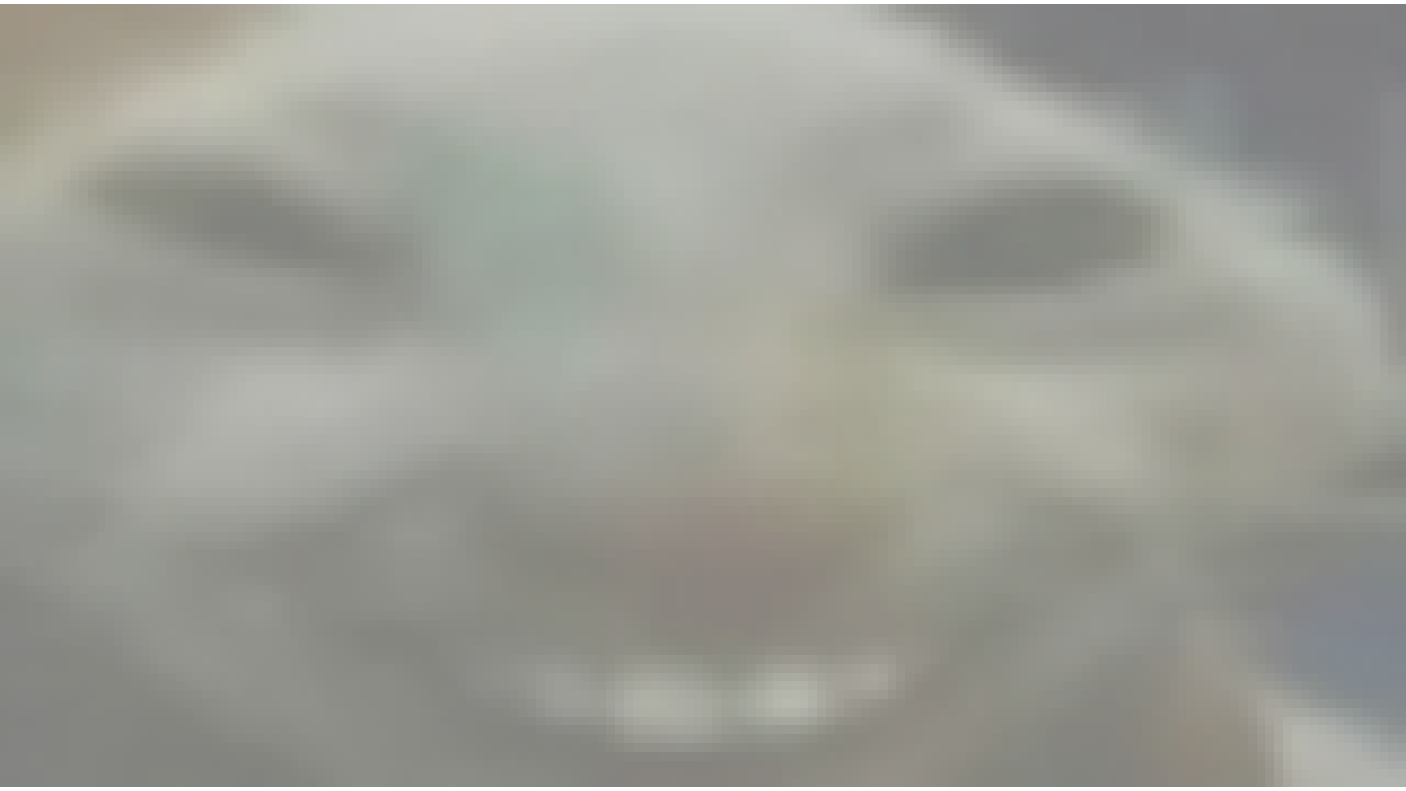


gdańskie wydawnictwo oświatowe

2 MATEMATYKA Z PLUSEM

multipodręcznik do liceum i technikum

zakres rozszerzony




2
MATEMATYKA
Z PLUSEM
multipodręcznik do liceum i technikum
zakres rozszerzony

Małgorzata Dobrowolska
Marcin Karpiński
Jacek Lech

MATEMATYKA Z PLUSEM

multipodręcznik do liceum i technikum

2

zakres rozszerzony

gdańskie wydawnictwo oświatowe

Projekt okładki: *Iwona Duczmal*

Ilustracje: *Bartłomiej Brosz*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*

Fotografie: Archiwum GWO, Fotolia, Shutterstock

Skład (TEX): *Łukasz Sitko, Joanna Szyller*

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników szkolnych przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki (w zakresie rozszerzonym) na poziomie klasy II liceum i technikum, na podstawie recenzji rzeczoznawców: dr. hab. Jacka Jędrzejewskiego, dr. Edwarda Stachowskiego i dr Zofii Ireny Krzywickiej-Vauthier.

Numer dopuszczenia: 963/2/2020

ISBN 978-83-8118-187-7

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2020. Wydanie pierwsze

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy.

Uwaga. W podręczniku nie należy zapisywać żadnych odpowiedzi, podkreślać ani zaznaczać rozwiązań zadań.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl
lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
http://www.gwo.pl e-mail: handel@gwo.pl

Spis treści

Wielomiany

- Przykłady wielomianów 10
- Rozkład wielomianu na czynniki 15
- Równania wielomianowe 22
- Dzielenie wielomianów 30
- Twierdzenie Bézouta 36
- Równania wielomianowe (cd.) 40
- Powtórzenie 48

Figury na płaszczyźnie. Część 1

- Kąty. Kąty w trójkątach i w czworokątach 51
- Podstawowe własności trójkątów 59
- Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa 62
- Własności trójkątów (cd.) 70
- Własności czworokątów 81
- Powtórzenie 88

Funkcje

- Funkcje wielomianowe 90
- Nierówności wielomianowe 98
- Funkcje wielomianowe (cd.) 103
- Nierówności wielomianowe (cd.) 108
- Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna 111
- Równania wykładnicze i logarytmiczne 121
- Zastosowania funkcji wykładniczych i logarytmicznych 129
- Powtórzenie 138

Figury na płaszczyźnie. Część 2

- Pole koła. Długość okręgu 140
- Własności kątów środkowych i kątów wpisanych 146
- Proste i okręgi 151
- Okrąg opisany na wielokącie 159
- Okrąg wpisany w wielokąt 165
- Własności wielokątów. Wielokąty foremne 170
- Powtórzenie 178

Trygonometria

- Tangens kąta ostrego 180
- Sinus i cosinus kąta ostrego 185
- Obliczenia trygonometryczne 190
- Zastosowania trygonometrii 196
- Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45° i 60° 201
- Związki między funkcjami trygonometrycznymi 204
- Funkcje trygonometryczne kątów od 0° do 180° 207
- Twierdzenie sinusów 215
- Twierdzenie cosinusów 220
- Powtórzenie 226

Figury w przestrzeni

- Graniastosłupy 231
- Ostrosłupy 239
- Walec 247
- Stożek 253
- Kula 259
- Powtórzenie 264

Statystyka

- Przybliżenia 266
- Średnia arytmetyczna, mediana, dominanta 269
- Średnia ważona 280
- Odchylenie standardowe 286
- Powtórzenie 296

TABELA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH 297

ODPOWIEDZI 299

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

zadania 7–10 ▶ — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązywać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii

◀ III — odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem III

● — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)

● — zadanie trudne

Drogie Uczennice!
Drodzy Uczniowie!

Jeden z najwybitniejszych uczonych XVII wieku René Descartes, zwany w Polsce Kartezjuszem, w swoim dziele „Rozprawa o metodzie" pisał: „Nie wystarczy mieć rozum, trzeba jeszcze umieć z niego korzystać."

Tadeusz Boy-Żeleński, tłumacz „Rozprawy o metodzie", opatrzył pierwsze polskie wydanie dzieła Kartezjusza napisem „Tylko dla dorosłych" na obwolucie. Liczył na to, że skusi tym napisem młodzież, by sięgnęła po książkę, która mądrze mówi o tym, jak posługiwać się rozumem.

Kartezjusz pisał w swym dziele: „(…) wiadomości książkowe (…) nie są tak bliskie prawdy jak proste rozumowania, które (…) może uczynić człowiek o zdrowym rozsądku (…)". Mamy nadzieję, że korzystając (zapewne nie zawsze dobrowolnie) z naszego podręcznika do matematyki, znajdziecie w nim nie tylko wiadomości książkowe, ale także pomoc w posługiwaniu się własnym zdrowym rozsądkiem.

Autorzy

Wielomiany

Czy wiesz, ilu pączków potrzebuje cukiernik, aby ułożyć składającą się z pięciu warstw piramidę, taką jak na fotografii? Ilu pączków potrzebowałby, gdyby warstw było 12? Problem ten można łatwo rozstrzygnąć, korzystając z pewnego wyrażenia algebraicznego.



Przykłady wielomianów ■ Rozkład wielomianu na czynniki
■ Równania wielomianowe ■ Dzielenie wielomianów
■ Twierdzenie Bézouta ■ Równania wielomianowe (cd.)
■ Powtórzenie

PRZYKŁADY WIELOMIANÓW

I

Przykłady jednomianów:

$4x^{16}$ $\quad -3m^5$

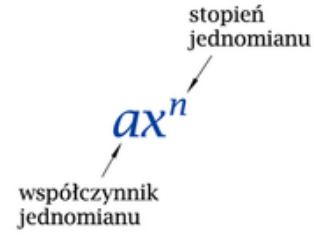
$\frac{2}{3}y$ $\quad -3\sqrt{2}t^{101}$

Każde z wyrażeń w ramce obok to iloczyn liczby i potęgi jednej zmiennej o wykładniku naturalnym. Takie wyrażenia nazywamy jednomianami.

Uwaga. Jednomianami nazywamy także wyrażenia, w których występuje więcej zmiennych, np. $3x^2y$, ab^3, $\frac{3}{5}m^5n^6$. Nie będziemy się nimi jednak zajmować w tym rozdziale.

Jednomianem stopnia $n \geqslant 1$ zmiennej x nazywamy wyrażenie, które można przekształcić do postaci:

ax^n, gdzie $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}_+$.



Każda liczba rzeczywista różna od zera jest jednomianem stopnia zerowego. Przyjmujemy, że liczba 0 jest także jednomianem i nazywamy go **jednomianem zerowym**. Stopień takiego jednomianu nie jest określony.

Jednomiany oraz ich sumy nazywamy wielomianami.

Wielomianem stopnia n zmiennej x nazywamy wyrażenie, które można przekształcić do postaci:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

gdzie współczynniki $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ są liczbami rzeczywistymi, $a_n \neq 0$ i $n \in \mathbb{N}$.

Współczynnik a_0 wielomianu jest nazywany wyrazem wolnym.

Przykłady wielomianów:

$4x^5 + 11x^3 + 7$

$-8a^3 - \frac{2}{3}a^5$

$0{,}04u^8$

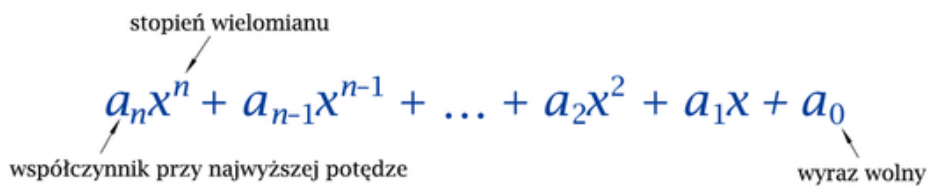
$3t^7 - 2\sqrt{6}t^5 + t^4 - 9$

$(2x - 1)^2$

$2 + \frac{m}{3} + 2m^2$

6

ĆWICZENIE A Określ stopień każdego z wielomianów podanych w ramce obok.



Przykłady dwumianów:

$2x - 1$

$a^3 + 2$

$3x^5 - \sqrt{2}x$

$\frac{3}{4}t^7 + t^{12}$

Przykłady trójmianów:

$3x^2 - 2x + 3$

$\frac{2}{3}y^8 + y^4 + 1$

$m^{10} - 2m^7 + m^6$

$\sqrt{7}x^5 - x - x^6$

Wielomian, który można zapisać w postaci sumy dwóch niezerowych jednomianów różnych stopni, nazywamy dwumianem, a sumę trzech jednomianów (różnych stopni) nazywamy trójmianem.

Trójmian, który jest wielomianem drugiego stopnia, nazywamy **trójmianem kwadratowym**.

ĆWICZENIE B a) Wymień współczynniki przy najwyższej potędze każdego z dwumianów i trójmianów zapisanych w ramce obok.

b) Podaj przykład trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych.

c) Czy wyrażenie $(2x - 3)^2$ jest trójmianem kwadratowym?

zadania 1–2

II Wielomiany można dodawać, odejmować i mnożyć. Wykonując tego typu działania, otrzymujemy nowy wielomian, który warto uporządkować, czyli zredukować wyrazy podobne, a występujące w nim jednomiany zapisać w kolejności od stopnia najwyższego do najniższego.

PRZYKŁAD 1 Zapisz w jak najprostszej postaci:

a) sumę wielomianów:

$(7 - 5x^5 - 3x^2) + (3x^2 - 4x - x^5) = 7 - 5x^5 - 3x^2 + 3x^2 - 4x - x^5 = \underline{-6x^5 - 4x + 7}$

b) różnicę wielomianów:

$(-8p^4 - 2p^6 + 3) - (3 - 5p + 2p^6) = -8p^4 - 2p^6 + 3 - 3 + 5p - 2p^6 = \underline{-4p^6 - 8p^4 + 5p}$

c) iloczyn wielomianów:

$(3 - 2t^5 + t)(-5t^2 - t) = -15t^2 - 3t + 10t^7 + 2t^6 - 5t^3 - t^2 = \underline{10t^7 + 2t^6 - 5t^3 - 16t^2 - 3t}$

ZADANIE Uporządkuj wielomian.

a) $(4x^5 + 3x^2 - 2x + 5) + (2x^5 - 3x^2 + 3x - 5)$

b) $(9a^6 - 5a^3) - (9a^6 + 5a^4 - 4a^3 + 2)$

c) $(3z^5 - 2z)(z^2 - 2z + 3)$

Zmienna wielomianu może oczywiście być oznaczona dowolną literą. Wielomiany zmiennej x będziemy czasami oznaczać w skrócie $W(x)$, $V(x)$, $P(x)$.

zadania 3–7

III Wartość wielomianu dla danej liczby otrzymamy, wstawiając w wielomianie tę liczbę w miejsce zmiennej. Dla danego wielomianu $W(x)$ jego wartość na przykład dla zmiennej x równej 5 będziemy zapisywali jako $W(5)$.

PRZYKŁAD 2 Oblicz wartość podanego wielomianu, gdy $x = \frac{2}{5}$.

a) $W(x) = (3x^7 - 9x^3 - 4x) - (3x^7 - 8x^3 + x)$

$W(x) = 3x^7 - 9x^3 - 4x - 3x^7 + 8x^3 - x = -x^3 - 5x$

$W\left(\frac{2}{5}\right) = -\left(\frac{2}{5}\right)^3 - 5 \cdot \frac{2}{5} = -\frac{8}{125} - 2 = \underline{-2\frac{8}{125}}$

Aby uprościć obliczenia, najpierw porządkujemy wielomian $W(x)$.

b) $V(x) = (25x^2 - 5x + 3)(1 - x)$

$V\left(\frac{2}{5}\right) = \left(25 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{5} + 3\right)\left(1 - \frac{2}{5}\right) = \underline{3}$

Nie porządkujemy wielomianu $V(x)$, bo nie upraszcza to obliczeń.

ZADANIE Oblicz wartość podanego wielomianu, gdy $x = \frac{1}{3}$.

a) $W(x) = (8x^5 + 6x^2 + 3) + (-8x^5 - 5x^2 + x - 3)$ b) $V(x) = (3x - 2)(x^3 - 9x^2 + 1)$

zadania 8–10

IV Dwa wielomiany tej samej zmiennej są równe, gdy są tego samego stopnia i po uporządkowaniu każdego z nich współczynniki przy tych samych potęgach są równe.

PRZYKŁAD 3 Rozważmy wielomiany:

$U(x) = ax^2 + bx \qquad V(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x \qquad W(x) = x - 3$

Dla jakich wartości współczynników a i b wielomian $U(x) - V(x)$ jest równy wielomianowi $U(x) \cdot W(x)$?

$U(x) - V(x) = (ax^2 + bx) - (2x^3 - 11x^2 + 12x) = ax^2 + bx - 2x^3 + 11x^2 - 12x =$
$= -2x^3 + (a + 11)x^2 + (b - 12)x$

$U(x) \cdot W(x) = (ax^2 + bx)(x - 3) = ax^3 - 3ax^2 + bx^2 - 3bx = ax^3 + (b - 3a)x^2 - 3bx$

$U(x) - V(x) = -2x^3 + (a + 11)x^2 + (b - 12)x$

$U(x) \cdot W(x) = ax^3 + (b - 3a)x^2 - 3bx$

$$\begin{cases} -2 = a \\ a + 11 = b - 3a \\ b - 12 = -3b \end{cases}$$

Porównujemy współczynniki obu wielomianów przy odpowiednich potęgach zmiennej; rozwiązujemy układ równań.

Stąd: $\underline{a = -2 \text{ i } b = 3}$

ZADANIE Dla jakich wartości współczynników a i b iloczyn wielomianów $U(x) = 2x - a$ i $V(x) = x^3 - x$ jest równy wielomianowi $W(x) = bx^4 - 5x^3 - 2x^2 + ax$?

zadania 11–13

ZESTAW ZADAŃ

I **1.** Wskaż w ramce wielomiany i określ stopień każdego z nich.

a)
$$\frac{7x^5-5x^7}{2}$$
$$6u^3-11u^{-2}+4$$
$$\sqrt{3}z^{105}+\frac{z^5}{3}$$

b)
$$\frac{1}{x^3-5x^2+4}$$
$$-2x^6-5\sqrt{x}+4$$
$$8^{\frac{1}{2}}$$

c)
$$0{,}2t+6t^3-1{,}4t^{10}$$
$$-3w^7$$
$$5w^{\frac{1}{3}}+4w$$

2. Przedstaw podane wyrażenie w postaci ax^n.

a) $\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^3\cdot\left(-\frac{2}{3}x\right)^2$ **b)** $x^2+x^2\sqrt{2}$ **c)** $\frac{3x^3}{2}\cdot x^2-\frac{1}{5}x^5$ **d)** $\frac{5x^2-(3x)^2}{2}$

II **3.** Wynik działania przedstaw w postaci uporządkowanego wielomianu.

a) $(4x-8x^3)-(2x^5-3x+2-8x^3)$

b) $(-3x^5+5x^7-2)+\frac{3-2x^2-7x^5}{2}$

c) $\frac{6x^5+4x^3-2x}{2}-\frac{2x(2x^2+x-1)}{5}$

d) $\frac{x(x^7-x^5)}{3}-\frac{x^6(x-x^7-1)}{2}$

e) $\frac{-x(x^4-8x^3-5)}{6}-\frac{4x^4(3x-2)}{3}$

f) $\left[\frac{-(5x^4+3x^2-4x)}{3}+3x^2(2x^2+1)\right]\cdot 3x^2$

g) $(5x^3-2)(x^3+1)-6x^3(2-x^3)$

h) $\frac{(x^2-6)(2x+3)}{5}+3x(4-2x^2)$

i) $\left[\frac{4x(-2x^9+7x^3)}{3}-\frac{20x^4-8x^{10}}{12}\right]\cdot(1-2x)$

j) $\frac{(3-4x^3)(5x^2+x)}{2}-\left[6x^5-5x^3-(5x^5-x^3)\right]$

k) $(2-3x^2)\cdot\frac{x^4-7x^6-2}{3}$

l) $\frac{-3x^3+2x^5}{2}\cdot\frac{x^5-1+5x^3}{5}$

4. Niech P oznacza wielomian $-4x+5$, Q — wielomian x^2-3x+1, a R — wielomian $2x^3-1$. Wykonaj działania.

a) $P-(Q+R)$ **b)** $4Q-3P+\frac{1}{2}R$ **c)** $R\cdot(P+Q)$

5. Bez porządkowania wielomianu określ jego stopień, współczynnik przy najwyższej potędze oraz wyraz wolny.

a) $(5x^2+3)(3x^3+2x^2-1)$

b) $(3x-2)(x+5)(7-x)$

c) $(x+1)^4(x-9)^2(x^2+2)$

d) $(4x^3+x^2-x+3)(x^2-5)-(x^3-2)(3x^2+1)$

e) $(x^2+1)(2x^3-7)-(x+1)(2x^4-4)$

f) $x^7(x^2+3)(2x-5)-2x^4(x^6-x^5+2)$

6. Stopień pewnego wielomianu $W(x)$ jest równy m, a stopień wielomianu $V(x)$ wynosi n oraz $m>n$. Określ stopień wielomianu:

a) $W(x)+V(x)$ **b)** $W(x)-V(x)$ **c)** $W(x)\cdot V(x)$ **d)** $[W(x)]^2-V(x)$

7. Podaj przykłady dwóch wielomianów stopnia czwartego, których:

a) suma jest jednomianem stopnia trzeciego,

b) iloczyn jest dwumianem.

III **8.** Oblicz wartość wielomianu, gdy zmienna x jest równa podanej liczbie.

a) $0{,}32x^3 - 0{,}42x - 1{,}32x^3 + 1{,}42x$, gdy $x = -10$

b) $\left(3\frac{2}{3}x^4 - \frac{3}{5}x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{5}\right) + \left(\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^3 - 3x^2\right)$, gdy $x = \sqrt{5}$

c) $(-2{,}3x^5 + 0{,}6x^4 - 1{,}7x) - (1{,}7x^5 + 1{,}6x^4 - 0{,}7x)$, gdy $x = -0{,}1$

d) $\left(-9\frac{3}{7}x^3 + 3\frac{5}{7}x^2 + 1\frac{3}{7}x^3 + x - \frac{2}{7}x^2\right)(4x-1)^3$, gdy $x = \frac{1}{2}$

e) $(0{,}6x - 1{,}4 + 7{,}4x^3 + 3{,}4x + 8{,}6x^3 + 1{,}15)(3 - 8x)^2$, gdy $x = 0{,}25$

9. a) Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + rx^2 + sx + t$. Znajdź wartości współczynników r, s, t, jeśli wiadomo, że $W(1) = -2$, $W(-1) = -10$ i $W(0) = -4$.

b) Dany jest wielomian $W(x) = ax^5 + bx^2 + c$. Znajdź wartości współczynników a, b oraz c, jeśli wiadomo, że $W(\sqrt{2}) = 4$, $W(-\sqrt{2}) = -12$ i $W(0) = -10$.

10. Cukiernik układa pączki w piramidy, tak jak na zdjęciu. Liczba pączków w piramidzie o n warstwach wynosi:

$$L(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$



a) Oblicz, z ilu pączków jest zbudowana piramida o 12 warstwach.

b) Uzasadnij, że $L(n+1) - L(n) = (n+1)^2$.

IV **11.** Ustal, dla jakich wartości współczynników p, q, r wielomian $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + 1$ jest równy wielomianowi:

a) $x^2 - 3x + x^4 - 13$

b) $x^5 - (7x^3 - x^4 + x)$

c) $(x^2 - 1)^2$

d) $(x-2)\left(x^3 - 3x - \frac{1}{2}\right)$

e) $(x^2 + 5x - 1)^2$

f) $(x^2 - 2x)(x^2 + 2x) + 1$

12. Dane są wielomiany $A(x) = 3x^2 + 5x + 2$, $B(x) = 9x^3 + 3x^2 - 17x - 4$ oraz $C(x) = mx + n$. Dla jakich wartości współczynników m i n wielomian $B(x) + C(x)$ jest równy wielomianowi $A(x) \cdot C(x)$?

13. Podaj przykłady jednomianów, które można wstawić w miejsca liter A i B, aby zachodziła równość wielomianów.

a) $A(2x^2 + x) = 4x^2 + B$

b) $Ax^2(9x + 2) = 5x^4 + Bx$

MINISPRAWDZIAN

S1. Jeśli $W(x) = 3x - (2x^2 - 1)(5 - x)$, to różnica $W(5) - W(0)$ jest równa:

A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

S2. Który z poniższych wielomianów jest wielomianem szóstego stopnia?

A. $(6x^3 - 6x^2 + 6)^6 + (6x^2)^3$

B. $2x^2(3x^3 - 5x^2 + 6) + 3x^3 \cdot 2x^2$

C. $6x(5x^5 + 2x^4) - 3x^4(2x + 10x^2)$

D. $(4x^2 - 3x)(2x^4 - 6) - 6x^2$

S3. Dla jakiej wartości a wielomiany $(x+a)(2x^3-x)$ i $5x-x^2(1+10x-2x^2)$ są równe?

A. $a = -5$ B. $a = -2$ C. $a = 1$ D. $a = 5$

ROZKŁAD WIELOMIANU NA CZYNNIKI

Wiadomo, że w wyniku mnożenia wielomianów otrzymujemy pewien wielomian. Czasem można wykonać operację odwrotną — rozłożyć wielomian na czynniki, czyli przedstawić go jako iloczyn innych wielomianów.

ĆWICZENIE A Jakie jednomiany należy wpisać w miejscu kratek?

a) $x^5 + 2x^3 = \square(x^2 + \square)$ b) $6x^4 - 9x = 3x(\square - \square)$

PRZYKŁAD 1 Rozłóż wielomian na czynniki co najwyżej drugiego stopnia.

a) $6x^3 - 3x^2 + 10x - 5 =$

$= 3x^2(2x - 1) + 5(2x - 1) =$

$= (2x - 1)(3x^2 + 5)$

W każdym z podkreślonych dwumianów wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, tak aby otrzymać sumę wielomianów, które mają wspólny czynnik. Następnie ten wspólny czynnik, czyli $2x - 1$, wyłączamy przed nawias.

b) $5x^4 - 20x^3 - x^2 + 4x =$

$= 5x^3(x - 4) - x(x - 4) =$

$= (x - 4)(5x^3 - x) =$

$= x(x - 4)(5x^2 - 1)$

W każdym z podkreślonych dwumianów wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, tak aby otrzymać sumę wielomianów, które mają wspólny czynnik.

Dwumian $x - 4$ wyłączamy przed nawias.

W zaznaczonym dwumianie wyłączamy wspólny czynnik x przed nawias.

ZADANIE Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $10x^3 - 4x^2 + 15x - 6$ b) $6x^4 - 15x^3 - 2x^2 + 5x$

Niektóre trójmiany kwadratowe można rozkładać na czynniki, korzystając ze wzorów, które przypominamy poniżej.

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, można przedstawić w postaci iloczynowej, gdy $\Delta \geqslant 0$ ($\Delta = b^2 - 4ac$).

Jeśli $\Delta > 0$, to równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

i zachodzi równość:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Jeśli $\Delta = 0$, to równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma jedno rozwiązanie:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

i zachodzi równość:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

Jeśli $\Delta < 0$, to równanie $ax^2 + bx + c = 0$ nie ma rozwiązań i wielomianu $ax^2 + bx + c$ nie można rozłożyć na czynniki pierwszego stopnia.

PRZYKŁAD 2 Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki jak najniższego stopnia.

a) $W(x) = -10x^3 + 25x^2 + 60x = -5x(2x^2 - 5x - 12)$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 121$

$x_1 = \frac{5 - \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{5 + \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = 4$

$W(x) = -5x \cdot 2\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x - 4) = \underline{-10x\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 4)}$

Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu $2x^2 - 5x - 12$. Ponieważ $\Delta > 0$, trójmian ten rozkłada się na czynniki pierwszego stopnia.

b) $W(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 =$

$= \underline{x^3(x^2 - 3x + 4)}$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7 < 0$

Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu $x^2 - 3x + 4$. Ponieważ $\Delta < 0$, trójmian ten nie rozkłada się na czynniki pierwszego stopnia.

ZADANIE Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki jak najniższego stopnia.

a) $W(x) = -4x^5 + 14x^4 - 6x^3$ b) $W(x) = -x^4 + 4x^3 - 7x^2$

zadania 1–5

|| Poniżej przypominamy wzory skróconego mnożenia. Można je wykorzystać przy rozkładaniu wielomianów na czynniki.

Wzory skróconego mnożenia

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

ĆWICZENIE B Uzasadnij, że ze wzoru pozwalającego rozłożyć na czynniki różnicę $a^n - b^n$ wynikają wzory na różnicę kwadratów i różnicę sześcianów.

PRZYKŁAD 3 Rozłóż wielomian na czynniki możliwie najniższego stopnia.

a) $x^4 - 25 = (x^2 - 5)(x^2 + 5) =$

$= \underline{(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x^2 + 5)}$

Dwukrotnie stosujemy wzór $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

b) $\underline{x^5 + x^4 + x^3} - \underline{8x^2 - 8x - 8} =$

W każdym z podkreślonych trójmianów wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

$= x^3(x^2 + x + 1) - 8(x^2 + x + 1) =$

Wyłączamy wspólny czynnik (trójmian $x^2 + x + 1$) przed nawias.

$= (x^2 + x + 1)(x^3 - 8) =$

$= \underline{(x^2 + x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}$

Stosujemy wzór $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

$\Delta_1 = -3 < 0$

$\Delta_2 = -12 < 0$

Sprawdzamy, czy otrzymane czynniki drugiego stopnia da się rozłożyć na czynniki pierwszego stopnia.

c) $x^6 + 2x^3 + 1 = (x^3)^2 + 2x^3 + 1 =$

$= (x^3 + 1)^2 = [(x+1)(x^2 - x + 1)]^2 =$

Stosujemy wzór $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, a następnie wzór $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

$= \underline{(x+1)^2(x^2 - x + 1)^2}$

$\Delta = -3 < 0$

Sprawdzamy, czy otrzymany czynnik drugiego stopnia da się rozłożyć na czynniki pierwszego stopnia.

ZADANIE Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $81x^4 - 1$ b) $8x^5 + 8x^3 - x^2 - 1$ c) $x^4 - 6x^2 + 9$

zadania 6–12

III Czasem aby rozłożyć wielomian na czynniki, trzeba się wykazać pomysłowością i zastosować nietypowe metody przekształcania wielomianów, np. przedstawić jednomian jako sumę dwóch jednomianów albo dodać i odjąć ten sam jednomian.

PRZYKŁAD 4 Rozłóż wielomiany na czynniki.

a) $2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 =$

$= \underline{2x^4 + x^3 + x^2} + 2x^2 + x + 1 =$ — Zastępujemy jednomian $3x^2$ sumą $x^2 + 2x^2$.

$= x^2(2x^2 + x + 1) + 2x^2 + x + 1 =$ — W zaznaczonym trójmianie wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

$= \underline{(2x^2 + x + 1)(x^2 + 1)}$ — Wyłączamy wspólny czynnik (trójmian $2x^2 + x + 1$) przed nawias.

b) $4x^3 - 5x + 1 =$

$= \underline{4x^3 - 4x} - \underline{x + 1} =$ — Zastępujemy jednomian $-5x$ sumą $-4x - x$.

$= 4x(x^2 - 1) - (x - 1) =$ — W zaznaczonych dwumianach wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

$= 4x(x - 1)(x + 1) - (x - 1) =$ — Stosujemy wzór $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$= (x - 1)\big[4x(x + 1) - 1\big] =$ — Wyłączamy wspólny czynnik (dwumian $x - 1$) przed nawias.

$= \underline{(x - 1)(4x^2 + 4x - 1)}$

c) $x^4 + 4 =$

$= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 =$ — Dodajemy i odejmujemy jednomian $4x^2$.

$= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 =$ — Stosujemy wzór $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

$= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) =$ — Stosujemy wzór $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$= \underline{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)}$

ZADANIE Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 3$ b) $3x^3 - 4x - 1$ c) $x^4 + 1$

W omawianych dotąd przykładach czynniki występujące w rozkładzie wielomianu nie miały stopnia wyższego niż 2. Okazuje się, że każdy wielomian można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego.

Warto wiedzieć!

Już w XVIII wieku znane było twierdzenie:

Każdy wielomian można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego.

Pierwszy dowód tego twierdzenia podał w swojej rozprawie doktorskiej Carl Friedrich Gauss (czyt. karl fridrich gauss) (1777–1855). Miał wówczas zaledwie 22 lata. Gauss jest uważany, obok Archimedesa i Newtona, za jednego z największych matematyków świata (zwany był księciem matematyków). Zajmował się prawie wszystkimi działami matematyki, a także fizyką i astronomią.

zadania 13–16

ZESTAW ZADAŃ

1. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $x^5 - x^3$

b) $x^4 - x^3 + x^2$

c) $4x^7 + 8x^6$

d) $15x^5 - 20x^3 + 5x^2$

e) $-9x^6 + 18x^4 - 12x^3$

f) $14x^8 - 21x^7 - 28x^5$

2. Przedstaw w postaci iloczynów dwóch wielomianów.

a) $x^3 + 4x^2 + x + 4$

b) $6x^3 - 5x^2 + 6x - 5$

c) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$

d) $2x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 5x$

e) $3x^6 - 4x^5 - 3x^3 + 4x^2$

f) $-7x^3 - 6x^2 + 7x + 6$

3. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $x^3 + 5x^2 + 3x + 15$

b) $2x^3 - 3x^2 + 6x - 9$

c) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$

d) $-15x^3 + 6x^2 - 5x + 2$

e) $5x^3 - \sqrt{7}x^2 + 10x - 2\sqrt{7}$

f) $\sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^2 + 5\sqrt{2}x - 5\sqrt{3}$

4. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia.

a) $15x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 4x$

b) $-10x^4 + 25x^3 - 8x^2 + 20x$

c) $x^5 + 10x^4 + x^3 + 10x^2$

d) $2x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 9x$

e) $2x^5 - 10x^4 + x^3 - 5x^2$

f) $-6x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 2x^2$

5. Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższego stopnia.

a) $10x^4 + 15x^3 - 45x^2$

b) $x^4 - 4x^3 - 5x^2$

c) $2x^3 + 3x^2 - 2x$

d) $x^5 - 2x^4 - x^3$

e) $2x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 24x$

f) $-10x^4 + 80x^3 - 20x^2 + 160x$

6. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $x^2 - 16$

b) $4x^2 - 5$

c) $49x^4 - \frac{1}{81}$

d) $x^7 - 100x^5$

e) $x^2 - 6x + 9$

f) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$

g) $x^4 - 2x^2 + 1$

h) $(x+3)^2 + 2(x+3) + 1$

i) $x^3 - 27$

j) $x^3 + 1$

k) $\frac{1}{27}x^3 - 8$

l) $64x^{10} + x^7$

7. Przedstaw wielomian w postaci iloczynu dwóch wielomianów, z których jeden jest dwumianem pierwszego stopnia.

a) $x^5 - 1$ **b)** $32x^5 - 1$ **c)** $x^6 - 64$ **d)** $x^5 - 3$ **e)** $x^6 - 27$

8. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $-3x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 14x$

b) $-x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 6x^3$

c) $-2x^5 + 5x^4 + 8x^3 - 20x^2$

d) $15x^6 - 10x^5 - 45x^4 + 30x^3$

e) $3x^4 + 2\sqrt{5}x^3 - 9x^2 - 6\sqrt{5}x$

f) $-6\sqrt{6}x^4 - 3\sqrt{5}x^3 + 2\sqrt{6}x^2 + \sqrt{5}x$

9. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $3x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 2$

b) $x^5 - x^4 + x^3 + 5x^2 - 5x + 5$

c) $x^5 + x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 8x + 16$

d) $2x^5 + x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 3$

e) $x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 16x - 16$

f) $x^5 - \sqrt{5}x^4 + x^3 - x^2 + \sqrt{5}x - 1$

10. a) Rozłóż wielomian $x^3 + 5x^2 + 3x + 15$ na czynniki, a następnie uzasadnij, że przyjmuje on wartości dodatnie tylko wtedy, gdy $x > -5$.

b) Rozłóż wielomian $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6$ na czynniki, a następnie określ, dla jakich wartości x wielomian ten przyjmuje wartości ujemne.

c) Rozłóż wielomian $-12x^5 + 6x^4 - 2x + 1$ na czynniki, a następnie uzasadnij, że gdy zmienna x ma wartość ujemną, wielomian ten przyjmuje wartości dodatnie.

11. Zapisz podane wyrażenie w jak najprostszej postaci (przyjmij, że x jest liczbą, dla której wyrażenie występujące pod kreską ułamkową jest różne od 0).

a) $\frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x - 3}$ **b)** $\frac{30x^4 - 6x^3 + 45x^2 - 9x}{8x^3 + 12x}$ **c)** $\frac{3x^2 - 5x + 2}{3x^3 - 2x^2 - 12x + 8}$

12. a) Rozłóż wielomian $n^3 - n$ na czynniki, a następnie uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej n wartość tego wielomianu jest liczbą podzielną przez 3.

b) Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej n wartość wielomianu $n^4 - 2n^3 + n^2$ jest liczbą podzielną przez 4.

c) Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n wartość wielomianu $n^5 - n$ jest liczbą podzielną przez 6.

III **13.** Znajdź liczbę, którą należy wpisać w kratce, a następnie rozłóż otrzymany wielomian na czynniki.

a) $3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + \square x^2 + 2x + 1$

b) $5x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 5x^4 - 7x^3 + \square x^2 + 5x^2 - 7x + 3$

c) $-2x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 15 = -2x^4 - 7x^3 + 15x^2 + \square x^2 - 7x + 15$

d) $-9x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 4x - 2 = -9x^4 + 6x^3 - 3x^2 + \square x^2 + 4x - 2$

14. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$

b) $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$

c) $3x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 2$

d) $2x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$

e) $x^4 + 5x^3 + x^2 - 5x - 2$

f) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$

15. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $2x^3 + x + 3$

b) $x^3 + x + 10$

c) $3x^3 - 5x + 2$

d) $x^3 - 6x - 4$

e) $x^3 - x - 6$

f) $x^3 - 15x + 4$

g) $2x^3 - 17x + 3$

h) $2x^3 - 3x^2 + 1$

16. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $x^4 + 9$ **b)** $x^4 + 100$ **c)** $4x^4 + 1$ **d)** $9x^4 + 25$

MINISPRAWDZIAN

S1. Wskaż ten z wielomianów, którego nie można rozłożyć na czynniki tak, aby jednym z czynników był dwumian $2x + 3$.

A. $4x^2 + 12x + 9$ B. $8x^3 + 27$ C. $4x^2 + 9$ D. $4x^2 - 9$

S2. Wielomian $x^3 + 5x^2 - 3x - 15$ można przedstawić jako iloczyn trzech spośród podanych dwumianów. Który dwumian nie wystąpi w tym rozkładzie?

A. $x + 5$ B. $x - 5$ C. $x + \sqrt{3}$ D. $x - \sqrt{3}$

S3. Wielomian $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 12x - 12$ można przedstawić jako iloczyn $(x + a)(x^2 + bx + c)(x + d)^2$. Która z wartości współczynników a, b, c, d jest błędna?

A. $a = -\sqrt[3]{3}$ B. $b = 2\sqrt{3}$ C. $c = \sqrt[3]{9}$ D. $d = -2$

RÓWNANIA WIELOMIANOWE

I

Przykłady równań wielomianowych:

$7x^2 = 4x$

$-15x + 6 = 6x$

$(3x + 2)^2 = 9x(x - 2)$

$-3x^2 + 5x - 2 = 0$

$5x^3 - 2x^2 + 15x - 6 = 0$

$-6x^2(x^2 - 3) = 2x^2 + 5$

Każde z równań zapisanych w ramce obok można przekształcić tak, aby po jednej stronie równania występował wielomian, a po drugiej — liczba 0.

Równanie, które można zapisać w postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n, nazywamy **równaniem wielomianowym stopnia n**.

Liczbę, która jest rozwiązaniem równania wielomianowego $W(x) = 0$, nazywamy **pierwiastkiem wielomianu** $W(x)$ lub pierwiastkiem równania.

ĆWICZENIE A a) Znajdź w ramce powyżej równania wielomianowe pierwszego stopnia i oblicz ich pierwiastki.

b) Znajdź w ramce powyżej równania wielomianowe drugiego stopnia i oblicz ich pierwiastki.

Metody znajdowania pierwiastków wielomianu pierwszego stopnia były już omawiane w szkole podstawowej. Wiesz też, jak rozwiązywać równania wielomianowe drugiego stopnia.

Pokażemy teraz, jak znajdować pierwiastki niektórych wielomianów wyższych stopni.

ĆWICZENIE B Podaj liczby, które spełniają równanie:

a) $(x + 1)(x - 6) = 0$ b) $(x - 2)^4 = 0$ c) $3x(x - 1)(2x - 4) = 0$

Dosyć łatwo można rozwiązać równanie wielomianowe $W(x) = 0$, gdy wielomian $W(x)$ jest przedstawiony w postaci iloczynowej. Wystarczy skorzystać z faktu, że iloczyn czynników jest równy zero wtedy, gdy którykolwiek z czynników jest równy zero.

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ lub } b = 0$$

Uwaga. Przy rozwiązywaniu równań wielomianowych rozkładanie wielomianu na czynniki jak najniższego stopnia nie jest konieczne. Wystarczy rozłożyć wielomian na takie czynniki, których pierwiastki potrafimy obliczyć.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie.

a) $x^5 - 6x^4 = 40x^3$

$x^5 - 6x^4 - 40x^3 = 0$ ⋮ Przekształcamy równanie do postaci $W(x) = 0$.

$x^3(x^2 - 6x - 40) = 0$ ⋮ Wielomian $W(x)$ rozkładamy na czynniki.

$x^3 = 0$ lub $x^2 - 6x - 40 = 0$

$x = 0$ $\quad \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 196$

$\sqrt{\Delta} = 14$

$x_1 = \frac{6-14}{2} = -4 \quad x_2 = \frac{6+14}{2} = 10$

$x = 0$ lub $x = -4$ lub $x = 10$

b) $x^3 - 6x^2 - 3x + 18 = 0$

$x^2(x - 6) - 3(x - 6) = 0$

$(x - 6)(x^2 - 3) = 0$

$x - 6 = 0$ lub $x^2 - 3 = 0$

$x = 6$ lub $x^2 = 3$

$x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{3}$

$x = 6$ lub $x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{3}$

c) $4x^6 = x^2$

$4x^6 - x^2 = 0$

$x^2(4x^4 - 1) = 0$

$x^2(2x^2 - 1)(2x^2 + 1) = 0$

$x^2 = 0$ lub $2x^2 - 1 = 0$ lub $2x^2 + 1 = 0$

$x = 0$ $\quad x^2 = \frac{1}{2}$ $\quad$ równanie sprzeczne

$x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ lub $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

$x = 0$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $2x^4 - 5x^3 - 3x^2 = 0$ b) $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$ c) $15x^3 = 9x$

zadania 1–9

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

$x^2 = t \qquad t^2 - 7t + 12 = 0$

W miejscu x^2 podstawiamy t i rozwiązujemy otrzymane równanie z niewiadomą t.

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 12 = 1 \qquad \sqrt{\Delta} = 1$

$t_1 = \frac{7-1}{2} = 3 \qquad t_2 = \frac{7+1}{2} = 4$

Rozwiązujemy równania $x^2 = t_1$ i $x^2 = t_2$.

$x^2 = 3 \quad$ lub $\quad x^2 = 4$

$x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{3}$ lub $x = 2$ lub $x = -2$

b) $x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27 = 0$

$x^4(x-3) - 8x^2(x-3) - 9(x-3) = 0$

$(x-3)(x^4 - 8x^2 - 9) = 0$

$x - 3 = 0 \quad$ lub $\quad x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

$x = 3 \qquad x^2 = t \qquad t^2 - 8t - 9 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot (-9) = 100 \qquad \sqrt{\Delta} = 10$

$t_1 = \frac{8-10}{2} = -1 \qquad t_2 = \frac{8+10}{2} = 9$

$x^2 = -1 \quad$ lub $\quad x^2 = 9$

równanie sprzeczne

$x = 3$ lub $x = -3$

$x = 3$ lub $x = -3$

c) $(x^2 + 3)^2 - 6(x^2 + 3) - 7 = 0$

$x^2 + 3 = t \qquad t^2 - 6t - 7 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (-7) = 64 \qquad \sqrt{\Delta} = 8$

$t_1 = \frac{6+8}{2} = 7 \qquad t_2 = \frac{6-8}{2} = -1$

$x^2 + 3 = 7 \quad$ lub $\quad x^2 + 3 = -1$

$x^2 = 4 \qquad x^2 = -4$

$x = 2$ lub $x = -2$ równanie sprzeczne

$x = 2$ lub $x = -2$

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ b) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = 0$ c) $(x^2 - 7)^2 + (x^2 - 7) - 6 = 0$

zadania 10–16

III Zastanówmy się teraz, jaki może być związek między stopniem wielomianu a liczbą pierwiastków tego wielomianu.

Wiadomo, że wielomian pierwszego stopnia ma jeden pierwiastek (każde równanie postaci $ax + b = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma jedno rozwiązanie). Wiadomo także, że wielomian drugiego stopnia może mieć dwa pierwiastki lub jeden albo wcale nie mieć pierwiastków.

ĆWICZENIE C a) Każdy z trzech poniższych wielomianów jest wielomianem trzeciego stopnia. Ustal, po ile pierwiastków mają te wielomiany.

$$U(x) = x(x-2)(x+3) \qquad V(x) = (x+1)(x^2-3x+5) \qquad W(x) = x(x+5)^2$$

b) Podaj przykład wielomianu czwartego stopnia, który nie ma pierwiastków, oraz wielomianu piątego stopnia, który ma tylko jeden pierwiastek.

Zauważmy, że:

- Wielomian n-tego stopnia ma co najwyżej n pierwiastków (taki wielomian można rozłożyć na co najwyżej n wielomianów pierwszego stopnia).
- Ponieważ każdy wielomian można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego, więc w wypadku wielomianu nieparzystego stopnia co najmniej jeden czynnik musi być pierwszego stopnia. Zatem wielomian nieparzystego stopnia musi mieć co najmniej jeden pierwiastek.

W takim razie na przykład wielomian stopnia trzeciego zawsze ma jakiś pierwiastek, ale nie może mieć ich więcej niż trzy. Wielomian czwartego stopnia może nie mieć pierwiastków, ale jeśli ma pierwiastki, to nie więcej niż cztery.

ĆWICZENIE D Podaj przykład wielomianu jak najniższego stopnia, który ma sześć pierwiastków.

Rozważmy następujące wielomiany:

$$W(x) = (x-7)(x-5)^2 \qquad P(x) = (x-7)^2(x-5)^3$$

Pierwiastkami każdego z tych wielomianów są liczby 7 i 5.

W rozkładzie wielomianu $W(x)$ na czynniki dwumian $x - 7$ występuje raz, a dwumian $x - 5$ występuje dwa razy, gdyż $W(x) = (x-7)(x-5)(x-5)$. Mówimy, że liczba 7 jest jednokrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, a liczba 5 — jego dwukrotnym pierwiastkiem.

Zauważ, że w rozkładzie wielomianu $P(x)$ na czynniki dwumian $x - 7$ występuje dwa razy, a dwumian $x - 5$ występuje trzy razy. Liczba 7 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $P(x)$, a liczba 5 jest pierwiastkiem trzykrotnym tego wielomianu.

Niech $W(x)$ będzie wielomianem niezerowym. Liczbę a nazywamy ***k*-krotnym pierwiastkiem wielomianu** $W(x)$, gdy ten wielomian możemy przedstawić w postaci:

$$W(x) = (x-a)^k \cdot P(x),$$

gdzie $P(x)$ jest pewnym wielomianem i liczba a nie jest jego pierwiastkiem (czyli $P(a) \neq 0$).

ĆWICZENIE E Liczba -1 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, a liczba 7 jest jego pierwiastkiem pięciokrotnym. Co można powiedzieć o stopniu wielomianu $W(x)$?

W poprzednim temacie przypomnieliśmy wzory pozwalające obliczać pierwiastki wielomianu postaci $ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Taki wielomian może mieć dwa pierwiastki (i każdy z tych pierwiastków jest jednokrotny) lub może mieć jeden pierwiastek (i pierwiastek ten jest dwukrotny) albo może wcale nie mieć pierwiastków. Możemy bowiem korzystać z następującej własności: *Wielomian* $W(x) = ax^2 + bx + c$, *gdzie* $a \neq 0$, *ma dwa pierwiastki* x_1 *i* x_2 *wtedy i tylko wtedy, gdy* $W(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ *i* $x_1 \neq x_2$ *lub jeden pierwiastek* x_0 *wtedy i tylko wtedy, gdy* $W(x) = a(x - x_0)^2$.

ĆWICZENIE F Znajdź pierwiastki wielomianu i określ ich krotności.

a) $x^3(x-3)(x+1)^4$

b) $(x+2)^2(x+5)^3(x+2)$

c) $(x-1)(x^2-6x+5)$

d) $(x-3)(x^2-6x+9)$

zadania 17–23

ZESTAW ZADAŃ

1. Znajdź wszystkie liczby spełniające równanie.

a) $(x-3)(2x+5)(4-3x)^2 = 0$

b) $(x+5)(x^2+x-20)(x^2-5) = 0$

c) $x(2x^2+9x+9)(9x^2+1) = 0$

d) $(4x^2-8x+6)(4x^2-8x)(-8x+6) = 0$

e) $x^3(x^3-1)(1+x^3) = 0$

f) $(x^2+2)(x^3+2)(x^3+8) = 0$

2. Nie rozwiązując równania, ustal, czy ma ono rozwiązania.

a) $x^4 + 1 = 0$

b) $3x^2 + x^4 = 0$

c) $3x^2 + 4x^8 + 2 = 0$

3. Rozwiąż równanie.

a) $5x^3 - 45x = 0$

b) $3x^3 = x^2 + 2x$

c) $x^4 - 3x^3 - 10x^2 = 0$

d) $6x^4 + 3x^3 = 45x^2$

e) $2x^5 - 14x^4 + 24x^3 = 0$

f) $-5x^4 + 3x^3 + 14x^2 = 0$

4. Rozwiąż równanie.

a) $6x^3 + 6x^2 - 3x - 3 = 0$

b) $2x^5 - 18x^3 + 2x^2 - 18 = 0$

c) $4x^3 - 14x^2 + 6x - 21 = 0$

d) $15x^5 - 10x^4 - 6x + 4 = 0$

e) $2x^5 - 8x^3 + 16x^2 - 64 = 0$

f) $3x^5 - 12x^3 - 12x^2 + 48 = 0$

g) $5x^5 + x^3 - 6 = 30x^2$

h) $5 = 3x + 5x^4 - 3x^5$

5. Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki jak najniższego stopnia i podaj wszystkie jego pierwiastki.

a) $W(x) = (x^4 - 9)(-x^2 + x + 2)$

b) $W(x) = (3x^2 - 4)(x^3 - 1)$

c) $W(x) = (x^3 - 8)(2x^2 - x - 3)$

d) $W(x) = (2x^2 - 3x + 1)^2(7x^2 + 5x)$

6. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = 0$

c) $x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 5 = 0$

d) $3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$

e) $2x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

f) $2x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$

7. Rozwiąż równanie.

a) $2x^5 = 3x^4$

b) $5x^7 = 10x^4$

c) $x^6 = 5x^2$

d) $x^4(x - 6) = x^4$

e) $x^3(x + 7) = x^3$

f) $2x^2(3x - 1) = 3x^2$

g) $x^2(x + 5) = 4(x + 5)$

h) $x^3(x^2 - 9) = 27(x^2 - 9)$

i) $3x^2(x^3 - 8) = x(x^3 - 8)$

8. Czy podane równanie ma rozwiązania? Odpowiedz na to pytanie, nie rozwiązując równania.

a) $x^4 + 1 = 0$

b) $x^2 - 2 = 0$

c) $3x^2 + x^4 = 0$

d) $3x^2 + 4x^8 + 2 = 0$

e) $(3x - 4)^6 + 5 = 0$

f) $2(x^2 - 7) = -4$

g) $(x^4 + 2)^3 = -8$

h) $(x^2 - 7)^5 + 1 = 0$

i) $(x - 1)^2 = (x - 1)^4$

9. Podaj przykład wielomianu o współczynnikach całkowitych, którego jednym z pierwiastków jest:

a) $\sqrt{5}$

b) $1 + \sqrt{7}$

c) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$

10. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

d) $x^5 + x^3 - 12x = 0$

e) $2x^5 + 5x^3 - 12x = 0$

f) $3x^5 - 8x^3 - 3x = 0$

g) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

h) $x^7 + 5x^4 + 6x = 0$

i) $2x^7 - x^4 - x = 0$

11. Rozwiąż równanie.

a) $x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x - 2 = 0$

b) $x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 2x + 4 = 0$

c) $x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 4x - 12 = 0$

d) $x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 4x + 8 = 0$

12. Rozwiąż równanie.

a) $(x^2 + 3)^2 - 6(x^2 + 3) + 8 = 0$

b) $(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) - 3 = 0$

c) $(x^3 + 2)^2 - 4(x^3 + 2) + 3 = 0$

d) $(x^3 - 1)^2 - 6(x^3 - 1) - 7 = 0$

e) $(x - 3)^4 - (x - 3)^2 - 12 = 0$

f) $(2x + 1)^4 - 5(2x + 1)^2 + 4 = 0$

13. Rozwiąż równanie (postaraj się znaleźć rozwiązania w jak najprostszy sposób).

a) $(2x - 1)^2 = 100$ **b)** $(5 - x)^3 = -8$ **c)** $3(2x^2 - 7)^2 = 27$

14. a) Znajdź liczbę, której sześcian jest równy sumie tej liczby i jej kwadratu.

b) Znajdź liczbę, o której wiadomo, że suma tej liczby i sześcianu liczby o 1 od niej mniejszej wynosi 11.

c) Znajdź liczbę, której kwadrat jest o 2 mniejszy od jej czwartej potęgi.

15. Uzasadnij następującą własność:

Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu wtedy i tylko wtedy, gdy suma współczynników tego wielomianu jest równa 0.

16. Uzasadnij, że jeśli wielomian $W(x) = ax^7 + bx^5 + cx^3 + dx + e$ spełnia warunek $W(-1) = -W(1)$, to liczba 0 jest pierwiastkiem tego wielomianu.

III **17.** Znajdź wszystkie pierwiastki podanego wielomianu i ustal ich krotności.

a) $x^7(x - 1)^3(x + 2)(x + 5)^5$

b) $x(x + 3)^2(2x - 1)^3(x + 3)$

c) $(x + 2)^4(3x + 4)^2(x + 2)^3$

d) $(x - 3)^2(3 - x)^3(x + 3)^2$

18. Znajdź wszystkie pierwiastki podanego wielomianu i ustal ich krotności.

a) $(x^2 - 9)(x^2 + 2x - 15)^2(x^2 - 2x + 3)$

b) $(x^2 + 6x + 9)(2x^2 + 9)(2x^2 + 5x - 3)$

c) $(x - 1)(x^5 - 5x^4 + 4x^3)$

d) $(3x^4 - x^3 + 3x - 1)(x + 1)^3$

e) $(x^2 - 1)^2(x^6 - 2x^5 + x^4)$

f) $(x^3 - x^2)(x^6 + x^4 - x^2 - 1)$

19. Dane są wielomiany $W(x) = 3(x - 2)^5(x + 4)^3$ i $V(x) = -5(x - 2)^4(x + 4)^4$. Znajdź wszystkie pierwiastki wielomianu $Z(x)$ i określ ich krotność.

a) $Z(x) = W(x) \cdot V(x)$ **b)** $Z(x) = W(x) + V(x)$ **c)** $Z(x) = W(x) - V(x)$

20. Podaj przykład wielomianu, który spełnia podany warunek.

a) Liczba 3 jest pierwiastkiem dwukrotnym, a liczba -10 jest pierwiastkiem czterokrotnym wielomianu.

b) Liczby $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$ są pierwiastkami dwukrotnymi i wszystkie współczynniki wielomianu są liczbami całkowitymi.

c) Liczba -5 jest pierwiastkiem pięciokrotnym i stopień wielomianu jest równy 7.

d) Stopień wielomianu jest równy 10, jedynymi pierwiastkami są liczby 0, -2, $-\sqrt{2}$, przy czym liczba 0 jest pierwiastkiem dwukrotnym, liczba -2 jest pierwiastkiem trzykrotnym, a liczba $-\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem jednokrotnym.

21. Znajdź liczby p i q, dla których równanie ma jeden pierwiastek trzykrotny.

a) $8x^3 - 36x^2 + px + q = 0$

b) $px^3 + qx^2 + x - 1 = 0$

c) $125x^3 + px^2 + qx + 8 = 0$

d) $\frac{1}{8}x^3 + px^2 + \frac{3}{2}x + q = 0$

22. Ustal, w jaki sposób liczba pierwiastków równania $(2x^2 + px + 1)^2 = 0$ i ich krotność zależą od wartości p.

23. Liczba a jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ i m-krotnym pierwiastkiem wielomianu $V(x)$ $(k > m)$. Uzasadnij, że liczba a jest także pierwiastkiem wielomianu $Z(x)$, i ustal, jaką ma krotność, jeśli:

a) $Z(x) = W(x) \cdot V(x)$

b) $Z(x) = [W(x)]^2(V(x) + 3)$

c) $Z(x) = W(x) + V(x)$

MINISPRAWDZIAN

S1. Wielomian $(4x^2 + 5)(4x^2 - x - 7)(x + 6)^2$ ma:

A. sześć pierwiastków
B. cztery pierwiastki
C. trzy pierwiastki
D. jeden pierwiastek

S2. Suma rozwiązań równania $6x^5 - 2x^4 - 24x^3 + 8x^2 = 0$ jest równa:

A. -2 B. $\frac{1}{3}$ C. $2\frac{1}{3}$ D. 4

S3. Wszystkie pierwiastki równania $x^6 - 7x^3 + 10 = 0$ należą do przedziału:

A. $\langle -10; -7 \rangle$ B. $\langle -7; -3 \rangle$ C. $\langle -3; 2 \rangle$ D. $\langle 2; 7 \rangle$

S4. Liczba 1 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu:

A. $x(x-1)(x^2-1)$
B. $(x+1)^3(x^2+1)^3$
C. $x^3(3x-1)(x-3)$
D. $(2x-2)(x^2-2x+1)$

DZIELENIE WIELOMIANÓW

Wiadomo, że jeśli dana liczba naturalna a jest iloczynem pewnych dwóch liczb, to w wyniku dzielenia liczby a przez jedną z tych liczb otrzymamy drugą z nich. Na przykład równość:

$$4503 = 57 \cdot 79$$

możemy zapisać w postaci:

$$4503 : 57 = 79$$

Oznacza to, że liczba 4503 jest podzielna przez 57 (a także przez 79). W analogiczny sposób będziemy rozumieli dzielenie wielomianów.

Wiesz już, że wielomiany można rozkładać na czynniki. Na przykład wielomian $W(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 6$ można zapisać w postaci iloczynu:

$$2x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = (x - 2)(2x^2 + 3)$$

Powyższą równość można zapisać inaczej:

$$(2x^3 - 4x^2 + 3x - 6) : (x - 2) = 2x^2 + 3$$

Mówimy wówczas, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $x - 2$. Wynikiem dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - 2$ jest wielomian $2x^2 + 3$.

Uwaga. Wielomian $W(x)$ jest także podzielny przez wielomian $2x^2 + 3$.

Mówimy, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez niezerowy wielomian $P(x)$, jeśli istnieje taki wielomian $Q(x)$, że:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

Tę równość można też zapisać w postaci:

$$W(x) : P(x) = Q(x)$$

Zauważ, że po rozłożeniu danego wielomianu na czynniki łatwo można wskazać wielomiany, przez które jest on podzielny, i podać wyniki takiego dzielenia.

ĆWICZENIE A Rozłóż wielomian $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$ na czynniki, a następnie określ wynik dzielenia.

a) $(x^5 - 4x^3 + x^2 - 4) : (x - 2)$ b) $(x^5 - 4x^3 + x^2 - 4) : (x^2 - 4)$

Pokażemy teraz metodę, która pozwala znaleźć wynik dzielenia dwóch wielomianów bez konieczności rozkładania pierwszego z nich na czynniki. Metoda ta przypomina pisemne dzielenie liczb naturalnych.

Wynik dzielenia $W(x) : P(x)$, gdzie $W(x) = 2x^3 - x^2 - 16x + 3$ i $P(x) = x - 3$, można znaleźć w następujący sposób:

$$\begin{array}{l} \ 2x^2 \\ (2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) \end{array}$$

1. Dzielimy pierwszy wyraz wielomianu $W(x)$ (jednomian najwyższego stopnia) przez pierwszy wyraz wielomianu $P(x)$; $2x^3 : x = 2x^2$

$$\begin{array}{l} \ 2x^2 \\ (2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) \\ \ 2x^3 - 6x^2 \end{array}$$

2. Mnożymy częściowy wynik $2x^2$ przez wielomian $P(x)$; $2x^2 \cdot (x - 3) = 2x^3 - 6x^2$

$$\begin{array}{l} \ 2x^2 \\ (2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) \\ -(2x^3 - 6x^2) \\ \hline \qquad 5x^2 - 16x + 3 \end{array}$$

3. Otrzymany wynik mnożenia $2x^3 - 6x^2$ odejmujemy od wielomianu $W(x)$; $2x^3 - x^2 - 16x + 3 - (2x^3 - 6x^2) = 5x^2 - 16x + 3$

$$\begin{array}{l} \ 2x^2 + 5x \\ (2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) \\ -(2x^3 - 6x^2) \\ \hline \qquad 5x^2 - 16x + 3 \end{array}$$

4. Dzielimy pierwszy wyraz wielomianu otrzymanego w wyniku odejmowania przez pierwszy wyraz wielomianu $P(x)$; $5x^2 : x = 5x$

$$\begin{array}{l} \ 2x^2 + 5x \\ (2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) \\ -(2x^3 - 6x^2) \\ \hline \qquad 5x^2 - 16x + 3 \\ \qquad -(5x^2 - 15x) \\ \hline \qquad\qquad -x + 3 \end{array}$$

5. Mnożymy częściowy wynik $5x$ przez wielomian $P(x)$; $5x \cdot (x - 3) = 5x^2 - 15x$ i otrzymany wynik odejmujemy od wielomianu $5x^2 - 16x + 3$; $5x^2 - 16x + 3 - (5x^2 - 15x) = -x + 3$

$$\begin{array}{l} \ 2x^2 + 5x - 1 \\ (2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) \\ -(2x^3 - 6x^2) \\ \hline \qquad 5x - 16x + 3 \\ \qquad -(5x^2 - 15x) \\ \hline \qquad\qquad -x + 3 \\ \qquad\qquad -(-x + 3) \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

6. Dzielimy pierwszy wyraz wielomianu otrzymanego w wyniku odejmowania przez pierwszy wyraz wielomianu $P(x)$; $-x : x = -1$
Mnożymy -1 przez wielomian $P(x)$ i otrzymany wynik odejmujemy od wielomianu $-x + 3$.

Wynikiem dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ jest wielomian $2x^2 + 5x - 1$.

$$(2x^3 - x^2 - 16x + 3) : (x - 3) = 2x^2 + 5x - 1$$

ĆWICZENIE B Upewnij się, że otrzymany wynik jest poprawny — pomnóż wielomian $x - 3$ przez wielomian $2x^2 + 5x - 1$.

Zauważ, że przy wykonywaniu dzielenia obliczaliśmy różnice pewnych wielomianów. Gdy wykonujemy takie działania, łatwo o pomyłkę, dlatego warto nieco zmienić sposób zapisu dzielenia.

$$\begin{array}{r} 2x^2+5x-1 \\ \hline (2x^3-x^2-16x+3):(x-3) \\ -2x^3+6x^2 \\ \hline 5x^2-16x+3 \\ -5x^2+15x \\ \hline -x+3 \\ x-3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Wynik mnożenia $2x^2\cdot(x-3)$ zapisujemy ze zmienionymi znakami, a następnie dodajemy go do wielomianu $2x^3-x^2-16x+3$.

Wynik mnożenia $5x\cdot(x-3)$ zapisujemy ze zmienionymi znakami, a następnie dodajemy go do wielomianu $5x^2-16x+3$.

PRZYKŁAD 1 Podziel wielomian $W(x)=3x^3+16x^2+3x-10$ przez dwumian $x+5$ i zapisz wielomian $W(x)$ w postaci iloczynu.

$$\begin{array}{r} 3x^2+x-2 \\ \hline (3x^3+16x^2+3x-10):(x+5) \\ -3x^3-15x^2 \\ \hline x^2+3x-10 \\ -x^2-5x \\ \hline -2x-10 \\ 2x+10 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$W(x)=(x+5)(3x^2+x-2)$$

ZADANIE Wykonaj dzielenie $(5x^3-17x^2+7x-3):(x-3)$.

zadania 1–5

Podobnie jak przy dzieleniu liczb naturalnych, także w wyniku dzielenia wielomianu przez inny wielomian możemy otrzymać resztę różną od 0.

LICZBY

$$\begin{array}{r} 211 \\ \hline 2745:13 \\ -26 \\ \hline 14 \\ -13 \\ \hline 15 \\ -13 \\ \hline 2 \end{array}$$ ← reszta

Wynik dzielenia:

$2745:13=211$ reszta 2

Zatem:

$2745=211\cdot 13+2$

Reszta jest mniejsza od liczby, przez którą dzielimy.

WIELOMIANY

$$\begin{array}{r} 2x^2+x+1 \\ \hline (2x^3+7x^2+4x+5):(x+3) \\ -2x^3-6x^2 \\ \hline x^2+4x+5 \\ -x^2-3x \\ \hline x+5 \\ -x-3 \\ \hline 2 \end{array}$$ ← reszta

Wynik dzielenia

$(2x^3+7x^2+4x+5):(x+3)=2x^2+x+1$ reszta 2

Zatem:

$2x^3+7x^2+4x+5=(x+3)(2x^2+x+1)+2$

Stopień reszty jest mniejszy od stopnia wielomianu, przez który dzielimy.

PRZYKŁAD 2 Wykonaj dzielenie $W(x) : P(x)$, gdy $W(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 14x - 3$, $P(x) = x - 4$.

$$\begin{array}{l} x^4 - 3x + 2 \\ \hline (x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 14x - 3) : (x - 4) \\ -x^5 + 4x^4 \\ \hline \qquad -3x^2 + 14x - 3 \\ \qquad 3x^2 - 12x \\ \hline \qquad 2x - 3 \\ \qquad -2x + 8 \\ \hline \qquad 5 \end{array}$$

W wyniku dzielenia $W(x) : P(x)$ otrzymujemy: $x^4 - 3x + 2$ reszta 5.

$(x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 14x - 3) : (x - 4) = x^4 - 3x + 2$ reszta 5

Zatem:

$x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 14x - 3 = (x - 4)(x^4 - 3x + 2) + 5$ $\quad W(x) = P(x) \cdot (x^4 - 3x + 2) + 5$

ZADANIE Wykonaj dzielenie $(2x^3 + x^2 - 12x + 5) : (x + 3)$.

Zauważ, że resztą z dzielenia dowolnego wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$ jest zawsze liczba. Gdy ta reszta jest równa 0, to mówimy, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

zadania 6–12

ZESTAW ZADAŃ

1. Podaj przykłady trzech wielomianów, przez które podzielny jest zarówno wielomian $W(x)$, jak i wielomian $V(x)$.

a) $W(x) = -(3x + 2)^4(2x + 5)^3$, $V(x) = (2x + 5)^3(x + 2)$

b) $W(x) = \frac{1}{3}(2x - 1)^5(4x - 1)(x^2 + 2)$, $V(x) = (x^2 + 2)^5(2x - 1)^2(x - 4)$

2. Wykonaj dzielenie.

a) $(x^3 - 8x^2 + 17x - 10) : (x - 5)$

b) $(3x^3 + 8x^2 - 18x - 8) : (x + 4)$

c) $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1) : (x - 1)$

d) $(-4x^4 + 12x^3 - 5x^2 + 17x - 6) : (x - 3)$

e) $(x^5 + 9x^4 + 14x^3 + x + 7) : (x + 7)$

f) $(-x^5 - 2x^4 + 5x^2 + 17x + 14) : (x + 2)$

3. Znajdź taki wielomian $W(x)$, aby była spełniona podana równość.

a) $(x + 2) \cdot W(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$

b) $W(x) \cdot (x - 3) = 5x^4 - 17x^3 + 6x^2 - x + 3$

c) $10x^2 + (x - 5) \cdot W(x) = 3x^4 - 13x^3 - x + 5$

d) $7(2x^2 + x) - (x + 4) \cdot W(x) = 4 - 3x^3$

① $3x^4 + 2x - 3$

② $3x^4 - 3x - 6$

③ $3x^3 + 2x + 3$

④ $3x^3 - 2x - 3$

⑤ $3x^4 + 3x - 2$

4. Obok zapisano pięć różnych wielomianów. Jeden z nich jest wynikiem podanego dzielenia. Nie wykonując dzielenia, wskaż który.

a) $(3x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 9x - 9) : (x + 3)$

b) $(3x^5 - 9x^4 + 3x^2 - 11x + 6) : (x - 3)$

c) $(3x^5 + 3x^4 - 3x^2 - 9x - 6) : (x + 1)$

d) $(3x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 5x + 3) : (x - 1)$

5. Jakie liczby należy wstawić w miejsce kratek?

a) $(3x^3 + \square x^2 + \square x + \square) : (x + 2) = \square x^2 + 1$

b) $(\square x^4 + \square x^3 + \square x^2 - 15x) : (x - 3) = -2x^3 + \square x$

6. Wykonaj dzielenie z resztą.

a) $(x^3 - 4x^2 + 10x) : (x - 1)$

b) $(2x^3 + 7x^2 + 2x - 1) : (x + 3)$

c) $(3x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 11x - 4) : (x + 2)$

d) $(-4x^4 + 17x^3 - 4x^2 + 2x - 5) : (x - 4)$

e) $(x^5 + x^4 - 2x^2 + x + 10) : (x + 1)$

f) $(3x^5 - 13x^4 - 10x^3 - x^2 + 7x - 6) : (x - 5)$

7. Znajdź wielomian $W(x)$ spełniający podany warunek.

a) Dzieląc $W(x)$ przez $x - 4$, otrzymamy wielomian $3x - 2$ oraz resztę -2.

b) Dzieląc $W(x)$ przez $x + 5$, otrzymamy wielomian $x^2 - 5$ oraz resztę 7.

8. Podaj przykład wielomianu czwartego stopnia, dla którego reszta z jego dzielenia przez wielomian $x + 2$ jest równa 10.

9. a) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 - x^2 - 11x - 4$ przez dwumian $P(x) = x - 2$ jest równa -14. Jaką liczbą należałoby zastąpić wyraz wolny wielomianu $W(x)$, aby otrzymany wielomian był podzielny przez dwumian $P(x)$?

b) Reszta z dzielenia wielomianu $V(x) = 5x^4 + 15x^3 - 2x^2 - 2x + 7$ przez dwumian $Q(x) = x + 3$ wynosi -5. Jak należałoby zmienić wyraz wolny wielomianu $V(x)$, aby otrzymany wielomian był podzielny przez dwumian $Q(x)$?

10. a) Dane są wielomiany:

$$W_1(x) = 2x^3 - 11x^2 - 4x - 2 \qquad W_2(x) = 3x^4 - 15x^3 + 4x - 16$$

Podziel każdy z tych wielomianów przez dwumian $x - 5$, a następnie podziel wielomian $W_1(x) + W_2(x)$ przez dwumian $x - 5$.

b) Udowodnij, że jeśli resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - a$ jest r_1 i resztą z dzielenia wielomianu $V(x)$ przez $x - a$ jest r_2, to reszta z dzielenia wielomianu $W(x) + V(x)$ przez $x - a$ jest równa $r_1 + r_2$.

Schemat Hornera

Dzieląc wielomian czwartego stopnia przez dwumian $x - p$, otrzymamy wielomian trzeciego stopnia oraz resztę r (reszta może być równa 0).

Możemy więc zapisać równość:

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - p)(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + r$$

Przekształcając prawą stronę tej równości, otrzymamy:

$$b_3x^4 + (b_2 - pb_3)x^3 + (b_1 - pb_2)x^2 + (b_0 - pb_1)x + r - pb_0$$

Z równości wielomianów wynika, że:

$$a_4 = b_3 \quad a_3 = b_2 - pb_3 \quad a_2 = b_1 - pb_2 \quad a_1 = b_0 - pb_1 \quad a_0 = r - pb_0$$

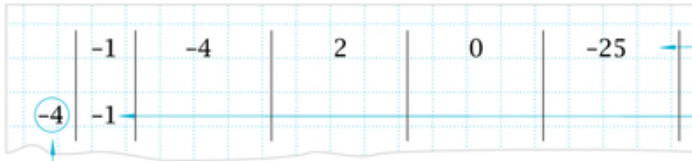
Stąd:

$$b_3 = a_4 \quad b_2 = pb_3 + a_3 \quad b_1 = pb_2 + a_2 \quad b_0 = pb_1 + a_1 \quad r = pb_0 + a_0$$

Podobne zależności otrzymalibyśmy, dzieląc wielomian dowolnego stopnia przez dwumian $x - p$. Dlatego szukając wyniku takiego dzielenia, możemy skorzystać z uproszczonej metody zwanej schematem Hornera. Poniżej pokazano ją na przykładzie dzielenia wielomianu $-x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 25$ przez dwumian $x + 4$. William Horner był brytyjskim matematykiem, który tę metodę spopularyzował.

$W(x)$: $x - p$

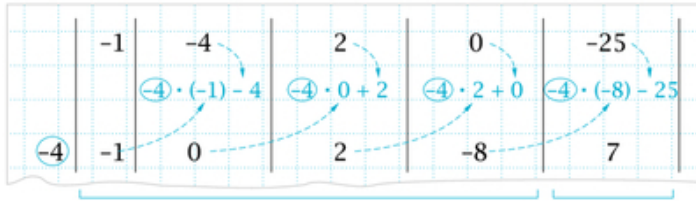
$(-x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 0 \cdot x - 25) : (x + 4) = ?$



Zapisujemy kolejne współczynniki wielomianu $W(x)$.

Tu przepisujemy pierwszy współczynnik wielomianu $W(x)$.

Tu wpisujemy p (w tym wypadku -4).



W kolejnych kolumnach wpisujemy wyniki odpowiednich działań.

To są współczynniki wielomianu, który otrzymujemy w wyniku dzielenia; wielomian ten ma stopień o 1 niższy niż wielomian $W(x)$, jest to więc wielomian $(-1) \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 8$.

To jest reszta z dzielenia.

W wyniku dzielenia wielomianu $-x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 25$ przez dwumian $x + 4$ otrzymujemy wielomian $-x^3 + 2x - 8$ oraz resztę 7, czyli:

$$(-x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 25) = (x + 4)(-x^3 + 2x - 8) + 7$$

11. Zapisz dowolny wielomian piątego stopnia. Następnie podziel go przez dwumian $x + 2$. Wykonaj to dzielenie dwoma sposobami — korzystając z poznanej wcześniej metody oraz ze schematu Hornera omówionego powyżej.

