

6

Marcin Braun
Agnieszka Mańkowska
Małgorzata Paszyńska

Matematyka z kluczem

PODRĘCZNIK DO MATEMATYKI
DLA KLASY SZÓSTEJ SZKOŁY PODSTAWOWEJ
CZĘŚĆ II



Twoje mocne strony

Druga Nowa Era

Nigdy tym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy druk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Wszyskich e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regularne książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę (o ironio), w której papier nie jest bezcennie marnowany dla pieniędzy. Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów!

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

Spis treści

IV Figury na płaszczyźnie

1. Okrąg i koło. Odległość punktu od prostej	6
2. Kąty	12
3. Trójkąty	21
4. Czworokąty	31
5. Pola czworokątów	39
6. Figury na kratce	47
<i>Powtórzenie przed klasówką</i>	57
<i>Zadania na temat...</i>	60
<i>Zadania na deser</i>	62

V Równania

1. Równania, czyli skąd my to znamy	66
2. Sprawdzanie, czyli rozwiązanie bez rozwiązywania	72
3. Jak rozwiązać równanie	79
4. Trudniejsze równania	85
5. Zadania tekstowe	93
<i>Powtórzenie przed klasówką</i>	100
<i>Zadania na temat...</i>	101
<i>Zadania na deser</i>	103

VI Bryły

1. Bryły i ich objętość	106
2. Zamiana jednostek	114
3. Siatki brył	120
4. Pole powierzchni bryły	128
<i>Powtórzenie przed klasówką</i>	135
<i>Zadania na temat...</i>	137
<i>Zadania na deser</i>	140

VII Matematyka i my

1. Tabele	142
2. Diagramy i wykresy	148
3. Procenty	155
4. Prędkość, droga, czas – część 1	162
5. Prędkość, droga, czas – część 2	167
6. Korzystanie ze wzorów	174
7. Plan, mapa i skala	180
<i>Powtórzenie przed klasówką</i>	187
<i>Zadania na temat...</i>	189
<i>Zadania na deser</i>	191

VIII Matematyka na co dzień

1. Zakupy	194
2. Działki, domy, mieszkania	198
3. Podróż	203
4. Odżywianie	208

Odpowiedzi	213
------------	-----

Pamiętaj, że podręcznik, który masz przed sobą, w kolejnych latach będzie służył Twoim młodszym koleżankom i kolegom. Dbaj o niego, nie pisz w nim, zadania rozwiązuj w zeszycie przedmiotowym.

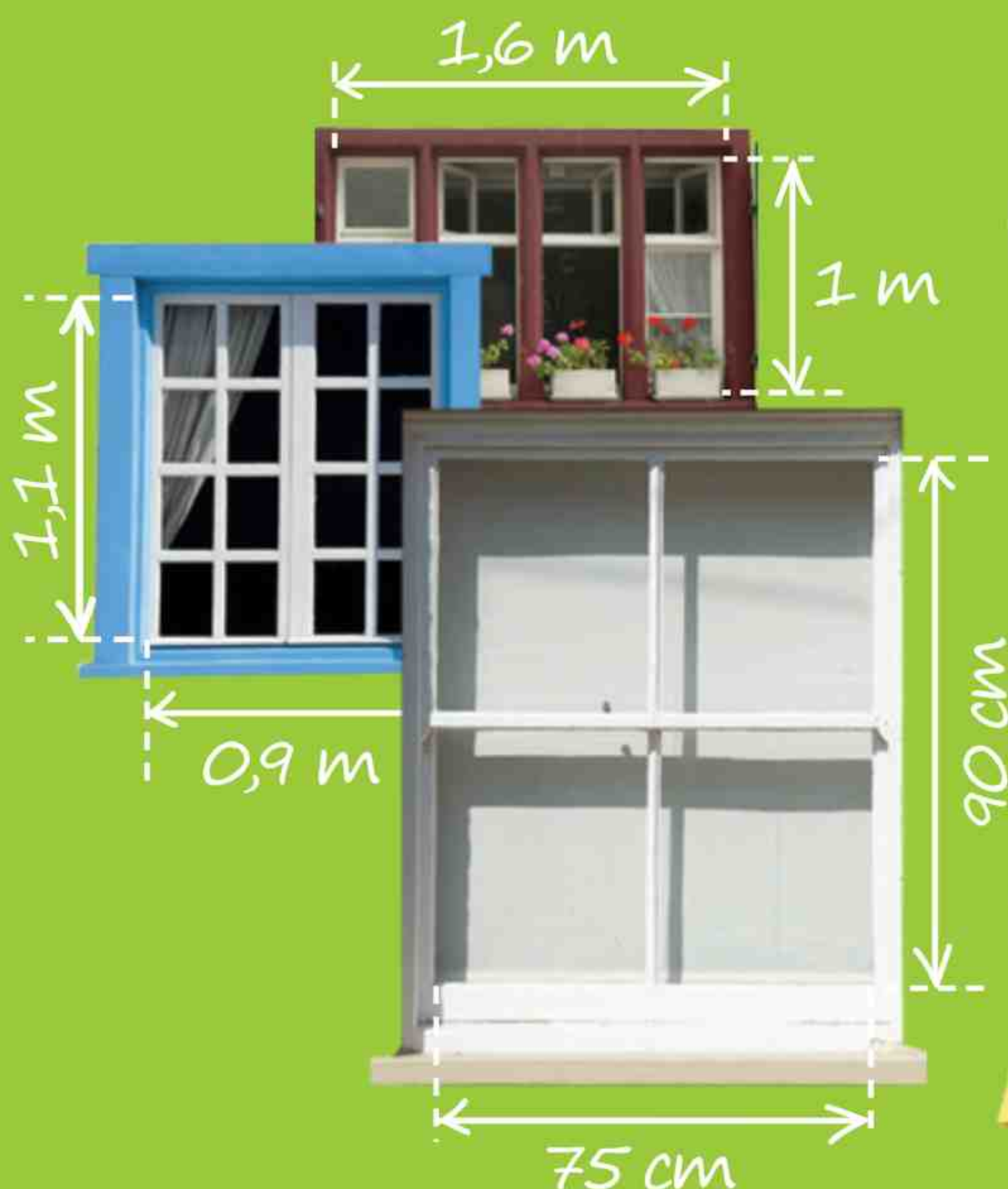
Redakcja

IV



Figury na płaszczyźnie

Najczęściej okna w naszych domach mają kształt prostokąta. Coraz częściej jednak architekci projektują okna, które mają kształty różnych figur.



Ile metrów
kwadratowych
szyby potrzeba
do tych okien?



Okrąg i koło.

Odległość punktu od prostej



Na dobry początek

Trafi – nie trafi?

Przygotujcie gładką kartkę, linijkę i dwa pisaki w różnych kolorach – po jednym dla każdego z was.

- ▶ Narysuj na środku kartki odcinek OA o długości 2 cm.
- ▶ Zaznacz swoim pisakiem punkt A_1 odległy o 2 cm od punktu O i co najmniej o 5 mm od punktu A . Nie korzystaj z linijki.
- ▶ Sprawdź za pomocą linijki, czy twój punkt jest dobrze zaznaczony. Jego odległość od punktu O może się różnić od oczekiwanej odległości nie więcej niż o 1 mm, podobnie odległość od punktu A .
- ▶ Jeśli odległość od punktu O jest zbyt mała lub zbyt duża, przekreśl zaznaczony punkt i zaznacz punkt A_1 w odpowiedniej odległości.
- ▶ Drugi gracz powtarza te czynności, zaznaczając swoim pisakiem punkt A_2 , również oddalony o 2 cm od punktu O i co najmniej o 5 mm od punktu A_1 .
- ▶ Na zmianę zaznaczajcie według tych zasad kolejne punkty ($A_3, A_4, A_5 \dots$).
- ▶ Gra trwa do momentu, gdy nie można już zaznaczyć kolejnych punktów. Wygrywa ten, kto od razu zaznaczył poprawnie więcej punktów.

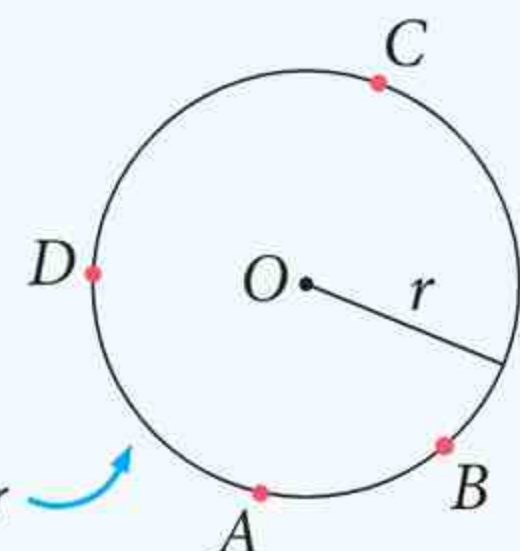
Okrąg i koło

Zapamiętaj

Okrąg

Każdy punkt okręgu leży w **tej samej odległości** od punktu O , czyli od środka okręgu. Ta odległość jest równa promieniowi r .

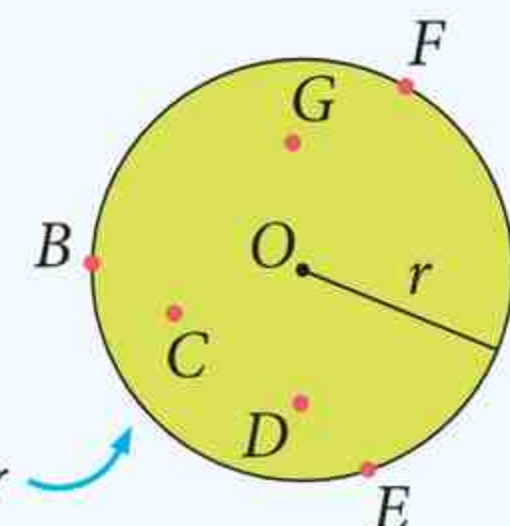
okrąg o środku O i promieniu r



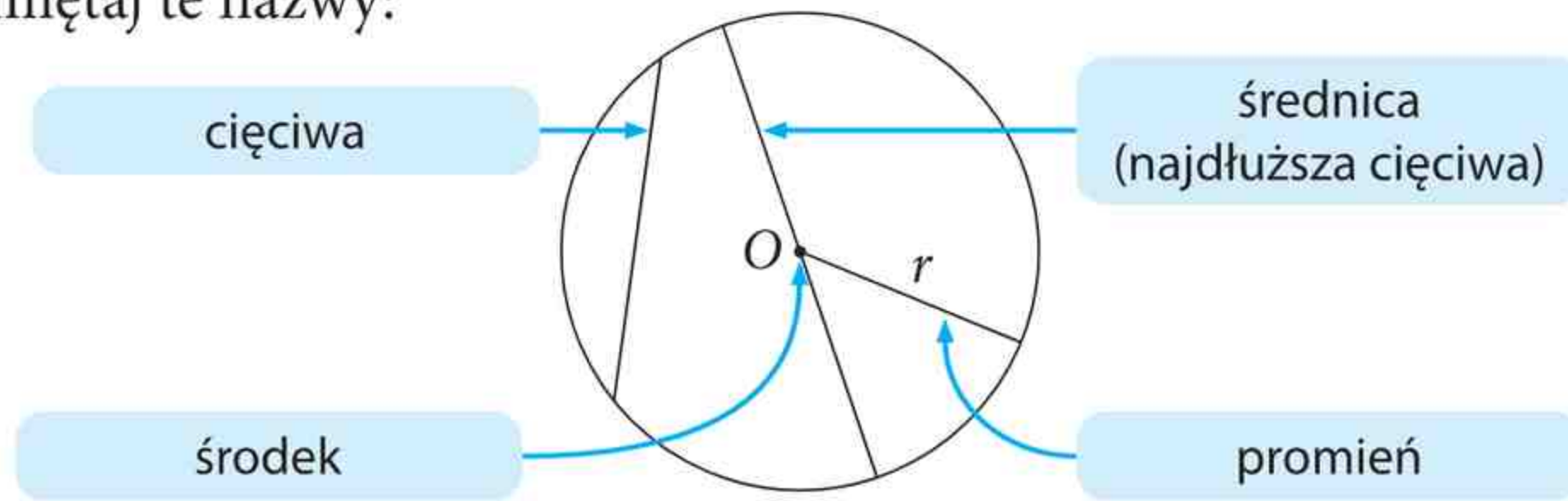
Koło

Każdy punkt koła leży albo w odległości r od środka O , albo bliżej.

koło o środku O i promieniu r

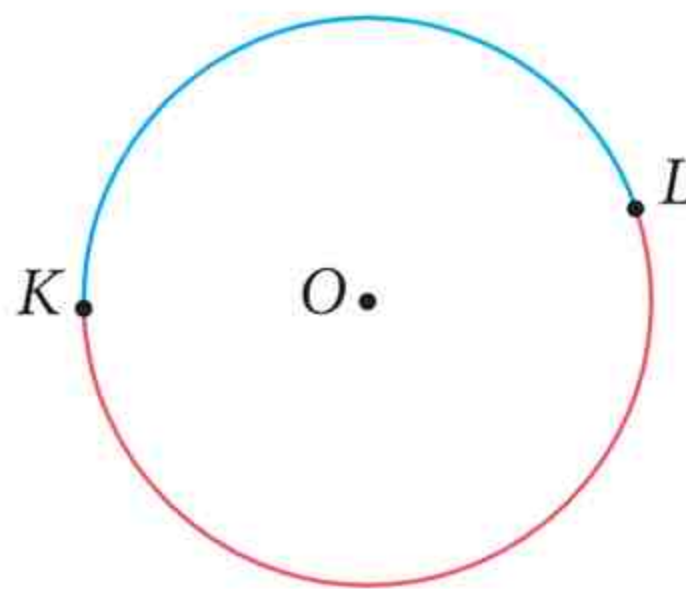


Zapamiętaj te nazwy:



Gdy mówimy o promieniu lub średnicy okręgu (koła), to w zależności od sytuacji mamy na myśli odpowiedni odcinek lub jego długość.

Łuk to część okręgu między dwoma punktami okręgu. Punkty te są końcami łuku.

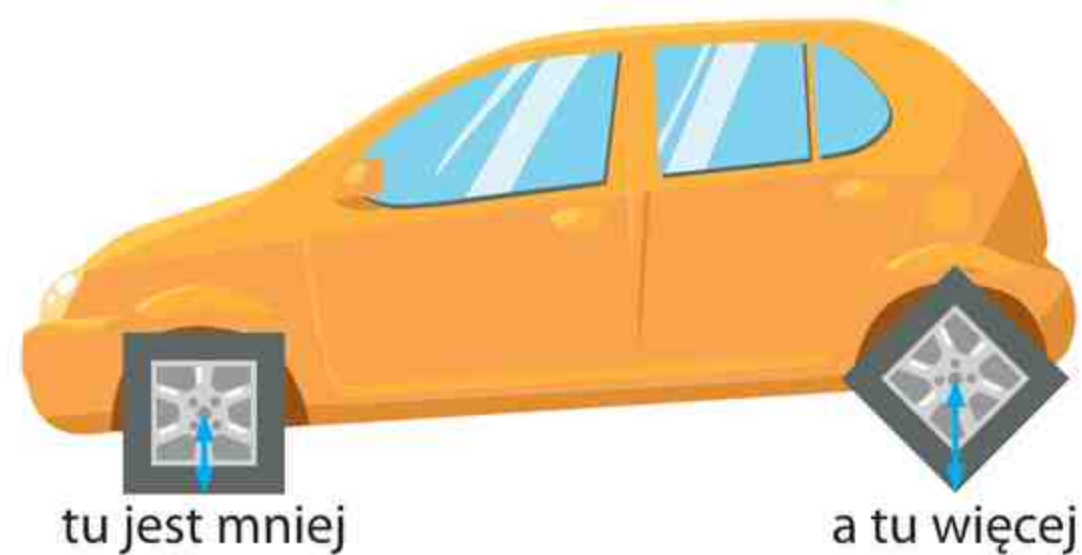


Okrągłe przedmioty wykorzystujemy nie bez powodu. Na przykład w samochodzie stosujemy koła, a nie kwadraty. Dlaczego?

Każdy punkt okręgu jest tak samo oddalony od środka okręgu. Gdy koło samochodu się obróci, odległość jego środka od ziemi się nie zmieni.



Kwadrat nie ma tej własności. Samochód na kwadratowych „kołach” podskakiwałby, jadąc po równej drodze, a przy większej prędkości po prostu rozsypałby się od wstrząsów.



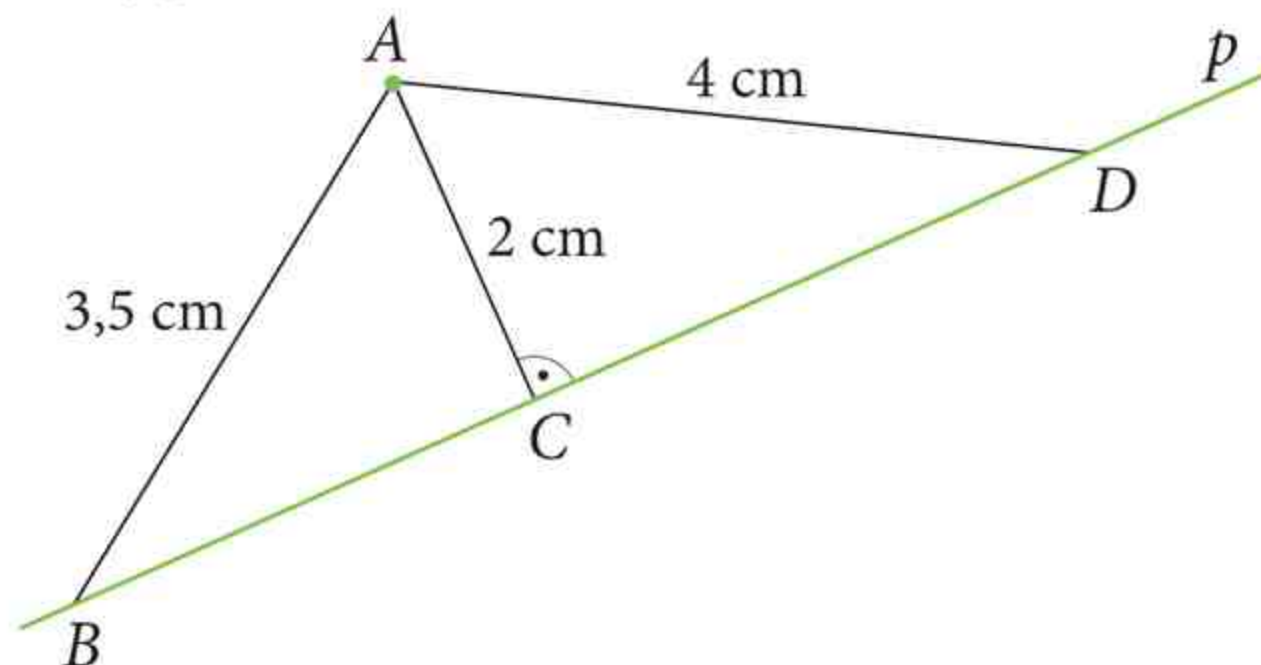
Okręgi, koła i łuki rysujemy za pomocą cyrkla.

Dobra rada

Kiedy rysujesz okrąg lub koło, najpierw zaznacz jego środek.

Odległość punktu od prostej

Popatrz na punkty B , C i D zaznaczone na prostej p . Każdy z nich leży w innej odległości od punktu A . Najbliżej punktu A leży punkt C . Odcinek AC jest prostopadły do prostej p . Długość odcinka AC nazywamy **odległością punktu A od prostej p** .



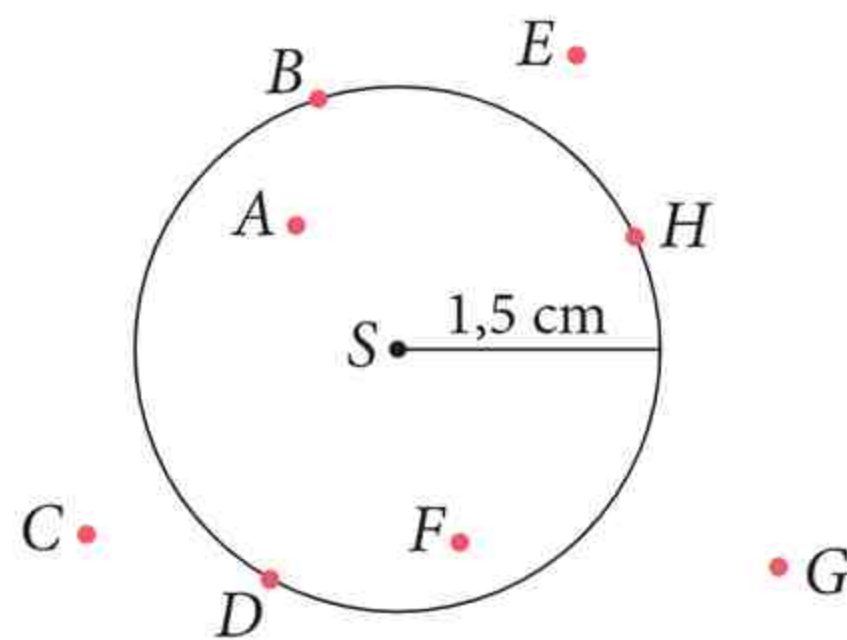
Odległość punktu A od prostej p jest równa 2 cm.

Zapamiętaj

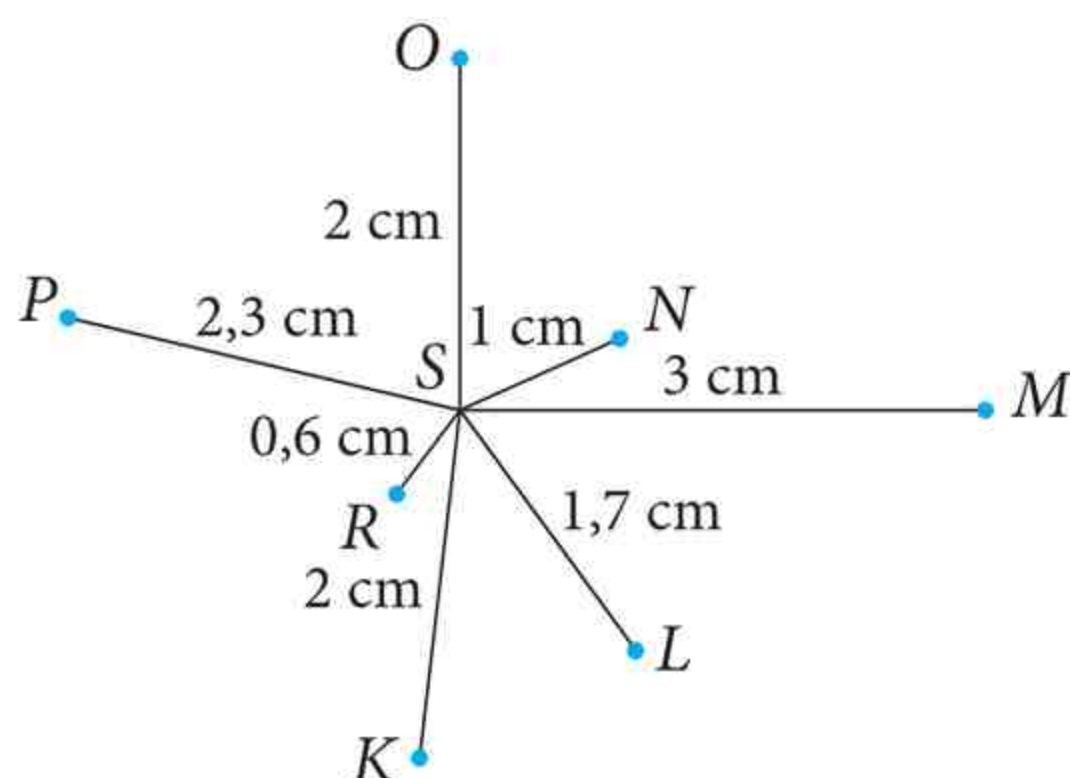
Odległość punktu od prostej mierzymy wzdłuż prostej do niej prostopadłej.

Zadania

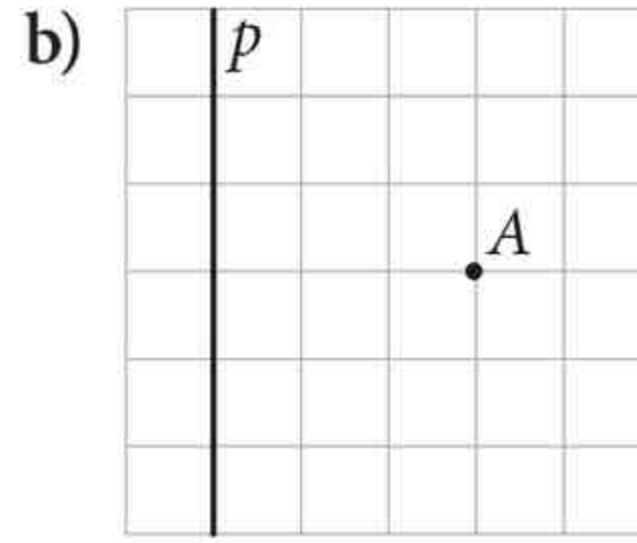
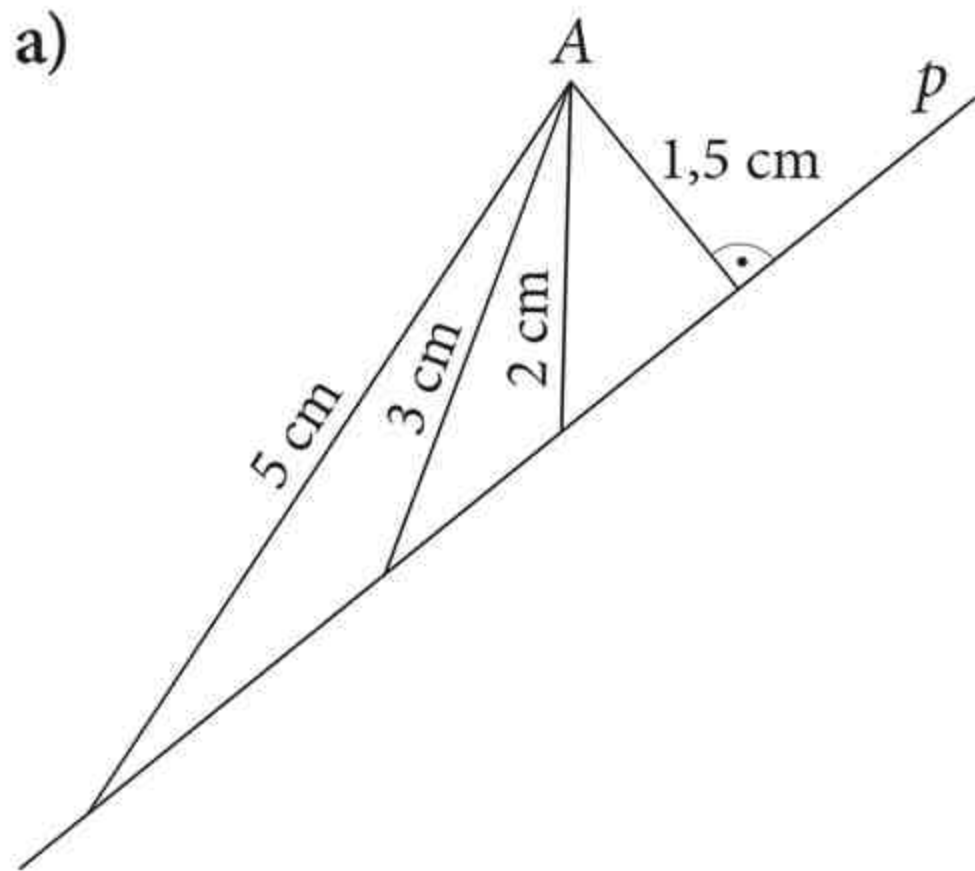
- 1 Na rysunku przedstawiono okrąg o środku S i zaznaczono kilka punktów. Bez mierzenia odpowiedz, które punkty leżą w odległości:
 - 1,5 cm od punktu S ,
 - większej niż 1,5 cm od punktu S ,
 - mniejszej niż 1,5 cm od punktu S .



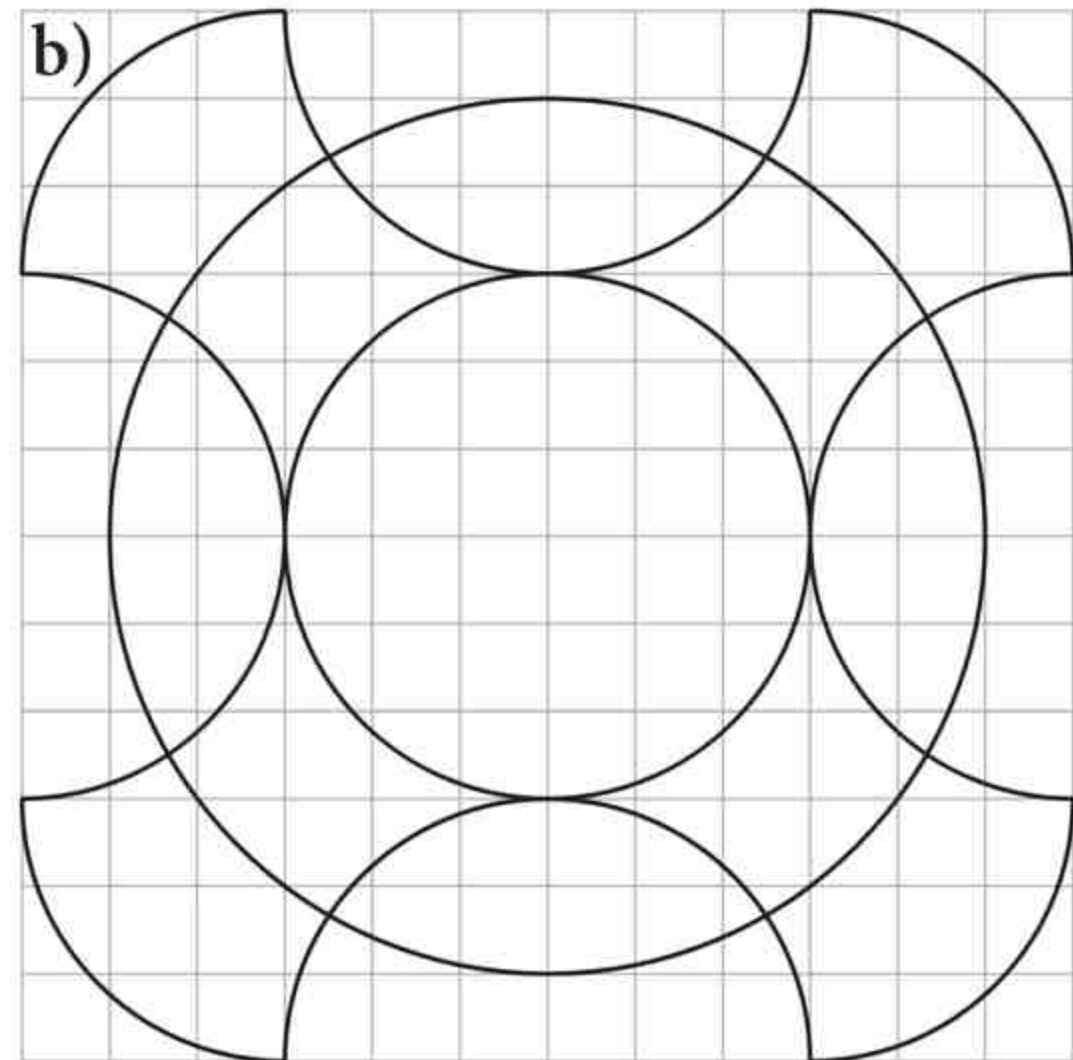
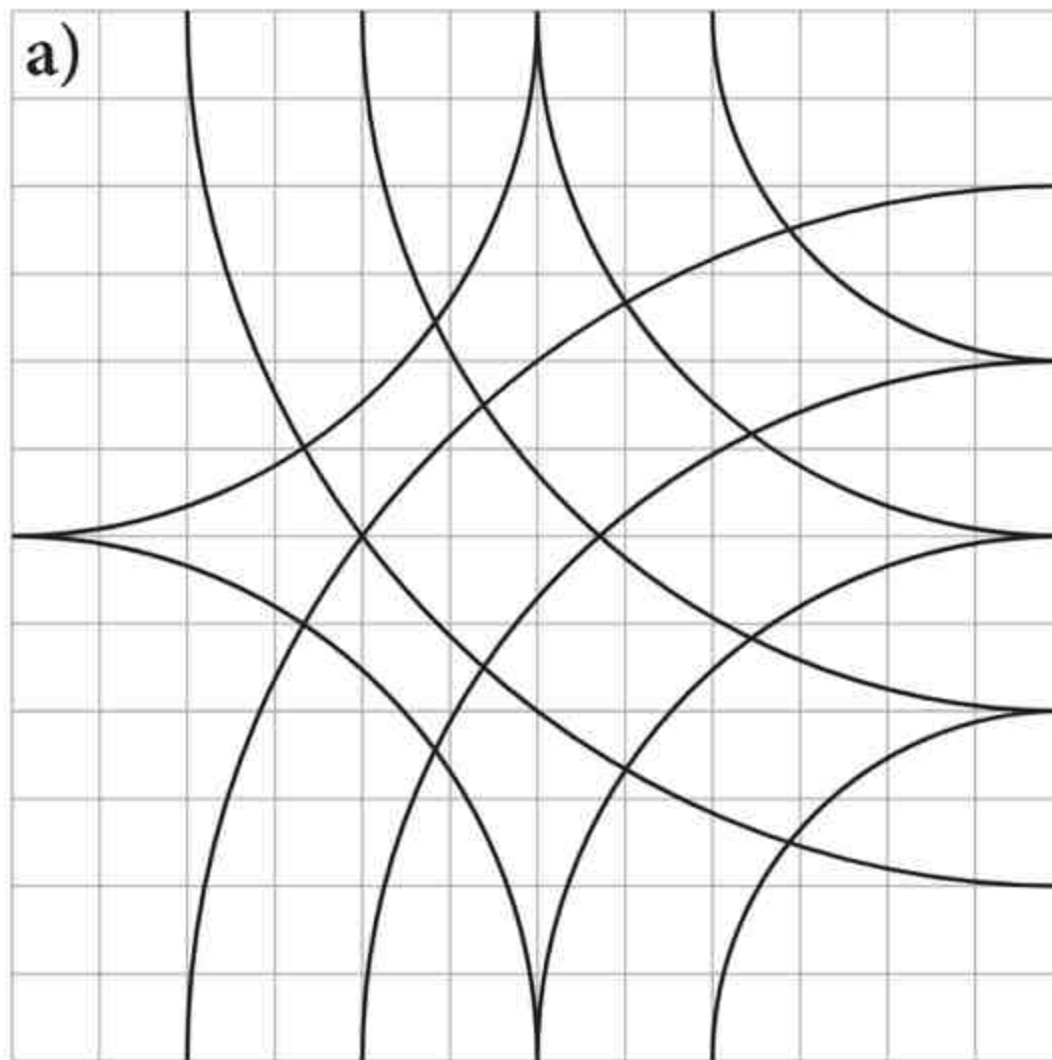
- 2 Które punkty leżą na okręgu o środku S i promieniu 2 cm?



- **3** Ile wynosi odległość punktu A od prostej p ?



- **4** Przerysuj starannie rysunek na kartkę w kratkę. Zwróć uwagę na położenie środków i promienie okręgów liczone w kratkach.

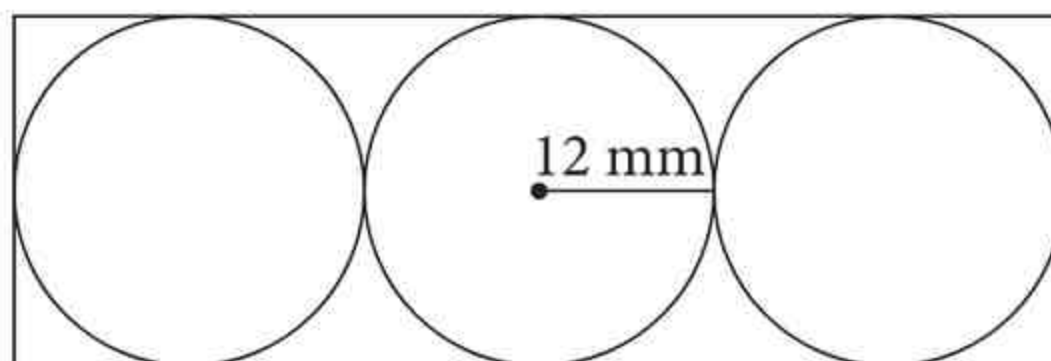


- **5** Narysuj okrąg o promieniu 4,5 cm w skali 1 : 1. Następnie narysuj ten okrąg w skali 1 : 3, czyli okrąg o promieniu trzy razy mniejszym.
- **6** Kwadratowa koperta na płytę CD ma bok równy 12,5 cm. Oblicz, jaki promień ma płyta, jeśli jej średnica jest o 5 mm krótsza od boku koperty.
- **7** Traktor narysowano w skali 1 : 60. Zmierz średnicę jego dużego koła na tym rysunku. Jaki jest promień tego koła w rzeczywistości?



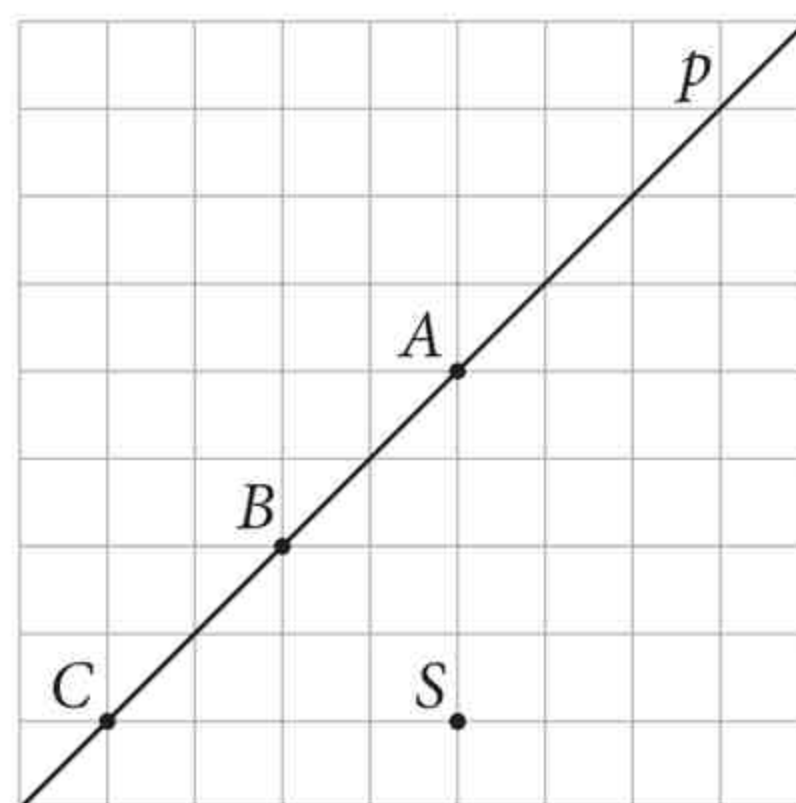
- **8** Agnieszka chce wyciąć jak największe koło z prostokątnego kartonu o wymiarach $32 \text{ cm} \times 18 \text{ cm}$. Jaki największy promień może mieć to koło?

- **9** Jakie wymiary w centymetrach ma prostokąt na rysunku obok? Oblicz obwód i pole tego prostokąta.



- **10** W kole o promieniu 5 cm zaznaczono punkt A leżący w odległości 2 cm od środka koła. Jaką długość ma najdłuższa cięciwa przechodząca przez ten punkt?

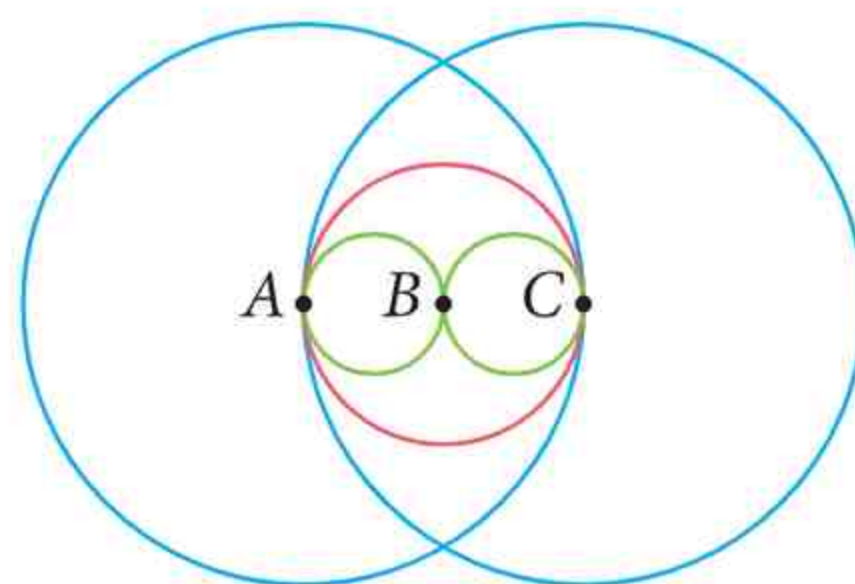
- **11** Czy na rysunku obok odległość punktu S od prostej p jest równa długości odcinka SA , SB czy SC ?



- **12** W trójkącie KLM bok KL ma długość 4 cm , a wysokość opuszczona na ten bok równa jest 3 cm . Ile wynosi odległość punktu M od prostej KL ?

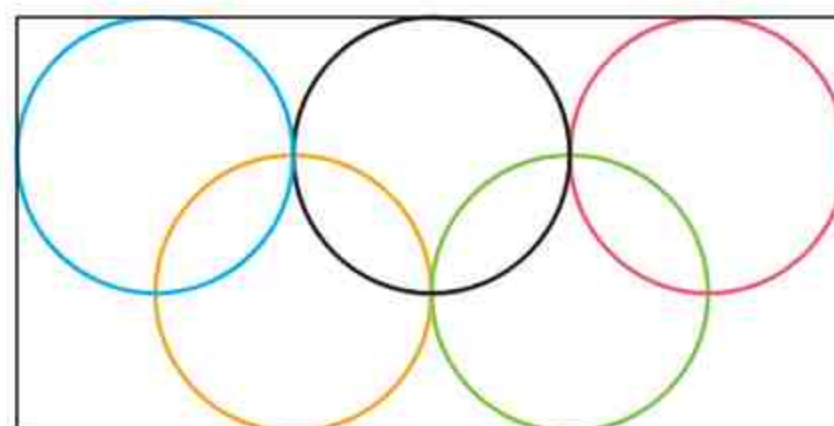
- **13** Okręgi w jednakowych kolorach mają równe promienie. Niebieskie okręgi mają środki odpowiednio w punktach A i C , a ich średnice mają po $2,4 \text{ cm}$.

- a) Ile wynosi promień czerwonego okręgu?
b) Ile wynoszą promienie zielonych okręgów?



- **14** Na kartce w kratkę narysuj poziomą prostą a . Następnie narysuj:
- dziesięć punktów odległych od prostej a o 2 cm ,
 - figurę, którą tworzą wszystkie punkty odległe od prostej a o 2 cm ,
 - figurę, którą tworzą wszystkie punkty odległe od prostej a o 2 cm lub mniej niż 2 cm .

- 🏆 **15** Jakie wymiary ma flaga olimpijska przygotowana przez uczniów na międzyszkolne igrzyska sportowe, jeżeli każde z pięciu kół na tej fladze ma promień 65 cm ?



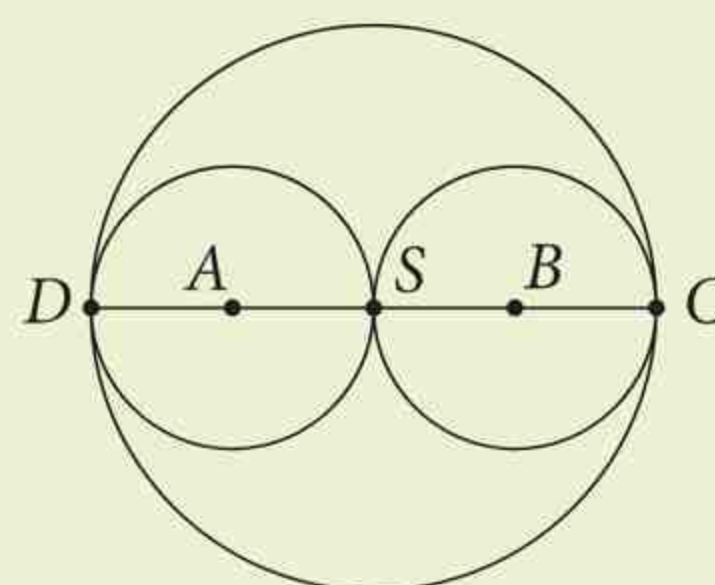
 Dla dociekliwych

- 1 Zaznacz na kartce punkt A oraz wszystkie punkty, których odległość od A wynosi 1,5 cm.
- 2 Zaznacz punkty A i B odległe od siebie o 5 cm. Znajdź i zaznacz punkt C , który jest odległy od punktu A o 2 cm i od punktu B o 4 cm. Ile jest takich punktów? Jak znaleźć wszystkie?

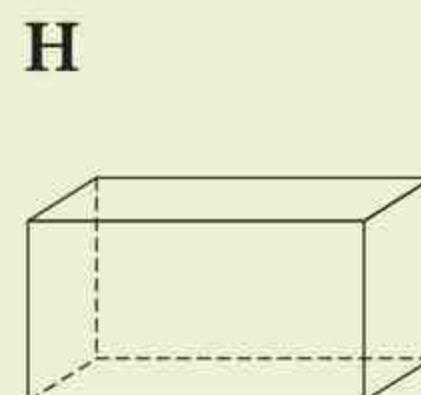
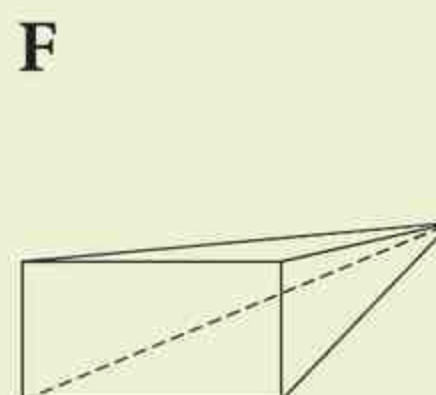
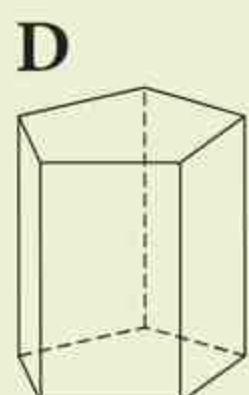
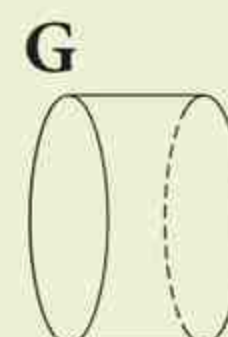
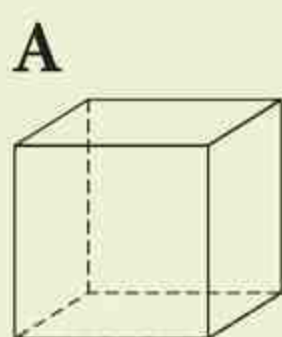
 Czy już umiem?

- I Ile centymetrów ma promień okręgu o średnicy 15 dm?
- II Narysuj prostą p . Zaznacz punkt A , którego odległość od prostej p będzie równa 25 mm.
- III Punkty A , S i B są środkami okręgów. Każdy z małych okręgów ma średnicę 4 cm. Określ długość odcinka:

- a) AB ,
- b) CD ,
- c) AS .



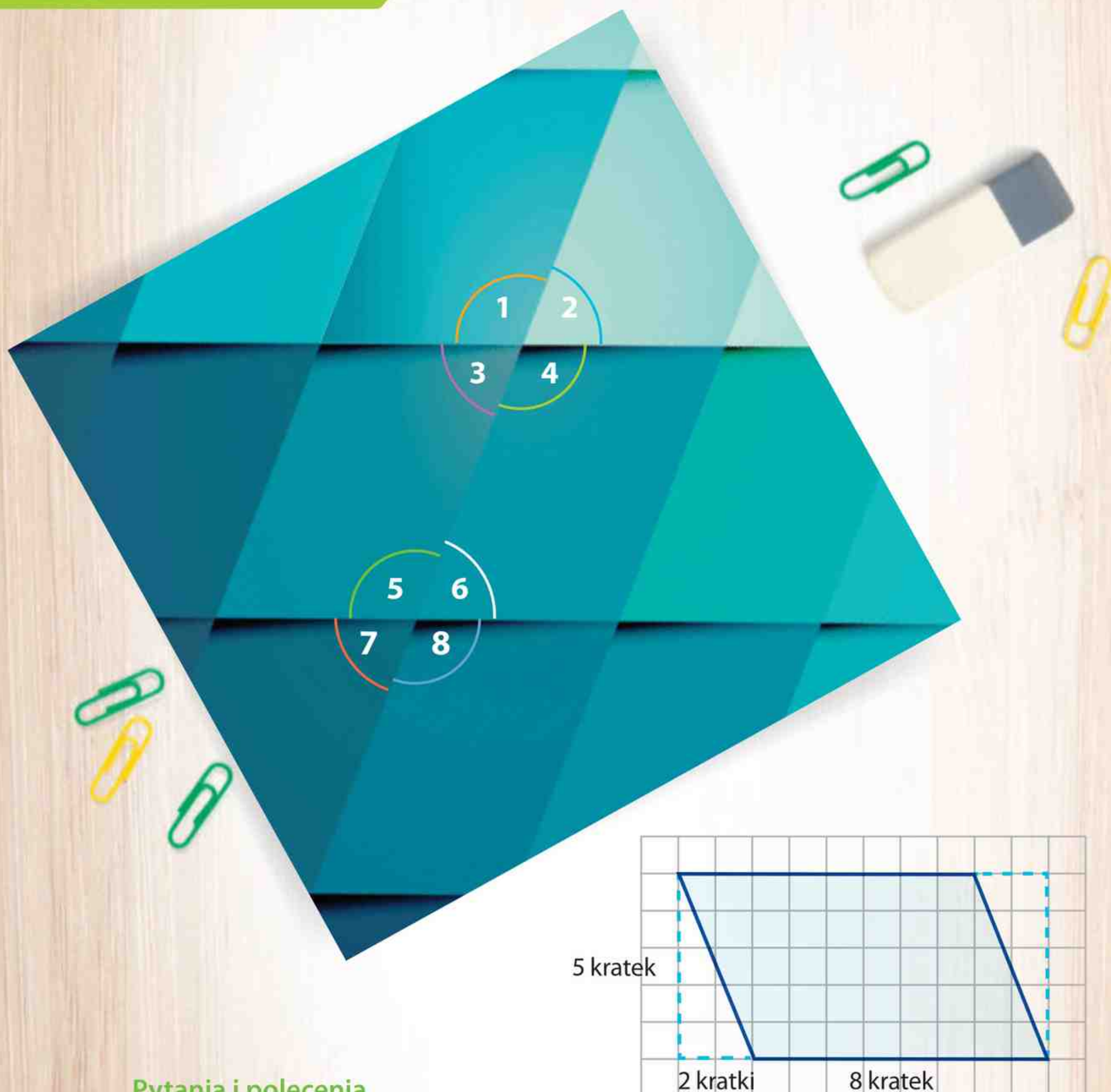
IV Na rysunku przedstawiono kilka brył.



- a) Podaj nazwę każdej bryły.
- b) Ile spośród tych brył to graniastosłupy? Które to bryły?
- c) Ile spośród tych brył to ostrosłupy? Które to bryły?

  Na dobry początek

Deseń z równoległoboków



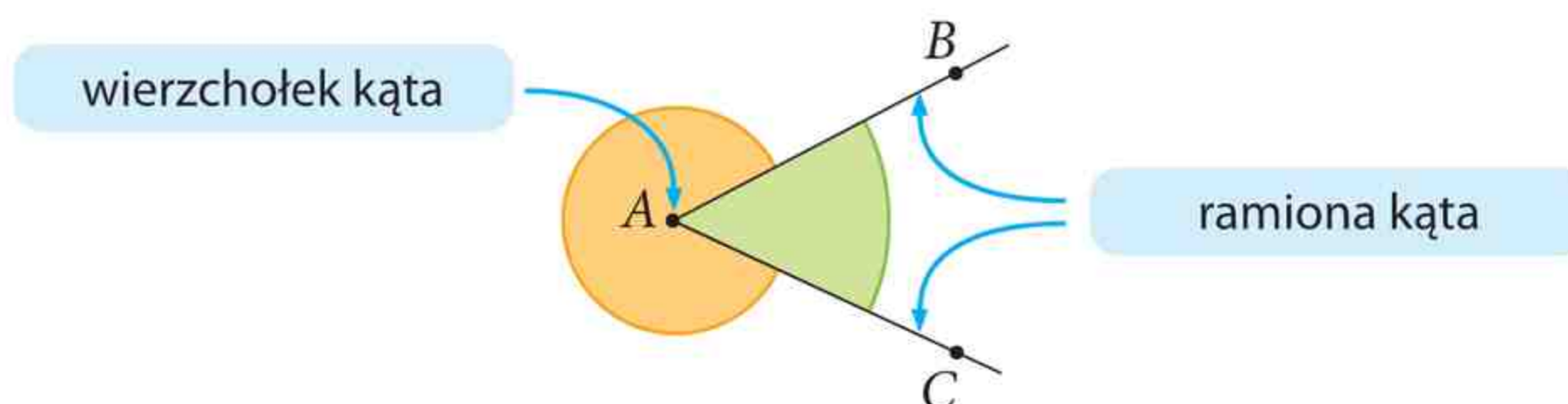
Pytania i polecenia

Mozaikę stworzono z równoległoboków takich, jak ten pokazany na kratce. Wytnij z kartki w kratkę taki równoległobok. Przyjrzyj się kątom ponumerowanym na mozaice i odpowiedz na pytania.

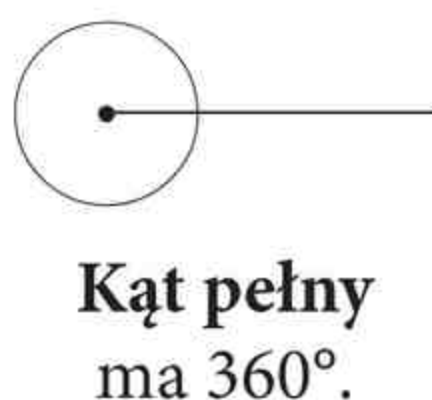
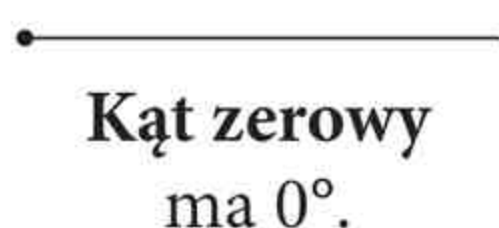
- Które kąty są równe kątowi 1? Sprawdź to, używając wyciętego równoległoboku. Zapisz ich numery w zeszycie.
- Przyjrzyj się pozostałym kątom. Co można o nich powiedzieć?

Kąt

Dwie półproste o wspólnym początku dzielą płaszczyznę na dwa obszary. Każdy z tych obszarów wraz z półprostymi tworzy kąt. Aby wskazać, który z dwóch kątów wyznaczonych przez półproste nas interesuje, zaznaczamy go łukiem. Na rysunku poniżej zaznaczono oba kąty utworzone przez półproste AB i AC .



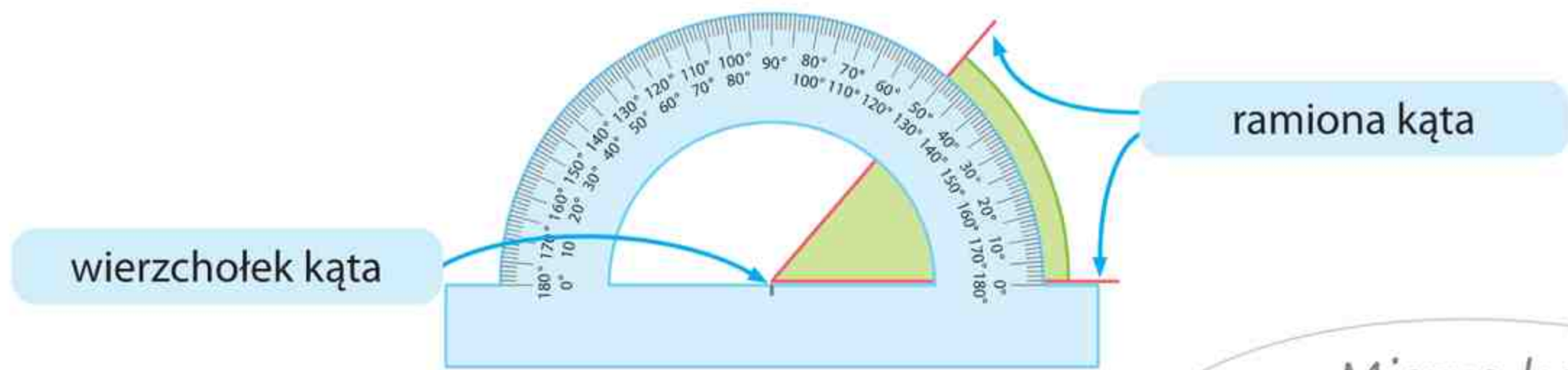
Rodzaje kątów



Kąt pełny oraz każdy z kątów od 0° do 180° włącznie są **kątami wypukłymi**.

IV. Figury na płaszczyźnie

Kąty mierzymy kątomierzem.



Mierzę kąt rozwarty, więc musi on mieć więcej niż 90° .

Dobra rada

Zawsze zwracaj uwagę na to, czy odczytujesz miarę kąta z odpowiedniej skali kątomierza!

Najpierw się zastanów, czy mierzysz kąt ostry czy rozwarty.



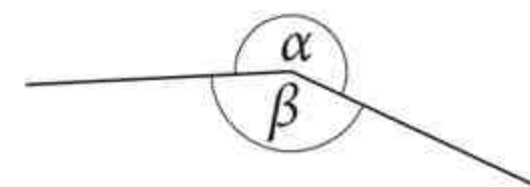
Przykład 1

Ustal, jaką miarę ma kąt α . Skorzystaj z kątomierza.

Sposób 1

Wystarczy zmierzyć kąt rozwarty β i odjąć jego miarę od 360° .

Kąt β ma 152° . A więc $\alpha = 360^\circ - 152^\circ = 208^\circ$.

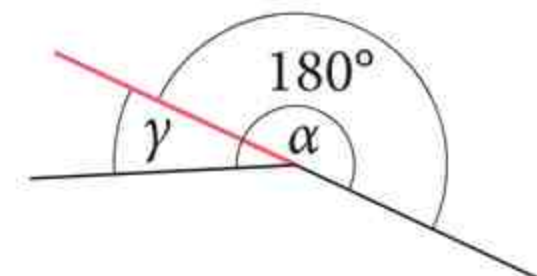


Sposób 2

Możemy przedłużyć jedno ramię kąta α tak jak na rysunku i zmierzyć kąt γ .

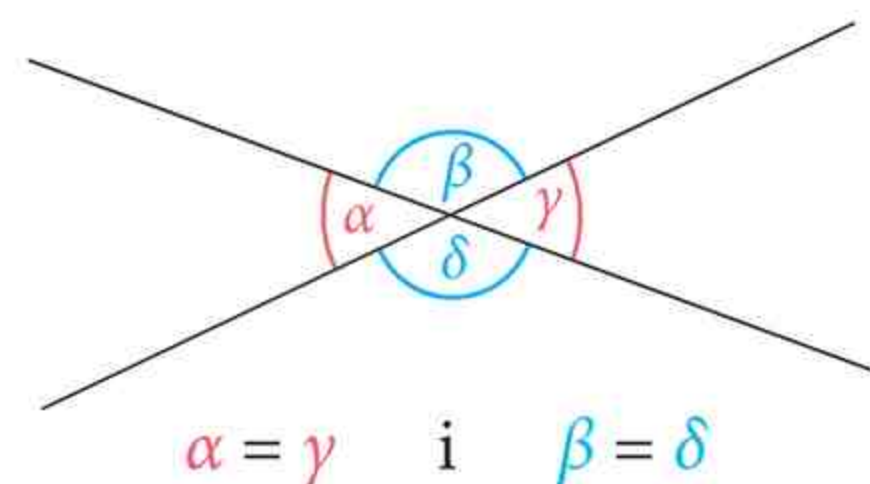
Kąt γ ma 28° .

A więc $\alpha = 180^\circ + \gamma = 180^\circ + 28^\circ = 208^\circ$.



Kąty między prostymi

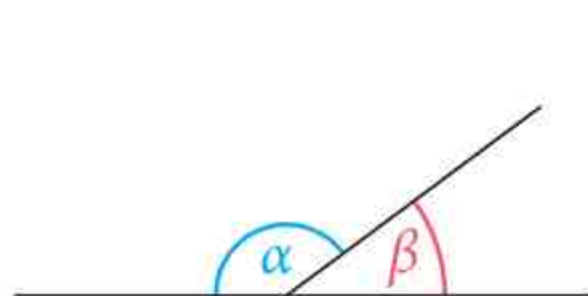
Kąty α i γ są **kątami wierzchołkowymi**.
Również kąty β i δ są kątami wierzchołkowymi.



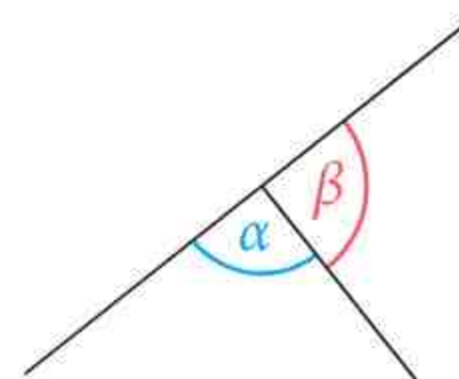
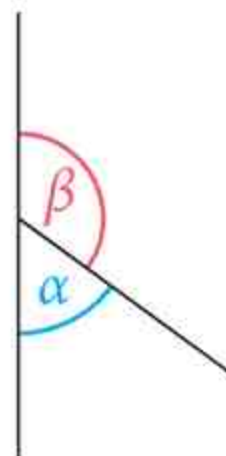
Zapamiętaj

Kąty wierzchołkowe są równe.

Na każdym z poniższych rysunków kąty α i β są **kątami przyległymi**.



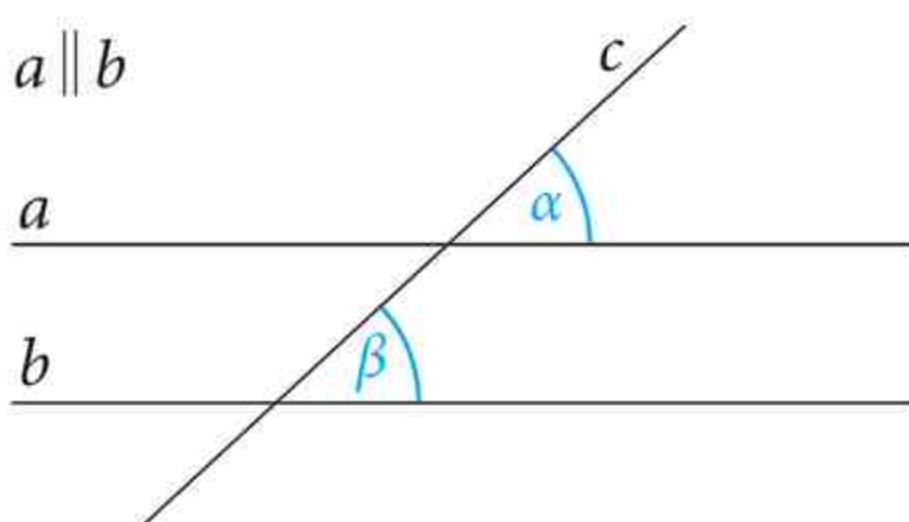
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



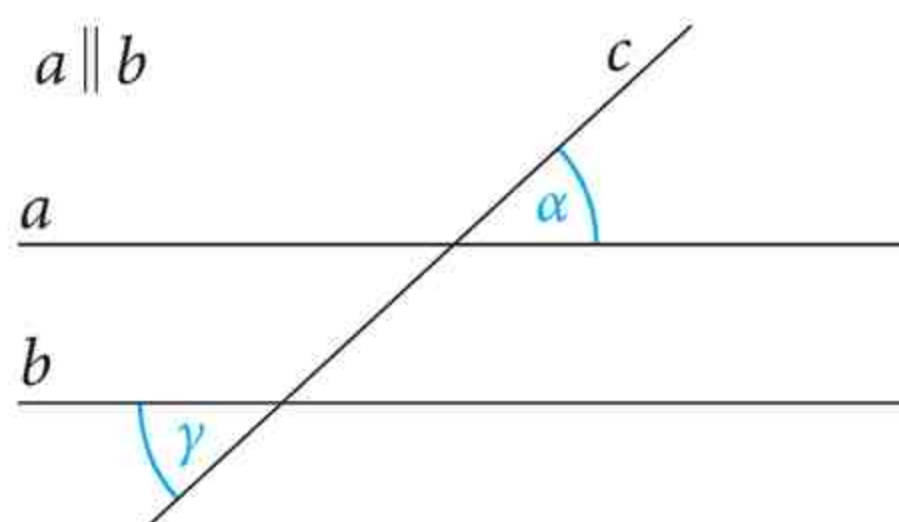
Zapamiętaj

Suma kątów przyległych jest równa 180° .

Na rysunkach poniżej widzisz kąty, które powstaną, gdy dwie proste równoległe przetniemy trzecią prostą.



Te kąty są równe.
 $\alpha = \beta$



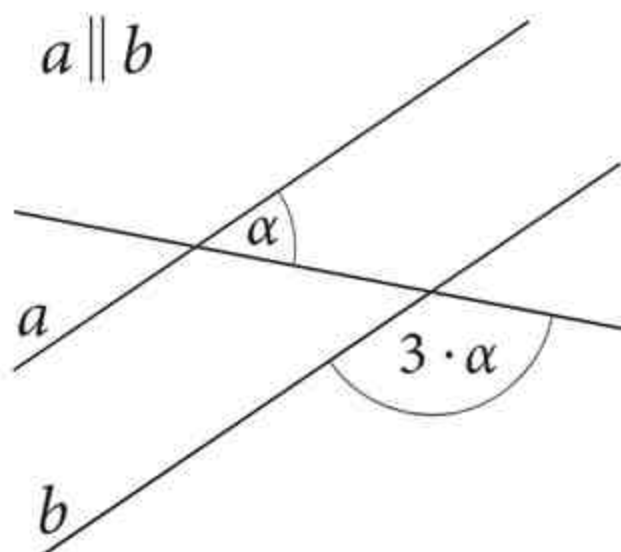
Te kąty są równe.
 $\alpha = \gamma$

Przykład 2

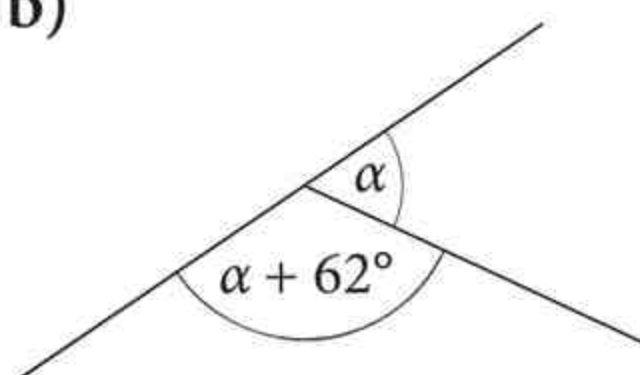
Oblicz miarę kąta α .

a)

$a \parallel b$



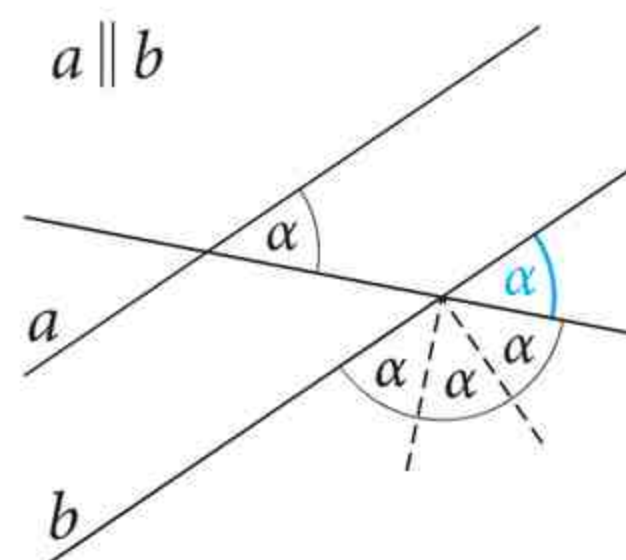
b)



a) Zauważmy, że kąt zaznaczony na rysunku na niebiesko ma miarę α . Natomiast kąt $3 \cdot \alpha$ można podzielić na 3 równe kąty, każdy o mierze α . W ten sposób kąt półpełny (180°) został podzielony na 4 równe kąty α . Zatem:

$$\alpha = 180^\circ : 4 = 45^\circ$$

Odp. Kąt α ma miarę 45° .



- b) Podzielmy większy z kątów na dwie części: 62° i α .

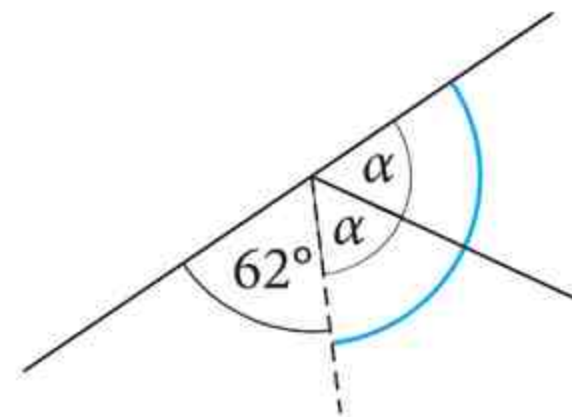
Wtedy dwa kąty α możemy połączyć w jeden – na rysunku jest on zaznaczony na niebiesko.

Zauważmy, że jest on przyległy do kąta o mierze 62° i jego miara wynosi:

$$180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$$

Kąt α stanowi połowę tego kąta, więc: $\alpha = 118^\circ : 2 = 59^\circ$.

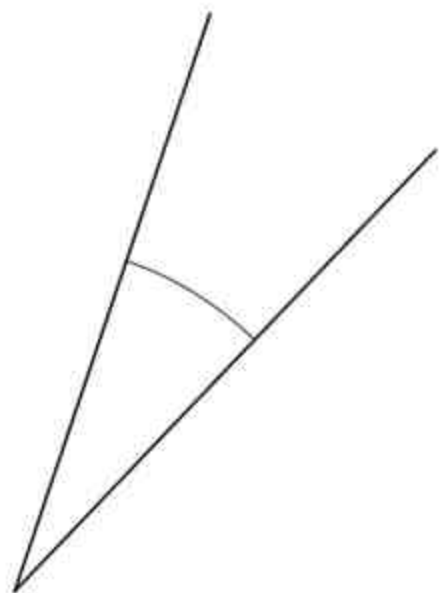
Odp. Kąt α ma miarę 59° .



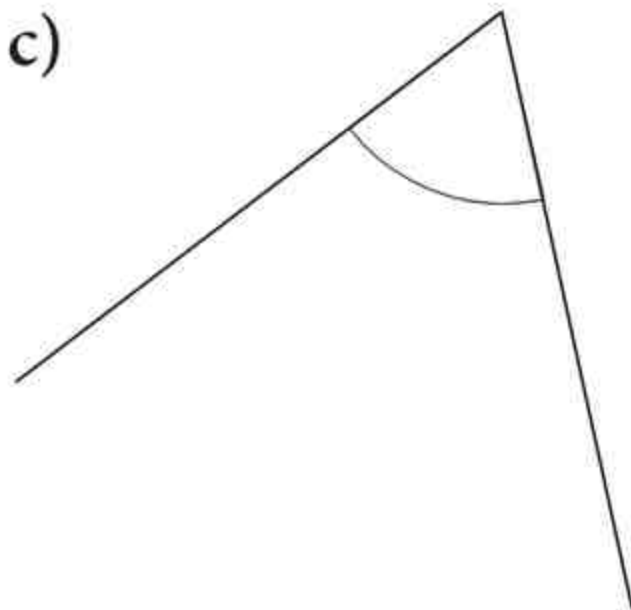
Zadania

- **1** Zmierz kąty.

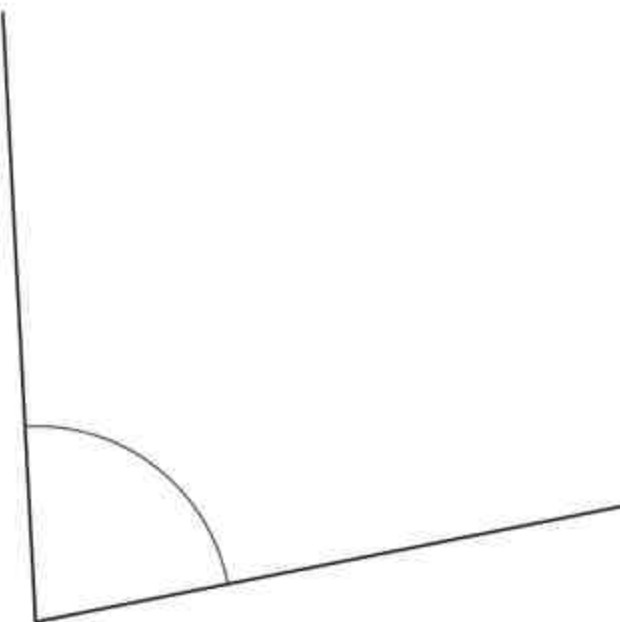
a)



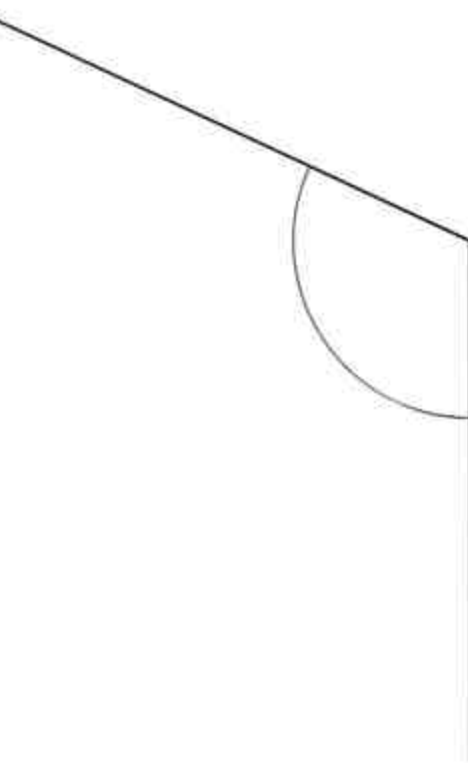
c)



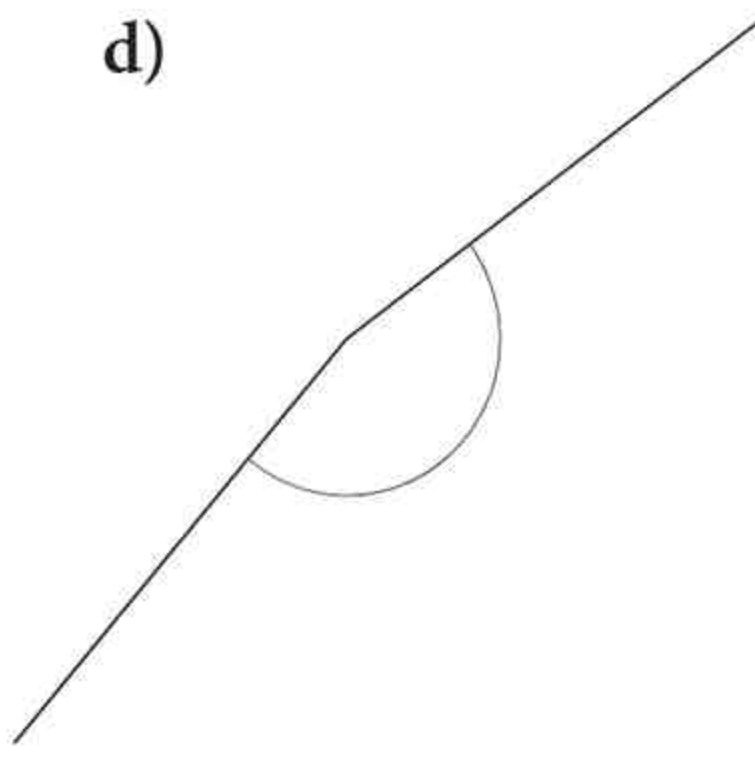
e)



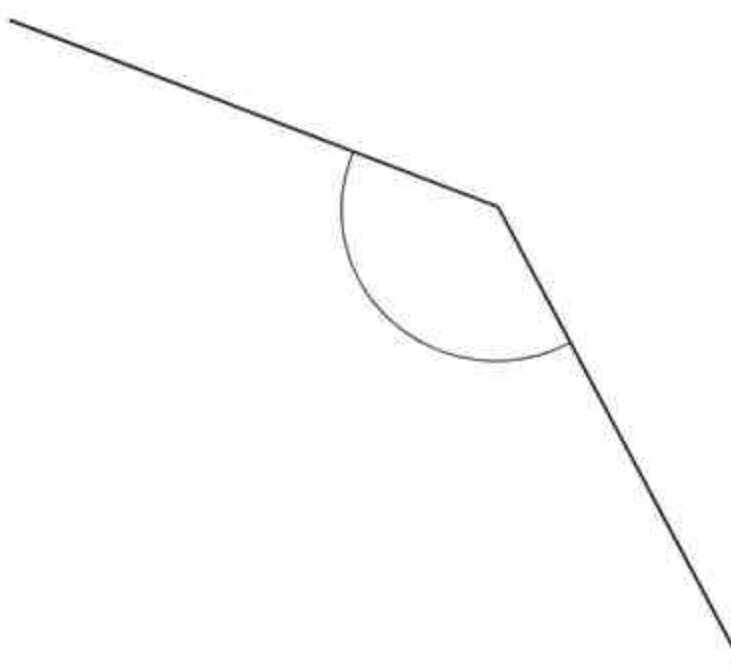
b)



d)



f)



- **2** Narysuj po dwa kąty ostre i rozwarte. Oznacz je literami greckimi, zmierz i zapisz ich miary.
- **3** Narysuj pięć kątów, a następnie oszacuj ich miary. Sprawdź za pomocą kątomierza, o ile stopni miary tych kątów różnią się od szacowanych.
- **4** Narysuj kąt o podanej mierze.

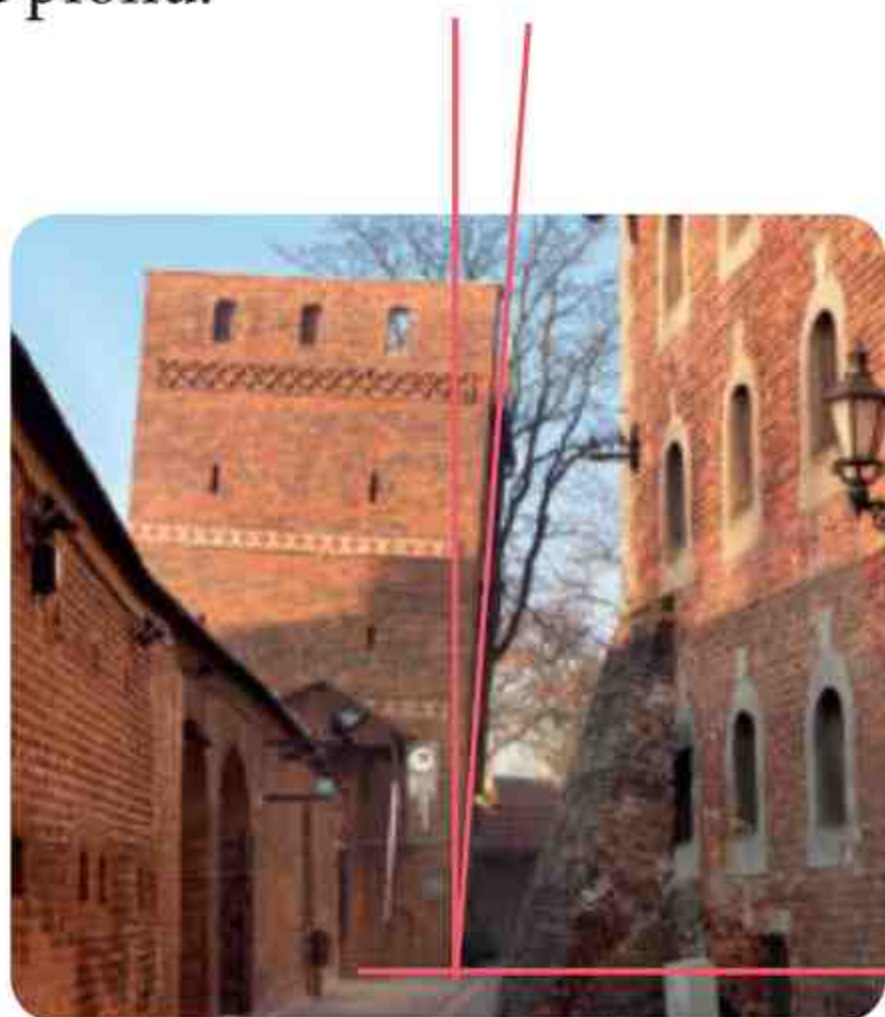
a) 45°

b) 150°

c) 123°

d) 68°

- **5** Oto dwie słynne budowle. Zmierz zaznaczone kąty odchylenia tych wież od pionu.

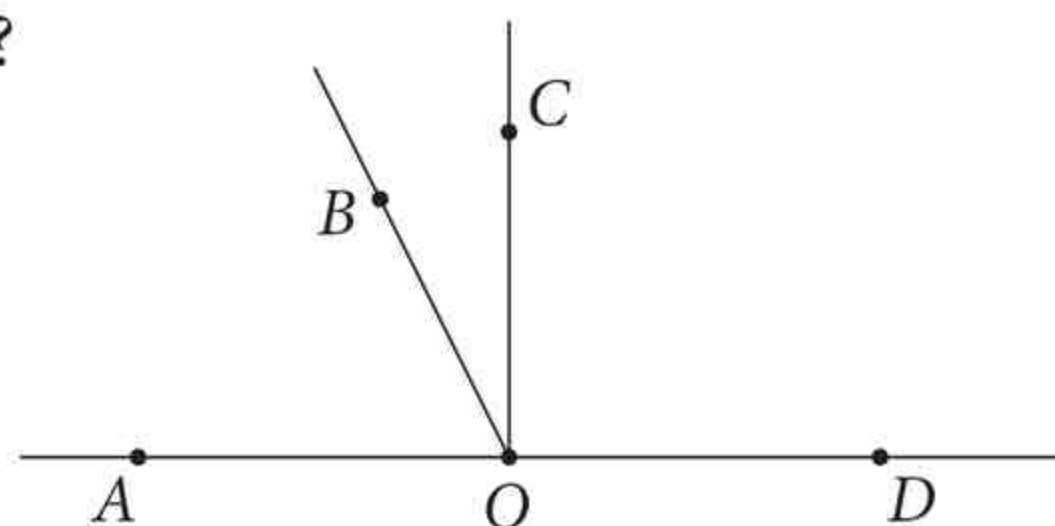


Baszta miejska w Toruniu
zbudowana w XIV w.

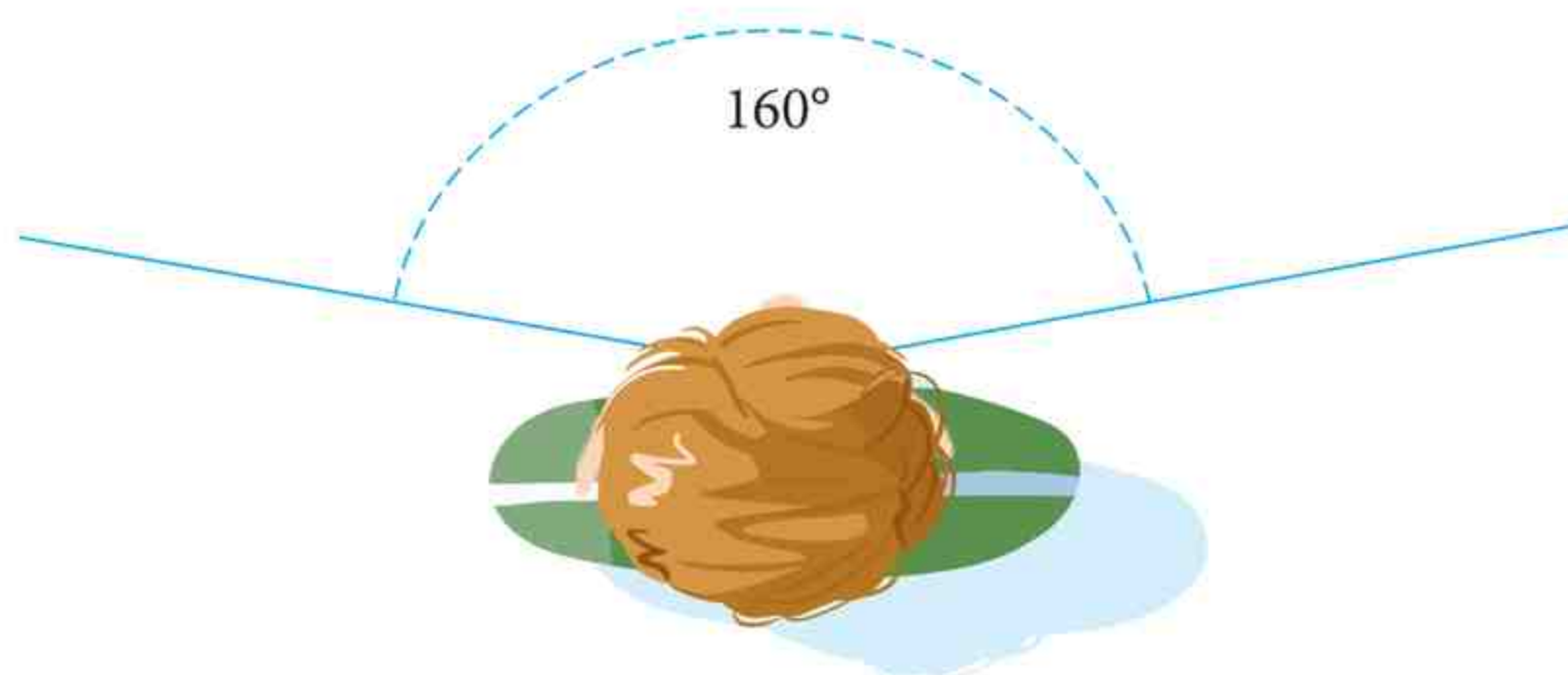


Dzwonnica w Pizie
wzniesiona w XII w.

- **6** Ile kątów wypukłych jest na rysunku? Podaj ich nazwy (np. $\sphericalangle AOB$).

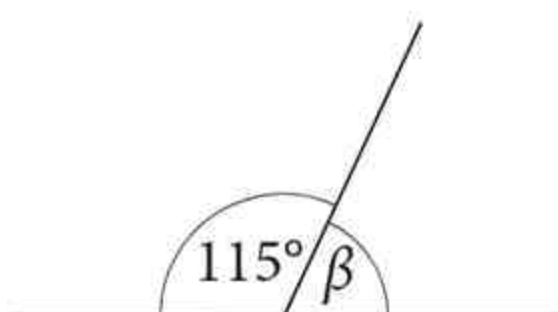


- **7** Kąt widzenia człowieka wynosi 160° , kota 180° , psa i zająca 250° , a niektórych ptaków – do 330° . Narysuj kąty widzenia wymienionych zwierząt. Jakiego rodzaju są to kąty? Jak dużej części widnokręgu nie widzi człowiek?

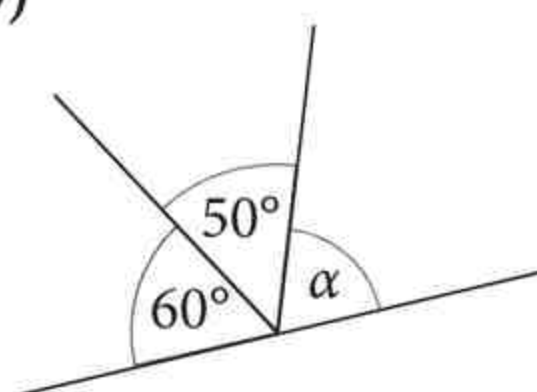


- **8** Oblicz kąty oznaczone literami greckimi.

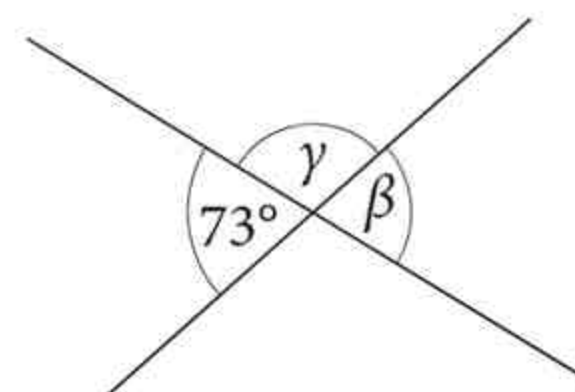
a)



b)



c)

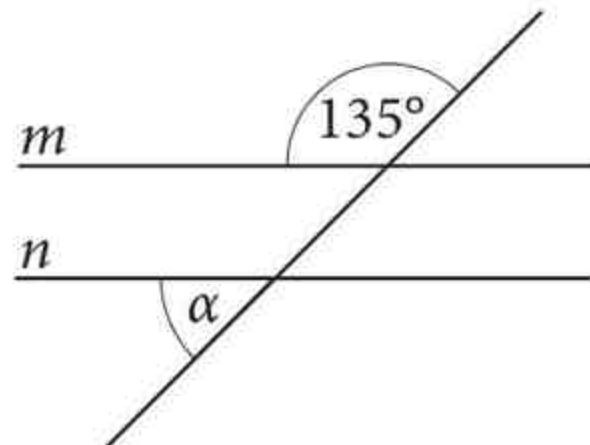


IV. Figury na płaszczyźnie

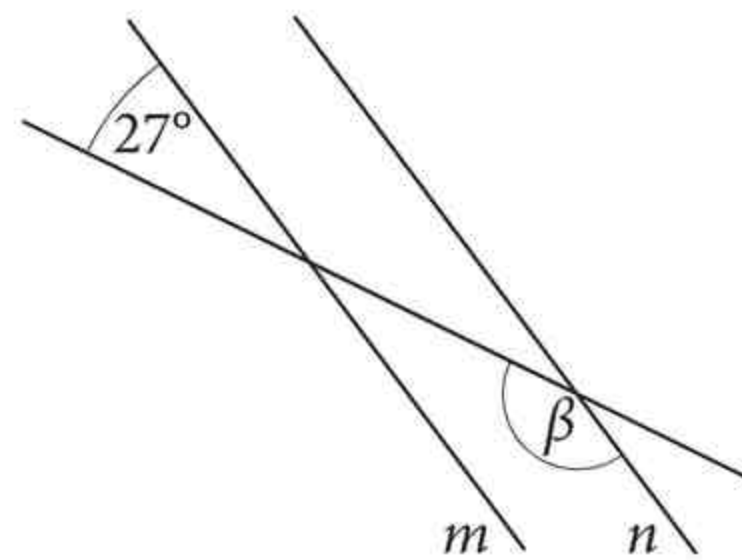
- **9** Podaj przykład godziny, o której wskazówki na tarczy zegara tworzą kąt:
 a) 60° , b) prosty, c) 120° , d) półpełny, e) pełny.

- **10** Proste m i n są równoległe. Oblicz miary kątów oznaczonych literami greckimi.

a)

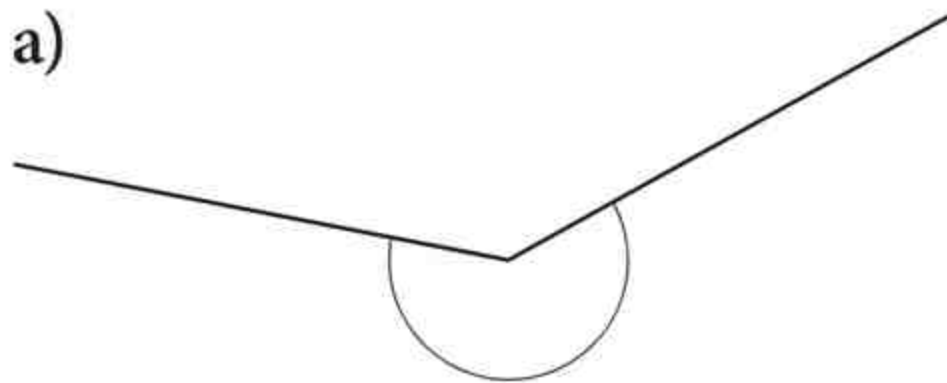


b)

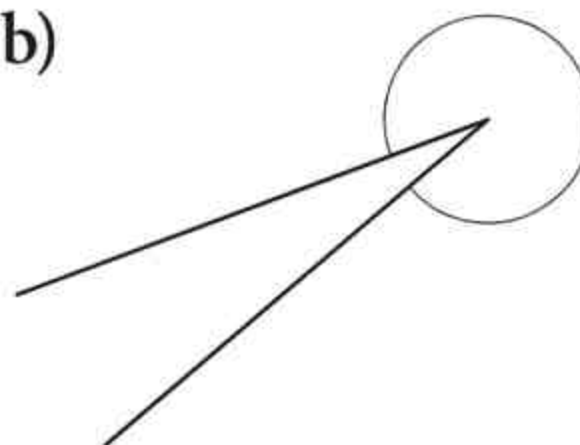


- **11** Ustal, jaką miarę ma kąt zaznaczony łukiem. Skorzystaj z kątomierza.

a)

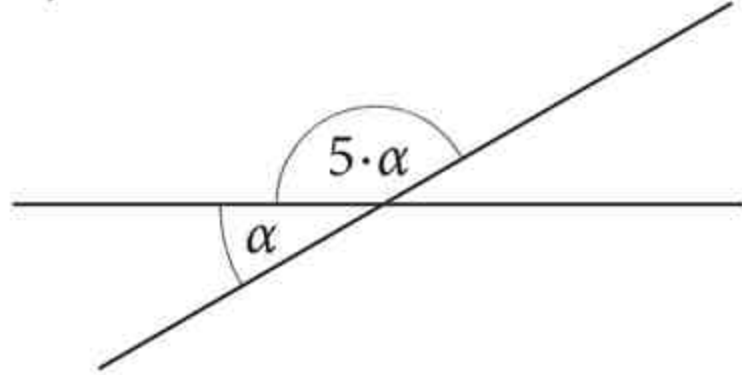


b)

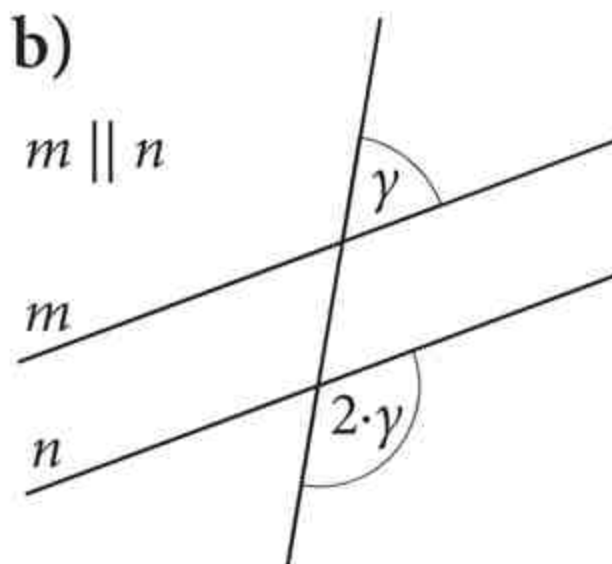


- **12** Oblicz miary kątów oznaczonych literami greckimi.

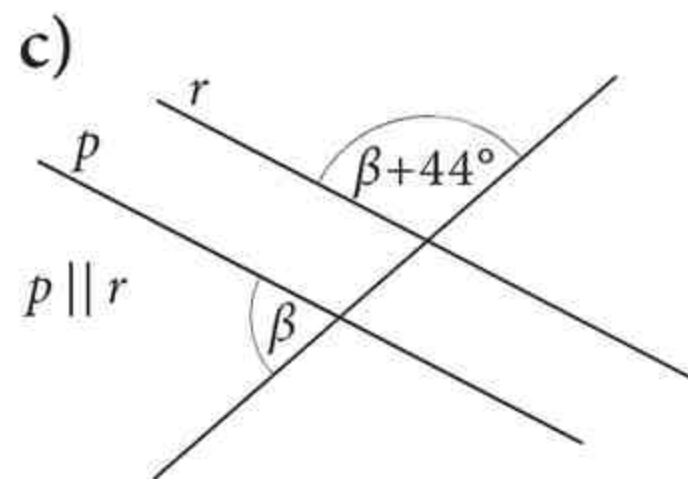
a)



b)



c)



- **13** O jaki kąt obróci się wskazówka godzinowa w podanym czasie?

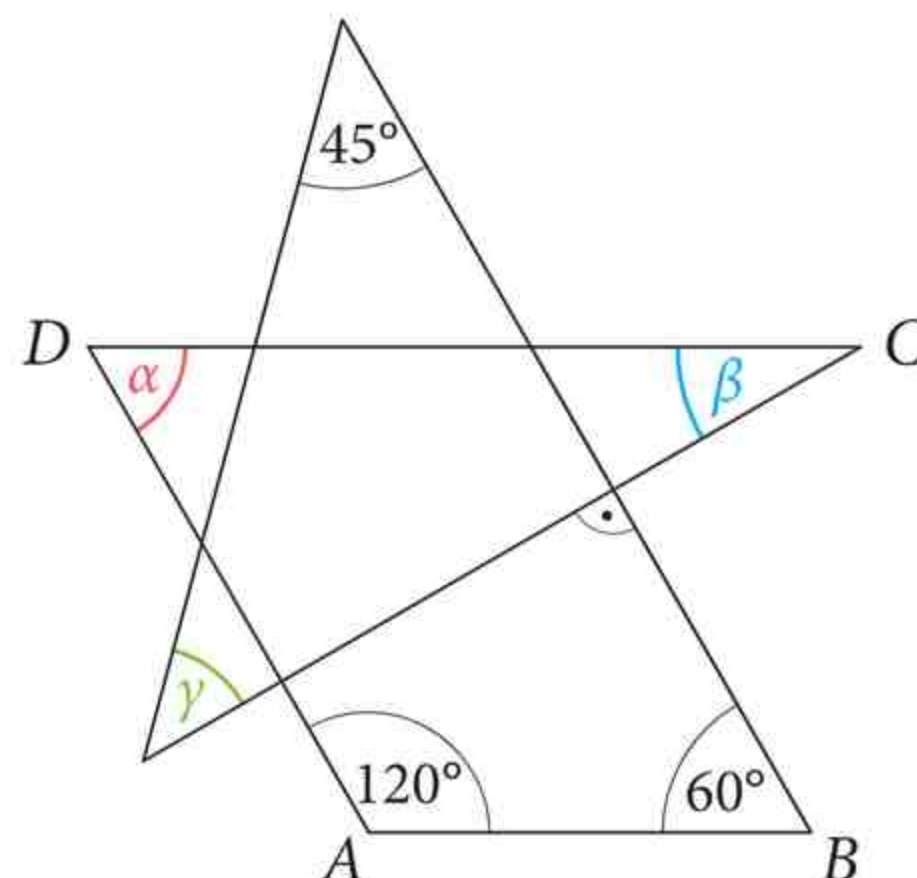
a) 10 minut

b) 12 minut

c) 15 minut



- 14** Odcinki AB i CD są równoległe. Oblicz miary kątów oznaczonych literami greckimi.



 Dla ciekawych

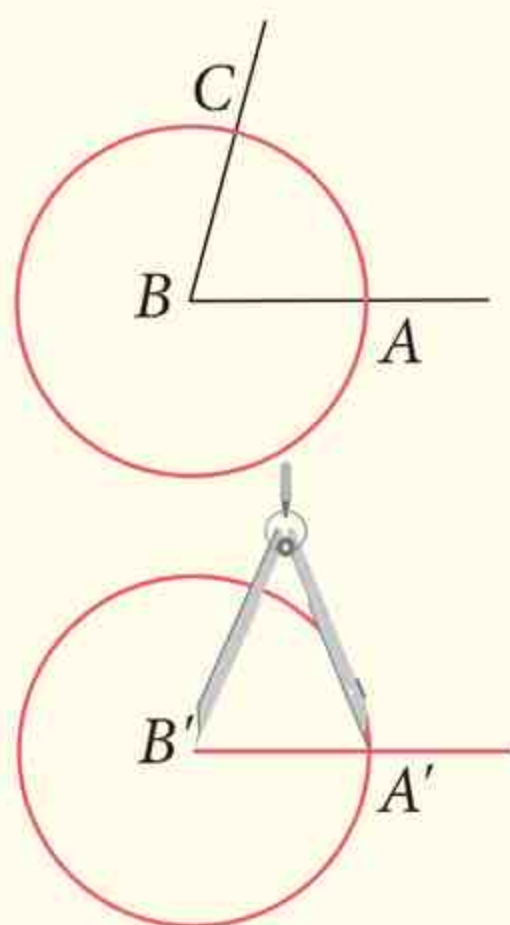
Konstrukcjami geometrycznymi nazywamy rysowanie figur geometrycznych wyłącznie za pomocą cyrkla i linijki. Linijki używamy przy tym tylko do rysowania prostych, nie do mierzenia długości.



Taki sposób rysowania figur narzucili greccy matematycy około 2000 lat temu. Proste i okręgi uważali oni za najdoskonalsze figury.

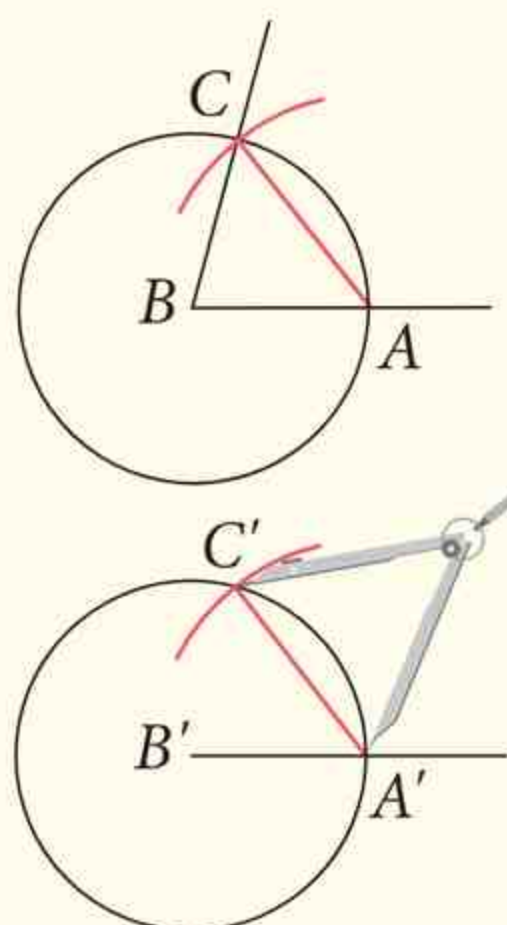
Przyjrzyj się, jak konstrukcyjnie przenieść kąt, to znaczy narysować bez pomocy kątomierza kąt o takiej samej mierze jak kąt dany.

1.



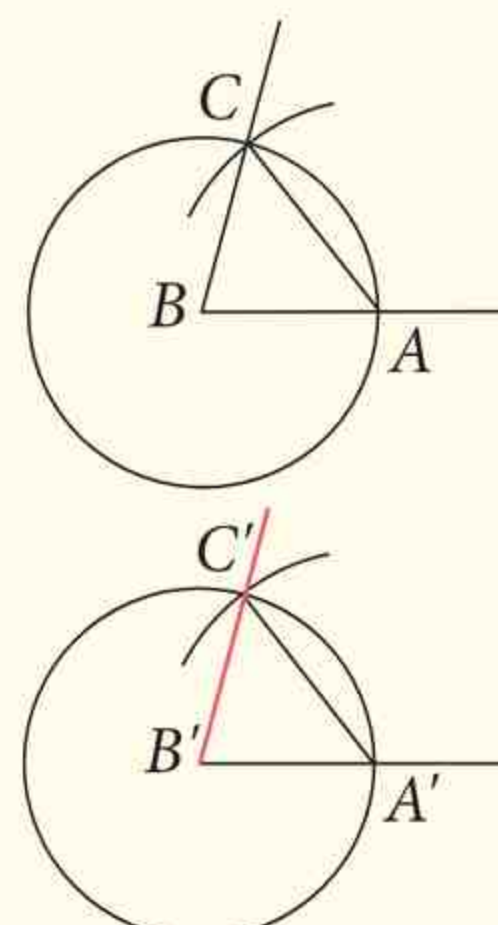
Rysujemy jedno ramię nowego kąta, a następnie dwa okręgi o tym samym promieniu i środkach w punktach B i B' .

2.



Odmierzamy cyrklem długość cięciwy AC i przenosimy ją na rysowany kąt.

3.



Rysujemy półprostą $B'C'$. Kąt $A'B'C'$ jest równy kątowi ABC .

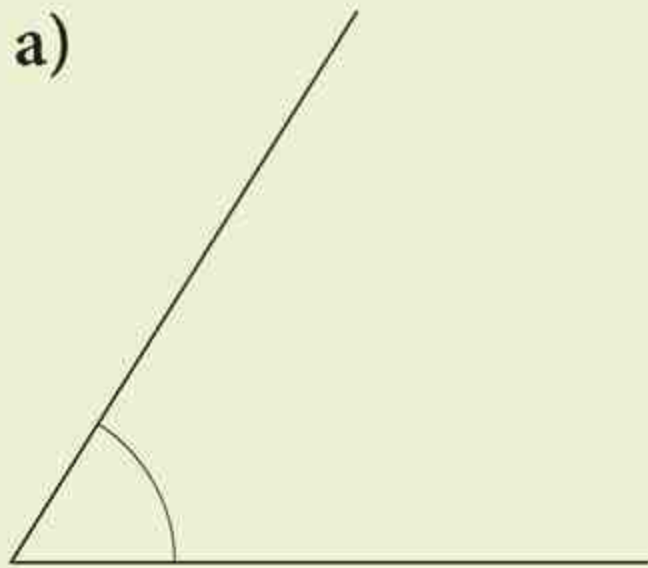
- 1** Odrysuj kąty ekierki różnobocznej. Następnie narysuj te kąty w innym miejscu tylko za pomocą cyrkla i linijki. Przyłóż ekierkę i sprawdź, czy narysowane kąty są równe kątom ekierki.
- 2** Narysuj kąt rozwarty, a następnie przenieś go w inne miejsce na kartce za pomocą linijki i cyrkla.
- 3** Narysuj kąt wklęsły i przenieś go tak jak kąt rozwarty.



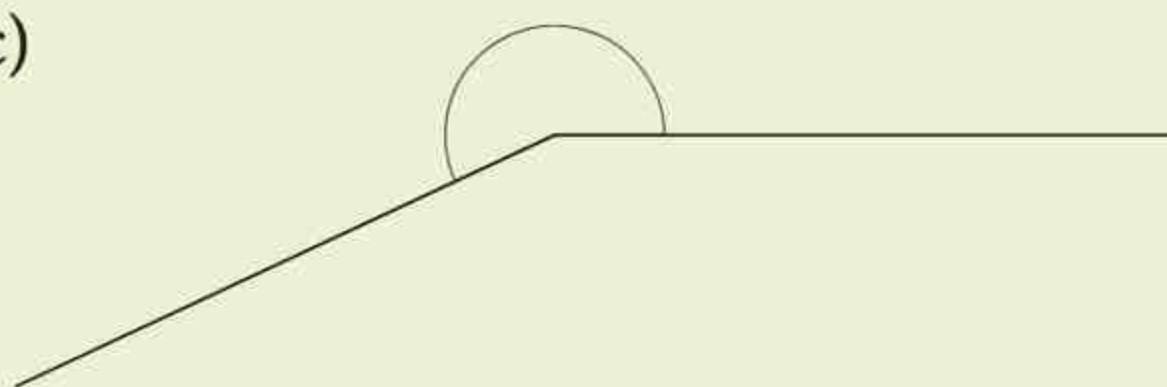
Czy już umiem?

I Ile stopni ma kąt zaznaczony łukiem? Skorzystaj z kątomierza.

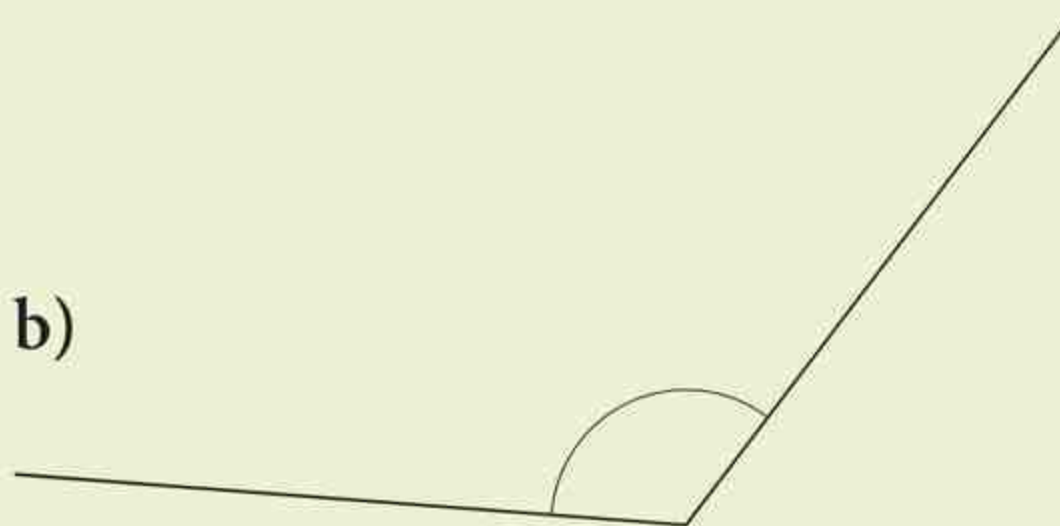
a)



c)

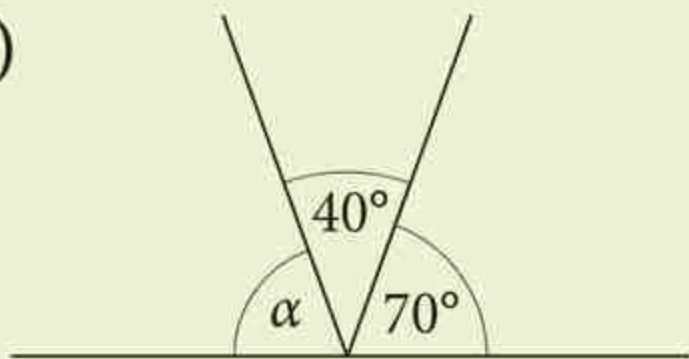


b)

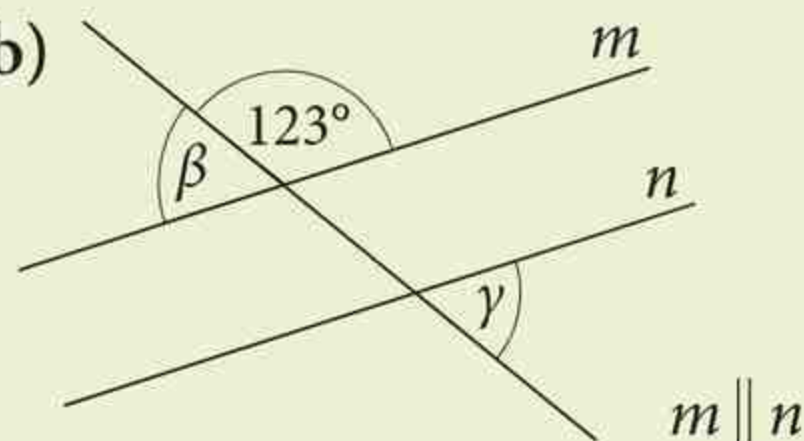


II Oblicz miary kątów oznaczonych literami greckimi.

a)



b)



III Ile stopni ma kąt wypukły, który tworzą wskazówki zegara o godzinie:

a) 14.00,

b) 18.00,

c) 19.00?

IV W tabeli podano ceny za korzystanie z basenu przez 60 min.

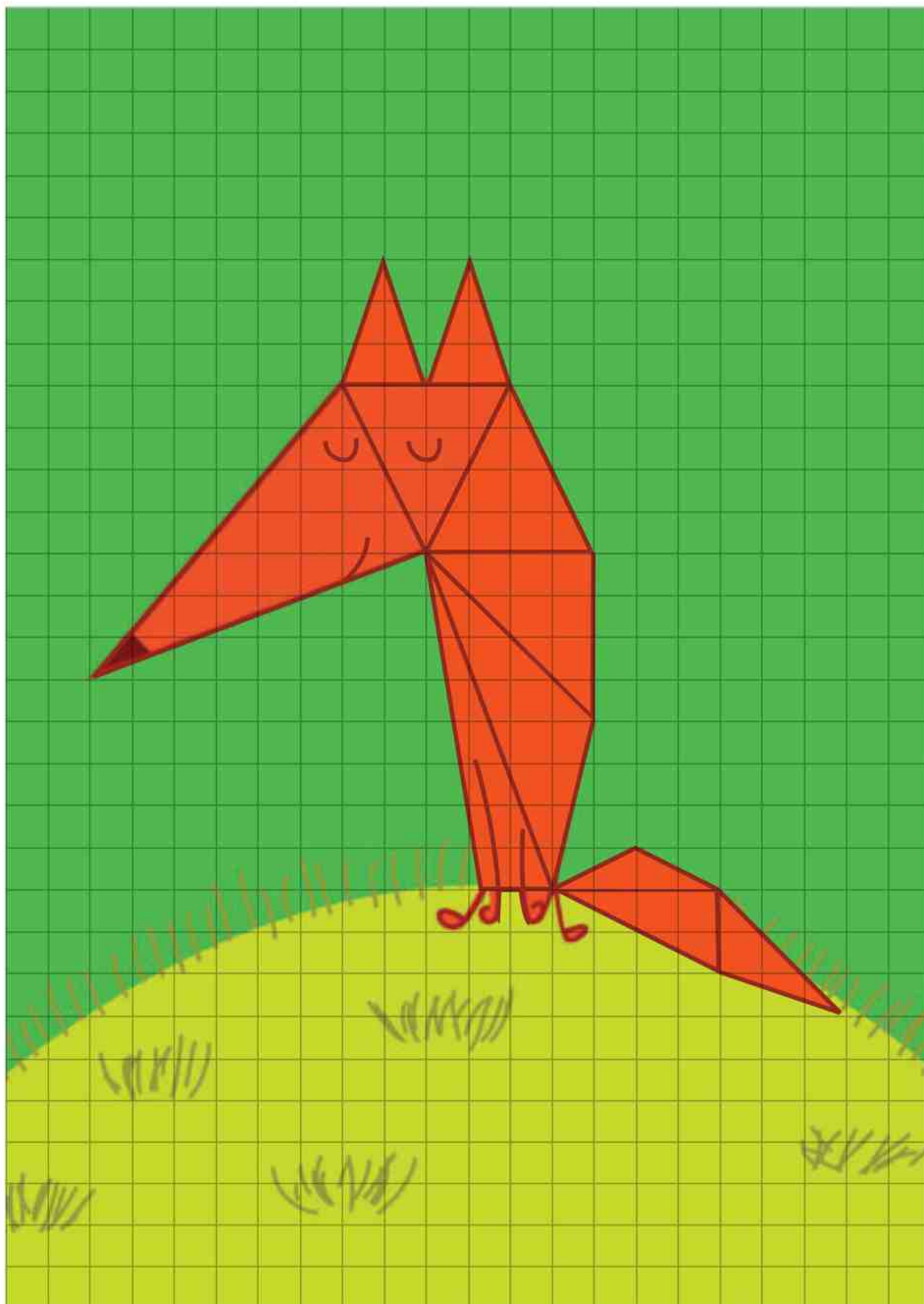
Godziny	6.00–9.00	9.00–20.00	20.00–22.00
Dorośli i młodzież od lat 15	12 zł	16 zł	14 zł
Dzieci poniżej lat 15	5 zł	8 zł	10 zł
Seniorzy od lat 65	7 zł	13 zł	11 zł
Osoby niepełnosprawne i ich opiekunowie	6 zł	9 zł	9 zł

Uwaga. W sobotę i niedzielę opłata za godzinę jest o 2 zł wyższa.

Pan Adam z trojgiem wnucząt wybrał się w niedzielę w południe na basen, gdzie spędzili 1 godz. Pan Adam ma 67 lat, najmłodszy z wnuków – 7 lat, średni – 13, a najstarszy – 16. Ile zapłacił pan Adam za siebie i wnuki?

Na dobry początek

Trójkąty na kratce



Pytania i polecenia

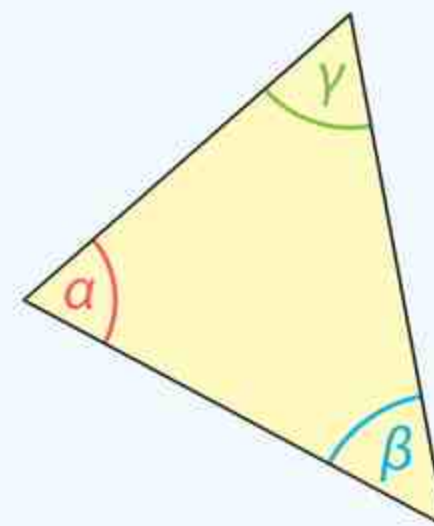
Ile trójkątów równoramiennych widzisz w narysowanym lisie?

Suma kątów trójkąta

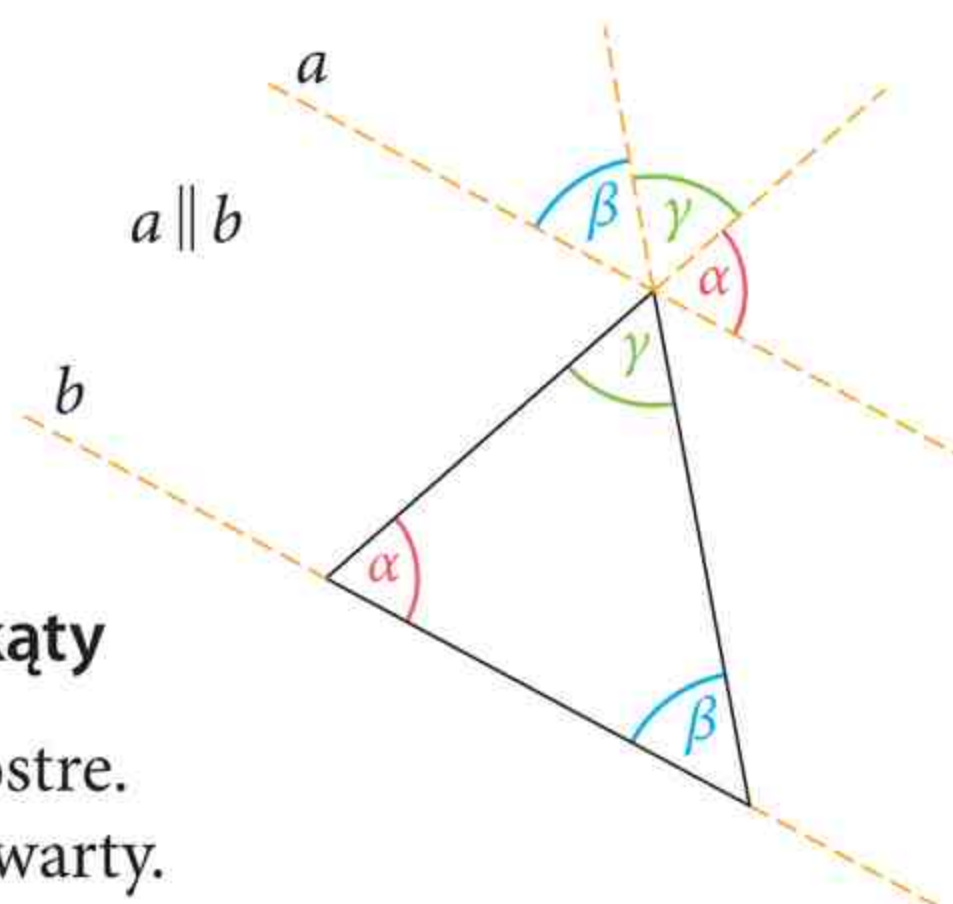
Zapamiętaj

Suma kątów trójkąta jest równa 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

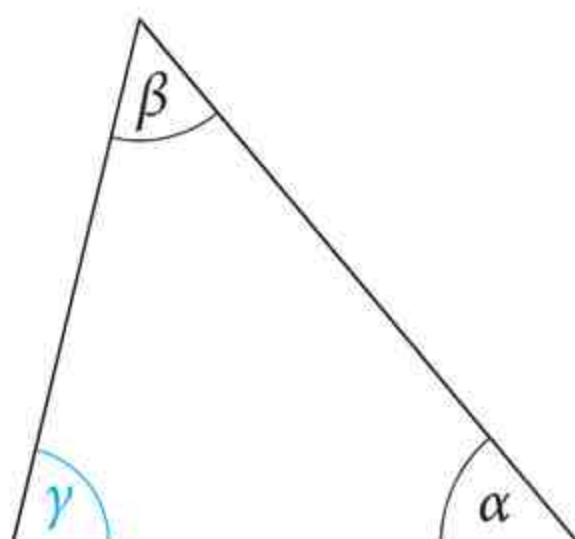


Uzasadnienie tego faktu możesz odczytać z rysunku obok.

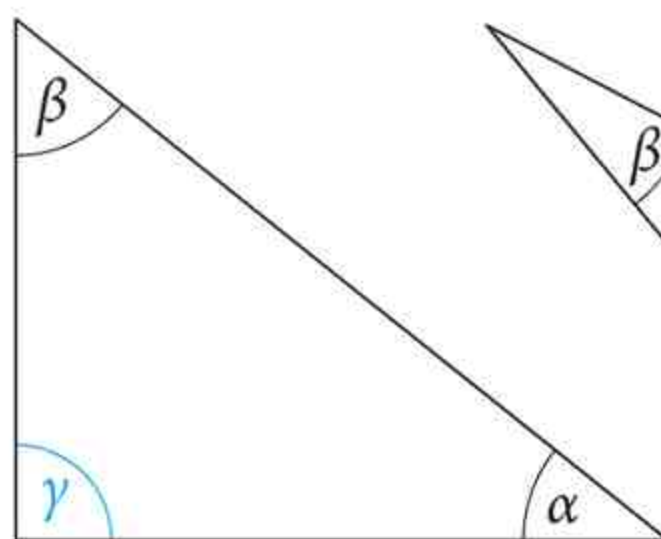


Klasyfikacja trójkątów ze względu na kąty

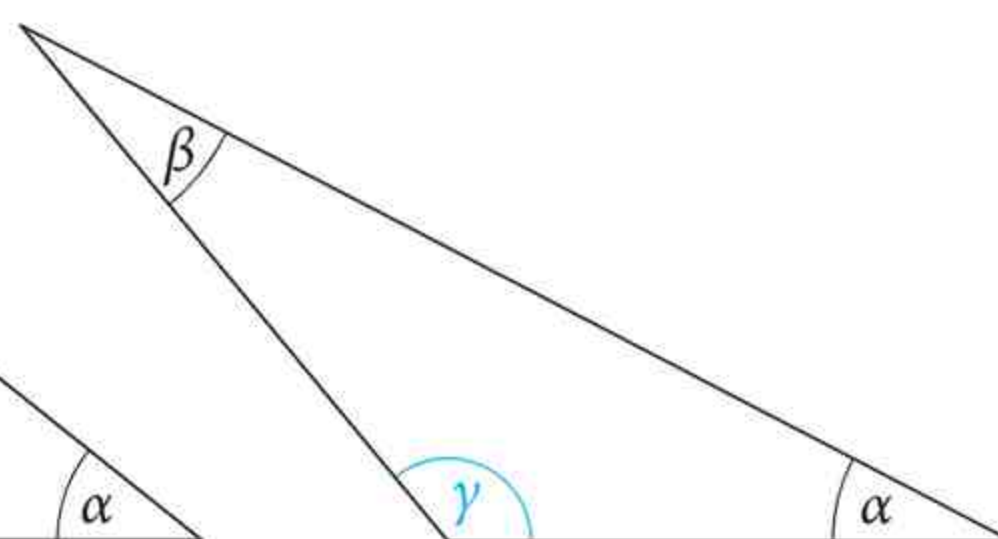
Każdy trójkąt ma co najmniej dwa kąty ostre. Trzeci kąt może być ostry, prosty lub rozwarty.



α i β – kąty ostre
 $\gamma < 90^\circ$
trójkąt ostrokątny

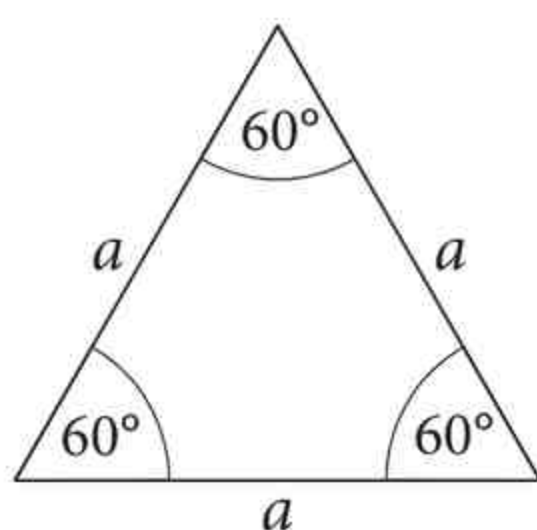


α i β – kąty ostre
 $\gamma = 90^\circ$
trójkąt prostokątny

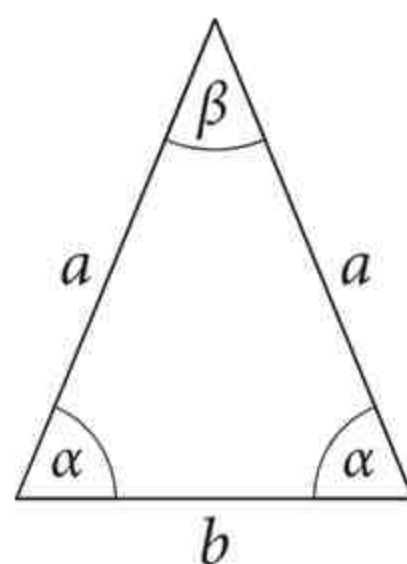


α i β – kąty ostre
 $\gamma > 90^\circ$
trójkąt rozwartokątny

Klasyfikacja trójkątów ze względu na boki

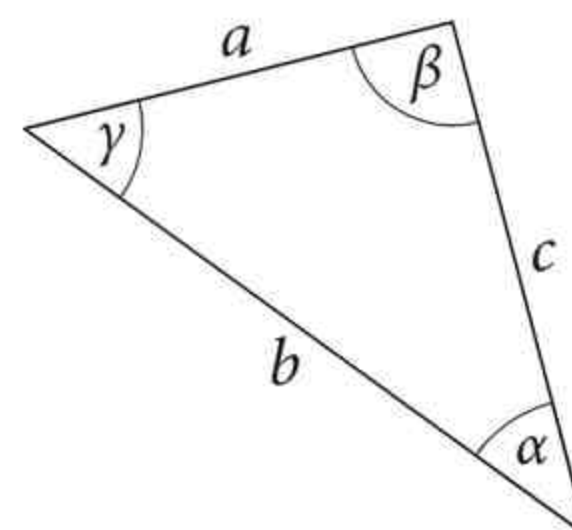


trójkąt
równoboczny



a – ramię
 b – podstawa

trójkąty równoramienne



trójkąt różnoboczny

Pole trójkąta

Jeśli znamy długość boku trójkąta i odpowiednią wysokość, możemy obliczyć **pole trójkąta**.

