu. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
- Pole podstawy ostrosłupa jest równe **A** / **B**. **A.** $162\sqrt{3} \text{ cm}^2$ **B.** $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- Objętość ostrosłupa wynosi **C** / **D**. **C.** 648 cm^3 **D.** 1944 cm^3
- 9 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole powierzchni całkowitej wynosi 48 cm^2 , a krawędź podstawy i wysokość ściany bocznej są równej długości. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Przykład 3.

Obliczmy objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego siatkę przedstawiono na rysunku.



Wykonajmy rysunek ostrosłupa.

**Dane**

$$|AB| = |BC| = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$|AS| = |BS| = |CS| = |DS| = 17 \text{ cm}$$

Szukane

$$V = ?$$

$$|SO| = h = ?$$

Rozwiązanie

Podstawa ostrosłupa jest kwadratem o boku $8\sqrt{2} \text{ cm}$, a zatem jego przekątna AC ma długość: $|AC| = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot 2 = 16 \text{ [cm]}$.

Trójkąt SOC jest trójkątem prostokątnym, w którym odcinek OC stanowi połowę przekątnej AC . Wobec tego $|OC| = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \text{ [cm]}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SOC obliczamy h .

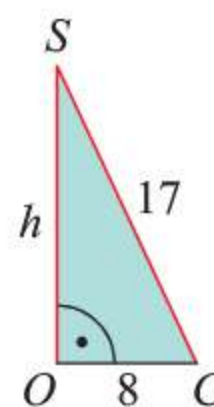
$$h^2 + 8^2 = 17^2 \quad h^2 = 289 - 64 \quad h^2 = 225$$

$$h = \sqrt{225} \quad h = 15 \text{ [cm]}$$

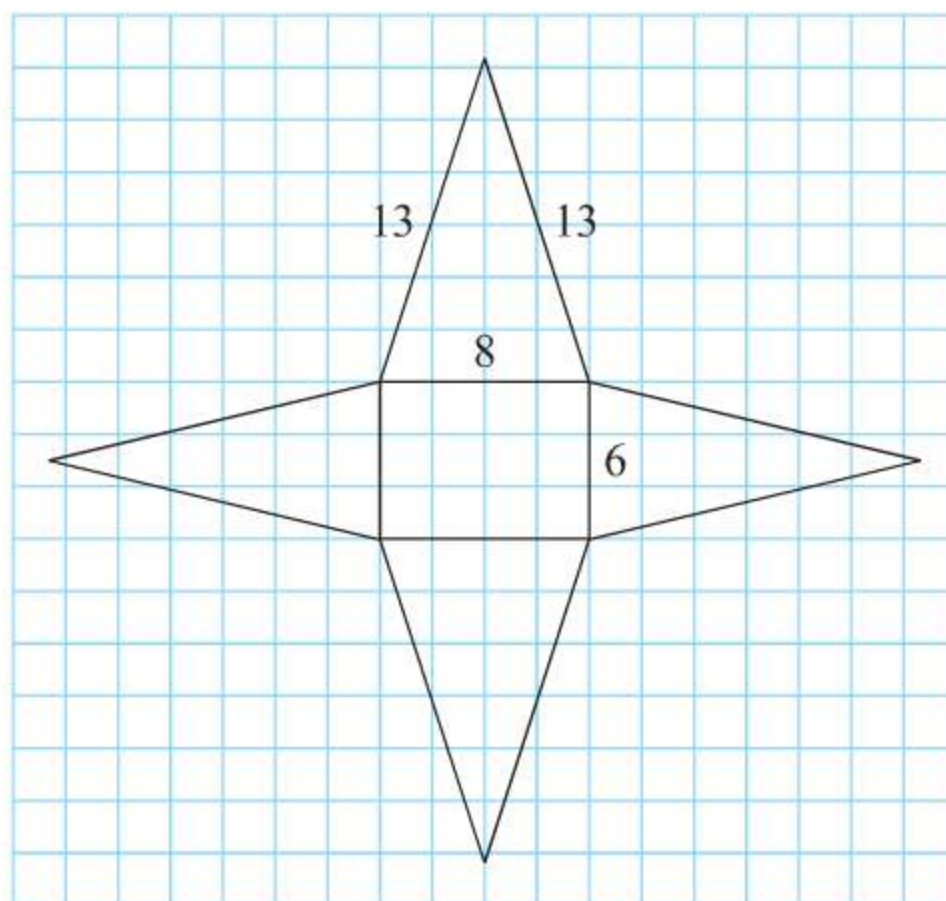
$$P_p = 8\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = 64 \cdot 2 = 128 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 128 \cdot 15 = 640 \text{ [cm}^3\text{]}$$

ODPOWIEDŹ: Objętość ostrosłupa jest równa 640 cm^3 .



- 10** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długości krawędzi bocznej i przekątnej podstawy są równe i wynoszą po 20 cm. Oblicz objętość tej bryły.
- 11** Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego stanowi 150% wysokości podstawy równej $12\sqrt{3}$ cm. Ile wynosi objętość tego ostrosłupa? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
- A. 3888 cm^3 B. 2592 cm^3 C. 7776 cm^3 D. 5184 cm^3
- 12** Oblicz objętość ostrosłupa, którego siatkę przedstawiono na rysunku.



- 13** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeśli graniastosłup i ostrosłup mają takie same objętości i równe wysokości, to pole podstawy ostrosłupa jest trzy razy większe od pola podstawy graniastosłupa.	P	F
Jeśli ostrosłup i graniastosłup mają takie same objętości, a pole podstawy ostrosłupa jest dwa razy większe od pola podstawy graniastosłupa, to wysokość ostrosłupa stanowi $\frac{2}{3}$ wysokości graniastosłupa.	P	F

- 14** Jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa ma długość 10 cm i jest prostopadła do podstawy. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli wiesz, że jego podstawą jest:
- a) romb o boku 6 cm i kącie rozwartym 120° ,
- b) trójkąt równoboczny o wysokości 6 cm.
- Wykonaj rysunek tego ostrosłupa.
- 15** Podstawa ostrosłupa czworokątnego ma kształt trapezu równoramienneego, którego ramię i krótsza podstawa mają długość 3 cm, a kąt rozwarty wynosi 120° . Krawędź boczna ostrosłupa, długości 4 cm, wychodząca z wierzchołka jednego z kątów rozwartych trapezu, jest prostopadła do podstawy bryły. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

- 16** Objętość ostrosłupa jest równa 84 cm^3 . Wyznacz wysokość tego ostrosłupa, jeżeli jego podstawą jest:
- kwadrat o przekątnej długości $6\sqrt{2} \text{ cm}$,
 - trójkąt prostokątny, którego jedna z przyprostokątnych jest o 72% krótsza od przeciwprostokątnej równej 25 cm ,
 - równoległobok o bokach 8 cm i 12 cm oraz kącie ostrym o mierze 30° .

Wyzwanie

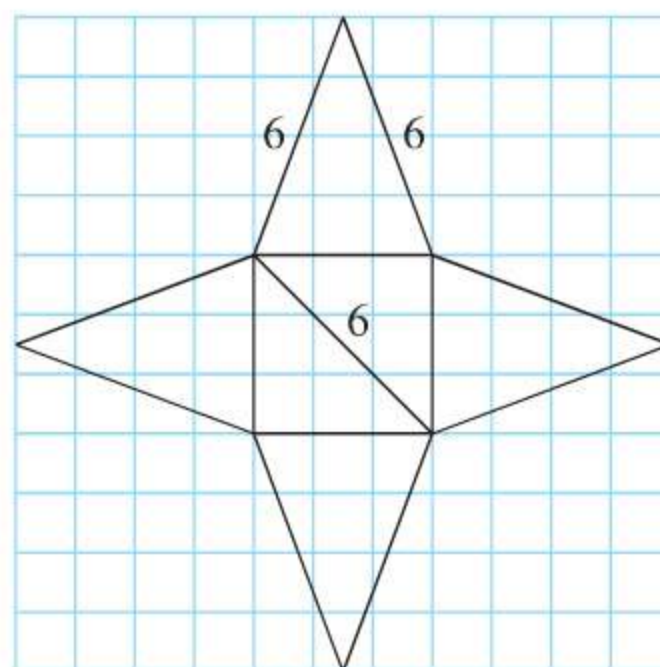
Oblicz objętość wielościanu, którego krawędziami są odcinki łączące środki sąsiednich ścian sześcianu o krawędzi $a = 5 \text{ cm}$.

Sprawdź się!

- W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o wysokości 10 cm krawędź podstawy ma długość 6 cm . Oblicz objętość tego ostrosłupa.
- W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole podstawy jest dwa razy mniejsze od pola powierzchni bocznej, równego 200 cm^2 . Ile wynosi objętość tego ostrosłupa?
- Jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa ma długość 10 cm i jest prostopadła do podstawy. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli jego podstawą jest prostokąt o bokach długości $3\sqrt{2} \text{ cm}$ i $5\sqrt{2} \text{ cm}$.
- Czy wszystkie ostrosłupy o wysokości 12 cm , których podstawą jest romb o boku 6 cm , mają taką samą objętość? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

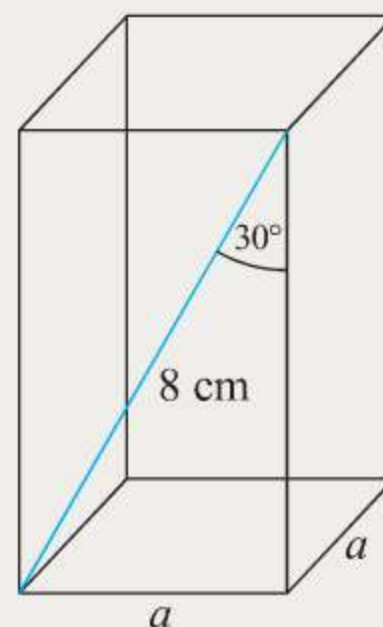
A.	Tak,	ponieważ	1.	romb ma wszystkie boki równe.
B.	Nie,		2.	romby mogą mieć różne kąty.

- 5** Oblicz objętość ostrosłupa, którego siatkę przedstawiono na rysunku.

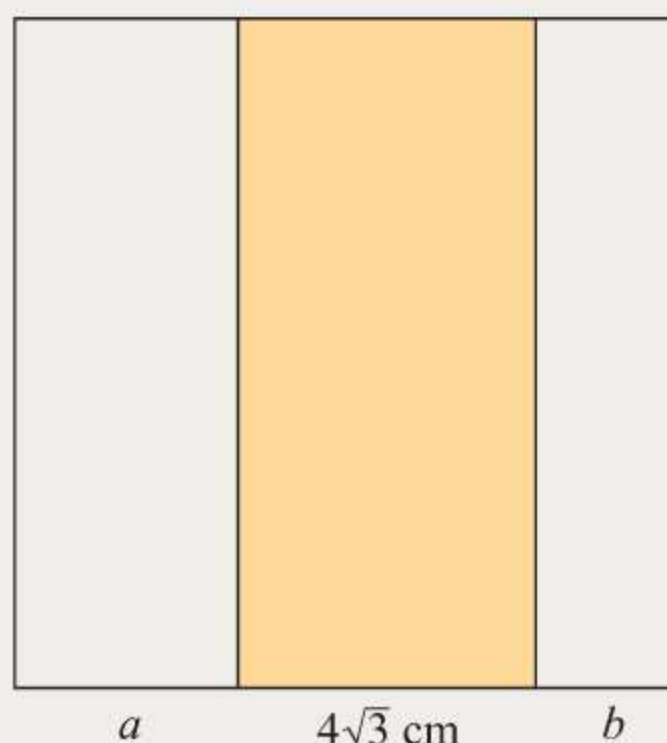
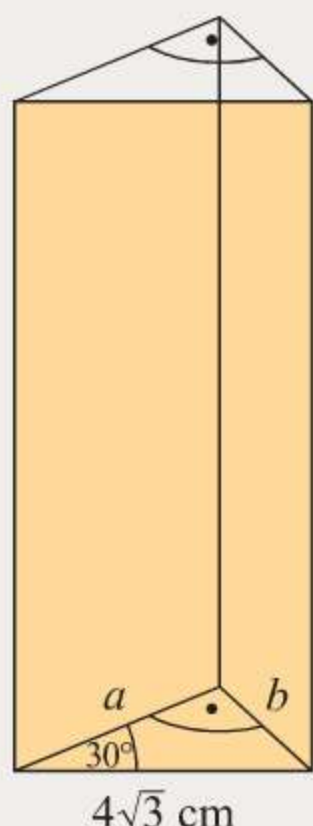


Zadania utrwalające

- 1 Narysuj ostrosłup:
 - a) prawidłowy trójkątny,
 - b) trójkątny, którego jedna krawędź boczna jest prostopadła do podstawy.
- 2 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 3 cm, a wysokość ściany bocznej jest równa 2 cm.
 - a) Naszkicuj ten ostrosłup.
 - b) Narysuj jego siatkę.
 - c) Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.
 - d) Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.
- 3 Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Oblicz długość krawędzi podstawy prostopadłościanu, jeśli wiadomo, że jego objętość wynosi 54 cm^3 , a wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy.
- 4  Krawędź sześcianu ma długość 2,2 cm, a krawędź czworościanu foremnego jest równa 4 cm. Która bryła ma większe pole powierzchni całkowitej?
- 5 Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o długości 8 cm tworzy z krawędzią boczną kąt 30° , tak jak pokazano na rysunku. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.
- 6 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość $8\sqrt{2}$ cm, a krawędź boczna 12 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
- 7 Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy x cm i wysokości ściany bocznej o 1 dm dłuższej od tej krawędzi.
- 8 Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkątami prostokątnymi. Jakie jest pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa, jeżeli krawędź podstawy ma długość 4 cm?
- 9 Jak zmieni się objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, jeżeli jego wysokość dwukrotnie zwiększymy, a krawędź podstawy dwukrotnie zmniejszymy?
- 10 Ile metrów kwadratowych tapety potrzeba na wytapetowanie ścian przedpokoju, którego podłoga ma kształt prostokąta o wymiarach $2,5 \text{ m} \times 2,8 \text{ m}$, a wysokość jest równa 2,6 m, jeśli odliczymy dwa otwory na drzwi o wymiarach $90 \text{ cm} \times 200 \text{ cm}$?



- 11** Podstawą graniastoslupa jest trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość $4\sqrt{3}$ cm, a jeden z kątów ma miarę 30° . Powierzchnia boczna tego graniastoslupa po rozwinięciu jest kwadratem. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość tego graniastoslupa.



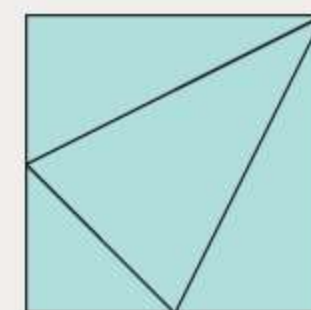
- 12** W drzwi są wstawione cztery kwadratowe szyby o wymiarach $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ i grubości 3 mm. Oblicz masę tych szyb, jeśli szkło, z którego są wykonane, ma gęstość $2,6 \text{ g/cm}^3$. Wynik podaj po zaokrągleniu do 0,01 kg.

- 13** Świecę w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy równej $6\sqrt{2}$ cm i krawędzi bocznej o 2 cm krótszej niż przekątna podstawy przetopiono i ukształtowano w formie prostopadłościanu o takiej samej wysokości jak poprzednio. Ile wynosi długość jednej z krawędzi podstawy nowej świecy, jeśli druga krawędź podstawy ma 6 cm?



- 14** W przedpokoju o wymiarach $2,5 \text{ m} \times 3,8 \text{ m}$ i wysokości 3 m podwieszono, w odległości 20 cm od sufitu, płytę gipsową, w której zamontowano oświetlenie. O ile procent zmniejszyła się kubatura przedpokoju?

- 15** Kwadrat o boku 4 cm podzielono na trójkąty tak, aby powstała siatka ostrosłupa jak na rysunku obok. Wykaż, że objętość tego ostrosłupa jest równa $2\frac{2}{3} \text{ cm}^3$.



- 16** Cztery wierzchołki sześcianu połączono odcinkami tak, że otrzymano krawędzie czworościanu foremego. Wykonaj odpowiedni rysunek i oblicz, jaką częścią objętości sześcianu jest objętość czworościanu. Odpowiedź uzasadnij.

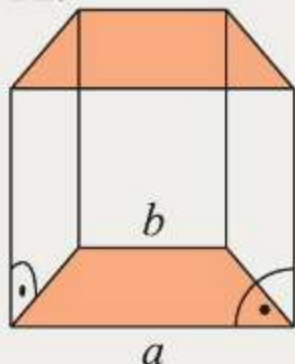
Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

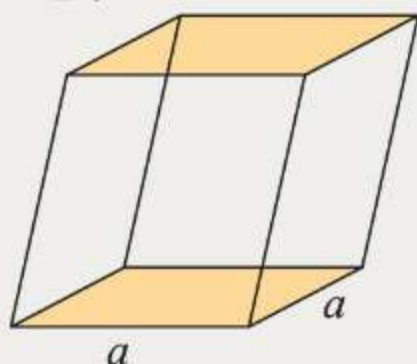
W zadaniach 1.–2. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

1 Który graniastosłup jest prawidłowy?

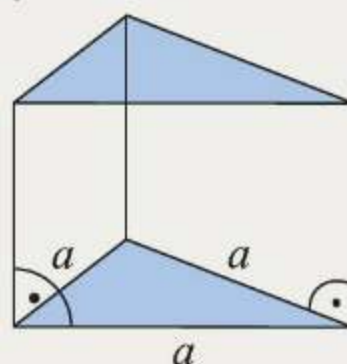
A.



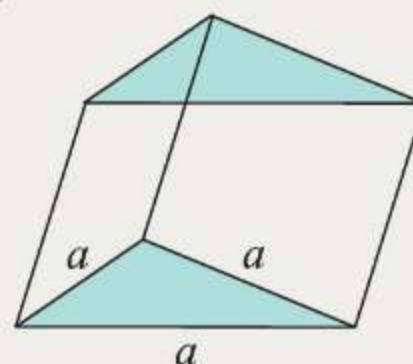
B.



C.

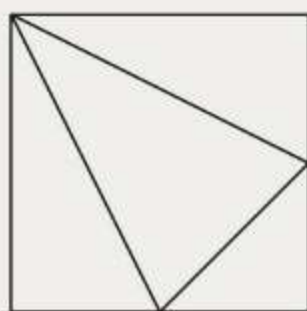


D.

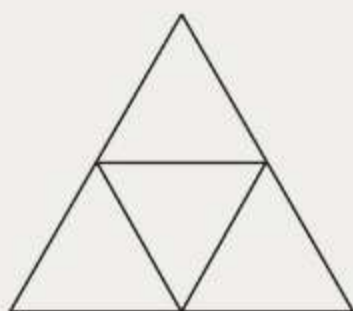


2 Z której siatki **nie można** złożyć modelu ostrosłupa?

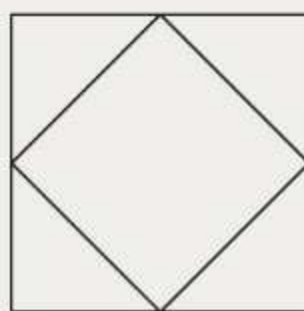
A.



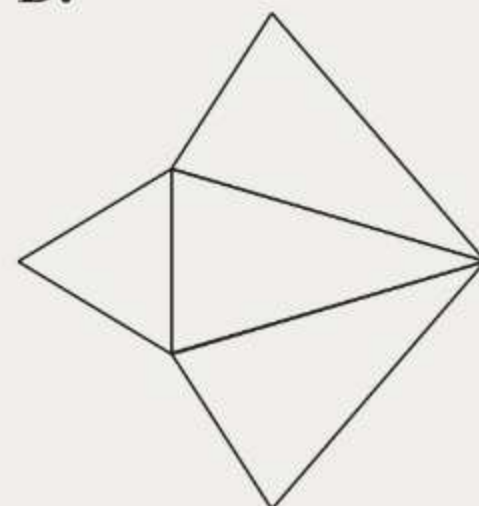
B.



C.



D.



W zadaniach 3.–7. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

3 Sześcian i czworościan mają krawędzie jednakowej długości, równej 5 cm. Pola powierzchni całkowitych tych brył wynoszą

A. 75 cm^2 i 60 cm^2

B. 150 cm^2 i $50\sqrt{3} \text{ cm}^2$

C. $50\sqrt{3} \text{ cm}^2$ i 100 cm^2

D. 150 cm^2 i $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$

4 Obwód podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 28 cm, a wysokość ściany bocznej jest równa 10 cm. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa to

A. $1,89 \text{ m}^2$

B. $1,89 \text{ dm}^2$

C. 1890 cm^2

D. $18,9 \text{ cm}^2$

5 Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 48 cm^3 . Krawędź podstawy ma długość 6 cm. Wysokość ściany bocznej wynosi

A. 3 cm

B. $1\frac{1}{3} \text{ cm}$

C. 5 cm

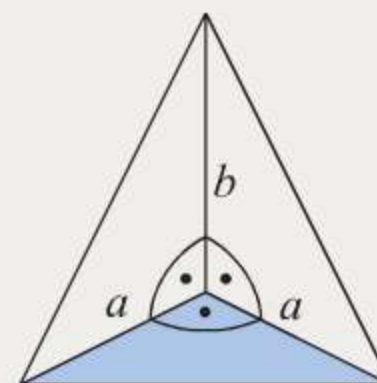
D. 4 cm



- 6 W akwarium w kształcie prostopadłościanu, wypełnionym do połowy, jest 48 l wody. Wymiary podstawy wynoszą 6 dm i 0,4 m. Wysokość tego akwarium to
 A. 2 dm B. 8 cm C. 80 cm D. 0,4 m

- 7 Objętość bryły przedstawionej na rysunku jest równa

- A. $\frac{a^2b}{3}$ B. $\frac{a^2b\sqrt{3}}{12}$
 C. $\frac{a^2b}{6}$ D. $\frac{a^2b}{2}$



- 8 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Ostrosłup siedmiokątny ma osiem wierzchołków i siedem ścian.	P	F
Graniastosłup trójkątny ma trzy przekątne.	P	F
Ostrosłup trójkątny ma cztery ściany i sześć krawędzi.	P	F
Czworościan foremny jest ostrosłupem prawidłowym czworokątnym.	P	F

- 9 Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest cztery razy dłuższa od krawędzi podstawy równej a cm. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa **A / B** cm.

- A. $19a$ B. $15a$

Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa wynosi **C / D** cm^2 .

- C. $9a^2\sqrt{7}$ D. $2,25a^2\sqrt{7}$

- 10 Ostrosłup prawidłowy czworokątny i sześcián mają wszystkie krawędzie długości 4 cm. Czy objętość ostrosłupa jest większa od $\frac{1}{3}$ objętości sześciánu? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	ostrosłup i sześcián mają takie same podstawy i wysokości, a więc objętość ostrosłupa stanowi $\frac{1}{3}$ objętości sześciánu.
B.	Nie,		2.	$\frac{64}{3}\sqrt{2} > \frac{64}{3}$.
			3.	$\frac{32\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{3} \cdot 64$.

- 11 Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 611 cm^2 , a pole powierzchni całkowitej 900 cm^2 . Jaką długość ma krawędź podstawy tego ostrosłupa? Zapisz obliczenia.

- 12 Na stole leżą modele sześciánów i czworościanów – łącznie 29 modeli. Razem mają 200 wierzchołków. Ile jest modeli sześciánów, a ile czworościanów? Odpowiedź uzasadnij.

Bryły w architekturze

Przyjrzyj się różnym budowlom, które kształtem nawiązują do brył znanych z lekcji matematyki.



Sala kinowa La Geode (czytaj: la żeod) (Paryż, Francja)

Sala ma kształt kuli. Jej średnica to 36 m.



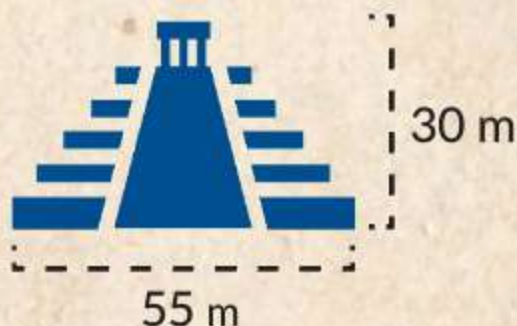
Sala może pomieścić 375 osób. Pokryta jest wypolerowaną blachą stalową.

1



Piramida Kukulkana (Chichén Itzá, czytaj: cziczen itsa, Meksyk)

To piramida schodkowa. Budowla składa się z dziewięciu platform. Na szczycie znajduje się świątynia. Piramida ma wysokość 30 m, a długość boku podstawy wynosi 55 m.



6

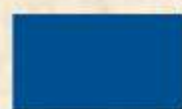




2

Muzeum II Wojny Światowej w Gdańsku

Muzeum znajduje się 200 m od historycznego budynku Poczty Polskiej. Ma powierzchnię około 20 000 m².



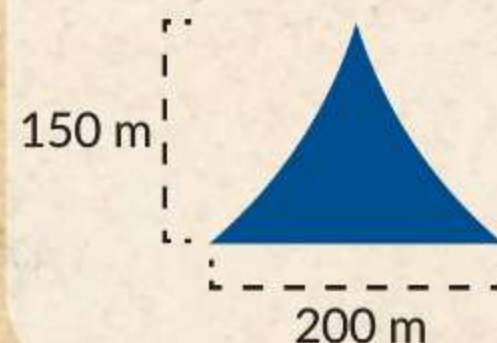
Wystawa główna muzeum zajmuje ok. 5000 m² i znajduje się w podziemiach.



3

Chan Szatyr (Nur-Sultan, Kazachstan)

Dosłownie „namiot chana”. Budynek nazywany największym namiotem świata kształtem przypomina stożek. Znajduje się w nim centrum rozrywki. Wysokość budynku to 150 m, a podstawa ma średnicę 200 m.



4

Krzywa wieża (Piza, Włochy)

Ta rromańska wieża zaczęła odchylać się od pionu już podczas budowy. Powodem są źle wykonane fundamenty oraz gliniasta gleba.

5,4 m



W 1993 roku odchylenie wieży od pionu wynosiło aż 5,4 m.



5

Malowane chaty w Tiébélé (Burkina Faso)

Malowane chaty – sukhole – to przykład niezwyklej architektury. Mieszka w nich ponad 450 osób. Dzieci mieszkają z dziadkami w chatach ośmiokątnych, małżeństwa w prostokątnych, a osoby samotne w okrągłych.



1. Proste metody zliczania obiektów

W życiu codziennym spotykamy różne zbiory obiektów, np. zbiór książek w bibliotece, zbiór domów na osiedlu mieszkaniowym, zbiór uczniów w szkole.

W matematyce przykładami zbiorów są: zbiór liczb naturalnych, zbiór liczb parzystych, zbiór trójkątów, zbiór prostych.

Zbiór, którego elementami są liczby, nazywamy zbiorem liczbowym.

Przykład 1.

Wypiszmy dzielniki liczby 12.

Liczba 12 jest podzielna przez: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Te liczby tworzą zbiór D dzielników liczby 12, co symbolicznie zapisujemy: $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Mówimy, że zbiór D ma sześć elementów oraz występująca w nim liczba (np. 1) należy do tego zbioru.

- 1 Wypisz wszystkie elementy zbioru A , który jest zbiorem liczb:
- a) pierwszych mniejszych od 10,
 - b) spełniających warunek $x^2 = 225$.
- Ile elementów ma zbiór A ?

Czasem wyszczególnienie wszystkich elementów danego zbioru jest co najmniej nużące (gdy zbiór jest skończony), a niekiedy nawet niemożliwe (gdy zbiór jest nieskończony). Jednym ze sposobów skrócenia tego zapisu jest wykorzystanie wielokropka.

Przykład 2.

Zapiszmy zbiór B , do którego należą wszystkie liczby:

- a) naturalne,
- b) naturalne nieparzyste większe od 10 i mniejsze od 92.

a) Zbiór liczb naturalnych jest nieskończony i zapisujemy: $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Wielokropek informuje, że po 5 są następne liczby, a układ początkowych elementów sugeruje, że każda następna liczba jest o 1 większa od poprzedniej.

b) Ten zbiór jest skończony, ale ma wiele elementów, dlatego wypisywanie wszystkich staje się uciążliwe. Wobec tego zapisujemy: $B = \{11, 13, 15, \dots, 91\}$. Zauważmy, że gdybyśmy zapisali $B = \{11, 13, \dots, 91\}$ lub $B = \{11, \dots, 91\}$, to w pierwszym przypadku można byłoby odczytać, że jest to zbiór wszystkich liczb pierwszych z danego zakresu, a w drugim przypadku – że jest to zbiór wszystkich liczb naturalnych z tego zakresu. Należy zadbać o to, aby zapis był jednoznaczny.

- 6 Wypisz wszystkie elementy zbioru:
- reszt z dzielenia liczb naturalnych przez 6,
 - par różnych owoców wybranych spośród: gruszki, pomarańczy, jabłka, kiwi.
- 7 Kuba się nudził i wypisał wszystkie liczby naturalne do 119 włącznie.
- Zapisz symbolicznie zbiór wypisany przez Kubę.
 - Ile liczb zapisał Kuba?
 - Czy wśród wypisanych liczb było 60 liczb parzystych i tyle samo liczb nieparzystych? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) oraz jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	liczb parzystych jest więcej niż nieparzystych.
			2.	liczb parzystych i nieparzystych musi być łącznie 119.
B.	Nie,		3.	wszystkich liczb jest 120, więc połowa z nich to liczby parzyste, a połowa – nieparzyste.

- 8 Zapisz symbolicznie zbiór 100 kolejnych liczb naturalnych, z których najmniejszą jest 51.
- 9 Ile jest liczb naturalnych:
- trzy cyfrowych podzielnych przez 100,
 - parzystych mniejszych od 444?
- 10 Ile jest liczb całkowitych x spełniających poniższy warunek?
- $-18 \leq x \leq 46$
 - $-81 \leq x < -64$
 - $-188 < x < 462$

Wyzwanie

Ile jest par liczb dwucyfrowych takich, że jedna liczba jest o 72 mniejsza od drugiej? Wypisz te pary.

Sprawdź się!

- Ile jest par liczb naturalnych, których suma wynosi 11? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. 14 B. 8 C. 7 D. 6
- Oblicz, ile elementów ma zbiór liczb naturalnych od 32 do 259 włącznie, podzielnych przez 9.
- Wypisz wszystkie elementy zbioru liczb pierwszych dwucyfrowych.
- Zapisz symbolicznie zbiór 259 kolejnych liczb naturalnych, z których największą jest 512.
- Ile jest liczb naturalnych większych od 300 i jednocześnie mniejszych od 1000? Odpowiedź uzasadnij.

2. Doświadczenia losowe

Słowo „doświadczenie” jest wam znane głównie z chemii i fizyki. Teraz poznacie jego znaczenie w matematyce. W znaczeniu matematycznym towarzyszy mu zawsze określenie „losowe”.

Doświadczenie losowe (eksperyment) to doświadczenie, które można powtarzać wiele razy w tych samych warunkach, nie potrafimy jednak określić jego kolejnych wyników. Doświadczeniami losowymi są na przykład: rzut monetą, rzut kostką do gry, losowanie karty z talii, losowanie kuli z pojemnika, losowanie lotto.

Przykład 1.

Ile jest możliwych wyników doświadczenia losowego polegającego na jednokrotnym rzucie monetą?



W tym doświadczeniu losowym możemy otrzymać dwa wyniki: R – reszkę lub O – orła, zatem są dwa możliwe wyniki tego doświadczenia.

- 1 Ile jest wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego polegającego na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry?

Jeśli doświadczenie losowe powtórzymy wielokrotnie i zanotujemy jego wyniki, to otrzymamy informacje zwane **danymi**. Dane możemy przedstawiać w postaci tabel, diagramów lub wykresów.



Przykład 2.

W 30 rzutach sześcienną kostką do gry (30 powtórzeń doświadczenia losowego) Janek otrzymał kolejno następujące wyniki:

1, 3, 2, 5, 2, 5, 3, 3, 6, 6, 6, 4, 4, 1, 1, 5, 5, 5, 1, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 6, 6, 5, 5, 5.

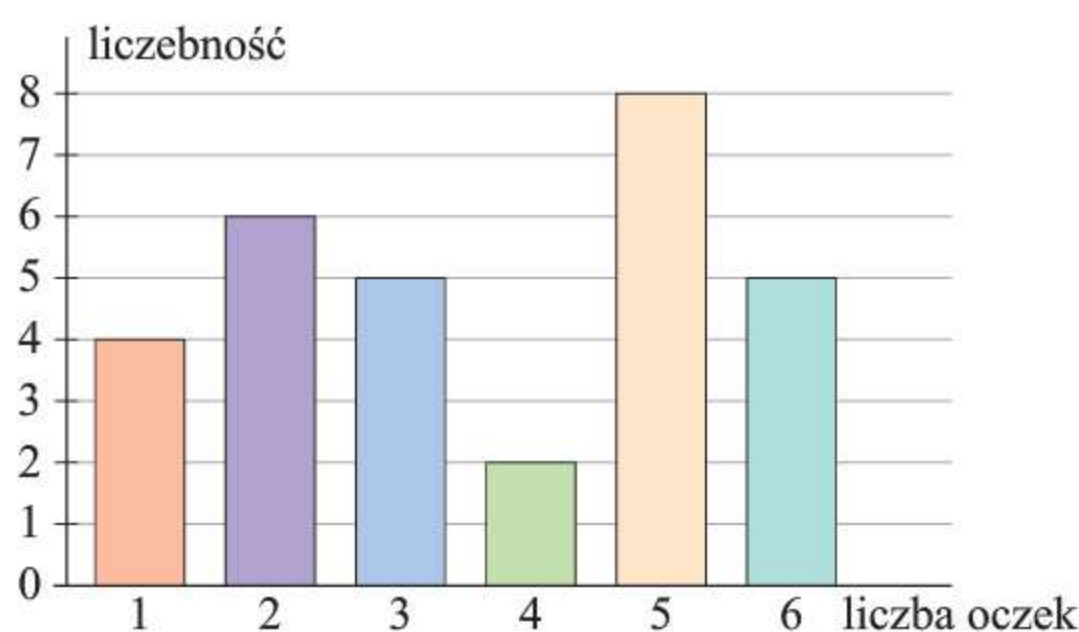
Przedstawmy te dane w postaci:

- tabeli liczebności,
- diagramu słupkowego (histogramu),
- diagramu procentowego kołowego.

a) Tabelę liczebności tworzymy przez wpisanie w pierwszym rzędzie liczby oczek na ściankach kostki, a w drugim rzędzie – liczby (liczebności) wyników odpowiadających danej liczbie oczek uzyskanych w serii rzutów.

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Liczebność	4	6	5	2	8	5

b) Diagram słupkowy (histogram)

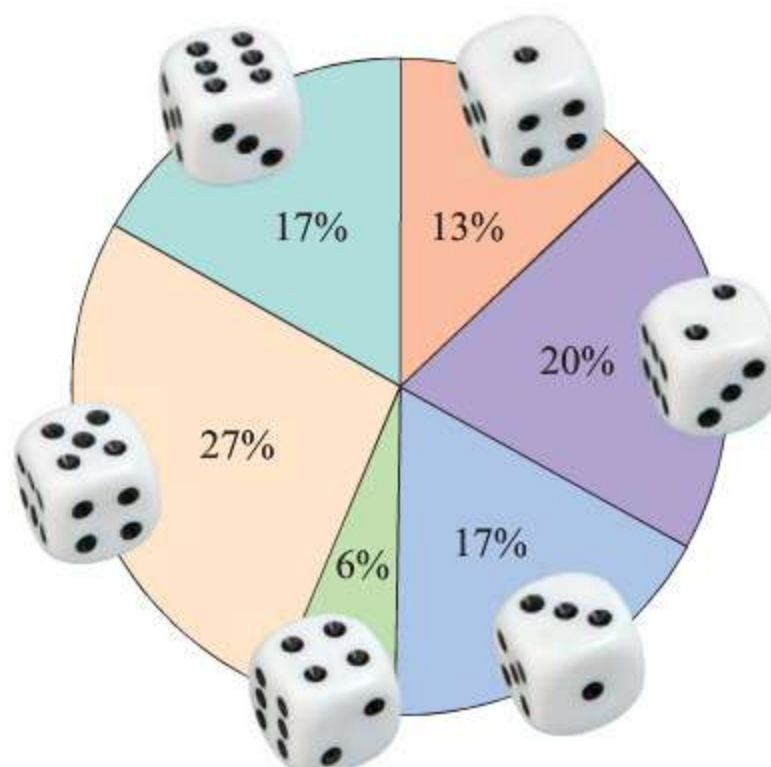


c) Aby sporządzić diagram procentowy, należy obliczyć częstości wystąpienia poszczególnych wyników. Wyniki tych obliczeń zapiszmy w tabeli częstości.

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Częstość (wyrażona ułamkiem)	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{5}{30}$
Częstość (wyrażona w procentach)	$\approx 13\%$	20%	$\approx 17\%$	$\approx 6\%$	$\approx 27\%$	$\approx 17\%$

$\cdot 100\%$

Przedstawione na diagramie części koła odpowiadają liczebności poszczególnych wyników w 30 rzutach (30 powtórzeniach doświadczenia losowego). Z największą częstością wystąpił w tych doświadczeniach wynik 5, a z najmniejszą częstością – wynik 4.

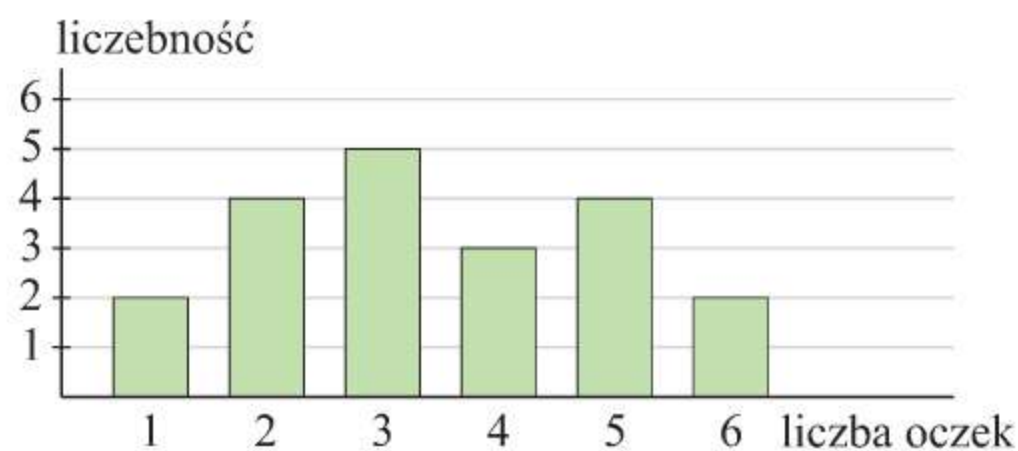


- 2 Rzuć 20 razy monetą i zanotuj wyniki kolejnych rzutów. Sporządź:
- tabelę liczebności otrzymanych orłów oraz reszek,
 - diagram słupkowy ilustrujący otrzymane wyniki.

- 3 Talia kart ma po 13 kart w każdym z czterech kolorów (pik ♠, kier ♥, karo ♦, trefl ♣). Z takiej talii Ania losowała jedną kartę, wkładała ją z powrotem i losowała następną. Wylosowała 13 kart: asa pik, króla kier, 10 kier, damę karo, 8 pik, waleta pik, damę karo, 2 pik, 5 karo, damę pik, asa kier, asa pik, 3 pik. Sporządź tabelę częstości występowania poszczególnych kolorów kart.



- 4 Mateusz wykonał rzuty sześcienną kostką do gry i wyniki tego doświadczenia przedstawił na diagramie.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Mateusz wykonał 21 rzutów kostką.	P	F
Wynik 6 był dwukrotnie rzadszy niż wynik 2.	P	F
Najczęściej wypadła trójka.	P	F
Piątka i szóstka wypadły razem tyle samo razy co w sumie dwójka i czwórka.	P	F

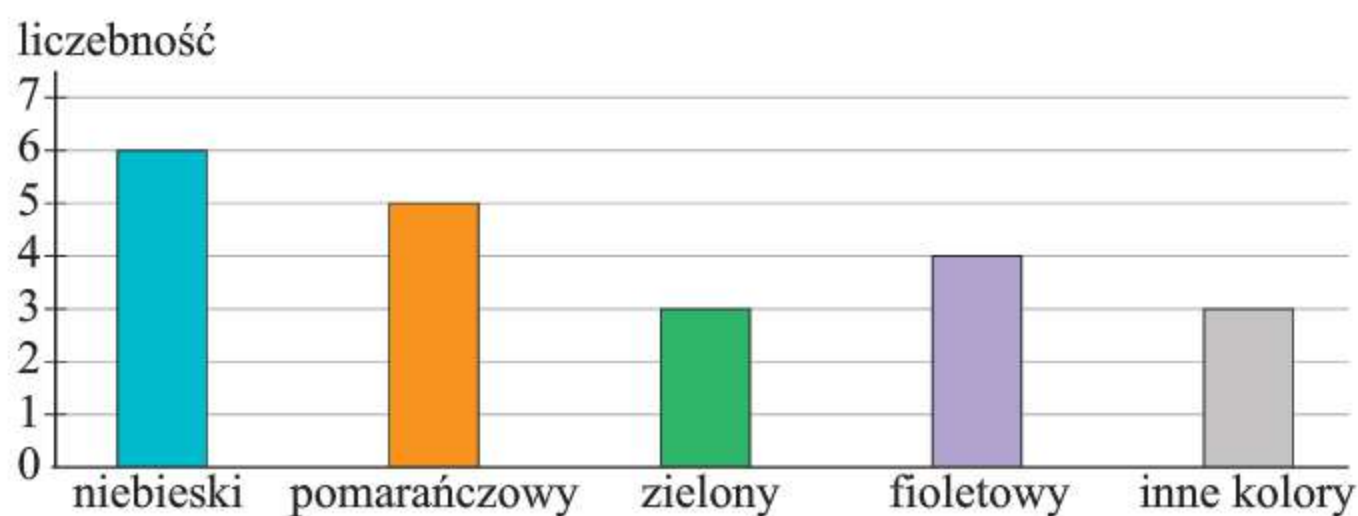
- 5 Wykonaj po 100 rzutów monetą i sześcienną kostką do gry.
- Sporządź tabele częstości wyników tych doświadczeń.
 - Sporządźcie tabele częstości wyników wszystkich uczniów w klasie. Czy można zauważyć jakieś prawidłowości?
- 6 W pojemniku znajdują się cztery kule: biała (B), czerwona (C), zielona (Z) i niebieska (N). Ola losowała 30 razy po jednej kuli i po każdym losowaniu zwracała ją do pojemnika. Oto wyniki kolejnych losowań: B, B, C, Z, N, N, N, C, C, C, B, B, B, Z, N, N, N, B, N, B, N, Z, N, B, B, N, N, C, N, C. Sporządź:
- tabelę liczebności wyników,
 - diagram procentowy kołowy ilustrujący wyniki,
 - histogram.

Wyzwanie

Wykonaj 100 rzutów dwiema sześciennymi kostkami do gry i po każdym rzucie zapisz sumę otrzymanych oczek. Wykonaj tabelę liczebności wyników i oblicz ich częstość. Zastanów się, dlaczego niektórych wyników jest więcej niż innych.

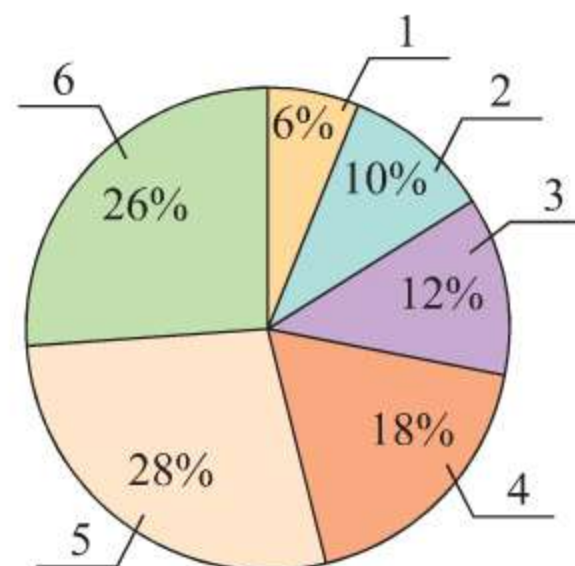
Sprawdź się!

- 1 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Doświadczeniem losowym **nie jest**
A. rzut sześcienną kostką do gry. B. losowanie karty z talii.
C. losowanie spośród jednokolorowych kul. D. rzut monetą.
- 2 Ile jest możliwych wyników doświadczenia polegającego na jednokrotnym losowaniu monety z puszką zawierającej wszystkie nominały polskich monet? Odpowiedź uzasadnij.
- 3 W serii 20 rzutów sześcienną kostką do gry otrzymano następujące liczby oczek: 5, 1, 5, 5, 4, 3, 5, 3, 3, 5, 2, 1, 3, 6, 4, 2, 5, 3, 5, 4. Przedstaw te dane w postaci tabeli liczebności.
- 4 Z pojemnika, w którym znajdują się kule w różnych kolorach, Asia losowała kule w ten sposób, że wyciągała jedną, następnie wkładała ją z powrotem do pudełka itd. Wyniki losowania przedstawiła na diagramie.



- a) Ile losowań wykonała Asia?
- b) Wyraż częstość wylosowania zielonej kuli w procentach z dokładnością do 1%.

- 5 Grupa uczniów wykonała 150 rzutów sześcienną kostką do gry i wyniki tego doświadczenia przedstawiła na diagramie kołowym. Zaprezentuj uzyskane dane za pomocą diagramu słupkowego ilustrującego, ile było poszczególnych wyników.



3. Zdarzenia losowe

W doświadczeniu losowym polegającym na rzucie sześcienną kostką do gry możemy otrzymać jeden z wyników: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Każdy możliwy wynik takiego doświadczenia losowego nazywa się **zdarzeniem elementarnym**, a dowolny zbiór zdarzeń elementarnych nazywamy **zdarzeniem losowym** lub krótko **zdarzeniem**. W przypadku jednokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych to $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dla tego doświadczenia zdarzeniami losowymi są np.

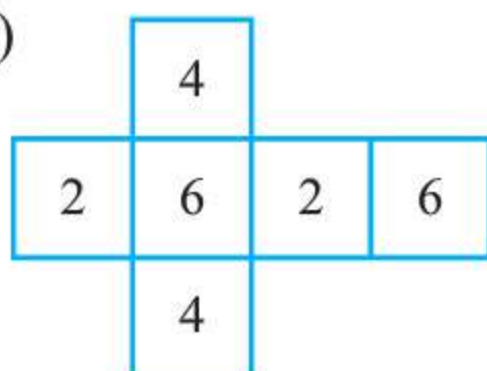
$A = \{6\}$ – wypadło sześć oczek,

$B = \{1, 2\}$ – wypadły nie więcej niż dwa oczka,

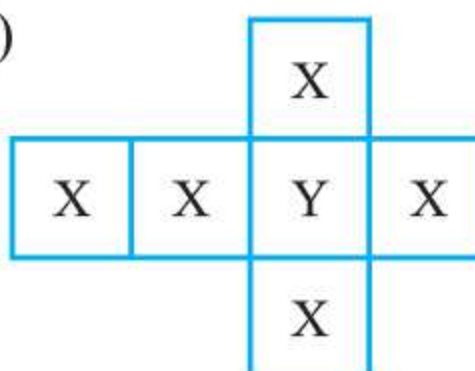
$C = \{2, 3, 5\}$ – wypadła liczba oczek będąca liczbą pierwszą.

- 1** Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką, której siatkę przedstawiono na rysunku. Zapisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego.

a)



b)



Przykład 1.

Rzucamy raz zwykłą sześcienną kostką do gry. Interesuje nas zdarzenie, w którym wypadnie parzysta liczba oczek. Ile wyników odpowiada temu zdarzeniu?

Spośród wszystkich możliwych wyników tylko trzy: 2, 4, 6 są liczbami parzystymi. Oznaczmy literą A zdarzenie „wypadła parzysta liczba oczek”. Mówimy, że **zdarzeniu A sprzyjają zdarzenia elementarne: 2, 4, 6**, co zapisujemy: $A = \{2, 4, 6\}$. Wobec tego zdarzeniu A „wypadła parzysta liczba oczek” sprzyjają trzy wyniki.

- 2** Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie zwykłą sześcienną kostką. Zapisz, jakie zdarzenia elementarne sprzyjają zdarzeniu:
- wypadnie nieparzysta liczba oczek,
 - wypadną nie więcej niż 4 oczka,
 - wypadną nie mniej niż 3 oczka,
 - ani nie wypadną 3 oczka, ani nie wypadnie 5 oczek.

Przykład 2.

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie dwunastościenną kostką przedstawioną na fotografii. Ustalmy, z ilu elementów jest złożony zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych. Zapiszmy, jakie zdarzenia elementarne sprzyjają zdarzeniu:



- wypadła liczba pierwsza,
- wypadła liczba złożona,
- wypadła liczba nie mniejsza niż 1 i nie większa niż 12,
- wypadła liczba większa od 12.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych składa się z dwunastu elementów: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

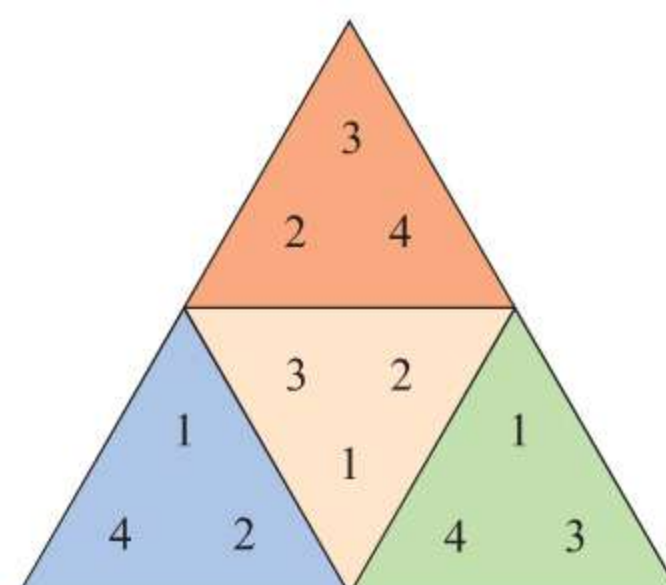
- Zdarzeniu „wypadła liczba pierwsza” sprzyja pięć zdarzeń elementarnych: 2, 3, 5, 7, 11.
- Zdarzeniu „wypadła liczba złożona” sprzyja sześć zdarzeń elementarnych: 4, 6, 8, 9, 10, 12.
- Zdarzeniu „wypadła liczba nie mniejsza niż 1 i nie większa niż 12” sprzyja dwanaście zdarzeń elementarnych: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. O zdarzeniu, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne, mówimy, że jest **zdarzeniem pewnym**.
- Zdarzeniu „wypadła liczba większa od 12” nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne. O takim zdarzeniu mówimy, że jest **zdarzeniem niemożliwym**.



Zdarzenie, któremu sprzyjają wszystkie możliwe zdarzenia elementarne, nazywamy **zdarzeniem pewnym**.
Zdarzenie, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne, nazywamy **zdarzeniem niemożliwym**.

- 3** Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie czworościenną kostką, której siatkę przedstawiono na rysunku. Obliczamy sumę liczb na ścianie, na której leży kostka. Określ, czy w tym doświadczeniu można uzyskać wyniki sprzyjające zdarzeniu:

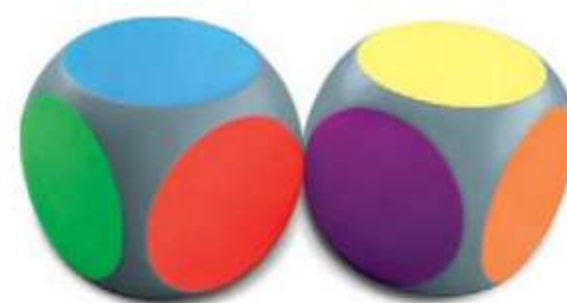
- suma liczb wynosi co najmniej 6,
 - suma liczb wynosi 7,
 - suma liczb wynosi maksymalnie 9.
- Które zdarzenie jest zdarzeniem pewnym?



- 4 Spośród liczb naturalnych od 1 do 50 włącznie losujemy jedną liczbę. Czy zbiorem zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A „wylosowano liczbę nieparzystą podzielną przez 3” jest zbiór $\{3, 9, 15, 33, 45\}$? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	wszystkie liczby tego zbioru są podzielne przez 3.
B.	Nie,		2.	brakuje w tym zbiorze liczb 21, 27, 39.
			3.	wszystkie liczby w tym zbiorze są nieparzyste.

- 5 Barwy ciepłe to np. żółty, pomarańczowy, czerwony, brązowy, kremowy, beżowy. Takie barwy, jak: niebieski, fioletowy, zielony itp. nazywamy barwami zimnymi. Doświadczenie polega na rzucie kostką, która na poszczególnych ściankach ma różne kolory. Na ilustracji przedstawiono wszystkie ścianki tej kostki. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu „wypadła barwa ciepła” jest więcej niż zdarzeń sprzyjających zdarzeniu „wypadła barwa zimna”.	P	F
Jest pięć zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu „wypadła barwa ciepła”.	P	F
Są trzy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu „wypadła barwa zimna”.	P	F
Zdarzenie „wypadł kolor brązowy” jest zdarzeniem niemożliwym.	P	F

Przykład 3.

Doświadczenie polega na umieszczeniu zeszytów z czterech przedmiotów: historii, biologii, fizyki, chemii w trzech szufladach biurka. Zastanówmy się, jak można rozmieścić te zeszyty.

Jest wiele sposobów na umieszczenie zeszytów w szufladach. Można wszystkie zeszyty włożyć do jednej z szuflad. Można trzy wybrane zeszyty umieścić w jednej szufladzie, a czwarty zeszyt w innej. Jeszcze innym sposobem jest włożenie po dwa zeszyty do dwóch szuflad albo po jednym zeszycie do dwóch szuflad i włożenie dwóch zeszytów do trzeciej.

Zauważmy, że we wszystkich rozmieszczeniach w co najmniej jednej szufladzie znajdują się co najmniej dwa zeszyty.



O rozmieszczeniu przedmiotów w szufladach mówi **zasada szufladkowa Dirichleta**:

Jeśli chcemy umieścić k przedmiotów w n szufladach i $k > n$, to co najmniej w jednej szufladzie znajdą się co najmniej dwa przedmioty.

Ta zasada umożliwia uzasadnienie, że np. jeśli chcemy powiesić 6 koszul na 5 wieszakach, to co najmniej na jednym wieszaku znajdą się co najmniej dwie koszule albo jeśli Ola ma 1000 znajomych na portalu społecznościowym, to na pewno przynajmniej trzy osoby spośród nich mają urodziny tego samego dnia.



- 6 Uzasadnij, że w grupie 13 osób muszą być co najmniej dwie osoby, które mają imieniny w tym samym miesiącu.
- 7 W klasie jest 24 uczniów i korzystają oni z 18 szafek na książki. Co najmniej ilu uczniów nie będzie musiało dzielić szafki z kolegą lub koleżanką?
- 8 Bibliotekarka umieściła 66 książek na 5 półkach. Co najmniej ile książek było na półce z największą liczbą tomów?
- 9 Co najmniej ile osób musi liczyć grupa, aby można było stwierdzić, że są w niej trzy osoby, które urodziły się w tym samym dniu tygodnia?



Wyzwanie

Jurek zakreślił w trzech kwadratach po 6 liczb i za każdym razem kierował się inną zasadą. Odgadnij regułę Jurka. Jakim zdarzeniom sprzyjają liczby zakreślone w każdym z trzech kwadratów? Podaj inne zbiory sprzyjające tym zdarzeniom.

I

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49					

II

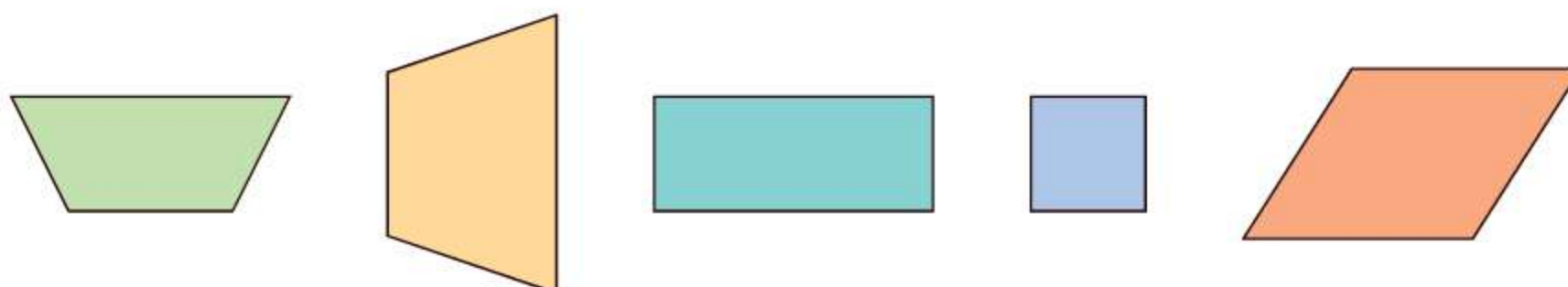
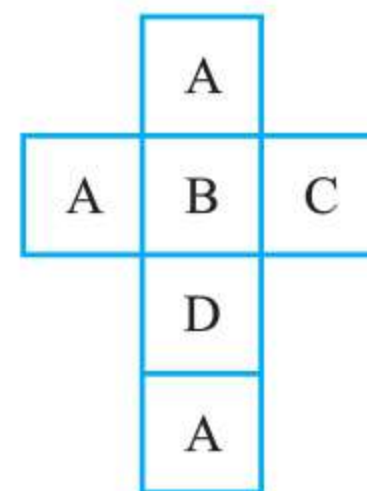
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49					

III

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49					

Sprawdź się!

- 1 Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką, której siatkę przedstawiono na rysunku. Zapisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego.
- 2 Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie zwykłą sześcienną kostką do gry. Zapisz, jakie zdarzenia elementarne sprzyjają zdarzeniu:
 - a) wypadnie reszta z dzielenia przez 7,
 - b) wypadnie wielokrotność liczby 10.
- 3 W pojemniku jest 12 kul oznaczonych literami od A do L. Doświadczenie polega na wylosowaniu jednej kuli z literą. Zapisz:
 - a) zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych,
 - b) zbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu „wylosowana litera jest samogłoską”.
- 4 W woreczku znajdują się karteczki ponumerowane kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 20. Julka wyjmuje je kolejno. Co najmniej ile karteczek musi wyjąć, aby mieć pewność, że przynajmniej jedna z nich jest oznaczona liczbą pierwszą? Odpowiedź uzasadnij.
- 5 W pudełku znajdują się karteczki z czworokątami takimi, jak na rysunku. Julka losuje jedną z nich.



Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu „wylosowano trapez” jest **A / B**. **A. 5** **B. 2**

Zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu „wylosowano równoległobok” jest **C / D**. **C. 3** **D. 1**

4. Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego

Gdy badamy określone doświadczenie losowe, możemy podać częstość wystąpienia danego wyniku. Możemy również przed wykonaniem doświadczenia ocenić teoretycznie, jaką szansę wystąpienia ma ten wynik.

Przykład 1.

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Doświadczenie powtórzono 100 razy. Wyniki przedstawiono w poniższej tabeli.



Liczba oczek	1	2	3	4	5	6
Liczebność	17	15	14	15	21	18

Interesuje nas, z jaką częstością wypadła nieparzysta liczba oczek. Rozpatrzmy, jaką odpowiedź otrzymamy, jeśli:

- weźmiemy pod uwagę wyniki tego doświadczenia,
- przeanalizujemy teoretyczne szanse wystąpienia nieparzystej liczby oczek.

a) Na 100 rzutów wyniki: 1, 3 lub 5 otrzymano odpowiednio: 17, 14 i 21 razy, czyli w sumie 52 razy. Nieparzysta liczba oczek wypadła z częstością $\frac{52}{100} = 0,52 \approx 0,5$.

b) Przy jednokrotnym rzucie sześcienną kostką zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych składa się z sześciu elementów: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Zdarzeniu A „wypadła nieparzysta liczba oczek” sprzyjają trzy zdarzenia elementarne: 1, 3, 5, czyli $A = \{1, 3, 5\}$. Teoretyczna szansa, że zajdzie zdarzenie A , wynosi $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Mówimy, że prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe 0,5 i zapisujemy: $P(A) = 0,5$.

Zauważmy, że częstość obliczona na podstawie wyników doświadczenia (0,52) różni się – choć niewiele – od teoretycznej szansy (0,5).



Prawdopodobieństwem P zdarzenia losowego A nazywamy stosunek liczby k zdarzeń elementarnych sprzyjających temu zdarzeniu do liczby n wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego.

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

- 1 Ze słowa *MATEMATYKA* wybieramy losowo jedną literę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będzie to:
- a) litera *A*, b) litera *M*, c) litera *Y*, d) litera *W*,
 e) samogłoska, f) spółgłoska, g) dowolna litera alfabetu?
- 2 Spośród liczb naturalnych od 5 do 30 włącznie losujemy jedną liczbę. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo wylosowania dowolnej liczby wynosi $\frac{1}{6}$.	P	F
Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5 wynosi $\frac{3}{13}$.	P	F

Przykład 2.

W urnie umieszczono 2 kule białe, 3 kule czarne i 5 kul zielonych. Losujemy jedną kulę. Obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) *A* – wylosowana kula jest zielona,
 b) *B* – wylosowana kula jest biała lub zielona,
 c) *C* – wylosowana kula jest żółta,
 d) *D* – wylosowana kula jest biała, czarna lub zielona.

a) W urnie znajduje się 10 kul. Połowa z nich to kule zielone, zatem $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
 Zauważmy, że prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest większe od 0, ale mniejsze od 1.

b) Białych i zielonych kul jest łącznie 7. Szansa, że wylosujemy jedną z tych 7 kul spośród wszystkich 10 kul, wynosi $\frac{7}{10}$. A zatem $P(B) = \frac{7}{10}$.
 Zauważmy, że prawdopodobieństwo zdarzenia *B* jest większe od 0, ale mniejsze od 1.

c) W urnie nie ma kuli żółtej. Zdarzenie, że wylosowana kula będzie żółta, jest zdarzeniem niemożliwym: $P(C) = \frac{0}{10} = 0$.

d) Zdarzenie, że wylosowana kula będzie biała, czarna lub zielona, jest zdarzeniem pewnym. Wobec tego $P(D) = \frac{10}{10} = 1$.

- Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe 0.
- Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1.
- Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia *A* jest liczbą nie mniejszą od 0 i nie większą od 1:

$$P(A) \geq 0 \quad \text{ i } \quad P(A) \leq 1$$



- 3 Do pudełka zawierającego 12 zielonych koralików wrzucono 6 czerwonych, 4 żółte i 2 niebieskie, a następnie wylosowano jeden koralik. Dobierz w pary: kolor koralika oraz literę odpowiadającą prawdopodobieństwu jego wylosowania.



A. $\frac{1}{12}$

B. 0,25

C. 0,55

D. 0,5

E. $\frac{1}{6}$

- 4 W 26-osobowej klasie jest 12 chłopców. W losowaniu prezentu mikołajkowego biorą udział wszyscy uczniowie i wychowawca. Wychowawca jako pierwszy losuje karteczkę z imieniem osoby, której ma kupić upominek. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosuje on:
- imię ucznia (dziewczynki lub chłopca),
 - imię dziewczynki,
 - swoje imię.

Przykład 3.

W pudełku znajdują się orzechy: 8 laskowych, 12 włoskich i 20 ziemnych. Losujemy jeden spośród wszystkich orzechów. Obliczmy prawdopodobieństwa wylosowania orzecha każdego rodzaju przy założeniu, że szanse wylosowania każdego orzecha są jednakowe.

W pudełku jest razem 40 orzechów. Przyjmijmy oznaczenia: L – zdarzenie polegające na wylosowaniu orzecha laskowego, W – włoskiego, Z – ziemnego.

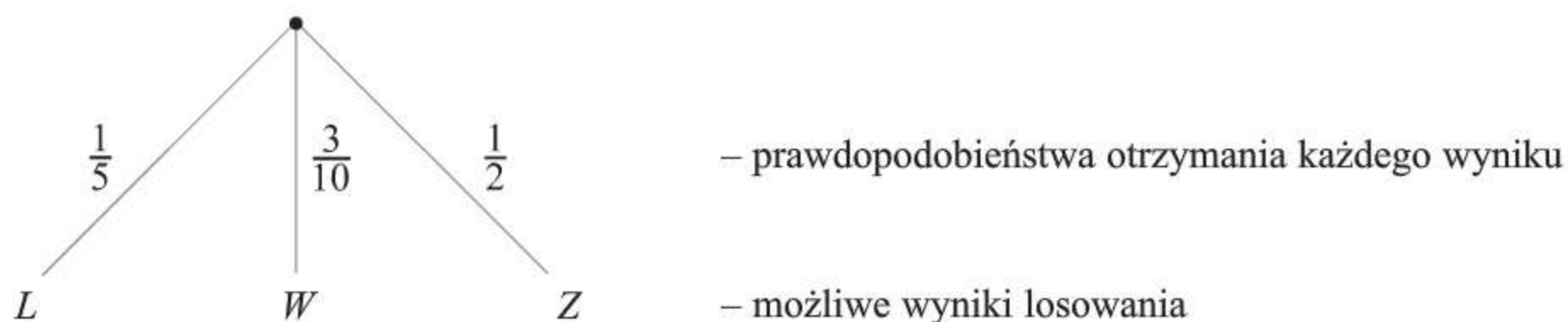
Orzechów laskowych jest 8, zatem $P(L) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$.

Orzechów włoskich jest 12, zatem $P(W) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$.

Orzechów ziemnych jest 20, zatem $P(Z) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$.



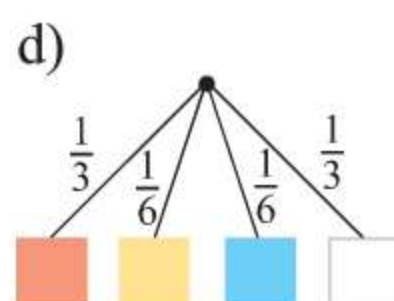
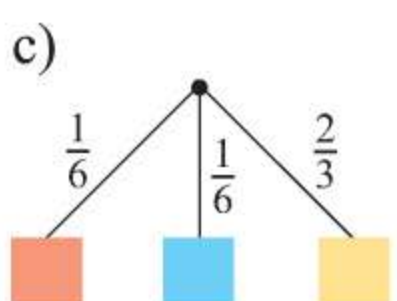
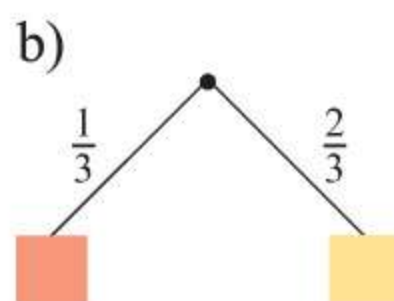
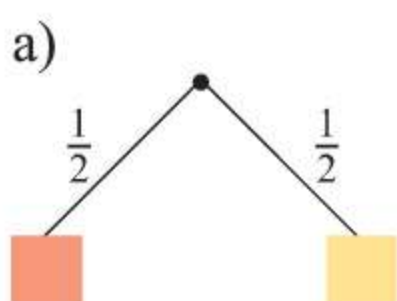
Na drzewie ilustrującym to doświadczenie możemy zaznaczyć prawdopodobieństwa poszczególnych zdarzeń.



Im większe jest prawdopodobieństwo zdarzenia, tym zajście tego zdarzenia jest bardziej prawdopodobne. Zauważmy, że w naszym przypadku $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ i $\frac{1}{2} > \frac{3}{10}$, zatem najbardziej prawdopodobne jest wylosowanie orzecha ziemnego.

- 5 W pudełku jest 10 kul: 4 czerwone, 3 zielone i 3 niebieskie. Losujemy jedną kulę.
- Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania każdej z kul: czerwonej, zielonej i niebieskiej.
 - Narysuj drzewo opisujące to losowanie i zaznacz na nim obliczone prawdopodobieństwo.

- 6 Za pomocą drzewa przedstawiono doświadczenie losowe polegające na rzucie sześcienną kostką o ściankach w różnych kolorach. Opisz tę kostkę.



- 7 Doświadczenie polega na losowaniu liczby za pomocą koła przedstawionego na rysunku poniżej. O ile prawdopodobieństwo uzyskania nieparzystej wielokrotności liczby 2 jest większe od prawdopodobieństwa uzyskania parzystej wielokrotności liczby 3?



- 8 Bartek i Kuba grają w grę polegającą na rzutach sześcienną kostką, której jedna ścianka jest czerwona, a pozostałe ścianki są białe. Gdy wypadnie ścianka czerwona – wygrywa Bartek, gdy biała – wygrywa Kuba.
- Ile razy szansa wygranej Bartka jest mniejsza od szansy wygranej Kuby?
 - Przy ilu ściankach czerwonych teoretyczne szanse wygranej dla obu graczy byłyby jednakowe?
 - Przy ilu ściankach czerwonych teoretyczna szansa wygranej Bartka byłaby dwa razy mniejsza od teoretycznej szansy wygranej Kuby?

- 9 W pewnym mieście 20% mieszkańców to emeryci, a 5% spośród nich ma więcej niż 85 lat. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany mieszkaniec tego miasta ma więcej niż 85 lat?

Wyzwanie

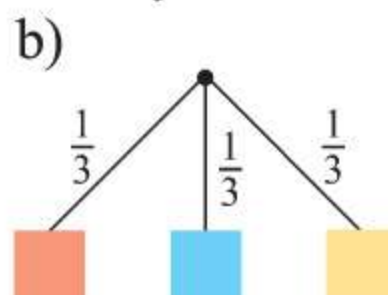
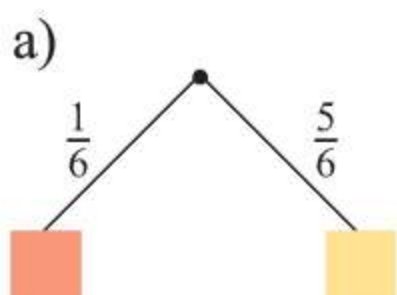
Na loterii „Marzenia się spełniają” można wygrać nagrodę główną, którą jest samochód osobowy, i 10 voucherów o wartości 3000 zł do wykorzystania w biurze podróży. W przypadku zakupu jednego losu za 10 zł prawdopodobieństwo wygrania vouchera wynosi 10^{-4} . Ile jest pustych losów na tej loterii?

Sprawdź się!

- 1 Z trzynastu kart do gry tego samego koloru losujemy jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania figury, czyli: waleta, damy, króla lub asa.
- 2 Ze zbioru $\{1, 3, 4, 5, 10, 12, 17, 20, 22, 28, 31, 33\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest nieparzysta lub podzielna przez 4.
- 3 Spośród liczb naturalnych od 51 do 80 włącznie losujemy jedną liczbę. Co jest bardziej prawdopodobne: wylosowanie liczby podzielnej przez 6 czy liczby podzielnej przez 9? Odpowiedź uzasadnij.
- 4 W klasie jest 15 dziewcząt i 16 chłopców. Wiemy, że 60% dziewcząt i 25% chłopców ma niebieskie oczy. Losujemy jedną osobę spośród tych, które mają niebieskie oczy. Czy prawdopodobieństwo, że wylosowaną osobą będzie chłopiec, wynosi $\frac{4}{13}$? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	liczba wszystkich osób z niebieskimi oczami wynosi 13, a wśród nich jest 4 chłopców, zatem $P = \frac{4}{13}$.
B.	Nie,		2.	liczba wszystkich osób wynosi 31 i jest 4 chłopców z niebieskimi oczami, zatem $P = \frac{4}{31}$.

- 5 Za pomocą drzewa przedstawiono doświadczenie losowe polegające na rzucie sześcienną kostką o ściankach w różnych kolorach. Opisz tę kostkę.



Zadania utrwalające

- 1 Zapisz symbolicznie zbiór liczb całkowitych:
 - a) ujemnych,
 - b) większych lub równych -3 i mniejszych lub równych 98 ,
 - c) spełniających warunek $x \geq -15$.
- 2 Czy zapis $M = \{9, \dots, 69\}$ określa jednoznacznie zbiór wszystkich liczb naturalnych nieparzystych podzielnych przez 3 i większych od 5 , a mniejszych od 75 ? Odpowiedź uzasadnij.
- 3 Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych utworzonych z cyfr $1, 2, 3, 4$, jeśli cyfry jedności i dziesiątek nie są jednakowe? Zapisz te liczby.
- 4 Ile jest liczb naturalnych większych od 23 , ale mniejszych od 157 , które są wielokrotnościami podanej liczby?
 - a) 5
 - b) 4
 - c) 13
- 5 Odpowiedz na poniższe pytania i uzasadnij swoje odpowiedzi.
 - I. Ile elementów ma zbiór $\{11, 12, 13, \dots, 79\}$?
 - II. Ile jest liczb naturalnych parzystych mniejszych niż 100 ?
 - III. Ile jest liczb nieparzystych od 19 do 98 ?
 - IV. Ile jest par liczb naturalnych, których suma wynosi 20 ?
- 6 Rzuć 30 razy sześcienną kostką do gry i zanotuj wyniki kolejnych rzutów. Następnie przedstaw uzyskane wyniki w postaci:
 - a) diagramu słupkowego,
 - b) procentowego diagramu kołowego.Skorzystaj z definicji prawdopodobieństwa i oblicz prawdopodobieństwo otrzymania każdego z wyników podczas jednokrotnego rzutu kostką.
- 7 W pudełku jest 5 kul białych i 7 czarnych. Wyciągamy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli:
 - a) białej,
 - b) czerwonej,
 - c) czarnej,
 - d) białej lub czarnej.
- 8 Talia kart zawiera 52 karty czterech kolorów: piki, kiery, kara, trefle, po 13 kart w każdym kolorze. Z talii tej losujemy jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – wylosowana karta to:
 - a) pik,
 - b) dama,
 - c) kier lub karo.
- 9 W urnie jest 12 zielonych kul. Ile czerwonych kul trzeba do niej dołożyć, aby szansa wylosowania czerwonej kuli była równa $0,4$?

- 10** W sklepie obuwniczym znajduje się 12 par jednego modelu kaloszy. W rozmiarach: 36, 37, 38, 39 są po dwie pary, w rozmiarze 40 – cztery pary. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana para kaloszy będzie miała rozmiar, który jest liczbą:
- a) 40,
c) parzystą,
e) mniejszą niż 37,
- b) nieparzystą,
d) nie większą niż 38,
f) większą niż 40.



- 11** W torebce jest 15 cukierków czekoladowych i 13 cukierków owocowych. Do torebki można dołożyć jeden cukierek owocowy lub usunąć z niej jeden cukierek czekoladowy. Po wykonaniu której czynności bardziej prawdopodobne będzie wylosowanie cukierka czekoladowego?
- 12** Gosia, Tomek i Jacek kupili bilety do kina. Bilety mają kolejne numery w jednym rzędzie. Oblicz prawdopodobieństwo, że Gosia nie będzie siedziała obok Jacka.
- 13** Ile jest par liczb naturalnych dwucyfrowych takich, że pierwsza liczba jest cztery razy mniejsza od drugiej liczby? Jakie to liczby?
- 14** W klasie jest 8 chłopców. Pani wywołała do odpowiedzi jedną osobę. Prawdopodobieństwo, że to będzie dziewczynka, wynosi $\frac{2}{3}$. Ile osób liczy ta klasa?
- 15** W urnie są kule białe i czarne. Prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli wynosi $\frac{2}{5}$. Gdy dołożymy dwie białe kule, prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli wzrośnie o $\frac{1}{10}$. Ile białych i ile czarnych kul jest w tej urnie?

- 16** Wśród 220 osób przeprowadzono badania ankietowe dotyczące miejsca zakupu pieczywa w pierwszą sobotę lipca. Wyniki ankiety przedstawiono w tabeli.
Uwaga! 52 osoby zrobiły zakupy w obu miejscach.

Miejsce zakupu	Liczba osób
sklep osiedlowy	107
supermarket	125

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia „losowo wybrana osoba nie kupowała tego dnia pieczywa”.



Zadania sprawdzające

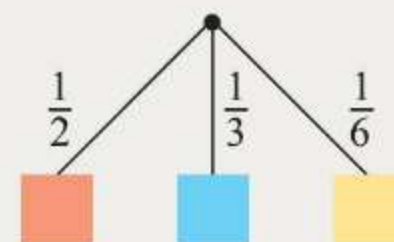
Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–3. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Ile jest liczb nieparzystych od 16 do 67 włącznie?
 A. 50 B. 52 C. 26 D. 25
- 2 Oto wyniki siedmiokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry: 1, 4, 2, 3, 5, 5, 6. Jaka jest częstość wystąpienia szóstki?
 A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{1}{6}$
- 3 W urnie znajdują się jedynie kule białe i czarne. Kul białych jest trzy razy więcej niż czarnych. Ile wynosi prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej?
 A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

W zadaniach 4.–6. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 4 Par liczb naturalnych, których suma wynosi 19, jest
 A. 10 B. 11 C. 9 D. 8
- 5 Rzucamy raz sześcienną kostką do gry. Zbiór wyników sprzyjających zdarzeniu „wyrzucona liczba oczek jest liczbą pierwszą” to
 A. {1, 2, 3, 5} B. {2, 4, 6} C. {2, 3, 5} D. {1, 2, 3}
- 6 Za pomocą drzewa przedstawiono doświadczenie losowe polegające na rzucie sześcienną kostką o ściankach w trzech różnych kolorach.
 Kostka ta ma następujące ścianki:
 A. 2 czerwone, 2 niebieskie i 2 żółte.
 B. 1 czerwoną, 2 niebieskie i 3 żółte.
 C. 3 czerwone, 2 niebieskie i 1 żółtą.
 D. 2 czerwone, 1 niebieską i 3 żółte.
- 7 Czy wśród liczb od 34 do 183 jest 25 liczb podzielnych przez 6? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.



A.	Tak,	ponieważ	1.	$(183 - 34) : 6 = 149 : 6 = 24$ reszta 5.
B.	Nie,		2.	liczb od 34 do 183 jest 150, a $150 : 6 = 25$.

- 8 W pudełku są kule czerwone i czarne. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej wynosi $\frac{1}{3}$. Jeśli dołożymy dwie kule czerwone, to prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej będzie równe $\frac{5}{11}$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

W pudełku jest 6 kul czerwonych i są 3 kule czarne.	P	F
W pudełku są 3 kule czerwone i jest 6 kul czarnych.	P	F

- 9 Wśród wszystkich osób uczestniczących w zebraniu jest 45 kobiet. Głos zabrała jedna osoba. Prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna, wynosi $\frac{1}{4}$. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

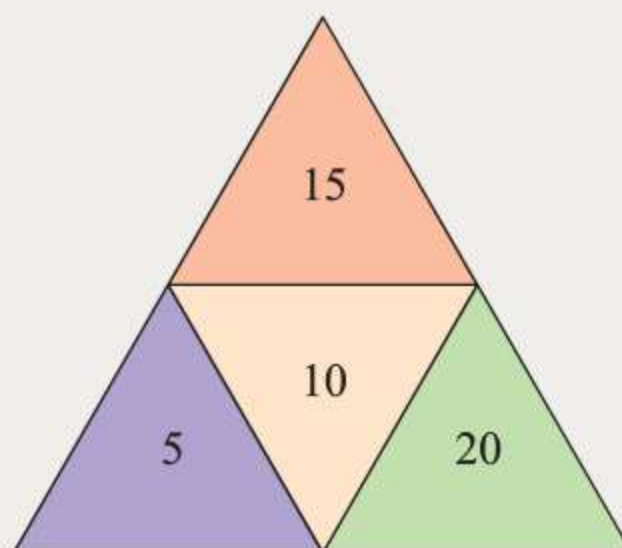
Wśród osób uczestniczących w zebraniu więcej było **A / B**.

A. mężczyzn **B.** kobiet

W zebraniu uczestniczyło **C / D** osób.

C. 60 **D.** 100

- 10 Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie czworościenną kostką, której siatkę przedstawiono na rysunku. Podaj przykład zdarzenia pewnego i zdarzenia niemożliwego dla tego doświadczenia losowego. Odpowiedź uzasadnij.



- 11 W urnie znajdują się kule: 2 białe, 4 czerwone, 8 zielonych i 6 żółtych. Losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli żółtej lub białej. Zapisz obliczenia.
- 12 W urnie jest 8 białych kul. Ile czarnych kul trzeba dołożyć do tej urny, aby szansa wylosowania czarnej kuli była równa 0,6? Odpowiedź uzasadnij.

Powtórzenie

- I. Liczby i działania
- II. Wyrażenia algebraiczne i równania
- III. Figury płaskie
- IV. Bryły
- V. Elementy statystyki opisowej, kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa
- VI. Przed egzaminem

Przypomnij sobie*

- potęga o wykładniku całkowitym nieujemnym (s. 7)
- iloczyn potęg o tej samej podstawie (s. 9)
- iloraz potęg o tej samej podstawie (s. 10)
- potęga iloczynu (s. 12)
- potęga ilorazu (s. 13)
- potęga potęgi (s. 16)
- potęga o wykładniku całkowitym ujemnym (s. 20)
- notacja wykładnicza (s. 19, 21)
- pierwiastek kwadratowy z liczby nieujemnej (s. 26)
- pierwiastek sześcienny (s. 26)
- pierwiastek z iloczynu (s. 28)
- pierwiastek z ilorazu (s. 34)
- włączanie czynnika pod pierwiastek (s. 30)
- wyłączanie czynnika przed pierwiastek (s. 30)
- usuwanie niewymierności z mianownika (s. 36)
- punkty procentowe (s. 87, 88)

* Wyjaśnienia powyższych terminów znajdziesz w tym podręczniku na podanych stronach.

Liczby całkowite to ..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... Zbiór liczb całkowitych oznaczamy jako $\mathbb{C}$.

Liczby naturalne to 0, 1, 2, 3, ..., 586, 587, 588, ..., czyli liczby całkowite dodatnie i zero. Zbiór liczb naturalnych oznaczamy jako $\mathbb{N}$.

Liczby wymierne to liczby, które można zapisać w postaci ułamka $\frac{a}{b}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi i $b \neq 0$, np. $2 = \frac{2}{1}$, $-3 = \frac{-9}{3}$, $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy jako $\mathbb{W}$.

Liczby niewymierne to liczby, których nie da się zapisać w postaci ułamka. Takimi liczbami są np. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{11}$.

Liczby pierwsze to 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ..., 79, ..., czyli liczby naturalne większe od jedności, które mają tylko dwa dzielniki naturalne: 1 oraz samą siebie. **Liczby 0 i 1 nie są liczbami pierwszymi.**

Liczby złożone to takie liczby naturalne większe od jedności, które mają więcej niż dwa dzielniki naturalne. Liczbę złożoną można przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych, np. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $25 = 5 \cdot 5$, $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$.

Liczba 1 nie jest liczbą złożoną.

Liczby przeciwne to dwie liczby, którym odpowiadają punkty leżące na osi liczbowej po przeciwnych stronach zera i w takiej samej odległości od zera, np. 3 i -3; $\frac{1}{5}$ i $-\frac{1}{5}$; 2,4 i -2,4. Liczby przeciwne mają tę samą wartość bezwzględną,

np. $|3| = 3$, $|-3| = 3$. Suma liczb przeciwnych jest równa zero, np. $-3 + 3 = 0$,
 $\frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right) = 0$.

Odwrotność liczby

Odwrotnością liczby a , gdzie $a \neq 0$, jest liczba $\frac{1}{a}$.

Iloczyn liczby a i jej odwrotności $\frac{1}{a}$ jest równy 1 dla $a \neq 0$.

Przykład

$$4 \text{ i } \frac{1}{4}, \text{ bo } 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$-0,2 \text{ i } -5, \text{ bo } -0,2 \cdot (-5) = 1$$

Rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze to zapisanie tej liczby w postaci iloczynu liczb pierwszych, np. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Obliczanie NWD i NWW

Przeanalizujmy sposób wyznaczania największego wspólnego dzielnika (NWD) i najmniejszej wspólnej wielokrotności (NWW) na przykładzie pary liczb: 8 i 20. Najpierw rozkładamy liczby na czynniki pierwsze.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

Aby znaleźć NWD, szukamy wspólnych czynników w rozkładach liczb 8 i 20, a następnie te wspólne czynniki mnożymy.

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \quad \text{NWD}(8, 20) = 2 \cdot 2 = 4$$

Aby znaleźć NWW, pierwszą liczbę mnożymy przez te czynniki, które są w rozkładzie drugiej liczby, a nie ma ich w rozkładzie pierwszej liczby.

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \quad \text{NWW}(8, 20) = 8 \cdot 5 = 40$$

Cechy podzielności liczb naturalnych przez: 2, 5, 10, 3, 9, 4

Liczba jest podzielna przez:

2 – jeżeli jej ostatnią cyfrą jest: 0, 2, 4, 6 lub 8, Liczby parzyste są podzielne przez 2.

5 – jeżeli jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5,

10 – jeżeli jej ostatnią cyfrą jest 0,

Liczba taka jest podzielna przez 2, 5 i 10.

3 – jeżeli suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 3, np. 48, 153, 1920,

9 – jeżeli suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 9, np. 72, 189, 3456,

4 – jeżeli jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4, np. 124, 2540.

Reszta z dzielenia

Dla dowolnej liczby całkowitej a i dowolnej dodatniej liczby naturalnej b istnieje tylko jedna para liczb całkowitych k i r taka, że $a = k \cdot b + r$, gdzie $r \geq 0$ i $r < b$. Liczbę k nazywamy ilorazem z dzielenia a przez b , a liczbę r – resztą z tego dzielenia. W szczególności, jeśli $r = 0$, to mówimy, że liczba a jest podzielna przez b .

Przykład

$154 : 7 = 22$ reszta 0, bo $22 \cdot 7 = 154$, $101 : 25 = 4$ reszta 1, bo $101 = 4 \cdot 25 + 1$

Liczby naturalne w systemie rzymskim

Do zapisu liczb naturalnych w systemie rzymskim używa się siedmiu liter. Każda z nich oznacza inną liczbę.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Litery te ustawia się w określonym porządku. Liczbę odczytuje się poprzez dodawanie lub odejmowanie liczb przypisanych poszczególnym literom, a następnie sumowanie częściowych wyników.

Na przykład:

$$DLX = 500 + (50 + 10) = 560$$

$$DXL = 500 + (50 - 10) = 540$$

$$MDCCLXXIX = 1000 + (500 + 100 + 100) + (50 + 10 + 10) + (10 - 1) = 1779$$

Przy używaniu znaków rzymskich należy stosować następujące zasady zapisu liczb:

1. Obok siebie mogą stać maksymalnie trzy jednakowe znaki spośród: I, X, C, M.
2. Nie można powtarzać obok siebie znaków: V, L, D.
3. Liczby, które wymagałyby czterech jednakowych znaków obok siebie, zapisujemy następująco: $IV = 5 - 1 = 4$, $IX = 10 - 1 = 9$, $XL = 50 - 10 = 40$ itd.
4. Znak I może stać tylko przed V i X, znak X – tylko przed L i C, a znak C – tylko przed D i M.
5. Znaki I, X, C poprzedzające znaki oznaczające większe liczby mogą występować tylko jeden raz przed większą liczbą.
6. Znaki V, L, D nie mogą poprzedzać znaków oznaczających większe liczby.

Zero w mnożeniu i dzieleniu

$$a \cdot 0 = 0, \quad \text{np. } 8 \cdot 0 = 0, \quad 25 \cdot 39 \cdot 86 \cdot 41 \cdot 611 \cdot 1000 \cdot 0 \cdot 7 = 0, \quad 0 \cdot 0 = 0$$

Jeżeli jednym z czynników jest 0, to iloczyn zawsze jest równy zero.

$$0 : a = 0 \text{ dla każdej liczby } a \text{ różnej od zera,} \quad \text{np. } 0 : 97 = 0, \quad 0 : 1 = 0$$

Dzielenie przez zero jest niewykonalne!

Kolejność wykonywania działań

1. Działania w nawiasach, najpierw w tym nawiasie, który nie zawiera w sobie innych nawiasów.
2. Potęgowanie lub pierwiastkowanie w kolejności ich występowania.
3. Mnożenie lub dzielenie w kolejności ich występowania.
4. Dodawanie lub odejmowanie w kolejności ich występowania.

Przykład

$$\begin{aligned} & -20 : \sqrt{25} + 5 \cdot \left[20 - (2^2 + 14) + \sqrt[3]{8} \right] = -20 : 5 + 5 \cdot [20 - 18 + 2] = \\ & = -20 : 5 + 5 \cdot 4 = -4 + 20 = 16 \end{aligned}$$

Rozwinięcie dziesiętne liczby to przedstawienie liczby w postaci ułamka dziesiętnego lub rozwinięcia nieskończonego.

Rozwinięcie dziesiętne skończone: $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{3}{4} = 0,75$, $1\frac{1}{8} = 1,125$, $3 = 3,0$,
 $5\frac{7}{20} = 5,35$

Rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe: $\frac{2}{3} = 0,666... = 0,(6)$,
 $\frac{6}{7} = 0,857142857142... = 0,(857142)$, $2\frac{4}{15} = 2,26666... = 2,2(6)$

Rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe: $\sqrt{2} = 1,414213562...$,
 $\sqrt{3} = 1,732050807...$

Przybliżenie dziesiętne to podanie przybliżonej wartości liczby z pewną dokładnością.

Przykład

Liczby 0,4 i 0,5 są przybliżeniami dziesiętnymi liczby $\frac{7}{16}$ z dokładnością do 0,1 ($\frac{7}{16} = 0,4375$). W praktyce, gdy podajemy przybliżenia dziesiętne liczb z określoną dokładnością, stosujemy **zasadę zaokrąglania**. Przyjmujemy zatem, że $\frac{7}{16} \approx 0,4$.

Zasada zaokrąglania liczb

Aby zaokrąglić liczbę do danego rzędu, należy odrzucić wszystkie cyfry znajdujące się na prawo od cyfry danego rzędu oraz:

- jeśli pierwsza z odrzuconych cyfr jest równa 0, 1, 2, 3 lub 4, to ostatnią zachowaną cyfrę trzeba zostawić bez zmiany – jest to **zaokrąglenie w dół**, np.
 $4,2475 \approx 4,2$, $2531,2 \approx 2500$.

Jeśli odrzucone cyfry były położone przed przecinkiem (w rzędach: jedności, dziesiątek, setek itd.), należy na ich pozycjach wpisać zera.

- jeśli pierwsza z odrzuconych cyfr jest równa 5, 6, 7, 8 lub 9, to ostatnią zachowaną cyfrę trzeba zwiększyć o 1 – jest to **zaokrąglenie w górę**, np.
 $15,854 \approx 15,9$, $12\,789,23 \approx 13\,000$.

Jeśli odrzucone cyfry były położone przed przecinkiem (w rzędach: jedności, dziesiątek, setek itd.), należy na ich pozycjach wpisać zera.

Wartością bezwzględną dowolnej liczby a nazywamy odległość tej liczby od zera na osi liczbowej. Wartość bezwzględną liczby a oznaczamy jako $|a|$.

Wartością bezwzględną liczby nieujemnej jest ta sama liczba, np. $|8| = 8$, $|0| = 0$.

Wartością bezwzględną liczby ujemnej jest liczba przeciwna do niej, np. $|- \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$.

Procent (1%) dowolnej wielkości to jedna setna ($\frac{1}{100}$) tej wielkości.

Zamiana ułamka na procent

Aby zamienić ułamek pewnej wielkości na procent tej wielkości, należy ten ułamek pomnożyć przez 100%, np.: $0,75 = 0,75 \cdot 100\% = 75\%$; $2 = 2 \cdot 100\% = 200\%$.

Zamiana procentu na ułamek

Aby zamienić procent pewnej wielkości na ułamek tej wielkości, należy liczbę procentów podzielić przez 100, np. $30\% = \frac{30}{100} = 0,3$; $0,7\% = \frac{0,7}{100} = 0,007$.

Obliczanie procentu dowolnej wielkości

p procent dowolnej wielkości a jest równe $\frac{p}{100} \cdot a$.

Przykład

22% kwoty 200 zł jest równe $\frac{22}{100} \cdot 200 = 44$ [zł]

Obliczanie wielkości, gdy dany jest jej procent

Wielkość a , której p procent wynosi b , można obliczyć ze wzoru $a = \frac{b}{p} \cdot 100$.

Przykład

20% pewnej liczby wynosi 17. Ta liczba jest równa 85, ponieważ: $\frac{17}{20} \cdot 100 = 85$.

Obliczanie, jakim procentem danej wielkości jest inna wielkość

Wielkość b stanowi p procent wielkości a , gdy $\frac{b}{a} \cdot 100\% = p\%$.

Przykład

Liczba 24 stanowi 20% liczby 120, ponieważ $\frac{24}{120} \cdot 100\% = 20\%$.

Liczba 120 stanowi 500% liczby 24, ponieważ $\frac{120}{24} \cdot 100\% = 500\%$.

Odsetki – określony procent kapitału wypłacany przez bank (w przypadku lokowania w banku pieniędzy) lub pobierany przez bank (w przypadku kredytu).

Przykład

Odsetki od kwoty 20 000 zł, wpłaconej do banku na lokatę z oprocentowaniem 3% w skali roku, po upływie roku wyniosą: $20\,000 \cdot 3\% = 20\,000 \cdot 0,03 = 600$ [zł].

Roztwór to mieszanina dwóch lub więcej związków chemicznych, których skład określa się procentowo.

Przykład

Roztwór soli kuchennej o stężeniu 10% oznacza, że sól stanowi 10% masy roztworu, a woda to 90% masy roztworu.

Stężenie procentowe roztworu obliczamy ze wzoru:

$$\frac{\text{masa substancji rozpuszczanej}}{\text{masa roztworu}} \cdot 100\%$$

Przykład

25 g cukru rozpuszczono w 100 g wody. Stężenie procentowe tego roztworu wynosi: $\frac{25}{25 + 100} \cdot 100\% = \frac{25}{125} \cdot 100\% = \frac{1}{5} \cdot 100\% = 20\%$.

Stop to mieszanina metali, np. stop miedzi i cynku to mosiądz.