12. Wykonaj dzielenie, korzystając ze schematu Hornera.

a) $(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) : (x - 2)$

b) $(x^4 + x^3 + x^2 + 4x + 3) : (x + 1)$

c) $(2x^4 - 8x^3 + 5x - 20) : (x - 4)$

d) $(x^5 - 9x^3 + 2x + 5) : (x + 3)$

e) $(5x^5 - 7x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x) : (x - 1)$

f) $(-3x^4 + 2x - 3) : (x + 2)$

MINISPRAWDZIAN

S1. Przez który z wielomianów nie jest podzielny wielomian $(2x - 1)(x + 1)(x - 2)$?

A. $x + 1$ B. $x^2 - x - 2$ C. $2x^2 + x - 1$ D. $x^2 + 2x + 1$

S2. Wynikiem dzielenia wielomianu $6x^4 - 13x^3 - 17x^2 + 10x - 12$ przez dwumian $x - 3$ jest wielomian $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Która z podanych równości jest prawdziwa?

A. $a = 3$ B. $b = 5$ C. $c = 2$ D. $d = -4$

S3. W wyniku dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 2$ otrzymano wielomian $4x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ oraz resztę 5. Wielomian $W(x)$ jest równy:

A. $4x^4 + 5x^3 - x^2 + 4x - 7$ C. $4x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 4x - 5$

B. $4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 5$ D. $4x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x - 1$

S4. Po podzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 7$ otrzymano wielomian $3x^3 - 5x^2 + x + 4$ i resztę 2. Które z podanych zdań nie jest prawdziwe?

A. *$W(x)$ jest wielomianem czwartego stopnia.*

B. *Współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu $W(x)$ jest równy 3.*

C. *Wyraz wolny wielomianu $W(x)$ jest równy 28.*

D. *Wielomian $W(x) - 2$ dzieli się przez dwumian $x + 7$ bez reszty.*

TWIERDZENIE BÉZOUTA

I Wiemy już, że dzieląc dowolny wielomian $W(x)$ przez dwumian $x - a$, otrzymamy pewien wielomian $Q(x)$ i resztę R, która jest liczbą. Wielomian $W(x)$ można zapisać w postaci:

$$W(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$$

Gdy $R = 0$, to zachodzi równość:

$$W(x) = (x - a) \cdot Q(x)$$

Wówczas $W(a) = 0$, czyli a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Ogólną własność wielomianów, która wiąże pierwiastek wielomianu z podzielnością tego wielomianu przez pewien dwumian, opisuje twierdzenie Bézouta (czyt. bezuta).

Twierdzenie Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$
wtedy i tylko wtedy, gdy
wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x-a$.

Uwaga. Powyższe twierdzenie można zapisać w następujący sposób:

$W(a)=0 \iff W(x):(x-a)=P(x)$, gdzie $P(x)$ jest pewnym wielomianem.

Dowód

Zauważmy, że dla dowolnej liczby a wielomian $W(x)$ można zapisać w postaci:

$$W(x)=(x-a)\cdot P(x)+R,$$

gdzie $P(x)$ jest pewnym wielomianem, a R — pewną liczbą.

Wobec tego:

$$W(a)=(a-a)\cdot P(a)+R=0\cdot P(a)+R=R$$

Otrzymaliśmy zatem równość: $W(a)=R$

Korzystając z tej równości, udowodnimy dwie implikacje.

1. Załóżmy, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, czyli $W(a)=0$.

Ponieważ $W(a)=R$, zatem $R=0$. Wynika stąd, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-a$.

2. Załóżmy teraz, że wielomian $W(x)$ dzieli się przez $x-a$, czyli $R=0$.

Ponieważ $W(a)=R$, zatem $W(a)=0$. Wynika stąd, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. □

ĆWICZENIE A Dany jest wielomian $W(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$. Korzystając z twierdzenia Bézouta, ustal, przez które z podanych dwumianów jest on podzielny.

$x-1$ $\quad$ $x+1$ $\quad$ $x-2$ $\quad$ $x+2$

Analizując dowód twierdzenia Bézouta, można zauważyć, że przy okazji została uzasadniona następująca własność wielomianów:

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-a$
jest równa $W(a)$.

ĆWICZENIE B Ustal reszty z dzielenia podanych wielomianów przez $x-2$.

$A(x)=x^3-x^2+3x-5$ $\quad$ $B(x)=\frac{1}{4}x^5-x^2-7x+1$ $\quad$ $C(x)=x^4-6x^3+5x^2+12$

zadania 1–4

|| Przypuśćmy, że mamy rozwiązać równanie wielomianowe $W(x) = 0$ i wiemy, że liczba p jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Z twierdzenia Bézouta wynika, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x - p$. Czyli istnieje wielomian $Q(x)$ niższego stopnia niż $W(x)$, taki że:

$$W(x) = (x - p) \cdot Q(x)$$

Równanie $W(x) = 0$ możemy więc zapisać w postaci:

$$(x - p) \cdot Q(x) = 0$$

Aby ustalić, czy wielomian $W(x)$ ma jakieś inne pierwiastki, należy rozwiązać równanie niższego stopnia: $Q(x) = 0$.

PRZYKŁAD Sprawdź, że liczba 1 jest rozwiązaniem danego równania, i znajdź pozostałe rozwiązania tego równania.

$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

$1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

Sprawdzamy, czy liczba 1 spełnia równanie $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$.

$$\begin{array}{l} \quad x^2 - 2x - 2 \\ \hline (x^3 - 3x^2 + 2) : (x - 1) \\ -x^3 + x^2 \\ \hline \quad -2x^2 + 2 \\ \quad\ 2x^2 - 2x \\ \hline \quad\quad -2x + 2 \\ \quad\quad\ 2x - 2 \\ \hline \quad\quad\quad\ 0 \end{array}$$

Dzielimy wielomian $x^3 - 3x^2 + 2$ przez dwumian $x - 1$, aby rozłożyć wielomian na czynniki.

$x^3 - 3x^2 + 2 = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$

$(x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$

Zapisujemy równanie w innej postaci i je rozwiązujemy.

$x = 1$ lub $x^2 - 2x - 2 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot (-2) = 12$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$

$x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$

Odp. Równanie ma trzy rozwiązania: $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{3}$, $x_3 = 1$.

ZADANIE Sprawdź, że liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 7x + 6$, a następnie rozwiąż równanie $W(x) = 0$.

zadania 5–7

Ciekawostka

Étienne Bézout (czyt. etien bezu) (1730–1783) był francuskim matematykiem. Zajmował się algebrą, ale znany jest głównie jako autor doskonałych podręczników. Jego książki są napisane niezwykle przystępnie. Sześciotomowe dzieło Bézouta „Kurs matematyki", przetłumaczone na angielski, było przez wiele lat podstawowym podręcznikiem na Uniwersytecie Harvarda.

Twierdzenie o podzielności wielomianu przez dwumian nie zostało ani sformułowane, ani udowodnione przez Bézouta — było znane już wcześniej. Właściwie nie wiadomo, dlaczego w Polsce jest nazywane twierdzeniem Bézouta. W większości krajów, nawet we Francji, nie używa się takiej nazwy.

ZESTAW ZADAŃ

I **1.** Czy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $V(x)$?

a) $W(x) = 5x^{14} - 6x + 1, \quad V(x) = x - 1$

b) $W(x) = 3x^7 - x^3 + x^2 + 1, \quad V(x) = x + 1$

c) $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 10, \quad V(x) = x + 2$

d) $W(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 1, \quad V(x) = x - \frac{1}{2}$

2. Nie wykonując dzielenia, ustal, jaka jest reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$.

a) $W(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4 \quad P(x) = x - 1$ **b)** $W(x) = -5x^3 - 3x^2 + 6 \quad P(x) = x + 2$

3. a) Dla jakiej wartości a wielomian $5x^5 - ax^3 + 3x^2 - 6x$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$?

b) Dla jakiej wartości p wielomian $px^5 - px^3 - \frac{1}{2}x + 2$ jest podzielny przez dwumian $x + 2$?

4. a) Wykaż, że dla dowolnej liczby a wielomian $x^n - a^n$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

b) Wykaż, że gdy n jest liczbą parzystą, to dla dowolnej liczby a wielomian $x^n - a^n$ jest podzielny przez dwumian $x + a$.

II **5.** Sprawdź, że podana liczba jest pierwiastkiem równania, a następnie znajdź jego pozostałe pierwiastki.

a) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0, \quad 2$

b) $6x^3 - 29x^2 - 6x + 5 = 0, \quad 5$

c) $x^3 + 7x^2 - 5x - 75 = 0, \quad 3$

d) $4x^3 - 4x^2 - 15x + 18 = 0, \quad -2$

e) $x^4 - x^3 - 14x^2 + 2x + 24 = 0, \quad -3$

f) $x^4 + 8x^3 + 19x^2 + 32x + 60 = 0, \quad -5$

6. Liczby 2 i -3 są pierwiastkami wielomianu $ax^3 + bx^2 - 11x + 30$. Znajdź trzeci pierwiastek tego wielomianu.

7. Sprawdź, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, i rozłóż ten wielomian na czynniki stopnia pierwszego.

a) $W(x) = 3x^3 - 35x^2 + 48x + 20, \quad a = 10$

b) $W(x) = 10x^3 + 63x^2 - 48x + 7, \quad a = -7$

c) $W(x) = x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 28x - 24, \quad a = -6$

d) $W(x) = 2x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 6x + 40, \quad a = 4$

MINISPRAWDZIAN

S1. Reszta z dzielenia wielomianu $2x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 5$ przez dwumian $x - 1$ to:

A. 2 B. 5 C. -1 D. -2

S2. Wielomian $x^6 + 4x^3 - 32$ jest podzielny przez dwumian:

A. $x - 1$ B. $x + 1$ C. $x - 2$ D. $x + 2$

S3. Tylko jeden z poniższych wielomianów można przedstawić w postaci:

$$(x - 1)(x + 1)P(x),$$

gdzie $P(x)$ jest wielomianem. Wskaż ten wielomian.

A. $2x^{10}-20$ B. $2x^7+5x-7$ C. $2x^7-2x^5-x^4+2x^2-1$ D. $2x^8+2x^6+x^3-1$

S4. Dla jakiej wartości m wielomian $x^3 + mx^2 + mx + 3$ jest podzielny przez dwumian $x + 3$?

A. $m = -3$ B. $m = 4$ C. $m = 5$ D. $m = 10$

RÓWNANIA WIELOMIANOWE (CD.)

Aby skorzystać z twierdzenia Bézouta przy rozwiązywaniu równania wielomianowego, trzeba znać przynajmniej jedną liczbę spełniającą to równanie. Nawet gdy taka liczba istnieje, na ogół trudno ją znaleźć.

Spróbujemy teraz odkryć, jakie warunki musiałyby być spełnione, aby jednym z rozwiązań równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych mogła być liczba wymierna.

Rozważmy na przykład wielomian:

$$W(x) = 5x^3 - 6x^2 + 16x - 3$$

Pierwiastki tego wielomianu spełniają równanie:

$$5x^3 - 6x^2 + 16x - 3 = 0$$

Przypuśćmy, że liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi, jest rozwiązaniem tego równania. Możemy założyć, że ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny, czyli liczby p i q nie mają wspólnych dzielników różnych od 1 i od -1 (są względnie pierwsze). Zatem zachodzi równość:

$$5 \cdot \frac{p^3}{q^3} - 6 \cdot \frac{p^2}{q^2} + 16 \cdot \frac{p}{q} - 3 = 0$$

Tę równość możemy zapisać w postaci:

$$5p^3 - 6p^2q + 16pq^2 - 3q^3 = 0$$

Otrzymaną równość przekształcimy na dwa sposoby:

$$-3q^3 = -5p^3 + 6p^2q - 16pq^2 \qquad 5p^3 = 6p^2q - 16pq^2 + 3q^3$$

Stąd:

$$-3q^3 = p\,(-5p^2 + 6pq - 16q^2) \qquad 5p^3 = q\,(6p^2 - 16pq + 3q^2)$$

Liczby p i q są całkowite, więc po obu stronach każdej z dwóch otrzymanych równości jest iloczyn liczb całkowitych. Z pierwszej równości wynika, że liczba $-3q^3$ jest podzielna przez p. Z drugiej równości wynika, że liczba $5p^3$ jest podzielna przez q.

Założyliśmy, że liczby p i q są względnie pierwsze, więc:

Liczba p jest dzielnikiem liczby -3, która jest wyrazem wolnym wielomianu $W(x)$, czyli $p \in \{1, -1, 3, -3\}$.

Liczba q jest dzielnikiem liczby 5, która jest współczynnikiem przy najwyższej potędze wielomianu $W(x)$, czyli $q \in \{1, -1, 5, -5\}$.

Zatem, jeśli rozważany wielomian ma pierwiastek wymierny $\frac{p}{q}$, to jest to jedna z liczb:

$$1,\ -1,\ 3,\ -3,\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{5},\ \frac{3}{5},\ -\frac{3}{5}$$

Łatwo sprawdzić, że żadna z liczb $1, -1, 3, -3$ nie jest pierwiastkiem tego wielomianu, a liczba $\frac{1}{5}$ jest jego pierwiastkiem.

$$W\left(\frac{1}{5}\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 - 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 16 \cdot \frac{1}{5} - 3 = 0$$

Sprawdzając, jaka jest wartość wielomianu dla pozostałych ułamków, można znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne tego wielomianu.

Twierdzenie (o rozwiązaniach wymiernych)

Załóżmy, że w równaniu wielomianowym postaci:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi oraz $a_0 \neq 0$ i $a_n \neq 0$. Jeśli rozwiązaniem tego równania jest liczba wymierna, to można ją przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie licznik p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, a mianownik q jest dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze.

Dowód

Przyjmijmy, że liczby $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ występujące w poniższym równaniu są liczbami całkowitymi oraz $a_0 \neq 0$ i $a_n \neq 0$.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Załóżmy, że pewna liczba $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi różnymi od 0, jest rozwiązaniem równania. Możemy też założyć, że ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny (tzn. że p i q nie mają wspólnych dzielników różnych od 1 i od −1).

Zatem spełniona jest równość:

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Pokażemy najpierw, że p jest dzielnikiem liczby a_0.

Po pomnożeniu obu stron równości przez q^n otrzymamy:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p^1 q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Zapiszmy tę równość w postaci:

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \ldots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

Przyjęliśmy, że wszystkie liczby oznaczone w tej równości literami są całkowite, więc po obu jej stronach jest iloczyn liczb całkowitych. Liczba q^n nie ma wspólnych dzielników z liczbą p (różnych od 1 i od −1). Wynika stąd, że liczba a_0 musi być podzielna przez liczbę p. Wykazaliśmy zatem, że p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Zapiszmy teraz otrzymaną wcześniej równość w postaci:

$$q(a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n$$

Rozumując podobnie jak wyżej, dojdziemy do wniosku, że q jest dzielnikiem współczynnika a_n. □

ĆWICZENIE A Liczba $\frac{2}{5}$ jest rozwiązaniem jednego z podanych równań. Którego?

$6x^5 + 3x^3 - 2x - 4 = 0$ $\quad$ $5x^3 + 8x^2 - 14x + 4 = 0$

$10x^3 + 7x^2 - 5 = 0$ $\quad$ $x^4 + 5x^2 - x + 10 = 0$

Zauważ, że jeżeli równanie wielomianowe o współczynnikach całkowitych nie ma rozwiązań wymiernych, to nie oznacza, że w ogóle nie ma rozwiązań.

ĆWICZENIE B Podaj przykład takiego równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, które ma rozwiązanie, ale nie ma rozwiązań wymiernych.

Zauważ, że szukając pierwiastków całkowitych wielomianu, możemy posłużyć się następującym wnioskiem z powyższego twierdzenia.

Twierdzenie (o rozwiązaniach całkowitych)

Załóżmy, że w równaniu wielomianowym:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

wszystkie współczynniki $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ *są liczbami całkowitymi i* $a_0 \neq 0$. *Jeśli rozwiązaniem tego równania jest liczba całkowita, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego* a_0.

Ciekawostka

Na początku roku 1535 rozpoczął się matematyczny pojedynek. Jego uczestnikami byli dwaj Włosi — Mario Fior i Niccolò (czyt. nikolo) Fontana, znany pod przezwiskiem Tartaglia (czyt. tartalia; tłum. jąkała). Takie naukowe zawody były wówczas bardzo popularne, gdyż dzięki nim rosła sława (i dochody) zwycięzcy.

Zawody polegały na tym, że w ciągu 30 dni obaj uczestnicy mieli rozwiązać kilkadziesiąt zadań przygotowanych przez przeciwnika. Fior wygrał już wcześniej wiele turniejów, bo znał kilka równań trzeciego stopnia, które tylko on, jak mu się zdawało, umiał rozwiązać. Wszystkie zadania Fiora dotyczyły równań trzeciego stopnia. Tydzień przed upływem terminu Tartaglia odkrył metodę rozwiązywania tego typu równań i wygrał turniej.

Wielu uczonych pragnęło poznać metodę Tartaglii, jednak on nikomu nie chciał jej zdradzić. Jeden z włoskich matematyków — Girolamo Cardano (czyt. dżirolamo kardano) — tak długo prosił Tartaglię o pokazanie jego metody, że ten w końcu się zgodził — jednak pod warunkiem, że Cardano nikomu jej nie ujawni. Kilka lat później Cardano dowiedział się, że metodę Tartaglii odkrył wcześniej Scipione del Ferro (czyt. szipione del ferro). Uznał wtedy, że obietnica dana Tartaglii już go nie obowiązuje, i nieuczciwie opublikował wzory pod własnym nazwiskiem. Od tego czasu wzory pozwalające rozwiązać równanie trzeciego stopnia są nazywane wzorami Cardana.

Rozwiązując równanie wielomianowe o współczynnikach całkowitych, warto rozpocząć od sprawdzenia, czy istnieją rozwiązania całkowite. W ten sposób często można uprościć dalsze rachunki.

PRZYKŁAD Rozwiąż równanie: $2x^3 - 5x^2 + x + 3 = 0$.

Dzielnikami wyrazu wolnego $W(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 3$ są liczby: $1,\ -1,\ 3,\ -3$.

$W(1) = 2 - 5 + 1 + 3 \neq 0$

$W(-1) = 2 \cdot (-1) - 5 - 1 + 3 \neq 0$

$W(3) = 2 \cdot 27 - 5 \cdot 9 + 3 + 3 \neq 0$

$W(-3) = 2 \cdot (-27) - 5 \cdot 9 - 3 + 3 \neq 0$

Sprawdzamy, czy równanie ma pierwiastki całkowite.

Dzielniki współczynnika przy najwyższej potędze to:

$1,\ -1,\ 2,\ -2$

Możliwe rozwiązania wymierne:

$1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ 3,\ -3$

Jeśli równanie ma rozwiązanie wymierne $\frac{p}{q}$, to licznik jest dzielnikiem liczby 3, a mianownik dzielnikiem liczby 2; wypisujemy wszystkie takie liczby $\frac{p}{q}$, że $p \in \{1, -1, 3, -3\}$ oraz $q \in \{1, -1, 2, -2\}$.

$W\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{8} - 5 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 3 \neq 0$

$W\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - 5 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 = -\frac{8}{4} + 3 \neq 0$

$W\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + 3 = \frac{27}{4} - \frac{45}{4} + \frac{18}{4} = 0$

Sprawdziliśmy już, że nie istnieją całkowite rozwiązania równania, zatem wystarczy sprawdzić, czy wśród liczb: $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$ jest rozwiązanie równania.

$$\begin{array}{l} 2x^2 - 2x - 2 \\ \hline (2x^3 - 5x^2 + x + 3) : \left(x - \frac{3}{2}\right) \\ \underline{-2x^3 + 3x^2} \\ \quad -2x^2 + x + 3 \\ \quad \underline{2x^2 - 3x} \\ \quad\quad -2x + 3 \\ \quad\quad \underline{2x - 3} \\ \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Dzielimy wielomian przez dwumian $x - \frac{3}{2}$, aby wielomian $W(x)$ rozłożyć na czynniki.

$\left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 2x - 2) = 0$

Zapisujemy równanie w innej postaci, a następnie je rozwiązujemy.

$x - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{lub} \quad 2x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \Big| : 2$

$x = \frac{3}{2} \qquad x^2 - x - 1 = 0, \quad \Delta = 5$

$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Odp. Równanie ma trzy rozwiązania: $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$.

ZADANIE Rozwiąż równanie: $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$.

Opisaną w tym rozdziale metodę rozwiązywania równań można też wykorzystać przy rozwiązywaniu równań o współczynnikach wymiernych (niekoniecznie całkowitych). Wystarczy zauważyć, że gdy obie strony takiego równania pomnożymy przez wspólny mianownik wszystkich współczynników, otrzymamy równoważne równanie o współczynnikach całkowitych.

ĆWICZENIE C Zapisz równanie o współczynnikach całkowitych równoważne równaniu:

$$\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} = 0$$

Uzasadnij, że to równanie nie ma pierwiastków całkowitych.

zadania 1–17

ZESTAW ZADAŃ

1. Jedna z pięciu podanych liczb jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Która?

a) $W(x) = 5x^3 + 23x^2 - 35x + 10$ $\quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{3}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad -\frac{4}{5}, \quad 3$

b) $W(x) = 3x^5 - x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 45x + 15$ $\quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{5}{2}, \quad -\frac{15}{8}$

c) $W(x) = -6x^3 - 11x^2 + 13x + 15$ $\quad \frac{3}{5}, \quad -\frac{5}{6}, \quad 2, \quad -4, \quad \frac{6}{5}$

d) $W(x) = -2x^5 - 9x^4 - 9x^3 - 11x^2 - 10x + 14$ $\quad -\frac{3}{7}, \quad \frac{1}{14}, \quad -3\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{7}, \quad -12$

2. Znajdź wszystkie całkowite pierwiastki wielomianu.

a) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

b) $3x^4 + x^3 - x^2 - x - 2$

c) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

d) $2x^3 + 8x^2 + 8x + 6$

e) $-x^5 - 3x^4 + 6x^2 + 4x$

f) $x^6 - 4x^5 - 6x^4 + 4x^3 + 5x^2$

3. Wykaż, że wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

a) $W(x) = x^4 - x^2 - 2$

b) $W(x) = 2x^3 + 5x + 3$

4. Jednym z pierwiastków wielomianu jest liczba całkowita. Znajdź tę liczbę oraz pozostałe pierwiastki wielomianu.

a) $10x^3 - x^2 - 7x - 2$

b) $-12x^3 - 11x^2 + 2x + 1$

c) $x^3 + 3x^2 + x - 2$

d) $4x^3 - 12x^2 + 9x - 2$

5. Znajdź wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu.

a) $2x^3 + 5x^2 - 5x + 7$

b) $6x^4 + 5x^3 + 5x - 6$

c) $4x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 8x + 3$

d) $-3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 3x$

e) $-6x^5 + 17x^4 + 4x^3 - 3x^2$

f) $12x^5 - 16x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x$

6. Rozwiąż równanie.

a) $5x^3 + 10x^2 + 6x + 1 = 0$

b) $3x^3 + 8x^2 - 4x - 3 = 0$

c) $10x^3 + 11x^2 - 16x + 4 = 0$

d) $4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 0$

e) $8x^3 - 26x^2 + 3x + 9 = 0$

f) $3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 2x - 3 = 0$

g) $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 10x - 4 = 0$

h) $-3x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 6x + 3 = 0$

7. Rozwiąż równanie.

a) $-2x^3 - x^2 + 13x - 6 = 0$

b) $2x^3 + 15x^2 + 27x + 10 = 0$

c) $-3x^3 + 7x^2 - 4 = 0$

d) $12x^3 + 20x^2 + 11x + 2 = 0$

e) $-125x^3 + 15x + 2 = 0$

f) $-8x^4 + 10x^3 - 5x^2 + 10x + 3 = 0$

8. Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 + 2x^2 + 3 = 11x$

b) $x(x+2)^2 + 4x = -5$

c) $5(x+10) = x^2(8-x)$

d) $5x\left(x^2+1\right) - (3x+1)^2 = -2x^2 - x - 3$

e) $2\left(x^2-1\right)^2 + x(2x+3)^2 = 11x^2 + 14x$

f) $(3x-2)^2 + 4x\left(1-x^2\right) = 6 - 5x^4$

9. Przekształć podane równanie do postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, a następnie rozwiąż to równanie.

a) $x^3 - x^2 - 1{,}5x - 1 = 0$

b) $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 3\frac{1}{3} = 0$

c) $\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2\frac{2}{3}x - 1 = 0$

d) $1{,}5x^3 + 2x^2 - 0{,}5x - 1 = 0$

e) $0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 - 2 = 0$

f) $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$

10. Dla jakich naturalnych wartości n równanie $x^n + x + 2 = 0$ ma rozwiązania całkowite? Znajdź te rozwiązania.

11. Uzasadnij, że równanie $97x^{10} - x + 1 = 0$ nie ma rozwiązań wymiernych.

12. Uzasadnij, że nie istnieje liczba wymierna, która jest wspólnym pierwiastkiem podanych wielomianów.

$W(x) = 4x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x - 3$ $\qquad$ $V(x) = -3x^5 + 20x^4 - 26x^3 + 10x^2 - 23x - 10$

13. Wyjaśnij, dlaczego wymierne pierwiastki wielomianu $W(x)$ (jeśli istnieją) muszą należeć do podanego przedziału.

a) $W(x) = 60x^4 - 8x^3 - 19x^2 + 2x + 1$, $\quad \langle -1\,;1 \rangle$

b) $W(x) = 6x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 10x - 2$, $\quad \langle -2\,;2 \rangle$

c) $W(x) = 8x^3 + 49x^2 + 16x + a$ (gdzie a jest liczbą całkowitą), $\quad \langle -|a|\,;|a| \rangle$

14. Dla jakich całkowitych wartości m wielomian $9x^3 - mx + 1$ ma pierwiastek wymierny?

15. Wśród wymiernych pierwiastków wielomianu $W(x) = 5x^4 - 11x^3 + ax^2 + bx - 2$ są dwie liczby, które są pierwiastkami wielomianu $Q(x) = 2x^4 + cx^3 + dx^2 + 9x + 5$. Znajdź współczynniki a, b, c i d.

Warto wiedzieć!

Twierdzenie o rozwiązaniach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych można wykorzystać do uzasadnienia niewymierności niektórych liczb. Wykażemy przykładowo następujące twierdzenie:

Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Dowód

Rozważmy równanie $x^2 - 2 = 0$.

Jedynymi „kandydatami" na rozwiązania wymierne tego równania są liczby $\frac{1}{1}$, $-\frac{1}{1}$, $-\frac{2}{1}$ i $\frac{2}{1}$. Ponieważ żadna z nich nie spełnia równania $x^2 - 2 = 0$, więc nie ma ono rozwiązań wymiernych.

Wiadomo, że jednym z rozwiązań tego równania jest liczba $\sqrt{2}$. Wynika stąd, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

16. Przeczytaj dowód w ramce. Wykaż, że niewymierne są liczby:

a) $\sqrt{5}$ **b)** $-2\sqrt{3}$ **c)** $\sqrt[3]{7}$ **d)** $\sqrt[12]{100}$

17. Wykaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to dla liczby naturalnej $n \geqslant 2$ liczba $\sqrt[n]{p}$ jest niewymierna.

MINISPRAWDZIAN

S1. Liczba $\frac{3}{7}$ jest pierwiastkiem jednego z podanych wielomianów. Którego?

A. $3x^3 - 5x^2 + x - 7$
C. $6x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x + 14$
B. $7x^4 - 3x^3 - 28x^2 + 26x - 6$
D. $x^5 - 3x^4 - x^2 + 7x - 1$

S2. Jedna z poniższych liczb jest rozwiązaniem równania $18x^3 - x^2 - 31x - 12 = 0$. Wskaż ją.

A. 9 B. $-\frac{4}{9}$ C. -5 D. $\frac{2}{5}$

S3. Wielomian $-30x^3 + 11x^2 + 9x - 2$ ma trzy pierwiastki wymierne. Która z poniższych liczb nie jest pierwiastkiem tego wielomianu?

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

S4. Ile pierwiastków całkowitych ma równanie $x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 = 0$?

A. jeden B. dwa C. trzy D. cztery

POWTÓRZENIE

1. Przyjmij, że: $U(x) = 4x^3 - 3x$, $V(x) = -3x^2 - 6x + 2$, $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x$ i wykonaj działania:

a) $W(x) + 2U(x) - \frac{1}{2}V(x)$

b) $U(x) \cdot V(x) + W(x)$

2. Jakie jednomiany należy wstawić w miejsce liter A, B i C, aby zachodziła równość wielomianów?

a) $Ax^2 + B + 4 = C(3x^2 - 5x + 2)$

b) $A(3x^2 - x + B) = 6x^4 + Cx^2 + 8x$

3. Dany jest wielomian:

$$W(x) = (5x^3 - 3x - 2)^{10}$$

Oblicz sumę wszystkich współczynników tego wielomianu.

4. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $50x^2 - 72$

b) $5x^4 - 20$

c) $-4x^4 + 26x^3 - 12x^2$

d) $2x^3 + 5x^2 + 6x + 15$

e) $x^5 - 2x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 16x + 56$

f) $x^5 - 2x^4 + \sqrt{3}x^3 - 3x^2 + 6x - 3\sqrt{3}$

5. Rozłóż wielomian $-x^3 + 2x^2 - 3x + 6$ na czynniki, a następnie uzasadnij, że przyjmuje on wartości dodatnie tylko wtedy, gdy $x < 2$.

6. Rozwiąż równanie.

a) $(5x - 2)(x + 7)\left(4 - \frac{1}{3}x\right) = 0$

b) $5x^5 - 21x^4 - 20x^3 = 0$

c) $2x^4 - 11x^2 - 21 = 0$

d) $5x^3 - 4x^2 + 45x - 36 = 0$

7. Znajdź liczbę, której kwadrat jest równy iloczynowi sześcianu tej liczby i liczby o 2 od niej większej.

8. Znajdź pierwiastki podanego wielomianu i ustal ich krotności.

a) $x^5(x - 3)(x + 11)^2(2x + 4)^5$

b) $(x^2 - 3x + 2)(-2x^2 + 3x + 2)(-2x^2 + x + 1)$

c) $(x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32)(x^3 - 2x^2)$

9. Wykonaj dzielenie.

a) $(3x^3 + 7x^2 - x + 15) : (x + 3)$

b) $(-x^4 + 3x^2 + 3x - 5) : (x - 2)$

10. Dany jest wielomian $-4x^3 + px^2 + x - 2$. Dla jakiej wartości parametru p:

a) wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x + 2$,

b) reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x - 3$ jest równa 1?

11. Dla jakich wartości parametrów m i n liczba 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 5x^2 + mx + n$?

12. Znajdź liczbę całkowitą spełniającą równanie $2x^4 - x^3 - 13x^2 + 5x + 15 = 0$, a następnie znajdź pozostałe rozwiązania tego równania.

13. a) Znajdź wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu $3x^3 - 2x^2 - 9x + 6$.

b) Czy wielomian $2x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$ ma pierwiastki wymierne? Odpowiedź uzasadnij.

14. Korzystając z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu, uzasadnij, że liczba $3\sqrt{7}$ jest niewymierna.

Figury na płaszczyźnie część 1

Geometria to po grecku „mierzenie ziemi". Dziedzina ta wywodzi się z pomiarów pól uprawnych, jednak od tysięcy lat ludzie zajmują się geometrią nie tylko ze względu na jej zastosowania, ale po prostu z ciekawości.



Kąty. Kąty w trójkątach i czworokątach ■ Podstawowe własności trójkątów ■ Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa ■ Własności trójkątów (cd.) ■ Własności czworokątów ■ Powtórzenie

Kilka uwag wstępnych

Figury geometryczne są obiektami abstrakcyjnymi, więc gdy mówimy, np. narysuj prostą, narysuj trójkąt, mamy na myśli sporządzenie rysunku przedstawiającego model rozważanej figury.

Punkty oznaczamy wielkimi literami. Proste możemy oznaczać małymi literami albo za pomocą dwóch wielkich liter. Półproste oznaczamy zwykle za pomocą dwóch wielkich liter, a pierwsza z nich to początek półprostej.



prosta a



prosta AB



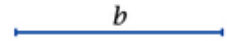
półprosta AB



półprosta BA

Odcinki możemy oznaczać małymi literami. Przyjmujemy, że mała litera może też oznaczać długość odcinka.

Odcinki oznaczamy też za pomocą dwóch wielkich liter, np. AB, ale długość odcinka oznaczonego w ten sposób zapisujemy tak: $|AB|$.



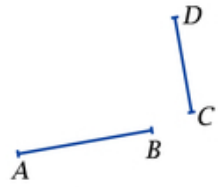
$b = 2{,}4$ cm



odcinek AB

$|AB| = 2{,}4$ cm

Za pomocą symbolu $\parallel$ zapisujemy, że proste lub odcinki są równoległe, a za pomocą symbolu $\perp$ zapisujemy, że proste lub odcinki są prostopadłe.

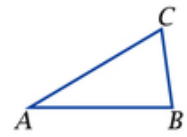


$AB \perp CD$

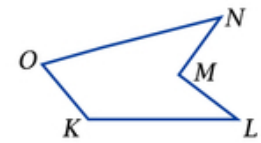


$a \parallel b$

Wielokąty oznaczamy za pomocą kilku wielkich liter. Litery oznaczają kolejne wierzchołki wielokąta.



trójkąt ABC



pięciokąt $KLMNO$

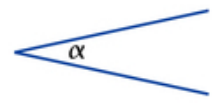
Gdy mówimy, że długość odcinka jest równa 4, oznacza to, że odcinek ten jest 4 razy dłuższy od pewnego odcinka przyjętego za jednostkę długości. Gdy mówimy, że pole figury jest równe 12, oznacza to, że pole tej figury jest 12 razy większe niż pole pewnego kwadratu przyjętego za jednostkę pola.

Kąty najczęściej oznaczamy małymi literami alfabetu greckiego:

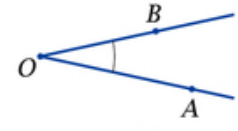
α (alfa) β (beta) γ (gamma) δ (delta) φ (fi) χ (chi) ψ (psi) ω (omega)

Przyjmujemy, że mała grecka litera może też oznaczać miarę kąta.

Kąty możemy oznaczać także za pomocą trzech wielkich liter, z których środkowa litera zawsze oznacza wierzchołek kąta. Np. $\sphericalangle AOB$ to kąt o wierzchołku O. Miarę oznaczonego w ten sposób kąta zapisujemy tak: $|\sphericalangle AOB|$.



$\alpha = 24°$



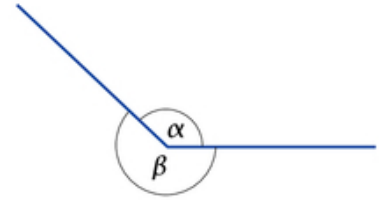
$\sphericalangle AOB$

$|\sphericalangle AOB| = 24°$

KĄTY. KĄTY W TRÓJKĄTACH I W CZWOROKĄTACH

Przypomnijmy, że dwie różne półproste o wspólnym początku dzielą płaszczyznę na dwa kąty; półproste to ramiona obu kątów.

Jeśli te ramiona nie leżą na jednej prostej, to jeden z kątów jest kątem wypukłym, a drugi — wklęsłym. Suma ich miar jest równa 360°.



$\beta = 360° - \alpha$

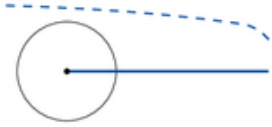
Kąt jest wypukły, gdy jego miara należy do zbioru $\langle 0°; 180° \rangle \cup \{360°\}$.



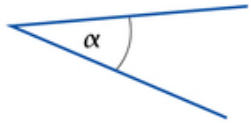
Kąt prosty ma 90°.



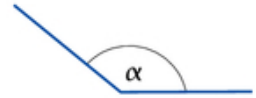
Kąt półpełny ma 180°.



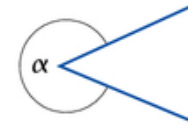
Kąt pełny ma 360°.



Kąt α jest ostry, gdy $\alpha \in (0°; 90°)$.



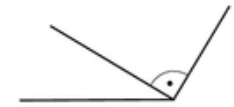
Kąt α jest rozwarty, gdy $\alpha \in (90°; 180°)$.



Kąt α jest wklęsły, gdy $\alpha \in (180°; 360°)$.

kąty wypukłe

ĆWICZENIE A Ile kątów wklęsłych można wskazać na rysunku obok?



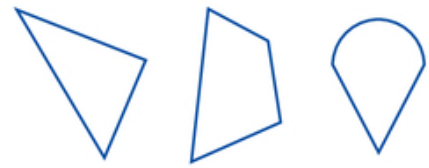
Warto wiedzieć!

Figurę $\mathcal{F}$ nazywamy wklęsłą, gdy istnieje odcinek o końcach należących do figury $\mathcal{F}$, który nie zawiera się w tej figurze. Jeśli każdy z odcinków o końcach należących do figury $\mathcal{F}$ zawiera się w tej figurze, to tę figurę nazywamy wypukłą.

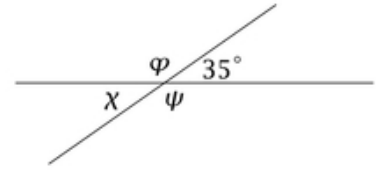
Przykłady figur wklęsłych



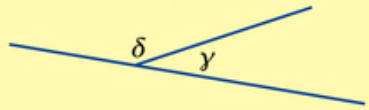
Przykłady figur wypukłych



ĆWICZENIE B Jakie miary mają kąty, które na rysunku obok zaznaczono literami φ, χ i ψ (czyt. fi, chi, psi)?



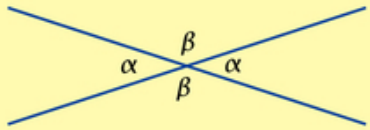
Kąty przyległe



$\gamma = 180° - \delta$

Kąty, które mają wspólne ramię i tworzą razem kąt półpełny, nazywamy **kątami przyległymi**. Suma miar kątów przyległych jest równa 180°.

Kąty wierzchołkowe

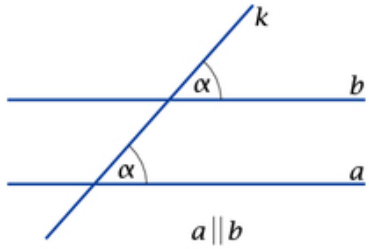


Gdy ramiona jednego kąta są przedłużeniami ramion drugiego kąta, to takie kąty mają równe miary i nazywamy je **kątami wierzchołkowymi**. Dwie przecinające się proste tworzą dwie pary kątów wierzchołkowych.

ĆWICZENIE C Narysuj dwie przecinające się proste i wskaż na tym rysunku dwie pary kątów wierzchołkowych oraz cztery pary kątów przyległych.

zadania 1–4

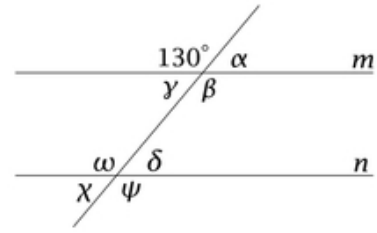
II



$a \| b$

Prosta, która przecina dwie proste równoległe, jest nachylona do każdej z nich pod takim samym kątem.
Jest też odwrotnie — jeśli jakaś prosta przecina dwie inne proste i każdą z nich pod tym samym kątem, to te proste muszą być równoległe.

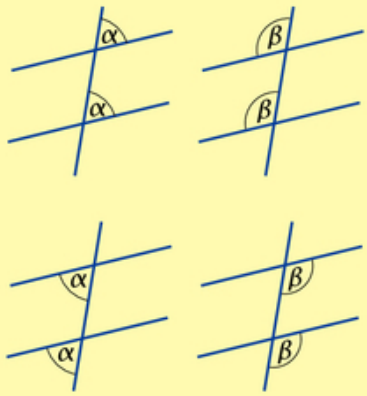
ĆWICZENIE D Proste m i n na rysunku obok są równoległe. Jakie miary mają kąty oznaczone literami?



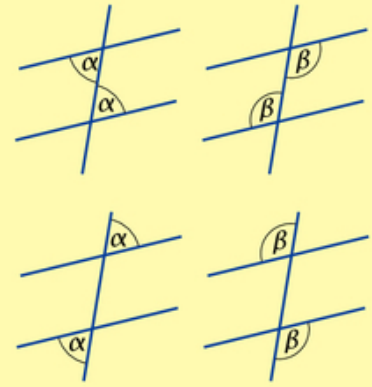
Jeżeli dwie proste są przecięte trzecią prostą, to możemy wskazać cztery pary kątów, które nazywamy odpowiadającymi, oraz cztery pary kątów nazywanych naprzemianległymi.

Na każdym z poniższych rysunków prosta przecina dwie proste równoległe, więc dwa zaznaczone kąty mają równe miary.

Kąty odpowiadające



Kąty naprzemianległe

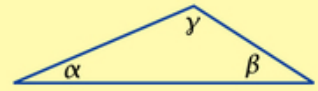


zadania 5–6

III Przypomniane dotąd wiadomości możemy wykorzystać do uzasadnienia twierdzenia o kątach trójkąta.

Twierdzenie

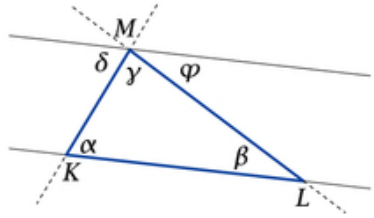
Suma miar kątów trójkąta jest równa 180°.



$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Dowód

Niech α, β i γ oznaczają kąty trójkąta KLM. Pokażemy, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.



Przez wierzchołek M trójkąta KLM prowadzimy prostą równoległą do prostej KL. Oznaczmy przez δ i φ kąty, które razem z kątem γ tworzą kąt półpełny, czyli:

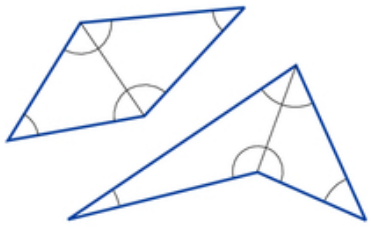
$$\delta + \varphi + \gamma = 180^\circ$$

Prosta KM przecina dwie proste równoległe, więc $\alpha = \delta$, bo są to kąty naprzemianległe. Podobnie $\beta = \varphi$.

Zatem: $\alpha + \beta + \gamma = \delta + \varphi + \gamma = 180^\circ$. □

ĆWICZENIE E W trójkącie równoramiennym jeden z kątów ma 70°. Jakie miary mają pozostałe kąty tego trójkąta?

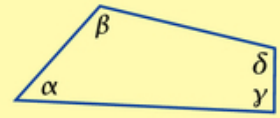
zadania 7–16

IV 

Ponieważ dowolny czworokąt można podzielić jedną z przekątnych na dwa trójkąty, więc suma miar kątów obu tych trójkątów to suma miar kątów czworokąta. Prawdziwe jest zatem następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Suma miar kątów czworokąta jest równa 360°.



$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

zadania 17–18

V Korzystając z własności kątów odpowiadających lub kątów naprzemianległych, można uzasadnić poniższe własności trapezu i równoległoboku.

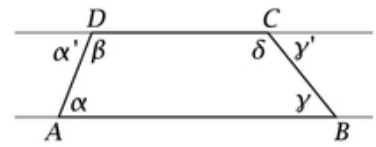
Twierdzenie

W trapezie suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu jest równa 180°.



$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$

ĆWICZENIE F Zapisz dowód twierdzenia o kątach w trapezie, wzorując się na dowodzie twierdzenia o sumie miar kątów trójkąta. Skorzystaj z rysunku obok.



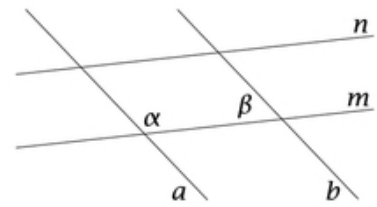
Twierdzenie

W równoległoboku przeciwległe kąty mają jednakowe miary, a suma miar kątów leżących przy tym samym boku jest równa 180°.



$\alpha + \beta = 180^\circ$

ĆWICZENIE G Na rysunku obok proste a i b oraz m i n zawierają boki równoległoboku, czyli $a \parallel b$ i $m \parallel n$. Wskaż kąty, które mają taką samą miarę jak kąt α, oraz kąty, które mają taką samą miarę jak kąt β. Korzystając z tego rysunku, udowodnij powyższe twierdzenie.

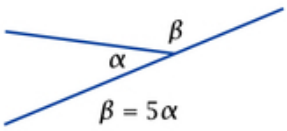


zadania 19–23

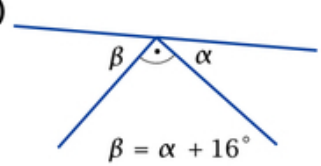
ZESTAW ZADAŃ

I **1.** Korzystając z informacji pod rysunkiem, oblicz miary kątów α i β.

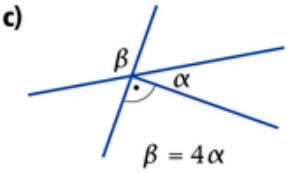
a)



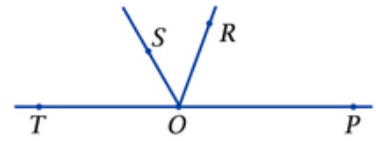
b)

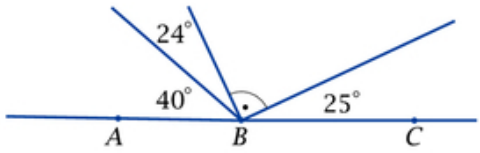


c)



2. Punkty T, O, P na rysunku obok leżą na jednej prostej oraz $|\sphericalangle SOR| = 50°$, $|\sphericalangle TOR| = 110°$. Oblicz miarę kąta wklęsłego POS.





3. Popatrz na rysunek obok. Uzasadnij, że punkty A, B, C nie leżą na jednej prostej.

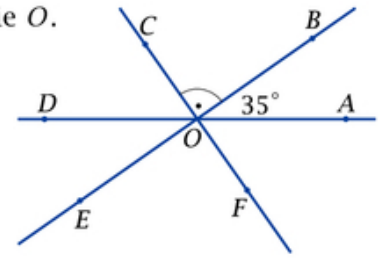
4. Na rysunku obok trzy proste przecinają się w punkcie O.

a) Podaj miary kątów wklęsłych:

$\sphericalangle DOB$ $\sphericalangle EOA$ $\sphericalangle COD$ $\sphericalangle EOF$

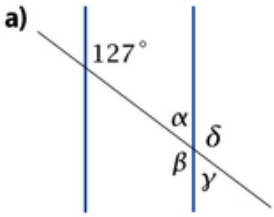
b) Wskaż dwa kąty rozwarte, które są kątami wierzchołkowymi. Ile jest par takich kątów?

c) Ile par kątów przyległych można wskazać na tym rysunku?

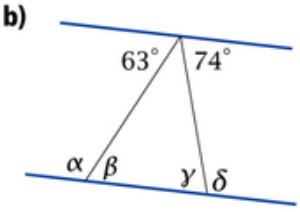


II **5.** Proste zaznaczone kolorem niebieskim są równoległe. Oblicz miary kątów oznaczonych literami.

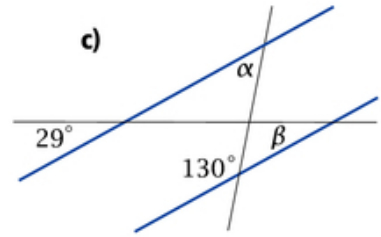
a)



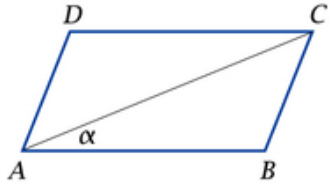
b)

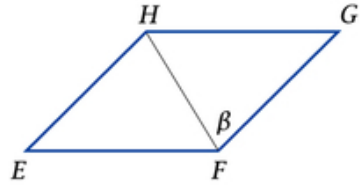


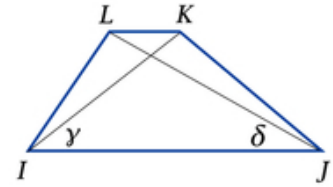
c)



6. Poniżej narysowano dwa równoległoboki i trapez. Znajdź na tych rysunkach kąty, które mają takie same miary jak kąty α, β, γ i δ.

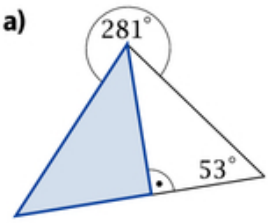




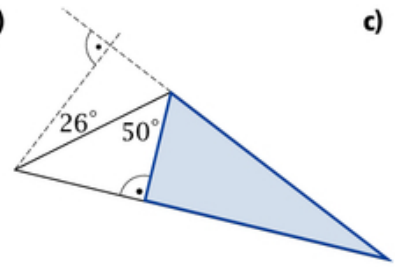


III **7.** Jakie miary mają kąty trójkąta zaznaczonego kolorem niebieskim?

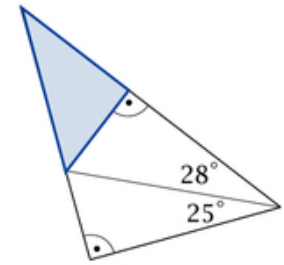
a)



b)

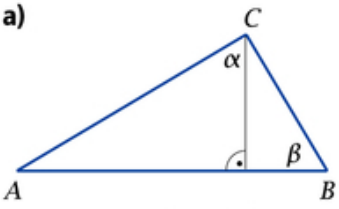


c)



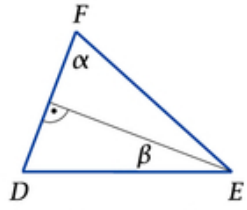
8. Jaki jest związek między kątami α i β?

a)



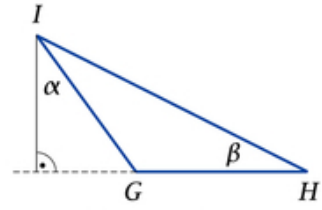
$|\sphericalangle ACB| = 90°$

b)



$|DE| = |EF|$

c)



$|GH| = |GI|$

9. Oblicz miary kątów trójkąta prostokątnego, w którym:

a) różnica miar kątów ostrych wynosi 20°,

b) jeden z kątów ma miarę trzykrotnie większą niż inny kąt tego trójkąta (rozpatrz dwa przypadki),

c) suma miar pewnych dwóch kątów jest 11 razy większa od miary trzeciego kąta.

10. Stosunek miar kątów trójkąta jest równy 1 : 9 : 10. Znajdź miary kątów tego trójkąta.

11. Kąty pewnego trójkąta mają miary $\alpha - 2°$, $2\alpha - 16°$ i $\frac{\alpha}{2} + 23°$. Uzasadnij, że ten trójkąt jest równoramienny.

12. Oblicz miary kątów trójkąta równoramiennego, w którym:

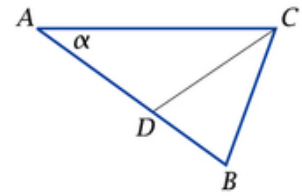
a) kąt przy podstawie ma miarę 7 razy mniejszą od miary kąta między ramionami,

b) miara kąta między ramionami jest o 30° większa od miary kąta przy podstawie.



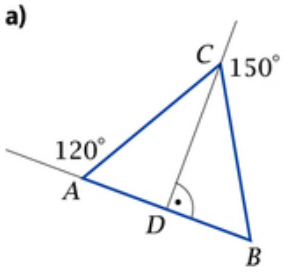
● **13.** Promienie słoneczne padają pod kątem 50° do powierzchni ziemi. Pionowy patyk rzuca cień. Pod jakim kątem należy pochylić patyk w stronę cienia, aby patyk i jego cień miały tę samą długość?

14. Popatrz na rysunek obok. Odcinek CD dzieli trójkąt równoramienny ABC ($|AB| = |AC|$) na dwa trójkąty równoramienne ($|CD| = |AD| = |CB|$). Jaką miarę ma kąt α?

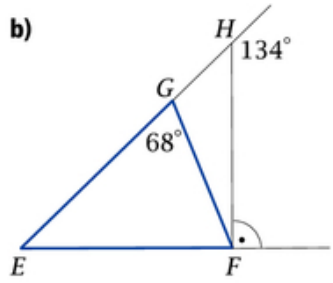


15. Uzasadnij, że trójkąt zaznaczony niebieskim kolorem jest równoramienny.

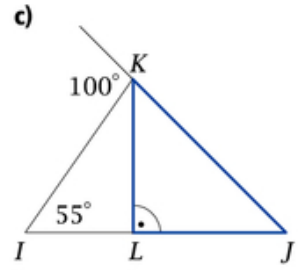
a)



b)



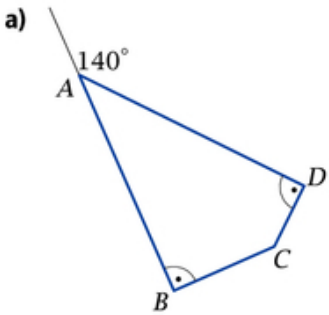
c)



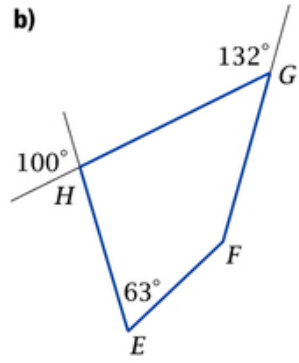
16. Punkty A, B i C są niewspółliniowe. Kąt przyległy do kąta ABC ma miarę dwa razy większą od miary kąta BAC. Uzasadnij, że trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym.

IV **17.** Jakie miary mają kąty narysowanego czworokąta?

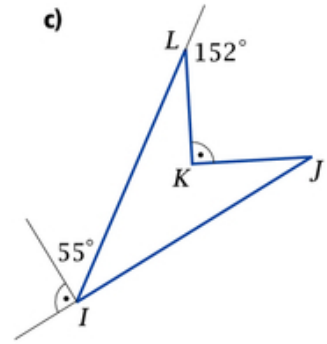
a)



b)



c)

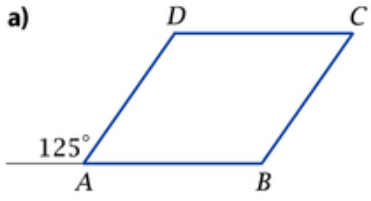


18. a) Kąty pewnego czworokąta mają miary α, 2α, $\alpha + 20°$, $\alpha - 10°$. Jaką miarę ma kąt α? Jaką miarę ma największy, a jaką — najmniejszy kąt tego czworokąta?

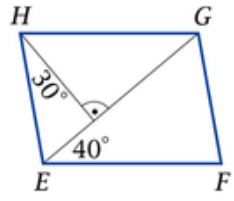
b) Zależności między kątami α, β, γ i δ pewnego czworokąta są następujące: $\beta = \alpha + 20$, $\gamma = 4\alpha + 30°$ i $\delta = \gamma - 20°$. Ile razy miara największego kąta jest większa od miary najmniejszego kąta w tym czworokącie?

V **19.** Jakie miary mają kąty w narysowanym równoległoboku?

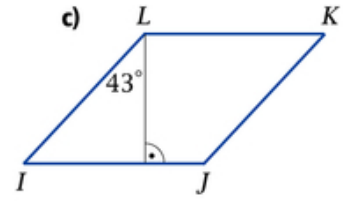
a)



b)

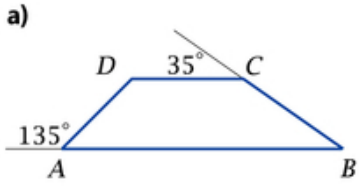


c)

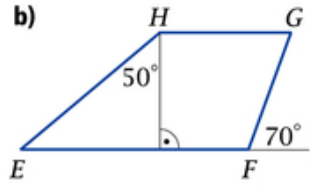


20. Jakie miary mają kąty w narysowanym trapezie?

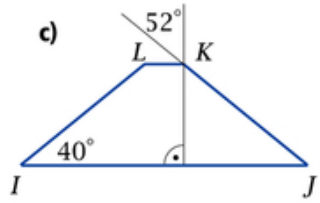
a)



b)



c)



21. Jedna z przekątnych równoległoboku dzieli go na dwa trójkąty równoramienne. W każdym z tych trójkątów kąt między ramionami ma miarę 50°. Jakie miary mają kąty tego równoległoboku?

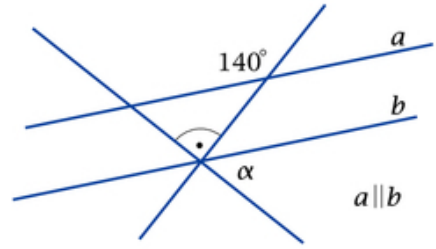
22. Krótsza przekątna dzieli trapez na trójkąt równoboczny i trójkąt prostokątny. Oblicz miary kątów tego trapezu.

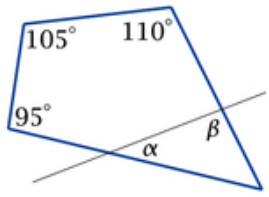
23. Narysuj dowolny romb i połącz odcinkami środki jego sąsiednich boków. Wykaż, że w otrzymanym w ten sposób czworokącie wszystkie kąty są proste (czyli że czworokąt jest prostokątem).

MINISPRAWDZIAN

S1. Jaką miarę ma kąt α na rysunku obok?

A. 30° B. 40° C. 50° D. 60°





S2. Suma miar kątów α i β zaznaczonych na rysunku obok jest równa:

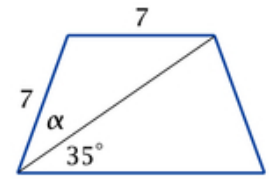
A. 95° C. 120°
B. 110° D. 130°

S3. Jaką miarę ma największy kąt trapezu $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, $|AB| = |AC|$, $|AD| = |CD|$ i $|\sphericalangle ABC| = 80°$?

A. 80° B. 100° C. 120° D. 140°

S4. Na rysunku obok przedstawiono trapez. Jaką miarę ma kąt α?

A. 17,5° B. 35° C. 70° D. 90°



PODSTAWOWE WŁASNOŚCI TRÓJKĄTÓW

I

ĆWICZENIE A a) W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 12$, $|BC| = 14$, $|AC| = 22$. Który kąt tego trójkąta jest największy?
b) W trójkącie KLM dane są $|\sphericalangle KLM| = 71^\circ$ i $|\sphericalangle LKM| = 66^\circ$. Który bok tego trójkąta jest najdłuższy?

W poprzednim rozdziale omówiliśmy twierdzenie o sumie miar kątów trójkąta. Warto też pamiętać, że w trójkącie najdłuższy bok leży naprzeciw kąta o największej mierze, a najkrótszy bok leży naprzeciw najmniejszego kąta.

zadania 1–2

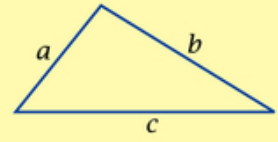
II Teraz przypomnimy dwie ważne własności trójkątów.

ĆWICZENIE B Dwa boki trójkąta mają długości 5 cm i 2 cm. Czy trzeci bok trójkąta może mieć długość 7 cm? Czy może mieć długość 2 cm?

Nie każde trzy odcinki mogą być bokami trójkąta. Warunek, jaki muszą spełniać boki trójkąta, jest opisany przez poniższe twierdzenie.

Twierdzenie
(nierówność trójkąta)

Suma długości dowolnych dwóch boków trójkąta jest większa niż długość trzeciego boku.



$a + b > c \quad b + c > a \quad a + c > b$

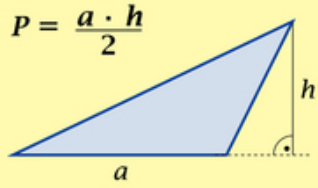
Uwaga. Jeśli dane są trzy odcinki o różnych długościach, to aby stwierdzić, czy można za ich pomocą skonstruować trójkąt, wystarczy sprawdzić, czy suma długości dwóch krótszych odcinków jest większa od długości trzeciego odcinka.

ĆWICZENIE C Dane są cztery odcinki o długościach: 2, 5, 8 oraz 9. Wybierz takie trzy z nich, które mogą być bokami tego samego trójkąta.

zadania 3–7

III

$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$



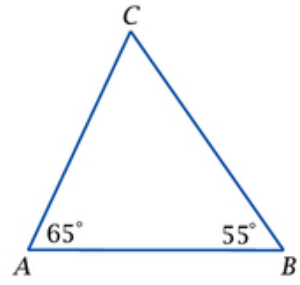
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości poprowadzonej do prostej zawierającej ten bok.

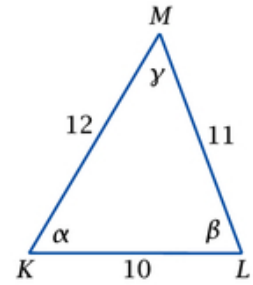
zadania 8–14

ZESTAW ZADAŃ

I **1.** **a)** Który z boków trójkąta ABC jest najdłuższy, a który — najkrótszy?

b) Który z kątów trójkąta KLM jest największy, a który — najmniejszy?





2. **a)** W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 17$, $|BC| = 12$, $|AC| = 15$. Który kąt tego trójkąta jest największy, a który — najmniejszy?

b) W trójkącie ABC kąty mają miary: $|\sphericalangle BAC| = 50°$, $|\sphericalangle CBA| = 85°$. Który bok tego trójkąta jest najdłuższy, a który — najkrótszy?

II **3.** Sprawdź, czy trójkąt może mieć boki o długościach:

a) 2 dm, 15 cm, 32 cm

b) 6 mm, 4 cm, 3 cm

c) $6,\ 3\sqrt{2},\ 7-\sqrt{3}$

d) $\sqrt{8},\ \sqrt{18},\ \sqrt{50}$

4. Dwa boki trójkąta równoramiennego mają długości a i b. Odpowiedz, jaką długość może mieć trzeci bok, jeśli:

a) $a = 3$ cm, $b = 5$ cm

b) $a = 3$ km, $b = 7$ km

c) $b = 2a$

d) $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

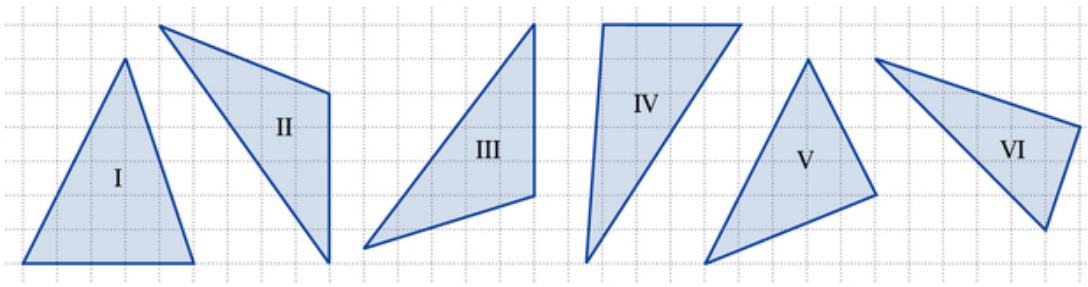
5. W pewnym czworokącie $ABCD$ boki mają długości: $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 11$ cm, $|CD| = 15$ cm, $|AD| = 8$ cm. Czy przekątna AC może mieć długość 21 cm?

6. Ustal, czy w trójkącie stosunek długości boków może wynosić:

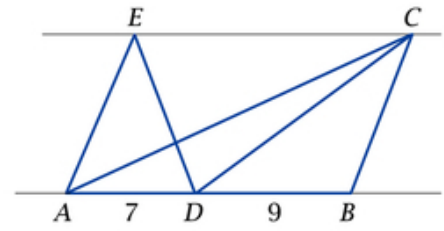
a) 2 : 4 : 7 **b)** 3 : 6 : 8 **c)** 4 : 5 : 9

7. Czy kolejne boki czworokąta mogą mieć długości: 7 cm, 6 cm, 16 cm i 2 cm?

III **8.** Oblicz pola narysowanych trójkątów. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.



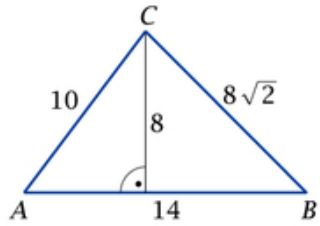
9. Na rysunku obok proste AB i EC są równoległe. Pole trójkąta ADE jest równe 35. Oblicz pola trójkątów ADC, DBC i ABC.



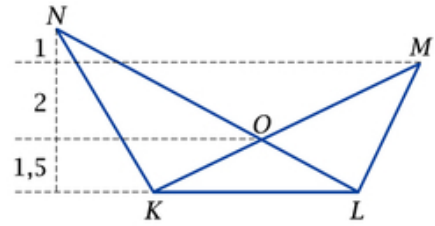
10. **a)** Boki pewnego trójkąta o polu równym 14 mają długości 5, 7 i $4\sqrt{2}$. Oblicz długość najkrótszej wysokości tego trójkąta.

b) Boki pewnego trójkąta prostokątnego mają długości 3, $3\sqrt{2}$ i $3\sqrt{3}$. Jakie pole ma ten trójkąt?

11. Popatrz na poniższy rysunek. W trójkącie ABC dane są długości boków oraz długość jednej wysokości. Oblicz pozostałe wysokości tego trójkąta.



12. Pole trójkąta KLN na rysunku poniżej jest równe 13,5. Oblicz pola trójkątów KLO i KLM. Jakie pole ma trójkąt OLM?



13. W trójkącie ABC wybrano na boku BC taki punkt D, że $|BD| = 2|DC|$. Pole trójkąta ABD jest równe 18. Jakie pole ma trójkąt ABC?

14. Wysokości pewnego trójkąta wynoszą 12, $11\frac{1}{5}$ i $12\frac{12}{13}$. Obwód tego trójkąta jest równy 42. Oblicz długości wszystkich jego boków.

MINISPRAWDZIAN

S1. Jeden z boków trójkąta ma długość 8. Pozostałe dwa boki mogą mieć długości:

A. 2 i 5 B. 2 i 10 C. 10 i 20 D. 20 i 22

S2. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$ i $|BC| = 6$, a wysokość opuszczona na bok AB ma długość 5. Jaką długość ma wysokość tego trójkąta opuszczona na bok BC?

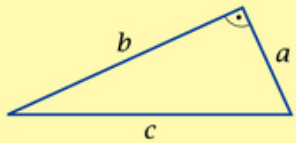
A. 3 B. $3\frac{1}{3}$ C. $3\frac{2}{3}$ D. $6\frac{2}{3}$

S3. Jeden z kątów trójkąta ma miarę 70°. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. *Ten trójkąt nie może być rozwartokątny.*
B. *Naprzeciw tego kąta może leżeć najkrótszy bok.*
C. *Ten trójkąt nie może być równoramienny.*
D. *Naprzeciw tego kąta może leżeć najdłuższy bok.*

TWIERDZENIE PITAGORASA I TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA PITAGORASA

I



$a^2 + b^2 = c^2$

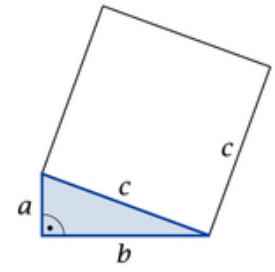
Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

Dowód

Niech a i b oznaczają długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, zaś c niech oznacza długość przeciwprostokątnej. Udowodnimy, że $a^2 + b^2 = c^2$.

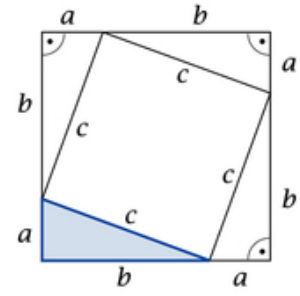
Na przeciwprostokątnej c budujemy kwadrat (zob. pierwszy rysunek). Następnie do trzech boków kwadratu dokładamy trzy identyczne trójkąty prostokątne o bokach a, b i c (zob. drugi rysunek).



Ponieważ kąt kwadratu o boku c i sąsiadujące z nim dwa kąty ostre trójkątów tworzą kąt półpełny, więc otrzymana figura to czworokąt, a dokładniej — kwadrat o boku $a + b$.

Pole tego kwadratu wynosi:

$P = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Ponieważ otrzymany kwadrat składa się z czterech trójkątów i kwadratu o boku c, więc jego pole można też obliczyć w następujący sposób:

$P = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2 = 2ab + c^2$

Wobec tego możemy zapisać równość:

$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

Stąd: $a^2 + b^2 = c^2$ □

Z historii

Pitagoras z Samos (572 – 497 p.n.e.) żył w Grecji w czasach, gdy w Indiach nauczał Budda, a w Chinach Konfucjusz. Pitagoras był nie tylko matematykiem, ale także filozofem. Założona przez niego szkoła filozoficzna głosiła m.in. wiarę w reinkarnację. Pitagorejczycy wierzyli, że dusza człowieka może wcielić się nawet w roślinę. Prowadzili oni również działalność naukową.

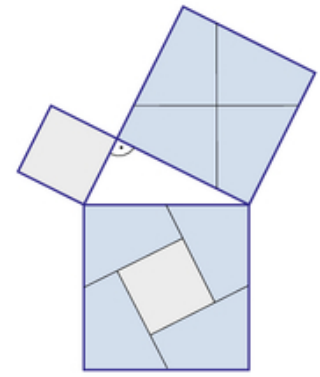
Nie wiadomo, czy twierdzenie Pitagorasa udowodnił po raz pierwszy sam Pitagoras, czy też któryś z jego uczniów. Jest natomiast pewne, że było ono znane wcześniej, gdyż znaleziono przykłady jego użycia już w egipskich papirusach.

Warto wiedzieć!

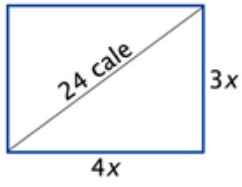
Oto inne sformułowanie twierdzenia Pitagorasa:

W trójkącie prostokątnym suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.

Twierdzenie w tej wersji można udowodnić, dzieląc dwa mniejsze kwadraty na takie części, aby można było z nich złożyć większy kwadrat. Tego typu dowodów twierdzenia Pitagorasa jest wiele (kwadraty można dzielić na różne sposoby). Jeden z nich został przedstawiony na rysunku obok.



PRZYKŁAD Wielkość ekranu telewizora określamy, podając długość jego przekątnej (w calach). Jakie wymiary w centymetrach ma 24-calowy ekran, jeżeli stosunek jego szerokości do wysokości wynosi 4 : 3? (1 cal = 2,54 cm)



Wykonujemy rysunek pomocniczy; stosunek 4 : 3 oznacza, że jeśli dla pewnego x szerokość ekranu wynosi $4x$, to wysokość ekranu wynosi $3x$.

$(4x)^2 + (3x)^2 = 24^2$

$16x^2 + 9x^2 = 24^2$

$25x^2 = 24^2$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa (musimy pamiętać, że wynik otrzymamy w calach).

$x^2 = \frac{24^2}{25}$

$x = \frac{24}{5}$

Litera x oznacza długość pewnego odcinka, czyli jest liczbą dodatnią, więc ujemnego rozwiązania równania kwadratowego ($-\frac{24}{5}$) nie bierzemy pod uwagę.

Wysokość ekranu $= 3 \cdot \frac{24}{5}$ cali $= 3 \cdot \frac{24}{5} \cdot 2{,}54$ cm $\approx 36{,}6$ cm

Szerokość ekranu $= 4 \cdot \frac{24}{5} \cdot 2{,}54$ cm $\approx 48{,}8$ cm

Odp. Ekran telewizora ma wymiary (w przybliżeniu) 48,8 cm × 36,6 cm.

ZADANIE Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest dwa razy dłuższa od drugiej. Przeciwprostokątna ma długość 10. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

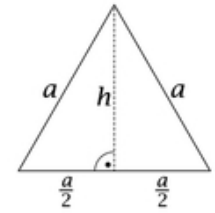
zadania 1–8

II

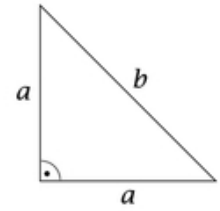
ĆWICZENIE A Trójkąt na rysunku obok jest równoboczny. Wysokość dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty prostokątne.

a) Zapisz równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa dla jednego z tych trójkątów i wyznacz z niej h.

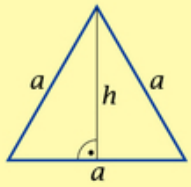
b) Jakie pole ma trójkąt równoboczny o boku a?



ĆWICZENIE B Trójkąt na rysunku obok jest prostokątny równoramienny. Zapisz równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta i wyznacz b.

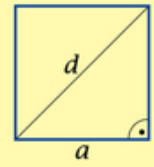


Wzory pozwalające obliczyć wysokość i pole trójkąta równobocznego oraz długość przekątnej kwadratu możesz zawsze łatwo otrzymać, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$d = a\sqrt{2}$$

ĆWICZENIE C Jedna z przekątnych rombu dzieli go na dwa trójkąty równoboczne. Jaki jest stosunek długości przekątnych tego rombu?

zadania 9–14

III

ĆWICZENIE D Podane zdania to implikacja i implikacja do niej odwrotna. Które z tych zdań są prawdziwe?

a) Jeśli jeden z kątów trójkąta jest prosty, to dwa kąty tego trójkąta są ostre. Jeśli dwa kąty trójkąta są ostre, to jeden z kątów tego trójkąta jest prosty.

b) Jeśli trójkąt jest równoboczny, to każdy kąt tego trójkąta ma miarę 60°. Jeśli każdy kąt trójkąta ma miarę 60°, to ten trójkąt jest równoboczny.

Zauważmy, że twierdzenie Pitagorasa można sformułować w postaci następującej implikacji:

Jeśli
trójkąt jest prostokątny,
to
suma kwadratów długości dwóch krótszych boków
jest równa kwadratowi długości trzeciego boku.

Uzasadnimy teraz, że implikacja odwrotna także jest prawdziwa.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

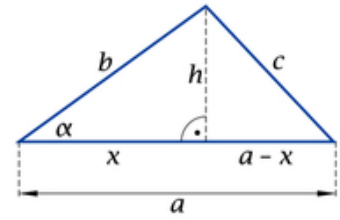
Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to ten trójkąt jest prostokątny.

Dowód

Załóżmy, że długości boków trójkąta wynoszą a, b i c oraz że $a^2 + b^2 = c^2$. Niech α będzie kątem między bokami a i b. Korzystając z metody nie wprost, udowodnimy, że $\alpha = 90°$.

Przypuśćmy, że α nie jest kątem prostym. Może zatem być kątem ostrym lub rozwartym.

1. Załóżmy, że kąt α jest kątem ostrym i $a \geqslant b$. Wówczas mamy taką sytuację, jak na rysunku obok. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:



$$h^2 = b^2 - x^2 \quad \text{oraz} \quad h^2 = c^2 - (a - x)^2$$

Stąd:

$$b^2 - x^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

Zatem:

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ax, \quad \text{gdzie } 2ax > 0$$

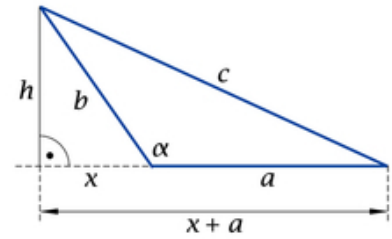
Wobec tego:

$$a^2 + b^2 > c^2$$

Otrzymana nierówność jest sprzeczna z założoną na początku równością: $a^2 + b^2 = c^2$. Zatem α nie może być kątem ostrym.

