

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



MATEMATYKA Z PLUSEM

zbiór zadań dla liceum i technikum

zakres podstawowy
i rozszerzony







MATEMATYKA Z PLUSEM

zbiór zadań dla liceum i technikum

zakres podstawowy
i rozszerzony

Marcin Braun
Małgorzata Dobrowolska
Marcin Karpiński
Jacek Lech
Ewa Szymańska
Adam Wojaczek

2

MATEMATYKA Z PLUSEM

zbiór zadań dla liceum i technikum

zakres podstawowy
i rozszerzony



Redakcja: *Elżbieta Bagińska-Stawiarz*

Korekta merytoryczna: *Agnieszka Frączyk, Hanna Lenz-Terlecka,
Mirosława Nawrot, Anna Płońska*

Korekta językowa: *Aleksandra Golecka-Mazur*

Projekt okładki: *Iwona Duczmal*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski, Jarosław Zakrzewski*

Projekt graficzny: *Joanna Szyller*

Skład (T_EX): *Lukasz Sitko*

ISBN 978-83-8118-590-5

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2020. Wydanie pierwsze

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl
lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl

SPIS TREŚCI

WIELOMIANY

■ Przykłady wielomianów	12
■ Rozkład wielomianu na czynniki	17
■ Równania wielomianowe	21
■ Dzielenie wielomianów	26
■ Twierdzenie Bézouta	31
■ Równania wielomianowe (cd.)	33
■ Przed sprawdzianem	37
■ Przed maturą	39

FIGURY NA PŁASZCZYŹNIE. CZĘŚĆ I

■ Kąty. Kąty w trójkątach i w czworokątach	42
■ Podstawowe własności trójkątów	47
■ Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa	50
■ Własności trójkątów (cd.)	54
■ Własności czworokątów	57
■ Przed sprawdzianem	62
■ Przed maturą	66

FUNKCJE

■ Wzory i wykresy funkcji	70
■ Przykłady funkcji i ich własności	73
■ Funkcje wielomianowe	76
■ Nierówności wielomianowe	80
■ Funkcje wielomianowe (cd.)	84
■ Nierówności wielomianowe (cd.)	87
■ Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna	89
■ Równania wykładnicze i logarytmiczne	95
■ Zastosowania funkcji wykładniczych i logarytmicznych	99

■ Przekształcanie wykresów funkcji	103
■ Przekształcanie wykresów funkcji (cd.)	108
■ Przed sprawdzianem	112
■ Przed maturą	115

FIGURY NA PŁASZCZYŹNIE. CZĘŚĆ 2

■ Pole koła. Długość okręgu	119
■ Własności kątów środkowych i kątów wpisanych	123
■ Proste i okręgi	126
■ Okrąg opisany na trójkącie. Okrąg wpisany w trójkąt	134
■ Okrąg opisany na wielokącie	137
■ Okrąg wpisany w wielokąt	138
■ Własności wielokątów. Wielokąty foremne	140
■ Przed sprawdzianem	144
■ Przed maturą	148

TRYGONOMETRIA

■ Tangens kąta ostrego	152
■ Sinus i cosinus kąta ostrego	154
■ Obliczenia trygonometryczne	156
■ Zastosowania trygonometrii	162
■ Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60°	165
■ Związki między funkcjami trygonometrycznymi	167
■ Funkcje trygonometryczne kątów od 0° do 180°	169
■ Twierdzenie sinusów	172
■ Twierdzenie cosinusów	176
■ Przed sprawdzianem	180
■ Przed maturą	183

FIGURY W PRZESTRZENI

■ Graniastosłupy	188
■ Ostrosłupy	194
■ Walec	199
■ Stożek	201
■ Kula	205
■ Przed sprawdzianem	207
■ Przed maturą	209

STATYSTYKA

■ Przybliżenia	212
■ Średnia arytmetyczna, mediana, dominanta	214
■ Średnia ważona	220
■ Odchylenie standardowe	223
■ Przed sprawdzianem	229
■ Przed maturą	232

ODPOWIEDZI	234
-------------------------	-----

Szarym symbolem ■ oznaczono tematy przeznaczone dla zakresu rozszerzonego, a czarnym symbolem ■ oznaczono tematy przeznaczone tylko dla zakresu podstawowego (tematy te nie są omawiane w podręczniku dla zakresu rozszerzonego).

W książce przyjęto następujące oznaczenia:

12. — zadanie łatwe

12. — zadanie o średnim poziomie trudności

12. — zadanie trudne

Я — zadanie z zakresu rozszerzonego

Ж — zadanie z zakresu podstawowego, które w zakresie rozszerzonym można pominąć

Wstęp

Zbiór zadań stanowi uzupełnienie podręcznika do nauczania matematyki w klasie drugiej liceum i technikum i jest zgodny z programem *Matematyka z plusem*. Książka ta może być jednak pomocna uczniom i nauczycielom niezależnie od wybranego programu nauczania.

W każdym dziale zostały zebrane najważniejsze wiadomości z teorii, a wszystkie zadania podzielone na trzy grupy. W pierwszej — oznaczonej numerami typu 69. — znalazły się zadania typowe lub łatwe. Z nimi powinni sobie poradzić wszyscy uczniowie.

W drugiej grupie — o numerach typu 69. — znajdują się zadania nieco trudniejsze, przeznaczone dla tych uczniów, którym nie sprawiają kłopotu zadania z pierwszej grupy.

Trzecia grupa zadań — oznaczonych numerami typu 69. — obejmuje zadania raczej trudne. Z nimi powinni sobie poradzić uczniowie zdolniejsi i zainteresowani matematyką.

Dodatkowo przy numerach zadań dotyczących treści nauczania, które nie są obowiązkowe dla zakresu podstawowego, znajduje się symbol $\mathbb{P}$, a przy zadaniach, które są obowiązkowe tylko dla zakresu podstawowego (uczniowie realizujący zakres rozszerzony mogą je pominąć) — symbol $\mathbb{M}$.

Każdy dział kończy się zestawami zadań: „Przed sprawdzianem” — umożliwia powtórzenie materiału z danego zakresu tematycznego, „Przed maturą” — zawiera wybrane oryginalne zadania maturalne z minionych egzaminów. Dzięki nim można przyzwyczaić uczniów do systematycznego przygotowywania się do matury z matematyki i oswoić ich z typowymi zadaniami maturalnymi.

Na końcu książki znajdują się odpowiedzi do niemal wszystkich zadań, a do trudniejszych — także wskazówki.

WIELOMIANY

Wielomianem stopnia n zmiennej x nazywamy wyrażenie postaci:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie współczynniki $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są liczbami rzeczywistymi i $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_n \neq 0$.

Współczynnik a_0 nazywamy wyrazem wolnym.

Liczbę, która jest rozwiązaniem równania wielomianowego $W(x) = 0$, nazywamy **pierwiastkiem wielomianu $W(x)$** .

Liczba a jest **k -krotnym pierwiastkiem** wielomianu $W(x)$, gdy $W(x)$ można przedstawić w postaci:

$$W(x) = (x - a)^k \cdot P(x),$$

gdzie $P(x)$ jest wielomianem i $P(a) \neq 0$.

Liczba pierwiastków wielomianu $ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, zależy od wartości wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$.

Jeśli $\Delta > 0$, to wielomian ma dwa pierwiastki: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Jeśli $\Delta = 0$, to wielomian ma jeden pierwiastek dwukrotny: $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Jeśli $\Delta < 0$, to wielomian nie ma pierwiastków.

Wzory skróconego mnożenia

Kwadrat sumy: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Sześcian sumy: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Sześcian różnicy: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Suma sześciątów: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Różnica sześciątów: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Różnica n -tych potęg:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Twierdzenie Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Twierdzenie o reszcie

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$ jest równa $W(a)$.

Twierdzenie o rozwiązaniach całkowitych

Założmy, że w równaniu wielomianowym:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi i $a_0 \neq 0$. Jeśli rozwiązaniem tego równania jest liczba całkowita, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Twierdzenie o rozwiązaniach wymiernych

Założmy, że w równaniu wielomianowym postaci:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi oraz $a_0 \neq 0$ i $a_n \neq 0$. Jeśli rozwiązaniem tego równania jest liczba wymierna, to można ją przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie licznik p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , a mianownik q jest dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze.

PRZYKŁADY WIELOMIANÓW

1. Wśród podanych wyrażeń algebraicznych znajdź wielomiany i określ stopień każdego z nich.

a) $9x^8 - 4x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 5$

e) $\pi t^{20} + 3^{-2}$

i) $\frac{1}{\pi}$

b) $\frac{1}{12}y^{12} - 5y^{10} + \sqrt{2}y - 0,1y^{13}$

f) $3\sqrt[3]{u} - u$

j) $3x^5 + 2x^{-3} + 1$

c) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + \frac{1}{x}$

g) $\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$

k) $\frac{3x^5}{2} + \frac{2x^3}{7} - \frac{1}{3}$

d) $\frac{3}{2x^{10}} + \frac{2}{3x^8} + \frac{1}{x^3}$

h) $\sqrt[5]{2}x^3 - 2$

l) $2^{\frac{3}{2}}w + \frac{1}{2}w^5$

2. Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, przekształć dany wielomian do postaci $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

a) $(3x^2 + 10)^2$

i) $\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}x^3\right)\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}x^3\right)$

b) $(2x^3 - \sqrt{6})^2$

j) $(2x^3 - x)^2 - (x^2 + 2)^3$

c) $(5x^3 + 4x)^2$

k) $(3\sqrt{2} - x)^2 + 3\sqrt{2}x(3x - \sqrt{2})$

d) $\left(\frac{1}{4}x^2 - \sqrt{2}x^5\right)^2$

l) $(2x^3 + x^2)(2x^3 - x^2) + (x^2 + 1)^3$

e) $(x^3 + x^4)^3$

m) $(2a - 1)(2 + 3a^5)^2$

f) $\left(\frac{1}{2}x^5 - 3\right)^3$

n) $(2x - 5)^3 - (2x - 1)^2$

g) $\left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right)\left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right)$

o) $\left(\frac{1}{3}x + 2\right)^3 + \left(\frac{1}{3} - 2x\right)^3$

h) $(3x^4 - 2x)(3x^4 + 2x)$

p) $(x^2 - 1)^3 - (x^2 + 2)^3$

3. Poniższe wyrażenia przedstaw w postaci jednomianu ax^n .

a) $\frac{(5x^3)^4}{3}$

c) $(4x^8)^3 - (2x^{12})^2$

b) $(2x^4)^2 \cdot (4x^3)^3$

d) $\frac{2}{3}x^2 \cdot \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{6}$

4. Oblicz wartość wielomianu dla podanej wartości zmiennej.

a) $5x^4 - 2x^3 + 10x^2 - x\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ dla $x = 2$

b) $2x^3 - 3x^2 + 7$ dla $x = -1$

c) $\frac{a^4}{8} - \frac{3}{4}a^3 - 2a$ dla $a = 2$

d) $0,001x^3 - x^2 + 3x + 2$ dla $x = -10$

e) $\left(\frac{1}{3}z + 2\right)^2 - \left(\frac{2}{5}z - 3\right)^3 - 1$ dla $z = 0$

f) $3(x - 2)^5 + (2x - 1)^2$ dla $x = 1$

g) $-5x^4 + x^3 - 6x^2 + \frac{x}{2} - 1$ dla $x = \frac{2}{3}$

h) $\frac{3}{2}x^4 - 2x^2 - \frac{1}{4}$ dla $x = -\sqrt{2}$

i) $(x - 2\sqrt{3} + 1)^3 - 2x$ dla $x = \sqrt{3} - 1$

Яj) $2x^4 - x^3 + 6x^2 - x - 3$ dla $x = 2\sqrt{3}$

Яk) $\frac{5a^3}{2} - \frac{2a^2}{3} + \frac{3}{4}a$ dla $a = -\frac{1}{2}$

Яl) $3(y + 2)^2 - (2y - 5)^2$ dla $y = 2\sqrt{2} - 1$

Яm) $x^3 + 2x^2 - x + 4\sqrt{2}$ dla $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Яn) $(5k + 1)^3 - (5k - 1)^2$ dla $k = \sqrt[3]{-2}$

5. Wykonaj działania i uporządkuj otrzymany wielomian.

- a) $(2t + 6t^2 + 1) - (2t^3 - t^2 + 3t - 2)$
- b) $(3p^4 - 4p^2 + p) + 4(p^4 - 2p^3 + 3p^2 - \frac{1}{2}p + 1)$
- c) $x^2(2x^2 + 5x - 7) - 3x(x^3 - 2x^2 + x - 5)$
- d) $(2x^3 + 1) - \left(3x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \left(x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 2\right)\right)$
- e) $2(3x^2 + x - 8) - 2(3x^4 + x^3 + 5x^2 - 6x + 1) + 4x^2\left(2x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right)$
- f) $(3k - 2)(2k^3 + 4k - 5)$

6. Określ stopień podanego wielomianu bez wykonywania wszystkich działań.

- a) $(3x^3 + 2x^2 - x)^2$
- c) $x^2(2x + 1)^{30}$
- b) $(2x^3)^5 - x^9$
- d) $(x^2 - 2x + 1)(x^4 - x^3)$

7. Określ, dla jakiej wartości a wielomian $W(x)$ jest równy wielomianowi $P(x)$.

- a) $W(x) = (2x - 1)^2 - 3x(x - 1), \quad P(x) = ax^2 - x + 1$
- b) $W(x) = 2x(5x^3 - 4x^2 - 1) - 5x^3, \quad P(x) = 10x^4 + ax^3 - 2x$
- c) $W(x) = (x^2 - 5)(3x^2 + x), \quad P(x) = 3x^4 + x^3 + ax^2 - 5x$

8. Niech $W(x)$ oznacza wielomian $3x^3 + x^2 + 1$, $P(x)$ — wielomian $x + 3$, a $Q(x)$ — wielomian $x^2 - 3$. Uporządkuj poniższy wielomian.

- a) $W(x) + P(x)Q(x)$
- c) $P(x)(W(x) - Q(x))$
- b) $(P(x))^2 - Q(x)$
- d) $P(x) - 2Q(x) - W(x)P(x)$

9. Uporządkuj wielomian.

- a) $\left(x^2 + (1 + \sqrt{2})\right)^2$
- e) $(\sqrt{5} + 2x)^4$
- b) $(x^2 - \sqrt{2} - 1)^2$
- f) $\left((x\sqrt{2} - \sqrt{3})(x\sqrt{2} + \sqrt{3})\right)^4$
- c) $(x^2 - 3x + 2)^2$
- g) $\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt[4]{5}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt[4]{5}\right)\right)^4$
- d) $(x - 3)^4$
- h) $(x^3 + 2x^2 - x - 2)^2$

10. Przekształć podany wielomian, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

- a) $(3x^3 - 2)(2 + 3x^3)$
- d) $3(x^2 - 2x + 1) - 2(x - 1)^2$
- b) $(2x + \sqrt{2})^2 - (2x - \sqrt{2})^2$
- e) $(7 - 2x)^2(7 + 2x)^2$
- c) $(2 - 7x)^3 + (2 + 7x)^3$
- f) $(x - \sqrt{5})^3(x + \sqrt{5})^3$

11. Zapisz wielomian w jak najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla podanej wartości zmiennej.

a) $(2y + 1)^2 - (3 - y)^2 - 3y^2$ dla $y = \frac{1}{5}$

b) $-4x(9x - 3) + (6x - 1)^2$ dla $x = -\frac{3}{7}$

c) $\left(\frac{1}{3}x - 2\right)^3 - \frac{1}{3}x\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2$ dla $x = \frac{2}{11}$

d) $(x + 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}) - (x + \sqrt{2})^2$ dla $x = -\frac{5\sqrt{2}}{4}$

12. Uporządkuj wielomian zmiennej x .

a) $(\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{5}) - (x^3 + x^2 - 3a)$

b) $(2t^2 - xt + 3x^2t^3) - (3x^2 + t^3 - 2xt)$

c) $2(x^5 + ax^2 - x) + (bx + 1)^2$

d) $(\sqrt{3}ax^2 + 3)bx - x(\sqrt{3} - x)$

13. Niech $P(x)$ oznacza wielomian $3x^5 - x$, $Q(x)$ — wielomian $3x^5 - 2x^2 + 3$, a $R(x)$ — wielomian $x^3 + 1$. Określ stopień poniższego wielomianu.

a) $(P(x) - Q(x))^5 - R(x)$

Яd) $P(x)(Q(x) + R(x)) - 2R(x)(Q(x) + P(x))$

b) $P(x)(Q(x) - R(x)^2)$

Яe) $(P(x)Q(x) - Q(x)R(x) + P(x)R(x))^2$

c) $(P(x))^{10} + (R(x))^{14}$

Яf) $(P(x)Q(x)R(x))^3$

14. Dany jest wielomian $P(x) = 5x^4 + 2x + \frac{1}{2}$. Podaj przykład takiego wielomianu $Q(x)$, aby wielomian $P(x) - Q(x)$ był:

a) wielomianem stopnia siódmego,

c) wielomianem stopnia zerowego,

b) wielomianem stopnia trzeciego,

d) wielomianem zerowym.

15. Oblicz wartość współczynnika a , jeżeli:

a) $W(x) = 3x^2 + 2x + a$ oraz $W(1) = 1$

b) $W(x) = ax^3 - 4x^2 + 3x - 2$ oraz $W(2) = 0$

c) $W(x) = -2x^7 + x^5 + ax^2 + 3$ oraz $W(-1) = 1$

d) $W(x) = ax^4 + 8x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ oraz $W(-2) = -5$

Яe) $W(x) = 5x^2 + ax + 2a - 7$ oraz $W(a) = a$

16. Oblicz wartości współczynników a oraz b , jeżeli:

a) $W(x) = ax^2 + bx + 4$ oraz $W(-1) = 9, W(1) = 3$

b) $W(x) = ax^3 + 5x^2 - 2x + b$ oraz $W(2) = 11, W(-2) = 35$

c) $W(x) = -x^4 - x^3 + ax^2 + 3x + b$ oraz $W(0) = 7, W(3) = -2$

Я 17. Oblicz wartości współczynników a, b, c , jeżeli:

- a) $W(x) = ax^2 + bx + c$, $W(0) = 2$, $W(2) = 10$, $W(-1) = 13$
- b) $W(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + c$, $W(1) = 8$, $W(-1) = 6$, $W\left(\frac{1}{2}\right) = 5\frac{1}{4}$
- c) $W(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$, $W(1) - W(-1) = -2$, $W(2) + W(3) = 2$, $W(0) + W(4) = -18$
- d) $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 12$, $W(-2) = W(2) = W(3) = 0$

18. Określ, jakie warunki muszą spełniać współczynniki a, b, c i d wielomianu $W(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$, jeżeli $W(2) - W(-2) = 8$.

19. Dane są wielomiany $P(x) = x^2 + 2x$ oraz $Q(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Wyznacz, o ile istnieją, współczynniki a i b wielomianu $W(x) = ax^2 + bx + 1$, jeżeli:

- a) $W(x) \cdot P(x) = Q(x)$
- b) $W(x) = Q(x) - 2x^2 \cdot P(x)$

20. Niech $F(x) = x^2 + 1$, $G(x) = x^2 + bx + c$ oraz $H(x) = x^4 - 7x^3 + x^2 - 7x$. Dla jakich wartości b i c wielomian $F(x) \cdot G(x) - H(x)$ jest wielomianem zerowym?

Я 21. Wielomiany $F(x) = x^2 - 5x - 6$ oraz $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 16x - 12$ przyjmują wartość 0 dla tych samych wartości zmiennej x . Wyznacz wartości współczynników a oraz b .

Я 22. Dany jest wielomian $W(x) = (k^2 - 3k + 2)x^3 + (k^2 - 1)x^2 + kx - 3$. Dla jakiej wartości parametru k jest on wielomianem drugiego stopnia?

23. Dane są dwa wielomiany: $P(y) = a(y + 1)(y - 2) + b(y + 3)(y - 1) + c(y - 1)$ oraz $Q(y) = 4y - 2$. Dla jakich wartości a, b i c są one równe?

24. Napisz kilka przykładów wielomianów piątego stopnia zmiennej x o współczynnikach 0, -2, 3, 4, 7, przy czym współczynniki przy różnych potęgach zmiennej muszą być różne. Ile takich wielomianów można zapisać?

25. Jaki jest stopień podanego wielomianu?

- a) $(1 + 2x + 3x^2 + \dots + 100x^{99})(1 - 3x)$
- b) $7(1 - x + x^2 - \dots - x^{15})(x^{10} - x^9 + \dots + 1)$
- c) $(x - 1)(x + 1)(x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^3 - 3)(x^3 + 3)(x^4 - 4)(x^4 + 4)$
- d) $(1 + x + x^2 + \dots + x^{100})(1 + x) - (1 + x + x^2 + \dots + x^{101})(1 - x)$

26. Ile wynosi suma współczynników wielomianu $W(x) = (4x^2 - 3x - 2)^{2003}$?

ROZKŁAD WIELOMIANU NA CZYNNIKI

27. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $x^6 + 2x^4$

d) $-10x^{10} + 6x^7 - 4x^5$

b) $-5x^4 + x^3 + 3x^2$

e) $-18x^5 - 12x^4 + 15x^3 + 24x^2$

c) $3x^9 + 12x^8 + 9x^6$

f) $-60x^{33} + 32x^{20} - 20x^{16} + 12x^5$

28. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $6x^6 - 2x^5$

d) $3(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)$

g) $4x^2(2x + 1) + 5(2x + 1)$

b) $\frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3$

e) $2x(x + 5) - (x + 5)$

h) $6x(3x^2 + 2) - 7(3x^2 + 2)$

c) $x^4 - x^3 + 3x^2$

f) $2x(5x - 2) + 5x - 2$

i) $5(x - 1)^2 + x - 1$

29. Rozłóż wielomian na czynniki, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $x^2 - 36$

e) $9x^2 - 6x + 1$

i) $4x^4 + 4x^2 + 1$

b) $x^2 - 2$

f) $x^4 - 16$

j) $x^3 - 8$

c) $16x^2 - 5$

g) $x^4 - 9$

Яk) $x^3 + 1$

d) $x^2 + 4x + 4$

h) $x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$

Яl) $\frac{1}{27} + x^3$

30. Rozłóż wielomian na czynniki — najpierw wyłącz wspólny czynnik, a następnie skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $x^3 - 9x^5$

c) $3x^{10} - 2x^8$

Яe) $27x^6 + 64x^3$

b) $25x^4 - 16x^6$

d) $8x^5 - x^2$

f) $0,001x^{15} - x^{12}$

31. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia.

a) $x^3 + x^2 + x + 1$

d) $6x^3 - 7x^2 + 12x - 14$

g) $2x^3 - 8x^2 - 5x + 20$

b) $x^3 - 5x^2 + x - 5$

e) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

h) $2x^3 - 5x^2 + x - \frac{5}{2}$

c) $2x^3 + 3x^2 + 4x + 6$

f) $2x^3 - 9x^2 - 6x + 27$

Яi) $2x^3 - 5x^4 + 250 - 625x$

32. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia.

a) $x^4 + 4x^3 - x - 4$

f) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2$

Яb) $x^4 - 5x^3 + x - 5$

g) $\frac{5}{3}x^5 + x^4 - \frac{5}{3}x^3 - x^2$

c) $x^4 - 2x^3 - 8x + 16$

h) $64x^5 - 192x^4 - 27x^2 + 81x$

d) $27x^4 - 3x^2 + 9x^3 - x$

i) $3x^6 + 6x^5 - 3x^3 - 6x^2$

e) $3x^4 - 2x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

Яj) $5x^8 - 15x^7 + 40x^5 - 120x^4$

33. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia.

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{4x}{3}(9x-1) - \frac{3}{4}(9x-1)$ | f) $\frac{x\sqrt{3}}{3}(8x+3) - \frac{\sqrt{2}}{2}(8x+3)$ |
| b) $\frac{5x^2}{2}(7x+2) + \frac{5}{3}(7x+2)$ | g) $5x(2x^2+3) - 3 - 2x^2$ |
| c) $\frac{3}{4}(5x-3) - \frac{5x^2}{6}(5x-3)$ | h) $3x^2(4x-3) + 2(3-4x)$ |
| d) $\sqrt{2}x(2x+3) - 3\sqrt{11}(2x+3)$ | i) $10x(9x-6) - 2(15x-10)$ |
| e) $x^2\sqrt{6}(3x-7) + 2\sqrt{3}(3x-7)$ | j) $4x(12x^2+20) - 5(30x^2+50)$ |

34. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia.

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $10x^6 + 30x^5 + 5x^4 + 15x^3$ | g) $3x^5 - 15x^4 + 6x^3 - 30x^2$ |
| b) $40x^7 - 100x^6 + 8x^5 - 20x^4$ | h) $8x^7 - 72x^5 - 4x^6 + 36x^4$ |
| c) $15x^8 + 5x^7 + 105x^6 + 35x^5$ | i) $3x^8 - 12x^6 - 6x^7 + 24x^5$ |
| d) $18x^5 - 8x^3$ | j) $-6x^5 + 15x^4 + 24x^3 - 60x^2$ |
| e) $8x^6 - 18x^4$ | k) $10x^5 + 15x^4 - 2x^3 - 3x^2$ |
| f) $\frac{5x^7}{4} - 5x^5$ | l) $12x^{10} + 24x^9 - 3x^8 - 6x^7$ |

35. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia.

- | | |
|------------------------------------|---|
| a) $x^3 - 2x^2 + x$ | d) $-5x^5 + 30x^4 - 45x^3$ |
| b) $3x^4 - 30x^3 + 75x^2$ | e) $6x^7 + 24x^6 + 24x^5$ |
| c) $32x^7 - 32\sqrt{3}x^6 + 24x^5$ | f) $-\frac{1}{2}x^6 + x^5 - \frac{1}{2}x^4$ |

36. Rozłóż wielomian na czynniki, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|---------------------|
| a) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ | d) $(x-2)^2 + 2(x-2) + 1$ | g) $x^6 - 1$ |
| b) $x^2 - 4\sqrt{3}x + 12$ | e) $(3x+1)^2 - 6(3x+1) + 9$ | h) $64 - x^6$ |
| c) $3x^2 - 2x\sqrt{30} + 10$ | f) $4(3-2x)^2 - 20(2x-3) + 25$ | i) $x^6 - 2x^3 + 1$ |

37. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia.

- | | |
|---|---|
| a) $4x^3 - 4\sqrt{3}x^2 - x + \sqrt{3}$ | e) $4x^3 + x^2\sqrt{3} + 4x + \sqrt{3}$ |
| b) $2x^3 + 4x - x^2 - 2$ | f) $x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x + 1$ |
| c) $15x^3 - 6x^2 + 5x - 2$ | g) $6x^6 + 2x^4 + x^2 + \frac{1}{3}$ |
| d) $3\pi x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + \pi x - \sqrt[3]{2}$ | h) $\sqrt{2}x^3 - x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$ |

38. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a) $2x^4 + 3x^3 - 2x - 3$ | h) $9x^4 + 2x^3 - x^2 - \frac{2}{9}x$ |
| Яb) $x^4 - x^3 + x - 1$ | i) $3x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4x - 1$ |
| Яc) $4x^4 - 3x^3 + 32x - 24$ | j) $10x^3 - 4\sqrt{2}x^2 - 5x + 2\sqrt{2}$ |
| d) $8x^4 - 40x^3 - x + 5$ | k) $x^3 + \sqrt{2}x^2 + 3x + 3\sqrt{2}$ |
| e) $2x^5 + x^4 - 16x^2 - 8x$ | l) $2x^3 - 3\sqrt{2}x^2 - 18x + 27\sqrt{2}$ |
| Яf) $6x^6 - 4x^5 + 750x^3 - 500x^2$ | m) $x^4 - \sqrt{5}x^3 + \sqrt{5}x^2 - 5x$ |
| g) $27x^4 - 45x^3 - 12x^2 + 20x$ | n) $2\sqrt{3}x^5 + 2x^4 - 3\sqrt{3}x^3 - 3x^2$ |

39. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia.

- | | |
|--|---|
| a) $W(x) = (x^2 - 16)(x^2 + 2x - 3)$ | g) $W(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - 2x - 5)$ |
| b) $W(x) = (3x^3 - x)(4x^2 + 5x + 1)$ | h) $W(x) = (4x^2 - 5)(9x^2 - 6x + 1)$ |
| c) $W(x) = (x^4 - 4)(2x^2 - x - 6)$ | i) $W(x) = (4x^2 + 4x + 1)(4x^2 - 1)$ |
| d) $W(x) = (x^3 - 1)(3x^2 + x - 4)$ | j) $W(x) = (25x^4 - 20x^3 + 4x^2)(4x^2 - 20x + 25)$ |
| e) $W(x) = (27x^3 - 8)(x^3 - 3x^2 - 10x)$ | k) $W(x) = (2 - x^2)(x^2 - 2\sqrt{3}x + 3)$ |
| f) $W(x) = (3x^2 - 5x + 2)(3x^2 + 2x - 8)$ | l) $W(x) = (3x^2 + 2x\sqrt{6} + 2)\left(\frac{x^2}{4} - x + 1\right)$ |

40. Rozłóż wielomian na czynniki.

- | | |
|--|---|
| a) $W(x) = 12x^3 + 30x^2 - 18x$ | d) $W(x) = 16x^5 - 8x^4 - 120x^3 - 2x^2 + x + 15$ |
| b) $W(x) = 15x^4 - 25x^3 - 10x^2$ | e) $W(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 2x + 6$ |
| c) $W(x) = 4x^5 + x^4 - 5x^3 - 4x^2 - x + 5$ | f) $W(x) = 3x^7 - 3x^6 + 6x^5 + 4x^3 - 4x^2 + 8x$ |

41. Zapisz w postaci iloczynu.

- | | |
|------------------------------|--|
| a) $(x + 7)^5 + 2(x + 7)^4$ | c) $(x - 3)^3 - (x - 3)^2(2x - 5)$ |
| b) $(2x - 1)^4 - (2x - 1)^2$ | d) $(x + 1)^3(x + 2)^2 - (x + 1)^2(x + 2)^3$ |

42. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia, stosując wzory skróconego mnożenia.

- | | | |
|------------------------|------------------|--------------------------|
| a) $3x^4 + 12x^2 + 12$ | Яc) $x^5 + 8x^2$ | e) $(x^2 + 1)^2 - 25$ |
| b) $x^8 - 8x^4 + 16$ | d) $3x^4 - 6x$ | f) $(x^2 - 2x)^2 - 9x^2$ |

43. Przedstaw wielomian w postaci iloczynu wielomianów, z których jeden jest dwumianem pierwszego stopnia.

- | | | | |
|--------------|---------------|-----------------|--------------|
| a) $x^6 - 1$ | b) $x^5 - 32$ | c) $243x^5 - 1$ | d) $x^6 - 8$ |
|--------------|---------------|-----------------|--------------|

44. Wykaż, że jeśli do iloczynu dwóch kolejnych liczb całkowitych dodamy większą z nich, to otrzymamy kwadrat tej liczby.

45. Wykaż, że wielomian $x^6 + x^4 + 3x^2 + 3$ przyjmuje tylko wartości dodatnie.

46. Uzasadnij, że wielomian $x^7 - x^6 + 4x - 4$ przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x < 1$.

47. Przedstaw podane wyrażenie w jak najprostszej postaci (przyjmij założenie, że mianownik ułamka jest różny od zera).

a) $\frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{2x - 1}$

c) $\frac{6x^4 - 2x^3 + 24x^2 - 8x}{x^4 + 4x^2}$

b) $\frac{x^3 - 9x}{2x + 6}$

d) $\frac{3x^3 + x^2 - 27x - 9}{3x^2 + 10x + 3}$

48. Znajdź liczbę, którą należy wpisać w kratce, a następnie rozłóż wielomian na czynniki.

a) $4x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 5x - 1 = 4x^4 + 5x^3 + x^2 + \square x^2 - 5x - 1$

b) $x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 20x + 24 = x^4 + 5x^3 - 6x^2 + \square x^2 - 20x + 24$

c) $x^4 - x^3 - 17x^2 - 3x - 60 = x^4 - x^3 - 20x^2 + \square x^2 - 3x - 60$

d) $3x^4 + 9x^3 - 52x^2 + 6x - 36 = 3x^4 + 9x^3 + \square x^2 + \square x^2 + 6x - 36$

49. Jaka jest największa liczba czynników, na które można rozłożyć wielomian $(x^4 - 3x^3 + x - 3)^{2003}$?

50. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 9$

g) $4x^3 - 7x + 3$

b) $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$

h) $x^3 - 8x + 3$

c) $2x^4 + 4x^3 - 15x^2 + 2x - 8$

i) $x^3 - 13x + 12$

d) $x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 27x + 36$

j) $x^3 - 3x - 2$

e) $2x^3 - x + 1$

k) $x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 6x + 10$

f) $x^3 - 3x + 2$

l) $x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x$

51. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $x^4 + 1$

b) $2x^4 + 32$

c) $x^6 + 1$

d) $x^8 + x^4 + 1$

52. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3$

c) $x^5 + 3x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 24x + 56$

b) $x^7 + 2x^6 - 6x^4 - 12x^3 + 9x + 18$

d) $x^6 + x^5 + 4x^4 + 9x^2 + 9x + 36$

53. Udowodnij, że wartość wielomianu $x^5 - 5x^3 + 4x$ dla każdej liczby całkowitej jest liczbą podzielną przez 120.

54. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej p liczba $\frac{1}{24}p^4 - \frac{1}{4}p^3 + \frac{11}{24}p^2 - \frac{1}{4}p$ jest całkowita.

55. Uzasadnij, że nie istnieje liczba naturalna dodatnia n , dla której liczba $n^4 + 4n^3 + 8n^2 + 16n + 16$ byłaby kwadratem pewnej liczby naturalnej.

RÓWNANIA WIELOMIANOWE

56. Sprawdź, które z podanych liczb x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $W(x)$.

a) $W(x) = (x^2 - 2)(3x + 2)$, $x_1 = 2, x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = -\frac{2}{3}$

b) $W(x) = (x^2 + 9)(x^2 - 3x - 40)$, $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 8$

c) $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x$, $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1$

d) $W(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 15$, $x_1 = 5, x_2 = 2, x_3 = \sqrt{3}$

e) $W(x) = x^4 - 14x^2 + 45$, $x_1 = -6, x_2 = -3, x_3 = -\sqrt{5}$

f) $W(x) = 2021x^{2021} + 2000x^2 - 21x$, $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$

57. Znajdź liczby spełniające równanie.

a) $(x^2 - 4)(x + 3)x = 0$

e) $8(x^7 - 2x^6)(x^2 - 2) = 0$

b) $(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$

f) $(x^3 - 125)(x^2 - 36)(2x + 7) = 0$

c) $(x^2 - 2x + 1)(x + 1)^2 = 0$

g) $(x^4 - 27x)(x^2 + 1) = 0$

d) $5x^2(x - 1)(x^2 - 1) = 0$

h) $(x^3 - 8)(x^2 - 8)(x - 8) = 0$

58. Rozwiąż równanie.

a) $(x + 7)^2(3x - 5)^3(4x + 1)^5 = 0$

d) $(2x^2 - 1)(4x^2 + 1)(9x - 2) = 0$

b) $(9x - 1)^2(x^2 + 1)(x - 9) = 0$

e) $(x^3 + 27)(x^3 - 27)(x^3 - 27x) = 0$

c) $(x^3 - 3)(x^2 - 5)(x + 5) = 0$

f) $(6x^3 - 9x^2)(6x^3 - 9) = 0$

59. Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 - 7x^2 = 0$

d) $-3x^3 + 8x^2 + x = 0$

b) $4x^3 + 8x = 0$

e) $2x^3 - 9x^2 + 9x = 0$

c) $x^3 + x^2 - 2x = 0$

f) $x^4 - 10x^3 + 25x^2 = 0$

60. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 4 = 0$

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c) $x^4 - 18x^2 + 32 = 0$

d) $2x^4 - 15x^2 - 27 = 0$

e) $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$

f) $4x^4 - 5x^2 - 6 = 0$

g) $2,5x^4 + 3x^2 + 5 = 0$

h) $4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

i) $2x^6 - x^4 = 3x^2$

j) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

k) $(x^4 - 3x^2 + 2)(x^4 - x^2 - 6) = 0$

l) $x^5 + 3x^3 + 2x = 0$

61. Rozwiąż równanie.

a) $(x^2 + 1)^2 - 6(x^2 + 1) + 8 = 0$

b) $(x^2 - 2)^2 - 2(x^2 - 2) = 15$

c) $x^5 + 2x^4 - 19x^3 - 38x^2 - 20x = 40$

d) $2x^6 + 5x^5 - 18x^4 - 45x^3 + 16x^2 + 40x = 0$

62. Wśród pierwiastków wielomianu $P(x)$ wskaż takie, które są jednocześnie pierwiastkami wielomianu $Q(x)$.

a) $P(x) = x^2 - 9$, $Q(x) = x(x - 3)^2$

b) $P(x) = (x^4 - 1)(2x - 1)$, $Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$

c) $P(x) = 3x^3 - x^2$, $Q(x) = x^3 - 3x$

d) $P(x) = 4x^6 - 6x^4$, $Q(x) = x^6(x^2 - 3)$

63. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

b) $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$

c) $2x^3 + 4x - x^2 - 2 = 0$

d) $2x^6 + x^5 - 64x - 32 = 0$

e) $2x^4 + x^3 - 4x - 2 = 0$

f) $3x^6 - 5x^5 - 3x^2 + 5x = 0$

g) $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2 = 0$

h) $-2x^5 + 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 6x - 18 = 0$

i) $3x^5 - 2x^4 - 18x^3 + 12x^2 + 24x - 16 = 0$

j) $4x^5 - x^4 + 24x^3 - 6x^2 + 20x - 5 = 0$

64. Dla jakiej wartości liczby a pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 - 5x + 10$ jest liczba $x_1 = 2$? Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

65. Dla jakiej wartości liczby k rozwiązaniem równania $kx^3 + 9x^2 + 4x = -12$ jest liczba $x_1 = -3$? Wykaż, że liczba x_1 jest jedynym rozwiązaniem tego równania.

66. Dla jakich wartości liczb a oraz b liczby $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 2x^5 + ax^4 + bx^3 + 5x^2 + 8x - 4$? Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

67. Ustal, dla jakiej wartości parametru m liczba 5 jest rozwiązaniem równania $x^3 - 2mx^2 - m^2x + 70 = 0$.

68. Rozwiąż równanie.

- a) $x^2(x+5) - 2(x+5)(2x-1) = 0$ d) $x^4(x-2) + (2x-4)(x^2+1) = 0$
b) $\left(x - \frac{2}{3}\right)(3x^2 - 2) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1)$ e) $x^5 + 2x^4 + 16x + 32 = 8x^2(x+2)$
c) $2x^2(x+4) = (x+4)(3x-1)$ f) $x^4(3x-1) = 6x^3 - 2x^2 + 45x - 15$

69. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3 + 5(x+1)^2 = 5$ d) $6(1-x^2)(1+x^2) = 5x^2$
b) $x(x^2 - x + 3) = 3$ e) $x(-x^2 + x + 4) = 4$
c) $x^2(x^3 - 5) + x^3(x-5) + (x+2)^2 = x^2$ f) $(x^4 + 3x^3)(x-3) = x^3 - 9x$

70. Rozwiąż równanie (przedstaw środkowy składnik jako sumę dwóch jednomianów i rozłóż wielomian na czynniki).

- a) $x^3 - 5x + 2 = 0$ c) $x^3 - 3x - 2 = 0$
b) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ d) $x^3 - 4x^2 + 9 = 0$

71. Znajdź liczbę, która spełnia oba równania.

- a) $x^3 - 2x = 0$ i $x^5 - 3x = 0$
b) $x^3 - 6x^2 + 11x = 6$ i $x^3 - 4x = 0$
c) $2x^3 + x^2 = 8x + 4$ i $2x^3 + 5x^2 + 2x = 0$
d) $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$ i $x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = 0$

72. Znajdź dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = \frac{-2}{7x^3 + 2x^2 - 21x - 6}$ c) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 - 150x} + \frac{4x}{x^3 - 10x}$
b) $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{2x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 12x^2}$ d) $f(x) = \frac{3}{x^4 - 7x^2 + 6} - \frac{x+1}{5x^2 - 2x^3}$

73. Podaj przykład wielomianu:

- a) stopnia 3 o pierwiastkach 1, -1, 2,
b) stopnia 4 o pierwiastkach 3, 4,
c) stopnia 5, którego jedynymi pierwiastkami są liczby 0, 1, -1,
d) stopnia 100, który nie ma pierwiastków.

Я74. Podaj pierwiastki wielomianu $W(x)$ i ich krotności.

a) $W(x) = x(x - 5)(x + 2)^2$

d) $W(x) = (2x - 3)^2(3x + 2)$

b) $W(x) = (x + 1)^3(x - 1)^2$

e) $W(x) = (x^2 + 25)(x - 3)$

c) $W(x) = -5x^2(x + \sqrt{3})^3$

f) $W(x) = -3(x - 9)^2(x - 3)^3$

75. Podaj przykład wielomianu stopnia 4, który:

- a) nie ma pierwiastków,
- b) ma tylko jeden pierwiastek,
- c) ma tylko dwa pierwiastki,
- d) ma cztery pierwiastki.

Я76. Podaj przykład wielomianu spełniającego podane warunki.

- a) Wielomian jest stopnia trzeciego, ma trzy pierwiastki i wszystkie pierwiastki są jednokrotne.
- b) Wielomian jest stopnia czwartego, ma trzy pierwiastki, w tym jeden pierwiastek jest dwukrotny.
- c) Wielomian ma cztery pierwiastki dwukrotne i dwa pierwiastki czterokrotne.
- d) Wielomian ma wszystkie współczynniki całkowite, a liczby $x_1 = -\frac{4}{5}$, $x_2 = \frac{5}{4}$ są pierwiastkami trzykrotnymi tego wielomianu.
- e) Wielomian jest stopnia dziesiątego, liczba 7 jest jego jedynym pierwiastkiem i jest to pierwiastek sześciokrotny.

Я77. Wśród podanych wielomianów tylko jeden ma pierwiastek dwukrotny. Wskaż ten wielomian.

$W_1(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$

$W_4(x) = 2(4x^2 - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$W_2(x) = 2x(x^2 - 9)(x + 9)$

$W_5(x) = 3x(x^2 - 5x + 1)(x - 1)$

$W_3(x) = (x^2 + 3)^2(x - 3)$

$W_6(x) = (x^2 - 2x + 2)(x + 2)$

Я78. Podaj pierwiastki wielomianu i ich krotności.

a) $W(x) = (2x - 1)^2(x - 2)^3\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$

e) $W(x) = (x - 2)^2(x^2 - 4)(x + 2)$

b) $W(x) = (x - 3)(3x + 1)^5(3 - x)^2$

f) $W(x) = 5x^2(6x^2 - 2x)(1 - 3x)^4$

c) $W(x) = x^3(3x^2 - x)(9x^2 - 1)$

g) $W(x) = (x^2 - 6x + 9)^4(x^2 - 3x)^5$

d) $W(x) = (4x^3 - x)(x^2 - 2x^3)^2$

h) $W(x) = (x^2 - 5x + 4)^3(x^3 - x)^2(x^2 - 2x + 1)^4$

Я79. Liczba -2 jest trzykrotnym pierwiastkiem pewnego wielomianu $W(x)$ trzeciego stopnia. Wiadomo, że $W(1) = 3$. Znajdź wielomian $W(x)$.

80. Rozwiąż równanie.

a) $(3x - 1)^2 = 169$

c) $(5x - 4)^3 = 27$

e) $(x^2 - 8)^3 = -1000$

b) $(x^2 - 9)^2 = 49$

d) $(x + 3)^4 = 4$

f) $(x^3 - 1)^2 = 9$

81. a) Suma sześcienu pewnej liczby oraz jej kwadratu jest równa tej liczbie. Znajdź tę liczbę.

b) Znajdź liczbę, o której wiadomo, że suma kwadratu tej liczby i sześcienu liczby o 2 od niej mniejszej jest równa 52.

c) Znajdź liczbę, której czwarta potęga jest o 20 większa od jej kwadratu.

82. Rozwiąż równanie.

a) $3x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x + 4 = 0$

b) $6x^8 - 12x^6 - 5x^5 + 10x^3 + x^2 - 2 = 0$

c) $x \left((2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{6}x)(2\sqrt{2}x^2 + \sqrt{6}x) - x(16x^2 - 12) + 1 \right) = 2$

d) $(x - 1)(x^2 + 5x + 2) + (x + 8)^2 = x^2 + x + 62$

e) $3x^2(x - 1)(x + 1) - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

83. Rozwiąż układ równań.

a)
$$\begin{cases} x^4 - 4y - 1 = 0 \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 = y + 1 \\ x^3(y + 2) = 10(y + 1) \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^3 + 2y^2 + 8 = 0 \\ x + y = 2(x + 1) \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = y + \frac{9}{16} \\ x^3 + 6y = 0 \end{cases}$$

84. Znajdź rozwiązania równania $x^4 + px^2 = 0$ dla:

a) $p > 0$

b) $p = 0$

c) $p < 0$

85. Uzasadnij, że równanie $x^3 - 3x^2 - px + 3p = 0$ ma zawsze co najmniej jedno rozwiązanie. Sprawdź, kiedy to równanie ma dokładnie dwa rozwiązania, i znajdź te rozwiązania.

86. a) Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$. Uzasadnij, że liczba 32 należy do zbioru wartości przyjmowanych przez ten wielomian.

b) Uzasadnij, że wielomian $W(x) = 2x^4 - 15x^2$ przyjmuje wartość -7 dla czterech różnych wartości zmiennej x .

c) Uzasadnij, że liczba 3 należy do zbioru wartości przyjmowanych przez wielomian $W(x) = x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 19$.

Я87. Wykaż, że równanie $2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 3x + 7 = 0$ nie ma rozwiązań.

Я88. Zbadaj, w jaki sposób liczba rozwiązań podanego równania zależy od wartości parametru m . Narysuj wykres funkcji $y = f(m)$, gdzie $f(m)$ oznacza liczbę rozwiązań równania dla wartości m .

a) $x^3 - 9x^2 - m^2x + 9m^2 = 0$

b) $x^3 - m^3 + 2m^2 + 4m - 8 = (2 - m)x^2 + (m^2 - 4)x$

c) $x^3 + (m - 1)x^2 - (m^2 - 9)x - m^3 + m^2 + 9m - 9 = 0$

Я89. Wyznacz pierwiastki równania w zależności od wartości parametru m .

a) $x^3 - mx^2 + mx - m^2 = 0$

b) $x^3 - mx^2 + (m^2 - 9)x - m^3 + 9m = 0$

Я90. a) Dla jakich wartości parametru p równanie $x^3 + (p - 2)x^2 + (p + 1)x = 0$ ma trzy rozwiązania?

b) Dla jakich wartości parametru p równanie $x^3 - (2p + 1)x^2 + (p + 1)x = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?

c) Dla jakich wartości parametru p równanie $x^4 + px^2 + p = -3$ ma cztery różne rozwiązania?

d) Dla jakich wartości parametru p równanie $2x^4 + (p - 1)x^2 = -1$ nie ma rozwiązań?

DZIELENIE WIELOMIANÓW

91. Wykonaj dzielenie.

a) $(-x^2 + 16x - 63) : (x - 7)$

e) $(5x^3 + 36x^2 + 4x - 21) : (x + 7)$

b) $(2x^2 + 15x - 27) : (x + 9)$

f) $(-x^3 - 5x^2 - 5x - 4) : (x + 4)$

c) $(3x^3 - 2x^2 - 3x + 2) : (x - 1)$

g) $(4x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 3x - 2) : (x - 2)$

d) $(-2x^3 + 6x^2 + 9x - 4) : (x - 4)$

h) $(-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2) : (x + 1)$

92. Wykonaj dzielenie.

a) $(5x^4 - 2x^3 - 3) : (x - 1)$

e) $(2x^5 - 9x^4 + 10x^3 - x + 2) : (x - 2)$

b) $(-16x^4 + x + \frac{1}{2}) : (x - \frac{1}{2})$

f) $(3x^6 + 9x^5 + 2x^2 + x - 15) : (x + 3)$

c) $(2x^5 + 3x^2 - 5) : (x - 1)$

g) $(3x^5 - 4x^4 + x^3 - 2x^2 - 32) : (x - 2)$

d) $(3x^5 - 4x^3 + x + 66) : (x + 2)$

h) $(x^4 + 9x^3 - 8x^2 + 10x - 100) : (x + 10)$

93. Wykonaj dzielenie z resztą.

a) $(5x^2 + 2x - 3) : (x - 1)$

f) $(2x^3 + 3x^2 - 3x + 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

b) $(2x^2 - 3x - 5) : (x + 2)$

g) $(7x^2 + 5x - 10) : (x + 4)$

c) $(-x^2 + 2x - 1) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$

h) $(x^3 - 2) : (x + 1)$

d) $(-2x^2 - 5x + 1) : (x + 3)$

i) $(x^4 + x^2 + 1) : (x - 3)$

e) $(x^3 + 2x^2 - x - 10) : (x - 3)$

j) $(-2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) : (x - 2)$

94. Wykonaj dzielenie.

a) $(x^6 - 1) : (x - 1)$

b) $(x^7 + 1) : (x + 1)$

c) $(x^6 - 64) : (x - 2)$

$(x^{100} - 1) : (x - 1)$

$(x^{99} + 1) : (x + 1)$

$(x^5 + 243) : (x + 3)$

95. Wykonaj dzielenie wielomianu $W(x)$ przez dwumian $P(x)$, korzystając ze schematu Hornera.

a) $W(x) = x^3 + x^2 - 7x + 7, \quad P(x) = x - 2$

b) $W(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 10x - 7, \quad P(x) = x - 3$

c) $W(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 6x - 2, \quad P(x) = x - 1$

d) $W(x) = x^3 + 5x - 2, \quad P(x) = x + 1$

e) $W(x) = x^5 + 2x^4 + 5x, \quad P(x) = x - 1$

f) $W(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 1, \quad P(x) = x + 2$

g) $W(x) = -3x^3 + 5x + 2, \quad P(x) = x + 3$

h) $W(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4, \quad P(x) = x - 2$

i) $W(x) = 5x^5 - 24x^4 + 16x^3 + 2x - 8, \quad P(x) = x - 4$

96. Podaj wynik dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$.

a) $W(x) = 4(x - 7)^2(x + 3), \quad P(x) = (x - 7)(x + 3)$

b) $W(x) = x^2(2x - 5)^2(x + 1), \quad P(x) = (2x - 5)x$

c) $W(x) = 6x^3(x^2 - 1)(x + 2), \quad P(x) = 2x^2(x + 1)$

d) $W(x) = 8(x^2 + 1)^3(x - 3), \quad P(x) = (x^2 + 1)(2x - 6)$

e) $W(x) = (3x + 5)^2(6x - 3)^3, \quad P(x) = (2x - 1)(3x + 5)$

f) $W(x) = x^5(x^2 - 9), \quad P(x) = x^3 - 3x^2$

g) $W(x) = 4x^3(x^2 - 4)^2, \quad P(x) = 2x^2 + 4x$

h) $W(x) = (x^2 - 16)(x^2 - 9x + 14), \quad P(x) = (x - 2)(x^2 - 11x + 28)$

i) $W(x) = (x^3 + 10x^2 - 11x)(x^3 - 25x), \quad P(x) = x^3 + 6x^2 - 55x$

97. Znajdź wielomian $W(x)$ spełniający podaną równość.

a) $(x - 7)W(x) = 2x^3 - 9x^2 - 36x + 7$

b) $W(x)(x + 5) = 2x^4 + 11x^3 + 10x^2 + 21x - 20$

c) $(x - 1)W(x) = 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 7x - 6$

d) $W(x)(x - 2) = x^3 + 3x^2 - 11x + 2$

e) $W(x)(x + 1) + x^2 + x + 1 = x^3 - 5x^2 + 3x + 10$

f) $(x + 2)^3 - W(x)(x - 3) = (x - 2)^2 + 124$

g) $(-3x^4 - 10x^3 - 7x^2 - 4) : W(x) = x + 2$

Я h) $W(x)(6 - x) + (2x - 4) \cdot W(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 6$

Я i) $W(x)(2x + 5) + 2x^3 - x^2 + 7x = (x + 1)W(x) - 172$

98. Sprawdź, czy istnieje wielomian $W(x)$ spełniający podaną równość.

a) $3x^4 - 2x^3 - 5 = (x + 1)W(x)$

b) $x^3 - 6x^2 + x + 2 = (x - 3)W(x)$

c) $2x^3 - 9x^2 - 7x - 1 = W(x)(x + 0,5)$

d) $(x + 2)W(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + 6$

e) $(x - 5)W(x) = x^3 - 12x^2 + 35x - 2$

f) $x^5 - 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 - 4)W(x)$

g) $2x^4 - x^3 - 7x^2 - 3x + 3 = (x^2 - x - 2)W(x)$

99. Wiadomo, że $(x^2 + 5x + 3)(2x + 1) + 5 = 2x^3 + 11x^2 + 11x + 8$. Znajdź iloraz i resztę z dzielenia podanych wielomianów.

a) $(2x^3 + 11x^2 + 11x + 8) : (x^2 + 5x + 3)$

b) $(2x^3 + 11x^2 + 11x + 8) : (2x + 1)$

Я 100. Znajdź wielomian $W(x)$, który spełnia podany warunek.

a) Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 3$ otrzymujemy wielomian $5x^2 + 2x + 1$ i resztę 2.

b) Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 4$ otrzymujemy wielomian $2x + 3$ i resztę 6.

c) W wyniku dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 2$ otrzymujemy wielomian $3x^2 - 6x - 2$ i resztę -4 .

d) W wyniku dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - \pi$ otrzymujemy wielomian $x^2 - 5x + 6$ i resztę 2π .

e) Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $2x^2 - 3$ otrzymujemy wielomian $4x^2 - 2x$ i resztę $-5x$.

101. Podaj przykład wielomianu stopnia k podzielonego przez wielomian $W(x)$.

a) $k = 4$, $W(x) = x - 3$

d) $k = 100$, $W(x) = x - 4\sqrt{2}$

b) $k = 3$, $W(x) = x + 7$

e) $k = 8$, $W(x) = (x - 1)^2$

c) $k = 7$, $W(x) = x + \frac{1}{3}$

f) $k = 12$, $W(x) = (x + \sqrt{3})^3$

102. Zapisz wielomian jak najniższego stopnia podzielny jednocześnie przez dane wielomiany.

a) $(x - 1)(x + 2)$ oraz $(x + 2)(x + 5)$

b) $x^2 - 1$ oraz $x - 1$

c) $6x^2 + x - 2$ oraz $(2x - 1)(x + 1)$

d) $x^2 + 4x + 4$ oraz $x^2 - x - 6$

103. Dla jakiej wartości parametru a wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $V(x)$?

a) $W(x) = 2x^3 + 5x^2 + ax - 4$, $V(x) = x + 1$

b) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + 8$, $V(x) = x - 2$

c) $W(x) = x^5 - 2x^3 + ax^2 - 3$, $V(x) = x - 1$

d) $W(x) = x^4 + ax^2 + 2x + 24$, $V(x) = x + 3$

104. Resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x^2 - 1$ jest $2x + 3$. Ustal, jaka jest reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian:

a) $x - 1$

b) $x + 1$

105. Po podzieleniu wielomianu $W(x)$ przez wielomian $x^3 - x^2 + 5x - 5$ otrzymamy resztę $2x^2 + 5x + 3$. Jaka jest reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x^2 + 5$?

106. Po podzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 6$ otrzymamy resztę 8.

a) Uzasadnij, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $2x - 12$ jest także równa 8.

b) Jaka jest reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $\frac{1}{2}x - 3$?

107. Dla jakiej wartości p wielomian $W(x)$ dzieli się przez wielomian $V(x)$?

a) $W(x) = x^4 + (p + 1)x^2 + 2p + 2$, $V(x) = x^2 + 1$

b) $W(x) = px^5 + x^3(5p + 1) + 3x^2 + 5x + 15$, $V(x) = x^2 + 5$

c) $W(x) = x^5 + 3x^3 - 2x^2 + p - 1$, $V(x) = x^2 + 3$

d) $W(x) = x^4 + (p + 2)x^2 + px + 3$, $V(x) = x^2 + 2$

Я 108. Przeczytaj tekst w ramce, a następnie wykonaj dzielenie według opisanego sposobu.

Dowolny wielomian stopnia n można podzielić przez dowolny wielomian stopnia niższego niż n . Stopień reszty jest niższy od stopnia wielomianu, przez który dzielimy. Oto przykład dzielenia wielomianu $W(x) = 6x^5 - 2x^4 + 17x^3 - 2x^2 + 6x + 2$ przez wielomian $P(x) = 3x^2 - x + 1$.

$$\begin{array}{r}
 \overline{6x^5 : 3x^2} \quad \overline{3x^2 : 3x^2} \\
 \begin{array}{r}
 2x^3 + 5x + 1 \\
 (6x^5 - 2x^4 + 17x^3 - 2x^2 + 6x + 2) : (3x^2 - x + 1) \\
 \underline{-6x^5 + 2x^4 - 2x^3} \qquad \leftarrow -2x^3 \cdot (3x^2 - x + 1) \\
 15x^3 - 2x^2 + 6x + 2 \\
 \underline{-15x^3 + 5x^2 - 5x} \qquad \leftarrow -5x \cdot (3x^2 - x + 1) \\
 3x^2 + x + 2 \\
 \underline{-3x^2 + x - 1} \qquad \leftarrow -1 \cdot (3x^2 - x + 1) \\
 2x + 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Dzielimy pierwszy wyraz wielomianu $W(x)$ przez pierwszy wyraz wielomianu $P(x)$: $6x^5 : 3x^2 = 2x^3$. Otrzymany jednomian mnożymy przez wielomian $P(x)$ i wynik tego mnożenia zapisujemy pod wielomianem $W(x)$ ze zmienionymi znakami. Następnie ten wielomian dodajemy do wielomianu $W(x)$. Dalej postępujemy analogicznie tak długo, aż otrzymamy wielomian niższego stopnia niż $P(x)$.

Wynikiem dzielenia $W(x) : P(x)$ jest $2x^3 + 5x + 1$ reszta $2x + 1$.

- $(2x^3 - 5x^2 + 6x - 7) : (x^2 - x)$
- $(6x^4 - x^3 - 14x^2 + 13x + 1) : (2x^2 + 3x - 1)$
- $(8x^4 - 4x^3 + 14x^2 - x - 10) : (4x^2 - 3)$
- $(3x^5 + 13x^4 - 15x^3 + 29x^2 - 14x + 4) : (3x^2 - 2x + 4)$
- $(x^5 - x^3 - 5) : (x^2 - x + 2)$

Я 109. W zapisie dzielenia wielomianów każda litera oznacza dodatnią liczbę jednocyfrową. Jednakowym literom odpowiadają równe liczby, a różnym literom — różne. Rozszyfruj to działanie.

$$\begin{array}{r}
 \overline{Ax^2 - Bx + C} \\
 (Dx^3 - Ex^2 + Fx - C) : (Bx - C) \\
 \underline{-Dx^3 + Ax^2} \\
 -Fx^2 + Fx \\
 \underline{Fx^2 - Bx} \\
 Bx - C \\
 \underline{-Bx + C} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \overline{Ax^2 + Bx - C} \\
 (Ax^4 + Dx^3 - Ex^2 - Fx + D) : (Gx^2 + Gx - B) \\
 \underline{-Ax^4 - Ax^3 + Hx^2} \\
 Bx^3 - Gx^2 - Fx \\
 \underline{-Bx^3 - Bx^2 + Ax} \\
 -Cx^2 - Cx + D \\
 \underline{Cx^2 + Cx - D} \\
 0
 \end{array}$$

TWIERDZENIE BÉZOUTA

110. Dane są wielomiany:

$$W_1(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

$$W_2(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$W_3(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$$

$$W_4(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

Bez wykonywania dzielenia określ, które spośród tych wielomianów są podzielne przez dwumian:

- a) $x - 1$ c) $x + 2$
b) $x + 1$ d) $x - 2$

111. Uzasadnij, że dwumian $x^{128} - 1$ jest podzielny przez dwumiany $x - 1$ oraz $x + 1$, ale nie jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

112. Bez wykonywania dzielenia znajdź resztę z tego dzielenia.

- a) $(x^8 + 2x^7 - 3x^6 + 5) : (x - 1)$ d) $(x^4 - 10x^2 - 3x) : (x + 3)$
b) $(x^7 + 5) : (x + 1)$ e) $(x^{10} + x^5 + 8) : (x + 2)$
c) $(-2x^6 + 4x^5 + 3x - 4) : (x - 2)$ f) $(2x^5 - 3x^4 + 5x^2 - 9x + 8) : (x - 3)$

113. Sprawdź, że x_1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ i znajdź pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

- a) $W(x) = x^3 - 7x^2 - 21x + 27$, $x_1 = 1$ f) $W(x) = -3x^3 + 27x^2 - 6x - 144$, $x_1 = 8$
b) $W(x) = -x^3 + x^2 + 21x - 45$, $x_1 = 3$ g) $W(x) = x^3 - 9x^2 + 10x + 28$, $x_1 = 7$
c) $W(x) = 2x^3 - 4x^2 - 98x + 196$, $x_1 = 2$ h) $W(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 8x + 4$, $x_1 = \frac{1}{2}$
d) $W(x) = 4x^3 - 19x^2 + 13x - 4$, $x_1 = 4$ i) $W(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$, $x_1 = -3$
e) $W(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + 9$, $x_1 = -3$ j) $W(x) = x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 25x$, $x_1 = 5$

114. Wiadomo, że jednym z rozwiązań podanego równania jest liczba całkowita z przedziału $(-3; 3)$. Rozwiąż to równanie.

- a) $4x^3 + 8x^2 - 11x - 15 = 0$ c) $2x^3 - 8x^2 + 6x + 4 = 0$
b) $x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$ d) $20x^2 + 18 = 33x + 4x^3$

115. a) Uzasadnij, że liczby $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 2$ są jedynymi pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$.

b) Uzasadnij, że liczba $x = -2$ jest jedynym pierwiastkiem i zarazem pierwiastkiem podwójnym wielomianu $W(x) = x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 48x + 28$.

116. Podana liczba jest rozwiązaniem równania — znajdź pozostałe rozwiązania.

- a) $x^2(x-2) = 5x-6$; 1 d) $(2x)^2(2x-13) = 5(15-22x)$; 1,5
b) $x(x^2+6x+4) = 16$; -4 e) $x((x+2)^2-35) = 70$; -2
c) $x^5 - (x^2-x)(x^2+x) = (x-2)^2$; 1 f) $x^3 + \sqrt{2} = (\sqrt{2}+3)x^2 - (\sqrt{18}-1)x$; $\sqrt{2}$

117. Sprawdź, że liczby x_1, x_2 są pierwiastkami wielomianu $W(x)$. Następnie znajdź pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

- a) $W(x) = 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 9x + 6$, $x_1 = 2, x_2 = \sqrt{3}$
b) $W(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$, $x_1 = 2, x_2 = 3$
c) $W(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$, $x_1 = 1, x_2 = 2$
d) $W(x) = 2x^4 + 2x^3 - 13x^2 - x + 6$, $x_1 = 2, x_2 = -3$
e) $W(x) = x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 6x + 7$, $x_1 = 1, x_2 = 7$

118. Dla jakiej wartości parametru a wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $V(x)$?

- a) $W(x) = x^{50} + 2x^{49} + a$, $V(x) = x - 2$
b) $W(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x + a$, $V(x) = x - 1$
c) $W(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x + a$, $V(x) = x + 1$

119. Sprawdź, czy po podzieleniu wielomianów $W(x)$ oraz $P(x)$ przez dwumian $x+2$ otrzymamy taką samą resztę.

- a) $W(x) = 3x^4 - x^2 + 2x - 10$, $P(x) = -x^5 + 8$
b) $W(x) = x^3 + 5x^2 - 16$, $P(x) = x^4 + 3x^3 + x^2$
c) $W(x) = -x^5 + 8x^2 + x + 2$, $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$

120. Jaka jest krotność pierwiastka x_1 wielomianu $W(x)$?

- a) $W(x) = x^3 - 9x$, $x_1 = 3$
b) $W(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8$, $x_1 = 2$
c) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$, $x_1 = 2$
d) $W(x) = x^5 - 4x^4 - 15x^3 + 60x^2 - 16x + 64$, $x_1 = -4$

121. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $V(x)$?

- a) $W(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 5$, $V(x) = x^2 - 1$
b) $W(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx - 4$, $V(x) = x^2 + x - 2$
c) $W(x) = ax^3 - 9x^2 - 33x + b$, $V(x) = x^2 - 5x - 14$
d) $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 8x - 6$, $V(x) = x^2 - 4x + 3$

- Я 122.** Wielomian $W(x) = 2x^3 + 7x^2 + ax + b$ jest podzielny przez trójmian kwadratowy $V(x) = x^2 + 4x + 3$. Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki.
- Я 123.** O wielomianie $W(x) = x^3 + ax^2 + 11x + c$ wiadomo, że jest podzielny przez wielomian $V(x) = (x - 1)(x - 3)$. Oblicz wartość wyrażenia $W(\sqrt{2}) - W(-2)$.
- Я 124.** Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = 3x^3 + mx^2 + 37x + n$ jest równa 8. Wyznacz wszystkie pierwiastki tego wielomianu, jeżeli wiadomo, że jest on podzielny przez dwumian $V(x) = 3x - 1$.
- Я 125.** a) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 1$ jest równa 3, a reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x + 4$ wynosi 8. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $V(x) = (x - 1)(x + 4)$.
 b) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 1$ jest równa 5, a reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x + 1$ wynosi 1. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $V(x) = x^2 - 1$.
 c) Liczba 9 jest resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 2$, a liczba -11 jest resztą z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x + 3$. Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez trójmian $V(x) = x^2 + x - 6$.
 d) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 1$ jest równa 2, reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x - 2$ wynosi -1 , a reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 1$ wynosi 4. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $V(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$.
- 126.** Sprawdź, że x_1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ i znajdź jego pozostałe pierwiastki.

- a) $W(x) = x^3 - (p + 5)x^2 + (5p - 14)x + 14p$, $x_1 = p$
 b) $W(x) = x^3 + (1 - 3p)x^2 + (2p^2 - 3p)x + 2p^2$, $x_1 = p$
 c) $W(x) = x^3 + (3 - 4p)x^2 + (4p^2 - 12p)x + 12p^2$, $x_1 = 2p$

RÓWNANIA WIELOMIANOWE (CD.)

127. Znajdź wszystkie całkowite pierwiastki wielomianu.

- | | |
|----------------------------|---|
| a) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ | e) $x^4 - x^3 - 24x^2 + 25x - 25$ |
| b) $2x^3 + 5x^2 - 2x + 3$ | f) $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9$ |
| c) $3x^3 + 4x^2 - 2x - 3$ | g) $x^4 - 6x^2 + 5x$ |
| d) $2x^3 - 7x^2 - 48x - 7$ | h) $(x^3 + 8)(x + 8)^3(3x - 2)^2(x^3 - 10x^2 - 10x - 11)$ |

128. Uzasadnij, że podane równanie nie ma rozwiązań całkowitych.

a) $10x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 3x - 1 = 0$

c) $2x^3 + 3x^2 - 6x + 2 = 0$

b) $x^4 + 6x^2 - x + 9 = 0$

d) $x^4 - x^3 - 5x^2 + 5x - 3 = 0$

129. Znajdź wszystkie pierwiastki wielomianu.

a) $W(x) = 9x^3 + 27x^2 + 14x - 8$

d) $W(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

b) $W(x) = 2x^3 - 6x^2 - 5x - 12$

e) $W(x) = -2x^3 - x^2 + 2x - 8$

c) $W(x) = 2x^3 - 7x^2 - 3x + 18$

f) $W(x) = -4x^3 + 8x^2 + 9x - 18$

130. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

d) $p^4 + 4p^3 - 9p^2 - 16p + 20 = 0$

b) $-4y^4 + 8y^3 + 7y^2 - 17y + 6 = 0$

e) $a^5 - 2a^4 + a^3 - 2a^2 - 2a + 4 = 0$

c) $-2m^4 + 5m^3 - 5m^2 - 5m + 7 = 0$

f) $x^5 - 2x^4 - 11x^3 + 19x^2 + 18x - 9 = 0$

131. Znajdź wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu.

a) $2x^3 + 5x^2 + 5x - 4$

d) $3x^4 + x^3 + 10x^2 + 3x + 3$

b) $12x^3 + 8x^2 - 49x + 15$

e) $5x^4 - x^3 - 5x^2 - 29x + 6$

c) $2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 7x + 6$

f) $12x^5 + 8x^4 - 51x^3 - 34x^2 + 12x + 8$

132. Uzasadnij, że podane równanie nie ma rozwiązań wymiernych.

a) $2x^3 + x + 1 = 0$

c) $2x^4 - x^2 - 3 = 0$

b) $x^8 + 3x - 3 = 0$

d) $3x^5 + 2x + 2 = 0$

133. Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 - x^2 + 5x + 3 = 0$

c) $5x^4 - 21x^3 + 14x^2 - 2x = 0$

b) $4x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0$

d) $3x^4 + x^3 + 13x^2 + 5x - 10 = 0$

134. Znajdź wszystkie pierwiastki wielomianu.

a) $W(x) = -2x^4 + 7x^2 - 2x$

d) $W(x) = 0,5x^4 + 2,5x^3 + 2x^2 - 1,5x - 1,5$

b) $W(x) = x^3 - 4x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{45}{4}$

e) $W(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{4} + \frac{x}{2} - 1$

c) $W(x) = x^5 - 1\frac{5}{6}x^4 - 4x^3 + \frac{3}{2}x^2$

f) $W(x) = 0,9x^5 - 6,1x^3 + 5,6x^2 - 1,2x$

135. Ustal, dla jakich wartości a wyrażenie $a^3 - 4a^2 + a + 6$ przyjmuje:

- a) wartość 4, b) wartość 10, c) wartość -20.

136. Rozwiąż równanie.

- a) $(4x^3 - 9x - 9)(x - 1) = 7 - x$
b) $(x^2 - 2)^2 = 12x + 13$
c) $(2x^2 + 3)(2x^4 - 1) - x^3(x - x^3) + 4(x^2 + 1) = 0$
d) $3x^5 + 4x^4 + (2x - 3)^3 = 18x^3 - 21x^2 + 62x - 23$

Я 137. Znajdź pierwiastki wielomianu i określ ich krotności.

- a) $W(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 6$
b) $W(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8$
c) $W(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8$
d) $W(x) = 4x^4 - 28x^3 + 57x^2 - 36x$
e) $W(x) = 3x^4 - 14x^3 + 12x^2 + 24x - 32$

Я 138. Ile co najwyżej pierwiastków wymiernych może mieć wielomian o współczynnikach całkowitych, jeśli współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 6, a wyraz wolny jest równy 1?

Я 139. Rozwiąż równanie.

- a) $24x^3 + 14x^2 - 7x - 3 = 0$
b) $5x^3 + 7x^2 - 5\frac{1}{2}x - 3 = 0$
c) $6x^3 + 31x^2 + 41x + 21 = 0$
d) $6x^4 - x^3 - 18\frac{1}{3}x^2 + 3x + 1 = 0$
e) $x^5 - 6x^4 - 4x^3 - 21x^2 = 0$

Я 140. Wyznacz wszystkie całkowite wartości parametru m , dla których dane równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie wymierne.

- a) $2x^3 + 3x^2 + mx - 2 = 0$ b) $100x^{10} + 2x^7 - mx^5 + 24x = 0$

Я 141. Określ liczbę rozwiązań podanego równania w zależności od parametru m .

- a) $x^3 + (1 - m^2)x - m = 0$ b) $x^3 + (1 - m)x^2 - m^2 = 0$

142. Dla jakich liczb całkowitych m podane równanie ma przynajmniej jeden pierwiastek całkowity?

a) $mx^3 + 5x^2 + 1 = 0$

c) $x^2 + m = 0$

b) $x^3 + mx^2 - 2 = 0$

d) $x^3 + mx + 4 = 0$

143. Czy istnieją takie dwie kolejne liczby całkowite, których czwarte potęgi różnią się o 16?

144. Niech p będzie liczbą pierwszą. Zbadaj, czy podane równanie ma rozwiązania całkowite.

a) $x^3 + (3 - p)x^2 + (5 - 3p)x - 5p = 0$

c) $x^3 + 5x^2 - 2x + p = 0$

b) $x^3 - 2x^2 + px - 2p = 0$

d) $x^3 - 3x^2 + x - p = 0$

145. Wykaż, że równanie $2x^7 + 3x + 1 = 0$ nie ma rozwiązań wymiernych, ale ma co najmniej jedno rozwiązanie niewymierne.

146. Rozwiąż równanie.

a) $|3x^3 - x^2 - x - 2| = 2$

b) $4x^6 + x^4 + |x + 1| + 3 = 0$

147. Wielomiany $W_1(x)$ i $W_2(x)$ mają współczynniki całkowite. Współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu $W_1(x)$ jest taki sam jak wyraz wolny wielomianu $W_2(x)$ i wynosi 2. Natomiast wyraz wolny wielomianu $W_1(x)$ jest taki sam jak współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu $W_2(x)$. Wykaż, że jeśli wielomiany mają wspólny pierwiastek wymierny, to jest on równy -2 , -1 , $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1 lub 2 .

148. Ile co najwyżej pierwiastków wymiernych może mieć wielomian o współczynnikach całkowitych, jeśli współczynnik przy najwyższej potędze i wyraz wolny są liczbami pierwszymi?

PRZED SPRAWDZIANEM

1. Dane są wielomiany:

$$W(x) = 3x^5 + 4x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 3x + 12 \quad \text{oraz} \quad V(x) = -x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 15x + 21.$$

Które z podanych zdań jest fałszywe?

- A. Dla $x = -1$ wielomiany $W(x)$ i $V(x)$ przyjmują tę samą wartość.
- B. Dla $x = 1$ spełniony jest warunek: $W(x) - V(x) > 0$.
- C. Iloczyn wielomianów $W(x)$ oraz $V(x)$ jest wielomianem stopnia 5.
- D. Suma wielomianów $W(x)$ oraz $V(x)$ jest wielomianem stopnia 5.

2. Który z danych wielomianów jest równy wielomianowi $W(x) = x^2(x - 5) - 4(x - 5)$?

- A. $V(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 5)$
- B. $V(x) = (x^2 - 4)(x - 5)^2$
- C. $V(x) = (x - 2)^2(x - 5)$
- D. $V(x) = (x - 5)(x^2 + 4)$

3. Którego z podanych wielomianów nie można rozłożyć na czynniki?

- A. $W(x) = x^3 - 8$
- B. $W(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$
- C. $W(x) = x^2 + x - 1$
- D. $W(x) = -x^2 + x - 1$

4. Ile całkowitych rozwiązań ma równanie $3x^4 + x^3 - 12x^2 - 4x = 0$?

- A. cztery
- B. trzy
- C. dwa
- D. jedno

5. Wielomian $W(x) = -5x^3 + 4x^2 - 7x - 70$ jest podzielny przez dwumian:

- A. $x - 1$
- B. $x - 2$
- C. $x + 3$
- D. $x + 2$

6. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$, $V(x) = 5 - 2x$ oraz $U(x) = x^2 - 3x + 1$. Wyznacz wielomian $P(x) = W(x) - U(x) \cdot V(x)$ i oblicz jego wartość dla $x = -\sqrt{3}$.

7. Wielomiany $W(x) = ax^3 + (1 - x)^3$ oraz $V(x) = 4x^3 + bx^2 - 3x + 1$ są równe. Wyznacz współczynniki a i b .

8. Rozłóż wielomian na czynniki możliwie najniższego stopnia.

- a) $2x^3 + x^2 - 15x$
- b) $6x^3 - 10x^2 + 9x - 15$

9. Wykonaj dzielenie.

- a) $(4x^3 - 5x^2 - 7x + 2) : (x - 2)$
- b) $(2x^4 + 3x^2 - 7x + 10) : (x + 3)$

10. Wykaż, że wielomian $W(x) = 10x^3 - 4x^2 + 15x - 6$ nie ma pierwiastków całkowitych.

11. Rozwiąż równanie.

- a) $(3x - 7)(7x - 3)(x^2 + 5)(x^2 - 5) = 0$ c) $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = 0$
 b) $x^6 + 2x^4 = 15x^2$ d) $3x^3 + x^2 - 20x + 12 = 0$

12. Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + 14x + b$ jest podzielny przez dwumian $V(x) = x - 4$, a przy dzieleniu przez dwumian $U(x) = x + 2$ daje resztę -72 . Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$.

13. Ile pierwiastków całkowitych ma wielomian $W(x) = 3x^4 - 4x^3 - 31x^2 + 36x + 36$?

- A. jeden B. dwa C. trzy D. cztery

14. Dla ilu wartości zmiennej x wielomiany $W(x) = (x + 3)(x^2 - 5x)$ oraz $P(x) = 2x + 6$ mają równe wartości?

- A. dla jednej B. dla dwóch C. dla trzech D. dla czterech

15. Wielomian $W(x) = x^2 - 3x - 10$ jest dzielnikiem wielomianu:

- A. $V(x) = 2x^4 + x^2 - 3x + 7$ C. $V(x) = x^8 - 1$
 B. $V(x) = -2x^3 + 6x^2 + x - 5$ D. $V(x) = 3x^3 - 11x^2 - 24x + 20$

16. Ile pierwiastków wymiernych ma wielomian $W(x) = 6x^4 + x^3 - 13x^2 - 2x + 2$?

- A. jeden B. dwa C. cztery D. żadnego

17. Jakie wyrażenie należy dodać do wielomianu $P(x) = (x - 4)^3$, aby otrzymać wielomian $R(x) = (x + 4)^3$?

18. Rozłóż wielomian na czynniki możliwie najniższego stopnia.

- a) $4x^4 + 3x^3 - 20x^2 - 15x$ b) $x^3 - x^2 - 10x - 8$

19. Rozwiąż równanie $24x^3 + 86x^2 + 5x - 7 = 0$.

20. Pierwiastkami wielomianu trzeciego stopnia $W(x)$ są liczby: -2 , 1 , 3 . Wyznacz sumę współczynników tego wielomianu, jeżeli wiadomo, że $W(2) = 1$.

21. Dany jest wielomian $W(x) = (2x^2 + x - 21)(3x - 10)^4(x^2 - 6x + 9)(2x + \sqrt{2})^5$. Wyznacz wszystkie pierwiastki tego wielomianu i określ ich krotności.

22. Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. W wyniku dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x - 4$ otrzymano resztę 8 . Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez trójmian $V(x) = x^2 - 6x + 8$.

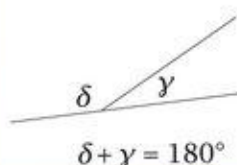
PRZED MATURĄ

1. Suma wszystkich pierwiastków równania $(x+3)(x+7)(x-11)=0$ jest równa:
A. -1 B. 21 C. 1 D. -21
2. Liczba niewymiernych rozwiązań równania $x^2(x+5)(2x-3)(x^2-7)=0$ jest równa:
A. 0 B. 1 C. 5 D. 2
3. Równanie $x(x^2-4)(x^2+4)=0$ z niewiadomą x :
A. nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych
B. ma dokładnie dwa rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych
C. ma dokładnie trzy rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych
D. ma dokładnie pięć rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych
4. Rozwiąż równanie $(x^2-6)(3x+2)=0$.
5. Rozwiąż równanie $(x^3-8)(x^2-4x-5)=0$.
6. Rozwiąż równanie $x^4-2x^3+27x-54=0$.
7. Wielomian $W(x)=6x^3+3x^2-5x+p$ jest podzielny przez dwumian $x-1$ dla p równego:
A. 4 B. -2 C. 2 D. -4
8. Wiadomo, że wielomian $15x^5-133x^4+383x^3-499x^2+146x+120$ ma w zbiorze $\{\frac{7}{6}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{9}{5}\}$ dokładnie jeden pierwiastek wymierny. Jest nim liczba:
A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $\frac{8}{7}$ D. $\frac{9}{5}$
9. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=x^3-2x^2+ax+\frac{3}{4}$ przez dwumian $x-2$ jest równa 1. Oblicz wartość współczynnika a .
10. Wykaż, że równanie $x^8+x^2=2(x^4+x-1)$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste $x=1$.
11. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=4x^3-5x^2-23x+m$ przez dwumian $x+1$ jest równa 20. Oblicz wartość współczynnika m oraz pierwiastki tego wielomianu.
12. Wielomian $W(x)=x^4+ax^3+bx^2-24x+9$ jest kwadratem wielomianu $P(x)=x^2+cx+d$. Oblicz a oraz b .

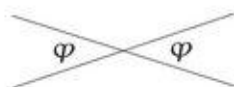
FIGURY

NA PŁASZCZYŹNIE. CZĘŚĆ 1

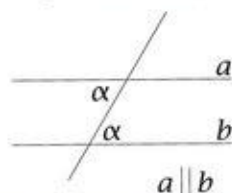
Kąty przyległe



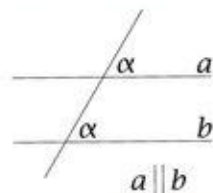
Kąty wierzchołkowe



Kąty naprzemianległe



Kąty odpowiadające



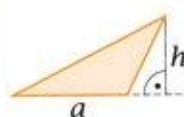
Twierdzenia o kątach w wielokątach

Suma miar kątów trójkąta wynosi 180° .

Suma miar kątów czworokąta wynosi 360° .

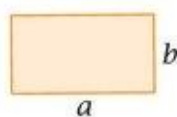
Pola wielokątów

trójkąt



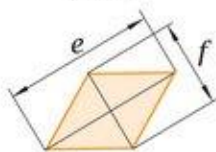
$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

prostokąt



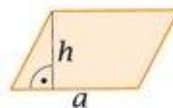
$$P = a \cdot b$$

romb



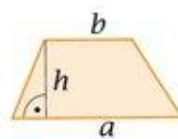
$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

równoległobok



$$P = a \cdot h$$

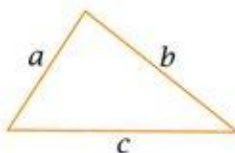
trapez



$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

Nierówność trójkąta

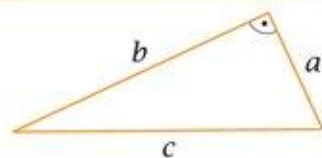
Suma długości dowolnych dwóch boków trójkąta jest większa niż długość trzeciego boku.



$$a + b > c$$

$$b + c > a$$

$$c + a > b$$



$$a^2 + b^2 = c^2$$

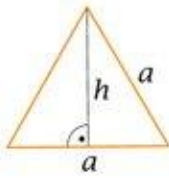
Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

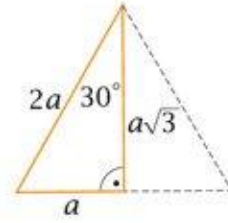
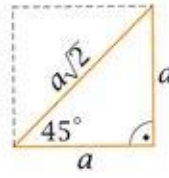
Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to ten trójkąt jest prostokątny.

Niektóre zastosowania twierdzenia Pitagorasa

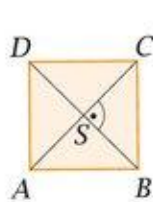


$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



Własności czworokątów

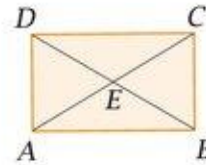


kwadrat

$$|AC| = |BD|$$

$$|AS| = |SC| = |BS| = |SD|$$

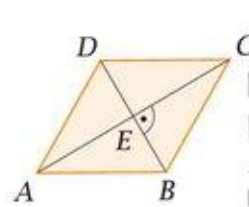
$$AC \perp BD$$



prostokąt

$$|AC| = |BD|$$

$$|AE| = |EC| = |BE| = |ED|$$



romb

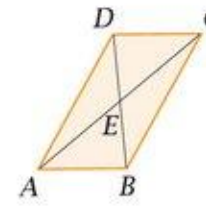
$$|AE| = |EC|$$

$$|BE| = |ED|$$

$$AC \perp BD$$

$$|\angle BAC| = |\angle CAD| =$$

$$= \frac{1}{2} |\angle BAD|$$



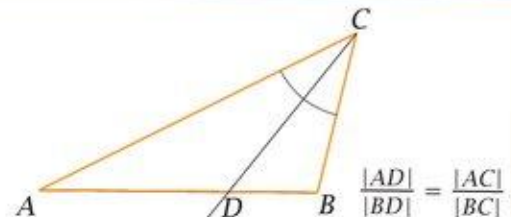
równoległobok

$$|AE| = |EC|$$

$$|BE| = |ED|$$

Twierdzenie o dwusiecznej

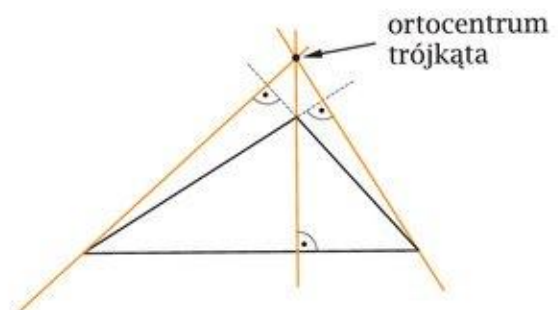
Jeżeli w trójkącie ABC dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D , to stosunek $|AD| : |BD|$ jest równy stosunkowi $|AC| : |BC|$.



Twierdzenia

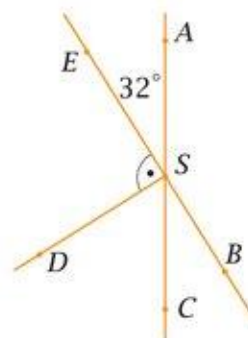
W każdym trójkącie:

- symetralne boków przecinają się w jednym punkcie,
- dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie,
- proste zawierające wysokości przecinają się w jednym punkcie (zw. ortocentrum trójkąta),
- środkowe, czyli odcinki łączące wierzchołki trójkąta ze środkami przeciwległych boków, przecinają się w jednym punkcie (zw. środkiem ciężkości trójkąta) i punkt ten dzieli każdą środkową w stosunku 2:1.



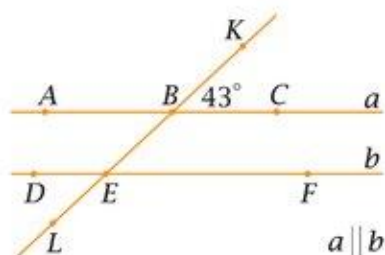
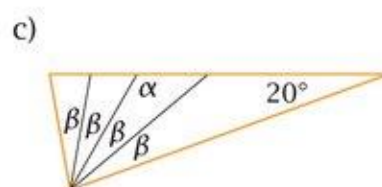
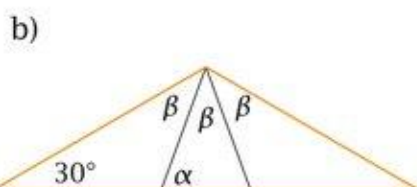
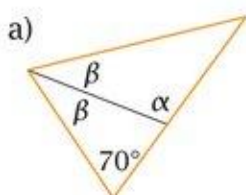
KĄTY. KĄTY W TRÓJKĄTACH I W CZWOROKĄTACH

1. a) Znajdź na rysunku obok kąty przyległe do kąta wypukłego CSB . Ile takich kątów można wskazać?
 b) Znajdź miary kątów wypukłych: $|\sphericalangle CSB|$, $|\sphericalangle DSC|$ i $|\sphericalangle BSA|$.
 c) Znajdź miary kątów wklęsłych: $|\sphericalangle DSB|$, $|\sphericalangle ESA|$ i $|\sphericalangle ASB|$.



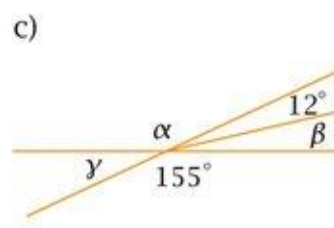
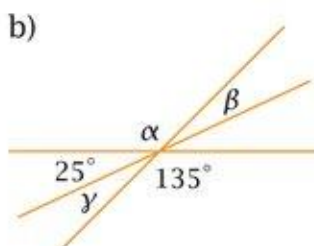
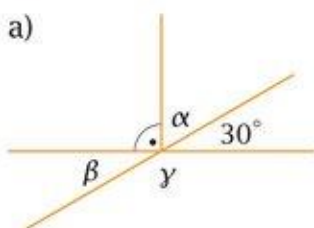
2. a) Kąt prosty podzielono na trzy kąty tak, że najmniejszy kąt jest o 20° mniejszy od największego, a największy kąt jest o 4° większy od średniego. Jakie miary mają te kąty?
 b) Kąt półpełny podzielono na trzy kąty tak, że najmniejszy jest dwa razy mniejszy od średniego, a średni jest dwa razy mniejszy od największego. Jakie miary mają te kąty?
 c) Kąt pełny podzielono na cztery kąty, których miary są w stosunku $1:2:3:4$. Jakie miary mają te kąty?

3. Narysowany trójkąt jest równoramienny. Oblicz miarę kąta α .

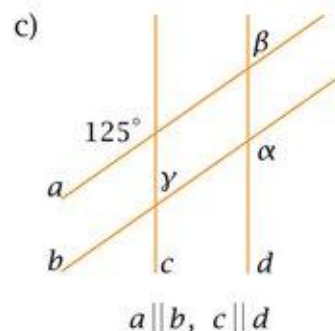
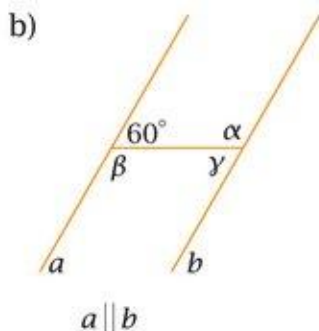
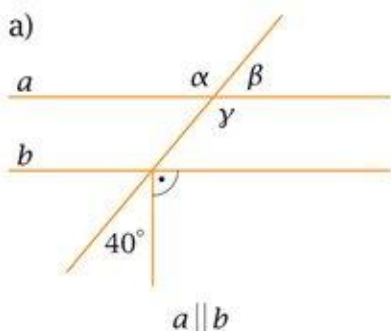


4. a) Znajdź na rysunku kąty, których miary są równe 43° .
 b) Oblicz miary kątów wklęsłych: $|\sphericalangle LEF|$ i $|\sphericalangle LED|$.

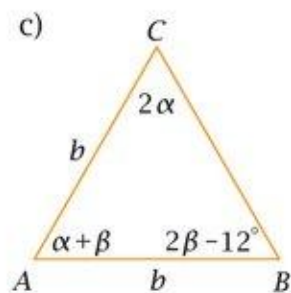
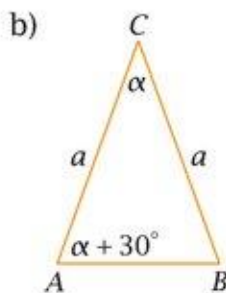
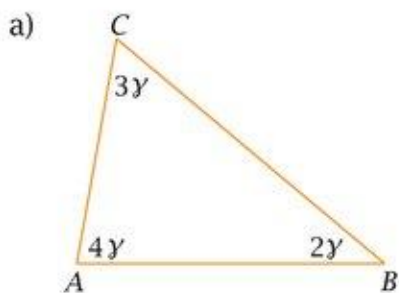
5. Oblicz miary kątów α , β i γ .



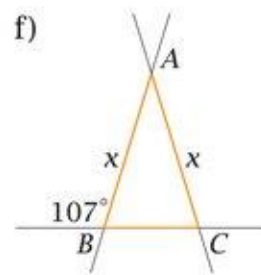
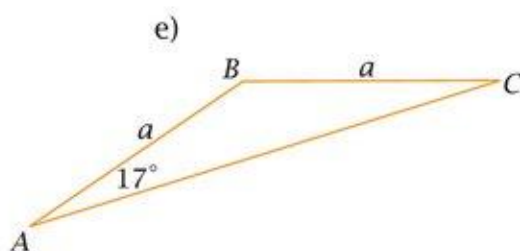
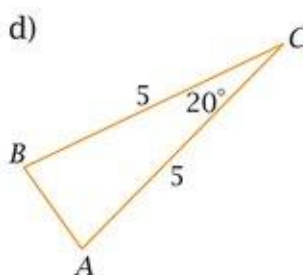
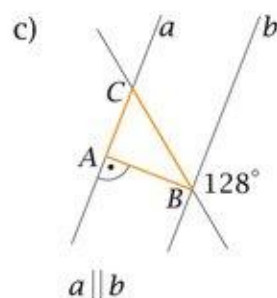
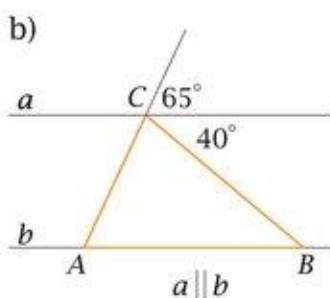
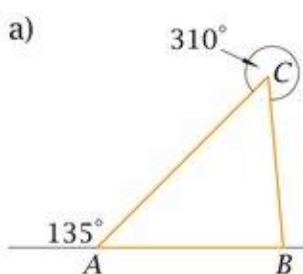
6. Oblicz miary kątów α , β i γ .



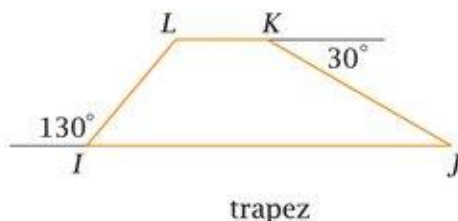
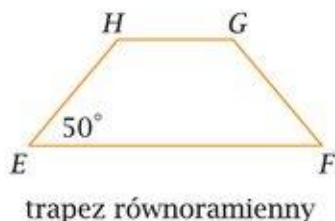
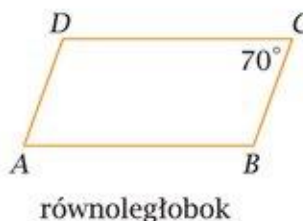
7. Oblicz miary kątów trójkąta ABC .



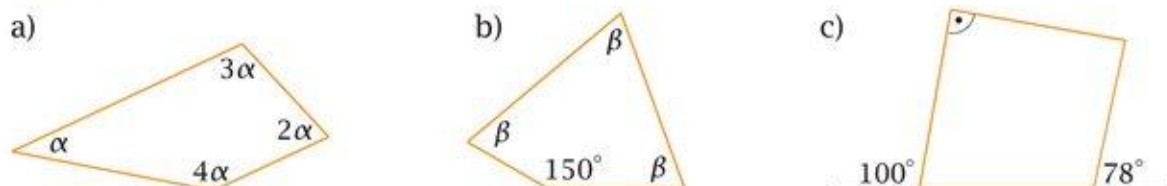
8. Oblicz miary kątów trójkąta ABC .



9. Oblicz miary kątów narysowanych czworokątów.



10. Oblicz miary wszystkich kątów narysowanego czworokąta.



11. a) Dany jest kąt α i odcinki a i b . Skonstruuj trójkąt ABC , w którym $|AB| = a$, $|AC| = b$, $|\sphericalangle BAC| = \alpha$.

b) Dane są kąty α i β oraz odcinek a . Skonstruuj trójkąt ABC , w którym $|AB| = a$, $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$.

12. a) Skonstruuj kąt prosty.

b) Skonstruuj kąt o mierze 45° .

c) Skonstruuj kąt o mierze 60° .

d) Skonstruuj kąt o mierze 30° .

13. a) Skonstruuj trójkąt równoboczny.

b) Skonstruuj trójkąt prostokątny równoramienny.

c) Skonstruuj trójkąt prostokątny o kątach ostrych 30° i 60° .

d) Skonstruuj trójkąt o kątach 45° , 60° i 105° .

14. a) Jakie miary mają kąty przyległe α i β , jeśli kąt α ma miarę o 50° większą od kąta β ?

b) Jeden z kątów przyległych ma miarę 7 razy większą od drugiego. Jakie są miary tych kątów?

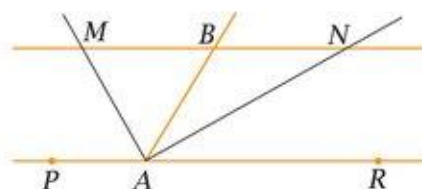
c) Stosunek miar kątów przyległych wynosi $2:7$. Jakie to miary?

15. a) Kąty α i β są kątami wierzchołkowymi. Kąt β ma miarę o 15° większą od połowy miary kąta α . Jaką miarę ma kąt α ?

b) Jeden z par kątów wierzchołkowych jest o 75° większy od pewnego kąta α , a drugi z kątów wierzchołkowych jest 4 razy większy od α . Jaką miarę ma każdy z tych kątów wierzchołkowych?

c) W wyniku przecięcia się dwóch prostych powstały dwie pary kątów wierzchołkowych. Suma miar kątów jednej z tych par jest o 140° większa od sumy miar kątów drugiej pary. Jakie miary mają kąty wierzchołkowe poszczególnych par?

16. Na rysunku obok proste MB i PA są równoległe. Półproste AM i AN są dwusiecznymi odpowiednio kątów PAB i RAB . Wykaż, że odcinki MB i BN mają równe długości.



- 17.** a) Udowodnij, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.
b) Udowodnij, że dwusieczne kątów naprzemianległych są równoległe.

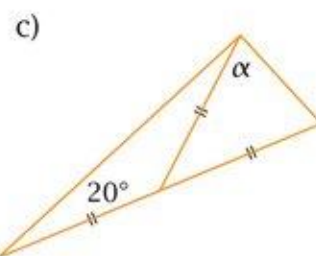
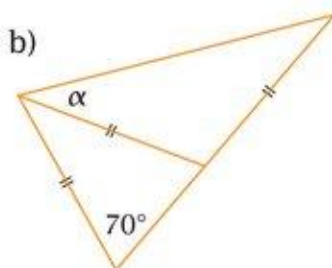
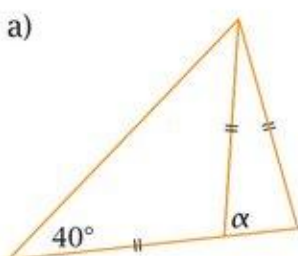
18. Trójkąt ABC jest równoramienny ($|AC| = |BC|$). Udowodnij, że dwusieczna kąta przyległego do kąta ACB jest równoległa do boku AB .

19. Pewien kąt trójkąta równoramiennego ma miarę α . Oblicz, jakie miary mają pozostałe kąty, gdy $\alpha = 15^\circ$, a jakie — gdy $\alpha = 115^\circ$.

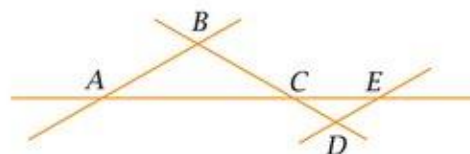
20. Oblicz miary kątów trójkąta równoramiennego, w którym:

- a) kąt przy podstawie ma miarę 4 razy mniejszą od kąta między ramionami,
b) kąt przy podstawie ma miarę 4 razy większą od kąta między ramionami.

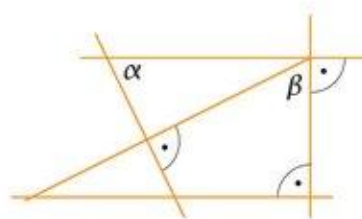
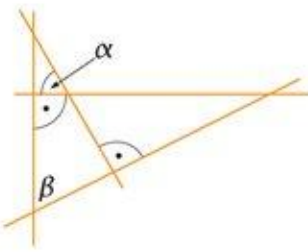
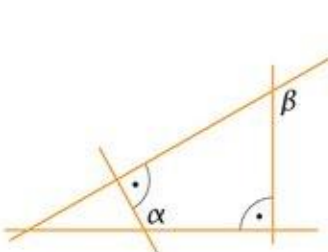
21. Oznaczone odcinki mają równe długości. Znajdź miarę kąta α .



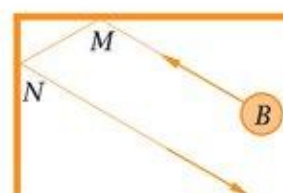
22. Na rysunku obok $|AB| = |BC|$ oraz $|CD| = |DE|$. Wykaż, że proste AB i DE są równoległe.



23. Wykaż, że $\alpha = \beta$.



24. Na rysunku przedstawiono tor ruchu bili (B) po odbiciu od dwóch band stołu bilardowego (w punktach M i N). Wykaż, że po drugim odbiciu bila porusza się wzdłuż prostej równoległej do prostej BM .



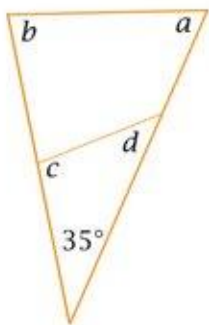
25. a) Udowodnij, że miara kąta przyległego do dowolnego kąta trójkąta jest równa sumie miar pozostałych kątów tego trójkąta.

b) Udowodnij, że suma miar wszystkich kątów przyległych do wszystkich kątów trójkąta jest równa 720° .

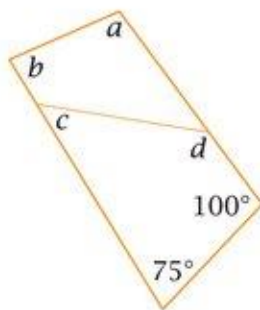
c) Udowodnij, że suma miar wszystkich kątów przyległych do wszystkich kątów czworokąta jest równa 720° .

26. Oblicz sumę miar kątów oznaczonych literami.

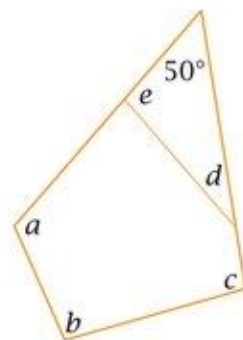
a)



b)

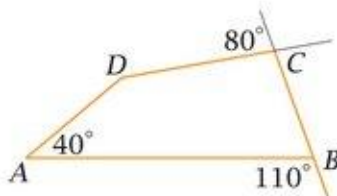


c)

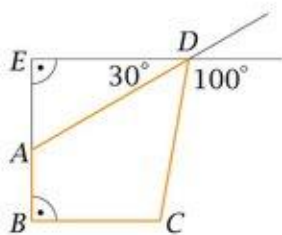


27. Oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$.

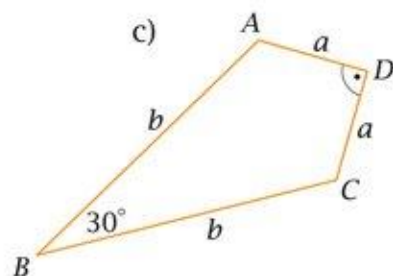
a)



b)



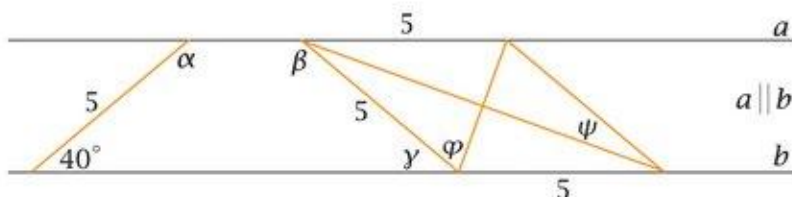
c)



28. a) Przekątna trapezu równoramiennego, który nie jest równoległobokiem, dzieli go na dwa trójkąty równoramiennie. Jakie miary mają kąty tego trapezu?

b) Przekątna trapezu równoramiennego, który nie jest równoległobokiem, dzieli go na dwa trójkąty: równoramienny i prostokątny. Jakie miary mają kąty tego trapezu?

29. Jakie miary mają kąty oznaczone literami?



30. a) Skonstruuj kąt o mierze 75° .

b) Skonstruuj kąt o mierze 105° .

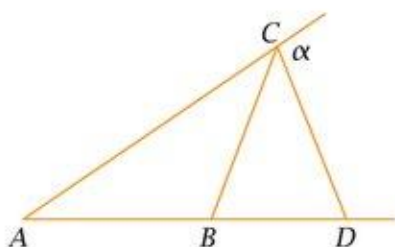
c) Skonstruuj kąt o mierze $112,5^\circ$.

31. W pewnym trójkącie miary kątów wynoszą α , β i γ . Sprawdź, czy trójkąt ten jest równoramienny, gdy:

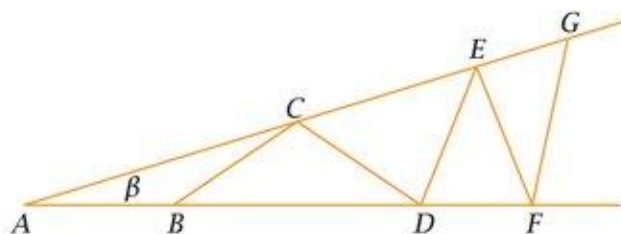
- a) $\alpha = 4\beta$ i $\gamma - \alpha = 90^\circ$
- b) $10\alpha + 6\beta = \gamma$ i $2\alpha = \beta + 10^\circ$
- c) $\alpha + 2\beta = 180^\circ$

32. Udowodnij, że w każdym trójkącie jest kąt o mierze nie większej od 60° i kąt o mierze nie mniejszej od 60° .

33. a) Na rysunku odcinki AB , BC i CD mają równe długości. Wyznacz $|\angle DAC|$ w zależności od α .



b) Na rysunku odcinki AB , BC , CD , DE i EF są równe. Wyznacz $|\angle DCE|$ oraz $|\angle FEG|$ w zależności od β .



34. Jeśli równoległobok nie jest rombem, to dwusieczne jego kątów przecinają się w czterech punktach. Udowodnij, że czworokąt o wierzchołkach w tych punktach jest prostokątem.

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI TRÓJKĄTÓW

35. Sprawdź, czy istnieje trójkąt o bokach podanej długości.

- | | | |
|--------------|--|------------------------|
| a) 5, 8, 12 | d) $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{17}$, $\sqrt{300}$ | g) 6 km, 500 m, 6000 m |
| b) 13, 3, 10 | e) 2 , π , $\sqrt{2}$ | h) 0,5 m, 17 cm, 38 mm |
| c) 7, 5, 14 | f) 4 , $8\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$ | i) 8 dm, 16 cm, 900 mm |

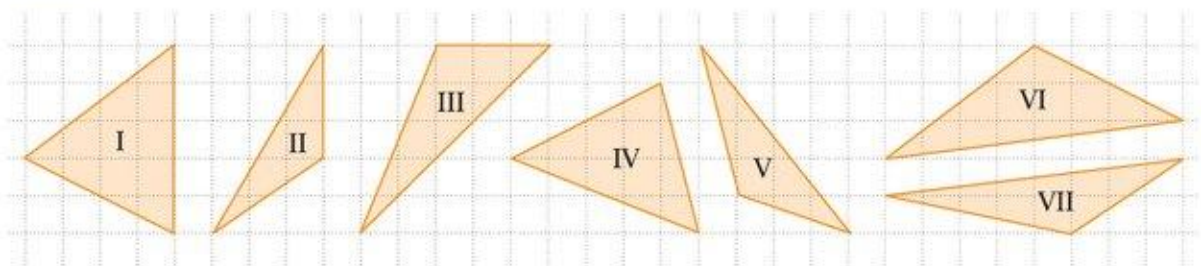
36. Wyjaśnij, dlaczego długości boków trójkąta nie mogą być w stosunku $1:2:5$, a miary kątów mogą być w takim stosunku. Jakże to miary?

37. a) Trójkąt o bokach długości 7, 8 i 9 ma pole równe $12\sqrt{5}$. Oblicz wysokości tego trójkąta.

b) Oblicz wysokości trójkąta prostokątnego o bokach długości 5, 12 i 13.

c) W trójkącie równoramiennym o polu 24 wysokość poprowadzona ze wspólnego wierzchołka obu ramion ma długość 6. Oblicz obwód tego trójkąta.

38. Oblicz pola narysowanych trójkątów. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.



39. a) Spośród podanych liczb można na cztery sposoby wybrać trzy różne liczby, które mogą być długościami boków trójkąta. Wypisz wszystkie te trójki liczb.

$$\sqrt{2} \quad 3 \quad 7 \quad \sqrt{17} \quad \sqrt{5}$$

b) Długości wszystkich boków pewnego trójkąta są liczbami całkowitymi, a jego obwód wynosi 11. Jakie długości mają boki? Wymień wszystkie możliwości.

40. Zapoznaj się z informacjami podanymi w ramce. Sprawdź, czy punkty A , B i C leżą na jednej prostej, jeżeli:

- a) $|AB| = 13$, $|BC| = 29$, $|AC| = 16$
- b) $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|AC| = 9$
- c) $|AB| = \sqrt{2} + 1$, $|BC| = 3 - \sqrt{2}$, $|AC| = 4$

41. Zapoznaj się z informacjami podanymi w ramce. Czy istnieje liczba x , dla której punkty A , B i C są współliniowe?

- a) $|AB| = 3x - 2$, $|BC| = 2x$, $|AC| = x + 3$
- b) $|AB| = \sqrt{2}x - 1$, $|BC| = 2\sqrt{2}x$, $|AC| = 1$
- c) $|AB| = x - 1$, $|BC| = x + 1$, $|AC| = 2x + 1$

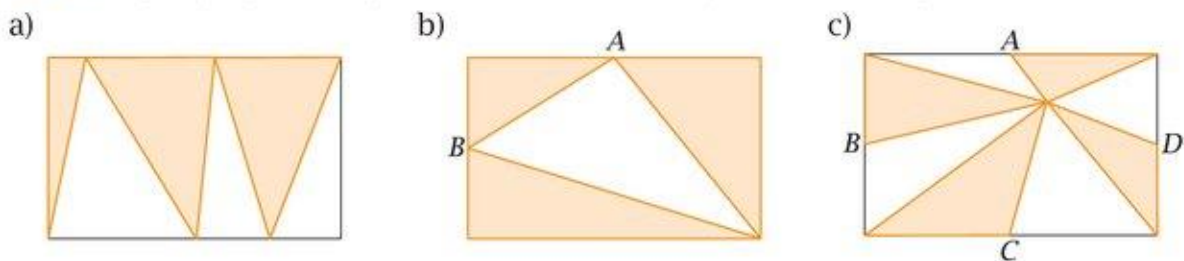
Punkty X , Y , Z są współliniowe (leżą na jednej prostej), gdy spełniony jest jeden z warunków zależnie od tego, który z punktów leży między pozostałymi:

$$\begin{array}{c} X \quad Z \quad Y \\ |XY| = |XZ| + |ZY| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} X \quad Y \quad Z \\ |XZ| = |XY| + |YZ| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} Y \quad X \quad Z \\ |YZ| = |YX| + |XZ| \end{array}$$

42. Jaką część prostokąta zacieniowano? Punkty A , B , C , D są środkami boków.



43. Jakie warunki musi spełniać liczba x , aby istniał trójkąt o podanych bokach?

- a) x , $x + 1$, 3
- b) $2x$, $x + 1$, 5

44. a) Najkrótsza wysokość trójkąta o bokach 4 , $3\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$ ma długość 3 . Oblicz długości pozostałych wysokości tego trójkąta.