1. Liczby naturalne

- 1** Liczby: 17, 23, 31, 43 przedstaw w postaci sum najwyżej czterech liczb pierwszych. Czy jest tylko jeden sposób przedstawienia tych liczb w postaci sumy liczb pierwszych?
 - 2** Napisz pięć liczb złożonych większych od 5 i każdą z nich zapisz w postaci sumy liczb pierwszych.
 - 3** Pan Wojtek kupił farby w sześciu pojemnikach. Pięć z nich miało pojemność większą odpowiednio o 2, 6, 8, 12 i 14 litrów od pojemności najmniejszego pojemnika. Znajdź pojemności tych pojemników. Przyjmij, że są one liczbami pierwszymi.
 - 4** Liczby pierwsze: 29, 47, 61, 83, 97 przedstaw w postaci sumy kwadratów co najmniej dwóch liczb pierwszych.
 - 5** Asia jest nastolatką. Wiek Asi i wiek jej pieska są liczbami pierwszymi. Suma tych liczb też jest liczbą pierwszą, a suma cyfr wieku Asi to wiek jej pieska. Ile lat ma Asia, a ile – jej piesek?
 - 6** Rozłóż na czynniki pierwsze pary liczb:
a) 24 i 60, b) 25 i 80, c) 16 i 72.
Wypisz wszystkie dzielniki każdej z tych liczb, następnie podaj wspólne dzielniki obu liczb i ich największy wspólny dzielnik.
 - 7** Zastosuj poniższą metodę szukania NWD do obliczenia:
a) $\text{NWD}(247, 195)$, b) $\text{NWD}(476, 391)$, c) $\text{NWD}(459, 527)$.
- 



Algorytm Euklidesa

$$\begin{aligned} \text{NWD}(198, 121) &= \text{NWD}(198 - 121, 121) = \text{NWD}(77, 121) = \\ &= \text{NWD}(121 - 77, 77) = \text{NWD}(44, 77) = \text{NWD}(77 - 44, 44) = \text{NWD}(33, 44) = \\ &= \text{NWD}(44 - 33, 33) = \text{NWD}(11, 33) = \text{NWD}(33 - 11, 11) = \text{NWD}(22, 11) = \\ &= \text{NWD}(22 - 11, 11) = \text{NWD}(11, 11) = 11 \end{aligned}$$

- 8** Przepisz działanie, wpisz w miejsce liter a, k, b, r brakujące liczby.
- a) $15 : 6 = \frac{k \cdot 6 + r}{6}$ b) $72 : 5 = \frac{k \cdot b + r}{5}$
- c) $a : 3 = \frac{17 \cdot b + 1}{3}$ d) $43 : b = \frac{k \cdot 8 + r}{b}$
- 9** Znajdź iloraz oraz resztę i sprawdź wynik.
- a) $35 : 9$ b) $136 : 18$ c) $257 : 11$
- 10** Liczbę 63 podziel przez 2, 6, 11, 19. W którym przypadku reszta z dzielenia jest największa?

- 11** Dziadek zerwał 70 jabłek i postanowił rozdać je po równo sześciu wnukom. Ile maksymalnie jabłek może dać każdemu wnukowi?
- 12** Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez:
a) 10, b) 100?
- 13** Jaki może być brakujący jednocyfrowy składnik x sumy $4 \cdot 10 + x + 5 \cdot 100 + 7 \cdot 1000 + 8 \cdot 10\,000$, aby ta suma była podzielna przez:
a) 2, b) 3, c) 5, d) 9, e) 10?
- 14** Jaki może być brakujący jednocyfrowy składnik x sumy $4 \cdot 1000 + x + 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10$, aby ta suma była podzielna przez:
a) 6, b) 12, c) 15?
- 15** Jaką cyfrą należy zastąpić gwiazdkę w liczbie 380^* , aby liczba była podzielna przez:
a) 2, b) 3, c) 4, d) 5, e) 9, f) 10, g) 100?
- 16** Jakie cyfry trzeba wpisać zamiast figur w liczbie $13 \heartsuit 041 \spadesuit$, jeśli wiadomo, że liczba ta dzieli się przez 18?
- 17** Podaną datę historyczną zapisz w systemie rzymskim:
a) 1410 r. – bitwa pod Grunwaldem,
b) 1794 r. – bitwa pod Racławicami,
c) 1939 r. – wybuch II wojny światowej,
d) 1989 r. – obrady Okrągłego Stołu.



- 18** Utwórz pary liczb o jednakowej wartości.
- | | | | | |
|---------|------|-------|-----|------|
| XXXVIII | XCIV | MMCXX | MXI | XLIX |
| 1011 | 49 | 38 | 94 | 2120 |
- 19** Odczytaj datę zapisaną w systemie rzymskim. Oceń prawdziwość podanych informacji. Wybierz P, jeśli informacja jest prawdziwa, albo F – jeśli jest fałszywa.

MCMLXXVIII – wybór Karola Wojtyły na papieża	P	F
CMLXVI – chrzest Polski	P	F
MDCCXCV – trzeci rozbiór Polski	P	F
MCCCXXI – bitwa pod Płowcami	P	F

- 20** Jaki znak: $>$ lub $<$ należy wpisać zamiast $\square$?
 $7 \cdot 8 + 280 : 7 \square CCX - CXL$
- 21** Poniżej podano odległości (w kilometrach) z Rzymu do innych włoskich miast.
- | | |
|----------------------|-----------------------|
| Turyn – DCLXXVIII | Bolonia – CCCLXXXVIII |
| Mediolan – DLXXXVII | Wenecja – DXXXIX |
| Florencja – CCLXXXIV | Neapol – CCXXVII |
- a) Która odległość jest mniejsza – z Rzymu do Wenecji czy z Rzymu do Florencji?
b) O ile kilometrów dalej od Rzymu leży Mediolan niż Bolonia?
c) Które miasto leży najdalej, a które – najbliżej Rzymu?

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–7. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Resztę równą 3 otrzymamy z dzielenia
A. $250 : 6$ B. $219 : 6$ C. $254 : 6$ D. $263 : 6$
- 2 Do przewiezienia 279 osób autobusami 52-osobowymi potrzeba
A. 5 autobusów. B. 6 autobusów. C. 4 autobusy. D. 7 autobusów.
- 3 Szósta część trzykrotności liczby 48 jest równa
A. 10 B. 24 C. 16 D. 8
- 4 Liczba, która w rozkładzie na czynniki pierwsze ma 4 dwójki i 3 piątki, to
A. 2000 B. 120 C. 400 D. 1000
- 5 Liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych jednocześnie przez 2 i 3 jest
A. 12 B. 20 C. 15 D. 24
- 6 Iloczynem liczb 56 i 35 jest liczba
A. MCMLX B. CMCD C. MMCL D. CMLIV
- 7 Liczba MMDCLVI jest większa od liczby MCMXLIX
A. o 693. B. o 725. C. o 364. D. o 707.
- 8 Czy najmniejszą liczbą naturalną podzielną jednocześnie przez liczby: 2, 3, 5 i 9 jest 60? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) oraz jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	liczba 60 dzieli się przez 30.
			2.	liczba 60 dzieli się przez 15.
B.	Nie,		3.	suma cyfr liczby 60 nie dzieli się przez 9.

- 9 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Różnica dwóch liczb parzystych jest liczbą parzystą.	P	F
Iloczyn kolejnych dwóch liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą.	P	F
Suma dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą.	P	F
Iloczyn kolejnych dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.	P	F

W zadaniach 10.–11. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 10** Jaka jest najmniejsza liczba naturalna, przez którą trzeba podzielić liczbę 180, aby otrzymać kwadrat liczby całkowitej?
A. 2 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 9
- 11** Pierwszy tunel pod wodą powstał pod Tamizą. Budowano go w latach MDCCCXXV–MDCCCXLIII. Ile lat trwała budowa tego tunelu?
A. 44 **B.** 33 **C.** 15 **D.** 18
- 12** Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
 Ze 134 patyczków jednakowej długości można ułożyć maksymalnie **A / B** osobne trójkąty i zostaną jeszcze dwa patyczki. **A.** 42 **B.** 44
 Ze 134 patyczków jednakowej długości można ułożyć maksymalnie 33 osobne romby i zostaną jeszcze **C / D** patyczki. **C.** 3 **D.** 2
- 13** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeśli w wyniku dzielenia otrzymujemy resztę, to jest ona zawsze mniejsza od dzielnika.	P	F
Tomek rozłożył 237 kasztanów po równo do 5 koszyków i zostały mu 4 kasztany.	P	F
Mama zrobiła 49 pączków, 1 pączek zjadła, a resztę rozłożyła po równo na 6 talerzach.	P	F
Wojtek sprawiedliwie poczęstował 13 kolegów 55 cukierkami i zostały mu 2 cukierki.	P	F

- 14** Ile lat do 2022 roku upłynęło od podanych zdarzeń historycznych, których daty zapisano w systemie rzymskim?
 a) CMLXXII – bitwa pod Cedynią
 b) MCMXLIII – wybuch powstania w getcie warszawskim
 c) MDCCXCVII – powstanie *Mazurka Dąbrowskiego* Józefa Wybickiego
 d) MCCXXVI – sprowadzenie Krzyżaków do Polski
 Zapisz obliczenia.
- 15** NWD dwóch liczb wynosi 2, a NWW tych liczb jest równa 12. Co to za liczby? Zapisz obliczenia.
- 16** Pewną liczbę podzielono przez 13, otrzymano 21 i reszty 12. Czy tą liczbą jest 265? Odpowiedź uzasadnij.
- 17** Jaką cyfrą należy zastąpić gwiazdkę, aby liczba 12^* była liczbą złożoną? Podaj wszystkie możliwości.

2. Działania w zbiorze liczb wymiernych

- 1 Na opakowaniu mąki pszennej widnieje napis „masa: 1 kg $\pm$ 21 g”. Jaka może być minimalna masa tej mąki, a jaka – maksymalna?
- 2 Jeśli jedną parę rajstop kupimy w sklepie, to zapłacimy 16 zł. Jeśli rajstopy kupimy w hurtowni, to przy zakupie co najmniej 10 par zapłacimy po 10,70 zł za parę, a przy zakupie 9 par lub mniej – po 11,60 zł za parę. Ile złotych zaoszczędzimy, jeśli kupimy 11 par rajstop w hurtowni zamiast w sklepie?
- 3 Hania wybrała się do sklepu spożywczego po zakupy. Kupiła: 0,6 kg szynki po 39 zł za 1 kg, $\frac{3}{4}$ kg pomidorów po 12 zł za 1 kg, 0,5 kg moreli po 20 zł za 1 kg, kostkę masła za 7,50 zł i sześć bułek po 1,10 zł. Dostała od mamy trzy banknoty o nominale 10 zł, jeden banknot o nominale 20 zł i dwie monety pięciozłotowe. Czy wystarczy jej jeszcze pieniędzy na zakup dwóch lizaków po 1,50 zł?
- 4 Ola zrobiła zakupy w drogerii. Dla mamy kupiła pomadkę za 30 zł, mydło za 1,80 zł i waciki do demakijażu za 4,20 zł. Dla siebie kupiła dezodorant za 12 zł i płyn do kąpieli za 6 zł. Jaką część wszystkich wydatków stanowią zakupy na potrzeby Oli?
- 5 W tabeli podano wartość energetyczną 100-gramowej porcji dzikiego ryżu oraz masę niektórych składników.

Wartość energetyczna	1434 kJ (338 kcal)
Białko	12,9 g
Węglowodany	68,4 g
Tłuszcz	1,4 g

 - a) Jaka jest wartość energetyczna 25-gramowej porcji ryżu?
 - b) Jaką część masy 50 gramów ryżu stanowią razem białko, węglowodany i tłuszcz?
- 6 Ile muzycznych płyt kompaktowych po 25 zł każda można kupić za $(100^2 + 5^2)$ zł, a ile – za 25^3 zł? Oblicz najprostszym sposobem.
- 7 Przerysuj kwadrat. Zamiast  wpisz odpowiednie liczby, aby powstał kwadrat magiczny (aby suma liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i wzdłuż każdej przekątnej była taka sama).
- 8 Podaj wszystkie liczby:
 - a) całkowite, które są większe od $-4,5$ i jednocześnie mniejsze od $3,5$,
 - b) całkowite niedodatnie, które są większe od $-7,8$.

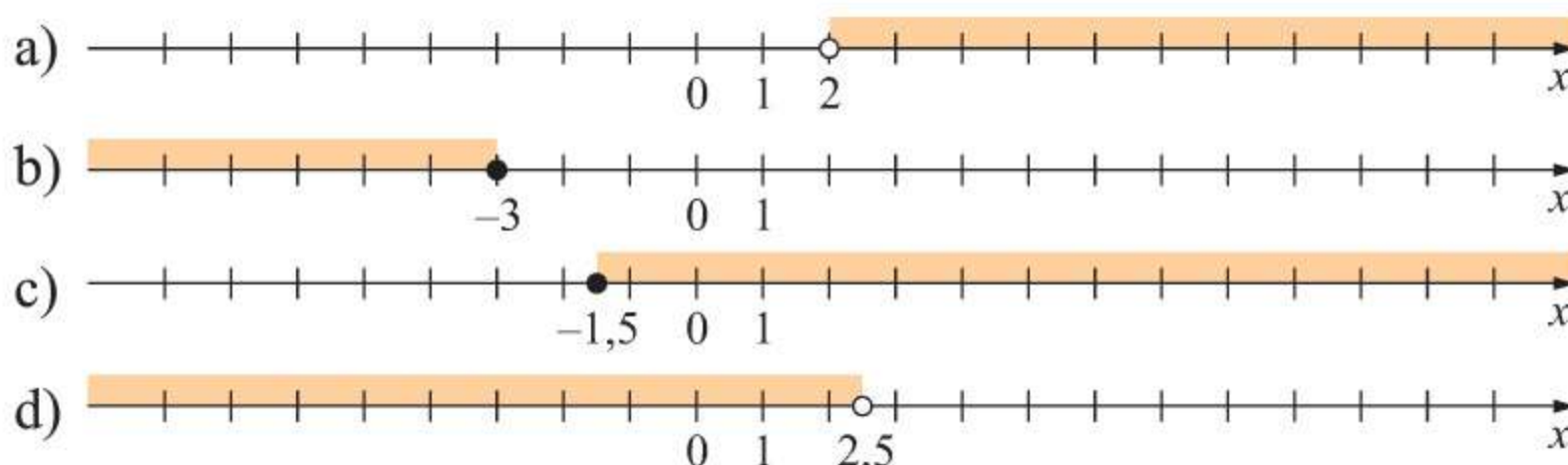


$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$
	$\frac{5}{12}$	
		$\frac{1}{6}$

9 Zaznacz na osi liczbowej liczby spełniające podany warunek.

- a) $x > 4$ b) $x \leq -2$ c) $x \geq -3\frac{1}{2}$ d) $x < 6$

10 Zapisz warunek opisujący zbiór liczb zaznaczony na osi liczbowej.



11 Temperatura w Tatrach spada wraz ze wzrostem wysokości średnio o 1°C na każde 200 m wysokości. Oblicz temperaturę na Kasprowym Wierchu (ok. 2000 m n.p.m.), gdy w Zakopanem (1000 m n.p.m.) są 2°C .



12 Przyjmijmy, że x jest daną liczbą, y jest liczbą przeciwną do x , c jest odwrotnością liczby x , a d jest odwrotnością liczby y . Oblicz $|x \cdot y + c : d|$, jeśli:

- a) $x = 5$, b) $x = -\frac{2}{3}$, c) $x = -1,5$.

13 Ile razy liczba a jest mniejsza od liczby b , jeżeli:

$$a = \left| (-0,5)^2 - \frac{4}{5} : \sqrt{0,64} \right|, \quad b = 1,8 \cdot 1\frac{1}{3} + \sqrt[3]{-0,001} \cdot 9?$$

14 Oblicz wartość wyrażenia $\left| \left(\frac{1}{2} \right)^3 - (1,5)^2 \cdot 4^2 \right| + 2^{-2} - \left| -3^2 \cdot 3^5 : 3^6 \right|$.

15 Oblicz.

- a) $|12 - 5|$ b) $|0,05 - 0,25|$ c) $|-4| \cdot |-3| - |-5| - |20|$
d) $\left| 1,5 - 1\frac{3}{4} \right|$ e) $-|100| : |-50| - |2|$ f) $|-120| : |-2| - |-3| \cdot |6| - |-7|$
g) $\frac{|115| - |-11|}{|4 - 5|} \cdot \frac{3}{26}$ h) $\frac{|-|-5| + 14|}{|-3| \cdot |2| - |-2|} \cdot \frac{|-3| \cdot 4}{|-|-6||}$
i) $-|4 - 5|^2 + |-3|^3$ j) $-|-|-5^2| + 2^5| + 10$

16 Podaj, jaki czynnik należy wpisać zamiast $\square$, aby warunek był prawdziwy.

a) $|3| \cdot |-1| \cdot (-2) \cdot \square < 0$

b) $|4| \cdot |-8| \cdot \square < 0$

c) $-|-3| \cdot (-1) \cdot |-2| \cdot \square > 0$

d) $-(-1) \cdot |-3| \cdot |-6| \cdot \square > 0$

e) $-|-4 \cdot (-2)| \cdot \square < 0$

f) $|-7 \cdot (-12)| \cdot |-97| \cdot \square < 0$

17 Oblicz.

a) $-|2^2| + |4^0|$

b) $-4^3 : |-2|^3 + 2^2$

c) $-3^2 : |-3| - 2 \cdot |-4|$

d) $(-|5 - 6| \cdot |7 - 8|)^2 - |-5|$

18 Przepisz poniższe wyrażenia do zeszytu i wstaw nawiasy w taki sposób, aby zachodziła równość.

a) $\frac{5}{6} + \frac{1}{3} : 2\frac{2}{3} - 1,75 = 1\frac{3}{11}$

b) $1,5 - 3 \cdot 1\frac{1}{3} : 2,5 = -1$

c) $1,2 - 2,5 - 2,3 - 1,25 = -2,35$

d) $2\frac{1}{3} + 1,75 : 1,5 - 2\frac{2}{3} = -3,5$

19 Wisła ma 1047 km długości, a Odra ok. 850 km.

a) Ile razy Wisła jest dłuższa od Odry? Wynik zaokrąglij do części dziesiątych.

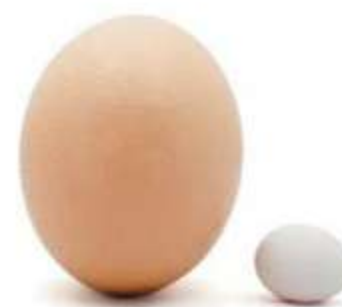
b) Jaką długość ma Wisła na poniższej mapie?



20 Uzasadnij, że ostatnią cyfrą wyrażenia:

a) $2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$ jest 4, b) $14^4 + 13^4 - 12^4$ jest 1.

21 Przeciętna masa kurzego jajka wynosi 5,4 dag, a strusiego jajka – 1,76 kg. Oszacuj, ile kurzych jajek ma masę strusiego jajka.



- 22 Podaj dwunastą, dwudziestą i trzydziątą pierwszą cyfrę rozwinięcia dziesiętnego liczby $0,157(236)$.

- 23 Bakterie rozmnażają się przez podział w ten sposób, że z jednej bakterii powstają dwie. Jedna bakteria jest zdolna do podziału co 20 minut. Ile bakterii powstanie z jednej w ciągu doby?



- 24 Znajdź rozwinięcia dziesiętne liczb. Hasło otrzymasz po wyeliminowaniu z ramki liter odpowiadających ułamkom, które mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone o okresie dwucyfrowym.

$$\begin{array}{llllll} A \rightarrow \frac{9}{11} & B \rightarrow \frac{5}{22} & E \rightarrow \frac{11}{12} & K \rightarrow \frac{145}{75} & N \rightarrow \frac{85}{66} & O \rightarrow \frac{79}{54} \\ R \rightarrow \frac{10}{7} & S \rightarrow \frac{12}{81} & T \rightarrow \frac{7}{55} & & & \end{array}$$

A	B	O	N	K	R	E	T	S
---	---	---	---	---	---	---	---	---

- 25 Lądy na Ziemi zajmują ok. $1,5 \cdot 10^8 \text{ km}^2$. Powierzchnia mórz i oceanów na Ziemi wynosi $360\,000\,000 \text{ km}^2$. Jaką część powierzchni mórz i oceanów na Ziemi stanowią lądy? Wynik zaokrąglaj do jednego miejsca po przecinku.



- 26 Krew człowieka ma objętość od $3,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ do $6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Ile to litrów?
- 27 Ile razy średnica naczyń włosowatych, równa $5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, jest mniejsza od odległości do najbliższych gwiazd, wynoszącej $4 \cdot 10^{16} \text{ m}$?
- 28 Oblicz obwód kwadratu o polu równym:
 a) $6,4 \cdot 10^{-5} \text{ km}^2$, b) $2,5 \cdot 10^{-1} \text{ m}^2$, c) $1,6 \cdot 10^7 \text{ mm}^2$.
- 29 Bok kwadratu o długości $6 \cdot 10^{-1} \text{ km}$ wydłużono o $4 \cdot 10^{-2} \text{ km}$. Zapisz (w metrach) obwód powiększonego kwadratu za pomocą notacji wykładniczej.

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–3. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

1. Największą wartość ma wyrażenie
 A. $0,1 : 100$ B. $0,1 : 0,01 \cdot 1000$
 C. $10\,000 \cdot 100 : 10$ D. $10 \cdot 0,001 \cdot 100$
2. Zbiór wszystkich liczb całkowitych, których odległość (na osi liczbowej) od zera jest nie większa od 3, to
 A. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2, 3\}$
 C. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
3. Różnica objętości dwóch kremów o pojemnościach 400 ml i $3 \cdot 10^{-1} \text{ dm}^3$ jest równa
 A. 1 dm^3 B. 10^{-1} l C. 10^{-2} dm^3 D. 10^{-2} l

W zadaniach 4.–6. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

4. Która masa spośród 0,102 kg, 0,00102 t, 102 g i 10,2 dag jest największa?
 A. 0,102 kg B. 0,00102 t C. 102 g D. 10,2 dag
5. Która zależność została zapisana poprawnie?
 A. $-5^4 = (-5)^4$ B. $4^8 = 2^{10}$
 C. $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^2 = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^3$ D. $(-0,25)^4 > \left(-\frac{1}{2}\right)^8$
6. Jaka jest cyfra jedności liczby $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$?
 A. 5 B. 2 C. 4 D. 3
7. Dane są liczby całkowite **ujemne** x i y , takie że $x \geq -5$ i $y > -4$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Różnica $y - x$ jest zawsze dodatnia.	P	F
Iloczyn $y \cdot x$ jest zawsze dodatni.	P	F
Suma $y + x$ może być równa zero.	P	F
Iloraz $x : y$ może być ujemny.	P	F

- 8 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczba $5,995 \cdot 10^4$ zaokrąglona do setek jest równa $6 \cdot 10^4$.	P	F
Liczba $1,45 \cdot 10^5$ zaokrąglona do dziesiątek tysięcy jest równa $1,5 \cdot 10^5$.	P	F
Iloczyn liczb $2,5 \cdot 10^3$ i $3 \cdot 10^2$ zaokrąglony do setek tysięcy to $7,5 \cdot 10^5$.	P	F
Różnica $5,2 \cdot 10^3 - 4,55 \cdot 10^2$ zaokrąglona do setek jest równa $4,8 \cdot 10^3$.	P	F

- 9 Dane są dwie liczby: $k = \left[\frac{1}{3} \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot (-4) \right] : (-1)$ i $l = -\frac{1}{4} \cdot [12 - (-4)]$.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Liczba l jest o **A** / **B** większa od liczby k . **A.** $1\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$

Iloraz liczby l przez k jest o **C** / **D** większy od liczby l . **C.** $3\frac{3}{4}$ **D.** $4\frac{3}{4}$

- 10 Dane są trzy liczby: $x = |-4 \cdot \sqrt[3]{64}| \cdot (-0,25)^2 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{9}$, $y = -2^2 \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2} \right)^3$,

$z = (-1,6)^0 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \sqrt{2\frac{1}{4}}$. Czy prawdziwa jest zależność: $y < x < z$? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	liczby x i y są równe.
			2.	liczba y jest o 4 mniejsza od liczby x , a liczba x jest o $\frac{3}{4}$ mniejsza od liczby z .
B.	Nie,		3.	tylko liczba y jest ujemna, a liczba x jest mniejsza od liczby z o $\frac{1}{4}$.

- 11 Pani Grażyna kupiła w promocji 3 butelki płynu do płukania bielizny za 24,60 zł i 4 pudełka proszku do prania za 36,80 zł. Sąsiadka odkupiła od niej 2 butelki płynu i 2 pudełka proszku. Zapisz odpowiednie wyrażenie arytmetyczne i oblicz, ile pieniędzy otrzymała pani Grażyna od sąsiadki.
- 12 Grubość papieru używanego do produkcji książek wynosi 0,1 mm. Jaką grubość miałyby gigantyczna książka zawierająca 10^9 kartek, wykonana z tego papieru? Wynik podaj w metrach za pomocą notacji wykładniczej. Zapisz obliczenia.
- 13 Podaj, jaką liczbę należy wpisać zamiast gwiazdki. Odpowiedź uzasadnij.
- $$\frac{*}{8} < \frac{6}{*} < \frac{*}{5}$$
- 14 Uzasadnij, że ostatnią cyfrą iloczynu $38^4 \cdot 29^3$ jest 4.

3. Działania na pierwiastkach

- 1 Oblicz pole prostokąta o wymiarach:
a) $\sqrt{3} \text{ dm} \times \sqrt{12} \text{ dm}$, b) $\sqrt[3]{2} \text{ m} \times \sqrt[3]{32} \text{ m}$.
- 2 Pole prostokąta jest równe $\sqrt{75} \text{ cm}^2$. Jego jeden bok ma długość 5 cm. Czy długość drugiego boku prostokąta jest większa, czy mniejsza od 1,5 cm?
- 3 Uporządkuj liczby malejąco.
 $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, $\sqrt[3]{8}$, $-\sqrt{64}$, $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$, $-\sqrt{0,04}$, $\sqrt[3]{-0,125}$
- 4 Jaką liczbę należy wpisać zamiast gwiazdki?
a) $0,8 = \sqrt{*}$ b) $\sqrt{*} = \frac{3}{8}$ c) $-\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{*}$
- 5 Trójkąt i kwadrat mają równe pola. Podstawa trójkąta ma długość 8 cm, a wysokość opuszczona na ten bok 4 cm. Oblicz długość boku kwadratu.
- 6 Prostopadłościan o wymiarach $2 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ oraz sześcián mają takie same objętości. Oblicz długość krawędzi sześciánu.
- 7 Co jest większe: wartość wyrażenia $a = \left[\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \right)^4 + \left(\sqrt{\frac{8}{9}} \right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{25}} \right] \cdot \sqrt[3]{125}$ czy wartość wyrażenia $b = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} : \sqrt[3]{2\frac{1}{4}} + (\sqrt[3]{2,5})^3 - \sqrt[3]{1000}$?
- 8 Znajdź liczbę, której 25% jest równe wartości wyrażenia:
 $\sqrt{0,04 \cdot 121} + \sqrt[3]{1000 \cdot 0,001}$.
- 9 Oblicz wartość wyrażenia.
a) $\sqrt{8^2 \cdot 5^2 - 8^2 \cdot 4^2}$ b) $\sqrt{10^2 \cdot 3^2 + 10^2 \cdot 4^2}$
c) $\sqrt{33^2 + 44^2}$ d) $\sqrt{35^2 - 28^2}$
- 10 Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci.
a) $\sqrt{32} + \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{162}$ b) $\sqrt{6\frac{1}{4}} + \sqrt{1\frac{7}{9}} - \sqrt{\frac{1}{9}} - 2\sqrt{2\frac{1}{4}}$
- 11 Oblicz podwojoną sumę liczb:
a) $\sqrt{20}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{45}$, b) $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{128}$, $\sqrt[3]{16}$.

- 12** Porównaj liczby. Użyj odpowiedniego znaku: $>$, $<$, $=$.
- a) $4\sqrt{27}$ i $6\sqrt{12}$ b) $9\sqrt{45}$ i $7\sqrt{80}$
 c) $5\sqrt[3]{16}$ i $3\sqrt[3]{54}$ d) $4\sqrt[3]{375}$ i $5\sqrt[3]{192}$
- 13** Jaką liczbę należy wpisać zamiast gwiazdki, aby równość była prawdziwa?
- a) $\sqrt{90} = *\sqrt{10}$ b) $\sqrt[3]{*} = 3\sqrt[3]{5}$
 c) $*\sqrt{2} = \sqrt{98}$ d) $*\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{128}$
 e) $4\sqrt{12} = *\sqrt{3}$ f) $*\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{16}$
 g) $\sqrt{75} - \sqrt{108} = *\sqrt{3}$ h) $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{*} = -\sqrt[3]{5}$
- 14** Oblicz iloczyn:
- a) różnicy $\sqrt{54} - \sqrt{24}$ oraz $\sqrt{2}$, b) sumy $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{3}$ oraz $\sqrt[3]{9}$.
- 15** Oblicz iloraz:
- a) różnicy $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{648}$ przez $\sqrt[3]{24}$, b) sumy $5\sqrt{28} - 3\sqrt{7} + \sqrt{63}$ przez $\sqrt{7}$.
- 16** Która liczba jest większa:
- a) $4\sqrt{3}$ czy $3\sqrt{4}$, b) $2\sqrt[3]{16}$ czy $4\sqrt[3]{2}$?
- 17** Oblicz.
- a) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (-3\sqrt{\frac{2}{3}} + 4\sqrt{0,375})$ b) $(4\sqrt[3]{72} - 6\sqrt[3]{1125}) \cdot 2\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$
- 18** Między jakimi kolejnymi liczbami całkowitymi (na osi liczbowej) znajduje się podana liczba?
- a) $2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{56}$ c) $\sqrt[3]{9}$ d) $2\sqrt[3]{80}$
- 19** Sprawdź, czy $\sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$ równa się $1 + 2\sqrt{2}$.
- 20** Podaj przykłady punktów w układzie współrzędnych na płaszczyźnie, których współrzędne są liczbami całkowitymi i spełniają warunek:
- a) pierwsza współrzędna jest większa od $\sqrt{2}$, a druga mniejsza od $\sqrt{7}$,
 b) pierwsza współrzędna jest mniejsza od $-\sqrt{10}$, a druga jest równa $\sqrt[3]{8}$,
 c) pierwsza współrzędna jest nie mniejsza od $\sqrt[3]{64}$, a druga jest liczbą ujemną,
 d) odcięta jest mniejsza od $\sqrt[3]{-28}$, a rzędna jest większa od $\sqrt[3]{126}$.

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–4. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Które wyrażenia mają jednakowe wartości?
- A. $\sqrt{16+9}$ i $\sqrt{16} + \sqrt{9}$ B. $\sqrt{16-9}$ i $\sqrt{16} - \sqrt{9}$
C. $\sqrt{16 \cdot 9}$ i $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$ D. $\sqrt{16:9}$ i $\sqrt{9} : \sqrt{16}$
- 2 Wynikiem którego działania jest liczba 3?
- A. $\sqrt[3]{0,27} : \sqrt[3]{0,1}$ B. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}$ C. $\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2}$ D. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{6}$
- 3 Ile jest równe 20% wartości wyrażenia $\frac{\sqrt{18} : \sqrt{2}}{\sqrt[3]{8,1} : 0,3}$?
- A. 0,6 B. 3 C. 6 D. 0,2
- 4 Która z podanych liczb jest większa niż 10 i mniejsza niż 11?
- A. $\sqrt[3]{1000}$ B. $3\sqrt{20}$ C. $2\sqrt{30}$ D. $\sqrt{121}$

W zadaniach 5.–9. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 5 Wartością wyrażenia $|\sqrt{8}(\sqrt{12} - \sqrt{27})|$ jest
- A. $-6\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{6}$ C. $6\sqrt{2}$ D. $12\sqrt{8}$
- 6 Wartością wyrażenia $(2\sqrt{15} \cdot \sqrt{30}) : \sqrt{2}$ jest
- A. 30 B. $\sqrt{450}$ C. 15 D. $30\sqrt{2}$
- 7 Zamiast gwiazdki w równości $\sqrt{18} + \sqrt{8} - 2\sqrt{*} = -3\sqrt{2}$ trzeba wstawić liczbę
- A. 32 B. 64 C. 2 D. 16
- 8 Największą spośród liczb $3\sqrt{5}$, $5\sqrt{6}$, $2\sqrt{10}$, $8\sqrt{2}$ jest
- A. $2\sqrt{10}$ B. $5\sqrt{6}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $8\sqrt{2}$
- 9 Punkt A o współrzędnych całkowitych leży w układzie współrzędnych na płaszczyźnie. Pierwsza współrzędna tego punktu jest nie większa od $\sqrt{17}$, a druga nie mniejsza od $-\sqrt[3]{27}$. Punkt A może mieć współrzędne
- A. (5, -3) B. (4, -4) C. (4, -2) D. (6, -1)

- 10 Dane są dwie liczby: $k = (\sqrt[3]{-4} \cdot \sqrt[3]{16}) + (\sqrt{8})^2$ oraz $l = (\sqrt[3]{10})^3 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$. Czy liczba l stanowi czwartą część liczby k ? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	liczba l stanowi $\frac{1}{12}$ liczby k .
B.	Nie,		2.	liczba k jest 4 razy większa od liczby l .
			3.	liczba l jest o 3 większa od liczby k .

- 11 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczba $2\sqrt{3}$ jest większa niż $3\sqrt{2}$.	P	F
Liczba $-(\sqrt{21})^2$ jest o 1 większa od $-(\sqrt[3]{20})^3$.	P	F
Pierwiastek kwadratowy z 96 leży na osi liczbowej między liczbami 9 i 10.	P	F
Liczba $\sqrt{110}$ jest większa od 11.	P	F

- 12 Dane jest przybliżenie $\sqrt{2} \approx 1,41$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

$\sqrt{8} \approx 2 \cdot 1,41$	P	F	$\sqrt{200} \approx 28,2$	P	F
$3\sqrt{2} < \sqrt[3]{64}$	P	F	$-\sqrt[3]{8} > -2\sqrt{2}$	P	F

- 13 Czy prawdziwa jest zależność $3\sqrt{6} < 6\sqrt{3}$? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$3 \cdot 6 = 6 \cdot 3$.
B.	Nie,		2.	$\sqrt{54} < \sqrt{108}$.

- 14 Dane są dwie liczby: $x = -\sqrt{192} + \sqrt{432}$ oraz $y = \sqrt{27} - \sqrt{3}$. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Iloczyn liczb x i y jest równy **A** / **B**. **A.** -120 **B.** 24

Mniejszą spośród danych liczb jest liczba **C** / **D**. **C.** x **D.** y

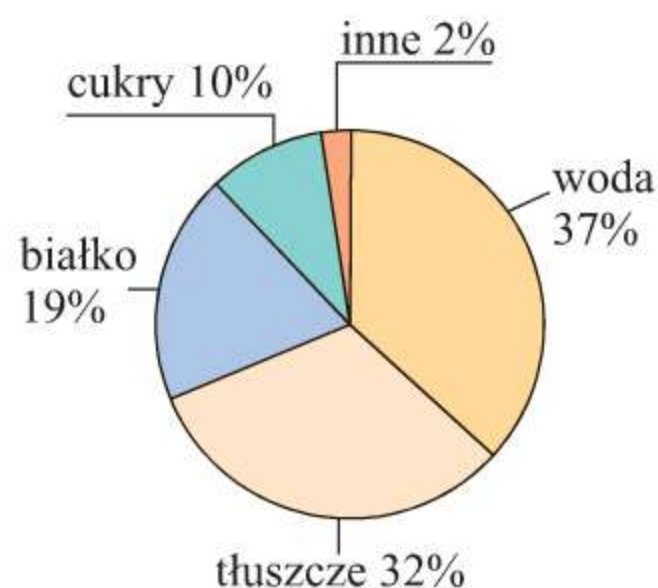
- 15 Ile razy objętość prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości: $\sqrt[3]{3 \cdot 10^3}$ cm, $\sqrt[3]{1,5 \cdot 10^6}$ cm, $\sqrt[3]{6}$ cm, jest mniejsza od objętości sześcianu o krawędzi długości $\sqrt[3]{9 \cdot 10^4}$ cm? Zapisz obliczenia.

- 16 Między jakimi kolejnymi liczbami całkowitymi (na osi liczbowej) znajduje się liczba $-2\sqrt{5}$? Odpowiedź uzasadnij.

4. Obliczenia procentowe

- 1 Zmieszano 2,5 kg cukierków krówek i 10 kg śliwek w czekoladzie. Jaki procent mieszanki stanowią krówki, a jaki – śliwki w czekoladzie?
- 2 Książka liczy 500 stron. Basia przeczytała jedną czwartą tej książki.
 - a) Jaki procent książki przeczytała Basia?
 - b) Ile stron pozostało do przeczytania?
 - c) Jaka część książki pozostała do przeczytania?
 - d) Jaki procent stron nieprzeczytanych stanowią strony przeczytane?
- 3 Sprawdź, która liczba jest większa:
 - a) 30% liczby 90 czy 90% liczby 30,
 - b) 5% liczby 120 czy 120% liczby 5.

- 4 Na diagramie przedstawiono procentową zawartość składników kotleta schabowego. Skorzystaj z diagramu i oblicz, ile gramów tłuszczu zawiera taki kotlet, ważący 13,5 dag.



- 5 Średnie zasolenie Morza Czerwonego wynosi 4%, Morza Martwego 26%, a Morza Śródziemnego 3,7%. Ile kilogramów soli zawiera woda o masie 200 kg zaczerpnięta z każdego morza?
- 6 W świeżej bułce jest 36% wody. Ile gramów wody zawiera bułka o masie 5 dag?

- 7 Dienne zapotrzebowanie organizmu ludzkiego na białko wynosi średnio ok. 80 g. W tabeli przedstawiono procentową zawartość białka w wybranych produktach.

Wojtek zjadł na śniadanie 100 g chleba, 10 g masła, 120 g pomidorów, 65 g żółtego sera i wypił 200 g mleka. Skorzystaj z tabeli i oblicz, ile procent dziennego zapotrzebowania na białko zapewniło Wojtkowi to śniadanie. Wynik podaj w zaokrągleniu do 1%.

Nazwa produktu	Zawartość białka [%]
chleb	8
masło	0,8
mleko	3
żółty ser	27
pomidory	1

- 8 W sklepie były dwa rodzaje mieszanki czekoladowej. W pierwszej mieszance zawartość cukierków Bajecznych wynosiła 20%, a w drugiej – 60%. Karolina kupiła 70 dag pierwszej mieszanki i 30 dag drugiej. Ile procent cukierków Bajecznych zawierała mieszanka Karoliny?

- 9 W tabeli podano wartości energetyczne 100-gramowej porcji śmietany 22% i śmietany 12% oraz masy niektórych ich składników.

	Śmietana 22%	Śmietana 12%
Wartość energetyczna	921 kJ (220 kcal)	568 kJ (136 kcal)
Białko	2,2 g	2,9 g
Węglowodany	3,4 g	4 g
Tłuszcz	22 g	12 g

- a) Ile procent tłuszczu jest w śmietanie 22% o masie 50 g, a ile procent – w śmietanie 12% o masie 100 g?
 b) Jaka jest wartość energetyczna 75 g śmietany 22% i 50 g śmietany 12%?
 c) Jaka jest zawartość procentowa białka oraz węglowodanów w 200 g każdej śmietany?

- 10 W 16 kg mieszanki orzechów stosunek masy orzechów nerkowca do masy orzechów pistacjowych jest równy 3 : 5. Których orzechów jest więcej i o ile kilogramów? Jaki procent mieszanki stanowiłyby orzechy pistacjowe, gdyby z mieszanki usunięto 6 kg tych orzechów?



- 11 Miesięczne wynagrodzenie za pracę bez potrąceń (brutto) wyniosło 2980 zł. Podatek od tej kwoty jest równy 18%. Oblicz wynagrodzenie po odliczeniu podatku. Wynik zaokrąglaj do pełnych złotych.

- 12 Wartość akcji pewnej spółki giełdowej w ciągu jednej sesji spadła o 5,5%. Przed sesją akcja miała wartość 28 zł. Jaka jest wartość tej akcji po zakończeniu sesji?



- 13 Pan Jan wpłacił do banku 10 000 zł na lokatę terminową oprocentowaną 1,2% w stosunku rocznym. Podatek od zysku z oszczędności wynosi 20%. Ile złotych uzyska pan Jan z tej kwoty po upływie roku?



- 14 Z 2 ton rudy o zawartości 37,5% żelaza usunięto 600 kg domieszek o zawartości 15% żelaza. Ile procent żelaza znajduje się w tak wzbogaconej rudzie?

- 15 Francuski ser pleśniowy kosztował 75 zł za 1 kg. Ile zapłacono za 20 dag tego sera po 20-procentowej obniżce?

- 16 W pierwszym sklepie bluzka kosztowała 50 zł, w drugim 60 zł. O ile procent cena bluzki w drugim sklepie była wyższa od ceny bluzki w pierwszym sklepie?



- 17 Ceny płyty, równą 40 zł, podwyższono o 5%, a następnie obniżono o 5%. Jak zmieniła się cena płyty po tych operacjach?
- 18 Która obniżka ceny towaru jest większa: najpierw o 15%, a potem o 25% czy od razu o 40%?
- 19 Pani Magda kupiła 4 kg warzyw oraz owoce. Warzywa stanowiły 80% masy całych zakupów. Ile ważyły owoce?
- 20 Cena pralki z VAT-em 23% jest równa 1259,52 zł. Ile wynosi cena netto tej pralki?
- 21 Cena hurtowa pudełka ptasiego mleczka wynosi 9 zł. Jego cena detaliczna jest o 25% wyższa. Ile kosztuje pudełko ptasiego mleczka w sklepie?
- 22 Do sklepu spożywczego dostarczono soki warzywne i owocowe w kartonach o pojemności 1 litra. Część tych soków ustawiono na półkach sklepowych, a resztę schowano do magazynu. Na półkach stało 50 soków owocowych, które stanowiły 12,5% wszystkich dostarczonych soków (owocowych i warzywnych razem), oraz 20% soków warzywnych, co stanowiło 30 kartonów tych soków. Ile soków każdego rodzaju przywieziono do sklepu?
- 23 Pierwsza liczba stanowi 25% drugiej liczby. Ile procent pierwszej liczby stanowi druga liczba?
-  24 Do czyszczenia wyrobów miedzianych i mosiężnych sporządza się mieszaninę z 50 g amoniaku, 20 g kredy i 100 g wody. Oblicz procentowy skład tej mieszaniny. Wyniki podaj w zaokrągleniu do 1%.
- 25 Roztwór wodny soli o masie 3,5 kg zawiera 21 dag soli. Oblicz stężenie procentowe tego roztworu.
- 26 Babcia wsypała dwadzieścia łyżeczek cukru do 300 g wody. Przyjmij, że 1 łyżeczka cukru odpowiada 5 g cukru, a następnie oblicz, iluprocentowy syrop otrzymała babcia.



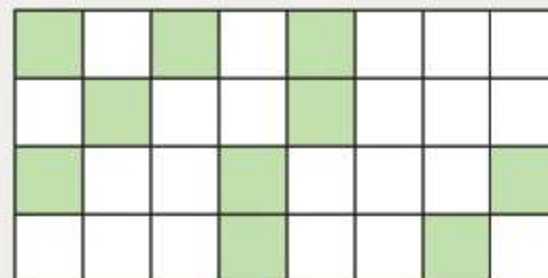
Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–3. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

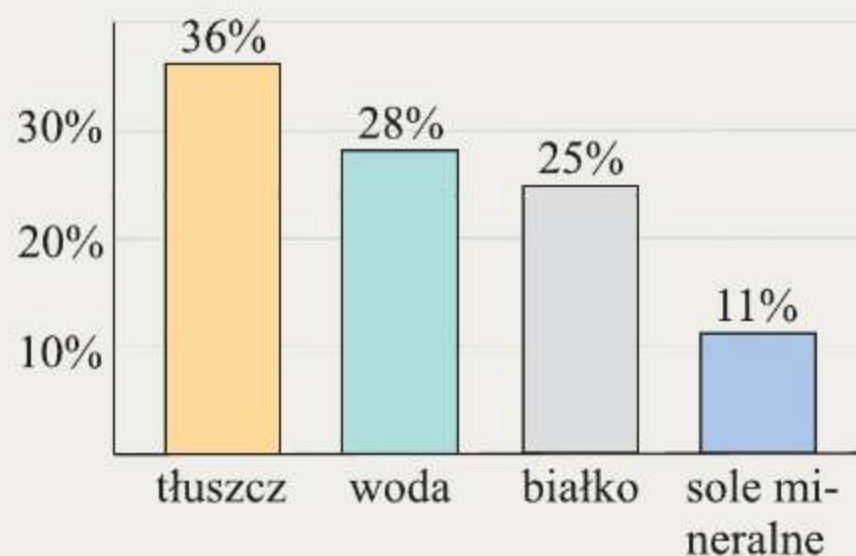
1 Jaki procent figury nie został zamalowany?

- A. 10% B. $31\frac{1}{4}\%$
C. 22% D. $68\frac{3}{4}\%$



2 Na diagramie przedstawiono procentową zawartość składników w szynce wieprzowej. Ile kilogramów wody zawiera pięciokilogramowa szynka?

- A. 1 kg B. 1,4 kg
C. 2 kg D. 1,7 kg



3 Przechowywane ziemniaki tracą w ciągu zimy 10,5% swojej masy. Ile ziemniaków trzeba zgromadzić jesienią, aby na wiosnę mieć ich $3,58 \cdot 10^4$ kg?

- A. 4 t B. 400 kg C. 40 000 dag D. 40 t

W zadaniach 4.–6. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

4 20% z 10% liczby 640 to

- A. 12,8 B. 11,5 C. 10,8 D. 21,8

5 Wartość akcji pewnej spółki giełdowej wzrosła o 2,2% i wynosiła 76,65 zł. Cena tej akcji przed wzrostem była równa

- A. 72 zł B. 74 zł C. 75 zł D. 73,50 zł

6 Wysokość VAT-u na dany towar zmieniono z 8% na 23% i wówczas cena tego towaru wzrosła o 78 zł. Cena netto tego towaru wynosi

- A. 250 zł B. 205 zł C. 520 zł D. 502 zł

7 Liczba x stanowi 75% liczby y ($y > 0$). Czy liczba y jest większa od połowy liczby x ? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$x = 0,75y$, czyli $y = 0,25x$, więc $y < \frac{1}{2}x$.
B.	Nie,		2.	$y = \frac{4}{3}x$, więc $y > \frac{1}{2}x$.

- 8 W klasie ósmej jest 6 chłopców i 18 dziewcząt. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Chłopcy stanowią 25% uczniów tej klasy.	P	F
Dziewcząt jest o 200% więcej niż chłopców.	P	F
Stosunek procentowy liczby chłopców do liczby dziewcząt wynosi $33\frac{1}{3}\%$.	P	F
Chłopców jest mniej więcej o 33% mniej niż dziewcząt.	P	F

- 9 Cenę laptopa obniżono o 30%, a następnie jeszcze o kolejne 30%. Laptop po obu obniżkach kosztuje 1715 zł. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Cena laptopa przed tymi obniżkami wynosiła **A / B**.

A. 3200 zł **B.** 3500 zł

Pierwsza obniżka była **C / D**.

C. o 315 zł większa od drugiej

D. taka sama jak druga, bo wynosiła tyle samo procent



- 10 Cenę towaru najpierw podwyższono o 20%, a potem obniżono o 20%. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Cena towaru nie uległa zmianie.	P	F
Po podwyżce i obniżce cena towaru jest wyższa od ceny początkowej.	P	F
Końcowa cena towaru stanowi 96% ceny początkowej.	P	F
Cena towaru jest taka sama, jaka byłaby, gdyby najpierw obniżono cenę towaru o 20%, a potem podwyższono ją o 20%.	P	F

- 11 Ewelina zjadła dwie brzoskwinie z dziesięciu i cztery morele z czternastu. Jaki procent owoców został zjedzony? Zapisz obliczenia.
- 12 Zmieszano 200 g roztworu cukru o stężeniu 20% i 400 g roztworu cukru o stężeniu 40%. Jakie stężenie procentowe ma otrzymana mieszanina roztworów? Zapisz obliczenia.
- 13 Pensję pracownika podwyższono najpierw o 12%, a potem jeszcze o 18%. Czy korzystniejsza byłaby jednorazowa podwyżka o 30%? Odpowiedź uzasadnij.

Przypomnij sobie*

- mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian (s. 71)
- mnożenie sum algebraicznych (s. 74)
- równanie tożsamościowe (s. 79)
- równanie sprzeczne (s. 79)

* Wyjaśnienia powyższych terminów znajdziesz w tym podręczniku na podanych stronach.

Jednomian to liczba, litera lub dowolny iloczyn czynników liczbowych i literowych, np. -5 , x , $a^2 \cdot 4 \cdot bc$, x^3y^2z , $\sqrt{5}ab$.

Jednomian uporządkowany to jednomian, którego pierwszym czynnikiem jest liczba, a następnymi czynnikami są litery występujące w porządku alfabetycznym, np. $3aby$, $-4a^2b^2c$.

Współczynnik liczbowy jednomianu to liczba występująca na początku uporządkowanego jednomianu, np. 6 jest współczynnikiem liczbowym jednomianu $6x^3y^2$.

Wyrażenie algebraiczne to zapis zbudowany z liczb, liter i działań arytmetycznych. **Nazwa wyrażenia algebraicznego** pochodzi od nazwy ostatniego wykonywanego działania wyznaczonego zgodnie z regułami kolejności wykonywania działań.

Przykład

$2a + b^2 + cd$ – suma, $c^2 - 3ab$ – różnica (lub suma, bo $c^2 - 3ab = c^2 + (-3ab)$),
 $\frac{a+b}{a-b}$ – iloraz, $0,3(c-d)h$ – iloczyn, $(a-b)^2$ – kwadrat różnicy.

Wartość liczbową wyrażenia algebraicznego to wartość otrzymana po podstawieniu liczb na miejsce liter w wyrażeniu i po wykonaniu wskazanych działań.

Przykład

Wartość liczbową wyrażenia $x^2 - y$ dla $x = 2$ i $y = -1$ wynosi: $2^2 - (-1) = 4 + 1 = 5$.

Suma algebraiczna to suma jednomianów, np. $2,6a + ab$, $3,4 - 8x^2 - yz + 9c$.

Wyrazy podobne (jednomiany podobne) to jednomiany identyczne lub takie, które różnią się co najwyżej współczynnikiem liczbowym, np. a^2b , $\frac{1}{3}ba^2$, $-0,1a^2b$, $2,7ba^2$.

Wyrazy sumy algebraicznej to składniki sumy algebraicznej, np. wyrazami sumy $2a + 4c - 5b^2$ są: $2a$, $4c$, $-5b^2$.

Redukcja wyrazów podobnych to przekształcenie sumy algebraicznej polegające na zastąpieniu kilku wyrazów podobnych jednym wyrazem, np.

$$5a - 7a - 2b^2 - 3a + 4b^2 = (5a - 7a - 3a) + (-2b^2 + 4b^2) = -5a + 2b^2.$$

Wylączanie wspólnego czynnika przed nawias to **zamiana sumy na iloczyn**, np.

a) $5a + 5 = 5 \cdot a + 5 \cdot 1 = 5 \cdot (a + 1) = 5(a + 1),$

b) $12n^2 - 30m = 6 \cdot 2n^2 - 6 \cdot 5m = 6(2n^2 - 5m).$

Równanie to dwa wyrażenia algebraiczne połączone znakiem $=$, np.

$$3x + 6 = 5x - 2, \quad ab - 4 = a^2 + b^2.$$

Równanie z jedną niewiadomą to równanie, w którym występuje tylko jedna niewiadoma (litera), np. $2x - 4 = 5$, $3a^3 - 2a^2 = 1 + a$.

Równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą to równanie, w którym niewiadoma występuje w pierwszej potęgze, np. $x + 1 = 4$, $3m - 2 = 2m$, $a - 10 = 12a$.

Pierwiastek równania (rozwiązanie równania) to liczba, która spełnia równanie, czyli po podstawieniu jej na miejsce niewiadomej otrzyma się równość.

Przykład

Liczba 4 jest pierwiastkiem równania $3x + 6 = 18$, bo $3 \cdot 4 + 6 = 18$.

Zbiór rozwiązań równania to zbiór wszystkich liczb spełniających równanie, np.

a) $x - 4 = 18$ – to równanie spełnia tylko liczba 22,

b) $-1 + x = x - 1$ – to równanie spełnia każda liczba,

c) $2x - 4 = 5 + 2x$ – tego równania nie spełnia żadna liczba.

Równania równoważne to równania, które mają ten sam zbiór rozwiązań, np.

$$x + 5 = 10 \text{ i } x - 5 = 0; \quad 3x - 2 = 4 \text{ i } 3x = 6; \quad (x + 2)^2 = x^2 \text{ i } x = -1.$$

Rozwiązywanie równań metodą równań równoważnych polega na przekształcaniu równania przez:

- dodawanie do obu stron równania tej samej liczby lub wyrażenia,
- odejmowanie od obu stron równania tej samej liczby lub wyrażenia,
- mnożenie lub dzielenie obu stron równania przez tę samą liczbę różną od zera.

$$3x - 5 = x + 7 \quad | +5$$

Do obu stron równania dodajemy 5.

$$3x - \cancel{5} + \cancel{5} = x + 7 + 5$$

$$3x = x + 12 \quad | -x$$

Od obu stron równania odejmujemy x .

$$3x - x = \cancel{x} + 12 - \cancel{x}$$

$$2x = 12 \quad | :2$$

Obie strony równania dzielimy przez 2.

$$x = 6$$

Stosunek dwóch wielkości to iloraz dwóch liczb lub dwóch wielkości, np.

a) stosunek liczb 12 i 6 jest równy $\frac{12}{6} = \frac{2}{1} = 2 : 1$,

b) stosunek długości odcinków AB i CD , takich że $|AB| = 5$ cm, $|CD| = 20$ cm, jest równy $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 1 : 4$.

Proporcja to równość dwóch stosunków $a : b = c : d$, która ma tę własność, że iloczyn wyrazów skrajnych $a \cdot d$ jest równy iloczynowi wyrazów środkowych $b \cdot c$, np. $2 : 3 = 11 : 16,5$, czyli $2 \cdot 16,5 = 3 \cdot 11$.

Na podstawie równości $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$ możemy zbudować cztery różne proporcje:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \quad \frac{3}{6} = \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{2} = \frac{6}{4} \quad \text{i} \quad \frac{6}{3} = \frac{4}{2}.$$

Stosowanie własności proporcji podczas rozwiązywania równań polega na przekształcaniu równania zgodnie z regułą: iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych, np.

$$\frac{3}{x} = \frac{-7}{x+5}, \quad x \neq 0, x \neq -5$$

$$3 \cdot (x+5) = -7 \cdot x$$

$$3x + 15 = -7x \quad | +7x - 15$$

$$3x + 7x = -15$$

$$10x = -15 \quad | : 10$$

$$x = -1,5$$

$-1,5 \neq 0$ i $-1,5 \neq -5$, więc liczba $-1,5$ jest rozwiązaniem równania.

Wielkości wprost proporcjonalne to dodatnie i zmieniające się wielkości, których iloraz jest stały. Ten stały iloraz nazywa się **współczynnikiem proporcjonalności**.

Przykład

Jeden kilogram cukru kosztuje 3,50 zł, dwa kilogramy kosztują 7 zł, trzy kilogramy – 10,50 zł, cztery – 14 zł. Koszt y cukru oraz liczba x kilogramów cukru są wielkościami wprost proporcjonalnymi, $\frac{y}{x} = 3,50$.

y – koszt [zł]	3,50	7,00	10,50	14,00
x – liczba kilogramów	1	2	3	4
$\frac{y}{x}$ – koszt przypadający na 1 kg	3,50	3,50	3,50	3,50

Koszt 1 kg cukru jest wielkością stałą równą w tym przykładzie 3,50 zł. Liczba 3,50 to współczynnik proporcjonalności.



1. Wyrażenia algebraiczne

- 1** Zapisz wyrażenie algebraiczne według podanego przepisu i doprowadź je do najprostszej postaci.
1. Pewną liczbę x pomnóż przez $\frac{3}{7}$.
 2. Od wyniku odejmij $\frac{3}{7}$.
 3. Pomnóż wszystko przez $\frac{7}{3}$.
- Jaką liczbą jest x , jeśli wartość otrzymanego wyrażenia wynosi:
- a) $(-3)^3$, b) $\sqrt{2}$, c) -1 ?
- 2** Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:
- a) sumę pięciu kolejnych liczb całkowitych, z których największa jest równa c ,
 - b) liczbę naturalną podzielną przez 3,
 - c) liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 5.
- 3** Odpowiedz na postawione pytanie. Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- a) Za x kg bananów zapłacono y zł. Jaka była cena 1 kg bananów?
 - b) Kupiono 2 kg truskawek po a zł za kilogram, 1 kg czereśni, droższych od truskawek o 2 zł za kilogram, oraz 1 kg wiśni, tańszych od czereśni o 1 zł za kilogram. Ile zapłacono za owoce?
 - c) Zosia kupiła 1 chleb za x zł oraz 10 bułek. Jedna bułka jest o 1,60 zł tańsza od bochenka chleba. Płaciła banknotem dwudziestozłotowym. Ile otrzymała reszty?
- 
- 4** Zapisz w postaci odpowiedniego wyrażenia algebraicznego liczbę trzycyfrową, której cyfrą dziesiątek jest x , cyfra jedności jest o 2 większa od cyfry dziesiątek, a cyfra setek jest o 3 mniejsza od cyfry jedności.
- 5** Zapisz w postaci odpowiedniego wyrażenia algebraicznego różnicę liczby trzycyfrowej oraz liczby, która powstanie w wyniku przestawienia cyfr setek i jedności liczby trzycyfrowej. Przez jakie liczby jest podzielna ta różnica?
- 6** W pewnej szkole we Francji lekcja trwa a minut, w szkole w Austrii – trwa o 5 minut krócej niż we Francji, a w Anglii – o 10 minut dłużej niż w Austrii.
- a) Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego czas trwania lekcji w szkołach w Austrii i Anglii.
 - b) Oblicz, ile minut trwają lekcje w poszczególnych krajach, jeśli stosunek czasu trwania lekcji w Anglii do czasu trwania lekcji w Polsce wynosi $\frac{4}{3}$.



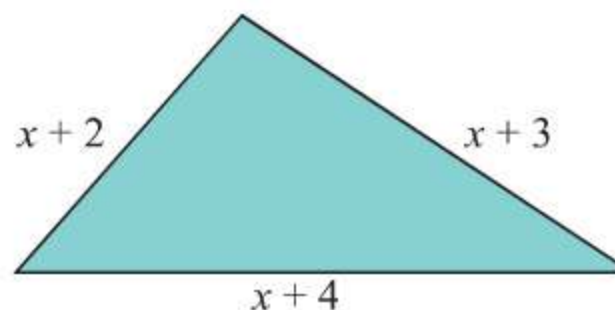
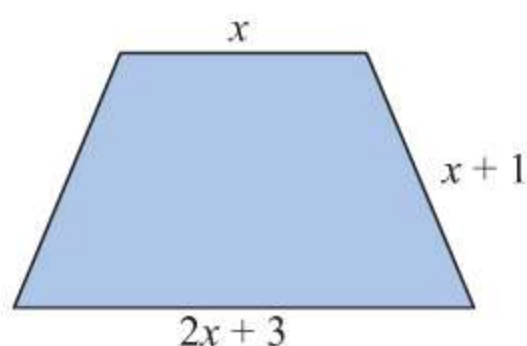
- 7 Zapisz w postaci odpowiedniego wyrażenia algebraicznego średnią arytmetyczną czterech kolejnych nieparzystych liczb naturalnych. Oblicz tę średnią, jeśli najmniejszą z tych liczb jest liczba 101.
- 8 Podczas lekcji klasę podzielono na cztery grupy dziewcząt i trzy grupy chłopców. Każda grupa dziewcząt liczyła x osób, a każda grupa chłopców była o jedną osobę liczniejsza.
- Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ile osób było w tej klasie.
 - Oblicz, ile było dziewcząt, a ilu – chłopców, jeśli dziewcząt było więcej niż chłopców, a liczba osób w klasie nie przekraczała trzydziestu pięciu.

- 9 Rowerzysta wyruszył w trasę i przez pierwsze t godzin jechał ze średnią prędkością v km/h. W ciągu kolejnych 60 minut jechał ze średnią prędkością mniejszą o 1 km/h. Jak długo jechał rowerzysta? Jaką drogę przejechał w tym czasie? Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne.



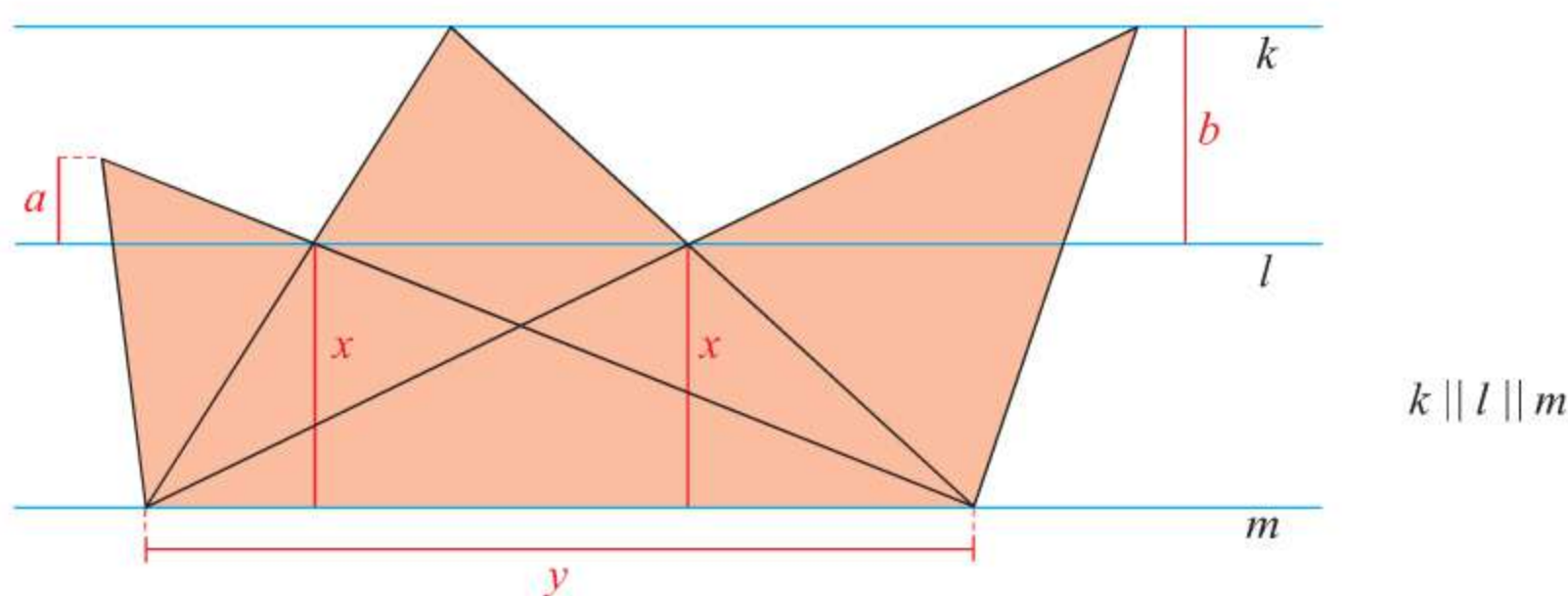
- 10 W rombie jedna przekątna ma długość x dm, druga jest o 20% dłuższa. Jakie jest pole tego rombu? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.

- 11 Na rysunku przedstawiono dwie figury: trapez równoramienny i trójkąt. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego różnicę obwodów tych figur. Rozważ różne przypadki, tak aby wartość wyrażenia była liczbą nieujemną. Jaką liczbą musi być wtedy x ?



- 12 Cenę odkurzacza wynoszącą a zł obniżono o c zł. Ile procent wyniosła obniżka? Ile zapłacono by za dwa odkurzacze po obniżce? Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne.
- 13 Roztwór wodny cukru o stężeniu 40% zawiera x kg cukru. Jaka jest masa tego roztworu? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.

- 14** Weronika pomyślała o jakiejś liczbie. Następnie utworzyła dwie nowe liczby: o 3 większą oraz o 3 mniejszą od pomyślanej. Pomnożyła te liczby przez siebie, dodała do nich 10, a następnie odjęła kwadrat pomyślanej liczby. Czy można odgadnąć, o jakiej liczbie pomyślała Weronika?
- 15** Oblicz iloczyny wyrażeń.
 a) $x+1$ i $x+1$ b) z^2-1 i z^2+1 c) $2x-2$ i $2x+2$ d) $3x-1$ i $3x-1$
- 16** Uzasadnij, że podwojona wartość liczbową wyrażenia $5a^2(2-b) - a^2b$ dla $a = -5^0$, $b = -\sqrt{16}$ jest liczbą całkowitą.
- 17** Do wyrażenia $2a(3x-2y)$ dodaj czterokrotność wyrażenia $x(-2a+1)$. Uzasadnij, że 40% wartości liczbowej otrzymanej sumy dla $a = -\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $x = \sqrt[3]{64}$, $y = (\sqrt{2})^2$ jest równe 8.
- 18** Od wyrażenia $6a^2$ odejmij wyrażenie $3(a+1)(a-1)$. Następnie oblicz wartość liczbową otrzymanej różnicy dla $a = \sqrt{3}$.
- 19** Przedstaw w prostszej postaci wyrażenie $(3a-b)^2 - (3a-b)(3a+b)$. Uzasadnij, że jego wartość liczbową dla $a = \left|-\frac{1}{3}\right|$, $b = \sqrt{36}$ jest liczbą parzystą.
- 20** Skorzystaj z rysunku i zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego pole zamalowanej figury, a następnie oblicz jego wartość dla: $y = 18$, $x = 6$, $a = 2$, $b = 6$.

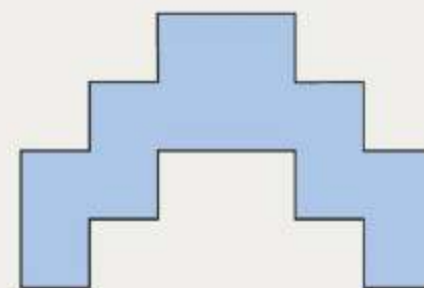


Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–5. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Wartość liczbową wyrażenia $\frac{(a^7 : a^4)^3 \cdot a^4}{a^3 \cdot a}$ dla $a = -|-1|$ jest równa
 A. 1 B. -9 C. 9 D. -1
- 2 Jeden kąt czworokąta ma miarę α , drugi jest od niego o 20° mniejszy, a trzeci dwa razy większy od drugiego. Czwarty kąt tego czworokąta ma miarę
 A. $420^\circ - 4\alpha$ B. $300^\circ - 4\alpha$ C. $240^\circ - 4\alpha$ D. $120^\circ - 4\alpha$
- 3 Na rysunku dłuższe boki figury mają długość a , a krótsze – długość b . Pole tej figury można wyrazić za pomocą wyrażenia
 A. $4ab + 4b^2$ B. $4a + 13b$
 C. $a^2 + b^2$ D. $a^2 + 3ab + b^2$
- 4 Pole trapezu o podstawach a i b ($a > 0$, $b > 0$) jest równe $2ab + 2b^2$. Wysokość tego trapezu wynosi
 A. $2b$ B. $2a$ C. $4b$ D. b
- 5 Rower kosztował a zł, a motorower b zł ($b > a$). Rower zdrożał o 15%, a motorower o 20%. Po podwyżkach motorower jest droższy od roweru o
 A. $(b + 20\%) - (a + 15\%)$ B. $1,2b - 1,15a$
 C. $0,20b - 0,15a$ D. $0,15a - 0,2b$



- 6 W prostokącie jeden bok ma długość $2x + y$ ($x > 0$, $y > 0$), a drugi jest od niego x razy dłuższy. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Obwód prostokąta jest równy A / B. A. $2(2x^2 + xy + 2x + y)$ B. $2(5x + 2y)$

Pole tego prostokąta wynosi C / D. C. $6x^2 + 5xy + y^2$ D. $[x(4x^2 + 4xy + y^2)]$

- 7 Kasia, Basia i Ania zbierają pamiątki z podróży – kolorowe magnesy. Kasia ma o 4 magnesy więcej niż Basia. Gdyby Ania miała o 5 magnesów więcej, to miałaby trzy razy tyle magnesów, ile ma Basia. Oznacz przez x liczbę magnesów Basi. Czy dziewczynki łącznie mają $(5x - 1)$ magnesów? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	Ania ma o $(2x - 1)$ magnesów więcej niż Kasia.
B.	Nie,		2.	Ania ma o $(2x - 5)$ magnesów więcej niż Basia.

- 8 Starszy brat Ewy ma a lat, jej młodsza siostra ma b lat. Wiek Ewy jest średnią arytmetyczną wieku rodzeństwa. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Ewa jest o $\frac{a+b}{2}$ lat młodsza od brata.	P	F
Trójka rodzeństwa ma razem $\frac{2a+2b}{3}$ lat.	P	F
Siostra Ewy jest od niej młodsza o $\frac{a-b}{2}$ lat.	P	F

W zadaniach 9.–10. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 9 Ile wynosi wartość wyrażenia $4a + 10b$ dla $a = -2^4$, $b = \sqrt[3]{64}$?
 A. 104 B. 48 C. -24 D. -104
- 10 Dany jest wzór $a = 2\frac{bc}{n^2}$, gdzie a, b, c, n są liczbami dodatnimi. W którym przypadku poprawnie wyznaczono zmienną n ?
 A. $n = \frac{bc}{a}$ B. $n = \sqrt{\frac{2bc}{a}}$ C. $n = \sqrt{2abc}$ D. $n = \sqrt{\frac{a}{2bc}}$
- 11 W liczbie dwucyfrowej cyfra jedności to x , a cyfra dziesiątek to y i $x > y$. Suma tych cyfr wynosi 15. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Każda liczba spełniająca warunki zadania jest podzielna przez 3.	P	F
Warunki zadania spełniają cztery liczby.	P	F
Każda liczba spełniająca warunki zadania jest podzielna przez 5.	P	F
Są dwie liczby spełniające warunki zadania.	P	F

- 12 Dane jest wyrażenie $2x^2 + (3-x)x - x(x+2) - (x-2)$. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby x wartość wyrażenia wynosi $|-2|$.
- 13 Dane są trzy wyrażenia: $K = 3x - (x+7)$, $L = 13 - (4x+1)$, $M = -8 - (-2x-3)$. Uzasadnij, że wartość wyrażenia $K + L + M$ jest równa 0 dla każdej wartości x .
- 14 Oblicz wartość liczbową wyrażenia $(a-6)(b+6)$, jeśli wiadomo, że $a-b = -5$ i $ab = 4$. Zapisz obliczenia.

2. Równania

1 Rozwiąż równanie.

a) $x - \frac{x-2}{2} = 0,5x - 1$

b) $4(y+5) - 10 = 2(2y+5)$

c) $\frac{x-5}{3} = \frac{2(x-6)}{5}$

d) $x(3x-2) - x(4+3x) = 18$

2 Dane jest równanie i jego pierwiastek. Wyznacz liczbę a .

a) $5y + (4 - 3y) = a; \quad y = 4$

b) $ab - (6 + b) = 0; \quad b = 6$

c) $4(10 - 5x) = 3(-3x - a); \quad x = 5$

d) $5(x+1) - (x-2) = a(x+3); \quad x = -4$

3 Rozwiąż równanie. Czy spełnia je liczba całkowita?

a) $(x-2)(x+2) + 4 = (x-2)^2$

b) $(x+1)^2 = 7 + (x-3)(x+3)$

c) $(x-1)^2 - (-1)^2 = (x-2)(2+x)$

d) $x - (x-3)(3+x) = 10 - (x-2)^2$

4 Sprawdź, czy podana liczba spełnia równanie.

a) $3x^3 - 12x^4 = 15; \quad -1$

b) $2x^2 - x(x+4) = -4\sqrt{3} + x^2; \quad \sqrt{3}$

5 Z podanego wzoru wyznacz wskazane zmienne. Przyjmij, że wszystkie zmienne są liczbami dodatnimi.

a) $P = 2\pi r(r+H); \quad H$

b) $P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2; \quad d_1$

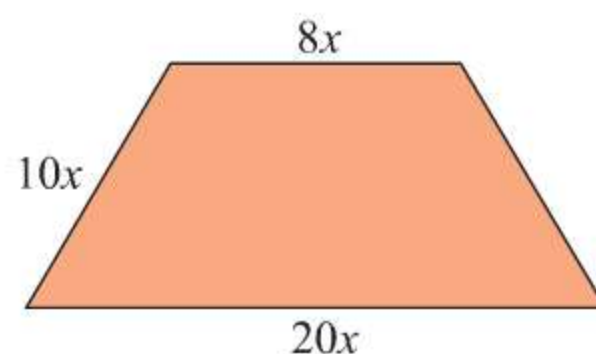
c) $V = a^3; \quad a$

d) $y = ax + b; \quad a, b$

e) $V = \pi r^2 H; \quad r, H$

f) $a = \frac{-ax+b}{5}; \quad a, x$

6 Pole trapezu równoramiennego przedstawionego na rysunku jest równe 1008 cm^2 . Oblicz wysokość tego trapezu.



7 Za 2 kg bananów zapłacono 9 zł. Ile kilogramów bananów można kupić za kwotę o 2,25 zł mniejszą?

8 Bartek kupił: klaser, mazak i kalkulator. Cena klasera była o 100% wyższa od ceny mazaka, a cena kalkulatora była trzy razy wyższa od ceny klasera. Ze 150 zł kasjerka wydała mu 11,40 zł. Jakie były ceny poszczególnych artykułów?

9 Bank w ramach promocji wiosennej podniósł oprocentowanie lokaty terminowej o 0,3 punktu procentowego, w wyniku czego oprocentowanie lokaty wzrosło o 15%. Jakie było pierwotne oprocentowanie tej lokaty?

10 W ciągu trzech dni dostarczono do sklepu 684 kg jabłek. Pierwszego dnia dostarczono dwa razy więcej jabłek niż drugiego, a trzeciego – o 20% mniej niż drugiego. Ile kilogramów jabłek dostarczono trzeciego dnia?

- 11 W ciągu 0,6 sekundy głos przenosi się w wodzie na odległość 861 m. Na jaką odległość przeniesie się głos w ciągu 2 sekund?
- 12 Jeśli do pewnej liczby dodamy 5% tej liczby i jeszcze 10% tej liczby, to otrzymamy 69. Znajdź tę liczbę.
- 13 Kwotę 700 zł wypłacono 20 banknotami po: 10 zł, 20 zł i 100 zł. Ile było banknotów każdego rodzaju, jeśli banknotów 20-złotowych było dwa razy mniej niż 10-złotowych?
- 14 Kupon materiału o długości 4,9 m rozcięto na 15 kawałków o długościach 30 cm i 50 cm. Ile otrzymano kawałków każdego rodzaju?
- 15 Stosunek długości boków trójkąta prostokątnego jest równy $6 : 8 : 10$. Różnica długości najdłuższego i najkrótszego boku jest równa 8 cm. Oblicz obwód i pole tego trójkąta.
- 16 Stosunek wieku mamy do wieku córki jest równy $5 : 2$. Obecnie łącznie mają 49 lat. Ile lat będzie miała każda z nich za 5 lat?
- 17 Iloczyn pewnej liczby i tej samej liczby pomniejszonej o 2 jest równy iloczynowi tej liczby powiększonej o 4 i tej samej liczby pomniejszonej o 5. Co to za liczba?
- 18 Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 14. Jeżeli przestawimy w niej cyfry, to otrzymamy liczbę o 36 mniejszą od pierwotnej. Jaka to liczba?
- 19 Roztwór wodny zawiera 5% cukru. Ile kilogramów wody trzeba dodać do 40 kg tego roztworu, aby otrzymać roztwór zawierający 2% cukru?
- 20 Ile kilogramów octu o stężeniu 20% i ile kilogramów octu o stężeniu 5% należy zmieszać, aby otrzymać 24 kg octu o stężeniu 10%?
- 21 Półfinał konkursu matematycznego składał się z czterech testów. Janek za trzy kolejne testy otrzymał: 26, 35 i 28 punktów. Ile punktów co najmniej powinien uzyskać za czwarty test, aby dostać się do finału, jeśli średnia arytmetyczna liczby punktów wszystkich testów musi wynosić minimum 32?
- 22 Chłopiec ma dwa razy więcej braci niż siostr, a jego siostra – pięć razy więcej braci niż siostr. Jak liczne jest to rodzeństwo?
- 23 Dłuższy bok prostokąta skrócono o x procent, a krótszy wydłużono o x procent. W wyniku tego pole prostokąta zmniejszyło się o 4%. O ile procent zmieniono długości boków?
- 24 W ogrodzie pana Tomasza rosną tulipany. Białych i żółtych tulipanów jest łącznie 400, żółtych i czerwonych – 300, a białych i czerwonych – 440. Ile tulipanów każdego koloru rośnie w ogrodzie pana Tomasza?



Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–6. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Rozwiązaniem równania $-5(4x - 7) = 2x - 9$ jest odwrotność liczby
A. 0,5 B. 2 C. -2 D. $-\frac{1}{2}$
- 2 Zmienna x wyznaczona ze wzoru $y = \frac{0,2x + 8}{4}$ to
A. $x = \frac{4y + 8}{0,2}$ B. $x = \frac{y - 2}{0,2}$ C. $x = 20(y - 2)$ D. $x = 5(y - 2)$
- 3 Największą liczbą całkowitą niedodatnią spełniającą równanie $-3x^2 - 5x = -2$ jest
A. -1 B. -2 C. 0 D. -3
- 4 Suma dwóch liczb jest równa -2, a różnica pierwszej i drugiej liczby to 14. Jeśli przez x oznaczymy pierwszą z tych liczb, to podane zależności opisuje równanie
A. $x + x + 2 = -14$ B. $x + x + 14 = 2$
C. $x - (-x - 2) = 14$ D. $x + x - 2 = 14$
- 5 Aby otrzymać 3-procentowy ocet, trzeba do 0,5 litra 10-procentowego octu dolać
A. 1 litr wody. B. $1\frac{1}{6}$ litra wody. C. $1\frac{1}{4}$ litra wody. D. 2 litry wody.
- 6 Woda morska zawiera 4% soli. Aby otrzymać 20 kg soli, trzeba odparować ok.
A. 500 kg wody morskiej. B. 50 kg wody morskiej.
C. 100 kg wody morskiej. D. 80 kg wody morskiej.

W zadaniach 7.–10. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 7 Które z następujących wielkości są wprost proporcjonalne?
A. Pole kwadratu i długość jego boku.
B. Prędkość i czas przebycia danej drogi.
C. Obwód trapezu i jego wysokość.
D. Czas jazdy i droga przebyta przez samochód jadący ze stałą prędkością.
- 8 Ziemię rolną podzielono na cztery części w stosunku 1 : 2 : 3 : 4. Różnica powierzchni największej i najmniejszej części jest równa 180 ha. Jaka jest łączna powierzchnia tych dwóch części ziemi rolnej?
A. 120 ha B. 300 ha C. 420 ha D. 180 ha

- 9 30% pewnej liczby jest o 20% większe od tej liczby zmniejszonej o 6. Co to za liczba?

A. $6\frac{2}{3}$ B. 12 C. 14,8 D. 8

- 10 Posągi odlewa się z brązu, który zawiera 85% miedzi oraz cynę. Ile kilogramów miedzi trzeba stopić z 660 kg cyny, aby otrzymać taki brąz?

A. 3740 kg B. 4400 kg C. 3080 kg D. 3470 kg

- 11 Cena biletów ulgowych do kina stanowi 75% ceny biletów normalnych. Kasia zapłaciła za 2 bilety normalne i 2 ulgowe 140 zł. Monika kupiła 1 bilet normalny i 3 ulgowe, a Krzysztof kupił 3 bilety normalne i 1 ulgowy. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Monika zapłaciła za bilety A / B. A. 150 zł B. 130 zł

Krzysztof zapłacił za bilety o C / D więcej niż Kasia. C. 20 zł D. 10 zł

- 12 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczba -1 jest rozwiązaniem równania $x^5 - 4x^4 = -5 $.	P	F
Liczba -2 jest pierwiastkiem równania $4x^3 - 2x^2 - 3x = -34$.	P	F
Liczba $\sqrt{5}$ spełnia równanie $-x^2 + 3x = -2\sqrt{5}$.	P	F

- 13 W pierwszej beczce było cztery razy więcej oleju niż w drugiej. Gdy z pierwszej beczki przelano do drugiej 5 l oleju, okazało się, że w pierwszej beczce jest trzy razy więcej oleju niż w drugiej. Czy w obu beczkach łącznie jest 100 l oleju? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	w pierwszej beczce jest 20 l oleju, a w drugiej 5 l.
B.	Nie,		2.	w drugiej beczce jest 20 l oleju, a w pierwszej 80 l.

- 14 Jeden bok prostokąta jest o 3 cm krótszy od drugiego boku długości y cm. Pole tego prostokąta jest o 18 cm^2 mniejsze od pola kwadratu o boku długości y cm. Oblicz pole prostokąta i obwód kwadratu. Zapisz obliczenia.

- 15 Właściciel antykwariatu kupił dwie książki za 90 zł, a na ich sprzedaży zyskał $33\frac{1}{3}\%$ tej kwoty. Ile złotych zapłacił antykwariusz za każdą z książek, jeżeli na sprzedaży pierwszej zyskał 20%, a na sprzedaży drugiej 40%? Zapisz obliczenia.

- 16 Kasia jest o 4 lata starsza od Kingi. Za 5 lat będą miały razem 58 lat. Ile lat ma obecnie każda z nich? Zapisz obliczenia.

Przypomnij sobie*

- wielokąt foremny (s. 48)
- twierdzenie Pitagorasa (s. 50)
- wzór na długość przekątnej kwadratu (s. 51)
- własności trójkąta prostokątnego równoramiennego (s. 52)
- wzór na wysokość trójkąta równobocznego (s. 52)
- własności trójkąta prostokątnego o kątach ostrych 30° , 60° (s. 53)
- wzór na pole trójkąta równobocznego (s. 55)
- wzór na pole sześciokąta foremnego (s. 56)
- współrzędne punktu (s. 59)
- współrzędne środka odcinka (s. 60)
- punkty kratowe (s. 60, 61)
- punkty współliniowe (s. 60)

* Wyjaśnienia powyższych terminów znajdziesz w tym podręczniku na podanych stronach.

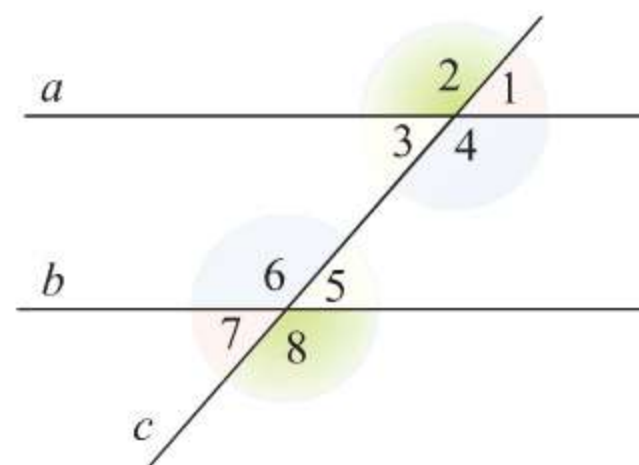
Kąt wklęsły to taki kąt β , że $\beta > 180^\circ$ i $\beta < 360^\circ$.

Kąt wypukły to taki kąt α , że $\alpha \geq 0^\circ$ i $\alpha \leq 180^\circ$, oraz kąt pełny $\alpha = 360^\circ$.

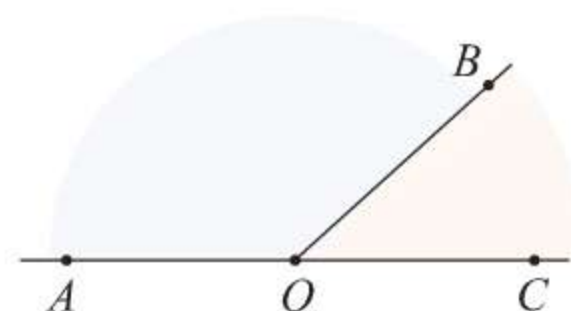
Kąty odpowiadające i naprzemianległe to kąty utworzone przez trzy przecinające się proste, z których dwie są równoległe. Jeśli dwie proste równoległe a i b przecina prosta c , to te trzy proste wyznaczają osiem kątów oznaczonych na rysunku numerami od 1 do 8.

Kąty naprzemianległe to kąty: 3 i 5, 4 i 6, 2 i 8 oraz 1 i 7. Kąty naprzemianległe mają równe miary.

Kąty odpowiadające to kąty: 2 i 6, 3 i 7, 1 i 5 oraz 4 i 8. Kąty odpowiadające mają równe miary.

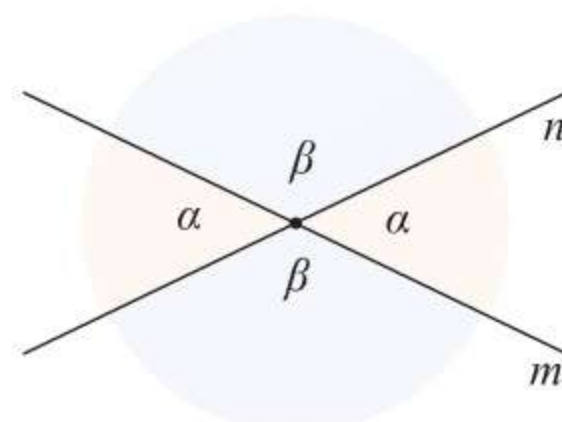


Kąty przyległe to dwa kąty, które mają jedno wspólne ramię, a dwa pozostałe ramiona tworzą prostą. Dwa kąty przyległe tworzą kąt półpełny.
 $|\angle AOB| + |\angle BOC| = 180^\circ$



Kąty wierzchołkowe to para kątów wyznaczonych przez dwie przecinające się proste, w której ramiona jednego kąta są przedłużeniem ramion drugiego.

Kąty wierzchołkowe mają równe miary. Dwie przecinające się proste wyznaczają dwie pary kątów wierzchołkowych.



Łamana to figura zbudowana z odcinków w taki sposób, że:

- każde dwa kolejne odcinki mają wspólny koniec,
- żadne dwa kolejne odcinki nie leżą na jednej prostej.

Rodzaje łamanych	
łamana otwarta	łamana zamknięta

Skala umożliwia rysowanie dużych obiektów w pomniejszeniu, a małych obiektów w powiększeniu.

Przykład

wymiar rzeczywisty – skala **1 : 1** $\overline{A \quad B} \quad |AB| = 2 \text{ cm}$

wymiar zmniejszony 2 razy – skala **1 : 2** $\overline{A' \quad B'} \quad |A'B'| = 1 \text{ cm}$

wymiar zwiększony 2 razy – skala **2 : 1** $\overline{A'' \quad B''} \quad |A''B''| = 4 \text{ cm}$

Jednostki długości

1 cm = 10 mm

1 dm = 10 cm

1 m = 10 dm

1 km = 1000 m

1 mm = 0,1 cm

1 cm = 0,1 dm

1 dm = 0,1 m

1 m = 0,001 km

Jednostki pola

1 cm² = 100 mm²

1 dm² = 100 cm²

1 m² = 100 dm²

1 km² = 1 000 000 m²

1 a = 100 m²

1 ha = 100 a

1 km² = 100 ha

1 mm² = 0,01 cm²

1 cm² = 0,01 dm²

1 dm² = 0,01 m²

1 m² = 0,000001 km²

1 m² = 0,01 a

1 a = 0,01 ha

1 ha = 0,01 km²

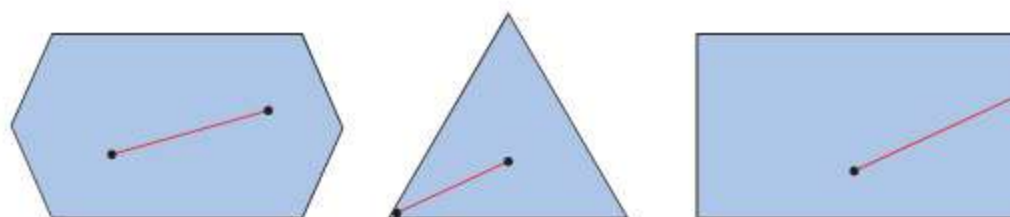
Przykład

a) $8,2 \text{ dm}^2 = 8,2 \cdot 1 \text{ dm}^2 = 8,2 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 820 \text{ cm}^2$

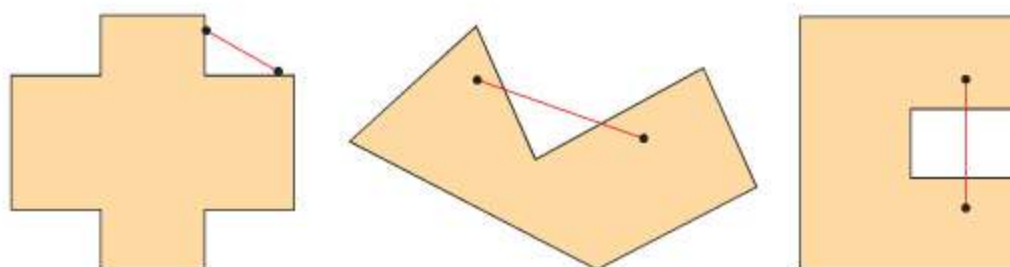
b) $12\,500 \text{ m}^2 = 12\,500 \cdot 1 \text{ m}^2 = 12\,500 \cdot 0,01 \text{ a} = 125 \text{ a}$

Wielokąty wypukłe

Wielokąt jest wypukły, jeśli odcinek łączący dwa dowolne jego punkty zawiera się w tym wielokącie.

**Wielokąty wklęsłe**

Wielokąt jest wklęsły, jeśli istnieje odcinek łączący dwa jego punkty, który nie zawiera się w tym wielokącie.

**Niektóre własności trójkąta**

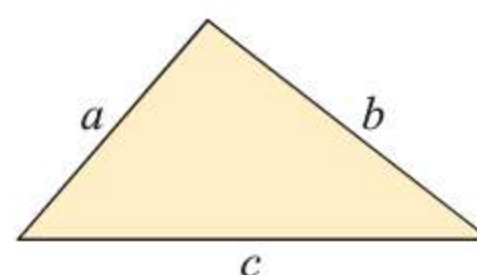
• Długość każdego boku trójkąta jest mniejsza od sumy długości dwóch pozostałych boków.

$$a + b > c$$

$$a + c > b$$

$$b + c > a$$

• W każdym trójkącie naprzeciw najdłuższego boku leży największy kąt, a naprzeciw najkrótszego boku – najmniejszy kąt.



Figury przystające to figury, które po nałożeniu jedna na drugą – wzajemnie się pokrywają.

Cechy przystawania trójkątów

Cecha pierwsza (bbb) – dwa trójkąty są przystające, jeśli długości ich odpowiednich boków są równe.

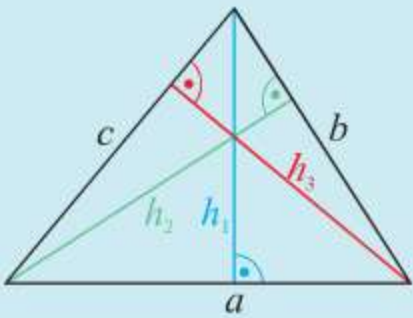
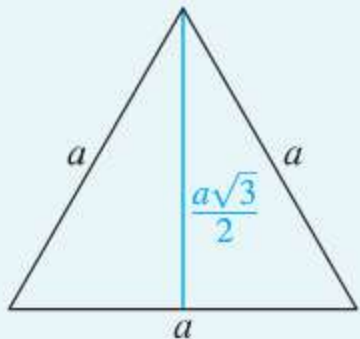
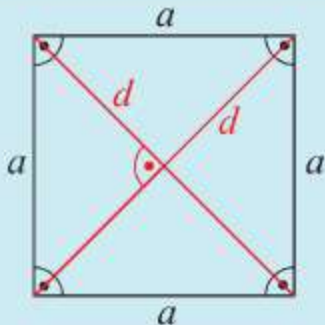
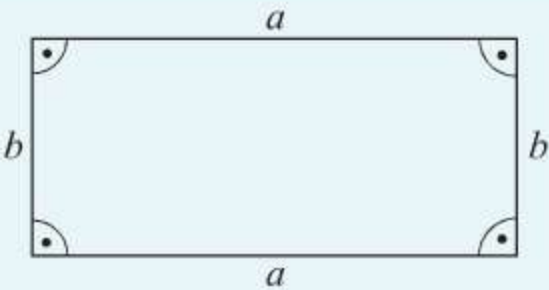
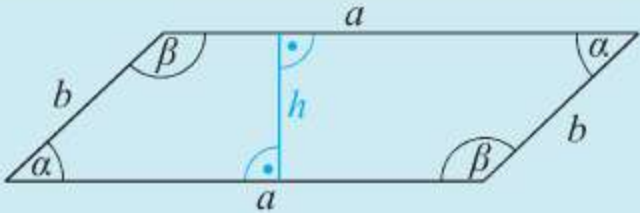
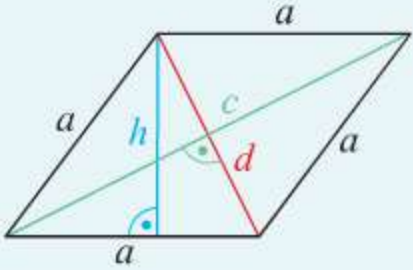
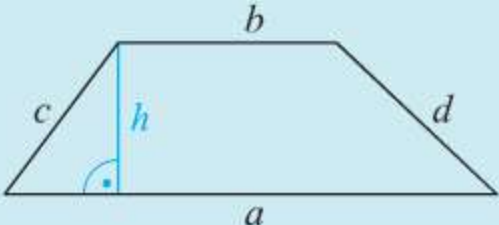
Cecha druga (bkb) – dwa trójkąty są przystające, jeśli mają dwa odpowiednie boki równej długości oraz kąty między tymi bokami w obu trójkątach są równej miary.

Cecha trzecia (kbb) – dwa trójkąty są przystające, jeśli mają jeden bok równej długości oraz dwa kąty przyległe do tego boku w jednym i drugim trójkącie są odpowiednio równej miary.

Suma miar kątów wewnętrznych wielokątów wypukłych

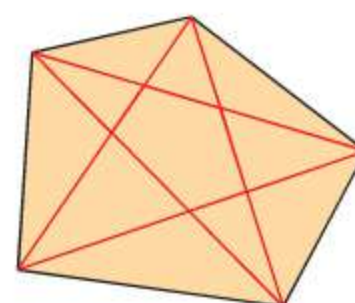
Nazwa figury	Suma miar kątów wewnętrznych
trójkąt	180°
czworokąt	360°
pięciokąt	540°
dowolny wielokąt o n kątach	$(n - 2) \cdot 180^\circ$

Trójkąty i czworokąty – pola i obwody

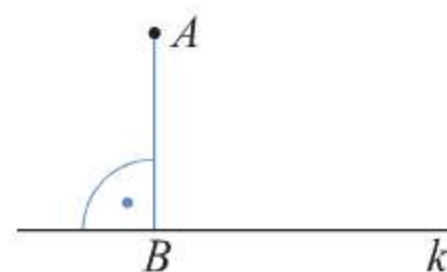
Nazwa figury	Figura	Pole	Obwód
trójkąt		$P = \frac{1}{2}a \cdot h_1$ $P = \frac{1}{2}b \cdot h_2$ $P = \frac{1}{2}c \cdot h_3$	$L = a + b + c$
trójkąt równoboczny		$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$	$L = 3a$
kwadrat		$P = a^2$ $P = \frac{1}{2}d^2$	$L = 4a$
prostokąt		$P = a \cdot b$	$L = 2(a + b)$
równoległobok		$P = a \cdot h$	$L = 2(a + b)$
romb		$P = a \cdot h$ $P = \frac{1}{2}c \cdot d$	$L = 4a$
trapez		$P = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$	$L = a + b + c + d$

Przekątna wielokąta to odcinek, który łączy wierzchołki wielokąta i nie jest jego bokiem.