Zapamiętaj

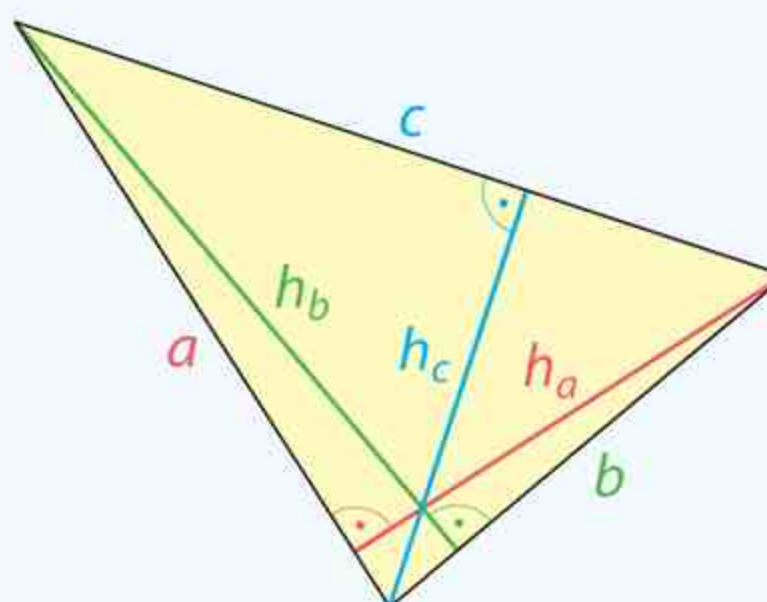
Pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

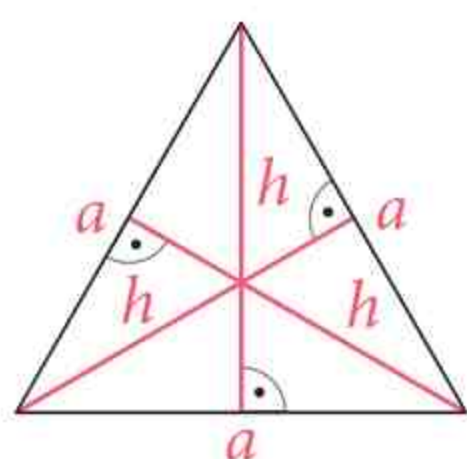
$$P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

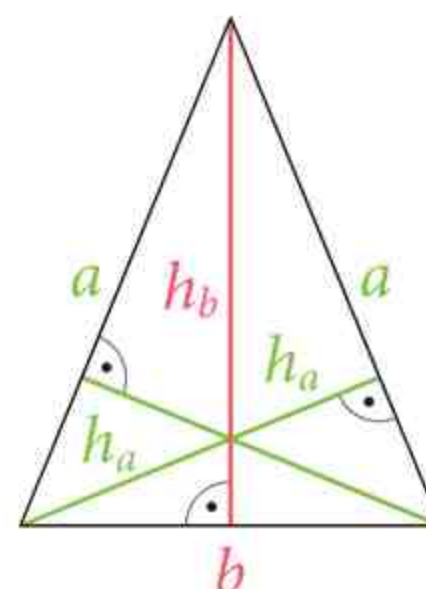
Korzystając z każdego z tych wzorów, otrzymamy ten sam wynik.



Jeśli trójkąt ma któreś boki równe (np. a i b), to wysokości opuszczone na te boki (odpowiednio h_a i h_b) także są równe. W przeciwnym razie korzystając ze wzorów na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$ oraz $P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$, otrzymalibyśmy różne wyniki, co nie jest możliwe.



Wszystkie wysokości trójkąta równobocznego są równe.



Wysokości trójkąta równoramiennego opuszczone na ramiona są równe.

Przykład 1

Oblicz pole narysowanego trójkąta.

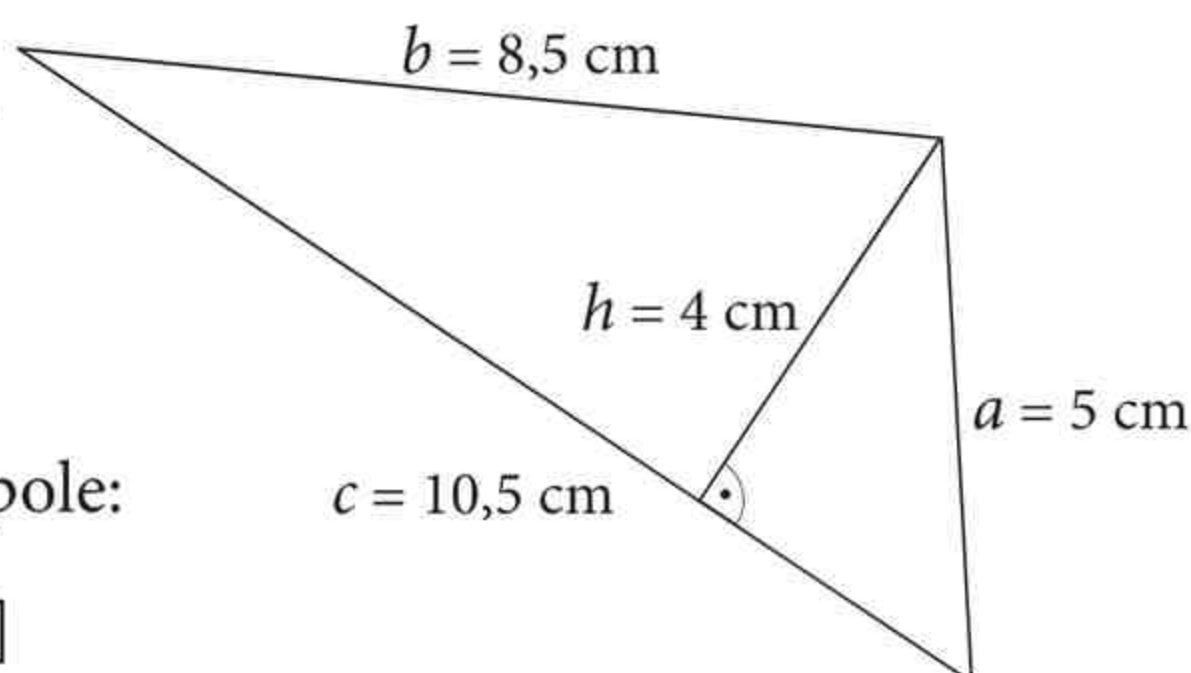
Dana wysokość h jest prostopadła do boku c .

$$c = 10,5 \text{ cm} \quad h = 4 \text{ cm}$$

Podstawiamy te dane do wzoru na pole:

$$P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 10,5 \cdot 4 = 21 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Odp. Trójkąt ma pole równe 21 cm^2 .



Przykład 2

Oblicz pole żółtego sześciokąta wyciętego z prostokąta o wymiarach $7\text{ cm} \times 10\text{ cm}$.

Obliczamy pole prostokąta.

$$P_p = 7 \cdot 10 = 70 [\text{cm}^2]$$

Obliczamy pola odciętych trójkątów.

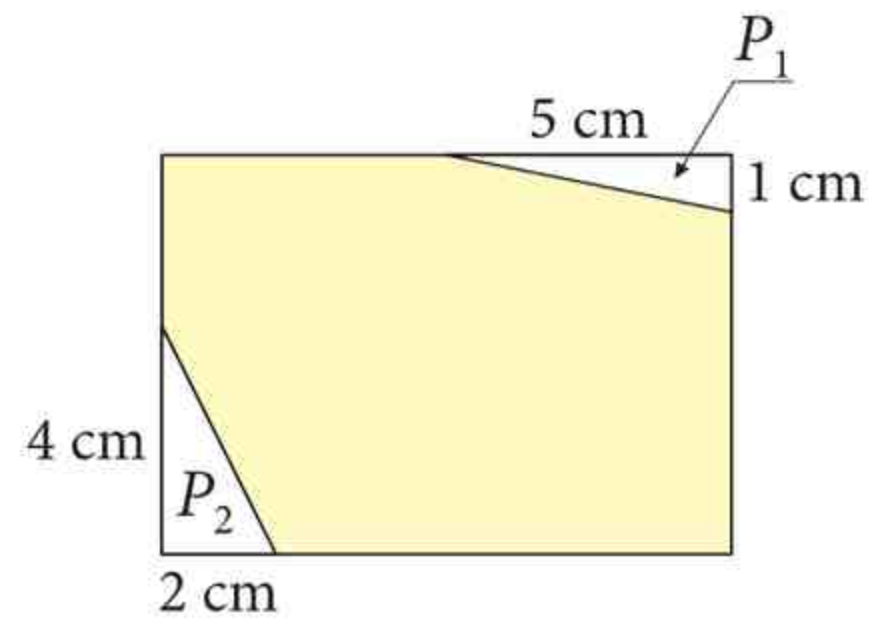
$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = 2,5 [\text{cm}^2]$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 [\text{cm}^2]$$

Obliczamy pole sześciokąta.

$$P = 70 - 2,5 - 4 = 63,5 [\text{cm}^2]$$

Odp. Pole żółtego sześciokąta jest równe $63,5\text{ cm}^2$.



Przykład 3

Oblicz wysokość trójkąta opuszczoną na bok o długości 25 cm .

Oznaczamy:

$$a = 25\text{ cm} \quad b = 26\text{ cm} \quad c = 17\text{ cm} \quad h_c = 24\text{ cm}$$

Obliczamy pole trójkąta. Wybieramy do obliczeń tę podstawę, dla której znamy wysokość.

$$P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 24 = 204 [\text{cm}^2]$$

To samo pole można też obliczyć za pomocą wzoru:

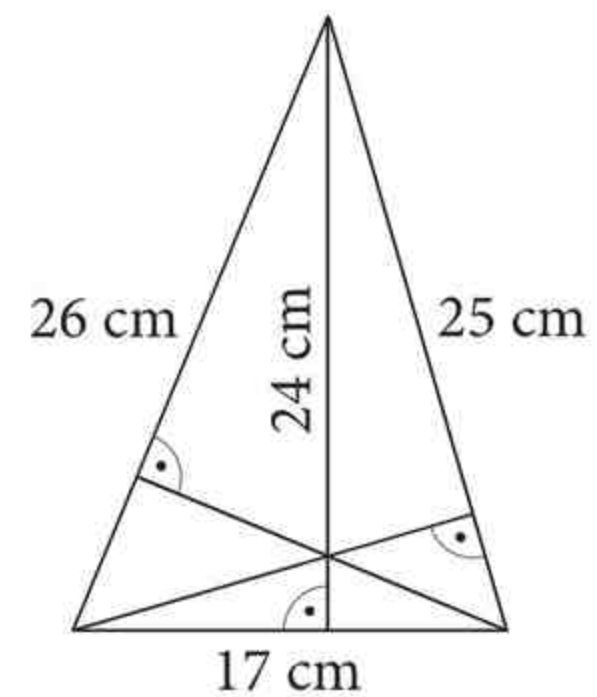
$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$204 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot h_a$$

$$204 = 12,5 \cdot h_a$$

$$h_a = 204 : 12,5 = 16,32 [\text{cm}]$$

Odp. Wysokość opuszczona na bok o długości 25 cm ma $16,32\text{ cm}$.

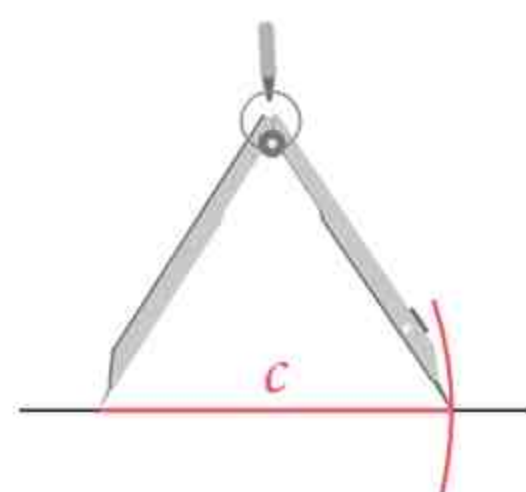
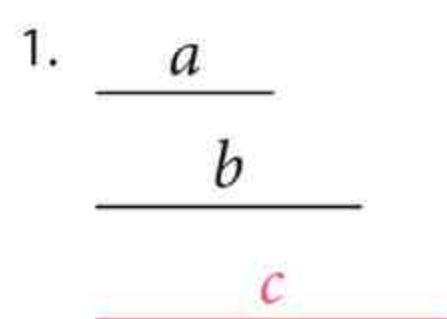


Konstruowanie trójkąta o danych bokach

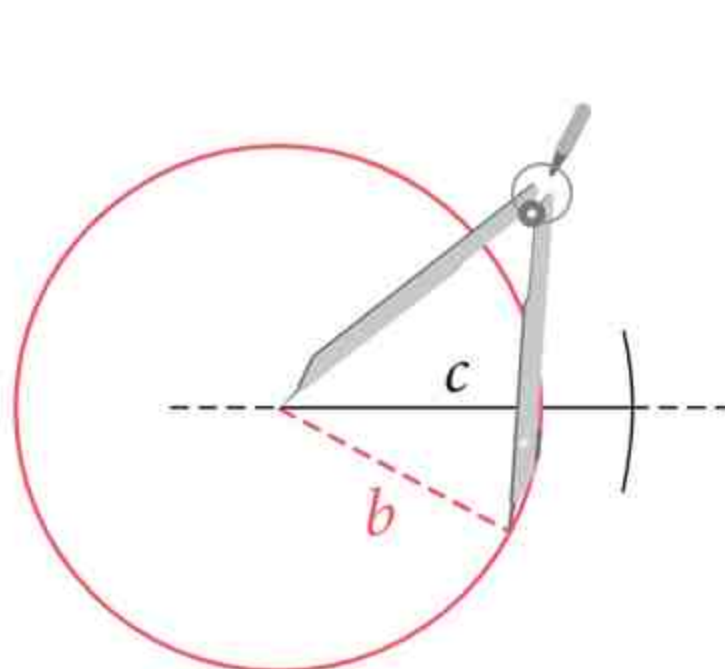
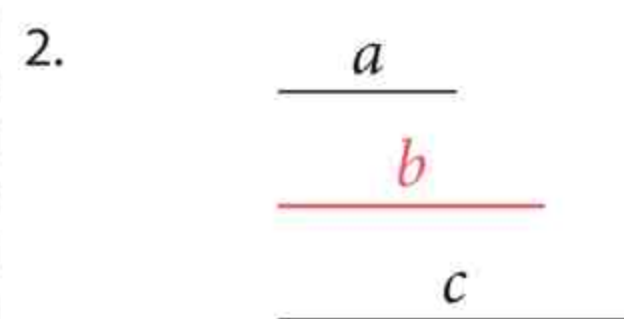
Zapamiętaj

Z trzech odcinków można zbudować trójkąt, jeżeli suma dwóch krótszych odcinków jest większa od najdłuższego.

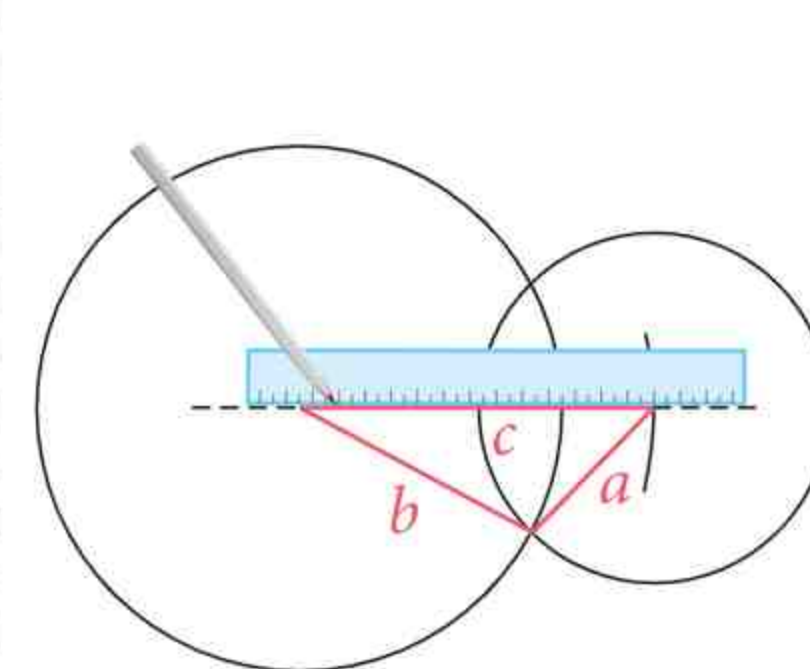
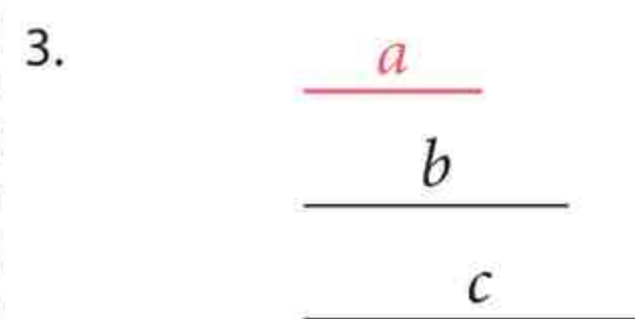
Popatrz, jak narysować trójkąt o bokach długości a , b , c .



Rysujemy prostą.
Za pomocą cyrkla odkładamy na niej odcinek o długości c .



Rysujemy okrąg o środku w jednym końcu odcinka c i promieniu b .



Rysujemy okrąg o środku w drugim końcu odcinka c i promieniu a .
Jeden z punktów przecięcia okręgów łączymy z końcami odcinka c . Otrzymaliśmy trójkąt o bokach a , b i c .

Uwaga 1. Rysowanie można zacząć od dowolnego odcinka.

Uwaga 2. Jeśli wybierzemy drugi punkt przecięcia okręgów, to otrzymamy taki sam trójkąt, tylko inaczej położony.

Przykład 4

Czy można zbudować trójkąt o bokach długości $a = 6$ cm, $b = 75$ mm, $c = 5,6$ cm?

Zapisujemy wszystkie długości w tej samej jednostce, np. w centymetrach.

$$b = 75 \text{ mm} = 7,5 \text{ cm}$$

Ponieważ $a + c > b$ ($a + c = 11,6$ cm, $b = 7,5$ cm), więc można zbudować trójkąt o bokach długości 6 cm, 75 mm, 5,6 cm.

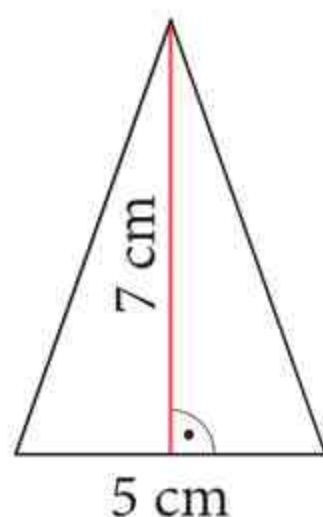


- 1** Oblicz zgodnie z poleceniem. ► Jeśli poprawnie wykonasz dwa kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

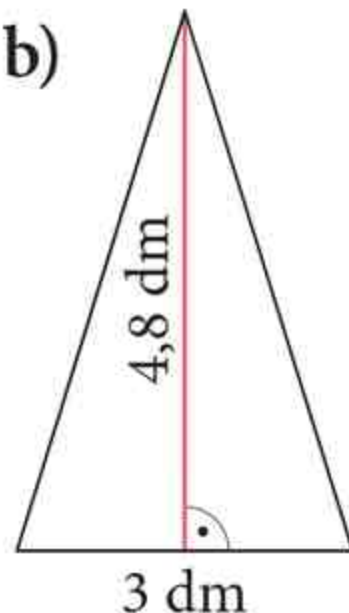
poziom A

Oblicz pole trójkąta o wymiarach podanych na rysunku.

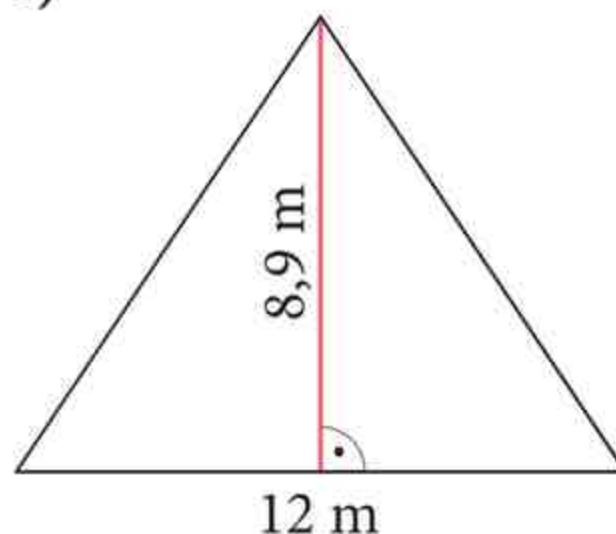
a)



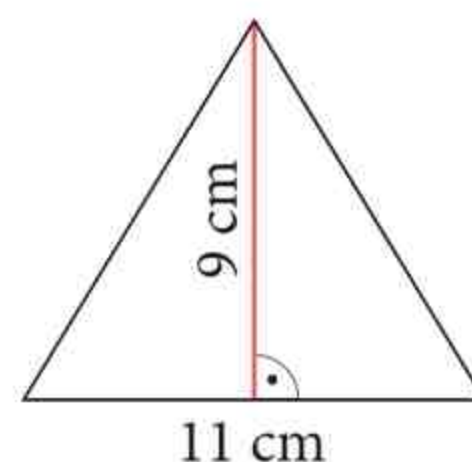
b)



c)



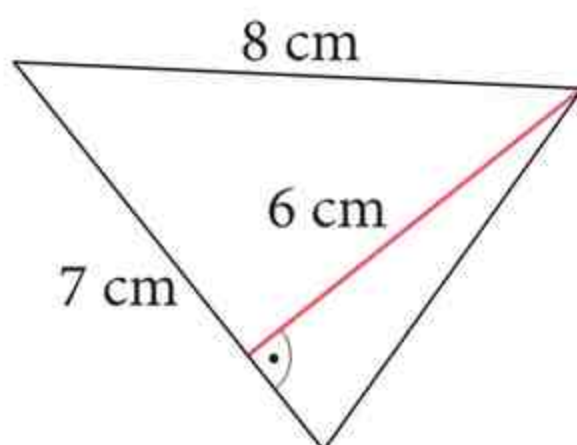
d)



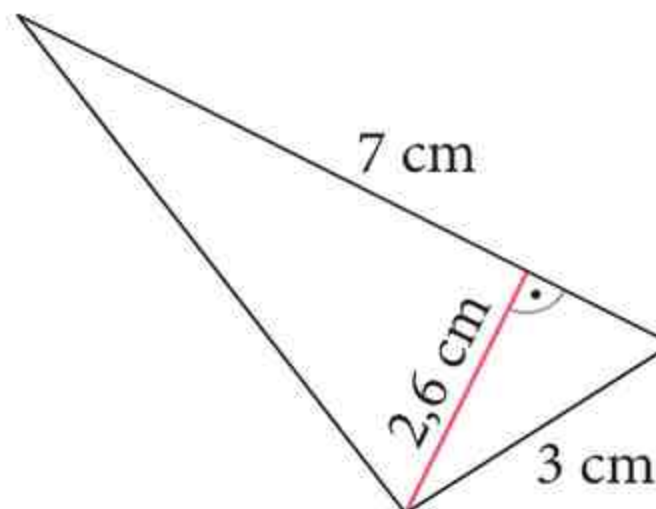
poziom B

Oblicz pole trójkąta o wymiarach podanych na rysunku.

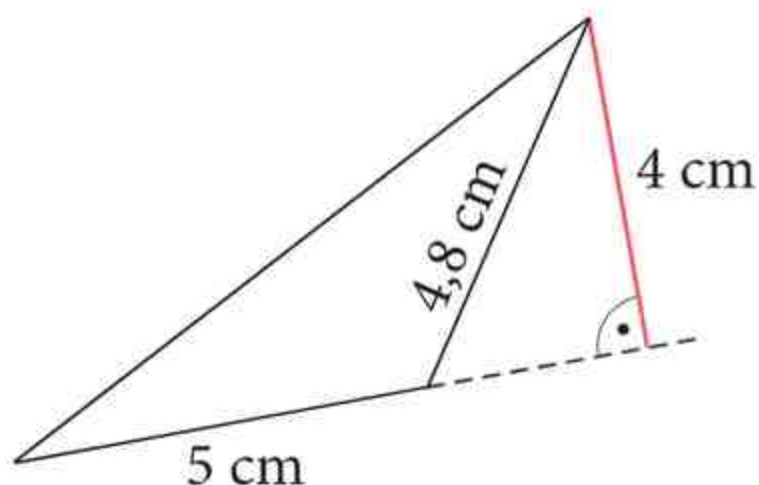
a)



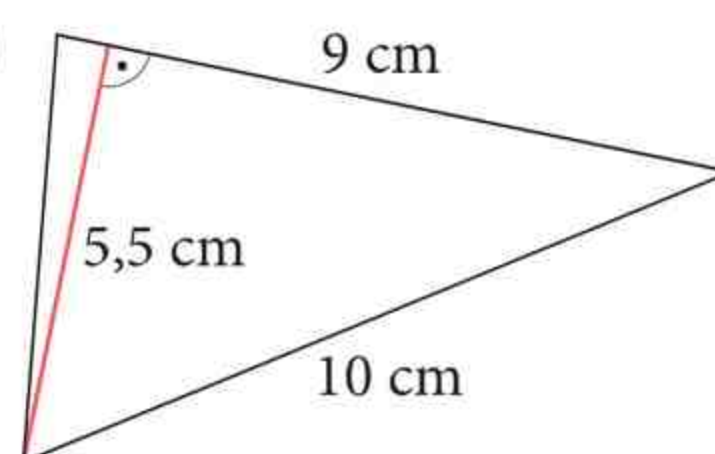
c)



b)



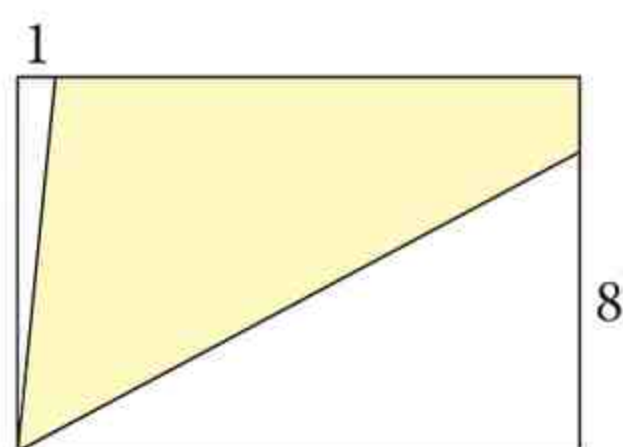
d)



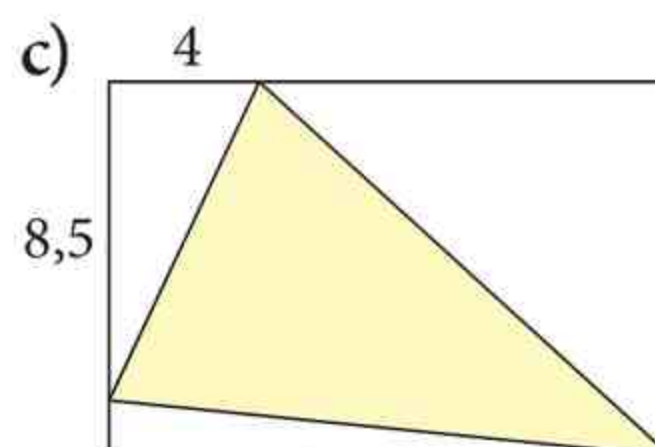
poziom C

Żółty wielokąt wycięto z prostokąta o wymiarach $10\text{ cm} \times 15\text{ cm}$. Oblicz pole tego wielokąta. Długości odcinków są podane w centymetrach.

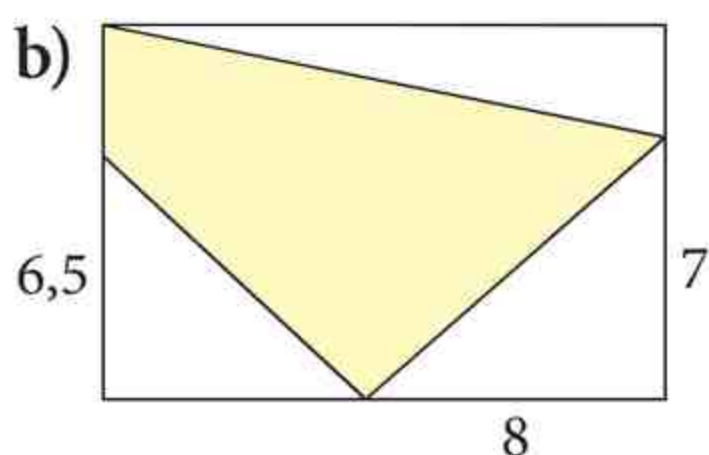
a)



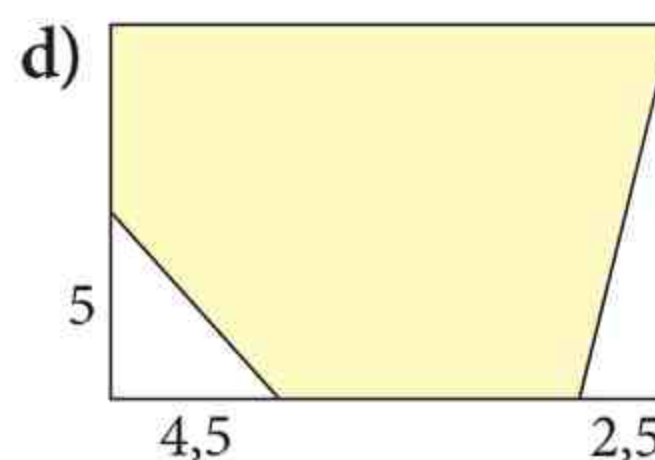
c)



b)

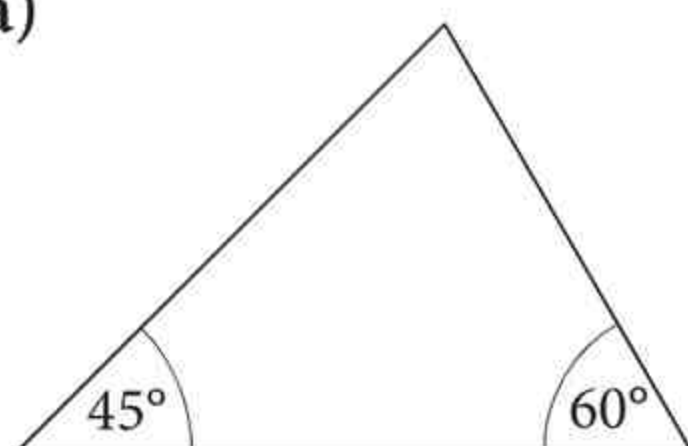


d)

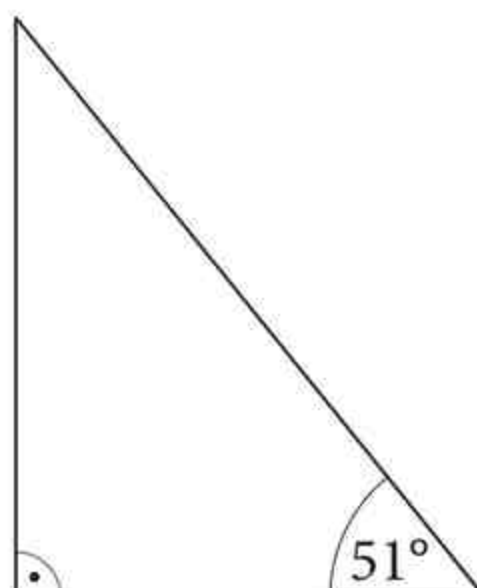


- **2** Oblicz, ile stopni ma każdy z niepodpisanych kątów trójkąta.

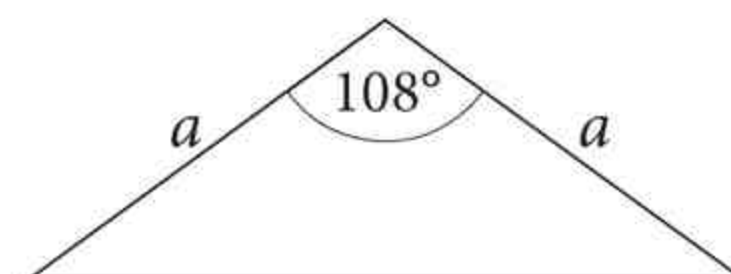
a)



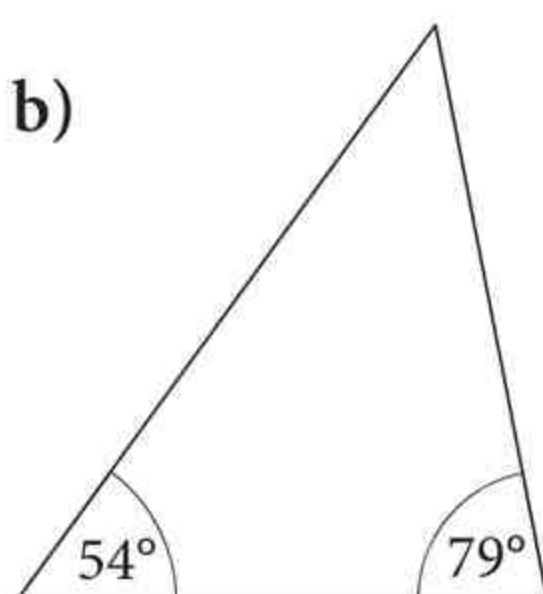
c)



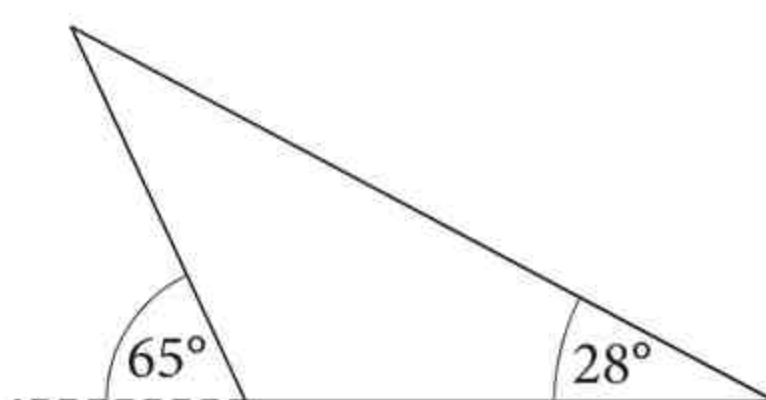
e)



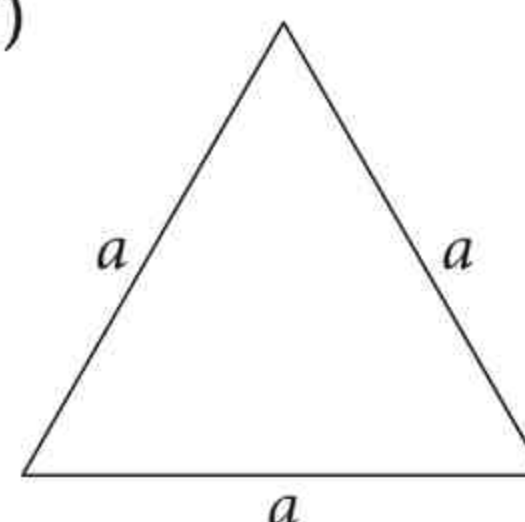
b)



d)



f)



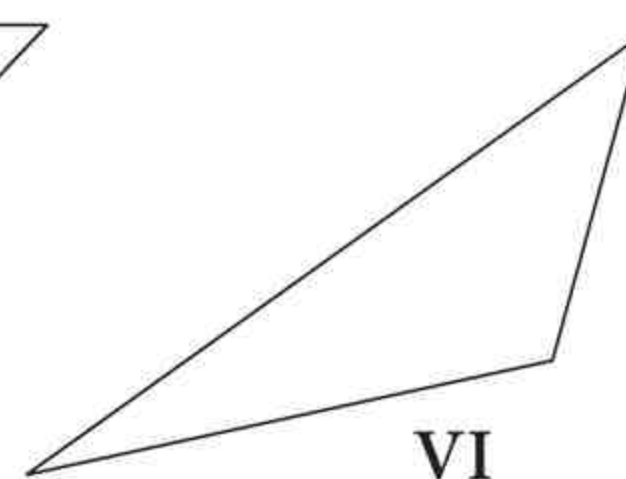
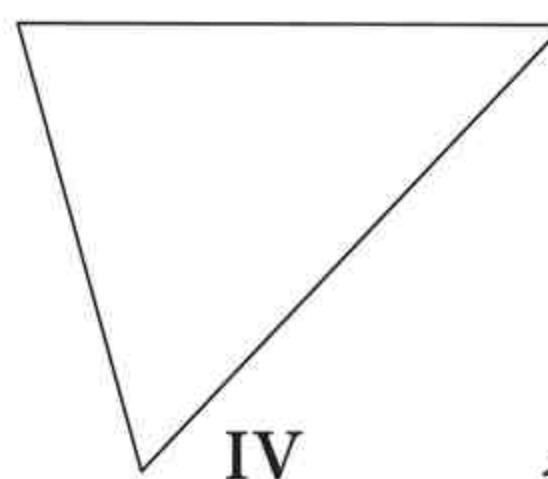
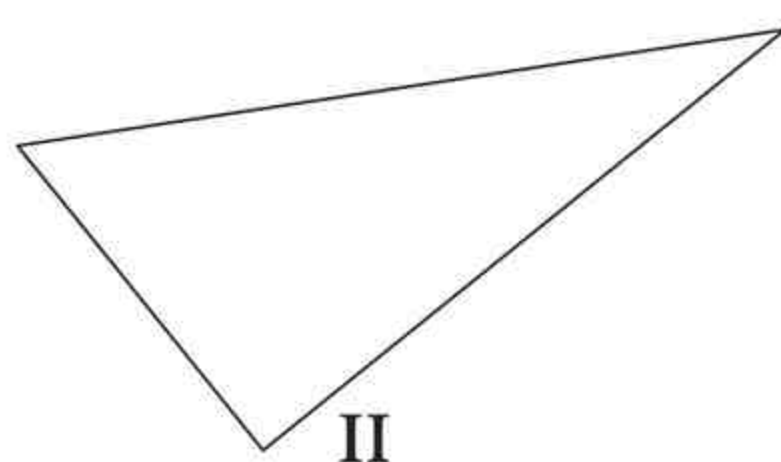
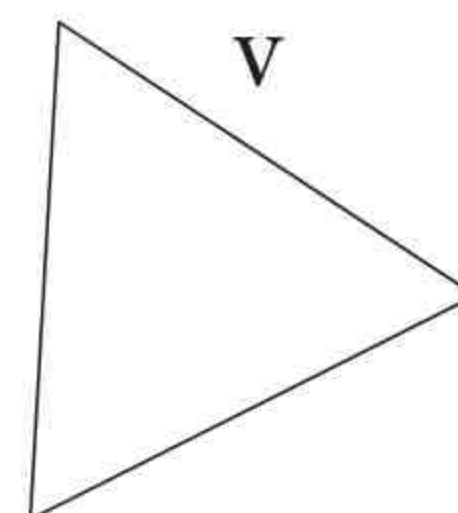
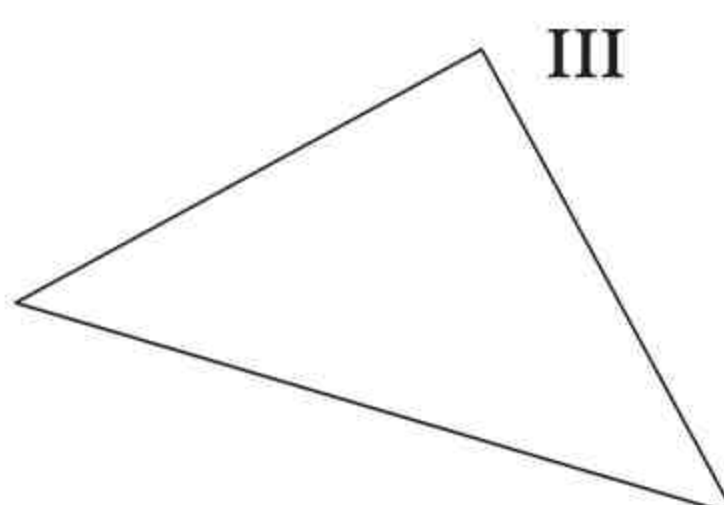
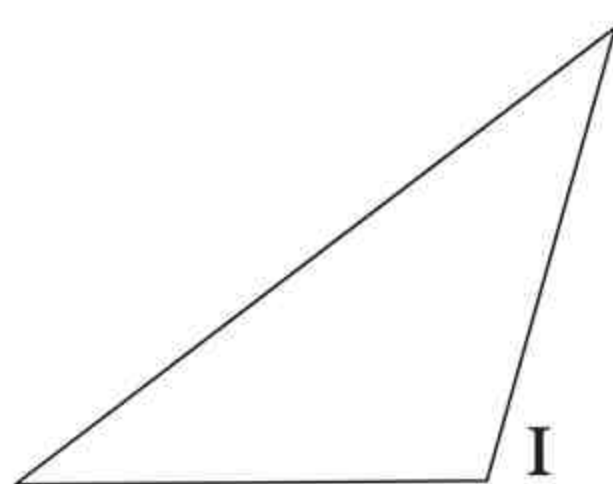
- **3** Za pomocą odpowiednich przyrządów sprawdź, które trójkąty mają:

a) tylko dwa boki równe,

c) wszystkie boki różne,

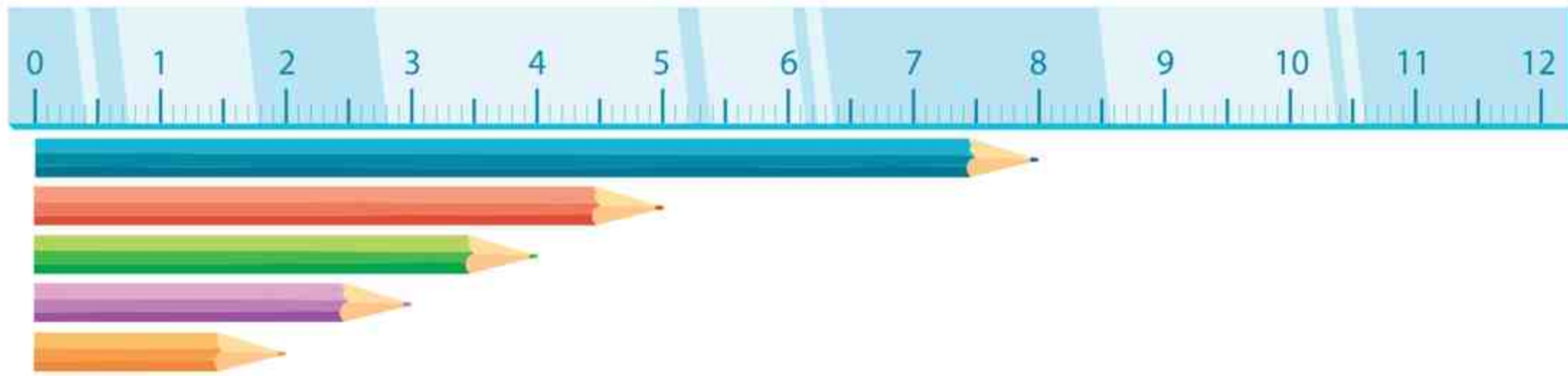
b) kąt prosty,

d) wszystkie kąty ostre.

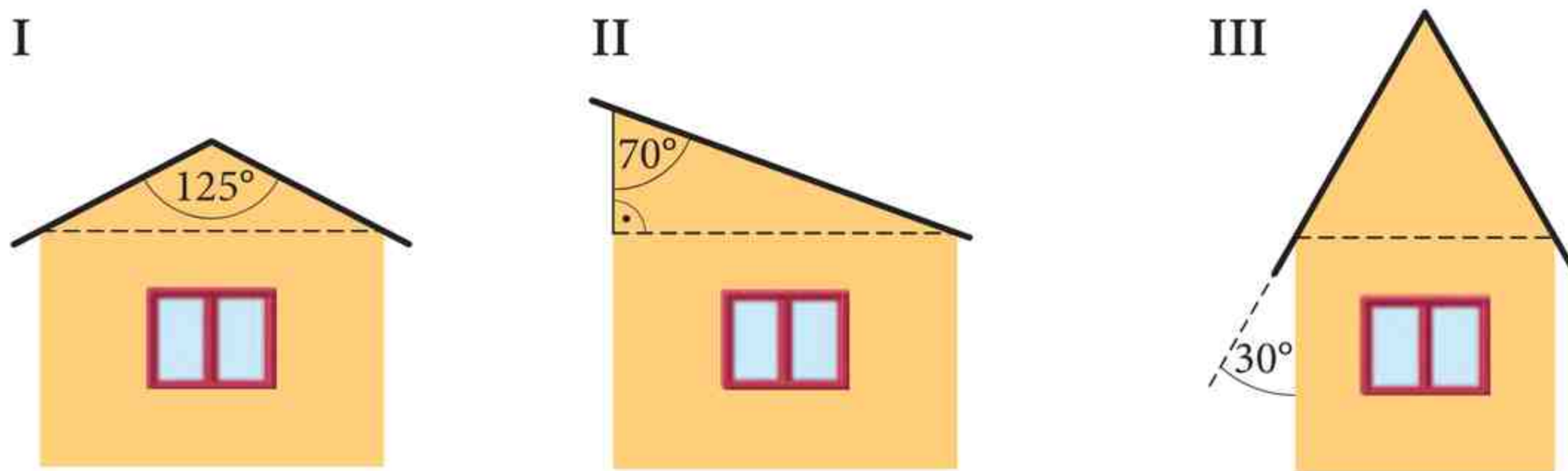


- **4** Które z trójkątów z zadania 3 mają oś symetrii? Które mają trzy osie symetrii?
- **5** Narysuj odcinki długości 4 cm, 3,5 cm i 6 cm. Skonstruuj trójkąt, którego boki mają długości równe narysowanym odcinkom. Jaki to rodzaj trójkąta?
- **6** Narysuj odcinek długości 5 cm, a następnie skonstruuj trójkąt równoboczny o bokach równych temu odcinkowi.
- **7** Jaką długość ma bok trójkąta równobocznego o obwodzie 2,1 dm?

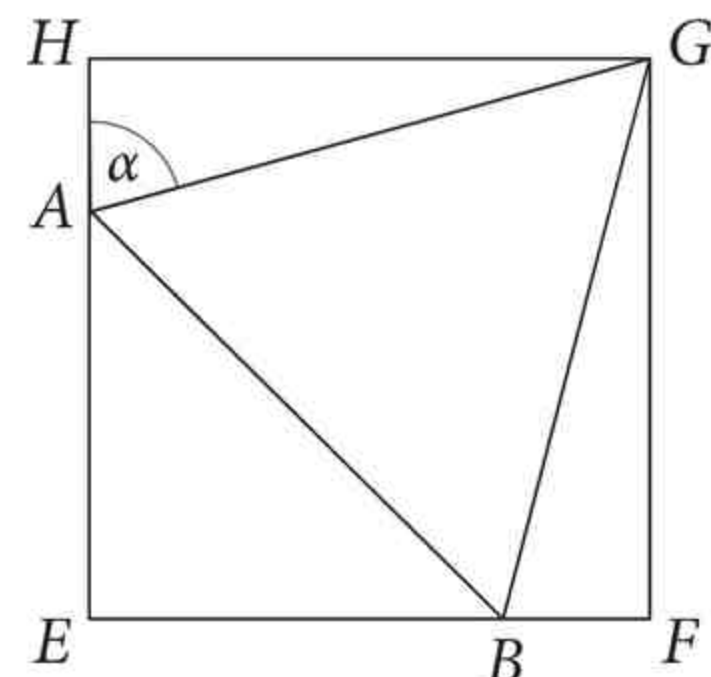
- **8** Jakie kolory mogą mieć boki trójkątów ułożonych z tych kredek? Wymień wszystkie cztery możliwości.



- **9** Mówi się, że dach jest pochyły, gdy nachylenie jego powierzchni do poziomu jest większe niż 15° , ale mniejsze niż 60° . Dach o większym kącie nachylenia uznawany jest za stromy, a o mniejszym – za płaski. Podaj kąt nachylenia każdego dachu. Który dach na rysunku jest pochyły, a który stromy?

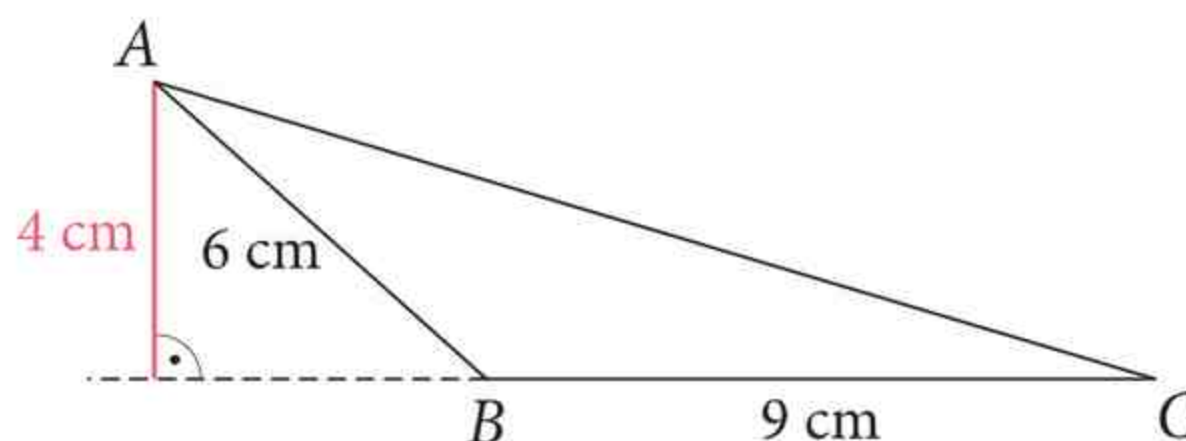


- **10** Trójkąt równoramienny ma dwa boki o podanych długościach. Jaka jest długość trzeciego boku? Czy jest tylko jedna możliwość?
a) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ b) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$
- **11** Jeden z kątów trójkąta równoramiennego jest równy 40° . Jakie miary mają pozostałe kąty? Rozpatrz dwa przypadki.
- **12** Boki trójkąta mają długości 13 cm, 20 cm i 21 cm, a jego pole jest równe 126 cm^2 . Oblicz wysokości tego trójkąta.
- **13** Trójkąt ma jeden bok długości 6,4 cm, drugi o 1,8 cm dłuższy od pierwszego, a trzeci o 3,2 cm krótszy od pierwszego. Oblicz obwód tego trójkąta.
- **14** Na rysunku obok przedstawiono kwadrat $EFGH$ i trójkąt równoboczny ABG . Kąt α ma 75° . Oblicz pozostałe kąty trójkątów prostokątnych.

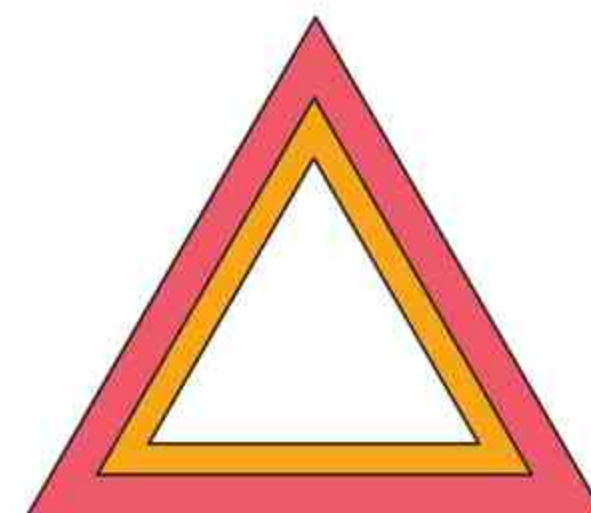


... 15 Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 24 cm. Jego najdłuższy bok ma 10 cm, a najkrótszy 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

... 16 Niektóre wymiary trójkąta ABC podano na rysunku. Oblicz wysokość opuszczoną na bok AB.

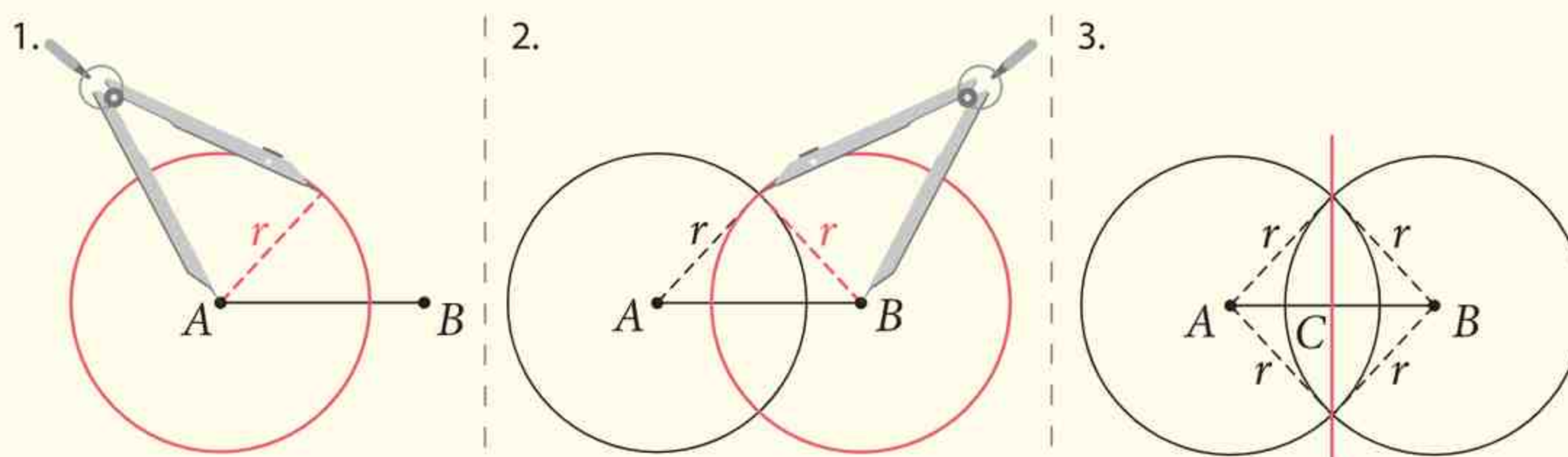


... 17 Trójkąt ostrzegawczy jest wykonany z blachy i ma kształt trójkąta równobocznego z wyciętym środkiem. Obwód zewnętrzny znaku wynosi ok. 132 cm, a obwód wyciętego środka – ok. 78 cm. Wysokości trójkątów wynoszą odpowiednio: ok. 38 cm i ok. 22,5 cm. Ile waży ten trójkąt? Przyjmij, że 1 cm^2 blachy waży 1 g.



Dla ciekawych

Przyjrzyj się kolejnym etapom konstrukcji.



Każdy punkt przecięcia okręgów leży w jednakowej odległości od punktów A i B.

W takim razie na trzecim rysunku czworokąt zaznaczony linią przerywaną jest rombem i dlatego czerwona prosta jest prostopadła do odcinka AB i dzieli go na pół. Taką prostą nazywamy **symetralną** odcinka AB. Punkt C jest środkiem odcinka AB.

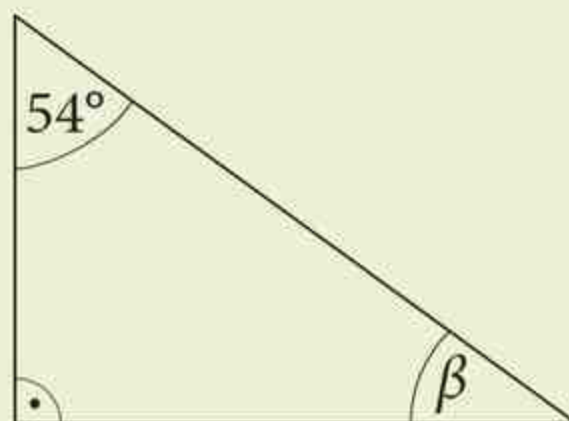
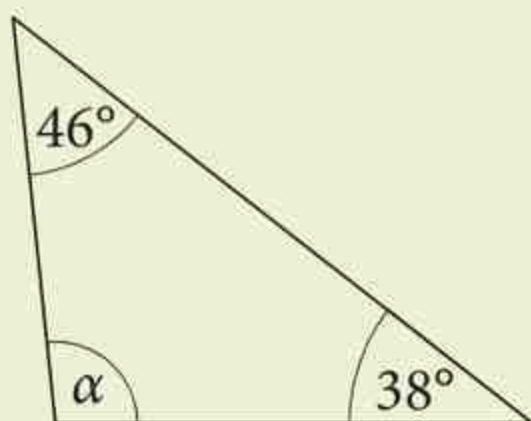
Tę konstrukcję można wykorzystać do rysowania prostych prostopadłych oraz do dzielenia danego odcinka na połowy.

- 1 Narysuj dowolny odcinek i podziel go konstrukcyjnie na dwa równe odcinki.
- 2 Narysuj prostą i zaznacz na niej punkt C. Następnie skonstruuj prostą prostopadłą do narysowanej prostej i przechodzącą przez punkt C.



Czy już umiem?

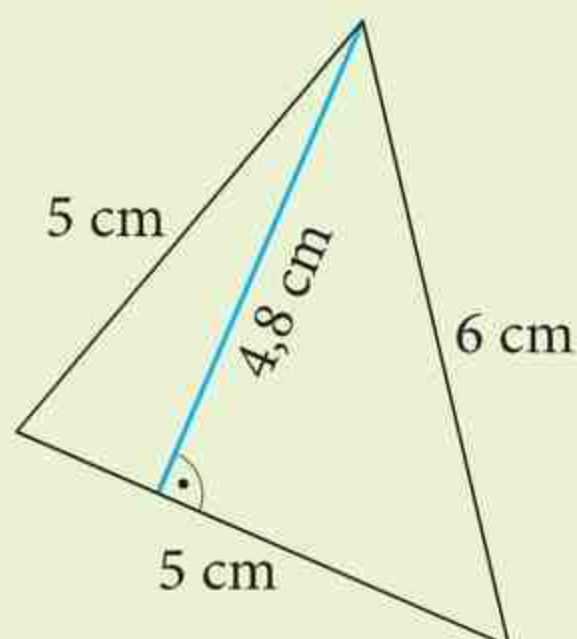
I Oblicz kąty α , β i γ .



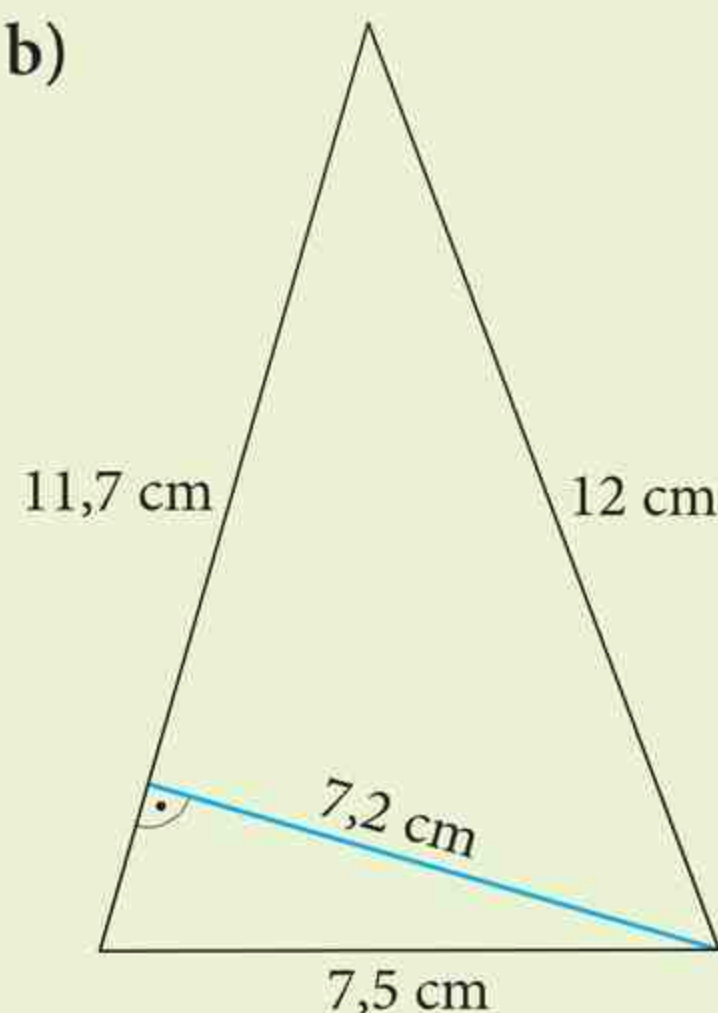
II Narysuj trzy odcinki: 2,5 cm, 3,2 cm i 4,8 cm. Skonstruuj trójkąt o bokach równych tym odcinkom. Określ rodzaj tego trójkąta.

III Oblicz obwód i pole narysowanego trójkąta.

a)



b)



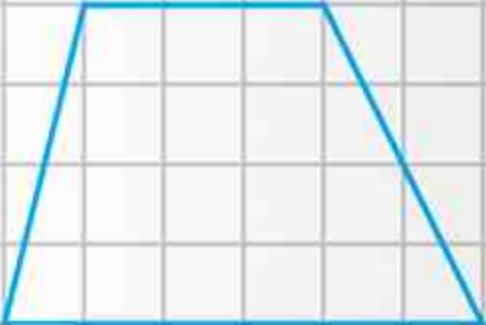
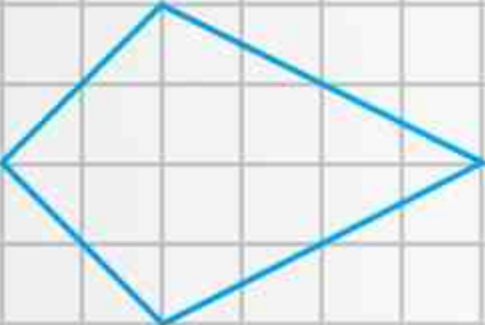
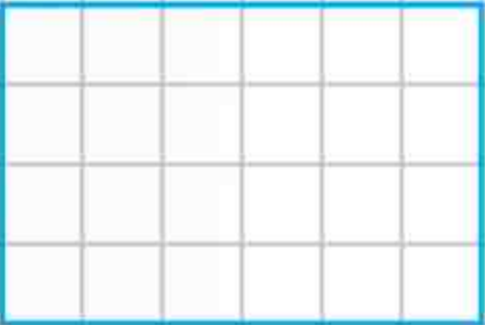
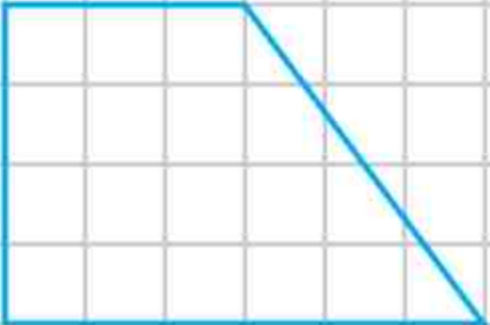
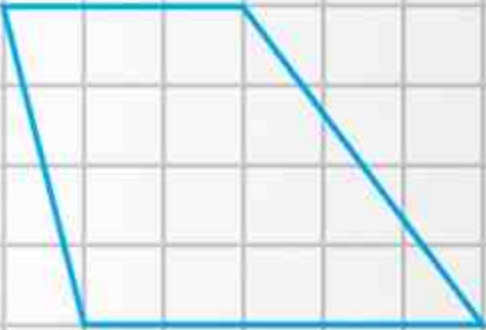
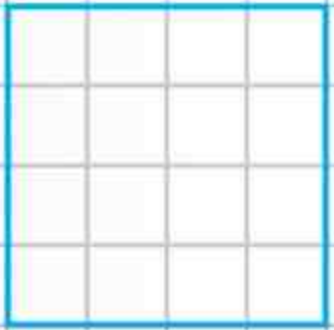
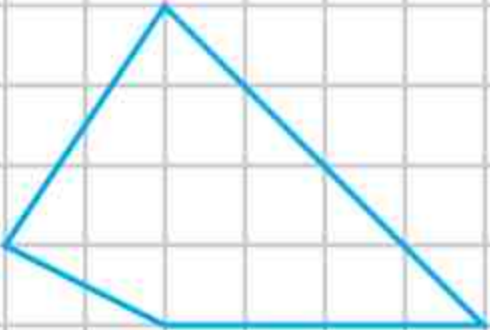
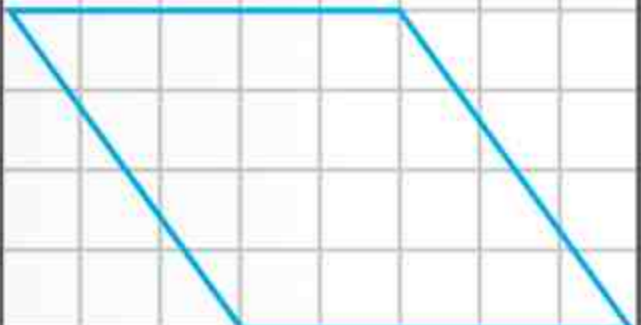
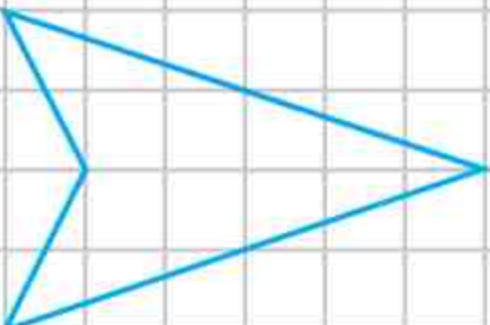
IV Zapoznaj się z rozkładem jazdy pociągu z Paryża do Warszawy.

a) Jak długo trwa podróż z Paryża do Poznania?

b) O której godzinie przyjechałby do Warszawy pociąg, jeśli wyjechałby z Frankfurtu nad Odrą o trzeciej po południu? Przyjmij, że pociąg ten sam odcinek pokonuje za każdym razem w tym samym czasie.

Stacja	Przyjazd	Odjazd
Paryż		19.28
Frankfurt nad Menem	2.24	2.26
Berlin	7.50	7.57
Frankfurt nad Odrą	9.18	9.25
Poznań	11.05	11.10
Warszawa	15.34	

Poniższy diagram ma 12 części. Każda z nich składa się z czworokąta i dwóch pól z literami na niebieskim i pomarańczowym polu.

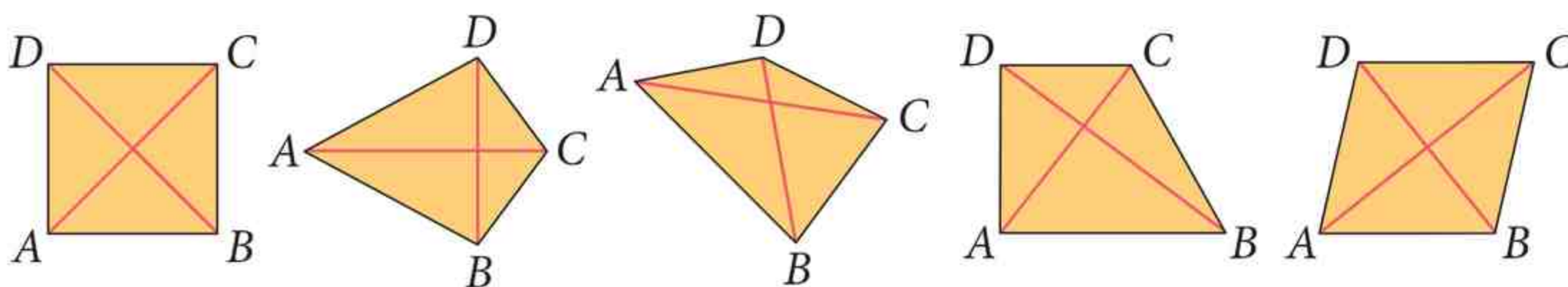
							
WMA	NI	ATY	KR	TEM	JAL	ATY	OGI
							
CEN	SP	IEM	A	ADR	NI	EC	ÓL
							
OGI	EDL	SP	I	EC	A	NI	ÓW

Pytania i polecenia

- Wśród pokazanych czworokątów znajdź te, które są trapezami. Odczytaj kolejno przyporządkowane im litery na niebieskich polach. Utworzą one początek hasła.
- Wśród pokazanych czworokątów znajdź równoległoboki. Odczytaj litery na pomarańczowych polach. Utworzą one środkową część hasła.
- Wśród czworokątów na diagramie znajdź te, które nie są trapezami. Odczytaj litery na pomarańczowych polach. Utworzą one końcówkę hasła.

Czworokąty

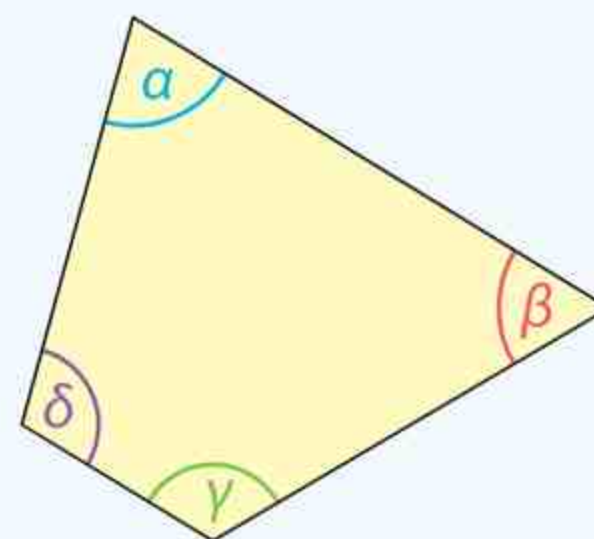
Czworokąt to wielokąt o czterech kątach. Ma cztery boki i dwie **przekątne**. W narysowanych czworokątach odcinki AC i BD są przekątnymi.



Zapamiętaj

Suma kątów czworokąta jest równa 360° .

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$



Skąd to wiemy?

Przekątna dzieli czworokąt na dwa trójkąty.

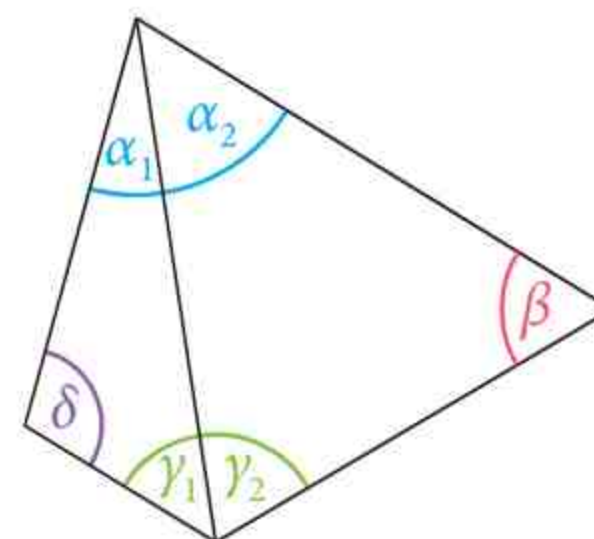
Suma kątów trójkąta jest równa 180° , więc:

$$\alpha_1 + \gamma_1 + \delta = 180^\circ$$

$$\alpha_2 + \beta + \gamma_2 = 180^\circ$$

Dlatego:

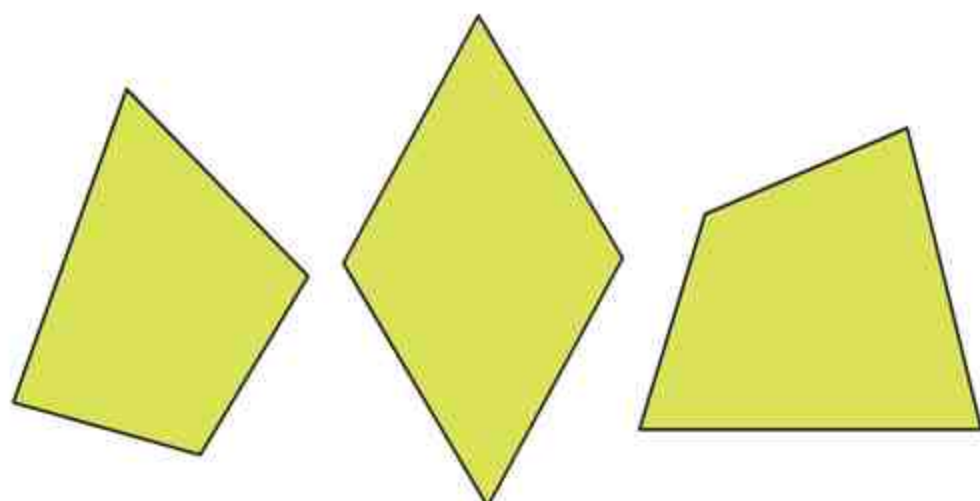
$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \beta + (\gamma_1 + \gamma_2) + \delta = 360^\circ$$



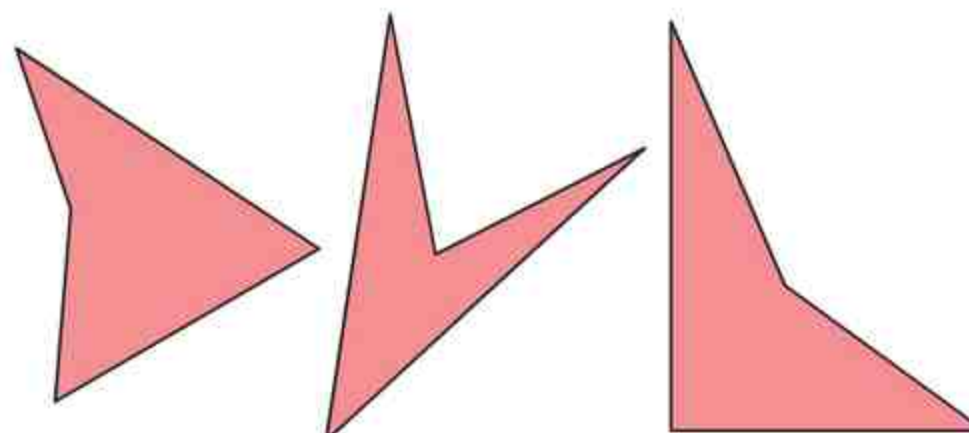
Czworokąty wypukłe

Każdy z czworokątów na rysunkach powyżej ma wszystkie kąty wypukłe (mniejsze od 180°). Takie czworokąty nazywamy **wypukłymi**. Istnieją także czworokąty, które nie są wypukłe. Każdy taki czworokąt ma jeden kąt większy niż 180° .

To są czworokąty wypukłe.

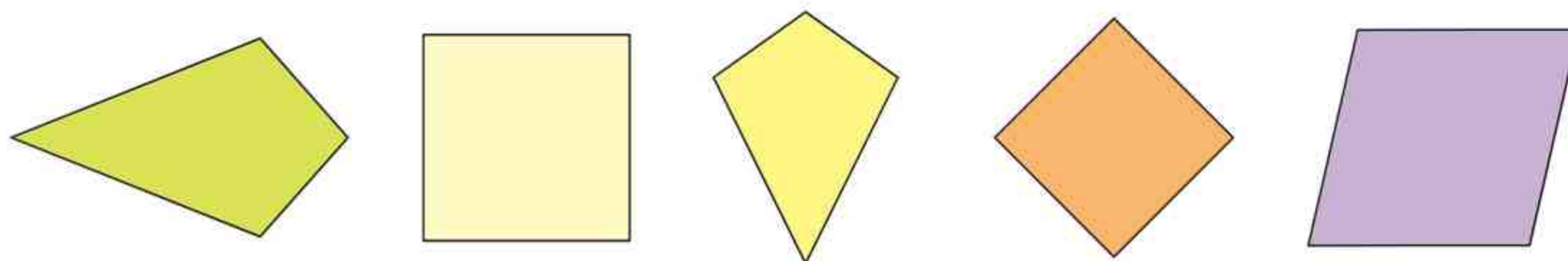


To nie są czworokąty wypukłe.

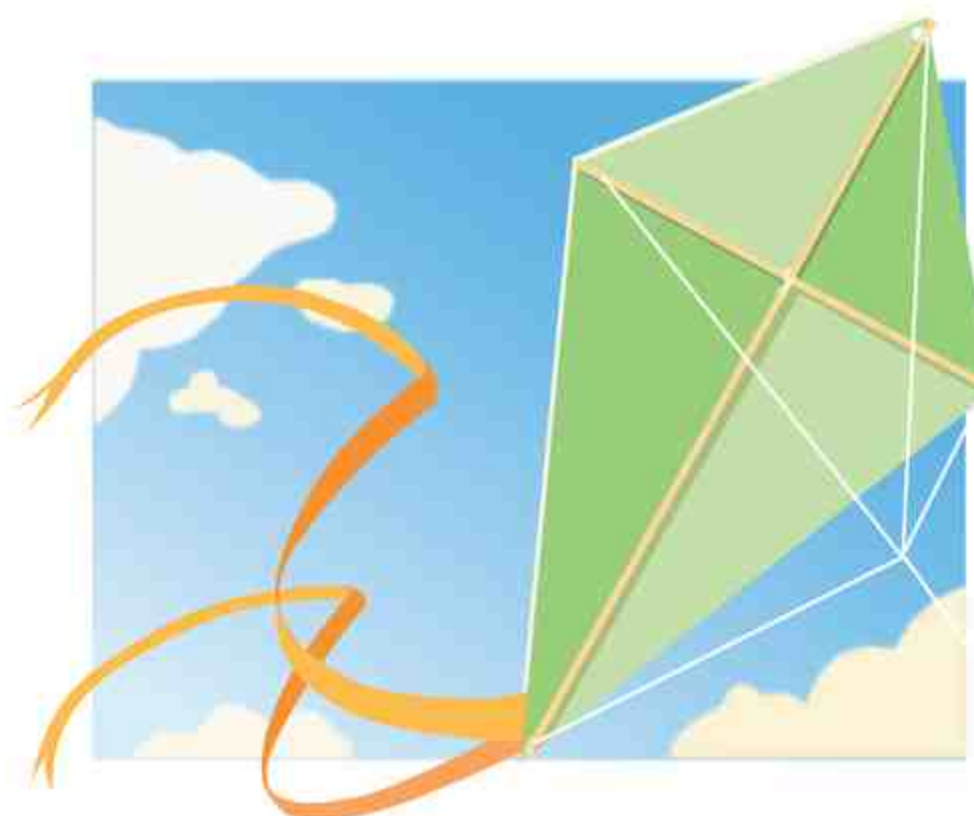
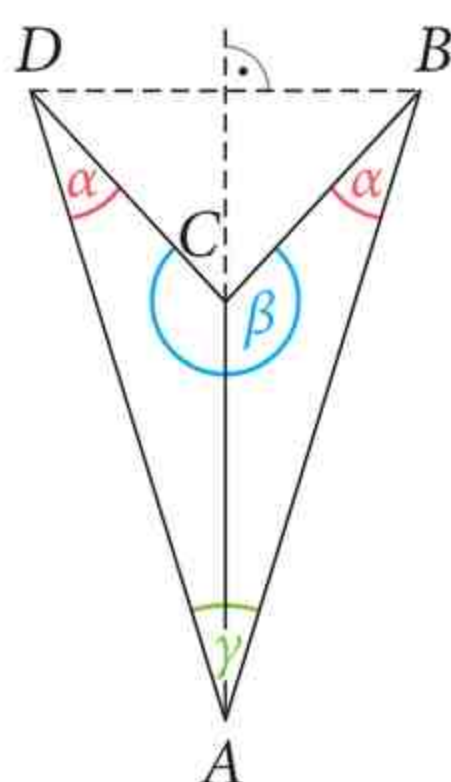
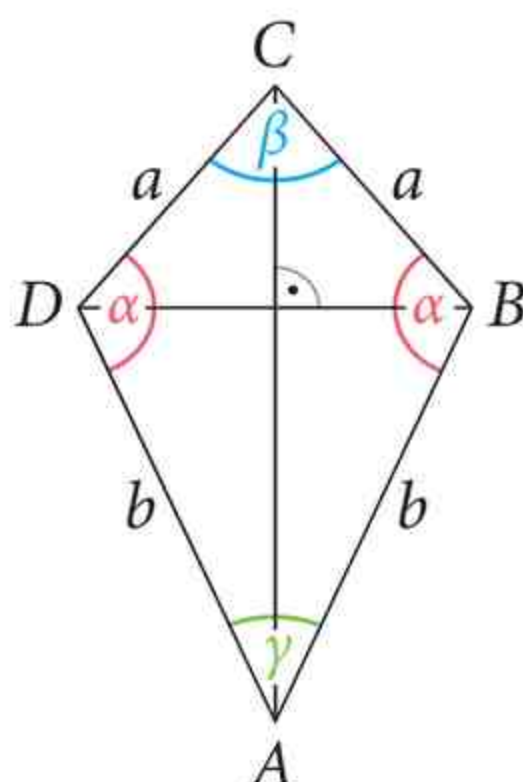


Deltoidy

Deltoid to czworokąt, który ma **dwie pary sąsiednich boków równych**.



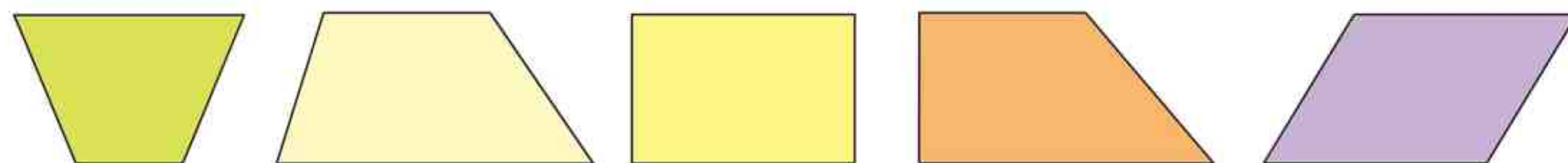
Każdy deltoid ma dwa kąty równe. W deltoidach poniżej są to kąty leżące przy wierzchołkach B i D .



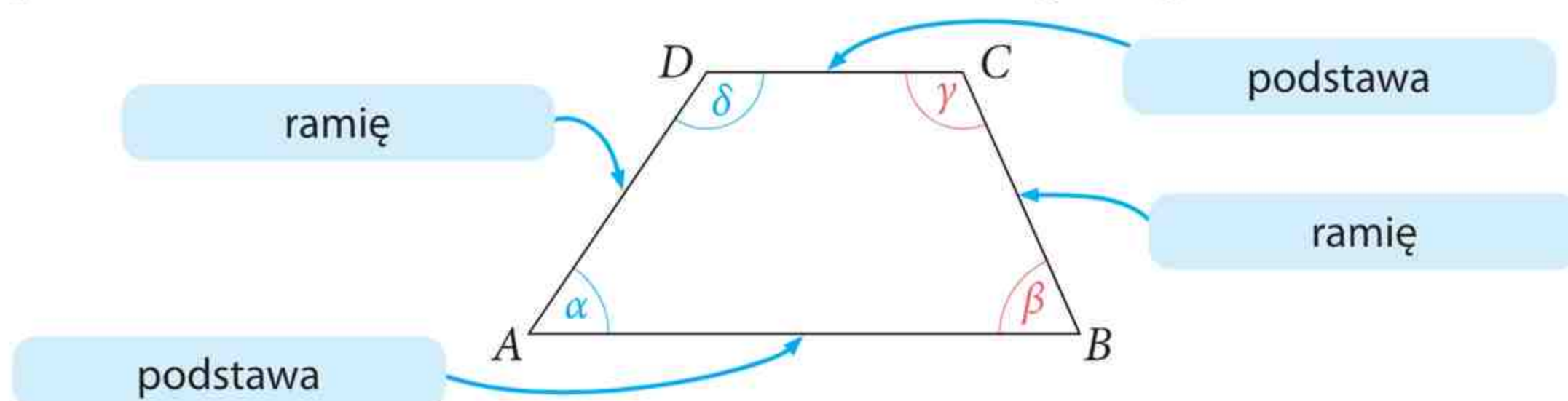
Przekątne deltoidu są prostopadłe. Jedna z nich (na rysunku powyżej jest to przekątna AC) zawiera się w osi symetrii deltoidu. W deltoidzie wypukłym dzieli ona drugą przekątną na pół, a w deltoidzie, który nie jest wypukły, jej przedłużenie dzieli drugą przekątną na pół.

Trapezy

Trapez to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.



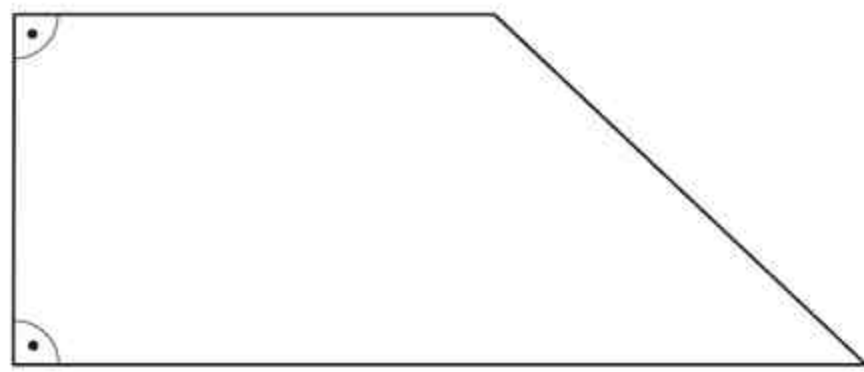
Równoległe boki trapezu, który nie jest równoległobokiem, nazywa się **podstawami**. Pozostałe dwa boki to **ramiona** tego trapezu.



W trapezie suma kątów leżących przy tym samym ramieniu wynosi 180° .

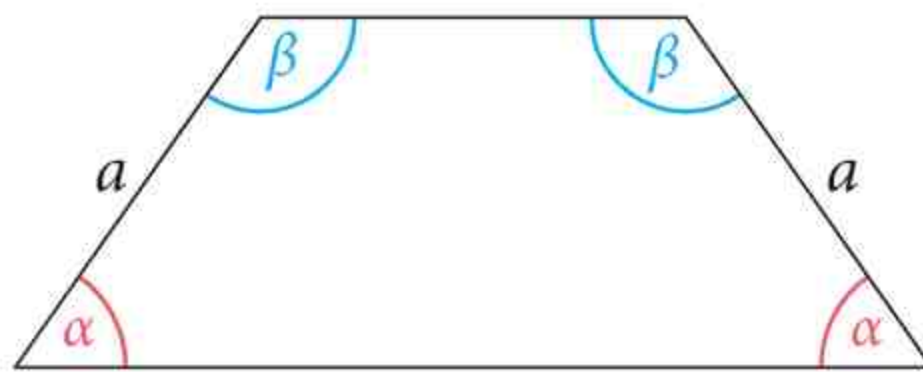
$$\alpha + \delta = 180^\circ \quad \text{i} \quad \beta + \gamma = 180^\circ$$

To jest trapez prostokątny.



Ma przynajmniej jedno ramię prostopadłe do podstawy.

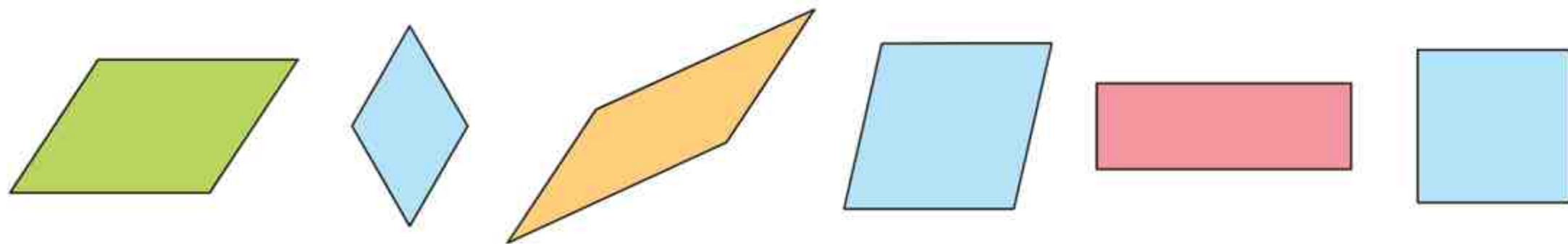
To jest trapez równoramienny.



Ma równe ramiona i równe kąty przy tej samej podstawie.

Równoległoboki i romby

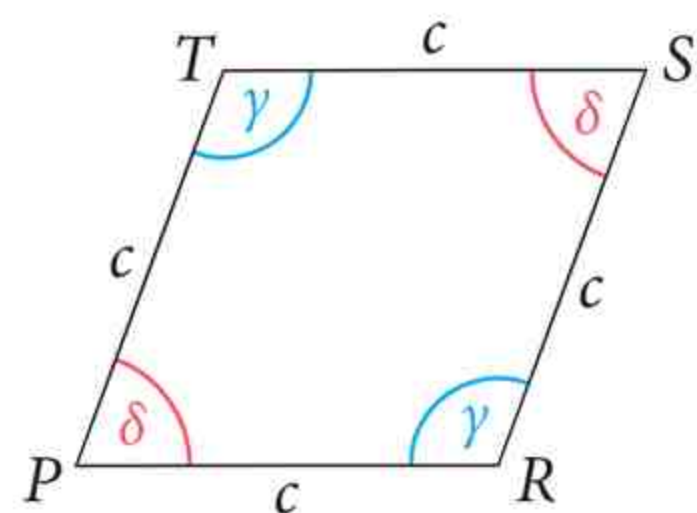
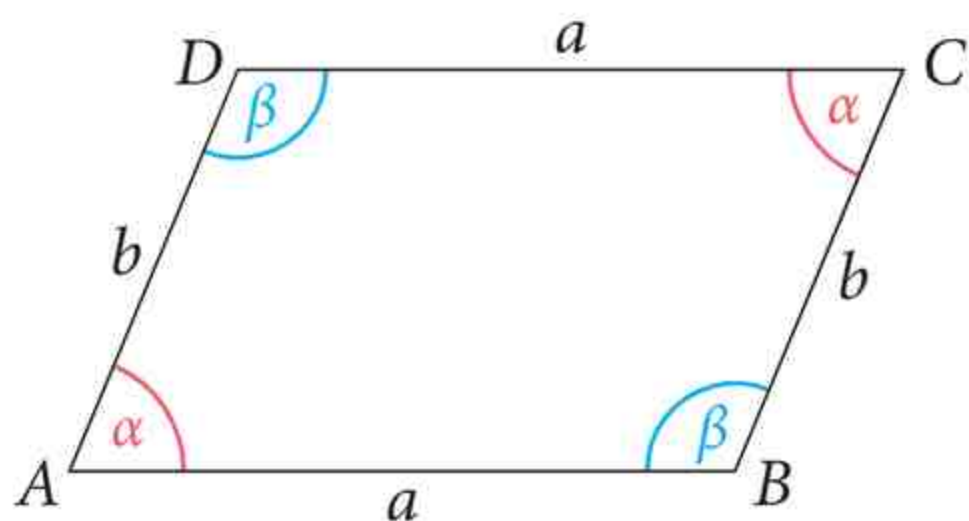
Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.



Niebieskie równoległoboki na rysunku powyżej są rombami.

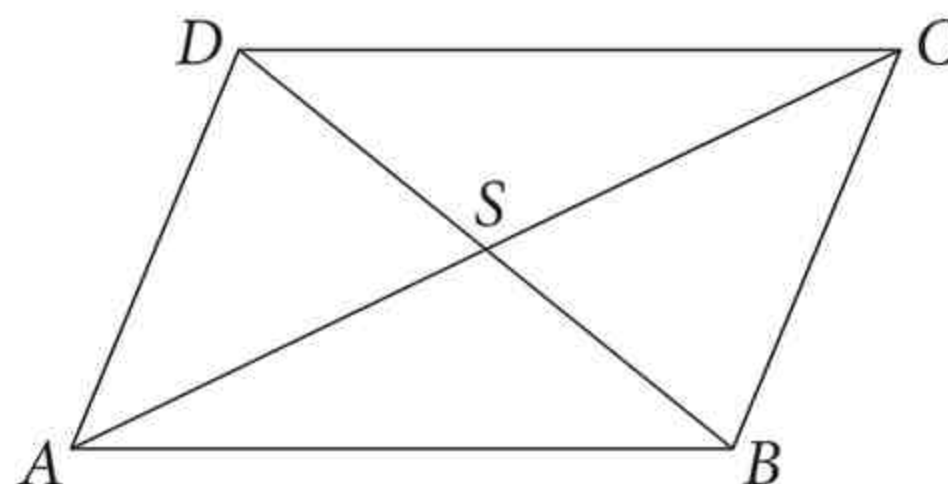
Romb to równoległobok, który ma wszystkie boki równe.

W równoległoboku kąty leżące naprzeciwko siebie są równe, a równoległe boki mają taką samą długość.



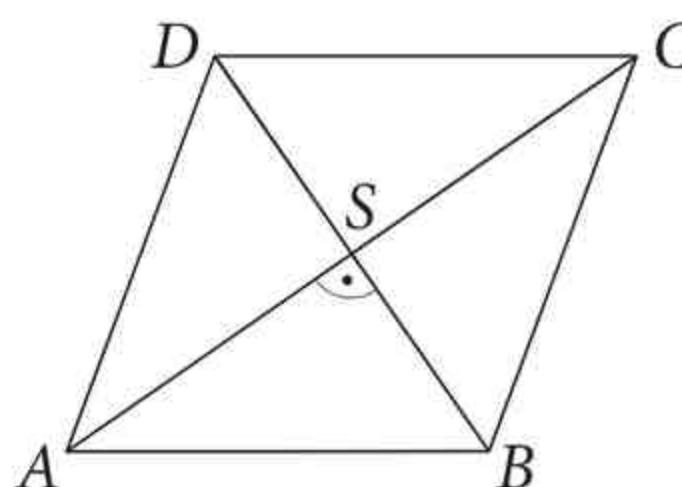
Przekątne równoległoboku przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

$$\begin{aligned} AS &= SC \\ BS &= SD \end{aligned}$$



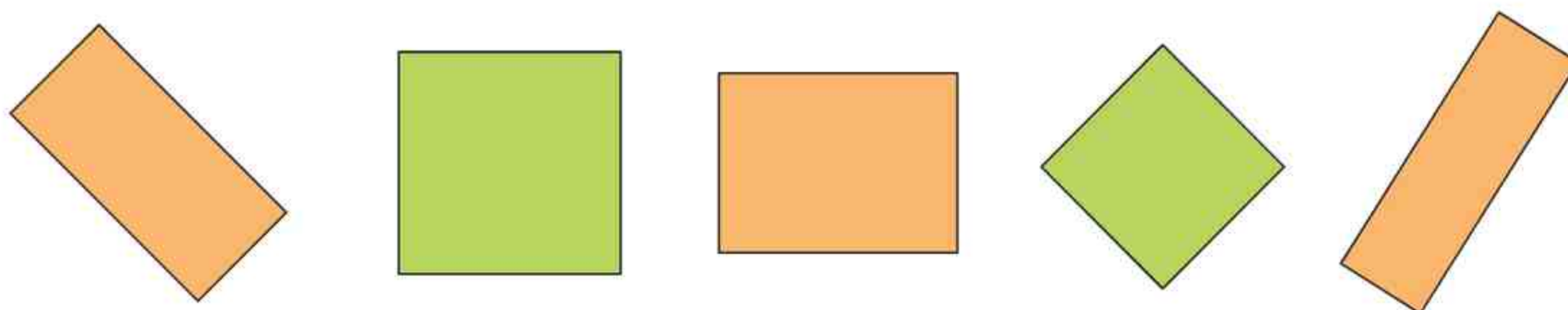
Przekątne rombu są prostopadłe.

$$AC \perp BD$$



Prostokąty

Prostokąt to czworokąt, który ma cztery kąty proste.

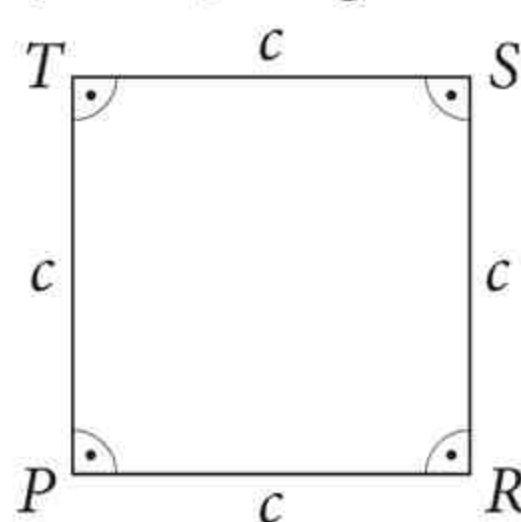
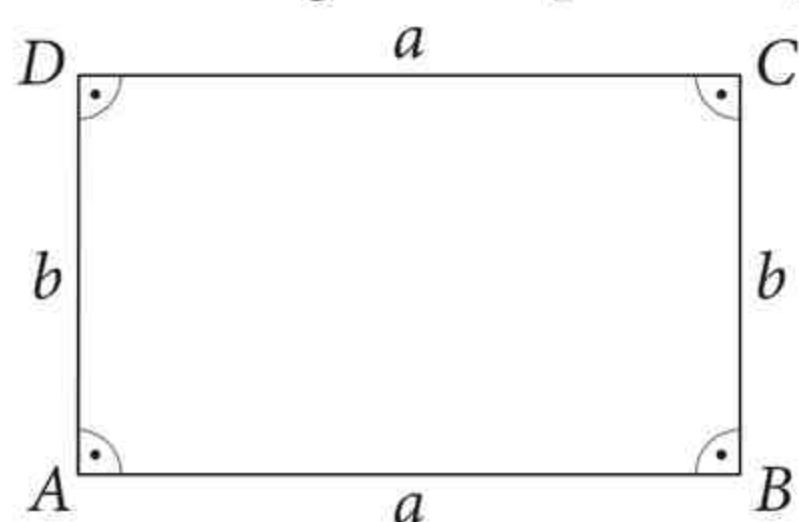


Zielone prostokąty na rysunku powyżej są kwadratami.

Kwadrat to prostokąt, który ma wszystkie boki równe.

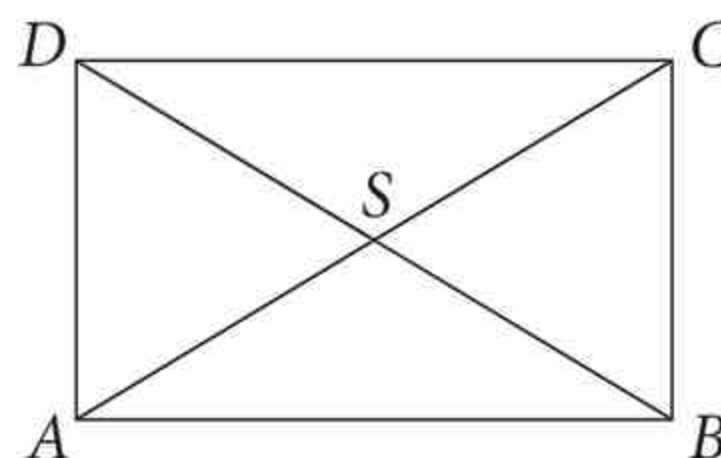
Można też powiedzieć, że jest to romb o wszystkich kątach prostych.

Przeciwnie boki prostokąta mają taką samą długość.

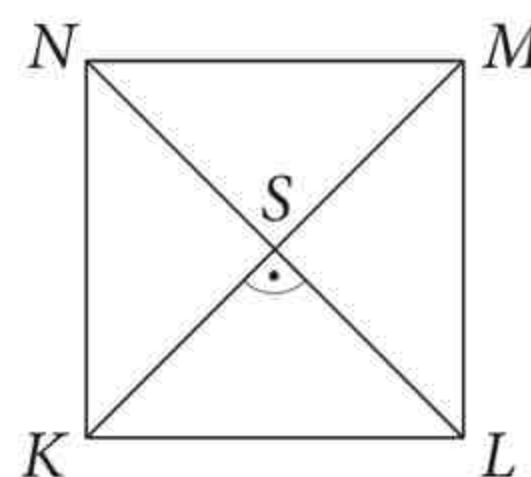


Przekątne prostokąta są równe. Prostokąt jest równoległobokiem, więc jego przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

$$AS = SC = BS = SD$$

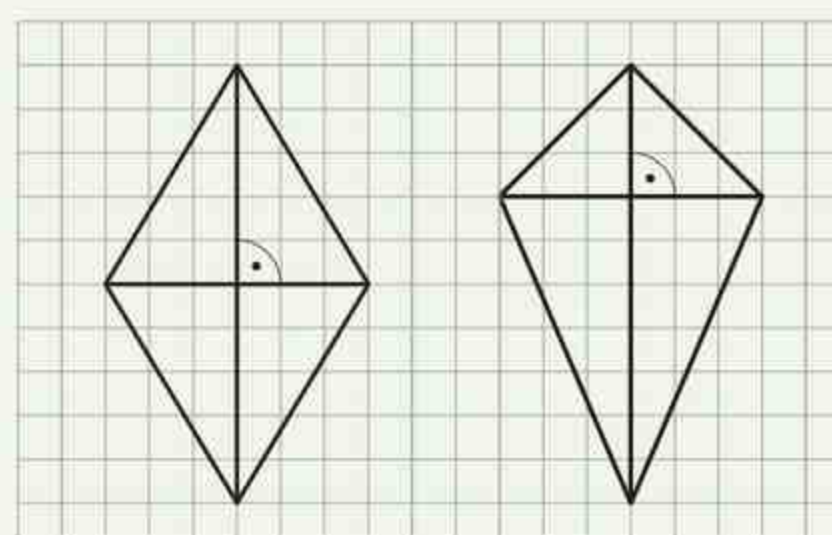


Kwadrat, który jest szczególnym przypadkiem równoległoboku, prostokąta i rombu, ma przekątne dzielące się na połowy, równej długości i prostopadłe.



Dobra rada

Aby starannie narysować romb i deltoid, możesz wykorzystać własności przekątnych tych figur oraz kratki w zeszycie.



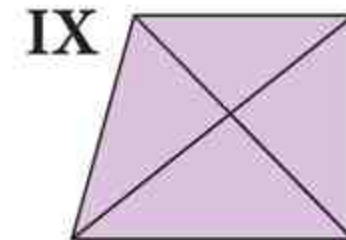
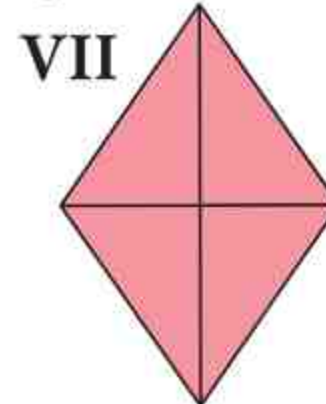
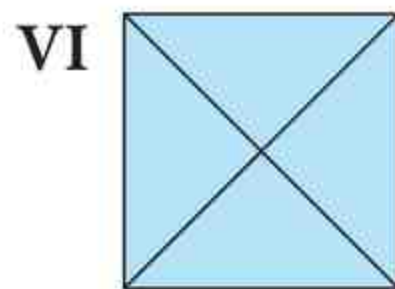
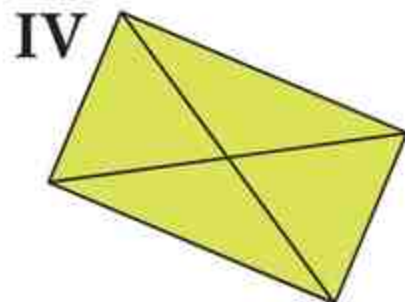
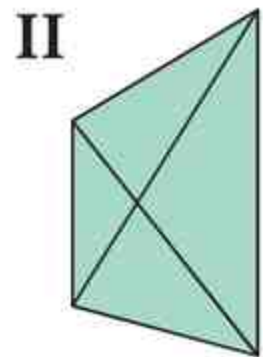
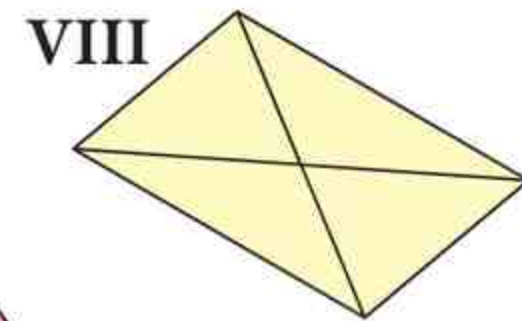
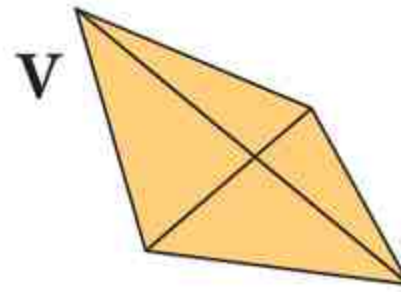
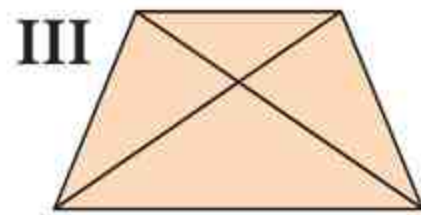
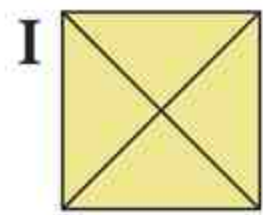
Zadania

- 1 Która z poniższych figur jest:

a) równoległobokiem,

b) kwadratem,

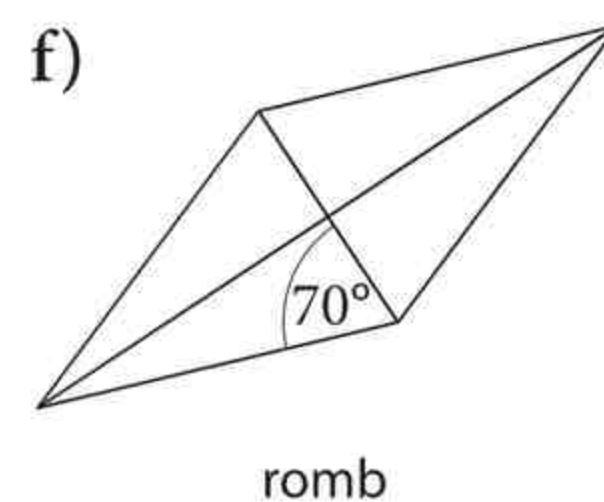
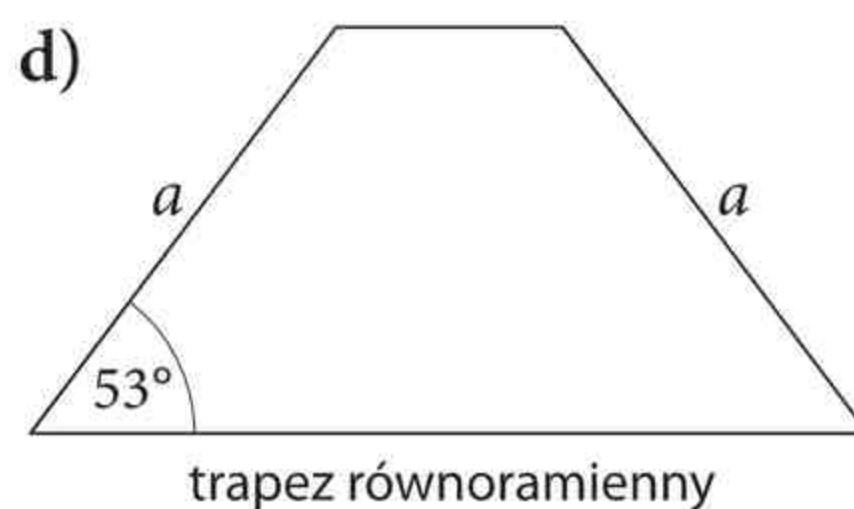
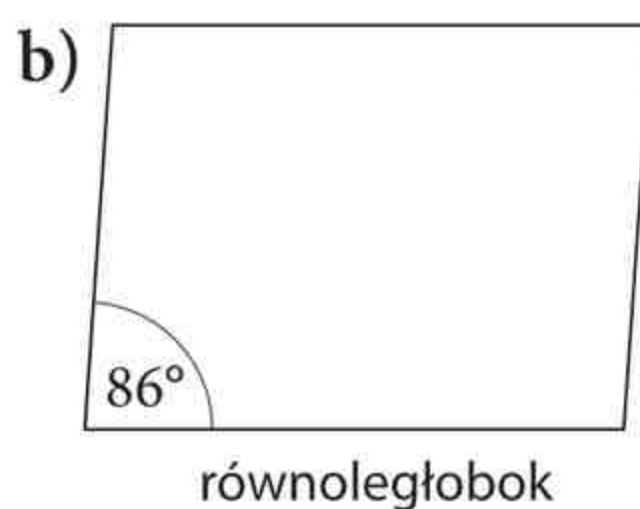
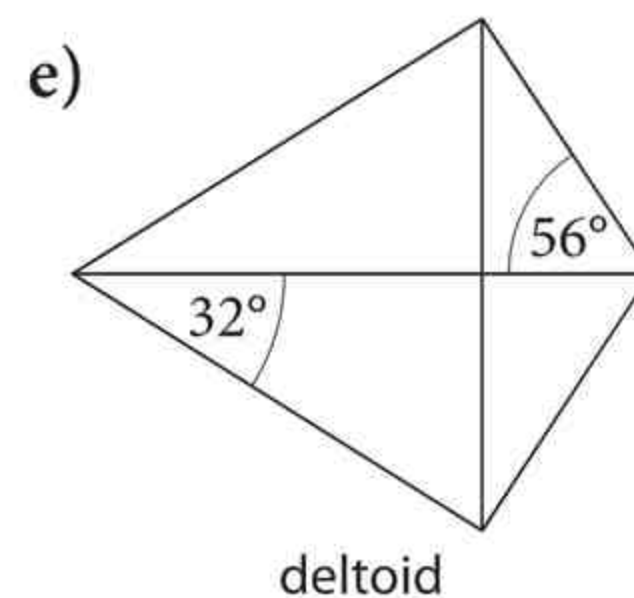
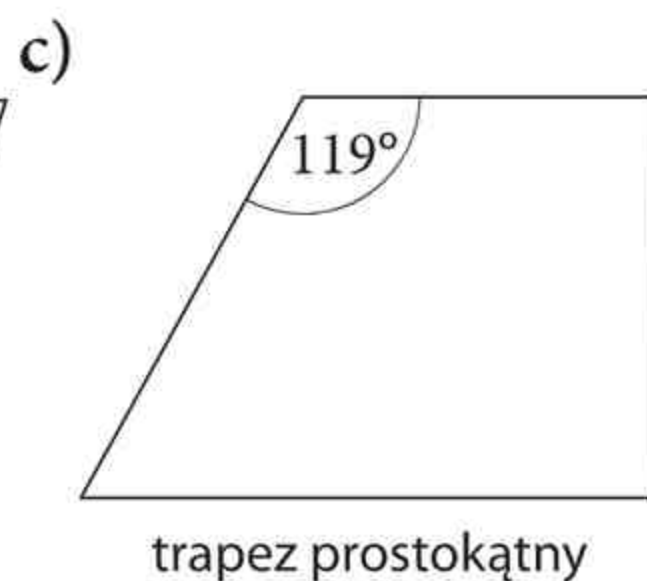
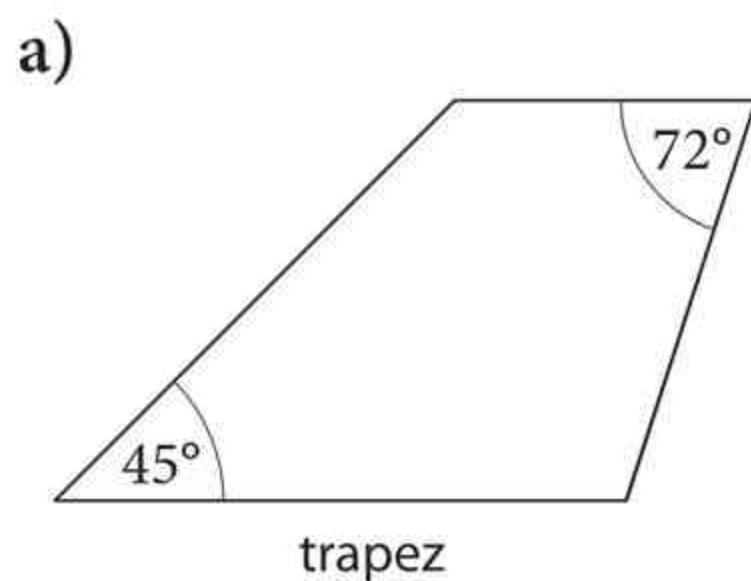
c) trapezem?



- 2 a) Narysuj równoległobok o bokach 2 cm i 3 cm.
b) Narysuj trapez prostokątny o podstawach 2,5 cm i 4 cm oraz krótszym ramieniu 3 cm.

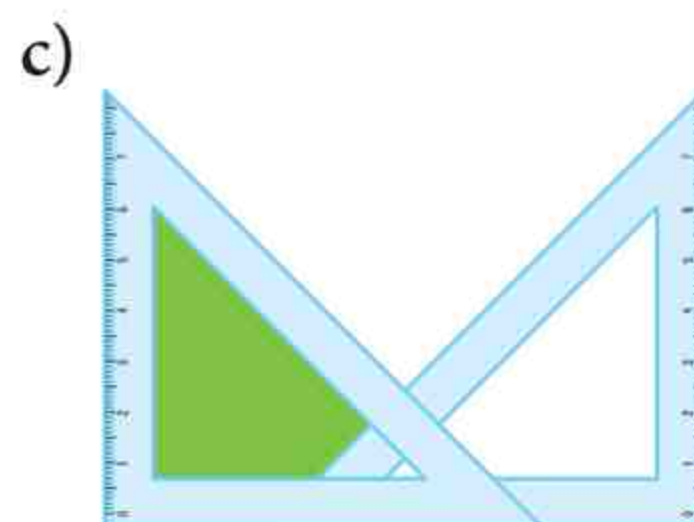
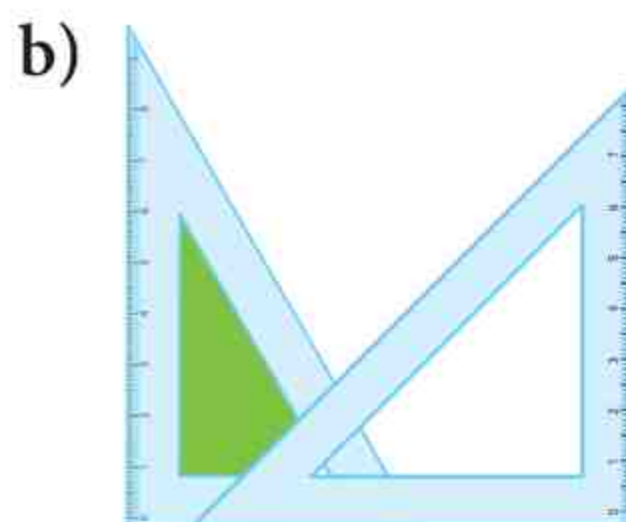
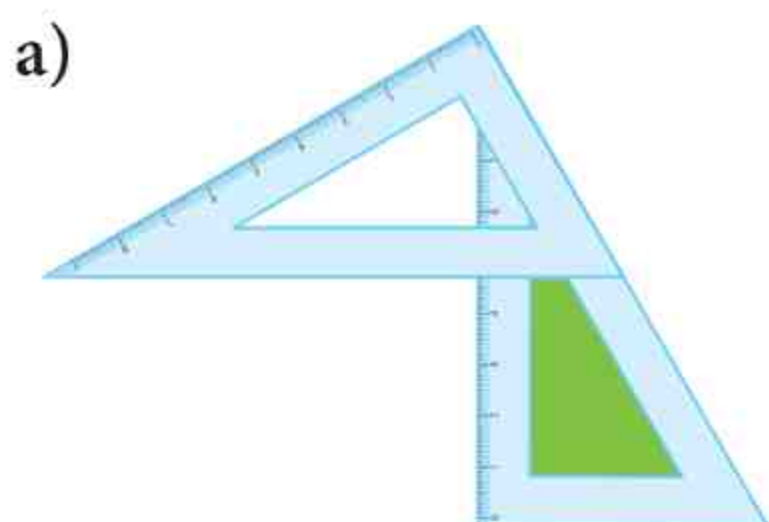
- 3 Jakie czworokąty możesz ułożyć z czterech zapalek? A jakie – z sześciu?

- 4 Podaj miary kątów czworokąta.



- 5 Trapez prostokątny został podzielony na kwadrat o boku 4 dm i trójkąt prostokątny o bokach 3 dm, 4 dm i 5 dm. Oblicz obwód tego trapezu.
- 6 Obwód trapezu równoramiennego wynosi 126 m. Jaka jest długość ramienia tego trapezu, jeżeli długość jednej podstawy wynosi 17 m, a druga podstawa jest trzy razy dłuższa od pierwszej?

- **7** Suma trzech kątów trapezu jest równa 290° . Oblicz jego kąty, jeżeli jest to:
 - a) trapez równoramienny,
 - b) trapez prostokątny.
- **8** Odpowiedz na pytanie.
 - a) Czy każdy kwadrat jest rombem?
 - b) Czy każdy prostokąt jest kwadratem?
 - c) Czy istnieje deltoid, który jest równoległobokiem?
- **9** Trzy spośród kątów czworokąta mają miary: 20° , 50° i 80° . Czy jest to czworokąt wypukły?
- **10** Za pomocą linijki i cyrkla narysuj deltoid, którego przekątna zawarta w osi symetrii ma 6 cm, a boki mają 3,5 cm i 5 cm.
- **11** Jeden z kątów deltoidu ma 70° , a drugi jest od niego dwa razy większy. Oblicz pozostałe kąty. Rozpatrz trzy przypadki.
- **12** Narysuj romb, który jest trapezem prostokątnym. Jak krócej nazwać tę figurę?
- **13** Korzystając z własności przekątnych, narysuj:
 - a) kwadrat o przekątnej 5 cm,
 - b) romb o przekątnych 3 cm i 4 cm,
 - c) deltoid o przekątnych 2 cm i 6 cm taki, że punkt przecięcia przekątnych dzieli dłuższą przekątną na dwa odcinki, z których jeden jest dwa razy dłuższy od drugiego.
- **14** Kwadrat i trapez równoramienny mają równe obwody. Podstawy trapezu mają długości 6 cm i 4 cm, natomiast każde z ramion ma taką długość jak bok kwadratu. Oblicz obwód trapezu i pole kwadratu.
- 🏆 **15** Hubert ułożył ekierki tak, jak pokazano na rysunku. Oblicz kąty zielonego czworokąta.

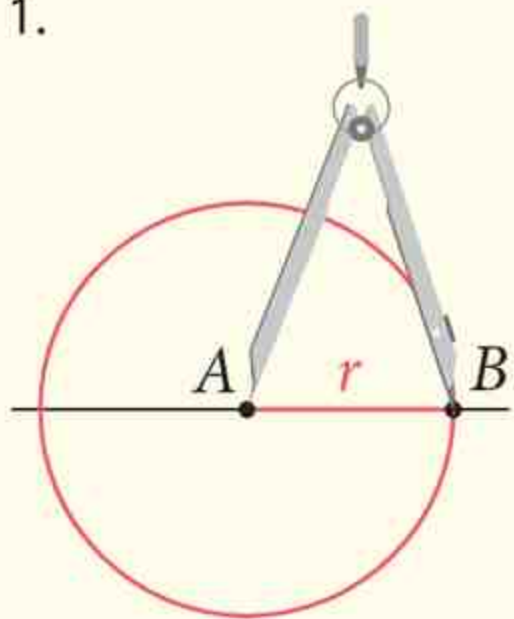




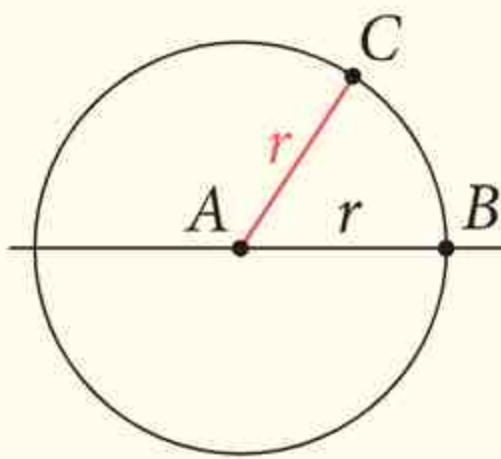
Dla ciekawych

Jak skonstruować prostą równoległą do danej prostej?
Przyjrzyj się kolejnym etapom konstrukcji.

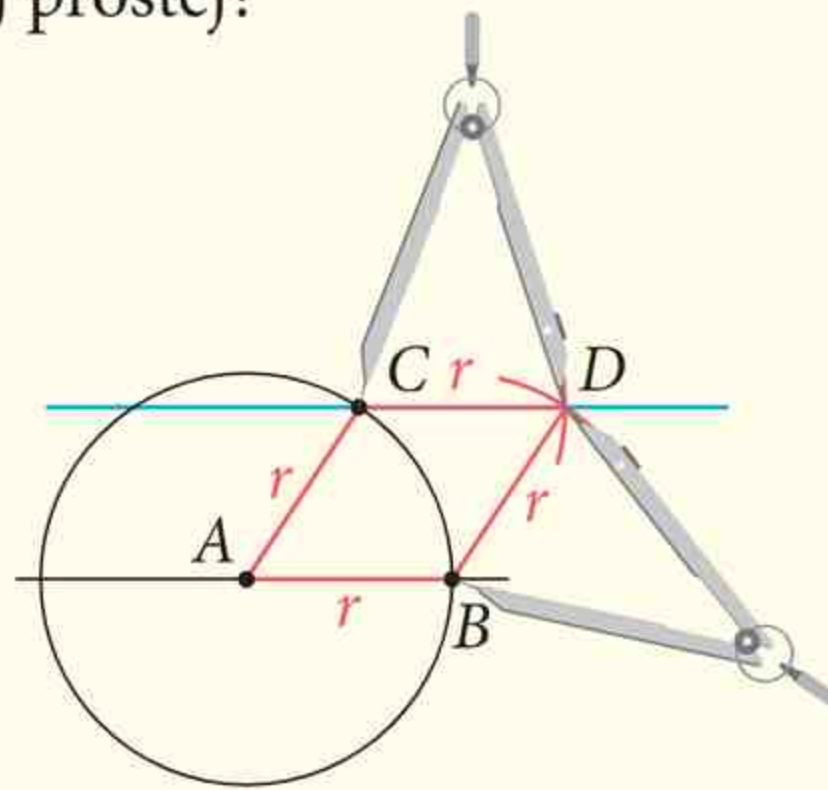
1.



2.



3.



Czworokąt $ABDC$ na trzecim rysunku to romb, więc niebieska prosta jest równoległa do prostej, na której leży odcinek AB .

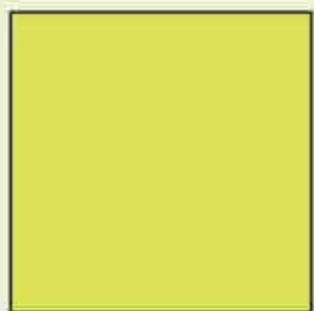
- 1 Skonstruuj romb o boku 3,5 cm i kwadrat o boku 4 cm.
- 2 Narysuj prostą p i punkt A nieleżący na prostej p . Skonstruuj prostą równoległą do prostej p i przechodzącą przez punkt A .



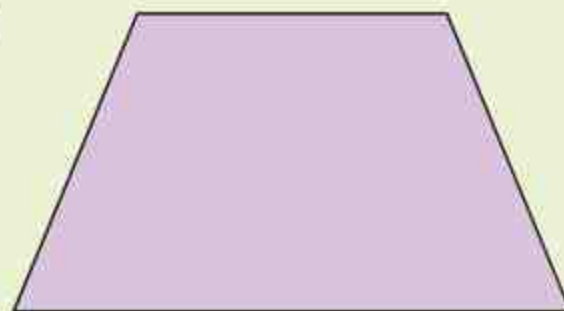
Czy już umiem?

I Która z poniższych figur jest równoległobokiem?

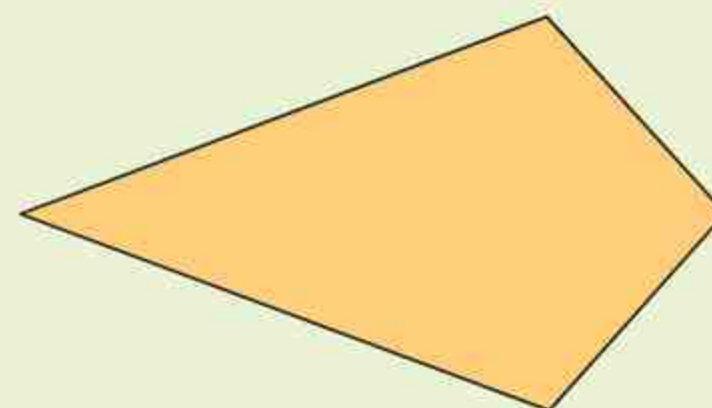
A



B

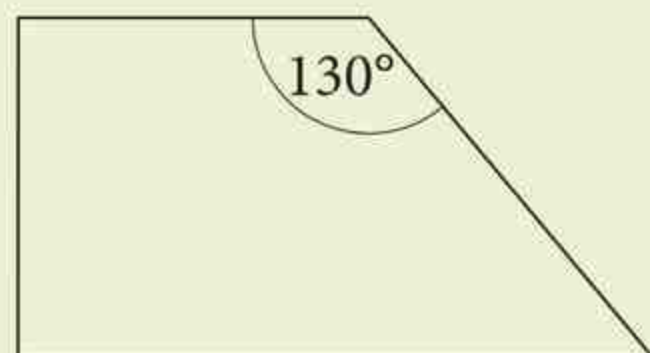


C



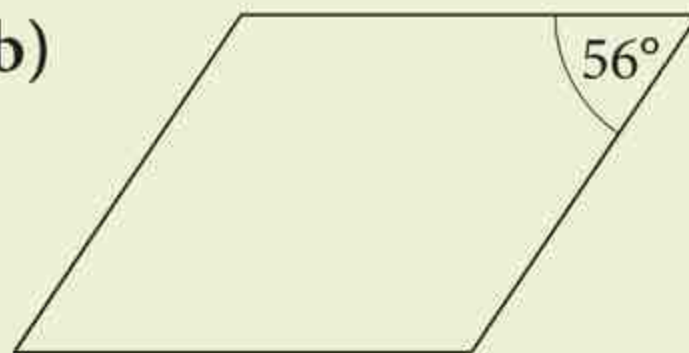
II Oblicz pozostałe kąty czworokąta.

a)



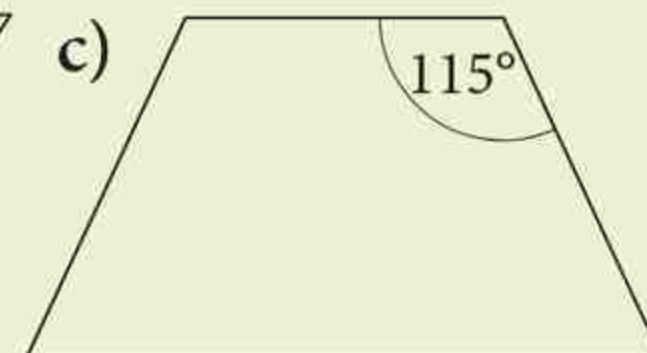
trapez prostokątny

b)



równoległobok

c)



trapez równoramienny

III Oblicz obwód trapezu równoramiennego $ABCD$, którego podstawa AB ma 15 cm, podstawa CD jest od niej o 3 cm krótsza, a każde ramię jest trzy razy krótsze od podstawy CD .

IV Kamil kupił 35 dag sera żółtego w cenie 18,60 zł za kilogram. Za zakupy płacił banknotem 20 zł. Ile reszty otrzymał?

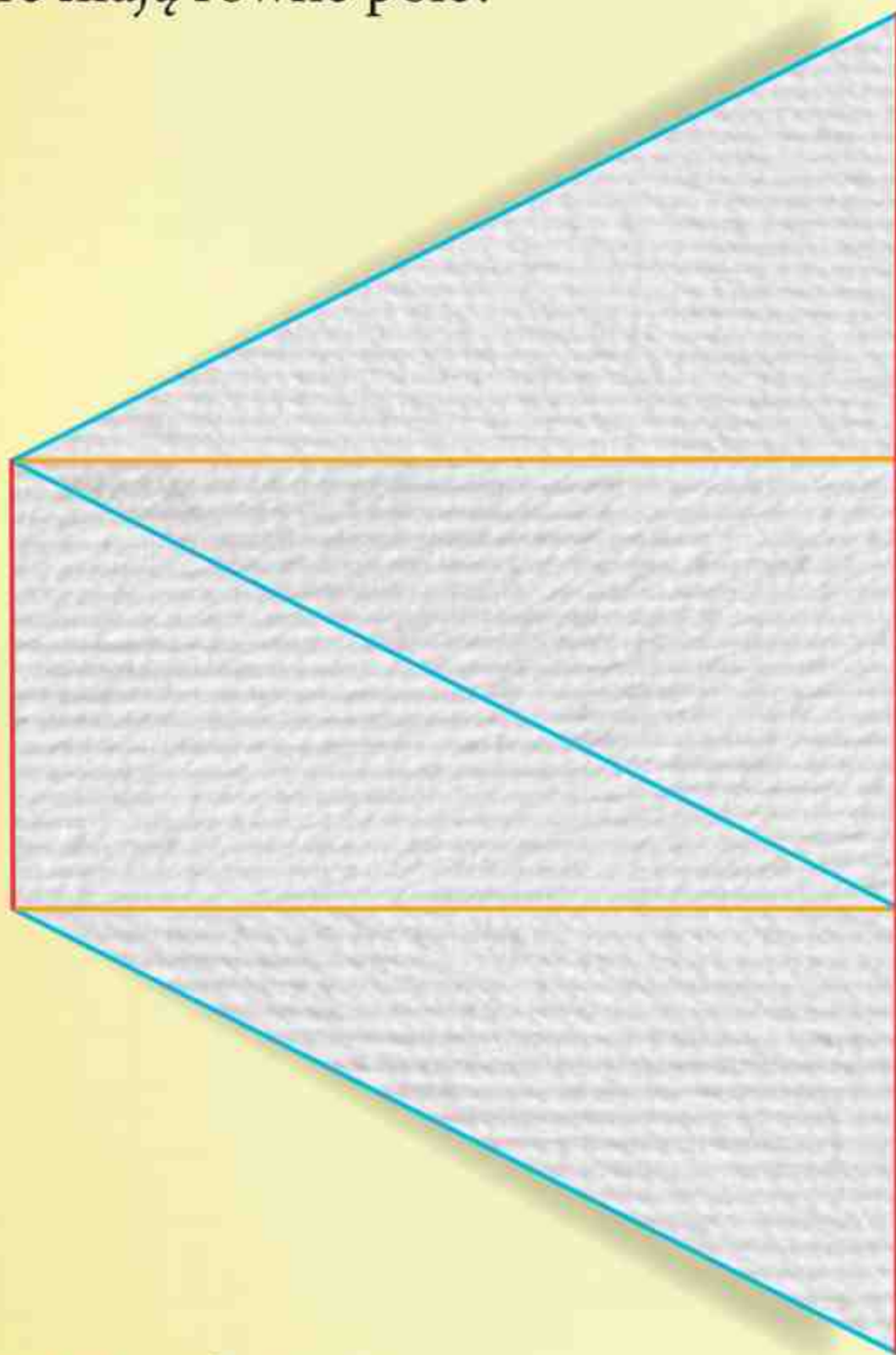
Na dobry początek

Jaka to figura?