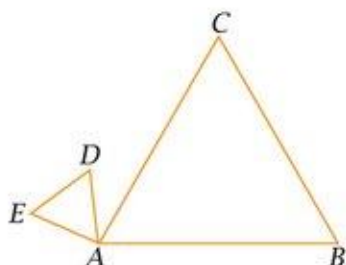
b) Wysokości pewnego trójkąta mają długości 2 , $\frac{4\sqrt{5}}{5}$, $\frac{4\sqrt{13}}{13}$, a jego najkrótszy bok ma długość 2 . Oblicz długości pozostałych boków.

45. a) Wykaż, że długość dowolnego odcinka, którego końce leżą na bokach trójkąta, jest mniejsza od połowy obwodu tego trójkąta.

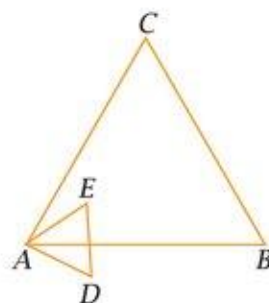
b) Wykaż, że długość dowolnej przekątnej wielokąta jest mniejsza od połowy obwodu tego wielokąta.

46. Na rysunkach poniżej przedstawiono dwa przypadki położenia dwóch trójkątów równobocznych, które mają wspólny jeden z wierzchołków. Wykaż, że w każdym z tych przypadków długości odcinków BD i EC są równe.

Przypadek I



Przypadek II



47. Narysuj dowolny trójkąt. Podziel go konstrukcyjnie prostymi przechodzącymi przez jeden z wierzchołków na dwa trójkąty:

a) o równych polach,

b) o polach w stosunku $3:1$.

48. Punkt P jest dowolnym punktem leżącym na boku BC trójkąta ABC . Wykaż, że:

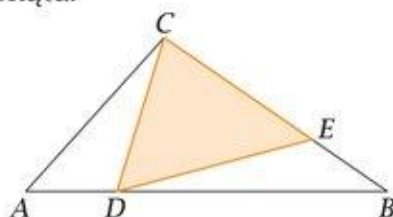
$$\frac{1}{2}(|AB| + |AC| - |BC|) < |AP| < \frac{1}{2}(|AB| + |AC| + |BC|)$$

49. a) Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu trójkąta od wierzchołków trójkąta jest większa od połowy obwodu tego trójkąta.

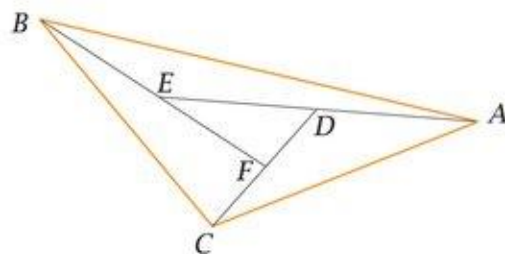
b) Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu czworokąta od wierzchołków czworokąta jest większa od połowy obwodu tego czworokąta.

c) Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu wielokąta od wierzchołków wielokąta jest większa od połowy obwodu tego wielokąta.

50. Jaką część pola trójkąta ABC stanowi pole trójkąta CDE , jeśli $|AD| = 3$, $|BD| = 9$, $|BE| = 3$, $|CE| = 6$?



51. Punkty D , E i F są środkami odcinków AE , BF i CD . Znajdź pole trójkąta ABC , jeżeli pole trójkąta DEF jest równe P .

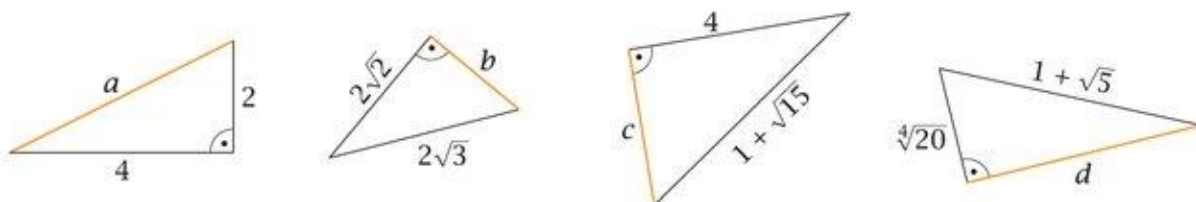


52. a) Czy istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości 2, 4, 5?
b) Udowodnij, że jeśli h_1 , h_2 , h_3 są wysokościami pewnego trójkąta, to odwrotność każdej z tych liczb jest mniejsza od sumy odwrotności dwóch pozostałych.

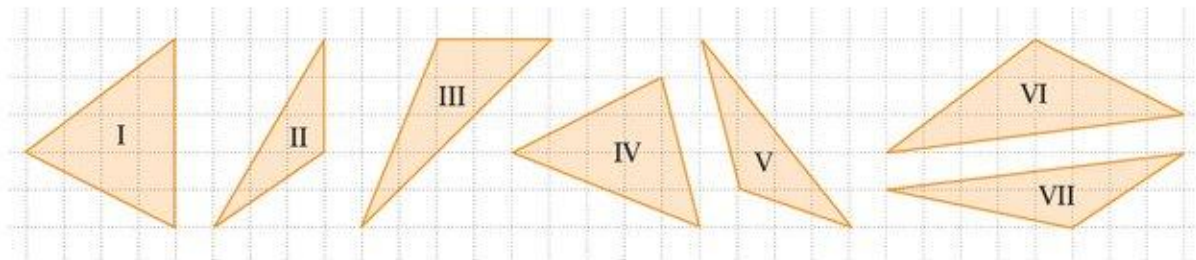
53. Trójkąt ma boki o długościach a , b i c . Wykaż, że $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2$.

TWIERDZENIE PITAGORASA I TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA PITAGORASA

54. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



55. Oblicz obwody narysowanych trójkątów. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.



56. a) Jaką długość ma przekątna kwadratu, którego obwód jest równy $\sqrt{3}$?
b) Jakie pole ma kwadrat o przekątnej $2\sqrt{5}$?
c) Obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego jest równy $2(\sqrt{6} + \sqrt{3})$. Jakie jest pole tego trójkąta?

57. a) Jakie pole ma trójkąt równoboczny o boku $3\sqrt{3}$?

b) Jaką długość powinien mieć bok trójkąta równobocznego, aby jego pole było równe 1?

c) Jaki obwód ma trójkąt równoboczny, którego wysokość jest równa 5?

58. Sprawdź, czy trójkąt o bokach podanych długości jest prostokątny.

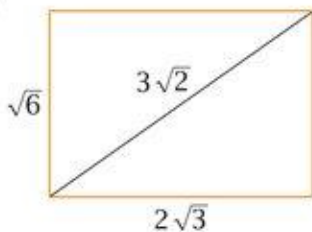
a) 17, 8, 15

b) 2, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

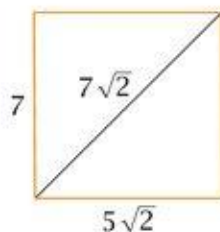
c) 14, $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{46}$

59. Czy narysowany równoległobok jest prostokątem?

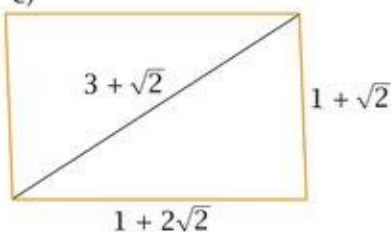
a)



b)



c)



60. Narysuj dowolny odcinek i przyjmij, że jego długość jest równa 1. Skonstruuj odcinki o podanych długościach.

$\sqrt{2}$

$\sqrt{5}$

$\sqrt{10}$

$\sqrt{26}$

$2\sqrt{2}$

61. a) Wykaż, że suma pól trójkątów równobocznych zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa polu trójkąta równobocznego zbudowanego na przeciwprostokątnej.

b) Wykaż, że suma pól sześciokątów foremnych zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa polu sześciokąta foremnego zbudowanego na przeciwprostokątnej tego trójkąta.

62. a) Dwa z boków trójkąta prostokątnego mają długości $3\sqrt{5}$ i $2\sqrt{3}$. Jaką długość powinien mieć trzeci bok, by obwód trójkąta był możliwie najdłuższy?

b) Dwa z boków trójkąta prostokątnego mają długości $2\sqrt{7}$ i $3\sqrt{6}$. Jaką długość powinien mieć trzeci bok, by obwód trójkąta był możliwie najkrótszy?

63. a) Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest o 1,7 dm dłuższa od drugiej, a przeciwprostokątna ma długość 25 cm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

b) W pewnym trójkącie prostokątnym o polu 32 jedna z przyprostokątnych jest 3 razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

c) W pewnym trójkącie równoramiennym o obwodzie 21 stosunek długości ramienia do podstawy wynosi 2:3. Oblicz pole tego trójkąta.

d) W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest 4 razy dłuższa od jednej z przyprostokątnych. Oblicz stosunek długości przyprostokątnych tego trójkąta.

64. a) Boki prostokąta mają długości 15 i 20. Oblicz odległość wierzchołka tego prostokąta od przekątnej, do której ten wierzchołek nie należy.

b) Przekątne rombu mają długości 10 i 24. Oblicz odległość punktu przecięcia się przekątnych od boku tego rombu.

65. a) Jeden z boków prostokąta ma długość $3\sqrt{7}$, a przekątna ma długość $6\sqrt{2}$. Jaki obwód ma ten prostokąt?

b) Jaki obwód ma romb o przekątnych długości $2\sqrt{7}$ i $2\sqrt{10}$?

c) W trapezie prostokątnym bok o długości $1 + 3\sqrt{7}$ jest prostopadły do boków o długościach $\sqrt{7}$ i 3. Jaką długość ma czwarty bok?

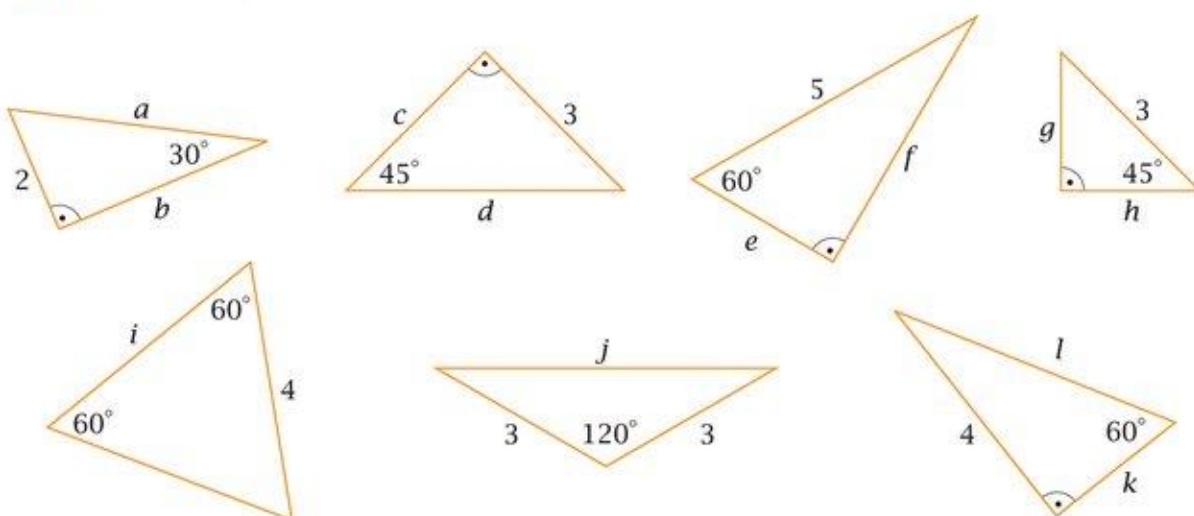
66. a) W trójkącie ABC kąt CAB jest rozwarty oraz $|AB| = 5$ i $|BC| = 8$. Wysokość poprowadzona z wierzchołka C ma długość $\sqrt{15}$. Oblicz długość boku AC .

b) W trójkącie KLM wysokość dzieli bok KL na odcinki o długościach 2 i 9. Bok LM ma długość 3. Oblicz obwód i pole trójkąta KLM .

c) W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC| = 9$, poprowadzono odcinek CD łączący wierzchołek C z bokiem AB tak, że punkt D podzielił bok AB na odcinki o długości $|AD| = 8$ i $|DB| = 4$. Oblicz długość odcinka CD .

67. Trójkąt prostokątny ma przyprostokątne długości 6 i 8. Oblicz długości odcinków, na które wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną.

68. Oblicz długości boków oznaczonych literami.



69. a) W pewnym trójkącie prostokątnym równoramiennym przyprostokątna ma długość $2\sqrt{3}$. Oblicz obwód tego trójkąta.

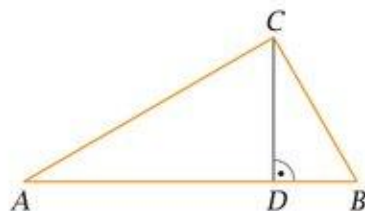
b) Najdłuższy bok pewnego trójkąta prostokątnego równoramiennego ma długość 10. Oblicz pole tego trójkąta.

70. W trójkącie równoramiennym ramię ma długość 20, a kąt między ramionami ma miarę 30° . Oblicz odległość środka podstawy od ramienia tego trójkąta.

71. Punkt S jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C trójkąta ABC na bok AB . Wykaż, że $|AC|^2 - |BC|^2 = |AS|^2 - |BS|^2$.

72. Wykaż, że trójkąt ABC przedstawiony na rysunku obok jest prostokątny, jeżeli:

- a) $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$ i $|AD| : |DB| = 3 : 1$,
- b) $|CD| : |BD| = 4 : 3$ i $|AD| : |DB| = 16 : 9$.



73. a) Wykaż, że jest tylko jeden trójkąt prostokątny, którego długości boków są pierwiastkami kwadratowymi z kolejnych liczb naturalnych.

b) Wykaż, że jedynym trójkątem prostokątnym, którego długości boków są kolejnymi liczbami naturalnymi, jest trójkąt o bokach długościach 3, 4 i 5.

74. Przekątne pewnego czworokąta wypukłego są do siebie prostopadłe i przecinają się w punkcie P . Wykaż, że suma kwadratów długości boków tego czworokąta jest dwa razy większa od sumy kwadratów odległości punktu P od wierzchołków tego czworokąta.

75. Dany jest odcinek długości 1. Skonstruuj odcinek o długości:

- a) $\sqrt{13}$
- b) $\sqrt{3}$
- c) $\sqrt{7}$
- d) $\sqrt{15}$

76. Dane są trzy różne kwadraty. Skonstruuj kwadrat, którego pole jest równe:

- a) sumie pól tych trzech kwadratów,
- b) różnicy między sumą pól dwóch większych kwadratów i polem najmniejszego kwadratu.

77. Długości boków trójkąta ABC są kolejnymi liczbami całkowitymi, bok AB jest najdłuższy, a bok BC — najkrótszy. Z wierzchołka B opuszczono wysokość i jej spodek S podzielił bok AC na dwie części. Wykaż, że różnica długości między tymi częściami jest równa 4.

78. Trójkąt prostokątny ma przyprostokątne długości a i b , a wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość h . Udowodnij, że: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

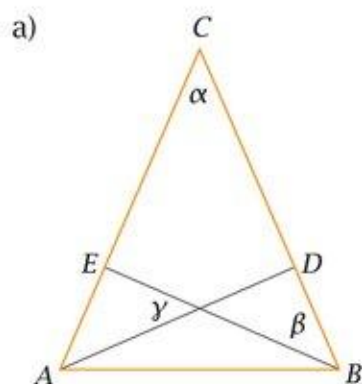
79. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 1$, $|BC| = \sqrt{2}$, $|\sphericalangle ABC| = 135^\circ$. Oblicz $|AC|$.

80. a) Wykaż, że suma kwadratów długości czterech boków równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości jego przekątnych.

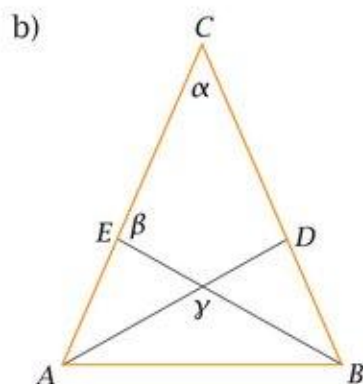
b) Boki trójkąta mają długości a , b i c . Jaką długość ma odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku o długości a ?

WŁASNOŚCI TRÓJKĄTÓW (CD.)

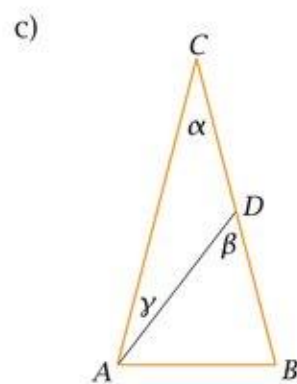
81. Trójkąt ABC jest równoramienny ($|AC| = |BC|$) oraz $|\sphericalangle ACB| = \alpha$. Oblicz miary kątów β i γ .



Odcinki AD i BE to wysokości trójkąta ABC .

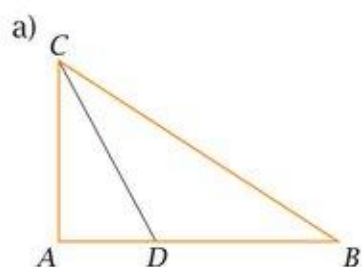


Półproste AD i BE to dwusieczne kątów CAB i ABC .

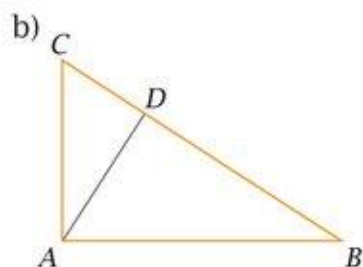


Odcinek CD to środkowa trójkąta ABC i $|BC| = 2|AB|$.

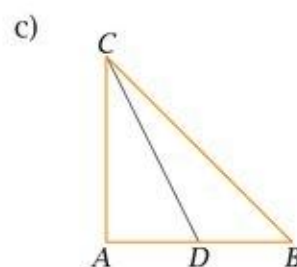
82. Trójkąt ABC jest prostokątny.



Półprosta CD jest dwusieczną kąta ACB i $|BD| = |CD|$.
Wykaż, że $\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{1}{2}$.



Odcinek AD jest wysokością trójkąta i $|\sphericalangle ABC| = 30^\circ$.
Wykaż, że $\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{1}{3}$.



Odcinek CD jest środkową trójkąta i $2|AD| = |CD|$.
Wykaż, że $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

83. Oblicz pole trójkąta równobocznego, w którym punkt przecięcia wysokości:

- jest odległy od jednego z boków o 5,
- jest odległy od wierzchołków o d .

84. Skonstruuj trójkąt równoramienny, mając dane:

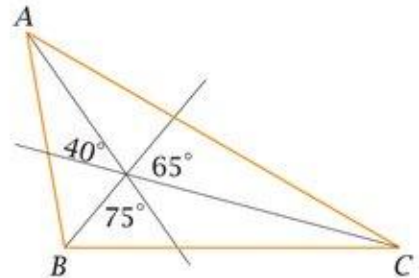
- podstawę i ramię,
- podstawę i wysokość opuszczoną na podstawę,
- ramię i kąt między ramionami,
- ramię i kąt przy podstawie,
- podstawę i kąt między ramionami,
- wysokość i kąt między ramieniem a podstawą.

85. Kąty pewnego trójkąta mają miary 50° , 55° i 75° . Wysokości tego trójkąta dzielą go na sześć mniejszych trójkątów. Oblicz miary kątów każdego z tych sześciu trójkątów.

86. Kąty pewnego trójkąta mają miary 40° , 60° i 80° . Dwusieczne tych kątów dzielą trójkąt na sześć mniejszych trójkątów. Oblicz miary kątów każdego z tych sześciu trójkątów.

87. Trójkąt KLM został podzielony środkowymi na sześć mniejszych trójkątów. Jeden z tych trójkątów ma pole równe P . Jakie pole ma trójkąt KLM ?

88. Narysowane półproste są dwusiecznymi kątów trójkąta ABC . Oblicz miary kątów tego trójkąta.



89. W trójkącie prostokątnym kąt między wysokością poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego a dwusieczną tego kąta ma miarę 20° . Jaką miarę ma najmniejszy kąt tego trójkąta?

90. Wysokość CM trójkąta ABC ma długość 21. Dwusieczna kąta ABC przecina tę wysokość w punkcie P i dzieli ją tak, że $|CP| : |PM| = 5 : 2$. Znajdź wysokość trójkąta BCP opuszczoną z wierzchołka P .

91. a) Punkt H jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC . Wykaż, że $|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - |\sphericalangle AHB|$.

b) Punkt D jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta ABC . Wykaż, że $|\sphericalangle ACB| = 2|\sphericalangle ADB| - 180^\circ$.

92. Wykaż, że dwusieczne dwóch kątów w trójkącie nie mogą być prostopadłe.

93. Wykaż, że jeśli długość jednej ze środkowych trójkąta jest równa połowie długości boku, do którego została poprowadzona, to ten trójkąt jest prostokątny.

94. a) W trójkącie ABC odcinek AP jest środkową. Wykaż, że odległości punktów B i C od prostej AP są równe.

b) W trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P . Wykaż, że stosunek odległości punktów B i C od tej dwusiecznej jest taki sam jak stosunek $|BP| : |CP|$.

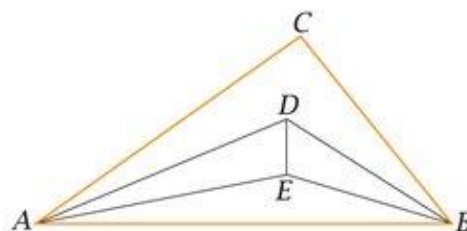
95. Narysuj dowolny trójkąt, a następnie wyznacz konstrukcyjnie:

a) środek ciężkości tego trójkąta, b) ortocentrum tego trójkąta.

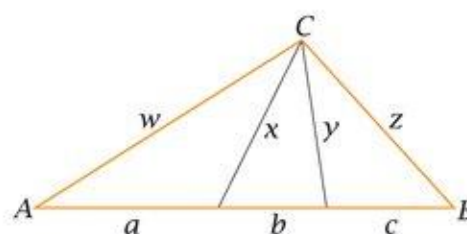
96. Boki trójkąta mają długości a , b i c . Dwusieczna jednego z kątów tego trójkąta dzieli bok o długości c na dwa odcinki. Jakie są długości tych odcinków?

97. Trójkąt o bokach długości 10, 15 i 20 podzielono na dwie części dwusieczną jednego z kątów. Oblicz stosunki pól tych części trójkąta, gdy dwusieczna podzieliła najmniejszy kąt tego trójkąta i gdy podzieliła największy kąt.

98. Półproste AD i AE dzielą kąt BAC na trzy równe części, a półproste BD i BE — kąt ABC na trzy równe części (zob. rysunek). Wykaż, że kąty ADE i BDE mają równe miary.



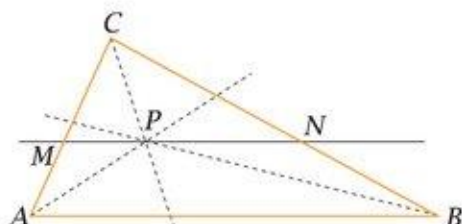
99. W równoległoboku $ABCD$ poprowadzono z punktu A odcinki AM i AN do środków boków BC i CD . Wykaż, że odcinki te podzieliły przekątną BD na trzy równe części.



100. Kąt ACB podzielono na trzy równe części (zob. rysunek). Wykaż, że $\frac{a}{c} = \frac{wx}{yz}$.

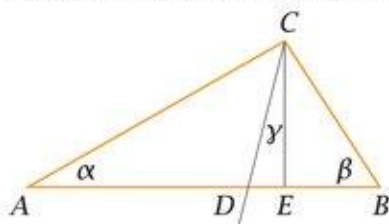
101. Wykaż, że:

- obwód trójkąta jest większy od sumy długości jego środkowych,
- suma długości środkowych trójkąta jest większa od połowy jego obwodu,
- środkowa trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka A jest mniejsza od połowy sumy $|AB| + |AC|$.



102. Przez punkt P przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB , która przecina boki AC i BC w punktach M i N , tak jak na rysunku obok. Wykaż, że $|MN| = |AM| + |BN|$.

103. Dane są dwa kąty trójkąta — α i β . Z wierzchołka trzeciego kąta poprowadzimy dwusieczną tego kąta i wysokość trójkąta. Kąt między tą dwusieczną i wysokością oznaczmy literą γ .



a) Na rysunku obok przedstawiono tę sytuację, gdy α i β są kątami ostrymi i $\alpha < \beta$. Wyraź miarę kąta γ w zależności od miar kątów α i β .

b) Wyraź miarę kąta γ w zależności od miar kątów α i β , gdy jeden z tych kątów jest rozwarty.

104. Narysuj dowolny kąt wypukły i wybierz punkt P należący do tego kąta, ale nie do żadnego z jego ramion. Skonstruuj trójkąt, którego jednym z wierzchołków jest wierzchołek narysowanego kąta, dwa pozostałe wierzchołki leżą na ramionach tego kąta, a punkt P jest:

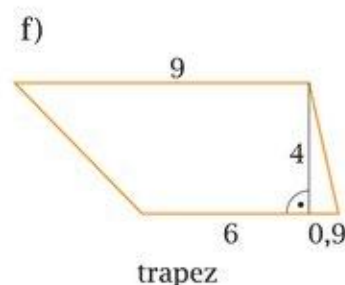
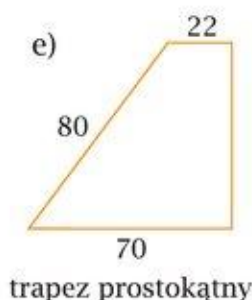
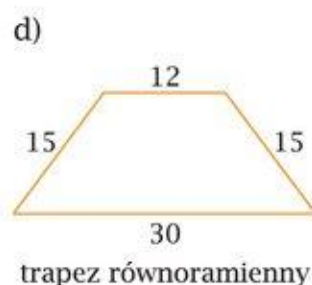
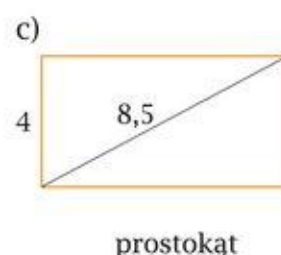
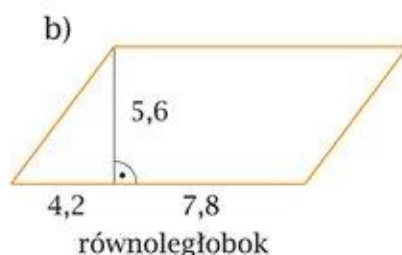
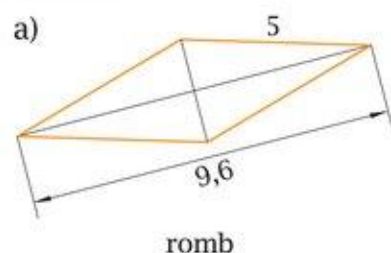
- ortocentrum tego trójkąta,
- środkiem ciężkości tego trójkąta.

WŁASNOŚCI CZWOROKATÓW

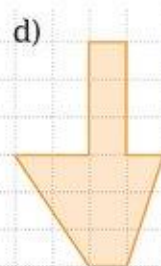
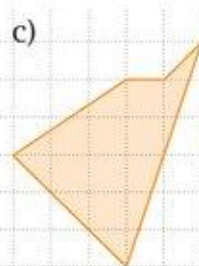
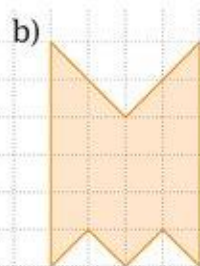
105. a) Przekątna trapezu równoramiennego dzieli go na dwa trójkąty równoramienne. Jakie miary mają kąty tego trapezu?

b) Przekątna trapezu równoramiennego dzieli go na trójkąt równoramienny i trójkąt prostokątny. Jakie miary mają kąty tego trapezu?

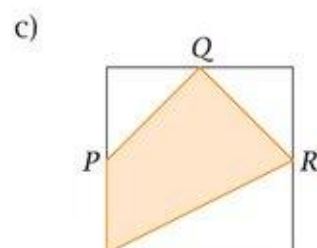
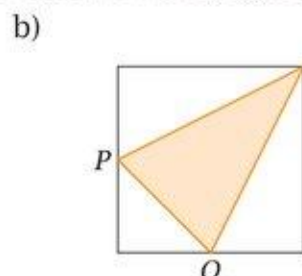
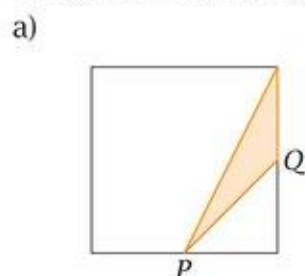
106. Oblicz pole i obwód narysowanego czworokąta.



107. Oblicz pole zacieniowanej figury. Za jednostkę przyjmij jedną kratkę.

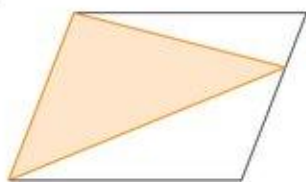


108. Punkty oznaczone literami są środkami boków kwadratu. Oblicz, jaką część pola kwadratu jest pole zacieniowanej figury.

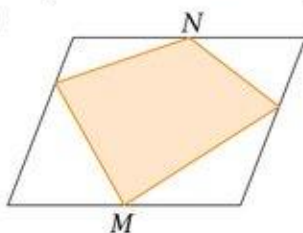


109. Punkty oznaczone literami są środkami boków równoległoboku. Oblicz, jaką część pola równoległoboku jest pole zacieniowanej figury.

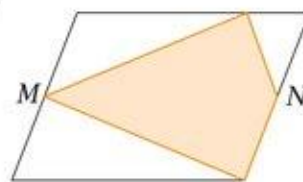
a)



b)

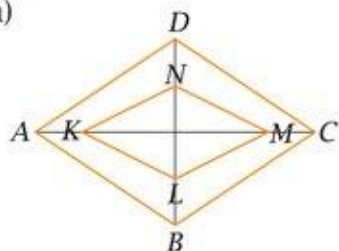


c)



110. Pole rombu $ABCD$ jest równe P . Oblicz pole czworokąta $KLMN$.

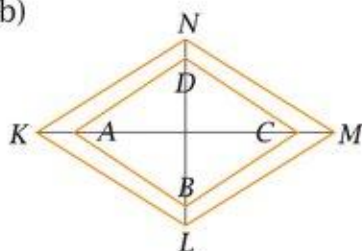
a)



$$|AK| = |MC| = \frac{1}{6}|AC|$$

$$|BL| = |ND| = \frac{1}{4}|BD|$$

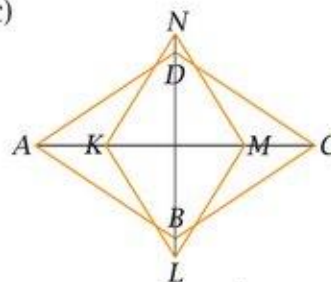
b)



$$|AK| = |MC| = \frac{1}{6}|AC|$$

$$|BL| = |ND| = \frac{1}{8}|BD|$$

c)



$$|AK| = |MC| = \frac{1}{4}|AC|$$

$$|BL| = |ND| = \frac{1}{5}|BD|$$

111. Oblicz pole narysowanego czworokąta.

a)



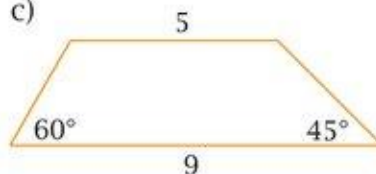
równoległobok

b)



romb

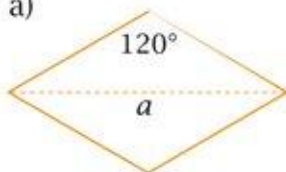
c)



trapez

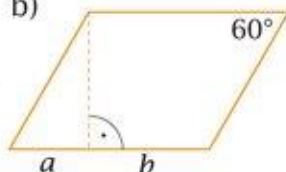
112. Zapisz obwód czworokąta.

a)



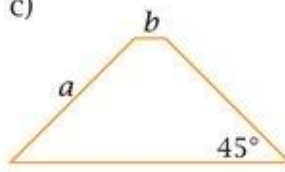
romb

b)



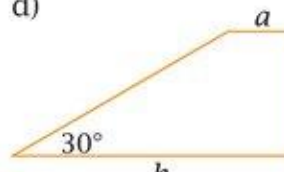
równoległobok

c)



trapez
równoramienny

d)



trapez
prostokątny

113. a) Oblicz pole rombu o obwodzie 36 cm i wysokości 3 cm.

b) Oblicz pole rombu, którego jedna z przekątnych ma długość 6 m, a druga jest dwa razy dłuższa.

114. Kąt między przekątną równoległoboku o długości 6 i bokiem o długości 4 ma miarę α . Oblicz pole tego równoległoboku, jeżeli:

a) $\alpha = 30^\circ$

b) $\alpha = 45^\circ$

c) $\alpha = 60^\circ$

115. a) Jakie pole ma prostokąt, którego jeden bok ma długość 5, a przekątna ma długość 10?

b) Jakie pole ma kwadrat o przekątnej długości 7?

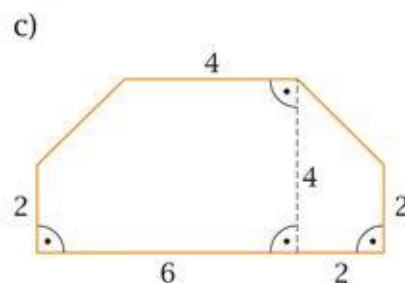
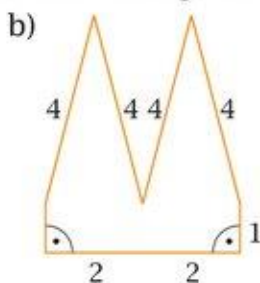
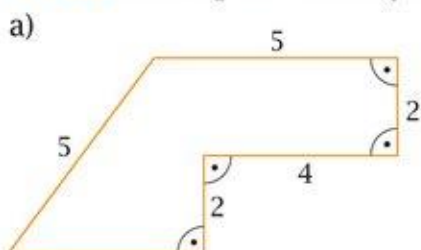
116. a) Stosunek długości boków prostokąta o obwodzie $8\sqrt{2}$ wynosi 3 : 2. Oblicz pole tego prostokąta.

b) Jeden z boków równoległoboku jest o 9 cm krótszy od wysokości h opuszczonej na ten bok. Pole tego równoległoboku jest równe 36 cm^2 . Oblicz h .

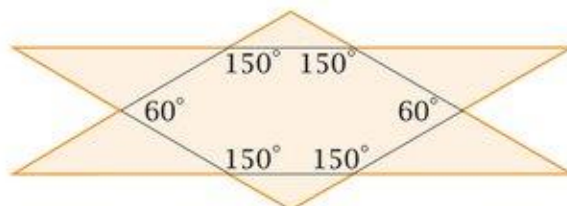
c) Krótsza podstawa trapezu i jego wysokość mają równe długości i są o 3 cm krótsze od dłuższej podstawy. Pole trapezu jest równe 45 cm^2 . Oblicz długości podstaw tego trapezu.

117. Narysuj czworokąt $ABCD$, który nie jest prostokątem i który ma dwa kąty proste: raz przy wierzchołkach A i B , a raz przy wierzchołkach A i C .

118. Oblicz pole wielokąta przedstawionego na rysunku.



119. Zacięta figura to gwiazda zbudowana na równobocznym sześciokącie o boku długości 1 i podanych kątach. Oblicz pole tej figury.



120. a) Przekątna czworokąta ma długość 12 cm i dzieli go na dwa trójkąty, z których jeden ma obwód 24 cm, a drugi — 27 cm. Oblicz obwód tego czworokąta.

b) Jedna z przekątnych czworokąta o obwodzie 40 cm podzieliła go na trójkąty o obwodach 20 cm i 30 cm. Jaką długość ma ta przekątna?

c) W pewnym pięciokącie z jednego wierzchołka poprowadzono dwie przekątne o długościach 4 cm i 7 cm. Przekątne te podzieliły pięciokąt na trzy trójkąty, każdy o obwodzie 16 cm. Oblicz obwód tego pięciokąta.

121. a) Jakie pole ma prostokąt o obwodzie 34, jeśli przekątna tego prostokąta ma długość 13?

b) W rombie o boku długości $2\sqrt{10}$ jedna z przekątnych jest o 8 dłuższa od drugiej. Oblicz pole tego rombu.

c) Wysokość opuszczona z wierzchołka równoległoboku o polu 30 dzieli jego podstawę na odcinki o długościach 4 i 6. Oblicz obwód tego równoległoboku.

122. Które z następujących zdań są fałszywe? Narysuj odpowiednie przykłady.

- a) Każdy czworokąt o prostopadłych przekątnych jest rombem.
- b) Każdy czworokąt o bokach równej długości jest rombem.
- c) Każdy trapez, w którym przeciwległe kąty mają jednakowe miary, jest rombem.
- d) Każdy czworokąt o przekątnych równej długości jest prostokątem.
- e) Każdy równoległobok o co najmniej jednym kącie prostym jest prostokątem.
- f) Każdy czworokąt, w którym przeciwległe boki mają jednakową długość, jest prostokątem.
- g) Każdy czworokąt, który ma dwie pary boków o jednakowej długości, jest równoległobokiem.
- h) Każdy czworokąt, którego przekątne przecinają się w połowie, jest równoległobokiem.
- i) Każdy trapez, który ma co najmniej jedną parę równych kątów przeciwległych, jest równoległobokiem.

123. a) Czy równoległobok o bokach długości $2\sqrt{3}$ i $5\sqrt{2}$ i przekątnej długości $\sqrt{62}$ jest prostokątem?

b) Czy równoległobok, którego jeden z boków ma długość 13 cm, a przekątne mają długości 10 cm i 24 cm, jest rombem?

c) Czy trapez o podstawach długości $1 + \sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ oraz pozostałych bokach o długościach $\sqrt{3}$ i 2 jest prostokątny?

124. Prostokąt $ABCD$ ma boki długości $|AB| = 40$ cm i $|BC| = 75$ cm. Jaka jest odległość wierzchołka B od przekątnej AC ?

125. Długość krótszego boku prostokąta wynosi 2,5 cm, a dwusieczna jednego z jego kątów dzieli dłuższy bok w stosunku 1 : 2. Oblicz obwód tego prostokąta.

126. a) Bok rombu jest o 2 dłuższy od wysokości opuszczonej na ten bok. Pole tego rombu jest równe 15. Oblicz obwód tego rombu.

b) Jedna z przekątnych rombu jest o 4 dłuższa od drugiej, a pole tego rombu jest równe 48. Oblicz długość boku tego rombu.

127. Pole trapezu równoramiennego jest równe 160. Jedna z podstaw tego trapezu jest 2,2 razy dłuższa od drugiej, a przekątna dzieli kąt przy dłuższej podstawie na połowy. Oblicz długości boków tego trapezu.

128. Przekątne równoległoboku $ABCD$ przecinają się w punkcie O . Udowodnij, że $2|AO| < |AB| + |AD|$.

129. a) Skonstruuj kwadrat, którego jedną z przekątnych jest dany odcinek.

b) Dane są trzy wierzchołki rombu. Znajdź konstrukcyjnie czwarty wierzchołek. Zaproponuj dwie metody rozwiązania tego zadania.

130. Skonstruuj równoległobok, mając dane:

- a) dwa boki i kąt między nimi,
- b) dwie przekątne i kąt, pod jakim się przecinają,
- c) dwie przekątne i jeden z boków.

131. Wysokość rombu (poprowadzona z wierzchołka) ma długość 4 i dzieli bok rombu na odcinki o długościach 3 i 2. Oblicz długości przekątnych tego rombu.

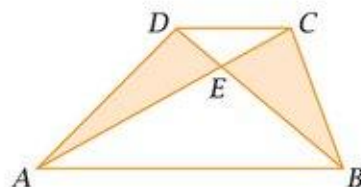
132. Trapez ma podstawy długości 28 cm i 7 cm oraz ramiona długości 13 cm i 20 cm. Oblicz jego pole.

133. Trapez równoramienny ma podstawy długości 2 m i 6 m, a jego przekątne są prostopadłe. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

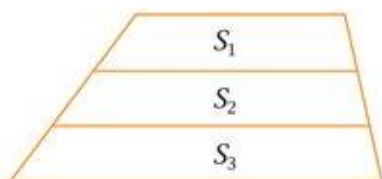
134. Wykaż, że w dowolnym czworokącie wypukłym:

- a) obwód jest większy od sumy długości jego przekątnych,
- b) suma długości przeciwległych boków jest mniejsza od sumy długości jego przekątnych,
- c) długość każdej przekątnej jest mniejsza od połowy jego obwodu.

135. Wykaż, że w trapezie $ABCD$ pola trójkątów BCE i AED są równe (zob. rysunek).

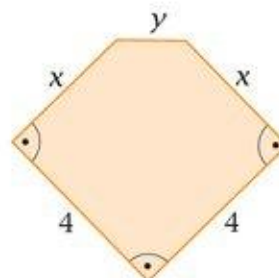


136. Udowodnij, że przekątne równoległoboku dzielą go na cztery trójkąty o równych polach.



137. Popatrz na rysunek obok. Odcinki równoległe do podstaw trapezu dzielą jego wysokość na trzy równe części. Dane są pola S_1 i S_3 . Wyznacz pole S_2 .

138. Przyjrzyj się rysunkowi pięciokąta. Jaką długość powinny mieć boki oznaczone literami, aby pole tej figury było równe 15,5?

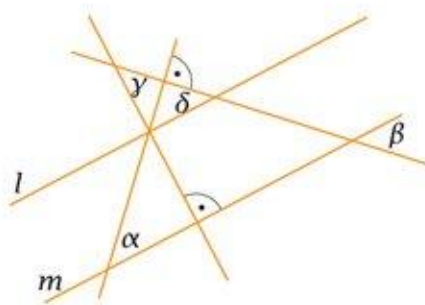


139. Punkt E jest środkiem przekątnej AC czworokąta wypukłego $ABCD$. Wykaż, że czworokąty $ABED$ i $BCDE$ mają równe pola.

PRZED SPRAWDZIANEM

1. Popatrz na rysunek obok. Proste l i m są równoległe. Które z kątów oznaczonych literami mają taką samą miarę jak kąt α ?

- A. tylko kąt β
- B. tylko kąt γ
- C. tylko kąty β i δ
- D. kąty β , γ i δ



2. Dwa z boków trójkąta mają długości 4 m i 6 m. Która z podanych długości nie może być długością trzeciego boku tego trójkąta?

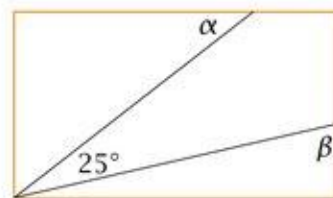
- A. 9 m
- B. 6 m
- C. 5 m
- D. 2 m

3. W trójkącie ABC dane są: $|\sphericalangle BAC| = 20^\circ$ i $|\sphericalangle ABC| = 50^\circ$. Dwusieczne tych kątów przecinają się w punkcie P . Miara kąta APB jest równa:

- A. 110°
- B. 130°
- C. 145°
- D. 160°

4. Popatrz na rysunek prostokąta. Suma miar kątów α i β jest równa:

- A. 105°
- B. 115°
- C. 145°
- D. 180°



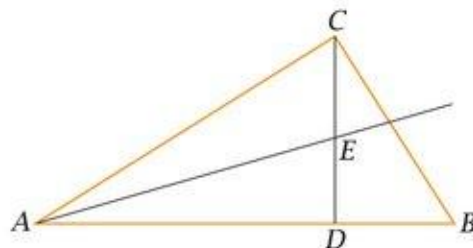
5. Popatrz na rysunek obok. Suma miar kątów α , β i γ jest równa:

- A. 120°
- B. 160°
- C. 180°
- D. 200°



6. W trójkącie ABC wysokość CD i dwusieczna kąta BAC przecinają się w punkcie E . Kąt BAC ma miarę 32° . Kąt AEC ma miarę:

- A. 98°
- B. 106°
- C. 116°
- D. 148°

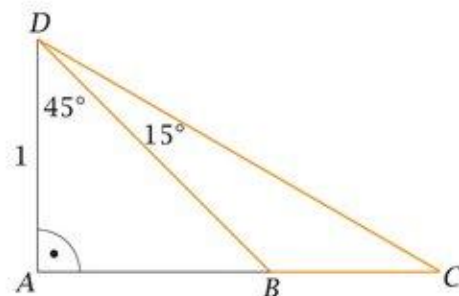


7. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości x cm i 10 cm, a przeciwprostokątna ma długość y cm. Z tych informacji nie wynika, że:

- A. $x^2 = y^2 - 100$
- B. $(y - x)(y + x) = 100$
- C. $(x + 10)^2 > y^2$
- D. $(x + 1)^2 + 11^2 = (y + 1)^2$

8. Popatrz na rysunek. Obwód trójkąta BCD jest równy:

- A. $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$
 B. $2\sqrt{6}$ D. $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$



9. Bok rombu ma długość 10. Które liczby nie mogą być długościami przekątnych tego rombu?

- A. $2\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$ C. $10\sqrt{3}$, 10
 B. 12, 16 D. 18, $2\sqrt{19}$

10. W pewnym trapezie suma miar kątów przy dłuższej podstawie jest równa 40° , a suma miar dwóch przeciwległych kątów jest równa 170° . Największy kąt tego trapezu ma miarę:

- A. 120° B. 130° C. 155° D. 165°

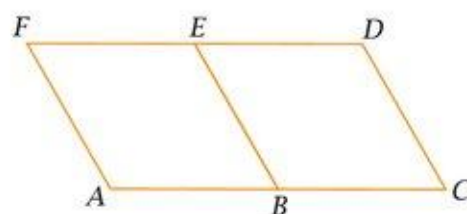
11. Wysokości równoległoboku mają długości 2 i 5, a kąt ostry ma miarę 30° . Pole tego równoległoboku jest równe:

- A. 10 B. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ C. $10\sqrt{3}$ D. 20

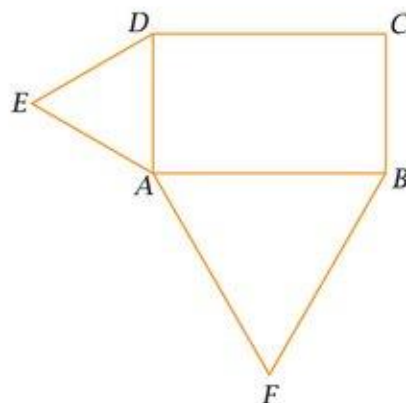
12. W trójkącie ABC miara kąta ACB jest trzy razy większa od miary kąta BAC i o 19° mniejsza od miary kąta ABC . Oblicz miary kątów tego trójkąta.

13. Oblicz pole trapezu równoramienne, którego boki mają długości 4 cm, 10 cm, 10 cm i 20 cm.

14. Romby $ABEF$ i $CDEB$ przedstawione na rysunku mają przekątne długości 8 i 6. Znajdź obie wysokości równoległoboku $ACDF$.



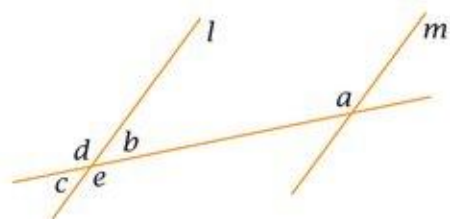
15. W trójkącie dwa kąty ostre mają miary α i β ($\alpha > \beta$). Z wierzchołka kąta rozwartego tego trójkąta opuszczono wysokość. Wykaż, że różnica między miarami kątów, na które ta wysokość dzieli kąt rozwarty, jest równa $\alpha - \beta$.



16. Na bokach prostokąta $ABCD$ zbudowano dwa trójkąty równoboczne, tak jak na rysunku. Wykaż, że trójkąty ABE i ADF są przystające.

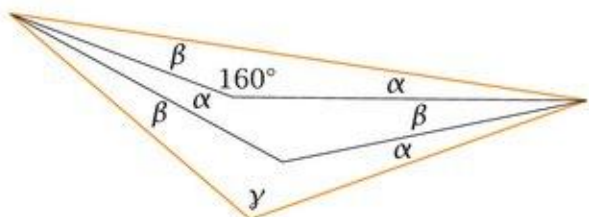
Я17. Proste l i m są równoległe, a miara kąta a jest 5 razy większa od miary kąta b . Wynika stąd zależność:

- A. $c = d - b$ C. $b = \frac{c+d}{5}$
 B. $d = 10b - e$ D. $e = 2(b + c)$



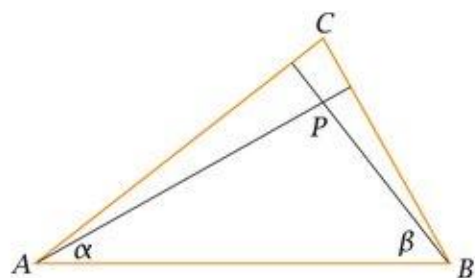
Я18. Popatrz na rysunek obok. Miara kąta y jest równa:

- A. 100° C. 130°
 B. 120° D. 140°



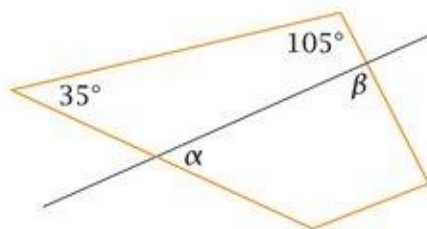
Я19. Na rysunku obok wysokości trójkąta ABC poprowadzone z wierzchołków A i B przecinają się w punkcie P i tworzą z bokiem AB kąty α i β . Która równość jest fałszywa?

- A. $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ - \alpha$
 B. $|\sphericalangle ACB| = \alpha + \beta$
 C. $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$
 D. $|\sphericalangle APB| = 180^\circ - \alpha - \beta$



Я20. Suma miar kątów α i β jest równa:

- A. 140° C. 180°
 B. 160° D. 220°

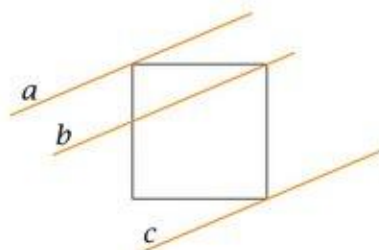


Я21. W jakim z poniższych stosunków należy podzielić odcinek, aby z otrzymanych trzech odcinków można było zbudować trójkąt?

- A. 1:2:3 B. 1:3:5 C. 2:3:4 D. 2:2:5

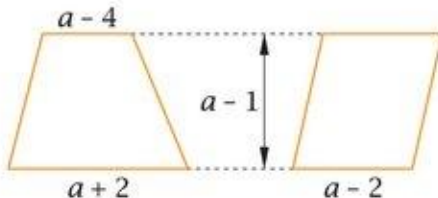
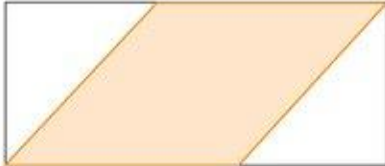
Я22. Proste a , b i c są równoległe i każda z nich przechodzi przez jeden z wierzchołków kwadratu, jak na rysunku obok. Odległość między prostymi a i b jest równa 3, a między prostymi b i c — jest równa 5. Pole tego kwadratu jest równe:

- A. 15 B. 25 C. 30 D. 34



Я23. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest 10 razy dłuższa od krótszej przyprostokątnej. Stosunek długości krótszej przyprostokątnej do długości dłuższej przyprostokątnej jest równy:

- A. 1:9 B. $1:\sqrt{10}$ C. $1:3\sqrt{11}$ D. 1:99

- Я24.** W trójkącie ABC boki mają długości: $|AB| = 12$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$. Dwusieczna kąta ACB przecięła bok AB w punkcie D . Odcinek AD ma długość:
- A. 4,5 B. 6 C. 7,5 D. 8
- Я25.** Wskaż zdanie fałszywe.
- A. Ortocentrum trójkąta może leżeć poza tym trójkątem.
 B. Odległości punktu przecięcia symetralnych boków trójkąta od wierzchołków tego trójkąta są jednakowe.
 C. Środek ciężkości trójkąta dzieli każdą środkową na dwie części, z których jedna jest trzy razy krótsza od całej środkowej.
 D. Łącząc punkt przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta z wierzchołkami tego trójkąta dzielimy ten trójkąt na trzy części o równych polach.
- Я26.** Różnica kwadratów długości dwóch boków prostokąta jest równa 12, a przekątna prostokąta ma długość 6. Pole tego prostokąta jest równe:
- A. $4\sqrt{6}$ B. 18 C. $12\sqrt{2}$ D. 36
- Я27.** Trapez i równoległobok przedstawione na rysunku obok mają taką samą wysokość. O ile pole trapezu jest większe od pola równoległoboku?
- A. $a - 2$ C. $a + 1$
 B. $a - 1$ D. $a + 2$
- 
- Я28.** Krótszy bok narysowanego obok prostokąta ma długość 10. Zacięniowana figura jest rombem, którego pole stanowi 60% pola prostokąta. Oblicz długość boku rombu.
- 
- Я29.** Środkowe AK i CL trójkąta ABC przecinają się w punkcie P . Jaką częścią pola trójkąta ABC jest pole trójkąta PLK ?
- Я30.** Przekątne pewnego trapezu równoramiennego są prostopadłe. Wysokość tego trapezu jest równa 13 cm. Oblicz jego pole.
- Я31.** a) Wykaż, że jeżeli w trójkącie dwie wysokości są równe, to ten trójkąt jest równoramienny.
 b) Wykaż, że jeżeli w trójkącie dwie środkowe są równe, to ten trójkąt jest równoramienny.

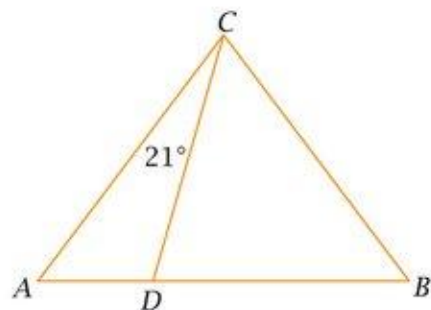
PRZED MATURĄ

1. Miary kątów wewnętrznych pewnego trójkąta pozostają w stosunku 3:4:5. Najmniejszy kąt wewnętrzny tego trójkąta ma miarę:

- A. 45° C. 75°
B. 90° D. 60°

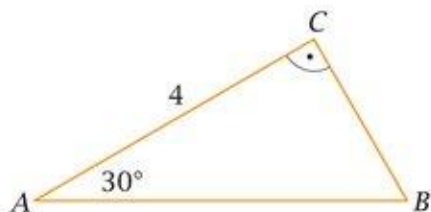
2. W trójkącie ABC , w którym $|AC| = |BC|$, na boku AB wybrano punkt D taki, że $|BD| = |CD|$ oraz $|\sphericalangle ACD| = 21^\circ$ (zob. rysunek). Wynika stąd, że kąt BCD ma miarę:

- A. 57° C. 51°
B. 53° D. 55°



3. Pole trójkąta prostokątnego ABC , przedstawionego na rysunku, jest równe:

- A. $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
B. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

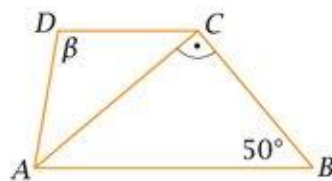


4. Miary kątów pewnego czworokąta pozostają w stosunku 2:3:3:4. Wynika stąd, że najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę:

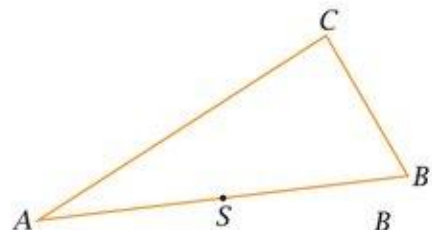
- A. 60° B. 50° C. 40° D. 30°

5. Dany jest trapez $ABCD$, w którym przekątna AC jest prostopadła do ramienia BC , $|AD| = |DC|$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 50^\circ$ (zob. rysunek). Stąd wynika, że:

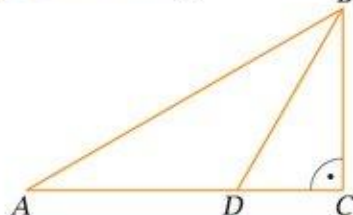
- A. $\beta = 100^\circ$ C. $\beta = 110^\circ$
B. $\beta = 120^\circ$ D. $\beta = 130^\circ$



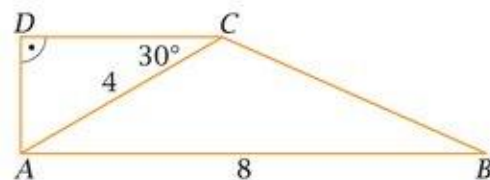
6. Dany jest trójkąt ABC . Punkt S jest środkiem boku AB tego trójkąta (zob. rysunek). Wykaż, że odległości punktów A i B od prostej CS są równe.



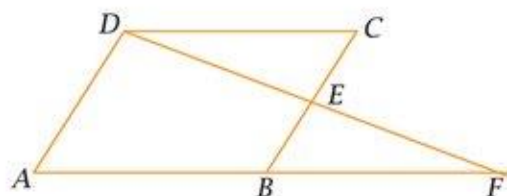
7. Dwusieczna kąta ostrego ABC przecina przyprostokątną AC trójkąta prostokątnego ABC w punkcie D . Wykaż, że jeżeli $|AD| = |BD|$, to $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$.



8. W trapezie prostokątnym $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość 8. Przekątna AC tego trapezu ma długość 4 i tworzy z krótszą podstawą trapezu kąt o mierze 30° (zob. rysunek). Oblicz długość przekątnej BD tego trapezu.

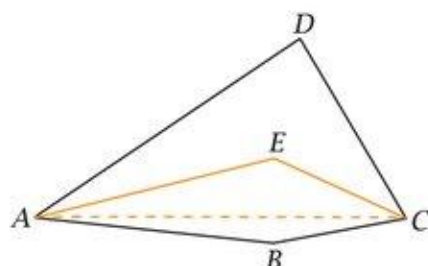


9. W równoległoboku $ABCD$ punkt E jest środkiem boku BC . Z wierzchołka D poprowadzono prostą przecinającą bok BC w punkcie E . Proste AB i DE przecinają się w punkcie F (zob. rysunek). Wykaż, że punkt B jest środkiem odcinka AF .



10. Dwusieczne kątów BAD i BCD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E , przy czym punkty B i E leżą po przeciwnych stronach prostej AC (zob. rysunek). Wykaż, że:

$$|\angle ABC| - |\angle ADC| + 2 \cdot |\angle AEC| = 360^\circ$$

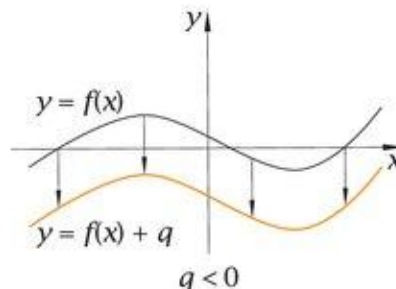
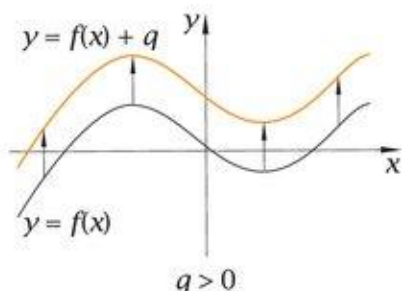


11. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.

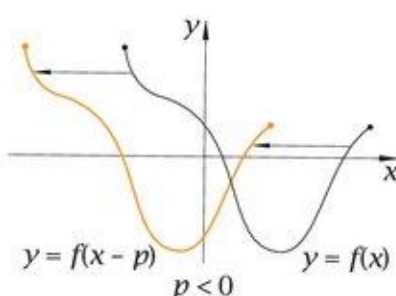
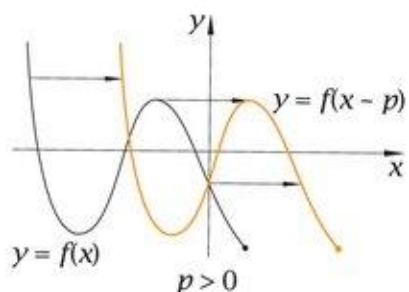
12. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Na ramieniu AC tego trójkąta wybrano punkt M ($M \neq A$ i $M \neq C$), a na ramieniu BC wybrano punkt N , w taki sposób, że $|AM| = |CN|$. Przez punkty M i N poprowadzono proste prostopadłe do podstawy AB tego trójkąta, które wyznaczają na niej punkty S i T . Udowodnij, że $|ST| = \frac{1}{2}|AB|$.

FUNKCJE

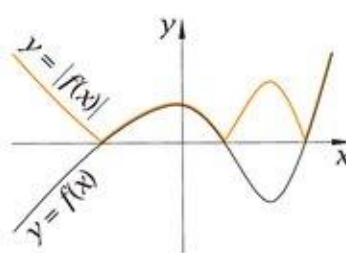
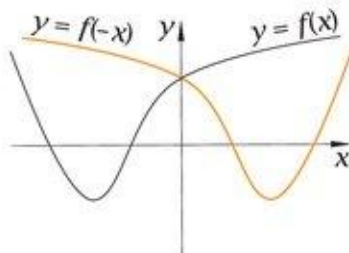
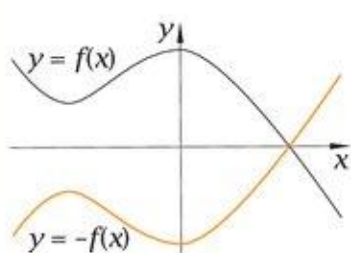
Przesuwanie wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi y



Przesuwanie wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi x



Przekształcanie wykresów funkcji



Rozwiązanie nierówności wielomianowych

$$a(x - x_1)(x - x_2)^3(x - x_3)^2 \leq 0$$

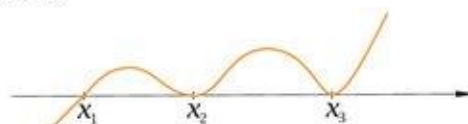
$$a < 0$$



$$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$$

$$a(x - x_1)^3(x - x_2)^2(x - x_3)^4 > 0$$

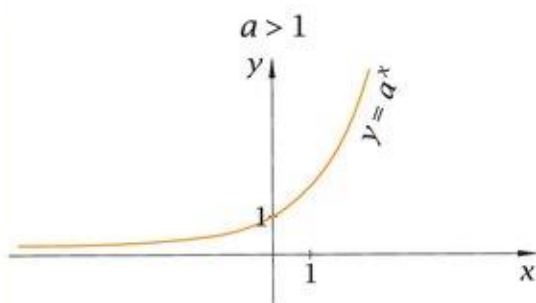
$$a > 0$$



$$x \in (x_1; x_2) \cup (x_2; x_3) \cup (x_3; +\infty)$$

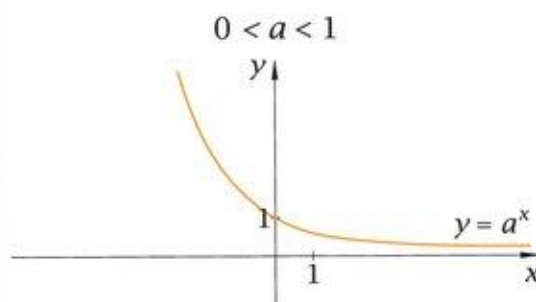
Funkcja wykładnicza

Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = a^x$, gdzie $a > 0$, nazywamy **funkcją wykładniczą**. Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych.



Jeżeli $a > 1$, to funkcja $y = a^x$ jest rosnąca, więc:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$



Jeżeli $0 < a < 1$, to funkcja $y = a^x$ jest malejąca, więc:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Funkcja wykładnicza $y = a^x$ ($a \neq 1$) jest funkcją różnowartościową. Zatem dla dowolnych liczb dodatnich p i r :

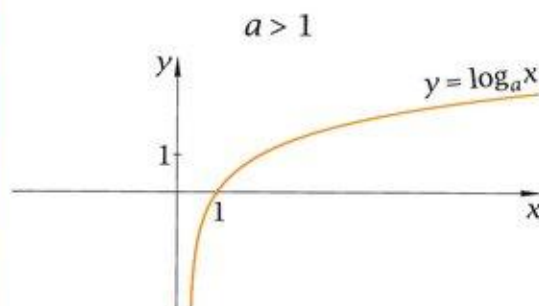
$$a^p = a^r \Leftrightarrow p = r$$

Wykresy wszystkich funkcji wykładniczych przechodzą przez punkt o współrzędnych (0, 1).

Prosta $y = 0$ jest asymptotą każdego z tych wykresów dla $a \neq 1$.

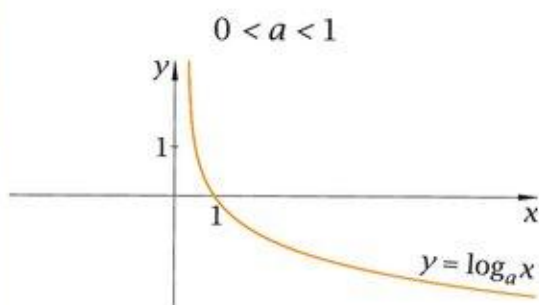
Funkcja logarytmiczna

Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, nazywamy **funkcją logarytmiczną**. Dziedziną funkcji logarytmicznej jest przedział $(0; +\infty)$.



Jeżeli $a > 1$, to funkcja $y = \log_a x$ jest rosnąca, więc:

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$



Jeżeli $0 < a < 1$, to funkcja $y = \log_a x$ jest malejąca, więc:

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Funkcja logarytmiczna $y = \log_a x$ jest funkcją różnowartościową. Zatem dla dowolnych liczb dodatnich p i r :

$$\log_a p = \log_a r \Leftrightarrow p = r$$

Wykresy wszystkich funkcji logarytmicznych przechodzą przez punkt o współrzędnych (1, 0).

Prosta $x = 0$ jest asymptotą każdego z tych wykresów.

WZORY I WYKRESY FUNKCJI

✎1. Określ dziedzinę funkcji f i oblicz $f(1)$, $f(3)$, $f(-3)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(\sqrt{2})$.

a) $f(x) = 5 - 3x$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 2}$

e) $f(x) = |x| + x$

b) $f(x) = \frac{3}{x}$

d) $f(x) = \sqrt{3 - x}$

f) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

✎2. Narysuj wykres funkcji $f: \{-2, -\frac{1}{9}, 0, 1\frac{1}{3}, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem:

a) $f(x) = -3x + 2$

c) $f(x) = \frac{1 - 3x}{x + 1}$

e) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $f(x) = \frac{1}{1 - x}$

d) $f(x) = \sqrt{7 - x}$

f) $f(x) = |2x - 1|$

✎3. Czy do wykresu podanej funkcji należy punkt $A = (0, 2)$? Czy należy punkt $B = (2, 0)$?

a) $f(x) = x^3 + 2$

c) $h(x) = 2 - \frac{x^2}{2}$

e) $l(x) = |x - 2|$

b) $g(x) = x^2 - 2$

d) $k(x) = \frac{2}{x} - 1$

f) $m(x) = ||2x| - 2| - 2$

✎4. Dana jest funkcja $f(x) = |2x|$.

a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 3.

b) Utwórz tabelkę funkcji f dla pięciu dowolnie wybranych argumentów.

c) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 1?

d) Znajdź miejsce zerowe funkcji.

✎5. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{20}{x}$.

a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu -15 .

b) Utwórz tabelkę funkcji f dla pięciu dowolnie wybranych argumentów.

c) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3?

d) Czy funkcja f ma miejsce zerowe?

e) Oblicz wartość wyrażenia $f(2) - f(\sqrt{2})$.

✎6. Opisz wzorem funkcję, która danej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje:

a) liczbę o 5 większą,

b) sześcian tej liczby,

c) połowę kwadratu tej liczby,

d) pierwiastek z liczby o 3 mniejszej od danej,

e) odwrotność sześcianu tej liczby,

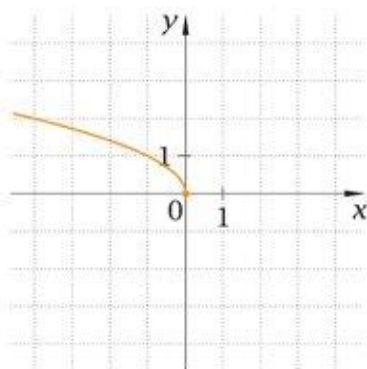
f) wartość bezwzględną z trzykrotności tej liczby.

7. Który z podanych wzorów opisuje funkcję przedstawioną na wykresie?

a) $y = -\sqrt{x}$

$y = \sqrt{-x}$

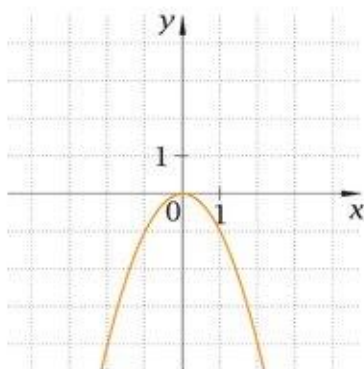
$y = |\sqrt{x}|$



b) $y = -x^2$

$y = (-x)^2$

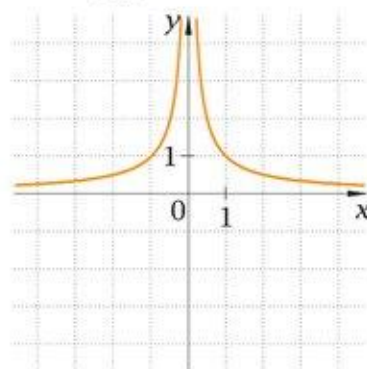
$y = |x^2|$



c) $y = -\frac{1}{x}$

$y = \frac{1}{-x}$

$y = \left| \frac{1}{x} \right|$



8. Który z punktów, A , B czy C , jest punktem przecięcia wykresów funkcji f i g ?

a) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $g(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + 5$ $A = (6, 9)$, $B = (9, 6)$, $C = (-1, 3)$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{10}$ $A = (2, \frac{2}{5})$, $B = (0, 0)$, $C = (-1, \frac{1}{10})$

c) $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = -x^2 + 17$ $A = (-2, -5)$, $B = (4, 1)$, $C = (7, 2)$

d) $f(x) = \frac{3}{2x-1}$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ $A = (0, -3)$, $B = (3, 1\frac{2}{3})$, $C = (-1, -1)$

e) $f(x) = \frac{x}{x+3}$, $g(x) = \frac{4}{x^2} - 3$ $A = (2, 1)$, $B = (-1, -\frac{1}{2})$, $C = (-2, -2)$

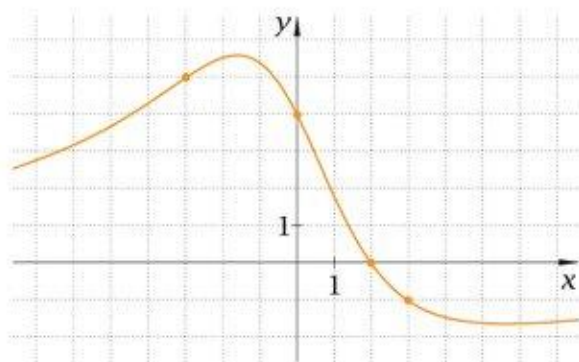
9. Jeden z podanych wzorów opisuje funkcję przedstawioną na wykresie. Który?

① $y = x^2 - 4x + 4$

② $y = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

③ $y = \sqrt{8(2-x)}$

④ $y = \frac{18(2-x)}{x^2+9}$



10. Określ dziedzinę funkcji.

a) $y = \sqrt{3x-2}$

b) $y = \sqrt{9-8x}$

c) $y = \frac{1}{2x+8}$

d) $y = \frac{x}{x^2-1}$

e) $y = \frac{4}{|x+2|-1}$

f) $y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}$

g) $y = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2+2x+1}$

h) $y = \frac{2x-5}{5x-2} - \frac{1}{x^2-25}$

i) $y = \sqrt{4x+1} + \sqrt{6-2x}$

j) $y = \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x}$

k) $y = \frac{x-10}{\sqrt{9-10x}} + \frac{\sqrt{4+2x}}{3x+1}$

l) $y = \frac{\sqrt{5}}{|x|-x}$

»11. Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji.

a) $y = \frac{2x+7}{x^2-4}$

c) $y = \frac{x(x+8)}{\sqrt{x+8}}$

e) $y = \frac{2x(x-5)}{\sqrt{x-3}}$

b) $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{3x^2-9x}$

d) $y = \frac{x^2-2}{x^2-2x+1}$

f) $y = \frac{(2x+13)^2}{\sqrt{2x+13}}$

»12. Wyznacz miejsca zerowe (o ile istnieją) podanej funkcji.

a) $f: \langle -11; 3 \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x+4| - 7$

b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 + 7x - 2$

c) $f: \langle -1; 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 6x^2 - 7x$

d) $f: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 + 8x^2 - x - 2$

»13. Sprawdź, czy liczby -1 i 3 należą do zbioru wartości funkcji f .

a) $f(x) = |x-2|$

c) $f(x) = \frac{12}{x}$

b) $f(x) = |2x+1| - 2$

d) $f(x) = x^2 + 3$

»14. Oblicz, dla jakiej wartości parametru a wykres funkcji przechodzi przez dany punkt A .

a) $y = ax^3 - 2, A = (-3, 4)$

b) $y = \frac{ax}{x+3}, A = (-2, \frac{1}{2})$

»15. Oblicz, dla jakich wartości parametrów a i b wykres funkcji przechodzi przez dane punkty A i B .

a) $y = ax^2 + bx - 3, A = (1, -2), B = (2, 3)$

b) $y = (a-b)x + \frac{1}{2}b, A = (3, -1\frac{1}{2}), B = (-9, 6\frac{1}{2})$

»16. Funkcja f jest określona poniższym wzorem. Zapisz $f(2a), f(a-2), f(1-a)$.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 7$

b) $f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{3x-1}$

»17. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^2 + x + 5$. Oblicz, dla jakiej liczby a spełniona jest dana równość.

a) $f(a) = f(a+1)$

b) $f(a-3) = f(a+3)$

c) $f(2a+1) = f(2a)$

»18. Wykaż, że dla funkcji $f(x) = x^3 + x - \frac{2}{x}$ zachodzi równość $f(x) = -f(-x)$.

»19. Dane są funkcje $f(x) = \sqrt{x+6}$ i $g(x) = x^2 + 7x + 10$. Określ dziedzinę funkcji h .

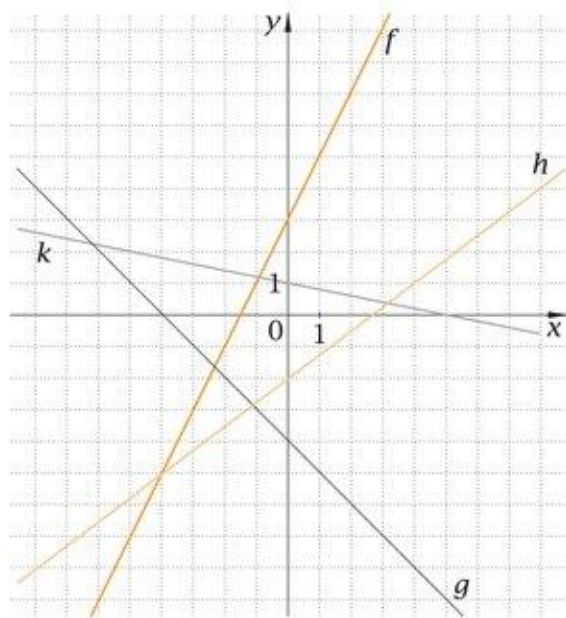
a) $h(x) = f(x+1) + g(x)$

b) $h(x) = \frac{g(x)}{f(2x)}$

c) $h(x) = \frac{f(2x-1)}{g(x)-7x}$

PRZYKŁADY FUNKCJI I ICH WŁASNOŚCI

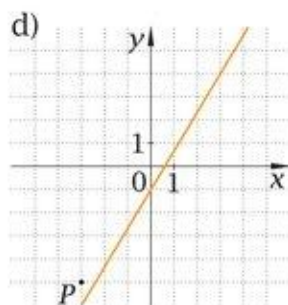
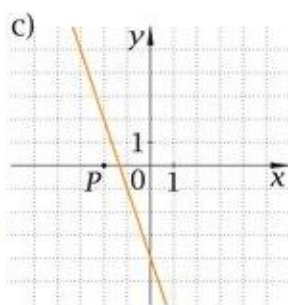
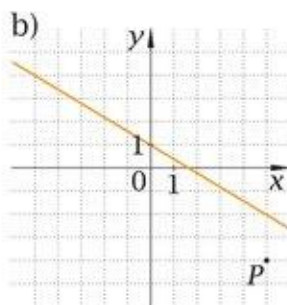
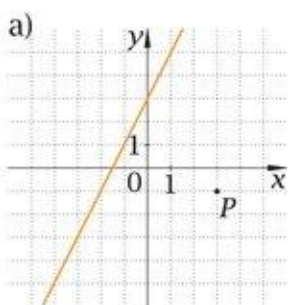
20. Znajdź wzory funkcji liniowych f , g , h oraz k , których wykresy przedstawiono na rysunku obok.



21. Znajdź wzór funkcji liniowej f , jeżeli wiadomo, że:

- $f(2) = 5$, $f(-3) = -7$,
- liczba 7 jest miejscem zerowym tej funkcji, a wykres funkcji f przecina oś y w punkcie o rzędnej 11,
- funkcja ma to samo miejsce zerowe, co funkcja $g(x) = \frac{2}{3}x + 6$ i do jej wykresu należy punkt $K = (-1, 2)$,
- liczba $3\sqrt{2}$ jest jednym z nieskończenie wielu miejsc zerowych tej funkcji.

22. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej f . Znajdź wzór funkcji liniowej g , jeżeli wiadomo, że jej wykres przechodzi przez punkt P i jest równoległy do wykresu funkcji f .



23. Znajdź wzór funkcji liniowej f , jeżeli wiadomo, że jej wykres przechodzi przez punkt P i jest równoległy do wykresu funkcji g .

- | | |
|---|--|
| a) $g(x) = 2x + 5$, $P = (1, 3)$ | d) $g(x) = 0,1x$, $P = (-6, 6)$ |
| b) $g(x) = -\frac{4}{7}x - 2$, $P = (-7, 4)$ | e) $g(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{3}$, $P = (0, \sqrt{5})$ |
| c) $g(x) = -4x + 2$, $P = (5, -1)$ | f) $g(x) = \pi$, $P = (102, 201)$ |

24. Znajdź wzór funkcji liniowej f , o której wiadomo, że:

- nie ma miejsc zerowych, a do jej wykresu należy punkt $K = (2\sqrt{3}, -3\sqrt{2})$,
- jej wykres jest równoległy do wykresu funkcji $g(x) = -\frac{3}{4}x + 1$, a miejsce zerowe tej funkcji różni się o 3 od miejsca zerowego funkcji g .

✎25. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = (x - 3)(x + 1)$

c) $f(x) = (x + 3)^2 - 4$

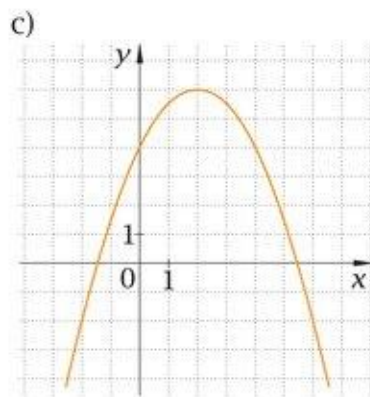
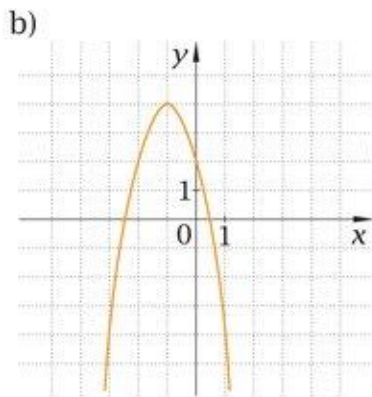
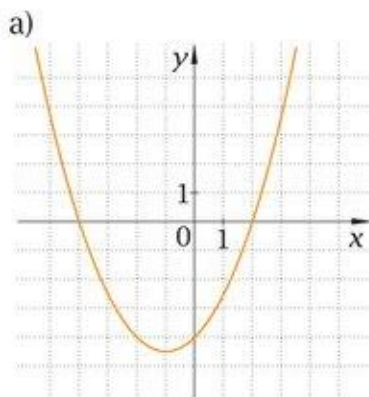
e) $f(x) = -(x + 3)^2 + 1$

b) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$

d) $f(x) = -(x - 1)^2 - 4$

f) $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$

✎26. Znajdź wzór ogólny funkcji kwadratowej przedstawionej na wykresie.



✎27. Znajdź wzór funkcji kwadratowej, jeżeli wiadomo, że:

a) funkcja osiąga największą wartość równą 5 dla argumentu 2, a do jej wykresu należy punkt $P = (-1, 11)$,

b) wykres tej funkcji przecina oś y w punkcie $K = (0, 3)$, a liczby $x_1 = -6$, $x_2 = 1$ są miejscami zerowymi tej funkcji,

c) do wykresu tej funkcji należą punkty: $A = (1, -2)$, $B = (2, 3)$, $C = (-2, 7)$,

d) funkcja ta ma te same miejsca zerowe co funkcja $g(x) = |x - 4\frac{1}{2}| - \frac{1}{2}$ i osiąga najmniejszą wartość równą -1 .

✎28. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 4 > 0$

d) $x^2 + 7x - 8 < 0$

g) $-3x^2 + 7x - 2 \leq 0$

b) $5x \geq x^2$

e) $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$

h) $4 - x > 1\frac{1}{2}x^2$

c) $9x^2 - 6x \leq -1$

f) $2x^2 - 5x - 3 > 0$

i) $2x^2 + x + 3 > 0$

✎29. Oblicz $f(-3)$, $f(0)$, $f(8)$, jeżeli:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{dla } x < 2 \\ -\frac{1}{4}x + 3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} |3x - 1| & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ |x^2 - 1| & \text{dla } x \in \langle 0; +\infty \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{dla } x \leq -3 \\ 5 & \text{dla } -3 < x \leq 0 \\ 10 - x^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+1} & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 3x^4 & \text{dla } x \in \langle -1; 8 \rangle \\ \frac{1}{4}x^3 - x^2 & \text{dla } x \in \langle 8; +\infty \end{cases}$

» **30.** Narysuj wykres funkcji. Określ jej zbiór wartości, przedziały monotoniczności oraz miejsca zerowe.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{dla } x \leq 1 \\ -x+6 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{dla } x \in (-3; 1) \\ \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} & \text{dla } x \in \langle 1; +\infty \rangle \end{cases}$$

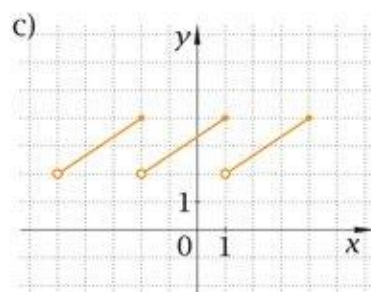
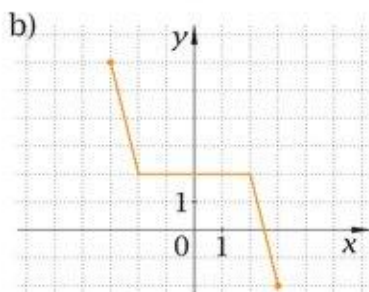
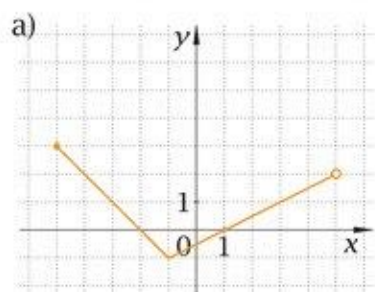
$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} -3\frac{1}{2} & \text{dla } x \leq -1 \\ 2x-5 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-4; -2) \\ x & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in (2; 4) \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x+4 & \text{dla } x \in \langle -4; 2 \rangle \\ x-2 & \text{dla } x \in (2; 4) \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} -x-4 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 2x-4 & \text{dla } x \in \langle 0; 3 \rangle \\ -\frac{1}{2}x+1 & \text{dla } x \in (3; +\infty) \end{cases}$$

» **31.** Znajdź wzór funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku.



» **32.** Narysuj wykres funkcji f , a następnie określ zbiór wartości tej funkcji oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości niedodatnie.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{dla } x < 2 \\ -x + 2 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{dla } x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

» **33.** Narysuj wykres funkcji.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x^2 & \text{dla } x \in (-2; 2) \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 4 & \text{dla } x \in \langle -4; 4 \rangle \\ -x^2 + 16 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \langle -4; 4 \rangle \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{dla } x \in (-\infty; 3) \\ \frac{2}{3}x - 1 & \text{dla } x \in \langle 3; 6 \rangle \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ (x-2)^2 & \text{dla } x \in \langle 0; +\infty \rangle \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} -2x-3 & \text{dla } x \in (-3; 1) \\ (x-3)^2 & \text{dla } x \in \langle 1; 5 \rangle \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 & \text{dla } x \in \langle -4; -2 \rangle \\ x^2 & \text{dla } x \in \langle -2; 2 \rangle \\ -x^2 + 8 & \text{dla } x \in (2; 4) \end{cases}$$

» **34.** Dobierz tak liczbę a , aby funkcja $f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{dla } x \leq 1 \\ -2x+a & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ nie miała miejsc zerowych.

✎ **35.** Dobierz tak liczbę a , aby funkcja f miała dokładnie dwa miejsca zerowe.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 3 \\ 2x + a & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x - 12 & \text{dla } x \leq 4 \\ x^2 + a & \text{dla } x > 4 \end{cases}$

✎ **36.** Dobierz tak liczby a oraz b , aby wykres funkcji f można było sporządzić bez odrywania ręki.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -\frac{2}{3}x + b & \text{dla } x \in (1; +\infty) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} ax + 7 & \text{dla } -2 \leq x \leq 1 \\ x^2 - a & \text{dla } 1 < x \leq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 3 \\ ax + 2 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4 & \text{dla } x \leq -2 \\ ax + b & \text{dla } -2 < x \leq 3 \\ 2x^2 - 5x + 4 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

FUNKCJE WIELOMIANOWE

✎ **37.** Dane są funkcje:

$$p(x) = x^{10} \quad q(x) = x^{11} \quad r(x) = x^{12} \quad s(x) = x^{13}$$

Ustal, która z wartości tych funkcji dla podanego argumentu x jest najmniejsza, a która — największa.

a) $x = 1,7$

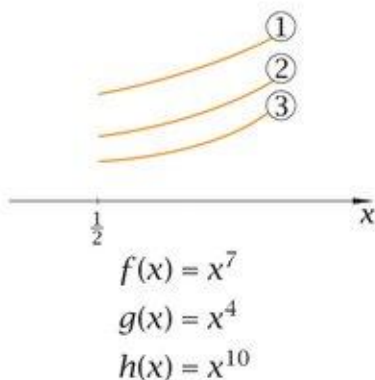
b) $x = \frac{1}{15}$

c) $x = -0,3$

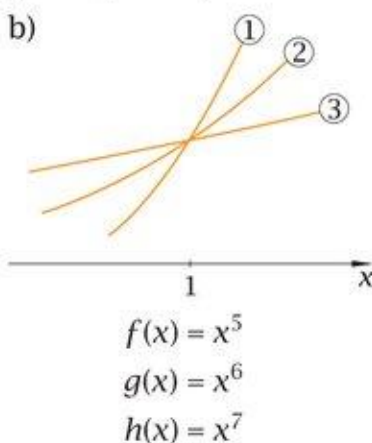
d) $x = -\frac{9}{7}$

✎ **38.** Na rysunku przedstawiono fragmenty wykresów funkcji, których wzory zapisano pod rysunkiem. Dopasuj wzory do wykresów.

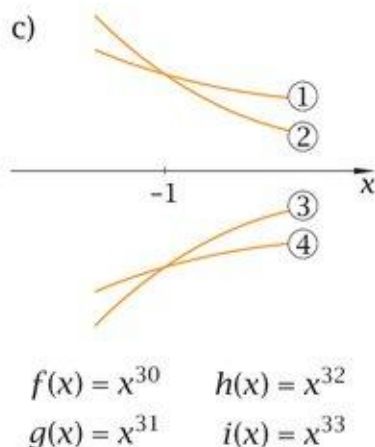
a)



b)



c)



✎ **39.** Rozwiąż graficznie nierówność.

a) $x^{40} < -x$

b) $x^{101} \geq x^2$

c) $x^{2003} + x^{200} > 0$

d) $x^{30} - x^4 \geq 0$

✎ **40.** a) W ilu punktach przecinają się wykresy funkcji $y = x^3$ i $y = -2x + 3$?

b) Ile co najwyżej może być punktów przecięcia prostej z wykresem funkcji wielomianowej trzeciego stopnia?

Я41. Naskicuj wykres funkcji $y = x^5$, a następnie wykres funkcji:

- a) $y = |x|^5$ c) $y = 2x^5$ e) $y = x^5 - 2$ g) $y = -|x^5 - 1|$
 b) $y = -x^5$ d) $y = \frac{1}{3}x^5$ f) $y = |x^5 + 1|$ h) $y = 2 - |x^5|$

Я42. Dane są funkcje: $f_1(x) = \sqrt{3}x^4$, $f_2(x) = (\pi - 3)x^3$, $f_3(x) = (2 - \sqrt{5})x^2$, $f_4(x) = (2 - e)x^5$, $f_5(x) = \frac{x^{12}}{\pi}$.

- a) Która z tych funkcji nie przyjmuje wartości ujemnych?
 b) Która z tych funkcji jest malejąca?
 c) Której z tych funkcji wykres jest symetryczny względem osi y ?
 d) Której z tych funkcji wykres jest symetryczny względem punktu $(0, 0)$?

Я43. Znajdź wzór funkcji liniowej f , jeżeli wiadomo, że:

- a) $f(2) = 5$, $f(-3) = -7$,
 b) liczba 7 jest miejscem zerowym tej funkcji, a wykres funkcji f przecina oś y w punkcie o rzędnej 11,
 c) liczba $3\sqrt{2}$ jest jednym z nieskończenie wielu miejsc zerowych tej funkcji,
 d) jej wykres przecina osie układu współrzędnych dokładnie w tych samych punktach, co wykres funkcji $g(x) = \frac{9}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$,
 e) $f(x) \geq 9$ dla $x \leq -8$ oraz $f(x) \leq 4$ dla $x \geq 2$.

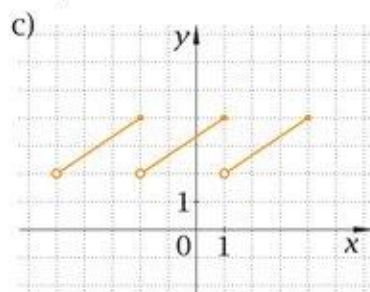
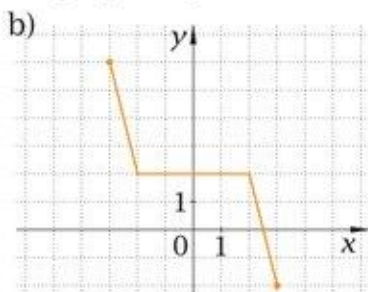
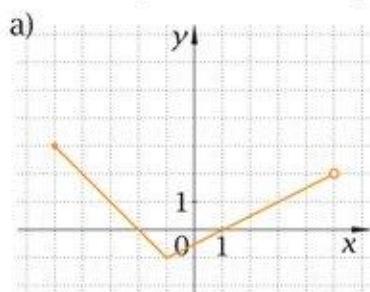
Я44. Sporządź wykres funkcji.

- a) $f(x) = (x - 3)(x + 1)$ c) $f(x) = (x + 3)^2 - 4$ e) $f(x) = -(x + 3)^2 + 1$
 b) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ d) $f(x) = -(x - 1)^2 - 4$ f) $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$

Я45. Narysuj wykres funkcji.

- a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \in \langle -4; -2 \rangle \\ 2x - 1 & \text{dla } x \in \langle -2; 4 \rangle \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{dla } x \leq 1 \\ -x^2 - 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$
 b) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{dla } x \leq -3 \\ 4 & \text{dla } -3 < x < 1 \\ x - 2 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0 \\ (x - 2)^2 - 3 & \text{dla } 0 \leq x < 4 \\ x - 3 & \text{dla } x \geq 4 \end{cases}$

Я46. Znajdź wzór funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku.



Я47. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} -5x+3 & \text{dla } x < -2 \\ -2x^2+5x-3 & \text{dla } -2 \leq x < 1 \\ 4-3x^3 & \text{dla } 1 \leq x < 3 \\ \frac{1}{2}x^5 & \text{dla } 3 \leq x < 7 \\ -2 & \text{dla } x \geq 7 \end{cases}$. Oblicz:

a) $f(-3) + f(-2) + f(1) + f(2)$

b) $\frac{f(-\sqrt{2})}{f(\sqrt{2})}$

c) $f(4) - f(4 + \pi)$

d) $\frac{f(0) + f(2\sqrt{2})}{f(1 - \sqrt{10}) - 5\sqrt{10}}$

Я48. Znajdź wzór funkcji kwadratowej, jeżeli wiadomo, że:

a) funkcja osiąga największą wartość równą 5 dla argumentu 2, a do jej wykresu należy punkt $P = (-1, 11)$,

b) wykres tej funkcji przecina oś y w punkcie $K = (0, 3)$, a liczby $x_1 = -6$, $x_2 = 1$ są miejscami zerowymi tej funkcji,

c) do wykresu tej funkcji należą punkty: $A = (1, -2)$, $B = (2, 3)$, $C = (-2, 7)$,

d) funkcja ta ma te same miejsca zerowe co funkcja $g(x) = \left|x - 4\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}$ i osiąga najmniejszą wartość równą -1 .

Я49. Dane są funkcje:

$$f_1(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{dla } x \in \langle -4; -1 \rangle \\ -2x+3 & \text{dla } x \in (-1; 3) \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^4 & \text{dla } |x| \leq 2 \\ x^2 - 10 & \text{dla } |x| > 2 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x \leq -2 \\ -2x^3 & \text{dla } -2 < x < 3 \\ \frac{1}{2}x - 6 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 2x+7 & \text{dla } -4 \leq x < -1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{dla } -1 \leq x < 3 \\ x^2 - 16 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$$

Dla podanych funkcji wyznacz:

a) dziedzinę,

b) zbiór wartości,

c) miejsca zerowe,

d) przedziały, w których funkcja jest rosnąca,

e) argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne.

Я50. Wyznacz wartość liczby a , jeżeli wiadomo, że punkt P należy do wykresu funkcji f .

a) $f(x) = ax^5$, $P = (-1, 2)$

d) $f(x) = 3x^7$, $P = (-1, a)$

b) $f(x) = ax^4$, $P = (-3, -3)$

e) $f(x) = -2x^3$, $P = (a, 54)$

c) $f(x) = ax^6$, $P = (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

f) $f(x) = 4x^4$, $P = (a, 16)$

Я51. Wykres funkcji f przesunięto o wektor $\vec{u}$. Znajdź wzór otrzymanej funkcji.

a) $f(x) = 2x^3$, $\vec{u} = [3, 0]$

c) $f(x) = -\frac{2}{5}x^5$, $\vec{u} = [-4, 1]$

b) $f(x) = -3x^4$, $\vec{u} = [0, -8]$

d) $f(x) = \frac{x^{16}}{16}$, $\vec{u} = [-16, -16]$

Я52. Znajdź wzór funkcji liniowej, jeżeli wiadomo, że pole trójkąta równoramiennego ograniczonego wykresem tej funkcji i osiami układu współrzędnych wynosi 5.

Я53. a) Uzasadnij, że jeżeli m jest liczbą nieparzystą, to wykres funkcji $y = ax^m$ jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

b) Uzasadnij, że jeżeli n jest liczbą parzystą, to wykres funkcji $y = ax^n$ jest symetryczny względem osi y .

Я54. Uzasadnij, że wykresy funkcji $f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 7$ i $g(x) = 2x^5 - 5x^3 + 2x^2 - 6x - 7$ przecinają się w dokładnie jednym punkcie. Wyznacz współrzędne tego punktu.

Я55. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 + 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty) \\ x^2 - |x| & \text{dla } x \in \langle -3; 3 \rangle \end{cases}$.

Uzasadnij, że dla dowolnych dwóch przeciwnych argumentów funkcja f przyjmuje tę samą wartość oraz że funkcja f ma trzy miejsca zerowe.

Я56. Dane są funkcje: $f(x) = x^3 - 8$ oraz $g(x) = x^2 + 2x - 8$.

a) Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresów tych funkcji.

b) Sporządź wykresy tych funkcji i na ich podstawie rozwiąż nierówność $f(x) > g(x)$.

Я57. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 7x - 8 & \text{dla } x \leq -2 \\ 2x^2 - 3x + 1 & \text{dla } -2 < x \leq 1 \\ -2\frac{1}{2} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$. Znajdź wzór funkcji g , której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$.

a) $\vec{u} = [0, -3]$

b) $\vec{u} = [-2, 0]$

c) $\vec{u} = [1, 4]$

Я58. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ 2x + 9 & \text{dla } x \in \langle -3; -2 \rangle \\ -\frac{1}{4}x^3 & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 2x - 9 & \text{dla } x \in \langle 2; 3 \rangle \\ -4 & \text{dla } x \in (3; +\infty) \end{cases}$. Wykaż, że dla dowolnych

dwoch przeciwnych argumentów funkcja ta przyjmuje także wartości przeciwne.

Я59. Naszkicuj wykresy odpowiednich funkcji i określ liczbę rozwiązań równania.

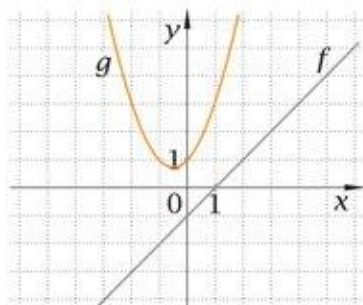
a) $x^{17} - x + 10 = 0$

b) $x^8 - 2x - 3 = 0$

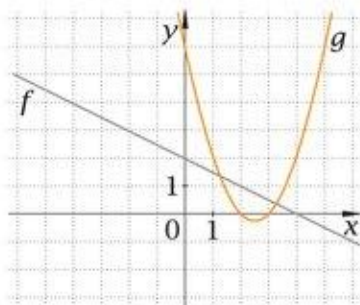
NIERÓWNOŚCI WIELOMIANOWE

60. Korzystając z wykresów funkcji f i g , rozwiąż nierówność.

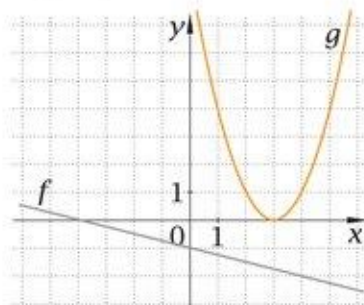
a) $f(x)g(x) > 0$



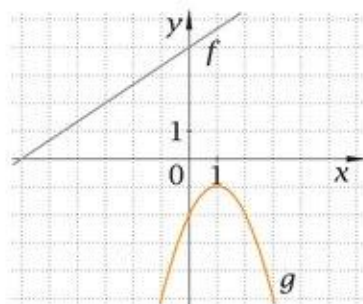
c) $f(x)g(x) > 0$



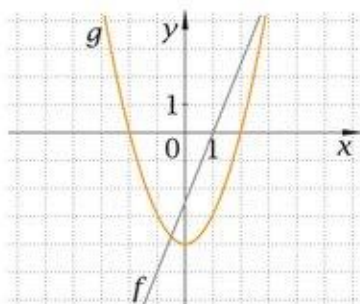
e) $f(x)g(x) \geq 0$



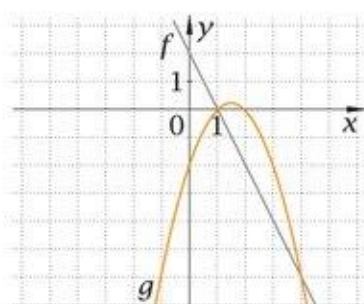
b) $f(x)g(x) \leq 0$



d) $f(x)g(x) \geq 0$

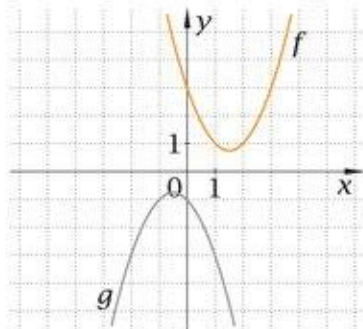


f) $f(x)g(x) < 0$

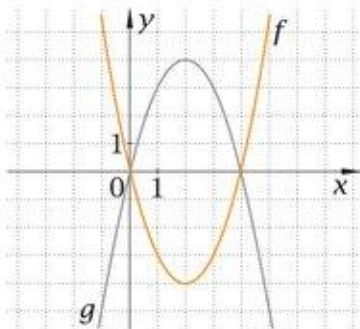


61. Korzystając z wykresów funkcji f i g , rozwiąż nierówność.

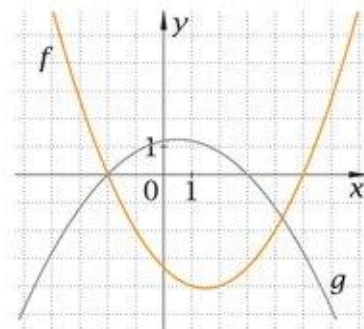
a) $f(x)g(x) < 0$



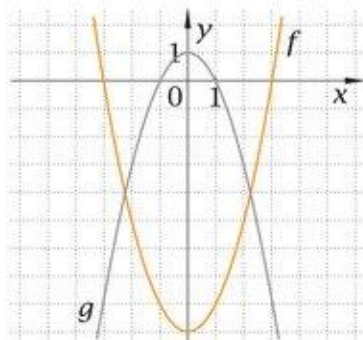
c) $f(x)g(x) < 0$



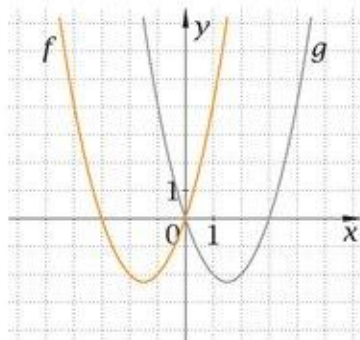
e) $f(x)g(x) > 0$



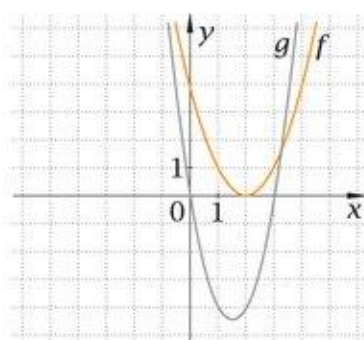
b) $f(x)g(x) \geq 0$



d) $f(x)g(x) > 0$

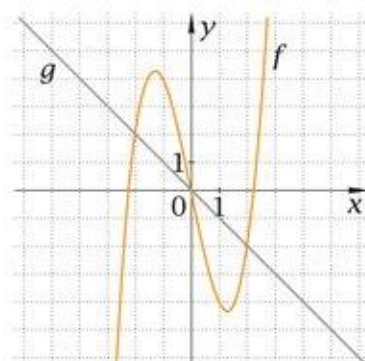
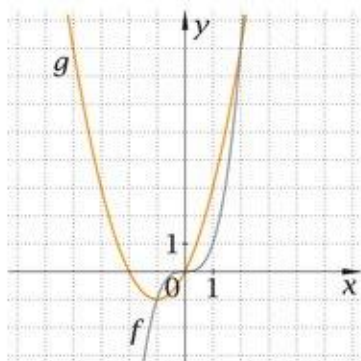
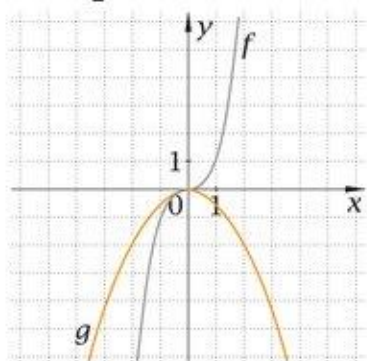


f) $f(x)g(x) \geq 0$



Я62. Korzystając z wykresów funkcji f i g , rozwiąż nierówność.

a) $f(x) = x^3$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $x^3 \geq -\frac{1}{2}x^2$ b) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 + 2x$, $x^3 < x^2 + 2x$ c) $f(x) = x^3 - 5x$, $g(x) = -x$, $x^3 - 5x < -x$



Я63. Sporządź wykresy funkcji f i g , a następnie rozwiąż podaną nierówność.

a) $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = x^2 - 5$, $(3x - 1)(x^2 - 5) > 0$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, $g(x) = 4 - x^2$, $(\frac{1}{2}x + 3)(4 - x^2) \geq 0$
 c) $f(x) = -2x - 5$, $g(x) = x^2 - 5x$, $(-2x - 5)(x^2 - 5x) < 0$
 d) $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = x^2 - 6x + 8$, $(2x - 4)(x^2 - 6x + 8) > 0$
 e) $f(x) = 3 - x$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$, $(3 - x)(-\frac{1}{2}x^2 + x + 4) \leq 0$
 f) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$, $g(x) = x^2 + 2x + 1$, $(-\frac{2}{3}x + 4)(x^2 + 2x + 1) \leq 0$
 g) $f(x) = -x^2 + 4$, $g(x) = x^2 - 9$, $(-x^2 + 4)(x^2 - 9) > 0$
 h) $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, $(x^2 - 3x)(-x^2 + 2x + 3) \leq 0$

Я64. Rozwiąż nierówność.

a) $x(1 - x^2) < 0$ e) $x^2(1 - 2x) \leq 0$
 b) $2x(x^2 - 2x) > 0$ f) $x^2(5 - x^2) < 0$
 c) $-\frac{1}{2}x(x^2 - 3) \geq 0$ g) $-x^2(x^2 + 6x) > 0$
 d) $x(x^2 - 4x + 3) > 0$ h) $-x^2(4x^2 + 4x + 1) \leq 0$

Я65. Rozwiąż nierówność.

a) $(2 - x)(x^2 + 3x + 2) < 0$ f) $(-x - 5)(x - 5)^2 \leq 0$
 b) $(3x - 1)(-5x^2 - 3x + 2) \geq 0$ g) $(-2x^2 - 5x + 3)(-x^2 - 4x + 1) > 0$
 c) $(9 - x^2)(3x^2 + 2x - 1) > 0$ h) $(x^2 - 3x - 10)(-x^2 + 7x - 12) > 0$
 d) $(x^2 + 4x)(x^2 + 2x - 8) < 0$ i) $(x^2 + x + 1)(-x^2 - 1) > 0$
 e) $(5 - x^2)(-2x^2 + 3x - 1) < 0$ j) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) > 0$

Я66. Rozłóż na czynniki wielomian zapisany po lewej stronie nierówności, a następnie rozwiąż tę nierówność.

a) $x^3 - 5x > 0$

c) $x^3 + x^2 - 6x \leq 0$

e) $x^4 - 9x^2 \geq 0$

b) $x^3 - 5x^2 > 0$

d) $-2x^3 - x^2 + x < 0$

f) $-x^4 + 4x^3 + 5x^2 < 0$

Я67. Rozwiąż nierówność.

a) $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 > 0$

d) $-x^3 + x^2 + x - 1 < 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 5x + 15 \leq 0$

e) $3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 \geq 0$

c) $-x^3 - 2x^2 + x + 2 < 0$

f) $-4x^3 + 12x^2 - 2x + 6 \geq 0$

Я68. Rozwiąż nierówność.

a) $(2x - 5)x^3 \geq 0$

c) $-x^7(x^2 + 3) < 0$

e) $-3x^5(x - 3)^2 \leq 0$

b) $x^5(2 - 4x) > 0$

d) $x^3(2x^2 - 1) \geq 0$

f) $x^7(-x^2 + 6x - 5) < 0$

Я69. Rozwiąż nierówność (rozłóż najpierw wielomian na czynniki).

a) $4x^3 + 4x^2 - 15x - 18 < 0$

d) $x^4 - 9x^2 + 20 < 0$

b) $x^3 + x + 2 \leq 0$

e) $x^7 + x^5 - 30x^3 > 0$

c) $x^3 + 3x^2 - 16x + 12 > 0$

f) $-x^8 + 2x^6 + 3x^4 \geq 0$

Я70. a) Dla jakich wartości zmiennej x wyrażenie $3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x + 2$ przyjmuje wartości dodatnie?

b) Dla jakich wartości s wyrażenie $-s^3 + 8s^2 - 21s + 10$ przyjmuje wartości mniejsze od -8 ?

c) Dla jakich wartości zmiennej t wartość wyrażenia $7t^4 + 5t^3 + t^2$ jest mniejsza od wartości wyrażenia $t^4 - 14t^3 + 6t$?

Я71. Rozwiąż nierówność jak najprostszym sposobem.

a) $x^4(2 - x)^3 > 0$

e) $(x^2 - 2x + 5)(-x^2 - 3x + 7)^6 \geq 0$

b) $(5x - 2)^4(x + 7) \leq 0$

f) $5x^3 - x^2 + 15x - 3 \geq 0$

c) $(x^2 - 3)(-x^2 + 2x - 3) < 0$

g) $x^8 + 3x^7 + 4x^6 \leq 0$

d) $(x + 3)^7(2x - 1)^6(1 - 3x)^5 > 0$

h) $-x^4 - 4x^3 - 5x^2 > 0$

Я72. Znajdź dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{(3x + 1)^2(2x - 1)}$

d) $f(x) = \sqrt{2x^9 - 3x^8 + 6x^3 - 9x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{(2x - 1)^4(2x^2 + x + 1)}$

e) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{6x^3 + 14x^2 - 3x - 7}}$

c) $f(x) = \sqrt{-3x^3 + 14x^2 - 20x + 8}$

f) $f(x) = \frac{2x - 3}{\sqrt{(3 - x)^6(3x^2 + 2x - 1)^2}}$

Я73. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność.

a) $(2x^2 - 3x - 2)(x + 3) > 0$

c) $(x + 1)^2(x - 4) \geq 0$

b) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 > 0$

d) $-x^3 + 6x^2 - 5x < 0$

Я74. Rozwiąż nierówność.

a) $(2x - 3)(5 - 3x)(1 - 3x) \geq 0$

d) $(3 - x^2)(x^3 - 2x^2 - 4x) > 0$

b) $(x - 4)(x^2 + 5x - 6)(-x^2 + 2x + 1) < 0$

e) $(-5x^3 + 2x^2 - 10x + 4)(x^2 + 2x - 2) \geq 0$

c) $(4 - 3x)(2x^2 - 3x + 1)(3x^2 - 4x + 1) \leq 0$

f) $(x^2 - 3x - 4)(3x^4 + 5x^2 - 12) < 0$

Я75. Kolejne długości krawędzi akwarium w kształcie prostopadłościanu różnią się o jeden decymetr. Ile może być równa długość najkrótszej krawędzi akwarium, jeżeli mieści się w nim więcej niż 60 litrów wody?

Я76. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$. Znajdź argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje wartości:

a) nieujemne,

b) mniejsze od 30.

Я77. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - x$ przyjmuje wartości większe od wartości funkcji $g(x) = x^3 - 2x^2 - 8x - 2$?

Я78. Dane są funkcje $f(x) = \sqrt{(-x^2 + 9)(x + 5)}$ i $g(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 3x}}$. Znajdź wszystkie liczby naturalne, które należą równocześnie do dziedzin obu tych funkcji.