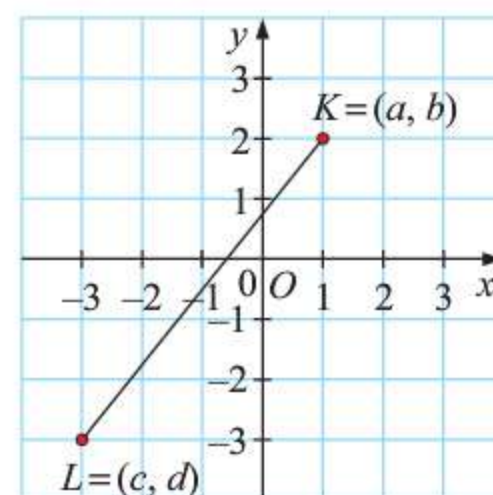
Liczbę przekątnych wielokąta wypukłego można wyznaczyć ze wzoru $\frac{n(n-3)}{2}$, gdzie n to liczba boków.



Odległość punktu A od prostej k to długość odcinka AB prostopadłego do prostej k , którego koniec B należy do k .



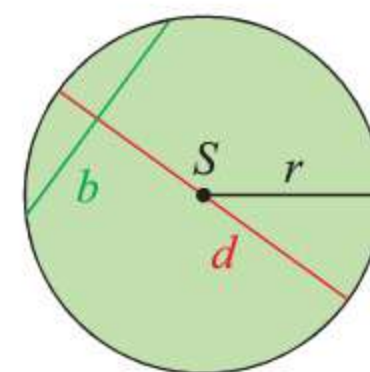
Długość odcinka KL , gdzie $K = (a, b)$ oraz $L = (c, d)$, można obliczyć ze wzoru $|KL| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ lub $|KL| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$.



Koło to część płaszczyzny ograniczona okręgiem wraz z tym okręgiem.

Na rysunku:

S – środek koła, r – promień koła,
 b – cięciwa, d – średnica, $d = 2r$.



Dwie figury są symetryczne względem prostej, jeśli figurę położoną po jednej stronie prostej można nałożyć na figurę znajdującą się po drugiej stronie tej prostej poprzez zgięcie kartki wzdłuż tej prostej.

Figury F_1 i F_2 są symetryczne względem prostej k .

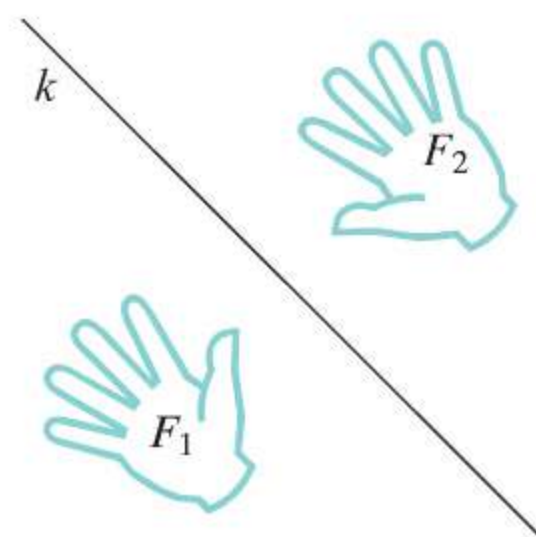
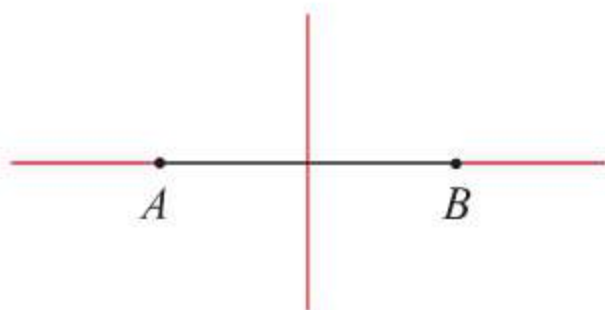
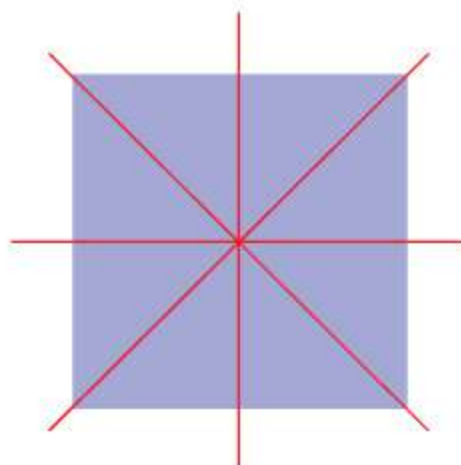


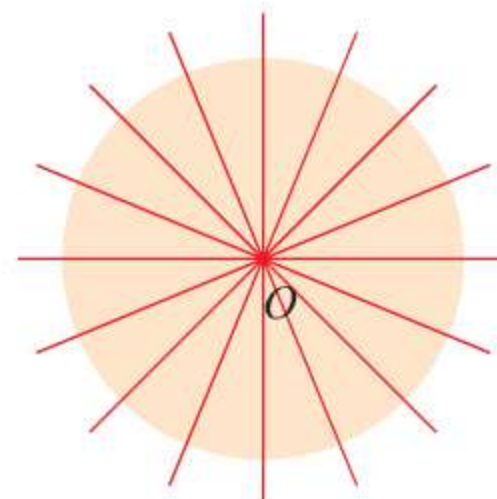
Figura osiowosymetryczna to figura, która ma oś symetrii. **Ośią symetrii figury** jest prosta, która dzieli figurę na dwie figury symetryczne względem tej prostej. Figura osiowosymetryczna, taka jak odcinek, kwadrat, koło, może mieć jedną lub więcej osi symetrii.



Odcinek ma dwie osie symetrii.



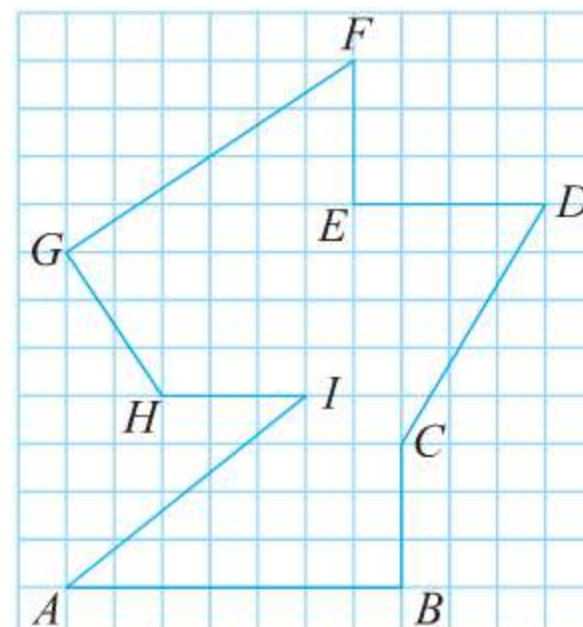
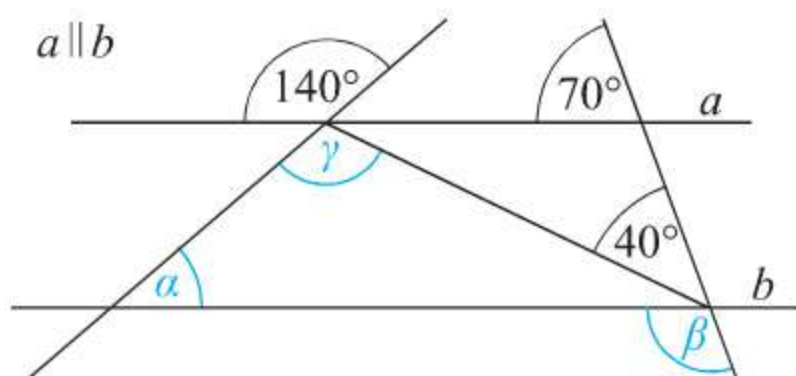
Kwadrat ma cztery osie symetrii.



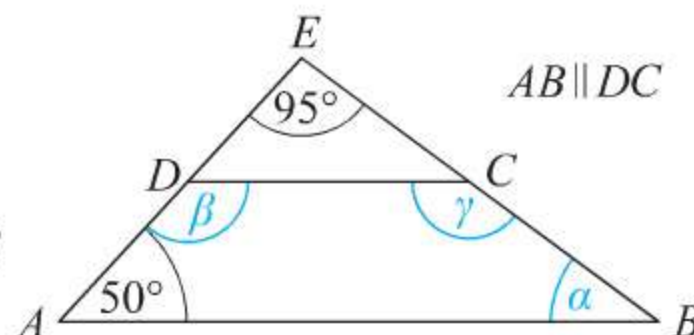
Koło ma nieskończenie wiele osi symetrii.

1. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie

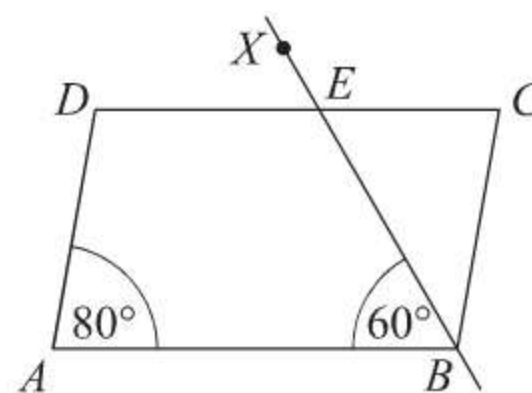
- 1 Oblicz miary kątów α , β , γ zaznaczonych na rysunku.



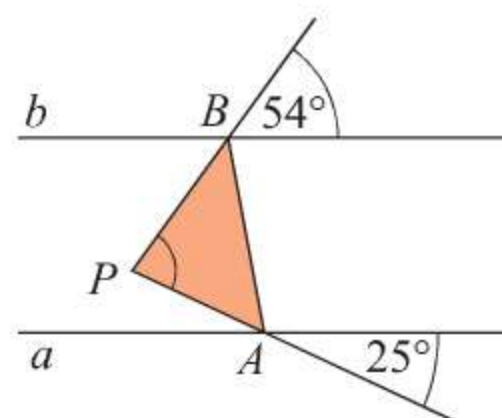
- 2 Oblicz długość łamanej $ABCDEFGHIA$, jeśli wiadomo, że bok kratki ma długość 1.
- 3 Jeden bok trójkąta ma 11 cm długości, a drugi 6 cm. Czy trzeci bok tego trójkąta może mieć 18 cm? Odpowiedź uzasadnij.
- 4 Obwód trójkąta ABC wynosi 28,5 m. Bok AB jest najkrótszy. Najdłuższy bok AC jest o 50% dłuższy od boku BC , a bok BC jest o 50% dłuższy od boku AB . Oblicz długości boków tego trójkąta.
- 5 Skorzystaj z rysunku i odpowiedz na pytania.
 a) Który bok trójkąta ABE jest najkrótszy?
 b) Ile stopni ma kąt β ?
 c) Dlaczego trapez $ABCD$ nie jest równoramienny?
 d) Ile stopni wynosi różnica miar kątów γ i β ?



- 6 Skorzystaj z rysunku równoległoboku $ABCD$ i oblicz miary kątów: BCD , ABC , BED , BEC , CEX .



- 7 Uzasadnij, że jeśli w trójkącie miara jednego kąta jest równa różnicy miar dwóch pozostałych kątów, to ten trójkąt jest prostokątny.

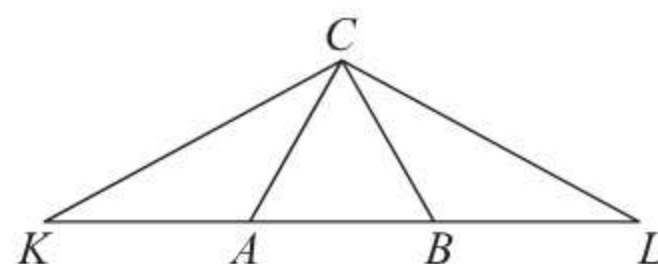


- 8 Na rysunku proste a i b są równoległe. Wyznacz miarę kąta APB .

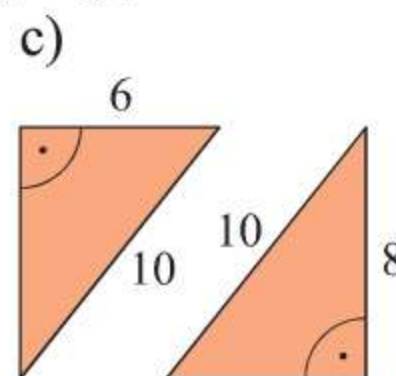
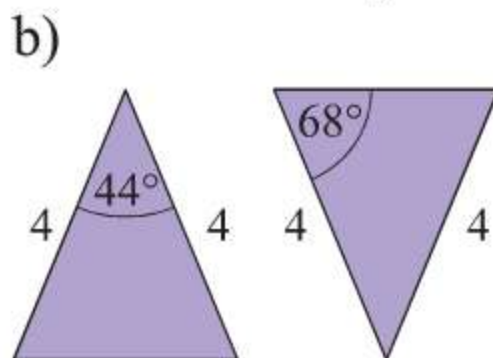
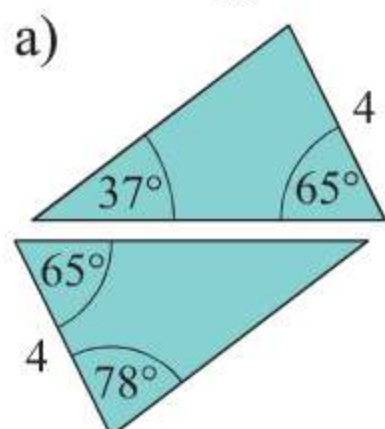


- 9 Wojtek układa trójkąty z zapalek. Czy może ułożyć:
 a) trójkąt równoboczny ze 125 zapalek,
 b) trójkąt prostokątny z 60 zapalek?

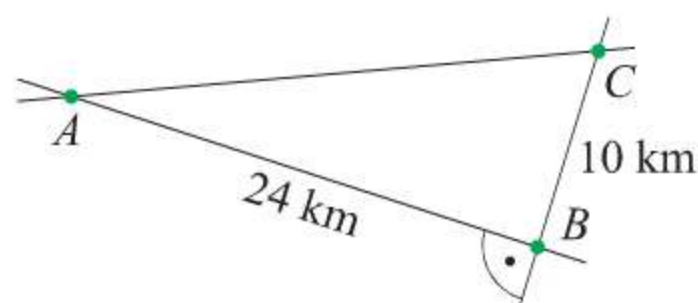
- 10** Na przedłużeniu podstawy AB trójkąta równoramiennego ABC odłożono odcinki AK i BL równej długości. Uzasadnij, że trójkąt KLC jest równoramienny.



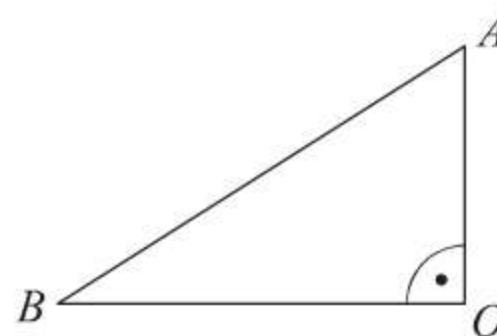
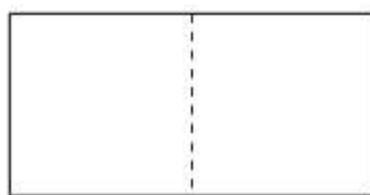
- 11** Uzasadnij, że trójkąty przedstawione na rysunku są przystające.



- 12** Układ dróg łączących miejscowości A , B i C przedstawiono na rysunku. Odległość z A do B wynosi 24 km, a z B do C – 10 km. Krzysiek wyjechał na rowerze z miejscowości A do C i jechał ze średnią prędkością 15 km/h. Andrzej wyjechał na motorze z miejscowości A godzinę później niż Krzysiek i też jechał do miejscowości C , ale przez miejscowość B . Jego średnia prędkość wyniosła 60 km/h. Kto na kogo czekał w miejscowości C i ile czasu?



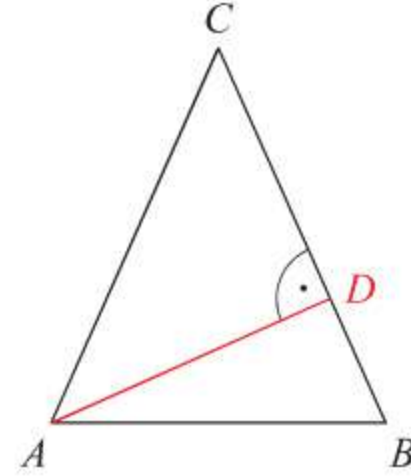
- 13** Ile stopni ma kąt ostry równoległoboku, jeśli miara kąta rozwartego jest od niego większa o 76° ?
- 14** W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawa CD i ramiona mają taką samą długość. Podstawa AB jest dwa razy dłuższa od krótszej podstawy, a obwód tego trapezu wynosi $35\sqrt{3}$ cm. Odpowiedz na poniższe pytania. Odpowiedzi uzasadnij.
- Jaka jest długość podstawy AB ?
 - Ile wynosi wysokość trapezu?
 - Ile razy przekątna trapezu jest dłuższa od jego wysokości?
 - Czy jeśli połączymy środek S dłuższej podstawy trapezu $ABCD$ z wierzchołkami D i C , to podzielimy ten trapez na trzy trójkąty równoboczne?
 - Czy trapez $ABCD$ jest osiowoosymetryczny?
- 15** Na rysunku bok trójkąta równobocznego i bok kwadratu mają długość 1. Odcinek OA ma taką samą długość jak przekątna kwadratu, a odcinek OB – jak przekątna prostokąta złożonego z dwóch takich kwadratów. Oblicz, o ile długość odcinka AB jest większa od wysokości trójkąta równobocznego.



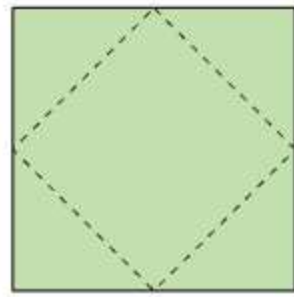


- 16** Lina podtrzymująca maszt tworzy z podłożem kąt o mierze 60° . Oblicz długość liny, której punkt zamocowania na ziemi jest odległy od podstawy masztu o 5 m. Na jakiej wysokości masztu zamocowano linę? Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 cm. Przyjmij, że $\sqrt{3} = 1,73$.

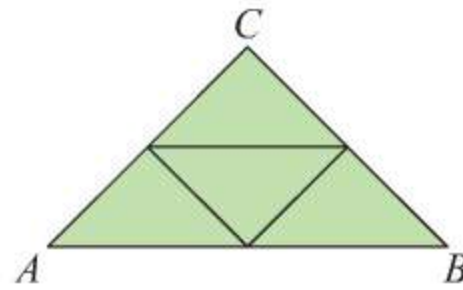
- 17** W trójkącie równoramiennym ABC boki AC i BC są ramionami, a odcinek AD jest wysokością trójkąta. Uzasadnij, że miara kąta BAD jest połową miary kąta ACB .



- 18** Kwadrat rozcięto tak, że linie cięcia biegną przez środki boków tego kwadratu (rys. 1). Z odciętych trójkątów ułożono trójkąt ABC (rys. 2).



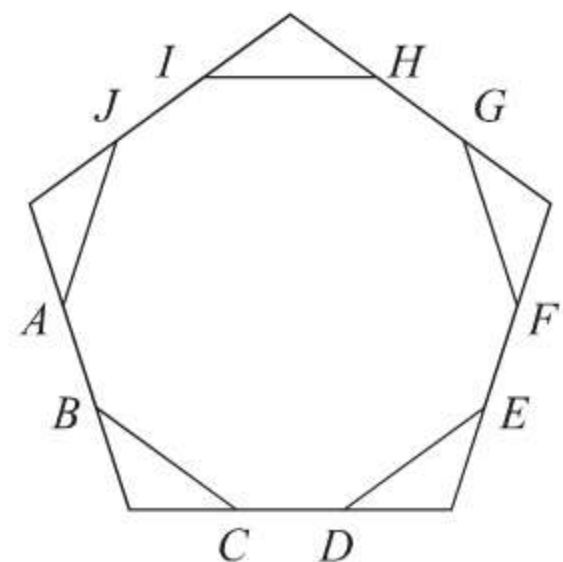
rys. 1



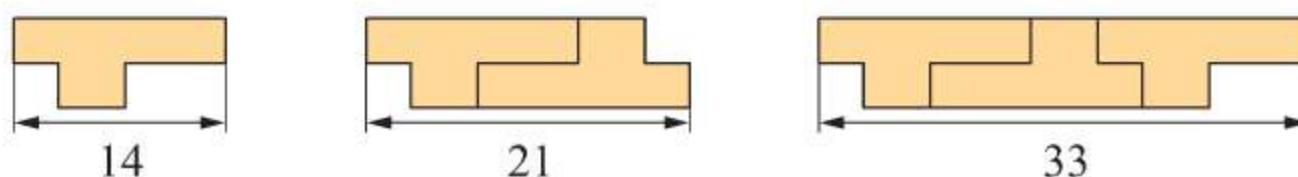
rys. 2

Odpowiedz na poniższe pytania. Odpowiedzi uzasadnij.

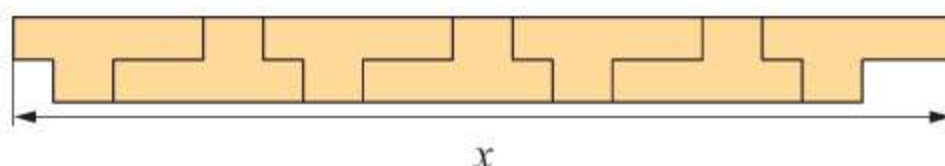
- Czy trójkąt ABC jest prostokątny?
 - Czy pole trójkąta ABC jest dwa razy mniejsze od pola kwadratu?
 - Czy trójkąt ABC jest równoboczny?
 - Jaki obwód ma trójkąt ABC , jeśli bok kwadratu ma długość 5 cm?
- 19** Dwa sąsiednie kąty wewnętrzne czworokąta są ostre i mają jednakowe miary, trzeci kąt jest o 120° większy niż kąt ostry, a czwarty – pięć razy większy niż kąt ostry. Jaki to czworokąt? Czy ma oś symetrii?
- 20** W pięciokącie foremnym każdy bok podzielono na 3 części równej długości i połączono kolejno punkty podziału, w wyniku czego otrzymano dziesięciokąt. Odpowiedz na poniższe pytania. Odpowiedzi uzasadnij.
- Czy każdy kąt wewnętrzny dziesięciokąta ma miarę 144° ?
 - Czy długość każdego boku dziesięciokąta stanowi $\frac{1}{3}$ długości boku pięciokąta?
 - Czy otrzymany dziesięciokąt jest foremny?
 - Czy obwód pięciokąta jest mniejszy od obwodu dziesięciokąta?
 - Który z tych dwóch wielokątów ma więcej osi symetrii?



- 21** Na rysunkach przedstawiono kształt i sposób układania płytek oraz niektóre wymiary w centymetrach.



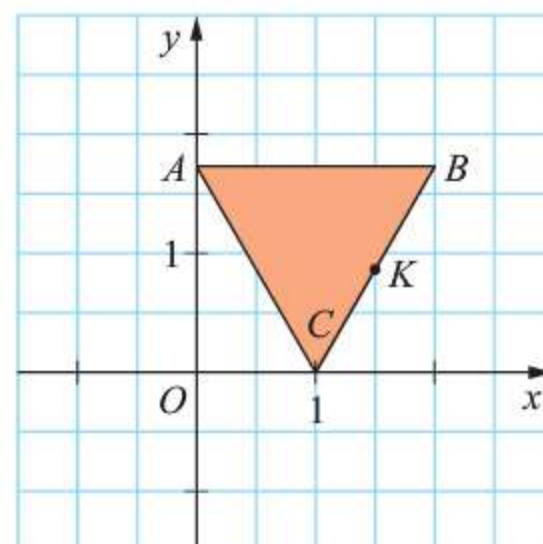
Jaką długość będzie miał wzór ułożony z 7 płytek, taki jak na rysunku?



- 22** Oblicz odległość punktu o podanych współrzędnych od początku układu współrzędnych.
- a) $(4, -5)$ b) $(-6, -8)$ c) $(-40, 50)$ d) $(5, 10)$

- 23** Na rysunku trójkąt ABC jest równoboczny. Bok AB jest równoległy do osi x . Odpowiedz na poniższe pytania. Odpowiedzi uzasadnij.

- a) Jaki jest obwód trójkąta ABC ?
 b) Jakie współrzędne ma punkt A ?
 c) Jakie współrzędne ma punkt K , jeśli jest środkiem boku BC ?
 d) Jaką miarę ma kąt OAC ?
 e) Czy punkty $(1, 0)$ i $(1, \sqrt{3})$ leżą na bokach trójkąta i na jego osi symetrii?



- 24** Bez wykonywania rysunku uzasadnij, że punkty kratowe:
- a) $A = (4, 5)$, $B = (6, 1)$, $C = (8, -3)$ są współliniowe,
 b) $A = (-4, -4)$, $B = (-2, -3)$, $C = (4, 3)$ nie są współliniowe.
- 25** Czy środek odcinka MN jest punktem kratowym, jeśli $M = (-5, 2)$, $N = (3, -5)$? Odpowiedź uzasadnij.

- 26** W układzie współrzędnych na płaszczyźnie dane są punkty: $A = (3, -3)$ i $B = (-1, 5)$. Podaj współrzędne punktu C takiego, że jeden z trzech punktów A , B , C jest środkiem odcinka o końcach w dwóch pozostałych punktach. Rozpatrz wszystkie możliwości.

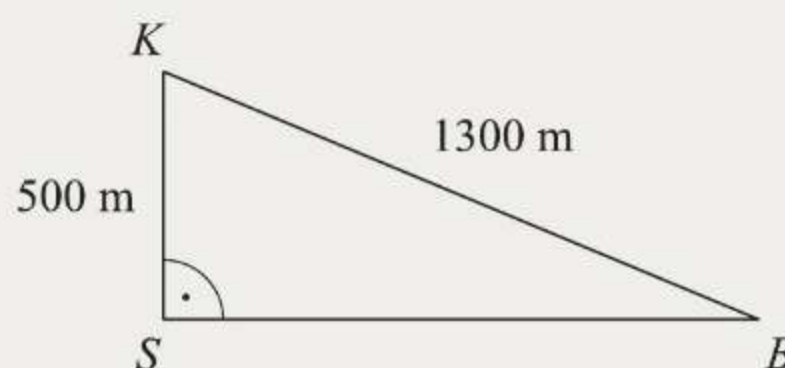
Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–2. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1** Kasia może dojechać na rowerze do babci ścieżką rowerową, która biegnie wzdłuż łamanej KSB , lub polną drogą KB . Po polnej drodze porusza się z prędkością 13 km/h, a po ścieżce rowerowej z prędkością 17 km/h. Którą trasą Kasia dojedzie do babci szybciej? O ile minut szybciej?

- A. Trasą KSB , o 3 minuty szybciej.
 B. Trasą KB , o 1 minutę szybciej.
 C. Obiema trasami przejedzie w tym samym czasie.
 D. Jest za mało danych, aby to obliczyć.

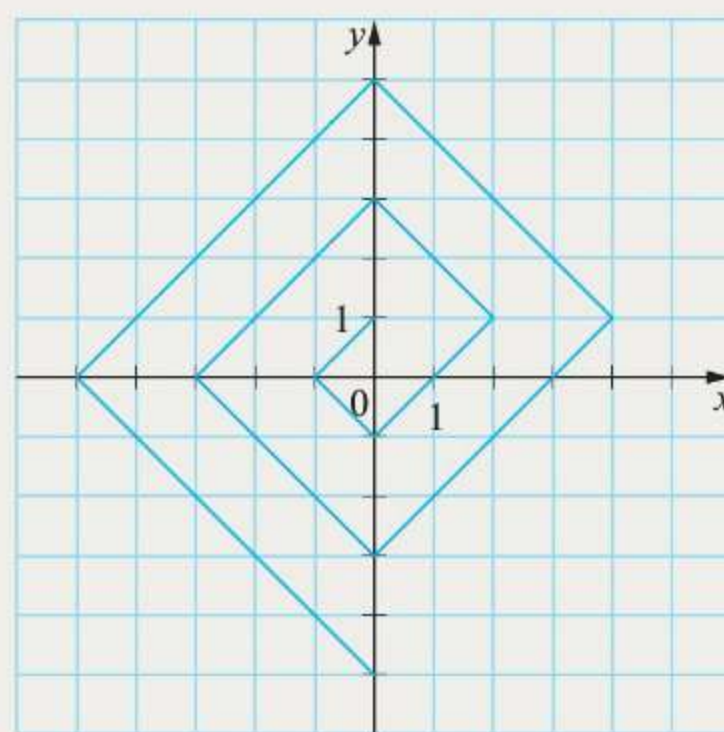


- 2** Jakie są miary kątów czworokąta $ABCD$, jeżeli kąt przy wierzchołku C jest największy, a każdy następny jest o 30° mniejszy od poprzedniego?

- A. 130° , 100° , 70° , 40° B. 135° , 105° , 75° , 45°
 C. 135° , 105° , 75° , 35° D. 130° , 130° , 50° , 50°

- 3** Na podstawie rysunku oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Końce łamanej mają współrzędne $(0, 1)$ i $(-5, 0)$.	P	F
Najkrótszy bok łamanej ma długość 1, a najdłuższy $5\sqrt{2}$.	P	F
Ośią symetrii tej łamanej jest oś y .	P	F



- 4** Czy istnieje trójkąt, którego boki mają długości: 5,2 cm, 48 mm, 0,9 dm? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	najdłuższy bok jest krótszy od sumy długości pozostałych boków.
B.	Nie,		2.	$48 > 5,2 + 0,9$.

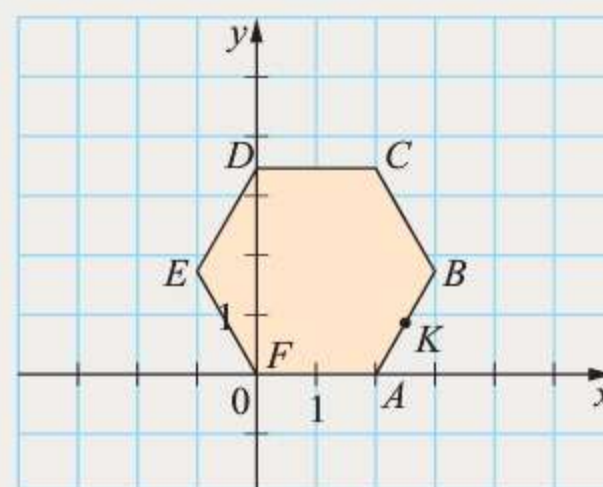
W zadaniach 5.–6. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 5 Rama prostokątnego obrazu jest wykonana z drewnianych listew tej samej szerokości. Zewnętrzny obwód ramy jest o 4 dm większy od obwodu wewnętrznego. Grubość ramy wynosi

A. 5 cm B. 10 cm C. 4 cm D. 8 cm

- 6 Sześciokąt foremny $ABCDEF$ o boku długości 2 przedstawiono na rysunku. Punkt K jest środkiem boku AB . Współrzędnymi punktu K są

A. $(2,5, \frac{\sqrt{3}}{2})$ B. $(5, \sqrt{3})$
C. $(-4, \frac{\sqrt{3}}{2})$ D. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2,5)$



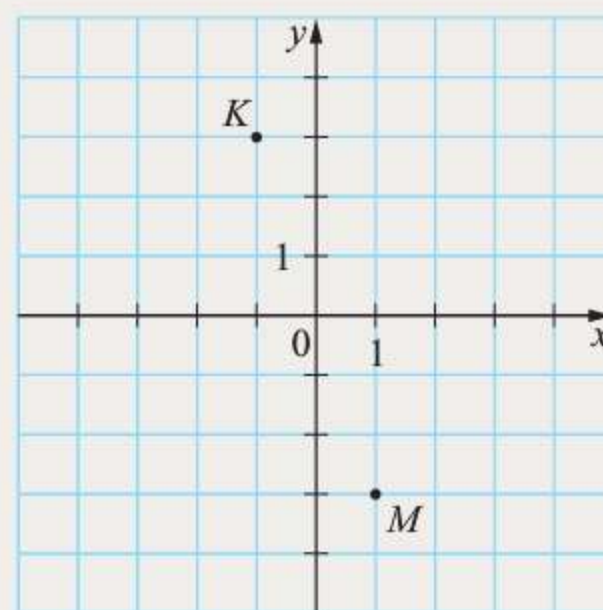
- 7 W układzie współrzędnych zaznaczono punkty K i M . Odcinek KM jest przekątną kwadratu $KLMN$. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Współrzędne wierzchołków L i N wynoszą A / B.

A. $(3, 1)$ oraz $(-3, -1)$ B. $(5, 1)$ oraz $(-5, -1)$

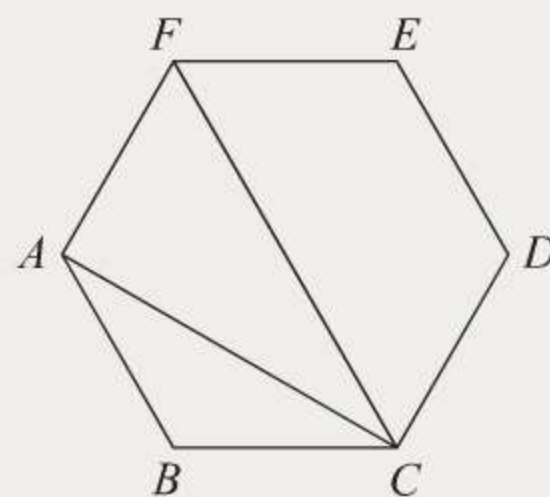
Długość przekątnej LN jest równa C / D.

C. $4\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{10}$

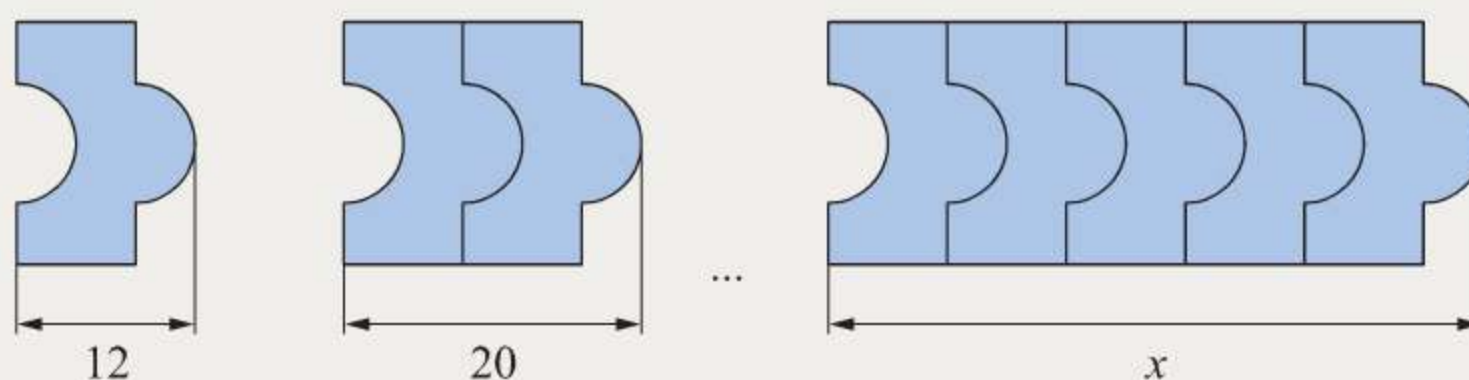


- 8 Długość boku sześciokąta foremnego przedstawionego na rysunku wynosi 4 cm. Odpowiedz na pytania. Odpowiedzi uzasadnij.

- a) Ile wynosi stosunek długości przekątnej CF do przekątnej AC ?
b) O ile centymetrów obwód trapezu $CFED$ jest mniejszy od obwodu sześciokąta?
c) Czy trójkąt CAF jest prostokątny?

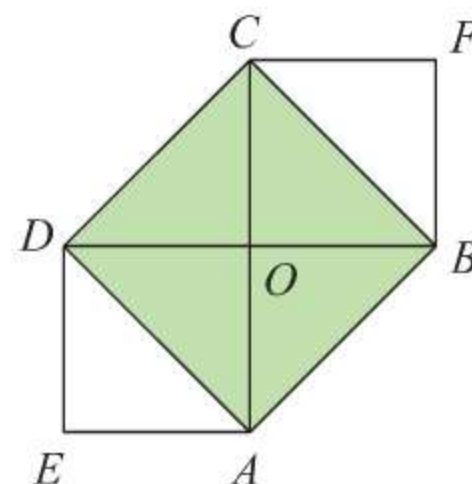


- 9 Na rysunkach przedstawiono kształt i sposób układania płytek oraz niektóre wymiary w centymetrach. Jaką długość będzie miał wzór ułożony z 5 płytek? Zapisz obliczenia.

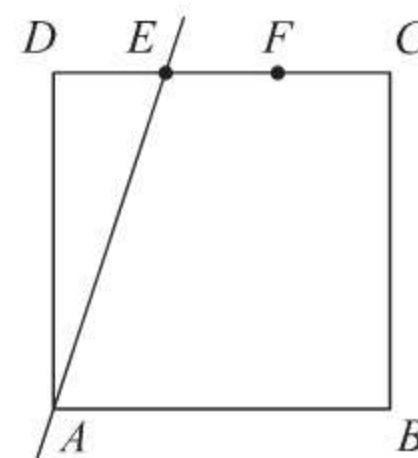


2. Pola wielokątów

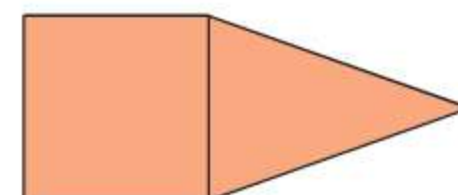
- 1 Na rysunku punkt O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $ABCD$ o boku 2 cm, a boki AD i BC tego kwadratu są odpowiednio przekątnymi kwadratów $AODE$ i $BFCO$. Odpowiedz na poniższe pytania. Odpowiedzi uzasadnij.
- Jaką część pola sześciokąta $ABFCDE$ jest pole kwadratu $ABCD$?
 - Ile osi symetrii ma sześciokąt $ABFCDE$?
 - Ile centymetrów ma obwód sześciokąta $ABFCDE$?
 - Ile przystających trójkątów o polu 1 cm^2 jest na rysunku?



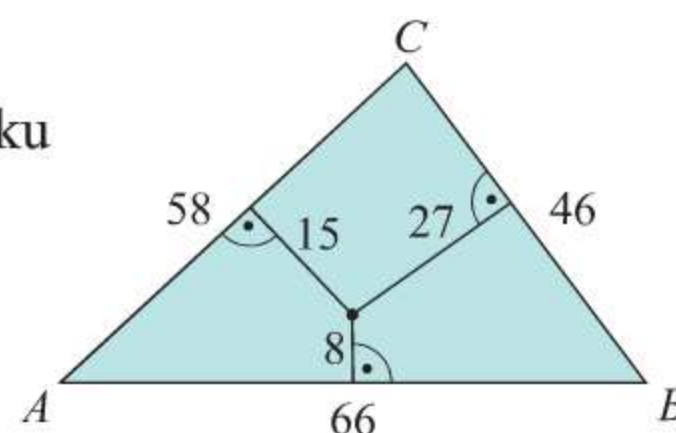
- 2 Bok CD kwadratu $ABCD$ podzielono punktami E i F na trzy odcinki równej długości. Przez punkty A i E poprowadzono prostą. Pole trapezu $ABCE$ wynosi 160 cm^2 . Odpowiedz na poniższe pytania. Odpowiedzi uzasadnij.
- Jaką długość ma bok kwadratu?
 - Ile wynosi stosunek długości przekątnej kwadratu do przeciwprostokątnej trójkąta AED ?
 - Ile wynosi pole trójkąta AED ?
 - O ile pole kwadratu jest większe od pola trójkąta AED ?



- 3 Pięciokąt przedstawiony na rysunku składa się z kwadratu i trójkąta równoramiennego. Obie figury mają taki sam obwód, równy 16 cm. Oblicz pole pięciokąta.

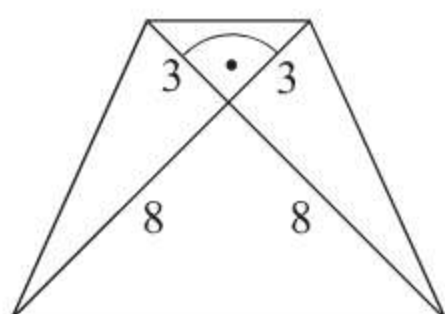


- 4 Oblicz pole trójkąta ABC przedstawionego na rysunku obok.

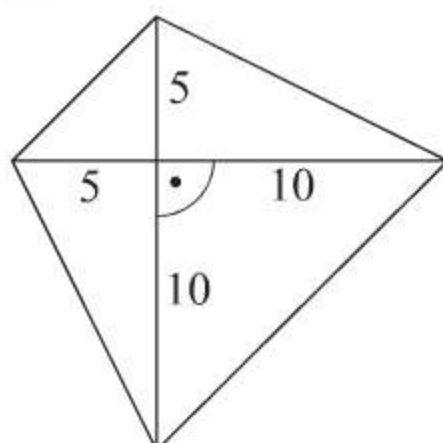


- 5 Które trapezy mają równe pola?

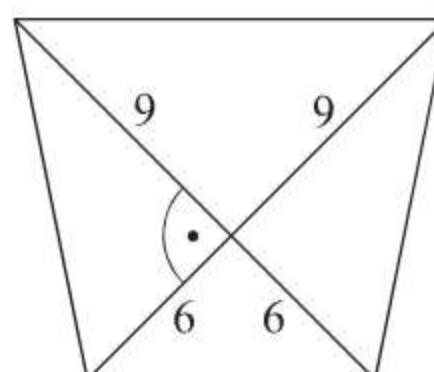
I



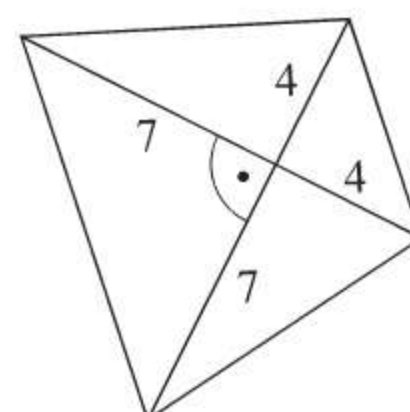
II



III



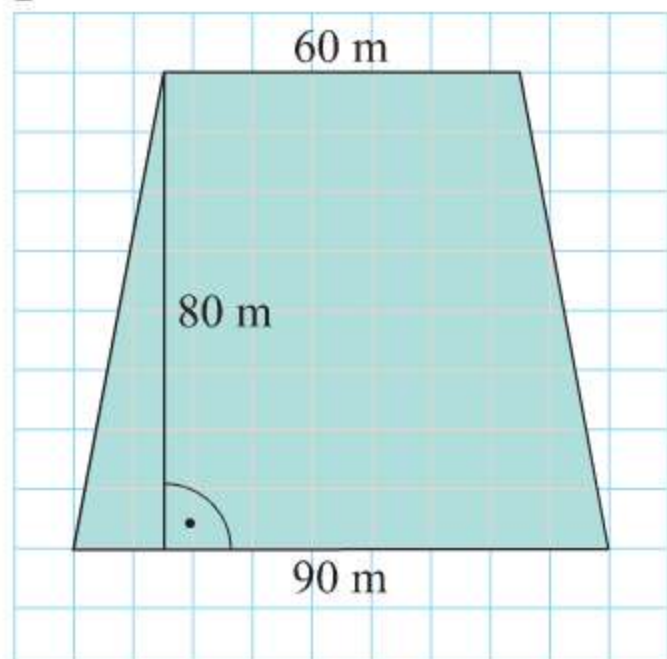
IV



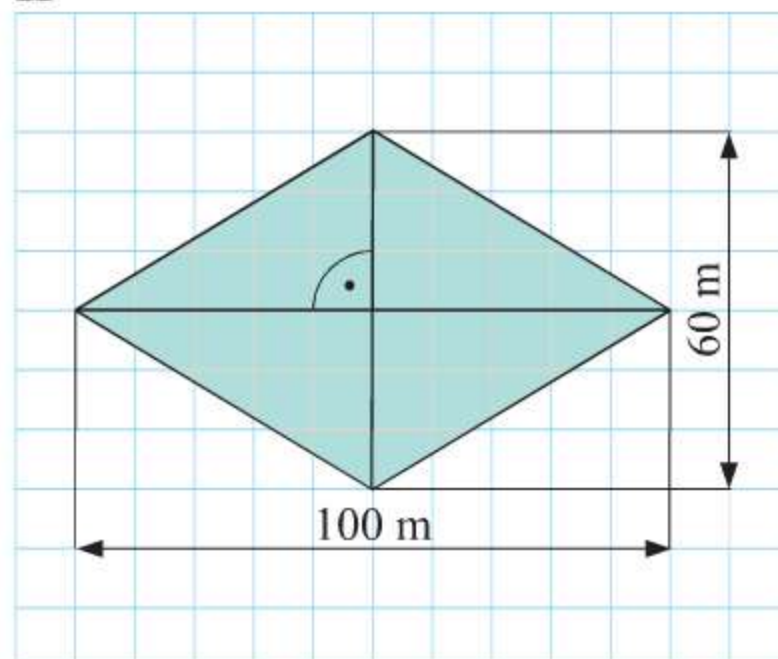


- 6** W rombie o boku długości 34 cm jedna z przekątnych ma długość 60 cm. Oblicz odległość punktu przecięcia się przekątnych rombu od jego boku. Wynik zaokrąglij do pełnych centymetrów.
- 7** W kwadrat o boku długości a wpisano kwadrat w taki sposób, że bok kwadratu wpisanego tworzy z bokiem kwadratu wyjściowego kąt o mierze 45° . Oblicz stosunek pola większego kwadratu do pola mniejszego kwadratu.
- 8** W prostokącie stosunek długości dwóch sąsiednich boków jest równy $3 : 8$. Ze środka dłuższego boku prostokąta poprowadzono do jednego z wierzchołków odcinek, który podzielił ten prostokąt na trójkąt o obwodzie 24 cm i trapez o obwodzie 40 cm. Oblicz obwód i pole tego prostokąta.
- 9** Działki rekreacyjne mają takie kształty, jak przedstawiono na rysunkach. Oblicz, ile hektarów ma pole każdej działki. Która z nich jest najmniejsza, a która największa?

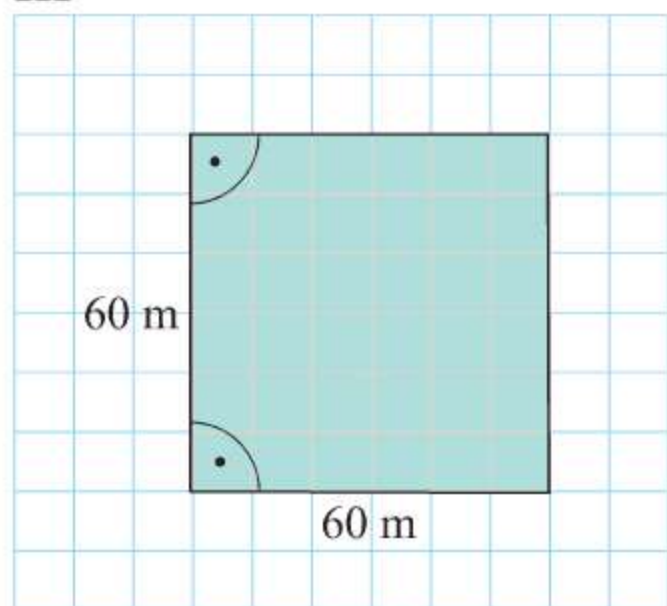
I



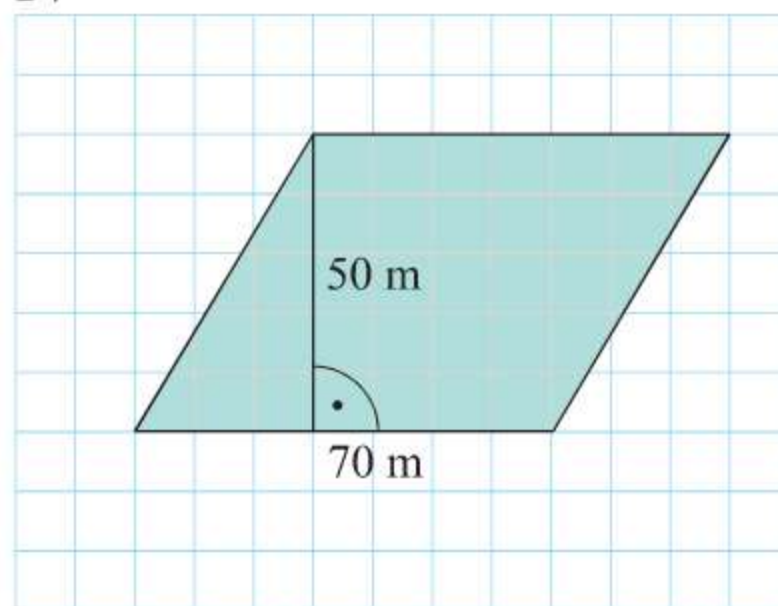
II



III



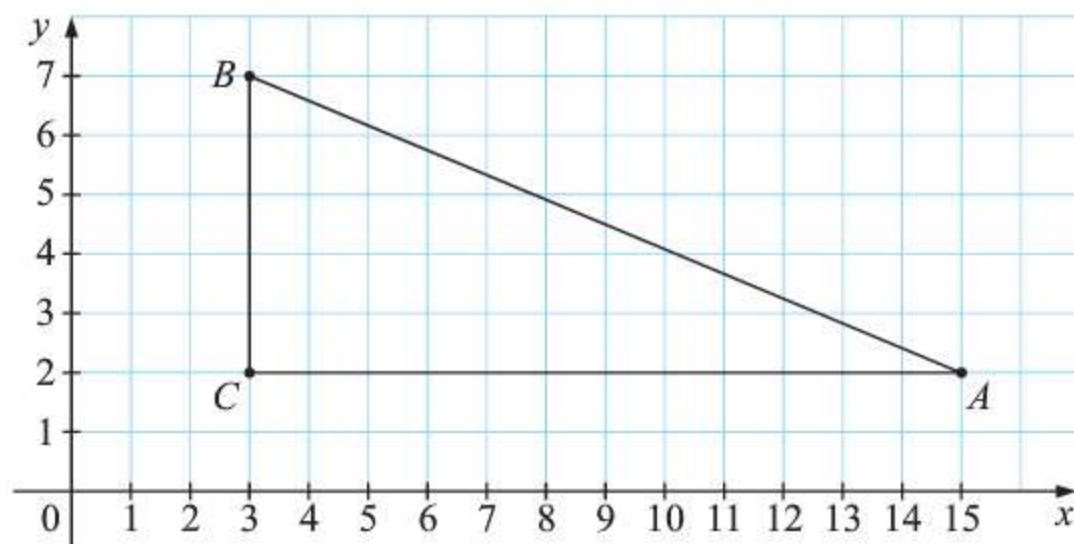
IV



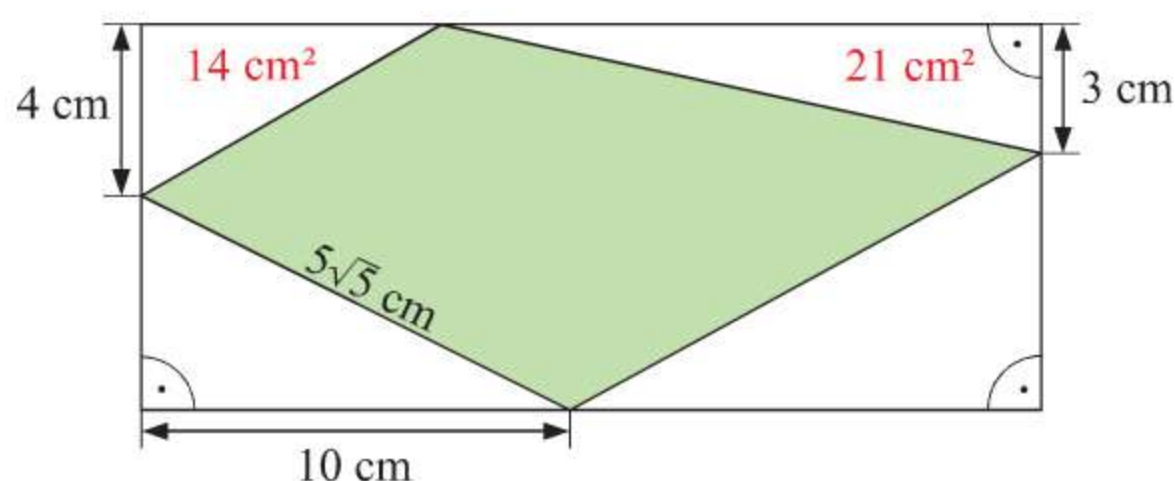
- 10** Długości dwóch boków trójkąta są równe 15 cm i 9 cm, a jego trzy wysokości wynoszą: 9 cm, 12 cm i 7,2 cm. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta. Co to za trójkąt?
- 11** Obwód trapezu równoramiennego wynosi $6(4 + \sqrt{2})$ cm. Krótsza podstawa stanowi 60% dłuższej podstawy, a kąt rozwarty trapezu ma miarę 135° . Oblicz pole tego trapezu.



- 12** W układzie współrzędnych umieszczono trójkąt prostokątny ABC . Oblicz odległość wierzchołka C trójkąta od boku AB .



- 13** Skorzystaj z danych na rysunku i oblicz pole zamalowanego czworokąta.



- 14** Bok kwadratu jest równy $4\sqrt{2}$ cm. Długość jednego boku kwadratu skrócono o 20%, a długość drugiego boku wydłużono o 40%. W wyniku tych operacji otrzymano prostokąt.

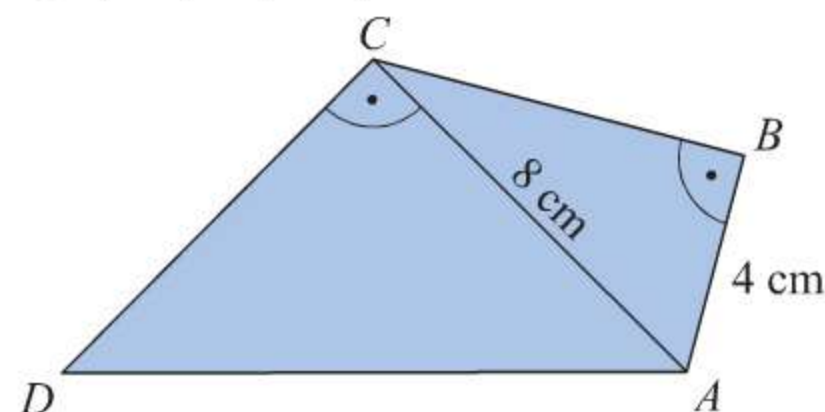
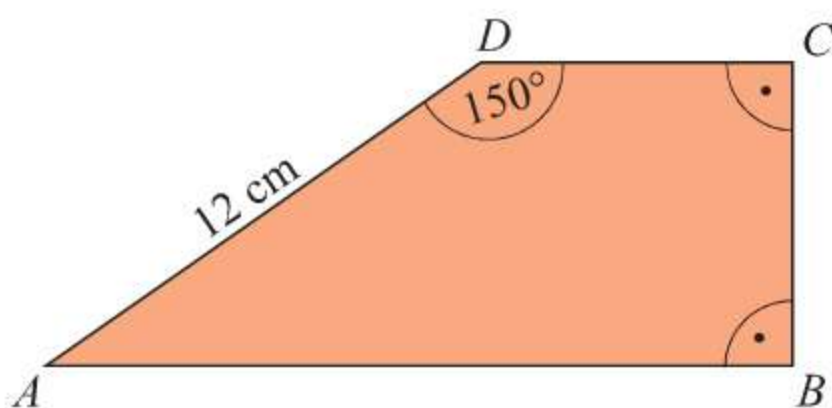
Odpowiedz na poniższe pytania. Odpowiedzi uzasadnij.

- Która figura ma większe pole i o ile?
 - Jakie wymiary ma prostokąt?
 - Jaką długość ma przekątna kwadratu, a jaką – przekątna prostokąta?
- 15** W trapezie równoramiennym kąt ostry przy podstawie ma miarę 45° , a długość ramienia wynosi 8 cm. Na krótszej podstawie zbudowano trójkąt równoboczny, którego bok ma długość równą długości tej podstawy. Otrzymano pięciokąt o obwodzie $(34 + 8\sqrt{2})$ cm. Oblicz pole trapezu.

- 16** Skorzystaj z rysunku i oblicz pole oraz obwód czworokąta $ABCD$.

a) $|BC| = |CD|$

b) $|AC| = |CD|$

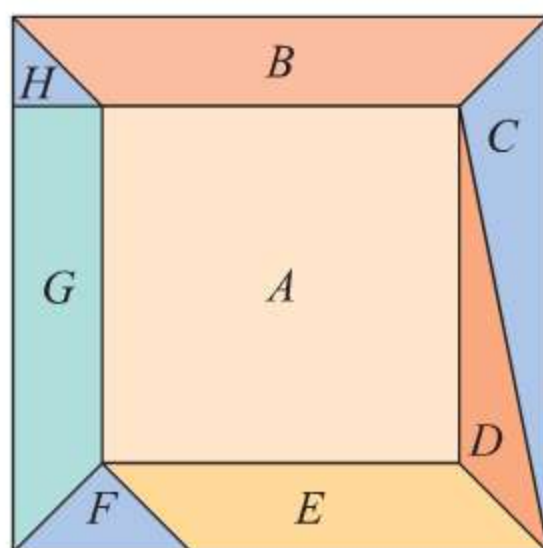




- 17** Elementy mozaiki ściennej mają kształt sześciokąta foremnego, którego dłuższa przekątna ma długość 20 cm. Jaka jest powierzchnia dziesięciu takich elementów? Ile to metrów kwadratowych? Przyjmij, że $\sqrt{3} = 1,73$. Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,1 m².

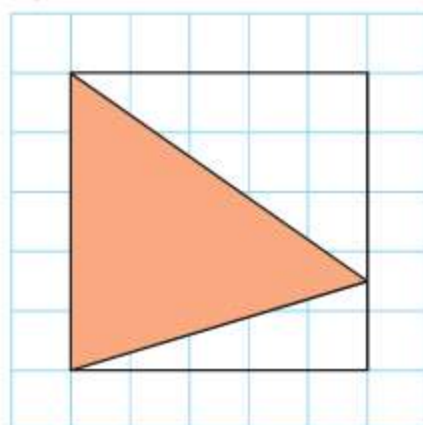


- 18** W równoległoboku kąt ostry ma miarę 30°, a długości boków to 6 cm i 9 cm. Oblicz pole tego równoległoboku oraz wysokość opuszczoną na krótszy bok.
- 19** Kwadrat o polu 100 cm² podzielono na figury A, B, C, D, E, F, G, H, tak jak na rysunku. Oblicz pole każdej z figur. Przyjmij, że pole kwadratu A wynosi 36 cm², a jego środek pokrywa się ze środkiem kwadratu o polu 100 cm².

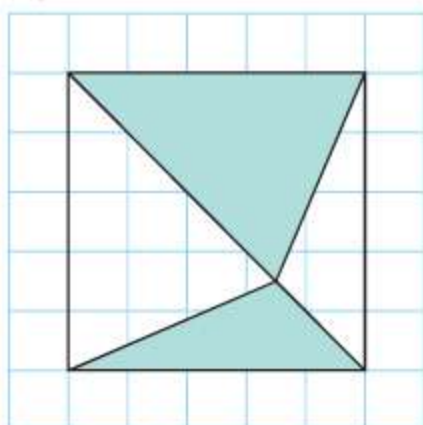


- 20** Pole kwadratu jest równe 12 cm². Oblicz pole zamalowanej figury.

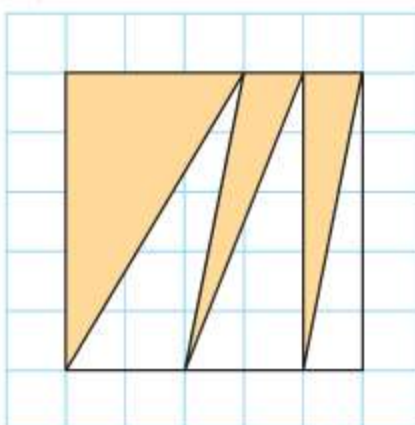
a)



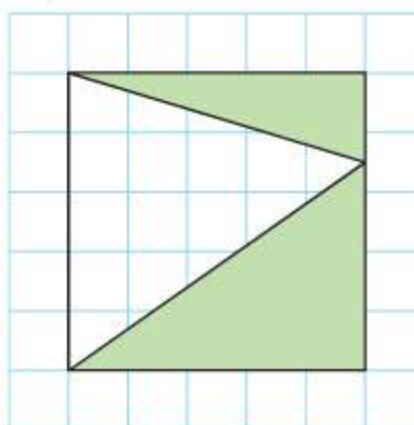
b)



c)

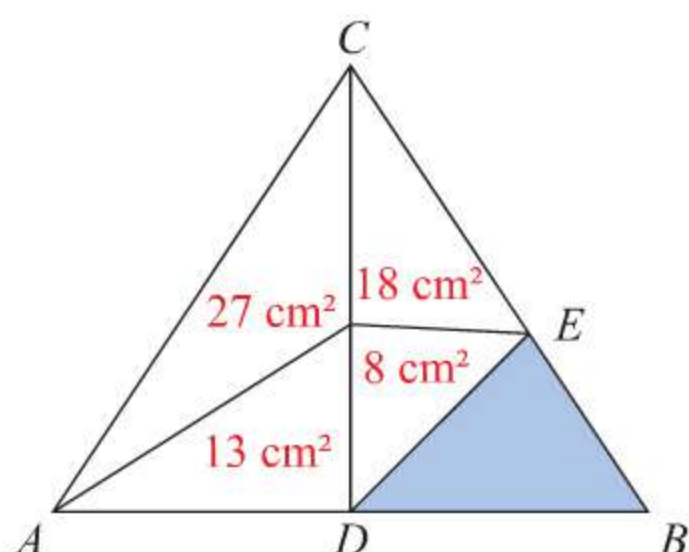


d)

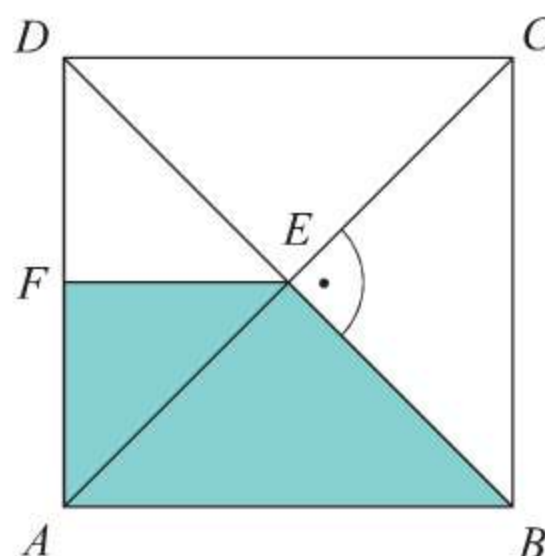


- 21** Skorzystaj z danych na rysunku i oblicz pole zamalowanej figury.

a) $|AD| = |DB|$, $|AC| = |CB|$

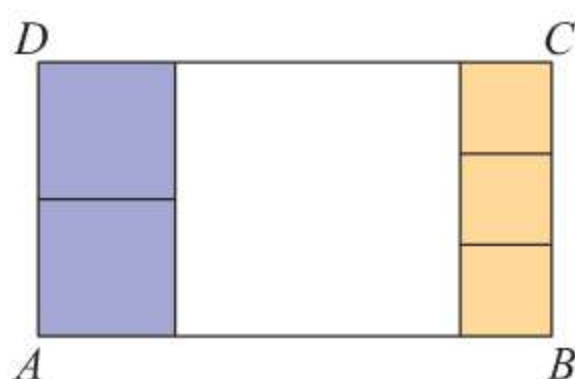


b) $|DF| = |AF|$, $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$,
 $P_{ABCD} = 48 \text{ cm}^2$

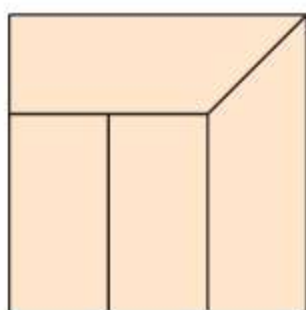




- 22** W jakim stosunku należy podzielić dłuższą podstawę trapezu równoramiennego dwoma odcinkami prostopadłymi do podstaw, aby otrzymane figury miały równe pola? Przyjmij, że dolna podstawa trapezu ma długość 24 cm, a górna – długość 12 cm.
- 23** W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na dwa trójkąty prostokątne równoramiennie. Oblicz pole tego trapezu, jeśli dłuższa podstawa ma długość 10 cm.
- 24** Przekątna prostokąta tworzy z jednym bokiem kąt 60° . Uzasadnij, że pole tego prostokąta jest równe polu trójkąta równobocznego, którego bok ma długość przekątnej tego prostokąta.
- 25** Prostokąt $ABCD$ podzielono na 6 kwadratów, tak jak na rysunku. Uzasadnij, że suma pól zamalowanych kwadratów jest mniejsza niż połowa pola prostokąta $ABCD$.



- 26** W trapezie równoramiennym podstawy mają długości 28 cm i 20 cm, a ramię ma długość 5 cm. Oblicz odległość punktu przecięcia się przekątnych tego trapezu od dłuższej podstawy.
- 27** Kwadrat pocięto na cztery części w sposób przedstawiony na rysunku 1. Z tych części ułożono pasek, tak jak pokazano na rysunku 2. Pole kwadratu jest równe 81 cm^2 . Czy obwody kwadratu i paska są jednakowe? Odpowiedź uzasadnij.



rys. 1



rys. 2

- 28** Oblicz pole trapezu równoramiennego, którego przekątne są prostopadłe, a wysokość jest równa 10 cm.

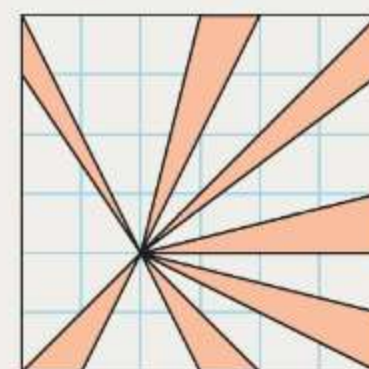
Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–2. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

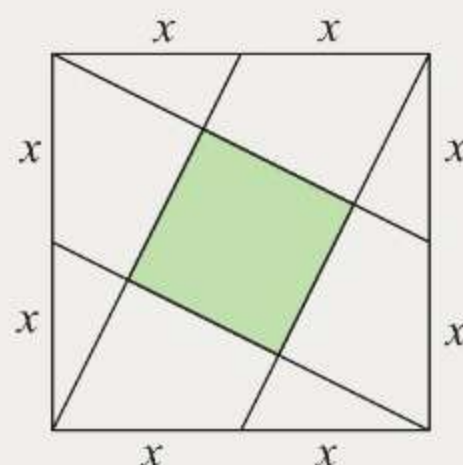
- 1 Kwadrat o polu 49 cm^2 rozcięto na dwa prostokąty. Obwód jednego z tych prostokątów wynosi 22 cm . Jaki jest obwód drugiego prostokąta?
- A. 22 cm B. 20 cm C. 18 cm D. 27 cm

- 2 Jaki jest stosunek pola figury zamalowanej do pola figury niezamalowanej?
- A. $\frac{11}{25}$ B. $\frac{11}{36}$
C. $\frac{25}{36}$ D. $\frac{25}{11}$

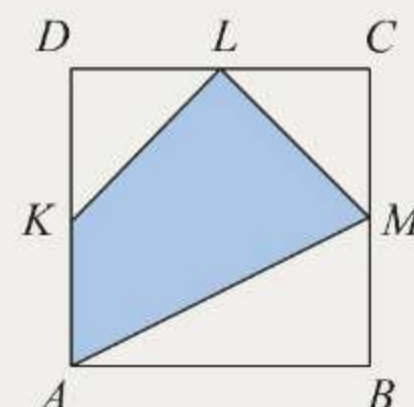


W zadaniach 3.–4. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 3 Pole zamalowanego kwadratu stanowi
- A. $\frac{1}{4}$ pola dużego kwadratu.
B. 20% pola dużego kwadratu.
C. $\frac{1}{6}$ pola dużego kwadratu.
D. więcej niż 25% pola dużego kwadratu.
- 4 Kąt ostry rombu ma miarę 45° , a jego bok ma długość a . Pole tego rombu wynosi
- A. $a^2\sqrt{3}$ B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ D. a^2



- 5 W kwadracie $ABCD$ punkty K, L, M są środkami boków, tak jak na rysunku obok. Czy pole czworokąta $AMLK$ jest dwa razy mniejsze od pola kwadratu $ABCD$? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.



A.	Tak,	ponieważ	1.	pole trójkąta KML nie jest równe polu trójkąta AKM .
B.	Nie,		2.	suma pól trójkątów ABM , KDL i LMC stanowi połowę pola kwadratu $ABCD$.



- 6 Pole kwadratowej działki budowlanej jest równe 1,21 ha. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

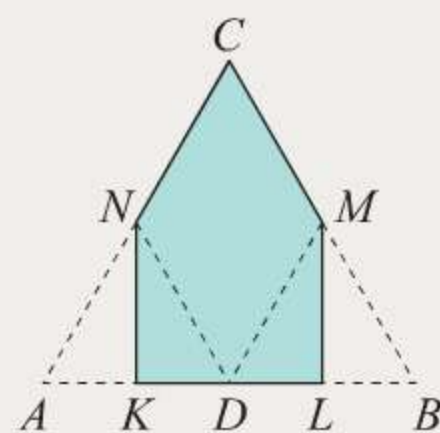
Długość boku tej działki budowlanej jest równa **A / B**.

A. 121 m **B.** 110 m

Długość boku działki na planie w skali 1 : 500 wynosi **C / D**.

C. 25 cm **D.** 22 cm

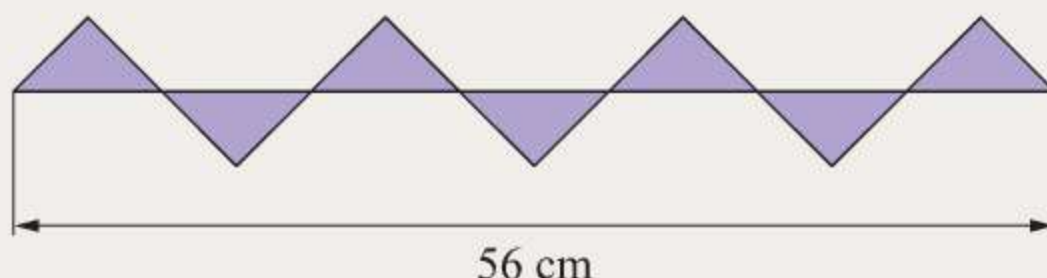
- 7 Julka wycięła z kartki trójkąt równoboczny ABC , a następnie zagięła w nim dwa narożniki tak, że wierzchołki A i B trójkąta znalazły się w środku D jego podstawy. Powstał w ten sposób pięciokąt $KLMCN$. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Pole powstałego pięciokąta jest o 25% mniejsze od pola trójkąta ABC .	P	F
Pole czworokąta $DMCN$ jest większe niż połowa pola trójkąta ABC .	P	F

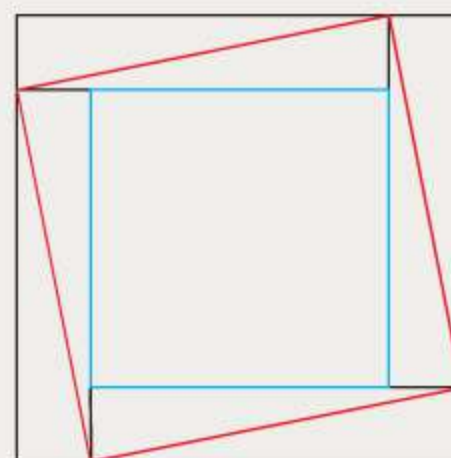
- 8 Prostokąt o wymiarach $4\sqrt{6}$ i $12\sqrt{6}$ podzielono na 12 przystających kwadratów. Oblicz długość boku kwadratu.

- 9 Figura na rysunku składa się z przystających, równoramiennych trójkątów prostokątnych.

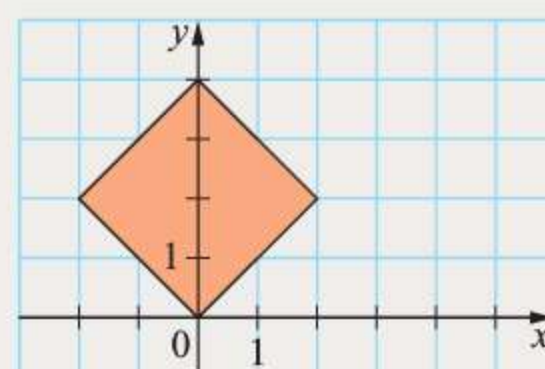


Oblicz długość przyprostokątnej trójkąta i pole figury przedstawionej na rysunku.

- 10 Pole największego kwadratu przedstawionego na rysunku wynosi 25 cm^2 , a pole najmniejszego jest równe 9 cm^2 . Wyznacz pole średniego kwadratu (o czerwonych bokach). Zapisz obliczenia.



- 11 W układzie współrzędnych narysowano kwadrat o polu równym 8, tak jak na rysunku. Czy punkt S przecięcia się przekątnych tego kwadratu ma współrzędne $(0, 2)$? Odpowiedź uzasadnij.

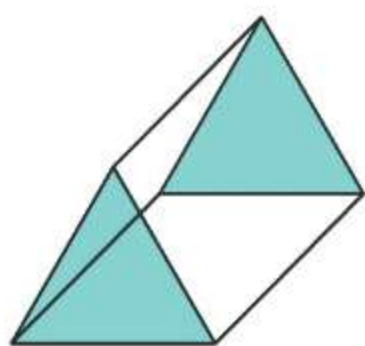


Przypomnij sobie*

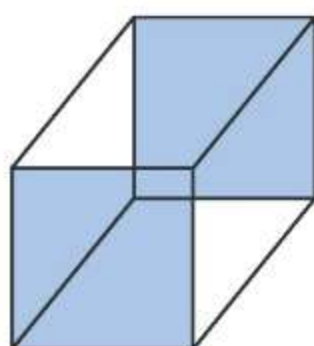
- graniastosłup prosty (s. 98)
- graniastosłup pochyły (s. 98)
- przekątna graniastosłupa (s. 99)
- wzór na długość przekątnej sześcianu (s. 100)
- ostrosłup: podstawa, ściany boczne, wierzchołek (s. 106)
- wysokość ostrosłupa, spodek wysokości (s. 106)
- rodzaje ostrosłupów (s. 106)
- czworościan foremny (s. 107)
- ostrosłup prawidłowy (s. 107)
- siatka ostrosłupa (s. 109)
- pole powierzchni ostrosłupa (s. 111)
- objętość ostrosłupa (s. 115)

* Wyjaśnienia powyższych terminów znajdziesz w tym podręczniku na podanych stronach.

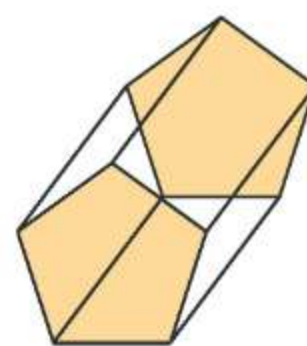
Graniastosłup prawidłowy to graniastosłup prosty, który ma w podstawie wielokąt foremny. Wszystkie ściany boczne tego graniastosłupa są przystającymi prostokątami.



Graniastosłup prawidłowy trójkątny



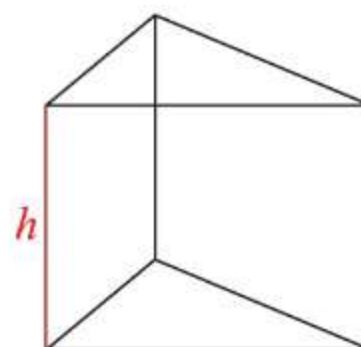
Graniastosłup prawidłowy czworokątny



Graniastosłup prawidłowy pięciokątny

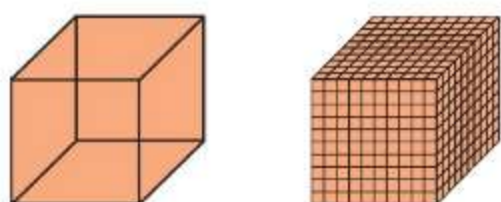
Wysokość graniastosłupa prostego to odcinek (lub jego długość) prostopadły do podstaw, którego końce leżą na tych podstawach. Wysokość jest równa długości krawędzi bocznej.

Na rysunku obok zaznaczono wysokość graniastosłupa prostego trójkątnego.



Jednostki objętości

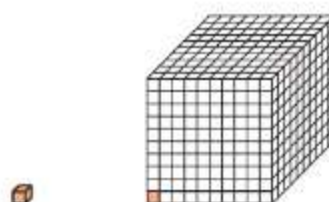
$$1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$$



$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ mm}^3 = 0,001 \text{ cm}^3$$



$$1 \text{ cm}^3 = 0,001 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 0,001 \text{ m}^3$$

Przykład

a) $12,3 \text{ dm}^3 = 12,3 \cdot 1 \text{ dm}^3 = 12,3 \cdot 1000 \text{ cm}^3 = 12\,300 \text{ cm}^3$

b) $2315 \text{ cm}^3 = 2315 \cdot 1 \text{ cm}^3 = 2315 \cdot 0,001 \text{ dm}^3 = 2,315 \text{ dm}^3$

Jednostki pojemności, np. litr (l), hektolitr (hl), mililitr (ml)

$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$

$1 \text{ hl} = 100 \text{ l} \quad 1 \text{ l} = 0,01 \text{ hl}$

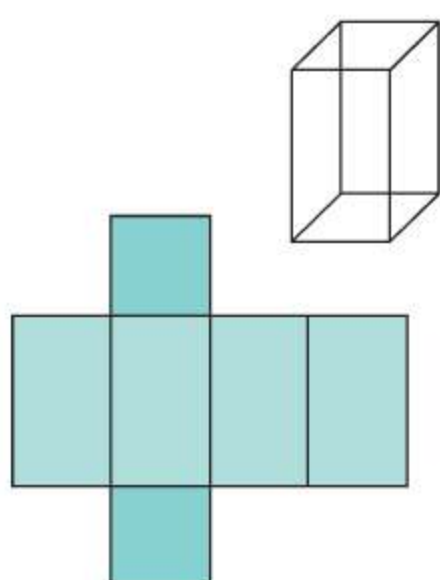
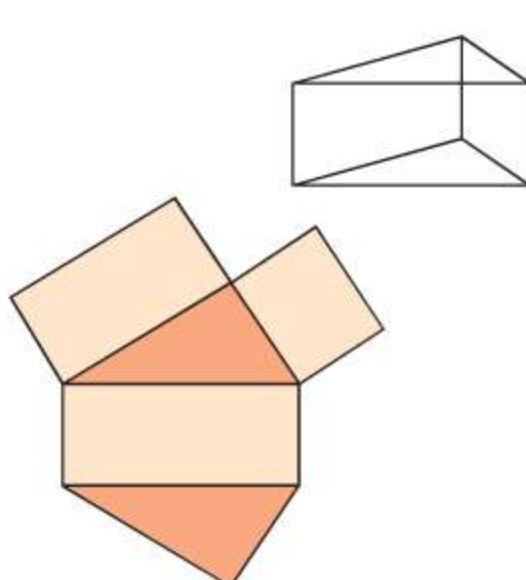
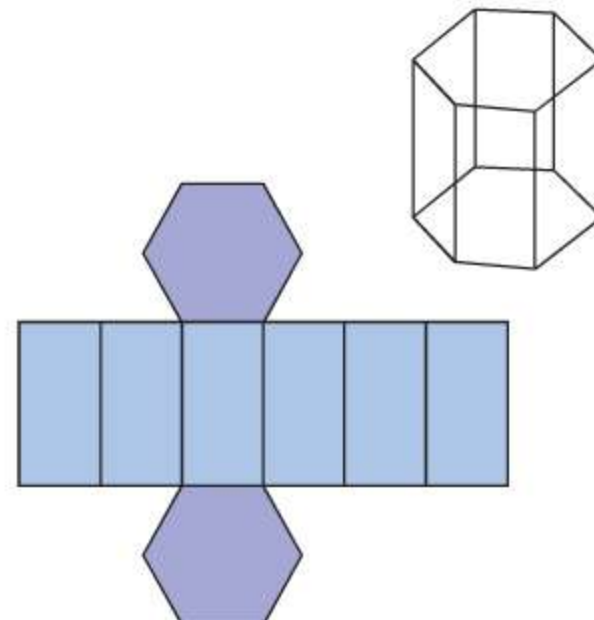
$1 \text{ l} = 1000 \text{ ml} \quad 1 \text{ ml} = 0,001 \text{ l}$

Przykład

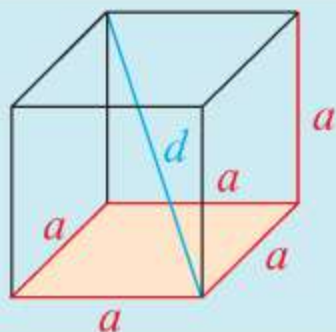
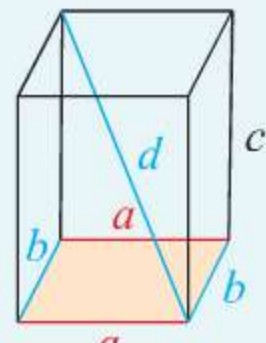
a) $4200 \text{ dm}^3 = 4200 \text{ l} = 4200 \cdot 0,01 \text{ hl} = 42 \text{ hl}$

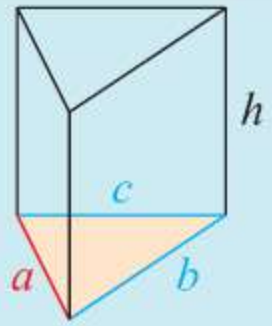
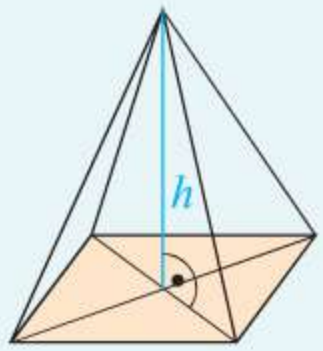
b) $3,2 \text{ dm}^3 = 3,2 \text{ l} = 3,2 \cdot 1 \text{ l} = 3,2 \cdot 1000 \text{ ml} = 3200 \text{ ml}$

Siatka graniastoslupa prostego to wielokąt otrzymany w wyniku rozcięcia powierzchni graniastoslupa wzdłuż pewnych krawędzi i rozłożenia go na płaszczyźnie, np.

Siatka
prostopadłościanuSiatka graniastosłupa
prostego trójkątnegoSiatka graniastosłupa
prawidłowego sześciokątnego

Pola powierzchni i objętości graniastoslupów prostych oraz ostrosłupów

Nazwa bryły	Bryła	Pole powierzchni całkowitej (P_c)	Objętość (V)	Długość przekątnej bryły
sześcian		$P_p = a^2$ $P_c = 6 \cdot P_p$ $P_c = 6a^2$	$V = a^3$	$d = a\sqrt{3}$
prostopadłościan		$P_p = a \cdot b$ $P_b = (2a + 2b) \cdot c$ $P_c = 2P_p + P_b$ $P_c = 2ab + (2a + 2b) \cdot c$	$V = a \cdot b \cdot c$	$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

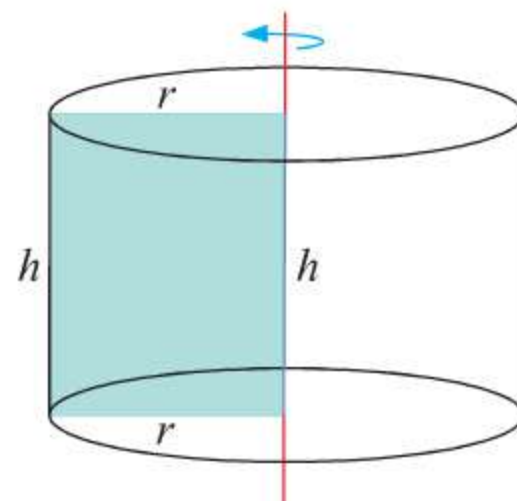
Nazwa bryły	Bryła	Pole powierzchni całkowitej (P_c)	Objętość (V)	Długość przekątnej bryły
graniastosłup prosty		$P_b = L \cdot h$ $P_c = 2P_p + P_b$	$V = P_p \cdot h$	—
ostrosłup		$P_c = P_p + P_b$	$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$	—
Oznaczenia: P_p – pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej, h – wysokość bryły, a, b, c – długości krawędzi, L – obwód podstawy.				

Bryły obrotowe powstają w wyniku obrotu pewnej figury płaskiej dookoła prostej. Prosta tę nazywamy osią obrotu.

Walec

Jeśli prostokąt obrócimy o kąt 360° dookoła prostej zawierającej jego bok, to otrzymamy walec.

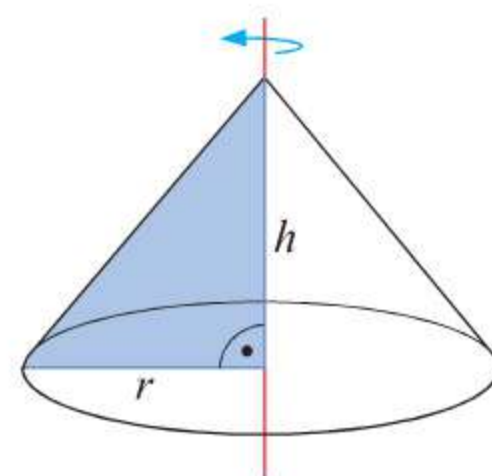
Dwa koła o promieniu r wyznaczone przez obrót boków r prostokąta, prostopadłych do osi obrotu, leżą w płaszczyznach równoległych. Koła te nazywamy podstawami walca. Bok h prostokąta nazywamy wysokością walca.



Stożek

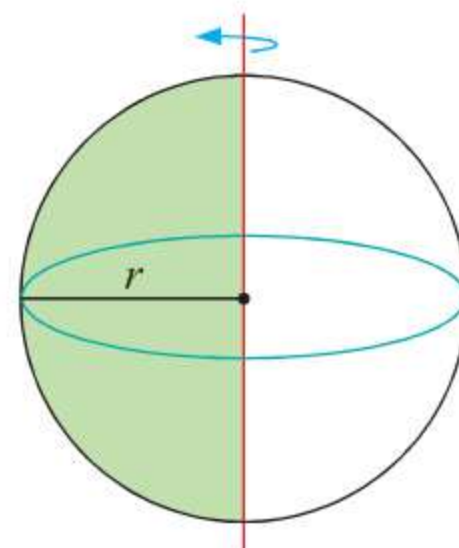
Jeśli trójkąt prostokątny obrócimy o kąt 360° dookoła prostej zawierającej przyprostokątną, to otrzymamy stożek.

W wyniku obrotu trójkąta przyprostokątna o długości r zakreśla koło, które nazywamy podstawą stożka. Drugą przyprostokątną nazywamy wysokością stożka.



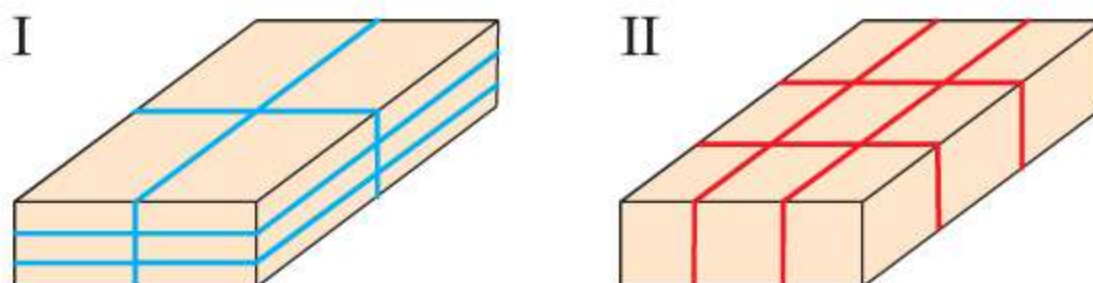
Kula

Jeśli półkole obrócimy o kąt 360° dookoła prostej zawierającej średnicę, to otrzymamy kulę.

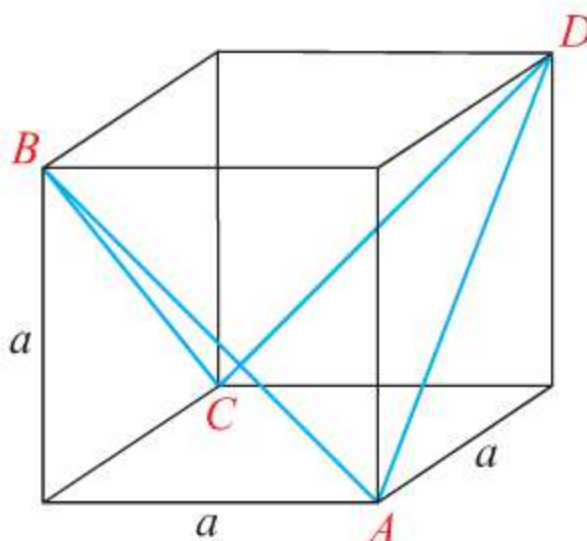


1. Graniastopy

- 1 Prostopadłościan ma wymiary $3\text{ m} \times 4\text{ m} \times 12\text{ m}$. W jakiej odległości od podstawy o wymiarach $3\text{ m} \times 4\text{ m}$ leży punkt przecięcia przekątnych tego prostopadłościanu?
- 2 Jednakowe prostopadłościenne paczki trzeba obwiązać plastikową taśmą, tak jak pokazano na rysunku. Na obwiązanie której paczki trzeba zużyć więcej taśmy, jeśli długość paczki jest równa 50 cm , szerokość – 35 cm , a wysokość – 10 cm ?

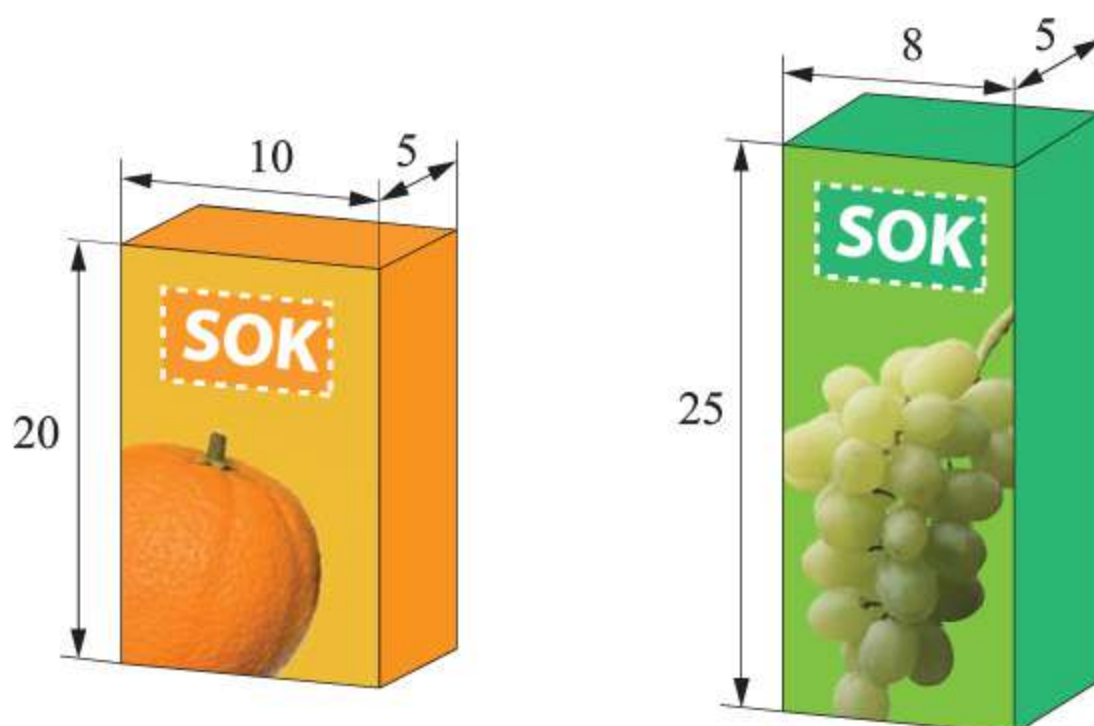


- 3 Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość sześcianu, którego przekątna ma podaną długość.
a) $12\sqrt{3}\text{ cm}$ b) $5\sqrt{3}\text{ m}$ c) $60\sqrt{3}\text{ mm}$
Jaką pojemność miałyby naczynie w kształcie tego sześcianu? Wyraż ją w litrach.
- 4 Prostopadłościan ma wymiary $6\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 12\text{ cm}$. Oblicz sumę długości przekątnych trzech jego ścian o różnych wymiarach.
- 5 W sześcianie przedstawionym na rysunku zaznaczono pewne odcinki i wierzchołki. Narysuj siatkę tego sześcianu i zaznacz na niej wyróżnione odcinki oraz wierzchołki. Ile wynosi suma długości zaznaczonych odcinków?

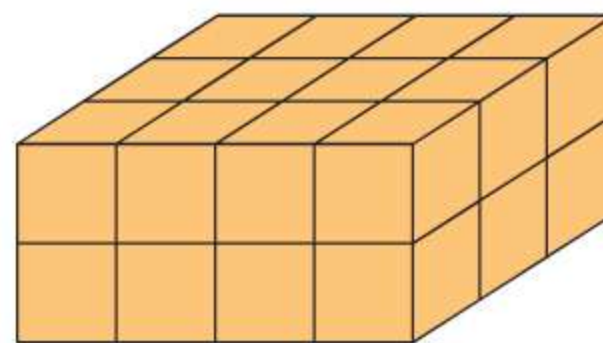


- 6 Pole powierzchni całkowitej graniastopy prawidłowego czworokątnego wynosi 608 cm^2 . Oblicz objętość tego graniastopy, jeśli krawędź jego podstawy ma długość 8 cm .
- 7 Kilogram soli wypełnia pudełko w kształcie prostopadłościanu o podstawie kwadratu do $\frac{2}{3}$ wysokości. Oblicz objętość soli, jeśli wiadomo, że wymiary pudełka wynoszą $9\text{ cm} \times 9\text{ cm} \times 12\text{ cm}$. Czy ta ilość soli zmieści się w litrowym słoiku?
- 8 Wysokość prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest równa $11,7\text{ cm}$. Przekątna podstawy ma długość $5\sqrt{2}\text{ cm}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego prostopadłościanu.

- 9 Na rysunku przedstawiono dwa rodzaje kartonów na soki owocowe produkowane przez pewną firmę. Na który karton trzeba zużyć więcej materiału i o ile więcej, jeżeli na zakładki do sklejania trzeba przeznaczyć 10% powierzchni opakowania? Wymiary na rysunku są podane w centymetrach.