Narysuj i wytnij cztery trójkąty prostokątne o przyprostokątnych 3 cm i 6 cm. Ułóż z nich po kolei:

- kwadrat,
- prostokąt, który nie jest kwadratem,
- równoległobok, który nie jest prostokątem,
- romb, który nie jest kwadratem,
- sześciokąt.

Czy wśród ułożonych wielokątów były takie, które mają równe pole?



Pytania i polecenia

Dwa trapezy pokazane powyżej zbudowano z czterech identycznych trójkątów prostokątnych, każdy o przyprostokątnych 3 cm i 6 cm.

- Długości których odcinków są potrzebne do obliczenia pola trapezu?
- Który trapez ma większe pole?
- Który z nich ma większy obwód?

Pole prostokąta i kwadratu

Zapamiętaj

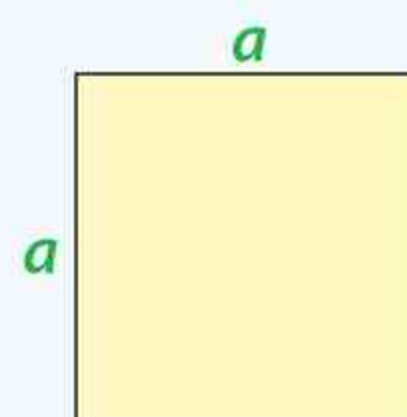
Pole prostokąta i kwadratu

$$P = a \cdot b$$



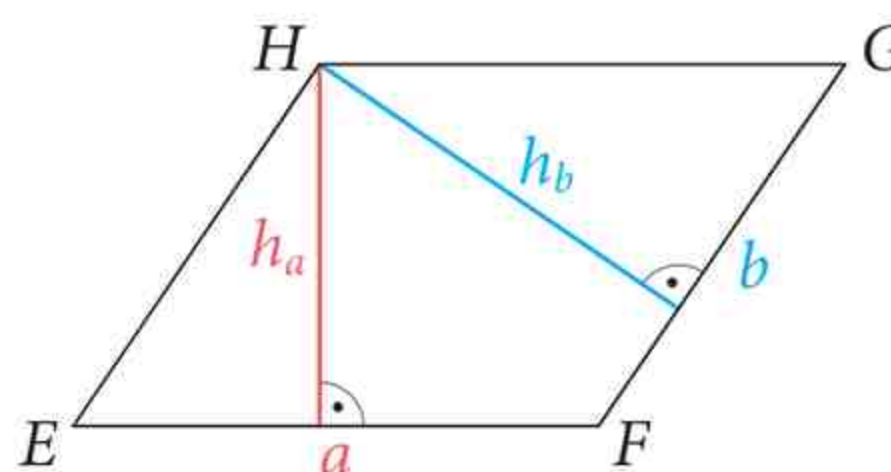
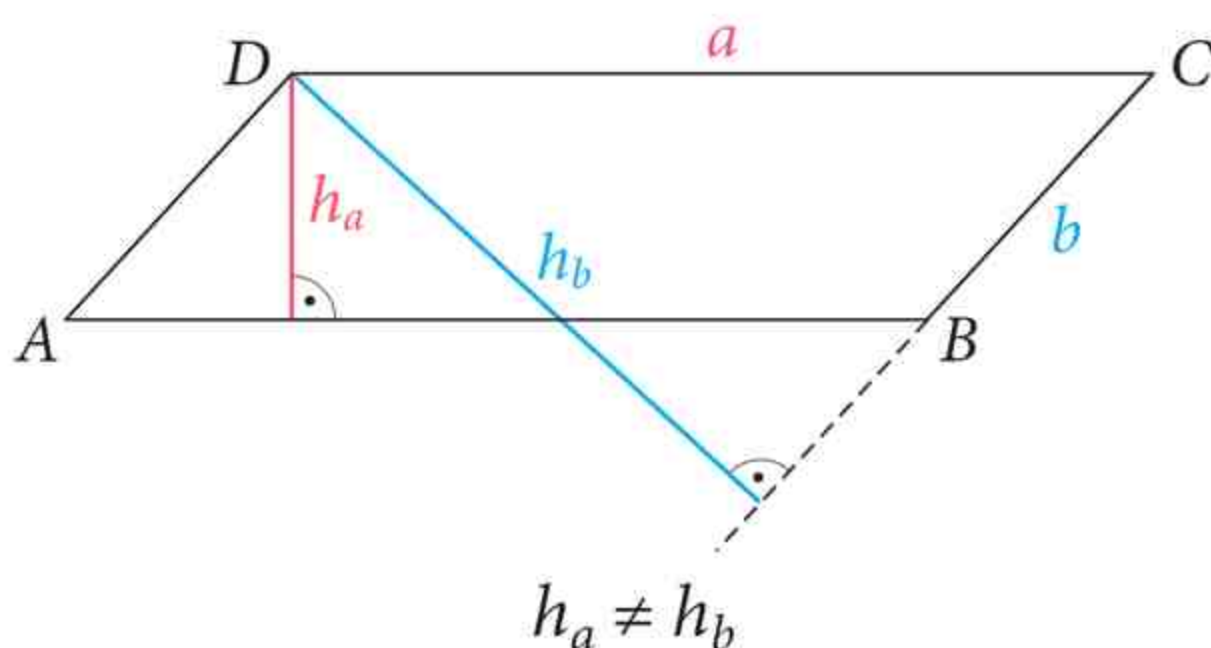
$$P = a \cdot a$$

$$P = a^2$$

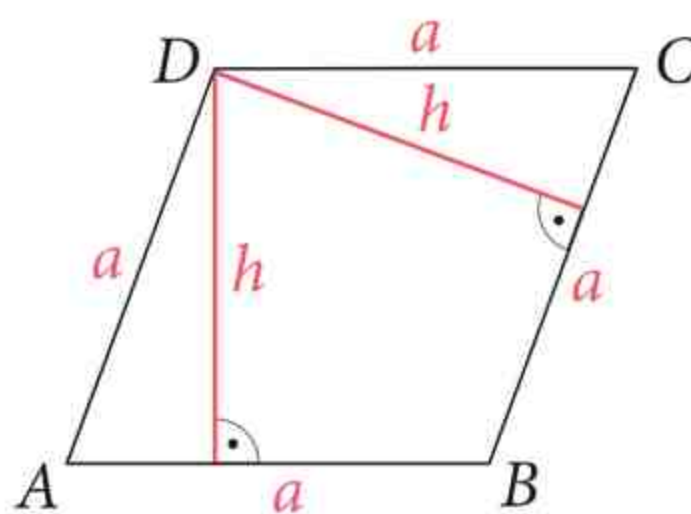


Wysokość i pole równoległoboku

Wysokości równoległoboku opuszczone na boki różnej długości są różne.



Romb jest równoległobokiem o równych bokach. Jego wysokości są równe.

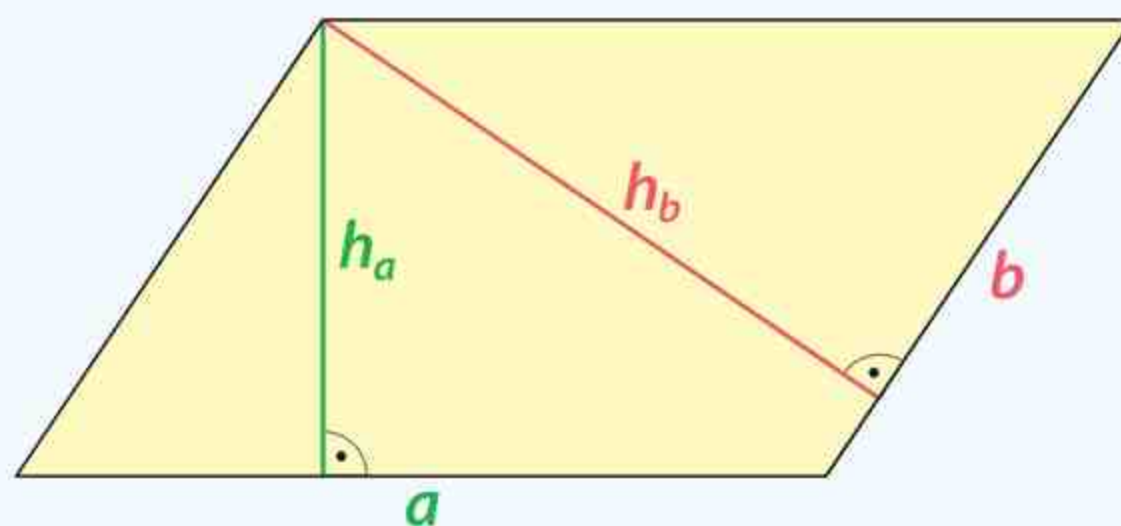


Zapamiętaj

Pole równoległoboku

$$P = a \cdot h_a$$

$$P = b \cdot h_b$$



Przykład 1

Oblicz pole równoległoboku.

Oznaczamy:

$$a = 9 \text{ m}$$

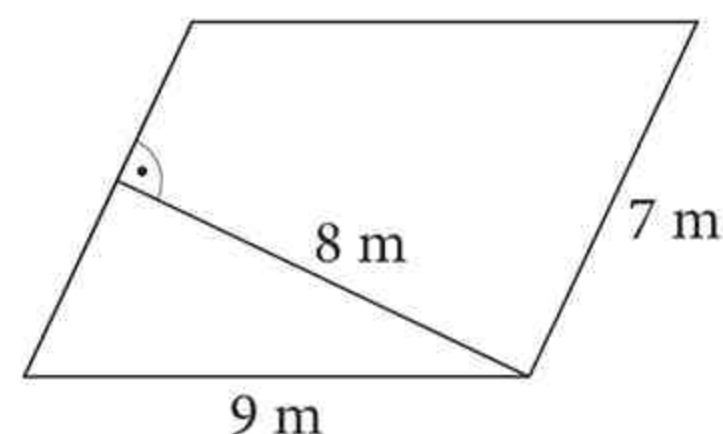
$$b = 7 \text{ m}$$

$$h_b = 8 \text{ m}$$

Jako podstawę wybieramy bok, który jest prostopadły do danej wysokości – w tym wypadku jest to bok b o długości 7 m.

$$P = 7 \cdot 8 = 56 \text{ [m}^2\text{]}$$

Odp. Pole równoległoboku jest równe 56 m².



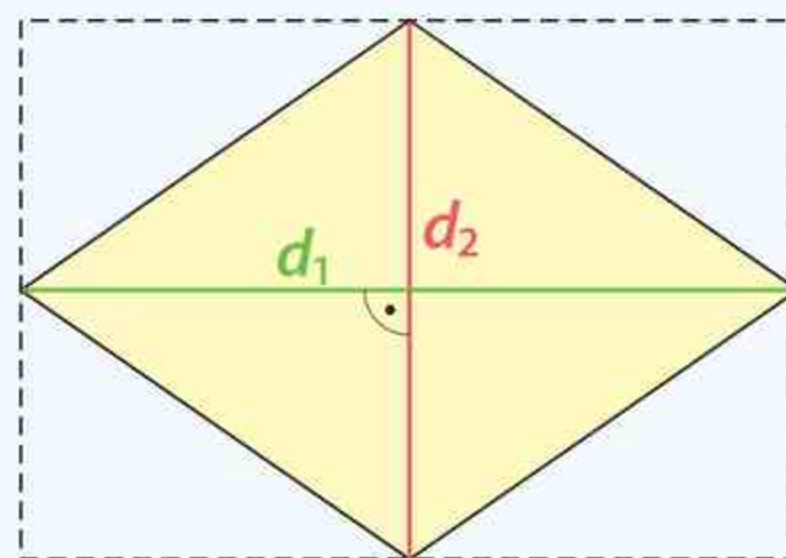
Pole rombu i deltoidu

Pole rombu możemy obliczyć tak jak pole każdego równoległoboku. Przypomnijmy też inny sposób.

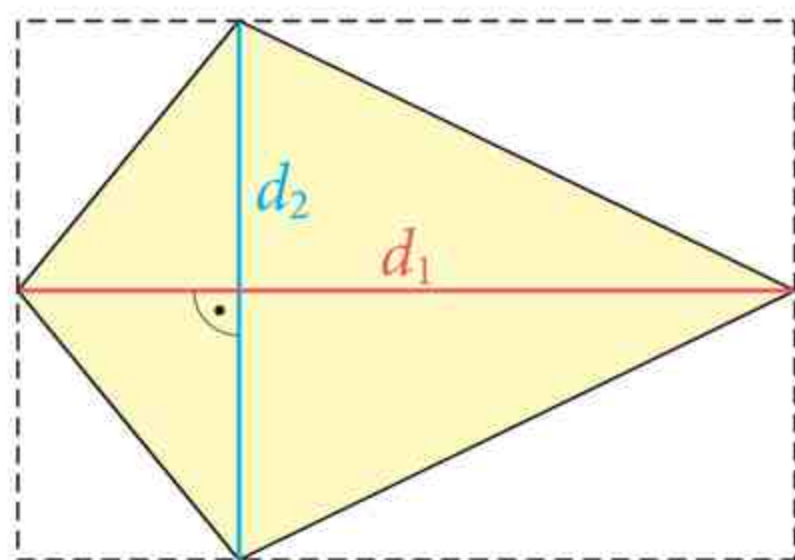
Zapamiętaj

Pole rombu o przekątnych d_1 i d_2 jest równe połowie pola prostokąta o bokach d_1 i d_2 .

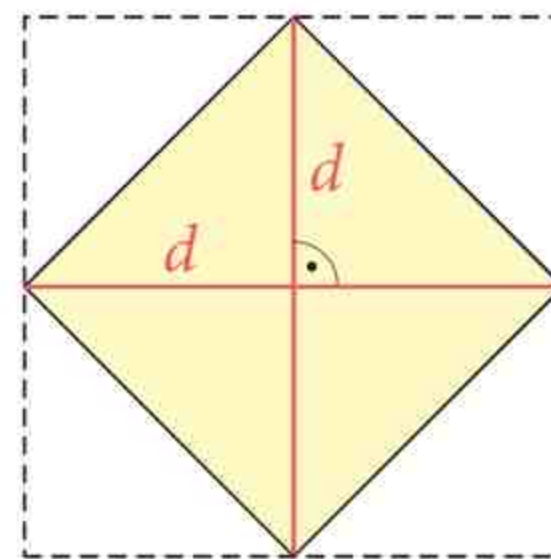
$$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$$



Tak samo możemy obliczyć pole deltoidu i pole kwadratu.



$$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$$



$$P = \frac{1}{2} \cdot d \cdot d = \frac{1}{2} \cdot d^2$$

Przykład 2

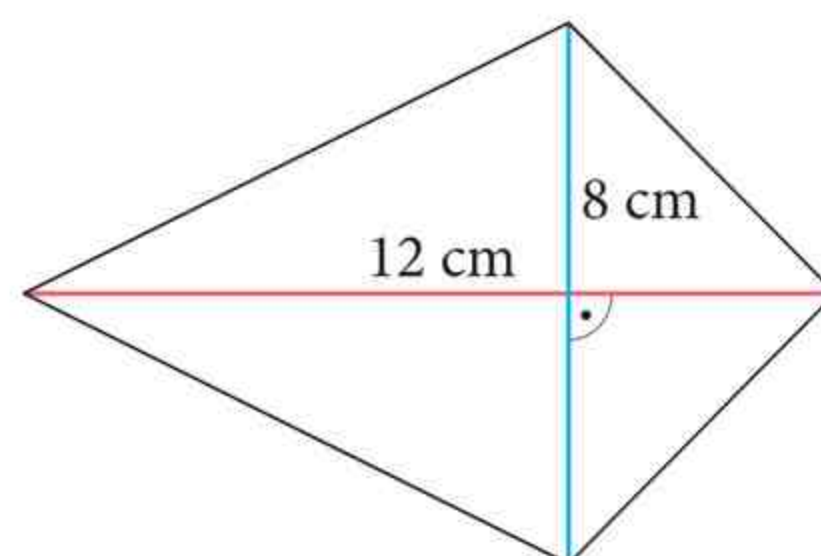
Oblicz pole deltoidu.

Oznaczamy:

$$d_1 = 12 \text{ cm}, \quad d_2 = 8 \text{ cm}$$

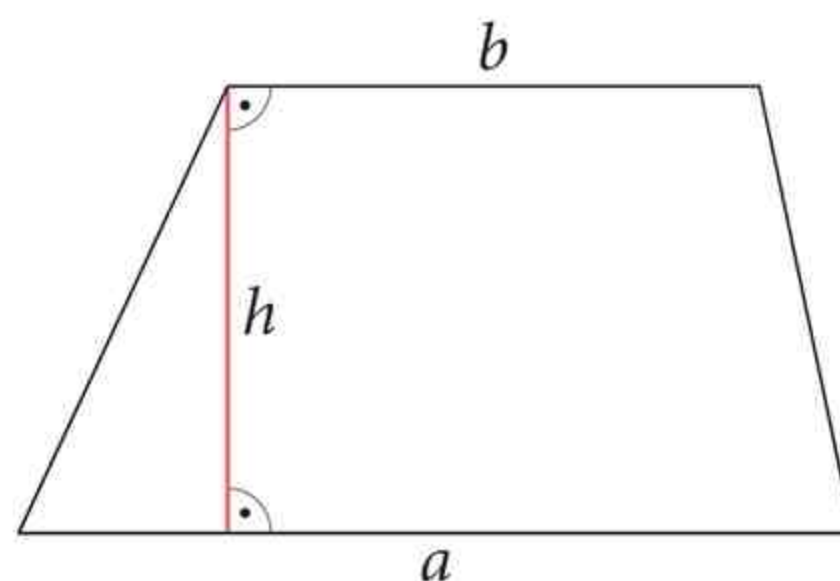
$$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48 [\text{cm}^2]$$

Odp. Pole deltoidu jest równe 48 cm^2 .



Wysokość i pole trapezu

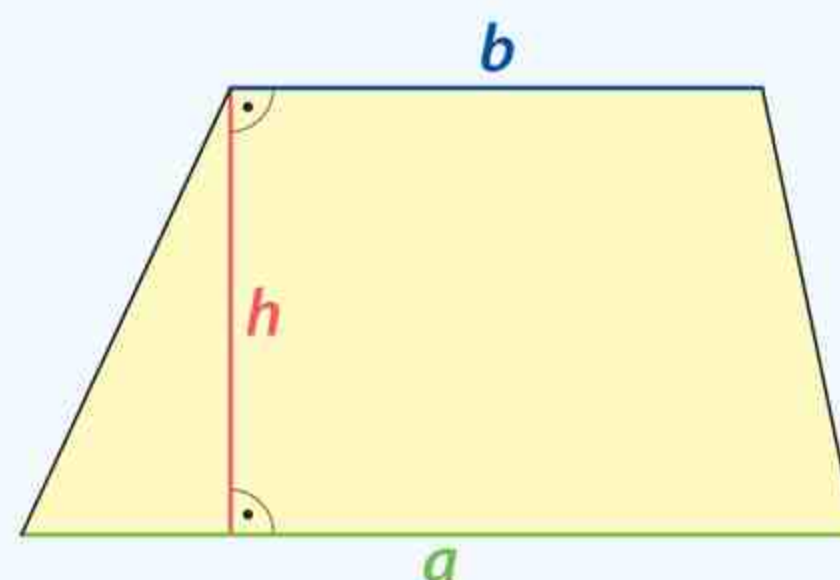
Wysokość trapezu to odcinek prostopadły do podstaw, o końcach leżących na tych podstawach lub ich przedłużeniach. Długość takiego odcinka także nazywamy wysokością trapezu.



Zapamiętaj

Pole trapezu to połowa iloczynu sumy długości podstaw i wysokości.

$$P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$



Przykład 3

Oblicz pole trapezu przedstawionego na rysunku.

Oznaczamy:

$$a = 13 \text{ dm}$$

$$b = 5 \text{ dm}$$

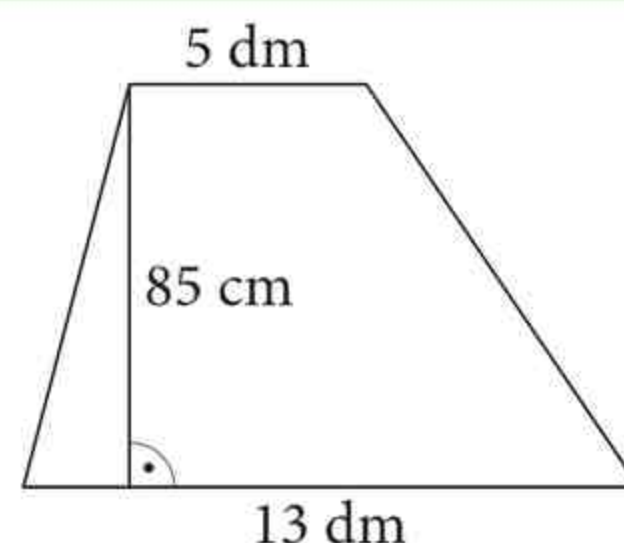
$$h = 85 \text{ cm}$$

Wszystkie potrzebne długości są podane, ale w różnych jednostkach. Należy wyrazić je w tej samej jednostce, np. w decymetrach. Wtedy:

$$h = 8,5 \text{ dm}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (13 + 5) \cdot 8,5 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 8,5 = 76,5 [\text{dm}^2]$$

Odp. Pole trapezu jest równe $76,5 \text{ dm}^2$.

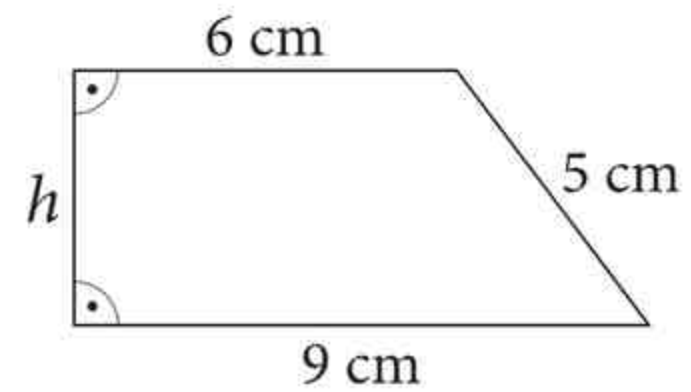


Przykład 4

Pole trapezu prostokątnego wynosi 30 cm^2 . Podstawy mają długości 9 cm i 6 cm, a dłuższe ramię ma 5 cm. Oblicz obwód tego trapezu.

Rysujemy trapez i zaznaczamy dane długości.

Obwód trapezu to suma długości jego boków. Długości trzech z nich są podane w treści zadania. Brakuje długości czwartego boku. W przypadku tego trapezu bok ten jest jednocześnie wysokością.



Aby ją obliczyć, skorzystamy ze wzoru na pole trapezu.

$$P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

Po wstawieniu znanych wielkości i wykonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$30 = \frac{1}{2} \cdot (9 + 6) \cdot h$$

$$30 = 7,5 \cdot h$$

$$h = 30 : 7,5 = 4 \text{ [cm]}$$

Zatem obwód trapezu jest równy:

$$\text{Obw.} = 6 + 9 + 5 + 4 = 24 \text{ [cm]}$$

Odp. Obwód trapezu wynosi 24 cm.

Dobra rada

Gdy w zadaniu wielkości są podane w różnych jednostkach:

1. Zdecyduj się na jedną jednostkę.
2. Zrób to na samym początku, np. przy określaniu długości boków.

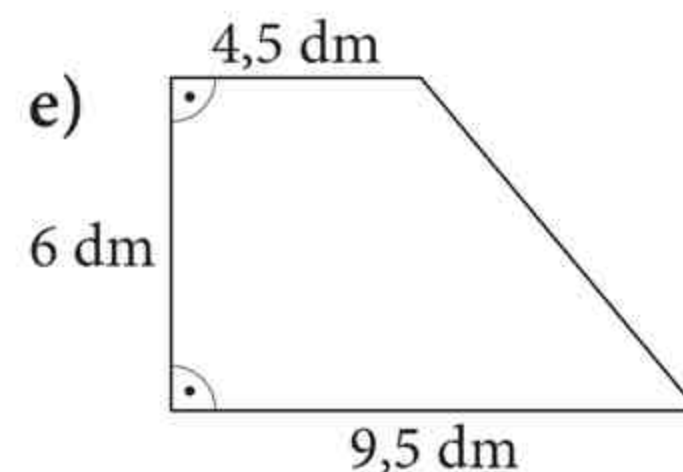
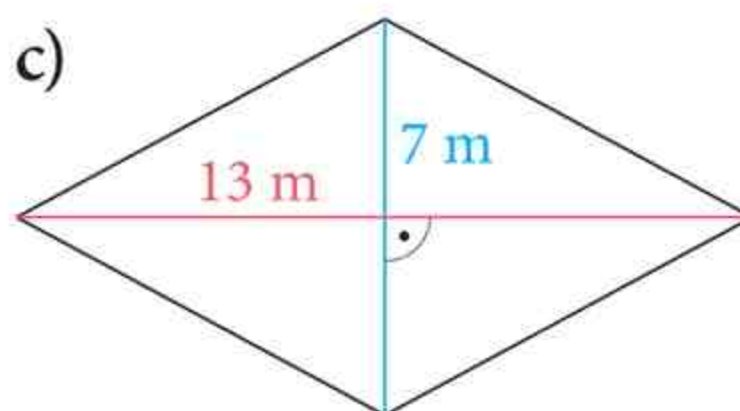
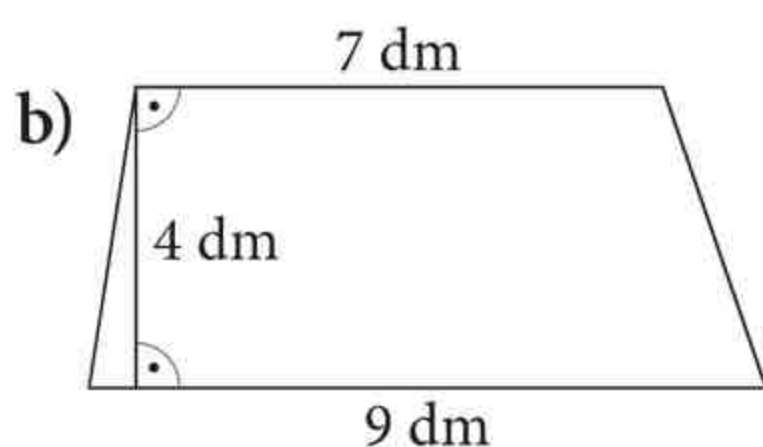
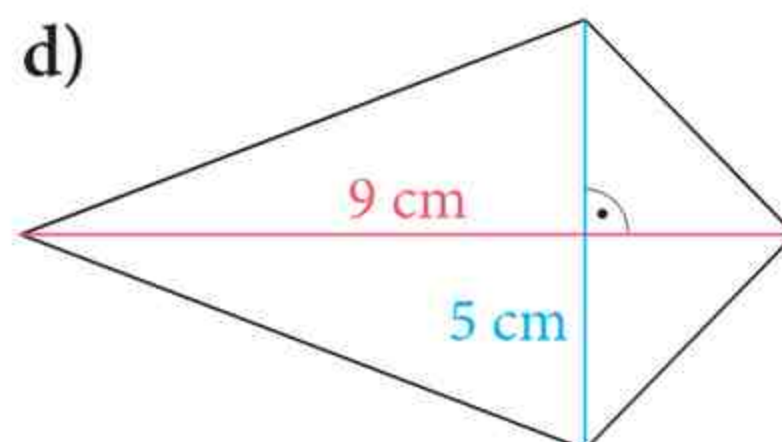
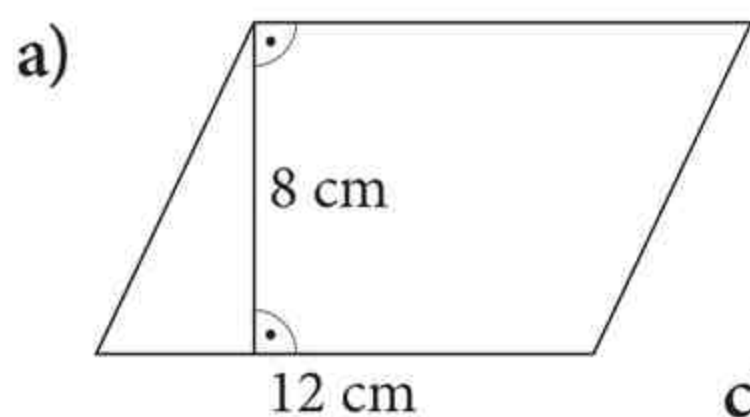


Zadania

- **1** Oblicz pole i obwód:
 - a) prostokąta o bokach 3 dm i 2 m,
 - b) kwadratu o boku 1,5 dm,
 - c) prostokąta, którego jeden bok ma 6 cm, a drugi jest o 2 cm dłuższy,
 - d) prostokąta, którego jeden bok ma 6 cm, a drugi jest 2 razy dłuższy.

IV. Figury na płaszczyźnie

- **2** Wytnij z kartki w kratkę kwadrat o boku 5 cm. Zapisz jego obwód i pole. Rozetnij go po liniach kratek na trzy różne wielokąty, a następnie złoż z tych elementów dowolny wielokąt. Czy obwód ułożonej figury jest inny niż obwód początkowego kwadratu? Czy pole się zmieniło?
- **3** Oblicz pole figury o wymiarach podanych na rysunku.



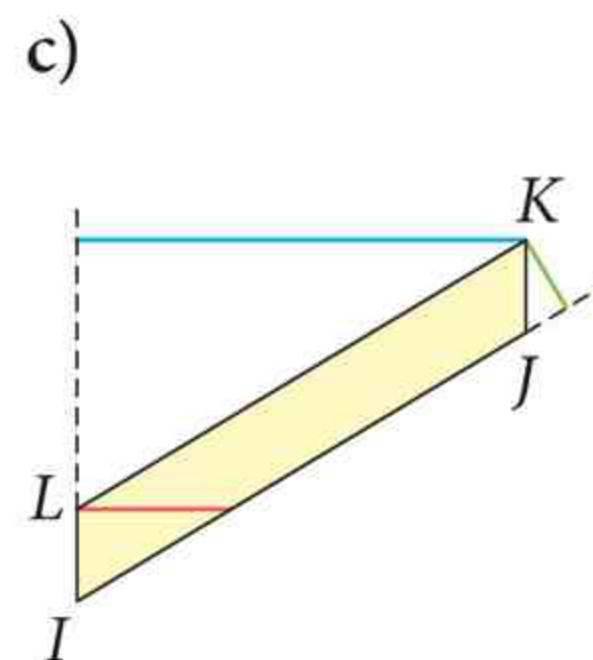
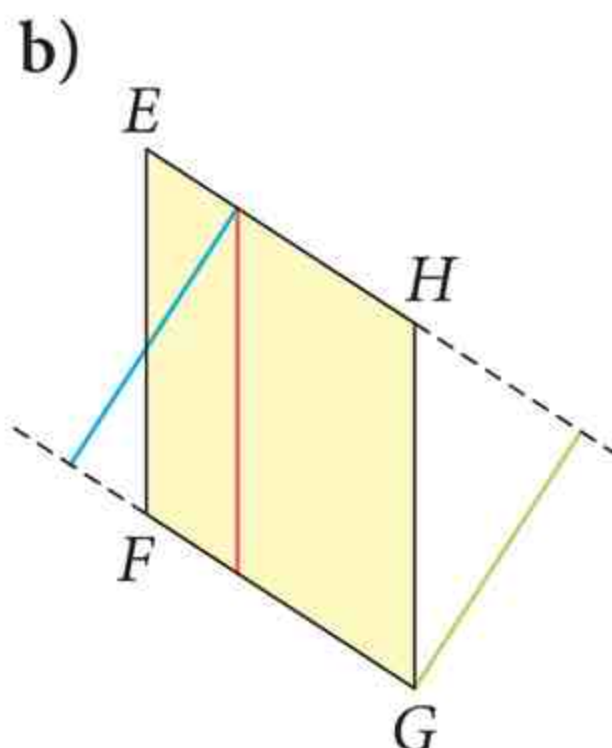
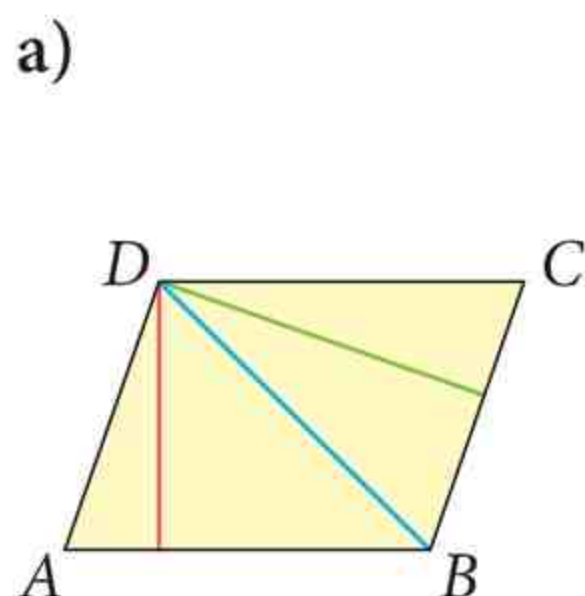
- **4** Na rysunku przedstawiono równoległobok i trzy odcinki: niebieski, zielony i czerwony. Tylko jeden z tych odcinków nie jest wysokością równoległoboku. Przepisz zdania, wpisując w miejsce ? nazwę równoległoboku, odpowiedniego koloru lub odcinka.

Na rysunku przedstawiono równoległobok ?.

Wysokością tego równoległoboku nie jest odcinek ?.

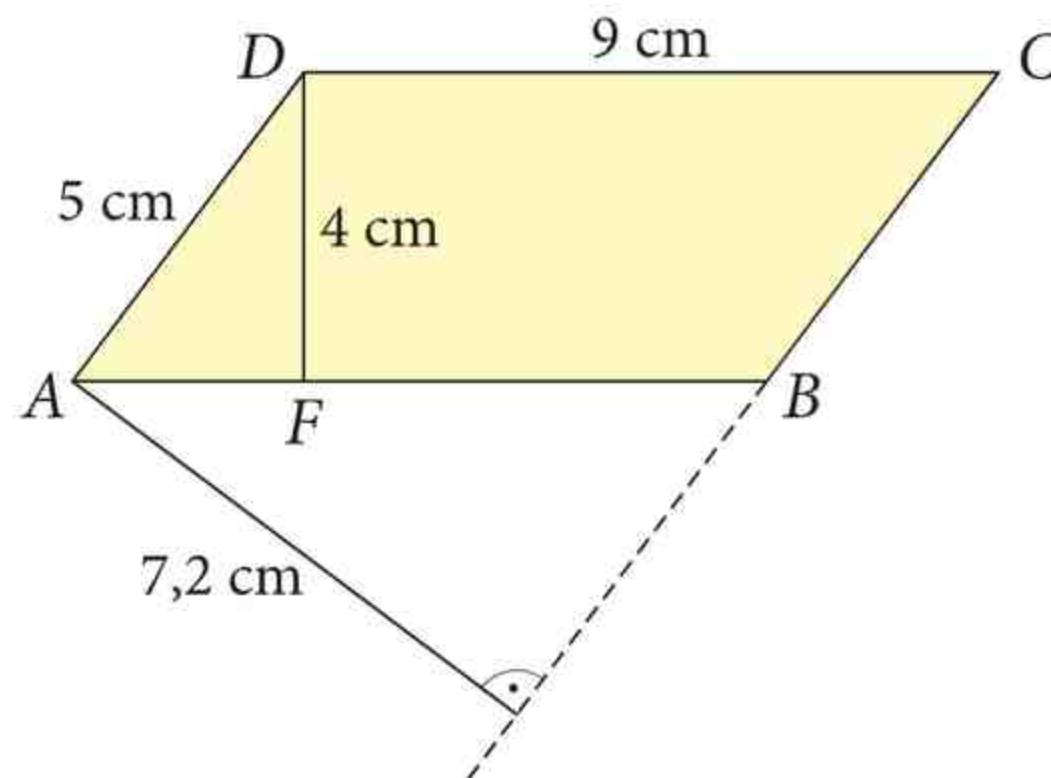
Wysokość narysowana kolorem ? jest opuszczona na bok ?.

Wysokość narysowana kolorem ? jest opuszczona na bok ?.



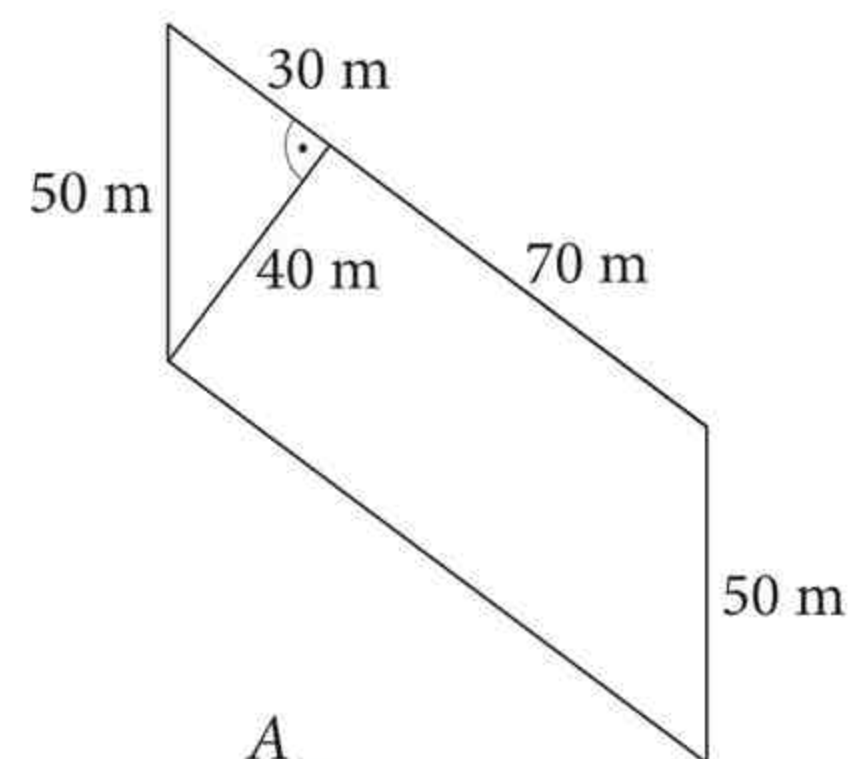
- **5** Pole prostokąta wynosi 42 cm^2 , a jeden z jego boków ma długość 4 cm. Oblicz obwód tego prostokąta.

- 6 Oblicz pole kwadratu o obwodzie równym 32 cm.
- 7 Oblicz pole i obwód równoległoboku $ABCD$. Pole oblicz dwoma sposobami. Sprawdź, czy w obu przypadkach otrzymane wyniki są takie same.

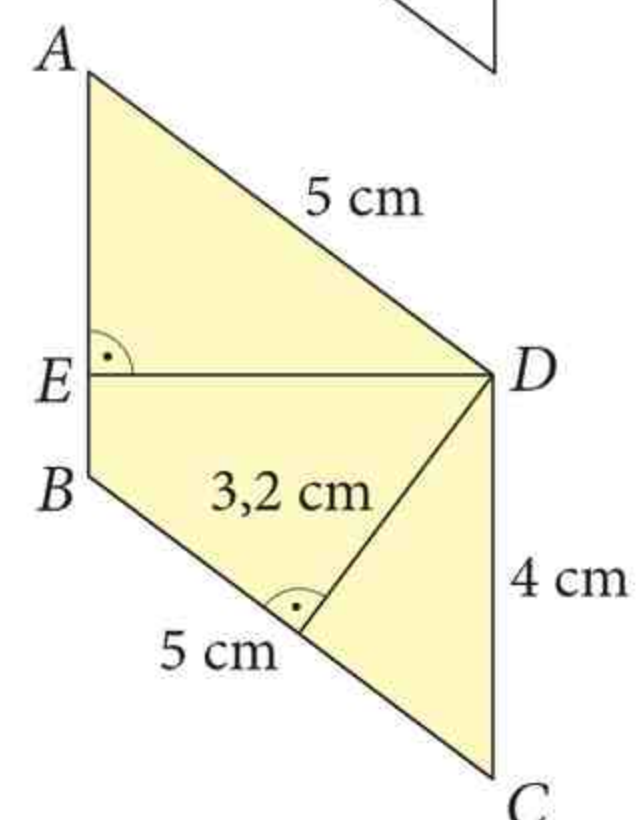


- 8 Punkt przecięcia przekątnych rombu jest odległy od jednego wierzchołka tego rombu o 3 cm, a od drugiego o 4 cm. Narysuj ten romb i zmierz jego boki. Oblicz jego pole i obwód.
- 9 Działka ma kształt trapezu prostokątnego. Równoległe boki mają 17 m i 23 m, trzeci bok ma 8 m, a czwarty jest od trzeciego o 2 m dłuższy. Furtka i brama mają razem szerokość 4 m. Oblicz powierzchnię tej działki. Ile zapłacił właściciel za siatkę ogrodzeniową, jeżeli 1 m kosztował 11,70 zł?

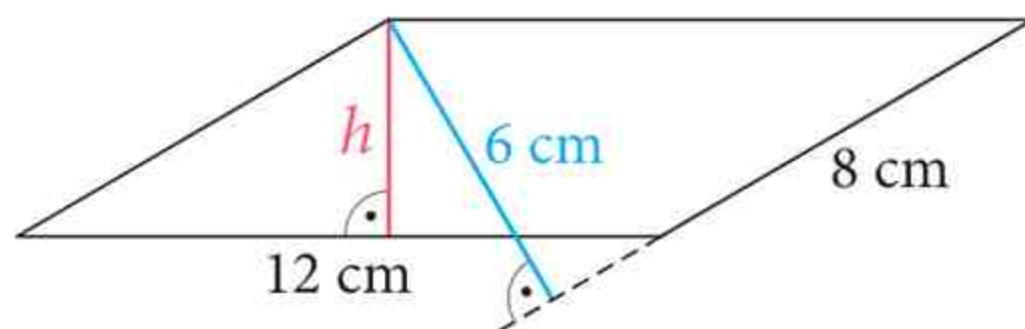
- 10 Działka ma kształt równoległoboku o wymiarach podanych na rysunku obok. Oblicz pole powierzchni tej działki. Odpowiedź podaj w arach.



- 11 Na rysunku obok przedstawiono równoległobok $ABCD$. Oblicz długość odcinka DE .
- 12 Jaką wysokość ma trapez, którego podstawy są równe 11 cm i 15 cm, a pole wynosi 156 cm^2 ?



- ... **13** Oblicz wysokość równoległoboku opuszczoną na bok długości 12 cm.



- ... **14** Obwód trapezu równoramiennego wynosi 26 m. Oblicz pole tego trapezu, jeżeli jedna podstawa ma 11 m, wysokość ma 4 m, a każde ramię jest tej samej długości co druga podstawa.
- ... **15** Pole trapezu równoramiennego wynosi 24 cm^2 . Wysokość trapezu jest równa 4 cm, a ramię ma długość 5 cm. Oblicz obwód tego trapezu.



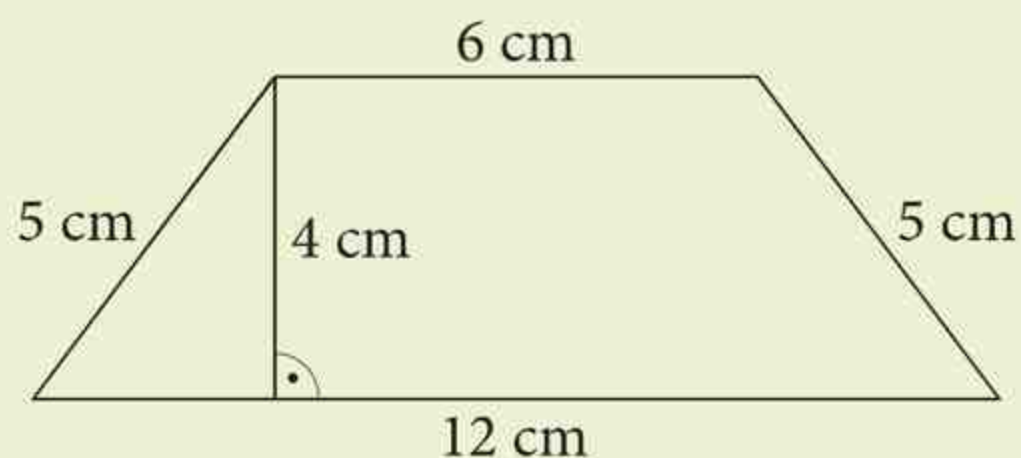
Dla dociekliwych

- 1 Czworokąt o obwodzie 2 dm podzielono przekątną na dwa trójkąty o obwodach 16 cm i 18 cm. Oblicz długość tej przekątnej.
- 2 Trapez prostokątny został podzielony na kwadrat o boku 5 m i trójkąt prostokątny o obwodzie 12 m. Oblicz obwód trapezu.

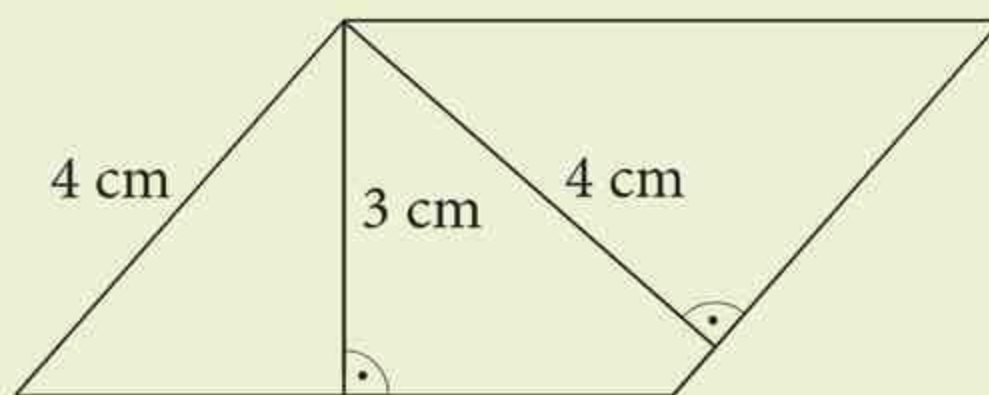


Czy już umiem?

- I Oblicz pole i obwód trapezu przedstawionego na rysunku obok.



- II Oblicz pole równoległoboku przedstawionego na rysunku obok.

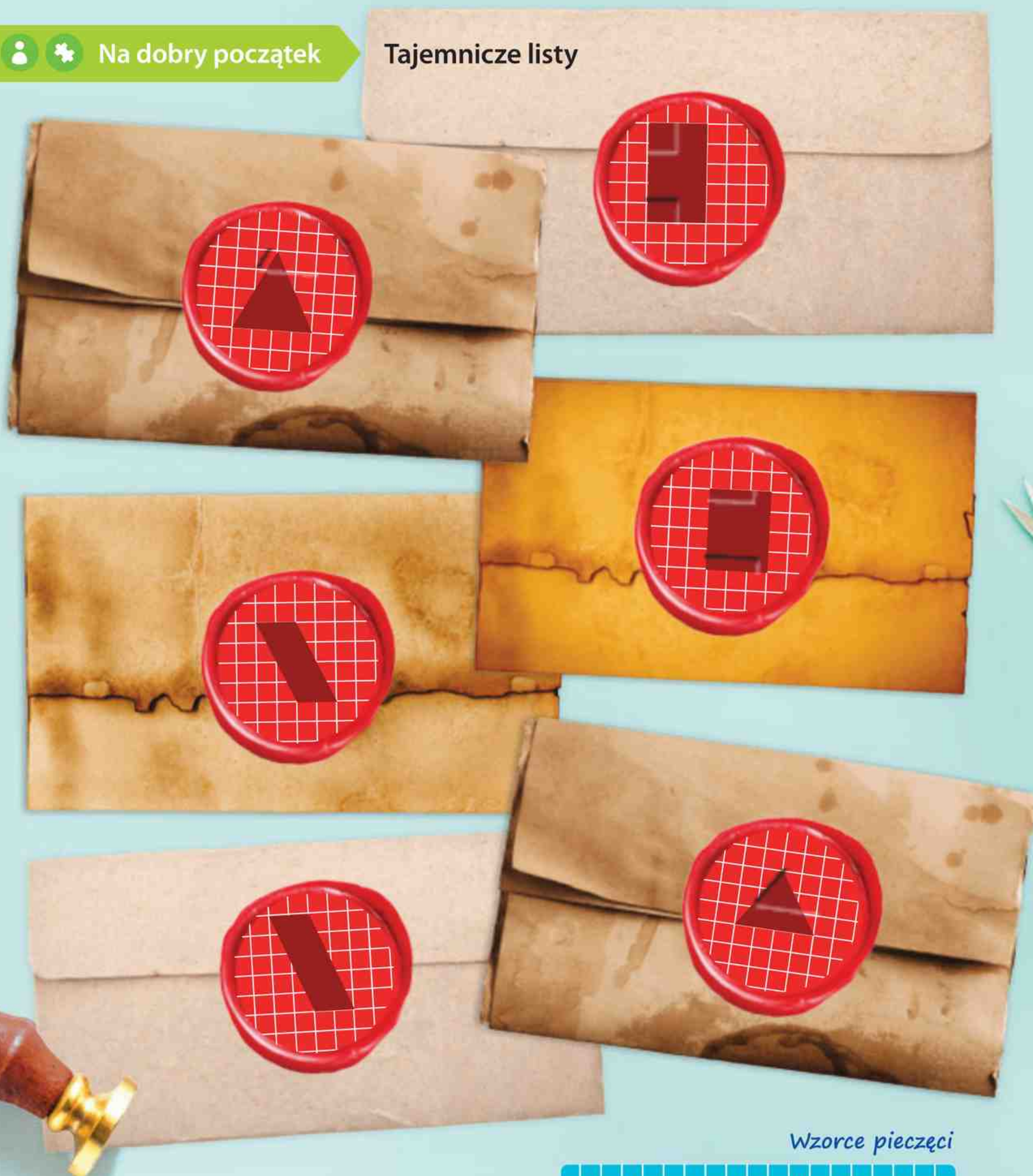


- III Oblicz wysokość rombu, którego przekątne mają długości 12 cm i 16 cm, a bok ma 10 cm.

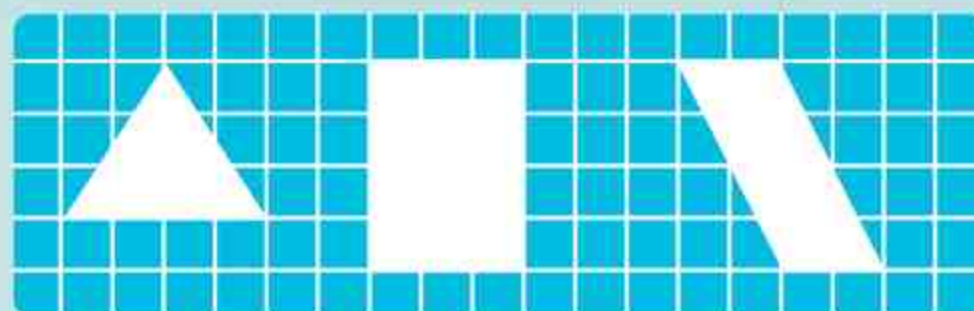
- IV Oblicz NWD i NWW liczb 36 i 48.

  Na dobry początek

Tajemnicze listy



Wzorce pieczęci



Pytania i polecenia

Po prawej stronie pokazano wzorce trzech pieczęci. Spróbuj je odnaleźć na zalakowanych listach na ilustracji.

Własności kratki

Od wielu lat korzystasz z kratki w zeszytach i doskonale wiesz, że:

- wszystkie poziome linie są równoległe,
- wszystkie pionowe linie są równoległe,
- dowolna pozioma linia i dowolna pionowa linia są prostopadłe,
- odległość między sąsiednimi równoległymi liniami to 5 mm, czyli 0,5 cm (jeśli jest inaczej, to jest to podane w treści zadania).

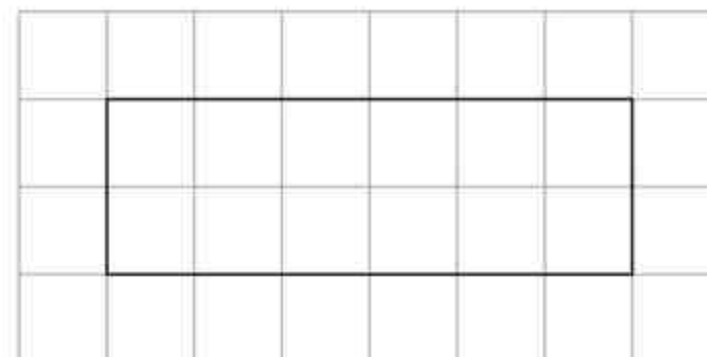
Przyjrzyj się poniższym rysunkom. Wydaje się, że rozpoznajemy przedstawione na nich figury. Ale czy możemy być tego pewni?



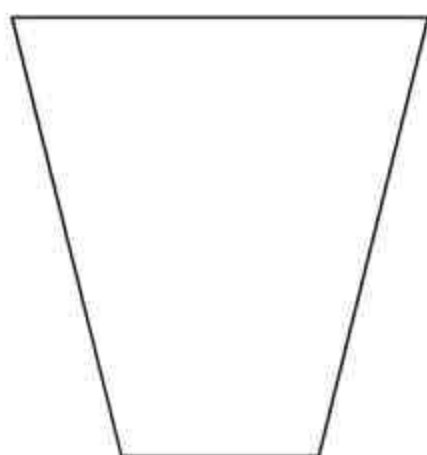
Nie wiadomo, czy to jest prostokąt. Nasze oko nie zauważy drobnych niedokładności.



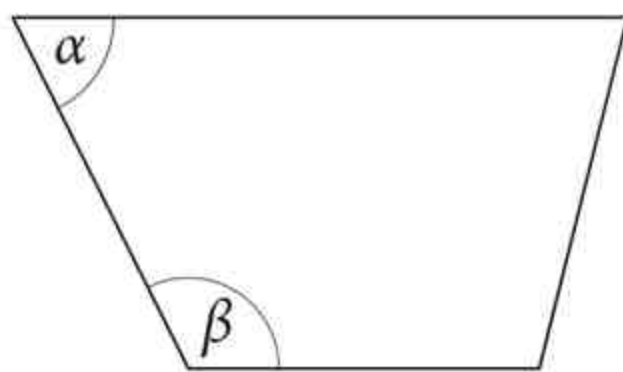
To na pewno jest prostokąt. Zaznaczono w nim kąty proste.



To na pewno jest prostokąt, ponieważ linie kratki są prostopadłe.

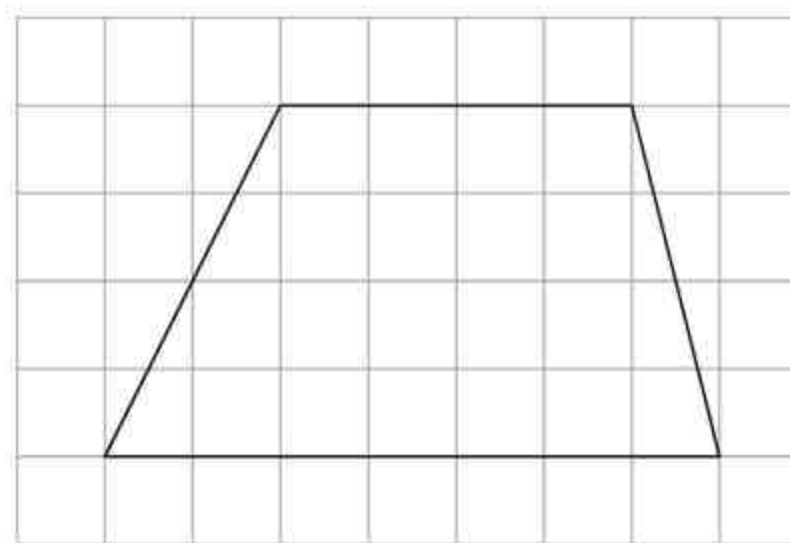


Nie wiadomo, czy to jest trapez.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

To na pewno jest trapez. Wynika to z informacji o kątach.

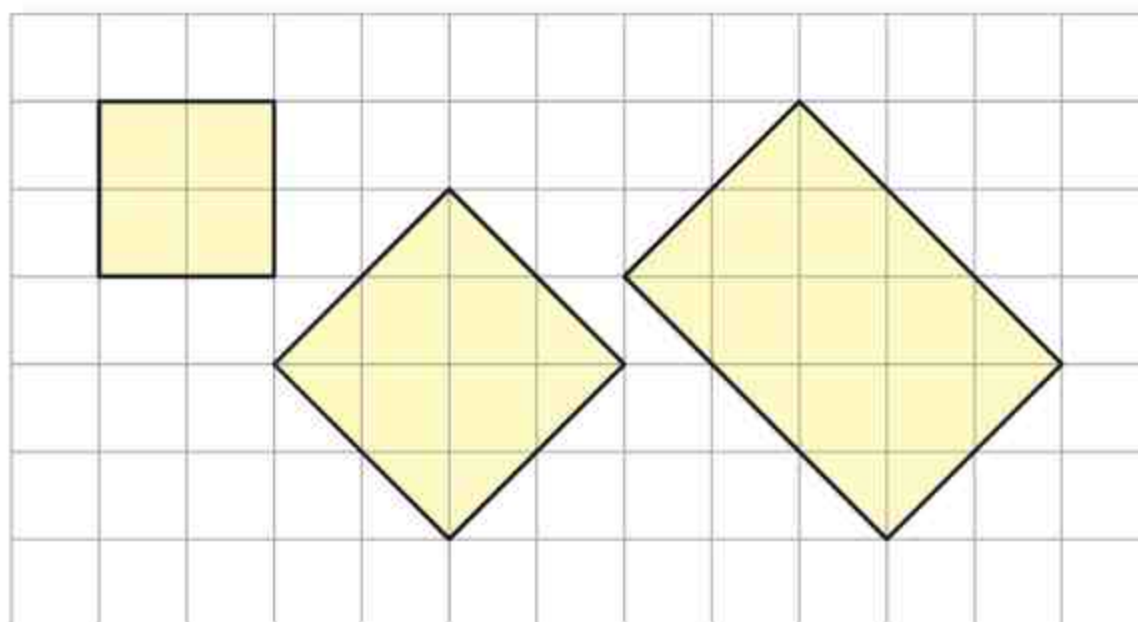


To na pewno jest trapez, ponieważ linie kratki są równoległe.

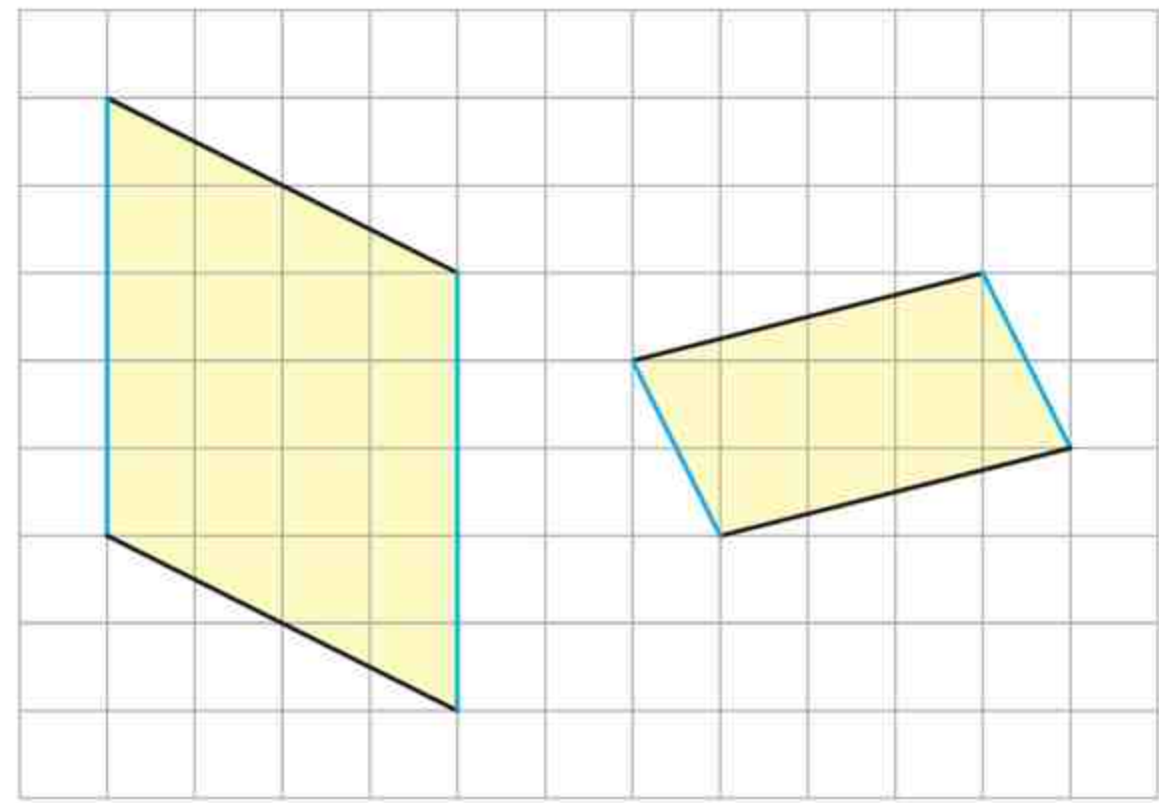
Czworokąty na kratce

Do rysowania wielu czworokątów na kratce nie jest potrzebna ekierka, ponieważ dzięki kratkom łatwo znajdziemy linie prostopadłe i równoległe. Wystarczy więc linijka do rysowania boków.

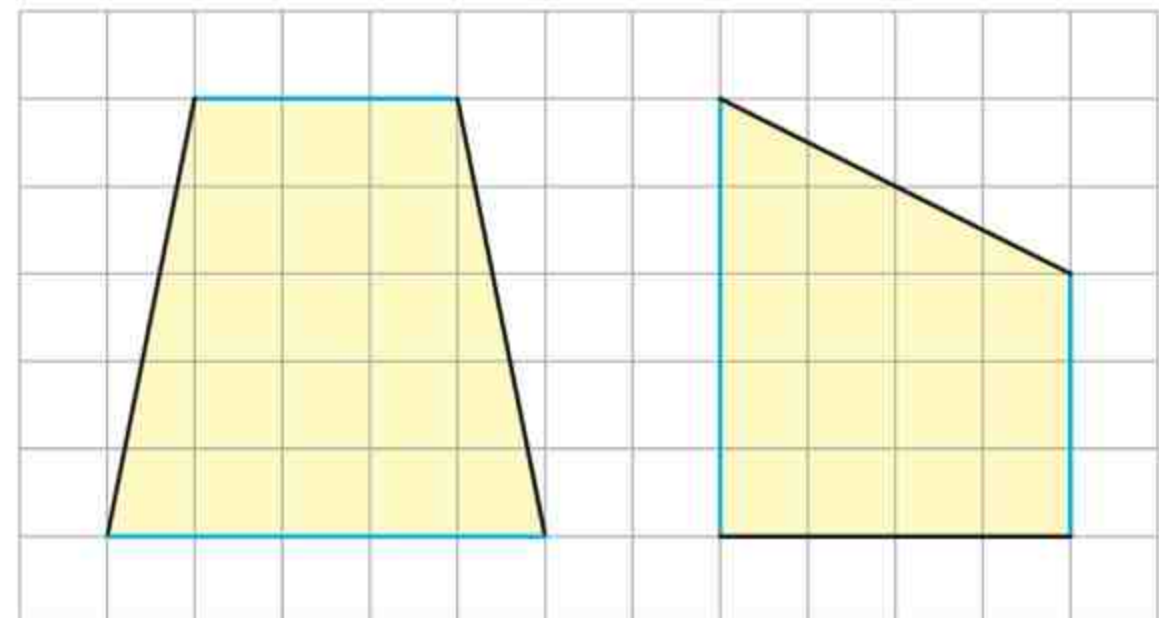
Jeśli wszystkie boki czworokąta narysujemy wzdłuż linii albo wzdłuż przekątnych kratek, otrzymamy prostokąt. Jeśli dodatkowo jego boki są równe, to prostokąt jest kwadratem.



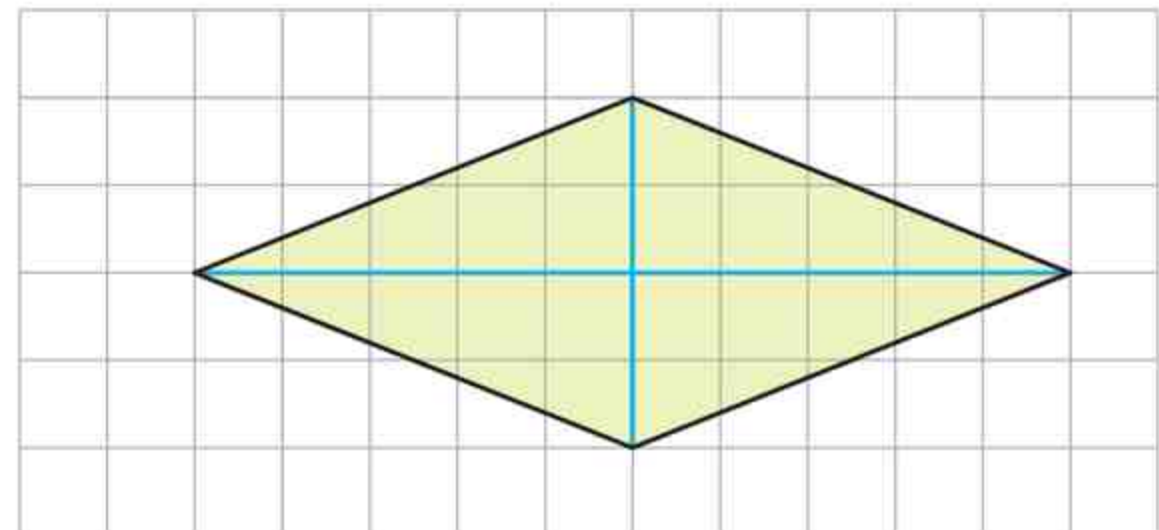
Aby otrzymać równoległobok, wystarczy narysować **dwa odcinki równe i równoległe**, a następnie połączyć ich końce.



Rysowanie trapezu najłatwiej zacząć od **podstaw**, czyli boków, które są równoległe.

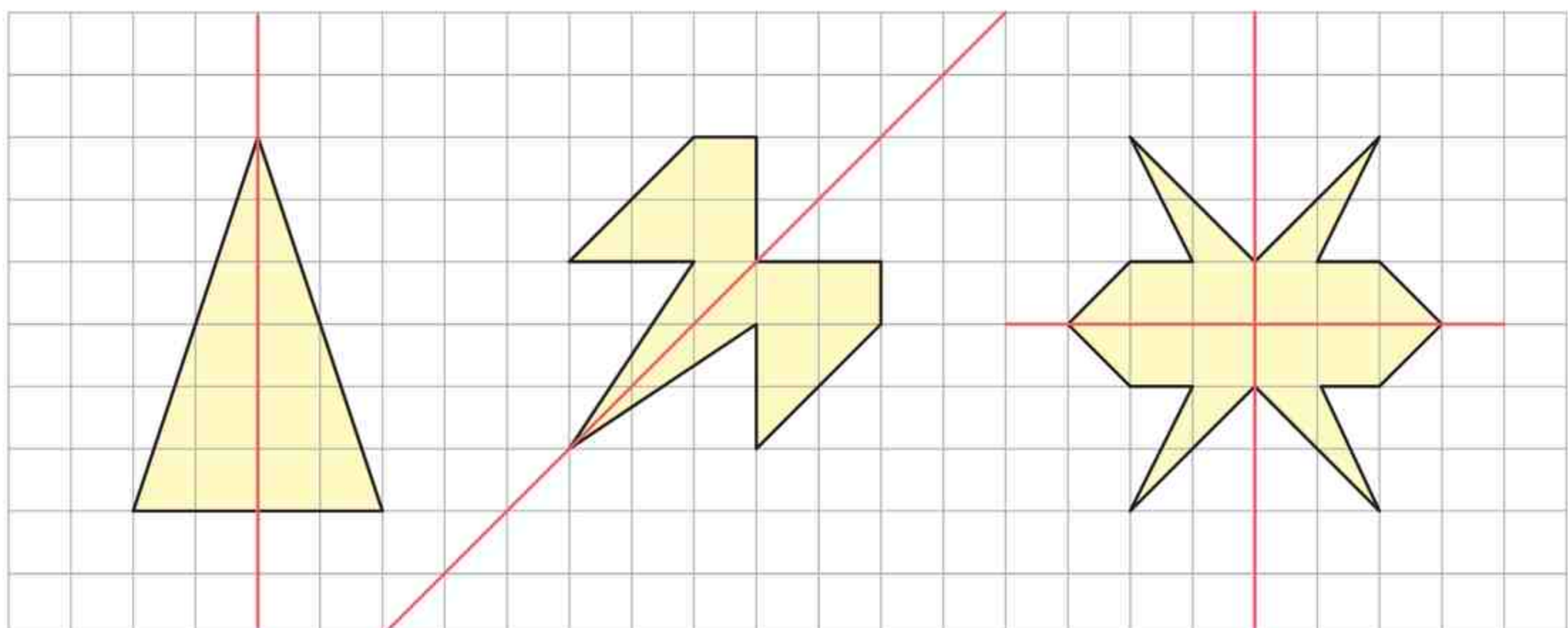


Sposób rysowania rombu na kratce na pewno znasz – korzystamy z faktu, że **przekątne** tej figury są prostopadłe i dzielą się na połowy.



► Oś symetrii figury na kratce

Na kratce łatwo jest też zaznaczać osie symetrii figur i rysować figury, które mają osie symetrii położone wzdłuż kratek lub wzdłuż ich przekątnych.



Przerysowywanie figur

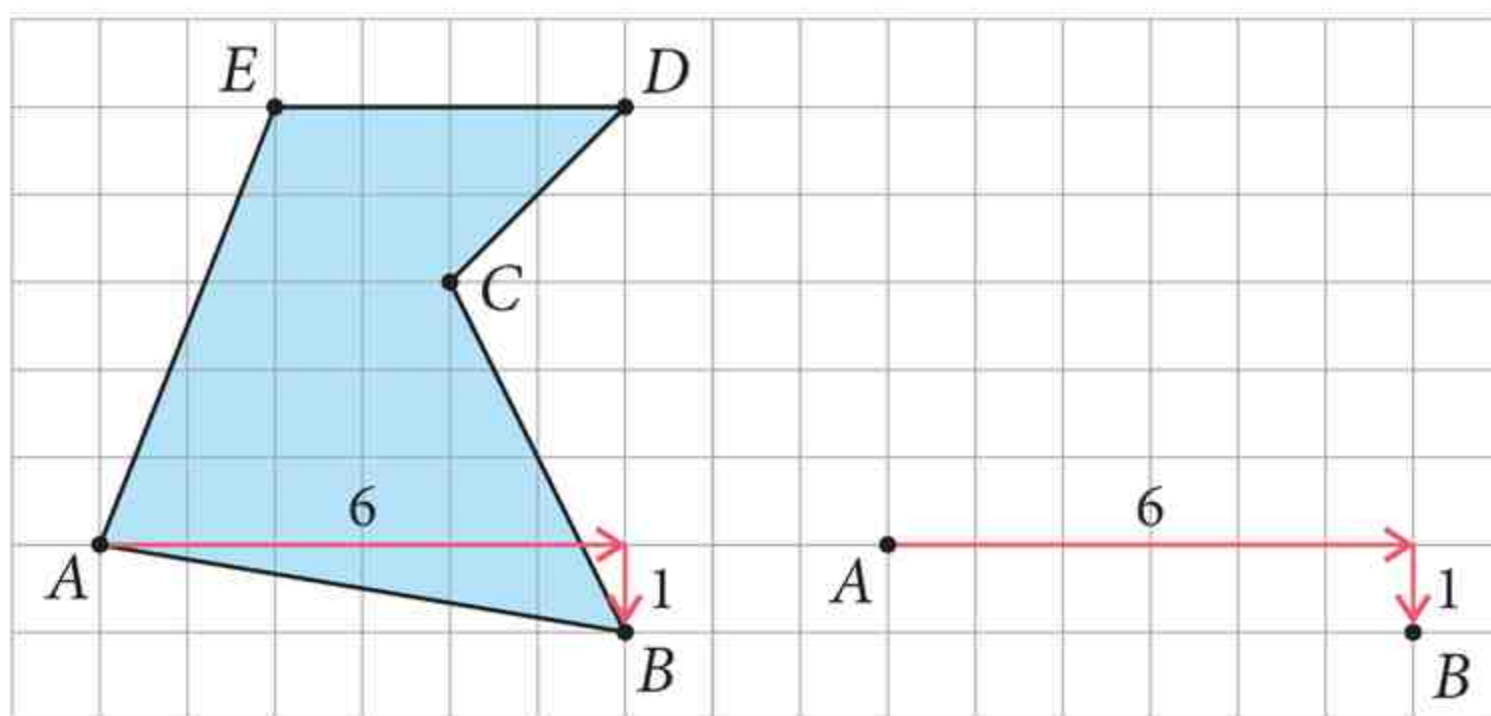
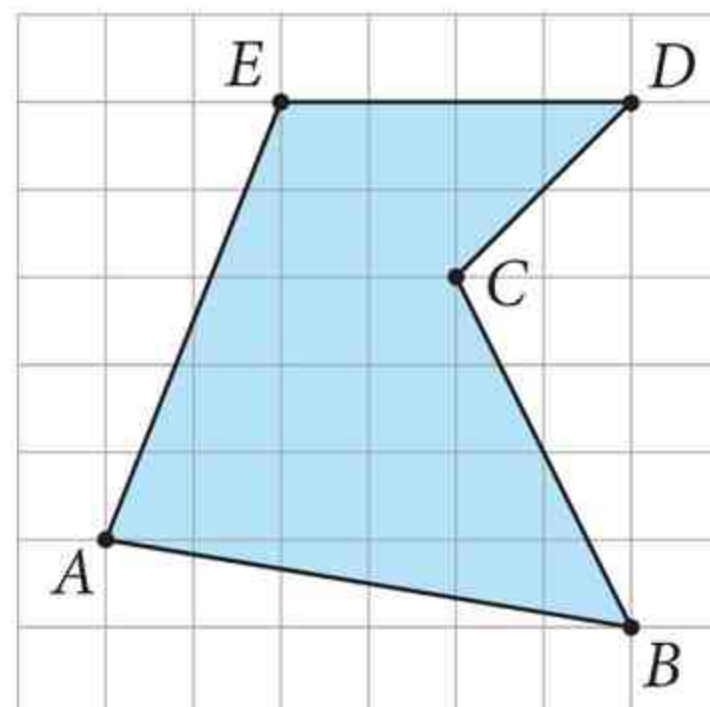
Figury na kratce można łatwo przerysować.

Przykład 1

Przerysuj do zeszytu w kratkę pięciokąt $ABCDE$.

W zeszycie zaznaczamy w dowolnym miejscu na skrzyżowaniu kretek punkt A .

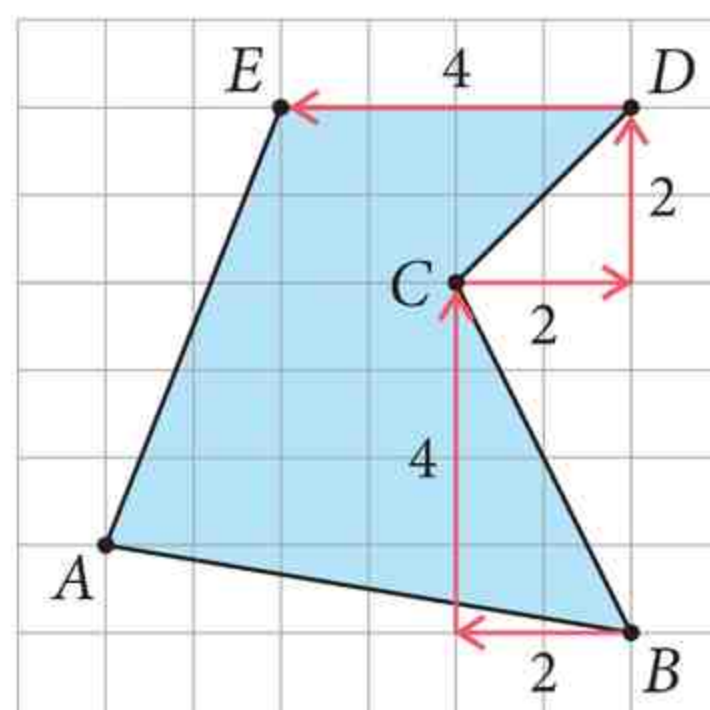
Aby właściwie zaznaczyć punkt B , odcytujemy z podanego rysunku, jak z punktu A dotrzeć po kratkach do punktu B – trzeba przesunąć się o 6 kretek w prawo i o 1 kratkę w dół.



Analogicznie zaznaczamy kolejne wierzchołki:

- z B do C : 2 kratki w lewo, 4 w górę,
- z C do D : 2 kratki w prawo, 2 w górę,
- z D do E : 4 kratki w lewo.

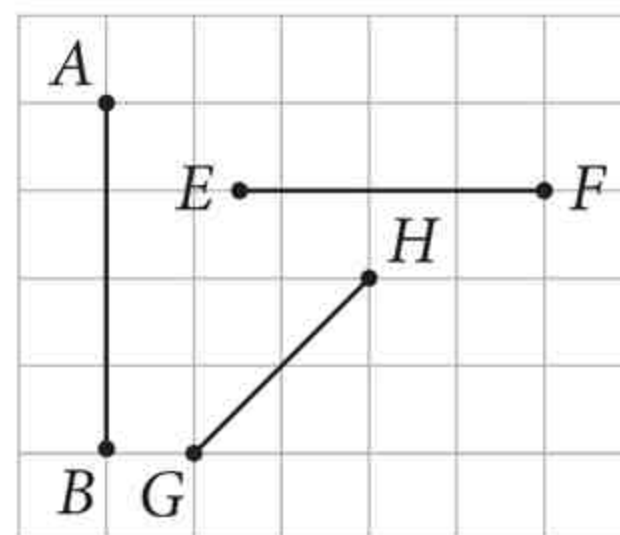
Na koniec łączymy odcinkami kolejne wierzchołki.



Długości i pola na kratce

Długości niektórych odcinków możemy ustalić, licząc kratki.

Na rysunku obok odcinek AB ma 4 kratki długości, a ponieważ kratka to pół centymetra, to $AB = 2$ cm. Nie możemy jednak odczytać długości odcinka EF (punkt E nie leży na skrzyżowaniu kretek) ani długości odcinka GH (ponieważ nie biegnie wzdłuż kretek). Długości odcinków takich jak GH nauczysz się obliczać w klasie 7.

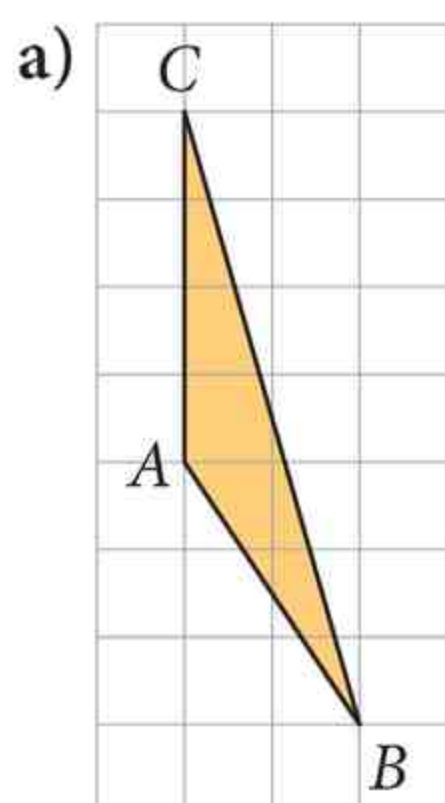


Zapamiętaj

Jeśli w zadaniu nie ma polecenia „zmiar”, to nie mierzymy długości odcinków. Wykorzystujemy tylko informacje z treści zadania lub własności kratki.

Przykład 2

Oblicz pole figury przedstawionej na rysunku.

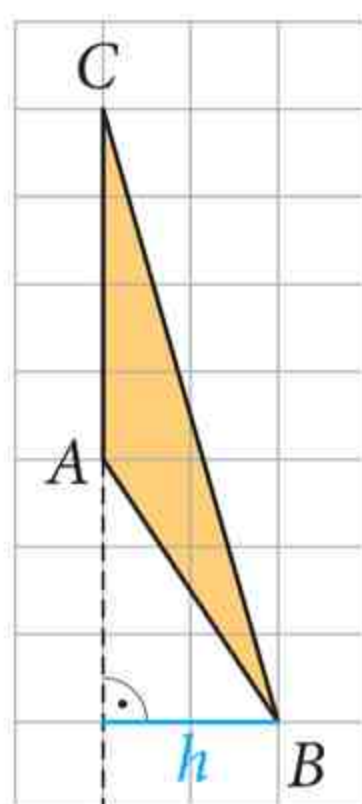


Pole trójkąta obliczymy ze wzoru:
 $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

Tylko bok AC biegnie wzdłuż kratek. Przyjmujemy go za podstawę i odczytujemy jego długość.

$$a = AC = 2 \text{ cm}$$

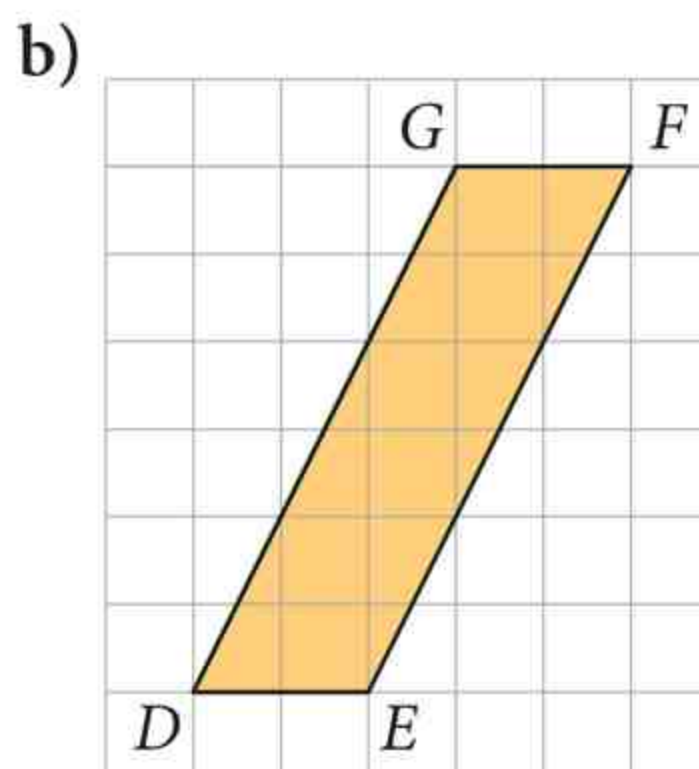
Zaznaczamy na rysunku wysokość opuszczoną na bok AC i odczytujemy jej długość.



$$h = 1 \text{ cm}$$

Zatem pole wynosi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 [\text{cm}^2]$$

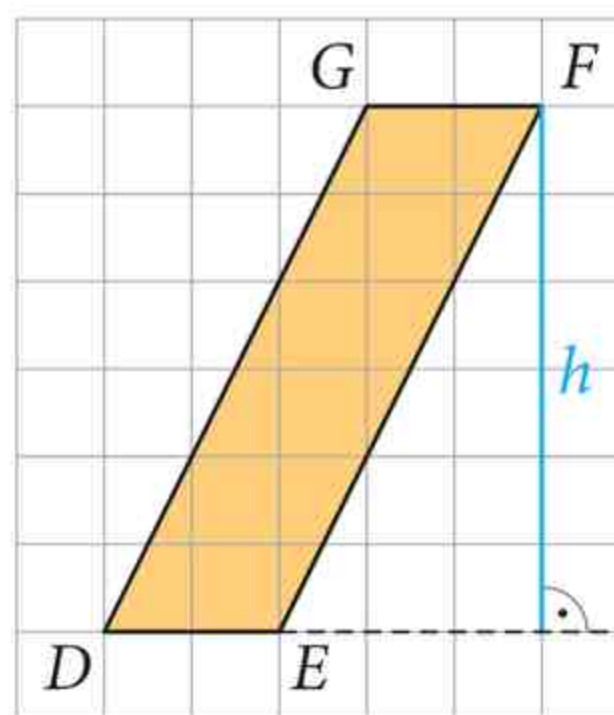


Pole równoległoboku obliczymy ze wzoru: $P = a \cdot h$

Tylko boki DE i GF biegną wzdłuż kratek. Przyjmujemy jeden z nich, np. DE, za podstawę i odczytujemy jego długość.

$$a = DE = 1 \text{ cm}$$

Zaznaczamy na rysunku wysokość prostopadłą do boku DE i odczytujemy jej długość.



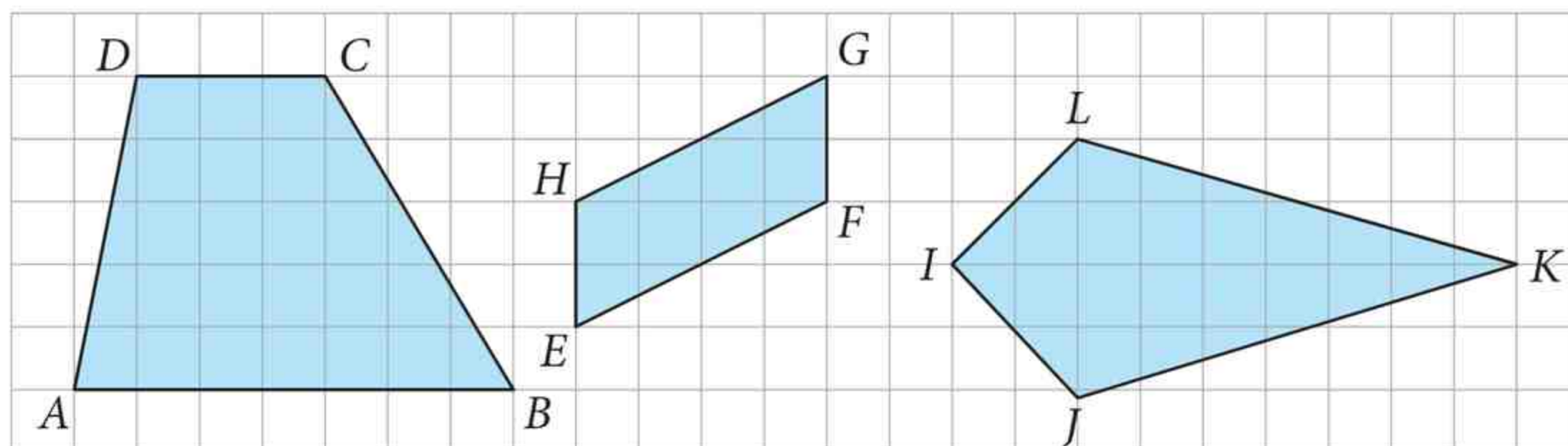
$$h = 3 \text{ cm}$$

Zatem pole wynosi:

$$P = 1 \cdot 3 = 3 [\text{cm}^2]$$

Ćwiczenie 1

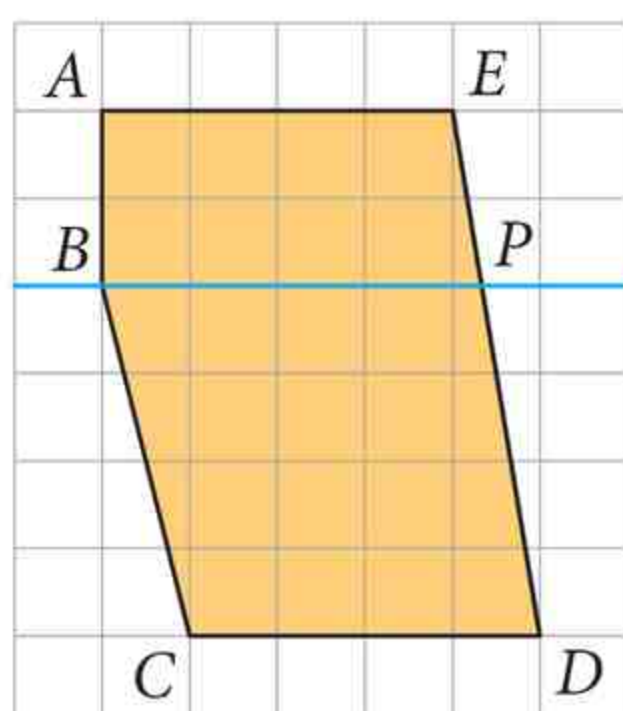
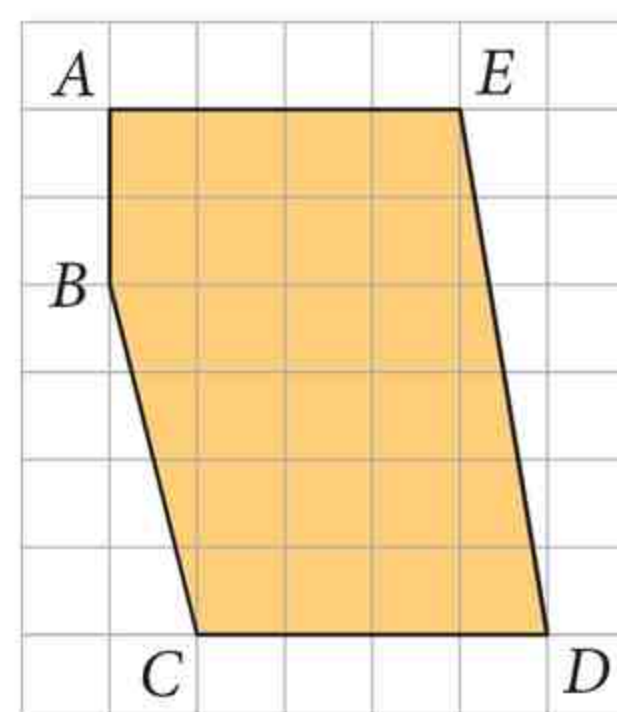
Oblicz pola figur przedstawionych na rysunku.



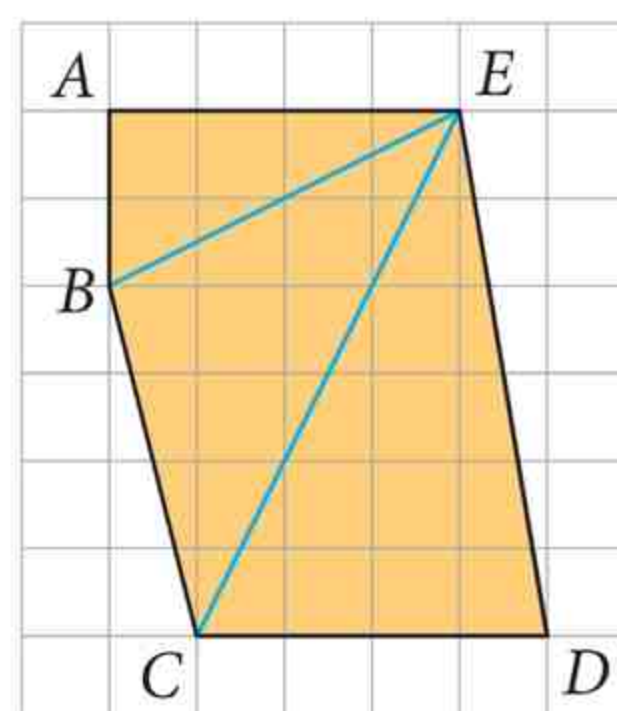
Przykład 3

Oblicz pole figury. Długości odpowiednich odcinków odczytaj z kratek.

Figura ta jest pięciokątem. Nie znamy wzorów na pola pięciokątów. Możemy jednak podzielić naszą figurę na figury, których pola umiemy obliczać. Podział taki nie może jednak być zrobiony dowolnie.



Ten podział nie pomoże obliczyć pola pięciokąta, ponieważ nie umiemy odczytać długości odcinka BP .



Ten podział także się nie przyda, ponieważ nie umiemy odczytać długości żadnego boku trójkąta BCE .

Potrzebny jest nam podział na figury, których pola umiemy obliczyć. Na następnej stronie mamy przykład takiego podziału – w każdym z trójkątów jeden bok biegnie wzdłuż kratek, umiemy więc odczytać zarówno długość tego boku, jak i wysokość opuszczoną na ten bok.

Obliczmy po kolei pola trójkątów.

Trójkąt BCD

ma podstawę $CD = 2$ cm

i wysokość $BF = 2$ cm,

więc $P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ [cm²]

Trójkąt ABD

ma podstawę $AB = 1$ cm

i wysokość $FD = 2,5$ cm,

więc $P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2,5 = 1,25$ [cm²]

Trójkąt ADE

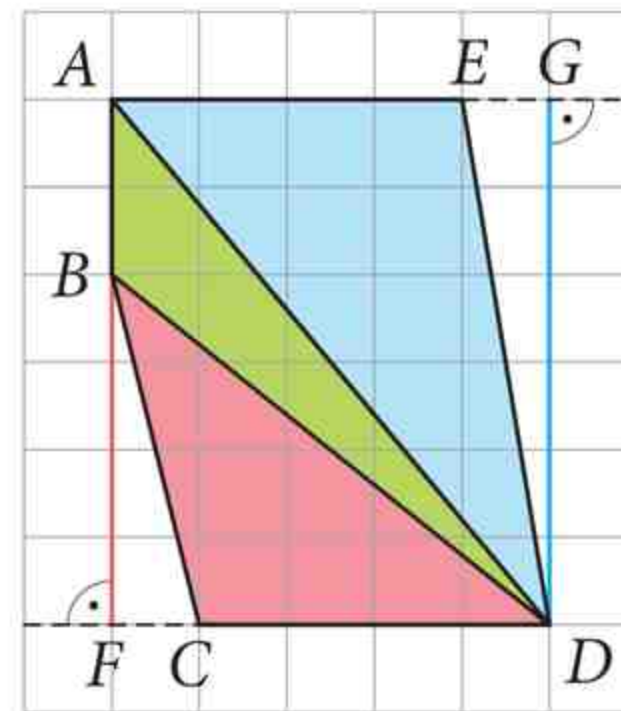
ma podstawę $AE = 2$ cm

i wysokość $DG = 3$ cm,

więc $P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$ [cm²]

Pole pięciokąta $ABCDE$ to suma tych pól.

$$P_{ABCDE} = 2 + 1,25 + 3 = 6,25 \text{ [cm}^2\text{]}$$



Ćwiczenie 2

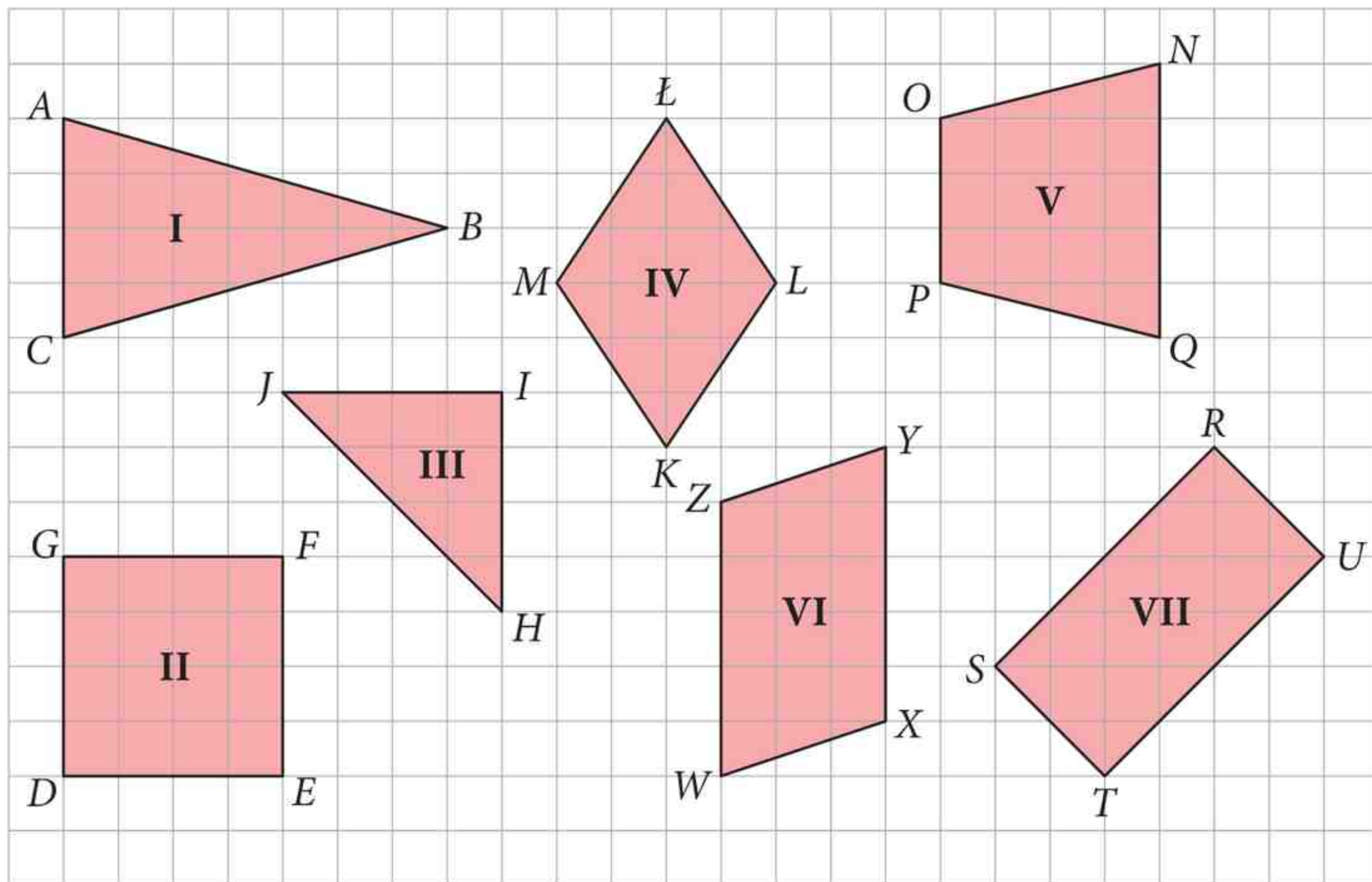
Oblicz pole pięciokąta $ABCDE$ metodą przedstawioną w przykładzie 2 na stronie 24. Porównaj otrzymany wynik z odpowiedzią do przykładu 3.



Zadania

- **1** Narysuj na kratce:
 - a) trapez równoramienny,
 - b) równoległobok o boku 3,5 cm,
 - c) kwadrat o przekątnej 8 cm,
 - d) trójkąt ostrokątny równoramienny,
 - e) romb o przekątnych długości 4 cm i 5 cm.

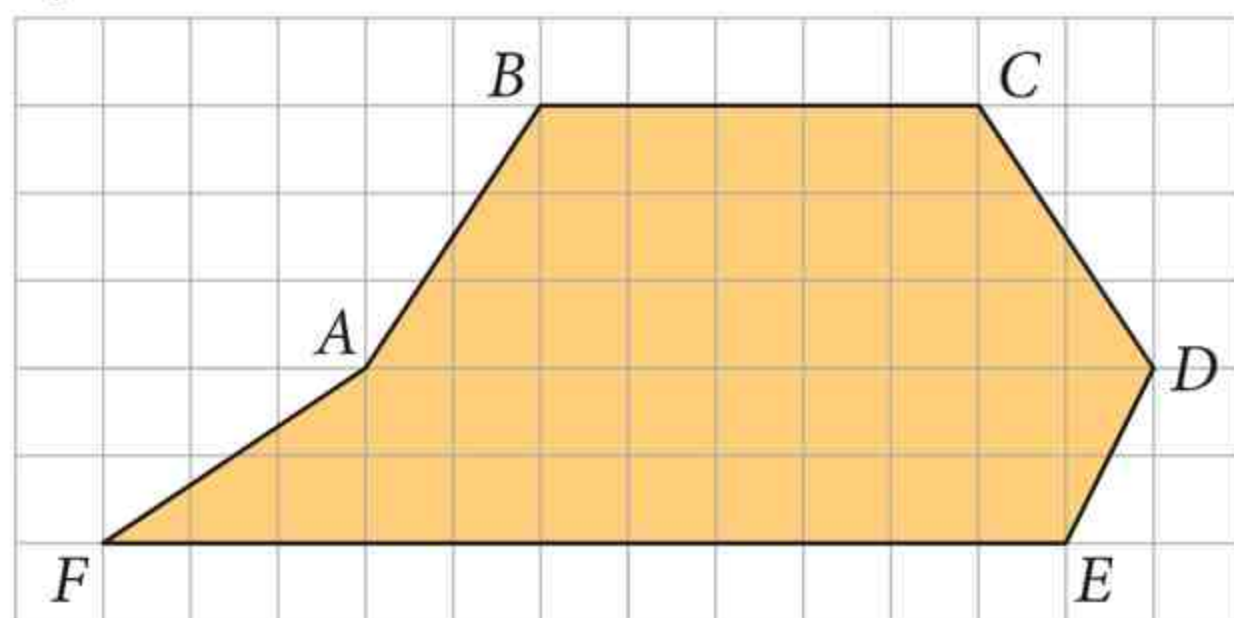
Rysunek do zadań 2-4



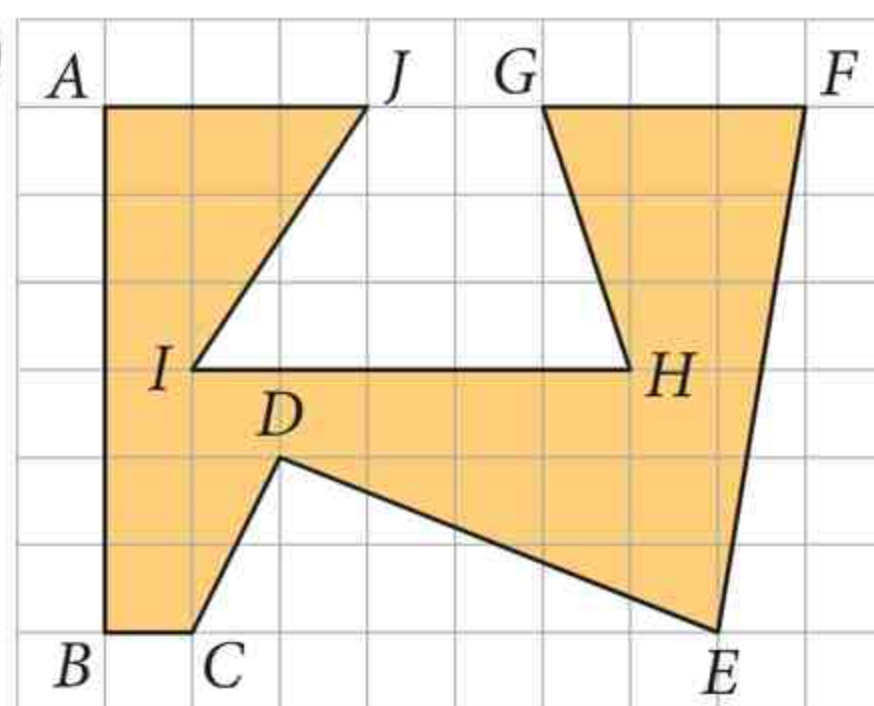
- **2** Na kratce przedstawiono różne wielokąty.
 - a) Nazwij każdy z tych wielokątów.
 - b) Które z nich mają oś symetrii?
 - c) Które z nich mają dokładnie jedną oś symetrii?
 - d) Które z tych wielokątów mają dokładnie dwie osie symetrii? Jak położone są te osie względem siebie?
 - e) Które z figur mają więcej niż dwie osie symetrii? Ile jest tych osi?
- **3** Odpowiedz na pytania.
 - a) W których wielokątach można odczytać z kratki długości wszystkich boków?
 - b) W których wielokątach nie można odczytać z kratki długości żadnego boku?
 - c) W których wielokątach można odczytać z kratki długości tylko niektórych boków?
 - d) Dla wielokątów wymienionych w podpunkcie c) zapisz długości tych boków, które można odczytać.
 - e) Oblicz obwody figur wymienionych w podpunkcie a).
- **4** Oblicz pola figur oznaczonych liczbami rzymskimi od I do VI.

- **5** Przerysuj figurę do zeszytu. Zapisz długości tych boków wielokąta, które można odczytać z kratki.

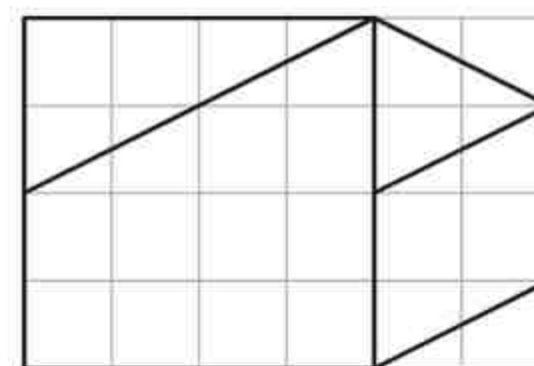
a)



b)

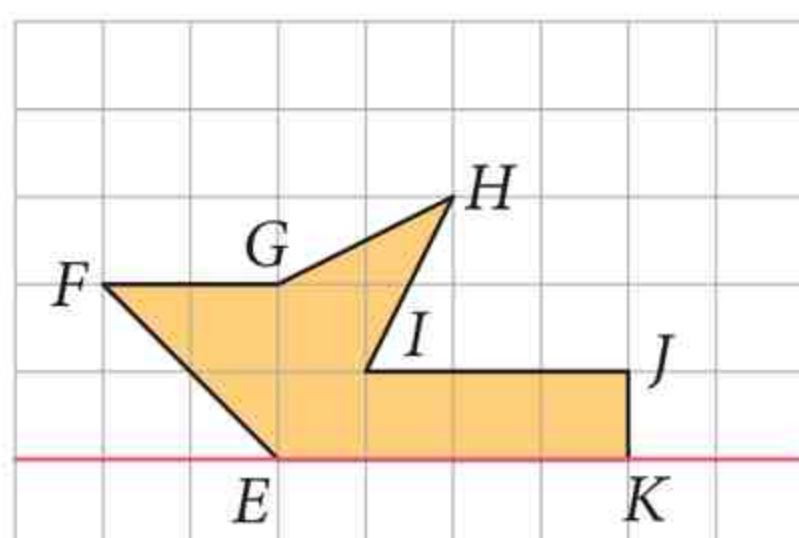


- **6** Na rysunku obok można wskazać różne wielokąty. Oblicz pola pięciu z nich.
- **7** Narysuj na kartce w kratkę cztery różne figury, każdą o polu 10 cm^2 : równoległobok, trapez, trójkąt i deltoid.

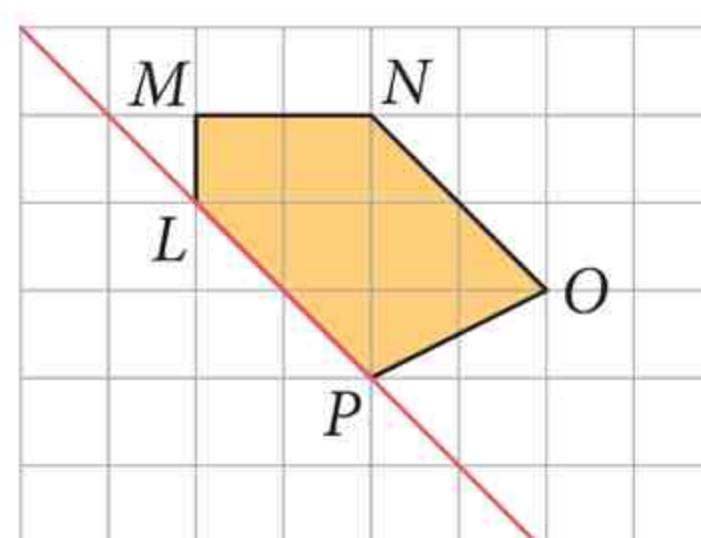


- **8** Przerysuj rysunek i uzupełnij go tak, aby powstała figura o jednej osi symetrii.

a)

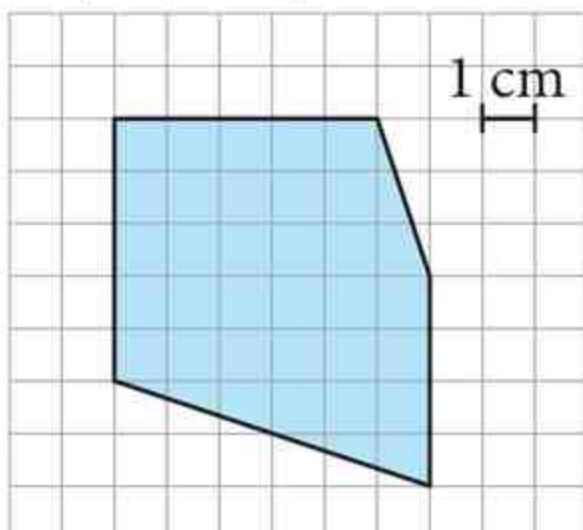


b)

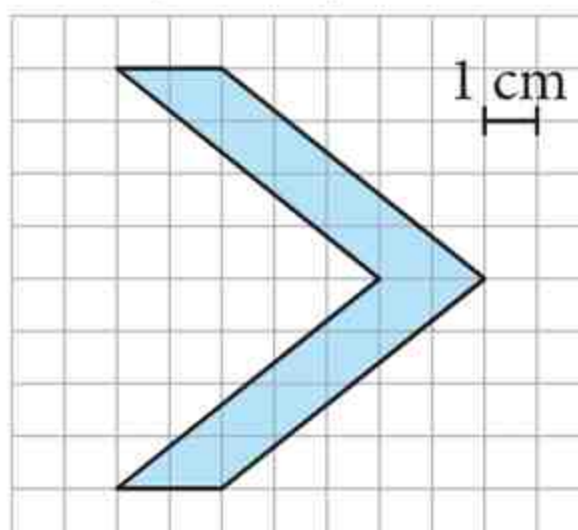


- **9** Odczytaj z rysunku potrzebne wymiary i oblicz pole wielokąta.

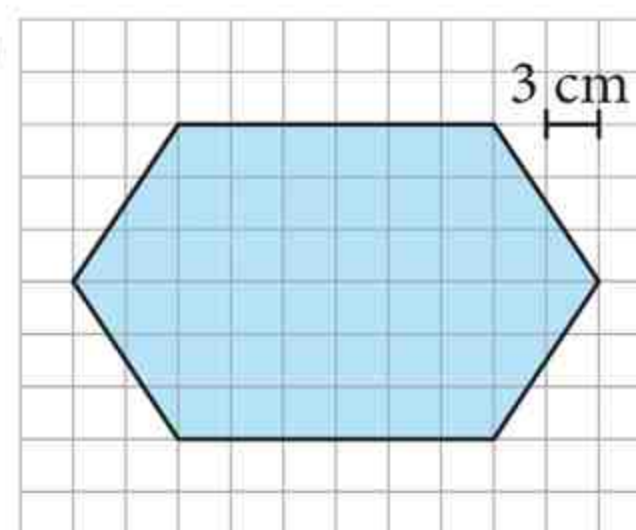
a)



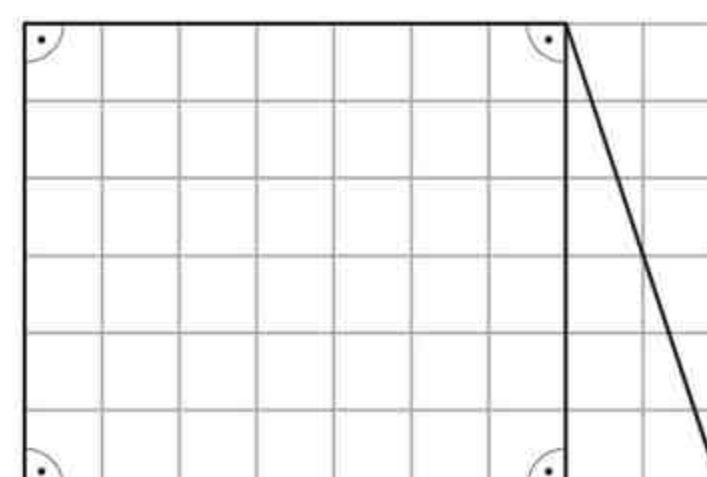
b)



c)



- **10** Na rysunku obok przedstawiono plan pokoju w skali 1 : 100. Odczytaj potrzebne długości z planu, oblicz rzeczywiste wymiary pokoju i jego pole powierzchni.
- **11** Oblicz pola figur przedstawionych na rysunku w zadaniu 5.

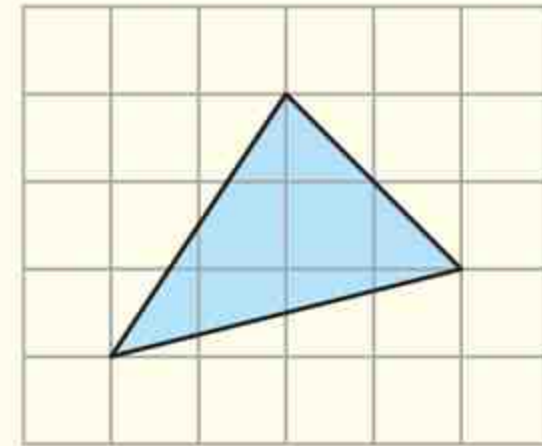




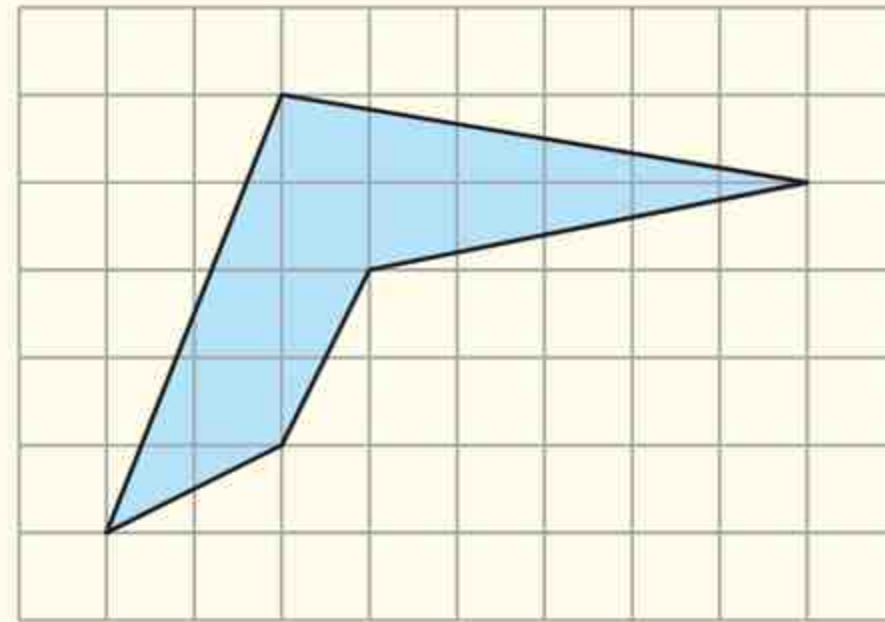
Dla dociekliwych

- 1 Przerysuj do zeszytu trójkąt przedstawiony na rysunku obok, a następnie oblicz jego pole.

Wskazówka Narysuj prostokąt o bokach biegnących wzdłuż kratek tak, aby wszystkie wierzchołki trójkąta leżały na jego bokach.



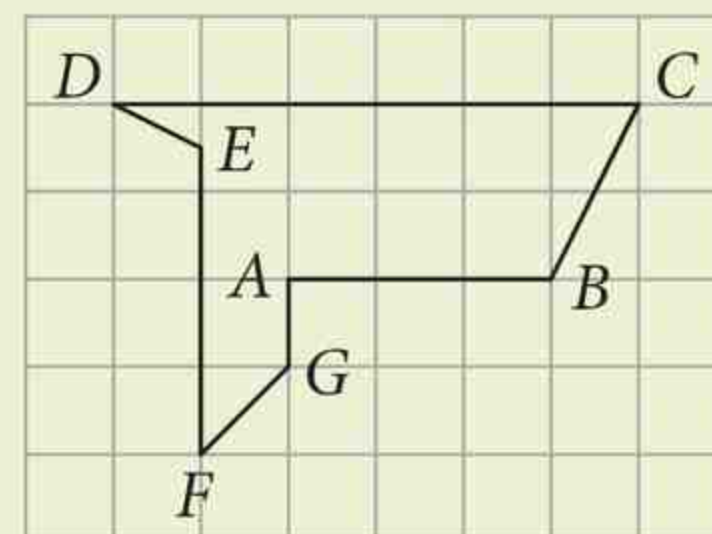
- 2 Oblicz pole pięciokąta przedstawionego na rysunku obok.



Czy już umiem?

- I Na rysunku obok przedstawiono siedmiokąt $ABCDEFGG$.

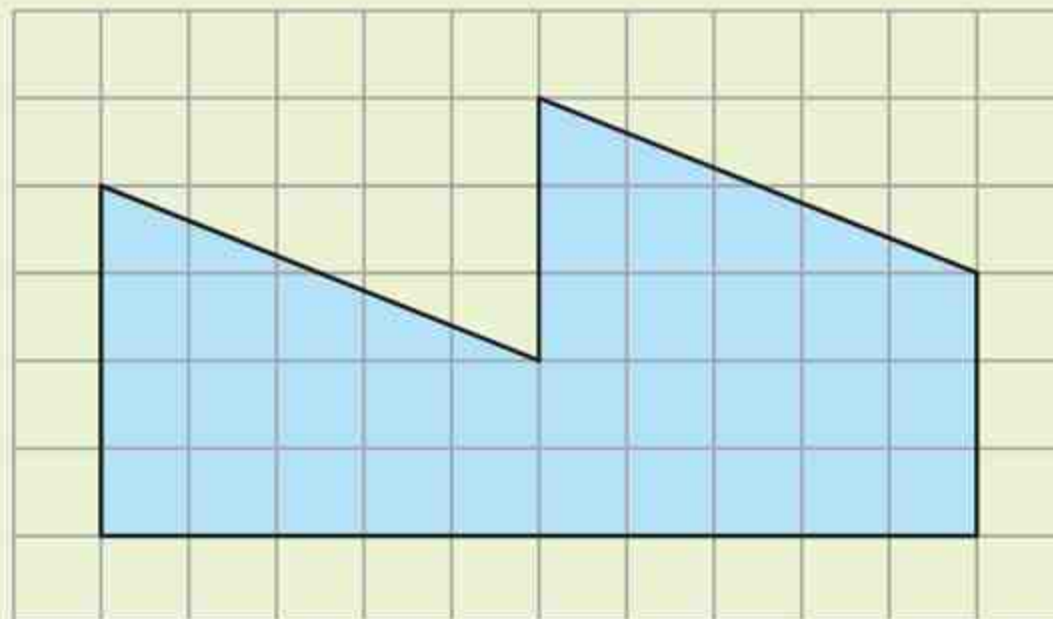
- Wypisz odcinki, których długości nie można odczytać z kratki.
- Podaj długości pozostałych odcinków.



- II Narysuj na kratce:

- równoległobok o wysokości 3 cm,
- trójkąt prostokątny o polu 4 cm^2 ,
- trójkąt rozwartokątny, który ma oś symetrii.

- III Przerysuj do zeszytu wielokąt przedstawiony na rysunku obok i oblicz jego pole.



- IV Pan Jan przebywał w pensjonacie „Jantar” od rana 28 lipca do wieczora 8 sierpnia.

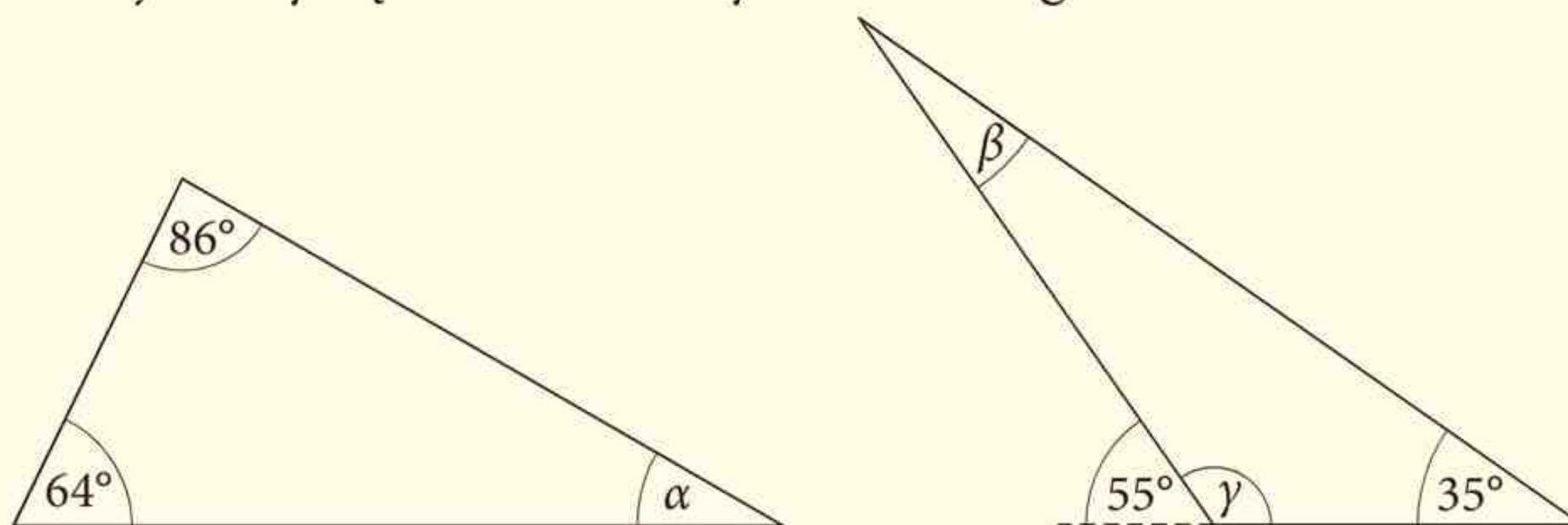
- Ile zapłacił za wyżywienie?
- Ile zapłacił za wszystkie noclegi?

Pensjonat „Jantar”

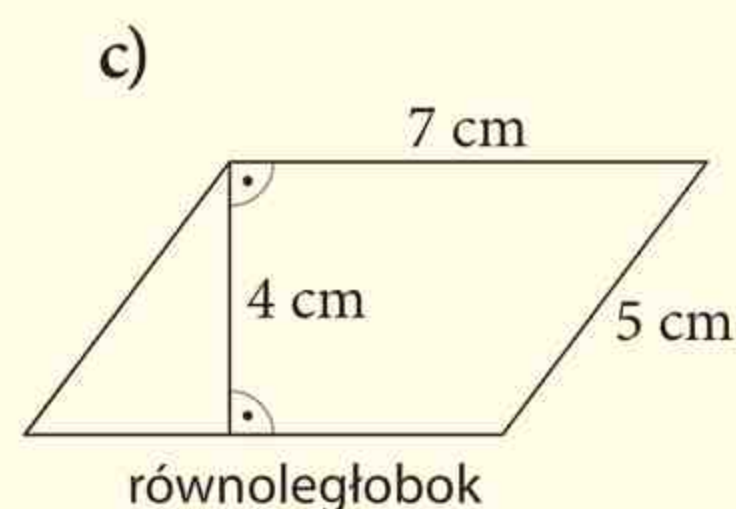
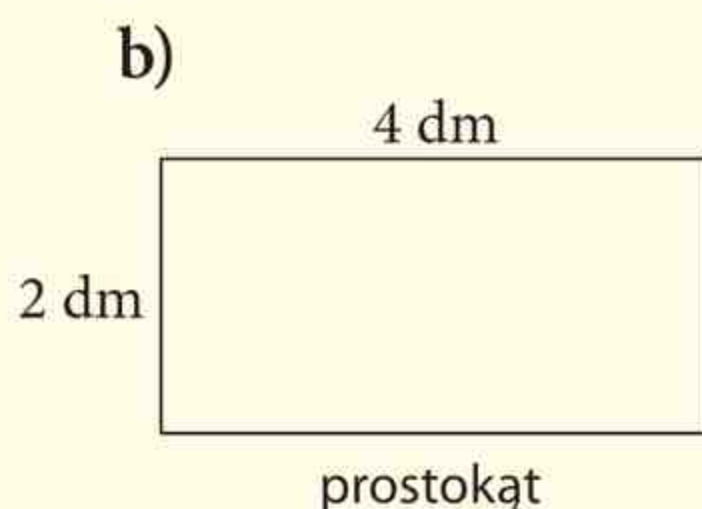
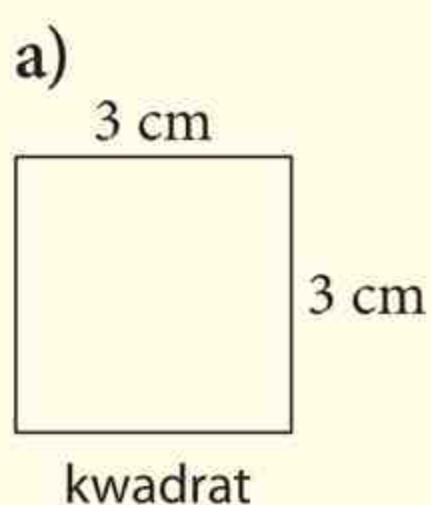
Nocleg	47 zł
Całodzienne wyżywienie	53 zł

Powtórzenie przed klasówką

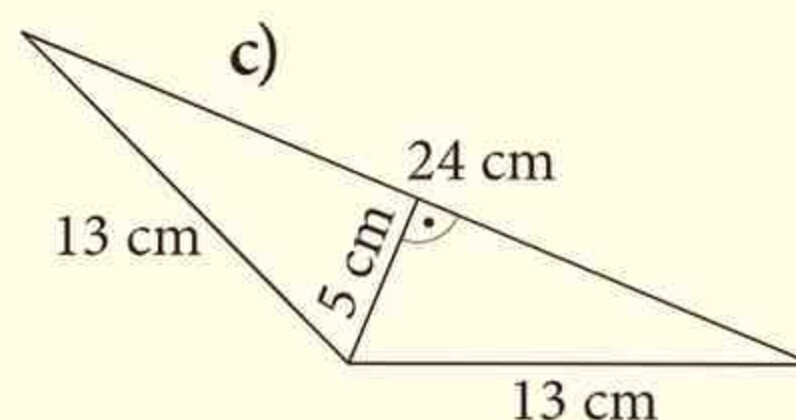
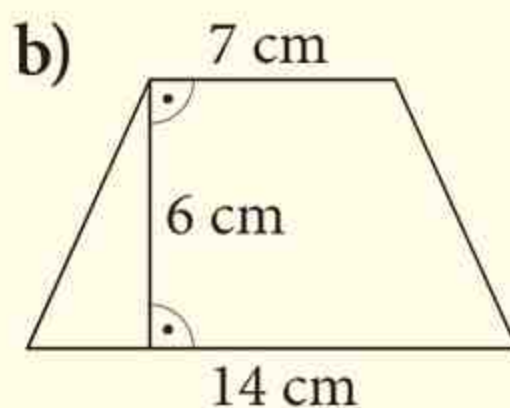
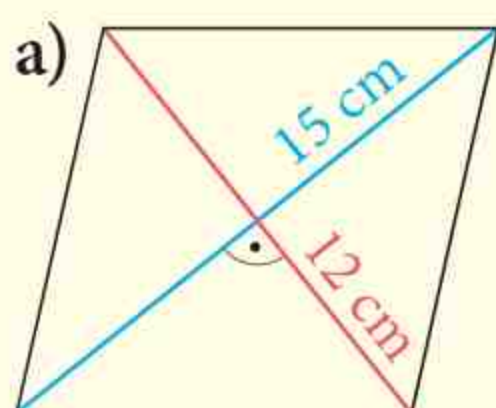
- 1 Podaj miary kątów oznaczonych literami greckimi.



- 2 Oblicz pole i obwód figury.