Я79. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami wielomianu $W(x)$. Wyznacz zbiór tych argumentów, dla których wielomian przyjmuje wartości ujemne.

a) $x_1 = 0, x_2 = -2; W(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b$

b) $x_1 = 2, x_2 = 3; W(x) = -x^3 + ax^2 + bx - 12$

Я80. Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + 2x + b$ jest podzielny przez trójmian $x^2 - 3x + 2$. Dla jakich argumentów wielomian $W(x)$ przyjmuje wartości większe od 6?

Я81. Dla jakich wartości liczb p oraz r nierówność $(x^2 + x - 12)(x^2 + px - 2rx - 2pr) \geq 0$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą?

Я82. Wyznacz takie wartości parametru m , dla których reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^5 - 2mx^3 - 5x^3 + 10mx - 6x + 15$ przez dwumian $x - m$ jest większa od 3.

Я83. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność:

$$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 4 > 0$$

Я84. Wykaż, że nierówność $-x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 4x - 6 \geq 0$ nie ma rozwiązania.

Я85. Rozwiąż nierówność.

a) $|x^3 + x| > x^2 + 1$

b) $x^4 - 5x^2 \geq |x^2 - 5|$

c) $|x^3 - 6x| > 5x^2$

Я86. Ustal, dla jakich wartości parametrów b i c zbiorem rozwiązań nierówności $(x^2 + bx + c)(-x^2 + 2x + 3) \geq 0$ jest zbiór:

a) $\langle -4; -1 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$ b) $\langle 1; 3 \rangle \cup \{-1\}$ c) $\langle -1; 3 \rangle$ d) $(-\infty; -1) \cup \langle 3; +\infty)$

FUNKCJE WIELOMIANOWE (CD.)

Я87. Dopasuj wzory funkcji do wykresów.

$f_1(x) = -(x-3)^3(x+2)$

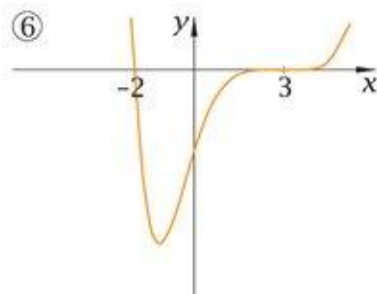
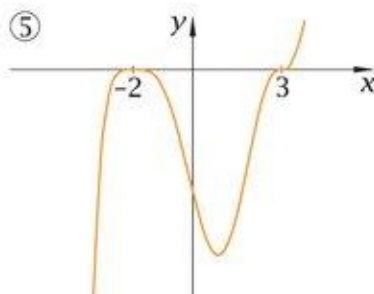
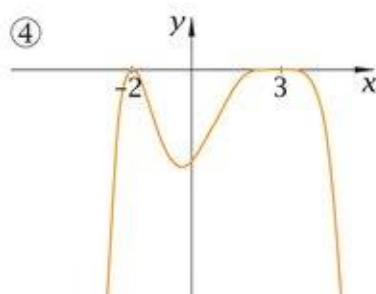
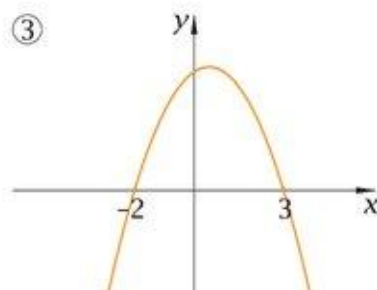
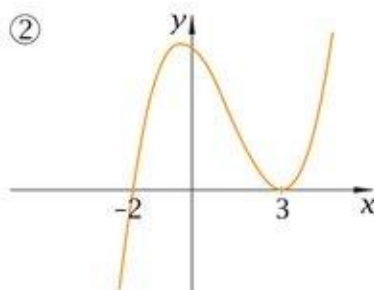
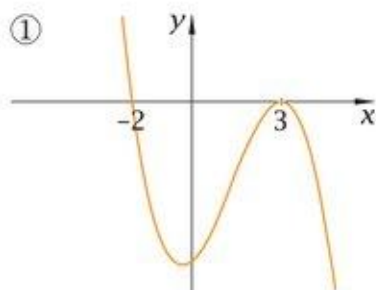
$f_3(x) = -(x-3)^4(x+2)^2$

$f_5(x) = (x-3)^5(x+2)$

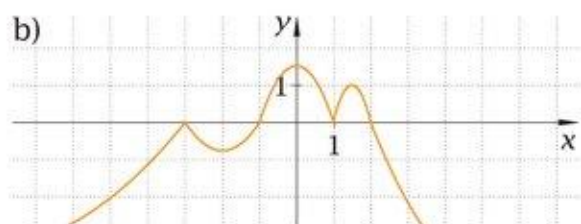
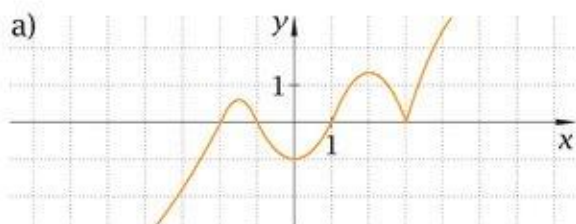
$f_2(x) = -(x-3)^2(x+2)^3$

$f_4(x) = (x-3)^2(x+2)$

$f_6(x) = (x-3)(x+2)^4$



Я88. Podaj dwa przykłady wzorów funkcji wielomianowych, których znaki wartości zmieniają się tak jak znaki wartości funkcji przedstawionej na wykresie. Jaki jest najniższy stopień wielomianu w każdym przypadku?



Я 89. Rozważmy cztery własności funkcji wielomianowej $y = W(x)$.

- ① Funkcja przyjmuje tylko wartości ujemne.
- ② Liczby 2 i 6 są pierwiastkami dwukrotnymi wielomianu $W(x)$.
- ③ Funkcja przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x \in (-\infty; -1)$.
- ④ Dla $x \in (6; +\infty)$ funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla $x \in (-\infty; 2)$ przyjmuje wartości ujemne.

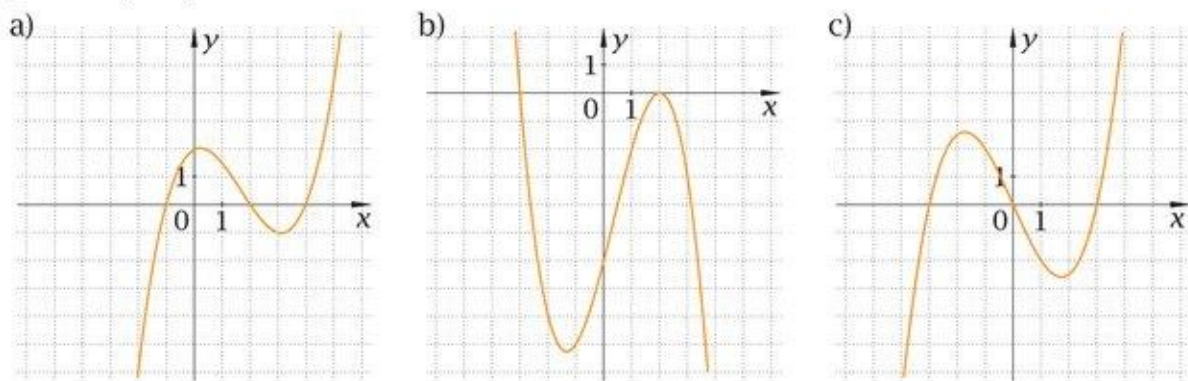
Podaj przykład wzoru funkcji wielomianowej, która ma:

- | | | |
|---------------|---------------|--------------------|
| a) własność ① | c) własność ③ | e) własności ② i ③ |
| b) własność ② | d) własność ④ | f) własności ② i ④ |

Я 90. Znajdź wzór wielomianu czwartego stopnia, o którym wiadomo, że:

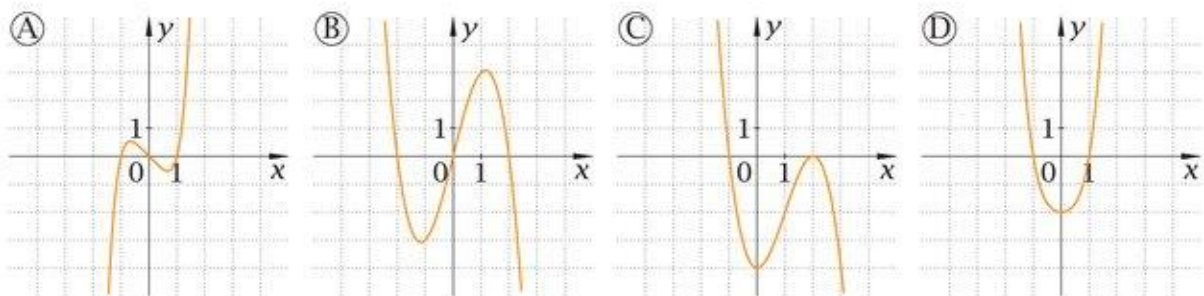
- a) liczby: $-3, -1, 0, 3$ są pierwiastkami tego wielomianu, a do wykresu tego wielomianu należy punkt $A = (2, 1)$,
- b) liczby 1 i 2 są pierwiastkami dwukrotnymi tego wielomianu, a wykres tego wielomianu przecina oś y w punkcie o rzędnej 3.

Я 91. Znajdź wzór wielomianu trzeciego stopnia, którego wykres przedstawiono na poniższym rysunku.



Я 92. Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy czterech funkcji wielomianowych. Dopasuj te wykresy do odpowiednich wzorów.

I. $y = x^4 + x^2 - 2$ II. $y = -(x+1)(x-2)^2$ III. $y = -x^3 + 4x$ IV. $y = x^5 - x$



Я93. Podaj przykład wielomianu $W(x)$ czwartego stopnia, który:

- przyjmuje wyłącznie wartości ujemne,
- ma tylko dwa pierwiastki, -3 oraz 4 , i nie przyjmuje wartości ujemnych,
- $W(-\sqrt{3}) = W(-\sqrt{2}) = W(\sqrt{5}) = W(\sqrt{6}) = 0$ i $W(\sqrt{7}) < 0$.

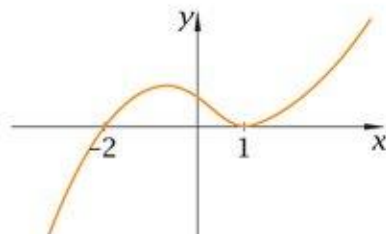
Я94. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji wielomianowej stopnia trzeciego $y = W(x)$. Wymień pierwiastki poniższych wielomianów i podaj ich krotności.

$$W_1(x) = (x - 1)W(x)$$

$$W_3(x) = (x - 1)^2(x + 2)W(x)$$

$$W_2(x) = (x + 2)^2W(x)$$

$$W_4(x) = -(x - 1)^2(x + 2)^2W(x)$$

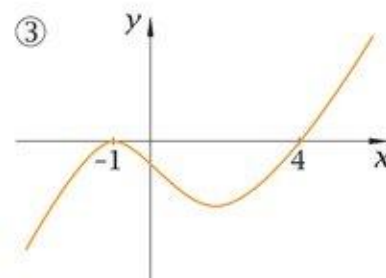
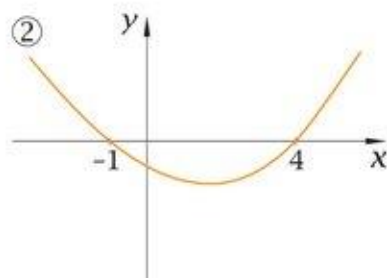
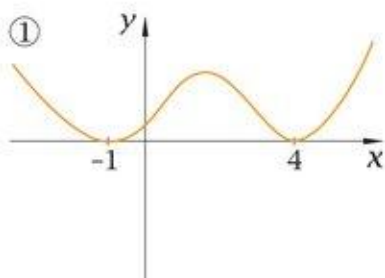
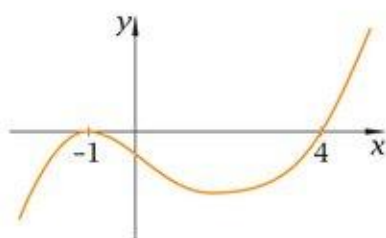


Я95. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji wielomianowej $y = W(x)$. Dopasuj podane wzory do poniższych wykresów.

Ⓐ $y = (x + 1)W(x)$

Ⓑ $y = (x - 4)^2W(x)$

Ⓒ $y = (x + 1)^2(x - 4)W(x)$



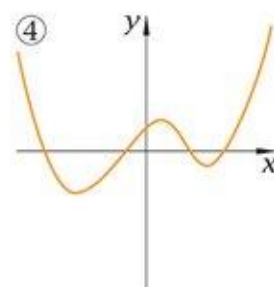
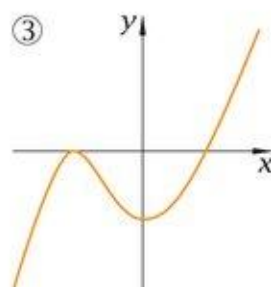
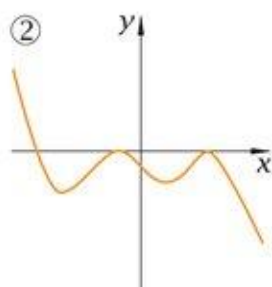
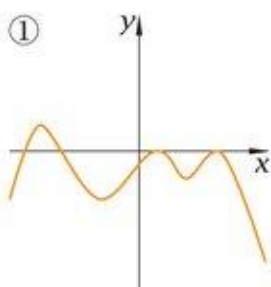
Я96. Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji wielomianowych postaci $y = W(x)$. Niech a_n oznacza współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu $W(x)$. Dopasuj zdania do wykresów.

Ⓐ Wielomian $W(x)$ ma jeden pierwiastek parzystokrotny i $a_n > 0$.

Ⓑ Wielomian $W(x)$ ma jeden pierwiastek nieparzystokrotny i $a_n < 0$.

Ⓒ Wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$ są nieparzystokrotne.

Ⓓ Wielomian $W(x)$ ma tyle samo pierwiastków parzystokrotnych co nieparzystokrotnych.



Я97. Naszkicuj wykresy odpowiednich funkcji i określ liczbę rozwiązań równania.

a) $x^{12} = -x^{10} + 2$ b) $x^{17} - x + 10 = 0$ c) $x^{40} + x^{20} - 3 = 0$ d) $x^5 + x^{70} = -5$

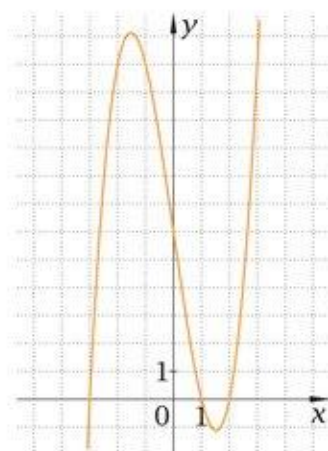
Я98. Czy wykresy funkcji $f(x) = 3x^{10} + 2x^9 - x^7 + 15$ i $g(x) = 3x^{10} - x^5 + 4x^2 - 20$ mają punkty wspólne?

Я99. Niech n oznacza liczbę naturalną dodatnią. Zbadaj, ile miejsc zerowych ma funkcja określona wzorem $f(x) = x^{3n} + 3x^{2n} - 4x^n - 12$ w zależności od parametru n .

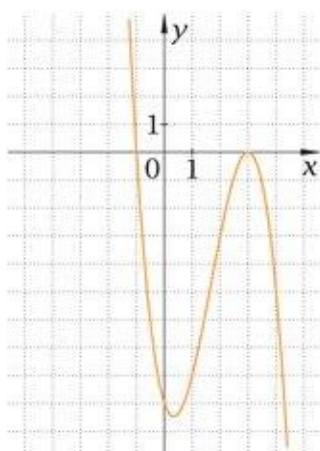
NIERÓWNOŚCI WIELOMIANOWE (CD.)

Я100. Poniżej przedstawiono wykres funkcji wielomianowej $W(x)$. Skorzystaj z rysunku i rozwiąż podane nierówności.

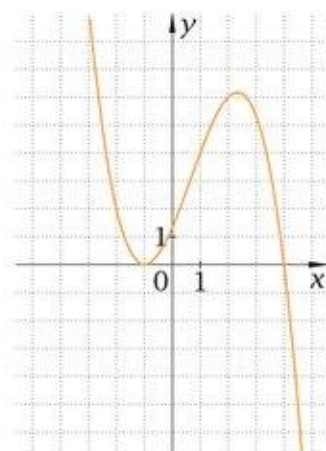
a) $W(x) = (x+3)(x-1)(x-2)$ b) $W(x) = -(x+1)(x-3)^2$ c) $W(x) = \frac{1}{3}(4-x)(x+1)^2$



I. $W(x) > 0$ II. $W(x) \leq 0$



I. $W(x) < 0$ II. $W(x) \geq 0$



I. $W(x) > 0$ II. $W(x) \leq 0$

Я101. Rozwiąż nierówność.

a) $(x+3)(x-2)(x+1) \geq 0$

b) $-(x-2)^2(x-1)^2(x+1)^3 > 0$

c) $x(x-3)^2(x+4)^5 \geq 0$

d) $-3\left(x + \frac{1}{2}\right)^6(x - \sqrt{2})^4(x - 1)^3 < 0$

e) $4x^2\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)^2\left(x + \frac{1}{5}\right)^7 \leq 0$

f) $-2(1-x)^3(2x+5)(x+3)(x-2)^9 > 0$

102. Rozwiąż nierówność.

a) $2x^3 - 5x^2 - 2x + 5 > 0$

b) $3x^3 + 2x^2 - 9x - 6 \geq 0$

c) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 > 0$

d) $-3x^4 - x^3 + 18x^2 + 6x > 0$

e) $8x + 6x^2 - 2x^3 < 24$

f) $3x^3 + x^2 \geq 27x + 9$

Я 103. Rozwiąż nierówność.

- a) $(1 - 2x)^3(3x + 2)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0$
- b) $(x^2 + 2x)^{10}(x^2 - x - 6)^5 < 0$
- c) $x(3x - x^2)^5(x^2 - 2x - 3)^4 \leq 0$
- d) $(-2x^2 - 2\sqrt{2}x + x + \sqrt{2})^7(2x^2 + x - 1)^9 \geq 0$
- e) $(-x^2 + 3x - 2)^{2000} \cdot (2x^3 - 3x^2 - 2x + 3)^{2003} < 0$
- f) $(12x^3 - 16x^2 + 7x - 1)^{10} \cdot (-10x^2 + 3x + 1)^5 > 0$

Я 104. Rozwiąż nierówność.

- a) $-5x^3 - 4x^2 + 11x - 2 > 0$
- b) $8x^3 + 2x^2 - 27x - 18 \geq 0$
- c) $-x^4 - 4x^3 + 7x^2 > -10x$
- d) $x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x - 4 \leq 0$
- e) $2x^3 + x^2 + 5x - 3 < 0$
- f) $-12x^3 + 8x^2 + x - 1 \geq 0$
- g) $(x + 1)^3 < (x - 1)^2$
- h) $(x - 2)^3 > (2x + 3)^2 - 26$

Я 105. Uzasadnij, że żadna liczba całkowita nie spełnia nierówności $x^4 + 20 < 9x^2$.

Я 106. a) Liczby: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 10$ są pierwiastkami wielomianu $W(x)$ czwartego stopnia. Wiadomo, że $W(\sqrt{10}) < 0$. Rozwiąż nierówność $W(x) < 0$.

b) Liczby: $x_1 = -4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 5$ są pierwiastkami wielomianu $W(x)$ siódmego stopnia, przy czym liczby x_2 oraz x_4 są pierwiastkami dwukrotnymi. Ponadto $W(1 - \sqrt{3}) > 0$. Rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.

Я 107. Dla jakich argumentów wielomian $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 3$ przyjmuje wartości dodatnie, jeżeli wiadomo, że $W(1) = 0$, $W(2) = -3$ oraz $W(-2) = 45$?

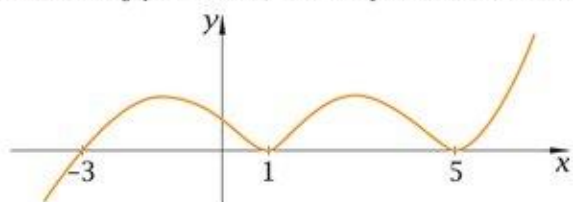
Я 108. Dane są zbiory: $A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 5x^2 \leq 14x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : -2x^3 + x^2 + 8x - 4 > 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} : (x + 3)(x + 2)^2(5 - x)^3 \leq 0\}$. Wyznacz zbiory: $A \setminus B$, $B \cap C$, $A \cup C$.

Я 109. Ustal, dla jakich argumentów wartości funkcji $f(x) = (x^3 + 4x^2 + x - 6)^3$ oraz $g(x) = -2x^5(-2x^2 + 7x - 3)^4$ są różnych znaków.

Я 110. Rozwiąż nierówność $(x - 1)^4(x - 5)^3(x + 2)^5(x - 3)^9 \leq (6 - 2x)^3(x - 1)^2(x^2 - 3x - 10)^7$.

Я 111. Korzystając z wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, rozwiąż nierówność.

- a) $(x + 3)W(x) \geq 0$
- b) $(x + 3)(x - 1)W(x) < 0$
- c) $(x + 3)(x - 1)^2(x - 5)^3W(x) > 0$
- d) $(x - 2)W(x) \leq 0$



Я 112. Rozwiąż nierówność.

a) $|x^3 + 4x^2 + x - 3| < 3$

c) $|x^3| - 3x > 6 - 2x^2$

b) $|x^3 - x| < 6$

d) $x^3 + |x^2 - 2x| > 0$

Я 113. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} 8x^3 - 27 < 0 \\ (4x^2 - 1)^2(125x^3 + 1) \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^3 + 4x^2 + 6x + 8 < 0 \\ x^4 - 7x^2 + 12 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 - 5x^2 - 6x \geq 0 \\ -3x^3 + x^2 + 15x - 5 < 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x^2 - 4x^4 \leq 0 \\ x^3 > 19x - 30 \end{cases}$

Я 114. Dla jakich wartości m rozwiązaniem nierówności $(7 - x)^5(4x + m) \leq 0$ jest każda liczba rzeczywista?

Я 115. Wykaż, że wielomian $W(x) = x^6 - x^5 + 5x^4 - 3x^3 + 6x^2$ nie przyjmuje wartości ujemnych.

FUNKCJA WYKŁADNICZA I FUNKCJA LOGARYTMICZNA

116. Na rysunku przedstawiono wykresy następujących funkcji:

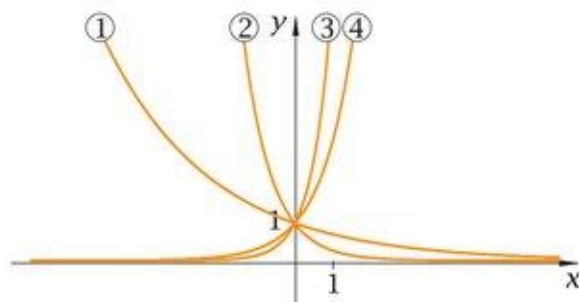
$$f(x) = 7^x$$

$$h(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$$

$$g(x) = \pi^x$$

$$k(x) = \left(\frac{3}{11}\right)^x$$

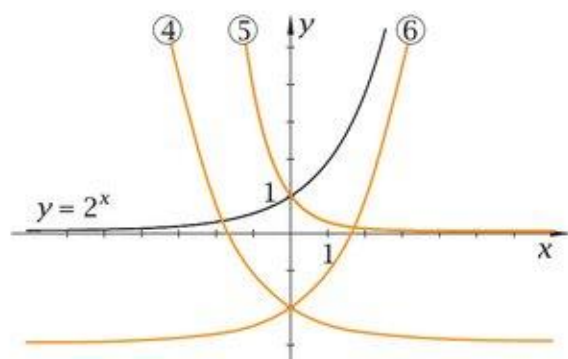
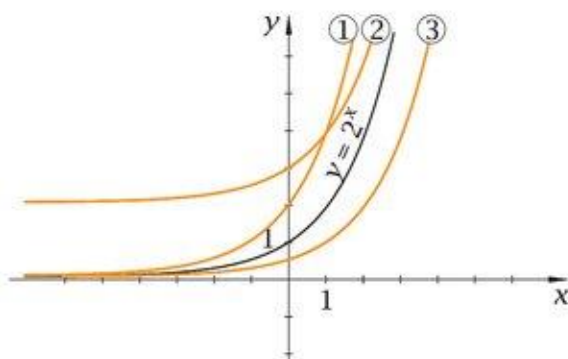
Dopasuj wzory do wykresów.



117. Na rysunkach przedstawiono wykres funkcji $y = 2^x$ oraz wykresy funkcji:

$$f(x) = 2^{x-1} \quad g(x) = 2^x + 2 \quad h(x) = 2^{-2x} \quad k(x) = \frac{1}{2^x} - 3 \quad l(x) = 2^{x+1} \quad m(x) = 2^x - 3$$

Dopasuj wzory do wykresów.



118. Określ dziedzinę funkcji.

a) $y = \log_5(2x - 1)$

e) $y = \log_{3x} 7$

b) $y = \log_{\frac{1}{3}}(5 - 4x)$

f) $y = \log_{x+3} 2$

c) $y = \log_{0,1}(3 - x^2)$

g) $y = \log_{\pi}(|x - \pi| - 3)$

d) $y = \log(2x^2 - x + 1)$

h) $y = \ln(2x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 15x^2)$

119. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji:

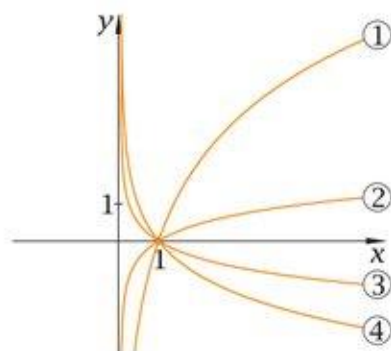
$f(x) = \log_{0,2} x$

$g(x) = \log_5 x$

$h(x) = \log_{\frac{\sqrt{5}}{5}} x$

$k(x) = \log_{\sqrt{2}} x$

Dopasuj wzory do wykresów.



120. Dla jakiej liczby a wykres funkcji f przechodzi przez punkt P ?

a) $f(x) = a^x$ $P = (4, 16)$

d) $f(x) = a^x$ $P = (2, \frac{1}{3})$

b) $f(x) = a^x$ $P = (-3, \frac{1}{8})$

e) $f(x) = 7^x$ $P = (a, 1)$

c) $f(x) = a^x$ $P = (-2, 9)$

f) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ $P = (a, 1024)$

121. Wykres funkcji f przechodzi przez punkty P oraz R . Wyznacz wartości liczb a oraz b , jeżeli wiadomo, że $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

a) $f(x) = 3 \cdot 2^x$ $P = (a, 12)$, $R = (b, \frac{3}{8})$

c) $f(x) = ab^x$ $P = (2, 8)$, $R = (3, 32)$

b) $f(x) = ab^x$ $P = (1, 6)$, $R = (-1, \frac{3}{2})$

d) $f(x) = ab^x$ $P = (-1, 10)$, $R = (2, \frac{5}{4})$

122. Narysuj wykres funkcji $y = 3^x$, a następnie sporządź wykres podanej funkcji.

a) $y = 4 + 3^x$

d) $y = 3^{x-3} + 1$

g) $y = 3^{-x} + 1$

b) $y = 3^{x+2}$

e) $y = -3^x$

h) $y = 3^{-x+2} - 3$

c) $y = 3^{x-1}$

f) $y = 3^{-x}$

i) $y = \frac{3^x}{9}$

123. Sporządź wykres podanej funkcji i na podstawie wykresu podaj jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, monotoniczność, asymptoty, punkty przecięcia z osiami, argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

a) $y = 5^x - 1$

b) $y = (\frac{1}{3})^{x+5}$

c) $y = 2 - 2^x$

d) $y = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{x-1} - 4 \right|$

124. Które z podanych wzorów przedstawiają tę samą funkcję?

$$f(x) = 4^x$$

$$g(x) = 2^{-2x}$$

$$h(x) = 4^{-x}$$

$$i(x) = 0,5^{2x}$$

$$j(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}x}$$

$$k(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x}$$

$$l(x) = \frac{1}{2} \cdot 4^{x+1}$$

$$m(x) = 8 \cdot 2^{2x-3}$$

125. Zapisz równanie asymptoty oraz znajdź współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.

a) $f(x) = 9^x - 27$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x + 0,8$

e) $f(x) = (\sqrt{3})^x - 4$

b) $f(x) = 1,3^{x+7}$

d) $f(x) = e^{x-2}$

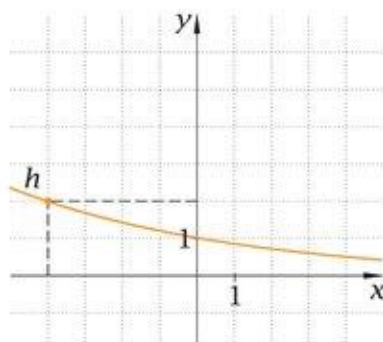
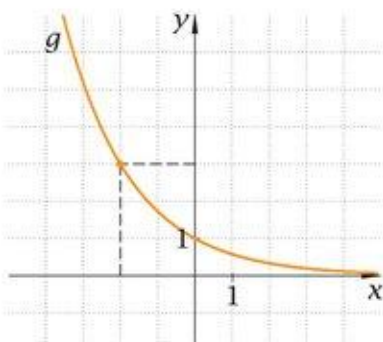
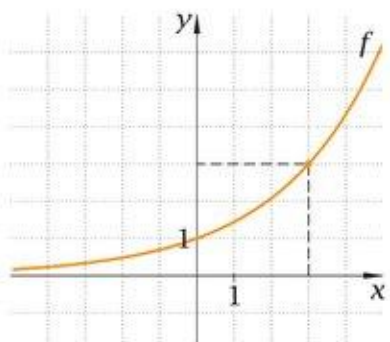
f) $f(x) = 11^{x-1} + 2$

126. Dla jakich wartości a i b do wykresu funkcji $y = a^x + b$ należą punkty P i M ?

a) $P = \left(0, \frac{1}{2}\right), M = (-1, -0,3)$

b) $P = (0, 3), M = \left(-\frac{1}{4}, 4\right)$

127. Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji wykładniczych typu $y = a^x$. Podaj wzory tych funkcji.



128. Podaj przykład wzoru funkcji postaci $y = \left(\frac{1}{10}\right)^{x+a} + b$ spełniającej warunek:

a) funkcja nie ma miejsc zerowych,

b) asymptotą wykresu funkcji jest prosta $y = -2$,

c) wykres przecina oś rzędnych w punkcie $(0, -3)$,

d) miejscem zerowym funkcji jest liczba 4,

e) wykres funkcji przecina oś odciętych w punkcie $(-2, 0)$ i ma asymptotę $y = 3$.

129. Określ dziedzinę funkcji.

a) $y = \log_x(4x - 1)$

b) $y = \log_{x-4}(12 - 2x)$

c) $y = \ln |3x + 1|$

130. Określ dziedzinę funkcji.

a) $y = \log_{x^2-4}(4x - x^2)$

c) $y = \log_{x^3-8}(x^4 - x^2)$

b) $y = \log_{\frac{1}{x^2}}(8x^3 - x^2)$

d) $y = \log_{|x-5|}(x^2 - 5x + 6)$

Я 131. Naskicuj wykres funkcji $y = \log_3 x$, a następnie sporządź wykres funkcji g .

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| a) $g(x) = 2 + \log_3 x$ | e) $g(x) = \log_3 81x$ | i) $g(x) = \log_3(4 - x)$ |
| b) $g(x) = \log_3(x + 2)$ | f) $g(x) = 1 - \log_3 x$ | j) $g(x) = \log_3 x $ |
| c) $g(x) = \log_3(x + 3) - 1$ | g) $g(x) = \log_3(-x)$ | k) $g(x) = -2 + \log_3 x + 3 $ |
| d) $g(x) = \log_3 \frac{x}{3}$ | h) $g(x) = \log_3(x - 1) $ | l) $g(x) = \log_3 2 - x $ |

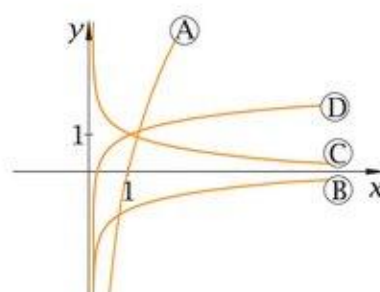
132. Które z podanych wzorów przedstawiają tę samą funkcję?

$f_1(x) = \log_5 5x$	$f_3(x) = \log_5 x^5$	$f_5(x) = \log_5 x^5 $	$f_7(x) = 5 \log_5 x$
$f_2(x) = \log_5(x + 5)$	$f_4(x) = \log_{5x} 5$	$f_6(x) = 1 + \log_5 x$	$f_8(x) = (\log_5 x)^5$

133. Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy następujących funkcji:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| ① $y = \log 10x$ | ③ $y = \log x^{10}$ |
| ② $y = \log \frac{10}{x}$ | ④ $y = \log \frac{x}{10}$ |

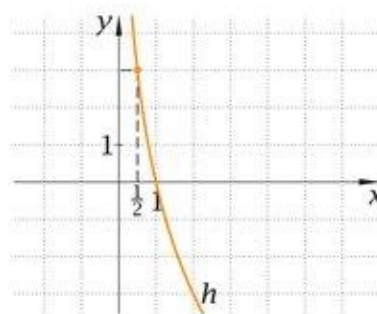
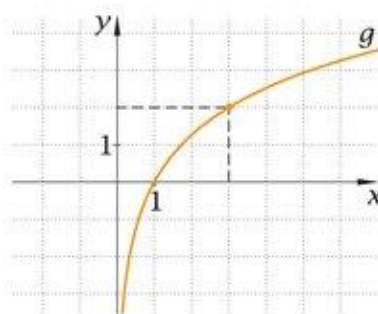
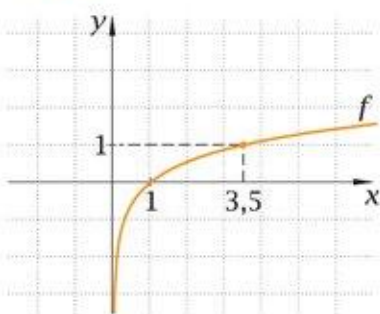
Dopasuj wzory do wykresów.



134. Dla jakiej liczby a wykres funkcji f przechodzi przez punkt P ?

- | | |
|--|--|
| a) $f(x) = \log_a x$ $P = (4, 2)$ | d) $f(x) = \log_a x$ $P = \left(\frac{1}{25}, -4\right)$ |
| b) $f(x) = \log_a x$ $P = \left(\frac{1}{10}, -1\right)$ | e) $f(x) = \log_8 x$ $P = \left(a, -\frac{1}{2}\right)$ |
| c) $f(x) = \log_a x$ $P = (9, -2)$ | f) $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$ $P = (9, a)$ |

Я 135. Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji typu $y = \log_a x$. Podaj ich wzory.



Я 136. Dla jakich wartości m i n podane wzory opisują tę samą funkcję?

- | |
|---|
| a) $y = \ln \frac{(5x)^3}{2}$ i $y = m + n \ln x$ |
| b) $y = 1 - \log_3 x$ i $y = \log(mx)^n$ |

Я 137. Znajdź takie wartości a i b , aby punkty M i N należały do wykresu funkcji $y = a + b \log_2 x$.

a) $M = \left(\frac{1}{2}, 4\right), N = (4, 1)$

b) $M = \left(1, \frac{1}{3}\right), N = \left(0, 125, -8\frac{2}{3}\right)$

Я 138. Dane są funkcje:

$$f(x) = \log_{12}(x - 4), \quad g(x) = \log_{0,4}(x + 9), \quad h(x) = -8 + \log_{\frac{\sqrt{3}}{4}} x, \quad k(x) = \frac{2}{11} + \log_{\sqrt{7}} |x|.$$

Wskaż wśród nich te funkcje, które:

- a) są malejące,
- b) mają dodatnie miejsce zerowe,
- c) mają wykres przecinający oś y ,
- d) mają asymptotę pionową inną niż $x = 0$,
- e) są różnowartościowe,
- f) nie są określone dla liczb ujemnych.

Я 139. Podaj równanie asymptoty i współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.

a) $y = \log_8(x + 1)$

d) $y = -3 + \log_{0,1} x$

g) $y = 2 - \log_2(x - 1)$

b) $y = \log_{\frac{1}{6}}(x - 4)$

e) $y = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{7}x\right)$

h) $y = 1 + \ln(x + 2)$

c) $y = 2 + \log_5 x$

f) $y = \log_3(10x)$

i) $y = 3 - \log_5 \frac{x}{25}$

Я 140. Podaj przykład wzoru funkcji typu $y = a + \log_{\frac{1}{3}}(x + b)$ spełniającej warunek:

- a) dziedziną funkcji jest zbiór $(-5; +\infty)$,
- b) dziedziną funkcji jest zbiór $(-\infty; 2)$,
- c) asymptotą wykresu funkcji jest prosta o równaniu $x = -4$,
- d) asymptotą wykresu funkcji jest prosta o równaniu $x = 5$,
- e) wykres funkcji przecina oś y w punkcie $(0, 3)$,
- f) miejscem zerowym funkcji jest $x = -3$,
- g) dziedziną funkcji jest zbiór $(-3; +\infty)$ i wykres przecina oś y w punkcie $(0, 1)$,
- h) asymptotą wykresu funkcji jest prosta o równaniu $x = 1$ i wykres przecina oś x w punkcie $(4, 0)$.

Я 141. Wyobraź sobie, że rysujesz wykres funkcji $y = 10^x$ takim ołówkiem, że linia wykresu ma grubość 0,5 mm. Załóżmy, że udaje się linię prowadzić tak, że wykres funkcji przebiega jej środkiem. Przyjmijmy też, że jednostka układu współrzędnych ma 1 cm długości. W którym miejscu rysowana linia powinna dotknąć osi x ?

Я 142. Sporządź wykres funkcji i podaj jej zbiór wartości.

a) $y = |2^{-x} - 3|$

c) $y = -4^{|x|} + 2$

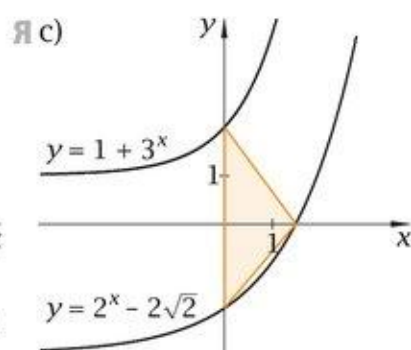
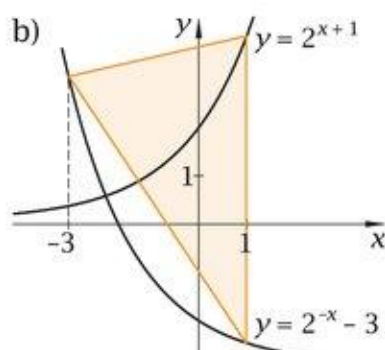
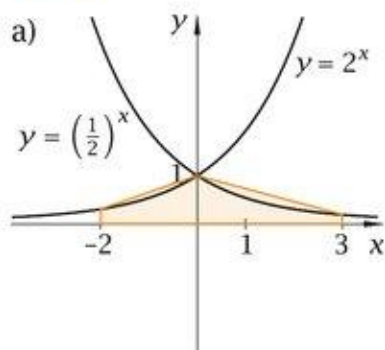
e) $y = 3^{|x-4|+1}$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

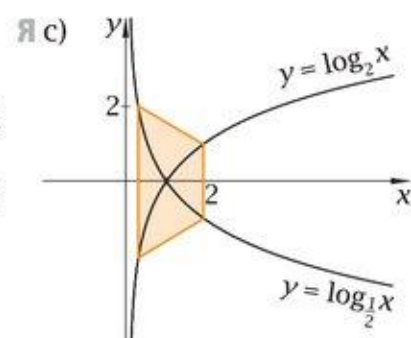
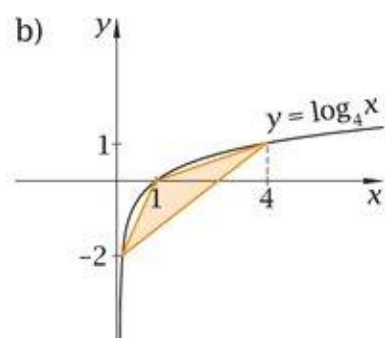
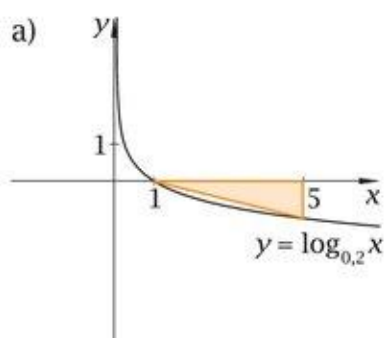
d) $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2\right| - 1$

f) $y = -2^{|x|-1}$

143. Oblicz pole zaznaczonego wielokąta.



144. Oblicz pole zaznaczonego wielokąta.



Я **145.** Naskicuj wykresy funkcji.

a) $y = \log x^2$ i $y = 2 \log x$

b) $y = \log_2 x$, $y = \log_2 \sqrt{x}$ i $y = \log_{\sqrt{2}} x$

Я **146.** Narysuj wykres funkcji f i — korzystając z niego — opisz własności tej funkcji.

a) $f(x) = \log_{0.5} |x + 2|$

b) $f(x) = \log_{0.5} |x| + 2$

Я **147.** Korzystając z wykresów odpowiednich funkcji, rozwiąż równanie.

a) $\log_2 x = -x + 1$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x + 1 = x^2$

c) $\log_2 x = -2x^2 + x + 7$

Я **148.** Korzystając z wykresów odpowiednich funkcji, rozwiąż nierówność.

a) $2^x \leq 3x - 1$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} < -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$

c) $\frac{5^x}{5} + 3 > \log_2(x + 1)$

Я **149.** Uzasadnij, że wartości funkcji $f(x) = 3^{|x|}$ są nie mniejsze od 1.

Я **150.** Uzasadnij, że podane równanie i nierówność nie mają rozwiązań.

a) $3^x - x = -1$

b) $\log(-x) + 8x > 2(x^2 + 3)$

Я **151.** Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których dziedziną funkcji $f(x) = \log((k^2 - 1)x^2 + (2k - 2)x + k)$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

RÓWNANIA WYKŁADNICZE I LOGARYTMICZNE

152. Rozwiąż równanie.

a) $4^x = 0,25$

d) $7^4 - 3^x = 1$

g) $5^{3x+7} = 5^{x-1}$

b) $2^x = \sqrt{2}$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$

h) $0,7^{x-4} = 0,7^{2x+2}$

c) $5^x = \sqrt[3]{25}$

f) $8^x = 2$

i) $3^{2x-1} = 9$

153. Rozwiąż równanie.

a) $3^x \cdot 3^{2x} = 27$

c) $9^{2x} : 9^{x+1} = 81$

e) $2^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = 2\sqrt{2}$

b) $9^x \cdot 3 = 9$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = 4$

f) $10^{2x} \cdot 0,1^x = \sqrt{1000}$

154. Rozwiąż równanie.

a) $\log_3 x = 2$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$

c) $\log_{17}(x-1) = 0$

155. Rozwiąż równanie.

a) $\log_{0,05}(2x) = -\frac{1}{2}$

b) $\log(10x) = 4$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) = -2$

156. Rozwiąż równanie.

a) $\log_5 x = \log_5(2x-3)$

d) $\log_7 2x = \log_7(x^2-3)$

b) $\log(x+1) = \log(3x+4)$

e) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2+6x)$

c) $\log(2x+3) = \log(x^2+4)$

f) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-4) = \log_{\sqrt{2}}(x-4)^2$

157. Rozwiąż równanie.

a) $3 \log_7 x = 6$

c) $3 \log_6 x + 4 = 13$

e) $\frac{1}{3} \log_{\sqrt{2}} x + 1 = \frac{5}{3}$

b) $2 \log x = 1$

d) $4 + \log_{\frac{1}{2}} x = 3\frac{1}{2}$

f) $5 - \frac{3}{2} \log_{\frac{2}{3}} x = 8$

158. Rozwiąż równanie.

a) $\log x + \log 2 = \log 14$

c) $2 \log_{0,1} x = \log_{0,1} 4$

e) $3 \log_5 x + \log_5 x^2 = 10$

b) $\log_3 2 - \log_3 x = \log_3 8$

d) $\log_2 x - \log_2 3 = 5$

f) $\log_3 \sqrt{2} + \log_3 x = \frac{1}{2}$

159. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3^x}{6^x} = 8$

b) $20^x = 10000 \cdot 2^x$

c) $21^x = 3\sqrt{3} \cdot 7^x$

d) $\frac{25}{4^x} = \frac{16}{5^x}$

e) $6^{x^2-4} = \sqrt{6}$

f) $5^{2x^2-2} = 0,2$

g) $2^{x^2} = (\sqrt{2})^x$

h) $3 \cdot 3^{2x} = \frac{1}{3}$

i) $4 \cdot 4^x = 2^{x+3}$

j) $8 \cdot 3^x = 6^x$

k) $9 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x$

l) $25 \cdot 2^{x+1} = 20 \cdot 5^x$

160. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{(\sqrt{2})^x}{2} = 4^x$

b) $2^{2x-5} : 2^x = \sqrt[3]{4}$

c) $5^x \cdot 5^7 = \frac{1}{5^x}$

d) $10^x : 0,01 = 0,1^x$

e) $\frac{3^{x-1}}{27} = 9^x$

f) $25^{x+3} \cdot \frac{1}{5} = 5^x$

g) $8^{x-3} = 16 \cdot 2^x$

h) $0,25^x \cdot 8^{x-1} = 2$

161. Rozwiąż równanie.

a) $5^{x+1} \cdot 25^{x-1} = \frac{1}{625}$

b) $0,25^x \cdot 8^{x-1} = 2$

c) $10^x \cdot 100^x \cdot 1000^x = 0,1^{1-x}$

d) $(\sqrt{2})^x \cdot (\sqrt{8})^x = 32$

e) $(3\sqrt{3})^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = \sqrt[4]{27}$

f) $(10\sqrt{1000})^x \cdot 0,1^x = (\sqrt[5]{0,1})^{3x+2}$

g) $7^x \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{2x} = 7 \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{7}}{7}\right)^x$

h) $4^{\frac{1}{2}x} \cdot 16^{-x} = \sqrt[3]{64} \cdot (4\sqrt{4})^x$

162. Rozwiąż równanie.

a) $2^x + 2^{x+2} = 20$

b) $3^x - 3^{x-1} = 54$

c) $6^x + 6^{x+1} + 6^{x+2} = 1\frac{7}{36}$

d) $10^{2x+1} - 10^{2x-1} = 990\sqrt{10}$

e) $9^{\frac{x}{2}} + 3^{x+2} = \sqrt{2700}$

f) $5^{2x} + 25^{x+1} = 1,04$

g) $(\sqrt{7})^x - \frac{(\sqrt{7})^{x+1}}{7} = 7(\sqrt{7} - 1)$

h) $\frac{1}{7^x} + 7^{2-x} = 350$

163. Rozwiąż równanie.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} - 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x = 10$

b) $\frac{4}{2^{2x}} - \frac{9}{2^x} + 2 = 0$

c) $\frac{2}{16^x} - \frac{5}{4^x} + 2 = 0$

d) $\frac{1}{9^x} + \frac{\sqrt{3}}{3^x} = 6$

e) $12 - \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{(\sqrt{3})^x}$

f) $2^x + 2^{-x} = \frac{65}{8}$

g) $3^x - 3^{1-x} + 2 = 0$

h) $9^{x+\frac{1}{2}} + 9^{-x} = 4$

164. Rozwiąż równanie. Wynik przedstaw w postaci logarytmu.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $2^x = 5$ | f) $(\sqrt{7})^x \cdot (\sqrt{3})^x = 5$ | k) $9^x + 3^{2x+1} = 16$ |
| b) $5^{x+2} = 7$ | g) $\frac{5}{3^x} = 4^x$ | l) $4^x + (\sqrt{2})^{4x+1} = 3\sqrt{2} + 3$ |
| c) $0,1^{2x+3} = 3$ | h) $5^x \cdot 2^x = 3$ | m) $0,2^x + 5^{1-x} = 1$ |
| d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = \sqrt{5}$ | i) $18^x \cdot 7 = 6^x \cdot 5$ | Я n) $7^{x^2} = 5^{x^3}$ |
| e) $0,5^x \cdot 2^{2x+1} = 3$ | j) $6^{3x-1} = 4$ | Я o) $3^{x^2+x} = 5^x$ |

165. Rozwiąż równanie.

- | | |
|--|--|
| a) $\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 2$ | e) $\log_7 x^2 + \log_7 2 = \log_7 24$ |
| b) $\log_3 5 + 4 \log_3 2 = \log_3 x$ | f) $2 \log_6 x - 3 \log_6 2 = \log_6 18$ |
| c) $\log_{0,4} x - \log_{0,4} 12 = \frac{1}{3} \log_{0,4} 8$ | g) $3 \log_{\frac{2}{3}} x + 2 \log_{\frac{2}{3}} 10 = \log_{\frac{2}{3}} 200$ |
| d) $3 \log 3 + \log x = \log 6$ | h) $2 \log_4 6 = 4 \log_4 x - 2 \log_4 3$ |

Я 166. Rozwiąż równanie.

- | | |
|---|--------------------------------------|
| a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{ 5x+2 } = \sqrt{2}$ | c) $6 \cdot 6^{ x-2 } = 216^{ x+3 }$ |
| b) $5^{ 3x-6 } = 5\sqrt{5}$ | d) $2^{ x^2-4 } = \frac{4^x}{2}$ |

Я 167. Rozwiąż równanie.

- | | |
|--|---|
| a) $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{x^4-9x^2+20} = 1$ | c) $5^{x^3-8x} = 25^{x^2-8}$ |
| b) $7^{x^3-9x^2+8x+2} = 49$ | d) $2^{x^3} \cdot 4^{x^2} = 256 \cdot 16^x$ |

Я 168. Rozwiąż równanie.

- | | |
|---|---|
| a) $\log x + \log(x+1) = \log 6$ | e) $\log_2 x + \log_2(x+1) = 1$ |
| b) $\log_2 x^2 + 5 = \log_2 x$ | f) $\log x + \log(x-5) = \log(6-4x)$ |
| c) $\log_{\frac{1}{3}} x^3 - \log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_{\frac{1}{3}} x$ | g) $\log x = 2 + \log(x-1)$ |
| d) $\ln 2x + \ln(x-1) = -1$ | h) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3 + \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ |

Я 169. Rozwiąż równanie.

- | |
|---|
| a) $\log_2 x \cdot \log_3 x = 0$ |
| b) $\log_3 x \cdot \log x \cdot \ln(x-1) = 0$ |
| c) $\log_{x+1}(x-1) \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x^2-1) \cdot \log_{x^2-1} \frac{1}{3} = 0$ |

Я 170. Rozwiąż równanie.

a) $(\ln x)^2 = \ln x^2$

b) $(2 \log x - 1) \log x = 3$

c) $5(\log_2 x)^2 = 2 + \log_2 x^9$

d) $(\log_{\frac{1}{2}}(x-1) - 4) \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + 4 = 0$

e) $(\log_4(x+2))^2 = 9$

f) $12 + (\log_{0,2} x)^2 = \log_{0,2} x^6$

Я 171. Rozwiąż równanie.

a) $\log x + \log_{0,1} x^2 = 1$

b) $\log_3 x + \log_9 x^3 = 7,5$

c) $\log_2 x - \log_{\frac{1}{4}} x = 4,5$

d) $\log_7 x = \log_{49} x^2$

e) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_8 x^2 = 2$

f) $\log_8 x^3 - \frac{3}{2} = \log_{2\sqrt{2}} x^2 - \log_4 x$

172. Uzasadnij, że równanie $2^x + 3^x + 4^x = 0$ nie ma rozwiązań.

173. Uzasadnij, że równanie $\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{3x-5} \cdot \log(2x^2-5x-2)}{2x+1} = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wyznacz to rozwiązanie.

174. Rozwiąż równanie.

a) $\log_x \frac{1}{8} = 3$

c) $\log_{2x} 64 = 3$

e) $\log_{2x+1} 64 = 3$

b) $\log_{x+1} \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

d) $\log_{2-x} \frac{1}{9} = 2$

f) $\log_x(x+1) = \log_x(2x)$

Я 175. Rozwiąż równanie.

a) $\log_{x-1}(2x^2 - 3x - 2) = 2$

b) $\log_{x+6}(2x^2 + 17x + 30) = 2$

c) $\log_{x-3}(2x^2 - 6x) = 2$

d) $\log_{x+2}(4x + 8) = 2$

e) $\log_{x+1}(2x^3 + 6x^2 + 2x - 2) = 3$

f) $\log_{x-1}(2x^3 - 5x^2 + 2x + 1) = 3$

g) $\log_{x^2-1}(2x^2 - 2) = 2$

h) $\log_{x-2}(2x^3 - 6x^2 + 18x - 15) = 3$

Я 176. Wyznacz rozwiązania równania w zależności od parametru m .

a) $4^x = m + 1$

b) $10^{x+m} = 17$

c) $2^{x+m} = m$

Я 177. Wyznacz liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru m .

a) $6^{x^2+mx} = 6^{\frac{m}{36}}$

b) $7^{x^3+mx^2} = \left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^x$

- Я 178.** a) Znajdź miejsce zerowe funkcji $f(x) = \log_2(x-1) - 2$, a następnie podaj argumenty, dla których funkcja ta przyjmuje wartości ujemne.
 b) Znajdź miejsce zerowe funkcji $f(x) = \log_{0,25}(3x+5) - 1$, a następnie podaj argumenty, dla których funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie.
 c) Znajdź argument, dla którego funkcja $f(x) = \log_5(2x-7)+2$ przyjmuje wartość 4. Następnie podaj wszystkie argumenty, dla których funkcja ta przyjmuje wartości nie mniejsze od 4.
 d) Znajdź argument, dla którego funkcja $f(x) = \log_{\frac{2}{3}}(x+4)-3$ przyjmuje wartość -2 . Następnie podaj wszystkie argumenty, dla których funkcja ta przyjmuje wartości większe od -2 .

Я 179. Rozwiąż równanie.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $\log_2 7x = \log_7 2x$ | d) $\log_{\frac{1}{4}}(x+1)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-5) = 2$ |
| b) $\log_3 x + \log_2 x = \log_5 x$ | e) $\log_3 x - \log_9(x-2) = 1$ |
| c) $\log_2(x+2) - \log_4(x-1)^2 = 5$ | f) $\log x + \ln x = 1$ |

Я 180. Rozwiąż układ równań.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 8 \\ \ln x \cdot \ln y = 15 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} \ln x - e^y = -1 \\ \ln x + e^y = 1 \end{cases}$ | c) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ \log_4 x + \log_2 y = 5 \end{cases}$ |
|--|--|---|

Я 181. Rozwiąż równanie.

- | | | |
|------------------------|-------------------------|------------------|
| a) $2^{1+\ln x} = x^2$ | b) $1 + \log x = \ln x$ | c) $e^x = \ln x$ |
|------------------------|-------------------------|------------------|

Я 182. Wyznacz liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru m .

- | | | |
|----------------|-------------------|--------------------------|
| a) $\ln x = m$ | b) $\log_m x = m$ | c) $ \log_m x = 2m - 4$ |
|----------------|-------------------|--------------------------|

ZASTOSOWANIA FUNKCJI WYKŁADNICZYCH I LOGARYTMICZNYCH

183. Na podstawie badań ustalono, że liczba bakterii w pewnej kolonii zmienia się zgodnie ze wzorem $N = 10\,000e^{0,14t}$, gdzie N oznacza liczbę bakterii, a t — czas (w godzinach) od rozpoczęcia obserwacji.

- a) Jaka była liczba bakterii w momencie rozpoczęcia obserwacji, a jaka trzy godziny później?
 b) Po jakim czasie liczba bakterii przekroczyła 50 000?

184. Liczebność L kolonii bakterii po upływie t minut od momentu rozpoczęcia doświadczenia można obliczyć ze wzoru $L(t) = 10^6 \cdot 1,04^t$.

- Oblicz liczbę bakterii na początku eksperymentu.
- Oblicz liczbę bakterii po pięciu minutach od rozpoczęcia doświadczenia.
- Po jakim czasie liczebność kolonii bakterii podwoi się, a po jakim potroi?
- Przyjęto, że powyższy wzór poprawnie opisuje liczebność kolonii bakterii tak długo, jak długo liczba bakterii jest mniejsza od 10^9 . Określ dziedzinę funkcji $L(t)$.
- Oblicz, ile bakterii byłoby w kolonii po upływie doby, gdyby wzór opisywał liczebność populacji bakterii dla dowolnej liczby t . Oblicz, ile ważyłaby ta kolonia bakterii, przyjmując, że 10^9 bakterii ma masę 1 mg.

185. W roku 1920 na świecie żyło około 1789 mln ludzi, a w roku 1930 — około 2013 mln. Zakładając, że liczba ludności na świecie wzrasta zgodnie z modelem wykładniczym, oblicz:

- ilu ludzi żyło na świecie w roku 1924,
- w którym roku liczba ludności przekroczyła 1,9 mld.

Mówimy, że dana wielkość zmienia się zgodnie z modelem wykładniczym, jeśli tę zmianę można opisać wzorem:

$$f(t) = ba^t$$

gdzie t oznacza czas.

186. Ludność pewnego kraju wzrasta zgodnie z modelem wykładniczym i podwaja się co 30 lat. O ile procent rocznie rośnie liczba ludności tego kraju?

Poziom L głośności dźwięku (w decybelach) można obliczyć ze wzoru:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

I — natężenie dźwięku w W/m^2

I_0 — natężenie dźwięku odpowiadające progowi słyszalności ($I_0 = 10^{-2} \text{ W/m}^2$)

187. Zgodnie z przepisami BHP poziom hałasu wytwarzanego przez kserokopiarke nie może przekroczyć 70 dB. Pewna zepsuta kserokopiar-ka powoduje hałas 75 dB. Ile razy przekroczone zostało dopuszczalne natężenie dźwięku?

188. Okres połowicznego rozpadu fer-
mu ^{256}Fm wynosi 2,63 godziny.

- Opisz wzorem masę fermu pozostałego po czasie t (godzin) z próbki o masie początkowej m_0 .
- Jaka część próbki fermu rozpadnie się w ciągu 10 godzin?
- Po jakim czasie rozpadnie się 99% próbki fermu?

Masa m pierwiastka promieniotwórczego po upływie czasu t wynosi:

$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

m_0 — masa początkowa pierwiastka

T — okres połowicznego rozpadu (podany w tej samej jednostce czasu co t)

189. Izotop plutonu ^{238}Pu , którego okres połowicznego rozpadu wynosi 87 lat, wykorzystuje się jako źródło energii w stymulatorach serca. Energia wydzielana przez ten izotop zamieniana jest w energię elektryczną, która zasila stymulator. Energia wydzielana w jednostce czasu jest wprost proporcjonalna do masy pozostałego w próbce izotopu, a więc zmniejsza się w miarę jego rozpadu.

- O ile procent zmniejszy się energia wydzielana w jednostce czasu przez próbkę ^{238}Pu po 10 latach?
- Projektowany stymulator serca ma mieć źródło energii pozwalające na zasilanie go przez 25 lat. Przyjmijmy, że minimalna ilość ^{238}Pu pozwalająca na prawidłową pracę stymulatora wynosi m_0 . O ile procent większa od m_0 powinna być ilość ^{238}Pu w projektowanym urządzeniu?

190. Średnie ciśnienie atmosferyczne zależy (w przybliżeniu) od wysokości nad poziomem morza zgodnie ze wzorem:

$$p = 1013 \cdot 0,876^h$$

gdzie p jest ciśnieniem w hektopaskalach (hPa), a h wysokością nad poziomem morza w kilometrach. Wzór ten daje dobre przybliżenie dla $h \leq 10$ km.

- Jakie jest średnie ciśnienie atmosferyczne na szczycie Rysów (2499 m n.p.m.), a jakie — na szczycie Mont Blanc (4807 m n.p.m.)?
- Na jakiej wysokości średnie ciśnienie jest dwukrotnie niższe niż na poziomie morza?
- Naszkuć wykres zależności p od h .

191. Przeczytaj informacje podane w ramce.

Kwasowość roztworu mierzy się za pomocą tzw. współczynnika pH . Współczynnik ten równy jest $-\log s$, gdzie s oznacza stężenie jonów wodorowych w roztworze (w molach/dm³).

Woda destylowana (czyli roztwór niewykazujący ani kwasowości, ani zasadowości) ma $pH = 7$. Im mniejsza wartość pH , tym większa kwasowość roztworu.

Oto współczynniki pH kilku innych substancji.

roztwór	pH
sok z cytryny	2,3
kwaśne mleko	4,4
świeże mleko	6,5
krew	7,4

- Oblicz współczynnik pH wody sodowej, w której stężenie jonów wodorowych wynosi $1,3 \cdot 10^{-4}$ moli/dm³.
- Oblicz stężenie jonów wodorowych we krwi i w soku cytrynowym.
- Oblicz, ile razy stężenie jonów wodorowych w kwaśnym mleku jest większe od stężenia tych jonów w świeżym mleku.

192. Skala Richtera służy do określania siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R = \log \frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0 = 10^{-4}$ cm jest stałą nazywaną amplitudą wzorcową. 5 maja 2014 roku w Tajlandii miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,2 w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi i ustal, czy jest ona większa czy mniejsza od 100 cm.

193. Przeczytaj informacje podane w ramce.

Starożytny astronom Klaudiusz Ptolemeusz podzielił gwiazdy na sześć kategorii według jasności (gwiazdami pierwszej wielkości nazwał najjaśniejsze, szóstej wielkości — najsłabsze, które są widoczne gołym okiem). Po latach okazało się, że opisaną przez Ptolemeusza wielkość gwiazdową można w przy-

bliżeniu obliczyć, korzystając z poniższego wzoru:

$$m = -2,5 \log L - 14,05$$

L — jasność gwiazdy w luksach

m — wielkość gwiazdowa

Obecnie ten wzór przyjmowany jest jako definicja wielkości gwiazdowej.

Syriusz ma wielkość gwiazdową $-1,44$, a Gwiazda Polarna $+2,0$. Korzystając z powyższych informacji, oblicz, która z tych gwiazd jest jaśniejsza i ile razy?

194. Uzasadnij, że każdą funkcję postaci $y = b \cdot a^x$ można zapisać w postaci $y = c \cdot e^{kx}$. Wyznacz c i k w zależności od b i a .

195. W tabeli przedstawiono okresy (T) obiegu wokół Słońca (w dniach) i średnie odległości (R) od Słońca (w mln km) planet znanych na przełomie XVI i XVII wieku. Na podstawie tych danych genialny astronom niemiecki Johannes Kepler ustalił związek zwany III prawem Keplera, który można wyrazić wzorem $T = aR^b$, gdzie a i b są pewnymi stałymi wielkościami. Znajdź wartości tych stałych.

Planeta	Okres obiegu (w dniach)	Średnia odległość od Słońca (w mln km)
Merkury	88	57,9
Wenus	225	108,2
Ziemia	365	149,6
Mars	687	227,9
Jowisz	4 330	778,3
Saturn	10 750	1427,0

Temperaturę T stygnącej substancji po upływie czasu t można obliczyć ze wzoru:

$$T = T_0 + (T_p - T_0)e^{-kt}$$

T_0 — temperatura otoczenia (w $^{\circ}\text{C}$)

T_p — początkowa temperatura substancji (w $^{\circ}\text{C}$)

k — stała charakterystyczna dla danej substancji

196. Do naczynia wiano wrzątek. Do godziny 12⁰⁰ woda ostygła do temperatury 90 $^{\circ}\text{C}$, a do 13⁰⁰ do temperatury 80 $^{\circ}\text{C}$. Temperatura otoczenia wynosiła stale 20 $^{\circ}\text{C}$. O której godzinie wiano wrzątek?

PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI

✎ 197. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = f(x)$ o:

- 5 jednostek w prawo,
- 3 jednostki w lewo,
- 10 jednostek w górę,
- 4 jednostki w dół,
- 2 jednostki w prawo i 1 jednostkę do góry,
- 7 jednostek w lewo i 6 jednostek do góry,
- 12 jednostek w dół i 8 jednostek w prawo,
- 11 jednostek w dół i 9 jednostek w lewo.

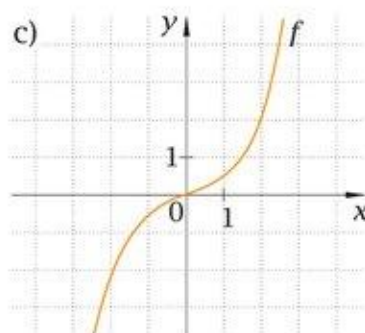
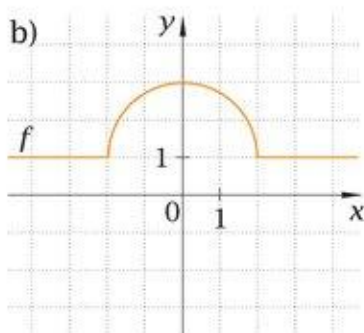
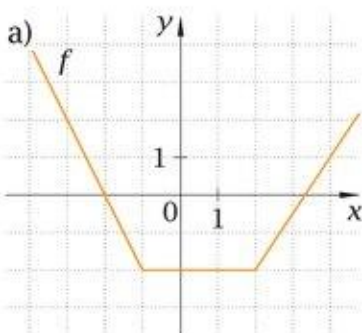
✎ 198. Rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji f . Narysuj wykresy funkcji:

$$g_1(x) = f(x) + 2$$

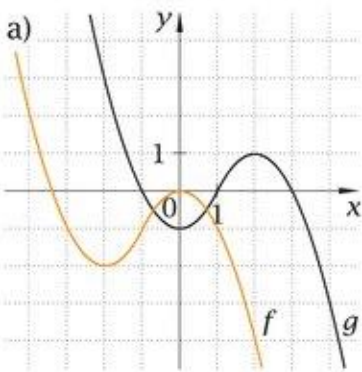
$$g_2(x) = f(x) - 3$$

$$g_3(x) = f(x - 1)$$

$$g_4(x) = f(x + 4)$$



✎ 199. Rysunek przedstawia wykresy funkcji f i g . Która z podanych równości opisuje zależność między tymi funkcjami?

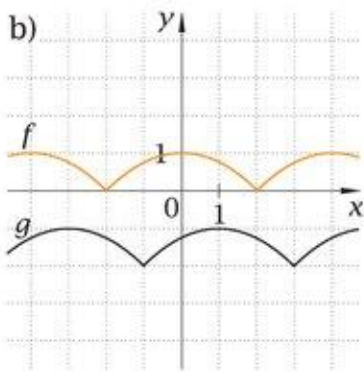


$$g(x) = f(x + 2) + 1$$

$$g(x) = f(x - 2) + 1$$

$$g(x) = f(x + 2) - 1$$

$$g(x) = f(x - 2) - 1$$

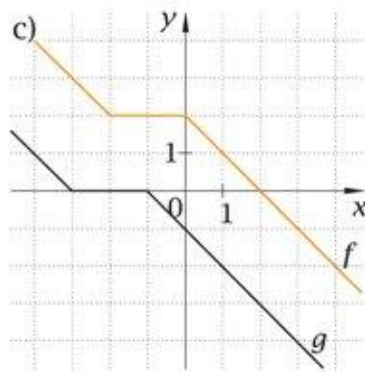


$$g(x) = f(x - 1) - 2$$

$$g(x) = f(x - 2) - 1$$

$$g(x) = f(x + 1) - 2$$

$$g(x) = f(x - 2) + 1$$



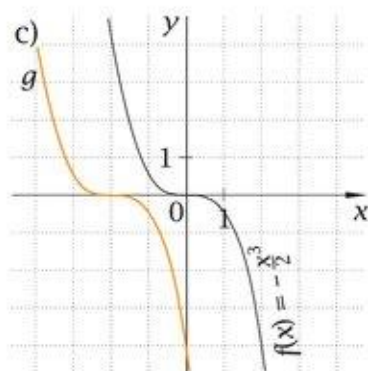
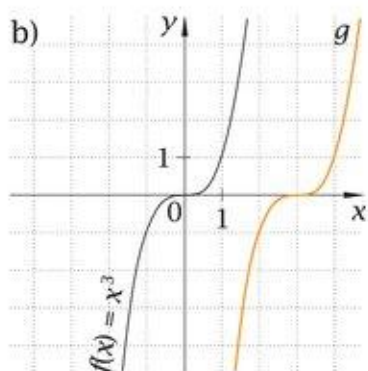
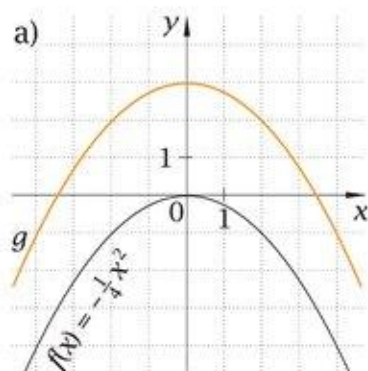
$$g(x) = f(x + 1) - 2$$

$$g(x) = f(x - 1) - 2$$

$$g(x) = f(x - 2) + 1$$

$$g(x) = f(x - 2) - 1$$

200. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f . Zapisz wzór funkcji g .



201. Zapisz wzór funkcji g i opisz, w jaki sposób należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g .

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = f(x - 5)$

e) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = f(x + 4) - 5$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = f(x + 2)$

f) $f(x) = \frac{3}{x-4}$, $g(x) = f(x - 4) - 3$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = f(x + 3) - 4$

g) $f(x) = 3^x - 2$, $g(x) = f(x + 2) + 3$

d) $f(x) = x^3 + 5$, $g(x) = f(x - 1) + 2$

h) $f(x) = \log_2(x - 5) + 1$, $g(x) = f(x - 3) - 2$

202. Zapisz wzór funkcji, której wykres powstaje z wykresu funkcji $y = -2x^7$ w wyniku przesunięcia o:

a) 2 jednostki w górę,

b) 3 jednostki w dół,

c) 1 jednostkę w lewo,

d) 2 jednostki w prawo,

e) 3 jednostki w lewo i 1 jednostkę w górę,

f) 2 jednostki w prawo i 1 jednostkę w dół,

g) $\frac{1}{2}$ jednostki w prawo i $\frac{1}{2}$ jednostki w górę,

h) $\frac{2}{7}$ jednostki w lewo i $\frac{2}{7}$ jednostki w dół.

203. W wyniku przesunięcia wykresu funkcji f można otrzymać wykres funkcji g . Określ, o ile jednostek i w którym kierunku należy dokonać tego przesunięcia.

a) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x - 3|$

e) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = 2(x - 6)^3 - 4$

b) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| - 5$

f) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x + 5} - 3$

c) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x + 1| - 2$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \sqrt[3]{x - 2} + 1$

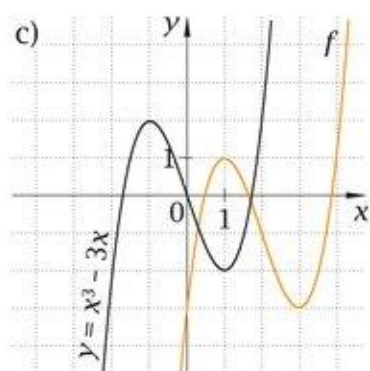
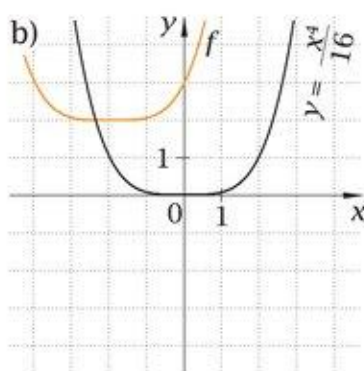
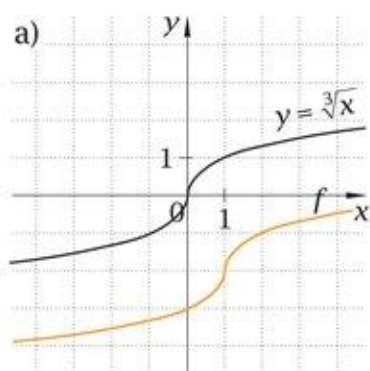
d) $f(x) = x^2$, $g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}$

h) $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x - 2} - 1$

✎ **204.** Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f , jeżeli funkcja f jest opisana wzorem:

- $f(x) = 2x - 1$ i jej wykres przesunięto o 3 jednostki w lewo i 5 jednostek do góry,
- $f(x) = 5x^2 + 2$ i jej wykres przesunięto o 2 jednostki w lewo,
- $f(x) = 2|x| + 1$ i jej wykres przesunięto o $\sqrt{2}$ jednostki w prawo i $\sqrt{2}$ jednostki w dół,
- $f(x) = \frac{3}{x-1}$ i jej wykres przesunięto o 4 jednostki w prawo i 1 jednostkę do góry,
- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 6$ i jej wykres przesunięto o 4 jednostki w lewo i 3 jednostki w dół,
- $f(x) = \log x - 3$ i jej wykres przesunięto o 2 jednostki w prawo i 2 jednostki w dół.

✎ **205.** Zapisz wzór funkcji f , której wykres otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji opisanej danym wzorem.



✎ **206.** Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f . Znajdź wzór funkcji f , jeżeli jej wykres przesunięto:

- o 2 jednostki w lewo i 5 jednostek w górę i otrzymano wykres funkcji $g(x) = x^2$,
- o 4 jednostki w prawo i 6 jednostek w górę i otrzymano wykres funkcji $g(x) = \frac{3}{x}$,
- o 1 jednostkę w lewo i 2 jednostki w górę i otrzymano wykres funkcji $g(x) = |x - 2| + 1$,
- o 3 jednostki w lewo i 5 jednostek w dół i otrzymano wykres funkcji $g(x) = \sqrt{x + \frac{1}{2}} - 4$,
- o 6 jednostek w dół i 3 jednostki w prawo i otrzymano wykres funkcji $g(x) = 2^{x-7} + 9$,
- o 2 jednostki w górę i 7 jednostek w lewo i otrzymano wykres funkcji $g(x) = \log(x + 3) + 3$.

✎ **207.** Określ, o ile jednostek i w którym kierunku należy przesunąć wykres funkcji $f(x) = x^2$, aby otrzymać wykres funkcji g .

- | | |
|--|----------------------------|
| a) $g(x) = (x + 1)(x - 1)$ | d) $g(x) = x^2 - 10x + 25$ |
| b) $g(x) = x^2 + 2x + 1$ | e) $g(x) = x^2 - 10x + 28$ |
| c) $g(x) = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ | f) $g(x) = x^2 + 4x - 2$ |

✎ **208.** Określ, o ile jednostek i w którym kierunku należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g .

a) $f(x) = (x - 3)^2 + 7$, $g(x) = (x - 3)^2 + 9$

b) $f(x) = (x - 3)^2 + 7$, $g(x) = (x + 2)^2 + 5$

c) $f(x) = 2^{x-3} + 5$, $g(x) = 2^{x+3} - 5$

d) $f(x) = \log_5(x + 4) + 1$, $g(x) = \log_5(x + 1) + 4$

e) $f(x) = \frac{2}{x-1} + 3$, $g(x) = \frac{2}{x+3} - 1$

f) $f(x) = \sqrt{x+1} - 9$, $g(x) = \sqrt{x-11} + 11$

✎ **209.** Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f . Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji f i g , jeżeli:

a) wykres funkcji $f(x) = 5x - 2$ przesunięto o 10 jednostek w prawo i 6 jednostek w dół,

b) wykres funkcji $f(x) = x^2$ przesunięto o 2 jednostki w prawo i 4 jednostki w górę,

c) wykres funkcji $f(x) = x^3$ przesunięto o 2 jednostki w lewo i 8 jednostek w dół.

✎ **210.** Dziedzina funkcji f jest przedział $(2; 7)$, a zbiorem wartości jest przedział $\langle 4; 6 \rangle$. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f . Jaka jest dziedzina funkcji g ? Jaki jest jej zbiór wartości?

a) $g(x) = f(x) - 2$

d) $g(x) = f(x + 6) + 9$

b) $g(x) = f(x - 2)$

e) $g(x) = f(x - 5) + 12$

c) $g(x) = f(x - 1) + 4$

f) $g(x) = f(x + 21) - 16$

✎ **211.** Określ, ile miejsc zerowych ma funkcja f bez wyznaczania tych miejsc.

a) $f(x) = |x - 2|$

c) $f(x) = \log_2(x - 5) + 6$

b) $f(x) = |x + 4| - 0,1$

d) $f(x) = 3^{x+4} - 2$

✎ **212.** a) Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 3)$ i malejąca w przedziale $\langle 3; +\infty \rangle$. Określ przedziały monotoniczności funkcji $g(x) = f(x + 1) - 12$.

b) Funkcja f przyjmuje największą wartość równą 5 dla argumentu 3. Dla jakiego argumentu przyjmuje największą wartość funkcja $g(x) = f(x - 2) + 3$? Podaj tę wartość.

c) Liczby $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 9 - 3\sqrt{2}$ są miejscami zerowymi funkcji f . Wyznacz miejsca zerowe funkcji $\tilde{f}(x + 5)$.

✎ **213.** Sporządź wykres funkcji i na podstawie wykresu opisz jej własności.

a) $y = 5^x - 3$

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$

c) $y = 2 - 2^x$

»**214.** Naskicuj wykres funkcji $y = \log_3 x$. Korzystając z tego wykresu, sporządź wykres funkcji:

a) $y = 2 + \log_3 x$

b) $y = \log_3(x + 2)$

c) $y = \log_3 \frac{x}{3}$

»**215.** Sporządź wykres funkcji i podaj jej zbiór wartości.

a) $y = |2^{-x} - 3|$

c) $y = -4^{|x|} + 2$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

d) $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2\right| - 1$

»**216.** Narysuj wykres funkcji f i — korzystając z niego — opisz własności tej funkcji.

a) $f(x) = \log_2(x - 1)$

c) $f(x) = \log_{0,5}|x + 2|$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 1$

d) $f(x) = \log_{0,5}|x| + 2$

»**217.** Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w lewo i 1 jednostkę w dół.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 5 \\ x + 3 & \text{dla } x \geq 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x < -1 \\ 5 - x & \text{dla } x \geq -1 \end{cases}$

»**218.** Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} & \text{dla } x \leq 1 \\ |x - 4| - 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$.

a) Wyznacz zbiór wartości, przedziały monotoniczności i miejsca zerowe funkcji f .

b) Dla jakiej wartości m wykresy funkcji $f(x)$ oraz $g(x) = m$ przecinają się w dwóch punktach?

»**219.** Funkcja f określona jest następującym wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x \in \langle -4; 1 \rangle \\ -x + 4 & \text{dla } x \in (1; 3) \\ x^2 - 2 & \text{dla } x \in \langle 3; 5 \rangle \end{cases}$$

Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymano po przesunięciu wykresu funkcji f :

a) o 10 jednostek w dół,

b) o 4 jednostki w prawo,

c) o 3 jednostki do góry i 7 jednostek w lewo.

»**220.** Wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f(x - 4)$ przecięły się w punkcie $(2, 5)$. Które z poniższych zdań na pewno są prawdziwe?

I. Funkcja f nie jest ani rosnąca, ani malejąca.

II. Punkty $(2, 5)$ i $(-2, 5)$ należą do wykresu funkcji f .

III. Funkcja f jest różnowartościowa.

IV. Wykres funkcji f jest symetryczny względem osi y .

✎ **221.** a) Wykres funkcji liniowej $y = 5x$ przesunięto o 3 jednostki w prawo, a następnie o q jednostek w górę i otrzymano prostą pokrywającą się z wykresem funkcji $y = 5x$. Oblicz q .

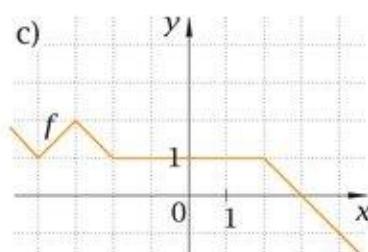
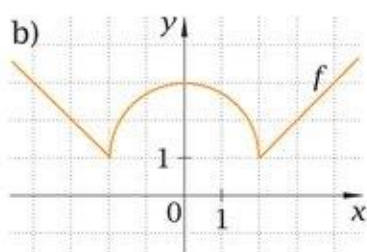
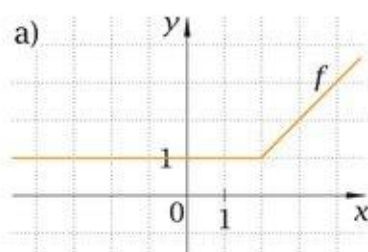
b) Wykres funkcji liniowej $y = ax + b$ przesunięto o p jednostek w prawo, a następnie o q jednostek w górę i otrzymano z powrotem wykres funkcji $y = ax + b$. Zapisz, jaki warunek spełniają liczby a , p i q .

PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI (CD.)

✎ **222.** Wykres funkcji $f(x) = x^4 - x^2$ odbito symetrycznie względem osi y . Uzasadnij, że otrzymany w ten sposób wykres pokrywa się z wykresem funkcji f .

✎ **223.** Dany jest wykres funkcji f . Narysuj wykresy funkcji:

$$g_1(x) = -f(x) \quad g_2(x) = f(-x) \quad g_3(x) = -f(x) + 1$$



✎ **224.** Narysuj wykres funkcji $y = x^2$, a następnie wykres funkcji g .

a) $g(x) = -x^2$ b) $g(x) = -(x+1)^2$ c) $g(x) = -x^2 + 3$ d) $g(x) = -(x-2)^2 - 4$

✎ **225.** Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -2; 7 \rangle$, a jej miejscem zerowym jest $x_0 = 3$. Podaj zbiór wartości oraz miejsce zerowe funkcji g , jeżeli:

a) $g(x) = -f(x)$ b) $g(x) = f(-x)$ c) $g(x) = f(x-5)$ d) $g(x) = -f(x-5)$

✎ **226.** Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymano w podany sposób.

a) Przesuwamy wykres funkcji $y = x^3$ o 2 jednostki w lewo, a następnie przekształcamy otrzymany wykres przez symetrię względem osi x .

b) Przekształcamy wykres funkcji $y = \frac{\sqrt{3}}{x^7}$ przez symetrię względem osi x , a następnie przesuwamy otrzymany wykres o 3 jednostki w górę.

c) Przesuwamy wykres funkcji $y = \frac{x^4}{3}$ o 2 jednostki w prawo, a następnie przekształcamy otrzymany wykres przez symetrię względem osi y .

227. Zapisz wzór funkcji g , której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia:

- wykresu funkcji $f(x) = -3x + 2$ przez symetrię względem osi x ,
- wykresu funkcji $f(x) = -3x + 2$ przez symetrię względem osi y ,
- wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 2x + 3$ przez symetrię względem osi x ,
- wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 2x + 3$ przez symetrię względem osi y ,
- wykresu funkcji $f(x) = (x + 2)^2 - 3$ przez symetrię względem osi x ,
- wykresu funkcji $f(x) = (x + 2)^2 - 3$ przez symetrię względem osi y ,
- wykresu funkcji $f(x) = 2x - \frac{3}{x}$ najpierw przez przesunięcie o 3 jednostki w prawo, a następnie przez symetrię względem osi y ,
- wykresu funkcji $f(x) = 2x - \frac{3}{x}$ najpierw przez symetrię względem osi y , a następnie przez przesunięcie o 3 jednostki w prawo,
- wykresu funkcji $f(x) = 2x - \frac{3}{x}$ najpierw przez przesunięcie o 3 jednostki w prawo, a następnie przez symetrię względem osi x ,
- wykresu funkcji $f(x) = 2x - \frac{3}{x}$ najpierw przez symetrię względem osi x , a następnie przez przesunięcie o 3 jednostki w prawo,

228. Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi x , a wykres funkcji h jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi y . Zapisz wzory funkcji g i h , jeżeli:

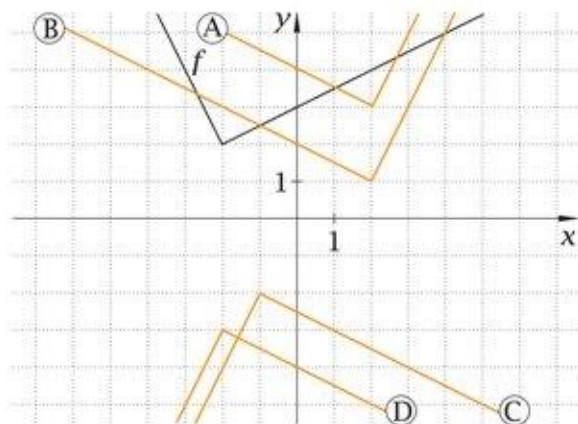
- $f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x$
- $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x + 1}$
- $f(x) = -3(x + 2)^2$
- $f(x) = x^2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$
- $f(x) = 4x^3 - 3x$
- $f(x) = \log(x - 4)$

229. Wykres funkcji f przekształcono przez symetrię względem osi x , a następnie przez symetrię względem osi y i otrzymano wykres funkcji g . Wyznacz wzór funkcji g .

- $f(x) = 2x + 3$
- $f(x) = x^2 - 4x + 5$
- $f(x) = x^3 + x^2 - x$
- $f(x) = \frac{4}{x} + x^2$

230. Wykresy ①, ②, ③ i ④ powstały w wyniku przekształcenia wykresu funkcji f . Dopasuj wzory ①, ②, ③ i ④ do tych wykresów.

- $y = -f(x) - 1$
- $y = -f(x - 1)$
- $y = 1 + f(-x)$
- $y = f(-x) - 1$



✎ **231.** Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -1)$, stała w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$ oraz malejąca w przedziale $\langle 2; +\infty \rangle$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji g , jeżeli:

a) $g(x) = -f(x)$

c) $g(x) = f(x+1)$

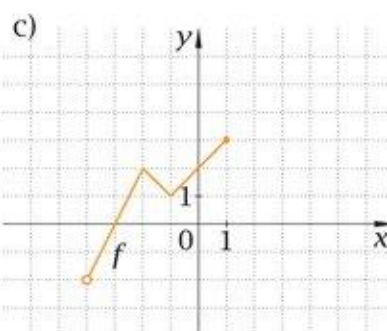
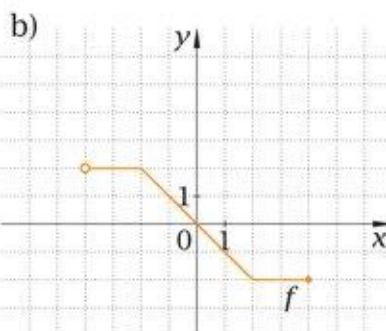
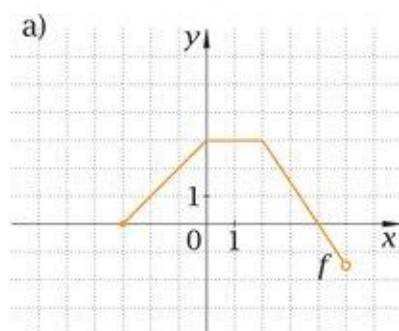
e) $g(x) = f(x) + 3$

b) $g(x) = f(-x)$

d) $g(x) = -f(x+1)$

f) $g(x) = f(-x) + 3$

✎ **232.** Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Narysuj wykres funkcji g oraz wykres funkcji h , jeżeli:



$g(x) = f(-x) - 1$

$g(x) = -f(x-2)$

$g(x) = -2 - f(x)$

$h(x) = -f(x) - 1$

$h(x) = -f(-x)$

$h(x) = -f(x-4) + 1$

✎ **233.** Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -x-4 & \text{dla } x \leq -3 \\ -1 & \text{dla } -3 < x \leq 2 \\ 2x-5 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$. Następnie wyznacz:

a) zbiór wartości funkcji $y = -f(x)$,

b) miejsca zerowe funkcji $y = f(-x)$,

c) maksymalny przedział, w którym funkcja $y = -f(x+4) - 1$ jest rosnąca,

d) maksymalny przedział, w którym funkcja $y = -f(-x)$ jest stała.

✎ **234.** Funkcja f przyjmuje największą wartość równą 5 dla argumentu 3. Co można na tej podstawie powiedzieć o największej wartości funkcji g ?

a) $g(x) = f(-x)$

b) $g(x) = -f(x+2)$

c) $g(x) = f(3-x) + 1$

✎ **235.** Dziedzina funkcji f jest przedział $\langle -5; 7 \rangle$, a jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -3; 2 \rangle$. Jaka jest dziedzina i zbiór wartości funkcji g ?

a) $g(x) = -f(x)$

b) $g(x) = f(-x)$

c) $g(x) = f(x+3)$

✎ **236.** Liczby $x_1 = -3$ oraz $x_2 = 5$ są miejscami zerowymi funkcji f . Wyznacz miejsca zerowe podanej funkcji.

a) $y = f(-x)$

c) $y = -f(-x)$

b) $y = -f(x)$

d) $y = -f(x-5)$

✎ **237.** Narysuj wykres funkcji $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, a następnie wykres funkcji:

a) $y = -\log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$

b) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 2$

c) $y = -\log_{\frac{1}{2}}(x + 3) - 2$

✎ **238.** a) Wykres funkcji $f(x) = 2(x + 3)^2 - 1$ odbito symetrycznie względem osi x , a następnie przesunięto o 5 jednostek w prawo i o 2 jednostki w górę. Podaj wzór funkcji $g(x)$, której wykres otrzymano w wyniku tych przekształceń.

b) Wykres funkcji $f(x) = 2(x + 3)^2 - 1$ przesunięto o 5 jednostek w prawo i o 2 jednostki w górę, a następnie odbito symetrycznie względem osi x . Podaj wzór funkcji $g(x)$, której wykres otrzymano w wyniku tych przekształceń.

c) Wykres funkcji $f(x) = 2(x + 3)^2 - 1$ odbito symetrycznie względem osi y , a następnie przesunięto o 4 jednostki w lewo i o 6 jednostek w dół. Podaj wzór funkcji $g(x)$, której wykres otrzymano w wyniku tych przekształceń.

d) Wykres funkcji $f(x) = 2(x + 3)^2 - 1$ przesunięto o 4 jednostki w lewo i o 6 jednostek w dół, a następnie odbito symetrycznie względem osi y . Podaj wzór funkcji $g(x)$, której wykres otrzymano w wyniku tych przekształceń.

e) Wykres funkcji $f(x) = 2(x + 3)^2 - 1$ odbito symetrycznie względem osi x , następnie otrzymany wykres odbito symetrycznie względem osi y , a na końcu przesunięto o 3 jednostki w lewo i o 1 jednostkę w dół. Podaj wzór funkcji $g(x)$, której wykres otrzymano w wyniku tych przekształceń.

PRZED SPRAWDZIANEM

1. Który z podanych punktów nie należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1-x^2}{2x+3}$?

- A. $(0, \frac{1}{3})$ B. $(1, 0)$ C. $(2, -\frac{3}{7})$ D. $(-2, -5)$

2. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{dla } x \leq -2 \\ 5-x^2 & \text{dla } -2 < x < 1 \\ 6 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$. Która z podanych równości jest prawdziwa?

- A. $f(-2) + f(0) + f(1) = 11$ C. $f(-3) + f(0) + f(10) = 10$
B. $f(-2) + f(-1) + f(1) = 9$ D. $f(-4) + f(-1) + f(1) = 3$

3. Dziedzina funkcji $y = \log_x(1-3x)$ jest zbiór:

- A. $\mathbb{R}_+$ B. $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ C. $(0; \frac{1}{3})$ D. $(\frac{1}{3}; +\infty) \setminus \{1\}$

4. Rozwiązaniem równania $12^x \cdot 6 = 4^x$ jest liczba:

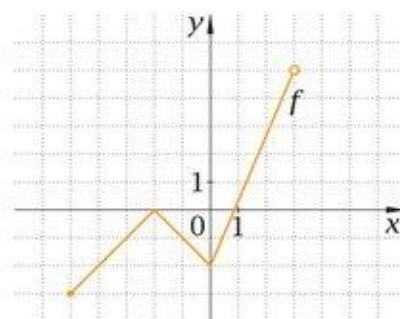
- A. $\log_3 \frac{1}{6}$ B. $\log_{\frac{1}{6}} 3$ C. $\log_{\frac{1}{3}} 6$ D. $\log_6 \frac{1}{3}$

5. Liczba mieszkańców pewnego miasteczka w 2010 roku wynosiła 18 600. Założono, że liczba ta systematycznie wzrastała każdego roku o 4% w porównaniu z rokiem poprzednim. Po ilu latach liczba mieszkańców będzie większa o 40% w porównaniu z rokiem 2010?

- A. po ok. 5 latach C. po ok. 9 latach
B. po ok. 7 latach D. po 10 latach

6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Które z podanych zdań jest fałszywe?

- A. Dziedzina funkcji $y = f(x+3)$ jest zbiór $\langle -8; 0 \rangle$.
B. Funkcja $y = f(x) - 5$ przyjmuje wyłącznie wartości ujemne.
C. Funkcja $y = f(x-1) + 2$ ma trzy miejsca zerowe.
D. Zbiorem wartości funkcji $y = f(x-12) + 15$ jest przedział $\langle 12; 20 \rangle$.



7. Wykres funkcji $f(x) = (x-2)^2 + 3$ odbito symetrycznie względem osi y , a następnie przesunięto o 3 jednostki w lewo. Otrzymano w ten sposób wykres funkcji:

- A. $g(x) = (x+5)^2 + 3$ C. $g(x) = (x-1)^2 + 3$
B. $g(x) = -(x+1)^2 + 3$ D. $g(x) = (x+2)^2 + 6$

8. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f .

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - x - 6$

b) $f: (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 8x^2 + 7x$

9. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $(-\infty; 2]$, a liczby $x_1 = -3$ oraz $x_2 = 5$ są jej miejscami zerowymi. Wyznacz wzór funkcji f .

10. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dla } -3 < x \leq 2 \\ 2x - 4 & \text{dla } 2 < x \leq 5 \\ 6 & \text{dla } x > 5 \end{cases}$. Następnie wyznacz:

a) dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji,

b) przedziały monotoniczności funkcji f ,

c) miejsca zerowe funkcji f .

11. Do wykresu funkcji $y = \log_a x$ należy punkt $P = (\sqrt{2}, \frac{1}{4})$. Wyznacz a .

12. Rozwiąż równanie.

a) $16^{x-2} \cdot 8^{x+1} = 0,25$

c) $\log_{0,2}(4 - 3x) = -2$

b) $\frac{\sqrt{5}}{25^x} = \frac{1}{5^x}$

d) $3 \log 4 - \log 32 = 2 \log x$

13. Wykres funkcji $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$ przesunięto o 2 jednostki w prawo i o 8 jednostek w dół. Otrzymano w ten sposób wykres funkcji g . Wyznacz wzór funkcji g oraz znajdź jej miejsca zerowe.

14. Dana jest funkcja $f(x) = -3x + 2$ określona dla $x \in \langle -2; 3 \rangle$. Wyznacz dziedzinę, zbiór wartości oraz miejsca zerowe funkcji:

a) $y = f(-x)$

b) $y = -f(x)$

15. Do wykresu funkcji $W(x) = a(x+1)^2(x-2)$ należy punkt $P = (1, 1)$. Oznacza to, że:

A. $a < -1$

B. $a \in (-1; 1)$

C. $a = 1$

D. $a > 1$

16. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & \text{dla } x \leq 1 \\ \log_{\frac{1}{2}} x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$. Wskaż zdanie fałszywe.

A. Funkcja nie ma miejsca zerowego.

B. Dla $x > 1$ funkcja jest malejąca.

C. Wartość wyrażenia $f(-2) + f(2)$ jest liczbą całkowitą.

D. Dla $x = \frac{1}{2}$ funkcja przyjmuje wartość 1.

Я17. Ile liczb całkowitych spełnia nierówność $(x+2)^2(x^2-3x) \leq 0$?

- A. dwie B. pięć C. cztery D. nieskończenie wiele

Я18. Równanie $\log_{x+1} 4 = 2$:

- A. nie ma rozwiązania
B. ma dwa rozwiązania
C. ma jedno rozwiązanie będące liczbą dodatnią
D. ma jedno rozwiązanie będące liczbą ujemną

Я19. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji: $W(x) = 3x^2 - x + 2$ oraz $V(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 12$.

Я20. Rozwiąż nierówność.

- a) $(3-x)^2(-x^2+x-1)(2x+1)^3 < 0$ b) $-2x^3 + 3x^2 + 12x - 18 \geq 0$ c) $x^4 + 4x > 3x^3$

Я21. Wyznacz dziedzinę funkcji.

- a) $f(x) = \sqrt{4x^3 - 16x^2 - x + 4}$ b) $f(x) = \frac{4x+7}{\sqrt{(x-4)^2(9x^2+6x+1)(2-x)}}$

Я22. Punkty $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (3, 0)$ i $D = (2, 6)$ należą do wykresu wielomianu $W(x)$, który jest wielomianem trzeciego stopnia. Rozwiąż nierówność $W(x) < 6$.

Я23. Liczby $x_1 = 2$ oraz $x_2 = 3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + 12$. Dla jakich argumentów wielomian ten przyjmuje wartości ujemne?

Я24. Dla jakich wartości parametru m nierówność $(3x+4)^7(x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2})(m-2x) > 0$ nie ma rozwiązania?

Я25. Dane są funkcje $f(x) = (x^2 - 6x + 8)(2x - x^2)$ oraz $g(x) = 2x^3 - 7x^2 - 8x + 28$. Dla jakich argumentów obie funkcje jednocześnie przyjmują wartości nieujemne?

Я26. Rozwiąż równanie.

- a) $4^{2x+1} + 2^{4x-2} = 17$
b) $(5\sqrt{5})^x - 5 \cdot 5^x - (\sqrt{5})^x + 5 = 0$
c) $\log_3 x + \log_3(x+1) = 1 + \log_3(x+5)$
d) $\log_{x-1}(x^2+x-4) = 3$

Я27. Uzasadnij, że równanie $\frac{2^x}{8} + \log x = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

PRZED MATURĄ

1. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x-8}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Wówczas wartość funkcji $f(\sqrt{2})$ jest równa:

- A. $2 - 4\sqrt{2}$ B. $1 - 2\sqrt{2}$ C. $1 + 2\sqrt{2}$ D. $2 + 4\sqrt{2}$

2. Liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, a punkt $M = (3, -2)$ należy do wykresu tej funkcji. Współczynnik a we wzorze tej funkcji jest równy:

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. -1

3. Proste o równaniach $y = (m+2)x + 3$ oraz $y = (2m-1)x - 3$ są równoległe, gdy:

- A. $m = 2$ B. $m = 3$ C. $m = 0$ D. $m = 1$

4. Funkcja liniowa $f(x) = (1 - m^2)x + m - 1$ nie ma miejsc zerowych dla:

- A. $m = 1$ B. $m = 0$ C. $m = -1$ D. $m = -2$

5. Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = -3(x-2)(x-9)$. Liczby x_1, x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji f . Zatem:

- A. $x_1 + x_2 = 11$ B. $x_1 + x_2 = -11$ C. $x_1 + x_2 = 33$ D. $x_1 + x_2 = -33$

6. Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x - 3$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych:

- A. $(-6, -3)$ B. $(-6, 69)$ C. $(3, -12)$ D. $(6, -3)$

7. Funkcja wykładnicza określona wzorem $f(x) = 3^x$ przyjmuje wartość 6 dla argumentu:

- A. $x = 2$ B. $x = \log_3 2$ C. $x = \log_3 6$ D. $x = \log_6 3$

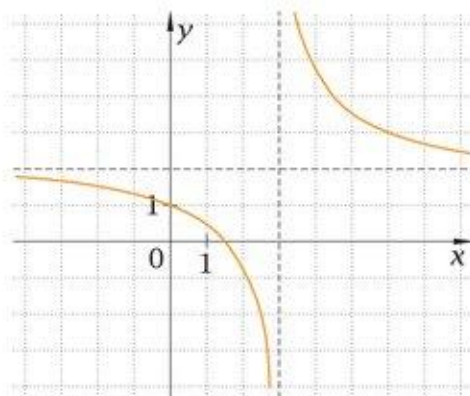
8. Dane są funkcje $f(x) = 3^x$ oraz $g(x) = f(-x)$, określone dla wszystkich rzeczywistych x . Punkt wspólny wykresów funkcji f i g :

- A. nie istnieje C. ma współrzędne $(0, 1)$
B. ma współrzędne $(1, 0)$ D. ma współrzędne $(0, 0)$

9. Do wykresu funkcji wykładniczej, określonej dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x) = a^x$ gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, należy punkt $P = (2, 9)$. Oblicz a i zapisz zbiór wartości funkcji g , określonej wzorem $g(x) = f(x) - 2$.

Я 10. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór $D = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. Równanie $|f(x)| = p$ z niewiadomą x ma dokładnie jedno rozwiązanie:

- A. w dwóch przypadkach: $p = 0$ lub $p = 3$
- B. w dwóch przypadkach: $p = 0$ lub $p = 2$
- C. tylko wtedy, gdy $p = 3$
- D. tylko wtedy, gdy $p = 2$



Я 11. Liczba punktów wspólnych wykresów funkcji $y = -x + 1$ i $y = \log_2 x$ jest równa:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

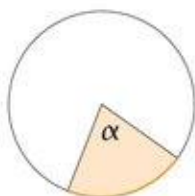
Я 12. Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których wykresy funkcji f i g , określonych wzorami $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = 5 - ax$, przecinają się w punkcie o obu współrzędnych dodatnich.

Я 13. Wielomian określony wzorem $W(x) = 2x^3 + (m^3 + 2)x^2 - 11x - 2(2m + 1)$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $x + 1$ daje resztę 6. Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \leq 0$.

FIGURY

NA PŁASZCZYŹNIE. CZĘŚĆ 2

Koła i okręgi



Długość okręgu:

$$l = 2\pi r$$

Długość łuku:

$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Pole koła:

$$P = \pi r^2$$

Pole wycinka koła:

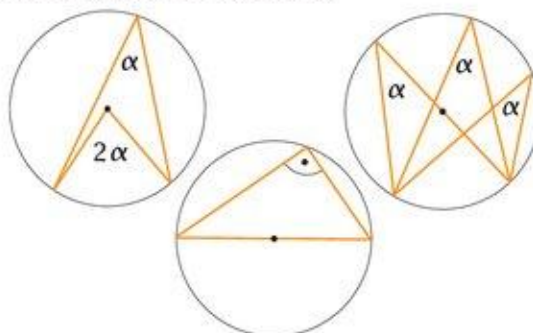
$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Twierdzenia o kątach wpisanych i środkowych

Kąt środkowy w kole ma 2 razy większą miarę niż kąt wpisany oparty na tym samym łuku.

Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.

Kąt wpisany oparty na średnicy jest kątem prostym.



Wzajemne położenie prostej i okręgu



okrąg i prosta są rozłączne



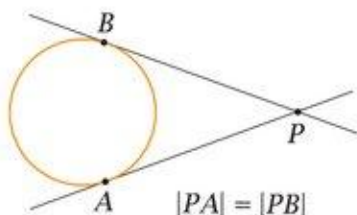
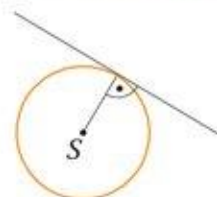
prosta przecina okrąg



okrąg i prosta są styczne

Twierdzenia o stycznej

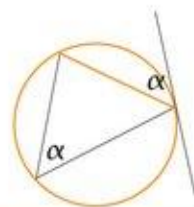
Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.



$$|PA| = |PB|$$

Gdy styczne do okręgu się przecinają, to odcinki łączące punkt przecięcia z punktami styczności mają równe długości.

Kąt ostry α między cięciwą okręgu a styczną w punkcie, który jest końcem cięciwy, jest równy kątowi ostremu wpisanemu w okrąg opartemu na tej cięciwie.



Wzajemne położenie dwóch okręgów



okręgi rozłączne zewnętrznie



okręgi rozłączne wewnętrznie



okręgi przecinające się

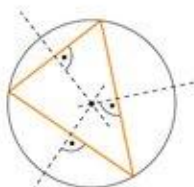


okręgi styczne zewnętrznie



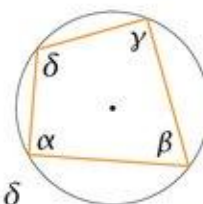
okręgi styczne wewnętrznie

Okrąg opisany na wielokącie



Na każdym trójkącie można opisać okrąg. Środkiem takiego okręgu jest punkt przecięcia symetrycznych boków trójkąta.

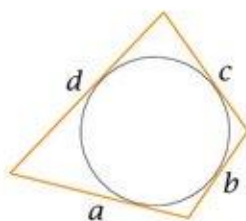
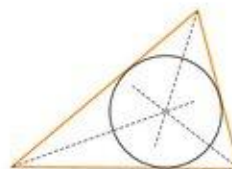
Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów są równe.



$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

Okrąg wpisany w wielokąt

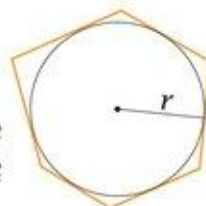
W każdy trójkąt można wpisać okrąg. Środkiem okręgu wpisanego w trójkąt jest punkt przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta.



$$a + c = b + d$$

W czworokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt jest wypukły i sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

Pole wielokąta opisanego na okręgu jest równe iloczynowi promienia tego okręgu przez połowę obwodu wielokąta.



$$P = rp$$

P – pole wielokąta
 p – połowa obwodu wielokąta

Twierdzenia o kątach w wielokątach

Suma miar kątów n -kąta wynosi $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

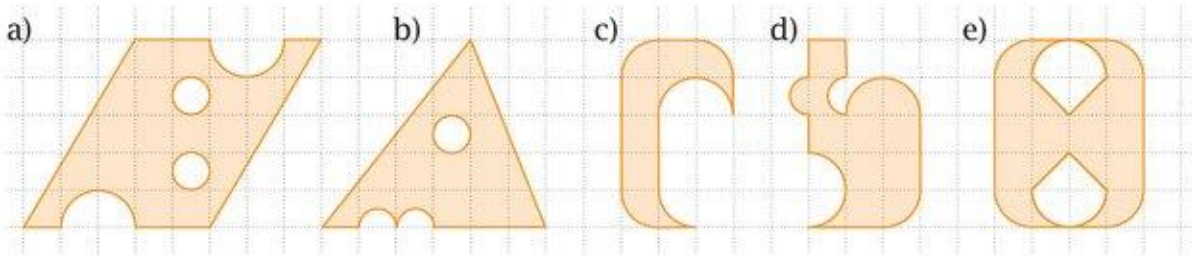
Każdy kąt n -kąta foremnego ma miarę $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

Liczba przekątnych w n -kącie wynosi $\frac{n(n-3)}{2}$.

POLE KOŁA. DŁUGOŚĆ OKRĘGU

1. a) Jaki promień ma okrąg, którego długość jest równa 7?
b) Jaką średnicę ma koło o polu 10?
c) Jaki obwód ma koło o polu 25?
d) Jakie pole ma koło o obwodzie 30?

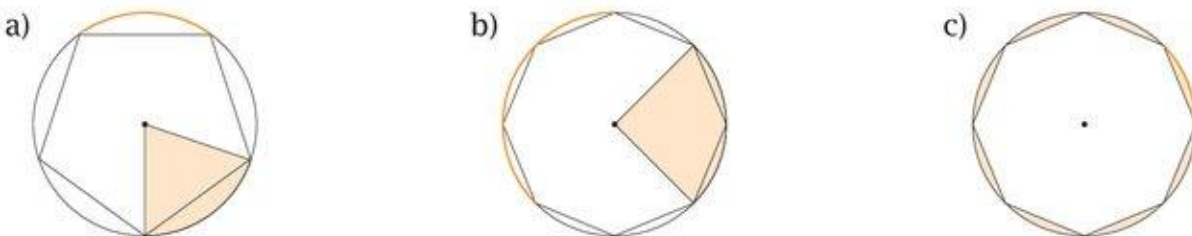
2. Oblicz pola zacieniowanych figur. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.



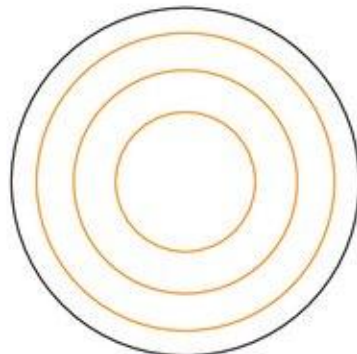
3. a) Pan Maciek od 50 lat codziennie wypija dwa kubki herbaty. Przyjmij, że każdą herbatę pan Maciek miesza łyżeczką, trzy razy zataczając okrąg o średnicy 5 cm, i oszacuj, jaką drogę pokonała łyżeczka podczas mieszania herbaty przez pana Maćka w ciągu tych 50 lat.

b) Przyjmijmy, że kropki w tekście drukowanym mają kształt kół o średnicy 0,25 mm oraz że takich kropek znajduje się przeciętnie 300 na jednej stronie. Oblicz, jaką powierzchnię zajmują kropki w 200-stronicowej książce wydanej w nakładzie 100 tys. egzemplarzy.

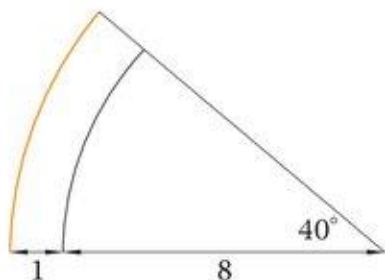
4. Na rysunku przedstawiono wielokąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 5. Oblicz pole zacieniowanego obszaru i długość zaznaczonego łuku.



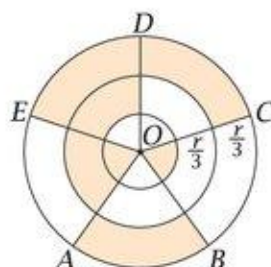
5. Na rysunku obok przedstawiono tarczę o średnicy 1 m. Każde z pól tarczy, na jakie trzy współśrodkowe okręgi ją podzieliły, jest takie samo. Jakie promienie mają te okręgi?



6. O ile dłuższy jest łuk zaznaczony kolorem pomarańczowym od łuku zaznaczonego kolorem czarnym?



7. Na rysunku pięciokąt $ABCDE$ jest foremny. Oblicz pole i obwód zacieniowanej figury dla $|OA| = r$.



8. a) Znajdź pole części wspólnej trójkąta równobocznego o boku a i koła, którego średnicą jest jeden z boków tego trójkąta.

b) Podstawą trójkąta równobocznego jest średnica koła. Oblicz stosunek pola części trójkąta leżącej na zewnątrz koła do pola części trójkąta leżącej wewnątrz koła.

9. a) O ile procent zwiększy się pole koła, jeśli jego promień zwiększymy o 10%?

b) O ile procent zmniejszy się pole koła, jeśli jego promień zmniejszymy o 10%?

c) O ile procent trzeba zwiększyć promień, aby pole koła zwiększyło się o 125%?