Zakładaliśmy, że $a \geqslant b$. Gdy $b > a$, dowód przebiegałby analogicznie.

2. Przypuśćmy, że α jest kątem rozwartym. Sytuację tę zilustrowano na rysunku obok. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że:



$$h^2 = b^2 - x^2 \quad \text{oraz} \quad h^2 = c^2 - (x + a)^2$$

Stąd:

$$b^2 - x^2 = c^2 - x^2 - 2ax - a^2$$

Zatem:

$$a^2 + b^2 = c^2 - 2ax, \text{ gdzie } 2ax > 0$$

Wobec tego:

$$a^2 + b^2 < c^2$$

Ta nierówność jest sprzeczna z założeniem. Zatem α nie może być kątem rozwartym.

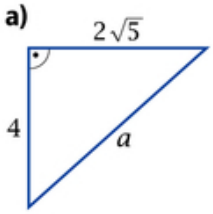
Ponieważ kąt α nie może być ani kątem ostrym, ani kątem rozwartym, musi więc być kątem prostym. □

zadania 15–22

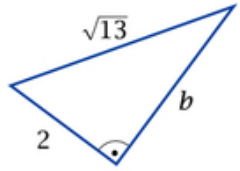
ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz długość boku oznaczonego literą.

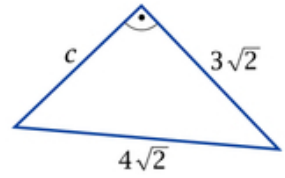
a)



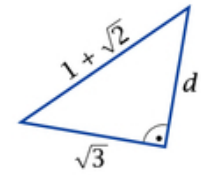
b)



c)

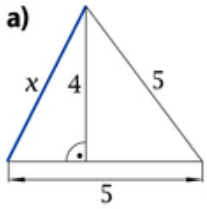


d)

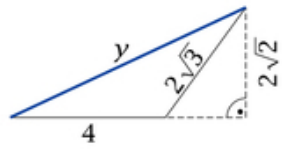


2. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

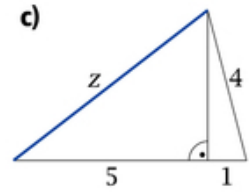
a)



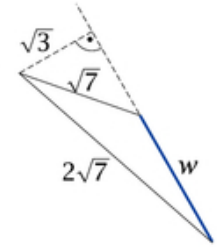
b)



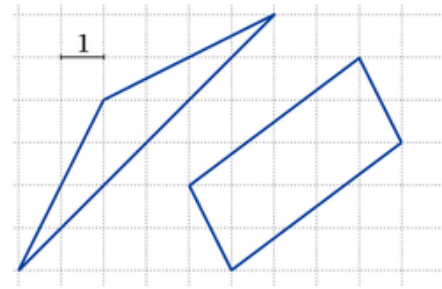
c)



d)



3. Która z figur na rysunku obok ma większy obwód — trójkąt czy równoległobok? O ile większy?

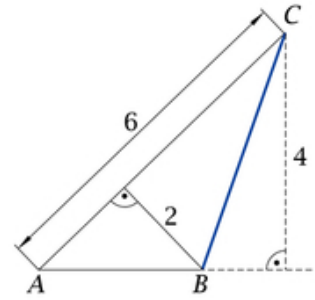


4. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 5 cm i 10 cm. Oblicz wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego.

5. **a)** Oblicz pole trójkąta równoramiennego, w którym podstawa ma długość 6, a ramię ma długość 10.

b) Wysokość trójkąta równoramiennego poprowadzona do podstawy ma długość 6. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli jego pole jest równe 12.

6. Korzystając z danych na rysunku obok, oblicz długość odcinka BC.



7. W pewnym trójkącie równoramiennym ramię jest 3 razy dłuższe od podstawy. Oblicz stosunek wysokości opuszczonej na podstawę trójkąta do długości tej podstawy.

8. W trójkącie równoramiennym o obwodzie 18 wysokość opuszczona na podstawę jest o 1 dłuższa od długości tej podstawy. Oblicz pole tego trójkąta.

II **9.** Zapisz wzór, który pozwala obliczać:

a) długość boku a trójkąta równobocznego, gdy dane jest pole P tego trójkąta,

b) obwód d trójkąta równobocznego, gdy dana jest wysokość h tego trójkąta,

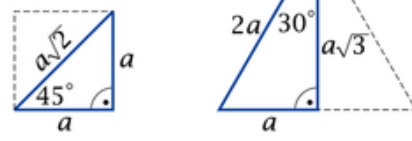
c) pole P trójkąta równobocznego, gdy dana jest wysokość h tego trójkąta,

d) obwód d trójkąta równobocznego, gdy dane jest pole P tego trójkąta.

Warto zapamiętać!

Trójkąt prostokątny równoramienny to połowa kwadratu, a trójkąt prostokątny o kątach ostrych 30° i 60° to połowa trójkąta równobocznego.

Na rysunkach przedstawiono zależności między długościami boków w takich trójkątach.



10. **a)** Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma 45°, a długość jednego z boków jest równa 10. Oblicz pole i obwód tego trójkąta (rozpatrz dwa przypadki).

b) Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma 30°, a jeden z boków tego trójkąta ma długość 20. Oblicz obwód tego trójkąta. (Rozpatrz wszystkie przypadki).

11. W okręgu o promieniu 8 poprowadzono cięciwę. Oblicz długość tej cięciwy, jeśli jej odległość od środka okręgu jest równa 6.

12. **a)** Na 25-metrowym basenie pływackim tory są rozdzielone naprężoną liną. Oblicz, na jaką maksymalną wysokość nad powierzchnię wody można by unieść środek tej liny, gdyby jej długość zwiększyć o 1 m.

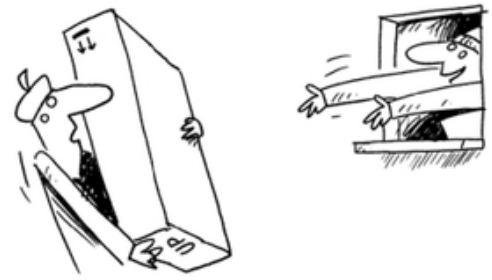


b) Wyobraź sobie, że o 1 m wydłużono linę rozdzielającą tory na basenie 50-metrowym. Jak myślisz, czy środek liny można unieść wyżej czy niżej niż w wypadku basenu 25-metrowego? Sprawdź swoją odpowiedź, wykonując obliczenia.



13. Czy przez drzwi o szerokości 70 cm i wysokości 2 m można przenieść lustro w kształcie koła o promieniu 106 cm? Odpowiedź uzasadnij.

14. Czy przez okno w kształcie kwadratu, którego bok ma długość 95 cm, można przenieść pudło w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 30 cm × 1 m × 1,5 m? Odpowiedź uzasadnij.



III **15.** Sprawdź, czy trójkąt, którego boki mają podane długości, jest trójkątem prostokątnym.

a) 20, 26, 32

b) $3\sqrt{7}$, 12, 9

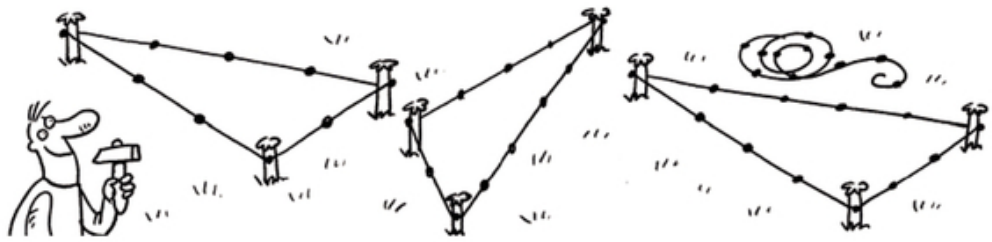
c) $3\sqrt{5}$, $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{13}$

d) $2\sqrt{2}$, $3+\sqrt{2}$, $\sqrt{3+6\sqrt{2}}$

e) 3 dm, 3,6 dm, 20 cm

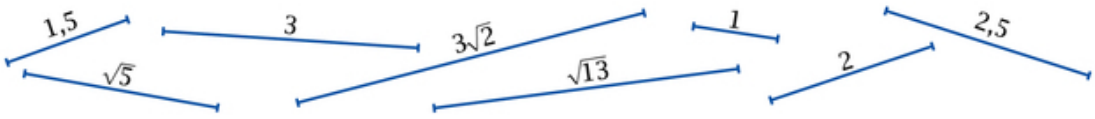
f) 1,2 m, 5 dm, 130 cm

16. Na sznurkach zawiązano supełki w jednakowych odległościach, a sznurki rozpięto na kołkach. Przy którym kołku sznurek wyznaczył kąt prosty?



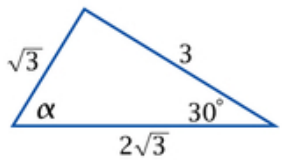
17. Czy równoległobok, którego boki mają długości 6 i 9, a przekątna ma długość 12 jest prostokątem? Odpowiedź uzasadnij.

18. Spośród narysowanych odcinków wybierz trzy, z których można zbudować trójkąt prostokątny. (Uwaga. Zadanie ma pięć rozwiązań).

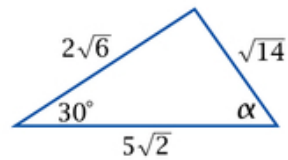


19. Czy kąt α ma miarę 60°?

a)



b)



20. Boki sześciokąta foremnego $ABCDEF$ mają długość a.

a) Jakie długości mają przekątne tego sześciokąta?

b) Wykaż, że trójkąt BCE jest prostokątny.

21. Trójkąt o bokach długości 3, 4 i 5 jest prostokątny. Czy istnieje inny trójkąt prostokątny, którego długości boków są kolejnymi liczbami naturalnymi?

Warto wiedzieć!

Trzy liczby naturalne, które mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego, nazywamy *trójką pitagorejską*. Oto przykłady takich trójek:

3, 4, 5; 5, 12, 13; 40, 198, 202.

Już 3,5 tys. lat temu Babilończycy znali wiele takich trójek. Okazuje się, że jest ich nieskończenie wiele.

Oto ogólna metoda znajdowania trójek pitagorejskich:

wybieramy dodatnie liczby naturalne p, q, takie że $p > q > 0$, i obliczamy a, b i c według wzorów:

$$a = p^2 - q^2 \qquad b = 2pq \qquad c = p^2 + q^2$$

Tak otrzymane liczby spełniają warunek:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

22. **a)** Znajdź kilka trójek pitagorejskich, korzystając z metody opisanej wyżej.

b) Uzasadnij, że liczby a, b i c obliczone ze wzorów podanych w ciekawostce spełniają warunek $a^2 + b^2 = c^2$.

c) Znajdź trójkę pitagorejską, w której największą liczbą jest 20.

d) Znajdź trójkę pitagorejską, w której największą liczbą jest 34.

MINISPRAWDZIAN

S1. Dwa boki trójkąta mają długości 7 i 24. Które z podanych zdań jest fałszywe?

A. *Gdy trzeci bok ma długość 25, to trójkąt jest prostokątny.*
B. *Gdy trzeci bok ma długość $\sqrt{526}$, to trójkąt jest prostokątny.*
C. *Długość trzeciego boku nie może być równa 16.*
D. *Długość trzeciego boku może być równa 28.*

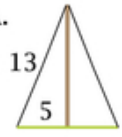
S2. O ile procent wysokość trójkąta równobocznego jest krótsza od jego boku?

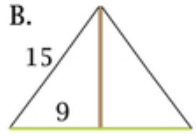
A. o mniej niż 15% B. o więcej niż 33% C. o 15% D. o 33%

S3. Prostokąt $ABCD$ ma boki o długościach 2 i 4. Odległość wierzchołka A od przekątnej BD jest równa:

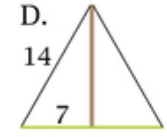
A. $2\sqrt{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. $0{,}8\sqrt{5}$ D. $0{,}6\sqrt{5}$

S4. Rysunki przedstawiają cztery maszty o wysokości 12 m, podtrzymywane przez napięte liny. Jeden z nich nie jest ustawiony pionowo. Który?

A.


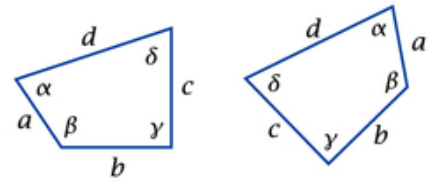
B.


C.


D.


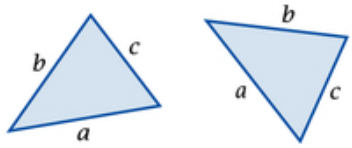
WŁASNOŚCI TRÓJKĄTÓW (CD.)

I O dwóch wielokątach mówimy, że są przystające, jeśli kolejne boki jednego wielokąta mają takie same długości jak odpowiednie kolejne boki drugiego wielokąta i kąty między odpowiadającymi sobie bokami mają równe miary.



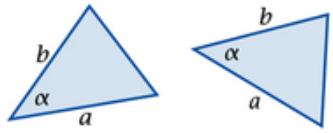
Aby stwierdzić, czy dwa trójkąty są przystające, nie trzeba sprawdzać, czy wszystkie odpowiednie boki mają równe długości i czy wszystkie odpowiednie kąty mają równe miary. Można bowiem skorzystać z cech przystawania trójkątów, które przypominamy poniżej.

CECHY PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW



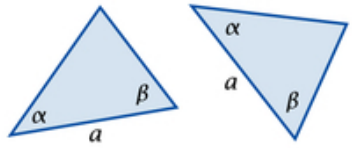
Cecha bbb

Jeśli boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



Cecha bkb

Jeśli dwa boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta i kąty między tymi bokami są równe, to trójkąty są przystające.

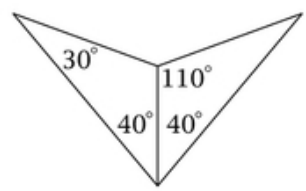


Cecha kbk

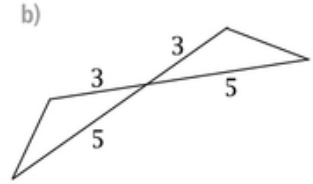
Jeśli bok jednego trójkąta ma taką samą długość jak bok drugiego trójkąta, a kąty jednego trójkąta przy tym boku są równe odpowiednim kątom drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.

ĆWICZENIE A Z której cechy przystawania trójkątów wynika, że narysowane trójkąty są przystające?

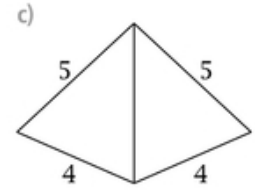
a)



b)



c)



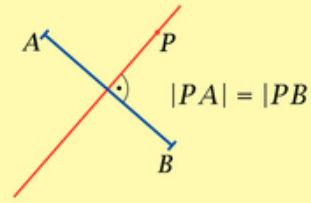
zadania 1–12

II Korzystając z cech przystawania trójkątów, można udowodnić niektóre własności geometryczne.

Przypomnijmy, że **symetralna odcinka** to prosta do niego prostopadła i przechodząca przez jego środek.

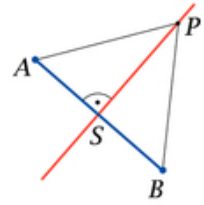
Twierdzenie

Punkt należy do symetralnej odcinka wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednakowo oddalony od jego końców.



Dowód

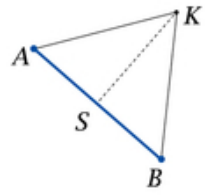
Pokażemy, że jeśli punkt P leży na symetralnej odcinka AB, to $|PA| = |PB|$.



Niech S będzie środkiem odcinka AB i $P \neq S$. Trójkąty ASP i BSP mają wspólny bok SP. Ponadto $|AS| = |SB|$ i kąt o wierzchołku S w obu trójkątach jest prosty. Zatem z cechy *bkb* wynika, że trójkąty te są przystające. Wobec tego $|PA| = |PB|$.

Gdy $P = S$, to oczywiście także $|PA| = |PB|$.

Pokażemy, że jeśli punkt K leży w jednakowej odległości od końców odcinka AB, to leży on na symetralnej tego odcinka.



Niech S będzie środkiem odcinka AB i $K \neq S$. Trójkąty ASK i BSK mają odpowiednie boki o tej samej długości, więc z cechy *bbb* wynika, że trójkąty te są przystające. Wobec tego $|\sphericalangle ASK| = |\sphericalangle BSK|$, a ponieważ są to kąty przyległe, więc oba są kątami prostymi. Wynika stąd, że prosta KS jest symetralną odcinka AB.

Gdy $K = S$, to oczywiście K leży na symetralnej odcinka AB. □

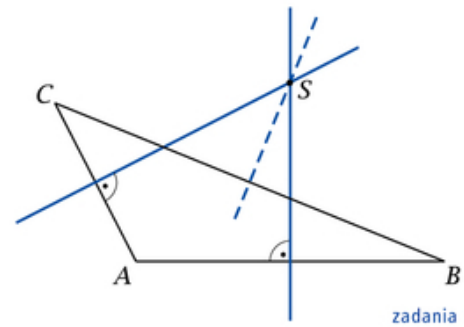
Twierdzenie

W każdym trójkącie symetralne boków przecinają się w jednym punkcie.

Dowód

Niech S będzie punktem przecięcia symetralnych boków AB i AC w trójkącie ABC. Z własności symetralnej wynika, że $|SA| = |SB|$ oraz $|SA| = |SC|$.

Stąd $|SB| = |SC|$, a to oznacza, że punkt S leży także na symetralnej boku BC. □

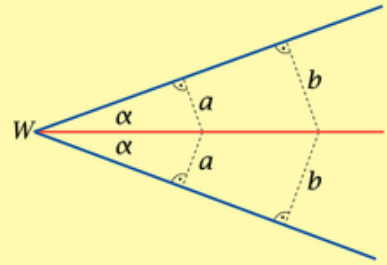


zadania 13–16

III Przypomnijmy, że **dwusieczna kąta** to półprosta, która dzieli ten kąt na dwa kąty o równych miarach.

Twierdzenie

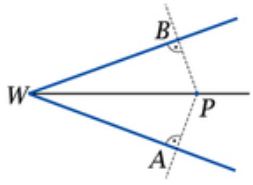
Punkt należący do kąta wypukłego leży na jego dwusiecznej wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednakowo odległy od obu ramion kąta.



Będziemy korzystać z tego twierdzenia tylko dla kątów ostrych, prostych lub rozwartych, więc dowód przeprowadzimy dla takich kątów.

Dowód

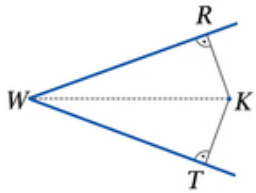
Pokażemy, że jeśli punkt P leży na dwusiecznej kąta o wierzchołku W (ostrego, prostego lub rozwartego), to odległości punktu P od ramion kąta są równe.



Niech $P \neq W$ i $PA \perp WA$ oraz $PB \perp WB$. Trójkąty WPA i WPB są prostokątne i mają wspólny bok WP. Ponadto kąty leżące przy tym boku są w obu trójkątach takie same. Zatem z cechy *kbk* wynika, że trójkąty te są przystające. Wobec tego $|PA| = |PB|$.

Gdy $P = W$, to oczywiście odległości punku P od obu ramion kąta są jednakowe (równe 0).

Pokażemy, że jeśli K jest takim punktem kąta (ostrego, prostego lub rozwartego) o wierzchołku W, który leży w równych odległościach od ramion kąta, to punkt ten leży na dwusiecznej tego kąta.



Niech $K \neq W$ i $KR \perp WR$, $KT \perp WT$ oraz $|KR| = |KT|$. Trójkąty WTK i WRK mają po dwa odpowiednie boki o tej samej długości. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|WR| = |WT|$. Z cechy *bbb* wynika, że te trójkąty są przystające. Wobec tego $|\sphericalangle TWK| = |\sphericalangle KWR|$, czyli punkt K leży na dwusiecznej kąta TWR.

Gdy $K = W$, to oczywiście punkt K leży na dwusiecznej kąta. □

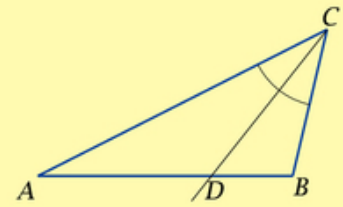
Twierdzenie

W każdym trójkącie dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie.

ĆWICZENIE B Udowodnij powyższe twierdzenie, wzorując się na dowodzie twierdzenia o punkcie przecięcia symetralnych boków trójkąta.

Twierdzenie o dwusiecznej

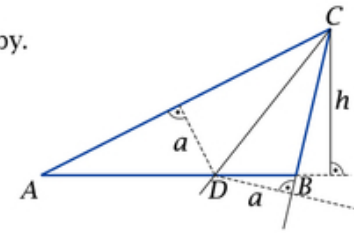
Jeżeli w trójkącie ABC dwusieczna kąta o wierzchołku C przecina bok AB w punkcie D, to stosunek $|AD| : |BD|$ jest równy stosunkowi $|AC| : |BC|$.



$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

Dowód

Niech w trójkącie ABC dwusieczna kąta o wierzchołku C przecina bok AB w punkcie D. Odległości punktu D od ramion tego kąta są równe. Na rysunku oznaczono je literą a.



Pole trójkąta ADC można zapisać na dwa sposoby. Z równości $\frac{|AD|\cdot h}{2} = \frac{|AC|\cdot a}{2}$ wynika $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{a}{h}$.

Podobnie dla trójkąta BDC z równości $\frac{|BD|\cdot h}{2} = \frac{|BC|\cdot a}{2}$ wynika $\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{a}{h}$.

Wobec tego: $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|BC|}$. □

zadania 17–21

IV ĆWICZENIE C Narysuj dwa dowolne trójkąty: ostrokątny i rozwartokątny. W każdym z nich narysuj proste zawierające wysokości trójkąta.

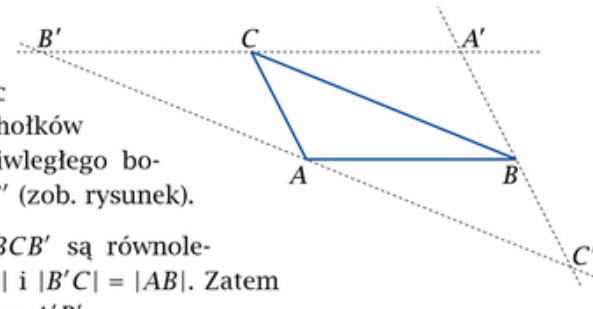
Jeśli twoje rysunki z ćwiczenia C były wykonane dokładnie, to na każdym z nich dorysowane linie powinny się przeciąć w jednym punkcie. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie

W każdym trójkącie proste zawierające wysokości przecinają się w jednym punkcie.

Dowód

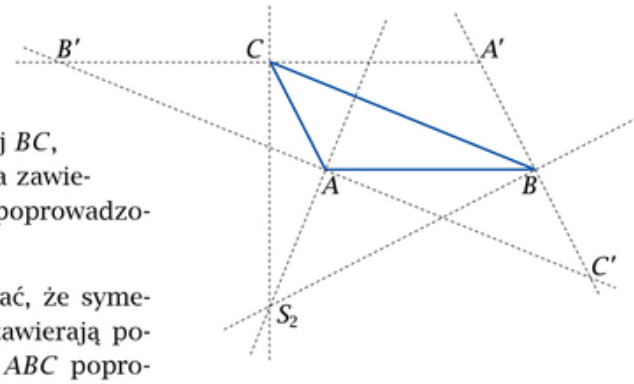
Niech ABC będzie dowolnym trójkątem. Prowadząc przez każdy z jego wierzchołków prostą równoległą do przeciwległego boku, otrzymamy trójkąt $A'B'C'$ (zob. rysunek).



Czworokąty $ABA'C$ oraz $ABCB'$ są równoległobokami, więc $|A'C| = |AB|$ i $|B'C| = |AB|$. Zatem punkt C jest środkiem odcinka $A'B'$.

Podobnie można zauważyć, że punkt B jest środkiem odcinka $A'C'$, a punkt A — środkiem odcinka $B'C'$.

Pokażemy teraz, że symetralne boków trójkąta $A'B'C'$ zawierają wysokości trójkąta ABC.



Symetralna boku $B'C'$ przechodzi przez punkt A i jest prostopadła do prostej BC, bo $B'C' \parallel BC$. Ta symetralna zawiera wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka A.

Analogicznie można wykazać, że symetralne boków $A'B'$ i $A'C'$ zawierają pozostałe wysokości trójkąta ABC poprowadzone z wierzchołków C i B.

Wiemy już, że symetralne boków trójkąta $A'B'C'$ przecinają się w jednym punkcie (zob. twierdzenie na str. 71). Punkt ten (na rysunku oznaczony jako S) jest punktem przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta ABC. □

Odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku nazywamy **środkową trójkąta**.

ĆWICZENIE D Narysuj dowolny trójkąt oraz wszystkie jego środkowe. Czy przecinają się one w jednym punkcie?

Poniższe twierdzenie opisuje czwarty szczególny punkt trójkąta.

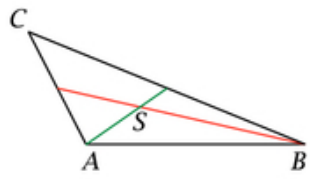
Twierdzenie

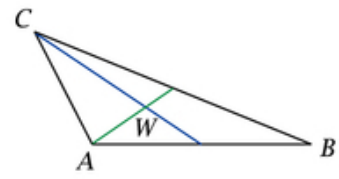
W każdym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie i punkt ten dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1.

Dowód

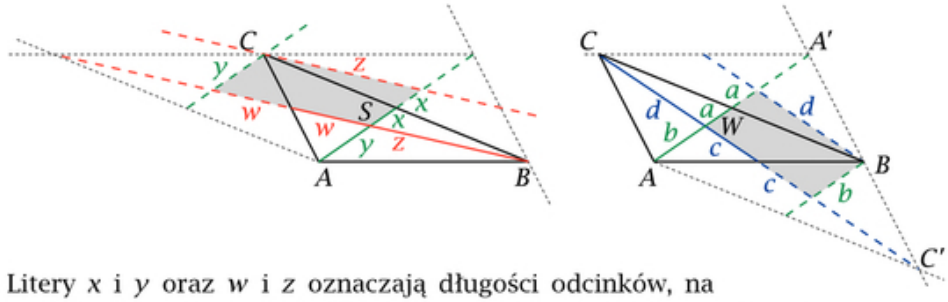
Niech ABC będzie dowolnym trójkątem.

Niech S będzie punktem przecięcia środkowych tego trójkąta poprowadzonych z wierzchołków A i B (zob. pierwszy rysunek) i niech W będzie punktem przecięcia środkowych poprowadzonych z wierzchołków A i C (zob. drugi rysunek).





Przyjrzyj się kolejnym rysunkom. Na każdym z nich — prowadząc proste równoległe do boków trójkąta ABC — dorysowano dwa trójkąty przystające do tego trójkąta i zaznaczono odpowiednie środkowe.



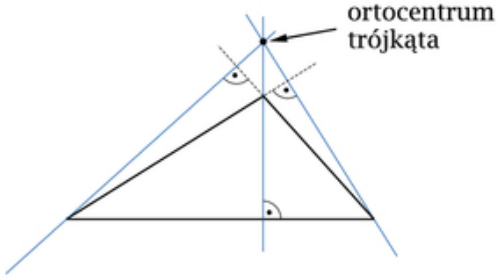
Litery x i y oraz w i z oznaczają długości odcinków, na które punkt S podzielił środkowe. Litery a i b oraz c i d oznaczają długości odcinków, na które punkt W podzielił środkowe. Można zauważyć, że na obu rysunkach zacieniowane figury są równoległobokami, więc otrzymujemy równości:

$$y = 2x \text{ i } z = 2w \qquad \text{oraz} \qquad b = 2a \text{ i } d = 2c$$

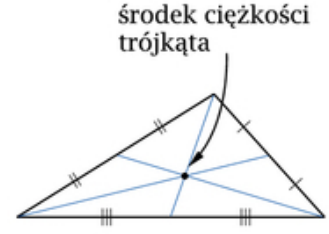
Wykazaliśmy, że zarówno punkt S, jak i punkt W dzieli środkową poprowadzoną z wierzchołka A w stosunku $2 : 1$, więc $S = W$ i S dzieli każdą środkową w tym stosunku. □

Punkty opisane w powyższych dwóch twierdzeniach mają swoje nazwy.

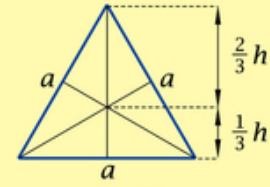
Punkt przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta nazywamy **ortocentrum**.



Punkt przecięcia środkowych trójkąta nazywamy **środkiem ciężkości trójkąta**.



Zauważmy, że w trójkącie równobocznym ortocentrum, środek ciężkości, punkt przecięcia symetralnych boków i dwusiecznych kątów to ten sam punkt, który dzieli każdą wysokość w stosunku $1 : 2$.



Uwaga. Jeśli trójkąt nie jest równoboczny, to ortocentrum, środek ciężkości, punkt przecięcia symetralnych boków i punkt przecięcia dwusiecznych kątów są czterema różnymi punktami.

zadania 22–29

ĆWICZENIE E Wykonaj kolejno czynności:

1. Narysuj na kartonie dowolny trójkąt (raczej duży) i wytnij go. Powieś ten trójkąt na haczyku (miejsce zaczepienia wybierz w pewnej odległości od wierzchołków). Na tym samym haczyku powieś obciążoną nitkę. Zaznacz na trójkącie linię wzdłuż nitki.

2. Wybierz inny punkt do zawieszenia trójkąta i wykonaj te same czynności.

3. Znajdź punkt przecięcia narysowanych linii. Sprawdź (rysując środkowe), że ten punkt to środek ciężkości trójkąta.



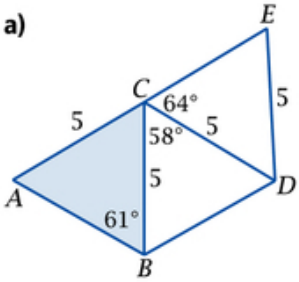
Warto wiedzieć!

Pojęcie środka ciężkości powinno być ci znane z lekcji fizyki. Na każdy punkt ciała fizycznego działa siła grawitacji. Wypadkowa tych sił przyłożona jest w punkcie zwanym środkiem ciężkości. Gdybyśmy zatem wycięli z kartonu trójkąt, wyznaczyli jego środek ciężkości i przeciągnęli przez ten punkt nitkę, to po zawieszeniu na niej trójkąta powinien on zawisnąć poziomo i pozostawać w równowadze.

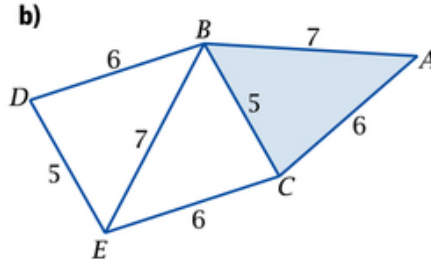
ZESTAW ZADAŃ

1. Znajdź na rysunku trójkąt, który jest przystający do zacieniowanego trójkąta.

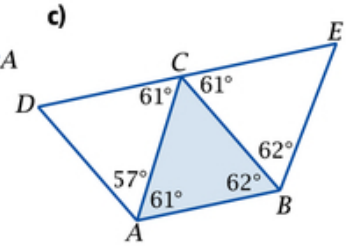
a)



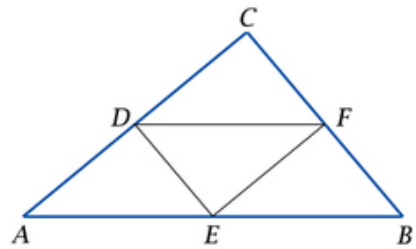
b)



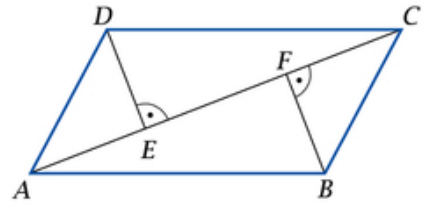
c)



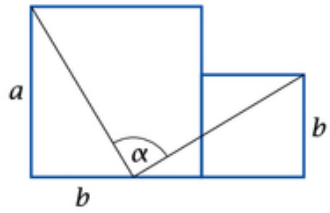
2. W trójkącie ABC na rysunku obok punkty D, E, F są środkami boków. Boki trójkąta DEF są równoległe do odpowiednich boków trójkąta ABC. Uzasadnij, że trójkąty AED, EBF, DEF i DFC są przystające.



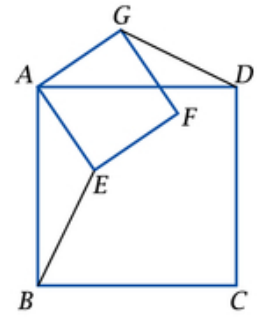
3. Czworokąt $ABCD$ na rysunku obok jest równoległobokiem. Wykaż, że trójkąt ABF jest przystający do trójkąta CDE oraz że trójkąt AED jest przystający do trójkąta CFB.



4. Dwa kwadraty są położone tak, jak na rysunku poniżej. Wykaż, że kąt α jest prosty.



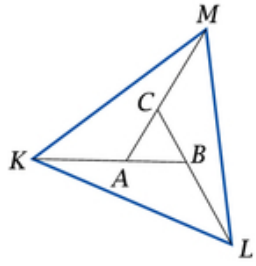
5. Dwa kwadraty są położone tak, jak na rysunku. Uzasadnij, że $|BE| = |GD|$.



6. Każdy trapez można podzielić na prostokąt i dwa trójkąty prostokątne. Korzystając z cech przystawania trójkątów, uzasadnij własność trapezu równoramiennego opisaną w ramce obok.

W trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem, kąty przy tej samej podstawie mają równe miary.





7. Trójkąt ABC na rysunku obok jest równoboczny. Punkty K, L i M leżą na prostych zawierających boki tego trójkąta, a odcinki AK, BL i CM mają równe długości. Wykaż, że trójkąt KLM jest równoboczny.

8. Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym:

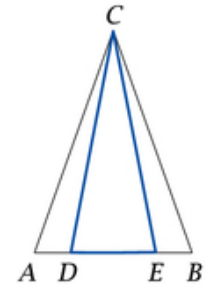
a) środkowe poprowadzone do ramion tego trójkąta mają równe długości,

b) wysokości poprowadzone do ramion trójkąta mają równe długości,

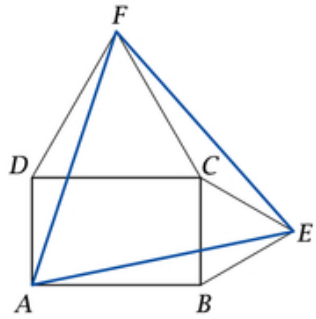
c) odcinki, które są częścią wspólną trójkąta i dwusiecznych kątów przy podstawie trójkąta, mają równe długości.

9. Udowodnij, że trójkąt, którego wierzchołkami są środki boków trójkąta równoramiennego, też jest równoramienny.

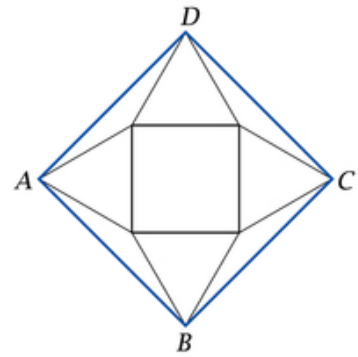
10. Trójkąt ABC na rysunku obok jest równoramienny. Na podstawie AB wybrano dwa punkty D, E, takie że $|AD| = |EB|$. Wykaż, że trójkąt DEC jest równoramienny.



11. Na nierównoległych bokach DC i BC prostokąta $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne DCF i BCE (zob. rysunek poniżej). Wykaż, że trójkąt AEF jest równoboczny.



12. Na wszystkich bokach kwadratu zbudowano trójkąty równoboczne tak, jak pokazano na poniższym rysunku. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.



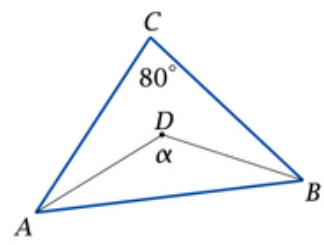
II **13.** W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 12$ i $|BC| = 16$. Symetralne tych boków przecinają się w punkcie S. Przekątna SB czworokąta $ABCS$ ma długość 10. Oblicz pole tego czworokąta.

14. Boki trójkąta ostrokątnego mają długości a, b i c. Symetralne boków przecinają się w punkcie, którego odległość od wierzchołków trójkąta jest równa d. Oblicz odległości tego punktu od poszczególnych boków trójkąta.

15. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 4, a punkt przecięcia symetralnych boków leży w odległości 3 od podstawy. Oblicz długości ramion tego trójkąta.

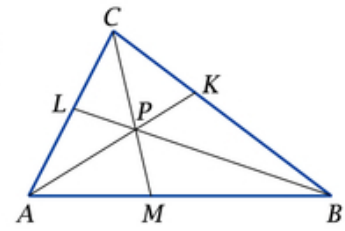
16. Symetralne ramion AB i BC trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC przecinają się w punkcie P. Punkty M i N są środkami boków AB i BC. Uzasadnij, że czworokąt $BMPN$ jest kwadratem.

III **17.** Punkt D na rysunku obok jest punktem przecięcia dwusiecznych dwóch kątów trójkąta ABC. Oblicz miarę kąta α.



18. Dwusieczne AM i BN kątów ostrych trójkąta prostokątnego ABC przecinają się w punkcie P. Punkty M i N leżą na bokach trójkąta. Uzasadnij, że największy kąt czworokąta $CNPM$ ma miarę 135°.

19. W trójkącie ABC kąt ABC ma miarę 40°, a kąt BCA — miarę 80°. Dwusieczne kątów tego trójkąta przecinają boki w punktach K, L, M, a ich punktem wspólnym jest punkt P, jak na rysunku. Oblicz miary kątów trójkąta:



a) AMP **b)** CLP **c)** BKP

20. W trójkącie prostokątnym, którego boki mają długości 3, 4 i 5, poprowadzono dwusieczną większego z kątów ostrych, która podzieliła trójkąt na dwa trójkąty. Oblicz pole większego z tych trójkątów.

21. W trójkącie ABC dwusieczne kątów o wierzchołkach A i C przecinają boki trójkąta odpowiednio w punktach E i D oraz przecinają się w punkcie F. Wykaż, że:

a) $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|DF|}{|CF|}$ **b)** $\frac{|AF| \cdot |DF|}{|FE| \cdot |CF|} = \frac{|AD|}{|CE|}$ **c)** $\frac{|DF|}{|CF|} + \frac{|BD|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|CE|}$

IV **22.** Wysokości trójkąta równobocznego ABC przecinają się w punkcie D.

a) Oblicz długość odcinka AD, jeśli wiadomo, że $|AB| = 5$.

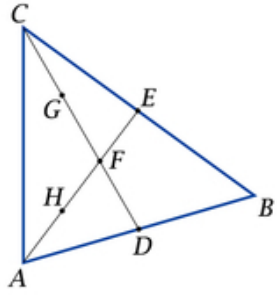
b) Oblicz odległość punktu D od prostej BC, jeśli $|BC| = 10$.

c) Oblicz odległość punktu D od boku AB, jeśli $|DC| = 12$.

d) Oblicz pole trójkąta BCD, jeśli $|AD| = 20$.

23. W trójkącie prostokątnym, którego boki mają długości 6, 8 i 10, z wierzchołka kąta prostego poprowadzono środkową i dwusieczną tego kąta. Podzieliły one przeciwprostokątną trójkąta na trzy odcinki. Oblicz długości tych odcinków.

24. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 6, a długość ramion jest równa 9. Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od jego podstawy.

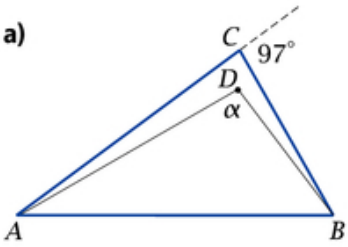


25. Uzasadnij, że środkowe trójkąta dzielą go na sześć trójkątów o równych polach.

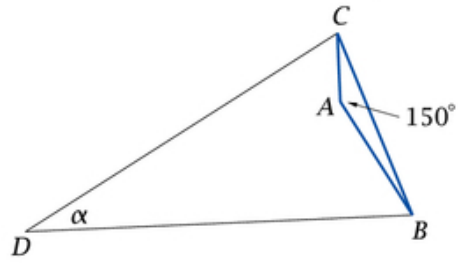
26. Odcinki AE i CD na rysunku obok są środkowymi trójkąta ABC. Punkt F jest środkiem ciężkości tego trójkąta, a punkty G i H są środkami odcinków CF i AF. Wykaż, że $|GE| = |DH|$.

27. Punkt D na rysunku jest ortocentrum trójkąta ABC. Oblicz miarę kąta α.

a)



b)



28. W trójkącie równoramiennym ABC środkowe AM i BN poprowadzone do ramion przecinają się w punkcie P. Obwód czworokąta $MCNP$ jest równy 10, a obwód trójkąta BCP wynosi 13. Oblicz wysokość trójkąta ABC opuszczoną na podstawę.

29. a) Udowodnij, że w równoległoboku $ABCD$ zachodzi równość:

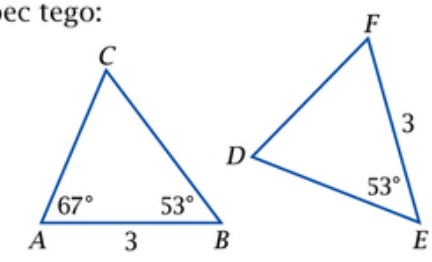
$$|AC|^2 + |BD|^2 = 2|AB|^2 + 2|AD|^2$$

b) Udowodnij, że w trójkącie KLM, w którym $|KL| = m$, $|KM| = l$ i $|LM| = k$, długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka K do boku LM wynosi $\frac{1}{2}\sqrt{2m^2 + 2l^2 - k^2}$. Ustal długości pozostałych środkowych tego trójkąta.

c) Niech S będzie środkiem ciężkości trójkąta KLM. Uzasadnij, że suma kwadratów odległości punktu S od wierzchołków trójkąta jest 3 razy mniejsza niż suma kwadratów długości boków tego trójkąta.

MINISPRAWDZIAN

S1. Trójkąty narysowane obok są przystające. Wobec tego:



A. kąt przy wierzchołku D ma miarę 60°
B. kąt przy wierzchołku D ma miarę 67°
C. kąt przy wierzchołku F ma miarę 60°
D. kąt przy wierzchołku F ma miarę 53°

S2. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

A. *Ortocentrum trójkąta prostokątnego jest wierzchołkiem tego trójkąta.*
B. *Dwusieczne kątów ostrych trójkąta prostokątnego przecinają się pod kątem 45°.*
C. *Odległość środka ciężkości trójkąta prostokątnego od wierzchołka kąta prostego jest zawsze dwa razy większa od jego odległości od przeciwprostokątnej.*
D. *Odległości punktu przecięcia symetralnych boków trójkąta prostokątnego od wierzchołków tego trójkąta są jednakowe.*

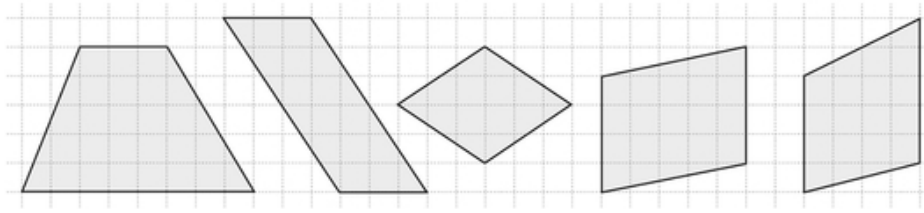
S3. Odległość środka ciężkości pewnego trójkąta równobocznego od jego boków wynosi 4. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. $12\sqrt{3}$ B. $18\sqrt{3}$ C. $24\sqrt{3}$ D. $36\sqrt{3}$

WŁASNOŚCI CZWOROKĄTÓW

Własności kątów w niektórych czworokątach omawialiśmy już wcześniej (patrz str. 54). Teraz przypomnimy inne własności czworokątów.

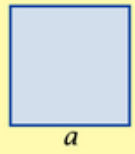
ĆWICZENIE A Przyjmijmy, że bok kratki ma długość 1. Oblicz pola narysowanych figur.



ĆWICZENIE B Narysuj kwadrat, prostokąt (który nie jest kwadratem), romb (który nie jest kwadratem) i równoległobok (który nie jest rombem ani prostokątem). Zaznacz przekątne tych czworokątów. Zastanów się, co można powiedzieć o przekątnych każdej z narysowanych figur.

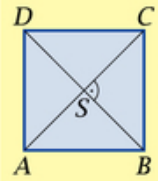
Kwadrat to czworokąt, którego wszystkie kąty są proste i wszystkie boki mają jednakowe długości.

Pole kwadratu jest równe kwadratowi długości jego boku.



$P = a^2$

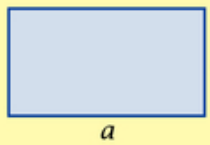
Przekątne kwadratu mają równe długości, przecinają się w połowie i są prostopadłe.



$|AC| = |BD|$
$|AS| = |SC| = |BS| = |SD|$
$AC \perp BD$

Prostokąt to czworokąt, którego wszystkie kąty są proste.

Pole prostokąta jest równe iloczynowi długości dwóch sąsiednich jego boków.



$P = a \cdot b$

Przekątne prostokąta mają równe długości i przecinają się w połowie.

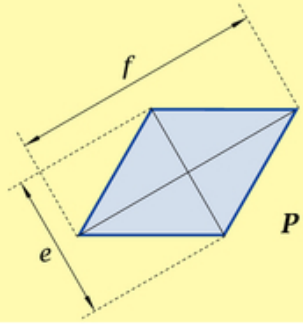


$|AC| = |BD|$
$|AS| = |SC| = |BS| = |SD|$

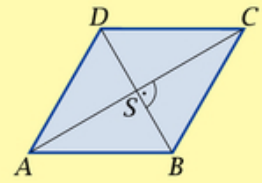
Romb to czworokąt, którego wszystkie boki mają jednakowe długości.

Pole rombu jest równe połowie iloczynu długości jego przekątnych.

Przekątne rombu przecinają się w połowie i są prostopadłe. Przekątna rombu dzieli kąt rombu na dwie równe części.



$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$



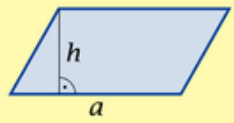
$|AS| = |SC|$
$|BS| = |SD|$
$AC \perp BD$

Uwaga. Kwadrat jest rombem, więc jego pole można też obliczyć, korzystając ze wzoru na pole rombu.

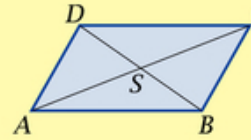
Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości jego boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

Przekątne równoległoboku przecinają się w połowie.



$$P = a \cdot h$$



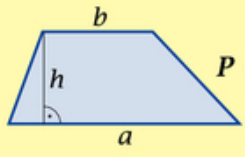
$|AS| = |SC|$
$|BS| = |SD|$

Uwaga. Romb jest równoległobokiem, więc jego pole możemy także obliczać, korzystając ze wzoru na pole równoległoboku.

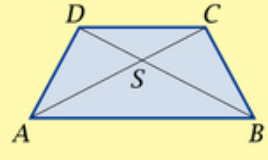
Trapez to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Pole trapezu jest równe połowie iloczynu sumy długości jego podstaw i wysokości.

W trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem, przekątne mają równe długości.

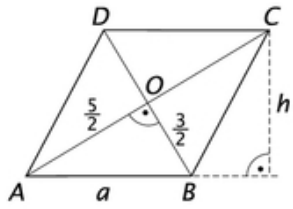


$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$



$|AC| = |BD|$
$|AS| = |BS|$
$|SC| = |SD|$

PRZYKŁAD Przekątne rombu mają długości 3 i 5. Jaką wysokość ma ten romb?



Wykonujemy rysunek pomocniczy. Z własności rombu wynika, że trójkąt ABO jest prostokątny i jego przyprostokątne mają długości $\frac{3}{2}$ i $\frac{5}{2}$ (każda z nich to połowa odpowiedniej przekątnej rombu).

$$a^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Obliczamy długość boku rombu, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABO.

$$a^2 = \frac{34}{4}$$

$$a = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

Ujemnego rozwiązania równania kwadratowego możemy nie brać pod uwagę, gdyż a to długość boku.

$$\frac{3 \cdot 5}{2} = a \cdot h$$

$$\frac{15}{2} = \frac{\sqrt{34}}{2} \cdot h$$

$$h = \frac{15}{\sqrt{34}} = \frac{15\sqrt{34}}{34}$$

Przedstawiamy pole rombu na dwa sposoby i zapisujemy odpowiednią równość.

Odp. Wysokość rombu wynosi $\frac{15\sqrt{34}}{34}$, czyli około 2,6.

ZADANIE Pole rombu wynosi 32, a jedna z przekątnych ma długość 4. Oblicz wysokość tego rombu.

zadania 1–17

II Przypomniane powyżej własności przekątnych kwadratu, prostokąta, rombu i równoległoboku można sformułować za pomocą równoważności. Oto przykład takiej równoważności:

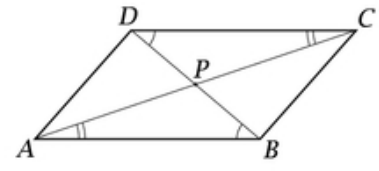
Twierdzenie

Czworokąt jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne przecinają się w połowie.

Dowód

Pokażemy, że jeśli czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, to jego przekątne przecinają się w połowie.

Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Z cechy kbk wynika, że trójkąty ABP i CDP są przystające, bo $|AB| = |CD|$ i odpowiednie kąty tych trójkątów są równe.

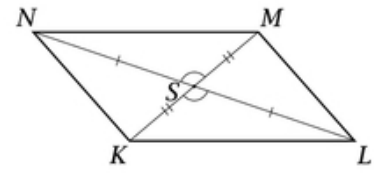


Stąd: $|AP| = |PC|$ i $|BP| = |PD|$.

Zatem punkt P jest środkiem przekątnej AC i środkiem przekątnej BD.

Pokażemy teraz, że jeśli $KLMN$ jest czworokątem, którego przekątne przecinają się w połowie, to jest równoległobokiem.

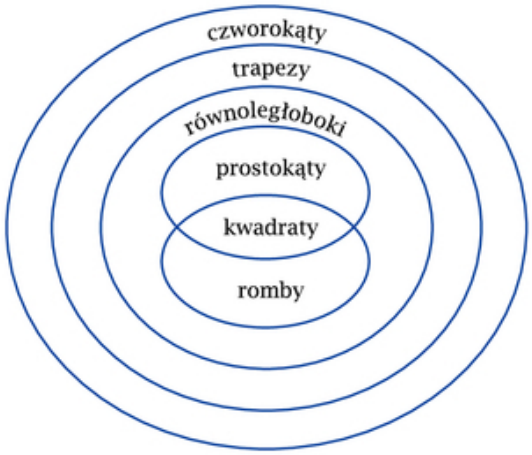
Niech S będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta $KLMN$. Trójkąty KLS i MNS są przystające (cecha *bkb*). Wobec tego: $|\sphericalangle KLS| = |\sphericalangle SNM|$. Zatem $KL \parallel MN$.



Analogicznie można pokazać, że $KN \parallel ML$.

Wynika stąd, że czworokąt $KLMN$ ma dwie pary boków równoległych, jest więc równoległobokiem. □

ĆWICZENIE C Narysuj dwa odcinki o różnych długościach, ale przecinające się w połowie. Narysuj czworokąt, którego przekątnymi są te odcinki. Z której spośród dowodzonych powyżej implikacji wynika, jaki to czworokąt?



Wiadomo, że każdy równoległobok jest trapezem, każdy prostokąt — równoległobokiem itp.

ĆWICZENIE D Korzystając ze wzoru na pole trapezu, oblicz pole:

a) kwadratu o boku a,

b) prostokąta o bokach a i b,

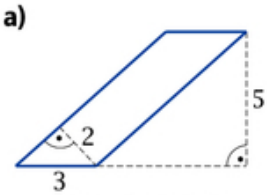
c) równoległoboku o boku a i wysokości h poprowadzonej do tego boku.

zadania 18–19

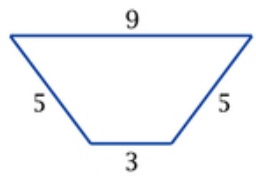
ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz pola figur przedstawionych na rysunkach.

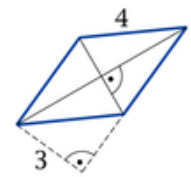
a)



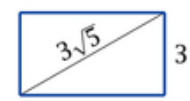
równoległobok



trapez

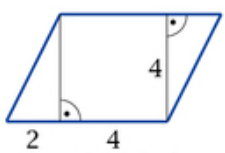


romb

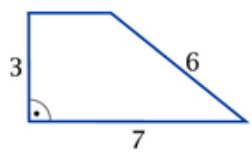


prostokąt

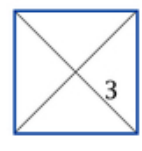
b)



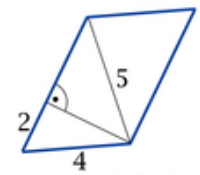
równoległobok



trapez

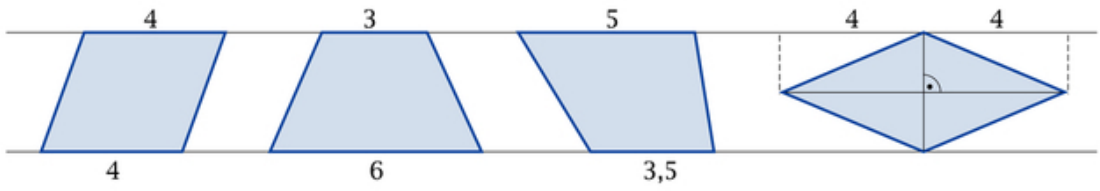


kwadrat



równoległobok

2. Narysowane proste są równoległe. Która z figur ma największe pole? Które figury mają równe pola?



3. Zapisz wzór pozwalający obliczać:

a) pole kwadratu o danej przekątnej d,

b) obwód kwadratu o danym polu P,

c) pole rombu o obwodzie b i wysokości h,

d) obwód rombu o danych przekątnych e i f,

e) pole trapezu równoramiennego o danych podstawach a, b $(a > b)$ i ramieniu r,

f) obwód trapezu równoramiennego o podstawach a i b $(a > b)$ oraz polu P.

4. Oblicz pole prostokąta o obwodzie 27, w którym stosunek długości boków jest równy $4:5$.

5. Oblicz pole kwadratu, którego przekątna jest o 5 dłuższa od boku.

6. W rombie o obwodzie 20 jedna z przekątnych jest dwa razy krótsza od drugiej. Oblicz pole tego rombu.

7. Pole pewnego równoległoboku wynosi 36. Jeden z jego boków jest 3 razy krótszy od wysokości opuszczonej na ten bok. Oblicz długość tego boku.

8. W trapezie prostokątnym o obwodzie 8 krótsza podstawa i wysokość mają równe długości. Różnica długości podstaw wynosi 2. Oblicz długości podstaw trapezu.

9. Jedna z przekątnych rombu jest o 6 cm dłuższa od drugiej. Pole tego rombu jest równe $56\,\text{cm}^2$. Oblicz obwód tego rombu.

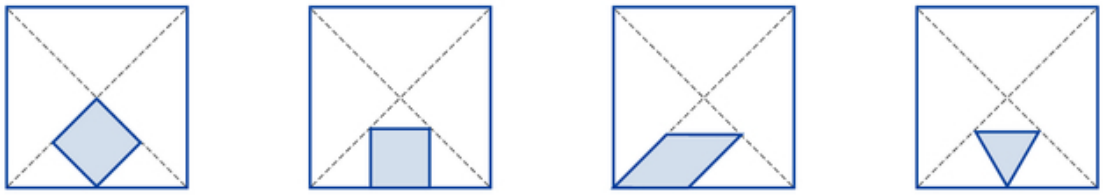
10. Pole trapezu prostokątnego wynosi $40\,\text{cm}^2$. Bok prostopadły do obu podstaw jest krótszy od jednej z nich o 2 cm, a od drugiej o 4 cm. Oblicz obwód tego trapezu.

11. **a)** Oblicz pole rombu, w którym jeden z kątów ma $45°$, a bok ma długość a.

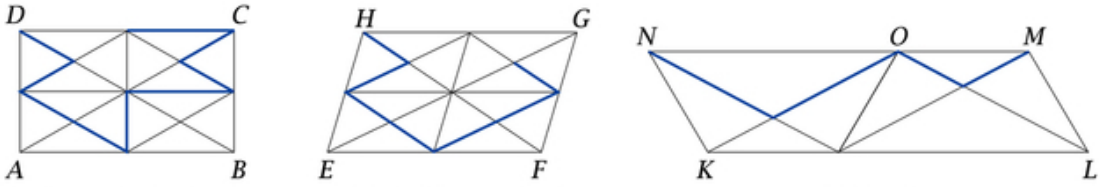
b) Oblicz pole trapezu równoramiennego, w którym jeden z kątów ma $60°$, krótsza podstawa ma długość a, a ramię ma długość $2a$.

c) Oblicz obwód równoległoboku o wysokościach a i b, jeśli jeden z jego kątów ma miarę $30°$.

12. Poniżej narysowano cztery kwadraty — każdy o boku 10. Zaznaczono w nich dwa kwadraty, romb i trójkąt równoboczny. Oblicz długości boków tych figur.



13. Poniżej narysowano prostokąt, równoległobok i figurę złożoną z dwóch jednakowych trapezów równoramiennych. Korzystając z informacji podanych pod rysunkami, oblicz długości zaznaczonych łamanych.



$|AB| = 7$ $|BC| = 4$ $|EG| = 9$ $|FH| = 7$ $|KO| = 7$

14. Przeczytaj ciekawostkę.

a) Oblicz stosunek długości kartki formatu A do jej szerokości.

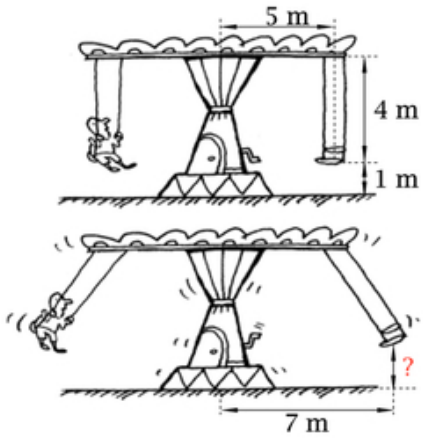
b) Kartkę formatu A podzielono na trójkąt prostokątny równoramienny i trapez. Ile razy pole trapezu jest większe od pola trójkąta?

Ciekawostka

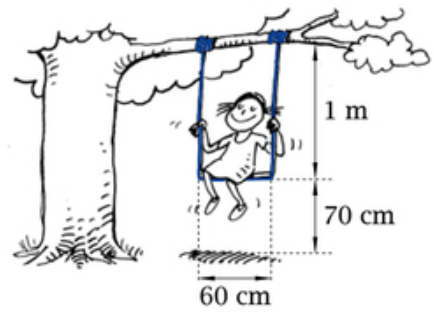


Kartki formatu A (np. A4 — używana do drukarek, A5 — kartka z zeszytu) mają następującą własność: jeśli poprowadzimy z wierzchołka linię pod kątem 45° (zob. rysunek), to linia ta ma taką samą długość jak dłuższy bok kartki.

15. Na rysunkach przedstawiono karuzelę w spoczynku i w ruchu. Jak wysoko nad ziemią znajduje się krzesełko, gdy karuzela się kręci?



16. Popatrz na rysunek. Do gałęzi przywiązano linę i zamocowano na niej deskę o długości 60 cm. Huśtawka wisi 70 cm nad ziemią. Gdy zamiast tej deski włożono deskę krótszą, huśtawka zawisła 60 cm nad ziemią. Oblicz długość krótszej deski.



17. Przyjmij, że na papierze w kratkę długość boku kratki jest równa 1. Narysuj na takim papierze:

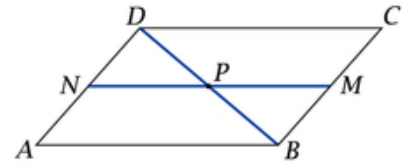
a) romb, którego przekątne mają długości 6 i 8,

b) kwadrat o przekątnej 10,

c) kwadrat o boku $\sqrt{17}$,

d) równoległobok o bokach $\sqrt{3}$ i $\sqrt{17}$.

18. Odcinek MN łączy środki przeciwległych boków równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że odcinek MN i przekątna BD przecinają się w połowach swoich długości.



19. Ustal, czy zdanie jest prawdziwe. Jeśli tak, to je uzasadnij, a gdy nie — podaj kontrprzykład.

a) Wszystkie trapezy są równoległobokami.

b) Każdy prostokąt jest równoległobokiem.

c) Każdy kwadrat jest rombem.

d) Jeśli przekątne czworokąta są prostopadłe, to czworokąt jest rombem.

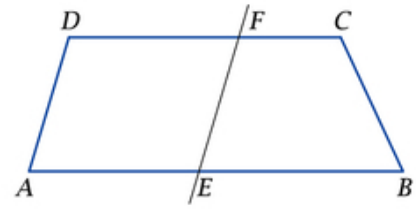
MINISPRAWDZIAN

S1. Suma długości boku i przekątnej kwadratu jest równa 5. Pole tego kwadratu wynosi:

A. 25 C. $50\sqrt{2}-25$

B. $25\sqrt{2}-25$ D. $75-50\sqrt{2}$

S2. Prosta EF na rysunku obok podzieliła trapez $ABCD$ na figury o równych polach — równoległobok i trapez. Jeśli $|AB| = a$ i $|CD| = b$, to odcinek FC ma długość:



A. $\frac{3a-b}{4}$ C. $\frac{3b-a}{4}$

B. $\frac{a+b}{6}$ D. $\frac{2(b-a)}{3}$

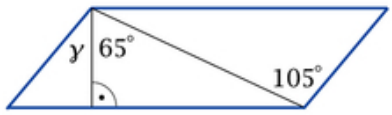
S3. Który wzór pozwala obliczać pole prostokąta o danym boku a i przekątnej d?

A. $P = a \cdot d$ C. $P = \frac{a \cdot d}{2}$

B. $P = a(d-a)$ D. $P = a \cdot \sqrt{d^2 - a^2}$

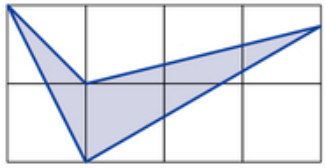
POWTÓRZENIE

1. Na rysunku przedstawiono równoległobok. Jaką miarę ma kąt y?



2. W trójkącie, którego obwód jest równy 7, długość każdego boku jest liczbą naturalną. Jakie długości mogą mieć boki takiego trójkąta? Podaj wszystkie możliwości.

3. Prostokąt zbudowano z ośmiu jednakowych kwadratów (zob. rysunek). Jaką część pola tego prostokąta stanowi pole zaznaczonego czworokąta?



4. W trójkącie o bokach 3, 5, 6 najkrótsza wysokość jest równa $\frac{2\sqrt{14}}{3}$. Oblicz najdłuższą wysokość tego trójkąta.

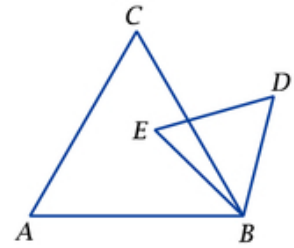
5. W trapezie $ABCD$ podstawa AB ma długość a. Kąty przy tej podstawie mają po 60°, a ich dwusieczne przecinają się w punkcie E. Uzasadnij, że trójkąt ABE ma takie samo pole jak trójkąt równoboczny o wysokości $\frac{a}{2}$. Oblicz to pole.

6. Sprawdź, czy trójkąt o bokach długości 5, 15, $5\sqrt{10}$ jest prostokątny. Oblicz długości wysokości tego trójkąta.

7. Środkowe trójkąta ABC przecinają się w punkcie D. Pole trójkąta ADC jest równe 14. Oblicz pole trójkąta ABC.

8. Odcinek CD jest środkową trójkąta ABC. Udowodnij, że odległości punktów A i B od prostej CD są równe.

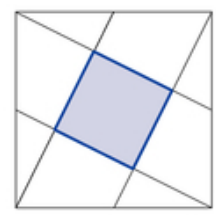
9. Trójkąty ABC i BDE przedstawione na poniższym rysunku są równoboczne. Udowodnij, że $|AE| = |CD|$.



10. Przekątna pewnego trapezu dzieli go na trójkąt równoboczny o boku długości $\sqrt{3}$ oraz trójkąt prostokątny. Oblicz pole i obwód tego trapezu. Rozważ dwa przypadki.

11. Dwusieczne kątów trapezu $ABCD$ leżących przy ramieniu AD przecinają się w punkcie P. Uzasadnij, że trójkąt ADP jest prostokątny.

12. W kwadracie o polu 4 połączono każdy wierzchołek ze środkiem jednego z boków — tak jak na rysunku. Oblicz pole zacieniowanej figury.



Funkcje

Dźwięk to zjawisko fizyczne wywoływane przez drgania. Wielkość tego zjawiska można więc mierzyć jako energię tych drgań. Okazuje się jednak, że dźwięk, który ma dwa razy większą energię, nie jest odbierany przez ludzi jako dwa razy głośniejszy. Gdy zależy nam na porównaniu poziomów głośności dźwięku zgodnie z tym, jak odbiera to ludzkie ucho, korzystamy z funkcji logarytmicznej.

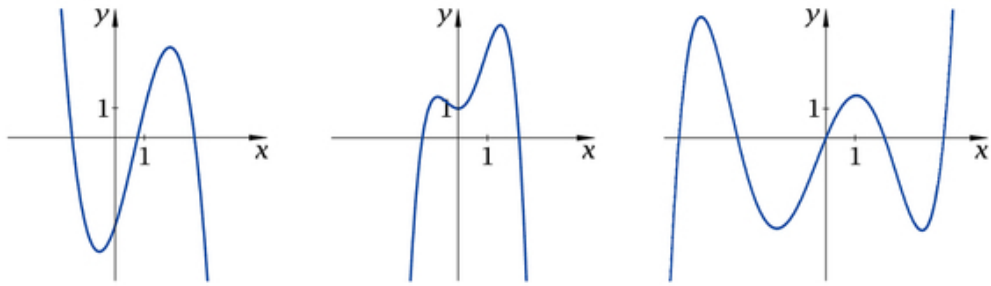


Funkcje wielomianowe ■ Nierówności wielomianowe ■ Funkcje wielomianowe (cd.) ■ Nierówności wielomianowe (cd.) ■ Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna ■ Równania wykładnicze i logarytmiczne ■ Zastosowania funkcji wykładniczych i logarytmicznych ■ Powtórzenie

FUNKCJE WIELOMIANOWE

I Poniżej przedstawiono wzory i fragmenty wykresów kilku funkcji. Wzór każdej z nich ma postać $y = W(x)$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem. Tego typu funkcje nazywamy funkcjami wielomianowymi. Dziedziną funkcji wielomianowej jest zbiór liczb rzeczywistych.

$y = -x^3 + 2x^2 + 3x - 3$ $\quad$ $y = -x^4 + x^3 + 2x^2 + 1$ $\quad$ $y = \frac{x}{50}(x^2 + 8x + 15)(x^2 - 6x + 8)$

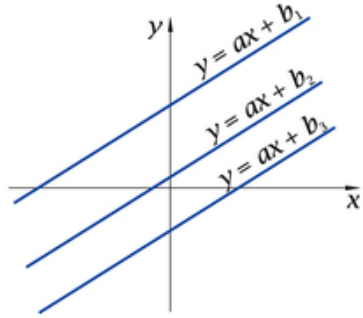


ĆWICZENIE A Jeśli dysponujesz kalkulatorem graficznym lub komputerem z odpowiednim programem, użyj ich do sporządzenia wykresów kilku dowolnych funkcji wielomianowych.

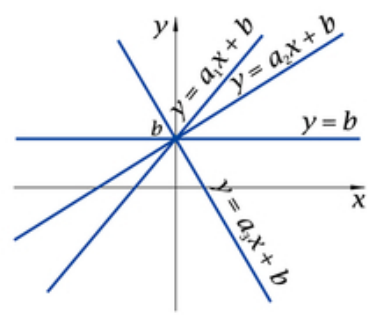
Zauważ, że funkcje liniowe i funkcje kwadratowe (które były omawiane w pierwszej klasie) to także funkcje wielomianowe.

Poniżej przypominamy ich własności.

Funkcja określona wzorem $y = ax + b$ to funkcja liniowa. Jej wykresem jest prosta. Gdy $a > 0$, to funkcja jest rosnąca, gdy $a < 0$, to jest malejąca, a gdy $a = 0$, to jest stała.



Wykresy funkcji typu $y = ax + b$ o takim samym współczynniku a są prostymi równoległymi.



Wykresy funkcji typu $y = ax + b$ o takim samym współczynniku b przecinają się w punkcie $(0, b)$.

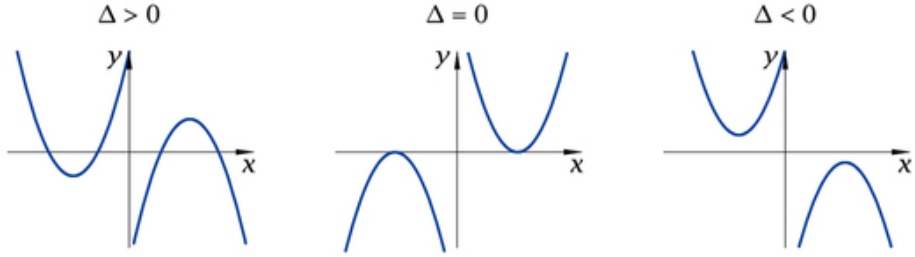
zadania 1–6

II Funkcja określona wzorem $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, to funkcja kwadratowa. Jej wykresem jest parabola o ramionach skierowanych do góry, gdy $a > 0$ i w dół, gdy $a < 0$. Liczba miejsc zerowych takiej funkcji zależy od wartości wyrażenia $\Delta = b^2 - 4ac$.

Gdy $\Delta > 0$, funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Gdy $\Delta = 0$, funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x = \frac{-b}{2a}$.

Gdy $\Delta < 0$, funkcja nie ma miejsc zerowych.



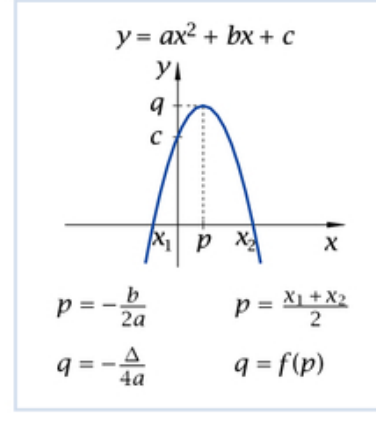
Wzór funkcji kwadratowej można zapisać w postaci ogólnej lub kanonicznej, a jeśli funkcja ta ma miejsca zerowe — to także w postaci iloczynowej.

Postać ogólna: $y = ax^2 + bx + c$

Postać kanoniczna: $y = a(x - p)^2 + q$

Postać iloczynowa: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

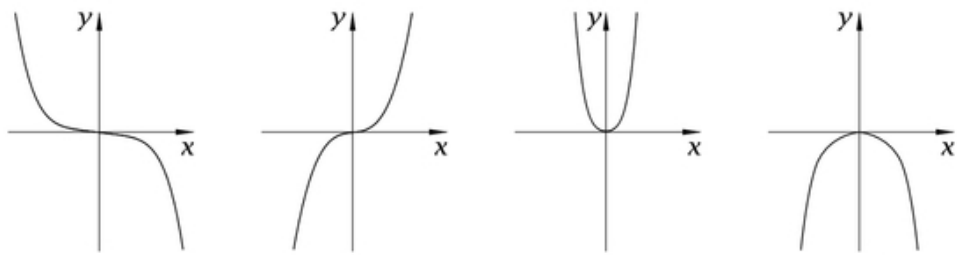
Gdy funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe x_0, to wzór funkcji można zapisać w postaci $y = a(x - x_0)^2$.



zadania 7–10

III Omówimy teraz niektóre własności funkcji postaci $y = ax^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

ĆWICZENIE B Przyjrzyj się narysowanym poniżej wykresom funkcji.



a) Podaj miejsce zerowe każdej z tych funkcji

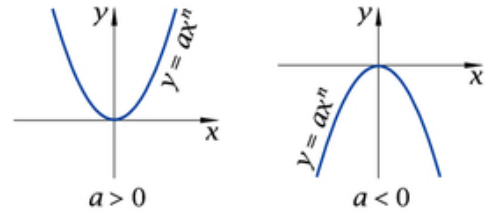
b) Określ monotoniczność każdej z tych funkcji.

c) Który z wykresów jest symetryczny względem osi y, a który — względem początku układu współrzędnych?

Wykresy funkcji typu $y = ax^n$ ($n \in \mathbb{N}_+$) przechodzą przez początek układu współrzędnych. Ponadto:

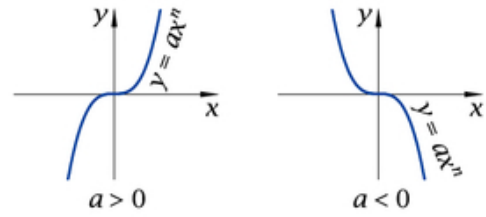
Jeśli n jest liczbą parzystą, to wykres funkcji $y = ax^n$ ma oś symetrii — jest nią oś y. W zależności od wartości współczynnika a funkcja może przyjmować tylko wartości nieujemne (gdy $a > 0$) lub tylko niedodatnie (gdy $a < 0$).

n jest liczbą parzystą



Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to wykres funkcji $y = ax^n$ ma środek symetrii — jest nim początek układu współrzędnych. W zależności od wartości współczynnika a funkcja może być rosnąca (gdy $a > 0$) albo malejąca (gdy $a < 0$).

n jest liczbą nieparzystą



ĆWICZENIE C Naszkicuj wykresy podanych funkcji i ustal, czy te funkcje mają miejsca zerowe. Jeśli funkcja ma miejsca zerowe, to określ ich liczbę i znaki.