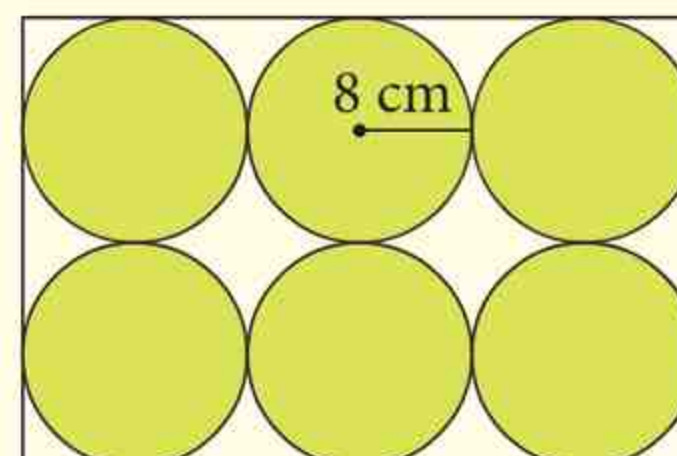
- 3 Oblicz pole figury.



- 4 Podaj długość boku trójkąta równobocznego o obwodzie równym 4,8 cm.

- 5 Okrąg narysowany w skali 1 : 2 ma średnicę 12 cm. Oblicz, jaki promień ma ten okrąg w skali 1 : 1.

- 6 Jakie wymiary ma narysowany obok prostokąt?

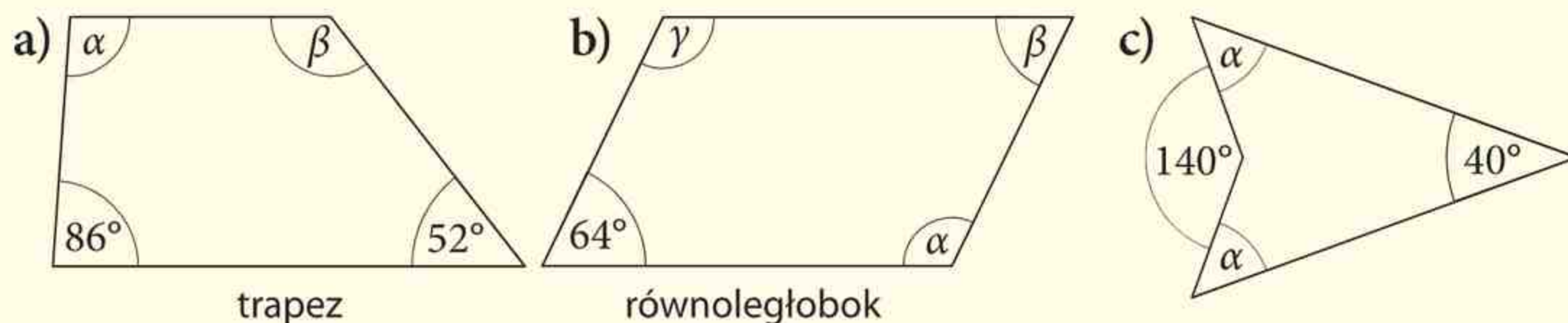


- 7 Korzystając z własności przekątnych, narysuj:

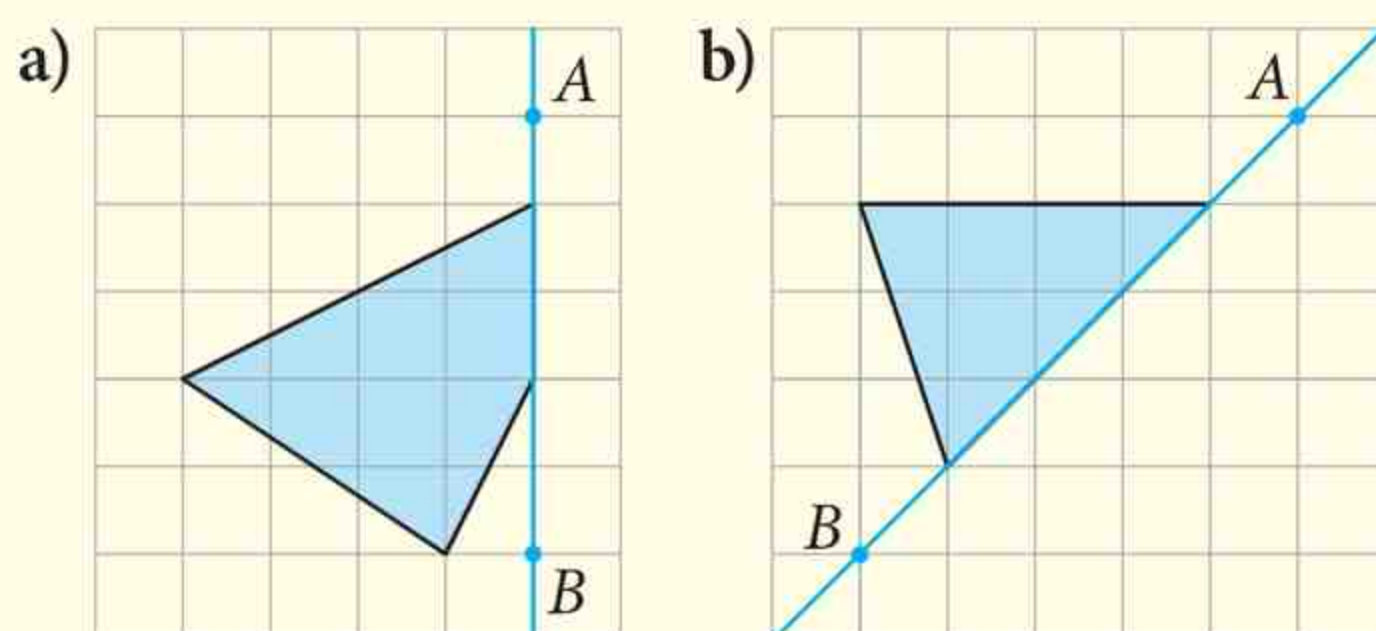
a) kwadrat o przekątnej 4 cm,

b) romb o przekątnych 3 cm i 6 cm.

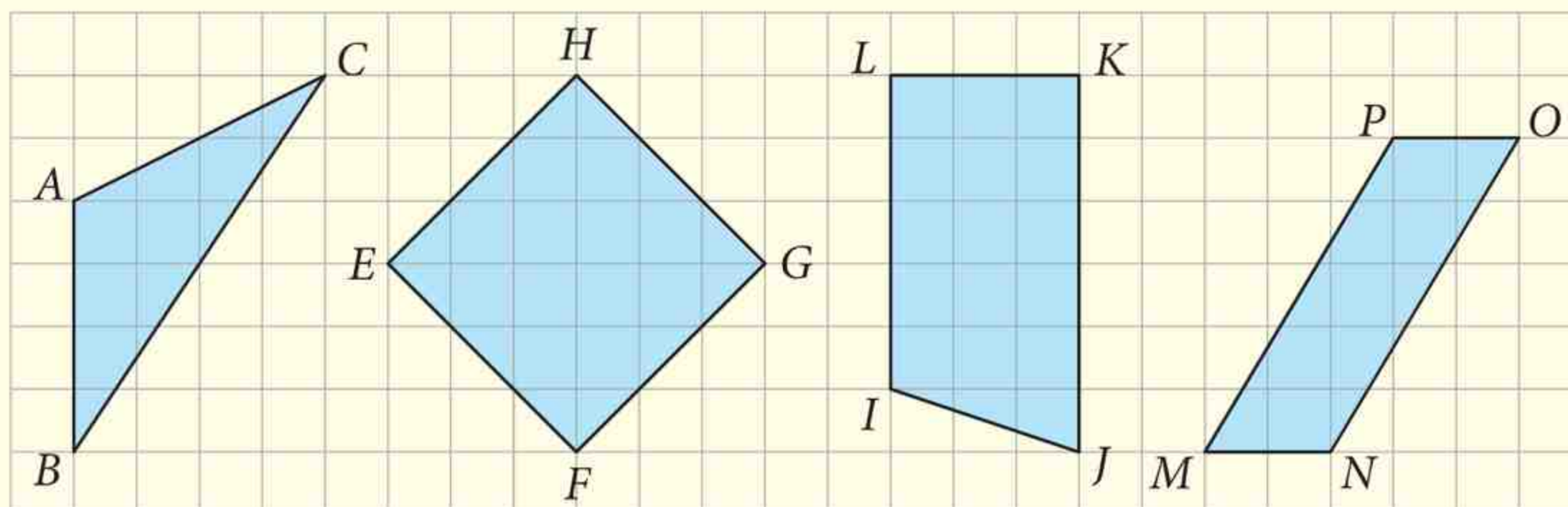
- 8 Oblicz kąty czworokąta oznaczone literami greckimi.



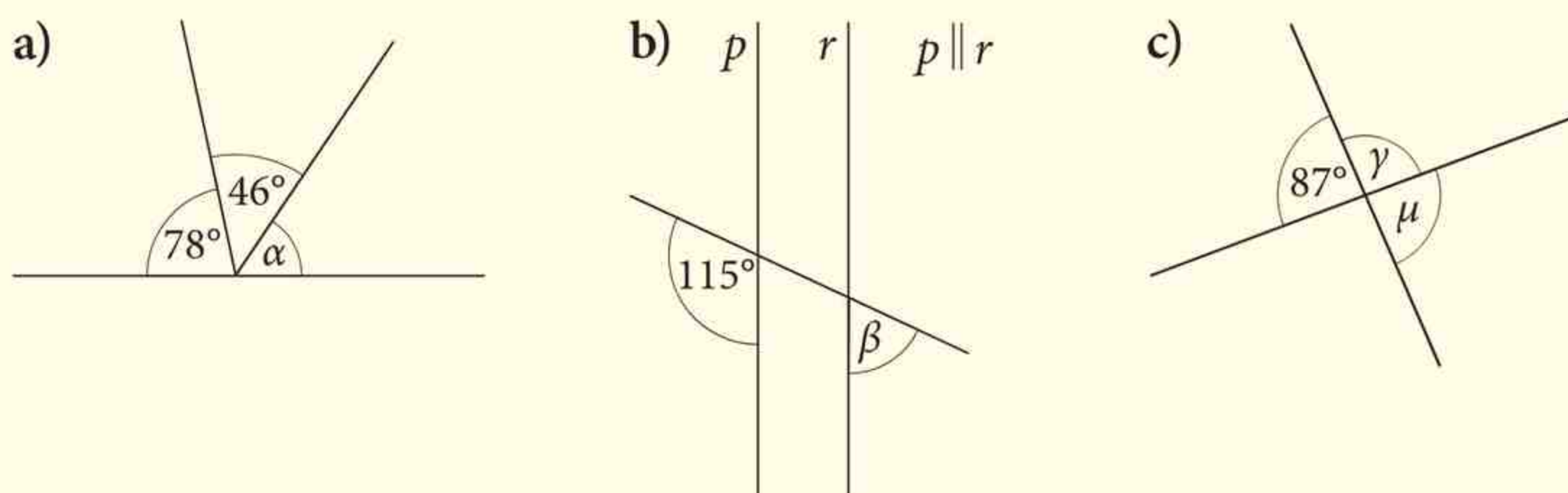
- 9 Przerysuj rysunek na kartkę w kratkę i uzupełnij go tak, aby powstała figura, która ma jedną oś symetrii – prostą AB .



- 10 Oblicz pola figur.

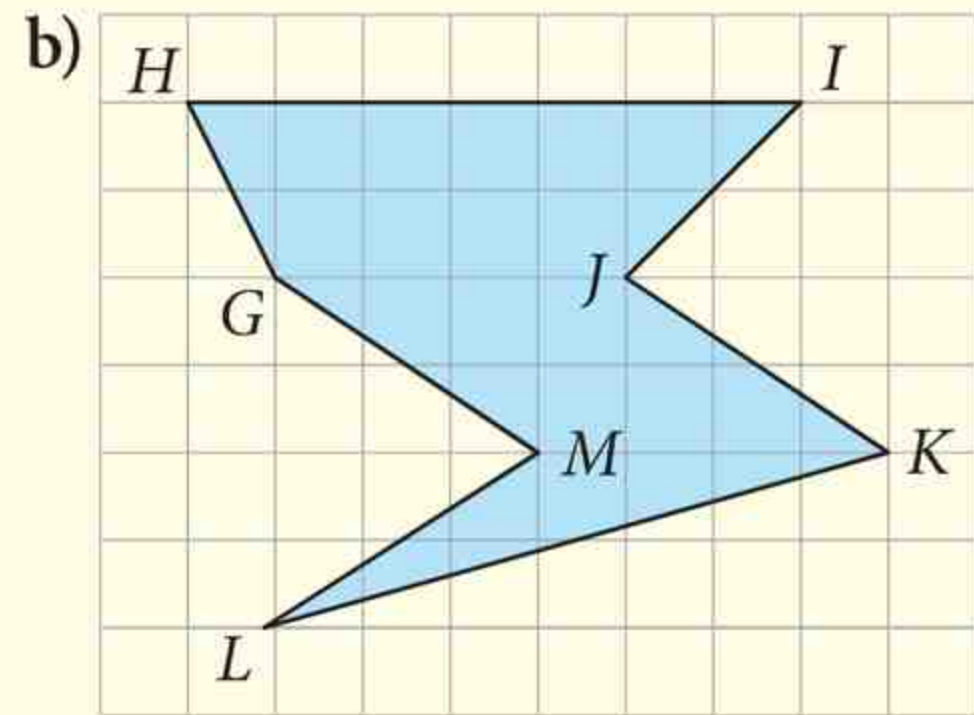
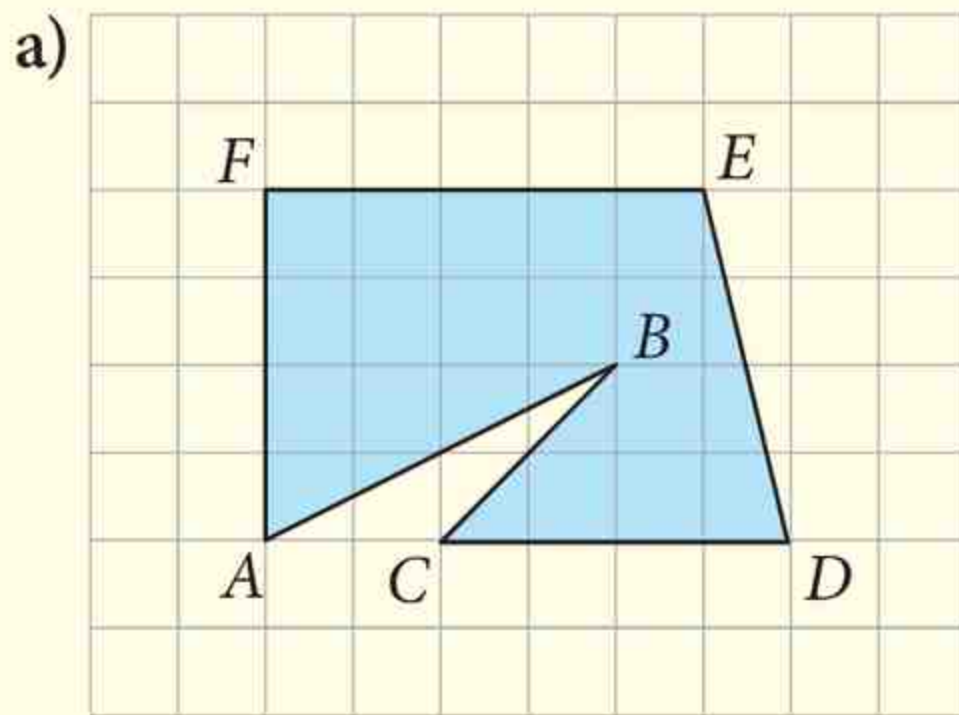


- 11 Oblicz kąty oznaczone literami greckimi.

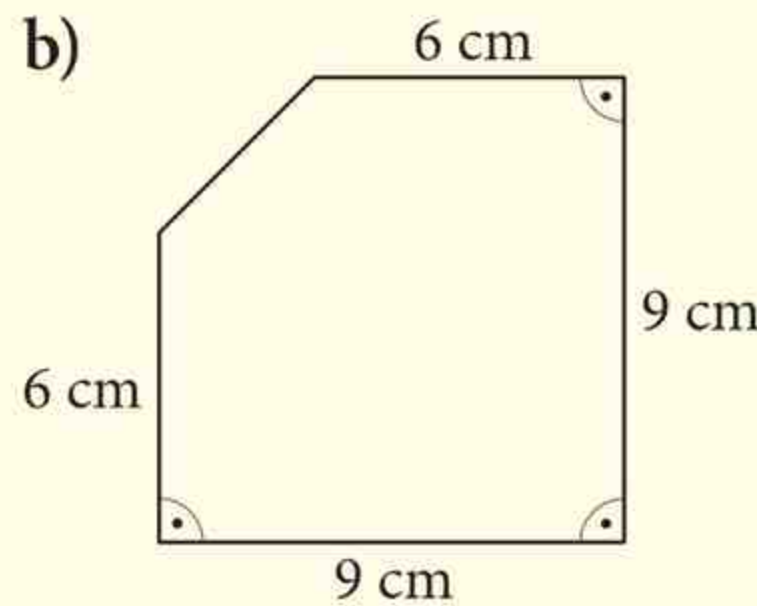
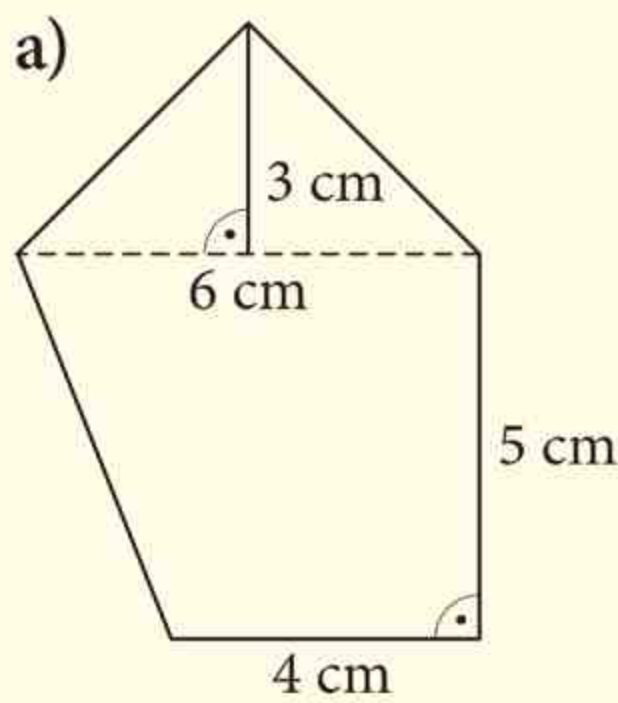


- 12 Obwód prostokąta jest równy 38 cm. Oblicz pole tego prostokąta, wiedząc, że jeden jego bok jest o 3 cm krótszy od drugiego.

- 13 Przerysuj figurę na kartkę w kratkę i oblicz jej pole.



- 14 Oblicz pole wielokąta. Potrzebne wymiary odczytaj z rysunku.



- 15 Działka ma kształt trapezu równoramienneego. Jej równoległe boki mają 15 m i 33 m, a ramiona po 15 m. Oblicz powierzchnię tej działki, wiedząc, że jej równoległe boki są od siebie oddalone o 12 m. Ile będzie musiał zapłacić właściciel działki za ogrodzenie, jeśli 1 m siatki kosztuje 14,80 zł, a brama ma szerokość 3 m?
- 16 Powierzchnia prostokątnej działki jest równa 512 m^2 . Ile siatki potrzeba na ogrodzenie tej działki, jeżeli jeden z jej boków jest dwukrotnie dłuższy od drugiego? Przyjmij, że brama ma szerokość 3,5 m.
- 17 Obwód kwadratu wynosi 24 cm. Jeden z boków tego kwadratu wydłużono o 2 cm, a drugi skrócono o 2 cm tak, że otrzymano prostokąt. Oblicz pole i obwód tego prostokąta.
- 18 Obwód trójkąta prostokątnego ABC wynosi 36 cm. Bok AB jest o 3 cm dłuższy od boku AC , a bok BC o 6 cm dłuższy od boku AC . Oblicz pole tego trójkąta.
- 19 Pole równoległoboku $KLMN$ wynosi 50 cm^2 . Bok KL jest dwa razy dłuższy od prostopadłej do niego wysokości. Oblicz długość boku KL .

Zadania na temat...

Żagle wielkie i małe

Dar Młodzieży to żaglowiec szkolny Akademii Morskiej w Gdyni. Uroczyste podniesienie bandery na Darze Młodzieży odbyło się 4 lipca 1982 r. W pierwszy rejs żaglowiec wypłynął do Osaki. Przebył 28 065 mil morskich i odwiedził 13 portów. Podróż trwała 217 dni.

Zapoznaj się z danymi technicznymi żaglowca Dar Młodzieży.

Typ statku	Żaglowiec szkolny, fregata trzymasztowa
Bandera	Polska
Port macierzysty	Gdynia
Rok i miejsce budowy	1982 r. Stocznia Gdańska
Długość całkowita z bukszprytem	108,815 m
Szerokość	14,0 m
Zanurzenie	6,6 m
Powierzchnia ożaglo- wania podstawowego	3015 m ²
Wysokość masztów	49,5 m; 49,5 m; 46,5 m



buchspryt

- 1 Ile lat ma Dar Młodzieży? Czy wiesz, jak nazywał się jego poprzednik – obecnie statek-muzeum stojący w porcie w Gdyni?
- 2 Jaką długość ma Dar Młodzieży? Czy to więcej czy mniej niż długość budynku twojej szkoły? Więcej czy mniej niż długość szkolnego boiska?
- 3 Załóżmy, że każda kondygnacja w wieżowcu ma 3 m. Do którego piętra takiego budynku sięgałyby maszty Daru Młodzieży?
- 4 Ile miesięcy trwała pierwsza podróż Daru Młodzieży?

- 5 a) Mila morska to 1852 m. Ile kilometrów przebył żaglowiec w czasie pierwszej podróży?
- b) Ile mil morskich na dobę pokonywał średnio Dar Młodzieży podczas pierwszej podróży?

A oto dane techniczne różnych jednostek pływających pod żaglami.



Optymist
załoga: 1 osoba
dł. 2,32 m, szer. 1,13 m
masa: 35 kg
ożaglowanie:
grot $3,5 \text{ m}^2$



Omega
załoga: do 6 osób
dł. 6,20 m, szer. 1,80 m
masa: 250 kg
ożaglowanie:
grot $9,00 \text{ m}^2$, fok $6,00 \text{ m}^2$



DZ (Dezeta)
załoga: do 12 osób
dł. 8,50 m, szer. 2,15 m
masa: 1120 kg
ożaglowanie:
grot $15,70 \text{ m}^2$, fok $3,90 \text{ m}^2$,
bezan $9,50 \text{ m}^2$

- 6 a) Ile optymistów należałoby ustawić jeden za drugim, aby ich łączna długość przekroczyła długość dezety? A ile optymistów trzeba ustawić obok siebie, aby ich szerokość przekroczyła szerokość dezety?
- b) Ile optymistów należałoby ustawić jeden za drugim, aby ich łączna długość przekroczyła długość Daru Młodzieży?
- 7 Na rysunkach przedstawiono w różnych skalach kadłuby żaglówek. Rysunki mają jednakową długość. Porównując ich szerokości, określ, który przedstawia optymistę, który dezetę, a który omegę.

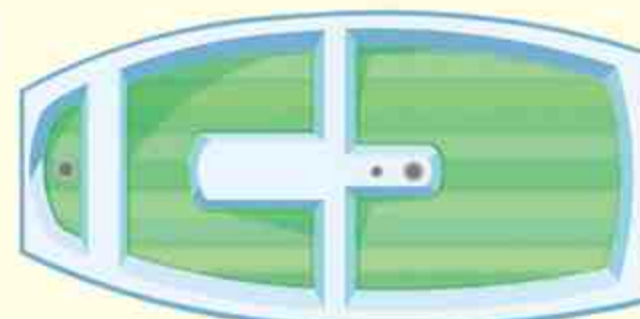
I



II



III



- 8 Ile wynosi łączna powierzchnia żagli dezety? Ile to razy mniej niż ożaglowanie Daru Młodzieży? Ile to razy więcej niż ożaglowanie omegi? Ile to razy więcej niż ożaglowanie optymisty?
- 9 Czy powierzchnia ożaglowania Daru Młodzieży to więcej czy mniej niż 1 a? To więcej czy mniej niż 1 ha?

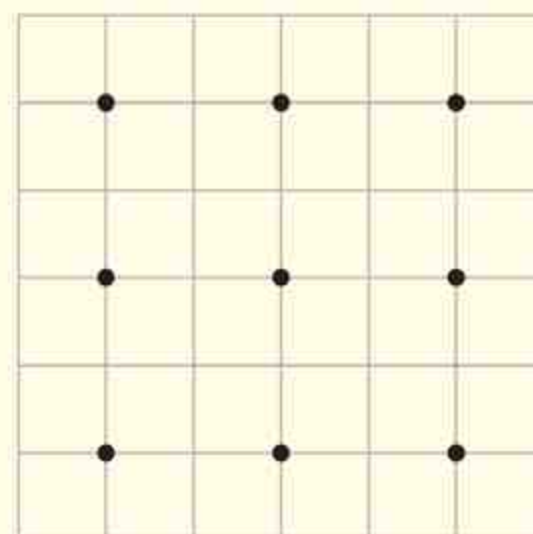
Zadania na deser

- 1 W trójkącie ABC znamy sumy długości boków:
 $AB + BC = 5 \text{ cm}$, $BC + CA = 6 \text{ cm}$, $CA + AB = 5 \text{ cm}$

- Oblicz obwód tego trójkąta.
- Oblicz długości jego boków.
- Czy ten trójkąt jest równoboczny lub równoramienny?

- 2 Na kartce w kratkę narysuj kropki w takim układzie, jak pokazano obok.

Narysuj różne trójkąty prostokątne takie, żeby ich wierzchołki znajdowały się w punktach zaznaczonych kropkami. Każda kropka może być wierzchołkiem kilku trójkątów.



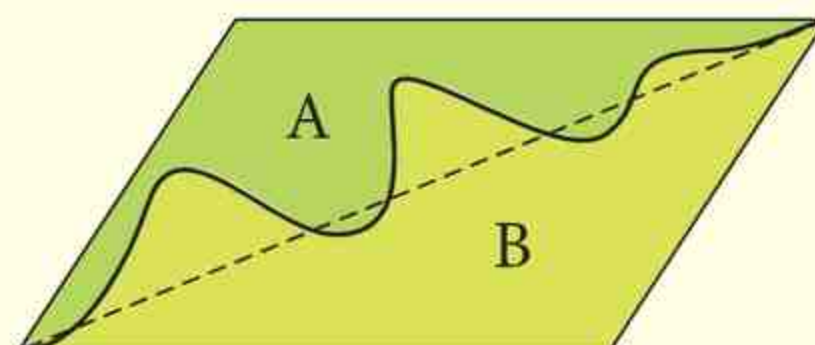
- 3 Odpowiedz na pytania.

- Ile pełnych obrotów wykonuje wskazówka minutowa zegara w czasie jednego pełnego obrotu wskazówki godzinowej?
- Wskazówka minutowa obróciła się o kąt 60° . O ile stopni obróciła się w tym czasie wskazówka godzinowa?
- O godzinie 12.00 wskazówka godzinowa pokrywa się ze wskazówką minutową. Ile stopni będzie miał kąt wypukły między tymi wskazówkami 20 minut później?
- O godzinie 3.00 wskazówki są prostopadłe. Ile stopni ma kąt wypukły między wskazówkami o 3.20?
- Ile stopni ma kąt wypukły między wskazówkami o 6.00, a ile o 6.20?
- Ile stopni ma kąt wypukły między wskazówkami o 8.45, a ile o 9.15?

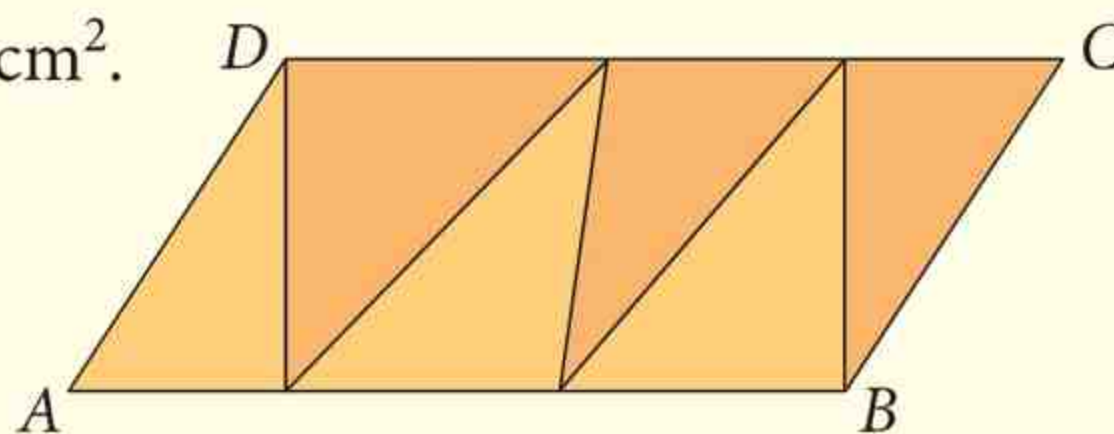
- 4 Ile co najwyżej kątów prostych może mieć pięciokąt?

- 5 Jedna z przekątnych rombu ma długość taką jak bok. Ile stopni mają kąty tego rombu?

- 6 Równoległobok podzielono na dwie części. Ciągła linia oznacza linię podziału. Która część ma większy obwód: A czy B? Która część ma większe pole?

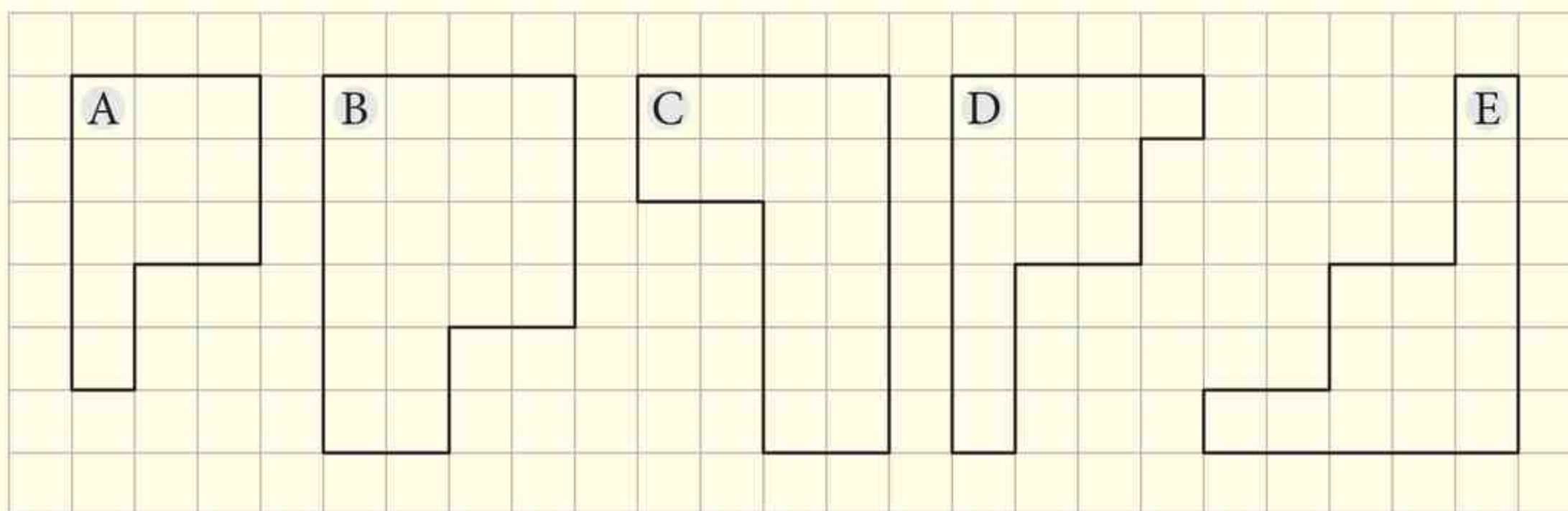


- 7 Równoległobok $ABCD$ ma pole 50 cm^2 . Oblicz pole jaśniejszej części równoległoboku.

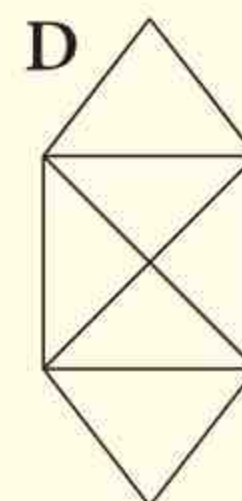
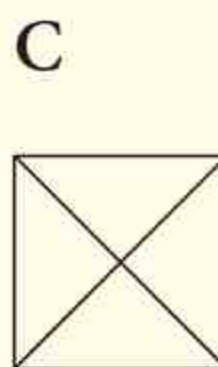
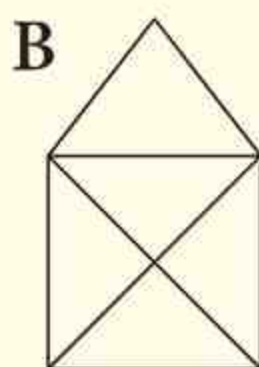
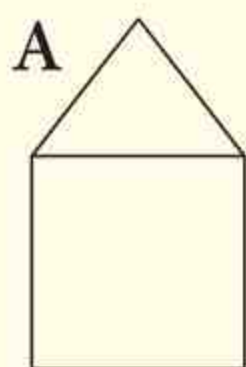


- 8 Które figury można zestawić, aby otrzymać prostokąt? Na rysunku są dwie pary takich figur i jedna figura bez pary. Figury można obracać i przekładać „na lewą stronę”.

Uwaga. Po rozwiązaniu zadania przerysuj figury, wytnij je i sprawdź, czy rzeczywiście można je ułożyć w prostokąt.



- 9 Spróbuj narysować każdą z figur A, B, C, D, nie odrywając ołówka od kartki i nie rysując dwa razy tej samej linii. W wypadku jednej figury nie jest to możliwe. Która to figura?



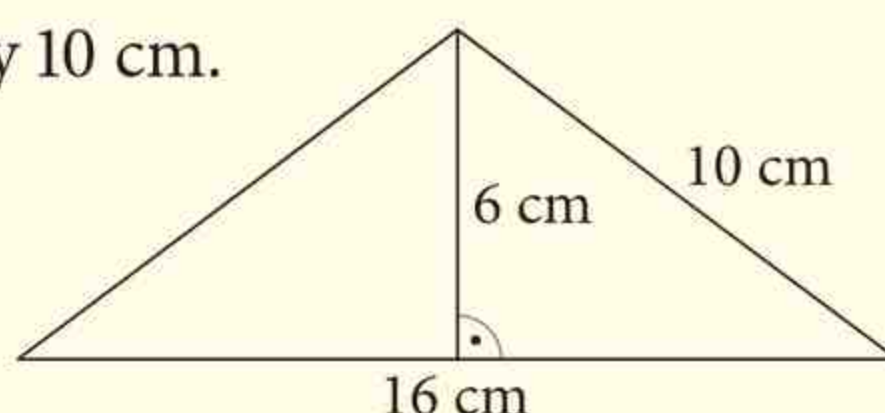
- 10 Zapisz kilka słów złożonych z podanych liter, tak aby każdy z powstałych napisów miał oś symetrii.

A B C D E F G H I J K L M N O P R S T U V W X Y Z

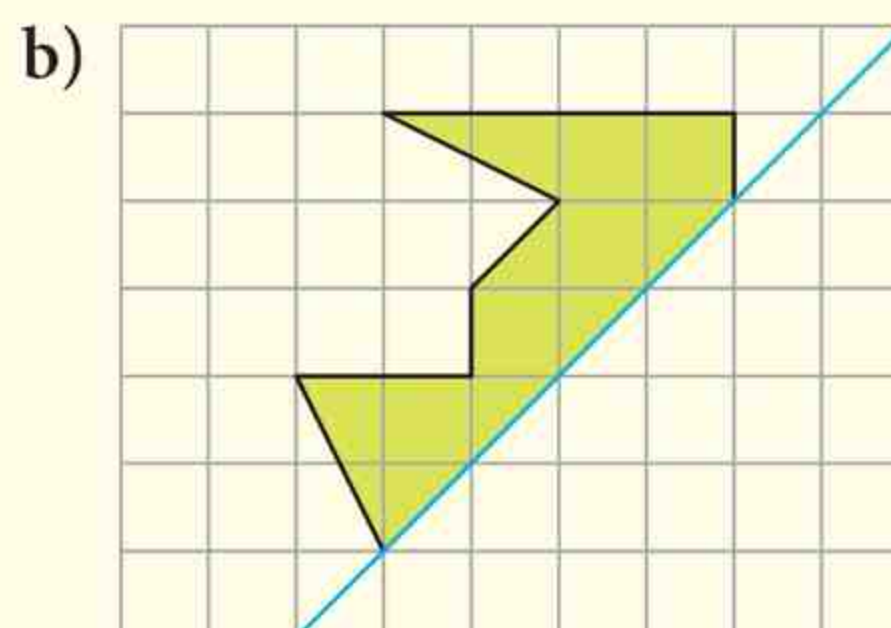
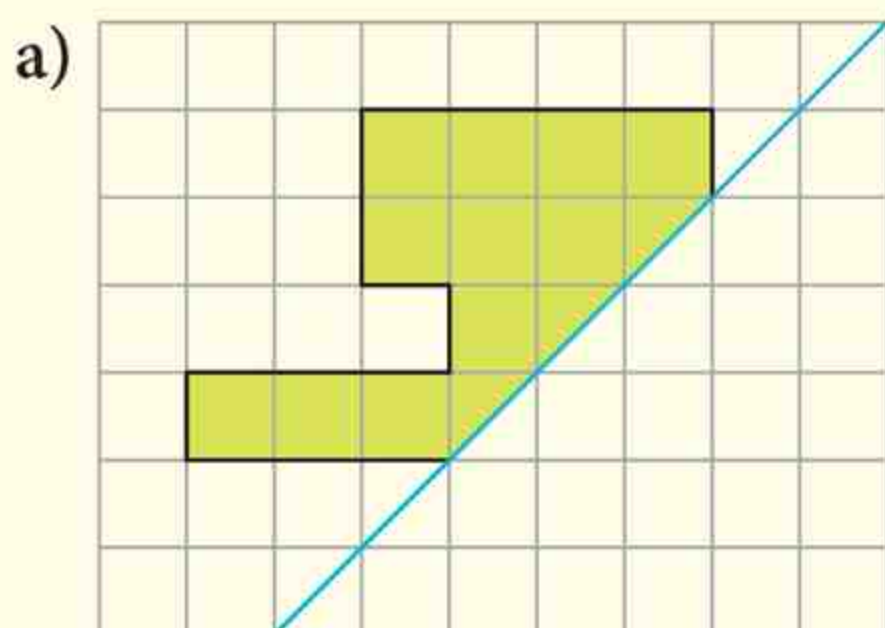
- 11 Listewkę o długości 240 cm przecięto na dwie części tak, że jedna część jest trzy razy dłuższa od drugiej. Jaka jest powierzchnia latawca rozpiętego na tych listewkach? Kształt jakiego czworokąta może mieć ten latawiec? Czy jest tylko jedno rozwiązanie? Jeśli nie wiesz, jak rozpina się latawiec na listewkach, spójrz na stronę 33.

- 12 Obwód prostokąta jest równy 64 cm , a jeden jego bok jest trzykrotnie krótszy od drugiego. Oblicz pole tego prostokąta.

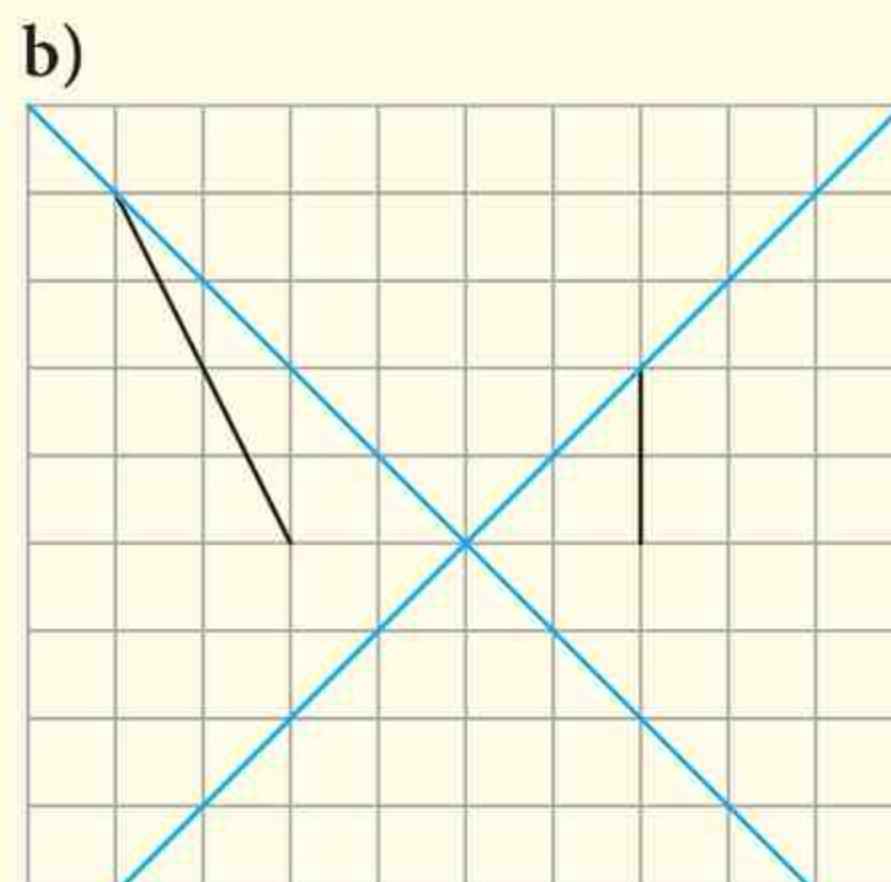
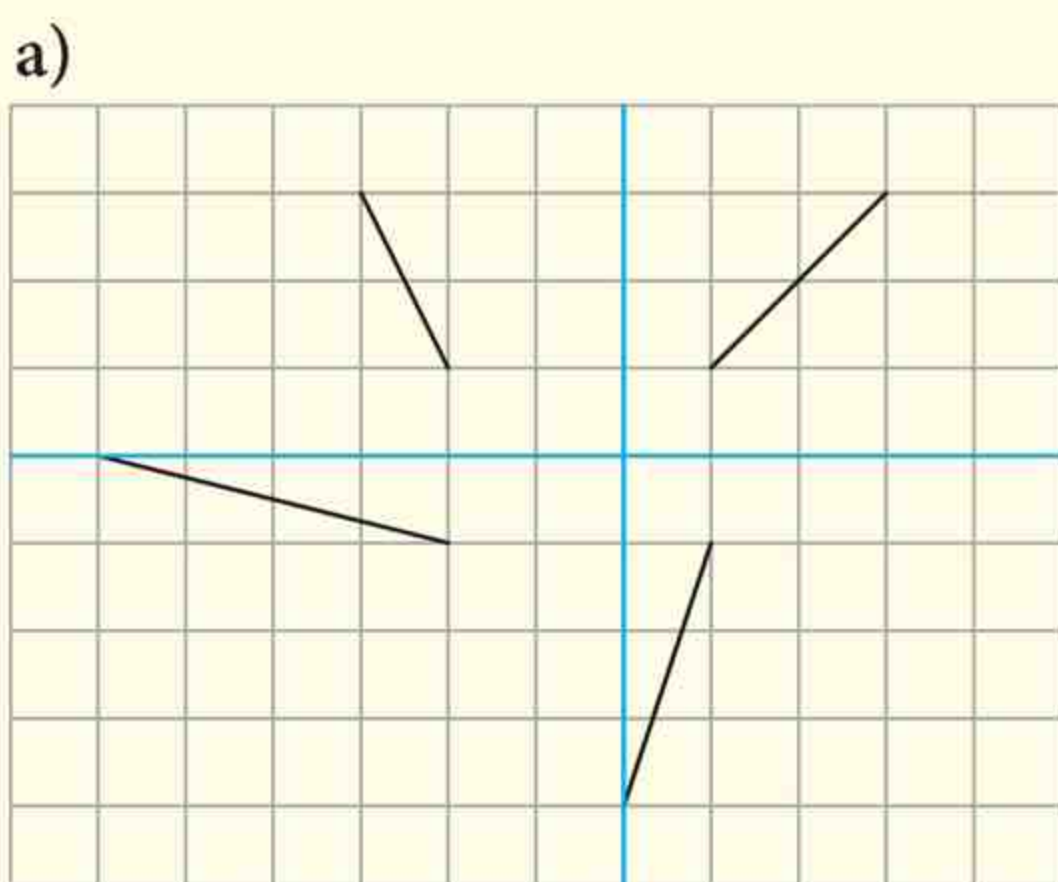
- 13 Boisko sportowe ma kształt prostokąta o powierzchni równej 450 m^2 . Ile potrzeba siatki na ogrodzenie tego boiska, jeżeli jeden z jego boków jest dwukrotnie dłuższy od drugiego?
- 14 Obwód trapezu prostokątnego jest równy 90 cm . Jaka jest długość dłuższej podstawy tego trapezu, jeśli dwa najkrótsze boki mają po 15 cm , a ramię nieprostokątne jest od każdego z nich dłuższe o 10 cm ?
- 15 Przekątne rombu mają długości 6 cm i 8 cm . Obwód jednego z czterech trójkątów powstałych w wyniku podziału rombu przez przekątne jest o 8 cm mniejszy od obwodu rombu. Oblicz długość boku rombu.
- 16 Oblicz wysokość opuszczoną na bok równy 10 cm .



- 17 Przerysuj rysunek do zeszytu. Następnie uzupełnij go tak, aby niebieska prosta była osią symetrii otrzymanej figury.



- 18 Przerysuj rysunek do zeszytu. Następnie uzupełnij go tak, aby obie niebieskie proste były osiami symetrii otrzymanej figury.





Równania

W piątek 20 maja 2016 r. w Warszawie
dzień trwał dwa razy dłużej niż noc.
Tego dnia słońce weszło o godzinie 4.32.



*Ile godzin
trwał dzień?*



1 Równania, czyli skąd my to znamy

Na dobry początek

Owocowe zagadki


$$+ + = 21$$


$$+ + = 5$$


$$+ + = 16$$


$$- = 5$$


$$- =$$

Pytania i polecenia

Jaka liczba jest ukryta pod rysunkiem gruszki?

Z równaniami spotykaliśmy się już wielokrotnie. Rozwiązaliśmy je, to znaczy podawaliśmy liczbę, którą należy wstawić w miejsce litery (czyli niewiadomej), żeby otrzymać prawdziwą równość.

Oto przykłady równań:

$$x - 5 = 12$$

$$2 \cdot x = 7$$

$$0,4 + x = 1,2$$

Równania mogą być bardziej skomplikowane, na przykład:

$$z^3 - 1 = 7$$

$$3^{x-1} = 9$$

$$a^2 \cdot (a + 1) = 12$$

Jeśli chcesz, możesz spróbować zgadnąć rozwiązania tych równań.

► Co to jest równanie?

Zwróć uwagę, że:

- W każdym równaniu występuje niewiadoma liczba oznaczona literą. Najczęściej jest to litera x , ale można używać dowolnych liter.
- W każdym równaniu występuje jeden znak $=$. Rozdziela on lewą stronę równania i prawą stronę równania.

$$\underbrace{2 \cdot x + 1}_{\text{lewa strona równania}} = \underbrace{13}_{\text{prawa strona równania}}$$

$$\underbrace{x^2 + 1}_{\text{lewa strona równania}} = \underbrace{x + 3}_{\text{prawa strona równania}}$$

Znak równości oznacza, że lewa i prawa strona równania mają być równe.

$$\text{lewa strona równania} = \text{prawa strona równania}$$

Równania będziemy bardzo często wykorzystywać do rozwiązywania zadań tekstowych. W tym temacie poćwiczymy tylko układanie równań. Ich rozwiązywaniem zajmiemy się później.

Przykład 1

Ułóż równanie do podanego zadania.

Zosia ma o 4 ołówki więcej niż Magda. Razem mają 14 ołówków. Ile ołówków ma Magda?

m tyle ołówków ma Magda

W równaniu musi wystąpić niewiadoma. Wybieramy literę i określamy, co ona będzie oznaczać.

$m + 4$ tyle ołówków ma Zosia

Teraz możemy zapisać inne informacje z zadania.

liczba ołówków Magdy $m + m + 4 = 14$ liczba ołówków Zosi

Układamy równanie.

Czy umiesz odgadnąć m ?

Przykład 2

Ułóż równanie do podanego zadania.

W trójkącie wysokość ma 6 cm, a pole jest równe 15 cm^2 . Oblicz długość podstawy tego trójkąta.

Szukaną długość podstawy trójkąta oznaczmy literą a .

a podstawa trójkąta

$h = 6 \text{ cm}$ wysokość trójkąta

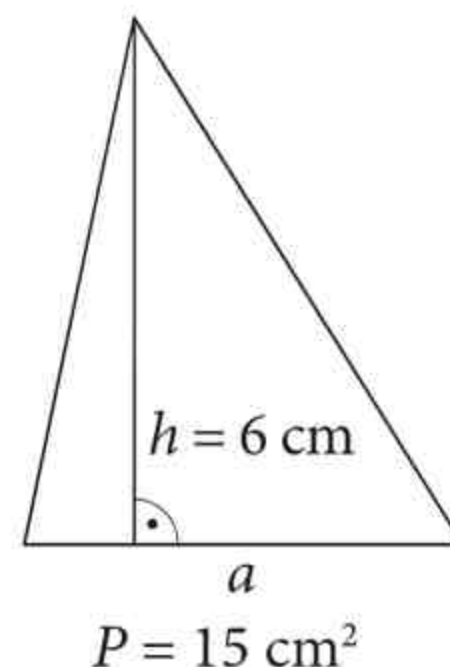
$P = 15 \text{ cm}^2$ pole trójkąta

Pole trójkąta obliczamy ze wzoru: $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$.

Do wzoru na pole trójkąta podstawiamy znane wielkości (wysokość h i pole P) i otrzymujemy równanie:

$$15 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 6$$

Czy umiesz odgadnąć a ?



Uff...
obliczyłem x !
Ale co to było?

Dobra rada

Gdy wprowadzasz literę opisującą niewiadomą, zapisz, co ona oznacza.



Przykład 3

Ułóż równanie do podanego zadania.

Liczba o 10 większa od liczby k jest równa liczbie trzy razy większej od k .
Jaką liczbą jest k ?

k	szukana liczba
-----	----------------

$k + 10$	liczba o 10 większa od k
----------	----------------------------

$3 \cdot k$	liczba trzy razy większa od k
-------------	---------------------------------

Możemy teraz zapisać równanie:

$$k + 10 = 3 \cdot k$$

Czy umiesz odgadnąć k ?

Przykład 4

Ułóż zadanie do równania $5 \cdot x = 45$.

Możliwych propozycji zadań jest wiele. Na przykład:

- Zosia ma 45 naklejek, czyli pięć razy więcej niż Ewa. Ile naklejek ma Ewa?
- Jeden z boków prostokąta ma 5 m. Pole tego prostokąta jest równe 45 m^2 . Oblicz długość drugiego boku.
- Każdy z harcerzy biorących udział w biwaku dostał na deser 5 śliwek. Jeden z zastępów stwierdził, że w sumie ma 45 śliwek. Ilu harcerzy było w tym zastępie?



Zadania

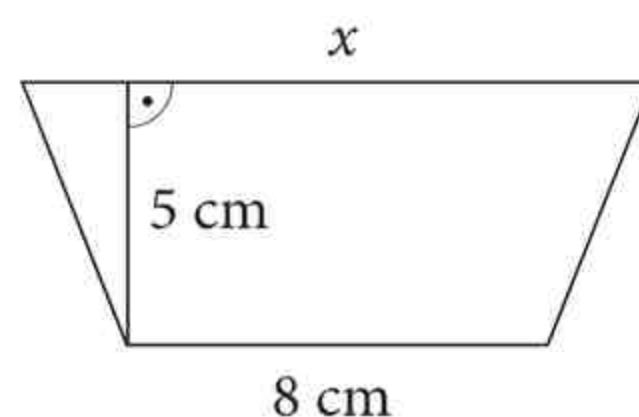
- 1 Przepisz równanie do zeszytu. Podkreśl lewą stronę równania na zielono, a prawą na czerwono.
 - a) $x - 7 = 11$
 - b) $2 \cdot (x + 3) = 3 \cdot x + 4$
 - c) $x^2 + 9 = 2 \cdot x^2 - 16$
 - d) $2 \cdot x - 5 = x + 7$
- 2 Ułóż równanie do podanego zadania.
 - a) Janek ma o 3 balony mniej niż Franek. Razem mają 19 balonów. Ile balonów ma Janek?
 - b) Magda ma 4 razy więcej serwetek niż Tosia. Razem mają 100 serwetek. Ile serwetek ma Magda?

•• **3** Ułóż równanie do podanego zadania.

- Mama upiekła 43 ciasteczka i położyła je na talerzach. Na pięciu dużych talerzach było po tyle samo ciasteczek, a na szóstym małym talerzyku były trzy ciasteczka. Ile ciasteczek leżało na każdym dużym talerzu?
- Jeden bok prostokąta jest o 5 cm dłuższy od drugiego. Pole tego prostokąta jest równe 24 cm^2 . Jaką długość ma krótszy bok?
- Jeden bok prostokąta jest o 5 cm krótszy od drugiego. Obwód tego prostokąta jest równy 38 cm. Jaką długość ma dłuższy bok?

•• **4** Ułóż równanie do podanego zadania.

Pole trapezu jest równe 55 cm^2 . Oblicz długość jego dłuższej podstawy. Potrzebne dane odczytaj z rysunku.



•• **5** Ułóż zadanie do równania $4 \cdot x + 1 = 13$.

•• **6** Zagrajcie w grupie co najmniej 5-osobowej. Usiądźcie wokół stołu. Każdy z uczestników gry przygotowuje kartkę, na górze pisze równanie i podaje ją sąsiadowi po lewej stronie. Kolejna osoba układa do równania zadanie, zagina kartkę tak, aby nie było widać równania, i podaje dalej. Kolejny uczestnik pisze równanie do zadania i zagina kartkę tak, aby nie było widać zadania, itd. Gdy kartka wróci do właściciela, ten odczytuje równania oraz zadania i sprawdza, czy wszystkie zostały dobrze ułożone.

••• **7** Ułóż trzy różne zadania do równania $(x + 3) \cdot x = 70$.

 8 Ułóż równanie do podanego zadania.

Ola jest o 5 lat młodsza od Krysi i o rok starsza od Janka. Mama jest 5 razy starsza od Oli, a tata o dwa lata starszy od mamy. Cała sześćoosobowa rodzina wraz z najmłodszym, trzyletnim Krzysiem ma w sumie 100 lat. Ile lat ma Ola?



Dla dociekliwych

Wojtek, Paweł i Adam rozwiązywali podane niżej zadanie.

Zosia ma w piórniku o 15 kredek więcej niż Krysia, a Paulina ma o 10 kredek mniej niż Zosia. Razem dziewczynki mają 35 kredek. Ile kredek ma każda z nich?

Oto ułożone przez chłopców równania i ich rozwiązania:

Wojtek ► $x + x - 15 + x - 10 = 35$ $x = 20$

Paweł ► $x + x + 15 + x + 15 - 10 = 35$ $x = 5$

Adam ► $x + 10 + x + 10 - 15 + x = 35$ $x = 10$

Marcin twierdzi, że wszystkie równania są poprawnie zapisane i rozwiązane.

- 1 Czy to możliwe, że Marcin ma rację? Odpowiedź uzasadnij.
- 2 Przyjmij, że Krysia ma 10 kredek. Oblicz, ile kredek mają Zosia i Paulina. Sprawdź, czy to poprawna odpowiedź do zadania.
- 3 Przyjmij, że Paulina ma 10 kredek. Oblicz, ile kredek mają Zosia i Krysia. Sprawdź, czy to poprawna odpowiedź do zadania.
- 4 Marcin miał rację: wszyscy chłopcy poprawnie rozwiązyli zadanie. Co oznaczała niewiadoma x w poszczególnych równaniach?



Czy już umiem?

- I Wskaż niewiadomą oraz lewą i prawą stronę równania.

a) $11 = 7 + a$

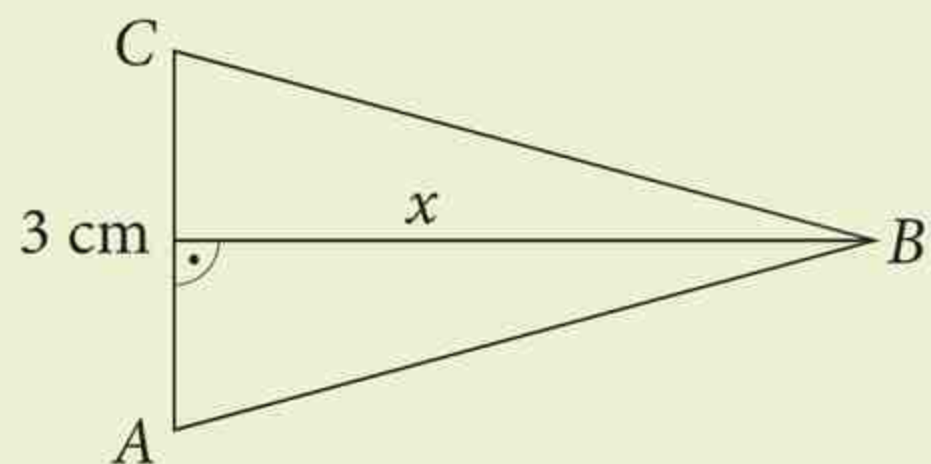
b) $2 \cdot x - 3 = x \cdot (x + 7)$

- II Ułóż równanie do podanego zadania.

W czasie mistrzostw szkoły w piłce nożnej Jacek strzelił o 3 gole mniej niż Tomek. Razem strzelili 15 goli. Ile goli strzelił Tomek?

- III Ułóż równanie do podanego zadania.

Oblicz wysokość trójkąta ABC , wiedząc, że jego pole jest równe 12 cm^2 .



- IV Zapisz dzielenie w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego lub liczby mieszanej. Przedstaw otrzymaną liczbę w postaci ułamka dziesiętnego.

a) $15 : 20$

b) $154 : 25$

c) $110 : 66$

Sprawdzanie, czyli rozwiązywanie bez rozwiązywania

  Na dobry początek

Co kryje okienko?

Przygotujcie kostkę do gry. Jeśli nie macie kostki, możecie użyć kartoników z cyframi od 1 do 6.

- ▶ Rzuć kostką (lub wylosuj jeden z kartoników).
- ▶ Wybierz z ramki równanie, do którego w miejsce okienka można wstawić wylosowaną liczbę tak, aby otrzymać prawdziwą równość. Jeśli wskażesz poprawnie – zdobywasz punkt.
- ▶ Powtórzcie opisane czynności kilka razy. Zamieniajcie się rolami.
- ▶ Wygrywa osoba, która zdobędzie więcej punktów.

$$2 \cdot \text{okienko} - 5 = 7$$

$$3 \cdot \text{okienko} - 2 = 1$$

$$2 \cdot \text{okienko} - 5 = 3$$

$$3 \cdot \text{okienko} - 2 = 4$$

$$2 \cdot \text{okienko} - 5 = 5$$

$$3 \cdot \text{okienko} - 2 = 7$$



Rozwiązania równania

Jaka liczba jest rozwiązaniem podanego równania?

$$x + 1 = 7$$

Łatwo sprawdzić, że **rozwiązaniem** tego równania jest liczba 6.

Oznacza to, że jeśli do tego równania zamiast niewiadomej x wstawimy liczbę 6, to otrzymamy równość.

$$\underbrace{6 + 1}_{\text{lewa strona: } 6 + 1 = 7} = \underbrace{7}_{\text{prawa strona: również } 7}$$

lewa strona: $6 + 1 = 7$

prawa strona: również 7

Zapamiętaj

O liczbie, która jest rozwiązaniem równania, mówimy, że **spełnia to równanie**.

Ile rozwiązań może mieć równanie?

może mieć jedno rozwiązanie

np. $x + 1 = 7$

Tutaj pasuje tylko liczba 6.

może mieć kilka rozwiązań

np. $x^2 = 25$

$5^2 = 25$, ale także $(-5)^2 = 25$

Równanie:

może mieć nieskończenie

wiele rozwiązań

np. $x + x = 2 \cdot x$

dodajemy dwie takie same liczby mnożymy liczbę przez 2

To jest przecież to samo!

może nie mieć rozwiązań

np. $x + 1 = x$

$x + 1$ to zawsze więcej niż x

np. $x^2 = -25$

iloczyn dwóch jednakowych liczb nigdy nie jest ujemny

Zapamiętaj

Rozwiązać równanie to znaczy znaleźć **wszystkie** liczby spełniające to równanie, czyli **wszystkie** jego rozwiązania.

Co możemy powiedzieć
o rozwiązaniach równania
 $0 \cdot x = 0$?

A równania $0 \cdot x = 7$?

Przecież zero razy
dowolna liczba
to zero!



► Sprawdzanie rozwiązań

Przykład 1

poziom A

Sprawdź, czy liczba 10 jest rozwiązaniem równania $100 : x - 2 = 8$.

Trzeba wstawić liczbę 10 w miejsce x .

Lewa strona równania = $100 : x - 2 = 100 : 10 - 2 = 10 - 2 = 8$

Prawa strona równania = 8

Lewa strona równania jest równa prawej stronie.

Odp. Liczba 10 jest rozwiązaniem równania $100 : x - 2 = 8$.

poziom B

Sprawdź, czy liczba 5 jest rozwiązaniem równania $6 \cdot x - 2 + x = 23$.

Lewa strona równania = $6 \cdot x - 2 + x = 6 \cdot 5 - 2 + 5 = 30 - 2 + 5 = 33$

Prawa strona równania = 23

Lewa strona równania **nie jest równa** prawej stronie.

Odp. Liczba 5 nie jest rozwiązaniem równania $6 \cdot x - 2 + x = 23$.

Dobra rada

Możesz pisać L zamiast „Lewa strona” i P zamiast „Prawa strona”.
Zwrot „nie jest równe” można zastąpić symbolem $\neq$.

poziom C

Sprawdź, czy liczba 7 jest rozwiązaniem równania $6 \cdot x - 2 = 5 \cdot x + 8$.

$L = 6 \cdot x - 2 = 6 \cdot 7 - 2 = 42 - 2 = 40$

$P = 5 \cdot x + 8 = 5 \cdot 7 + 8 = 35 + 8 = 43$

$L \neq P$

Odp. Liczba 7 nie jest rozwiązaniem równania $6 \cdot x - 2 = 5 \cdot x + 8$.

poziom D

Sprawdź, które z liczb: 1, 3, 5 są rozwiązaniami równania $x \cdot x + 5 = 6 \cdot x$.

Sprawdzamy, czy rozwiązaniem jest liczba 1.

$$L = x \cdot x + 5 = 1 \cdot 1 + 5 = 6$$

$$P = 6 \cdot x = 6 \cdot 1 = 6$$

$$L = P$$

Sprawdzamy, czy rozwiązaniem jest liczba 3.

$$L = x \cdot x + 5 = 3 \cdot 3 + 5 = 9 + 5 = 14$$

$$P = 6 \cdot x = 6 \cdot 3 = 18$$

$$L \neq P$$

Sprawdzamy, czy rozwiązaniem jest liczba 5.

$$L = x \cdot x + 5 = 5 \cdot 5 + 5 = 25 + 5 = 30$$

$$P = 6 \cdot x = 6 \cdot 5 = 30$$

$$L = P$$

Odp. Rozwiązaniami równania $x \cdot x + 5 = 6 \cdot x$ są liczby 1 i 5.



Zadania



1 Wykonaj polecenia. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz dwa kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

Sprawdź, czy liczba podana obok równania jest jego rozwiązaniem.

a) $2 \cdot x + 7 = 11$; 3

d) $5 \cdot (x - 4) - x = 8$; 7

b) $x^2 - 1 + x = 1$; 1

e) $6 + x = 10$; 4

c) $\frac{20}{x+1} = 5$; 4

f) $(x + 6) : 2 = 10$; 12

poziom B

Sprawdź, które z liczb podanych pod równaniem są jego rozwiązaniami.

a) $20 + x^2 - 8 \cdot x = 5$
3, 5, 1

d) $(x + 5) \cdot (x - 4) = 0$
-5, 5, 4

b) $(x - 5) \cdot (x + 5) = 66$
1, 6, 15

e) $m^2 = 16$
4, 8, -4

c) $\frac{15}{x+1} = 3$
0, 2, 4

f) $x^2 + 12 - 3 \cdot x = 10$
1, 2, 3

poziom C

Sprawdź, czy liczba 3 jest rozwiązaniem równania.

a) $2 \cdot x = x + 5$

d) $7 - x = \frac{12}{x+1}$

b) $x^2 - 4 = x + 2$

e) $24 - 4 \cdot a = \frac{12}{a}$

c) $5 \cdot (3 + a) = a \cdot 10$

f) $6 + 5 \cdot c = 10 - c$

poziom D

Sprawdź, które z liczb: 1, 2, 3 są rozwiązaniami podanego równania.

a) $x^2 + 3 = 4 \cdot x$

d) $\frac{12}{x+1} = x + 2$

b) $x^2 - 1 = 8$

e) $(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-2) = x - x$

c) $(x-1) \cdot (x+1) = x^2 - 1$

f) $(x+6) : 2 = x \cdot 2$

MISTRZ

Każda z liczb: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 jest rozwiązaniem jednego z poniższych równań. Którego?

I $x + 5 = 1$

IV $x \cdot (x+1) \cdot (2 \cdot x + 6) = 0$

II $\frac{15}{x+4} = 3$

V $7^x + 1 = 50$

III $[(4-x) \cdot 3 - 2] : 4 = 4$

VI $x^2 + 17 = 5 + 7 \cdot x$

- **2** Ułóż równanie, którego rozwiązaniem jest liczba 2.
- **3** Odgadnij, jaką liczbę w równaniu zasłania plama, jeśli wiadomo, jaka liczba jest jego rozwiązaniem.

a) $x + 5 =$ 

$x = 7$

b) $x +$  $= 10$

$x = 4$

- **4** Pracujcie w parach. Przygotujcie komplet kartoników z liczbami od 0 do 9 oraz planszę według wzoru.

$$3 \cdot \square + 5 =$$

Wylosuj 3 kartoniki i połóż je na stole liczbami do góry. Następnie wybierz jedną z wyłożonych liczb, ale nie mów drugiemu graczowi, która to liczba. Oblicz wynik, który otrzymasz po wstawieniu wybranej liczby w okienko w działaniu na planszy. Podaj ten wynik drugiemu graczowi. Jego zadanie polega na odgadnięciu wybranej przez ciebie liczby. Potem zamieńcie się rolami. Jeśli chcecie, możecie przygotować podobne plansze, ale z innymi liczbami.

- **5** Każda z liczb: 1, 2, 3, 4, 5 jest rozwiązaniem jednego z poniższych równań. Sprawdź którego. Uporządkuj równania tak, aby rozwiązaniem pierwszego była liczba 1, drugiego – liczba 2 itd. Litery odpowiadające równaniom utworzą hasło.

T $(5+x) \cdot 3 = 18$

B $5 \cdot x = 15$

R $x + 10 = 15$

O $x \cdot x - x = 3 \cdot x$

A $(x-2) \cdot (x+5) = 0$

- 6 Odgadnij rozwiązania równań oznaczonych cyframi rzymskimi. Następnie do każdego z nich dobierz z ramki równanie, które jest spełnione przez tę samą liczbę.

I $x + 2 = 6$

II $x : 6 = 1$

III $x \cdot 2 = 20$

IV $x - 2 = 3$

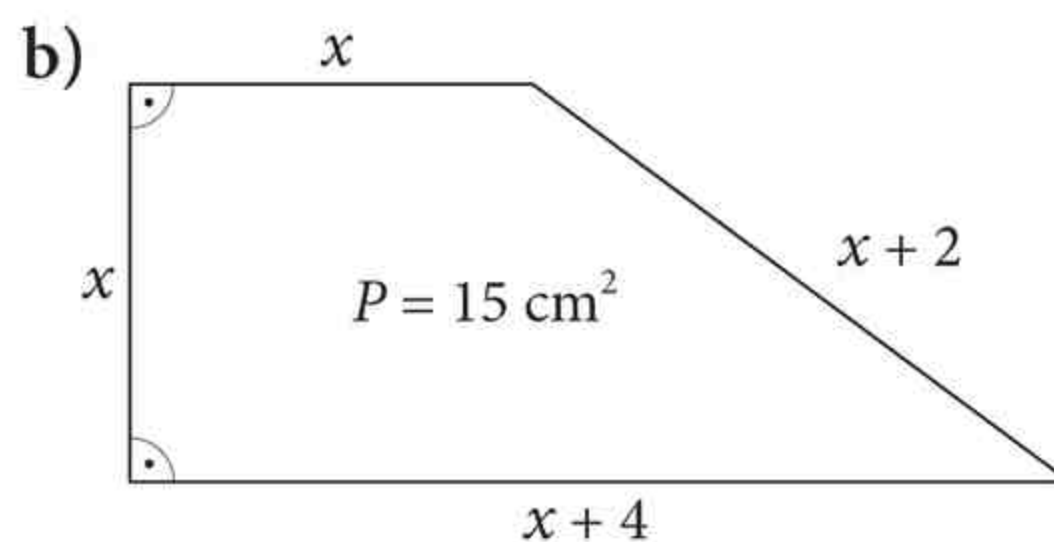
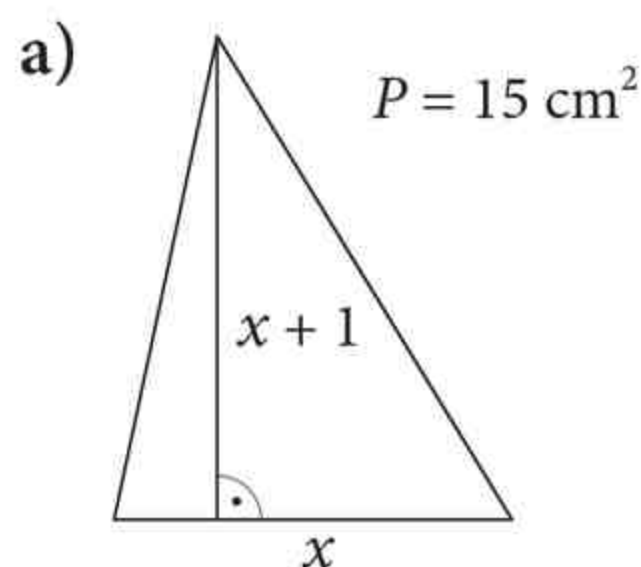
A $\frac{2 \cdot x + 4}{x - 2} = \frac{2 \cdot x}{3}$

C $(x - 4) \cdot (x - 3) \cdot (x - 2) = 6$

B $8^{x-8} = 88 - (8 + 8 + 8)$

D $(x - 3)^3 + (x - 2)^2 + (x - 1)^1 = 2 \cdot x$

- 7 Ułóż trzy różne równania takie, aby liczba 7 była rozwiązaniem każdego z nich.
- 8 Ułóż równanie do rysunku. Sprawdź, która z liczb: 1, 2, 3, 4, 5 jest jego rozwiązaniem.



- 9 Wśród poniższych równań są: równanie, które ma jedno rozwiązanie, równanie, które nie ma rozwiązań, i równanie, które ma nieskończenie wiele rozwiązań. Które to równania?
- I $x = x + 2$ II $2 \cdot (x + 3) = 2 \cdot x + 6$ III $3 \cdot x = 15$
- 10 Wśród poniższych równań są: równanie, które ma dwa rozwiązania, równanie, które nie ma rozwiązań, i równanie, które ma nieskończenie wiele rozwiązań. Które to równania?
- I $(x - 2) \cdot (x + 2) = x^2 - 4$ II $x - 9 = x + 3$ III $(x - 3) \cdot (x + 5) = 0$
- 11 Dane jest równanie $x \cdot (x - 3) \cdot (x - 5) \cdot (x - 9) \cdot (x - 6) \cdot (x - 8) = 0$.
- Sprawdź, czy liczba 10 jest rozwiązaniem tego równania.
 - Sprawdź, czy liczby 3 i 5 są rozwiązaniami tego równania.
 - Spróbuj odgadnąć inne rozwiązania. Zrób sprawdzenia. Spróbuj opisać i uzasadnić swoją metodę zgadywania rozwiązań.
 - Sprawdź, czy liczba 0 jest rozwiązaniem równania.
- 🏆 12 Podaj wszystkie cztery rozwiązania równania $x \cdot (x - 7) \cdot (x^2 - 4) = 0$.



Dla dociekliwych

Bez trudu można ułożyć wiele prostych równań, których rozwiązaniem jest liczba 6, np. $x + 1 = 7$ lub $x \cdot 2 = 12$.

Popatrz, jak można ułożyć trudniejsze równanie.

- Układamy dowolne równanie, np.

$$3 \cdot x + 11 = x + \frac{1}{2} \cdot x$$

- Sprawdzamy wartość lewej i prawej strony ułożonego równania dla $x = 6$.

$$L = 3 \cdot 6 + 11 = 29$$

$$P = 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 6 + 3 = 9$$

$$L \neq P \text{ (prawa strona jest o 20 mniejsza od lewej)}$$

- Poprawiamy ułożone równanie:

$$3 \cdot x + 11 = x + \frac{1}{2} \cdot x + 20$$

- 1 Ułóż równanie, którego rozwiązaniem jest liczba 5 i w którym:

- a) występuje nawias,
- b) niewiadoma jest podniesiona do kwadratu,
- c) niewiadoma występuje co najmniej 3 razy.

- 2 Ułóż równanie, którego rozwiązaniem jest liczba 3 i w którym niewiadoma występuje:

- | | |
|------------------|-------------------------|
| a) w liczniku, | c) w podstawie potęgi, |
| b) w mianowniku, | d) w wykładniku potęgi. |

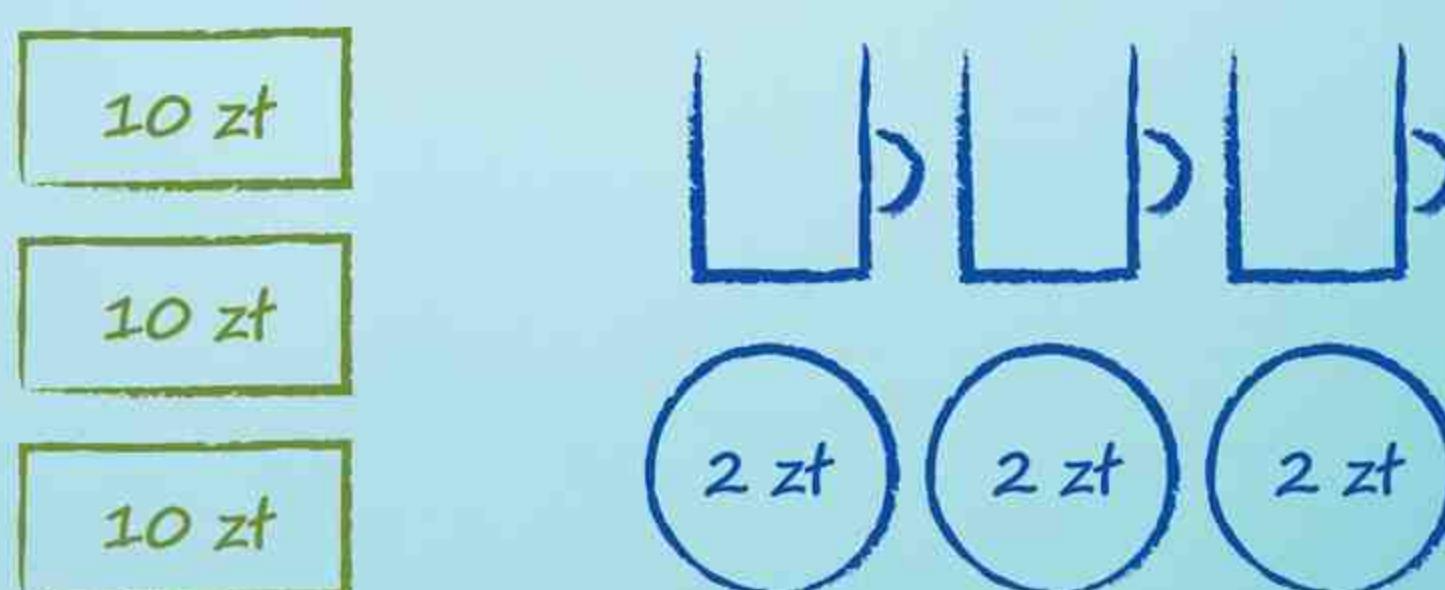


Czy już umiem?

- I Sprawdź, czy liczba 5 jest rozwiązaniem równania $2 \cdot x - 3 = x + 2$. Zapisz sprawdzenie.
- II Które z liczb: 4, 10, 100 są rozwiązaniami równania $\frac{1000}{x} + 21 = (x + 1)^2$?
- III Jedno z podanych równań nie ma rozwiązania, a jedno ma nieskończenie wiele rozwiązań. Które to równania?
 A $x + x + x = 3 \cdot x$ B $x + 3 = x - 5$
- IV Zosia w ciągu 80 minut odrobiła wszystkie zadane prace domowe. Praca domowa z matematyki zajęła jej $\frac{2}{5}$ tego czasu. Ile czasu zajęło Zosi odrobienie pracy domowej z matematyki?

Wyobraźcie sobie, że jesteście w sklepie. Można tu kupić kubki – wszystkie są w tej samej cenie.

- ▶ Przygotujcie kartkę, która będzie ladą w sklepie. Będziecie na niej rysować banknoty i kubki. Ustalcie, kto będzie klientem, a kto sprzedawcą.
- ▶ Klient dysponuje tylko banknotami 10-złotowymi.
- ▶ Sprzedawca ustala w myśli cenę kubka (nie mówi jej głośno): od 2 zł do 9 zł w pełnych złotych.
- ▶ Klient prosi o kilka kubków (np. trzy) i rysuje na kartce banknoty, którymi chce zapłacić.
- ▶ Jeśli narysowana kwota jest zbyt mała, sprzedawca mówi: „To za mało”, a klient „dokłada” (dorysowuje) kolejny banknot.
- ▶ Sprzedawca rysuje wskazaną liczbę kubków oraz resztę, którą wydaje klientowi.
- ▶ Klient zgaduje, ile kosztuje jeden kubek.
- ▶ Zamieniacie się rolami.



Pytania i polecenia

Klient poprosił o trzy kubki i wyłożył trzy banknoty 10-złotowe. Otrzymał kubki i resztę jak na ilustracji powyżej. Ile kosztuje jeden kubek?



W prostych równaniach często od razu można odgadnąć rozwiązanie. Ale jak rozwiązać trudniejsze równanie?

Pokażemy, jak rozwiązywać równania podobne do

$$5 + x = 7 \text{ czy } 3 \cdot x - 1 = 2 \cdot x + 1.$$

Każde równanie ma dwie strony, które muszą być równe.

Przypomina to nieco sytuację ze sklepu. Produkty wyłożone przez sprzedawcę mają łącznie z resztą tę samą wartość co pieniądze wyłożone przez klienta. Na rysunku obok 3 kubki i 5 zł reszty są warte tyle, co 20 zł. Jeśli cenę kubka oznaczmy przez x , to możemy zapisać:

$$3 \cdot x + 5 = 20$$



Rozwiązując równanie, możemy je zmieniać (przekształcać), ale tylko tak, aby obie strony były cały czas równe. Możemy:

- do obu stron równania dodać tę samą liczbę lub od obu stron równania odjąć tę samą liczbę.

Na przykład:

$$3 \cdot x + 5 = 20$$

$$3 \cdot x + 5 - 5 = 20 - 5$$

$$3 \cdot x = 15$$

Jeśli i klient, i sprzedawca zabiorą po 5 zł, to nadal „wartość” prawej i lewej strony lady będzie taka sama.



Możemy również:

- obie strony równania pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę różną od 0.

Na przykład:

$$3 \cdot x = 15$$

$$3 \cdot x : 3 = 15 : 3$$

$$x = 5$$

Trzy kubki kosztują 15 zł, więc jeden kubek kosztuje 5 zł.



Przykład 1

Rozwiąż podane równanie.

poziom A

$$x - 7 = 11$$

Chcemy, żeby z lewej strony równania został tylko x .

$$x - 7 = 11 \quad | \text{ Dodajemy 7 do lewej i do prawej strony równania.}$$

$$x - 7 + 7 = 11 + 7$$

$$\underline{x = 18}$$

Sprawdzenie:

$$L = x - 7 = 18 - 7 = 11$$

$$P = 11$$

$$L = P$$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba 18.

poziom B

$$3 \cdot x = 15$$

Po lewej stronie równania występuje $3 \cdot x$, a chcemy obliczyć x .

$$3 \cdot x = 15 \quad | \text{ Dzielimy lewą i prawą stronę równania przez 3.}$$

$$\frac{3^1 \cdot x}{3_1} = \frac{15^5}{3_1}$$

$$\underline{x = 5}$$

Sprawdzenie:

$$L = 3 \cdot x = 3 \cdot 5 = 15$$

$$P = 15$$

$$L = P$$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba 5.

Dobra rada

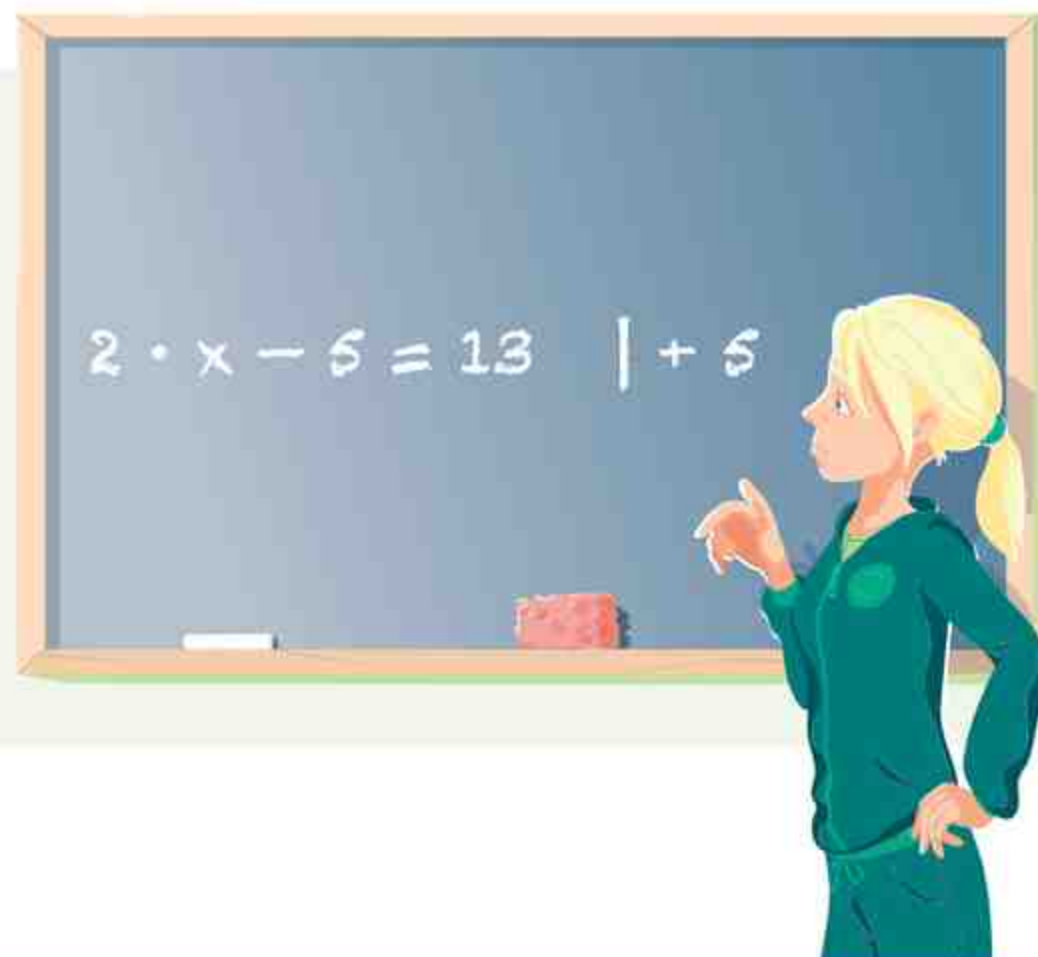
Zamiast pisać:

$$2 \cdot x - 5 = 13$$

| Do obu stron
równania dodaję 5.

możesz skorzystać z symbolu:

$$2 \cdot x - 5 = 13 \quad | +5$$



poziom C

$$-8 \cdot a + 3 = -1$$

Najpierw pozbędziemy się liczby 3 z lewej strony równania, aby zostały tam tylko wyrażenia z niewiadomą, tak jak w poziomie B.

$$-8 \cdot a + 3 = -1 \quad | -3 \quad \text{Od obu stron równania odejmujemy 3.}$$

$$-8 \cdot a + 3 - 3 = -1 - 3$$

równanie takiego rodzaju jak w poziomie B

$$-8 \cdot a = -4 \quad | :(-8) \quad \text{Obie strony równania dzielimy przez } (-8).$$

$$\frac{-8^1 \cdot a}{-8_1} = \frac{-4^1}{-8_2}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Sprawdzenie:

$$L = -8 \cdot a + 3 = -8 \cdot \frac{1}{2} + 3 = -4 + 3 = -1 \quad P = -1 \quad L = P$$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba $\frac{1}{2}$.



Zadania



1 Rozwiąż równanie i sprawdź rozwiązanie. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne równania z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

a) $x - 5 = 4$

d) $m - 4 = 8$

g) $x - 2 = 8$

j) $s - 9 = 6$

b) $a - 2 = 11$

e) $x + 7 = 11$

h) $c - 10 = 13$

k) $7 + x = 15$

c) $5 + x = 76$

f) $y + 4 = 9$

i) $x + 7 = 9$

l) $k + 3 = 7$

poziom B

a) $8 \cdot x = 24$

d) $m \cdot 4 = 8$

g) $x \cdot 2 = 8$

j) $s \cdot 9 = 36$

b) $a \cdot 2 = 11$

e) $x \cdot 7 = 21$

h) $10 \cdot t = 130$

k) $6 \cdot x = 54$

c) $5 \cdot x = 25$

f) $3 \cdot f = 9$

i) $15 \cdot x = 90$

l) $k \cdot 3 = 27$

poziom C

a) $2 \cdot x + 5 = -3$

d) $2 \cdot m - 4 = 8$

g) $3 \cdot x + 2 = -19$

j) $5 \cdot s - 9 = -6$

b) $-7 \cdot a - 3 = 11$

e) $8 \cdot x + 7 = 15$

h) $6 \cdot c - 10 = 14$

k) $7 - 2 \cdot x = 15$

c) $5 + 6 \cdot x = 23$

f) $-4 \cdot h + 5 = 29$

i) $8 \cdot x + 3 = 43$

l) $6 \cdot k + 3 = 33$

MISTRZ

a) $7 \cdot x - 5 = 4$

d) $3 \cdot m - 4 = 18$

b) $2 \cdot a - 0,2 = 11$

e) $0,1 \cdot x + 7 = 11$

c) $\frac{3}{5} + 6 \cdot x = 7,6$

f) $\frac{1}{3} \cdot y + 4 = 9$

- **2** Rozwiąż równania. Ustaw je w kolejności od najmniejszego do największego rozwiązania. Litery odpowiadające równaniom utworzą hasło.

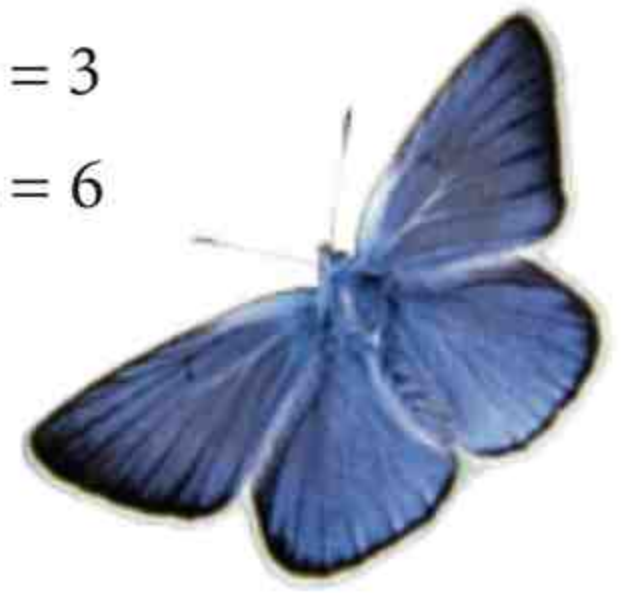
O $5 - x = 4$

Y $4 \cdot x - 7 = 13$

$$Mx + 5 = 2$$

L $x : 3 = 3$

T $x \cdot 2 = 6$



- **3** Ułóż równanie, którego rozwiązaniem jest liczba 3. Rozwiąż to równanie.

- **4** Wybierz z chmurki równanie, które umiesz rozwiązać. Rozwiąż je i sprawdź, czy liczba, która jest jego rozwiązaniem, spełnia również pozostałe równania.

$$(5 + x) \cdot (x - 2) : 10 = 6$$

$$2 \cdot x - 8 = 6$$

$$4 \cdot x - 9 = 19$$

$$9 \cdot x - 20 = 6 \cdot x + 1$$

- **5** Janek rozwiązywał zadanie. Przepisz i rozwiąż równanie. Sprawdź rozwiązanie z treścią zadania.

Mama jest trzy razy starsza od Janka, a dziadek o 31 lat starszy od mamy. Ile lat ma Janek, jeśli dziadek obchodzi właśnie siedemdziesiąte urodziny?

$x \rightarrow$ wiek Janka

$3 \cdot x \rightarrow$ wiek mamy

$3 \cdot x + 31 \rightarrow$ wiek dziadka

$3 \cdot x + 31 = 70$

- ... **6** Spośród podanych sześciu równań wybierz te trzy, które możesz rozwiązać poznaną metodą, i je rozwiąż. Otrzymasz trzy różne rozwiązania. Sprawdź, które z nich są również rozwiązaniami pozostałych równań.

I $4 \cdot x = 12$

III $2 \cdot x^2 + 6 = 8 \cdot x$

$$\text{V } 2 \cdot x + 3 = 3$$

II $5 \cdot x + 2 = 7$

IV $x^3 + 3 \cdot x = 4 \cdot x^2$

VI $(x-2) \cdot (x+2) + 4 = 6 \cdot x$

- 7 Przyjrzyj się podanym dwóm równaniom. Jak trzeba przekształcić pierwsze z nich, aby otrzymać drugie?

a) $49 \cdot x + 14 = 280$

b) $1,5 \cdot x + 7 = 5,5$

c) $0,8 \cdot x + 5 = 1,8$

$$7 \cdot x + 2 = 40$$

$$3 \cdot x + 14 = 11$$

$$8 \cdot x + 50 = 18$$



Dla dociekliwych

Przyjrzyj się równaniu: $4 \cdot (z + 1) - 7 = 33$.

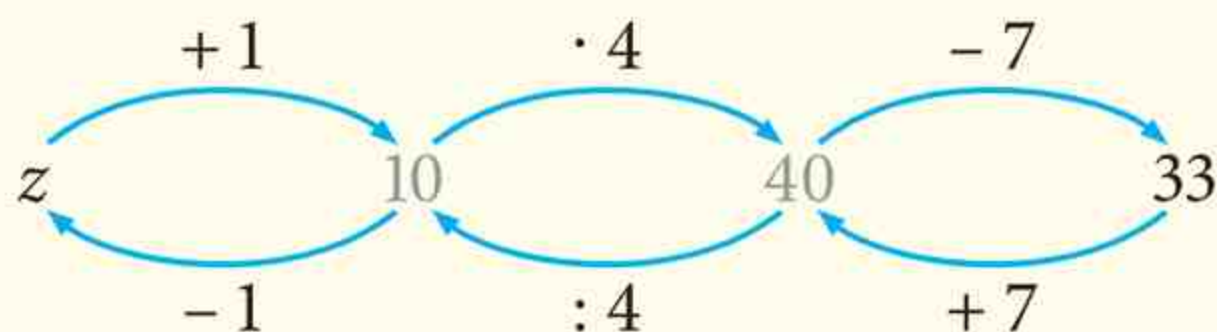
Jest dość skomplikowane, ale niewiadoma występuje w nim tylko w jednym miejscu. Takie równanie można rozwiązywać sposobem przedstawionym na rysunku. Wystarczy pamiętać o kolejności wykonywania działań.

$$4 \cdot (z + 1) - 7 = 33$$

$$4 \cdot (z + 1) = 40$$

$$z + 1 = 10$$

$$z = 9$$



Sprawdzenie: $4 \cdot (9 + 1) - 7 = 4 \cdot 10 - 7 = 33$

1 Rozwiąż równanie podanym wyżej sposobem.

a) $4 \cdot (y - 2) + 4 = 52$

c) $[12 \cdot (a : 2 - 3) : 6 + 1] \cdot 3 - 2 = 13$

b) $(2 \cdot y + 1) \cdot 5 = 35$

d) $\left(\frac{c-3}{8} \cdot 5 - 9\right) \cdot 6 + 14 = 20$

2 Zapisz zagadkę w postaci równania, rozwiąż je i sprawdź wynik.

Mateusz pomyślał o pewnej liczbie. Dodał do niej 8, wynik pomnożył przez 3, potem odjął 1 i otrzymał 62. O jakiej liczbie pomyślał Mateusz?



Czy już umiem?

I Rozwiąż równanie i sprawdź rozwiązanie: $7 \cdot x = 35$.

II Rozwiąż równanie i sprawdź rozwiązanie: $4 \cdot x - 5 = 19$.

III Rozwiąż równania. Ustaw je w kolejności od najmniejszego do największego rozwiązania. Litery odpowiadające równaniom utworzą hasło. Podaj jego różne znaczenia.

W $20 - x = 13$

T $3 \cdot x - 2 = 13$

Y $4 \cdot x + 2 = 26$

O $6 \cdot x - 10 = 8$

M $8 + 2 \cdot x = 12$

IV Robert zbiera modele samochodów. W swojej kolekcji ma 21 modeli samochodów przedwojennych, co stanowi $\frac{3}{7}$ wszystkich jego modeli. Ile modeli samochodów posiada w sumie Robert?



Pytania i polecenia

Powyżej pokazano zawartość dwóch portfeli. W każdym z nich są złotówki, dolary amerykańskie i jeny japońskie.

- Ile złotych, ile dolarów i ile jenów jest w każdym portfelu z osobna, a ile w obu portfelach łącznie?
- Dolary oznacza się symbolem \$, a jeny – symbolem ¥.
Uprość wyrażenie:

$$3000 \text{ ¥} + 1 \$ + 10 \text{ zł} + 20 \$ + 20 \text{ zł} + 1000 \text{ ¥}$$

Upraszczanie równań

Przyjrzyj się równaniu:

$$3 \cdot x + 1 + 2 \cdot x + 4 = 20$$

Zauważ, że jego lewa strona to suma czterech składników. W równaniach nazywamy je **wyrazami**. Niektóre z nich zawierają **niewiadomą**.

$$3 \cdot x + 1 + 2 \cdot x + 4 = 20$$

Nasze równanie jest dość skomplikowane, dlatego postaramy się je uprościć.

$$3 \cdot x + 1 + 2 \cdot x + 4 = 20$$

$$5 \cdot x + 5 = 20$$



Aby uprościć równanie, możemy:

- dodać lub odjąć liczby, które występują po jednej stronie równania:

$$3 \cdot x + \underbrace{1}_{+1} + 2 \cdot x + \underbrace{4}_{+4} = 20$$

$$3 \cdot x + 2 \cdot x + 5 = 20$$

- dodać lub odjąć te składniki (wyrazy), które znajdują się po tej samej stronie równania i w których występuje identyczna niewiadoma:

$$\underbrace{3 \cdot x + 2 \cdot x}_{+5x} + 5 = 20$$

$$5 \cdot x + 5 = 20$$



$$3 \cdot x + 2 \cdot x \quad \text{to razem} \quad 5 \cdot x$$

Zapamiętaj

Znak + lub – jest związany z wyrazem, przed którym stoi:

$$3 \cdot x - \underbrace{1}_{-1} + \underbrace{5}_{+5} = 10$$

$$3 \cdot x + 4 = 10$$

$$\underbrace{5 \cdot x}_{+5x} + 7 - \underbrace{2 \cdot x}_{-2x} = 22$$

$$3 \cdot x + 7 = 22$$

► Dodawanie do obu stron równania lub odejmowanie od obu jego stron

Wiesz już, że można dodać tę samą liczbę do obu stron równania lub odjąć tę samą liczbę od obu jego stron. Można tak postąpić nie tylko z liczbami. Do obu stron równania można również dodać (lub od nich odjąć) ten sam wyraz, np. x , $2 \cdot x$, $x \cdot \frac{1}{7}$ lub $x : 2$.



Przed dołożeniem czerwonych kubków: $3 \cdot x + 8 = 20$

$+ 2 \cdot x$ (do obu stron
dodajemy $2 \cdot x$)

Po dołożeniu czerwonych kubków: $3 \cdot x + 8 + 2 \cdot x = 20 + 2 \cdot x$

Przykład 1

Rozwiąż podane równanie.

poziom A

$$5 \cdot x + 4 - 2 \cdot x = 13$$

Upraszczamy:

$$5 \cdot x + 4 - 2 \cdot x = 13$$

$$3 \cdot x + 4 = 13 \quad | -4$$

$$3 \cdot x + 4 - 4 = 13 - 4$$

$$3 \cdot x = 9 \quad | :3$$

$$x = 3$$

Sprawdzenie:

$$L = 5 \cdot 3 + 4 - 2 \cdot 3 = 15 + 4 - 6 = 13$$

$$P = 13$$

$$L = P$$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba 3.

Dobra rada

Wyrazy, które będziemy dodawać, warto podkreślić w ten sam sposób.

poziom B

$$5 \cdot x = 7 - 2 \cdot x$$

Niewiadome chcemy mieć tylko po jednej stronie równania. Wtedy rozwiążemy je podobnie jak równanie w poziomie A. Trzeba więc „usunąć” z prawej strony równania wyraz $-2 \cdot x$. Jak to zrobić? Do obu stron równania trzeba dodać $2 \cdot x$.

$$5 \cdot x = 7 - 2 \cdot x \quad | +2 \cdot x$$

$$\underbrace{5 \cdot x + 2 \cdot x}_{7 \cdot x} = 7 \underbrace{- 2 \cdot x + 2 \cdot x}_0$$

$$7 \cdot x = 7 \quad | :7$$

$$x = 1$$

Sprawdzenie:

$$L = 5 \cdot 1 = 5$$

$$P = 7 - 2 \cdot 1 = 7 - 2 = 5$$

$$L = P$$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba 1.

poziom C

$$6 \cdot x - 2 = 8 \cdot x + 12$$

Przekształcamy równanie tak, aby wyrazy z niewiadomą były po jednej stronie, a liczby po drugiej.

$$6 \cdot x - 2 = 8 \cdot x + 12 \quad | -8 \cdot x$$

$$6 \cdot x - 2 - 8 \cdot x = 8 \cdot x + 12 - 8 \cdot x$$

$$-2 \cdot x - 2 = 12 \quad | +2$$

$$-2 \cdot x - 2 + 2 = 12 + 2$$

$$-2 \cdot x = 14 \quad | :(-2)$$

$$x = -7$$

Sprawdzenie:

$$L = 6 \cdot (-7) - 2 = -42 - 2 = -44$$

$$P = 8 \cdot (-7) + 12 = -56 + 12 = -44$$

$$L = P$$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba -7 .

Dobra rada

Gdy chcesz pozbyć się wybranego wyrazu z jednej ze stron równania, możesz go odjąć od obu stron. Tę czynność możemy też opisać jako „przenoszenie na drugą stronę ze zmienionym znakiem”.

$$7 \cdot x - 1 = 2 \cdot x + 14 \quad | -2 \cdot x$$

$$7 \cdot x - 1 - 2 \cdot x = 2 \cdot x + 14 - 2 \cdot x$$

$$7 \cdot x - 1 - 2 \cdot x = 14$$

Od obu stron odejmujemy $2 \cdot x$.

$$7 \cdot x - 1 = 2 \cdot x + 14$$

$$7 \cdot x - 1 - 2 \cdot x = 14$$

Przenosimy $2 \cdot x$ na drugą stronę i zmieniamy znak.

poziom D

$$2 \cdot x - 8 - 5 \cdot x + 6 = 5 + 4 \cdot x + 7$$

Przekształcamy równanie tak, aby wyrazy z niewiadomą były po jednej stronie, a liczby po drugiej.

$$2 \cdot x - 8 - 5 \cdot x + 6 = 5 + 4 \cdot x + 7 \quad \text{Porządkujemy wyrazy z } x \text{ po lewej stronie równania.}$$

$$-3 \cdot x - 8 + 6 = 5 + 4 \cdot x + 7$$

Porządkujemy liczby po lewej i prawej stronie równania.

$$-3 \cdot x - 2 = 4 \cdot x + 12 \quad | -4 \cdot x$$

$$-3 \cdot x - 2 - 4 \cdot x = 4 \cdot x + 12 - 4 \cdot x$$

$$-7 \cdot x - 2 = 12 \quad | +2$$

$$-7 \cdot x - 2 + 2 = 12 + 2$$

$$-7 \cdot x = 14 \quad | :(-7)$$

$$x = -2$$

Sprawdzenie:

$$L = 2 \cdot (-2) - 8 - 5 \cdot (-2) + 6 = -4 - 8 + 10 + 6 = -12 + 10 + 6 = -2 + 6 = 4$$

$$P = 5 + 4 \cdot (-2) + 7 = 5 - 8 + 7 = -3 + 7 = 4$$

$$L = P$$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba -2 .

Zapamiętaj

$1 \cdot x$ to inaczej x

$-1 \cdot x$ to inaczej $-x$

 Zadania

-  **1** Rozwiąż równanie i sprawdź rozwiązanie. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne równania z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $4 \cdot x - 3 + 5 \cdot x = 15$ | e) $2 \cdot x - 3 + x = 9$ |
| b) $5 \cdot x + 7 - 3 \cdot x = 13$ | f) $3 \cdot x - 5 - x = 11$ |
| c) $7 \cdot x - 2 - 6 \cdot x = 5$ | g) $x - 5 + 6 \cdot x = 16$ |
| d) $6 \cdot x - 4 + 4 \cdot x = 56$ | h) $3 \cdot x - 4 - 2 \cdot x = 16$ |

poziom B

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $6 \cdot x = 2 \cdot x - 8$ | e) $9 \cdot x = 3 \cdot x + 12$ |
| b) $8 \cdot x = 9 + 5 \cdot x$ | f) $10 \cdot x = 4 \cdot x - 6$ |
| c) $7 \cdot x = 2 \cdot x - 20$ | g) $3 \cdot x = 9 - 6 \cdot x$ |
| d) $2 \cdot x = 12 - 2 \cdot x$ | h) $5 \cdot x = 4 \cdot x + 4$ |

poziom C

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $8 - 3 \cdot x = 6 \cdot x - 10$ | e) $9 \cdot x - 7 = 3 \cdot x + 5$ |
| b) $7 \cdot x - 4 = 9 + 8 \cdot x$ | f) $3 - 10 \cdot x = 9 - 4 \cdot x$ |
| c) $-5 + 7 \cdot x = 2 \cdot x - 20$ | g) $5 - 2 \cdot x = 9 - 6 \cdot x$ |
| d) $8 - 2 \cdot x = -4 + 2 \cdot x$ | h) $-6 + 4 \cdot x = 5 \cdot x + 4$ |

poziom D

- | |
|---|
| a) $5 \cdot x - 3 + 2 \cdot x = 4 \cdot x + 9$ |
| b) $8 \cdot x - 6 - 9 \cdot x = 5 \cdot x - 6$ |
| c) $2 + 4 \cdot x - 1 + 2 \cdot x = -8 + 4 \cdot x - 7$ |
| d) $-3 + 7 \cdot x - 2 = 3 \cdot x - 11 + 6 \cdot x$ |
| e) $4 + 5 \cdot x - 2 = 7 \cdot x - 7$ |
| f) $-8 + 7 \cdot x + 3 = 5 \cdot x + 4 + 4 \cdot x + 5$ |

MISTRZ

- | |
|---|
| a) $5 \cdot x + 3 - x = 14$ |
| b) $3 \cdot x - 7 + 5 \cdot x = 2 + 10 \cdot x$ |
| c) $x + 2 \cdot x + 3 \cdot x + \dots + 15 \cdot x - 3 = 9$ |

- **2** Rozwiąż równania. Znajdź ich rozwiązania w chmurce. Zapisz litery odpowiadające rozwiązaniom kolejnych równań, a otrzymasz hasło.

- I $4 \cdot x = 12$
 II $11 \cdot x + 9 = 8 \cdot x + 15$
 III $9 \cdot x - 6 = 7 \cdot x + 4$
 IV $5 \cdot x - 3 = 3 \cdot x + 11$

5 **A** 7 **B**
 3 **G** 2 **R**



Dla dociekliwych

$$3 \cdot x + 1 = 10$$

$$3 \cdot x + 1 = 10 \quad | \cdot 2$$

$$2 \cdot (3 \cdot x + 1) = 10 \cdot 2$$

lub inaczej (bez nawiasów)

$$6 \cdot x + 2 = 20$$

$$2 \cdot (3 \cdot x + 1) = 20$$



$$2 \cdot 3 \cdot x + 2 \cdot 1 = 20$$

$$6 \cdot x + 2 = 20$$

To równanie może opisywać sytuację, gdy klient płaci 10 zł i otrzymuje 3 kubki po x złotych i 1 zł reszty.

Wyobraź sobie, że klient podał kolejne 10 zł i poprosił o jeszcze jeden taki komplet.

Jak opisać, co dostaje klient?

Dwa komplety po 3 kubki i po złotówce reszty do każdego kompletu
lub inaczej 6 kubków i 2 zł reszty.

Mnożenie liczby przez wyrażenie w nawiasie (czyli opuszczanie nawiasu) wykonujemy tak: każdy wyraz w nawiasie mnożymy przez tę liczbę.

- 1** Opuść nawiasy w równaniu. Które z równań podanych w chmurce powstało w ten sposób?

a) $3 \cdot (x - 6) = 12$

b) $3 \cdot (x - 2) = 12$

c) $3 \cdot (2 \cdot x - 6) = 12$

$$6 \cdot x - 18 = 12$$

$$3 \cdot x - 18 = 12$$

$$3 \cdot x - 6 = 12$$

$$6 \cdot x - 6 = 12$$

- 2** Rozwiąż równanie i sprawdź rozwiązanie.

a) $2 \cdot (x - 5) = 14$

b) $3 \cdot (4 \cdot x - 5) = 9$

c) $8 \cdot (x - 5) = 2 \cdot (3 \cdot x + 4) - 14$

d) $3 \cdot x + 2 \cdot (3 \cdot x - 4) = 17$



Czy już umiem?

I Rozwiąż równanie: $5 \cdot x - 4 = 2 \cdot x + 8$.

II Rozwiąż równanie: $2 \cdot x + 5 \cdot x - 3 = 4 \cdot x + 2 - x + 3$.

III Wśród równań A–D wskaż wszystkie, które można otrzymać w wyniku przekształcenia równania $2 \cdot x + x + 3 = 4 \cdot x + 5 + 1$.

A $3 \cdot x + 3 = 4 \cdot x + 5 + 1$

C $2 \cdot x + x + 3 = 4 \cdot x + 6$

B $6 \cdot x = 4 \cdot x + 6$

D $2 \cdot x + x = 4 \cdot x + 5 + 1 - 3$

IV Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach 5 cm, 7 cm i 12 cm.



W starym domu znaleziono listy i fotografie sprzed lat. Na zdjęciu widać podpis na odwrocie jednej z fotografii. Zabawcie się w zgadywanie, ile lat mogły mieć osoby ze zdjęcia.

- ▶ Dobierzcie się w grupy po trzy lub cztery osoby.
- ▶ Ustalcie, kto z was będzie Dariuszem, kto Edwardem, a kto Piotrem. W grupie czteroosobowej czwarta osoba będzie Bartoszem.
- ▶ Dariusz wymyśla swój wiek (między 10 a 20 lat) i podaje go na głos.
- ▶ Pozostali (w dowolnej kolejności) obliczają swój wiek zgodnie z informacją na fotografii. Wspólnie sprawdzacie, czy obliczenia są poprawne.

*Moi synowie:
Piotr jest o 3 lata starszy
od Dariusza, a Edward
o 5 lat młodszy od Dariusza.
Dariusz jest o 4 lata starszy
od Bartosza.*

Pytania i polecenia

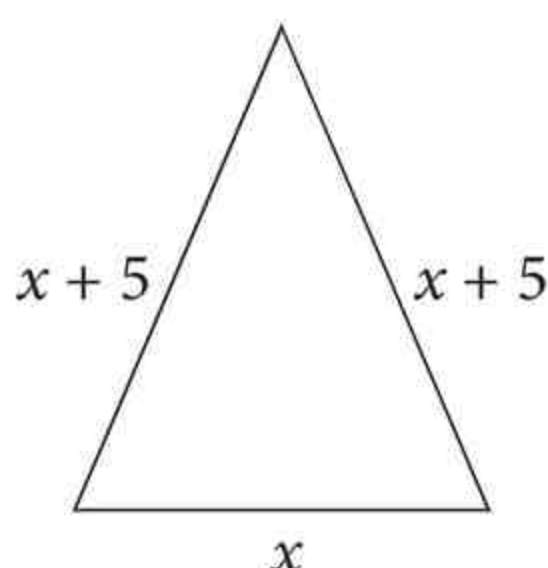
Ile lat mieli pozostali bracia, jeżeli Dariusz miał 15 lat?

Wiele zadań tekstowych można rozwiązać za pomocą równań. W tym temacie zajmiemy się tylko tą metodą. Pamiętaj jednak, że są także zadania, które łatwiej rozwiązać innymi metodami.

Przykład 1

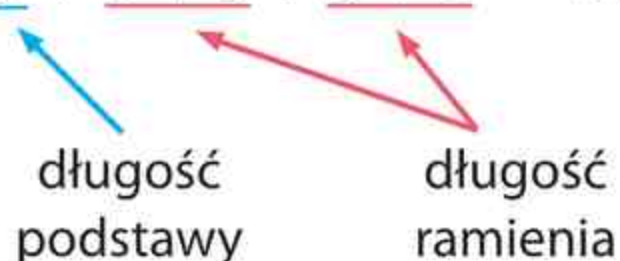
W trójkącie równoramiennym ramię jest o 5 cm dłuższe od podstawy. Obwód tego trójkąta jest równy 16 cm. Oblicz długość podstawy.

$x \rightarrow$ długość podstawy



$x + 5 \rightarrow$ długość ramienia

$x + x + 5 + x + 5 \rightarrow$ obwód



$$x + x + 5 + x + 5 = 16$$

$$3 \cdot x + 10 = 16 \quad | -10$$

$$3 \cdot x = 6 \quad | :3$$

$$x = 2$$

Podstawa: 2 cm

Ramię: $2 + 5 = 7$ [cm]

Obwód: $2 + 7 + 7 = 16$ [cm]

Zgadza się!

Odp. Podstawa ma 2 cm.

1. Zapisujesz, co oznacza niewiadoma. Możesz zrobić schematyczny rysunek.

2. Opisujesz kolejne kroki prowadzące do ułożenia równania.

3. Zapisujesz równanie.

4. Rozwiązujesz równanie.

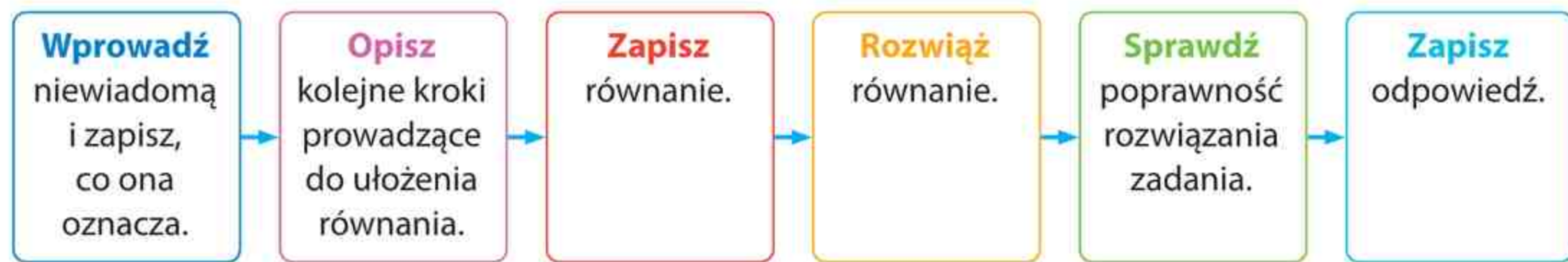
5. Jeszcze raz przeczytaj treść zadania. Sprawdzasz, czy otrzymane rozwiązanie równania zgadza się ze wszystkimi warunkami i informacjami podanymi w zadaniu.

6. Zapisujesz odpowiedź.

Sprawdzenie rozwiązania zadania nie polega na sprawdzeniu równania! Mogło się zdarzyć, że równanie zostało źle ułożone. Dlatego czytamy jeszcze raz całe zadanie i sprawdzamy, czy nasze rozwiązanie zgadza się ze wszystkimi wielkościami lub zależnościami podanymi w zadaniu.

Jak rozwiązujemy zadanie tekstowe

Sposób rozwiązywania zadania tekstowego możemy przedstawić na schemacie.



Przykład 2

Tomek, Grześ i Marek zerwali z drzewa 45 śliwek. Tomek stwierdził: „Mam o 15 śliwek więcej od Grzesia”, a Marek: „Mam cztery razy więcej śliwek niż Grześ”. Kto zerwał więcej śliwek: Tomek czy Marek?

$g \rightarrow$ tyle śliwek zebrał Grześ

$g + 15 \rightarrow$ tyle śliwek zebrał Tomek

$4 \cdot g \rightarrow$ tyle śliwek zebrał Marek

$g + g + 15 + 4 \cdot g \rightarrow$ tyle śliwek
zebrali razem

$$g + g + 15 + 4 \cdot g = 45$$

$$6 \cdot g + 15 = 45 \quad | -15$$

$$6 \cdot g = 30 \quad | :6$$

$$g = 5$$

Grześ: 5 śliwek

Tomek: $5 + 15 = 20$ śliwek

Marek: $4 \cdot 5 = 20$ śliwek

Razem: $5 + 20 + 20 = 45$

Zgadza się!

Odp. Tomek i Marek zebrali
po tyle samo śliwek.

1. Zapisujesz, co oznacza niewiadoma. Ponieważ Tomek i Marek porównują swoje zbiory ze zbiorami Grzesia, najwygodniej wybrać jako niewiadomą liczbę śliwek zebranych przez Grzesia.

2. Opisujesz kolejne kroki.

3. Zapisujesz równanie.

4. Rozwiązujesz równanie.

5. Jeszcze raz przeczytaj treść zadania. Sprawdzasz, czy otrzymane rozwiązanie równania zgadza się ze wszystkimi warunkami i informacjami podanymi w zadaniu. Zauważ, że w pytaniu nie chodzi o to, ile śliwek zebrał Grześ, ale kto zebrał więcej.

6. Zapisujesz odpowiedź.

► Co to jest wyrażenie algebraiczne?

W przykładzie 2, zanim ułożyliśmy równanie, zapisaliśmy kolejne kroki rozumowania za pomocą niewiadomej. W ten sposób pojawiają się wyrażenia algebraiczne.

W przykładzie 2 były to:

$$g \qquad g + 15 \qquad 4 \cdot g \qquad g + g + 15 + 4 \cdot g$$

W wyrażeniach algebraicznych występują liczby i niewiadome (a w najprostszych wyrażeniach – same liczby albo same niewiadome).

Zauważ, że każda ze stron równania jest wyrażeniem algebraicznym.



Zadania

• 1 Przeczytaj zadanie.

Piotr i Paweł mają razem 300 znaczków. Piotr ma 5 razy więcej znaczków niż Paweł. Ile znaczków ma Paweł?

a) Sprawdź, czy poprawna jest odpowiedź:

Paweł ma 60 znaczków.

W tym celu wykonaj kolejne polecenia.

- Zapisz, że Paweł ma 60 znaczków.
- Oblicz, ile znaczków ma Piotr.
- Oblicz, ile znaczków mają razem.
- Sprawdź, czy otrzymany wynik jest zgodny z treścią zadania.



b) Sprawdź, czy poprawna jest odpowiedź:

Paweł ma 50 znaczków.

• 2 Przeczytaj zadanie.

Lasse, Bosse i Olle zebrali razem 250 orzechów. Lasse zebrał dwa razy więcej orzechów niż Bosse i o 50 orzechów więcej niż Olle. Ile orzechów zebrał Lasse?

Sprawdź, która odpowiedź jest poprawna.

- A. Lasse zebrał 80 orzechów.
- B. Lasse zebrał 100 orzechów.
- C. Lasse zebrał 120 orzechów.
- D. Lasse zebrał 150 orzechów.

- **3** Przeczytaj zadanie.

Po podwórku biegają króliki i paw. Zwierzęta mają razem 18 nóg. Ile jest królików?

Wykonaj kolejne polecenia.

- Przyjmij jako niewiadomą liczbę królików.
- Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego (czyli używając niewiadomej), ile nóg mają wszystkie króliki razem.
- Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile nóg mają zwierzęta na podwórku.
- Ułóż równanie i je rozwiąż.
- Zrób sprawdzenie (sprawdź, czy odpowiedź zgadza się z informacjami podanymi w zadaniu).
- Zapisz odpowiedź.

Uwaga. Zadania 4–12 rozwiąż za pomocą równań.

- **4** Piotr i Paweł mają razem 300 znaczków. Piotr ma 5 razy więcej znaczków niż Paweł. Ile znaczków ma Paweł?

Aby rozwiązać zadanie, wykonaj kolejne polecenia.

- Oznacz przez x liczbę znaczków Pawła.
- Zapisz za pomocą x , jak obliczyć liczbę znaczków Piotra.
- Zapisz za pomocą x , jak obliczyć, ile znaczków mają razem.
- Ułóż i rozwiąż równanie.
- Zrób sprawdzenie, czyli sprawdź, czy odpowiedź zgadza się z informacjami podanymi w zadaniu (osoby, które wcześniej rozwiązały zadanie 1, mogą ten punkt opuścić).
- Zapisz odpowiedź.

- **5** Tereska i Julka upiekły razem 100 pierniczków. Tereska upiekła o 20 pierniczków więcej niż Julka. Ile pierniczków upiekła Julka?

Wskazówka Oznacz jako niewiadomą liczbę pierniczków zrobionych przez Julkę.

- **6** Ala i Zojka upiekły razem 100 pierniczków. Ala upiekła 4 razy więcej pierniczków niż Zojka. Ile pierniczków upiekła Zojka?

- **7** W prostokącie o obwodzie 50 cm jeden bok jest o 3 cm dłuższy od drugiego. Oblicz długość krótszego boku.

- **8** W trójkącie równoramiennym ramię jest 3 razy dłuższe od podstawy. Oblicz długość podstawy, wiedząc, że obwód tego trójkąta jest równy 35 cm.

- **9** Tomek jest trzy razy starszy od Krzysia. Razem mają 20 lat. Ile lat ma Tomek, a ile Krzys?
- **10** Mama jest trzy razy starsza od Zosi, a tata o 4 lata starszy od mamy. Ile lat ma Zosia, jeśli jej tata obchodził właśnie czterdzieste urodziny?
- **11** Joasia, Zosia i Marysia od 3 tygodni hodują rybki. Joasia ma dwa razy więcej rybek niż Zosia, a Marysia o 4 mniej od Joasi, czyli 18 rybek. Ile rybek ma Zosia?
-  **12** W teatrze jest 360 miejsc. Na parterze jest 20 rzędów, a na balkonie 12 rzędów. Rzędy na balkonie są o 2 miejsca krótsze niż rzędy na parterze. Po ile miejsc mają rzędy na parterze?



Dla dociekliwych

1 Przeczytaj zadanie.

Mama jest 3 razy starsza od Asi. 5 lat temu była od niej aż 5 razy starsza. Ile razy starsza będzie za 10 lat?

Wykonaj kolejne polecenia.

- Przerysuj do zeszytu tabelę.

	5 lat temu	Dzisiaj	Za 10 lat
Asia			
Mama			

- Wiek Asi dzisiaj oznacz literą x . Wpisz tę literę w odpowiednie pole tabeli.
- Za pomocą wyrażenia algebraicznego (z niewiadomą x) można zapisać wiek Asi 5 lat temu i wiek mamy dzisiaj. Zapisz te wyrażenia w odpowiednich polach tabeli.
- Wiek mamy 5 lat temu można zapisać na dwa sposoby: korzystając z wieku Asi 5 lat temu i korzystając z wieku mamy dzisiaj. Zapisz oba powstałe wyrażenia.
- Te wyrażenia są równe, ponieważ za każdym razem zapisywaliśmy wiek mamy 5 lat temu. Możesz więc zapisać równanie. Rozwiąż je i oblicz x .
- Co jeszcze zostało do obliczenia? Dokończ rozwiązanie zadania i zapisz odpowiedź.

- 2 Rozwiąż zadanie. Możesz pomóc sobie tabelą podobną jak w zadaniu 1.
- Jarek jest o 30 lat młodszy od swojego taty. Za 5 lat będzie od niego 3 razy młodszy. Ile lat ma Jarek?
 - Kamil jest o 4 lata starszy od swojego brata. Brat jest 3 razy młodszy od Kamila. Ile lat mają w sumie?



Czy już umiem?

I Przeczytaj zadanie.

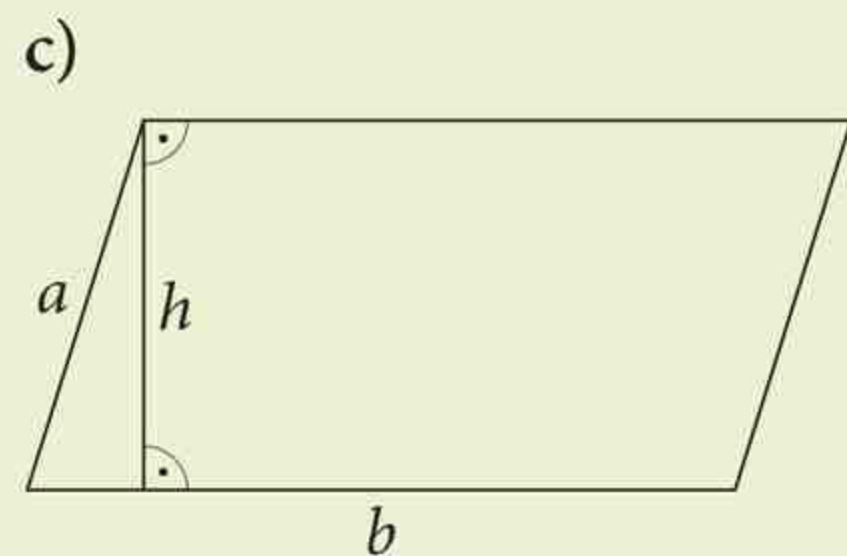
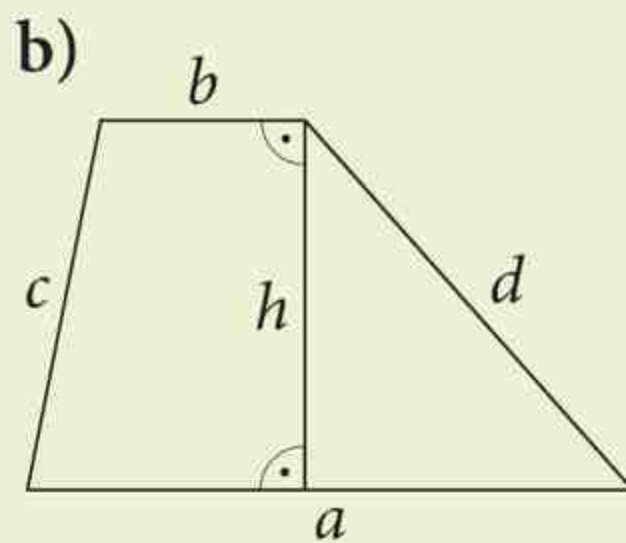
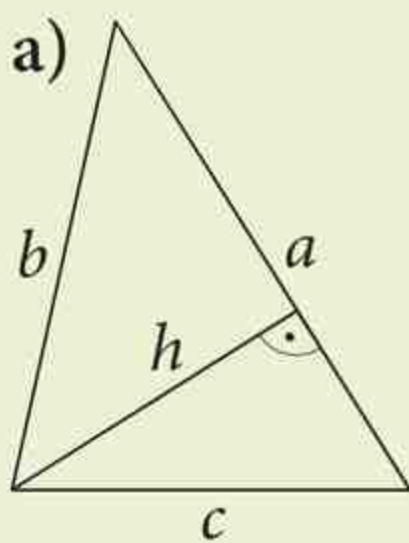
Tomek i Wojtek to bliźniacy, a Marek jest od nich o 4 lata starszy. Ile lat ma Tomek, jeśli wszyscy razem mają 43 lata?

Sprawdź, czy poprawna jest odpowiedź: Tomek ma 13 lat.

Uwaga. Zadania II i III rozwiąż za pomocą równań.

- II W prostokącie jeden bok jest trzy razy dłuższy od drugiego. Obwód tego prostokąta wynosi 100 cm. Oblicz długość krótszego boku.
- III Tomek, Marek i Wojtek zbierają znaczki. Tomek ma trzy razy więcej znaczków niż Wojtek, a Marek cztery razy więcej znaczków niż Wojtek. Razem mają 320 znaczków. Ile znaczków ma Wojtek?

IV Wskaż wzór na pole figury przedstawionej na rysunku.



A $P = \frac{a \cdot b}{2} \cdot h$

B $P = a \cdot h$

C $P = \frac{a}{2} + h$

D $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$

E $P = \frac{a}{2} : h$

F $P = \frac{a}{2} \cdot h$

G $P = b \cdot h$

H $P = \frac{a+b}{2} : h$

Uwaga. Każde zadanie tekstowe rozwiąż za pomocą równania.

- a) Ile kilometrów jest z Piasków do granicy drogą nad morzem?

Zadania na temat...

Język całego świata

Na świecie można wyróżnić około 7000 języków. Nie ma najmniejszej szansy, żeby opanować choćby co dziesiąty. Dlatego już od setek lat niektóre języki pełniły funkcję języków międzynarodowych, przynajmniej dla grupy państw które często się ze sobą kontaktują. Od dawna pojawiały się także pomysły na stworzenie języka, którym można by się porozumiewać na całym świecie. Jeden z najbardziej znanych opracował Ludwik Zamenhof, lekarz pochodzący z Białegostoku. Ten język to *esperanto*, co znaczy „mający nadzieję”.

Choć przypuszcza się, że *esperanto* zna kilka milionów ludzi na świecie, nadzieje Zamenhofa na jego powszechne użycie okazały się płonne. Funkcję języka międzynarodowego pełni, jak to już bywało, jeden z języków naturalnych – obecnie jest to angielski. Nie oznacza to, że wszędzie i z każdym porozumiemy się po angielsku.

Możemy jednak wskazać język wspólny dla całego świata. To matematyka. Gdy równość $4 + 5 = 9$ damy do przeczytania osobom różnych narodowości, usłyszymy różne dźwięki. Polak powie „cztery plus pięć równa się dziewięć”, Anglik – „four plus five equals nine”, Japończyk – „四足す五は九” (czytaj: jon tasu go ła kiuu).

Również wzory algebraiczne zapisujemy tak samo na całym świecie. Nawet osoby, które w swoim języku używają innego alfabetu, niewiadome czy długości boków figur geometrycznych oznaczają literami łacińskimi. Czy im to nie przeszkadza? Cóż, my też nie piszemy na co dzień po grecku, a jednak podpisujemy kąty literami α czy β . Ciekawostkę stanowi fakt, że w matematyce stosujemy także jedną z liter alfabetu hebrajskiego. Jest to $\aleph$ (alef), odpowiednik łacińskiego A.

- 1 Co oznaczają podane wyrażenia i zwroty?
Jeśli nie wiesz, sprawdź w słowniku.
 - a) nadzieje okazały się płonne
 - b) język naturalny
 - c) litery łacińskie
- 2 Dla kilku tysięcy osób na świecie *esperanto* jest językiem ojczystym. Jak to możliwe, skoro nie jest to język żadnego narodu?



Ludwik Zamenhof

- 3 Poniżej zapisano trzy teksty w różnych językach.

Pierwszy z nich jest w języku *punjabi* (czytaj: pundżabi), jednym z języków używanych w Indiach.

ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਘਾਤ ਦੀ ਕਾਰਵਾਈ ਨੂੰ 'b' ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਭ ਤੋਂ ਸੌਖੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ, ਸਿਰਫ ਸੰਖਿਆ 'b' ਦੀ ਖੁਦ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਨੂੰ 'n' ਵਾਰ ਦੁਹਰਾਉਣਾ ਘਾਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ: $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ । ਸੰਖਿਆ 'b' ਨੂੰ ਅਧਾਰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 'n' ਨੂੰ ਘਾਤਾਂਕ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

Drugi tekst został zapisany w języku hebrajskim, używanym w Izraelu. W tym języku pisze się od prawej do lewej strony, ale fragmenty zapisane symbolami matematycznymi – od lewej do prawej.