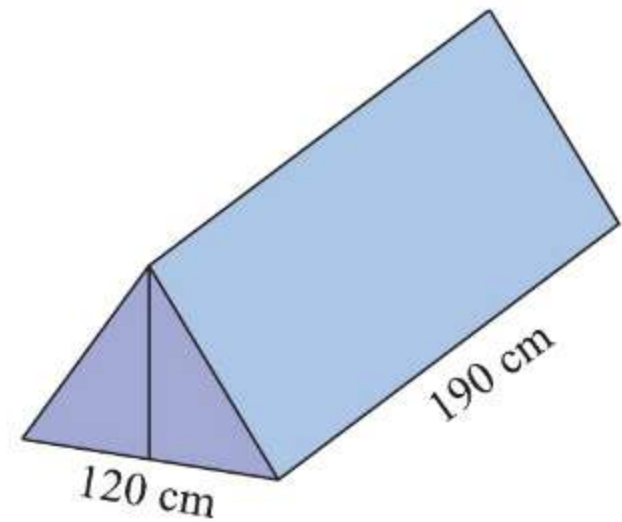
- 10 Drugą pod względem długości rzeką na świecie, po Nilu, jest Amazonka. Rzeka ta płynie w Ameryce Południowej i wpada do Atlantyku, wlewając do niego średnio $220\,000\text{ m}^3$ wody w ciągu sekundy. Oblicz, ile hektolitrów słodkiej wody z Amazonki wpływa w ciągu doby do Atlantyku. Wynik zapisz w notacji wykładniczej.
- 11 Akwarium ma kształt sześcianu. Suma długości wszystkich jego krawędzi wynosi 480 cm . Ile litrów wody trzeba wlać do tego akwarium, aby wypełnić je do $\frac{3}{4}$ wysokości?
- 12 Dwa graniastosłupy prawidłowe czworokątne mają jednakowe wysokości równe h . Krawędź podstawy pierwszego graniastosłupa jest trzy razy dłuższa od krawędzi a podstawy drugiego graniastosłupa. Ile razy objętość pierwszego graniastosłupa jest większa od objętości drugiego? Oblicz różnicę objętości tych graniastosłupów.
- 13 Bryłę przedstawioną na rysunku zbudowano z sześciąt o krawędzi długości 5 cm . Które sześciany trzeba wyjąć z górnej warstwy tej bryły, aby jej objętość zmniejszyła się o 500 cm^3 , a pole powierzchni całkowitej nie uległo zmianie?



- 14 Naczynie w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $7\text{ cm} \times 5\text{ cm} \times 15\text{ cm}$ jest w 40% wypełnione wodą. Wrzucono do niego kamień i poziom wody podniósł się do wysokości 9 cm . Jaką objętość ma kamień?
- 15 Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok, którego boki mają długości 4 cm i 6 cm , a miara jednego z kątów wynosi 30° . Oblicz objętość tego graniastosłupa, przy założeniu, że jego pole powierzchni całkowitej jest równe 72 cm^2 .

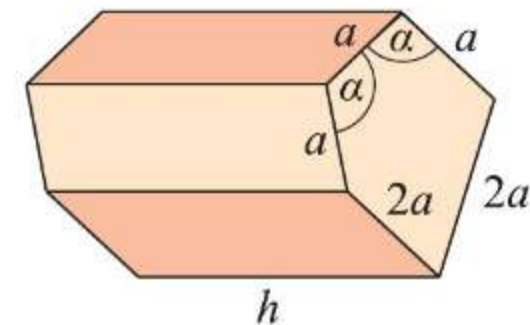


- 16** Wysokość dwuosobowego namiotu jest równa 1 m. Skorzystaj z danych na rysunku i oblicz, ile metrów sześciennych powietrza jest w tym namiocie.

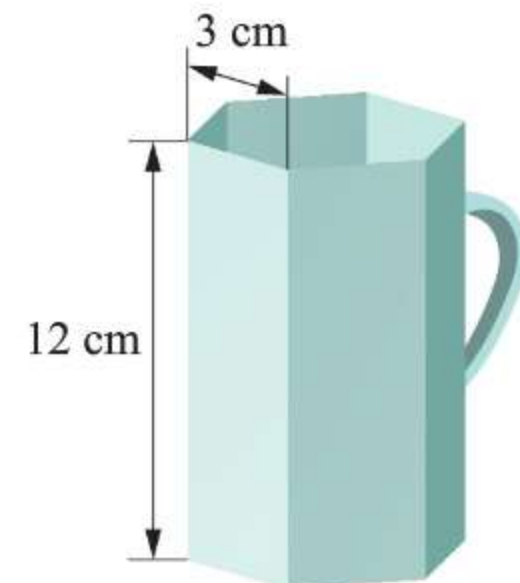


- 17** Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy długości x cm i wysokości bryły równej $(x + 1)$ cm.

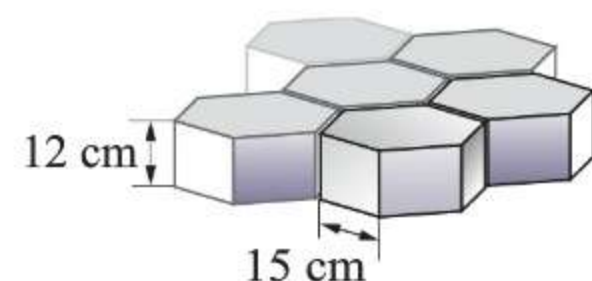
- 18** Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku. Przyjmij, że $a = 4$ cm, $\alpha = 120^\circ$, $h = 8$ cm.



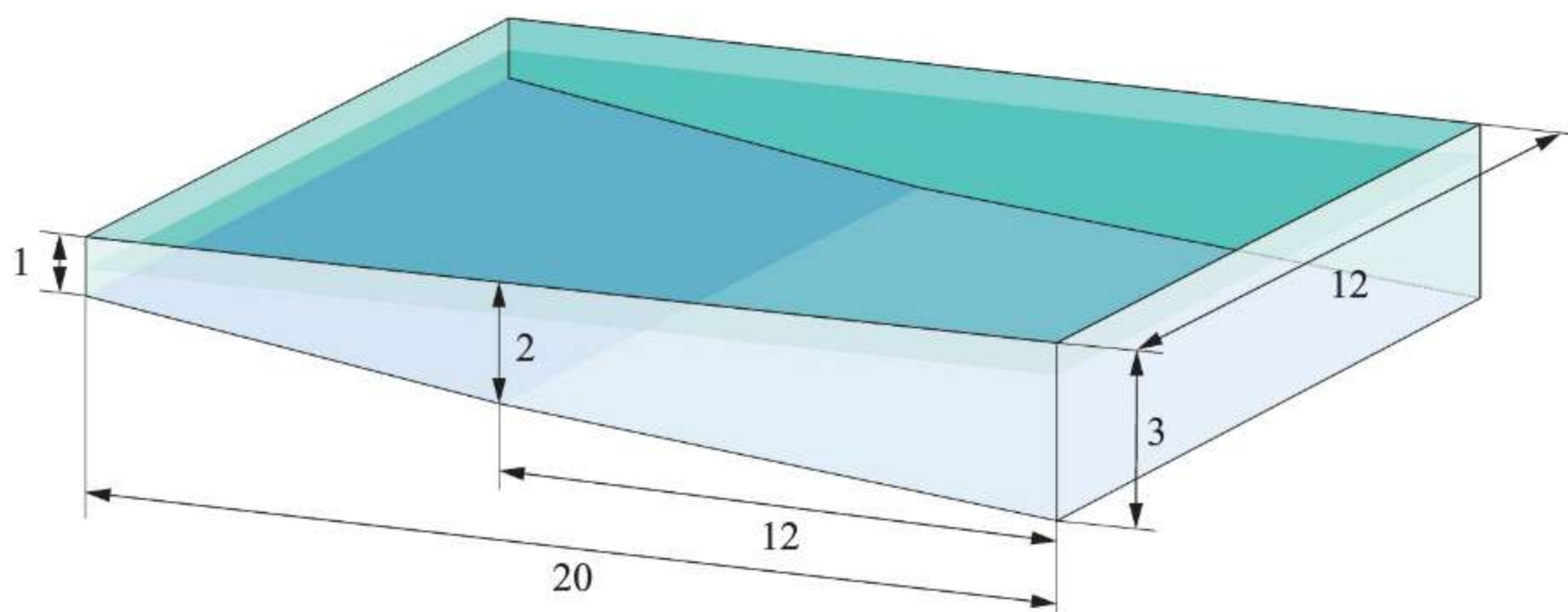
-  **19** Tomek wypija codziennie rano 250 ml mleka. Ostatnio dostał od brata na urodziny kubek, taki jak na rysunku. Czy w tym kubku zmieści się dzienna porcja mleka?



-  **20** Trylinka to sześciokątna kostka betonowa służąca do wykładania dróg. Jest ona wykonana z betonu o gęstości równej $2,3 \text{ g/cm}^3$. Ile kostek maksymalnie może jednorazowo przewieźć ciężarówka o ładowności 2 t? Przyjmij, że $\sqrt{3} = 1,7$.



- 21** W basenie przedstawionym na rysunku tafla wody znajduje się 0,5 m poniżej krawędzi basenu. Ile hektolitrów wody jest w tym basenie? Wszystkie wymiary są podane w metrach.





- 22** W kuchni domku letniskowego pani Ani jest kosz na śmieci w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $30\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 40\text{ cm}$, a w ogrodzie – kosz w kształcie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o wysokości $0,5\text{ m}$ i krawędzi podstawy równej 20 cm . W sklepach są dostępne worki na śmieci o pojemnościach: 20 l , 25 l , 30 l , 35 l , 60 l , 120 l , 240 l . Jakie worki do poszczególnych pojemników na śmieci powinna kupić pani Ania, jeśli pojemność worka powinna być trochę większa od pojemności kosza?



- 23** Ojciec Basi postanowił zbudować na działce komórkę na narzędzia ogrodnicze, taką jak przedstawiono na rysunku. Od sąsiada dostał drzwi o szerokości 90 cm i wysokości 2 m . Ile metrów kwadratowych desek i ile rolek papy musi kupić na tę komórkę, jeśli dach trzeba pokryć papą przynajmniej dwa razy? Papę sprzedaje się w rolkach o szerokości 1 m i długości 9 m . Dodaj po 10% desek i 10% papy na ubytki i zakładki.





Zadania sprawdzające

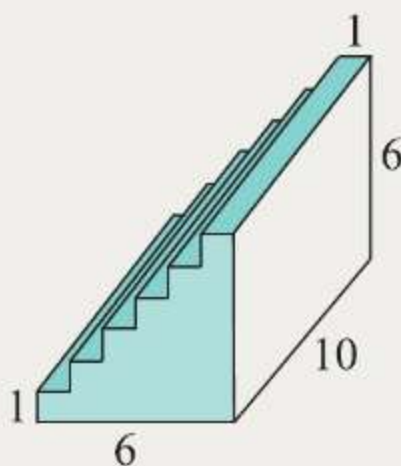
Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–4. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Podstawą graniastosłupa prostego jest siedmiokąt foremny, którego bok ma długość $(x + 5)$ dm. Wysokość graniastosłupa jest o 2 cm dłuższa od krawędzi podstawy. Suma długości wszystkich krawędzi tej bryły wynosi
- A. $(21x + 119)$ cm B. $(14x + 84)$ cm
C. $(210x + 1064)$ cm D. $(210x + 840)$ cm

- 2 Długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach $5 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} \times 13 \text{ cm}$ jest równa
- A. 13 cm B. $13\sqrt{2}$ cm C. 17 cm D. $\sqrt{17}$ cm

- 3 Objętość graniastosłupa przedstawionego na rysunku jest równa
- A. 360 B. 210 C. 180 D. 220



- 4 Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy a i objętości V jest równe
- A. $a^2 + \frac{V}{a}$ B. $2a^2 + \frac{2V}{a}$ C. $2a^2 + 4a^3V$ D. $2a^2 + \frac{4V}{a}$

W zadaniach 5.–6. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 5 Pole podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 144 cm^2 . Kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną ma miarę 30° . Ile wynosi objętość tego graniastosłupa?
- A. $1728\sqrt{3} \text{ cm}^3$ B. 864 cm^3 C. $432\sqrt{3} \text{ cm}^3$ D. $864\sqrt{3} \text{ cm}^3$
- 6 W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym wysokość jest o 20% dłuższa od krawędzi jego podstawy. Objętość graniastosłupa jest równa $115,2\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Ile wynosi pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa?
- A. $19,2 \text{ cm}^2$ B. 96 cm^2 C. $115,2 \text{ cm}^2$ D. $76,8 \text{ cm}^2$

- 7 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

W każdym graniastosłupie ściany boczne są prostokątami.	P	F
Jeżeli graniastosłup jest prawidłowy, to wszystkie jego krawędzie są równej długości.	P	F
W każdym graniastosłupie liczba jego krawędzi jest o 50% większa od liczby jego wierzchołków.	P	F
Przekątną graniastosłupa jest każdy odcinek łączący jego dwa wierzchołki, które nie należą do jednej krawędzi.	P	F

- 8 Długość każdej krawędzi sześcianu wydłużono o 1 cm, co spowodowało zwiększenie jego pola powierzchni całkowitej o 66 cm^2 . Czy objętość sześcianu wzrosła więcej niż dwukrotnie? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	pierwotna objętość stanowi więcej niż 60% nowej objętości.
			2.	nowa objętość stanowi ok. 170% pierwotnej objętości.
B.	Nie,		3.	długość każdej krawędzi wzrosła więcej niż 20%.

- 9 Długość krawędzi bocznej graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego stanowi 175% długości krawędzi jego podstawy równej $x \text{ dm}$. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa **A / B**.

A. $137,5x \text{ cm}$ **B.** $187,5x \text{ cm}$

Pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa wynosi **C / D**.

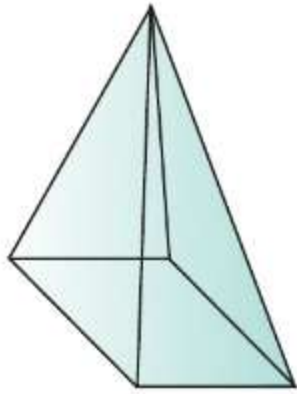
C. $87,5x^2 \text{ cm}^2$ **D.** $875x^2 \text{ cm}^2$

- 10 W akwarium mającym kształt prostopadłościanu o wymiarach podstawy $1 \text{ m} \times 30 \text{ cm}$ i wysokości 50 cm woda sięgała do połowy jego wysokości. Dodano 30 l wody. Do jakiej wysokości sięga teraz woda w akwarium? Zapisz obliczenia.
- 11 Graniastosłup o objętości 840 cm^3 ma w podstawie trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 7 cm i 24 cm. Ile wynosi pole powierzchni całkowitej graniastosłupa? Zapisz obliczenia.
- 12 Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 112. Jego krawędź boczna jest o 25% dłuższa od krawędzi podstawy. Wykaż, że wymiary tego graniastosłupa są liczbami naturalnymi.

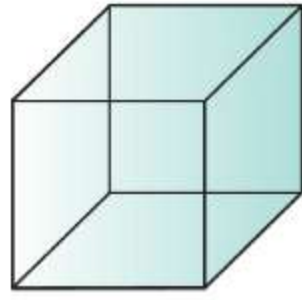
2. Ostrosłupy

- 1 Na którym rysunku przedstawiono czworościan?

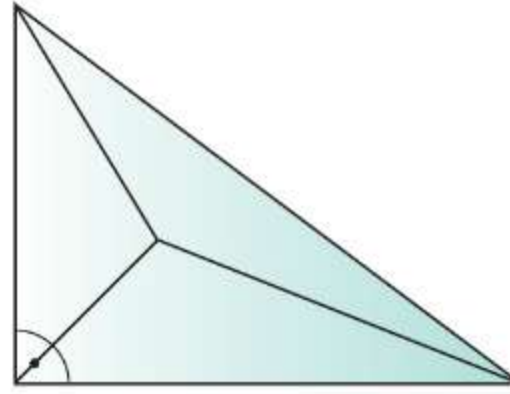
I



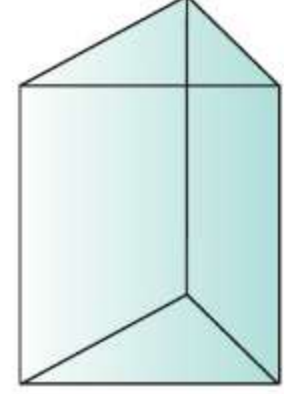
II



III



IV



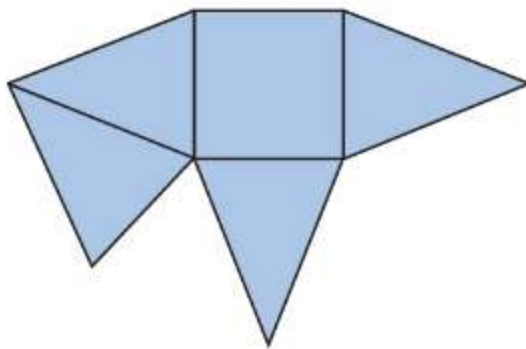
- 2 Przepisz zdania do zeszytu i uzupełnij luki.

- I. Ostrosłup pięciokątny ma krawędzi, wierzchołków oraz ścian.
- II. Ostrosłup sześciokątny ma tyle samo krawędzi co graniastosłup .
- III. W dowolnym ostrosłupie liczba jego ścian jest zawsze o większa od liczby jego wierzchołków podstawy.
- IV. Czworościan to taka figura przestrzenna, której każda ściana jest .
- V. Graniastosłup dwunastokątny ma tyle samo ścian co ostrosłup .

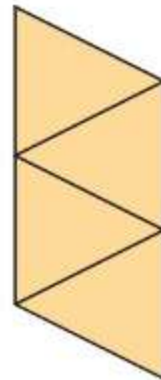
- 3 Podstawą ostrosłupa jest trapez. Oblicz sumę miar kątów wewnętrznych ścian bocznych tego ostrosłupa.

- 4 Ustal, na których rysunkach przedstawiono siatki ostrosłupów, i uzasadnij, dlaczego pozostałe rysunki nie są siatkami ostrosłupów.

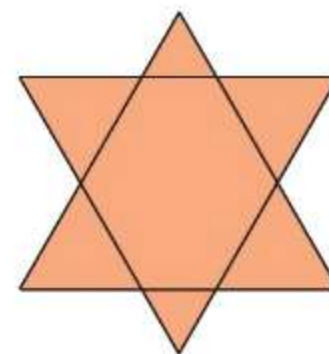
I



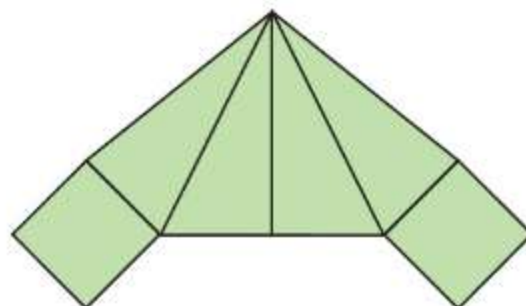
II



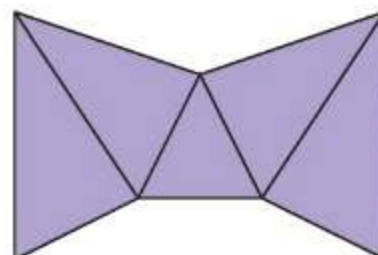
III



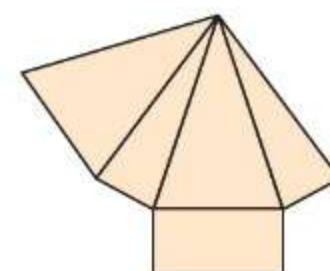
IV



V

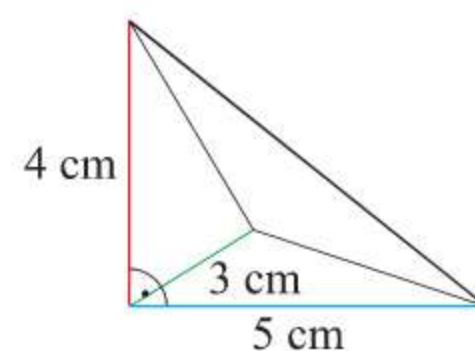


VI



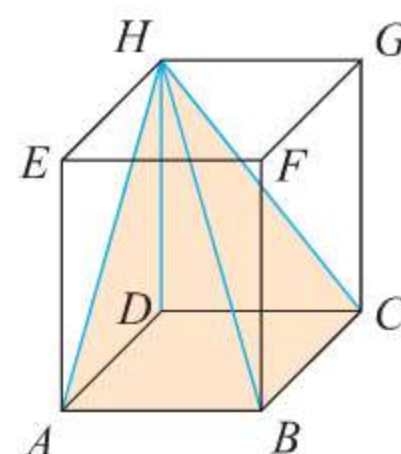
- 5 Ile blachy potrzeba na pokrycie dachu, który ma kształt powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 10 m i wysokości ściany bocznej 6 m, jeżeli ubytki blachy podczas budowy stanowią ok. 18% powierzchni dachu?

- 6 Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 611 cm^2 , a pole jego powierzchni całkowitej – 900 cm^2 . Jaka długość ma krawędź podstawy tego ostrosłupa?
- 7 Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o polu podstawy 49 cm^2 , którego wysokość ściany bocznej jest o 3 cm dłuższa od krawędzi podstawy.
- 8 Jak zmieni się pole powierzchni czworościanu foremnego, jeśli podwoimy długość każdej jego krawędzi? Odpowiedź uzasadnij.
- 9 Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy długości 10 cm i krawędzi bocznej o 50% dłuższej.
- 10 Pole jednej ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego, równe 70 cm^2 , stanowi $0,4$ pola podstawy. Ile wynosi pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa?
- 11 Piramida Słońca, znajdująca się w środkowym Meksyku, ma 65 m wysokości. Jej podstawą jest prostokąt o bokach długości 225 m i 220 m . Przyjmij, że piramida ta jest ostrosłupem czworokątnym, i oblicz jej objętość.
- 12 Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości 8 cm i przeciwprostokątnej o 9 cm dłuższej. Jedna z krawędzi ostrosłupa, długości 3 dm , jest prostopadła do dwóch krawędzi podstawy. Oblicz objętość tej bryły.
- 13 W ostrosłupie, którego podstawą jest równoległobok o bokach długości 12 cm i 6 cm oraz kącie ostrym między nimi 30° , jedna z krawędzi bocznych, długości 20 cm , jest prostopadła do podstawy. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
- 14 Objętość ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego jest równa 63 cm^3 , a wysokość ma 9 cm . Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa.
- 15 Oblicz objętość ostrosłupa trójkątnego, w którym z jednego wierzchołka wychodzą trzy prostopadłe krawędzie o długościach: 3 cm , 4 cm , 5 cm .
- 16 Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, jeśli jego wysokość wynosi 8 cm , a krawędź podstawy jest równa 12 cm .





- 17** Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy ma długość 6 cm, a wysokość ściany bocznej jest równa 5 cm.
- 18** Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $12\sqrt{2}$ cm, a krawędź boczna – 13 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
- 19** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy jest równa $8\sqrt{2}$ cm, a krawędź boczna ma 12 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
- 20** Obwody podstaw ostrosłupa prawidłowego trójkątnego i ostrosłupa prawidłowego czworokątnego są takie same, równe 42 cm. Bryły te mają jednakowe wysokości. Który ostrosłup ma większą objętość? Ile razy większą?
- 21** Podstawy ostrosłupa i graniastoslupa są wielokątami przystającymi, a objętość ostrosłupa jest dwa razy większa od objętości graniastoslupa. Oblicz stosunek wysokości ostrosłupa do wysokości graniastoslupa.
- 22** W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 6 cm, a krawędź boczna 8 cm. Jeden wierzchołek górnej podstawy graniastoslupa połączono z wierzchołkami podstawy dolnej, tak jak na rysunku. Oblicz:
 a) długości krawędzi bocznych powstałego ostrosłupa,
 b) pole powierzchni całkowitej powstałego ostrosłupa,
 c) ile razy objętość powstałego ostrosłupa jest mniejsza od objętości graniastoslupa.
- 23** Uzasadnij, że w każdym ostrosłupie prawidłowym pole powierzchni bocznej jest równe połowie iloczynu obwodu podstawy i wysokości ściany bocznej.
- 24** Cztery wierzchołki sześcianu, którego krawędź ma długość a , połączono odcinkami tak, że powstał czworościan foremny. Na ile części rozpadnie się sześcian po wycięciu z niego tego czworościanu? Oblicz objętość każdej z tych części.



Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–4. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

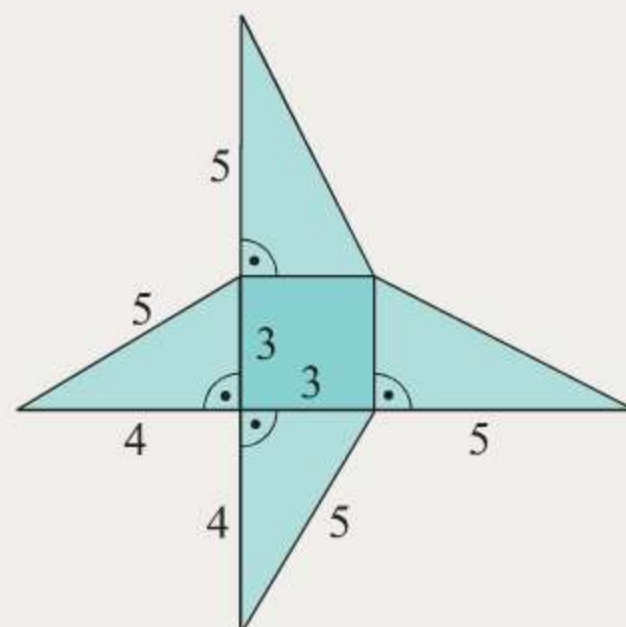
- 1 W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość x dm, a krawędź boczna jest o $(x + 3)$ cm dłuższa. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa
 A. $(9x + 9)$ cm B. $9(x + 1)$ dm C. $(33x + 9)$ cm D. $0,9(7x + 1)$ dm
- 2 Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi długości $3\sqrt{3}$ cm jest równe
 A. $7\frac{1}{4}\sqrt{3}$ cm² B. $27\sqrt{3}$ cm² C. $9\sqrt{3}$ cm² D. 81 cm²
- 3 Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o obwodzie 56 cm. Stosunek długości jego boków jest równy 2 : 5. Jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy i ma długość 21 cm. Objętość ostrosłupa wynosi
 A. $1,12$ dm³ B. $3,36$ dm³ C. 112 dm³ D. $11,2$ dm³
- 4 Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź podstawy ma długość $6x$, a objętość jest równa V , wynosi
 A. $\frac{\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{V}{x^2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{V}{x^2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{V}{x^2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{V}{x^2}$
- 5 Krawędź sześcianu ma długość 2 cm, a krawędź czworościanu foremnego jest równa 4 cm. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
 Suma długości krawędzi obu brył jest równa **A / B**.
 A. 56 cm B. 48 cm
 Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest **C / D** od pola powierzchni całkowitej czworościanu.
 C. mniejsze D. większe
- 6 Dane są dwa ostrosłupy: prawidłowy czworokątny, w którym krawędź podstawy jest równa $3x$, a wysokość jest o $\frac{2}{3}$ długości krawędzi dłuższa, oraz ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy $6x$ oraz wysokości dwukrotnie mniejszej. Czy ostrosłup czworokątny ma większą objętość? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$9\sqrt{3}x^3 < 15x^3$.
			2.	$3\sqrt{3} > 5$.
B.	Nie,		3.	$18\sqrt{3}x^3 > 15x^3$.

W zadaniach 7.–8. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

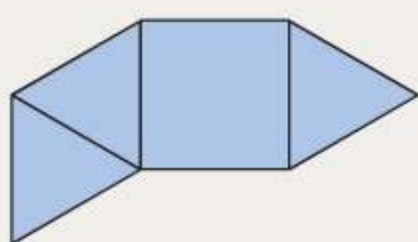
- 7 Do sześciennego naczynia, którego krawędź ma długość 12 cm, napełnionego wodą do $\frac{2}{3}$ wysokości, wrzucono bryłę w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 8 cm i wysokości 9 cm. O ile milimetrów podniesie się poziom wody w naczyniu?
- A. Mniej niż 12. B. Więcej niż 13. C. Dokładnie o 12. D. Dokładnie o 13.

- 8 Jaką objętość ma ostrosłup, którego siatkę przedstawiono na rysunku, jeśli wszystkie wymiary podano tam w centymetrach?
- A. $0,012 \text{ dm}^3$
 B. $0,015 \text{ dm}^3$
 C. $1,2 \text{ dm}^3$
 D. $1,5 \text{ dm}^3$

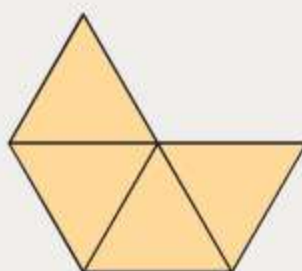


- 9 Figury przedstawione na rysunku są złożone z kwadratów i trójkątów równobocznych. Aby otrzymać z nich siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, należy dorysować jeden trójkąt równoboczny lub jeden kwadrat. Zastanów się, czy z każdej figury można w opisany sposób otrzymać siatkę ostrosłupa.

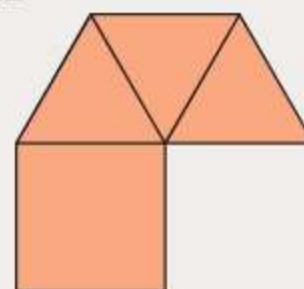
I



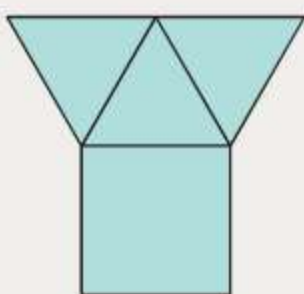
II



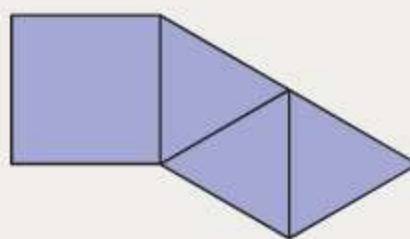
III



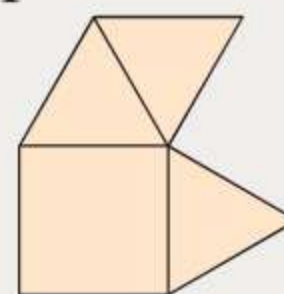
IV



V



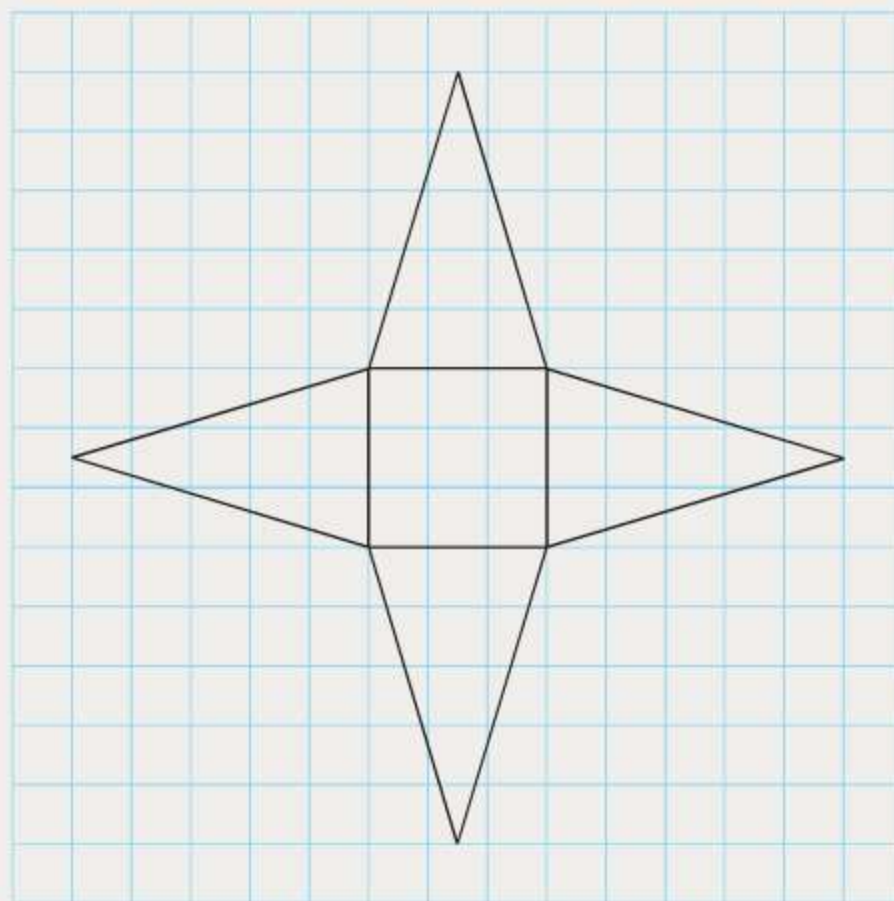
VI



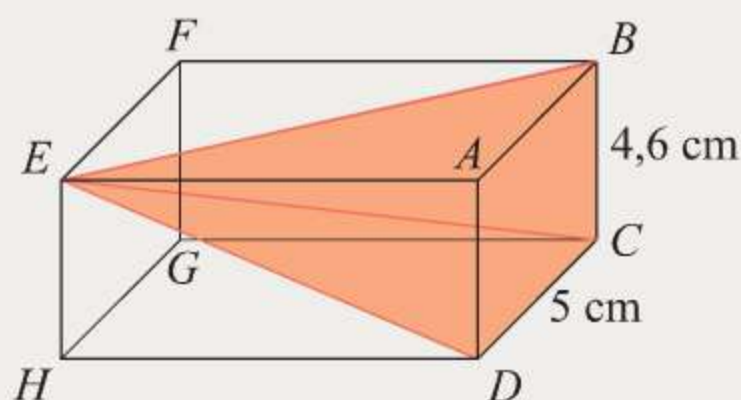
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Po uzupełnieniu figur II, III, VI nie otrzymamy żadnej siatki ostrosłupa.	P	F
Siatki ostrosłupa otrzymamy po uzupełnieniu figur I, II, IV, V.	P	F
W każdym przypadku otrzymamy siatkę ostrosłupa po uzupełnieniu figury trójkątem równobocznym lub kwadratem.	P	F

- 10 Przyjmij, że długość dwóch kratek na rysunku przedstawiającym siatkę ostrosłupa wynosi 1, i oblicz pole jego powierzchni bocznej. Jaki procent pola powierzchni bocznej ostrosłupa stanowi pole jego podstawy? Zapisz obliczenia.



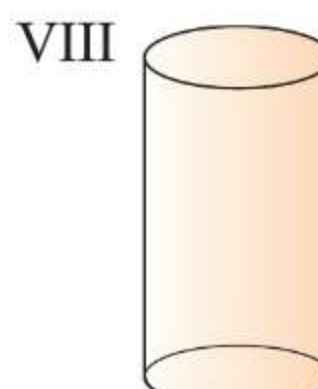
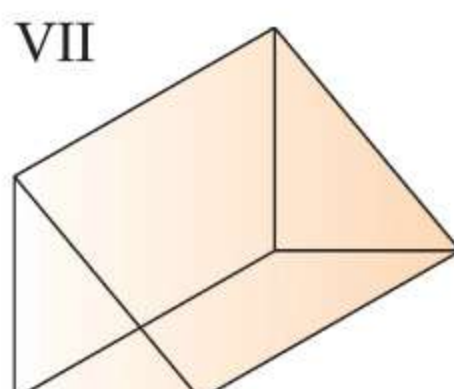
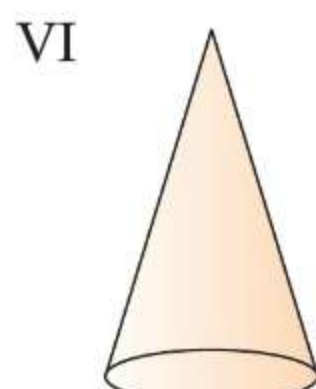
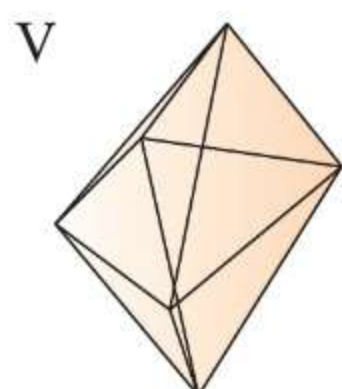
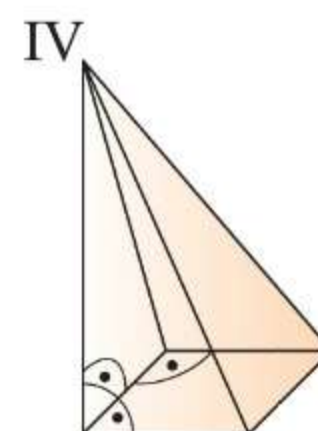
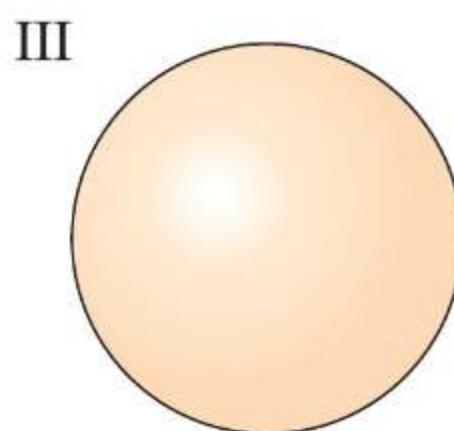
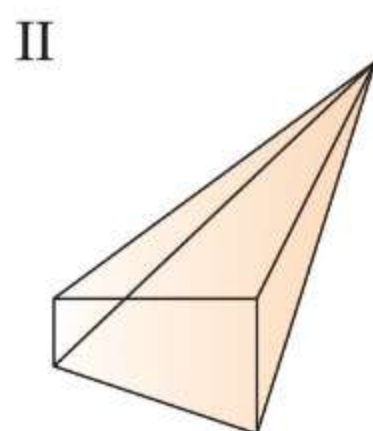
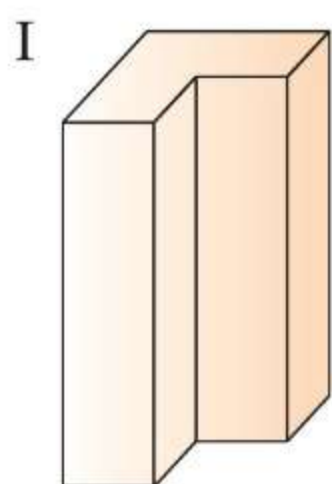
- 11 Objętość zaznaczonego na rysunku ostrosłupa czworokątnego jest równa $48,3 \text{ cm}^3$. Skorzystaj z danych na rysunku i podaj, ile wynosi objętość prostopadłościanu. Zapisz obliczenia.



- 12 Wykaż, że objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość a , jest równa $a^3 \frac{\sqrt{2}}{6}$.

3. Bryły obrotowe

- 1 Które z przedstawionych na rysunku brył to:
 a) graniastosłupy, b) ostrosłupy, c) bryły obrotowe?



- 2 Spośród przedmiotów pokazanych poniżej wymień te, które mają kształt:
 a) walca, b) stożka, c) kuli.



- 3 Narysuj bryłę powstałą przez obrót trójkąta o bokach: 3 cm, 4 cm, 5 cm wokół prostej zawierającej jego:
a) najkrótszy bok, b) najdłuższy bok.
- 4 Narysuj walec, który powstanie w wyniku obrotu prostokąta o bokach a i b wokół osi zawierającej:
a) bok a prostokąta, b) bok b prostokąta.
W każdym przypadku podaj promień podstawy i wysokość walca.
- 5 Wymień kilka przedmiotów ze swojego otoczenia, które mają kształt walca.
- 6 Jakie długości boków musi mieć trójkąt, aby figura otrzymana w wyniku obrotu tego trójkąta dookoła prostej zawierającej jeden z jego boków była stożkiem? Podaj dwa przykłady takich trójkątów.
- 7 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Stożek powstaje przez obrót dowolnego trójkąta wokół jego boku.	P	F
Walec powstaje przez obrót dowolnego czworokąta wokół jego boku.	P	F
Gdy obrócimy półkole wokół średnicy, otrzymamy kulę.	P	F

- 8 Przyjmij, że Ziemia jest kulą o promieniu 6370 km, i oblicz odległość między biegunami.



- 9 Na ile sposobów można otrzymać stożek przez obrót trójkąta prostokątnego, którego boki mają długości a , b , c , takie że $a \leq b < c$? Wykonaj odpowiednie rysunki. W każdym przypadku podaj promień podstawy i wysokość stożka.

Przypomnij sobie*

- zbiór obiektów (s. 126)
- zbiór liczbowy (s. 126)
- liczba elementów zbioru (s. 127)
- doświadczenie losowe (s. 129)
- dane (s. 129)
- zdarzenia: elementarne, sprzyjające (s. 133)
- zdarzenie losowe (s. 133)
- zdarzenia losowe: pewne, niemożliwe (s. 134)
- prawdopodobieństwo zdarzenia losowego (s. 138, 139)

* Wyjaśnienia powyższych terminów znajdziesz w tym podręczniku na podanych stronach.

Dane statystyczne (dane surowe) to dane uzyskiwane za pomocą badań statystycznych: ankiet, spisów, sondaży, wywiadów, badań naukowych. Dotyczą m.in. liczby ludności, sprzedaży różnych produktów, oglądalności programów telewizyjnych, skuteczności działań różnych leków.

Zmienne to cechy charakterystyczne danych statystycznych.

Liczebność zmiennej to liczba określająca, ile razy zmienna pojawia się w badaniu statystycznym.

Dla uporządkowanej serii danych można określić liczby, które ją charakteryzują, m.in. średnią arytmetyczną.

Średnia arytmetyczna zbioru liczb to iloraz sumy tych liczb i ich liczebności. Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ wyraża się wzorem:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Przykład

Wzrost 30 uczniów pewnej klasy ósmej, wyrażony w centymetrach, podano w poniższej tabeli.

Wzrost	149	152	158	165	168	170	178	182
Liczebność	4	3	7	5	3	3	3	2

Średnia arytmetyczna:

$$\begin{aligned} & \frac{149 \cdot 4 + 152 \cdot 3 + 158 \cdot 7 + 165 \cdot 5 + 168 \cdot 3 + 170 \cdot 3 + 178 \cdot 3 + 182 \cdot 2}{4 + 3 + 7 + 5 + 3 + 3 + 3 + 2} = \\ & = \frac{596 + 456 + 1106 + 825 + 504 + 510 + 534 + 364}{30} = \frac{4895}{30} \approx 163 \end{aligned}$$

Tabela liczebności, diagram słupkowy (pionowy, poziomy), diagram procentowy (prostokątny, kołowy)

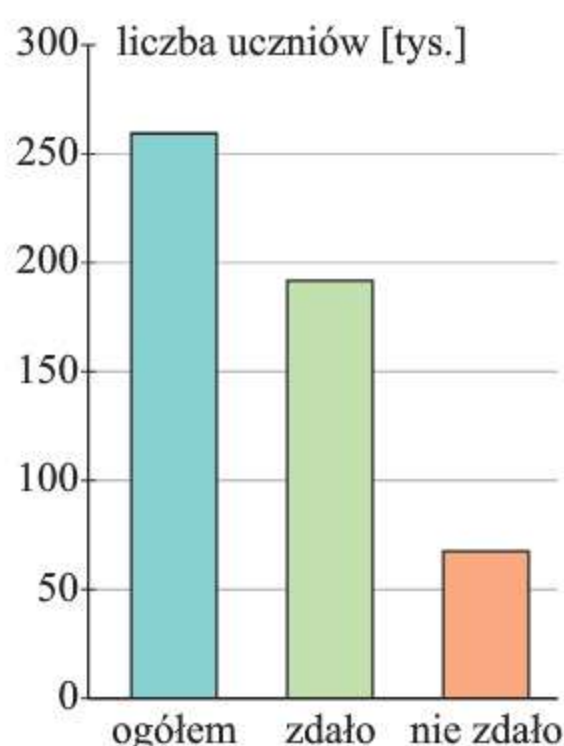
Przykład

Dane GUS dotyczące liczby uczniów, którzy przystąpili w Polsce do matury w czerwcu 2020 roku, przedstawmy na różne sposoby – w postaci tabeli liczebności, diagramów słupkowych (pionowego i poziomego) oraz diagramów procentowych (prostokątnego i kołowego).

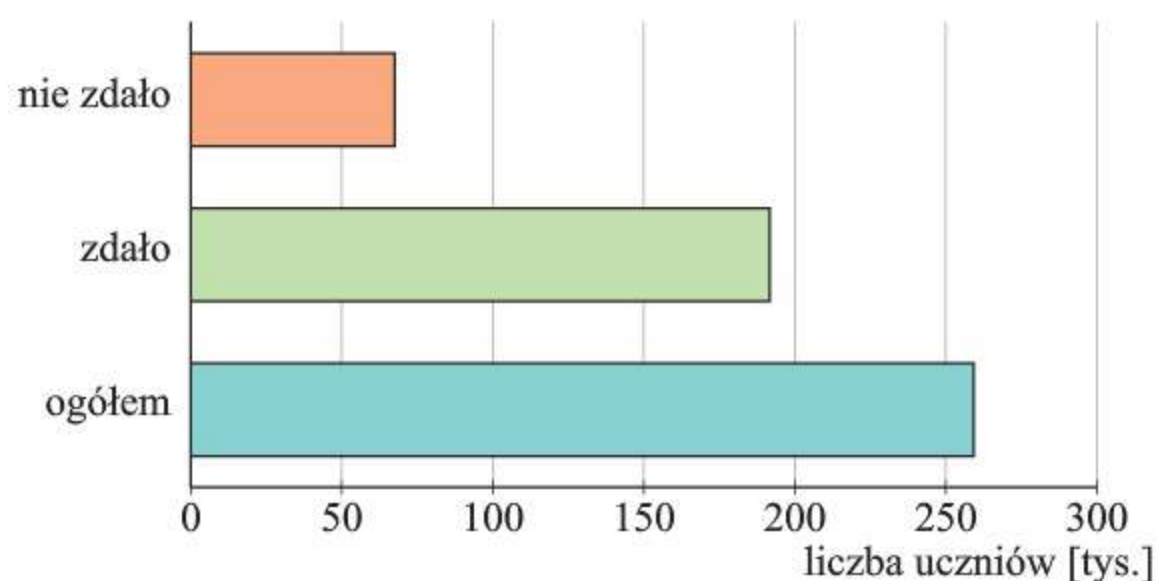
1. Tabela liczebności

Liczba uczniów, którzy przystąpili w Polsce do matury w czerwcu 2020 roku		
ogółem	zdało	nie zdało
259 272	191 734	67 538

2. Diagram słupkowy pionowy



3. Diagram słupkowy poziomy



4. Diagram procentowy prostokątny

Liczbę uczniów ogółem, czyli 259 272, przyjmujemy za 100%. Wtedy:

- uczniowie, którzy zdali maturę, stanowią $\frac{191\,734}{259\,272} \cdot 100\% \approx 74\%$ wszystkich zdających;
- uczniowie, którzy nie zdali matury, stanowią $\frac{67\,538}{259\,272} \cdot 100\% \approx 26\%$ wszystkich zdających.



5. Diagram procentowy kołowy

Obliczamy miary kątów odpowiadających poszczególnym danym wyrażonym w procentach. Wtedy:

- liczba uczniów, którzy zdali maturę, odpowiada kątowi o mierze ok. 266° (74% z 360°);
- liczba uczniów, którzy nie zdali matury, odpowiada kątowi o mierze ok. 94° (26% z 360°).



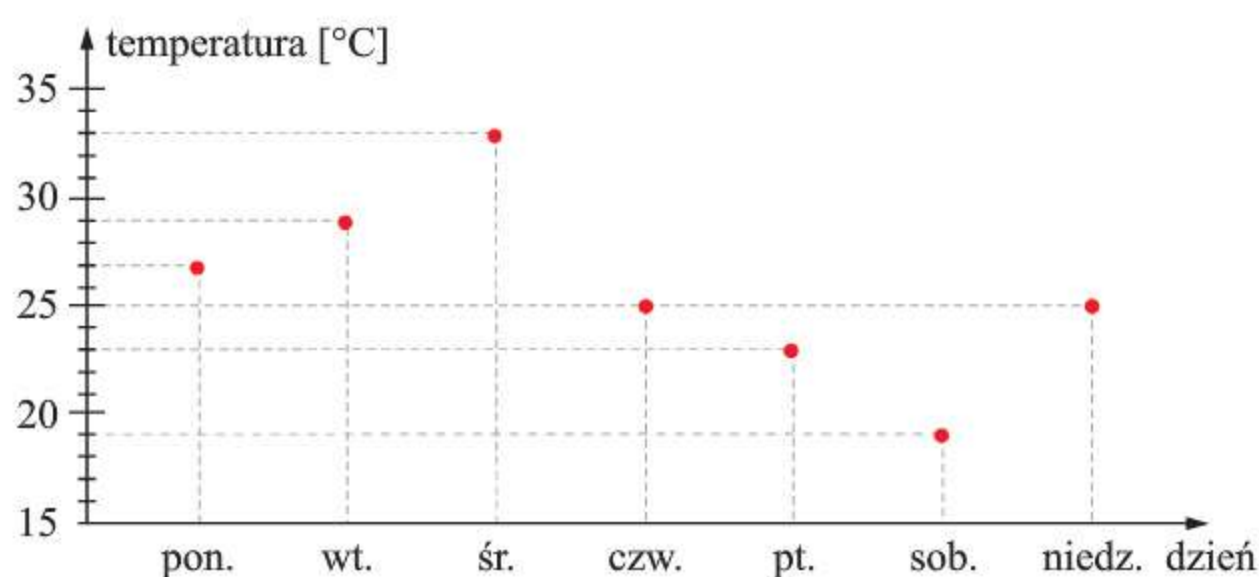
Wykres punktowy to jeden ze sposobów przedstawiania danych statystycznych.

Przykład

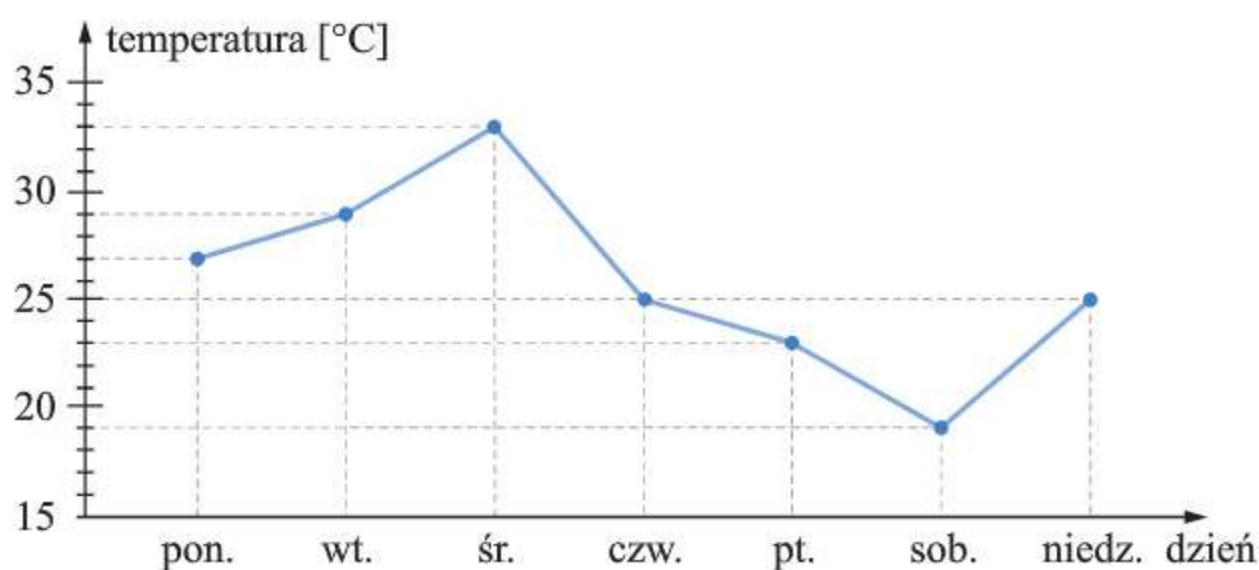
W ciągu tygodnia wakacji codziennie o godzinie 12.00 mierzono temperaturę powietrza w Giżycku. Wyniki pomiarów przedstawiono w tabeli.

Poniedziałek	Wtorek	Środa	Czwartek	Piątek	Sobota	Niedziela
27°C	29°C	33°C	25°C	23°C	19°C	25°C

Na wykresie punktowym zgodnie z danymi z tabeli przedstawiono zależność temperatury od dnia tygodnia, w którym temperatura była mierzona.



Jeśli punkty połączymy odcinkami, to otrzymamy **wykres liniowy**.



Z wykresu liniowego wygodnie odczytuje się pewne zależności, np.

- Temperatura rosła na początku tygodnia.
- Od środy do soboty temperatura malała.
- Pod koniec tygodnia temperatura zaczęła znowu rosnać.
- Najwyższą temperaturę zanotowano w środę (33°C).
- Najniższą temperaturę zanotowano w sobotę (19°C).

Częstość to iloraz liczebności zmiennej oraz liczby wszystkich wyników w danym badaniu statystycznym.

Tabela częstości

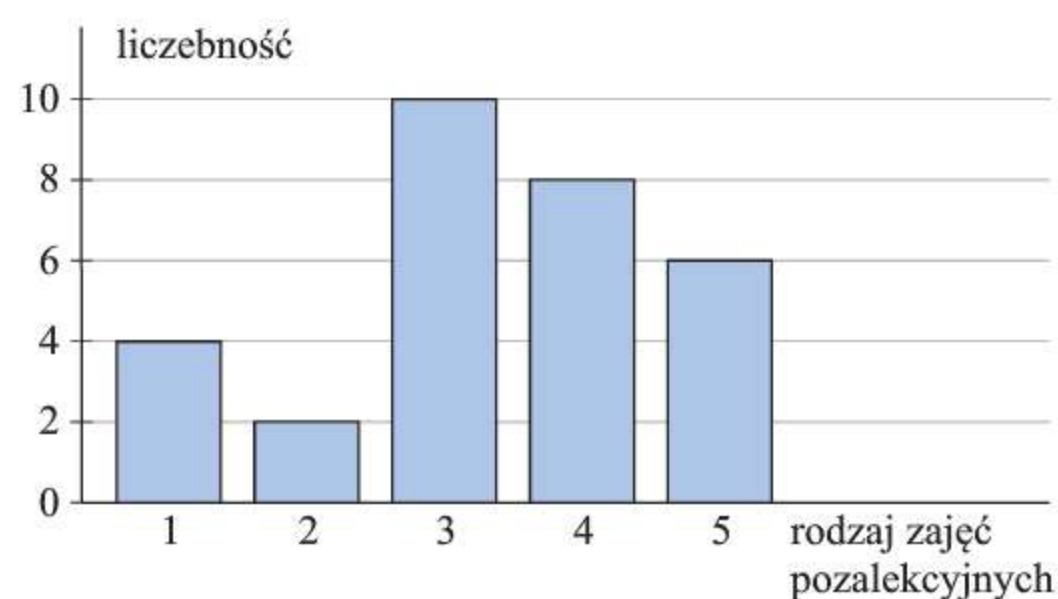
Przykład

Wśród 30 uczniów pewnej klasy przeprowadzono sondaż dotyczący wyboru zajęć pozalekcyjnych. Każdy uczeń mógł wskazać najwyżej jedno zajęcie dodatkowe. Odpowiedzi uczniów przedstawiono w tabeli.



Lp.	Rodzaj zajęć pozalekcyjnych (zmienna)	Liczebność zmiennej	Częstość
1.	zajęcia sportowe	4	$\frac{4}{30}$
2.	zajęcia plastyczne	2	$\frac{2}{30}$
3.	koła przedmiotowe	10	$\frac{10}{30}$
4.	chór	8	$\frac{8}{30}$
5.	żadne	6	$\frac{6}{30}$
	RAZEM	30	

Histogram to diagram słupkowy służący do przedstawiania rozkładu liczebności. Histogram dla powyższych danych będzie wyglądał tak, jak pokazano poniżej.



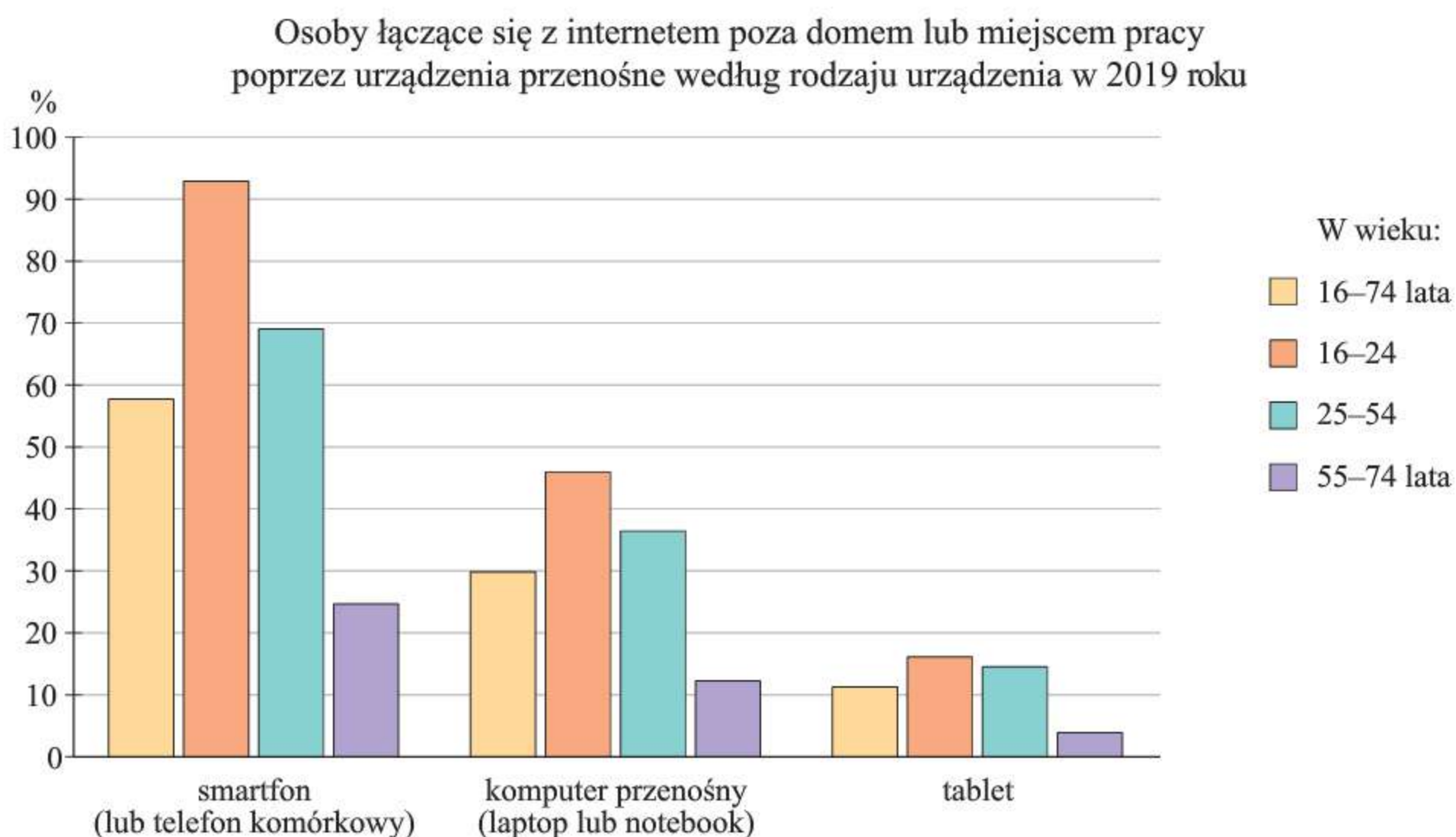
1. Odczytywanie danych statystycznych

- 1 W tabeli zamieszczono nieobecności uczniów klas ósmych pewnej szkoły podstawowej w ciągu jednego tygodnia.

Klasa	Poniedziałek	Wtorek	Środa	Czwartek	Piątek
8a	2	5	2	4	2
8b	0	3	1	0	1
8c	0	4	3	1	2

- Ilu uczniów klas ósmych było nieobecnych w szkole w czwartek?
- Ilu uczniów klas ósmych było nieobecnych w szkole we wtorek?
- Która klasa miała największą liczbę nieobecności w tygodniu?
- Ile średnio było nieobecności dziennie w każdej klasie w ciągu tygodnia?

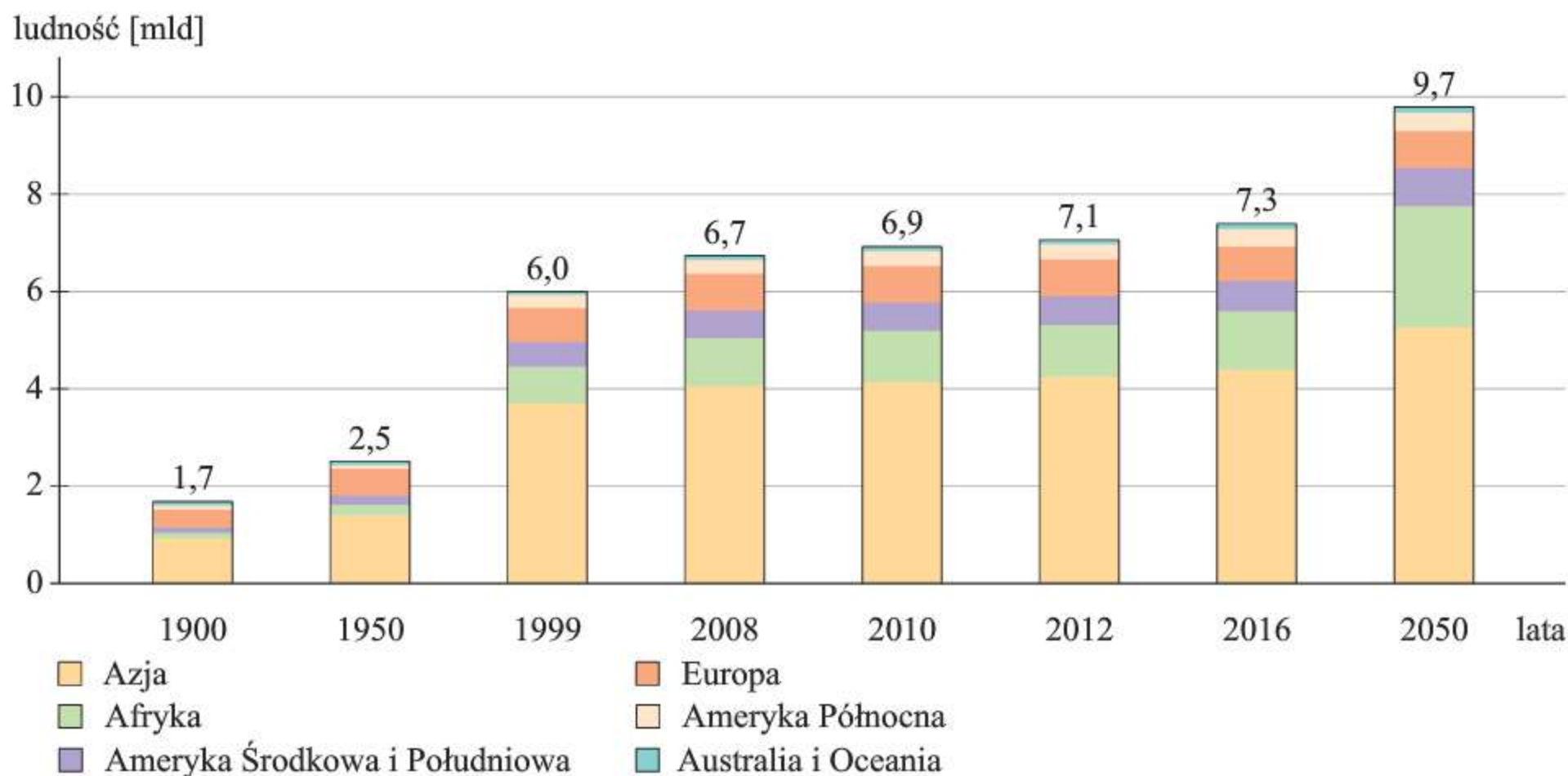
- 2 Na diagramie słupkowym przedstawiono wyniki badań dotyczące urządzeń przenośnych, z jakich korzystali Polacy w sieci w 2019 roku.



Źródło: GUS, *Polska w liczbach* 2020

- Ile procent osób w wieku 16-24 korzystało z internetu na smartfonie lub telefonie komórkowym?
- Które narzędzie do korzystania z internetu było dominujące w każdej grupie wiekowej?
- Która grupa wiekowa najmniej korzystała ze wszystkich urządzeń przenośnych?

- 3 Na diagramie przedstawiono liczby ludności na poszczególnych kontynentach: dane statystyczne z lat 1900–2016 oraz prognozy na rok 2050.



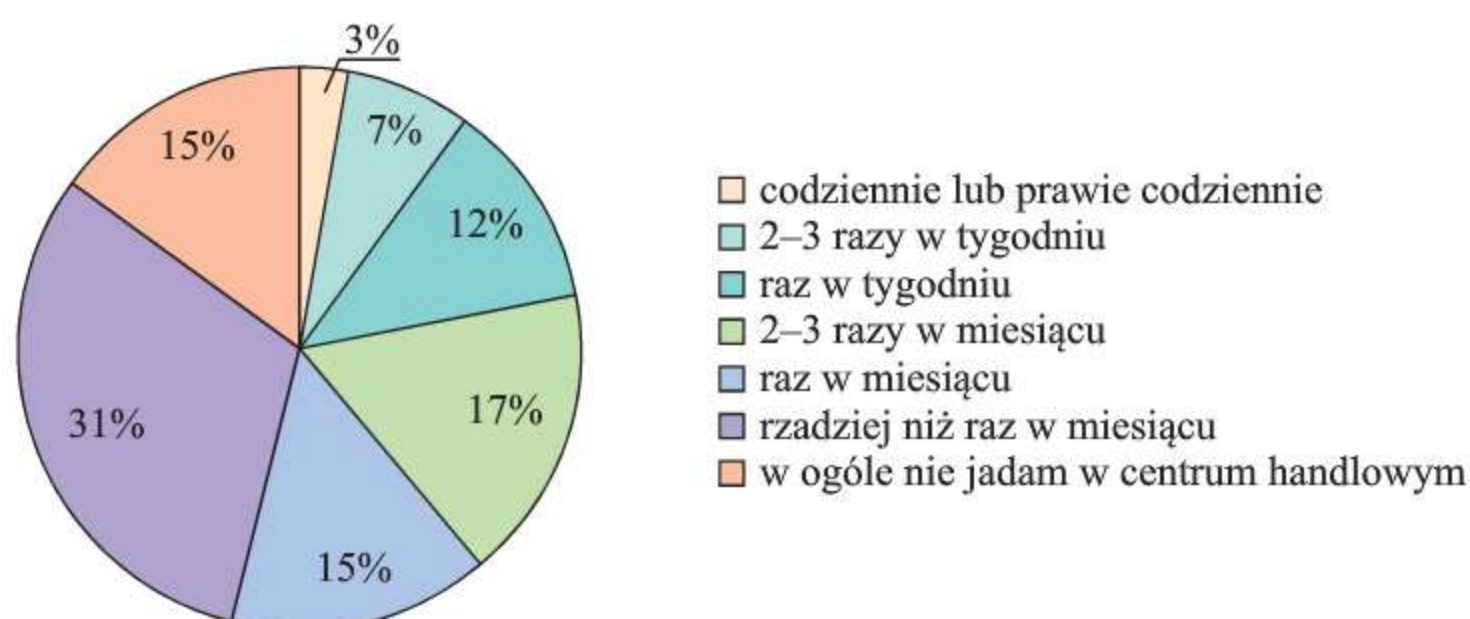
Źródło: <https://businessinsider.com.pl/wiadomosci/liczba-ludnosci-na-swiecie-statystyki-i-prognozy/ceep8qj>

Skorzystaj z tych danych i odpowiedz na poniższe pytania.

- Gdzie było i będzie najwięcej ludności?
- Na którym kontynencie prognozuje się największy wzrost liczby ludności?

- 4 We wrześniu 2019 roku przeprowadzono w Polsce badanie dotyczące częstości korzystania z oferty gastronomicznej w centrum handlowym. Wzięło w nim udział 1052 respondentów powyżej 18. roku życia. Wyniki badań przedstawiono na diagramie procentowym kołowym.

- Co który respondent decyduje się jeść w centrum handlowym od 1 do 3 razy w tygodniu?
- Oszacuj, ilu respondentów jada w centrum handlowym co najmniej raz w miesiącu.
- Wśród osób, które korzystają z gastronomii w centrum handlowym co najmniej raz w tygodniu, 36% stanowią młode osoby. Ile było tych osób wśród badanych?

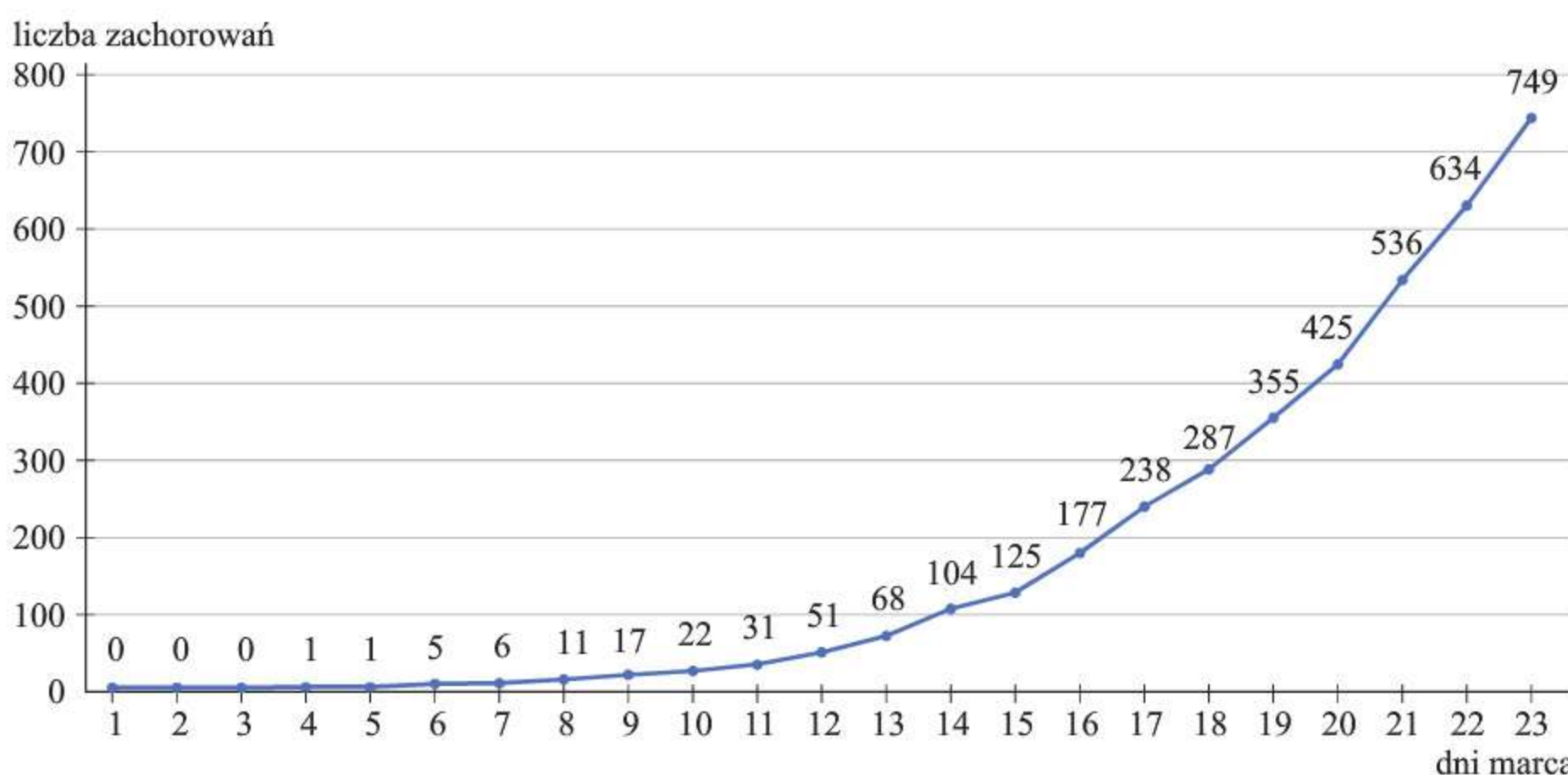


Źródło: <https://issuu.com/shoppingcentermagazine/docs/scfm-2019-11>

- 5 Na wykresie przedstawiono liczbę wypożyczeń samochodów w pewnym kurorcie wczasowym w poszczególnych dniach tygodnia. Uzasadnij, że średnia wypożyczeń wynosiła w tych dniach 14 samochodów dziennie.



- 6 Na wykresie przedstawiono liczbę potwierdzonych przypadków zachorowań w Polsce na Covid-19 w marcu 2020 roku.



Źródło: <https://dane-i-analizy.pl/raport/1931-liczba-potwierdzonych-przypadkow-zachorowan-na-koronawirusa/zobacz/atlas.html>

- Kiedy stwierdzono pierwszy przypadek zachorowania na koronawirusa w Polsce?
- Którego dnia spośród analizowanych był największy przyrost zachorowań, a którego – najmniejszy?
- U ilu osób wykryto koronawirusa w drugiej dekadzie miesiąca?

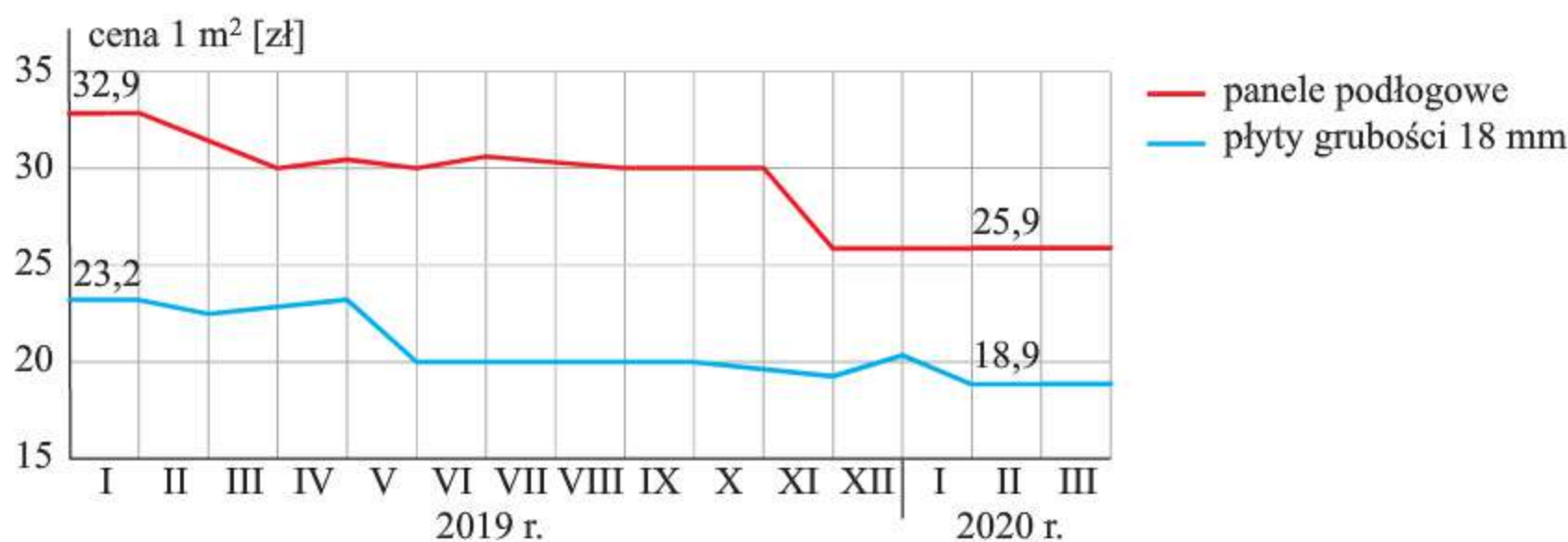
- 7 W tabeli przedstawiono prognozy dotyczące liczby ludności w Polsce. Oblicz, o ile procent zmniejszy się liczba ludności w Polsce w 2050 roku w stosunku do roku 2020.

	2020	2025	2030	2035	2040	2045	2050
Mężczyźni (w tys.)	18 461	18 272	18 002	17 663	17 294	16 926	16 564
Kobiety (w tys.)	19 677	19 469	19 183	18 814	18 374	17 891	17 387

Źródło: GUS, *Mały Rocznik statystyczny Polski* 2019

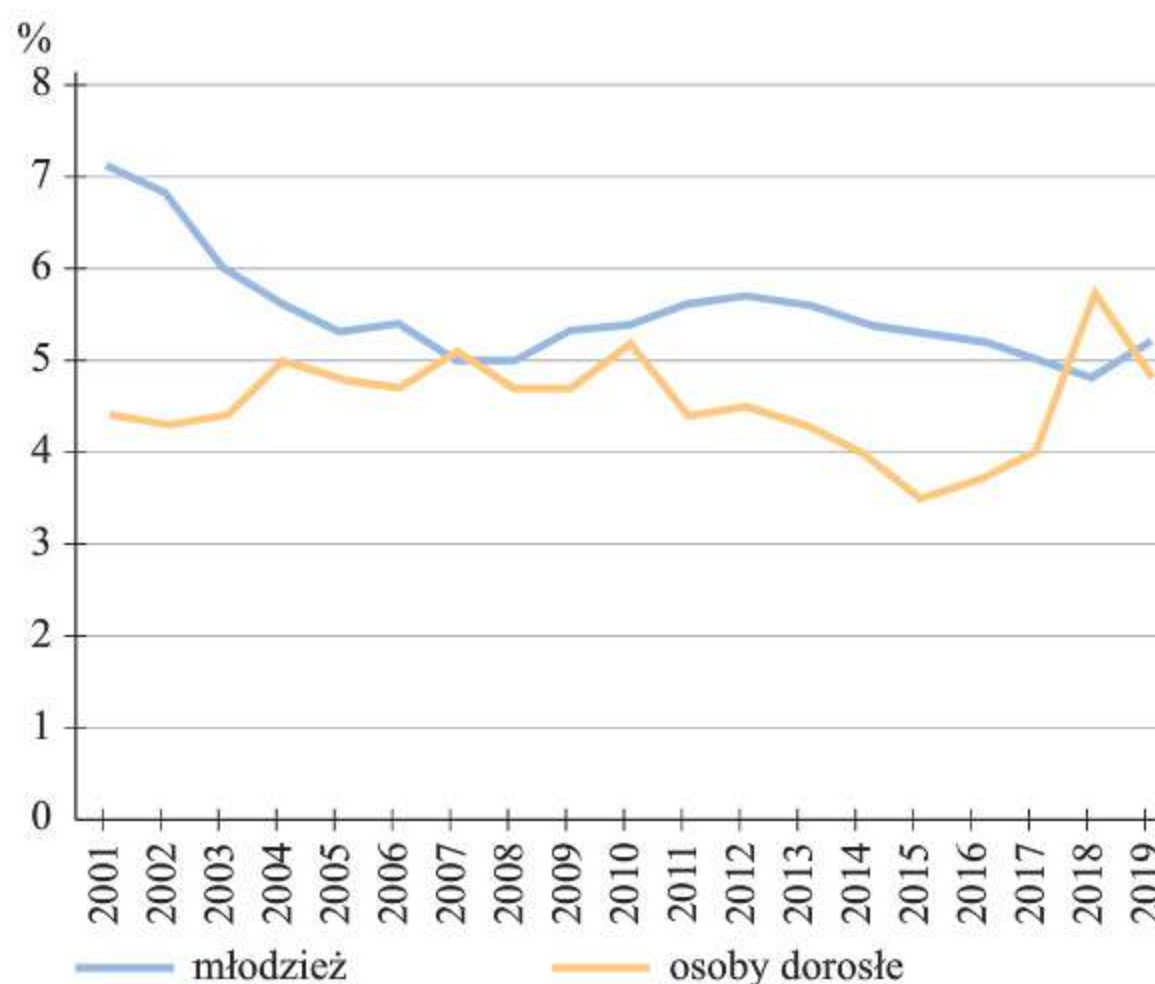
- 8 Na wykresie przedstawiono, jak kształtowały się ceny materiałów podłogowych w pewnym składzie budowlanym w 2019 roku i pierwszym kwartale 2020 roku. Skorzystaj z wykresu i odpowiedz na pytania.

- W jakich okresach ceny paneli, a w jakich ceny płyt utrzymywały się na stałym poziomie?
- Pan Jan kupił 100 m^2 paneli podłogowych w styczniu 2019 roku. Ile złotych mniej by zapłacił, gdyby kupił te panele rok później?
- Ile złotych zaoszczędziłby pan Jan, gdyby w marcu 2020 roku zamiast paneli kupił płyty podłogowe?



Na podstawie poniższych informacji wykonaj zadania 9.–10.

Na wykresie przedstawiono dane dotyczące młodzieży (18–24 lata) z wykształceniem najwyższym gimnazjalnym, niekontynuującej nauki, i dorosłych (25–64 lata) uczestniczących w kształceniu.



Źródło: GUS, *Polska w liczbach* 2020

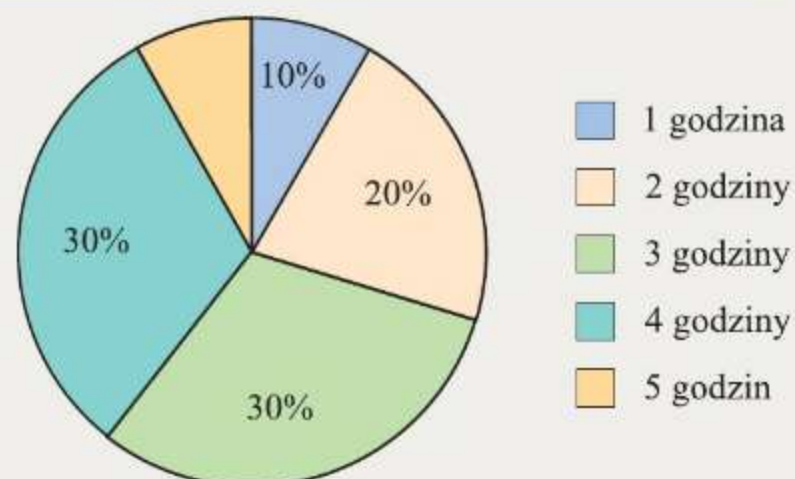
- W którym roku było najwięcej kształcących się dorosłych i jednocześnie najmniej nieuczącej się młodzieży?
- W którym roku różnica między liczbą uczących się dorosłych i liczbą nieuczącej się młodzieży wynosiła mniej więcej jeden punkt procentowy?

Zadania sprawdzające

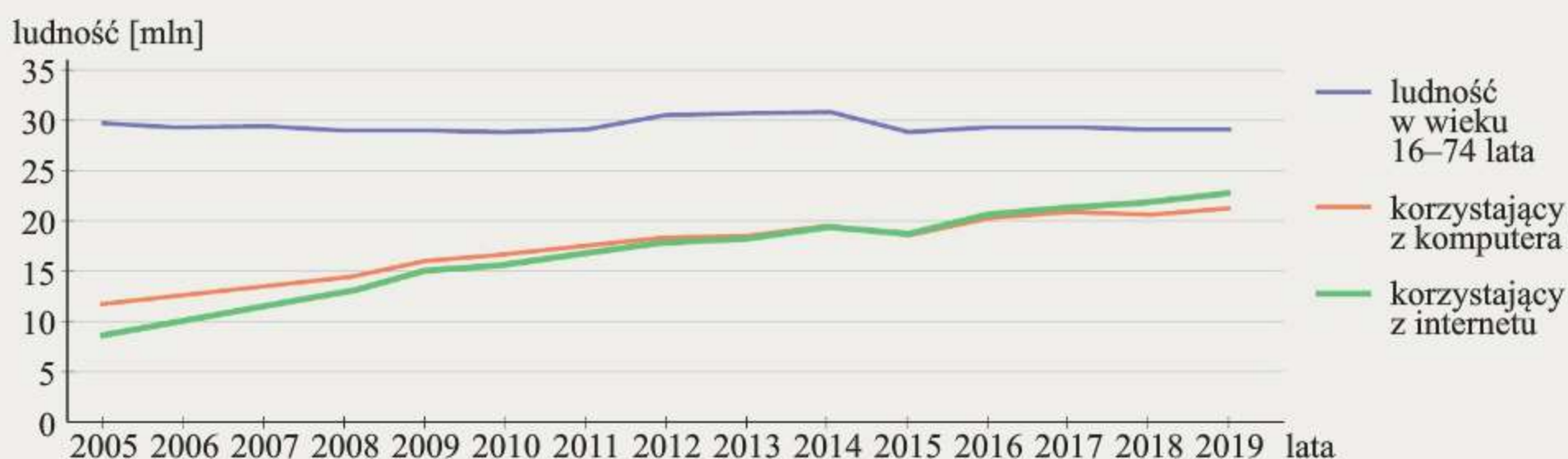
Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

Na podstawie poniższych informacji wykonaj zadania 1.–2.

Wśród trzydziestu uczniów pewnej klasy przeprowadzono ankietę na temat: *Ile czasu średnio poświęcasz tygodniowo na uprawianie sportu?* Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie kołowym.



- 1 Ilu uczniów na uprawianie sportu poświęca średnio 5 godzin tygodniowo? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. 6 B. 3 C. 9 D. 10
- 2 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba uczniów, którzy na uprawianie sportu poświęcają średnio najwyżej 3 godziny tygodniowo, wynosi
A. 9 B. 6 C. 18 D. 12
- 3 Na wykresie liniowym przedstawiono informacje dotyczące liczby Polaków w wieku 16–74 lata regularnie (co najmniej raz w tygodniu) korzystających z komputera i internetu.



Źródło: GUS, *Polska w liczbach 2020*

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

W roku 2014 liczba Polaków w wieku 16–74 wynosiła mniej niż A / B.

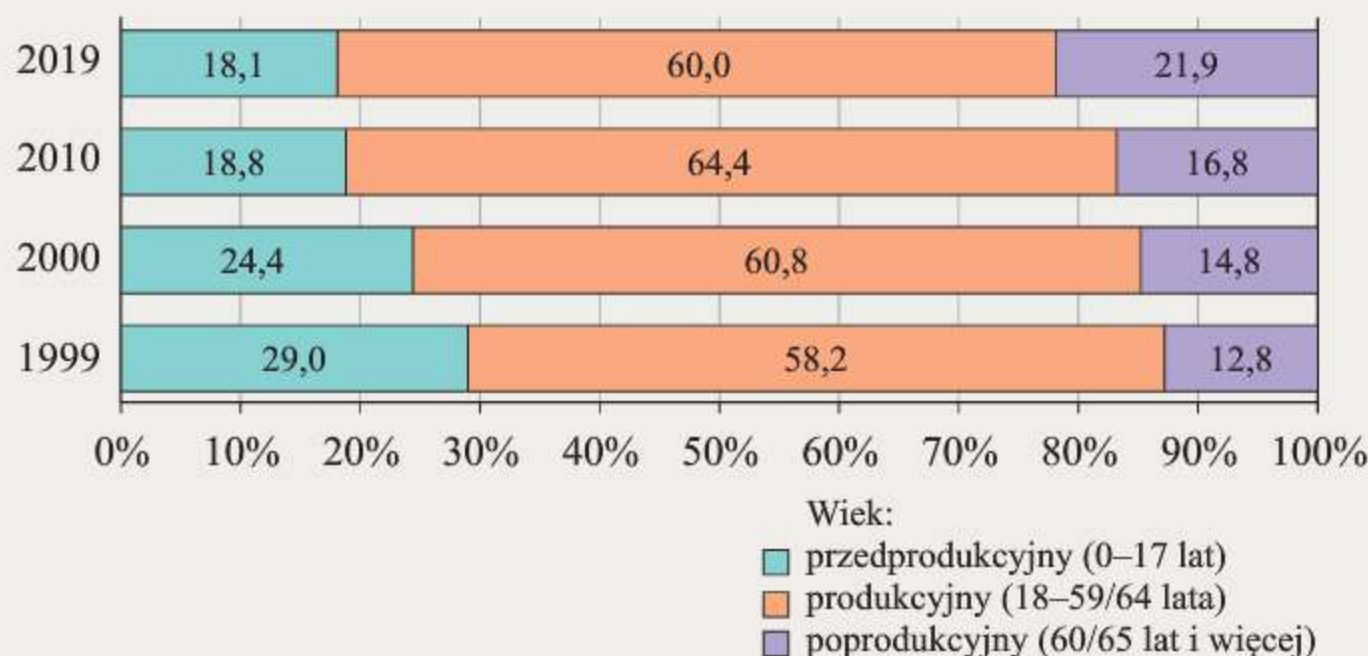
A. 20 mln B. 33 mln

W 2019 roku liczba Polaków w wieku 16–74 korzystających z internetu była C / D niż korzystających z komputera.

C. wyższa D. niższa

Na podstawie poniższych danych wykonaj zadania 4.–5.

Na diagramie przedstawiono ludność Polski według ekonomicznych grup wiekowych.



Źródło: GUS, *Polska w liczbach 2020*

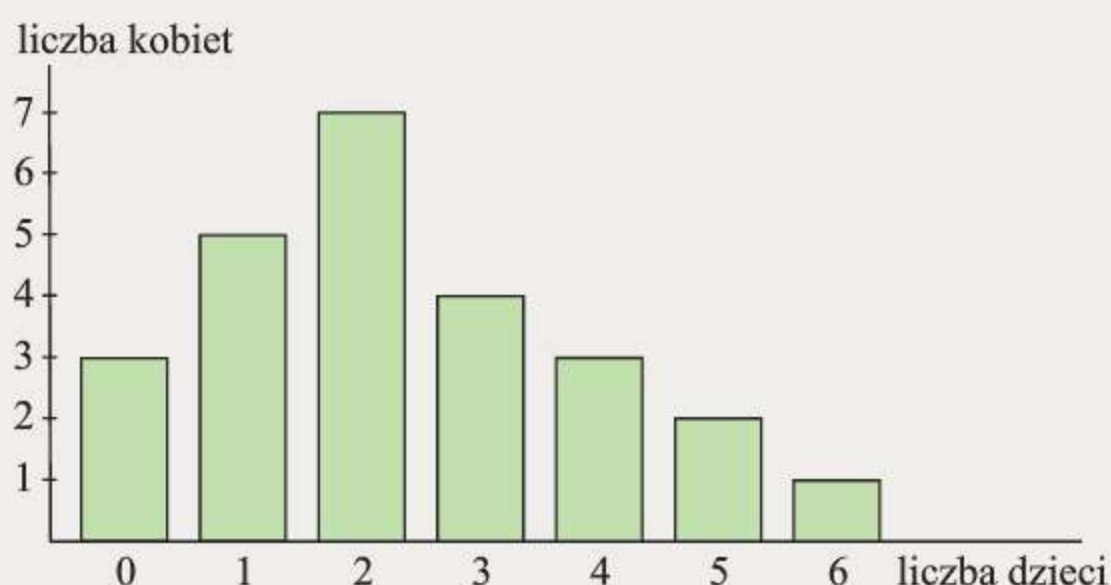
- 4 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

W 2019 roku trzech na pięciu Polaków było w wieku produkcyjnym.	P	F
W prezentowanym okresie odnotowano spadek ludności w grupie przedprodukcyjnej, a wzrost w grupie poprodukcyjnej.	P	F

- 5 Czy w ostatniej dekadzie przybyło ponad 5 punktów procentowych osób starszych niż 60/65 lat? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$21,9 - 14,8 = 7,1$.
B.	Nie,		2.	$21,9 - 16,8 = 5,1$.

- 6 Pewną grupę kobiet zapytano o liczbę ich dzieci. Otrzymane wyniki przedstawiono na diagramie.



Uzasadnij, że liczba kobiet bezdzietnych stanowi 25% liczby kobiet z jednym dzieckiem lub dwójką dzieci.

2. Zliczanie obiektów

- 1 Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych większych od 300 i mniejszych od 999? Odpowiedź uzasadnij.
- 2 Oblicz, ile elementów ma zbiór liczb od 16 do 268 włącznie, podzielnych przez 4.
- 3 Odpowiedz na poniższe pytania.
 - a) Ile elementów zawiera zbiór składający się z reszt z dzielenia dowolnie wybranych liczb naturalnych przez 8?
 - b) Ile par ubrań można utworzyć spośród: czapka, kurtka, rękawiczki, szalik?
- 4 Ile jest par liczb dwucyfrowych takich, że jedna liczba jest o 42 większa od drugiej? Odpowiedź uzasadnij.
- 5 Ile jest liczb naturalnych:
 - a) trzycyfrowych niepodzielnych przez 100,
 - b) większych od 468 i jednocześnie mniejszych od 898,
 - c) nieparzystych mniejszych od 404?
- 6 Oblicz, ile jest liczb całkowitych x :
 - a) nie mniejszych niż -88 i jednocześnie nie większych od 64,
 - b) większych od -62 i jednocześnie nie większych niż -14 .
- 7 Wypisz wszystkie elementy zbioru liczb od -20 do 58, podzielne przez 6.
- 8 Dany jest zbiór 142 kolejnych liczb naturalnych.
 - a) Najmniejszą liczbą jest 42. Jaka liczba jest największa w tym zbiorze?
 - b) Największą liczbą jest 248. Jaka liczba jest najmniejsza w tym zbiorze?
- 9 W meczu piłkarskim między reprezentacjami klas 8a i 8b padły łącznie 3 bramki. Uzasadnij, że w tym meczu mogły być 4 różne wyniki.
- 10 W loterii co czwarty los wygrywa. Jest 20 losów wygrywających. Ile losów przygotowano w tej loterii? Odpowiedź uzasadnij.
- 11 Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych parzystych, których suma cyfr wynosi co najmniej 14? Zapisz obliczenia.
- 12 W woreczku jest 7 losów pełnych i 9 pustych. Ile co najmniej losów trzeba wyciągnąć z woreczka, aby mieć pewność, że będzie wśród nich los pełny?
- 13 Asia na jednym oddechu wypowiada dwa słowa. Ile oddechów zajmie jej wypowiedzenie wszystkich liczb naturalnych od 7 do 139 włącznie? Odpowiedź uzasadnij.
- 14 Ile cyfr należy napisać, aby ponumerować wszystkie strony rękopisu zawierającego 115 zapisanych kartek? Odpowiedź uzasadnij.

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–2. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Który zapis jednoznacznie określa zbiór M wszystkich nieparzystych liczb naturalnych większych od 10 i mniejszych od 62?
 - A. $M = \{11, 13, \dots, 61\}$
 - B. $M = \{11, \dots, 61\}$
 - C. $M = \{11, 13, 15, \dots, 61\}$
 - D. $M = \{11, 13, \dots, 59, 61\}$
- 2 Ile elementów należy do zbioru liczb złożonych dwucyfrowych?
 - A. 69
 - B. 50
 - C. 45
 - D. 78

W zadaniach 3.–4. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 3 Liczb w zbiorze $D = \{354, 355, 356, \dots, 849\}$ jest
 - A. 495
 - B. 490
 - C. 496
 - D. 488
- 4 Kuba zapisuje jedną cyfrę w czasie 1 sekundy. Wszystkie liczby naturalne do 220 włącznie zapisze w czasie
 - A. 5 min 11 s
 - B. 220 s
 - C. 3 min 30 s
 - D. 9 min 13 s
- 5 W hotelu jest 100 pokoi, w tym pokoje: jedno-, dwu- i trzyosobowe. Jeśli numer pokoju jest liczbą 1 lub liczbą pierwszą, to pokój jest jednoosobowy. Pozostałe numery pokoi przydzielono następująco: jeśli numer pokoju jest liczbą parzystą, to jest dwuosobowy, jeśli jest liczbą nieparzystą – trzyosobowy. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Najwięcej jest pokoi dwuosobowych.	P	F
Pokoje jednoosobowych jest tyle samo co pokoi trzyosobowych.	P	F
Pokoje jedno- i trzyosobowych razem jest mniej niż dwuosobowych.	P	F
Pokoje dwuosobowych jest 49.	P	F

- 6 Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Zbiór liczb naturalnych od 45 do 79 włącznie, podzielnych przez 3, ma **A / B** elementów.