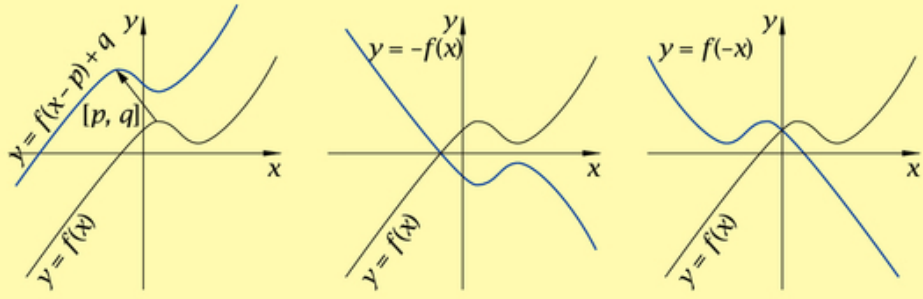
$f(x) = 5x^{24} - 6$ $\quad g(x) = -7x^{109} + 3$ $\quad h(x) = -3x^{50} - 4$

W poniższej ramce przypominamy podstawowe informacje dotyczące przekształcania wykresów funkcji.

Gdy wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o wektor $[p, q]$, otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - p) + q$.

Gdy wykres funkcji $y = f(x)$ odbijemy symetrycznie względem osi x, otrzymamy wykres funkcji $y = -f(x)$.

Gdy wykres funkcji $y = f(x)$ odbijemy symetrycznie względem osi y, otrzymamy wykres funkcji $y = f(-x)$.



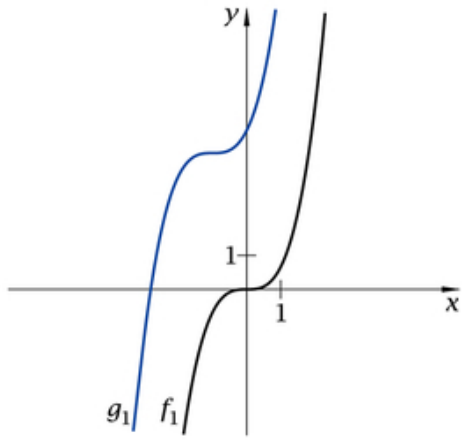
Zauważmy, że przesuwając lub odbijając symetrycznie wykresy funkcji typu $y = ax^n$, otrzymamy wykresy innych funkcji wielomianowych. Oto przykłady:

Po przesunięciu wykresu funkcji:

$$f_1(x) = \frac{2}{3}x^3$$

o wektor $[-1, 4]$ otrzymamy wykres funkcji

$$g_1(x) = \frac{2}{3}(x+1)^3 + 4$$

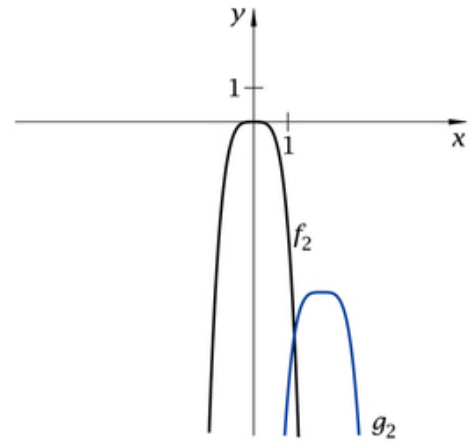


Po przesunięciu wykresu funkcji:

$$f_2(x) = -3x^4$$

o wektor $[2, -5]$ otrzymamy wykres funkcji

$$g_2(x) = -3(x-2)^4 - 5$$



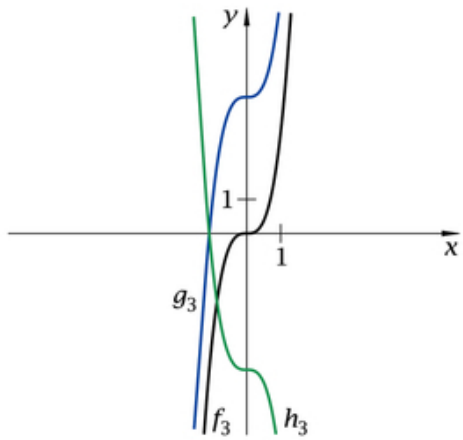
Po przesunięciu wykresu funkcji:

$$f_3(x) = 3x^3$$

o wektor $[0, 4]$ otrzymamy wykres funkcji:

$$g_3(x) = 3x^3 + 4$$

Gdy ten wykres odbijemy symetrycznie względem osi x, otrzymamy wykres funkcji $h_3(x) = -3x^3 - 4$.



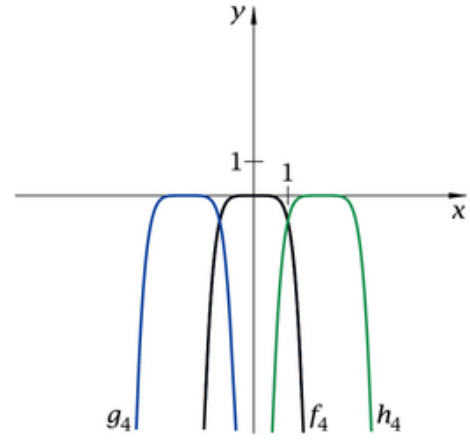
Po przesunięciu wykresu funkcji:

$$f_4(x) = -\frac{3}{4}x^6$$

o wektor $[-2, 0]$ otrzymamy wykres funkcji:

$$g_4(x) = -\frac{3}{4}(x+2)^6$$

Gdy ten wykres odbijemy symetrycznie względem osi y, otrzymamy wykres funkcji $h_4(x) = -\frac{3}{4}(-x+2)^6$.



Inne własności funkcji wielomianowych omawiamy w jednym z następnych rozdziałów.

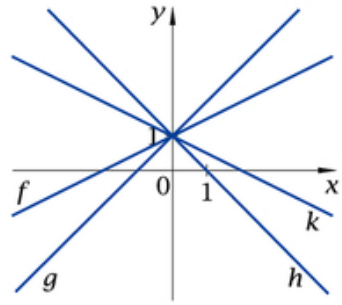
zadania 11–19

ZESTAW ZADAŃ

1. Dopasuj wzory do wykresów.

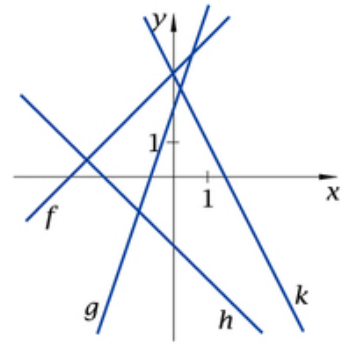
a)

$y = x + 1$
$y = -x + 1$
$y = \frac{1}{2}x + 1$
$y = -\frac{1}{2}x + 1$



b)

$y = x + 3$
$y = -x - 2$
$y = -2x + 3$
$y = 3x + 2$



2. Znajdź wzór funkcji liniowej, która spełnia warunek:

a) Wykres funkcji przechodzi przez punkty $(5, -2)$ i $(-4, 1)$.

b) Miejscem zerowym funkcji jest -2 i wykres tej funkcji przecina oś y w punkcie $(0, 6)$.

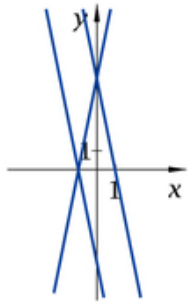
3. **a)** Znajdź wzór funkcji liniowej f, której miejsce zerowe jest o 3 mniejsze od miejsca zerowego funkcji $g(x) = -\frac{4}{5}x + 3$, ale wykresy funkcji f i g przecinają oś y w tym samym punkcie.

b) Funkcja liniowa f przyjmuje wartości dodatnie tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty; -4)$ i jej wartości dla argumentów -10 i 4 różnią się o 3. Znajdź wzór tej funkcji.

4. Na rysunku są przedstawione wykresy trzech funkcji liniowych. Dwie z prostych są równoległe. Wzory dwóch funkcji są podane. Znajdź wzór trzeciej funkcji.

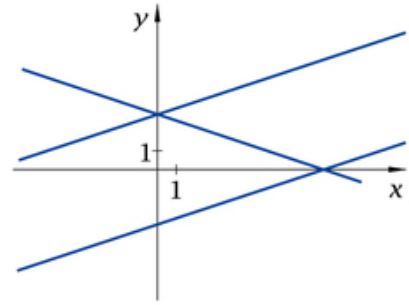
a)

$y = 5x + 5$
$y = -5x - 5$



b)

$y = \frac{1}{3}x - 3$
$y = -\frac{1}{3}x + 3$



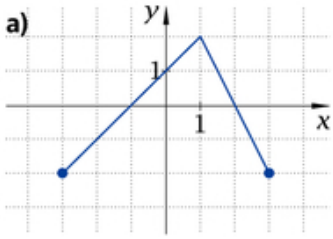
5. Narysuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{dla } -5 < x \leqslant -2 \\ 2x + 2 & \text{dla } -2 < x \leqslant 1 \end{cases}$

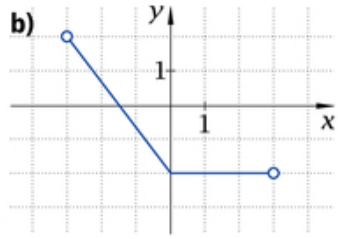
b) $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{dla } x \in \langle -6; -2) \\ -x + 5 & \text{dla } x \in \langle -2; 2 \rangle \\ 7 & \text{dla } x \in (2; 4) \end{cases}$

6. Znajdź wzór funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku.

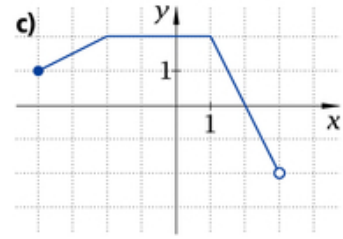
a)



b)



c)



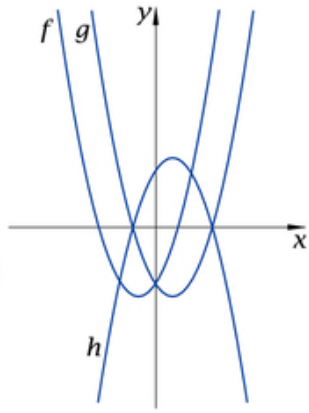
II **7.** Dopasuj wzory do wykresów.

a)

$y = \frac{1}{2}(x-2)(x+5)$

$y = \frac{1}{2}(x+2)(x-5)$

$y = -\frac{1}{2}(x+2)(x-5)$

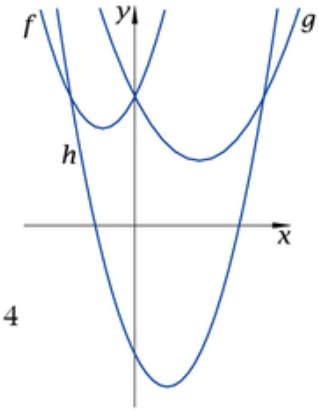


c)

$y = x^2 - 2x - 4$

$y = x^2 + 2x + 4$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$

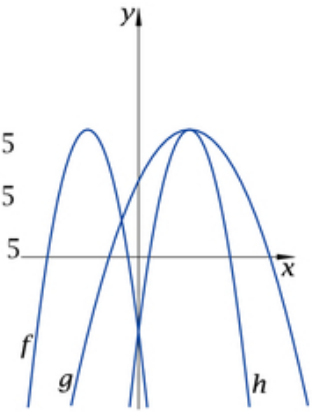


b)

$y = -2(x-2)^2 + 5$

$y = -2(x+2)^2 + 5$

$y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 5$

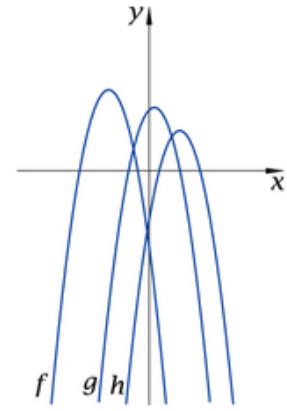


d)

$y = -(x+2)(x-3)$

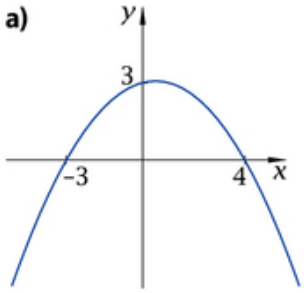
$y = -(x+4)^2 + 8$

$y = -x^2 + 6x - 5$

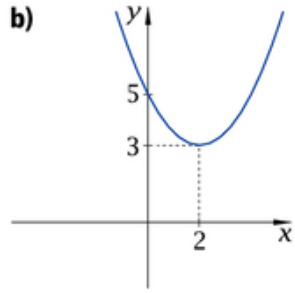


8. Znajdź wzór funkcji kwadratowej przedstawionej na wykresie.

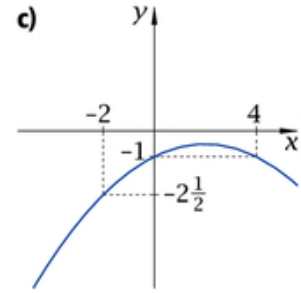
a)



b)



c)



9. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+3 & \text{dla } x\in\langle -6;-2)\\ -x^2+4 & \text{dla } x\in\langle -2;2\rangle\end{cases}$

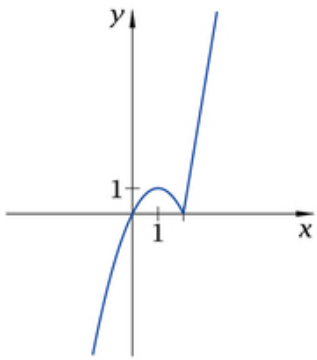
b) $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & \text{dla } -4\leqslant x\leqslant 1\\ -x+4 & \text{dla } x>1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}-x^2+4 & \text{dla } x\in(-2;2)\\ x^2-4 & \text{dla } x\in\mathbb{R}\setminus(-2;2)\end{cases}$

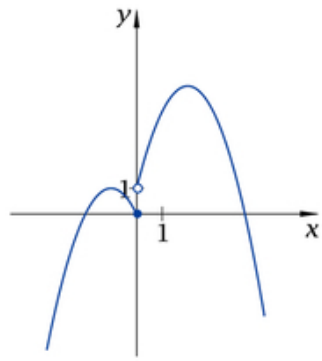
d) $f(x)=\begin{cases}x^2+3 & \text{dla } x\leqslant 0\\ x^2-2x & \text{dla } 0<x\leqslant 3\end{cases}$

10. Wykres funkcji f składa się z fragmentów wykresów funkcji, których wzory zapisano nad rysunkiem. Zapisz wzór funkcji f.

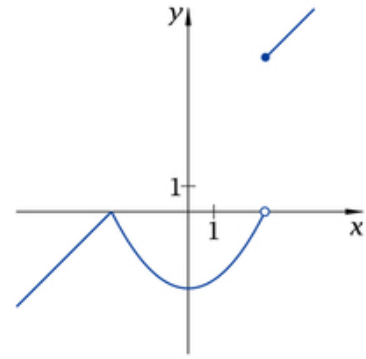
a) $y=x(2-x)$
$y=6x-12$



b) $y=-x(x+2)$
$y=-x(x-4)+1$



c) $y=\frac{x^2}{3}-3$
$y=x+3$

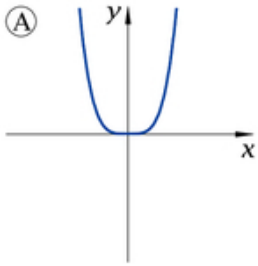


III **11.** Poniżej narysowano wykresy następujących funkcji:

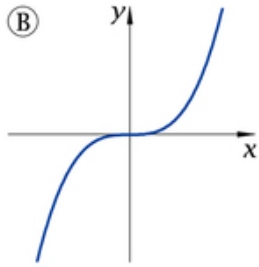
$f(x)=-3x^4$ $\quad g(x)=-2x^5$ $\quad h(x)=\frac{1}{4}x^3$ $\quad k(x)=\sqrt{2}x^4$

Dopasuj wykresy do odpowiednich wzorów funkcji.

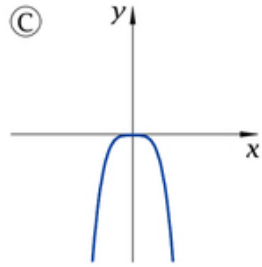
Ⓐ



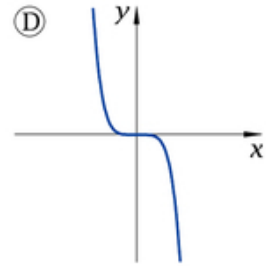
Ⓑ



Ⓒ



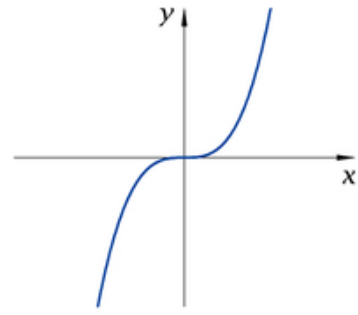
Ⓓ



12. Jeden z podanych wzorów opisuje funkcję, której wykres narysowano obok. Który to wzór?

$f(x)=(\sqrt{2}-\sqrt{3})x^3$ $\quad g(x)=(\pi-3)x^5$

$h(x)=(2-\sqrt{3})x^4$



13. Określ dziedzinę funkcji i zbiór wartości, ustal monotoniczność funkcji i podaj, dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie, a dla jakich — ujemne.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 & \text{dla } x \in \langle -3;0 \rangle \\ 4 & \text{dla } x \in (0;4\rangle \end{cases}$

b) $h(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{dla } x \in (-2;2\rangle \\ -x^4 & \text{dla } x \in (2;3\rangle \end{cases}$

14. Wykresy funkcji $f(x) = (x-2)^5 + 38$ i $g(x) = -x^3 + 6$ przecinają się w jednym punkcie.

a) Uzasadnij, że ten punkt leży na osi y.

b) Naszkicuj wykresy tych funkcji i na ich podstawie rozwiąż nierówność $f(x) > g(x)$.

15. Ile punktów przecięcia mogą mieć wykresy funkcji $f(x) = x^n$ i $g(x) = x^m$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}_+$ i $n \neq m$? Rozważ różne przypadki.

16. a) W ilu punktach przecinają się wykresy funkcji $y = x^{99}$ i $y = -x+1$? Ile wobec tego miejsc zerowych ma funkcja $y = x^{99} + x - 1$?

b) W ilu punktach przecinają się wykresy funkcji $y = x^{102}$ i $y = x + 102$? Ile miejsc zerowych ma funkcja $y = x^{102} - x - 102$?

c) Ile miejsc zerowych ma funkcja $y = x^{111} - x - 111$?

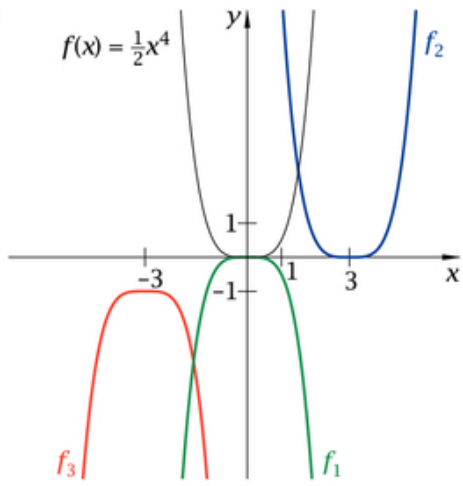
17. Wykresy funkcji $f(x) = x^3 + 8$ i $g(x) = -x^2 + 4$ przecinają się w jednym punkcie.

a) Uzasadnij, że ten punkt leży na osi x.

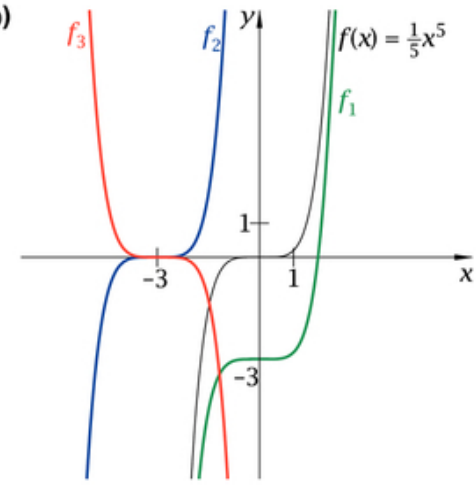
b) Naszkicuj wykresy tych funkcji i na ich podstawie rozwiąż nierówność $f(x) \leqslant g(x)$.

18. Wykresy funkcji f_1, f_2 i f_3 powstały przez przesunięcie lub odbicie symetryczne wykresu funkcji f. Podaj wzory tych funkcji.

a)



b)



19. Dana jest funkcja: $f(x) = \begin{cases} (x-3)^3 & \text{dla } x \geqslant \frac{3}{2} \\ -x^3 & \text{dla } x < \frac{3}{2} \end{cases}$. Wykaż, że wykres tej funkcji ma oś symetrii.

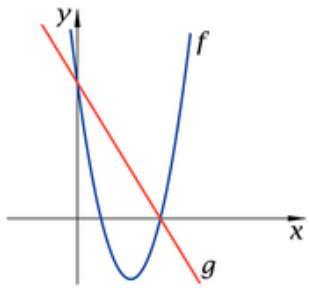
MINISPRAWDZIAN

S1. Zbiór wartości funkcji $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{dla } x \in (-\infty;-1\rangle \\ 4 & \text{dla } x \in (-1;2\rangle \\ x^2 & \text{dla } x \in (2;+\infty) \end{cases}$ jest równy:

A. $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ B. $\mathbb{R} \setminus \langle -3;4)$ C. $\mathbb{R} \setminus (-3;4)$ D. $\mathbb{R} \setminus (-3;4\rangle$

S2. Funkcja $f(x) = -x^2 - 4x + 1$ jest malejąca w przedziale:

A. $(-\infty;-2\rangle$ B. $(-\infty;2\rangle$ C. $\langle -2;+\infty)$ D. $\langle 2;+\infty)$



S3. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = 3(x-2)(x-5)$ oraz funkcji liniowej g o wzorze:

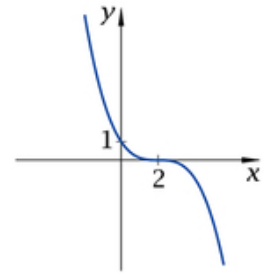
A. $g(x) = -6x + 30$ C. $g(x) = -5x + 30$

B. $g(x) = -2x + 10$ D. $g(x) = -3x + 6$

S4. Na rysunku obok przedstawiono wykres jednej z poniższych funkcji. Której?

A. $f(x) = -(x-2)^3 + 1$ C. $f(x) = \frac{(x+2)^3}{8}$

B. $f(x) = -\frac{(x-2)^3}{8}$ D. $f(x) = (x+2)^3 + 1$

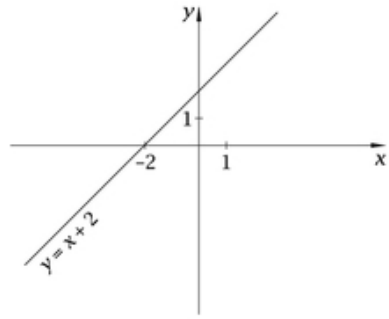


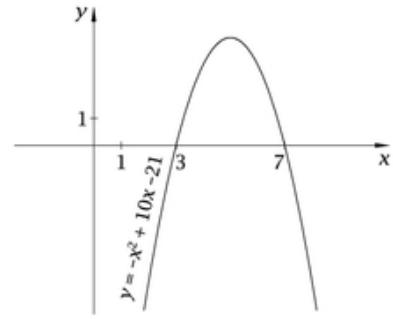
NIERÓWNOŚCI WIELOMIANOWE

I

ĆWICZENIE Korzystając z wykresów funkcji, podaj trzy liczby spełniające podaną nierówność.

a) $(x+2)(-x^2+10x-21) > 0$ b) $(x+2)(-x^2+10x-21) \leqslant 0$





Potrafisz już rozwiązywać nierówności pierwszego stopnia oraz nierówności kwadratowe. Umiejętności te można wykorzystać przy rozwiązywaniu niektórych nierówności wyższych stopni. Przyda się przy tym prosta własność — iloczyn dwóch liczb jest liczbą ujemną, gdy czynniki mają różne znaki, a liczbą dodatnią, gdy mają te same znaki.

$$a \cdot b < 0 \iff \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

$$a \cdot b > 0 \iff \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$$

Pokażemy teraz, jak można rozwiązać nierówność:

$$(x-3)(x^2+x-2) < 0$$

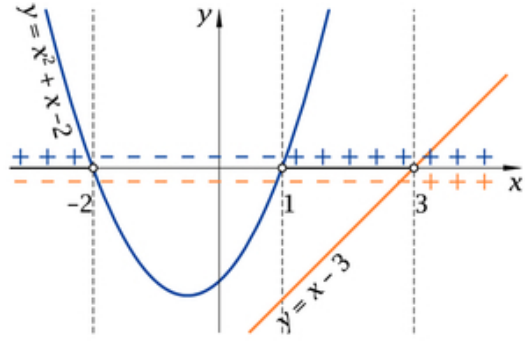
Ta nierówność jest spełniona, gdy wartości wyrażeń $x-3$ oraz x^2+x-2 mają przeciwne znaki, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{cases} x-3 > 0 \\ x^2+x-2 < 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x-3 < 0 \\ x^2+x-2 > 0 \end{cases}$$

Aby znaleźć rozwiązania tych układów nierówności najwygodniej jest naszkicować w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = x-3$ oraz $y = x^2+x-2$, tak jak na poniższym rysunku.

Uwaga. Wykresów nie musimy rysować bardzo dokładnie, ważne jest tylko, aby można było z nich odczytać, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne, a dla jakich dodatnie (wystarczy więc wyznaczyć miejsca zerowe, określić kierunek prostej i położenie ramion paraboli).

Na rysunku znakami plus i minus oznaczono, w jakich przedziałach funkcje te przyjmują wartości dodatnie, a w jakich ujemne.



Z rysunku możemy odczytać, że wartości funkcji $y = x-3$ oraz $y = x^2+x-2$ mają przeciwne znaki w przedziale $(-\infty;-2)$, a także w przedziale $(1;3)$. Zatem rozważana nierówność jest spełniona, gdy $x \in (-\infty;-2) \cup (1;3)$.

PRZYKŁAD Rozwiąż nierówność.

$4x^3 + 2x^2 - 1 \geqslant x^3 + 27x + 17$

$3x^3 + 2x^2 - 27x - 18 \geqslant 0$

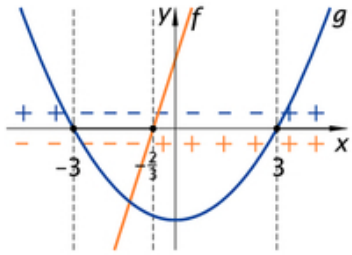
$(3x + 2)(x^2 - 9) \geqslant 0$

Przekształcamy nierówność do postaci $W(x) \geqslant 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem. Rozkładamy wielomian na czynniki stopnia co najwyżej drugiego.

$3x + 2 = 0 \qquad x^2 - 9 = 0$

$x = -\frac{2}{3} \qquad x = 3 \text{ lub } x = -3$

Znajdujemy miejsca zerowe funkcji $f(x) = 3x + 2$ i $g(x) = x^2 - 9$.



Szkicujemy wykresy funkcji $f(x) = 3x + 2$ i $g(x) = x^2 - 9$ oraz zaznaczamy, dla jakich argumentów funkcje przyjmują wartości dodatnie, a dla jakich — ujemne.

$x \in \left\langle -3 ; -\frac{2}{3} \right\rangle \cup \left\langle 3 ; +\infty \right)$

Z wykresu odczytujemy przedziały, w których wartości funkcji mają ten sam znak lub są równe 0.

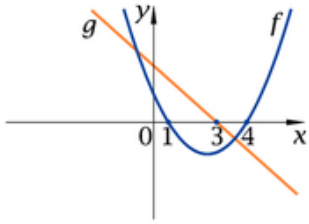
ZADANIE Rozwiąż nierówność: $x^3 + x^2 + x + 2 < 5x + 6$.

zadania 1–9

ZESTAW ZADAŃ

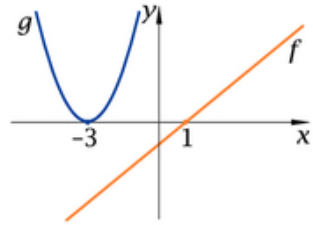
1. Na każdym rysunku przedstawiono fragmenty wykresów dwóch funkcji wielomianowych pierwszego i drugiego stopnia. Podaj zbiory rozwiązań nierówności zapisanych pod rysunkami.

a)



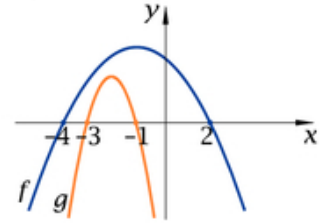
$f(x) \cdot g(x) > 0$

c)



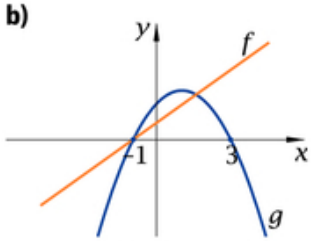
$f(x) \cdot g(x) < 0$

e)



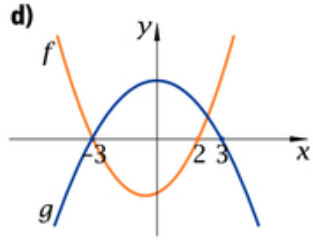
$f(x) \cdot g(x) > 0$

b)



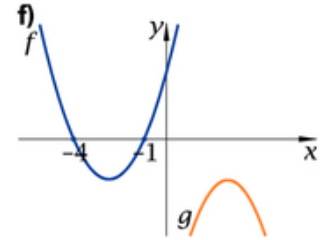
$f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$

d)



$f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$

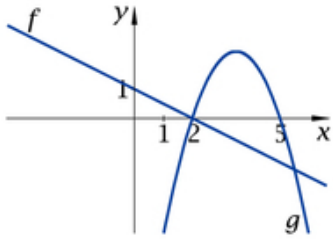
f)



$f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$

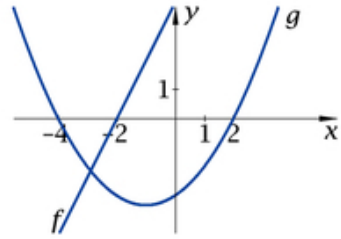
2. Korzystając z wykresów funkcji f i g, podaj rozwiązanie nierówności zapisanej pod rysunkiem.

a) $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$
$g(x) = -x^2 + 7x - 10$



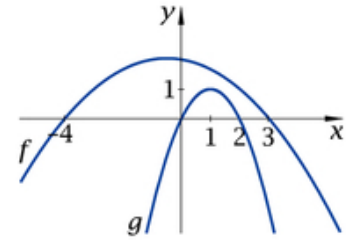
$\left(-\frac{x}{2} + 1\right)(-x^2 + 7x - 10) \geqslant 0$

b) $f(x) = 2x + 4$
$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$



$(2x + 4)\left(\frac{1}{2}x^2 + x - 4\right) \leqslant 0$

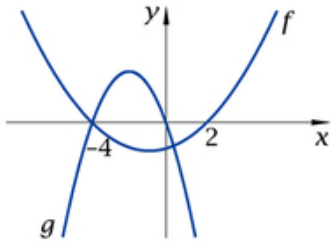
c) $f(x) = -\frac{1}{5}(x^2 + x - 12)$
$g(x) = 2x - x^2$



$-\frac{1}{5}(x^2 + x - 12)(2x - x^2) \leqslant 0$

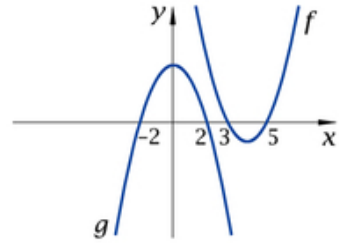
3. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f i g. Korzystając z podanych wzorów, zapisz nierówność wielomianową czwartego stopnia tak, aby zbiór podany pod rysunkiem był zbiorem jej rozwiązań.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$
$g(x) = -x^2 - 4x$



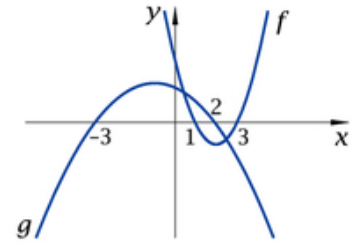
$(0;2)$

b) $f(x) = x^2 - 8x + 15$
$g(x) = -x^2 + 4$



$\langle -2;2\rangle \cup \langle 3;5\rangle$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
$g(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2$



$(-3;1) \cup (2;3)$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $(x + 1)x^3 \geqslant 0$

b) $2x^3(x - 9) < 0$

c) $-2x^5(3x + 6) > 0$

d) $-x^3(x - 5)^2 < 0$

e) $-3x^7(x^2 - 4) < 0$

f) $-5x^5(x^2 - 2x - 1) \geqslant 0$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $(-x + 1)(x^2 - 2) \geqslant 0$

b) $(x^2 - x - 6)(x^2 + 3) \geqslant 0$

c) $(2 - 3x)(-3x^2 - 4x - 2) < 0$

d) $(3 - x)(x^2 + 8x + 16) \leqslant 0$

e) $(x^2 - 3x - 10)(x^2 - 5x) \leqslant 0$

f) $(x^2 - 10)(3x^2 - 20) < 0$

g) $(x^2 - x)(-x^2 + 2x + 11) \leqslant 0$

h) $(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 3x - 4) > 0$

6. Rozwiąż nierówność (najpierw rozłóż wielomian na czynniki).

a) $\frac{1}{2}x^3 - 5x^2 < 0$

b) $2x^4 - x^3 \geqslant 0$

c) $x^3 - x^2 - 6x < 0$

d) $2x^7 - 3x^6 - 2x^5 > 0$

e) $-4x^3 + 3x^2 + 4x - 3 > 0$

f) $-2x^3 + x^2 + 18x - 9 \leqslant 0$

g) $x^3 + 5x^2 + 8x + 40 \leqslant 0$

h) $x^4 + x^3 - 8x - 8 \geqslant 0$

7. **a)** Dla jakiej wartości p liczba $p^3 + p^2 - 9p$ jest większa od 9?

b) Dla jakich liczb naturalnych n liczba $2n^3 + 3n^2 + 4n - 5$ jest większa od liczby $3n^3 - 2n^2 + 15$?

8. Określ dziedzinę funkcji:

a) $y = \sqrt{(x-3)(x^2-4)}$

b) $y = \sqrt{4x^4 + 12x^3 + 9x^2}$

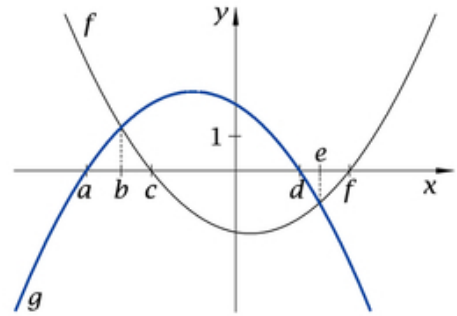
c) $y = \frac{1}{\sqrt{(x+3)(2x^2-9x-5)}}$

d) $y = \sqrt{(x^2-9)(x+5)} - \frac{1}{x+5}$

9. Dla jakiej wartości b zbiorem rozwiązań nierówności $(x+b)(x^2+x-1) > 0$ jest przedział $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right)$?

MINISPRAWDZIAN

S1. Na rysunku obok przedstawiono wykresy dwóch funkcji kwadratowych $f(x)$ i $g(x)$. Rozwiązaniem nierówności $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ jest:



A. $\langle a; e \rangle$

B. $\langle a; c \rangle \cup \langle d; f \rangle$

C. $\langle a; d \rangle$

D. $\langle a; b \rangle \cup \langle e; f \rangle$

S2. Zbiorem rozwiązań jednej z poniższych nierówności jest przedział $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle$. Wskaż tę nierówność.

A. $(2x+1)(x^2-4) \leqslant 0$

B. $\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2+4) \geqslant 0$

C. $(x^2+1)(2x+1) \leqslant 0$

D. $(2x+1)(2x-1) \geqslant 0$

S3. Dziedziną funkcji $y = \frac{x-1}{\sqrt{(1-x)(x^2-4x+3)}}$ jest:

A. $(3; +\infty)$ B. $(-\infty; 3)$ C. $(-\infty; 1) \cup (1; 3)$ D. $(1; 3)$

FUNKCJE WIELOMIANOWE (CD.)

Przypomnijmy, że wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków, a gdy jest nieparzystego stopnia, to ma co najmniej jeden pierwiastek. Wynika stąd, że:

- Funkcja wielomianowa $y = W(x)$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n, ma nie więcej niż n miejsc zerowych.
- Jeśli $W(x)$ jest wielomianem nieparzystego stopnia, to funkcja postaci $y = W(x)$ ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

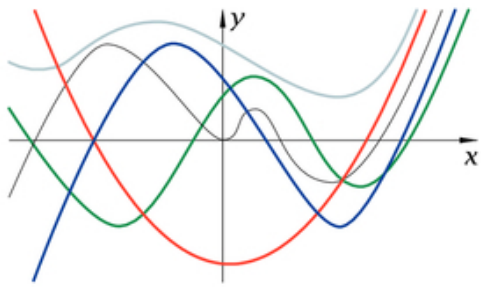
Uwaga. Jeśli $W(x)$ jest wielomianem parzystego stopnia, to funkcja postaci $y = W(x)$ może nie mieć miejsc zerowych.

ĆWICZENIE A Wzór podanej funkcji można zapisać tak: $y = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Podaj znak współczynnika a_n. Znajdź największe miejsce zerowe podanej funkcji i sprawdź dla kilku argumentów większych od tego miejsca zerowego, czy dla tych argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie czy ujemne.

a) $f(x) = 5(x-2)(x+3)(x-5)$ b) $f(x) = -2(x+1)(x-1)(x+4)$

Poniżej przedstawiono fragmenty wykresów kilku funkcji wielomianowych postaci $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ i zaznaczono ich wszystkie miejsca zerowe. Z lewej strony przedstawiono funkcje, dla których a_n jest liczbą dodatnią, a z prawej — funkcje, dla których a_n jest liczbą ujemną.

$a_n > 0$



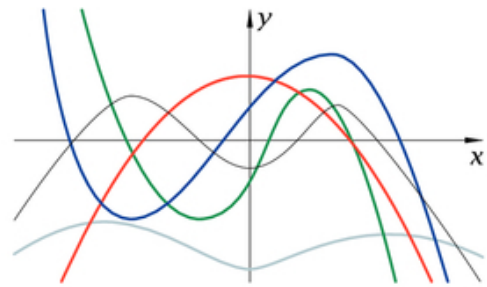
Jeśli $a_n > 0$ i funkcja wielomianowa

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ma miejsca zerowe, to dla argumentów większych od wszystkich miejsc zerowych wartości funkcji są dodatnie.

Jeśli taka funkcja nie ma miejsc zerowych, to wszystkie jej wartości są dodatnie.

$a_n < 0$



Jeśli $a_n < 0$ i funkcja wielomianowa

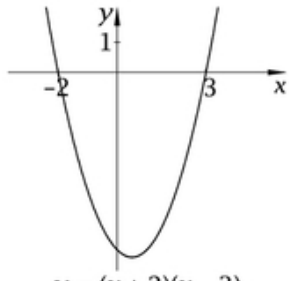
$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ma miejsca zerowe, to dla argumentów większych od wszystkich miejsc zerowych wartości funkcji są ujemne.

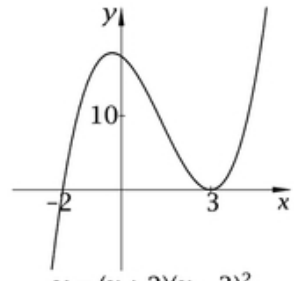
Jeśli taka funkcja nie ma miejsc zerowych, to wszystkie jej wartości są ujemne.

Dla argumentów mniejszych od wszystkich miejsc zerowych wartości funkcji mogą być dodatnie lub ujemne zarówno wtedy, gdy $a_n > 0$, jak i wtedy, gdy $a_n < 0$.

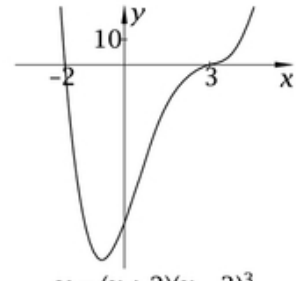
ĆWICZENIE B Na każdym rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji typu $y = (x + 2)^m(x - 3)^n$. Ustal, jak się zmienia znak wartości funkcji przy przechodzeniu jej wykresu przez punkty $(-2, 0)$ oraz $(3, 0)$, w zależności od tego, czy m i n są liczbami parzystymi czy nieparzystymi.



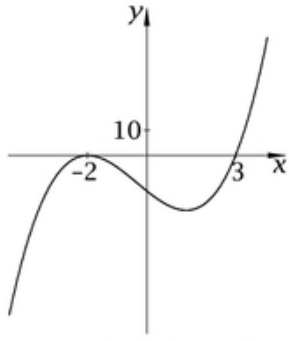
$y = (x + 2)(x - 3)$



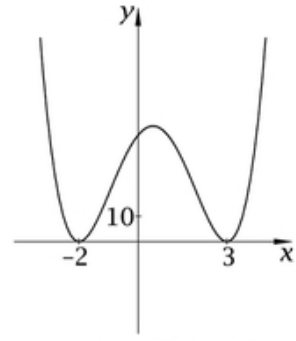
$y = (x + 2)(x - 3)^2$



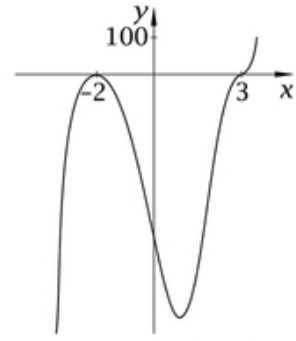
$y = (x + 2)(x - 3)^3$



$y = (x + 2)^2(x - 3)$



$y = (x + 2)^2(x - 3)^2$



$y = (x + 2)^4(x - 3)^3$

ĆWICZENIE C Jakie wartości przyjmuje podana funkcja — dodatnie czy ujemne — dla argumentów większych od 7, a jakie — dla mniejszych od 7?

a) $y = (x - 7)^{16}$ b) $y = (x - 7)^{19}$

Jeśli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to wykres funkcji postaci $y = W(x)$ przechodzi przez punkt $(a, 0)$. Po przejściu przez ten punkt wykres może pozostać po tej samej stronie osi x albo przejść na drugą stronę. Zależy to od krotności pierwiastka a:

- Jeśli a jest pierwiastkiem parzystokrotnym, to wykres po przejściu przez punkt $(a, 0)$ pozostaje po tej samej stronie osi x (znak wartości funkcji się nie zmienia).



p, q — pierwiastki parzystokrotne

- Jeśli a jest pierwiastkiem nieparzystokrotnym, to wykres po przejściu przez punkt $(a, 0)$ przechodzi na drugą stronę osi x (znak wartości funkcji się zmienia).



r, s — pierwiastki nieparzystokrotne

ĆWICZENIE D Przypuśćmy, że liczby -1 i 2 są jedynymi pierwiastkami wielomianu $W(x)$. Naszkicuj, jak może wyglądać wykres funkcji $y = W(x)$, jeśli:

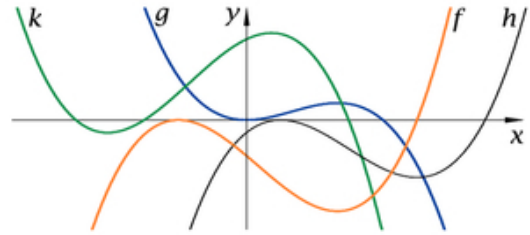
a) oba pierwiastki tego wielomianu są parzystokrotne,

b) liczba -1 jest pierwiastkiem jednokrotnym, a liczba 2 pierwiastkiem trzykrotnym.

zadania 1–8

ZESTAW ZADAŃ

1. Na rysunku obok przedstawiono cztery wykresy funkcji wielomianowych trzeciego stopnia. Dla której z tych funkcji współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu jest dodatni?



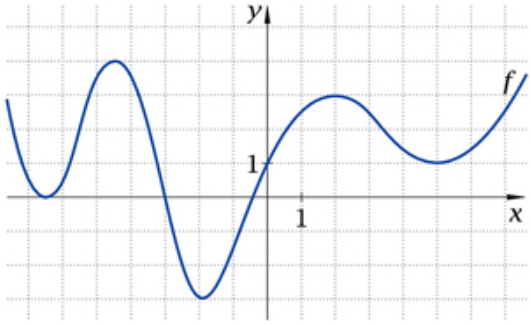
2. Poniżej narysowano wykresy funkcji f oraz g. W jaki sposób należy przesunąć wykres każdej z tych funkcji, aby otrzymać wykres, który:

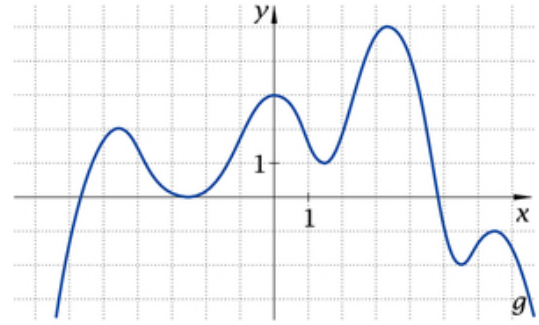
a) nie przecina osi x,

b) ma z osią x jeden punkt wspólny,

c) ma z osią x pięć punktów wspólnych,

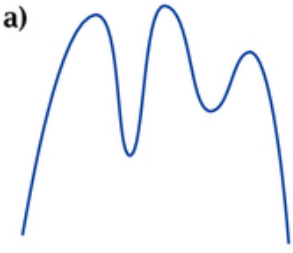
d) ma z osią x sześć punktów wspólnych?



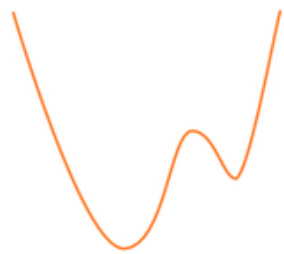


3. Krzywa na rysunku to fragment wykresu funkcji wielomianowej. Określ najniższy możliwy stopień odpowiedniego wielomianu.

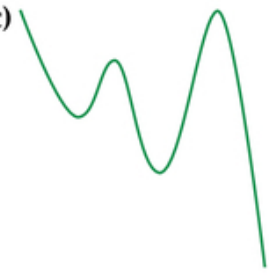
a)



b)



c)

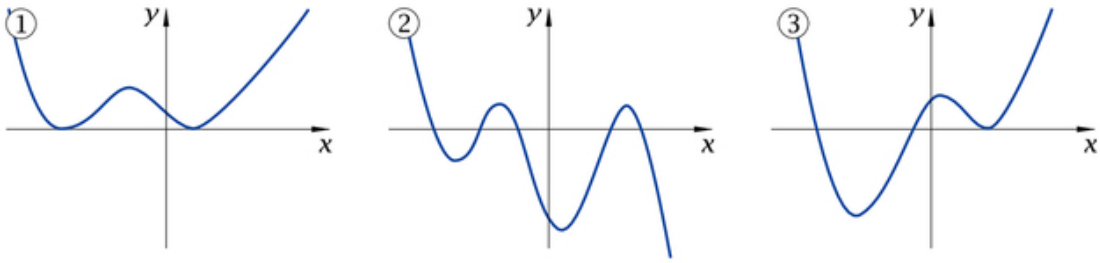


4. Na rysunkach przedstawiono takie fragmenty wykresów funkcji wielomianowych, że widoczne są wszystkie ich miejsca zerowe. Dopasuj zdania do wykresów.

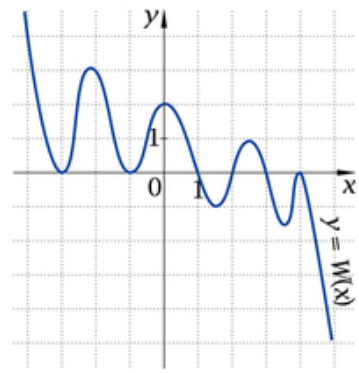
a) Dwa pierwiastki wielomianu są nieparzystokrotne.

b) Wszystkie pierwiastki wielomianu są parzystokrotne.

c) Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest liczbą ujemną.



5. Obok narysowano taki fragment wykresu funkcji wielomianowej, na którym widoczne są wszystkie jej miejsca zerowe. Odczytaj z wykresu pierwiastki wielomianu $W(x)$ i określ, które z nich są parzystokrotne. Ile pierwiastków parzystokrotnych ma wielomian $y = [W(x)]^2$?



6. Podaj przykład wzoru funkcji wielomianowej o miejscach zerowych 1, 3 i 5, która przyjmuje:

a) tylko wartości nieujemne,

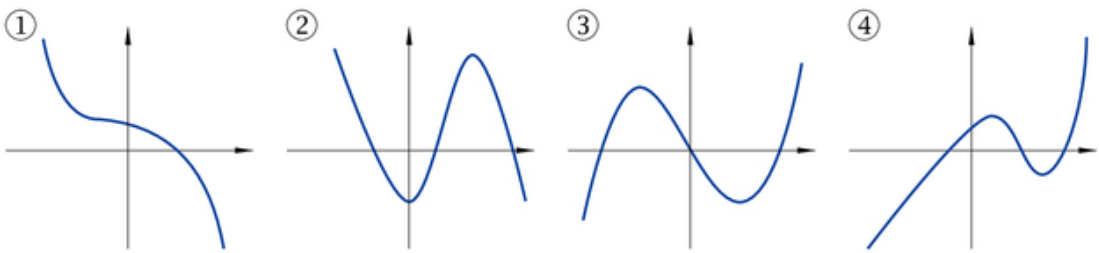
b) wartości ujemne tylko wtedy, gdy $x \in (3;5) \cup (5;+\infty)$,

c) wartości ujemne tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty;1)$.

Ciekawostka

Łatwo zauważyć, że wykres funkcji typu $y = ax^3$ ma środek symetrii (jest nim początek układu współrzędnych). Wydawać by się mogło, że wykresy innych funkcji wielomianowych trzeciego stopnia nie są tak regularne. Okazuje się jednak, że każdy wykres funkcji wielomianowej $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$, ma środek symetrii. Środkiem symetrii wykresu takiej funkcji jest ten punkt wykresu, którego pierwsza współrzędna jest równa $-\frac{b}{3a}$.

7. Przeczytaj ciekawostkę. Tylko na dwóch z poniższych rysunków przedstawione są fragmenty wykresów funkcji wielomianowych stopnia trzeciego. Na których?



8. Przeczytaj ciekawostkę na s. 106.

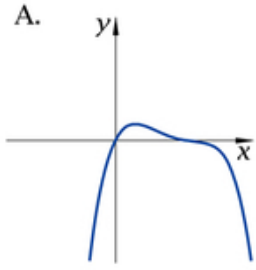
a) Oblicz współrzędne środka symetrii wykresu funkcji $y = -x^3 + 3x^2 + 7x + 11$.

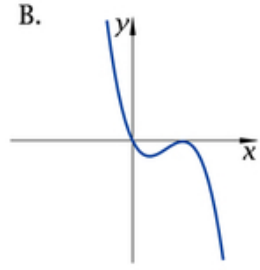
b) Jaki warunek muszą spełniać współczynniki a, b, c oraz d we wzorze funkcji $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, aby środek symetrii jej wykresu leżał na osi y?

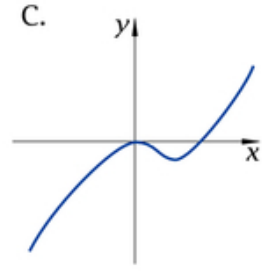
c) Jaki warunek muszą spełniać współczynniki a, b oraz c, aby środek symetrii wykresu funkcji $y = ax^3 + bx^2 + cx$ leżał na osi x?

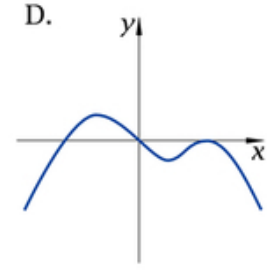
MINISPRAWDZIAN

S1. Który z poniższych rysunków przedstawia wykres funkcji $f(x) = -2(x^2 - x)(x - 1)^2$?

A.


B.


C.


D.


S2. Rozważ funkcję wielomianową $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ (gdy $a_n \neq 0$). Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

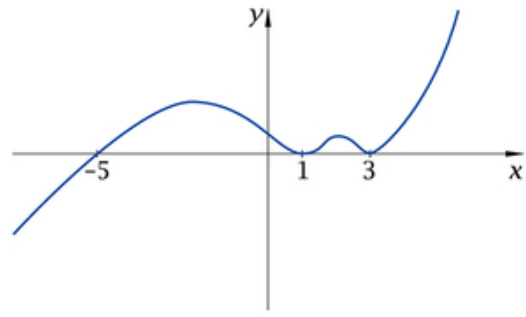
A. *Jeśli $n = 5$, to funkcja f ma pięć miejsc zerowych.*

B. *Jeśli współczynnik $a_n > 0$, to zbiorem wartości funkcji f jest zbiór dodatnich liczb rzeczywistych.*

C. *Jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ są podwójne, to funkcja f nie przyjmuje wartości ujemnych.*

D. *Jeśli funkcja f ma siedem miejsc zerowych, to $n \geqslant 7$.*

S3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = a(x - b)(x - c)^4(x - 3)^d$. Jeden z podanych warunków jest dla tej funkcji spełniony. Który?

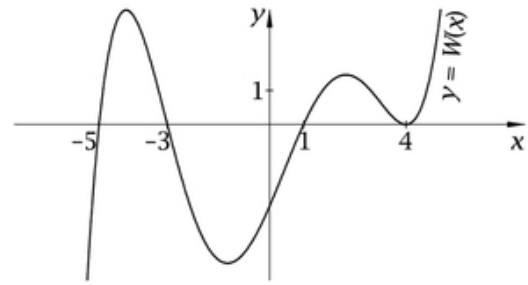


A. $a < 0$ B. $b = 5$ C. $c = 1$ D. $d = 3$

NIERÓWNOŚCI WIELOMIANOWE (CD.)

I

ĆWICZENIE A Obok narysowano wykres pewnej funkcji $y = W(x)$. Odczytaj z tego wykresu rozwiązanie nierówności $W(x) \leqslant 0$.



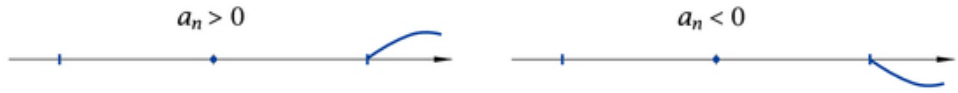
Posługując się wykresem funkcji wielomianowej $y = W(x)$, można łatwo podać rozwiązania nierówności $W(x) \geqslant 0$, $W(x) < 0$ itp.

Jeśli nie mamy do dyspozycji komputera albo kalkulatora graficznego, rysowanie wykresu funkcji wielomianowej może być bardzo trudne. Ale korzystając z omówionych w poprzednim rozdziale własności funkcji wielomianowych, możemy naszkicować rysunek ilustrujący, jak zmienia się znak wartości funkcji $y = W(x)$, gdzie $W(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$.

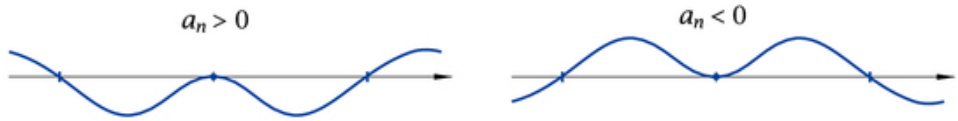
Oto sposób postępowania przy szkicowaniu takiego rysunku.

- Najpierw znajdujemy pierwiastki wielomianu $W(x)$ i określamy ich krotności, a następnie zaznaczamy te pierwiastki na osi x (parzystokrotne można zaznaczyć kropką, a nieparzystokrotne — kreseczką).

- Ustalamy, jaki znak ma współczynnik a_n wielomianu $W(x)$ przy najwyższej potędze zmiennej. Rysowanie wykresu zaczynamy od prawej strony; gdy $a_n > 0$ — zaczynamy nad osią x, gdy $a_n < 0$ — zaczynamy pod osią x.



- Rysujemy linię przechodzącą przez punkty zaznaczone na osi. Jeśli punkt na osi odpowiada pierwiastkowi parzystokrotnemu — linia pozostaje po tej samej stronie osi. Jeśli punkt odpowiada pierwiastkowi nieparzystokrotnemu — linia przechodzi na drugą stronę osi x.



Uwaga. Należy pamiętać, że linia, którą rysujemy w opisany wyżej sposób, nie jest wykresem danej funkcji wielomianowej. Linia ta tylko ilustruje, w jaki sposób zmienia się znak wartości funkcji.

ĆWICZENIE B Liczby -3, 0 i 2 to jedyne pierwiastki wielomianu $W(x)$. Wiedząc, że -3 jest pierwiastkiem dwukrotnym, 0 — trzykrotnym, a 2 — jednokrotnym, naszkicuj wykres ilustrujący, w jaki sposób zmienia się znak funkcji $y = W(x)$, gdy współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x jest liczbą ujemną.

PRZYKŁAD Rozwiąż nierówność.

$x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 8x^3 \leqslant 0$

$x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 8x^3 =$

$= x^3(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) =$

$= x^3[x^2(x + 2) - 4(x + 2)] =$

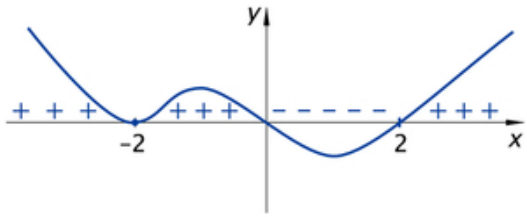
$= x^3(x + 2)(x^2 - 4) = x^3(x + 2)^2(x - 2)$

Rozkładamy wielomian na czynniki, aby znaleźć jego pierwiastki i określić ich krotności.

$x^3(x + 2)^2(x - 2) = 0$

$x = 0$ pierwiastek trzykrotny; $x = -2$ pierwiastek dwukrotny; $x = 2$ pierwiastek jednokrotny

Znajdujemy pierwiastki wielomianu i ustalamy ich krotności.



Szkicujemy wykres zmiany znaku wartości funkcji $y = x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 8x^3$; szkicowanie rozpoczynamy z prawej strony ponad osią x, gdyż współczynnik przy x^6 jest dodatni.

Wykres przecina oś x w punktach $(0, 0)$ oraz $(2, 0)$, a przechodząc przez punkt $(-2, 0)$, pozostaje po tej samej stronie osi x.

$x \in \langle 0; 2 \rangle \cup \{-2\}$

Z wykresu odczytujemy rozwiązania nierówności.

ZADANIE Rozwiąż nierówność: $(x^3 - x^2)(x^3 - x^2 - x + 1) \geqslant 0$.

zadania 1–9

ZESTAW ZADAŃ

1. Rozwiąż nierówność.

a) $-2(x - 3)^2(x - 1)^5\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \geqslant 0$

b) $\frac{1}{2}x^3(x + 4)^4(x - 3)^2 \leqslant 0$

c) $-\sqrt{5}x^2(x - \sqrt{2})^3(x + \sqrt{3})^5 > 0$

d) $-0{,}4(x - 7)^6(3x + 1)^8(x - 1)^7 < 0$

e) $x(x - 2)^2(x + 2)^3(1 - x) > 0$

f) $(4 - 5x)^3(x - 11)^6 > 0$

g) $(2x - 6)^5(6x - 3)^5(2 - x)^2 \geqslant 0$

h) $-5(3 - 2x)^3(x - 3)^4(1 - x)^2 < 0$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $(x-13)(x^2-25)(x+3) \geqslant 0$

b) $-7(3-x)(x^2+8)(x^2-100) \leqslant 0$

c) $(3x-2)^4(2x^2-4)^3(x+3)^2 < 0$

d) $(x-5)^2(2x^2-8)^3 > 0$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $(x^2-25)^3(5-x)^5 \geqslant 0$

b) $3(2x-5)^5(3-x)^3(5-2x)^7 < 0$

c) $x^3(8-2x^2)(2-x)(3x-6) > 0$

d) $(x^2-2x-15)^4(x-5)^3 \leqslant 0$

e) $(x^2-9)(x+3)(1-x^2) < 0$

f) $(x^2-1)(2x^2+x-1)(3x^2+x-2) \geqslant 0$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $(x^2-3x-10)(x-5)^3(x^2+4x+4) \geqslant 0$

b) $-\frac{2}{3}(x^2-4)(x-2)(x^2-1)(x^2-x-2) > 0$

c) $\frac{1}{2}x(x^2+2x-3)(x^2+6x+9)(x^2-x) \leqslant 0$

d) $-3x^2(x^2-9)(x^2-6x+9)(x^2-3x) < 0$

5. Wyznacz wszystkie argumenty, dla których obie funkcje f i g przyjmują wartości ujemne.

a) $f(x) = x(x+3)^3(x-5)^4$, $g(x) = (x+1)(x-3)^2(x-5)^5$

b) $f(x) = 2(x+5)(x-1)^7(x-6)^2$, $g(x) = -3(x+5)^3(x-1)(x-6)$

c) $f(x) = -4x(x+1)(x+4)^3(x-4)$, $g(x) = -\frac{1}{4}x^4(x+4)(x-4)^3$

6. Znajdź wszystkie argumenty, dla których wartości funkcji $y = f(x) \cdot g(x)$ są dodatnie.

a) $f(x) = -7(x+1)^2(x-3)$, $g(x) = (x+1)^2(x-3)^7$

b) $f(x) = 0{,}3(x-6)^2(x+5)^3(x-4)$, $g(x) = -5(x-9)^3(x-6)(x-4)^2$

c) $f(x) = -2(x+3)^3(x-1)^6(x-4)^4(x-6)^5$, $g(x) = -0{,}2(x+3)(x+1)^2(x-1)^5$

7. Rozwiąż nierówność.

a) $x^3+5x^2-4x-20 \geqslant 0$

b) $-4x^3-12x^2+x+3 > 0$

c) $x^4-7x^3+x^2-7x \leqslant 0$

d) $-3x^5+15x^4-4x^3+20x^2 < 0$

8. Rozwiąż po dwa przykłady z zadań 5 i 6 ze str. 101–102, korzystając z metody opisanej w tym rozdziale.

9. a) Liczby -2 i -5 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3+ax^2+bx-20$. Rozwiąż nierówność $W(x) \geqslant 0$.

b) Liczby $\frac{1}{3}$ i 3 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = ax^3+bx^2-x+3$. Rozwiąż nierówność $W(x) < 0$.

MINISPRAWDZIAN

S1. Zbiorem rozwiązań nierówności $-3x^2(x-4)^4(x+4)^5 > 0$ jest:

A. $(-\infty;-4)$ B. $(-4;4)$ C. $(-\infty;0)$ D. $(-4;0)\cup(0;4)\cup(4;+\infty)$

S2. Jeśli liczby -1 i 2 są trzykrotnymi pierwiastkami wielomianu $a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ i wielomian ten nie ma więcej pierwiastków oraz $a_n < 0$, to zbiorem rozwiązań nierówności $a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0 < 0$ jest:

A. $(2;+\infty)$ B. $(-\infty;-1)$ C. $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ D. $(-1;2)$

S3. Dane są wielomiany:

$$U(x)=-(5-x)(x-2)^3 \quad V(x)=(5-x)^2(x-2) \quad W(x)=-2(5-x)^4(x-2)^2$$

Dla jakich argumentów funkcja $f(x)=U(x)\cdot V(x)\cdot W(x)$ przyjmuje wartości ujemne?

A. gdy $x\in(5;+\infty)$ C. gdy $x\in(-\infty;5)$

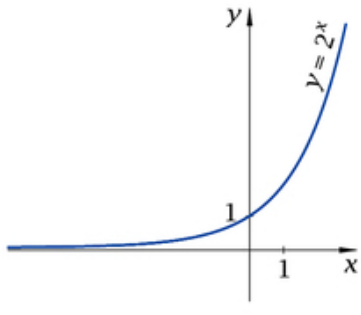
B. gdy $x\in(-\infty;2)\cup(2;5)$ D. gdy $x\in(2;+\infty)$

FUNKCJA WYKŁADNICZA I FUNKCJA LOGARYTMICZNA

Wiesz już, że dla każdej liczby rzeczywistej x określona jest liczba 2^x. Można więc rozpatrywać funkcję $y=2^x$, której dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}$.

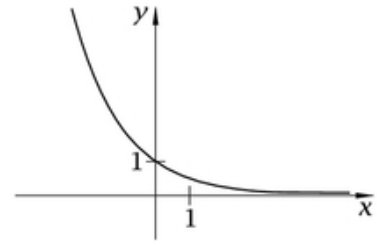
ĆWICZENIE A Oblicz wartości funkcji $y=2^x$ dla argumentów: -3, -2, -1, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3 i zaznacz w układzie współrzędnych odpowiadające tym argumentom punkty wykresu funkcji. Naszkicuj wykres tej funkcji.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y=2^x$. Zauważ, że:



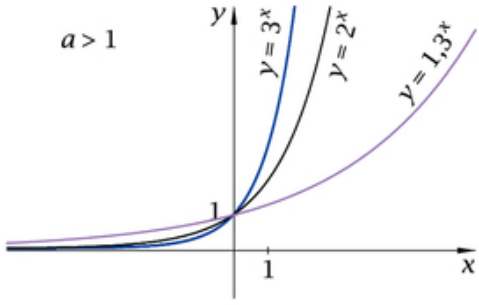
- Wartości funkcji są dodatnie, gdyż $2^x > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x.
- Wykres nie przecina osi x, ale dla coraz mniejszych argumentów odpowiadające im punkty wykresu leżą coraz bliżej tej osi. Mówimy, że oś x jest asymptotą poziomą wykresu funkcji $y=2^x$.
- Wykres funkcji przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0,1)$, bo $2^0=1$.

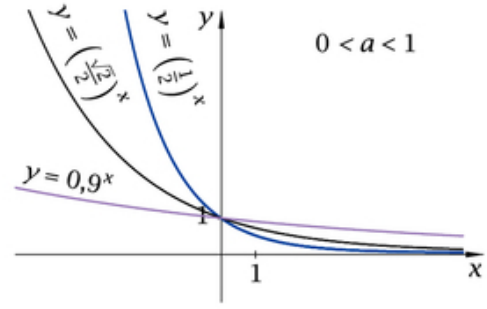
ĆWICZENIE B Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Sprawdź, które z własności opisanych na poprzedniej stronie ma ta funkcja.



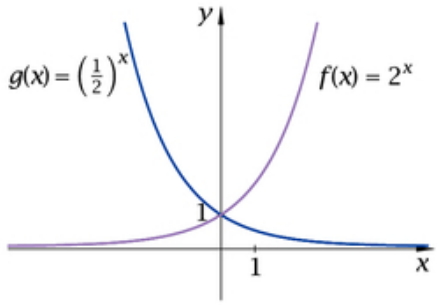
Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = a^x$, gdzie $a > 0$, nazywamy **funkcją wykładniczą**. Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Zwróć uwagę, że gdy $a = 1$, funkcja wykładnicza ma postać $y = 1$, a więc jest funkcją stałą. Poniżej narysowano wykresy kilku funkcji wykładniczych $y = a^x$, gdzie $a \neq 1$, i podano ich własności.





- Zbiorem wartości funkcji jest przedział $(0; +\infty)$.
- Oś x jest asymptotą poziomą wykresu funkcji.
- Wykres funkcji przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, 1)$.
- Gdy $a > 1$, funkcja $y = a^x$ jest rosnąca, a gdy $0 < a < 1$, jest malejąca.



Obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = 2^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Zauważ, że wzór funkcji g można zapisać w postaci $g(x) = 2^{-x}$. Zatem zachodzi równość:

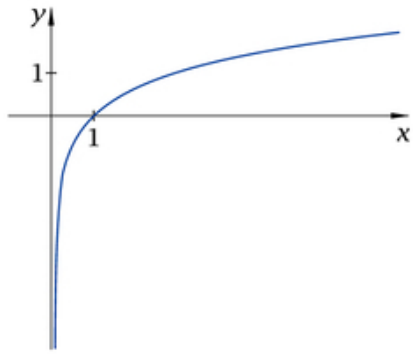
$$f(-x) = g(x)$$

Wobec tego wykres funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ względem osi y.

zadania 1–5

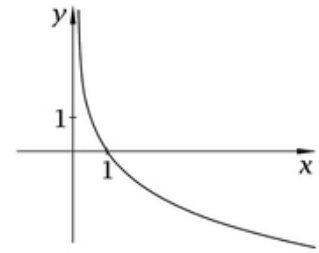
II Ponieważ każdej liczbie dodatniej x możemy jednoznacznie przyporządkować liczbę $\log_2 x$ (czyli taki wykładnik potęgi, do którego należy podnieść 2, aby otrzymać x), więc możemy rozpatrywać funkcję $\log_2 x$, której dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}_+$.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = \log_3 x$. Zauważ, że:



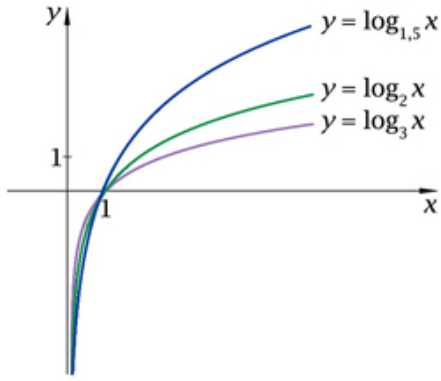
- Dziedziną funkcji jest zbiór $(0;+\infty)$.
- Wykres funkcji nie przecina osi y, ale im argumenty są bliższe zeru, tym bardziej odpowiadające im punkty wykresu zbliżają się do osi y. Mówimy, że oś y jest asymptotą pionową wykresu funkcji.
- Wykres funkcji przecina oś x w punkcie $(1, 0)$.

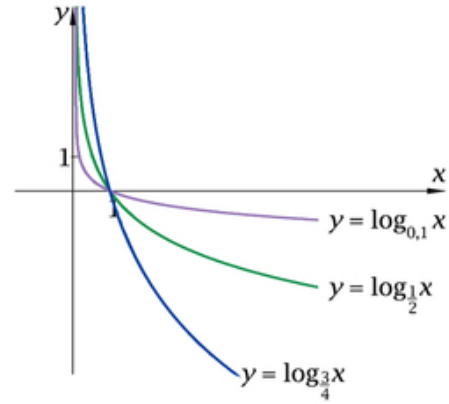
ĆWICZENIE C Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Którą z własności opisanych powyżej ma ta funkcja?



Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, nazywamy **funkcją logarytmiczną**. Dziedziną funkcji logarytmicznej jest przedział $(0;+\infty)$.

Oto przykłady wykresów kilku funkcji logarytmicznych oraz ich własności.





- Zbiorem wartości funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Oś y jest asymptotą (pionową) wykresu funkcji.
- Wykres funkcji przecina oś x tylko w punkcie $(1, 0)$, tzn. jedynym miejscem zerowym funkcji jest $x = 1$.
- Gdy $a > 1$, funkcja $y = \log_a x$ jest rosnąca, a gdy $0 < a < 1$, jest malejąca.

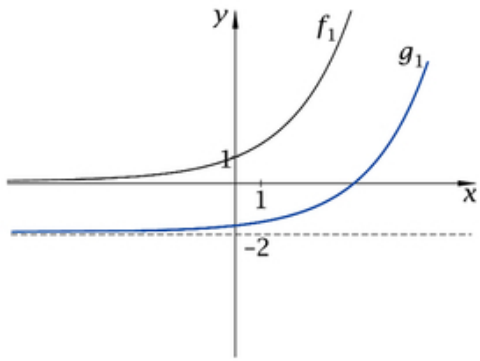
Korzystając z wykresów funkcji wykładniczych i logarytmicznych, można otrzymać wykresy innych funkcji.

Po przesunięciu wykresu funkcji:

$$f_1(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

o wektor $[3, -2]$ otrzymamy wykres funkcji:

$$g_1(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-3} - 2$$



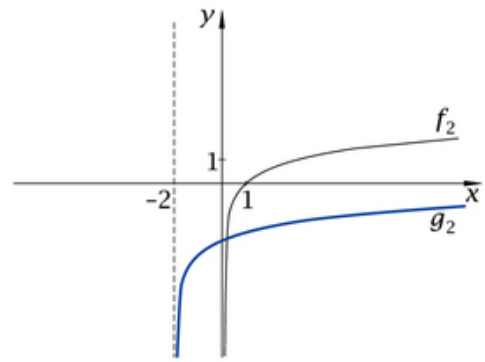
Wykres funkcji g_1 ma asymptotę poziomą o równaniu $y = -2$.

Po przesunięciu wykresu funkcji:

$$f_2(x) = \log_3 x$$

o wektor $[-2, 3]$ otrzymamy wykres funkcji:

$$g_2(x) = \log_3(x + 2) + 3$$



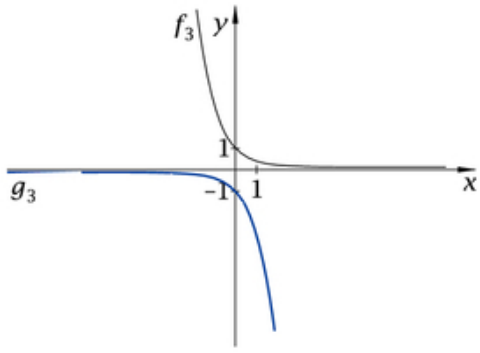
Wykres funkcji g_2 ma asymptotę pionową o równaniu $x = -2$.

Po odbiciu wykresu funkcji:

$$f_3(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

symetrycznie względem osi x, a potem względem osi y otrzymamy wykres funkcji:

$$g_3(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$$



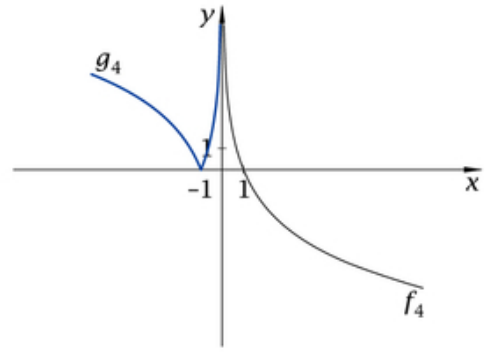
Asymptotą wykresu funkcji g_3 jest oś x.

Po odbiciu wykresu funkcji:

$$f_4(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$$

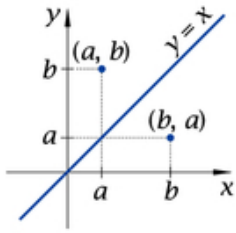
względem osi y, a następnie odbiciu części otrzymanego wykresu leżącego pod osią x względem tej osi otrzymamy wykres funkcji:

$$g_4(x) = |\log_{\frac{2}{3}}(-x)|$$



Asymptotą wykresu funkcji g_4 jest oś y.

Pojęcie logarytmu jest związane z potęgowaniem. Podobnie istnieje związek między funkcją logarytmiczną a funkcją wykładniczą.