10. Typowy rower ma koła o średnicy 28 cali ($1 \text{ cal} = 2,54 \text{ cm}$).

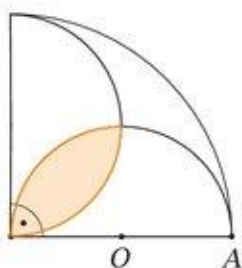
a) Jaką drogę przejedzie taki rower, gdy jego koła obróćą się 100 razy?

b) Ile razy obracają się koła tego roweru na trasie długości 1 km?

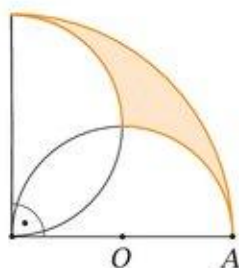
c) Ile obrotów na minutę wykonują koła tego roweru w czasie jazdy z prędkością $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

11. Jakie pole ma zacieniowana figura? Przyjmij, że $|OA| = a$.

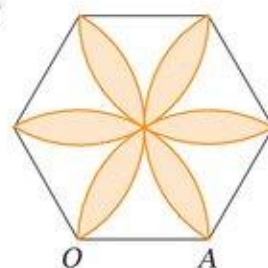
a)



b)

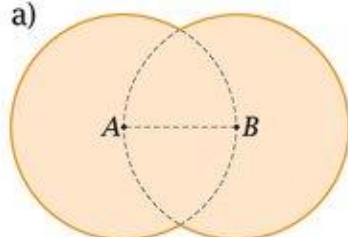


c)

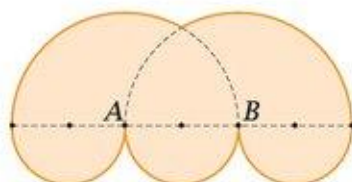


12. Znajdź pole i obwód narysowanej figury, gdy $|AB| = 4$.

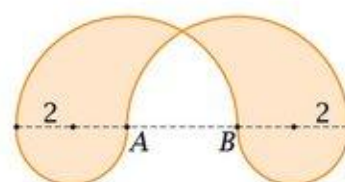
a)



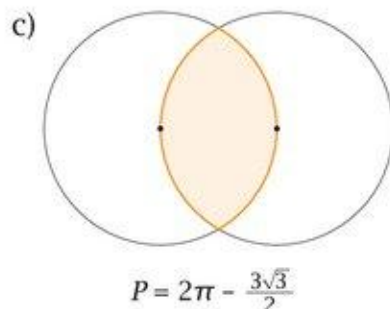
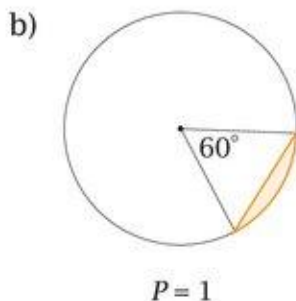
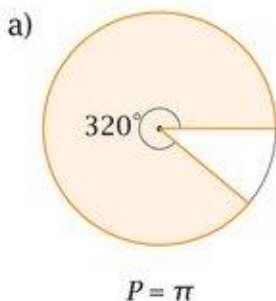
b)



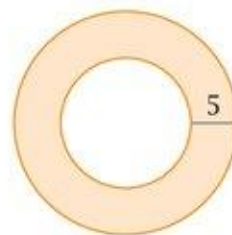
c)



13. Pod rysunkiem podano pole zacieniowanej figury. Oblicz, jaką długość ma promień okręgu.



14. W kole o promieniu r kąt środkowy o mierze α wyznacza wycinek o polu $\frac{2\pi}{3}$ oraz łuk o długości $\frac{2\pi}{3}$. Znajdź r i α .



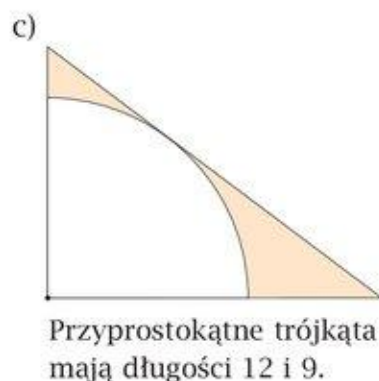
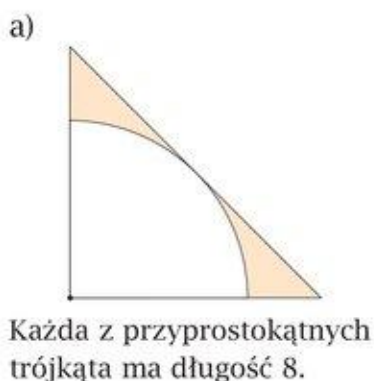
15. Obwód pierścienia na rysunku obok jest równy 120. Oblicz jego pole.

16. Odległość od środka tarczy zegarka do końca wskazówki minutowej jest równa 1,5 cm, a do końca wskazówki godzinowej wynosi 1 cm. Wyraż w milimetrach na minutę, z jaką prędkością porusza się koniec każdej z tych wskazówek.

17. Wahadło Foucaulta we Fromborku ma długość 28 m. Jego okres wahań, czyli czas pełnego wachnięcia z lewej do prawej i z powrotem, wynosi 10,6 s. Oblicz średnią prędkość, z jaką porusza się koniec wahadła, jeśli maksymalnie odchyła się ono od pionu o 2° .

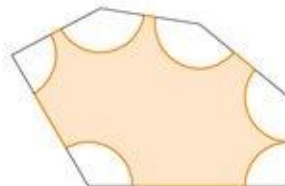
18. a) Budapeszt (48°N) i Kapsztad (34°S) leżą w przybliżeniu na jednym południku. Jaka jest odległość między nimi? Promień Ziemi ma długość około 6371 km.
b) Długość Warszawy z północy na południe wynosi około 30 km. Jakiej różnicy szerokości geograficznych odpowiada ta długość?

19. Znajdź pole zacieniowanego obszaru. Krzywe na rysunkach są łukami okręgów o środkach w zaznaczonych punktach.



- 20.** a) Narysuj okrąg. Wyznacz konstrukcyjnie środek tego okręgu.
 b) Narysuj koło i zaznacz w jego wnętrzu dowolny punkt. Skonstruuj cięciwę tego koła, której środkiem jest zaznaczony punkt.
 c) Narysuj odcinek. Skonstruuj taki okrąg, dla którego dany odcinek jest cięciwą, a promień jest dwa razy dłuższy niż ten odcinek.

- 21.** a) Narysowany wielokąt ma obwód równy 35. Z każdego z jego wierzchołków zakreślono łuk o promieniu 2. Jaki obwód ma zacieniowana figura? Czy jest on większy czy mniejszy od obwodu wielokąta?

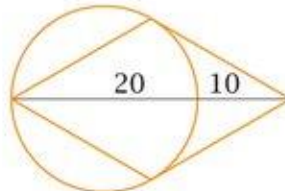


- b) Z każdego wierzchołka wielokąta o n kątach zakreślono łuki o promieniu 2, a następnie odcięto od wielokąta powstałe wycinki kół. Wykaż, że tak powstała figura nie może mieć obwodu równego obwodowi wielokąta.

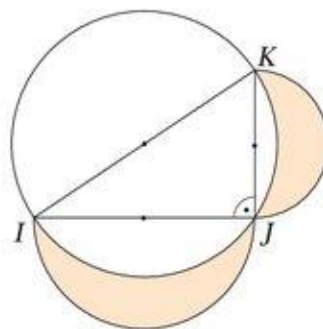
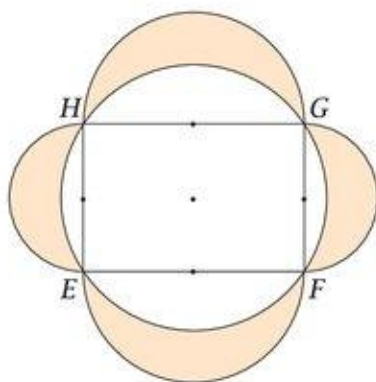
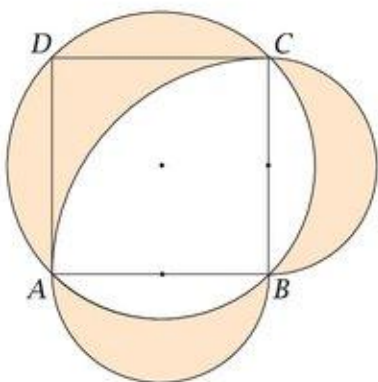
- 22.** a) Wyraż w sekundach, o jaki kąt obraca się wskazówka sekundowa zegarka w ciągu sekundy.
 b) Wyraż w minutach, o jaki kąt obraca się wskazówka godzinowa w ciągu sekundy.

- 23.** Łuków ma współrzędne geograficzne $51^{\circ}56'N$ i $22^{\circ}19'E$, a Zielona Góra $51^{\circ}56'N$ i $15^{\circ}31'E$. W którym z tych miast słońce wschodzi wcześniej? O ile minut wcześniej?

- 24.** Okrąg na rysunku obok przechodzi przez trzy wierzchołki rombu i dzieli jego dłuższą przekątną na odcinki o długościach 20 i 10. Oblicz pole rombu.



- 25.** Wykaż, że pola zaznaczonych obszarów (tzw. księżyce Hipokratesa) są równe odpowiednio polu kwadratu $ABCD$, polu prostokąta $EFGH$ i polu trójkąta IJK .



- 26.** Narysuj dwa różne koła, a następnie skonstruuj:

- a) koło, którego pole jest równe sumie pól tych kół,
 b) koło, którego pole jest równe różnicy pól tych kół.

WŁASNOŚCI KĄTÓW ŚRODKOWYCH I KĄTÓW WPISANYCH

27. a) Miara kąta środkowego jest o 35° większa od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku. Jaka jest miara tego kąta wpisanego?

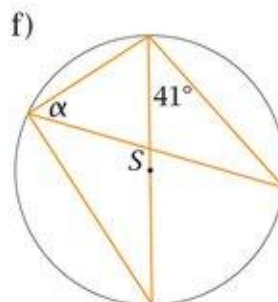
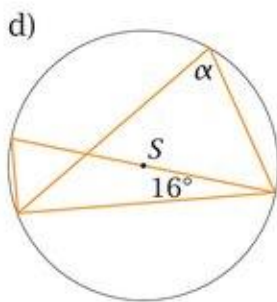
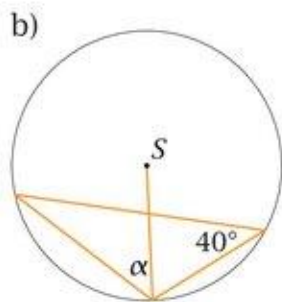
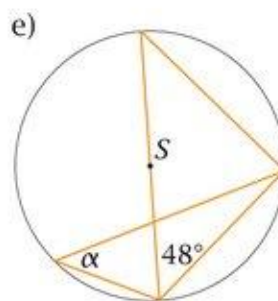
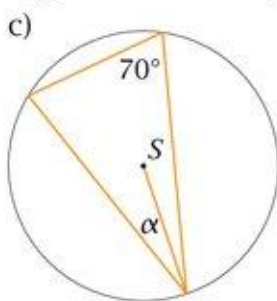
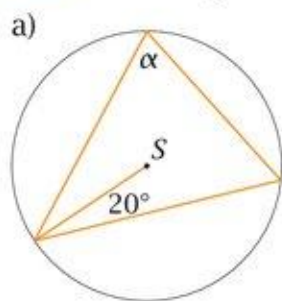
b) Miara kąta wpisanego jest o 18° mniejsza od kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Jaka jest miara tego kąta środkowego?

c) Kąt środkowy i kąt wpisany oparte są na tym samym łuku. Suma ich miar jest równa 51° . Jaka jest miara kąta wpisanego?

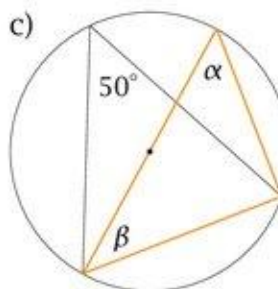
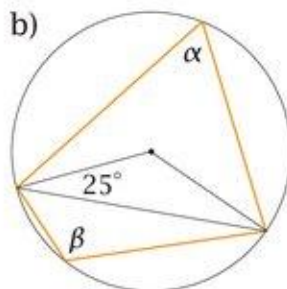
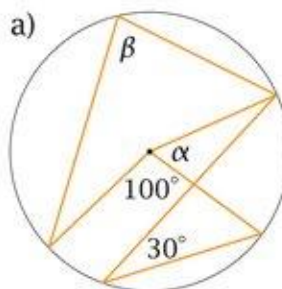
d) Miara kąta wpisanego jest o 75° mniejsza od kąta środkowego opartego na łuku dwa razy większym niż kąt wpisany. Jaka jest miara tego kąta środkowego?

e) Miara kąta środkowego jest o 10° mniejsza od kąta wpisanego opartego na łuku trzy razy większym niż kąt środkowy. Jaka jest miara tego kąta wpisanego?

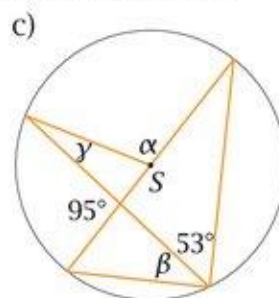
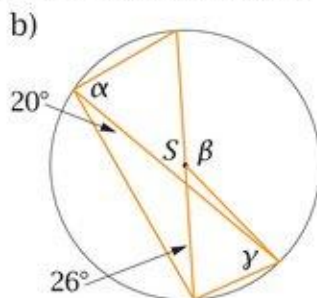
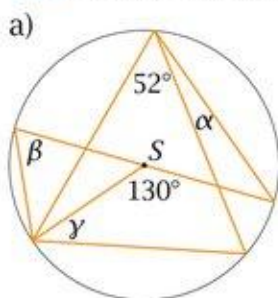
28. Punkt S jest środkiem okręgu. Oblicz miarę kąta α .



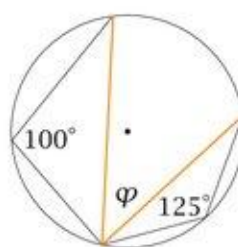
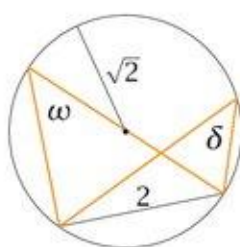
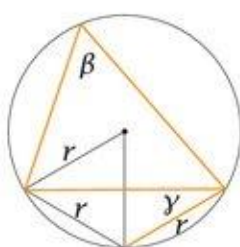
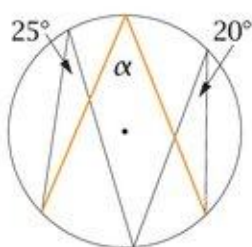
29. Oblicz miary kątów α i β .



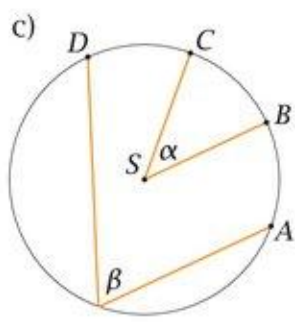
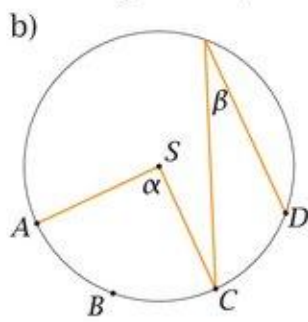
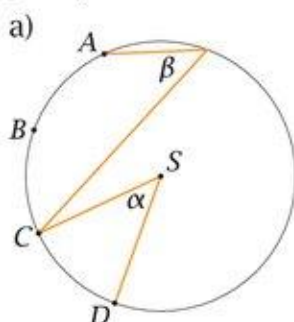
30. Punkt S jest środkiem okręgu. Oblicz miary kątów oznaczonych literami.



31. Oblicz miary kątów oznaczonych literami.



32. Punkt S jest środkiem okręgu, a łuki AB , BC i CD mają takie same długości. Jaka jest zależność między miarami kątów α i β ?



33. Na okręgu o środku O obrano punkty A , B i C . Znajdź miarę kąta AOB , jeśli:

- a) $|\sphericalangle ABC| = 50^\circ$, $|AB| = |BC|$
- b) $|\sphericalangle OBC| = 40^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 70^\circ$
- c) $|\sphericalangle BAC| = 80^\circ$, $|\sphericalangle AOC| = 140^\circ$

34. Na okręgu o środku O obrano punkty A , B , C i D tak, że odcinek AD jest średnicą, $|\sphericalangle ADB| = 25^\circ$ oraz $|\sphericalangle BDC| = 15^\circ$. Oblicz miarę podanego kąta. Rozważ dwie możliwości położenia punktu C względem punktu B .

- a) $\sphericalangle CAB$
- b) $\sphericalangle COD$
- c) $\sphericalangle CAD$

35. Na okręgu obrano trzy punkty A , B i C tak, że kąt wpisany oparty na łuku AB ma miarę 40° , a kąt środkowy oparty na łuku BC ma miarę 50° . Oblicz miary kątów trójkąta ABC .

36. Odległość pewnej cięciwy od środka okręgu jest równa połowie długości tej cięciwy. Jaka jest miara kąta wpisanego w okrąg opartego na tej cięciwie?

37. a) Punkty A, B i C dzielą okrąg na łuki, których długości pozostają w stosunku 3:4:5. Jakie miary mają kąty trójkąta ABC ?

b) Punkty A, B, C i D dzielą okrąg na łuki, których długości pozostają w stosunku 3:4:5:6. Jakie miary mają kąty czworokąta $ABCD$?

c) Punkty A, B, C, D i E dzielą okrąg na łuki, których długości pozostają w stosunku 1:2:3:4:5. Jakie miary mają kąty pięciokąta $ABCDE$?

d) Ośiem punktów dzieli okrąg na łuki, których długości pozostają w stosunku 1:2:3:4:5:6:7:8. Jakie miary mają kąty tego ośmiokąta?

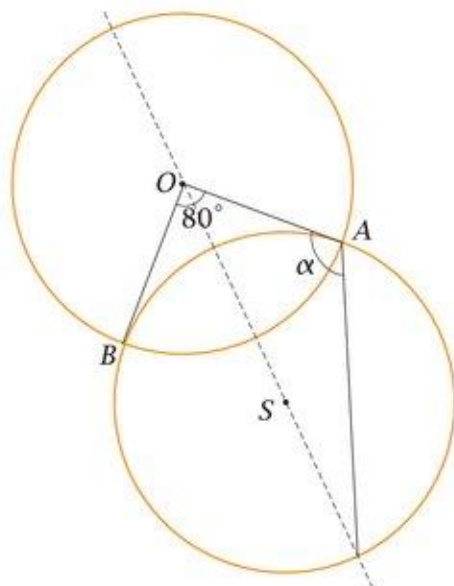
38. Wierzchołki pięciokąta $ABCDE$ leżą na okręgu, a przekątne AC i BE są średnicami tego okręgu. Wykaż, że:

a) $|AB|^2 + |AE|^2 = |BD|^2 + |DE|^2$

b) $|AB| = |EC|$

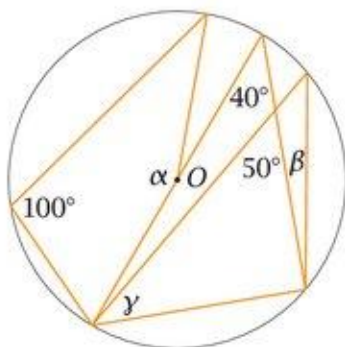
39. Wykaż, że okrąg, którego średnicą jest jeden z boków dowolnego trójkąta, oraz okrąg, którego średnicą jest inny z boków tego trójkąta, przecinają się w punkcie leżącym na trzecim boku tego trójkąta.

40. Dwa okręgi o środkach w punktach O i S mają równe promienie i przecinają się w punktach A i B (zob. rysunek). Miara kąta AOB jest równa 80° . Znajdź miarę kąta α .

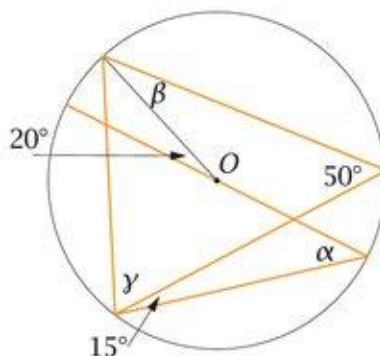


41. Punkt O jest środkiem okręgu. Znajdź miary kątów α, β i γ .

a)



b)



42. W pewnym okręgu narysowano cięciwę długości 2. Jaka jest odległość środka okręgu od tej cięciwy, jeśli kąt wpisany oparty na tej cięciwie ma miarę:

a) 30°

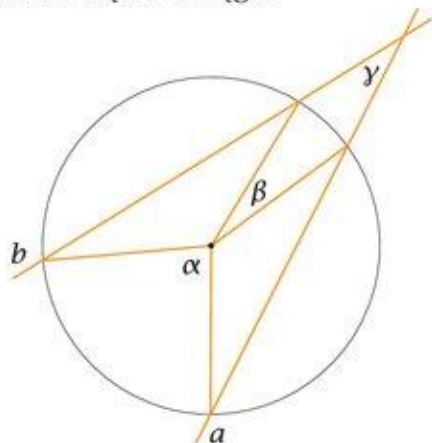
b) 45°

c) 60°

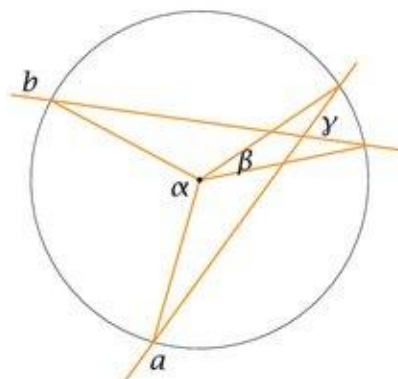
d) 90°

43. Proste a i b przecinają się pod kątem γ i wycinają z okręgu łuki odpowiadające kątom środkowym α i β . Znajdź miary kątów α i β , znając miarę kąta γ , gdy proste przecinają się:

a) na zewnątrz okręgu



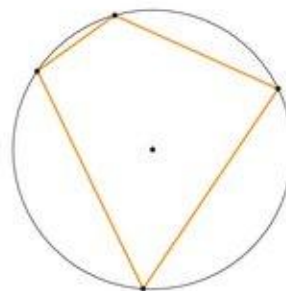
b) wewnątrz okręgu



44. Wierzchołki czworokąta leżą na okręgu i dzielą go kolejno na łuki, których długości są w stosunku odpowiednio $1:2:3:3$.

a) Znajdź miarę kąta, pod jakim przecinają się przekątne tego czworokąta.

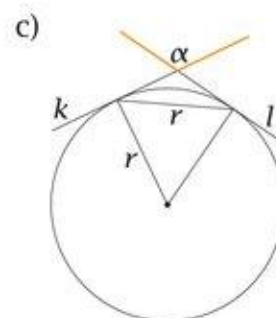
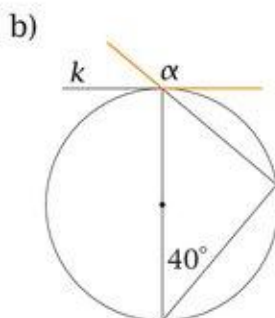
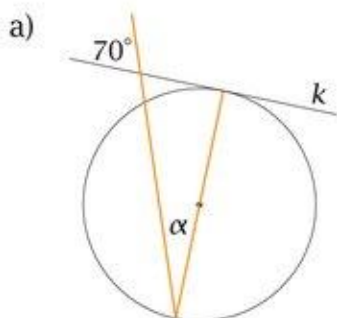
b) Znajdź miary kątów, pod jakimi przecinają się proste zawierające przeciwległe boki tego czworokąta.



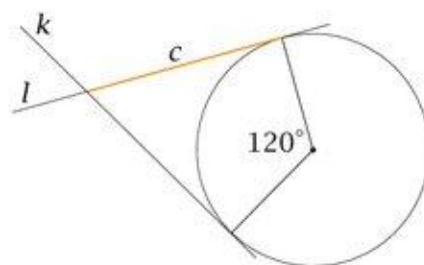
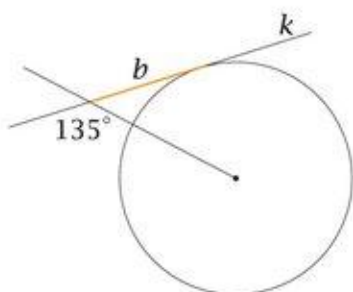
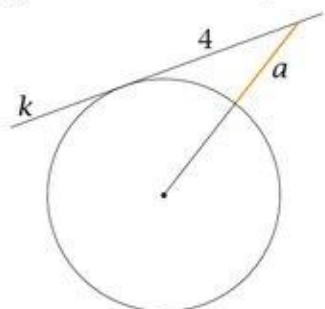
45. Punkty A, B, C i D dzielą okrąg na cztery łuki. Wykaż, że prosta przechodząca przez środki łuków AB i CD jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środki dwóch pozostałych łuków.

PROSTE I OKRĘGI

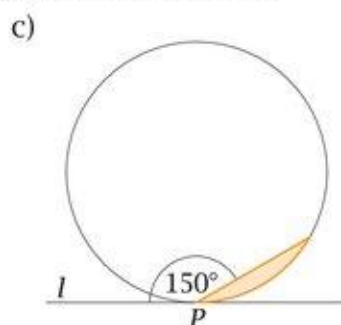
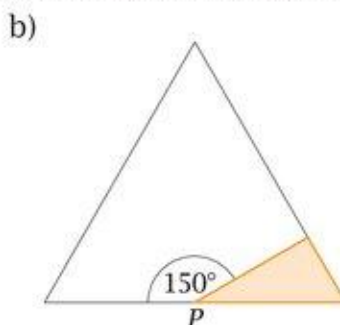
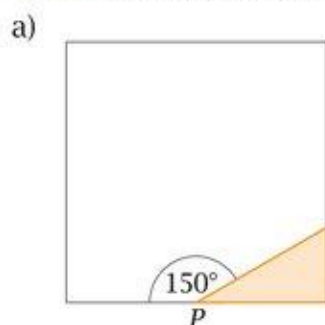
46. Proste k i l są styczne do okręgu. Oblicz miarę kąta α .



47. Promień okręgu ma długość 2. Proste k i l są styczne do okręgu. Oblicz długości odcinków a , b i c .



48. Przeczytaj informację pod rysunkiem. Jaką część figury zacięniowano?



Punkt P jest środkiem boku kwadratu.

Punkt P jest środkiem boku trójkąta równobocznego.

Punkt P jest punktem styczności okręgu i prostej l .

49. Dwa okręgi mają promienie 1 i 10. Określ, jaka jest odległość między środkami tych okręgów, gdy:

- mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego okręgu,
- większy okrąg przechodzi przez środek mniejszego okręgu,
- te okręgi są styczne (rozważ dwa przypadki),
- przecinają się,
- są rozłączne.

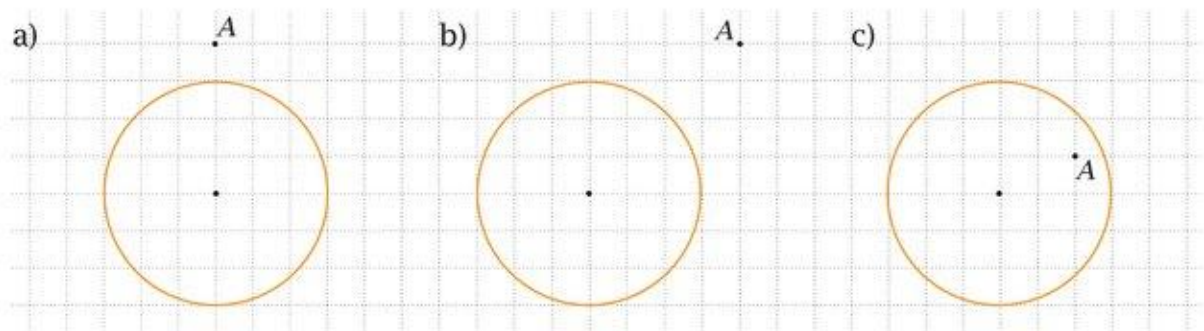
50. a) Dwa okręgi o promieniu r są styczne zewnętrznie. Są one też styczne wewnętrznie do trzeciego okręgu. Jaki promień może mieć ten okrąg?

b) Dwa okręgi o promieniach r i R ($R > r$) są styczne wewnętrznie. Trzeci okrąg jest styczny wewnętrznie do większego okręgu i zewnętrznie do mniejszego okręgu. Jaki promień może mieć ten okrąg?

51. Dwa okręgi współśrodkowe mają promienie 6 i 15.

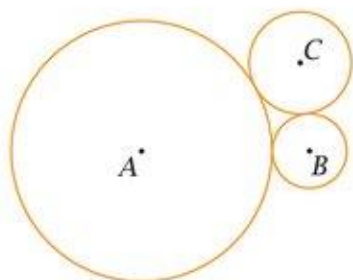
- Jaką długość ma promień okręgu stycznego do obu tych okręgów?
- Jaką długość ma promień okręgu stycznego wewnętrznemu do większego z danych okręgów, jeżeli jego środek leży na mniejszym z tych okręgów?
- Mniejszy okrąg jest styczny wewnętrznie do okręgu, którego środek leży na większym z tych okręgów. Jaką długość ma promień tego okręgu?

52. Jaki promień ma okrąg o środku A styczny do narysowanego okręgu? Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.

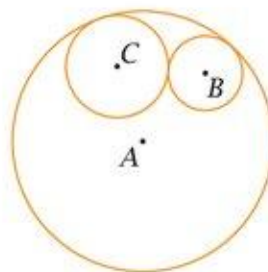


53. Okręgi o środkach w punktach A , B i C są parami styczne.

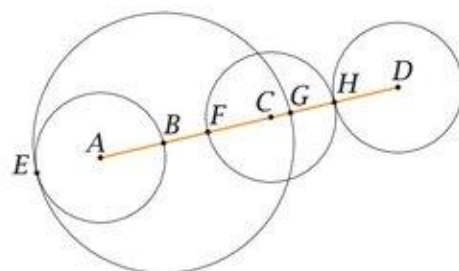
a) Uzasadnij, że obwód trójkąta ABC jest równy sumie długości średnic tych okręgów.



b) Uzasadnij, że obwód trójkąta ABC jest równy długości średnicy największego okręgu.



54. Na rysunku obok punkty A , B , C i D są środkami okręgów, a punkty E i H — punktami styczności. Wszystkie te punkty wraz z punktami F i G są współliniowe. Promienie okręgów o środkach w punktach A , C i D są jednakowe, równe 1, a odcinek GH ma długość 0,8. Oblicz długości odcinków:



- a) ED b) BC c) EF d) AH

55. Trzy okręgi są parami styczne zewnętrznie. Znajdź pole trójkąta, którego wierzchołkami są środki tych okręgów, jeśli:

- a) każdy z okręgów ma promień r ,
b) okręgi mają promienie r , $2r$ i $3r$.

56. Narysuj okrąg i zaznacz na nim punkt. Skonstruuj:

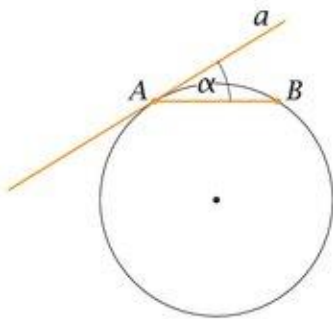
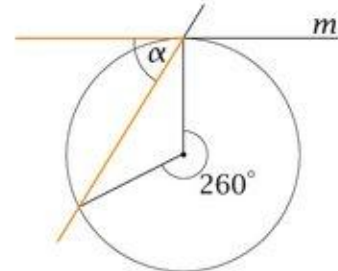
- a) dwa okręgi styczne do narysowanego okręgu w zaznaczonym punkcie o promieniu dwa razy krótszym od promienia narysowanego okręgu,
b) prostą styczną do tego okręgu w zaznaczonym punkcie.

57. Określ, jaką figurę tworzą środki wszystkich okręgów przechodzących przez:
a) dany punkt, b) dwa dane punkty, c) trzy niewspółliniowe punkty.

58. a) Narysuj okrąg o promieniu 3 cm. Następnie narysuj zbiór środków wszystkich okręgów o promieniu 1 cm stycznych do danego okręgu.

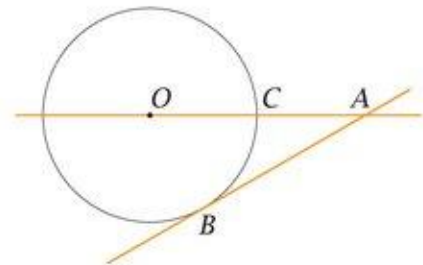
b) Narysuj prostą, a następnie zbiór środków wszystkich okręgów o promieniu 1 cm stycznych do tej prostej.

59. Prosta m jest styczna do okręgu narysowanego obok. Znajdź miarę kąta α .



60. Prosta a jest styczna do okręgu narysowanego obok, a kąt ostry między cięciwą AB i prostą a ma miarę α . Jaką miarę ma kąt rozwarty wpisany w okrąg i oparty na cięciwie AB ?

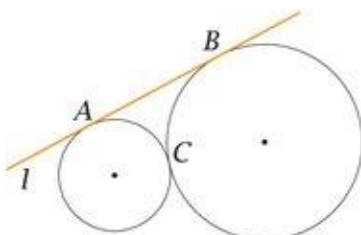
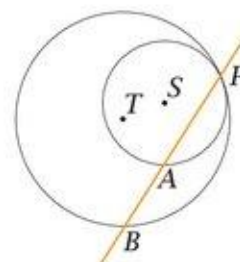
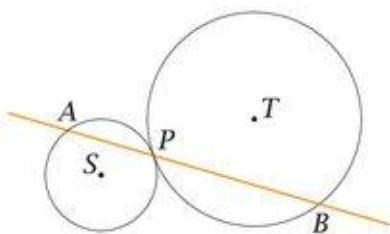
61. Na rysunku obok prosta AB jest styczna w punkcie B do okręgu o środku O , a trójkąt ABC jest równoramienny. Oblicz miarę kąta ABC .



62. Okręgi o środkach w punktach S i T są styczne w punkcie P . Sieczna poprowadzona przez punkt P przecina je w punktach A i B . Wykaż, że proste SA i TB są równoległe. Rozpatrz przypadek, że:

a) okręgi są styczne zewnętrznie,

b) okręgi są styczne wewnętrznie.



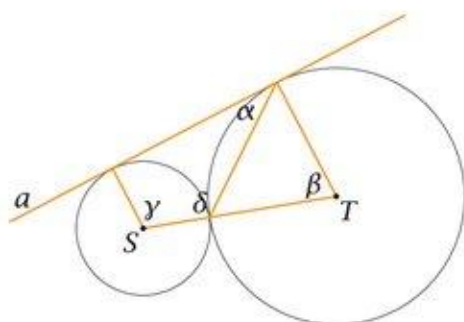
63. Na rysunku obok okręgi o promieniach a i b ($a < b$) są styczne w punkcie C , a prosta l jest styczna do każdego z nich w punktach odpowiednio A i B .

a) Jaka jest odległość między punktami A i B ?

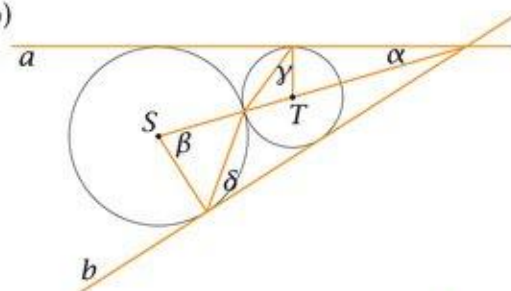
b) Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

64. Środkami okręgów na rysunkach są punkty S i T . Okręgi te są styczne do siebie i do prostych a i b . Zapisz, jaka jest zależność między miarami kątów β , γ i δ a miarą kąta α .

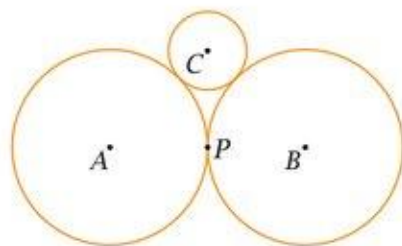
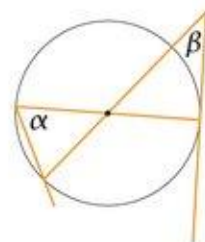
a)



b)



65. Popatrz na rysunek obok. Jaki jest związek między miarami kątów α i β ?



66. Na rysunku obok okręgi o środkach A i B mają promienie długości R i są styczne zewnętrznie w punkcie P . Oblicz, jaką długość powinien mieć promień okręgu o środku C , aby:

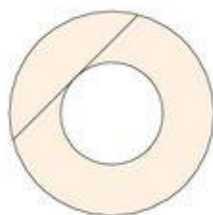
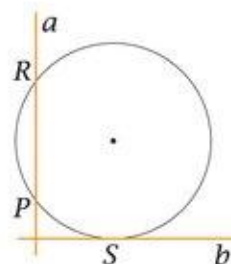
a) trójkąt ABC był prostokątny,

b) te trzy okręgi były styczne wewnętrznie do okręgu o środku w punkcie P .

67. W kole o promieniu 5 poprowadzono dwie równoległe cięciwy o długościach 6 i 8. Oblicz odległość między środkami tych cięciw.

68. Okręgi o promieniach 4 i 6 przecinają się tak, że ich wspólna cięciwa ma długość 4. Jaka jest odległość między środkami tych okręgów?

69. Na rysunku obok proste a i b są prostopadłe, a okrąg jest styczny do prostej b w punkcie S i przecina prostą a w punktach P i R . Promień okręgu jest równy 7, a odcinek PS ma długość 5. Oblicz długość cięciwy PR .

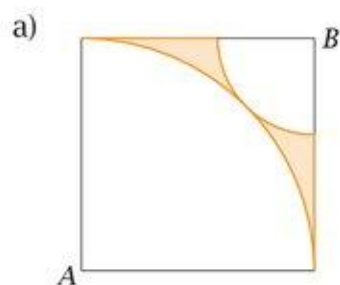


70. Na rysunku obok zacięniowano pierścień i poprowadzono cięciwę większego okręgu tak, że jest ona styczna do mniejszego okręgu.

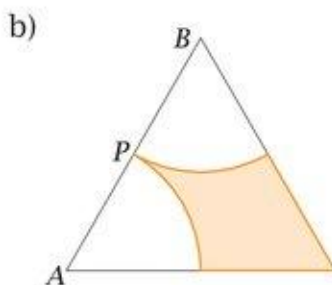
a) Uzasadnij, że jeżeli mniejszy okrąg ma promień r , a większy — R , to cięciwa ma długość $2\sqrt{R^2 - r^2}$.

b) Cięciwa ma długość 6. Jaki jest pole pierścienia?

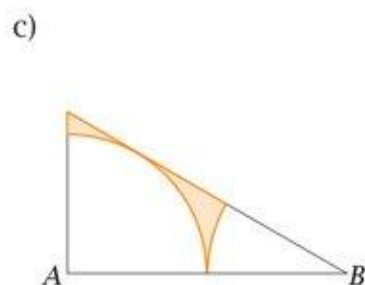
71. Zacięniowana figura jest ograniczona odcinkami i łukami okręgów o środkach w punktach A i B (łuki są styczne). Oblicz pole i obwód tej figury.



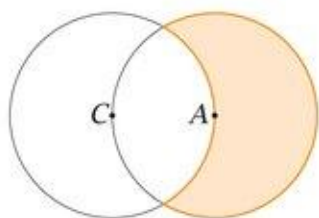
Kwadrat o boku długości 4.



Trójkąt równoboczny o boku długości 4. Punkt P jest środkiem boku.



Przeciwprostokątna trójkąta ma długość 6, a krótsza przyprostokątna — długość 3.



72. Z punktu C okręgu o środku A i promieniu r zakreślono łuk przechodzący przez punkt A (zob. rysunek obok). Oblicz pole i obwód zacięniowanej figury.

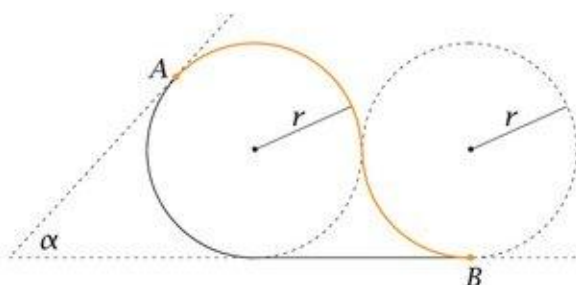
73. a) Narysuj okrąg i dowolną cięciwę tego okręgu. Skonstruuj prostą styczną do narysowanego okręgu równoległą do tej cięciwy.

b) Narysuj okrąg i zaznacz punkt leżący poza tym okręgiem. Skonstruuj prostą styczną do narysowanego okręgu przechodzącą przez wybrany punkt.

74. Narysuj okrąg i prostą. Skonstruuj okrąg styczny do narysowanego okręgu i prostej o promieniu takim samym jak narysowany okrąg.

75. Okręgi o promieniach długości $\sqrt{3} + 1$, $3 - \sqrt{3}$ i $\sqrt{3} - 1$ są parami styczne zewnętrznie. Znajdź miary kątów trójkąta, którego wierzchołkami są środki okręgów.

76. Dwa okręgi są styczne wewnętrznie w punkcie A . Promień OB większego okręgu o środku O jest styczny do mniejszego okręgu w punkcie C . Wykaż, że $|\angle BAC| = 45^\circ$.



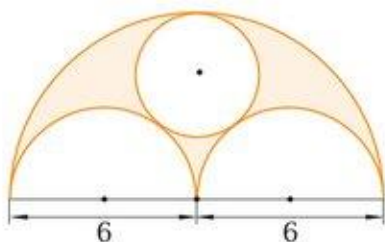
77. a) Która z dwu linii ciągłych łączących punkty A i B jest dłuższa, jeśli $\alpha = 50^\circ$?

b) Dla jakiego kąta α obie linie mają równe długości?

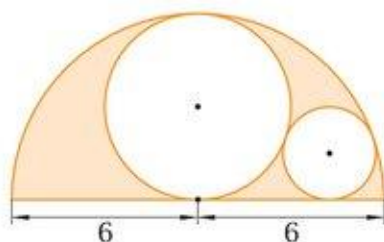
78. Odległość między środkami okręgów o promieniach 2 i 7 jest równa 13. Poprowadzono styczną do obu okręgów. Oblicz odległość między punktami styczności tej prostej do okręgów. Rozważ dwie możliwości położenia stycznej.

79. Na rysunkach przedstawiono okręgi i fragmenty okręgów stycznych. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

a)



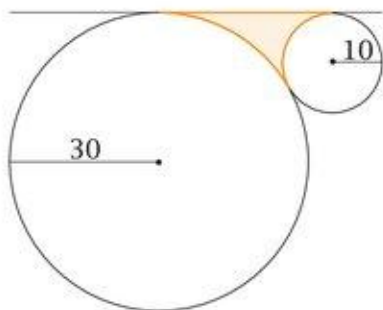
b)



80. a) Dwa okręgi o promieniach R i r są styczne zewnętrznie. Prosta a jest styczna do obu tych okręgów w punktach odpowiednio A i B . Oblicz długość odcinka AB .

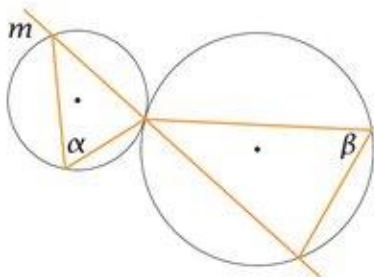
b) Popatrz na rysunek obok. Oblicz pole zacieniowanego obszaru ograniczonego okręgami stycznymi zewnętrznie i prostą styczną do tych okręgów.

c) Dwa okręgi o promieniach 4 i 9 są styczne zewnętrznie. Prosta l jest styczna do obu okręgów, ale nie przechodzi przez punkt styczności okręgów. Znajdź promień okręgu stycznego zewnętrznie do obu okręgów i stycznego do prostej l .

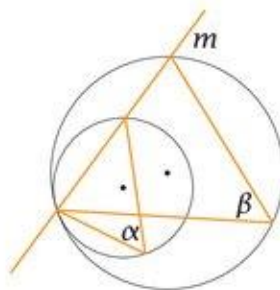


81. Okręgi na rysunku są styczne, a prosta m zawiera punkt styczności i nie przechodzi przez środki tych okręgów. Wykaż, że kąty oznaczone literami mają jednakowe miary.

a)

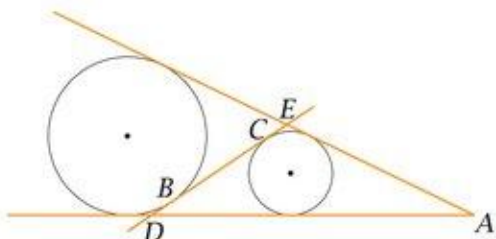


b)

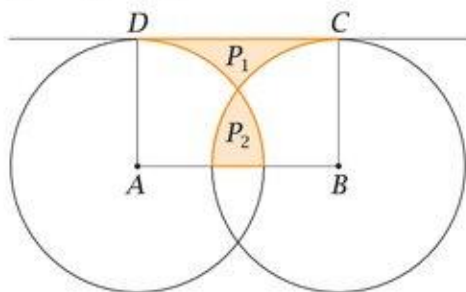


82. Dwa okręgi są styczne w punkcie S . Przez ten punkt poprowadzono prostą, która przecina te okręgi jeszcze w punktach P i R . Wykaż, że proste styczne do tych okręgów w punktach P i R są równoległe.

83. Na rysunku obok proste AD , AE i ED są styczne do dwóch rozłącznych okręgów. Punkty B i C są punktami styczności, a punkty E i D — punktami przecięcia się stycznych. Wykaż, że $|BD| = |CE|$.

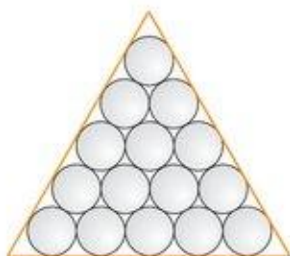


84. Do okręgu o promieniu 2 poprowadzono styczną w punkcie A . Ze środka okręgu poprowadzono półprostą, która przecina okrąg w punkcie B , a styczną w punkcie C . Półprosta i styczna przecinają się pod kątem 60° . Znajdź promień okręgu stycznego do odcinków AC i BC oraz do łuku AB .



85. Wiadomo, że pola P_1 i P_2 są równe oraz że oba okręgi mają promień o długości r . Oblicz pole prostokąta $ABCD$.

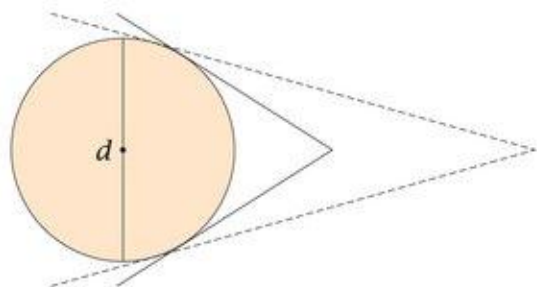
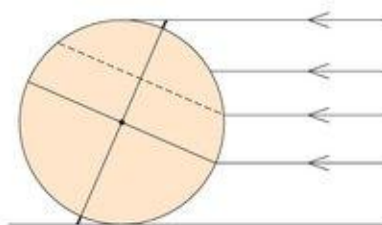
86. Trzy jednakowe puszkі o średnicy 6 cm chcemy okleić taśmą w sposób pokazany na rysunku. Czy wystarczy do tego taśma długości 36 cm?



88. W pudełku ustawiono 40 jednakowych słoików tak, że każdy jest „styczny” do sąsiednich (zobacz rysunek). Czy można tak przestawić słoiki, aby zmieściło się ich 41?



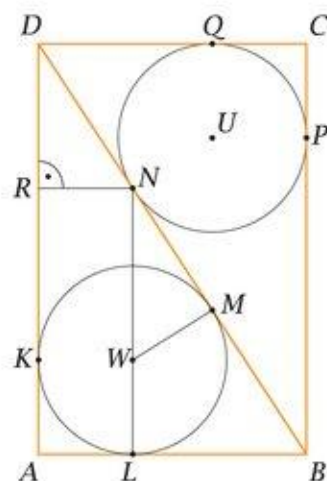
89. W południe 22 czerwca Słońce góruje nad zwrotnikiem Raka ($23^\circ 27' N$). Na jakich szerokościach geograficznych panuje wówczas noc polarna, czyli Słońce znajduje się pod horyzontem nawet w południe?



90. Oddalając się od okrągłego słupa ogłoszeniowego, widzimy coraz większą jego część. Sytuację tę przedstawia schematycznie rysunek (widok z góry). Oznaczmy średnicę słupa literą d . W jakiej odległości od słupa należy stanąć, aby widzieć 25% jego powierzchni bocznej, a w jakiej, aby widzieć jedną trzecią tej powierzchni?

91. Dwa okręgi o środkach U i W mają jednakowe promienie i każdy z nich jest styczny do dwóch boków prostokąta $ABCD$ i jednej z jego przekątnych. Punkty K, L, M, N, P, Q są punktami styczności. Punkty L, W, N leżą na prostej równoległej do odcinka AD .

- Wykaż, że trójkąt DRN i trójkąt NMW są przystające.
- Wykaż, że trójkąt DNW jest równoramienny.
- Wykaż, że trójkąt BNW nie jest trójkątem równoramiennym.



92. Narysuj dwie przecinające się proste i na jednej z nich zaznacz punkt. Skonstruuj okrąg styczny do obu tych prostych, tak aby zaznaczony punkt był jednym z punktów styczności.

93. Narysuj prostą i zaznacz dwa punkty nieleżące na tej prostej. Skonstruuj okrąg przechodzący przez te punkty o środku na narysowanej prostej. Wyjaśnij, jak liczba rozwiązań zależy od wyboru tych punktów.

94. a) Dane są dwa okręgi (o różnych promieniach) styczne zewnętrznie. Skonstruuj proste styczne jednocześnie do obu tych okręgów.

b) Dane są dwa okręgi rozłączne i odległość między ich środkami jest większa niż suma ich promieni. Skonstruuj proste styczne jednocześnie do obu tych okręgów.

95. Narysuj okrąg i prostą. Skonstruuj styczną do tego okręgu, która jest:

- równoległa do narysowanej prostej,
- prostopadła do narysowanej prostej.

96. Dane są środki trzech okręgów, z których każdy jest styczny zewnętrznie do dwu pozostałych. Skonstruuj te okręgi.

OKRĄG OPISANY NA TRÓJKĄCIE. OKRĄG WPISANY W TRÓJKĄT

97. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

- Kąty trójkąta ABS mają miary 20° , 15° i 145° . Ustal miary kątów trójkąta ABC .
- Okrąg ten jest styczny do boku AB w punkcie D , do boku BC w punkcie E , a do boku CA w punkcie F . Wiadomo, że $|AD| = 5$, $|DB| = 3$ i $|CF| = 4$. Jakie długości mają boki trójkąta ABC ?

- 98.** a) Jaki jest stosunek pola trójkąta równobocznego do pola koła w niego wpisanego?
b) Jaki jest stosunek pola koła opisanego na trójkącie równobocznym do pola tego trójkąta?
- 99.** Oblicz pole pierścienia ograniczonego okręgiem wpisanym w trójkąt równoboczny o boku długości 9 i okręgiem opisanym na tym trójkącie.
- 100.** a) Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 5, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość 3,5. Oblicz pole tego trójkąta.
b) Obwód trójkąta jest równy 13, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 3. Oblicz pole tego trójkąta.
- 101.** a) Boki trójkąta mają długości $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$ i 5. Znajdź odległość punktu przecięcia symetralnych boków tego trójkąta od jego wierzchołków.
b) Boki trójkąta mają długości $\sqrt{11}$, $\sqrt{22}$ i $\sqrt{33}$. Znajdź promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
- 102.** Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 i 12. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- 103.** a) Narysuj dowolny trójkąt prostokątny, a następnie skonstruuuj okrąg opisany na tym trójkącie.
b) Narysuj dowolny trójkąt, a następnie skonstruuuj środek okręgu opisanego na tym trójkącie.
- 104.** a) Narysuj dowolny trójkąt równoboczny, a następnie skonstruuuj okrąg wpisany w ten trójkąt.
b) Narysuj dowolny trójkąt, a następnie skonstruuuj środek okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- 105.** Wykaż, że pole pierścienia ograniczonego okręgiem wpisanym w trójkąt równoboczny o boku długości a i okręgiem opisanym na tym trójkącie jest cztery razy mniejsze od pola koła, którego promieniem jest bok tego trójkąta.
- 106.** a) Trójkąt prostokątny opisany jest na okręgu o promieniu 2. Jedna z przyprostokątnych tego trójkąta ma długość 5. Oblicz obwód tego trójkąta.
b) W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 7. W ten trójkąt wpisano okrąg o promieniu 3. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

107. a) Wykaż, że średnica okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c jest równa $a + b - c$.

b) Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgów opisanego na tym trójkącie i wpisanego w ten trójkąt.

108. W okrąg o środku O wpisano trójkąt ostrokątny ABC . Z wierzchołka A opuszczono wysokość AD . Wykaż, że $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle OAC|$.

109. Wykaż, że każdy trójkąt prostokątny można rozciąć na takie dwa trójkąty równoramienne, że różnica ich obwodów jest równa różnicy długości przyprostokątnych.

110. Znajdź stosunek pola koła opisanego na trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt, jeśli jest on:

- a) równoboczny,
- b) prostokątny o przyprostokątnych długości 3 i 4,
- c) prostokątny równoramienny.

111. a) Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego wpisanego w okrąg o promieniu r .

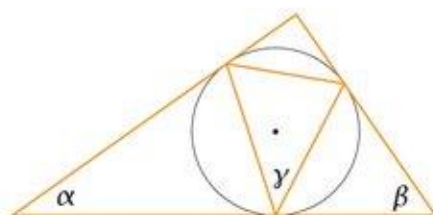
b) Oblicz pole trójkąta prostokątnego wpisanego w okrąg o promieniu r , w którym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy dłuższa od drugiej.

c) Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego wpisanego w okrąg o promieniu r ma długość równą r . Oblicz pole tego trójkąta.

112. Wykaż, że miary kątów zaznaczonych na rysunku spełniają warunek $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

113. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie i styczne do obu ramion kąta α . Mniejszy okrąg ma promień długości 1. Oblicz promień większego okręgu, jeśli:

- a) $\alpha = 60^\circ$
- b) $\alpha = 90^\circ$



114. Dane są trzy okręgi, z których każdy jest styczny zewnętrznie do dwóch pozostałych. Wykaż, że okrąg wpisany w trójkąt, którego wierzchołkami są środki danych okręgów, jest opisany na trójkącie, którego wierzchołkami są punkty styczności tych okręgów.

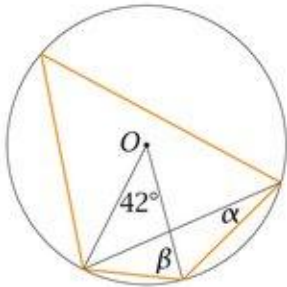
115. Z wierzchołków A i B trójkąta ABC opuszczono wysokości. Wykaż, że symetralna odcinka łączącego spodki tych wysokości dzieli bok AB na połowy.

116. Wykaż, że jeśli wielokąt jest wpisany w okrąg, to symetralne wszystkich przekątnych tego wielokąta przecinają się w jednym punkcie.

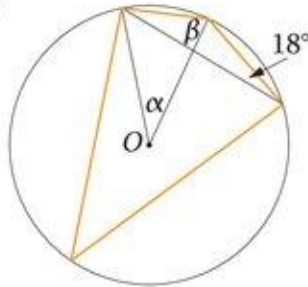
OKRĄG OPISANY NA WIELOKĄCIE

Я117. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na narysowanym wielokącie. Znajdź miary kątów α i β .

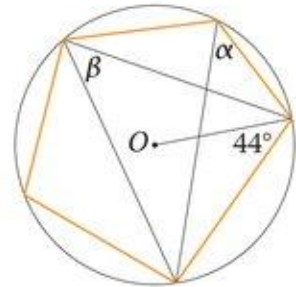
a)



b)



c)



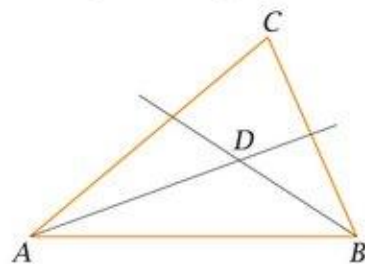
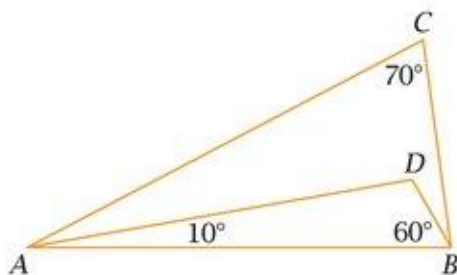
Я118. a) Na pewnym czworokącie opisano okrąg o promieniu 10. Jeden z boków tego czworokąta ma długość 6. Oblicz odległość środka okręgu od tego boku.

b) Jeden z boków czworokąta ma długość 8. Odległość środka okręgu opisanego na tym czworokącie od tego boku jest równa 2. Jaka długość ma promień okręgu?

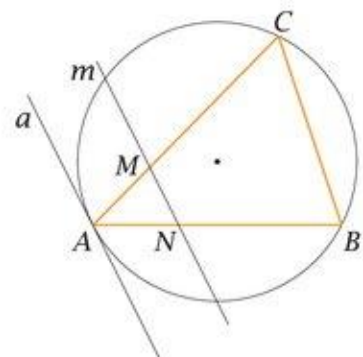
Я119. Wyjaśnij, dlaczego na każdym trapezie równoramiennym można opisać okrąg.

Я120. a) Wyjaśnij, dlaczego okręgi opisane na trójkątach ABC i ABD mają równe promienie.

b) Półproste AD i BD są dwusiecznymi kątów trójkąta ABC . Okręgi opisane na trójkątach ABC i ABD mają taki sam promień. Znajdź miarę kąta ACB .

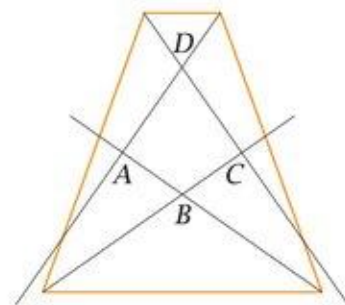


Я121. Na trójkącie ABC opisano okrąg, przez wierzchołek A poprowadzono prostą a styczną do okręgu, a następnie poprowadzono prostą m równoległą do a przecinającą dwa boki trójkąta w punktach M i N . Wykaż, że na czworokącie $BCMN$ można opisać okrąg.



Я122. Kwadrat wpisano w okrąg o promieniu r . Wykaż, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu na tym okręgu od wszystkich wierzchołków kwadratu jest równa $8r^2$.

Я 123. Punkty A, B, C i D na rysunku obok to punkty przecięcia dwusiecznych kątów trapezu równoramiennego. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.



Я 124. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B . Przez punkt A poprowadzono prostą, która przecięła jeden okrąg w punkcie C , a drugi — w punkcie D . Styczne do okręgów w punktach C i D przecięły się w punkcie E . Wykaż, że na czworokącie $BDEC$ można opisać okrąg.

Я 125. a) Znajdź promień okręgu opisanego na trapezie równoramiennym o ramieniu długości $\sqrt{10}$ i o podstawach długości 4 i 6.

b) Dwie cięciwy okręgu o promieniu 5 są równoległe i jedna z nich jest o 2 dłuższa od drugiej. Odległość między tymi cięciwami jest równa 1. Oblicz długości tych cięciw.

Я 126. Podstawami trapezu $ABCD$ są odcinki AB i CD . Ramię BC ma długość a , a odcinki AB , AC i AD mają jednakową długość równą b . Oblicz długość przekątnej BD trapezu i podaj warunek, jaki muszą spełniać a i b , aby zadanie miało rozwiązanie.

Я 127. Punkt P jest ortocentrum pewnego trójkąta ostrokątnego. Wykaż, że punkty symetryczne do punktu P względem boków tego trójkąta leżą na okręgu opisanym na tym trójkącie.

Я 128. Wyjaśnij, dlaczego sześciokąt wpisany w okrąg nie może mieć trzech kątów prostych.

Я 129. Dany jest okrąg i dwa odcinki o długościach krótszych niż średnica okręgu. Skonstruuj trapez wpisany w dany okrąg o podstawach, których długości są równe długościom danych odcinków.

OKRĄG WPISANY W WIELOKĄT

Я 130. Ramię trapezu równoramiennego ma długość 5, a okrąg wpisany w ten trapez ma promień 2. Oblicz pole tego trapezu.

Я 131. Jedna z przekątnych rombu jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz stosunek długości boku tego rombu do promienia okręgu w niego wpisanego.

Я132. Podstawy trapezu mają długości 2 i 8. Na tym trapezie można opisać okrąg i można w niego wpisać okrąg. Oblicz pole tego trapezu.

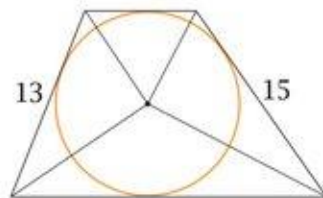
Я133. a) W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AM i BN , które przecinają się w punkcie P . Wykaż, że na czworokącie $CNPM$ można opisać okrąg.

b) Sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny. Wykaż, że w czworokąt $ACDE$ można wpisać okrąg.

c) W trapezie $ABCD$ kąty BAD i ADC są proste, dwusieczna kąta ABC przecina bok AD w punkcie M , a dwusieczna kąta BCD przecina bok AB w punkcie N . Punkt P jest punktem przecięcia tych dwusiecznych. Wykaż, że na każdym z czworokątów $ANPM$ i $CDMP$ można opisać okrąg.

d) Na bokach AB i AC trójkąta równobocznego ABC obrano dwa punkty M i N tak, że $|AM| = |AN| = \frac{1}{3}|AB|$. Wykaż, że w czworokąt $BCNM$ można wpisać okrąg.

Я134. Ramiona trapezu opisanego na okręgu mają długości 13 i 15, a pole tego trapezu jest równe 168 (zob. rysunek). Oblicz pola czterech trójkątów, na które trapez dzielą odcinki łączące środek okręgu z wierzchołkami trapezu.



Я135. a) Trapez równoramienny o obwodzie 20 i przekątnej długości $\sqrt{41}$ jest opisany na okręgu. Oblicz pole tego trapezu.

b) Trapez równoramienny jest opisany na okręgu o promieniu 6. Kąt ostry tego trapezu ma miarę 60° . Oblicz pole tego trapezu.

Я136. Wysokość trapezu równoramiennego h jest równa średniej geometrycznej długości jego podstaw a i b (tzn. $h = \sqrt{ab}$). Wykaż, że w ten trapez można wpisać okrąg.

Я137. W trapezie $ABCD$ bok AD jest prostopadły do podstaw AB i DC . W ten trapez wpisano okrąg o środku S i wiadomo, że $|SC| = 6$ oraz $|SB| = 8$. Oblicz pole tego trapezu.

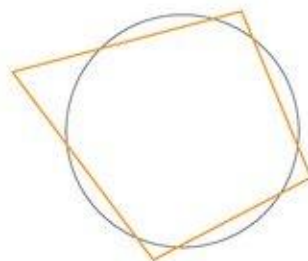
Я138. a) Kąt ostry rombu ma miarę 60° . Znajdź stosunek pola koła wpisanego w ten romb do pola koła opisanego na jednym z trójkątów, na które rozcina ten romb jego dłuższa przekątna.

b) W czworokącie $ABCD$ dane są: $|AB| = |AD|$, $|BC| = |CD|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = 90^\circ$ i $|\sphericalangle BCD| = 60^\circ$. Znajdź stosunek pola koła opisanego na tym czworokącie do pola koła wpisanego w trójkąt BCD .

c) W pewien trapez równoramienny o kącie ostrym 60° można wpisać koło. Znajdź stosunek pola koła opisanego na trapezie do pola koła wpisanego w ten trapez.

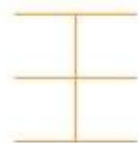
Я 139. Podstawy trapezu prostokątnego opisanego na okręgu mają długości a i b . Jakie długości mają pozostałe boki tego trapezu?

Я 140. Na rysunku obok okrąg wyciął na każdym z boków czworokąta cięciwy o jednakowych długościach. Wykaż, że w ten czworokąt można wpisać okrąg.



WŁASNOŚCI WIELOKĄTÓW. WIELOKĄTY FOREMNE

141. Przerysuj figury do zeszytu. Podziel każdą z nich na jak najmniejszą liczbę figur wypukłych.



142. a) Trójkąt równoboczny i sześciokąt foremny mają równe obwody. Jaki jest stosunek ich pól?

b) Trójkąt równoboczny i sześciokąt foremny mają równe pola. Jaki jest stosunek ich obwodów?

143. Narysuj okrąg, a następnie, korzystając z kątomierza, narysuj podany wielokąt foremny wpisany w ten okrąg.

a) pięciokąt

b) siedmiokąt

c) dziesięciokąt

144. Oblicz sumę miar wszystkich kątów:

a) dwunastokąta

b) dwudziestokąta

145. Oblicz, ile przekątnych ma:

a) siedmiokąt

b) trzynastokąt

146. Oblicz, jaką miarę ma każdy kąt n -kąta foremnego, jeżeli:

a) $n = 12$

b) $n = 15$

c) $n = 20$

147. Sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny. Oblicz miary kątów trapezu $ADEF$.

148. Skonstruuj wielokąt foremny:

- a) trójkąt b) czworokąt c) sześciokąt d) ośmiokąt

149. Narysuj dwa wielokąty niewypukłe:

- a) których część wspólna jest wielokątem wypukłym,
b) których część wspólna jest wielokątem niewypukłym,
c) których suma jest wielokątem wypukłym,
d) których suma jest wielokątem niewypukłym.

150. Czy istnieje wielokąt, w którym suma wszystkich kątów jest równa podanej liczbie? Jeśli tak, to ile kątów ma ten wielokąt?

- a) 2160° b) 2540° c) 3060°

151. Czy istnieje wielokąt o podanej liczbie przekątnych? Jeśli tak, to ile ma boków?

- a) 9 b) 12 c) 35 d) 104

152. a) W jakim wielokącie liczba przekątnych wychodzących z jednego wierzchołka jest dwa razy mniejsza niż liczba boków?

b) Jaki wielokąt ma tyle samo boków co przekątnych?

c) W jakich wielokątach liczba przekątnych jest większa od liczby boków?

153. Czy istnieje wielokąt foremny, którego kąt wewnętrzny ma podaną miarę? Jeśli tak, to ile boków ma ten wielokąt?

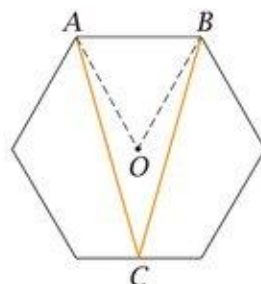
- a) 160° b) 163° c) 165° d) 166°

154. a) Naskicuj sześciokąt, którego wszystkie boki mają tę samą długość, ale który nie jest foremny.

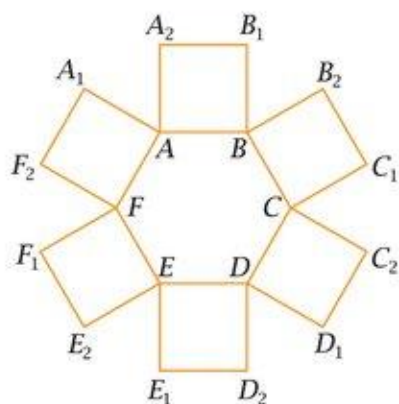
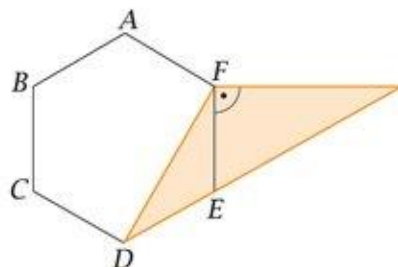
b) Naskicuj sześciokąt, w którym wszystkie kąty mają równe miary, ale który nie jest foremny.

c) Naskicuj sześciokąt, którego wszystkie boki mają tę samą długość, ale który nie jest wypukły.

155. Na rysunku obok punkt C jest środkiem boku sześciokąta foremnego. Wykaż, że odcinki AC i BC dzielą ten sześciokąt na trzy części o równych polach.



156. Sześciokąt foremny $ABCDEF$ przedstawiony na rysunku obok ma bok długości 10. Oblicz pole zacieniowanego trójkąta.



157. Na każdym z boków sześciokąta foremnego $ABCDEF$ zbudowano kwadrat (zob. rysunek obok). Wykaż, że wielokąt o wierzchołkach $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, F_1, F_2$ jest foremny.

158. a) Obwód sześciokąta foremnego jest o 4 krótszy od obwodu koła opisanego na tym sześciokącie. Oblicz pole tego koła.

b) Obwód sześciokąta foremnego jest o 4 dłuższy od obwodu koła wpisanego w ten sześciokąt. Oblicz pole tego koła.

159. Możemy przyjąć, że przekrój jednej komórki plastra miodu ma kształt sześciokąta foremnego o boku 3 mm. Ramka pszczelarska ma wymiary $20 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$. Sprawdź, czy w takiej ramce zmieści się 4000 komórek.

160. a) Wykaż, że przekątne poprowadzone z jednego wierzchołka wielokąta foremnego dzielą kąt przy tym wierzchołku na równe części.

b) Kąt między sąsiednimi przekątnymi poprowadzonymi z jednego wierzchołka wielokąta foremnego ma miarę 20° . Ile boków ma ten wielokąt?

161. Naskicuj przykład figury niewypukłej, której nie da się podzielić na skończoną liczbę figur wypukłych.

162. Uzasadnij, że część wspólna dwóch figur wypukłych jest figurą wypukłą.

163. a) Dane są trzy punkty A, B i C . Jaka jest najmniejsza figura wypukła zawierająca te trzy punkty?

b) Dane są cztery punkty A, B, C i D . Jaka jest najmniejsza figura wypukła zawierająca te cztery punkty?

164. Ile wierzchołków ma wielokąt, który ma k przekątnych?

165. Oblicz długości przekątnych ośmiokąta foremnego o boku a .

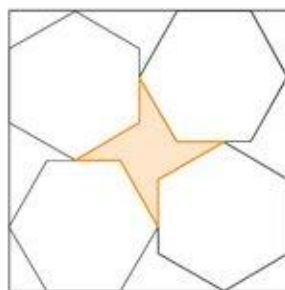
166. Oblicz długość boku ośmiokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu długości r .

167. a) Wykaż, że różnica między polem koła opisanego na kwadracie i polem koła wpisanego w ten kwadrat jest równa polu koła, którego średnicą jest bok tego kwadratu.

b) Wykaż, że różnica między polem koła opisanego na ośmiokącie foremnym i polem koła wpisanego w ten ośmiokąt jest równa polu koła, którego średnicą jest bok tego ośmiokąta.

c) Wykaż, że różnica między polem koła opisanego na n -kącie foremnym i polem koła wpisanego w ten n -kąt jest równa polu koła, którego średnicą jest bok tego n -kąta.

168. W kwadracie o boku długości 10 umieszczono przystające sześciokąty foremne, tak jak na rysunku. Oblicz pole zaznaczonego ośmiokąta.



169. Ośmiokąt $ABCDEFGH$ jest foremny. Znajdź długość boku tego ośmiokąta, jeżeli wiadomo, że:

a) przekątna AC ma długość 1,

b) przekątna AD ma długość 1,

c) przekątna AE ma długość 1.

170. Znajdź miarę kąta między boki n -kąta foremnego wpisanego w okrąg a styczną do tego okręgu przechodzącą przez wierzchołek n -kąta.

171. Stukąt $P_1P_2P_3\dots P_{100}$ jest foremny. Znajdź:

a) $|\sphericalangle P_1P_{45}P_2|$,

b) $|\sphericalangle P_{10}P_{70}P_{30}|$,

c) miarę kąta ostrego między prostymi zawierającymi przekątne P_1P_{21} i P_3P_{20} ,

d) miarę kąta ostrego między prostymi zawierającymi przekątne P_5P_{75} i $P_{10}P_{95}$.

172. Stukąt $P_1P_2P_3\dots P_{100}$ jest wpisany w okrąg. Wykaż, że suma kątów przy wierzchołkach $P_1, P_3, P_5, \dots, P_{99}$ jest równa sumie miar kątów przy wierzchołkach $P_2, P_4, P_6, \dots, P_{100}$.

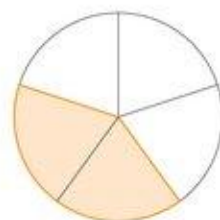
PRZED SPRAWDZIANEM

1. Która z równości przedstawia związek między polem P koła i obwodem L tego koła?

- A. $L = 2P$ B. $L^2 = 4\pi P$ C. $P^2 = \frac{L}{4\pi}$ D. $P = \frac{L^2}{4}$

2. Koło o polu równym 25π podzielono na pięć przystających wycinków, tak jak pokazano na rysunku obok. Obwód zacieniowanej figury jest równy:

- A. 5π B. $4\pi+10$ C. $10\pi+5$ D. $25\pi+10$

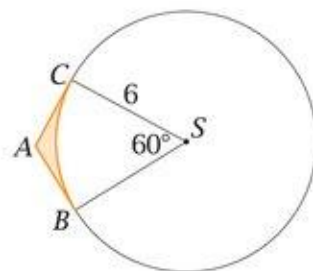


3. Wycinek koła o promieniu 3 cm i kącie środkowym 3° ma takie samo pole jak wycinek koła o promieniu $\frac{1}{3}$ cm i kącie środkowym α . Kąt α ma miarę:

- A. 9° B. 27° C. 81° D. 243°

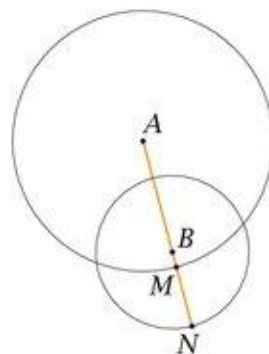
4. Na rysunku obok proste AB i AC są styczne do okręgu o środku S i promieniu 6. Pole zacieniowanego obszaru jest równe:

- A. $12\sqrt{3} - 6\pi$ C. $18\sqrt{3} - 6\pi$
B. $12\sqrt{3} - \pi$ D. $6\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi$



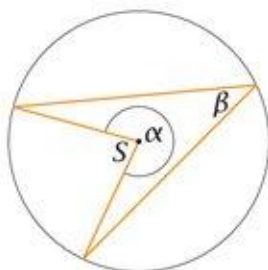
5. Na rysunku okrąg o środku A ma promień 17, okrąg o środku B ma promień 10, a odległość między tymi środkami jest równa 15. Wynika stąd, że odcinek MN ma długość:

- A. 2 B. 5 C. 7 D. 8



6. Okręgi o promieniach 9 i 4 są styczne zewnętrznie i styczne do prostej m . Oba okręgi leżą po tej samej stronie prostej. Odległość między punktami, w których prosta jest styczna do okręgów, wynosi:

- A. $\sqrt{13}$ B. 10 C. 12 D. 13

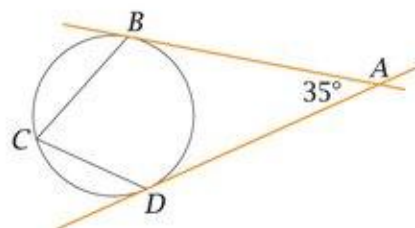


7. Punkt S jest środkiem okręgu, a suma miar kątów α i β jest równa 320° . Wynika stąd, że różnica $\alpha - \beta$ jest równa:

- A. 200° C. 260°
B. 240° D. 300°

8. Z punktu A poprowadzono dwie proste styczne do okręgu w punktach B i D . Miara kąta BCD jest równa:

- A. 35° B. 55° C. $65,5^\circ$ D. $72,5^\circ$



9. Pole trójkąta prostokątnego, w którym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy dłuższa od drugiej, jest równe 6. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość:

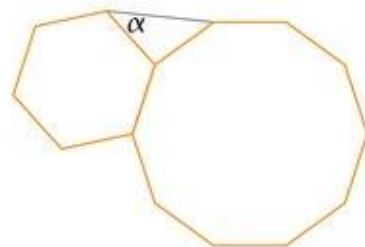
- A. $\sqrt{6}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{30}}{2}$ D. 6

10. Liczba przekątnych dziesięciokąta jest większa od liczby przekątnych pięciokąta o:

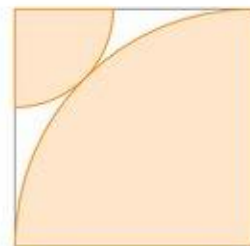
- A. 4 B. 8 C. 22 D. 34

11. Na rysunku przedstawiono dziesięciokąt foremny i sześciokąt foremny zbudowany na jednym z jego boków. Kąt α ma miarę:

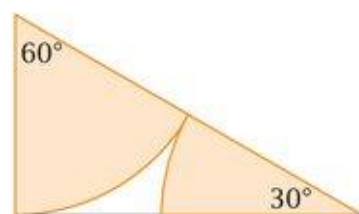
- A. 30° B. 36° C. 42° D. 44°



12. Popatrz na rysunek. W kwadracie o boku długości 1 narysowano dwa łuki okręgów o środkach w wierzchołkach tego kwadratu. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

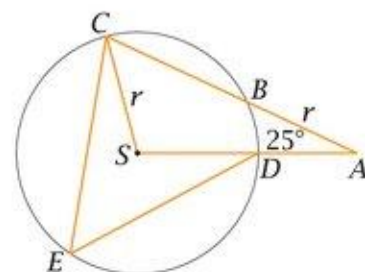


13. Figury zacieniowane na rysunku obok są wycinkami kół o środkach w wierzchołkach narysowanego trójkąta. Wykaż, że suma pól tych wycinków kół jest 4 razy mniejsza od pola koła opisanego na tym trójkącie.



14. Różnica pola koła opisanego na pewnym trójkącie równobocznym i pola koła wpisanego w ten trójkąt jest równa 75π . Oblicz długość boku tego trójkąta.

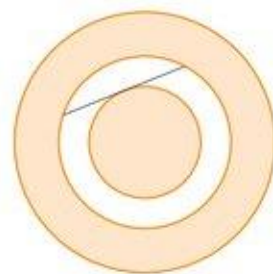
15. Na rysunku obok punkt S jest środkiem okręgu, a odcinek AB ma taką samą długość jak promień okręgu. Znajdź miarę kąta CED .



16. Wykaż, że kąt przyległy do kąta wielokąta foremnego o n wierzchołkach ma miarę równą $\frac{360^\circ}{n}$.

Я17. Okręgi na rysunku obok są współśrodkowe. Cięciwa środkowego okręgu styczna do małego okręgu ma długość równą promieniowi R dużego okręgu. Pole zacieniowanego obszaru jest równe:

- A. $\frac{1}{4}\pi R^2$ C. $\frac{2}{3}\pi R^2$
B. $0,75\pi R^2$ D. $0,8\pi R^2$

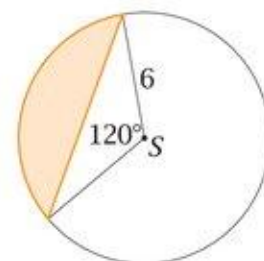


Я18. Wycinek W_1 wycięto z koła o promieniu dwa razy większym od promienia koła, z którego wycięto wycinek W_2 , ale kąt środkowy wycinka W_1 ma miarę dwa razy mniejszą od miary kąta środkowego wycinka W_2 . Które zdanie jest prawdziwe?

- A. Oba wycinki mają równe pola i równe obwody.
B. Wycinek W_1 ma większe pole od pola wycinka W_2 , ale oba mają równe obwody.
C. Wycinek W_2 ma większy obwód od obwodu wycinka W_1 , ale oba mają równe pola.
D. Wycinek W_1 ma większe pole i większy obwód od pola i obwodu wycinka W_2 .

Я19. Na rysunku obok zacieniowano odcinek koła o środku S i promieniu 6. Pole tego odcinka jest równe:

- A. $12\pi - 9\sqrt{3}$ C. $12\pi - 18\sqrt{3}$
B. $18\pi - 12\sqrt{3}$ D. $9\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$



Я20. Okrąg o środku A ma promień długości r , a okrąg o środku B ma promień długości R , przy czym $R > r$. Poniżej podano cztery warunki:

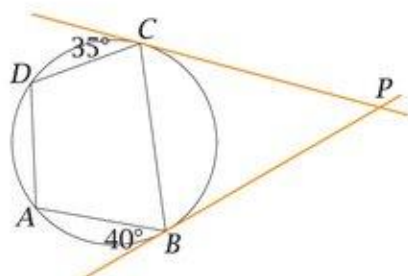
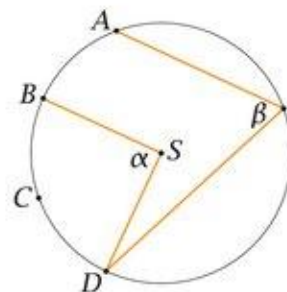
- I. $|AB| > R - r$ II. $|AB| < R - r$ III. $|AB| > R + r$ IV. $|AB| < R + r$

Jeśli te okręgi przecinają się w dwóch punktach, to:

- A. spełniony jest tylko warunek IV C. spełniony jest tylko warunek II
B. spełnione są warunki I i III D. spełnione są warunki I i IV

Я21. Punkt S jest środkiem okręgu narysowanego obok, a łuki AB , BC i CD mają równe długości. Wynika stąd, że:

- A. $\alpha = \beta$ C. $\alpha = 2\beta$
B. $2\alpha = 3\beta$ D. $3\alpha = 4\beta$



Я22. Popatrz na rysunek obok. Proste PC i PB są styczne do okręgu. Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się pod kątem o mierze:

- A. 15° B. 70° C. 75° D. 80°

Я23. W trójkącie ABC dane są: $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 70^\circ$, punkt S jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, punkt P jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a punkty K i L są punktami styczności okręgu wpisanego do boków odpowiednio AB i AC . Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A. Półprosta CS jest dwusieczną kąta ACB .
 B. Trójkąt ASC jest równoramienny.
 C. Kąt AKL ma miarę 75° .
 D. Kąt APB ma miarę 130° .

Я24. Odcinki AK , BL , CM są wysokościami w trójkącie ostrokątnym ABC , a punkt P jest ortocentrum tego trójkąta. Rozważ czworokąty $AMPL$, $BKPM$, $CLPK$. Na ilu z tych czworokątów można opisać okrąg?

- A. na żadnym B. na jednym C. na dwóch D. na wszystkich

Я25. Na okręgu o promieniu r opisano czworokąt, którego najdłuższy bok ma długość a , a najkrótszy — długość b . Pole tego czworokąta jest równe:

- A. $ar + br$ B. $r(2a + 2b)$ C. $\frac{(a+b)r}{2}$ D. $ab - \pi r^2$

Я26. Z jednego z wierzchołków wielokąta można poprowadzić 10 przekątnych. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

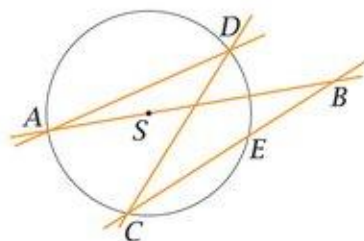
- A. Suma miar kątów tego wielokąta jest równa 1980° .
 B. Z każdego z wierzchołków tego wielokąta można poprowadzić 10 przekątnych.
 C. Ten wielokąt ma 130 przekątnych.
 D. Ten wielokąt ma 13 boków.

Я27. Miara każdego kąta wielokąta foremnego o n wierzchołkach jest równa α , a miara każdego kąta wielokąta foremnego o $2n$ wierzchołkach jest równa β . Która z poniższych równości jest prawdziwa?

- A. $\beta = \frac{\alpha}{2}$ B. $\beta = \alpha + 2^\circ$ C. $\beta = 2\alpha$ D. $\beta = \alpha + \frac{180^\circ}{n}$

Я28. Okręgi o środkach A i B mają promienie o długościach odpowiednio 2 i 3 i są styczne zewnętrznie. Okrąg o środku C ma promień o długości 1 i jest styczny wewnętrznie do większego z tych okręgów. Podaj możliwie najmniejszy przedział, do którego na pewno należy obwód trójkąta ABC .

29. Na rysunku obok punkt S jest środkiem okręgu, a odcinek BE ma długość równą promieniowi okręgu. Wykaż, że $2|\sphericalangle ADC| = 3|\sphericalangle ABC|$.



Я30. Prostokąt $ABCD$, w którym bok AB jest dwa razy dłuższy od boku BC , rozcięto na trójkąt BCE i trapez $ABED$ tak, że w trapez można wpisać okrąg. W jakim stosunku punkt E dzieli dłuższy bok prostokąta?

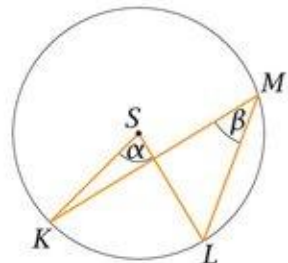
PRZED MATURĄ

1. Dane są dwa okręgi o promieniach 10 i 15. Mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego okręgu. Odległość między środkami tych okręgów jest równa:

- A. 2,5 B. 5 C. 10 D. 12,5

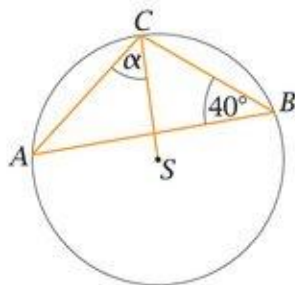
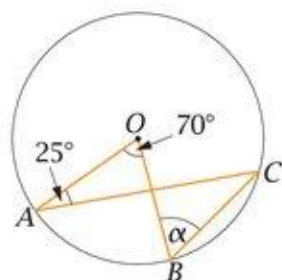
2. Dany jest okrąg o środku S . Punkty K , L i M leżą na tym okręgu. Na łuku KL tego okręgu są oparte kąty KSL i KML (zob. rysunek), których miary α i β spełniają warunek $\alpha + \beta = 114^\circ$. Wynika stąd, że:

- A. $\beta = 19^\circ$ C. $\beta = 57^\circ$
B. $\beta = 38^\circ$ D. $\beta = 76^\circ$



3. Na okręgu o środku w punkcie O wybrano trzy punkty A , B , C tak, że $|\sphericalangle AOB| = 70^\circ$, $|\sphericalangle OAC| = 25^\circ$. Cięciwa AC przecina promień OB (zob. rysunek). Wtedy miara kąta α jest równa:

- A. 25° B. 60° C. 70° D. 85°

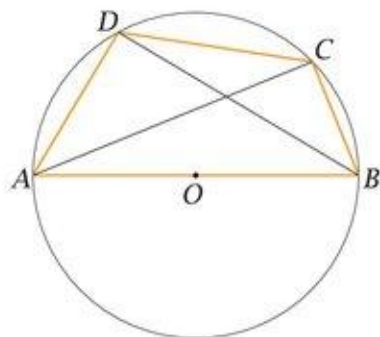
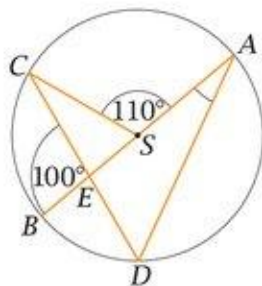


4. W trójkącie ABC wpisanym w okrąg o środku w punkcie S miara kąta ABC jest równa 40° (zob. rysunek). Miara α kąta, jaki bok AC tworzy z promieniem CS , jest równa:

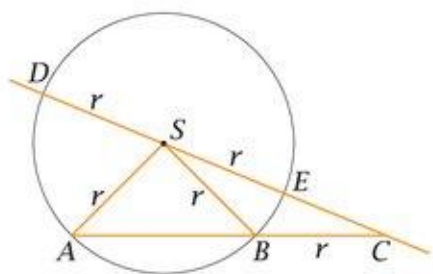
- A. $\alpha = 40^\circ$ C. $\alpha = 50^\circ$
B. $\alpha = 45^\circ$ D. $\alpha = 60^\circ$

5. Punkty A , B , C i D leżą na okręgu o środku S . Cięciwa CD przecina średnicę AB tego okręgu w punkcie E tak, że $|\sphericalangle BEC| = 100^\circ$. Kąt środkowy ASC ma miarę 110° (zob. rysunek). Kąt wpisany BAD ma miarę:

- A. 15° C. 25°
B. 20° D. 30°



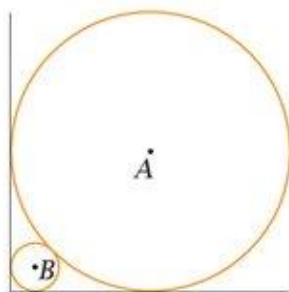
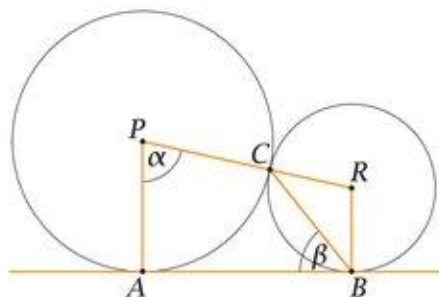
6. Bok AB czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg jest średnicą tego okręgu (zob. rysunek). Udowodnij, że $|AD|^2 + |BD|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$.



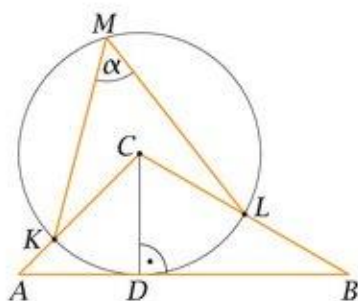
7. Dany jest okrąg o środku w punkcie S i promieniu r . Na przedłużeniu cięciwy AB poza punkt B odłożono odcinek BC równy promieniowi danego okręgu. Przez punkty C i S poprowadzono prostą. Prosta CS przecina dany okrąg w punktach D i E (zob. rysunek). Wykaż, że jeżeli miara kąta ACS jest równa α , to miara kąta ASD jest równa 3α .

8. Na trójkącie o bokach długości $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{15}$ opisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu.

9. Dane są dwa okręgi o środkach w punktach P i R , styczne zewnętrznie w punkcie C . Prosta AB jest styczna do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B oraz $|\sphericalangle APC| = \alpha$ i $|\sphericalangle ABC| = \beta$ (zob. rysunek obok). Wykaż, że $\alpha = 180^\circ - 2\beta$.



10. Okręgi o środkach odpowiednio A i B są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest styczny do obu ramion danego kąta prostego (zob. rysunek). Promień okręgu o środku A jest równy 2. Uzasadnij, że promień okręgu o środku B jest mniejszy od $\sqrt{2} - 1$.

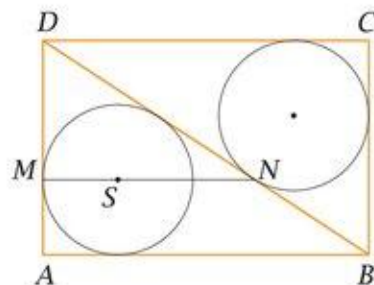


11. Odcinek CD jest wysokością trójkąta ABC , w którym $|AD| = |CD| = \frac{1}{2}|BC|$ (zob. rysunek obok). Okrąg o środku C i promieniu CD jest styczny do prostej AB . Okrąg ten przecina boki AC i BC trójkąta odpowiednio w punktach K i L . Zaznaczony na rysunku kąt α wpisany w okrąg jest równy:

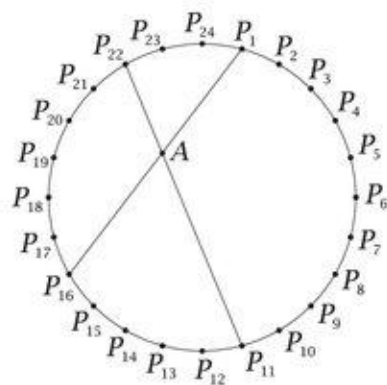
- A. $37,5^\circ$ B. 45° C. $52,5^\circ$ D. 60°

12. Miara kąta wewnętrznego n -kąta foremnego jest o 2° mniejsza od miary kąta wewnętrznego $(n+2)$ -kąta foremnego. Oblicz n .

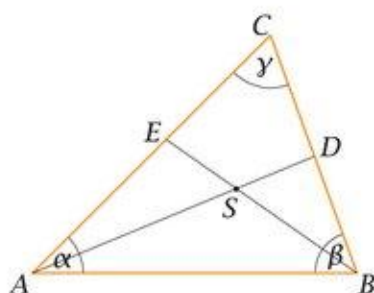
13. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N . Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M , a środek S tego okręgu leży na odcinku MN , jak na rysunku. Wykaż, że $|MN| = |AD|$.



Я 14. Punkty $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{23}, P_{24}$ dzielą okrąg na 24 równe łuki (zob. rysunek). Punkt A jest punktem przecięcia cięciw $P_{11}P_{22}$ i P_1P_{16} . Udowodnij, że $|\sphericalangle P_{16}AP_{11}| = 60^\circ$.

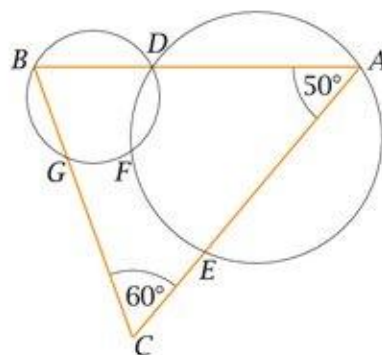


Я 15. Trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu. Ramię BC ma długość 10, a ramię AD jest wysokością trapezu. Podstawa AB jest 2 razy dłuższa od podstawy CD . Oblicz pole tego trapezu.



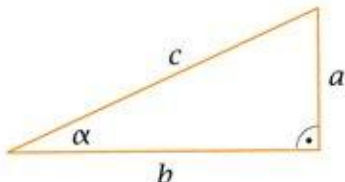
Я 16. Miary kątów trójkąta ABC są równe $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$ oraz $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a proste zawierające odcinki AS i BS przecinają boki BC i AC tego trójkąta w punktach odpowiednio D i E (zob. rysunek). Wykaż, że jeżeli $\alpha + \beta = 2\gamma$, to na czworokącie $DCES$ można opisać okrąg.

Я 17. W trójkącie ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku A ma miarę 50° , a kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę 60° . Okrąg o_1 przechodzi przez punkt A i przecina boki AB i AC trójkąta odpowiednio w punktach D i E . Okrąg o_2 przechodzi przez punkt B , przecina okrąg o_1 w punkcie D oraz w punkcie F leżącym wewnątrz trójkąta ABC . Ponadto okrąg o_2 przecina bok BC trójkąta w punkcie G . Udowodnij, że na czworokącie $CEFG$ można opisać okrąg.



TRYGONOMETRIA

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60°

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Związki między funkcjami trygonometrycznymi

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Wzory redukcyjne

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

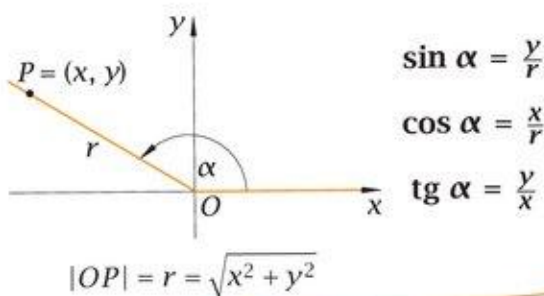
$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

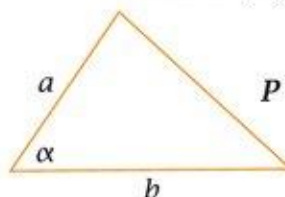
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Funkcje trygonometryczne kąta od 0° do 180° w układzie współrzędnych



Pole trójkąta



$$P = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

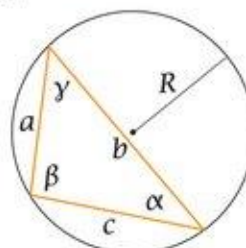
Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

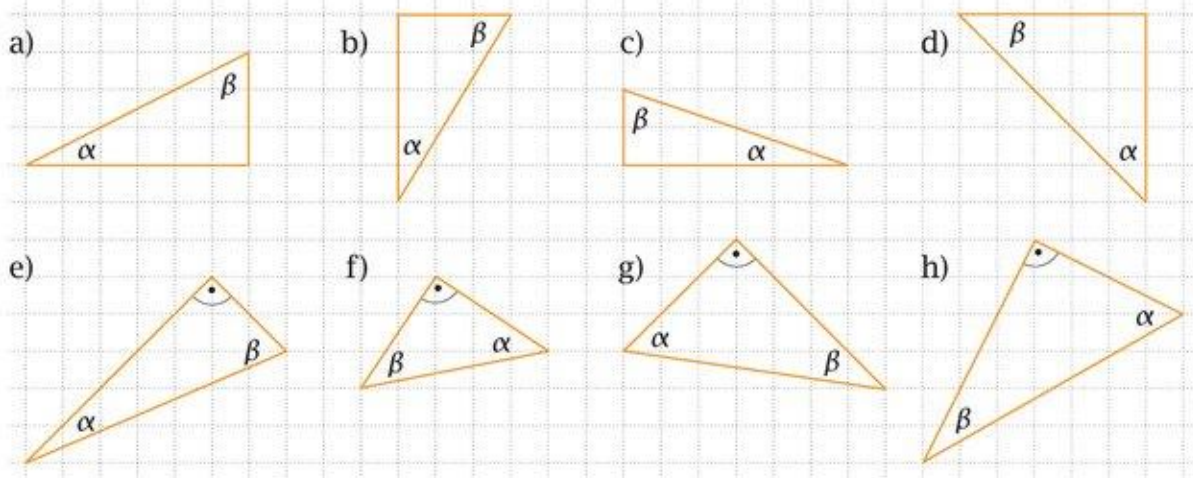
Twierdzenie sinusów



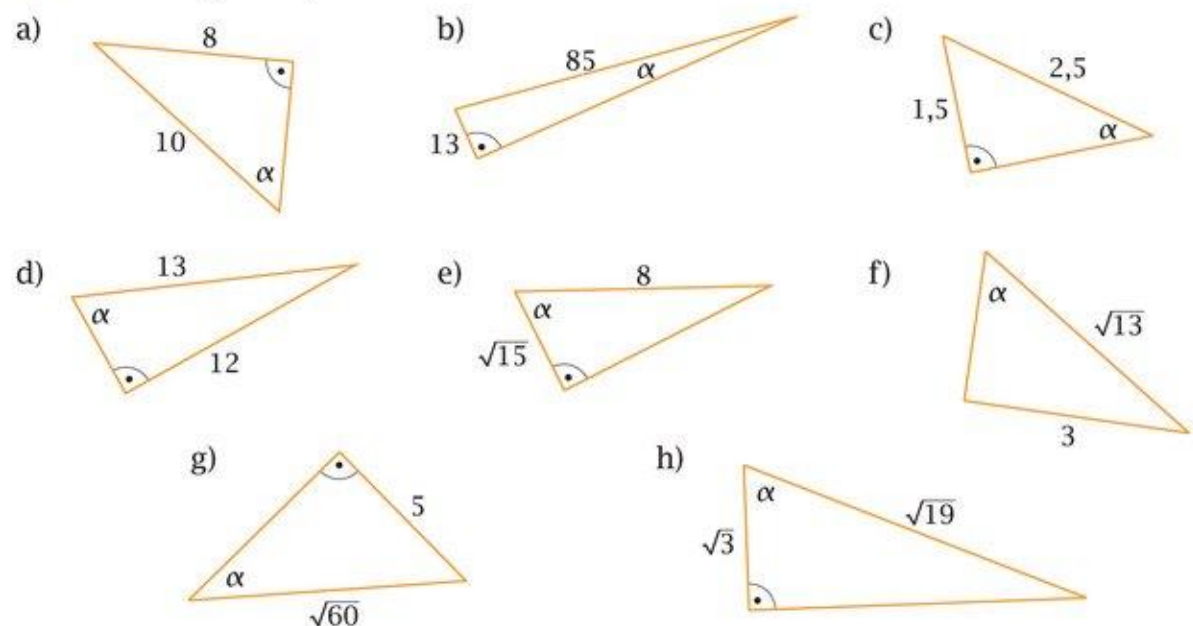
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

TANGENS KĄTA OSTREGO

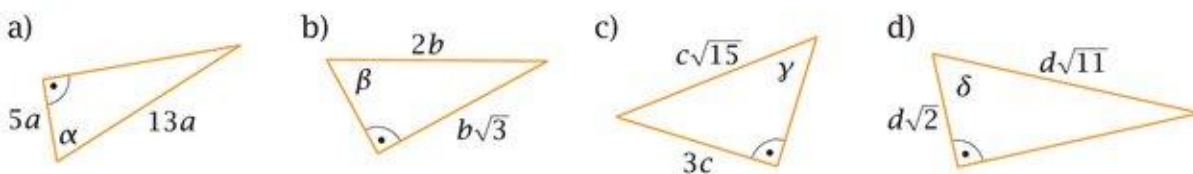
1. Oblicz tangens kąta α i tangens kąta β .



2. Oblicz tangens kąta α .



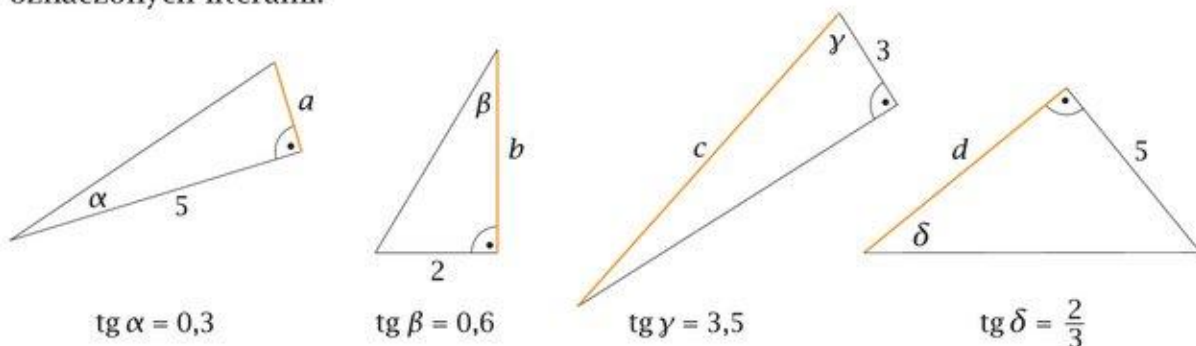
3. Oblicz tangens kąta oznaczonego literą.



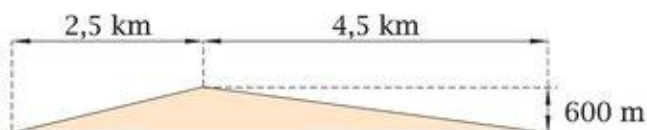
4. Narysuj na papierze w kratkę trzy różne trójkąty prostokątne, w których jeden z kątów ma tangens równy podanej liczbie. Zaznacz ten kąt.

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $2\frac{1}{3}$ d) 0,7

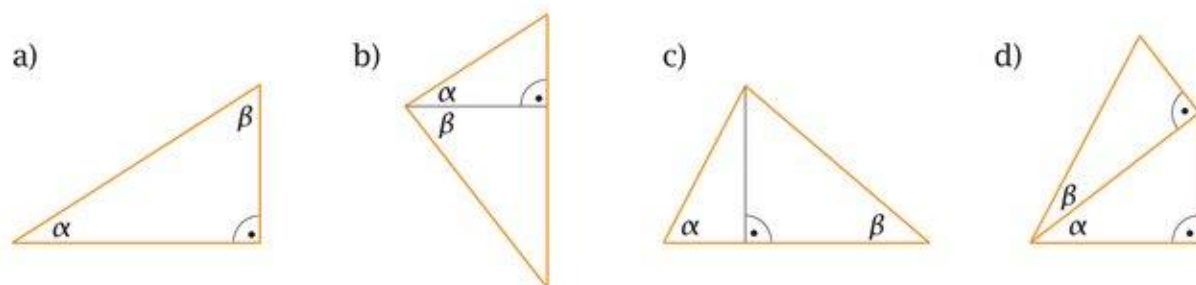
5. Skorzystaj z informacji zapisanych pod rysunkami i oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



6. Na rysunku przedstawiono schematycznie przekrój przez pewną górę, na którym widać dwa jej zbocza. Oblicz średnie nachylenie każdego z tych stoków (wyrażone w procentach).



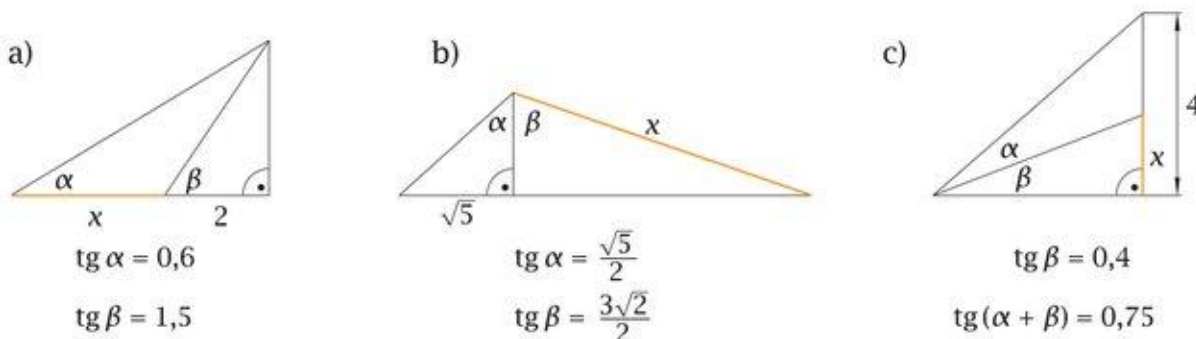
7. Bez wykonywania obliczeń oceń, która z liczb jest większa — $\operatorname{tg} \alpha$ czy $\operatorname{tg} \beta$.



8. Trójkąt prostokątny ABC ma kąty ostre α i β , a trójkąt prostokątny DEF ma kąty ostre γ i δ . Wiadomo, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$, $\operatorname{tg} \gamma = 8$. Oceń, który kąt jest większy.

- a) α czy γ b) β czy δ c) α czy δ d) β czy γ

9. Korzystając z informacji zapisanych pod rysunkiem, oblicz długość odcinka x .



10. W trójkącie prostokątnym naprzeciwko kąta α leży bok a , naprzeciwko kąta β leży bok b , a naprzeciwko kąta prostego leży bok c . Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{tg} \beta$, jeżeli:

- a) bok b jest 40 razy dłuższy od a ,
- b) bok b jest 40 razy krótszy od a ,
- c) bok b jest o 40% dłuższy od a ,
- d) bok b jest o 40% krótszy od a ,
- e) długość b stanowi 40% długości a ,
- f) bok c jest o 40% dłuższy od a .

11. a) Tangens jednego z kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest równy 1,4, a przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość $\sqrt{74}$. Oblicz długości przyprostokątnych i pole tego trójkąta.

b) Tangens jednego z kątów ostrych trójkąta prostokątnego o polu 14 wynosi 3,5. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

c) Tangens jednego z kątów ostrych trójkąta prostokątnego o obwodzie 30 jest równy 2,4. Oblicz pole tego trójkąta.

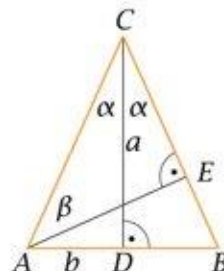
12. Równoległobok ma boki długości $2\sqrt{2}$ i 4, a jego krótsza wysokość ma długość 2. Oblicz tangens kąta ostrego tego równoległoboku.

13. Popatrz na rysunek obok. Odcinki CD i AE są wysokościami ostrokątnego trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$, $|CD| = a$ i $|AD| = b$.

a) Wykaż, że $|AE| = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i $|EC| = \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

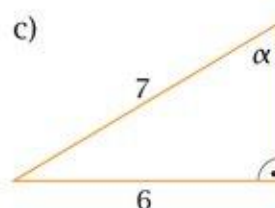
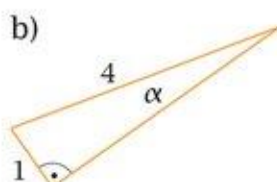
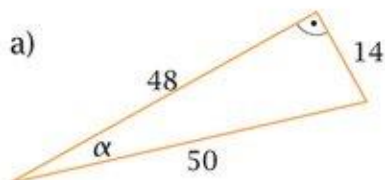
b) Skorzystaj z zależności podanych w podpunkcie a) i uzasadnij, że $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

c) Skorzystaj z zależności podanych w podpunktach a) i b) i wykaż, że $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$.

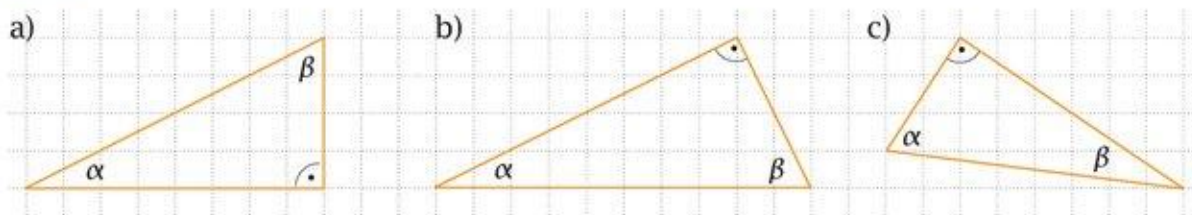


SINUS I COSINUS KĄTA OSTREGO

14. Oblicz tangens, sinus i cosinus kąta α .



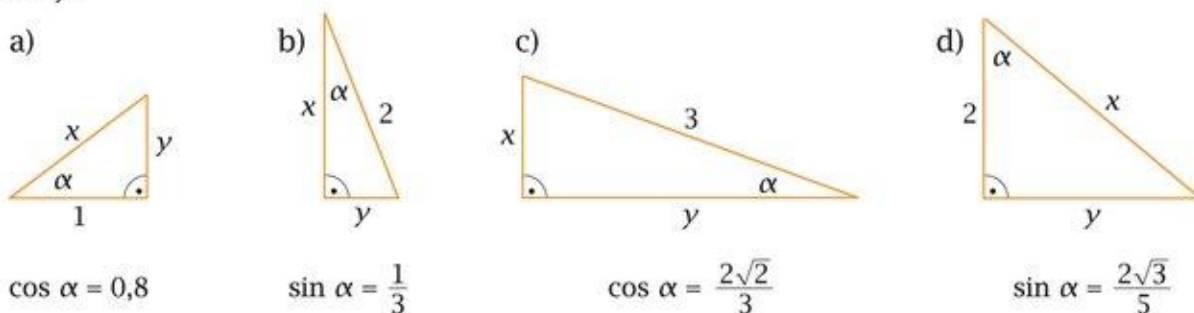
15. Oblicz sinus i cosinus kątów α i β .



16. a) Oblicz sinus, cosinus i tangens większego z kątów ostrych trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 7.

b) Oblicz sinus, cosinus i tangens mniejszego kąta ostrego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej długości 3 i przeciwprostokątnej długości 7.