A. 12 **B.** 11

Liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 5 jest **C / D**.

C. 180 **D.** 181

- 7 Do „Biegu na szóstkę” zgłosiło się 328 uczestników. Organizatorzy biegu przygotowali dla uczestników koszulki startowe z numerem zawodnika w trzech kolorach: białym, zielonym i czerwonym. Koszulki białe otrzymują zawodnicy, których numer jest liczbą podzielną przez 4, zielone – których numer jest liczbą nieparzystą, a czerwone – pozostali. Czy białych koszulek jest o 2 mniej niż czerwonych? Wybierz odpowiedź A (Tak) lub B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	białych koszulek jest $328 : 4$, a czerwonych $328 : 2$.
			2.	są 82 białe koszulki, a białych i czerwonych koszulek razem jest tyle, ile zielonych.
B.	Nie,		3.	zielonych koszulek jest najwięcej.



- 8 Wypisz wszystkie elementy zbioru liczb od -30 do 59 , podzielne przez 8.
- 9 Dany jest zbiór 324 kolejnych liczb naturalnych.
- Najmniejszą liczbą jest 85. Jaka liczba jest największa w tym zbiorze?
 - Największą liczbą jest 748. Jaka liczba jest najmniejsza w tym zbiorze?
- 10 W meczu piłkarskim między reprezentacjami klas 8a i 8b padły łącznie 4 bramki. Uzasadnij, że w tym meczu mogło być 5 różnych wyników.
- 11 W loterii co trzeci los wygrywa. Jest 50 losów wygrywających. Ile losów przygotowano w tej loterii? Zapisz obliczenia.
- 12 Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych nieparzystych, których suma cyfr wynosi co najmniej 12? Zapisz obliczenia.

3. Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego

1 Dane są trzy cyfry: 2, 4, 7. Ile liczb trzycyfrowych można z nich utworzyć w taki sposób, żeby żadna z cyfr się nie powtarzała?

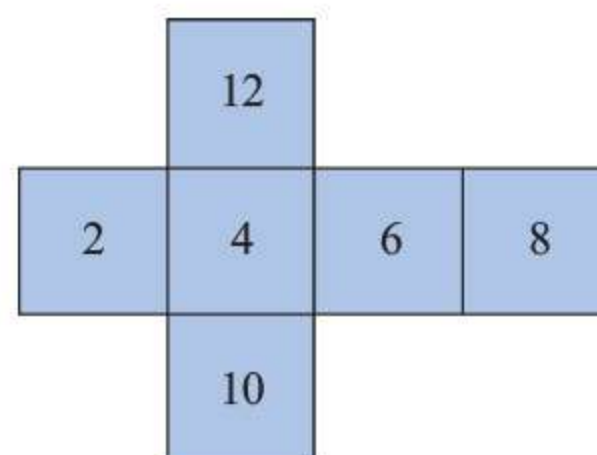
2 Rzucamy raz sześcienną kostką, której siatkę przedstawiono na rysunku obok. Które spośród poniższych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, a które niemożliwym?

A – wypadła liczba podzielna przez 4;

B – wypadło co najmniej 12;

C – wypadła liczba parzysta;

D – wypadła liczba podzielna przez 7.

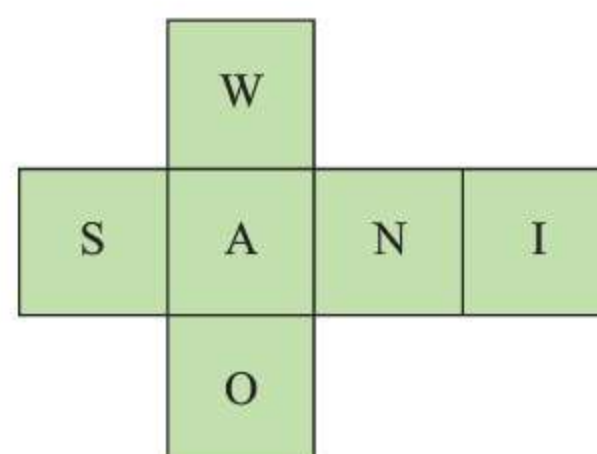


3 Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie kostką, której siatkę przedstawiono na rysunku obok. Odpowiedz na poniższe pytania.

a) Ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu „wypadła samogłoska”?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia „wypadła litera wchodząca w skład wyrazu WIOSNA”?

c) Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia „wypadła litera wchodząca w skład wyrazu LUTY”?



4 W ósmej klasie jest 11 dziewcząt i 13 chłopców. Ile wynosi prawdopodobieństwo tego, że spośród wszystkich uczniów klasy do odpowiedzi zostanie wybrana dziewczynka?

5 W dniu urodzin Jacek przyniósł do szkoły torebkę owocowych żelków, w której było 25 o smaku truskawkowym, 13 o smaku pomarańczowym, 10 – o wiśniowym i 12 – o cytrynowym. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwszy wybrany żelek będzie miał smak truskawkowy?

6 Do urny wrzucono kolorowe kule: 32 białe, 23 czarne, 34 niebieskie i 31 żółtych. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo wylosowania kuli, która nie jest ani biała, ani niebieska, wynosi $\frac{9}{20}$.

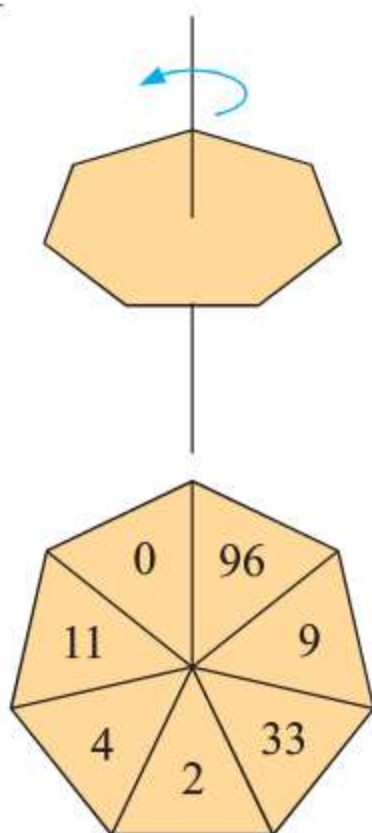
- 7 W torebce jest 5 cukierków różniących się tylko smakiem: 2 o smaku owocowym, 2 o smaku orzechowym i 1 o smaku migdałowym. Kuba losuje jeden cukierek.
- Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne tego doświadczenia.
 - Wskaż zdarzenia jednakowo prawdopodobne i najmniej prawdopodobne wśród następujących zdarzeń A , B , C :

A – Kuba wylosował cukierek o smaku owocowym,
 B – Kuba wylosował cukierek o smaku orzechowym,
 C – Kuba wylosował cukierek o smaku migdałowym.

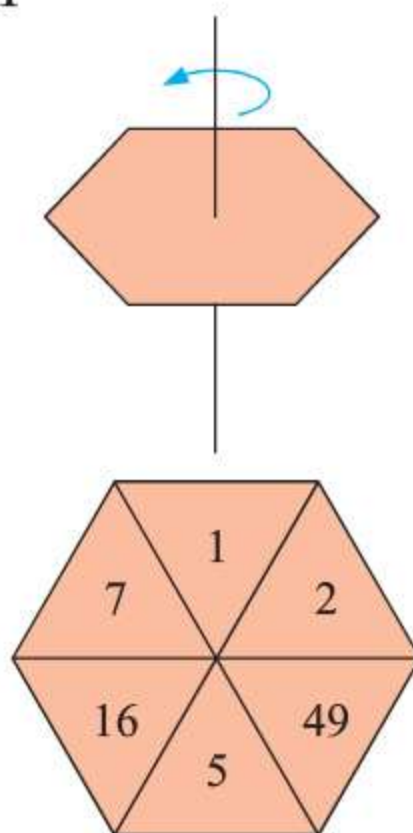


- 8 Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo:
- wylosowania dowolnej figury,
 - wylosowania króla lub asa,
 - niewylosowania żadnej figury,
 - wylosowania piątki kier.
- 9 W urnie są białe i czerwone kule. Ile jest wszystkich kul, jeśli białych jest pięć, a prawdopodobieństwo wylosowania czerwonej kuli wynosi $\frac{4}{9}$?
- 10 W woreczku jest 12 losów pełnych i 30 pustych. Ile losów pełnych trzeba dołożyć, aby prawdopodobieństwo wyciągnięcia pełnego losu wynosiło $\frac{1}{3}$? Odpowiedź uzasadnij.
- 11 Jacek ma do dyspozycji trzy bączki takie jak na rysunku. Każdy bączek po zatrzymaniu na jednym boku wielokąta wskazuje liczbę umieszczoną na jego tarczy. Który bączek powinien wybrać Jacek, aby prawdopodobieństwo otrzymania liczby:
- podzielnej przez 3 było najmniejsze,
 - będącej kwadratem liczby naturalnej wynosiło 0,5,
 - będącej liczbą pierwszą było większe niż liczby będącej liczbą złożoną?

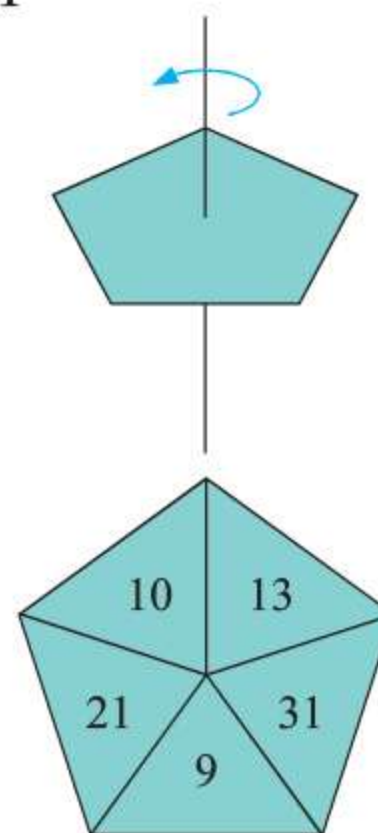
I



II



III



Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–2. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 W koszyku jest 15 jabłek i 12 gruszek. Ile owoców trzeba wylosować, aby mieć pewność, że wśród wylosowanych owoców co najmniej dwa są różne?

A. 13 B. 12
C. 16 D. 15



- 2 Z talii składającej się z 52 kart losujemy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana karta jest w czerwonym kolorze?

A. $\frac{1}{52}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 0,5 D. 0,25

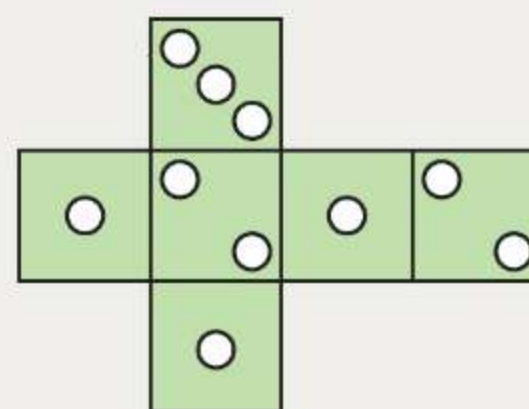
W zadaniach 3.–4. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 3 W urnie jest 40 kul białych, czarnych i zielonych. Kul białych jest cztery razy więcej niż czarnych, a zielonych o dwie mniej niż czarnych. Prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli wynosi

A. $\frac{7}{40}$ B. $\frac{1}{8}$ C. 0,125 D. 0,7

- 4 Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie kostką, której siatkę przedstawiono na rysunku. Zdarzenie polegające na wyrzuceniu co najmniej czterech oczek jest

A. prawdopodobne. B. niemożliwe.
C. pewne. D. możliwe.



- 5 Rzucamy jeden raz zwykłą sześcienną kostką do gry. Czy prawdopodobieństwo otrzymania maksymalnie 4 oczek wynosi $\frac{2}{3}$? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	to zdarzenie jest pewne.
			2.	prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $\frac{1}{2}$.
B.	Nie,		3.	sprzyjającymi zdarzeniami elementarnymi są: 1, 2, 3, 4.

- 6 Ze zbioru liczb naturalnych dodatnich mniejszych od 16 wybieramy losowo jedną liczbę. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 wynosi $\frac{1}{3}$.	P	F
Szansa na wylosowanie liczby pierwszej stanowi 75% szansy na wylosowanie liczby złożonej.	P	F
Prawdopodobieństwa wylosowania liczby dwucyfrowej i pierwszej są różne.	P	F
Prawdopodobieństwa wylosowania liczby jednocyfrowej i złożonej są jednakowe.	P	F

- 7 W tabeli przedstawiono wyniki ankiety na temat posiadania zwierząt wśród uczniów pewnej klasy ósmej. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

	Ma	Nie ma
Dziewczęta	8	2
Chłopcy	6	4

Prawdopodobieństwo, że wybrana losowo osoba z tej klasy jest dziewczynką, wynosi **A / B**. **A.** $\frac{4}{5}$ **B.** 0,5

Prawdopodobieństwo, że wybrana losowo osoba z tej klasy nie ma zwierzęcia, wynosi **C / D**. **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** 0,3

- 8 Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych wybieramy losowo jedną liczbę. Odpowiedz na poniższe pytania.
- Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5?
 - Ile razy szansa wylosowania liczby parzystej jest większa od szansy wylosowania liczby podzielnej przez 5?
 - Ile wynosi prawdopodobieństwo wylosowania dowolnej liczby dwucyfrowej?
 - Ile wynosi prawdopodobieństwo wylosowania liczby jednocyfrowej?
- 9 Janek przygotował losy z numerami od 1 do 49. Za pierwszym razem wylosował numer 29 i odrzucił go z puli losów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że za drugim razem wylosuje numer większy niż 29? Zapisz obliczenia.
- 10 W woreczku jest 26 losów pełnych i 108 pustych. Ile losów pustych trzeba wyjąć, aby prawdopodobieństwo wyciągnięcia pełnego losu wynosiło 0,25? Zapisz obliczenia.

Zestaw zadań nr 1

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

- 1 Ile cyfr w zapisie dziesiętnym ma liczba $(0,2)^8 \cdot 5^{11}$?
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. 8 B. 11 C. 3 D. 5

- 2 **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
Liczba 3448 zapisana w systemie rzymskim ma postać
A. MMMDCLXVIII B. MMMCDLXVIII
C. MMMDCLXVIII D. MMMCDXLVIII

- 3 Cyfra setek pewnej liczby jest dwa razy większa od cyfry jedności tej liczby. Cyfra dziesiątek jest trzy razy mniejsza od cyfry jedności.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Jeśli przyjmiemy, że x to cyfra jedności, wówczas tę trzycyfrową liczbę możemy zapisać jako
A. $200x + \frac{10}{3}x + x$ B. $100x + 3x + x$
C. $200x + 3x + x$ D. $100x + \frac{10}{3}x + x$

- 4 Reklama trwająca 10 minut pojawia się w telewizji 20 minut i 50 minut po każdej pełnej godzinie. Od godziny 15.45 do 21.15 emitowano seriale. Ile razy w tym czasie pojawiła się reklama oraz ile czasu łącznie trwały reklamy?
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. 10 razy, 1 h 40 min B. 11 razy, 1 h 50 min
C. 12 razy, 2 h D. 13 razy, 2 h 10 min

- 5 Prostokątną kartkę podzielono na cztery równe części wzdłuż dłuższego boku i na trzy równe części wzdłuż krótszego boku. Przekątna każdego kwadratu powstałego w wyniku podziału kartki ma długość $12\sqrt{2}$ cm.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Obwód tej kartki wynosił
A. 84 cm B. 168 cm C. 96 cm D. 112 cm

- 6 Mieszkanie o powierzchni 81 m^2 ma kształt kwadratu. Czy plan, na którym powierzchnia tego mieszkania jest równa 81 cm^2 , został wykonany w skali 1 : 100?
Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	długość boku kwadratu na planie jest 100 razy mniejsza od rzeczywistej wartości.
B.	Nie,		2.	stosunek rzeczywistej powierzchni mieszkania do powierzchni mieszkania na planie wynosi 1 : 100.

- 7 Jedna akcja pewnej firmy była warta na giełdzie 14 zł. Między marcem a kwietniem wartość tej akcji wzrosła o 15%, natomiast między kwietniem a majem spadła o 15%. Ile złotych wynosiła wartość tej akcji pod koniec maja?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

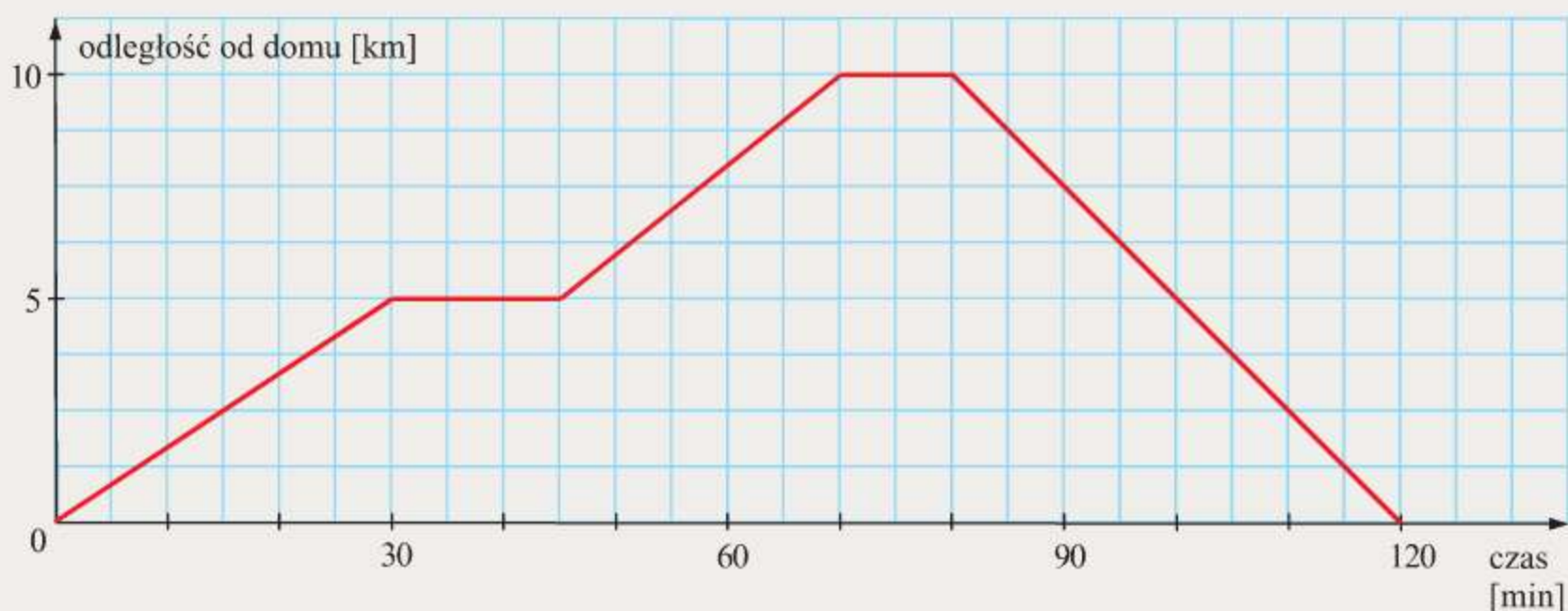
A. 14 zł B. 14,50 zł C. 13,50 zł D. 13,69 zł

- 8 Dane są wyrażenia $x = 4a^b$ i $y = b^{4a}$. Niech $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wartość liczbową wyrażenia $\frac{x}{y}$ jest równa $\frac{1}{4}$.	P	F
Wartość liczbową wyrażenia x jest mniejsza od wartości liczbowej wyrażenia y .	P	F
Wartość liczbową wyrażenia $x \cdot y$ jest równa $\sqrt{16}$.	P	F
Wartość liczbową wyrażenia $x - y$ jest równa $\sqrt[3]{27}$.	P	F

- 9 Jacek jeździ na rowerze, aby poprawić swoją kondycję. Na wykresie opisano jego ostatnią wyprawę do lasu.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jacek przejechał 20 km.	P	F
Łączny czas postojów Jacka na trasie był równy 25 min.	P	F
Średnia prędkość, z jaką Jacek jechał z powrotem, wynosiła 30 km/h.	P	F
Drugi postój Jacek zrobił po 1 h i 10 min od wyruszenia z domu.	P	F

- 10 Trzej studenci wynajęli trzypokojowe mieszkanie. Opłata za wynajem wynosiła 2250 zł miesięcznie. Podzielili się kosztami wynajmu proporcjonalnie do wielkości zajmowanych pokoi – odpowiednio w stosunku 2 : 3 : 4. Jaką kwotę zapłaci student zajmujący największy pokój?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 1250 zł B. 1000 zł C. 750 zł D. 500 zł

-

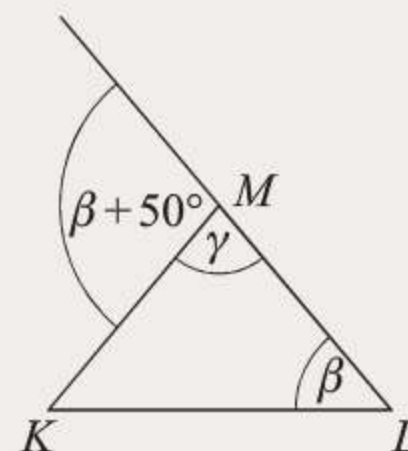
Po wyjęciu dowolnej liczby kostek pole powierzchni otrzymanej bryły będzie w każdym przypadku inne niż pole powierzchni sześcianu.	P	F
Po wyjęciu dowolnych 8 kostek z sześcianu otrzyma się bryłę, której objętość będzie równa 448 cm^3 .	P	F
Z wyjętych 8 kostek można ułożyć sześcian.	P	F
Po wyjęciu 8 kostek z wierzchołków sześcianu otrzyma się bryłę, której pole powierzchni będzie takie samo jak pole powierzchni sześcianu.	P	F

- C.** mniejsza niż 11 **D.** większa niż 11

- A. 16 zł** **B. 23 zł** **C. 25 zł** **D. 27 zł**

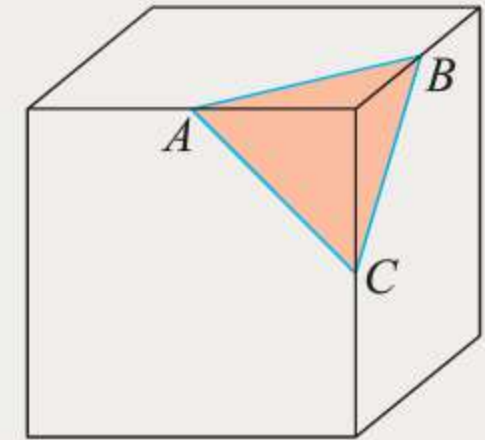
- A.** 12 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 9

- | | | |
|---|----------|----------|
| W trójkącie kąt KLM ma miarę 130° . | P | F |
| Odcinek KL jest najdłuższym bokiem trójkąta KLM . | P | F |



- 16 W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt E jest środkiem podstawy AB i $|AB| = 2 \cdot |CD|$. Uzasadnij, że trójkąty AED , EBC i ECD mają równe pola.
Zapisz uzasadnienie.

- 17 Z sześcianu o krawędzi 6 cm odcięto czworościan, tak jak na rysunku. Punkty A , B i C są środkami odpowiednich krawędzi sześcianu. Oblicz, ile razy pole powierzchni otrzymanej bryły jest większe od pola powierzchni odciętego czworościanu. Podczas obliczeń określ pola powierzchni brył w zaokrągleniu do $0,1 \text{ cm}^2$.
Zapisz obliczenia.



- 18 Wiadomo, że $\frac{a+b}{2} = 1$ i $\frac{a+c}{3} = 2$. Oblicz $a + \frac{b+c}{2}$.
Zapisz obliczenia.

- 19 Ola kupiła 7 kajzerek, 3 drożdżówki, 1 chleb i zapłaciła 16 zł. Wojtek kupił 10 kajzerek, 4 drożdżówki, 1 chleb i zapłacił 20 zł. Ile złotych zapłacił Adrian, który kupił 1 kajzerkę, 1 drożdżówkę i 1 chleb?
Zapisz obliczenia.

- 20 Do schroniska dla zwierząt zakupiono w workach suchą karmę dla kotów i psów. Liczba worków suchej karmy dla psów stanowiła $\frac{3}{4}$ liczby wszystkich zakupionych worków suchej karmy. Liczba worków suchej karmy dla kotów była o 22 mniejsza od liczby worków suchej karmy dla psów. Ile worków suchej karmy dla kotów zakupiono do schroniska?
Zapisz obliczenia.

- 21 Pani Karolina przejechała na elektrycznej hulajnodze trasę z domu do pracy o długości 9 km w czasie 45 minut. W drodze powrotnej tę samą trasę pokonała w czasie o kwadrans krótszym. O ile kilometrów na godzinę była większa jej średnia prędkość jazdy w drodze z pracy do domu?
Zapisz obliczenia.



Zestaw zadań nr 2

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

1 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Połowa wartości wyrażenia $2 : \frac{1}{2} - 2^0 + \sqrt{0,25} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ jest równa

- A. 1,5 B. 3,75 C. 7,5 D. $1\frac{7}{8}$

2 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeżeli liczba jest podzielna przez 9, to jest podzielna przez 3.	P	F
Jeżeli liczba jest podzielna przez 10, to jest podzielna przez 2 i przez 5.	P	F
Jeżeli liczba jest podzielna przez 2 i przez 10, to jest podzielna przez 20.	P	F
Jeżeli liczba jest podzielna przez 2 i przez 3, to jest podzielna przez 6.	P	F

3 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczbą przeciwną do wartości liczbowej wyrażenia $\frac{-a+3,5}{2} - \sqrt{a} - 1$ dla $a = \frac{1}{4}$ jest

- A. $-\frac{1}{8}$ B. 8 C. $\frac{1}{8}$ D. -8

4 Dane są prostokąt o wymiarach $(x - 3y) \times (3x - 5y)$ i kwadrat o boku długości $(2x - 4y)$. Czy te czworokąty mają równe obwody?

Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	jeden z boków prostokąta jest dłuższy od boku kwadratu.
B.	Nie,		2.	sumy długości dwóch kolejnych boków kwadratu i dwóch kolejnych boków prostokąta są równe.

5 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Liczba $2,38 \cdot 10^5$ zaokrąglona do dziesiątek tysięcy jest równa $2,4 \cdot 10^5$.	P	F
Iloczyn liczb $4,5 \cdot 10^3$ i $2 \cdot 10^2$ zaokrąglony do setek tysięcy jest równy $9 \cdot 10^5$.	P	F
Różnica liczb $6,3 \cdot 10^3$ i $3,45 \cdot 10^2$ zaokrąglona do setek jest równa $6 \cdot 10^3$.	P	F
Iloraz liczby $6,8 \cdot 10^6$ przez liczbę $4 \cdot 10^3$ zaokrąglony do tysięcy jest równy $2 \cdot 10^3$.	P	F

- 6 Podstawa graniastopu prostego jest trójkątem prostokątnym równoramiennym o przeciwprostokątnej długości $8\sqrt{2}$ cm. Jeden z boków prostokąta, który jest w tym graniastopie ścianą boczną o największym polu, ma długość 5 cm. Ile wynosi pole powierzchni całkowitej tego graniastopu oraz jego objętość?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $P_c = 184\sqrt{2}$ cm², $V = 160$ cm³
 B. $P_c = (112 + 40\sqrt{2})$ cm², $V = 320$ cm³
 C. $P_c = 8(18 + 5\sqrt{2})$ cm², $V = 160$ cm³
 D. $P_c = (144 + 40\sqrt{2})$ cm², $V = 320$ cm³

- 7 Samochód osobowy zużywa poza miastem 6 l benzyny na 100 km. W mieście zużycie paliwa na 100 km jest o 20% większe. Ile litrów benzyny zużył samochód, jeśli przejechał w mieście odległość 250 km?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 12 l B. 18 l C. 15 l D. 14,4 l

- 8 Dane są równania: $2(x+2) = 6+x$ i $\frac{x^2}{9} + \frac{5}{9} = 1$. Czy te równania mają takie same rozwiązania?

Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	liczba 2 jest rozwiązaniem każdego z równań.
			2.	równanie $2(x+2) = 6+x$ spełnia jedna liczba, a równanie $\frac{x^2}{9} + \frac{5}{9} = 1$ spełniają dwie liczby.
B.	Nie,		3.	liczba 4 spełnia oba te równania.

- 9 Dany jest trójkąt, którego boki mają długości 10 cm, 14 cm i 12 cm. Naprzeciwko boku o jakiej długości leży kąt o największej mierze?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 10 cm B. 12 cm C. 14 cm D. Miary wszystkich kątów są jednakowe.

- 10 Pani Antonina podróżowała drogą ekspresową. Podróż podzieliła na trzy etapy, których stosunek długości wynosił 5 : 4 : 2. Najdłuższy etap trasy był dłuższy od najkrótszego o 105 km.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Trasa miała długość

- A. 577,5 km B. 385 km C. 315 km D. 245 km

- 11 W trapezie $ABCD$, w którym kąty przy podstawie AB mają miary 60° i 70° , przedłużono ramiona do przecięcia w punkcie E .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miary kątów trójkąta DCE są równe

- A. 50° , 120° , 10° B. 70° , 70° , 40° C. 60° , 50° , 70° D. 70° , 55° , 55°

- 12** W każdej z dwóch urn znajdują się kule: 8 białych, 10 czerwonych i 7 zielonych. **Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.**

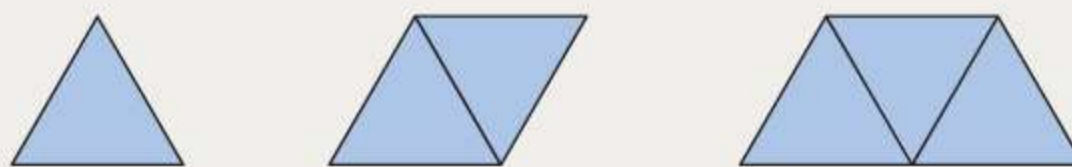
Z pierwszej urny należy wyjąć **A / B**, aby prawdopodobieństwo wylosowania z tej urny kuli czerwonej było równe $\frac{1}{4}$.

A. 4 kule czerwone **B.** 5 kul czerwonych

Do drugiej urny należy dołożyć **C / D** kul zielonych, aby prawdopodobieństwo wylosowania z tej urny kuli zielonej było równe $\frac{2}{5}$.

C. 5 **D.** 6

- 13** Trójkąty równoboczne o bokach długości 2 układano obok siebie, tworząc coraz większe trapezy, według reguły przedstawionej na rysunku.



Ile takich trójkątów równobocznych należy ułożyć, aby otrzymać trapez o obwodzie 22?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 6 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 11

- 14** Ewelina miała w skarbonce 76 zł w monetach pięciozłotowych i dwuzłotowych, przy czym monet dwuzłotowych miała o $\frac{1}{3}$ mniej niż monet pięciozłotowych. Ile monet dwuzłotowych miała Ewelina?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 20 **B.** 18 **C.** 12 **D.** 8

- 15** Drukarka drukuje 60 stron w ciągu 3 minut. Ile stron wydrukuje w ciągu 1 godziny i 5 minut?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 1300 **B.** 1500 **C.** 1800 **D.** 2100

- 16** Z drutu o długości 64 cm wykonano szkielet ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wszystkie krawędzie mają tę samą długość. Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

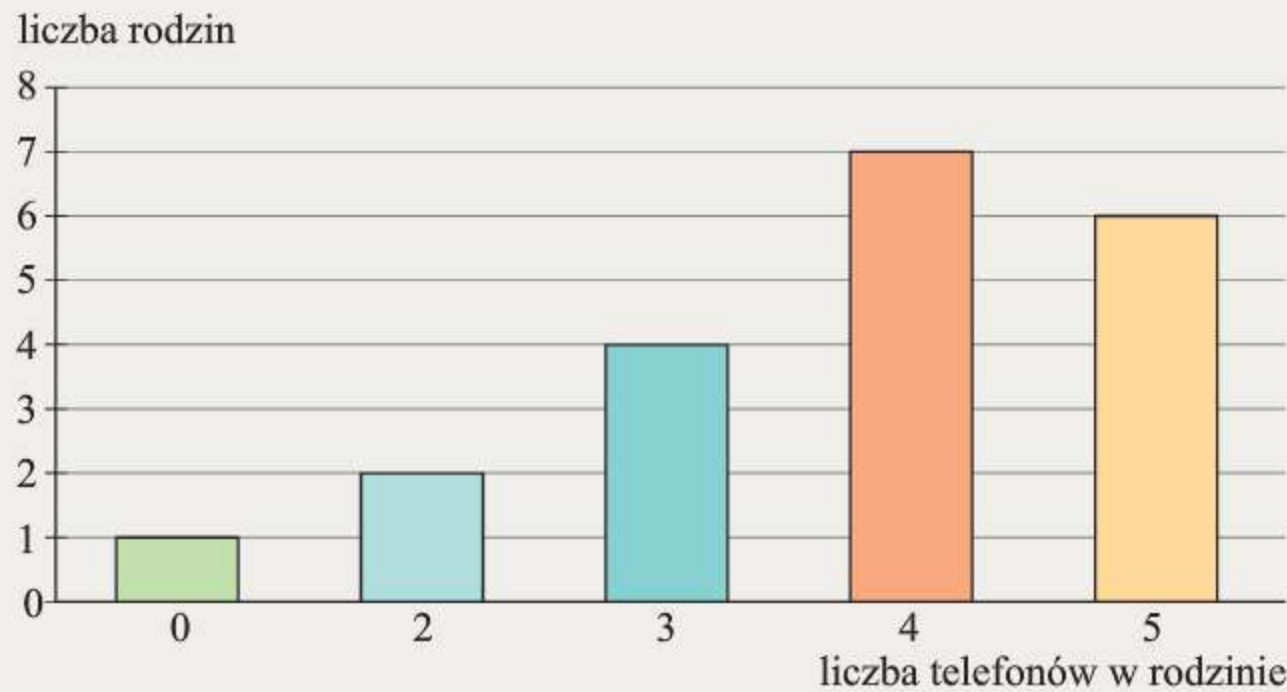
Zapisz obliczenia.

- 17** W prostokątnym układzie współrzędnych umieszczono taki prostokąt $ABCD$, że $A = (-6, -4)$, $B = (2, -4)$, $D = (-6, 2)$.

- Podaj współrzędne wierzchołka C tego prostokąta.
- Podaj współrzędne punktu S przecięcia się przekątnych prostokąta $ABCD$.
- Oblicz odległość punktu S od wierzchołka D .
- Oblicz pole prostokąta $ABCD$.

Zapisz obliczenia.

- 18 Na diagramie przedstawiono, ilu telefonów komórkowych używają rodziny uczniów pewnej klasy ósmej.



Na podstawie diagramu odpowiedz na pytania.

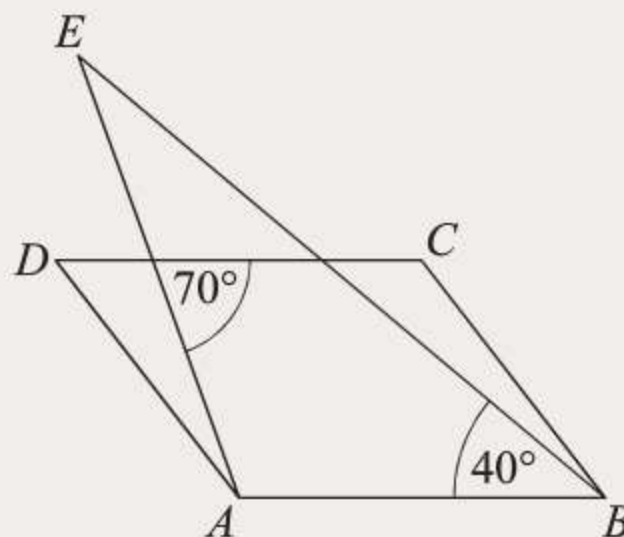
- Ilu uczniów liczy klasa, jeżeli wiadomo, że nie ma w niej rodzeństwa?
- Jaka liczba telefonów najczęściej przypada na jedną rodzinę?
- Jaki procent wszystkich rodzin stanowią rodziny korzystające z jednego lub dwóch telefonów?
- W ilu rodzinach liczba telefonów jest nie większa niż średnia arytmetyczna dla rodzin tej klasy?

- 19 W liczbie czterocyfrowej $4x6y$ podzielnej przez 9 i 5 cyfrę setek zastąpiono literą x , a cyfrę jedności – literą y . Jakie cyfry mogły być w miejscu liter x i y ?

Podaj wszystkie możliwości.

- 20 Dane są równoległobok $ABCD$ oraz trójkąt ABE takie, jak na rysunku. Uzasadnij, że $|\sphericalangle AEB| = 30^\circ$.

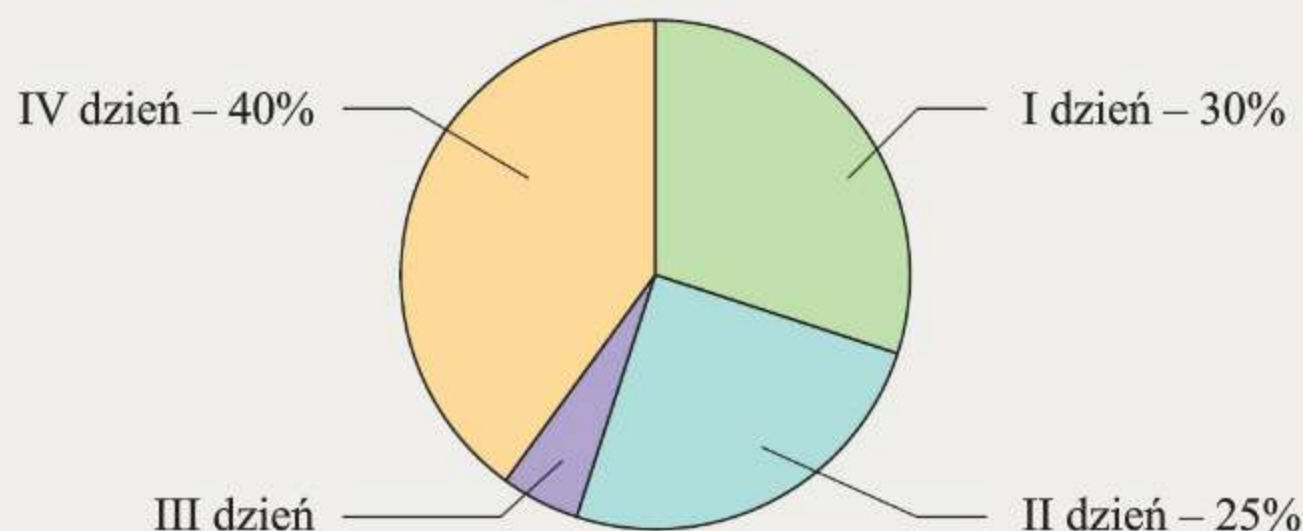
Zapisz uzasadnienie.



Zestaw zadań nr 3

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

- 1 Na procentowym diagramie kołowym przedstawiono, jaką część książki przeczytała Basia w poszczególnych dniach. Wiadomo, że pierwszego dnia przeczytała 126 stron.



Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Basia pierwszego i trzeciego dnia przeczytała A / B stron.

A. więcej niż 146

B. mniej niż 147

Basia pierwszego dnia przeczytała o C / D stron mniej niż czwartego dnia.

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{4}$

- 2 Na urodzinach babci 18 marca spotkały się wnuczeta: Zosia, Antek i Staś. Postanowili, że będą ją regularnie odwiedzać: Zosia co trzy dni, Antek co cztery dni, a Staś co pięć dni.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wnuczeta ponownie spotkają się u babci 17 maja.	P	F
Zosia i Staś ponownie spotkają się u babci za 12 dni.	P	F

- 3 Rodzeństwo Marysia i Jaś udali się tą samą trasą do parku odległego o 4,5 km. Marysia wyszła o godzinie 10.45 i szła ze średnią prędkością 6 km/h. Jaś trasę pokonał, jadąc na hulajnodze ze średnią prędkością 10 km/h. Marysia i Jaś przybyli do parku o tej samej godzinie.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Marysia dotarła do parku o godzinie 11.30.	P	F
Jaś wyjechał z domu o godzinie 11.03.	P	F

- 4 W rombie miara kąta ostrego jest cztery razy mniejsza od miary kąta rozwartego. **Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.**

Miara kąta przyległego do kąta ostrego tego rombu jest równa 144° .	P	F
Suma miar dwóch sąsiednich kątów rombu jest równa 180° .	P	F

- 5 Jaką liczbę należy dodać do wartości wyrażenia $-4^2 + 27 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3$, aby po wykonaniu działań otrzymać zero?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. -15 B. -17 C. 15 D. 17

- 6 O ile wartość wyrażenia $k = \sqrt{3}(1 + 2\sqrt{3})$ jest większa od wartości wyrażenia $l = \sqrt{27} - \sqrt{12}$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. -6 B. $|-6|$ C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3} + 6$

- 7 W urnie znajduje się 15 kul białych i 35 kul czarnych.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Z urny należy zabrać **A** / **B** kul czarnych, aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej wynosiło $\frac{1}{3}$. A. 5 B. 10

Do urny należy dołożyć **C** / **D** kul białych, aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej wynosiło $\frac{1}{2}$. C. 15 D. 20

- 8 Średnia arytmetyczna wzrostu trzech uczniów jest równa 170 cm. Ile centymetrów wzrostu ma czwarty uczeń, jeśli średnia arytmetyczna wzrostu czterech uczniów jest równa 175 cm?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 175 cm B. 180 cm C. 185 cm D. 190 cm

- 9 Pole kwadratu można obliczyć ze wzoru $P = \frac{1}{2}x^2$, gdzie x oznacza długość przekątnej kwadratu. Które równanie opisuje niewiadomą x wyznaczoną z tego wzoru?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $x = \sqrt{P}$ B. $x = 2\sqrt{P}$ C. $x = \frac{1}{2}\sqrt{P}$ D. $x = \sqrt{2P}$

- 10 Dany jest trapez równoramienny o kącie ostrym 60° i ramieniu długości 6. **Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Wysokość tego trapezu jest równa

- A. $6\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{2}$ D. 3

- 11** Bok kwadratu długości x cm skrócono o $\frac{1}{5}$ długości, a następnie wydłużono o $\frac{1}{5}$ długości. Czy końcowa długość tego boku różni się od początkowej?
Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	końcowa długość boku kwadratu wynosi $x - 0,2x + 0,2x = x$.
B.	Nie,		2.	końcowa długość boku kwadratu stanowi $\frac{24}{25}$ długości początkowej, czyli $0,96x$.

- 12** Motocyklista przejechał 80 km w ciągu 1 godziny i 20 minut. Ile kilometrów przejedzie w tych samych warunkach w ciągu 35 minut?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 21 km B. 30 km
 C. 35 km D. ok. 47 km



- 13** Do zbiornika w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $10 \text{ dm} \times 5 \text{ dm} \times 5 \text{ dm}$ wlano 150 litrów roztworu soli o stężeniu 10% i dopełniono roztworem soli o stężeniu 5%. Jakie stężenie procentowe ma roztwór soli w tym zbiorniku?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 9% B. 8% C. 7,5% D. 6,5%

- 14** Stosunek wieku matki do wieku córki jest równy $7 : 1$. Łącznie mają 48 lat.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Matka jest o 36 lat starsza od córki.	P	F
Za 13 lat córka będzie miała 15 lat, a matka 55 lat.	P	F

- 15** Pani Krystyna kupiła 1 kg orzechów nerkowca w cenie 36 zł za 1 kg, 2 kg orzechów włoskich w cenie 21 zł za 1 kg i 3 kg orzechów laskowych w cenie 26 zł za 1 kg. Jaka była cena jednego kilograma mieszanki wykonanej z zakupionych orzechów?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 52 zł B. 28 zł C. 27 zł D. 26 zł

- 16** W kinie w pierwszym rzędzie siedziały o 4 osoby więcej niż w rzędzie drugim. Jeśli szósta część widzów z pierwszego rzędu przesiadłaby się do rzędu drugiego, to w pierwszym rzędzie byłoby tylu widzów, ilu było na początku w rzędzie drugim. Ilu widzów siedziało na początku w każdym rzędzie?

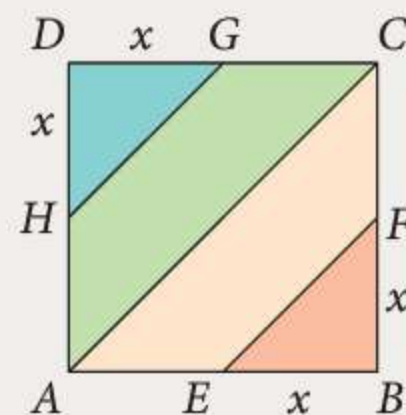
Zapisz obliczenia.

- 17 Dla uczestników konkursu informatycznego zakupiono nagrody w postaci gier komputerowych i zewnętrznych dysków twardych. Dyski stanowiły $\frac{3}{5}$ liczby zakupionych nagród. Gier komputerowych było o 6 mniej niż dysków. Ile dysków kupiono? **Zapisz obliczenia.**

- 18 Jeden z boków trójkąta ma długość $(3x - 10)$, drugi $\left(\frac{2}{5}x + 16\right)$, a trzeci $(1,5x + 5)$. Obwód tego trójkąta jest równy 60. Uzasadnij, że ten trójkąt jest równoboczny. **Zapisz uzasadnienie.**

- 19 Kwadrat $ABCD$ o boku 24 cm pocięto na cztery części w taki sposób, jak pokazano na rysunku. Wiadomo, że $|EF| = |HG| = 0,5|AC|$. Oblicz pole i obwód wielokąta $AEFCGH$.

Zapisz obliczenia.



- 20 Dana jest liczba dwucyfrowa, której cyfrą dziesiątek jest y , a cyfrą jedności jest x . Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego sumę danej liczby dwucyfrowej i liczby złożonej z tych samych cyfr, ale zapisanych w odwrotnej kolejności. Podaj wszystkie przykłady różnych par takich liczb, których suma jest równa 99.

Zapisz rozwiązanie.

- 21 W ostrosłupie jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i jej długość wynosi $a\sqrt{6}$ cm. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu równym 30 cm^2 . Jedna z krawędzi podstawy ma długość 5 cm, a druga jest równa a cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

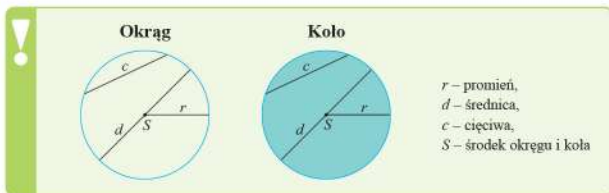
Zapisz obliczenia.



1. Długość okręgu

Przypomnij sobie

- czym różni się koło od okręgu,
- co to jest promień i średnica okręgu,
- co nazywamy cięciwą.



Zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r , nazywamy **okręgiem**. Część płaszczyzny, którą ogranicza okrąg, wraz z tym okręgiem nazywamy **kołem**.

Zauważmy, że **długość okręgu jest jednocześnie obwodem koła**.

Jeżeli postawimy na kartce szklankę i obrysujemy obwód jej dna, to otrzymamy rysunek okręgu. Podobnie będzie, jeśli obrysujemy talerz czy monetę. Aby zmierzyć długości tych okręgów, wystarczy za pomocą np. nitki lub sznurka zmierzyć obwody tych przedmiotów.

Przykład 1.

Przeanalizujemy wyniki pomiarów różnych przedmiotów przedstawione w tabeli.

Przedmiot	Obwód	Średnica	$\frac{\text{Obwód}}{\text{Średnica}}$
moneta 2 zł	6,6 cm	2,1 cm	3,14
szklanka	26 cm	8,2 cm	3,17
talerz	73 cm	23,2 cm	3,15
koło rowerowe	358 cm	112 cm	3,20

Dla czterech przedmiotów podano wyniki pomiaru ich obwodu oraz średnicy. W ostatniej kolumnie zapisano stosunki obwodu przedmiotu do jego średnicy. Każdy z tych stosunków jest bliski liczbie 3 (i jednocześnie większy od liczby 3).

To grecki uczony Archimedes w III wieku p.n.e. stwierdził, że dla wszystkich kół są spełnione następujące warunki:

$$\frac{\text{obwód}}{\text{średnica}} > 3 \frac{10}{71} \quad \text{ i } \quad \frac{\text{obwód}}{\text{średnica}} < 3 \frac{10}{70}$$

Późniejsze obliczenia, wykonane z większą dokładnością, potwierdziły, że:

$$\frac{\text{obwód}}{\text{średnica}} \approx 3,141592654.$$



Okazuje się, że liczba wyrażająca stosunek obwodu koła do jego średnicy jest dla każdego koła taka sama. Oznaczono ją grecką literą π (czytaj: pi).

$$\pi = \frac{\text{obwód}}{\text{średnica}}$$

Rozwinięcie dziesiętne tej liczby jest nieskończone i nieokresowe, a zatem π jest liczbą niewymierną. W obliczeniach najczęściej korzystamy z jej przybliżenia, np. w postaci dziesiętnej $\pi \approx 3,14$ lub ułamka zwykłego $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Po przyjęciu oznaczeń:

L – długość okręgu (obwód koła),

d – średnica,

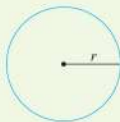
r – promień

możemy zapisać: $\pi = \frac{L}{d}$, czyli $L = \pi \cdot d$.

Ponieważ $d = 2r$, to **długość okręgu (obwód koła)** wynosi $2\pi r$.

Długość L okręgu (obwód koła) o promieniu r wyraża się wzorem:

$$L = 2\pi r$$



1 Oblicz długość okręgu o danym promieniu.

a) 3 cm

b) 2,4 m

c) $1 \frac{2}{3}$ dm

d) $\sqrt{5}$ mm

2 Oblicz długość okręgu o danej średnicy.

a) 5 dm

b) $2\sqrt{3}$ cm

c) $\frac{4}{\pi}$ m

d) $4a$

3 Oblicz promień i średnicę okręgu, którego długość jest podana.

a) 8 π cm

b) $\frac{2}{5}\pi$ dm

c) $2\sqrt{2}\pi$ m

d) $14a\pi$



- 4 Julka obwiązała metrową wstążką rulon o średnicy 24 cm. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Jeśli przyjmujemy, że $\pi = 3$, to na węzeł i kokardę zostało jej
- A. 28 cm. B. mniej niż 25 cm.
C. więcej niż 30 cm. D. 18 cm.

Przykład 2.

W rowerach górskich stosuje się koła 26-calowe. Obliczmy, ile razy obróci się koło tego roweru na dystansie 10 km.

Powyższa informacja oznacza, że średnica koła roweru ma 26 cali, czyli ok. 66 cm, ponieważ 1 cal $\approx$ 2,54 cm. Promień koła ma ok. 33 cm.

Jeśli koło wykona jeden obrót, to przebędzie drogę:

$$2\pi \cdot 33 \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 33 = 207,24 \text{ [cm]}$$

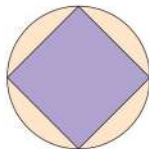
$$10 \text{ km} = 1\,000\,000 \text{ cm}$$

$$1\,000\,000 : 207,24 \approx 4825$$

ODPOWIEDŹ: Na dystansie 10 km koło roweru obróci się ok. 4825 razy.

- 5 Ile obrotów wykona koło motoroweru o średnicy 80 cm na drodze o długości 5 km? Do obliczeń przyjmij $\pi = 3,14$.

- 6 Bok kwadratu ma długość 4, a jego wierzchołki leżą na brzegu koła. O ile obwód kwadratu jest mniejszy od obwodu koła?



- 7 Każdy z siedmiu chłopców ma rozpiętość ramion równą 145 cm. Czy zdołają oni objąć pień dębu Bartek, którego średnica wynosi 314 cm? Odpowiedź uzasadnij.

- 8 Ola w drodze do szkoły pokonuje na rowerze 2,5 km. Na tym dystansie korzysta z trzech przełożeń przerzutki. Pierwszy kilometr przebywa tak, że jeden obrót pedałów powoduje 2,5 obrotu kół roweru, na drugim kilometrze stosuje przełożenie wywołujące 1,6 obrotu kół roweru, a pozostałe pół kilometra przebywa z przełożeniem równym 3 obrotom kół roweru. Czy w drodze do szkoły pedały roweru Oli wykonują więcej niż 500 obrotów, jeśli koło jej roweru ma średnicę równą 70 cm? Do obliczeń przyjmij $\pi = 3$.

Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	przy I przełożeniu przerzutki pedały obracają się ok. 85 razy, przy II – ok. 150, przy III – ok. 40.
B.	Nie,		2.	przy I przełożeniu przerzutki pedały obracają się ok. 190 razy, przy II – ok. 300, przy III – ok. 80.

Przykład 3.

Obliczmy, o ile centymetrów należy zmniejszyć średnicę koła o promieniu 8 cm, aby obwód koła zmniejszył się czterokrotnie.

Obwód tego koła wynosi $2\pi \cdot 8 \text{ cm} = 16\pi \text{ cm}$, a średnica 16 cm.

Po zmniejszeniu obwód będzie równy $4\pi \text{ cm}$, a średnica wyniesie 4 cm.

Wobec tego średnicę trzeba zmniejszyć o $16 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$.

ODPOWIEDZ: Średnicę koła trzeba zmniejszyć o 12 cm.

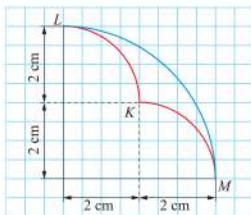
- 9 O ile centymetrów zwiększy się obwód koła o średnicy 5 cm, gdy promień zwiększymy 5 razy?
- 10 Koło ma średnicę równą a cm. Ile razy mniejszy obwód ma koło, którego średnica jest trzy razy krótsza?



- 11 Na Pałacu Kultury i Nauki w Warszawie znajduje się zegar, którego tarcza ma średnicę ok. 6,3 m. Wskazówka minutowa ma ok. 3,5 m długości, a jej dłuższa część, mierzona od środka tarczy, jest równa ok. 2,8 m. Oblicz, jaką drogę pokona koniec tej wskazówki w czasie 45-minutowej godziny lekcyjnej. Do obliczeń przyjmij $\pi = 3,14$. Wynik podaj po zaokrągleniu do 1 m.



- 12 Na rysunku przedstawiono trzy krzywe: LK , KM i LM .



Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Długość krzywej LM wynosi A / B.

A. 8 π cm

B. 2π cm

Suma długości krzywych LK i KM jest C / D długości krzywej LM .

C. o $\frac{1}{2}\pi$ cm dłuższa od

D. równa

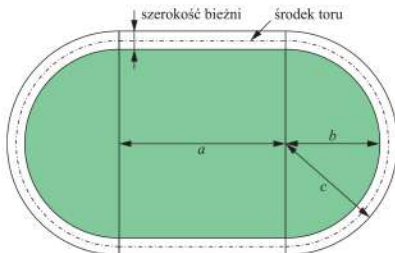
- 13 Oblicz, o ile procent zmniejszy się obwód koła, jeżeli jego promień zmniejszymy:
 a) o 30%,
 b) czterokrotnie.

Wyzwanie

Typowa bieżnia lekkoatletyczna jest owalem. Schemat takiej bieżni przedstawiono na rysunku poniżej. Ustal długości a , b , c , jeżeli wiadomo, że jednocześnie są spełnione następujące warunki:

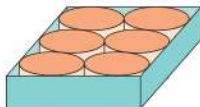
- długość bieżni, mierzona pośrodku toru, jest równa 400 m,
- szerokość bieżni ma 7,6 m,
- długość a jest o 30,5 m większa od b .

Przyjmij przybliżenie $\pi = 3$. Wyniki podaj po zaokrągleniu do 0,1 m.



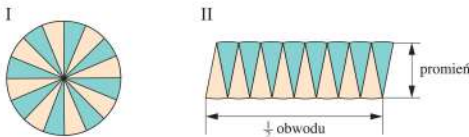
Sprawdź się!

- 1 Oblicz długość okręgu o średnicy 20 cm.
- 2 Promień koła ma długość 12 cm. O ile centymetrów należy zwiększyć średnicę koła, aby jego obwód zwiększył się trzykrotnie?
- 3 Średnica koła roweru jest równa 80 cm. Ile obrotów wykona koło tego roweru na odcinku 1256 m? Do obliczeń przyjmij $\pi = 3,14$.
- 4 Obwód koła, które jest podstawą pudełka w kształcie walca, jest równy 6π cm. Ile wynoszą wymiary prostokąta, który jest podstawą prostopadłościennego pudełka? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
 A. $1,2 \text{ dm} \times 18 \text{ dm}$ B. $12 \text{ dm} \times 1,8 \text{ dm}$
 C. $1,2 \text{ dm} \times 1,8 \text{ dm}$ D. $12 \text{ dm} \times 18 \text{ dm}$
- 5 Czy żeton o obwodzie 7 cm zmieści się w okrągłym otworze o średnicy 2 cm? Odpowiedź uzasadnij.



2. Pole koła

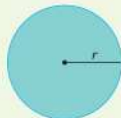
Koło pocięto wzdłuż promieni na części tak jak na rysunku I. Z tych części można ułożyć figurę taką jak przedstawiona na rysunku II. Figura ta przypomina równoległobok.



Koło można rozciąć na mniejsze kawałki i ułożyć z nich figurę jeszcze bardziej zbliżoną do równoległoboku, którego podstawa jest w przybliżeniu równa połowie obwodu tego koła, a wysokość – promieniowi koła, a zatem $P = \pi r \cdot r = \pi r^2$.

Pole P koła o promieniu r wyraża się wzorem:

$$P = \pi r^2$$



- 1 Oblicz pole i obwód koła o danym promieniu.
 - a) 2 cm
 - b) $\frac{5}{6}$ m
 - c) 3,2 dm
 - d) $1\frac{2}{3}$ cm
- 2 Oblicz pole i obwód koła o danej średnicy.
 - a) 10 cm
 - b) $4\sqrt{2}$ cm
 - c) $\frac{8}{\pi}$ m
 - d) $20x$
- 3 Oblicz promień koła o danym polu.
 - a) 36 cm^2
 - b) $0,64\pi\text{ m}^2$
 - c) $2\frac{14}{25}\pi\text{ dm}^2$
 - d) $10\pi\text{ cm}^2$

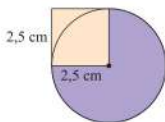
Przykład 1.

Ile razy pole koła o promieniu 2,5 cm jest większe od pola kwadratu, którego bok ma długość równą promieniowi koła?

$$P_{\text{koła}} = \pi \cdot 2,5^2\text{ cm}^2 \quad P_{\text{kwadratu}} = 2,5^2\text{ cm}^2$$

$$\frac{P_{\text{koła}}}{P_{\text{kwadratu}}} = \frac{2,5^2\pi}{2,5^2} = \pi$$

ODPOWIEDZ: Pole koła jest π razy większe od pola kwadratu.





- 4 Dane jest koło o promieniu 4 cm. Jaką częścią pola koła jest pole kwadratu o boku równym promieniowi koła?
- 5 Lądowisko dla helikoptera ratunkowego może mieć kształt kwadratu o boku co najmniej 25 m lub koła o takiej średnicy. Porównaj powierzchnie obu lądowisk. Do obliczeń przyjmij $\pi = 3$.
- 6 W koło o średnicy 12 cm zmniejszono promień o 3 cm. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Pole koła zmniejszy się mniej więcej o 85 cm^2 .	P	F
Pole koła zmniejszy się trzy razy.	P	F
Pole otrzymanego koła stanowi 25% pola wyjściowego koła.	P	F
Pole wyjściowego koła jest cztery razy większe od pola otrzymanego koła.	P	F

- 7 Oblicz w zaokrągleniu do 1 cm^2 pole koła, którego obwód jest równy 51,81 cm. Do obliczeń przyjmij $\pi = 3,14$.

- 8 Oblicz obwód koła, którego pole jest równe $1,44\pi \text{ dm}^2$.

- 9 Ile razy zwiększy się pole koła, jeśli jego promień zwiększymy trzy razy?

- 10 Największa pizza na świecie (stan na rok 2020) powstała w 2006 roku we Włoszech. Jej średnica miała 39,6 m. Powierzchnia średniej pizzy wynosi ok. 768 cm^2 . Powierzchnia ilu takich średnich pizz jest równa powierzchni największej pizzy na świecie? Do obliczeń przyjmij $\pi = 3$.

- 11 Obwód pnia drzewa na wysokości 30 cm ma 62,8 cm. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D. Do obliczeń przyjmij $\pi = 3,14$.

Średnica przekroju drzewa na podanej wysokości wynosi A / B.

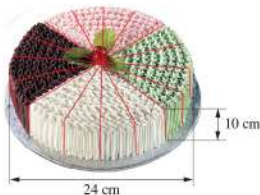
A. 10 cm B. 20 cm

Pole przekroju drzewa na podanej wysokości jest równe C / D.

C. 314 cm^2 D. 157 cm^2

- 12 Czy do prostopadłościennego pudełka o wymiarach $36 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} \times 11 \text{ cm}$ zmieszczą się wszystkie kawałki tortu pokrojonego tak jak na rysunku? Odpowiedź uzasadnij.

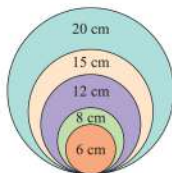
- 13 Wykaż, że jeżeli promień koła zwiększymy o 20%, to jego pole wzrośnie o 44%.





14

Julka wykonała „pawie oczko” z kolorowego papieru, takie jak na rysunku. Oblicz, ile procent niebieskiego fragmentu „oczka” stanowi każdy z pozostałych kolorów, jeśli podane liczby określają średnice poszczególnych kół.



Wyzwanie

Moneta 5-złotowa zasłania nalepkę w kształcie sześciokąta foremnego, ale wierzchołki nalepki leżą na obrzeżach monety. Jaki procent pola monety stanowi nalepka, jeśli średnica monety ma 2,4 cm?

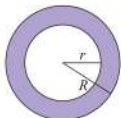
Sprawdź się!

- 1 Ile wynoszą pole i obwód koła o promieniu $\frac{3}{4}$ cm?
- 2 Ile razy zmniejszy się pole koła, jeśli jego promień zmniejszymy cztery razy? Odpowiedź uzasadnij.
- 3 Pole koła jest równe 196π cm². Ile decymetrów ma jego obwód? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. $1,4\pi$ dm B. 28π dm C. $2,8\pi$ dm D. 14π dm
- 4 Z koła o promieniu 5 cm wycięto kwadrat o boku 6 cm. Jaki procent pola koła pozostał? Do obliczeń przyjmij $\pi = 3,14$.
- 5 Promień koła zwiększono trzykrotnie. Uzasadnij, że pole tego koła wzrosło o 800%.

3. Pierścień kołowy, pole pierścienia

Okręgi o wspólnym środku nazywamy **okręgami współśrodkowymi**.

Dwa okręgi o wspólnym środku i promieniach różnej długości wyznaczają pierścień. **Pierścień kołowy** to część płaszczyzny ograniczona dwoma okręgami wraz z tymi okręgami.



Promień r mniejszego okręgu nazywamy **promieniem wewnętrznym** pierścienia, a promień R większego okręgu nazywamy **promieniem zewnętrznym** pierścienia. Różnica promienia zewnętrznego i wewnętrznego $R - r$ jest **szerokością pierścienia**.

- 1 Narysuj dwa koła o wspólnym środku: jedno o promieniu 2,4 cm, a drugie o średnicy 6 cm. Zakreskuj powstały pierścień. Jaką szerokość ma ten pierścień?
- 2 Szerokość pierścienia kołowego jest równa 1,2 dm, a jego promień wewnętrzny to 28 cm. Czy promień zewnętrzny jest równy 40 cm? Odpowiedź uzasadnij.
- 3 Promień zewnętrzny pierścienia kołowego o szerokości 9 cm jest równy 1,4 dm. Oblicz różnicę obwodów okręgów wyznaczających ten pierścień. Do obliczeń przyjmij $\pi = 3,14$. Wynik zaokrąglij do 1 cm.

Przykład 1.

Obliczmy pole pierścienia przedstawionego na rysunku.

Odczytajmy promienie pierścienia. Ponieważ bok kratki ma 0,5 cm, to promień zewnętrzny $R = 3$ cm, a promień wewnętrzny $r = 1,5$ cm.

Aby obliczyć pole pierścienia P , należy od pola koła o promieniu R odjąć pole koła o promieniu r .

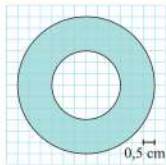
Pole P_1 koła o promieniu R jest równe:

$$P_1 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

Pole P_2 koła o promieniu r jest równe: $P_2 = \pi \cdot 1,5^2 = 2,25\pi \text{ [cm}^2\text{]}$.

Pole pierścienia P jest równe: $P = P_1 - P_2 = 9\pi - 2,25\pi = 6,75\pi \text{ [cm}^2\text{]}$.

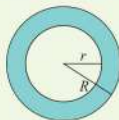
Zwróćmy uwagę na to, że: $P = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$.



Pole dowolnego pierścienia można obliczyć ze wzoru:

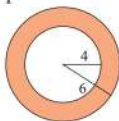
$$P = \pi(R^2 - r^2),$$

gdzie: R – promień zewnętrzny pierścienia,
 r – promień wewnętrzny pierścienia.

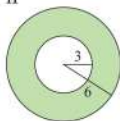


- 4 Zapisz pary: numer pierścienia i literę określającą jego pole.

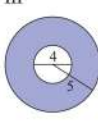
I



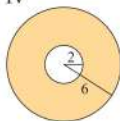
II



III



IV

A. 21π B. 24π C. 20π D. 32π E. 27π

- 5 Na rysunku tarczy strzelniczej można wyróżnić kilka różnokolorowych pierścieni. Średnica tarczy wynosi 42 cm, a szerokość każdego pierścienia oznaczono cyfrą jest równa 2 cm. Oblicz pola pierścieni: czarnego, niebieskiego i czerwonego. Czy pole żółtego koła jest mniejsze od pola czarnego pierścienia o więcej niż 60%?



- 6 Promień wewnętrzny pierścienia kołowego ma 2 cm, a promień zewnętrzny 2,5 dm. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole tego pierścienia wynosi

A. $2,25\pi\text{ cm}^2$ B. $621\pi\text{ cm}^2$ C. $62,1\pi\text{ dm}^2$ D. $22,5\pi\text{ dm}^2$

- 7 Dane są dwa pierścienie kołowe, których promienie zewnętrzne są takie same, równe 18 cm. Szerokość jednego pierścienia jest o 40% większa od szerokości drugiego pierścienia, równej 5 cm. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Promień wewnętrzny jednego pierścienia jest o A / B dłuższy od promienia wewnętrznego drugiego pierścienia.

A. 2 cm B. 7 cm

Różnica pól tych pierścieni kołowych wynosi C / D.

C. $48\pi\text{ cm}^2$ D. $24\pi\text{ cm}^2$



- 8 Pole pierścienia kołowego jest równe $24\pi \text{ cm}^2$. Promień zewnętrzny ma 7 cm. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Promień wewnętrzny tego pierścienia ma 5 cm.	P	F
Szerokość pierścienia wynosi 3 cm.	P	F
Pole pierścienia jest równe $(7-5)^2\pi \text{ cm}^2$.	P	F
Stosunek obwodu wewnętrznego do obwodu zewnętrznego pierścienia wynosi $\frac{5}{7}$.	P	F

Przykład 2.

Firma, w której pracuje pan Wojciech, wykonuje znaki drogowe. Pan Wojciech ma zakupić czerwoną farbę do pomalowania 1000 wielkich znaków zakazu ruchu w obu kierunkach. Obliczmy, ile pojemników farby musi kupić, jeśli jeden pojemnik wystarcza na pomalowanie 40 m^2 powierzchni.



Wymiary znaków zakazu		
Grupa wielkości znaków	Średnica [mm]	Szerokość obrzeża [mm]
wielkie	1000	100
duże	900	90
średnie	800	80
małe	600	60
mini	400	40

Z danych znajdujących się w tabeli wynika, że promień zewnętrzny czerwonego pierścienia wynosi 0,5 m, a jego szerokość 0,1 m, zatem promień wewnętrzny czerwonego pierścienia ma 0,4 m.

Pole czerwonego pierścienia obliczamy ze wzoru $P = \pi(R^2 - r^2)$, a zatem:
 $P \approx 3,14 \cdot (0,5^2 - 0,4^2) = 3,14 \cdot (0,25 - 0,16) = 3,14 \cdot 0,09 = 0,2826 \text{ [m}^2\text{]}.$

Powierzchnia czerwonych pierścieni na 1000 znaków drogowych wynosi $1000 \cdot 0,2826 \text{ m}^2$, czyli ok. 283 m^2 .

$$283 : 40 = 7 \text{ r } 3$$

ODPOWIEDZ: Pan Wojciech musi zakupić 8 pojemników farby.

- 9 Skorzystaj z tabeli podanej w przykładzie 2. i oblicz pola pierścieni znaków: dużego, średniego, małego i mini. Czy suma pól pierścieni dużego i mini jest większa niż suma pól pierścieni małego i średniego?

- 10** Wachlarz wykonano z koronki w kształcie połowy pierścienia. Ile metrów kwadratowych koronki potrzeba na wykonanie 500 wachlarzy, jeśli szerokość koronki wynosi 12 cm, a długość drewnianych patyczków 24 cm? Do obliczeń przyjmij $\pi = 3$.



- 11** Zosia robi kapelusz na bal maskowy. Chce okleić z dwóch stron rondo kapelusza zielonym aksamitem. Ile aksamitu potrzebuje, jeśli obwód jej głowy wynosi 54 cm, a rondo ma mieć 10 cm szerokości? Do obliczeń przyjmij $\pi = 3$.

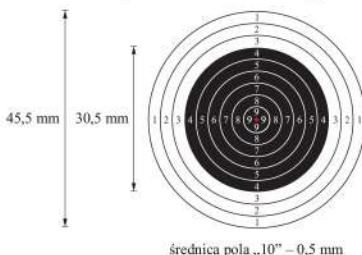


- 12** Tęczówka ze źrenicą oka ma średnicę ok. 12 mm, a średnica źrenicy zmienia się od 2 mm do 8 mm.



- Jaką część tęczówki ze źrenicą oka zajmuje źrenica, gdy jest najmniejsza, a jaką – gdy jest największa?
- Oblicz pole tęczówki, gdy źrenica jest najmniejsza i największa. Przyjmij, że powierzchnia tęczówki ze źrenicą jest płaska.

- 13** Na rysunku przedstawiono tarczę do strzelania z karabinu pneumatycznego.



- Oblicz pole białej części tarczy.
- Które pole tarczy jest większe: to, na którym można zdobyć przy jednym strzale 1 lub 2, lub 3 punkty, czy to, na którym zdobywamy więcej niż 3 punkty, ale mniej niż 10 punktów? O ile procent jest większe?
- Jaki procent pozostałej części tarczy stanowi pole 10-punktowe?



Wyzwanie

Tata zrobił synkowi okrągły stół, na którym ustawił jego kolejkę, taką jak na rysunku. Średnica stoika jest taka sama jak zewnętrzna średnica toru kolejki i wynosi 50 cm. Tor kolejki zajmuje 40% powierzchni stoika. Jaka szerokość ma tor kolejki? Wynik podaj po zaokrągleniu do 1 cm.



Sprawdź się!

- 1 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Pierścień tworzą dwa okręgi o wspólnym środku.	P	F
Promień zewnętrzny pierścienia jest mniejszy od promienia wewnętrznego tego pierścienia.	P	F
Jeśli promienie pierścienia wynoszą 3,9 dm i 1,2 m, to pierścień ma 81 cm szerokości.	P	F
Każde dwa koła o różnych promieniach tworzą pierścień, którego szerokością jest różnica dłuższego i krótszego promienia.	P	F

- 2 Promień zewnętrzny pierścienia kołowego jest równy 8 dm, a promień wewnętrzny jest o 5 cm krótszy. Ile wynosi pole tego pierścienia?
- 3 Z koła o średnicy 20 cm wycięto koło o promieniu 8 cm w taki sposób, że otrzymano pierścień kołowy. Ile wynosi pole tego pierścienia? Do obliczeń przyjmij $\pi = 3,14$.
- 4 Dwa koła o polach $1,69\pi \text{ dm}^2$ i $81\pi \text{ cm}^2$ tworzą pierścień kołowy. Jaka jest szerokość tego pierścienia?
- 5 Obwód wewnętrzny pierścienia kołowego jest o 20% mniejszy od jego obwodu zewnętrznego, równego $30\pi \text{ cm}$. Oblicz pole tego pierścienia.

Zadania utrwalające

- 1** Walec drogowy ma średnicę 1,80 m. Podczas wyrównywania nawierzchni drogi wykonał 150 pełnych obrotów. Podaj w zaokrągleniu do 1 m długość drogi, jaką wyrównał walec, przy założeniu, że jechał prosto w jednym kierunku.
- 2** Jacek na podstawie tabeli wiekowej drzew, sporządzonej przez prof. Longina Majdeckiego, dowiedział się, że dąb rosnący na jego działce ma ok. 70 lat. Skorzystaj z fragmentu tej tabeli i odpowiedz, czy przybliżona średnica dębu na działce Jacka ma 35 cm.

Nazwa drzewa	Wiek drzewa [lata]						Obwód pnia [cm]
	10	20	40	70	100	120	
sosna	15	31	79	157	214	251	
dąb	14	28	57	110	148	173	
brzoza	19	38	79	157	220	261	

- 3** Obecnie największym diabelskim kołem na świecie jest The High Roller w Las Vegas (Stany Zjednoczone). Koło to składa się z 28 podświetlanych gondoli, rozmieszczonych co 18,8 m. Każda gondola może pomieścić do 40 osób, co oznacza, że jednorazowo młyn może zabrać w podróż aż 1120 osób. Pełen obrót koła trwa 30 minut. Spośród powyższych informacji wybierz te, które pozwolą ci obliczyć, na jaką maksymalną wysokość ten młyn zabiera pasażerów. Zapisz obliczenia i wynik. Do obliczeń przyjmij $\pi = 3,14$.



- 4** Czy 6 m sznurka wystarczy, aby ułożyć z niego okrąg o średnicy 2 m? Odpowiedź uzasadnij.
- 5** Średnica dużego koła traktora wynosi 1,60 m, a średnica małego koła 0,5 m. Oblicz, ile razy więcej obrotów wykona małe koło na drodze 480 m.
- 6** Która z figur ma mniejsze pole: koło o średnicy 10 cm czy prostokąt o wymiarach $12,5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$?
- 7** Oblicz promień koła o polu $1,69\pi$.



- 8 Koza w ciągu dnia jest uwiązana na sznurku długości 8 m w narożniku prostokątnej działki.

a) Ile metrów kwadratowych ma obszar, na którym pasie się koza?
b) O ile zwiększy się pole tego obszaru, jeśli sznurek wydłużymy o 1 m?
Przyjmij, że $\pi = 3,14$, a wymiary działki są większe niż 9 m.



- 9 Z kwadratowej blachy o boku długości 1 m wycięto koła o promieniu 10 cm tak, żeby było jak najmniej odpadów. Jaki procent powierzchni blachy stanowią odpady?

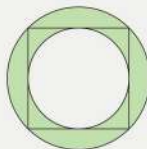


- 10 Obwód zewnętrzny pierścienia kołowego jest równy 16π cm, a obwód wewnętrzny – 10π cm. Oblicz pole tego pierścienia.

- 11 Koło ma średnicę 10 m. Oblicz pole pierścienia kołowego, który powstanie z tego koła, jeżeli wytniemy z niego koło o promieniu o 20% mniejszym.



- 12 Kwadratowy plac zabaw o boku 30 m zmieniono na okrągły i utworzono wokół niego ścieżkę spacerową, jak na rysunku, którą wyłożono kostką. Oblicz, ile metrów kwadratowych kostki zużyto na tę ścieżkę. Do obliczeń przyjmij $\pi = 3$.



- 13 Oblicz sumę długości okręgów o średnicach 18 cm i 10 cm wyznaczających pierścień kołowy.

- 14 Bulaj (okrągłe okienko na statku) ma średnicę równą 0,4 m. Metalowa rama tego okienka ma szerokość 4 cm. Jaką powierzchnię ma szyba w tym bulaju? Do obliczeń przyjmij $\pi = 3$.



- 15 Z prostokątnego ciasta o wymiarach $24 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ mama wycięła szklanką koła o średnicy 8 cm. Następnie w tych kołach wycięła kieliszkiem dziurki o średnicy 4 cm. Oblicz, ile procent ciasta mama wykorzystała na wykonanie ciastek z dziurką, jeśli wiesz, że starała się, aby zostało jak najmniej ciasta. Do obliczeń przyjmij $\pi = 3,14$.

- 16 Obrus w kształcie koła ma powierzchnię równą $6,75 \text{ m}^2$. Jaką średnicę ma stół, na którym położono ten obrus, jeśli część obrusa opadająca wokół stołu ma szerokość 25 cm? Do obliczeń przyjmij $\pi = 3$.



Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–2. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Ile obręczy o średnicy 8 cm można wykonać z drutu o długości 1 m?
A. 3 B. 4 C. 2 D. 8
- 2 O ile centymetrów należy zwiększyć promień okręgu równy 3 dm, aby długość okręgu wzrosła dwukrotnie?
A. O 2 cm. B. O 11 cm. C. O 20 cm. D. O 30 cm.

W zadaniach 3.–5. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 3 Promień koła, którego pole jest równe $121\pi \text{ cm}^2$, wynosi
A. 12,1 cm B. 1,1 dm C. 0,12 m D. 111 cm
- 4 Dwa koła mają wspólny środek. Promień większego koła jest równy średnicy mniejszego koła. Suma promieni obu kół wynosi 9 cm. Szerokość pierścienia utworzonego przez te koła jest równa
A. 3,5 cm B. 3 cm C. 5 cm D. 6 cm
- 5 Klomb ma kształt koła o średnicy 8 m. Wokół klombu biegnie ścieżka o szerokości 1,5 m, którą wysypano żwirem. Powierzchnia pokryta żwirem jest równa
A. $14,25 \text{ m}^2$ B. $26,25\pi \text{ m}^2$ C. $14,25\pi \text{ m}^2$ D. ok. 36 m^2

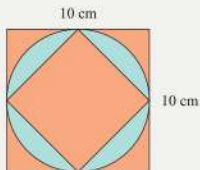
- 6 Na rysunku przedstawiono element witraża. Cały witraż składa się z 300 takich elementów. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D. Do obliczeń przyjmij $\pi = 3$.

Na ten witraż potrzeba A / B niebieskiego szkła.

- A. $0,75 \text{ m}^2$ B. $1,25 \text{ m}^2$

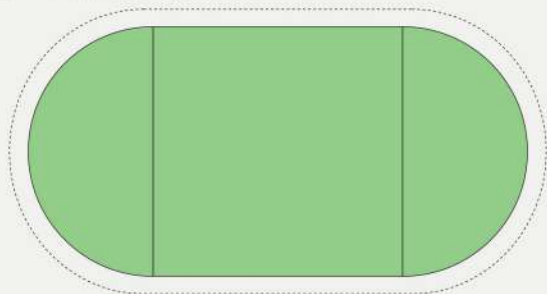
Na ten witraż zużyto o C / D więcej szkła pomarańczowego niż niebieskiego.

- C. $1,5 \text{ m}^2$ D. $0,75 \text{ m}^2$





- 7 Na rysunku przedstawiono plan stadionu składającego się z murawy i bieżni lekkoatletycznej. Murawa ma kształt kwadratu z doklejonymi przystającymi półkami. Długość wewnętrznej krawędzi bieżni ma 400 m.



Czy promień tych półkoli wynosi 40 m, jeśli do obliczeń przyjmiesz $\pi = 3$? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1, 2 albo 3.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$400 = 2r(2 + \pi)$, gdzie r – promień półkola.
			2.	$400 = 9r$, gdzie r – promień półkola.
B.	Nie,		3.	$400 = 4r(2 + \pi)$, gdzie r – promień półkola.

- 8 Długość wycieraczki tylnej szyby samochodowej jest równa 50 cm. Długość pióra wycieraczki czyszczącego szybę stanowi 60% długości wycieraczki. Część okręgu zakreślona przez górny koniec pióra stanowi $\frac{1}{3}$ okręgu o promieniu równym długości wycieraczki.

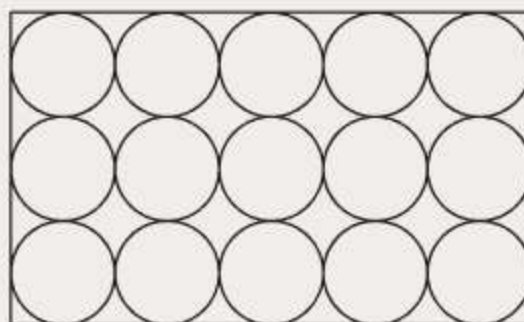


Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Przyjmij $\pi = 3,14$.

Szerokość czyszczonego fragmentu szyby wynosi 30 cm.	P	F
Czyszczona powierzchnia szyby wynosi $700\pi \text{ cm}^2$.	P	F
Jeśli szyba ma powierzchnię $0,72 \text{ m}^2$, to wycieraczka czyści jej połowę.	P	F
Czyszczona powierzchnia szyby jest równa połui koła o promieniu 25 cm.	P	F



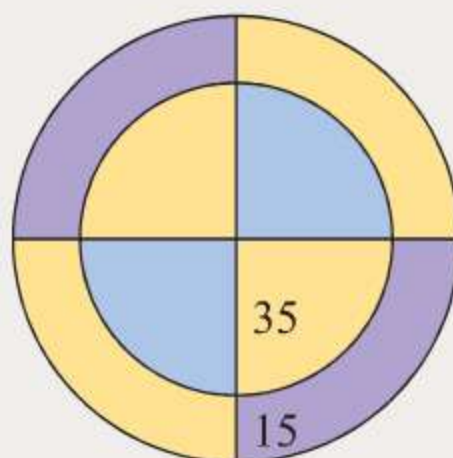
- 9 Z dwóch arkuszy gotowego ciasta francuskiego mama wykroiła szklanką placuszki na pierogi z kapustą i grzybami w kształcie kół o średnicy 7 cm, tak jak na rysunku.



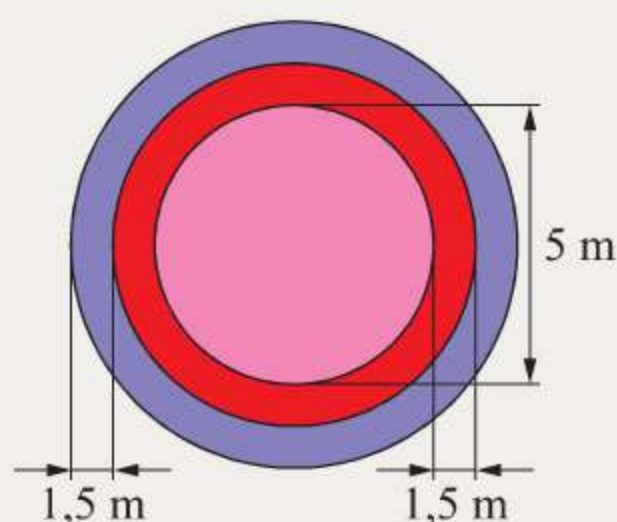
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Przyjmij $\pi = 3$.

Arkusz ciasta francuskiego ma wymiary 35 cm $\times$ 21 cm.	P	F
Mama upiekła 30 pierogów z kapustą i grzybami.	P	F
Na pierogi mama zużyła 75% ciasta francuskiego.	P	F
Z pozostałego ciasta można ulepić 12 takich placuszków na pierogi.	P	F

- 10 Okrągłe okno ma promień równy 50 cm i jest wykonane z szyb w trzech kolorach, jak na rysunku. Szyby w którym kolorze zajmują najmniejszą powierzchnię? Zapisz obliczenia.



- 11 Klomb w kształcie koła podzielono na trzy części w sposób przedstawiony na rysunku. Dla których kwiatów przeznaczono najmniejszą część klombu, a dla których – największą? Odpowiedź uzasadnij.

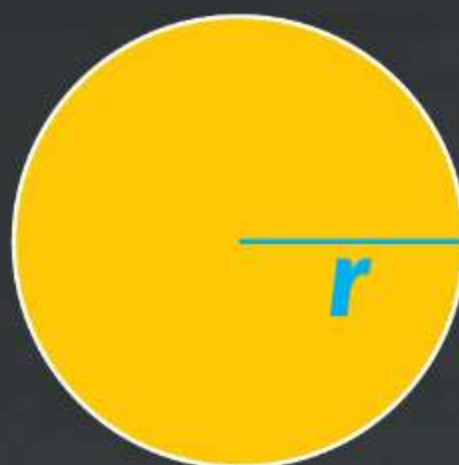


- hiacynty
- tulipany
- krokusy



Matematyka

Matematyka może przydać się także w pizzerii. Na przykład kiedy podejmujemy decyzję, czy zamówić **trzy małe pizze** czy **jedną dużą**.



Z pomocą przyjdzie wzór na pole koła.

$$P = \pi r^2$$

Cennik pizzy



PIZZA DUŻA
Średnica: 60 cm
Cena: 54 zł



PIZZA MAŁA
Promień: 15 cm
Cena: 19 zł



Pole dużej pizzy

$$\begin{aligned} r &= 30 \text{ cm} \\ P &= \pi \cdot (30 \text{ cm})^2 = \\ &= \mathbf{900\pi \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

Cena: 54 zł



Pole trzech małych pizz

$$\begin{aligned} r &= 15 \text{ cm} \\ P &= 3 \cdot \pi \cdot (15 \text{ cm})^2 = \\ &= 3 \cdot \pi \cdot 225 \text{ cm}^2 = \\ &= \mathbf{675\pi \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

Cena: $3 \cdot 19 \text{ zł} = 57 \text{ zł}$

Widać, że bardziej opłaca się kupić dużą pizzę.

$\pi = 3,141592653589793238462643383279$

w pizzerii

Jak nietypowo podzielić pizzę pomiędzy dwie osoby?



Zgodnie z **twierdzeniem o pizzy** można podzielić ją równo pomiędzy kilka osób, nawet w przypadku, kiedy punkt przecięcia **nie przechodzi przez środek ciasta**.

Przy podziale na dwie osoby pizzę należy **rozkroić wzdłuż czterech linii prostych przecinających się w jednym punkcie pod równymi kątami**. Liczba linii prostych jest dwa razy większa od liczby osób.

W ten sposób otrzymamy osiem kawałków pizzy. Suma powierzchni fragmentów nieparzystych (zaczynając od dowolnego) jest równa sumie powierzchni kawałków parzystych.



A jak nietypowo podzielić pizzę pomiędzy trzy osoby?

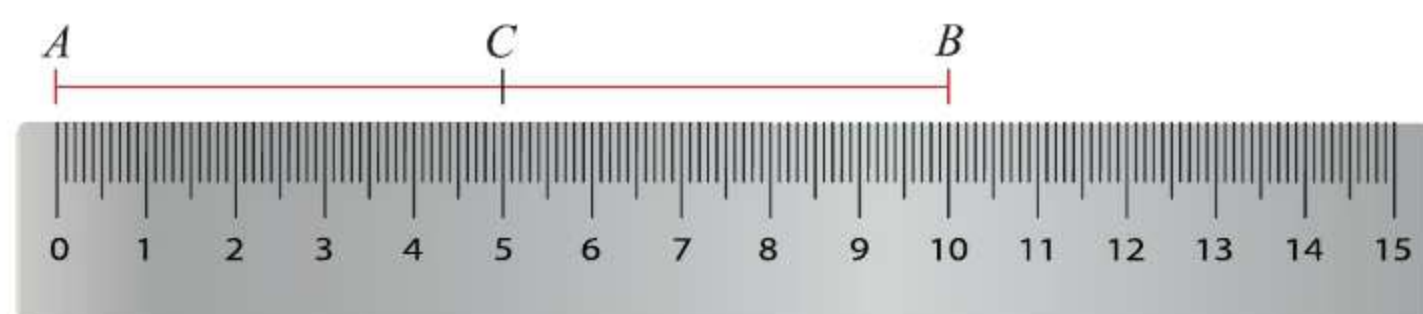


W tym przypadku pizzę należy **rozkroić wzdłuż sześciu linii prostych przecinających się w jednym punkcie pod równymi kątami**. Każda z osób otrzyma co trzeci kawałek pizzy.

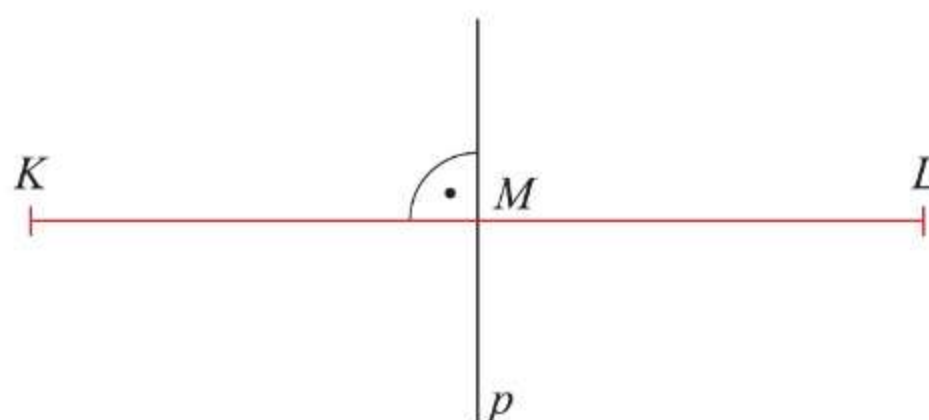
502884197169399375105820974944592...

1. Symetralna odcinka i dwusieczna kąta

Punkt C jest środkiem odcinka AB .



Środek odcinka można wyznaczyć bez użycia podziałki linijki – trzeba zgiąć kartkę, na której narysowany jest odcinek, w taki sposób, żeby końce odcinka się pokryły.



Prosta p , wyznaczona przez zgięcie kartki, przecina odcinek KL w punkcie M . Prosta p jest prostopadła do odcinka KL i dzieli go na połowy. Taką prostą nazywamy symetralną odcinka.

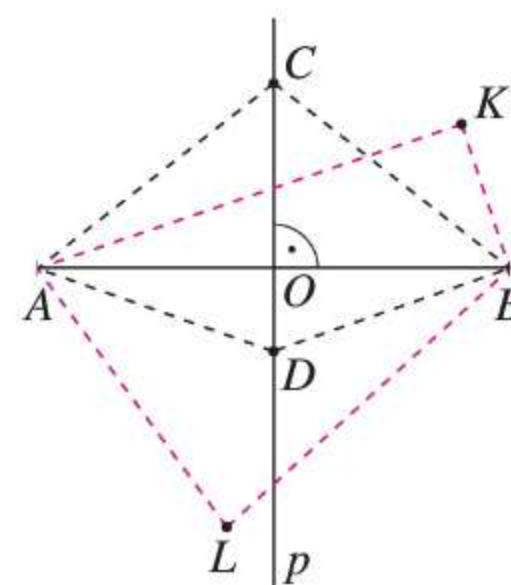


Symetralna odcinka to prosta prostopadła do odcinka, która dzieli go na dwie równe części.

Zaznaczmy punkty C i D leżące na symetralnej p odcinka AB oraz punkty K i L leżące poza symetralną.

Długości odcinków narysowanych liniami przerywanymi oznaczają odległości tych punktów od końców odcinka AB . Porównujemy: $|AC|$ i $|CB|$, $|AD|$ i $|DB|$, a także $|AO|$ i $|OB|$, i stwierdzamy, że:

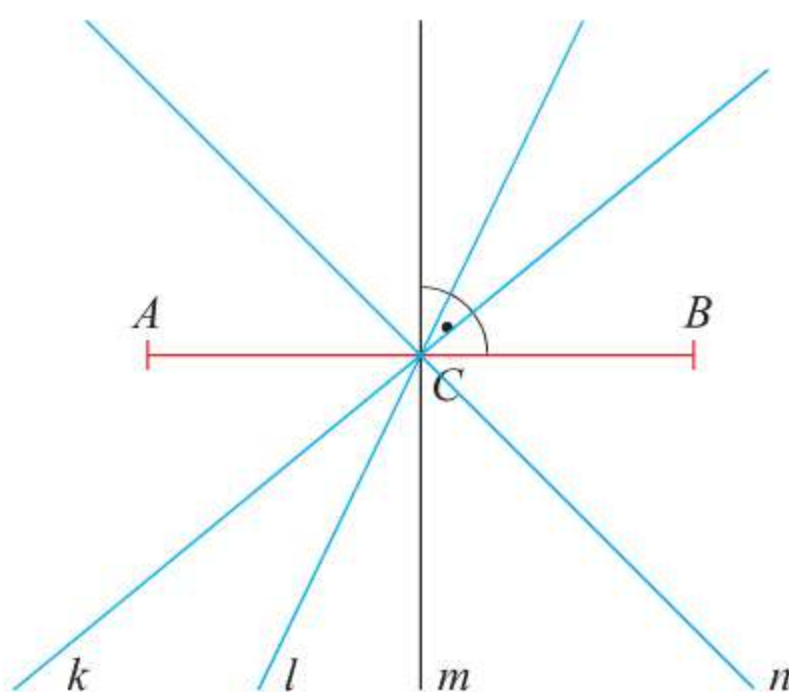
Każdy punkt leżący na symetralnej odcinka jest jednakowo odległy od obu końców tego odcinka.



Następnie porównujemy: $|AK|$ i $|KB|$ oraz $|AL|$ i $|LB|$ i stwierdzamy, że:

Każdy punkt, który leży poza symetralną odcinka, nie jest jednakowo odległy od obu końców tego odcinka.

Przez punkt C będący środkiem odcinka AB rysujemy kilka prostych.



Tylko prosta m jest prostopadła do odcinka AB .

Przez środek odcinka przechodzi nieskończenie wiele prostych, ale tylko jedna z nich jest jego symetralną.

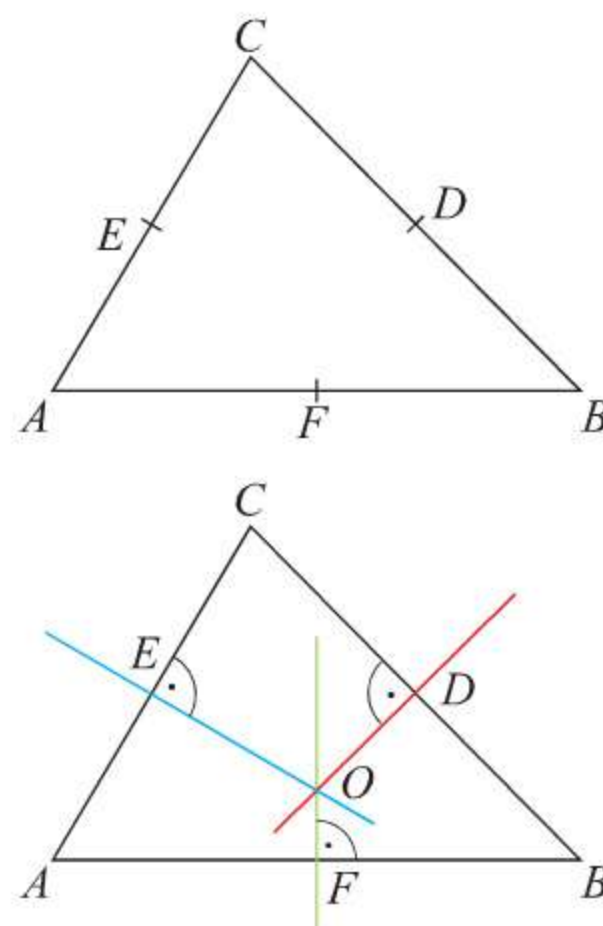


Przykład 1.