Popatrz na rysunek obok. Łatwo zauważyć, że oś x i oś y są symetryczne do siebie względem prostej $y = x$ i każdy punkt o współrzędnych (a, b) jest symetryczny względem tej prostej do punktu (b, a). Można ten fakt wykorzystać przy rysowaniu wykresów funkcji logarytmicznych.

ĆWICZENIE D Znajdź cztery punkty należące do wykresu funkcji $y = 2^x$. Następnie zapisz współrzędne punktów symetrycznych do nich względem prostej $y = x$ i sprawdź, że należą one do wykresu funkcji $y = \log_2 x$.

Rozważmy następujące funkcje:

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = \log_2 x$$

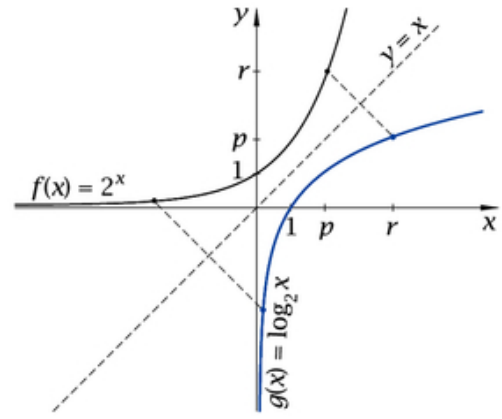
Niech punkt (p, r) będzie dowolnym punktem wykresu funkcji f. Zatem:

$$r = 2^p$$

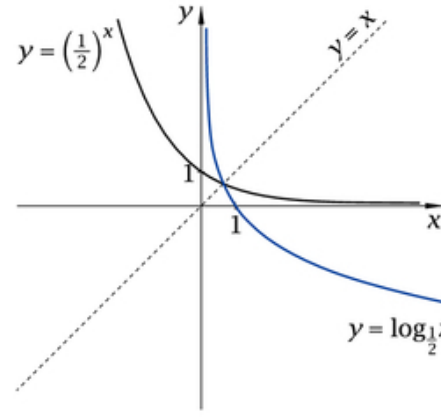
Stąd:

$$\log_2 r = p$$

Wobec tego punkt (r, p) należy do wykresu funkcji g. Oznacza to, że wykres funkcji g jest symetryczny względem prostej $y = x$ do wykresu funkcji f.



Podobnie wykres funkcji $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ względem prostej $y = x$.



ĆWICZENIE E Narysuj wykres funkcji $y = 2^x + 1$ oraz wykres do niego symetryczny względem prostej $y = x$. Można otrzymać taki sam wykres, przesuwając odpowiednio wykres funkcji $y = \log_2 x$. Zapisz wzór otrzymanej funkcji.

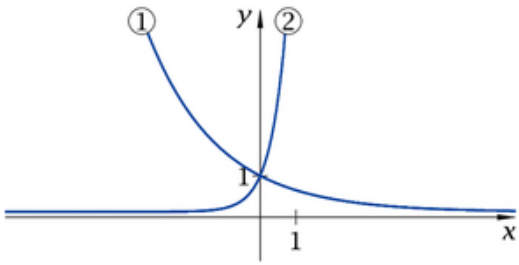
zadania 6–24

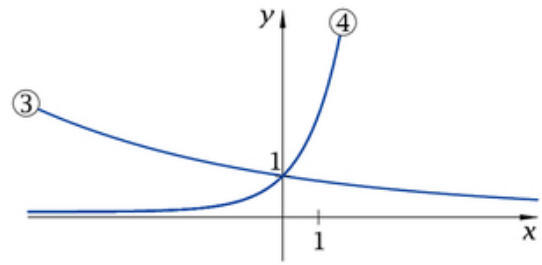
ZESTAW ZADAŃ

I **1.** Na każdym z poniższych rysunków przedstawiono wykresy dwóch spośród następujących funkcji:

$$f(x) = 0{,}6^x \qquad g(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x \qquad h(x) = 2{,}7^x \qquad k(x) = 10^x$$

Dopasuj wzory do wykresów.





2. Wśród podanych wzorów znajdź takie, które przedstawiają tę samą funkcję.

$a(x) = 10^{x+2}$ $\quad c(x) = 100 + 10^x$ $\quad g(x) = \frac{10^x}{100}$ $\quad i(x) = 10^{x^2}$

$b(x) = 10^{x-2}$ $\quad d(x) = 100 \cdot 10^x$ $\quad h(x) = 100^x$ $\quad j(x) = 10^{2x}$

3. **a)** Dla jakiej wartości a wykres funkcji $y = a^x$ przechodzi przez punkt $(2, 4)$?

b) Dla jakiej wartości a do wykresu funkcji $y = a^x$ należy punkt $(-3, 27)$?

4. Oblicz, dla jakich wartości a i b wykres funkcji $y = ba^x$ przechodzi przez punkty K i L, jeśli:

a) $K = (0, 6)$, $L = \left(2, \frac{2}{3}\right)$ **b)** $K = (1, 8)$, $L = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

5. W tabelkach przedstawiono wyniki pomiarów wielkości t i M dokonanych podczas trzech doświadczeń. Przypuszcza się, że związek między tymi wielkościami wyraża się za pomocą wzoru $M = b \cdot a^t$, gdzie a i b są stałymi charakterystycznymi dla danego doświadczenia. Które wyniki potwierdzają to przypuszczenie?

①

t	0	1	5
M	0,01	0,1	1000

②

t	0	2	3
M	50	2	3

③

t	0	2	4
M	5	20	80

II **6.** Określ dziedzinę funkcji:

a) $y = \log_3(x - 2)$ **d)** $y = \log(x^2 - 3x - 10)$ **g)** $y = \log_x(x + 1)$

b) $y = \log(3 + 2x)$ **e)** $y = \log_x 2$ **h)** $y = \log_x(2 - x)$

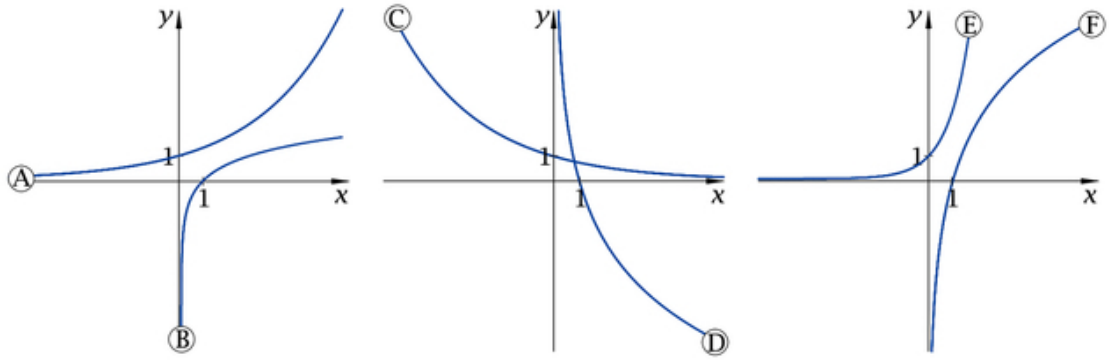
c) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 9)$ **f)** $y = \log_{x-3} 5$ **i)** $y = \log_2 |x - 1|$

7. Na poniższych rysunkach przedstawione są wykresy funkcji:

$$\text{①}\ y=\left(\frac{3}{4}\right)^x \qquad \text{②}\ y=\left(\frac{4}{3}\right)^x \qquad \text{③}\ y=3^x$$

$$\text{④}\ y=\log_{\frac{3}{4}} x \qquad \text{⑤}\ y=\log_{\frac{4}{3}} x \qquad \text{⑥}\ y=\log_3 x$$

Dopasuj wzory do wykresów.



8. Dobierz wartości a i b tak, aby podane wzory opisywały tę samą funkcję.

a) $y=\log\frac{x^5}{3}$ i $y=a+b\log x$ **b)** $y=4-\frac{1}{2}\log x$ i $y=\log(ax)^b$

9. Oblicz, dla jakich wartości a i b wykres funkcji $y=a+b\log x$ przechodzi przez punkty P i R, jeśli:

a) $P=(1,5)$, $R=(10,2)$ **b)** $P=\left(\frac{1}{10},6\right)$, $R=(100,0)$

10. W tabelkach przedstawiono wyniki pomiarów wielkości t i p dokonanych podczas trzech różnych doświadczeń. Przypuszcza się, że zależność między tymi wielkościami przedstawia wzór $p=a+b\log t$, gdzie a i b są pewnymi stałymi charakterystycznymi dla danego doświadczenia. Które wyniki pomiarów potwierdzają to przypuszczenie?

①

t	$\frac{1}{10}$	1	10
p	−16	−10	−6

②

t	0,01	1	1000
p	13	−2	−12

③

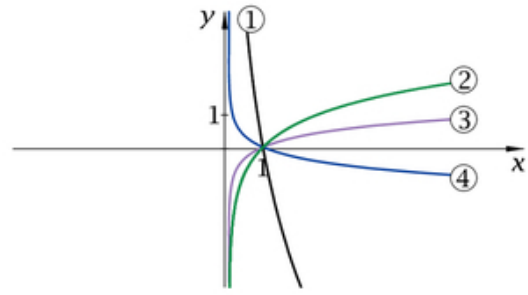
t	0,1	1	100
p	−3	4	18

11. Na rysunkach obok przedstawiono wykresy następujących funkcji:

$f(x)=\log x$ $h(x)=\log_{\frac{5}{6}} x$

$g(x)=\log_3 x$ $k(x)=\log_{0,1} x$

Dopasuj wzory do wykresów.



12. Narysuj wykres funkcji $y = 2^x$, a następnie wykres funkcji:

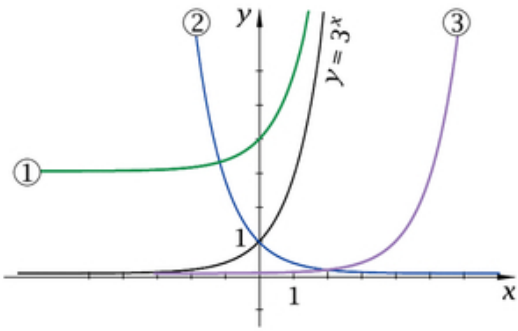
a) $y = 1 + 2^x$ **c)** $y = 2^{x+2}$ **e)** $y = -2^x$ **g)** $y = 8 \cdot 2^x$

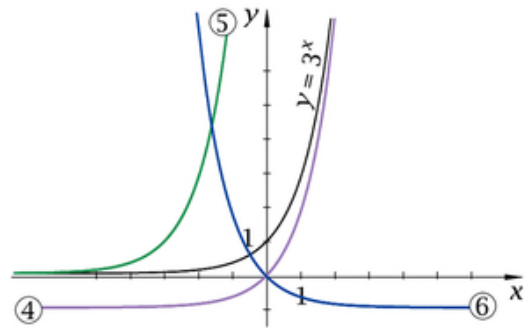
b) $y = -3 + 2^x$ **d)** $y = 2^{x-1}$ **f)** $y = 5 - 2^x$ **h)** $y = \frac{2^x}{4}$

13. Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy następujących funkcji:

$f(x) = 3^x + 3$ $k(x) = \frac{1}{3^x} - 1$ $g(x) = 3^x - 1$ $l(x) = 3^{x+3}$ $h(x) = 3^{-x}$ $m(x) = 3^{x-4}$

Dopasuj wzory funkcji do wykresów.





14. Dane są funkcje:

$f(x) = 2 + 3^x$ $g(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^x - 5$ $h(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ $k(x) = -6^{x+4}$

Podaj, jakie asymptoty mają wykresy tych funkcji, oraz ustal, które z tych funkcji:

a) są rosnące,

b) przyjmują tylko wartości dodatnie,

c) mają miejsca zerowe,

d) mają wykresy przecinające oś y.

15. Znajdź równanie asymptoty oraz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji f z osią y.

a) $f(x) = 5 + 5^x$ **c)** $f(x) = 0{,}1^{x+3} + 7$ **e)** $f(x) = 3^x - 3$

b) $f(x) = 4^{x-2}$ **d)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ **f)** $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} - 5$

16. Zapisz przykład funkcji, której wzór ma postać $y = 5^{x+a} + b$, spełniającej poniższy warunek.

a) Asymptotą wykresu funkcji jest prosta o równaniu $y = 5$.

b) Wykres przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, -3)$.

c) Miejscem zerowym funkcji jest 1.

d) Asymptotą wykresu funkcji jest prosta o równaniu $y = -1$ i wykres przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, 4)$.

e) Asymptotą wykresu funkcji jest prosta o równaniu $y = -5$ i wykres przechodzi przez punkt o współrzędnych $(0, 0)$.

17. Narysuj wykres funkcji $y = \log_2 x$, a następnie wykres funkcji:

a) $y = \log_2(x - 3)$ **d)** $y = -4 + \log_2 x$ **g)** $y = -\log_2 x$

b) $y = \log_2(5 + x)$ **e)** $y = \log_2 \frac{x}{8}$ **h)** $y = 3 - \log_2 x$

c) $y = 1 + \log_2 x$ **f)** $y = \log_2 4x$ **i)** $y = |\log_2 x - 1|$

18. Które z podanych wzorów przedstawiają tę samą funkcję?

$$f(x) = 2\log_3 x \qquad g(x) = \log_3 2x \qquad h(x) = 2 + \log_3 x$$
$$i(x) = \log \frac{1}{x} \qquad j(x) = \log_3 2 + \log_3 x \qquad k(x) = \log_3(2 + x)$$
$$l(x) = -\log x \qquad m(x) = \log_3 9x$$

19. Na rysunkach obok są przedstawione wykresy następujących funkcji:

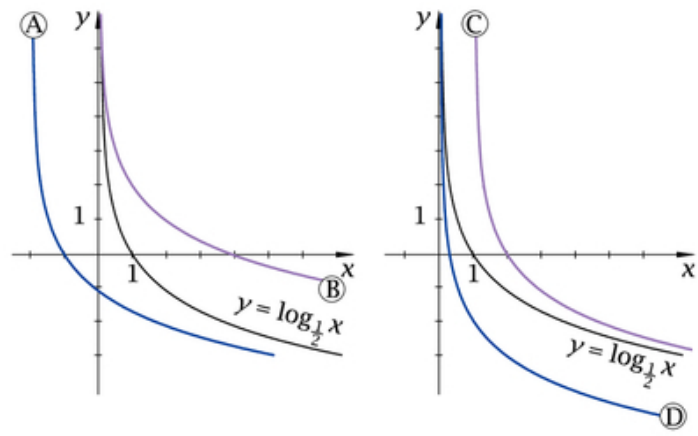
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$

$g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$

$h(x) = \log_{\frac{1}{2}} 4x$

$k(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{4}$

Dopasuj wzory funkcji do wykresów.



20. Dane są funkcje:

$f(x) = \log_5(x - 13)$ $g(x) = \log(x + 10)$ $h(x) = 13 + \log_{0,1} x$ $k(x) = -10 + \log_{\frac{1}{6}} x$

Podaj dziedziny tych funkcji, asymptoty ich wykresów oraz ustal, które z tych funkcji:

a) są rosnące,

b) mają miejsce zerowe,

c) mają wykresy przecinające oś y,

d) mają zbiór wartości równy $\mathbb{R}$.

21. Znajdź równanie asymptoty podanej funkcji i współrzędne punktów przecięcia się jej wykresu z osią x.

a) $y = \log_5(x - 2)$ **c)** $y = -2 + \log_{\frac{1}{3}} x$ **e)** $y = \log_{\frac{1}{5}} \frac{x}{5}$

b) $y = \log_3(x + 3)$ **d)** $y = \log_2(16x)$ **f)** $y = 1 + \log(x - 5)$

22. a) Uzasadnij, że wzory $y = \log_5 x^2$ i $y = 2\log_5 x$ nie przedstawiają tej samej funkcji.

b) Narysuj wykres funkcji $y = \frac{1}{2}\log_2 x^2$.

23. Podaj przykład funkcji, której wzór ma postać $y = a + \log_2(x + b)$, spełniającej poniższy warunek.

a) Asymptotą wykresu jest prosta o równaniu $x = 3$.

b) Wykres przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, 4)$.

c) Miejscem zerowym funkcji jest 2.

d) Asymptotą wykresu funkcji jest prosta o równaniu $x = -1$ i wykres przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, 1)$.

e) Asymptotą wykresu funkcji jest prosta o równaniu $x = -2$ i wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych.

24. Zapisz wzór funkcji, których wykresy otrzymano w wyniku odbicia symetrycznego wykresów funkcji $f(x) = 5^x$ i $g(x) = \log x$:

a) względem osi x,

b) względem osi y,

c) względem prostej o równaniu $y = x$,

d) względem prostej o równaniu $y = -x$.

MINISPRAWDZIAN

S1. Której z poniższych własności nie ma funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$, gdy $a \neq 1$?

A. *Funkcja dla wszystkich argumentów przyjmuje wartości różne od 0.*

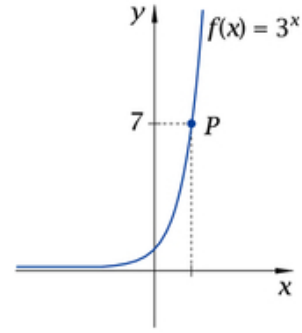
B. *Asymptotą wykresu funkcji jest prosta o równaniu* $y = 0$.

C. *Zbiorem wartości funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.*

D. *Wykres funkcji przecina oś* y *w punkcie (0, 1).*

S2. Jaka jest pierwsza współrzędna punktu P (na rysunku obok)?

A. $\frac{1}{7}$ B. $\sqrt{7}$ C. $\log_3 7$ D. $\log_7 3$



S3. Która z poniższych funkcji ma asymptotę o równaniu $x = 5$?

A. $f(x) = 5\log_5 x$ C. $f(x) = 5 + \log_2 x$

B. $f(x) = \log(x + 5)$ D. $f(x) = \log(x - 5)$

$y = \left(\sqrt{5}\right)^x$ $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ $y = 0{,}5^x$

$y = \log_{\frac{1}{5}} x$ $y = \log_5 x$

S4. Ile jest funkcji malejących wśród podanych w ramce obok?

A. dwie C. cztery

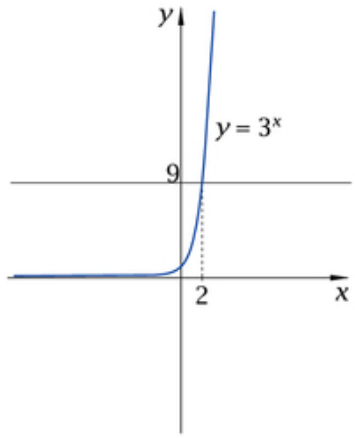
B. trzy D. pięć

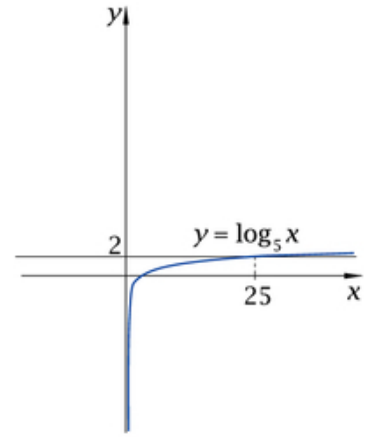
RÓWNANIA WYKŁADNICZE I LOGARYTMICZNE

I O funkcji mówimy, że jest **różnowartościowa**, gdy dla dowolnych dwóch różnych argumentów przyjmuje różne wartości. Innymi słowy: taka funkcja każdą wartość przyjmuje tylko dla jednego argumentu. Oznacza to, że spełniony jest warunek:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Zauważ, że każda funkcja rosnąca i każda funkcja malejąca jest różnowartościowa, więc ten warunek jest spełniony przez funkcje wykładniczą i logarytmiczną.





Równanie:

$$3^x = 9$$

można zapisać tak:

$$3^x = 3^2$$

Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa, więc:

$$x = 2$$

i liczba 2 jest jedynym rozwiązaniem rozważanego równania.

Równanie:

$$\log_5 x = 2$$

można zapisać tak:

$$\log_5 x = \log_5 25$$

Funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa, więc:

$$x = 25$$

i liczba 25 jest jedynym rozwiązaniem rozważanego równania.

Zauważ, że funkcja $y = x^2$ nie jest różnowartościowa. Równanie $x^2 = 9$ można zapisać w postaci $x^2 = 3^2$ i $x = 3$ jest pierwiastkiem tego równania, ale nie jest to jedyny pierwiastek tego równania.

Równanie $3^x = 9$ jest przykładem równania wykładniczego, czyli takiego, w którym niewiadoma występuje tylko w wykładniku.

W równaniu $\log_5 x = 2$ niewiadoma jest wielkością logarytmowaną. Jest to przykład równania logarytmicznego.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie.

a) $5^x = \frac{1}{25}$

$5^x = 5^{-2}$

$\underline{x = -2}$

Zapisujemy obie strony równania w postaci potęg o jednakowych podstawach.

Korzystamy z warunku: $a^p = a^r \iff p = r$.

b) $3^x = \sqrt[5]{3}$

$3^x = 3^{\frac{1}{5}}$

$\underline{x = \frac{1}{5}}$

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $2^x = \sqrt[3]{2}$ b) $10^x = 0{,}001$

Przy rozwiązywaniu równań wykładniczych przydają się czasami własności potęg, które przypominamy obok.

Jeśli $a > 0$, to:

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż równanie.

a) $2^x = \frac{\sqrt[3]{4}}{16}$

$2^x = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2^4}$

$2^x = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^4}$

$2^x = 2^{\frac{2}{3}-4}$

$2^x = 2^{-\frac{10}{3}}$

$\underline{x = -\frac{10}{3}}$

Korzystając z własności potęg, zapisujemy obie strony równania w postaci potęg o jednakowych podstawach.

Korzystamy z warunku: $a^p = a^r \iff p = r$.

b) $9^x = \frac{27^x}{\sqrt{3}}$

$(3^2)^x = \frac{(3^3)^x}{3^{\frac{1}{2}}}$

$3^{2x} = 3^{3x-\frac{1}{2}}$

$2x = 3x - \frac{1}{2}$

$\underline{x = \frac{1}{2}}$

Korzystając z własności potęg, zapisujemy obie strony równania w postaci potęg o jednakowych podstawach.

Korzystamy z warunku: $a^p = a^r \iff p = r$.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $4^x = \sqrt{2}$ b) $8^x = 2 \cdot 4^x$

PRZYKŁAD 3 Rozwiąż równanie.

$4^x - 6 \cdot 2^x - 16 = 0$

$(2^2)^x - 6 \cdot 2^x - 16 = 0$ — Zapisujemy wszystkie potęgi występujące w równaniu jako potęgi o tych samych podstawach.

$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x - 16 = 0$ — $(2^2)^x = (2^x)^2$

Niech $t = 2^x$. Zatem $t > 0$. — $t > 0$, bo dla dowolnej wartości x potęga 2^x jest liczbą dodatnią.

$t^2 - 6t - 16 = 0$

$\Delta = 36 + 4 \cdot 16 = 100$

$t_1 = \frac{6-10}{2} = -2 \qquad t_2 = \frac{6+10}{2} = 8$ — Szukamy dodatnich rozwiązań równania kwadratowego.

$t_1 < 0 \qquad 2^x = t_2$ — Liczba -2 nie spełnia warunku $t > 0$.

$2^x = 8$, czyli $\underline{x = 3}$

ZADANIE Rozwiąż równanie: $3 \cdot 9^x + 5 \cdot 3^x - 2 = 0$.

zadania 1–2

Rozwiązując równanie wykładnicze, nie zawsze da się zastosować metodę pokazaną w powyższych przykładach. Czasem można znaleźć rozwiązanie, korzystając z definicji logarytmu.

PRZYKŁAD 4 Rozwiąż równanie.

a) $5 \cdot 2^x + 1 = 4$

$5 \cdot 2^x = 3$

$2^x = \frac{3}{5}$ — Korzystamy z definicji logarytmu.

$\underline{x = \log_2 \frac{3}{5}}$

b) $3^x = 2 \cdot 5^x$

$\frac{3^x}{5^x} = 2$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x = 2$ — Korzystamy z definicji logarytmu.

$\underline{x = \log_{\frac{3}{5}} 2}$

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $4 \cdot 3^x = 7$ b) $3 \cdot 5^x = 10^x$

Zauważ, że w przykładzie 4b) równanie można by przekształcać inaczej i otrzymać w wyniku $x = \log_{\frac{5}{3}} \frac{1}{2}$.

zadania 3–6

III Rozwiązując równania logarytmiczne, można korzystać z definicji logarytmu lub różnowartościowości funkcji logarytmicznej. Przy rozwiązywaniu takich równań trzeba pamiętać o odpowiednich założeniach.

PRZYKŁAD 5 Rozwiąż równanie.

a) $3\log_5(x+1)+4=6$ zał. $x+1>0$

$\log_5(x+1)=\frac{2}{3}$ ⋮ Korzystamy z definicji logarytmu.

$x+1=5^{\frac{2}{3}}$

$\underline{x=\sqrt[3]{25}-1}$ ⋮ Sprawdzamy założenie: $\sqrt[3]{25}-1+1=\sqrt[3]{25}>0$.

b) $\log_2 2x=\log_2(x^2-3)$ zał. $2x>0$ i $x^2-3>0$

$2x=x^2-3$ ⋮ Korzystamy z warunku: $\log_a p=\log_a r \iff p=r$.

$x^2-2x-3=0$

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16,\quad \sqrt{\Delta}=4$

$x_1=\frac{2+4}{2}=\underline{3}$ spełnia założenia $\qquad x_2=\frac{2-4}{2}=-1$ nie spełnia założenia

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $5\log_2(x-4)-3=1$ b) $\log 3x=\log(x^2-4)$

zadania 7–8

IV Czasami przy rozwiązywaniu równań logarytmicznych przydają się własności logarytmów, które przypominamy obok.

Jeśli $a>0$, $b>0$, $c>0$, $k>0$, $a\neq 1$ i $k\neq 1$, to:

$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$

$\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$

$\log_a b^p=p\log_a b$

$\log_a b=\frac{\log_k b}{\log_k a}$

PRZYKŁAD 6 Rozwiąż równanie.

a) $\log_5\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\log_5 x=\log_5\frac{1}{4}-2$ zał. $x>0$

$\frac{1}{3}\log_5 x=\log_5\frac{1}{2}+\log_5 5^2-\log_5\frac{1}{4}$ ⋮ $2=2\log_5 5=\log_5 5^2$

$\frac{1}{3}\log_5 x=\log_5\frac{\frac{1}{2}\cdot 25}{\frac{1}{4}}$ ⋮ Korzystamy z twierdzeń o sumie i różnicy logarytmów.

$\log_5 x=3\log_5 50$

$\log_5 x=\log_5 50^3$

$\underline{x=125\,000}$ ⋮ Liczba 125 000 spełnia założenie.

b) $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{4}} x = 6$ zał. $x > 0$

$$2\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{4}} = 6$$

Korzystamy z twierdzenia o zmianie podstawy logarytmu.

$$2\log_2 x + \frac{\log_2 x}{-2} = 6$$

$$\frac{3}{2}\log_2 x = 6$$

$$\log_2 x = 4$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$x = 2^4$$

$$\underline{x = 16}$$

Liczba 16 spełnia założenie.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $\log_3 x - \log_3 4 = 2\log_3 5 - 1$

b) $\log_5 x + \log_{\sqrt{5}} x = -6$

Zauważmy, że rozwiązując równanie typu $a^x = b$, zamiast korzystać z definicji logarytmu, możemy zlogarytmować obie strony takiego równania (przyjmując za podstawę logarytmu dowolną liczbę dodatnią różną od 1).

Poniżej rozwiązano równanie $7^x = 11$ na trzy sposoby. Za każdym razem otrzymano takie samo rozwiązanie, tylko zapisane w inny sposób.

$$7^x = 11$$
$$\log_7 7^x = \log_7 11$$
$$x\log_7 7 = \log_7 11$$
$$x = \log_7 11$$

$$7^x = 11$$
$$\log_{11} 7^x = \log_{11} 11$$
$$x\log_{11} 7 = 1$$
$$x = \frac{1}{\log_{11} 7}$$

$$7^x = 11$$
$$\log 7^x = \log 11$$
$$x\log 7 = \log 11$$
$$x = \frac{\log 11}{\log 7}$$

Uwaga. Aby obliczyć przybliżoną wartość rozwiązania równania $7^x = 11$ za pomocą kalkulatora, najwygodniej jest używać logarytmu dziesiętnego, czyli korzystać z ostatniego sposobu.

ĆWICZENIE A Zapisz rozwiązanie równania $5^x = \frac{3}{4}$ za pomocą logarytmów dziesiętnych.

ĆWICZENIE B Dwóch uczniów rozwiązywało równanie $4^{x-1} = 5^x$. Obok przedstawiono początek obu rozwiązań. Znajdź wyniki, jakie otrzymali uczniowie. Uzasadnij, że otrzymane liczby są jednakowe.

Uczeń I

$$4^{x-1} = 5^x$$
$$\frac{4^x}{4} = 5^x$$
$$\frac{4^x}{5^x} = 4$$
$$\left(\frac{4}{5}\right)^x = 4$$

Uczeń II

$$4^{x-1} = 5^x$$
$$\log_4 4^{x-1} = \log_4 5^x$$
$$(x-1)\log_4 4 = x\log_4 5$$
$$x - 1 = x\log_4 5$$
$$x - x\log_4 5 = 1$$

zadania 9–16

ZESTAW ZADAŃ

I **1.** Rozwiąż równanie.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 125$

b) $\left(\frac{6}{7}\right)^4 = \left(\frac{7}{6}\right)^x$

c) $9^x = 27$

d) $\frac{1}{4} = 8^x$

e) $\left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{1}{32}$

f) $(\sqrt{7})^x = \sqrt[3]{7}$

g) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

h) $0{,}1 = 1000 \cdot 10^x$

i) $2^x \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{16}$

j) $\frac{1}{49} \cdot 7^x = \sqrt{7}$

k) $\sqrt{0{,}2} = 25^x$

l) $\frac{4}{3} = \left(\frac{8}{27}\right)^x \cdot 3$

2. Rozwiąż równanie.

a) $3^x \cdot 5^x = 15$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 6^x = 9$

c) $\frac{15^x}{5^x} = \frac{1}{9}$

d) $6^x = 3^x \cdot 4$

e) $10^x = \sqrt{2} \cdot 5^x$

f) $\frac{2^x}{\sqrt{3}} = 6^x$

g) $\frac{2^x}{16} = 2 \cdot 4^x$

h) $0{,}2 \cdot 5^x = (\sqrt{5})^x$

i) $\frac{2^x}{3} = \frac{3^x}{2}$

j) $14^x = \frac{7^x}{2\sqrt{2}}$

k) $81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{9^x}{3}$

l) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot 1{,}5 = \left(\frac{8}{27}\right)^x$

m) $4^x \cdot 8^{x+1} = \frac{1}{2}$

n) $27^{x+3} = \sqrt{3} \cdot 81^x$

o) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = \frac{27}{8}$

II **3.** Rozwiąż równanie.

a) $7^x = 3$

b) $5 \cdot 6^x = 10$

c) $3^{x+1} = 4$

d) $4 \cdot 5^x - 1 = 7$

e) $\frac{3^{2x}}{5} = 2$

f) $7^{3x} \cdot 3 = 1$

g) $2^{3x-1} = 5$

h) $4^{2x+3} = 3$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} = 2$

4. Ustal współrzędne punktów przecięcia wykresów podanych funkcji.

a) $y = 3^x$ i $y = 4 \cdot 6^x$

b) $y = 5^x$ i $y = \sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$

5. a) Znajdź miejsce zerowe funkcji $f(x) = 3^x - \sqrt{3}$ i podaj argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

b) Znajdź miejsce zerowe funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 5$ i podaj argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje wartości ujemne.

c) Znajdź argument, dla którego funkcja $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 10$ przyjmuje wartość 15, i podaj argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje wartości większe od 15.

d) Znajdź argument, dla którego funkcja $f(x) = 6^x + 4$ przyjmuje wartość 9, i podaj argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje wartości mniejsze od 9.

6. Rozwiąż równanie.

a) $7^x = 5 \cdot 3^x$

b) $\frac{2^x}{3} = 5^x$

c) $5^x = 2^{x+1}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

e) $4^{1-x} = 5^x$

f) $2^x \cdot 3^x = 5$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 15^x = 2$

h) $14^x = 3 \cdot 2^x$

i) $5 \cdot 3^x = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

III **7.** Rozwiąż równanie.

a) $2\log_5 x = 6$

b) $3 + \log_{\frac{1}{3}} x = 1$

c) $4\log_6 x + 3 = 5$

d) $\frac{1}{2}\log_4 x - 5 = -4$

e) $1 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{5}} x = 3$

f) $7 - \frac{3}{2}\log_8 x = 9$

8. Rozwiąż równanie.

a) $\log_3(2x+1) = \log_3 x$

b) $\log_{\frac{1}{4}} x = \log_{\frac{1}{4}}(3x-4)$

c) $\log(x+2) = \log(2x-1)$

d) $\log_5(3x+5) = \log_5(x+1)$

e) $\log_{\frac{2}{3}}(5x+1) = \log_{\frac{2}{3}}(4x-1)$

f) $\log_6(9x-2) = \log_6(7x+2)$

IV **9.** Rozwiąż równanie.

a) $\log_3 x = \log_3 5 + \log_3 4$

b) $\log_{0,7} x = 3\log_{0,7} 2 - \log_{0,7} 3$

c) $\log_5 4 + \log_5 x = \frac{1}{2}\log_5 49$

d) $\log 8 = \log x - 2\log\frac{1}{5}$

e) $2\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 6 + \log_{\frac{1}{2}} 24$

f) $4\log 2 = 2\log x + \log 5$

g) $\log_6 5 - \frac{1}{2}\log_6 x = \log_6 \frac{1}{2}$

h) $\log_2 x^2 - \log_2 x = 2\log_2 5$

10. Rozwiąż równanie.

a) $\log_3(x-5) = 3$

b) $\log_{\frac{2}{3}}(x+2) = -2$

c) $\log_{0,1}(2x-3) = 1$

d) $\log_2\left(3 + \frac{x}{2}\right) = -4$

e) $\log_8(x^2-2) = -\frac{1}{3}$

f) $\log_{\frac{1}{9}}(1-x^2) = \frac{3}{2}$

11. Rozwiąż równanie.

a) $\log_{x+1} 36 = 2$

b) $\log_{2-x} \frac{1}{8} = 3$

c) $\log_{\frac{x}{2}} \frac{8}{125} = -3$

d) $\log_{3x} 15 = \frac{1}{2}$

e) $\log_{2+\frac{x}{2}} 5 = 1$

f) $\log_{2x-1} \sqrt[3]{4} = -\frac{1}{3}$

12. Znajdź x.

a) $\log_2(\log_3 x) = 2$

b) $\log_4\left(\log_3(\log_2 x)\right) = 0$

c) $\log_2\left(\log_2(\log_2 x)\right) = 1$

13. Rozwiąż równanie.

a) $(\log_4 x)^2 = 9$

b) $(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 - 25 = 0$

c) $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 = 0$

d) $(\log x)^2 - \log x^2 = 3$

e) $2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 = 1 - \log_{\frac{1}{2}} x$

f) $(\log_{\frac{1}{3}} x)(3 + \log_{\frac{1}{3}} x) = 4$

g) $(2\log_3 x)^2 = 2\log_3 x^2 + 3$

h) $(\log_2 x)(1 + \log_2 x) = 2 + \log_2 x^2$

14. Rozwiąż równanie.

a) $\log_2 x = \log_8 1000$

b) $\log_3 x = \log_{\frac{1}{3}} 5$

c) $\log_{\frac{1}{4}} 3 + \log_2 5 = \log_2 x$

d) $\log_3 2 - \log_{\frac{1}{9}} x = \log_{\frac{1}{9}} 2$

e) $\log_{27} 4 - \log_3 4 = \log_9 x$

f) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_8 3 + \log_4 x = 0$

g) $2\log 3 - \frac{1}{2}\log_{0,1} x = \log_{100} 0{,}5$

h) $\log_{0,2} 49 + 2\log_{25} x = 3\log_{125} 7$

15. Ustal współrzędne punktu przecięcia wykresów podanych funkcji.

a) $y = \log x$ i $y = 1 - \log x$

b) $y = 3\log_3 x$ i $y = 4 + \log_3 x$

16. Rozwiąż równanie.

a) $x^{\log_5 x} = 25x$

b) $x^{\log_2 x} = 64x$

c) $x^{\log_3 x} = \frac{1}{x^2}$

MINISPRAWDZIAN

S1. Rozwiązaniem którego z poniższych równań jest liczba dodatnia?

A. $3^x \cdot 9 = \frac{1}{3}$ B. $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)^x = 25$ C. $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 4$ D. $0{,}01^x = \frac{1}{\sqrt{10}}$

S2. Rozwiązaniem równania $10 \cdot 2^{x-1} = 6^{x+2}$ jest:

A. $\log_3 5 - \log_3 36$ B. $\log_3 \frac{36}{5}$ C. $\log_3 31$ D. $\log_3 38 - \log_3 10$

S3. Suma rozwiązań równania $(\log x)^2 - \log x^3 - 4 = 0$ wynosi:

A. 100,1 B. 10 000,1 C. 1000,01 D. 1100

S4. Rozwiązaniem równania $\log_3 x + \log_{\frac{1}{3}} 5 = \log_9 2$ jest:

A. $5\sqrt{2}$ B. $\frac{5}{\sqrt{2}}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

ZASTOSOWANIA FUNKCJI WYKŁADNICZYCH I LOGARYTMICZNYCH

Za pomocą funkcji wykładniczych i logarytmicznych można opisać zjawiska z bardzo różnych dziedzin wiedzy.

LICZEBNOŚĆ POPULACJI

Pewna kolonia bakterii liczyła początkowo 1000 bakterii, a co godzinę ich liczba rosła o 10%.

po pierwszej godzinie: $1000 \cdot 1{,}1$

po drugiej godzinie: $(1000 \cdot 1{,}1) \cdot 1{,}1 = 1000 \cdot 1{,}1^2$

po trzeciej godzinie: $(1000 \cdot 1{,}1^2) \cdot 1{,}1 = 1000 \cdot 1{,}1^3$

po t godzinach: $1000 \cdot 1{,}1^t$

Opisana kolonia bakterii to przykład populacji zmieniającej się w stałym tempie. Tak zmieniające się populacje można opisać za pomocą wzorów typu:

$$L(t) = b \cdot a^t,$$

gdzie t oznacza czas, a współczynniki a i b zależą od tempa zmian populacji oraz jej początkowej wielkości. Gdy w ten sposób opiszemy populację, mówimy, że stworzyliśmy jej model wykładniczy.

PRZYKŁAD 1 W 1971 r. w Indiach żyło 548 mln ludzi, a w 1991 r. — 846 mln. Liczba ludności Indii w latach 1971–1995 zmieniała się zgodnie z modelem wykładniczym.

a) Ustal wzór dla tego modelu.

$L(t) = b \cdot a^t$ — $L(t)$ — liczba ludności Indii (w mln); t — czas (w latach) od 1971 roku. Zapisujemy ogólny wzór modelu wykładniczego.

$548 = b \cdot a^0$ — Początkiem obserwacji populacji był rok 1971. Wówczas $t = 0$ odpowiada rokowi 1971, czyli $L(0) = 548$.

$b = 548$

$846 = b \cdot a^{20}$ — Rokowi 1991 odpowiada $t = 20$, więc $L(20) = 846$.

$846 = 548 \cdot a^{20}$ — $b = 548$

$a = \sqrt[20]{\frac{846}{548}} \approx 1{,}022$

Otrzymaliśmy wzór: $\underline{L(t) = 548 \cdot 1{,}022^t}$

b) Oszacuj liczbę ludności Indii w 1980 roku i w 1995 roku.

$L_{1980} = 548 \cdot 1{,}022^{9} \approx 667$

$L_{1995} = 548 \cdot 1{,}022^{24} \approx 924$

Korzystamy ze wzoru $L(t) = 548 \cdot 1{,}022^{t}$, gdy $t = 9$ i gdy $t = 24$.

Odp. W 1980 roku liczba ludności Indii wynosiła ok. 667 mln, a w 1995 roku — ok. 924 mln.

c) W 2000 roku liczba ludności Indii przekroczyła 1 miliard. Oblicz, w którym roku miało to nastąpić zgodnie z podanym wzorem.

$1000 = 548 \cdot 1{,}022^{t}$

Korzystamy ze wzoru $L(t) = 548 \cdot 1{,}022^{t}$, gdy $L(t) = 1000$.

$1{,}022^{t} = \frac{1000}{548}$

$\log 1{,}022^{t} = \log \frac{1000}{548}$

Logarytmujemy obie strony równania.

$t \cdot \log 1{,}022 = \log \frac{1000}{548}$

$t = \frac{\log \frac{1000}{548}}{\log 1{,}022}$

$t \approx 28$

28 lat po 1971 roku.

Odp. Zgodnie z podanym wzorem liczba ludności Indii miała przekroczyć 1 miliard w 1999 roku.

ZADANIE Liczba ludności Nigerii w latach 2006–2017 zmieniała się zgodnie z modelem wykładniczym. Ustal wzór dla tego modelu, wiedząc, że w 2006 r. w Nigerii żyło 140 mln ludzi, a w 2011 r. — 162 mln. Korzystając z tego wzoru, oszacuj liczbę ludności Nigerii w 2015 r. i ustal, w którym roku liczba ludności przekroczy 250 mln.

Ciekawostka

W 1862 roku prezydent Stanów Zjednoczonych Abraham Lincoln przedstawił Kongresowi prognozę liczby ludności USA do 1930 roku. Na podstawie spisów ludności z lat 1790–1860 Lincoln zauważył, że współczynnik przyrostu naturalnego w tym okresie był stały. Założył więc, że współczynnik ten nie będzie się zmieniał do 1930 roku, i stosując model wykładniczy, obliczył, że do tego czasu w USA będzie żyło ponad 250 mln ludzi. W rzeczywistości Stany Zjednoczone miały w 1930 roku 123 mln mieszkańców.

Jak widać, model wykładniczy do obliczania przyrostu populacji jest skuteczny tylko dla krótkich okresów, ponieważ zakłada niezmienność współczynnika przyrostu naturalnego. W rzeczywistości współczynnik ten nie jest stały i zależy od wielu czynników, m.in. od wielkości populacji, zmian kulturowych, migracji ludności, klęsk żywiołowych.

Model wykładniczy można stosować także do opisu innych wielkości niż populacja, ale tylko takich, które zmieniają się w stałym tempie.

ĆWICZENIE Masa M próbki zmienia się zgodnie z modelem wykładniczym. Ustal, czy masa ta rośnie, czy maleje, gdy:

a) $M = 20 \cdot 0{,}7^t$

b) $M = 10 \cdot 1{,}2^t$

zadania 1–3

II POZIOM GŁOŚNOŚCI DŹWIĘKU

Niektóre wielkości są opisywane liczbami od bardzo małych do bardzo dużych, tak że zakres wartości utrudnia posługiwanie się nimi.

Przykładem jest natężenie dźwięku mierzone w W/m^2. Ustalono, że próg słyszalności, czyli najniższe natężenia dźwięków, które słyszy przeciętny człowiek, wynosi 10^{-12} W/m^2. Najgłośniejszy dźwięk wyemitowany na Ziemi towarzyszył wybuchowi wulkanu Krakatau w Indonezji. Wynosił on 10^{23} W/m^2.

Siłę dźwięku określa się, obliczając, ile razy natężenie I tego dźwięku jest większe od natężenia I_0 dźwięku odpowiadającego progowi słyszalności. Tak więc siłę dźwięku opisuje iloraz $\frac{I}{I_0}$. Z informacji podanych powyżej wynika, że wartości tego ilorazu wahają się od 1 do 10^{35}. Skalą o takiej rozpiętości byłoby trudno się posługiwać. Natomiast logarytmy dziesiętne tych liczb przyjmują wartości od 0 ($\log 1 = 0$) do 35 ($\log 10^{35} = 35$).

Liczbami w takim zmniejszonym zakresie o wiele łatwiej się posługiwać, dlatego wprowadzono nowe pojęcie — poziom głośności dźwięku. Jest on najczęściej wyrażany w decybelach (w skrócie dB).

Poziom głośności dźwięku (w decybelach) można obliczyć ze wzoru:

$$L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

$L(I)$ — poziom głośności dźwięku (w decybelach)

I — natężenie dźwięku w W/m^2

I_0 — natężenie dźwięku odpowiadającego progowi słyszalności ($I_0 = 10^{-12}$ W/m^2)

Poziom głośności progu słyszalności wynosi 0 dB, a wybuch wulkanu Krakatau miał poziom głośności 350 dB.

Uwaga. Natężenie dwóch równoczesnych dźwięków jest sumą natężeń tych dźwięków, ale poziom głośności tych dwóch dźwięków nie jest sumą ich poziomów głośności, gdyż $\log(a + b) \neq \log a + \log b$ dla dodatnich a i b.

PRZYKŁAD 2 Poziom głośności gwizdka czajnika wynosi 90 dB, a gwizdka pociągu — 110 dB.

a) Ile razy natężenie dźwięku gwizdka pociągu jest większe od natężenia dźwięku gwizdka czajnika?

I_c — natężenie dźwięku gwizdka czajnika

I_p — natężenie dźwięku gwizdka pociągu

$90 = 10 \log \frac{I_c}{10^{-12}}$

$110 = 10 \log \frac{I_p}{10^{-12}}$

Korzystamy ze wzoru $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$, gdzie $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

$9 = \log \frac{I_c}{10^{-12}}$

$11 = \log \frac{I_p}{10^{-12}}$

$\frac{I_c}{10^{-12}} = 10^9$

$\frac{I_p}{10^{-12}} = 10^{11}$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$I_c = 10^9 \cdot 10^{-12}$

$I_p = 10^{11} \cdot 10^{-12}$

$I_c = 10^{-3} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$

$I_p = 10^{-1} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$

$\frac{I_p}{I_c} = \frac{10^{-1}}{10^{-3}} = 100$

Odp. Natężenie dźwięku gwizdka pociągu wynosi $10^{-1} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ i jest 100 razy większe od natężenia dźwięku gwizdka czajnika, które wynosi $10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

b) Oblicz poziom głośności dźwięku wydawanego przez gwizdki dwóch mijających się pociągów.

I — natężenie dźwięku gwizdków dwóch pociągów

$I = I_p + I_p = 2 \cdot 10^{-1}$

Natężenia dwóch równoczesnych dźwięków się dodaje; wcześniej obliczyliśmy, że $I_p = 10^{-1}$ W/m^2.

$L = 10 \log \frac{2 \cdot 10^{-1}}{10^{-12}} =$

Korzystamy ze wzoru $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$.

$= 10 \log(2 \cdot 10^{-1-(-12)}) =$

$= 10 \log(2 \cdot 10^{11}) =$

$\log(2 \cdot 10^{11}) = \log 2 + \log 10^{11}$

$= 10(\log 2 + \log 10^{11}) =$

$= 10(\log 2 + 11 \log 10) =$

$= 10(\log 2 + 11) \approx 113$

Odp. Poziom głośności dźwięku gwizdków dwóch pociągów to około 113 dB.

c) Ile gwizdków czajników stwarza hałas bolesny dla ucha, czyli o poziomie głośności 130 dB?

I_n — natężenie dźwięku n gwizdków czajników

$I_n = n \cdot I_c = n \cdot 10^{-3}$ — Obliczyliśmy wcześniej, że $I_c = 10^{-3}$ W/m^2.

$130 = 10 \log \frac{n \cdot 10^{-3}}{10^{-12}}$ — Korzystamy ze wzoru $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$.

$13 = \log(n \cdot 10^9)$ — Korzystamy z definicji logarytmu.

$n \cdot 10^9 = 10^{13}$

$n = \frac{10^{13}}{10^9}$

$n = 10^4$

Odp. Potrzeba aż 10 000 gwiżdżących czajników, aby poziom głośności wyniósł 130 dB.

ZADANIE Poziom głośności dźwięku wydawanego przez pewną lodówkę jest równy 40 dB, a przez pewien odkurzacz — 80 dB.

a) Ile razy natężenie dźwięku wydawanego przez odkurzacz jest większe od natężenia dźwięku wydawanego przez lodówkę?

b) Oblicz poziom głośności dźwięku wydawanego przez lodówkę i odkurzacz pracujące jednocześnie.

c) Ile pracujących odkurzaczy stwarza hałas o poziomie głośności 100 dB?

zadania 4–11

ZESTAW ZADAŃ

1. Liczba ludności Polski w latach 1962–1970 zmieniała się zgodnie z modelem wykładniczym. Skorzystaj z danych w tabelce i ustal wzór dla tego modelu.

Rok	1962	1964
Ludność Polski	30,5 mln	31,3 mln

a) Oszacuj, jaka była (według otrzymanego wzoru) liczba ludności Polski w 1970 r. Porównaj swoje wyniki z rzeczywistą liczbą ludności w tym roku (32,6 mln).

b) Oszacuj, jaka byłaby liczba mieszkańców Polski w bieżącym roku, gdyby przyrost naturalny z lat 1962–1964 utrzymywał się bez zmian aż do dzisiaj. Porównaj otrzymany wynik z rzeczywistą liczbą ludności Polski.

c) W którym roku zgodnie z tym modelem liczba ludności Polski przekroczyłaby 50 mln, gdyby przyrost naturalny z lat 1962–1964 utrzymywał się bez zmian?

2. Pacjent przyjął dawkę 50 mg pewnego leku. Wiadomo, że w ciągu 6 godzin z krwiobiegu jest usuwane 60% tego leku.

a) Masę m leku (w mg) pozostałą w organizmie po upływie czasu t (w godzinach) można obliczyć ze wzoru: $m = ab^t$, gdzie a i b są stałymi. Oblicz wartości tych stałych.

b) Ile leku pozostaje w krwiobiegu po upływie godziny, a ile — po upływie doby?

c) Pacjent powinien przyjąć drugą dawkę leku, zanim zawartość pierwszej dawki w krwiobiegu spadnie poniżej 10 mg. Po ilu godzinach od przyjęcia pierwszej dawki pacjent powinien przyjąć drugą dawkę?

3. W pewnej mazurskiej miejscowości podjęto walkę z plagą komarów. Specjaliści twierdzą, że systematyczne opryski spowodują zmniejszenie liczby komarów o 15% rocznie. Przyjmij, że przed opryskami populacja komarów wynosiła 2 mln.

a) Po jakim czasie liczba komarów powinna się zmniejszyć o połowę?

b) Walkę z komarami zamierza się przerwać, gdy populacja komarów będzie mniejsza niż 500 000. Jak długo będzie trwała ta walka?

II **4.** W ramce obok podano poziomy głośności kilku wybranych dźwięków.

szelest liści — 10 dB
skrzypce (pianissimo) — 30 dB
krzyk — 80 dB
młot pneumatyczny — 100 dB
orkiestra (fortissimo) —100 dB
koncert rockowy — 120 dB

a) Oblicz natężenie dźwięku wydawanego przez szeleszczące liście.

b) Ile razy mniejsze natężenie ma dźwięk skrzypiec grających pianissimo od dźwięku orkiestry grającej fortissimo?

c) Oblicz poziom głośności hałasu wydawanego przez dwa młoty pneumatyczne pracujące jednocześnie.

d) Oblicz poziom głośności koncertu wykonywanego równocześnie przez dziewięciu skrzypków grających pianissimo.

e) Oblicz poziom głośności hałasu, na który narażona jest osoba siedząca obok krzyczącego widza na głośnym koncercie rockowym.

f) Oblicz, ile pracujących młotów pneumatycznych wytwarza hałas równy poziomem głośności koncertowi rockowemu.

5. Przyjmij, że w grupie N osób informacja rozprzestrzenia się z taką prędkością, że po czasie t zna ją n osób. Według instytucji badających opinię publiczną liczbę tę można oszacować za pomocą wzoru: $n = N(1 - a^t)$, gdzie a oznacza stałą.

a) Po godzinie od momentu ogłoszenia wiadomości o podwyżce płac znało ją 300 z 500 pracowników fabryki. Ilu pracowników zapewne dowie się o tej nowinie po 2 godzinach, a ilu — po 6 godzinach?

b) Plotka o „dniu bez samochodu" po trzech dniach od jej powstania dotarła do 40% kierowców. Jaka część kierowców znała tę plotkę po pierwszym dniu? Kiedy znać ją będzie 80% kierowców?

Ciekawostka

Jądra atomów niektórych pierwiastków ulegają samoistnej przemianie w jądra innych pierwiastków. Zjawisku temu towarzyszy promieniowanie i dlatego nazwano je rozpadem promieniotwórczym. Masa pierwiastka ulegającego rozpadowi promieniotwórczemu zmniejsza się o połowę po upływie pewnego — ściśle określonego dla tego pierwiastka — czasu, zwanego okresem połowicznego rozpadu. Na przykład okres połowicznego rozpadu radu ^{226}Ra wynosi 1600 lat, zatem próbka radu ^{226}Ra o masie 10 g po 1600 latach będzie zawierać 5 g tego pierwiastka, a po kolejnych 1600 latach — tylko 2,5 g.

6. Przeczytaj ciekawostkę. Masa m pierwiastka promieniotwórczego po upływie czasu t wynosi:

$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie m_0 — masa początkowa pierwiastka, T — okres połowicznego rozpadu (podany w tej samej jednostce czasu co t).

a) Wykaż, że ten wzór jest zgodny z informacją o rozpadzie radu ^{226}Ra podaną w ciekawostce.

b) Okres połowicznego rozpadu izotopu cynku ^{65}Zn wynosi 244 dni. Pewna próbka zawiera 5 g tego izotopu. Oblicz masę ^{65}Zn w tej próbce po 2 latach.

c) Okres połowicznego rozpadu izotopu irydu ^{195}Ir wynosi 2,5 godziny. Oblicz, po jakim czasie zawartość tego izotopu w próbce zmniejszy się z 1 mg do 0,1 mg.

d) Zawartość izotopu cezu ^{137}Cs w próbce zmniejszyła się w ciągu 6 lat z 2 g do 1,74 g. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu.

Warto wiedzieć!

Niech a będzie liczbą naturalną. Liczba $\log a$ ma związek z liczbą jej cyfr. Zauważmy, że gdy $1 \leqslant a < 10$, to liczba a jest jednocyfrowa, gdy $10 \leqslant a < 100$, to liczba a jest dwucyfrowa. Ogólnie: Gdy $10^n \leqslant a < 10^{n+1}$, to liczba a ma $n+1$ cyfr. Funkcja $y = \log x$ jest rosnąca, więc:

$$\log 10^n \leqslant \log a < \log 10^{n+1}$$

Stąd $n \leqslant \log a < n+1$.

Aby zatem ustalić, ile cyfr ma na przykład liczba 3^{100}, wystarczy obliczyć jej logarytm dziesiętny i sprawdzić, między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi on się znajduje.

$\log 3^{100} = 100 \log 3 \approx 47{,}7$

Ponieważ $47 \leqslant \log 3^{100} < 48$, więc liczba 3^{100} ma 48 cyfr.

7. Przeczytaj informacje w ramce.

a) Oblicz, ile cyfr ma liczba 2^{1410} zapisana w systemie dziesiętnym.

b) Znajdź w internecie, jaka jest największa znana liczba pierwsza. Oblicz, ile ona ma cyfr.

Ciekawostka

Jednym z występujących w przyrodzie izotopów węgla jest ^{14}C. Okres połowicznego rozpadu ^{14}C wynosi 5715 lat. Każdy żywy organizm absorbuje węgiel ^{12}C i izotop ^{14}C z otoczenia. Tak długo, jak żyje roślina, zwierzę czy człowiek, stosunek liczby atomów ^{12}C do ^{14}C w organizmie się nie zmienia (1 atom ^{14}C przypada na 1012 atomów ^{12}C). Po śmierci organizmu atomy ^{14}C ulegają rozpadowi, a atomy ^{12}C — nie. Zatem im więcej czasu upływa od śmierci organizmu, tym większa jest przewaga liczby atomów ^{12}C nad liczbą atomów ^{14}C. Amerykański fizyk Willard F. Libby w 1946 roku opracował metodę, która pozwala wykorzystać to zjawisko do określenia wieku znalezisk pochodzenia organicznego. W tym celu spala się niewielką próbkę znaleziska i otrzymany dwutlenek węgla przepuszcza przez urządzenie, które rozdziela atomy ^{12}C i ^{14}C na podstawie różnicy ich mas. To pozwala określić, jak zmieniła się zawartość izotopu ^{14}C w znalezisku w porównaniu z zawartością ^{14}C w żywym organizmie, a w konsekwencji — wiek znaleziska.

Na przykład stwierdzono, że masa izotopu ^{14}C w znalezisku to tylko 90% masy tego izotopu, jaką zawierałby żywy organizm. Korzystając ze wzoru:

$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}, \text{ gdzie } T = 5715,$$

otrzymujemy:

$$0{,}9m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5715}}$$

$$0{,}9 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5715}}$$

$$\log 0{,}9 = \log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5715}}$$

$$\log 0{,}9 = \frac{t}{5715}\log\frac{1}{2}$$

$$t = 5715 \cdot \frac{\log 0{,}9}{\log\frac{1}{2}}$$

$$t \approx 870$$

Wynika stąd, że znalezisko pochodzi sprzed około 870 lat.

8. Przeczytaj ciekawostkę.

a) Odkrywca pewnego egipskiego grobowca twierdzi, że jego znalezisko pochodzi z okresu Średniego Państwa (około 2 tys. lat p.n.e.). Ponieważ niektórzy uczeni są innego zdania, przedmioty z grobowca będą poddane badaniom wieku metodą opartą na pomiarze zawartości izotopu ^{14}C. Jakiego procentu początkowej masy izotopu należy się spodziewać w znaleziskach, jeżeli ich odkrywca ma rację?

b) Pewien ekspert ma wątpliwości, czy obraz w muzeum jest dziełem wielkiego włoskiego malarza Giotta di Bondone (czyt. dżiotta di bondone) (1266–1337). Po zbadaniu zawartości izotopu węgla ^{14}C w płótnie i farbach okazało się, że stanowi ona 95% początkowej masy tego izotopu. Czy autorem obrazu mógł być Giotto?

c) W połowie XX wieku pewien genialny fałszerz podrobił obrazy jednego z najwybitniejszych malarzy holenderskich Johannesa Vermeera (1632–1675). Fałszerstwo udowodniono — mierząc zawartość izotopu ^{14}C. Jaki procent początkowej masy izotopu powinny zawierać płótno i farby, gdyby pochodziły z obrazu Vermeera?

d) Najstarszymi świadectwami operacji chirurgicznych przeprowadzanych przez naszych przodków są czaszki z wyciętymi otworami znalezione w Peru. Badania wykazały, że czaszki te zawierają zaledwie 23% początkowej masy ^{14}C. Sprzed ilu lat pochodzą te znaleziska?

Ciekawostka

Przedmiot umieszczony w otoczeniu o temperaturze niższej niż temperatura przedmiotu zacznie stygnąć. Gdy temperatura otoczenia jest stała, to temperaturę T przedmiotu po upływie czasu t opisuje wzór:

$$T(t) = T_0 + (T_p - T_0)a^t$$

T_0 — temperatura otoczenia (w °C)
T_p — początkowa temperatura przedmiotu (w °C)
a — stała charakterystyczna dla danego przedmiotu

9. Przeczytaj ciekawostkę. W laboratorium, w którym panowała temperatura 20°C, mierzono temperaturę herbaty w kubku. Wyniki pomiarów przedstawiono w tabeli. Znajdź wzór opisujący, jak się zmienia temperatura herbaty w zależności od czasu.

Czas t (w minutach)	0	1	5	10
Temperatura herbaty (w °C)	90	81,6	56,9	39,5

10. Ciasto wyjęte z piekarnika stygnie w kuchni, w której panuje temperatura 25°C. Temperaturę ciasta (w °C) po upływie t minut można obliczyć ze wzoru:

$$T(t) = 25 + 200 \cdot 0{,}9^t$$

a) Jaką temperaturę miało ciasto zaraz po wyjęciu z piekarnika?

b) Jaką temperaturę będzie miało ciasto po upływie 10 minut?

c) Kiedy ciasto ostygnie do temperatury 30°C?

11. Z przedstawionego w ciekawostce wzoru $T = T_0+(T_p-T_0)a^t$ korzystają specjaliści medycyny sądowej, określając czas, jaki upłynął od śmierci denata. Przyjmijmy, że policja znalazła zwłoki o godzinie 18^{00} oraz że temperatura ciała ofiary wynosiła 30°, a temperatura otoczenia, podobnie jak przez całe popołudnie, wynosiła 10°C. Przyjmijmy też, że po upływie godziny temperatura otoczenia się nie zmieniła, ale ciało ostygło do 28°C. Oblicz, o której godzinie nastąpił zgon.

MINISPRAWDZIAN

S1. Przeczytaj informacje na s. 131. Poziom głośności dźwięku wydawanego przez pracujący odkurzacz jest równy 60 dB. Jaki byłby poziom głośności hałasu spowodowanego jednoczesną pracą 100 takich odkurzaczy?

A. 70 dB B. 80 dB C. 160 dB D. 600 dB

S2. Przeczytaj ciekawostkę na s. 135. Okres połowicznego rozpadu izotopu fransu ^{223}Fr wynosi 22 minuty. Po jakim czasie zawartość tego izotopu w próbce zmniejszy się z 1 mg do 0,8 mg? Wynik zaokrąglij do jednej minuty.

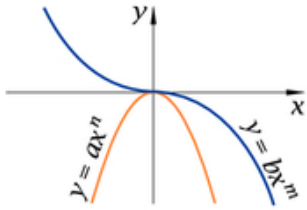
A. po 1 min B. po 7 min C. po 11 min D. po 18 min

POWTÓRZENIE

1. Narysuj wykres funkcji f, znajdź jej miejsca zerowe i określ przedziały monotoniczności.

$$f(x)=\begin{cases} x+7 & \text{dla } x<-4 \\ \frac{1}{2}x^2+x-1 & \text{dla } -4\leqslant x\leqslant 4 \\ -\frac{1}{4}x+12 & \text{dla } x>4 \end{cases}$$

2. Korzystając z rysunku, ustal, która z liczb — m czy n — jest parzysta oraz jakie znaki mają liczby a i b.



3. Rozwiąż nierówność.

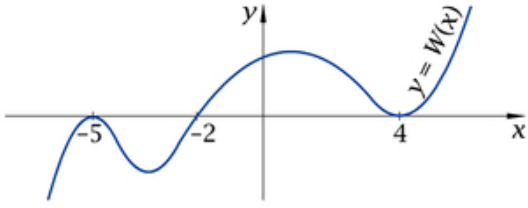
a) $(2x^2-x)(2x^2+11x-6)\leqslant 0$

b) $4x^3+3x^2-8x-6>0$

c) $-3x^4+10x^3+25x^2<0$

4. Znajdź wszystkie argumenty, dla których funkcja $f(x)=-3x^4(x-5)^3(x+2)^7$ przyjmuje wartości ujemne.

5. Funkcja wielomianowa, której fragment wykresu przedstawiono na rysunku, ma trzy miejsca zerowe. Korzystając z rysunku, rozwiąż podaną nierówność.



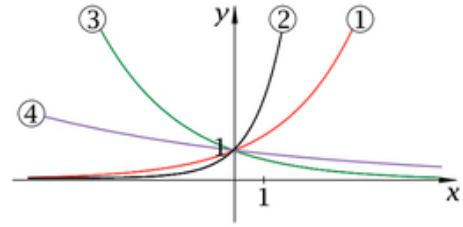
a) $(x+5)^2W(x)<0$ b) $-2x^4\cdot W(x)<0$

6. Znajdź wszystkie argumenty, dla których wartości funkcji $f(x)=2x^3-4x^2+x-3$ są większe od wartości funkcji $g(x)=-2x^3+5x^2-x-3$.

7. Dopasuj wzory funkcji do wykresów.

$f(x)=1{,}5^x$ $\quad g(x)=2{,}7^x$

$h(x)=0{,}7^x$ $\quad k(x)=\left(\frac{8}{9}\right)^x$



8. Naszkicuj wykres funkcji. Podaj jej miejsca zerowe i równanie asymptoty.

a) $f(x)=-\log(x-4)$

b) $f(x)=2+\log_{\frac{1}{2}}(-x)$

c) $f(x)=|\log_2 x|-3$

9. a) Punkty $(-1,7)$ i $\left(2,5\frac{1}{4}\right)$ leżą na wykresie funkcji $f(x)=a^x+b$. Oblicz wartości a i b.

b) Punkty $(9,5)$ i $\left(\sqrt{3},6\frac{1}{2}\right)$ leżą na wykresie funkcji $f(x)=a+\log_b x$. Oblicz wartości a i b.

10. Rozwiąż równanie.

a) $\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x=\frac{4}{25}$

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x-6=0$

c) $4^x\cdot 3^{x-2}=2^x$

d) $2\log_3\sqrt{x}-3\log_3\frac{1}{x}=8$

e) $\log_{\frac{1}{2}}x\cdot\log_4 x=-8$

f) $2+\log x=\log 3$

11. Pewien naukowiec ważył próbkę izotopu ołowiu ^{214}Pb. Na początku jej masa wynosiła 3,127 g, a po minucie 3,047 g. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu.

Figury na płaszczyźnie część 2

Wyobraź sobie, że stoisz na plaży w pogodny dzień i patrzysz na morze. Jak daleko linia horyzontu jest od twoich oczu?



Pole koła. Długość okręgu ■ Własności kątów środkowych i kątów wpisanych ■ Proste i okręgi ■ Okrąg opisany na wielokącie ■ Okrąg wpisany w wielokąt ■ Własności wielokątów. Wielokąty foremne ■ Powtórzenie

POLE KOŁA. DŁUGOŚĆ OKRĘGU

I

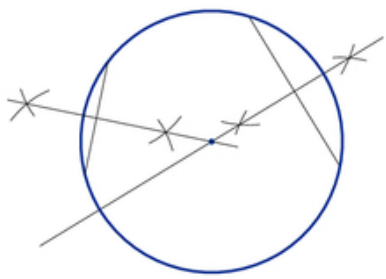
ĆWICZENIE A Jak narysować na piasku okrąg, mając do dyspozycji sznurek? Opisz słowami, jaką figurę nazywamy okręgiem, a jaką — kołem. Co nazywamy cięciwą okręgu, a co — średnicą?

Przypomnijmy, że **okrąg o środku S i promieniu r** to zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r.

Koło o środku O i promieniu r to zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza od r lub równa r.

ĆWICZENIE B Niech $o(S,r)$ oznacza okrąg o środku S i promieniu r i niech $k(S,r)$ oznacza koło o środku S i promieniu r. Punkty należące do okręgu spełniają warunek: $P \in o(S,r) \Leftrightarrow |PS| = r$. Zapisz podobny warunek dla koła.

Warto wiedzieć!



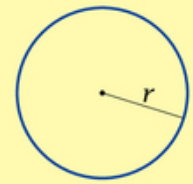
Środek okręgu leży na symetralnej każdej cięciwy okręgu, gdyż jest jednakowo odległy od końców tej cięciwy. Wobec tego aby wyznaczyć konstrukcyjnie środek danego okręgu, wystarczy narysować dwie nierównoległe cięciwy i skonstruować ich symetralne. Punkt przecięcia tych symetralnych jest szukanym środkiem okręgu.

Już w czasach starożytnych zauważono, że stosunek długości okręgu do długości jego średnicy jest dla wszystkich okręgów taki sam (niezależnie od wielkości okręgu). Liczba równa temu stosunkowi jest niewymierna i oznaczamy ją literą π.

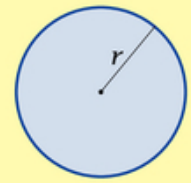
$$\frac{\text{długość okręgu}}{\text{długość średnicy}} = \pi$$

Oto kilkanaście początkowych cyfr rozwinięcia dziesiętnego tej liczby:

$$\pi = 3{,}14159265358979\ldots$$



Długość okręgu:
$\boldsymbol{l = 2\pi r}$



Pole koła:
$\boldsymbol{P = \pi r^2}$

Z historii

Oznaczenie stosunku długości okręgu do długości średnicy literą π być może wzięło się stąd, że jest to pierwsza litera greckiego słowa $\pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$ (perimetros) — obwód.

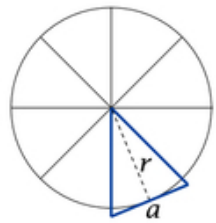
Od wieków stosowane były rozmaite przybliżenia liczby π. Na przykład z pewnego fragmentu Biblii (I Księga Królewska, rozdział 7, 23) wynika, że w czasach biblijnych przyjmowano $\pi \approx 3$. Egipcjanie (XX w. p.n.e.) przyjmowali $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2$, a Archimedes (III w. p.n.e.) przyjął $\pi \approx \frac{22}{7}$.

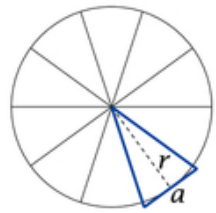
Także w czasach nowożytnych starano się podać jak najdokładniejszą wartość π. W 1610 r. holenderski uczony Ludolph van Ceulen (czyt. ludolf fan kylen) podał 35 cyfr po przecinku liczby π. Na jego cześć liczba π nazywana jest czasem ludolfiną.

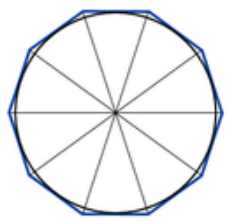
Wykorzystując komputery, w roku 2016 ustalono około 22,5 biliona cyfr po przecinku liczby π. Obliczenia zajęły 105 dni. Liczba π jest niewymierna, co oznacza, że cyfry jej rozwinięcia dziesiętnego pojawiają się nieregularnie. Ciekawostką jest, że w tym rozwinięciu można znaleźć dowolną sekwencję kilku cyfr. Na przykład sekwencja 01052004, czyli kolejne cyfry daty przystąpienia Polski do Unii Europejskiej, pojawiają się w pierwszych 100 milionach cyfr po przecinku. Można to sprawdzić, wykorzystując odpowiedni program komputerowy dostępny w internecie.

Wzór, który pozwala obliczać długość l okręgu, wynika wprost z określenia liczby π. (Ponieważ $\pi = \frac{l}{2r}$, więc $l = 2\pi r$).

Pokażemy teraz, jak można by próbować uzasadnić wzór na pole koła.







Wyobraźmy sobie, że koło o promieniu r dzielimy na jednakowe części (zob. rysunek). Pole każdej z tych części niewiele się różni od pola trójkąta o podstawie a i wysokości r, czyli wynosi w przybliżeniu $\frac{a \cdot r}{2}$.

Jeśli liczba części, na które dzielimy koło, jest równa n, to podstawa a trójkąta jest w przybliżeniu równa $\frac{1}{n}$ długości okręgu, czyli:

$$a \approx \frac{1}{n} \cdot 2\pi r = \frac{2\pi r}{n}$$

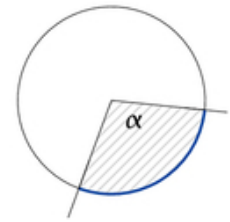
Pole każdej części to $\frac{1}{n}$ pola koła. Zatem:

$$\text{pole koła} \approx n \cdot \frac{a \cdot r}{2} \approx n \cdot \frac{\frac{2\pi r}{n} \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Im więcej będzie części, na które dzielimy koło, tym przybliżenie będzie dokładniejsze. Możemy zatem przyjąć, że pole koła jest równe πr^2.

zadania 1–11

II ĆWICZENIE C Popatrz na rysunek obok. Ile razy długość części okręgu zaznaczonej niebieskim kolorem jest mniejsza od długości całego okręgu, jeśli $\alpha = 108°$? Jaką część pola całego koła stanowi pole zaznaczonej figury?



Kąt o wierzchołku w środku koła nazywamy **kątem środkowym**. Część wspólna kąta środkowego i koła to **wycinek koła**, a część wspólna tego kąta i okręgu to **łuk okręgu**. Mówimy, że kąt środkowy jest oparty na tym łuku.

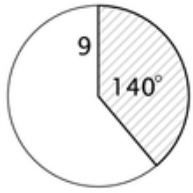
Długość łuku to pewien ułamek długości okręgu, a pole wycinka koła to ułamek pola koła. Ułamek ten jest równy $\frac{\alpha}{360°}$.



Długość łuku okręgu: $l = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$

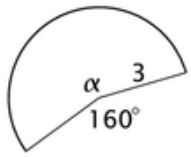
Pole wycinka koła: $P = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$

PRZYKŁAD a) Kąt środkowy w kole o promieniu 9 ma miarę 140°. Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez ten kąt.



Pole wycinka $= \frac{140°}{360°} \cdot \pi \cdot 9^2 = \frac{7}{18} \cdot 81 \cdot \pi = \underline{\frac{63}{2}\pi}$

b) Na rysunku przedstawiono wycinek koła. Oblicz obwód tej figury.



$\alpha = 360° - 160° = 200°$

Łuk jest wycięty przez kąt środkowy α o mierze 200°.

$l = \frac{200°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 3 = \frac{5}{9} \cdot 6\pi = \frac{10}{3}\pi$

Obwód wycinka $= \underline{6 + \frac{10}{3}\pi}$

ZADANIE W kole o promieniu 10 zaznaczono kąt środkowy o mierze 40°. Oblicz pole oraz obwód wycinka koła wyznaczonego przez ten kąt.

zadania 12–18

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz:

a) pole koła o promieniu 7,

b) pole koła o średnicy 12,

c) długość okręgu o średnicy 17,

d) promień koła o polu 10,

e) promień okręgu o długości 5,

f) obwód koła o polu 4.

2. Zapisz wzór, który pozwala obliczać:

a) długość okręgu l, gdy dana jest jego średnica d,

b) pole koła P, gdy dany jest jego obwód l,

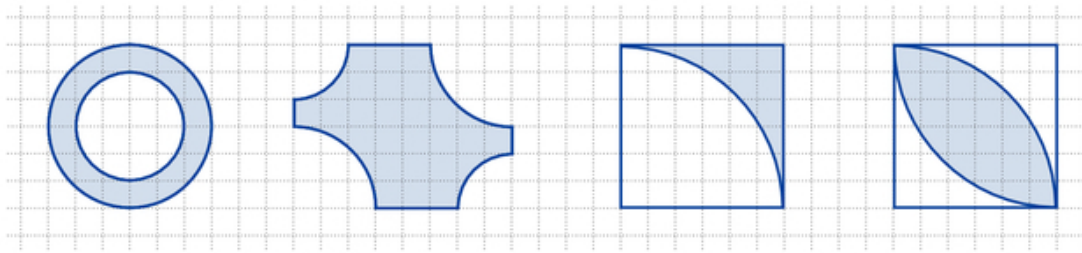
c) średnicę koła d, gdy dane jest jego pole P,

d) obwód koła l, gdy dane jest jego pole P.

3. Minutowa wskazówka pewnego zegara ma 8 cm. Oblicz, jaką drogę pokonuje koniec tej wskazówki w ciągu:

a) godziny, **b)** doby, **c)** kwadransa, **d)** 45 minut.