פתרון של משוואה הוא ערך של משתנה לא ידוע שעושה את השוויון נכון. לדוגמא, המספר 3 הוא פתרון של המשוואה $x^2 + 6 = 5x$ בגלל שמתקיים $3^2 + 6 = 5 \cdot 3$ (שני הצדדים שווים 15).
למשוואה יכול שלא להיות פתרון, מספר סופי של פתרונות או מספר אינסופי של פתרונות. לדוגמא, למשוואה $x^2 = 1$ ישנם שני פתרונות: 1 וגם -1 ולמשוואה $x^2 = 0$ יש רק פתרון אחד $x = 0$.

Ostatni tekst został zapisany w języku ukraińskim.

Правильний кут має міру 90° . Цей кут між двома перпендикулярними прямими лініями. Гострі кути – кути менше 90° , а тупі кути – кути (α), які відповідають умовам $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

O jakim pojęciu matematycznym jest mowa w każdym z tych tekstów?

- 4 Oto notatka w języku japońskim. Czy poznajesz zawarte w niej wzory?

- 正方形: a^2 ($a = \text{辺}$)
- 長方形: ab ($a = \text{長さ}$, $b = \text{幅}$)
- 平行四辺形: ah ($a = \text{底辺}$, $h = \text{高さ}$)
- 台形: $\frac{1}{2}(B + b)h$ ($B, b = \text{底辺}$, $h = \text{高さ}$)

Znajdź w tekście podane słowo i spróbuj domyślić się jego znaczenia.

- 正方形 (czytaj: sejhowkej)
- 平行四辺形 (czytaj: hejkoszichenkej)
- 高さ (czytaj: takasa)

- 5 Co oznaczają litery B i b w ostatnim wzorze w tekście japońskim w zadaniu 4?

Zadania na deser

- 1 Boki trójkąta są kolejnymi liczbami nieparzystymi, a jego obwód wynosi 21 cm. Narysuj ten trójkąt w naturalnej wielkości.

- 2 Przeczytaj zadanie.

Lasse, Bosse i Olle zebrali razem 250 orzechów. Lasse zebrał dwa razy więcej orzechów niż Bosse i o 50 orzechów więcej niż Olle. Ile orzechów zebrał każdy z chłopców?

Czworo dzieci ułożyło równania do tego zadania. Jedno z równań jest niepoprawne. Wskaż, kto się pomylił, i zapisz, co oznacza niewiadoma w równaniach pozostałych dzieci.

Adam: $a + a : 2 + a - 50 = 250$

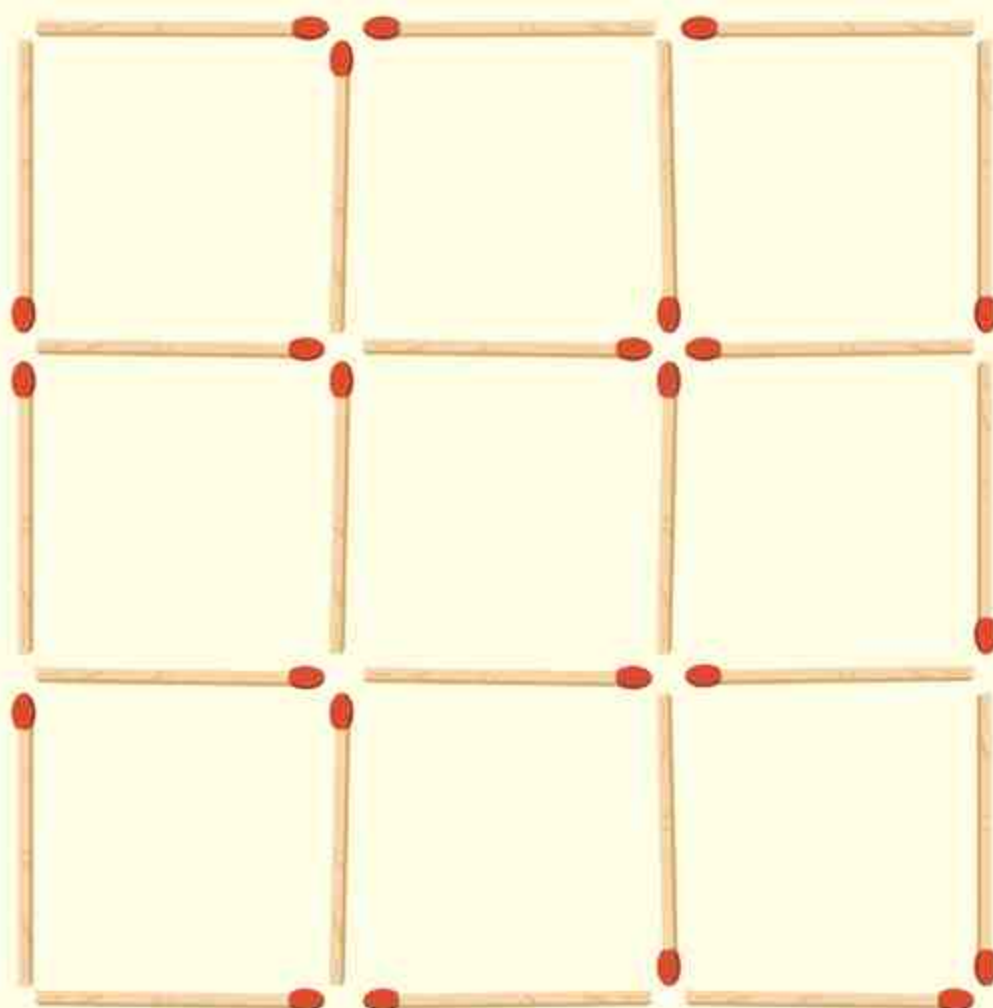
Beata: $2 \cdot b + b + 2 \cdot b - 50 = 250$

Czarek: $c + 2 \cdot c - 50 = 250$

Dorota: $d + d + 50 + d : 2 + 25 = 250$

Wybierz jedno z poprawnych równań i rozwiąż zadanie.

- 3 Na rysunku przedstawiono kwadrat, który ma 3×3 oczka.



- a) Ile zapalek potrzeba do ułożenia kwadratu mającego 5×5 oczek?
- b) Ile zapalek potrzeba do ułożenia kwadratu, który ma $n \times n$ oczek?
Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.
- c) Ile oczek będzie miał kwadrat ułożony w podobny sposób z 220 zapalek?
Zapisz równanie i spróbuj odgadnąć jego rozwiązanie.

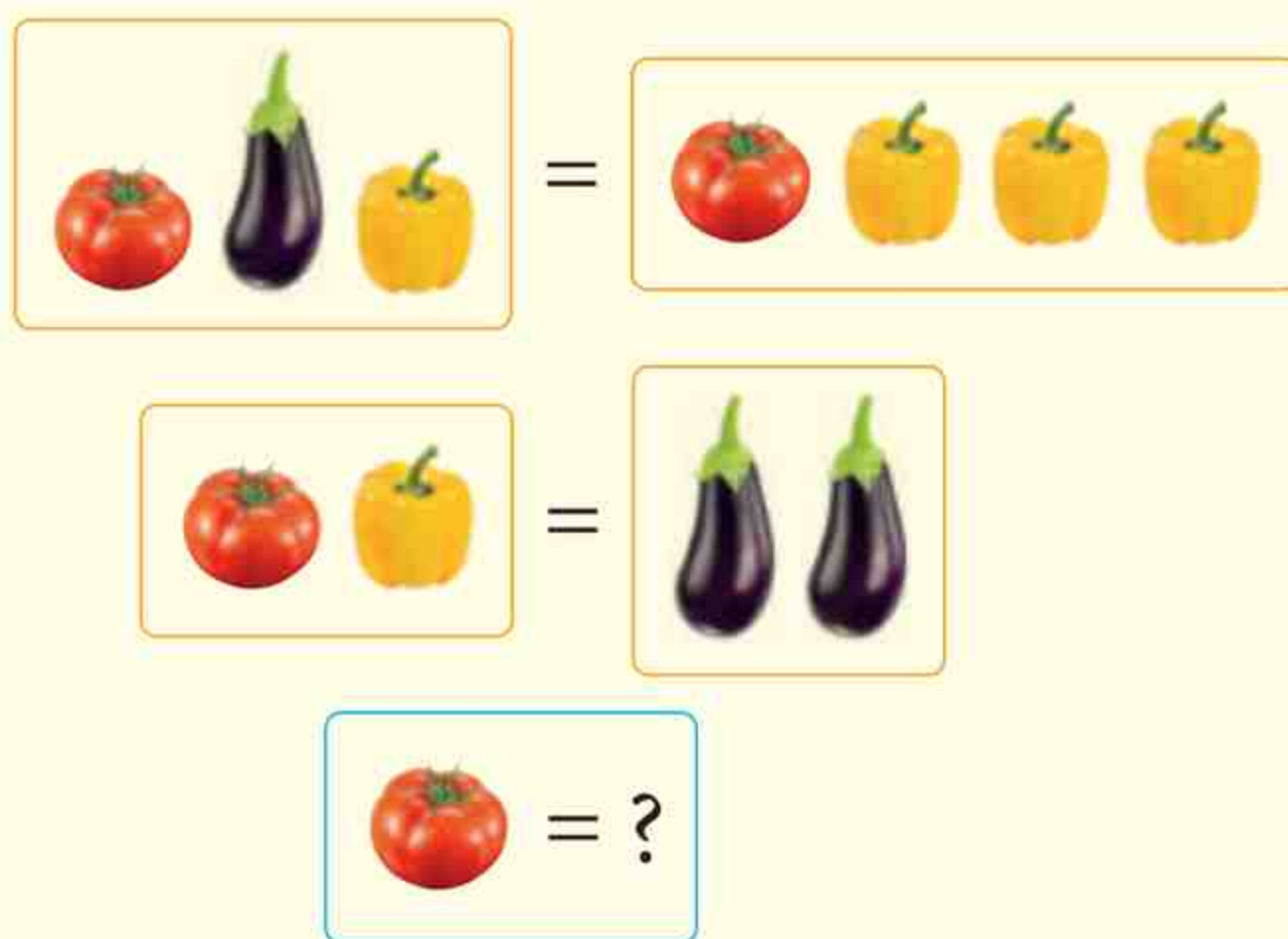
Uwaga. Zadania 4 i 5 rozwiąż za pomocą równań. Każde z nich rozwiąż dwoma sposobami – za każdym razem inaczej wybierając niewiadomą.

4 Joasia ma 2 razy więcej kredek od Krysi, a Dominika o 4 kredki więcej od Krysi. Razem mają 44 kredki. Ile kredek ma Krysia?

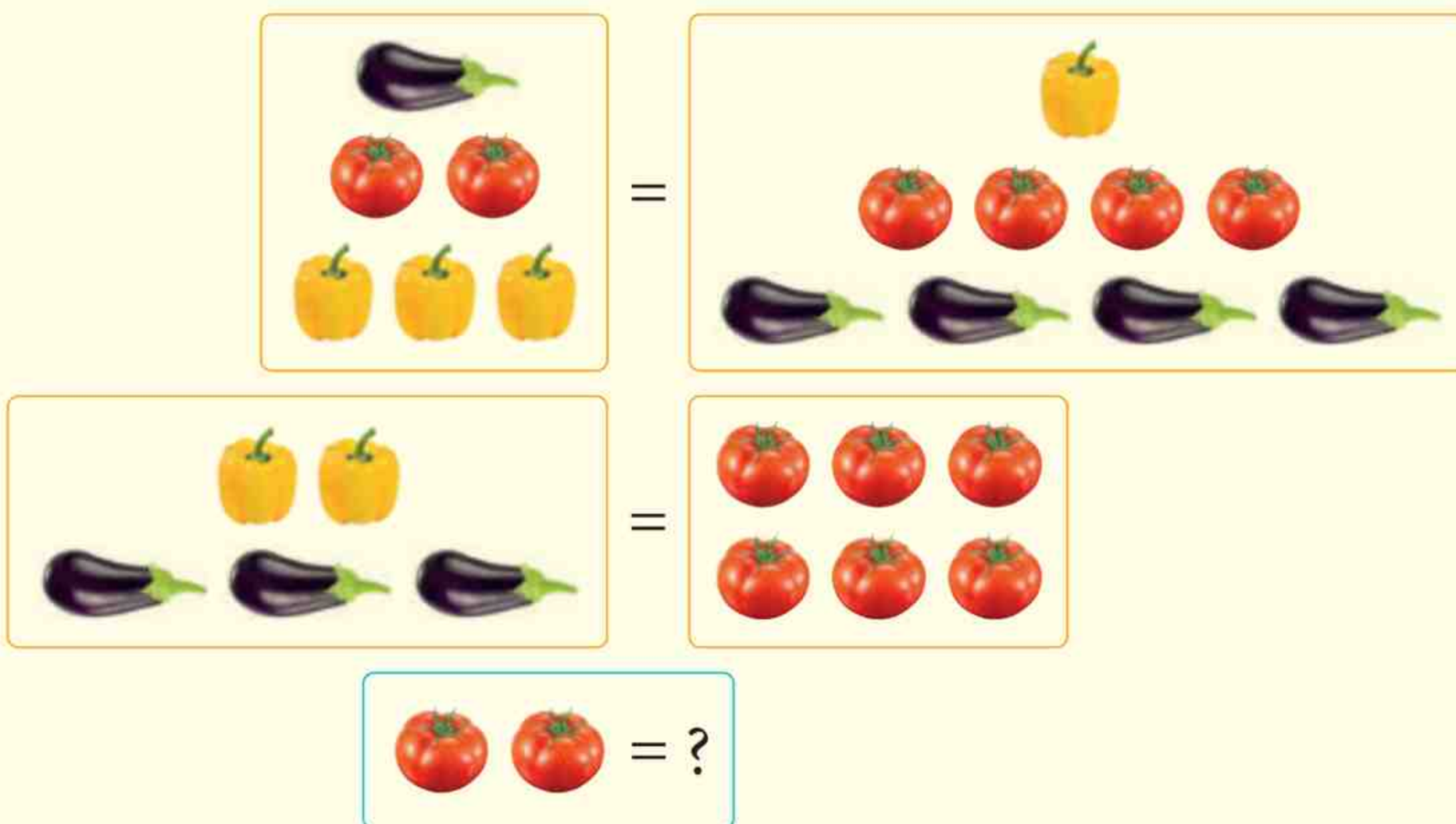
5 Wojtek jest najmłodszy, Andrzej jest dwa razy starszy od Wojtka, a Piotr o rok starszy od Andrzeja. W sumie bracia mają 61 lat. Ile lat ma Wojtek?

6 Rozwiąż łamigłówkę. Porozmawiaj z koleżankami i kolegami o sposobie rozwiązania. Czy wszyscy zrobiliście to w ten sam sposób?

a) Ile papryk waży tyle co jeden pomidor?



b) Ile bakłażanów waży tyle co dwa pomidory?



VI



Bryły

Czy wystarczy
mi papieru,
aby zapakować
prezent?

70 cm x 2 m



sześcian

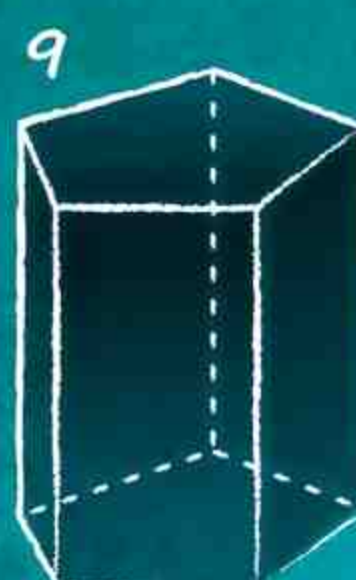
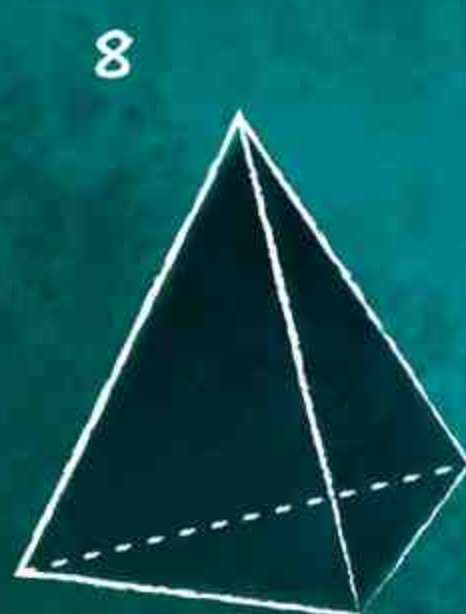
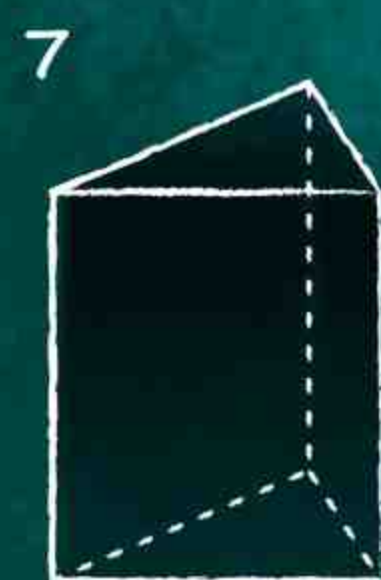
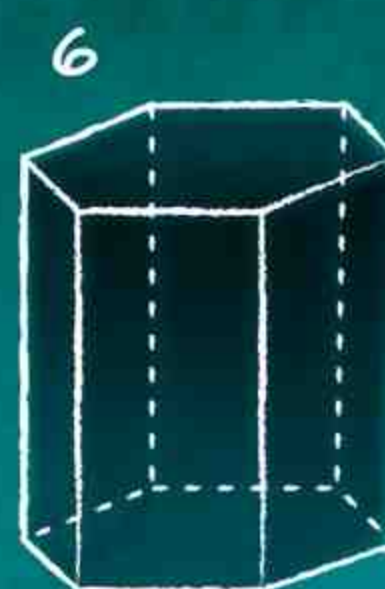
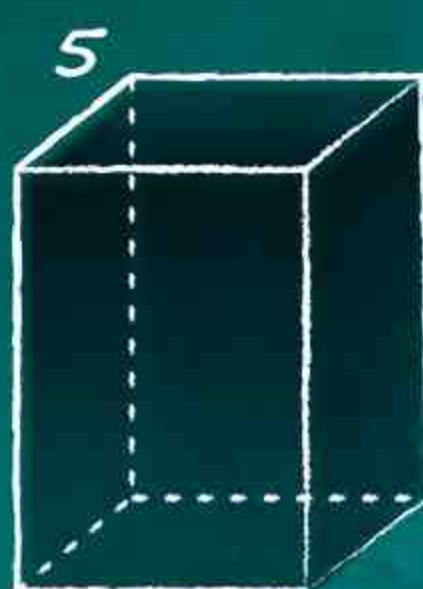
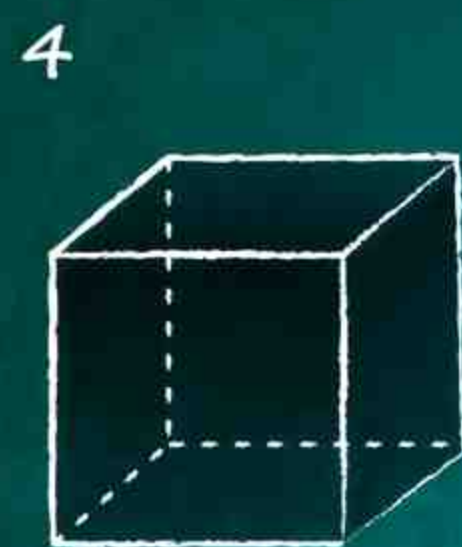
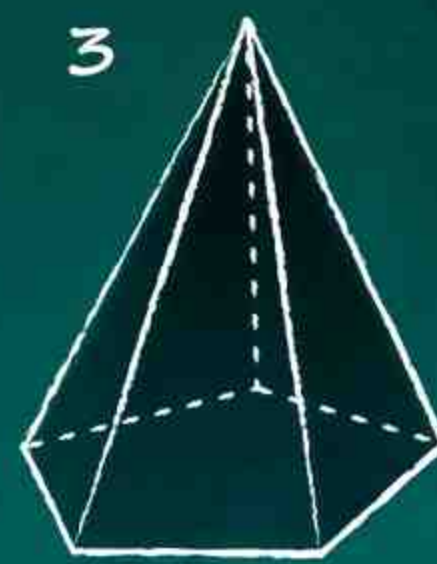
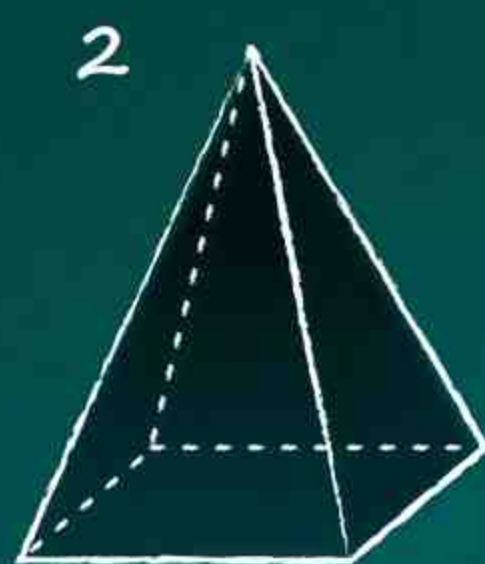
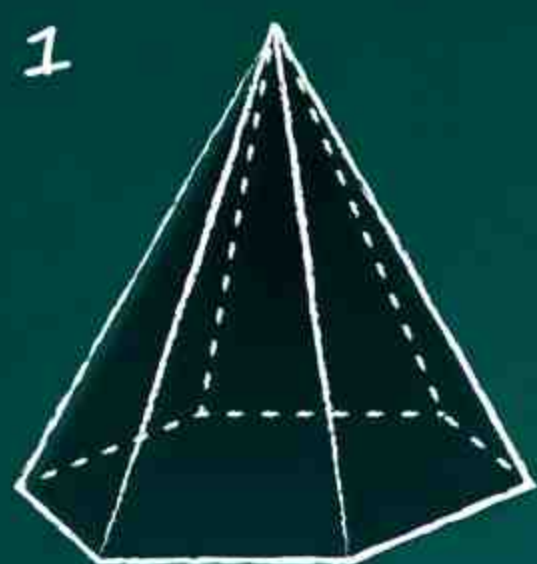
25 cm



1 Bryły i ich objętość

  Na dobry początek

Co to za bryła?



Pytania i polecenia

Wylosuj liczbę od 1 do 9. Znajdź na rysunku bryłę oznaczoną wylosowaną liczbą. Odpowiedz na pytania.

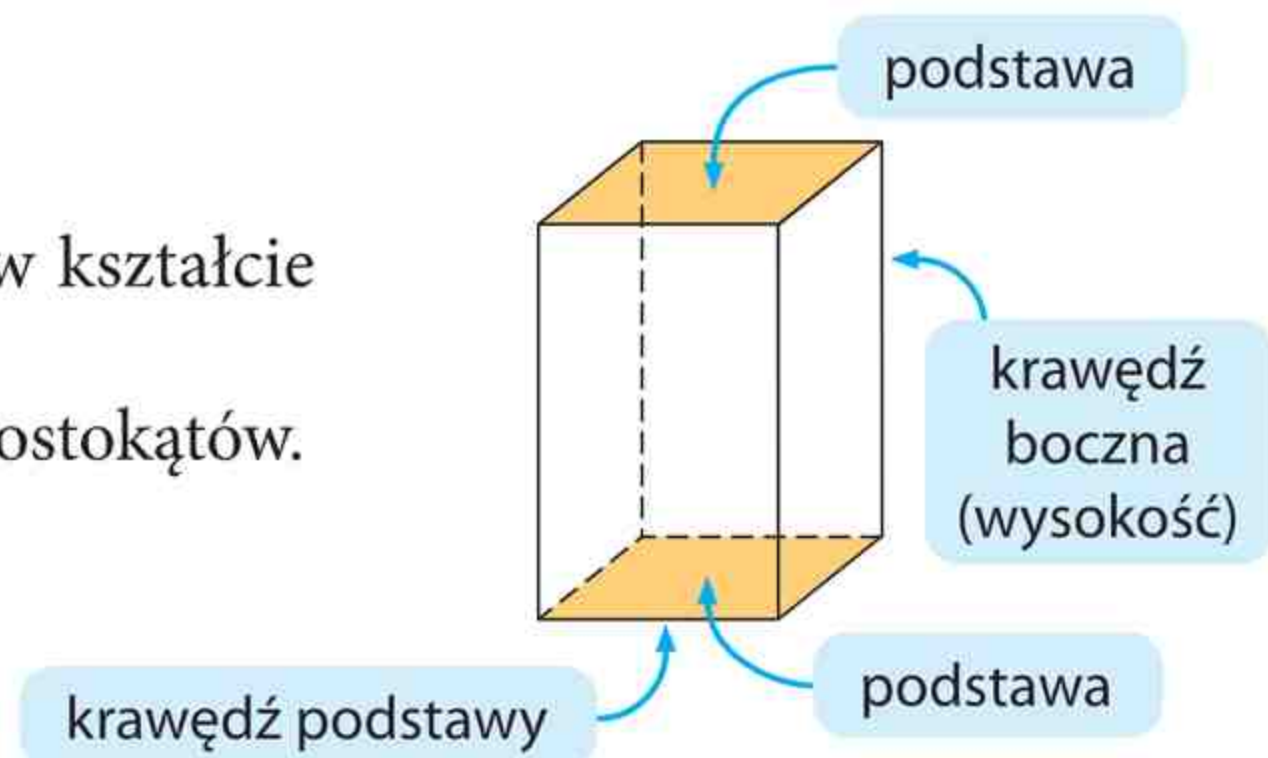
- Jaka to bryła?
- Ile ma ścian? Jakimi figurami są jej ściany boczne?
- Ile ma krawędzi i wierzchołków?
- Czy umiesz wskazać przedmioty codziennego użytku, które mają kształt tej bryły?



Graniastosłupy i ostrosłupy

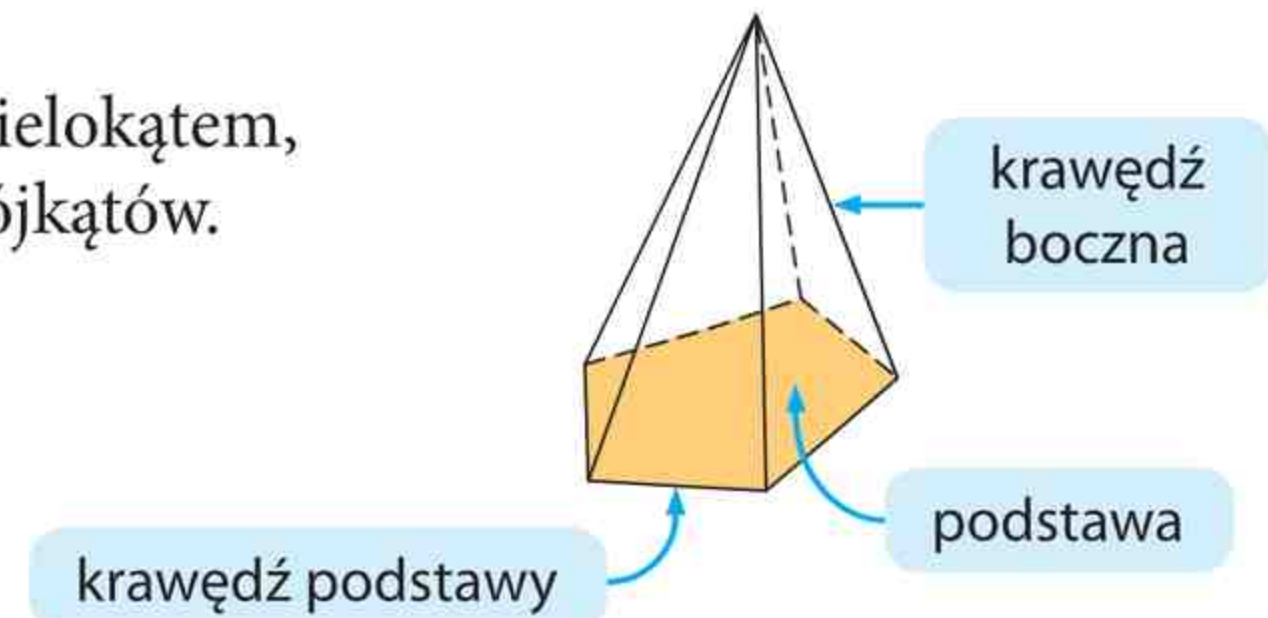
Graniastosłup prosty ma:

- dwie jednakowe podstawy w kształcie wielokątów,
- ściany boczne w kształcie prostokątów.



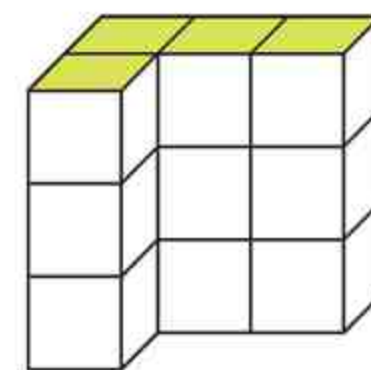
Ostrosłup ma:

- jedną podstawę, która jest wielokątem,
- ściany boczne w kształcie trójkątów.



Objętość graniastosłupa

Przyjrzyj się rysunkowi graniastosłupa. Zbudowano go z sześciennych klocków o krawędzi 1 cm. Jak obliczyć jego objętość?



Jedna warstwa tego graniastosłupa składa się z 4 sześciątów.
Objętość jednej warstwy to 4 cm^3 .
Graniastosłup ma 3 warstwy.

$$V = 4 \cdot 3 = 12 [\text{cm}^3]$$

liczba klocków
w warstwie

liczba
warstw

Podstawa tego graniastosłupa składa się z 4 kwadratów.
Pole podstawy wynosi 4 cm^2 .
Graniastosłup ma wysokość 3 cm.

$$V = 4 \cdot 3 = 12 [\text{cm}^3]$$

pole
podstawy

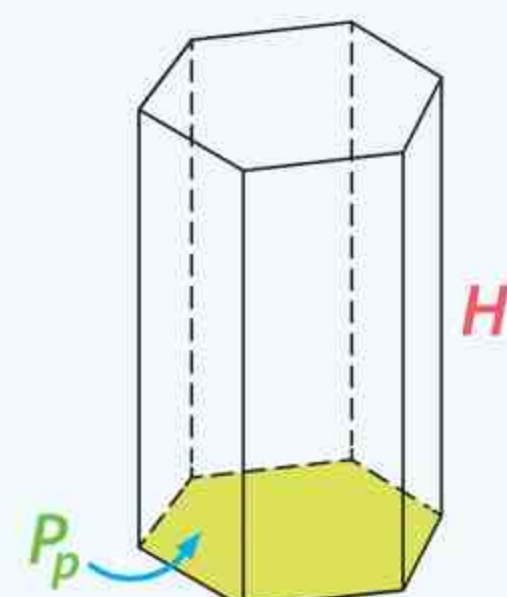
wysokość
graniastosłupa

Zapamiętaj

Objętość graniastosłupa można obliczyć za pomocą wzoru:

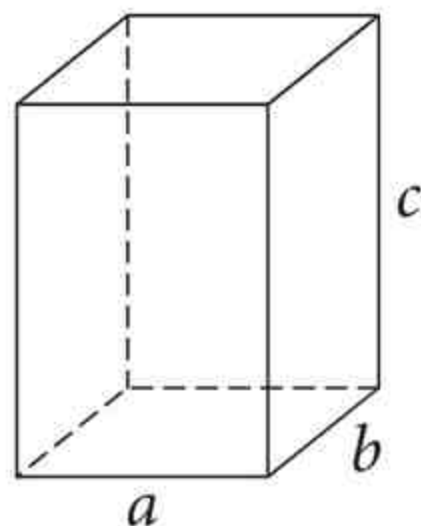
$$V = P_p \cdot H$$

w którym P_p oznacza pole podstawy graniastosłupa, a H – jego wysokość.

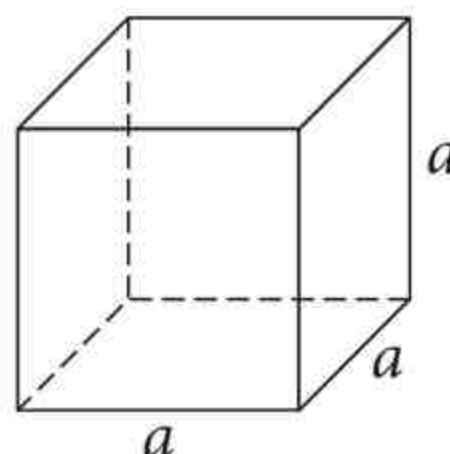


Objętość prostopadłościanu

Prostopadłościan jest graniastosłupem. Jego objętość także można obliczyć ze wzoru $V = P_p \cdot H$. Sześcian jest prostopadłościanem, więc i jego objętość obliczymy z tego wzoru.



$$V = \underbrace{a \cdot b}_{\text{pole podstawy}} \cdot \underbrace{c}_{\text{wysokość}}$$



$$V = \underbrace{a^2}_{\text{pole podstawy}} \cdot \underbrace{a}_{\text{wysokość}} = a^3$$

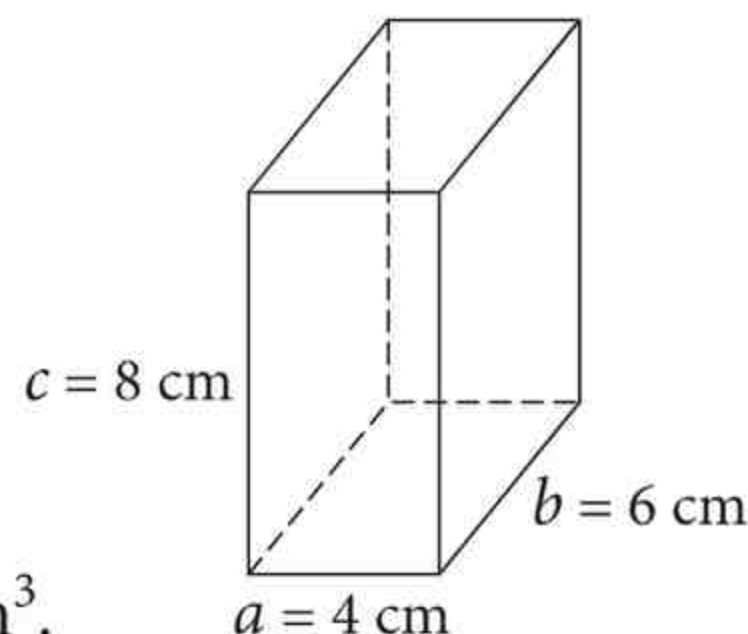
Przykład 1

Oblicz objętość prostopadłościanu o krawędziach 4 cm, 6 cm i 8 cm.

Podstawiamy dane wymiary do wzoru:

$$V = a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Odp. Objętość prostopadłościanu wynosi 192 cm^3 .



Przykład 2

Oblicz objętość bryły przedstawionej na rysunku.

Jest to graniastosłup o podstawie trójkątnej. Jego wymiary są podane w różnych jednostkach, więc najpierw trzeba je przedstawić w tej samej jednostce.

$$a = 1,2 \text{ dm} = 12 \text{ cm}, \quad h = 15 \text{ cm}$$

$$H = 4 \text{ dm} = 40 \text{ cm}$$

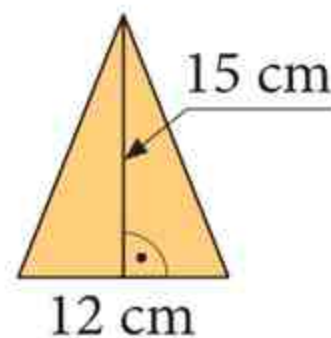
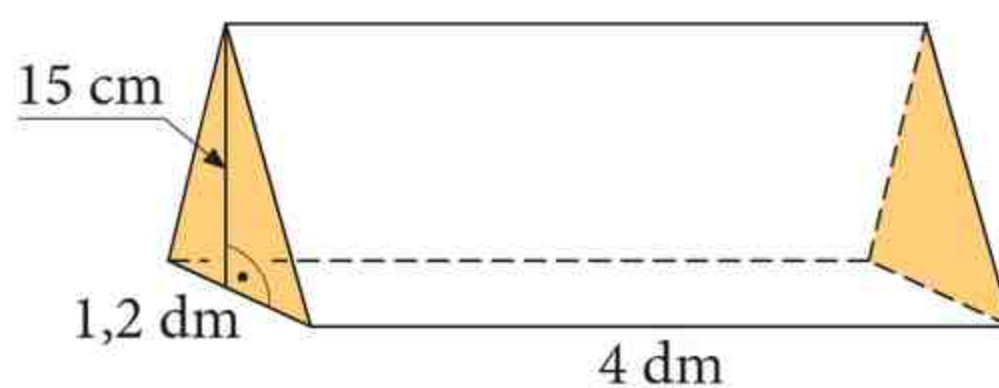
Obliczamy pole podstawy.

$$P_p = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 = 90 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Teraz możemy obliczyć objętość.

$$V = P_p \cdot H = 90 \cdot 40 = 3600 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Odp. Objętość graniastosłupa wynosi 3600 cm^3 .



Dobra rada

Przed obliczeniami sprawdź, czy wszystkie wymiary są wyrażone w tej samej jednostce.

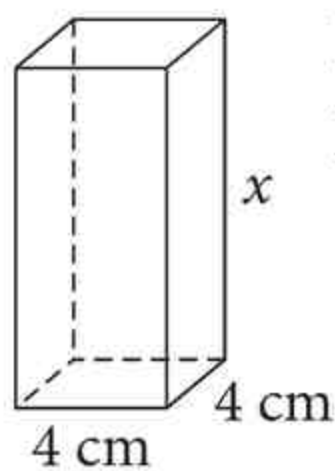
Przykład 3

Podstawą prostopadłościanu o objętości 144 cm^3 jest kwadrat. Jedna z krawędzi tej bryły ma długość 4 cm. Podaj wymiary tego prostopadłościanu.

W zadaniu nie podano, która krawędź ma długość 4 cm. Dlatego musimy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek 1

Niech długość 4 cm ma krawędź podstawy.



Długość trzeciej krawędzi oznaczmy x .

Ponieważ objętość (w cm^3) wynosi:

$V = 4 \cdot 4 \cdot x$ oraz $V = 144$,
możemy ułożyć równanie:

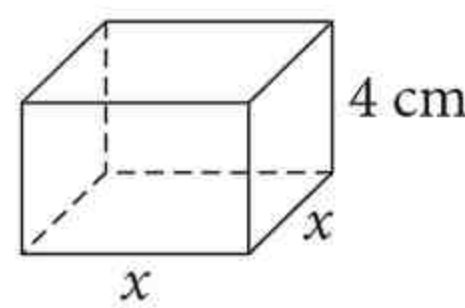
$$4 \cdot 4 \cdot x = 144$$

$$16 \cdot x = 144$$

$$x = 9 \text{ [cm]}$$

Przypadek 2

Niech 4 cm wynosi wysokość bryły.



Długość krawędzi podstawy oznaczmy x .

Ponieważ objętość (w cm^3) wynosi:

$V = x \cdot x \cdot 4$ oraz $V = 144$,
możemy ułożyć równanie:

$$x \cdot x \cdot 4 = 144$$

$$x \cdot x = 36$$

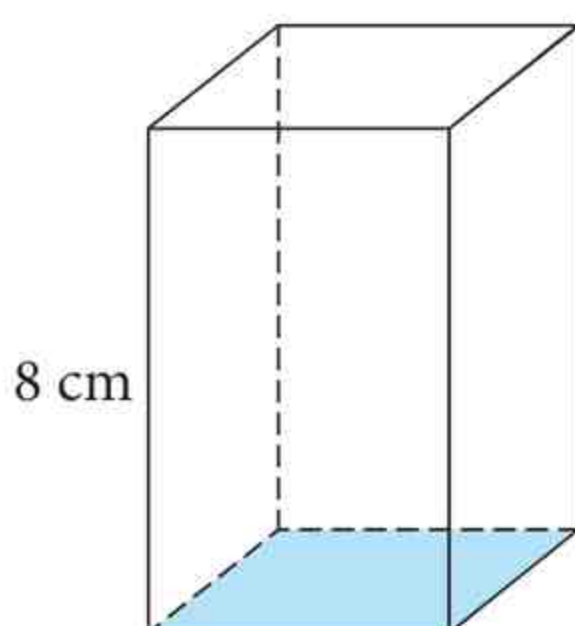
$$x = 6 \text{ [cm]}$$

Prostopadłościan ma wymiary 4 cm, 4 cm i 9 cm lub 6 cm, 6 cm i 4 cm.

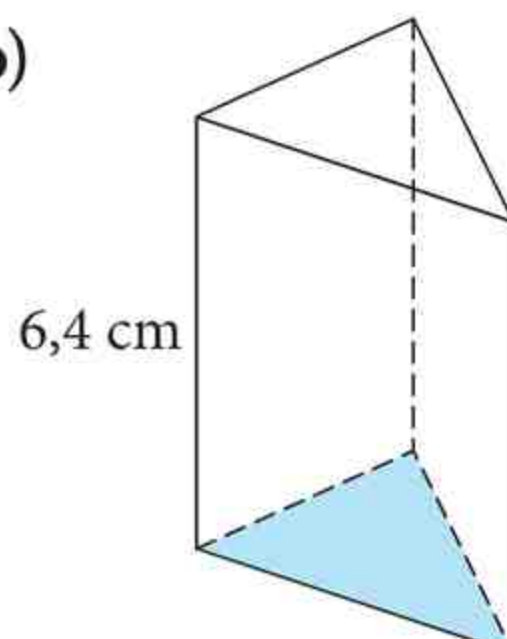
**Zadania**

- 1 Pole podstawy graniastosłupa przedstawionego na rysunku równa się 12 cm^2 . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

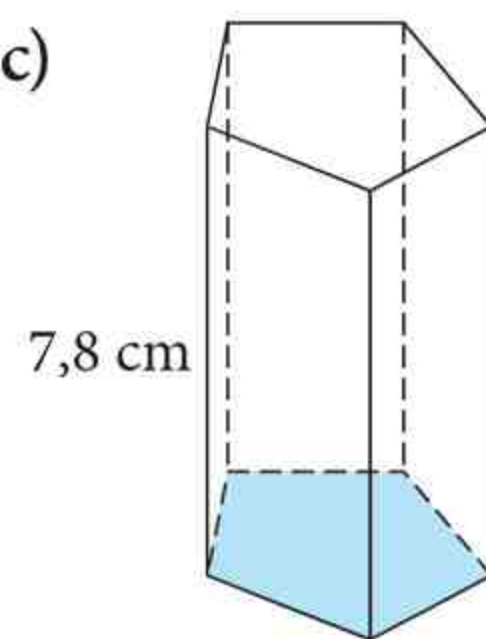
a)



b)



c)

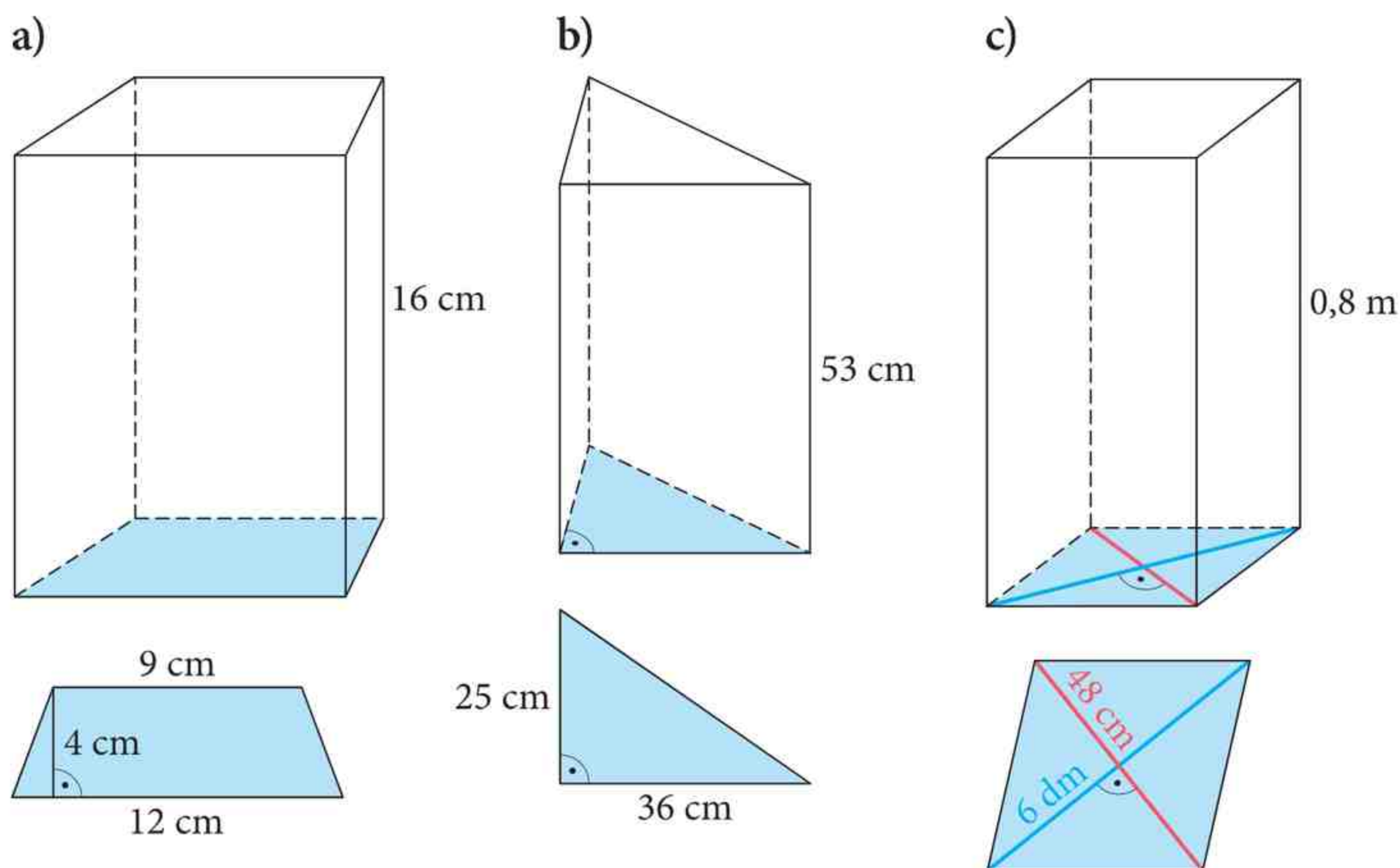


•• 2 Narysuj:

- a) graniastosłup prosty o podstawie sześciokątnej,
- b) ostrosłup o podstawie trójkątnej,
- c) graniastosłup prosty o podstawie prostokątnej,
- d) ostrosłup o podstawie pięciokątnej.

•• 3 Oblicz, ile litrów (czyli dm^3) wody musimy wlać do prostopadłościennego basenu o długości 25 m, szerokości 8 m i głębokości 1,5 m, jeśli chcemy go napęlnić do $\frac{7}{8}$ głębokości.

•• 4 Oblicz objętość graniastosłupa o wymiarach podanych na rysunku.



•• 5 Paweł skonstruował budowlę z 25 jednakowych klocków. Oblicz objętość tej budowli, jeśli każdy klocek jest:

- a) graniastosłupem prostym o wysokości 5 cm i podstawie, która jest kwadratem o boku 3 cm,
- b) sześcianem o krawędzi 4 cm.

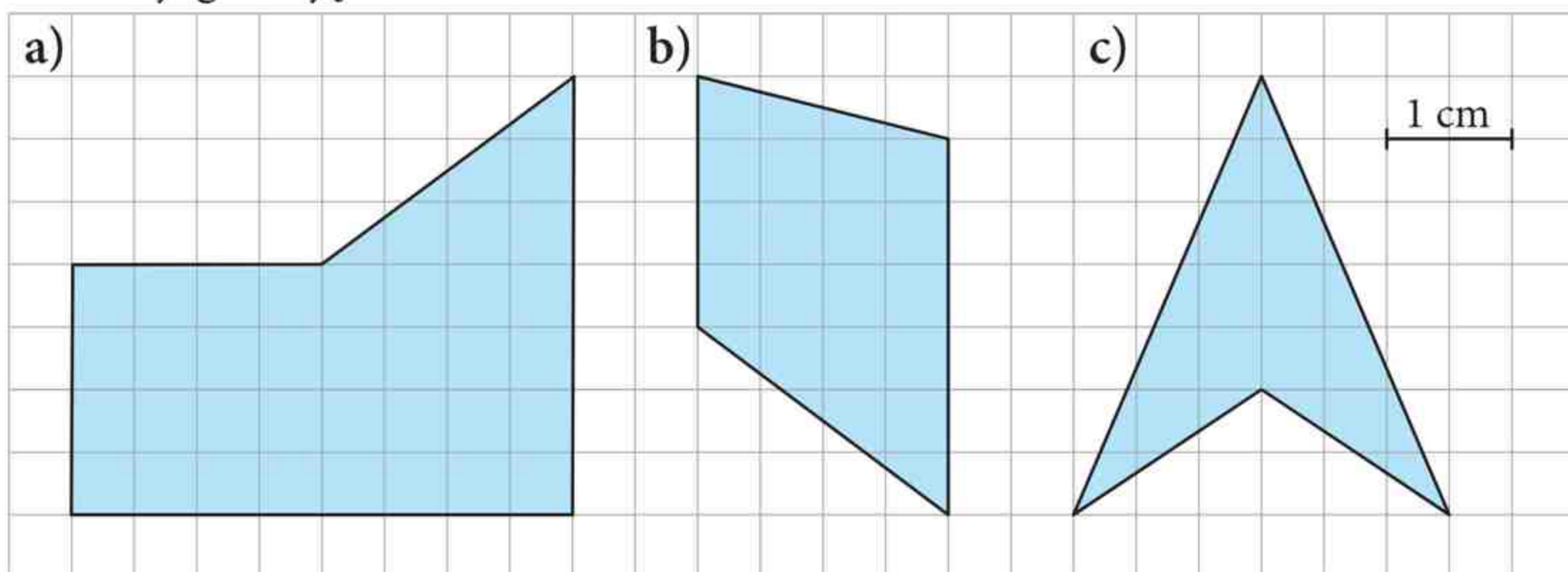
•• 6 Magda ma wazon w kształcie graniastosłupa prostego. Pole powierzchni jego dna jest równe $1,2 \text{ dm}^2$, a wysokość 4,5 dm.

- a) Ile litrów wody mieści się w wazonie?
- b) W szklance mieści się 0,25 litra wody. Ile najwięcej pełnych szklanek wody może wlać Magda do wazonu?

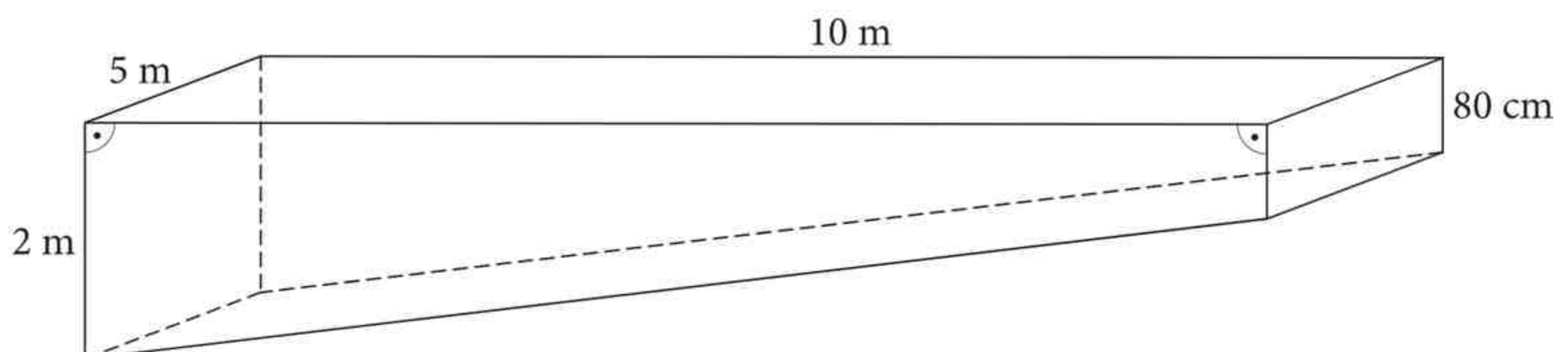
- 7 Jeden kawałek masy plastycznej, którą można ugniatać i dowolnie formować, ma objętość 100 cm^3 . Ile takich kawałków zmieści się w pudełku, które ma kształt prostopadłościanu o wymiarach $45 \text{ mm} \times 6 \text{ cm} \times 1,5 \text{ dm}$?



- 8 Agnieszka ma akwarium w kształcie prostopadłościanu, którego wysokość jest równa krótszej krawędzi podstawy. Dłuższa krawędź podstawy jest równa 60 cm i jest trzy razy dłuższa od krótszej krawędzi. Ile litrów wody mieści się w akwarium Agnieszki?
- 9 Podstawą graniastosłupa jest romb o boku 13 cm . Przekątne tej podstawy mają 10 cm i 24 cm . Objętość bryły wynosi 600 cm^3 . Oblicz jej wysokość.
- 10 Na rysunku przedstawiono podstawę graniastosłupa o wysokości $1,5 \text{ dm}$. Oblicz jego objętość.



- 11 Powierzchnia basenu jest prostokątem o wymiarach $10 \text{ m} \times 5 \text{ m}$. Głębokość basenu zmienia się tak, jak pokazano na rysunku. W najpłytszym miejscu wynosi ona 80 cm , a w najgłębszym 2 m . Ile metrów sześciennych wody może zmieścić się w tym basenie? Ile to litrów?

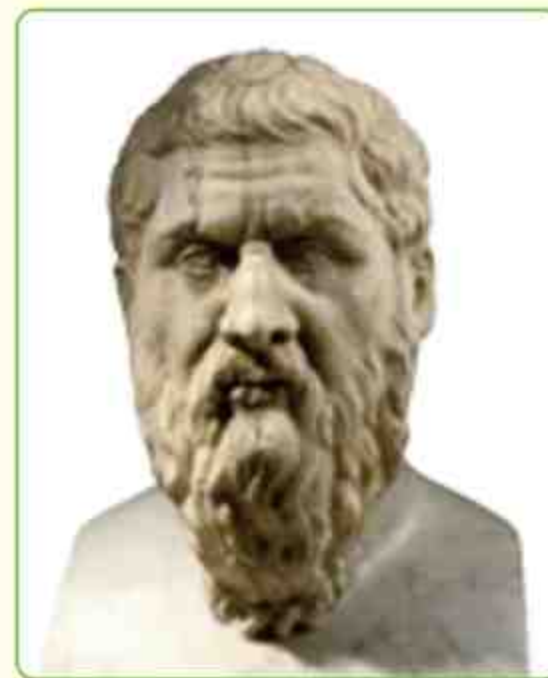


- 12 Prostopadłościan ma objętość 288 cm^3 . Jedna z jego krawędzi ma 12 cm , a długość drugiej jest równa $\frac{2}{3}$ długości trzeciej krawędzi. Podaj wymiary tego prostopadłościanu.

- 13** Pojemnik jest graniastosłupem prostym o wysokości 10 cm, którego podstawa ma kształt rombu o boku 5 cm i kącie ostrym 60° . Pojemnik ten napełniono wodą do połowy jego wysokości. Wazon jest graniastosłupem prostym o wysokości 20 cm, jego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku 5 cm. Czy woda z pojemnika zmieści się w wazonie? Uzasadnij odpowiedź.
- 14** Długości krawędzi prostopadłościanu wyrażone w centymetrach są liczbami naturalnymi. Suma długości wszystkich krawędzi wynosi 112 cm. Objętość bryły wynosi 510 cm^3 . Wyznacz wymiary tego prostopadłościanu. Czy to zadanie ma tylko jedno rozwiązanie?

Dla dociekliwych

Bryły, których wszystkie ściany są jednakowymi wielokątami foremnymi (czyli takimi, które mają wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe) i w których z każdego wierzchołka wychodzi tyle samo krawędzi, nazywamy bryłami **foremnymi** albo inaczej **platońskimi** (od imienia greckiego filozofa Platona). Takich brył jest tylko pięć. Być może znasz kostki do gry w takich kształtach.



Platon

czworościan
foremny

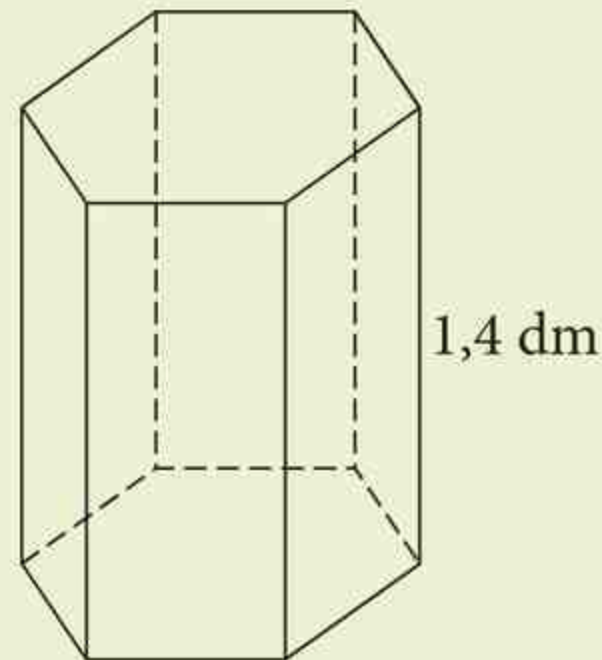
sześcián

ośmiościan
foremnydwunastościan
foremnydwudziestościan
foremny

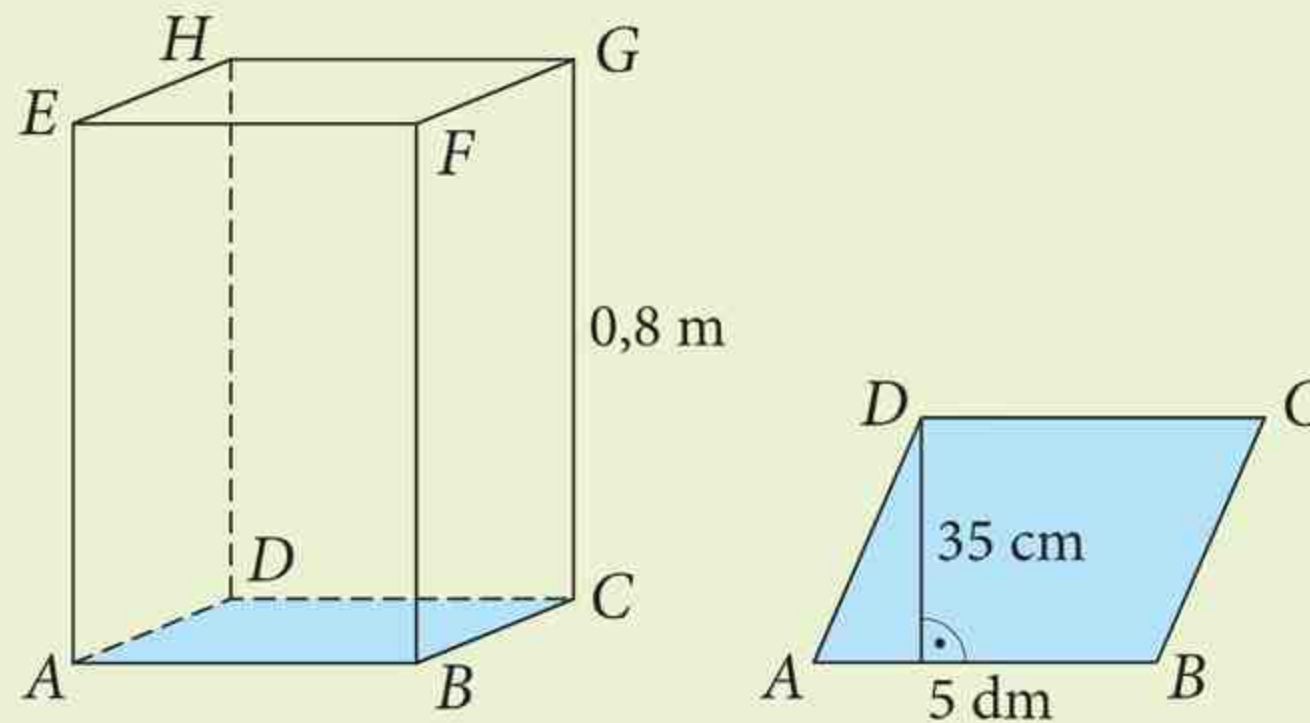
- 1 Jakimi wielokątami są ściany brył platońskich?
- 2 Ile ścian, ile wierzchołków i ile krawędzi ma ośmiościan foremny, a ile – dwunastościan foremny?
- 3 Poszukaj w dostępnych źródłach informacji na temat brył półforemnych i gwiaździstych.
- 4 Sprawdź w dostępnych źródłach, kim był Platon.

✓ Czy już umiem?

- I Pole podstawy graniastosłupa przedstawionego na rysunku równa się 85 cm^2 . Oblicz objętość graniastosłupa.



- II Oblicz objętość graniastosłupa o wymiarach podanych na rysunku.



- III Wazon o wysokości 27 cm ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratowej. Krawędź podstawy jest równa 10 cm. Oblicz, ile litrów wody mieści się w tym wazonie.
- IV Na pierwszym zegarze pokazano, o której godzinie Jarek rozpoczął dzisiaj lekcje, a na drugim – o której je skończył. W tym czasie miał 6 lekcji po 45 minut oraz kilka przerw. Jaką część czasu od początku do końca lekcji stanowiły przerwy?

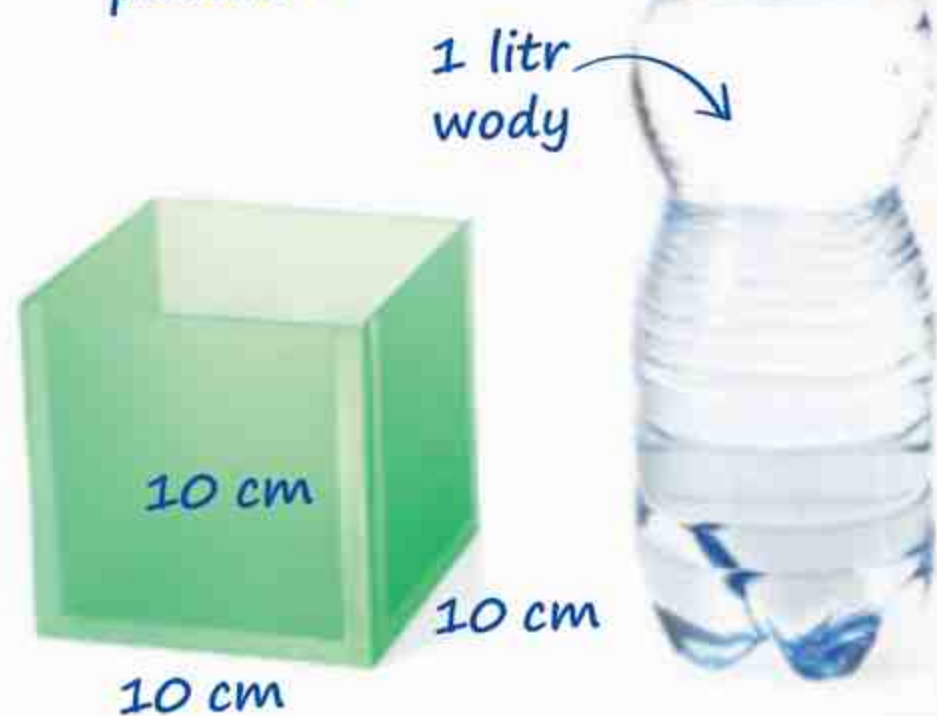


  Na dobry początek

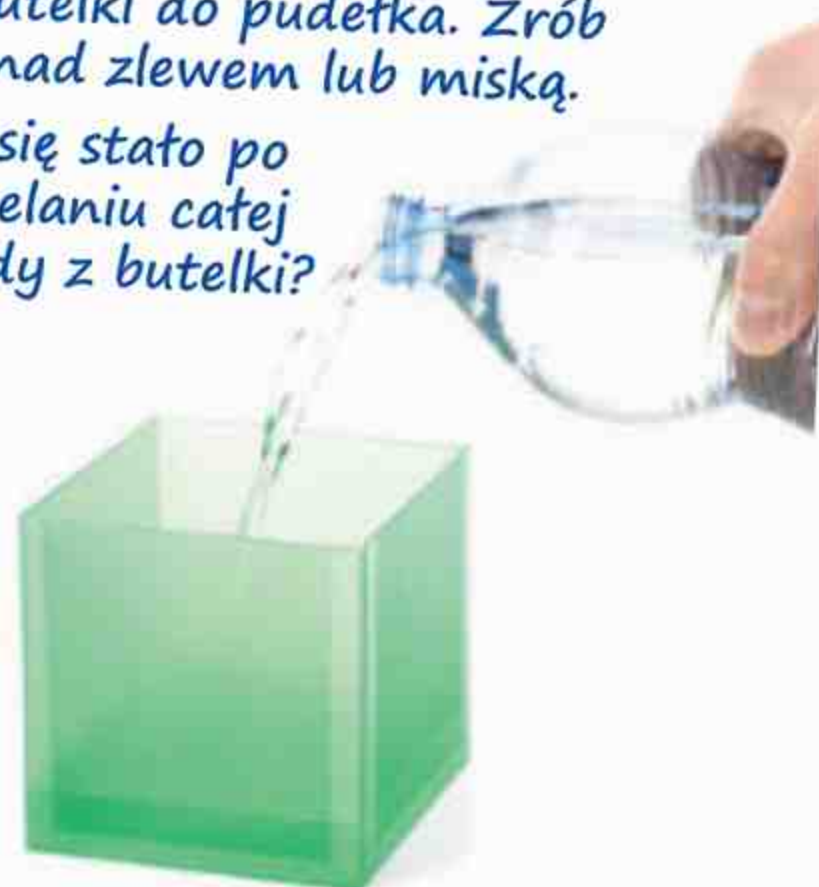
Za mało, za dużo czy w sam raz?

Przygotuj pudełko w kształcie sześcianu o krawędzi 10 cm, do którego można wlewać wodę. Możesz wyciąć kwadratowe ściany z powlekanego papieru (np. z pocztówek) lub sztywnej plastikowej folii i skleić krawędzie taśmą klejącą. Przygotuj również litrową butelkę. Wykonaj poniższe doświadczenie i odpowiedz na pytania.

- 1 Jak oceniasz, czy litr wody zmieści się w przygotowanym pudełku?



- 2 Przelej wodę z butelki do pudełka. Zrób to nad zlewem lub miską. Co się stało po przelaniu całej wody z butelki?



- A Woda wypełniła część pudełka.



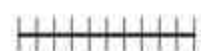
- B Woda wypełniła pudełko po brzegi.



- C Woda się przelata.

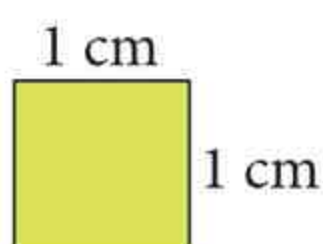
Odcinek długości 1 cm można podzielić na odcinki długości 1 mm.

1 cm 

10 mm 

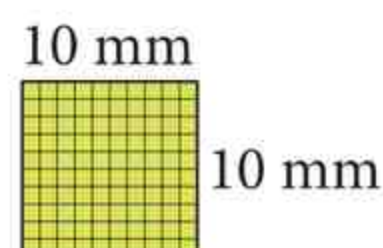
$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

Kwadrat o boku 1 cm można podzielić na kwadraty o boku 1 mm. Jego pole można obliczyć różnymi sposobami.



$$P = 1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}$$

$$P = 1 \text{ cm}^2$$

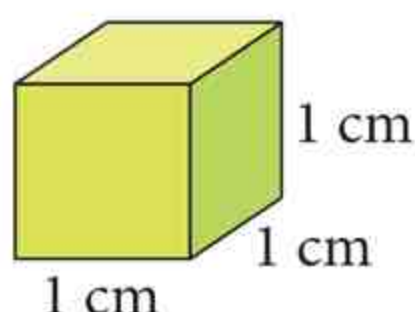


$$P = 10 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm}$$

$$P = 100 \text{ mm}^2$$

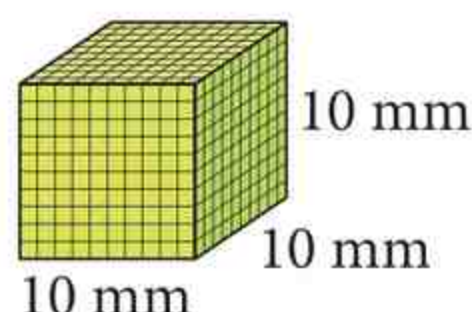
$$\text{Czyli } 1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

Sześcian o krawędzi 1 cm można podzielić na sześciiany o krawędzi 1 mm.



$$V = 1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}$$

$$V = 1 \text{ cm}^3$$



$$V = 10 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm}$$

$$V = 1000 \text{ mm}^3$$

$$\text{Czyli } 1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$$

Zapamiętaj

Jednostki długości, pola i objętości mają podobne nazwy, ale zamienia się je inaczej!

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

Zapamiętaj

$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a}$$

Przykład 1

Basen w kształcie prostopadłościanu ma wymiary $25\text{ m} \times 10\text{ m} \times 1,6\text{ m}$. Ile litrów wody trzeba do niego wlać, żeby go wypełnić?

Przedstawmy wymiary basenu w decymetrach – żeby od razu otrzymać wynik w litrach, czyli w dm^3 .

$$25\text{ m} = 250\text{ dm}$$

$$10\text{ m} = 100\text{ dm}$$

$$1,6\text{ m} = 16\text{ dm}$$

$$V = 250 \cdot 100 \cdot 16$$

$$V = 400\,000\text{ [dm}^3\text{]}$$

Odp. Do basenu trzeba wlać 400 000 l wody.

$$1\text{ dm}^3 = 1\text{ litr}$$

$$1\text{ cm}^3 = 1\text{ ml}$$

$$1\text{ litr} = 1000\text{ ml}$$

Przykład 2

Zamień 25 m^3 na cm^3 .

Sposób 1

$$1\text{ m}^3 = 1\,000\,000\text{ cm}^3,$$

$$\text{czyli } 25\text{ m}^3 = 25\,000\,000\text{ cm}^3$$

Sposób 2

Wyobraźmy sobie prostopadłościan o objętości 25 m^3 .

Przyjmijmy, że ma wymiary:

$$1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 25\text{ m},$$

$$\text{czyli } 100\text{ cm} \times 100\text{ cm} \times 2500\text{ cm}.$$

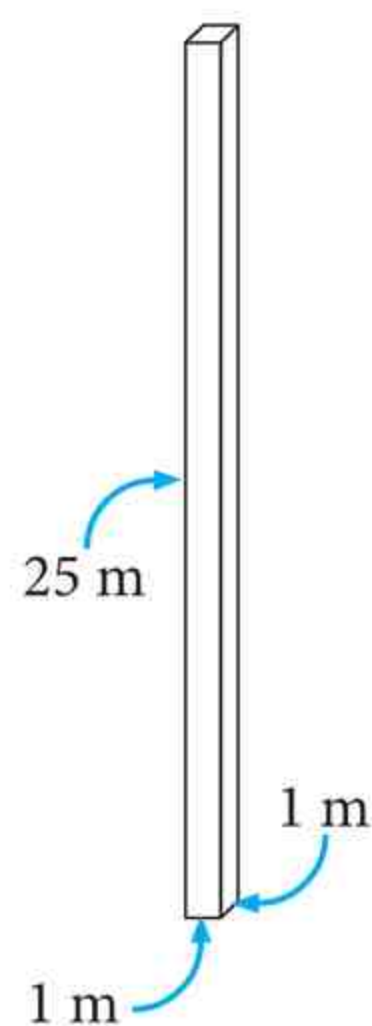
Obliczamy jego objętość.

$$V = 100\text{ cm} \cdot 100\text{ cm} \cdot 2500\text{ cm}$$

$$V = 25\,000\,000\text{ cm}^3,$$

$$\text{czyli } 25\text{ m}^3 = 25\,000\,000\text{ cm}^3$$

Otrzymany wynik nie zależy od tego, jakie przyjmiesz wymiary prostopadłościanu o danej objętości.



Dobra rada

Zastanów się, czy za miesiąc będziesz pamiętać zamianę jednostek kwadratowych i sześciennych. Jeśli nie masz pewności, to ćwicz zamianę jednostek sposobem 2!

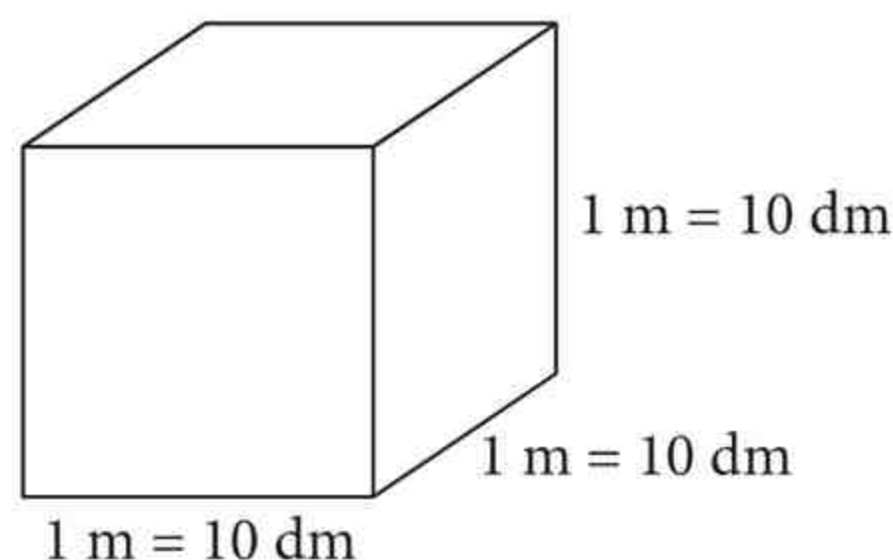
Przykład 3

1 litr wody waży 1 kg. Ile waży 1 m^3 wody?

Zamieniamy 1 m^3 na litry (czyli dm^3). Objętość 1 m^3 ma sześcian o krawędzi 1 m (czyli 10 dm).

$$V = 10 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = 1000 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ l}$$



Odp. 1 m^3 wody waży 1000 kg (1 tonę).



Przykład 4

W nocy spadł 1 cm deszczu (gdyby woda nie wsiąkała w glebę, to warstwa wody, która spadła, miałaby grubość 1 cm). Ile litrów wody spadło na pole o powierzchni 1 ha?

Chcemy otrzymać wynik w litrach, dlatego wymiary przedstawiamy w decymetrach.

Warstwa wody ma grubość: $1 \text{ cm} = 0,1 \text{ dm}$.

Hektar to powierzchnia kwadratu o boku 100 m, czyli 1000 dm.

$$V = 1000 \text{ dm} \cdot 1000 \text{ dm} \cdot 0,1 \text{ dm} = 100\,000 \text{ dm}^3$$

Odp. Na 1 ha spadło 100 000 litrów wody.



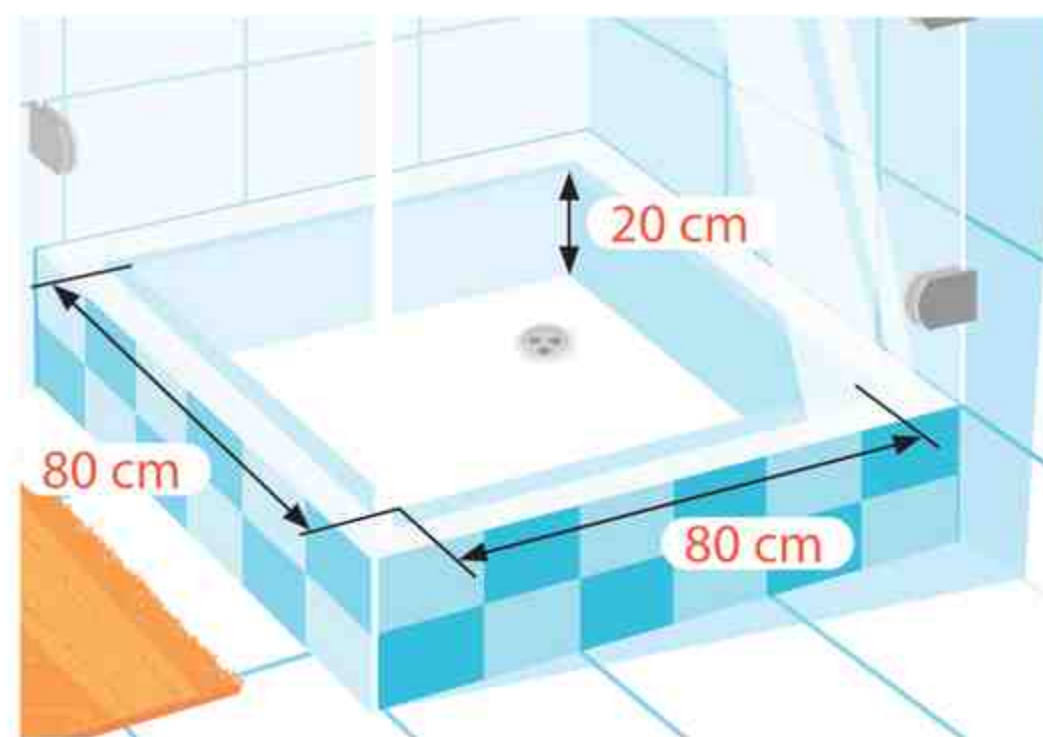
Zadania

- **1** Pan Piotr kupił prostokątną działkę o wymiarach $50 \text{ m} \times 100 \text{ m}$. Ile arów ma ta działka? Ile to hektarów?
- **2** Stół ma szerokość 110 cm i długość 170 cm. Podaj jego powierzchnię w m^2 .
- **3** Prostopadłościenne akwarium ma wymiary $20 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$. Ile litrów wody się w nim zmieści? Ile ważyłaby ta woda (1 litr wody waży 1 kg)? W obliczeniach nie uwzględniaj grubości szkła.

- **4** Szklanka ma pojemność 250 ml, czyli 250 cm^3 . Ile szklanek można napełnić wodą z litrowej butelki?
- **5** Pas ziemi w kształcie prostokąta o długości 1 km i szerokości 20 m podzielono na działki o powierzchni 4 a. Ile działek powstało?

- **6** W wiadrze mieści się 10 litrów wody. Czy w zatkanym brodziku, o wymiarach podanych na rysunku, zmieści się woda:

- a) z 10 wiader,
- b) z 15 wiader,
- c) z 20 wiader?



- **7** Litr powietrza waży ok. 1,2 g. Ile kilogramów waży powietrze w pustym pokoju o wysokości 280 cm, którego podłoga ma kształt prostokąta o wymiarach $4 \text{ m} \times 4,5 \text{ m}$? A ile waży powietrze w pustej sali o wymiarach $8 \text{ m} \times 10 \text{ m} \times 3 \text{ m}$?

- **8** Staw ma powierzchnię 5 ha i średnią głębokość 120 cm. To znaczy, że gdyby głębokość stawu wszędzie była równa 120 cm, to mieściłoby się w nim tyle samo wody. Ile litrów wody mieści się w stawie?

- **9** Basen olimpijski powinien mieć 50 m długości, w najpłytszym miejscu co najmniej 135 cm głębokości i 10 torów, każdy o szerokości 250 cm. Temperatura wody podczas zawodów powinna wynosić od 25°C do 28°C . Oblicz, ile wody znajduje się w basenie olimpijskim napełnionym do głębokości 220 cm. Odpowiedź podaj w litrach i m^3 .



- **10** Wannę o wymiarach wewnętrznych: długość 160 cm i szerokość 50 cm napełniono zimną wodą do głębokości 40 cm. Ile kosztuje napełnienie tej wanny wodą, jeśli cena 1 m^3 zimnej wody wynosi 11,60 zł?

Dla ciekliwych

Średni roczny przepływ Wisły przy ujściu wynosi $1054 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ (znaczy to, że w ciągu 1 sekundy Wisła wlewa do morza średnio 1054 m^3 wody). Średni roczny przepływ Amazonki przy ujściu wynosi $120 \text{ tys. } \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$. W jeziorze Hańcza, które jest najgłębszym jeziorem w Polsce, znajduje się około $0,1204 \text{ km}^3$ wody. Największe jezioro w Polsce, Śniardwy, ma powierzchnię $11\,400 \text{ ha}$ i średnią głębokość $6,5 \text{ m}$.

- 1 W którym jeziorze jest więcej wody: w Hańczy czy w Śniardwach?
- 2 Ile czasu (w przybliżeniu) Wisła napełniałaby basen o długości 25 m , szerokości 12 m i średniej głębokości 120 cm ?
- 3 Ile czasu w przybliżeniu Wisła napełniałaby jezioro Hańcza?
- 4 Czy Wisła w ciągu tygodnia napełniłaby jezioro Śniardwy?
- 5 Ile czasu (w przybliżeniu) Amazonka napełniałaby jezioro Śniardwy?

Czy już umiem?

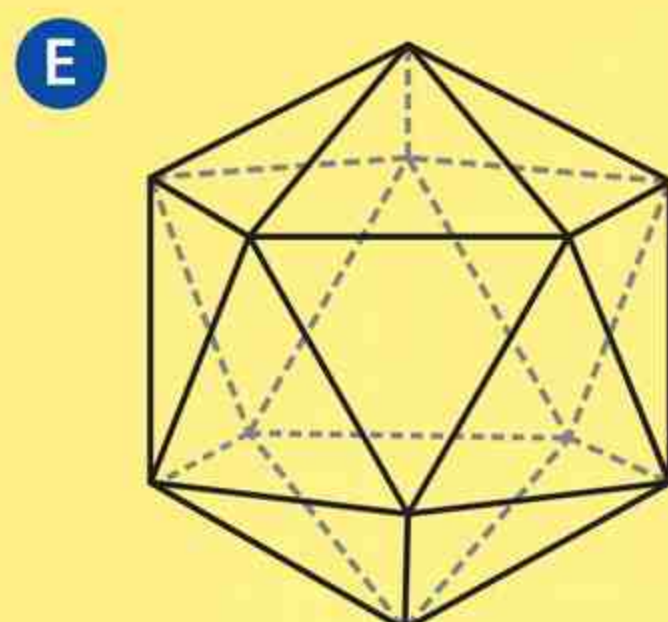
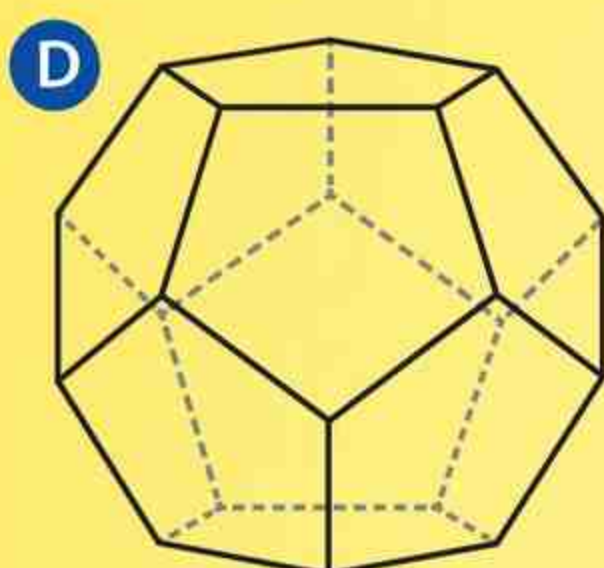
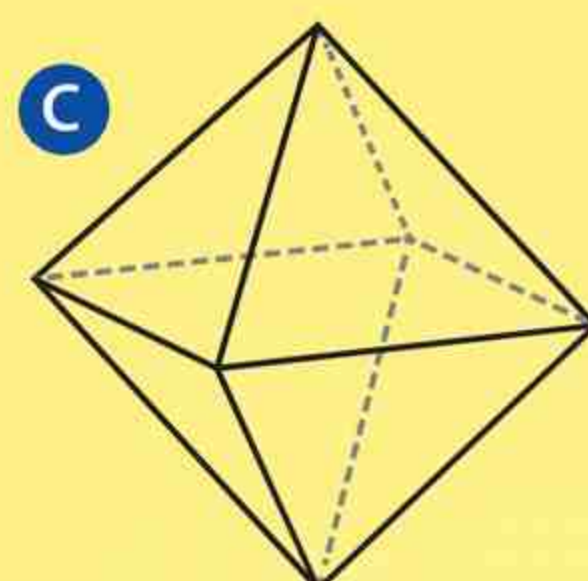
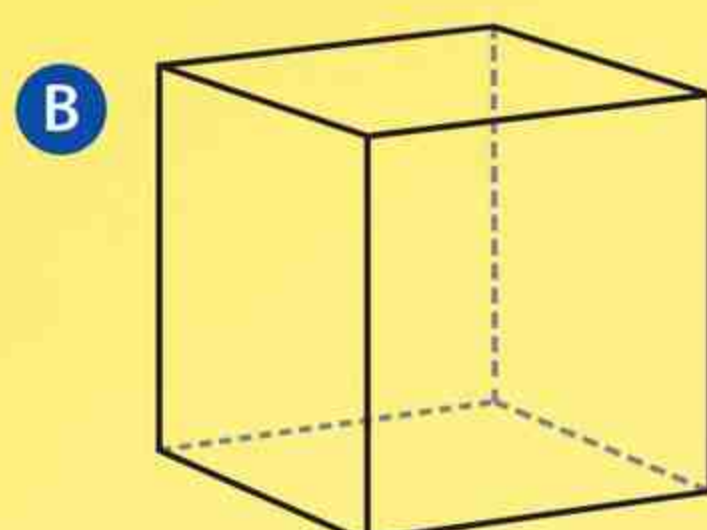
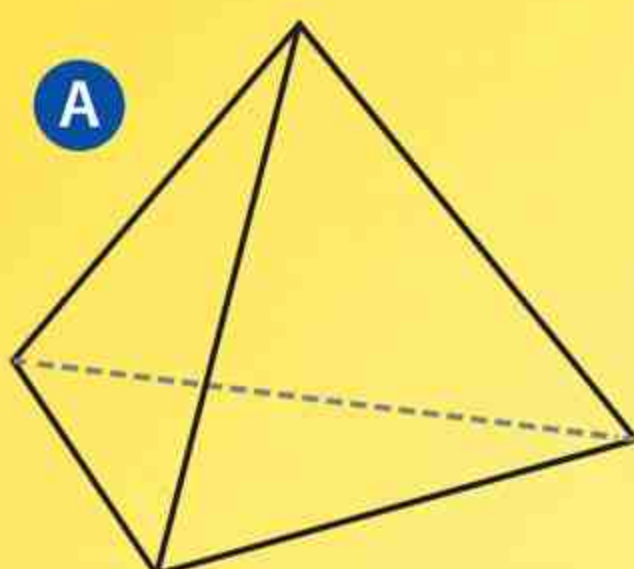
- I Podaj w m^2 pole powierzchni prostokątnej podłogi o wymiarach $450 \text{ cm} \times 350 \text{ cm}$.
- II Działka ma powierzchnię 2500 m^2 . Ile to arów? A ile hektarów?
- III Ile litrów wody mieści się w prostopadłościennym akwarium, które ma wymiary $40 \text{ cm} \times 80 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$? W obliczeniach nie uwzględniaj grubości szkła.
- IV Oblicz.

$$4 - 2\frac{1}{4} : 1,8 + 2,75 - 2\frac{2}{3} \cdot 0,9$$

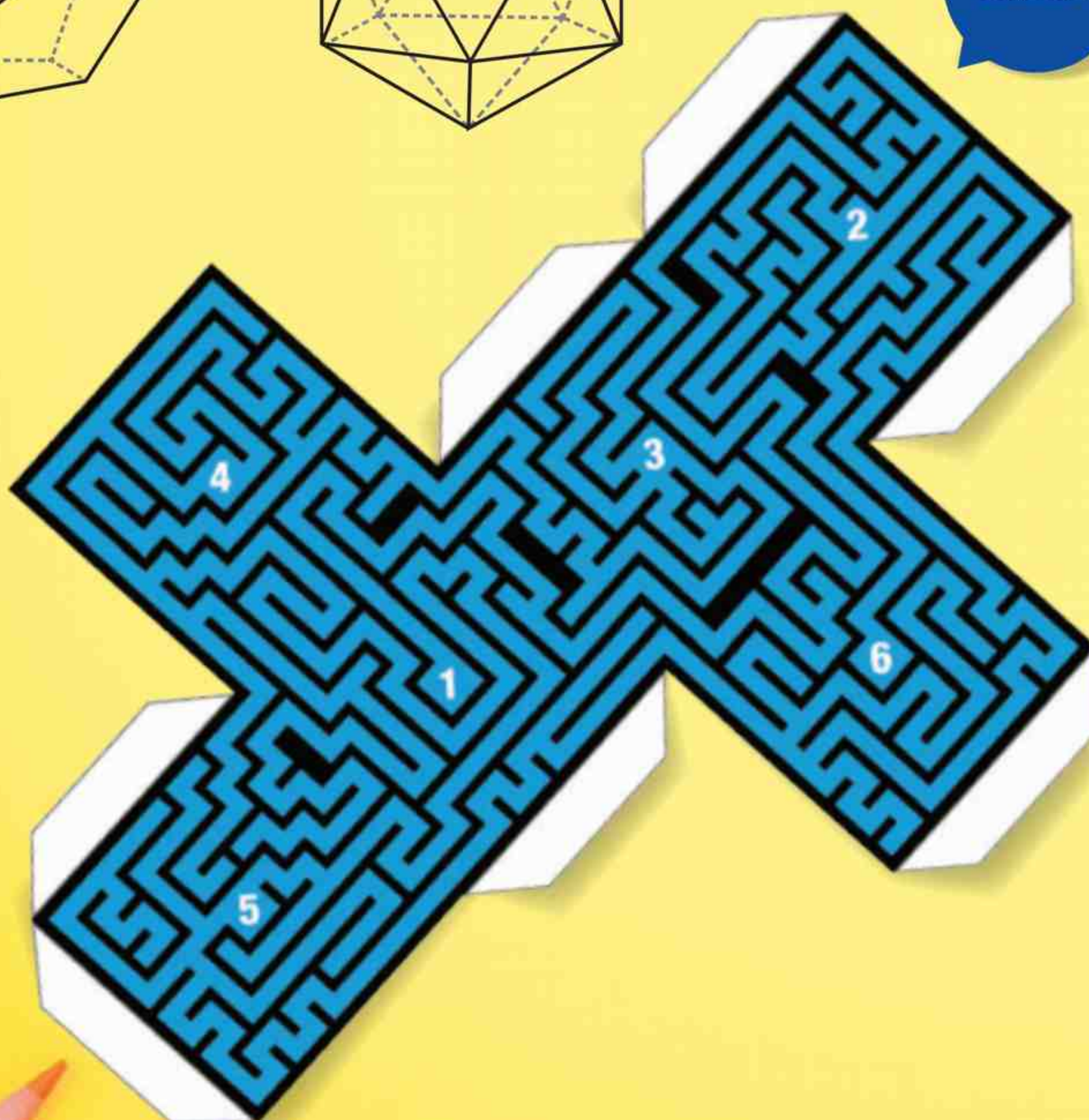


  Na dobry początek

Labirynt na bryle

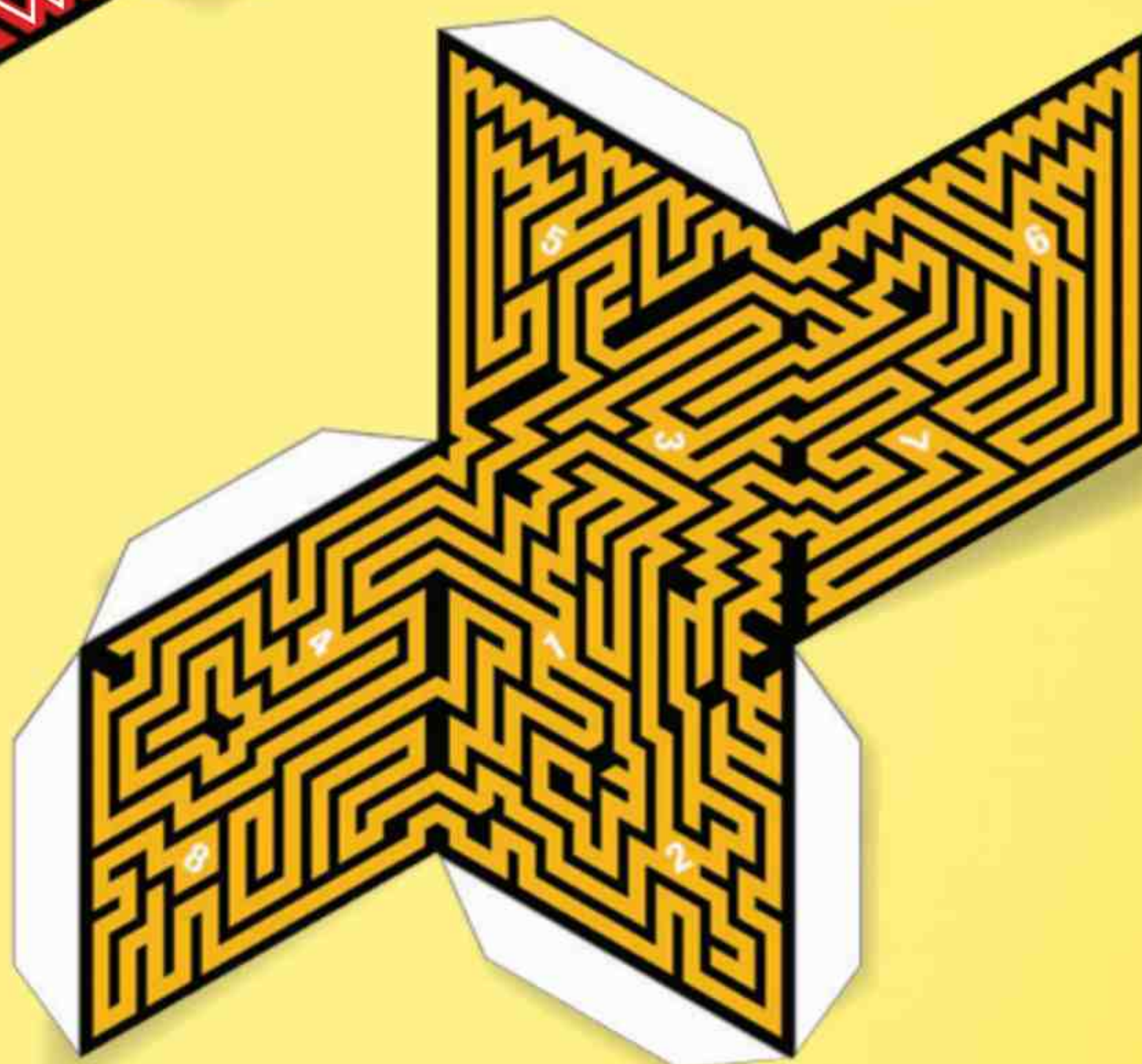


siatka I





siatka II

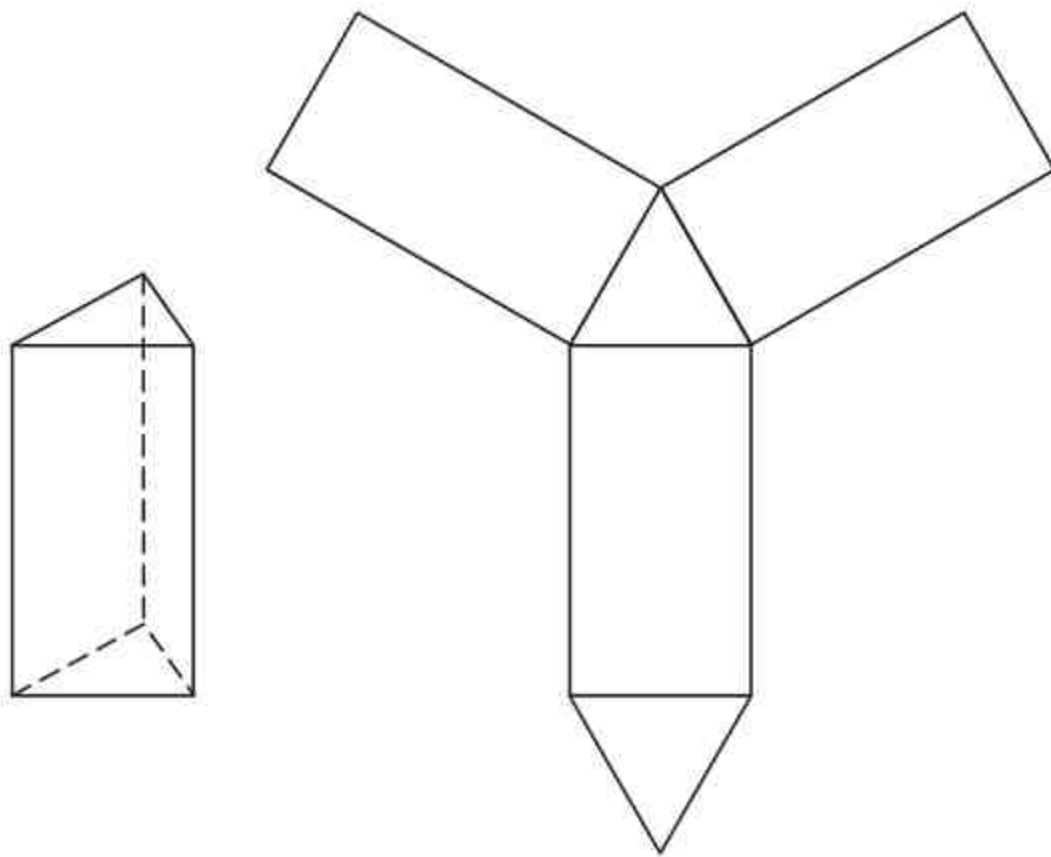


siatka III

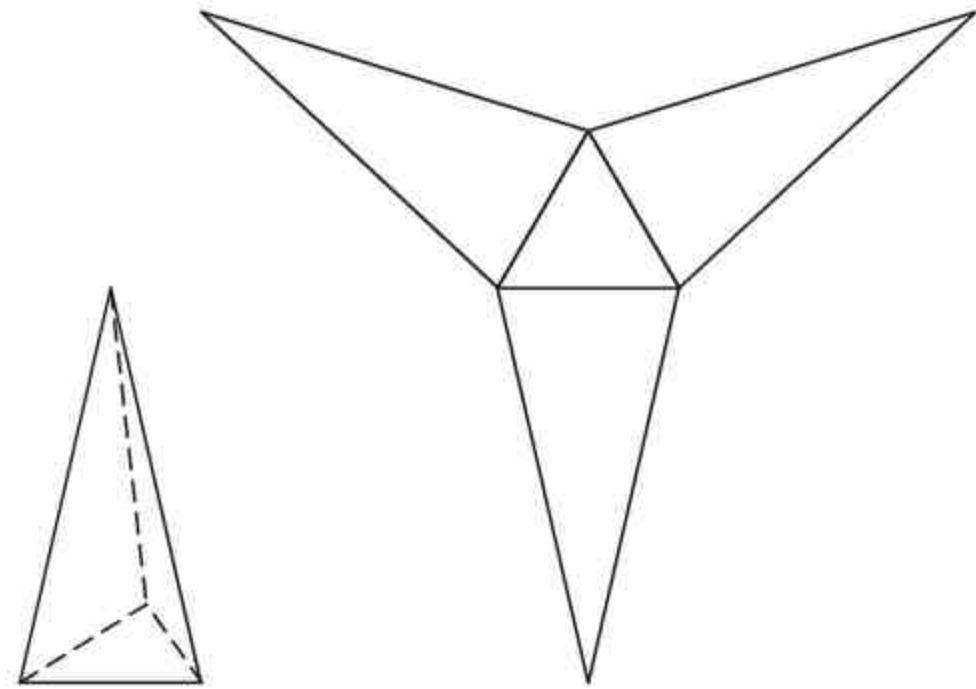
Pytania i polecenia

- Przyjrzyj się narysowanym siatkom i dopasuj do każdej z nich jedną bryłę spośród oznaczonych literami od A–E.
- Na każdej z siatek narysowano labirynt, w którym droga zaczyna się w polu oznaczonym liczbą 1, a potem przechodzi przez pola z kolejnymi liczbami. Taką drogę pokazano na siatce II. Przez ile ścian bryły przechodzi ta droga? Ile razy przecina krawędzie bryły?

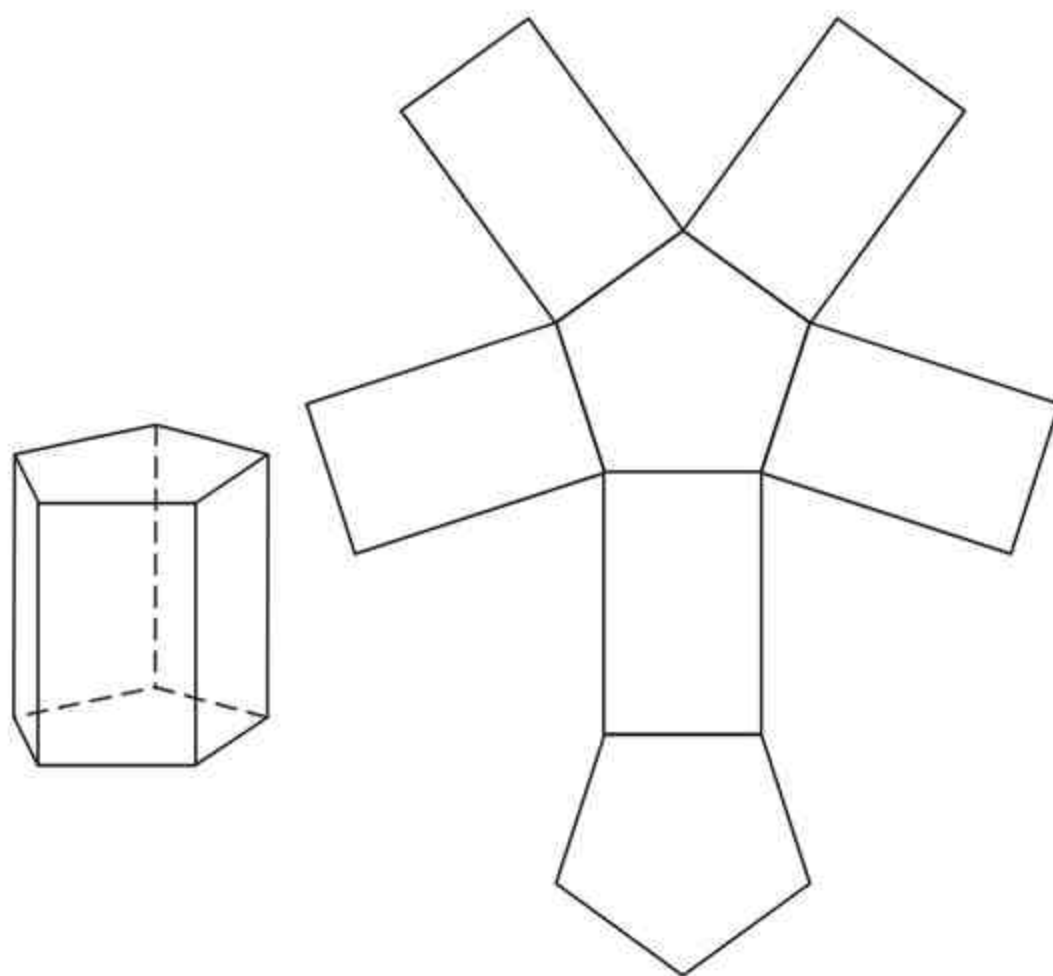
Oto kilka przykładowych graniastosłupów i ostrosłupów oraz ich siatek.



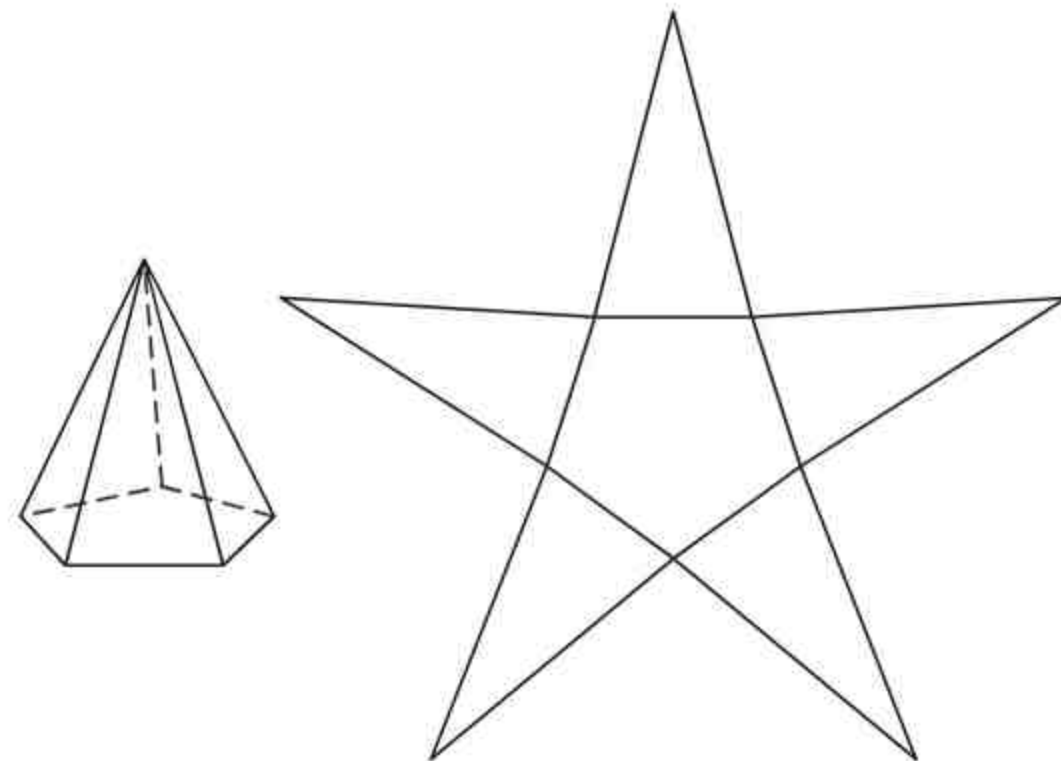
graniastosłup
o podstawie w kształcie
trójkąta równobocznego



ostrosłup
o podstawie w kształcie
trójkąta równobocznego



graniastosłup
o podstawie pięciokątnej



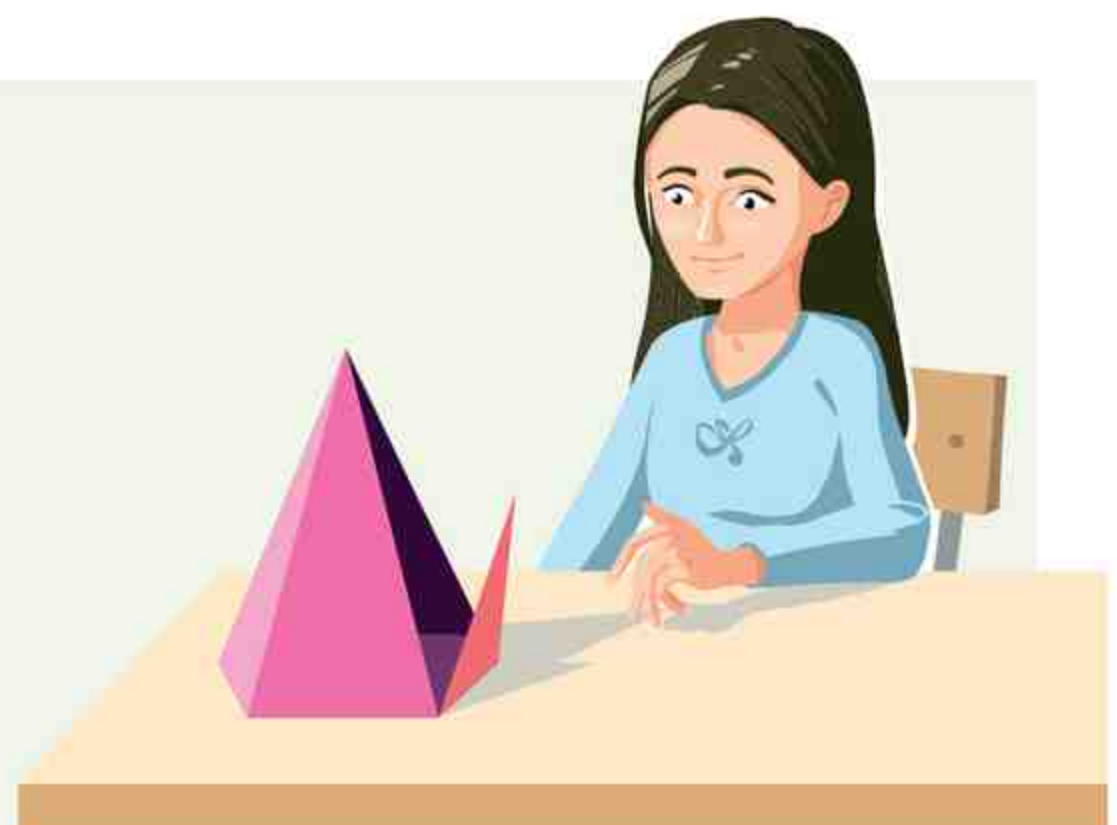
ostrosłup
o podstawie pięciokątnej

Dobra rada

Kiedy rysujesz siatki brył, zawsze sprawdzaj, czy:

- na rysunku masz odpowiednią liczbę podstaw,
- na rysunku jest właściwa liczba ścian bocznych,
- krawędzie, które się sklejają, mają tę samą długość.

Pamiętaj, że podstawy graniastosłupa są identyczne.

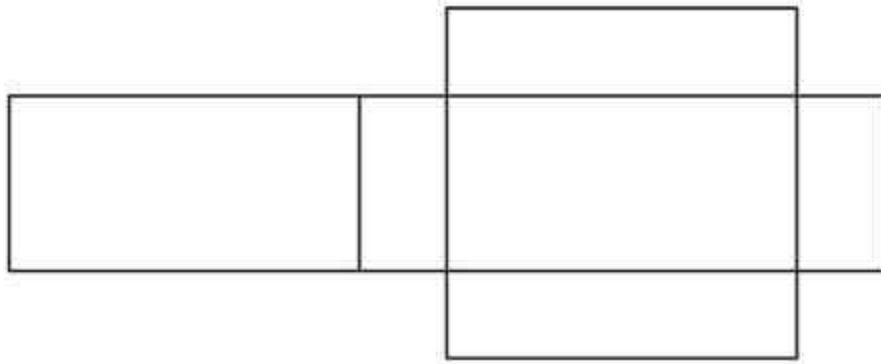




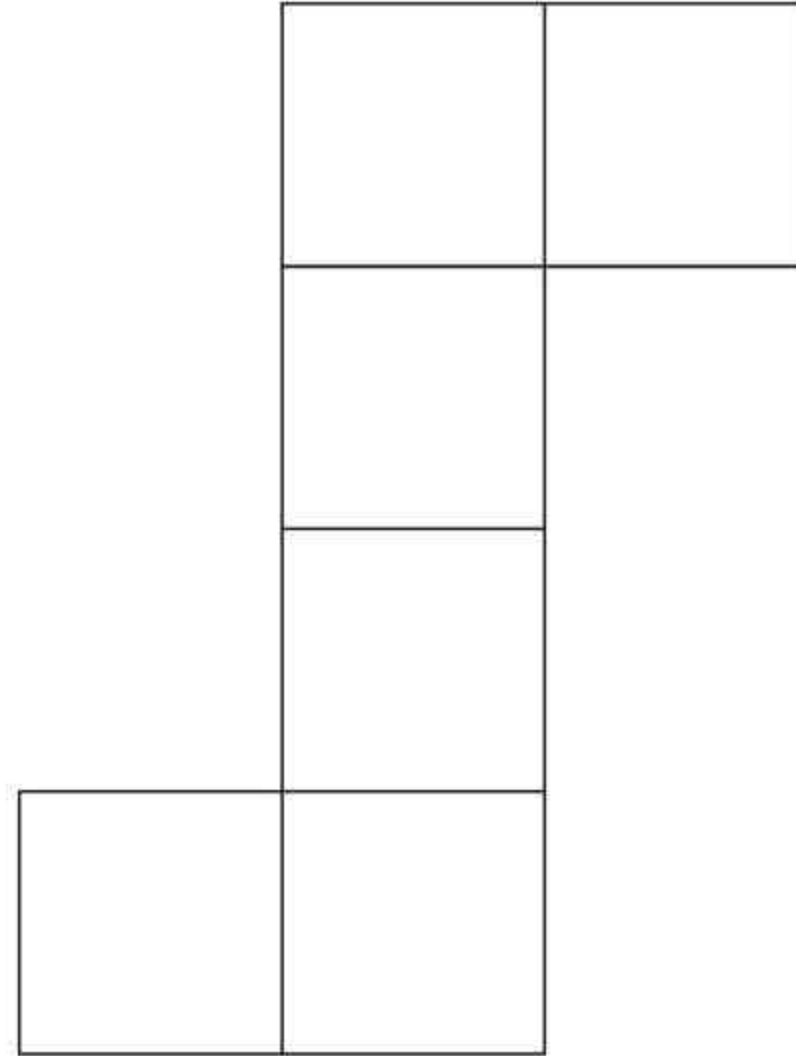
Zadania

- 1 Na rysunku przedstawiono siatkę prostopadłościanu naturalnej wielkości. Zmierz i podaj wszystkie trzy wymiary prostopadłościanu.

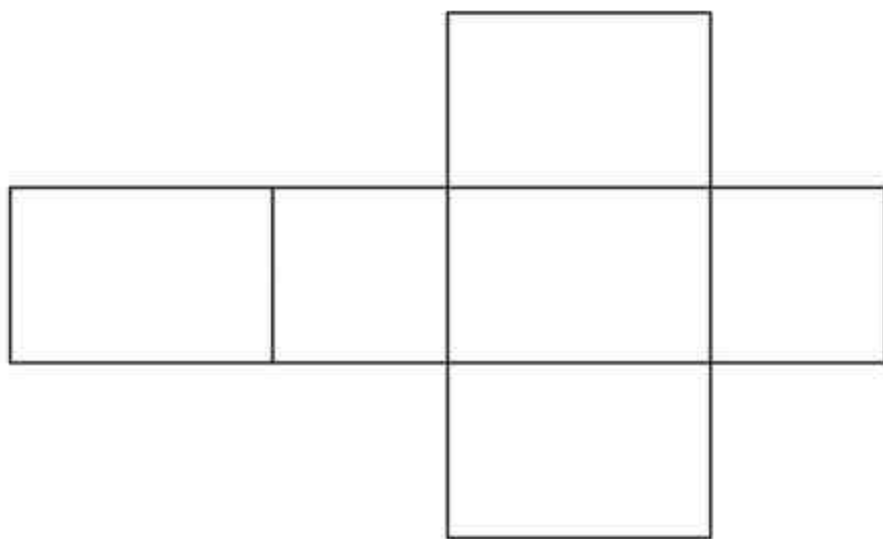
a)



c)

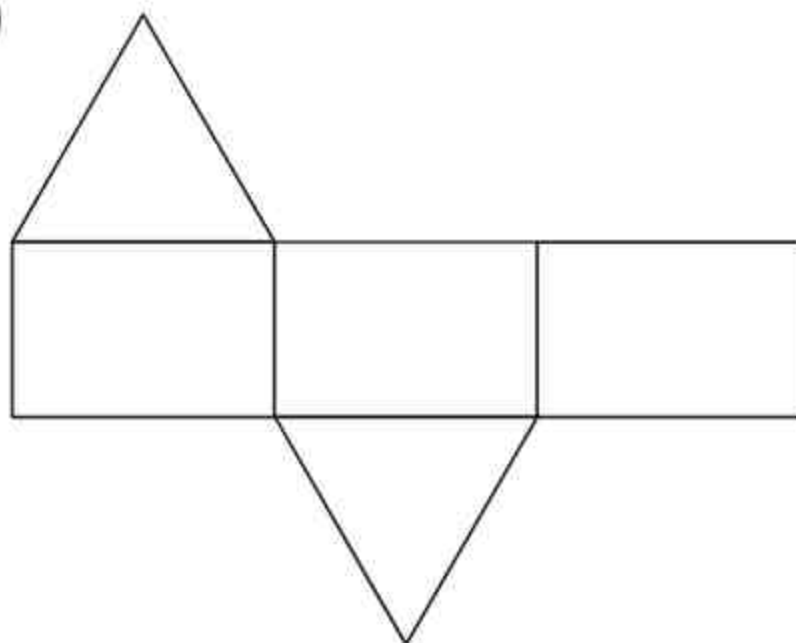


b)

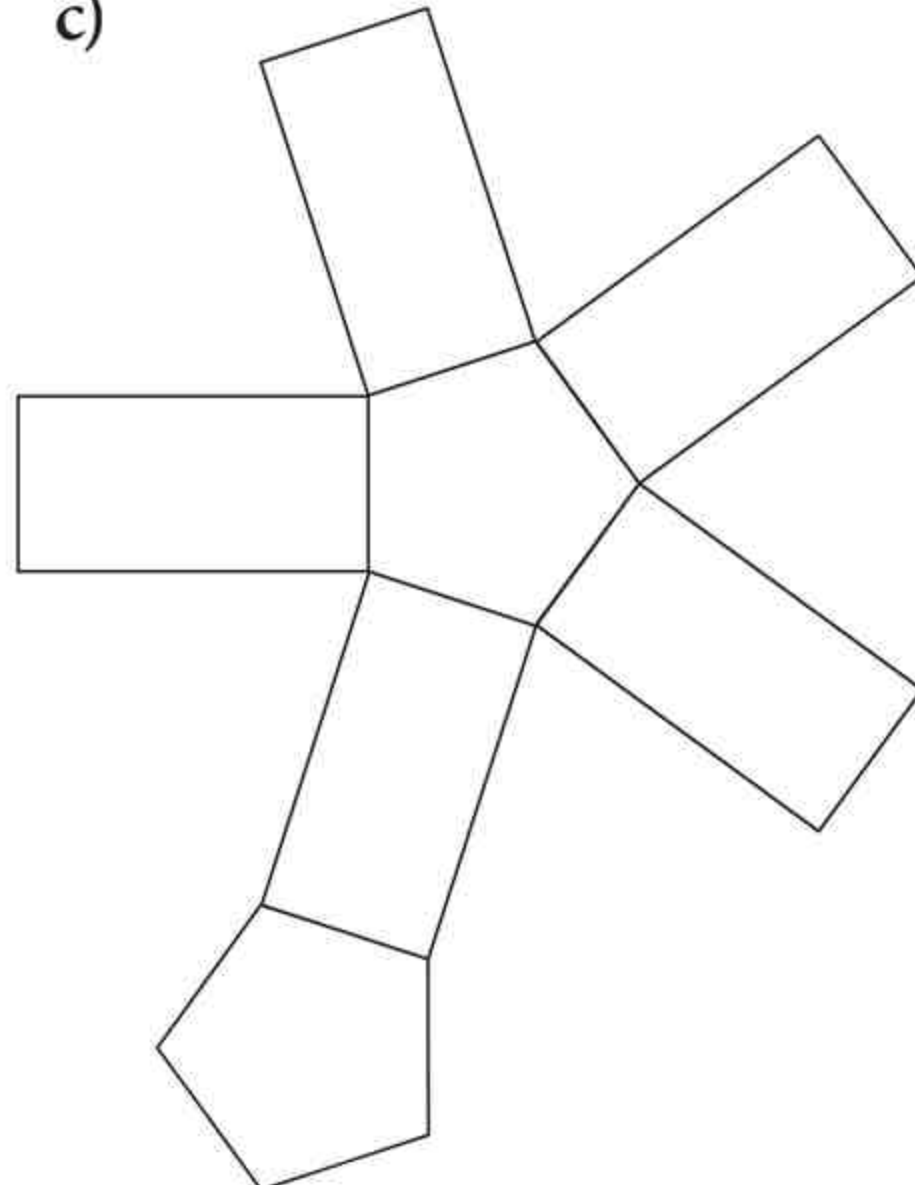


- 2 Na rysunku przedstawiono siatkę graniastosłupa naturalnej wielkości. Jaki to graniastosłup? Zmierz na siatce i zapisz w zeszycie jego wysokość oraz długości krawędzi podstawy.