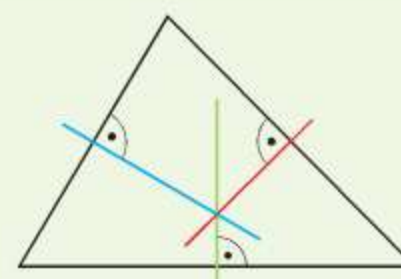
Narysujmy symetralne boków trójkąta ostrokałnego ABC .

Na początku wyznaczamy środki boków trójkąta. Otrzymujemy punkty D , E i F , które są środkami boków odpowiednio BC , CA i AB . Następnie rysujemy proste prostopadłe do każdego boku trójkąta, przechodzące przez punkty D , E , F .

Zauważmy, że symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie O . Ponieważ $|OA| = |OB| = |OC|$, to punkt O , w którym przecinają się symetralne boków trójkąta, jest jednakowo odległy od wierzchołków trójkąta ABC .



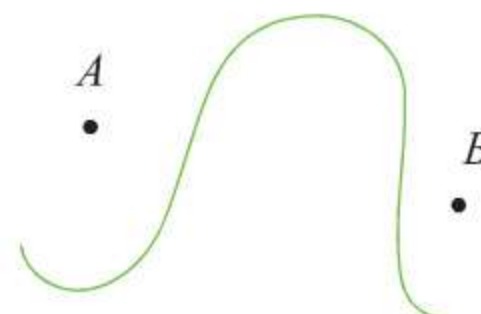
Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest jednakowo odległy od wierzchołków tego trójkąta.



- 1 Narysuj symetralne boków w trójkącie:
 - a) rozwartokątnym,
 - b) prostokątnym.
 Co zauważasz?
- 2 Narysuj okrąg, a w nim dwie nierównoległe cięciwy. Narysuj symetralne tych cięciw. Co zauważasz?
- 3 W trójkącie równobocznym narysuj:
 - a) wysokości,
 - b) symetralne boków.
 Uzasadnij, że wysokości trójkąta równobocznego zawierają się w symetralnych jego boków.
- 4 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

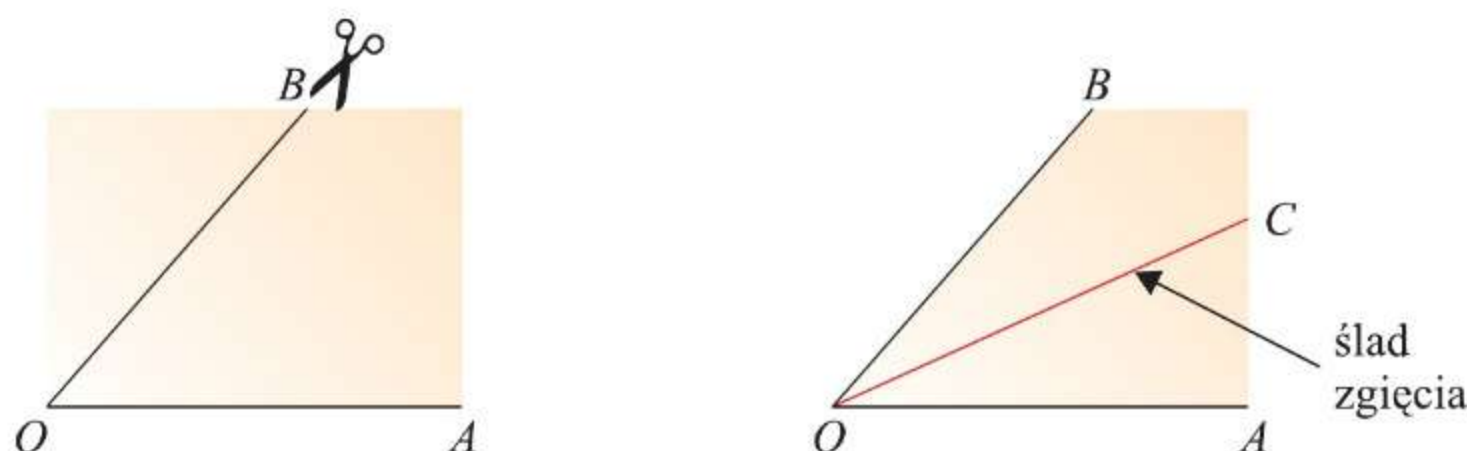
Prosta przechodząca przez środek odcinka jest jego symetralną.	P	F
Każdy punkt symetralnej odcinka jest jednakowo odległy od obu końców tego odcinka.	P	F
Prosta prostopadła do odcinka jest jego symetralną.	P	F
Wysokość trójkąta równobocznego zawiera się w symetralnej boku.	P	F

- 5 Narysuj dowolny odcinek. Jak znajdziesz odcinek długości $\frac{1}{4}$ odcinka narysowanego?
- 6 Przerysuj rysunek, a następnie narysuj okrąg przechodzący przez punkty A i B o środku O leżącym na tej krzywej.
- 7 Obrysuj jakiś okrągły przedmiot (dno szklanki, monetę, puszkę itp.), aby narysować koło. Jak znajdziesz środek tego koła?
- 8 Mateusz, Bartek i Kuba ustawili się w wierzchołkach trójkąta MBK . Gdzie należy położyć piłkę, aby leżała w równej odległości od każdego z chłopców? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
 - A. Nie można precyzyjnie tego określić.
 - B. W połowie odległości między punktami M i B .
 - C. W połowie odległości między punktami B i K .
 - D. W punkcie przecięcia się symetralnych boków trójkąta MBK .
- 9 Na symetralnej odcinka KL zaznaczono punkt R . Długość odcinka RK jest dwa razy większa od długości odcinka KL . Oblicz pole trójkąta KRL , jeśli jego obwód wynosi 30 cm.



Przykład 2.

Narysujmy na kartce kąt AOB , wytnijmy go i złożmy kartkę tak, by ramię OA pokryło się z ramieniem OB .

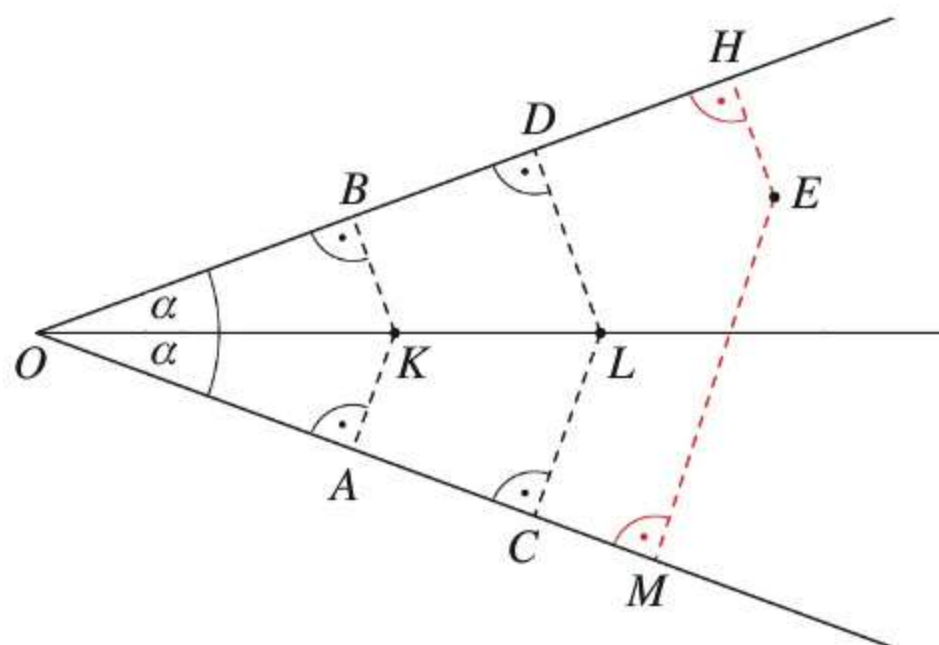


Półprosta OC , wyznaczona przez zgięcie kartki, dzieli kąt AOB na połowy. Możemy zapisać $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOC$ ($\equiv$ to symbol przystawania) oraz $|\sphericalangle AOC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AOB|$ i $|\sphericalangle BOC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AOB|$. Półprostą OC dzielącą kąt AOB na dwa kąty przystające nazywamy **dwusieczną kąta AOB** .

Dwusieczna kąta to półprosta, która dzieli ten kąt na dwa kąty przystające. Kąt ma tylko jedną dwusieczną.



Zaznaczmy punkty K i L leżące na dwusiecznej kąta AOB oraz punkt E nieleżący na tej dwusiecznej.



Długości odcinków narysowanych liniami przerywanymi oznaczają odległości tych punktów od ramion kąta AOB . Porównujemy: $|AK|$ i $|KB|$ oraz $|CL|$ i $|LD|$ i stwierdzamy, że:

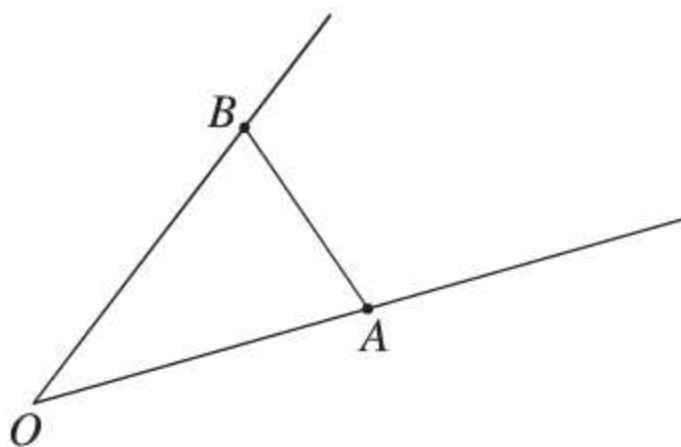
Każdy punkt dwusiecznej kąta leży w jednakowej odległości od obu ramion tego kąta.

Następnie porównujemy $|ME|$ i $|EH|$ i zauważamy, że:

Każdy punkt, który nie leży na dwusiecznej kąta, nie jest jednakowo odległy od ramion tego kąta.

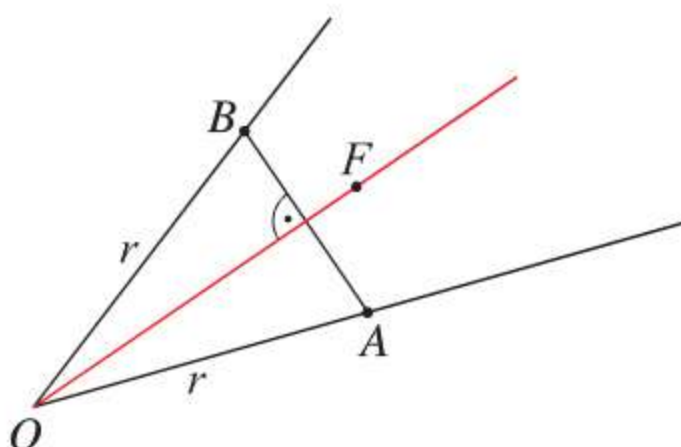
Przykład 3.

Narysujmy kąt ostry i podzielmy go na połowy.



Rysujemy kąt ostry, oznaczamy jego wierzchołek literą O i zaznaczamy punkty A i B tak, że $|OA| = |OB|$. Zauważmy, że punkty A , O , B są wierzchołkami trójkąta równoramiennego o podstawie AB .

Rysujemy symetralną odcinka AB , na której zaznaczamy punkt F .



Punkt O jest jednakowo odległy od punktów A i B . Punkt F jest także jednakowo odległy od punktów A i B , ponieważ leży na symetralnej odcinka AB . Trójkąty OFA i OFB są przystające (cecha bbb), zatem półprosta OF dzieli kąt AOB na połowy, czyli jest jego dwusieczną.

Do podziału kąta na połowy możemy również wykorzystać kątomierz. Mierzymy wówczas miarę kąta i dzielimy ją na połowę. Zaznaczamy punkt F taki, że półprosta OF dzieli kąt AOB na połowy.

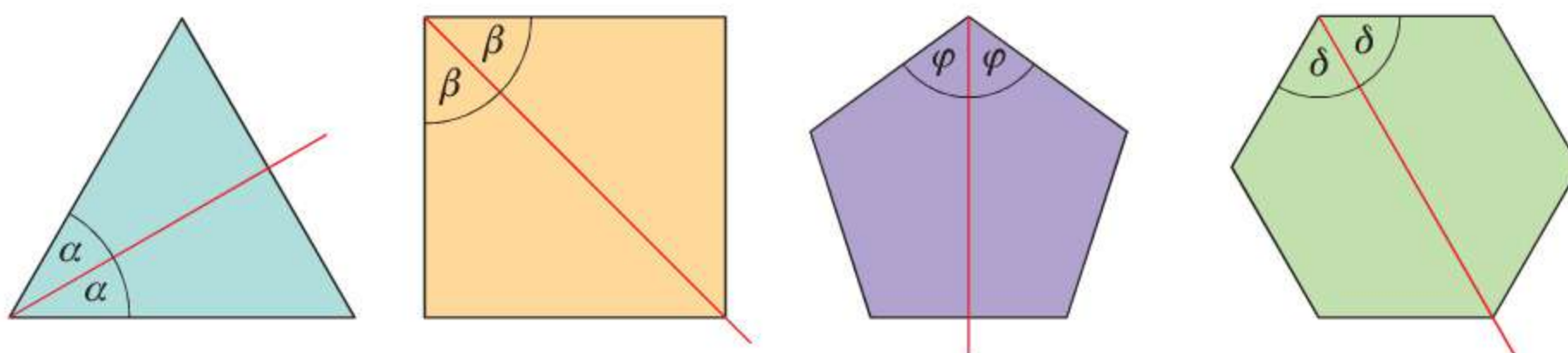
- 10 Narysuj kąty przyległe, a następnie ich dwusieczne. Co zauważasz?
- 11 W trójkątach: ostrokątnym, rozwartokątnym, prostokątnym narysuj dwusieczne kątów. Co zauważasz?
- 12 Narysuj trójkąt prostokątny równoramienny i dwusieczne jego kątów wewnętrznych. Wypisz pary równych kątów.
- 13 W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku B ma miarę 20° , a kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym. Z wierzchołka A poprowadzono dwusieczną kąta, która przecięła bok BC w punkcie D . Oblicz miary kątów w trójkątach ABD i ADC .
- 14 W trójkącie ABC kąty przy wierzchołkach A i B mają odpowiednio miary 50° i 60° . Z wierzchołka B poprowadzono dwusieczną kąta, która przecięła bok AC w punkcie E . Oblicz miary kątów w trójkątach BCE i ABE .



- 15** W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC|$, kąt przy wierzchołku C ma miarę 80° . Dwusieczna tego kąta przecina bok AB w punkcie D . Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta ABC przecinają się w punkcie S . Oblicz miary kątów w trójkątach ABS , BCS i DBS .

Przykład 4.

Narysujmy trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny i sześciokąt foremny, a następnie w każdym z wielokątów wyznaczmy dwusieczną kąta wewnętrznego.



Zauważmy, że w trójkącie równobocznym i pięciokącie foremnym dwusieczna kąta wewnętrznego zawiera się w symetralnej boku leżącego naprzeciwko tego kąta.

W kwadracie i sześciokącie foremnym dwusieczna kąta wewnętrznego zawiera jedną z przekątnych.

- 16** Narysuj kwadrat $ABCD$ i dwusieczne jego kątów wewnętrznych. Wypisz równe kąty.
- 17** Narysuj romb $ABCD$ i dwusieczne jego kątów wewnętrznych. Wypisz pary równych kątów.
- 18** Narysuj prostokąt i poprowadź dwusieczne wszystkich kątów.
a) Na jakie figury został podzielony ten prostokąt?
b) Podaj miary kątów utworzonych figur.
- 19** W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz bok AC jest krótszy od boku BC . Punkt D jest punktem przecięcia prostej CB i symetralnej boku AB i wiadomo, że kąt ADC ma miarę 80° . Czy miara kąta ABD jest równa 40° ? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	trójkąt ABD jest równoramienny.
B.	Nie,		2.	miara kąta ABD jest o 50° mniejsza od miary kąta ADB .

- 20** W kwadracie narysowano symetralne każdego boku i dwusieczne każdego kąta, a środki boków połączono kolejno odcinkami. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Najmniejszy z powstałych trójkątów ma kąty wewnętrzne o miarach **A / B**.

A. $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ **B.** $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$

Wszystkich kwadratów na rysunku jest **C / D**.

C. 10 **D.** 6

Wyzwanie

W trójkącie ABC punkt D leży na boku AB , a punkt E – na boku AC . Punkt O jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów ADE i AED , natomiast punkt S jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów ABC i ACB . Uzasadnij, że punkty O i S leżą na dwusiecznej kąta BAC .

Sprawdź się!

- Narysuj prostokąt niebędący kwadratem, a w nim symetralne jego boków. Co zauważasz?
- Narysuj okrąg, a w nim dwie dowolne średnice. Dla każdej pary utworzonych kątów wierzchołkowych poprowadź dwusieczne kątów. Co zauważasz?
- Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Kąt ma tylko jedną dwusieczną.	P	F
Każdy punkt dwusiecznej kąta jest jednakowo odległy od jego wierzchołka.	P	F
Dwusieczna kąta znajdującego się między ramionami trójkąta równoramiennego jest prostopadła do podstawy tego trójkąta.	P	F

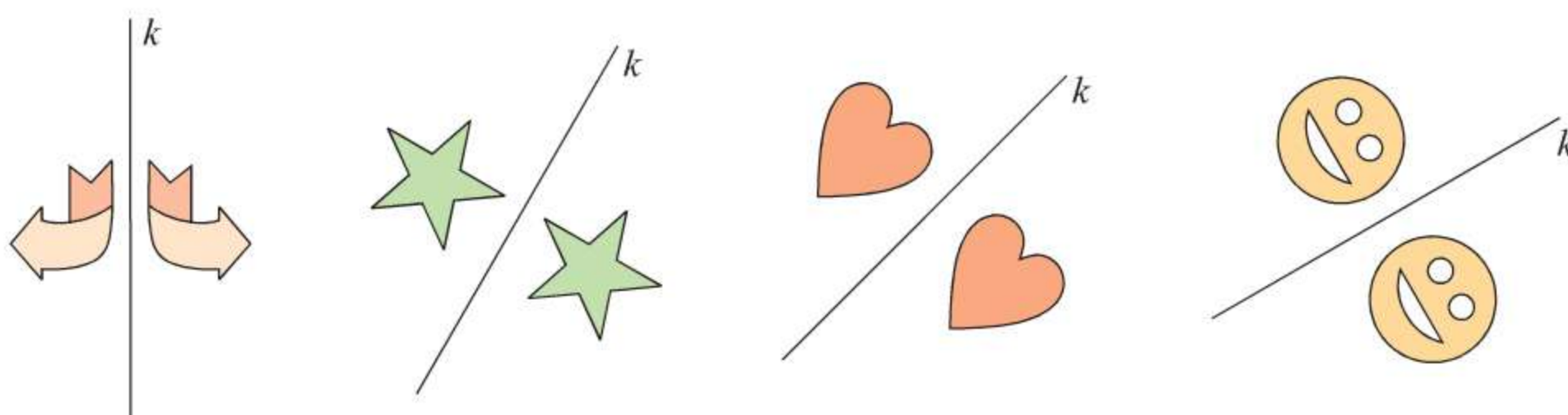
- W trójkącie ABC kąty przy wierzchołkach B i C mają odpowiednio miary 70° i 50° . Poprowadzono dwusieczne kątów CAB i ABC , które przecięły się w punkcie S . Oblicz miary kątów trójkąta ABS .
- W trapezie prostokątnym $ABCD$, w którym $|\sphericalangle BCD| = 120^\circ$, dwusieczna kąta rozwartego przecina bok AB w punkcie E . Wykaż, że trójkąt EBC jest równoboczny.

2. Symetria osiowa

Przypomnij sobie

- co to są figury przystające.

Pary figur przedstawione na rysunkach są **symetryczne**. Figurę położoną po jednej stronie prostej można nałożyć na figurę znajdującą się po drugiej stronie tej prostej poprzez zgięcie kartki wzdłuż prostej k .

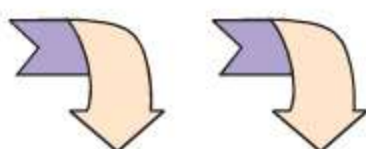


Wiemy, że figury, które możemy nałożyć na siebie, są **przystające**.

Figury symetryczne są przystające.



Strzałki przedstawione na rysunku poniżej są przystające, ale **nie są symetryczne**, gdyż nie ma takiej prostej, żeby po zgięciu kartki wzdłuż tej prostej strzałki się pokryły.

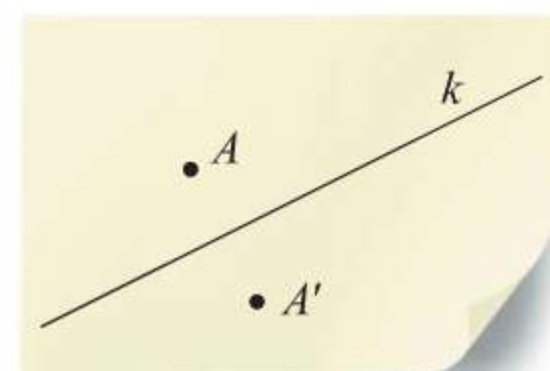


Nie każde dwie figury przystające są symetryczne.

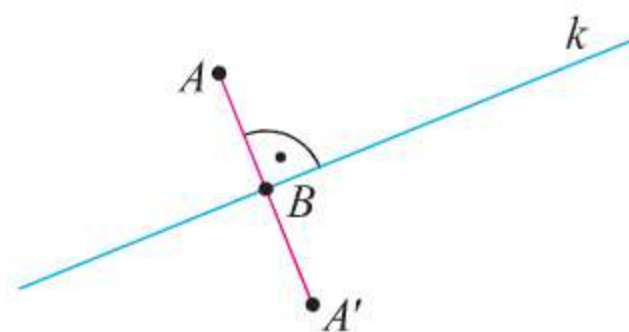


Przykład 1.

Na kartce narysujmy prostą k i punkt A , który nie leży na tej prostej. Zegnijmy tę kartkę wzdłuż prostej k . Przekłujmy szpilką kartkę w punkcie A i po rozłożeniu kartki ślad przekłucia oznaczmy jako A' .



Punkty A i A' nazywamy punktami symetrycznymi względem prostej k . Punkt A' jest symetryczny do punktu A względem prostej k . Prosta k nazywamy osią symetrii.



Punkty A i A' , symetryczne względem prostej k , połączono odcinkiem. Punkt przecięcia odcinka AA' z osią symetrii k oznaczono jako B .

Zauważmy, że:

- prosta k jest prostopadła do odcinka AA' ,
- punkty A i A' leżą po różnych stronach prostej k ,
- punkty A i A' leżą w równych odległościach od prostej k ,
- punkt B jest środkiem odcinka AA' ,
- punkt symetryczny do punktu B jest tym samym punktem B .

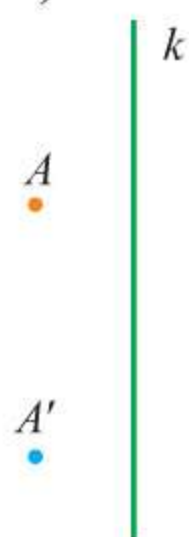


Dwa różne punkty A i A' są punktami symetrycznymi względem prostej k wtedy, gdy prosta k jest symetralną odcinka AA' .

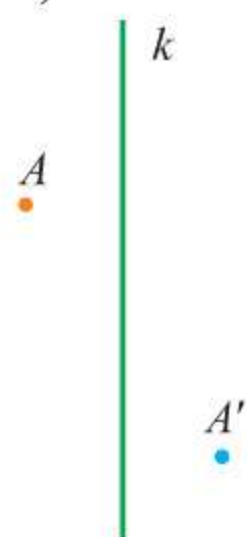
1 Narysuj symetralną l odcinka AB . Wyjaśnij, dlaczego punkty A i B są symetryczne względem prostej l .

2 Uzasadnij, dlaczego na rysunku punkty A i A' **nie są** symetryczne względem prostej k .

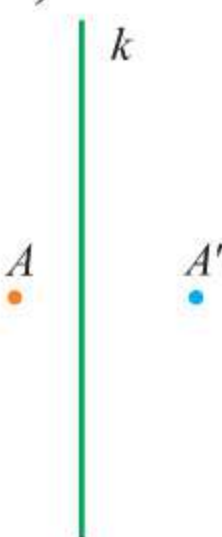
a)



b)



c)



d)



e)



3 Punkty C i D są symetryczne względem prostej k . Odległość między tymi punktami jest równa 7 cm. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

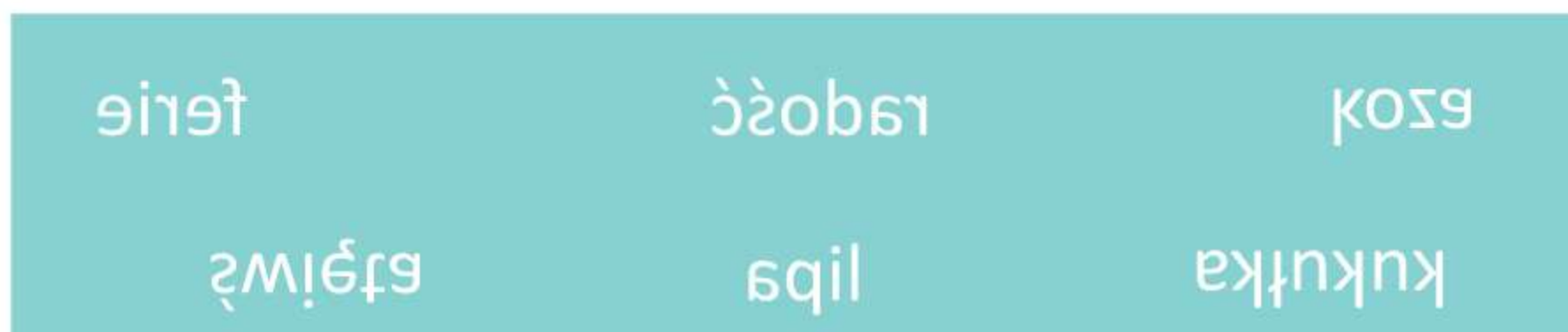
Odległość punktów C i D od prostej k jest równa

- A. 7 cm B. 5 cm C. 3,5 cm D. 4,5 cm

4 Narysuj dwa okręgi o promieniach 3 cm, które nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Narysuj prostą, względem której te okręgi są symetryczne. W jakiej odległości od środków okręgów leży ta oś symetrii? Czy jest tylko jedna taka prosta?



- 5 Poniższe napisy powinny być lustrzanymi odbiciami następujących wyrazów: koza, lipa, ferie, święta, radość, kukulka. Sprawdź, czy tak jest rzeczywiście. Możesz użyć lusterka, aby sobie pomóc.



- 6 Trapez prostokątny $ABCD$ jest symetryczny do trapezu ABC_1D_1 względem prostej zawierającej dłuższą podstawę AB . Wiadomo, że: $|AB| = 6$ cm, $|CD| = 3$ cm, $|AD| = 4$ cm oraz $\sphericalangle ABC$ jest ostry. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Pole pięciokąta DD_1C_1BC jest równe **A / B**.

A. 18 cm^2 **B.** 36 cm^2

Obwód pięciokąta DD_1C_1BC jest równy **C / D**.

C. 24 cm **D.** 30 cm

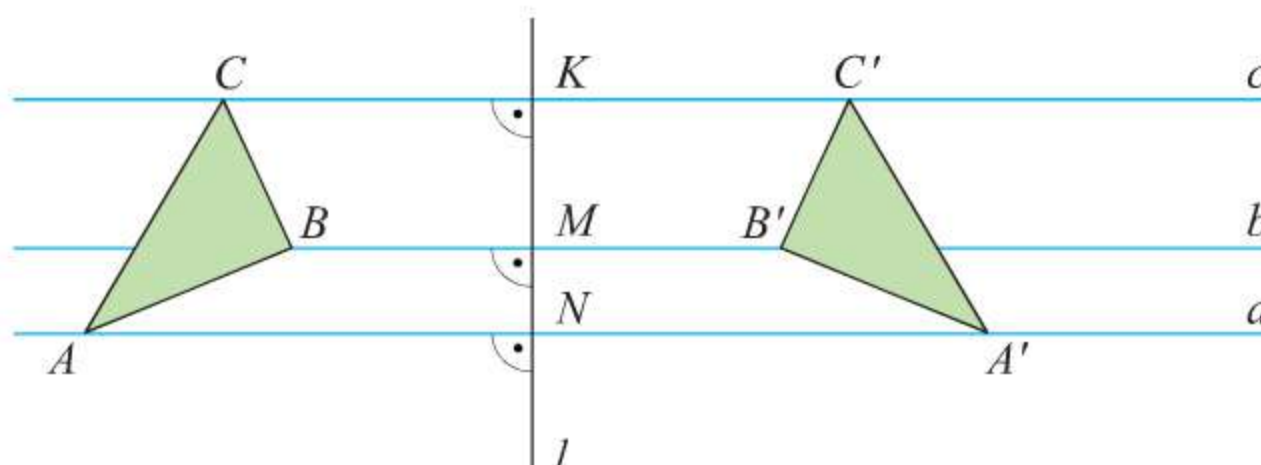
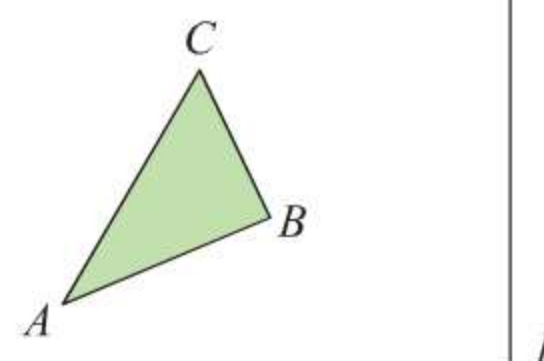
Przykład 2.

Dany jest trójkąt ABC i prosta l , która nie ma z nim punktów wspólnych. Narysujemy trójkąt $A'B'C'$ symetryczny do trójkąta ABC względem prostej l .

Aby narysować trójkąt $A'B'C'$ symetryczny do trójkąta ABC względem prostej l , należy znaleźć punkty A' , B' , C' symetryczne do wierzchołków trójkąta ABC względem prostej l .

W tym celu wykonajmy następujące czynności:

1. Przez punkty A , B , C prowadzimy proste a , b , c prostopadłe do prostej l , przecinające ją odpowiednio w punktach N , M , K .
2. Na prostych a , b , c wyznaczamy punkty A' , B' , C' , takie że: $|AN| = |NA'|$, $|BM| = |MB'|$, $|CK| = |KC'|$.
3. Rysujemy trójkąt $A'B'C'$ symetryczny do trójkąta ABC względem prostej l .



- 7 Narysuj dowolny trójkąt, a następnie narysuj trójkąt do niego symetryczny:
 a) względem prostej zawierającej jeden z wierzchołków trójkąta,
 b) względem prostej przecinającej dwa boki trójkąta.
 Jaką figurą jest część wspólna obu trójkątów?
- 8 Narysuj równoległobok oraz równoległobok do niego symetryczny względem prostej zawierającej przekątną.
- 9 Narysuj kąt rozwarty i figurę do niego symetryczną względem prostej zawierającej dwusieczną kąta. Jaką figurę otrzymasz?

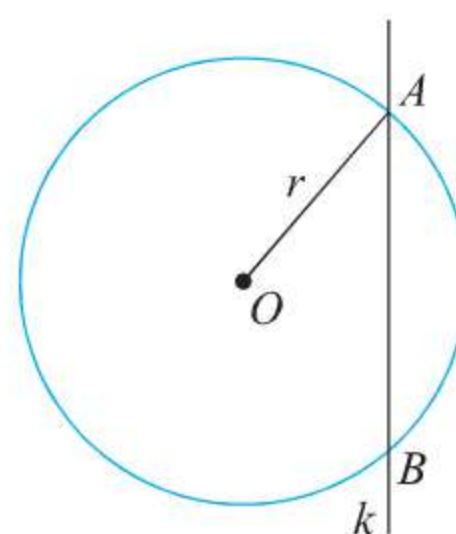
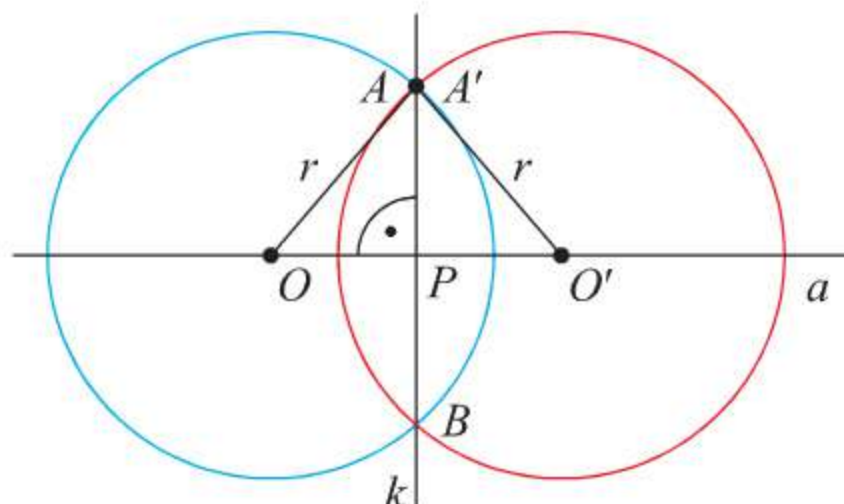
Przykład 3.

Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu r oraz prosta k , która przecina okrąg w punktach A i B . Narysujmy okrąg symetryczny do danego względem prostej k .

Aby narysować taki okrąg, należy znaleźć punkty: O' – punkt symetryczny do środka O okręgu oraz A' – punkt symetryczny do punktu A , w którym prosta k przecina okrąg. W symetrii względem prostej k obrazem punktu A jest ten sam punkt, czyli $A' = A$.

Wykonajmy następujące czynności:

1. Przez punkt O prowadzimy prostą a , prostopadłą do prostej k . Punkt przecięcia prostych nazywamy P .
2. Na prostej a wyznaczamy taki punkt O' , że $|OP| = |PO'|$.
3. Rysujemy okrąg o środku O' i promieniu $|OA| = r$.



- 10 Dane są okrąg o środku w punkcie E i prosta k , która ma z tym okręgiem jeden punkt wspólny, oraz okrąg o środku w punkcie F symetryczny do pierwszego okręgu względem prostej k . Czy suma długości promieni tych okręgów jest równa średnicy okręgu o środku w punkcie E ? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	suma ta jest mniejsza od długości średnicy okręgu o środku w punkcie E .
B.	Nie,		2.	odległość punktu E od prostej k jest równa odległości punktu F od tej prostej.



- 11** Narysuj trapez równoramienny i trapez do niego symetryczny względem prostej zawierającej przekątną.

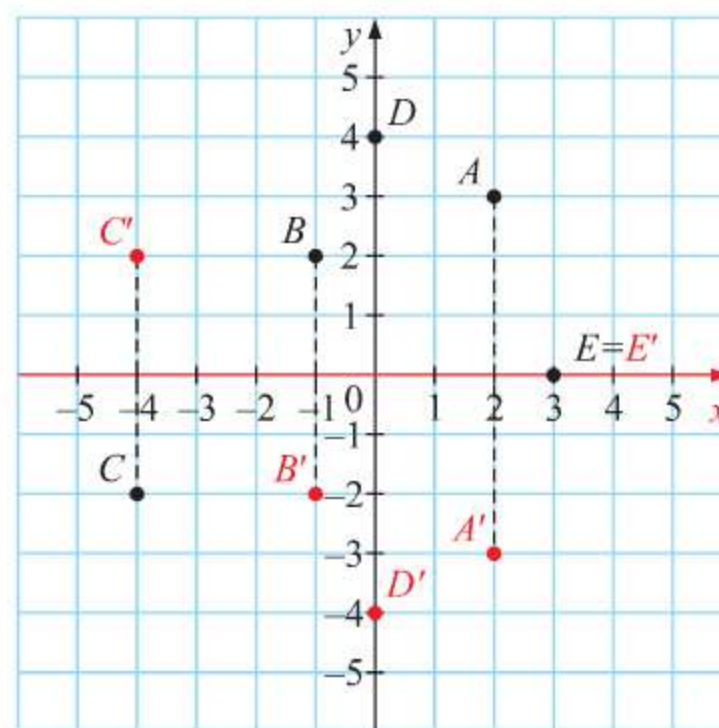
Przykład 4.

W prostokątnym układzie współrzędnych dane są następujące punkty: $A = (2, 3)$, $B = (-1, 2)$, $C = (-4, -2)$, $D = (0, 4)$, $E = (3, 0)$. Znajdźmy punkty symetryczne do danych względem **osi x** oraz **osi y** .

Symetria względem **osi x**

Porównajmy współrzędne punktów symetrycznych względem osi x .

$A = (2, 3)$	$A' = (2, -3)$
$B = (-1, 2)$	$B' = (-1, -2)$
$C = (-4, -2)$	$C' = (-4, 2)$
$D = (0, 4)$	$D' = (0, -4)$
$E = (3, 0)$	$E' = (3, 0)$



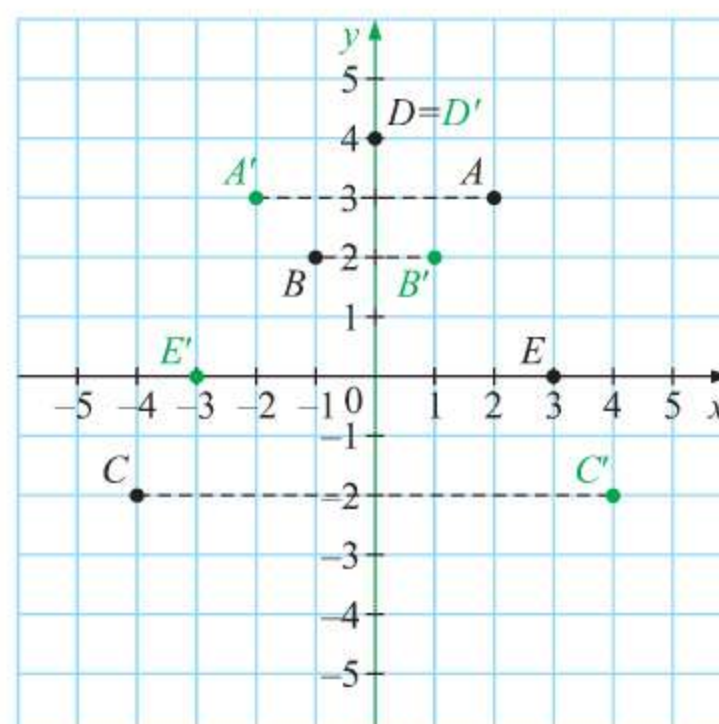
Punkty symetryczne względem osi x mają jednakowe pierwsze współrzędne (odcięte), a drugie współrzędne (rzędne) są liczbami przeciwnymi.



Symetria względem **osi y**

Porównajmy współrzędne punktów symetrycznych względem osi y .

$A = (2, 3)$	$A' = (-2, 3)$
$B = (-1, 2)$	$B' = (1, 2)$
$C = (-4, -2)$	$C' = (4, -2)$
$D = (0, 4)$	$D' = (0, 4)$
$E = (3, 0)$	$E' = (-3, 0)$



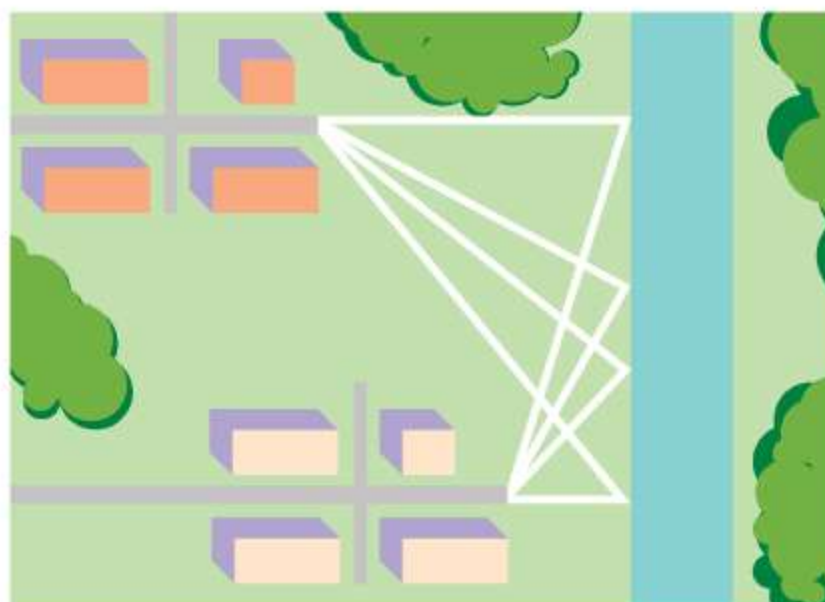
Punkty symetryczne względem osi y mają jednakowe drugie współrzędne (rzędne), a pierwsze współrzędne (odcięte) są liczbami przeciwnymi.



- 12** W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz punkty: $A = (-4, -2)$, $B = (3, 1)$, $C = (-5, 0)$, $D = (3, -3)$. Następnie zaznacz punkty symetryczne do danych punktów względem:
- a) osi x , b) osi y .
- 13** Narysuj trójkąt $A'B'C'$ symetryczny względem osi x do trójkąta ABC o wierzchołkach: $A = (-3, -2)$, $B = (2, 2)$, $C = (1, 5)$.
- 14** Narysuj trójkąt $A'B'C'$ symetryczny względem osi y do trójkąta ABC o wierzchołkach: $A = (-3, -2)$, $B = (2, 2)$, $C = (1, 5)$.
- 15** Punkt A ma współrzędne $(-2, 5)$, punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi x , a punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi y . Oblicz obwód i pole trójkąta ABC .
- 16** Pięciokąt $ABCDE$ jest symetryczny do pięciokąta $A'B'C'D'E'$ względem osi y . Dane są współrzędne punktów B, D, A', C', E' :
- $B = (5, -6)$, $D = (-1, 1)$, $A' = (3, -2)$, $C' = (-3, 2)$, $E' = (5, 4)$.
- Narysuj oba pięciokąty w układzie współrzędnych.
- 17** Wyznacz liczby a i b tak, aby punkty K i L były symetryczne względem osi x .
- a) $K = \left(-\frac{1}{2}, a\right)$, $L = (b, -2)$
- b) $K = (0, -a)$, $L = (-\sqrt{b}, -7)$
- 18** Wyznacz liczby a i b tak, aby punkty M i N były symetryczne względem osi y .
- a) $M = (a, -2)$, $N = (-4, b)$
- b) $M = \left(-2a, \frac{1}{3}\right)$, $N = \left(-\frac{1}{2}, -3b\right)$

Wyzwanie

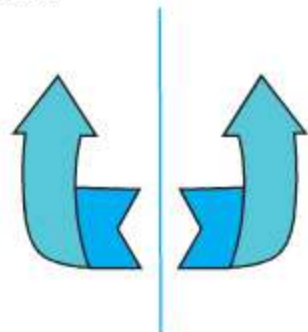
Dwa osiedla mieszkaniowe leżą po tej samej stronie kanału, lecz w różnych od niego odległościach. Z każdego osiedla postanowiono poprowadzić drogę do projektowanego mostu na kanale. W którym miejscu należy wybudować most, aby suma długości tych dróg była najkrótsza?



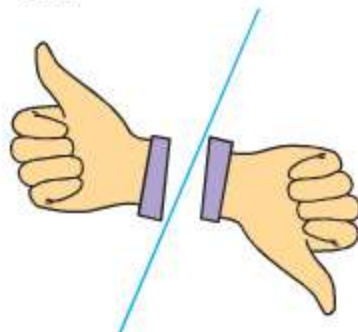
Sprawdź się!

- 1 Narysuj punkty A i B , takie że $A \neq B$. Narysuj prostą, względem której te punkty są symetryczne.
- 2 Które figury przedstawione na rysunku są symetryczne względem narysowanej prostej? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

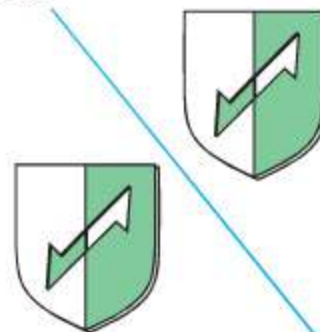
A.



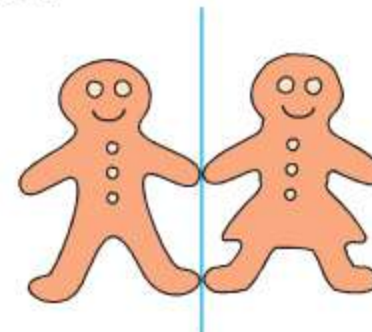
B.



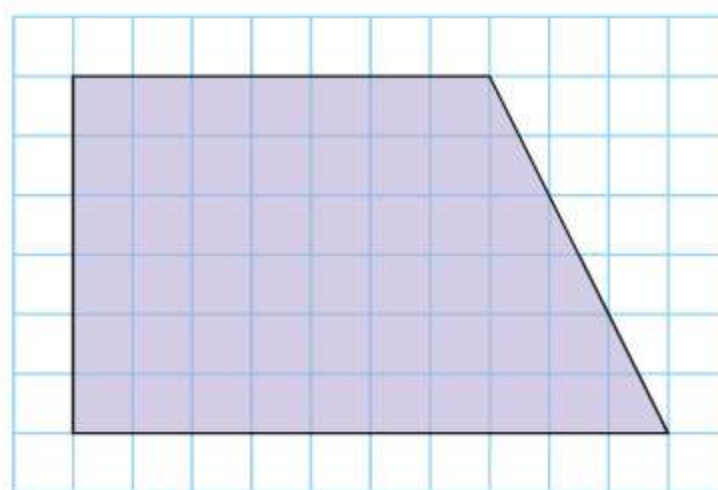
C.



D.



- 3 Dany jest trapez prostokątny. Narysuj trapez do niego symetryczny względem prostej zawierającej ramię trapezu, które nie jest prostopadłe do podstawy.



- 4 Narysuj kwadrat $A'B'C'D'$ symetryczny względem osi x do kwadratu $ABCD$ o wierzchołkach: $A = (-4, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 4)$, $D = (-4, 4)$. Oblicz pole i obwód czworokąta $D'C'CD$.
- 5 Wyznacz liczby a i b tak, aby punkty $E = (-7, b)$ i $K = (a, 4)$ były symetryczne względem osi y .

3. Figury osiowosymetryczne

Przypomnij sobie

- co to jest oś symetrii figury.

Symetria fascynowała ludzi od stuleci. Widoczna jest w architekturze.



Symetria stale towarzyszy również sztuce użytkowej.



Niepowtarzalne symetrie tworzy przyroda.



Symetrię wykorzystują jubilerzy podczas szlifowania kamieni szlachetnych. Szlify takie jak: tablicowe, kwadratowe, schodkowe, ośmiokątne, kropłowe, markiza czy owalne to szlify symetryczne.

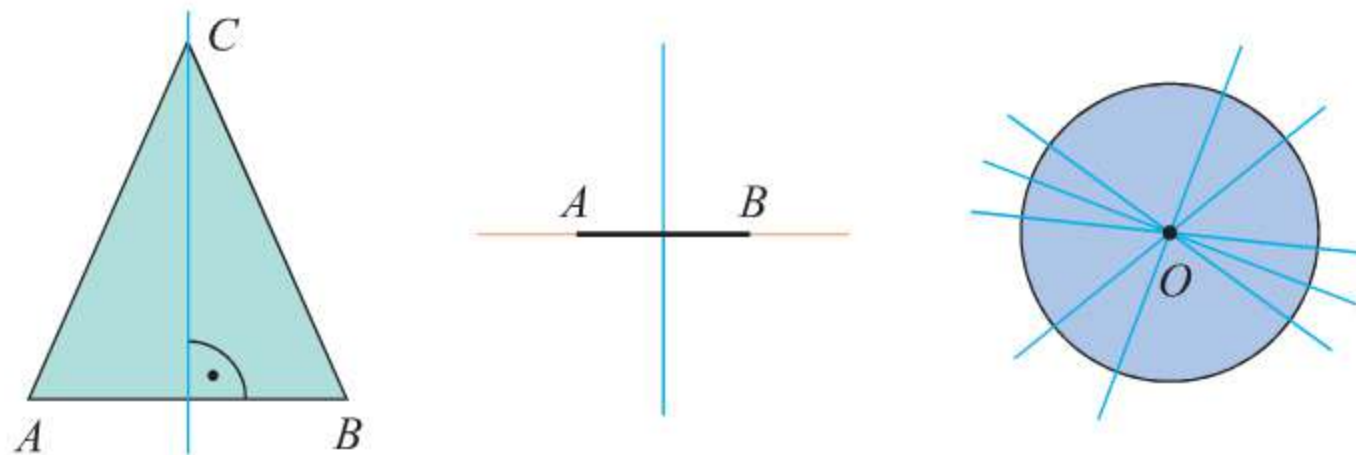


Figurę, która ma oś symetrii, nazywamy **figurą osiowosymetryczną**. Figury osiowosymetryczne mogą mieć jedną, dwie, trzy, ..., a nawet nieskończenie wiele osi symetrii.

Przykład 1.

Znajdźmy osie symetrii trójkąta równoramiennego (który nie jest trójkątem równobocznym), odcinka i koła (okręgu).

Gdy zginamy odpowiednio kartki z rysunkami tych figur, znajdujemy ich osie symetrii.



Ośią symetrii trójkąta ABC jest symetralna podstawy AB .

Ośiami symetrii odcinka AB są: symetralna odcinka i prosta zawierająca ten odcinek.

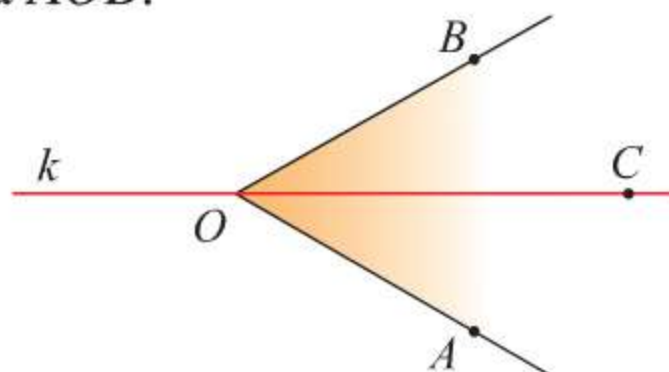
Ośiami symetrii koła (okręgu) są proste przechodzące przez jego środek.

- Trójkąt równoramienny, który nie jest trójkątem równobocznym, ma jedną oś symetrii.
- Odcinek ma dwie osie symetrii.
- Koło (okrąg) ma nieskończenie wiele osi symetrii.



Przykład 2.

Znajdźmy oś symetrii kąta AOB .



Za pomocą zginania kartki możemy znaleźć oś symetrii k kąta AOB . Prosta k zawiera półprostą OC (dwusieczną kąta), dzielącą kąt AOB na połowy. Prosta k to **oś symetrii kąta**.

Kąt ma jedną oś symetrii.



- 1 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Prostokąt, który nie jest kwadratem, ma dwie osie symetrii.	P	F
Romb, który nie jest kwadratem, nie ma osi symetrii.	P	F
Trapez równoramienny niebędący równoległobokiem ma jedną oś symetrii.	P	F

- 2 Narysuj wszystkie osie symetrii:

- a) trójkąta równobocznego, b) półprostej,
c) sześciokąta równobocznego, d) półkola.

- 3 Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Odcinek ma **A** / **B** symetrii.

A. 1 oś

B. 2 osie

Odcinek ma **C** / **D**.

C. 1 symetralną

D. 2 symetralne

- 4 Ile osi symetrii ma:

- a) kwadrat, b) prosta, c) kąt rozwarty, d) pierścień kołowy?

- 5 Które z następujących wyrazów mają osie symetrii?

KOD BABA MAM OTO CO KTO

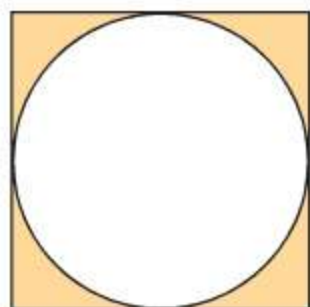
- 6 Które karty mają:

- a) tylko jedną oś symetrii, b) dwie osie symetrii?

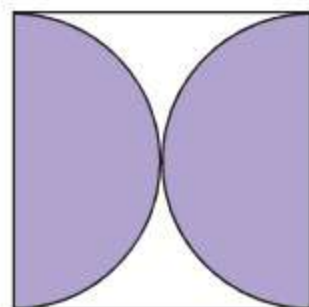


- 7 Ile osi symetrii ma dana figura?

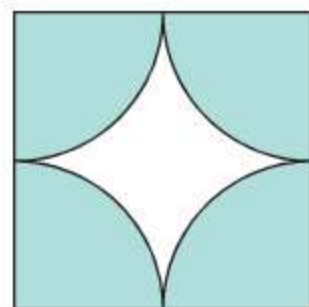
a)



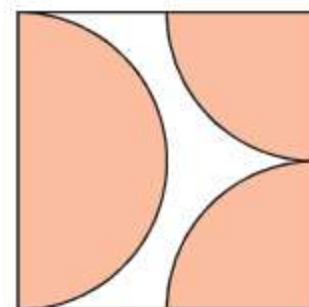
b)



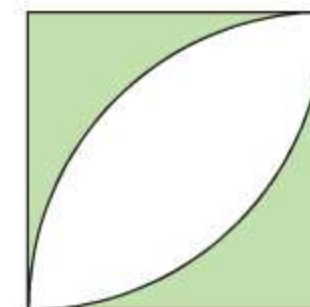
c)



d)



e)



- 8 W systemie rzymskim zapisu liczb znak V ma jedną oś symetrii, a znaki tworzące liczbę XIX – dwie osie symetrii. Czy liczby V i XIX mają oś symetrii w zapisie arabskim?

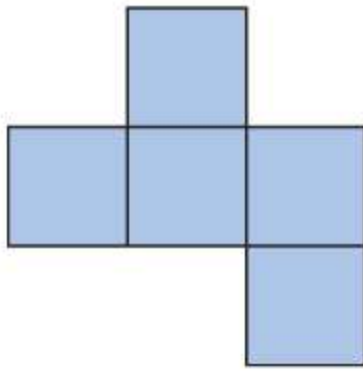
Napisz trzy liczby rzymskie, które mają:

- a) jedną oś symetrii, b) dwie osie symetrii.

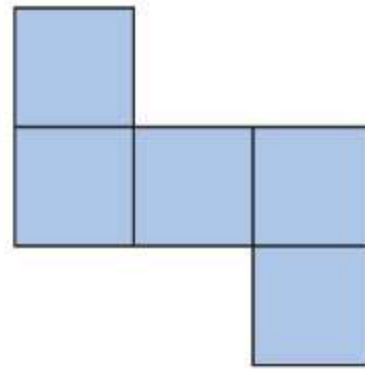


- 9 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Figurą osiowosymetryczną jest

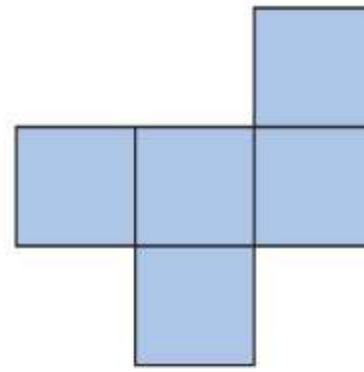
A.



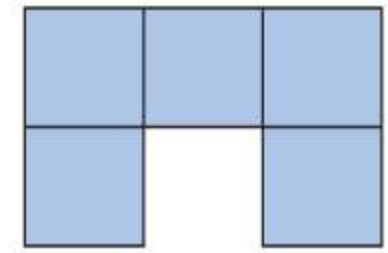
B.



C.



D.



- 10 Dany jest ciąg znaków:

II II

III III

IV VI

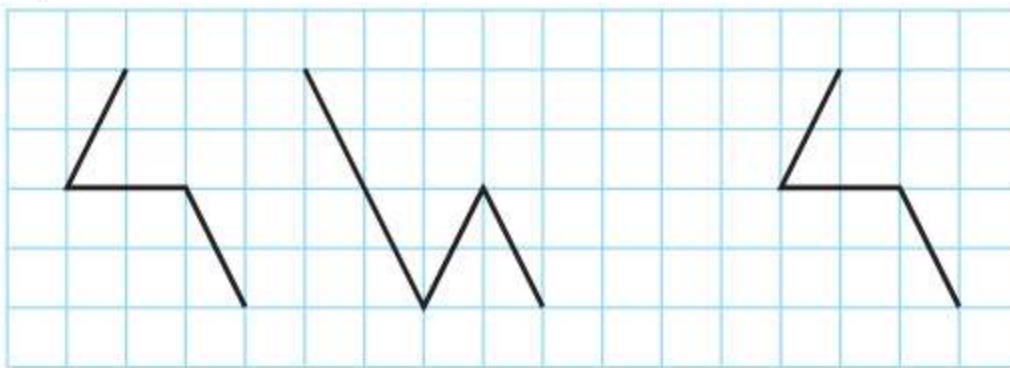


Który spośród poniższych znaków należy wstawić zamiast ? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

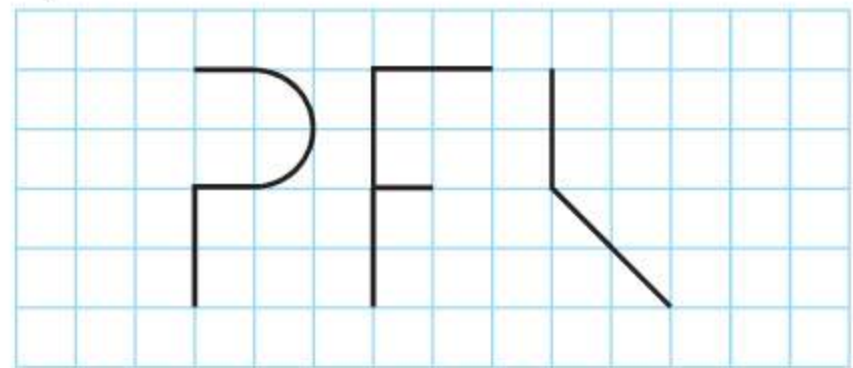
A. B. C. D. 

- 11 Przerysuj rysunek do zeszytu i uzupełnij go tak, aby otrzymać figurę, która ma oś symetrii.

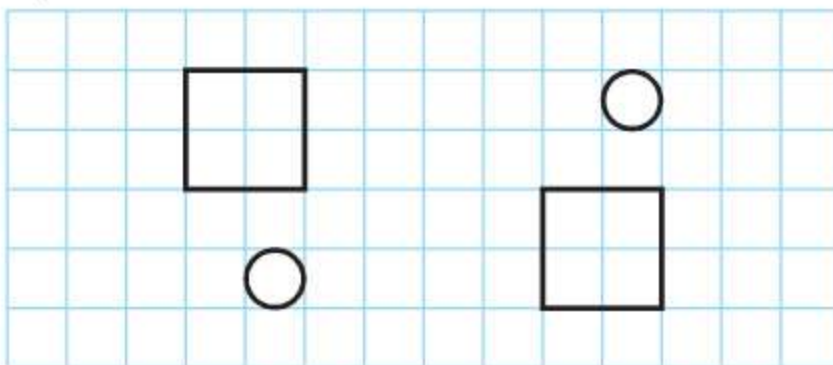
a)



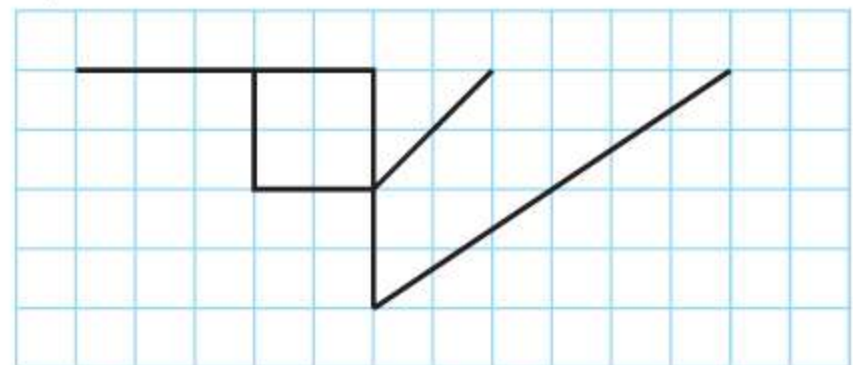
b)



c)



d)



- 12 Narysuj na kartonie i wytnij trzy koła o jednakowych promieniach. Ułóż z nich dowolną figurę, która:

a) ma tylko dwie osie symetrii,
c) ma tylko jedną oś symetrii,

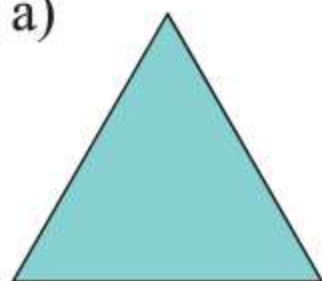
b) ma tylko trzy osie symetrii,
d) nie ma żadnej osi symetrii.

- 13 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

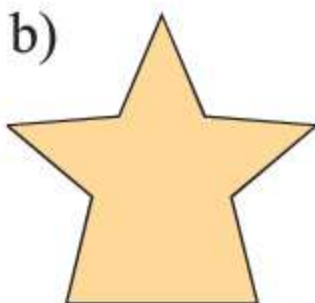
Figury symetryczne względem prostej są przystające.	P	F
Wielokąty foremne mają parzystą liczbę osi symetrii.	P	F
Okręgi współśrodkowe mają nieskończenie wiele osi symetrii.	P	F

- 14** Przerysuj do zeszytu figurę przedstawioną na rysunku i zaznacz w niej trójkąt, który należy odciąć, aby pozostała część figury była figurą osiowosymetryczną. Czy jest tylko jedno rozwiązanie tego zadania?

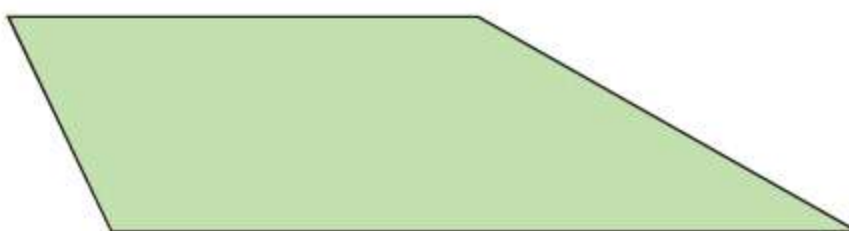
a)



b)



c)



Wyzwanie

Ile osi symetrii może mieć figura złożona z dwóch prostych? Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdź się!

- Narysuj cztery figury, które nie mają osi symetrii.
- Narysuj prostą k oraz podany wielokąt w taki sposób, aby jedyną osią symetrii figury była ta prosta.
 - trójkąt
 - czworokąt
 - sześciokąt
- Czerwone linie są osiami symetrii pewnych wyrazów. Odczytaj te wyrazy.



- Na każdym boku prostokąta (niebędącego kwadratem) zbuduj trójkąt równoboczny o boku długości danego boku prostokąta. Jaką figurę otrzymasz? Ile osi symetrii ma ta figura?
- Czy każdy czworokąt, który ma prostopadłe przekątne, jest figurą osiowosymetryczną? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

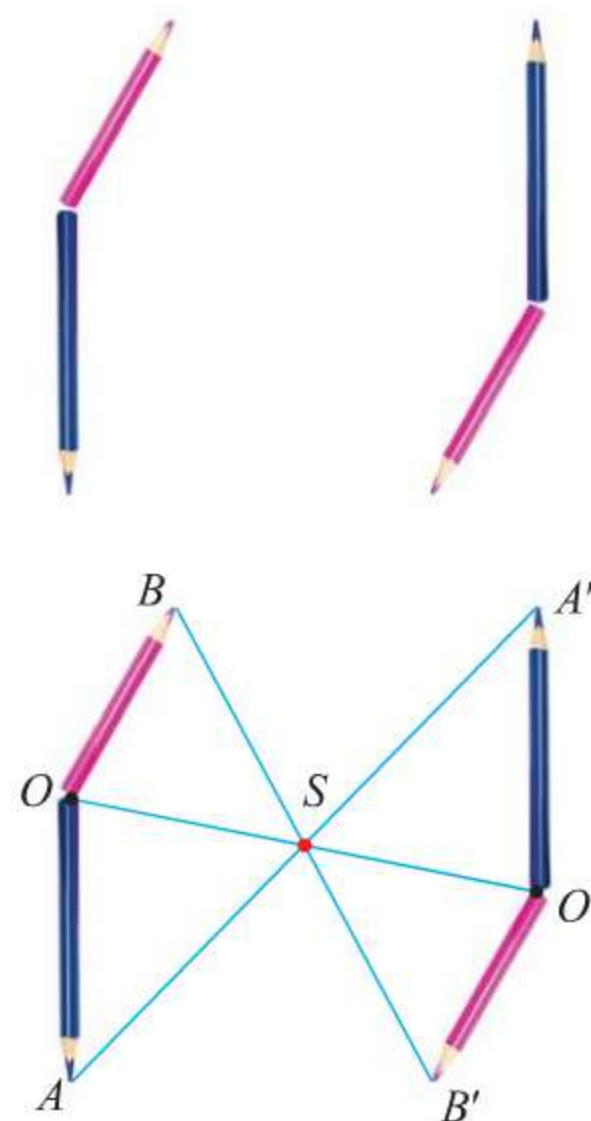
A.	Tak,	ponieważ	1.	przekątne nie muszą przecinać się w połowie długości.
B.	Nie,		2.	co najmniej jedna z przekątnych jest osią symetrii tego czworokąta.

4. Symetria środkowa

Na rysunku pary kredek sprawiają wrażenie symetrycznych, choć nie można znaleźć takiej prostej, aby po zgięciu kartki wzdłuż niej obie pary się pokryły.

Oznaczmy punkty styczności kredek jako O i O' , a ich końce odpowiednio jako A, B, A', B' , i narysujmy odcinki AA', BB', OO' . Odcinki AA', BB', OO' przecinają się w jednym punkcie S oraz $|AS| = |SA'|$, $|BS| = |SB'|$, $|OS| = |SO'|$.

Punkty A i A' , B i B' , O i O' są punktami symetrycznymi względem punktu S . O figurach tak utworzonych mówimy, że są figurami symetrycznymi względem punktu S . Punkt S nazywamy środkiem symetrii tych figur.



Dwa różne punkty A i A' są symetryczne względem punktu S , jeśli punkt S jest środkiem odcinka AA' .

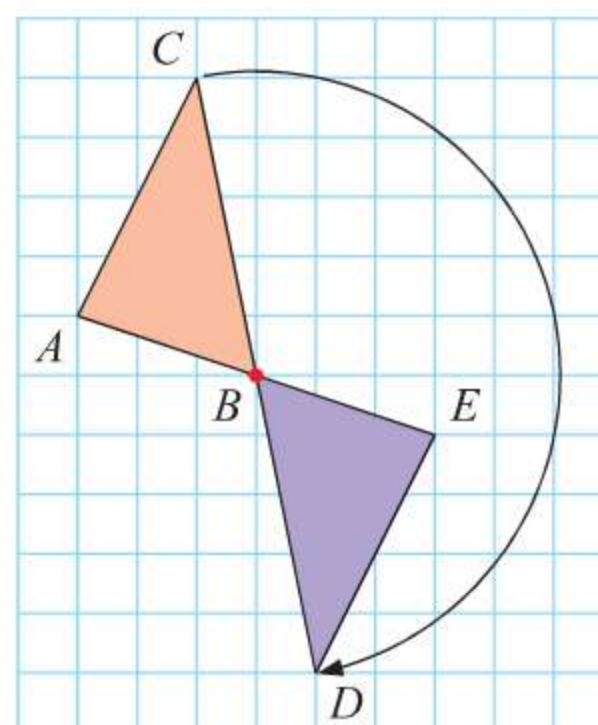


Przykład 1.

Sprawdźmy, czy trójkąty przedstawione na rysunku są symetryczne względem punktu B .

Trójkąt ABC jest symetryczny do trójkąta BDE względem punktu B , ponieważ punkt B jest środkiem odcinków CD oraz AE . Punktami symetrycznymi do punktów A, B, C względem punktu B są odpowiednio punkty E, B, D .

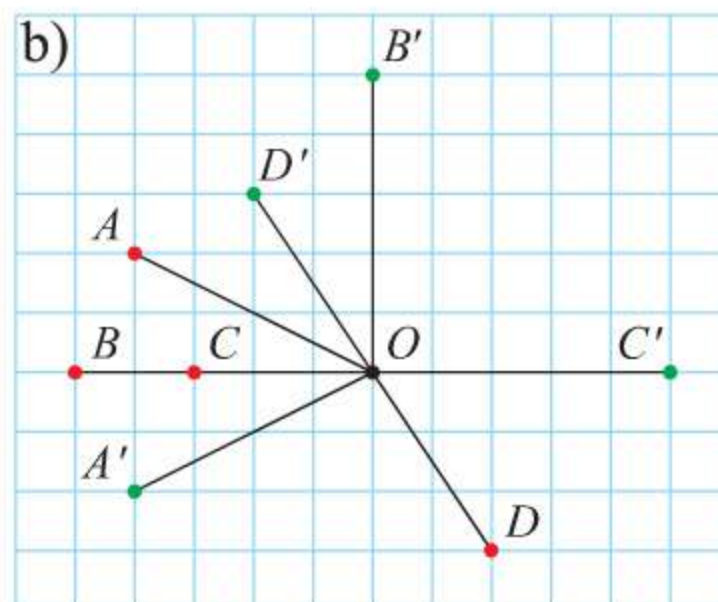
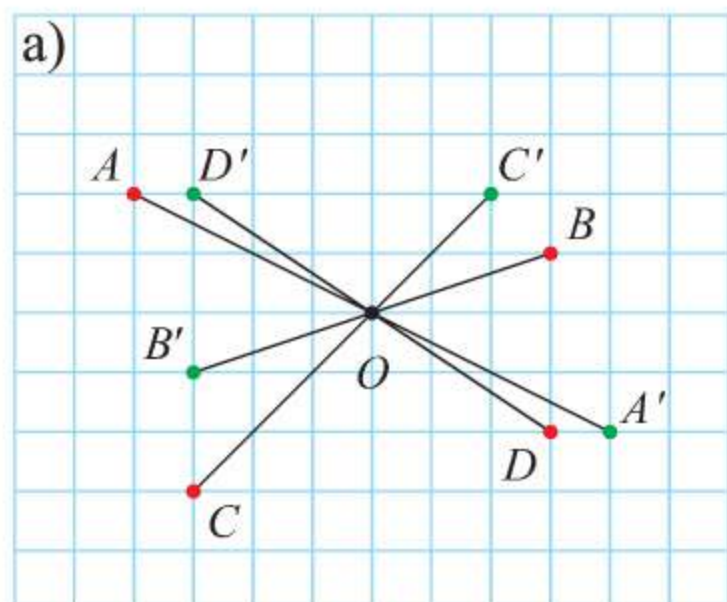
Zauważmy, że trójkąt BDE można również otrzymać po obroceniu trójkąta ABC o kąt 180° dookoła punktu B .



- Figury symetryczne względem punktu są przystające.
- Dwie figury są symetryczne względem punktu, jeżeli każdą z tych figur można otrzymać przez obrót drugiej figury o 180° dookoła tego punktu.



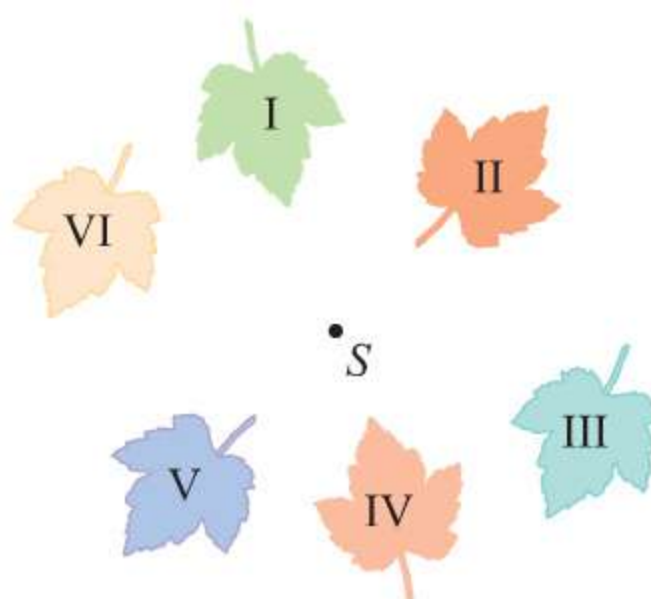
- 1 Zaznacz punkty A, B, C nieleżące na jednej prostej oraz znajdź punkty A' i B' symetryczne do punktów A i B względem punktu C . Odpowiedz na poniższe pytania.
 - a) Jakie jest wzajemne położenie punktów A, A' i C ?
 - b) Co powiesz o odległościach punktów B i B' od punktu C ?
 - c) Czym jest punkt C dla odcinków AA' i BB' ?
 - d) Gdzie znajduje się punkt symetryczny do punktu C względem punktu C ?
- 2 Sprawdź, czy punkty A', B', C', D' są symetryczne odpowiednio do punktów A, B, C, D względem punktu O .



- 3 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeżeli punkty C i D leżą w równej odległości od punktu S i punkt S nie leży na odcinku CD , to punkt S jest środkiem symetrii odcinka CD .	P	F
Jeżeli punkt S jest środkiem odcinka CD , to punkty C i D są symetryczne względem punktu S .	P	F

- 4 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

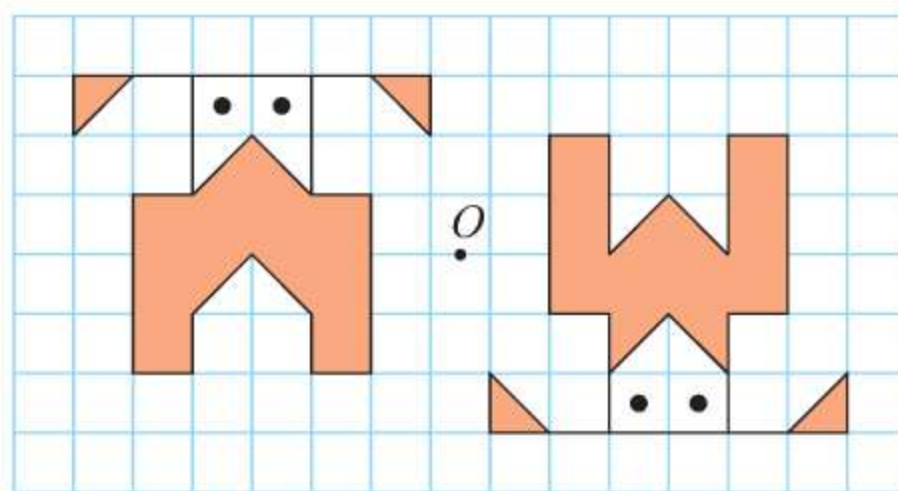


Parą figur symetrycznych względem punktu S jest

- A. I i IV B. III i VI C. II i V D. IV i VI

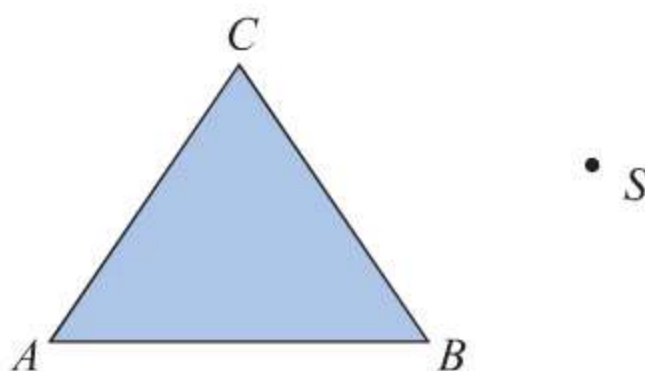
- 5 Narysuj oś liczbową i zaznacz punkty A, B, C, D, E, F, G o współrzędnych odpowiednio: $-\frac{9}{4}$; $-1,75$; $-0,5$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{4}$; $2,25$. Następnie zaznacz punkty $A', B', C', D', E', F', G'$ symetryczne do danych względem punktu O o współrzędnej zero.

- 6 Znajdź błędy na rysunku poniżej, jeśli wiadomo, że pieski miały być symetryczne względem punktu O .



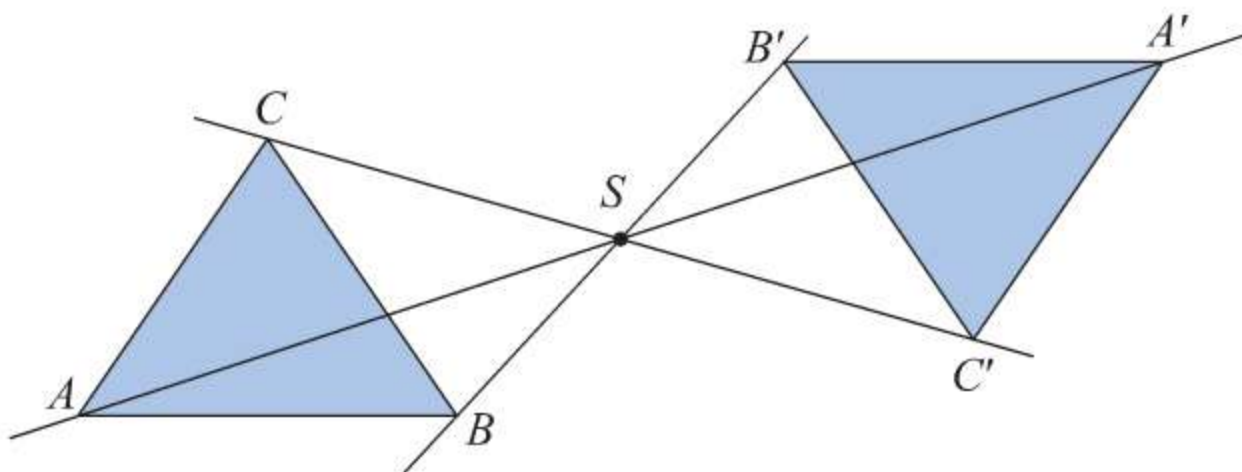
Przykład 2.

Dane są: trójkąt ABC i punkt S poza trójkątem. Narysujmy trójkąt $A'B'C'$ symetryczny do trójkąta ABC względem punktu S .



Aby narysować trójkąt $A'B'C'$ symetryczny do trójkąta ABC względem punktu S , należy znaleźć punkty A' , B' , C' symetryczne do wierzchołków trójkąta ABC względem punktu S . W tym celu wykonujemy następujące czynności:

1. Przez punkty A , B , C prowadzimy proste AS , BS i CS .
2. Na prostych AS , BS , CS wyznaczamy takie punkty A' , B' , C' , że $|AS| = |SA'|$, $|BS| = |SB'|$, $|CS| = |SC'|$.
3. Rysujemy trójkąt $A'B'C'$ symetryczny do trójkąta ABC względem punktu S .



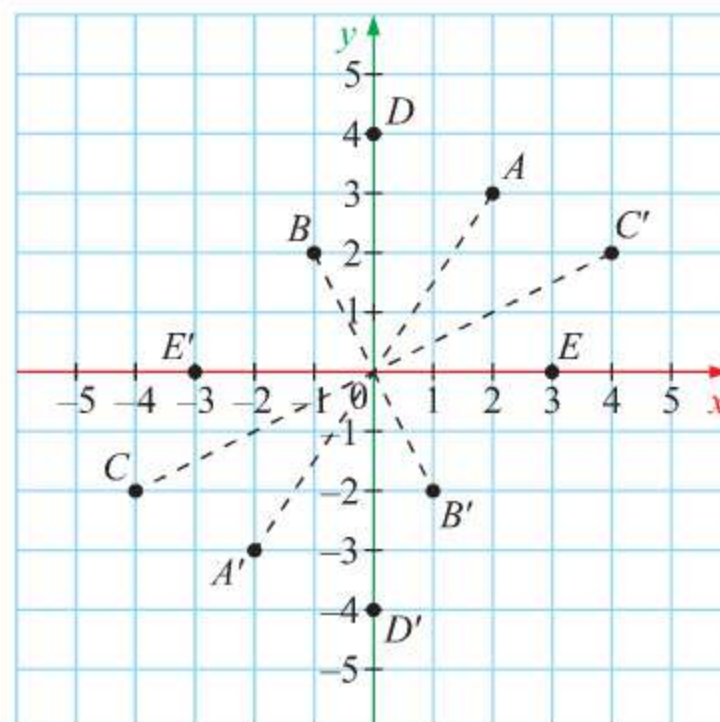
- 7 Narysuj trapez prostokątny, a następnie figurę symetryczną do niego względem wierzchołka kąta rozwartego tego trapezu.
- 8 W kwadracie $ABCD$ o boku 3 cm przekątne przecinają się w punkcie S . Punkty S_A , S_B , S_C , S_D są punktami symetrycznymi do punktu S względem punktów A , B , C , D . Oblicz obwód czworokąta $S_AS_BS_CS_D$.

Przykład 3.

W prostokątnym układzie współrzędnych dane są punkty: $A = (2, 3)$, $B = (-1, 2)$, $C = (-4, -2)$, $D = (0, 4)$, $E = (3, 0)$. Znajdźmy punkty symetryczne do danych względem punktu $O = (0, 0)$.

Porównajmy współrzędne punktów symetrycznych.

$A = (2, 3)$	$A' = (-2, -3)$
$B = (-1, 2)$	$B' = (1, -2)$
$C = (-4, -2)$	$C' = (4, 2)$
$D = (0, 4)$	$D' = (0, -4)$
$E = (3, 0)$	$E' = (-3, 0)$



Współrzędne punktów symetrycznych względem początku układu współrzędnych są liczbami przeciwnymi.

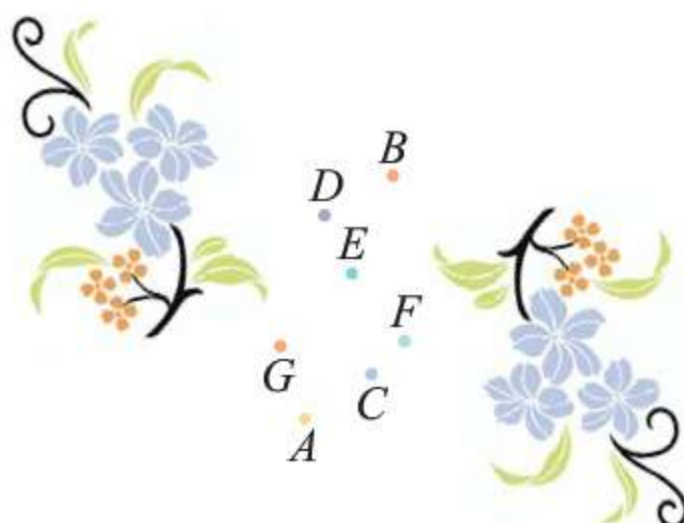
- 9 W układzie współrzędnych zaznacz punkty: $A = (3, 1)$, $B = (-1, -2)$, $C = (3, -3)$, $D = (-3, 1)$, $E = (0, 0)$, $F = (-5, 0)$ oraz $G = (0, -5)$, a następnie znajdź punkty A' , B' , C' , D' , E' , F' , G' symetryczne do danych punktów względem początku układu współrzędnych. Podaj współrzędne tych punktów.
- 10 Trójkąt ABC jest symetryczny do trójkąta $A'B'C'$ względem początku układu współrzędnych. Narysuj te trójkąty w układzie współrzędnych, jeśli wiadomo, że: $A = (-5, 2)$, $B = (-1, -2)$, $C' = (2, -6)$. Podaj współrzędne pozostałych wierzchołków tych trójkątów.
- 11 W układzie współrzędnych zaznacz punkty $E = (-2, -1)$ i $F = (2, -1)$. Punkt G jest symetryczny do punktu E względem początku układu współrzędnych. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
- Pole trójkąta EFG jest równe **A** / **B**. **A.** 8 **B.** 4
- Najdłuższy bok trójkąta EFG ma długość **C** / **D**. **C.** 4 **D.** $2\sqrt{5}$
- 12 Wyznacz liczby a i b tak, aby punkty K i L były symetryczne względem początku układu współrzędnych.
- a) $K = (-1, a)$, $L = (b, 2)$ b) $K = (0, -a)$, $L = \left(-\frac{b}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

Wyzwanie

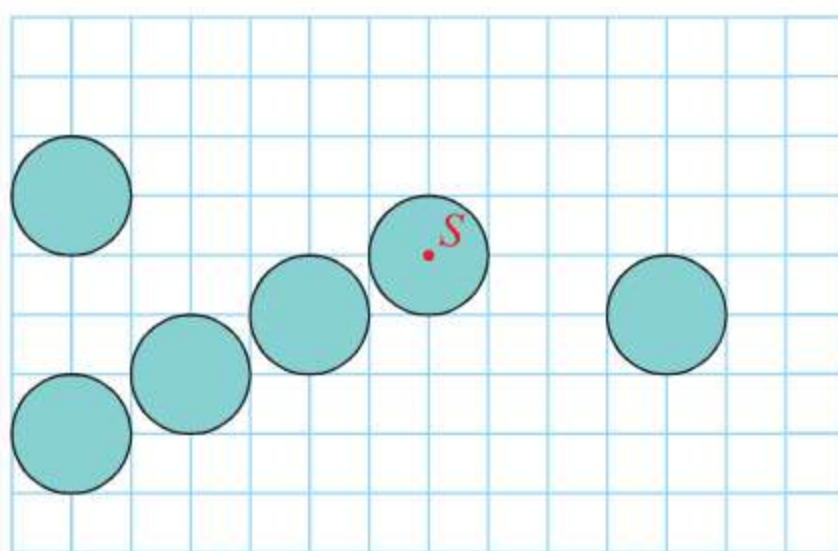
Wiadomo, że punkty A i B są symetryczne względem początku układu współrzędnych oraz że $A = (2a - 4, b^2 - 2)$, $B = (-a + 5, -b^2 - 2b + 4)$. Podaj współrzędne punktów A i B .

Sprawdź się!

- 1 Znajdź punkt, względem którego dane figury są symetryczne.



- 2 Ile kółek najmniej wystarczy dorysować, aby figura na rysunku była symetryczna względem punktu S ? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

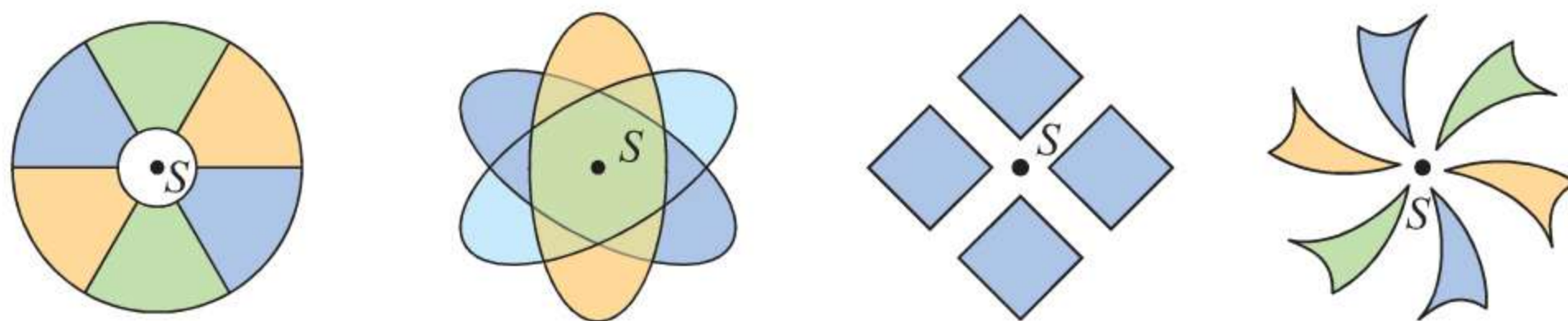


- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

- 3 Narysuj dowolny trójkąt, a następnie trójkąt do niego symetryczny względem punktu będącego wierzchołkiem trójkąta.
- 4 W układzie współrzędnych zaznacz punkty $A = (-2, -2)$ i $B = (2, -2)$, a następnie znajdź punkty A' i B' symetryczne do danych punktów względem początku układu współrzędnych. Podaj współrzędne tych punktów. Nazwij czworokąt $ABA'B'$. Oblicz jego obwód i pole.
- 5 Wyznacz liczby a i b tak, aby punkty $E = (b, -3)$, $F = (4, a)$ były symetryczne względem początku układu współrzędnych.

5. Figury środkowosymetryczne

Jeżeli każdą z figur przedstawionych na rysunku obrócimy o kąt 180° wokół jej środka, to otrzymana figura pokryje się z figurą wyjściową.



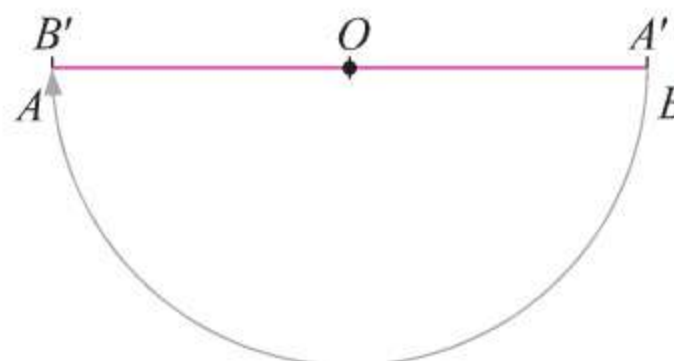
Takie figury nazywamy **figurami środkowosymetrycznymi**.

Punkt S jest **środkiem symetrii figury**, jeżeli dana figura i figura do niej symetryczna względem tego punktu się pokrywają.

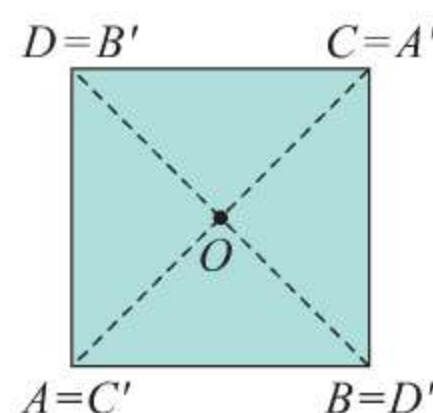
Przykład 1.

Sprawdźmy, czy odcinek, kwadrat i trójkąt równoboczny są figurami środkowosymetrycznymi.

Jeżeli odcinek AB obrócimy o kąt 180° względem jego środka O , to otrzymamy odcinek $A'B'$, który pokryje się z odcinkiem AB .

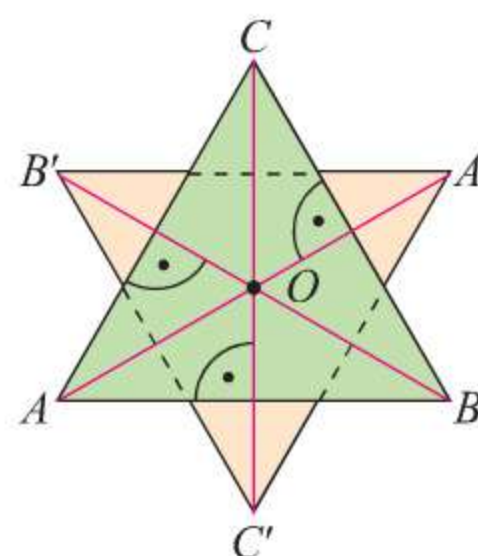


Jeżeli kwadrat $ABCD$ obrócimy o kąt 180° względem punktu O (przecięcia przekątnych), to otrzymamy kwadrat $A'B'C'D'$, który pokryje się z kwadratem $ABCD$.



Jeżeli trójkąt równoboczny ABC obrócimy o kąt 180° względem punktu O (przecięcia symetralnych boków trójkąta), to otrzymamy trójkąt $A'B'C'$, który nie pokryje się z trójkątem ABC .

Nie ma takiego punktu, względem którego trójkąt ABC i trójkąt $A'B'C'$ do niego symetryczny by się pokryły.



- Figurami środkowosymetrycznymi są np. odcinek i kwadrat.
- Trójkąt równoboczny nie ma środka symetrii. Nie ma go także żaden inny trójkąt. Trójkąt nie jest figurą środkowosymetryczną.

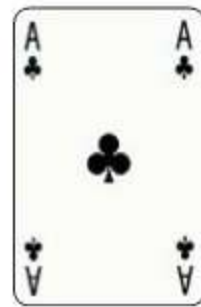


- 1 Które spośród wymienionych figur: kąt, równoległobok, trapez, koło, romb, trójkąt równoramienny, mają środek symetrii?
- 2 Jakie powinno być wzajemne położenie podanych figur, aby figura z nich złożona miała środek symetrii?
a) punkt i okrąg b) punkt i prosta c) okrąg i prosta
- 3 Które z kart przedstawionych na rysunku poniżej mają środek symetrii? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

I



II



III



IV



A. Wszystkie.

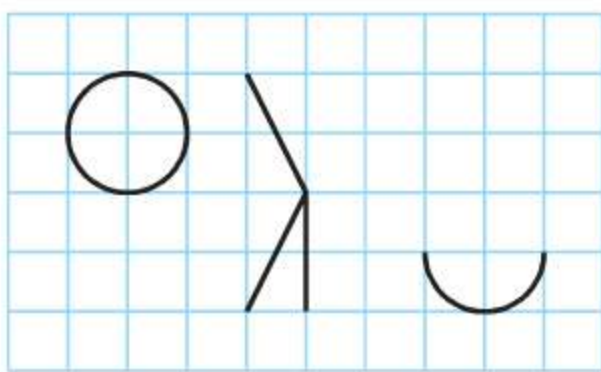
B. Tylko I.

C. Tylko III.

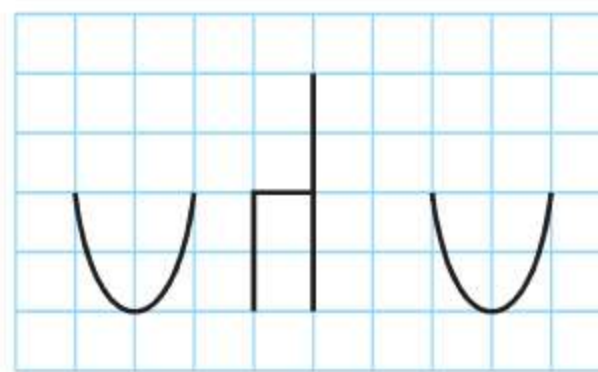
D. I i III.

- 4 Przerysuj rysunek do zeszytu i uzupełnij go tak, aby otrzymać figurę środkowosymetryczną.

a)



b)



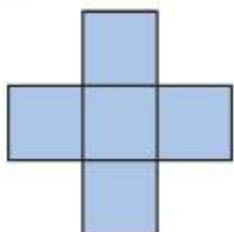
- 5 Wśród figur przedstawionych na rysunku wskaż figury:

a) osiowosymetryczne,

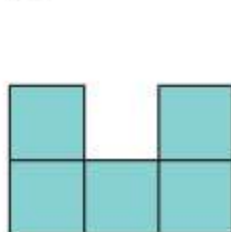
b) środkowosymetryczne,

c) osiowosymetryczne i środkowosymetryczne jednocześnie.