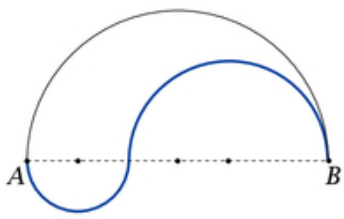
4. Oblicz pola zacieniowanych figur. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.



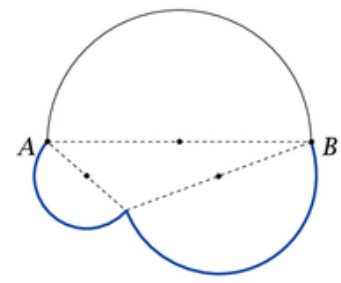
5. Z koła o promieniu R chcemy wyciąć trzy jednakowe koła tak, aby suma ich pól i pole pozostałej części były równe. Jaki promień powinny mieć wycinane koła?

6. Punkty A i B są połączone dwiema liniami zbudowanymi z półokręgów — czarną i niebieską.

a) Uzasadnij, że niebieska i czarna linia na poniższym rysunku mają tę samą długość.



b) Która z linii na poniższym rysunku jest dłuższa — niebieska czy czarna?



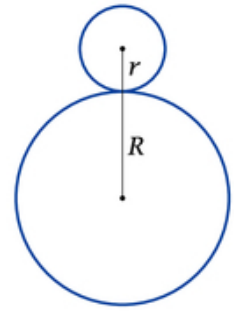
7. **a)** Zapisz, jaką długość ma bok kwadratu, który ma takie samo pole jak koło o promieniu r.

b) Koło i kwadrat mają równe pola. Która figura ma większy obwód? Ile razy?

Ciekawostka

Jak skonstruować za pomocą cyrkla i linijki kwadrat o polu równym polu danego koła? Problem ten, nazwany *kwadraturą koła*, próbowano rozwiązać przez ponad 2000 lat. Dopiero w XIX w. udowodniono, że taka konstrukcja jest niemożliwa. Wykazano tym samym, że dla danego odcinka o długości r niemożliwe jest skonstruowanie odcinka o długości $r\sqrt{\pi}$. W wielu językach kwadratura koła oznacza w przenośni problem nie do rozwiązania.

8. Długość średnicy koła samochodu wynosi około 64 cm. Ile obrotów na godzinę wykonują koła tego samochodu, gdy jedzie on z prędkością 60 km/h? Ile to obrotów na minutę? Ile to obrotów na sekundę?



9. Popatrz na rysunek obok. Wyobraź sobie, że małe koło obraca się (wokół swojego środka) i toczy po brzegu dużego koła. Ile obrotów musi wykonać małe koło, aby wrócić w to samo miejsce, jeśli $R = 10$ i $r = 2$?

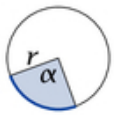
10. Ziemia jest oddalona od Słońca o około 150 mln km. Z jaką prędkością porusza się wokół Słońca? Możesz przyjąć, że orbita Ziemi jest okręgiem. W rzeczywistości orbita ta jest elipsą („spłaszczonym" okręgiem, ale to spłaszczenie jest niewielkie).



11. Wyobraź sobie, że jakaś maszyna latająca wisi nieruchomo na wysokości 1 km nad pewnym punktem leżącym na równiku. Z jaką prędkością porusza się ta maszyna, obracając się (wraz z Ziemią) wokół ziemskiej osi? Porównaj tę prędkość z prędkością punktu, nad którym wisi maszyna. Przyjmij, że równikowy promień Ziemi to 6371 km.

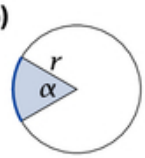
12. Oblicz długości zaznaczonych łuków oraz pola zacieniowanych figur.

a)



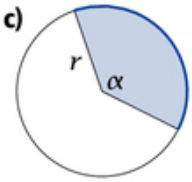
$\alpha = 90^\circ$
$r = 12$

b)



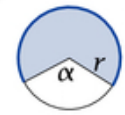
$\alpha = 60^\circ$
$r = 15$

c)



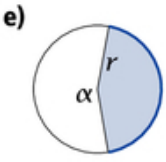
$\alpha = 135^\circ$
$r = 20$

d)



$\alpha = 120^\circ$
$r = 12$

e)

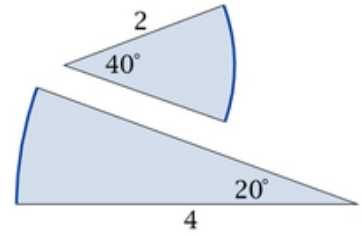


$\alpha = 200^\circ$
$r = 15$

13. Na rysunkach przedstawiono wycinki kół z zaznaczonymi łukami.

a) Który łuk jest dłuższy?

b) Który wycinek ma większe pole? Ile razy jest większe?

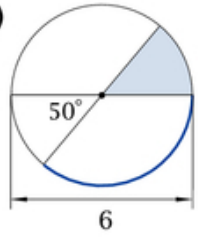


14. **a)** Oblicz długość promienia okręgu, w którym kąt o wierzchołku w środku okręgu ma 45° i jest oparty na łuku o długości 2π.

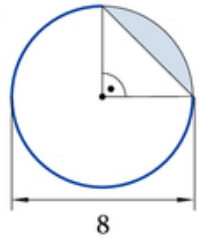
b) Oblicz długość promienia koła, w którym wycinkowi o polu $\frac{1}{9}\pi$ odpowiada kąt o mierze 30°.

15. Oblicz pole zacieniowanego obszaru i długość zaznaczonego łuku.

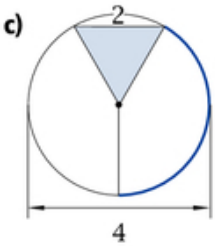
a)



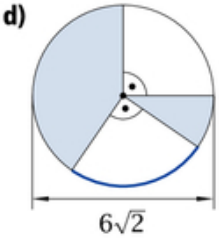
b)



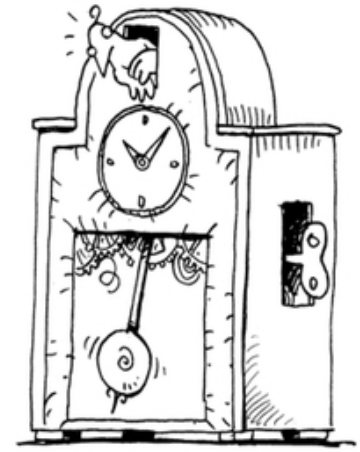
c)



d)



16. Wahadło starego zegara ma długość 50 cm i odchyla się od pionu o 18°. Pełne wahnięcie (od lewej do prawej i z powrotem) trwa 2 sekundy. Jaką drogę pokonuje końcówka wahadła w ciągu godziny?



17. Miary kątów można wyrażać w innych jednostkach niż stopnie, np. w radianach. Miara kąta środkowego jest równa 1 radianowi, gdy łuk, na którym ten kąt jest oparty, ma taką samą długość jak promień okręgu.

a) 1 radian — ile to stopni?

b) 90° — ile to radianów?



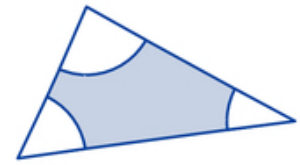
18. Koniec wskazówki minutowej pewnego zegara wieżowego jest oddalony od środka tarczy o 2,5 m. Jaką drogę pokonał koniec tej wskazówki, gdy obróciła się ona o kąt 2°45′? Jak długo trwał ten obrót?

MINISPRAWDZIAN

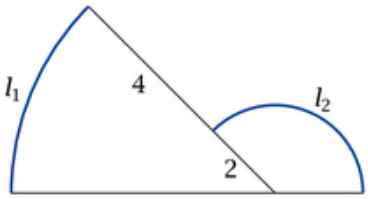
S1. Aby wycinek koła o promieniu 3 miał pole równe $\frac{\pi}{8}$, kąt środkowy tego wycinka musi być równy:

A. 15° B. 5° C. 7,5° D. 2,5°

S2. Z trójkąta o polu 12 wycięto trzy wycinki koła — każdy o promieniu 2 i środku w wierzchołku trójkąta (zob. rysunek). Jakie pole ma zacieniowana część trójkąta?



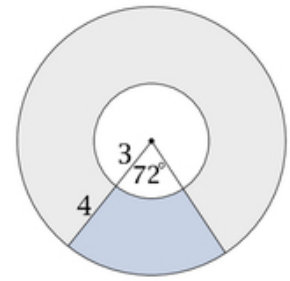
A. $12-\frac{3}{4}\pi$ B. $12-\frac{3}{2}\pi$ C. $12-2\pi$ D. $12-4\pi$



S3. Na rysunku obok l_1 i l_2 są łukami okręgów i długość l_1 jest równa 2π. Długość l_2 jest równa:

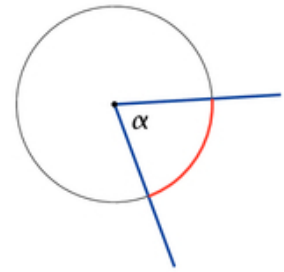
A. π B. $\frac{7\pi}{6}$ C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{2}$

S4. Popatrz na rysunek obok. Kąt środkowy podzielił pierścień na dwie części. O ile większy jest obwód części zaznaczonej na szaro od obwodu części zaznaczonej na niebiesko?



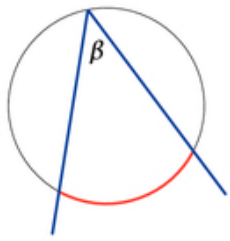
A. O 8 B. O 9π C. O $8{,}4\pi$ D. O 12π

WŁASNOŚCI KĄTÓW ŚRODKOWYCH I KĄTÓW WPISANYCH



I Na rysunku obok zaznaczono kąt środkowy α oraz łuk, na którym ten kąt jest oparty.

Na tym rysunku można wskazać jeszcze jeden kąt środkowy, jego miara wynosi $360° - \alpha$. Łuk, na którym ten kąt jest oparty, zaznaczono kolorem czarnym.

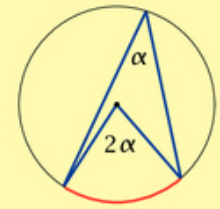


Kąt wpisany to kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, ramiona przecinają okrąg, a miara jest mniejsza od 180°. Na rysunku obok zaznaczono kąt wpisany β i łuk, na którym ten kąt jest oparty.

Zauważ, że jest tylko jeden kąt środkowy oparty na danym łuku, natomiast istnieje nieskończenie wiele kątów wpisanych opartych na tym łuku.

Twierdzenie o kątach wpisanym i środkowym opartych na tym samym łuku

Kąt wpisany ma dwa razy mniejszą miarę niż kąt środkowy oparty na tym samym łuku.



Dowód

Przyjmijmy, że kąt α to kąt wpisany, a kąt β to kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt α. Pokażemy, że $\beta = 2\alpha$.

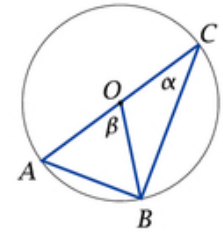
Możliwe są trzy przypadki położenia środka okręgu względem kąta wpisanego α: środek okręgu może leżeć na ramieniu kąta α, może leżeć wewnątrz tego kąta, może też leżeć na zewnątrz kąta.

1. Niech środek okręgu leży na ramieniu kąta wpisanego α, tak jak pokazano na rysunku obok. Trójkąt BCO jest równoramienny, więc:

$|\sphericalangle BOC| = 180° - 2\alpha$

Kąt β oraz $\sphericalangle BOC$ to kąty przyległe, więc:

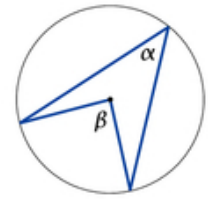
$\beta = 180° - |\sphericalangle BOC| = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$

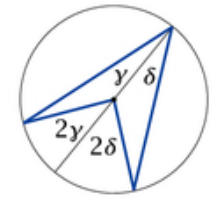


2. Niech środek okręgu leży wewnątrz kąta wpisanego α, tak jak pokazano na pierwszym z rysunków poniżej.

Prowadząc średnicę z wierzchołka kąta α, dzielimy kąt α na dwa kąty γ i δ. Wtedy kąt β także zostanie podzielony na dwa kąty. Z poprzednich rozważań wiemy, że te kąty to 2γ i 2δ, zatem:

$$\alpha = \gamma + \delta \qquad \beta = 2\gamma + 2\delta$$





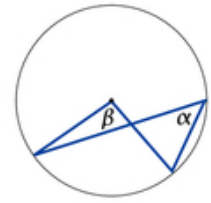
Stąd:

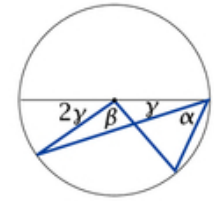
$\beta = 2(\gamma + \delta) = 2\alpha$

3. Niech środek okręgu leży na zewnątrz kąta wpisanego α, tak jak pokazano na pierwszym rysunku poniżej.

Prowadząc średnicę z wierzchołka kąta α, otrzymujemy sytuację przedstawioną na drugim rysunku. Kąt wpisany $\alpha + \gamma$ jest oparty na tym samym łuku co kąt środkowy $\beta + 2\gamma$. Z poprzednich rozważań wiemy, że:

$$\beta + 2\gamma = 2(\alpha + \gamma)$$





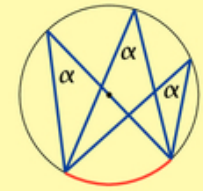
Stąd:

$\beta = 2(\alpha + \gamma) - 2\gamma = 2\alpha$

W każdym z rozważanych przypadków otrzymaliśmy $\beta = 2\alpha$. □

Twierdzenie o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku

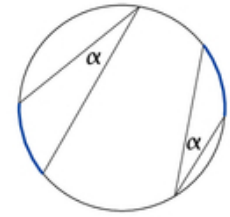
Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.

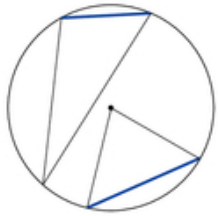


Dowód

Z poprzedniego twierdzenia wynika, że gdy kąty wpisane są oparte na tym samym łuku, to każdy z nich ma miarę dwa razy mniejszą niż kąt środkowy oparty na tym łuku. Zatem wszystkie te kąty wpisane mają równe miary. □

Jeśli łuki danego okręgu mają równe długości, to kąty środkowe, które je wycinają, mają równe miary. Wynika stąd, że kąty wpisane są równe także wtedy, gdy są oparte na łukach o tej samej długości.

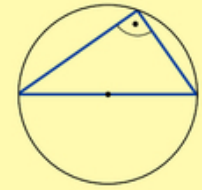




Gdy kąt środkowy lub kąt wpisany jest oparty na pewnym łuku, to można też powiedzieć, że jest on oparty na cięciwie łączącej końce łuku.

Twierdzenie o kącie wpisanym opartym na średnicy

Kąt wpisany oparty na średnicy jest kątem prostym.



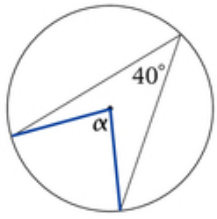
Dowód

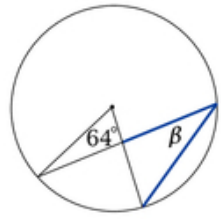
Kąt środkowy oparty na półokręgu ma miarę 180°. Kąt wpisany oparty na średnicy ma miarę dwa razy mniejszą od niego, czyli jest kątem prostym. □

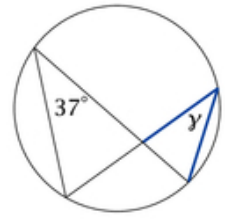
zadania 1–12

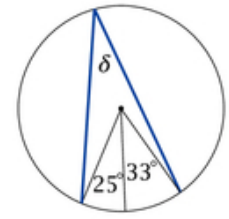
ZESTAW ZADAŃ

1. Podaj miary kątów α, β, γ i δ.

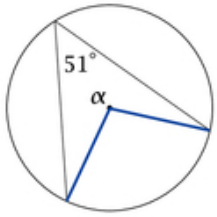


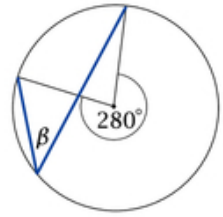


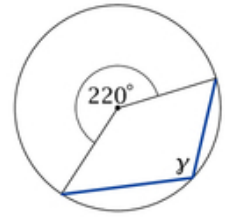


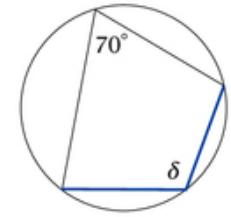


2. Podaj miary kątów α, β, γ i δ.

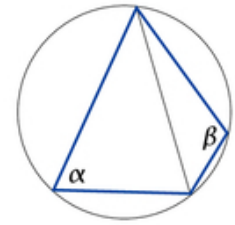








3. Popatrz na rysunek obok. Uzasadnij, że suma miar kątów wpisanych α i β opartych na tej samej cięciwie jest równa 180°.



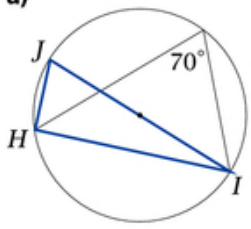
4. Jaka jest miara kąta wpisanego w okrąg, opartego na cięciwie o długości równej promieniowi tego okręgu?

Uwaga. Zadanie ma dwa rozwiązania.

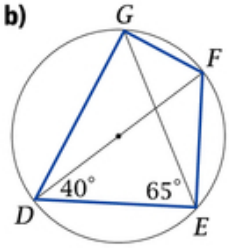
5. Punkt C leży na okręgu o średnicy AB. Wiadomo, że $|AC| = 8\,\text{cm}$, $|BC| = 10\,\text{cm}$. Oblicz pole trójkąta ABC.

6. Oblicz miary kątów wielokąta, którego boki zaznaczono niebieskim kolorem.

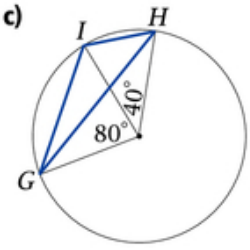
a)



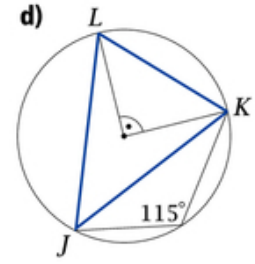
b)



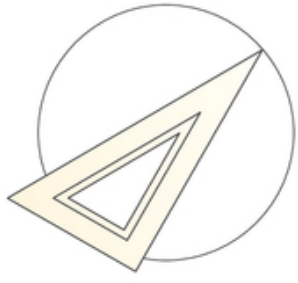
c)



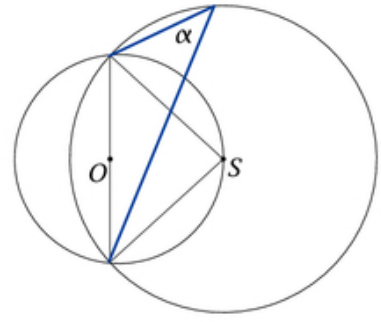
d)



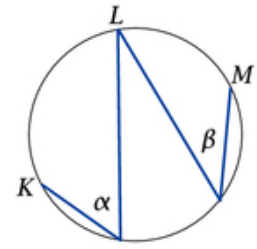
7. Popatrz na poniższy rysunek. Kąty ostre ekierki mają miary 30° i 60°. Jaką część okręgu zakrywa ta ekierka?

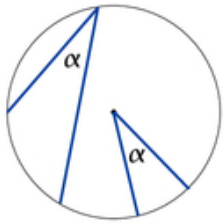


8. Punkty O i S na rysunku poniżej są środkami narysowanych okręgów. Jaką miarę ma kąt α?



9. Na rysunku obok kąt α ma miarę 54°, a kąt β ma 36°. Uzasadnij, że odcinek KM jest średnicą okręgu.

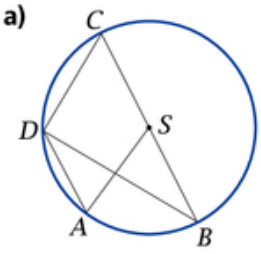




10. Ze środka areny cyrkowej (która ma kształt koła) można oświetlić latarką fragment bandy o długości 3 m. Jak długi fragment bandy można oświetlić tą latarką z punktu na bandzie? Sytuację opisaną w zadaniu przedstawiono na rysunku obok.

11. Korzystając z informacji podanej obok rysunku, oblicz miary kątów wpisanych DCB i ADB.

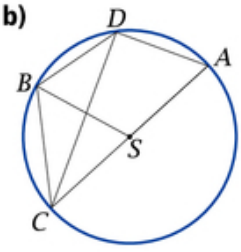
a)



$|\sphericalangle DBC| = 32°48'$

$|\sphericalangle ASB| = 63°32'$

b)



$|\sphericalangle ASB| = 109°20'$

$|\sphericalangle CAD| = 62°34'$

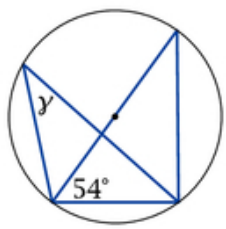
12. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu i $|AB| = |CD|$. Udowodnij, że czworokąt, którego wierzchołkami są te punkty, jest trapezem.

MINISPRAWDZIAN

S1. Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku S. W czworokącie $ABCS$ kąt ABC ma miarę 70°. Jaką miarę ma kąt ASC w tym czworokącie?

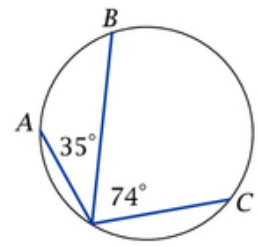
A. 70° B. 140° C. 220° D. 35°

S2. Kąt y na rysunku ma miarę:



A. 27° B. 36° C. 18° D. 54°

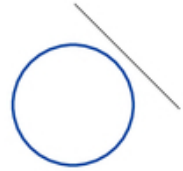
S3. Największy kąt trójkąta ABC ma miarę:



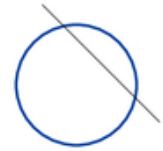
A. 35° B. 71° C. 74° D. 90°

PROSTE I OKRĘGI

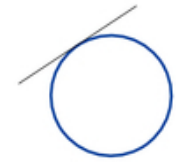
I Prosta i okrąg mogą nie mieć punktów wspólnych, mogą przecinać się w dwóch punktach albo mieć jeden punkt wspólny. Prostą, która ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną do okręgu**.



okrąg i prosta są rozłączne



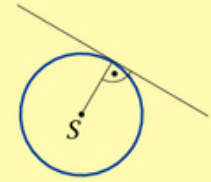
prosta przecina okrąg



okrąg i prosta są styczne

Twierdzenie

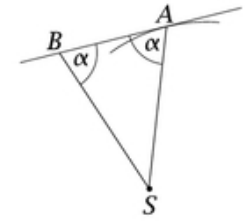
Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.



Dowód

Uzasadnienie przeprowadzimy metodą nie wprost.

Przypuśćmy, że jeden z kątów między styczną do okręgu a promieniem poprowadzonym do punktu styczności jest ostry. Na rysunku to kąt α o wierzchołku A. Prowadząc ze środka okręgu inną prostą niż SA, ale nachyloną do stycznej pod kątem α, otrzymamy trójkąt równoramienny ABS.



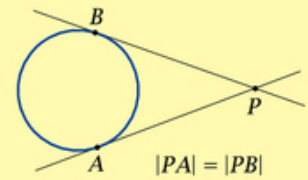
Wówczas $|SB| = |SA|$ i punkt B musiałby należeć do okręgu, byłby więc drugim punktem wspólnym stycznej i okręgu, co przeczy definicji stycznej. □

zadania 1–7

II

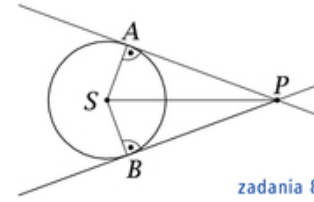
Twierdzenie

Gdy styczne do okręgu się przecinają, to odcinki łączące punkt przecięcia z punktami styczności mają równe długości.



Dowód

Niech proste PA i PB będą stycznymi do okręgu o środku S w punktach A i B. Wówczas trójkąty PSA i PSB są prostokątne, mają wspólną przeciwprostokątną PS oraz $|SA| = |SB|$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|PA| = |PB|$. □

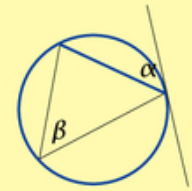


zadania 8–10

III

Twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą

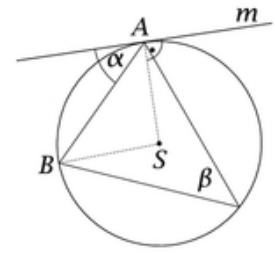
Kąt ostry α między cięciwą okręgu a styczną w punkcie, który jest końcem cięciwy, jest równy kątowi ostremu wpisanemu w okrąg opartemu na tej cięciwie.



$\alpha = \beta$

Dowód

Przyjmijmy, że prosta m i okrąg o środku S są styczne w punkcie A i kąt ostry między prostą m i cięciwą AB jest równy α (zob. rysunek obok).



Wówczas:

$|\sphericalangle SAB| = 90° - \alpha$

Trójkąt SAB jest równoramienny, więc:

$|\sphericalangle ASB| = 180° - 2 \cdot |\sphericalangle SAB| = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$

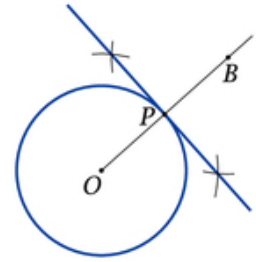
Kąt β to kąt wpisany oparty na cięciwie AB, więc:

$\beta = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASB| = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$ □

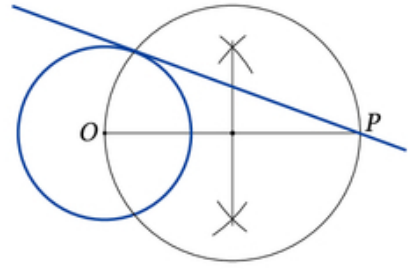
Warto wiedzieć!

Niech O będzie środkiem okręgu. Przez punkt P chcemy poprowadzić styczną do tego okręgu.

Gdy punkt P leży na okręgu, to wystarczy poprowadzić półprostą OP i skonstruować prostą do niej prostopadłą przechodzącą przez punkt P (zob. pierwszy rysunek).



Gdy punkt P leży na zewnątrz okręgu, to najpierw wyznaczamy środek odcinka OP i rysujemy okrąg, którego średnicą jest OP. Następnie prowadzimy prostą przez punkt P i punkt wspólny okręgów (zob. drugi rysunek).



Narysowana prosta jest prostopadła do promienia danego okręgu, gdyż wiadomo, że kąt wpisany oparty na średnicy OP jest kątem prostym, zatem ta prosta jest szukaną styczną.

Oczywiście prowadząc prostą przez punkt P i drugi wspólny punkt okręgów, też otrzymamy styczną do okręgu.

zadania 11–13

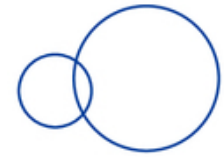
IV Dwa różne okręgi mogą być położone względem siebie tak, że nie mają punktów wspólnych albo mają dwa punkty wspólne, albo tylko jeden punkt wspólny. Gdy okręgi mają tylko jeden punkt wspólny, mówimy, że są styczne.



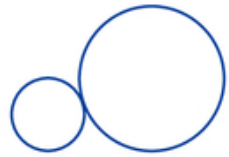
okręgi rozłączne zewnętrznie



okręgi rozłączne wewnętrznie



okręgi przecinające się



okręgi styczne zewnętrznie

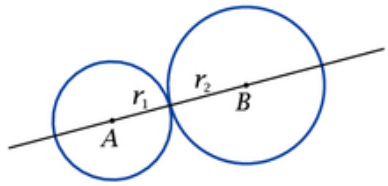


okręgi styczne wewnętrznie

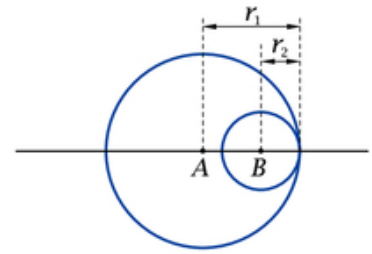
Uwaga. O okręgach, które mają wspólny środek, mówimy, że są współśrodkowe. Jeśli okręgi współśrodkowe mają różne promienie, to okręgi te są oczywiście rozłączne. Jeśli promienie okręgów współśrodkowych są jednakowe, to okręgi mają nieskończenie wiele punktów wspólnych (pokrywają się).

ĆWICZENIE A Narysuj okrąg o promieniu 2 cm. Oznacz jego środek literą O i poprowadź przez punkt O dowolną prostą. Narysuj za pomocą cyrkla okrąg o środku na narysowanej prostej styczny do narysowanego okręgu.

Prosta przechodząca przez środki dwóch okręgów stycznych przechodzi także przez punkt ich styczności. Wynika stąd, że odległość między środkami okręgów stycznych jest równa sumie lub różnicy długości promieni tych okręgów.



$|AB| = r_1 + r_2$



$|AB| = r_1 - r_2$

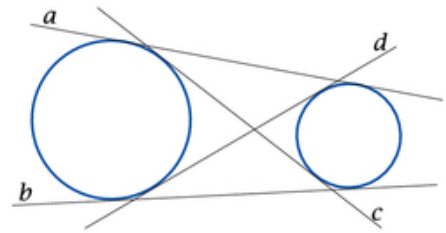
ĆWICZENIE B Okrąg o środku S ma promień długości 2, a okrąg o środku T ma promień długości 5. Określ wzajemne położenie tych okręgów, jeśli:

a) $|ST| = 7$ b) $|ST| = 8$ c) $|ST| = 4$

ĆWICZENIE C Ile może być prostych jednocześnie stycznych do dwóch okręgów? Rozważ różne położenia okręgów.

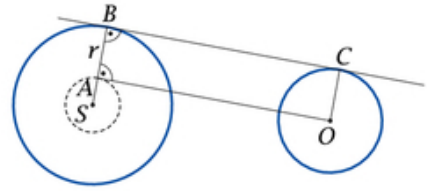
Ciekawostka

Na poniższym rysunku okręgi są rozłączne zewnętrznie, a każda z czterech prostych jest styczna do obu okręgów. Pokażemy, jak konstruować takie proste.

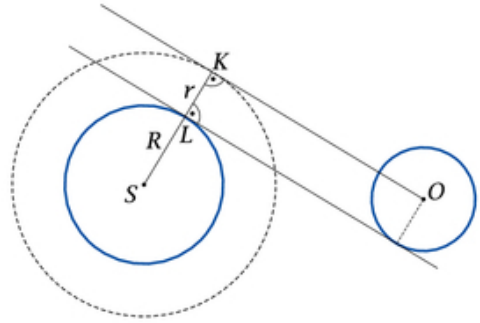


Niech okrąg o środku S i promieniu R leży na zewnątrz okręgu o środku O i promieniu r. Przyjmijmy, że $R > r$.

Sposób konstruowania prostej a: Rysujemy okrąg o środku S i promieniu $R - r$, następnie prowadzimy z punktu O prostą styczną do tego okręgu (w sposób opisany na s. 152). Przez otrzymany punkt styczności A prowadzimy półprostą SA, która przecina duży okrąg w punkcie B. Prowadząc przez punkt B prostą prostopadłą do półprostej SA, otrzymamy szukaną styczną, bo czworokąt $AOCB$ jest prostokątem.



Sposób konstruowania prostej c: Rysujemy okrąg o środku S i promieniu $R + r$, następnie wyznaczamy prostą styczną do tego okręgu przechodzącą przez punkt O. Rysujemy promień SK (gdzie K jest punktem styczności) i przez punkt L — wspólny punkt okręgu o promieniu R i odcinka SK — prowadzimy prostą prostopadłą do SK. Ta prosta jest szukaną styczną.

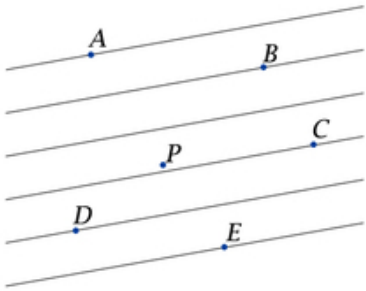


Zauważ, że prostą b można skonstruować podobnie jak prostą a, zaś prostą d podobnie jak prostą c.

zadania 14–23

ZESTAW ZADAŃ

1. Proste na poniższym rysunku są parami równoległe. Odległości między sąsiednimi prostymi są równe 1.



a) Pewien okrąg o środku A ma z narysowanymi prostymi dokładnie trzy punkty wspólne. Jaką długość ma promień tego okręgu?

b) Czy okrąg o środku B może mieć z tymi prostymi dokładnie trzy punkty wspólne?

c) Jaki promień może mieć okrąg o środku C, aby przecinała go dokładnie jedna prosta?

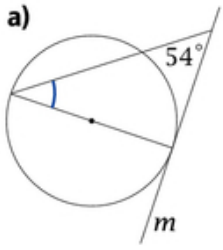
d) Jaki promień powinien mieć okrąg o środku D, aby przecinały go cztery proste (każda w dwóch punktach)?

e) Jaki promień może mieć okrąg o środku E, jeśli wiadomo, że okrąg ten ma z narysowanymi prostymi dokładnie cztery punkty wspólne?

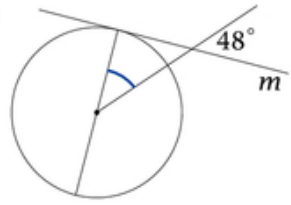
f) Ile prostych przecina okrąg o środku P i promieniu 2?

2. Prosta m jest styczna do okręgu. Podaj miarę kąta, który zaznaczono łukiem.

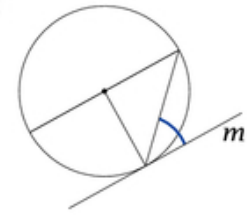
a)



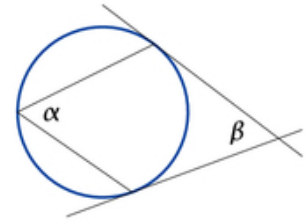
b)

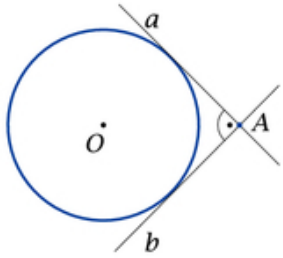


c)



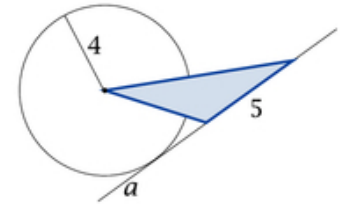
3. Ramiona kąta β na rysunku obok są styczne do okręgu. Jaki jest związek między miarami kątów α i β?

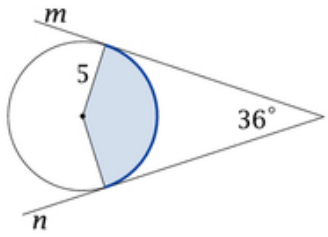




4. Proste a i b na rysunku obok są styczne do okręgu o środku O. Oblicz odległość punktu A od punktu O, gdy promień okręgu ma długość 5.

5. Prosta a na rysunku obok jest styczna do okręgu. Oblicz pole zacieniowanego trójkąta.





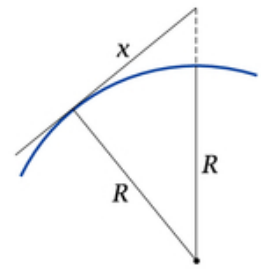
6. Proste m oraz n na rysunku obok są styczne do okręgu. Oblicz pole zacieniowanego wycinka koła.

7. Wyobraź sobie, że stoisz nad brzegiem morza.

a) Jak daleko od twoich oczu jest horyzont, jeśli twoje oczy znajdują się na wysokości 1,5 m nad poziomem morza? Przyjmij, że promień Ziemi ma 6371 km.

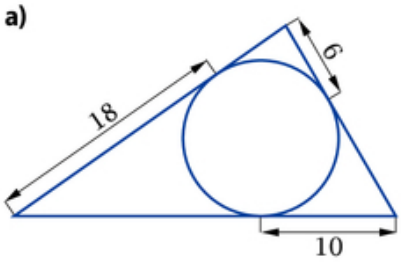
b) O ile dalej sięgnie twój wzrok, jeśli wejdziesz na drzewo tak wysoko, że twoje oczy znajdą się 15 m nad poziomem morza?

c) Czy wystarczy wznieść się 1 km nad poziom morza, aby horyzont znajdował się w odległości ponad 100 km od oczu?

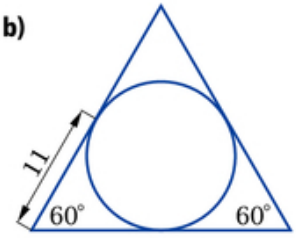


II **8.** Boki narysowanego trójkąta są styczne do okręgu. Oblicz obwód tego trójkąta.

a)

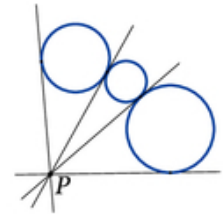


b)



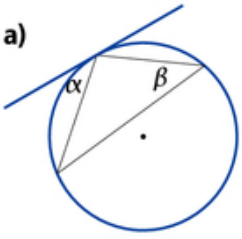
9. Wszystkie boki trójkąta prostokątnego są styczne do okręgu o promieniu 2 cm. Punkt styczności dzieli przeciwprostokątną na odcinki 4 cm i 6 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

10. Na rysunku obok każde dwa sąsiednie okręgi są styczne w tym samym punkcie do pewnej prostej przechodzącej przez punkt P. Uzasadnij, że punkty styczności leżą na okręgu o środku w punkcie P.

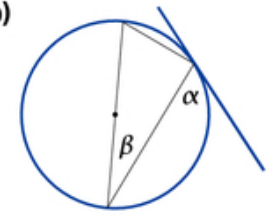


III **11.** Narysowana prosta jest styczna do okręgu. Wyraź miarę kąta β w zależności od kąta α.

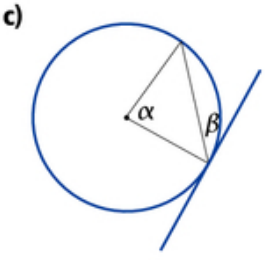
a)



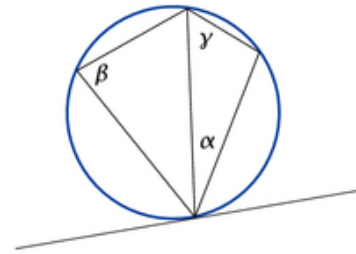
b)

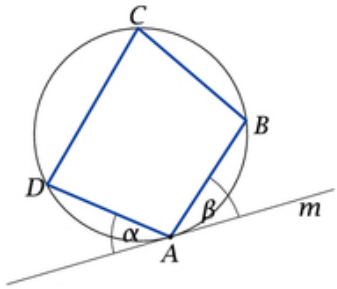


c)



12. Na rysunku obok prosta jest styczna do okręgu. Pokaż, że $\alpha = \beta - \gamma$.





13. Popatrz na rysunek obok. Wierzchołki czworokąta $ABCD$ leżą na okręgu, a prosta m jest styczna do okręgu w punkcie A. Wykaż, że jeden z kątów tego czworokąta ma miarę $\alpha + \beta$ i przekątna dzieli go na kąty o miarach α i β.

IV **14.** Rysujemy dwa okręgi: jeden o promieniu 3 cm, drugi o promieniu 4 cm. Jaka powinna być odległość między środkami tych okręgów, aby okręgi te:

a) były styczne zewnętrznie,

b) były styczne wewnętrznie,

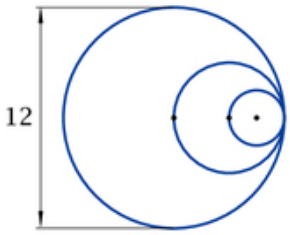
c) przecinały się w dwóch punktach,

d) były rozłączne?

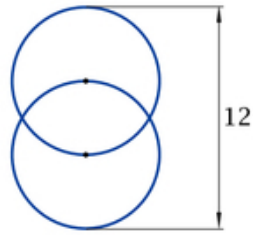
15. Jaka jest odległość między środkami okręgów o promieniach 5 i 8, gdy mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego, a jaka — gdy większy okrąg przechodzi przez środek mniejszego?

16. Jakie długości mają promienie narysowanych okręgów?

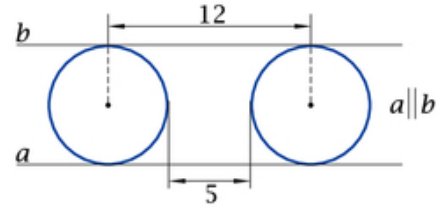
a)



b)



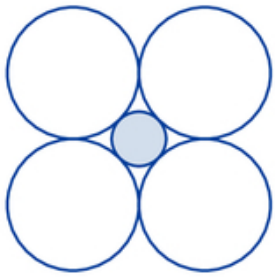
c)



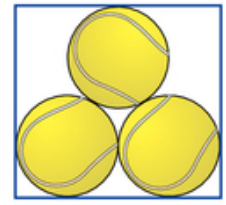
17. Okręgi o promieniach 10 i 15 są współśrodkowe. Jaki promień ma okrąg styczny do obu tych okręgów?

18. Trzy okręgi o środkach A, B, C są parami styczne zewnętrznie. Wiedząc, że $|AB| = 8$, $|BC| = 10$, $|AC| = 12$, oblicz długości promieni tych okręgów.

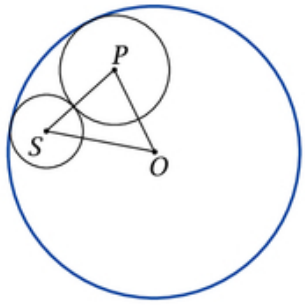
19. Na poniższym rysunku cztery jednakowe okręgi o promieniu r są parami styczne i jednocześnie są styczne do zacieniowanego koła. Oblicz długość średnicy tego koła.



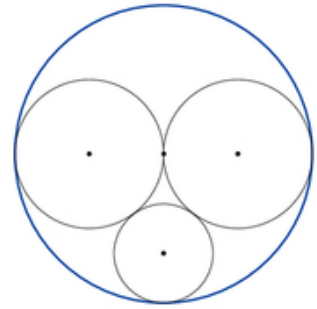
20. Trzy piłki tenisowe, każda o średnicy 6,38 cm, umieszczono w pudełku w sposób pokazany na rysunku. Ustal wymiary pudełka, jeśli wiadomo, że piłki nie wystają ponad pudełko ani pudełko nie wystaje ponad piłki.



21. Okręgi na poniższym rysunku są parami styczne. Największy z okręgów ma promień długości r. Oblicz obwód trójkąta OPS.



22. Okręgi na poniższym rysunku są parami styczne. Promień największego z nich jest równy r. Oblicz długość promienia najmniejszego z tych okręgów.



Ciekawostka

Dla dowolnego punktu P oraz dla dowolnego okręgu o środku O i promieniu r liczbę równą $|PO|^2 - r^2$ nazywamy potęgą punktu P względem okręgu.

Zauważ, że potęga punktu P:

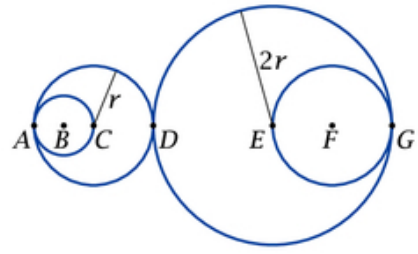
- jest liczbą dodatnią, gdy punkt P leży na zewnątrz okręgu,
- jest równa 0, gdy punkt P leży na okręgu,
- jest liczbą ujemną, gdy punkt P leży wewnątrz okręgu.

23. Przeczytaj ciekawostkę. Środki okręgów narysowanych obok leżą na jednej prostej, a punkty A, D, G to punkty styczności odpowiednich okręgów. Oblicz:

a) potęgę punktu C względem okręgu o środku E,

b) potęgę punktu B względem okręgu o środku C,

c) potęgę punktu F względem okręgu o środku B.



MINISPRAWDZIAN

S1. Z punktu A poprowadzono styczne do okręgu o środku B w punktach C i D. Która równość jest nieprawdziwa?

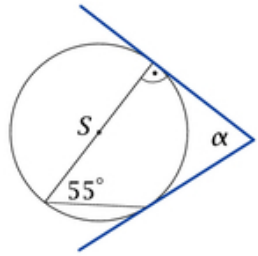
A. $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$
B. $|\sphericalangle CAD| = 180° - |\sphericalangle CBD|$
C. Pole czworokąta $ACBD = |AC| \cdot |BC|$
D. $|AC| + |AD| = 2|AB|$

S2. Prosta AD jest styczna do okręgu w punkcie A, a cięciwy AC i BC mają równe długości. Jeżeli $|\sphericalangle ABC| = 70°$, to miara kąta DAB wynosi:

A. 30° B. 40° C. 60° D. 70°

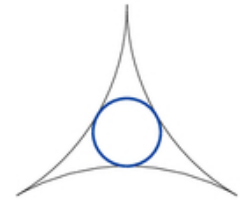
S3. Na rysunku poniżej ramiona kąta α są styczne do okręgu o środku S. Jaką miarę ma kąt α?

A. 35°
B. 55°
C. 70°
D. 80°



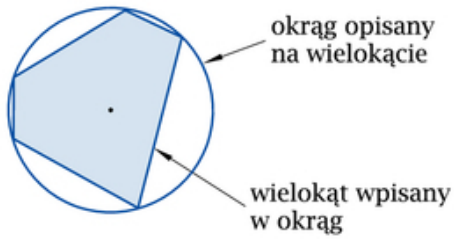
S4. Poniżej przedstawiono fragmenty trzech okręgów o promieniu 1, które są parami styczne, oraz mniejszy okrąg styczny do każdego z tych okręgów. Jaką długość ma promień tego okręgu?

A. $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$
B. $\frac{1}{19}$
C. $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$
D. $\frac{\sqrt{5}}{3} - 1$



OKRĄG OPISANY NA WIELOKĄCIE

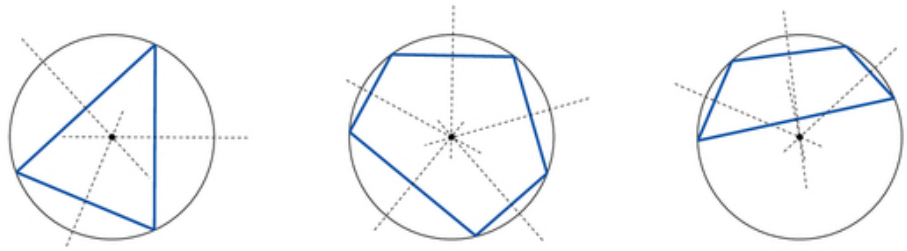
I



Mówimy, że **okrąg jest opisany na wielokącie**, gdy wszystkie wierzchołki tego wielokąta leżą na okręgu.

Jeżeli okrąg jest opisany na wielokącie, to możemy też powiedzieć, że wielokąt jest wpisany w okrąg.

Środek okręgu opisanego na wielokącie jest punktem jednakowo odległym od jego wierzchołków. Z własności symetralnej (por. s. 71) wynika, że środek ten musi leżeć na symetralnej każdego boku wielokąta.

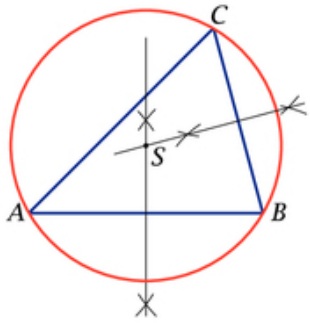


Wiemy już, że symetralne trzech boków każdego trójkąta przecinają się w jednym punkcie (por. s. 71). Wynika stąd następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Na każdym trójkącie można opisać okrąg. Środkiem takiego okręgu jest punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta.

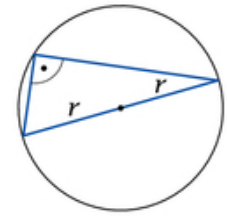




Aby wyznaczyć konstrukcyjnie środek okręgu opisanego na trójkącie, wystarczy poprowadzić symetralne dwóch boków trójkąta. Ich punkt przecięcia to środek szukanego okręgu, a odległość tego punktu od dowolnego wierzchołka trójkąta to promień okręgu.

ĆWICZENIE A Narysuj trójkąt i skonstruuj okrąg opisany na tym trójkącie.

Zauważ, że z własności kątów środkowych i wpisanych wynika, że środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.



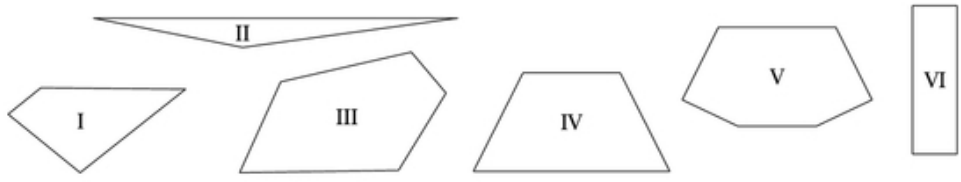
ĆWICZENIE B a) Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 4 i 5.

b) Oblicz długości boków trójkąta prostokątnego równoramiennego wpisanego w okrąg o promieniu 20.

zadania 1–4

II Nie na każdym wielokącie można opisać okrąg. Możliwe jest to tylko wówczas, gdy symetralne wszystkich jego boków przecinają się w jednym punkcie. Na przykład okręgu nie można opisać na równoległoboku, który nie jest prostokątem.

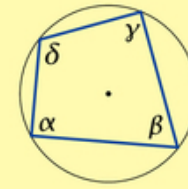
ĆWICZENIE C Na których z narysowanych wielokątów na pewno nie można opisać okręgu?



Warunek, jaki musi spełniać czworokąt, na którym da się opisać okrąg, opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

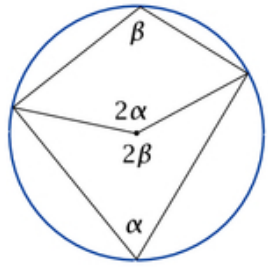
Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów są równe.



$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

Dowód

Wykażemy najpierw, że jeśli na pewnym czworokącie można opisać okrąg, to suma miar przeciwległych kątów tego czworokąta wynosi 180°.

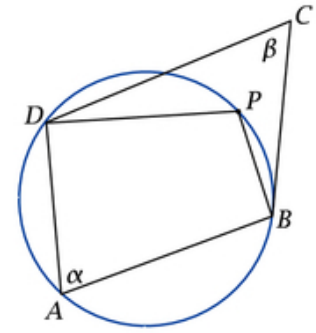


Oznaczmy przez α i β przeciwległe kąty czworokąta wpisanego w okrąg (zob. rysunek). Kąty środkowe oparte na tych samych łukach co kąty α i β mają odpowiednio miary 2α i 2β oraz $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$. Stąd $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Z twierdzenia o sumie miar kątów czworokąta wynika, że suma pozostałych dwóch kątów rozważanego czworokąta także wynosi 180°.

Wykażemy teraz, że jeśli w czworokącie suma miar przeciwległych kątów wynosi 180°, to na tym czworokącie można opisać okrąg.

Przyjmijmy, że w czworokącie $ABCD$ dane są: $|\sphericalangle BAD| = \alpha$, $|\sphericalangle BCD| = \beta$ oraz $\alpha + \beta = 180^\circ$ (zob. rysunek).



Zauważmy, że wszystkie kąty czworokąta $ABCD$ są wypukłe, więc punkt C leży wewnątrz kąta α.

Rozważmy okrąg opisany na trójkącie ABD. Przypuśćmy, że odległość punktu C od środka tego okręgu jest większa niż promień okręgu.

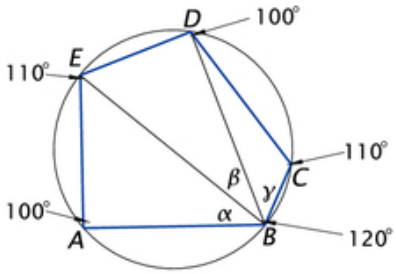
Niech P będzie punktem leżącym na łuku okręgu, na którym oparty jest kąt α, oraz $P \neq B$ i $P \neq D$. Wówczas kąt wpisany BPD ma miarę $180^\circ - \alpha$ i wobec tego w czworokącie $BCDP$ suma miar kątów o wierzchołkach P i C wynosiłaby:

$$|\sphericalangle BPD| + |\sphericalangle BCD| = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) + \beta = 180^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

Taki czworokąt nie może istnieć, zatem odległość punktu C od środka okręgu opisanego na trójkącie ABD nie jest większa niż promień tego okręgu.

Analogicznie można wykazać, że odległość punktu C od środka rozważanego okręgu nie może być też mniejsza niż promień okręgu. Punkt C musi więc leżeć na tym okręgu, czyli jest to okrąg opisany na czworokącie $ABCD$. □

PRZYKŁAD Kolejne kąty pięciokąta wpisanego w okrąg mają miary: 100°, 120°, 110°, 100° i 110°. W pięciokącie tym poprowadzono przekątne wychodzące z wierzchołka kąta o mierze 120°. Na jakie kąty przekątne te podzieliły ten kąt?



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

$\alpha + \beta + 110^\circ = 180^\circ$

$\alpha + \beta = 70^\circ$

Czworokąt $ABDE$ jest wpisany w okrąg, więc $|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle AED| = 180^\circ$.

$\gamma = 120^\circ - (\alpha + \beta) = 120^\circ - 70^\circ = 50^\circ$

$|\sphericalangle ABC| = \alpha + \beta + \gamma = 120^\circ$

$\beta + \gamma + 100^\circ = 180^\circ$

$\beta + \gamma = 80^\circ$

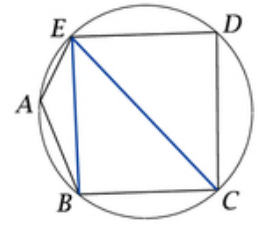
$\beta = 80^\circ - \gamma = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$

Czworokąt $BCDE$ jest wpisany w okrąg, więc $|\sphericalangle CBE| + |\sphericalangle CDE| = 180^\circ$.

$\alpha = 120^\circ - (\beta + \gamma) = 120^\circ - 80^\circ = 40^\circ$

Odp. Przekątne dzielą kąt o mierze 120° na kąty o miarach 40°, 30° i 50°.

ZADANIE Dane są miary kątów pięciokąta $ABCDE$ wpisanego w okrąg: $|\sphericalangle ABC| = 110^\circ$, $|\sphericalangle BCD| = 95^\circ$, $|\sphericalangle CDE| = 85^\circ$, $|\sphericalangle DEA| = 120^\circ$, $|\sphericalangle EAB| = 130^\circ$. Znajdź miarę kąta BEC.



zadania 5–15

ZESTAW ZADAŃ

1. Ustal, czy środek okręgu opisanego na trójkącie należy do trójkąta, gdy miary dwóch kątów trójkąta wynoszą:

a) 39° i 47° **b)** 70° i 55° **c)** 63° i 27°

2. a) Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 5 i 12.

b) W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 i 8. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego ze środkiem przeciwprostokątnej.

3. Które z podanych zdań są prawdziwe?

① *Środek okręgu opisanego na trójkącie leży zawsze na przecięciu prostych zawierających wysokości tego trójkąta.*

② *Środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.*

③ *Dla dowolnych trzech punktów niewspółliniowych można narysować okrąg, który przechodzi przez te punkty.*

④ *Każdy bok trójkąta ostrokątnego wpisanego w okrąg jest krótszy od średnicy tego okręgu.*

⑤ *Każdy bok trójkąta rozwartokątnego wpisanego w okrąg jest krótszy od średnicy tego okręgu.*

4. Ostrokątny trójkąt równoramienny, którego podstawa ma 4 cm, jest wpisany w okrąg o promieniu 3 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

5. **a)** Oblicz promień okręgu opisanego na prostokącie o bokach 5 cm i 12 cm.

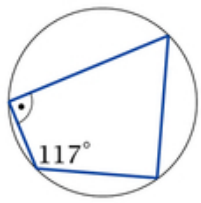
b) Oblicz długość boku kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 cm.

6. Sprawdź, czy można opisać okrąg na czworokącie, którego kolejne kąty mają podane miary:

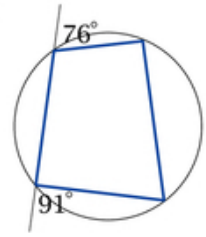
a) 30°, 60°, 150°, 120° **b)** 64°, 126°, 56°, 114° **c)** 91°, 92°, 89°, 88°

7. Oblicz miary kątów narysowanego czworokąta.

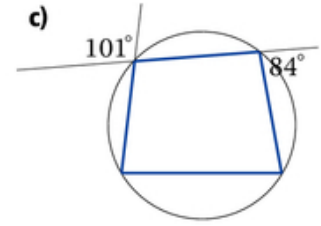
a)



b)



c)

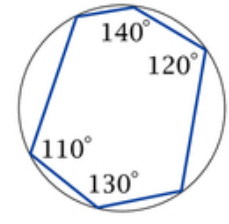


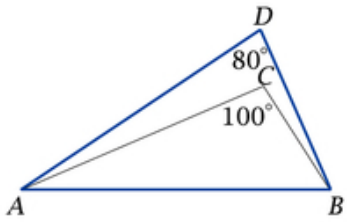
8. **a)** Czy czworokąt wpisany w okrąg może mieć dokładnie trzy kąty ostre?

b) Pewne dwa kąty czworokąta wpisanego w okrąg mają miary 98° i 82°. Ustal, jakie miary mogą mieć pozostałe kąty tego czworokąta.

9. Uzasadnij, że na trapezie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy trapez ten jest równoramienny.

10. W sześciokącie narysowanym obok dane są cztery kąty. Oblicz miary pozostałych kątów tego sześciokąta.



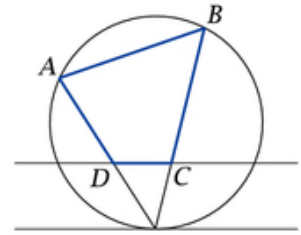


11. Na rysunku obok przedstawiono trójkąty ABC i ABD. Uzasadnij, że okrąg opisany na trójkącie ABC ma taki sam promień, jak okrąg opisany na trójkącie ABD.

12. Miary kątów pewnego czworokąta wyrażone w stopniach są kolejnymi liczbami nieparzystymi. Czy na tym czworokącie można opisać okrąg?

13. Punkt P jest symetryczny do ortocentrum trójkąta ABC względem prostej AB. Udowodnij, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

14. Popatrz na rysunek. Z trójkąta wpisanego w okrąg odcinamy jeden róg prostą równoległą do stycznej poprowadzonej przez wierzchołek. Udowodnij, że na otrzymanym w ten sposób czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.



15. Udowodnij, że jeśli dwusieczne wszystkich kątów czworokąta przecinają się w czterech punktach, to punkty te tworzą czworokąt, na którym można opisać okrąg.

MINISPRAWDZIAN

S1. Jakie pole ma trójkąt prostokątny równoramienny wpisany w okrąg o promieniu 14 cm?

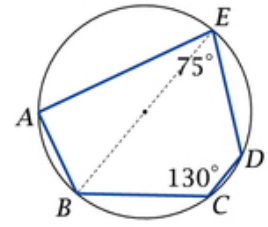
A. 196 cm^2 B. 292 cm^2 C. 584 cm^2 D. 98 cm^2

S2. Oblicz miarę największego kąta czworokąta wpisanego w okrąg, jeśli miary pozostałych jego kątów wynoszą α, 2α i 6α.

A. 240° B. 22,5° C. ok. 154° D. 157,5°

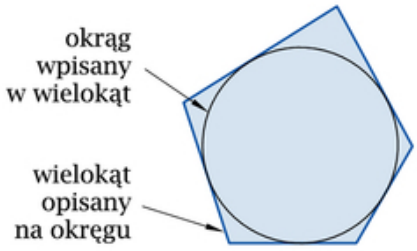
S3. Przekątna BE dzieli pięciokąt $ABCDE$ na trójkąt i trapez równoramienny. Środek okręgu opisanego na tym pięciokącie leży na tej przekątnej. Oblicz miarę kąta ABC, jeśli $|\sphericalangle BCD| = 130°$ oraz $|\sphericalangle AED| = 75°$.

A. 105° B. 115° C. 130° D. 150°



OKRĄG WPISANY W WIELOKĄT

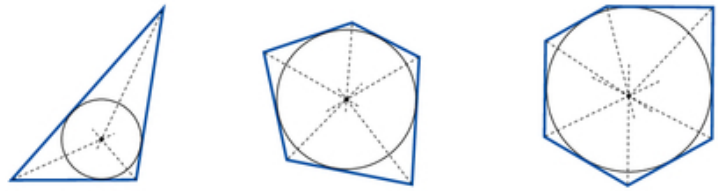
I



Mówimy, że **okrąg jest wpisany w wielokąt**, jeżeli jest styczny do wszystkich boków tego wielokąta.

Jeżeli okrąg jest wpisany w wielokąt, to możemy też powiedzieć, że wielokąt jest opisany na okręgu.

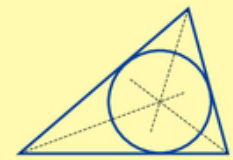
Odległość środka okręgu wpisanego w wielokąt od każdego boku wielokąta jest równa promieniowi okręgu. Środek takiego okręgu jest jednakowo odległy od wszystkich jego boków, zatem z własności dwusiecznej (por. s. 72) wynika, że środek ten musi leżeć na dwusiecznej każdego kąta wielokąta.



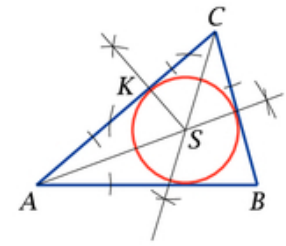
Ponieważ wiemy już, że dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie, zatem prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie

W każdy trójkąt można wpisać okrąg. Środkiem okręgu wpisanego w trójkąt jest punkt przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta.



Aby skonstruować okrąg wpisany w trójkąt, prowadzimy dwusieczne dwóch dowolnych kątów trójkąta, ich wspólny punkt S będzie środkiem szukanego okręgu. Następnie kreślimy prostą przechodzącą przez punkt S i prostopadłą do jednego z boków. Punkt przecięcia tej prostej z bokiem AC (na rysunku oznaczony literą K) jest jednym z punktów styczności. Kreślimy okrąg o środku S i promieniu $|SK|$.

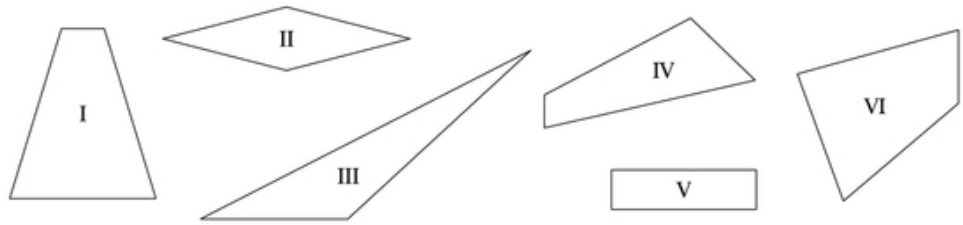


ĆWICZENIE A Narysuj trójkąt i skonstruuj okrąg wpisany w ten trójkąt.

zadania 1–6

II Nie w każdy wielokąt da się wpisać okrąg. Możliwe jest to tylko wtedy, gdy dwusieczne wszystkich kątów przecinają się w jednym punkcie. Na przykład nie można wpisać okręgu w prostokąt, który nie jest kwadratem.

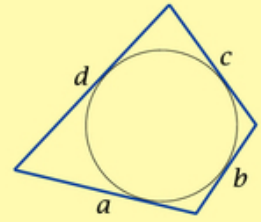
ĆWICZENIE B W które z narysowanych wielokątów na pewno nie można wpisać okręgu?



Warunek jaki musi spełniać czworokąt opisany na okręgu jest następujący:

Twierdzenie

W czworokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt jest wypukły i sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

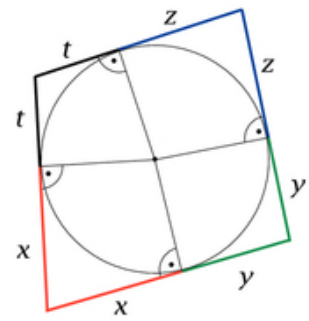


$a + c = b + d$

Dowód

Załóżmy, że w pewien czworokąt można wpisać okrąg. Taki czworokąt musi być wypukły, bo nie może mieć kątów większych od 180°. Pokażemy, że sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

Boki czworokąta są styczne do okręgu. Z własności stycznej do okręgu (zob. str. 151) wynika, że odcinki łączące dany wierzchołek z punktami styczności są równe (zob. rysunek).

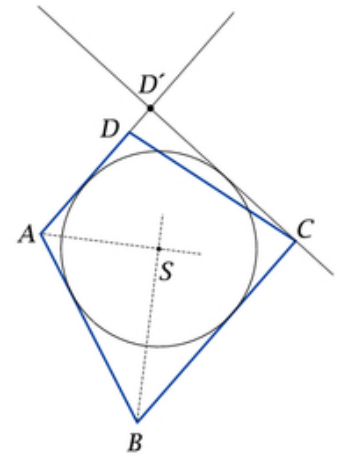


Łatwo zauważyć, że niezależnie od tego, którą parę przeciwległych boków czworokąta wybierzemy, suma ich długości wynosi $x + y + z + t$, czyli sumy długości przeciwległych boków są równe.

Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, w którym sumy długości przeciwległych boków są równe, czyli $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$. Pokażemy, metodą nie wprost, że w ten czworokąt można wpisać okrąg.

Niech S oznacza punkt przecięcia dwusiecznych kątów BAD i ABC i okrąg o środku S jest styczny do boków AB, BC i AD (zob. rys. na następnej stronie). Przypuśćmy, że okrąg ten nie jest styczny do boku CD.

Prowadząc z punktu C styczną do narysowanego okręgu, otrzymamy na prostej AD punkt D' różny od D. Możemy założyć, że $|AD'| > |AD|$ (gdyby $|AD'| < |AD|$, dowód przebiegałby analogicznie), czyli punkty C, D, D' powinny być wierzchołkami trójkąta.



Czworokąt $ABCD'$ jest opisany na okręgu, więc:

$|AD'| + |BC| = |AB| + |CD'|$

Zakładaliśmy, że spełniony jest także warunek:

$|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$

Z obu tych warunków wynika równość:

$|AD'| - |AD| = |CD'| - |CD|$

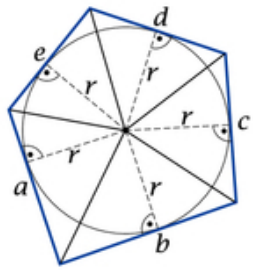
$|AD'| - |AD| = |DD'|$, więc $|DD'| = |CD'| - |CD|$.

Stąd $|DD'| + |CD| = |CD'|$.

Zatem odcinki CD, DD', $D'C$ nie spełniają nierówności trójkąta, czyli nie istnieje trójkąt o wierzchołkach C, D, D' (sprzeczność). Wobec tego $D = D'$, czyli czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu. □

zadania 7–11

III Pokażemy teraz, jak można obliczyć pole wielokąta opisanego na okręgu, gdy znamy długość promienia tego okręgu i obwód wielokąta.



Na rysunku obok pięciokąt opisany na okręgu został podzielony na trójkąty odcinkami łączącymi wierzchołki ze środkiem okręgu. Pole wielokąta jest równe sumie pól tych trójkątów:

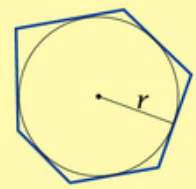
$$P = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}dr + \frac{1}{2}er$$

$$P = \frac{1}{2}r(a + b + c + d + e)$$

Powyższe rozumowanie przeprowadziliśmy dla pięciokąta. Analogiczne rozumowanie moglibyśmy przeprowadzić dla dowolnego wielokąta. Zatem:

Twierdzenie

Pole wielokąta opisanego na okręgu jest równe iloczynowi promienia tego okręgu przez połowę obwodu wielokąta.

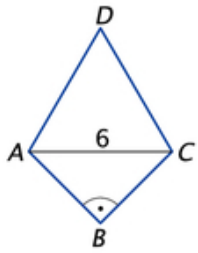


$$P = rp$$

P — pole wielokąta

p — połowa obwodu wielokąta

PRZYKŁAD Przekątna AC czworokąta $ABCD$ ma długość 6 i dzieli czworokąt na trójkąt równoboczny i trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej AC. W ten czworokąt można wpisać okrąg. Jaki promień ma taki okrąg?



$|AD| = |DC| = 6$

$|AB| = |BC| = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2} + \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9 + 9\sqrt{3}$

$p = 6 + 3\sqrt{2}$ — p — połowa obwodu czworokąta $ABCD$

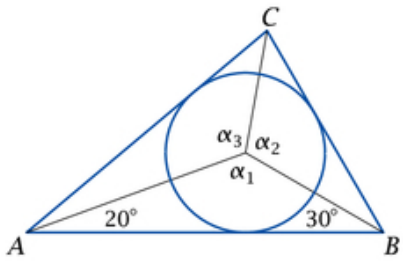
$r = \frac{P_{ABCD}}{p} = \frac{9+9\sqrt{3}}{6+3\sqrt{2}} = \frac{3+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ — r — promień okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$

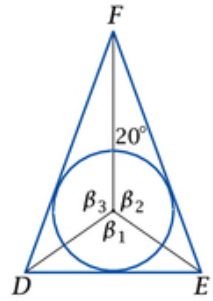
ZADANIE W czworokącie $KLMN$ przekątna KM ma długość 24 i dzieli ten czworokąt na dwa trójkąty równoramienne o podstawie KM. Ramiona tych trójkątów mają długości 13 i 20. Jaką długość ma promień okręgu wpisanego w czworokąt $KLMN$?

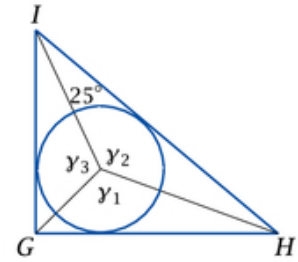
zadania 12–15

ZESTAW ZADAŃ

1. Poniżej narysowano trójkąty: ostrokątny, równoramienny oraz prostokątny. Oblicz miary kątów tych trójkątów oraz miary kątów oznaczonych literami.







2. Narysuj dowolny kąt ostry. Na jednym z ramion zaznacz punkt A. Skonstruuj okrąg styczny do obu ramion narysowanego kąta tak, aby punkt A był jednym z punktów styczności.

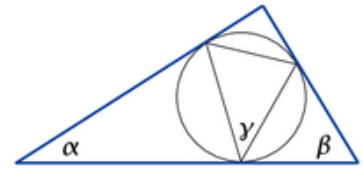
3. W trójkąt równoramienny ABC, w którym kąt między ramionami AC i BC ma 100°, wpisano okrąg o środku O. Oblicz miarę kąta AOB.

4. Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt oraz okręgu opisanego na tym trójkącie.

5. Kąt między ramionami AC i BC trójkąta równoramiennego ABC ma miarę $40°$. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a punkt S jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Oblicz miarę kąta SAO.

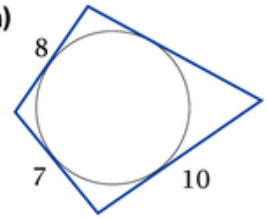
6. Na rysunku obok trójkąt o kątach α i β opisany jest na okręgu. Kąt γ jest kątem trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności. Wykaż, że:

$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

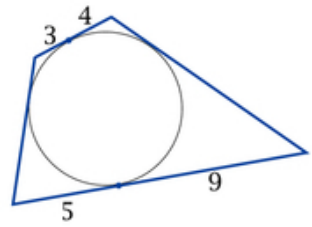


II **7.** Oblicz obwód czworokąta przedstawionego na rysunku.

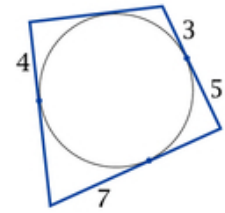
a)



b)



c)



8. Sprawdź, czy można wpisać okrąg w czworokąt wypukły, którego kolejne boki mają długości:

a) $7,\ 12,\ 17,\ 12$ **b)** $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{4}$ **c)** $3,\ 2\sqrt{3},\ 5\sqrt{3}-3,\ 3\sqrt{3}$

9. Długości boków pewnego czworokąta są kolejnymi liczbami naturalnymi. Czy w ten czworokąt można wpisać okrąg?

10. Punkty A, B i C są wierzchołkami trójkąta, w którym $|AB| = |BC|$. Znajdź konstrukcyjnie taki punkt D, że istnieje okrąg wpisany w czworokąt $ABCD$ i istnieje okrąg opisany na tym czworokącie.

11. Na pewnym trapezie można opisać okrąg, a także można w ten trapez wpisać okrąg. Podstawy tego trapezu mają długości 7 i 3. Oblicz długości jego ramion.

III **12.** Uzasadnij, że pole czworokąta opisanego na okręgu o promieniu r jest równe $r(a+b)$, gdzie a i b są długościami dwóch przeciwległych boków.

13. Wykaż, że stosunek obwodu koła do obwodu wielokąta opisanego na nim jest równy stosunkowi pola koła do pola wielokąta.

14. Oblicz promień okręgu wpisanego w romb o przekątnych 10 cm i 12 cm.

15. Oblicz długości promieni okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny i opisanego na nim, jeżeli boki trójkąta mają długości:

a) $8,\ 15,\ 17$ **b)** $1,\ 2,\ \sqrt{5}$ **c)** $\sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{11}$

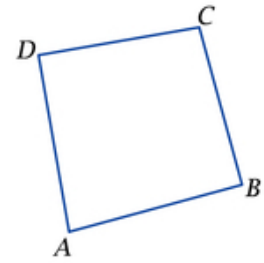
MINISPRAWDZIAN

S1. Na okręgu o środku S jest opisany trójkąt prostokątny równoramienny ABC. Odcinek BC to najdłuższy bok trójkąta. Jaką miarę ma kąt ASB?

A. 135° B. 67,5° C. 90° D. 112,5°

S2. W czworokącie na rysunku: $|AB| = |AD|$ i $|BC| = |CD|$. Taki czworokąt nazywa się deltoidem. Ponadto $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = 90°$. Które ze zdań jest prawdziwe?

A. *Na tym czworokącie nie można opisać okręgu i w ten czworokąt nie można wpisać okręgu.*
B. *Na tym czworokącie można opisać okrąg, ale w ten czworokąt nie można wpisać okręgu.*
C. *Na tym czworokącie nie można opisać okręgu, ale w ten czworokąt można wpisać okrąg.*
D. *Na tym czworokącie można opisać okrąg i w ten czworokąt można wpisać okrąg.*



S3. Obwód czworokąta opisanego na okręgu o promieniu 3 jest równy 40. Pole tego czworokąta jest równe:

A. 120 B. 80 C. 60 D. 30

S4. Jaki jest promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 7 i 24?