17. Skorzystaj z informacji zapisanych pod rysunkiem i oblicz długości odcinków x i y .



18. Przyjrzyj się rysunkowi. Porównaj liczby:

a) $\sin \alpha$ i $\sin \beta$

b) $\cos \alpha$ i $\cos \beta$

c) $\cos \alpha$ i $\sin \beta$



19. Porównaj liczby, nie używając kalkulatora ani tablic.

a) $\sin 2^\circ$ i $\sin 18^\circ$

c) $\cos 4^\circ$ i $\cos 74^\circ$

e) $\sin 20^\circ$ i $\cos 20^\circ$

b) $\sin 15^\circ$ i $\sin 1,5^\circ$

d) $\cos 3^\circ$ i $\cos 0,1^\circ$

f) $\sin 50^\circ$ i $\cos 50^\circ$

20. Nie używając kalkulatora ani tablic, oceń, który kąt (α czy β) ma większą miarę.

a) $\sin \alpha = 0,1$, $\sin \beta = 0,7$

c) $\cos \alpha = 0,01$, $\cos \beta = 0,99$

b) $\sin \alpha = 0,49$, $\sin \beta = 0,35$

d) $\cos \alpha = 0,4$, $\cos \beta = 0,45$

21. Oszacuj, bez użycia tablic i kalkulatora, które z wyrażeń jest mniejsze od 0,5.

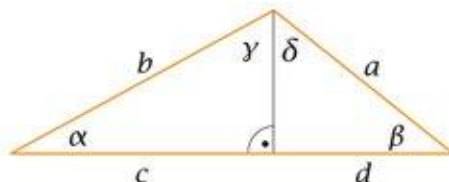
$$a = \sin 20^\circ \quad b = \tan 50^\circ \quad c = \cos 40^\circ \quad d = \frac{1}{4 - \sin 35^\circ} \quad e = \cos 55^\circ - \frac{1}{2} \quad f = \frac{\tan 75^\circ}{2}$$

22. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α . Bok leżący naprzeciwko tego kąta ma długość a , przyprostokątna leżąca przy tym kącie ma długość b , a przeciwprostokątna ma długość c . Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, jeżeli:

- bok a jest krótszy od boku c o 40%, a bok b jest krótszy od boku c o 20%,
- bok a jest krótszy od c o 4%, a długość boku b stanowi 28% długości boku c ,
- bok a jest krótszy o 30% od boku c .

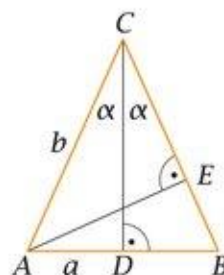
23. Korzystając z oznaczeń podanych na rysunku, uzasadnij równości:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b} \quad \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{c}{d} \quad \frac{\cos \gamma}{\cos \delta} = \frac{a}{b}$$



24. Popatrz na rysunek obok. Odcinki CD i AE są wysokościami ostrokątnego trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$, $|AD| = a$ i $|AC| = b$.

- Wykaż, że $|AE| = \frac{2a\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$.
- Skorzystaj z zależności podanej w podpunkcie a) i udowodnij, że $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.
- Wykaż, że $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.



OBLICZENIA TRYGONOMETRYCZNE

25. Znajdź (z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku) liczby:

$\sin 5^\circ$	$\cos 17^\circ$	$\cos 57^\circ$	$\cos 85^\circ$
$\operatorname{tg} 10^\circ$	$\sin 29^\circ$	$\sin 72^\circ$	$\operatorname{tg} 89^\circ$

26. Oblicz z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku wartość podanego wyrażenia.

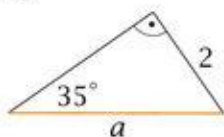
- $3 \operatorname{tg} 17^\circ$
- $2 \sin 52^\circ + 3$
- $5 - 4 \cos 27^\circ$
- $\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ$
- $3 \sin 76^\circ + 2 \cos 18^\circ$
- $5 \operatorname{tg} 67^\circ - 12 \cos 85^\circ$
- $1 - \sin^2 75^\circ$
- $\operatorname{tg}^2 50^\circ + \operatorname{tg}^2 40^\circ$
- $\cos^2 17^\circ - \sin^2 71^\circ$

27. Podaj miarę kąta α , jeżeli wiadomo, że:

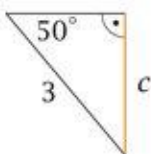
- $\sin \alpha = 0,19$
- $\cos \alpha = 0,26$
- $\operatorname{tg} \alpha = 0,14$
- $\sin \alpha = 0,45$
- $\cos \alpha = 0,82$
- $\operatorname{tg} \alpha = 1,6$
- $\sin \alpha = 0,92$
- $\cos \alpha = 0,97$
- $\operatorname{tg} \alpha = 9,51$

28. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

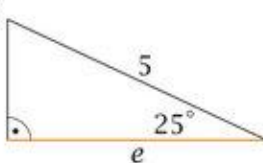
a)



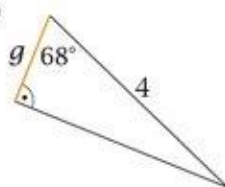
c)



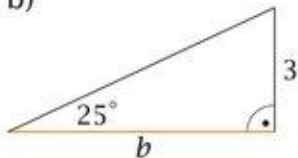
e)



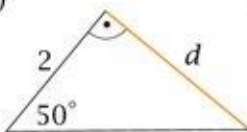
g)



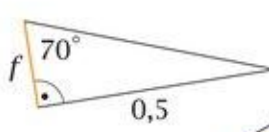
b)



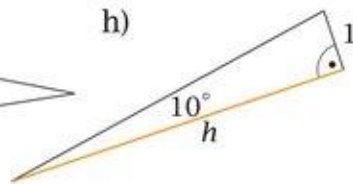
d)



f)

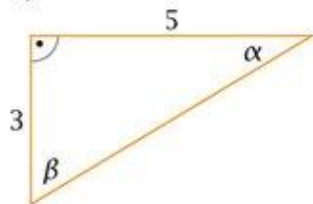


h)

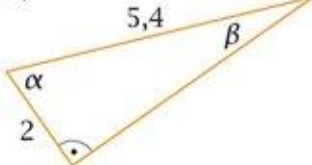


29. Oblicz miary kątów α i β .

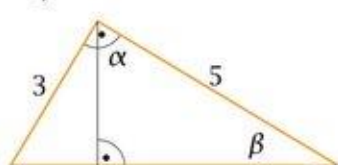
a)



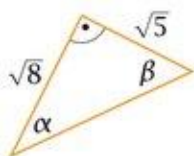
c)



e)



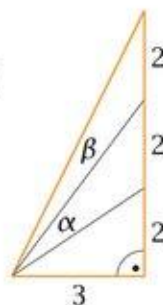
b)



d)

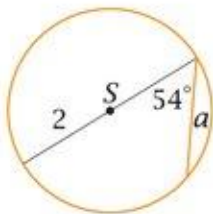


f)

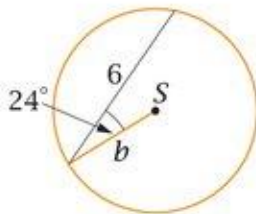


30. Punkt S jest środkiem okręgu, a T — punktem styczności okręgu i prostej. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

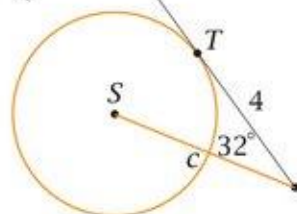
a)



b)



c)



31. a) Jaką długość ma przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego, w którym kąt ostry ma miarę 70° i najkrótszy bok ma długość 20 cm?

b) Jakie długości mają przyprostokątne trójkąta prostokątnego o kącie ostrym 20° i przeciwprostokątnej długości 10 cm?

c) Jaki obwód ma trójkąt prostokątny, w którym kąt ostry ma miarę 40° , a krótsza przyprostokątna ma długość 5?

32. Sprawdź, że podane liczby tworzą trójkę pitagorejską, czyli trójkę liczb naturalnych, które są długościami boków pewnego trójkąta prostokątnego. Oblicz miary kątów ostrych tego trójkąta.

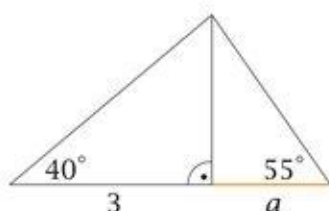
a) 3, 4, 5

b) 5, 12, 13

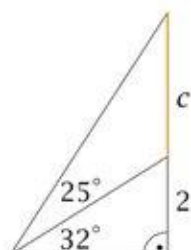
c) 8, 15, 17

33. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

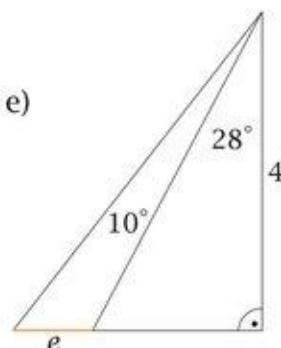
a)



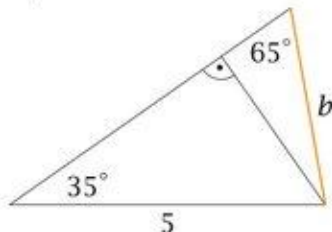
c)



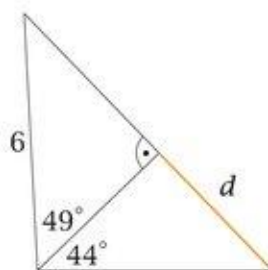
e)



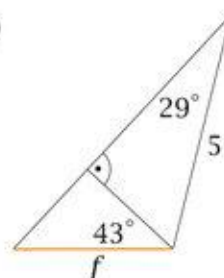
b)



d)

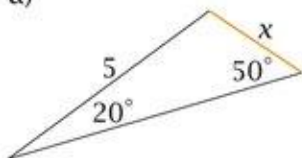


f)

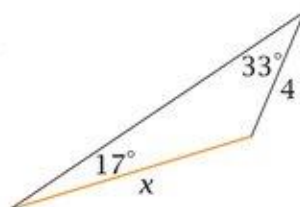


34. Jaką długość ma odcinek x ?

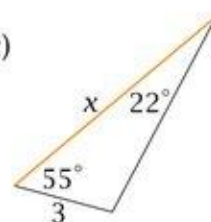
a)



b)



c)



35. a) Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 4 cm, a kąt między ramionami ma miarę 102° . Oblicz długość podstawy tego trójkąta.

b) W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ma miarę 23° . Wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość 6 cm. Oblicz długość przeciwprostokątnej.

c) Kąt ostry rombu ma miarę 32° , a dłuższa przekątna ma długość 10 cm. Oblicz długość boku tego rombu.

d) Krótszy bok równoległoboku ma długość 3 cm, a jeden z kątów ma miarę 105° . Oblicz długość wysokości tego równoległoboku opuszczonej na dłuższy bok.

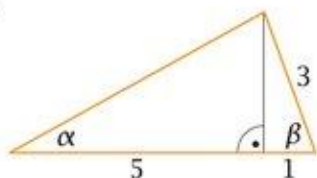
e) Jedno z ramion trapezu prostokątnego ma długość 6 cm i nachylone jest do podstawy pod kątem 70° . Oblicz długość drugiego ramienia tego trapezu.

f) W trapezie równoramiennym kąt między ramieniem a podstawą ma miarę 78° , a wysokość ma długość 4 cm. Jaką długość ma ramię tego trapezu?

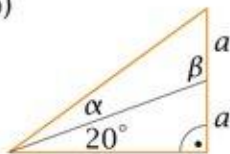
- 36.** a) Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma miarę 100° . Ramię ma długość a . Oblicz długość podstawy tego trójkąta.
 b) Kąt między podstawą a ramieniem trójkąta równoramiennego ma miarę 20° . Wysokość opuszczona na podstawę ma długość b . Oblicz obwód tego trójkąta.
 c) Ramię trójkąta równoramiennego ma długość c , a kąt pomiędzy ramionami ma miarę 40° . Oblicz pole tego trójkąta.

37. Oblicz miary kątów α i β .

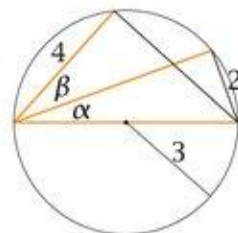
a)



b)



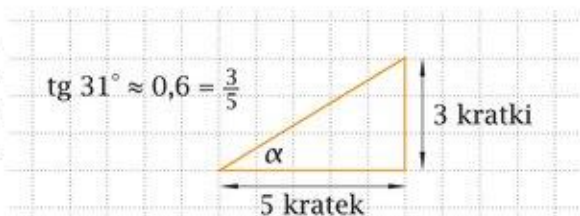
c)



- 38.** a) W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 6 cm, a każde z ramion ma długość 8 cm. Oblicz miary kątów tego trójkąta.
 b) Oblicz miarę kąta między przekątnymi prostokąta o wymiarach 5 cm $\times$ 9 cm.
 c) Ramiona trapezu prostokątnego mają długości 4 m i 7 m. Oblicz miarę kąta między dłuższym ramieniem i dłuższą podstawą tego trapezu.
 d) Krótszy bok równoległoboku ma długość 3 m, a krótsza wysokość — 2 m. Oblicz miarę kąta ostrego tego równoległoboku.
 e) Przekątne rombu mają długości 8 cm i 20 cm. Znajdź miary kątów tego rombu.
 f) Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 12 m i 10 m, a ramię ma długość 8 m. Oblicz miarę kąta między ramieniem a dłuższą podstawą trapezu.

39. W równoległoboku jeden z kątów ma miarę 104° . Wysokość opuszczona z wierzchołka tego kąta ma długość 10 cm i dzieli bok równoległoboku w stosunku 1:3. Oblicz pole tego równoległoboku.

40. Rysunek przedstawia, jak na papierze w kratkę, używając tylko linijki, można narysować kąt $\alpha \approx 31^\circ$. Czy miara narysowanego kąta różni się od 31° o więcej czy mniej niż 1° ?



41. Przekątna o długości 5 cm dzieli kąt ostry równoległoboku na dwa kąty o miarach 20° i 30° . Oblicz pole, długości boków i drugiej przekątnej równoległoboku.

42. W trapezie równoramiennym ramię ma długość 5 cm i jest nachylone do dłuższej podstawy pod kątem 74° . Kąt między przekątną tego trapezu a jego podstawą ma miarę 62° . Jaką długość ma przekątna?

43. a) Kąt środkowy AOB w okręgu o środku O i promieniu 4 cm ma miarę 80° . Oblicz długość cięciwy AB .

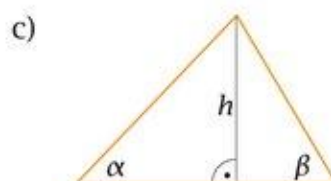
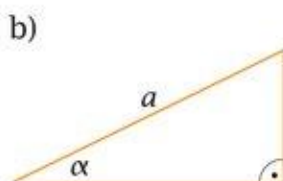
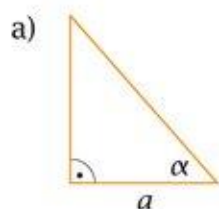
b) Oblicz miarę kąta środkowego w okręgu o promieniu 10 cm opartego na cięciwie długości 6 cm.

44. Oblicz długość boku:

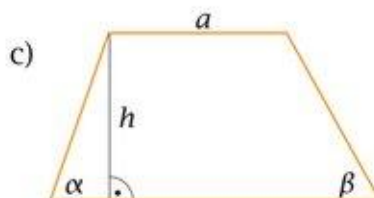
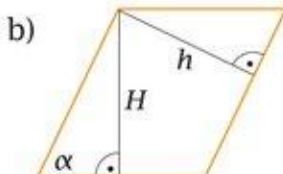
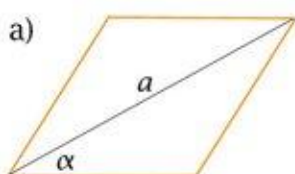
a) dziesięciokąta foremnego wpisanego w koło o promieniu 1,

b) dziewięciokąta foremnego opisanego na kole o promieniu 1.

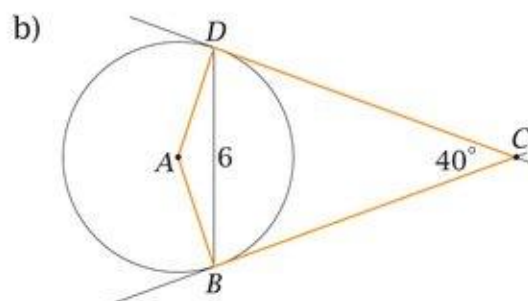
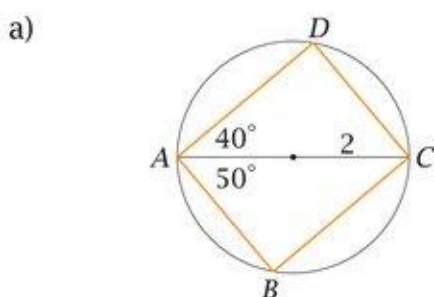
45. Zapisz pola narysowanych trójkątów.



46. Zapisz pola narysowanego rombu, równoległoboku i trapezu.



47. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.



48. W wycinek koła o promieniu R wpisano koło o promieniu r tak, jak pokazano na rysunku.

a) Kąt środkowy wycinka koła ma miarę 50° i $R = 5$. Oblicz r .

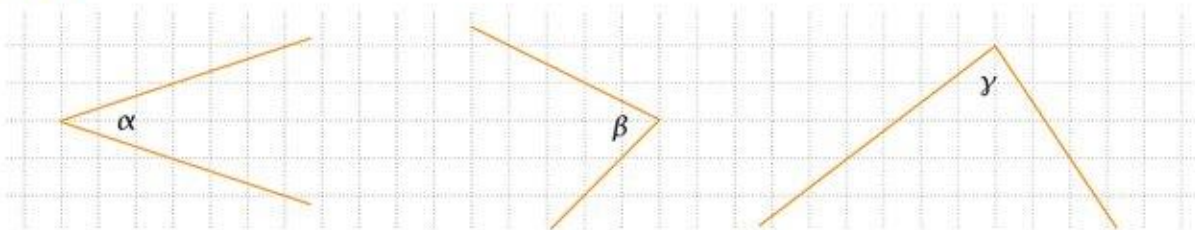
b) Znajdź kąt środkowy wycinka, jeśli $R = 10$ i $r = 2$.



49. Naszkicuj wykres funkcji, która każdej liczbie x z przedziału $(0; 90)$ przyporządkowuje:

a) tangens kąta x stopni, b) sinus kąta x stopni, c) cosinus kąta x stopni.

50. Oblicz miary narysowanych kątów.

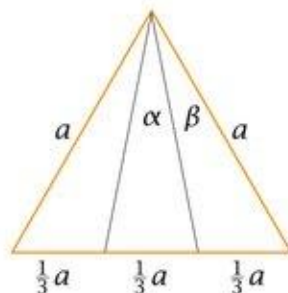


51. Trapez ma podstawy długości 13 cm i 30 cm oraz ramiona długości 25 cm i 26 cm. Znajdź miary kątów między dłuższą podstawą a ramionami tego trapezu.

52. Wyprowadź wzór na pole:

- trapezu równoramiennego o podstawach a i b ($a > b$) i kącie α pomiędzy ramieniem a dłuższą podstawą,
- trapezu prostokątnego o wysokości h , dłuższej podstawie a i kącie ostrym α .

53. Jeden z boków trójkąta równobocznego podzielony został na trzy części (zob. rysunek). Oblicz (korzystając z kalkulatora), jaka jest różnica miar kątów α i β .



54. Oblicz pole części wspólnej dwóch kół, jeśli:

- promienie kół mają długość 5 cm, a środki oddalone są od siebie o 8 cm,
- promienie kół mają długości 5 cm i 8 cm, a środki oddalone są od siebie o 8 cm.

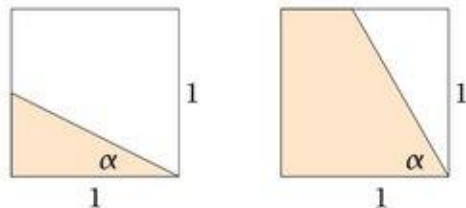
55. Zapisz wzór pozwalający obliczyć długość boku n -kąta foremnego:

- opisanego na okręgu o promieniu r ,
- wpisanego w okrąg o promieniu r .

56. a) Jaki procent pola koła stanowi pole n -kąta foremnego wpisanego w to koło?

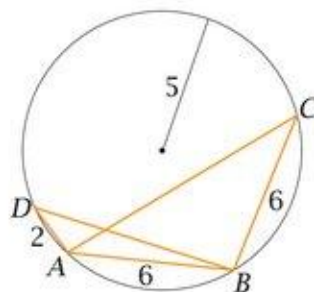
b) Jaki procent pola n -kąta foremnego stanowi pole koła, na którym ten wielokąt jest opisany?

57. Przyjrzyj się rysunkom. Zapisz wzór funkcji opisującej zależność pola zacieniowanej części kwadratu od miary zaznaczonego kąta α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).



58. Kąty ostre trapezu mają miary α i β . Pole tego trapezu jest równe P , a wysokość — h . Oblicz długości boków tego trapezu.

59. Oblicz miary kątów trójkątów ABC i ABD przedstawionych na rysunku obok.



60. a) Stosunek różnicy przyprostokątnych do przeciwprostokątnej pewnego trójkąta prostokątnego jest równy $\frac{1}{5}$. Oblicz sinusy kątów ostrych tego trójkąta.

b) Stosunek sumy przyprostokątnych do przeciwprostokątnej pewnego trójkąta prostokątnego jest równy $\frac{2\sqrt{10}}{5}$. Oblicz cosinusy kątów ostrych tego trójkąta.

61. Jedną z podstaw trapezu wpisanego w okrąg jest średnica. Stosunek obwodu tego trapezu do sumy podstaw jest równy $\frac{3}{2}$. Oblicz cosinus kąta ostrego tego trapezu.

ZASTOSOWANIA TRYGONOMETRII

62. Zamierzamy wtoczyć po desce taczkę na wysokość 1 m.

a) Jaką co najmniej długość powinna mieć deska, aby jej kąt nachylenia był nie większy niż 20° ?

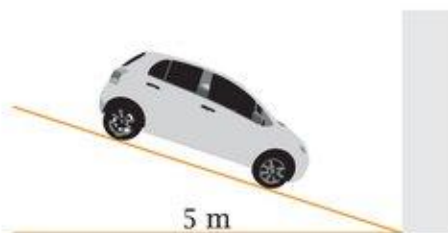
b) Pod jakim kątem będzie nachylona do poziomu deska o długości 4 m?

63. Drabina o długości 3 m oparta jest o ścianę.

a) Pod jakim kątem do poziomu jest nachylona drabina, gdy jej dolny koniec oddalony jest od ściany o 1 m?

b) Jak wysoko sięga drabina, gdy kąt między nią a ścianą ma miarę 25° ?

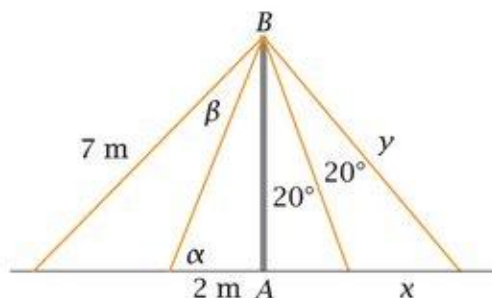
64. a) Zgodnie z przepisami podjazd do garażu nie może być nachylony do poziomu pod kątem większym niż 14° . Jaką różnicę poziomów pozwoli pokonać podjazd o takim nachyleniu zbudowany między ulicą a garażem oddalonym od niej o 5 m?



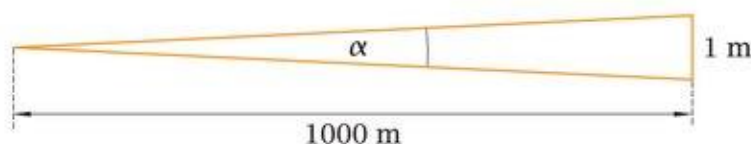
b) Samolot znajduje się 200 m nad punktem A i rozpoczyna lądowanie. Lotniska dotknie w punkcie B , który jest oddalony od punktu A o 3 km. Pod jakim kątem do poziomu ląduje ten samolot?



65. Pionowy maszt AB ma wysokość 5 m i jest podtrzymywany czterema linami (zob. rysunek). Oblicz długości odcinków i miary kątów oznaczonych literami.

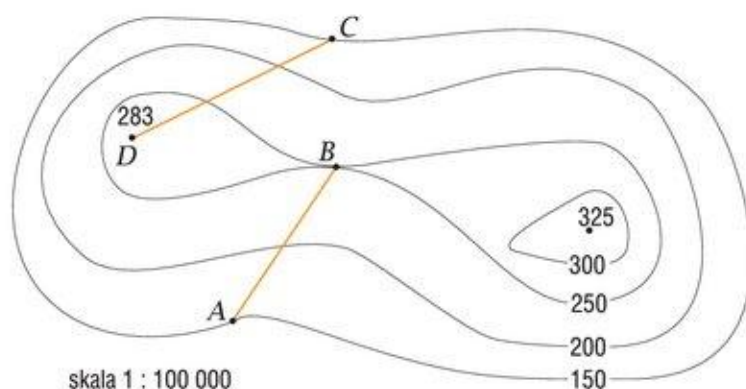


66. W artylerii używa się jednostki miary kąta zwanej tysięczną: 1 tysięczna to miara kąta α , pod którym widać odcinek o długości 1 m z odległości 1 km (zob. rysunek). Ilu minutom i sekundom kątowym równa jest 1 tysięczna?

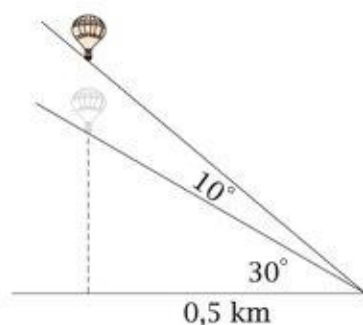
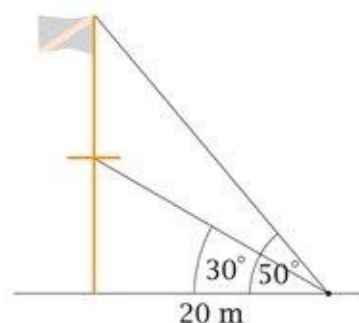


67. Ściana pokoju na poddaszu jest nachylona do podłogi pod kątem 80° . W jakiej odległości od dolnej krawędzi tej ściany można ustawić szafkę o wysokości 80 cm?

68. Jakie jest średnie nachylenie (wyrażone w procentach) drogi wiodącej od A do B , a jakie — drogi wiodącej od C do D ? Jaką są kąty nachylenia tych dróg?



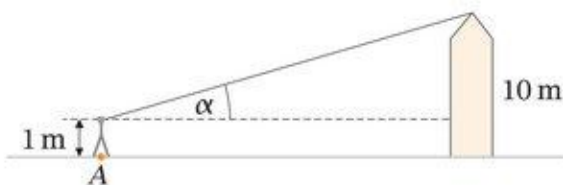
69. Z punktu odległego o 20 m od podstawy masztu widać szczyt tego masztu pod kątem 50° , a umieszczoną niżej poprzeczkę — pod kątem 30° . Oblicz odległość między szczytem masztu a poprzeczką.



70. Od osiągnięcia przez balon niższego pułapu do momentu osiągnięcia wyższego upłynęło 10 minut. Oba położenia balonu przedstawiono na rysunku. Z jaką średnią prędkością wznosi się balon? Odpowiedź podaj w metrach na sekundę.

71. Instrumenty geodezyjne muszą być bardzo precyzyjne. Aby się o tym przekonać, wykonaj obliczenia.

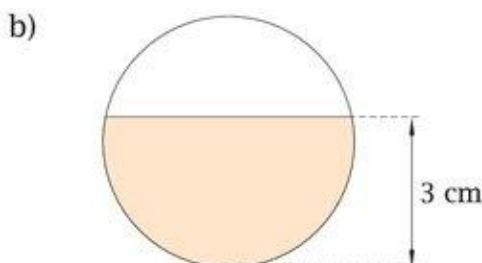
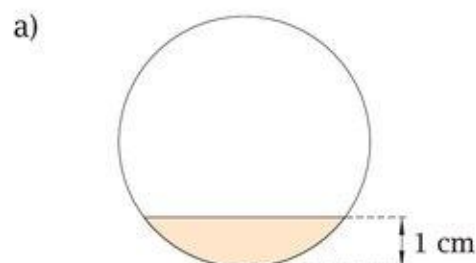
Sprawdź, jaka byłaby różnica w obliczonej odległości punktu A (zob. rysunek) od podstawy dziesięciometrowej wieży, gdyby pomiar kąta α , pod którym widać szczyt wieży, różnił się o jeden stopień i raz wyniósł 5° , a raz 6° .



72. Słup ogłoszeniowy ma kształt walca o średnicy 2 m. Zbliżając się do tego słupa, widzimy coraz mniejszą część jego powierzchni.

- Jaki procent powierzchni słupa widać z odległości 10 m?
- Z jakiej odległości widać ponad 49% powierzchni słupa?

73. Na rysunku przedstawiono przekrój rury o średnicy 5 cm (zacięniowany obszar oznacza wodę). Oblicz, jaką część przekroju rury zajmuje woda.

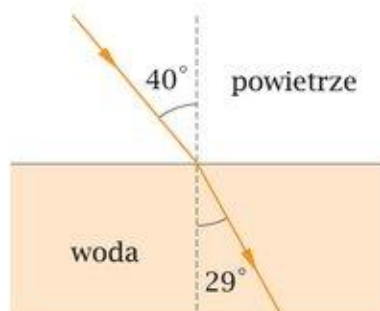
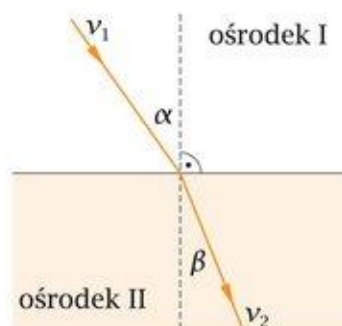


74. Przeczytaj informacje podane w ramce.

Gdy światło przechodzi z jednego ośrodka do drugiego, *załamuje się*, tzn. jego promienie zmieniają kierunek. Tę zmianę kierunku opisuje prawo załamania:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

α — kąt padania światła (zob. rysunek),
 β — kąt załamania,
 v_1 — prędkość światła w ośrodku I,
 v_2 — prędkość światła w ośrodku II.



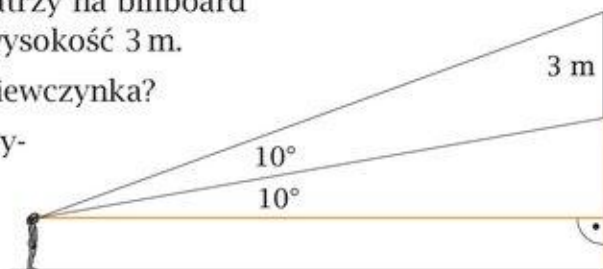
a) Na podstawie rysunku oblicz prędkość światła w wodzie. Przyjmij, że prędkość światła w powietrzu jest równa $300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

b) W szkłe światło porusza się z prędkością o 33% mniejszą niż w powietrzu. O ile stopni odchylił się od początkowego kierunku promień światła padający na szkło pod kątem 45° ?

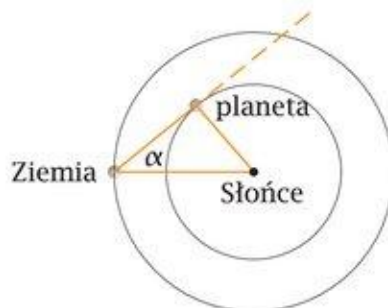
75. Na rysunku obok dziewczynka patrzy na billboard umieszczony na słupie. Billboard ma wysokość 3 m.

a) W jakiej odległości od słupa stoi dziewczynka?

b) Oczy dziewczynki znajdują się na wysokości 1,5 m nad ziemią. Na jakiej wysokości nad ziemią znajduje się dolna krawędź billboardu?



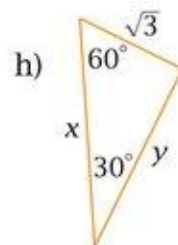
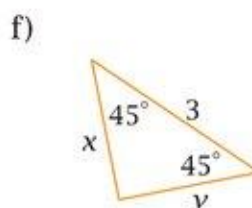
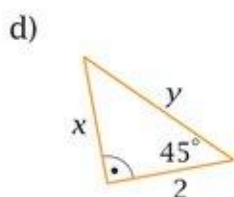
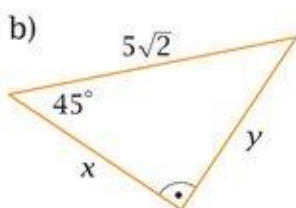
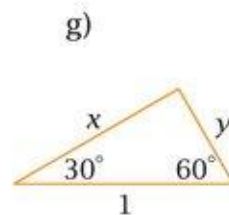
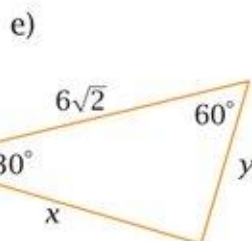
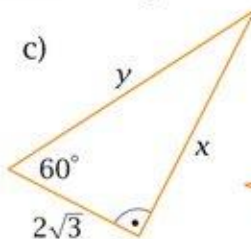
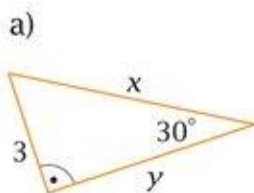
76. Odległość Ziemi od Słońca (150 mln km) nazywana jest jednostką astronomiczną. Mikołaj Kopernik, przyjmując, że orbity planet są okręgami, potrafił obliczyć odległość planety od Słońca (wyrażoną w jednostkach astronomicznych). Metodę tę ilustruje rysunek, na którym kąt α to największy kąt, pod jakim widać planetę z Ziemi.



Korzystając z metody Kopernika, oblicz odległość od Słońca planety Merkury, dla której $\alpha = 23,3^\circ$, oraz Wenus, dla której $\alpha = 46,1^\circ$. Największa odległość Merkurego od Słońca wynosi 57,34 mln km, a Wenus — 108,21 mln km. Porównaj z tymi wielkościami wyniki otrzymane przez ciebie.

WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH DLA KĄTÓW 30° , 45° I 60°

77. Oblicz długości odcinków x i y .



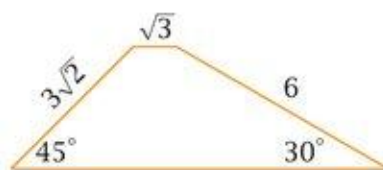
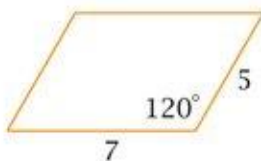
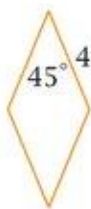
78. Kąt przy wierzchołku C trójkąta prostokątnego ABC jest prosty. Oblicz miary pozostałych kątów, jeżeli wiadomo, że:

- a) $|AB| = 18$, $|BC| = 9$ d) $|AC| = 2\sqrt{2}$, $|BC| = 2\sqrt{6}$
 b) $|BC| = \sqrt{3}$, $|AC| = 3$ e) $|AB| = 3\sqrt{2}$, $|BC| = 1,5\sqrt{2}$
 c) $|AC| = \sqrt{5}$, $|AB| = \sqrt{10}$ f) $|BC| = 12$, $|AB| = 8\sqrt{3}$

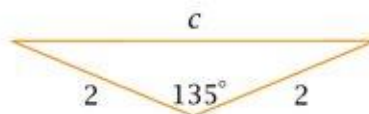
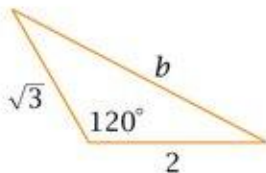
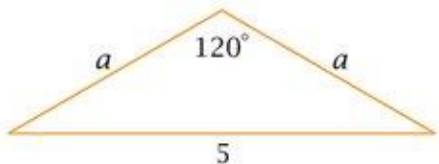
79. Oblicz wartość wyrażenia.

- a) $\sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ - \cos 45^\circ$ b) $\frac{\cos 60^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ} + \sin 30^\circ$ c) $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \cos 30^\circ}{\sin 45^\circ}$

80. Poniżej narysowano trójkąt równoramienny, romb, równoległobok i trapez. Oblicz pola tych figur.



81. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



82. Do okręgu o promieniu długości 10 cm poprowadzono styczne z punktu odległego od środka tego okręgu o 20 cm. Znajdź miarę kąta między stycznymi.

83. Wysokość opuszczona z wierzchołka A trójkąta ABC ma długość 12 cm i dzieli kąt BAC na kąty o miarach 45° i 60° . Oblicz pole trójkąta ABC .

84. Krótsza podstawa trapezu ma długość 8 cm i jest równa jego wysokości. Kąty przy krótszej podstawie mają miary 135° i 120° . Oblicz obwód tego trapezu.

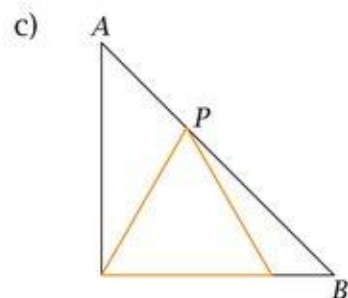
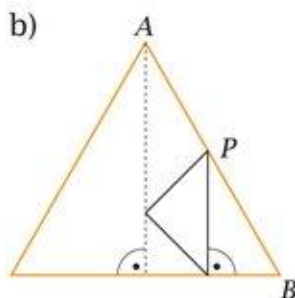
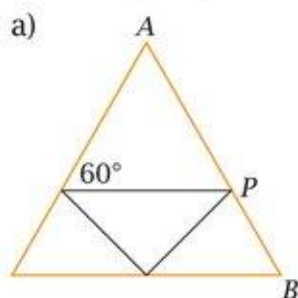
85. a) Oblicz długość wysokości trójkąta opuszczonej na bok o długości 10 cm, jeżeli wiadomo, że kąty przy tym boku mają miary 30° i 45° .

b) Oblicz obwód trójkąta, w którym kąty leżące przy boku o długości 6 cm mają miary 45° i 60° .

86. Korzystając z wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° i 60° , uzasadnij, że podana równość nie jest prawdziwa dla dowolnych kątów α i β .

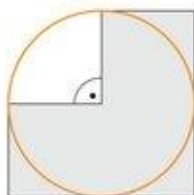
- a) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$ b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha + \cos \beta$ c) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$

87. Na rysunku przedstawiono dwa trójkąty: równoboczny i prostokątny równoramienny. W jakim stosunku punkt P dzieli odcinek AB ?



88. a) Korzystając z rysunku, oblicz dokładną wartość $\sin 15^\circ$.

b) Oblicz dokładną wartość $\sin 75^\circ$.



89. Wykaż, że pole zacieniowanej figury jest równe polu dwunastokąta foremnego wpisanego w narysowany okrąg.

ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCJAMI TRYGONOMETRYCZNYMI

90. Znając wartość jednej z funkcji $\sin$, $\cos$, tg , oblicz wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

a) $\sin \alpha = \frac{21}{29}$

c) $\cos \alpha = \frac{60}{61}$

e) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{35}$

b) $\sin \alpha = \frac{9}{41}$

d) $\cos \alpha = \frac{48}{73}$

f) $\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{1}{3}$

91. Cosinus kąta ostrego α jest równy 0,1. Oblicz wartość podanego wyrażenia.

a) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$

c) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$

b) $\sin \alpha$

d) $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}$

92. Uprość wyrażenie i znajdź jego wartość dla $\alpha = 60^\circ$.

a) $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$

c) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$

e) $\frac{\sin^3 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$

b) $\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$

d) $\sin \alpha \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$

f) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha$

93. Uzasadnij, że dla dowolnego kąta ostrego zachodzi równość.

- a) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}$ e) $(1 - \sin \alpha)(\sin \alpha + 1) = \cos^2 \alpha$
b) $\cos \alpha - \frac{1}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha \sin \alpha$ f) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$
c) $\sin \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 0$ g) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2 \sin^2 \alpha - 1$
d) $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$ h) $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

94. Sinus kąta ostrego α jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz dokładną wartość wyrażenia.

- a) $2 \cos \alpha - 1$ b) $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ c) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$ d) $3 \operatorname{tg} \alpha$

95. Oblicz, nie używając tablic ani kalkulatora.

- a) $\operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 85^\circ$ c) $\operatorname{tg} 15^\circ \sin 75^\circ - \cos 75^\circ$
b) $\sin 10^\circ \cos 80^\circ + \sin 80^\circ \cos 10^\circ$ d) $\left(\frac{\operatorname{tg} 12^\circ}{\operatorname{tg} 78^\circ} + 1 \right) \cos^2 12^\circ$

96. Uzasadnij tożsamość.

- a) $\frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$
b) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) \operatorname{tg} \alpha = 1$
c) $\sin \alpha \cos(90^\circ - \alpha) = 1 - \sin(90^\circ - \alpha) \cos \alpha$
d) $\sin^2(45^\circ + \alpha) + \sin^2(45^\circ - \alpha) = 1$
e) $\cos(45^\circ + \alpha) \sin(45^\circ - \alpha) = \frac{1 - \cos^2(45^\circ + \alpha)}{\operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha)}$
f) $\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(30^\circ + \alpha)}$

97. Jak znaleźć $\cos 37^\circ$, dysponując tylko tablicą sinusów? Zaproponuj dwie metody. Która z nich jest prostsza?

98. a) Wiadomo, że $\sin 54^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$. Oblicz dokładne wartości $\cos 54^\circ$ i $\operatorname{tg} 54^\circ$.

b) Wiadomo, że $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Oblicz dokładne wartości $\sin 75^\circ$ i $\operatorname{tg} 75^\circ$.

c) Wiadomo, że $\operatorname{tg} 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$. Oblicz dokładne wartości $\sin 22,5^\circ$ i $\cos 22,5^\circ$.

99. Znajdź miary kątów ostrych α i β trójkąta prostokątnego, jeśli:

- a) $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{3}$ b) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}$ c) $\sin \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$

100. Wiadomo, że $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,22$. Oblicz $\sin \alpha \cos \alpha$.

101. Oblicz, nie używając tablic ani kalkulatora.

a) $\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$

b) $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$

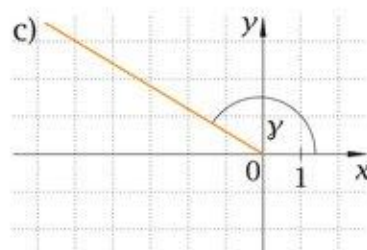
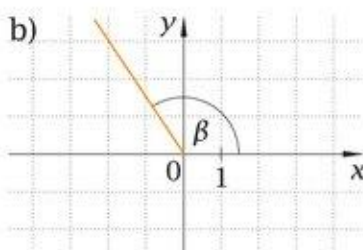
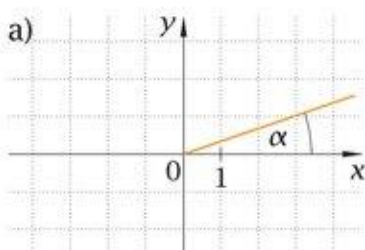
c) $\frac{\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 45^\circ}{\cos 45^\circ \cdot \cos 46^\circ \cdot \cos 47^\circ \cdot \dots \cdot \cos 89^\circ}$

102. a) Udowodnij, że iloczyn sinusów kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest równy $\frac{1}{2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ten trójkąt jest równoramienny.

b) Udowodnij, że iloczyn sinusów kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest mniejszy lub równy $\frac{1}{2}$.

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTÓW OD 0° DO 180°

103. Znajdź punkt o obu współrzędnych całkowitych leżący na narysowanej półprostej. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych zaznaczonego kąta.



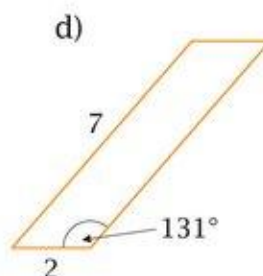
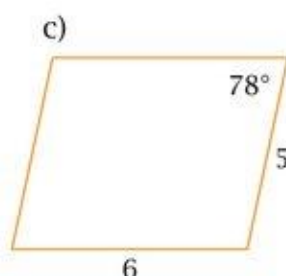
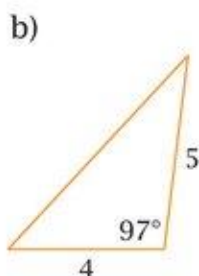
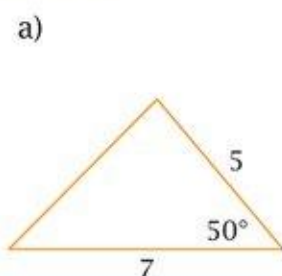
104. Dane są współrzędne punktów $N = (1, 0)$ i $O = (0, 0)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha = |\sphericalangle NOP|$.

a) $P = (2, 3)$

b) $P = (-2, 5)$

c) $P = (-4, 3)$

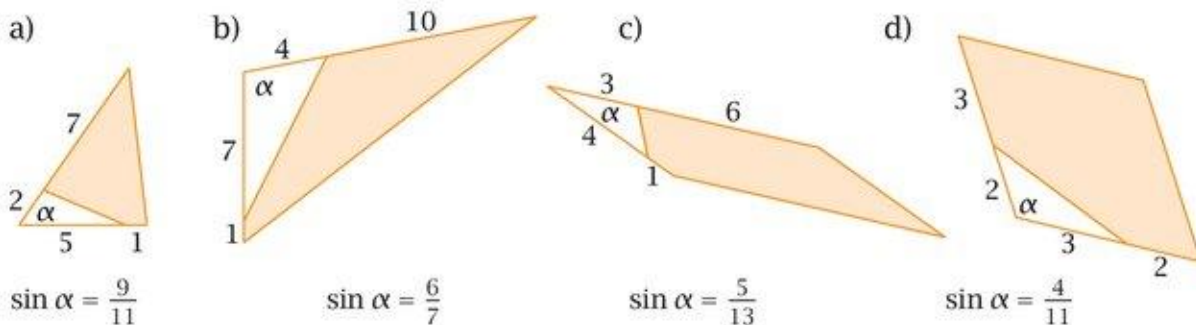
105. Oblicz pola narysowanych trójkątów i równoległoboków.



106. Podaj dokładną wartość wyrażenia.

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------------------|
| a) $\sin 120^\circ$ | c) $\sin 150^\circ$ | e) $\sin 135^\circ$ | g) $\operatorname{tg} 150^\circ$ |
| b) $\cos 135^\circ$ | d) $\cos 120^\circ$ | f) $\cos 150^\circ$ | h) $\operatorname{tg} 180^\circ$ |

107. Na rysunkach zacięniowano części trójkątów i równoległoboków. Oblicz pole zacięniowanego wielokąta.



108. Oblicz miarę kąta, jaki tworzy z osią x wykres podanej funkcji.

- | | | |
|-----------------------|-------------------|----------------------------|
| a) $y = \frac{1}{3}x$ | c) $y = 1,5x + 4$ | e) $y = -1,15x - 4$ |
| b) $y = 2x - 1$ | d) $y = -3x$ | f) $y = -\frac{5}{8}x + 6$ |

109. Bez korzystania z tablic i kalkulatora określ, czy wartość podanego wyrażenia jest liczbą dodatnią czy ujemną.

- | | |
|---|--|
| a) $\sin 170^\circ \cdot \frac{\operatorname{tg} 70^\circ}{\cos 100^\circ}$ | c) $\sin 100^\circ \cdot \cos 110^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ$ |
| b) $\sin 103^\circ - \cos 31^\circ \cdot \operatorname{tg} 130^\circ$ | d) $\operatorname{tg} 50^\circ + \sin 100^\circ - \cos 150^\circ$ |

110. a) Narysuj w układzie współrzędnych kąt rozwarty, którego wierzchołkiem jest początek układu, jednym z ramion jest dodatnia część osi x , a cosinus jest równy $-\frac{3}{4}$.

b) Narysuj w układzie współrzędnych dwa różne kąty, których wierzchołkiem jest początek układu, jednym z ramion jest dodatnia część osi x , a wartość sinusa jest równa $\frac{2}{3}$.

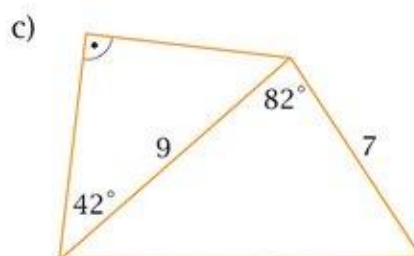
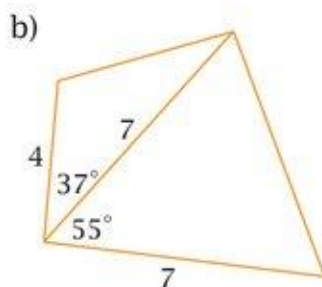
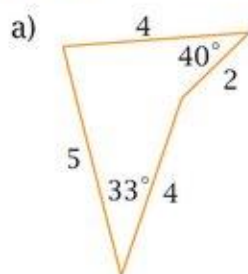
111. Kąt α jest rozwarty.

- | |
|--|
| a) Wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{2}{5}$. Oblicz $\cos \alpha$. |
| b) Wiadomo, że $\cos \alpha = -\frac{4}{7}$. Oblicz $\sin \alpha$. |
| c) Wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{3}{7}$. Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$. |
| d) Wiadomo, że $\operatorname{tg} \alpha = -3$. Oblicz $\cos \alpha$. |

112. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , gdzie $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$, jeżeli dana jest wartość jednej z nich.

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|
| a) $\cos \alpha = -\frac{2}{9}$ | b) $\operatorname{tg} \alpha = -5$ | c) $\sin \alpha = \frac{5}{6}$ |
|---------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|

113. Oblicz pole narysowanego czworokąta.



114. Oblicz miarę kąta ostrego rombu, który ma pole równe polu podanego wielokąta, a bok — dwa razy dłuższy od boku tego wielokąta.

- a) kwadrat b) trójkąt równoboczny c) sześciokąt foremny

115. Wykaż, że pole P dowolnego n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu r można obliczyć za pomocą wzoru $P = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$. Skorzystaj z tego wzoru, aby obliczyć pole osiemnastokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu długości 1.

116. Wykaż, że pole czworokąta wypukłego jest równe połowie iloczynu długości przekątnych i sinusa kąta między nimi.

117. Prosta a przecina oś y w punkcie A , prosta b — w punkcie B , a punkt C jest punktem przecięcia tych prostych. Oblicz miary kątów trójkąta ABC .

a) $a: y = x + 3, \quad b: y = -\frac{1}{2}x + 7$

b) $a: y = -x + 2, \quad b: y = 3x + 5$

c) $a: y = -2x + 8, \quad b: y = \frac{2}{5}x - 6$

118. Znajdź kąt rozwarty α , który spełnia równość.

a) $\sin \alpha = \sin 13^\circ$

b) $\cos \alpha = -\cos 82^\circ$

c) $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} 55^\circ$

119. Która z podanych liczb jest większa?

a) $\sin 154^\circ$ czy $\cos 154^\circ$

b) $\operatorname{tg} 111^\circ$ czy $\sin 111^\circ$

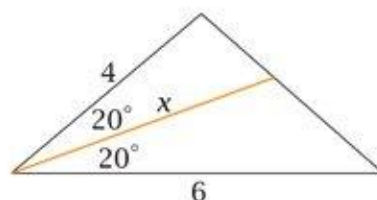
c) $\cos 100^\circ$ czy $\cos 80^\circ$

d) $\sin 160^\circ$ czy $\sin 70^\circ$

e) $\cos 95^\circ$ czy $\operatorname{tg} 95^\circ$

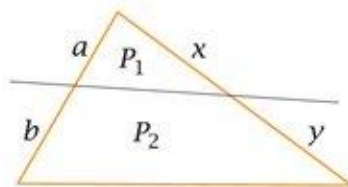
f) $\operatorname{tg} 170^\circ$ czy $\cos 170^\circ$

120. Popatrz na rysunek obok. Oblicz długość odcinka x .

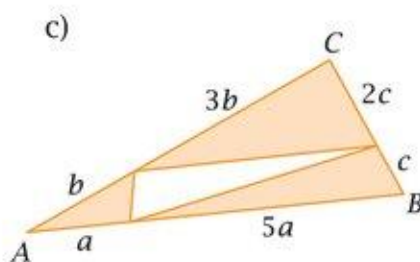
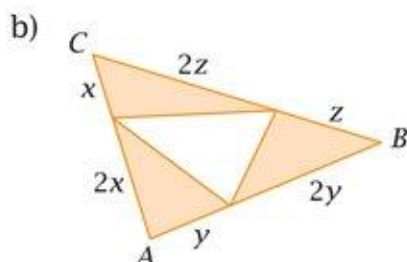
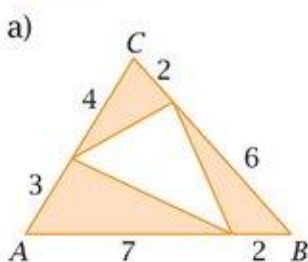


121. Prosta dzieli trójkąt na dwie części o polach P_1 i P_2 , jak pokazano na rysunku obok. Znajdź stosunek $a:b$, jeżeli stosunek pól $P_1:P_2$ oraz stosunek $x:y$ są równe:

- a) $P_1:P_2 = 1:5$, $x:y = 1:1$
 b) $P_1:P_2 = 1:3$, $x:y = 1:2$
 c) $P_1:P_2 = 3:7$, $x:y = 2:3$



122. Jaką część trójkąta ABC zacieniowano?



123. Punkty A, B, C dzielą okrąg o promieniu długości 2 na trzy łuki, których długości są w stosunku $a:b:c$. Oblicz pole trójkąta ABC , jeśli:

- a) $a:b:c = 1:4:7$ b) $a:b:c = 2:3:5$ c) $a:b:c = 2:2:5$

124. W trójkąt o kątach α, β i γ wpisano okrąg o promieniu r .

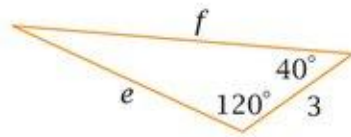
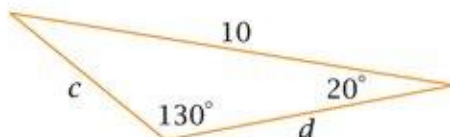
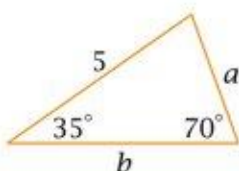
- a) Oblicz pole tego trójkąta.
 b) Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności okręgu z bokami danego trójkąta.

125. Wykresy funkcji f i g to proste, które przecinają się pod kątem ostrym α . Oblicz miarę tego kąta.

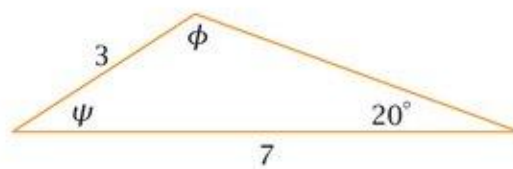
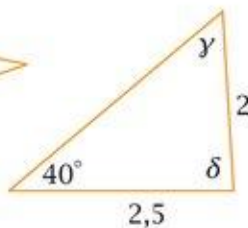
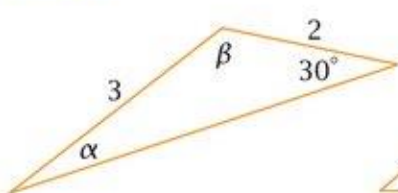
- a) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x - 7$
 b) $f(x) = -\frac{4}{9}x - 8$, $g(x) = 0,9x + 5$
 c) $f(x) = -\frac{1}{5}x + 6$, $g(x) = -\frac{6}{7}x - 4$

TWIERDZENIE SINUSÓW

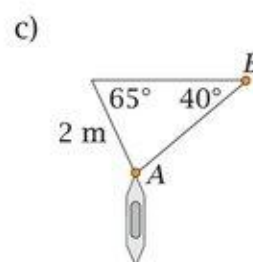
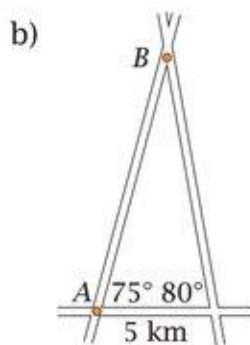
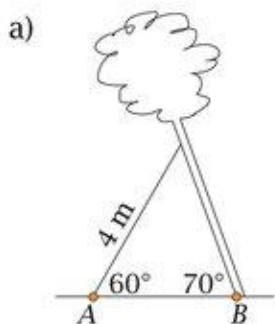
126. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



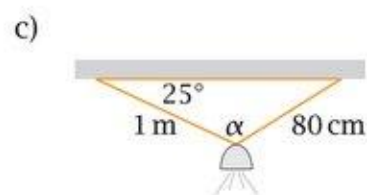
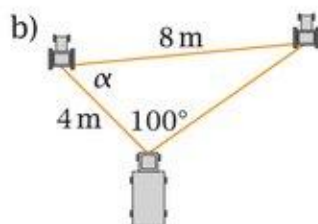
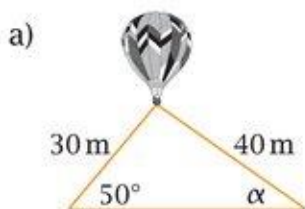
127. Oblicz miary kątów oznaczonych literami.



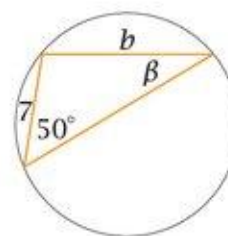
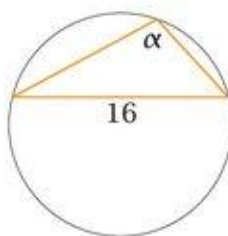
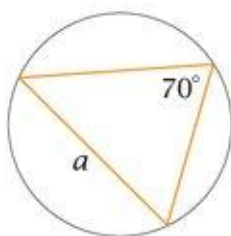
128. Znajdź długość odcinka AB .



129. Znajdź miarę kąta α .



130. Narysowane okręgi mają promienie równe 10. Oblicz długości boków i miary kątów oznaczonych literami.



131. Oblicz brakujące długości boków i miary kątów w trójkącie ABC .

- $|AB| = 10$, $|BC| = 15$, $|\sphericalangle ACB| = 20^\circ$
- $|AB| = 5$, $|AC| = 8$, $|\sphericalangle ABC| = 40^\circ$
- $|AB| = 8$, $|BC| = 4$, $|\sphericalangle ACB| = 30^\circ$
- $|BC| = 5$, $|AC| = 7$, $|\sphericalangle BAC| = 40^\circ$
- $|AB| = 20$, $|\sphericalangle ABC| = 30^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 70^\circ$
- $|AB| = 5$, $|\sphericalangle CAB| = 20^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 150^\circ$

132. a) Dwa spośród kątów trójkąta mają miary 20° i 30° . Jaki jest stosunek długości najdłuższego boku do najkrótszego?

b) Najkrótszy bok trójkąta ma długość 20 cm, najdłuższy 30 cm. Jaka jest długość trzeciego boku, jeśli najmniejszy kąt ma miarę 40° ?

133. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o promieniu 5 i $|AB| = 5$. Oblicz miary kątów tego trójkąta, gdy bok BC ma długość:

a) 1

b) 3

c) 7

134. a) Oblicz długości boków trójkąta o kątach 30° , 50° , 100° wpisanego w okrąg o średnicy 20.

b) Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie o kątach 20° , 75° , 85° i najkrótszym boku długości 5.

135. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4, a każde z jego ramion ma długość 8.

a) Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

b) Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

136. Krótsza przekątna równoległoboku ma długość 5 i dzieli jego kąt na kąty o miarach 45° i 80° . Oblicz długości boków tego równoległoboku.

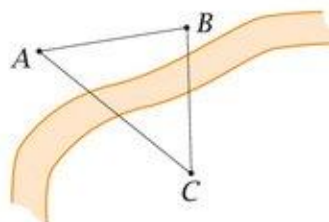
137. W pewnym trójkącie naprzeciwko kąta α leży bok długości 3, a naprzeciwko kąta 2α leży bok długości 5. Korzystając ze wzoru $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, oblicz miarę największego kąta w tym trójkącie.

138. Przeczytaj informacje podane w poniższej ramce.

W wyniku pomiarów geodezyjnych powstają mapy i wytyczane jest położenie budowanych obiektów. Geodeta posługuje się przyrządami pozwalającymi na określenie odległości, miar kątów, a także różnicy poziomów w terenie. Często jednak bezpośredni pomiar szukanej wielkości jest niemożliwy i wtedy geodeta może korzystać z twierdzenia sinusów lub twierdzenia cosinusów. Przykładem takiej sytuacji jest problem zwany w geodezji „wcięciem w przód”.

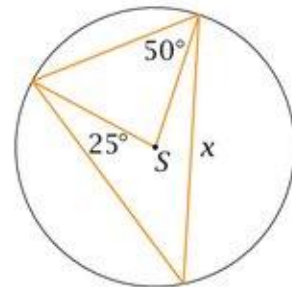
Wcięcie w przód

Znana jest odległość między punktami A i B oraz miary kątów $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BAC$ (zob. rysunek). Należy obliczyć odległości $|AC|$ i $|BC|$.



Rozwiąż problem „wcięcia w przód”, jeżeli $|AB| = 500$ m, $|\sphericalangle ABC| = 78^\circ$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 64^\circ$.

139. Na rysunku obok punkt S jest środkiem okręgu o promieniu 3. Oblicz długość odcinka x z dokładnością do części dziesiątych.

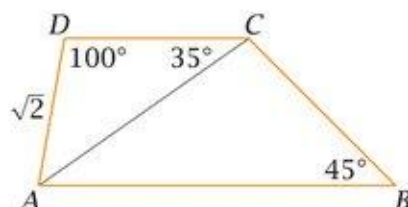


140. W pewnym trójkącie, w którym naprzeciwko boku długości a leży kąt α , a naprzeciwko boku długości b leży kąt β , zachodzi równość:

$$\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos \beta}$$

Co można powiedzieć o długościach boków a i b ?

141. Przekątna AC trapezu $ABCD$ podzieliła go na dwa trójkąty, jak pokazano na rysunku obok. Oblicz długość ramienia BC tego trapezu.



142. Punkt P jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC . Wykaż, że promienie okręgów opisanych na trójkątach ABC , ABP , ACP i BCP mają równe długości.

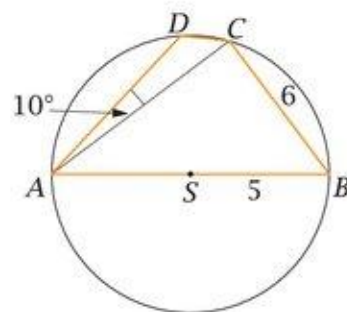
143. a) Trójkąt prostokątny ABC ma przyprostokątne $|AB| = 4$, $|AC| = 1$. Punkt D leży na przeciwprostokątnej, a półprosta AD jest dwusieczną kąta prostego. Oblicz $|AD|$.

b) Dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną w stosunku 1:3. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

144. Z wierzchołka kąta prostego trójkąta równoramiennego poprowadzono dwie półproste, które dzielą ten kąt na trzy równe części. W jakim stosunku dzielą te półproste przeciwprostokątną tego trójkąta?

145. Wysokość pewnego trójkąta i jego środkowa dzielą jeden z kątów na trzy równe części. Jakie są miary kątów tego trójkąta?

146. Na rysunku obok czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku S i promieniu długości 5. Bok BC ma długość 6, a kąt między przekątną AC i bokiem AD ma miarę 10° . Oblicz obwód tego czworokąta.

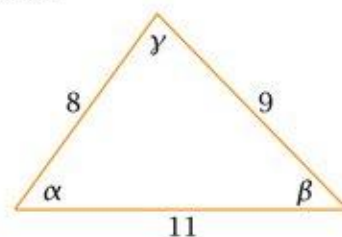
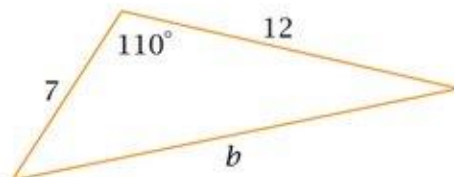
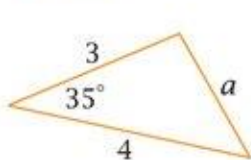


147. Przekątne czworokąta wypukłego dzielą go na cztery trójkąty. Udowodnij, że promienie okręgów opisanych na tych trójkątach są równej długości wtedy i tylko wtedy, gdy ten czworokąt jest rombem.

148. Udowodnij, że jeśli kąty α , β , γ w pewnym trójkącie spełniają równość $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$, to ten trójkąt jest prostokątny.

TWIERDZENIE COSINUSÓW

149. Oblicz długości boków a i b oraz miary kątów α , β i γ .



150. Oblicz miary kątów trójkąta o bokach długości:

- a) 4, 6, 7 b) 4, 5, 8 c) 10, 12, 13

151. W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków i miara jednego z kątów. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.

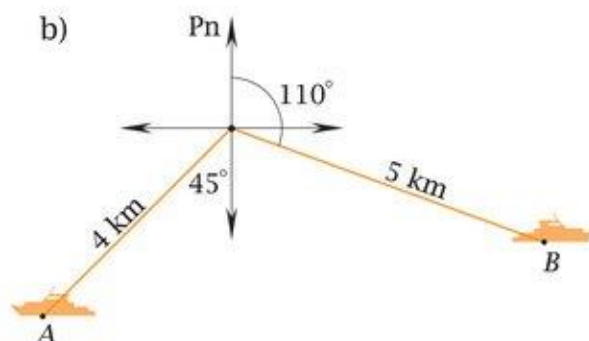
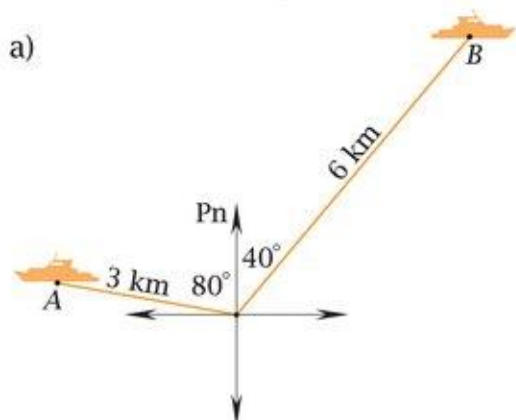
- a) $|BC| = 5$, $|AC| = 2$, $|\sphericalangle BCA| = 20^\circ$
b) $|BC| = 3$, $|AB| = 4$, $|\sphericalangle ABC| = 110^\circ$
c) $|AB| = 5$, $|AC| = 4$, $|\sphericalangle CAB| = 40^\circ$

152. Pomiedzy słupkami A , B i C rozciągnięto linę o długości 30 m. Odległość między słupkami A i B wynosi 10 m. Oblicz miarę kąta ACB , gdy odległość między słupkami B i C będzie równa 8 m.

153. Oblicz brakujące długości boków i miary kątów trójkąta KLM .

- a) $|KM| = 7$, $|KL| = 10$, $|\sphericalangle MKL| = 80^\circ$
b) $|KL| = 5$, $|LM| = 7$, $|\sphericalangle KLM| = 50^\circ$
c) $|KL| = 7$, $|LM| = 6$, $|\sphericalangle MKL| = 30^\circ$
d) $|LM| = 10$, $|KM| = 13$, $|\sphericalangle KLM| = 110^\circ$
e) $|KM| = 10$, $|LM| = 6$, $|\sphericalangle KML| = 10^\circ$
f) $|LM| = 7$, $|\sphericalangle KLM| = 50^\circ$, $|\sphericalangle LMK| = 100^\circ$

154. Oblicz odległość między statkami A i B .



155. Czy trójkąt o podanych długościach boków jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny?

a) 10, 12, 21

c) 12, 13, 5

e) 5, 5, 8

b) 3, 4, 4

d) 10, 11, 14

f) 7, 12, 13

156. a) Oblicz pole trójkąta o bokach długości 5, 7, 10.

b) Oblicz długość najkrótszej wysokości trójkąta o bokach długości 6, 7, 8.

157. a) W trójkącie o bokach długości 4, 8 i 10 poprowadzono środkową łączącą wierzchołek z najdłuższym bokiem. Oblicz długość tej środkowej.

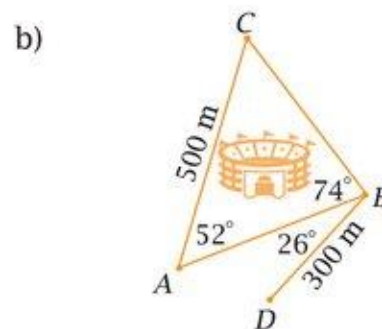
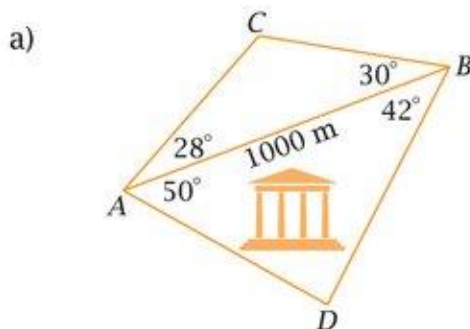
b) W trójkącie ABC boki AB i AC mają długości odpowiednio 4 i 6, a środkowa poprowadzona z wierzchołka A ma długość $\sqrt{10}$. Oblicz długość boku BC .

c) W trójkącie ABC dane są: $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = 70^\circ$, $|AB| = 5$. Oblicz długość środkowej AD .

158. Jeden z boków równoległoboku jest o 3 dłuższy od drugiego, kąt ostry tego równoległoboku ma miarę 60° , a dłuższa przekątna ma długość $3\sqrt{7}$. Oblicz długość drugiej przekątnej.

159. Podstawy trapezu mają długości 12 i 4, a jedno z jego ramion ma długość 6. Kąt między drugim ramieniem a podstawą ma miarę 40° . Oblicz długość drugiego ramienia i miary pozostałych kątów trapezu.

160. Na schematycznym rysunku przedstawiono wyniki pomiarów geodezyjnych. Oblicz odległość między punktami C i D .



161. a) Wykaż, że suma kwadratów długości czterech boków równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości jego przekątnych.

b) Boki trójkąta mają długości a , b i c . Jaka długość ma środkowa trójkąta poprowadzona do boku o długości a ?



162. Do kołków A i B oddległych od siebie o 4 m przywiązano sznur długości 6 m. W punkcie C naciągnięto sznur tak, że $|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$. W jakich odległościach od końców sznura znajduje się punkt C ?

163. a) Podstawy trapezu mają długości 10 i 15, a ramiona są równe 6 i 8. Oblicz długości przekątnych tego trapezu.

b) Krótsza podstawa trapezu równoramiennego ma długość 2, przekątna ma długość 6, a kąt między przekątnymi ma miarę 30° . Oblicz długość drugiej podstawy tego trapezu.

c) Podstawy trapezu mają długości 3 i 11, a przekątne mają długości 6 i 10. Oblicz miarę większego z kątów między przekątnymi.

164. Boki czworokąta $ABCD$ mają długości: $|AB| = 1$, $|BC| = 2$, $|CD| = 3$ oraz $|DA| = 4$, a kąt BCD jest prosty. Znajdź miary pozostałych kątów tego czworokąta.

165. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg oraz $|AB| = 5$, $|BC| = 6$, $|CD| = 7$ i $|AD| = 8$.

a) Oblicz miary kątów tego czworokąta.

b) Oblicz długości przekątnych tego czworokąta.

166. W trójkącie ABC boki BC i AC mają długości a i b , a kąt ACB ma miarę α . Dwusieczna tego kąta przecina bok AB w punkcie P . Znajdź długość odcinka CP , jeżeli:

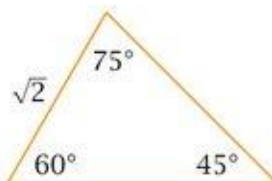
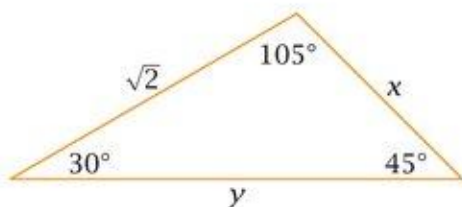
a) $\alpha = 120^\circ$

b) $\alpha = 90^\circ$

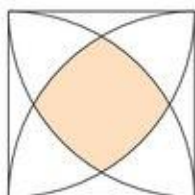
c) $\alpha = 60^\circ$

167. a) Oblicz długości boków x i y , a następnie — dokładną wartość $\cos 105^\circ$.

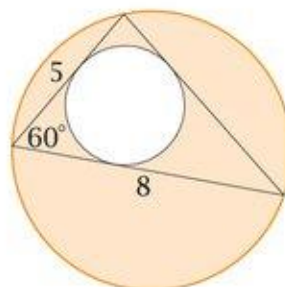
b) Skorzystaj z poniższego rysunku do obliczenia dokładnej wartości $\cos 75^\circ$.



168. Zacieniowana figura jest ograniczona łukami okręgów o środkach w wierzchołkach kwadratu i promieniach równych długości boku kwadratu. Oblicz pole tej figury, gdy długość boku kwadratu jest równa 1.

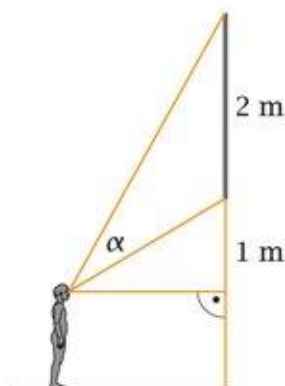


169. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.



- 170.** a) Oblicz długość przekątnej pięciokąta foremnego o boku długości a .
 b) Oblicz długości przekątnych siedmiokąta foremnego o boku długości a .

171. Chłopiec patrzy na obraz wiszący na ścianie. Obraz ma wysokość 2 m, a jego dolna krawędź jest umieszczona 1 m powyżej poziomej linii przebiegającej na wysokości oczu chłopca.



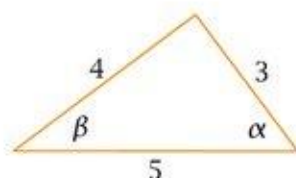
- a) W jakiej odległości od ściany, na której wisi obraz, powinien stanąć chłopiec, aby kąt α widzenia obrazu miał miarę 30° ?
 b) Wykaż, że chłopiec nie może stanąć w takiej odległości od ściany, aby miara kąta α była równa 45° .
 c) Chłopiec patrzy teraz na obraz o wysokości 3 m, którego dolna krawędź jest umieszczona na tej samej wysokości co pierwszy obraz. W jakiej odległości od ściany, na której wisi obraz, powinien stanąć chłopiec, aby kąt α widzenia obrazu miał miarę 30° ?

172. W okrąg o promieniu 7 wpisano czworokąt $ABCD$. Boki AB i BC mają równe długości, a kąt ADC ma miarę 120° . Przekątna BD dzieli czworokąt na trójkąty, z których trójkąt ABD ma pole dwa razy większe od trójkąta BCD . Oblicz obwód tego czworokąta.

PRZED SPRAWDZIANEM

1. Na rysunku obok zaznaczono kąty α i β . Które z poniższych wyrażeń ma największą wartość?

- A. $\sin \alpha$ B. $\operatorname{tg} \alpha$ C. $\cos \beta$ D. $\operatorname{tg} \beta$



2. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 4 i 7. Miara większego z kątów ostrych tego trójkąta należy do przedziału:

- A. $\langle 29^\circ; 31^\circ \rangle$ B. $\langle 34^\circ; 36^\circ \rangle$ C. $\langle 54^\circ; 56^\circ \rangle$ D. $\langle 59^\circ; 61^\circ \rangle$

3. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 9, a jeden z kątów ostrych tego trójkąta ma miarę 54° . Długość najkrótszego boku tego trójkąta należy do przedziału:

- A. $\langle 5; 6 \rangle$ B. $\langle 7; 8 \rangle$ C. $\langle 12; 13 \rangle$ D. $\langle 15; 16 \rangle$

4. Z punktu na okręgu poprowadzono średnicę i cięciwę o długości 7. Kąt między nimi ma miarę 35° . Długość średnicy należy do przedziału:

- A. $\langle 4; 6 \rangle$ B. $\langle 6; 7 \rangle$ C. $\langle 7; 8 \rangle$ D. $\langle 8; 9 \rangle$

5. Wartość którego z poniższych wyrażeń nie jest równa 0,5?

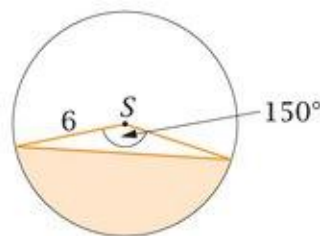
- A. $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$ B. $\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$ C. $\frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{\sin 30^\circ}$ D. $\frac{\cos 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ}$

6. Pole równoległoboku o bokach długości 1 i 2 i kącie ostrym 60° jest równe:

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $1\frac{1}{2}$ D. $\sqrt{3}$

7. Na rysunku obok zamalowano odcinek koła o środku S. Pole tego odcinka jest równe:

- A. $15\pi - 9$ C. $12\pi - 18$
B. $5\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$ D. $6\pi - 4\sqrt{3}$



8. Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$. Wartość wyrażenia $\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$ jest równa:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{23}}{50}$ C. $\frac{\sqrt{46}}{25}$ D. $\frac{23\sqrt{46}}{625}$

9. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 3$, $|\sphericalangle BAC| = 45^\circ$ i $|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$. Wynika stąd, że długość boku BC jest równa:

- A. 2 B. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{3}$

10. Uczeń zaznaczył w układzie współrzędnych trzy punkty: $P = (0, 0)$, $R = (-2, 5)$ i $S = (4, 0)$ i oznaczył literą α miarę kąta rozwartego SPR . Następnie zapisał wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta:

$$\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -2,5$$

Która z powyższych wartości jest prawdziwa?

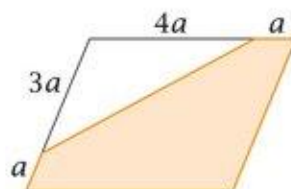
- A. żadna B. tylko tangens C. tylko sinus i cosinus D. wszystkie

11. Wykaż tożsamość: $2(\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha) \operatorname{tg} \alpha = (\sin \alpha + \cos \beta)^2 - 1$.

12. Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 4 cm i 6 cm, a kąt ostry tego trapezu ma miarę 59° . Oblicz obwód tego trapezu.

13. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 5 cm. Pole tego trójkąta jest równe 12 cm^2 . Jaką miarę może mieć kąt między ramionami tego trójkąta?

14. Jaką część równoległoboku zacieniowano?



15. Boki równoległoboku mają długości 1 i 3, a kąt ostry ma miarę 60° . Oblicz różnicę długości przekątnych tego równoległoboku.

16. W trójkącie prostokątnym kąty ostre mają miary α i β . Wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Które z poniższych wyrażeń ma największą wartość?

- A. $\sin \alpha$ B. $\operatorname{tg} \alpha$ C. $\sin \beta$ D. $\operatorname{tg} \beta$

17. Półprosta AD jest dwusieczną kąta trójkąta prostokątnego ABC , tak jak na rysunku obok. Długość boku AC należy do przedziału:

- A. $\langle 7; 8 \rangle$ B. $\langle 8; 10 \rangle$ C. $\langle 10; 12 \rangle$ D. $\langle 12; 13 \rangle$



18. Stosunek długości promienia okręgu wpisanego w n -kąt foremny do długości promienia okręgu opisanego na tym wielokącie jest równy:

- A. $\cos \frac{180^\circ}{n}$ B. $\operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n}$ C. $\sin \frac{180^\circ}{n}$ D. $2 \sin \frac{180^\circ}{n}$

19. Wartość wyrażenia $\sin 120^\circ \cdot \cos 150^\circ \cdot \operatorname{tg} 135^\circ$ jest równa:

- A. $-\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{8}$ C. -1 D. $\frac{3}{4}$

20. Wiadomo, że $\cos \alpha = 0,8$. Wynika stąd, że wyrażenie $\cos(90^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha)$ ma wartość równą:

- A. $-0,2$ B. $0,2$ C. $1,2$ D. $1,6$

Я21. Kąty α i β są kątami ostrymi pewnego trójkąta prostokątnego i $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Wartość wyrażenia $\frac{\sin \alpha}{\cos \beta} - \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\operatorname{tg} \beta}$ jest równa:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ B. $\frac{2}{25}$ C. $1 - \frac{\sqrt{3}}{25}$ D. $\frac{3}{25}$

Я22. Cosinus kąta rozwartego, jaki prosta o równaniu $y = -\frac{2}{3}x + 4$ tworzy z dodatnią częścią osi x , jest równy:

- A. $-\frac{3}{\sqrt{13}}$ B. $-\frac{2}{\sqrt{13}}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{52}}$

Я23. Kąt rozwarty trójkąta ma miarę 150° , najdłuższy bok ma długość $\sqrt{13}$, a najkrótszy — $\sqrt{3}$. Trzeci bok tego trójkąta ma długość:

- A. $\frac{\sqrt{43} + \sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. 2 D. $\sqrt{16 + 3\sqrt{11}}$

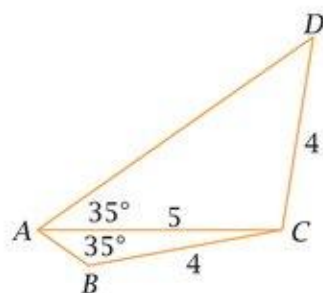
Я24. Dla pewnego kąta α zachodzi równość $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 6$. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin \alpha + \cos \alpha)^3$.

Я25. Bok BC trójkąta ABC jest dwa razy dłuższy od boku AC . Środkowa CD podzieliła kąt ACB na dwa kąty. Sinus mniejszego z nich jest równy $\frac{1}{4}$. Oblicz miarę drugiego z nich.

Я26. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 4$ i $|AC| = 2$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$. Oblicz długość odcinka dwusiecznej tego kąta zawartego w tym trójkącie.

Я27. Przekątna AC czworokąta $ABCD$ dzieli go na dwa nieprzystające trójkąty, tak jak na rysunku obok. Oblicz miarę kąta BCD .

Я28. Boki trójkąta ABC mają długości: $|AB| = 10$, $|AC| = 6$ i $|BC| = 5$. Z wierzchołka B poprowadzono odcinek do punktu D na boku CA tak, że $|CD| = 2$. Oblicz długość odcinka BD .



Я29. W trójkącie kąt α leży naprzeciw boku a , a kąt β leży naprzeciw boku b . Wykaż, że:

$$(b \cos \alpha + a \cos \beta)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha + \beta)$$

PRZED MATURĄ

1. W trójkącie prostokątnym o długościach przyprostokątnych 2 i 5 cosinus większego z kątów ostrych jest równy:

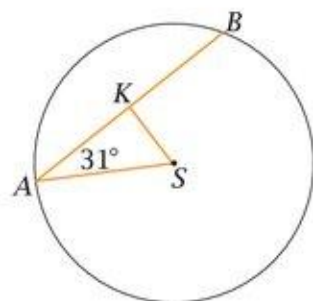
- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{\sqrt{29}}$ D. $\frac{5}{\sqrt{29}}$

2. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 3, a długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α jest równa $\sqrt{3}$. Zatem:

- A. $\alpha = 60^\circ$ B. $\alpha \in (40^\circ; 60^\circ)$ C. $\alpha \in (30^\circ; 40^\circ)$ D. $\alpha = 30^\circ$

3. W okręgu o środku w punkcie S poprowadzono cięciwę AB , która utworzyła z promieniem AS kąt o mierze 31° (zob. rysunek). Promień tego okręgu ma długość 10. Odległość punktu S od cięciwy AB jest liczbą z przedziału:

- A. $\left(\frac{9}{2}; \frac{11}{2}\right)$ C. $\left(\frac{13}{2}; \frac{19}{2}\right)$
B. $\left(\frac{11}{2}; \frac{13}{2}\right)$ D. $\left(\frac{19}{2}; \frac{37}{2}\right)$

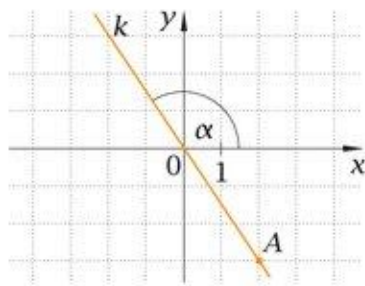


4. Wartość wyrażenia $(\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ)^2 - \sin 60^\circ$ jest równa:

- A. $2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $4 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

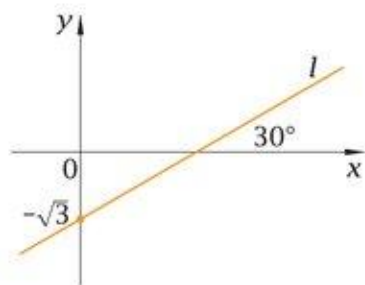
5. Na rysunku przedstawiona jest prosta k , przechodząca przez punkt $A = (2, -3)$ i przez początek układu współrzędnych, oraz zaznaczony jest kąt α nachylenia tej prostej do osi x . Zatem:

- A. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$ C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$
B. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$ D. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$



6. Prosta l jest nachylona do osi x pod kątem 30° i przecina oś y w punkcie $(0, -\sqrt{3})$ (zob. rysunek). Prosta l ma równanie:

- A. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ B. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$
C. $y = \frac{1}{2}x - \sqrt{3}$ D. $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{3}$



7. Jeśli $m = \sin 50^\circ$, to:

- A. $m = \sin 40^\circ$ B. $m = \cos 40^\circ$ C. $m = \cos 50^\circ$ D. $m = \operatorname{tg} 50^\circ$

8. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$. Wówczas $\sin \alpha$ jest równy:

- A. $\frac{\sqrt{5}}{17}$ B. $\frac{12}{17}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{12}{13}$

9. Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Oznacza to, że:

- A. $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{16}{15}$ C. $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$
 B. $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{16}$ D. $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{20}$

10. Wartość wyrażenia $2 \sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ + \cos^2 18^\circ$ jest równa:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

11. Każde z ramion trójkąta równoramiennego ma długość 20. Kąt zawarty między ramionami tego trójkąta ma miarę 150° . Pole tego trójkąta jest równe:

- A. 100 B. 200 C. $100\sqrt{3}$ D. $100\sqrt{2}$

12. Przekątne równoległoboku mają długości 4 i 8, a kąt między tymi przekątnymi ma miarę 30° . Pole tego równoległoboku jest równe:

- A. 32 B. 16 C. 12 D. 8

13. Pole rombu o obwodzie 8 jest równe 1. Kąt ostry tego rombu ma miarę α . Oznacza to, że:

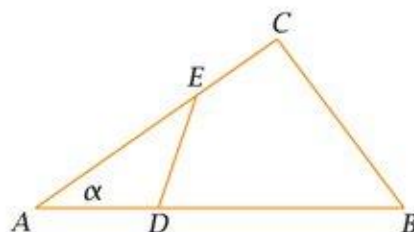
- A. $14^\circ < \alpha < 15^\circ$ C. $60^\circ < \alpha < 61^\circ$
 B. $29^\circ < \alpha < 30^\circ$ D. $75^\circ < \alpha < 76^\circ$

14. Kąt α jest ostry i $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$.

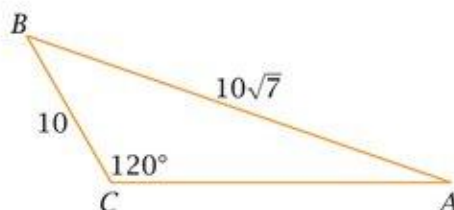
15. Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.

16. W trójkącie ABC dane są długości boków $|AB| = 15$ i $|AC| = 12$ oraz $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, gdzie $\alpha = \sphericalangle BAC$. Na bokach AB i AC tego trójkąta obrano punkty odpowiednio D i E takie, że $|BD| = 2|AD|$ i $|AE| = 2|CE|$ (zob. rysunek). Oblicz pole:

- a) trójkąta ADE ,
 b) czworokąta $BCED$.



17. Dany jest trójkąt rozwartokątny ABC , w którym $\sphericalangle ACB$ ma miarę 120° . Ponadto wiadomo, że $|BC| = 10$ i $|AB| = 10\sqrt{7}$ (zob. rysunek). Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC .



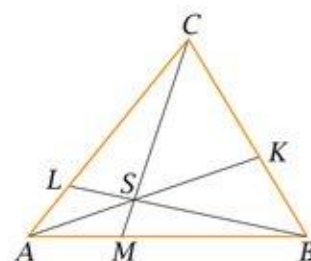
18. W trójkącie prostokątnym stosunek różnicy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{1}{2}$. Oblicz cosinusy kątów ostrych tego trójkąta.

19. Dla dowolnego kąta α wartość wyrażenia $\sin \alpha + \sin (180^\circ - \alpha)$ jest równa:

- A. $\sin 2\alpha$ B. $-\sin \alpha$ C. $2 \sin \alpha$ D. 0

20. W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c , długość boku BC jest równa a oraz $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}$.

21. Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC , przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM . Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zob. rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów AMS , ALS , BMS i CLS .



22. Długości boków czworokąta $ABCD$ są równe $|AB| = 2$, $|BC| = 3$, $|CD| = 4$, $|DA| = 5$. Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg. Oblicz długość przekątnej AC tego czworokąta.

23. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 15 i 20 wpisano okrąg. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego tego trójkąta z punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej.

24. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AC| = 16$, $|AD| = 6$, $|CD| = 14$ i $|BC| = |BD|$. Oblicz obwód trójkąta ABC .

FIGURY W PRZESTRZENI

Graniastosłup

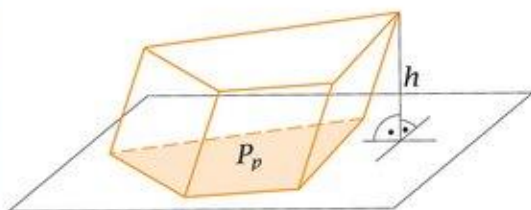
Graniastosłup, w którym krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, nazywamy **graniastosłupem prostym**. Wszystkie jego ściany boczne są prostokątami. Graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw, nazywamy **graniastosłupem pochyłym**.

Graniastosłup prosty, w którym podstawy są wielokątami foremnymi, nazywamy **graniastosłupem prawidłowym**.

Objętość graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot h$$

P_p — pole podstawy graniastosłupa
 h — wysokość graniastosłupa



Ostrosłup

Ostrosłup, w którym podstawa jest wielokątem foremnym i krawędzie boczne mają równe długości, nazywamy **ostrosłupem prawidłowym**.

Ściany boczne tego ostrosłupa są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

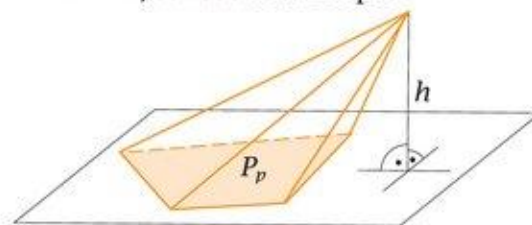
Ostrosłup trójkątny nazywany jest **czworościanem**. W czworościanie każdą ze ścian możemy uznać za podstawę. Czworościan, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**.

W ostrosłupie prawidłowym spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

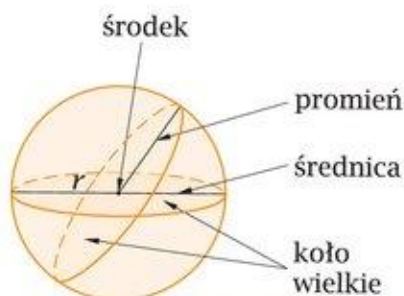
Objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

P_p — pole podstawy ostrosłupa
 h — wysokość ostrosłupa



Kula



Pole powierzchni kuli:

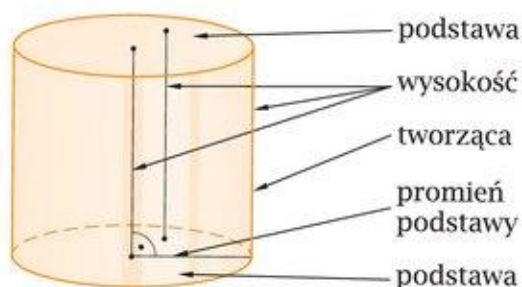
$$P = 4\pi r^2$$

Objętość kuli:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

r — promień kuli

Walec



Każdy odcinek łączący płaszczyznę podstaw i prostopadły do nich nazywamy **wysokością walca**. Wysokości, które łączą brzegi podstaw, tworzą powierzchnię boczną walca. Każdą taką wysokość nazywamy **tworzącą walca**.

Pole powierzchni bocznej walca:

$$P_b = 2\pi rh$$

Pole powierzchni całkowitej walca:

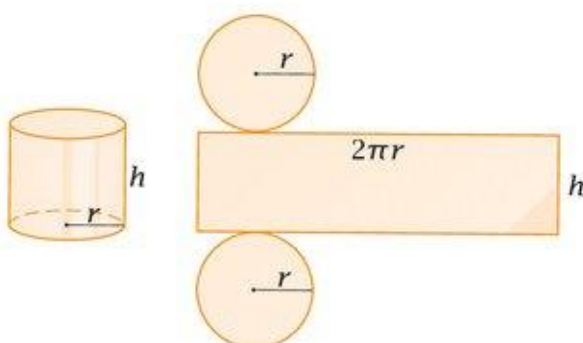
$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Objętość walca:

$$V = \pi r^2 h$$

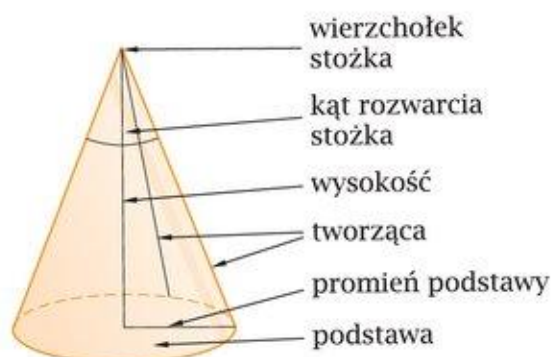
r — promień podstawy

h — wysokość walca



Stożek

Odcinek łączący wierzchołek ze środkiem podstawy stożka nazywamy **wysokością stożka**. Odcinki łączące wierzchołek z brzegiem podstawy tworzą powierzchnię boczną stożka. Każdy taki odcinek nazywamy **tworzącą stożka**. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia stożka**.



Pole powierzchni bocznej stożka:

$$P_b = \pi rl$$

Pole powierzchni całkowitej stożka:

$$P_c = \pi r^2 + \pi rl$$

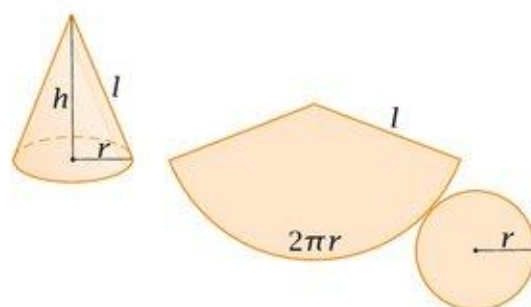
Objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

r — promień podstawy stożka

l — długość tworzącej

h — wysokość stożka



GRANIASTOSŁUPY

1. Przerysuj tabelę i ją uzupełnij.

Podstawa graniastosłupa				dziwięciokąt
Liczba ścian	15			
Liczba krawędzi		60		
Liczba wierzchołków			30	

2. Ustal, ile boków ma podstawa graniastosłupa, który ma:

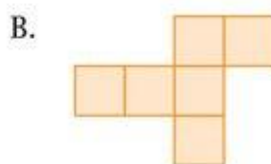
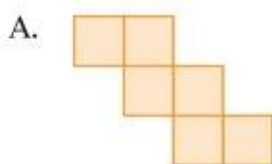
- a) 10 ścian, b) 14 wierzchołków, c) 18 krawędzi.

3. Sprawdź, czy istnieje graniastosłup, który ma:

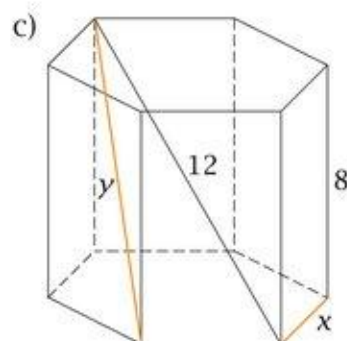
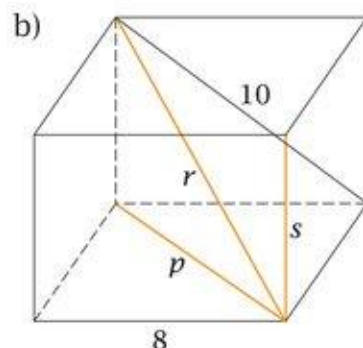
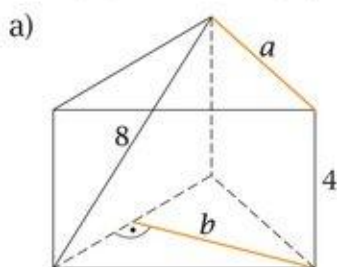
- a) 7 ścian, c) 10 wierzchołków, e) 15 krawędzi,
b) 8 ścian, d) 9 wierzchołków, f) 17 krawędzi.

4. Narysuj siatkę graniastosłupa prostego, którego wysokość jest równa 3, a podstawą jest trapez prostokątny o podstawach długości 5 i 8 i krótszym ramieniu długości 4.

5. Które z poniższych rysunków przedstawiają siatkę sześcianu?



6. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami, jeżeli wiadomo, że przedstawiony graniastosłup jest prawidłowy.



7. Podstawa graniastoslupa prostego jest rombem o boku długości 5 cm i kącie ostrym 60° . Wysokość tego graniastoslupa wynosi 10 cm. Jakimi figurami są jego ściany boczne?

8. a) Oblicz długość krawędzi sześcianu, którego przekątna ma długość 9.

b) W prostopadłościanie dwie krawędzie wychodzące ze wspólnego wierzchołka mają długości 4 cm i 6 cm. Przekątna tego prostopadłościanu ma długość 11 cm. Oblicz długość trzeciej krawędzi wychodzącej z tego wierzchołka.

c) Z miedzianego drutu o długości 9 m należy wykonać model prostopadłościanu, którego długość, szerokość i wysokość pozostają w stosunku $2:3:4$. Jaką długość ma przekątna tego prostopadłościanu (zakładamy, że drut został wykorzystany w całości do stworzenia modelu)?

d) W graniastoslupie prawidłowym sześciokątnym wysokość ma długość 7, a krótsza przekątna ma długość $2\sqrt{19}$. Oblicz długość krawędzi podstawy oraz długość dłuższej przekątnej tego graniastoslupa.

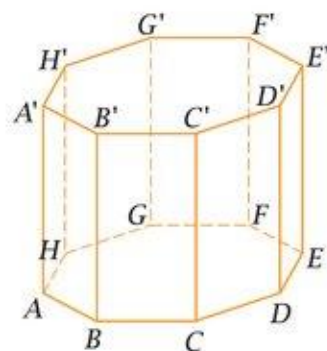
9. a) Przekątna podstawy graniastoslupa prawidłowego czworokątnego ma długość $3\sqrt{2}$, a przekątna ściany bocznej ma długość 5. Oblicz długość przekątnej tego graniastoslupa.

b) Wysokość podstawy graniastoslupa prawidłowego trójkątnego ma długość 3, a jego ściany boczne są kwadratami. Oblicz wysokość tego graniastoslupa.

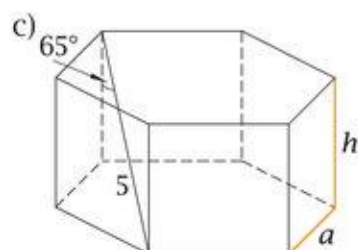
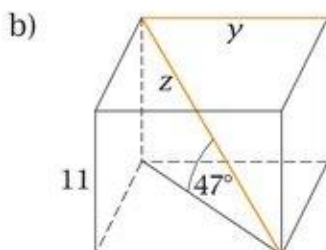
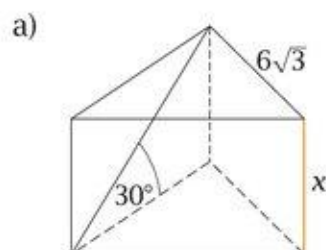
c) Podstawa graniastoslupa prostego jest rombem o przekątnych długości 12 i 16. Przekątna ściany bocznej ma długość 26. Jaka jest wysokość tego graniastoslupa?

10. Na rysunku przedstawiono graniastoslup prawidłowy ośmiokątny. Wymień wszystkie krawędzie tego graniastoslupa, które są:

- równoległe do CD ,
- równoległe do AA' ,
- prostopadłe do AB ,
- prostopadłe do AA' .



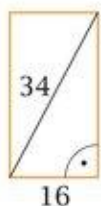
11. Na poniższym rysunku przedstawiono graniastoslup prawidłowy. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



12. Wyznacz miarę kąta nachylenia przekątnej sześcianu do przekątnej podstawy.

13. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa o narysowanej podstawie i wysokości 10.

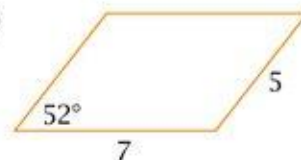
a)



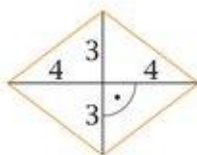
c)



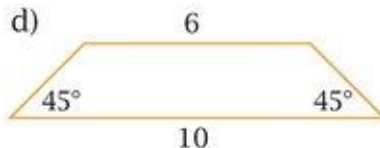
e)



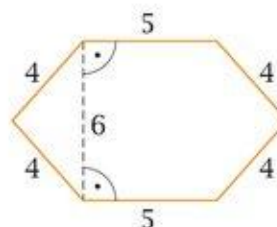
b)



d)

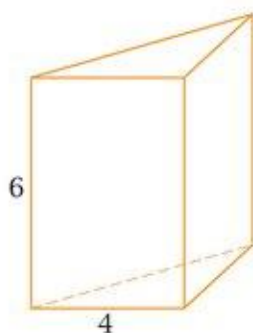


f)

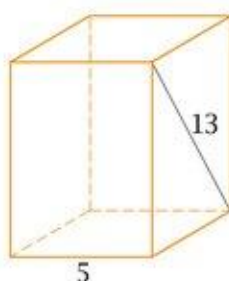


14. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku.

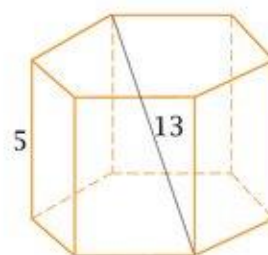
a)



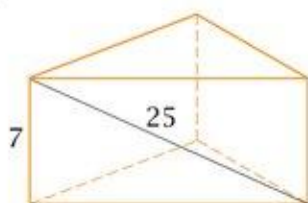
c)



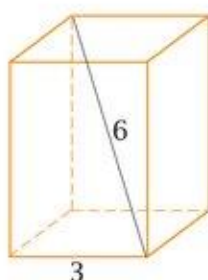
e)



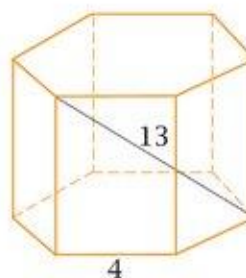
b)



d)



f)



15. a) Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 42. Oblicz objętość tego sześcianu.

b) W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie krawędzie mają jednakową długość. Objętość tego graniastosłupa jest równa $16\sqrt{3}$. Oblicz pole jego powierzchni bocznej.

c) W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędzie boczne są dwa razy dłuższe od krawędzi podstawy. Oblicz objętość tego graniastosłupa, jeżeli pole jego powierzchni całkowitej jest równe $300(4 + \sqrt{3})$.

16. Oblicz długości przekątnych graniastosłupa prawidłowego o krawędzi podstawy a i wysokości h , jeśli jego podstawa jest:

a) czworokątem,

b) sześciokątem.

17. Ściana boczna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest prostokątem o bokach długości 4 i 6.

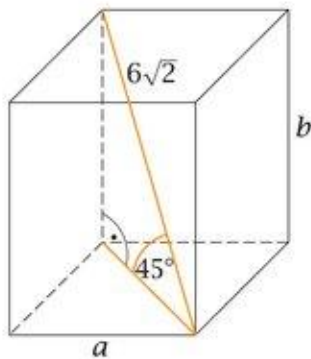
a) Narysuj siatkę tego graniastosłupa.

b) Oblicz długość przekątnej jego ściany bocznej.

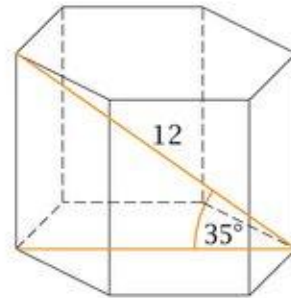
c) Oblicz długość najdłuższej przekątnej tego graniastosłupa.

d) Oblicz odległość punktu przecięcia najdłuższych przekątnych podstawy od środka krawędzi bocznej.

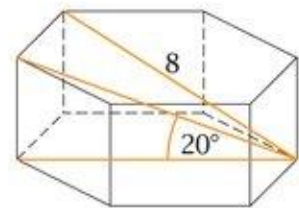
18. Oblicz długości krawędzi graniastosłupa prawidłowego przedstawionego na poniższym rysunku.



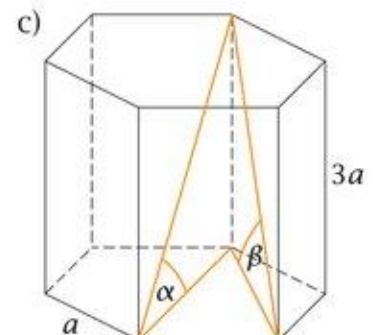
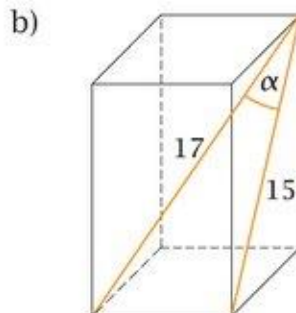
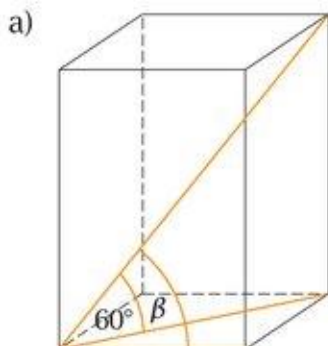
19. Oblicz długość krótszej przekątnej graniastosłupa prawidłowego przedstawionego na poniższym rysunku.



20. Oblicz długości krawędzi podstawy i wysokości graniastosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku obok.

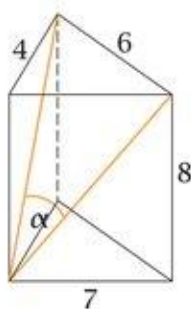


21. Wyznacz miary kątów α i β w graniastosłupie prawidłowym przedstawionym na rysunku.

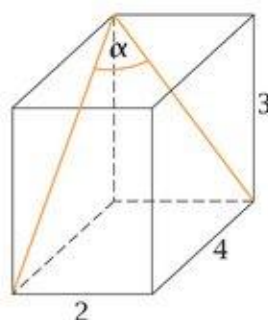


22. Wyznacz miarę kąta α w graniastosłupie prostym przedstawionym na rysunku.

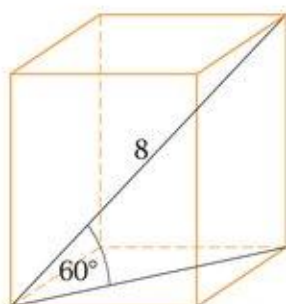
a)



b)

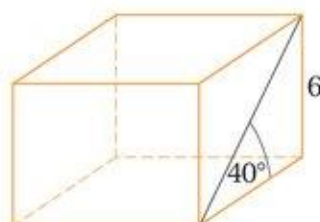


a)

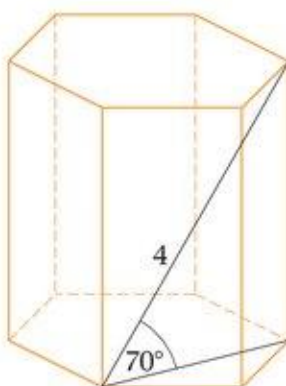


23. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku.

b)

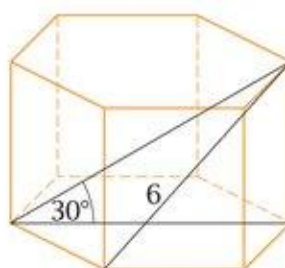


a)

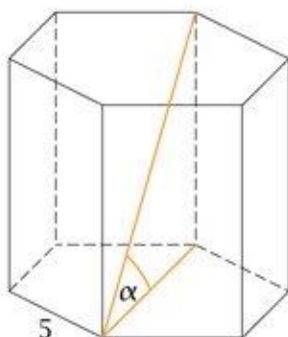


24. Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku.

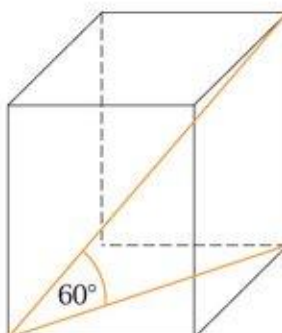
b)



25. a) Objętość graniastosłupa prawidłowego przedstawionego na poniższym rysunku jest równa $675\sqrt{3}$. Oblicz tangens kąta α .



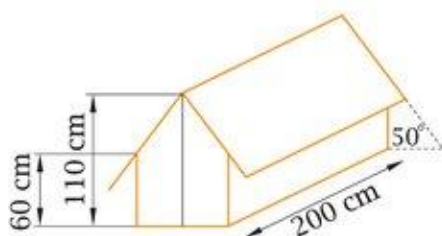
b) Objętość graniastosłupa prawidłowego przedstawionego na poniższym rysunku jest równa $512\sqrt{6}$. Oblicz długość przekątnej graniastosłupa.



26. Z wierzchołka prostopadłościanu poprowadzono trzy przekątne ścian o długościach: 2, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$. Oblicz objętość oraz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.

27. Modele dwóch sześciątów sklejono ze sobą ścianami w taki sposób, że ściana mniejszego sześciątka jest całkowicie zawarta w ścianie dużego sześciątka. Jeden z sześciątów ma krawędź długości 8, a drugi — 5. Oblicz pole powierzchni całkowitej powstałego w ten sposób wielościanu.

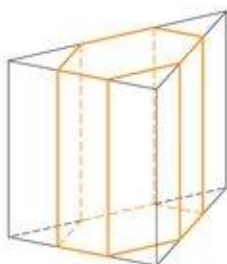
28. Kontener na deszczówkę ma kształt sześciątka o objętości 1 m^3 . Po nocnej ulewie poziom wody w kontenerze podniósł się z 49 cm do 51 cm. Ile litrów wody spłynęło podczas nocy do kontenera?



29. Oblicz, ile w przybliżeniu litrów powietrza mieści się w namiocie przedstawionym na rysunku obok.

30. Ile ton ziemi należy wywieźć, aby przygotować miejsce na basen o wymiarach $25 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ i o głębokości zmieniającej się wzdłuż basenu od 120 cm do 220 cm? Dno basenu ma być płaskie (choć nie poziome). Przyjmij, że 1 m^3 ziemi waży 2 t. Ile metrów kwadratowych kafelków potrzeba na wyłożenie tego basenu?

31. Czy 1 m^3 piasku wystarczy, by wypełnić piaskownicę w kształcie sześciokąta foremnego o boku 1 m i głębokości 60 cm do $\frac{2}{3}$ głębokości?



32. Z graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wycięto graniastosłup prawidłowy sześciokątny w sposób pokazany na rysunku.