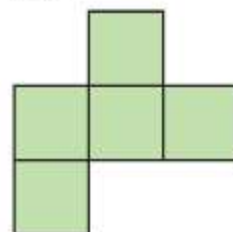
I



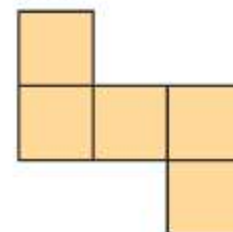
II



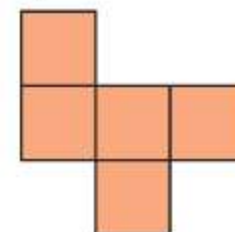
III



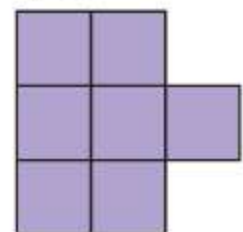
IV



V



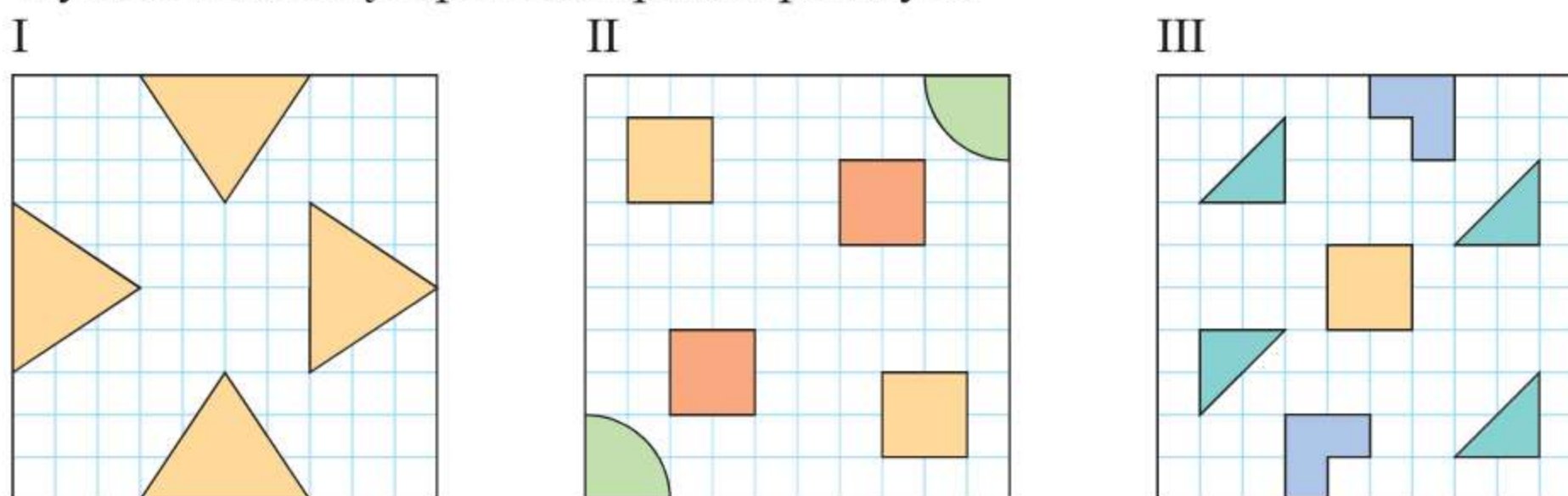
VI



- 6 Które z figur przedstawionych na rysunku są:
a) osiowosymetryczne, b) środkowosymetryczne?



- 7 Które z figur przedstawionych na rysunku mają środek symetrii i oś symetrii? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.



- A. Tylko I. B. II i III. C. Tylko II. D. Żadna.

- 8 Podaj przykład figury, która:
a) jest środkowosymetryczna, a nie jest osiowosymetryczna,
b) jest jednocześnie środkowosymetryczna i osiowosymetryczna,
c) ma nieskończenie wiele osi symetrii i nieskończenie wiele środków symetrii,
d) jest osiowosymetryczna, a nie jest środkowosymetryczna.

- 9 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Punkt przecięcia przekątnych czworokąta jest jego środkiem symetrii tylko wtedy, gdy przekątne są osiami symetrii tego czworokąta.	P	F
Punkt przecięcia przekątnych wielokąta nigdy nie jest środkiem jego symetrii.	P	F
Jeśli figura ma dwie prostopadłe osie symetrii, to ma środek symetrii.	P	F
Jeśli figura ma środek symetrii, to ma dwie prostopadłe osie symetrii.	P	F



- 10** W układzie współrzędnych dane są punkty $A = (3, -3)$, $D = (-3, -3)$. Czworokąt $ABCD$ jest figurą środkowosymetryczną względem początku układu współrzędnych. Oblicz obwód, pole i sumę długości przekątnych tego czworokąta.
- 11** W układzie współrzędnych dany jest odcinek AB , taki że $A = (-8, 0)$, $B = (0, 6)$. Narysuj odcinek A_1B_1 symetryczny do odcinka AB względem osi y , następnie A_2B_2 – odcinek symetryczny do odcinka A_1B_1 względem osi x , a następnie odcinek A_3B_3 symetryczny do odcinka A_2B_2 względem osi y . Oblicz pole i obwód figury $AB_1A_2B_3$. Co to za figura? Znajdź środek symetrii tej figury.

Wyzwanie

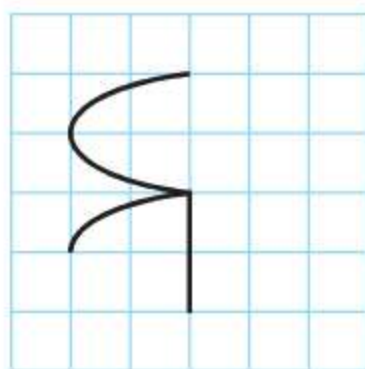
Czy istnieje figura, która ma dokładnie

- a) 2, b) 3, c) 2022
środki symetrii? Dlaczego?

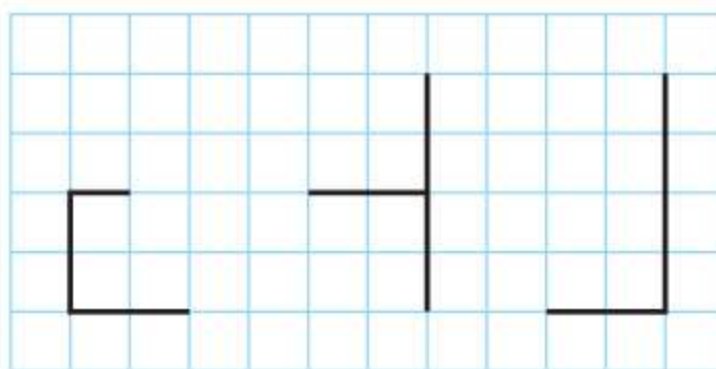
Sprawdź się!

- 1 Które spośród wymienionych figur: dwie proste przecinające się, półkole, okrąg, półprosta, płaszczyzna mają środek symetrii?
- 2 Które cyfry arabskie mają środek symetrii?
- 3 Przerysuj rysunek do zeszytu i uzupełnij go tak, aby otrzymać figurę środkowosymetryczną.

a)



b)



- 4 Narysuj figurę złożoną z czterech kół o jednakowych promieniach tak, aby miała środek symetrii.
- 5 W układzie współrzędnych dane są punkty $K = (-5, 5)$ i $M = (5, -5)$. Czworokąt foremny $KLMN$ jest figurą środkowosymetryczną względem początku układu współrzędnych. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Pole czworokąta $KLMN$ jest równe **A / B**.

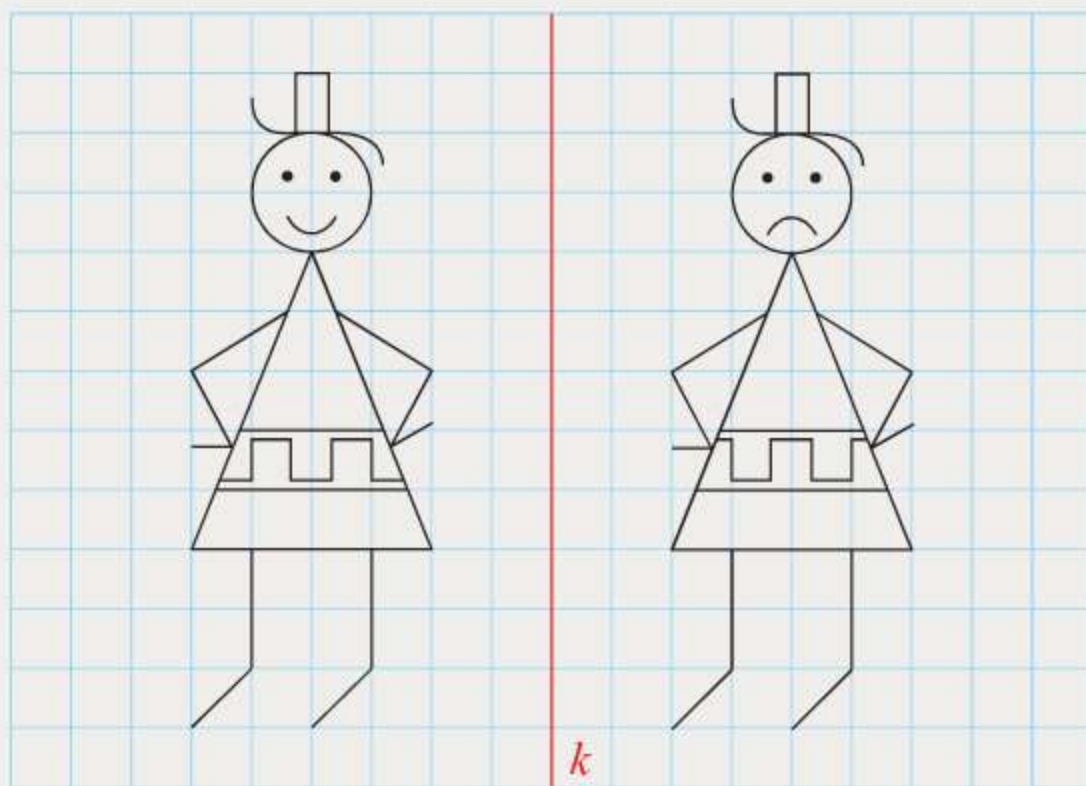
- A.** 100 **B.** 25

Suma długości przekątnych czworokąta $KLMN$ jest równa **C / D**.

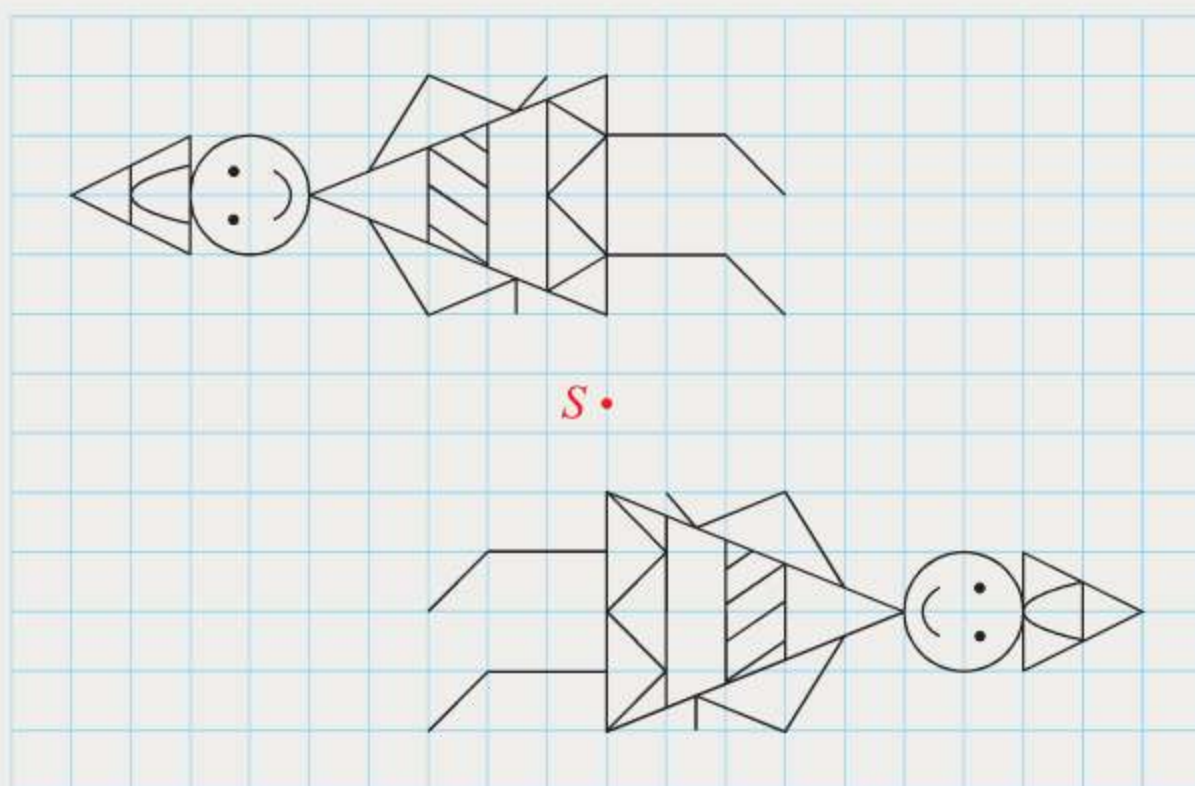
- C.** $10\sqrt{2}$ **D.** $20\sqrt{2}$

Zadania utrwalające

- 1 Znajdź szczegóły zakłócające symetrię obrazka względem prostej k .



- 2 Znajdź szczegóły zakłócające symetrię obrazka względem punktu S .



- 3 Określ, ile osi symetrii ma dany znak drogowy oraz czy ma środek symetrii.

I



II



III



IV



V

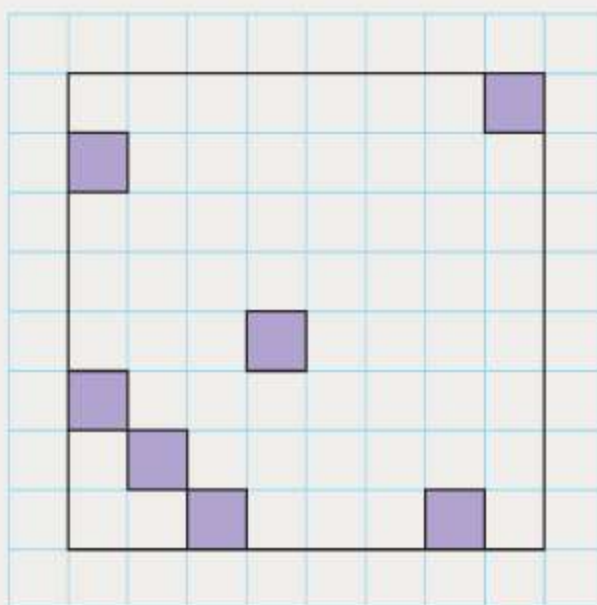


- 4 Ile osi symetrii ma figura utworzona z dwóch przecinających się prostych?

- 5 Narysuj dwa okręgi tak, aby otrzymana figura miała:
a) dokładnie dwie osie symetrii,
b) nieskończenie wiele osi symetrii.



- 6 Napisz liczbę dwucyfrową mającą:
 - a) jedną oś symetrii,
 - b) dwie osie symetrii.
- 7 Narysuj dwa odcinki AB i CD przecinające się w punkcie O tak, aby czworokąt utworzony przez połączenie końców tych odcinków miał środek symetrii.
- 8 Narysuj kąt o mierze 60° i wierzchołku S . Zaznacz w obszarze kąta dowolny punkt P . Znajdź punkty A i B , które są symetryczne do punktu P względem ramion tego kąta. Jaką miarę ma kąt ASB ?
- 9 Dany jest trójkąt ABC . Znajdź punkt D taki, aby czworokąt o wierzchołkach A, B, C, D miał środek symetrii. Ile rozwiązań ma to zadanie?
- 10 W trójkącie prostokątnym ABC : $|\angle ACB| = 90^\circ$, $|AC| = \sqrt{2}$ cm, $|BC| = 2\sqrt{2}$ cm. Oblicz pole i obwód czworokąta $ABA'B'$, jeśli wiadomo, że punkty A' i B' są symetryczne do punktów A i B względem punktu C .
- 11 Czworokąt $ABCD$ jest symetryczny względem osi x układu współrzędnych oraz $A = \left(-1\frac{1}{2}, -6\right)$, $C = \left(3, 1\frac{1}{2}\right)$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego czworokąta.
- 12 W prostokątnym układzie współrzędnych dane są punkty: $B = (4, -4)$, $G = (-1, 0)$. Podaj współrzędne punktów A, C, D, E, F, H , jeżeli wiadomo, że ośmiokąt $ABCDEFGH$ jest figurą osiowosymetryczną względem obu osi układu współrzędnych oraz środkowosymetryczną względem początku układu współrzędnych. Zrób odpowiedni rysunek. Ile rozwiązań ma to zadanie?
- 13 Ile kwadratów najmniej wystarczy dorysować, aby figura na rysunku była środkowosymetryczna i osiowosymetryczna?



- 14 Narysuj trzy proste tak, aby figura z nich utworzona była środkowosymetryczna. Na ile sposobów mogą być położone względem siebie proste spełniające warunki zadania?

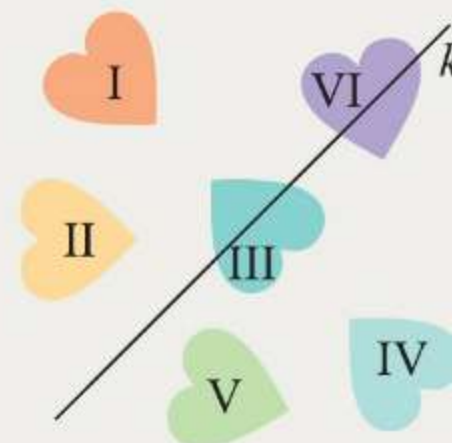
Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

W zadaniach 1.–3. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

1 Figury symetryczne względem prostej k to figury

- A. II i IV
- B. I i V
- C. I i IV
- D. III i VI



2 Tyle samo osi symetrii mają

- A. prostokąt niebędący kwadratem i kwadrat.
- B. odcinek i trapez równoramienny niebędący równoległobokiem.
- C. prosta i półprosta.
- D. trójkąt równoramienny i trapez równoramienny niebędący równoległobokiem.

3 Mariusz ubrany w koszulkę z napisem **LATO** widzi w lustrze napis

- A. **OTAJ**
- B. **OLAT**
- C. **OTAL**
- D. **TAJO**

W zadaniach 4.–7. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

4 Punkty A i B oraz punkty A' i B' , symetryczne do nich względem prostej l , są wierzchołkami prostokąta. Jakie jest położenie prostej l i odcinka AB ?

- A. Odcinek zawiera się w prostej.
- B. Prosta przechodzi przez środek odcinka lub prosta i odcinek są równoległe.
- C. Prosta i odcinek są prostopadłe.
- D. Jeden z końców odcinka leży na prostej l .

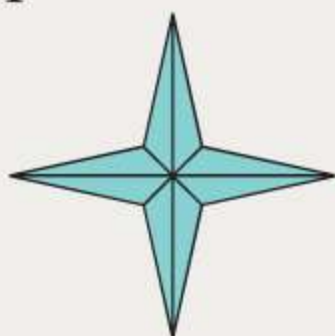
5 Które figury są symetryczne względem zaznaczonego punktu S ?

- A.   S
- B.   S
- C.   S
- D.   S

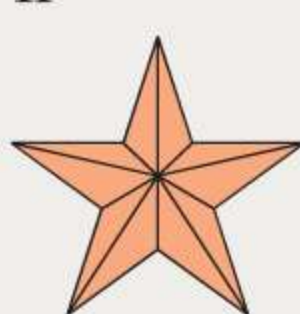


- 6 Które gwiazdy mają osie symetrii i środek symetrii?

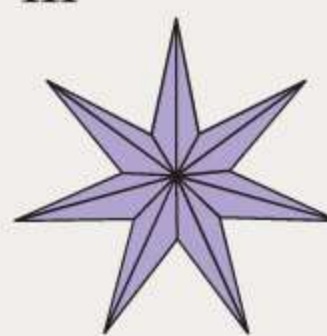
I



II



III



A. I, II i III.

B. Tylko I.

C. Tylko II.

D. II i III.

- 7 Które spośród symboli znaków zodiaku nie mają osi symetrii, ale mają środek symetrii?



BARAN



BYK



BLIŹNIĘTA



RAK



LEW



PANNA

A. Rak, Lew i Panna.

B. Tylko Rak.

C. Baran, Byk i Bliźnięta.

D. Tylko Bliźnięta.

- 8 Dane są figury I, II, III, IV.

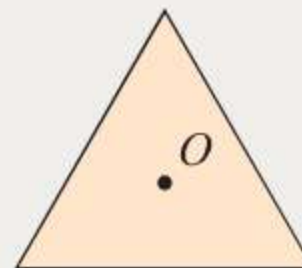
I



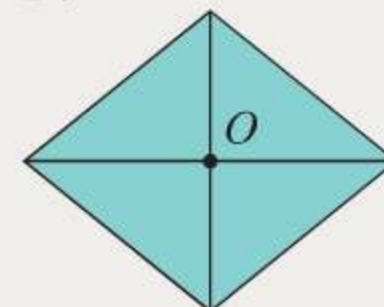
II



III



IV



Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Punkt O jest środkiem symetrii figury A / B.

A. I

B. II

Punkt O nie jest środkiem symetrii figury C / D.

C. III

D. IV

- 9 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Figury symetryczne względem prostej są przystające.	P	F
Figury przystające są symetryczne względem pewnej prostej.	P	F
Punkty symetryczne względem prostej k leżą na prostej prostopadłej do prostej k .	P	F
Wielokąty symetryczne względem prostej mają równe pola.	P	F

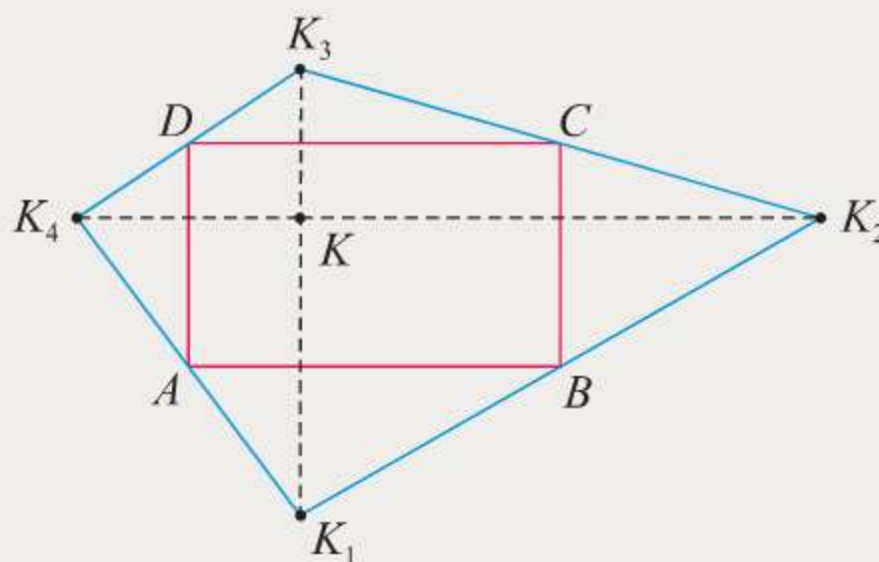
- 10 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Prosta ma nieskończenie wiele środków symetrii.	P	F
Odcinki symetryczne względem punktu są równoległe.	P	F
Jeśli figura ma środek symetrii, to ma również oś symetrii.	P	F
Dwie proste tworzą figurę, która ma środek symetrii.	P	F

- 11 Trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |CB|$, przekształcono symetrycznie względem prostej AB tak, że obrazem punktu C jest punkt C_1 . Czy figura AC_1BC ma dwie prostopadłe osie symetrii? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	nie znamy długości odcinków AC_1 i BC_1 .
B.	Nie,		2.	proste AB i CC_1 są prostopadłymi osiami symetrii.

- 12 Wewnątrz prostokąta $ABCD$ o wymiarach $5\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ zaznaczono punkt K . Punkty K_1, K_2, K_3, K_4 są punktami symetrycznymi do punktu K względem prostych zawierających boki tego prostokąta. Oblicz pole czworokąta $K_1K_2K_3K_4$. Zapisz obliczenia.



- 13 W prostokątnym układzie współrzędnych dane są punkty: $A = (-2, 4)$, $C = \left(3, 2\frac{1}{2}\right)$, $E = (-1, -1)$. Podaj współrzędne punktów B, D, F , jeżeli wiadomo, że sześciokąt $ABCDEF$ jest figurą osiowosymetryczną względem jednej z osi układu współrzędnych. Wykonaj odpowiedni rysunek.

1. Reguła mnożenia

Aby rozwiązywać zadania z rachunku prawdopodobieństwa, musimy przede wszystkim umieć zliczać wyniki doświadczeń, które rozważamy w tych zadaniach.

Przykład 1.

Ustalmy, ile jest wyników doświadczenia polegającego na jednokrotnym rzucie monetą i sześcienną kostką do gry.

Wygodnie jest przedstawić możliwe wyniki w tabeli.

Rzut kostką Rzut monetą						
	(O, 1)	(O, 2)	(O, 3)	(O, 4)	(O, 5)	(O, 6)
	(R, 1)	(R, 2)	(R, 3)	(R, 4)	(R, 5)	(R, 6)

Liczba wszystkich wyników tego doświadczenia wynosi 12. Tę liczbę można ustalić szybciej.

Zauważmy, że możemy otrzymać 2 wyniki w rzucie monetą i 6 wyników w rzucie kostką. Po pomnożeniu $2 \cdot 6$ otrzymujemy 12 wyników.

Ta metoda zliczania nazywa się **regułą mnożenia**.

Podczas stosowania reguły mnożenia spójnik „i” zamieniamy zawsze na znak mnożenia.

- 1 W dwóch woreczkach są karteczki z literami. W pierwszym woreczku są spółgłoski: c, b, p, t, w drugim woreczku – samogłoski o, e, i. Wybieramy jedną literę z pierwszego woreczka, a potem jedną literę z drugiego woreczka, i układamy sylabę w kolejności wybierania. Ile dwuliterowych sylab możemy w ten sposób utworzyć?

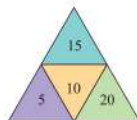




- 2 Staś układa życzenia, wybierając z każdej kolumny jeden fragment. Ile różnych życzeń może w ten sposób ułożyć?

W dniu Z okazji	Twojego święta urodzin	wszelkiej pomyślności dużo zdrowia szczęścia na każdy dzień moc radości samiych sukcesów	życzy Staś z rodziną. życzy Staś.
--------------------	---------------------------	--	--------------------------------------

- 3 Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie kostkami: kostką, której siatkę przedstawiono na rysunku obok, oraz sześcienną kostką do gry. Ile jest możliwych wyników tego doświadczenia?



Przykład 2.

Ustalmy, ile liczb naturalnych trzycyfrowych można utworzyć ze wszystkich cyfr.

Jest 10 cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Na pierwszym miejscu liczby trzycyfrowej nie może stać 0, więc jest 9 możliwości ustawienia cyfr na pierwszym miejscu. Na drugim i trzecim miejscu może stać zero, czyli jest 10 możliwości ustawienia cyfr na tych miejscach. Wszystkich możliwości jest $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

- 4 Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest A / B.

A. 89

B. 90

Wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych jest o C / D więcej niż liczb naturalnych trzycyfrowych.

C. 8100

D. 8000

Przykład 3.

Ustalmy, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, w których cyfra dziesiątek jest o 2 mniejsza od cyfry jedności.

W tych liczbach na drugim i trzecim miejscu może być tylko taki układ cyfr: 79, 68, 57, 46, 35, 24, 13, 02 (8 końcówek). Na pierwszym miejscu mogą być wszystkie cyfry oprócz zera (9 cyfr). Zatem tych liczb jest $8 \cdot 9 = 72$.

- 5 Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, w których:
- cyfra jedności jest o 2 mniejsza od cyfry dziesiątek,
 - cyfra dziesiątek jest 3 razy większa od cyfry jedności i ta liczba nie jest podzielna przez 10?

Przykład 4.

W pierwszym rzędzie sali teatralnej jest 12 miejsc. Obliczmy, na ile sposobów mama z tatą i córką mogą usiąść na tych miejscach.

Jeśli mama pierwsza wybiera miejsce, to może usiąść na 12 sposobów, wtedy tata może usiąść na 11 sposobów (mama już zajęła jedno miejsce), a córka na 10 sposobów. Mama z tatą i córką mogą usiąść w pierwszym rzędzie na $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ sposobów.

- 6 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pięć osób można zakwaterować w sześciu jednoosobowych pokojach na

A. 30 sposobów. B. 720 sposobów.
C. 1100 sposobów. D. 652 sposoby.

Przykład 5.

Na części parkingu przed biurowcem trzeba wyznaczyć w jednym rzędzie obok siebie 3 miejsca dla samochodów zarządu firmy X i 2 miejsca dla samochodów zarządu firmy Y. Miejsca będą oznaczone numerami rejestracyjnymi samochodów służbowych. Ustalmy, na ile sposobów można to zrobić, aby najbliżej wejścia stały samochody firmy Y, a dalej samochody firmy X.

Przyjmijmy oznaczenia miejsc parkingowych dla samochodów firmy Y odpowiednio: Y_1, Y_2 , a dla samochodów firmy X: X_1, X_2, X_3 .

Miejsce Y_1 można obsadzić na 2 sposoby.

Miejsce Y_2 można obsadzić na 1 sposób.

Miejsce X_1 można obsadzić na 3 sposoby.

Miejsce X_2 można obsadzić na 2 sposoby.

Miejsce X_3 można obsadzić na 1 sposób.

Wyznaczenie miejsc parkingowych jest możliwe na $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ sposobów.

- 7 Na części parkingu przy biurowcu trzeba wyznaczyć w jednym rzędzie obok siebie 3 miejsca dla samochodów pracowników firmy X i 2 miejsca dla samochodów pracowników firmy Y. Miejsca będą oznaczone numerami rejestracyjnymi samochodów służbowych. Na ile sposobów można to zrobić, aby:

- najbliżej wejścia stał samochód firmy Y,
- dwa samochody najbliżej wejścia należały do firmy X,
- żaden samochód należący do firmy X nie stał obok innego samochodu tej firmy?



Przykład 6.

Ustalmy, ile czterocyfrowych kodów do otwarcia furtki można utworzyć, jeżeli mamy do dyspozycji cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, cyfry w kodzie **mogą** się powtarzać, a ostatnia cyfra kodu jest liczbą parzystą.

Czwartą (ostatnią) cyfrę można wybrać spośród liczb 0, 2, 4, czyli na **3** sposoby (bo ma to być liczba parzysta).

Trzecią cyfrę można wybrać na **6** sposobów.

Drugą cyfrę można wybrać na **6** sposobów.

Pierwszą cyfrę można wybrać na **6** sposobów.

Można utworzyć $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 648$ kodów spełniających powyższe warunki.



- 8 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5 można utworzyć 520 czterocyfrowych kodów, w których cyfry mogą się powtarzać i ostatnia cyfra jest liczbą nieparzystą.

P

F

Z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 można utworzyć 12 trzycyfrowych liczb podzielnych przez 100, w których cyfry mogą się powtarzać.

P

F

Przykład 7.

Ustalmy, ile czterocyfrowych kodów PIN do karty kredytowej można utworzyć z cyfr: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, jeśli cyfry w kodzie **nie mogą** się powtarzać.

Czwartą (ostatnią cyfrę) można wybrać na **7** sposobów.

Trzecią cyfrę można wybrać na **6** sposobów (jedna cyfra już została wybrana).

Drugą cyfrę można wybrać na **5** sposobów (dwie cyfry już zostały wybrane).

Pierwszą cyfrę można wybrać na **4** sposoby (trzy cyfry już zostały wybrane).

Czterocyfrowych kodów PIN zapisanych za pomocą cyfr: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, jeśli cyfry w kodzie nie mogą się powtarzać, jest $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

- 9 Czy z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 można utworzyć 72 czterocyfrowe kody PIN do karty kredytowej, jeśli cyfry w kodzie nie mogą się powtarzać i ostatnia cyfra jest liczbą nieparzystą? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.
B.	Nie,		2.	$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72$.



- 10** Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 można utworzyć 288 czterocyfrowych liczb podzielnych przez 4, w których cyfry mogą się powtarzać.	P	F
Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 można utworzyć 25 trzycyfrowych liczb podzielnych przez 5, w których cyfry nie mogą się powtarzać.	P	F

- 11** Ania może z domu do szkoły dotrzeć trzema różnymi trasami. Na ile sposobów Ania może odbyć drogę z domu do szkoły i z powrotem tak, aby trasy w obie strony były:
- a) różne, b) jednakowe, c) dowolne?

- 12** Nauczyciel matematyki przygotowuje sprawdzian. Ma do dyspozycji zadania pogrupowane według zagadnień i chce, aby sprawdzian zawierał po jednym zadaniu z każdego z nich. Skorzystaj z tabeli i podaj, ile różnych zestawów może ułożyć nauczyciel.

Zagadnienie	Liczba zadań
okrąg i koło	6
piesień kołowy	4
symetria osiowa	7
symetria środkowa	5
kombinatoryka	2
rachunek prawdopodobieństwa	10

- 13** W klasie 8c jest 28 uczniów. Cała klasa wraz z pięcioma opiekunami wybiera się na autokarową wycieczkę do Pragi czeskiej. W autokarze są 53 miejsca, w tym 2 miejsca dla kierowcy i jego zmiennika oraz 1 miejsce dla pilota wycieczki. Kierowcy i pilot zajęli już miejsca, a pozostali uczestnicy wycieczki losują je. Jakie liczby trzeba wpisać w miejsce $\square$, aby wartość wyrażenia poniżej określała liczbę różnych sposobów zajęcia miejsc w autokarze przez uczniów i ich opiekunów?

$$\square \cdot \square \cdot 48 \cdot 47 \cdot \dots \cdot \square \cdot \square \cdot \square$$



- 14** Ile jest liczb czterocyfrowych większych od 2000, utworzonych z cyfr: 0, 1, 2, jeśli cyfry w liczbie mogą się powtarzać?
- 15** Janek gra w pewną grę komputerową. Aby ją ukończyć, musi przejść 5 poziomów. Każdy poziom można ukończyć na kilka sposobów. Liczba tych sposobów zawsze jest o 2 większa niż numer poziomu. Ile jest wszystkich możliwości ukończenia gry?

Wyzwanie

Rzucamy cztery razy dwunastościenną kostką, której wszystkie ściany pokazano na fotografii, i zapisujemy wyniki w kolejności rzutów. Ile jest możliwych wyników, w których żadna z wyrzuconych liczb nie jest większa od 8?



Sprawdź się!

- 1 Przedszkolanka rozdała dzieciom do pokolorowania kartki z trzema obrazkami, takimi jak poniżej. Każde dziecko ma do dyspozycji 4 kredki: czerwoną, zieloną, żółtą i niebieską. Ile różnokolorowych prac mogą narysować dzieci, jeśli każdy obrazek będzie pomalowany innym kolorem?



- 2 W kinie w jednym rzędzie jest 14 miejsc. Na ile sposobów Kasia, Jacek, Marcin i Ola mogą usiąść w tym rzędzie tak, aby żadne z nich nie siedziało na brzegu? Odpowiedź uzasadnij.
- 3 Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 można utworzyć 36 trzycyfrowych liczb podzielnych przez 5, w których cyfry mogą się powtarzać.	P	F
Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 można utworzyć 96 czterocyfrowych liczb podzielnych przez 4, w których cyfry nie mogą się powtarzać.	P	F

- 4 Asia, Karolina i Weronika wybrały się do kawiarni. Każda z nich zamówiła deser lodowy wybrany spośród 5 dostępnych rodzajów. Oblicz, na ile różnych sposobów dziewczyny mogły złożyć zamówienie, jeżeli każda z nich wybrała inny rodzaj deseru.
- 5 Oblicz, ile liczb pięciocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, jeśli ostatnią cyfrą jest 2. Uzasadnij, że te liczby są podzielne przez 3.

2. Reguła dodawania

Przykład 1.

Ustalmy, na ile sposobów Zosia może założyć jednokolorowy strój, jeśli wybierze spośród 5 różnych spódniczek (3 granatowych i 2 białych) oraz 8 różnych T-shirtów (4 granatowych i 4 białych).

Strój Zosi może być granatowy **albo** biały. Do każdej z 3 granatowych spódniczek Zosia może założyć 4 granatowe T-shirty, a więc zgodnie z regułą mnożenia jest $3 \cdot 4 = 12$ możliwości. Dla stroju białego jest $2 \cdot 4 = 8$ możliwości. Wszystkich wariantów jednokolorowego stroju jest $12 + 8 = 20$.

Ten sposób zliczania nazywamy **regułą dodawania**.

Podczas stosowania reguły dodawania spójnik „albo” zamieniamy zawsze na znak dodawania.



- 1 Pan Krzysztof podróżuje pociągiem i postanowił zjeść obiad w wagonie restauracyjnym. W menu było do wyboru:

- pierwsze danie: barszcz z uszkami, rosół;
- drugie danie: roladki z indyka, zraziki wieprzowe, pierogi;
- deser: semik, szarlotka, galaretka, lody.

Pan Krzysztof zamierza zjeść pierwsze i drugie danie albo drugie danie i deser. Na ile sposobów może wybrać posiłek?

Przykład 2.

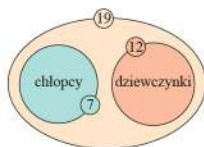
Obliczmy, ile osób liczy klasa, jeżeli:

- chłopców jest w niej 7, a dziewczynek o 5 więcej;
- wszystkie osoby z tej klasy uprawiają sport: lekkoatletykę uprawia 15 osób, pływanie 12 osób, a obie dyscypliny 8 osób.

- W tej klasie jest 7 chłopców i 12 dziewczynek, a więc klasa liczy $7 + 12 = 19$ osób.

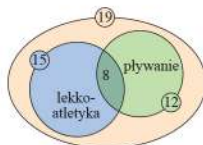
Tę sytuację ilustruje rysunek obok.

Zwróćmy uwagę, że klasa jest podzielona na dwa zbiory, które nie mają wspólnych elementów (chłopcy, dziewczynki). W takim przypadku liczba elementów sumy tych zbiorów jest sumą liczb elementów każdego zbioru.



b) Przedstawmy tę sytuację na rysunku.

Wyróżniono dwa zbiory, które mają wspólne elementy (osoby, które uprawiają i lekkoatletykę, i pływanie). Zauważymy, że jeśli dodamy liczby elementów tych zbiorów, to elementy części wspólnej zostaną policzone **dwukrotnie**. Liczbę wspólnych elementów musimy więc odjąć od wyniku. Zatem w tej klasie jest $(15 + 12) - 8 = 19$ osób.



2 Wszyscy uczniowie pewnej klasy ósmej uczą się dodatkowo języków obcych. Ilu uczniów liczy ta klasa, jeżeli:

- 6 uczniów uczy się języka hiszpańskiego, 4 uczniów włoskiego, a chińskiego o 2 uczniów mniej niż hiszpańskiego i włoskiego razem oraz każdy uczeń uczy się dodatkowo tylko jednego języka obcego;
- 8 uczniów uczy się języka hiszpańskiego, 6 uczniów włoskiego, 12 chińskiego, 4 uczniów hiszpańskiego i włoskiego oraz 2 uczniów włoskiego i chińskiego?

Przykład 3.

Obliczmy, ile jest liczb naturalnych od 1 do 1000 włącznie, podzielnych przez 2 lub przez 3.

W tym zbiorze znajduje się 500 liczb podzielnych przez 2 oraz 333 liczby podzielne przez 3. Należy jednak zauważyć, że niektóre liczby są jednocześnie podzielne przez 2 i przez 3. To liczby podzielne przez 6. Jest ich 166 i zostały one uwzględnione wśród liczb podzielnych przez 2 oraz wśród liczb podzielnych przez 3.

Wobec tego w zbiorze liczb naturalnych od 1 do 1000 włącznie liczb podzielnych przez 2 lub przez 3 jest $500 + 333 - 166 = 667$.

3 Ile jest liczb naturalnych od 1 do 568 włącznie, podzielnych przez:

- 3 lub 5,
- 2 lub 7,
- 4 lub 9?

Przykład 4.

Obliczmy, ile jest liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach, w których cyfry 7 i 1 stoją obok siebie.

Najpierw policzmy, ile jest tych liczb, jeśli 7 i 1 stoją w kolejności 71.

Zapiszmy możliwe ustawienia pary cyfr 71 w liczbie czterocyfrowej.

A.

7	1		
---	---	--	--

 albo B.

	7	1	
--	---	---	--

 albo C.

		7	1
--	--	---	---

W ustawieniu A trzecie miejsce możemy obsadzić na 8 sposobów (dwie cyfry już wykorzystaliśmy), a czwarte miejsce na 7 sposobów (trzy cyfry już wykorzystaliśmy). Liczb w ustawieniu A jest $8 \cdot 7 = 56$.

W ustawieniu B pierwsze miejsce możemy obsadzić na 7 sposobów (dwie cyfry już wykorzystaliśmy i pierwsza cyfra nie może być zerem) i czwarte miejsce też na 7 sposobów (trzy cyfry już wykorzystaliśmy). Liczb w ustawieniu B jest $7 \cdot 7 = 49$. Liczb w ustawieniu C też jest 49.

Wszystkich liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach, w których cyfry 7 i 1 stoją w kolejności 71, jest $56 + 49 + 49 = 154$.

Teraz należy policzyć, ile jest tych liczb, jeśli 7 i 1 stoją w kolejności 17.

Zapiszmy możliwe ustawienia pary cyfr 17 w liczbie czterocyfrowej.

D.

1	7		
---	---	--	--

 albo E.

	1	7	
--	---	---	--

 albo F.

		1	7
--	--	---	---

Zauważmy, że sytuacja jest analogiczna do poprzedniej. Cyfry 1 i 7 tylko zamieniliśmy miejscami. Wobec tego wszystkich liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach, w których cyfry 7 i 1 stoją w kolejności 17, jest $56 + 49 + 49 = 154$.

Wobec tego wszystkich liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach, w których cyfry 7 i 1 stoją obok siebie, jest $154 + 154 = 308$.

- 4 Czy liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach, w których cyfry 3 i 2 stoją obok siebie, jest 260? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	tych liczb jest $2 \cdot (8 \cdot 7 + 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7)$.
B.	Nie,		2.	tych liczb jest $8 \cdot 7 + 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7$.

- 5 Bartek studiuje w Paryżu. Na uczelnię może dojechać bezpośrednio metrem linii: 3, 7 lub 11 albo z przesiadką, najpierw autobusem numer: 28, 68 lub 96, a następnie tramwajami: linią T3 lub T4. Podaj, na ile sposobów Bartek może dojechać na uczelnię.

- 6 Ile jest punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna należy do zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a druga do zbioru $B = \{1, 2, 3\}$ albo pierwsza współrzędna należy do zbioru $C = \{-5, -4, 0, 4\}$, a druga do zbioru $D = \{-1, 0\}$? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

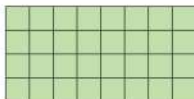
A. 15

B. 23

C. 8

D. 28

- 7 Prostokąt na rysunku podzielono na kwadraty o boku 1. Ile jest kwadratów o bokach 1, 2, 3, 4, które można wyróżnić w tym prostokącie?



Wyzwanie

Ile może być numerów rejestracyjnych mających na początku 2 litery, a następnie 5 cyfr, jeśli mogą w nich występować tylko litery W, F oraz cyfry 0, 1, 3, 5, 8, przy czym litery i cyfry mogą się powtarzać, albo mających na początku 2 litery spośród: G, D oraz 5 cyfr spośród: 2, 4, 6, 7, 9, przy czym litery i cyfry nie mogą się powtarzać?

Sprawdź się!

- 1 W pewnym zespole tanecznym każdy uczy się tańca towarzyskiego lub sportowego. Tańca towarzyskiego uczy się 32 osoby, a sportowego 28, natomiast obu rodzajów tańca uczy się 17 osób. Oblicz, ile osób liczy ten zespół.
- 2 W pierwszym pudełku jest 5 maskotek, w drugim – 7, a w trzecim – 12. Julka losuje po jednej maskotce z każdego pudełka. Oblicz, ile jest możliwych wyników tego losowania.
- 3 Pani Ania chce kupić w prezencie zestaw do herbaty składający się z filiżanki i czajniczka. W ofercie sklepu są 4 modele szklanych filiżanek i 4 modele szklanych czajniczków oraz 6 modeli porcelanowych filiżanek i 5 modeli porcelanowych czajniczków. Czy pani Ania może dokonać zakupu na 46 sposobów, jeśli chce mieć zestaw wykonany z jednakowego materiału? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.



A.	Tak,	ponieważ	1.	wszystkich wariantów jest $4 \cdot 5 + 4 \cdot 6$.
B.	Nie,		2.	wszystkich wariantów jest $4 \cdot 4 + 5 \cdot 6$.

- 4 Oblicz, ile jest liczb naturalnych od 1 do 354 włącznie, podzielnych przez 3 lub 7.
- 5 Ile jest liczb trzycyfrowych mniejszych od 500, które w swoim zapisie mają jedną piątkę? Zapisz obliczenia.

3. Zdarzenia w doświadczeniach losowych

Wiemy już, że w doświadczeniu losowym nie możemy przewidzieć konkretnego wyniku, ale możemy określić zbiór wszystkich możliwych wyników, czyli zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych. Na przykład, gdy rzucamy monetą, możemy otrzymać orła (O) lub reszkę (R). Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych przy jednokrotnym rzucie monetą to $\{O, R\}$.



Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych przy jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry to $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

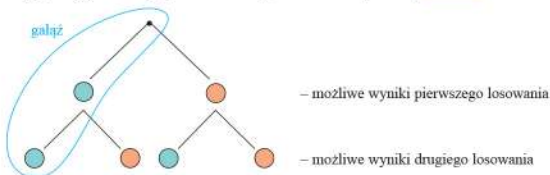


Inne zbiory wszystkich zdarzeń elementarnych otrzymamy w wyniku wielokrotnego rzutu monetą lub kostką do gry oraz w różnych doświadczeniach polegających na losowaniu ze zwracaniem i bez zwracania.

Przykład 1.

W urnie znajdują się 4 kule: 1 niebieska (N) i 3 pomarańczowe (P). Zapiszmy wszystkie możliwe wyniki doświadczenia losowego, w którym losujemy dwa razy po jednej kuli **ze zwracaniem** wylosowanej kuli do urny.

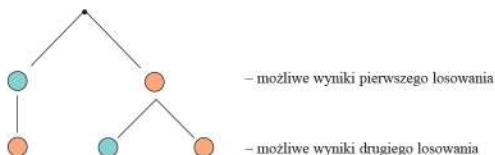
Opisaną sytuację możemy przedstawić graficznie za pomocą **drzewa**.



Drzewo ma 4 gałęzie. Każda gałąź przedstawia jeden z możliwych wyników losowania. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych to: $\{(N, N), (N, P), (P, N), (P, P)\}$.

Przykład 2.

W urnie znajdują się 4 kule: 1 niebieska (N) i 3 pomarańczowe (P). Przedstawmy w postaci drzewa wszystkie możliwe wyniki doświadczenia losowego, w którym losujemy dwa razy po jednej kuli **bez zwracania** wylosowanej kuli do urny.



Drzewo ma 3 gałęzie. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych to:
 $\{(N, P), (P, N), (P, P)\}$.

- 1 Z pojemnika, w którym znajdują się 2 kule białe i 1 czarna, losujemy kolejno trzy razy po jednej kuli:

a) ze zwracaniem, b) bez zwracania.

Zilustruj to doświadczenie losowe za pomocą drzewa i zapisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.

Przykład 3.

Rzucamy dwukrotnie monetą. Z ilu elementów składa się zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia? Zapiszmy, jakie zdarzenia elementarne sprzyjają zdarzeniu:

- dwukrotnie wypadła reszka,
- co najmniej raz wypadł orzeł,
- co najmniej raz wypadła reszka lub wypadł orzeł,
- trzykrotnie wypadła reszka.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych składa się z czterech elementów:
 $(O, O), (O, R), (R, O), (R, R)$.

- Zdarzeniu „dwukrotnie wypadła reszka” sprzyja jedno zdarzenie elementarne: (R, R) .
- Zdarzeniu „co najmniej raz wypadł orzeł” sprzyjają trzy zdarzenia elementarne: $(O, O), (O, R), (R, O)$.
- Zdarzeniu „co najmniej raz wypadła reszka lub wypadł orzeł” sprzyjają cztery zdarzenia elementarne: $(O, O), (O, R), (R, O), (R, R)$. Jest to **zdarzenie pewne**.
- Zdarzeniu „trzykrotnie wypadła reszka” nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne. Jest to **zdarzenie niemożliwe**.



- 2 Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia losowego jest 36.	P	F
Zdarzeniu „dwukrotnie wypadła szóstka” sprzyja jedno zdarzenie elementarne.	P	F
Zdarzenie „co najmniej raz wypadła parzysta liczba oczek” jest pewne.	P	F
Zdarzenie „trzykrotnie wypadła jednocyfrowa liczba oczek” jest niemożliwe.	P	F

- 3 W urnie znajdują się 3 kule: biała (B), czarna (C) i zielona (Z). Losujemy kolejno dwa razy po jednej kuli, bez zwracania. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego składa się z **A / B** elementów.

A. 3

B. 6

Zdarzeniu „wśród wylosowanych kul znajduje się kula zielona” sprzyjają zdarzenia elementarne **C / D**.

C. (B, Z), (C, Z)

D. (B, Z), (C, Z), (Z, B), (Z, C)

- 4 W urnie znajdują się 3 kule żółte, 3 czerwone i 3 niebieskie. Losujemy 4 kule. Określ, czy podane zdarzenie jest zdarzeniem niemożliwym czy pewnym.

A – wszystkie wylosowane kule są niebieskie.

B – każda z wylosowanych kul jest w innym kolorze.

C – wylosowano kule co najmniej w dwóch kolorach.



- 5 Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Liczbę oczek otrzymaną w pierwszym rzucie przyjmujemy za cyfrę dziesiątek liczby dwucyfrowej, a liczbę oczek otrzymaną w drugim rzucie – za cyfrę jedności. Określ, czy podane zdarzenie jest możliwe.

A – otrzymano liczbę, której suma cyfr jest większa od 12.

B – otrzymano liczbę, której suma cyfr jest większa od 1.

C – otrzymano liczbę, której różnica cyfr jest równa 0.

- 6 Sześcienna kostka ma dwie ściany oznaczone cyfrą 2, dwie oznaczone cyfrą 4 i dwie – cyfrą 6. Rzucamy nią dwukrotnie i zapisujemy wyniki rzutów jako liczbę dwucyfrową. Podaj przykład zdarzenia:

a) niemożliwego,

b) pewnego.

Wyzwanie

Ze zbioru cyfr różnych od zera losujemy kolejno cztery cyfry bez zwracania oraz zapisujemy je w kolejności losowania. W ten sposób otrzymujemy liczbę czterocyfrową. Ile wśród wszystkich zdarzeń elementarnych jest liczb podzielnych przez 25? Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdź się!

- 1 W urnie są dwie kule: biała i czarna. Losujemy jedną kulę, wkładamy ją z powrotem do urny, następnie losujemy drugą. Zilustruj to doświadczenie losowe za pomocą drzewa i zapisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.
- 2 Oblicz, na ile sposobów mogą stanąć w kolejce trzy osoby: Kasia (K), Basia (B) i Marek (M).
- 3 Rzucamy trzykrotnie monetą. Czy tylko cztery zdarzenia elementarne sprzyjają zdarzeniu „co najmniej raz wypadła reszka”? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	zbiór $\{(O, O, O), (O, O, R), (O, R, O), (R, O, O), (R, R, R)\}$ ma 5 elementów.
B.	Nie,		2.	zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych ma 8 elementów, a tylko zdarzenie elementarne (O, O, O) nie sprzyja danemu zdarzeniu.

- 4 W urnie znajdują się 4 kule: czerwona, niebieska, żółta i zielona.



Losujemy kolejno dwa razy po jednej kuli, bez zwracania do urny. Zapisz zbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu:

- a) jedna z wylosowanych kul jest żółta,
- b) nie wylosowano ani kuli niebieskiej, ani zielonej,
- c) nie wylosowano kuli zielonej i wylosowano kulę czerwoną.

- 5 W torebce jest 6 cukierków: 1 czekoladowy, 1 miętowy i 4 owocowe. Jarek wyciągnął na chybił trafił 3 cukierki. Określ, czy w tym losowaniu można uzyskać wyniki sprzyjające podanemu zdarzeniu.

A – wszystkie cukierki są owocowe.

B – co najmniej jeden cukierek jest owocowy.

C – żaden cukierek nie jest owocowy.

4. Prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych

Przykład 1.

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma otrzymanych liczb oczek jest podzielna przez 3.

Przedstawimy możliwe wyniki tego doświadczenia w tabeli.

Wyniki pierwszego rzutu \ Wyniki drugiego rzutu	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych składa się z 36 elementów.

Zdarzeniu A – „suma liczb oczek otrzymanych w dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry jest podzielna przez 3” sprzyja 12 zdarzeń elementarnych (oznaczonych na czerwono).

Wobec tego $P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

ODPOWIEDŹ: Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry otrzymamy sumę liczb oczek podzielną przez 3, wynosi $\frac{1}{3}$.

1 Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Zapisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A i oblicz jego prawdopodobieństwo, jeżeli:

- A – suma wyrzuconych oczek jest równa 8,
- A – za pierwszym razem wypadło mniej niż 3 oczka, za drugim razem wypadła liczba oczek będąca liczbą pierwszą,
- A – różnica liczb oczek, jakie wypadły w dwóch rzutach, jest liczbą podzielną przez 4.



- 2 Rzucamy dwukrotnie monetą. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wypadł orzeł, wynosi $\frac{3}{4}$.	P	F
Prawdopodobieństwo tego, że ani razu nie wypadła reszka, jest równe $\frac{1}{2}$.	P	F

Przykład 2.

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby trzycyfrowej, počawszy od cyfry setek. Obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia A – utworzona liczba trzycyfrowa jest podzielna przez 4.

Liczba jest podzielna przez 4, jeśli jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4. Wszystkich liczb trzycyfrowych, jakie możemy utworzyć za pomocą cyfr od 1 do 6, jest $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Liczby trzycyfrowe utworzone z cyfr od 1 do 6 i podzielne przez 4 mogą mieć na końcu 9 liczb dwucyfrowych: 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64. Cyfrę setek stanowi jedna z cyfr od 1 do 6.

Wobec tego wszystkich takich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 4 jest: $9 \cdot 6 = 54$.

$$P(A) = \frac{54}{216} = 0,25$$

ODPOWIEDZ: Prawdopodobieństwo zdarzenia, że utworzymy liczbę trzycyfrową podzielną przez 4, wynosi 0,25.

- 3 Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Otrzymane liczby oczek są zapisywane jako kolejne cyfry liczby trzycyfrowej, počawszy od cyfry setek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- utworzona liczba trzycyfrowa jest liczbą parzystą,
- utworzona liczba trzycyfrowa jest liczbą podzielną przez 5.

Przykład 3.

W urnie jest dziesięć kul ponumerowanych od 1 do 10. Dwukrotnie losujemy po jednej kuli. Sprawdźmy, które zdarzenie jest bardziej prawdopodobne:

- druga z wylosowanych kul ma numer o dwa większy od pierwszej kuli, jeżeli losujemy **bez zwracania** pierwszej kuli do urny;
- druga z wylosowanych kul ma numer o dwa większy od pierwszej kuli, jeżeli losujemy **ze zwracaniem** pierwszej kuli do urny.

W obu zdarzeniach zbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających jest taki sam. To zbiór ośmiu par: $\{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7), (6, 8), (7, 9), (8, 10)\}$.

W losowaniu bez zwracania wszystkich zdarzeń elementarnych jest $10 \cdot 9 = 90$.

W losowaniu ze zwracaniem wszystkich zdarzeń elementarnych jest $10 \cdot 10 = 100$. Prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi $P(A) = \frac{8}{90}$, a zdarzenia $B - P(B) = \frac{8}{100}$.

ODPOWIEDŹ: Ponieważ $\frac{8}{90} > \frac{8}{100}$, to bardziej prawdopodobne jest wylosowanie takiej pary kul w losowaniu bez zwracania.



- 4 Z urny zawierającej dziesięć kul ponumerowanych od 1 do 10 losujemy kolejno dwie kule. Czy prawdopodobieństwo zdarzenia „jedna z wylosowanych kul ma numer 6, a druga – mniejszy niż 6” jest większe w losowaniu ze zwracaniem czy bez zwracania? Odpowiedź uzasadnij.

- 5 Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A :

- suma liczb wyrzuconych oczek jest mniejsza niż 2,
- za pierwszym razem wypadła parzysta liczba oczek,
- iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest równy 12,
- wartość bezwzględna różnicy liczb wyrzuconych oczek jest liczbą naturalną.



- 6 Doświadczenie polega na wylosowaniu po jednej kuli z trzech pojemników zawierających różne kule. W jednym pojemniku jest dziesięć kul oznaczonych cyframi: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, w drugim sześć kul oznaczonych literami: a, b, c, d, e, f , a w trzecim są dwie kule: biała i czerwona. Czy prawdopodobieństwo otrzymania trzech kul, wśród których jedna jest z liczbą parzystą, a druga ze spółgłoską, wynosi $\frac{1}{3}$? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$\frac{5 \cdot 4 \cdot 2}{10 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$.
B.	Nie,		2.	$\frac{4 \cdot 4}{10 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$.

- 7 W pewnej klasie ósmej 10 uczniów uczęszcza na zajęcia plastyczne, 12 uczniów na zajęcia sportowe, 4 bierze udział w zajęciach koła teatralnego, a 6 korzysta z zajęć sportowych i plastycznych. Pozostałe 5 osób nie uczestniczy w żadnych zajęciach pozalekcyjnych. Pewnego dnia w szkole był nieobecny jeden uczeń.

- Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że nieobecny uczeń korzysta tylko z zajęć sportowych?
- Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że nieobecny uczeń nie korzysta z zajęć koła teatralnego?





- 8 Ze zbioru liczb czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

- a) jest to liczba o różnych cyfrach oraz że cyfry 4 i 7 stoją obok siebie,
b) jest to liczba o różnych cyfrach oraz że cyfry 1, 2 i 3 stoją obok siebie w kolejności rosnącej?

- 9 W lodówce Zosi jest 9 jaj od kur z wolnego wybiegu i 3 od kur z chowu ściółkowego. Zosia przygotowała śniadanie z dwóch losowo wybranych jaj. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Prawdopodobieństwo tego, że wybrała tylko jaja od kur z wolnego wybiegu, wynosi **A / B**.

A. $\frac{6}{11}$ B. $\frac{9}{12}$

Prawdopodobieństwo tego, że wybrała tylko jaja od kur z chowu ściółkowego, wynosi **C / D**.

C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{22}$



- 10 W torebce było 14 cukierków owocowych i 16 cukierków o smaku toffi. Po dołożeniu kilkunastu cukierków czekoladowych prawdopodobieństwo wybrania z torebki cukierka o smaku toffi wynosi $\frac{8}{21}$. Jaki cukierek wylosujemy z największym prawdopodobieństwem, a jaki – z najmniejszym? Ile cukierków czekoladowych dołożono?

- 11 Wśród 120 osób przeprowadzono ankietę dotyczącą zakupów w pewnym markecie. Okazało się, że 95 osób kupiło artykuły spożywcze, 66 osób – artykuły przemysłowe, a 51 osób kupiło oba rodzaje artykułów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba spośród ankietowanych nie kupiła żadnego z tych artykułów.

- 12 Ze zbioru liczb naturalnych większych od 1 i mniejszych od 9 losujemy dwa razy po jednej liczbie:

- a) bez zwracania, b) ze zwracaniem.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że pierwsza wylosowana liczba jest o 3 mniejsza od drugiej lub o 4 większa.

- 13 W urnie znajdują się kule ponumerowane od 1 do 6. Trzykrotnie losujemy jedną kulę i za każdym razem zwracamy ją do urny. Z wylosowanych numerów tworzymy liczby trzycyfrowe. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) otrzymana liczba trzycyfrowa jest liczbą podzielną przez 3,
b) otrzymana liczba trzycyfrowa jest liczbą podzielną przez 9.

Wyzwanie

Na prostej k zaznaczono 3 punkty, a na prostej l – 4 punkty. Oblicz, ile jest wszystkich trójkątów, których wierzchołkami są trzy spośród zaznaczonych punktów.



Sprawdź się!

- 1 Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
 - a) suma liczb oczek jest równa 9,
 - b) iloczyn liczb oczek jest równy 6,
 - c) różnica liczb oczek jest równa 3 lub -3 ,
 - d) na obu kostkach wypadły parzyste liczby oczek.
- 2 Losujemy dwa razy po jednej cyfrze (bez zwracania) ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i układamy z nich liczbę w kolejności losowania, począwszy od cyfry dziesiątek.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba będzie podzielna przez 3, wynosi

A. $\frac{5}{18}$
B. $\frac{2}{3}$
C. $\frac{1}{6}$
D. $\frac{1}{3}$
- 3 W maszynie losującej są kule z niespodzianką: 8 kul jest żółtych, 7 – niebieskich i 10 – czerwonych. Karolina wylosowała niebieską kulę. Po niej będzie losować Weronika. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że Weronika również wylosuje niebieską kulę.
- 4 Losujemy kolejno, ze zwracaniem, dwa razy po jednej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
 - a) druga z wylosowanych liczb jest mniejsza od pierwszej,
 - b) pierwsza z wylosowanych liczb jest dzielnikiem drugiej wylosowanej liczby.



- 5 Gra polega na dwukrotnym rzucie monetą. Jeśli wypadną same orły albo same reszki, wygrywa gracz X. Jeśli wypadnie raz orzeł i raz reszka, łącznie w jakiej kolejności, to wygrywa gracz Y. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej każdego z graczy? Odpowiedź uzasadnij.



Zadania utrwalające

- 1 Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych, w których obie cyfry są nie większe od 5?
- 2 Rzucamy cztery razy sześcienną kostką do gry i zapisujemy otrzymane liczby oczek w kolejności rzutów. Ile wyników tego doświadczenia sprzyja zdarzeniu „żadna liczba oczek się nie powtarza”?
- 3 Rzucamy cztery razy sześcienną kostką do gry i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby czterocyfrowej. Ile w ten sposób można otrzymać liczb, których suma cyfr jest równa 6?
- 4 Jacek zapisuje dwuznakowe kody. Buduje je z dwóch różnych liter (wybranych spośród 26 liter alfabetu) lub dwóch różnych cyfr, lub litery i cyfry. Ile kodów, w których występuje co najmniej jedna litera, może zapisać, jeśli:
 - a) nie rozróżnia małych i wielkich liter,
 - b) rozróżnia małe i wielkie litery?
- 5 Rzucono czterokrotnie monetą. Zapisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego. Z ilu elementów składa się ten zbiór?
- 6 Sześcienna kostka ma ściany: 2 czerwone, 1 niebieską i 3 białe. Rzucamy kostką dwukrotnie. Narysuj drzewo ilustrujące to doświadczenie losowe. Z ilu elementów składa się zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych?
- 7 W pudełku znajdują się koraliki: biały, czerwony, zielony i niebieski. Losujemy cztery koraliki kolejno bez zwracania. Na ile sposobów możemy je wylosować, jeśli uwzględnimy kolejność losowania?
- 8 Nauczyciel WF musi wybrać jednego spośród trzech uczniów do reprezentacji szkoły w międzyszkolnych zawodach w skoku wzwyż. Podczas treningu Adam zaliczył 75% swoich skoków, Maciek 5 skoków w 8 próbach, a Jacek 7 skoków na 10. Którego zawodnika powinien wybrać nauczyciel?
- 9 Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Określ, czy jest możliwe podane zdarzenie losowe.

A – suma liczb wyrzuconych oczek jest liczbą jednocyfrową.
 B – suma liczb wyrzuconych oczek jest liczbą podzielną przez 13.
 C – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą nieparzystą.
 D – suma liczb wyrzuconych oczek jest liczbą nie mniejszą niż 2.
 E – wartość bezwzględna różnicy liczb wyrzuconych oczek wynosi maksymalnie 5.





- 10** Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie monetą i sześcienną kostką do gry.
- Wyznacz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych opisanego doświadczenia losowego.
 - Zapisz zbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniom:
 A – wypadł orzeł i parzysta liczba oczek,
 B – wypadły 3 oczka lub wypadło 6 oczek,
 C – wypadła reszka i wypadły więcej niż 3 oczka.
- 11** Cyfry: 7, 8, 9 zapisujemy w dowolnej kolejności i w ten sposób tworzymy liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby:
- której cyfrą dziesiątek jest 9,
 - nieparzystej.
- 12** Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A :
- suma liczb wyrzuconych oczek jest równa co najmniej 4,
 - iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest mniejszy od 25,
 - liczba dwucyfrowa, której cyfrą dziesiątek jest liczba oczek otrzymana w pierwszym rzucie, a cyfrą jedności – liczba oczek otrzymana w drugim rzucie, jest nie większa od 66.
- 13** Doświadczenie polega na trzykrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
- suma liczb wyrzuconych oczek jest mniejsza niż 2,
 - suma liczb wyrzuconych oczek jest większa niż 2.
- 14** Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie monetą. Przedstaw je za pomocą drzewa. Zapisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:
- za każdym razem takiego samego wyniku,
 - dwóch orłów i reszki,
 - co najmniej dwóch reszek.
- 15** Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie dwóch orłów w trzech kolejnych rzutach monetą czy trzech orłów w czterech kolejnych rzutach monetą?
- 16** Dane są dwa zbiory liczb $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Wybieramy losowo liczbę z pierwszego zbioru, a potem – liczbę z drugiego. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – suma wylosowanych liczb jest liczbą podzielną przez 5.



Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszytcie.

W zadaniach 1.–3. wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 1 Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, w których cyfry 5 i 8 stoją obok siebie?
A. 24 B. 13 C. 40 D. 30
- 2 Z osiedla do ZOO prowadzą 4 alejki przez park. Na ile sposobów można dojść z osiedla do ZOO i z powrotem tak, aby trasę z ZOO w kierunku osiedla pokonać inną alejką niż z osiedla do ZOO?
A. 18 B. 12 C. 6 D. 8
- 3 W urnie znajdują się 3 kule: biała, czerwona i zielona. Losujemy jedną kulę, zwracamy ją, a następnie losujemy drugą. Ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu „kulę czerwona wylosowaliśmy za pierwszym razem”?
A. 6 B. 3 C. 2 D. 4

W zadaniach 4.–6. dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- 4 W pudełku jest 5 kul: biała, czerwona, zielona, niebieska i czarna. Wylosowano kolejno, bez zwracania, dwie kule. Zdarzeniem niemożliwym dla tego doświadczenia losowego jest zdarzenie
A. kule są różnych kolorów.
B. jedna kula jest zielona, a druga – biała.
C. jedna kula jest niebieska, a druga – czarna.
D. obie kule są tego samego koloru.
- 5 Rzucamy dwukrotnie monetą. Prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła jest równe
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{8}$
- 6 Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania dwukrotnie nieparzystej liczby oczek jest równe
A. $\frac{4}{36}$ B. $\frac{5}{18}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{8}{36}$



- 7 Krawcowa ma materiały w 6 kolorach i szyje z nich spódnice składające się z trzech falban. Czy z tych materiałów może uszyć 18 różnych spódnic z falbanami w różnych kolorach? Wybierz odpowiedź A (Tak) albo B (Nie) i jej uzasadnienie spośród 1 albo 2.

A.	Tak,	ponieważ	1.	$6 \cdot 3 = 18$.
B.	Nie,		2.	$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

- 8 Restauracja w biurowcu oferuje 6 różnych zup, 13 drugich dań i 8 deserów. Ocen prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Zupę i drugie danie można wybrać na 78 sposobów.	P	F
Drugie danie i deser można wybrać na 104 sposoby.	P	F
Zupę i deser można wybrać na 40 sposobów.	P	F
Pani Basia zjada podczas lunchu zupę i drugie danie albo drugie danie i deser, więc ma 185 możliwości wyboru posiłku.	P	F

- 9 Z cyfr: 3, 4, 5, 6 losujemy kolejno dwie cyfry (bez zwracania) i tworzymy z nich liczbę dwucyfrową. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Zdarzeniu „otrzymana liczba jest liczbą podzielną przez 9” sprzyjają A / B zdarzenia elementarne.

A. 3 B. 4

Zdarzeniem niemożliwym jest zdarzenie „otrzymana liczba jest liczbą C / D”.

C. pierwszą D. podzielną przez 24

- 10 Grupa młodzieży uczestniczy w turnieju gier planszowych. W warcaby gra 34 zawodników, w szachy 28, w obie te gry razem gra 26 zawodników, 14 zawodników natomiast nie gra w żadną z tych gier. Ilu zawodników uczestniczy w tym turnieju? Odpowiedź uzasadnij.



- 11 Szyfr w linie do roweru składa się z trzech cyfr. Bartek utworzył szyfr o różnych cyfrach, w którym cyfry 0 i 1 stoją obok siebie. Na ile sposobów Bartek mógł wybrać ten szyfr? Zapisz obliczenia.

- 12 O tym, która z trzech osób A, B, C otrzyma nagrodę, decyduje wynik dwukrotnego rzutu monetą. Jeśli wypadną same orły, to nagrodę otrzyma osoba A. Jeśli wypadną same reszki, to nagrodę otrzyma osoba B. W pozostałych przypadkach nagrodę otrzyma osoba C. Która osoba ma największą szansę na zdobycie nagrody? Odpowiedź uzasadnij.

Jaką masz szansę?

W życiu czasem się zdarza, że pewne decyzje musimy podjąć „w ciemno”. Warto jednak wiedzieć, że zazwyczaj szczęściu można pomagać! Przy podejmowaniu ważnych decyzji warto wykorzystać wiedzę matematyczną.

Szansa trafienia szóstki



Mamy wytypować sześć liczb spośród 49. Który kupon – 1 czy 2 – ma większe szanse trafienia szóstki?

Od razu widać, że pierwszy. Trudniej jest wylosować sześć kolejnych liczb.



Nic bardziej mylnego! Szansa wylosowania dowolnego zestawu sześciu różnych liczb jest **taka sama**. Kupon możemy wypełnić na **49 · 48 · 47 · 46 · 45 · 44** sposobów.
1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6

Jeśli wypełnimy jeden kupon, szansa trafienia szóstki jest prawie jak jeden do 14 milionów.

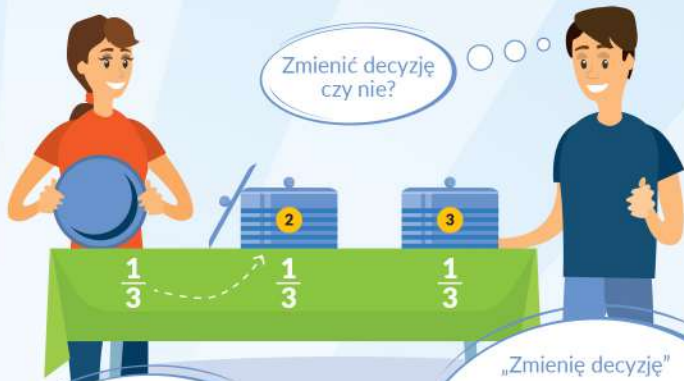


Szukanie kota w worku

Na stole leżą trzy pudełka: dwa są puste, a w jednym jest **niespodzianka**. Janek ma wskazać pudełko z niespodzianką.



Chłopiec wybrał pudełko numer 3. Wówczas prowadząca grę Magda odkryła zawartość pudełka numer 1, które okazało się puste. Magda zapytała Janka, czy chce zmienić swój wybór.



„Nie zmienię decyzji”

Moja szansa
na wygraną wynosi $\frac{1}{3}$,
bo wybrałem jedno z trzech
pudełek.

„Zmienię decyzję”

Szansa, że niespodzianka
była w pudełkach 1 lub 2, wynosiła $\frac{2}{3}$.
Magda otworzyła puste pudełko.
Zatem teraz $\frac{2}{3}$ szans
ma pudełko numer 2.
Szansa na wygraną wynosi $\frac{2}{3}$.



Nie wierzysz? Przeprowadź eksperyment z koleżanką lub kolegą.
Zobacz, ile razy wygrasz, gdy zmienisz decyzję, a ile razy – gdy jej nie zmienisz.

I. Potęgi i pierwiastki

1. Mnożenie i dzielenie potęg o tej samej podstawie / 7

1. 27, 0, 121, $\frac{1}{16}$, $5\frac{1}{16}$, -0,216, 1, 1,69 2. $(-5)^2 > \left(-\frac{1}{2}\right)^2 > -\left(-\frac{1}{3}\right)^3 > \left(-\frac{1}{3}\right)^3 > -\left(\frac{1}{2}\right)^2 > -5^2$
 3. a) 19 b) -47 c) $32\frac{1}{3}$ d) 0,75 4. a) < b) = c) > d) = 5. PFFP 6. a) 3^4 , $(-2)^5$, 1^{16}
 b) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $(-0,5)^3$, 10^6 c) a^3 , c^{18} , $(-y)^{a+b+1}$ 7. a) np. $12^8 = 12^1 \cdot 12^7 = 12^3 \cdot 12^5$,
 $(-8)^6 = (-8)^2 \cdot (-8)^4 = (-8)^3 \cdot (-8)^3$, $\left(\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$,
 $(-a)^6 = (-a)^1 \cdot (-a)^5 = (-a)^4 \cdot (-a)^2$, $b^{x+y+z} = b^x \cdot b^{y+z} = b^{x+y} \cdot b^z$ b) np. $3^{15} = 3^4 \cdot 3^{11} = 3^8 \cdot 3^7$,
 $(1,6)^2 = (1,6)^0 \cdot (1,6)^2 = (1,6)^1 \cdot (1,6)^1$, $(-0,2)^4 = (-0,2)^3 \cdot (-0,2)^1 = (-0,2)^2 \cdot (-0,2)^2$, $x^5 = x^1 \cdot x^4 = x^2 \cdot x^3$,
 $y^{a+b+1} = y^a \cdot y^{b+1} = y^{a+b} \cdot y^1$ 8. a) 10^4 b) 12^7 c) 24^4 d) 36^4 9. a) 3^6 b) 7^{15} 10. Wskazówka:
 $8 \cdot 2^{15} = 2^3 \cdot 2^{15}$ 11. a) $4^2 = 16$, $(-2)^6 = 64$, $(-3)^0 = 1$ b) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$, $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2 = 1\frac{7}{9}$, $(-1,5)^3 = -3,375$
 12. a) x^2 b) y^1 c) z^5 d) $(-a)^3$ e) $(-b)^3$ f) $(-c)^0$ 13. a) 2^{99} b) 3^{14} 14. a) 9 b) 16 c) 5 d) 36
 15. a) x^3 b) y^3 c) a^3 d) d^2 e) a^8b^6 f) e^9z^6 16. a) $2^2 = 4$ b) $3^3 = 27$ 17. B2 18. a) 4
 b) 18 c) 3 d) 4 e) 5 f) 1 19. a) 3^5 b) 5^5 20. Wskazówka: Oblicz sumę cyfr tej liczby.
Wyzwanie. a) 3 b) 0 **Sprawdź się!** 1. $(-20)^6$, $(-1)^{13}$, $(-x)^7$ 2. a) 3^{11} b) 4^{22} 3. B
 4. a) $2^4 = 16$ b) $(-5)^0 = 1$ 5. 3

2. Mnożenie i dzielenie potęg o tym samym wykładniku / 12

1. a) 2500, 6400, 100 000 000, 1 000 000, 4900 b) 16, 1000, -1, 144 c) 32, 125, 1, 32, 0,001 d) 1, 625,
 32, $1\frac{7}{9}$ 2. a) 4^2x^2 b) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^4b^4c^4$ c) $(-0,3)^3a^3b^3c^3$ 3. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $5^2 = 25$, $11^2 = 121$,
 $(-4,8)^0 = 1$ b) $(-4)^3 = -64$, $(-2,4)^2 = 5,76$, $\left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$ 4. a) $\frac{(ab)^6}{c^6}$ b) $\frac{(-2xy)^2}{(3z)^2}$ c) $\frac{0,2^4}{a^4}$ d) $\frac{(1,5c)^2}{d^2}$
 e) $\frac{(-0,1ac)^3}{(mn)^3}$ f) $\frac{(-5x)^2}{(3y)^2}$ 5. a) 144 b) -64 6. a) -28 b) 52 c) 0 d) $-81\frac{1}{8}$ 7. a) $999\frac{7}{8}$ b) 1,001
 c) 37 d) $-\frac{3}{4}$ 8. a) 100 000 b) 50 000 000 c) 320 000 d) 16 000 000 e) 625 000 000
 f) 1 250 000 9. FFFP 10. BC 11. Wskazówka: Wykaż, że wyrażenie jest równe 5^8 .
Wyzwanie. 10^{10} **Sprawdź się!** 1. a) $(-3)^5a^5$ b) $\left(\frac{2}{5}\right)^3x^3z^3$ c) $1,2^7m^7n^7$ 2. $14^2 = 196$,
 $(-5)^3 = -125$, $(-2)^4 = 16$ 3. a) 64 b) $15\frac{5}{8}$ 4. D 5. 500 000 000

3. Potęga potęgi / 16

1. a) 1, 1, -0,000001 b) $-27a^6b^3$, $-a^{10}b^{15}c^{20}$, $\frac{1}{8}a^{15}b^{21}$ 2. a) np. $((-2)^2)^5$ b) np. $((-2^{20})^1)^1$
 c) np. $((3-a)^4)^8$ 3. Wskazówka: Przedstaw liczby w postaci potęg o jednakowej podstawie.
 4. a) < b) = c) > 5. y^3 , $-3\frac{3}{8}$ 6. $243^2 < 27^4 < 9^7 < 9^8 < 3^{18} < 81^5$ 7. C 8. PFFP
 9. a) $3^8 = 9^4 = 81^2$ b) 5^7 c) $2^{12} = 4^6 = 8^4 = 16^3 = 64^2$ 10. Wskazówka: Przedstaw liczbę w postaci
 sumy potęg o podstawie 2. 11. a) $y < z < x$ b) $z < x < y$ **Wyzwanie.** a) 2^{22} b) 9^{99}
Sprawdź się! 1. 1; 0,000001; 0,000064; $-a^5b^{10}c^5d^{10}$ 2. a) np. $(12^2)^3$ b) np. $((0,5)^4)^2$
 c) np. $((x+y)^3)^5$ 3. a) < b) < c) = 4. AC 5. x^3 , $-2\frac{10}{27}$

4. Notacja wykładnicza / 19

1. a) $2,3 \cdot 10^2$ b) $3,6 \cdot 10^3$ c) $1,8 \cdot 10^4$ d) $1,95 \cdot 10^5$ e) $1,2 \cdot 10^5$ f) $1,34 \cdot 10^7$ 2. a) $1,3 \cdot 10^7$
 b) $5,8 \cdot 10^4$ c) $2,4 \cdot 10^3$ d) $1,02 \cdot 10^6$ e) $3 \cdot 10^7$ f) $1,2 \cdot 10^6$ 3. 310 000, 50, 4900, 800 000
 4. a) tak b) nie 5. $1,4 \cdot 10^7^\circ\text{C}$, $5 \cdot 10^3^\circ\text{C}$, $1,3 \cdot 10^3^\circ\text{C}$ 6. 150 000 000 km 7. a) $1,2 \cdot 10^4$ kg
 b) $5,1 \cdot 10^3$ g c) $1,25 \cdot 10^5$ m 8. a) 10^6 mm b) 10^4 cm² c) 10^6 cm³ 9. nie 10. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^8$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^1$
 c) $\left(-\frac{1}{8}\right)^5$ d) $(-2)^6$ e) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ f) $\left(3\frac{1}{3}\right)^4$ 11. a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{9}$ c) 0,00001 d) -1 e) $\frac{64}{125}$ f) $2\frac{113}{256}$

12. $\left(\frac{1}{9}\right)^2 < 3^{-3} < \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 2^{-3} < 3^0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ 13. PFFFF 14. a) $4 \cdot 10^{-1}$ b) $6 \cdot 10^{-3}$ c) $5,8 \cdot 10^{-5}$
 d) $1,83 \cdot 10^{-6}$ 15. a) 10^{-3} l b) 10^{-9} m c) 10^{-12} g d) 10^7 nm e) 10^{12} ps f) 10^5 ml
 16. a) $2,95 \cdot 10^{-1}$ kg b) $1,5 \cdot 10^{-2}$ m c) $1 \cdot 10^{-3}$ km d) $1,35 \cdot 10^{-3}$ hl 17. a) ok. $4 \cdot 10^9$ B
 b) ok. $7 \cdot 10^8$ B c) ok. $5 \cdot 10^{11}$ B 18. a) 10^{57} b) 10^{60} c) 10^{48} d) 10^{18} 19. a) dziesięć milionów
 b) sto miliardów c) dziesięć bilionów d) sto trylionów 20. a) 7 b) 5 c) 1,25 d) -4 e) -6 f) 4,8
 g) 0,0006123 h) 1,986 i) 2 j) -3 21. a) $9 \cdot 10^6$ cm² b) $2,5 \cdot 10^{11}$ mm² c) $1,44 \cdot 10^{12}$ dm²
 22. a) $7 \cdot 10^{15}$ cm³ b) $1,2 \cdot 10^{15}$ dm³ c) $2,4 \cdot 10^5$ m³ d) $9 \cdot 10^3$ mm³ 23. a) $2 \cdot 10^7$ b) $2,4 \cdot 10^6$
 24. a) $85\frac{5}{7}$ razy b) o $1,999994 \cdot 10^{30}$ kg 25. a) ryjówka: $1,2 \cdot 10^{-3}$ kg, żyrafa: $1,4 \cdot 10^3$ kg, anakonda:
 $2 \cdot 10^8$ mg, gekon: $6,4 \cdot 10^4$ mg b) AD 26. a) 1,68 cm b) ok. 15 cm **Wyzwanie.** ok. 10,7 razy
Sprawdź się! 1. a) $1,24 \cdot 10^9$ b) $2,35 \cdot 10^9$ c) $1 \cdot 10^0$ 2. a) $1,7 \cdot 10^4$ g b) $1,5 \cdot 10^4$ mm
 c) $1,8 \cdot 10^5$ dm 3. D 4. $3 \cdot 10^{19}$ cm³ 5. 69 milionów

5. Pierwiastek z iloczynu, iloczyn pierwiastków / 26

1. a) $1, \frac{5}{7}, 1\frac{1}{2}, 0,1$ b) $17, \frac{6}{11}, 2\frac{1}{5}, 1,7$ 2. a) $-1, \frac{1}{3}, 0,2, -0,5$ b) $0, -\frac{1}{2}, 0,4, 1\frac{1}{3}$ 3. a) -9 b) $\frac{133}{1000}$
 c) -9 d) -16 4. PFFFF 5. B3 6. a) $c = 6,3$ b) $d = -4$ lub $d = 4$ c) $e = 3$ 7. a) 40, 36,
 30, 12, 20, -20 b) 2,2; 3,9; 8,5; 1; -0,4 8. a) 10, 10, 3, -4 b) 9, 6, -3 9. C 10. 60, 1200, -40
 11. a) 8 b) 5 c) 3 d) 8 12. a) 70 cm b) 6 cm c) 2000 cm 13. a) 50 cm b) 60 cm c) 40 cm
 14. Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru na iloczyn pierwiastków. 15. a) $1,2 \cdot 10^7$ b) $2 \cdot 10^{11}$
Wyzwanie. a) np. $\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ b) np. $\sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{72}$ c) np. $\sqrt[3]{-\frac{2}{5}}, \sqrt[3]{-400}$ d) np. $\sqrt{\frac{15}{2}}, \sqrt{30}$
Sprawdź się! 1. 6, 6, 1,2, -2 2. -20, -300, 8000 3. a) 4 b) -2 4. A3 5. 6 cm²

6. Wylaczanie czynnika przed pierwiastek, włączanie czynnika pod pierwiastek / 30

1. a) $4\sqrt{2}, 5\sqrt{3}$ b) $10\sqrt{2}, 6\sqrt{3}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{5}\sqrt{2}$ d) $2\sqrt[3]{5}, 2\sqrt[3]{12}$ e) $-2\sqrt[3]{3}, -5\sqrt[3]{2}$ f) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{5}, \frac{1}{4}\sqrt[3]{7}$
 2. a) $12\sqrt{2}$ b) $11\sqrt{2}$ c) $30\sqrt{5}$ d) $12\sqrt[3]{3}$ e) $-6\sqrt[3]{6}$ f) $-5\sqrt[3]{3}$ 3. a) $30\sqrt{30}$ b) $72\sqrt{5}$ c) $270\sqrt{2}$
 d) $20\sqrt[3]{4}$ e) $-30\sqrt[3]{2}$ f) $-32\sqrt[3]{5}$ 4. a) $\sqrt{128}$ b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $\sqrt[3]{189}$ d) $\sqrt[3]{-80}$ e) $\sqrt{0,8}$ f) $\sqrt[3]{0,3}$
 5. a) $-2\sqrt{72} < -\sqrt{32} < 3\sqrt{8} < \sqrt{98} < 3\sqrt{18}$ b) $-2\sqrt[3]{16} < -\sqrt[3]{54} < \sqrt[3]{250} < \sqrt[3]{432} < 4\sqrt[3]{128}$
 6. FFP 7. a) $x = 3\frac{5}{9}$ b) $x = 3$ c) $x = 6$ 8. a) $-3\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{2}$ c) $2\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{2} + 2\sqrt{5} + 4$
 9. a) $11\sqrt{3}$ b) $9\sqrt[3]{3}$ c) $9\sqrt{5}$ d) $10\sqrt[3]{2}$ 10. a) $-5\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt{7}$ d) $-\sqrt[3]{3}$ 11. $2\sqrt[3]{2}$ dm
 12. a) $-143\sqrt{2}$ b) $5\sqrt[3]{10}$ c) $131\sqrt{5}$ 13. a) $5\sqrt{3}$ b) $10\sqrt[3]{2}$ c) $19\sqrt{2}$ d) $2\sqrt[3]{3}$ 14. a) $a = 6$
 b) $a = 12$ 15. a) $51\sqrt{2}$ b) $-40\sqrt{5}$ **Wyzwanie.** a) tak b) nie c) tak d) nie
Sprawdź się! 1. a) $2\sqrt{10}, 9\sqrt{10}, \frac{1}{7}\sqrt{5}$ b) $3\sqrt[3]{9}, -4\sqrt[3]{2}, \frac{1}{5}\sqrt[3]{11}$ 2. C 3. a) $\sqrt{2\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[3]{135}$
 c) $\sqrt[3]{0,8}$ 4. $24\sqrt{2}$ cm 5. a) $11\sqrt{2}$ b) $2\sqrt[3]{3}$

7. Pierwiastek z ilorazu, iloraz pierwiastków / 34

1. a) $2\frac{1}{4}$ b) $1\frac{2}{3}$ c) 0,9 2. a) $3\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $8\frac{1}{2}$ d) $7\frac{21}{50}$ 3. a) 3 b) $\frac{1}{4}$ c) 3 4. a) = b) < c) <
 d) > 5. BD 6. BANACH 7. 10 8. a) $x = 2$ b) $x = 2$ c) $x = 5$ 9. Wskazówka: Wylącz
 czynnik przed pierwiastek. 10. a) 15 b) $10\sqrt{2}$ c) 10 d) 18 11. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt[3]{9}$
 d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 12. a) $3\sqrt{2} - \sqrt{3}$ b) $\sqrt{2} + 1$ c) $\frac{2\sqrt[3]{50} + 3\sqrt[3]{100}}{10}$ 13. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $2\sqrt[3]{3}$ 14. Wskazówka:
 Usuń niewymierność z mianownika odjemnej. **Wyzwanie.** a) 1 i 5 b) 5 i 3 c) 3 i 2
Sprawdź się! 1. a) 0,1 b) $-\frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{8}$ 2. a) 0,3 b) 4 c) 2 3. o $3\sqrt{3}$ 4. PFPF 5. a) $\frac{\sqrt{15}}{5}$
 b) $2\sqrt{5}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ d) $4\sqrt[3]{4}$

8. Szacowanie wartości wyrażeń zawierających pierwiastki / 38

1. a) 2 i 3 b) 23 i 24 c) 4 i 5 d) 7 i 8 2. a) 4 b) 7 c) 8 d) 11 3. a) 17 b) 3 c) 5 d) 8
 4. a) np. 17, 18, 19 b) np. 105, 107, 118 c) np. 175, 177, 190 d) np. 909, 950, 960 5. a) < b) > c) >
 6. a) $\sqrt{3} < \sqrt{5} < \sqrt{7} < 2\sqrt{7} < 4\sqrt{7}$ b) $-10\sqrt{11} < -3\sqrt{11} < -\sqrt{11} < 2\sqrt{3} < 5\sqrt{3}$ 7. a) najmniejsza:
 $3\sqrt{7}$, największa: $4\sqrt{5}$ b) najmniejsza: $2\sqrt[3]{12}$, największa: $6\sqrt[3]{2}$ 8. B 9. kolumnami: FPPFFP

10. a) 3 i 4 b) 11 i 12 c) 5 i 6 d) 6 i 7 11. a) E b) C c) F d) B e) F f) D 12. a) 12 b) 16
c) 6 d) 3 13. 6 cm 14. a) < b) > Wyzwanie. a) < b) > c) > d) < Sprawdź się! 1. a) 3 i 4
b) 8 i 9 c) 11 i 12 d) 2 i 3 2. a) > b) > 3. A2 4. 0 i 1 5. a) > b) >

Zadania utrwalające / 42

1. a) < b) = c) > d) > 2. a) $2\frac{1}{4}$ b) -64 c) 1 d) -0,000000000064 3. a) $1\frac{1}{3}$ b) 1,1 c) 5
d) $-\frac{4}{5}$ 4. a) -32 b) -1 c) -0,0000000001 d) 2 e) $\frac{2}{3}$ f) 1 5. a) 9 b) 4 c) 19 d) 0 e) 4 f) 3
7. 20 8. a) $\frac{1}{64}$ b) $-\frac{1}{27}$ 9. a) -1 b) -5 10. ok. 28 razy 11. a) $3 \cdot 10^{-1}$ kg b) $5 \cdot 10^{-6}$ kg
12. a) ok. 395 b) ponad 210 milionów 13. $1,7009 \cdot 10^{-27}$ kg
14. $-4^2 < -\sqrt{1,21} < -\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(-\frac{1}{3}\right)^2 < \left(-\frac{1}{4}\right)^0 < \sqrt[3]{27} < (-4)^2$ 15. a) 6 b) 13 c) $5\frac{2}{3}$ d) -50
16. a) $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$ b) $39\sqrt[3]{2}$ 17. a) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ c) $\frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$ d) $\frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{10}}{10}$ 18. $1 < \sqrt[3]{3} < 2$,
 $4 < \sqrt{17} < 5$, $-1 < -\sqrt{0,002} < 0$, $0 < \sqrt[3]{\frac{1}{3}} < 1$, $-2 < -\sqrt{1,2} < -1$, $3 < \sqrt[3]{62} < 4$ 19. a) $5\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{5}$
c) 6 20. np. $7^2 + 7^0$, $7^3 : 7^1 + 7^0$, nieskończenie wiele takich zapisów 21. Wskazówka: Wyłącz wspólny
czynnik przed nawias. 22. Wskazówka: $6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{100} = 6(1 + 6) + 6^3(1 + 6) + \dots + 6^{99}(1 + 6)$

Zadania sprawdzające / 44

1. C 2. A 3. C 4. D 5. D 6. B 7. C 8. C 9. C 10. A 11. C 12. B
13. kolumnami: PFPF 14. A3 15. BD 16. o 40 cm 17. 5 razy 18. Wskazówka: Skorzystaj
z cech podzielności przez 3 i przez 5.