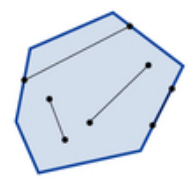
A. 5 B. 6 C. 7 D. 3

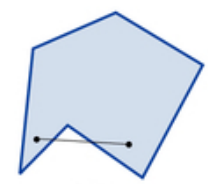
WŁASNOŚCI WIELOKĄTÓW. WIELOKĄTY FOREMNE

I

ĆWICZENIE A Narysuj:
a) czworokąt, w którym dwa niesąsiednie boki są prostopadłe,
b) pięciokąt, który ma jedną parę boków równoległych,
c) sześciokąt, w którym trzy boki są parami równoległe.

Zauważ, że niektóre wielokąty spełniają warunek: dla dowolnych dwóch punktów wielokąta odcinek, którego końcami są te punkty, zawiera się w tym wielokącie. Takie wielokąty nazywamy **wielokątami wypukłymi**.


wielokąt wypukły

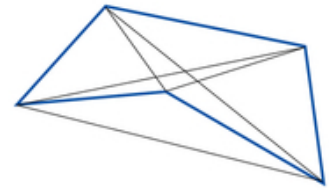

wielokąt niewypukły

ĆWICZENIE B Oto przykłady różnych wielokątów. Które z nich są wypukłe?



Zauważ, że wszystkie kąty wielokąta wypukłego to kąty o mierze większej od 0° i mniejszej od 180° (są to kąty wypukłe). W wielokącie niewypukłym co najmniej jeden kąt jest kątem wklęsłym.

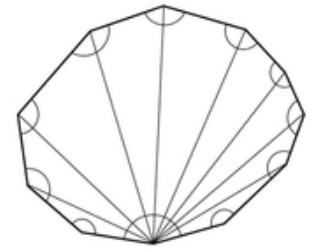
Przypomnijmy, że przekątną wielokąta nazywamy każdy odcinek łączący niesąsiednie wierzchołki wielokąta. Niektóre przekątne wielokąta niewypukłego leżą poza wielokątem.



Wiemy już, że suma miar kątów trójkąta jest równa 180°, a suma miar kątów czworokąta wynosi 360°. Zastanówmy się, co możemy powiedzieć o sumie miar kątów n-kąta, czyli wielokąta, który ma n wierzchołków.

ĆWICZENIE C Narysuj dowolny wielokąt wypukły. Wybierz dowolny wierzchołek i narysuj wszystkie wychodzące z niego przekątne. Na ile trójkątów podzieliły wielokąt narysowane przekątne?

ĆWICZENIE D Popatrz na rysunek obok. Na ile trójkątów przekątne podzieliły ten 11-kąt? Ile wynosi suma miar kątów 11-kąta?



Wszystkie przekątne poprowadzone z jednego wierzchołka n-kąta wypukłego dzielą ten wielokąt na $n-2$ trójkąty (trójkątów jest tyle, ile boków, które nie zawierają wybranego wierzchołka). Suma miar kątów tych trójkątów wynosi $(n-2)\cdot 180°$ i jest równa sumie miar kątów n-kąta. Taka sama zależność zachodzi dla wielokątów niewypukłych.

Twierdzenie

Suma miar kątów n-kąta wynosi $(n-2)\cdot 180°$.

ĆWICZENIE E Narysuj dowolny sześciokąt. Z każdego wierzchołka poprowadź trzy przekątne. Jeśli dla pewnego wierzchołka jakaś przekątna została już narysowana, to narysuj ją jeszcze raz, ale innym kolorem. Ile razy rysowana była każda z przekątnych? Ile przekątnych ma sześciokąt?

Z każdego wierzchołka n-kąta można poprowadzić $n-3$ przekątne. (Z wybranego wierzchołka nie można poprowadzić przekątnej do niego ani do sąsiadujących z nim wierzchołków). Kreśląc przekątne z każdego wierzchołka, narysowalibyśmy $n(n-3)$ odcinków, każdy dwukrotnie. Takie rozumowanie prowadzi do następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Liczba przekątnych w n-kącie wynosi $\frac{n(n-3)}{2}$.

PRZYKŁAD Ile przekątnych ma wielokąt, w którym suma miar kątów jest równa 2700°?

$(n-2)\cdot 180^\circ = 2700^\circ$ — Korzystamy z twierdzenia o sumie miar kątów n-kąta, aby obliczyć liczbę boków wielokąta.

$n-2 = 15$

$n = 17$ — Wielokąt, o którym mowa, to 17-kąt.

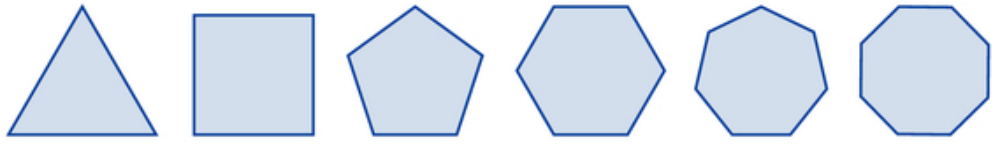
liczba przekątnych $= \frac{17(17-3)}{2} = 119$ — Obliczamy, ile przekątnych ma 17-kąt.

Odp. Ten wielokąt ma 119 przekątnych.

ZADANIE Ile przekątnych ma wielokąt, którego suma miar kątów wynosi 2160°?

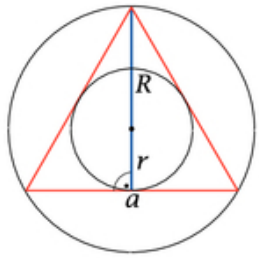
zadania 1–5

Wielokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości i wszystkie kąty jednakowej miary, nazywamy **wielokątem foremnym**. Wielokątami foremnymi są na przykład trójkąt równoboczny i kwadrat.



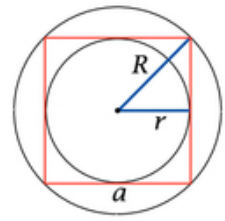
W każdym wielokącie foremnym wszystkie dwusieczne kątów i symetralne boków przecinają się w tym samym punkcie. Punkt ten jest więc jednocześnie środkiem okręgu opisanego na wielokącie i wpisanego w ten wielokąt.

Przy obliczaniu długości promieni takich okręgów dla trójkąta równobocznego, kwadratu i sześciokąta foremnego można korzystać z odpowiednich wzorów.



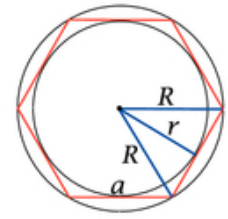
$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$R = 2r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$



$r = \frac{a}{2}$

$R = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$



$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$R = a$

zadania 6–22

III Wiemy już, że suma miar kątów w n-kącie wynosi $(n-2) \cdot 180°$. Ponieważ wszystkie kąty n-kąta foremnego są równe, więc możemy korzystać z następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Każdy kąt n-kąta foremnego ma miarę $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

ĆWICZENIE F a) Jaką miarę ma każdy z kątów sześciokąta foremnego?
b) Ile przekątnych ma sześciokąt foremny?

zadania 23–29

ZESTAW ZADAŃ

I **1.** **a)** Oblicz sumy miar wszystkich kątów siedmiokąta oraz kątów stukąta.

b) Ile boków ma wielokąt, w którym suma miar kątów wynosi 1080°?

c) Czy istnieje wielokąt, w którym suma miar wszystkich kątów wynosi 1000°?

d) W pewnym 10-kącie jeden z kątów jest prosty, a pozostałe kąty mają tę samą miarę. Oblicz tę miarę.

2. Wyobraź sobie, że dla każdego kąta n-kąta wypukłego zaznaczamy jeden z kątów przyległych do tego kąta. Uzasadnij, że suma miar wszystkich zaznaczonych w ten sposób kątów jest równa 360°.

3. Uzasadnij, że nie istnieje siedmiokąt, w którym każde dwa sąsiednie boki są prostopadłe.

4. **a)** Ile przekątnych ma dziewięciokąt, a ile — dwustukąt?

b) Ile boków ma wielokąt, który ma 90 przekątnych?

c) Czy istnieje wielokąt, który ma 30 przekątnych? Czy istnieje wielokąt, który ma 170 przekątnych?

d) Czy istnieje wielokąt, który ma tyle samo przekątnych co boków?

5. **a)** Z wierzchołka pewnego wielokąta można poprowadzić 15 przekątnych. Oblicz sumę miar kątów tego wielokąta.

b) Pewien wielokąt ma 275 przekątnych. Oblicz sumę miar kątów tego wielokąta.

c) Z jednego wierzchołka pewnego wielokąta wypukłego można poprowadzić 100 przekątnych. Uzasadnij, że największy kąt tego wielokąta ma więcej niż 175°.

II **6.** **a)** Oblicz długość okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku 10.

b) Ustal, jaka jest długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 5.

7. **a)** Ile razy pole koła opisanego na trójkącie równobocznym jest większe od pola koła wpisanego w ten trójkąt?

b) Ile razy długość okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest większa od obwodu tego trójkąta?

8. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego:

a) opisanego na okręgu o promieniu $2\sqrt{3}$,

b) wpisanego w okrąg o promieniu 6.

9. O ile dłuższy jest promień okręgu opisanego na kwadracie o boku 10 cm od promienia okręgu wpisanego w ten kwadrat?

10. **a)** Oblicz pole sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 5.

b) Oblicz długość okręgu wpisanego w sześciokąt foremny o boku 10.

11. **a)** Oblicz długości przekątnych sześciokąta foremnego o boku 2.

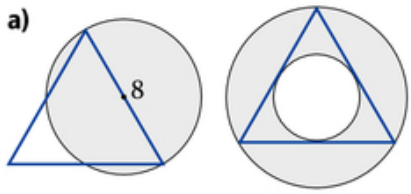
b) Krótsza przekątna sześciokąta foremnego ma długość $6\sqrt{3}$. Jaki obwód ma ten sześciokąt?

12. **a)** Uzasadnij, że suma długości przekątnych wychodzących z jednego wierzchołka sześciokąta foremnego jest mniejsza od obwodu tego sześciokąta.

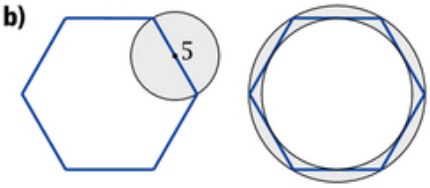
b) Oblicz sumę długości wszystkich przekątnych sześciokąta foremnego o boku długości a. Ile razy ta suma jest większa od obwodu sześciokąta?

13. Narysowane wielokąty są foremne i przystające. Sprawdź, czy koło i pierścień mają takie same pola.

a)



b)

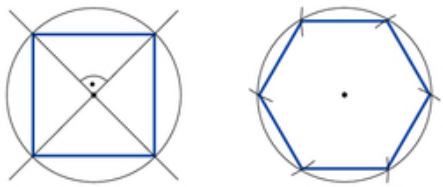


14. Kwadrat i sześciokąt foremny mają równe pola. Ile razy bok kwadratu jest dłuższy od boku sześciokąta?

15. Czy sześciokąt foremny o boku 40 cm zmieści się w prostokącie o wymiarach 70 cm × 80 cm?

Ciekawostka

Na poniższych rysunkach przedstawiono sposób konstruowania kwadratu i sześciokąta foremnego. Teoria wielokątów foremnych była jednym ze znakomitych osiągnięć szkoły pitagorejskiej. Pitagorejczycy potrafili za pomocą cyrkla i linijki wpisać w okrąg trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny i sześciokąt foremny.



Potrafili także skonstruować wielokąt foremny o liczbie boków dwukrotnie większej od liczby boków danego wielokąta (a więc np. znając konstrukcję kwadratu wpisanego w okrąg, potrafili też zbudować 8-kąt foremny, 16-kąt foremny itd.).

Starożytnym uczonym nie udało się jednak skonstruować niektórych wielokątów foremnych, na przykład: 7-kąta, 9-kąta czy 17-kąta. Próby trwały wiele stuleci.

Po pitagorejczykach w teorii wielokątów foremnych nie odkryto niczego przez ponad 2000 lat. Dopiero w 1801 roku niemiecki matematyk Carl Friedrich Gauss pokazał, jak skonstruować 17-kąt foremny. Niedługo potem uzasadnił, że nie można skonstruować 7-kąta ani 9-kąta foremnego. Sformułował też twierdzenie pozwalające sprawdzić, czy dla danej liczby n można skonstruować n-kąt foremny.

16. Przeczytaj ciekawostkę.

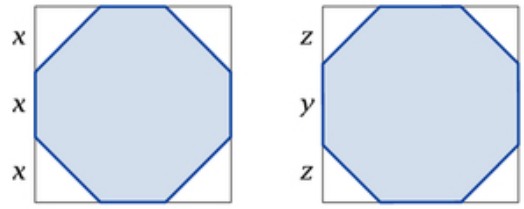
a) Skonstruuj sześciokąt foremny o boku 3 cm.

b) Korzystając z konstrukcji sześciokąta foremnego, wpisz w okrąg trójkąt równoboczny i dwunastokąt foremny.

17. Narysuj okrąg o promieniu 4 cm. Wpisz w ten okrąg ośmiokąt foremny i szesnastokąt foremny.

18. **a)** Popatrz na pierwszy rysunek. Każdy bok kwadratu jest podzielony na trzy jednakowe części. Uzasadnij, że zacieniowany ośmiokąt nie jest foremny.

b) Popatrz na drugi rysunek. Zacieniowany ośmiokąt jest foremny. Bok kwadratu ma długość a. Jaką długość ma bok ośmiokąta?



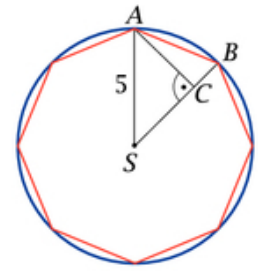
19. Ośmiokąt foremny ma bok o długości 4. Jakie długości mają przekątne tego ośmiokąta?

20. W okrąg o promieniu 5 jest wpisany ośmiokąt foremny (zob. rysunek obok).

a) Jaką miarę ma kąt ostry ASB?

b) Oblicz wysokość AC trójkąta ASB.

c) Ustal, jakie pole ma narysowany ośmiokąt foremny.



Ciekawostka

Za pomocą cyrkla i linijki nie można skonstruować niektórych wielokątów foremnych, np. nie można skonstruować 7-kąta foremnego ani 9-kąta foremnego. Istnieją jednak konstrukcje przybliżone.

Opisaną obok metodę rysowania 7-kąta foremnego znali matematycy arabscy już w X wieku. Wiadomo, że posługiwał się nią Leonardo da Vinci (czyt. da winczi), a także Albrecht Dürer (czyt. direr).

Długość odcinka wyznaczonego według tego opisu jest bardzo dobrym przybliżeniem długości boku 7-kąta foremnego wpisanego w okrąg.

Oto przybliżona konstrukcja 7-kąta foremnego:

1. Narysuj dowolny okrąg. Niech S oznacza środek tego okręgu.
2. Zaznacz na narysowanym okręgu dowolny punkt S' i narysuj okrąg o środku S' i takim samym promieniu jak poprzedni okrąg.
3. Niech A i B oznaczają punkty przecięcia narysowanych okręgów.
4. Znajdź punkt przecięcia prostej AB z prostą SS'. Oznacz ten punkt literą P.
5. Długość boku siedmiokąta foremnego wpisanego w narysowany okrąg o środku S jest w przybliżeniu równa $|AP|$.

21. Narysuj siedmiokąt foremny zgodnie z opisem podanym w ciekawostce.

22. Rozważmy wielokąty foremne wpisane w okrąg o środku S.

a) Ile przekątnych ośmiokąta foremnego przechodzi przez punkt S?

b) Czy któraś przekątna siedmiokąta foremnego może przechodzić przez punkt S?

c) Co można powiedzieć o liczbie wierzchołków wielokąta foremnego, w którym przynajmniej jedna przekątna przechodzi przez środek okręgu? Ile przekątnych takiego n-kąta foremnego przechodzi przez środek okręgu?

III **23.** **a)** Każdy z kątów pewnego wielokąta foremnego ma miarę 150°. Ile boków ma ten wielokąt?

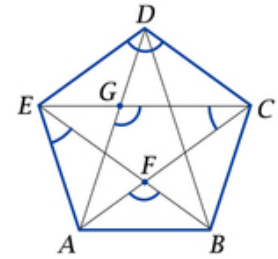
b) Czy istnieje wielokąt foremny, którego każdy kąt ma miarę 130°?

24. **a)** Oblicz miarę kąta 20-kąta foremnego.

b) Ile boków ma wielokąt foremny, w którym każdy z kątów ma miarę 179°?

c) Czy w wielokącie foremnym kąt może mieć 145°? Czy może mieć 165°?

25. Pięciokąt $ABCDE$ na rysunku obok jest foremny. Oblicz miary zaznaczonych kątów.



26. Punkty $P_1, P_2, \cdots, P_{12}$ są kolejnymi wierzchołkami dwunastokąta foremnego. Oblicz miarę kąta:

a) $\sphericalangle P_1P_7P_2$ **b)** $\sphericalangle P_1P_8P_3$ **c)** $\sphericalangle P_3P_2P_7$

27. Dla jakiej liczby naturalnej n kąt n-kąta foremnego jest o 1,5° mniejszy od kąta wielokąta foremnego, który ma $n+1$ boków?

28. Dla jakiego n miara kąta n-kąta foremnego (określona w stopniach) jest liczbą podzielną przez 10?

29. Cięciwa AB jest bokiem pewnego wielokąta foremnego wpisanego w okrąg o środku S. Jaką miarę ma każdy kąt tego wielokąta, jeśli kąt ASB ma miarę α?

MINISPRAWDZIAN



S1. Na rysunku obok trójkąt równoboczny jest opisany na okręgu o promieniu 1, a kwadrat jest wpisany w ten okrąg. O ile pole trójkąta jest większe niż pole kwadratu?

A. o $3\sqrt{3}-2$ B. o $3\sqrt{2}-2$ C. o $6\sqrt{3}-\sqrt{2}$ D. o $6\sqrt{3}-4\sqrt{2}$

S2. Ile boków ma wielokąt o 44 przekątnych?

A. 22 B. 14 C. 11 D. 8

S3. O ile większa jest długość okręgu opisanego na sześciokącie foremnym o boku 4 od długości okręgu wpisanego w ten sześciokąt?

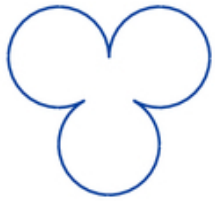
A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. 4π C. $4-2\sqrt{3}$ D. $8\pi-4\pi\sqrt{3}$

S4. Jaką miarę ma kąt między sąsiednimi przekątnymi wychodzącymi z wierzchołka 10-kąta foremnego?

A. 18° B. 20° C. 36° D. 45°

POWTÓRZENIE

1. Każdy z trzech okręgów o promieniu r jest styczny do dwóch pozostałych w zaznaczonych punktach. Oblicz długość niebieskiej linii.



2. Okrąg o środku w jednym z wierzchołków trójkąta przecina dwa jego boki wychodzące z tego wierzchołka. Kąty przy pozostałych dwóch wierzchołkach trójkąta mają miary α i β. Oblicz miarę kąta wpisanego opartego na łuku zawartym w trójkącie.

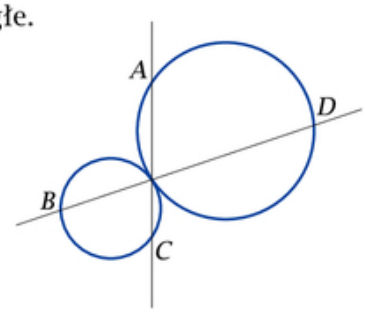
3. Ramiona kąta ADB są styczne do okręgu o środku S w punktach A i B. Oblicz obwód czworokąta o wierzchołkach D, A, S, B, jeżeli wiadomo, że:

a) $|DS| = 10$ i $|DA| = 5$,

b) promień okręgu ma długość r i jest trzy razy krótszy od odcinka DS.

4. Cięciwy AB i AC tworzą ze styczną do okręgu w punkcie A kąty $50°$ i $65°$. Oblicz miary kątów trójkąta ABC. Rozważ dwa przypadki.

5. Przez punkt styczności dwóch okręgów poprowadzono dwie proste, które przecinają okręgi w punktach A, B, C i D. Wykaż, że proste AD i BC są równoległe.



6. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie, którego boki mają długości 10, 10 i 12.

7. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma $40°$, a kąt przy wierzchołku B — $60°$. Prowadzimy prostą przecinającą boki AC i BC tego trójkąta w punktach odpowiednio D i E. Oblicz, jaką miarę powinien mieć kąt CDE, aby na czworokącie $ABED$ można było opisać okrąg.

8. W trójkąt o kątach $70°$, $50°$ i $60°$ wpisano okrąg, który jest styczny do boków trójkąta w punktach A, B i C. Oblicz miary kątów trójkąta ABC.

9. Czworokąt jest opisany na okręgu o promieniu 4. Dwa przeciwległe boki tego czworokąta mają długości 12 i 6. Oblicz jego pole.

10. a) Ile przekątnych ma ośmiokąt?

b) Ile co najmniej boków ma wielokąt o więcej niż 100 przekątnych?

c) O ile więcej przekątnych ma n+1-kąt od n-kąta?

11. a) Ile boków ma wielokąt foremny, w którym miary kątów wynoszą $179°$?

b) Czy w wielokącie foremnym kąt może mieć $145°$? Czy może mieć $165°$?

12. Okrąg, którego środkiem jest punkt przecięcia przekątnych pewnego kwadratu, przecina ten kwadrat w ośmiu punktach. Punkty te dzielą okrąg na osiem jednakowych łuków. Która figura ma większe pole: kwadrat czy koło ograniczone tym okręgiem?

Trygonometria

Termin trygonometria *pochodzi od dwóch greckich słów:* trigŏnon *(trójkąt) i* métron *(mierzyć), oznacza więc dosłownie mierzenie trójkątów. Ta dziedzina matematyki zajmuje się m.in. opisywaniem związków między długościami boków trójkąta a miarami jego kątów.*



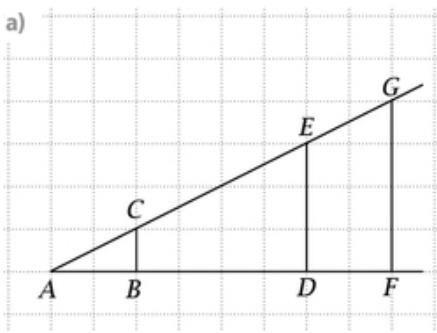
Tangens kąta ostrego ■ Sinus i cosinus kąta ostrego ■ Obliczenia trygonometryczne ■ Zastosowania trygonometrii ■ Wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45° i 60° ■ Związki między funkcjami trygonometrycznymi ■ Funkcje trygonometryczne kątów od 0° do 180° ■ Twierdzenie sinusów ■ Twierdzenie cosinusów ■ Powtórzenie

TANGENS KĄTA OSTREGO

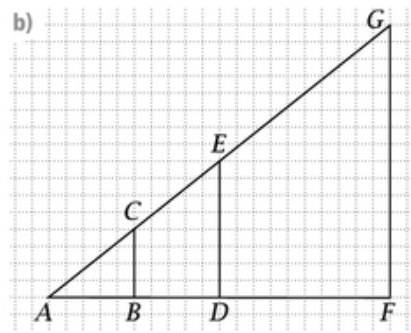
I

ĆWICZENIE A Oblicz ilorazy: $\frac{|BC|}{|AB|}$, $\frac{|DE|}{|AD|}$, $\frac{|FG|}{|AF|}$.

a)



b)

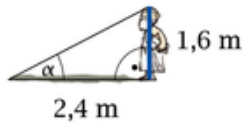


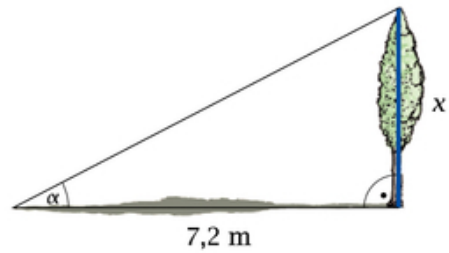
Legenda głosi, że starożytny mędrzec Tales z Miletu potrafił za pomocą cienia wyznaczać wysokości piramid i drzew.



Tales przy swoich pomiarach korzystał z faktu, że w danym momencie kąt padania promieni słonecznych wyznaczających cienie różnych obiektów jest taki sam i wykorzystywał następującą własność trójkątów prostokątnych:

Jeżeli dwa trójkąty prostokątne mają takie same kąty, to stosunek długości przyprostokątnych w jednym z tych trójkątów jest taki sam jak stosunek długości odpowiednich przyprostokątnych w drugim trójkącie.





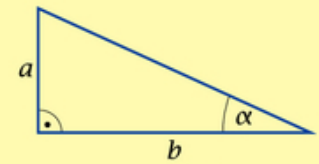
Dla danych przedstawionych na rysunku z własności tej wynika równość:

$$\frac{1{,}6}{2{,}4} = \frac{x}{7{,}2}$$

Rozwiązując to równanie, można ustalić, że wysokość drzewa wynosi 4,8 m.

Niech α będzie jednym z kątów ostrych trójkąta prostokątnego.

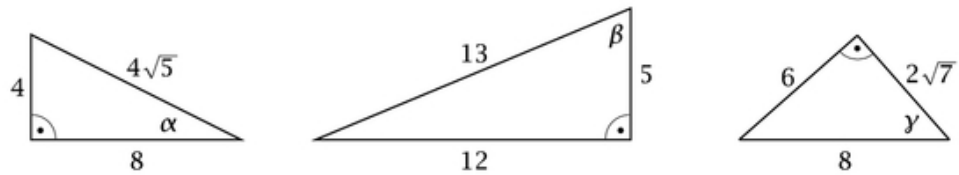
Tangensem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości drugiej przyprostokątnej. Tangens kąta α oznaczamy w skrócie tg α.



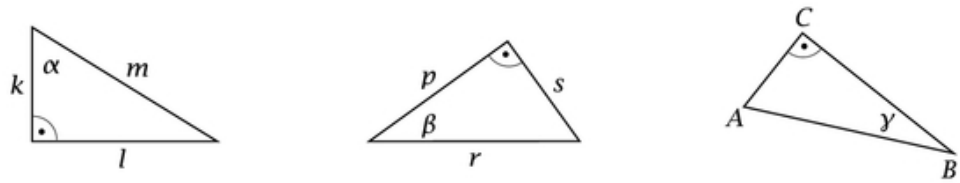
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Liczba tg α nie zależy od wielkości trójkąta, a tylko od miary kąta α.

ĆWICZENIE B a) Oblicz tangensy kątów α, β i γ.

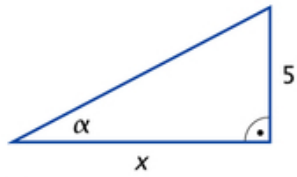


b) Podaj stosunki długości boków równe tangensom kątów α, β i γ.



zadania 1–3

II **PRZYKŁAD 1** W pewnym trójkącie prostokątnym tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{2}{7}$, a przyprostokątna leżąca naprzeciw tego kąta ma długość 5. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.



Wykonujemy rysunek pomocniczy.

$\frac{5}{x} = \frac{2}{7}$ $\quad$ tg $\alpha = \frac{5}{x}$ i tg $\alpha = \frac{2}{7}$

$x = \frac{7 \cdot 5}{2}$, stąd $x = 17{,}5$

Odp. Długość drugiej przyprostokątnej wynosi 17,5.

ZADANIE Niech α będzie kątem ostrym trójkąta prostokątnego i tg $\alpha = \frac{3}{5}$. Przyprostokątna tego trójkąta leżąca przy kącie α ma 12 cm. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.

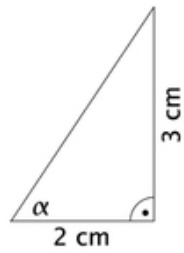
zadania 4–6

III ĆWICZENIE C Jakie długości mogą mieć przyprostokątne trójkąta prostokątnego, jeśli tangens jednego z kątów ostrych tego trójkąta wynosi $\frac{3}{4}$?

PRZYKŁAD 2 Narysuj kąt, którego tangens jest równy 1,5.

$\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} = \frac{3\text{ cm}}{2\text{ cm}}$



Wybieramy odcinki o takich długościach, aby ich stosunek był równy $\frac{3}{2}$, np. 3 cm i 2 cm (moglibyśmy przyjąć też długości 6 cm i 4 cm).

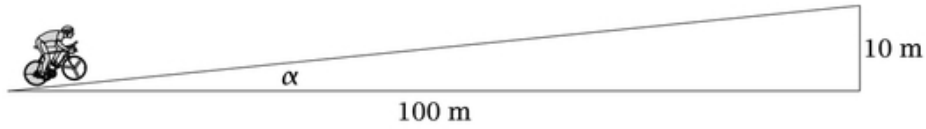
Rysujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 cm i 2 cm. Szukany kąt leży naprzeciwko przyprostokątnej o długości 3 cm.

ZADANIE Narysuj kąt, którego tangens jest równy $\frac{3}{4}$.

zadania 7–8

IV Nachylenie stoków gór, schodów i dachów domów często podaje się w procentach. Na przykład znak drogowy przedstawiony na zdjęciu ostrzega przed stromym podjazdem, którego nachylenie wynosi 10%. Oznacza to, że tangens kąta nachylenia drogi do poziomu wynosi 0,10.





Rysunek ilustruje podjazd o nachyleniu 10% ($\operatorname{tg}\alpha = 0{,}10$).

ĆWICZENIE D a) Nachylenie pewnego zbocza wyrażone w procentach wynosi 20%. Narysuj kąt odpowiadający temu nachyleniu.

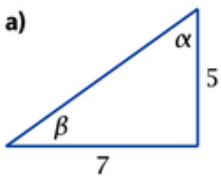
b) Pod jakim kątem byłoby nachylone zbocze góry, gdyby nachylenie wyrażone w procentach wynosiło 100%?

zadania 9–14

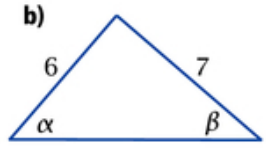
ZESTAW ZADAŃ

I **1.** Narysowany trójkąt jest prostokątny. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$.

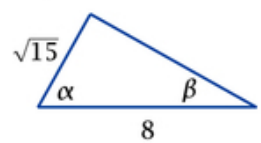
a)



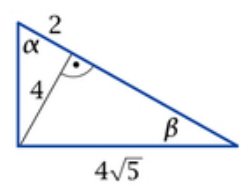
b)



c)

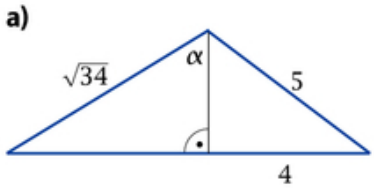


d)

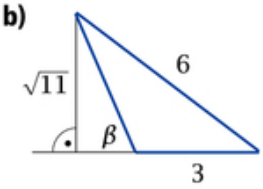


2. Oblicz tangens kąta oznaczonego literą.

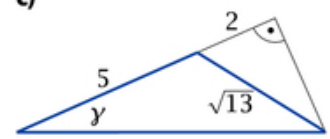
a)



b)



c)

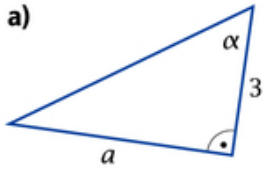


3. a) W pewnym trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 cm i 20 cm. Ile wynosi tangens mniejszego z kątów ostrych w tym trójkącie?

b) Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest 5 razy krótsza od drugiej przyprostokątnej. Oblicz tangens większego z kątów ostrych tego trójkąta.

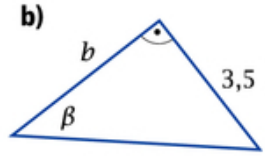
II **4.** Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

a)



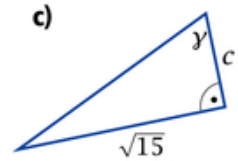
$\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$

b)



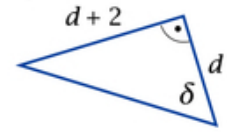
$\operatorname{tg}\beta = \frac{7}{8}$

c)



$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{5}$

d)



$\operatorname{tg}\delta = 1{,}5$

5. Krótsza przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma 6 cm, a tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{2}{3}$. Jaką długość może mieć druga przyprostokątna?

6. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym jedna z przyprostokątnych jest o 6 cm dłuższa od drugiej i tangens jednego z kątów ostrych wynosi $\frac{2}{3}$.

III **7.** Skonstruuj taki kąt α, że:

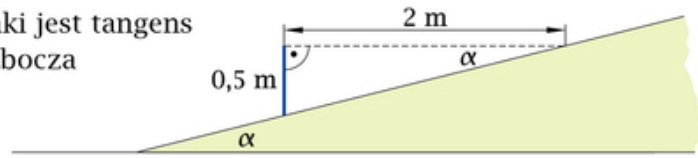
a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$ **b)** $\operatorname{tg}\alpha = 3$ **c)** $\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{2}{3}$ **d)** $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4$

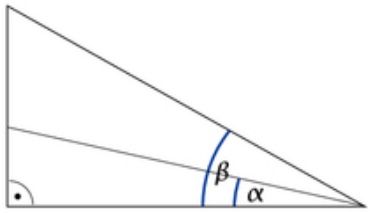
8. a) Narysuj dwa różne trójkąty prostokątne, w których jedna z przyprostokątnych ma 5 cm, a tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{1}{3}$.

b) Narysuj trójkąt prostokątny, w którym dłuższa przyprostokątna ma 6 cm, a tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{3}{2}$.

IV **9.** Najbardziej stromy odcinek drogi w Polsce znajduje się w Beskidach. Jego nachylenie wynosi 28%. Narysuj kąt, pod jakim jest nachylona droga w tym miejscu.

10. Przyjrzyj się rysunkowi. Jaki jest tangens kąta α? Jakie jest nachylenie zbocza wyrażone w procentach?





11. **a)** Popatrz na rysunek obok. Która liczba jest większa: $\operatorname{tg}\alpha$ czy $\operatorname{tg}\beta$?

b) Która z podanych liczb jest największa, a która najmniejsza?

$\operatorname{tg}76°$ $\operatorname{tg}22°$ $\operatorname{tg}27{,}5°$ $\operatorname{tg}1°$ $\operatorname{tg}39°$

c) Który z kątów ostrych, γ czy δ, jest większy, jeśli $\operatorname{tg}\gamma = 2$ i $\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{3}$?

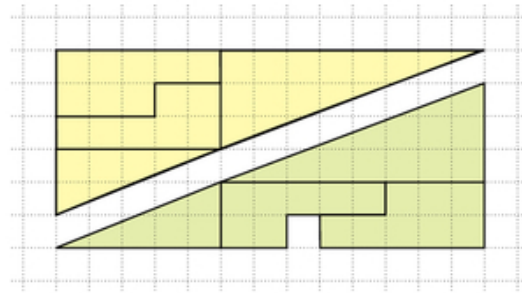
12. **a)** Tangens pewnego kąta ostrego jest równy 1. Jaką miarę ma ten kąt?

b) Nie wykonując obliczeń, odpowiedz, które z podanych liczb są większe od 1.

$\operatorname{tg}37°$ $\operatorname{tg}46°$ $\operatorname{tg}80°$ $\operatorname{tg}1°$ $\operatorname{tg}89°$

13. Czy z tego, że tangens kąta α jest dwa razy większy od tangensa kąta β wynika, że kąt α ma miarę dwa razy większą od miary kąta β? Sporządź odpowiedni rysunek.

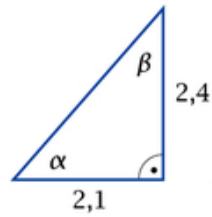
14. Popatrz na rysunek obok. Wydaje się, że zielona i żółta figura mają różne pola. Ale przecież obie figury zbudowane są z jednakowych części, zatem ich pola są równe. Spróbuj wyjaśnić ten paradoks.

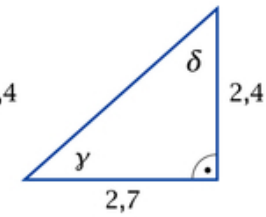


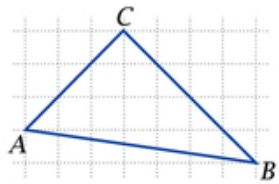
MINISPRAWDZIAN

S1. Przyjrzyj się rysunkom. Która z poniższych liczb jest największa?

A. $\operatorname{tg}\alpha$ B. $\operatorname{tg}\beta$ C. $\operatorname{tg}\gamma$ D. $\operatorname{tg}\delta$







S2. Tangens kąta BAC w trójkącie przedstawionym na rysunku obok jest równy:

A. $4\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

S3. Tangens jednego z kątów trójkąta prostokątnego jest równy 1,5. Jeśli najkrótszy bok tego trójkąta ma długość a, to najdłuższy bok ma długość:

A. $\frac{13a}{2}$ B. $\frac{13a}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{13}}{3}$

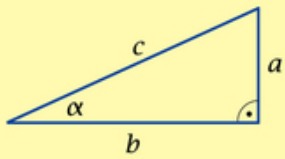
S4. Kąt ostry rombu ma miarę α. Dłuższa jego przekątna ma długość d. Pole tego rombu jest równe:

A. $\frac{d^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha$ B. $\frac{d^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ C. $\frac{d^2}{4} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ D. $\frac{d^2}{4} \cdot \operatorname{tg}\alpha$

SINUS I COSINUS KĄTA OSTREGO

Wiemy już, że jeśli dwa trójkąty prostokątne mają taki sam kąt ostry, to stosunki długości odpowiednich przyprostokątnych w obu tych trójkątach są takie same. Podobnie stosunki długości innych par boków są równe i mają swoje nazwy.

Niech α będzie kątem ostrym trójkąta prostokątnego.



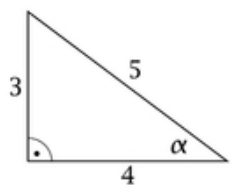
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

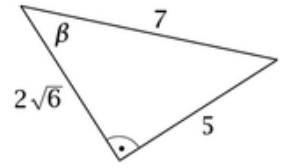
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

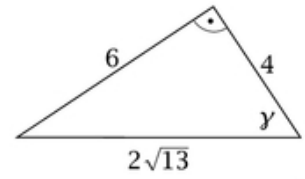
Sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przeciwprostokątnej. Sinus α oznaczamy $\sin\alpha$.

Cosinusem kąta α (czyt. kosinusem) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie α do długości przeciwprostokątnej. Cosinus α oznaczamy $\cos\alpha$.

ĆWICZENIE A Oblicz tangensy oraz sinusy i cosinusy kątów α, β i γ.





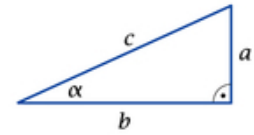


zadania 1–5

Warto wiedzieć!

Przyjmując oznaczenia jak na rysunku obok, otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$



Pozostałe stosunki boków w tym trójkącie też mają nazwy: cotangens (czyt. kotangens) kąta α, w skrócie $\operatorname{ctg}\alpha$, secans (czyt. sekans) kąta α, w skrócie $\sec\alpha$, cosecans (czyt. kosekans) kąta α, w skrócie $\operatorname{csc}\alpha$.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}$$

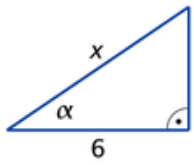
$$\operatorname{csc}\alpha = \frac{c}{a}$$

Funkcję secans wprowadził i wykorzystał Mikołaj Kopernik w swoim słynnym dziele *De revolutionibus orbium coelestium*.

Zwróć uwagę, że zachodzą następujące zależności:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad \operatorname{csc}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

II **PRZYKŁAD 1** W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 6, a cosinus kąta leżącego przy tej przyprostokątnej wynosi $\frac{4}{5}$. Oblicz długość przeciwprostokątnej.



$\frac{6}{x} = \frac{4}{5}$

$x = \frac{6 \cdot 5}{4}$

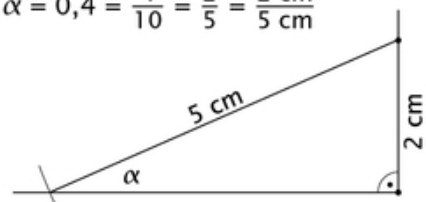
$x = 7{,}5$

$\cos\alpha = \frac{6}{x}$ i $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

ZADANIE W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 20, a sinus kąta leżącego naprzeciw tej przyprostokątnej wynosi $\frac{2}{5}$. Oblicz długość przeciwprostokątnej.

PRZYKŁAD 2 Narysuj kąt, którego sinus jest równy 0,4.

$\sin\alpha = 0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{2\text{ cm}}{5\text{ cm}}$



Wybieramy odcinki o takich długościach, aby ich iloraz był równy 0,4, np. 2 cm i 5 cm.

Rysujemy trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 2 cm i przeciwprostokątnej długości 5 cm. Szukany kąt leży naprzeciw przyprostokątnej długości 2 cm.

ZADANIE Narysuj kąt, którego cosinus jest równy $\frac{3}{5}$.

zadania 6–10

III Wiesz już, że liczba równa tangensowi kąta nie zależy od długości boków trójkąta, ale od miary kąta. Podobnie sinus i cosinus kąta zależą wyłącznie od miary kąta. Tangens, sinus i cosinus możemy więc rozpatrywać jako funkcje, których argumentami są miary kątów. Te funkcje nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi**.

ĆWICZENIE B Czy istnieje trójkąt prostokątny, w którym sinus jednego z kątów jest równy 2?

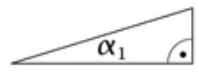
Zauważ, że przeciwprostokątna to najdłuższy bok trójkąta prostokątnego. W takim razie stosunek długości przyprostokątnej do długości przeciwprostokątnej jest zawsze liczbą mniejszą od 1. Wynika stąd, że sinus i cosinus kąta ostrego są liczbami dodatnimi mniejszymi od 1. Natomiast wartość tangensa kąta ostrego może być dowolną liczbą dodatnią.

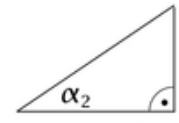
ĆWICZENIE C Na każdym rysunku przeciwprostokątna ma długość 1. Która z podanych trzech wartości jest największa?

a) $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$, $\sin\alpha_3$

b) $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$

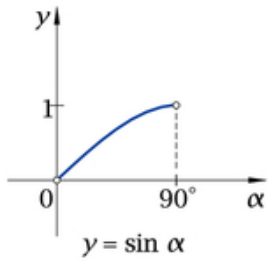
c) $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, $\operatorname{tg}\alpha_3$



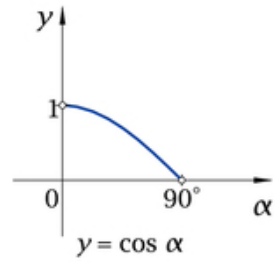




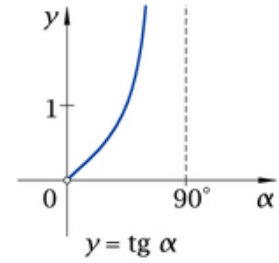
Poniższe wykresy pokazują, jak zmieniają się wartości funkcji trygonometrycznych, gdy $\alpha \in (0°; 90°)$.



$y = \sin\alpha$



$y = \cos\alpha$



$y = \operatorname{tg}\alpha$

ĆWICZENIE D Która z podanych liczb jest największa, a która — najmniejsza?

a) $\sin 73°$, $\sin 23°$, $\sin 11°$ b) $\cos 35°$, $\cos 9°$, $\cos 83°$ c) $\operatorname{tg} 16°$, $\operatorname{tg} 67°$, $\operatorname{tg} 47°$

Ciekawostka

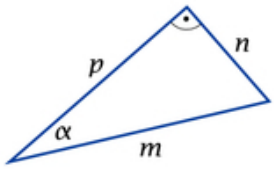
Nazwy funkcji trygonometrycznych pochodzą z łaciny. Ciekawa jest historia powstania nazwy sinus. Jak wiele innych pojęć matematycznych, także to pojęcie pochodzi z Indii. Stamtąd zostało przyswojone przez uczonych arabskich. Zwyczajem arabskim było zapisywanie wyrazów bez samogłosek, więc nazwę sinusa — *jeiba* — zapisywali jako *jb*.

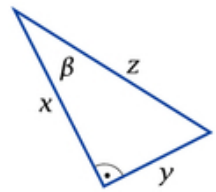
Gdy tłumacz arabskich ksiąg na łacinę natknął się na słowo *jb*, nie zdawał sobie sprawy, że jest ono obcego (niearabskiego) pochodzenia. Sprawdził tylko, że w języku arabskim słowo to może oznaczać *zatokę*. Ponieważ po łacinie *zatoka* to *sinus*, tak przetłumaczył słowo *jb*. Można więc powiedzieć, że nazwa *sinus* znalazła się w matematyce przez pomyłkę.

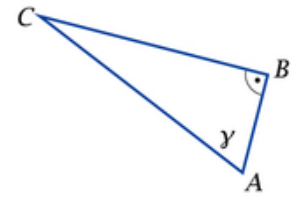
zadania 11–13

ZESTAW ZADAŃ

1. Zapisz sinus, cosinus oraz tangens kątów α, β i γ jako stosunki odpowiednich długości boków trójkątów.

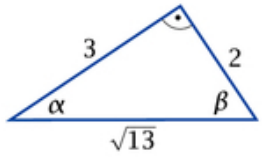






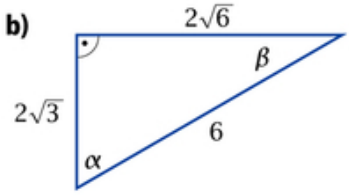
2. Oblicz wartości podanych funkcji trygonometrycznych kątów α i β.

a)



$\sin\alpha$
$\cos\beta$
$\operatorname{tg}\beta$

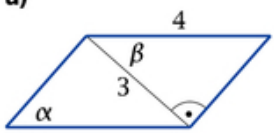
b)



$\cos\alpha$
$\sin\beta$
$\operatorname{tg}\alpha$

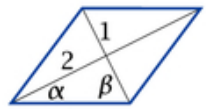
3. Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\beta$.

a)



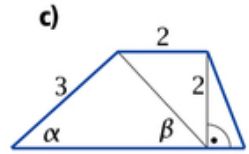
równoległobok

b)



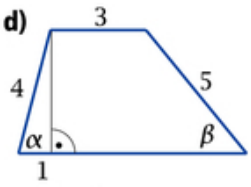
romb

c)



trapez

d)

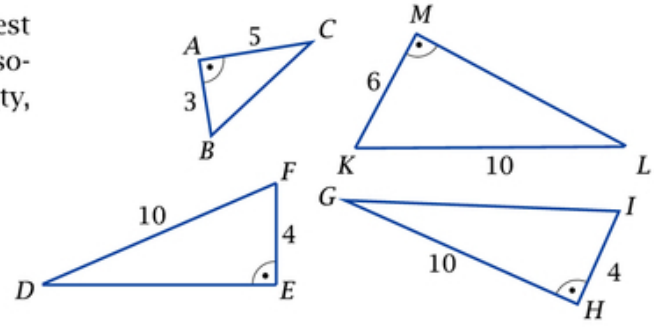


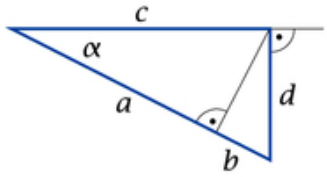
trapez

4. Każdy z kątów α, β, γ i δ jest kątem ostrym w jednym z narysowanych trójkątów. Wskaż te kąty, jeżeli wiadomo, że:

$\sin\alpha = \frac{2}{5}$ $\quad$ $\operatorname{tg}\gamma = \frac{3}{5}$

$\cos\beta = \frac{3}{5}$ $\quad$ $\operatorname{tg}\delta = \frac{2}{5}$





5. Popatrz na rysunek obok.

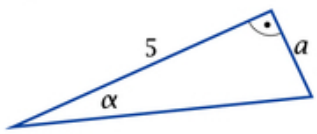
a) Do każdego z podanych ułamków dopasuj odpowiednią funkcję trygonometryczną kąta α.

$\frac{d}{a+b}$ $\quad$ $\frac{a}{c}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}$ $\quad$ $\frac{c}{a+b}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{d^2-b^2}}{c}$ $\quad$ $\frac{d}{c}$

b) Uzasadnij równość $\frac{b}{d} = \frac{d}{a+b}$.

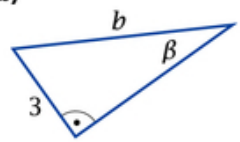
II **6.** Korzystając z podanej wartości funkcji trygonometrycznej kąta, oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

a)



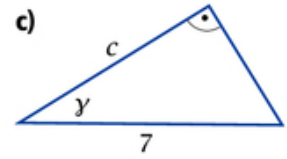
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$

b)



$\sin\beta = \frac{2}{3}$

c)



$\cos\gamma = \frac{4}{5}$

7. Najmniejszy z kątów pewnego trójkąta prostokątnego ma miarę α.

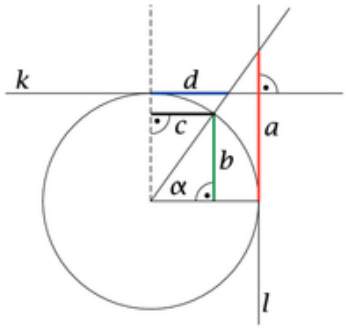
a) Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta, jeśli przeciwprostokątna ma długość p.

b) Najkrótszy bok trójkąta ma długość m. Oblicz długości pozostałych boków.

8. Skonstruuj kąty α i β, jeżeli wiadomo, że $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ i $\cos\beta = \frac{3}{4}$.

9. **a)** Skonstruuj trójkąt prostokątny mający przeciwprostokątną długości 6 cm i kąt ostry α, taki że $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

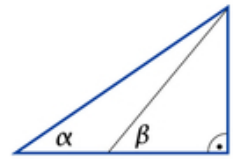
b) Skonstruuj trójkąt prostokątny o kącie ostrym α, takim że $\cos\alpha = \frac{2}{5}$, i przyprostokątnej o długości 3 cm leżącej przy tym kącie.

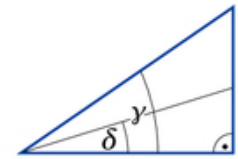


10. Okrąg na rysunku obok ma promień długości 1, a proste k i l są styczne do tego okręgu. Zapisz za pomocą funkcji trygonometrycznych kąta α długości zaznaczonych odcinków.

III **11.** Przyjrzyj się rysunkom i porównaj liczby:

a) $\sin\alpha$ i $\sin\beta$ **b)** $\cos\gamma$ i $\cos\delta$





12. Kąty α i β są ostre. Oceń, który z nich jest większy, gdy:

a) $\sin\alpha = 0{,}7$, $\sin\beta = 0{,}1$ **b)** $\cos\alpha = 0{,}6$, $\cos\beta = 0{,}2$

13. Kąt między ramieniem a podstawą trójkąta równoramiennego ma miarę α. Korzystając z funkcji trygonometrycznych, zapisz wzór pozwalający obliczać:

a) pole tego trójkąta, gdy dana jest wysokość h poprowadzona do podstawy,

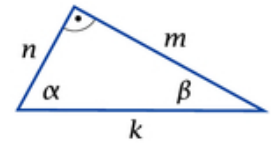
b) pole tego trójkąta, gdy dana jest długość ramienia d,

c) obwód tego trójkąta, gdy dana jest długość jego podstawy a.

MINISPRAWDZIAN

S1. Przy takich oznaczeniach jak na rysunku obok iloraz $\frac{k}{n}$ to:

A. $\cos\beta$ B. $\sin\alpha$ C. $\frac{1}{\cos\alpha}$ D. $\frac{1}{\sin\alpha}$



S2. Najdłuższy bok trójkąta prostokątnego ma długość 6, a mniejszy z kątów ostrych ma miarę α. Jaką długość ma krótsza z przyprostokątnych?

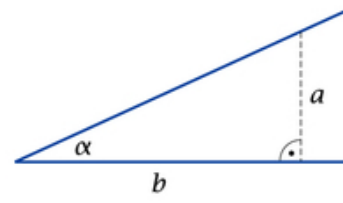
A. $6 \cdot \sin\alpha$ B. $\frac{6}{\sin\alpha}$ C. $6 \cdot \cos\alpha$ D. $\frac{6}{\cos\alpha}$

S3. W trójkącie równoramiennym o polu P wysokości poprowadzone do ramion mają długość h. Jeśli kąt między ramionami jest ostry i ma miarę α, to $\sin\alpha$ wynosi:

A. $\frac{h^2}{2P}$ B. $\frac{P}{h^2}$ C. $\frac{P}{2h}$ D. $\frac{2h^2}{P}$

OBLICZENIA TRYGONOMETRYCZNE

I Gdy dany jest kąt ostry α, możemy znaleźć jego tangens, postępując w następujący sposób. Rysujemy taki trójkąt prostokątny, w którym kąt α jest jednym z jego kątów. Mierzymy długości przyprostokątnych i obliczamy odpowiedni ich iloraz. Podobnie — po wykonaniu odpowiednich pomiarów — możemy obliczyć $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

ĆWICZENIE A Posługując się kątomierzem, narysuj kąt o mierze 20°. Zmierz długości odpowiednich odcinków i na podstawie tych pomiarów oblicz $\sin 20°$, $\cos 20°$, $\operatorname{tg} 20°$. Wynik zaokrąglij do części dziesiątych.

Wykonywanie takich obliczeń jak w ćwiczeniu A jest uciążliwe i zawsze obarczone pewnym błędem (wynikającym na przykład z niedokładności pomiarów). Aby znaleźć wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta, możesz się posłużyć tabelą zamieszczoną na s. 297 podręcznika. Oto jej fragment:

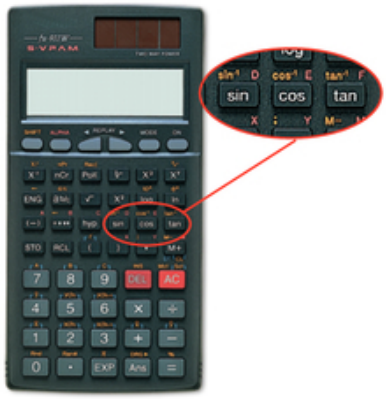
α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
1°	0,0175	0,9998	0,0175	16°	0,2756	0,9613	0,2867
2°	0,0349	0,9994	0,0349	17°	0,2924	0,9563	0,3057
3°	0,0523	0,9986	0,0524	18°	0,3090	0,9511	0,3249
4°	0,0698	0,9976	0,0699	19°	0,3256	0,9455	0,3443
5°	0,0872	0,9962	0,0875	20°	0,3420	0,9397	0,3640
6°	0,1045	0,9945	0,1051	21°	0,3584	0,9336	0,3839
7°	0,1219	0,9925	0,1228	22°	0,3746	0,9272	0,4040
8°	0,1392	0,9903	0,1405	23°	0,3907	0,9205	0,4245
9°	0,1564	0,9877	0,1584	24°	0,4067	0,9135	0,4452
10°	0,1736	0,9848	0,1763	25°	0,4226	0,9063	0,4663
11°	0,1908	0,9816	0,1944	26°	0,4384	0,8988	0,4877
12°	0,2079	0,9781	0,2126	27°	0,4540	0,8910	0,5095
13°	0,2250	0,9744	0,2309	28°	0,4695	0,8829	0,5317
14°	0,2419	0,9703	0,2493	29°	0,4848	0,8746	0,5543
15°	0,2588	0,9659	0,2679	30°	0,5000	0,8660	0,5774

Z tej tabeli można na przykład odczytać, że:

$$\sin 8° \approx 0{,}14 \qquad \cos 8° \approx 0{,}99 \qquad \operatorname{tg} 8° \approx 0{,}14$$
$$\sin 27° \approx 0{,}45 \qquad \cos 27° \approx 0{,}89 \qquad \operatorname{tg} 27° \approx 0{,}51$$

ĆWICZENIE B Odczytaj z tabeli $\sin 20°$, $\cos 20°$, $\operatorname{tg} 20°$ i porównaj te liczby z wynikami otrzymanymi w ćwiczeniu A.

Jeszcze łatwiej znaleźć sinus, cosinus i tangens danego kąta, korzystając z odpowiedniego kalkulatora. Do obliczania wartości tych funkcji służą klawisze z napisami: *sin*, *cos*, *tan*.



Uwaga. Używając kalkulatora do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych, należy najpierw sprawdzić, czy ustawioną w kalkulatorze jednostką miary kąta jest stopień. Najczęściej można wybrać jedną z trzech jednostek: stopień (skrót DEG od ang. *degree*), radian (skrót RAD) lub gradus (skrót GRAD).

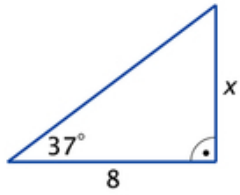
Warto wiedzieć!

Wiadomo, że kąt o mierze 1° to $\frac{1}{90}$ kąta prostego. Kąt o mierze 1 grad to $\frac{1}{100}$ kąta prostego. Natomiast 1 rad to miara kąta środkowego opartego na łuku o długości równej promieniowi okręgu.

ĆWICZENIE C Oblicz za pomocą kalkulatora: $\sin 12^\circ$, $\cos 74^\circ$, $\operatorname{tg} 44^\circ$. Porównaj otrzymane wyniki z danymi zamieszczonymi w tabeli na końcu podręcznika.

Korzystając z funkcji trygonometrycznych, możemy obliczać długości odcinków i miary kątów w różnych figurach geometrycznych.

PRZYKŁAD 1 Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma miarę 37°, a przyprostokątna leżąca przy tym kącie ma długość 8. Jaką długość ma druga przyprostokątna?



Wykonujemy rysunek pomocniczy.

$\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{x}{8}$

$x = 8 \cdot \operatorname{tg} 37^\circ$

Zapisujemy i przekształcamy odpowiednią równość.

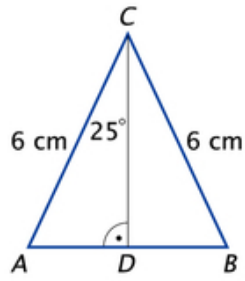
$x \approx 8 \cdot 0{,}7536 \approx 6$

Wartość $\operatorname{tg} 37^\circ$ odczytujemy z tablic lub obliczamy za pomocą kalkulatora.

Odp. Druga przyprostokątna ma długość około 6.

ZADANIE Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma miarę 42°, a przyprostokątna leżąca naprzeciwko tego kąta ma długość 5. Jaką długość ma druga przyprostokątna?

PRZYKŁAD 2 Ramiona trójkąta równoramiennego mają długość 6 cm. Kąt między tymi ramionami ma miarę 50°. Oblicz długość podstawy tego trójkąta.



Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Wysokość opuszczona na podstawę trójkąta równoramiennego dzieli kąt między ramionami na dwa równe kąty.

$$\sin 25^\circ = \frac{|AD|}{6}$$

$$|AD| = 6 \cdot \sin 25^\circ$$

$$|AB| = 2 \cdot |AD| = 12 \cdot \sin 25^\circ$$

$$|AB| \approx 12 \cdot 0{,}4226 \approx 5 \text{ [cm]}$$

Wartość $\sin 25^\circ$ odczytujemy z tabeli lub obliczamy za pomocą kalkulatora.

Odp. Podstawa trójkąta ma około 5 cm długości.

ZADANIE Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 8 cm. Kąt przy podstawie ma miarę 40°. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.

zadania 1–14

II Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych, możemy podać w pewnym przybliżeniu miarę kąta odpowiadającego danej wartości. Na przykład: aby znaleźć miarę kąta α, jeśli wiadomo, że $\sin\alpha = 0{,}31$, znajdujemy w kolumnie z wartościami funkcji sinus (zob. fragment tabeli poniżej) dwie liczby, z których jedna jest mniejsza, a druga większa od 0,31, i wybieramy ten kąt, którego sinus jest liczbą bliższą 0,31.

α	$\sin\alpha$
17°	0,2924
18°	0,3090
19°	0,3256
20°	0,3420

$$0{,}3090 < 0{,}31 < 0{,}3256$$

$\sin 18^\circ$ $\sin\alpha$ $\sin 19^\circ$

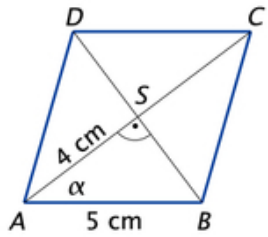
$$\alpha \approx 18^\circ$$

ĆWICZENIE D Korzystając z tabeli na końcu podręcznika, podaj w przybliżeniu, jakie miary mają kąty α, β i γ, jeśli $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$, $\sin\beta = 0{,}53$, $\cos\gamma = 0{,}45$.

Znając sinus lub cosinus, lub tangens kąta, można z większą dokładnością i znacznie wygodniej ustalić jego miarę, gdy skorzystamy z kalkulatora. Służą do tego klawisze, nad którymi widnieją napisy: $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$.

ĆWICZENIE E Korzystając z kalkulatora, ustal miary kątów α, β i γ, jeśli $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$, $\sin\beta = 0{,}53$, $\cos\gamma = 0{,}45$. Porównaj otrzymane liczby z liczbami otrzymanymi w ćwiczeniu D.

PRZYKŁAD 3 W rombie, którego bok ma 5 cm, dłuższa przekątna ma 8 cm. Oblicz miary kątów tego rombu.



$|\sphericalangle DAB| = 2\alpha$

Przekątne rombu są prostopadłe, przecinają się w połowie i dzielą kąty rombu na dwie równe części.

$\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$

W trójkącie ABS mamy $\cos\alpha = \frac{|AS|}{|AB|}$.

$\alpha \approx 37°$

Korzystając z tabeli lub kalkulatora, ustalamy miarę kąta, którego cosinus wynosi 0,8.

$|\sphericalangle DAB| = 2\alpha \approx 74°$

$|\sphericalangle ADC| = 180° - |\sphericalangle DAB| \approx 106°$

Korzystamy z tego, że suma miar sąsiednich kątów rombu wynosi 180°.

Odp. Sąsiednie kąty tego rombu mają miary około 74° i około 106°.

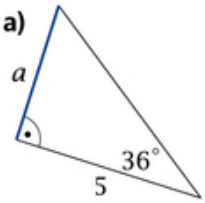
ZADANIE Przekątna prostokąta ma długość 8 cm, a jeden z jego boków — 3 cm. Oblicz miary kątów, jakie tworzy przekątna z bokami tego prostokąta.

zadania 15–20

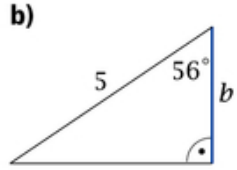
ZESTAW ZADAŃ

1. Korzystając z tabeli na str. 297 lub z kalkulatora, oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

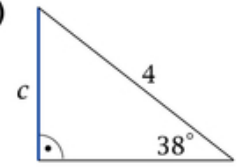
a)



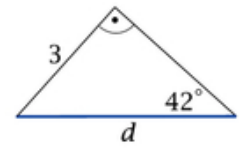
b)



c)



d)



2. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, którego jeden z kątów ma miarę 26°, a przyprostokątna leżąca naprzeciw tego kąta ma długość 10 cm.

3. Oblicz stosunek długości krótszej przyprostokątnej do przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym o kącie ostrym α, gdy:

a) $\alpha = 22°$ **b)** $\alpha = 72°$ **c)** $\alpha = 48°$

4. Oblicz stosunek długości dłuższej przyprostokątnej do krótszej w trójkącie prostokątnym o kącie ostrym α, gdy:

a) $\alpha = 73°$ **b)** $\alpha = 15°$ **c)** $\alpha = 28°$

5. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości a i b, a przeciwprostokątna ma długość c. Naprzeciw boku a leży kąt o mierze α. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta i miarę drugiego z jego kątów ostrych, jeśli dane są:

a) $a = 1$, $\alpha = 24°$ **b)** $b = 6$, $\alpha = 58°$ **c)** $c = 7$, $\alpha = 36°$

6. Wysokość równoległoboku poprowadzona z jednego z wierzchołków podzieliła bok równoległoboku na odcinki o długościach 3 cm i 5 cm. Kąt ostry równoległoboku ma miarę 40°. Oblicz pole tego równoległoboku.

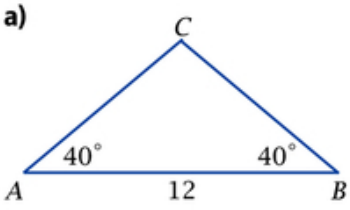
7. Przekątne prostokąta przecinają się pod kątem 80°. Dłuższy jego bok ma 5 cm. Oblicz pole tego prostokąta.

8. W trójkącie prostokątnym o kącie ostrym 20° jedna z przyprostokątnych jest o 5 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

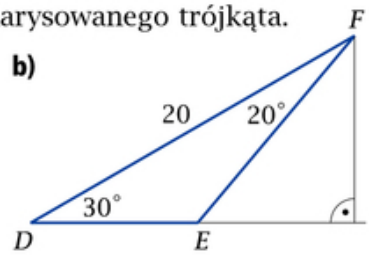
9. Krótsza przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma 5 cm, a jeden z jego kątów ma 20°. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną na przeciwprostokątną.

10. Oblicz długości boków narysowanego trójkąta.

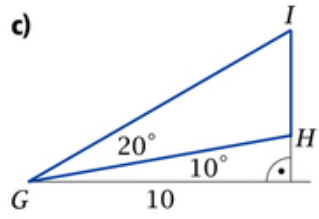
a)



b)



c)

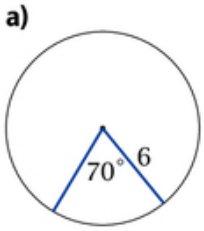


11. Znajdź wysokości równoległoboku, którego boki mają długości 7 cm i 10 cm, a kąt ostry ma 70°.

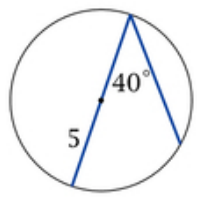
12. Bok rombu ma długość 5 cm, a jeden z jego kątów ma 54°. Oblicz długości przekątnych tego rombu.

13. Oblicz długość cięciwy, na której jest oparty zaznaczony kąt.

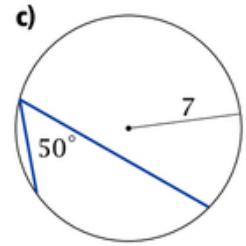
a)



b)



c)



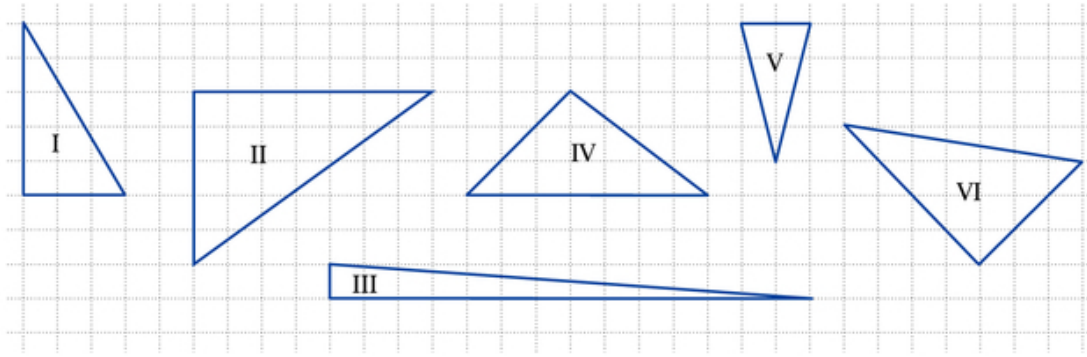
14. a) Oblicz długość boku pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 4 cm.

b) Znajdź długość promienia okręgu opisanego na dziesięciokącie foremnym o boku 2 cm oraz promienia okręgu wpisanego w ten dziesięciokąt.

II **15.** Korzystając z tabeli na str. 297 lub z kalkulatora, znajdź miarę kąta α, jeśli:

a) $\sin\alpha = 0{,}7$ **b)** $\cos\alpha = \frac{7}{12}$ **c)** $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}8$

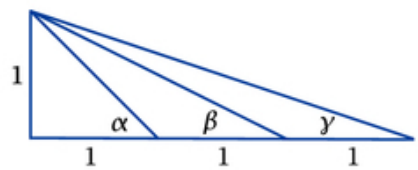
16. Oblicz miary kątów poniższych trójkątów.

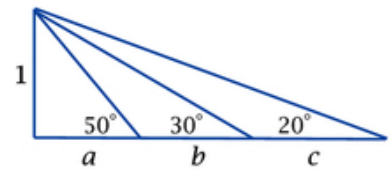


17. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy dłuższa od drugiej. Jakie miary mają kąty ostre tego trójkąta?

18. Znajdź miary kątów trójkąta równoramiennego, którego podstawa ma długość 3 cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę jest równa 5 cm.

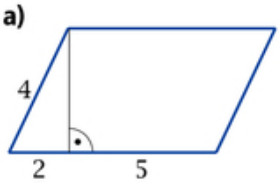
19. **a)** Oblicz miary kątów α, β i γ. **b)** Oblicz długości odcinków a, b i c.





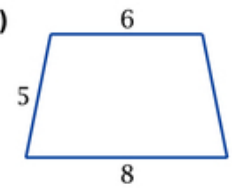
20. Oblicz miary kątów w narysowanym czworokącie.

a)



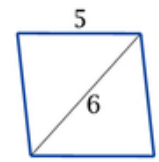
równoległobok

c)



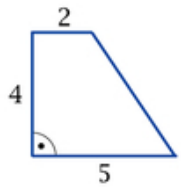
trapez równoramienny

e)



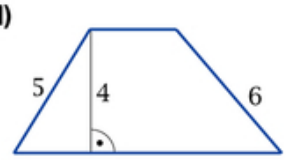
romb

b)



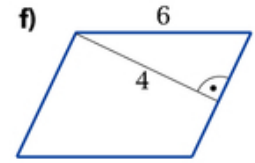
trapez

d)



trapez

f)



równoległobok

MINISPRAWDZIAN

S1. Jeżeli α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\alpha = 5$, to:

A. $\alpha < 50^\circ$ B. $50^\circ < \alpha < 60^\circ$ C. $60^\circ < \alpha < 70^\circ$ D. $\alpha > 70^\circ$

S2. Jeśli $\alpha = 65^\circ$, to $\sin\alpha + \cos\alpha$ zawiera się w przedziale:

A. $(0;0{,}5)$ B. $(0{,}5;1)$ C. $(1;1{,}5)$ D. $(1{,}5;2)$

S3. Boki trójkąta prostokątnego mają długości 5, 4, 3. Miara jednego z kątów tego trójkąta, po zaokrągleniu do pełnych stopni, jest równa:

A. 35° B. 37° C. 39° D. 41°

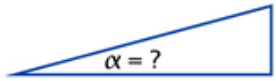
S4. Przekątne prostokąta przecinają się pod kątem 44°. Jeśli przez a oznaczymy długość krótszego boku, a przez b — dłuższego, to:

A. $a \approx 0{,}22b$ B. $a \approx 0{,}4b$ C. $a \approx 0{,}8b$ D. $a \approx 0{,}97b$

ZASTOSOWANIA TRYGONOMETRII

Funkcjami trygonometrycznymi posługują się często geodeci, architekci, konstruktorzy, a także specjaliści z takich dziedzin, jak fizyka, geografia i astronomia.

PRZYKŁAD 1 Kolejka linowo-terenowa na Gubałówkę wjeżdża po torach, których nachylenie wynosi 23%. Pod jakim kątem jest w tym miejscu nachylony stok Gubałówki?



Nachylenie podane w procentach to tangens kąta nachylenia; $23\% = 0{,}23$.

$23\% = 0{,}23$

$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}23$

Korzystając z tabeli lub kalkulatora, ustalamy miarę kąta, którego tangens wynosi 0,23.

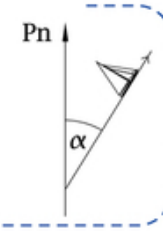
$\alpha \approx 13^\circ$

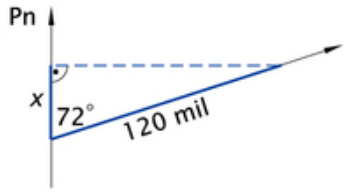
Odp. Stok Gubałówki jest nachylony pod kątem około 13°.

ZADANIE Nachylenie pewnej ulicy wynosi 16%. Pod jakim kątem nachylona jest ta ulica do poziomu?

PRZYKŁAD 2 Statek przepłynął 120 mil morskich kursem 72°. O ile mil statek zbliżył się do bieguna północnego? (W obliczeniach nie uwzględniaj krzywizny Ziemi).

Kurs statku to kąt między kierunkiem jego poruszania się a kierunkiem północnym (na rysunku jest to kąt α).





$\frac{x}{120} = \cos 72°$

$x = 120 \cdot \cos 72°$

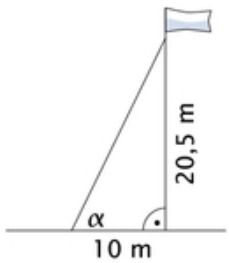
$x \approx 120 \cdot 0{,}309 \approx 37$

Wartość $\cos 72°$ odczytujemy z tabeli lub obliczamy za pomocą kalkulatora.

Odp. Statek zbliżył się do bieguna o około 37 mil morskich.

ZADANIE Statek przepłynął 85 mil kursem 32°. O ile mil morskich statek przemieścił się na wschód?

PRZYKŁAD 3 Linę podtrzymującą maszt przymocowano do niego na wysokości 20,5 m nad ziemią i zamocowano w ziemi w odległości 10 m od podstawy masztu. Jaki kąt tworzy z poziomem naprężona lina?



$\operatorname{tg} \alpha = \frac{20{,}5}{10} = 2{,}05$

$\alpha \approx 64°$

Odczytujemy z tabeli lub obliczamy za pomocą kalkulatora miarę kąta, którego tangens jest równy 2,05.

Odp. Lina nachylona jest do poziomu pod kątem około 64°.