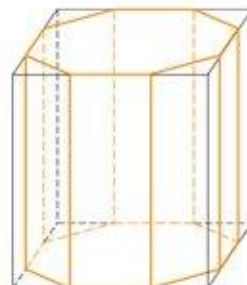
a) Jaką część objętości danego graniastosłupa stanowi wycięty graniastosłup sześciokątny?

b) Jak zmieniło się pole powierzchni graniastosłupa?

33. Z prostopadłościanu o podstawie kwadratu odcięto cztery graniastosłupy trójkątne i otrzymano graniastosłup prawidłowy ośmiokątny.

a) Oblicz objętość otrzymanego graniastosłupa przy założeniu, że objętość prostopadłościanu jest równa Q .

b) Oblicz pole powierzchni całkowitej otrzymanego graniastosłupa, jeżeli pole powierzchni prostopadłościanu jest równe S .



34. Z graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o objętości V i polu powierzchni P wycięto mniejszy graniastosłup prawidłowy czworokątny o objętości V' i polu powierzchni P' , którego wierzchołki są środkami krawędzi podstaw początkowego graniastosłupa.

- a) Czy znając wartość V , można obliczyć V' ?
- b) Czy znając wartość P , można obliczyć P' ?

35. Podstawą graniastosłupa prostego jest czworokąt, w którym obie przekątne mają długość d i są do siebie prostopadłe. Krawędź boczna i przekątna graniastosłupa, wychodzące z tego samego wierzchołka, są nachylone do siebie pod kątem α . Znajdź objętość tego graniastosłupa.

36. Oblicz objętość sześcianu, którego przekątna jest o 2 cm dłuższa od krawędzi.

37. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość a . Przekątne sąsiednich ścian bocznych, poprowadzone z tego samego wierzchołka, są prostopadłe. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

38. Rysunek obok przedstawia widok basenu z góry. Basen ten ma 20 m długości i 8 m szerokości. Liczby umieszczone w wierzchołkach prostokąta oznaczają głębokość w rogach basenu (w centymetrach). Ściany basenu są pionowe, a dno płaskie (choć nie poziome). Ile wody mieści się w tym basenie?



OSTROŚŁUPY

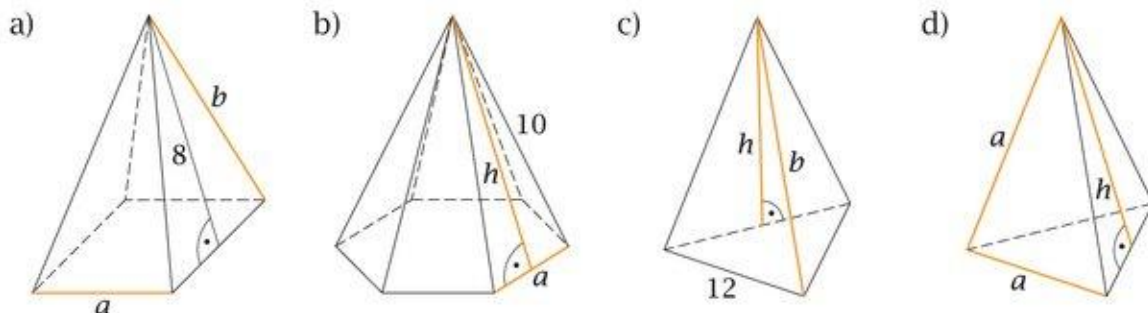
39. Przerysuj tabelę i ją uzupełnij.

Podstawa ostrosłupa				stukąt
Liczba ścian	9			
Liczba krawędzi		12		
Liczba wierzchołków			20	

40. Ustal, ile boków ma podstawa ostrosłupa, który ma:

- a) 8 ścian,
- b) 15 wierzchołków,
- c) 12 krawędzi.

41. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy, którego wysokość ma długość 6. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



42. W ostrosłupie $ABCD S$ podstawą jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 5, a krawędź AS jest wysokością ostrosłupa. Najdłuższa krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość 8. Oblicz długości pozostałych krawędzi bocznych tego ostrosłupa.

43. a) Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 7. Oblicz długości krawędzi podstawy i wysokości ostrosłupa, jeżeli wiadomo, że krawędź boczna ma długość $\sqrt{74}$.

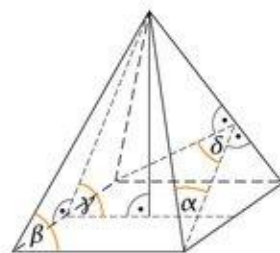
b) W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy i wysokość mają jednakową długość równą 6. Oblicz długość wysokości ściany bocznej ostrosłupa oraz długość krawędzi bocznej.

c) W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym wysokość ma długość 9, a krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Wyznacz długość krawędzi podstawy oraz długość wysokości ściany bocznej.

d) Prostokąt o bokach 6 i 10 jest podstawą ostrosłupa, którego wysokość ma długość 5. Wszystkie krawędzie boczne są jednakowej długości. Oblicz długości wysokości ścian bocznych tego ostrosłupa oraz długość krawędzi bocznych.

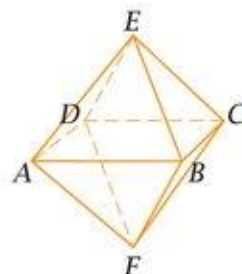
44. Opisz, jakie kąty oznaczono na rysunku obok literami α , β , γ oraz δ .

45. Oblicz długość krawędzi podstawy i wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź boczna ma długość 6 i tworzy z przekątną podstawy kąt o mierze 30° .

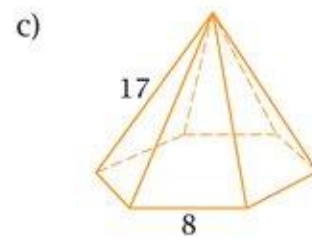
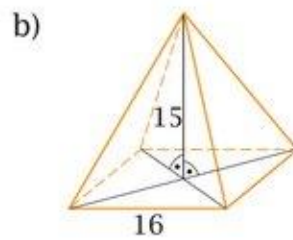
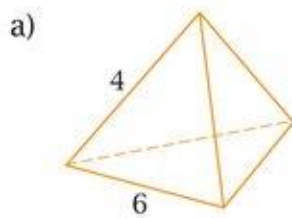


46. Na rysunku obok przedstawiono ośmiościan foremny $ABCDEFG$. Oblicz miarę kąta między takimi dwiema krawędziami ośmiościanu wychodzącymi z jednego wierzchołka, które:

- leżą na jednej ścianie,
- nie leżą na jednej ścianie.



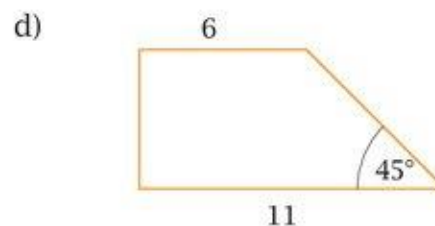
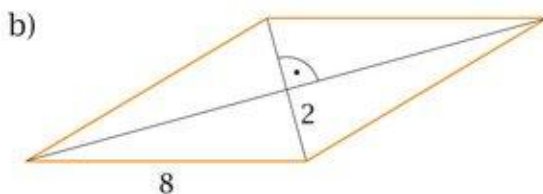
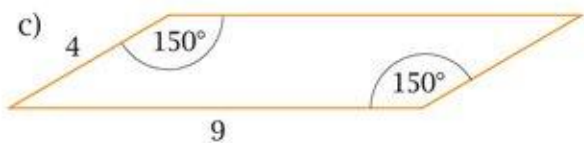
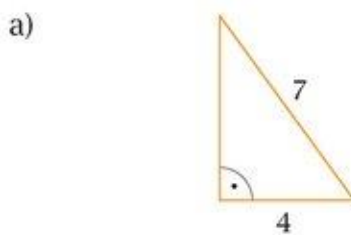
47. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku.



48. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa prawidłowego o krawędzi podstawy długości 2 i wysokości 4, jeśli wiadomo, że jest on:

- a) trójkątny, b) czworokątny, c) sześciokątny.

49. Oblicz objętość ostrosłupa o wysokości równej 12 i podstawie przedstawionej na poniższym rysunku.



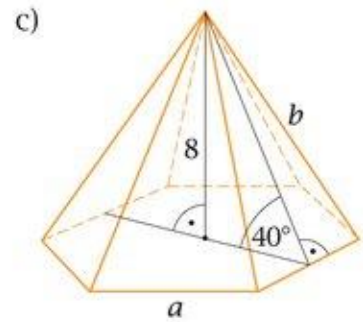
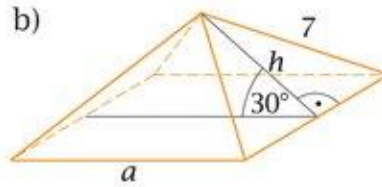
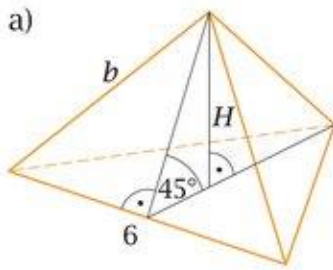
50. Jedna ze ścian ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest trójkątem o bokach długości 5, 13, 13.

- a) Narysuj siatkę tego ostrosłupa.
b) Oblicz wysokość jego ściany bocznej.
c) Oblicz wysokość tego ostrosłupa.
d) Oblicz odległość spodka wysokości od krawędzi bocznej.

51. W ostrosłupie prawidłowym krawędź boczna ma długość 6, a wysokość ściany bocznej jest o 3 dłuższa od wysokości ostrosłupa. Oblicz wysokość ostrosłupa, jeżeli wiadomo, że ostrosłup jest:

- a) czworokątny, b) sześciokątny.

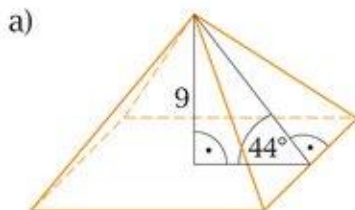
52. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



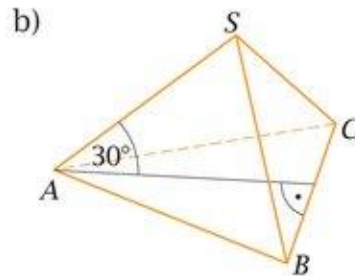
53. a) Oblicz objętość oraz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym krawędź boczna ma długość 10, a krawędź podstawy ma długość 4.

b) Oblicz objętość oraz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego, w którym wysokość ściany ma długość 12.

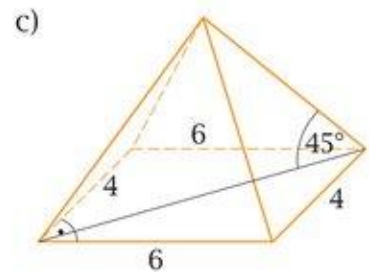
54. Oblicz objętość oraz pole powierzchni całkowitej przedstawionego ostrosłupa.



ostrosłup prawidłowy



ostrosłup prawidłowy
 $P_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3}$



wszystkie krawędzie
boczne równej długości

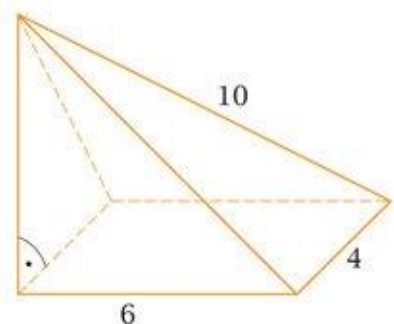
55. a) Podstawą ostrosłupa jest romb o kącie ostrym 60° i boku długości 4. Objętość tego ostrosłupa jest równa 16. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

b) W ostrosłupie trójkątnym krawędzie podstawy mają długości 5, 12, 13. Oblicz wysokość ostrosłupa, jeżeli wiadomo, że objętość tego ostrosłupa jest równa 20.

c) Podstawą ostrosłupa jest sześciokąt foremny. Oblicz długość krawędzi podstawy, jeżeli wysokość ostrosłupa ma długość 12, a jego objętość wynosi $18\sqrt{3}$.

56. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym pole podstawy jest równe $216\sqrt{3}$, a pole powierzchni bocznej wynosi 432. Oblicz objętość ostrosłupa.

57. Podstawą ostrosłupa przedstawionego na rysunku obok jest prostokąt. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

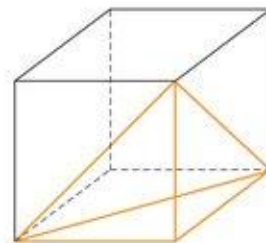


58. W sześcianie o krawędzi długości 1 wybrano cztery wierzchołki, jak na rysunku obok.

a) Czy czworościan o wierzchołkach w wybranych punktach jest prawidłowy?

b) Ile wysokości o różnych długościach ma ten czworościan? Znajdź te długości.

c) Czy wybierając w inny sposób cztery wierzchołki tego samego sześcianu, możemy uzyskać czworościan o innych wymiarach niż opisany powyżej (niekoniecznie foremny)? Jeśli tak, wyznacz długości jego krawędzi. Znajdź wszystkie możliwości.



59. Ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy a są trójkąty prostokątne. Oblicz pole powierzchni i objętość tego ostrosłupa.

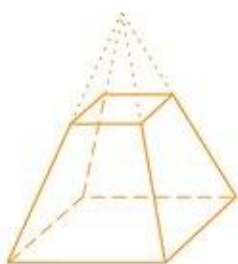
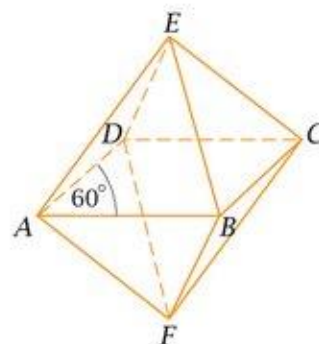
60. Dwie ściany ostrosłupa trójkątnego są prostopadłe i ich wspólna krawędź ma długość a . Wszystkie pozostałe krawędzie mają równe długości. Znajdź objętość tego ostrosłupa.

61. Bryła $ABCDEF$ przedstawiona na rysunku jest ośmiościanem powstałym ze sklejenia dwóch ostrosłupów prostych. Czworokąty $ABCD$ oraz $BFDE$ są rombami o boku a i kącie ostrym 60° , a ich przekątne AC i EF są prostopadłe.

a) Czy ściany tego ośmiościanu są trójkątami równobocznymi?

b) Oblicz pole powierzchni i objętość tej bryły.

c) Jaką figurą jest czworokąt $AFCE$?



62. Ostrosłup ścięty to bryła otrzymana z ostrosłupa przez odcięcie od niego mniejszego ostrosłupa płaszczyzną równoległą do podstawy. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa ściętego, którego dolna podstawa jest kwadratem o boku długości a , górna podstawa jest kwadratem o boku długości b , a wysokość jest równa h .

63. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź boczna tworzy z wysokością podstawy kąt α taki, że $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa, jeżeli wysokość ściany bocznej ma długość $h = 6$.

64. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ściany bocznej tworzy z wysokością ostrosłupa kąt, którego tangens wynosi $\frac{1}{4}$. Krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość 8. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

65. Każda ze ścian graniastosłupa jest rombem o boku a i kącie ostrym 60° . Narysuj siatkę tego graniastosłupa i oblicz jego objętość.

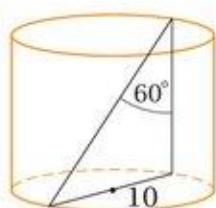
WALEC

66. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem o polu 10 cm^2 . Oblicz objętość tego walca.

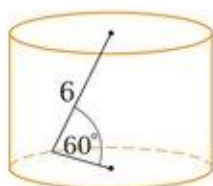
67. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem o przekątnej długości 8 cm . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

68. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej walca przedstawionego na rysunku (zaznaczone punkty to środki podstaw).

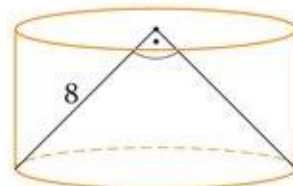
a)



b)



c)



69. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o bokach 6 i 7 . Oblicz objętość tego walca. Rozpatrz dwa przypadki.

70. Przekrój osiowy walca jest prostokątem, którego krótszy bok ma długość 4 cm , a przekątne tego przekroju przecinają się pod kątem 60° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca. Rozpatrz dwa przypadki.

71. Wysokość walca jest dwa razy dłuższa od średnicy jego podstawy. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca, jeżeli jego objętość jest równa 32π .

72. Pole powierzchni bocznej walca wynosi $30\pi\text{ cm}^2$, a obwód jego przekroju osiowego jest równy 22 cm . Oblicz objętość tego walca.

73. Pole powierzchni całkowitej walca jest równe 238π , a wysokość jest o 3 dłuższa od promienia podstawy. Oblicz pole przekroju osiowego tego walca.

74. Gdyby wysokość pewnego walca zwiększono o 3 , a promień podstawy pozostawiono bez zmian, to objętość tego walca zwiększyłaby się o 12 . Oblicz długość promienia podstawy tego walca.

75. a) Przekątna przekroju osiowego walca jest trzy razy dłuższa od jego wysokości. Oblicz stosunek długości przekątnej prostokąta powstałego po rozwinięciu powierzchni bocznej tego walca do wysokości tego walca.

b) Stosunek długości przekątnej prostokąta powstałego po rozwinięciu powierzchni bocznej walca do wysokości tego walca wynosi $3:1$. Oblicz, ile wynosi stosunek długości przekątnej przekroju osiowego do wysokości tego walca.

76. Wysokość walca jest o 2 dłuższa od promienia podstawy tego walca. Oblicz objętość walca, jeżeli pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe 528π .

77. Z prostokąta o bokach długości a i b , gdzie $a > b$, możemy otrzymać powierzchnię boczną walca o wysokości a albo walca o wysokości b .

a) Który z tych walców ma większą objętość?

b) Który z tych walców ma mniejsze pole powierzchni całkowitej?

78. Po rozwinięciu powierzchni bocznej walca otrzymano kwadrat o przekątnej długości d . Oblicz objętość tego walca.

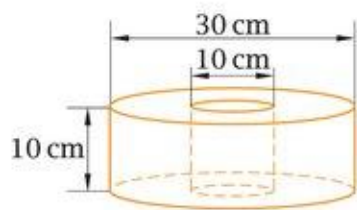
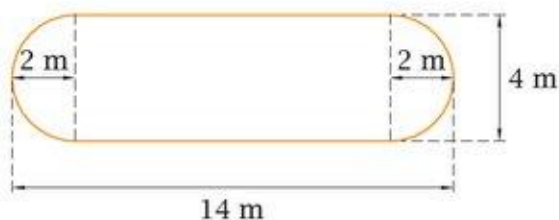
79. Objętość walca wynosi V , a pole powierzchni bocznej jest równe S . Oblicz tangens kąta między przekątną przekroju osiowego walca a średnicą podstawy.

80. Jakie wymiary ma walec, którego pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól jego podstaw i którego objętość jest równa 27?

81. Wysokość walca ma taką samą długość jak średnica jego podstawy. Objętość tego walca jest równa objętości sześcianu o przekątnej $6\sqrt{3}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

82. Dziesięć litrów soku należy rozlać po równo do jednakowych szklanek. Wnętrze każdej z nich ma kształt walca o wysokości 13 cm i średnicy równej 6 cm. Sprawdź, czy 30 szklanek wystarczy, aby rozlać ten sok.

83. Basen o głębokości 1,5 m postanowiono całkowicie napęlnić wodą za pomocą dwunastu dysz dopływowych o jednakowym przepływie. Basen widziany z góry ma kształt figury przedstawionej na rysunku. Jak długo potrwa napęlnianie pustego basenu, jeżeli przez jedną dyszę przepływa 15 l wody w czasie każdej minuty?



84. Kasia upiekła drożdżową babkę w kształcie walca z wydrążonym środkiem (zob. rysunek).

a) Jaką powierzchnię babki Kasia musiałaby polukrować, gdyby tylko spód ciasta nie był lukrowany?

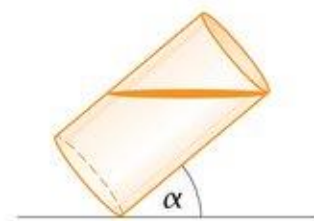
b) Przed przyjściem gości Kasia podzieliła babkę na 12 równych kawałków. Ile kilokalorii ma jeden kawałek babki, jeżeli 100 cm^3 tego ciasta ma 42 kcal?

85. Krążek do hokeja ma kształt walca o średnicy 7,6 cm i wysokości 2,5 cm. Guma, z której jest wykonany, ma gęstość $1410 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Ile gramów waży taki krążek?

86. Pole powierzchni bocznej pewnego walca jest równe polu koła opisanego na przekroju osiowym tego walca. Znajdź stosunek wysokości tego walca do promienia jego podstawy.

87. Cysterna w kształcie walca umieszczona poziomo na samochodzie zawiera 2000 litrów oleju. Największa głębokość oleju w cysternie wynosi 80 cm, co stanowi $\frac{4}{5}$ średnicy cysterny. Jaka jest pojemność tej cysterny?

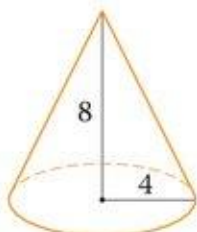
88. Szklankę w kształcie walca, którego wysokość jest dwa razy dłuższa od średnicy podstawy, wypełniono po brzegi wodą, a następnie przechyleno o kąt α , gdzie $\alpha \in (30^\circ; 90^\circ)$. Jaka część wody pozostała w szklance?



STOŻEK

89. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej narysowanego stożka.

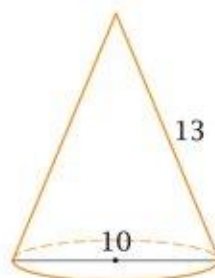
a)



b)

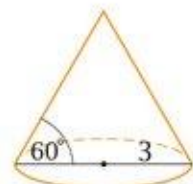


c)

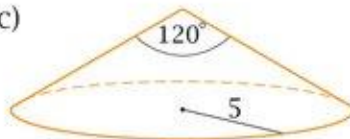


90. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej narysowanego stożka.

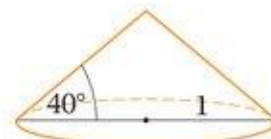
a)



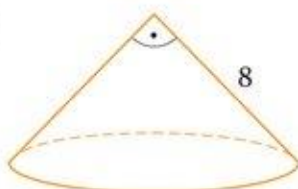
c)



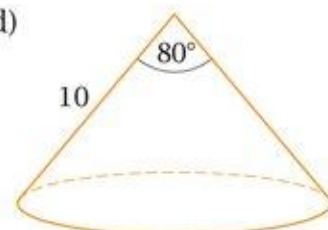
e)



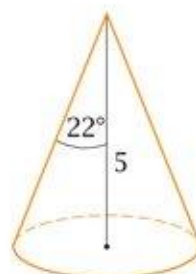
b)



d)



f)



91. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym, którego pole jest równe $15\sqrt{3}\text{ cm}^2$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

92. Wysokość stożka jest dziewięciokrotnie mniejsza od jego promienia. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka, jeżeli jego objętość wynosi $125\pi\text{ cm}^3$.

93. Powierzchnia boczna stożka ma trzy razy większe pole od pola podstawy tego stożka. Znajdź przybliżoną miarę kąta rozwarcia tego stożka.

94. Na rysunku przedstawiono wycinek koła o promieniu długości 6 cm. Oblicz objętość stożka, którego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest tym wycinkiem.

a)



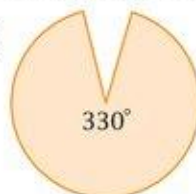
b)



c)



d)



95. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka, jeżeli wiadomo, że jego objętość jest równa $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$.

96. Ile metrów kwadratowych papieru zużyjemy na wykonanie czapeczki w kształcie stożka o wysokości 60 cm i obwodzie podstawy 50 cm? Jaki kąt powinien mieć wycinek koła potrzebny do sklejenia tej czapeczki?

97. a) Trójkąt równoboczny o boku a obracamy wokół jego osi symetrii. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej otrzymanej bryły.

b) Trójkąt równoboczny o boku a obracamy wokół jego boku. Oblicz objętość i pole powierzchni otrzymanej bryły.

98. Promień podstawy stożka ma długość 8, a pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe 128π . Oblicz objętość stożka.

99. Tworząca stożka jest o 2 cm dłuższa od promienia podstawy tego stożka. Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe $84\pi\text{ cm}^2$. Oblicz objętość stożka.

100. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej stożka, w którym wysokość ma długość $\sqrt{55}$, a tworząca jest o 2 dłuższa od średnicy podstawy.

101. Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt o polu równym $75\sqrt{3}$ i kącie rozwartym 120° . Wyznacz objętość tego stożka.

102. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym o polu S . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka.

103. Kwadrat o boku długości 8 cm obracamy wokół jego osi symetrii. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej otrzymanej bryły. Rozpatrz wszystkie możliwości.

104. Jaki jest stosunek pola powierzchni bryły otrzymanej w wyniku obrotu kwadratu wokół jego boku do pola powierzchni bryły otrzymanej w wyniku obrotu tego samego kwadratu wokół jego przekątnej?

105. Trójkąt o bokach długości 2, 3, 4 obraca się wokół najdłuższego boku. Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku tego obrotu.

106. a) Trójkąt o polu P obrócono wokół jednego z boków. Wysokość opuszczona na ten bok ma długość h . Znajdź objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu.

b) Trójkąt o polu P obracamy wokół boku o długości a . Oblicz objętość otrzymanej bryły.

c) Boki trójkąta mają długości 7, 8 i 9. Wokół którego boku należy obracać ten trójkąt, aby otrzymana bryła miała największą objętość?

107. W trójkącie równoramiennym o podstawie a kąt nachylenia ramienia trójkąta do podstawy ma miarę α . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły otrzymanej w wyniku obrotu tego trójkąta wokół:

a) wysokości poprowadzonej do podstawy trójkąta,

b) podstawy trójkąta.

108. W równoległoboku długości boków wynoszą 3 cm i 5 cm, a kąt ostry ma miarę 30° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły otrzymanej w wyniku obrotu tego równoległoboku wokół prostej zawierającej:

a) dłuższy bok równoległoboku,

b) krótszy bok równoległoboku.

109. Dany jest trapez prostokątny o podstawach długości 8 cm i 5 cm oraz kącie ostrym 45° . Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu tego trapezu wokół prostej zawierającej:

a) krótszą podstawę,

b) dłuższą podstawę,

c) wysokość.

110. Dany jest trapez równoramienny o podstawach długości 10 i 6 oraz wysokości 7. Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły, jaka powstaje w wyniku obrotu tego trapezu wokół prostej zawierającej:

a) krótszą podstawę,

b) dłuższą podstawę.

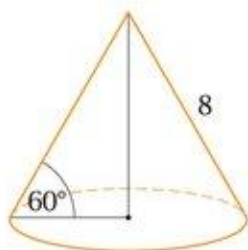
111. Pole podstawy stożka jest pięć razy większe od pola podstawy walca wpisanego w ten stożek w taki sposób, że dolna podstawa walca zawiera się w podstawie stożka, a brzeg górnej podstawy walca zawiera się w powierzchni bocznej stożka. Objętość stożka wynosi $125\sqrt{5}\pi \text{ cm}^3$, a tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{3}{4}$. Znajdź objętość walca.

112. Walec i stożek mają jednakową wysokość i takie samo pole przekroju osiowego. Wyznacz stosunek objętości walca do objętości stożka.

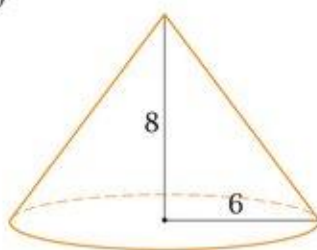
113. Dany jest stożek o kącie rozwarcia 120° i wysokości 8 cm. Stożek ten przecięto płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podstawy i przechodzącą przez wysokość stożka dokładnie w połowie. Oblicz objętości otrzymanych brył.

114. Jaką miarę ma kąt środkowy i jaką długość ma promień wycinka koła, z którego utworzono powierzchnię boczną stożka przedstawionego na rysunku?

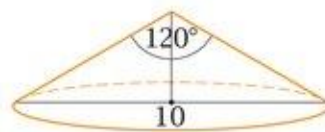
a)



b)



c)



115. Wykaż, że nie istnieje stożek, którego pole podstawy jest równe polu powierzchni bocznej.

116. Udowodnij, że nie istnieje stożek, którego pole powierzchni całkowitej jest trzy razy większe od pola jego przekroju osiowego.

117. Wycinek kołowy będący $\frac{1}{3}$ koła zwinięto w stożek. Oblicz objętość tego stożka, jeżeli najdłuższa cięciwa w tym wycinku ma długość a .

118. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły powstałej w wyniku obrotu sześciokąta foremnego o boku długości a wokół:

- prostej zawierającej najdłuższą przekątną sześciokąta,
- osi symetrii przechodzącej przez środki dwóch przeciwległych boków,
- prostej zawierającej krótszą przekątną tego sześciokąta,
- jednego z boków sześciokąta.

119. Po zwinięciu wycinka koła otrzymano powierzchnię boczną stożka, w którym tworząca nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Jaką miarę miał kąt środkowy tego wycinka?

- 120.** a) Stożek i walec mają takie same promienie podstaw, wysokości i pola powierzchni bocznych. Oblicz miarę kąta nachylenia tworzącej do podstawy stożka.
 b) Stożek i walec mają takie same tworzące, objętości i pola powierzchni bocznych. Oblicz miarę kąta nachylenia tworzącej do podstawy stożka.

KULA

121. a) Oblicz objętość kuli, której pole powierzchni wynosi 324π .

b) Oblicz pole powierzchni kuli, której objętość jest równa $\frac{\pi}{6}$.

c) Oblicz objętość kuli, której pole powierzchni jest równe S .

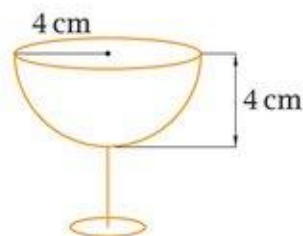
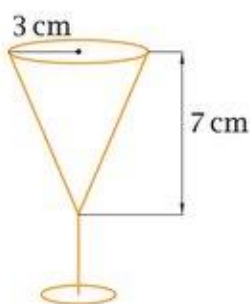
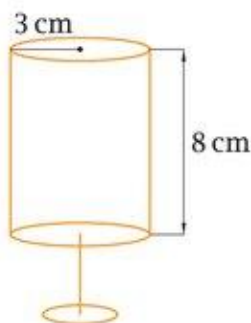
d) Oblicz pole powierzchni kuli o objętości V .

122. a) Pole przekroju kuli zawierającego jej środek jest równe 144π . Oblicz objętość tej kuli.

b) Objętość kuli jest równa 0,75. Wykaż, że najdłuższy odcinek zawarty w tej kuli jest krótszy niż 1,2.

123. Dziesięć srebrnych kulek, z których każda ma promień 3 cm, przetopiono na jedną dużą kulę. Wyznacz promień tej kuli.

124. Czy pół litra soku można rozlać do trzech szklanek o kształcie i wymiarach przedstawionych na poniższych rysunkach?



125. Do wazonu w kształcie walca o promieniu podstawy długości 10 cm częściowo wypełnionego wodą wrzucono 5 identycznych szklanych kulek i wówczas poziom wody podniósł się o 4 cm (woda się nie wylała). Oblicz średnicę jednej kulki.

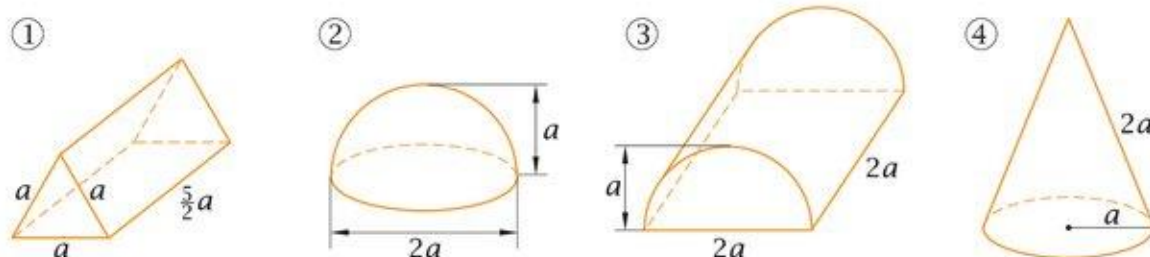
126. Kulę przecięto płaszczyzną w odległości 4 cm od jej środka. Pole otrzymanego przekroju jest równe $8\pi \text{ cm}^2$. Oblicz pole powierzchni tej kuli.

127. Oblicz stosunek objętości kuli do objętości sześcianu:

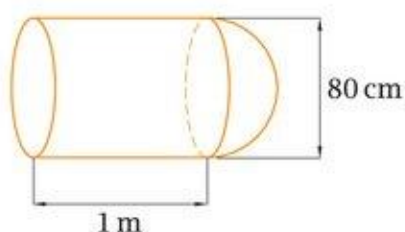
a) opisanego na tej kuli,

b) wpisanego w tę kulę.

128. W którym namiocie mieści się najwięcej powietrza, a w którym — najmniej? Na uszycie którego namiotu trzeba zużyć najwięcej materiału, a na uszycie którego — najmniej?



129. Przedstawiony na poniższym rysunku bojler ma kształt walca zakończonego z jednej strony półkulą.



a) Ile litrów wody pomieści ten bojler?

b) Firma produkująca bojler planuje pomalować zewnętrzną powłokę bojlera farbą o wydajności $10 \text{ m}^2/\text{liter}$ farby. Ile pojemników z farbą jest potrzebnych do pomalowania 12 takich bojlerów (zakładamy, że farby sprzedawane są w pojemnikach o pojemności 1 l)?

130. Do basenu o wymiarach $20 \text{ m} \times 10 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$ częściowo wypełnionego wodą wrzucono 10 000 jednakowych metalowych kulek o promieniu 3 cm. O ile podniósł się poziom wody w basenie, jeżeli wszystkie kulki znalazły się pod wodą?

131. Oblicz stosunek objętości kuli do objętości walca wpisanego w tę kulę, jeżeli wiadomo, że powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem.

132. Oblicz objętość kuli wpisanej w stożek o średnicy podstawy 6 cm i wysokości równej 4 cm.

133. W kulę wpisano stożek o promieniu podstawy długości 2 i wysokości 5. Oblicz pole powierzchni tej kuli.

134. Z czterech kul bilardowych o promieniu r zbudowano „piramidę” w ten sposób, że na stole na trzech stycznych kulach położono czwartą. Oblicz wysokość tej piramidy.

PRZED SPRAWDZIANEM

1. W graniastosłupie prawidłowym dwunastokątnym krawędź podstawy ma długość 2, a pole powierzchni bocznej jest dwa razy mniejsze od pola powierzchni całkowitej. Jeżeli objętość tego graniastosłupa wynosi 100, to wysokość graniastosłupa ma długość:

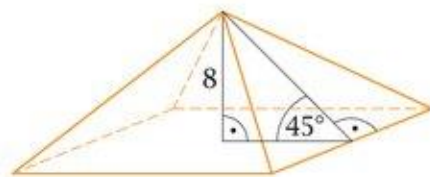
- A. mniejszą od 4 B. równą 4 C. równą $\frac{25}{6}$ D. większą od $\frac{25}{6}$

2. Jaką długość ma krawędź czworościanu foremnego o wysokości równej 6?

- A. $3\sqrt{6}$ B. $4\sqrt{3}$ C. 6 D. $6\sqrt{3}$

3. Jaką długość ma krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku?

- A. $8\sqrt{2}$ B. 16 C. 8 D. $8\sqrt{3}$

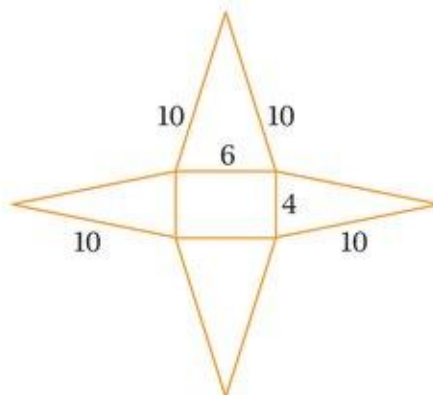


4. Jeżeli promień kuli zwiększy się o 10%, to objętość tej kuli zwiększy się o:

- A. 10% B. 20% C. 33,1% D. 40%

5. Z drutu o długości 1 m wykonano model ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wszystkie krawędzie mają jednakową długość. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

6. Na rysunku obok przedstawiono siatkę pewnego ostrosłupa. Oblicz jego objętość.



7. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10 i tworzy z przekątną podstawy kąt 56° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

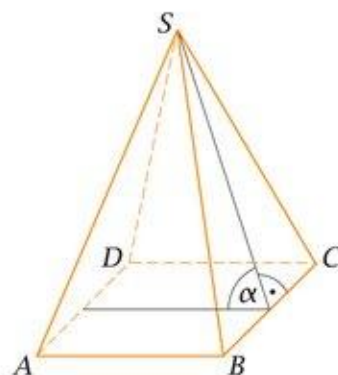
8. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym 60° i krótszej przekątnej równej 6. Oblicz długość krótszej przekątnej tego graniastosłupa, jeżeli wiadomo, że objętość graniastosłupa jest równa $72\sqrt{3}$.

9. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość tego stożka, jeżeli wysokość stożka ma długość 1.

10. Metalowy walec, którego przekrój osiowy jest kwadratem o boku długości 8, przetopiono na kulę. Oblicz pole powierzchni tej kuli.

Informacje do zadań 11. i 12.

Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy, w którym $|\sphericalangle ASC| = 60^\circ$.



Я 11. Miara kąta α jest równa:

- A. mniej niż 30° C. 60°
B. 45° D. więcej niż 60°

Я 12. Stosunek wysokości ściany bocznej do wysokości tego ostrosłupa wynosi:

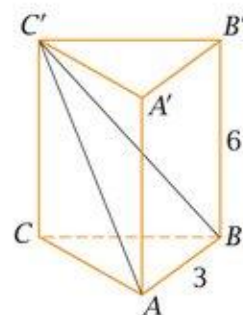
- A. $\frac{\sqrt{42}}{6}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{6}{5}$

Я 13. Stosunek długości krawędzi wychodzących ze wspólnego wierzchołka prostopadłościanu wynosi $2:3:4$, a przekątna tego prostopadłościanu ma długość $5\sqrt{29}$. Oznacza to, że najkrótsza krawędź prostopadłościanu ma długość:

- A. 2 B. 10 C. 15 D. 5

Я 14. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy trójkątny, w którym poprowadzono odcinki AC' i BC' . Miara kąta $AC'B$ jest równa około:

- A. $64,2^\circ$ B. $12,9^\circ$ C. $25,8^\circ$ D. $26,6^\circ$



Я 15. Z wycinka koła stanowiącego $\frac{1}{4}$ koła wykonano powierzchnię boczną stożka. Ile stopni ma kąt rozwarcia otrzymanego stożka?

- A. mniej niż 45° B. 45° C. 90° D. więcej niż 90°

Я 16. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym dłuższa przekątna tworzy z dłuższą przekątną podstawy kąt 30° . Objętość tego graniastosłupa jest równa 648. Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa.

Я 17. Punkty K , L , M są środkami trzech krawędzi sześcianu wychodzących ze wspólnego wierzchołka S . Wyznacz stosunek objętości ostrosłupa $KLMS$ do objętości bryły powstałej przez odcięcie od sześcianu tego ostrosłupa.

Я 18. Krawędzie boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S są czterokrotnie dłuższe od krawędzi podstawy równej a . Oblicz obwód trójkąta BDK , gdzie K jest środkiem krawędzi SC .

Я 19. Stożek i walec mają jednakowe podstawy i równe wysokości. Ponadto pole powierzchni bocznej stożka jest równe polu powierzchni bocznej walca. Wyznacz miarę kąta rozwarcia stożka.

PRZED MATURĄ

1. Długość przekątnej sześcianu jest równa 6. Stąd wynika, że pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe:

- A. 72 B. 48 C. 152 D. 108

2. Różnica liczby krawędzi i liczby wierzchołków ostrosłupa jest równa 11. Podstawą tego ostrosłupa jest:

- A. dziesięciokąt B. jedenastokąt C. dwunastokąt D. trzynastokąt

3. Pole powierzchni bocznej walca jest równe 16π , a promień jego podstawy ma długość 2. Wysokość tego walca jest równa:

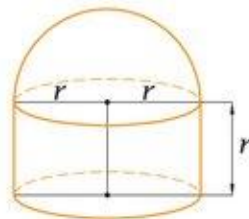
- A. 4 B. 8 C. 4π D. 8π

4. Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoboczny o boku długości 6. Objętość tego stożka jest równa:

- A. $27\pi\sqrt{3}$ B. $9\pi\sqrt{3}$ C. 18π D. 6π

5. Na rysunku przedstawiono bryłę zbudowaną z walca i półkuli. Wysokość walca jest równa r i jest taka sama jak promień półkuli oraz taka sama jak promień podstawy walca. Objętość tej bryły jest równa:

- A. $\frac{5}{3}\pi r^3$ B. $\frac{4}{3}\pi r^3$ C. $\frac{2}{3}\pi r^3$ D. $\frac{1}{3}\pi r^3$



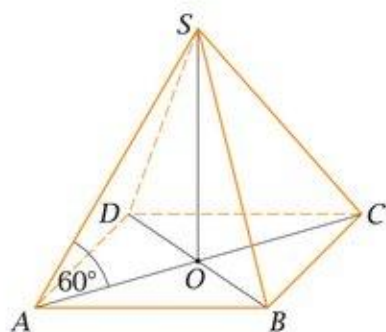
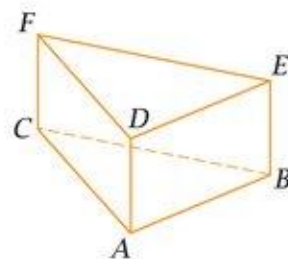
6. Stożek o promieniu podstawy r i kula o tym samym promieniu mają równe objętości. Tangens kąta między tworzącą i płaszczyzną podstawy tego stożka jest równy:

- A. $\frac{4}{3}$ B. 12 C. $\sqrt{17}$ D. 4

7. Jacek bawi się sześciennymi klockami o krawędzi 2 cm. Zbudował z nich jeden duży sześcian o krawędzi 8 cm i wykorzystał do tego wszystkie swoje klocki. Następnie zburzył budowlę i ułożył z tych klocków drugą bryłę — graniastosłup prawidłowy czworokątny. Wtedy okazało się, że został mu dokładnie jeden klocek, którego nie było gdzie dołożyć. Oblicz stosunek pola powierzchni całkowitej pierwszej ułożonej bryły do pola powierzchni całkowitej drugiej bryły i wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

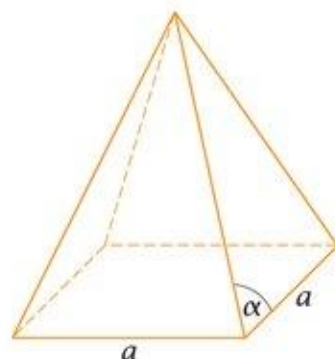
8. Dany jest stożek o objętości 8π , w którym stosunek wysokości do promienia podstawy jest równy 3:8. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

9. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny (zob. rysunek). Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $45\sqrt{3}$. Pole podstawy graniastosłupa jest równe polu jednej ściany bocznej. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



10. Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest prostokąt o polu równym 432, a stosunek długości boków tego prostokąta jest równy 3:4. Przekątne podstawy $ABCD$ przecinają się w punkcie O . Odcinek SO jest wysokością ostrosłupa (zob. rysunek). Kąt SAO ma miarę 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

11. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość a . Kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy ma miarę α , gdzie $\alpha > 45^\circ$ (zob. rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa.

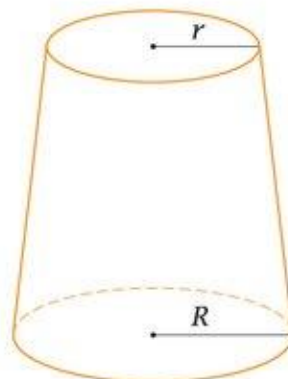


12. Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest trapez $ABCD$. Przekątna AC tego trapezu ma długość $8\sqrt{3}$, jest prostopadła do ramienia BC i tworzy z dłuższą podstawą AB tego trapezu kąt o mierze 30° . Każda krawędź boczna tego ostrosłupa ma tę samą długość $4\sqrt{5}$. Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od jego krawędzi bocznej SD .

13. Objętość stożka ściętego (przedstawionego na rysunku) można obliczyć ze wzoru

$$V = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + rR + R^2),$$

gdzie r i R są promieniami podstaw bryły ($r < R$), a H jest jej wysokością. Dany jest stożek ścięty, którego wysokość jest równa 10, objętość 840π , a $r = 6$. Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego tej bryły do jednej z jej podstaw.



STATYSTYKA

Błąd bezwzględny przybliżenia to wartość bezwzględna różnicy między wartością dokładną a wartością przybliżoną:

$$\text{błąd bezwzględny} = | \text{wartość dokładna} - \text{wartość przybliżona} |$$

Błąd względny przybliżenia to stosunek błędu bezwzględnego do wartości dokładnej:

$$\text{błąd względny} = \frac{\text{błąd bezwzględny}}{\text{wartość dokładna}}$$

Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ to liczba $\bar{x}$ obliczana według wzoru:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Dominanta zestawu danych to wartość, która w tym zestawie występuje najczęściej.

Uwaga. Zestaw danych może mieć kilka dominant. Może również nie mieć dominant. (Jeżeli wszystkie wartości w zestawie występują z tą samą częstością, to przyjmujemy, że zestaw nie ma dominanty).

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ oznacza ciąg liczb, w którym $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

Gdy n jest liczbą nieparzystą, to **medianą** liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy środkowy wyraz w tym ciągu, czyli a_k , gdzie $k = \frac{n+1}{2}$.

Gdy n jest liczbą parzystą, to **medianą** liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów tego ciągu, czyli liczbę $\frac{a_k + a_{k+1}}{2}$, gdzie $k = \frac{n}{2}$.

Aby określić, jak dany wynik wypada względem całego zestawu danych, możemy obliczyć, jaki procent danych jest nie większy od tego wyniku. Gdy dane opisane są w ten sposób, to mówimy, że są przedstawione w **skali centylowej**.

Średnia ważona liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ z wagami odpowiednio $a_1, a_2, \dots, a_n$ (gdzie $a_1, a_2, \dots, a_n$ oznaczają liczby dodatnie) to liczba $\bar{x}_w$ obliczana według wzoru:

$$\bar{x}_w = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Odchyleniem standardowym zestawu danych liczbowych $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę σ , którą obliczamy ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

lub ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2}$$

gdzie $\bar{x}$ oznacza średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$.

PRZYBLIŻENIA

Я1. Oszacuj wynik działania, a następnie oblicz dokładny wynik za pomocą kalkulatora oraz określ błąd bezwzględny i względny swojego oszacowania.

- | | | | |
|------------------------|------------------------|----------------------|-----------|
| a) $7,003 + 7,985$ | d) $61,25 - 49,85$ | g) $52,683 + 37,112$ | j) 41^2 |
| b) $5,976 \cdot 6,112$ | e) $49,83 : 7,21$ | h) $8253 - 2179$ | k) 72^2 |
| c) $21,806 : 7,03$ | f) $507,3 \cdot 41,23$ | i) $301 \cdot 302$ | l) 99^3 |

Я2. Oblicz błędy bezwzględny i względny przybliżenia.

- a) Podano, że 1 stycznia 2002 roku w pewnym mieście mieszkało 200 000 osób, chociaż dokładnie miasto liczyło 193 256 osób.
- b) Przyjęto, że ściana o wymiarach $2,45 \text{ m} \times 3,90 \text{ m}$ ma w przybliżeniu powierzchnię równą 10 m^2 .
- c) Przyjęto, że łąka, która ma kształt trapezu prostokątnego o podstawach 200 m i 100 m oraz wysokości 150 m, ma powierzchnię 2 ha.
- d) Akwarium w kształcie prostopadłościanu ma wymiary $2,5 \text{ m} \times 1,2 \text{ m} \times 80 \text{ cm}$. Oszacowano, że zmieści się w nim maksymalnie 2500 litrów wody.
- e) Oszacowano, że odsetki od kredytu w wysokości 5000 zł oprocentowanego 10,5 % w skali roku będą po roku wynosiły 500 zł.

Я3. Oblicz błąd względny przybliżenia.

Lp.	Wartość dokładna	Wartość przybliżona	Lp.	Wartość dokładna	Wartość przybliżona
1	3513 mm	3,5 m	4	0,6357 cm	6,5 mm
2	187,2 dag	1,8 kg	5	823 ml	0,8 l
3	59 s	1 min	6	5372 tys.	5,3 mln

Я4. Zaokrąglaj liczbę do części dziesiątych, do jedności i do dziesiątek. Oblicz błąd względny każdego z otrzymanych przybliżeń.

- a) 515,45 b) 79,82 c) 102,51

Я5. Dywan ma wymiary $6,4 \text{ m} \times 8,2 \text{ m}$.

- a) Zaokrąglaj pole powierzchni tego dywanu do metrów kwadratowych, a następnie oblicz błąd względny dokonanego przybliżenia.
- b) Zaokrąglaj najpierw wymiary dywanu do metrów i oblicz pole powierzchni dywanu dla tak zaokrąglonych wymiarów. Następnie oblicz błąd względny dokonanego przybliżenia.

Я6. Zaokrąglając liczby 126, 256, 1086, 256536 do dziesiątek, otrzymujemy przybliżenie z takim samym błędem bezwzględnym. Czy możesz odpowiedzieć bez wykonywania obliczeń, w którym wypadku błąd względny jest największy, a w którym — najmniejszy?

Я7. Poniżej podano kilka liczb oraz ich przybliżenia.

$$a = 2532,79 \approx 2530$$

$$c = 3094,81 \approx 3095$$

$$e = 24,02 \approx 20$$

$$b = 27,452 \approx 27,5$$

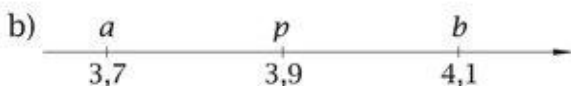
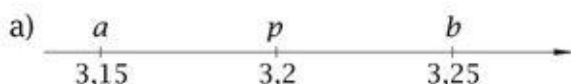
$$d = 392,9 \approx 400$$

$$f = 5,309 \approx 5,5$$

Wymień, które z tych przybliżeń spełniają warunek:

- jest to przybliżenie z niedomiarem i błąd bezwzględny jest większy od 0,5,
- jest to przybliżenie z nadmiarem i błąd bezwzględny jest mniejszy niż 1,
- błąd względny przybliżenia jest większy niż 1%.

Я8. Przyjrzyj się rysunkowi. Jaki błąd względny popełnimy, gdy liczbę a przybliżymy liczbą p , a jaki — gdy liczbę b przybliżymy liczbą p ?



Я9. Znajdź liczbę, której przybliżenie wynosi 20, jeśli wiadomo, że:

- jest to przybliżenie z niedomiarem, a jego błąd bezwzględny wynosi 1,5,
- jest to przybliżenie z nadmiarem, a jego błąd bezwzględny wynosi 2,3,
- błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 0,05,
- błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 1,01.

Я10. a) Jacek podał, że waży 75 kg, stosując przybliżenie z nadmiarem. Wyznacz błąd względny tego przybliżenia, jeżeli wiadomo, że błąd bezwzględny wynosi 1,1 kg.
 b) Długość szkolnego korytarza przybliżono z niedomiarem do 60 m. Wyznacz błąd względny tego przybliżenia, jeżeli wiadomo, że błąd bezwzględny wynosi 3,4 m.
 c) Koszt remontu pewnego mieszkania oszacowano z nadmiarem na kwotę 15 000 zł. Wyznacz błąd względny tego przybliżenia, jeżeli wiadomo, że błąd bezwzględny jest równy 1230 zł.

Я11. Waga wykazała, że na samochód załadowano 3 t węgla, chociaż masa tego ładunku wynosiła dokładnie 2995 kg. W laboratorium przyjęto, że porcja pewnej substancji waży 2 g, podczas gdy naprawdę ważyła 2,05 g. W którym z tych przypadków popełniono większy błąd względny?

- Я 12.** Piórko strusie waży 7,2 g, a w przybliżeniu podano, że jest to 10 g. Struś waży 126 kg. Jaką masę tego ptaka należałoby podać, aby błąd względny przybliżenia był taki sam jak w wypadku piórka?
- Я 13.** a) Przybliżenie z niedomiarem pewnej liczby wynosi 18. Błąd względny przybliżenia jest równy 4%. Znajdź tę liczbę.
b) Znajdź liczbę, której przybliżenie z nadmiarem jest równe 119, jeśli wiadomo, że błąd względny tego przybliżenia jest równy 6,25%.
- Я 14.** Podaj, jaki może być:
- największy możliwy błąd bezwzględny, gdy zaokrąglamy liczbę rzeczywistą do tysięcy,
 - największy możliwy błąd względny, gdy zaokrąglamy liczbę naturalną trzycyfrową do dziesiątek,
 - najmniejszy (różny od zera) błąd względny, gdy zaokrąglamy liczbę dwucyfrową do dziesiątek.
- Я 15.** Liczba a' jest przybliżeniem liczby a , liczba b' jest przybliżeniem liczby b (wszystkie te liczby są dodatnie). Błąd bezwzględny obu tych przybliżeń jest jednakowy, ale błąd względny jest dwukrotnie większy w wypadku przybliżenia $b \approx b'$. Która liczba jest większa: a czy b ? Ile razy?
- Я 16.** Przybliżone wymiary akwarium wynoszą $50 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$. Każdy z tych wymiarów obarczony jest błędem bezwzględnym równym 0,5 cm. Przyjęto, że objętość tego akwarium wynosi 60 litrów. Oblicz największy możliwy błąd względny tego przybliżenia.

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA, MEDIANA, DOMINANTA

- Я 17.** Znajdź średnią arytmetyczną, medianę i dominantę danego zestawu liczb.
- 53, 43, 21, 41, 53
 - 4, 5, 4, 9, 47, 101, 9, 51
 - 12, 8, 11, 13, 7, 12, 9, 10, 13, 5
 - 2, 5, 7, 8, 2, 2, 2, 5, 6, 6, 7, 9
 - 11, 8, 8, 10, 12, 11, 14, 21, 8, 8, 8, 10, 22, 34, 12
 - 19, -14, 16, 10, 1, -17, 4, 7, -2, -5, 13, -20, -8, -11

18. W dwóch klasach drugich pewnego liceum przeprowadzono ankietę, zadając każdej osobie pytanie: „Ile filmów oglądasz miesięcznie w kinie?”. Wyniki ankiety przedstawiono obok.

a) Określ średnią arytmetyczną, medianę i dominantę liczby oglądanych filmów dla każdej z tych klas.

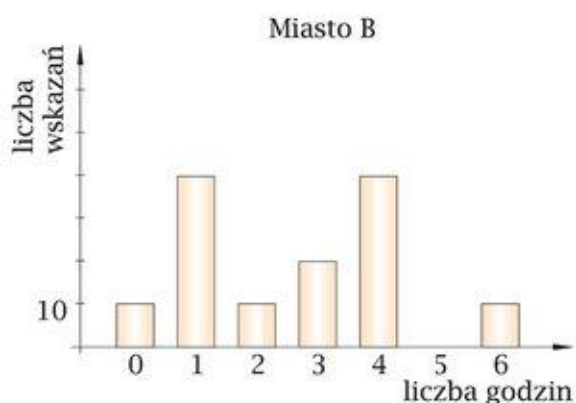
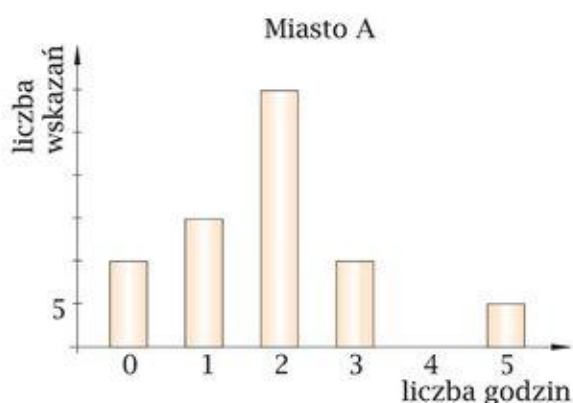
b) Określ średnią arytmetyczną, medianę i dominantę dla obu tych klas razem.

c) Przeprowadź tę samą ankietę w swojej klasie i określ średnią arytmetyczną, medianę i dominantę liczby filmów oglądanych miesięcznie.

KLASA II A							
Liczba filmów	0	1	2	3	4	5	6
Liczba wskazań	5	3	3	10	11	2	1

KLASA II B						
Liczba filmów	1	2	4	5	7	8
Liczba wskazań	10	15	3	2	2	1

19. Losowo wybranym osobom w dwóch miastach zadano pytanie: „Ile godzin w tygodniu poświęcasz na uprawianie sportu?”. Wyniki ankiety przedstawione są na diagramach. Określ średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zebranych danych dla każdego miasta i dla obu miast razem.



20. Bilans to bardzo ważne i obowiązkowe badanie. Jego celem jest sprawdzenie, czy dziecko prawidłowo się rozwija w stosunku do całej populacji (z uwzględnieniem płci). Podczas bilansu dziesięcioletka bliźniaki Jacek i Agata uzyskały następujące wyniki dokonanych pomiarów:

	wzrost	centyle	waga	centyle
Jacek	146 cm	75	34 kg	50
Agata	141 cm	50	30 kg	25

a) Ile procent dziesięcioletnich chłopców waży co najwyżej 34 kg?

b) Ile procent dziesięcioletnich dziewczynek ma co najwyżej 141 cm wzrostu?

c) Ile procent dziesięcioletnich chłopców ma wzrost większy niż 146 cm?

d) Ile procent dziesięcioletnich dziewczynek waży więcej niż 30 kg?

Я21. Określ średnią arytmetyczną, medianę oraz dominantę opisanego zestawu danych.

a) Wzrost zawodników pewnej drużyny piłki siatkowej:

2,02 m 1,98 m 1,95 m 2 m 1,99 m
2,01 m 1,98 m 2,05 m

b) Wyniki ważenia jedenastu bochenków chleba:

1 kg 1,03 kg 1,05 kg 1,03 kg 0,98 kg 1,05 kg
0,99 kg 0,95 kg 1,05 kg 1,05 kg 0,95 kg

c) Liczba spinaczy w kilkudziesięciu pudełkach:

Liczba pudełek	5	3	15	8	1	3
Liczba spinaczy w pudełku	98	99	100	101	102	103

Я22. W samorządzie uczniowskim pewnego liceum zasiadają uczniowie, których dane o wieku przedstawiono w tabeli.

Wiek	15 lat	16 lat	17 lat	18 lat
Liczba uczniów	4	6	7	3

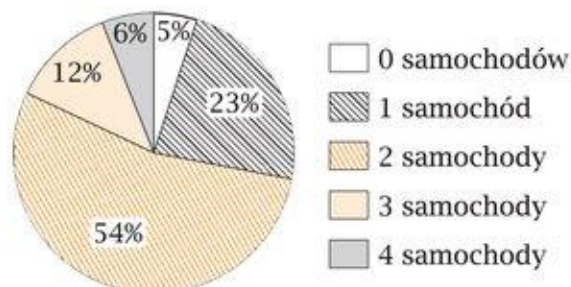
Gdyby uwzględnić również wiek nauczyciela — opiekuna samorządu, to średnia wieku członków tej grupy wzrośnie o 0,55.

a) Ile lat ma opiekun?

b) Ile wynosi mediana członków samorządu uczniowskiego wraz z opiekunem?

Я23. Drużyna piłkarska wraz z zawodnikami rezerwowymi liczy 16 osób. Średnia arytmetyczna wieku wszystkich zawodników wynosi 21,5 roku. Gdyby drużynę opuścił kapitan, to średnia ta wyniosłaby 21 lat. Ile lat ma kapitan?

Я24. W grupie 200 osób przeprowadzono sondę na temat liczby samochodów posiadanych w gospodarstwie domowym. Wyniki sondy przedstawiono na diagramie. Wyznacz średnią arytmetyczną, medianę oraz dominantę tego zestawu danych (zauważ, że niektóre z tych parametrów można wyznaczyć bez przeprowadzania obliczeń).



Я25. Średnia arytmetyczna liczb x , $y+2$, 9 jest równa 12, zaś średnia arytmetyczna liczb $2x$, y , 12 wynosi 16. Wyznacz x i y .

Я26. Kamil i Karolina otrzymali w ciągu semestru następujące oceny z zajęć wychowania fizycznego:

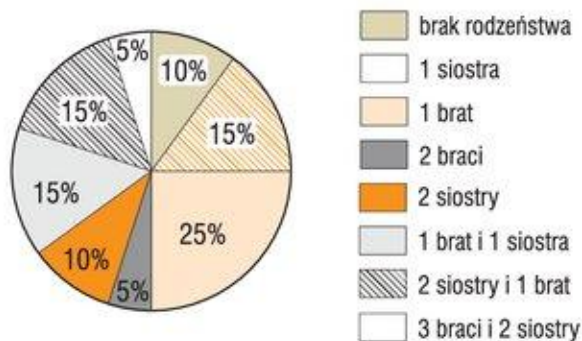
Kamil 3, 6, 4, 3, 5, 5, 4, 3

Karolina 4, 5, 5, 3, 6, 5, 4, 6, 6, 5

a) Nauczyciel wystawia ocenę semestralną na podstawie średniej arytmetycznej ocen cząstkowych zaokrąglonej do całości. Jakie oceny semestralne otrzymają Kamil i Karolina?

b) Oblicz błędy względne przybliżeń dokonanych przy zaokrągleniu ocen semestralnych Kamila i Karoliny.

Я27. Na diagramie kołowym przedstawiono informacje o liczbie rodzeństwa 20 uczniów klasy II C. Dla tego zestawu danych znajdź średnią arytmetyczną, medianę i dominantę:



a) liczby rodzeństwa,

b) liczby braci,

c) liczby sióstr.

Я28. a) Średnia arytmetyczna dziesięciu kolejnych liczb naturalnych wynosi 41,5. Wyznacz najmniejszą z tych liczb.

b) Średnia arytmetyczna dziewięciu kolejnych liczb podzielnych przez 9 wynosi 99. Wyznacz największą z tych liczb.

c) Mediana jedenastu kolejnych liczb całkowitych wynosi 3. Wyznacz najmniejszą z tych liczb.

d) Mediana dwunastu kolejnych liczb nieparzystych wynosi 100. Wyznacz największą z tych liczb.

e) Średnia arytmetyczna liczb naturalnych: 31, 16, 25, 29, 27, x jest równa połowie największej z nich. Wyznacz medianę tych liczb.

Я29. Uzasadnij, że jeżeli w zestawie danych liczbowych wszystkie liczby wzrosną o 1%, to średnia arytmetyczna również wzrośnie o 1%.

Я30. a) Czy mediana dwustu liczb może być równa jednej z tych liczb?

b) Czy średnia arytmetyczna dziesięciu liczb może być większa od dominanty tego zestawu?

c) Jaka może być największa liczba dominant w zestawie piętnastu liczb?

d) Czy średnia arytmetyczna dwudziestu różnych liczb może być równa największej z tych liczb?

e) Czy średnia arytmetyczna stu różnych liczb może być równa najmniejszej z tych liczb?

Я31. Podaj zestaw dziewięciu liczb, dla którego:

- średnia arytmetyczna jest równa 10,5,
- dominanta jest równa 7, a mediana 3,
- średnia arytmetyczna jest mniejsza od dominanty i mediany,
- mediana jest większa od dominanty,
- średnia arytmetyczna i mediana to te same liczby, a dominanta jest liczbą od nich różną.

Я32. Dla każdego zestawu danych podano jego średnią arytmetyczną. Oblicz wartość a . Określ dominantę i medianę tych zestawów danych.

a) $\bar{x} = 8,25$

Wartość x	4	7	9	a
Liczba wskazań	3	8	5	4

c) $\bar{x} = 9,625$

Wartość x	5	6	10	12
Liczba wskazań	a	6	6	$4a$

b) $\bar{x} = 5$

Wartość x	a	4	5	10
Liczba wskazań	3	1	a	2

d) $\bar{x} = 8,2$

Wartość x	2	5	9	10
Liczba wskazań	6	$2a - 1$	a	$5a$

Я33. a) Średnia temperatura w pierwszym tygodniu wakacji wynosiła 21°C , a średnia temperatura w ciągu kolejnych dwóch tygodni wynosiła 30°C . Oblicz średnią temperaturę trzech pierwszych tygodni wakacji.

b) W zarządzie pewnej firmy pracują 3 osoby, które zarabiają przeciętnie 7,5 tys. zł. Oprócz tego w firmie tej pracuje 20 osób w dziale marketingu i 12 osób w dziale technicznym. Średnia płaca w dziale marketingu wynosi 5,3 tys. zł, a w dziale technicznym 3,2 tys. zł. Jaka jest średnia zarobków w tej firmie?

Я34. W ciężarówce przewożono dwa rodzaje paczek. Ładunek ważył razem 4,8 t, a średnia masa paczki wynosiła 16 kg. Większe paczki ważyły średnio po 20 kg, a mniejsze — po 10 kg. Jaka była łączna masa większych paczek?

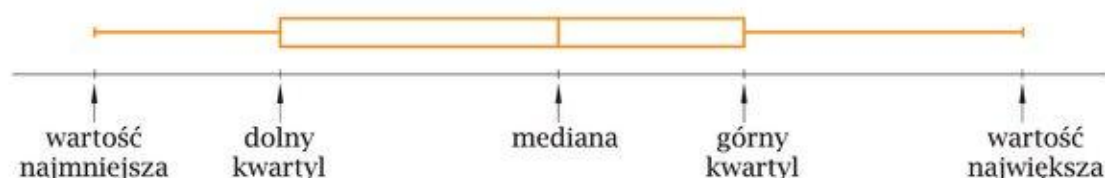
Я35. W pewnej szkole do egzaminu maturalnego z języka angielskiego przystąpiło 250 uczniów.

a) Michał uzyskał na tym egzaminie wynik 72%. Wynik ten odpowiadał 84. centylowi. Ilu uczniów w tej szkole zdobyło wynik lepszy od wyniku Michała?

b) Egzamin uznaje się za zdany, jeżeli uczeń zdobył co najmniej 30% punktów. Ile osób nie zdało egzaminu z języka angielskiego w tej szkole, jeżeli wiadomo, że wynik 29% odpowiada 2. centylowi?

Я36. Przeczytaj tekst zamieszczony w ramce.

Mediana dzieli zestaw danych na dwie części. Mediany poszczególnych części nazywane są **dolnym kwartylem** (lub pierwszym kwartylem) oraz **górnym kwartylem** (lub trzecim kwartylem). Wartości najmniejsze i największe w zestawie danych oraz kwartyle i medianę danych można przedstawić graficznie za pomocą tzw. **diagramu pudełkowego**.



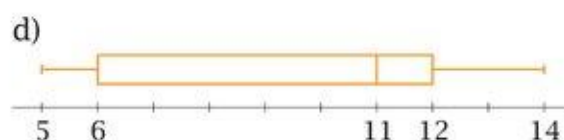
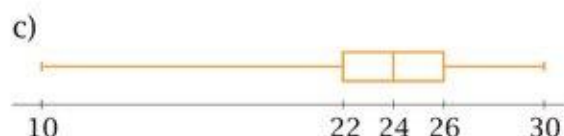
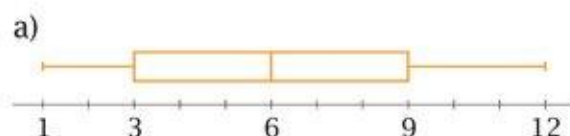
Różnicę między największą a najmniejszą z danych nazywamy **rozstępem danych**. Różnicę między górnym i dolnym kwartylem nazywamy **rozstępem międzykwartylowym**.

Narysuj diagramy pudełkowe odpowiadające poniższym zestawom liczb i oblicz dla każdego z tych zestawów rozstęp danych oraz rozstęp międzykwartylowy.

Zestaw A: 3, 5, 5, 5, 7, 8, 9, 12

Zestaw B: 10, 13, 15, 15, 19, 24, 25, 30, 34, 34, 40, 42, 43, 43, 45

Я37. Przeczytaj tekst zamieszczony w zadaniu 36. Podaj przykład zestawu danych, którego diagram pudełkowy wygląda tak, jak na rysunku.



Я38. Przeczytaj tekst zamieszczony w zadaniu 36. Narysuj diagram pudełkowy dla zestawu danych, o którym wiadomo, że:

- największą liczbą jest 55,
- rozstęp danych wynosi 43,
- dolny kwartyl jest liczbą dwa razy większą od najmniejszej wartości,
- rozstęp międzykwartylowy wynosi 15,
- między górnym a dolnym kwartylem jest dziewięć liczb, w tym pięć liczb równych 34.

Я39. Wiek mieszkańców trzech miejscowości porównano za pomocą diagramów pudełkowych (zob. tekst zamieszczony w zadaniu 36) przedstawionych na rysunku obok.

a) Jakie są mediany wieku mieszkańców w tych miejscowościach?

b) W której miejscowości jest największy rozstęp międzykwartylowy wieku mieszkańców?

c) W której miejscowości jest największy procent dzieci w wieku do 7 lat?

d) W której miejscowości jest największy procent ludzi w wieku powyżej 50 lat?

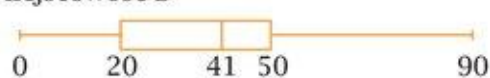
e) W jakim wieku są najstarsi mieszkańcy tych miejscowości?

f) W których miejscowościach co najmniej 75% osób ma nie więcej niż 40 lat?

Miejscowość A



Miejscowość B



Miejscowość C



Я40. Gdyby w pewnym zestawie liczb zmniejszyć o 10% najmniejszą z liczb, a największą zwiększyć o 5%, to średnia arytmetyczna by się nie zmieniła. Ile razy największa z liczb jest większa od najmniejszej w tym zestawie?

Я41. a) Oblicz, dla jakich wartości x i y średnia arytmetyczna liczb: 3, 5, 4, 9, 12, 4, 9, 5, 5, 4, x , y wynosi 6,25, a dominanta jest równa 5.

b) Średnia arytmetyczna zestawu liczb: 1, 3, 7, 4, 9, 10, 2, 4, 8, x , y wynosi 6, a mediana jest równa 5. Oblicz wartości x i y .

c) Dominanta zestawu liczb: 3, 5, 8, 9, 4, 2, 14, 17, x , y wynosi 9, a mediana 7. Znajdź wartości x i y .

Я42. W pewnym technikum dziewczęta stanowią 40% wszystkich uczniów. Po pierwszym semestrze średnia ocen dziewcząt i średnia ocen chłopców były jednakowe. Na koniec roku średnia ocen dziewcząt wzrosła o 1,2, a mimo to średnia ocen całej szkoły się nie zmieniła. O ile zmniejszyła się średnia ocen chłopców?

ŚREDNIA WAŻONA

Я43. W tabeli podano liczby i odpowiadające im wagi. Oblicz średnią ważoną tych liczb.

a)

Liczba	7	4	9
Waga	3	1	4

b)

Liczba	1	3	5	7
Waga	6	1	2	1

c)

Liczba	2	5	8	11	10	3
Waga	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3	0,3

d)

Liczba	5	3	9	2	7
Waga	0,5	0,15	0,05	0,2	0,1

44. a) Podczas pewnego konkursu uczestnicy odpowiadają na dwa zestawy po 10 pytań. Wynik konkursu jest średnią ważoną liczby poprawnych odpowiedzi: liczba poprawnych odpowiedzi na pytania z pierwszego zestawu ma wagę 3, a liczba poprawnych odpowiedzi na pytania z drugiego zestawu — wagę 5. Jaki wynik w tym konkursie uzyskała osoba, która odpowiedziała poprawnie na 3 pytania z pierwszego zestawu i na 7 pytań z drugiego?

b) W zawodach łuczniczych uczestnicy strzelali do tarczy z trzech odległości. Następnie obliczano średnią ważoną wyników tych trzech prób: wynik pierwszego strzelania miał wagę 1, drugiego — miał wagę 2, a trzeciego — miał wagę 3. Oblicz wynik końcowy zawodnika, który w pierwszym strzelaniu uzyskał 10 punktów, w drugim — 7 punktów, a w trzecim — 4 punkty.

45. W pewnym konkursie kulinarnym jurorzy oceniali pracę drużyn kucharzy i przyznawali punkty w skali od 0 do 10 w czterech kategoriach. Ocena końcowa drużyny to średnia ważona punktów zdobytych w tych kategoriach. W tabeli podano wagi poszczególnych kategorii i wyniki trzech drużyn. Ustal, która z tych drużyn była najlepsza.

Kategoria	Restauracja Sedan	Restauracja Parkowa	Pensjonat Orzeł
Sprawność organizacyjna (waga 0,3)	8	7	8
Utrzymanie czystości na stanowisku pracy (waga 0,1)	2	3	5
Wygląd potrawy (waga 0,2)	9	6	4
Walory smakowe (waga 0,4)	8	8	9

46. Przyjmijmy, że ocena semestralna to średnia ważona (zaokrąglona do części setnych) następujących liczb: średniej ocen ze sprawdzianów (z wagą 0,25), średniej ocen z klasówek (z wagą 0,55) oraz oceny za pracę na lekcji (z wagą 0,2).

Ocena roczna to zaokrąglona do liczby całkowitej średnia ważona oceny za pierwszy semestr (z wagą 0,35) i oceny za drugi semestr (z wagą 0,65). Wystaw oceny semestralne i oceny roczne uczniom, których wyniki przedstawiono w tabeli.

Nazwisko i imię	I semestr								Ocena za I semestr	II semestr								Ocena za II semestr	Ocena roczna
	Sprawdziany				Klasówki					Sprawdziany				Klasówki					
Dowcipny Jan	2	3	4	2	3	1	4	3		1	3	2	4	2	4	3	4		
Pilna Aneta	5	6	4	5	5	6	6	6		4	4	5	5	3	5	5	6		
Pracowity Adam	4	3	5	4	4	3	4	5		2	3	4	5	4	5	5	5		

Я47. a) Ania chce pojechać za granicę, korzystając z oferty last minute. Aby wybrać najlepszą propozycję oferowaną przez biura podróży, sporządziła poniższą tabelę, w której zapisała swoje oceny kilku proponowanych wycieczek, biorąc pod uwagę pięć najważniejszych dla niej kryteriów. Ponieważ kryteria te nie były dla niej jednakowo istotne, przydzieliła im różne wagi. Który wyjazd powinna wybrać?

Kraj	Koszt (z wagą 0,5)	Termin (z wagą 0,2)	Hotel (z wagą 0,1)	Rodzaj transportu (z wagą 0,1)	Wycieczki fakultatywne (z wagą 0,1)
Egipt	6	4	4	9	2
Riwiera Turecka	9	4	7	6	8
Tunezja	8	5	5	6	6
Grecja	5	7	8	7	4

b) Wojtek chce podjąć sezonową pracę na miesiąc. W tym celu znalazł kilka ofert i sporządził poniższą tabelę. Którą z ofert powinien wybrać?

Firma	Wynagrodzenie (z wagą 0,4)	Czas pracy (z wagą 0,2)	Dyspozycyjność (z wagą 0,2)	Czas dojazdu do pracy (z wagą 0,1)	Samodzielność (z wagą 0,1)
Grosik	10	5	6	8	6
Janex	6	9	8	5	3
Bonix	7	8	6	4	7

Я48. W tabeli podano zawartość białka, tłuszczu i węglowodanów w 100 g kilku produktów. Oblicz, ile kilokalorii zawiera 100 g każdego z wymienionych produktów, jeżeli wartość energetyczna tłuszczu wynosi 900 kcal/100 g, białka — 400 kcal/100 g, a węglowodanów — 300 kcal/100 g.

Nazwa produktu	Białko (w g)	Tłuszcze (w g)	Węglowodany (w g)
Ser twarogowy tłusty	18	9	3
Szynka gotowana	23	33	—
Mleko (2%)	3	2	4
Cebula	1	—	6
Czekolada	8	33	55

Я49. Wiadomo, że za 1 kg cukierków orzechowych trzeba zapłacić 25 zł, truskawkowych — 21 zł, a za 1 kg cukierków z likierem — 27 zł. Jaka powinna być cena 1 kg mieszanki cukierków, której 30% stanowią cukierki orzechowe, 45% — cukierki truskawkowe, a 25% — cukierki z likierem?

- Я50.** a) Średnia ważona trzech liczb: liczby 5 z wagą 2, liczby 3 z wagą 1 i liczby a z wagą 3 jest równa 3. Znajdź liczbę a .
 b) Średnia ważona trzech liczb: liczby 3 z wagą 1, liczby 5 z wagą 2 i liczby 8 z wagą b jest równa 6. Znajdź liczbę b .
 c) Średnia ważona czterech liczb: liczby 2 z wagą 1, liczby 4 z wagą 3, liczby 5 z wagą 2 i liczby 7 z wagą c jest równa 5. Znajdź liczbę c .
- Я51.** Producent pomidorów sprzedał jednego dnia na giełdzie towarowej 50% przywiezionych pomidorów po 3,50 zł za 1 kg, 30% po 3,20 zł, a resztę tylko po 2 zł za 1 kg. Jaką średnią zapłatę za 1 kg pomidorów otrzymał producent tego dnia?
- Я52.** a) Średnia ważona liczb 5 i 8 jest równa 7. Jaka jest zależność między wagami tych liczb?
 b) Średnia ważona liczb 2 i 7 jest równa 3,5. Jaka jest zależność między wagami tych liczb?
 c) Średnia ważona liczb x i y jest równa z . Jaka jest zależność między wagami tych liczb?
- Я53.** Wyjaśnij, dlaczego średnia ważona zestawu liczb nie może być większa od największej z tych liczb.

ODCHYLENIE STANDARDOWE

- Я54.** Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe zestawu danych.
- | | |
|----------------------|----------------------------|
| a) 4, 3, 7, 12, 15 | c) 1, 2, 2, 1, 6, 1,5, 0,5 |
| b) 5, 8, 2, 13, 4, 4 | d) 54, 12, 32, 78, 23, 17 |
- Я55.** W konkursie wystartowało 15 uczniów klasy II a i 10 uczniów klasy II b. W której z klas wyniki były bardziej wyrównane?
- II a: 23, 22, 30, 12, 45, 47, 49, 28, 17, 3, 18, 24, 44, 48, 40
 II b: 28, 43, 49, 29, 35, 38, 41, 45, 33, 1
- Я56.** Obok podano liczby zdobytych bramek w trzech pierwszych kolejkach meczów polskiej pierwszej ligi piłki nożnej w sezonie 2019/2020. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe liczby bramek w każdej z tych kolejek.
- | |
|--|
| I kolejka: 3, 2, 0, 3, 2, 0, 3, 3, 5 |
| II kolejka: 1, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1 |
| III kolejka: 3, 5, 2, 3, 3, 5, 3, 3, 8 |

57. Zważono jabłka z dwóch koszyków. Oblicz odchylenie standardowe dla każdego z koszyków.

koszyk I: 25 g, 17 g, 28 g, 16 g, 15 g, 17 g, 17 g, 25 g, 29 g, 31 g, 29 g, 18 g, 15 g

koszyk II: 23 g, 23 g, 24 g, 19 g, 21 g, 15 g, 25 g, 24 g, 24 g, 21 g, 25 g

58. Z poniższej tabelki można odczytać, w ilu meczach (w regulaminowym czasie i w dogrywce) Mistrzostw Świata w Piłce Nożnej w roku 2018 nie padła ani jedna bramka, w ilu padła jedna bramka, dwie bramki itd. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe liczby bramek.

Liczba bramek	0	1	2	3	4	5	6	7
Liczba meczy	1	15	17	19	5	2	2	3

59. W celu obliczenia odchylenia standardowego zestawu n danych obliczono ich sumę S i sumę K kwadratów tych danych. Oblicz to odchylenie standardowe.

a) $n = 10$, $S = 158$, $K = 2590$

b) $n = 20$, $S = 356$, $K = 8684$

c) $n = 100$, $S = 348$, $K = 1296$

60. Dwie maszyny pakują pinezki do pudełek. Sprawdzone, ile pinezek znajdowało się w 30 losowo wybranych pudełkach. Wyniki przedstawiono w tabelach.

Maszyna I

Liczba pinezek	48	49	50	51
Liczba pudełek	2	3	5	10

Maszyna II

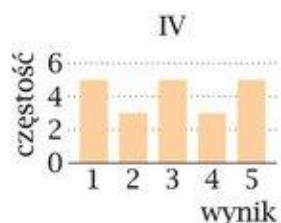
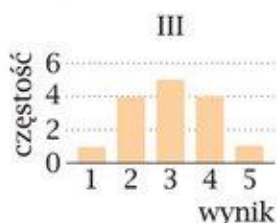
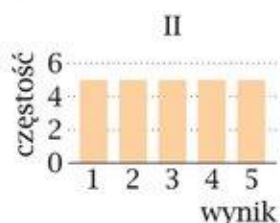
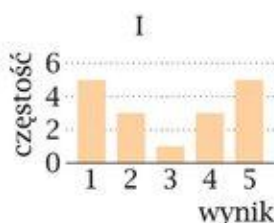
Liczba pinezek	49	50	51	52
Liczba pudełek	7	1	1	1

a) Ile spośród skontrolowanych pudełek było pakowanych przez maszynę I, a ile — przez maszynę II?

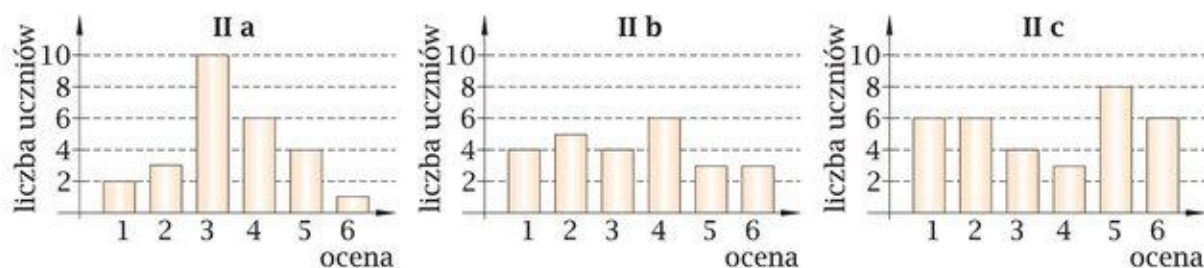
b) W przypadku której z maszyn średnia arytmetyczna liczby zapakowanych pinezek była bliższa 50?

c) W przypadku której z maszyn odchylenie standardowe liczby pakowanych pinezek jest mniejsze?

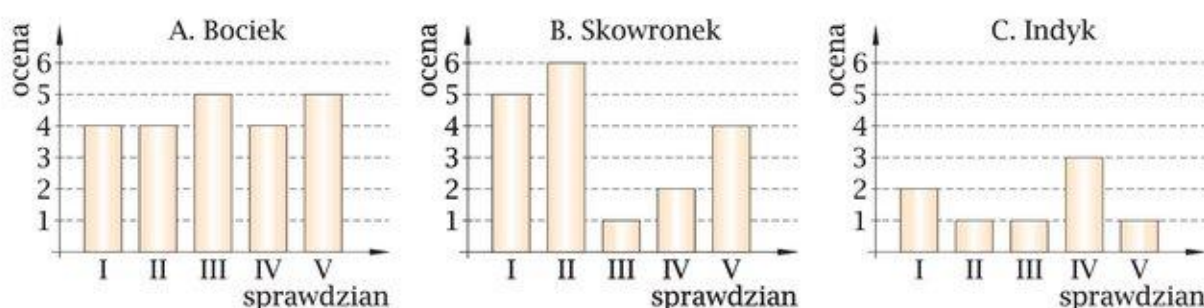
61. Bez wykonywania rachunków oceń, który z poniższych diagramów przedstawia zestaw danych o największym, a który — o najmniejszym odchyleniu standardowym. Następnie zweryfikuj swoją odpowiedź za pomocą obliczeń.



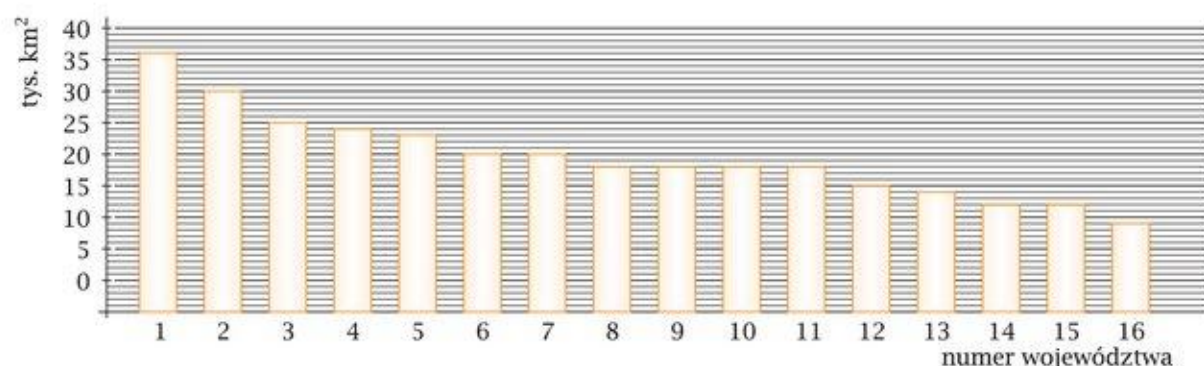
- Я 62.** Na diagramie przedstawiono wyniki pewnego sprawdzianu w trzech równoległych klasach liceum. Czy umiesz zgadnąć bez liczenia, w której z nich odchylenie standardowe ocen było największe, a w której najmniejsze? Sprawdź swoje przypuszczenia za pomocą rachunków.



- Я 63.** Diagramy przedstawiają oceny z kolejnych pięciu sprawdzianów otrzymane przez trzech uczniów. Oblicz odchylenie standardowe ocen każdego z nich.

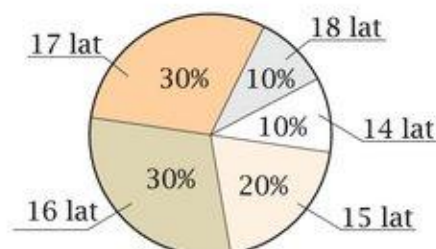


- Я 64.** Diagram przedstawia powierzchnię województw (z dokładnością do 1000 km²).
- Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tego zestawu danych.
 - Jaki procent województw ma powierzchnię z przedziału $(\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma)$?



- | | | | |
|------------------------|-----------------------|------------------------|--------------------|
| 1. mazowieckie | 5. zachodniopomorskie | 9. łódzkie | 13. lubuskie |
| 2. wielkopolskie | 6. podlaskie | 10. kujawsko-pomorskie | 14. śląskie |
| 3. lubelskie | 7. dolnośląskie | 11. podkarpackie | 15. świętokrzyskie |
| 4. warmińsko-mazurskie | 8. pomorskie | 12. małopolskie | 16. opolskie |

- Я 65.** Do Młodzieżowego Klubu Filmowego należy 20 uczniów. Informacje o ich wieku przedstawiono na diagramie. Oblicz średnią wiek członków tego klubu oraz odchylenie standardowe.



Pensja w zł	Liczba pracowników	
	Firma A	Firma B
1800	7	2
2500	6	2
3500	2	6
5000	2	7
8000	1	—

66. Tabela przedstawia, ilu pracowników w firmie A i ilu w firmie B otrzymuje wynagrodzenie danej wysokości. W której z tych firm średnie wynagrodzenie jest wyższe? W której pensje są bardziej zróżnicowane? Spróbuj odgadnąć odpowiedzi, a następnie sprawdź swoje przypuszczenia, obliczając średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe.

67. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe długości wyrazów (liczby liter w wyrazach) dla każdego z poniższych fragmentów znanego wiersza Juliana Tuwima *Lokomotywa*.

Fragment 1:

*Już ledwo sapie, już ledwo zipie,
A jeszcze palacz węgiel w nią sypie.*

Fragment 2:

*Buch — jak gorąco!
Uch — jak gorąco!
Puff — jak gorąco!
Uff — jak gorąco!*

Fragment 3:

*Stoi na stacji lokomotywa,
Ciężka, ogromna i pot z niej sływa:
Tłusta oliwa.*

68. Zapisz słowami w dwóch różnych językach liczby od 1 do 10. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe liczby liter zapisanych wyrazów dla poszczególnych języków.

69. Zbierz dane o wynikach w zawodach jakiejś dyscypliny lekkoatletycznej: mistrzostwach kraju czy świata oraz zawodach otwartych dla wszystkich chętnych. W których zawodach odchylenie standardowe wyników jest większe?

70. Bez wykonywania obliczeń ustal, czy odchylenie standardowe powierzchni państw świata byłoby mniejsze, czy większe, gdyby nie wzięto pod uwagę:

- Rosji, Chin, Kanady, Stanów Zjednoczonych i Brazylii,
- Watykanu, Monako i San Marino,
- wszystkich krajów, których powierzchnia różni się od średniej arytmetycznej powierzchni krajów świata o mniej niż 100 000 km².

71. Pewien uczeń, stojąc przy szosie, liczył przejeżdżające samochody i zapisywał, ile ich przejeżdża w ciągu kolejnych minut. Obliczył, że średnia liczba samochodów jadących ze wschodu na zachód była niemal taka sama jak jadących z zachodu na wschód. Jednak odchylenie standardowe było znacznie większe dla samochodów jadących ze wschodu na zachód. Z jednej strony ucznia było skrzyżowanie ze światłami. Czy skrzyżowanie to znajdowało się na wschód czy na zachód od ucznia?

Я72. Suma dziesięciu danych jest równa 10, a suma kwadratów tych danych wynosi 11,5.

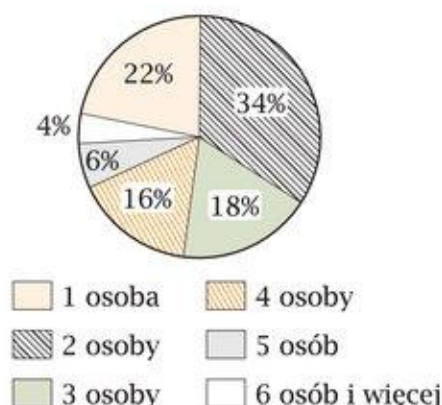
- Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tych danych.
- Do tego zestawu danych dołączono dwie o wartości 2 i 3. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tych dwunastu danych.

Я73. Średnia arytmetyczna zestawu czterech danych: -2 , 2 , x , y jest równa 0, a odchylenie standardowe jest równe $\sqrt{\frac{137}{8}}$. Jakie wartości mają x i y ?

Я74. Średnia arytmetyczna zestawu czterech danych jest równa 3, a odchylenie standardowe jest równe $\frac{\sqrt{10}}{2}$. Dwie z tych danych to 2 i 4. Znajdź pozostałe dane.

Я75. Na diagramie przedstawiono przybliżone informacje o liczbie osób w gospodarstwach domowych w Polsce w 2018 roku. Jaka była wówczas średnia arytmetyczna liczby osób w gospodarstwie domowym? Jakie było odchylenie standardowe?

Uwaga. Gospodarstwa domowe liczące 6 osób i więcej potraktuj tak, jakby liczyły dokładnie 6 osób.



Я76. Jaką liczbę należy dopisać do zestawu liczb 4, 8, 10, 12, aby otrzymany zestaw pięciu liczb miał odchylenie standardowe równe 4?

Я77. Jakie dwie liczby należy dopisać do zestawu liczb 2, 5, 6, aby otrzymany zestaw liczb miał średnią arytmetyczną równą 5 i odchylenie standardowe równe 2?

Я78. Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb jest równa 10, a odchylenie standardowe jest równe 2.

- Oblicz sumę tych liczb.
- Oblicz sumę kwadratów tych liczb.
- Każdą z tych liczb zmniejszono o 5. Oblicz sumę kwadratów tak powstałych liczb.

Я79. Suma czterdziestu liczb w zestawie A jest równa 300, a suma kwadratów tych liczb jest równa 5000. Suma sześćdziesięciu liczb w zestawie B jest równa 500, a suma kwadratów tych liczb jest równa 15 000. Oba te zestawy połączono w jeden zestaw liczący 100 liczb. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tego zestawu.

Я80. W tabeli zebrano informacje dotyczące dwóch zestawów danych.

	Liczba danych	Średnia arytmetyczna	Odchylenie standardowe
Zestaw A	10	6	2
Zestaw B	40	5	3

Oba te zestawy połączono w jeden zestaw liczący 50 liczb. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tego zestawu.

Я81. Zestaw danych składa się z n zer i m jedynek. Wykaż, że średnia arytmetyczna tych danych jest równa $\frac{m}{m+n}$, a odchylenie standardowe jest równe $\frac{\sqrt{mn}}{m+n}$.

Я82. Średnia arytmetyczna pewnego zestawu danych jest równa $\bar{x}$, a odchylenie standardowe jest równe s .

a) Do każdej danej tego zestawu dodano liczbę a . Znajdź średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tak powstałego zestawu danych.

b) Każdą daną tego zestawu pomnożono przez liczbę b . Znajdź średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tak powstałego zestawu danych.

Я83. Średnia arytmetyczna pewnego zestawu danych jest równa $\bar{x}$, a odchylenie standardowe jest równe s .

a) Każdą daną tego zestawu pomnożono przez b i do wyniku dodano liczbę a . Znajdź średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tak powstałego zestawu danych.

b) Średnia arytmetyczna pewnego zestawu danych jest równa 5, a odchylenie standardowe jest równe 2. Każdą z tych danych pomnożono przez 6, a następnie dodano do iloczynu 3. Znajdź średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tak powstałego zestawu danych.

c) Średnia arytmetyczna pewnego zestawu danych jest równa 12, a odchylenie standardowe jest równe 3. Każdą daną x tego zestawu należy zastąpić wynikiem $bx + a$, gdzie a i b są pewnymi liczbami, tak by średnia arytmetyczna zmienionych danych była równa 0, a odchylenie standardowe było równe 1. Znajdź a i b .

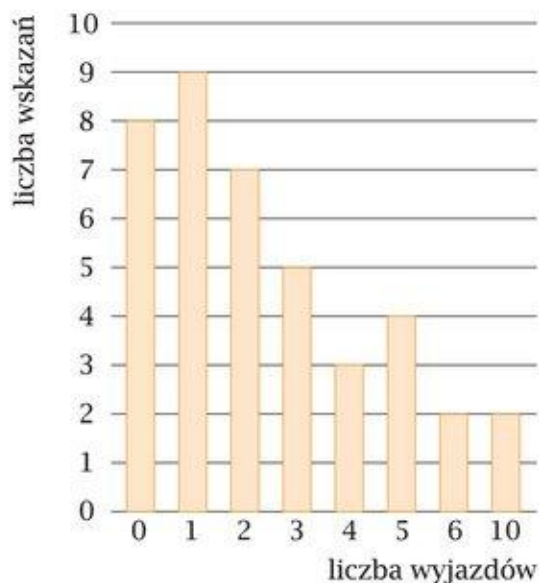
PRZED SPRAWDZIANEM

Я1. Liczbę 13,8 przybliżono do 15. Błąd względny tego przybliżenia:

- A. jest równy 1,2
- B. jest większy niż 2%, lecz mniejszy niż 5%
- C. jest większy niż 5%, lecz mniejszy niż 10%
- D. jest większy niż 10%

Я2. Losowo wybranych mieszkańców pewnego miasta zapytano o to, ile razy w ciągu minionego roku wyjeżdżali za granicę. Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie. Które z podanych zdań jest fałszywe?

- A. Ponad połowa ankietowanych osób była za granicą co najmniej 2 razy w ciągu minionego roku.
- B. Dominanta tego zestawu jest taka sama jak mediana.
- C. Średnia arytmetyczna tego zestawu jest większa od mediany.
- D. Dominanta tego zestawu jest mniejsza od średniej arytmetycznej.



Я3. Średnia arytmetyczna zestawu dwunastu liczb jest równa 6,5. Gdyby do tego zestawu dopisano liczbę k , to średnia wyniosłaby 8. Ile wyniosłaby średnia arytmetyczna, gdyby do początkowego zestawu dwunastu liczb zamiast liczby k dopisano liczbę $2k$?

- A. 26
- B. 8
- C. 12
- D. 10

Я4. Dominanta zestawu liczb 4, 5, 2, 15, 8, 9, 8, 2, x , y wynosi 2, a średnia arytmetyczna tego zestawu jest równa 6,6. Oznacza to, że:

- A. $x = y$
- B. mediana jest równa 6,5
- C. mediana jest równa 6,6
- D. $x + y = 6$

Я5. Średnia ważona trzech liczb: liczby 2 z wagą 3, liczby 5 z wagą 2 i liczby 4 z wagą 5 jest równa:

- A. $3\frac{3}{5}$
- B. $3\frac{29}{30}$
- C. 21
- D. 36

- Я6. Cztery uczelnie, wybierając kandydatów na studia, obliczają średnią ważoną ich wyników z trzech egzaminów. Wagi przydzielone każdemu z wyników podano w tabeli obok.

Egzamin	Język polski	Język obcy	Matematyka
Uczelnia A	0,2	0,3	0,5
Uczelnia B	0,2	0,4	0,4
Uczelnia C	0,5	0,2	0,3
Uczelnia D	0,6	0,3	0,1

Ada uzyskała na egzaminie 70 punktów z języka polskiego, 90 punktów z języka obcego i 60 punktów z matematyki. Na której uczelni średnia ważona jej wyników jest najwyższa?

- A. na uczelni A B. na uczelni B C. na uczelni C D. na uczelni D

- Я7. Zestaw *A* danych składa się z czterech liczb: 5, 8, 9, 14. Jeśli usuniemy jedną z nich, to otrzymamy zestaw *B* złożony z trzech danych. Którą daną z zestawu należy usunąć, żeby różnica między odchyleniami standardowymi obu zestawów była jak największa?

- A. 5 B. 8 C. 9 D. 14

- Я8. Przeliczono zapalki znajdujące w dziesięciu pudełkach. Wyniki przedstawiono w tabeli.

Liczba zapalek	47	48	49
Liczba pudełek	2	3	5

Odchylenie standardowe liczby zapalek w tych dziesięciu pudełkach należy do przedziału:

- A. $(0,5; 0,6)$ B. $(0,7; 0,8)$ C. $(0,9; 1)$ D. $(1,1; 1,2)$

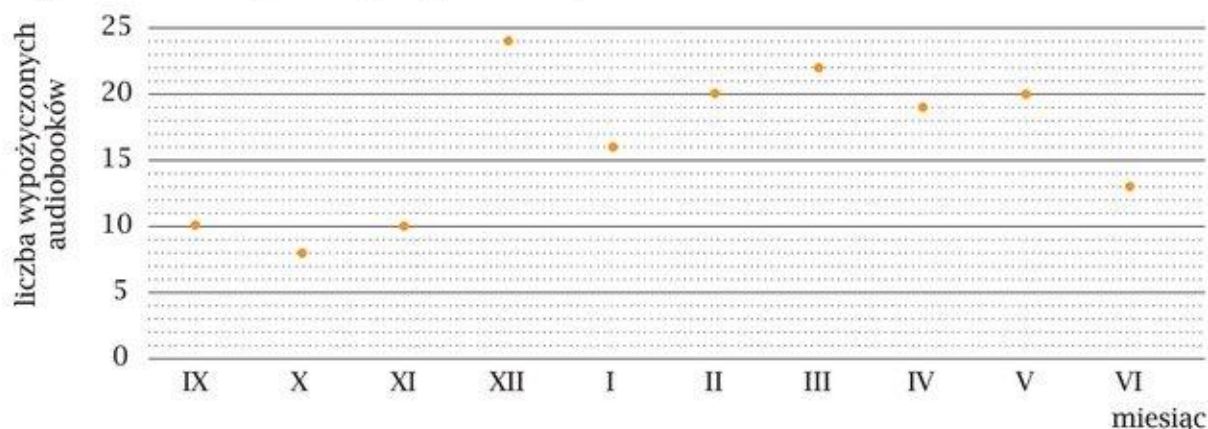
- Я9. Suma dziesięciu liczb jest równa 41, a suma kwadratów tych liczb jest równa 195. Jakie jest odchylenie standardowe w zestawie tych dziesięciu liczb?

- A. około 1,54 B. około 1,64 C. około 1,75 D. około 3,05

- Я10. Wzrost Ani oszacowano na 170 cm, a wzrost Michała — na 195 cm. Tymczasem w rzeczywistości Ania mierzy 172 cm i jest o 30 cm niższa od Michała. W przypadku której z tych osób popełniono większy błąd względny przy szacowaniu jej wzrostu?

- Я11. Liczbę x przybliżono do pewnej wartości. Błąd względny tego przybliżenia wynosi 4,1(6)%, a błąd bezwzględny jest równy 0,12. Wyznacz liczbę x .

- Я 12.** Na diagramie przedstawiono, ile audiobooków wypożyczono w pewnej szkolnej bibliotece w poszczególnych miesiącach.



- a) Ile wynosi średnia arytmetyczna, mediana i dominanta miesięcznej liczby wypożyczonych audiobooków?
- b) O ile procent średnia miesięcznej liczby wypożyczonych audiobooków w drugim semestrze jest wyższa od średniej z pierwszego semestru (przyjmij, że pierwszy semestr trwa od września do końca stycznia)?
- Я 13.** W pewnym liceum ogólnokształcącym do matury z języka niemieckiego przystąpiło łącznie 25 osób z trzech klas: A, B i C, z czego uczniowie klasy A stanowili 40% zdających. Z klasy C do matury przystąpiło o 3 uczniów więcej niż z klasy B. Średni wynik uczniów klasy B był o 6 punktów procentowych wyższy od średniego wyniku uczniów klasy A i o 2 punkty procentowe niższy od średniego wyniku uczniów klasy C. Średni wynik uzyskany przez wszystkich uczniów wyniósł 78,32%. Oblicz średni wynik z matury uczniów klasy C.
- Я 14.** Średnia ważona trzech liczb: liczby 5 z wagą 2, liczby 4 z wagą 3 i liczby 7 z wagą w , jest równa 6. Oblicz wartość w .
- Я 15.** Naukowcy zważyli 20 ryb rzadkiego gatunku. Wyniki przedstawili w tabeli.

Masa (kg)	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
Liczba sztuk	3	7	4	5	1

- Następnie postanowili, że dalszym badaniom poddadzą tylko te ryby, których masa w kilogramach należy do przedziału $(\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma)$, gdzie $\bar{x}$ oznacza średnią masę złowionych ryb, a σ — odchylenie standardowe mas złowionych ryb. Ile ryb zostanie poddanych dalszym badaniom?
- Я 16.** Średnia arytmetyczna czterech liczb jest równa 7, dominanta jest równa 9, a mediana jest równa 8. Oblicz odchylenie standardowe zestawu tych czterech liczb z dokładnością do części setnych.

PRZED MATURĄ

Я1. Liczba 0,3 jest jednym z przybliżeń liczby $\frac{5}{16}$. Błąd względny tego przybliżenia, wyrażony w procentach, jest równy:

- A. 4% B. 0,04% C. 2,5% D. 0,025%

Я2. Średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, 9 jest taka sama jak średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, 9, x . Wynika stąd, że:

- A. $x = 0$ B. $x = 3$ C. $x = 5$ D. $x = 6$

Я3. Średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, x jest równa n , natomiast średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, x , $2x$ jest równa $2n$. Wynika stąd, że:

- A. $x = 49$ B. $x = 21$ C. $x = 14$ D. $x = 7$

Я4. Średnia arytmetyczna czterech liczb: $x - 1$, $3x$, $5x + 1$ i $7x$ jest równa 72. Wynika stąd, że:

- A. $x = 9$ B. $x = 10$ C. $x = 17$ D. $x = 18$

Я5. Średnia arytmetyczna ośmiu liczb: 3, 5, 7, 9, x , 15, 17, 19 jest równa 11. Wtedy:

- A. $x = 1$ B. $x = 2$ C. $x = 11$ D. $x = 13$

Я6. Jeżeli do zestawu czterech danych: 4, 7, 8, x dołączymy liczbę 2, to średnia arytmetyczna wzrośnie o 2. Zatem:

- A. $x = -51$ B. $x = -6$ C. $x = 10$ D. $x = 29$

Я7. Wśród 100 osób przeprowadzono ankietę, w której zadano pytanie o liczbę książek przeczytanych w ostatnim roku. Wyniki ankiety zebrano w poniższej tabeli.

Liczba książek	0	1	2	3	4	5
Liczba osób	23	14	28	17	11	7

Średnia liczba przeczytanych książek przez jedną ankietowaną osobę jest równa:

- A. 0,5 B. 1 C. 2 D. 2,5

Я8. Średnia arytmetyczna zestawu danych: x , 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 jest równa 9. Wtedy mediana tego zestawu danych jest równa:

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 16

- 9.** Abiturient jednego z liceów zestawiał w tabeli oceny ze swojego świadectwa ukończenia szkoły.

Ocena	6	5	4	3	2
Liczba ocen	2	3	5	5	1

Mediana przedstawionego zestawu danych jest równa:

- A. 3 B. 3,5 C. 4 D. 4,5
- 10.** Mediana zestawu sześciu danych liczb: 4, 8, 21, a , 16, 25 jest równa 14. Zatem:
- A. $a = 7$ B. $a = 12$ C. $a = 14$ D. $a = 20$
- 11.** W zestawie $\underbrace{2, 2, 2, \dots, 2}_{m \text{ liczb}}, \underbrace{4, 4, 4, \dots, 4}_{m \text{ liczb}}$ jest $2m$ liczb ($m \geq 1$), w tym m liczb 2 i m liczb 4. Odchylenie standardowe tego zestawu liczb jest równe:

- A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\sqrt{2}$

- 12.** W tabeli przedstawiono roczne przyrosty wysokości pewnej sosny w ciągu sześciu kolejnych lat.

kolejne lata	1	2	3	4	5	6
przyrost (w cm)	10	10	7	8	8	7

Oblicz średni roczny przyrost wysokości tej sosny w badanym okresie sześciu lat. Otrzymany wynik zaokrąglij do 1 cm. Oblicz błąd względny otrzymanego przybliżenia. Podaj ten błąd w procentach.

WIELOMIANY

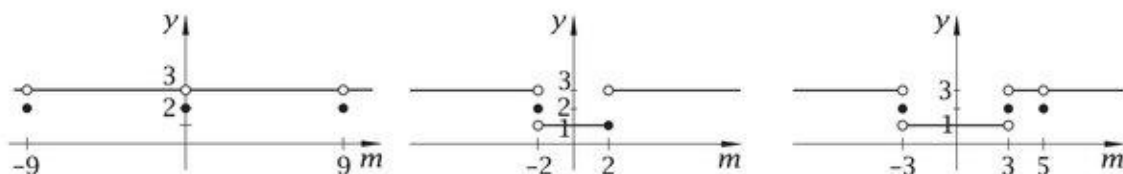
1. a) stopnia 8, b) stopnia 13, e) stopnia 20, h) stopnia 3, i) stopnia 0, k) stopnia 5, l) stopnia 5
2. a) $9x^4 + 60x^2 + 100$, b) $4x^6 - 4\sqrt{6}x^3 + 6$, c) $25x^6 + 40x^4 + 16x^2$, d) $2x^{10} - \frac{\sqrt{2}}{2}x^7 + \frac{1}{16}x^4$, e) $x^{12} + 3x^{11} + 3x^{10} + x^9$, f) $\frac{1}{8}x^{15} - \frac{9}{4}x^{10} + \frac{27}{2}x^5 - 27$, g) $\frac{1}{9}x^4 - 1$, h) $9x^8 - 4x^2$, i) $-3x^6 + \frac{x^4}{3}$, j) $3x^6 - 10x^4 - 11x^2 - 8$, k) $(9\sqrt{2} + 1)x^2 - 6(1 + \sqrt{2})x + 18$, l) $5x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 1$, m) $18a^{11} - 9a^{10} + 24a^6 - 12a^5 + 8a - 4$, n) $8x^3 - 64x^2 + 154x - 126$, o) $-7\frac{26}{27}x^3 + 4\frac{2}{3}x^2 + 3\frac{1}{3}x + 8\frac{1}{27}$, p) $-9x^4 - 9x^2 - 9$
3. a) $\frac{625}{3}x^{12}$, b) $256x^{17}$, c) $60x^{24}$, d) $-\frac{1}{30}x^6$
4. a) 104, b) 2, c) -8, d) -129, e) 30, f) -2, g) $-\frac{326}{81}$, h) $1\frac{3}{4}$, i) $-5\sqrt{3} + 2$, j) $357 - 26\sqrt{3}$, k) $-\frac{41}{48}$, l) $68\sqrt{2} - 54$, m) $9 + \frac{37\sqrt{2}}{4}$, n) $-250 + 50\sqrt[3]{4} - 25\sqrt[3]{2}$
5. a) $-2t^3 + 7t^2 - t + 3$, b) $7p^4 - 8p^3 + 8p^2 - p + 4$, c) $-x^4 + 11x^3 - 10x^2 + 15x$, d) $-\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - \frac{11}{4}x^2 + 3$, e) $2x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 14x - 18$, f) $6k^4 - 4k^3 + 12k^2 - 23k + 10$
6. a) 6, b) 15, c) 32, d) 6
7. a) $a = 1$, b) $a = -13$, c) $a = -15$
8. a) $4x^3 + 4x^2 - 3x - 8$, b) $6x + 12$, c) $3x^4 + 9x^3 + 4x + 12$, d) $-3x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 6$
9. a) $x^4 + 2(1 + \sqrt{2})x^2 + 3 + 2\sqrt{2}$, b) $x^4 - (2\sqrt{2} + 2)x^2 + 3 + 2\sqrt{2}$, c) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$, d) $x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$, e) $16x^4 + 32\sqrt{5}x^3 + 120x^2 + 40\sqrt{5}x + 25$, f) $16x^8 - 96x^6 + 216x^4 - 216x^2 + 81$, g) $\frac{1}{16}x^8 - \frac{\sqrt{5}}{2}x^6 + \frac{15}{2}x^4 - 10\sqrt{5}x^2 + 25$, h) $x^6 + 4x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 4x + 4$
10. a) $9x^6 - 4$, b) $8\sqrt{2}x$, c) $588x^2 + 16$, d) $x^2 - 2x + 1$, e) $16x^4 - 392x^2 + 2401$, f) $x^6 - 15x^4 + 75x^2 - 125$
11. a) $10y - 8; -6$, b) 1; 1, c) $-\frac{4}{9}x^2 + 3\frac{2}{3}x - 8; -7\frac{379}{1089}$, d) $-2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 5; 2\sqrt{2}$
12. a) $-x^3 + (\sqrt{3} - 1)x^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{5} + 3a$, b) $(3t^3 - 3)x^2 + tx - t^3 + 2t^2$, c) $2x^5 + (2a + b^2)x^2 + (2b - 2)x + 1$, d) $ab\sqrt{3}x^3 + x^2 + (3b - \sqrt{3})x$
13. a) 10, b) 11, c) 50, d) 10, e) 20, f) 39
15. a) $a = -4$, b) $a = 1,5$, c) $a = -3$, d) $a = 5$, e) $a = 1$ lub $a = -\frac{7}{6}$
16. a) $a = 2, b = -3$, b) $a = -1, b = 3$, c) $a = 10, b = 7$
17. a) $a = 5, b = -6, c = 2$, b) $a = 2, b = -1, c = 5$, c) $a = 3, b = 0, c = -1$, d) $a = 1, b = -3, c = -4$
18. $a, c, d \in \mathbb{R}, b = \frac{1}{2}$
19. a) Nie istnieją takie współczynniki a i b . b) $a = 3, b = 3$
20. $b = -7$ i $c = 0$
21. $a = -4, b = -9$
22. $k = 2$
23. $a = -1, b = 1$ i $c = 1$
24. 96. Wskazówka. Zauważ, że tylko współczynnik przy najwyższej potęgde nie może być równy 0, czyli są cztery możliwości wybrania tego współczynnika. Kolejny współczynnik nie może być równy temu, który stoi przy najwyższej potęgde, więc pozostają cztery możliwości wybrania tego współczynnika. Trzeci współczynnik nie może być równy dwóm współczynnikom już ustalonym, więc pozostają trzy liczby do wyboru itd.