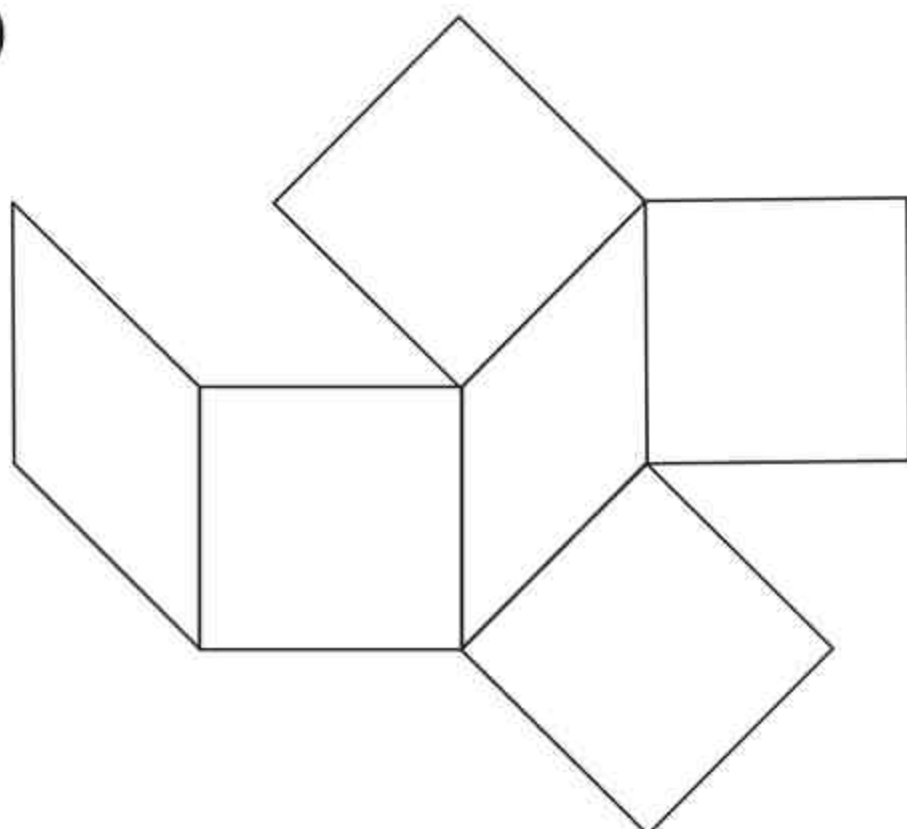
a)



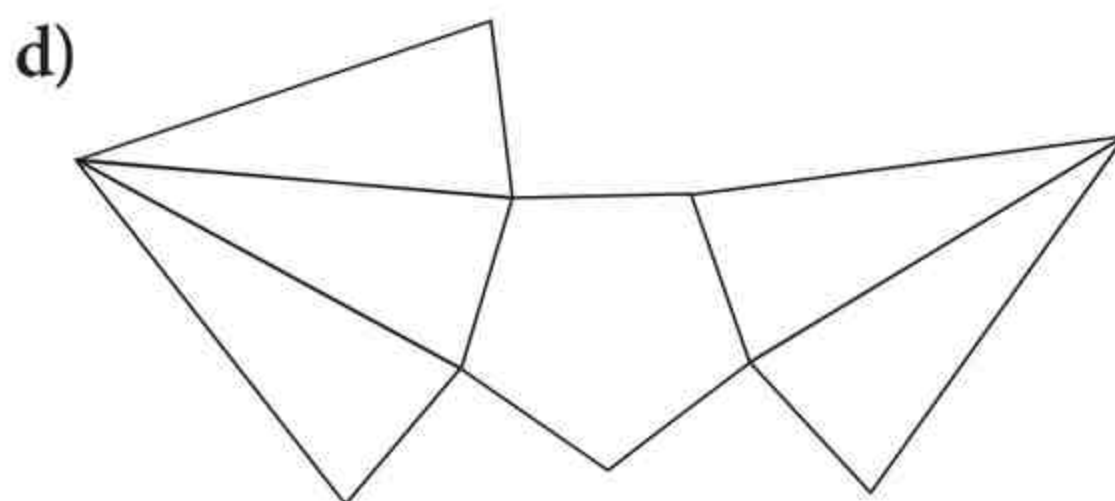
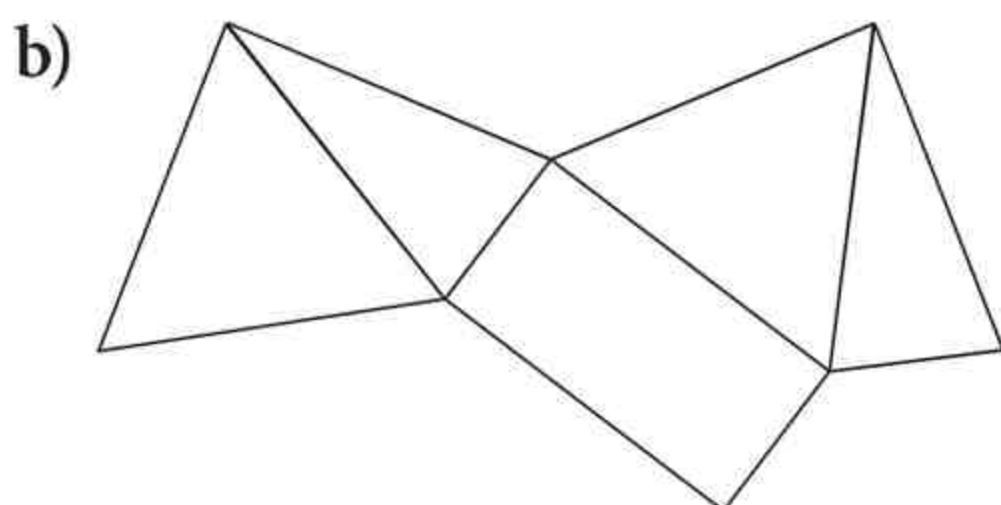
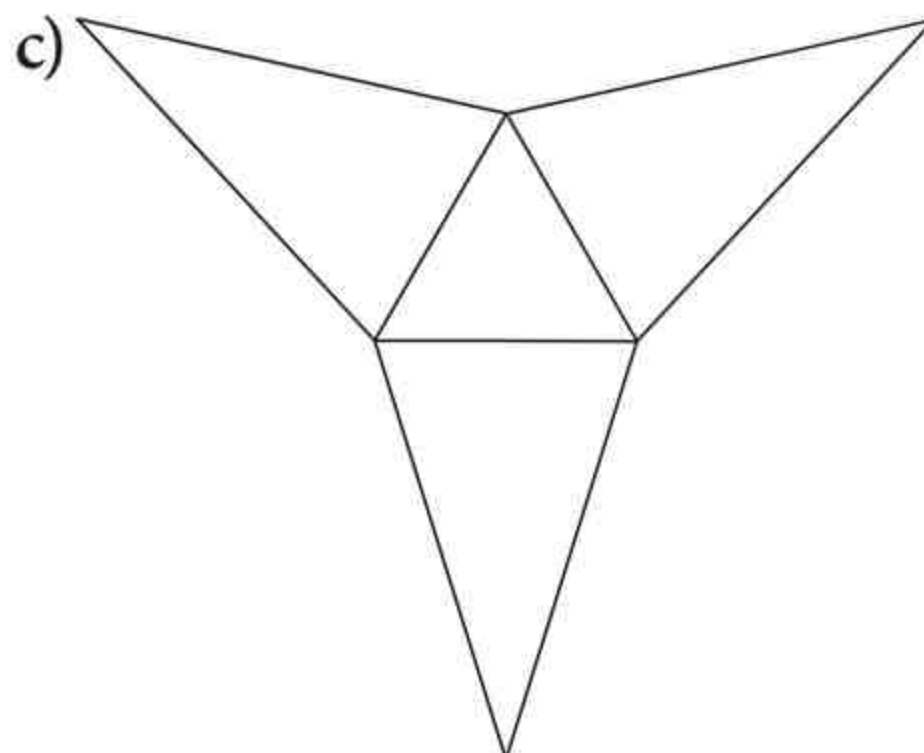
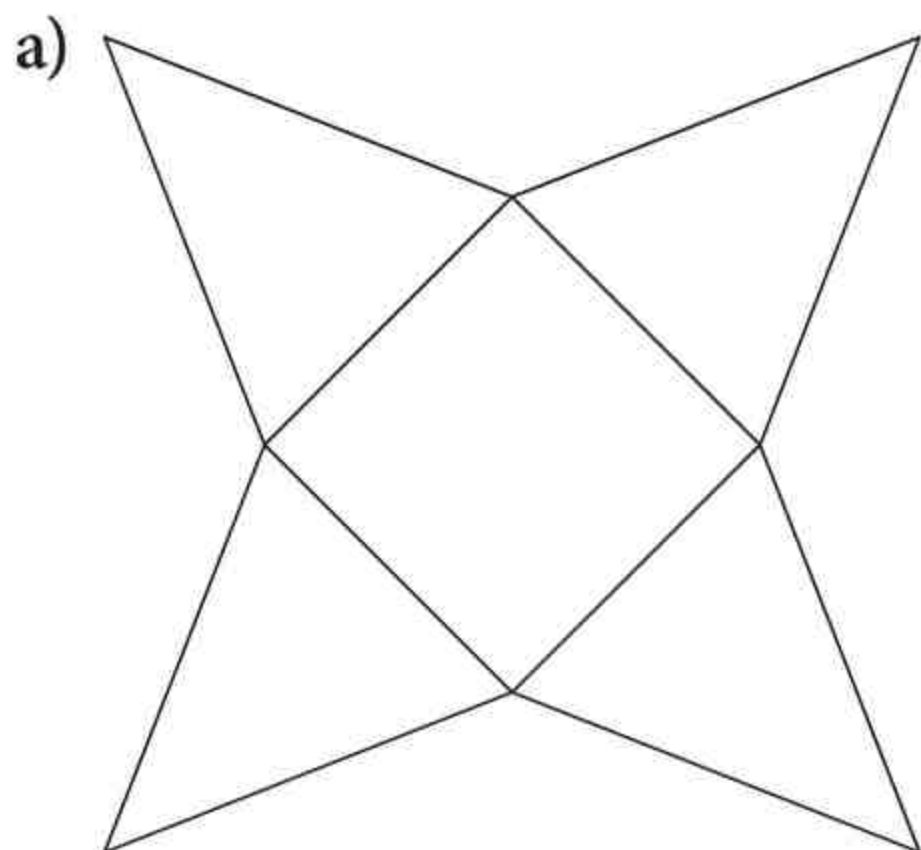
c)



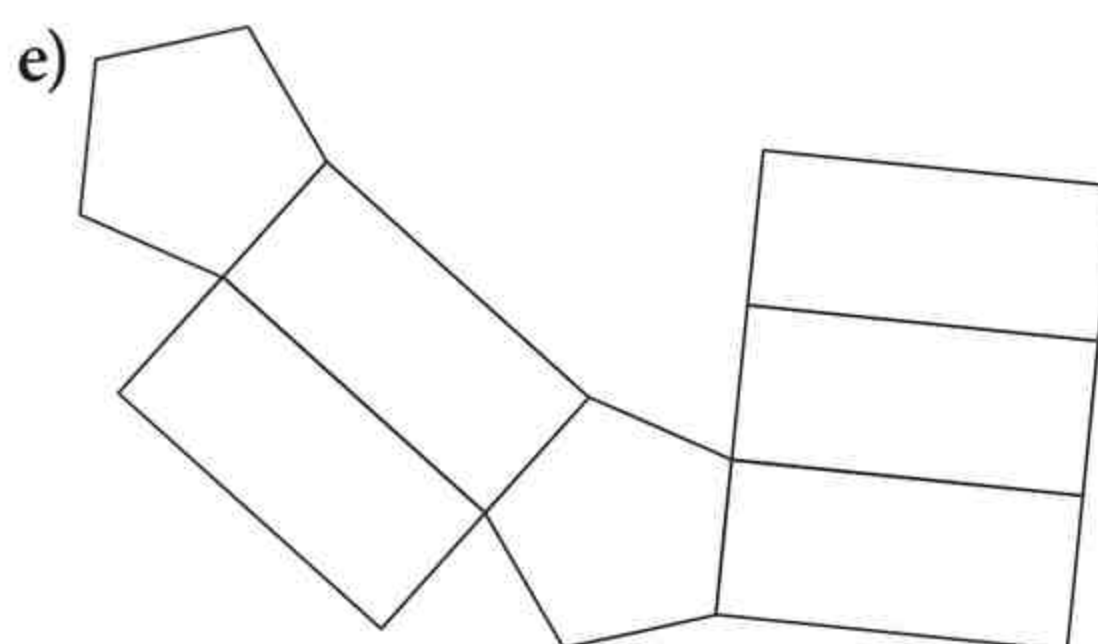
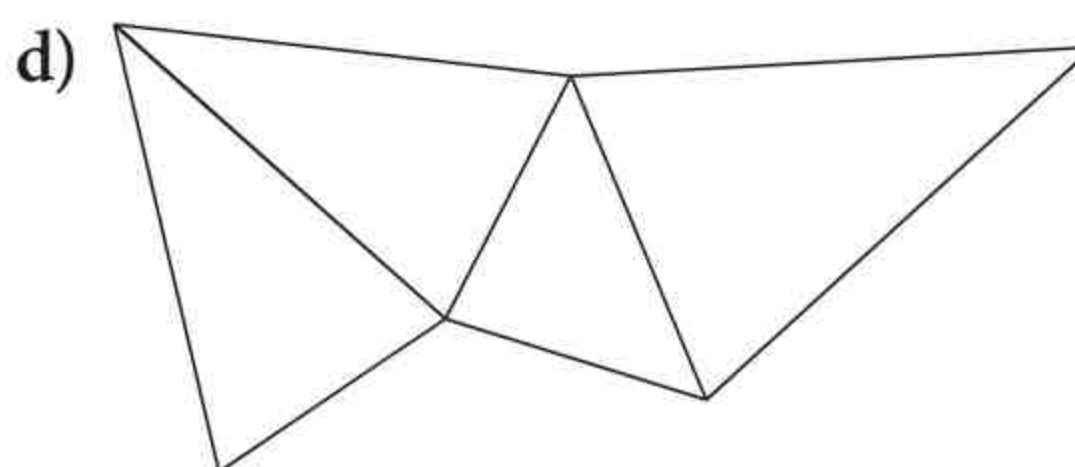
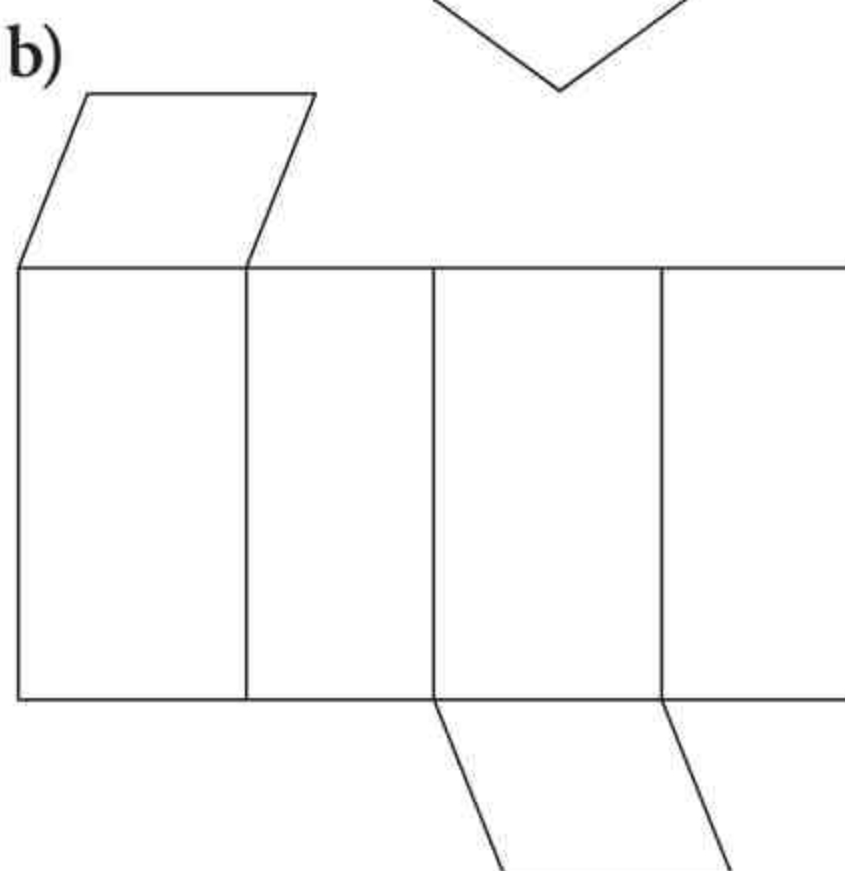
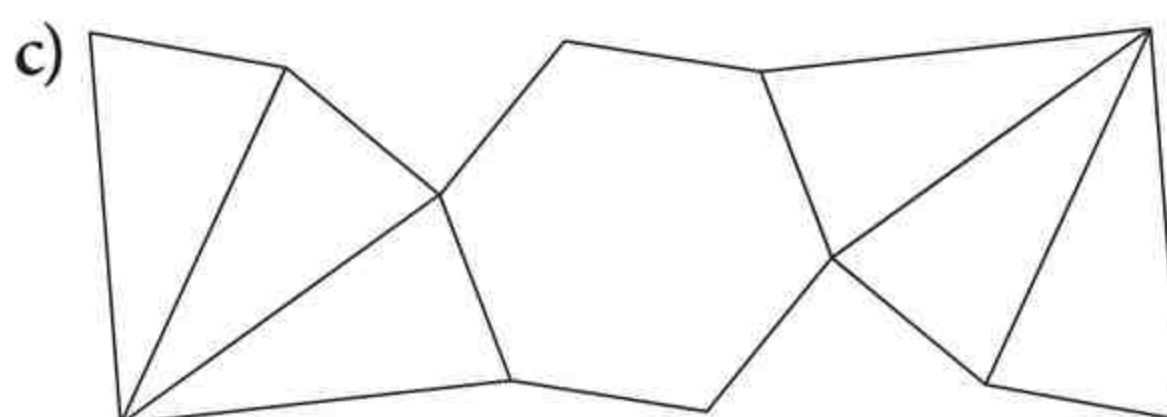
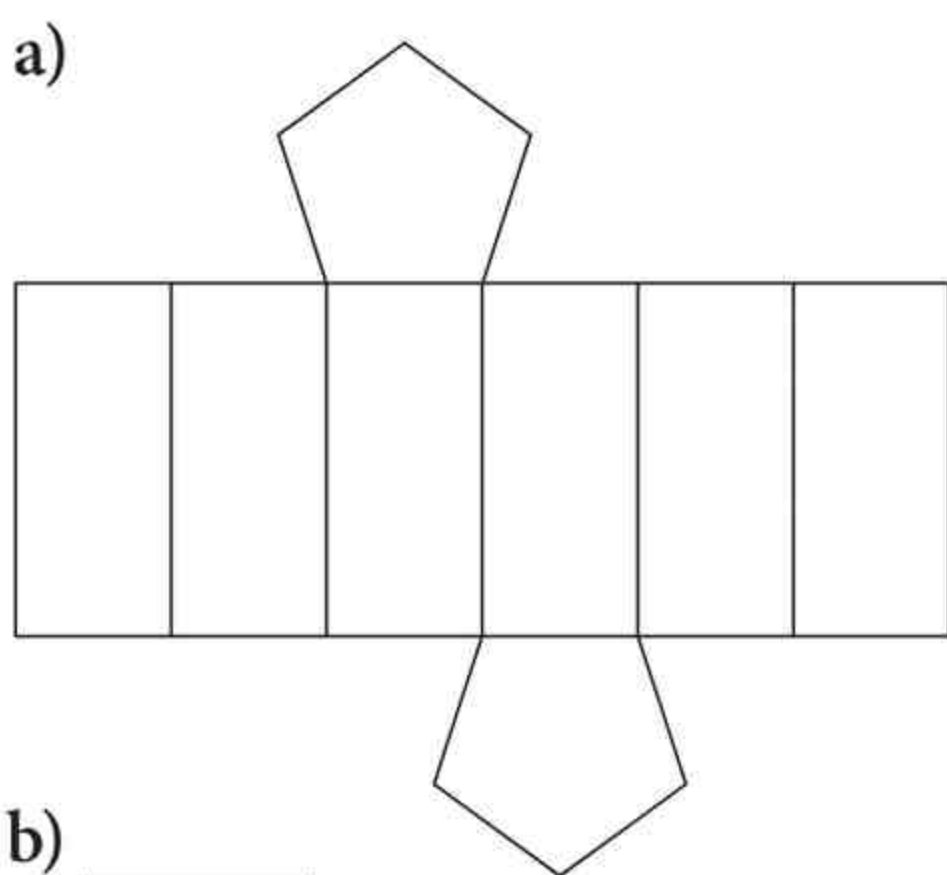
b)



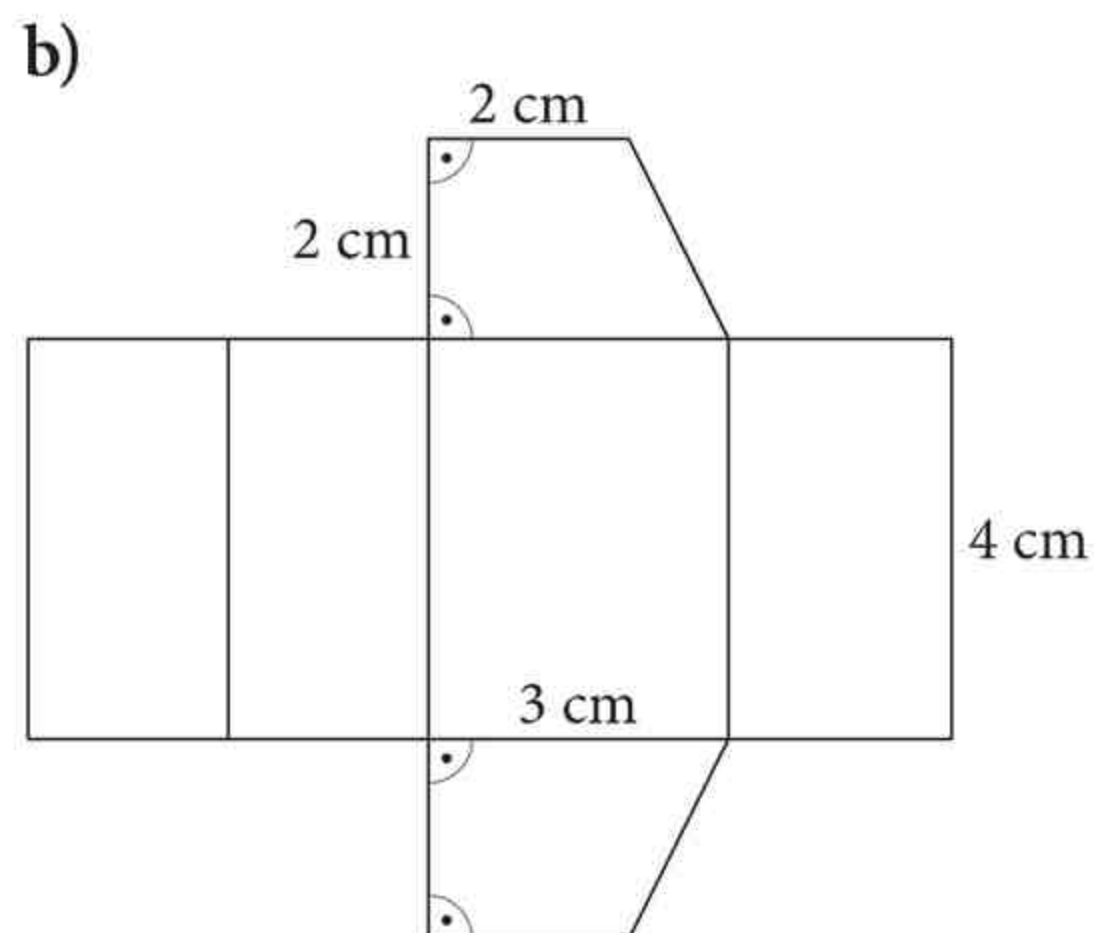
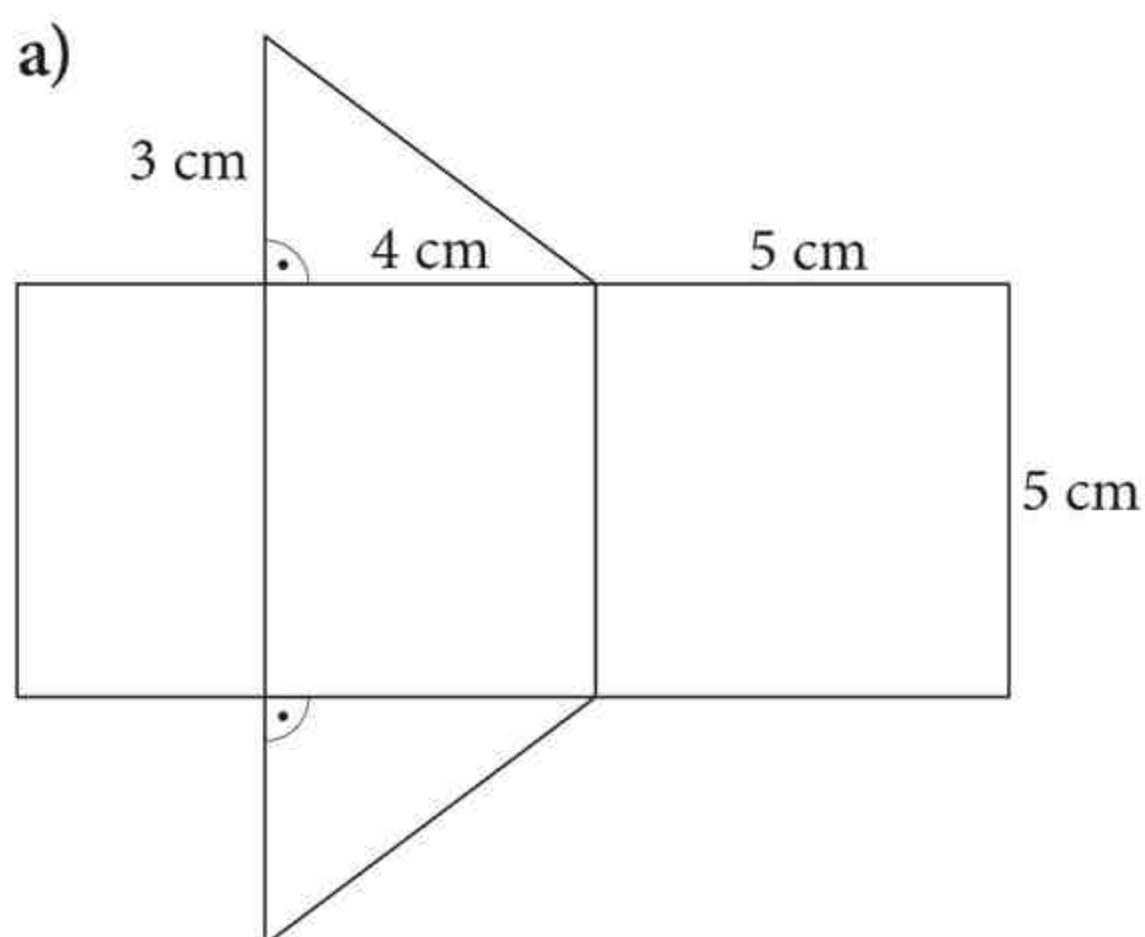
- **3** Rysunek przedstawia siatkę ostrosłupa naturalnej wielkości. Zmierz długości krawędzi podstawy oraz długość krawędzi bocznej. Narysuj ten ostrosłup w zeszycie i zapisz jego wymiary.



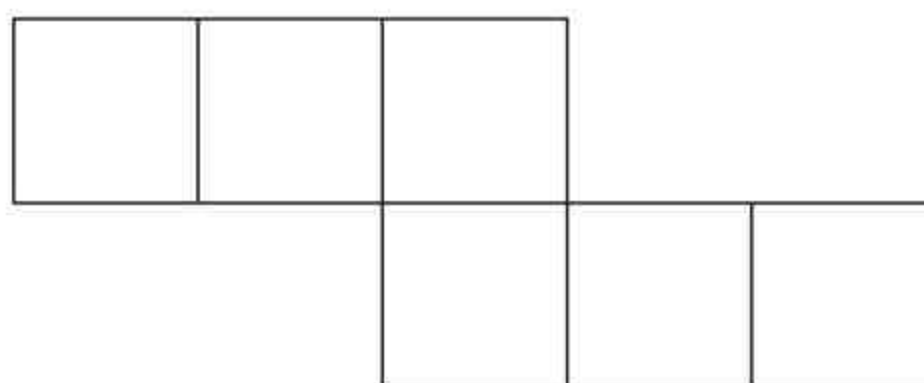
- **4** Czy rysunek przedstawia siatkę bryły? Jeśli tak – powiedz, jaka to bryła, i ją narysuj. Jeśli nie – uzasadnij, że nie jest to siatka.



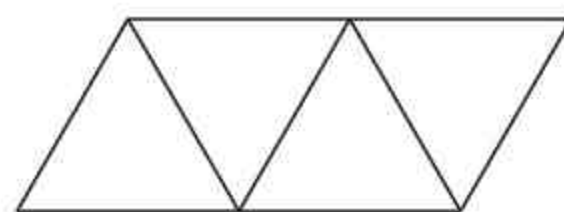
- **5** Narysuj siatkę graniastosłupa prostego o wysokości 2 cm, którego podstawą jest równoległobok o bokach 3 cm i 5 cm.
- **6** Oblicz objętość bryły, której siatkę przedstawiono na rysunku.



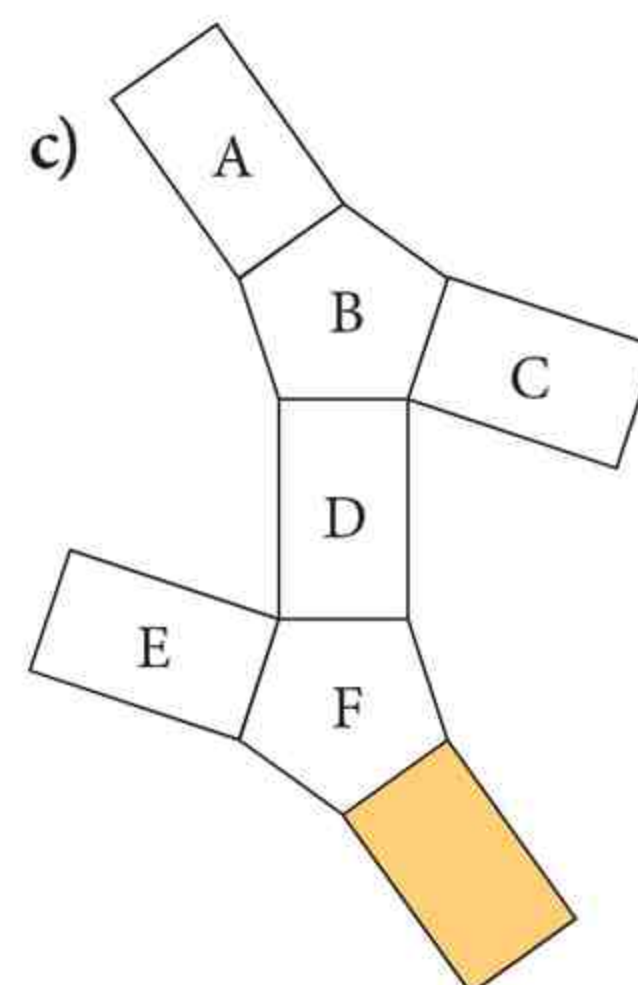
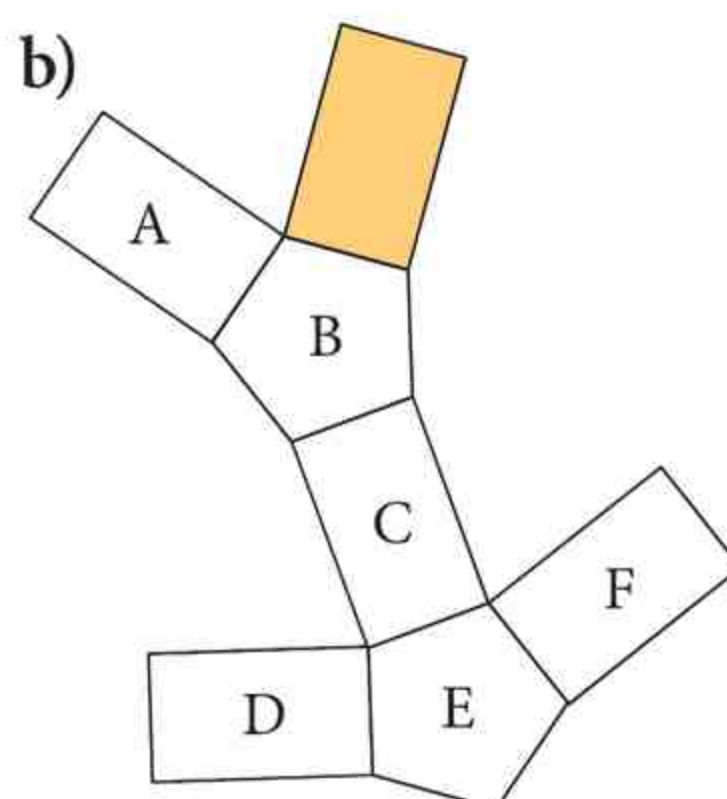
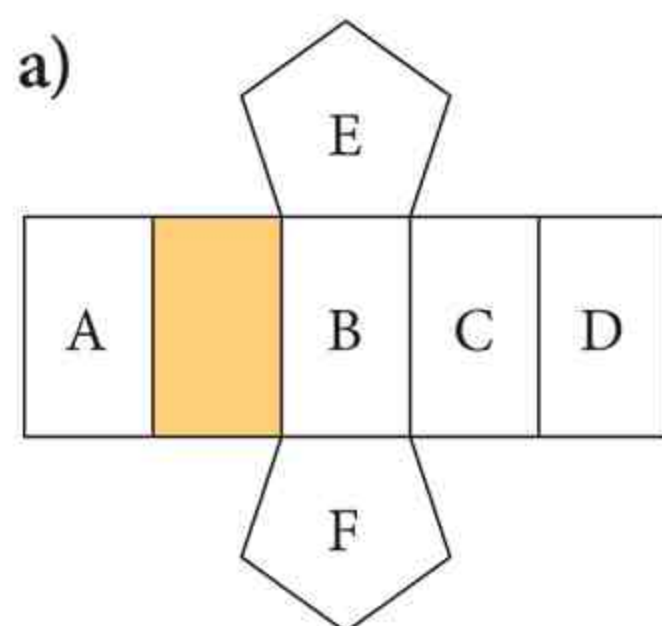
- **7** a) Czy rysunek przedstawia siatkę graniastosłupa? Jeśli tak – napisz, jaki to graniastosłup, jeśli nie – wyjaśnij dlaczego.



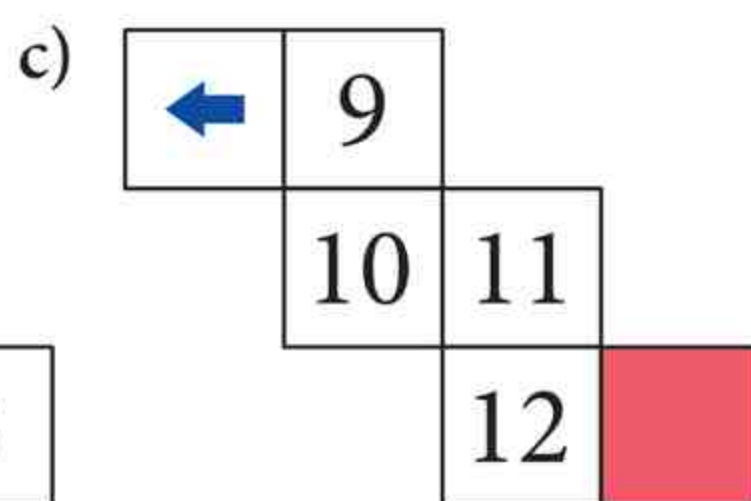
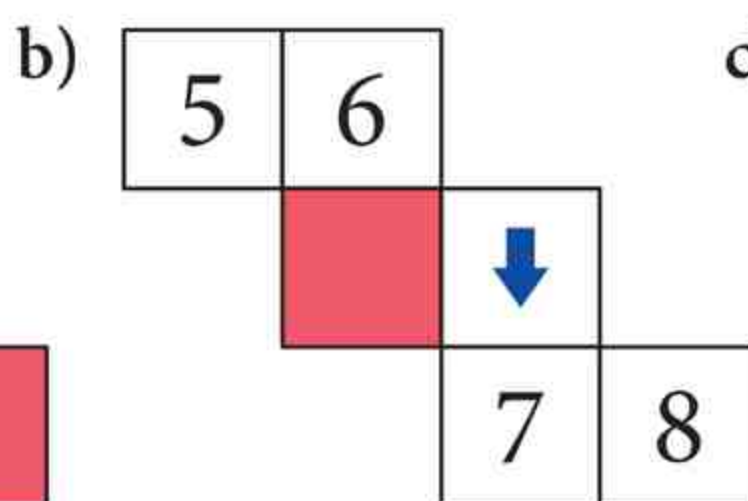
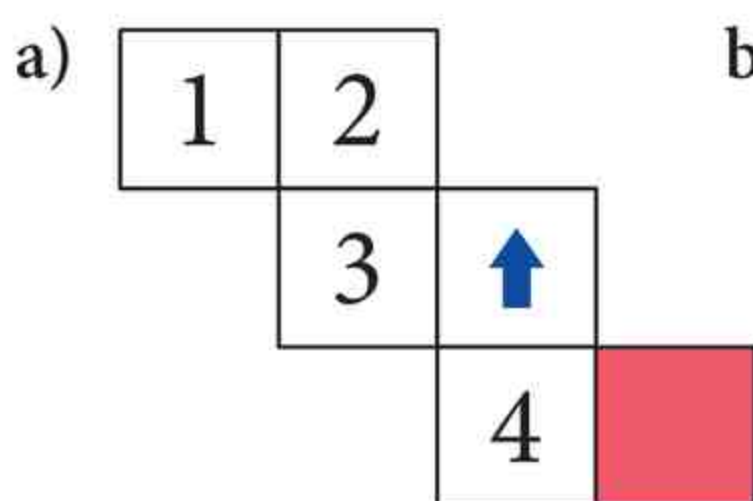
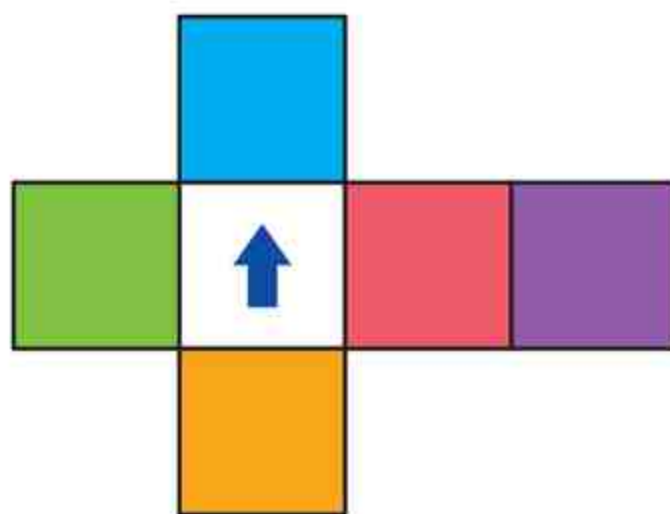
- b) Czy rysunek przedstawia siatkę ostrosłupa? Jeśli tak – napisz, jaki to ostrosłup, jeśli nie – wyjaśnij dlaczego.



- 🏆 **8** Przyjrzyj się siatce graniastosłupa o podstawie pięciokątnej. Które ściany sąsiadują ze ścianą pomarańczową?

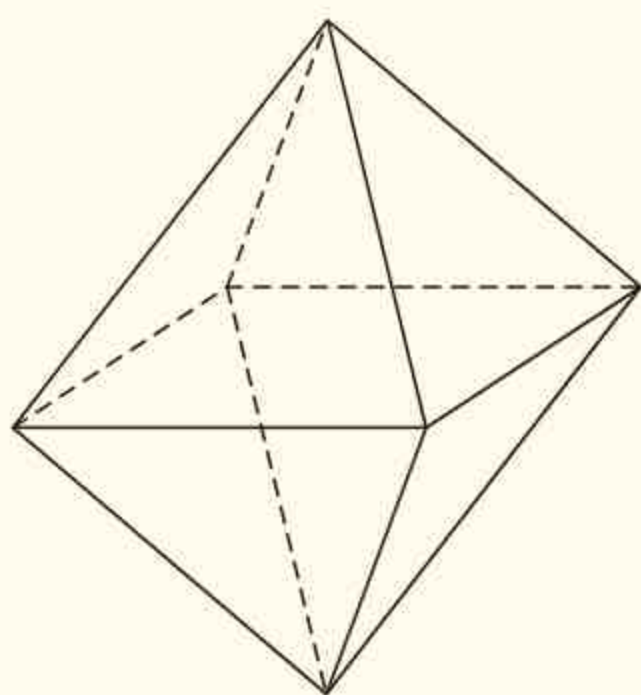


- 9** Na rysunku przedstawiono siatkę pewnego sześciianu. Jakie kolory powinny mieć ściany oznaczone liczbami, aby była to siatka tak samo pokolorowanej bryły?

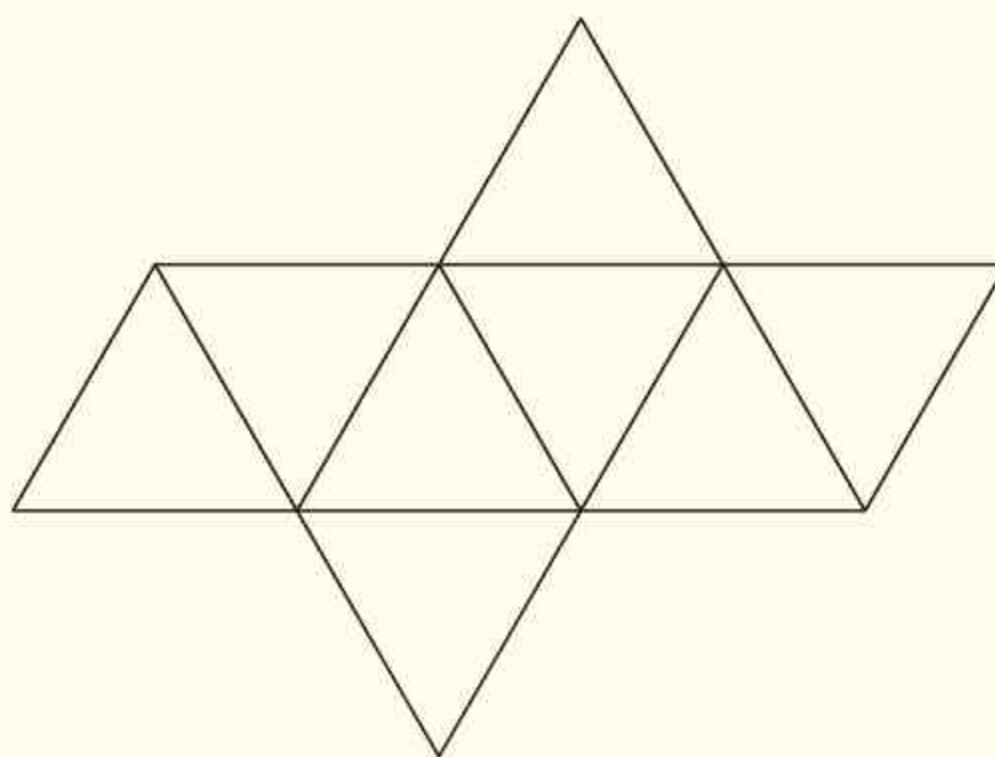


Dla dociekliwych

- 1** Oto ośmiościan foremny i jego przykładowa siatka. Przerysuj siatkę na sztywną kartkę, dorysuj „skrzydełka”, wytnij i sklej model.

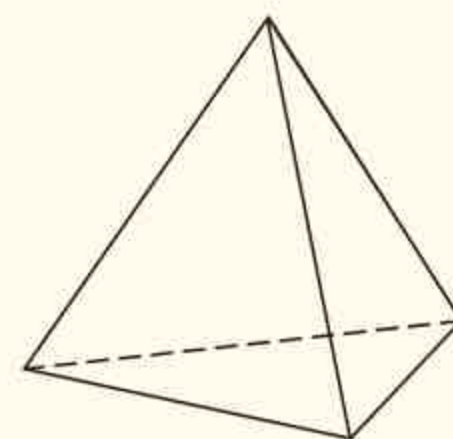


ośmiościan foremny



Podręcznik
cz. 2, s. 112
Bryły i ich objętość

- 2** Spróbuj zaprojektować inne siatki ośmiościanu foremnego. Wytnij jedną z nich i sprawdź, czy uda ci się skleić z niej bryłę. Pamiętaj o dorysowaniu „skrzydełek”.
- 3** Ułóż z trójkątów równobocznych dwie różne siatki czworościanu foremnego. Narysuj siatki na sztywnej kartce, wytnij je i sklej modele.



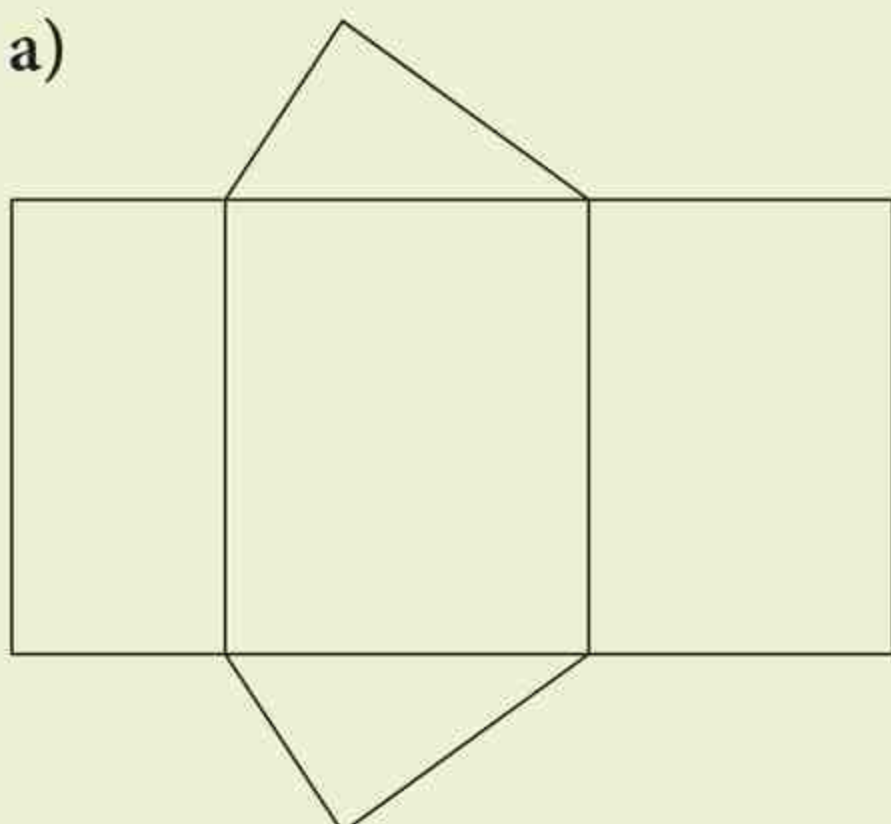
czworościan foremny



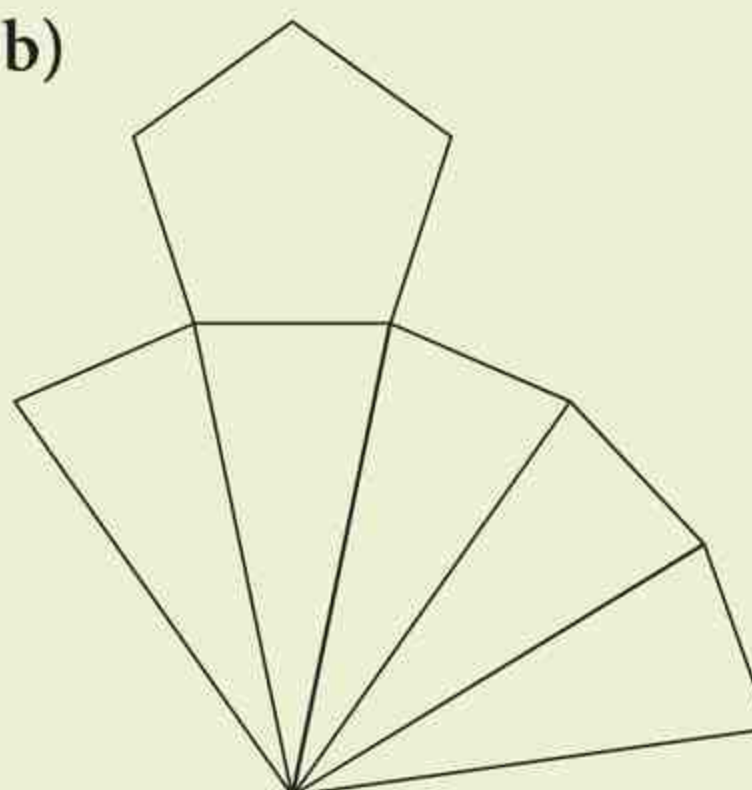
Czy już umiem?

I Na rysunku przedstawiono siatkę pewnej bryły. Jakiej?

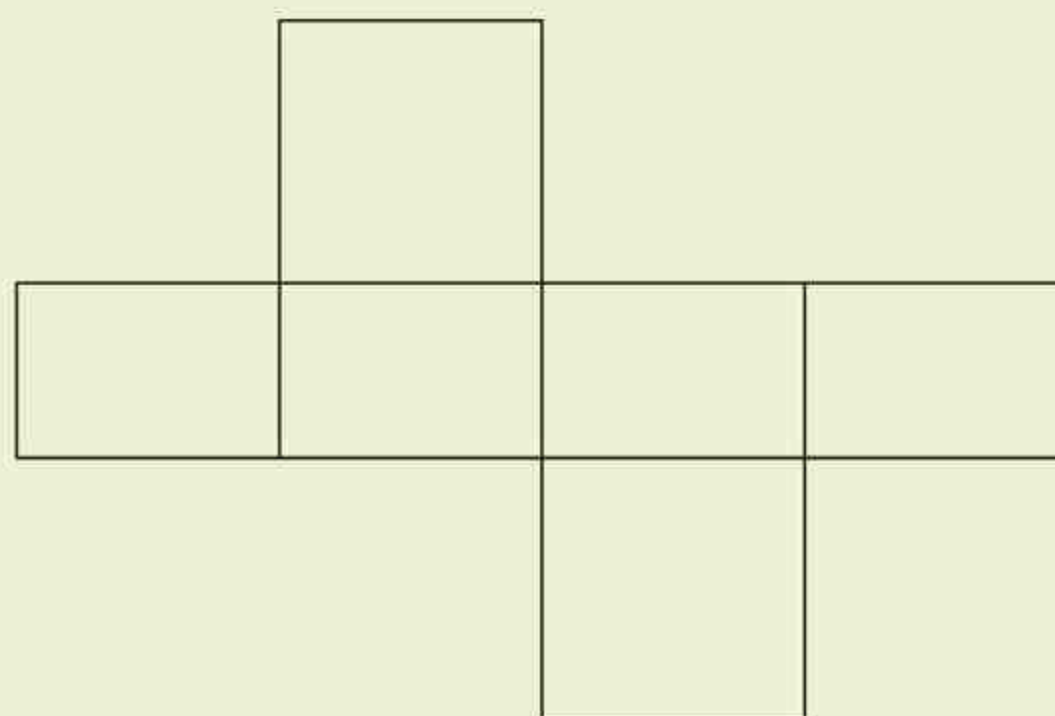
a)



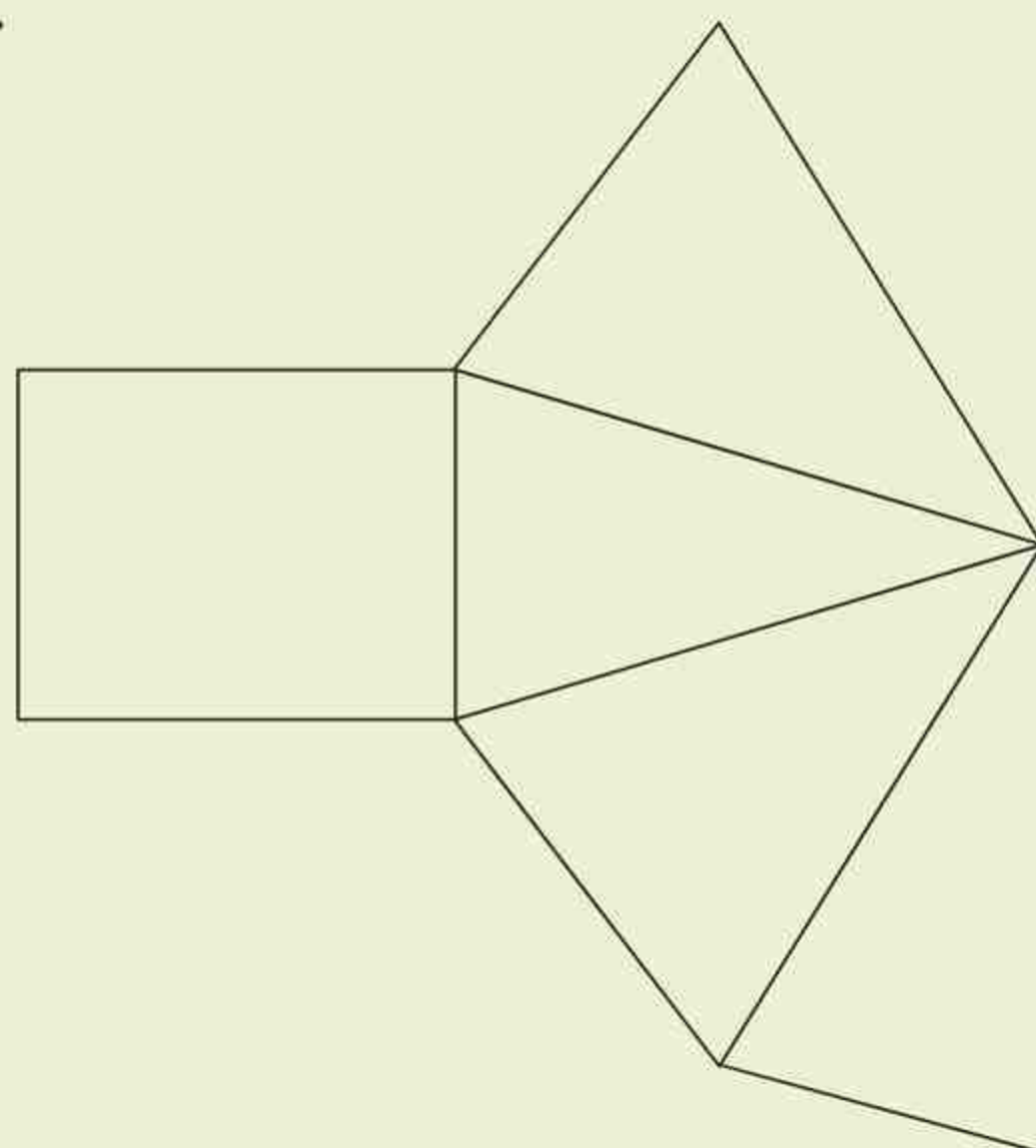
b)



II Jaka bryła powstanie po złożeniu narysowanej siatki? Zmierz długości jej krawędzi. Narysuj tę bryłę w zeszycie i zapisz wymiary.



III Jaka bryła powstanie po złożeniu narysowanej siatki? Narysuj tę bryłę, zmierz na siatce jej wymiary i zapisz na swoim rysunku długości krawędzi podstawy oraz krawędzi bocznych.



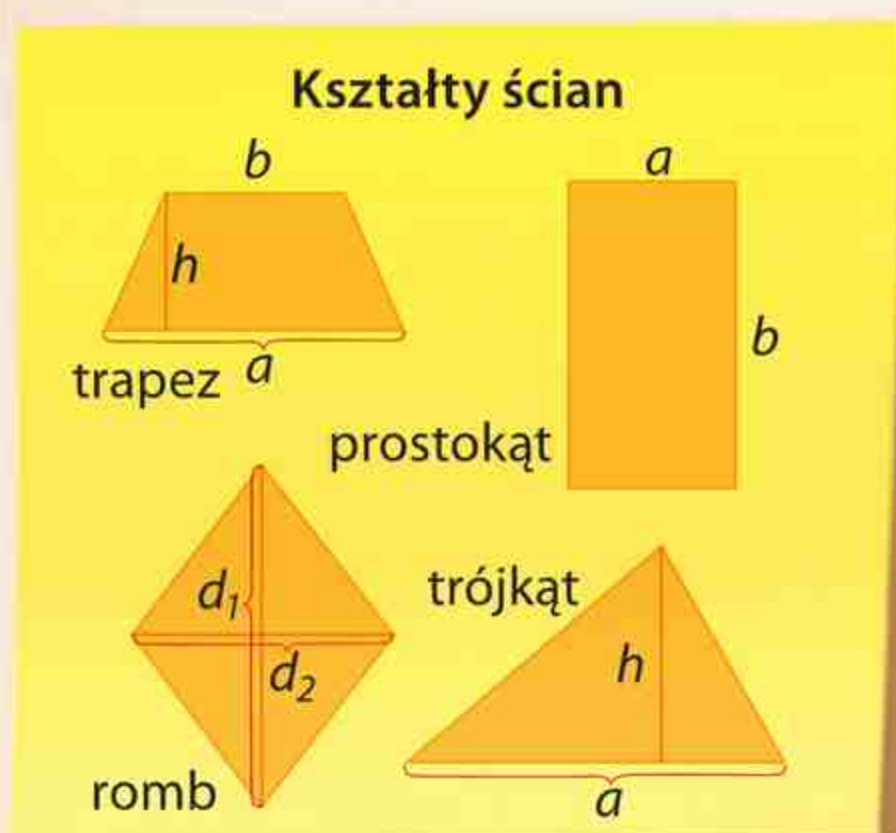
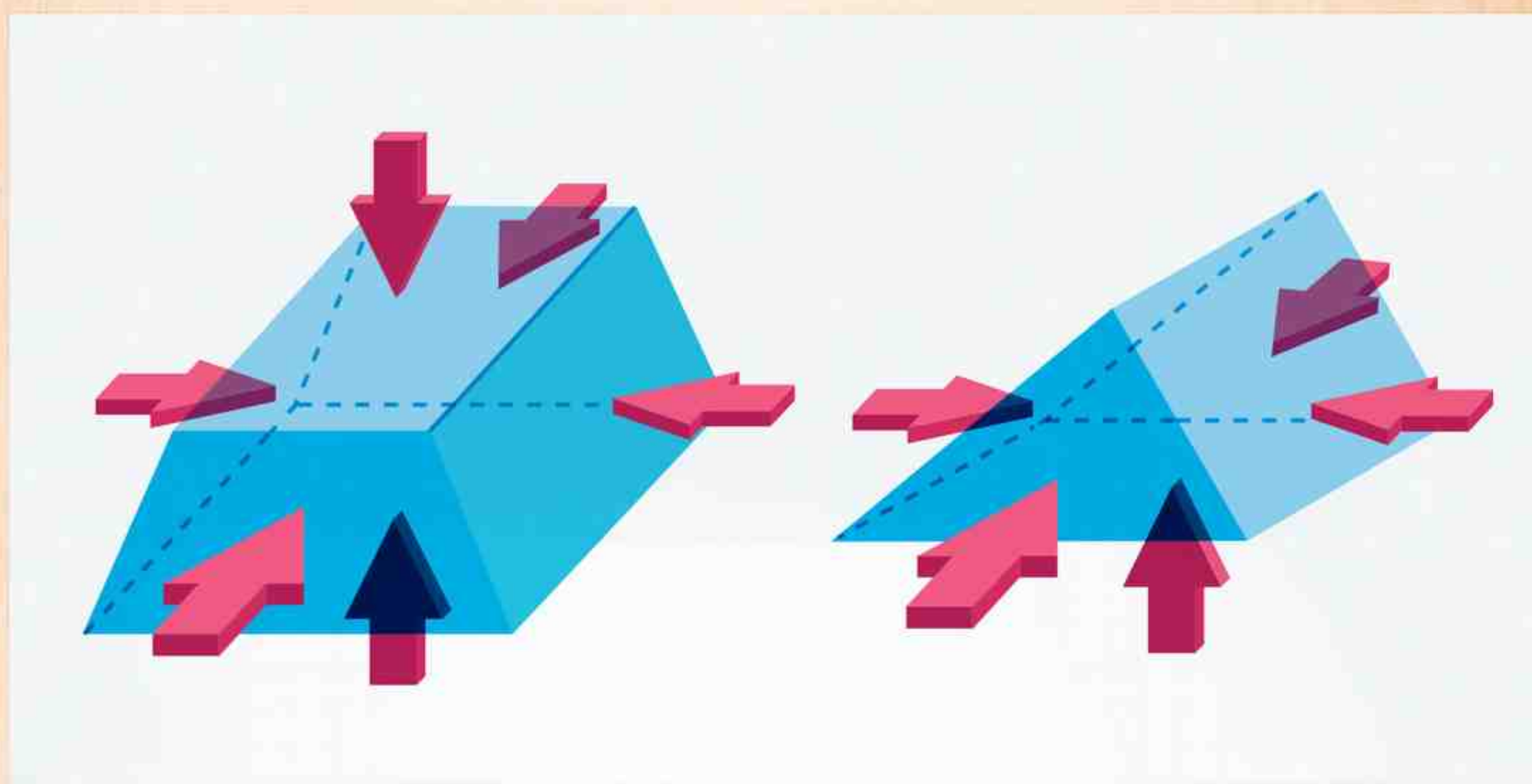
IV Oblicz.

$$2\frac{1}{3} - (-2\frac{1}{3}) : (-4\frac{2}{3}) \cdot \frac{7}{3} + (-\frac{5}{6}) - \frac{2}{3}$$

  Na dobry początek

Jaki to kształt?

Dobierzcie się w pary. Jedna osoba wskazuje na rysunku poniżej dowolną ścianę jednego z dwóch graniastosłupów. Druga osoba wybiera kształt tej ściany i odpowiedni wzór na pole. Następnie zamieńcie się rolami. Zagrajcie kilka razy.



Wzory na pola

$$P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h \quad P = a \cdot h$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \quad P = a \cdot b$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \quad P = d_1 \cdot d_2$$

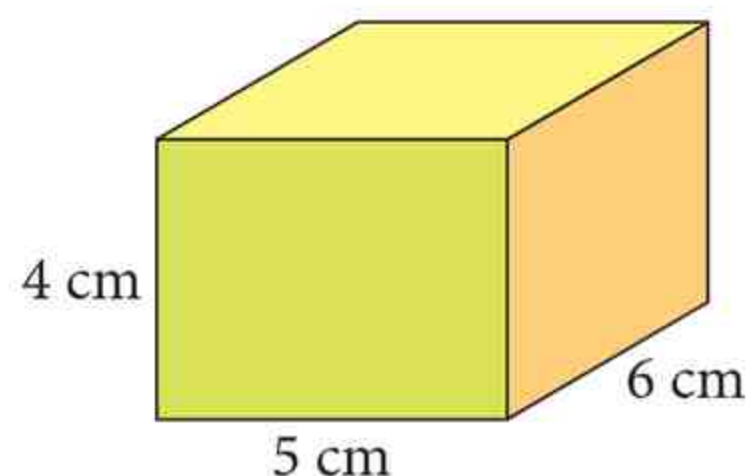
Pytania i polecenia

- Jaki kształt mają podstawy tych graniastosłupów?
Wskaż odpowiednie wzory na pola.
- Jaki kształt mają ściany boczne tych graniastosłupów?
Wskaż odpowiednie wzory na pola.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa lub ostrosłupa jest sumą pól wszystkich ścian. Można też powiedzieć, że jest to pole siatki bryły.

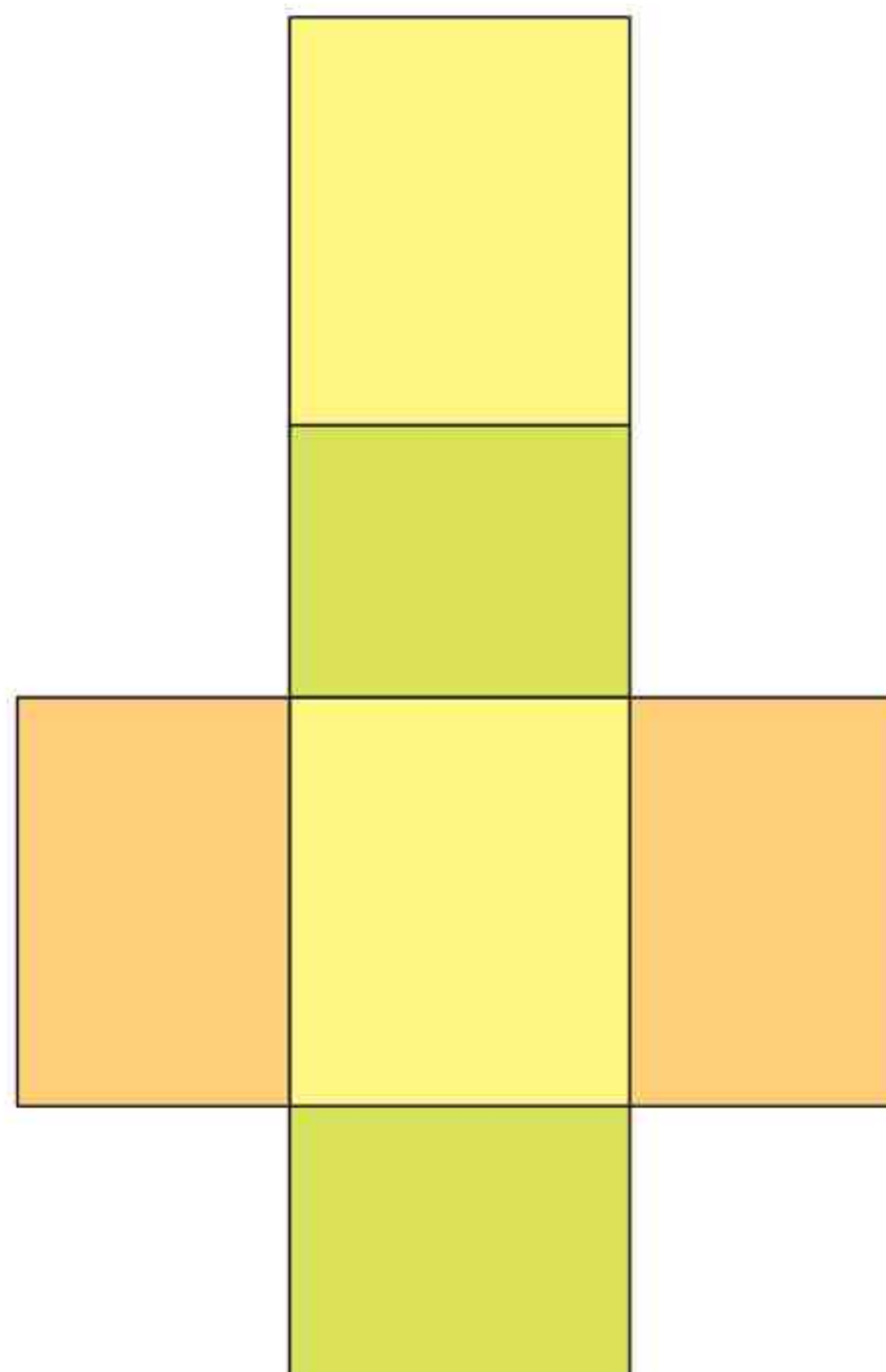
Przykład 1

Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $5\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 4\text{ cm}$.



Ten prostopadłościan ma:

- dwie ściany zielone, każdą z nich o polu:
 $P_1 = 4 \cdot 5 = 20\text{ [cm}^2\text{]}$
- dwie ściany pomarańczowe, każdą z nich o polu:
 $P_2 = 4 \cdot 6 = 24\text{ [cm}^2\text{]}$
- dwie ściany żółte, każdą z nich o polu:
 $P_3 = 5 \cdot 6 = 30\text{ [cm}^2\text{]}$



Pole powierzchni całkowitej tej bryły równa się:

$$P_c = 2 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 2 \cdot P_3, \text{ czyli}$$

$$P_c = 2 \cdot (P_1 + P_2 + P_3)$$

$$P_c = 2 \cdot (20 + 24 + 30) = 2 \cdot 74 = 148\text{ [cm}^2\text{]}$$

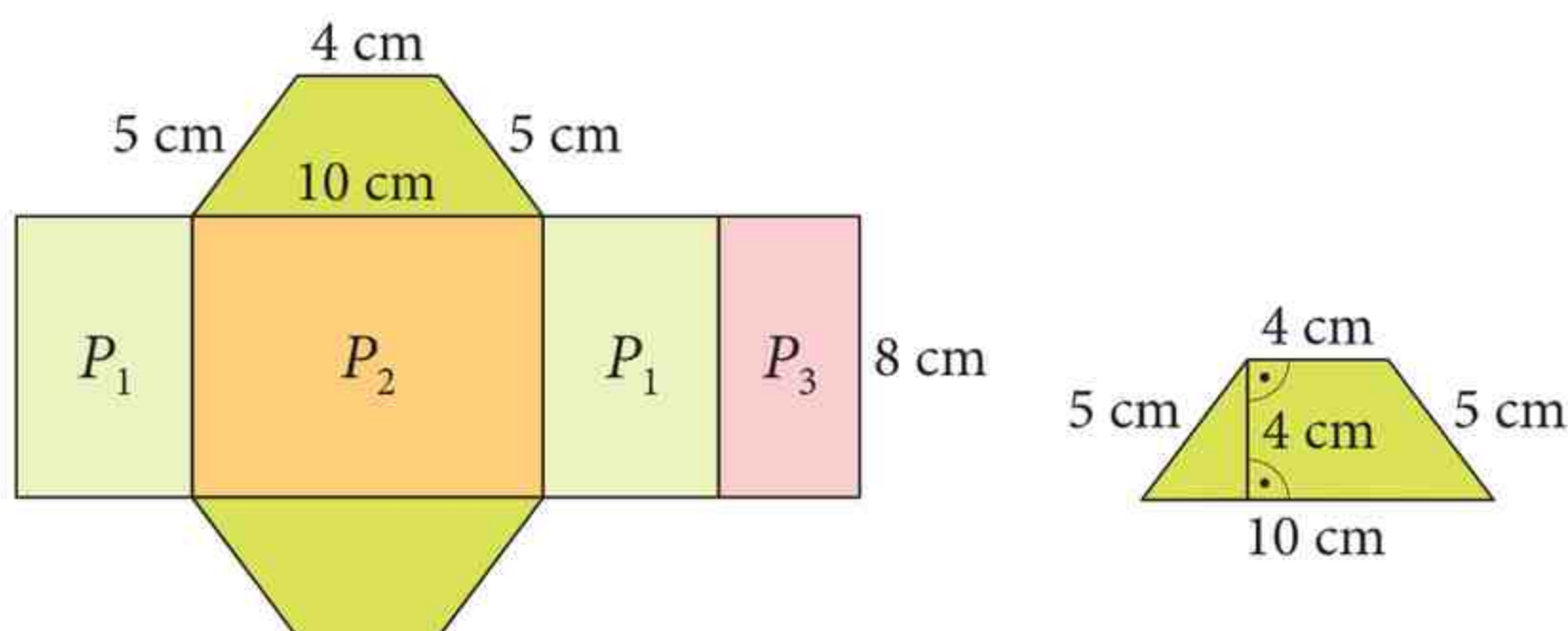
Odp. Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest równe 148 cm^2 .

Dobra rada

Jeśli potrafisz sobie wyobrazić, ile ścian ma bryła i jak te ściany wyglądają, możesz obliczyć pole powierzchni bryły bez rysowania jej siatki.

Przykład 2

Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa, którego siatkę przedstawiono poniżej.



Obliczamy pole powierzchni całkowitej tej bryły.

Podstawą tego graniastosłupa jest trapez o polu:

$$P_p = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (10 + 4) \cdot 4 = 7 \cdot 4 = 28 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Pola ścian bocznych są równe:

$$P_1 = 5 \cdot 8 = 40 \text{ [cm}^2\text{]}, \quad P_2 = 10 \cdot 8 = 80 \text{ [cm}^2\text{]}, \quad P_3 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa równa się:

$$P_c = 2 \cdot P_p + 2 \cdot P_1 + P_2 + P_3 = 2 \cdot 28 + 2 \cdot 40 + 80 + 32 = 248 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Obliczamy objętość.

Wysokość H bryły jest równa 8 cm, więc:

$$V = P_p \cdot H = 28 \cdot 8 = 224 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Odp. Pole powierzchni całkowitej wynosi 248 cm^2 , a objętość 224 cm^3 .

Przykład 3

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa o podstawie w kształcie kwadratu, którego krawędź podstawy ma 6 cm, a pole każdej ze ścian bocznych jest równe 24 cm^2 .

Ten ostrosłup ma:

- podstawę, która jest kwadratem o polu: $P_p = 6^2 = 6 \cdot 6 = 36 \text{ [cm}^2\text{]}$,
- cztery ściany boczne, każda o polu równym 24 cm^2 .

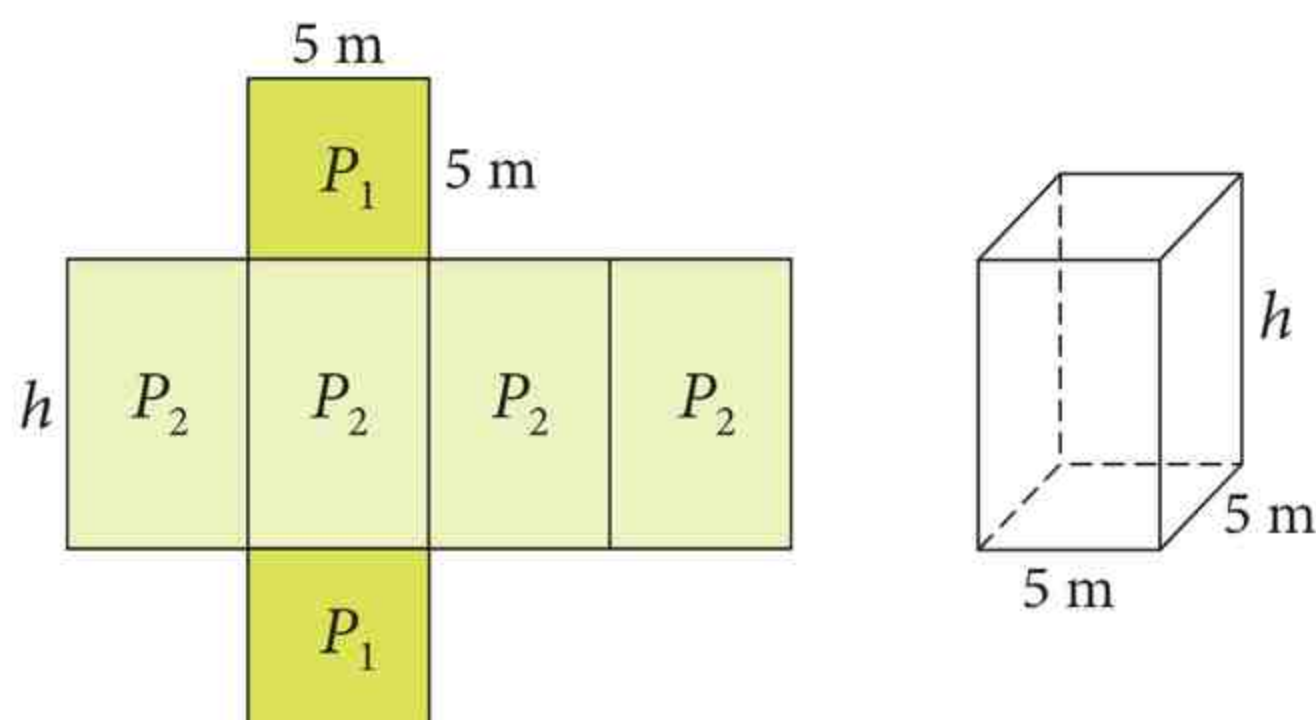
Pole powierzchni całkowitej bryły równa się:

$$P_c = 36 + 4 \cdot 24 = 36 + 96 = 132 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Odp. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe 132 cm^2 .

Przykład 4

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa wynosi 210 m^2 . Jego podstawą jest kwadrat o boku 5 m . Oblicz wysokość tej bryły.



Siatka tego graniastosłupa jest zbudowana:

- z dwóch kwadratów o polu: $P_1 = 5 \cdot 5 = 25 \text{ [m}^2\text{]}$.
- z czterech prostokątów o polu: $P_2 = 5 \cdot h$.

Pole powierzchni całkowitej tej bryły równa się:

$$P_c = 2 \cdot P_1 + 4 \cdot P_2 = 2 \cdot 25 + 4 \cdot 5 \cdot h$$

Otrzymujemy więc równanie: $210 = 2 \cdot 25 + 4 \cdot 5 \cdot h$

$$210 = 50 + 20 \cdot h \quad | - 50$$

$$160 = 20 \cdot h \quad | : 20$$

$$h = 8 \text{ [m]}$$

Sprawdźmy otrzymany wynik z warunkami zadania.

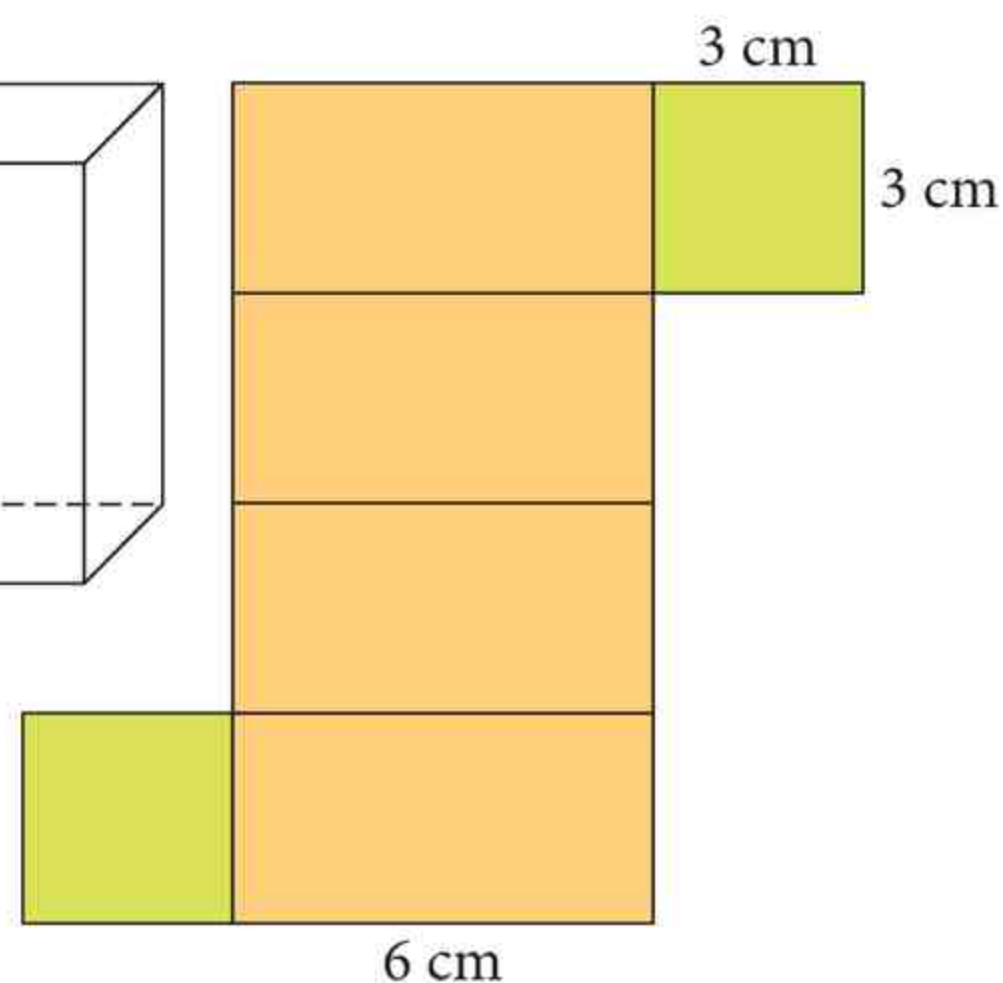
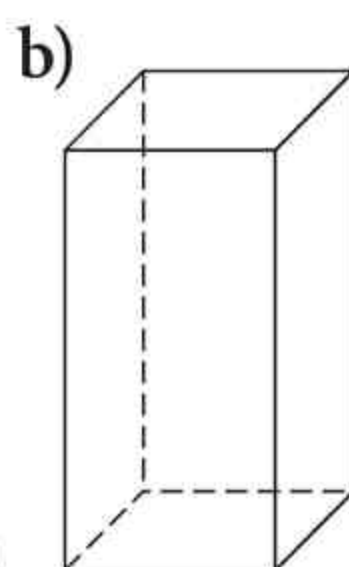
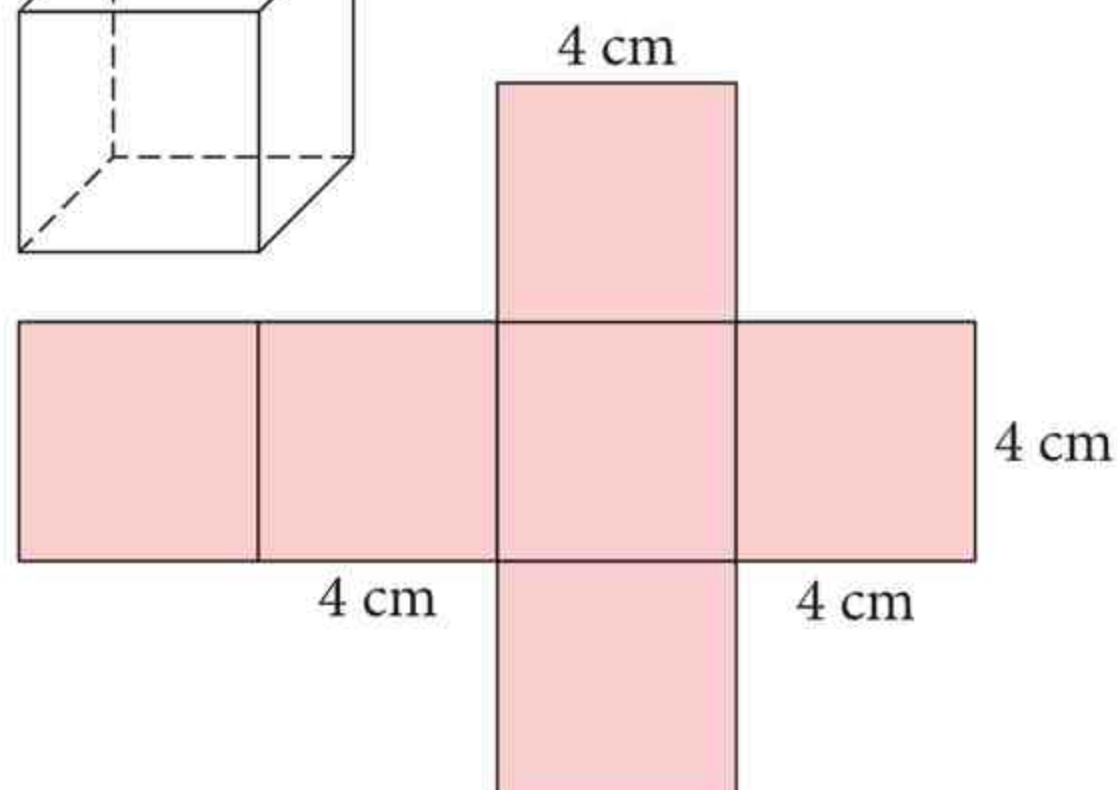
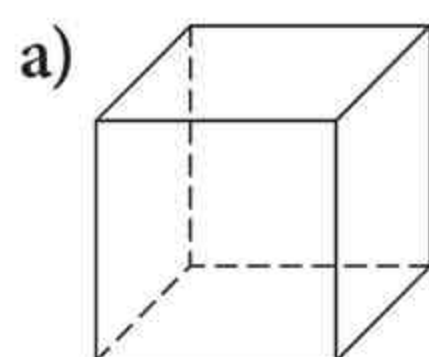
$$P_c = 2 \cdot 25 + 4 \cdot 5 \cdot 8 = 50 + 160 = 210 \text{ [m}^2\text{]}$$

Odp. Wysokość tego graniastosłupa wynosi 8 m .

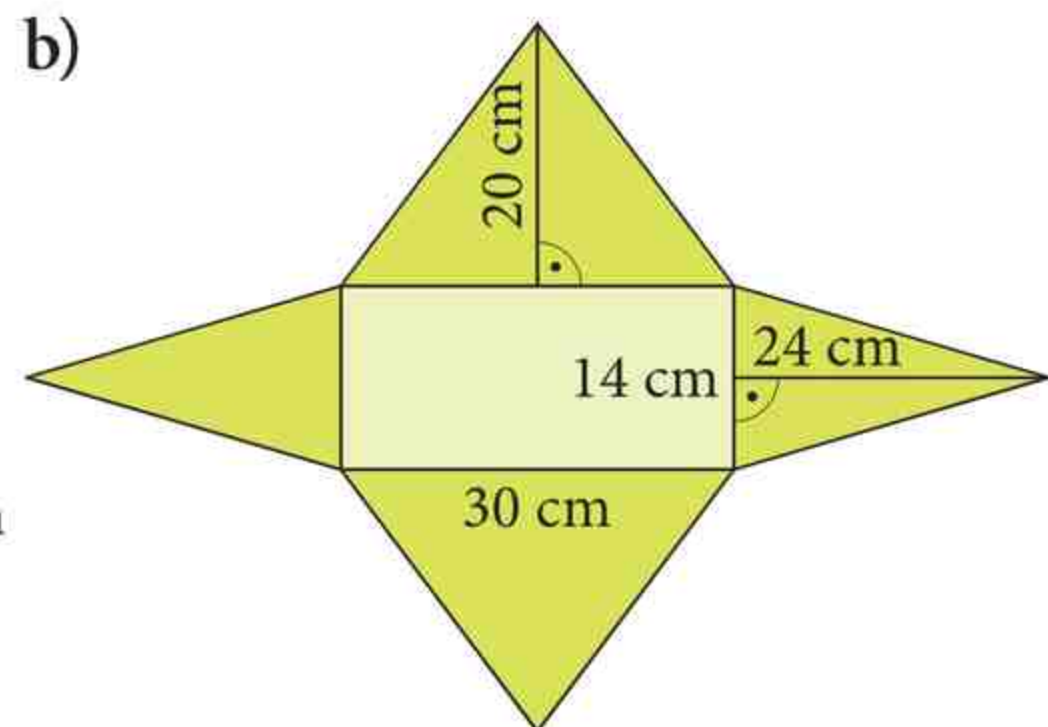
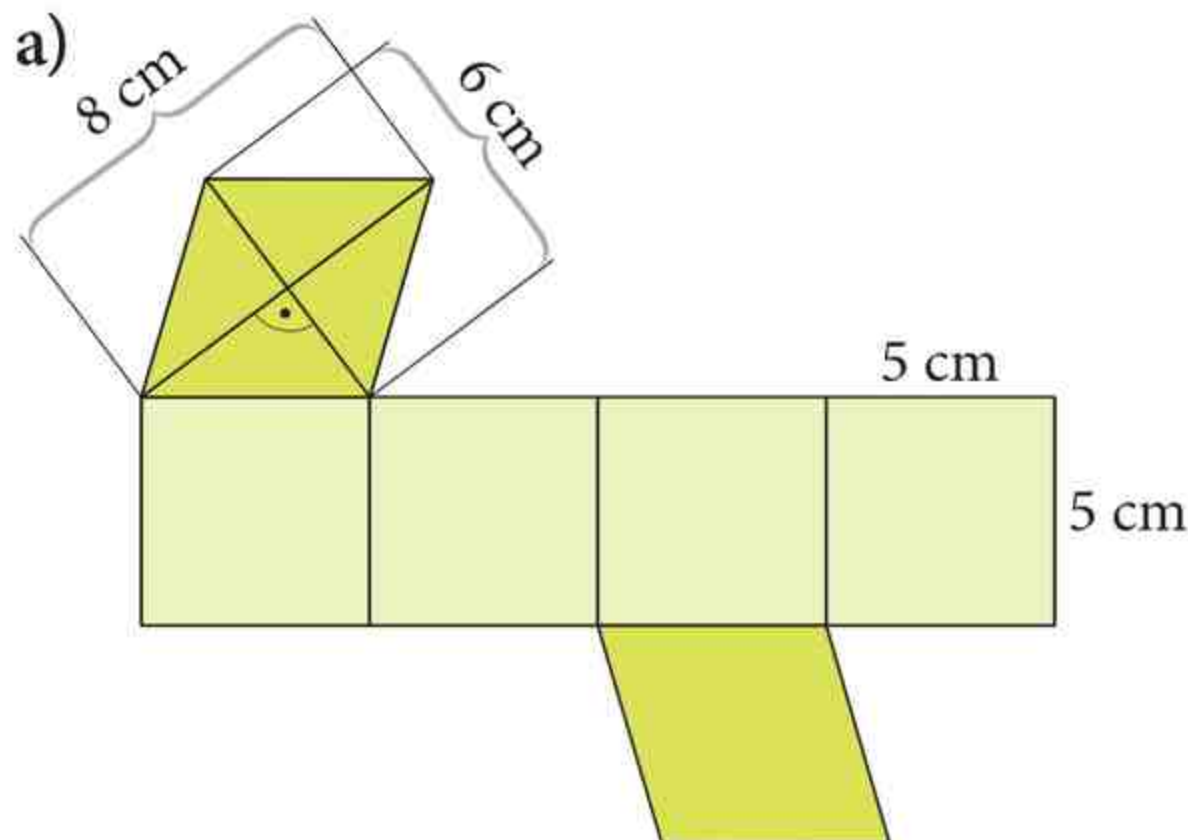


Zadania

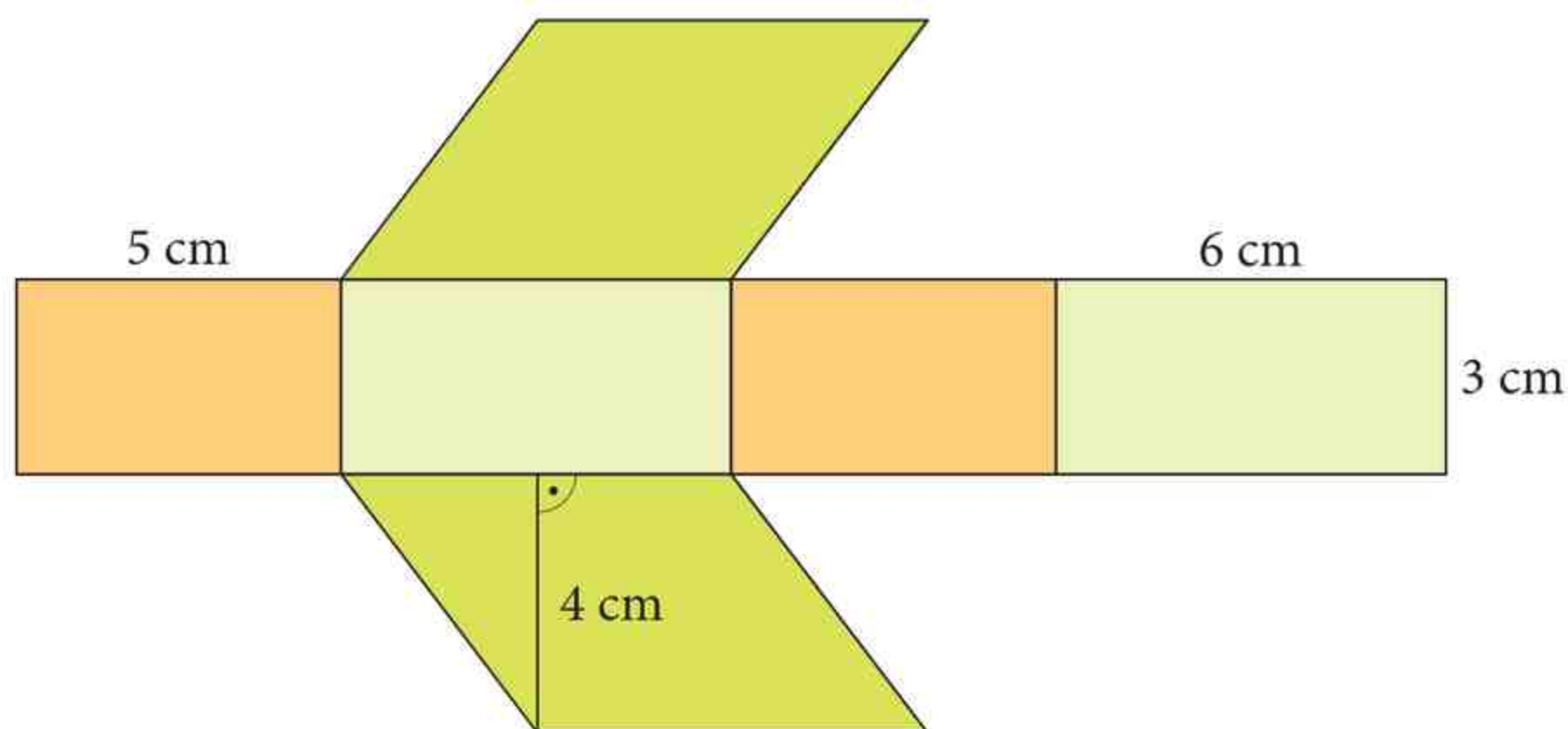
- **1** Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu. Potrzebne wymiary odczytaj z siatki.



- **2** Narysuj siatkę prostopadłościanu o wymiarach $2\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Oblicz jego pole powierzchni.
- **3** Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły, której siatkę przedstawiono na rysunku.



- **4** Na rysunku przedstawiono siatkę bryły. Narysuj tę bryłę w zeszycie i zapisz na swoim rysunku wszystkie jej wymiary. Oblicz objętość tej bryły.



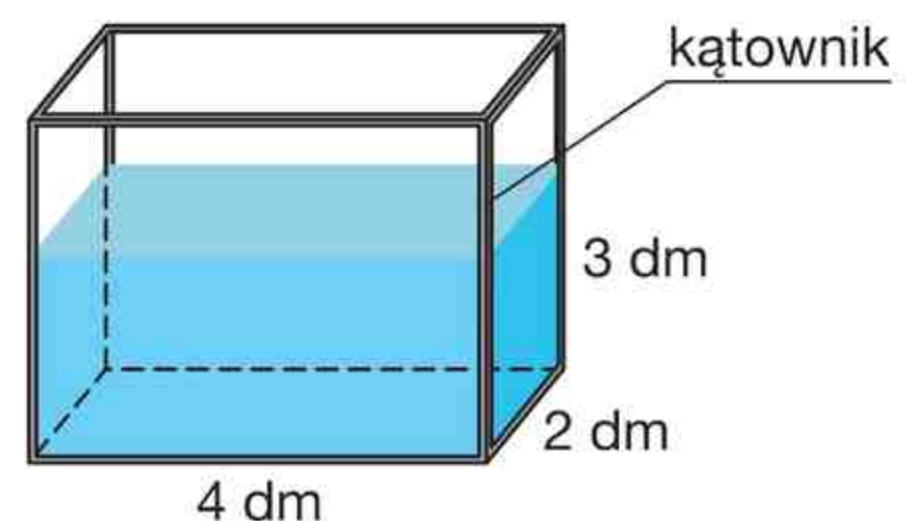
- **5** Podstawą bryły jest kwadrat o boku 2 cm , a ściana boczna ma wysokość 5 cm . Narysuj siatkę tej bryły i oblicz jej pole powierzchni całkowitej, wiedząc, że ta bryła to:

- a) graniastosłup, b) ostrosłup.

- **6** Akwarium Marcina ma mieć wymiary $4\text{ dm} \times 2\text{ dm} \times 3\text{ dm}$.

- a) Ile potrzeba szkła i ile kątownika, żeby zbudować takie akwarium?
- b) Ile litrów wody zmieści się w akwarium Marcina?

W obliczeniach nie uwzględniaj grubości szkła.

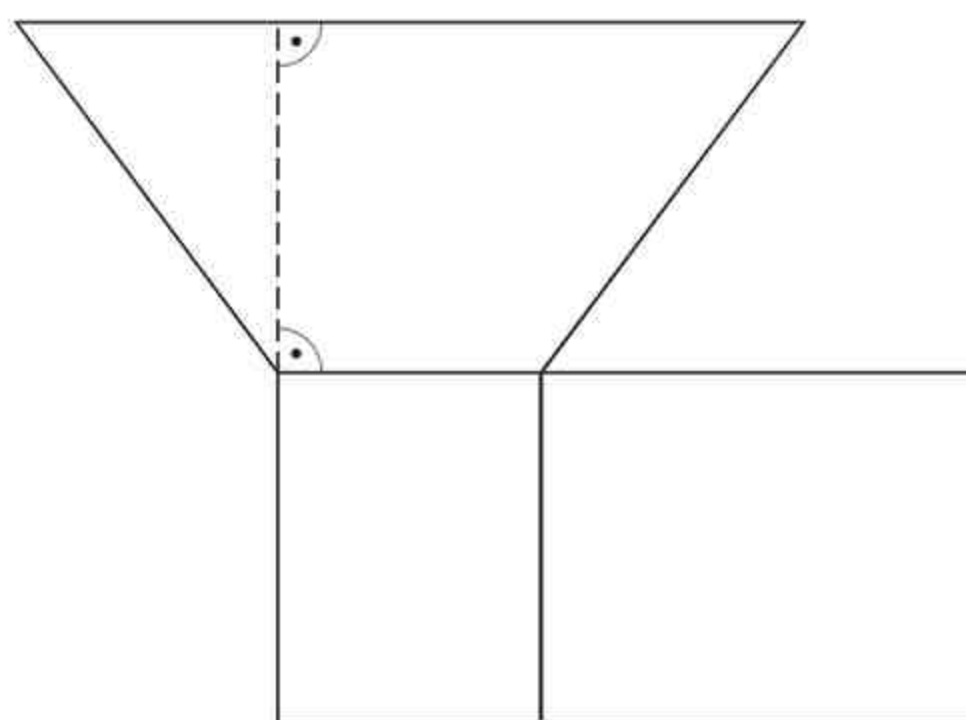


- 7 Szafa ma wymiary podane na rysunku. Jej drzwi są zrobione z desek sosnowych, spód, wierzch i boki – z płyty MDF, a tył – z innego materiału. Oblicz powierzchnię płyty MDF oraz powierzchnię desek sosnowych zużytych do budowy tej szafy.

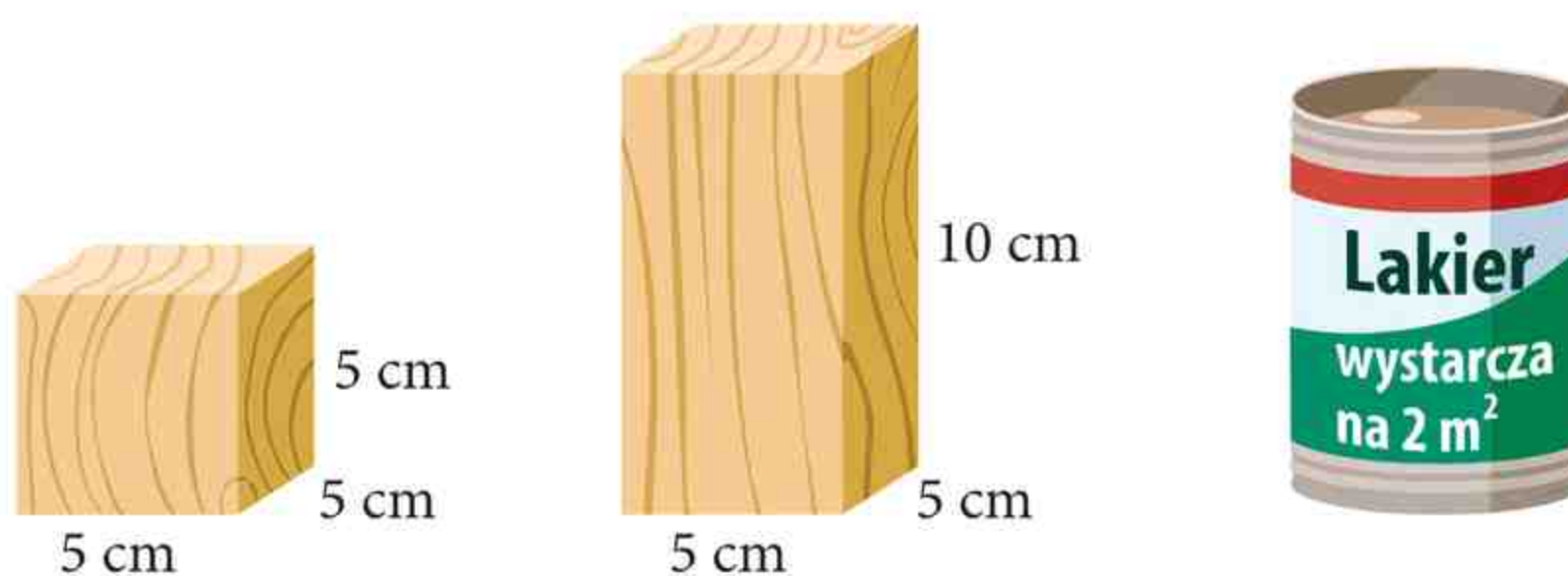


- 8 Pole powierzchni sześcianu jest równe 216 cm^2 . Jaką długość ma krawędź tego sześcianu? Oblicz jego objętość.

- 9 Na rysunku przedstawiono w skali 1 : 2 fragment siatki pewnego graniastosłupa. Zmierz długości odpowiednich odcinków i oblicz pole powierzchni całkowitej oraz objętość tego graniastosłupa.



- 10 Stolarz wyciął z drewna 40 dużych i 10 mniejszych prostopadłościennych klocków, których wymiary podano na ilustracji. Czy do pomalowania tych klocków wystarczy jedna puszka lakieru?



- 11 Z 216 cm drutu wykonano szkielet sześcianu, który następnie oklejono papierem. Oblicz, ile papieru zużyto, wiedząc, że na złączenia przeznaczono dodatkowy papier o powierzchni $\frac{1}{5}$ pola powierzchni sześcianu.
- 12 Podstawą graniastosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm oraz przeciwprostokątnej 10 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa 12 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tej bryły.
- 13 Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku 4,6 dm, a pole jego ściany bocznej jest równe polu jego podstawy. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły.

- ... 14 Model sześcianu o krawędzi 1 m zbudowano z kartonu, którego 1 m² waży 160 g. Co waży więcej – karton, z którego zbudowano ściany sześcianu, czy powietrze, które ten model wypełnia? Przyjmij, że 1 litr powietrza waży 1,2 g.



Dla dociekliwych

Janek wykonał modele wszystkich pięciu brył foremnych. Każda z tych brył ma pole powierzchni równe 240 cm². Janek planuje wykonanie z drutu modeli szkieletowych czworościanu, sześcianu i ośmiościanu. Wszystkie one mają mieć krawędzie jednakowej długości.



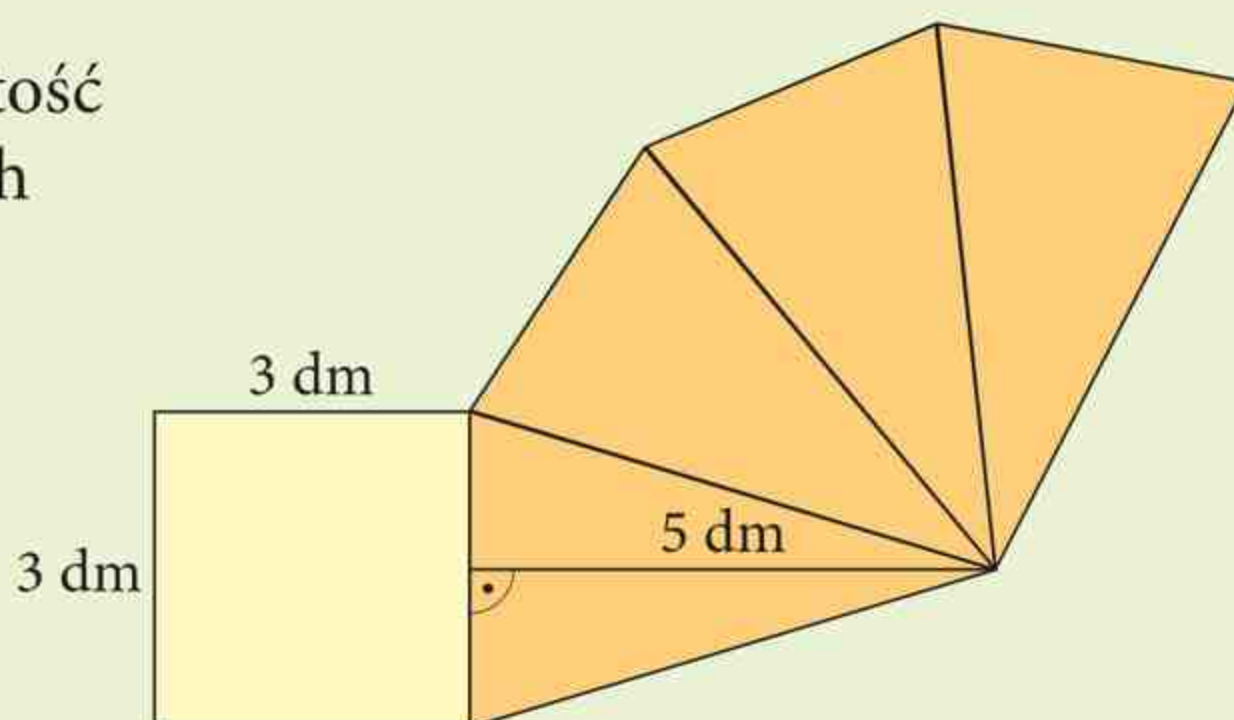
Podręcznik
cz. 2, s. 112
Bryły i ich objętość

- 1 Jakie jest pole powierzchni jednej ściany każdej z brył wykonanych przez Janka?
- 2 Ile drutu potrzeba na szkieletowe modele Janka, jeżeli każdy model ma mieć krawędzie równe 5 cm?
- 3 Jaką długość miałyby każda krawędź tych trzech brył, gdyby Janek chciał na swoje modele zużyć 1,2 m drutu?



Czy już umiem?

- I Oblicz pole powierzchni sześcianu o krawędzi 10 cm.
- II Oblicz pole powierzchni i objętość prostopadłościanu o wymiarach 6 m × 6 m × 12 m.
- III Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły, której siatkę przedstawiono obok. Wymiary odczytaj z rysunku.

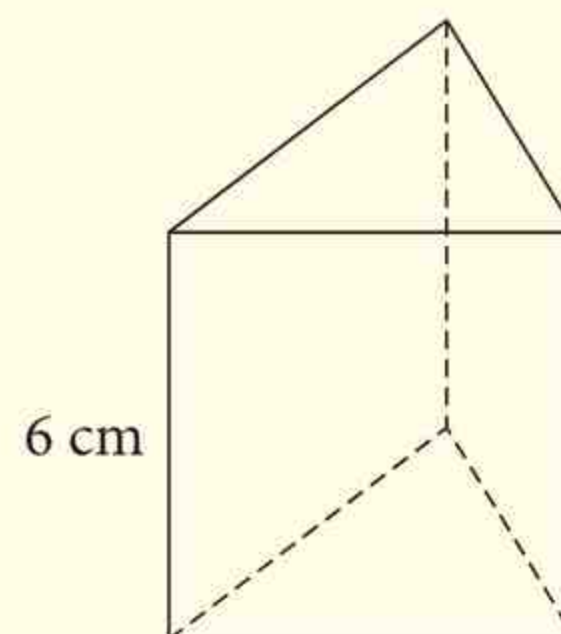


IV Przepisz, wstawiając w miejsce ? odpowiednią liczbę.

- | | | |
|--------------------------------|---------------------|-------------------------|
| a) $\frac{1}{3}$ godz. = ? min | b) 10 min = ? godz. | c) 1 kwadrans = ? godz. |
| $\frac{2}{5}$ godz. = ? min | 40 min = ? godz. | 1,5 godz. = ? min |
| $\frac{3}{4}$ godz. = ? min | 100 min = ? godz. | 0,3 godz. = ? min |

Powtórzenie przed klasówką

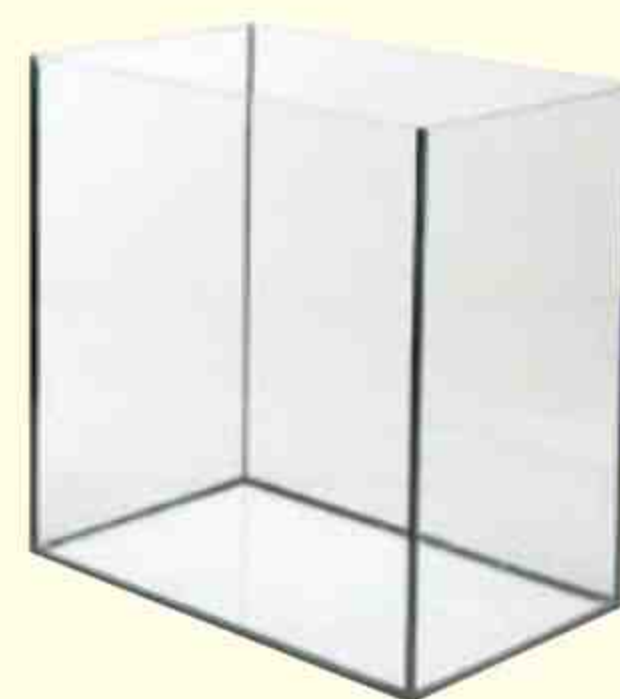
- 1 Oblicz objętość graniastosłupa przedstawionego na rysunku obok, wiedząc, że podstawa ma pole równe 18 cm^2 .



- 2 a) Ostrosłup ma 24 krawędzie. Ile wierzchołków ma ta bryła?
b) Graniastosłup ma 24 krawędzie. Ile wierzchołków ma ta bryła?

- 3 a) Ostrosłup ma 10 wierzchołków. Ile ścian ma ta bryła?
b) Graniastosłup ma 10 wierzchołków. Ile ścian ma ta bryła?

- 4 Na zdjęciu obok przedstawiono akwarium, które zrobił pan Grzegorz. Ma ono wysokość $4,5 \text{ dm}$, a jego podstawą jest prostokąt o wymiarach $2 \text{ dm} \times 5 \text{ dm}$.



- a) Oblicz, ile litrów wody może zmieścić się w tym akwarium.
b) Ile dm^2 szkła i ile metrów kątownika zużył pan Grzegorz do zrobienia akwarium?

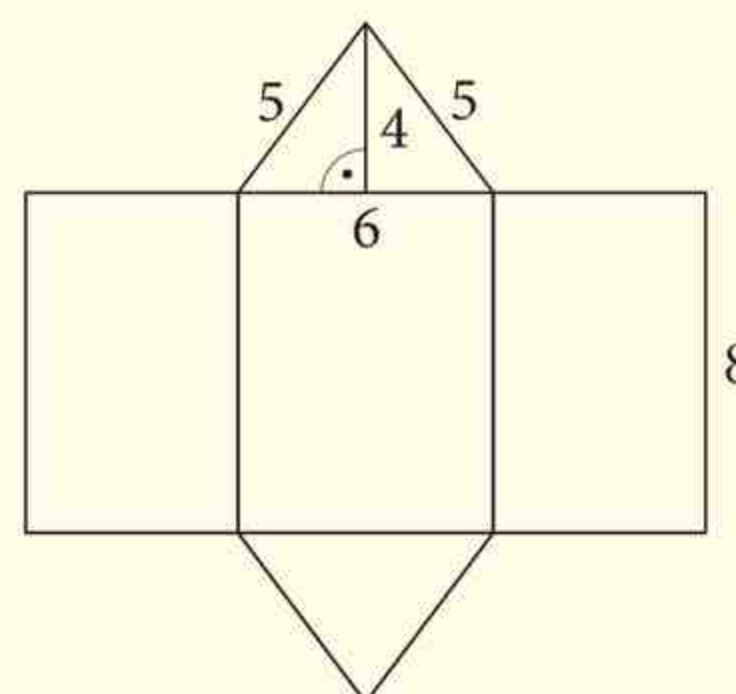
W obliczeniach nie uwzględniaj grubości szkła.

- 5 Narysuj siatkę sześcianu o krawędzi 3 cm . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tej bryły.

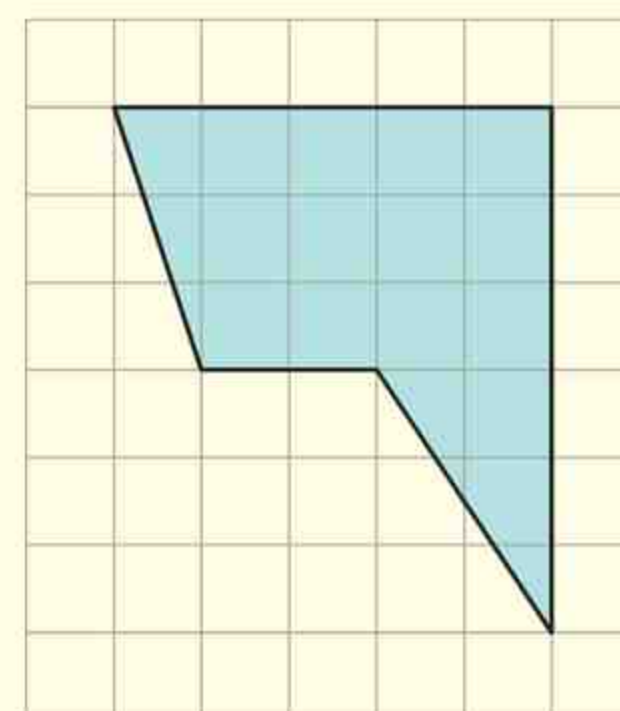
- 6 Narysuj na dużej kartce siatkę graniastosłupa prostego, którego wysokość jest równa 4 cm , a podstawą jest romb o przekątnych 8 cm i 6 cm .

- 7 Narysuj siatkę prostopadłościanu o wymiarach $1 \text{ cm} \times 2,5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tej bryły.

- 8 Na rysunku obok przedstawiono siatkę bryły. Wymiary podano w metrach. Narysuj tę bryłę i zapisz na rysunku wszystkie jej wymiary. Oblicz jej objętość i pole powierzchni całkowitej.



- 9 Pole powierzchni całkowitej sześcianu wynosi 150 cm^2 . Jaką długość ma krawędź tego sześcianu? Oblicz jego objętość.
- 10 Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu wynosi 30 cm .
 - a) Oblicz objętość tego sześcianu.
 - b) Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.
- 11 Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o bokach długości 5 cm , 4 cm i 3 cm . Wysokość tej bryły wynosi 4 cm .
 - a) Narysuj siatkę tego graniastosłupa.
 - b) Oblicz objętość bryły.
 - c) Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.
- 12 Narysuj siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat o boku 2 cm , a każda ze ścian bocznych jest trójkątem równoramiennym o wysokości 3 cm . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
- 13 Całe gospodarstwo pana Jacka zajmuje $4,75 \text{ ha}$, na las przypada 25 a , na ogród warzywny 400 m^2 , a na zabudowania i podwórko 6 a . Pozostały obszar gospodarstwa to grunty orne. Jaką powierzchnię zajmują grunty orne pana Jacka? Jaka to część całego gospodarstwa?
- 14 Oblicz objętość graniastosłupa prostego o wysokości 14 cm i podstawie narysowanej obok.
- 15 Oblicz pole powierzchni bocznej prostopadłościanu o podstawie kwadratowej, jeżeli wiadomo, że wysokość tej bryły jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy, a objętość bryły wynosi 24 cm^3 .
- 16 Znajdź wymiary prostopadłościanu o podstawie kwadratowej, którego objętość jest równa 225 cm^3 , a pole powierzchni bocznej wynosi 180 cm^2 .
- 17 Na rysunku przedstawiono sposób, w jaki obwiązano paczkę wstążką. Na kokardkę zużyto 30 cm wstążki. Ile wstążki zużyto, jeśli paczka ma wymiary $60 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$? Jaką objętość ma ta paczka?



Zadania na temat...

Jak przedstawić przestrzeń, czyli 3D w 2D

Popatrz na kolejne zdjęcia i rysunki. Wszystkie przedstawiają jeden prostopadłościan, ale na każdym z nich ten prostopadłościan wygląda inaczej.



Zdjęcie 1



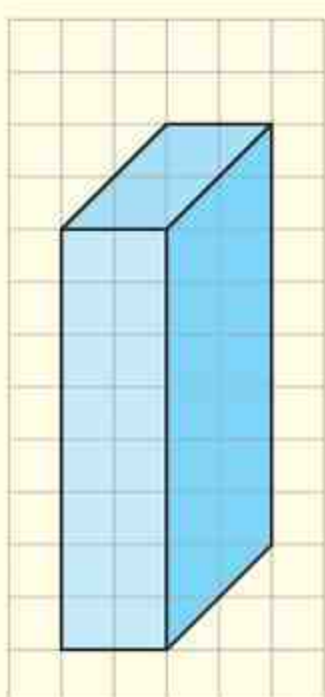
Zdjęcie 2



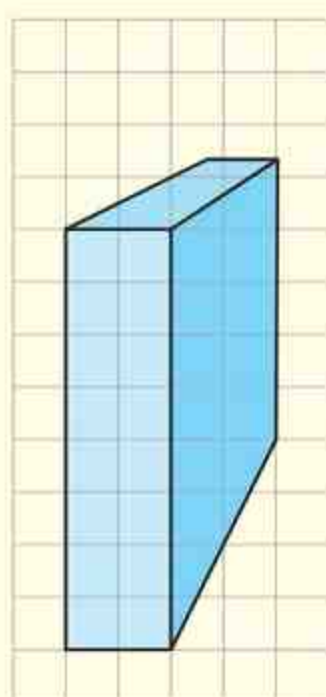
Zdjęcie 3



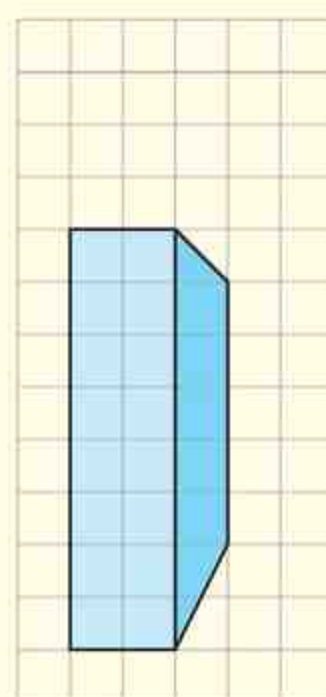
Zdjęcie 4



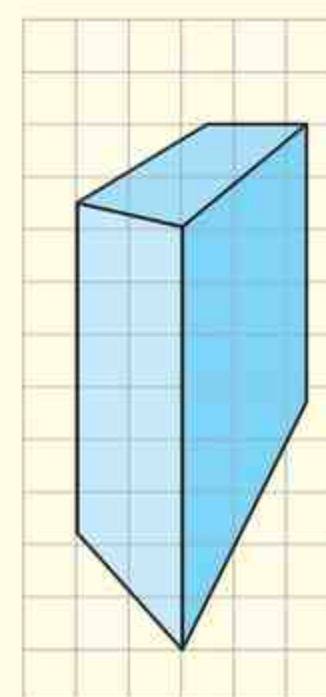
Rysunek 1



Rysunek 2



Rysunek 3



Rysunek 4

Dlaczego zdjęcia i rysunki przedstawiające ten sam obiekt tak bardzo się różnią? Problem polega na tym, że próbujemy na płaskiej kartce przedstawić obiekt trójwymiarowy.

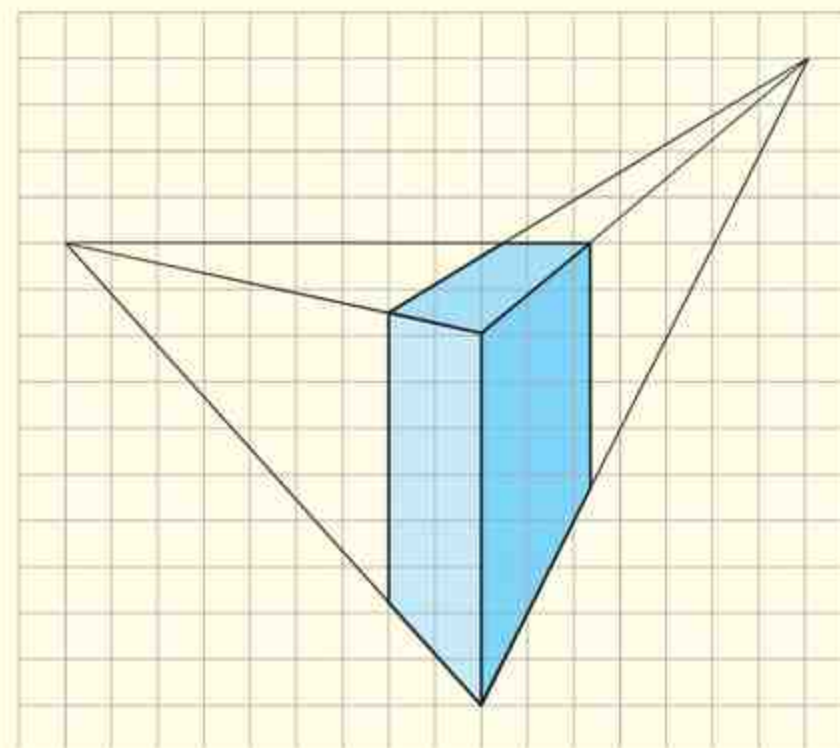
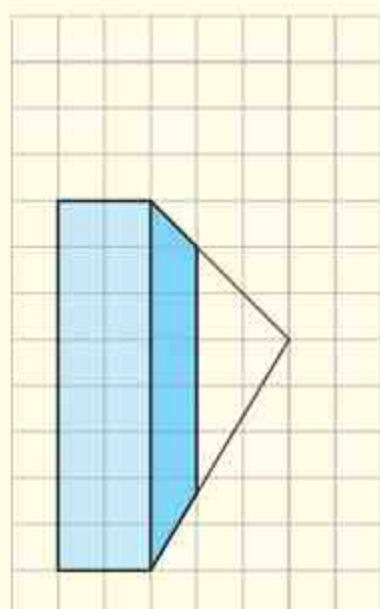
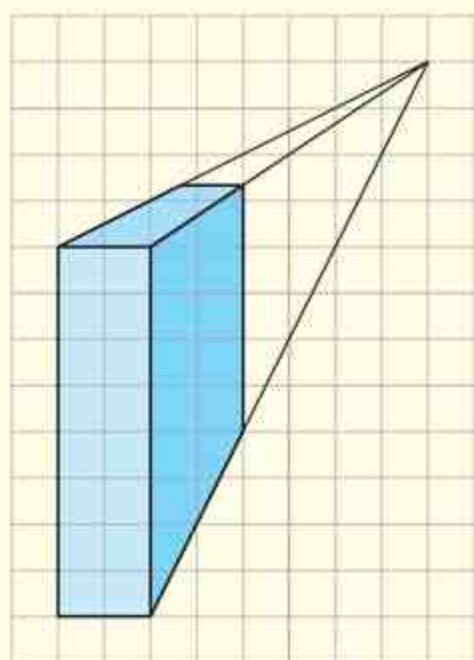
Rzut równoległy

Rysunek 1 to tzw. rzut równoległy. Przy tym sposobie rysowania spełniona jest następująca zasada: odcinki, które w bryle są równe i równoległe, na rysunku również pozostają równe i równoległe (rysunek obok).



Perspektywa liniowa

Rysunki 2, 3 i 4 na s. 137 są wykonane w tzw. perspektywie linearnej, czyli liniowej. Na rysunkach 2 i 3 zastosowano jeden punkt zbieżności (różnica wynika z położenia tego punktu). Na rysunku 4 zastosowano dwa punkty zbieżności.



W XIX w. rozwinęła się sztuka fotografii, która ułatwia nam przedstawianie trójwymiarowego świata na obrazie, choć problem, jak widzieć przestrzeń na płaskim rysunku, zawsze pozostanie aktualny.

- 1 Popatrz na zdjęcia pudełka na s. 137. Czy na każdym z nich widać, że jest to prostopadłościan? Na którym zdjęciu najlepiej widać pudełko? Na którym z nich najlepiej widać wzór umieszczony na pudełku?
- 2 Weź pudełko w kształcie prostopadłościanu. Zrób serię różnych zdjęć tego pudełka. Postaraj się wykonać takie ujęcia, na których:
 - widać 3 ściany,
 - widać 2 ściany,
 - widać tylko 1 ścianę,
 - pudełko wydaje się dłuższe,
 - pudełko wydaje się krótsze,
 - dokładnie widać wybraną ścianę pudełka,
 - pudełko wydaje się małe,
 - pudełko wydaje się duże.
- 3 Zrób zdjęcia wysokiego przedmiotu (np. szafy), umieszczając aparat:
 - centralnie – mniej więcej w połowie wysokości,
 - blisko i bardzo nisko, np. na podłodze,
 - wysoko (np. skorzystaj z wyięgnika).
 Porównaj otrzymane zdjęcia.

- 4 Dlaczego nie należy robić zdjęć całego budynku, gdy stoi się tuż przed nim?
- 5 Chcesz narysować prostopadłościan tak, aby wyglądał jak na zdjęciu 1 na s. 137. Skorzystasz z rzutu równoległego czy z perspektywy liniowej?
- 6 W 4, 5 i 6 klasie poznawaliście zasady rysowania brył. Czy te zasady odnoszą się do rzutu równoległego, czy do perspektywy liniowej?
- 7 Wykonaj rysunek sześcianu w rzucie równoległym.
- 8 Wykonaj cztery rysunki sześcianu w perspektywie liniowej z jednym punktem zbieżności. Wybierz różne położenia tego punktu.
- 9 Wykonaj rysunek sześcianu w perspektywie liniowej z dwoma punktami zbieżności.
- 10 Przyjrzyj się ilustracjom. W jaki sposób zostało narysowane tło?



- 11 Poszukaj w internecie informacji o innych rodzajach perspektywy. Dowiedz się, w jakich dziedzinach wykorzystuje się zasady perspektywy.

Zadania na deser

Wyobraź sobie sześcián i ostrosłup o podstawie w kształcie kwadratu, w których wszystkie krawędzie mają taką samą długość.

Przyjmijmy oznaczenia:

V_s – objętość sześciánu,

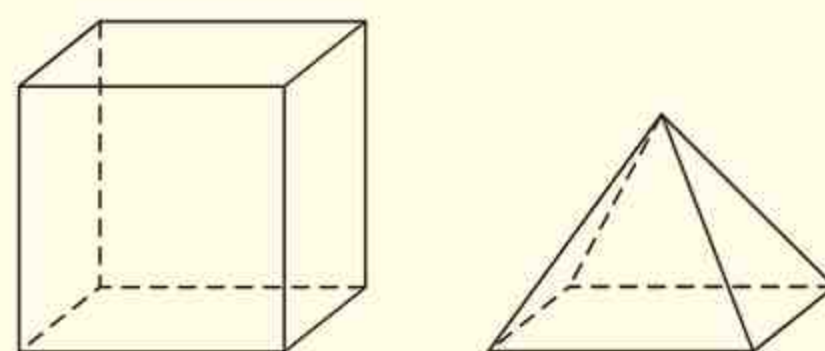
V_o – objętość ostrosłupa,

P_{cs} – pole powierzchni całkowitej sześciánu,

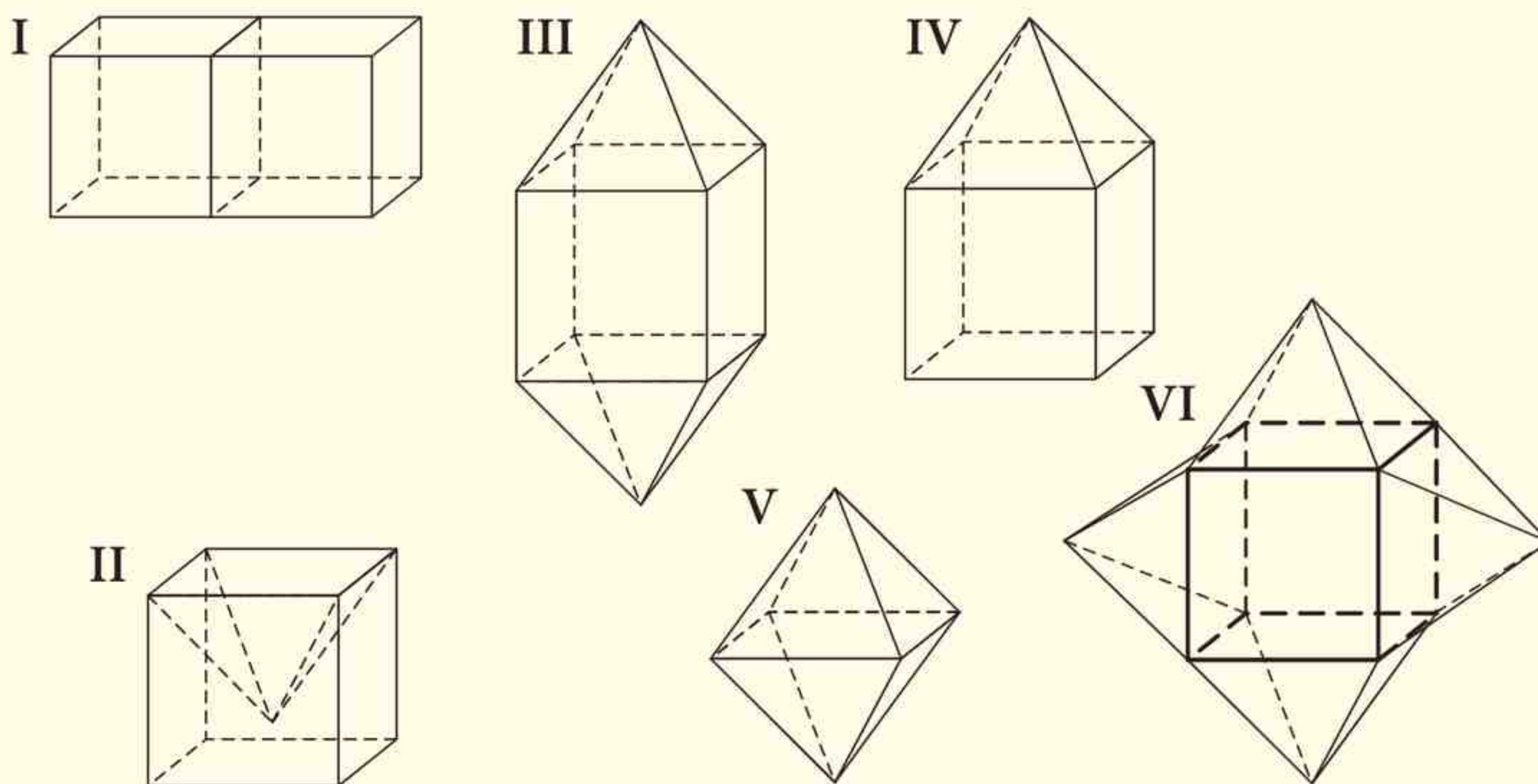
P_{co} – pole powierzchni całkowitej ostrosłupa,

K – pole kwadratu, który jest ścianą sześciánu i podstawą ostrosłupa,

T – pole trójkąta równobocznego, który jest ścianą boczną ostrosłupa.



- 1 Korzystając z oznaczeń K i T , zapisz, ile wynoszą P_{cs} i P_{co} .
- 2 Z sześciánów i ostrosłupów opisanych powyżej można otrzymać różne bryły. Niektóre z nich przedstawiono na rysunkach poniżej. Wybierz trzy z nich i korzystając z przyjętych oznaczeń, zapisz, ile wynosi pole powierzchni i objętość każdej z brył.



- 3 Wybierz z zadania 2 trzy bryły, które nie są prostopadłościanami. Narysuj ich siatki, wytnij i złoż. Przyjmij, że krawędź sześciánu ma 5 cm. Rysuj siatki na kartce formatu A4, pamiętaj o użyciu odpowiednich przyrządów. Do narysowania siatki bryły VI będziesz potrzebować większej kartki.
- 4 Czy to możliwe, aby z takiej samej siatki otrzymać dwie różne bryły?

VII

Matematyka i my



*Mam 140 cm
wzrostu. W jakiej
skali jestem na
zdjęciach w moim
albumie?*



Przygotujcie 12 kartoników z napisami: 5 mln, 5,2 mln, 50,2 mln, 52 tys., 52 mln, 520 tys., 5200 tys., 52 000, 520 000, 5 000 000, 50 200 000 i 52 000 000. Będą to karty do gry. Potasujcie je i rozłóżcie na ławce napisami do dołu.

- ▶ Spośród kart leżących na stole wybierz dwie i odwróć je napisami do góry. Jeśli na obu kartach jest ta sama liczba (tylko różnie zapisana), zabierasz tę parę kart i dostajesz punkt. Jeśli liczby są różne, odwróć karty i odłóż je na miejsce.
- ▶ Teraz drugi gracz niech postąpi tak samo.
- ▶ Wybierajcie pary kart na zmianę, aż zbierzecie wszystkie karty. Wygrywa osoba, która zdobyła więcej punktów.

Często spotykamy się z danymi zapisanymi w tabelach. Takie uporządkowanie danych pozwala łatwo znaleźć interesujące nas informacje. Aby poprawnie odczytać dane z tabeli, trzeba najpierw uważnie przeczytać jej tytuł oraz nagłówki kolumn. Jeśli w tabeli „Polska i jej sąsiedzi” poszukasz ludności Rosji, znajdziesz liczbę 144. Nie oznacza to oczywiście, że w Rosji mieszkają tylko 144 osoby. W nagłówku kolumny znajduje się skrót „mln”, który oznacza „miliony”. W Rosji mieszkają więc 144 miliony osób.

Polska i jej sąsiedzi (rok 2016 r.)

Państwo	Powierzchnia (tys. km ²)	Ludność (mln)
Polska	312,7	38,4
Niemcy	357	81,8
Czechy	78,9	10,6
Słowacja	49	5,4
Ukraina	603,6	44,9
Białoruś	207,6	9,5
Litwa	65,3	2,9
Rosja	17 098	144

Dobra rada

Czytanie tabeli zacznij od jej tytułu (nagłówek tabeli) i nagłówek kolumn.

Wielokrotnie rozwiązywaliśmy zadania, w których dane należało odczytać z tabeli. Teraz masz okazję jeszcze raz przećwiczyć te umiejętności.

Czy wiesz, że...

Największe zwierzęta lądowe, jakie kiedykolwiek żyły na Ziemi, to dinozaury. Nie każdy wie, że wśród dinozaurów były nie tylko olbrzymy, lecz także małe gatunki wielkości dzisiejszych kurczaków. Dinozaury pojawiły się na Ziemi około 220 mln lat temu, a wyginęły około 65 mln lat temu. Nie wszystkie zginęły bezpotomnie – jest bardzo prawdopodobne, że od dinozaurów pochodzą dzisiejsze ptaki.

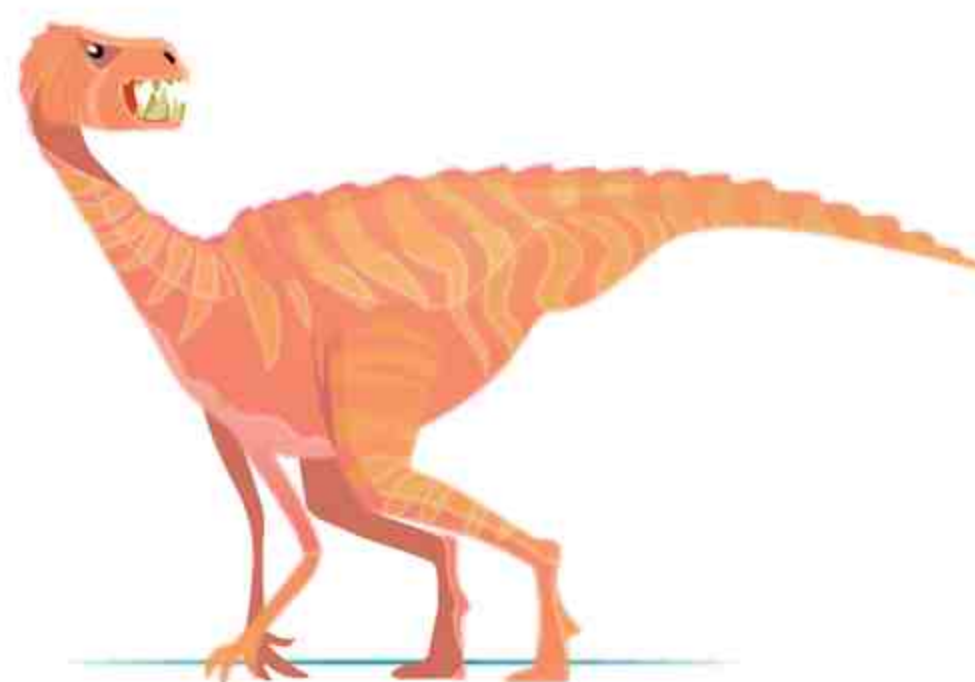
Wybrane gatunki dinozaurów

	Waga (t)	Długość (m)	Wysokość (m)
Diplodok	25	27	5
Tyranozaur	7	12	6
Stegozaur	3	8	3

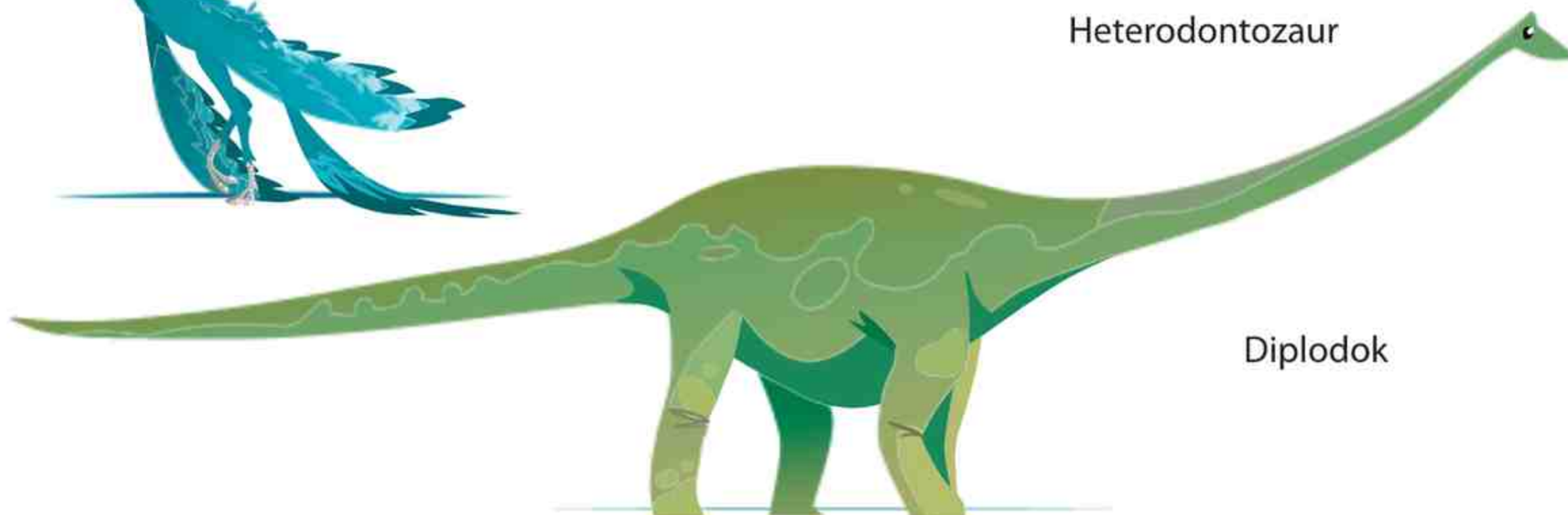
	Waga (kg)	Długość (cm)
Archeopteryks	0,5	60
Heterodontozaur	10	60



Archeopteryks



Heterodontozaur



Diplodok

Przykład 1

Który dinozaur był cięższy: heterodontozaur czy stegozaur? Ile razy cięższy?