II. Własności figur płaskich

1. Przekątna kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego / 48

1. FFPF 2. w kwadracie: 45° , 45° , 90° , w trójkącie równobocznym: 30° , 60° , 90° 3. BC 4. C
5. B1 6. E - I, A - II, B - III, D - IV 7. a) $0,75\sqrt{2}$ b) $\frac{3\sqrt{2}}{7}$ c) 2 d) $2\sqrt{6}$ e) $3\sqrt{10}$
8. a) $2,5\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{9}$ c) 4 d) $3\sqrt{6}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 9. a) 4 b) $\frac{6\sqrt{2}}{7}$ c) $1,5\sqrt{2}$ d) $4\sqrt{6}$ e) $6\sqrt{10}$
10. a) $8 + 8\sqrt{2}$ b) $0,15 + 0,15\sqrt{2}$ c) $4 + 2\sqrt{2}$ d) $6\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$ e) $x\sqrt{3} + x\sqrt{6}$ 11. nie 12. B - I,
A - II, C - III, E - IV 13. a) $0,28\sqrt{3}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ c) $2\sqrt{6}$ d) 3 e) $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ 14. a) 6 b) $\frac{8\sqrt{3}}{7}$
c) $1,12\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{6}$ e) $6\sqrt{15}$ 15. a) $(12 + 4\sqrt{3})$ cm b) $(0,54 + 0,18\sqrt{3})$ dm c) $(3\sqrt{2} + \sqrt{6})$ cm
d) $(6\sqrt{6} + 6\sqrt{2})$ dm e) $\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}x$ m 16. PF 17. Czworokąt ACED ma obwód większy o $(\sqrt{2} - 1)a$.
18. $\frac{k}{2}$ i $\frac{k\sqrt{3}}{2}$ lub $\frac{k\sqrt{3}}{3}$ i $\frac{2k\sqrt{3}}{3}$, lub $k\sqrt{3}$ i $2k$ Wyzwanie. $9(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm
Sprawdź się! 1. a) $50\sqrt{2}$ cm b) 0,4 cm 2. $2x + x\sqrt{2}$ 3. Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru na
wysokość trójkąta równobocznego. 4. BC 5. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm, $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm, 5 cm, 45° , 45° , 90°

2. Pola wielokątów foremnych / 55

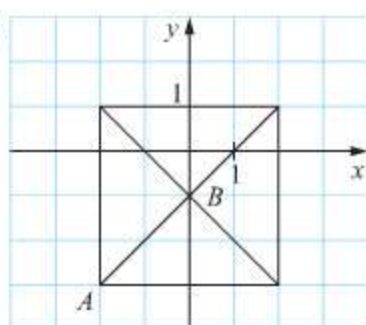
1. B - I, E - II, A - III, C - IV 2. a) $0,09\sqrt{3}$ b) $\frac{16\sqrt{3}}{25}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ e) $20\sqrt{3}$ 3. a) 4 b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 4. BC 5. a) $36\sqrt{3}$ b) $12\sqrt{3}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 6. a) $2,16\sqrt{3}$ b) $\frac{363\sqrt{3}}{50}$ c) $27\sqrt{3}$ d) $18\sqrt{3}$
e) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ 7. a) 9 b) 18 c) 3 d) 2,88 e) $\frac{d^2}{2}$ 8. Wskazówka: Skorzystaj z odpowiedniego wzoru
na pole kwadratu. 9. FPF 10. trójkąt: $16\sqrt{3}$ cm, kwadrat: 36 cm, sześciokąt: $24\sqrt{3}$ cm, największe
pole: sześciokąt, najmniejsze: trójkąt 11. pole trójkąta, 2 razy 12. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm², 2 cm² 13. $1\frac{9}{16}$ razy
14. Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru na pole trójkąta równobocznego. 15. $\sqrt{3}$ razy 16. pięciokąt,
 $\frac{4\sqrt{3} - 3}{3}$ razy 17. $72\sqrt{3}$ cm² Wyzwanie. 3 : 4 Sprawdź się! 1. $324\sqrt{3}$ cm² 3. B2
4. $(2 + \sqrt{2})$ cm 5. $8(1 + \sqrt{3})$ cm²

3. Współliniowość punktów kratowych / 59

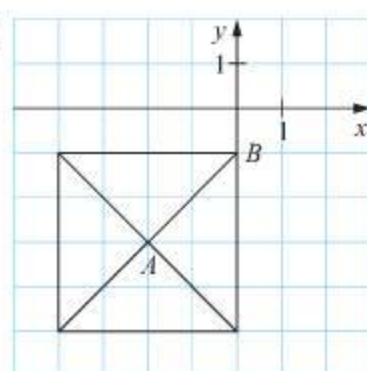
1. a) $A = (-5, 5)$, $B = (3, 5)$, $C = (2, 3)$, $D = (4, 2)$, $E = (1, 0)$, $F = (-2, 0)$, $G = (-4, 2)$, $H = (-2, 3)$
 b) $A = (4, 0)$, $B = (3, -2)$, $C = (2, -4)$, $D = (0, -3)$, $E = (-1, -1)$, $F = (-3, -1)$, $G = (-4, -3)$

3. $S = \left(2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$

5. a)



b)



6. np. $(2, 8)$, $(4, 11)$, $(6, 14)$ – leżą na półprostej BA ,
 $(-4, -1)$, $(-6, -4)$ – leżą na półprostej AB

7. nie 8. Wskazówka: Oblicz współrzędne środka odcinka. 9. B Wyzwanie. a) tak

b) tak Sprawdź się! 1. PF 2. Wskazówka: Oblicz współrzędne środka odcinka. 4. 29

5. np. $L = (1, 1)$, $M = (7, 3)$

Zadania utrwalające / 64

1. kwadrat, pięciokąt foremny, sześciokąt foremny, kwadrat, trójkąt równoboczny i sześciokąt foremny
 2. a) $24\sqrt{2}$ cm b) 18 cm² 3. $14(1 + \sqrt{3})$ cm 4. 60° , 120° , 60° , 120° 5. ok. $4,43$ m²
 6. Obwody są równe, większe pole ma kwadrat. 7. $P = 0,75a^2$, $L = 2(1 + \sqrt{2})a$ 8. a) tak b) nie
 c) tak d) nie 9. tak 10. Nie, posadzono 12. 11. Druga figura ma większe pole i większy obwód.
 12. a) Wojtek i Bartek b) Wyniki, które pozwolą na przejście do kolejnego etapu: np. 1, 3, 6 lub 2, 2, 2, 4, lub 5. Wyniki, które nie pozwolą na przejście do kolejnego etapu: np. 1, 2, 3, 3 lub 2, 2, 2, 2, lub 4, 5, 2.

Zadania sprawdzające / 66

1. A 2. D 3. C 4. D 5. A 6. FP 7. BC 8. A1 9. o $\frac{27(3 - \sqrt{3})}{2}$ cm²
 10. sześciokąt: $72\sqrt{3}$ cm², trójkąt: $48\sqrt{3}$ cm² 11. $(7 - 3\sqrt{3})$ cm² 12. tak

III. Rachunek algebraiczny i równania**1. Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian / 70**

1. a) $8a - 3b - 8$ b) $2x^2 + 3y^3 - 5$ c) $-\frac{5}{8}x^2 + 1,1x^2y - 9,5$ 2. $3a + 5$, $12a$ a) 11, 24 b) $8\frac{3}{4}$, 15
 c) 22,4; 69,6 3. a) $3x - 3y$ b) $4a + 4b$ c) $-4x + 2y$ d) $15a - 10 - 5b$ e) $-8x + 4y - 4$
 f) $-9 + 6xy - 15y$ 4. a) $2xy - 2x^2$ b) $-4y^2 + 8xy$ c) $6x^2y + 9x^2$ d) $12m + 15mp - 6mq$
 e) $-5x^2 + 10xy - 10x$ f) $20a^2 - 20a^2b + 12ab$ 5. PP 6. a) $13x$ b) $-x + 26y$ c) $xy - yz$
 d) $-x + 6y - 3xy$ 7. Wskazówka: Wykonaj działania. 8. a) $18a^3b$ b) $-40a^3 - 111ab$ 9. AC
 10. Wskazówka: Wykonaj działania i oblicz wartość wyrażenia. 11. B 12. $(5000a^2 + 2500a)$ cm²
 13. $(5x + 42 + ax + 10a - an)$ zł 14. B2 Wyzwanie. Łukasz mnoży x przez 10.
 Sprawdź się! 1. $7x^2 - 21x - 14$ 2. B 3. $14x - 6x^2, -20$ 4. $3xy$ 5. $(100x^2 - 300x)$ cm²

2. Mnożenie sum algebraicznych / 74

1. a) 21 b) 16 2. a) $a^2 - 1$ b) $x^2 - 16x + 15$ c) $2b^2 - 18c^2$ d) $8\sqrt{7} + 23$ 3. Wskazówka: Wykonaj działania. 4. C 5. a) $36x^2 + 15x + 1$, 175 b) $4,5x^2 + 12,5x + 3$, 46 6. o $(2a + 2b + 4)$ cm²
 b) o $(2x + 2)$ cm² 7. B1 8. AD 9. $P = 144$ cm², pole ramki nie zależy od wymiarów prostokąta.
 10. a) $y^2 + 2y + 1$ b) $x^4 + 2x^2 + 1$ c) $a^2 + 2ab + b^2$ d) $4x^2 - 12x + 9$ e) 18 f) $a^2 - 2ab + b^2$ 11. PF
 12. a) $x^2 - 1$ b) $1 - 9a^2b^2$ c) -1 d) 1 e) 4 f) $a^2 - b^2$ 13. III 14. nie 15. $a = 8$, $b = 12$
 Wyzwanie. Tak. Wskazówka: Przedstaw dane wyrażenie w postaci iloczynu. Sprawdź się! 1. B
 2. tak 3. $5a^3 - 5a^2b + 5ab^2 - 5b^3$ 4. Wskazówka: Wykonaj działania. 5. o $(5x + 5y - 25)$ cm²

3. Rozwiązywanie równań / 78

1. III. $y = -6$ IV. $x = 3$ V. $a = \frac{2}{9}$ 2. a), d) tak b), c) nie 3. a), c) nie b) tak
 4. a) nieskończenie wiele b) 0 c) 1 d) nieskończenie wiele 5. B 6. B 7. a) $x = -12$ b) $x = 1$
 c) $x = 1$ d) $x = -4$ 8. a) nieskończenie wiele b) 1 c) 1 d) 0 9. a), c) tak b), d) nie
 10. Wskazówka: Podstaw podaną liczbę do obu stron równania lub rozwiąż równanie. 11. PFP
 12. a) $x = 2$ b) $x = 1$ c) $x = 0$, $x = 2$ d) $x = 0$, $x = 3$ 13. a) $x = -2$, $x = 0$ b) $x = -1$ c) $x = -1$
 d) $x = -2$ 14. a) $x = 2\frac{1}{2}$ b) $x = \frac{1}{4}$ c) $x = 2\frac{1}{4}$ d) $x = 4$ 15. a) $x = 20$ b) $x = -7\frac{1}{2}$ c) $x = -4$
 d) $x = -\frac{1}{7}$ 16. BC 17. a) $a = -18$ b) $a = 10$ c) $a = 19$ d) $a = 4$ 18. a) $x = -\frac{1}{2}$ b) $x = -2$
 19. a) $x = \frac{1}{3}$ b) $x = \frac{2}{5}$ c) $x = -4$ 20. a) $x = \frac{5}{4}$, nie b) $x = 2$, tak c) $x = -21$, tak d) $x = \frac{2}{3}$, nie

21. a) $x = 5$ b) $x = 2\frac{1}{3}$ 22. A2 **Wyzwanie.** $a = 7, b = 13, c = -4, d = -5, e = 5$

Sprawdź się! 1. $x = -2$ 2. BD 3. $x = 0, x = 2$ 4. tak, $x = -12$ 5. $x = \frac{3}{4}$

4. Równania – zadania tekstowe / 84

1. 7200 zł 2. PP 3. 42 4. a) -6 b) 7,5 5. 17 6. D 7. 27, 29, 31 8. za 22 lata
9. Mateusz: 20 lat, Weronika: 10 lat 10. Basia: 31 lat, Kasia: 37 lat 11. mama: 61 lat, córka: 31 lat
12. Ewa: 61 lat, Ewelina: 34 lata 13. pierwsza: 63, druga: 88, trzecia: 76 14. 5000 zł 15. 120 000 zł
16. 98 17. 32 lata 18. AD 19. 136 kg miedzi, 16 kg cyny, 8 kg ołowiu 20. a) o 60%
b) o 3 p.proc. 21. a) 20% b) o 300% 22. a) o 40 p.proc. b) o 100% 23. 8%, 6% 24. 25 km
25. 8 km 26. w 1 godzinę i 10 minut 27. 45 km 28. 80 km 29. 23 łyżki, w 5 szklankach
30. 17 łyżek, w 8 szklankach 31. 36, 18 32. 80 l, 40 l 33. 10 34. 4 35. 12 cm, 1 cm²
36. $2\frac{1}{3}$ l 37. 200 ml śmietany 12%, 300 ml śmietany 22% 38. 1,5 l octu 3%, 0,5 l octu 5%
39. 0,85 kg soli, 7,65 kg wody 40. Olek: 24 lata, Bolek: 10 lat **Wyzwanie.** 345. *Wskazówka:* Wykaż,
że suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5. **Sprawdź się!** 1. 13, 16, 19 2. 3;
6,5; 6; 4,5 3. 54 cm² 4. 3 5. B1

Zadania utrwalające / 92

1. $-x^2 + 5y^2, 21$ 2. $(91 - 12a + 3b)$ zł 3. $6n + 3$ 4. I – D, II – C, III – B, IV – A 5. a) -4 b) -6
c) 14 6. $(300xy + 600y^2)$ cm² 7. obwód o 12, pole o $6x + 9$ 8. o 36% 9. a) $x = 1$ b) $x = 3$
c) $x = 0, x = 2$ d) $x = 1$ 10. a) $x = 1$ b) $x = 1$ c) równanie tożsamościowe d) brak rozwiązań
e) $x = 12$ f) $x = -5$ g) $x = 1$ h) $x = -24$ 11. co najmniej 8 ha 12. 75 g, 60 g 13. 8-procentowy
14. 30 15. 9 kg, 3 kg 16. 10 zł, o 40% 17. $5797 = 5270 + 527$ 18. 18 lat

Zadania sprawdzające / 94

1. D 2. B 3. A 4. D 5. B 6. B 7. A 8. B 9. C 10. A3 11. PFP 12. BD
13. 11 cm 14. o 25% 15. Zosia: 5 lat, Ola: 13 lat, łącznie za 5 lat: 28 lat 16. *Wskazówka:*
Wykonaj działania.

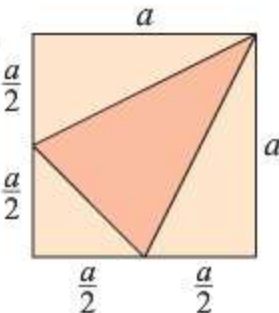
IV. Bryły

1. Graniastosłupy – pole powierzchni i objętość / 98

1. a) II, V, VI b) I, III, VIII c) IV, VII 2. FP 3. a) 4 b) 10 c) 18 4. $n(n - 3)$
5. a) przekątne ścian bocznych: AC', BC' b) przekątne podstaw: $BD, A'D'$, przekątne ścian bocznych:
 CD', EA' , przekątna graniastosłupa: BD' 6. a) $2\sqrt{3}$ cm b) $4,8\sqrt{3}$ cm c) $3\sqrt{6}$ cm 7. a) $5\sqrt{2}$ cm
b) $2\sqrt{15}$ cm 8. a) 10 b) 13 c) $4\sqrt{13}$ 9. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 10. a) $500\sqrt{3}$ cm²
b) $400(2 + \sqrt{3})$ cm² c) $1800\sqrt{3}$ cm² 11. $162(1 + 2\sqrt{3})$ cm² 12. C 13. $936\sqrt{3}$ cm²
14. 216 cm² 15. 12,3 kg 16. A2 17. a) III b) 3,86 l 18. 22,68 m³ 19. o 10 cm
20. a) 143 m² b) 430 000 l 21. 18,2 m³ 22. $\frac{1}{50}x(x + 1)$ dm³ 23. Nie, drugi ma mniejszą
objętość. 24. 60 **Wyzwanie.** $2 \times 6 \times 8$ **Sprawdź się!** 1. przekątna podstawy: BD , przekątne
ścian bocznych: AD', CB' , przekątna graniastosłupa: BD' 2. a) $2,5\sqrt{3}$ dm b) 60 dm 3. B
4. 48 cm³ 5. 40 cm

2. Ostrosłupy / 106

1. a) dowolny wielokąt b) są trójkątami c) jest równa liczbie krawędzi podstawy d) 2 razy więcej niż
krawędzi podstawy 2. a) pięciokątny b) sześciokątny c) trójkątny 3. a) trójkąt równoboczny
b) kwadrat c) sześciokąt foremny 4. I. trójkątami II. dowolny III. trójkątem IV. sześciokąt
foremny, trójkątami równoramiennymi V. trójkątami równoramiennymi 5. 24 cm 6. C 7. FFPP
8. a) tak b) tak c) nie 9. a) np. ostrosłup prawidłowy b) dowolny ostrosłup c) Na przykład
ostrosłup trójkątny, w którym spodek wysokości jest równo oddalony od dwóch wierzchołków podstawy
i leży w innej odległości od trzeciego. 10. I. prawidłowy czworokątny II. prawidłowy trójkątny
III. prawidłowy sześciokątny IV, V. czworokątny 14. a) 35 b) $23 + 4\sqrt{2} + \sqrt{41}$

15.  **Wyzwanie.** nie **Sprawdź się!** 1. a) siedmiokątny b) pięciokątny

c) sześciokątny 3. C 4. 3,2 cm 5. np. czworokąt i sześciokąt lub
sześciokąt i dziewięciokąt

3. Pole powierzchni ostrosłupa / 111

1. 64 cm^2 2. a) $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$ b) $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ c) $a^2\sqrt{3} \text{ cm}^2$ 4. D 5. $120 + 16\sqrt{3} + 4\sqrt{273}$
 6. $P_p = 150\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $P_b = 360 \text{ cm}^2$ 7. 420 cm^2 8. FFP 9. $(1 + 2\sqrt{2})a^2$ 10. a) 480 cm^2
 b) $8(6 + 2\sqrt{3} + \sqrt{21}) \text{ cm}^2$ **Wyzwanie.** Wskazówka: Wyznacz długość krawędzi czworoscianu.
Sprawdź się! 1. 105 cm^2 2. drugi ostrosłup 3. BD 4. $P_c = 3,4x^2$ 5. Wskazówka: Oblicz pole podstawy i pole powierzchni bocznej.

4. Objętość ostrosłupa / 115

1. 640 cm^3 2. 12 cm 3. $43,2 \text{ cm}^3$ 4. 6 cm 5. Bryły mają równą objętość. 6. 384 cm^3
 7. 400 cm^3 8. BC 9. $\frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$ 10. $\frac{2000\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$ 11. B 12. 192 13. PF
 14. a) $60\sqrt{3} \text{ cm}^3$ b) $40\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 15. $9\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 16. a) 7 cm b) 3 cm c) $5,25 \text{ cm}$
Wyzwanie. $20\frac{5}{6} \text{ cm}^3$ **Sprawdź się!** 1. $30\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 2. $\frac{500\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$ 3. 100 cm^3 4. B2 5. $18\sqrt{3}$

Zadania utrwalające / 120

2. c) 12 cm^2 d) 21 cm^2 3. 3 cm 4. sześcián 5. $P_c = 32(1 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $V = 64\sqrt{3} \text{ cm}^3$
 6. $V = \frac{256\sqrt{7}}{3} \text{ cm}^3$, $P_c = 64(1 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$ 7. $\left(\frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3x^2}{2} + 15x\right) \text{ cm}^2$ 8. $4(\sqrt{3} + 3) \text{ cm}^2$
 9. zmniejszy się dwukrotnie 10. $23,96 \text{ m}^2$ 11. $P_b = 72(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $V = 36(3 + \sqrt{3}) \text{ cm}^3$
 12. $2,81 \text{ kg}$ 13. 4 cm 14. o $6\frac{2}{3}\%$ 15. Wskazówka: Za podstawę ostrosłupa przyjmij najmniejszą jego ścianę i zauważ, że wtedy jedna z jego krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy. 16. $\frac{1}{3}$

Zadania sprawdzające / 122

1. C 2. C 3. D 4. B 5. C 6. D 7. C 8. FPPF 9. BD 10. B3 11. 17 cm
 12. 21 sześciánów, 8 czworoscianów

V. Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa**1. Proste metody zliczania obiektów / 126**

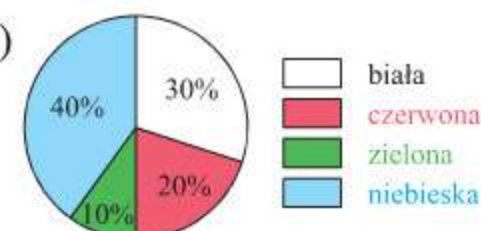
1. a) $A = \{2, 3, 5, 7\}$, 4 elementy b) $A = \{-15, 15\}$, 2 elementy 2. C 3. $M = \{14, 21, \dots, 98\}$
 4. FPPF 5. a) 17 b) 50 c) 102 6. a) 0, 1, 2, 3, 4, 5 b) {gruszka, pomarańcza}, {gruszka, jabłko}, {gruszka, kiwi}, {pomarańcza, jabłko}, {pomarańcza, kiwi}, {jabłko, kiwi} 7. a) {0, 1, 2, ..., 119}
 b) 120 c) A^3 8. {51, 52, 53, ..., 150} 9. a) 9 b) 222 10. a) 65 b) 17 c) 649
Wyzwanie. 18 par: (10, 82), (11, 83), (12, 84), ..., (27, 99) **Sprawdź się!** 1. D 2. 25 3. 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 4. {254, 255, 256, ..., 512} 5. 699

2. Doświadczenia losowe / 129

1. 6 3.

Kolor	pik	kier	karo	trefl
Częstość	$\frac{7}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{3}{13}$	0

4. FPPF 6. b)



- Wyzwanie.** Wyniki, których jest więcej, można uzyskać na więcej sposobów. **Sprawdź się!** 1. C 2. 9
 4. a) 21 b) 14%

3. Zdarzenia losowe / 133

1. a) {2, 4, 6} b) {X, Y} 2. a) 1, 3, 5 b) 1, 2, 3, 4 c) 3, 4, 5, 6 d) 1, 2, 4, 6 3. a), b), c) tak, zdarzenia pewne: a), c) 4. B2 5. FFPP 6. Wskazówka: Liczba osób jest większa niż liczba miesięcy. 7. 12 8. 14 9. 15 **Wyzwanie.** I. Liczby podzielne przez 6, np. {18, 24, 30, 36, 42, 48}. II. Liczby o sumie cyfr większej od 9, np. {38, 39, 46, 47, 48, 49}. III. Liczby pierwsze dwucyfrowe, np. {11, 13, 17, 19, 23, 29}. **Sprawdź się!** 1. {A, B, C, D} 2. a) 1, 2, 3, 4, 5, 6 b) Żadne zdarzenie elementarne nie sprzyja temu zdarzeniu. 3. a) {A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L} b) {A, E, I} 4. 13 5. AC

4. Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego / 138

1. a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{10}$ d) 0 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{2}$ g) 1 2. FP 3. zielony – D, czerwony – B, żółty – E, niebieski – A 4. a) $\frac{26}{27}$ b) $\frac{14}{27}$ c) $\frac{1}{27}$ 5. a) $\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}$ 6. liczba ścianek: a) 3 czerwone, 3 żółte b) 2 czerwone, 4 żółte c) 1 czerwona, 1 niebieska, 4 żółte d) 2 czerwone, 1 żółta, 1 niebieska, 2 białe 7. o $\frac{1}{9}$ 8. a) 5 razy b) przy trzech c) przy dwóch 9. $\frac{1}{100}$ **Wyzwanie.** 99 989
Sprawdź się! 1. $\frac{4}{13}$ 2. $\frac{5}{6}$ 3. wylosowanie liczby podzielnej przez 6 4. A1 5. liczba ścianek: a) 1 czerwona, 5 żółtych b) 2 czerwone, 2 niebieskie, 2 żółte

Zadania utrwalające / 143

1. a) $\{-1, -2, -3, \dots\}$ b) $\{-3, -2, \dots, 97, 98\}$ c) $\{-15, -14, -13, \dots\}$ 2. nie 3. 12 liczb: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43 4. a) 27 b) 34 c) 11 5. I. 69 II. 50 III. 40 IV. 11
 6. wszystkie prawdopodobieństwa są równe $\frac{1}{6}$ 7. a) $\frac{5}{12}$ b) 0 c) $\frac{7}{12}$ d) 1 8. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{13}$ c) $\frac{1}{2}$
 9. 8 10. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{6}$ f) 0 11. po usunięciu cukierka czekoladowego 12. $\frac{1}{3}$
 13. 15 par liczb: (10, 40), (11, 44), (12, 48), ..., (24, 96) 14. 24 15. 4 białe i 6 czarnych 16. $\frac{2}{11}$

Zadania sprawdzające / 145

1. C 2. C 3. C 4. A 5. C 6. C 7. A2 8. FP 9. BC 10. Na przykład zdarzenie pewne – wypadła liczba podzielna przez 5, zdarzenie niemożliwe – wypadła liczba podzielna przez 6.
 11. $\frac{2}{5}$ 12. 12

POWTÓRZENIE**I. Liczby i działania****1. Liczby naturalne / 153**

1. np. $17 = 2 + 3 + 5 + 7$, $23 = 2 + 3 + 5 + 13 = 3 + 7 + 13$, $31 = 2 + 3 + 7 + 19 = 3 + 11 + 17 = 2 + 29$, $43 = 2 + 3 + 7 + 31 = 3 + 11 + 29 = 2 + 41$ 3. 5 1, 7 1, 11 1, 13 1, 17 1, 19 1 4. np. $29 = 2^2 + 5^2$, $47 = 2^2 + 3^2 + 3^2 + 5^2$, $61 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 7^2$, $83 = 3^2 + 5^2 + 7^2$, $97 = 2^2 + 3^2 + 3^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2$
 5. Asia: 11 lat, piesek: 2 lata 6. a) $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $\text{NWD}(24, 60) = 12$ b) $25 = 5 \cdot 5$, $80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, $\text{NWD}(25, 80) = 5$ c) $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $\text{NWD}(16, 72) = 8$
 7. a) $\text{NWD}(247, 195) = 13$ b) $\text{NWD}(476, 391) = 17$ c) $\text{NWD}(459, 527) = 17$ 8. a) $15 : 6 = \frac{2 \cdot 6 + 3}{6}$
 b) $72 : 5 = \frac{14 \cdot 5 + 2}{5}$ c) $52 : 3 = \frac{17 \cdot 3 + 1}{3}$ d) $43 : 8 = \frac{5 \cdot 8 + 3}{8}$ 9. a) iloraz 3, reszta 8 b) iloraz 7, reszta 10 c) iloraz 23, reszta 4 10. największa reszta z dzielenia przez 11 11. 11 12. a) 90 b) 9
 13. a) 0, 2, 4, 6 lub 8 b) 0, 3, 6 lub 9 c) 0 lub 5 d) 3 e) 0 14. a) 2 lub 8 b) 8 c) 5 15. a) 0, 2, 4, 6 lub 8 b) 1, 4 lub 7 c) 0, 4 lub 8 d) 0 lub 5 e) 7 f) 0 g) 0 16. Należy wpisać jedną z par cyfr: (0, 0), (9, 0), (7, 2), (5, 4), (3, 6), (1, 8). 17. a) MCDX b) MDCCXCIV c) MCMXXXIX d) MCMLXXXIX 18. XXXVIII – 38, XCIV – 94, MMCXX – 2120, MXI – 1011, XLIX – 49
 19. PPPF 21. > 22. a) do Florencji b) o 199 km c) najdalej Turyn, najbliżej Neapol

Zadania sprawdzające / 155

1. B 2. B 3. B 4. A 5. C 6. A 7. D 8. B3 9. PFPP 10. C 11. D 12. BD
 13. PFPP 14. a) 1050 b) 79 c) 225 d) 796 15. 2 i 12 lub 4 i 6 16. nie 17. dowolną różną od 7

2. Działania w zbiorze liczb wymiernych / 157

1. minimalna 0,979 kg, maksymalna 1,021 kg 2. 58,30 zł 3. tak 4. $\frac{1}{3}$ 5. a) 358,5 kJ (84,5 kcal)
 b) $\frac{827}{1000}$ 6. 401, 625 7. kolejno rzędami: $\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}$ 8. a) -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3
 b) -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0 9. a) 
 10. a) $x > 2$ b) $x \leq -3$ c) $x \geq -1,5$ d) $x < 2,5$ 11. -3°C 12. a) 26 b) $1\frac{4}{9}$ c) 3,25 13. 2 razy

14. $33\frac{1}{8}$ 15. a) 7 b) 0,2 c) -13 d) 0,25 e) -4 f) 35 g) 12 h) 4,5 i) 26 j) 3 16. a), c), d),
 e) dodatni, b), f) ujemny 17. a) -3 b) -4 c) -11 d) -4 18. a) $\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) : \left(2\frac{2}{3} - 1,75\right) = 1\frac{3}{11}$
 b) $\left(1,5 - 3 \cdot 1\frac{1}{3}\right) : 2,5 = -1$ c) $(1,2 - 2,5) - (2,3 - 1,25) = -2,35$ d) $\left(2\frac{1}{3} + 1,75\right) : \left(1,5 - 2\frac{2}{3}\right) = -3,5$
 19. a) ok. 1,2 razy b) ok. 10,5 cm 20. a) Wskazówka: Oblicz wartość wyrażenia. b) Wskazówka:
 Wyznacz ostatnie cyfry składników danej sumy. 21. ok. 33 22. 6, 3, 2 23. $2^{72} \approx 4,7 \cdot 10^{21}$
 24. OKRES 25. ok. 0,4 26. od 3,5 l do 6 l 27. $8 \cdot 10^{21}$ razy 28. a) 32 m b) 2 m c) 16 m
 29. $2,56 \cdot 10^3$ m

Zadania sprawdzające / 161

1. C 2. D 3. B 4. B 5. C 6. A 7. FPFF 8. PPFF 9. AD 10. A3 11. 34,80 zł
 12. $1 \cdot 10^5$ m 13. 6 14. Wskazówka: Wyznacz ostatnią cyfrę każdego z czynników.

3. Działania na pierwiastkach / 163

1. a) 6 dm^2 b) 4 dm^2 2. większa 3. $\sqrt[3]{8} > \sqrt{2\frac{1}{4}} > \sqrt[3]{2\frac{10}{27}} > -\sqrt{0,04} > \sqrt[3]{-0,125} > \sqrt[3]{-1} > -\sqrt{64}$
 4. a) 0,64 b) $\frac{9}{64}$ c) $-3\frac{3}{8}$ 5. 4 cm 6. 4 cm 7. a 8. 12,8 9. a) 24 b) 50 c) 55 d) 21
 10. a) $3\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{2}$ 11. a) $20\sqrt{5}$ b) $18\sqrt[3]{2}$ 12. a) = b) < c) > d) = 13. a) 3 b) 135 c) 7
 d) 4 e) 8 f) 4 g) -1 h) 135 14. a) $2\sqrt{3}$ b) 18 15. a) $-\frac{1}{2}$ b) 10 16. a) $4\sqrt{3}$ b) Są równe.
 17. a) 0 b) -44 18. a) 3 i 4 b) 7 i 8 c) 2 i 3 d) 8 i 9 19. tak Wskazówka: Podnieś prawą stronę
 równości do kwadratu. 20. a) np. (2, 2) b) np. (-4, 2) c) np. (5, -1) d) np. (-4, 6)

Zadania sprawdzające / 165

1. C 2. C 3. D 4. C 5. B 6. A 7. A 8. B 9. C 10. A2 11. FFPP
 12. PPFP 13. A2 14. BD 15. 30 razy 16. -5 i -4

4. Obliczenia procentowe / 167

1. krówki 20%, śliwki w czekoladzie 80% 2. a) 25% b) 375 c) $\frac{3}{4}$ d) $33\frac{1}{3}\%$ 3. a), b) Są równe.
 4. 43,2 g 5. Morze Czerwone: 8 kg, Morze Martwe: 52 kg, Morze Śródziemne: 7,4 kg 6. 18 g
 7. ok. 41% 8. 32% 9. a) 22%, 12% b) 690,75 kJ (165 kcal), 284 kJ (68 kcal) c) białko: 2,2%,
 2,9%, węglowodany: 3,4%, 4% 10. pistacjowych o 4 kg więcej, 40% 11. ok. 2444 zł 12. 26,46 zł
 13. 96 zł 14. ok. 47,1% 15. 12 zł 16. o 20% 17. Zmalała o 0,10 zł. 18. większa od razu o 40%
 19. 1 kg 20. 1024 zł 21. 11,25 zł 22. 150 l soków warzywnych, 250 l soków owocowych
 23. 400% 24. amoniak ok. 29%, kreda ok. 12%, woda ok. 59% 25. 6% 26. 25-procentowy

Zadania sprawdzające / 170

1. D 2. B 3. D 4. A 5. C 6. C 7. A2 8. PPPF 9. BC 10. FFPP 11. 25%
 12. $33\frac{1}{3}\%$ 13. nie

II. Wyrażenia algebraiczne i równania

1. Wyrażenia algebraiczne / 175

1. $x - 1$ a) $x = -26$ b) $x = \sqrt{2} + 1$ c) $x = 0$ 2. a) $5c - 10$ b) $3n$, gdzie n jest liczbą naturalną.
 c) $7n + 5$, gdzie n jest liczbą naturalną. 3. a) $\frac{y}{x}$ zł b) $(4a + 3)$ zł c) $(36 - 11x)$ zł 4. $111x - 98$
 5. $99(x - z)$, gdzie x i z to cyfry setek i jedności. Różnica jest podzielna przez 99, 33, 11, 9, 3, 1.
 6. a) w Austrii $(a - 5)$ minut, w Anglii $(a + 5)$ minut b) we Francji 55 minut, w Austrii 50 minut,
 w Anglii 60 minut 7. $2n + 4$, jeżeli $2n + 1$ jest najmniejszą liczbą. 104 8. a) $7x + 3$ b) 16 dziewcząt,
 15 chłopców 9. $(t + 1)$ godzin, $(tv + v - 1)$ km 10. $P = 0,6x^2 \text{ dm}^2$ 11. Dla $x > 2$ trapez ma
 większy obwód niż trójkąt, a różnica wynosi $2x - 4$. Dla $x = 2$ trapez i trójkąt mają równe obwody, a więc
 różnica wynosi 0. Dla $1 < x < 2$ trójkąt ma większy obwód niż trapez, a różnica wynosi $-2x + 4$.
 12. $\frac{100c}{a}\%$, $(2a - 2c)$ zł 13. $2,5x$ kg 14. nie 15. a) $x^2 + 2x + 1$ b) $z^4 - 1$ c) $4x^2 - 4$
 d) $9x^2 - 6x + 1$ 16. Wskazówka: Oblicz wartość wyrażenia. 17. Wskazówka: Wykonaj działania
 i oblicz wartość wyrażenia. 18. $3a^2 + 3$, 12 19. $2b^2 - 6ab$ 20. $\frac{1}{2}ya + \frac{1}{2}yx + yb$, 180

Zadania sprawdzające / 178

1. D 2. A 3. A 4. C 5. B 6. AD 7. A2 8. FFP 9. C 10. B 11. PFFP
 12. Wskazówka: Wykonaj działania. 13. Wskazówka: Wykonaj działania. 14. -62

2. Równania / 180

1. a) brak rozwiązań b) nieskończenie wiele rozwiązań c) $x = 11$ d) $x = -3$ 2. a) $a = 12$ b) $a = 2$
 c) $a = 5$ d) $a = 9$ 3. a) $x = 1$, tak b) $x = -1\frac{1}{2}$, nie c) $x = 2$, tak d) $x = 1$, tak 4. a) nie b) tak
 5. a) $H = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r}$ b) $d_1 = \frac{2P}{d_2}$ c) $a = \sqrt[3]{V}$ d) $a = \frac{y-b}{x}$, $b = y - ax$ e) $r = \sqrt{\frac{V}{\pi H}}$, $H = \frac{V}{\pi r^2}$
 f) $a = \frac{b}{x+5}$, $x = \frac{b-5a}{a}$ 6. 24 cm 7. 1,5 kg 8. klaser: 30,80 zł, mazak: 15,40 zł, kalkulator: 92,40 zł
 9. 2% 10. 144 kg 11. 2870 m 12. 60 13. 10 dziesięciozłotowych, 5 dwudziestozłotowych, 5 stużłotowych 14. 13 o długości 30 cm, 2 o długości 50 cm 15. $L = 48$ cm, $P = 96$ cm²
 16. mama: 40 lat, córka: 19 lat 17. 20 18. 95 19. 60 kg 20. 8 kg octu 20%, 16 kg octu 5%
 21. 39 22. siedmioro rodzeństwa 23. o 20% 24. 270 białych, 130 żółtych, 170 czerwonych

Zadania sprawdzające / 182

1. A 2. C 3. B 4. C 5. B 6. A 7. D 8. B 9. D 10. A 11. BD 12. FPF
 13. A2 14. pole prostokąta: 18 cm², obwód kwadratu: 24 cm 15. 30 zł, 60 zł 16. Kasia: 26 lat, Kinga: 22 lata

III. Figury płaskie**1. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie / 189**

1. $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 110^\circ$, $\gamma = 110^\circ$ 2. $20 + 3\sqrt{13} + \sqrt{34} + \sqrt{41}$ 3. nie 4. $|AB| = 6$ m, $|BC| = 9$ m, $|AC| = 13,5$ m 5. a) AE b) 130° c) Kąty przy podstawie mają różne miary. d) 15° 6. 80° , 100° , 120° , 60° , 120° 7. Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru na sumę kątów trójkąta. 8. 79° 9. a) nie
 b) tak 10. Wskazówka: Wykaż, że trójkąty AKC i BLC są przystające. 11. Wskazówka: a) Skorzystaj z cechy kbk. b) Skorzystaj z cechy kkb lub kbb. c) Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa i cechy bbb lub kkb. 12. Andrzej, 10 minut 13. 52° 14. a) $|AB| = 14\sqrt{3}$ cm b) 10,5 cm c) 2 razy d) tak
 e) tak 15. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ razy 16. ok. 8,65 cm 17. Wskazówka: Skorzystaj z własności kątów w trójkącie równoramiennym i w trójkącie prostokątnym. 18. a) tak b) tak c) nie d) $5(2 + \sqrt{2})$ cm
 19. Trapez równoramienny, ma oś symetrii. 20. a) tak b) nie c) nie d) nie e) Mają tyle samo.
 21. 71 22. a) $\sqrt{41}$ b) 10 c) $10\sqrt{41}$ d) $5\sqrt{5}$ 23. a) 6 b) $A = (0, \sqrt{3})$ c) $K = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ d) 30°
 e) tak 25. nie 26. $C = (-5, 13)$ lub $C = (1, 1)$ lub $C = (7, -11)$

Zadania sprawdzające / 193

1. C 2. B 3. FFF 4. A1 5. A 6. A 7. AD 8. a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) o 4 cm c) tak 9. 44 cm

2. Pola wielokątów / 195

1. a) $\frac{2}{3}$ b) 2 c) $4(1 + \sqrt{2})$ cm d) 6 2. a) $8\sqrt{3}$ cm b) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ c) 32 cm² d) o 160 cm²
 3. $8(2 + \sqrt{2})$ cm² 4. 1320 5. I i IV, II i III 6. ok. 14 cm 7. 2 8. $L = 44$ cm, $P = 96$ cm²
 9. 0,6 ha, 0,3 ha, 0,36 ha, 0,35 ha, najmniejsza II, największa I 10. 12 cm, prostokątny 11. 36 cm²
 12. $4\frac{8}{13}$ 13. 96 cm² 14. a) prostokąt o 3,84 cm² b) $3,2\sqrt{2}$ cm $\times$ $5,6\sqrt{2}$ cm c) 8 cm,
 $0,8\sqrt{130}$ cm 15. $8(4 + 3\sqrt{2})$ cm² 16. a) $P = 18(2 + \sqrt{3})$ cm², $L = 6(5 + \sqrt{3})$ cm
 b) $P = 8(4 + \sqrt{3})$ cm², $L = 4(3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm 17. ok. 0,3 m² 18. 27 cm², 4,5 cm
 19. $P_B = 16$ cm², $P_C = 10$ cm², $P_D = 6$ cm², $P_E = 12$ cm², $P_F = 4$ cm², $P_G = 14$ cm², $P_H = 2$ cm²
 20. a), b), c), d) 6 cm² 21. a) 14 cm² b) 18 cm² 22. 3 : 2 : 3 23. 37,5 cm² 24. Wskazówka:
 Skorzystaj z własności trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° . 25. Wskazówka: Wyraż polą figur za pomocą
 długości boku największego kwadratu. 26. 1,75 cm 27. nie 28. 100 cm²

Zadania sprawdzające / 200

1. B 2. A 3. B 4. C 5. A2 6. BD 7. PF 8. $2\sqrt{6}$ 9. $4\sqrt{2}$ cm, 112 cm²
 10. 17 cm² 11. tak

IV. Bryły

1. Graniastosłupy / 205

1. 6 m 2. I 3. a) $P_c = 864 \text{ cm}^2$, $V = 1728 \text{ cm}^3 = 1,728 \text{ l}$ b) $P_c = 150 \text{ m}^2$, $V = 125 \text{ m}^3 = 125\,000 \text{ l}$
 c) $P_c = 21\,600 \text{ mm}^2$, $V = 216\,000 \text{ mm}^3 = 0,216 \text{ l}$ 4. $(10 + 6\sqrt{5} + 4\sqrt{13}) \text{ cm}$ 5. $4a\sqrt{2}$ 6. 960 cm^3
 7. 648 cm^3 , tak 8. 234 cm^2 9. na drugi o 33 cm^2 więcej 10. $1,9008 \cdot 10^{11} \text{ hl}$ 11. 48 l
 12. 9 razy, $8a^2h$ 13. np. 4 narożne sześciiany 14. 105 cm^3 15. $28,8 \text{ cm}^3$ 16. $1,14 \text{ m}^3$
 17. $V = \frac{3}{2}x^2(x+1)\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 18. $V = 224\sqrt{3} \text{ cm}^3$, $P_b = 224 \text{ cm}^2$ 19. tak 20. 126 21. 3840 hl
 22. do kuchni 25 l, do ogrodu 60 l 23. ok. 38 m^2 desek, 3 rolki papy

Zadania sprawdzające / 209

1. C 2. B 3. B 4. D 5. A 6. C 7. FFPF 8. B2 9. BD 10. 35 cm 11. 728 cm^2
 12. Wskazówka: Oblicz długości krawędzi graniastosłupa.

2. Ostrosłupy / 211

1. III 2. I. 10, 6, 6 II. czworokątny III. 1 IV. trójkątem V. trzynastokątny 3. 720° 4. siatki
 ostrosłupów: II, VI; I – Jedna ze ścian trójkątnych w złym miejscu. III – Niektóre boki, które się sklejają,
 są różnej długości. IV – Są 2 ściany niebędące trójkątami. V – Za dużo ścian trójkątnych. 5. $141,6 \text{ m}^2$
 6. 17 cm 7. 189 cm^2 8. Zwiększy się 4 razy. 9. $150(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$ 10. 525 cm^2
 11. $1\,072\,500 \text{ m}^3$ 12. 600 cm^3 13. 240 cm^3 14. 21 cm^2 15. 10 cm^3 16. $P_b = 240 \text{ cm}^2$,
 $V = 384 \text{ cm}^3$ 17. 48 cm^3 18. 480 cm^3 19. $\frac{256\sqrt{7}}{3} \text{ cm}^3$ 20. czworokątny $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ razy większą
 21. 6 22. a) $|DH| = 8 \text{ cm}$, $|AH| = |CH| = 10 \text{ cm}$, $|BH| = 2\sqrt{34} \text{ cm}$ b) 144 cm^2 c) 3 razy
 23. Wskazówka: Oblicz sumę pól ścian bocznych. 24. 4 części o objętości $\frac{1}{6}a^3$ każda

Zadania sprawdzające / 214

1. D 2. B 3. A 4. C 5. BC 6. B2 7. B 8. A 9. FPF 10. $P_b = 7,5$, 30%
 11. $144,9 \text{ cm}^3$ 12. Wskazówka: Oblicz wysokość ostrosłupa.

3. Bryły obrotowe / 217

1. a) I, VII b) II, IV c) III, VI, VIII 2. a) piórniki, beczka, szklanka b) rożek, pacholek (bez
 podstawy) c) piłka, kula dyskotekowa 4. a) $r = b$, $h = a$ b) $r = a$, $h = b$ 6. Suma kwadratów
 długości dwóch boków musi być równa kwadratowi długości trzeciego boku, np. 5, 12, 13 lub $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$,
 $\sqrt{13}$. 7. FFP 8. 12 740 km 9. 2 sposoby: $r = b$, $h = a$ lub $r = a$, $h = b$

V. Elementy statystyki opisowej, kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa

1. Odczytywanie danych statystycznych / 223

1. a) 5 b) 12 c) 8a d) 8a: 3, 8b: 1, 8c: 2 2. a) ok. 93% b) smartfon lub telefon komórkowy
 c) 55–74 lata 3. a) w Azji b) w Afryce 4. a) co piąty b) 568 c) 83 5. Wskazówka: Oblicz
 średnią liczbę wypożyczeń. 6. a) 4 marca b) największy 23 marca, najmniejszy 5 marca c) 1861
 7. o ok. 11% 8. a) panele: I, IX, X 2019 r. i od XII 2019 r., płyty podłogowe: I, VI – IX 2019 r.
 i od II 2020 r. b) o 700 zł c) 7 zł na każdym metrze kwadratowym 9. w 2018 r. 10. w 2011 r.,
 2012 r., 2017 r. i 2018 r.

Zadania sprawdzające / 227

1. B 2. C 3. BC 4. PP 5. A2 6. Wskazówka: Odczytaj z diagramu odpowiednie liczby.

2. Zliczanie obiektów / 229

1. 698 2. 64 3. a) 8 b) 6 4. 48 5. a) 891 b) 429 c) 202 6. a) 153 b) 48 7. –18,
 –12, –6, 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54 8. a) 183 b) 107 9. Wskazówka: Wypisz możliwe
 wyniki. 10. 80 11. 6 12. 10 13. 131 14. 582

Zadania sprawdzające / 230

1. C 2. A 3. C 4. D 5. PFFP 6. AC 7. B2 8. –24, –16, –8, 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56
 9. a) 408 b) 425 10. Wskazówka: Wypisz możliwe wyniki. 11. 150 12. 16

3. Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego / 232

1. 6 2. B, C – zdarzenie pewne, D – zdarzenie niemożliwe 3. a) 3 b) 1 c) 0 4. $\frac{11}{24}$ 5. $\frac{5}{12}$
 6. *Wskazówka:* Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli żółtej lub kuli czarnej.
 7. a) owocowy, orzechowy, migdałowy b) A, B – zdarzenia jednakowo prawdopodobne, C – zdarzenie najmniej prawdopodobne 8. a) $\frac{4}{13}$ b) $\frac{2}{13}$ c) $\frac{9}{13}$ d) $\frac{1}{52}$ 9. 9 10. 3 11. a), b), c) II

Zadania sprawdzające / 234

1. C 2. C 3. D 4. B 5. A3 6. PPFF 7. BD 8. a) $\frac{1}{5}$ b) 2,5 razy c) 1 d) 0 9. $\frac{5}{12}$
 10. 30

VI. Przed egzaminem**Zestaw zadań nr 1 / 236**

1. C 2. D 3. A 4. B 5. B 6. A1 7. D 8. PPPF 9. PPFP 10. B 11. FPPP
 12. BC 13. D 14. B 15. FP 16. *Wskazówka:* Zauważ, że te trójkąty mają równe podstawy i równe wysokości. 17. ok. 9,9 razy 18. 4 19. 8 zł 20. 11 21. o 6 km/h

Zestaw zadań nr 2 / 240

1. D 2. PPFP 3. A 4. A2 5. PPPP 6. C 7. B 8. B2 9. C 10. B 11. C
 12. BC 13. C 14. D 15. A 16. $64(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$ 17. a) $C = (2, 2)$ b) $S = (-2, -1)$
 c) 5 d) 48 18. a) 20 b) 4 c) 10% d) 7 19. $x = 3, y = 5$ lub $x = 8, y = 0$ 20. *Wskazówka:* Wyznacz najpierw miarę kąta EAB .

Zestaw zadań nr 3 / 244

1. AD 2. PF 3. PP 4. PP 5. D 6. B 7. AD 8. D 9. D 10. B 11. A2
 12. C 13. B 14. PF 15. D 16. I rząd: 24 osoby, II rząd: 20 osób 17. 18 18. *Wskazówka:* Wyznacz x dzięki rozwiązaniu odpowiedniego równania. 19. $P = 432 \text{ cm}^2, L = 24(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}$
 20. 18 i 81, 27 i 72, 36 i 63, 45 i 54 21. $60\sqrt{6} \text{ cm}^3$

VI. Okrąg, koło i pierścień kołowy**1. Długość okręgu / 248**

1. a) $6\pi \text{ cm}$ b) $4,8\pi \text{ m}$ c) $3\frac{1}{3}\pi \text{ dm}$ d) $2\pi\sqrt{5} \text{ mm}$ 2. a) $5\pi \text{ dm}$ b) $2\pi\sqrt{3} \text{ cm}$ c) 4 m d) 4π
 3. a) $r = 4 \text{ cm}, d = 8 \text{ cm}$ b) $r = \frac{1}{5} \text{ dm}, d = \frac{2}{5} \text{ dm}$ c) $r = \sqrt{2} \text{ m}, d = 2\sqrt{2} \text{ m}$ d) $r = 7a, d = 14a$
 4. A 5. ok. 1990 6. o $4(\pi\sqrt{2} - 4)$ 7. tak 8. A2 9. o $20\pi \text{ cm}$ 10. 3 razy 11. ok. 13 m
 12. BD 13. a) o 30% b) o 75% **Wyzwanie.** $a \approx 70,0 \text{ m}, b \approx 39,5 \text{ m}, c \approx 47,1 \text{ m}$
Sprawdź się! 1. $20\pi \text{ cm}$ 2. o 48 cm 3. ok. 500 4. C 5. nie

2. Pole koła / 253

1. a) $P = 4\pi \text{ cm}^2, L = 4\pi \text{ cm}$ b) $P = \frac{25}{36}\pi \text{ m}^2, L = 1\frac{2}{3}\pi \text{ m}$ c) $P = 10,24\pi \text{ dm}^2, L = 6,4\pi \text{ dm}$
 d) $P = 2\frac{7}{9}\pi \text{ cm}^2, L = 3\frac{1}{3}\pi \text{ cm}$ 2. a) $P = 25\pi \text{ cm}^2, L = 10\pi \text{ cm}$ b) $P = 8\pi \text{ cm}^2, L = 4\pi\sqrt{2} \text{ cm}$
 c) $P = \frac{16}{\pi} \text{ m}^2, L = 8 \text{ m}$ d) $P = 100\pi x^2, L = 20\pi x$ 3. a) 6 cm b) 0,8 m c) $1\frac{3}{5} \text{ dm}$ d) $\sqrt{10} \text{ cm}$
 4. $\frac{1}{\pi}$ 5. Lądowisko w kształcie koła ma o 25% mniejszą powierzchnię niż lądowisko kwadratowe.
 6. PFPP 7. ok. 214 cm^2 8. $2,4\pi \text{ dm}$ 9. 9 razy 10. ok. 15 000 11. BC 12. nie
 13. *Wskazówka:* Oblicz stosunek pól kół. 14. czerwony: $20\frac{4}{7}\%$, zielony: 16%, fioletowy: $45\frac{5}{7}\%$,
 beżowy: $46\frac{2}{7}\%$ **Wyzwanie.** ok. 82,7% **Sprawdź się!** 1. $P = \frac{9}{16}\pi \text{ cm}^2, L = 1\frac{1}{2}\pi \text{ cm}$ 2. 16 razy
 3. C 4. ok. 54% 5. *Wskazówka:* Oblicz stosunek pól kół.

3. Pierścień kołowy, pole pierścienia / 256

1. 0,6 cm 2. tak 3. ok. 57 cm 4. I – C, II – E, III – A, IV – D 5. $136\pi \text{ cm}^2, 104\pi \text{ cm}^2, 72\pi \text{ cm}^2$, tak 6. B 7. AC 8. PPFP 9. $729\pi \text{ cm}^2, 576\pi \text{ cm}^2, 324\pi \text{ cm}^2, 144\pi \text{ cm}^2$, nie

10. ok. $32,4 \text{ m}^2$ 11. 1680 cm^2 12. a) $\frac{1}{36}, \frac{4}{9}$ b) $35\pi \text{ mm}^2 \approx 110 \text{ mm}^2$, $20\pi \text{ mm}^2 \approx 63 \text{ mm}^2$

13. a) $285\pi \text{ mm}^2 \approx 895 \text{ mm}^2$ b) Białe pole jest większe mniej więcej o 22,6%. c) ok. 0,012%

Wyzwanie. ok. 6 cm **Sprawdź się!** 1. FFPP 2. $775\pi \text{ cm}^2$ 3. ok. $113,04 \text{ cm}^2$ 4. 4 cm

5. $81\pi \text{ cm}^2$

Zadania utrwalające / 261

1. ok. 848 m 2. tak 3. ok. 168 m 4. nie 5. 3,2 razy 6. prostokąt 7. 1,3 8. a) ok. 50 m^2

b) o ok. 13 m^2 9. ok. 21,5% 10. $39\pi \text{ cm}^2$ 11. $9\pi \text{ m}^2$ 12. ok. 675 m^2 13. $28\pi \text{ cm}$

14. ok. 768 cm^2 15. ok. 58,9% 16. ok. 2,5 m

Zadania sprawdzające / 263

1. A 2. D 3. B 4. B 5. C 6. AC 7. A1 8. PPFF 9. PPPF 10. w niebieskim

11. najmniejsza dla hiacyntów, największa dla krokusów

VII. Symetrie

1. Symetralna odcinka i dwusieczna kąta / 268

1. a) Punkt wspólny symetralnych leży na zewnątrz trójkąta. b) Punkt wspólny symetralnych jest środkiem przeciwprostokątnej. 2. Symetralne nierównoległych cięciw przecinają się w środku okręgu.

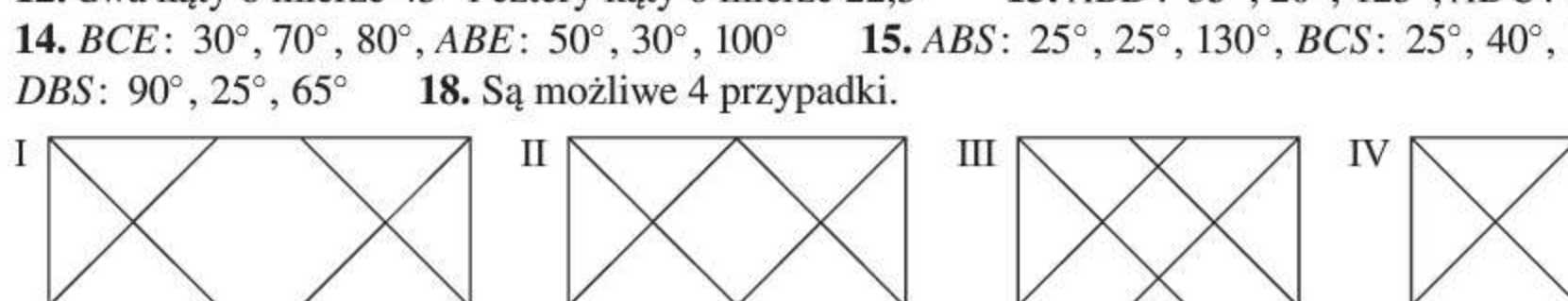
3. **Wskazówka:** Skorzystaj z faktu, że wysokość trójkąta równobocznego dzieli go na dwa trójkąty przystające. 4. FFPP 5. Wyznaczamy symetralną danego odcinka, a następnie symetralną połowy tego odcinka. 6. **Wskazówka:** Środek okręgu leży na symetralnej odcinka AB. 7. Środek koła jest punktem wspólnym symetralnych dwóch nierównoległych cięciw tego koła. 8. D 9. $9\sqrt{15} \text{ cm}^2$

10. Dwusieczne są prostopadłe. 11. Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

12. dwa kąty o mierze 45° i cztery kąty o mierze $22,5^\circ$ 13. $ABD: 35^\circ, 20^\circ, 125^\circ, ADC: 35^\circ, 55^\circ, 90^\circ$

14. $BCE: 30^\circ, 70^\circ, 80^\circ, ABE: 50^\circ, 30^\circ, 100^\circ$ 15. $ABS: 25^\circ, 25^\circ, 130^\circ, BCS: 25^\circ, 40^\circ, 115^\circ,$

$DBS: 90^\circ, 25^\circ, 65^\circ$ 18. Są możliwe 4 przypadki.



I. 6 trójkątów prostokątnych równoramiennych i sześciokąt o kątach $90^\circ, 135^\circ, 135^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 135^\circ$

II. 6 trójkątów prostokątnych równoramiennych i kwadrat III. 4 trójkąty prostokątne równoramienne, kwadrat i 4 trapezy o kątach $45^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ IV. 4 trójkąty prostokątne równoramienne 19. A1

20. BC **Wyzwanie.** **Wskazówka:** Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Sprawdź się! 1. Symetralne dzielą prostokąt na 4 prostokąty przystające. 2. Dwusieczne są prostopadłe. 3. PFP 4. $30^\circ, 35^\circ, 115^\circ$ 5. **Wskazówka:** Wyznacz miary kątów trójkąta EBC.

2. Symetria osiowa / 275

1. Odcinek AB jest prostopadły do l , punkty A i B leżą z różnych stron prostej l i są równo oddalone od l .

2. a) Punkty A i A' leżą z tej samej strony prostej k . b) Odcinek AA' nie jest prostopadły do k .

c) Punkty A i A' leżą w różnej odległości od prostej k . d) Punkt A leży poza prostą k , a punkt A' leży na prostej k . e) Punkty A i A' leżą na prostej k , ale są różne. 3. C 4. w tej samej odległości, tak

5. tak, poza wyrazem „kukułka” 6. BC 7. **Wskazówka:** Rozważ różne położenia prostej.

9. ten sam kąt 10. A2 12. a) $A' = (-4, 2), B' = (3, -1), C' = (-5, 0), D' = (3, 3)$ b) $A' = (4, -2),$

$B' = (-3, 1), C' = (5, 0), D' = (-3, -3)$ 13. $A' = (-3, 2), B' = (2, -2), C' = (1, -5)$ 14. $A' = (3, -2),$

$B' = (-2, 2), C' = (-1, 5)$ 15. pole: 20, obwód: $14 + 2\sqrt{29}$ 16. $B' = (-5, -6), D' = (1, 1),$

$A = (-3, -2), C = (3, 2), E = (-5, 4)$ 17. a) $a = 2, b = -\frac{1}{2}$ b) $a = -7, b = 0$ 18. a) $a = 4, b = -2$

b) $a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{9}$ **Wyzwanie.** **Wskazówka:** Przekształć jedno z osiedli przez symetrię względem rzeki.

Sprawdź się! 1. Ta prosta to symetralna odcinka AB. 2. A 4. pole: 40, obwód: 26 5. $a = 7, b = 4$

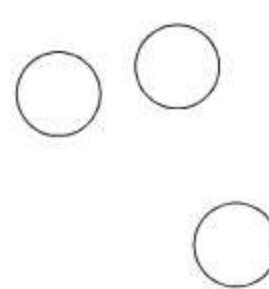
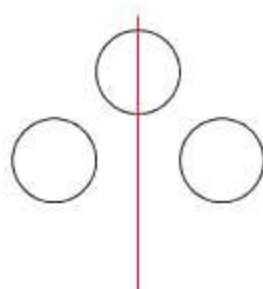
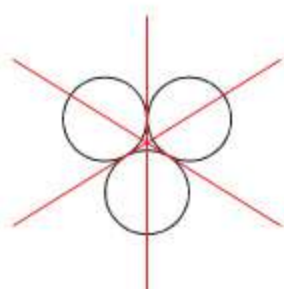
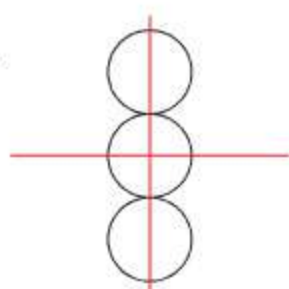
3. Figury osiowosymetryczne / 282

1. PFP 3. BC 4. a) 4 b) nieskończenie wiele c) 1 d) nieskończenie wiele 5. KOD, MAM,

OTO, CO 6. a) as trefl b) as karo 7. a) 4 b) 2 c) 4 d) 1 e) 2 8. nie a) np. XI, CIX, MM

b) np. III, XX, XXX 9. D 10. C

12. np.



13. PFP

14. a), b) nieskończenie wiele rozwiązań c) 2 rozwiązania **Wyzwanie.** 2, 4 lub nieskończenie wiele
Sprawdź się! 3. KOC, MIM, OKO, ECHO, BOK, DECH 4. ośmiokąt, 2 osie symetrii 5. B1

4. Symetria środkowa / 287

1. a) Leżą na jednej prostej. b) $|BC| = |B'C|$ c) Jest ich środkiem. d) Jest to punkt C. 2. a) A', B', D' : tak, C' : nie b) D' : tak, A', B', C' : nie 3. FP 4. C 8. 24 cm 9. $A' = (-3, -1)$, $B' = (1, 2)$, $C' = (-3, 3)$, $D' = (3, -1)$, $E' = (0, 0)$, $F' = (5, 0)$, $G' = (0, 5)$ 10. $A' = (5, -2)$, $B' = (1, 2)$, $C = (-2, 6)$

11. BD 12. a) $a = -2$, $b = 1$ b) $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$ **Wyzwanie.** $A = (-6, -1)$, $B = (6, 1)$

Sprawdź się! 1. E 2. B 4. $A' = (2, 2)$, $B' = (-2, 2)$, kwadrat, obwód: 16, pole: 16 5. $a = 3$, $b = -4$

5. Figury środkowosymetryczne / 292

1. równoległobok, koło, romb 2. a) Punkt powinien leżeć w środku okręgu. b) Punkt powinien leżeć na prostej. c) Środek okręgu powinien leżeć na prostej. 3. D 5. a) I, II, VI b) I, IV c) I 6. a) II, III, IV, VI, VII, VIII, IX, X b) IV, X 7. C 8. a) np. równoległobok niebędący ani prostokątem, ani rombem b) np. prostokąt c) np. prosta d) np. trójkąt równoramienny 9. FFPP 10. obwód: 24, pole: 36, suma długości przekątnych: $12\sqrt{2}$ 11. pole: 96, obwód: 40, romb, środek symetrii: (0, 0)

Wyzwanie. a), b), c) nie **Sprawdź się!** 1. dwie proste przecinające się, okrąg, płaszczyzna 2. 0, 8 5. AD

Zadania utrwalające / 296

1. włosy, usta, dłonie, wzór na sukience, stopy 2. wzór na czapce, dłonie, oba wzory na sukience, stopy 3. I. 2 osie symetrii, środek symetrii II. 4 osie symetrii, środek symetrii III. 1 oś symetrii, brak środka symetrii IV. brak osi symetrii, środek symetrii V. brak osi symetrii, brak środka symetrii 4. Gdy proste są prostopadłe: 4, gdy proste nie są prostopadłe: 2. 5. a) okręgi o tym samym promieniu i różnych środkach b) okręgi współśrodkowe 6. a) 30, 33, 38, 80, 83 b) 88 7. Punkt O powinien być środkiem obu odcinków. 8. 120° 9. 3 rozwiązania – środkiem symetrii jest środek jednego z boków trójkąta ABC. 10. pole: 8 cm^2 , obwód: $4\sqrt{10} \text{ cm}$ 11. $(-1\frac{1}{2}, 6)$, $(3, -1\frac{1}{2})$ 12. nieskończenie wiele rozwiązań: $A = (0, -a)$, $C = (1, 0)$, $D = (4, 4)$, $E = (0, a)$, $F = (-4, 4)$, $H = (-4, -4)$, gdzie a jest dowolną liczbą dodatnią, różną od 4. 13. 7 (osie symetrii zawierają przekątne kwadratu) 14. Na 3 sposoby: 1) proste przecinają się w 1 punkcie, 2) proste są równoległe, równo oddalone, 3) dwie proste są równoległe, a trzecia je przecina.

Zadania sprawdzające / 298

1. C 2. D 3. A 4. B 5. D 6. B 7. B 8. AC 9. PFPP 10. PPFP 11. A2

12. 30 cm^2 13. $B = (-1, 1)$, $D = (3, -2\frac{1}{2})$, $F = (-2, -4)$ lub $B = (2, 4)$, $D = (1, -1)$, $F = (-3, 2\frac{1}{2})$

VIII. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

1. Reguła mnożenia / 301

1. 12 2. 40 3. 24 4. BC 5. a) 72 b) 27 6. B 7. a) 48 b) 36 c) 12 8. FF 9. A2 10. FF 11. a) 6 b) 3 c) 9 12. 16 800 13. 50, 49, 20, 19, 18 14. 26 15. 2520

Wyzwanie. 4096 **Sprawdź się!** 1. 24 2. 11 880 3. PP 4. 60 5. 24. Wskazówka: Oblicz sumę cyfr dowolnej takiej liczby.

2. Reguła dodawania / 307

1. 18 2. a) 18 b) 20 3. a) 265 b) 325 c) 190 4. B1 5. 9 6. B 7. 32, 21, 12, 5

Wyzwanie. 12 740 **Sprawdź się!** 1. 43 2. 420 3. A2 4. 152 5. 72

3. Zdarzenia w doświadczeniach losowych / 311

1. a) $\{(B, B, B), (B, B, C), (B, C, B), (B, C, C), (C, B, B), (C, B, C), (C, C, B), (C, C, C)\}$

b) $\{(B, B, C), (B, C, B), (C, B, B)\}$ 2. PPFP 3. BD 4. niemożliwe: A, B, pewne: C 5. zdarzenia

możliwe: B, C , zdarzenie niemożliwe: A 6. a) Na przykład otrzymano liczbę, której suma cyfr jest mniejsza od 4. b) Na przykład otrzymano liczbę, której suma cyfr jest parzysta. **Wyzwanie.** 84
Sprawdź się! 1. $\{(B, B), (B, C), (C, B), (C, C)\}$ 2. 6 3. B2 4. a) $\{(\dot{Z}, C), (\dot{Z}, N), (\dot{Z}, Z), (C, \dot{Z}), (N, \dot{Z}), (Z, \dot{Z})\}$ b) $\{(\dot{Z}, C), (C, \dot{Z})\}$ c) $\{(C, \dot{Z}), (C, N), (\dot{Z}, C), (N, C)\}$ 5. Można: A, B , nie można: C .

4. Prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych / 315

1. a) $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), P(A) = \frac{5}{36}$ b) $(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 5), P(A) = \frac{1}{6}$
 c) $(1, 5), (5, 1), (2, 6), (6, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), P(A) = \frac{5}{18}$ 2. PF 3. a) $\frac{1}{2}$
 b) $\frac{1}{6}$ 4. w losowaniu bez zwracania 5. a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{9}$ d) 1 6. A1 7. a) $\frac{6}{25}$ b) $\frac{21}{25}$
 8. a) $\frac{77}{2250}$ b) $\frac{13}{9000}$ 9. AD 10. z największym: toffi, z najmniejszym: czekoladowy,
 12 czekoladowych 11. $\frac{1}{12}$ 12. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{7}$ 13. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{13}{108}$ **Wyzwanie.** 30
Sprawdź się! 1. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{4}$ 2. D 3. $\frac{1}{4}$ 4. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

Zadania utrwalające / 320

1. 30 2. 360 3. 10 4. a) 1170 b) 3640 5. 16 6. 9 7. 24 8. Adama 9. tak: A, C, D, E ,
 nie: B 10. a) $\{(O, 1), (O, 2), (O, 3), (O, 4), (O, 5), (O, 6), (R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6)\}$
 b) $A = \{(O, 2), (O, 4), (O, 6)\}, B = \{(O, 3), (O, 6), (R, 3), (R, 6)\}, C = \{(R, 4), (R, 5), (R, 6)\}$
 11. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ 12. a) $\frac{11}{12}$ b) $\frac{8}{9}$ c) 1 13. a) 0 b) 1 14. $\{(O, O, O), (O, O, R), (O, R, O),$
 $(O, R, R), (R, O, O), (R, O, R), (R, R, O), (R, R, R)\}$ a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{2}$ 15. wyrzucenie dwóch orłów
 w trzech kolejnych rzutach 16. $\frac{1}{5}$

Zadania sprawdzające / 322

1. D 2. B 3. B 4. D 5. C 6. C 7. B2 8. PPFF 9. BD 10. 50 11. 32 12. C

A

algorytm Euklidesa / 153

B

bryła obrotowa / 204

C

cechy podzielności liczb naturalnych / 149

cechy przystawania trójkątów / 186

cięciwa / 188, 248

częstość / 221

czworościan foremny / 107

D

dane (w rachunku prawdopodobieństwa) / 129

dane statystyczne / 219

dane surowe / 219

diagram procentowy / 220

diagram procentowy kołowy / 220

diagram procentowy prostokątny / 220

diagram słupkowy / 220

diagram słupkowy pionowy / 220

diagram słupkowy poziomy / 220

długość odcinka w układzie współrzędnych / 188

długość okręgu / 249

doświadczenie losowe / 129

drzewo (w rachunku prawdopodobieństwa) / 140, 311

dwusieczna kąta / 271

dzielenie potęg o tych samych podstawach / 10

dzielenie potęg o tych samych wykładnikach / 13

F

figura osiowosymetryczna / 188, 283

figura środkowosymetryczna / 292

figury przystające / 186, 275

figury symetryczne względem prostej / 188, 275

figury symetryczne względem punktu / 287

G

graniastosłup pochyły / 98

graniastosłup prawidłowy / 202

graniastosłup prosty / 98

H

histogram / 222

I

iloczyn pierwiastków kwadratowych z liczb
nieujemnych / 28

iloczyn pierwiastków sześciennych / 28

iloraz pierwiastków kwadratowych z liczb
nieujemnych / 34

iloraz pierwiastków sześciennych / 34

J

jednomian / 70, 172

jednomian uporządkowany / 172

jednomiany podobne / 172

jednostki długości / 185

jednostki objętości / 202

jednostki pojemności / 203

jednostki pola / 185

K

kąt wklęsły / 184

kąt wypukły / 184

kąty naprzemianległe / 184

kąty odpowiadające / 184

kąty przyległe / 184

kąty wierzchołkowe / 184

kolejność wykonywania działań / 150

koło / 188, 248

krawędź boczna ostrosłupa / 106

krawędź podstawy ostrosłupa / 106

kula / 204

kwadrat / 49, 187

kwadrat magiczny / 157

L

liczba całkowita / 148

liczba naturalna / 148

liczba niewymierna / 148

liczba π / 249

liczba pierwsza / 148

liczba przekątnych wielokąta wypukłego / 187

liczba wymierna / 148

liczba złożona / 148

liczby przeciwne / 148

liczebność zmiennej / 219

losowanie bez zwracania / 312

losowanie ze zwracaniem / 311

Ł

łamana / 185

M

metoda równań równoważnych / 78, 173

mnożenie potęg o tych samych podstawach / 9

mnożenie potęg o tych samych wykładnikach
naturalnych / 12

mnożenie sum algebraicznych / 74

mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian / 71

N

najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW) / 149

największy wspólny dzielnik (NWD) / 149
notacja wykładnicza / 19, 21

O

objętość graniastopu prostego / 102, 204
objętość ostrosłupa / 115, 204
objętość prostopadłościanu / 203
objętość sześcianu / 203
obliczanie, jakim procentem danej wielkości jest
inna wielkość / 152
obliczanie procentu dowolnej wielkości / 152
obliczanie wielkości, gdy dany jest jej procent / 152
obwód koła / 249
obwód kwadratu / 187
obwód prostokąta / 187
obwód rombu / 187
obwód równoległoboku / 187
obwód trapezu / 187
obwód trójkąta / 187
odcinki proporcjonalne w skali k / 185
odległość punktu od prostej / 188
odsetki / 152
odwrotność liczby / 149
okrąg / 248
okręgi współśrodkowe / 256
ostrosłup / 106
ostrosłup prawidłowy / 107
oś obrotu / 204
oś symetrii figury / 188, 283
oś symetrii kąta / 283

P

pierścień kołowy / 256
pierwiastek kwadratowy z iloczynu liczb
nieujemnych / 28
pierwiastek kwadratowy z ilorazu liczb
nieujemnych / 34
pierwiastek kwadratowy z liczby nieujemnej a / 26
pierwiastek równania / 78, 173
pierwiastek sześcienny z iloczynu liczb / 28
pierwiastek sześcienny z ilorazu liczb / 34
pierwiastek sześcienny z liczby a / 26
podstawa graniastopu / 98
podstawa ostrosłupa / 106
podstawa stożka / 204
podstawa walca / 204
pole koła / 253
pole kwadratu / 56, 187
pole pierścienia kołowego / 257
pole powierzchni całkowitej graniastopu / 204
pole powierzchni całkowitej ostrosłupa / 111, 204
pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu
/ 101, 203
pole powierzchni całkowitej sześcianu / 203
pole prostokąta / 187
pole rombu / 187
pole równoległoboku / 187

pole sześciokąta foremnego / 56
pole trapezu / 187
pole trójkąta / 187
pole trójkąta równobocznego / 55, 187
potęga o wykładniku całkowitym ujemnym / 20
potęga o wykładniku naturalnym / 7
potęgowanie iloczynu / 12
potęgowanie ilorazu / 13
potęgowanie pierwiastka kwadratowego / 27
potęgowanie pierwiastka sześciennego / 27
potęgowanie potęgi / 16
prawdopodobieństwo zdarzenia losowego / 138
prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego
/ 139
prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego / 139
prawdopodobieństwo zdarzenia w losowaniu bez
zwracania / 316
prawdopodobieństwo zdarzenia w losowaniu
ze zwracaniem / 316
procent dowolnej wielkości / 151
promień koła / 188, 248
promień okręgu / 248
promień wewnętrzny pierścienia / 256
promień zewnętrzny pierścienia / 256
proporcja / 174
prostokąt / 187
prostopadłościan / 203
przekątna graniastopu / 99
przekątna kwadratu / 51, 100
przekątna prostopadłościanu / 203
przekątna sześcianu / 100, 203
przekątna wielokąta / 187
przybliżenie dziesiętne / 151
punkty kratowe / 60, 61
punkty procentowe / 87, 88
punkty symetryczne względem osi x / 279
punkty symetryczne względem osi y / 279
punkty symetryczne względem początku układu
współrzędnych / 290
punkty symetryczne względem prostej / 276
punkty symetryczne względem punktu / 287
punkty współliniowe / 60

R

redukcja wyrazów podobnych / 70, 173
reguła dodawania / 307
reguła mnożenia / 301
reszta z dzielenia / 149
romb / 187
rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze / 149
roztwór / 152
rozwiązanie równania / 78, 173
rozwiązywanie równań / 78
rozwiniecie dziesiętne liczby / 151
rozwiniecie dziesiętne nieskończone nieokresowe
/ 151
rozwiniecie dziesiętne nieskończone okresowe / 151
rozwiniecie dziesiętne skończone / 151

równania równoważne / 173
 równanie / 173
 równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą / 78, 173
 równanie sprzeczne / 79
 równanie tożsamościowe / 79
 równanie z jedną niewiadomą / 78, 173
 równoległobok / 187

S

siatka graniastosłupa prostego / 203
 siatka ostrosłupa / 109
 skala / 185
 spodek wysokości / 106
 stężenie procentowe roztworu / 152
 stop / 152
 stosunek dwóch wielkości / 174
 stożek / 204
 suma algebraiczna / 70, 172
 suma miar kątów wewnętrznych czworokąta / 186
 suma miar kątów wewnętrznych dowolnego wielokąta wypukłego / 186
 suma miar kątów wewnętrznych pięciokąta / 186
 suma miar kątów wewnętrznych trójkąta / 186
 symetralna odcinka / 268
 system rzymski / 150
 szerokość pierścienia / 256
 sześcian / 203

Ś

ściana boczna graniastosłupa pochyłego / 98
 ściana boczna graniastosłupa prostego / 98
 ściana boczna ostrosłupa / 106
 średnia arytmetyczna / 219
 średnica / 188, 248
 środek koła / 188, 248
 środek odcinka / 60
 środek okręgu / 248
 środek symetrii figury / 292

T

tabela częstości / 222
 tabela liczebności / 220
 tożsamość / 79
 trapez / 187
 trójkąt / 187
 trójkąt równoboczny / 49, 187
 twierdzenie Pitagorasa / 50

U

usuwanie niewymierności z mianownika ułamka / 36

W

walec / 204

wartość bezwzględna liczby / 151
 wartość liczbową wyrażenia algebraicznego / 172
 wielkości wprost proporcjonalne / 174
 wielokąt foremny / 48
 wielokąt wklęsły / 186
 wielokąt wypukły / 186
 wierzchołek ostrosłupa / 106
 włączanie czynnika pod pierwiastek / 30
 współczynnik liczbowy jednomianu / 172
 współczynnik proporcjonalności / 174
 współrzędne punktu w układzie współrzędnych / 59
 współrzędne środka odcinka / 60
 wykres liniowy / 221
 wykres punktowy / 221
 wyłączanie czynnika przed pierwiastek / 30
 wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias / 173
 wynik doświadczenia losowego / 129
 wyrazy podobne / 70, 172
 wyrazy sumy algebraicznej / 70, 172
 wyrażenie algebraiczne / 172
 wysokość graniastosłupa prostego / 202
 wysokość ostrosłupa / 106
 wysokość równoległoboku / 187
 wysokość stożka / 204
 wysokość trapezu / 187
 wysokość trójkąta / 187
 wysokość trójkąta równobocznego / 52, 187
 wysokość walca / 204

Z

zależności w kwadracie / 51
 zależności w trójkącie prostokątnym o kątach ostrych 30° i 60° / 53
 zależności w trójkącie prostokątnym o kątach ostrych 45° i 45° / 52
 zależności w trójkącie równobocznym / 52
 zamiana procentu na ułamek / 152
 zamiana sumy na iloczyn / 173
 zamiana ułamka na procent / 152
 zaokrąglenie w dół / 151
 zaokrąglenie w górę / 151
 zasada szufladkowa Dirichleta / 136
 zasada zaokrąglania liczb / 151
 zbiór liczbowy / 126
 zbiór nieskończony / 126
 zbiór obiektów / 126
 zbiór rozwiązań równania / 173
 zbiór skończony / 126
 zdarzenie / 133
 zdarzenie elementarne / 133
 zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu / 133
 zdarzenie losowe / 133
 zdarzenie niemożliwe / 134, 312
 zdarzenie pewne / 134, 312
 zmienne (w statystyce) / 219

Źródła ilustracji

Okładka: (kratka) Valerio Rosati/EyeEm/Getty Images, (ananas) Taras Dovhych/iStock Photo/Getty Images

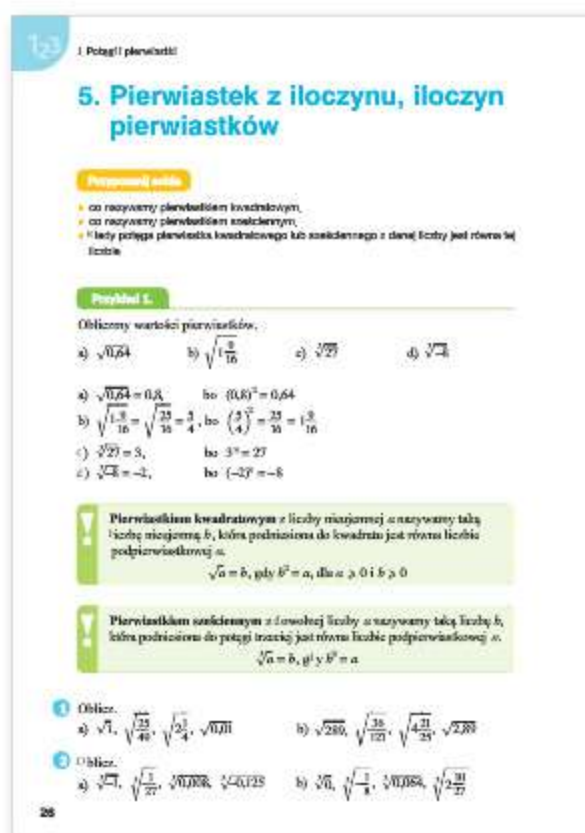
Tekst główny: s. 6 (Sala kinowa La Geode, Francja) Christian Mueller/Shutterstock.com; s. 8 (drzewa) violetkaipa/Shutterstock.com, (żółta karteczka) Garder Elena/Shutterstock.com; s. 20 (planety) cigdem/Shutterstock.com, (planety) robert_s/Shutterstock.com; s. 22 (pendrive) GO DESIGN/Shutterstock.com; s. 23 (żółta karteczka) Garder Elena/Shutterstock.com; s. 24 (ryjówka) Dawn photos/Shutterstock.com, (anakonda) cellistka/Shutterstock.com, (gekon) Thichaa/Shutterstock.com, (żyrafa) jaroslava V/Shutterstock.com; s. 25 (polio) Kateryna Kon/Shutterstock.com, (ospa) CHRIS BJORNBERG/SCIENCE SOURCE/BE&W; s. 32 (sześciiany) Katerina Pereverzeva/Shutterstock.com; s. 35 (stara fotografia – tło) sl_photo/Shutterstock.com, (portret Banacha) reprodukcja Marek Skorupski/Forum; s. 42 (jajka) Babyboom/Shutterstock.com; s. 43 (robot) Maksim Shmeljov/Shutterstock.com; s. 46 (skytale) Paramarta Bari/Shutterstock.com, (hoplita) Bridgeman Images/PhotoPower; s. 47 (Enigma – koła) Creative-Material/Shutterstock.com, (Enigma) Everett Historical/Shutterstock.com, (M. Rejewski, J. Różycki, H. Zygalski) reprodukcja, (popiersie Juliusza Cezara) akg-images/Liszt Collection/BE&W, (U-Boot) John Vector/Shutterstock.com; s. 64 (fioletowe płytki) eriyalim/Shutterstock.com, (drewniane sześciiany) Guiyuan Chen/Shutterstock.com, (kwadraty) dengali/Shutterstock.com, (trójkąty) SRM Company/Shutterstock.com; s. 68 (tło w trójkąty) s_maria/Shutterstock.com, (kumiko) JT Woodworks, (kumiko lampa) KIGI (Andrzej Burkot, Krzysztof Stasiak); <https://makimaki.pl/>, (kumiko lampa zapalona) Alexander Korotunskyi, (trójkąty) Lena Serditova/Shutterstock.com; s. 69 (tło w trójkąty) s_maria/Shutterstock.com, (plaster miodu) Diyana Dimitrova/Shutterstock.com, (złote i czarne sześciokąty) Gilmanashin/Shutterstock.com, (kafelki) andrew1998/Shutterstock.com, (półki) NukTD/Shutterstock.com; s. 84 (żółta karteczka) Garder Elena/Shutterstock.com; s. 86 (dziewczynka i kobieta) Roman Samborskyi/Shutterstock.com; s. 88 (monety) Andrei Kuzmik/Shutterstock.com; s. 89 (samochód) jamesteohart/Shutterstock.com; s. 90 (pomarańcze) Andreja Kovac/Shutterstock.com; s. 92 (skarpetki) Alexandr Makarov/Shutterstock.com; s. 93 (nastolatkowie) YanLev/Shutterstock.com; s. 96 (fioletowe tło) ironova Iuliia/Shutterstock.com, (bilet) Tomasz Korwin-Szymanowski, (sok pomarańczowy) Marraal/Shutterstock.com, (nachos) Tartila/Shutterstock.com, (karta) Tomasz Korwin-Szymanowski, (chłopcy) tynyuk/Shutterstock.com; s. 97 (fioletowe tło) ironova Iuliia/Shutterstock.com, (sala kinowa) Pavlo Plakhotia/Shutterstock.com; s. 101 (żółta karteczka) Garder Elena/Shutterstock.com; s. 102 (żółta karteczka) Garder Elena/Shutterstock.com; s. 103 (owoce) Lightspring/Shutterstock.com; s. 104 (kontener) Evannovostro/Shutterstock.com; s. 106 (piramidy) sculpies/Shutterstock.com; s. 121 (świeca) Fanfo/Shutterstock.com; s. 124 (stary papier – tło) Picsfive/Shutterstock.com, (kontynenty) vectorlight/Shutterstock.com, (Sala kinowa La Geode, Francja) Christian Mueller/Shutterstock.com, (ludziki – ikony) Tomasz Korwin-Szymanowski, (Piramida Kukulkana, Meksyk) Fer Gregory/Shutterstock.com, (piramida – ikona) T VECTOR ICONS/Shutterstock.com; s. 125 (stary papier – tło) Picsfive/Shutterstock.com, (kontynenty) vectorlight/Shutterstock.com, (Muzeum II Wojny Światowej, Polska) Konstantin Tronin/Shutterstock.com, (Cah Szatar, Kazachstan) udmurd/Shutterstock.com, (Krzywa Wieża, Włochy) Guzel Studio/Shutterstock.com, (krzywa wieża – ikona) SNicky/Shutterstock.com, (Malowane chaty, Burkina Faso) Bildagentur Zoonar GmbH/Shutterstock.com; s. 129 (wirująca moneta) surawach5/Shutterstock.com, (1 zł) reprodukcja, (kubek z kostką) Snaprender/Shutterstock.com; s. 130 (kostki) G. Bryk/WSiP; s. 131 (karty) Picsfive/Shutterstock.com, (karty – król) Kasia/Shutterstock.com; s. 134 (kostka) Undorik/Shutterstock.com; s. 135 (kostki) Bonsales/Shutterstock.com, (biurko) Photographee.eu/Shutterstock.com; s. 136 (młodzież) Africa Studio/Shutterstock.com, (książki) Prokrida/Shutterstock.com; s. 138 kostki G. Bryk/WSiP; s. 140 (orzechy) gresei/Shutterstock.com; s. 141 (tarcza) backUp/Shutterstock.com; s. 144 (kalosze) HelenaQueen/Shutterstock.com, (pieczywo) Kostiantyn Fastov/Shutterstock.com; s. 153 (pies) Nynke van Holten/Shutterstock.com; s. 154 (Matejko, Bitwa pod Grunwaldem) Muzeum Narodowe w Warszawie; s. 157 (pomidory) PixaHub/Shutterstock.com; s. 158 (kolejka na Kasprowy Wierch) kosmos111/Shutterstock.com; s. 159 (jajka) Baishev/Shutterstock.com; s. 160 (bakterie) Lukyanova Natalia frenta/Shutterstock.com, (Ziemia) ixpert/Shutterstock.com; s. 168 (orzechy)

Dionisvera/Shutterstock.com, (koszulka) Surrphoto/Shutterstock.com, (metka) profelis_aurata/Shutterstock.com, (duża metka) GO DESIGN/Shutterstock.com; s. 169 (warzywa i owoce) monticello/Shutterstock.com; s. 171 (laptop) Photoongraphy/Shutterstock.com; s. 174 (cukier) Picsfive/Shutterstock.com; s. 175 (banany) PixaHub/Shutterstock.com, (wiśnie) Kovaleva_Ka/Shutterstock.com, (truskawki) Valentyn Volkov/Shutterstock.com, (czereśnie) Oqbas/Shutterstock.com, (flagi) Puwadol Jaturawutthichai/Shutterstock.com; s. 176 (ludzie na rowerach) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com; s. 181 (bela materiału) AnnaBabich/Shutterstock.com, (wzór na materiale) Mrs. Opossum/Shutterstock.com, (tulipany) Mikhail Abramov/Shutterstock.com; s. 198 (mozaika) Panayu Chairatananond/Shutterstock.com; s. 208 (worki) Pavel Kubarkov/Shutterstock.com, (szopa) Volodymyr Krasyuk/Shutterstock.com, (drzwi) Ninell/Shutterstock.com; s. 212 (piramida) Alberto Loyo/Shutterstock.com; s. 217 (rozek) Jag_cz/Shutterstock.com, (piórniki) Vladvm/Shutterstock.com, (beczka) Dja65/Shutterstock.com, (piłka) jannoon028/Shutterstock.com, (wazon) Dontree/Shutterstock.com, (kula) Lipskiy/Shutterstock.com, (klocek) catwalker/Shutterstock.com, (pachołek drogowy) chanchai howharn/Shutterstock.com, (głośnik) Volodymyr Krasyuk/Shutterstock.com, (flakon) Scolopender/Shutterstock.com, (lampa) VitaminCo/Shutterstock.com, (szklanka) Gun2becontinued/Shutterstock.com; s. 218 (Ziemia) robert_s/Shutterstock.com; s. 222 (piłkarz) Larry St. Pierre/Shutterstock.com; s. 231 (bieg) Mateusz Włodarczyk/NurPhoto/Getty Images; s. 233 (cukierki) Oliver Hoffmann/Shutterstock.com; s. 234 (jabłka i gruszka) Markus Mainka/Shutterstock.com; s. 239 (kobieta na hulajnodze) Spic/Shutterstock.com; s. 246 (mężczyzna na motorze) OcsKay Mark/Shutterstock.com; s. 249 (Archimedes) reprodukcja, (stary papier – tło) sl_photo/Shutterstock.com; s. 251 (zegar) Warsaw_By_Drone/Shutterstock.com, (Pałac Kultury i Nauki) MaxxjaNe/Shutterstock.com; s. 254 (tort) highviews/Shutterstock.com; s. 258 (znak drogowy) reprodukcja; s. 259 (wachlarz) aydemiryagmur/Shutterstock.com, (kapelusz) Mega Pixel/Shutterstock.com, (oko) Billion Photos/Shutterstock.com; s. 260 (kolejka) koya979/Shutterstock.com; s. 261 (młyńskie koło) ExFlow/Shutterstock.com; s. 264 (wycieraczka tylna) Bepaliy/Shutterstock.com; s. 265 (krokusy) Sandra van der Steen/Shutterstock.com, (tulipan) Annaev/Shutterstock.com, (hiacynty) Annaev/Shutterstock.com; s. 266 (tło z pizzą, warzywa) Kumer Oksana/Shutterstock.com, (pizza) Danyliuk Konstantine/Shutterstock.com, (ludzie przy stole) Oxy_gen/Shutterstock.com; s. 267 (tło z pizzą, warzywa) Kumer Oksana/Shutterstock.com, (chłopiec) tynyuk/Shutterstock.com, (pizza) Danyliuk Konstantine/Shutterstock.com, (pizza) mart/Shutterstock.com; s. 268 (linijka) NikAndr/Shutterstock.com; s. 275 (kartka) oriontrail/Shutterstock.com; s. 282 (Chiny) Ingram Publishing, (Taj Mahal) Olena Tur/Shutterstock.com, (Łazienki Królewskie w Warszawie) Takashi Images/Shutterstock.com, (krzesło) kibri_ho/Shutterstock.com, (materiał) Grażyna Bryk/WSiP, (skrzypce) Robert Balcerzak/WSiP, (motyl) Ingram Publishing/ThETA, (śnieżynka) Kichigin/Shutterstock.com, (liść) Grażyna Bryk i Małgorzata Kozioł, (fioletowy kamień) NickKnight/Shutterstock.com, (niebieski kamień) NickKnight/Shutterstock.com, (zielony kamień) sudjai banthaothuk/Shutterstock.com; s. 287 (kredki) PIXbank CZ/Shutterstock.com; s. 291 (kwiaty) Flower design sketch gallery/Shutterstock.com; s. 301 (monety) reprodukcja, (kostki) G. Bryk/WSiP, (karteczki) Lyudmyla Kharlamova/Shutterstock.com; s. 303 (parking) non c/Shutterstock.com; s. 304 (domofon) OlegRi/Shutterstock.com; s. 305 (Praga) Oleksiy Mark/Shutterstock.com; s. 306 (kostki) timquo/Shutterstock.com; s. 310 (brakdance) Syda Productions/Shutterstock.com; s. 311 (5 zł) reprodukcja, (kostki) G. Bryk/WSiP; s. 317 (kostka) Leon Rafael/Shutterstock.com, (ludzie w basenie) dotshock/Shutterstock.com; s. 318 (jajka sadzone) Vlada Tikhonova/Shutterstock.com; s. 319 (bile) YummyBuum/Shutterstock.com; s. 320 (skok wzwyż) WoodysPhotos/Shutterstock.com; s. 323 (turniej szachowy) LESZEK KOTARBA/East News, (pionki szachowe) vipman/Shutterstock.com; s. 324 (tablet) Lutsina Tatiana/Shutterstock.com, (awatary) tynyuk/Shutterstock.com; s. 325 (ludziki) robuart/Shutterstock.com

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że podjęły starania mające na celu dotarcie do właścicieli i dysponentów praw autorskich wszystkich zamieszczonych utworów. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, przytaczając w celach dydaktycznych utwory lub fragmenty, postępują zgodnie z art. 27¹ ustawy o prawie autorskim. Jednocześnie Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że są jedynym podmiotem właściwym do kontaktu autorów tych utworów lub innych podmiotów uprawnionych w wypadkach, w których twórcy przysługuje prawo do wynagrodzenia.

Matematyka wokół nas

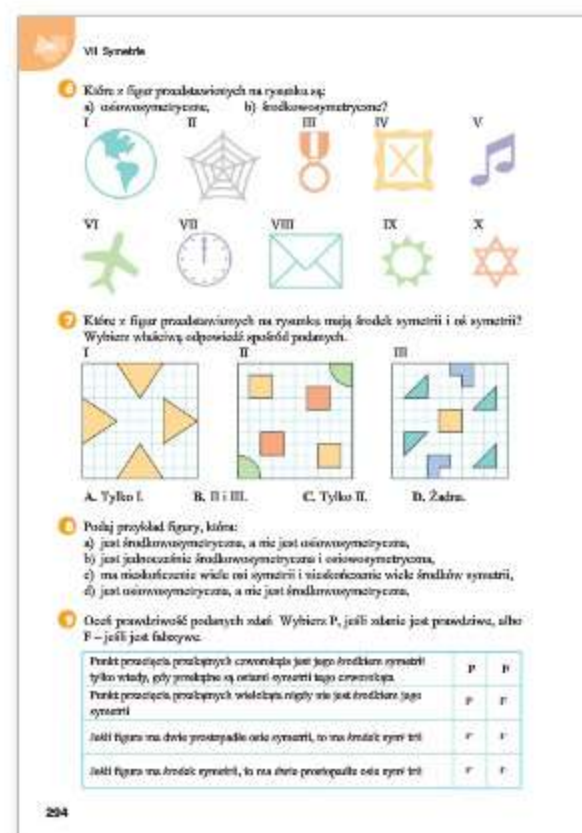
O podręczniku



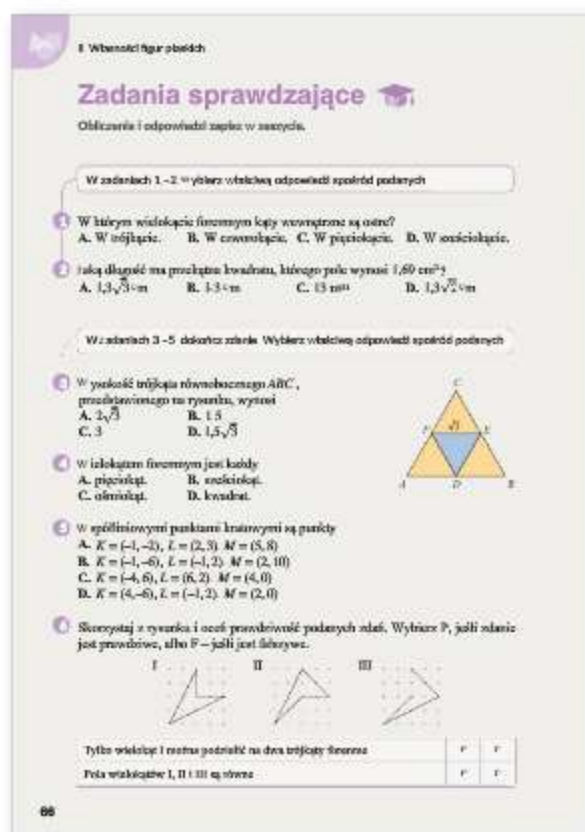
Dobrze wyjaśnione pojęcia matematyczne umożliwią samodzielną naukę.



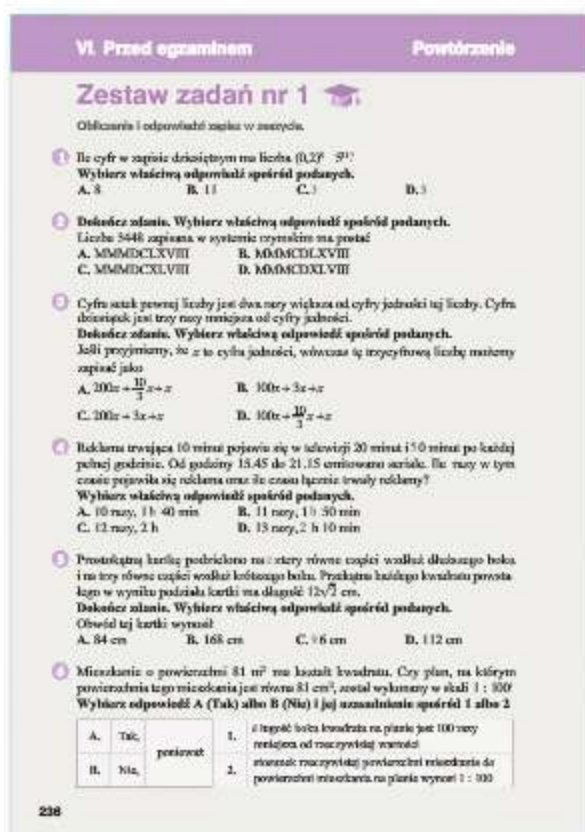
Przykłady rozwiązywane krok po kroku pomagają w zrozumieniu nowych pojęć i reguł.



Duża liczba zadań różnych typów wspomaga ćwiczenie umiejętności.



Zadania utrwalające i sprawdzające podsumowują umiejętności przed sprawdzianem.



Teoria oraz zadania w Powtórzeniu dobrze przygotowują do egzaminu.



Infografiki przedstawiają zastosowania matematyki i zachęcają do nauki.



WYDAWNICTWA
SZKOLNE
i PEDAGOGICZNE

wsip.pl
sklep.wsip.pl
infolinia: 801 220 555



ProfiLingua
profi-lingua.pl