25. a) 100, b) 25, c) 20, d) 102
26. -1, Wskazówka. Oblicz $W(1)$.
27. a) np. $x^4(x^2+2)$, b) np. $x^2(-5x^2+x+3)$, c) np. $3x^6(x^3+4x^2+3)$, d) np. $-2x^5(5x^5-3x^2+2)$,
e) np. $-3x^2(6x^3+4x^2-5x-8)$, f) np. $-4x^5(15x^{28}-8x^{15}+5x^{11}-3)$
28. a) $2x^5(3x-1)$, b) $\frac{1}{4}x^3(3x+1)$, c) $x^2(x^2-x+3)$, d) $(x^2+1)(3-x)$, e) $(x+5)(2x-1)$,
f) $(2x+1)(5x-2)$, g) $(4x^2+5)(2x+1)$, h) $(6x-7)(3x^2+2)$, i) $(x-1)(5x-4)$
29. a) $(x-6)(x+6)$, b) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, c) $(4x-\sqrt{5})(4x+\sqrt{5})$, d) $(x+2)(x+2)$, e) $(3x-1)(3x-1)$,
f) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$, g) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+3)$, h) $\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
i) $(2x^2+1)(2x^2+1)$, j) $(x-2)(x^2+2x+4)$, k) $(x+1)(x^2-x+1)$, l) $\frac{1}{27}(3x+1)(9x^2-3x+1)$
30. a) $x^3(1-3x)(1+3x)$, b) $x^4(5-4x)(5+4x)$, c) $x^8(\sqrt{3}x-\sqrt{2})(\sqrt{3}x+\sqrt{2})$, d) $x^2(2x-1)(4x^2+2x+1)$,
e) $x^3(3x+4)(9x^2-12x+16)$, f) $x^{12}(0,1x-1)(0,01x^2+0,1x+1)$
31. a) $(x+1)(x^2+1)$, b) $(x-5)(x^2+1)$, c) $(2x+3)(x^2+2)$, d) $(6x-7)(x^2+2)$, e) $(x-2)^2(x+2)$,
f) $(2x-9)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$, g) $(x-4)(\sqrt{2}x-\sqrt{5})(\sqrt{2}x+\sqrt{5})$, h) $\left(x^2+\frac{1}{2}\right)(2x-5)$,
i) $(2-5x)(x+5)(x^2-5x+25)$
32. a) $(x+4)(x-1)(x^2+x+1)$, b) $(x+1)(x-5)(x^2-x+1)$, c) $(x-2)^2(x^2+2x+4)$, d) $x(3x+1)^2(3x-1)$,
e) $x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(3x-2)$, f) $x^2(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$, g) $x^2(x-1)(x+1)\left(\frac{5}{3}x+1\right)$,
h) $x(x-3)(4x-3)(16x^2+12x+9)$, i) $3x^2(x+2)(x-1)(x^2+x+1)$, j) $5x^4(x-3)(x+2)(x^2-2x+4)$
33. a) $\frac{1}{12}(16x-9)(9x-1)$, b) $\frac{1}{6}(15x^2+10)(7x+2)$, c) $\frac{1}{12}(9-10x^2)(5x-3)$,
d) $(\sqrt{2}x-3\sqrt{11})(2x+3)$, e) $(x^2\sqrt{6}+2\sqrt{3})(3x-7)$, f) $\frac{1}{6}(2\sqrt{3}x-3\sqrt{2})(8x+3)$,
g) $(5x-1)(2x^2+3)$, h) $(3x^2-2)(4x-3)$, i) $(30x-10)(3x-2)$, j) $(16x-50)(3x^2+5)$
34. a) $5x^3(x+3)(2x^2+1)$, b) $4x^4(5x^2+1)(2x-5)$, c) $5x^5(x^2+7)(3x+1)$, d) $2x^3(3x+2)(3x-2)$,
e) $2x^4(2x-3)(2x+3)$, f) $5x^5\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)$, g) $3x^2(x-5)(x^2+2)$,
h) $4x^4(2x-1)(x+3)(x-3)$, i) $3x^5(x-2)^2(x+2)$, j) $-3x^2(x-2)(x+2)(2x-5)$,
k) $x^2(2x+3)(\sqrt{5}x-1)(\sqrt{5}x+1)$, l) $3x^7(x+2)(2x-1)(2x+1)$
35. a) $x(x-1)^2$, b) $3x^2(x-5)^2$, c) $8x^5(2x-\sqrt{3})^2$, d) $-5x^3(x-3)^2$, e) $6x^5(x+2)^2$, f) $-\frac{1}{2}x^4(x-1)^2$
36. a) $(x+\sqrt{2})^2$, b) $(x-2\sqrt{3})^2$, c) $(\sqrt{3}x-\sqrt{10})^2$, d) $(x-1)^2$, e) $(3x-2)^2$, f) $(4x-11)^2$,
g) $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, h) $(-x+2)(x+2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$, i) $(x-1)^2(x^2+x+1)^2$
37. a) $(2x-1)(2x+1)(x-\sqrt{3})$, b) $(2x-1)(x^2+2)$, c) $(3x^2+1)(5x-2)$, d) $(3x^2+1)(\pi x-\sqrt[3]{2})$,
e) $(x^2+1)(4x+\sqrt{3})$, f) $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+2)$, g) $\left(x^2+\frac{1}{3}\right)(6x^4+1)$, h) $\left(x^2+\frac{1}{2}\right)(\sqrt{2}x-1)$
38. a) $(x^2+x+1)(x-1)(2x+3)$, b) $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)$, c) $(x+2)(4x-3)(x^2-2x+4)$,
d) $(2x-1)(x-5)(4x^2+2x+1)$, e) $x(2x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$, f) $2x^2(3x-2)(x+5)(x^2-5x+25)$,
g) $x(3x-2)(3x+2)(3x-5)$, h) $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(9x+2)x$, i) $\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}-1\right)\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}+1\right)(4x+1)$,
j) $(5x-2\sqrt{2})(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)$, k) $(x^2+3)(x+\sqrt{2})$, l) $(x+3)(x-3)(2x-3\sqrt{2})$,
m) $x(x^2+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$, n) $x^2(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(\sqrt{2}x+\sqrt{3})(\sqrt{3}x+1)$
39. a) $W(x) = (x+4)(x+3)(x-1)(x-4)$, b) $W(x) = x(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)(4x+1)(x+1)$,
c) $W(x) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)(x-2)(2x+3)$, d) $W(x) = (x-1)^2(3x+4)(x^2+x+1)$,
e) $W(x) = x(3x-2)(x+2)(x-5)(9x^2+6x+4)$, f) $W(x) = (x-1)(x+2)(3x-2)(3x-4)$,
g) $W(x) = (x^2+x+1)(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6})$, h) $W(x) = (2x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{5})(3x-1)^2$,
i) $W(x) = (2x+1)^3(2x-1)$, j) $W(x) = x^2(5x-2)^2(2x-5)^2$,
k) $W(x) = (\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)(x-\sqrt{3})^2$, l) $W(x) = (\sqrt{3}x+\sqrt{2})^2\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$
40. a) $W(x) = 6x(2x-1)(x+3)$, b) $W(x) = 5x^2(3x+1)(x-2)$, c) $W(x) = (4x+5)(x-1)^2(x^2+x+1)$,
d) $W(x) = (2x-1)(x-3)(2x+5)(4x^2+2x+1)$, e) $W(x) = (x^4+2)(x^2+x+3)$,
f) $W(x) = x(3x^4+4)(x^2-x+2)$

41. a) $(x+7)^4(x+9)$, b) $4x(x-1)(2x-1)^2$, c) $(2-x)(x-3)^2$, d) $-(x+1)^2(x+2)^2$
42. a) $3(x^2+2)^2$, b) $(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2(x^2+2)^2$, c) $x^2(x+2)(x^2-2x+4)$,
d) $3x(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})$, e) $(x-2)(x+2)(x^2+6)$, f) $x^2(x-5)(x+1)$
43. a) $(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$, b) $(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$,
c) $(3x-1)(81x^4+27x^3+9x^2+3x+1)$, d) $(x-\sqrt{2})(x^5+\sqrt{2}x^4+2x^3+2\sqrt{2}x^2+4x+4\sqrt{2})$
45. Wskazówka. Rozłóż wielomian na czynniki.
46. Wskazówka. Rozłóż wielomian na czynniki.
47. a) x^2+3 , b) $\frac{x^2-3x}{2}$, c) $\frac{2(3x-1)}{x}$, d) $x-3$
48. a) $-4; 4(x+1)^2(x-1)\left(x+\frac{1}{4}\right)$, b) $-4; (x-2)(x-1)(x+2)(x+6)$, c) $3; (x^2+3)(x-5)(x+4)$,
d) $-54; 2; (3x^2+2)(x+6)(x-3)$
49. 6009
50. a) $(x^2+3)(x-3)(x-1)$, b) $(x^2+x+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$, c) $(2x^2+1)(x-2)(x+4)$,
d) $(x+3)(x-3)(x+1)(x-4)$, e) $(2x^2-2x+1)(x+1)$, f) $(x-1)^2(x+2)$,
g) $(2x-1)(2x+3)(x-1)$, h) $(x+3)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, i) $(x-1)(x-3)(x+4)$, j) $(x+1)^2(x-2)$,
k) $(x^2+2)(x^2+3x+5)$, l) $x(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)$
51. a) $(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$, b) $2(x^2-2\sqrt{2}x+4)(x^2+2\sqrt{2}x+4)$,
c) $(x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$, d) $(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$
52. a) $(x-3)(x^2+1)^2$, b) $(x+2)(x-\sqrt[3]{3})^2(x^2+\sqrt[3]{3}x+\sqrt[3]{9})^2$, c) $(x+2)(x^2-2x+4)(x^2+3x+7)$,
d) $(x^2+x+4)(x^2-\sqrt{6}x+3)(x^2+\sqrt{6}x+3)$
53. Wskazówka. Liczba jest podzielna przez 120, jeżeli jest podzielna przez każdą z liczb: 2^3 , 3 oraz 5. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia i zauważ, że gdy x jest liczbą całkowitą, to wartość tego wielomianu jest iloczynem pięciu kolejnych liczb całkowitych.
54. Wskazówka. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia (możesz najpierw wyłączyć $\frac{1}{24}$ i skorzystać z tego, że $11p^2 = 5p^2 + 6p^2$).
55. Wskazówka. Rozłóż wielomian na czynniki. W tym celu możesz najpierw przedstawić wielomian w postaci $(n^4+8n^2+16)+(4n^3+16n)$ albo zapisać $8n^2$ w postaci $4n^2+4n^2$.
56. a) x_2, x_3 , b) x_3 , c) x_1, x_2, x_3 , d) x_1, x_3 , e) x_2, x_3 , f) x_2, x_3 .
57. a) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = -3, x_4 = 0$, b) $x_1 = 2, x_2 = -2$, c) $x_1 = -1, x_2 = 1$, d) $x_1 = 0$,
 $x_2 = 1, x_3 = -1$, e) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \sqrt{2}, x_4 = -\sqrt{2}$, f) $x_1 = 5, x_2 = -6, x_3 = 6$,
 $x_4 = -3, 5$, g) $x_1 = 0, x_2 = 3$, h) $x_1 = 2, x_2 = 2\sqrt{2}, x_3 = -2\sqrt{2}, x_4 = 8$
58. a) $x_1 = -7, x_2 = -\frac{1}{4}, x_3 = \frac{5}{3}$, b) $x_1 = \frac{1}{9}, x_2 = 9$, c) $x_1 = -5, x_2 = -\sqrt{5}, x_3 = \sqrt[3]{3}, x_4 = \sqrt{5}$,
d) $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_3 = \frac{2}{9}$, e) $x_1 = -3, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 3\sqrt{3}, x_5 = -3\sqrt{3}$, f) $x_1 = 0$,
 $x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$
59. a) $x_1 = 0, x_2 = 3, 5$, b) $x = 0$, c) $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1$, d) $x_1 = 0, x_2 = \frac{4-\sqrt{19}}{3}$,
 $x_3 = \frac{4+\sqrt{19}}{3}$, e) $x_1 = 0, x_2 = 1, 5, x_3 = 3$, f) $x_1 = 0, x_2 = 5$
60. a) $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$, b) $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 2, x_4 = 3$, c) $x_1 = -4, x_2 = 4, x_3 = -\sqrt{2}$,
 $x_4 = \sqrt{2}$, d) $x_1 = -3, x_2 = 3$, e) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, f) $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$,
g) nie ma rozwiązania, h) $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, i) $x_1 = 0, x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2}, x_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}$, j) $x_1 = -1$,
 $x_2 = 2$, k) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -\sqrt{3}, x_4 = \sqrt{3}, x_5 = -\sqrt{2}, x_6 = \sqrt{2}$, l) $x = 0$
61. a) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -\sqrt{3}, x_4 = \sqrt{3}$, b) $x_1 = -\sqrt{7}, x_2 = \sqrt{7}$, c) $x_1 = -2, x_2 = -2\sqrt{5}$,
 $x_3 = 2\sqrt{5}$, d) $x_1 = 0, x_2 = -\frac{5}{2}, x_3 = -1, x_4 = 1, x_5 = -2\sqrt{2}, x_6 = 2\sqrt{2}$

62. a) $x = 3$, b) $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$, c) $x = 0$, d) $x = 0$
63. a) $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -1$, b) $x_1 = -1, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = -\sqrt{2}$, c) $x = \frac{1}{2}$, d) $x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}$,
e) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \sqrt[3]{2}$, f) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = \frac{5}{3}$, g) $x = 2$, h) $x_1 = 1, x_2 = -1$,
 $x_3 = 3$, i) $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2}, x_4 = -2, x_5 = 2$, j) $x = \frac{1}{4}$
64. $a = -2; x_2 = \sqrt{5}, x_3 = -\sqrt{5}$
65. $k = 3$
66. $a = -1, b = -10; x_3 = 2, x_4 = -1, x_5 = \frac{1}{2}$
67. $m = 3$ lub $m = -13$
68. a) $x_1 = -5, x_2 = 2 + \sqrt{2}, x_3 = 2 - \sqrt{2}$, b) $x = \frac{2}{3}$, c) $x_1 = -4, x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{2}$, d) $x = 2$,
e) $x_1 = -2, x_2 = 2$, f) $x_1 = -\sqrt{5}, x_2 = \sqrt{5}, x_3 = \frac{1}{3}$
69. a) $x = 0$, b) $x = 1$, c) $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 2$, d) $x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$, e) $x_1 = 1$,
 $x_2 = 2, x_3 = -2$, f) $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 3$
70. a) $x_1 = 2, x_2 = \sqrt{2} - 1, x_3 = -\sqrt{2} - 1$, b) $x_1 = 1, x_2 = -2$, c) $x_1 = 2, x_2 = -1$, d) $x_1 = 3$,
 $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}, x_3 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$
71. a) $x = 0$, b) $x = 2$, c) $x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{2}$, d) $x_1 = 3, x_2 = -\sqrt{5}, x_3 = \sqrt{5}$
72. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, -\frac{2}{7}, \sqrt{3}\}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -10, -\sqrt{10}, \sqrt{10}, 15\}$,
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{6}, -1, 0, \sqrt{6}, 1, \frac{5}{2}\}$
74. a) $x_1 = 0$ — jednokrotny, $x_2 = 5$ — jednokrotny, $x_3 = -2$ — dwukrotny, b) $x_1 = -1$ — trzykrotny, $x_2 = 1$ — dwukrotny, c) $x_1 = 0$ — dwukrotny, $x_2 = -\sqrt{3}$ — trzykrotny,
d) $x_1 = \frac{3}{2}$ — dwukrotny, $x_2 = -\frac{2}{3}$ — jednokrotny, e) $x = 3$ — jednokrotny, f) $x_1 = 3$ — trzykrotny, $x_2 = 9$ — dwukrotny
77. $W_4(x)$
78. a) $x_1 = \frac{1}{2}$ — pięciokrotny, $x_2 = 2$ — trzykrotny, b) $x_1 = 3$ — trzykrotny, $x_2 = -\frac{1}{3}$ — pięciokrotny, c) $x_1 = 0$ — czterokrotny, $x_2 = \frac{1}{3}$ — dwukrotny, $x_3 = -\frac{1}{3}$ — jednokrotny,
d) $x_1 = 0$ — pięciokrotny, $x_2 = \frac{1}{2}$ — trzykrotny, $x_2 = -\frac{1}{2}$ — jednokrotny, e) $x_1 = 2$ — trzykrotny, $x_2 = -2$ — dwukrotny, f) $x_1 = 0$ — trzykrotny, $x_2 = \frac{1}{3}$ — pięciokrotny,
g) 0 — pięciokrotny, 3 — trzynastokrotny, h) -1 — dwukrotny, 0 — dwukrotny, 1 — trzynastokrotny, 4 — trzykrotny
79. $W(x) = \frac{1}{9}(x+2)^3 = \frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}$
80. a) $x_1 = -4, x_2 = \frac{14}{3}$, b) $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = -4, x_4 = 4$, c) $x = \frac{7}{5}$, d) $x_1 = -3 + \sqrt{2}$,
 $x_2 = -3 - \sqrt{2}$, e) brak rozwiązań, f) $x_1 = \sqrt[3]{4}, x_2 = -\sqrt[3]{2}$
81. a) $0, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, b) 5 , c) $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$
82. a) $x = -\frac{2}{3}$, b) $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt{2}\}$, c) $x \in \{-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\}$, d) $x = 0$,
e) $x \in \{-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\}$
83. a) $x = \sqrt{5}, y = 6$ lub $x = -\sqrt{5}, y = 6$, b) $x = -2, y = 0$, c) $x = 2, y = 3$ lub $x = 0, y = -1$,
d) $x = 0, y = 0$ lub $x = -3, y = 4, 5$
84. a) $x = 0$, b) $x = 0$, c) $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{-p}, x_3 = -\sqrt{-p}$
85. Liczba 3 spełnia to równanie niezależnie od wartości p . Równanie ma dwa rozwiązania:
 $x_1 = 0, x_2 = 3$ dla $p = 0$ oraz $x_1 = -3, x_2 = 3$ dla $p = 9$.
87. Wskazówka. Przedstaw składnik $9x^2$ w postaci sumy dwóch jednomianów i rozłóż wielomian na czynniki.

88. a) Dla $m \in \{-9, 0, 9\}$ równanie ma dwa rozwiązania, dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-9, 0, 9\}$ — trzy rozwiązania, b) dla $m \in (-2; 2)$ równanie ma jedno rozwiązanie, dla $m = -2$ — dwa rozwiązania, dla pozostałych m — trzy rozwiązania, c) dla $m \in (-3; 3)$ równanie ma jedno rozwiązanie, dla $m \in \{-3, 3, 5\}$ — dwa rozwiązania, dla pozostałych m — trzy rozwiązania.



89. a) Dla $m \geq 0$ równanie ma jeden pierwiastek $x = m$, dla $m = -1$ — dwa pierwiastki: $x = 1$, $x = -1$, dla pozostałych m — trzy pierwiastki: $x = m$, $x = \sqrt{-m}$, $x = -\sqrt{-m}$, b) dla $m \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$ równanie ma jeden pierwiastek $x = m$, dla $m = -3$ — dwa pierwiastki: $x = 0$, $x = -3$, dla $m = 3$ — dwa pierwiastki: $x = 0$, $x = 3$, dla $m = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ i dla $m = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ — dwa pierwiastki: $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, dla pozostałych m — trzy pierwiastki: $x = m$, $x = \sqrt{9 - m^2}$, $x = -\sqrt{9 - m^2}$.
90. a) $p \in (-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$ Wskazówka. Zauważ, że jednym z rozwiązań równania jest $x = 0$. Zatem aby miało ono trzy rozwiązania, to równanie $x^2 + (p - 2)x + p + 1 = 0$ musi mieć dwa rozwiązania różne od zera. b) $p \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ Wskazówka. Zauważ, że jednym z rozwiązań równania jest $x = 0$. Zatem równanie $x^2 - (2p + 1)x + p + 1 = 0$ nie może mieć rozwiązań albo jedynym jego rozwiązaniem także jest $x = 0$. c) $p \in (-3; -2)$ Wskazówka. Równanie $x^4 + px^2 + p = -3$ ma cztery różne rozwiązania, gdy równanie $t^2 + pt + p + 3 = 0$ (gdzie $t = x^2$) ma dwa różne rozwiązania dodatnie. d) $p \in (1 - 2\sqrt{2}; +\infty)$ Wskazówka. Równanie $2x^4 + (p - 1)x^2 + 1 = 0$ nie ma rozwiązań, gdy równanie $2t^2 + (p - 1)t + 1 = 0$ (gdzie $t = x^2$) nie ma rozwiązań lub ma tylko rozwiązania będące liczbami ujemnymi.
91. a) $-x + 9$, b) $2x - 3$, c) $3x^2 + x - 2$, d) $-2x^2 - 2x + 1$, e) $5x^2 + x - 3$, f) $-x^2 - x - 1$, g) $4x^3 + 2x^2 - x + 1$, h) $-2x^3 + 3x^2 + 2$
92. a) $5x^3 + 3x^2 + 3x + 3$, b) $-16x^3 - 8x^2 - 4x - 1$, c) $2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 5x + 5$, d) $3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 16x + 33$, e) $2x^4 - 5x^3 - 1$, f) $3x^5 + 2x - 5$, g) $3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 16$, h) $x^3 - x^2 + 2x - 10$
93. a) $5x + 7$ reszta 4, b) $2x - 7$ reszta 9, c) $-x + \frac{3}{2}$ reszta $-\frac{1}{4}$, d) $-2x + 1$ reszta -2, e) $x^2 + 5x + 14$ reszta 32, f) $2x^2 + 2x - 4$ reszta 3, g) $7x - 23$ reszta 82, h) $x^2 - x + 1$ reszta -3, i) $x^3 + 3x^2 + 10x + 30$ reszta 91, j) $-2x^2 - x - 6$ reszta -7
94. a) $x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$; $x^{99} + x^{98} + \dots + x + 1$, b) $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$; $x^{98} - x^{97} + \dots - x^3 + x^2 - x + 1$, c) $x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32$; $x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 27x + 81$
95. a) $x^2 + 3x - 1$ reszta 5, b) $x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ reszta -4, c) $x^3 - x + 5$ reszta 3, d) $x^2 - x + 6$ reszta -8, e) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 8$ reszta 8, f) $2x^3 - 8x^2 + 18x - 36$ reszta 71, g) $-3x^2 + 9x - 22$ reszta 68, h) $3x^2 + 5x - 2$, i) $5x^4 - 4x^3 + 2$
96. a) $4(x - 7)$, b) $x(2x - 5)(x + 1)$, c) $3x(x - 1)(x + 2)$, d) $4(x^2 + 1)^2$, e) $27(3x + 5)(2x - 1)^2$, f) $x^3(x + 3)$, g) $2x^2(x - 2)^2(x + 2)$, h) $x + 4$, i) $x(x + 5)(x - 1)$
97. a) $W(x) = 2x^2 + 5x - 1$, b) $W(x) = 2x^3 + x^2 + 5x - 4$, c) $W(x) = 3x^3 + 4x^2 - x + 6$, d) $W(x) = x^2 + 5x - 1$, e) $W(x) = x^2 - 7x + 9$, f) $W(x) = x^2 + 8x + 40$, g) $W(x) = -3x^3 - 4x^2 + x - 2$, h) $W(x) = x^2 - 5x + 3$, i) $W(x) = -2x^2 + 9x - 43$
98. a) tak, b) nie, c) tak, d) tak, e) nie, f) nie, g) nie
99. a) iloraz $2x + 1$ reszta 5, b) iloraz $x^2 + 5x + 3$ reszta 5

100. a) $W(x) = 5x^3 - 13x^2 - 5x - 1$, b) $W(x) = 2x^2 - 5x - 6$, c) $W(x) = 3x^3 - 14x - 8$,
d) $W(x) = x^3 - (\pi + 5)x^2 + (5\pi + 6)x - 4\pi$, e) $W(x) = 8x^4 - 4x^3 - 12x^2 + x$
102. a) np. $(x-1)(x+2)(x+5)$, b) np. $x^2 - 1$, c) np. $(6x^2 + x - 2)(x+1)$, d) np. $(x^2 + 4x + 4)(x-3)$
103. a) $a = -1$, b) $a = -10$, c) $a = 4$, d) $a = -11$
104. a) 5, b) 1
105. $5x - 7$ Wskazówka. Rozłóż na czynniki wielomian $x^3 - x^2 + 5x - 5$.
106. b) 8
107. a) $p = -2$, b) $p \in \mathbb{R}$, c) $p = -5$, d) nie istnieje takie p
108. a) $2x - 3$ reszta $3x - 7$, b) $3x^2 - 5x + 2$ reszta $2x + 3$, c) $2x^2 - x + 5$ reszta $-4x + 5$,
d) $x^3 + 5x^2 - 3x + 1$, e) $x^3 + x^2 - 2x - 4$ reszta 3
109. a) $A = 3, B = 2, C = 1, D = 6, E = 7, F = 4$, b) $A = 4, B = 2, C = 3, D = 6, E = 9, F = 7$,
 $G = 1, H = 8$
110. a) $W_1(x), W_2(x), W_3(x)$, b) $W_2(x)$, c) $W_2(x), W_3(x), W_4(x)$, d) $W_3(x), W_4(x)$
112. a) 5, b) 4, c) 2, d) 0, e) 1000, f) 269
113. a) $x_2 = -3, x_3 = 9$, b) $x_2 = -5$, c) $x_2 = 7, x_3 = -7$, d) nie ma innych pierwiastków,
e) nie ma innych pierwiastków, f) $x_2 = -2, x_3 = 3$, g) $x_2 = 1 - \sqrt{5}, x_3 = 1 + \sqrt{5}$,
h) $x_2 = 2\sqrt{2}, x_3 = -2\sqrt{2}$, i) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 4$, j) $x_1 = 0$
114. a) $x_1 = -1, x_2 = 1,5, x_3 = -2,5$, b) $x_1 = -4, x_2 = -1, x_3 = 3$, c) $x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2}$,
 $x_3 = 2$, d) $x_1 = 1,5, x_2 = 2$
116. a) $x_2 = -2, x_3 = 3$, b) $x_2 = \sqrt{5}-1, x_3 = -\sqrt{5}-1$, c) nie ma innych rozwiązań, d) $x_2 = 2,5$,
e) $x_2 = 5, x_3 = -7$, f) $x_2 = \frac{\sqrt{13}+3}{2}, x_3 = \frac{-\sqrt{13}+3}{2}$
117. a) $x_3 = -\sqrt{3}, x_4 = -\frac{1}{2}$, b) $x_3 = -4, x_4 = -2$, c) $x_3 = -1$, d) $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
e) $x_3 = -1$
118. a) $a = -2^{51}$, b) $a = -100$, c) $a = 0$
119. a) nie, b) tak, c) nie
120. a) jednokrotny, b) trzykrotny, c) dwukrotny, d) jednokrotny
121. a) $a = -5, b = -3$, b) $a = 1, b = 0$, c) $a = 2, b = -14$, d) $a = -4, b = 1$
122. $W(x) = (2x-1)(x+1)(x+3)$
123. $42 + 13\sqrt{2}$ ($a = -6, c = -6$)
124. $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = \frac{1}{3}$ ($m = -22, n = -10$)
125. a) $R(x) = -x + 4$, b) $R(x) = 2x + 3$, c) $R(x) = 4x + 1$, d) $R(x) = -\frac{2}{3}x^2 - x + \frac{11}{3}$
126. a) $x_2 = -2, x_3 = 7$, b) $x_2 = 2p, x_3 = -1$, c) $x_2 = 2p, x_3 = -3$
127. a) 5, b) -3, c) -1, d) 7, e) 5, -5, f) -1, -3, 3, g) 0, 1, h) -8, -2, 11
129. a) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{4}{3}, x_3 = -2$, b) $x = 4$, c) $x_1 = -1,5, x_2 = 2, x_3 = 3$, d) $x_1 = 2, x_2 = 5$,
e) $x = -2$, f) $x_1 = -1,5, x_2 = 1,5, x_3 = 2$
130. a) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$, b) $y_1 = -1,5, y_2 = 0,5, y_3 = 1, y_4 = 2$, c) $m_1 = -1$,
 $m_2 = 1$, d) $p_1 = -5, p_2 = -2, p_3 = 1, p_4 = 2$, e) $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 2$, f) $x_1 = -3$,
 $x_2 = -1, x_3 = 3, x_4 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, x_5 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
131. a) $x = \frac{1}{2}$, b) $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{3}{2}$, c) $x_1 = -2, x_2 = -1\frac{1}{2}$, d) nie istnieją pierwiastki
wymierne, e) $x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = 2$, f) $x_1 = -2, x_2 = -\frac{2}{3}, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = \frac{1}{2}, x_5 = 2$
133. a) $x = -\frac{1}{2}$, b) $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, c) $x_1 = 2 - \sqrt{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{5}, x_4 = 2 + \sqrt{2}$,
d) $x_1 = -1, x_2 = \frac{2}{3}$

- 134.** a) $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3 = -2$, $x_4 = 0$, b) $x_1 = 3$, $x_2 = -1,5$, $x_3 = 2,5$, c) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$, d) $x_1 = \frac{-\sqrt{21}-3}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{21}-3}{2}$, $x_3 = -1$, e) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, f) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = \frac{1}{3}$, $x_5 = \frac{2}{3}$
- 135.** a) $a = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$, $a = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ lub $a = 1$, b) $a = 4$, c) $a = -2$
- 136.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{2}$, b) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, c) równanie sprzeczne, d) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$
- 137.** a) $x_1 = -6$ — jednokrotny, $x_2 = 1$ — dwukrotny, b) $x_1 = 1$ — jednokrotny, $x_2 = 2$ — trzykrotny, c) $x = -2$ — trzykrotny, d) $x_1 = 1,5$ — dwukrotny, $x_2 = 4$ — jednokrotny, $x_3 = 0$ — jednokrotny, e) $x_1 = -\frac{4}{3}$ — jednokrotny, $x_2 = 2$ — trzykrotny
- 138.** osiem
- 139.** a) $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, b) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{5}$, $x_3 = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$, c) $x = -3\frac{1}{2}$, d) $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = -\frac{1}{6}$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = \sqrt{3}$, e) $x_1 = 0$, $x_2 = 7$
- 140.** a) $m \in \{-13, -3, -1, 2\}$, b) $m \in \mathbb{Z}$
- 141.** Wskazówka. Jednym z rozwiązań jest $x = m$. a) Dla $m \in \{-2, 2\}$ równanie ma dwa rozwiązania, dla $m \in (-2; 2)$ — jedno rozwiązanie, a dla $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ — trzy rozwiązania, b) dla $m \in (\frac{1}{4}; +\infty)$ równanie ma jedno rozwiązanie, dla $m = -2$, $m = \frac{1}{4}$ i dla $m = 0$ — dwa rozwiązania, dla $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; \frac{1}{4})$ — trzy rozwiązania.
- 142.** a) $m = 6$ lub $m = -6$, b) $m = 1$ lub $m = 3$, c) $m = -k^2$, $k \in \mathbb{N}$, d) $m \in \{-17, -15, -6, -5, -2, 3\}$
- 143.** nie
- 144.** a) tak, $x = p$, b) tak, $x = 2$, c) nie, d) tak, tylko dla $p = 3$ ($x = 3$)
- 145.** Wskazówka. Wielomian nieparzystego stopnia ma co najmniej jeden pierwiastek.
- 146.** a) $x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$, $x_4 = 1\frac{1}{3}$, b) równanie sprzeczne
- 148.** osiem

PRZED SPRAWDZIANEM

1. C
2. A
3. D
4. B
5. D
6. $P(x) = 3x^3 - 9x^2 + 12x - 4$, $P(-\sqrt{3}) = -21\sqrt{3} - 31$
7. $a = 5$, $b = 3$
8. a) $x(x+3)(2x-5)$, b) $(2x^2+3)(3x-5)$
9. a) $4x^2+3x-1$, b) $2x^3-6x^2+21x-70$ reszta 220
11. a) $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = \frac{3}{7}$, $x_3 = \sqrt{5}$, $x_4 = \frac{7}{3}$, b) $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$, c) $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, d) $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 2$
12. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ ($a = -7$, $b = -8$)
13. C
14. C
15. D
16. B
17. $24x^2 + 128$

18. a) $x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(4x + 3)$, b) $(x - 4)(x + 1)(x + 2)$
 19. $x_1 = -\frac{7}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{4}$
 20. 0 Wskazówka. Zauważ, że suma współczynników wielomianu jest zawsze równa $W(1)$.
 21. $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ — pierwiastek pięciokrotny, $x_2 = -\frac{7}{2}$ — pierwiastek jednokrotny, $x_3 = 3$ — pierwiastek trzykrotny, $x_4 = \frac{10}{3}$ — pierwiastek czterokrotny
 22. $4x - 8$

PRZED MATURĄ

1. C
2. D
3. C
4. $-\sqrt{6}$, $-\frac{2}{3}$, $\sqrt{6}$
5. -1, 2, 5
6. -3, 2
7. D
8. A
9. 0,125
10. Wskazówka. Po uporządkowaniu wielomianu otrzymamy $x^8 + x^2 - 2x^4 - 2x + 2 = 0$. Zauważ, że zachodzi równość $(x^8 - 2x^4 + 1) + (x^2 - 2x + 1) = 0$.
11. $m = 6$; $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = 3$
12. $a = 8$, $b = 10$ lub $a = -8$, $b = 22$

FIGURY NA PŁASZCZYŹNIE. CZĘŚĆ 1

1. a) dwa: $\angle ASB$, $\angle CSE$, b) $|\angle CSB| = 32^\circ$, $|\angle DSC| = 58^\circ$, $|\angle BSA| = 148^\circ$,
 c) $|\angle DSB| = 270^\circ$, $|\angle ESA| = 328^\circ$, $|\angle ASB| = 212^\circ$
2. a) 18° , 34° , 38° , b) $25\frac{5}{7}^\circ$, $51\frac{3}{7}^\circ$, $102\frac{6}{7}^\circ$, c) 36° , 72° , 108° , 144°
3. a) 105° , b) 70° , c) 120°
4. a) $\angle ABE$, $\angle BEF$, $\angle DEL$, b) $|\angle LEF| = 223^\circ$, $|\angle LED| = 317^\circ$
5. a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 150^\circ$, b) $\alpha = 135^\circ$, $\beta = \gamma = 20^\circ$, c) $\alpha = 155^\circ$, $\beta = 13^\circ$, $\gamma = 25^\circ$
6. a) $\alpha = \gamma = 130^\circ$, $\beta = 50^\circ$, b) $\alpha = \beta = 120^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, c) $\alpha = 125^\circ$, $\beta = \gamma = 55^\circ$
7. a) 40° , 60° , 80° , b) 40° , 70° , 70° , c) 58° , 58° , 64°
8. a) 45° , 85° , 50° , b) 65° , 40° , 75° , c) 90° , 38° , 52° , d) 80° , 80° , 20° , e) 17° , 17° , 146° ,
 f) 73° , 73° , 34°
9. równoległobok: 70° , 70° , 110° , 110° ; trapez równoramienny: 50° , 50° , 130° , 130° ;
 trapez: 50° , 130° , 30° , 150°
10. a) 36° , 144° , 72° , 108° , b) 70° , 70° , 70° , 150° , c) 80° , 102° , 88° , 90°
14. a) $\alpha = 115^\circ$, $\beta = 65^\circ$, b) $22,5^\circ$, $157,5^\circ$, c) 40° , 140°
15. a) 30° , b) 100° , c) każdy z kątów jednej pary ma 55° , a każdy z kątów drugiej pary ma 125°
16. Wskazówka. Wykaż, że trójkąty ABM i ANB są równoramienne.
19. gdy $\alpha = 15^\circ$: $82,5^\circ$, $82,5^\circ$ lub 15° , 150° ; gdy $\alpha = 115^\circ$: $32,5^\circ$, $32,5^\circ$
20. a) 30° , 30° , 120° , b) 20° , 80° , 80°
21. a) 80° , b) 35° , c) 70°
24. Wskazówka. Skorzystaj z faktu, że kąty padania i odbicia mają równe miary.

25. b) Wskazówka. Zauważ, że do każdego kąta trójkąta przylegają dwa kąty przyległe.
26. a) 290° , b) 370° , c) 440°
27. a) $40^\circ, 70^\circ, 100^\circ, 150^\circ$, b) $90^\circ, 100^\circ, 50^\circ, 120^\circ$, c) $30^\circ, 120^\circ, 90^\circ, 120^\circ$
28. a) $72^\circ, 108^\circ$, b) $60^\circ, 120^\circ$
29. $\alpha = \beta = 140^\circ, \gamma = 40^\circ, \varphi = 70^\circ, \psi = 20^\circ$
31. a) nie, b) tak, c) tak
32. Wskazówka. Przeprowadź dowód nie wprost.
33. a) $|\angle DAC| = \frac{\alpha}{3}$, b) $|\angle DCE| = 3\beta$, $|\angle FEG| = 5\beta$
34. Wskazówka. Udowodnij, że dwusieczne dwóch sąsiednich kątów równoległoboku są prostopadłe.
35. a) tak, b) nie, c) nie, d) tak, e) tak, f) nie, g) tak, h) nie, i) tak
36. $22,5^\circ, 45^\circ, 112,5^\circ$
37. a) $\frac{24\sqrt{5}}{7}, 3\sqrt{5}, \frac{8\sqrt{5}}{3}$, b) 5, 12, $4\frac{8}{13}$, c) $4(2 + \sqrt{13})$
38. I. 10, II. 4,5, III. 7,5, IV. 9, V. 5,5, VI. 10, VII. 6,5
39. a) $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ i $\sqrt{3}$; $\sqrt{17}$, 3 i 7; $\sqrt{17}$, 3 i $\sqrt{2}$; $\sqrt{17}$, 3 i $\sqrt{5}$, b) 1, 5, 5; 2, 4, 5; 3, 3, 5; 3, 4, 4
40. a) tak, b) nie, c) tak
41. a) tak; $x = 1,25$, b) nie, c) nie
42. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{5}{8}$, c) $\frac{1}{2}$
43. a) $x > 1$, b) $\frac{4}{3} < x < 6$
44. a) $\frac{9\sqrt{2}}{4}, \frac{9\sqrt{5}}{5}$, b) $\sqrt{5}, \sqrt{13}$
46. Wskazówka. Wykaż, że trójkąty ABD i AEC są przystające.
47. Wskazówka. Środkowa dzieli trójkąt na dwie części o równych polach.
50. połowę
51. 7P Wskazówka. Dorysuj odcinki EC, FA, DB .
52. a) nie, b) Wskazówka. Skorzystaj ze wzoru na pole trójkąta i z nierówności trójkąta.
53. Wskazówka. Zapisz nierówność trójkąta dla trójkąta o danych bokach i podnieś ją stronami do kwadratu. Skorzystaj z nierówności $2ab \leq a^2 + b^2$.
54. $a = 2\sqrt{5}, b = 2, c = \sqrt[4]{60}, d = \sqrt{6}$
55. I. $10 + 2\sqrt{5}$, II. $3 + \sqrt{13} + \sqrt{34}$, III. $3 + \sqrt{29} + 5\sqrt{2}$, IV. $2\sqrt{5} + \sqrt{29} + \sqrt{17}$, V. $\sqrt{10} + \sqrt{17} + \sqrt{41}$, VI. $5 + 2\sqrt{5} + \sqrt{65}$, VII. $\sqrt{13} + \sqrt{26} + \sqrt{65}$
56. a) $\frac{\sqrt{6}}{4}$, b) 10, c) 3
57. a) $6,75\sqrt{3}$, b) $\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{\frac{16}{3}}$, c) $10\sqrt{3}$
58. a) tak, b) nie, c) tak
59. a) tak, b) nie, c) nie
60. Wskazówka. Znajdź długości boków trójkąta prostokątnego, którego jeden z boków ma długość równą podanej liczbie.
62. a) $\sqrt{57}$, b) $\sqrt{26}$
63. a) 84 cm^2 i 56 cm , b) $12\sqrt[4]{2}$, c) $\frac{27\sqrt{7}}{4}$, d) $\sqrt{15}:1$
64. a) 12, b) $4\frac{8}{13}$
65. a) $6 + 6\sqrt{7}$, b) $4\sqrt{17}$, c) $4\sqrt{5}$
66. a) $\sqrt{19}$, b) obwód $= 14 + \sqrt{86}$, $P = \frac{11\sqrt{5}}{2}$, c) 7 Wskazówka. Poprowadź wysokość z wierzchołka C .
67. 3,6 i 6,4

68. $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 3$, $d = 3\sqrt{2}$, $e = 2\frac{1}{2}$, $f = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $g = h = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $i = 4$, $j = 3\sqrt{3}$, $k = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $l = \frac{8\sqrt{3}}{3}$
69. a) $4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$, b) 25
70. 5 Wskazówka. Poprowadź wysokość trójkąta z wierzchołka podstawy do ramienia i zauważ, że dzieli ona dany trójkąt na dwa trójkąty, z których jeden jest połową trójkąta równobocznego.
78. Wskazówka. Przedstaw pole trójkąta na dwa sposoby.
79. $\sqrt{5}$ Wskazówka. Poprowadź wysokość CD . Co można powiedzieć o trójkącie BDC ?
80. b) $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ Wskazówka. Uzupełnij dany trójkąt do równoległoboku o bokach długości b i c , a następnie skorzystaj z własności podanej w podpunkcie a).
81. a) $\beta = 90^\circ - \alpha$, $\gamma = \alpha$, b) $\beta = 135^\circ - \frac{3}{4}\alpha$, $\gamma = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, c) $\beta = 45^\circ + \frac{\alpha}{4}$, $\gamma = 45^\circ - \frac{3\alpha}{4}$
83. a) $75\sqrt{3}$, b) $\frac{3\sqrt{3}d^2}{4}$
85. dwa trójkąty o kątach: 15° , 75° i 90° ; dwa trójkąty o kątach: 40° , 50° i 90° ; dwa trójkąty o kątach: 35° , 55° i 90°
86. 20° , 60° i 100° ; 30° , 80° i 70° ; 30° , 50° i 100° ; 40° , 60° i 80° ; 40° , 70° i 70° ; 20° , 50° i 110°
87. 6P Wskazówka. Wykaż, że każdy z mniejszych trójkątów ma takie samo pole.
88. 30° , 50° , 100°
89. 25°
90. 6
95. a) Wskazówka. Wyznacz konstrukcyjnie środki dwóch boków narysowanego trójkąta i połącz je z przeciwległymi wierzchołkami. Punkt przecięcia otrzymanych środkowych jest środkiem ciężkości trójkąta. b) Wskazówka. Z jednego z wierzchołków zakresł łuk tak, by przeciął on przeciwległy bok w dwóch punktach. Symetralna odcinka o końcach w tych punktach zawiera jedną z wysokości trójkąta. Skonstruuj w podobny sposób prostą zawierającą inną wysokość tego trójkąta. Punkt przecięcia otrzymanych prostych jest ortocentrum trójkąta.
96. $\frac{ac}{a+b}$, $\frac{bc}{a+b}$
97. 3:4 — dla najmniejszego kąta, 2:3 — dla największego kąta
98. Wskazówka. Zauważ, że półproste AE i BE są dwusiecznymi dwóch kątów trójkąta ABD .
99. Wskazówka. Rozpatrz trójkąty ABC i ACD . Odcinki AM i AN są środkowymi tych trójkątów.
100. Wskazówka. Skorzystaj dwukrotnie z twierdzenia o dwusiecznej.
101. c) Wskazówka. Zbuduj równoległobok $ABDC$ tak, by środkowa poprowadzona z wierzchołka A zawierała się w jednej z przekątnych tego równoległoboku.
102. Wskazówka. Wykaż, że trójkąty APM i BNP są równoramienne.
103. a) $\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}$, b) $\frac{\alpha - \beta}{2}$, jeśli α jest kątem rozwartym, $\frac{\beta - \alpha}{2}$, jeśli β jest kątem rozwartym
104. a) Wskazówka. Skonstruuj proste prostopadłe do ramion kąta przechodzące przez punkt P . Proste te przecinają ramiona w dwóch punktach: jeden z nich jest spodkiem wysokości, a drugi wierzchołkiem szukanego trójkąta. b) Wskazówka. Poprowadź prostą przez wierzchołek kąta i punkt P . Znajdź na tej prostej taki punkt należący do kąta, że jego odległość od wierzchołka kąta jest równa $\frac{3}{2}$ odległości punktu P od tego wierzchołka. Ten punkt jest środkiem boku szukanego trójkąta przeciwległego do wierzchołka kąta. Poprowadź przez ten punkt proste równoległe do ramion kąta. Proste te przecinają ramiona kąta w punktach, które są środkami boków szukanego trójkąta.

- 105.** a) 72° , 108° , b) 60° , 120° albo wszystkie kąty mają miarę 90° (wówczas trapez jest kwadratem)
- 106.** a) $P = 13,44$, obwód = 20, b) $P = 67,2$, obwód = 38, c) $P = 30$, obwód = 23, d) $P = 252$, obwód = 72, e) $P = 2944$, obwód = 236, f) $P = 31,8$, obwód = 25
- 107.** a) 6, b) 18, c) 12, d) $10\frac{1}{2}$, e) $13\frac{1}{2}$
- 108.** a) $\frac{1}{8}$, b) $\frac{3}{8}$, c) $\frac{1}{2}$
- 109.** a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{2}$
- 110.** a) $\frac{1}{3}P$, b) $\frac{5}{3}P$, c) $\frac{7}{10}P$
- 111.** a) 21, b) $32\sqrt{2}$, c) $14(3 - \sqrt{3})$
- 112.** a) $\frac{4\sqrt{3}a}{3}$, b) $6a + 2b$, c) $2b + a(2 + \sqrt{2})$, d) $a + b + \sqrt{3}(b - a)$
- 113.** a) 27 cm^2 , b) 36 m^2
- 114.** a) 12, b) $12\sqrt{2}$, c) $12\sqrt{3}$
- 115.** a) $25\sqrt{3}$, b) 24,5
- 116.** a) 7,68, b) 12 cm, c) 6 cm i 9 cm
- 118.** a) 18, b) $4 + 2\sqrt{15}$, c) 28
- 119.** $1 + \frac{5\sqrt{3}}{3}$
- 120.** a) 27 cm, b) 5 cm, c) 26 cm
- 121.** a) 60, b) 24, c) 30
- 122.** a), c), d), f), g)
- 123.** a) tak, b) tak, c) tak
- 124.** $35\frac{5}{17} \text{ cm}$
- 125.** 20 cm lub 12,5 cm
- 126.** a) 20, b) $2\sqrt{13}$
- 127.** $5\sqrt{5}$, $5\sqrt{5}$, $5\sqrt{5}$, $11\sqrt{5}$ Wskazówka. Jeden z trójkątów, na które przekątna dzieli ten trapez, jest równoramienny.
- 131.** $2\sqrt{5}$ i $4\sqrt{5}$
- 132.** 210 cm^2
- 133.** $P = 16 \text{ m}^2$, obwód = $(8 + 4\sqrt{5}) \text{ m}$
- 135.** Wskazówka. Najpierw porównaj pola trójkątów ABD i ABC .
- 137.** $S_2 = \frac{S_1 + S_3}{2}$
- 138.** $x = 3$, $y = \sqrt{2}$ Wskazówka. Zauważ, że rozważany pięciokąt można otrzymać z kwadratu o boku 4 przez odpowiednie odcięcie naroża.

PRZED SPRAWDZIANEM

1. B
2. D
3. C
4. B
5. B
6. B
7. D
8. A
9. A
10. D

11. D

12. 23° , 69° , 88°

13. 72 cm^2

14. 4,8 i 9,6

17. B

18. B

19. C

20. A

21. C

22. D

23. C

24. C

25. D

26. C

27. B

28. $6\sqrt{5}$

29. $\frac{1}{12}$

30. 169 cm^2 Wskazówka. Narysuj wysokość trapezu przechodzącą przez punkt przecięcia przekątnych. Zauważ, że ten punkt dzieli wysokość na dwa odcinki, a każdy z nich jest dwa razy krótszy od odpowiedniej podstawy.

PRZED MATURĄ

1. A

2. B

3. C

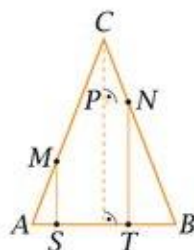
4. A

5. A

8. $2\sqrt{17}$

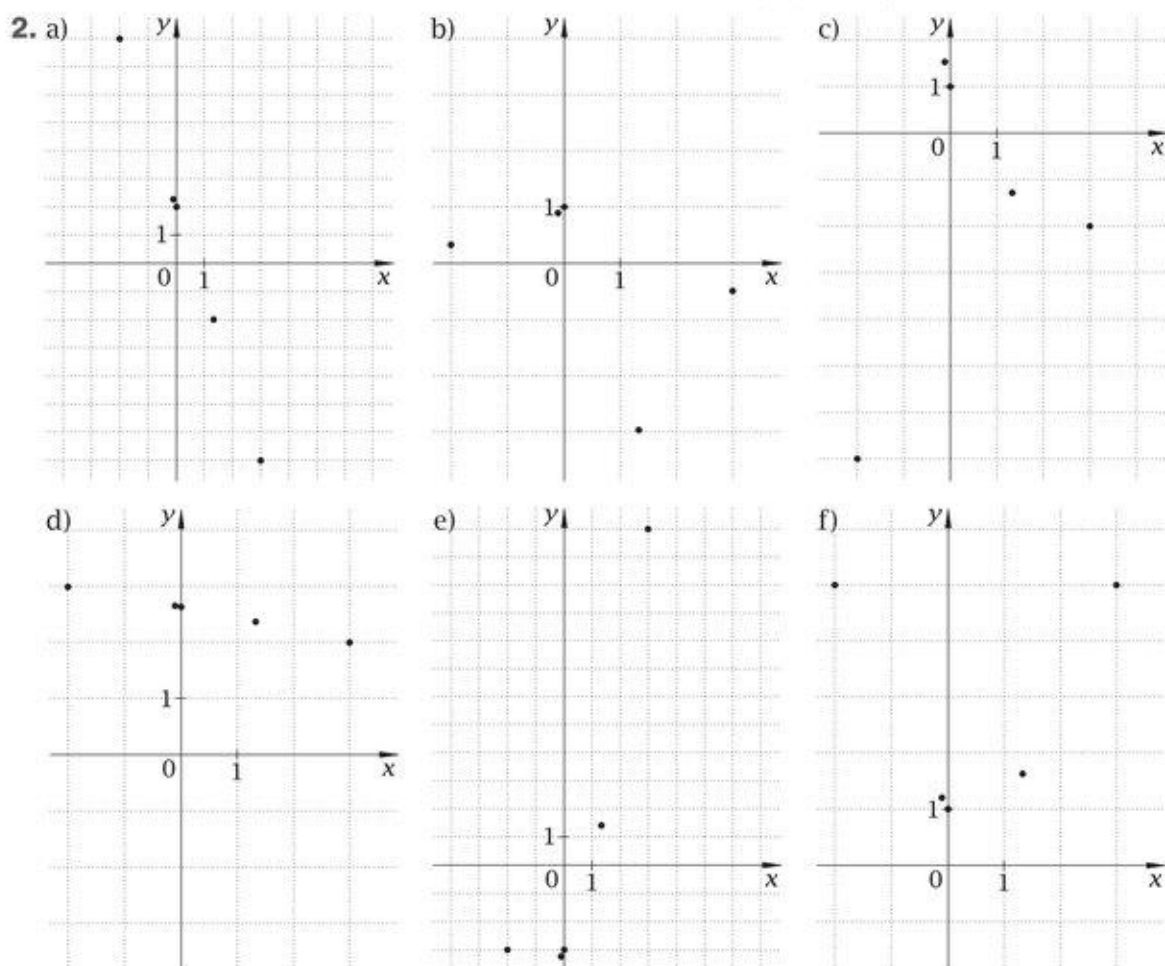
11. Wskazówka. Zauważ, że trójkąty PBD i DPC mają równe wysokości opuszczone z wierzchołka D , więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości boków, na które te wysokości są opuszczone. Następnie wyraż pól obu tych trójkątów za pomocą pola trójkąta ABC .

12. Wskazówka: Przyjrzyj się rysunkowi. Wykaż, że trójkąty ASM i NPC są przystające.



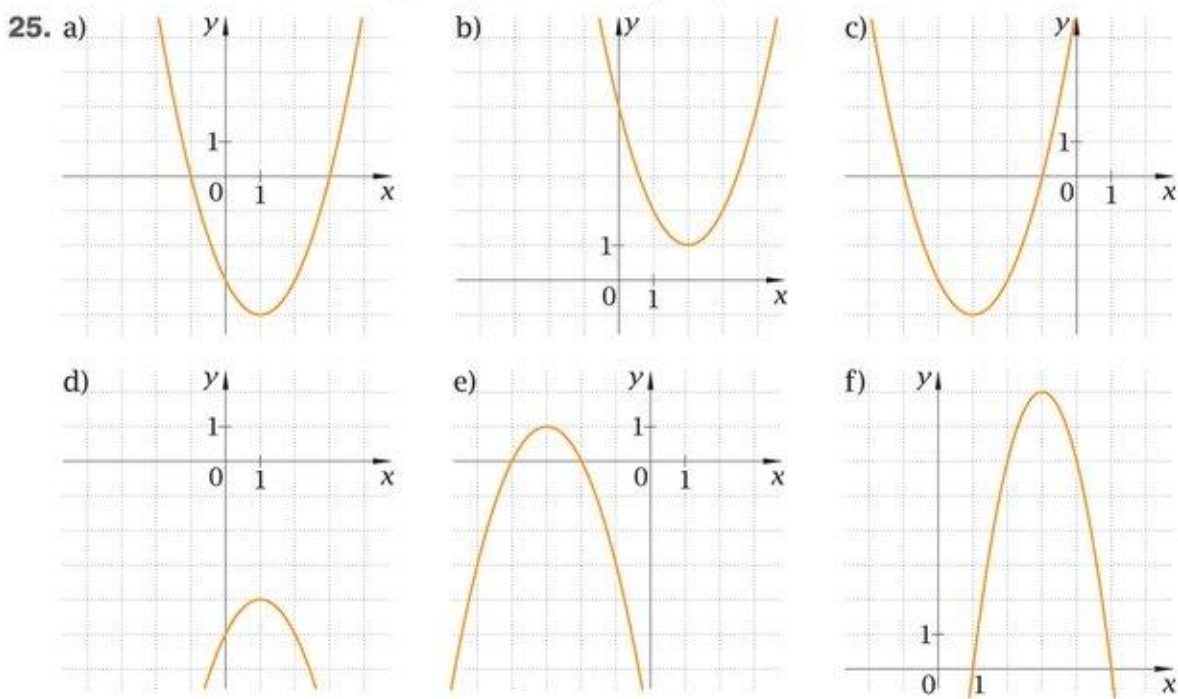
FUNKCJE

1. a) $x \in \mathbb{R}$; $f(1) = 2$, $f(3) = -4$, $f(-3) = 14$, $f(-\frac{1}{2}) = 6\frac{1}{2}$, $f(\sqrt{2}) = 5 - 3\sqrt{2}$, b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f(1) = 3$, $f(3) = 1$, $f(-3) = -1$, $f(-\frac{1}{2}) = -6$, $f(\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $f(1) = 1$, $f(3) = 7$, $f(-3) = -1\frac{2}{3}$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{10}$, $f(\sqrt{2}) = 0$, d) $x \in (-\infty; 3)$; $f(1) = \sqrt{2}$, $f(3) = 0$, $f(-3) = \sqrt{6}$, $f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{3\frac{1}{2}}$, $f(\sqrt{2}) = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$, e) $x \in \mathbb{R}$; $f(1) = 2$, $f(3) = 6$, $f(-3) = 0$, $f(-\frac{1}{2}) = 0$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, f) $x \in \mathbb{R}$; $f(1) = 2$, $f(3) = 14$, $f(-3) = -70$, $f(-\frac{1}{2}) = -4\frac{3}{8}$, $f(\sqrt{2}) = 7(\sqrt{2} - 1)$

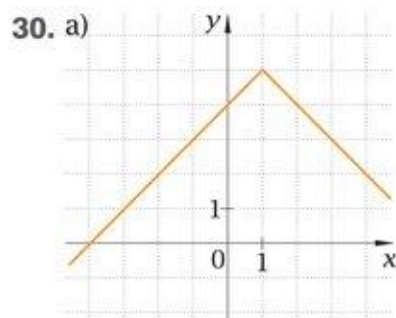


3. a) A — tak, B — nie, b) A — nie, B — nie, c) A — tak, B — tak, d) A — nie, B — tak, e) A — tak, B — tak, f) A — nie, B — tak
4. a) $f(3) = 6$, c) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, d) $x = 0$
5. a) $f(-15) = -\frac{4}{3}$, c) $x = \frac{20}{3}$, d) nie, e) $10(1 - \sqrt{2})$
6. a) $y = x + 5$, b) $y = x^3$, c) $y = \frac{x^2}{2}$, d) $y = \sqrt{x - 3}$, e) $y = \frac{1}{x^3}$, f) $y = |3x|$
7. a) $y = \sqrt{-x}$, b) $y = -x^2$, c) $y = \left|\frac{1}{x}\right|$
8. a) B , b) B , c) B , d) C , e) C
9. ④
10. a) $\langle \frac{2}{3}; +\infty \rangle$, b) $(-\infty; \frac{9}{8}]$, c) $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$, d) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, e) $\mathbb{R} \setminus \{-3, -1\}$, f) $\langle -1; +\infty \rangle \setminus \{0\}$, g) $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$, h) $\mathbb{R} \setminus \{-5, \frac{2}{5}, 5\}$, i) $\langle -\frac{1}{4}; 3 \rangle$, j) $\{5\}$, k) $\langle -2; \frac{9}{10} \rangle \setminus \{-\frac{1}{3}\}$, l) $(-\infty; 0)$
11. a) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; $x = -3, 5$, b) $\langle -\frac{1}{2}; +\infty \rangle \setminus \{0, 3\}$; $x = -0, 5$, c) $(-8; +\infty)$; $x = 0$, d) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$, e) $(3; +\infty)$; $x = 5$, f) $(-\frac{13}{2}; +\infty)$, brak miejsc zerowych

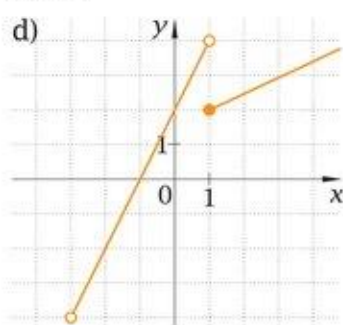
12. a) $x = -11$, b) brak miejsc zerowych, c) $x_1 = -1, x_2 = 0$, d) $x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{2}$
 13. a) -1 — nie, 3 — tak; b) -1 — tak, 3 — tak; c) -1 — tak, 3 — tak; d) -1 — nie, 3 — tak
 14. a) $a = -\frac{2}{9}$, b) $a = -\frac{1}{4}$
 15. a) $a = 2, b = -1$, b) $a = \frac{1}{3}, b = 1$
 16. a) $f(2a) = 4a^2 - 10a + 7, f(a-2) = a^2 - 9a + 21, f(1-a) = a^2 + 3a + 3$,
 b) $f(2a) = \frac{8a^3}{4a-1}, f(a-2) = \frac{a^3-6a^2+12a-8}{2a-5}, f(1-a) = \frac{1-3a+3a^2-a^3}{1-2a}$,
 c) $f(2a) = a - \sqrt{6a-1}, f(a-2) = \frac{1}{2}a - 1 - \sqrt{3a-7}, f(1-a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a - \sqrt{2-3a}$
 17. a) $a = -1$, b) $a = -\frac{1}{2}$, c) $a = -\frac{1}{2}$
 19. a) $\langle -7; +\infty \rangle$, b) $\langle -3; +\infty \rangle$, c) $\langle -\frac{5}{2}; +\infty \rangle$
 20. $f(x) = 2x + 3, g(x) = -x - 4, h(x) = \frac{3}{4}x - 2, k(x) = -\frac{1}{5}x + 1$
 21. a) $f(x) = \frac{12}{5}x + \frac{1}{5}$, b) $f(x) = -\frac{11}{7}x + 11$, c) $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$, d) $f(x) = 0$
 22. a) $g(x) = 2x - 7$, b) $g(x) = -\frac{3}{5}x - 1$, c) $g(x) = -3x - 6$, d) $g(x) = \frac{5}{3}x$
 23. a) $f(x) = 2x + 1$, b) $f(x) = -\frac{4}{7}x$, c) $f(x) = -4x + 19$, d) $f(x) = 0,1x + 6,6$, e) $f(x) = \sqrt{2}x + \sqrt{5}$,
 f) $f(x) = 201$
 24. a) $f(x) = -3\sqrt{2}$, b) $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$ lub $f(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$



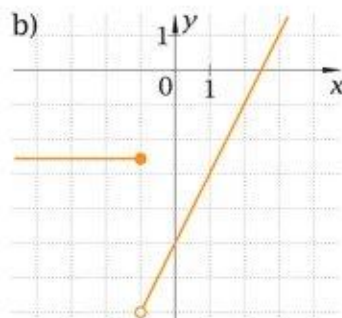
26. a) $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)(x-2) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$, b) $f(x) = -2(x+1)^2 + 4 = -2x^2 - 4x + 2$,
 c) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 6 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$
 27. a) $f(x) = \frac{2}{3}(x-2)^2 + 5$, b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+6)$, c) $f(x) = 2x^2 - x - 3$,
 d) $f(x) = 4\left(x - 4\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 4(x-4)(x-5)$
 28. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, b) $x \in \langle 0; 5 \rangle$, c) $x = \frac{1}{3}$, d) $x \in (-8; 1)$, e) $x \in \langle -1; 3 \rangle$,
 f) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (3; +\infty)$, g) $x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup \langle 2; +\infty \rangle$, h) $x \in (-2; \frac{4}{3})$, i) $x \in \mathbb{R}$
 29. a) $f(-3) = -14, f(0) = -5, f(8) = 1$, b) $f(-3) = 17, f(0) = 5, f(8) = -54$, c) $f(-3) = 10$,
 $f(0) = 1, f(8) = 63$, d) $f(-3) = -4\frac{1}{2}, f(0) = 0, f(8) = 64$



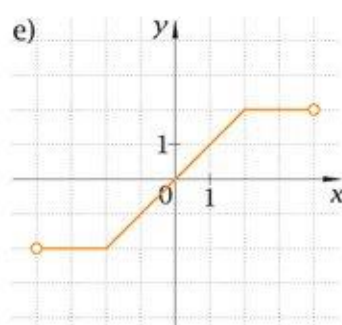
zbiór wartości: $(-\infty; 5]$,
funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; 1]$, malejąca w przedziale $\langle 1; +\infty)$,
miejsca zerowe: $x_1 = -4$,
 $x_2 = 6$



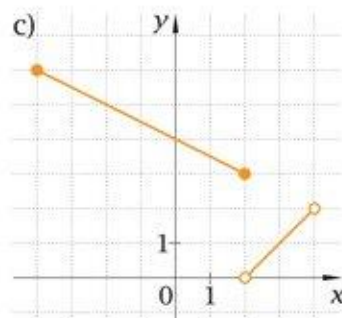
zbiór wartości: $(-4; +\infty)$,
funkcja rosnąca w przedziałach: $(-3; 1)$ oraz $\langle 1; +\infty)$,
miejsce zerowe: $x = -1$



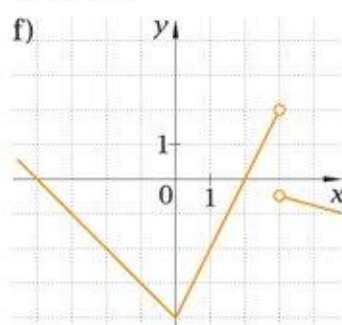
zbiór wartości: $(-7; +\infty)$,
funkcja stała w przedziale $(-\infty; -1]$, funkcja rosnąca w przedziale $(-1; +\infty)$,
miejsce zerowe: $x = 2\frac{1}{2}$



zbiór wartości: $\langle -2; 2 \rangle$,
funkcja rosnąca w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$, funkcja stała w przedziałach $(-4; -2)$ oraz $\langle 2; 4 \rangle$,
miejsce zerowe: $x = 0$



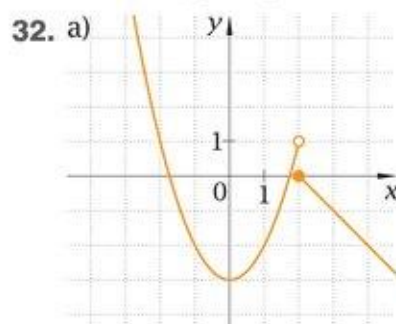
zbiór wartości: $(0; 2) \cup \langle 3; 6 \rangle$, funkcja malejąca w przedziale $\langle -4; 2 \rangle$,
funkcja rosnąca w przedziale $(2; 4)$, brak miejsc zerowych



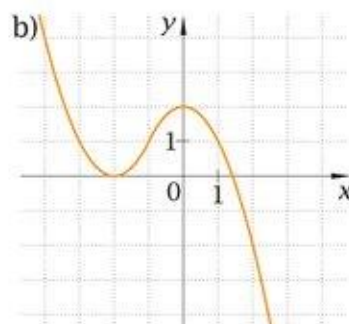
zbiór wartości: $\mathbb{R}$, funkcja malejąca w przedziałach $(-\infty; 0)$ oraz $(3; +\infty)$,
funkcja rosnąca w przedziale $\langle 0; 3 \rangle$,
miejsca zerowe: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$

31. a) $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{dla } -5 \leq x < -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{dla } -1 \leq x < 5 \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} -4x-6 & \text{dla } -3 \leq x < -2 \\ 2 & \text{dla } -2 \leq x < 2 \\ -4x+10 & \text{dla } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$,

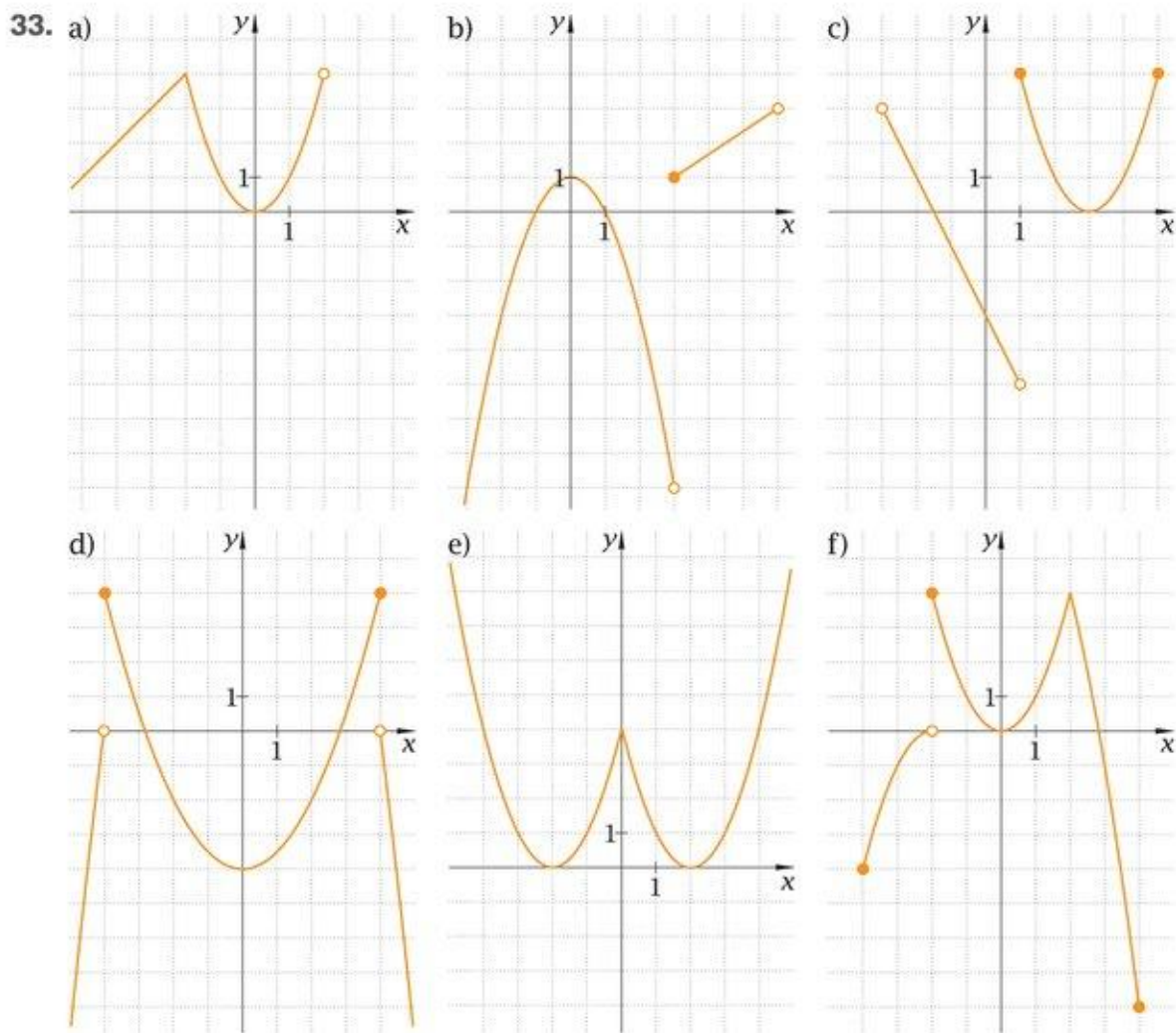
c) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{16}{3} & \text{dla } -5 < x \leq -2 \\ \frac{2}{3}x + \frac{10}{3} & \text{dla } -2 < x \leq 1 \\ \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} & \text{dla } 1 < x \leq 4 \end{cases}$



zbiór wartości: $\mathbb{R}$, funkcja przyjmuje wartości niedodatnie dla $x \in \langle -\sqrt{3}; \sqrt{3} \rangle \cup \langle 2; +\infty)$



zbiór wartości: $\mathbb{R}$, funkcja przyjmuje wartości niedodatnie dla $x \in \langle \sqrt{2}; +\infty) \cup \{-2\}$



34. $a < -2$

35. a) $a \leq -6$, b) $a < -16$

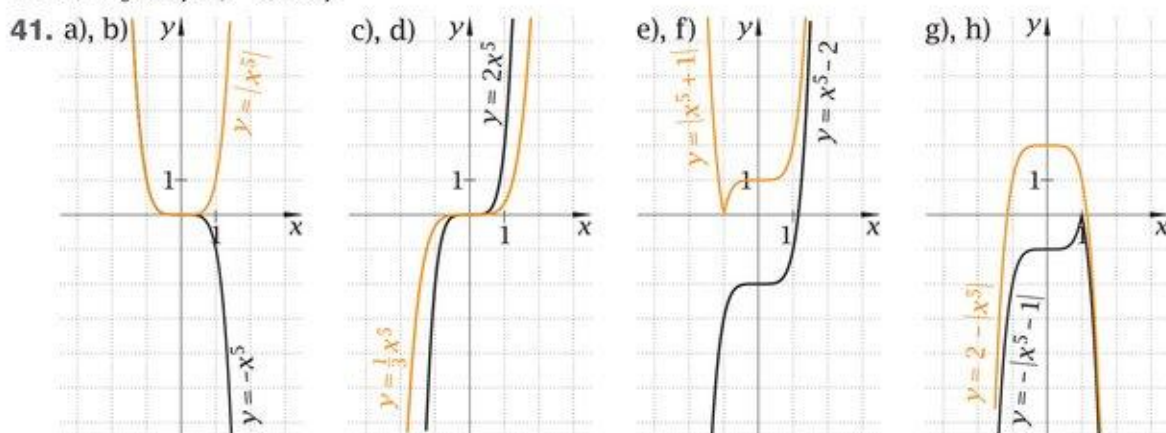
36. a) $b = -\frac{4}{3}$, b) $a = \frac{7}{3}$, c) $a = -3$, d) $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{23}{5}$

37. a) $p(x)$; $s(x)$, b) $s(x)$; $p(x)$, c) $q(x)$; $p(x)$, d) $s(x)$; $r(x)$

38. a) ① $-g(x)$, ② $-f(x)$, ③ $-h(x)$, b) ① $-h(x)$, ② $-g(x)$, ③ $-f(x)$,
c) ① $-f(x)$, ② $-h(x)$, ③ $-i(x)$, ④ $-g(x)$

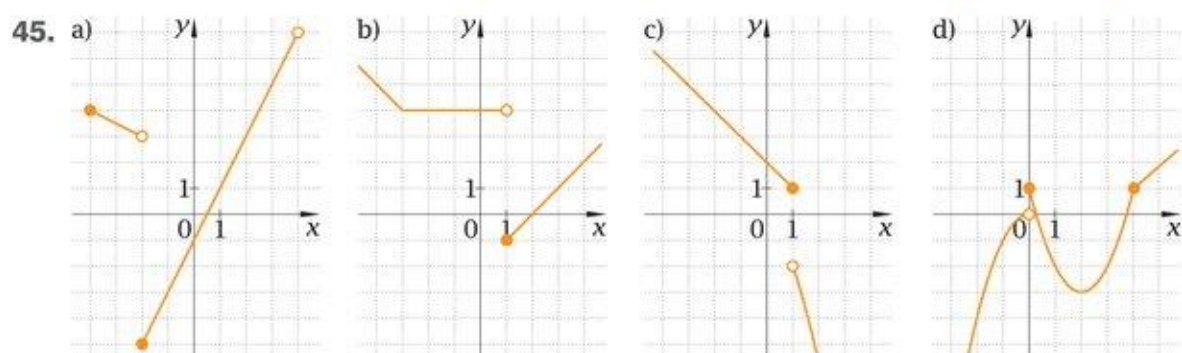
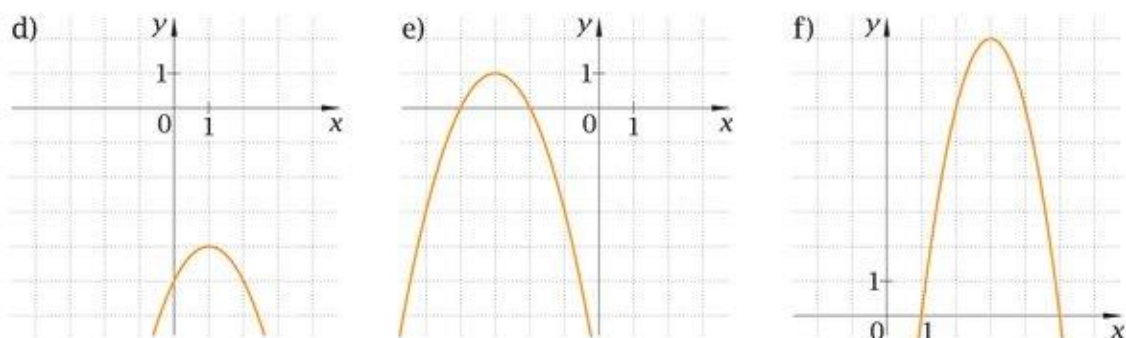
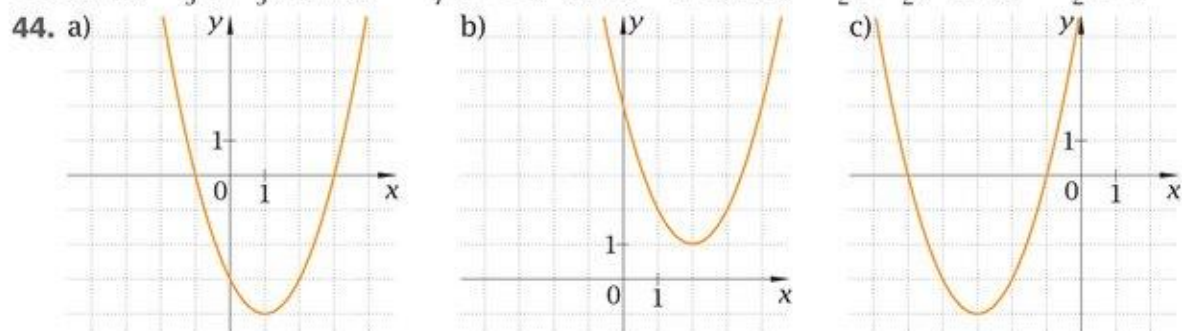
39. a) $x \in (-1; 0)$, b) $x \in \langle 1; +\infty \rangle \cup \{0\}$, c) $x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$,
d) $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; +\infty \rangle \cup \{0\}$

40. a) w jednym, b) trzy



42. a) $f_1(x)$, $f_5(x)$, b) $f_4(x)$, c) $f_1(x)$, $f_3(x)$, $f_5(x)$, d) $f_2(x)$, $f_4(x)$

43. a) $f(x) = \frac{12}{5}x + \frac{1}{5}$, b) $f(x) = -\frac{11}{7}x + 11$, c) $f(x) = 0$, d) $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, e) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$



46. a) $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{dla } -1 \leq x < 5 \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} -4x-6 & \text{dla } -3 \leq x < -2 \\ 2 & \text{dla } -2 \leq x < 2 \\ -4x+10 & \text{dla } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$,

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{16}{3} & \text{dla } -5 < x \leq -2 \\ \frac{2}{3}x + \frac{10}{3} & \text{dla } -2 < x \leq 1 \\ \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} & \text{dla } 1 < x \leq 4 \end{cases}$

47. a) -22, b) $\frac{44+31\sqrt{2}}{28}$, c) 514, d) $\frac{48\sqrt{2}-1}{2}$

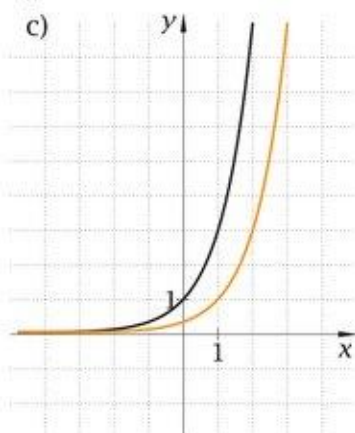
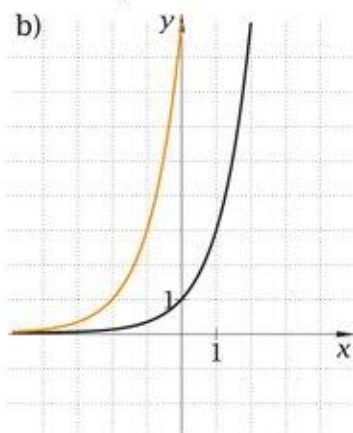
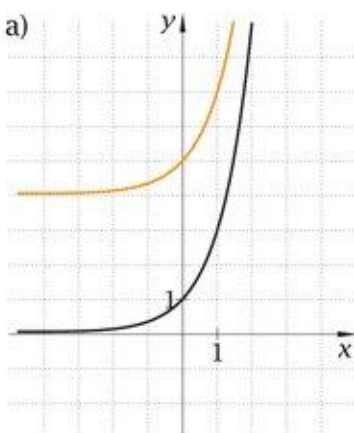
48. a) $f(x) = \frac{2}{3}(x-2)^2 + 5$, b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+6)$, c) $f(x) = 2x^2 - x - 3$,
d) $f(x) = 4\left(x - 4\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 4(x-4)(x-5)$

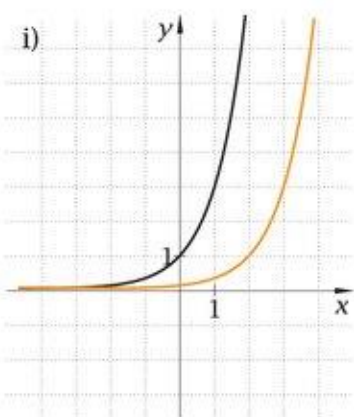
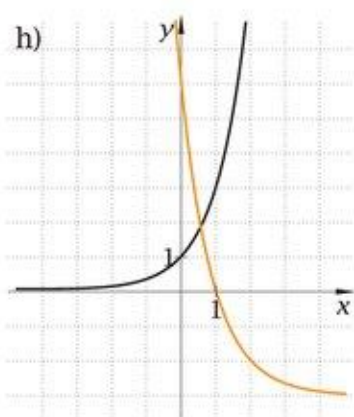
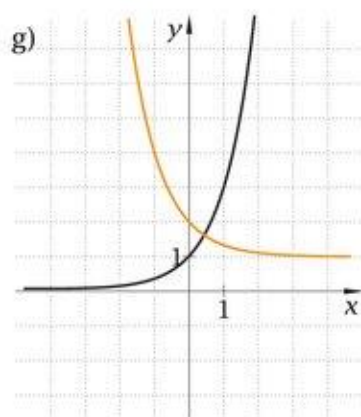
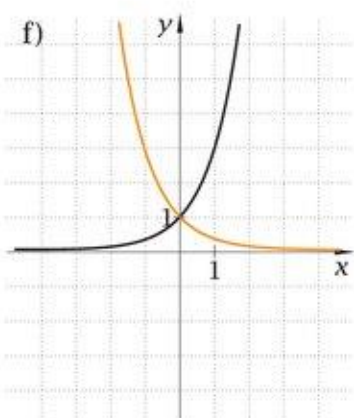
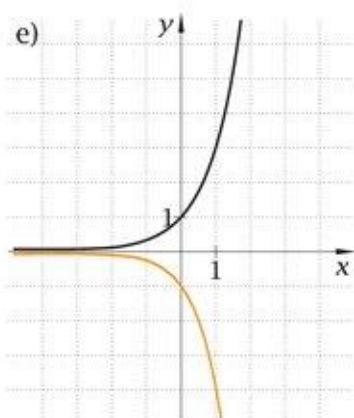
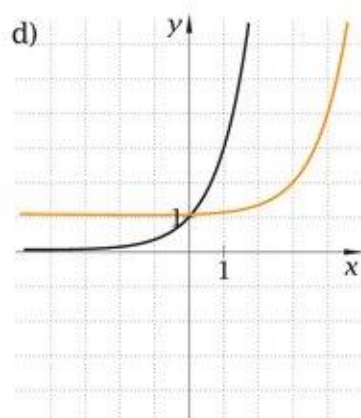
49. f_1 : a) $\langle -4; 3 \rangle$, b) $\langle -14; -5 \rangle \cup \langle -3; 5 \rangle$, c) $x = \frac{3}{2}$, d) $\langle -4; -1 \rangle$, e) $x \in \langle -1; \frac{3}{2} \rangle$;
 f_2 : a) $\mathbb{R}$, b) $\langle -54; +\infty \rangle$, c) $x_1 = 0$, $x_2 = 12$, d) $\langle 3; +\infty \rangle$, e) $x \in \langle -\infty; 0 \rangle \cup \langle 12; +\infty \rangle$;
 f_3 : a) $\mathbb{R}$, b) $\langle -6; +\infty \rangle$, c) $x_1 = -\sqrt{10}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{10}$, d) $(0; 2)$, $(2; +\infty)$,
e) $x \in \langle -\infty; -\sqrt{10} \rangle \cup \langle -2; 2 \rangle \cup \langle \sqrt{10}; +\infty \rangle$;
 f_4 : a) $\langle -4; +\infty \rangle$, b) $\langle -7; +\infty \rangle$, c) $x_1 = -3\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, d) $\langle -4; -1 \rangle$, $\langle 3; +\infty \rangle$,
e) $x \in \langle -3\frac{1}{2}; 2 \rangle \cup \langle 4; +\infty \rangle$

50. a) $a = -2$, b) $a = -\frac{1}{27}$, c) $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$, d) $a = -3$, e) $a = -3$, f) $a = -\sqrt{2}$ lub $a = \sqrt{2}$
51. a) $g(x) = 2(x-3)^3$, b) $g(x) = -3x^4 - 8$, c) $g(x) = -\frac{2}{5}(x+4)^5 + 1$, d) $g(x) = \frac{(x+16)^{16}}{16} - 16$
52. $f(x) = x + \sqrt{10}$ lub $f(x) = x - \sqrt{10}$ lub $f(x) = -x + \sqrt{10}$ lub $f(x) = -x - \sqrt{10}$
54. $(0, -7)$
55. $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$
56. a) $(-1, -9)$, $(0, -8)$, $(2, 0)$, b) $(-1; 0) \cup (2; +\infty)$
57. a) $g(x) = \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 7x - 11 & \text{dla } x \leq -2 \\ 2x^2 - 3x - 2 & \text{dla } -2 < x \leq 1, \\ -5\frac{1}{2} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$, b) $g(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - x - 6 & \text{dla } x \leq -4 \\ 2x^2 + 5x + 3 & \text{dla } -4 < x \leq -1, \\ -2\frac{1}{2} & \text{dla } x > -1 \end{cases}$,
 c) $g(x) = \begin{cases} x^3 - 8x^2 + 20x - 17 & \text{dla } x \leq -1 \\ 2x^2 - 7x + 10 & \text{dla } -1 < x \leq 2 \\ 1\frac{1}{2} & \text{dla } x > 2 \end{cases}$
59. a) 1, b) 2
60. a) $x \in (1; +\infty)$, b) $x \in \langle -6; +\infty \rangle$, c) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; 4)$, d) $x \in \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle$,
 e) $x \in (-\infty; -4) \cup \{3\}$, f) $x \in (-\infty; 2) \setminus \{1\}$
61. a) $x \in \mathbb{R}$, b) $x \in \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$, c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$, d) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$,
 e) $x \in (3; 5)$, f) $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 3; +\infty \rangle \cup \{2\}$
62. a) $x \in \langle 0; +\infty \rangle$, b) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$, c) $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$
63. a) $x \in (-\sqrt{5}; \frac{1}{3}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$, b) $x \in \langle -2; 2 \rangle \cup (-\infty; -6)$, c) $x \in (-\frac{5}{2}; 0) \cup (5; +\infty)$,
 d) $x \in (4; +\infty)$, e) $x \in (-\infty; -2) \cup \langle 3; 4 \rangle$, f) $x \in \langle 6; +\infty \rangle \cup \{-1\}$,
 g) $x \in (-3; -2) \cup (2; 3)$, h) $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 0; +\infty \rangle$
64. a) $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$, b) $x \in (2; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup \langle 0; \sqrt{3} \rangle$,
 d) $x \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$, e) $x \in \langle \frac{1}{2}; +\infty \rangle \cup \{0\}$, f) $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$,
 g) $x \in (-6; 0)$, h) $x \in \mathbb{R}$
65. a) $x \in (-2; -1) \cup (2; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; -1) \cup \langle \frac{1}{3}; \frac{2}{5} \rangle$, c) $x \in (-3; -1) \cup (\frac{1}{3}; 3)$,
 d) $x \in (0; 2)$, e) $x \in (-\sqrt{5}; \frac{1}{2}) \cup (1; \sqrt{5})$, f) $x \in \langle -5; +\infty \rangle$,
 g) $x \in (-\infty; -2 - \sqrt{5}) \cup (-3; -2 + \sqrt{5}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, h) $x \in (-2; 3) \cup (4; 5)$,
 i) brak rozwiązań, j) $x \in \mathbb{R}$
66. a) $x \in (-\sqrt{5}; 0) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$, b) $x \in (5; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -3) \cup \langle 0; 2 \rangle$,
 d) $x \in (-1; 0) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, e) $x \in (-\infty; -3) \cup \langle 3; +\infty \rangle \cup \{0\}$,
 f) $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$
67. a) $x \in (-2; 2) \cup (5; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup \langle \sqrt{5}; 3 \rangle$, c) $x \in (-2; -1) \cup (1; +\infty)$,
 d) $x \in (-1; +\infty) \setminus \{1\}$, e) $x \in \langle \frac{2}{3}; +\infty \rangle$, f) $x \in (-\infty; 3)$
68. a) $x \in (-\infty; 0) \cup \langle \frac{5}{2}; +\infty \rangle$, b) $x \in (0; \frac{1}{2})$, c) $x \in (0; +\infty)$,
 d) $x \in \langle -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \rangle \cup \langle \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \rangle$, e) $x \in \langle 0; +\infty \rangle$, f) $x \in (0; 1) \cup (5; +\infty)$
69. a) $x \in (-\infty; 2) \setminus \{-\frac{3}{2}\}$, b) $x \in (-\infty; -1)$, c) $x \in (-6; 1) \cup (2; +\infty)$,
 d) $x \in (-\sqrt{5}; -2) \cup (2; \sqrt{5})$, e) $x \in (-\sqrt{5}; 0) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$, f) $x \in \langle -\sqrt{3}; \sqrt{3} \rangle$
70. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 1) \cup (2; +\infty)$, b) $s \in (2; 3) \cup (3; +\infty)$, c) $t \in (-3; -\frac{2}{3}) \cup (0; \frac{1}{2})$

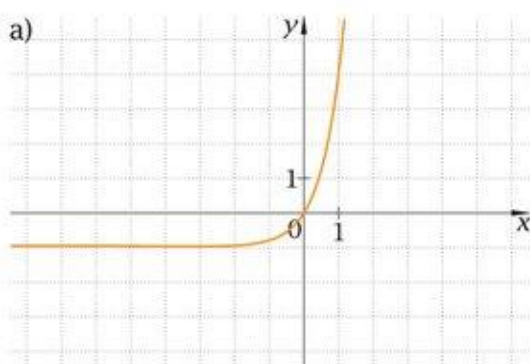
71. a) $x \in (-\infty; 2) \setminus \{0\}$, b) $x \in (-\infty; -7) \cup \{\frac{2}{5}\}$, c) $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$,
d) $x \in (-3; \frac{1}{3})$, e) $x \in \mathbb{R}$, f) $x \in \langle \frac{1}{5}; +\infty \rangle$, g) $x = 0$, h) brak rozwiązań
72. a) $D = \langle \frac{1}{2}; +\infty \rangle \cup \{-\frac{1}{3}\}$, b) $D = \mathbb{R}$, c) $D = (-\infty; \frac{2}{3}) \cup \{2\}$, d) $D = \langle \frac{3}{2}; +\infty \rangle$,
e) $D = (-2\frac{1}{3}; -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty)$, f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{1}{3}, 3\}$
73. a) -2, b) -2, c) -1, d) 6
74. a) $x \in \langle \frac{1}{3}; 1\frac{1}{2} \rangle \cup \langle 1\frac{2}{3}; +\infty \rangle$, b) $x \in (-6; 1 - \sqrt{2}) \cup (1; 1 + \sqrt{2}) \cup (4; +\infty)$,
c) $x \in \langle \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \rangle \cup \{1\} \cup \langle 1\frac{1}{3}; +\infty \rangle$, d) $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (1 - \sqrt{5}; 0) \cup (\sqrt{3}; 1 + \sqrt{5})$,
e) $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{3}) \cup \langle \frac{2}{5}; -1 + \sqrt{3} \rangle$, f) $x \in (-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1) \cup (\frac{2\sqrt{3}}{3}; 4)$
75. więcej niż 3 dm
76. a) $x \in \langle -5; 0 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle$, b) $x \in (-\infty; -\sqrt{10}) \cup (-3; \sqrt{10})$
77. $x \in (-2; -1) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$
78. 1, 2, 3
79. a) $a = 4, b = 0, x \in (-\infty; 0) \setminus \{-2\}$, b) $a = 3, b = 4, x \in (-2; 2) \cup (3; +\infty)$
80. $a = -3, b = 0, x \in (3; +\infty)$
81. $p = 4, r = 1,5$ lub $p = -3, r = -2$
82. $m \in (-\sqrt{6}; 2) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$
83. Wskazówka. Przedstaw składnik $5x^2$ w postaci sumy dwóch jednomianów.
85. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$,
c) $x \in (-\infty; -6) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (6; +\infty)$
86. a) $b = 2$ i $c = -8$, b) $b = 0$ i $c = -1$, c) $b^2 < 4c$, d) nie istnieją takie wartości b i c
87. ① $-f_2(x)$, ② $-f_4(x)$, ③ $-f_1(x)$, ④ $-f_3(x)$, ⑤ $-f_6(x)$, ⑥ $-f_5(x)$
88. a) 5, b) 6
90. a) $-\frac{1}{30}x(x+3)(x+1)(x-3)$, b) $\frac{3}{4}(x-1)^2(x-2)^2$
91. a) $W(x) = \frac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-4)$, b) $W(x) = -\frac{1}{2}(x+3)(x-2)^2$, c) $W(x) = \frac{1}{4}x(x-3)(x+3)$
92. I — ⑤, II — ③, III — ⑥, IV — ④
94. $W_1(x)$: -2 — jednokrotny; 1 — trzykrotny, $W_2(x)$: -2 — trzykrotny; 1 — dwukrotny,
 $W_3(x)$: -2 — dwukrotny; 1 — czterokrotny, $W_4(x)$: -2 — trzykrotny; 1 — czterokrotny
95. ① — ②, ② — ③, ③ — ①
96. ① — ③, ② — ②, ③ — ④, ④ — ①, ③
97. a) 2, b) 1, c) 2, d) 0
98. tak
99. dwa miejsca zerowe, gdy $n = 2k, k \in \mathbb{N}_+$, trzy miejsca zerowe, gdy $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}_+$
100. a) I. $x \in (-3; 1) \cup (2; +\infty)$, II. $x \in (-\infty; -3) \cup \langle 1; 2 \rangle$, b) I. $x \in (-1; +\infty) \setminus \{3\}$,
II. $x \in (-\infty; -1) \cup \{3\}$, c) I. $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 4)$, II. $x \in \langle 4; +\infty \rangle \cup \{-1\}$
101. a) $x \in \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle$, b) $x \in (-\infty; -1)$, c) $x \in (-\infty; -4) \cup \langle 0; +\infty \rangle$,
d) $x \in (1; +\infty) \setminus \{\sqrt{2}\}$, e) $x \in \langle -\frac{1}{5}; \frac{1}{3} \rangle \cup \{-\frac{1}{4}\}$, f) $x \in (-\infty; -3) \cup (-2\frac{1}{2}; 1) \cup (2; +\infty)$
102. a) $x \in (-1; 1) \cup (2,5; +\infty)$, b) $x \in \langle -\sqrt{3}; -\frac{2}{3} \rangle \cup \langle \sqrt{3}; +\infty \rangle$,
c) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (4; +\infty)$, d) $x \in (-\sqrt{6}; -\frac{1}{3}) \cup (0; \sqrt{6})$,
e) $x \in (-2; 2) \cup (3; +\infty)$, f) $x \in \langle -3; -\frac{1}{3} \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$

103. a) $x \in \{-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\}$, b) $x \in (-2; 0) \cup (0; 3)$, c) $x \in \langle 3; +\infty \rangle \cup \{-1, 0\}$,
 d) $x \in \langle -\sqrt{2}; -1 \rangle \cup \{\frac{1}{2}\}$ Wskazówka. Zauważ, że $\Delta = 9 + 4\sqrt{2} = (2\sqrt{2} + 1)^2$.
 e) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 1\frac{1}{2})$, f) $x \in (-\frac{1}{5}; \frac{1}{2}) \setminus \{\frac{1}{3}\}$
104. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{5}; 1)$, b) $x \in \langle -\frac{3}{2}; -\frac{3}{4} \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle$, c) $x \in (-5; -1) \cup (0; 2)$,
 d) $x \in \langle -4; 1 \rangle$, e) $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$, f) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup \{\frac{1}{2}\}$, g) $x \in (-\infty; 0)$,
 h) $x \in (\frac{9-3\sqrt{13}}{2}; 1) \cup (\frac{9+3\sqrt{13}}{2}; +\infty)$
106. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (3; 5) \cup (10; +\infty)$, b) $x \in \langle -4; 0 \rangle \cup \langle 5; +\infty \rangle \cup \{1\}$
107. $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$, $a = -4$, $b = 2$, $c = 4$
108. $A = (-\infty; -7) \cup \langle 0; 2 \rangle$, $B = (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; 2)$, $C = (-\infty; -3) \cup \langle 5; +\infty \rangle \cup \{-2\}$,
 $A \setminus B = \langle 0; \frac{1}{2} \rangle \cup \{2\}$, $B \cap C = (-\infty; -3)$, $A \cup C = (-\infty; -3) \cup \langle 0; 2 \rangle \cup \langle 5; +\infty \rangle \cup \{-2\}$
109. dla $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 0) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$
110. $x \in (-\infty; -2) \cup \{1\} \cup \langle 3; 5 \rangle$
111. a) $x \in \mathbb{R}$, b) $x \in (-\infty; 1) \setminus \{-3\}$, c) $x \in (5; +\infty)$, d) $x \in \langle -3; 2 \rangle \cup \{5\}$
112. a) $x \in (-\sqrt{3}-2; -3) \cup (-2; \sqrt{3}-2) \cup (0; 1)$, b) $x \in (-2; 2)$, c) $x \in (-\infty; -1) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$,
 d) $x \in (-2; +\infty) \setminus \{0\}$
113. a) $x \in \langle -\frac{1}{5}; \frac{3}{2} \rangle \cup \{-\frac{1}{2}\}$, b) $x \in \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 6; +\infty \rangle$, c) $x \in (-\infty; -2) \cup \langle -\sqrt{3}; -\frac{4}{3} \rangle$,
 d) $x \in (-5; -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cup \langle \frac{\sqrt{3}}{2}; 2 \rangle \cup (3; +\infty) \cup \{0\}$
114. $m = -28$
115. Wskazówka. Składnik $5x^4$ przedstaw w postaci sumy dwóch składników.
116. ① $-h$, ② $-k$, ③ $-f$, ④ $-g$
117. ① $-l$, ② $-g$, ③ $-f$, ④ $-k$, ⑤ $-h$, ⑥ $-m$
118. a) $D = (\frac{1}{2}; +\infty)$, b) $D = (-\infty; 1\frac{1}{4})$, c) $D = (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, d) $D = \mathbb{R}$,
 e) $D = (0; +\infty) \setminus \{\frac{1}{3}\}$, f) $D = (-3; +\infty) \setminus \{-2\}$, g) $x \in (-\infty; \pi-3) \cup (\pi+3; +\infty)$,
 h) $x \in (-\frac{5}{2}; 0) \cup (0; +\infty)$
119. ① $-k$, ② $-g$, ③ $-f$, ④ $-h$
120. a) $a = 2$, b) $a = 2$, c) $a = \frac{1}{3}$, d) $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, e) $a = 0$, f) $a = -10$
121. a) $a = 2$, $b = -3$, b) $a = 3$, $b = 2$, c) $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$, d) $a = 5$, $b = \frac{1}{2}$
122. a)



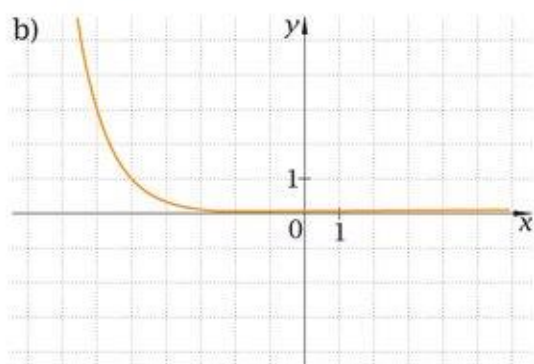


123. a)

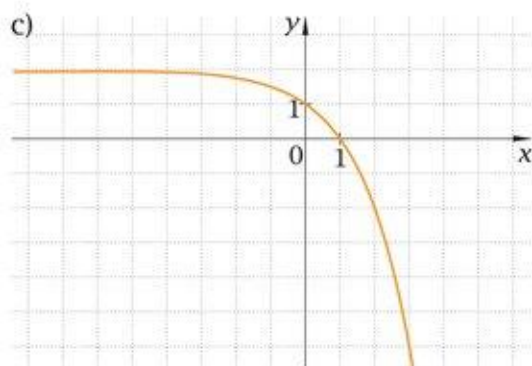


dziedzina: $\mathbb{R}$, zbiór wartości: $(-1; +\infty)$,
miejsce zerowe: $x = 0$, funkcja rosną-
ca w $\mathbb{R}$, asymptota pozioma: $y = -1$,
punkt przecięcia z osiami: $(0, 0)$, funk-
cja przyjmuje wartości dodatnie dla
 $x \in (0; +\infty)$, funkcja przyjmuje war-
tości ujemne dla $x \in (-\infty; 0)$

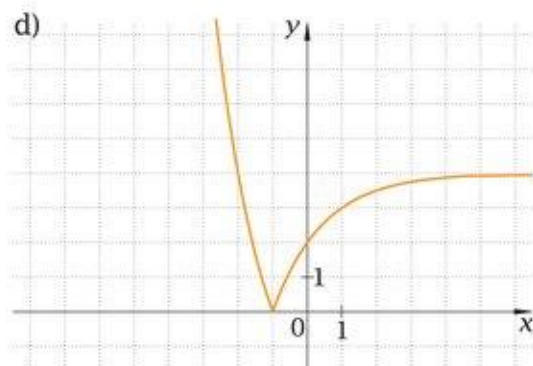
b)



dziedzina: $\mathbb{R}$, zbiór wartości: $(-\infty; 0)$,
brak miejsce zerowych, funkcja male-
jąca w $\mathbb{R}$, asymptota pozioma: $y = 0$,
punkty przecięcia z osiami: $(0, \frac{1}{243})$,
funkcja przyjmuje wartości dodatnie
dla $x \in \mathbb{R}$, funkcja nie przyjmuje warto-
ści ujemnych



dziedzina: $\mathbb{R}$, zbiór wartości: $(-\infty; 2)$,
miejsce zerowe: $x = 1$, funkcja malejąca
w $\mathbb{R}$, asymptota pozioma: $y = 2$, punkty
przecięcia z osiami: $(0, 1)$, $(1, 0)$, funkcja
przyjmuje wartości dodatnie dla
 $x \in (-\infty; 1)$, funkcja przyjmuje warto-
ści ujemne dla $x \in (1; +\infty)$



dziedzina: $\mathbb{R}$, zbiór wartości: $\langle 0; +\infty \rangle$,
miejsce zerowe: $x = -1$, funkcja ma-
lejąca w przedziale $(-\infty; -1)$, funkcja
rosnąca w przedziale $\langle -1; +\infty \rangle$, brak
asymptot, punkty przecięcia z osiami:
 $(-1, 0)$, $(0, 2)$, funkcja przyjmuje warto-
ści dodatnie dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, funkcja
nie przyjmuje wartości ujemnych

124. $g(x) = h(x) = i(x) = j(x)$, $f(x) = m(x)$

125. a) $y = -27$, $(0, -26)$, $(\frac{3}{2}, 0)$, b) $y = 0$, $(0, 1, 3^7)$, c) $y = 0,8$, $(0, 1, 8)$, d) $y = 0$, $(0, \frac{1}{e^2})$,
e) $y = -4$, $(0, -3)$, $(\log_{\sqrt{3}} 4, 0)$, f) $y = 2$, $(0, 2\frac{1}{11})$

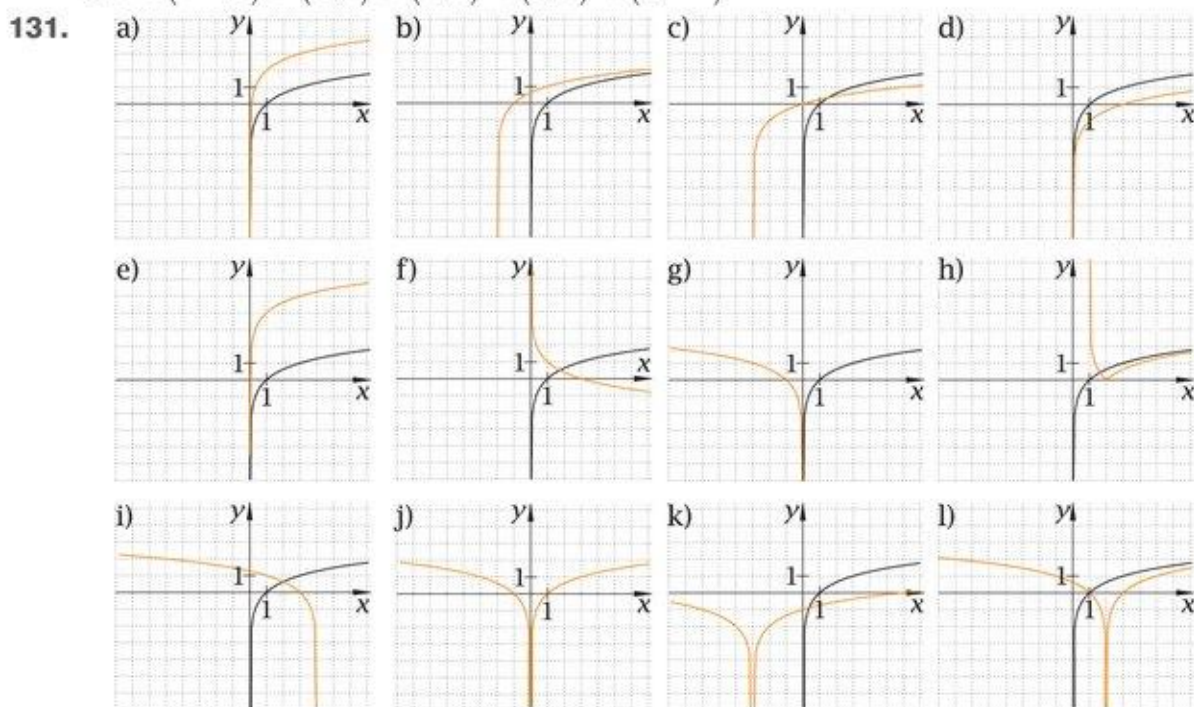
126. a) $a = 5$ i $b = -\frac{1}{2}$, b) $a = \frac{1}{16}$ i $b = 2$

127. $f(x) = 3^{\frac{1}{3}x}$, $g(x) = 3^{-\frac{1}{2}x}$, $h(x) = 2^{-\frac{1}{4}x}$

129. a) $D = (\frac{1}{4}; +\infty) \setminus \{1\}$, b) $D = (4; 6) \setminus \{5\}$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$

130. a) $x \in (2; 4) \setminus \{\sqrt{5}\}$, b) $x \in (\frac{1}{8}; +\infty) \setminus \{1\}$, c) $x \in (2; +\infty) \setminus \{\sqrt[3]{9}\}$,

d) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; 4) \cup (4; 5) \cup (5; 6) \cup (6; +\infty)$



132. $f_1(x) = f_6(x)$, $f_3(x) = f_7(x)$

133. ① — ①, ② — ③, ③ — ④, ④ — ②

134. a) $a = 2$, b) $a = 10$, c) $a = \frac{1}{3}$, d) $a = \sqrt{5}$, e) $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$, f) $a = 4$

135. $f(x) = \log_{3,5} x$, $g(x) = \log_{\sqrt{3}} x$, $h(x) = \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} x$

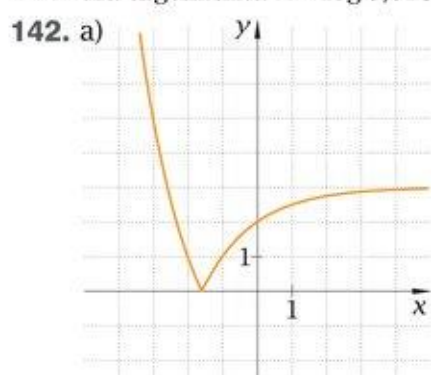
136. a) $m = \ln 62,5$ i $n = 3$, b) $m = \frac{1}{3}$ i $n = -\log_3 10$

137. a) $a = 3$, $b = -1$, b) $a = \frac{1}{3}$, $b = 3$

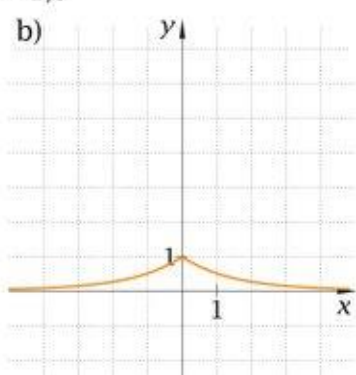
138. a) g, h , b) f, h, k , c) g , d) f, g , e) f, g, h , f) f, h

139. a) $x = -1, (0, 0)$, b) $x = 4, (5, 0)$, c) $x = 0, (\frac{1}{25}, 0)$, d) $x = 0, (\frac{1}{1000}, 0)$, e) $x = 0, (7, 0)$,
f) $x = 0, (\frac{1}{10}, 0)$, g) $x = 1, (5, 0)$, h) $x = -2, (0, 1 + \ln 2), (\frac{1}{e} - 2, 0)$, i) $x = 0, (5^5, 0)$

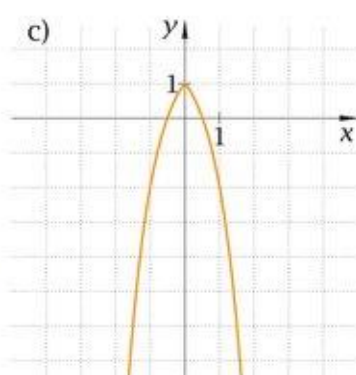
141. dla argumentu $x = \log 0,025 \approx -1,6$