Wagę tych dinozaurów znajdujemy w tabelach. Pamiętaj, że w tabeli trzeba czytać nie tylko liczby, lecz także nagłówki. Stegozaur ważył 3 tony, a heterodontozaur 10 kg, więc stegozaur był znacznie cięższy. Ile razy?

$$3 \text{ t} = 3000 \text{ kg}$$

$$3000 : 10 = 300$$

Odp. Stegozaur był 300 razy cięższy od heterodontozaura.



Stegozaur

Przykład 2

Jak długo żyły na Ziemi dinozaury?

W tekście znajdujemy informację, że dinozaury pojawiły się około 220 mln lat temu, a wyginęły około 65 mln lat temu.

$$220 - 65 = 155$$

Odp. Dinozaury żyły na Ziemi około 155 mln lat.

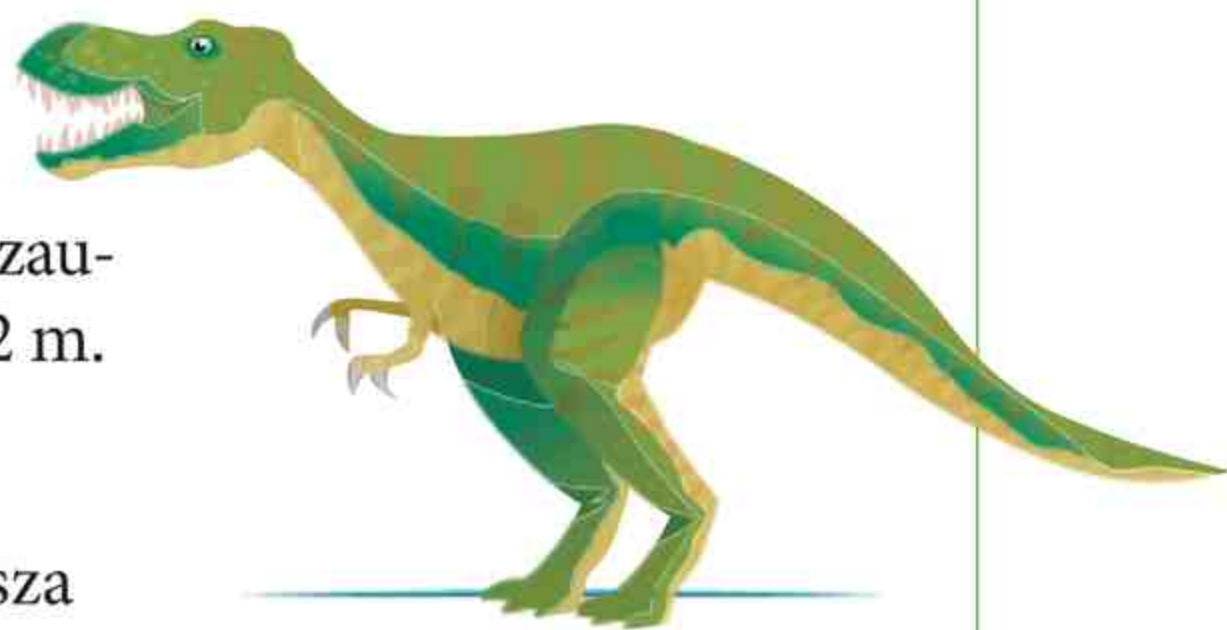
Przykład 3

Ile razy długość tyranozaura była większa od jego wysokości?

Z tabeli możemy odczytać, że wysokość tyranozaura wynosiła 6 m, a jego długość była równa 12 m.

$$\frac{12}{6} = 2$$

Odp. Długość tyranozaura była 2 razy większa od jego wysokości.



Tyranozaur

Przykład 4

Sala lekcyjna ma wymiary 5 m × 10 m i wysokość 3 m. Czy zmieściłby się w niej wyprostowany tyranozaur? A stegozaur?

Sprawdzamy wymiary dinozaurów w tabeli. Stegozaur miał długość 8 m i wysokość 3 m, a więc zmieściłby się w sali. Problem tylko, jak go do niej wprowadzić i czy podłoga wytrzymałaby jego ciężar.

Tyranozaur nie zmieściłby się w sali, chyba że wystawiłby ogon na korytarz, a głowę przez dziurę w suficie.



Informacje do zadań 1 i 2

KRYTA PŁYWALNIA Cennik (zł za 30 min)		
	pon.–pt.	sob.–niedz.
Dorośli	3,50	4,50
Młodzież 12–18 lat	3,00	4,00
Dzieci 6–11 lat	2,50	3,75
Dzieci poniżej 6. roku życia	bezpłatnie	

- **1** Ile w czwartek kosztuje 30-minutowy bilet na basen dla ośmiolatka?
- **2** Rodzice z trojgiem dzieci w wieku: 13, 9 i 5 lat poszli na basen w sobotę. Ile zapłacą za godzinny pobyt?

Uwaga. Zadania 3–6 rozwiąż, korzystając z tabeli „Polska i jej sąsiedzi” ze strony 142.

- **3** Zapisz w km^2 , nie używając skrótów „tys.” i „mln”:
 - a) powierzchnię Czech,
 - b) powierzchnię Rosji.
- **4** Oblicz na kalkulatorze:
 - a) ile razy więcej osób mieszka w Rosji niż w Polsce,
 - b) ile razy większą powierzchnię ma Rosja niż Polska.
- **5** Do 1992 r. Czechy i Słowacja tworzyły jedno państwo o nazwie Czechosłowacja. Jaka była jego powierzchnia?
- **6** Znajdź w tabeli dwa państwa, z których pierwsze ma większą powierzchnię niż drugie, jednak drugie ma więcej mieszkańców niż pierwsze.
- **7** Zapoznaj się z zamieszczoną obok tabelą i odpowiedz na pytania.
 - a) Który kraj ma większą powierzchnię: Szwecja czy Andora?
 - b) Ile razy większą powierzchnię ma Ukraina niż San Marino? Odpowiedź podaj w przybliżeniu.

Powierzchnia wybranych wielkich i małych państw Europy

Ukraina (tys. km^2)	603,6
Francja (tys. km^2)	544
Szwecja (tys. km^2)	447
Andora (km^2)	468
San Marino (km^2)	61
Watykan (km^2)	0,44

- ... 8 Podczas porządków Beata znalazła wycinek ze starej gazety. Podane tam informacje przedstaw w tabeli, którą samodzielnie zaprojektujesz. Jaki nadasz jej tytuł?

Nie dla wszystkich mieszkańców Polski językiem ojczystym jest język polski. Są więc szkoły, w których jako języka ojczystego naucza się innego języka. Najwięcej jest szkół z językiem niemieckim – aż 268. Uczęszcza do nich 24,1 tys. uczniów. Kolejne miejsca zajmują szkoły z językiem Romów, zwanych też Cyganami (jest ich 196), oraz Kaszubów (są 82 takie szkoły). Jednak w szkołach kaszubskich uczy się więcej uczniów (3,7 tys.) niż w romskich (1,6 tys.). To dlatego, że Kaszubi mieszkają głównie w jednym regionie – na Pomorzu, Romowie zaś są rozrzućeni po całym kraju.

Inne narody w Polsce mające ponad tysiąc uczniów w szkołach ze swoim językiem to Białorusini (1,8 tys. uczniów w 25 szkołach) i Ukraińcy (1,5 tys. uczniów w 91 szkołach).

Informacje do zadań 9–11

Największe żyjące ssaki

Gatunek	Masa (t)	Długość (m)
płetwal błękitny (wieloryb)	140	30
słoń afrykański	6	7

Najmniejsze żyjące ssaki

Gatunek	Masa (g)	Długość (cm)
ryjówka etruska	2	5
świnionos malutki (nietoperz)	2	3

- .. 9 Znajdź potrzebne informacje w tabelach i odpowiedz na pytania.
- Ile słoń waży w sumie tyle co jeden płetwal błękitny?
 - Ile razy dłuższy od słonia jest płetwal błękitny?
 - Ile ryjówek etruskich waży razem 1 kg?
- ... 10 Znajdź potrzebne informacje w odpowiednich tabelach (skorzystaj również z tabel ze strony 143) i odpowiedz na pytania.
- Które ze zwierząt jest cięższe: płetwal błękitny czy tyranozaur? Ile razy?
 - Które ze zwierząt jest dłuższe: słoń afrykański czy diplodok? Ile razy?
 - Które ze zwierząt jest dłuższe: archeopteryks czy świnionos malutki? Ile razy?
 - Ile razy heterodontozaur jest cięższy od ryjówki etruskiej?

-  **11** Ile razy płetwal błękitny jest dłuższy od ryjówki etruskiej? Ile razy jest od niej cięższy?

Dla dociekliwych

- 1** W pewnym kraju o powierzchni 2000 km^2 mieszka 600 tys. osób. Ile osób przypada na 1 km^2 ? Liczbę mieszkańców przypadających na 1 km^2 powierzchni nazywamy **gęstością zaludnienia**.

Uwaga. Rozwiązując następne zadania, korzystaj z odpowiednich tabel zamieszczonych w tym temacie. Do obliczeń używaj kalkulatora.

- 2** Znajdź w odpowiedniej tabeli potrzebne dane i oblicz gęstość zaludnienia Polski.
- 3** Oblicz gęstości zaludnienia Rosji i Niemiec.
- 4** Ile osób mieszkałoby w Polsce, gdyby nasz kraj miał taką gęstość zaludnienia jak Rosja?
- 5** Wiedząc, że gęstość zaludnienia Francji wynosi około 119 osób na km^2 , oblicz liczbę ludności tego kraju.

Czy już umiem?

- I** Znajdź w tabeli „Polska i jej sąsiedzi” na stronie 142 liczbę ludności Litwy i jej powierzchnię. Dane zapisz, nie używając skrótów „tys.” i „mln”.
- II** Ile razy dłuższy był diplodok od heterodontozaura? Skorzystaj z tabel ze strony 143.
- III** Dolne krawędzie okien na parterze znajdują się 150 cm nad ziemią, dolne krawędzie okien na pierwszym piętrze są 280 cm wyżej, a na drugim piętrze jeszcze 280 cm wyżej. Czy diplodok mógłby zajrzeć do okien na pierwszym piętrze? A na drugim? Skorzystaj z tabel ze strony 143.

IV Oblicz.

- a) 3^2 b) 10^6 c) 5^0 d) $(-3)^4$ e) 4^3 f) -2^4

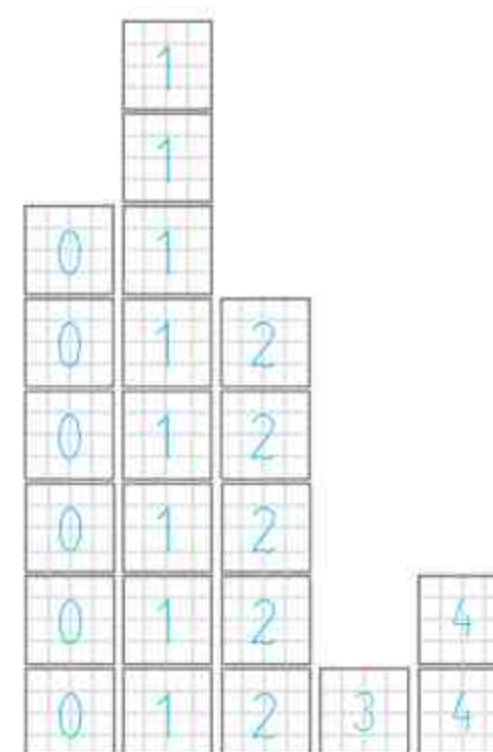


To ćwiczenie wykonuje cała klasa.

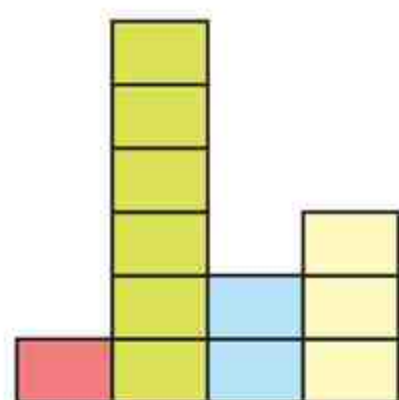
- ▶ Każdy uczeń niech wytnie z papieru w kratkę kwadrat o boku długości 4 kratki i napisze na nim, ile ma rodzeństwa (nie licząc siebie samego).
- ▶ Ułóżcie kwadraty w słupki – najpierw kwadraty z napisem 0, obok kwadraty z napisem 1 itd.
- ▶ Przerysujcie powstałe prostokąty do zeszytu. Przyjmijcie skalę: 1 kratka – 1 kwadrat.

Wymyślcie, jak z powstałego rysunku można odczytać:

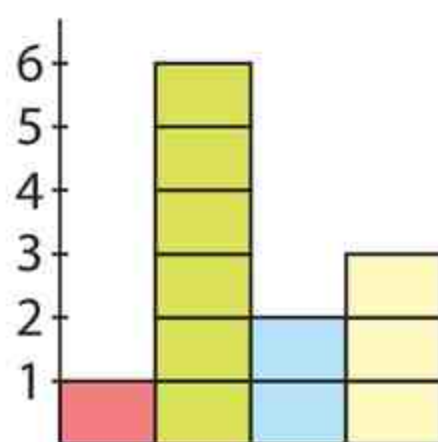
- Ile osób ma dwoje rodzeństwa?
- Z ilu osób składa się najliczniejsze rodzeństwo ucznia waszej klasy?
- Ile osób jest dziś na lekcji?



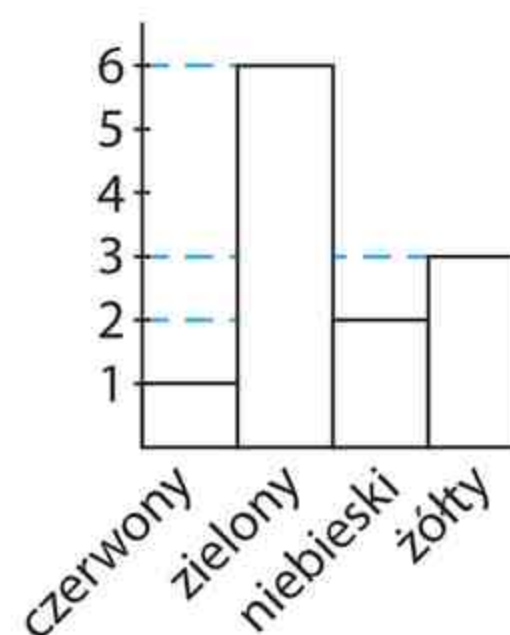
Zosia postanowiła sprawdzić, który z kolorów: żółty, zielony, niebieski czy czerwony jej koleżanki lubią najbardziej. Urządziła głosowanie: każda dziewczynka miała włożyć do koszyka klocek w swoim ulubionym kolorze. Później Zosia ustawiła z tych klocków wieże – każdą w innym kolorze – i od razu było widać wynik głosowania.



Wynik widać też na rysunku przedstawiającym te wieże. Możemy z niego odczytać, ile osób głosowało na poszczególne kolory.



Kiedy do rysunku wież dodamy podziałkę, jeszcze łatwiej odczytamy, ile jest klocków poszczególnych kolorów.

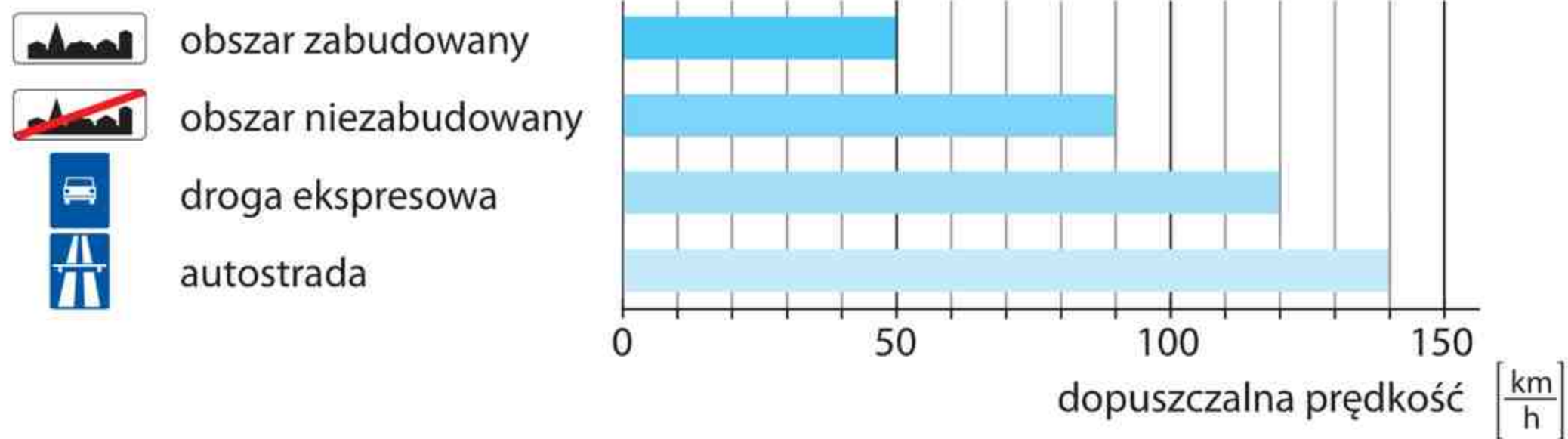


Gdy mamy podziałkę, nie potrzebujemy już rysunku każdego klocka. Wystarczy sam zarys wieży (słupki). Zamiast używać kolorów, możemy podpisać słupki.

W ten sposób powstał **diagram słupkowy**. Gdyby Zosia nie miała kolorowych klocków, mogłaby zapisywać głosy koleżanek na kartce i od razu narysować taki diagram, jaki został przedstawiony na ostatnim rysunku.

Przykład 1

Na diagramie pokazano, jaka jest w Polsce dopuszczalna prędkość na różnego rodzaju drogach.



Najpierw zapoznajmy się ze skalą. Odcinek między $0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ jest podzielony na pięć równych części, więc każda z nich odpowiada $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Jaka jest dopuszczalna prędkość na drodze na obszarze niezabudowanym?
Odczytujemy z diagramu: $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

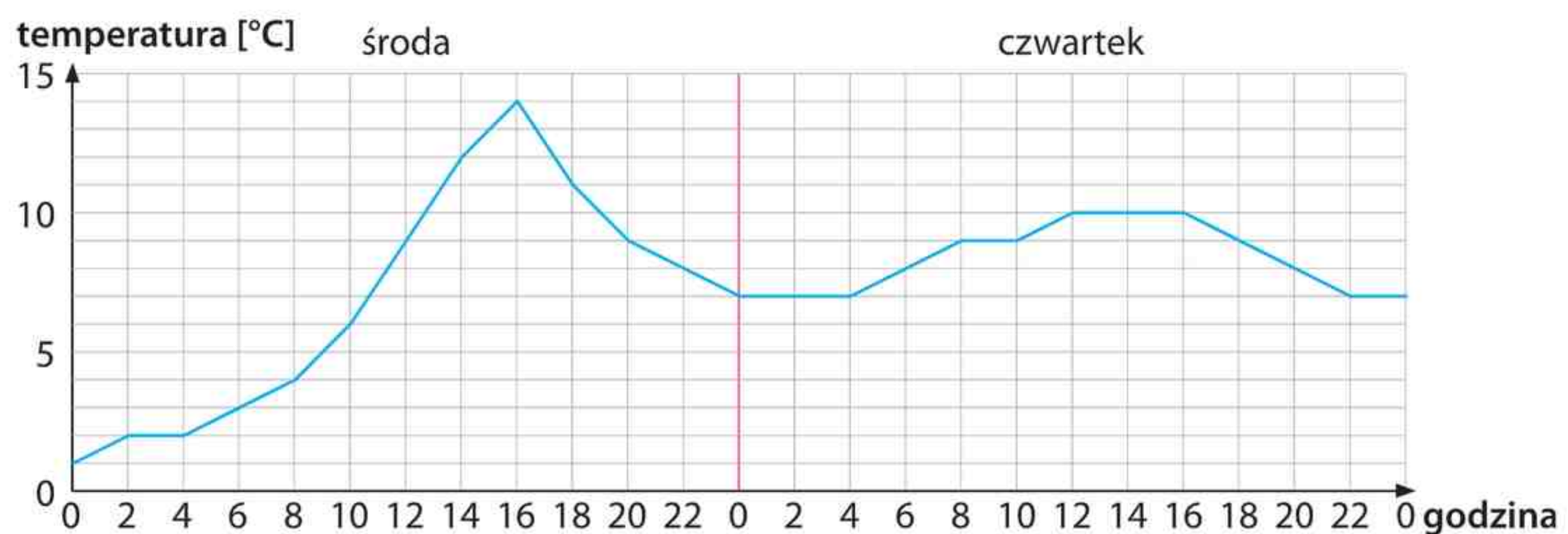
b) O ile kilometrów na godzinę szybciej można jechać na autostradzie niż na zwykłej szosie na obszarze niezabudowanym?

$$140 \frac{\text{km}}{\text{h}} - 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Odp. O $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ szybciej.

Przykład 2

Na wykresie pokazano, jak zmieniała się temperatura w ciągu dwóch kolejnych dni października.



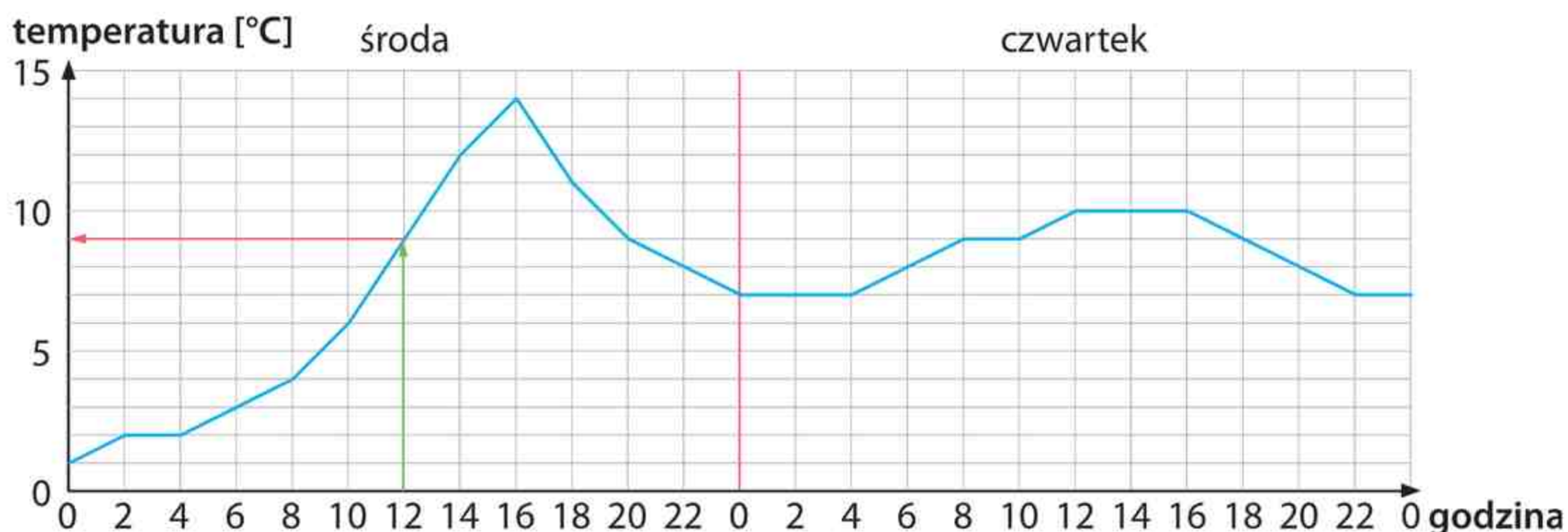
Odpowiedz na pytania.

- Jaka temperatura była w środę w południe?
- Którego dnia i o której godzinie zanotowano najwyższą temperaturę? Ile ona wynosiła?
- W jakich godzinach w środę temperatura malała?
- O jakich godzinach w środę zanotowano 9°C ?

Zanim zaczniemy odczytywać informacje, sprawdzamy, co zaznaczono na osi poziomej, a co na pionowej i jakie jednostki przyjęto.

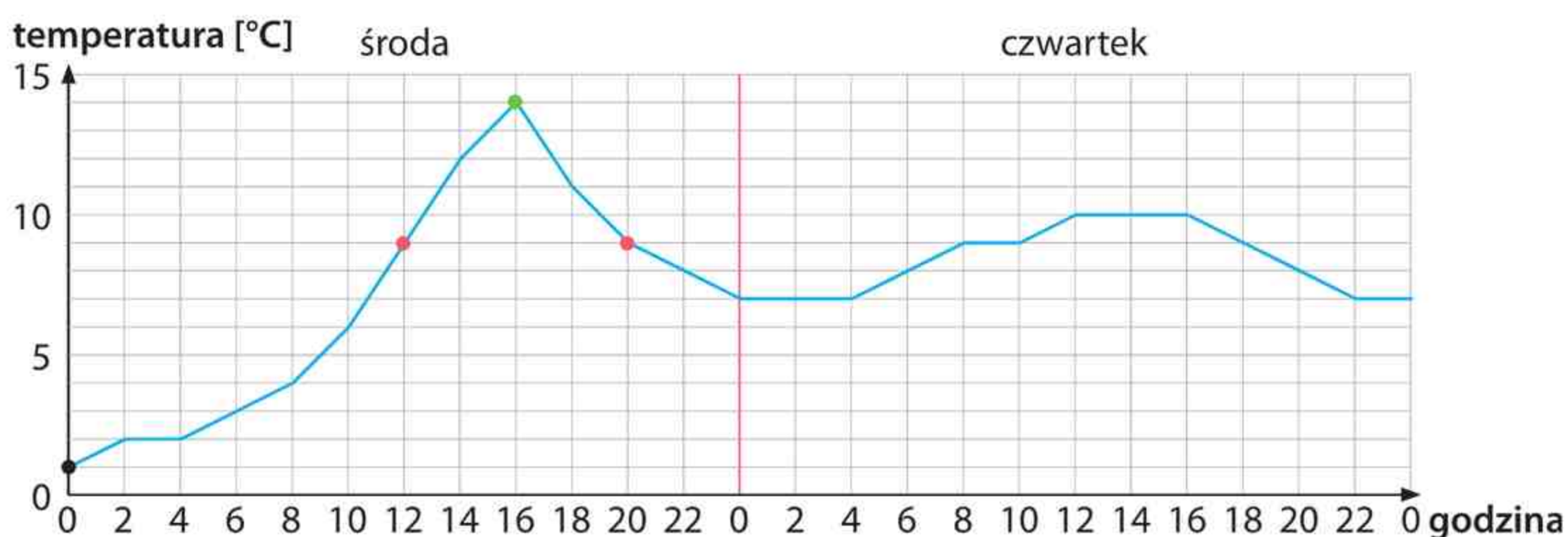
Na osi poziomej mamy zaznaczone godziny, a na osi pionowej temperaturę podaną w stopniach Celsjusza – jedna kratka to jeden stopień.

- a) Aby odpowiedzieć na to pytanie, znajdujemy na osi poziomej godzinę 12 w środę i szukamy punktu na wykresie, który jest nad tą godziną. Następnie odczytujemy z osi pionowej, jakiej temperaturze odpowiada ten punkt.



Odp. W środę o godzinie 12.00 było 9°C.

Na poniższym wykresie zaznaczyliśmy punkty, które są potrzebne do odpowiedzi na kolejne pytania.



- b) Szukamy na wykresie punktu położonego najwyżej (oznaczony na zielono). Odczytujemy z osi poziomej godzinę i sprawdzamy, który to dzień. Z osi pionowej odczytujemy temperaturę.

Odp. Najwyższą temperaturę, czyli 14°C, zanotowano w środę o 16.00.

- c) Szukamy takich fragmentów wykresu, które opadają, gdy patrzymy na linię od lewej do prawej. Wybieramy ten, który dotyczy środę. Odczytujemy z osi poziomej godziny.

Odp. W środę temperatura malała od godziny 16.00 do 24.00.

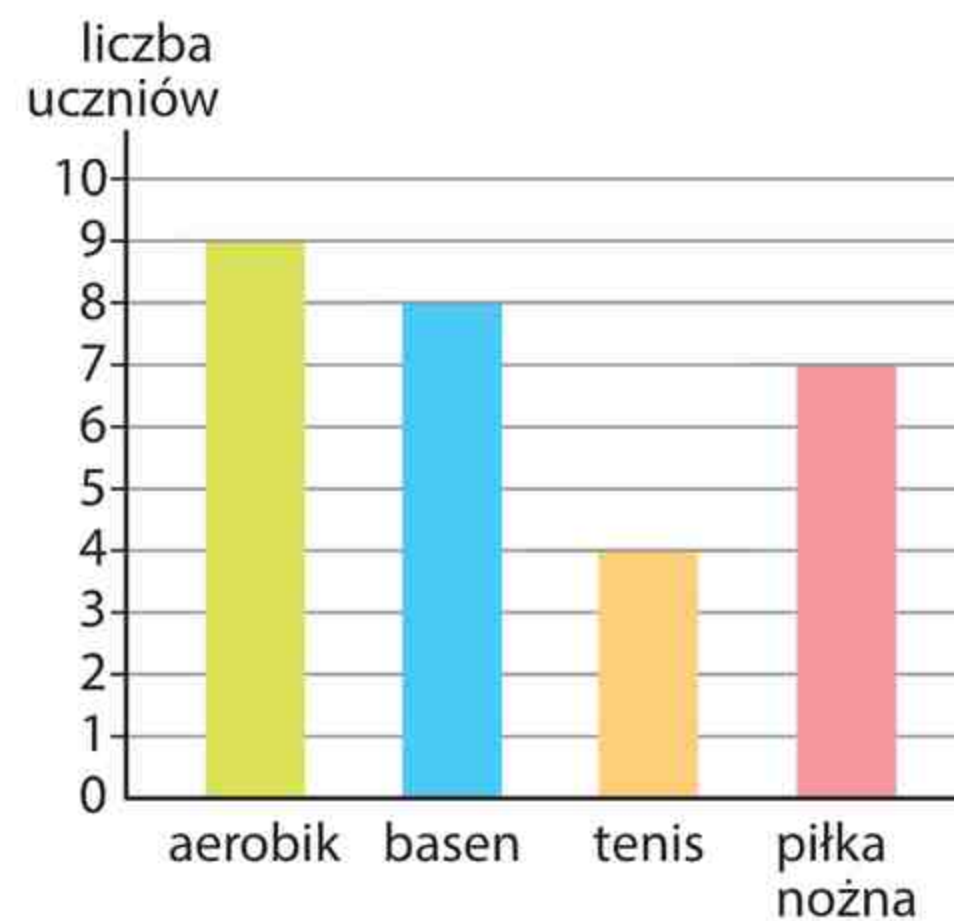
- d) Szukamy odpowiednich punktów (zaznaczone na czerwono) i odczytujemy godziny.

Odp. W środę zanotowano 9°C o godzinie 12.00 i 20.00.



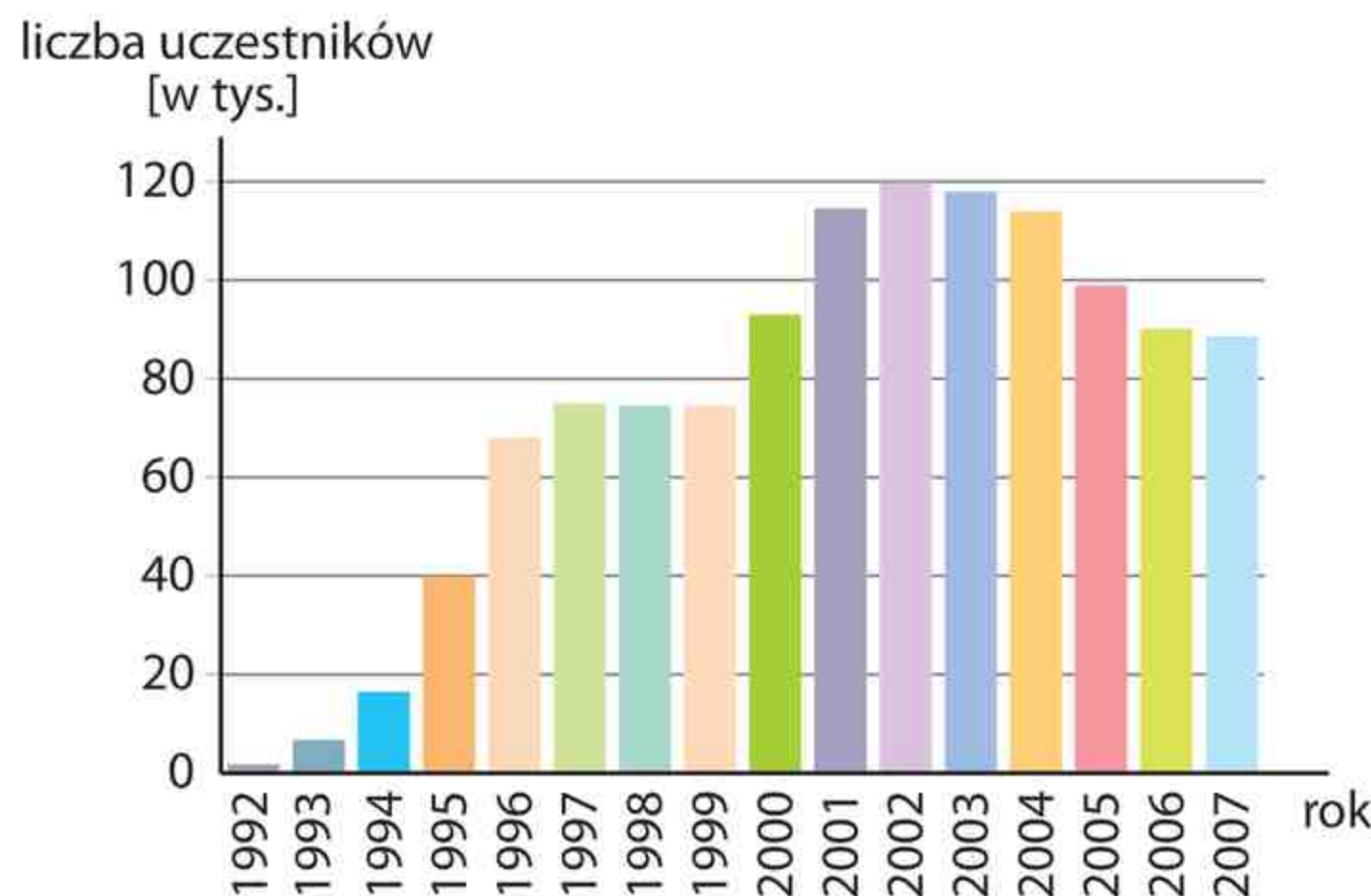
Zadania

- **1** Na diagramie przedstawiono, ilu uczniów klasy VIId bierze udział w dodatkowych zajęciach sportowych. Odpowiedz na pytania.
 - W jakich zajęciach biorą udział uczniowie klasy VIId?
 - W których zajęciach bierze udział najwięcej osób? Ile to osób?
 - Ile razy więcej osób chodzi na basen niż na tenis?
 - O ile więcej osób chodzi na basen niż na tenis?



Informacje do zadań 2 i 3

Na diagramie przedstawiono liczbę polskich uczestników Międzynarodowego Konkursu Matematycznego „Kangur” w kategorii wiekowej „Beniamin” (klasy V i VI) w pierwszych 16 latach istnienia konkursu.



- **2** W którym roku w konkursie wzięło udział najwięcej osób, a w którym najmniej?
- **3**
 - W których latach liczba uczestników konkursu przekroczyła 100 tys.?
 - Wymień lata, w których liczba uczestników konkursu była większa od 80 tys. i mniejsza od 100 tys.
 - W pewnym roku w konkursie startowało 16 500 uczniów. Który to był rok?
 - W którym roku liczba uczestników konkursu była największa? Ile ona wynosiła?
 - Kiedy liczba uczestników rosła, a kiedy się zmniejszała?

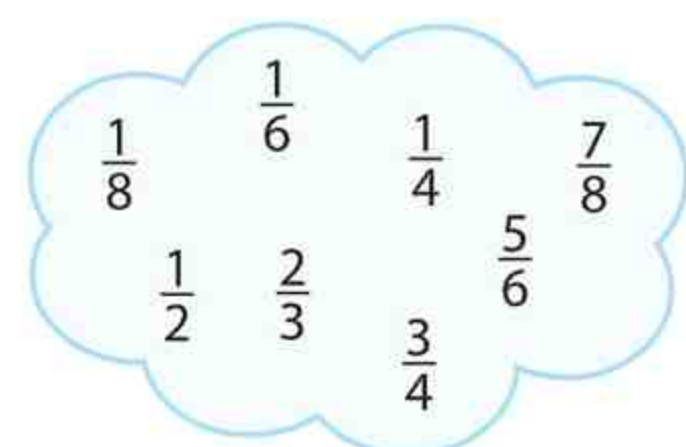
- 4 Przedstaw na diagramie słupkowym informacje zamieszczone w tabeli.

Turniej klas szóstych	
Klasa	Liczba punktów
6a	25
6b	40
6c	35

Informacje do zadań 5–7

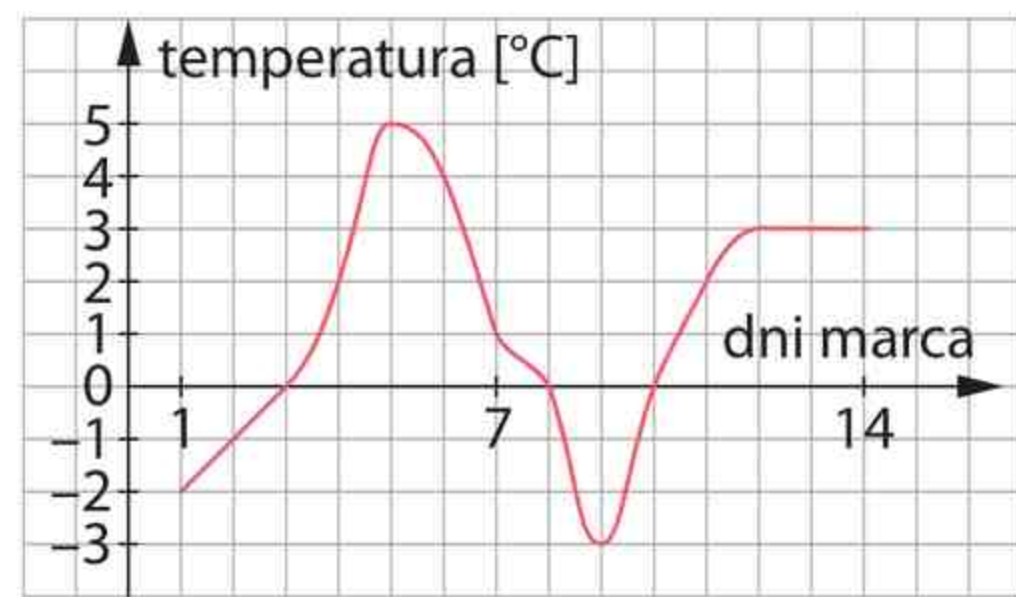


- 5 Odczytaj z diagramu (z dokładnością do 50 km):
- ile kilometrów długości ma Warta,
 - ile kilometrów długości ma odcinek Odry znajdujący się poza Polską.
- 6 Czy odpowiedź na podane pytanie można odczytać z diagramu? Jeśli tak, to udziel odpowiedzi. Jeśli nie, napisz: „Nie można odczytać z diagramu”.
- Czy Wisła ma ponad 1000 km długości?
 - Czy Narew ma ponad 450 km długości?
 - Czy Narew ma ponad 490 km długości?
 - Czy Wisła ma dokładnie 1047 km długości?
 - Czy Odra jest najdłuższą polską rzeką?
 - Czy Narew jest najkrótszą polską rzeką?
- 7 Jaka część Odry i jaka część Bugu znajduje się poza granicami Polski? Znajdź w chmurce ułamki, które najdokładniej określają długości tych części.



- ... 8 Wykres przedstawia wartości temperatury zanotowane w południe w pierwszych dwóch tygodniach marca.

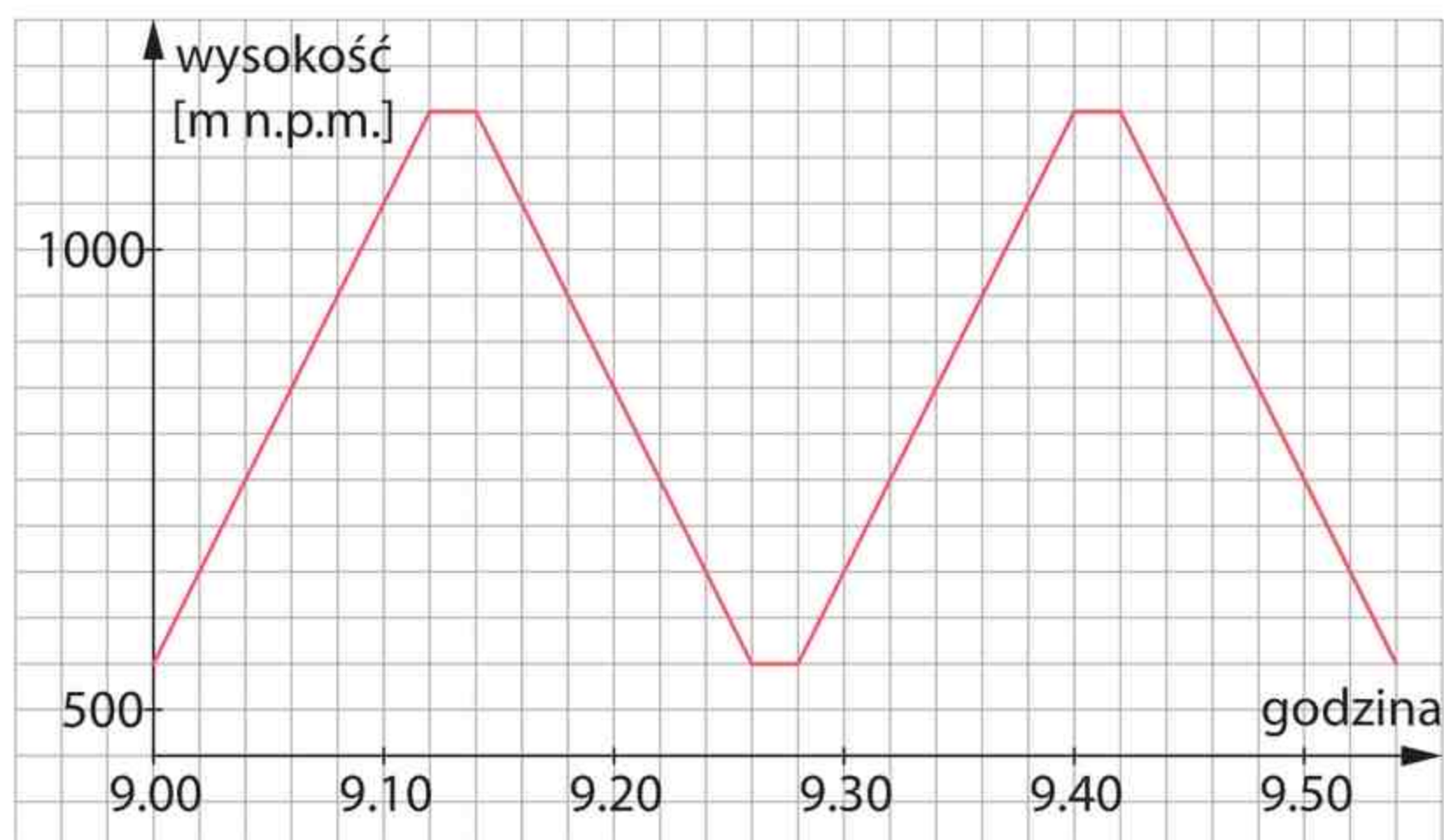
- Jaka temperatura była 7 marca?
- Kiedy temperatura wynosiła -3°C ?
- Jaka była najwyższa temperatura w tym okresie?
- Kiedy była najniższa temperatura w tym okresie?



- Przez ile dni temperatura w południe była ujemna?
- Ile było dni, w których temperatura w południe wynosiła 0°C ?
- W jakich dniach temperatura malała?
- Przez ile kolejnych dni temperatura była stała?

Informacje do zadań 9 i 10

Wagon kolejki linowej wozi narciarzy na szczyt, a potem zjeżdża do dolnej stacji. Na wykresie przedstawiono, jak zmienia się w czasie wysokość nad poziomem morza, na której znajduje się wagonik.



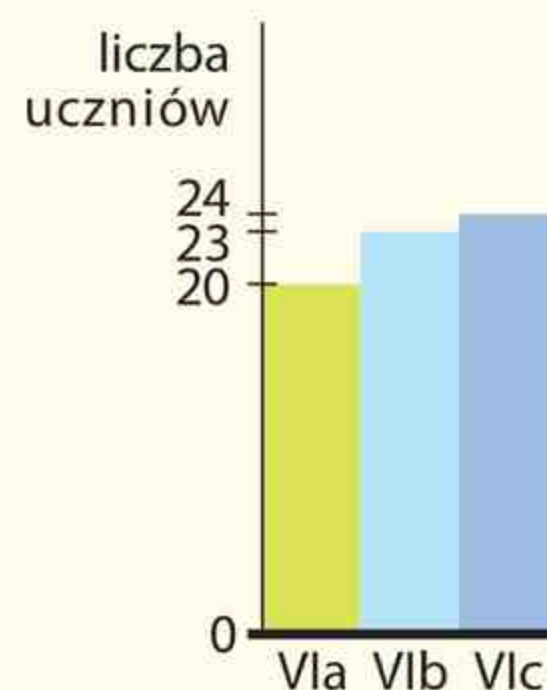
- ... 9 Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania.
- Na jakiej wysokości n.p.m. znajduje się dolna stacja kolejki, a na jakiej – górna stacja?
 - Jak długo trwa wjazd kolejką na szczyt?

-  10 Na podstawie wykresu odpowiedz, na jakiej wysokości n.p.m. będzie się znajdował wagonik o godzinie 11.00, jeśli będzie dalej kursować tak, jak do tej pory. Czy będzie on jechał w górę, czy w dół? Ile czasu zajmie mu jazda do najbliższej stacji?



Dla dociekliwych

- 1 a) W pewnej szkole są trzy klasy szóste. Liczbę uczniów tych klas przedstawiono na diagramie obok. Jakie są wysokości słupków dla klas VIa i VIc? Ile razy większa jest wysokość tego drugiego?



- b) Te same dane można przedstawić na innym diagramie. Jakie są wysokości słupków dla klas VIa i VIc? Ile razy większa jest wysokość tego drugiego?



- c) Czym różnią się te diagramy? Na którym lepiej widać, że liczby osób w klasach są podobne? Z którego łatwiej odczytać, jaka jest różnica w liczbie osób?
- 2 Znajdź w gazetach po 2 diagramy z każdego rodzaju pokazanego na powyższych rysunkach. Wytnij je i wklej do zeszytu.



Czy już umiem?

- I Na podstawie diagramu do zadania 1 ze strony 151 oblicz, o ile więcej osób wybrało piłkę nożną niż tenis.
- II Na podstawie diagramu do zadań 5–7 ze strony 152 określ (z dokładnością do 50 km), jaką długość ma odcinek Bugu, który znajduje się poza granicami Polski.
- III Na podstawie wykresu z zadania 8 ze strony 153 odpowiedz na pytania.
 - a) Jaka była temperatura 11 marca?
 - b) Jaka była różnica między najwyższą i najniższą temperaturą zanotowaną od 1 do 14 marca?
- IV Oblicz pisemnie.
 - a) $6003 - 2858$
 - b) $8060 \cdot 37900$

  Na dobry początek

Ponad sto procent



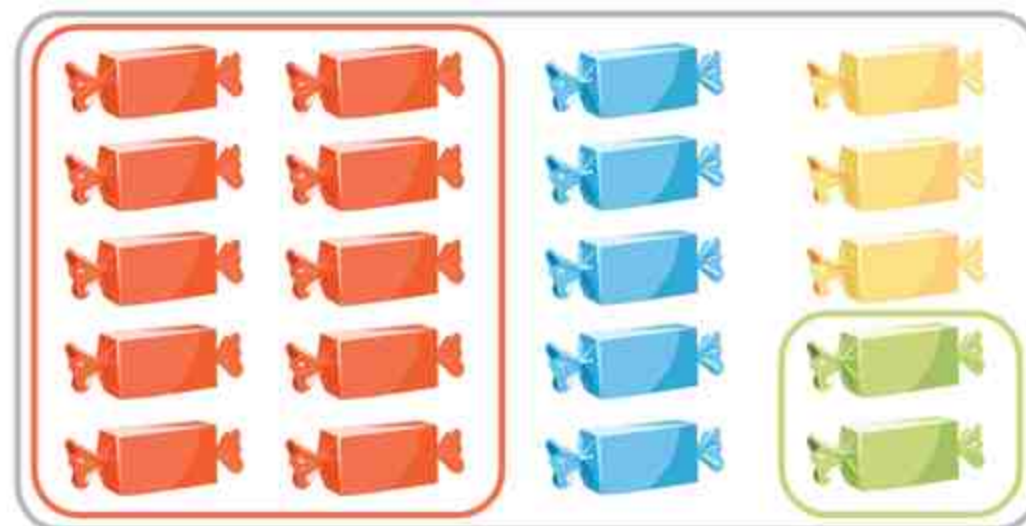
Pytania i polecenia

- Powyżej pokazano, gdzie można spotkać się z informacją o procentach. Wymień inne przykłady.
- Czy w przedstawionych sytuacjach może się pojawić więcej niż 100%?

Ze słowem **procent** i jego symbolem % spotykamy się często w życiu codziennym.

- 1% to $\frac{1}{100}$ całości.
- 100% to $\frac{100}{100}$ całości, czyli 1 całość.
- 50% to $\frac{50}{100}$ całości, czyli połowa.
- 25% to $\frac{25}{100}$, czyli $\frac{1}{4}$ całości.
- 10% to $\frac{10}{100}$, czyli $\frac{1}{10}$ całości.

100% cukierków, czyli wszystkie cukierki, to cukierki w papierkach.



50% cukierków, czyli połowa wszystkich cukierków, to cukierki czekoladowe.

10% cukierków, czyli $\frac{1}{10}$ wszystkich cukierków, to cukierki miętowe.

Przykład 1

W klasie VIb chłopcy stanowią 55% uczniów. Jaki procent uczniów tej klasy stanowią dziewczęta? Kogo jest więcej?

Całość to 100%.

Chłopcy stanowią 55% klasy, więc dziewczęta to pozostałe 45%.

55% klasy > 45% klasy, chłopców jest zatem więcej.

Przykład 2

Tomek pomalował 25% płotu. Jaka to część płotu? Ile procent zostało mu do pomalowania? Jaką część płotu musi jeszcze pomalować?

Tomek pomalował 25% płotu, czyli $\frac{25}{100}$ płotu, czyli $\frac{1}{4}$ płotu.

Pozostało mu do pomalowania 75% płotu. Jest to $1 - \frac{1}{4}$ płotu, czyli $\frac{3}{4}$ płotu.

Zapamiętaj

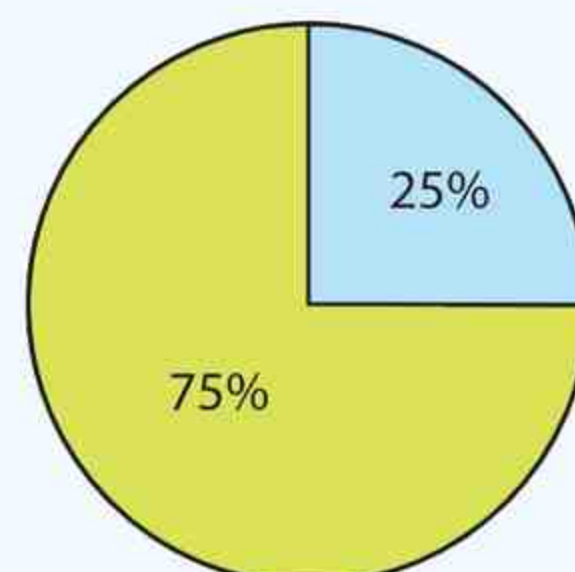
100% to całość.

50% całości to inaczej $\frac{1}{2} = 0,5$ tej całości.

25% całości to inaczej $\frac{1}{4} = 0,25$ tej całości.

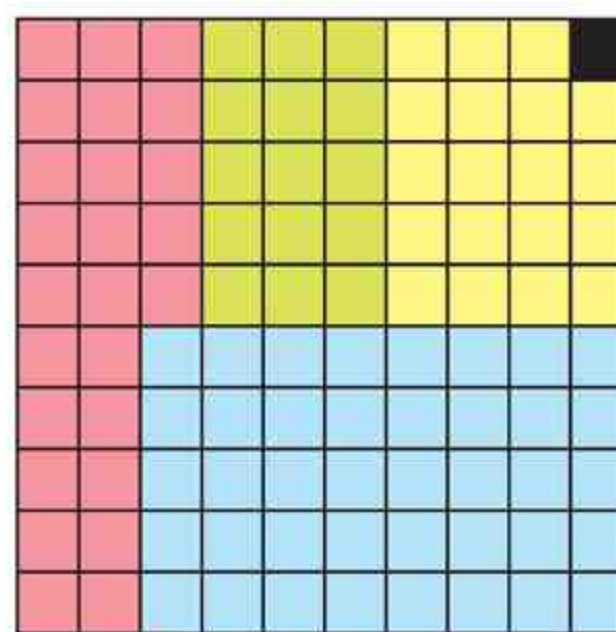
75% całości to inaczej $\frac{3}{4} = 0,75$ tej całości.

10% całości to inaczej $\frac{1}{10} = 0,1$ tej całości.



Powierzchnia całego kwadratu to 100%. W tym kwadracie pomalowano:

- na różowo 25%, czyli $\frac{25}{100}$,
- na zielono 15%, czyli $\frac{15}{100}$,
- na niebiesko 40%, czyli $\frac{40}{100}$,
- na żółto 19%, czyli $\frac{19}{100}$,
- na czarno 1%, czyli $\frac{1}{100}$.



Przykład 3

W klasie VIa jest 20 uczniów. Spośród nich 10% trenuje karate. Ilu uczniów klasy VIa trenuje karate?

- 10% uczniów to $\frac{1}{10}$ uczniów.
 $\frac{1}{10}$ z 20 uczniów to 2 uczniów.

Odp. Dwoje uczniów klasy VIa trenuje karate.

Przykład 4

Klasówkę pisało 20 uczniów. Spośród nich 15% otrzymało ocenę bardzo dobrą, 40% dobrą, 20% dostateczną, 10% dopuszczającą, 5% niedostateczną. Ile procent uczniów otrzymało ocenę celującą? Ilu to uczniów?

- Obliczamy, ile procent uczniów nie dostało oceny celującej.

$$15\% + 40\% + 20\% + 10\% + 5\% = 90\%$$

Wszyscy piszący klasówkę stanowią 100%. Ocenę celującą otrzymało $100\% - 90\% = 10\%$ uczniów.

100% uczniów to 20 uczniów.

10% uczniów to 2 uczniów. 10% to 10 razy mniej niż 100%

Odp. Ocenę celującą otrzymało 10% osób piszących klasówkę, czyli 2 uczniów.

Przykład 5

W 30-osobowej klasie 15 uczniów trenuje pływanie, a 3 uczniów – judo. Jaki procent klasy stanowią uczniowie trenujący poszczególne dyscypliny sportu?

- 15 uczniów to połowa, inaczej $\frac{1}{2}$ klasy, czyli 50%.
- 3 uczniów to $\frac{1}{10}$ klasy, czyli 10%.

Odp. Pływanie trenuje 50% klasy, a judo 10%.

► Czy może być więcej niż 100%?

To zależy od sytuacji.

Na przykład:

- można wykorzystać 40%, 73% lub 100% baterii, ale nie można wykorzystać więcej niż 100% baterii,
- na wycieczkę może pojechać 65%, 90% lub 100% klasy, ale nie może pojechać więcej niż 100% klasy.

Możemy jednak:

- zebrać 50%, 80%, 100% potrzebnej kwoty i jeśli będziemy zbierać dalej, możemy mieć 110%, 160%, ... tej kwoty,
- podwyższyć cenę towaru o 10%, 60%, 120%, 200%...

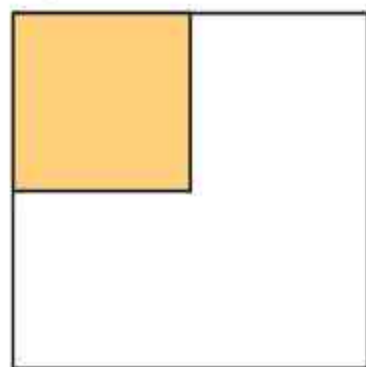


Zadania

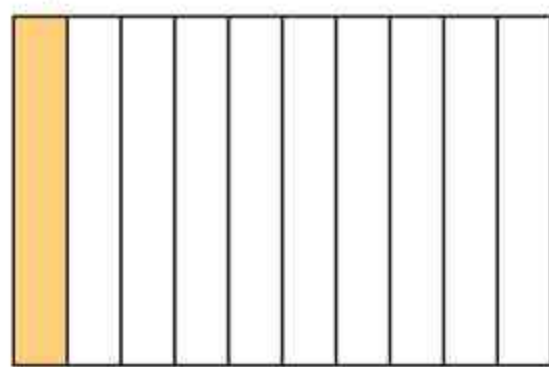
- **1** Morza i oceany zajmują 71% powierzchni Ziemi. Ile procent powierzchni Ziemi zajmują lądy?

- **2** Jaki procent figury został zamalowany?

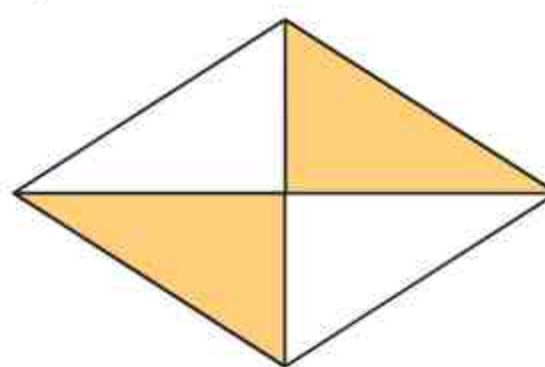
a)



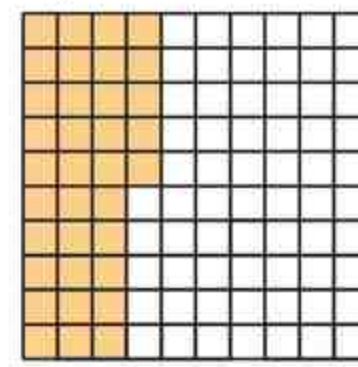
b)



c)



d)



- **3** Klasa VIc liczy 24 uczniów.

a) 100% uczniów klasy VIc było dziś w szkole. Ile to osób?

b) 25% uczniów klasy VIc ma na semestr czwórkę z matematyki. Ilu to uczniów?

c) 50% uczniów klasy VIc ma rodzeństwo. Ile to osób?

- **4** Jaki procent zwierząt na zdjęciu poniżej stanowią:

a) króliki,

b) psy,

c) koty,

d) ssaki?



- **5** Na parkingu przed fabryką samochodów stoi 300 samochodów.
 - a) 100% z nich to samochody osobowe. Ile ich jest?
 - b) 50% z nich wyprodukowano w Polsce. Ile ich jest?
 - c) 1% samochodów to auta zabytkowe. Ile ich jest?
 - d) 10% samochodów jest koloru czerwonego. Ile ich jest?
 - e) 25% samochodów to samochody typu kombi. Ile ich jest?
- **6** Paweł i Gaweł pokryli szkody spowodowane zalaniem mieszkania. Gaweł zapłacił 1350 zł, co stanowiło 50% wszystkich kosztów. Jaką kwotę zapłacili razem?
- **7** W bloku na osiedlu w Łodzi jest 20 mieszkań. W 10% mieszkań lokatorzy mają koty, w 50% mieszkań są psy. Jaki procent stanowią mieszkania, w których nie ma kota? W ilu mieszkaniach nie ma psa? Wyjaśnij, dlaczego nie da się powiedzieć, w ilu mieszkaniach nie ma ani psa, ani kota.
- **8** W 1795 r., w wyniku III rozbioru, nasz kraj został ostatecznie rozdzielony między trzech zaborców: Rosję, Prusy i Austrię. Rosja zajęła po tym podziale 63% terytorium Polski sprzed I rozbioru, a Prusy 19%. Który z krajów zagarnął większy obszar: Prusy czy Austria?
- **9** Przyjrzyj się rysunkowi i odpowiedz, ile procent uczniów tej klasy:
 - a) ma włosy blond,
 - b) ma na stoliku laptop,
 - c) nosi okulary,
 - d) to chłopcy,
 - e) to dziewczęta.



- **10** Na obozie było 60 harcerzy. 15 harcerzy wzięło udział w turnieju siatkówki, 30 osób popłynęło na rejs statkiem po Wiśle, a 6 – zdobyło złote medale na obozowej olimpiadzie.

- Jaki procent uczestników obozu stanowiły osoby uczestniczące w turnieju siatkówki?
- Ile procent uczestników obozu wybrało się na rejs statkiem?
- Jaki procent wszystkich harcerzy stanowili zdobywcy złotych medali na obozowej olimpiadzie?

- **11** Oblicz na podstawie rysunku:

- ile procent zwierząt stanowią ptaki,
- ile procent zwierząt stanowią papugi,
- ile procent ptaków stanowią papugi,
- ile procent zwierząt stanowią tygrysy,
- ile procent ssaków stanowią wielkie koty,
- ile procent gadów stanowią węże.



- **12** Jacek potrzebuje 40 pocztówek do albumu o Warszawie. Kupił 25 pocztówek, ale ze zdobyciem pozostałych miał problem. Poprosił kolegów, by mu pomogli. Kuba przyniósł mu 6 pocztówek, Dawid 8, a Kamil 11. Ile pocztówek ma już Jacek? Ile to procent potrzebnych pocztówek?

-  **13** W 24-osobowej klasie wszyscy uczniowie uczą się co najmniej jednego z dwóch języków: angielskiego lub niemieckiego. 75% uczniów uczy się języka angielskiego, a 25% uczy się dwóch języków. Ile osób uczy się języka niemieckiego?

-  **14** Członkowie szkolnego koła turystycznego wybrali się na wycieczkę w Rudawy Janowickie, ponieważ zainteresowały ich zabytki tego regionu. Pierwszego dnia przebyli 40% całej trasy, drugiego dnia 75% tego, co im zostało, a ostatniego dnia pokonali ostatnie 6 km. Ile kilometrów pokonali uczniowie pierwszego dnia?

 Dla dociekliwych

W pewnym mieście są dwie szkoły podstawowe. W miejskim konkursie matematycznym „Menelaos” biorą udział uczniowie z obydwu tych szkół. W szkole nr 1 jest 400 uczniów, spośród których 10% wystartowało w konkursie, a w szkole nr 2 jest 1000 uczniów, spośród których 5% wystartowało w konkursie.

Do grona laureatów zaliczono 10% zawodników ze szkoły nr 1 oraz 30% zawodników ze szkoły nr 2.

- 1 Spróbuj zgadnąć, z której szkoły wystartowało więcej osób.
- 2 Oblicz, ile osób wystartowało ze szkoły nr 1, a ile – ze szkoły nr 2. Czy twoje przypuszczenia z zadania 1 się potwierdziły?
- 3 Z której szkoły było więcej laureatów? Ile razy więcej?
- 4 Ile procent wszystkich uczniów szkoły nr 1 zaliczono do grona laureatów?
- 5 Ile procent wszystkich uczniów szkoły nr 2 zaliczono do grona laureatów?

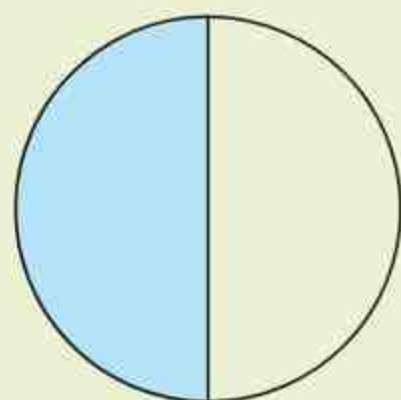
Wskazówka Informacje i wyniki obliczeń warto uporządkować w tabeli.

 Czy już umiem?

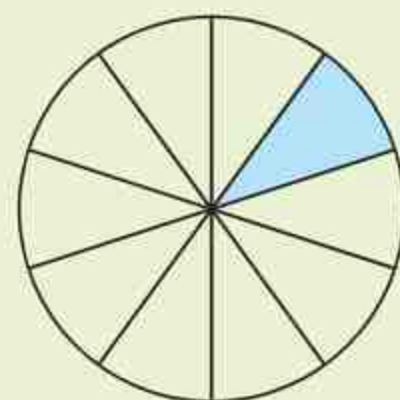
I Wśród nowo narodzonych dzieci 48% stanowią dziewczynki. Ile jest procent chłopców? Czy rodzi się więcej chłopców, czy dziewczynek?

II Jaki procent koła został zamalowany?

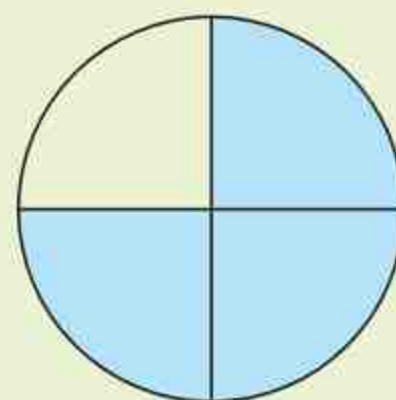
a)



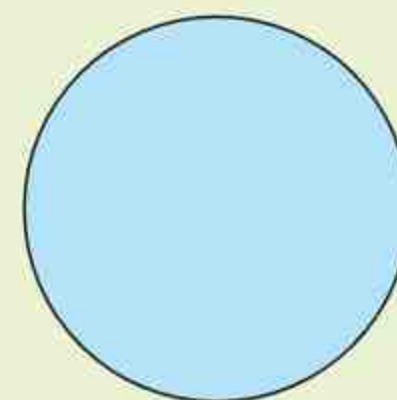
b)



c)



d)



III Klasa liczy 28 uczniów. 75% klasy było w teatrze na operze „Straszny Dwór” Stanisława Moniuszki. Ile osób z klasy było na tym przedstawieniu?

IV Zamień na metry.

- a) 2 500 000 cm b) 0,5 cm c) 0,04 km d) 680 mm



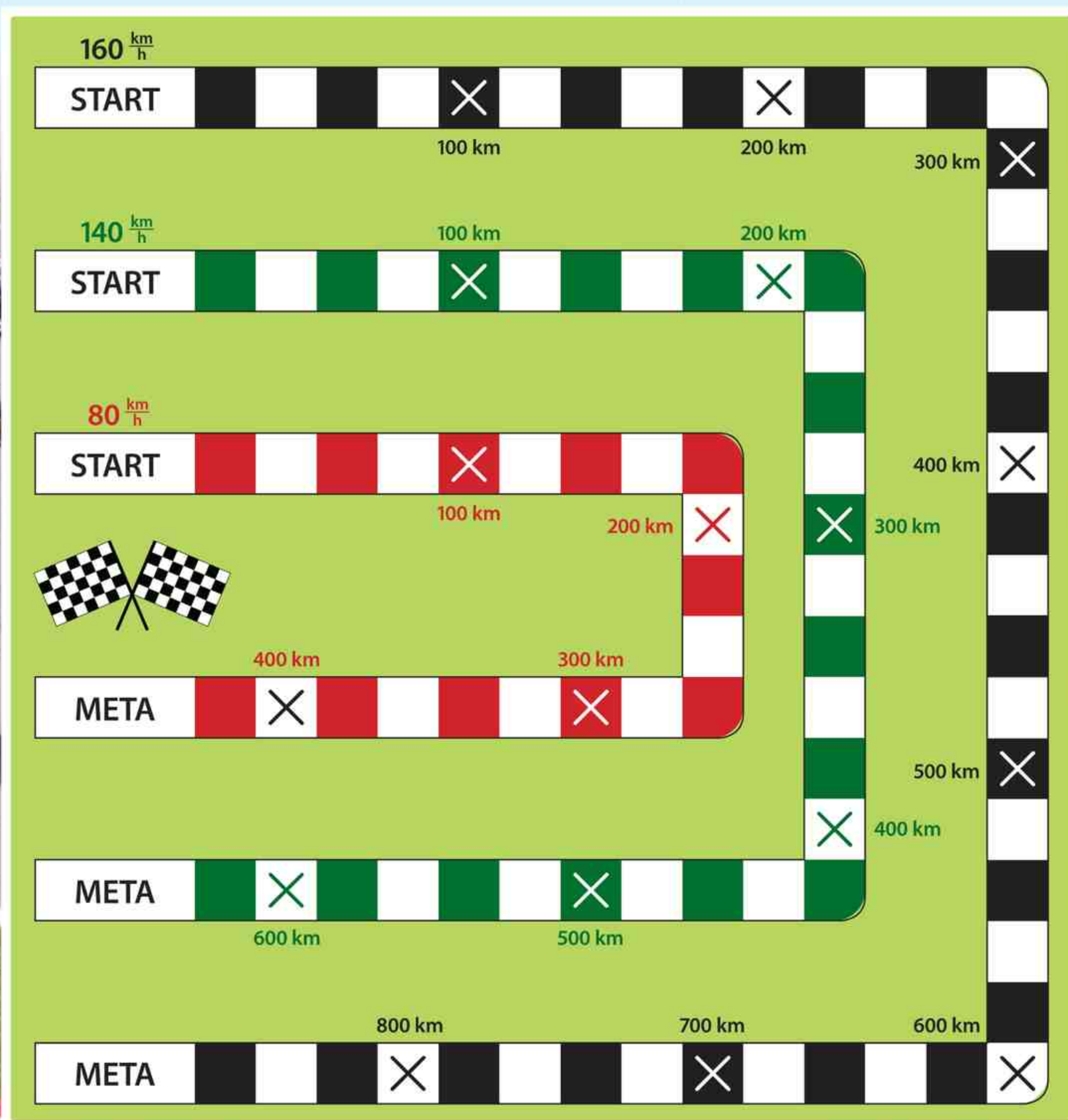
Na dobry początek

Rajd samochodowy

Podzielcie się na 3-osobowe grupy.

- ▶ Każdy z zawodników wybiera jedną z tras na planszy.
- ▶ Postawcie pionki na polu START. Grę zaczyna ten, kto wybrał najdłuższy tor. W kolejnych ruchach zaznaczajcie pionkami kolejne położenia samochodów zgodnie z podaną przy torze prędkością.
- ▶ Jeden ruch to 1 godzina, a przeskok o jedno pole to 20 km.
- ▶ Po każdym ruchu zawodnik zapisuje zgodnie ze wzorem (tabela obok), ile kilometrów przebył od początku wyścigu.
- ▶ Kto z was pierwszy dotarł na metę?

Prędkość ... $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	
po 1 godz.	... km
po 2 godz.	... km
...	...



Z pojęciem prędkości spotykamy się w codziennym życiu. Prędkość określa, jaką drogę pokonuje pojazd, człowiek czy zwierzę w ustalonym czasie. Na przykład jeśli samochód jedzie **z prędkością 50 kilometrów na godzinę**, to znaczy, że w ciągu 1 godziny przejeżdża 50 kilometrów.

Słowo „kilometr” zapisujemy w skrócie „km”. Skrótem słowa „godzina” jest „godz.,” ale także „h”, gdyż w wielu językach słowo to zaczyna się literą h (np. po angielsku *hour*). Kilometry na godzinę oznaczamy symbolem $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Często spotyka się też zapis km/h.

Przykład 1

poziom A

Ile kilometrów przejechał rowerzysta przez 2 godziny?

Ten rowerzysta przejeżdża 15 km w ciągu 1 godziny.

W ciągu 2 godzin przejechał 2 razy więcej, czyli: $2 \cdot 15 = 30$ [km].

Już 2 godziny
jadę z prędkością
15 km/h.



poziom B

Z jaką prędkością jechał kierowca?

W ciągu godziny ten kierowca przejechał: $180 : 3 = 60$ [km].

A więc jego prędkość wynosiła $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Prawdopodobnie samochód nie jechał przez cały czas z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Czasami mógł jechać szybciej, a czasem zwalniał lub nawet się zatrzymał. Skoro jednak na 1 h jazdy przypadło 60 km przebytej drogi, możemy powiedzieć, że **prędkość średnia** wynosiła $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Przejechałem
180 km w ciągu
3 godzin.



poziom C

Kiedy Jacek dojedzie do Miasteczka?

Jacek w ciągu 1 h przejeżdża 20 km, ale do Miasteczka jest 40 km.

Wobec tego jazda zajmie mu 2 h.

Jadę z prędkością
20 km/h.



Prędkość można podawać również w innych jednostkach, np. w metrach na sekundę ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$).

Przykład 2

Mucha leci z prędkością $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jaką drogę przebędzie w czasie:

a) 10 s,

b) 1 min?

a) W czasie 1 s mucha pokonuje 3 m, więc w ciągu 10 s pokona drogę 10 razy dłuższą.

$$10 \cdot 3 = 30 \text{ [m]}$$

b) Minuta to 60 sekund, więc w ciągu minuty mucha pokona

$$60 \cdot 3 = 180 \text{ [m]}.$$

Odp. W czasie 10 s mucha przebędzie drogę 30 m, a w czasie 1 min drogę 180 m.



Zadania



1 Wykonaj polecenia. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

Oblicz, jaką drogę przebedziemy, jeśli będziemy się poruszać przez podany czas z podaną prędkością.

a) 2 h; $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

d) 4 h; $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

g) 3 h; $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

b) 3 h; $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

e) 8 h; $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

h) 4 h; $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

c) 5 h; $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

f) 20 h; $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

i) 5 h; $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

poziom B

Samochód przejechał podaną drogę w podanym czasie. Z jaką średnią prędkością się poruszał?

a) 200 km; 4 h

d) 300 km; 3 h

g) 400 km; 5 h

b) 210 km; 3 h

e) 100 km; 2 h

h) 360 km; 4 h

c) 300 km; 6 h

f) 300 km; 4 h

i) 560 km; 7 h

poziom C

W jakim czasie przebedziemy podaną drogę z podaną prędkością?

a) 100 km; $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

d) 180 km; $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

g) 50 km; $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

b) 20 km; $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

e) 120 km; $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

h) 60 km; $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

c) 45 km; $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

f) 36 km; $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

i) 80 km; $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

MISTRZ

Oblicz, jaką łączną drogę przebył rowerzysta i ile czasu mu to zajęło, jeśli:

- przejechał 20 km z prędkością $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a potem 12 km w czasie 2 h,
- jechał przez 3 h z prędkością $11 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a potem przebył 27 km w czasie 3 h,
- przebył 26 km z prędkością $13 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a potem jechał przez 3 h z prędkością $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- **2** Jacek przeszedł 8 km w ciągu 2 godzin, a Placek przeszedł 9 km w ciągu 3 godzin. Który z nich szedł szybciej?
- **3** Rowerzysta jechał przez 2 h z prędkością $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a piechur szedł przez 5 h z prędkością $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Który z nich przebył dłuższą drogę?
- **4** Nietoperz rozpoczął polowanie o 18.30 i latał do 20.30 ze średnią prędkością $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile kilometrów przebył w tym czasie?
- **5** Delfin może płynąć z prędkością $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Aby przepłynąć Morze Śródziemne z okolic Rzymu do Tunisu, musi pokonać 585 km. Ile czasu zajmie mu taka podróż?
- **6** Jaki dystans pokonał sprinter, biegnąc przez 11 s ze średnią prędkością $9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?
- **7** Jeden samochód jechał przez 4 h z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Drugi samochód przebył tę samą drogę z prędkością $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. O ile dłużej jechał drugi samochód?
- **8** Z jaką średnią prędkością biegł zawodnik, który dystans 1000 m pokonał w czasie 3 min 20 s? Odpowiedź podaj w metrach na sekundę.
- **9** Motorówka płynęła w górę rzeki przez 4 h. Ile czasu zajmie jej powrót, jeśli w dół rzeki płynąć będzie z dwa razy większą prędkością?
- **10** Rowerzysta jechał przez 5 h z prędkością $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. O ile kilometrów na godzinę musiałby zwiększyć prędkość, aby tę samą drogę pokonać w czasie o 1 h krótszym?





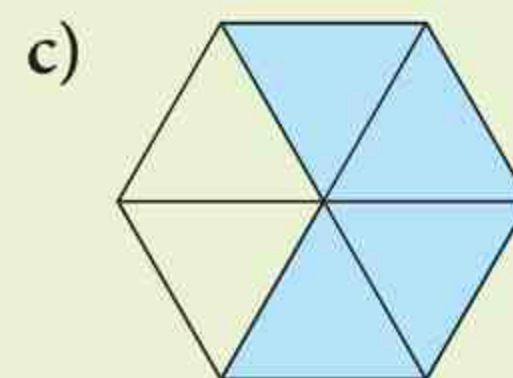
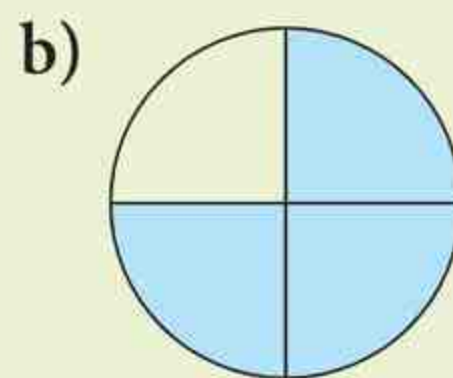
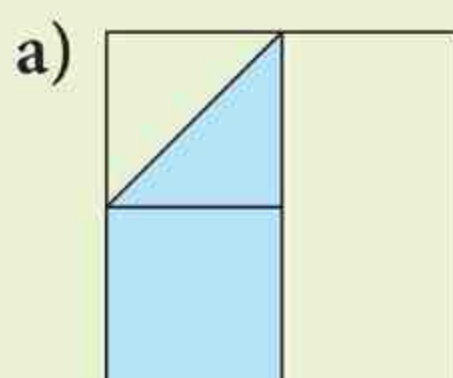
Dla dociekliwych

- 1 Samochód przejechał 360 km. Połowę tej drogi przebył po drodze ekspresowej z prędkością $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a połowę po drogach lokalnych z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- Ile czasu zajęła jazda po drodze ekspresowej?
 - Ile czasu zajęła jazda po drogach lokalnych?
 - Ile czasu trwała cała jazda?
 - Ile średnio kilometrów przypada na godzinę podróży?
 - Jaka była średnia prędkość na całej trasie?
- Zauważ, że średnia prędkość na całej trasie nie jest równa średniej arytmetycznej liczb 90 i 60.
- 2 Samochód przejechał 20 km z prędkością $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a potem przez godzinę jechał z prędkością $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaka była jego średnia prędkość na całej trasie?



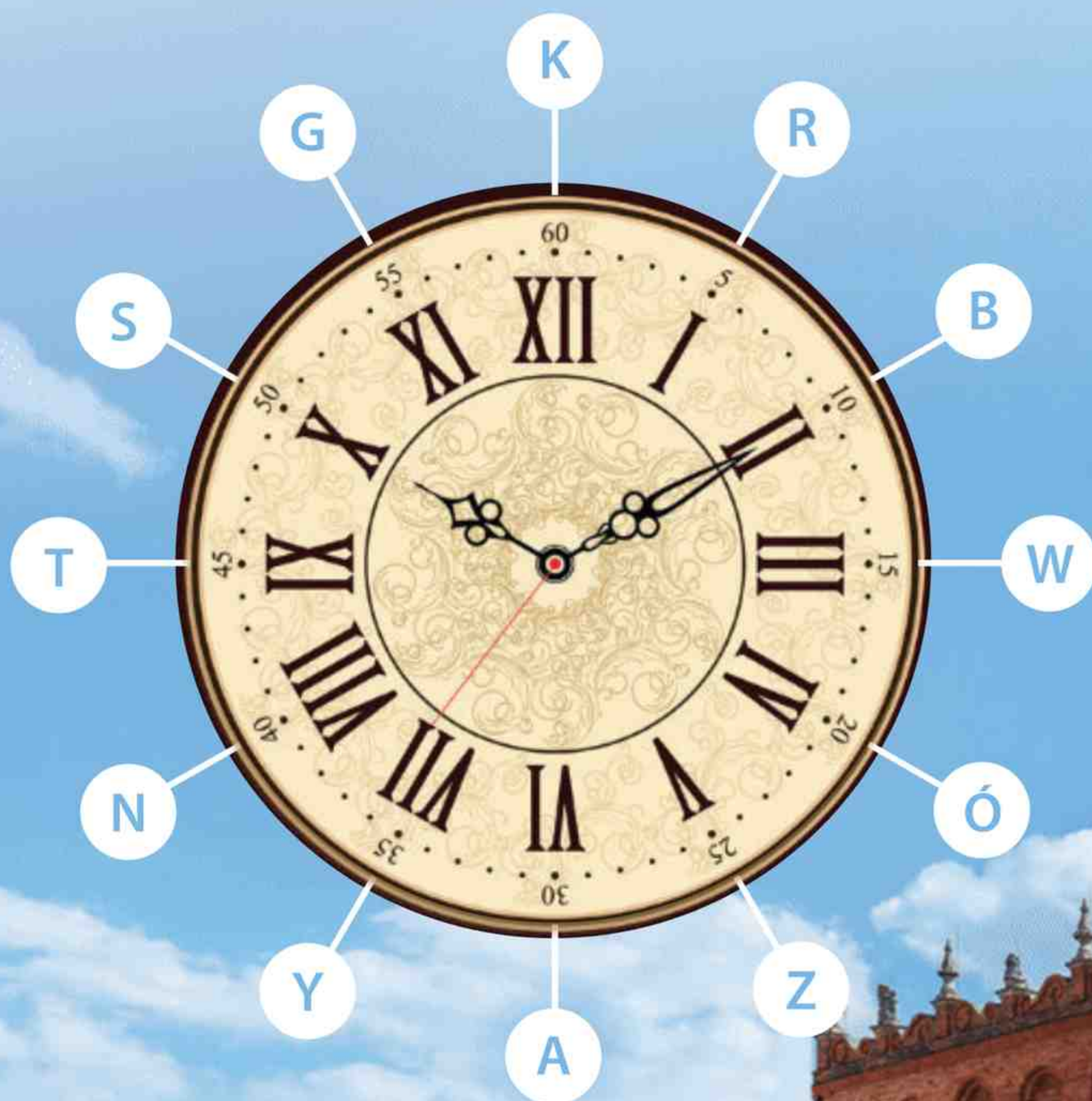
Czy już umiem?

- I Turysta przebył 18 km w ciągu 6 godzin. Podaj jego średnią prędkość.
- II Ile czasu zajmie podróż samochodem z Wrocławia do Łodzi ze średnią prędkością $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? Odległość między tymi miastami wynosi 200 km.
- III Jaką odległość pokonał pociąg w czasie od 12.45 do 15.45, jeśli jechał z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- IV Jaką część figury zamalowano? Odpowiedź przedstaw w postaci ułamka zwykłego i dziesiętnego (skończonego lub okresowego).



Na dobry początek

Zegarowy szyfr



Hasło:

$\frac{3}{4}$ h

0,5 h

$\frac{1}{12}$ h

$\frac{2}{3}$ h

20 min

$\frac{1}{4}$ h

Pytania i polecenia

W zaszyfrowanym hasle zamiast liter podano, ile czasu upłynęło od pełnej godziny. Odszyfruj hasło, a otrzymasz nazwę miasta w Małopolsce z jednym z najstarszych działających zegarów wieżowych w Polsce.

W poprzednim temacie rozwiązywaliśmy zadania dotyczące prędkości, drogi i czasu. We wszystkich obliczeniach występowały liczby naturalne. Często jednak spotykamy się z sytuacją, gdy droga, prędkość lub czas są wielkościami ułamkowymi.

Zaczniemy od czasu.

Przykład 1

poziom A

$\frac{3}{5}$ h – ile to minut?

$\frac{3}{5}$ z 1 h to inaczej $\frac{3}{5}$ z 60 min, czyli $\frac{3}{5} \cdot 60 = 36$ [min]

Odp. $\frac{3}{5}$ h to 36 min.

poziom B

40 min – jaka to część godziny?

Godzina ma 60 min, a więc 40 min to $\frac{40}{60}$ h.

$\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ (skracamy przez 20)

Odp. 40 min to $\frac{2}{3}$ h.

poziom C

15 min – jaka to część godziny?

Podaj wynik w postaci ułamka dziesiętnego.

$15 \text{ min} = \frac{15}{60} \text{ h} = \frac{1}{4} \text{ h} = 0,25 \text{ h}$

Odp. 15 min to 0,25 h.

poziom D

0,1 h – ile to minut?

Sposób 1

$0,1 \text{ h} = \frac{1}{10} \text{ h} = \frac{6}{60} \text{ h} = 6 \text{ min}$

Sposób 2

0,1 z liczby 60 to $0,1 \cdot 60 = 6$,
a więc 0,1 z 60 min to 6 min.

Odp. 0,1 h to 6 min.

$\frac{15}{60} = 15 : 60$,
więc mogę podzielić.



0,1 z liczby 60
to $0,1 \cdot 60$,
więc pomnożę.



Teraz możemy się zająć zadaniami dotyczącymi prędkości.

Przykład 2

Samochód jedzie z prędkością $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Jaką drogę przebędzie w ciągu 45 minut?

$$45 \text{ min} = \frac{45}{60} \text{ h} = \frac{3}{4} \text{ h}$$

$\frac{3}{4}$ z 80 km to 60 km.

Odp. Samochód przebędzie drogę 60 km.



Przykład 3

W ciągu 20 minut rowerzysta przebył 5 km. Z jaką średnią prędkością jechał?

$$20 \text{ min} = \frac{20}{60} \text{ h} = \frac{1}{3} \text{ h}$$

Skoro w czasie $\frac{1}{3}$ h rowerzysta przebył 5 km, to w ciągu całej godziny przejechałby drogę 3 razy dłuższą.

$$3 \cdot 5 \text{ km} = 15 \text{ km}$$

Odp. Rowerzysta jechał ze średnią prędkością $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Jeśli dane w zadaniu są bardziej skomplikowane, np. kiedy są to liczby mieszane, możesz pomyśleć o podobnym zadaniu z prostszymi danymi. Dzięki temu łatwiej ci będzie ustalić, jakie działanie trzeba wykonać.

Przykład 4

a) W czasie 2 h pociąg przebył 120 km. Z jaką średnią prędkością jechał?

Na 1 godzinę jazdy przypadała droga:

$$120 : 2 = 60 \text{ [km]}$$

Odp. Średnia prędkość wynosiła $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) W czasie $1\frac{1}{4}$ h pociąg przebył 140 km. Z jaką średnią prędkością jechał?

Na 1 godzinę jazdy przypadała droga:

$$140 : 1\frac{1}{4} = 140 : \frac{5}{4} = 140 \cdot \frac{4}{5} = 112 \text{ [km]}$$

Odp. Średnia prędkość wynosiła $112 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Przykład 5

- a) Samolot przebył 1000 km z prędkością $500 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jak długo trwał lot?
 $1000 : 500 = 2 \text{ [h]}$
 W ciągu 1 h samolot przebywa 500 km, więc 1000 km przebędzie w czasie 2 h.

Odp. Lot trwał 2 h.

- b) Samolot przebył 900 km z prędkością $400 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jak długo trwał lot?
 $900 : 400 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} \text{ [h]}$
 $2\frac{1}{4} \text{ h} = 2 \text{ h } 15 \text{ min}$

Odp. Lot trwał 2 h 15 min.

Dobra rada

Jeśli wykonujesz działania na ułamkach dziesiętnych, pamiętaj, że otrzymany ułamek godziny trzeba zamienić na minuty. Cyfry po przecinku nie oznaczają minut!

$3\frac{1}{10}$ godziny, czyli
3 h 6 min.



$2\frac{3}{4}$ godziny, czyli
2 h 45 min.



Zadania

- 1 Wykonaj polecenia. ► Jeśli poprawnie rozwiązesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

Zamień na minuty.

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| a) $\frac{1}{2} \text{ h}$ | c) $\frac{3}{5} \text{ h}$ | e) $\frac{1}{10} \text{ h}$ | g) $\frac{3}{4} \text{ h}$ |
| b) $\frac{2}{3} \text{ h}$ | d) $\frac{1}{4} \text{ h}$ | f) $\frac{1}{5} \text{ h}$ | h) $\frac{1}{3} \text{ h}$ |

poziom B

Jaka to część godziny? Odpowiedź zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| a) 24 min | d) 45 min | g) 30 min |
| b) 10 min | e) 35 min | h) 5 min |
| c) 20 min | f) 15 min | i) 40 min |

poziom C

Jaka to część godziny? Odpowiedź zapisz w postaci ułamka dziesiętnego.

- a) 24 min c) 30 min e) 45 min
b) 15 min d) 12 min f) 6 min

poziom D

Zamień na minuty.

- a) 0,2 h d) 0,15 h g) 0,05 h
b) 0,5 h e) 0,3 h h) 0,75 h
c) 0,25 h f) 0,6 h i) 0,8 h

- **2** Samochód jedzie z prędkością $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką drogę przebędzie w czasie 15 min?
- **3** Rowerzysta przejechał 30 km w czasie 1,5 h. Z jaką prędkością jechał?

Informacje do zadań 4 i 5

Rozkład jazdy pociągu

Stacja	Przyjazd	Odjazd
Warszawa Wschodnia		14.36
Warszawa Centralna	14.44	14.56
Kraków Główny	17.51	18.00
Kraków Płaszów	18.09	18.10
Bochnia	18.45	19.06
Tarnów	19.26	19.27
Rzeszów Główny	20.26	

- **4** Odpowiedz na pytania.

- a) O której godzinie pociąg odjeżdża ze stacji Warszawa Centralna?
b) O której godzinie pociąg przyjeżdża do stacji Rzeszów Główny?
c) Jak długo jedzie pociąg z Warszawy Centralnej do Rzeszowa? Wynik podaj w godzinach, w postaci liczby mieszanej.
d) Odległość kolejowa między Warszawą Centralną a Rzeszowem wynosi 450 km. Z jaką średnią prędkością jedzie pociąg na tej trasie?



- **5** Jadąc z Warszawy Wschodniej do Krakowa Głównego, pociąg przebywa około 300 km. Z jaką średnią prędkością jedzie?
- **6** Trasa z Łodzi do Krakowa ma długość 260 km. Ile czasu zajmie nam przebycie tej drogi ze średnią prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? O ile krócej będzie trwała taka podróż, jeśli będziemy jechać z prędkością $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- **7** Pasażerski samolot odrzutowy leci z prędkością około $900 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile kilometrów przeleciał ten samolot od godziny 12.45 do godziny 14.05?
- **8** Rakieta kosmiczna rozpędza się do prędkości $8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Okrążając Ziemię, przebywa drogę równą około 40 tys. km. Jak długo trwa okrążenie Ziemi? Podaj wynik w godzinach i minutach, zaokrąglając go do pełnych minut.
- 🏆 **9** Statek z Suezu do Adenu miał przebyć 1310 mil morskich w ciągu 138 godzin. Ponieważ Phileas Fogg obiecał kapitanowi nagrodę za zwiększenie prędkości, ten skrócił rejs o 15 godzin. O ile węzłów zwiększyła się prędkość statku? Do obliczeń użyj kalkulatora. Podaj wynik z dokładnością do części dziesiątych węzła. Czy wiesz, w jakiej książce opisano ten rejs?

1 mila morska = 1852 m
1 węzeł = 1 mila morska/h





Dla dociekliwych

Klaudia jechała rowerem z prędkością $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Gdy była w odległości 144 m od Jacka, chłopiec ruszył jej na spotkanie z prędkością $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Po jakim czasie się spotkali?

Jeden ze sposobów na rozwiązanie tego zadania polega na zauważeniu, że w ciągu 1 s odległość między Jackiem i Klaudią zmniejszała się o 9 m. Wobec tego czas do spotkania to $144 : 9 = 16$ [s].

Zwróć uwagę, że czas do spotkania byłby taki sam, gdyby jedno z nich stało w miejscu, a drugie poruszało się w jego stronę z prędkością $9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Podobne rozumowanie pozwoli ci rozwiązać także poniższe zadania.

- 1 Kuba i Wojtek pożegnali się przed szkołą. Kuba poszedł w stronę domu z prędkością $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wojtek został jeszcze dwie minuty na miejscu, ale przypomniał sobie, że ma oddać Kubie pożyczony od niego zeszyt. Zaczął więc gonić Kubę z prędkością $1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Po jakim czasie go dogonił?
- 2 Schody ruchome jadące w górę były zatłoczone, więc Ola postanowiła wbiec po schodach jadących w dół. Schody poruszały się z prędkością $0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a Ola wbiegała po nich z prędkością $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jak długo zajął jej bieg na górę, jeśli miała do przebycia 12 m?
Uwaga. Nie naśladuj Oli.
- 3 Dlaczego czołowe zderzenia samochodów są tak groźne?



Czy już umiem?

- I Jaką odległość pokonamy od godziny 12.55 do 14.20, poruszając się z prędkością $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- II Ile czasu zajmie pokonanie 120 km z prędkością $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? Wynik podaj w godzinach i minutach.
- III Jaką średnią prędkość miał samochód, który od godziny 12.20 do 13.40 przejechał 90 km?
- IV Rozwiąż równanie.

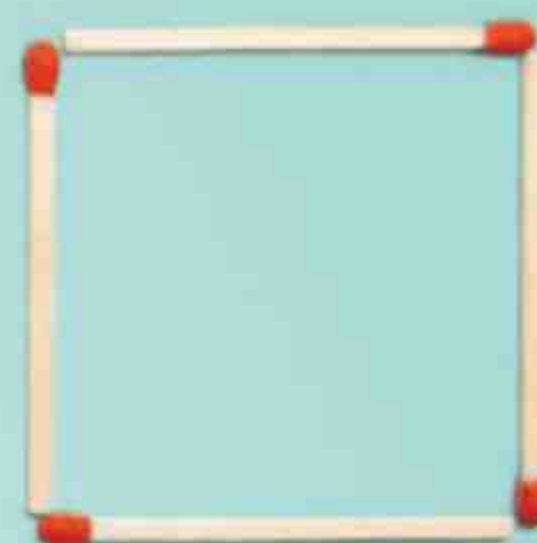
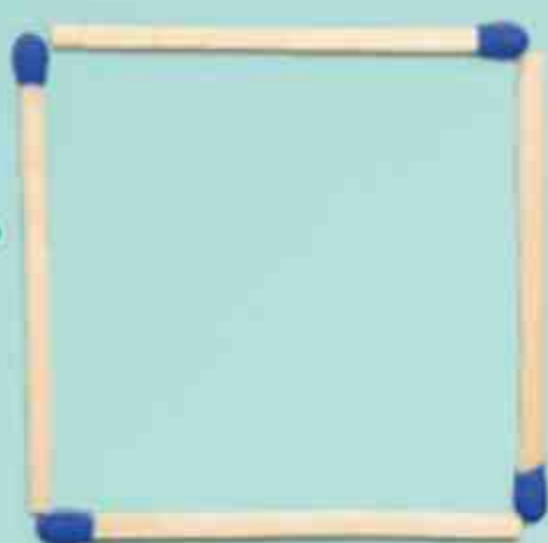
a) $12 \cdot x = 48$

b) $27 - x = 16$

Zagadka 1

Ile zapatek
potrzeba do
ułożenia
trzech
kwadratów?

A do
ułożenia
stu
kwadratów?



Zagadka 2

Ile zapatek
potrzeba
do ułożenia
w jednej linii
trzech
połączonych
kwadratów?



A do
zbudowania
pięciu
tak ułożonych
kwadratów?

Dziesięciu
tak ułożonych
kwadratów?

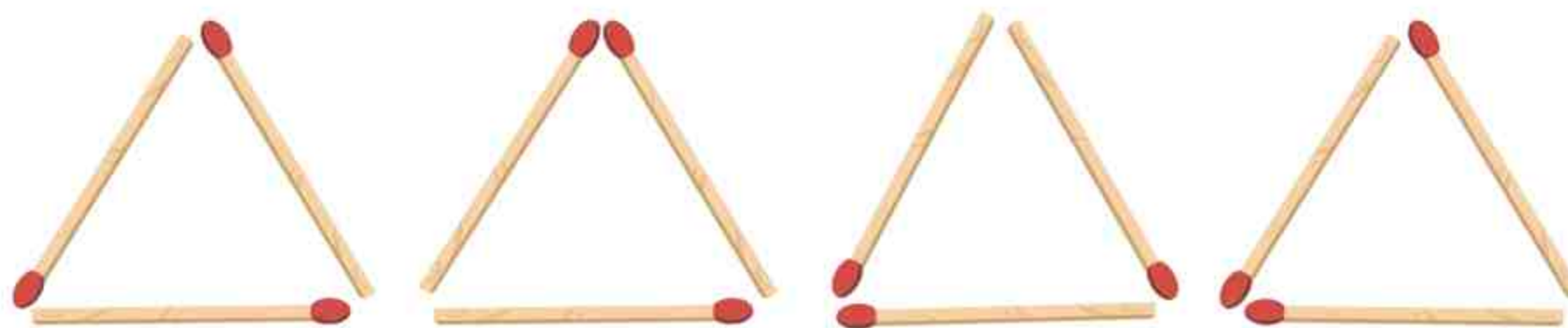
Stu
tak ułożonych
kwadratów?

Pytania i polecenia

Spróbuj odpowiedzieć na powyższe pytania. Porównaj swoje odpowiedzi z przewidywaniami innych uczniów w klasie.



Gdy chcemy układać trójkąty z zapalek (jak na rysunku poniżej), musimy mieć trzy razy więcej zapalek niż liczba zaplanowanych trójkątów.



Na tym rysunku są 4 trójkąty, a zapalek jest $3 \cdot 4 = 12$.

Tę zależność można zapisać za pomocą **wzoru**:

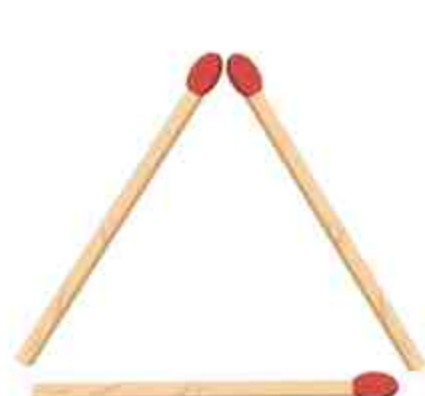
$$z = 3 \cdot t$$

Występujące we wzorze litery oznaczają:

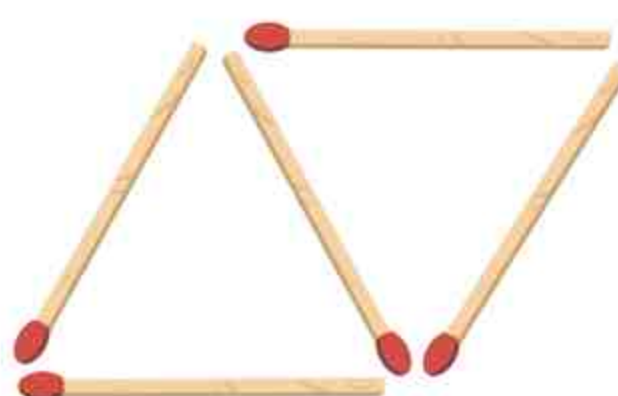
z – liczbę zapalek,

t – liczbę trójkątów.

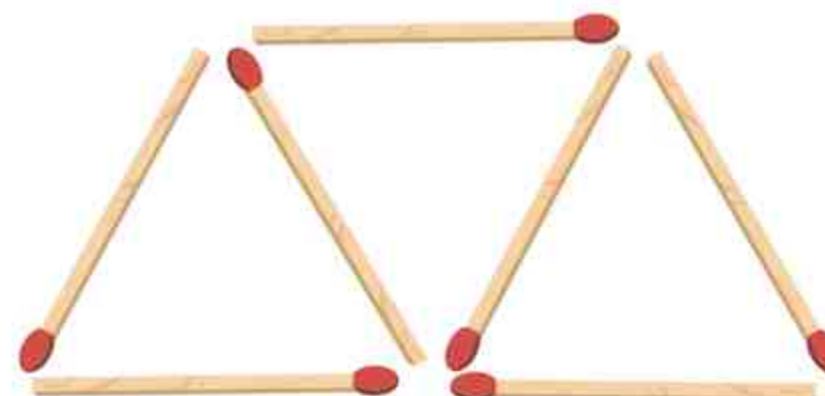
Spróbujmy teraz opisać zależność liczby zapalek od liczby trójkątów w nieco bardziej skomplikowanym przypadku – gdy układamy w jednej linii połączone trójkąty.



1 trójkąt –
3 zapalki



2 trójkąty –
5 zapalek



3 trójkąty –
7 zapalek

Gdybyśmy chcieli wiedzieć, ile zapalek potrzeba na 1000 tak połączonych trójkątów, układanie i liczenie nie byłoby najszybszą metodą. Lepiej zauważyć, że do ułożenia nowego trójkąta potrzeba dwóch zapalek i dodatkowo, do zakończenia całej „układanki”, potrzebna jest jeszcze jedna.

Przyjrzyj się rysunkowi.

Tak więc aby ułożyć 1000 połączonych trójkątów, potrzeba $2 \cdot 1000 + 1 = 2001$ zapalek.

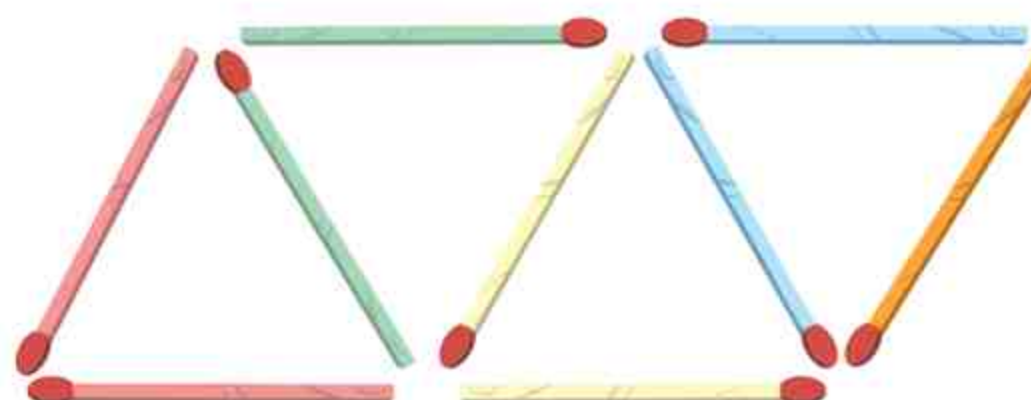
Ogólnie możemy zapisać:

$$z = 2 \cdot t + 1$$

gdzie:

z – liczba zapalek,

t – liczba trójkątów.



Gdy mamy taki wzór, łatwo możemy obliczyć liczbę zapalek potrzebnych do ułożenia danej liczby trójkątów. Na przykład jeśli chcemy się dowiedzieć, ile zapalek potrzeba do ułożenia 150 połączonych trójkątów, zastępujemy t liczbą 150, czyli **podstawiamy** w miejsce t liczbę 150.

$$z = 2 \cdot 150 + 1 = 300 + 1 = 301$$

Ze wzorami można się spotkać zarówno w życiu codziennym, jak i na lekcjach wielu przedmiotów. Na przykład wzór na pole prostokąta ma postać:

$$P = a \cdot b$$

Żeby skorzystać z tego wzoru, czyli obliczyć pole P prostokąta o podanych bokach, podstawiamy w miejsce a i b liczby oznaczające długości boków.

Przykład 1

Być może wiesz, że woda wrze w temperaturze 100°C . Okazuje się jednak, że temperatura wrzenia wody zależy od ciśnienia powietrza, np. w wysokich górach jest niższa. Temperaturę wrzenia wody w zależności od wysokości nad poziomem morza można obliczyć ze wzoru:

$$t = 100 - h \cdot 0,0033$$

gdzie:

t – temperatura w stopniach Celsjusza,

h – wysokość n.p.m. w metrach.

Oblicz temperaturę wrzenia wody na szczycie Śnieżki, na wysokości 1602 m n.p.m.

$$h = 1602 \text{ [m n.p.m.]}$$

Skoro

$$t = 100 - h \cdot 0,0033$$

to

$$t = 100 - 1602 \cdot 0,0033$$

$$t \approx 100 - 5 = 95 \text{ [}^{\circ}\text{C]}$$



Odp. Na szczycie Śnieżki woda wrze w temperaturze około 95°C .



Zadania

- 1** Wykonaj polecenia. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

Podstaw do wzoru podaną liczbę w miejsce x i oblicz y .

- a) $y = x + 1$; $x = 2$ c) $y = x : 2$; $x = 6$ e) $y = x : 3$; $x = 12$
 b) $y = 2 \cdot x$; $x = 3$ d) $y = 2 \cdot x$; $x = 4$ f) $y = x - 7$; $x = 8$

poziom B

Podstaw do wzoru $a = 6$ i $b = 2$. Oblicz c .

- a) $c = a + b$ d) $c = a \cdot b$ g) $c = a - b + 1$
 b) $c = \frac{a}{b}$ e) $c = a + b + 1$ h) $c = a - 2 \cdot b$
 c) $c = 2 \cdot a + b$ f) $c = \frac{b}{a}$ i) $c = 2 \cdot b + a$

poziom C

Podstaw do wzoru $p = 4$ i $r = 2$. Oblicz s .

- a) $s = \frac{p^2}{r}$ d) $s = \frac{p-2}{r+2}$ g) $s = (5-p) \cdot r$
 b) $s = \frac{p}{r-1}$ e) $s = \frac{p^2+2}{r+1}$ h) $s = (2-r)^2 \cdot p$
 c) $s = (p-1) \cdot (r+2)$ f) $s = 2 \cdot (p-4)$ i) $s = \frac{p}{r+2}$

MISTRZ

Jaką liczbę podstawić w miejsce x , aby otrzymać $y = 5$?

- a) $y = \frac{5}{x}$ c) $y = 2 \cdot x + 1$
 b) $y = x + 3$ d) $y = \frac{2}{x} + 4$

- **2** Który wzór odpowiada opisowi I, a który – opisowi II?

A $b = 3 \cdot a + 2$

B $b = 2 \cdot a + 3$

I Aby obliczyć b , mnożymy a przez 2, a potem dodajemy 3.

II Aby obliczyć b , mnożymy a przez 3, a potem dodajemy 2.

- **3** Który opis odpowiada wzorowi I, a który – wzorowi II?

A Aby obliczyć b , liczbę a dzielimy przez 2 i do ilorazu dodajemy 4.

B Aby obliczyć b , do liczby a dodajemy 4 i sumę dzielimy przez 2.

I $b = a : 2 + 4$

II $b = (a + 4) : 2$

- **4** Który opis odpowiada wzorowi I, który – wzorowi II, a który – wzorowi III?

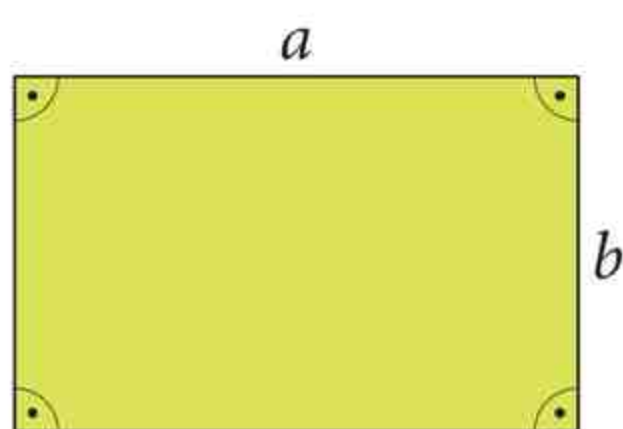
A Aby obliczyć pole, dodaj długości podstaw, podziel wynik przez 2 i pomnóż przez wysokość.

B Aby obliczyć pole, pomnóż podstawę przez wysokość i podziel przez 2.

C Aby obliczyć pole, pomnóż długości sąsiednich boków.

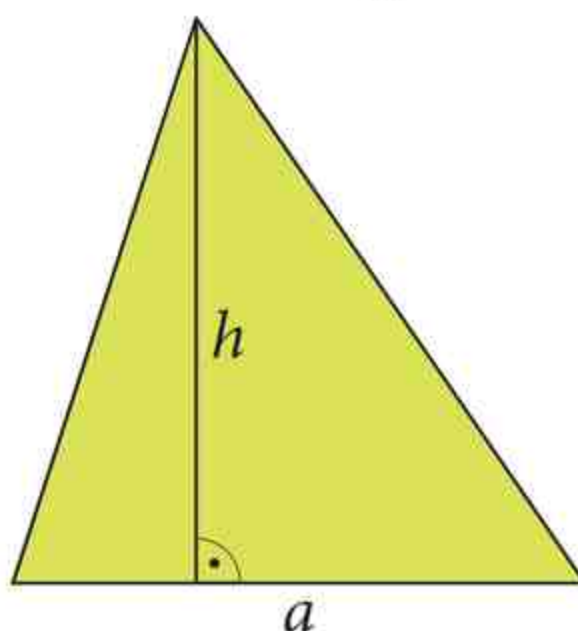
I

$$P = a \cdot b$$



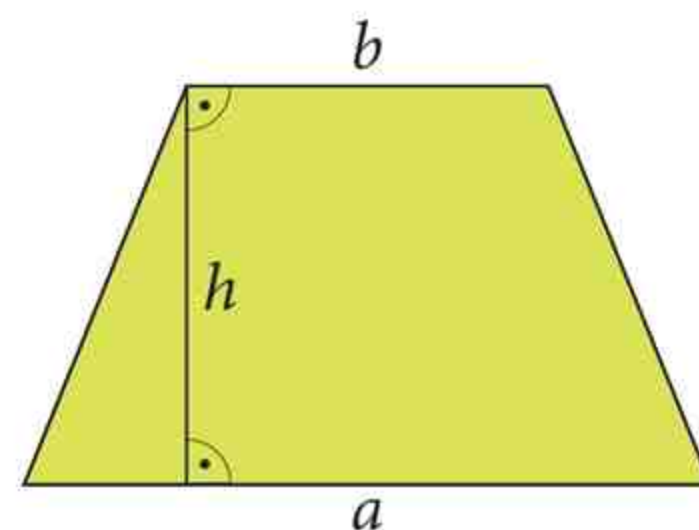
II

$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$



III

$$P = \frac{a + b}{2} \cdot h$$



Informacje do zadań 5–7

W niektórych krajach (m.in. w Stanach Zjednoczonych) temperaturę mierzy się w skali Fahrenheita (czytaj: farenhajta) opracowanej w XVIII wieku przez urodzonego w Gdańsku uczonego Daniela Gabriela Fahrenheita. Stopnie Fahrenheita ($^{\circ}\text{F}$) można przeliczyć na używane przez nas stopnie Celsjusza ($^{\circ}\text{C}$), korzystając ze wzoru:

$$c = \frac{5}{9} \cdot (f - 32)$$

gdzie:

c – temperatura w stopniach Celsjusza,

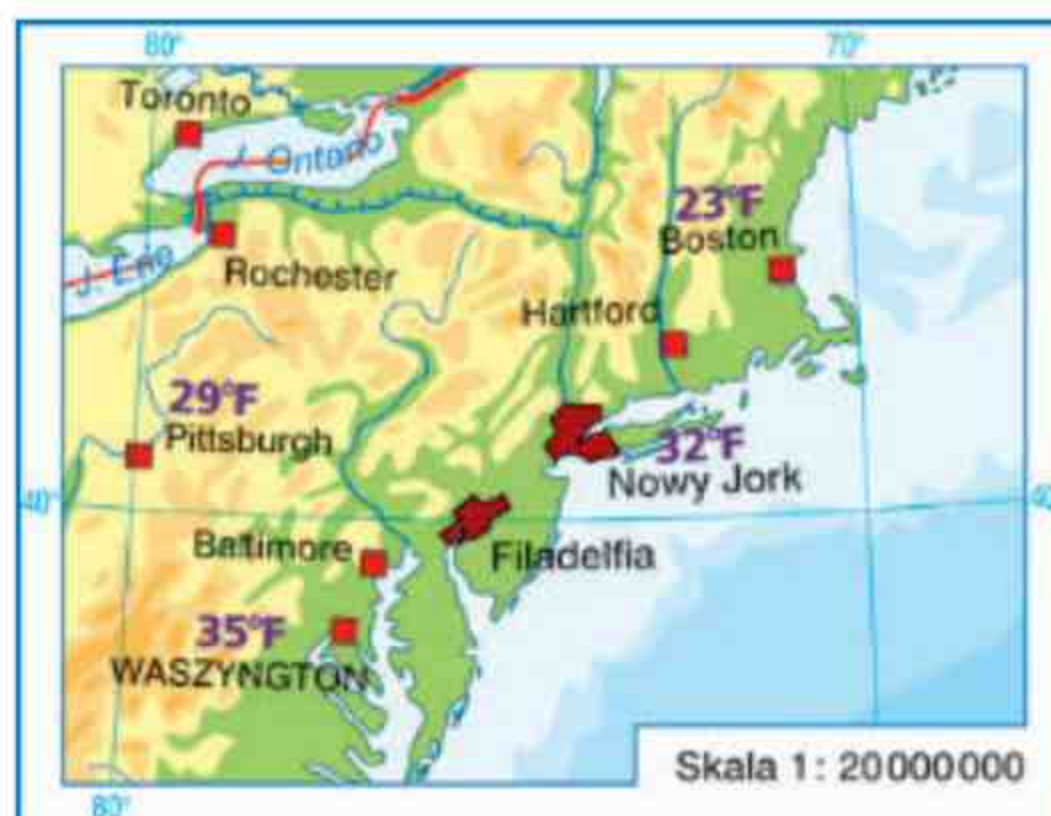
f – temperatura w stopniach Fahrenheita.

- **5** Przelicz na stopnie Celsjusza.

a) 41°F

b) 50°F

- **6** Na mapie pogody temperaturę w różnych miastach podano w stopniach Fahrenheita. Przelicz ją na stopnie Celsjusza.



- **7** Woda zamarza w temperaturze 0°C . Ile to stopni Fahrenheita?

- 🏆 **8** Oblicz, na jakiej wysokości nad poziomem morza woda wrze w temperaturze 90°C . Skorzystaj ze wzoru podanego w przykładzie na stronie 176.



Dla dociekliwych

Kiedy obliczasz pole trójkąta, wszystko jedno, czy korzystasz ze wzoru $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ czy $P = \frac{a \cdot h}{2}$. Za pomocą obu tych wzorów obliczymy to samo pole – czyli dla konkretnego trójkąta otrzymamy tę samą liczbę.

- 1 Wybierz i zapisz wzory, które właściwie opisują pole trójkąta o podstawie a i wysokości h .

$$P = \frac{a}{2} \cdot h$$

$$P = \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2}$$

$$P = a \cdot \frac{h}{2}$$

$$P = 0,5 \cdot a \cdot h$$

$$P = 0,5 \cdot h \cdot a$$

$$P = h \cdot a : 2$$

$$P = a \cdot h : 2$$

$$P = a : (2 \cdot h)$$

- 2 Tylko jeden z podanych wzorów daje inny wynik niż pozostałe. Który to wzór?

A $t = 2 \cdot m + 3$

B $t = m + m + 3$

C $t = m + m + 2 + m$

D $t = 3 + 4 \cdot m : 2$

E $t = m + 2 + m + 1$



Czy już umiem?

- I Który opis odpowiada wzorowi I, a który – wzorowi II?

A Aby obliczyć b , pomnóż a przez 2 i dodaj 5.

B Aby obliczyć b , do liczby a dodaj 5 i pomnóż wynik przez 2.

I $b = 2 \cdot a + 5$

II $b = 2 \cdot (a + 5)$

- II Najwyżej położonym miejscem w Polsce są Rysy (2499 m n.p.m.). W jakiej temperaturze wrze woda w tym miejscu? Skorzystaj ze wzoru podanego w przykładzie na stronie 176.

- III Przelicz temperaturę 59°F na stopnie Celsjusza.

- IV Podziel pisemnie. Wynik podaj w postaci z resztą, w postaci liczby mieszanej i w postaci ułamka dziesiętnego (skończonego lub okresowego).

a) $602 : 16$

b) $380 : 27$

Na dobry początek

Spacer po mieście

Przygotujcie plan swojego lub pobliskiego miasta albo skorzystajcie z planu centrum Gdańska zamieszczonego na stronie obok. Wybierzcie na planie punkt startowy i 4 punkty docelowe.

- ▶ Ustaw swój pionek na starcie. Drugi gracz jest twoim nawigatorem. Będzie ci wydawać polecenia kierujące do wybranego przez niego punktu docelowego, np. „Idź 200 m na północ” albo „Idź na wschód i skręć w lewo na pierwszym skrzyżowaniu”. Jeśli dobrze wykonasz polecenie, dostajesz punkt.
- ▶ Jeśli polecenie było niewykonalne, drugi gracz traci punkt.
- ▶ Zamieńcie się rolami. Wygrywa osoba, która zdobędzie więcej punktów.

- Znajdź na planie centrum Gdańska kościół św. Mikołaja.
- Stań przy skrzyżowaniu po północno-wschodniej stronie kościoła.
- Idź na południe około 100 metrów, aż dojdiesz do skrzyżowania.
- Skręć w lewo i idź do końca ulicy.
- Jaki zabytek masz przed sobą?

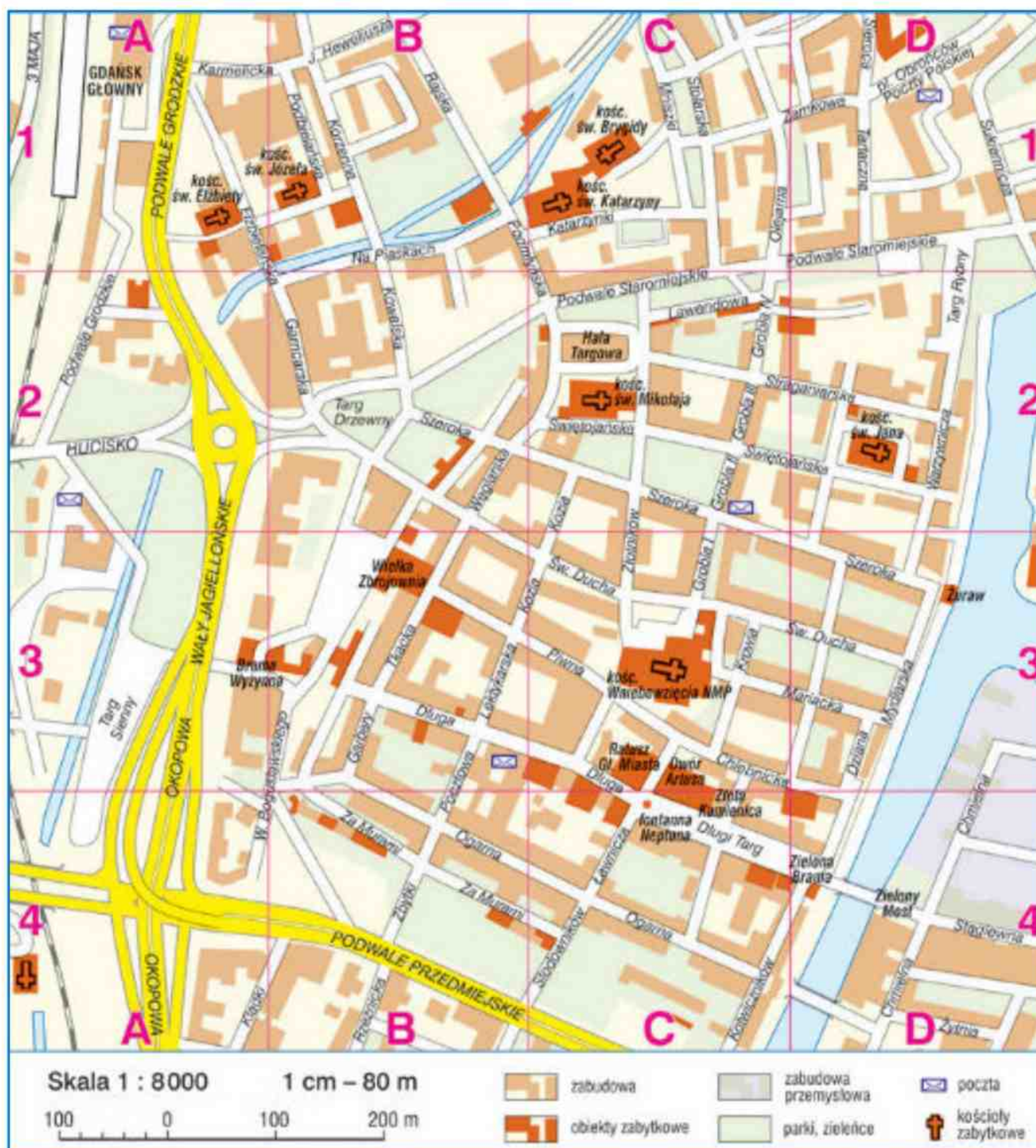
Pytania i polecenia

Wykonaj powyższe instrukcje, „spacerując” palcem po mapie.

Przykład 1

Poniżej przedstawiono fragment planu Gdańska. Na jego podstawie odpowiedz na pytania.

- Jak daleko jest w Gdańsku od fontanny Neptuna do Zielonego Mostu?
- Co się znajduje 120 m na północ od fontanny Neptuna?
- Jaki zabytek znajduje się w kwadracie D3?



- W legendzie możemy przeczytać, że plan wykonano w skali 1 cm – 80 m. Linijką mierzymy na planie interesującą nas odległość. Wynosi ona 2,5 cm. Każdy centymetr na planie to 80 m w terenie, a więc odległości 2,5 cm na planie odpowiada w rzeczywistości $2,5 \cdot 80 \text{ m} = 200 \text{ m}$.

- b) Najpierw obliczmy, jakiej odległości na planie odpowiada 120 m w terenie. Każde 80 m w rzeczywistości to 1 cm na planie.

$$120 : 80 = 1,5$$

(120 m to 1,5 raza więcej niż 80 m).

1 cm – 80 m

1,5 raza więcej

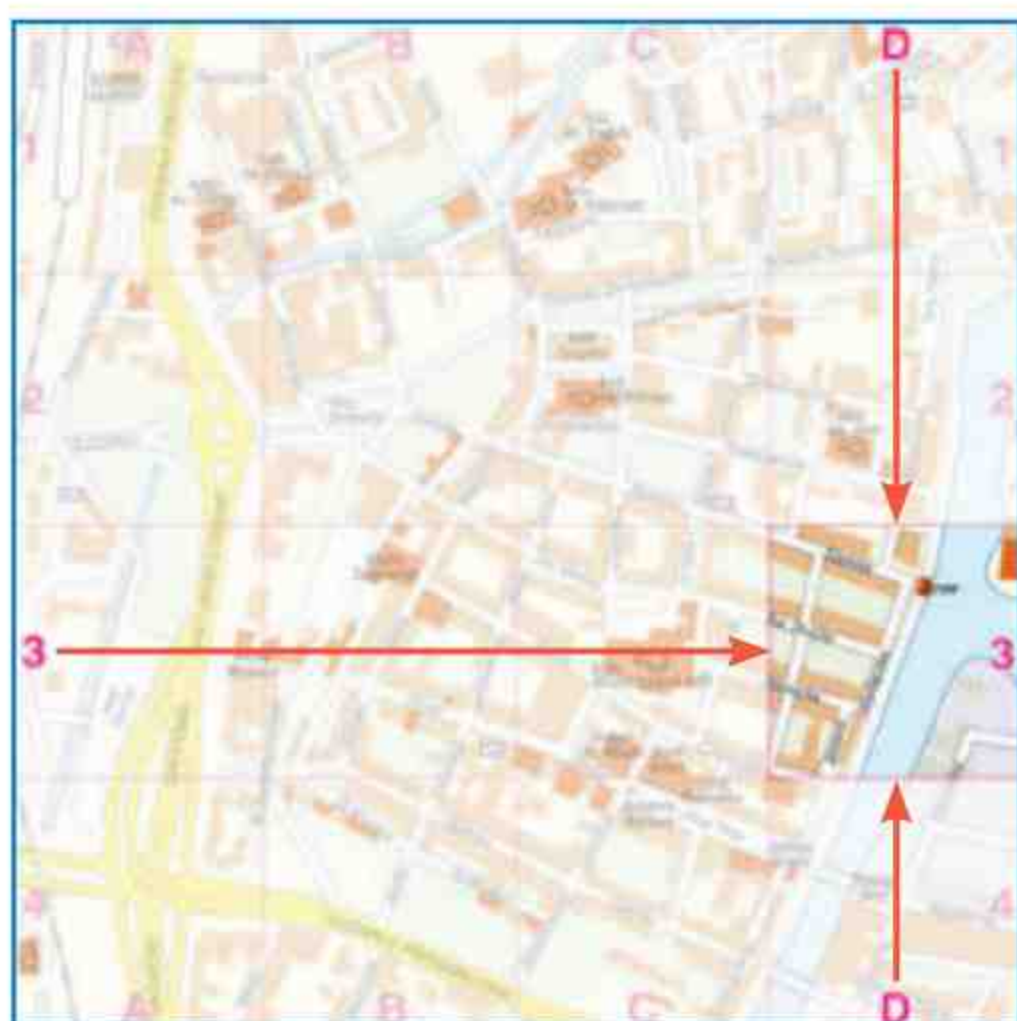
1,5 raza więcej

1,5 cm – 120 m

Północ znajduje się w górnej części planu. Za pomocą linijki szukamy miejsca położonego na planie 1,5 cm „w górę” od fontanny Neptuna. Znajduje się tam kościół Wniebowzięcia NMP.



- c) Znajdujemy kwadrat D3 jak na rysunku poniżej.



W tym kwadracie znajduje się słynny gdański Żuraw.



Przykład 2

- Jaka odległość w terenie odpowiada 1 cm na mapie Gór Stołowych?
- Jak daleko jest w prostej linii od przystanku w Karłowie do wsi Ostra Góra?
- Jak długa jest droga od przystanku w Karłowie do wsi Ostra Góra?



- W legendzie podano, że mapa jest wykonana w skali 1 : 50 000. Znaczy to, że 1 cm na planie odpowiada 50 000 cm w terenie. Warto tylko przeliczyć 50 000 cm na wygodniejsze jednostki:
 $50\,000\text{ cm} = 500\text{ m}$
 A więc 1 cm na mapie odpowiada 500 m w terenie.
- Mierzmy odległość w linii prostej za pomocą linijki. Otrzymujemy około 6 cm.
 $6 \cdot 500\text{ m} = 3000\text{ m} = 3\text{ km}$
- Interesuje nas długość drogi, a nie odległość w linii prostej między podanymi punktami. Możemy tę długość zmierzyć np. za pomocą nitki. Otrzymujemy około 10 cm. Oznacza to, że w terenie należy pokonać drogę długości około:
 $10 \cdot 500\text{ m} = 5000\text{ m} = 5\text{ km}$

Dobra rada

Zawsze najpierw oblicz, jakiej odległości w terenie odpowiada 1 cm na mapie. Będzie ci znacznie łatwiej przeliczać inne odległości.

Przykład 3

Odczytaj z mapy Gór Stołowych, na jakiej wysokości n.p.m. znajduje się schronisko w Pasterce.

Sprawdzamy w legendzie mapy, jakim symbolem oznacza się schronisko. Jest to .

Znajdujemy taki symbol we wsi Pasterka. Jest on narysowany w pobliżu poziomicy 700.

Tak więc schronisko znajduje się na wysokości około 700 m n.p.m.

**Zadania**

-  **1** Wykonaj polecenia. ► Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A

Oblicz, jakiej odległości w rzeczywistości odpowiada 1 cm na planie w podanej skali.

- | | | |
|------------|------------|------------|
| a) 1 : 20 | c) 1 : 850 | e) 1 : 120 |
| b) 1 : 200 | d) 1 : 30 | f) 1 : 40 |

poziom B

Oblicz, jakiej odległości w rzeczywistości odpowiada 1 cm na mapie w podanej skali.

- | | | |
|------------------|-------------------|----------------|
| a) 1 : 20 000 | d) 1 : 8000 | g) 1 : 15 000 |
| b) 1 : 4 000 000 | e) 1 : 120 000 | h) 1 : 90 000 |
| c) 1 : 750 000 | f) 1 : 24 000 000 | i) 1 : 180 000 |

poziom C

Oblicz, jakiej odległości w rzeczywistości odpowiada podana odległość na mapie w podanej skali.

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|----------------------|
| a) 4 cm; 1 : 20 000 | d) 6 cm; 1 : 8000 | g) 3 cm; 1 : 15 000 |
| b) 10 cm; 1 : 4 000 000 | e) 20 cm; 1 : 120 000 | h) 4 cm; 1 : 90 000 |
| c) 5 cm; 1 : 750 000 | f) 15 cm; 1 : 24 000 000 | i) 7 cm; 1 : 180 000 |

poziom D

Oblicz, jakiej odległości w rzeczywistości odpowiada podana odległość na mapie w podanej skali.

- | | | |
|--------------------------|------------------------|---------------------------|
| a) 3,2 cm; 1 : 10 000 | d) 3,1 cm; 1 : 250 000 | g) 3,5 cm; 1 : 20 000 |
| b) 5,3 cm; 1 : 8 000 000 | e) 8,2 cm; 1 : 50 000 | h) 1,5 cm; 1 : 44 000 000 |
| c) 2,5 cm; 1 : 120 000 | f) 4,5 cm; 1 : 150 000 | i) 2,3 cm; 1 : 7000 |

MISTRZ

Korzystając z mapy Gór Stołowych ze strony 183, oblicz rzeczywistą długość:

- zielonego szlaku turystycznego od parkingu przy Błędnym Skałach do schroniska w Pasterce,
- żółtego szlaku turystycznego od rozwidlenia szlaków żółtego i czerwonego w Karłowie do kościoła w Pasterce,
- niebieskiego szlaku turystycznego od parkingu nad rzeką Pośną do schroniska „Na Szczelińcu”.

Uwaga. Do rozwiązania zadań 2–4 wykorzystaj plan centrum Gdańska zamieszczony na stronie 181.

- **2** Znajdź pocztę w kwadracie B3 i zapisz, przy jakiej ulicy się znajduje.
- **3** Oblicz rzeczywistą długość ulicy Szerokiej (kwadraty B2, C2, C3, D3) i ulicy Długiej (kwadraty B3, C3, C4).
- **4** Jakimi ulicami i w jakim kierunku geograficznym trzeba iść, aby przejść od Zielonego Mostu (kwadrat D4) do Bramy Wyżynnej (kwadrat A3)? Jakie zabytki napotkasz po drodze i po której stronie?

Uwaga. Do rozwiązania zadań 5–9 wykorzystaj mapę Gór Stołowych zamieszczoną na stronie 183.

- **5** Czy Szczeliniec Wielki znajduje się na wschód, zachód, północ czy na południe od Szczelińca Małego?
- **6** O ile metrów Szczeliniec Wielki jest wyższy od Szczelińca Małego?
- **7** Zmierz odległość na mapie i oblicz, jaka jest rzeczywista odległość w linii prostej:
 - od szczytu Pasterskiej Góry do szczytu Błędnym Skał,
 - od przystanku w Pasterce do schroniska w Pasterce,
 - od kaplicy w Karłowie do parkingu nad rzeką Pośną.

- **8** Znajdź miejsce położone w odległości 3 km na zachód od przystanku w Karłowie. Co się tam znajduje?
- **9** Turyści szli zielonym szlakiem z Karłowa do Pasterki. Jaką drogę przebyli, idąc od przystanku PKS w Karłowie do przystanku PKS w Pasterce? Jaką drogę przebywa autobus między tymi przystankami?
-  **10** Na mapie w skali 1 : 200 000 odległość między dwiema wsiami wynosi 10 cm. Ile wynosi odległość między tymi wsiami na mapie w skali 1 : 50 000?



Dla dociekliwych

Aby zachęcić do turystyki górskiej, Polskie Towarzystwo Turystyczno-Krajoznawcze ustanowiło Górską Odznakę Turystyczną (GOT). Podczas wędrowki po górach turysta może w specjalnej książeczce zbierać punkty. 1 punkt można dostać za 1 przebyty kilometr lub za 100 m różnicy poziomów przy podejściu pod górę. Aby zdobyć popularną GOT, osoba w wieku 11–15 lat musi zebrać 50 punktów.

- 1** Oblicz, ile punktów GOT możesz zdobyć, idąc zielonym szlakiem ze schroniska w Pasterce na Błędne Skały. Ile punktów możesz dostać za wycieczkę w przeciwnym kierunku?



Czy już umiem?

- I** Jaki kościół znajduje się na planie Gdańska (s. 181) w kwadracie D2?
- II** W jakim kierunku od kościoła św. Katarzyny w Gdańsku znajduje się kościół św. Brygidy?
- III** Na podstawie mapy Gór Stołowych (s. 183) podaj rzeczywistą odległość między skałami Cap i Maks położonymi w pobliżu schroniska w Pasterce.
- IV** Oblicz.

a) $0,1^3$	c) $5,1^2$	e) $(2\frac{1}{2})^2$
b) $0,02^2$	d) $(\frac{2}{3})^3$	f) $-0,4^2$

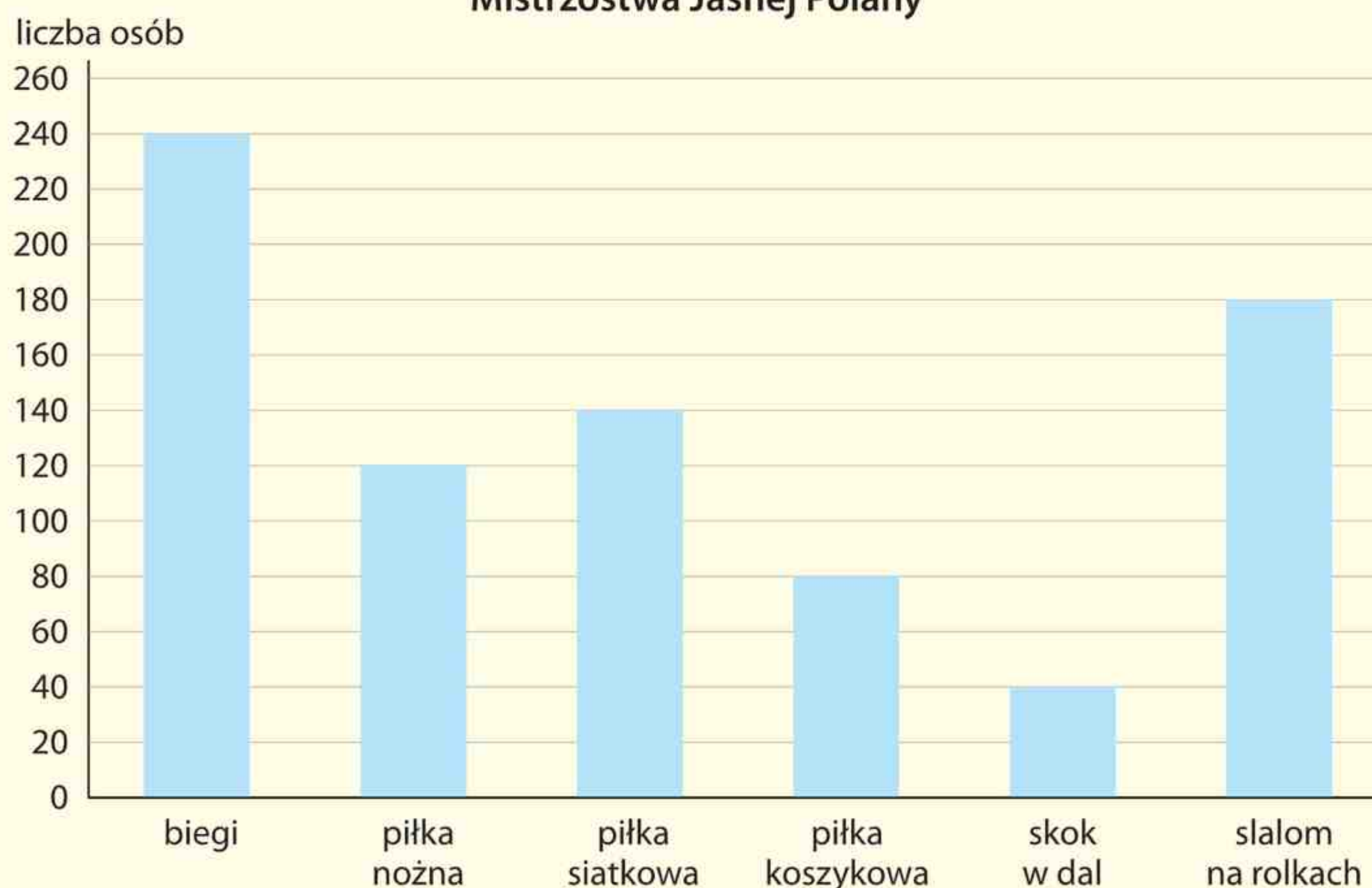
Powtórzenie przed klasówką

Informacje potrzebne do rozwiązywania zadań znajdziesz w tabeli, na diagramie i na mapie.

Szkoły w Jasnej Polanie

Szkoła	Liczba uczniów (tys.)
Szkoła Podstawowa nr 1	0,7
Szkoła Podstawowa nr 2	0,4
Szkoła Podstawowa nr 3	1,1
Liceum Ogólnokształcące	1,2

Mistrzostwa Jasnej Polany



- 1 Odczytaj z tabeli, ile osób chodzi do liceum w Jasnej Polanie. Odpowiedź zapisz bez użycia skrótu „tys.”.
- 2 Jaką drogę przebędziemy, jeśli przez 4 godziny będziemy szli z prędkością $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- 3 Ile czasu mija od 14.45 do 15.20?
- 4 Trzy jabłka ważą: 20 dag, 15 dag, 13 dag. Ile średnio waży jedno jabłko?



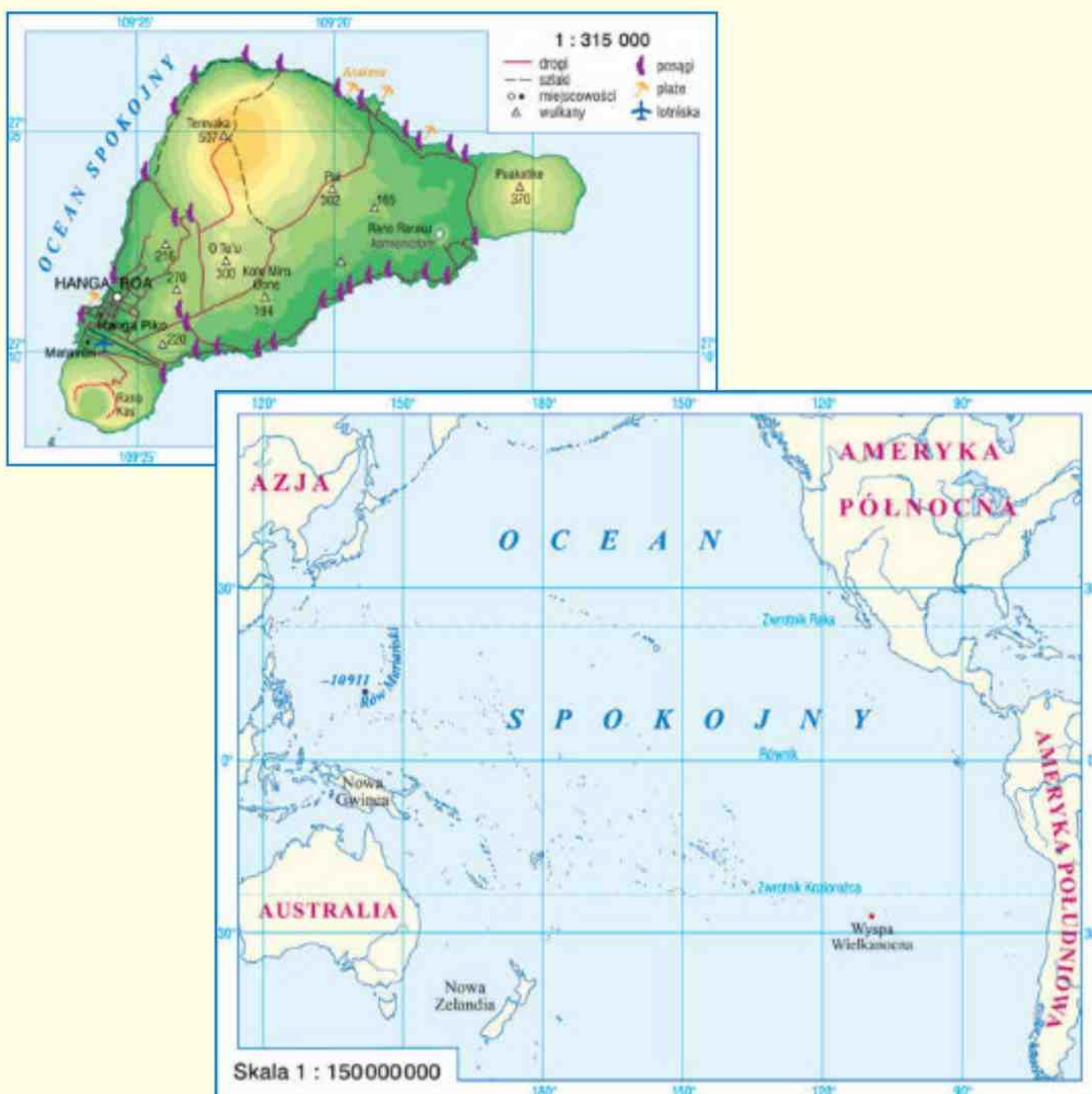
- 5 Odszukaj odpowiednie informacje w tabeli i odpowiedz, czy w Jasnej Polanie więcej uczniów chodzi do Liceum Ogólnokształcącego czy do Szkoły Podstawowej nr 2. O ilu uczniów więcej? Ile razy więcej?
- 6 W której grze zespołowej startowało najwięcej uczestników? Ilu ich było?
- 7 Ile razy więcej osób startowało w biegach niż w skoku w dal?
- 8 Jaką średnią prędkość miał samochód, który trasę długości 120 km przebył w ciągu 1 h 30 min?
- 9 Jakiej odległości w terenie odpowiada 1 cm na zamieszczonej powyżej mapie? Odpowiedź podaj w kilometrach.
- 10 Samochód wyjechał z Krakowa o 12.30 i pojechał do odległego o 270 km Wrocławia ze średnią prędkością $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. O której godzinie dotarł do celu?
- 11 Zmierz na mapie odległość w linii prostej między Wrocławiem a Olsztynem i oblicz, ile wynosi ta odległość w rzeczywistości.

Zadania na temat...

Wyspa Wielkanocna

Wyspa Wielkanocna to wulkaniczny obszar o powierzchni 163 km², leżący w południowej części Oceanu Spokojnego. W języku rdzennych mieszkańców nazywa się Rapa Nui. Słynie z posągów zwanych *moai*, które powstawały od około 1100 r. Ich budowa została nagle przerwana w 1680 r., prawdopodobnie z powodu wybuchu walk międzyplemiennych.

W niedzielę Wielkiej Nocy w 1722 r. wyspę odkrył holenderski żeglarz Jacob Roggeveen, a 52 lata później dotarł do niej angielski kapitan James Cook. W 1866 r. na wyspie zjawili się hiszpańscy misjonarze, a 22 lata później chilijski (czytaj: czilijski) kapitan Policarpo Toro przyłączył Wyspę Wielkanocną do Chile. Uruchomione w 1966 r. lotnisko w miejscowości Hanga Roa otworzyło wyspę na świat i umożliwiło rozwój turystyki.

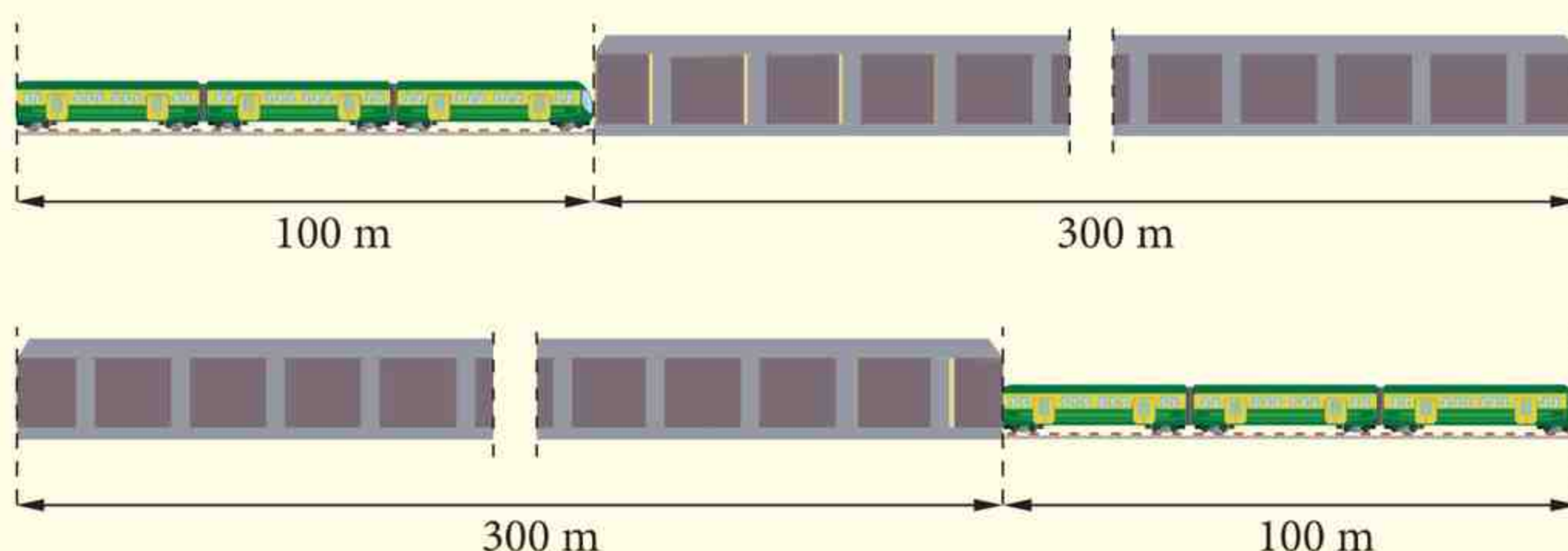




- 1 Ile lat minęło od odkrycia wyspy przez Holendrów do roku jej przyłączenia do terytorium Chile?
- 2 W którym roku kapitan Cook dotarł na wyspę? Który to był wiek? Ile lat minęło od roku, kiedy przerwano budowę posągów, do roku, kiedy zobaczył je kapitan Cook?
- 3 Jaka jest rzeczywista odległość Wyspy Wielkanocnej od wybrzeży Ameryki Południowej, jeśli na mapie w skali 1 : 200 000 000 wynosi ona 1,8 cm?
- 4 Aby dolecieć odrzutowcem z pewnego portu lotniczego na kontynencie południowoamerykańskim do tej niezwykłej wyspy, należy pokonać cztery tysiące kilometrów. Zajmuje to 4 h 10 min. Z jaką średnią prędkością leci samolot? Ile czasu zajęłaby ta trasa myśliwcowi poruszającemu się z prędkością $2000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- 5 Wyspa Wielkanocna ma kształt zbliżony do trójkąta o podstawie 24 km i wysokości 12 km. Oblicz na podstawie tych danych przybliżoną powierzchnię wyspy i porównaj ją z rzeczywistą powierzchnią.
- 6 Tajemniczych posągów *moai* jest na całej wyspie przeszło 900, z tego około 150 porzucono w kamieniołomie Rano Raraku, gdzie te figury wykonywano i skąd je transportowano na wybrzeże wyspy.
W kamieniołomie Rano Raraku można odnaleźć prostopadłościennne bloki kamienne, które miały posłużyć do wykonania posągów. W grupie tych bloków znajduje się największy, mający 21,5 metra wysokości i podstawę o wymiarach $2,3 \text{ m} \times 1,8 \text{ m}$. Oblicz objętość tego kamiennego bloku i jego wagę, przyjmując, że 1 m^3 kamienia waży 3 tony.
- 7 Oblicz różnicę poziomów między szczytem najwyższej góry Wyspy Wielkanocnej – Terevaka, a najniżej położonym punktem najgłębszego rowu oceanicznego na świecie – Rowu Mariańskiego.

Zadania na deser

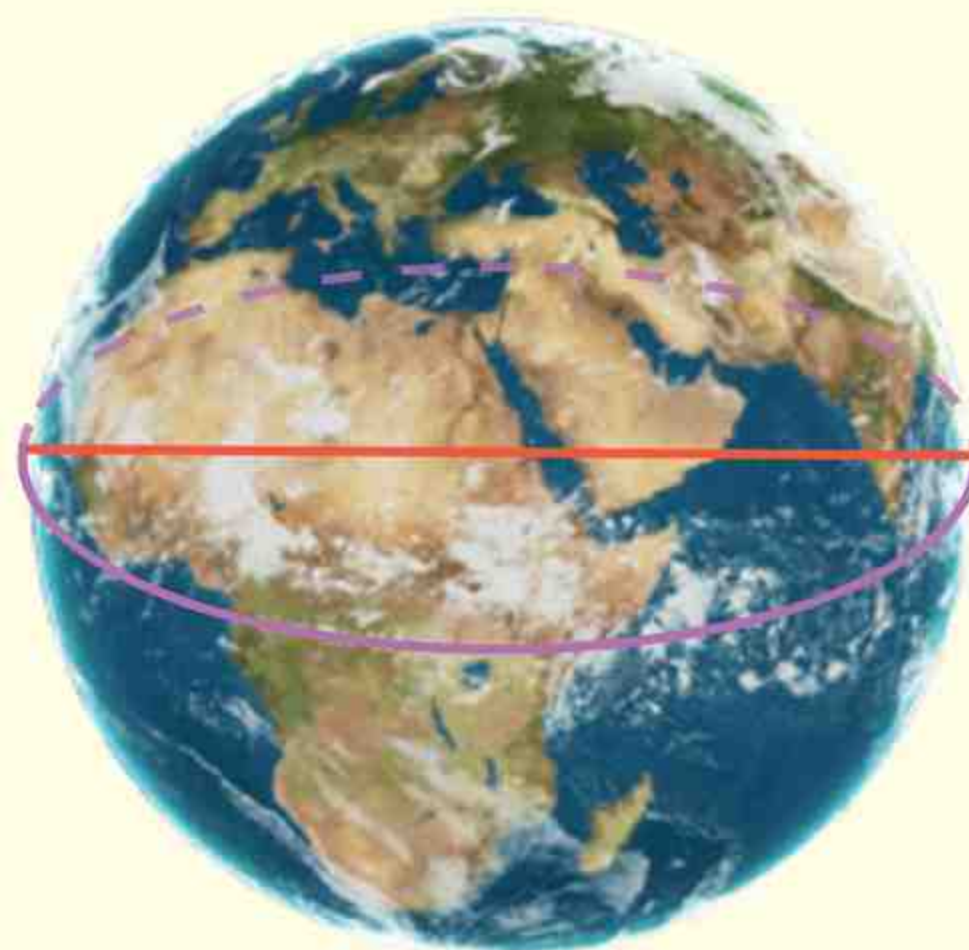
- 1 Samochód jedzie z prędkością $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką odległość pokonuje w ciągu minuty, a jaką w ciągu sekundy?
- 2 Pociąg o długości 100 m jedzie z prędkością $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przez tunel o długości 300 m.
 - a) Wyraż prędkość pociągu w metrach na sekundę.
 - b) Schematyczny rysunek przedstawia dwa położenia pociągu: w chwili, gdy zaczyna wjeżdżać do tunelu, i w chwili, gdy kończy z niego wyjeżdżać. Ile metrów przebywa w tym czasie lokomotywa pociągu? Ile czasu mija między tymi dwoma momentami?
 - c) Jak długo cały pociąg znajduje się w tunelu? Wykonaj rysunek i na jego podstawie znajdź odpowiedź na pytanie.



- 3 Jacek wybrał z ramki jeden wzór. Który to wzór, jeśli:
dla $x = 1$ otrzymał $y = 4$,
dla $x = 2$ otrzymał $y = 2$,
dla $x = 4$ otrzymał $y = 1$?

$$y = 6 - 2 \cdot x$$
$$y = 4 \cdot x + 2 - 2 \cdot x^2$$
$$y = \frac{4}{x}$$
- 4 Jeśli do wzoru $k = n^2 + n + 17$ podstawimy liczbę naturalną n mniejszą od 16, to otrzymana liczba k będzie liczbą pierwszą.
 - a) Jakie liczby k otrzymasz, jeśli podstawisz do tego wzoru kolejno: $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$?
 - b) Uzasadnij, że gdy $n = 16$, otrzymana liczba k nie jest już liczbą pierwszą. Nie musisz jej obliczać, wystarczy, że wskażesz jakiś jej dzielnik różny od 1 i różny od k .
 - c) Jaki wynik otrzymasz dla $n = -1$? Czy jest to liczba pierwsza?

- 5 Kuba miał mapę w skali 1 : 50 000. Wykonał jej kopię, ustawiając kserograf na powiększenie 200%, co sprawiło, że każdy odcinek na mapie został powiększony dwukrotnie. Jaką skalę ma otrzymana odbitka mapy?
- 6 Odszukaj na stronie 183 mapę Gór Stołowych. Odczytaj z niej, na jakiej wysokości nad poziomem morza znajduje się:
 - a) szczyt Ptasiej Góry,
 - b) skałka Cap,
 - c) Krągłe Mokradło.
- 7 Posłuż się planem Gdańska ze strony 181. Odszukaj trasę Jacka, który z dworca PKP w Gdańsku dojechał rowerem do Żurawia ulicami: Karmelicką, Korzenną, Kowalską i Szeroką. Zajęło mu to czas od godz. 17.12 do 17.18. Z jaką średnią prędkością jechał Jacek?
- 8 Średnica Ziemi wynosi ok. 13 000 km. Oblicz, w jakiej skali powinien być wykonany globus, aby miał średnicę równą wysokości tej książki.



- 9 Pan Józef wychodził właśnie z psem na spacer, gdy w odległości 100 m zobaczył żonę czekającą w kolejce do kiosku. Skierował się w jej stronę z prędkością 2 m/s. Ucieszony pies, kiedy zobaczył swoją panią, pobiegł do niej z prędkością 5 m/s. Gdy dobiegł do celu, zawrócił i pobiegł z tą samą prędkością do pana, potem znów do pani – i tak dalej, aż pan Józef doszedł do miejsca, w którym czekała żona. Jaką drogę przebył pies?
- 10 Klasa VI d chce pojechać w maju na wycieczkę w Tatry. Uczniowie postanowili zbierać surowce wtórne i w ten sposób zdobyć potrzebne pieniądze. Ustalili, że na opłacenie wyjazdu całej klasy muszą mieć 8000 zł.
 - a) W październiku i listopadzie zebrali 2000 zł. Jaki to procent potrzebnej kwoty?
 - b) W grudniu i styczniu zebrali 4000 zł. Jaki to procent potrzebnej kwoty? Jaki procent potrzebnej kwoty zebrali do stycznia?
 - c) W lutym, marcu i kwietniu również zebrali 4000 zł. Jaki to procent potrzebnej kwoty? Ile procent tej kwoty zebrali w sumie?

VIII

Matematyka na co dzień

Gdy w podróż samolotem zabieramy ze sobą bagaż, musi on spełniać określone warunki. Na przykład w wielu liniach lotniczych suma długości trzech wymiarów bagażu, który będzie przewożony w luku bagażowym, nie może przekroczyć 158 cm. Dodatkowo jest ustalone, ile co najwyżej taki bagaż może ważyć.

Czy
moja walizka
nie jest
za duża?





Na dobry początek

Klub Miłośników Chomików

Wstęp do klubu tylko dla właścicieli chomików

Do członków klubu:

Kupiłem 1 kg słonecznika za 6 zł. Paczki po 10 dag są do odbioru w sekretariacie. Prezesie, masz dwa chomiki, więc weź dwie paczki!

Z uszanowaniem
Skarbnik KMC



Pytania i polecenia

Do Klubu Miłośników Chomików należy 9 osób. Prezes klubu ma dwa chomiki, pozostałe osoby po jednym. Skarbnik klubu kupuje słonecznik na wagę i dzieli na 10-dekagramowe porcje. Dzięki temu każdy może wziąć przysmak dla swojego ulubieńca. Przeczytaj notkę od skarbnika i powiedz, ile złotych każda z osób powinna zwrócić mu za swoją część słonecznika.

Wielokrotnie rozwiązywaliśmy zadania o kupowaniu żywności na wagę. Czy wiesz, że na wagę kupujemy także wiele innych towarów?

Przykład 1

Oblicz, ile kosztują śruby o wadze:

- a) 3 kg,
- b) 3,73 kg,
- c) 0,5 kg.

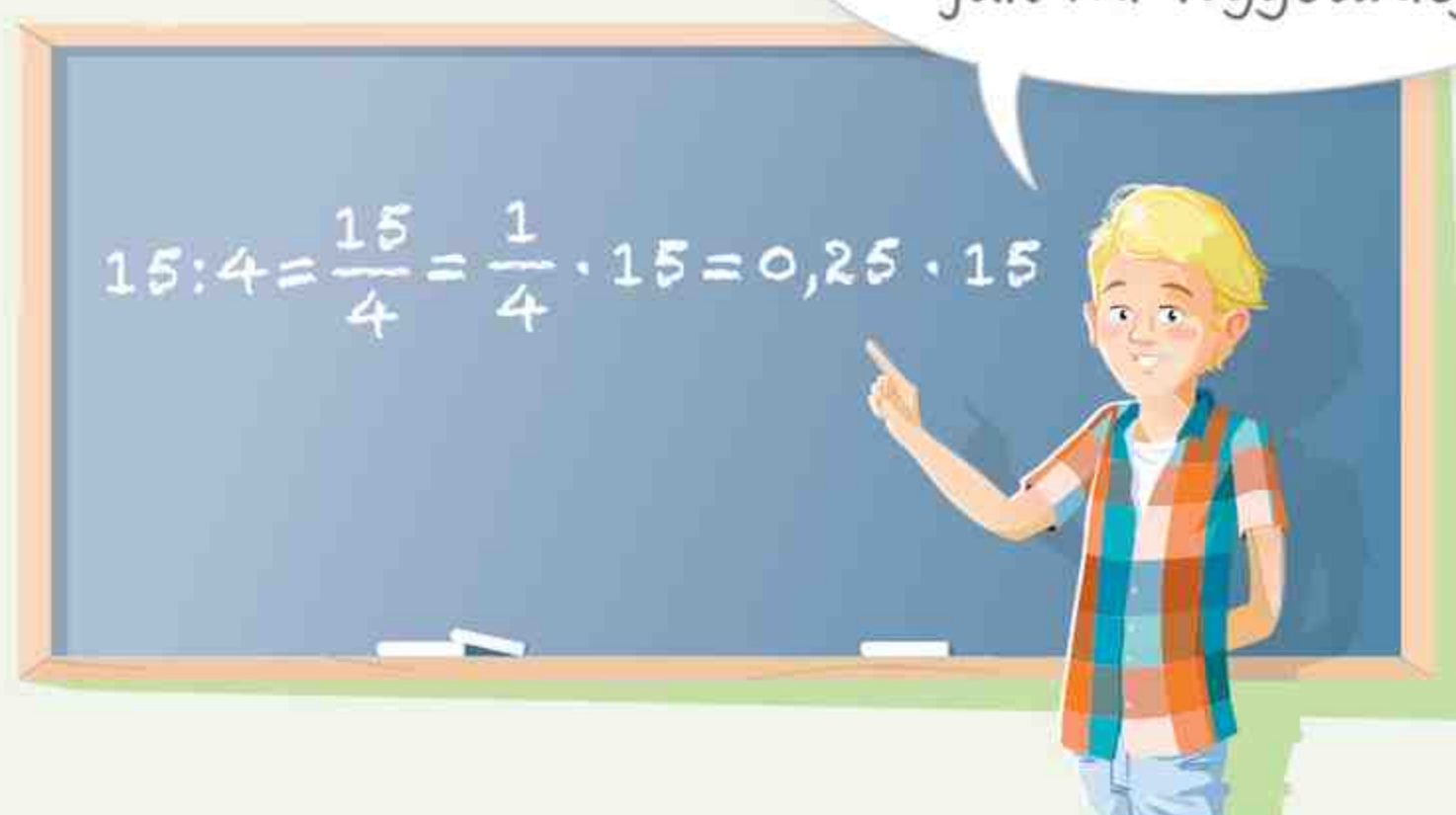


- a) Jeśli 1 kg kosztuje 15 zł, to 3 kg kosztują 3 razy więcej:
 $3 \cdot 15 = 45$ [zł]
- b) W takiej sytuacji postępujemy podobnie – wystarczy pomnożyć:
 $3,73 \cdot 15 = 55,95$ [zł]
- c) Pół kilograma kosztuje połowę ceny za 1 kg. Połowa kwoty 15 zł to 7,50 zł. Obliczenia można więc zapisać na dwa sposoby:
 $15 : 2 = 7,50$ [zł]
 lub
 $0,5 \cdot 15 = 7,50$ [zł]

Odp. 3 kg śrub kosztują 45 zł, za 3,73 kg śrub trzeba zapłacić 55,95 zł, a za 0,5 kg – 7,50 zł.

Dobra rada

Pomyśl o różnych sposobach obliczeń i wybierz najłatwiejszy.



Przykład 2

Oblicz, ile śrub można kupić za:

- a) 30 zł, b) 2,70 zł.

a) $30 : 15 = 2$

Skoro mamy 2 razy tyle pieniędzy, ile potrzeba na 1 kg, to możemy kupić 2 kg.

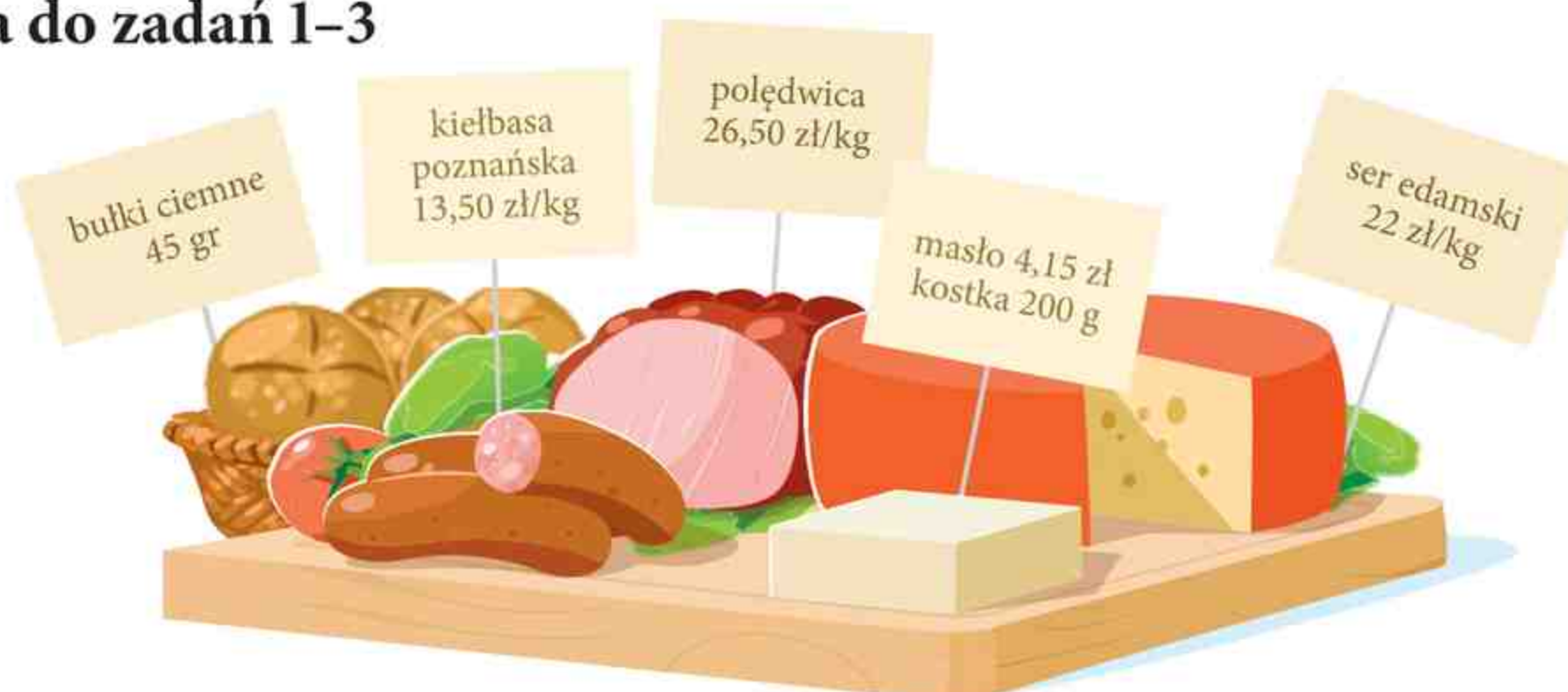
b) $2,70 : 15 = 0,18$

Możemy kupić 0,18 kg (czyli 18 dag) śrub.

Odp. Za 30 zł można kupić 2 kg śrub, a za 2,70 zł – 18 dag śrub.

Zadania

Ilustracja do zadań 1–3



- **1** Oblicz, ile kosztuje:
 - a) 20 dag kielbasy poznańskiej,
 - b) półtora kilograma sera,
 - c) 1 kg 73 dag polędwicy,
 - d) kielbasa poznańska leżąca na wadze.



- **2** Oblicz:
 - a) ile kosztuje kilogram masła,
 - b) ile sera kupimy za 6,60 zł,
 - c) ile kielbasy kupimy za 10 zł.

- **3** Ile Ola zapłaci za zakupy?



- 4 W ciągu miesiąca kot zużywa 10 litrów żwirku do kuwety. Ile złotych wydamy na żwirek w ciągu roku? Podaj odpowiedź dla każdego z opakowań przedstawionych na rysunku i wskaż, które najbardziej opłaca się kupować.



- 5 Jedna paczka zawierająca 450 g karmy dla rybek kosztuje 35 zł. Ile, w przybliżeniu do 10 gr, kosztuje 1 kg takiej karmy?
- 🏆 6 Wyobraź sobie, że ta książka jest zrobiona ze złota.
- Zmierz książkę i oblicz jej objętość.
 - Ile kilogramów ważyłaby taka złota książka? 1 cm^3 złota waży 19,3 g.
 - Ile złotych kosztowałoby tyle złota? Cenę złota podaje się w dolarach za uncję jubilerską (uncja jubilerska to około 31,1 g). Przyjmij cenę 1300 dolarów za uncję i kurs 3,75 zł za 1 dolara.



Dla dociekliwych

Uwaga. Do rozwiązania zadania potrzebne będą dodatkowe dane, które możesz znaleźć np. w encyklopedii, codziennych gazetach lub w internecie.

- 1 Pan Kowalski kupuje w Polsce benzynę po 4,60 zł za 1 litr. Jego samochód spala 7 litrów benzyny na 100 km. Mr Smith kupuje w USA benzynę po 2,50 \$ za 1 galon. Jego samochód przejeżdża 15 mil na 1 galonie paliwa. Który z nich więcej płaci za przejechanie drogi tej samej długości?



Czy już umiem?

- I Ile zapłacimy za 17 dag twarogu, którego kilogram kosztuje 8,50 zł?
- II Ile centymetrów wstążki można kupić za 2 zł, jeśli jeden metr tej wstążki kosztuje 1,50 zł?
- III Pani Ania zapłaciła 108 zł 36 gr za 25,2 l benzyny. Ile kosztuje 1 litr tej benzyny?

IV Oblicz.

$$\left[1\frac{1}{12} - 2\frac{2}{3} - \left(-2\frac{1}{2}\right)\right] : \left[\frac{5}{6} + \left(-1\frac{3}{4}\right)\right]$$

Na dobry początek

Działkowicze

1.

Działka o największym polu należy do pana Krzysztofa.

2.

Najmniej siatki było potrzebne do ogrodzenia działki pani Anny.

3.

Po drugiej stronie ulicy Jagodowej pani Anna ma za sąsiadkę panią Katarzynę.

4.

Czwarta działka należy do pana Andrzeja.

Pytania i polecenia

- Do kogo należą poszczególne działki?
- Kto potrzebował najwięcej siatki na ogrodzenie swojej działki?

Kiedy remontujemy mieszkanie, kupujemy działkę czy też planujemy uprawy w gospodarstwie rolnym, mamy do czynienia z wymiarami i polem powierzchni.

Przykład 1

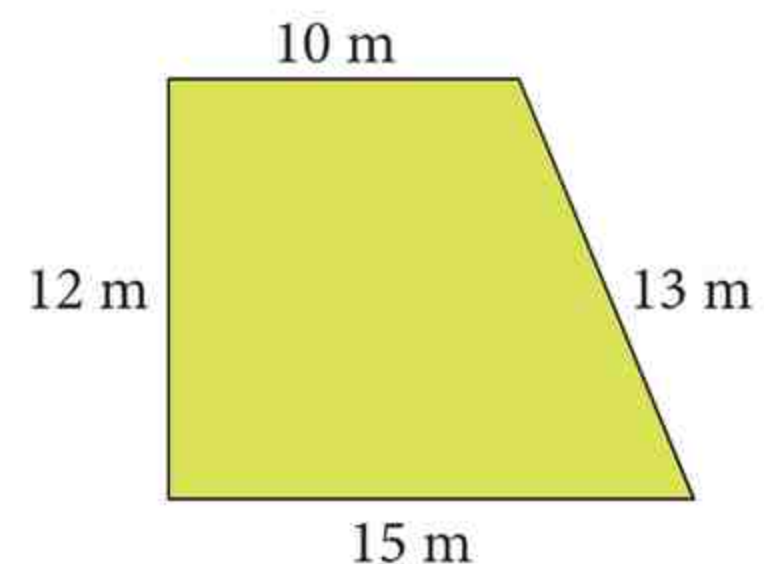
Chcemy zasiać trawę i ogrodzić trawnik płotkiem.
Ile będą kosztować nasiona, a ile będzie kosztować płotek?



Zauważmy, że trawnik ma kształt trapezu prostokątnego. Odczytajmy z planu jego wymiary. Plan wykonano w skali 1 cm – 500 cm, czyli 1 cm – 5 m.

Mierzmy boki trapezu na planie i obliczamy rzeczywiste długości:

$$\begin{aligned} 2 \text{ cm} &- 2 \cdot 5 \text{ m} = 10 \text{ m} \\ 2,4 \text{ cm} &- 2,4 \cdot 5 \text{ m} = 12 \text{ m} \\ 3 \text{ cm} &- 3 \cdot 5 \text{ m} = 15 \text{ m} \\ 2,6 \text{ cm} &- 2,6 \cdot 5 \text{ m} = 13 \text{ m} \end{aligned}$$



Możemy skorzystać ze wzoru na pole trapezu. Ponieważ trapez jest prostokątny, jego ramię o długości 12 m jest jednocześnie jego wysokością.

$$P = \frac{1}{2} \cdot (10 + 15) \cdot 12 = 6 \cdot 25 = 150 \text{ [m}^2\text{]}$$

Ile paczek nasion trzeba kupić, żeby obsiać 150 m² trawnika?

$$150 : 40 = 15 : 4 = 3\frac{3}{4}$$

Nie możemy kupić $3\frac{3}{4}$ opakowania, więc będą potrzebne 4 paczki.

Ich cena wyniesie:

$$4 \cdot 18 \text{ zł} = 72 \text{ zł}$$

Dobra rada

Jeśli nie pamiętasz wzoru na pole trapezu, możesz podzielić trapez na takie części, których pola potrafisz obliczyć.

Płotek stawiamy dookoła trawnika, interesuje nas więc obwód trawnika:

$$\text{Obw.} = 10 \text{ m} + 12 \text{ m} + 15 \text{ m} + 13 \text{ m} = 50 \text{ m}$$

Ponieważ 1 mb (metr bieżący, czyli po prostu 1 m długości płotka) kosztuje 9,50 zł, cały płotek będzie kosztował:

$$50 \cdot 9,50 \text{ zł} = 475 \text{ zł}$$

Odp. Nasiona będą kosztowały 72 zł, a płotek 475 zł.

Zadania

- **1** Pokój o wysokości 2,5 m ma podłogę o wymiarach 4 m $\times$ 5,5 m. Drzwi w tym pokoju mają szerokość 90 cm.
 - a) Oblicz powierzchnię podłogi pokoju.
 - b) Przy podłodze wzdłuż ścian chcemy zamocować listwę. Ile metrów bieżących listwy zużyjemy?
- **2** Gospodarstwo ma powierzchnię 8,5 ha. Ile to arów? Ile to metrów kwadratowych?
- **3** Przeczytaj ogłoszenie.
 - a) Która działka jest najdroższa, a która najtańsza?
 - b) Która działka ma najwyższą, a która najniższą cenę za 1 m²?
 - c) Gdybyśmy połowę działki w Strykowie obsiali pszenicą, to ile kwintali pszenicy moglibyśmy zebrać?

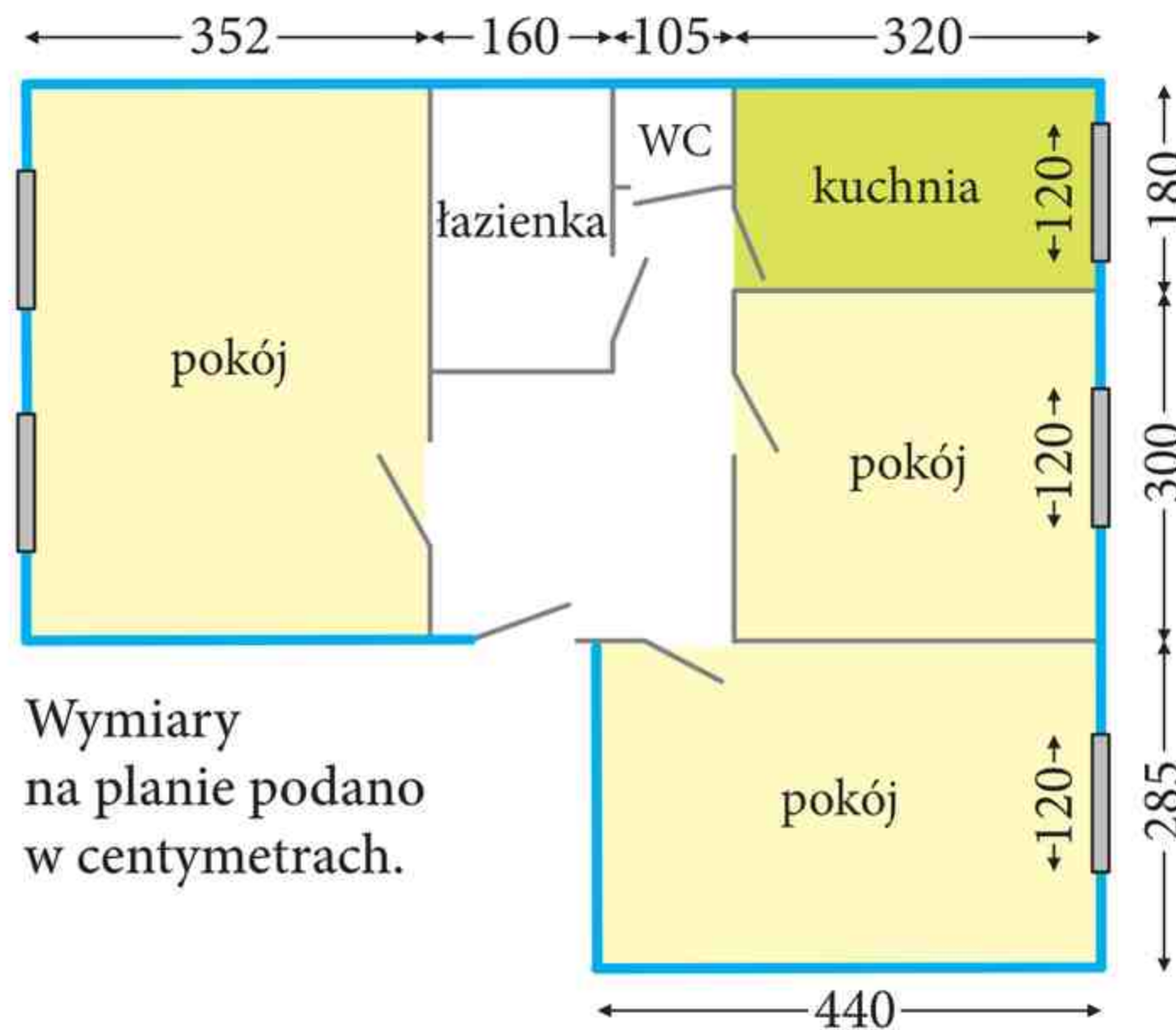


Czy wiesz, że...

Kwintal (w skrócie: q) to 100 kg. Z 1 ha zbiera się przeciętnie 40 q pszenicy.

Informacje do zadań 4–6

Na rysunku przedstawiono plan mieszkania państwa Sokołów. Największy pokój należy do rodziców. W najmniejszym mieszka Joasia, a w średnim Paweł i Marek. Wysokość mieszkania wynosi 2,6 m. Każde drzwi mają 2 m wysokości i 90 cm szerokości, okna mają 120 cm wysokości.



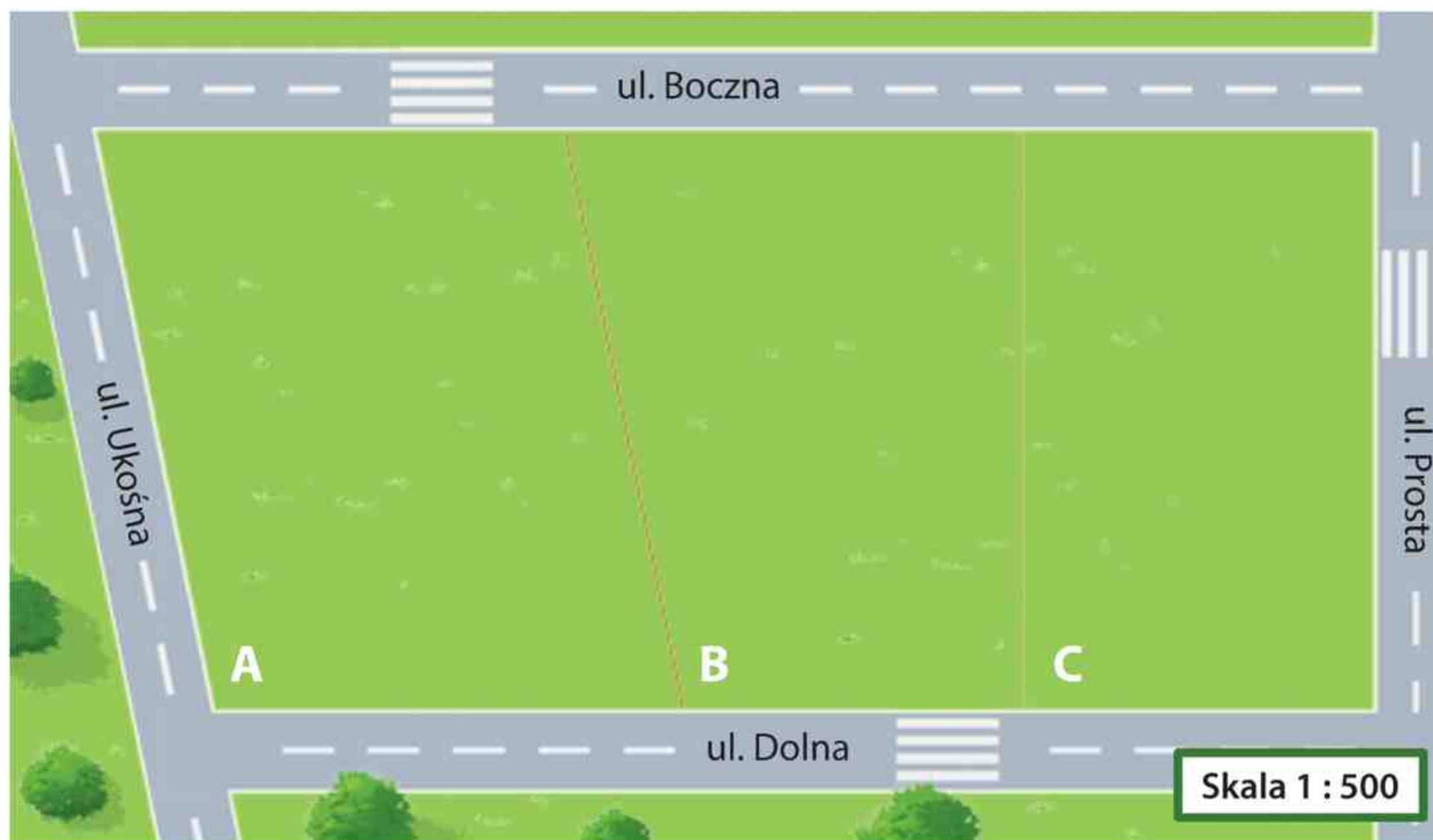
- **4** Oblicz powierzchnię każdego pokoju. Odpowiedź podaj w metrach kwadratowych z dokładnością do części dziesiątych.
- **5** Ile kosztuje jedna płytki terakoty? Układając płytki, możemy je przycinać, ale odciętych kawałków już nie wykorzystujemy. Ile co najmniej kosztuje terakota potrzebna do wyłożenia podłogi w kuchni?
- **6** W tym roku rodzina remontuje pokój Pawła i Marka. Sufit będzie pomalowany na biało, a ściany na niebiesko. Te prace wykonają rodzice z pomocą chłopców. Natomiast podłoga zostanie wycyklinowana i polakierowana przez fachowca. Oblicz koszt tych prac.



- **7** Gospodarstwo składa się z 7,6 ha pól, 80 a sadu i podwórka o powierzchni 6000 m^2 (wraz z zabudowaniami). Podaj całkowitą powierzchnię gospodarstwa. Jaką część całego gospodarstwa stanowi podwórko?

Informacje do zadań 8 i 9

Na planie zaznaczono działki budowlane wytyczone wzdłuż ulicy Bocznej.



- **8** Zmierz odpowiednie odcinki i podaj rzeczywiste wymiary działki C.
- **9** Zmierz odpowiednie odcinki i oblicz powierzchnię działek A, B i C, a następnie wartość każdej z nich, przyjmując cenę 120 zł za 1 m^2 .



Czy już umiem?

- I Panele podłogowe o wymiarach $50 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ sprzedawane są po 45 zł za 1 m^2 . Ile zapłacimy za panele potrzebne do wyłożenia podłogi o wymiarach $3,5 \text{ m} \times 4 \text{ m}$?
- II Działka rekreacyjna ma wymiary $40 \text{ m} \times 80 \text{ m}$. Oblicz jej powierzchnię. Odpowiedź podaj w metrach kwadratowych i w arach.
- III Na planie w skali 1 : 50 pokój ma wymiary $8 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Oblicz rzeczywistą powierzchnię tego pokoju.
- IV Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi 8 cm.



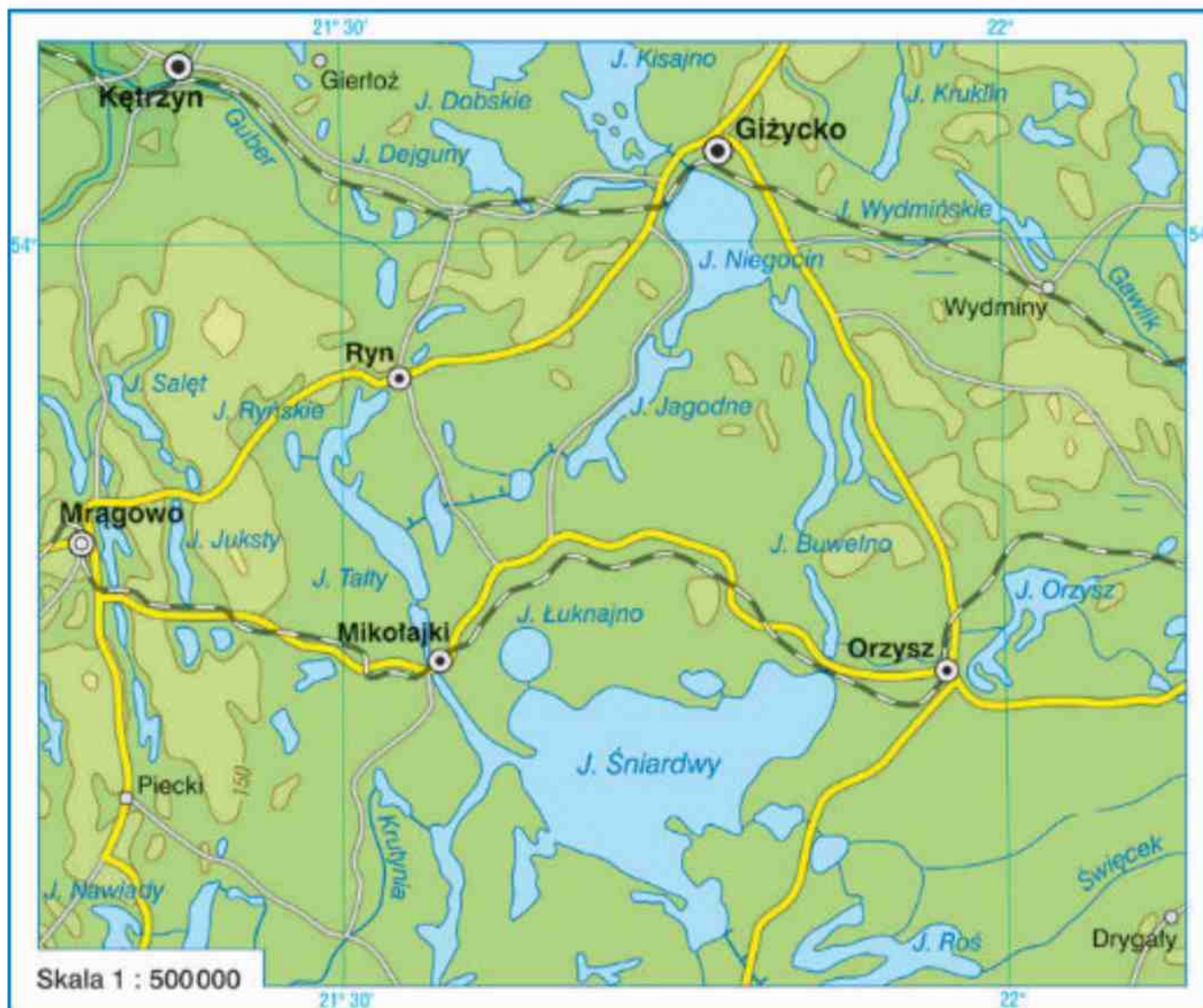
Na dobry początek

Ruszaj w podróż

- ▶ Wylosuj jeden z punktów oznaczonych na mapie numerami. Tu zacznie się twoja wycieczka.
- ▶ W podobny sposób wylosuj miejsce, do którego pojedziesz.
- ▶ Jaka jest rzeczywista odległość w linii prostej między wylosowanymi punktami?
- ▶ Który z wylosowanych punktów jest położony dalej na północ? Który jest położony dalej na wschód?
- ▶ Co ciekawego możesz obejrzeć na początku i na końcu wycieczki?



Kiedy planujemy podróż, korzystamy z wielu różnych źródeł informacji: map, przewodników, rozkładów jazdy, ulotek reklamowych i informacyjnych. W tym rozdziale nie zdobywasz nowych umiejętności matematycznych, dlatego nie przedstawiamy rozwiązyanych przykładów. Do rozwiązania zadań potrzebne ci będą informacje przedstawione poniżej.



Stacja/ przystanek	Przyjazd	Odjazd	Środki komunikacji	Uwagi
Warszawa Wschodnia		09.30	TLK 7114	Tanie Linie Kolejowe Wagon barowy, przesyłki konduktorskie za opłatą
Białystok	11.50			
Białystok		12.13	TLK 15115	Tanie Linie Kolejowe Przewóz rowerów, przesyłki konduktorskie za opłatą
Giżycko	14.37			



SMAŻALNIA RYB

CENNIK
Ceny ryb za 100 g

Pstrąg	3,50 zł
Sielawa	3,80 zł
• Szczupak	4,20 zł •
Frytki	3,80 zł
• Surówka	2,20 zł •

AGROTURYSTYKA

Nocleg
tylko 45 zł od osoby

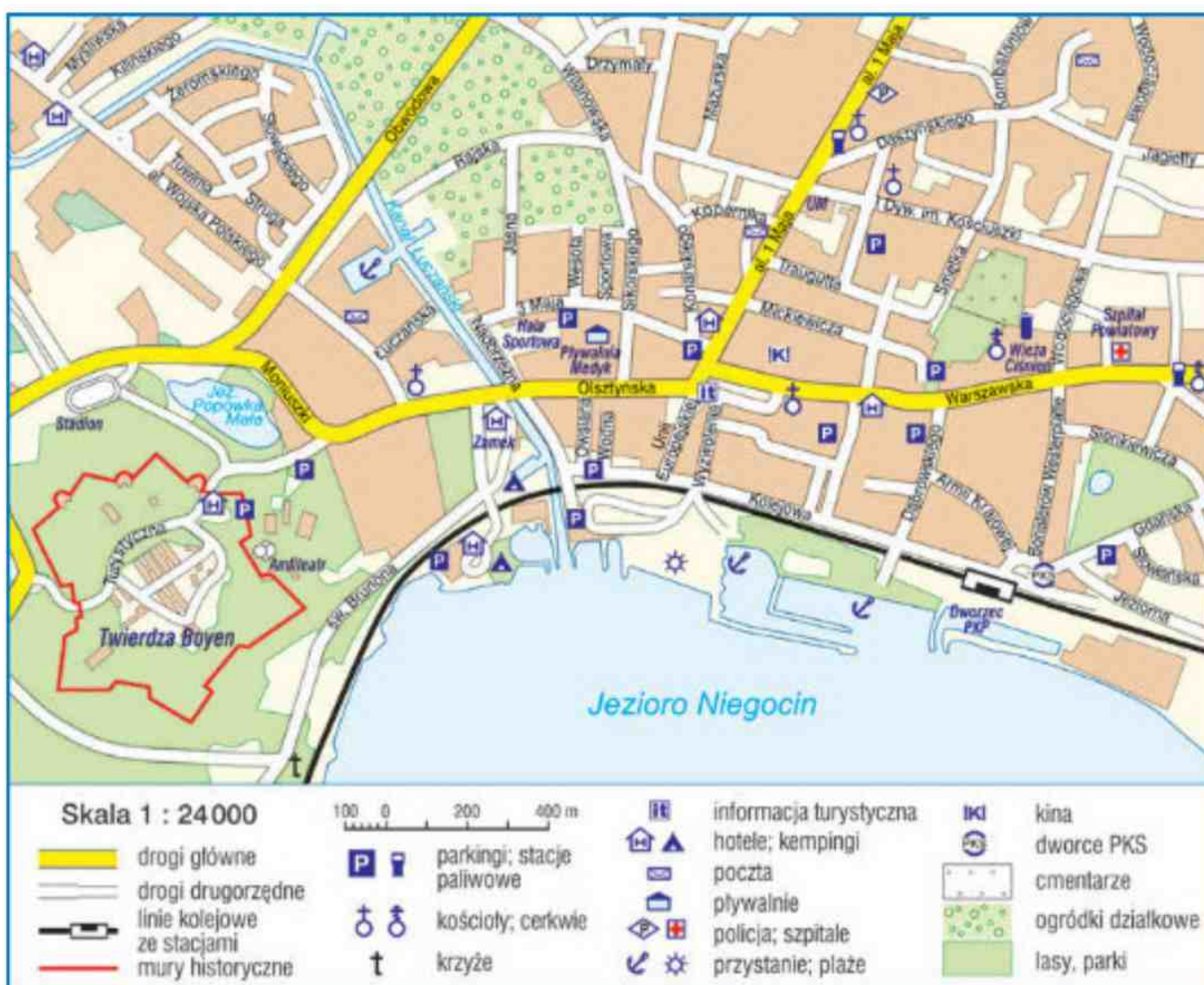
Całodzienne wyżywienie
tylko 35 zł od osoby

Śniadanie i kolacja
tylko 15 zł od osoby



CZARTER JACHTÓW KLASY *OMEGA*

120 zł za pierwszą dobę
i 90 zł za każdą następną



Zadania

- **1** Ile kosztują frytki w smażalni ryb?
- **2** O której godzinie pociąg odjeżdżający z Warszawy o 9.30 przyjeżdża do Białegostoku?

- **3** a) Jak nazywają się jeziora, między którymi leży Giżycko?
b) W którym kierunku należy się udać z Mikołajek, żeby dojechać do Orzysza?
- **4** Spóźnienia pociągów podaje się w minutach. O której godzinie dotrze do stacji docelowej pociąg relacji Białystok–Giżycko, jeśli spóźni się 85 minut?
- **5** Jak daleko jest w linii prostej z Giżycka do Mikołajek?
- **6** Ciocia Katarzyna zamówiła w smażalni sielawę z frytkami i surówką. Po usmażeniu sprzedawczyni zważyła rybę i okazało się, że waży ona 27 dag. Ile zapłaci ciocia Katarzyna?
- **7** Ile kosztuje wynajęcie żaglówki Omega od 30 lipca do 2 sierpnia włącznie?
- **8** Wycieczka zaczyna się w sobotę rano, a kończy we wtorek wieczorem. Jaki będzie łączny koszt noclegów i wyżywienia dla jednej osoby na tej wycieczce, jeśli skorzystamy z oferty agroturystyki?
- **9** Giżycko uzyskało prawa miejskie w 1612 r.
 - a) Zapisz tę datę cyframi rzymskimi.
 - b) Który to był wiek? Zapisz odpowiedź słownie i cyframi rzymskimi.
 - c) Od ilu lat Giżycko jest miastem?
- **10** Jak długi odcinek Kanału Łuczańskiego w Giżycku musi przepłynąć jacht płynący z jeziora Niegocin do przystani na tym kanale?
- **11** Opisz, jakimi ulicami trzeba przejść, aby z dworca kolejowego w Giżycku dojść do Twierdzy Boyen.
- **12** Znajdź miejsce położone w odległości 2 km na zachód od dworca PKS w Giżycku. Co się tam znajduje?
- **13** Wyobraź sobie, że jedziesz pociągiem z Kętrzyna do Ełku przez Giżycko i Wydminy. Czy Twierdzę Boyen miniesz przed postojem na stacji Giżycko, czy dopiero gdy ruszysz z tej stacji? Czy miniesz ją po swojej prawej, czy lewej stronie? Co zobaczysz z drugiej strony?

- ... **14** Odległość z Warszawy Wschodniej do Białegostoku wynosi około 180 km. Z jaką średnią prędkością jedzie planowo pociąg na tej trasie?
- ... **15** Zmierz na mapie za pomocą nitki i oblicz rzeczywistą długość szosy z Mrągowa do Giżycka. Oblicz rzeczywistą odległość w linii prostej między tymi miejscowościami. O ile kilometrów różnią się te wielkości?
- ... **16** Kuba zastanawia się, czy taniej będzie wykupić całodienne wyżywienie w agroturystyce, czy też kupić tam tylko śniadanie i kolację, a na obiad pójść do smażalni ryb i zjeść tam pstrąga z frytkami i surówką. Ile musi ważyć pstrąg, aby się to opłacało?



Dla dociekliwych

Korzystając z dostępnych źródeł, zaplanuj trzydniową wycieczkę klasową w okolicy Biskupina. Dowiedz się, co warto tam zobaczyć, jak tam dojechać i gdzie można tanio przenocować. Oblicz koszt wycieczki.



Czy już umiem?

- I Odczytaj z mapy (s. 204), czy jezioro Śniardwy znajduje się na północ, południe, wschód, czy na zachód od jeziora Niegocin.
- II Ile kosztuje wynajęcie jachtu na 3 dni?
- III Jak daleko jest w linii prostej z Mikołajek do Orzysza?
- IV Zaokrąglaj:

a) do dziesiątek liczbę 5678,	d) do części dziesiątych liczbę 29,439,
b) do setek liczbę 1953,	e) do części setnych liczbę 0,13524,
c) do tysięcy liczbę 38459,	f) do części tysięcznych liczbę 5,68972.



Na dobry początek

Smacznego!

Przynieście na lekcję opakowania po produktach żywnościowych.

- ▶ Obejrzyjcie je dokładnie i znajdźcie na nich jak najwięcej danych liczbowych.
- ▶ Sprawdźcie, czy podano: wartość energetyczną, zawartość witamin, zawartość błonnika.

Oliwa z oliwek	
Wartość odżywcza w 100 g	
Wartość energetyczna	3367 kJ 819 kcal
Tłuszcz	91 g
w tym kwasy tłuszczowe nasycone	15 g
Węglowodany	0 g
w tym cukry	0 g
Błonnik	0 g
Białko	0 g
Sól	0 g

Kakao o obniżonej zawartości tłuszczu	
Wartość odżywcza w 100 g	
Wartość energetyczna	1259 kJ 303 kcal
Tłuszcz	10,5 g
w tym kwasy tłuszczowe nasycone	6,4 g
Węglowodany	13 g
w tym cukry	0,5 g
Błonnik	10,3 g
Białko	23,5 g
Sól	0,06 g

Miód	
Wartość odżywcza w 100 g	
Wartość energetyczna	1416 kJ 333 kcal
Tłuszcz	0 g
w tym kwasy tłuszczowe nasycone	0 g
Węglowodany	83 g
w tym cukry	72 g
Białko	<0,5 g
Sól	0 g

Sok owocowy	
Wartość odżywcza w 100 g	
Wartość energetyczna	221 kJ 52 kcal
Białko	0,3 g
Węglowodany przyswajalne	12,5 g
Tłuszcz całkowity	0,1 g
Witamina C	nie mniej niż 30 mg
β-karoten	nie mniej niż 2,4 mg



Pytania i polecenia

- Ile procent tłuszczu zawiera oliwa? Ile kakao? A ile miód?
- W butelce jest 250 ml soku. Ile witaminy C dostarczysz organizmowi, jeśli wypijesz całą butelkę?
- Jaka jest zawartość białka w 100 g miodu?

Twój organizm jest bardzo skomplikowaną „maszyną” i do prawidłowego funkcjonowania potrzebuje wielu składników odżywczych. Zarówno ich niedobór, jak i nadmiar mogą prowadzić do różnych chorób. Zdarza się, że chcąc się odchudzić, pozbawiamy organizm nie tylko nadmiaru pożywienia, lecz także wielu składników niezbędnych dla zdrowia. Często jednak problemem nie jest ani to, że jemy zbyt mało, ani – że zbyt wiele, ale że jemy nie to, co trzeba.

Wartość energetyczną pożywienia mierzymy tradycyjnie w kilokaloriach (w skrócie: kcal).

Przykład 1

Kinga ma 12 lat i waży 45 kg. Do szkoły chodzi pieszo 1,5 km. Dwa razy w tygodniu chodzi na basen. Ile wynosi jej dzienne zapotrzebowanie energetyczne? Ile to razy więcej niż wartość przekąski złożonej z dużej porcji frytek (600 kcal) i półlitrowego słodzonego napoju (200 kcal)?

Dzienne zapotrzebowanie energetyczne osób w wieku 11–14 lat

Aktywność fizyczna	Liczba kcal na 1 kg masy ciała	
	Chłopcy	Dziewczęta
mała	45	40
umiarkowana	54	49
duża	64	57

Aktywność fizyczną Kingi możemy uznać za umiarkowaną. Z tabeli odczytujemy, że dziewczynka potrzebuje 49 kcal na 1 kg masy ciała. W takim razie jej zapotrzebowanie energetyczne jest równe:

$$45 \cdot 49 = 2205 \approx 2200 \text{ [kcal]}.$$

Frytki i napój mają łącznie wartość energetyczną:

$$600 + 200 = 800 \text{ [kcal]}.$$

Dzienne zapotrzebowanie Kingi jest większe:

$$2200 : 800 = 22 : 8 = 2\frac{3}{4} \text{ razy.}$$

Frytki i napój to tylko przekąska i Kinga będzie po niej wkrótce głodna, ale dostarcza ponad $\frac{1}{3}$ energii potrzebnej na cały dzień. Zastanów się, czy danie to zawiera $\frac{1}{3}$ codziennej porcji składników odżywczych.

Zadania

Informacje do zadań 1, 3, 6

Wartość energetyczna niektórych produktów (kcal na 100 g)			
biały ser chudy	100	jabłka	46
żółty ser	313	pomidory	25
jajka	140	czekolada	600

- **1** Oblicz na podstawie tabeli wartość energetyczną następujących produktów:
 - kawałek chudego białego sera o wadze 20 dag,
 - jajko ważące 50 g,
 - jabłko o wadze 15 dag,
 - pomidor ważący 120 g.



- **2** Na podstawie tabeli ze strony 209 oblicz, ile energii potrzebuje dziennie 13-letni chłopiec, który waży 48 kg i codziennie uprawia sport.

- **3** Kawałek żółtego sera ważący 23 dag pokrojono na 20 równych plasterków. Jaką wartość energetyczną ma jeden plasterzek?



- **4** Andrzej ma 12 lat i waży 42 kg. Czas poza szkołą spędza głównie przed telewizorem. Jaką część jego dziennego zapotrzebowania energetycznego pokrywa paczka wafli o wartości energetycznej 550 kcal?

- **5** Wejście na jeden stopień schodów wymaga zużycia 0,1 kcal. Na które piętro trzeba wejść, żeby zużyć 100 kcal energii zawarte w szklance słodzonego napoju? Przyjmij, że jedno piętro to 20 stopni.

- **6** Idąc przez godzinę z prędkością $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, zużywa się około 200 kcal.

- Jak długo trzeba iść, aby zużyć energię dostarczoną przez tabliczkę czekolady (100 g)?
- Jaką drogę w ten sposób przejdiesz?
- Podaj przykład miejsca, które znajduje się w takiej odległości od twojego domu. Możesz skorzystać z mapy lub planu miasta.



- ... 7 Mariola postanowiła się odchudzić. W internecie znalazła dietę pozwalającą ograniczyć dzienne spożycie do 1200 kcal. Niestety, Mariola nie pomyślała, aby sprawdzić, ile witamin zawierają opisane produkty.

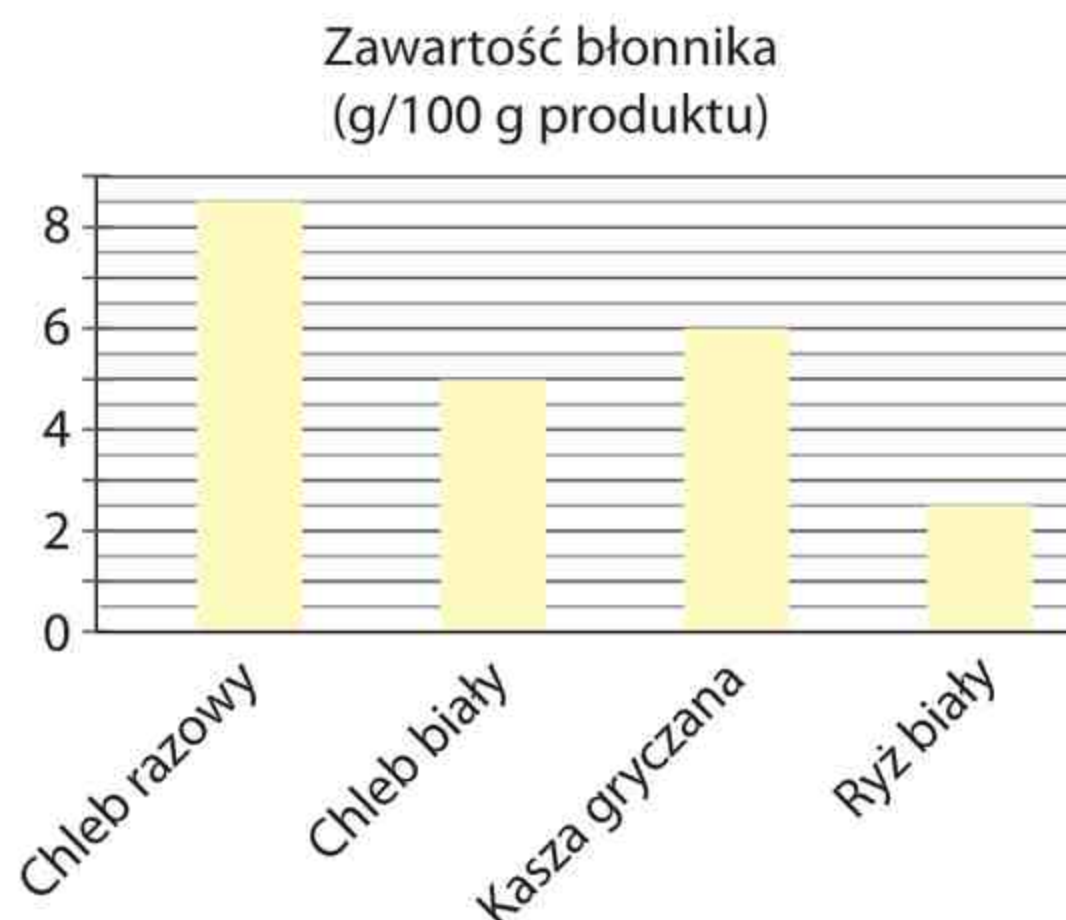
Osoba w jej wieku powinna na przykład codziennie dostarczać organizmowi 18 mg witaminy PP. Objawami niedoboru tej witaminy są: szorstka skóra z przebarwieniami, zwłaszcza na twarzy, szyi i rękach, senność, bóle głowy, zły nastrój, biegunka.

W tabeli podajemy jadłospis Marioli i zawartość witaminy PP w tych produktach. Czy dieta Marioli dostarczy jej odpowiedniej ilości witaminy PP?

		Waga (g)	Witamina PP (mg/100 g)	kcal/100 g
śniadanie	chleb jasny	150	0,5	240
	ser chudy	100	0,2	90
	mleko 0,5%	250	0,1	40
obiad	2 jajka	100	0,06	140
	ryż gotowany	200	0,2	120
	ogórek	200	0,2	13
kolacja	jogurt naturalny	250	0,14	60

Informacje do zadań 8 i 9

Błonnik jest składnikiem, który nie zostaje strawiony, ale jest niezbędny do pracy układu pokarmowego. Należy go codziennie zjadać w ilości 30–40 g. Niestety, większość z nas je chleb biały zamiast razowego, ryż i makaron zamiast kaszy itd. W rezultacie dostarczamy organizmowi zbyt mało błonnika.



- 8 Ile gramów błonnika zawiera półkilogramowy bochenek chleba razowego, a ile bochenek białego chleba o tej samej wadze?
- 9 Ile gramów kaszy gryczanej zawiera tyle błonnika, ile wynosi zalecane dzienne minimum? A ile gramów białego ryżu trzeba by zjeść każdego dnia, żeby dostarczyć organizmowi niezbędną ilość błonnika?

... 10 Przeczytaj przepis na sałatkę.

- Ile waży sałatka przygotowana według tego przepisu?
- Ile dekagramów sałatki przypada na osobę?
- Ile poszczególnych produktów trzeba wziąć, aby przygotować taką sałatkę dla 6 osób?

SAŁATKA (porcja dla 4 osób)

- 40 dag pomidorów
- 1 kapusta pekińska (ok. 0,5 kg)
- 1 puszka kukurydzy (po odsączeniu 300 g)
- 100 g oliwek
- 150 dag sera typu feta
- sos czosnkowy (ok. 50 g)

Odsączyć kukurydzę. Posiekać kapustę.
Pokroić w kostkę pomidory i ser.
Wszystkie składniki wymieszać, dodać sos.



Dla dociekliwych

BMI (ang. *Body Mass Index*, czyli wskaźnik masy ciała) osoby o wadze W (w kilogramach) i wzroście h (w metrach) obliczamy ze wzoru:

$$\text{BMI} = \frac{W}{h^2}$$

Wskaźnik ten pozwala się zorientować, czy ktoś ma właściwą wagę.



1 Oblicz BMI dla osoby o podanej wadze i wzroście. Czy ta osoba ma prawidłową wagę, czy waży zbyt mało lub zbyt dużo?

- 50 kg, 160 cm
- 82 kg, 165 cm
- 56 kg, 180 cm

2 Podaj największą i najmniejszą prawidłową wagę przy wzroście 164 cm.



Czy już umiem?

- Ile kilokalorii potrzebuje dziennie aktywna fizycznie 14-letnia dziewczynka, jeśli waży 42 kg?
- Tabliczka czekolady waży zwykle 100 g, ale są także większe, o wadze 150 g lub 200 g. Oblicz, jaką wartość energetyczną ma każda z większych tabliczek.
- Ile błonnika zawiera 25 dag kaszy gryczanej?
- Oblicz pisemnie $54 : 22$. Podaj wynik z dokładnością do części dziesiątych oraz w postaci ułamka okresowego. Jaka jest setna cyfra po przecinku w ułamku okresowym?

Odpowiedzi

IV Figury na płaszczyźnie

s. 8 1. Okrąg i koło. Odległość punktu od prostej

1 a) B, D, H b) C, E, G c) A, F 2 K, O 3 a) 1,5 cm b) 1,5 cm
 6 6 cm 7 75 cm 8 9 cm 9 $7,2 \text{ cm} \times 2,4 \text{ cm}$, Obw. = 19,2 cm, $P = 17,28 \text{ cm}^2$
 10 10 cm 11 SB 12 3 cm 13 a) 0,6 cm b) 0,3 cm 15 $3,9 \text{ m} \times 1,95 \text{ m}$

Czy już umiem? I 75 cm III a) 4 cm b) 8 cm c) 2 cm IV a) A – sześcián,
 B, F – ostrosłup, C – stożek, D, E – graniastosłup, G – walec, H – prostopadłościan
 b) A, D, E, H c) B, F

s. 16 2. Kąty

1 a) 25° b) 115° c) 65° d) 167° e) 82° f) 138° 6 siedem: $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$,
 $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle BOD$, $\sphericalangle AOD$ (nad prostą AD), $\sphericalangle AOD$ (pod prostą AD) 8 a) $\beta = 65^\circ$
 b) $\alpha = 70^\circ$ c) $\beta = 73^\circ$, $\gamma = 107^\circ$ 10 a) $\alpha = 45^\circ$ b) $\beta = 153^\circ$ 11 a) 220° b) 340°
 12 a) $\alpha = 30^\circ$, $5 \cdot \alpha = 150^\circ$ b) $\gamma = 60^\circ$, $2 \cdot \gamma = 120^\circ$ c) $\beta = 68^\circ$, $\beta + 44^\circ = 112^\circ$
 13 a) 5° b) 6° c) $7,5^\circ$ 14 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$

Czy już umiem? I a) 58° b) 123° c) 205° II a) $\alpha = 70^\circ$ b) $\beta = 57^\circ$, $\gamma = 57^\circ$
 III a) 60° b) 180° c) 150° IV 53 zł

s. 26 3. Trójkąty

➔ 1

poziom A a) $P = 17,5 \text{ cm}^2$ b) $P = 7,2 \text{ dm}^2$ c) $P = 53,4 \text{ m}^2$ d) $P = 49,5 \text{ cm}^2$

poziom B a) $P = 21 \text{ cm}^2$ b) $P = 10 \text{ cm}^2$ c) $P = 9,1 \text{ cm}^2$ d) $P = 24,75 \text{ cm}^2$

poziom C a) $P = 85 \text{ cm}^2$ b) $P = 76,75 \text{ cm}^2$ c) $P = 66,75 \text{ cm}^2$ d) $P = 126,25 \text{ cm}^2$

2 a) 75° b) 47° c) 39° d) 115° , 37° e) 36° , 36° f) 60° , 60° , 60°

3 a) I, III b) II, III c) II, IV, VI d) IV, V 4 jedna oś symetrii: I i III, trzy osie
 symetrii: V 5 różnoboczny rozwartokątny 7 0,7 dm 8 niebieski, czerwony, zielony
 lub czerwony, zielony, fioletowy, lub czerwony, zielony, żółty, lub zielony, fioletowy, żółty

9 dach I: $27,5^\circ$ (pochyły), dach II: 20° (pochyły), dach III: 60° (stromy)

10 a) 4 cm lub 5 cm b) 5 cm 11 40° i 100° lub 70° i 70°

12 $h_1 = 19\frac{5}{13} \text{ cm}$, $h_2 = 12\frac{3}{5} \text{ cm}$, $h_3 = 12 \text{ cm}$ 13 17,8 cm

14 trójkąt AGH: $\sphericalangle AGH = 15^\circ$; trójkąt BFG: $\sphericalangle BGF = 15^\circ$, $\sphericalangle GBF = 75^\circ$;

trójkąt ABE: $\sphericalangle BAE = 45^\circ$, $\sphericalangle ABE = 45^\circ$ 15 24 cm^2 16 6 cm 17 ok. 543,5 g

Czy już umiem? I $\alpha = 96^\circ$, $\beta = 36^\circ$, $\gamma = 49^\circ$ II trójkąt różnoboczny rozwartokątny

III a) Obw. = 16 cm, $P = 12 \text{ cm}^2$ b) Obw. = 31,2 cm, $P = 42,12 \text{ cm}^2$

IV a) 15 godz. 37 minut b) 21.09

s. 36 **4. Czworokąty**

1 a) I, IV, VI, VII, VIII b) I, VI c) I, II, III, IV, VI, VII, VIII, IX

3 Z czterech zapalek można ułożyć kwadrat i romb, a z sześciu – prostokąt, równoległobok i deltoid.

4 a) $135^\circ, 108^\circ$ b) $94^\circ, 86^\circ, 94^\circ$ c) $61^\circ, 90^\circ, 90^\circ$

d) $53^\circ, 127^\circ, 127^\circ$ **e)** $64^\circ, 92^\circ, 112^\circ, 92^\circ$ **f)** $140^\circ, 40^\circ, 140^\circ, 40^\circ$ **5** 20 dm

6 29 m **7** a) $70^\circ, 110^\circ, 70^\circ, 110^\circ$ b) $90^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 90^\circ$ **8** a) tak b) nie c) tak

9 nie **11** $75^\circ, 140^\circ, 75^\circ$ lub $140^\circ, 10^\circ, 140^\circ$, lub $80^\circ, 70^\circ, 140^\circ$ **12** kwadrat

14 obwód trapezu: 20 cm, pole kwadratu: 25 cm^2

15 a) $90^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 90^\circ$ b) $90^\circ, 135^\circ, 105^\circ, 30^\circ$ c) $90^\circ, 135^\circ, 90^\circ, 45^\circ$

Czy już umiem? **I** A **II** a) $90^\circ, 90^\circ, 50^\circ$ b) $124^\circ, 56^\circ, 124^\circ$ c) $65^\circ, 65^\circ, 115^\circ$

III 35 cm **IV** 13,49 zł

s. 43 **5. Pola czworokątów**

1 a) $P = 60 \text{ dm}^2$, Obw. = 46 dm b) $P = 2,25 \text{ dm}^2$, Obw. = 6 dm c) $P = 48 \text{ cm}^2$,

Obw. = 28 cm **d)** $P = 72 \text{ cm}^2$, Obw. = 36 cm **3** a) 96 cm^2 b) 32 dm^2 c) $45,5 \text{ m}^2$

d) $22,5 \text{ cm}^2$ **e)** 42 dm^2 **4** a) ABCD, niebieski, czerwonym, AB, zielonym, BC

b) EFGH, czerwony, niebieskim, FG, zielonym, FG c) IJKL, czerwony, zielonym, IJ,

niebieskim, IL **5** 29 cm **6** 64 cm^2 **7** $P = 36 \text{ cm}^2$, Obw. = 28 cm

8 $P = 24 \text{ cm}^2$, Obw. = 20 cm **9** $P = 160 \text{ m}^2$, koszt zakupu siatki: 631,80 zł

10 40 a **11** 4 cm **12** 12 cm **13** 4 cm **14** 32 m^2 **15** 22 cm

Dla dociekliwych **1** 7 cm **2** 22 cm

Czy już umiem? **I** $P = 36 \text{ cm}^2$, Obw. = 28 cm **II** 16 cm^2 **III** 9,6 cm

IV $\text{NWD}(36, 48) = 12$, $\text{NWW}(36, 48) = 144$

s. 52 **6. Figury na kratce**

Ćwiczenie 1: $P_{ABCD} = 6,25 \text{ cm}^2$, $P_{EFGH} = 2 \text{ cm}^2$, $P_{IJKL} = 4,5 \text{ cm}^2$

Zadania: **2** a) I, III – trójkąt, II – kwadrat, IV – romb, V – trapez, VI – równoległobok,

VII – prostokąt b) I, II, III, IV, V, VII c) I, III, V d) IV – osie symetrii są prostopadłe,

VII – osie symetrii przecinają się na środku e) II – cztery osie symetrii

3 a) II b) IV, VII c) I, III, V, VI d) figura I: $AC = 2 \text{ cm}$, figura III: $IH = IJ = 2 \text{ cm}$,

figura V: $PO = 1,5 \text{ cm}$, $NQ = 2,5 \text{ cm}$, figura VI: $WZ = XY = 2,5 \text{ cm}$ e) 8 cm

4 $P_I = 3,5 \text{ cm}^2$, $P_{II} = 4 \text{ cm}^2$, $P_{III} = 2 \text{ cm}^2$, $P_{IV} = 3 \text{ cm}^2$, $P_V = 4 \text{ cm}^2$, $P_{VI} = 3,75 \text{ cm}^2$

5 a) $BC = 2,5 \text{ cm}$, $EF = 5,5 \text{ cm}$ b) $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 0,5 \text{ cm}$, $FG = 1,5 \text{ cm}$, $HI = 2,5 \text{ cm}$,

$AJ = 1,5 \text{ cm}$ **9** a) $34,5 \text{ cm}^2$ b) 16 cm^2 c) 432 cm^2 **10** 12 m^2

11 a) $10,25 \text{ cm}^2$ b) $7,125 \text{ cm}^2$

Dla dociekliwych **2** $2,875 \text{ cm}^2$

Czy już umiem? **I** a) BC, DE, EF, FG b) $AB = 1,5 \text{ cm}$, $CD = 3 \text{ cm}$, $AG = 0,5 \text{ cm}$

III $P = 8,75 \text{ cm}^2$ **IV** a) 636 zł b) 517 zł

s. 57 **Powtórzenie przed klasówką**

- 1 a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 20^\circ$, $\gamma = 125^\circ$ 2 a) $P = 9 \text{ cm}^2$, Obw. = 12 cm
 b) $P = 8 \text{ dm}^2$, Obw. = 12 dm c) $P = 28 \text{ cm}^2$, Obw. = 24 cm
 3 a) 90 cm^2 b) 63 cm^2 c) 60 cm^2 4 1,6 cm 5 12 cm 6 $48 \text{ cm} \times 32 \text{ cm}$
 8 a) $\alpha = 94^\circ$, $\beta = 128^\circ$ b) $\alpha = 116^\circ$, $\beta = 64^\circ$, $\gamma = 116^\circ$ c) $\alpha = 50^\circ$
 10 $P_{ABC} = 2 \text{ cm}^2$, $P_{EFGH} = 4,5 \text{ cm}^2$, $P_{IJKL} = 4,125 \text{ cm}^2$, $P_{MNOP} = 2,5 \text{ cm}^2$
 11 a) $\alpha = 56^\circ$ b) $\beta = 65^\circ$ c) $\mu = 87^\circ$, $\gamma = 93^\circ$ 12 88 cm^2 13 a) 5 cm^2 b) $5,75 \text{ cm}^2$
 14 a) 34 cm^2 b) $76,5 \text{ cm}^2$ 15 $P = 288 \text{ m}^2$, koszt ogrodzenia: 1110 zł
 16 92,5 m 17 $P = 32 \text{ cm}^2$, Obw. = 24 cm 18 54 cm^2 19 10 cm

s. 60 **Zadania na temat...**

- 3 do 17 piętra 4 ok. 7 miesięcy 5 a) 51 976,38 km b) ok. 129 mil morskich
 6 a) długość: 4, szerokość: 2 b) 47 7 I: dezeta, II: omega, III: optymista
 9 Więcej niż 1 a, ale mniej niż 1 ha.

s. 62 **Zadania na deser**

- 1 a) 8 cm b) $AB = 2 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$, $AC = 3 \text{ cm}$ c) równoramienny
 3 a) 12 b) o 5° c) 110° d) 20° e) o 6.00: 180° , o 6.20: 70° f) o 8.45: $7,5^\circ$, o 9.15: $172,5^\circ$
 4 trzy 5 60° , 120° , 60° , 120° 6 Obwody są równe, większe pole ma część B.
 7 25 cm^2 8 B i C, A i D 11 $P = 5400 \text{ cm}^2$ 12 192 cm^2 13 90 m 14 35 cm
 15 5 cm 16 9,6 cm

V Równanias. 69 **1. Równania, czyli skąd my to znamy**

- 2 a) $x + x + 3 = 19$; x – liczba balonów Janka b) $m + \frac{1}{4} \cdot m = 100$; m – liczba serwetek Magdy
 3 a) $5 \cdot x + 3 = 43$; x – liczba ciasteczek na dużym talerzu b) $a \cdot (a + 5) = 24$; a – długość krótszego boku c) $2 \cdot (b - 5 + b) = 38$; b – długość dłuższego boku
 4 $55 = \frac{1}{2} \cdot (8 + x) \cdot 5$ 8 $x + x + 5 + x - 1 + 5 \cdot x + 5 \cdot x + 2 + 3 = 100$; x – tyle lat ma Ola

Dla dociekliwych 4 Niewiadoma x w równaniu Wojtka oznaczała liczbę kredek Zosi, w równaniu Pawła – liczbę kredek Krysi, a w równaniu Adama – liczbę kredek Pauliny.

Czy już umiem? II $x + x - 3 = 15$; x – liczba goli strzelonych przez Tomka

III $12 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x$ IV a) $\frac{3}{4} = 0,75$ b) $6\frac{4}{25} = 6,16$ c) $1\frac{2}{3} = 1,6$

s. 75 **2. Sprawdzanie, czyli rozwiązanie bez rozwiązywania**

➡ 1

poziom A a) nie b) tak c) nie d) tak e) tak f) nie

poziom B a) 3, 5 b) żadna c) 4 d) -5, 4 e) 4, -4 f) 1, 2

Odpowiedzi

poziom C a) nie b) tak c) tak d) nie e) nie f) nie

poziom D a) 1, 3 b) 3 c) 1, 2, 3 d) 2 e) 1, 2, 3 f) 2

MISTRZ I -4 II 1 III -2 IV 0, -1, -3 V 2 VI 3, 4

3 a) 12 b) 6 5 TABOR 6 I - D, II - A, III - B, IV - C

8 a) $15 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x + 1)$, $x = 5$ b) $15 = \frac{1}{2} \cdot (x + 4 + x) \cdot x$, $x = 3$

9 I - nie ma rozwiązań, II - ma nieskończenie wiele rozwiązań, III - ma jedno rozwiązanie 10 I - ma nieskończenie wiele rozwiązań, II - nie ma rozwiązań, III - ma dwa rozwiązania 11 a) nie b) tak d) tak 12 0, 7, 2, -2

Czy już umiem? I tak II 10 III A - ma nieskończenie wiele rozwiązań, B - nie ma rozwiązań IV 32 min

s. 82 3. Jak rozwiązać równanie

➔ 1

poziom A a) 9 b) 13 c) 71 d) 12 e) 4 f) 5 g) 10 h) 23 i) 2 j) 15 k) 8 l) 4

poziom B a) 3 b) 5,5 c) 5 d) 2 e) 3 f) 3 g) 4 h) 13 i) 6 j) 4 k) 9 l) 9

poziom C a) -4 b) -2 c) 3 d) 6 e) 1 f) -6 g) -7 h) 4 i) 5 j) 0,6 k) -4 l) 5

MISTRZ a) $1\frac{2}{7}$ b) 5,6 c) $1\frac{1}{6}$ d) $7\frac{1}{3}$ e) 40 f) 15

2 MOTYL 4 Liczba 7 spełnia wszystkie równania. 5 13 lat 6 I, III, IV: $x = 3$; II, III, IV: $x = 1$; IV, V, VI: $x = 0$ 7 a) Obie strony pierwszego równania trzeba podzielić przez 7. b) Obie strony pierwszego równania trzeba pomnożyć przez 2. c) Obie strony pierwszego równania trzeba pomnożyć przez 10.

Dla dociekliwych 1 a) 14 b) 3 c) 10 d) 19 2 x - liczba, o której pomyślał Mateusz; $(x + 8) \cdot 3 - 1 = 62$; $x = 13$

Czy już umiem? I $x = 5$ II $x = 6$ III MOTYW IV 49

s. 90 4. Trudniejsze równania

➔ 1

poziom A a) 2 b) 3 c) 7 d) 6 e) 4 f) 8 g) 3 h) 20

poziom B a) -2 b) 3 c) -4 d) 3 e) 2 f) -1 g) 1 h) 4

poziom C a) 2 b) -13 c) -3 d) 3 e) 2 f) -1 g) 1 h) -10

poziom D a) 4 b) 0 c) -8 d) 3 e) 4,5 f) -7

MISTRZ a) 2,75 b) -4,5 c) 0,1

2 GRAB 3 Rozwiązaniem każdego z podanych równań jest liczba 3. 4 PRĄD 5 $x = 3$; Magda posadziła 6 drzew.

Dla dociekliwych 1 a) $3 \cdot x - 18 = 12$ b) $3 \cdot x - 6 = 12$ c) $6 \cdot x - 18 = 12$ 2 a) 12 b) 2 c) 17 d) $2\frac{7}{9}$

Czy już umiem? I $x = 4$ II $x = 2$ III A, C, D IV 420 cm^3

s. 96 **5. Zadania tekstowe**

1 a) nie b) tak 2 C 3 4 4 50 5 40 6 20 7 11 cm 8 5 cm
9 Krzyś: 5 lat, Tomek: 15 lat 10 12 lat 11 11 rybek 12 12 miejsc

Dla dociekliwych 2 a) 10 lat b) 8 lat

Czy już umiem? I tak II 12,5 cm III 40 IV a) F b) D c) G

s. 100 **Powtórzenie przed klasówką**

1 11 lat 2 a) 3 b) 8 3 a) tak b) nie 4 105 znaczków 5 a) 3, 5 b) 3, 5, 7
6 $P = 168 \text{ cm}^2$ 7 7 lat 8 brak rozwiązań: E, G; nieskończenie wiele rozwiązań: B, I
9 a) 3,5 km b) 4,5 km

s. 101 **Zadania na temat...**

3 język punjabi: o potęgowaniu; język hebrajski: o równaniach; język ukraiński: o kątach
4 a) kwadrat b) równoległobok c) wysokość 5 długości podstaw trapezu

s. 103 **Zadania na deser**

2 Pomylił się Czarek. Lasse: 120, Bosse: 60, Olle: 70 3 a) 60 b) np. $2 \cdot (n + 1) \cdot n$
c) np. $2 \cdot (n + 1) \cdot n = 220$; $n = 10$ 4 10 5 12 lat 6 a) trzy b) trzy

VI Bryłys. 109 **1. Bryły i ich objętość**

1 a) 96 cm^3 b) $76,8 \text{ cm}^3$ c) $93,6 \text{ cm}^3$ 3 262 500 l 4 a) 672 cm^3 b) $23\,850 \text{ cm}^3$
c) $115,2 \text{ dm}^3$ 5 a) 1125 cm^3 b) 1600 cm^3 6 a) 5,4 l b) 21 szklanek 7 cztery
8 24 litry 9 5 cm 10 a) $142,5 \text{ cm}^3$ b) 75 cm^3 c) $56,25 \text{ cm}^3$ 11 $70 \text{ m}^3 = 70\,000 \text{ l}$
12 $4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$ 13 tak 14 $5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 17 \text{ cm}$

Dla dociekliwych 1 czworościan foremny: trójkąt równoboczny; sześciąt: kwadrat;
ośmiościan foremny: trójkąt równoboczny; dwunastościan foremny: pięciokąt foremny;
dwudziestościan foremny: trójkąt równoboczny 2 ośmiościan foremny: 6 wierzchołków,
8 ścian, 12 krawędzi; dwunastościan foremny: 20 wierzchołków, 12 ścian, 30 krawędzi

Czy już umiem? I 1190 cm^3 II 140 dm^3 III 2,7 litra IV $\frac{2}{11}$

s. 117 **2. Zamiana jednostek**

1 $50 \text{ a} = 0,5 \text{ ha}$ 2 $1,87 \text{ m}^2$ 3 40 l wody, która waży 40 kg 4 4 szklanki
5 50 6 a) tak b) nie c) nie 7 pokój: 60,48 kg; sala: 288 kg
8 60 000 000 l 9 $2750 \text{ m}^3 = 2\,750\,000 \text{ l}$ 10 ok. 3,71 zł

Dla dociekliwych 1 w Śniardwach 2 ok. 0,34 s 3 ok. 31,7 godz. 4 nie 5 ok. 103 min

Czy już umiem? I 15,75 m² II 25 a = 0,25 ha III 160 litrów IV 3,1

s. 123 **3. Siatki brył**

1 a) 0,5 cm × 1 cm × 2 cm b) 1 cm × 1 cm × 1,5 cm c) 1,5 cm × 1,5 cm × 1,5 cm

4 a) Nie – jest za dużo ścian bocznych. b) Tak – graniastosłup o podstawie w kształcie równoległoboku. c) Tak – ostrosłup o podstawie w kształcie sześciokąta foremnego.

d) Nie – nie da się skleić krawędzi bocznych. e) Nie – źle położona jedna ściana boczna. 6 a) 30 cm³ b) 20 cm³ 7 a) tak, sześciąt b) tak, ostrosłup o podstawie w kształcie trójkąta równobocznego 8 a) A, B, E, F b) A, B, E, F c) A, B, C, F

9 a) 1 – fioletowy, 2 – niebieski, 3 – zielony, 4 – pomarańczowy b) 5 – fioletowy, 6 – pomarańczowy, 7 – niebieski, 8 – zielony c) 9 – pomarańczowy, 10 – zielony, 11 – fioletowy, 12 – niebieski

Czy już umiem? I a) graniastosłup o podstawie trójkątnej b) ostrosłup o podstawie pięciokątnej II graniastosłup o podstawie kwadratowej; krawędź podstawy równa 1,5 cm, a wysokość bryły – 1 cm III ostrosłup o podstawie prostokątnej; krawędzie podstawy są równe 2 cm i 2,5 cm, a krawędź boczna ma 3,5 cm IV $-\frac{1}{3}$

s. 131 **4. Pole powierzchni bryły**

1 a) 96 cm² b) 90 cm² 2 52 cm² 3 a) 148 cm² b) 1356 cm² 4 72 cm³

5 a) 48 cm² b) 24 cm² 6 a) szkło: 44 dm², kątownik: 36 dm b) 24 litry

7 deski: 1,36 m², płyta MDF: 3 m² 8 krawędź: 6 cm, V = 216 cm³

9 $P_c = 136 \text{ cm}^2$, V = 96 cm³ 10 tak 11 2332,8 cm² 12 V = 288 cm³, $P_c = 336 \text{ cm}^2$

13 105,8 dm² 14 Powietrze waży więcej.

Dla dociekliwych 1 czworościan: 60 cm², sześciąt: 40 cm², ośmiościan: 30 cm², dwunastościan foremny: 20 cm², dwudziestościan foremny: 12 cm² 2 150 cm 3 4 cm

Czy już umiem? I 600 cm² II $P_c = 360 \text{ cm}^2$, V = 432 cm³ III 39 dm²

IV a) 20, 24, 45 b) $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{4}$, 90, 18

s. 135 **Powtórzenie przed klasówką**

1 108 cm³ 2 a) 13 b) 16 3 a) 10 b) 7 4 a) 45 l b) szkło: 73 dm³, kątownik: 3,2 m

5 $P_c = 54 \text{ cm}^2$, V = 27 cm³ 7 V = 10 cm³, P = 33 cm² 8 $P_c = 152 \text{ m}^2$, V = 96 m³

9 krawędź: 5 cm, V = 125 cm³ 10 a) 15,625 cm³ b) 37,5 cm²

11 b) 24 cm³ c) 60 cm² 12 16 cm² 13 440 a, co stanowi $\frac{88}{95}$ całego gospodarstwa

14 57,75 cm³ 15 48 cm² 16 5 cm × 5 cm × 9 cm

17 długość wstążeczki: 470 cm, objętość paczki: 36 000 cm³

s. 137 **Zadania na temat...**

5 z perspektywy liniowej 6 do rzutu równoległego

s. 140 **Zadania na deser**1 $P_{cs} = 6 \cdot K$, $P_{co} = K + 4 \cdot T$ 4 tak**VII Matematyka i my**s. 145 **1. Tabele**1 2,50 zł 2 33,50 zł 3 a) 78 900 km² b) 17 098 000 km² 4 a) ok. 3,8 b) ok. 54,75 127 900 km² 6 Litwa i Słowacja, Ukraina i Niemcy, Białoruś i Czechy

7 a) Szwecja b) ok. 9895

8

Język ojczysty	Liczba szkół	Liczba uczniów (w tys.)
niemiecki	268	24,1
kaszubski	82	3,7
romski	196	1,6
białoruski	25	1,8
ukraiński	91	1,5

9 a) ok. 23 b) ok. 4 razy c) 500 10 a) płetwał błękitny; 20 razy

b) diplodok; prawie 4 razy c) archeopteryks; 20 razy d) 5000 razy

11 600 razy dłuższy; 70 000 000 razy cięższy

Dla dociekliwych 1 300 osób 2 123 osoby na km² 3 Rosja: 8 osób na km², Niemcy: 229 osób na km² 4 2 501 600 osób, czyli ok. 2,5 mln osób

5 64 736 000 osób, czyli ok. 64,7 mln osób

Czy już umiem? I ludność: 2 900 000 osób, powierzchnia: 65 300 km² II 45 razy

III tak; nie IV a) 9 b) 1 000 000 c) 1 d) 81 e) 64 f) -16

s. 151 **2. Diagramy i wykresy**

1 a) aerobik, basen, tenis, piłka nożna b) aerobik, 9 osób c) 2 razy d) o 4

2 Najwięcej w 2002 roku, a najmniej w 1992 roku. 3 a) w 2001 roku, 2002 roku,

2003 roku i 2004 roku b) 2000, 2005, 2006, 2007 c) 1994 d) w 2002 r.;

120 000 uczestników 5 a) 800 km b) ok. 100 km

6 a) Wisła ma ponad 1000 km długości. b) Narew ma ponad 450 km długości.

c) Nie można odczytać z diagramu. d) Nie można odczytać z diagramu.

e) Odra nie jest najdłuższą polską rzeką. f) Nie można odczytać z diagramu.

7 Odra: $\frac{1}{8}$, Bug: $\frac{1}{4}$ 8 a) 1°C b) 9 marca c) 5°C d) 9 marca e) przez 3 dni

f) 3 dni g) od 5 do 9 marca h) przez 3 dni 9 a) dolna stacja: 550 m n.p.m.;

górną stacją: 1150 m n.p.m. b) 12 min 10 950 m n.p.m.; w górę; 4 min

Odpowiedzi

Dla dociekliwych 1 a) VIa: 2 cm, VIc: 2,4 cm; 1,2 razy b) VIa: 2 mm, VIc: 6 mm; 3 razy

Czy już umiem? I o 3 II ok. 200 km III a) 2°C b) 8°C
IV a) 3145 b) 305 474 000

s. 158 3. Procenty

1 29% 2 a) 25% b) 10% c) 50% d) 35% 3 a) 24 osoby b) 6 uczniów c) 12 osób
4 a) 50% b) 25% c) 25% d) 100% 5 a) 300 b) 150 c) 3 d) 30 e) 75 6 2700 zł
7 Kota nie ma w 90% mieszkań, psa nie ma w 10 mieszkaniach.
8 Prusy 9 a) 50% b) 5% c) 10% d) 25% e) 75% 10 a) 25% b) 50% c) 10%
11 a) 50% b) 25% c) 50% d) 10% e) 50% f) 100% 12 50 pocztówek, 125%
13 12 osób 14 16 km

Dla dociekliwych 2 szkoła nr 1: 40 uczniów, szkoła nr 2: 50 uczniów
3 ze szkoły nr 2, prawie 4 razy więcej 4 1% 5 1,5%

Czy już umiem? I 52%, chłopców II a) 50% b) 10% c) 75% d) 100%
III 21 osób IV a) 25 000 m b) 0,005 m c) 40 m d) 0,68 m

s. 164 4. Prędkość, droga, czas – część 1

➔ 1

poziom A a) 60 km b) 30 km c) 300 km d) 40 km e) 640 km f) 2400 km g) 36 km h) 320 km
i) 200 km

poziom B a) $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ b) $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ c) $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ d) $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ e) $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ f) $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ g) $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
h) $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i) $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

poziom C a) 2 h b) 2 h c) 5 h d) 2 h e) 3 h f) 3 h g) 5 h h) 5 h i) 4 h

MISTRZ a) droga: 32 km, czas: 4 h b) droga: 60 km, czas: 6 h c) droga: 50 km, czas: 5 h

2 Jacek 3 Obaj przebyli 20 km. 4 40 km 5 13 h 6 99 m 7 o 2 h dłużej 8 $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
9 2 h 10 o $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Dla dociekliwych 1 a) 2 h b) 3 h c) 5 h d) 72 km e) $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 2 $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Czy już umiem? I $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ II 4 h III 180 km IV a) $\frac{3}{8} = 0,375$ b) $\frac{3}{4} = 0,75$ c) $\frac{4}{6} = 0,666$

s. 170 5. Prędkość, droga, czas – część 2

➔ 1

poziom A a) 30 min b) 40 min c) 36 min d) 15 min e) 6 min f) 12 min g) 45 min h) 20 min

poziom B a) $\frac{2}{5}$ h b) $\frac{1}{6}$ h c) $\frac{1}{3}$ h d) $\frac{3}{4}$ h e) $\frac{7}{12}$ h f) $\frac{1}{4}$ h g) $\frac{1}{2}$ h h) $\frac{1}{12}$ h i) $\frac{2}{3}$ h

poziom C a) 0,4 h b) 0,25 h c) 0,5 h d) 0,2 h e) 0,75 h f) 0,1 h

poziom D a) 12 min b) 30 min c) 15 min d) 9 min e) 18 min f) 36 min g) 3 min
h) 45 min i) 48 min

2 20 km 3 $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 4 a) 14.56 b) 20.26 c) $5 \frac{1}{2}$ h d) ok. $82 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 5 ok. $92,3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
6 4 h 20 min; jadąc z prędkością $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, będziemy jechać krócej o 1 h 5 min
7 1200 km 8 1 h 23 min 9 ok. 1,2 węzła

Dla dociekliwych 1 po 4 min 2 10 s

Czy już umiem? I ok. 113 km II 1 h 20 min III $67,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ IV a) 4 b) 11

s. 177 6. Korzystanie ze wzorów

➔ 1

poziom A a) 3 b) 6 c) 3 d) 8 e) 4 f) 1

poziom B a) 8 b) 3 c) 14 d) 12 e) 9 f) $\frac{1}{3}$ g) 5 h) 2 i) 10

poziom C a) 8 b) 4 c) 12 d) 0,5 e) 6 f) 0 g) 2 h) 0 i) 1

MISTRZ a) 1 b) 2 c) 2 d) 2

2 I – B, II – A 3 I – A, II – B 4 I – C, II – B, III – A 5 a) 5°C b) 10°C

6 Waszyngton: $1\frac{2}{3}^\circ\text{C}$, Nowy Jork: 0°C , Pittsburgh: $-1\frac{2}{3}^\circ\text{C}$, Boston: -5°C 7 32°F

8 ok. 3030 m n.p.m.

Dla dociekliwych 1 $P = \frac{a}{2} \cdot h$, $P = 0,5 \cdot h \cdot a$, $P = h \cdot a : 2$, $P = a \cdot \frac{h}{2}$, $P = a \cdot h : 2$
 $P = 0,5 \cdot a \cdot h$ 2 C

Czy już umiem? I I – A, II – B II ok. $91,8^\circ\text{C}$ III 15°C IV a) 37 r 10; $37\frac{5}{8}$;
37,625 b) 14 r 2; $14\frac{2}{27}$; 14,(074)

s. 184 7. Plan, mapa i skala

➔ 1

poziom A a) 20 cm b) 2 m c) 8,5 m d) 30 cm e) 1,2 m f) 40 cm

poziom B a) 200 m b) 40 km c) 7,5 km d) 80 m e) 1,2 km f) 240 km g) 150 m h) 900 m i) 1,8 km

poziom C a) 800 m b) 400 km c) 37,5 km d) 480 m e) 24 km f) 3600 km g) 450 m h) 3,6 km
i) 12,6 km

poziom D a) 320 m b) 424 km c) 3 km d) 7,75 km e) 4,1 km f) 6,75 km g) 700 m h) 660 km
i) 161 m

MISTRZ a) ok. 10 cm – ok. 5 km b) ok. 3,6 cm – ok. 1,8 km c) ok. 4,4 cm – ok. 2,2 km

2 przy ulicy Długiej 3 ul. Szeroka: 6,4 cm – 512 m, ul. Długa: 3,5 cm – 280 m

5 na wschód 6 o 24 m 7 a) 5 cm – 2,5 km b) 1,4 cm – 700 m c) 4,3 cm – 2150 m

8 Krągłe Mokradło 9 turyści: ok. 4,2 cm – ok. 2,1 km, autobus: ok. 9,2 cm – ok. 4,6 km

10 40 cm

Dla dociekliwych 1 Idąc ze schroniska w Pasterce na Błędne Skały, można zdobyć 5 p.
Idąc w przeciwną stronę, można zdobyć 4 p.

Czy już umiem? I kościół św. Jana II północny wschód III ok. 1150 m
IV a) 0,001 b) 0,004 c) 26,01 d) $\frac{8}{27}$ e) $6\frac{1}{4}$ f) -0,16

s. 187 **Powtórzenie przed klasówką**

1 1200 2 12 km 3 35 min 4 16 dag

5 Więcej uczniów chodzi do liceum, więcej o 800, czyli 3 razy więcej.

6 w biegach; 240 osób 7 6 razy więcej 8 80 km/h 9 90 km 10 16.15 11 378 km

s. 189 **Zadania na temat...**

1 166 lat 2 w 1774 r., czyli w XVIII w.; 94 lata 3 3600 km

4 960 km/h, 2 godz. 5 Przybliżona powierzchnia wynosi 144 km^2 , czyli o 19 km^2 mniej od rzeczywistej. 6 ok. 89 m^3 , ok. 267 ton 7 11 418 m

s. 191 **Zadania na deser**

1 w czasie 1 min: 1,2 km; w czasie 1 s: 20 m 2 a) 25 m/s b) 400 m, 16 s c) 8 s

3 $y = \frac{4}{x}$ 4 a) 17, 19, 23, 29 b) 17 c) 17, tak 5 1 : 25 000 6 a) 851 m n.p.m.

b) 700 m n.p.m. c) 850 m n.p.m. 7 Przejechał ok. $12 \cdot 80 \text{ m} = 960 \text{ m} = 0,96 \text{ km}$;

średnia prędkość 9,6 km/h 8 1 : 54 000 000 9 250 m

10 a) 25% b) 50%, łącznie do stycznia 75% c) 50%, w sumie 125%

VIII Matematyka na co dzień

s. 196 **1. Zakupy**

1 a) 2,70 zł b) 33 zł c) 45,85 zł d) 3,69 zł 2 a) 20,75 zł b) 0,3 kg c) ok. 0,74 kg
3 25,35 zł 4 „Mruczek”: 225 zł, „Puszek”: 216 zł, „Kicia”: 224 zł; Najbardziej opłacalne jest kupowanie „Puszka”. 5 77,80 zł 6 a) $V \approx 500 \text{ cm}^3$ b) ok. 9,65 kg
c) 310,3 uncji, ok. 1 512 660 zł

Czy już umiem? I 1,45 zł II 133 cm III 4,30 zł IV -1

s. 200 **2. Działki, domy, mieszkania**

1 a) 22 m^2 b) 18,1 m 2 $850 \text{ a} = 85 000 \text{ m}^2$ 3 a) najdroższa: Stryków, najtańsza: Sulejów b) najwyższa: Kutno, najniższa: Stryków c) 184 q 4 $16,9 \text{ m}^2$; $9,6 \text{ m}^2$; $12,5 \text{ m}^2$
5 5,22 zł, 344,52 zł 6 645 zł: biała farba 36 zł, niebieska farba 44 zł, cyklinowanie 564,3 zł 7 a) 900 a b) $\frac{1}{15}$ 8 $15 \text{ m} \times 25 \text{ m}$ 9 A: 500 m^2 , 60 tys. zł; B: $437,5 \text{ m}^2$, 52,5 tys. zł; C: 375 m^2 , 45 tys. zł

Czy już umiem? I 630 zł II $3200 \text{ m}^2 = 32 \text{ a}$ III 20 m^2 IV $V = 512 \text{ cm}^3$, $P = 384 \text{ cm}^2$

s. 205 **3. Podróż**

1 3,80 zł 2 11.50 3 a) J. Niegocin, J. Kisajno b) na wschód 4 16.02 5 30 km
 6 16,26 zł 7 390 zł 8 275 zł 9 a) MDCXII b) siedemnasty wiek, XVII w.
 10 ok. 960 m 12 Twierdza Boyen 14 ok. $77 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 15 o ok. 3,5 km
 16 mniej niż 40 dag

Czy już umiem? I na południe II 300 zł III ok. 26 km
 IV a) 5680 b) 2000 c) 38 000 d) 29,4 e) 0,14 f) 5,690

s. 210 **4. Odżywianie**

1 a) 200 kcal b) 70 kcal c) 69 kcal d) 30 kcal 2 3072 kcal 3 36 kcal 4 ok. 0,3
 5 na 50 piętro 6 a) 3 godz. b) 18 km 7 nie 8 chleb razowy: 42,5 g, chleb biały: 25 g
 9 500 g kaszy gryczanej, 1200 g ryżu 10 a) ok. 2,85 kg b) ok. 71,25 dag

Dla dociekliwych 1 a) 19,5; prawidłowa waga b) 30,1; otyłość c) 17,3; niedowaga
 2 największa: 67,2 kg, najmniejsza: 49,8 kg

Czy już umiem? I 2394 kcal II 150 g: 900 kcal; 200 g: 1200 kcal III 15 g
 IV 2,5; 2,(45); setna cyfra: 5

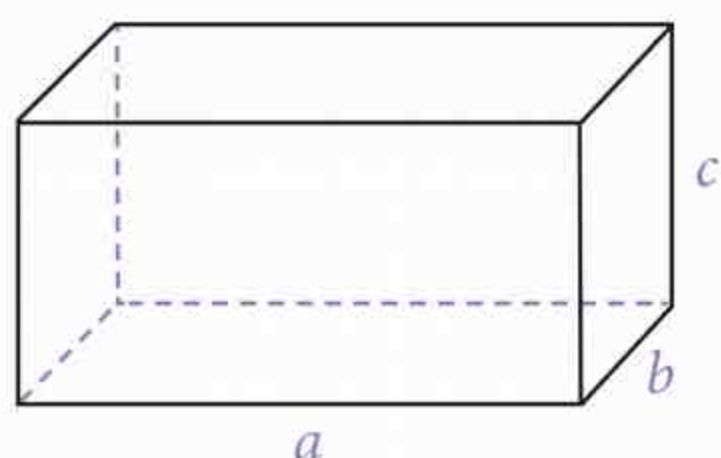
Zdjęcia: Agencja Gazeta: Sebastian Rzepiel s. 61 (jacht Omega); **BE&W:** Alamy Stock Photo/History and Art Collection s. 101, BEW STOCK/Jan Włodarczyk s. 17 (Toruń), BILDARCHIV BPK/dagli orti alfredo s. 112 (Platon), PHOTO12/Archives du 7e Art/DreamWorks Animation s. 139 (kadr z filmu „Mr. Peabody & Sherman”); **Getty Images:** Caiaimage/Tom Merton - okładka, E+/Josef Mohyla s. 104 (papryka), iStock/Getty Images Plus - ajt s. 182 (kościół Mariacki), Dorottya_Mathe s. 158 (pieski), photomaru s. 104 (bakłażan); **Panthermedia:** Britt Weykam s. 159, Christian-Philipp Worring s. 169, Gerald Küstler s. 112 (kostka 4, 5), Manfred Sobottka s. 190 (posągi 2); **Shutterstock:** 26kot s. 112 (kostka 3), 3DMI s. 155 (łyżworolka), aarrows s. 210 (ser), Aga & Miko (arsat) s. 182 (Neptun), Agafonov Oleg s. 105 (kompozycja z roślin), Alex Veresovich s. 47 (lak), AlexandrBognat s. 155 (biała kartka), amasterphotographer s. 105 (kokarda), Andreas Meng s. 5 (okno 3), Andrzej Puchta s. 61 (jacht DZ), arigato s. 12 (tło), Barbara Neveu s. 174 (pudełko zapalek), BLUR LIFE 1975 s. 208 (blat stołu), BONNINSTUDIO s. 155 (pokój), Chachamp s. 208 (sok), cloki s. 192, Daniela Pelazza s. 93 (zdjęcia), Davydenko Yuliia s. 47 (koperta 3, 4), Dean Drobot s. 193 (chłopak), Diego Cervo s. 5 (okno 4), D-Krab s. 85 (portfel 1), Dziewul s. 85 (100 zł), Early Spring s. 85 (portfel 2), Elegant Solution s. 72 (okna), Eric Isselee s. 158 (króliczki), Floral Deco s. 47 (przedmioty biurowe), s. 66 (farby), Florian Teodor s. 83 (motyl 3), fotorince s. 65 (Warszawa 1), GraphicsRF s. 105 (dywan), IB Photography s. 105 (nożyczki), IgorGolovniy s. 93 (stare zdjęcie), Immstudio s. 39 (przedmioty biurowe), s. 128 (przedmioty biurowe), InavanHateren s. 182 (Żuraw), itsmejust s. 65 (Warszawa 2), Ivonne Wierink s. 190 (posągi 3), Jacek Chabraszewski s. 65 (dziewczynka), Jan-Kalle Jonath s. 66 (wiśnie), Jeka s. 105 (dziewczynka), Kamira s. 83 (motyl 2), Kostsov s. 155 (karton), Kovaleva_Ka s. 208 (miód), Kovalov Anatolii s. 65 (zdjęcia w albumie), kozirsky s. 106 (przybory szkolne, jabłko), Leksele s. 190 (posągi 1), Luis Santos s. 5 (okno 2), Lyudmyla Kharlamova s. 128 (kolorowe karteczki), Mad Pixel s. 207, Marek Mierzejewski s. 83 (motyl 4), Margo Harrison s. 61 (jacht Optimist), Maria Dryfhout s. 111, Markus Gann s. 128 (białe karteczki), Martin D. Vonka s. 118, Mega Pixel s. 105 (karton), Megapixelina s. 66 (śliwka, gruszka, truskawka), mhatzapa s. 93 (ramka zdjęcia), Michael Guggemos s. 210 (jajko), Mike Mareen s. 65 (Warszawa 3), Monticello s. 193 (walizka), MSSA s. 12 (kolorowe równoległoboki), natu s. 79, Natursports s. 162, Neirfy s. 120-121 (przedmioty biurowe), nexus 7 s. 208 (oliwa), nimon s. 85 (1 \$), Ollie The Designer s. 194 (banery), opicobello s. 194 (kolorowe karteczki), Orgus88 s. 167 (zegar), Peter Hermes Furian s. 120 (sześcian do sklejan), 121 (bryły do sklejan), Phayabs s. 128 (drewniane tło), pimlena s. 66 (banany), piotrbb s. 60, Prachaya Roekdeethaweasab s. 85 (20 \$), redstone s. 39 (siatki brył), Robynrg s. 85 (2 \$, 5 \$), Roman Pavlik s. 176, RUM-photo s. 135, S_Kuzmin s. 93 (stare zdjęcia), Sergey Ryzhov s. 96, Sergii Figurnyi s. 141, SimplyDay s. 21 (zeszyt, ołówki), slpix s. 112 (kostka 1), Stepniak s. 167 (ratusz), stock_shot s. 194 (chomik), StockLite s. 5 (stolarz), Stokkete s. 47 (koperta 1, 6), Svetik Viktorovna s. 21 (lis), Swapan Photography s. 208 (kakao), Takeshi Nishio s. 85 (Jeny), Talaj s. 72 (kostki i pionki), Tamara Kulikova s. 5 (okno 1, 5), terekhov igor s. 210 (czekolada), Tim UR s. 104 (pomidor), s. 210 (pomidor), Twin Design s. 31, Unuchko Veronika s. 12 (przedmioty biurowe), Utekhina Anna s. 158 (kotki), vaklav s. 17 (Piza), Valentyn Volkov s. 210 (jabłko), valzan s. 47 (koperta 2, 5), VH-studio s. 180, Vitya_M s. 114 (ramka zdjęcia), Volodja1984 s. 85 (200 zł), Willem Dijkstra s. 83 (motyl 1), YamabikaY s. 85 (50 \$); **Thinkstock/Getty Images:** Robert Byron s. 19, Yan Shklyarov s. 112 (kostka 2); **Miłosz Budzyński** s. 114 (sześcian, woda, butelka), s. 174 (kwadraty z zapalek); **Krzysztof Rokicki** s. 171; **Bogdan Wańkowicz/Patryk Budzich** s. 137; **Maciej Wróbel** s. 85 (10 zł).

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Imię i nazwisko		Klasa	Rok szkolny
1.			
2.			
3.			

BRYŁY

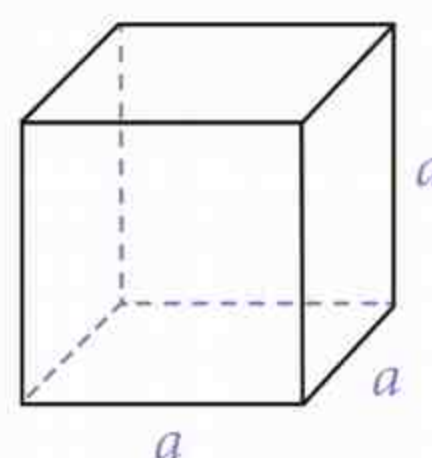
Prostopadłościan



$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$P_c = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c$$

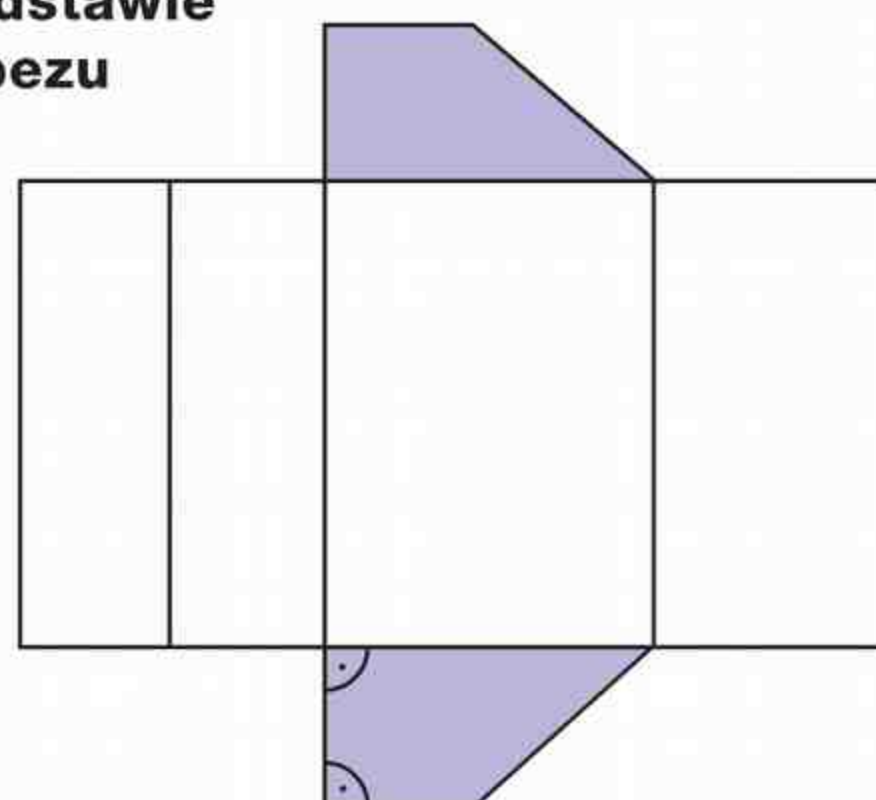
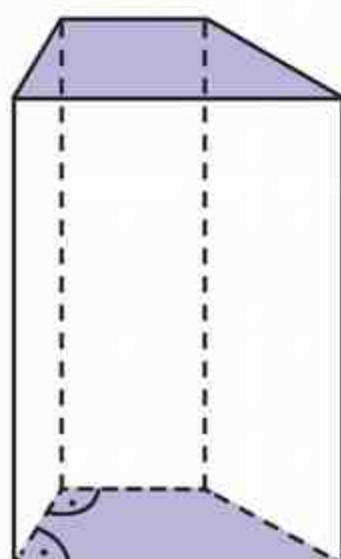
Sześcian



$$V = a^3$$

$$P_c = 6 \cdot a^2$$

Graniastosłup o podstawie w kształcie trapezu



Ostrosłup o podstawie w kształcie prostokąta