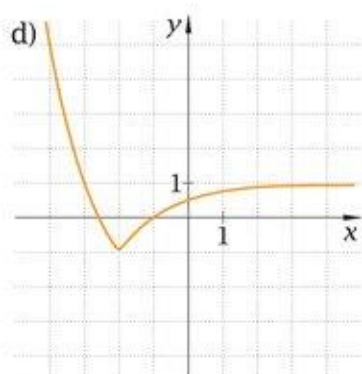
$\langle 0; +\infty \rangle$



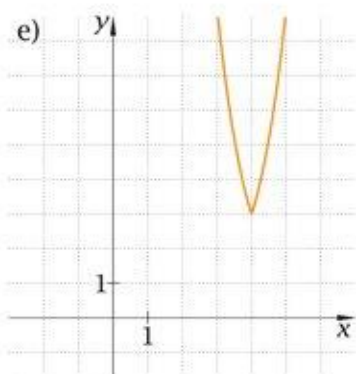
$\langle 0; 1 \rangle$



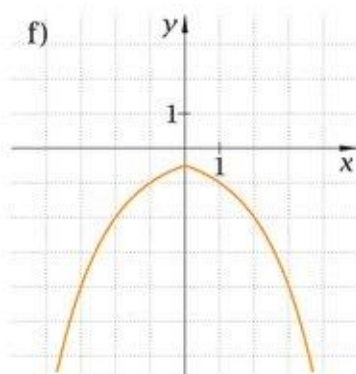
$\langle -\infty; 1 \rangle$



$\langle -1; +\infty \rangle$



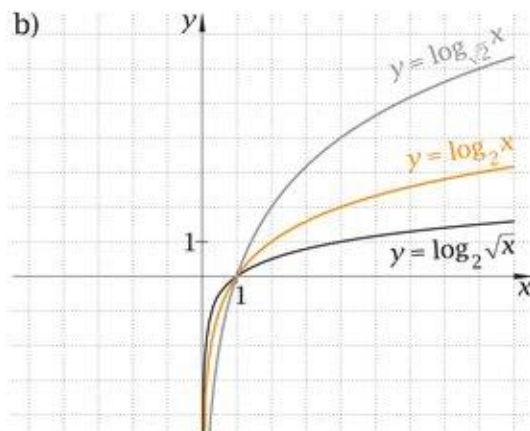
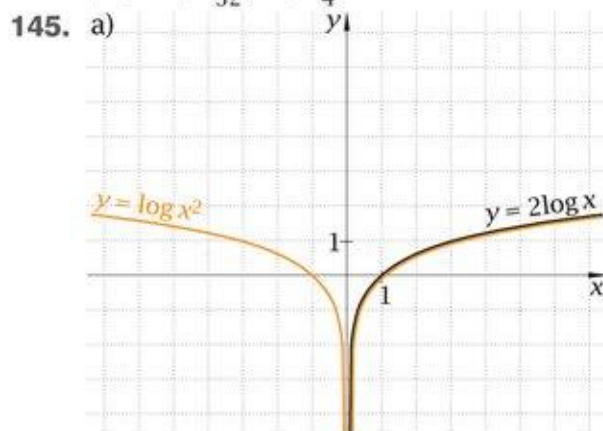
$\langle 3; +\infty \rangle$

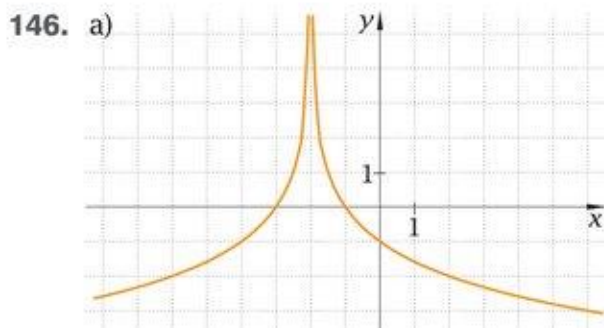


$\langle -\infty; -\frac{1}{2} \rangle$

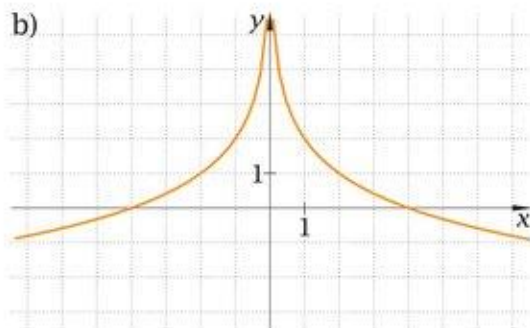
143. a) $\frac{47}{16}$, b) 13, c) $\frac{6\sqrt{2}+3}{4}$

144. a) 2, b) $2\frac{17}{32}$, c) $5\frac{1}{4}$





dziedzina: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, zbiór wartości: $\mathbb{R}$,
miejsce zerowe: $x = -3$, $x = -1$, funkcja
rosnąca w przedziale $(-\infty; -2)$, funk-
cja malejąca w przedziale $(-2; +\infty)$,
asymptota pionowa: $x = -2$



dziedzina: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, zbiór wartości: $\mathbb{R}$,
miejsce zerowe: $x = -4$, $x = 4$, funkcja
rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$, funkcja
malejąca w przedziale $(0; +\infty)$, asymp-
tota pionowa: $x = 0$

147. a) $x = 1$, b) $x = 1$, c) $x = 2$

148. a) $x \in \langle 1; 3 \rangle$, b) $x \in (0; 2)$, c) $x \in \mathbb{R}$

150. Wskazówka. Sporządź wykresy odpowiednich funkcji.

151. $k \geq 1$

152. a) $x = -1$, b) $x = \frac{1}{2}$, c) $x = \frac{2}{3}$, d) $x = \frac{4}{3}$, e) $x = -2$, f) $x = \frac{1}{3}$, g) $x = -4$, h) $x = -6$,
i) $x = \frac{3}{2}$

153. a) $x = 1$, b) $x = \frac{1}{2}$, c) $x = 3$, d) $x = -1$, e) $x = -\frac{1}{2}$, f) $x = \frac{3}{2}$

154. a) $x = 9$, b) $x = -\frac{1}{2}$, c) $x = 2$

155. a) $x = \sqrt{5}$, b) $x = 1000$, c) $x = -\frac{16}{81}$

156. a) $x = 3$, b) równanie sprzeczne, c) $x = 1$, d) $x = 3$, e) równanie sprzeczne,
f) $x = 2,5$

157. a) $x = 49$, b) $x = \sqrt{10}$, c) $x = 216$, d) $x = \sqrt{2}$, e) $x = 2$, f) $x = \frac{9}{4}$

158. a) $x = 7$, b) $x = \frac{1}{4}$, c) $x = 2$, d) $x = 96$, e) $x = 25$, f) $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

159. a) $x = -3$, b) $x = 4$, c) $x = \frac{3}{2}$, d) $x = -2$, e) $x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, f) $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, g) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, h) $x = -1$, i) $x = 1$, j) $x = 3$, k) $x = 2$, l) $x = 1$

160. a) $x = -\frac{2}{3}$, b) $x = 5\frac{2}{3}$, c) $x = -\frac{7}{2}$, d) $x = -1$, e) $x = -4$, f) $x = -5$, g) $x = 6\frac{1}{2}$, h) $x = 4$

161. a) $x = -1$, b) $x = 4$, c) $x = -\frac{1}{5}$, d) $x = 2,5$, e) $x = \frac{7}{16}$, f) $x = -\frac{4}{21}$, g) $x = -\frac{3}{7}$,
h) $x = -\frac{1}{3}$

162. a) $x = 2$, b) $x = 4$, c) $x = -2$, d) $x = \frac{5}{4}$, e) $x = \frac{3}{2}$, f) $x = -1$, g) $x = 3$, h) $x = -1$

163. a) $x = -1$, b) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, c) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, d) $x = -\frac{1}{2}$, e) $x = -2$, f) $x_1 = -3$,
 $x_2 = 3$, g) $x = 0$, h) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$

164. a) $x = \log_2 5$, b) $x = \log_5 \frac{7}{25}$, c) $x = \log_{0,1} 10\sqrt{30}$, d) $x = \log_3 \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$, e) $x = \log_2 \frac{3}{2}$,
f) $x = \log_{21} 25$, g) $x = \log_{12} 5$, h) $x = \log 3$, i) $x = \log_3 \frac{5}{7}$, j) $x = \log_6 2\sqrt[3]{3}$,
k) $x = \log_3 2$, l) $x = \log_2 \sqrt{3}$, m) $x = \log_5 6$, n) $x_1 = 0$, $x_2 = \log_5 7$, o) $x_1 = 0$,
 $x_2 = \log_3 \frac{5}{3}$

165. a) $x = 14$, b) $x = 80$, c) $x = 24$, d) $x = \frac{2}{9}$, e) $x_1 = 2\sqrt{3}$, $x_2 = -2\sqrt{3}$, f) $x = 12$, g) $x = \sqrt[3]{2}$,
h) $x = 3\sqrt{2}$

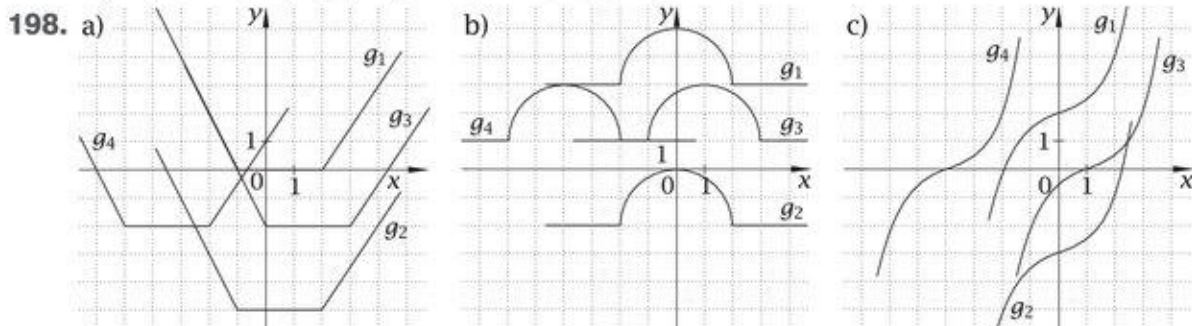
166. a) $x \in \emptyset$, b) $x_1 = 1,5$, $x_2 = 2,5$, c) $x_1 = -6$, $x_2 = -1,5$, d) $x_1 = -1 + \sqrt{6}$, $x_2 = 3$

167. a) $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = \sqrt{5}$, b) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 8$, c) $x_1 = -2\sqrt{2}$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2\sqrt{2}$, d) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$
168. a) $x = 2$, b) $x = \frac{1}{32}$, c) $x = \sqrt{3}$, d) $x = \frac{1+\sqrt{1+\frac{2}{e}}}{2}$, e) $x = 1$, f) równanie sprzeczne, g) $x = \frac{100}{99}$, h) równanie sprzeczne
169. a) $x = 1$, b) $x = 2$, c) $x = 2$
170. a) $x_1 = 1$, $x_2 = e^2$, b) $x_1 = 0,1$, $x_2 = 10\sqrt{10}$, c) $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, d) $x = \frac{5}{4}$, e) $x_1 = 62$, $x_2 = -1\frac{63}{64}$, f) równanie sprzeczne
171. a) $x = 0,1$, b) $x = 27$, c) $x = 8$, d) $x \in \mathbb{R}_+$, e) $x = \frac{1}{64}$, f) $x = 512$
173. $x = 3$
174. a) $x = \frac{1}{2}$, b) $x = 1$, c) $x = 2$, d) $x = \frac{5}{3}$, e) $x = 1,5$, f) równanie sprzeczne
175. a) $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, b) $x = 1$, c) równanie sprzeczne, d) $x = 2$, e) $x = 1$, f) równanie sprzeczne, g) $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$, h) równanie sprzeczne
176. a) dla $m \leq -1$ brak rozwiązań, dla $m > -1$ jedno rozwiązanie $x = \log_4(m+1)$, b) dla każdego $m \in \mathbb{R}$ jedno rozwiązanie $x = \log 17 - m$, c) dla $m \leq 0$ brak rozwiązań, dla $m > 0$ jedno rozwiązanie $x = \log_2 m - m$
177. a) dla $m \in (-\frac{1}{9}; 0)$ brak rozwiązań, dla $m \in \{-\frac{1}{9}, 0\}$ jedno rozwiązanie, dla $m \in (-\infty; -\frac{1}{9}) \cup (0; +\infty)$ dwa rozwiązania, b) dla $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ jedno rozwiązanie, dla $m \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ dwa rozwiązania, dla $m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ trzy rozwiązania
178. a) $x_0 = 5$, $x \in (1; 5)$, b) $x_0 = -\frac{19}{12}$, $x \in (-\frac{5}{3}; -\frac{19}{12})$, c) $x_0 = 16$, $x \in (16; +\infty)$, d) $x_0 = -\frac{10}{3}$, $x \in (-4; -\frac{10}{3})$
179. a) $x = \frac{1}{14}$, b) $x = 1$, c) $x = \frac{34}{31}$, d) równanie sprzeczne, e) $x = 3$ lub $x = 6$, f) $x = e^{\frac{1}{1+\log e}}$
180. a) $x = e^3$, $y = e^5$ lub $x = e^5$, $y = e^3$, b) $x = 1$, $y = 0$, c) $x = 4$, $y = 16$
181. a) $x = e^{\frac{\ln 2}{2-\ln 2}}$, b) $x = e^{\frac{1}{1-\log e}}$, c) równanie sprzeczne Wskazówka. Naszkicuj wykres funkcji.
182. a) dla każdego $m \in \mathbb{R}$ jedno rozwiązanie, b) dla $m \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ jedno rozwiązanie, dla $m \in (-\infty; 0) \cup \{1\}$ logarytm nie jest określony, c) dla $m \in (2; +\infty)$ dwa rozwiązania, dla $m = 2$ jedno rozwiązanie, dla $m \in (0; 1) \cup (1; 2)$ brak rozwiązań, dla $m \in (-\infty; 0) \cup \{1\}$ logarytm nie jest określony
183. a) 10 000; około 15 200, b) po około 11,5 godz.
184. a) 10^6 , b) około 1 217 000, c) po około 18 minutach; po około 28 minutach, d) $D = \langle 0; t_{\max} \rangle$, gdzie $t_{\max} \approx 176$, e) około $3,4 \cdot 10^{30}$ bakterii; 3,4 bln ton
185. a) około 1875 mln, b) w 1926 r.
186. o około 2,3%
187. $\sqrt{10}$ razy, czyli ponad 3 razy
188. a) $m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2,63}}$, b) około 93%, c) po około 17,5 h
189. a) o około 8%, b) o około 22%
190. a) około 730 hPa, około 540 hPa, b) około 5200 m n.p.m.
191. a) $pH \approx 3,89$, b) we krwi: $4 \cdot 10^{-8}$ moli/dm³; w soku cytrynowym: $5 \cdot 10^{-3}$ moli/dm³, c) około 126 razy
192. $A = 10^{2,2}$, większa
193. Syriusz; około 24 razy
194. $c = b$, $k = \ln a$

195. $a \approx 0,2$, $b \approx 1,5$

196. o 11^{08}

197. a) $y = f(x - 5)$, b) $y = f(x + 3)$, c) $y = f(x) + 10$, d) $y = f(x) - 4$, e) $y = f(x - 2) + 1$,
f) $y = f(x + 7) + 6$, g) $y = f(x - 8) - 12$, h) $y = f(x + 9) - 11$



199. a) $g(x) = f(x - 2) + 1$, b) $g(x) = f(x - 1) - 2$, c) $g(x) = f(x + 1) - 2$

200. a) $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$, b) $g(x) = (x - 3)^3$, c) $g(x) = -\frac{(x + 2)^3}{2}$

201. a) $g(x) = (x - 5)^2$; o 5 jednostek w prawo, b) $g(x) = \sqrt{x + 2}$; o 2 jednostki w lewo,
c) $g(x) = \frac{1}{x + 3} - 4$; o 3 jednostki w lewo i o 4 jednostki w dół, d) $g(x) = (x - 1)^3 + 7$;
o 1 jednostkę w prawo i o 2 jednostki w górę, e) $g(x) = x^2 + 6x + 6$; o 4 jednostki w lewo
i o 5 jednostek w dół, f) $g(x) = \frac{3}{x - 8} - 3$; o 4 jednostki w prawo i o 3 jednostki w dół,
g) $g(x) = 3^{x + 2} + 1$, o 2 jednostki w lewo i o 3 jednostki w górę, h) $g(x) = \log_2(x - 8) - 1$,
o 3 jednostki w prawo i o 2 jednostki w dół

202. a) $y = -2x^7 + 2$, b) $y = -2x^7 - 3$, c) $y = -2(x + 1)^7$, d) $y = -2(x - 2)^7$, e) $y = -2(x + 3)^7 + 1$,
f) $y = -2(x - 2)^7 - 1$, g) $y = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^7 + \frac{1}{2}$, h) $y = -2\left(x + \frac{2}{7}\right)^7 - \frac{2}{7}$

203. a) o 3 jednostki w prawo, b) o 5 jednostek w dół, c) o 1 jednostkę w lewo i o 2 jednostki w dół,
d) o $\frac{1}{2}$ jednostki w lewo i o $\frac{1}{3}$ jednostki w górę, e) o 6 jednostek w prawo
i o 4 jednostki w dół, f) o 5 jednostek w lewo i o 3 jednostki w dół, g) o 2 jednostki
w prawo i o 1 jednostkę w górę, h) o 2 jednostki w prawo i o 1 jednostkę w dół

204. a) $y = 2x + 10$, b) $y = 5(x + 2)^2 + 2$, c) $y = 2|x - \sqrt{2}| + 1 - \sqrt{2}$, d) $y = \frac{3}{x - 5} + 1$, e) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x + 4} + 3$,
f) $y = \log(x - 2) - 5$

205. a) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1} - 2$, b) $f(x) = \frac{(x + 2)^4}{16} + 2$, c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

206. a) $f(x) = (x - 2)^2 - 5$, b) $f(x) = \frac{3}{x + 4} - 6$, c) $f(x) = |x - 3| - 1$, d) $f(x) = \sqrt{x - 2\frac{1}{2}} + 1$,
e) $f(x) = 2^{x - 4} + 15$, f) $f(x) = \log(x - 4) + 1$

207. a) o 1 jednostkę w dół, b) o 1 jednostkę w lewo, c) o 3 jednostki w dół,
d) o 5 jednostek w prawo, e) o 5 jednostek w prawo i o 3 jednostki w górę,
f) o 2 jednostki w lewo i o 6 jednostek w dół

208. a) o 2 jednostki w górę, b) o 5 jednostek w lewo i o 2 jednostki w dół,
c) o 6 jednostek w lewo i o 10 jednostek w dół,
d) o 3 jednostki w prawo i o 3 jednostki w górę,
e) o 4 jednostki w lewo i o 4 jednostki w dół,
f) o 12 jednostek w prawo i o 20 jednostek w górę

209. a) brak punktów przecięcia, b) (2, 4), c) (0, 0) oraz (-2, -8)

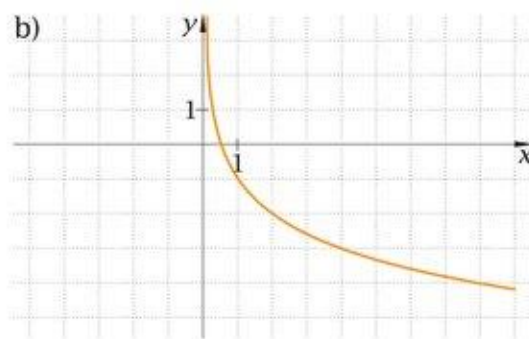
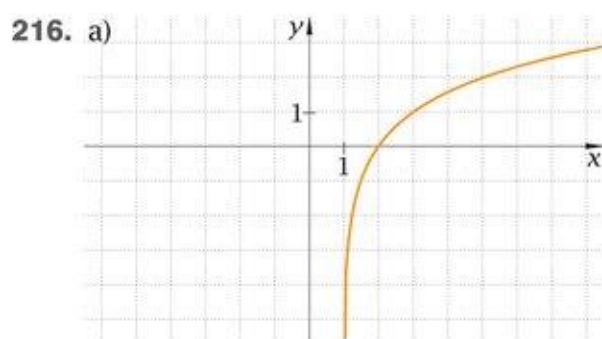
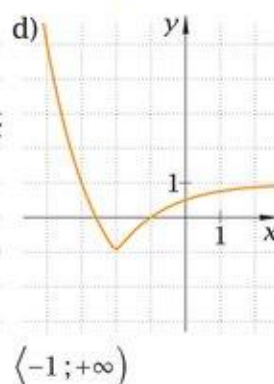
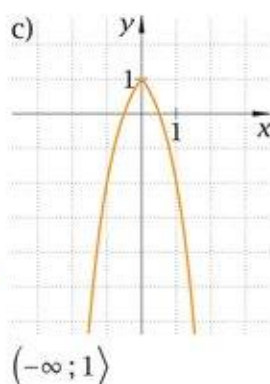
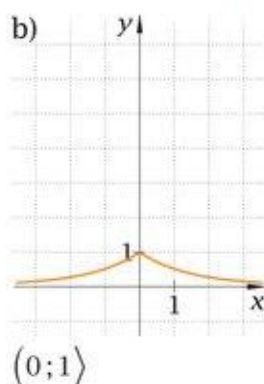
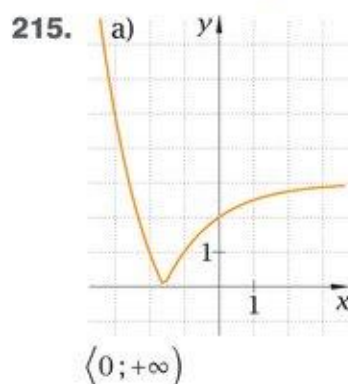
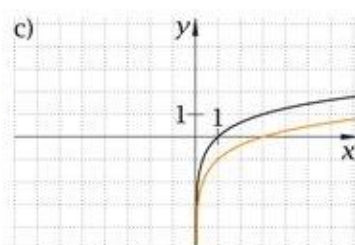
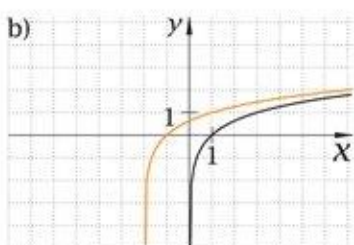
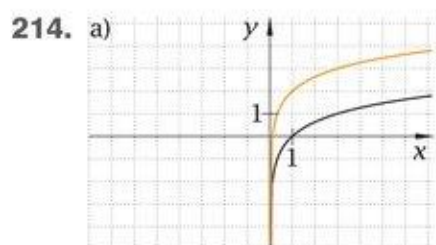
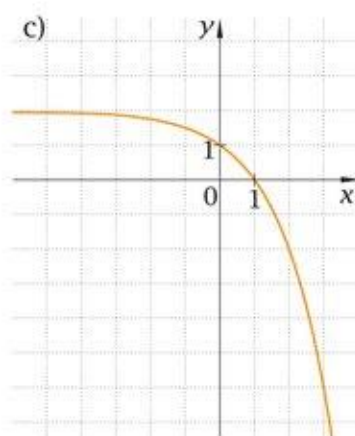
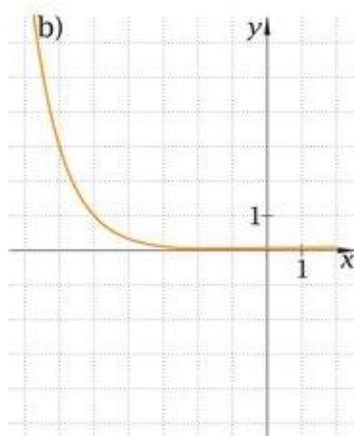
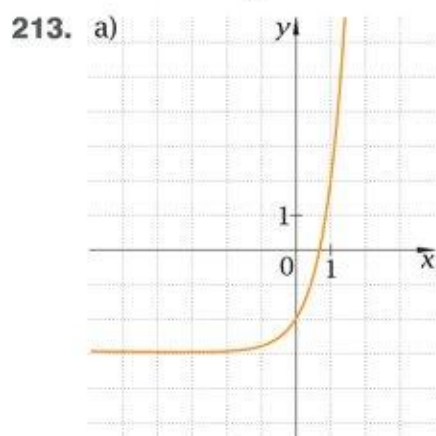
210. a) $x \in (2; 7)$; $g(x) \in (2; 4)$, b) $x \in (4; 9)$; $g(x) \in (4; 6)$, c) $x \in (3; 8)$; $g(x) \in (8; 10)$,
d) $x \in (-4; 1)$; $g(x) \in (13; 15)$, e) $x \in (7; 12)$; $g(x) \in (16; 18)$, f) $x \in (-19; -14)$,
 $g(x) \in (-12; -10)$

211. a) jedno, b) dwa, c) jedno, d) jedno

212. a) funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$, malejąca w przedziale $(2; +\infty)$,

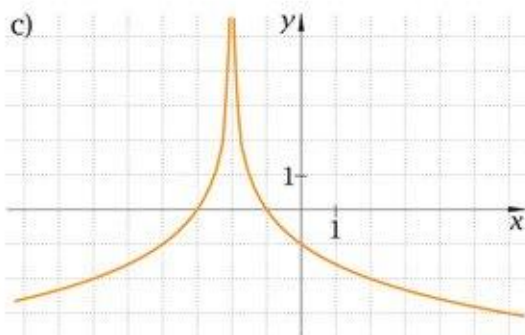
b) funkcja g osiąga największą wartość równą 8 dla argumentu 5,

c) $x_1 = -8$, $x_2 = -4\frac{1}{2}$, $x_3 = 4 - 3\sqrt{2}$

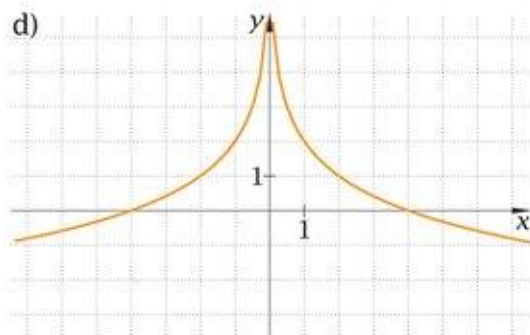


dziedzina: $x \in (1; +\infty)$, zbiór wartości: $\mathbb{R}$, miejsce zerowe: $x = 2$, funkcja rosnąca w przedziale $(1; +\infty)$, asymptota pionowa: $x = 1$

dziedzina: $x \in (0; +\infty)$, zbiór wartości: $\mathbb{R}$, miejsce zerowe: $x = \frac{1}{2}$, funkcja malejąca w przedziale $(0; +\infty)$, asymptota pionowa: $x = 0$



dziedzina: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, zbiór wartości: $\mathbb{R}$,
miejsce zerowe: $x = -3$, $x = -1$, funkcja
rosnąca w przedziale $(-\infty; -2)$, funk-
cja malejąca w przedziale $(-2; +\infty)$,
asymptota pionowa: $x = -2$



dziedzina: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, zbiór wartości: $\mathbb{R}$,
miejsce zerowe: $x = -4$, $x = 4$, funkcja
rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$, funkcja
malejąca w przedziale $(0; +\infty)$, asymp-
tota pionowa: $x = 0$

217. a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{dla } x < 3 \\ x + 4 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} |x + 2| - 1 & \text{dla } x < -3 \\ 2 - x & \text{dla } x \geq -3 \end{cases}$

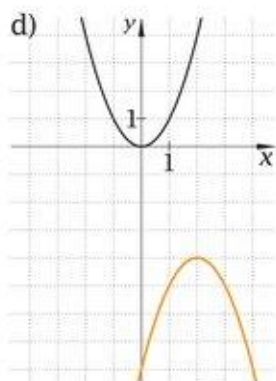
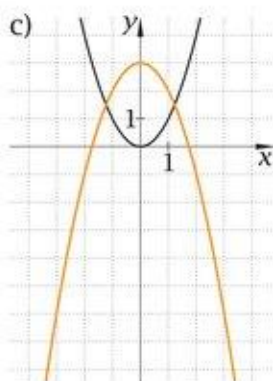
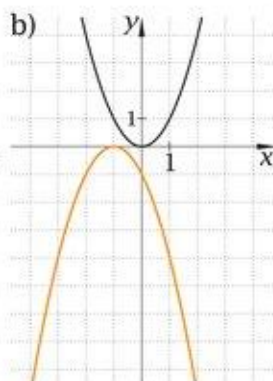
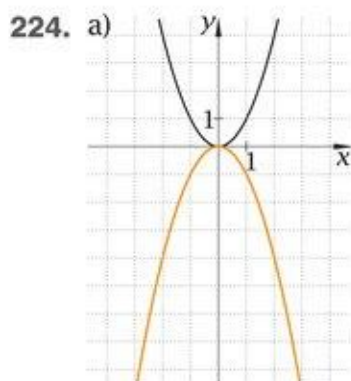
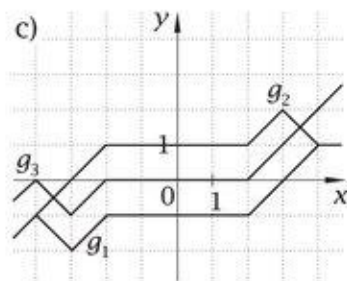
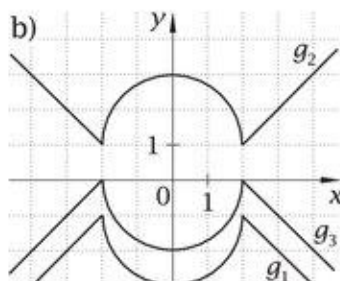
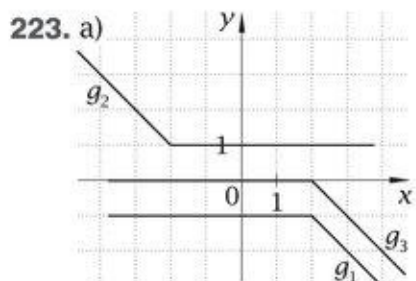
218. a) $f(x) \in \mathbb{R}$, funkcja rosnąca w przedziałach $(-\infty; 1)$ oraz $(4; +\infty)$, funkcja malejąca w przedziale $(1; 4)$, miejsca zerowe: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, b) $m = -1$ lub $m = 2$

219. a) $f(x) = \begin{cases} -5 & \text{dla } x \in \langle -4; 1 \rangle \\ -x - 6 & \text{dla } x \in (1; 3) \\ x^2 - 12 & \text{dla } x \in \langle 3; 5 \rangle \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x \in \langle 0; 5 \rangle \\ -x + 8 & \text{dla } x \in (5; 7) \\ (x - 4)^2 - 2 & \text{dla } x \in \langle 7; 9 \rangle \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 8 & \text{dla } x \in \langle -11; -6 \rangle \\ -x & \text{dla } x \in (-6; -4) \\ (x + 7)^2 + 1 & \text{dla } x \in \langle -4; -2 \rangle \end{cases}$

220. I, II

221. a) $q = 15$, b) $q = ap$



225. a) zbiór wartości: $\langle -7; 2 \rangle$, $x_0 = 3$, b) zbiór wartości: $\langle -2; 7 \rangle$, $x_0 = -3$, c) zbiór wartości: $\langle -2; 7 \rangle$, $x_0 = 8$, d) zbiór wartości: $\langle -7; 2 \rangle$, $x_0 = 8$

226. a) $y = -(x+2)^3$, b) $y = -\frac{\sqrt{3}}{x^2} + 3$, c) $y = \frac{(-x-2)^4}{3} = \frac{(x+2)^4}{3}$

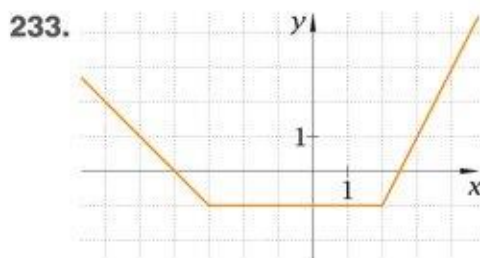
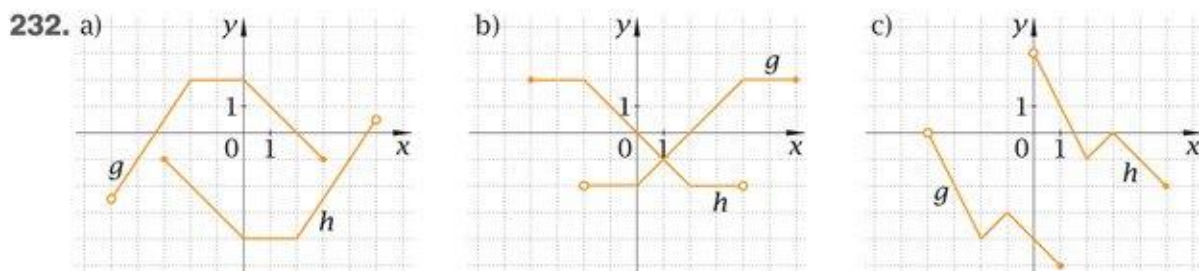
227. a) $g(x) = 3x - 2$, b) $g(x) = 3x + 2$, c) $g(x) = -x^2 + 2x - 3$, d) $g(x) = x^2 + 2x + 3$,
e) $g(x) = -(x+2)^2 + 3$, f) $g(x) = (-x+2)^2 - 3 = (x-2)^2 - 3$, g) $g(x) = -2x + \frac{3}{x+3} - 6$,
h) $g(x) = -2x + \frac{3}{x-3} + 6$, i) $g(x) = -2x + \frac{3}{x-3} + 6$, j) $g(x) = -2x + \frac{3}{x-3} + 6$

228. a) $g(x) = -2x^3 - x^2 + 7x$, $h(x) = -2x^3 + x^2 + 7x$, b) $g(x) = \frac{-x^2-4}{2x+1}$, $h(x) = \frac{x^2+4}{-2x+1}$,
c) $g(x) = 3(x+2)^2$, $h(x) = -3(x-2)^2$, d) $g(x) = -x^2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$, $h(x) = x^2\sqrt{-x} - \frac{1}{x}$,
e) $g(x) = -4x^3 + 3x$, $h(x) = -4x^3 + 3x$, f) $g(x) = -\log(x-4)$, $h(x) = \log(-x-4)$

229. a) $g(x) = 2x - 3$, b) $g(x) = -x^2 - 4x - 5$, c) $g(x) = x^3 - x^2 - x$, d) $g(x) = \frac{4}{x} - x^2$

230. ① — ④, ② — ③, ③ — ①, ④ — ②

231. a) funkcja g jest malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$, stała w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 2; +\infty \rangle$, b) funkcja g jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -2)$, stała w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 1; +\infty \rangle$, c) funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -2)$, stała w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 1; +\infty \rangle$, d) funkcja g jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$, stała w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 1; +\infty \rangle$, e) funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -1)$, stała w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 2; +\infty \rangle$, f) funkcja g jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -2)$, stała w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 1; +\infty \rangle$

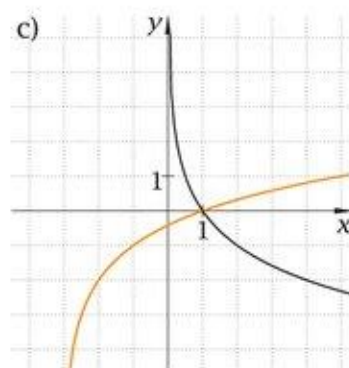
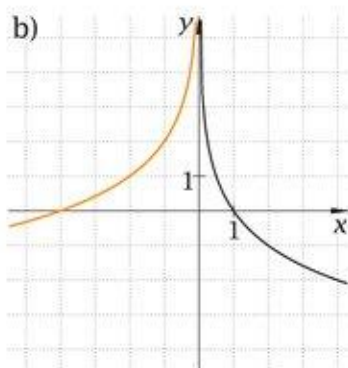
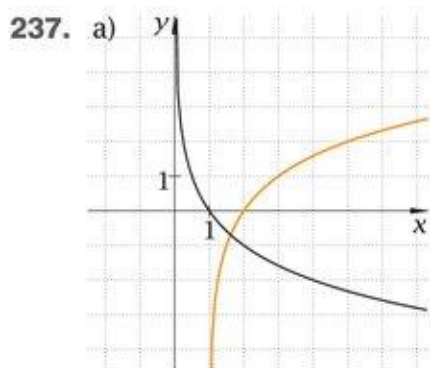


a) $y \in (-\infty; 1]$, b) $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = 4$, c) $x \in (-\infty; -7]$, d) $x \in \langle -2; 3 \rangle$

234. a) funkcja g przyjmuje największą wartość równą 5 dla argumentu -3 , b) nie można stwierdzić, jaka jest największa wartość funkcji g , c) funkcja g przyjmuje największą wartość równą 6 dla argumentu 0

235. a) dziedzina: $\langle -5; 7 \rangle$; zbiór wartości: $\langle -2; 3 \rangle$, b) dziedzina: $\langle -7; 5 \rangle$; zbiór wartości: $\langle -3; 2 \rangle$,
c) dziedzina: $\langle -8; 4 \rangle$; zbiór wartości: $\langle -3; 2 \rangle$

236. a) $x_1 = -5$, $x_2 = 3$, b) $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, c) $x_1 = -5$, $x_2 = 3$, d) $x_1 = 2$, $x_2 = 10$



238. a) $g(x) = -2(x-2)^2 + 3$, b) $g(x) = -2(x-2)^2 - 1$, c) $g(x) = 2(x+1)^2 - 7$, d) $g(x) = 2(x-7)^2 - 7$,
e) $g(x) = -2x^2$

PRZED SPRAWDZIANEM

1. D

2. B

3. C

4. A

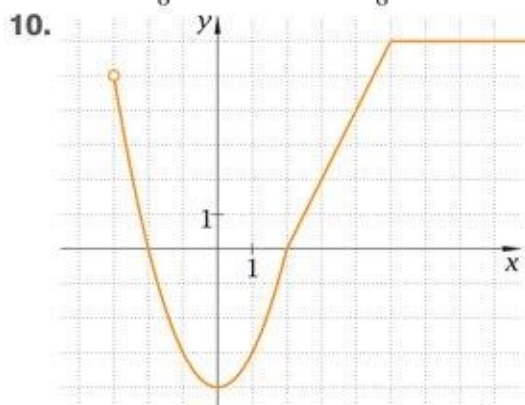
5. C

6. C

7. A

8. a) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 2$, b) $x = 7$

9. $f(x) = -\frac{1}{8}(x+3)(x-5) = -\frac{1}{8}(x-1)^2 + 2$



a) dziedzina: $(-3; +\infty)$, zbiór wartości: $\langle -4; 6 \rangle$, b) funkcja malejąca w przedziale $(-3; 0)$, rosnąca w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$, stała w przedziale $\langle 5; +\infty \rangle$, c) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

11. $a = 4$

12. a) $x = \frac{3}{7}$, b) $x = \frac{1}{2}$, c) $x = -7$, d) $x = \sqrt{2}$

13. $g(x) = 3x^2 - 20x + 17$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{17}{3}$

14. a) dziedzina: $(-3; 2]$, zbiór wartości: $(-7; 8]$, $x_0 = -\frac{2}{3}$, b) dziedzina: $\langle -2; 3 \rangle$, zbiór wartości: $\langle -8; 7 \rangle$, $x_0 = \frac{2}{3}$

15. B

16. D

17. B

18. C

19. $A = (5, 72)$, $B = (-\sqrt{2}, 8 + \sqrt{2})$, $C = (\sqrt{2}, 8 - \sqrt{2})$

20. a) $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$, b) $x \in (-\infty; -6) \cup \left(\frac{3}{2}; \sqrt{6}\right)$, c) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$
 21. a) $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \langle 4; +\infty \rangle$, b) $x \in (-\infty; 2) \setminus \{-\frac{1}{3}\}$
 22. $x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 2\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$; $W(x) = -2(x-1)(x+1)(x-3)$
 23. $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 3)$; $a = -3$, $b = -4$
 24. $m = -\frac{8}{3}$
 25. $x \in \langle 0; 2 \rangle \cup \left\langle 3\frac{1}{2}; 4 \right\rangle$
 26. a) $x = \frac{1}{2}$, b) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, c) $x = 5$, d) $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = 3$
 27. Wskazówka. Naskicuj we wspólnym układzie współrzędnych wykresy odpowiednich funkcji.

PRZED MATURĄ

1. A
 2. D
 3. B
 4. C
 5. A
 6. C
 7. C
 8. C
 9. $a = 3$, zbiór wartości $(-2; +\infty)$
 10. B
 11. B
 12. $a \in \left(-1; \frac{5}{2}\right)$
 13. $m = 1$, $x \in (-\infty; -3) \cup \left\langle -\frac{1}{2}; 2 \right\rangle$

FIGURY NA PŁASZCZYŹNIE. CZĘŚĆ 2

1. a) $\frac{7}{2\pi}$, b) $2\sqrt{\frac{10}{\pi}}$, c) $10\sqrt{\pi}$, d) $\frac{225}{\pi}$
 2. a) $25 - \frac{3}{2}\pi$, b) $15 - \frac{\pi}{2}$, c) 7, d) $10 + \frac{\pi}{4}$, e) 14
 3. a) około 17 km, b) około 3 arów
 4. a) $P = 5\pi$, długość łuku = 2π , b) $P = \frac{25}{4}\pi$, długość łuku = $\frac{15}{4}\pi$, c) $P = 25\pi - 50\sqrt{2}$,
 długość łuku = $\frac{5}{4}\pi$
 5. $\frac{1}{4}$ m, $\frac{\sqrt{2}}{4}$ m, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ m
 6. o $\frac{2}{9}\pi$
 7. $P = \frac{23}{45}\pi r^2$, obwód = $\frac{10}{3}r + \frac{34}{15}\pi r$
 8. a) $a^2 \frac{\pi + 3\sqrt{3}}{24}$, b) $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{3\sqrt{3} + \pi}$
 9. a) o 21%, b) o 19%, c) o 50%
 10. a) około 223 m, b) około 448 razy, c) około 149 obrotów
 11. a) $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2$, b) $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2$, c) $(2\pi - 3\sqrt{3})a^2$

12. a) $P = 21\frac{1}{3}\pi + 8\sqrt{3}$, obwód = $\frac{32\pi}{3}$, b) $P = \frac{50}{3}\pi + 4\sqrt{3}$, obwód = $\frac{34\pi}{3}$, c) $P = \frac{28}{3}\pi + 8\sqrt{3}$, obwód = 12π
13. a) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, b) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi-3\sqrt{3}}}$, c) $\sqrt{3}$
14. $r = 2$, $\alpha = 60^\circ$
15. 300 Wskazówka. Pole pierścienia jest równe $P = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R - r)(R + r)$, gdzie R i r oznaczają promienie odpowiednio większego i mniejszego okręgu. Zauważ, że różnica długości promieni okręgów jest dana, a sumę można obliczyć na podstawie obwodu.
16. minutowa około $1,6 \frac{\text{mm}}{\text{min}}$, godzinowa około $0,09 \frac{\text{mm}}{\text{min}}$
17. około $37 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$
18. a) około 9100 km, b) około $16'$
19. a) $32 - 8\pi$, b) $16\sqrt{3} - 8\pi$, c) $54 - 12,96\pi$
20. a) Wskazówka. Skonstruuj symetralne dwóch nierównoległych cięciw narysowanego okręgu. b) Wskazówka. Przez zaznaczony punkt poprowadź średnicę, a następnie skonstruuj do tej średnicy prostą prostopadłą w zaznaczonym punkcie. c) Wskazówka. Skonstruuj symetralną cięciwy. Z końca cięciwy zakresł łuk o promieniu dwa razy dłuższym niż cięciwa.
21. a) $11 + 8\pi$, b) $15 + 6\pi$ Wskazówka. Jeśli p to obwód wielokąta, a n ($n \in \mathbb{N}$) to liczba jego boków, to obwód powstałej figury jest równy $p - 2 \cdot 2 \cdot n + \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 2$.
22. a) $21\,600''$, b) $0,5'$
23. w Łukowie; o około 27 minut
24. $150\sqrt{3}$
25. Wskazówka. Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa.
26. a) Wskazówka. Skonstruuj trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości równe promieniom narysowanych kół. Długość przeciwprostokątnej tego trójkąta to promień szukanego koła. b) Wskazówka. Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa podobnie jak w podpunkcie a).
27. a) 35° , b) 36° , c) 17° , d) 100° , e) 30°
28. a) 70° , b) 50° , c) 20° , d) 74° , e) 42° , f) 49°
29. a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 80^\circ$, b) $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 115^\circ$, c) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 40^\circ$
30. a) $\alpha = 13^\circ$, $\beta = 65^\circ$, $\gamma = 38^\circ$, b) $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 140^\circ$, $\gamma = 64^\circ$, c) $\alpha = 106^\circ$, $\beta = 37^\circ$, $\gamma = 21^\circ$
31. $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $\delta = \omega = 45^\circ$, $\varphi = 45^\circ$
32. a) $\alpha = \beta$, b) $\alpha = 4\beta$, c) $\alpha = \frac{2}{3}\beta$
33. a) 130° , b) 120° , c) 60°
34. a) 15° , b) 100° lub 160° , c) 50° lub 80°
35. 25° , 40° , 115°
36. 45°
37. a) 45° , 60° , 75° , b) 70° , 90° , 110° , c) 72° , 96° , 108° , 120° , 144° , d) 105° , 115° , 125° , 135° , 145° , 155° , 165° , 135°
40. 120°
41. a) $\alpha = 160^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $\gamma = 40^\circ$, b) $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 25^\circ$, $\gamma = 65^\circ$
42. a) $\sqrt{3}$, b) 1, c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, d) 0
43. a) $\gamma = \frac{\alpha - \beta}{2}$, b) $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ Wskazówka. Narysuj odpowiedni kąt wpisany oparty na tym samym łuku co kąt α .
44. a) 80° , b) 40° , 20°

45. Wskazówka. Rozpatrz kąty jednego z trójkątów, którego wierzchołkami są punkt przecięcia opisanych w zadaniu prostych i środki dwóch sąsiednich łuków. Dwa z nich są kątami wpisanymi. Znajdź kąty środkowe oparte na tych samych łukach co te kąty wpisane.
46. a) 20° , b) 140° , c) 120°
47. $a = 2\sqrt{5} - 2$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$
48. a) $\frac{1}{8\sqrt{3}}$, b) $\frac{1}{8}$, c) $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}$
49. a) 1, b) 10, c) 9 lub 11, d) większa od 9 i mniejsza od 11, e) dodatnia mniejsza od 9 lub większa od 11
50. a) nie mniejszy niż $2r$, b) nie większy niż $R - r$
51. a) 4,5, b) 9, c) 21
52. a) 1 lub 7, b) $4\sqrt{2} - 3$ lub $4\sqrt{2} + 3$, c) $3 - \sqrt{5}$ lub $3 + \sqrt{5}$
54. a) 5,8, b) 1,8, c) 2,8, d) 3,8
55. a) $\sqrt{3}r^2$ b) $6r^2$ Wskazówka. Wykaż, że trójkąt jest prostokątny.
56. a) Wskazówka. Przez środek okręgu i zaznaczony punkt poprowadź prostą. Na tej prostej zaznacz dwa punkty, które są odległe od zaznaczonego punktu o połowę długości promienia narysowanego okręgu. Te punkty to środki szukanych okręgów. b) Wskazówka. Przez środek okręgu i zaznaczony punkt poprowadź prostą, a następnie skonstruuj prostą do niej prostopadłą przechodzącą przez zaznaczony punkt.
57. a) płaszczyznę, b) prostą, c) punkt
59. 50°
60. $180^\circ - \alpha$
61. 30°
62. a) Wskazówka. Zauważ, że trójkąty ASP i BTP są równoramienne.
63. a) $2\sqrt{ab}$
64. a) $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$, $\delta = 90^\circ + \alpha$, b) $\beta = 90^\circ - \alpha$, $\gamma = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\delta = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$
65. $\beta = 2\alpha - 90^\circ$
66. a) $(\sqrt{2} - 1)R$, b) $\frac{2}{3}R$
67. 1 lub 7
68. $2\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$
69. $10\frac{3}{7}$ Wskazówka. Oblicz wysokość trójkąta PSO (gdzie O jest środkiem okręgu) opuszczoną na ramię OS .
70. b) 9π
71. a) $P = 16 - 8\pi(2 - \sqrt{2})$, obwód $= 16 - 8\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\pi$, b) $P = \frac{4(3\sqrt{3} - \pi)}{3}$, obwód $= 4\left(1 + \frac{1}{3}\pi\right)$, c) $P = \frac{9}{4}(2\sqrt{3} - \pi)$, obwód $= 9 + \pi\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$
72. $P = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6}r^2$, obwód $= 2\pi r$
73. a) Wskazówka. Skonstruuj symetralną narysowanej cięciwy. Przez punkt, w którym ta symetralna przecina okrąg, poprowadź do niej prostą prostopadłą. b) Wskazówka. Skonstruuj okrąg, którego średnicą jest odcinek łączący środek narysowanego okręgu i zaznaczony punkt. Narysowane okręgi przecinają się w dwóch punktach. Każdy z nich może być punktem styczności szukanej prostej, zatem zadanie ma dwa rozwiązania.
74. Wskazówka. Skonstruuj okrąg współśrodkowy z narysowanym okręgiem, ale o promieniu dwa razy dłuższym, oraz prostą równoległą do narysowanej prostej odległą od niej o długość promienia narysowanego okręgu. Punkty przecięcia skonstruowanych okręgów i prostej są środkami dwóch okręgów, które spełniają warunki zadania.

75. 30° , 60° i 90°
77. a) czarna, b) $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi}$
78. 12 lub $2\sqrt{22}$
79. a) 5π , b) $6,75\pi$
80. a) $2\sqrt{Rr}$, b) $400\sqrt{3} - \frac{550}{3}\pi$ Wskazówka. Oblicz pole trapezu, którego wierzchołkami są środki okręgów i punkty styczności prostej z okręgami. c) 36 lub $\frac{36}{25}$
81. Wskazówka. Sposób I. W każdym z okręgów rozważ trójkąt, którego dwoma bokami są promienie, a trzecim bokiem jest cięciwa wycięta z prostej m . Trójkąty te mają równe odpowiednie kąty. Sposób II. Dorysuj styczną do obu okręgów w punkcie ich styczności i skorzystaj z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą.
82. Wskazówka. W każdym z okręgów rozważ trójkąt, którego dwoma bokami są promienie, a trzecim bokiem jest cięciwa wycięta z prostej PR . Trójkąty te mają odpowiednie kąty równe.
83. Wskazówka. Skorzystaj z faktu, że odległość między punktami styczności prostej AE do obu okręgów jest taka sama jak odległość między punktami styczności prostej AD do tych okręgów.
84. $\frac{6-4\sqrt{2}}{3}$
85. $\frac{1}{2}\pi r^2$
86. nie (zabraknie około 8 mm)
87. $(4 + \sqrt{3})2\frac{1}{4}$ cala $\approx 12,9$ cala $\approx 32,8$ cm
88. Można, ustawiamy 5 pionowych rzędów po 5 słoików, a między każde sąsiednie dwa takie rzędy wstawiamy 4 słoiki. (Każdy z nich będzie „styczny” do czterech innych słoików).
89. na południe od równoleżnika $66^\circ 33' S$
90. $\frac{(\sqrt{2}-1)d}{2}$, $\frac{d}{2}$
92. Wskazówka. Odległości między punktem przecięcia prostych a punktami styczności są równe.
93. Jeżeli wybrane punkty leżą na prostej prostopadłej do narysowanej prostej i są od niej jednakowo odległe, to istnieje nieskończenie wiele okręgów spełniających warunki zadania. Jeżeli wybrane punkty leżą na prostej prostopadłej do narysowanej prostej i nie są od tej prostej jednakowo odległe, to zadanie nie ma rozwiązań. W pozostałych przypadkach zadanie ma jedno rozwiązanie.
94. a) Wskazówka. Narysuj okrąg o tym samym środku co większy okrąg i promieniu równym różnicy promieni danych okręgów. Skonstruuj styczne do tego okręgu przechodzące przez środek mniejszego z danych okręgów. Dwie z szukanych prostych są równoległe do tych stycznych. Trzecia styczna jest prostopadła do odcinka łączącego środki okręgów. b) Wskazówka. Dwie z szukanych prostych można skonstruować w sposób opisany we wskazówce do podpunktu a).
95. a) Wskazówka. Skonstruuj prostą prostopadłą do narysowanej prostej przechodzącą przez środek narysowanego okręgu. Ta prosta przecina okrąg w dwóch punktach. Każdy z nich może być punktem styczności okręgu i szukanej prostej, więc zadanie ma dwa rozwiązania. b) Wskazówka. Skonstruuj prostą równoległą do narysowanej prostej przechodzącą przez środek narysowanego okręgu. Ta prosta przecina okrąg w dwóch punktach. Każdy z nich może być punktem styczności okręgu i szukanej prostej, więc zadanie ma dwa rozwiązania.

96. Wskazówka. Narysuj odcinek o długości równej obwodowi trójkąta, którego wierzchołkami są środki okręgów. Połowa tego odcinka ma długość a równą sumie trzech szukanych promieni. Odległość b między środkami dwóch z okręgów jest równa sumie promieni tych okręgów. Odcinek o długości $a - b$ jest promieniem trzeciego okręgu.
97. a) $40^\circ, 30^\circ$ i 110° , b) $|AB| = 8, |BC| = 7, |AC| = 9$
98. a) $3\sqrt{3} : \pi$, b) $4\pi : 3\sqrt{3}$
99. $\frac{81\pi}{4}$
100. a) $5\sqrt{6}$, b) 19,5
101. a) 2,5 Wskazówka. Wykaż, że trójkąt jest prostokątny. b) $\frac{\sqrt{33}}{2}$
102. promień okręgu opisanego = 6,5, promień okręgu wpisanego = 2
103. a) Wskazówka. Środek przeciwprostokątnej narysowanego trójkąta jest środkiem szukanego okręgu, a połowa przeciwprostokątnej jest jego promieniem. b) Wskazówka. Punkt przecięcia symetralnych dwóch boków trójkąta jest środkiem szukanego okręgu, a odcinek łączący ten punkt z dowolnym wierzchołkiem trójkąta jest jego promieniem.
104. a) Wskazówka. Punkt przecięcia symetralnych boków narysowanego trójkąta jest środkiem szukanego okręgu, a odległość tego punktu od boku jest jego promieniem. b) Wskazówka. Punkt przecięcia dwusiecznych dwóch kątów trójkąta jest środkiem szukanego okręgu, a odległość tego punktu od boku jest jego promieniem.
106. a) 30, b) 12,5
108. Wskazówka. Jeśli AE jest średnicą okręgu, to trójkąty BAD i AEC mają równe odpowiednie kąty.
110. a) $4 : 1$, b) $25 : 4$, c) $1 : (3 - 2\sqrt{2})$
111. a) r^2 , b) $\frac{4r^2}{5}$, c) $\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$
113. a) 3, b) $2\sqrt{2} + 3$
114. Wskazówka. Uzasadnij, że symetralna boku trójkąta o wierzchołkach w punktach styczności jest dwusieczną kąta trójkąta o wierzchołkach w środkach okręgów.
115. Wskazówka. Zauważ, że A, B i spodki opuszczonych z tych wierzchołków wysokości leżą na jednym okręgu. Odcinek łączący spodki wysokości to cięciwa tego okręgu.
116. Wskazówka. Zauważ, że dowolny trójkąt, którego wierzchołkami są wierzchołki danego wielokąta, jest wpisany w okrąg opisany na tym wielokącie.
117. a) $\alpha = 21^\circ, \beta = 69^\circ$, b) $\alpha = 36^\circ, \beta = 72^\circ$, c) $\alpha = 46^\circ, \beta = 46^\circ$
118. a) $\sqrt{91}$, b) $2\sqrt{5}$
120. a) Wskazówka. Rozważ czworokąt $AD'BC$, gdzie D' jest obrazem punktu D w symetrii względem prostej AB . b) 60°
124. Wskazówka. Zauważ, że $|\angle ACE| = |\angle ABC|$.
125. a) $\frac{\sqrt{85}}{3}$ Wskazówka. Promienie okręgu opisanego na trapezie poprowadzone do jego wierzchołków dzielą go na cztery trójkąty równoramienne. Suma wysokości dwóch z tych trójkątów jest równa wysokości trapezu. b) 6 i 8
126. $\sqrt{4b^2 - a^2}, 0 < a < b\sqrt{2}$ Wskazówka. Narysuj okrąg o środku A i promieniu b . Aby określić warunek, jaki muszą spełniać długości a i b , rozważ skrajne położenia odcinków AD i AC : gdy kąt między nimi jest bliski 180° i gdy kąt ten jest bliski 0° .
127. Wskazówka. Wykaż, że suma kąta trójkąta przy jednym z wierzchołków i kąta między wysokościami opuszczonymi z dwóch pozostałych wierzchołków jest równa 180° . Skorzystaj z własności czworokątów wpisanych w okrąg.
129. Wskazówka. Skonstruuj w danym okręgu dowolną cięciwę o długości jednego z danych odcinków. Skonstruuj symetralną tej cięciwy, a następnie dwie proste równoległe do

- tej symetralnej odległe od niej o połowę długości drugiego z danych odcinków. Każda z tych prostych przecina okrąg w dwóch punktach, które są wierzchołkami szukanego trapezu, zatem zadanie ma dwa rozwiązania.
- 130.** 20
- 131.** 5:2
- 132.** 20
- 134.** 21, 39, 45, 63
- 135.** a) 20, b) $96\sqrt{3}$
- 136.** Wskazówka. Wyraż kwadrat długości ramienia c trapezu za pomocą a , b i h , a następnie uzasadnij, że $2c = a + b$.
- 137.** $94\frac{2}{25}$ Wskazówka. Uzasadnij, że trójkąt SBC jest prostokątny. Zauważ, że $|PC| + |RB| = |BC|$, gdzie P i R są punktami styczności okręgu do podstaw.
- 138.** a) 3:16, b) 4:1, c) 28:9
- 139.** $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ i $\frac{2ab}{a+b}$
- 142.** a) 2:3, b) $\sqrt{6}:2$
- 144.** a) 1800° , b) 3240°
- 145.** a) 14, b) 65
- 146.** a) 150° , b) 156° , c) 162°
- 147.** 120° , 120° , 60° , 60°
- 148.** b) Wskazówka. Narysuj dowolny odcinek. Skonstruuj jego symetralną i zaznacz na niej odcinek o długości równej narysowanemu odcinkowi, tak aby oba odcinki przecinały się w połowie. Końce tych odcinków są wierzchołkami kwadratu. c) Wskazówka. Narysuj dowolny okrąg i zaznacz na nim punkty, tak aby odległość między dwoma kolejnymi punktami była równa promieniowi okręgu. Otrzymane punkty są wierzchołkami sześciokąta foremnego. d) Wskazówka. Skonstruuj kwadrat według wskazówki do podpunktu b) i symetralne jego boków. Zaznacz na nich cztery punkty, które są oddalone od punktu przecięcia symetralnych tak samo jak wierzchołki kwadratu. Narysuj kwadrat, łącząc otrzymane punkty. Punkty przecięcia boków obu narysowanych kwadratów są wierzchołkami ośmiokąta foremnego.
- 150.** a) tak; 14 kątów, b) nie istnieje, c) tak; 19 kątów
- 151.** a) tak; 6 boków, b) nie istnieje, c) tak; 10 boków, d) tak; 16 boków
- 152.** a) w sześciokącie, b) pięciokąt, c) w wielokątach, które mają co najmniej 6 boków
- 153.** a) tak; 18, b) nie istnieje, c) tak; 24, d) nie istnieje
- 155.** Wskazówka. Uzasadnij, że trójkąt ABC ma pole dwa razy większe od trójkąta ABO .
- 156.** $75\sqrt{3}$
- 158.** a) $\frac{4\pi}{(\pi-3)^2}$, b) $\frac{12\pi}{(6-\pi\sqrt{3})^2}$
- 159.** nie
- 160.** a) Wskazówka. Rozważ okrąg opisany na tym wielokącie. Kąty między przekątnymi poprowadzonymi z jednego wierzchołka są kątami wpisanymi w ten okrąg. b) dziewięć
- 161.** np. okrąg
- 163.** Wskazówka. Rozważ dwa przypadki: gdy dane punkty są współliniowe i gdy nie są współliniowe.
- 164.** $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{9+8k})$
- 165.** $\sqrt{2+\sqrt{2}}a$, $(1+\sqrt{2})a$, $\sqrt{4+2\sqrt{2}}a$
- 166.** $\sqrt{2-\sqrt{2}}r$

168. $100 - 750(7\sqrt{3} - 12)$

169. a) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$, b) $\sqrt{2} - 1$, c) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

170. $\frac{180^\circ}{n}$

171. a) $1,8^\circ$, b) 36° , c) $1,8^\circ$, d) 45°

PRZED SPRAWDZIANEM

1. B

2. B

3. D

4. A

5. D

6. C

7. B

8. D

9. C

10. C

11. C

12. $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$

14. $10\sqrt{3}$

15. $52,5^\circ$

17. B

18. D

19. A

20. D

21. D

22. C

23. A

24. D

25. A

26. C

27. D

28. $(10; 14)$

30. $1:2$

PRZED MATURĄ

1. C

2. B

3. B

4. C

5. C

8. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

11. C

12. $n = 18$

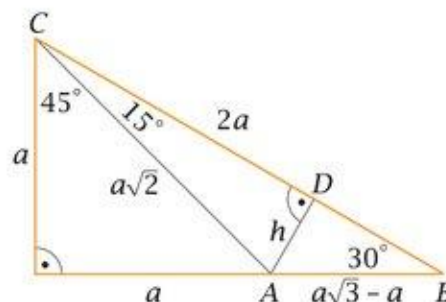
15. 72

TRYGONOMETRIA

1. a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = 2$, b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{3}$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = 3$, d) $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \beta = 1$,
e) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{2}$, f) $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \beta = 1$, g) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4}$, h) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{3}$
2. a) $\frac{4}{3}$, b) $\frac{13}{84}$, c) $\frac{3}{4}$, d) $2\frac{2}{5}$, e) $\frac{7\sqrt{15}}{15}$, f) $\frac{3}{2}$, g) $\frac{5\sqrt{35}}{35}$, h) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
3. a) $\frac{12}{5}$, b) $\sqrt{3}$, c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$, d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
5. $a = 1\frac{1}{2}$, $b = 3\frac{1}{3}$, $c = \frac{3\sqrt{53}}{2}$, $d = 7\frac{1}{2}$
6. $13\frac{1}{3}\%$ i 24%
7. a) $\operatorname{tg} \beta$, b) $\operatorname{tg} \beta$, c) $\operatorname{tg} \alpha$, d) $\operatorname{tg} \alpha$
8. a) γ , b) β , c) α , d) γ
9. a) $x = 3$, b) $x = \sqrt{22}$, c) $x = 2\frac{2}{15}$
10. a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{40}$, $\operatorname{tg} \beta = 40$, b) $\operatorname{tg} \alpha = 40$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{40}$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{7}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{7}{5}$, d) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3}$,
 $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{5}$, e) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{5}$, f) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5\sqrt{6}}{12}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$
11. a) 5 i 7; 17,5, b) $\sqrt{106}$, c) 30
12. 1
14. a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$, $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $\cos \alpha = \frac{24}{25}$, b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$, $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$,
c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6\sqrt{13}}{13}$, $\sin \alpha = \frac{6}{7}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$
15. a) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, b) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
c) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$
16. a) $\sin \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = 7$, b) $\sin \alpha = \frac{3}{7}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{7}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{20}$
17. a) $x = 1,25$, $y = 0,75$, b) $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, c) $x = 1$, $y = 2\sqrt{2}$, d) $x = \frac{10\sqrt{13}}{13}$, $y = \frac{4\sqrt{39}}{13}$
18. a) $\sin \alpha < \sin \beta$, b) $\cos \alpha < \cos \beta$, c) $\cos \alpha < \sin \beta$
19. a) $\sin 2^\circ < \sin 18^\circ$, b) $\sin 15^\circ > \sin 1,5^\circ$, c) $\cos 4^\circ > \cos 74^\circ$, d) $\cos 3^\circ < \cos 0,1^\circ$,
e) $\sin 20^\circ < \cos 20^\circ$, f) $\sin 50^\circ > \cos 50^\circ$
20. a) β , b) α , c) α , d) α
21. a, d, e
22. a) $\sin \alpha = 0,6$, $\cos \alpha = 0,8$, b) $\sin \alpha = 0,96$, $\cos \alpha = 0,28$, c) $\sin \alpha = 0,7$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{51}}{10}$
25. $\sin 5^\circ \approx 0,09$, $\operatorname{tg} 10^\circ \approx 0,18$, $\cos 17^\circ \approx 0,96$, $\sin 29^\circ \approx 0,48$, $\cos 57^\circ \approx 0,54$, $\sin 72^\circ \approx 0,95$,
 $\cos 85^\circ \approx 0,09$, $\operatorname{tg} 89^\circ \approx 57,29$
26. a) 0,92, b) 4,58, c) 1,44, d) 5,85, e) 4,81, f) 10,73, g) 0,07, h) 2,12, i) 0,02
27. a) około 11° , b) około 75° , c) około 8° , d) około 27° , e) około 35° , f) około 58° ,
g) około 67° , h) około 14° , i) około 84°
28. a) $a \approx 3,49$, b) $b \approx 6,43$, c) $c \approx 2,3$, d) $d \approx 2,38$, e) $e \approx 4,53$, f) $f \approx 0,18$, g) $g \approx 1,5$,
h) $h \approx 5,67$
29. a) $\alpha \approx 31^\circ$, $\beta \approx 59^\circ$, b) $\alpha \approx 38^\circ$, $\beta \approx 52^\circ$, c) $\alpha \approx 68^\circ$, $\beta \approx 22^\circ$, d) $\alpha \approx 39^\circ$, $\beta \approx 51^\circ$,
e) $\alpha \approx 59^\circ$, $\beta \approx 31^\circ$, f) $\alpha \approx 19^\circ$, $\beta \approx 10^\circ$
30. a) 2,35, b) 3,28, c) 4,72
31. a) 58,5 cm, b) około 9,4 cm i 3,4 cm, c) około 18,7
32. a) około $36,9^\circ$ i 53,1, b) około $22,6^\circ$ i 67,4, c) około $28,1^\circ$ i 61,9
33. a) $a \approx 1,8$, b) $b \approx 3,2$, c) $c \approx 2,9$, d) $d \approx 3,8$, e) $e \approx 1$, f) $f \approx 3,3$
34. a) $x \approx 2,2$, b) $x \approx 7,5$, c) $x \approx 7,8$

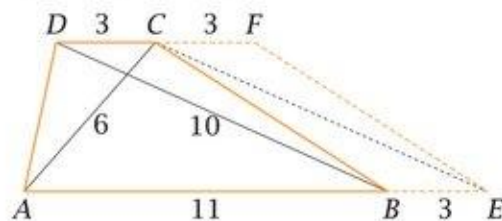
35. a) około 6,2 cm, b) około 16,7 cm, c) około 5,2 cm, d) około 2,9 cm, e) około 5,6 cm, f) około 4,1 cm
36. a) około 1,5a, b) około 11,3b, c) około 0,3c²
37. a) $\alpha \approx 29^\circ$, $\beta \approx 71^\circ$, b) $\alpha \approx 16^\circ$, $\beta \approx 110^\circ$, c) $\alpha \approx 19^\circ$, $\beta \approx 29^\circ$
38. a) około 44°, 68°, 68°, b) około 58° (i około 122°), c) około 35°, d) około 42°, e) około 44°, 136°, f) około 83°
39. około 100 cm²
40. o mniej
41. długości boków: około 3,3 cm i 2,2 cm, $P \approx 5,6 \text{ cm}^2$, przekątna: około 2,5 cm
42. około 5,4 cm
43. a) około 5,1 cm, b) około 35°
44. a) około 0,62, b) około 0,73
45. a) $\frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}$, b) $\frac{a^2 \cos \alpha \sin \alpha}{2}$, c) $\frac{h^2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$
46. a) $\frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}$, b) $\frac{Hh}{\sin \alpha}$, c) $\frac{h^2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} + ah$
47. a) około 7,9, b) około 28
48. a) około 1,5, b) około 29°
50. $\alpha \approx 37^\circ$, $\beta \approx 72^\circ$, $\gamma \approx 87^\circ$
51. około 73,7°, około 67,4°
52. a) $P = \frac{(a-b)(a+b) \operatorname{tg} \alpha}{4}$, b) $P = \frac{(2a \operatorname{tg} \alpha - h)h}{2 \operatorname{tg} \alpha}$
53. około 2,68°
54. a) $P \approx 8,2 \text{ cm}^2$, b) $P \approx 34 \text{ cm}^2$
55. a) $2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, b) $2r \sin \frac{180^\circ}{n}$
56. a) $\frac{100n \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}}{\pi} \%$, b) $\frac{100\pi}{n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}} \%$
57. $y = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha & \text{dla } 0^\circ < \alpha \leq 45^\circ \\ 1 - \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha} & \text{dla } 45^\circ < \alpha < 90^\circ \end{cases}$
58. $\frac{h}{\sin \alpha}$, $\frac{h}{\sin \beta}$, $\frac{P}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \right)$, $\frac{P}{h} + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \right)$
59. trójkąt ABC — około 37°, 37°, 106°, trójkąt ABD — około 12°, 37°, 131°
60. a) $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ Wskazówka. Niech a i b ($a > b$) będą długościami przyprostokątnych, c — długością przeciwprostokątnej, a α i β — miarami odpowiednich kątów ostrych danego trójkąta prostokątnego. Zauważ, że z warunku $\frac{a-b}{c} = \frac{1}{5}$ wynika $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{1}{5}$, a stąd $\sin \alpha - \sin \beta = \frac{1}{5}$. Ponadto z równości $a^2 + b^2 = c^2$, wynika $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, czyli $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$. b) $\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
61. $\sqrt{2} - 1$ Wskazówka. Niech a i b będą długościami podstaw trapezu ($b > a$) i c długością jego ramienia. Pokaż, że $\frac{a+b}{c} = 4$. Z równości tej wynika, że $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 4$, czyli $\frac{a}{c} = 4 - \frac{b}{c}$. Przedstaw cosinus kąta ostrego na dwa sposoby: $\cos \alpha = \frac{c}{b}$ oraz $\cos \alpha = \frac{\frac{b-a}{2}}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{c} - \frac{a}{c} \right)$. Zastępując w drugiej z tych równości $\frac{a}{c}$ wyrażeniem $4 - \frac{b}{c}$ oraz $\frac{b}{c}$ wyrażeniem $\frac{1}{\cos \alpha}$ otrzymujemy $\cos \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \left(4 - \frac{1}{\cos \alpha} \right) \right)$
62. a) około 292 cm, b) około 14,5°
63. a) około 70,5°, b) około 272 cm
64. a) nie więcej niż około 125 cm, b) około 3,8°
65. $x \approx 238 \text{ cm}$, $y \approx 653 \text{ cm}$, $\alpha \approx 68^\circ$, $\beta \approx 23^\circ$

66. około $3'26''$
 67. około 14 cm
 68. średnie nachylenie drogi od A do B: około 5%, od C do D: około 5,5%; kąt nachylenia drogi od A do B: około $2,9^\circ$, od C do D: około $3,2^\circ$
 69. około 12,3 m
 70. około $0,22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 71. około 17 m
 72. a) około 47%, b) około 31 m
 73. a) około 0,14 przekroju rury, b) około 0,63 przekroju rury
 74. a) około $226\,269 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, b) o około 17°
 75. a) około 16 m, b) około 4,3 m
 76. Merkury — około 59,33 mln km, Wenus — około 108,08 mln km
 77. a) $x = 6$, $y = 3\sqrt{3}$, b) $x = y = 5$, c) $x = 6$, $y = 4\sqrt{3}$, d) $x = 2$, $y = 2\sqrt{2}$, e) $x = 3\sqrt{6}$, $y = 3\sqrt{2}$, f) $x = y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, g) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, h) $x = 2\sqrt{3}$, $y = 3$
 78. a) $|\sphericalangle A| = 30^\circ$, $|\sphericalangle B| = 60^\circ$, b) $|\sphericalangle A| = 30^\circ$, $|\sphericalangle B| = 60^\circ$, c) $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle B| = 45^\circ$, d) $|\sphericalangle A| = 60^\circ$, $|\sphericalangle B| = 30^\circ$, e) $|\sphericalangle A| = 30^\circ$, $|\sphericalangle B| = 60^\circ$, f) $|\sphericalangle A| = 60^\circ$, $|\sphericalangle B| = 30^\circ$
 79. a) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, b) 1, c) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$
 80. trójkąt: 16, romb: $8\sqrt{2}$, równoległobok: $\frac{35\sqrt{3}}{2}$, trapez: $\frac{15\sqrt{3}+9}{2}$
 81. $a = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, $b = \sqrt{7+2\sqrt{3}}$, $c = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$
 82. 60°
 83. $(72+72\sqrt{3}) \text{ cm}^2$
 84. $8(3+\sqrt{3}+\sqrt{2}) \text{ cm}$
 85. a) $5(\sqrt{3}-1) \text{ cm}$, b) $(9\sqrt{2}+6\sqrt{3}-3\sqrt{6}) \text{ cm}$
 87. a) $1:\sqrt{3}$, b) $2:\sqrt{3}$, c) $1:\sqrt{3}$
 88. a) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ Wskazówka. Patrz rysunek.
 b) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$, Wskazówka. Zauważ, że $|\sphericalangle CAD| = 75^\circ$.
 90. a) $\cos \alpha = \frac{20}{29}$, $\tan \alpha = \frac{21}{20}$, b) $\cos \alpha = \frac{40}{41}$, $\tan \alpha = \frac{9}{40}$, c) $\sin \alpha = \frac{11}{61}$, $\tan \alpha = \frac{11}{60}$, d) $\sin \alpha = \frac{55}{73}$, $\tan \alpha = \frac{55}{48}$, e) $\sin \alpha = \frac{12}{37}$, $\cos \alpha = \frac{35}{37}$, f) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$
 91. a) 10, b) $\frac{3}{10}\sqrt{11}$, c) 0,99, d) $\frac{1}{99}$
 92. a) $\cos^2 \alpha$, $\frac{1}{4}$, b) $\cos \alpha$, $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$, 4, d) $\frac{1}{\cos \alpha}$, 2, e) $\sin \alpha$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, f) 1, 1
 94. a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{7}{25}$, c) $\frac{15}{41}$, d) $\frac{9}{4}$
 95. a) 1, b) 1, c) 0, d) 1
 96. Wskazówka. Skorzystaj ze związków między funkcjami kąta α a $90^\circ - \alpha$. d) Zapisz kąt $45^\circ + \alpha$ jako $90^\circ - (45^\circ - \alpha)$. e) Zapisz kąt $45^\circ - \alpha$ jako $90^\circ - (45^\circ + \alpha)$. f) Zapisz kąt $60^\circ - \alpha$ jako $90^\circ - (30^\circ + \alpha)$
 97. I. $\cos 37^\circ = \sin(90^\circ - 37^\circ) = \sin 53^\circ$, II. $\cos 37^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 37^\circ}$
 98. a) $\cos 54^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\tan 54^\circ = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$, b) $\sin 75^\circ = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{16}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$, c) $\sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
 99. a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, b) $\alpha = \beta = 45^\circ$, c) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$
 100. $\sin \alpha \cos \alpha = 0,2442$



- 101.** a) 1, b) 1 Wskazówka. Zwróć uwagę na nieparzystą liczbę czynników. c) 1 Wskazówka. Zamień funkcję sinus na cosinus lub odwrotnie.
- 103.** a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, b) $\sin \beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \beta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{2}$,
c) $\sin \gamma = \frac{3\sqrt{34}}{34}$, $\cos \gamma = -\frac{5\sqrt{34}}{34}$, $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{3}{5}$
- 104.** a) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$, b) $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{2}$,
c) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$
- 105.** a) około 13,4, b) około 9,93, c) około 29,3, d) około 10,6
- 106.** a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $-\frac{1}{2}$, e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, g) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, h) 0
- 107.** a) 18, b) 36, c) 15, d) 8
- 108.** a) około $18,4^\circ$, b) około $63,4^\circ$, c) około $56,3^\circ$, d) około 108° , e) około 131° , f) około 148°
- 109.** a) ujemna, b) dodatnia, c) dodatnia, d) dodatnia
- 111.** a) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$, b) $\frac{\sqrt{33}}{7}$, c) $-\frac{3\sqrt{10}}{20}$, d) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$
- 112.** a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{77}}{9}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{77}}{2}$, b) $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26}$, c) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$ lub $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5\sqrt{11}}{11}$
- 113.** a) około 8, b) około 28,5, c) około 51,3
- 114.** a) około $14,5^\circ$, b) około $6,2^\circ$, c) około $40,5^\circ$
- 115.** około 3,08
- 117.** a) 45° , około $63,4^\circ$, $71,6^\circ$, b) 45° , około $18,4^\circ$, $116,6^\circ$, c) około $26,6^\circ$, $68,2^\circ$, $85,2^\circ$
- 118.** a) 167° , b) 98° , c) 125°
- 119.** a) $\sin 154^\circ$, b) $\sin 111^\circ$, c) $\cos 80^\circ$, d) $\sin 70^\circ$, e) $\cos 95^\circ$, f) $\operatorname{tg} 170^\circ$
- 120.** $x \approx 4,5$ Wskazówka. Pole dużego trójkąta jest równe sumie pól dwóch mniejszych trójkątów.
- 121.** a) 1:2, b) 3:1, c) 3:1
- 122.** a) $\frac{9}{14}$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{13}{72}$
- 123.** a) $\sqrt{3}$, b) $4 \sin 72^\circ = 8 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \approx 3,8$, c) $4 \sin 80^\circ - 2 \sin 160^\circ \approx 3,3$
- 124.** a) $r^2 \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \right)$, b) $\frac{r^2}{2} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$ Wskazówka. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- 125.** a) około $18,4^\circ$, b) około 66° , c) około $29,3^\circ$
- 126.** $a \approx 3,05$, $b \approx 5,13$, $c \approx 4,46$, $d \approx 6,53$, $e \approx 5,64$, $f \approx 7,60$
- 127.** $\alpha \approx 19,5^\circ$, $\beta \approx 130,5^\circ$, $\gamma \approx 53,5^\circ$, $\delta \approx 86,5^\circ$, $\psi \approx 32,9^\circ$, $\phi \approx 127,1^\circ$
- 128.** a) około 3,26 m, b) około 11,65 km, c) około 2,82 m
- 129.** a) około 35° , b) około 51° , c) około 123°
- 130.** $a \approx 19$, $\alpha \approx 127^\circ$, $b \approx 15$, $\beta \approx 20^\circ$
- 131.** a) $|\sphericalangle BAC| \approx 31^\circ$, $|\sphericalangle ABC| \approx 129^\circ$, $|AC| \approx 23$ lub $|\sphericalangle BAC| \approx 149^\circ$, $|\sphericalangle ABC| \approx 11^\circ$,
 $|AC| \approx 6$, b) $|\sphericalangle ACB| \approx 24^\circ$, $|\sphericalangle BAC| \approx 116^\circ$, $|BC| \approx 11$, c) $|AC| \approx 11$, $|\sphericalangle ABC| \approx 136^\circ$,
 $|\sphericalangle CAB| \approx 14^\circ$, d) $|\sphericalangle ABC| \approx 64^\circ$, $|\sphericalangle ACB| \approx 76^\circ$, $|AB| \approx 8$ lub $|\sphericalangle ABC| \approx 116^\circ$,
 $|\sphericalangle ACB| \approx 24^\circ$, $|AB| \approx 3$, e) $|\sphericalangle CAB| = 80^\circ$, $|AC| \approx 11$, $|BC| \approx 21$, f) $|\sphericalangle BCA| = 10^\circ$,
 $|BC| \approx 10$, $|AC| \approx 14$
- 132.** a) około 2,2 (czyli około 11:5), b) około 28 cm
- 133.** a) 30° , około $5,7^\circ$, $144,3^\circ$, b) 30° , około $17,5^\circ$, $132,5^\circ$, c) 30° , około $44,4^\circ$, $105,6^\circ$
lub 30° , około $14,4^\circ$, $135,6^\circ$
- 134.** a) 10, około 15,3, około 19,7, b) około 7,3
- 135.** a) $\frac{2}{5}\sqrt{15}$, b) $\frac{16}{15}\sqrt{15}$

136. około 4,32 oraz około 6,01
137. około 79°
138. $|AC| \approx 794,4$ m, $|BC| \approx 729,9$ m
139. około 5,8
140. Z danej równości i twierdzenia sinusów wynika, że $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$, czyli $\alpha = \beta$, a więc $a = b$.
141. około 1,97
143. a) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$, b) 90° , około 18° , 72°
144. $1:(\sqrt{3}-1):1$ Wskazówka. Zastosuj twierdzenie sinusów do dwóch trójkątów, na które półproste dzielą dany trójkąt: jeden, w którym dwa kąty mają miary 30° , 45° , i drugi z kątami 60° , 45° .
145. 30° , 60° , 90°
146. około 23,7 Wskazówka: Trójkąt ABC jest prostokątny. Zwróć uwagę, że sinusy kątów ABC i ADC są równe.
149. $a \approx 2,3$, $b \approx 15,8$, $\alpha \approx 54^\circ$, $\beta \approx 46^\circ$, $\gamma \approx 80^\circ$
150. a) około 35° , 59° , 86° , b) około 24° , 31° , 125° , c) około 47° , 61° , 72°
151. a) $|AB| \approx 3,2$, b) $|AC| \approx 5,8$, c) $|BC| \approx 3,2$
152. $55,8^\circ$
153. a) $|LM| \approx 11$, $|\angle KLM| \approx 38^\circ$, $|\angle KML| \approx 62^\circ$, b) $|KM| \approx 5,4$, $|\angle KML| \approx 45^\circ$, $|\angle MKL| \approx 85^\circ$, c) $|\angle KML| \approx 36^\circ$, $|\angle KLM| \approx 114^\circ$, $|KM| \approx 10,9$ lub $|\angle KML| \approx 144^\circ$, $|\angle KLM| \approx 6^\circ$, $|KM| \approx 1,2$, d) $|\angle LMK| \approx 24^\circ$, $|\angle MKL| \approx 46^\circ$, $|KL| \approx 5,6$, e) $|KL| \approx 4,2$, $|\angle KLM| \approx 156^\circ$, $|\angle MKL| \approx 14^\circ$, f) $|KL| \approx 13,8$, $|KM| \approx 10,7$, $|\angle LKM| = 30^\circ$
154. a) około 7,9 km, b) około 7,6 km
155. a), e) — rozwartokątne, c) — prostokątny, b), d), f) — ostrokątne
156. a) około 16,2, b) około 5,1
157. a) $\sqrt{15}$, b) 8, c) około 5,1
158. $3\sqrt{3}$
159. około 9; 140° , około 99° , około 81° lub około 3; 140° , około 19° , około 161°
160. a) około 795 m, b) około 548 m
161. b) $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ Wskazówka. Uzupełnij dany trójkąt do równoległoboku o bokach długości b i c , a następnie skorzystaj z własności podanej w podpunkcie a).
162. około 1,47 m i 4,53 m
163. a) $3\sqrt{30}$ i $\sqrt{130}$,
b) $6\sqrt{2-\sqrt{3}}-2$ lub $6\sqrt{2+\sqrt{3}}-2$,
c) 120° Wskazówka. Przyjrzyj się rysunkowi obok. Szukany kąt między przekątnymi AC i BD jest równy kątowi ACE .
164. 60° , około $162,4^\circ$, około $47,6^\circ$
165. a) około $72,4^\circ$, $88,6^\circ$, $91,4^\circ$, $107,6^\circ$, b) $\frac{\sqrt{146329}}{43}$, $\frac{\sqrt{146329}}{41}$
166. a) $\frac{ab}{a+b}$, b) $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$, c) $\frac{ab\sqrt{3}}{a+b}$
167. a) $x = 1$, $y = 2 \sin 105^\circ$, $\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, b) $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
168. $\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$ Wskazówka. Wykaż, że każdy z łuków ograniczających figurę jest wycięty przez kąt środkowy o mierze 30° .
169. $\frac{40}{3}\pi$



170. a) $a\sqrt{2-2\cos 108^\circ}$, b) $a\sqrt{2-2\cos 128\frac{4}{7}^\circ}$,

$$a\sqrt{3-2\cos 128\frac{4}{7}^\circ-2\sqrt{2-2\cos 128\frac{4}{7}^\circ}\cdot\cos 102\frac{6}{7}^\circ}=\frac{a\sin 102\frac{6}{7}^\circ\sqrt{2-2\cos 128\frac{4}{7}^\circ}}{\sin 51\frac{3}{7}^\circ}$$

Wskazówka. Pierwsza postać wyrażenia przedstawiającego długość dłuższej przekątnej wynika z zastosowania twierdzenia cosinusów, druga — twierdzenia sinusów.

171. a) $\sqrt{3}\text{ m} \approx 1,7\text{ m}$ Wskazówka. Wyraż odległości oczu chłopca od dolnej i górnej krawędzi obrazu za pomocą odległości chłopca od ściany, a następnie zastosuj twierdzenie cosinusów. c) $\sqrt{\frac{19+3\sqrt{33}}{2}}\text{ m} \approx 0,94\text{ m}$ lub $\sqrt{\frac{19-3\sqrt{33}}{2}}\text{ m} \approx 4,26\text{ m}$

172. $14\sqrt{3}+3\sqrt{21}$ Wskazówka. Kąty ADB i BDC mają równe miary, więc porównując pola odpowiednich trójkątów, otrzymamy, że bok AD jest dwa razy dłuższy od boku DC . Skorzystaj z twierdzenia cosinusów i faktu, że trójkąt ABC jest równoboczny.

PRZED SPRAWDZIANEM

1. B
2. D
3. A
4. D
5. C
6. D
7. A
8. C
9. C
10. D
12. około 17,2 cm
13. około 74° lub około 106°
14. $\frac{7}{10}$
15. $\sqrt{13}-\sqrt{7}$
16. D
17. D
18. A
19. D
20. A
21. B
22. A
23. C
24. $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ Wskazówka. Oblicz wartość $\sin \alpha + \cos \alpha$.
25. 30°
26. $\frac{4}{3}$
27. około 110°
28. $\sqrt{42}$

PRZED MATURĄ

1. C
2. C
3. A

4. D
5. B
6. A
7. B
8. D
9. A
10. C
11. A
12. D
13. A
14. 2
15. $\frac{1}{4}$
16. a) 12, b) 42
17. 20
18. $\frac{\sqrt{7}+1}{4}, \frac{\sqrt{7}-1}{4}$
19. C
21. $P_{\triangle AMS} = 40, P_{\triangle ALS} = 45, P_{\triangle BMS} = 80, P_{\triangle CLS} = 135$
22. $\sqrt{\frac{253}{13}}$
23. $\sqrt{145}$
24. 120

FIGURY W PRZESTRZENI

1.

Podstawa graniastoslupa	trzynastokąt	dwudziestokąt	piętnastokąt	dziewięciokąt
Liczba ścian	15	22	17	11
Liczba krawędzi	39	60	45	27
Liczba wierzchołków	26	40	30	18
2. a) osiem, b) siedem, c) sześć
3. a) tak, b) tak, c) tak, d) nie, e) tak, f) nie
5. A i B
6. a) $a = 4\sqrt{3}, b = 6$, b) $s = 6, p = 8\sqrt{2}, r = 2\sqrt{41}$, c) $x = 2\sqrt{5}, y = 2\sqrt{31}$
7. wszystkie cztery ściany boczne to prostokąty o wymiarach $5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$
8. a) $3\sqrt{3}$, b) $\sqrt{69} \text{ cm}$, c) $\frac{\sqrt{29}}{4} \text{ m}$, d) krawędź podstawy: 3, dłuższa przekątna: $\sqrt{85}$
9. a) $\sqrt{34}$, b) $2\sqrt{3}$, c) 24
11. a) $x = 6$, b) $y \approx 7,25, z \approx 15,04$, c) $a \approx 2,62, h \approx 2,11$
12. około 35°
13. a) $P = 1880, V = 4800$, b) $P = 248, V = 240$, c) $P = 1720, V = 3600$, d) $P = 192 + 40\sqrt{2}, V = 160$, e) $P \approx 295,16, V \approx 275,8$, f) $P = 320 + 12\sqrt{7}, V = 300 + 60\sqrt{7}$
14. a) $P = 8\sqrt{3} + 72, V = 24\sqrt{3}$, b) $P = 288\sqrt{3} + 504, V = 1008\sqrt{3}$, c) $P = 290, V = 300$, d) $P = 36\sqrt{2} + 18, V = 27\sqrt{2}$, e) $P = 108\sqrt{3} + 180, V = 270\sqrt{3}$, f) $P = 48\sqrt{3} + 264, V = 264\sqrt{3}$
15. a) $V = 7\sqrt{7}$, b) $P_b = 48$, c) $V = 3000\sqrt{3}$

16. a) $\sqrt{2a^2 + h^2}$, b) $\sqrt{3a^2 + h^2}$, $\sqrt{4a^2 + h^2}$
 17. b) $2\sqrt{13}$, c) 10 lub $4\sqrt{10}$, d) 5 lub $2\sqrt{10}$
 18. $a = 3\sqrt{2}$, $b = 6$
 19. $\sqrt{144 \sin^2 35^\circ + 108 \cos^2 35^\circ} \approx 10,95$
 20. krawędź podstawy: $\frac{8}{\sqrt{3+4 \tan^2 20^\circ}} \approx 4,3$, wysokość: $\frac{16 \tan 20^\circ}{\sqrt{3+4 \tan^2 20^\circ}} \approx 3,1$
 21. a) $\beta \approx 69,3^\circ$, b) $\alpha \approx 28,1^\circ$, c) $\alpha \approx 56,3^\circ$, $\beta = 60^\circ$
 22. a) $\alpha \approx 34^\circ$, b) $\alpha \approx 60^\circ$ Wskazówka. Skorzystaj z twierdzenia cosinusów.
 23. a) $V = 32\sqrt{3}$, $P = 16 + 32\sqrt{6}$, b) $V \approx 307$, $P \approx 274$
 24. a) $32\sqrt{3} \sin 70^\circ \cos^2 70^\circ \approx 6,1$, b) $\frac{1944\sqrt{39}}{169}$
 25. a) 1,8, b) $16\sqrt{2}$
 26. $V = \sqrt{21}$, $P = 2(\sqrt{21} + \sqrt{3} + \sqrt{7})$
 27. 484
 28. 20 litrów
 29. około 1426 litrów
 30. około 850 t ziemi, około 369 m² kafelków
 31. nie (potrzeba około 1,04 m³ piasku)
 32. a) $\frac{2}{3}$, b) zmalało (stanowi $\frac{2}{3}$ pola powierzchni graniastosłupa trójkątnego)
 33. a) $2(\sqrt{2} - 1)Q$, b) $2(\sqrt{2} - 1)S$
 34. a) tak ($V' = \frac{1}{2}V$), b) nie
 35. $\frac{d^3}{2 \tan \alpha}$
 36. $10 + 6\sqrt{3}$
 37. $\frac{3\sqrt{6}}{4}a^3$
 38. 224 m³ (224 000 l)
 39.
- | Podstawa ostrosłupa | ośmiokąt | sześciokąt | dziewiętnastokąt | stokąt |
|---------------------|----------|------------|------------------|--------|
| Liczba ścian | 9 | 7 | 20 | 101 |
| Liczba krawędzi | 16 | 12 | 38 | 200 |
| Liczba wierzchołków | 9 | 7 | 20 | 101 |
40. a) siedem, b) czternaście, c) sześć
 41. a) $a = 4\sqrt{7}$, $b = 2\sqrt{23}$, b) $a = 8$, $h = 2\sqrt{21}$, c) $b = 2\sqrt{21}$, $h = 4\sqrt{3}$, d) $a = 3\sqrt{6}$, $h = \frac{9\sqrt{2}}{2}$
 42. $|AS| = \sqrt{14}$, $|BS| = |DS| = \sqrt{39}$
 43. a) krawędź podstawy: 10, wysokość: $2\sqrt{6}$, b) krawędź boczna: $4\sqrt{3}$, wysokość ściany bocznej: $\sqrt{39}$, c) krawędź podstawy: $3\sqrt{3}$, wysokość ściany bocznej: $\frac{9\sqrt{5}}{2}$, d) krawędź boczna: $\sqrt{59}$, wysokości ścian bocznych: $5\sqrt{2}$, $\sqrt{34}$
 45. krawędź podstawy: $3\sqrt{6}$, wysokość: 3
 46. a) 60° , b) 90°
 47. a) $P = 9\sqrt{7} + 9\sqrt{3}$, $V = 6\sqrt{3}$, b) $P = 800$, $V = 1280$, c) $P = 96\sqrt{3} + 24\sqrt{273}$, $V = 480\sqrt{3}$
 48. a) $P = 8\sqrt{3}$, $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, b) $P = 4 + 4\sqrt{17}$, $V = \frac{16}{3}$, c) $P = 6\sqrt{3} + 6\sqrt{19}$, $V = 8\sqrt{3}$
 49. a) $8\sqrt{33}$, b) $32\sqrt{15}$, c) 72, d) 170
 50. b) $\frac{\sqrt{651}}{2}$, c) 12, d) $4\frac{8}{13}$
 51. a) $3\sqrt{6} - 6$, b) $2\sqrt{10} - 4$

52. a) $H = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{15}$, b) $h = 2\sqrt{7}$, $a = 2\sqrt{21}$, c) $a \approx 11$, $b \approx 13,6$
 53. a) $V = 48\sqrt{7}$, $P = 24(\sqrt{3} + 2\sqrt{6})$, b) $V = 128\sqrt{6}$, $P = 192\sqrt{3}$
 54. a) $V \approx 1042,3$, $P \approx 830,42$, b) $V = 6\sqrt{3}$, $P = 9(\sqrt{3} + \sqrt{7})$,
 c) $V = 8\sqrt{13}$, $P = 2(12 + 2\sqrt{22} + 3\sqrt{17})$
 55. a) $2\sqrt{3}$, b) 2, c) $\sqrt{3}$
 56. $432\sqrt{3}$
 57. $V = 32\sqrt{3}$, $P = 4(12 + 5\sqrt{3} + \sqrt{21})$
 58. a) tak, b) dwie; 1, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, c) tak, są jeszcze dwie możliwości: czworościan o krawędziach długości: 1, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{3}$ lub o krawędziach długości: 1, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$
 59. $P = \frac{3+\sqrt{3}}{4}a^2$, $V = \frac{\sqrt{2}}{24}a^3$
 60. $\frac{1}{24}a^3$
 61. a) nie, ale są trójkątami równoramiennymi, b) $P = \sqrt{15}a^2$, $V = \frac{a^3}{2}$, c) kwadratem
 62. $P = a^2 + b^2 + (a+b)\sqrt{4h^2 + (a-b)^2}$, $V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$
 63. $V = 144$, $P = 108\sqrt{2}$
 64. $V = \frac{2048\sqrt{2}}{81}$, $P = \frac{128(1+\sqrt{17})}{9}$
 65. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$ Wskazówka. Odszukaj wierzchołki tworzące czworościan foremny.
 66. $\frac{5\sqrt{10}}{2\pi} \text{ cm}^3$
 67. $32 + \frac{16}{\pi}$
 68. a) $V = \frac{250\sqrt{3}\pi}{3}$, $P = \frac{100\sqrt{3}\pi}{3}$, b) $V = 27\sqrt{3}\pi$, $P = 18\sqrt{3}\pi$, c) $V = 128\sqrt{2}\pi$, $P = 64\pi$
 69. $73,5\pi$ lub 63π
 70. $8\pi(3 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ lub $8\pi(1 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$
 71. 40π
 72. $45\pi \text{ cm}^3$ lub $\frac{75\pi}{2} \text{ cm}^3$
 73. 140
 74. $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$
 75. a) $\sqrt{1+8\pi^2}:1$, b) $\sqrt{\pi^2+8}:\pi$
 76. 1573π
 77. a) o wysokości b , b) o wysokości a
 78. $\frac{\sqrt{2}d^3}{16\pi}$
 79. $\frac{S^3}{16\pi V^2}$
 80. Promień podstawy i wysokość walca mają długość $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$.
 81. $\frac{216\pi}{\sqrt[3]{4\pi^2}}$
 82. tak
 83. około 7 godzin i 18 minut
 84. a) $600\pi \text{ cm}^2 \approx 1884 \text{ cm}^2$, b) $70\pi \text{ kcal} \approx 220 \text{ kcal}$
 85. około 160 g
 86. $4 + 2\sqrt{3}$ lub $4 - 2\sqrt{3}$
 87. około 2332 l
 88. $\frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 1}{4 \operatorname{tg} \alpha}$
 89. a) $V = \frac{128\pi}{3}$, $P_c = 16\pi(1 + \sqrt{5})$, b) $V = \frac{640\pi}{3}$, $P_c = 8\pi(10 + 6\sqrt{5})$, c) $V = 100\pi$, $P_c = 90\pi$

90. a) $V = 9\sqrt{3}\pi$, $P_b = 18\pi$, b) $V = \frac{128\sqrt{2}\pi}{3}$, $P_b = 32\sqrt{2}\pi$, c) $V = \frac{125\sqrt{3}\pi}{9}$, $P_b = \frac{50\sqrt{3}\pi}{3}$,
d) $V \approx 331,4$, $P_b \approx 201,9$, e) $V \approx 0,9$, $P_b \approx 4,1$, f) $V \approx 21,4$, $P_b \approx 34,2$
91. a) $V = 15\sqrt{5}\pi \text{ cm}^3$, $P_c = 45\pi \text{ cm}^2$
92. $25\sqrt{82}\pi \text{ cm}^2$
93. około 39°
94. a) $\frac{3\sqrt{135}\pi}{8} \text{ cm}^3$, b) $\frac{16\sqrt{2}\pi}{3} \text{ cm}^3$, c) $\frac{225\sqrt{39}\pi}{64} \text{ cm}^3$, d) $\frac{121\sqrt{23}\pi}{24} \text{ cm}^3$
95. 12π
96. $\frac{125}{\pi} \sqrt{144\pi^2 + 25} \text{ cm}^2 \approx 0,15 \text{ m}^2$, $\alpha = \frac{1800}{\sqrt{144\pi^2 + 25}} \approx 47^\circ$
97. a) $V = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{24}$, $P_b = \frac{\pi a^2}{2}$, b) $V = \frac{\pi a^3}{4}$, $P_b = \sqrt{3}\pi a^2$
98. $\frac{512\sqrt{3}\pi}{3}$
99. $24\sqrt{7}\pi \text{ cm}^3$
100. $V = 3\sqrt{55}\pi$, $P_b = 24\pi$
101. $375\sqrt{3}\pi$
102. a) $V = \frac{\pi S\sqrt{S}}{3}$, $P_c = \pi S(1 + \sqrt{2})$
103. walec: $V = 128\pi$, $P_c = 96\pi$; dwa stożki złożone podstawami: $V = \frac{256\sqrt{2}\pi}{3}$, $P_c = 64\sqrt{2}\pi$
104. $2\sqrt{2}$
105. $\frac{45}{16}\pi$
106. a) $\frac{2}{3}\pi hP$, b) $\frac{4}{3}\pi \frac{P^2}{a}$, c) wokół boku o długości 7
107. a) $V = \frac{\pi a^3 \tan \alpha}{24}$, $P_c = \frac{\pi a^2}{4} \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right)$, b) $V = \frac{\pi a^3 \tan^2 \alpha}{12}$, $P_c = \frac{\pi a^2 \tan \alpha}{2 \cos \alpha}$
108. a) $V = \frac{45\pi}{4} \text{ cm}^3$, $P_c = 24\pi \text{ cm}^2$, b) $V = \frac{75\pi}{4} \text{ cm}^3$, $P_c = 40\pi \text{ cm}^2$
109. a) $63\pi \text{ cm}^3$, b) $54\pi \text{ cm}^3$, c) $129\pi \text{ cm}^3$
110. a) $14\pi(10 + \sqrt{53})$, b) $14\pi(6 + \sqrt{53})$
111. $75\pi(\sqrt{5} - 1) \text{ cm}^3$
112. $\frac{3}{4}$
113. 64π i 448π
114. a) promień wycinka: 8, kąt rozwarcia: 180° , b) promień wycinka: 10, kąt rozwarcia: 216° , c) promień wycinka: $\frac{10\sqrt{3}}{3}$, kąt rozwarcia: około 312°
117. $\frac{2\sqrt{6}\pi a^3}{729}$
118. a) $V = \pi a^3$, $P_c = 2\sqrt{3}\pi a^2$, b) $V = \frac{7\sqrt{3}\pi a^3}{12}$, $P_c = \frac{7\pi a^2}{2}$, c) $V = \frac{19\sqrt{3}\pi a^3}{12}$, $P_c = 7\pi a^2$,
d) $V = \frac{9\pi a^3}{2}$, $P_c = 6\sqrt{3}\pi a^2$
119. $360^\circ \cdot \cos \alpha$
120. a) 30° , b) około $48,6^\circ$ ($\sin \beta = \frac{3}{4}$)
121. a) 972π , b) π , c) $\frac{1}{6}S\sqrt{\frac{S}{\pi}}$, d) $\sqrt[3]{36\pi V^2}$
122. a) 2304π
123. $3\sqrt[3]{10} \text{ cm} \approx 6,5 \text{ cm}$
124. nie
125. $2\sqrt[3]{60} \approx 7,8 \text{ cm}$
126. $96\pi \text{ cm}^2$
127. a) $\frac{\pi}{6}$, b) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$
128. najwięcej powietrza w ③, najmniej powietrza w ①; najwięcej materiału na ③, najmniej materiału na ①

129. a) około 637 litrów, b) 5 pojemników

130. o około 0,57 cm

131. $\frac{2}{3} \left(\frac{1}{\pi} + \pi \right) \sqrt{1 + \pi^2}$

132. $\frac{9}{2} \pi \text{ cm}^3$

133. $33,64\pi$

134. $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3} + 2 \right) r$

PRZED SPRAWDZIANEM

1. A

2. A

3. D

4. C

5. $\frac{25\sqrt{2}}{4}$

6. $8\sqrt{87}$

7. $V \approx 129,62, P \approx 162,39$

8. $2\sqrt{13}$

9. $P_b = \pi\sqrt{2}, V = \frac{\pi}{3}$

10. $32\sqrt[3]{18}\pi$

11. D

12. A

13. B

14. C

15. A

16. $144\sqrt{3}$

17. 1:47

18. $4\sqrt{2}a$

19. 120°

PRZED MATURĄ

1. A

2. C

3. A

4. B

5. A

6. D

7. $\frac{16}{17}$

8. $2\sqrt{73}\pi$

9. 40,5

10. $2160\sqrt{3}$

11. $\frac{a^3 \sqrt{(\operatorname{tg} \alpha)^2 - 1}}{6}$

12. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

13. $\frac{9\sqrt{106}}{106}$

STATYSTYKA

2. a) błąd bezwzględny 6744; błąd względny około 3,5%, b) błąd bezwzględny $0,445 \text{ m}^2$; błąd względny około 4,7%, c) błąd bezwzględny 0,25 ha, błąd względny około 11,1%, d) błąd bezwzględny 1001, błąd względny około 4,2%, e) błąd bezwzględny 25 zł; błąd względny około 4,8%
3. 1: około 0,37%, 2: około 3,8%, 3: około 1,7%, 4: około 2,2%, 5: około 2,8%, 6: około 1,3%
4. a) około 0,01%, 0,09%, 0,88%, b) około 0,03%, 0,23%, 0,23%, c) około 0,01%, 0,48%, 2,45%
5. a) około 52 m^2 , około 0,9%, b) około 48 m^2 , około 8,5%
7. c) d, e, f
8. a) 1,59%, 1,54%, b) 5,41%, 4,88%
9. a) 21,5, b) 17,7, c) 20,05 lub 19,95, d) 21,01 lub 18,99
10. a) około 1,5%, b) około 5,4%, c) około 8,9%
11. w drugim
12. 77 kg lub 175 kg
13. a) 18,75, b) 112
14. a) 500, b) około 4,76%, c) 1,(01)%
15. liczba a , dwa razy
16. około 4%
17. średnia arytmetyczna: a) 42,2, b) 28,75, c) 10, d) około 5,08, e) około 13,1, f) -0,5; mediana: a) 43, b) 9, c) 10,5, d) 5,5, e) 11, f) -0,5; dominanta: a) 53, b) 4 i 9, c) 12 i 13, d) 2, e) 8, f) brak
18. a) średnia arytmetyczna: klasa II A około 2,8, klasa II B około 2,5, mediana: klasa II A 3, klasa II B 2, dominanta: klasa II A 4, klasa II B 2, b) średnia arytmetyczna około 2,69, mediana 2, dominanta 2
19. średnia arytmetyczna: miasto A około 1,86, miasto B około 2,62, razem 2,35; mediana: miasto A 2, miasto B 3, razem 2; dominanta: miasto A 2, miasto B 1 i 4, razem 1
20. a) 50%, b) 50%, c) 25%, d) 75%
21. a) średnia arytmetyczna 1,9975 m; mediana 1,995 m; dominanta 1,98 m, b) średnia arytmetyczna około 1,01 kg; mediana 1,03 kg; dominanta 1,05 kg, c) średnia arytmetyczna około 100,17 kg; mediana 100 kg; dominanta 100 kg
22. a) 28 lat, b) 17 lat
23. 29 lat
24. średnia arytmetyczna 1,91, dominanta 2, mediana 2
25. $x = 11$, $y = 14$
26. a) Kamil 4, Karolina 5, b) Kamil około 3,03%, Karolina około 2,04%
27. a) średnia arytmetyczna 1,7; mediana 1,5; dominanta 1, b) średnia arytmetyczna 0,8; mediana 1; dominanta 1, c) średnia arytmetyczna 0,9; mediana 1; dominanta 0
28. a) 37, b) 135, c) -2, d) 111, e) 28
30. a) tak, b) tak, c) siedem, d) nie, e) nie
32. a) $a = 13$, dominanta 7; mediana 7, b) $a = 2$, dominanta 2; mediana 4,5, c) $a = 4$, dominanta 12; mediana 11, d) $a = 10$, dominanta 10; mediana 10
33. a) 27°C , b) około 4768,57 zł
34. 3600 kg

35. a) 40, b) 5
36. zestaw A: rozstęp danych 9; rozstęp międzykwartylowy 3,5, zestaw B: rozstęp danych 35; rozstęp międzykwartylowy 27
39. a) miejscowość A: 30, miejscowość B: 41, miejscowość C: 30, b) w miejscowości A, c) w miejscowości A, d) w miejscowości B, e) Miejscowość A: 96, miejscowość B: 90, miejscowość C: 96, f) w miejscowościach A i C
40. dwa razy
41. a) $x = 5, y = 10$ lub $x = 10, y = 5$, b) $x = 5, y = 13$ lub $x = 13, y = 5$, c) $x = 6, y = 9$ lub $x = 9, y = 6$
42. o 0,8
43. a) 7,625, b) 2,6, c) 6,5, d) 4,5
44. a) 5,5, b) 6 punktów
45. drużyna z restauracji Sedan
46. Dowcipny Jan: sem. I — 2,75; sem. II — 3,08; ocena roczna — 3, Pilna Aneta: sem. I — 5,57; sem. II — 4,71; ocena roczna — 5, Pracowity Adam: sem. I — 4,02; sem. II — 4,44; ocena roczna — 4
47. a) wyjazd na Riwierę Turecką, b) ofertę firmy Grosik
48. ser twarogowy tłusty 162 kcal, szynka gotowana 389 kcal, mleko 42 kcal, cebula 22 kcal, czekolada 494 kcal
49. 23,70 zł
50. a) $\frac{5}{3}$, b) 2,5, c) 3
51. 3,11 zł
52. a) stosunek wag jest równy 1:2, b) stosunek wag jest równy 7:3, c) stosunek wag jest równy $(z - y):(x - z)$
54. a) $\bar{x} = 8,2, \sigma \approx 4,62$, b) $\bar{x} = 6, \sigma \approx 3,6$, c) $\bar{x} = 2, \sigma \approx 1,7$, d) $\bar{x} = 36, \sigma \approx 23,1$
55. w klasie II b
56. kolejka I: $\bar{x} = \frac{21}{9} \approx 2,3, \sigma = \sqrt{\frac{20}{9}} \approx 1,49$, kolejka II: $\bar{x} = \frac{16}{9} \approx 1,8, \sigma = \sqrt{\frac{68}{81}} \approx 0,92$,
kolejka III: $\bar{x} = \frac{35}{9} \approx 3,9, \sigma = \sqrt{\frac{242}{81}} \approx 1,73$
57. koszyk I: około 5,93, koszyk II: około 2,89
58. $\bar{x} = \frac{169}{64} \approx 2,6, \sigma \approx 1,56$
59. a) 3,06, b) 10,83, c) 0,92
60. a) 20 pudełek przez maszynę I, 10 pudełek przez maszynę II, b) w przypadku maszyny I ($\bar{x}_I = 50,15, \bar{x}_{II} = 49,6$), c) w przypadku maszyny I ($\sigma_I \approx 1,01, \sigma_{II} \approx 1,02$)
61. $\sigma_I \approx 1,645, \sigma_{II} \approx 1,414, \sigma_{III} \approx 1,033, \sigma_{IV} \approx 1,480$; największe odchylenie standardowe I, a najmniejsze — III
62. największe — w II c, najmniejsze — w II a
63. $\sigma_A \approx 0,49, \sigma_B \approx 1,855, \sigma_C = 0,8$
64. a) $\bar{x} = 19,5, \sigma \approx 6,7$, b) około 69%
65. $\bar{x} = 16,1, \sigma \approx 1,1$
66. średnia jest wyższa w firmie B, odchylenie standardowe — w firmie A
67. fragment 1: $\bar{x} \approx 4,2, \sigma \approx 1,8$; fragment 2: $\bar{x} \approx 4,2, \sigma \approx 1,3$; fragment 3: $\bar{x} \approx 4,7, \sigma \approx 2,5$
70. a) mniejsze, b) mniejsze, c) większe
71. na wschód od ucznia
72. a) $\bar{x} = 1, \sigma \approx 0,387$, b) $\bar{x} = 1,25, \sigma \approx 0,692$

73. $x = -5,5$ i $y = 5,5$ lub $x = 5,5$ i $y = -5,5$

74. 1 i 5

75. $\bar{x} = 2,62$, $\sigma \approx 1,35$

76. 1 lub 16

77. 4 i 8

78. a) 100, b) 1040, c) 290

79. $\bar{x} = 8$, $\sigma = 2\sqrt{34} \approx 11,66$

80. $\bar{x} = 5,2$, $\sigma = \sqrt{8,16} \approx 2,86$

82. a) średnia = $\bar{x} + a$, odchylenie standardowe = s , b) średnia = $b\bar{x}$, odchylenie standardowe = bs

83. a) średnia = $b\bar{x} + a$, odchylenie standardowe = bs , b) średnia = 33, odchylenie standardowe = 6 Wskazówka. Skorzystaj z rozwiązania podpunktu a). c) $a = -4$, $b = \frac{1}{3}$

PRZED SPRAWDZIANEM

1. C

2. B

3. D

4. B

5. A

6. D

7. D

8. B

9. B

10. w przypadku Michała (Michał: około 3,47%, Ania: około 1,16%)

11. 2,88

12. a) średnia arytmetyczna 16,2; mediana 17,5; dominanta 10 i 20, b) o około 38,2%

13. 82%

14. 8

15. 11 (tylko te o masie 1,3 kg i 1,4 kg)

16. $\sqrt{6} \approx 2,45$ Wskazówka. Liczbami w zestawie są 3, 7, 9, 9.

PRZED MATURĄ

1. A

2. D

3. A

4. D

5. D

6. A

7. C

8. B

9. C

10. B

11. B

12. około 8 cm, 4%



Podręczniki w wersji uczniowskiej są przeznaczone do nauki matematyki w czteroletnim liceum lub pięcioletnim technikum. Spełniają one kryteria *Ustawy o systemie oświaty* i najnowszej podstawy programowej z 2018 roku. Zostały dopuszczone przez MEN do użytku szkolnego i wpisane do wykazu podręczników.

Numery dopuszczenia:

964/2/2020 (zakres podstawowy)

963/2/2020 (zakres rozszerzony)

Zestaw dla ucznia składa się z odpowiedniego podręcznika (dla zakresu podstawowego lub rozszerzonego) i zbioru zadań. Uczniom poszukującym dodatkowych ćwiczeń warto polecić zeszyt ćwiczeń lub dostępny online program *Matnau 2*.



zeszyt ćwiczeń



www.matnau.gwo.pl