ZADANIE Drabina o długości 4,50 m jest oparta o ścianę tak, że jej koniec dotyka ściany na wysokości 4 m. Pod jakim kątem drabina jest nachylona do podłoża?

zadania 1–16

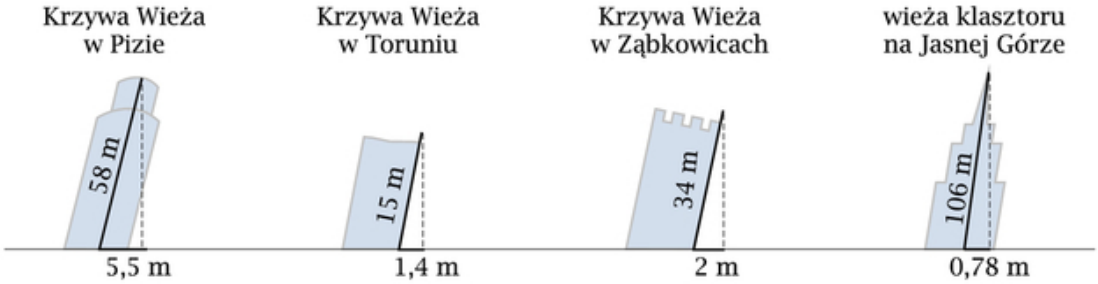
ZESTAW ZADAŃ

Wyciąg	Średnie nachylenie
Polanica	35,8%
Goryczkowa	37%
Hala Szrenicka	18%
Łabski Szczyt	28,9%

1. W tabelce podano nachylenia (w procentach) różnych wyciągów narciarskich. Pod jakimi kątami są nachylone te wyciągi?

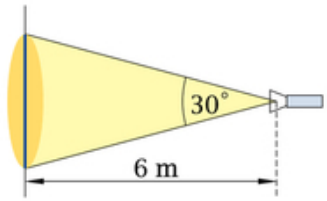
2. Trasa kolejki linowej na Kasprowy Wierch składa się z dwóch części. Nachylenie pierwszej wynosi 16,6%, a drugiej 27,5%. O ile stopni różnią się kąty nachylenia tych dwóch odcinków trasy kolejki?

3. Dla każdej z poniższych budowli oblicz, o jaki kąt odchylona jest od pionu.



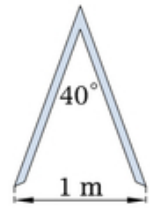
4. Korzystając z informacji podanych na rysunku, odpowiedz na pytanie.

a)



Jaka jest średnica kręgu światła rzucanego przez latarkę na ścianę?

b)



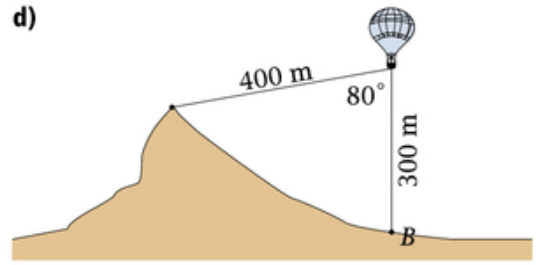
Z jak długich listew jest zbudowany przyrząd do odmierzania odległości?

c)



Jaka jest różnica wysokości między szczytem wzniesienia a punktem A?

d)



Jaka jest różnica wysokości między szczytem wzniesienia a punktem B?

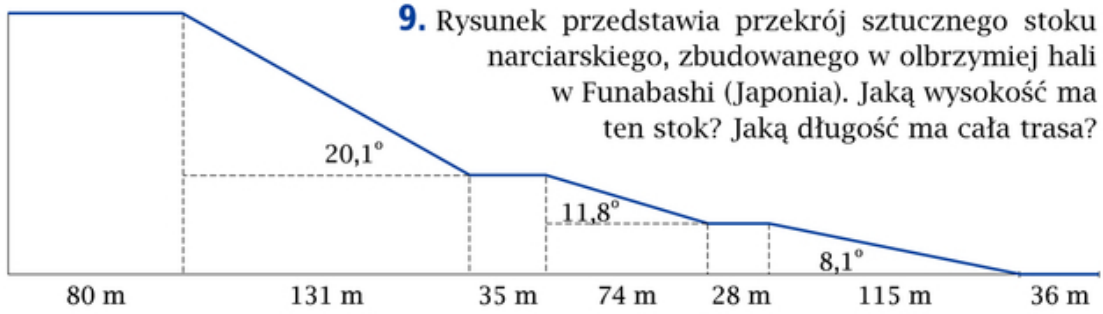
5. Zgodnie z przepisami budowlanymi podjazdy dla wózków inwalidzkich wewnątrz budynków nie mogą być nachylone pod kątem większym niż 5°. Jaka powinna być długość podjazdu, który umożliwia pokonanie różnicy wysokości 1 m?

6. Latarnia morska stoi 20 mil na zachód od portu, a statek znajduje się w punkcie położonym 50 mil na południe od tej latarni. Jakim kursem powinien popłynąć statek, by dotrzeć do portu najkrótszą drogą?

7. Gdy Mikołaj przebywał w miejscowości Oulu (Finlandia), notował każdego dnia w ciągu całego roku długość swojego cienia w południe. Okazało się, że najkrótszy cień miał 1,6 m, a najdłuższy 66,5 m. Mikołaj ma 180 cm wzrostu. Pod jakim kątem padały promienie słoneczne wtedy, gdy cień Mikołaja był najkrótszy, a pod jakim — gdy był najdłuższy?

8. Najbardziej stroma trasa kolejowa na świecie to Katoomba Scenic w Górach Błękitnych w Australii. Na jednym z jej odcinków, o długości 311 m, pociąg pokonuje różnicę wysokości 240 m. Jaki jest kąt nachylenia tego odcinka trasy?

9. Rysunek przedstawia przekrój sztucznego stoku narciarskiego, zbudowanego w olbrzymiej hali w Funabashi (Japonia). Jaką wysokość ma ten stok? Jaką długość ma cała trasa?





10. a) Fotografia obok przedstawia tzw. diabelski młyn w pewnym lunaparku. Średnica jego koła wynosi 35 m. Zawieszono na nim 36 wagoników. W najniższym położeniu wagonik zawieszony jest 2 m nad ziemią. Jak wysoko nad ziemią jest zaczepiony wagonik oznaczony na fotografii literą A, a jak wysoko — wagonik oznaczony literą B?

b) Największe na świecie koło widokowe London Eye (zob. fotografia na okładce) ma średnicę 135 m. Zawieszono na nim 32 gondole. Oblicz różnicę między wysokościami, na których znajdują się sąsiadujące ze sobą gondole, w momencie gdy jedna z nich znajduje się w najwyższym punkcie.



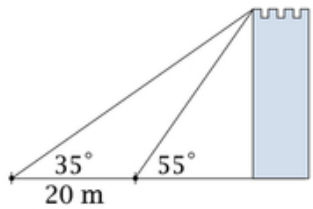
11. Zdjęcie przedstawia zamocowanie lin podtrzymujących wysoki maszt. Miejsce, w którym zakotwiczone są liny, jest oddalone o 20 m od podstawy masztu. Kąty między poszczególnymi linami a poziomem mają miary 15°, 33° i 45°.

a) Oblicz długości tych lin.

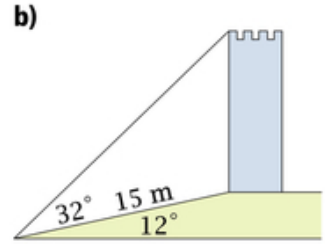
b) Oblicz odległości między punktami zaczepienia tych lin na maszcie.

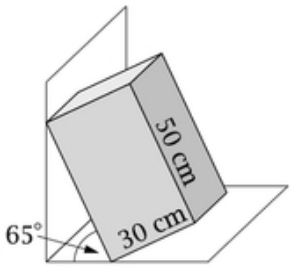
12. Korzystając z informacji podanych na rysunku, oblicz wysokość wieży.

a)



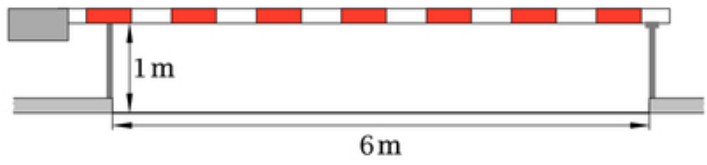
b)





13. Prostopadłościenne pudełko jest oparte jedną krawędzią o ścianę, a drugą — o podłogę, tak jak przedstawiono na rysunku. Oblicz odległość najwyżej położonego wierzchołka tego pudełka od podłogi (po zaokrągleniu do pełnych centymetrów).

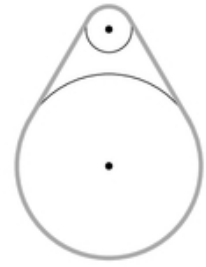
14. Przyjrzyj się rysunkowi. O jaki najmniejszy kąt należałoby obrócić ramię szlabanu, aby mógł przejechać pod nim autobus, który ma 2,5 m szerokości i 3,1 m wysokości?





15. Okrągłe lustro o średnicy 40 cm zawieszono na sznurze (zob. rysunek z lewej). Odległość między środkiem lustra a gwoździem, na którym wisi, jest równa 50 cm. Oblicz długość sznura.

16. Na dwóch kołach o promieniach 40 cm i 10 cm rozpięto pas transmisyjny (zob. rysunek z prawej). Odległość między środkami kół jest równa 60 cm. Jaka jest długość pasa?

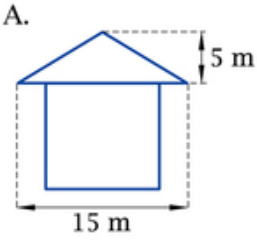


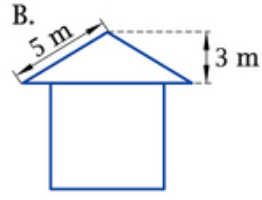
MINISPRAWDZIAN

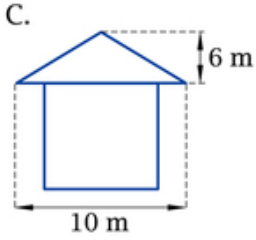
S1. Ruchome schody łączą parter z piętrem położonym 3 m wyżej. Poręcz przy tych schodach nachylona jest do poziomu pod kątem 32°. Jaką odległość pokonuje osoba, która przemieści się z parteru na piętro, korzystając z tych schodów?

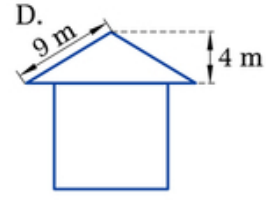
A. większą niż 5,5 m, ale mniejszą niż 5,9 m
B. większą niż 5 m, ale mniejszą niż 5,5 m
C. mniejszą niż 5 m
D. większą niż 5,9 m

S2. Architekci radzą, by dachówką pokrywać tylko te dachy, które są nachylone do poziomu pod kątem większym niż 31°. Na schematycznych rysunkach podano niektóre wymiary. Którego dachu nie powinno się pokryć dachówką?

A.


B.


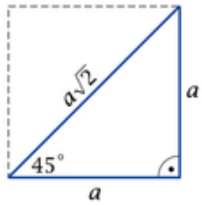
C.


D.


WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH KĄTÓW 30°, 45°, 60°

Z tabeli na str. 297 można odczytać przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych. Korzystając z zależności między bokami w pewnych trójkątach, możemy wyznaczyć dokładne wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45° i 60°.

Trójkąt prostokątny o kącie ostrym 45° to połowa kwadratu, więc:

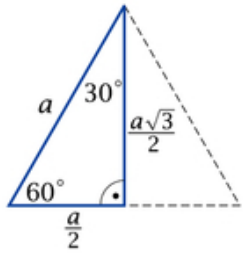


$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

Ponieważ trójkąt prostokątny o kątach ostrych 30° i 60° to połowa trójkąta równobocznego, więc:



$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

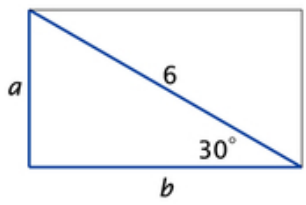
$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

W tabelce obok zebrano wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45° i 60°.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Zadania dotyczące trójkątów prostokątnych równoramiennych oraz trójkątów prostokątnych o kątach ostrych 30° i 60° rozwiązywaliśmy już wcześniej (por. str. 67). Korzystając z tabelki, możemy rozwiązać tego typu zadania także za pomocą funkcji trygonometrycznych.

PRZYKŁAD Oblicz długości boków prostokąta przedstawionego na rysunku.



$\frac{a}{6} = \sin 30°$ $\quad$ $\frac{b}{6} = \cos 30°$

$\frac{a}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{b}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2a = 6$ $\quad$ $2b = 6\sqrt{3}$

$a = 3$ $\quad$ $b = 3\sqrt{3}$

Korzystamy z wartości funkcji trygonometrycznych kąta 30°.

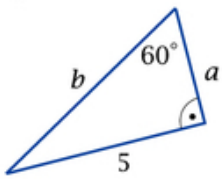
ZADANIE Krótszy bok prostokąta ma długość 3 cm, a kąt między przekątną a tym bokiem ma miarę 60°. Oblicz długość dłuższego boku tego prostokąta.

zadania 1–8

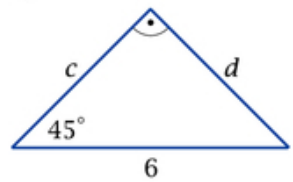
ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

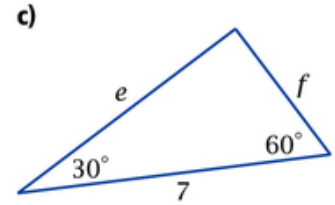
a)



b)



c)

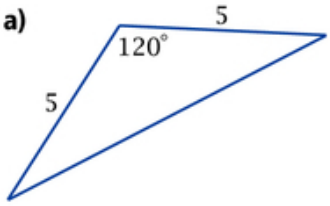


2. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α, a najkrótszy bok ma długość a. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta, jeśli:

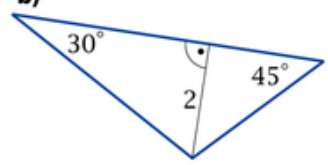
a) $\alpha = 30°$, $a = 4$ $\quad$ **b)** $\alpha = 45°$, $a = \sqrt{3}$ $\quad$ **c)** $\alpha = 60°$, $a = 2\sqrt{3}$

3. Oblicz obwód narysowanego trójkąta.

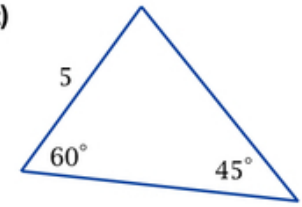
a)



b)

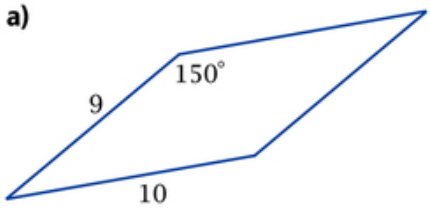


c)



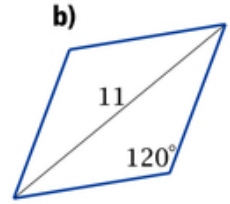
4. Oblicz pole czworokąta przedstawionego na rysunku.

a)



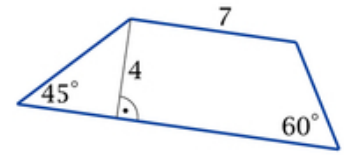
równoległobok

b)



romb

c)



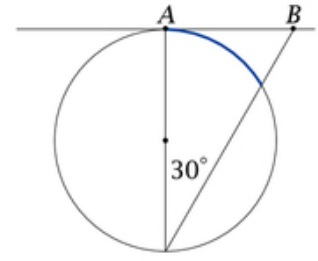
trapez

5. Krótsza przekątna równoległoboku ma długość 4 cm i dzieli go na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz pole tego równoległoboku, jeśli jego kąt ostry ma miarę 60°.

6. Bok rombu ma długość 6 cm, a kąt rozwarty ma miarę 120°. Oblicz długości przekątnych tego rombu.

7. Z punktu P poprowadzono dwie styczne do okręgu o promieniu 4 cm. Kąt między stycznymi ma miarę 60°. Znajdź odległość punktu P od środka okręgu.

8. Czy łuk zaznaczony na rysunku obok ma większą długość niż odcinek AB? Odpowiedź uzasadnij.



MINISPRAWDZIAN

S1. Liczba $2\sin 45° + 3\sin 30°$ jest równa:

A. $2+3\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}$ C. $\sqrt{2}+1$ D. $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

S2. W trójkącie dwa kąty mają miary 60° i 45°. Najkrótszy bok tego trójkąta ma długość 10. Jaką długość ma najdłuższy bok tego trójkąta?

A. $5\sqrt{3}+10$ B. $5\sqrt{3}$ C. $10\sqrt{3}$ D. $5\sqrt{3}+5$

S3. Przekątne równoległoboku mają długości a i b i przecinają się pod kątem 60°. Pole tego równoległoboku jest równe:

A. $\frac{ab}{4}$ B. $\frac{ab}{2}$ C. $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$

ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCJAMI TRYGONOMETRYCZNYMI

I

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

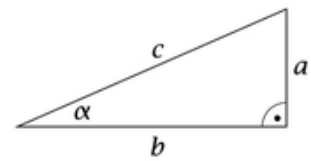
Obok zapisano dwie **tożsamości trygonometryczne**, czyli równości, które są prawdziwe dla dowolnego kąta ostrego α. Pierwsza z nich jest nazywana jedynką trygonometryczną.

Uwaga. Zapis $\sin^2\alpha$ (czytamy: sinus kwadrat alfa) oznacza liczbę $(\sin\alpha)^2$.

Dowód

Niech α będzie dowolnym kątem ostrym.

Stosując oznaczenia jak na rysunku obok, otrzymujemy:



$$L = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1 = P$$

Przekształcamy lewą stronę pierwszej równości tak, aby otrzymać prawą stronę.

Z twierdzenia Pitagorasa $a^2 + b^2 = c^2$.

$$P = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha = L \quad \square$$

Przekształcamy prawą stronę drugiej równości tak, aby otrzymać lewą stronę.

PRZYKŁAD 1 a) Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

Ponieważ cosinus kąta ostrego α jest dodatni, więc możemy pominąć rozwiązanie $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{12} = \frac{5}{12}$$

b) Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 7$. Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 7$, więc $\sin\alpha = 7\cos\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$(7\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$49\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$50\cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{50}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

Ponieważ cosinus kąta ostrego jest dodatni, więc pomijamy rozwiązanie $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{50}}$.

$\sin\alpha = 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

ZADANIE a) Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Oblicz $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$.

b) Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

PRZYKŁAD 2 Sprawdź tożsamość $\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

$L = \frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} =$

$= \frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} =$

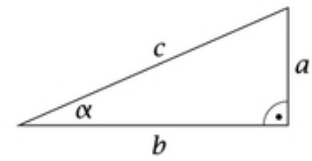
Przekształcamy lewą stronę równości tak, aby otrzymać prawą stronę.

$= \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = P$

ZADANIE Sprawdź tożsamość $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

zadania 1–5

II ĆWICZENIE Korzystając z oznaczeń na rysunku obok, zapisz za pomocą liter a, b i c: $\sin(90^\circ - \alpha)$, $\cos(90^\circ - \alpha)$ i $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$.



Porównując wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych tego samego trójkąta prostokątnego, otrzymamy równości, które zostały zapisane obok.

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

PRZYKŁAD 3 Zapisz w prostszej postaci iloczyn $\operatorname{tg}37^\circ \cdot \sin 53^\circ$.

$\operatorname{tg}37^\circ \cdot \sin 53^\circ = \frac{\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ} \cdot \sin(90^\circ - 37^\circ) = \frac{\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ} \cdot \cos 37^\circ = \sin 37^\circ$

ZADANIE Zapisz w prostszej postaci $\frac{\cos 18^\circ}{\operatorname{tg}72^\circ}$.

zadania 6–10

ZESTAW ZADAŃ

I **1.** Przyjmujemy, że α jest kątem ostrym.

a) Oblicz $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

b) Oblicz $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

c) Oblicz $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, gdy $\sin\alpha = \frac{2}{7}$.

d) Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, jeśli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$.

● **2.** Wiedząc, że $\sin 22{,}5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, oblicz $\cos 22{,}5^\circ$ i $\operatorname{tg} 22{,}5^\circ$.

3. Uzasadnij, że nie istnieje kąt ostry α, dla którego spełniony jest warunek:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

b) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg}\alpha = 3$ i $\cos\alpha = \frac{5}{7}$

4. Przedstaw w prostszej postaci.

a) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

b) $1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

c) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin\alpha\cos\alpha$

d) $(\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha)^2-\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$

e) $\sin\alpha\left(\sin\alpha+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$

● **f)** $\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

5. Sprawdź tożsamości.

a) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

b) $1+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

c) $\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

d) $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

II **6.** Uzasadnij, że dla dowolnego kąta ostrego α wartość podanego wyrażenia jest równa 1.

a) $\sin^2\alpha+\sin^2(90^\circ-\alpha)$

b) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)$

c) $\sin\alpha\cos(90^\circ-\alpha)+\cos\alpha\sin(90^\circ-\alpha)$

d) $\frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ-\alpha)}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos(90^\circ-\alpha)}$

7. Oblicz.

a) $\operatorname{tg}27^\circ\cdot\operatorname{tg}63^\circ$

b) $\sin^2 12^\circ+\sin^2 78^\circ$

c) $\frac{\sin 39^\circ}{\sin 51^\circ}\cdot\frac{\cos 39^\circ}{\cos 51^\circ}$

● **8.** **a)** Wiedząc, że $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, oblicz $\sin 54^\circ$ i $\sin 36^\circ$.

b) Wiedząc, że $\operatorname{tg} 75^\circ = 2+\sqrt{3}$, oblicz $\operatorname{tg} 15^\circ$.

c) Wiedząc, że $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, oblicz $\sin 75^\circ$.

● **9.** Znajdź miarę kąta ostrego α, jeżeli:

a) $\cos\alpha = \sin 20^\circ$

b) $\sin\alpha = \cos(\alpha-10^\circ)$

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}65^\circ}$

10. Niech α i β będą kątami ostrymi trójkąta prostokątnego. Ustal ich miary, gdy:

a) $\operatorname{tg}\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}$ **b)** $\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}$ **c)** $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \sqrt{3}$

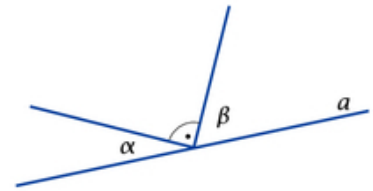
MINISPRAWDZIAN

S1. Ile wynosi wartość wyrażenia $\frac{1}{\cos\alpha \cdot \sin(90^\circ - \alpha)} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2(90^\circ - \alpha)}$?

A. 0 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

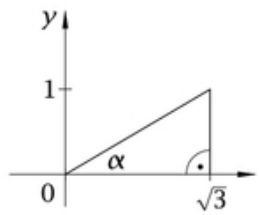
S2. Kąty α i β utworzone są przez prostą a i ramiona kąta prostego, tak jak na rysunku. Jeśli $\sin\alpha = \frac{2}{5}$, to $\sin\beta$ jest równy:

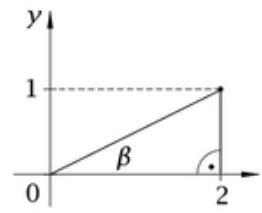
A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

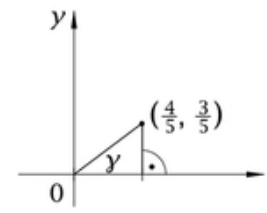


FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTÓW OD 0° DO 180°

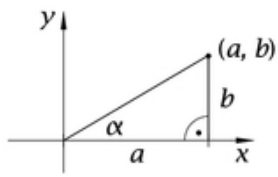
ĆWICZENIE A Na rysunkach kąty α, β i γ zaznaczono w układzie współrzędnych. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\gamma$.







Jeśli trójkąt prostokątny jest umieszczony w układzie współrzędnych, to funkcje trygonometryczne kąta α możemy opisać za pomocą współrzędnych jednego z wierzchołków tego trójkąta.



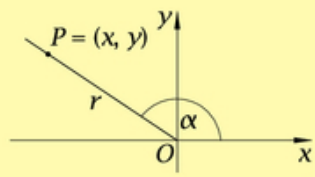
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Taką interpretację możemy wykorzystać do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych dowolnych kątów — nie tylko ostrych.

Niech α będzie dowolnym kątem umieszczonym w układzie współrzędnych tak, że wierzchołek kąta α leży w punkcie $(0,0)$, a jedno z ramion kąta — na nieujemnej części osi x. Wybieramy na drugim ramieniu kąta α dowolny punkt $P = (x, y)$ różny od wierzchołka kąta (zob. rysunek poniżej).



$$r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \quad (\text{gdy } x \neq 0)$$

Funkcje trygonometryczne kąta α definiujemy w następujący sposób:

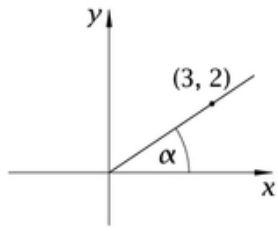
Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P (drugiej współrzędnej) do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

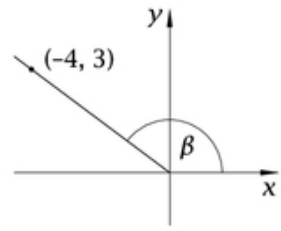
Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej punktu P (pierwszej współrzędnej) do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

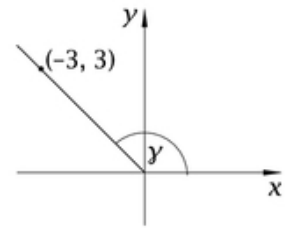
Jeśli odcięta punktu P jest różna od zera, to **tangensem** kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odciętej tego punktu.

W tym i następnych podrozdziałach będziemy rozpatrywać funkcje trygonometryczne dla kątów z przedziału $(0°; 180°)$.

ĆWICZENIE B a) Korzystając z danych na rysunkach, oblicz $\operatorname{tg}\alpha$, $\cos\beta$ i $\sin\gamma$.







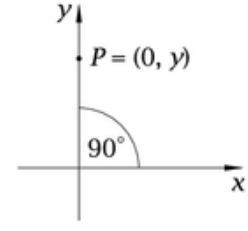
b) Przyjmijmy, że $\alpha \in (90°; 180°)$. Jakimi liczbami — dodatnimi czy ujemnymi — są liczby $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$?

Wszystkie funkcje trygonometryczne kąta ostrego są dodatnie, a dla kątów rozwartych sinus jest liczbą dodatnią, a cosinus i tangens są liczbami ujemnymi.

Na rysunku obok zaznaczono w układzie współrzędnych kąt 90°. Z definicji funkcji trygonometrycznych wynika, że:

$$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0 \qquad \sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{0^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2}} = 1$$

Nie możemy natomiast podać wartości tangensa dla kąta 90°, gdyż iloraz $\frac{y}{x}$ nie jest określony, gdy $x = 0$.



zadania 1–3

II

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ (jeśli } \cos\alpha \neq 0)$$

Poznane wcześniej tożsamości trygonometryczne zachodzą również dla wszystkich kątów, dla których wyrażenia występujące w tych tożsamościach mają sens.

ĆWICZENIE C Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych, uzasadnij równości zapisane powyżej.

PRZYKŁAD 1 Kąt α jest rozwarty i $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz $\cos\alpha$ oraz $\operatorname{tg}\alpha$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ ⋮ Cosinus kąta rozwartego jest liczbą ujemną.

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{-2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$

ZADANIE Kąt α jest kątem rozwartym i $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$. Oblicz $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$.

Obok zapisano trzy równości, które są spełnione dla dowolnego kąta ostrego α. Tego typu równości nazywamy wzorami redukcyjnymi. Łatwo te wzory uzasadnić, gdy sporządzimy odpowiedni rysunek.

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

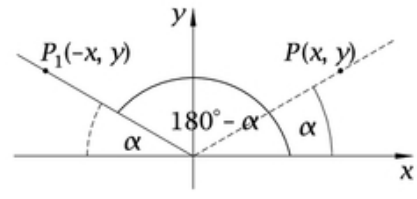
Dowód

Z danych na rysunku, wynika, że:

$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin\alpha$

$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha$ □



Tabele wartości funkcji trygonometrycznych są sporządzone dla kątów ostrych. Korzystając z nich oraz z powyższych wzorów, można obliczać wartości tych funkcji także dla kątów rozwartych.

PRZYKŁAD 2 Oblicz: $\sin 125°$, $\operatorname{tg} 95°$, $\cos 135°$.

$\sin 125° = \sin(180° - 55°) = \sin 55° \approx \underline{0{,}8192}$

$\operatorname{tg} 95° = \operatorname{tg}(180° - 85°) = -\operatorname{tg} 85° \approx \underline{-11{,}4301}$

$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Korzystamy ze wzorów i z tablic trygonometrycznych.

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ZADANIE a) Korzystając z tablic trygonometrycznych, oblicz: $\sin 114°$, $\cos 116°$, $\operatorname{tg} 160°$.

b) Oblicz: $\sin 135°$, $\cos 150°$, $\operatorname{tg} 120°$.

Z równości $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ wynika, że w przedziale $(0°; 180°)$ są zwykle dwa kąty, dla których wartości sinusa są takie same (wyjątkiem jest przypadek $\sin\alpha = 1$, wówczas $\alpha = 90°$).

W wypadku cosinusa i tangensa w przedziale $(0°; 180°)$ jest tylko jeden kąt, którego cosinus jest równy danej wartości, a także tylko jeden kąt, którego tangens jest równy danej wartości.

PRZYKŁAD 3 a) Oblicz α, wiedząc, że $\sin\alpha = 0{,}6$ i $\alpha \in (0°; 180°)$.

$\sin\alpha = 0{,}6$

$\alpha \approx \underline{37°}$ lub $\alpha \approx 180° - 37° = \underline{143°}$

Odczytujemy z tablic lub za pomocą kalkulatora miarę kąta ostrego α spełniającego warunek $\sin\alpha = 0{,}6$. Ten warunek spełnia też kąt $180° - \alpha$.

b) Oblicz α, wiedząc, że $\cos\alpha = -0{,}3$ i $\alpha \in (0°; 180°)$.

$\cos\alpha = -0{,}3$

$\cos\alpha \approx -\cos 73° = \cos(180° - 73°) = \cos 107°$

$\alpha \approx \underline{107°}$

Odczytujemy z tabeli miarę kąta, dla którego cosinus jest równy 0,3.

Korzystamy z równości $-\cos\alpha = \cos(180° - \alpha)$.

c) Oblicz α, wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = -4$ i $\alpha \in (0°; 180°)$.

$\operatorname{tg}\alpha = -4$

$\operatorname{tg}\alpha \approx -\operatorname{tg} 76° = \operatorname{tg}(180° - 76°) = \operatorname{tg} 104°$

$\alpha \approx \underline{104°}$

Odczytujemy z tabeli miarę kąta, dla którego tangens jest równy 4.

ZADANIE Oblicz α, jeśli wiadomo, że $\alpha \in (0°; 180°)$ oraz:

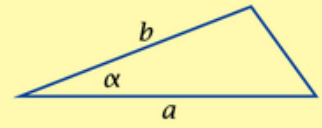
a) $\sin\alpha = 0{,}2$ b) $\cos\alpha = -0{,}6$ c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{5}$

zadania 4–8

III Z definicji funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych i rozwartych wynikają dwa użyteczne twierdzenia, które omawiamy poniżej.

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch boków trójkąta i sinusa kąta między tymi bokami.

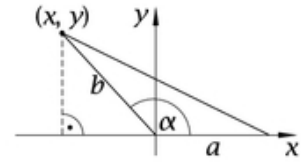


$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

Dowód

Z oznaczeń na rysunku wynika, że: $\sin \alpha = \frac{y}{b}$.

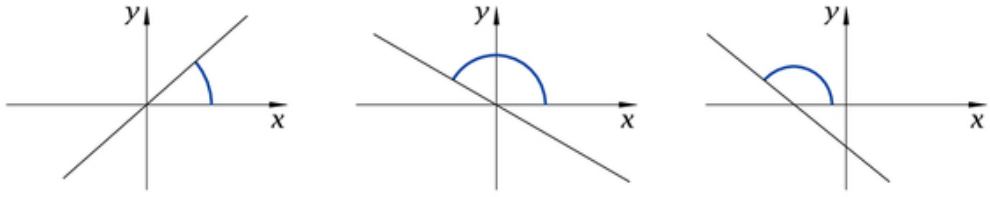
$P = \frac{1}{2}ay = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$. □



ĆWICZENIE D Dwa boki pewnego trójkąta mają długości 4 i 6, a kąt między tymi bokami ma 100°. Oblicz pole tego trójkąta.

zadania 9–15

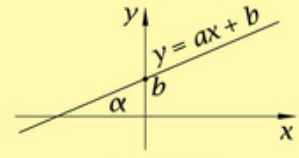
IV Na rysunkach przedstawiono kilka prostych. Zaznaczone kąty nazywamy kątami nachylenia tych prostych do osi x. Zwróć uwagę, że kąt nachylenia nie zawsze jest kątem ostrym, ale zawsze jest to kąt mniejszy od 180°.



ĆWICZENIE E Narysuj prostą $y = \frac{3}{4}x$ oraz prostą $y = -\frac{4}{5}x$. Zaznacz kąty nachylenia tych prostych do osi x i oblicz tangensy tych kątów.

Twierdzenie

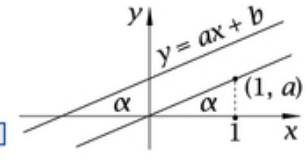
Współczynnik kierunkowy a prostej o równaniu $y = ax + b$ jest równy tangensowi kąta nachylenia tej prostej do osi x.



$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Dowód

Przypuśćmy, że prosta o równaniu $y = ax + b$ jest nachylona do osi x pod kątem α. Ponieważ na prostej o równaniu $y = ax$, która jest do niej równoległa, leży punkt $(1, a)$, więc: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{1} = a$. □



PRZYKŁAD 4 Znajdź równanie prostej, która jest nachylona do osi x pod kątem $30°$ i przechodzi przez punkt $(6, 4)$.

$y = ax + b$

$a = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — Współczynnik a jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej do osi x.

$4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 6 + b$, stąd $b = 4 - 2\sqrt{3}$ — Punkt $(6, 4)$ leży na prostej, więc spełnia jej równanie.

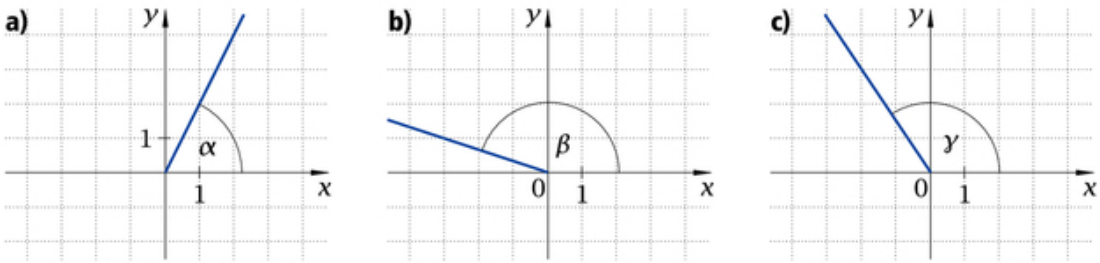
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 - 2\sqrt{3}$

ZADANIE Znajdź równanie prostej, która jest nachylona do osi x pod kątem $120°$ i przechodzi przez punkt $(1, -4)$.

zadania 16–18

ZESTAW ZADAŃ

I **1.** Znajdź punkt o obu współrzędnych całkowitych leżący na narysowanej półprostej. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych zaznaczonego kąta.



2. Które z podanych liczb są liczbami ujemnymi?

$\sin 57°$ $\sin 97°$ $\cos 88°$ $\cos 100°$ $\operatorname{tg} 57°$ $\operatorname{tg} 105°$

3. Narysuj w układzie współrzędnych kąt α, taki że $\alpha < 180°$ oraz:

a) $\cos\alpha = -0{,}2$ **b)** $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}4$ **c)** $\sin\alpha = 0{,}6$ i $\alpha > 90°$

II **4.** **a)** Wiadomo, że kąt α jest rozwarty i $\sin\alpha = \frac{1}{5}$. Oblicz $\cos\alpha$.

b) Wiadomo, że kąt α jest rozwarty i $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$.

c) Wiadomo, że kąt α jest rozwarty. Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, gdy $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

5. Korzystając z tabeli funkcji trygonometrycznych, oblicz:

a) $\operatorname{tg} 170°$ **b)** $\cos 100°$ **c)** $\sin 125°$ **d)** $\operatorname{tg} 145°$

6. Oblicz.

a) $\sin 135°$ **b)** $\operatorname{tg} 150°$ **c)** $\cos 120°$ **d)** $\cos 135°$

7. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$, gdy $\alpha = 45°$ **b)** $\cos\alpha + \cos 2\alpha$, gdy $\alpha = 60°$

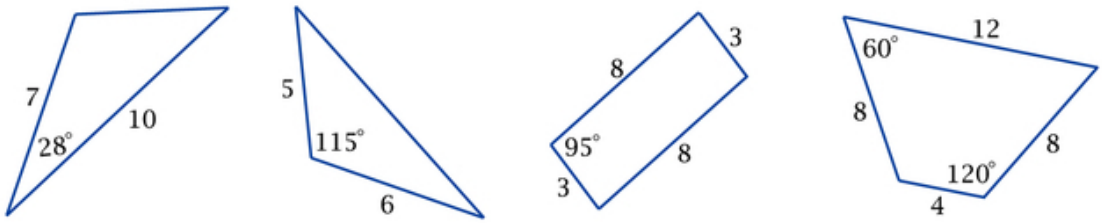
8. Przyjmijmy, że $\alpha \in (0°; 180°)$. Korzystając z tablic lub z kalkulatora, oblicz miarę kąta α (z dokładnością do pełnych stopni), jeśli wiadomo, że:

a) $\cos\alpha = 0{,}97$ **b)** $\cos\alpha = -0{,}4$ **c)** $\sin\alpha = 0{,}7$ **d)** $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}83$

III **9.** **a)** Oblicz pole równoległoboku o kącie ostrym 56° i bokach o długościach 3 i 7.

b) Oblicz pole osiemnastokąta foremnego wpisanego w okrąg, którego promień ma długość 5.

10. Oblicz pola narysowanych figur.



11. **a)** Znajdź miary kątów rombu o boku 6 m i polu równym 34 m^2.

b) Każde z ramion trójkąta równoramiennego ma 3 cm, a pole tego trójkąta jest równe 2 cm^2. Znajdź miary kątów tego trójkąta.

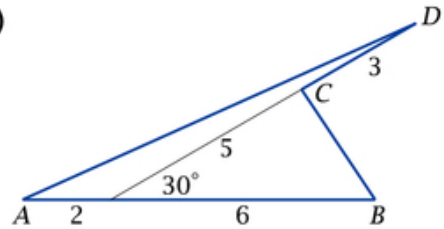
12. Zapisz wzór na pole równoległoboku, gdy:

a) dwa jego boki mają długości a i b, a kąt między tymi bokami ma miarę α,

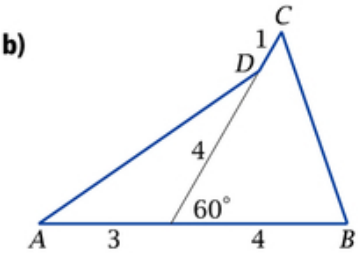
b) jego przekątne mają długości d_1 i d_2 oraz przecinają się pod kątem β.

13. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

a)

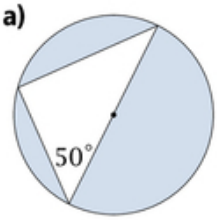


b)

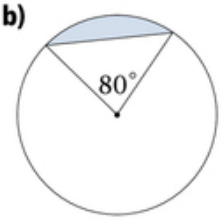


14. Narysowane koło ma promień o długości 5. Oblicz pole zacieniowanej figury.

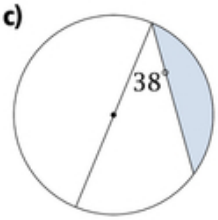
a)



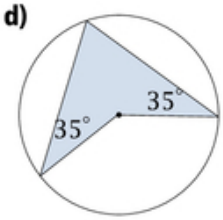
b)



c)



d)

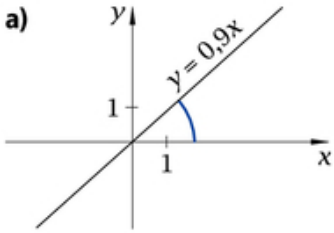


15. Pole trójkąta ABC jest równe $12\ \text{cm}^2$. Oblicz miarę kąta BAC, jeśli:

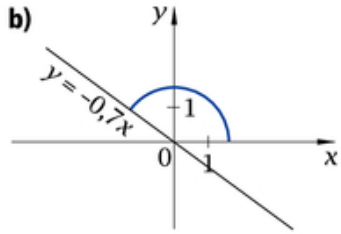
a) $|AB| = 8\,\text{cm}$ i $|AC| = 6\,\text{cm}$ **b)** $|AB| = 2\,\text{cm}$ i $|AC| = 15\,\text{cm}$

IV **16.** Podaj tangens zaznaczonego kąta, a następnie miarę tego kąta.

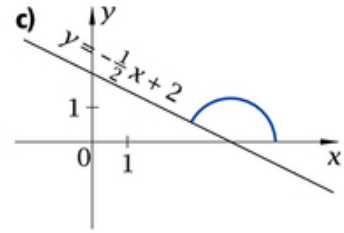
a)



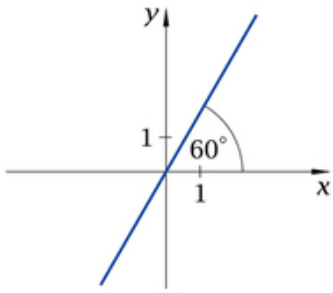
b)

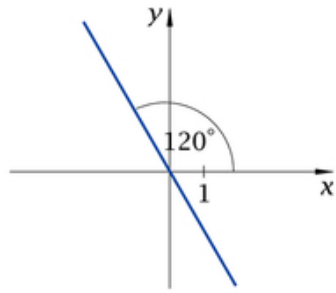


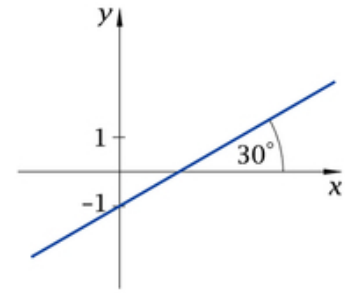
c)



17. Zapisz wzór funkcji, której wykres jest przedstawiony na rysunku.







18. Dwie proste przecinają się w punkcie o współrzędnych $(4, 6)$ i trójkąt ograniczony tymi prostymi i osią x ma kąty o miarach $45°$, $60°$ i $75°$. Najdłuższy bok tego trójkąta leży na osi x. Znajdź równania tych prostych.

MINISPRAWDZIAN

S1. Kąt α jest rozwarty i $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Wynika stąd, że:

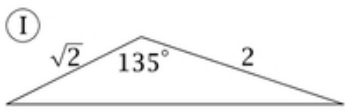
A. $\sin\alpha = 2\sqrt{0{,}2}$, $\cos\alpha = -\sqrt{0{,}2}$

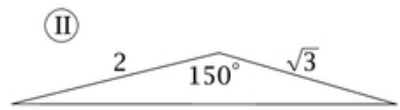
B. $\sin\alpha = -2$, $\cos\alpha = 1$

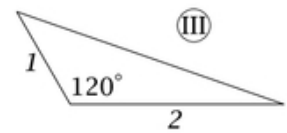
C. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = -\sqrt{0{,}2}$

D. $\sin\alpha = -2\sqrt{0{,}2}$, $\cos\alpha = \sqrt{0{,}2}$

S2. Który z narysowanych trójkątów ma największe pole?







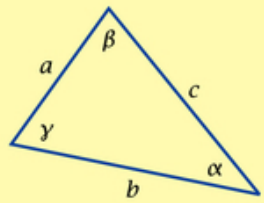
A. I B. II C. III D. Pola tych trójkątów są jednakowe.

S3. Pod jakim kątem prosta o równaniu $y = -\frac{3}{2}x + 2$ jest nachylona do osi x? (Spośród podanych przybliżonych wartości wybierz wartość najbliższą dokładnej).

A. ok. $115°$ B. ok. $124°$ C. ok. $65°$ D. ok. $56°$

TWIERDZENIE SINUSÓW

Wiadomo, że w każdym trójkącie najdłuższy bok leży naprzeciwko kąta o największej mierze, a najkrótszy — naprzeciwko kąta o najmniejszej mierze. Okazuje się, że istnieją ścisłe związki między długościami boków trójkąta a miarami jego kątów. Jedną z takich zależności opisuje następujące twierdzenie.



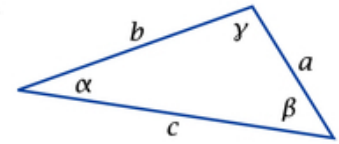
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Twierdzenie sinusów

W trójkącie stosunki długości boków do sinusów kątów leżących naprzeciw tych boków są równe.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku obok.



Pole tego trójkąta można zapisać na trzy sposoby:

$$P = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta$$

Rozważmy równość:

$$\tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha$$

Liczby: b, $\sin\alpha$, $\sin\gamma$ są różne od 0, więc tę równość możemy przekształcić:

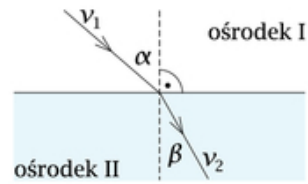
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Podobnie z równości $\tfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta$ wynika równość $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Wobec tego $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. □

Ciekawostka

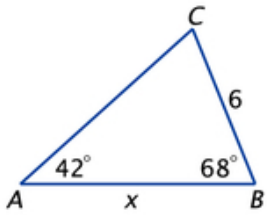
Holenderski fizyk, astronom i matematyk Snell Willebrord van Royen (zwany Snelliusem) żyjący w latach 1580–1626 jest najbardziej znany jako odkrywca prawa załamania światła (chociaż wiadomo, że znane ono było już Ptolemeuszowi prawie 1500 lat wcześniej). Równość opisująca to prawo przypomina równość z twierdzenia sinusów. Być może dlatego to twierdzenie jest czasem nazywane twierdzeniem Snelliusa.



$$\frac{v_1}{\sin\alpha} = \frac{v_2}{\sin\beta}$$

α — kąt padania
β — kąt załamania
v_1 — prędkość światła w ośrodku I
v_2 — prędkość światła w ośrodku II

PRZYKŁAD 1 W trójkącie ABC bok BC ma długość 6 cm oraz $|\sphericalangle CAB| = 42°$ i $|\sphericalangle ABC| = 68°$. Oblicz długość boku AB.



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

$|\sphericalangle ACB| = 180° - (42° + 68°) = 70°$

Obliczamy miarę kąta leżącego naprzeciwko boku AB.

$\frac{6}{\sin 42°} = \frac{x}{\sin 70°}$

Korzystamy z twierdzenia sinusów.

$x = \frac{6 \sin 70°}{\sin 42°}$

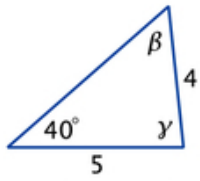
$x \approx 8{,}43$

Odp. Bok AB ma około 8,43 cm długości.

ZADANIE W trójkącie PQR bok PR ma długość 5 oraz $|\sphericalangle QPR| = 20°$ i $|\sphericalangle RQP| = 44°$. Oblicz długość boku PQ.

zadania 1–3

II **PRZYKŁAD 2** Jeden z kątów trójkąta ma miarę 40°. Bok leżący naprzeciw tego kąta ma długość 4, a inny z boków tego trójkąta ma długość 5. Oblicz miarę kąta leżącego naprzeciw tego boku.



Wykonujemy rysunek pomocniczy.

$\frac{4}{\sin 40°} = \frac{5}{\sin \beta}$

Korzystamy z twierdzenia sinusów.

$\sin \beta = \frac{5 \sin 40°}{4}$

$\sin \beta \approx 0{,}803$

$\beta_1 \approx 53°, \quad \beta_2 \approx 180° - 53° = 127°$

$0° < \beta < 180°$.

$40° + 53° < 180° \quad 40° + 127° < 180°$

Sprawdzamy, czy $40° + \beta < 180°$.

Odp. Szukany kąt ma około 53° lub około 127°.

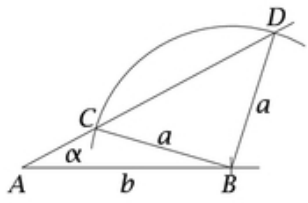
ZADANIE Jeden z kątów trójkąta ma miarę 18°. Bok leżący naprzeciw tego kąta ma długość 10, a inny bok ma długość 20. Oblicz miary pozostałych kątów tego trójkąta.

W przykładzie zadanie miało dwa rozwiązania. Nie zawsze jednak tak jest.

Na poniższych rysunkach przedstawiono dwie konstrukcje trójkąta, gdy dane są: jeden kąt trójkąta (α), bok leżący naprzeciw tego kąta (a) i jeden z boków leżących przy tym kącie (b).

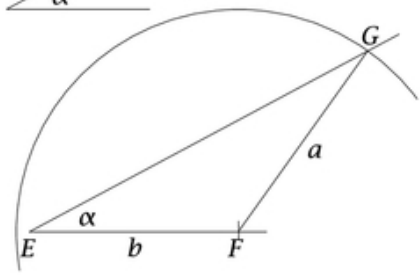
Dane:





Dane:



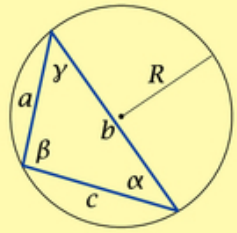


Jak widać, w zależności od długości boków a i b przyjęte warunki mogą być spełnione przez dwa trójkąty (na pierwszym rysunku trójkąty ABC i ABD) albo jeden trójkąt (na drugim rysunku trójkąt EFG).

ĆWICZENIE Sprawdź, że gdybyśmy w zadaniu z przykładu 2 zmienili długość boku 4 na długość 6, otrzymalibyśmy tylko jedno rozwiązanie.

zadania 4–8

III Twierdzenie sinusów można rozszerzyć w następujący sposób:



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

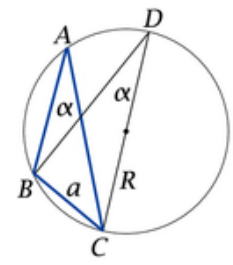
Twierdzenie

W trójkącie stosunek długości dowolnego boku do sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

Dowód

Warunek $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ wykazaliśmy już wcześniej. Co najmniej jeden z trzech kątów trójkąta musi być kątem ostrym. Przyjmijmy, że α jest takim kątem. Aby udowodnić powyższe twierdzenie, wystarczy wykazać równość $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

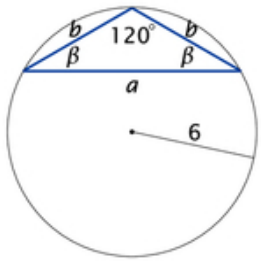
Niech ABC oznacza trójkąt wpisany w okrąg o promieniu R, w którym $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ i $|BC| = a$.



Prowadząc średnicę CD i cięciwę BD, otrzymujemy trójkąt prostokątny BCD o kącie ostrym α, gdyż $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle BDC$ są oparte na tym samym łuku. Zatem:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin|\sphericalangle BDC|} = \frac{a}{\frac{a}{|CD|}} = |CD| = 2R \quad \square$$

PRZYKŁAD 3 W okrąg o promieniu 6 wpisano trójkąt równoramienny. Kąt między ramionami tego trójkąta ma miarę 120°. Oblicz obwód tego trójkąta.



$\beta = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$

$\frac{a}{\sin 120^\circ} = 12$ i $\frac{b}{\sin 30^\circ} = 12$

Korzystamy z $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ i $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$.

$a = 12 \cdot \sin 120^\circ = 12 \sin(180^\circ - 60^\circ) = 12 \sin 60^\circ =$

$= 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

$b = 12 \cdot \sin 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$

Obwód $= a + 2b = 6\sqrt{3} + 2 \cdot 6 = \underline{6\sqrt{3} + 12}$

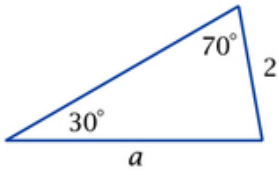
ZADANIE W okrąg o promieniu 10 wpisano trójkąt o kątach 45°, 60°, 75°. Znajdź długość najkrótszego boku tego trójkąta.

zadania 9–11

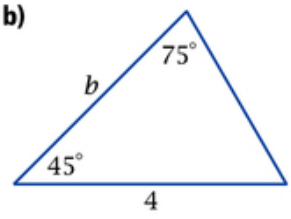
ZESTAW ZADAŃ

I **1.** Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

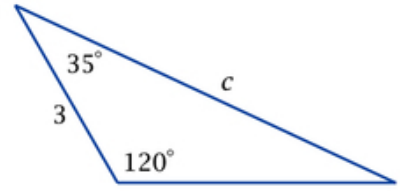
a)



b)



c)



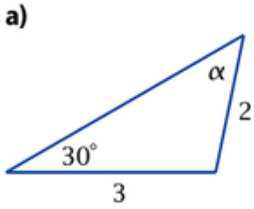
2. **a)** Czy istnieje trójkąt o kątach 30°, 70°, 80° i bokach długości 5, 9, 13?

b) Czy istnieje trójkąt, w którym dwa kąty mają miary 45° i 60°, a boki leżące naprzeciw tych kątów mają długości 3 i $\sqrt{6}$?

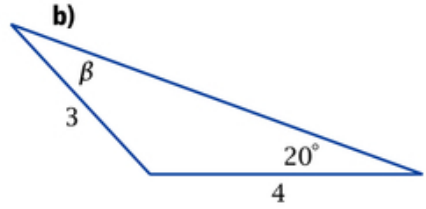
3. Jaką długość ma najkrótszy z boków trójkąta, w którym dwa kąty mają miary 10° i 20°, a najdłuższy bok ma długość 10?

II **4.** Oblicz miarę kąta oznaczonego literą.

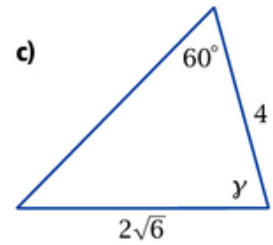
a)



b)



c)

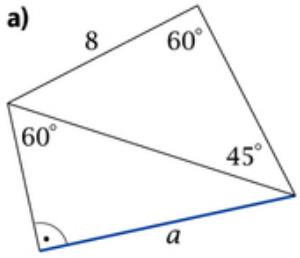


5. W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków oraz miara jednego z kątów. Znajdź miary pozostałych kątów tego trójkąta.

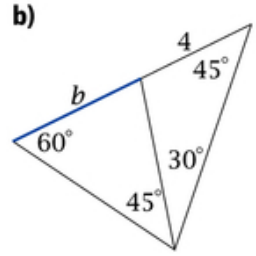
a) $|AC| = \sqrt{6}$, $|BC| = 2$, $|\sphericalangle ABC| = 60°$ **b)** $|AC| = 1$, $|BC| = \sqrt{2}$, $|\sphericalangle ABC| = 30°$

6. Znajdź długość odcinka oznaczonego literą.

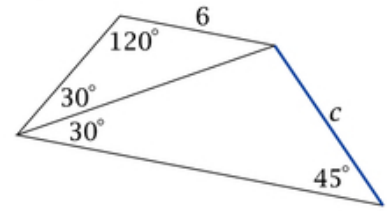
a)



b)

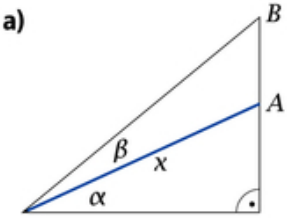


c)

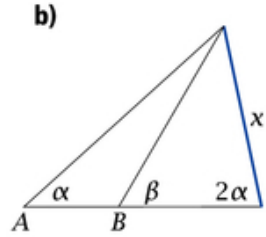


7. Przyjmijmy, że dane są kąty α i β oraz że $|AB| = a$. Znajdź x.

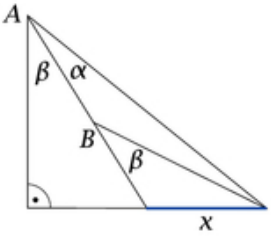
a)



b)



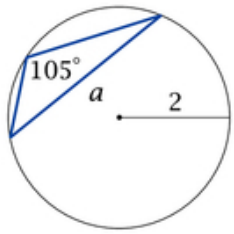
c)

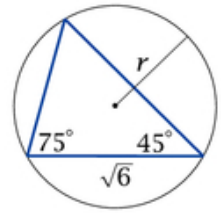


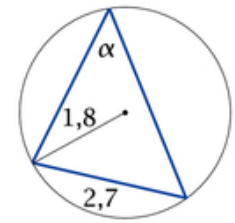
8. Wykaż, że jeżeli kąty α i β są kątami trójkąta i naprzeciw kąta α leży bok a, a naprzeciw kąta β leży bok b, to:

a) $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\beta}$ **b)** $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$

III **9.** Oblicz długości odcinków a i r oraz miarę kąta α.







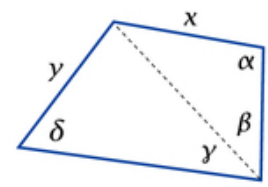
10. Wybieramy dowolny punkt P podstawy BC trójkąta równoramiennego ABC ($P \neq B$, $P \neq C$). Wykaż, że okrąg opisany na trójkącie APB ma taki sam promień jak okrąg opisany na trójkącie APC.

11. Przyjmijmy, że α, β i γ są kątami trójkąta oraz że naprzeciw tych kątów leżą odpowiednio boki o długościach a, b i c. Wykaż, że jeśli R oznacza długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, to pole trójkąta wyraża się wzorem:

a) $P = \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$ **b)** $P = \dfrac{abc}{4R}$ **c)** $P = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$

MINISPRAWDZIAN

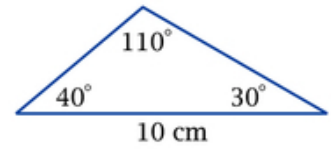
S1. W czworokącie przedstawionym na rysunku obok stosunek długości boków $\frac{x}{y}$ wynosi:



A. $\frac{\sin\beta \cdot \sin\delta}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}$ C. $\frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\delta \cdot \sin\gamma}$

B. $\frac{\sin\alpha \cdot \sin\delta}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}$ D. $\frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha \cdot \sin\delta}$

S2. Długość najkrótszego boku trójkąta przedstawionego na rysunku obok wyrażona w centymetrach należy do przedziału:



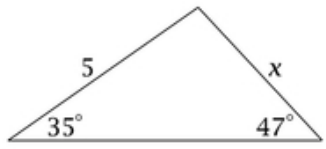
A. $(4;5)$ B. $(5;6)$ C. $(6;7)$ D. $(7;8)$

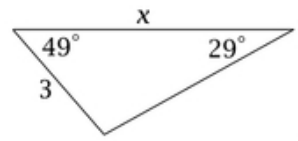
S3. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 10$, $|BC| = 7$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 20°$. Która z poniższych miar nie może być miarą żadnego z kątów tego trójkąta, zaokrągloną do pełnych stopni?

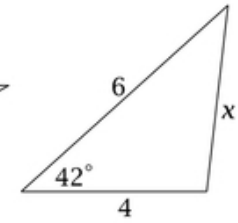
A. 29° B. 49° C. 131° D. 151°

TWIERDZENIE COSINUSÓW

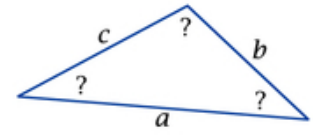
I ĆWICZENIE W którym z poniższych trójkątów można obliczyć długość boku x za pomocą twierdzenia sinusów?

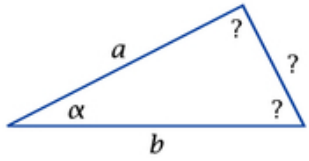






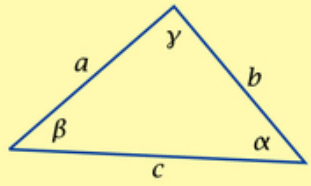
W sytuacji gdy dane są trzy boki trójkąta, trójkąt wyznaczony jest jednoznacznie. Powinniśmy zatem być w stanie obliczyć miary jego kątów.





Jest podobnie, gdy dany jest jeden kąt i długości dwóch boków leżących przy tym kącie. W takim trójkącie także powinniśmy być w stanie obliczyć długość trzeciego boku i miary dwóch pozostałych kątów.

Ani w jednym, ani w drugim wypadku nie można znaleźć brakujących wielkości, korzystając jedynie z twierdzenia sinusów. Możemy jednak skorzystać z następującej zależności między bokami a kątami w trójkącie.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

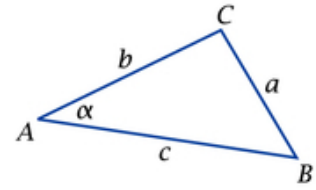
Twierdzenie cosinusów

W trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta między nimi.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku obok. Pokażemy, że zachodzi równość:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$



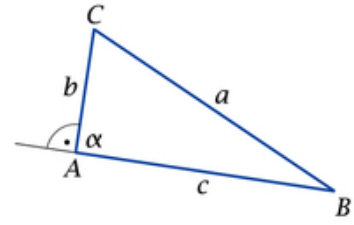
1. Załóżmy najpierw, że α jest kątem prostym.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

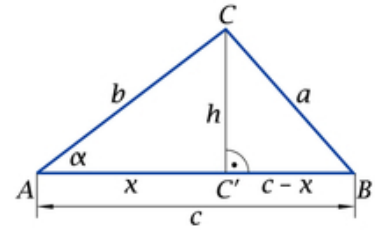
Ponieważ $\cos 90^\circ = 0$, więc $2bc\cos 90^\circ = 0$ i możemy zapisać równość:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 90^\circ$$



2. Załóżmy teraz, że kąt α jest kątem ostrym.

W każdym trójkącie co najmniej dwa kąty są ostre, możemy zatem założyć, że kąt ABC także jest ostry. Wobec tego wysokość h trójkata poprowadzona z wierzchołka C dzieli bok AB na dwa odcinki (zob. rysunek).



Ponieważ $\cos\alpha = \frac{x}{b}$ i $\sin\alpha = \frac{h}{b}$, więc:

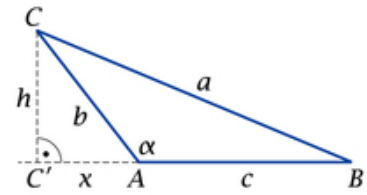
$x = b\cos\alpha$ i $h = b\sin\alpha$

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta $CC'B$, otrzymujemy:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$
$$a^2 = b^2\sin^2\alpha + (c - b\cos\alpha)^2$$
$$a^2 = b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha$$
$$a^2 = b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

3. Rozważmy teraz przypadek, gdy α jest kątem rozwartym.

Prowadząc z wierzchołka C wysokość h, otrzymamy dwa trójkąty prostokątne $C'AC$ i $C'BC$ (zob. rysunek).



Ponieważ $\cos(180°-\alpha) = \frac{x}{b}$ i $\sin(180°-\alpha) = \frac{h}{b}$, a ponadto:

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ i $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$,

więc: $x = -b\cos\alpha$ i $h = b\sin\alpha$

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta $CC'B$, otrzymujemy:

$$a^2 = h^2 + (c + x)^2$$

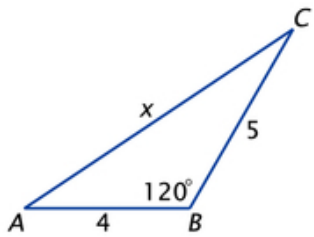
$$a^2 = b^2\sin^2\alpha + (c - b\cos\alpha)^2$$

$$a^2 = b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha$$

$$a^2 = b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \square$$

PRZYKŁAD 1 W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$, $|BC| = 5$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 120°$. Oblicz długość boku AC tego trójkąta.



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

$x^2 = 16 + 25 - 40\cos 120°$

$x^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 120°$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

$\cos 120° = -\cos(180° - 120°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

$x^2 = 41 - 40 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 = 61$

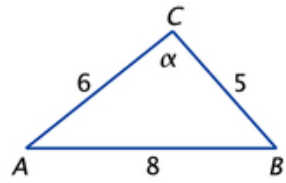
Literą x oznaczyliśmy długość boku trójkąta, więc bierzemy pod uwagę tylko dodatnie rozwiązanie równania $x^2 = 61$.

$x = \sqrt{61}$

Odp. Bok AC trójkąta ABC ma długość $\sqrt{61}$.

ZADANIE W trójkącie PQR dane są: $|PQ| = 7$, $|PR| = 3$ i $|\sphericalangle QPR| = 45°$. Oblicz długość boku QR tego trójkąta.

PRZYKŁAD 2 Boki trójkąta ABC mają długości $|AB| = 8$, $|BC| = 5$ oraz $|AC| = 6$. Oblicz miarę kąta ACB.



Wykonujemy rysunek pomocniczy.

$8^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos\alpha$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

$64 = 61 - 60\cos\alpha$

$3 = -60\cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{1}{20}$

Odczytujemy miarę kąta, którego cosinus jest równy $\frac{1}{20}$, i korzystamy z równości $-\cos\alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$.

$\alpha \approx 93^\circ$

$\cos\alpha \approx -\cos 87^\circ = \cos(180^\circ - 87^\circ) = \cos 93^\circ$

Odp. Kąt ACB ma miarę około 93°.

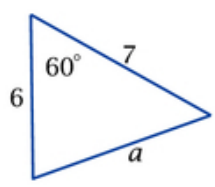
ZADANIE Boki trójkąta mają długości 3, 5 i 7. Oblicz miarę największego kąta tego trójkąta.

zadania 1–13

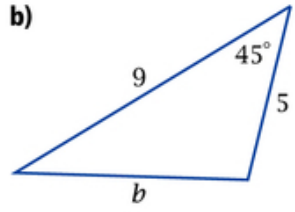
ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz długość boku oznaczonego literą.

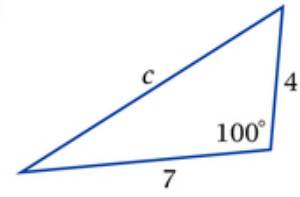
a)



b)

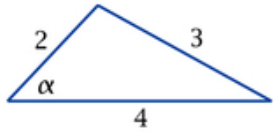


c)

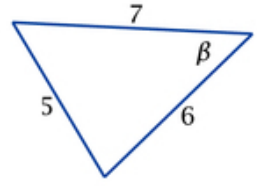


2. Oblicz miarę kąta oznaczonego literą.

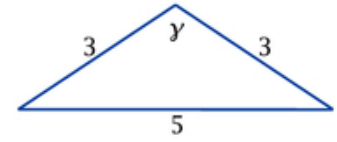
a)



b)



c)



3. Czy trójkąt o danych długościach boków jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny?

a) 5, 12, 13 **b)** 4, 5, 6 **c)** 5, 7, 9

4. Przekątne równoległoboku przecinają się pod kątem 60°, a ich długości wynoszą 2 i 6. Znajdź długości boków równoległoboku.

Warto wiedzieć!

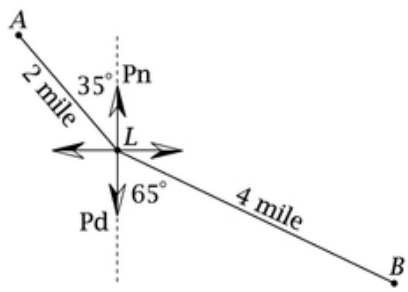
Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa można uogólnić w następujący sposób:

Jeśli a, b i c są długościami boków trójkąta oraz $a \leqslant c$ i $b \leqslant c$, to trójkąt ten jest:

- prostokątny, gdy $a^2 + b^2 = c^2$,
- rozwartokątny, gdy $a^2 + b^2 < c^2$,
- ostrokątny, gdy $a^2 + b^2 > c^2$.

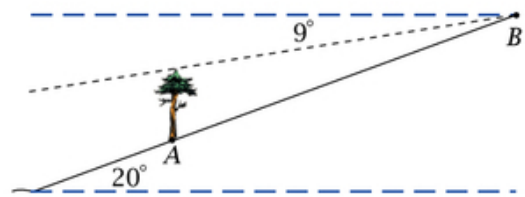
5. Uzasadnij twierdzenie podane w ramce, a następnie, korzystając z niego, rozwiąż zadanie 3.

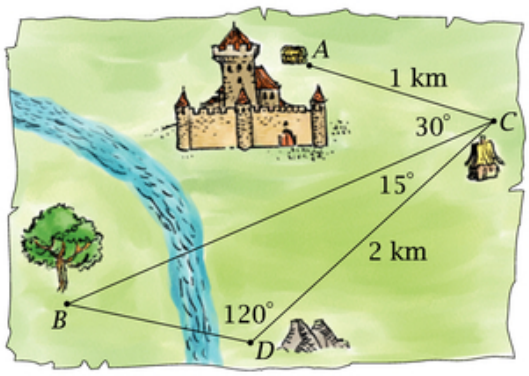
Uwaga. Przy rozwiązywaniu zadań 6–13 przyda się twierdzenie cosinusów albo twierdzenie sinusów. W niektórych zadaniach trzeba skorzystać z obu tych twierdzeń.



6. Rysunek przedstawia położenie statków A i B względem latarni L. Znajdź odległość między statkami.

7. Na rysunku obok niebieskie linie przerywane są równoległe. Oblicz wysokość drzewa, jeśli $|AB| = 150$ m.

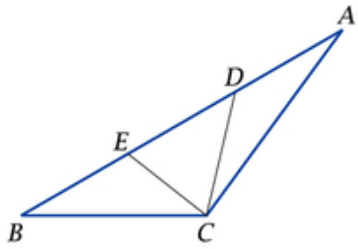




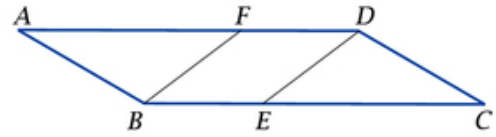
8. Korzystając z informacji przedstawionych na mapce, oblicz odległość między punktami A i B.

9. Boki trójkąta mają długości 2, 3 i 4. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną na najdłuższy bok.

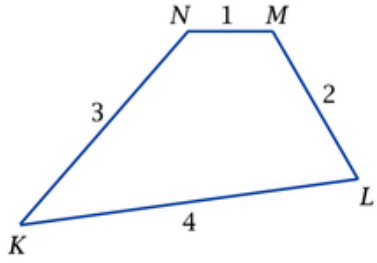
10. Na poniższym rysunku punkty D i E dzielą bok AB trójkąta ABC na trzy równe części. Wiedząc, że $|AB| = 6$, $|AC| = 5$ i $|\sphericalangle DAC| = 30°$, znajdź długości odcinków CD i CE.



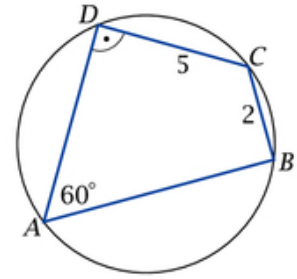
11. W równoległoboku $ABCD$ przedstawionym na rysunku poniżej dane są: $|AB| = \sqrt{3}$, $|AD| = 4$ oraz $|\sphericalangle BAD| = 30°$. Czworokąt $BEDF$ jest rombem. Znajdź długość jego boku.



12. W czworokącie $KLMN$ na rysunku poniżej kąt LMN ma 120°. Oblicz pole tego czworokąta.

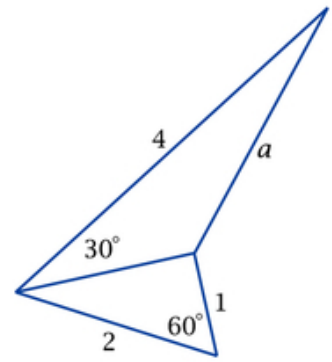


13. Popatrz na rysunek poniżej. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.



MINISPRAWDZIAN

S1. Długość boku oznaczonego na rysunku literą a jest równa:



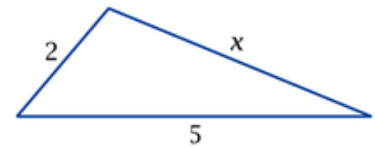
A. $25 - 12\sqrt{3}$ C. $\sqrt{31} - 2\sqrt{3}$

B. $\sqrt{7}$ D. $\sqrt{13}$

S2. Trójkąt ma boki o długościach 4, 5 i 6. Miara najmniejszego kąta tego trójkąta, po zaokrągleniu do pełnych stopni, wynosi:

A. 30° B. 38° C. 40° D. 41°

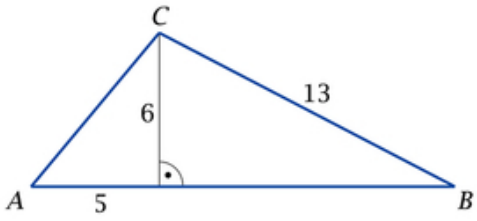
S3. Pole trójkąta narysowanego obok wynosi 3. Długość boku x jest zatem równa:



A. 3 B. 4 C. $\sqrt{13}$ D. $\sqrt{26}$

POWTÓRZENIE

1. Znajdź miary kątów trójkąta ABC.



2. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\sin 135^\circ + \cos 150^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ$$

3. a) Oblicz $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{2}{7}$ i α jest kątem rozwartym.

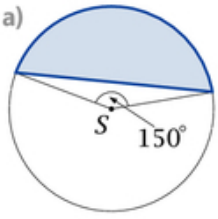
b) Oblicz $\sin\beta$ i $\cos\beta$, wiedząc, że $\operatorname{tg}\beta = -\frac{5}{12}$ i β jest kątem rozwartym.

4. Uzasadnij, że dla kąta ostrego α jest spełniona równość:

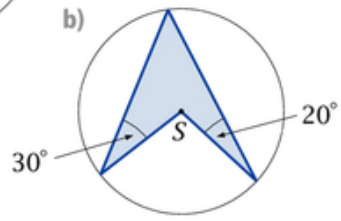
$$\frac{1}{1-\sin^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$$

5. Punkt S jest środkiem okręgu o promieniu 4 przedstawionego na rysunku. Oblicz pole zacieniowanej figury.

a)



b)



6. Ustal, pod jakim kątem jest nachylona do osi x prosta o równaniu $y = -3x + 1$.

7. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie o bokach mających długości 5, 8 i 10.

8. Oblicz miarę kąta ABC w trójkącie, w którym:

a) $|AB| = 10$, $|BC| = 6$, $|AC| = 9$

b) $|\sphericalangle BAC| = 20^\circ$, $|AC| = 5$, $|BC| = 4$

c) $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$, $|AC| = 6$, $|BC| = 10$

9. W trójkącie ABC bok BC ma długość 4. Oblicz długość boku AB, jeśli:

a) $|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$, $|AC| = 5$

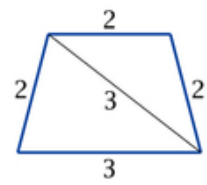
b) $|\sphericalangle BAC| = 45^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 30^\circ$

c) $|\sphericalangle ABC| = 50^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 110^\circ$

10. Sprawdź, czy trójkąt o bokach, których długości wynoszą 7, 8 i 10, jest ostrokątny czy rozwartokątny.

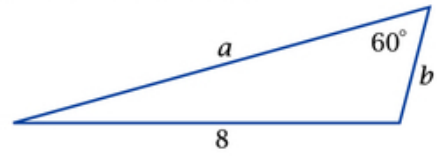
11. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 3$ i $|AB| = 3\sqrt{2}$, a kąt ABC ma miarę 30°. Oblicz pole trójkąta.

12. Czy przedstawiony na rysunku czworokąt jest trapezem? Uzasadnij swoją odpowiedź.



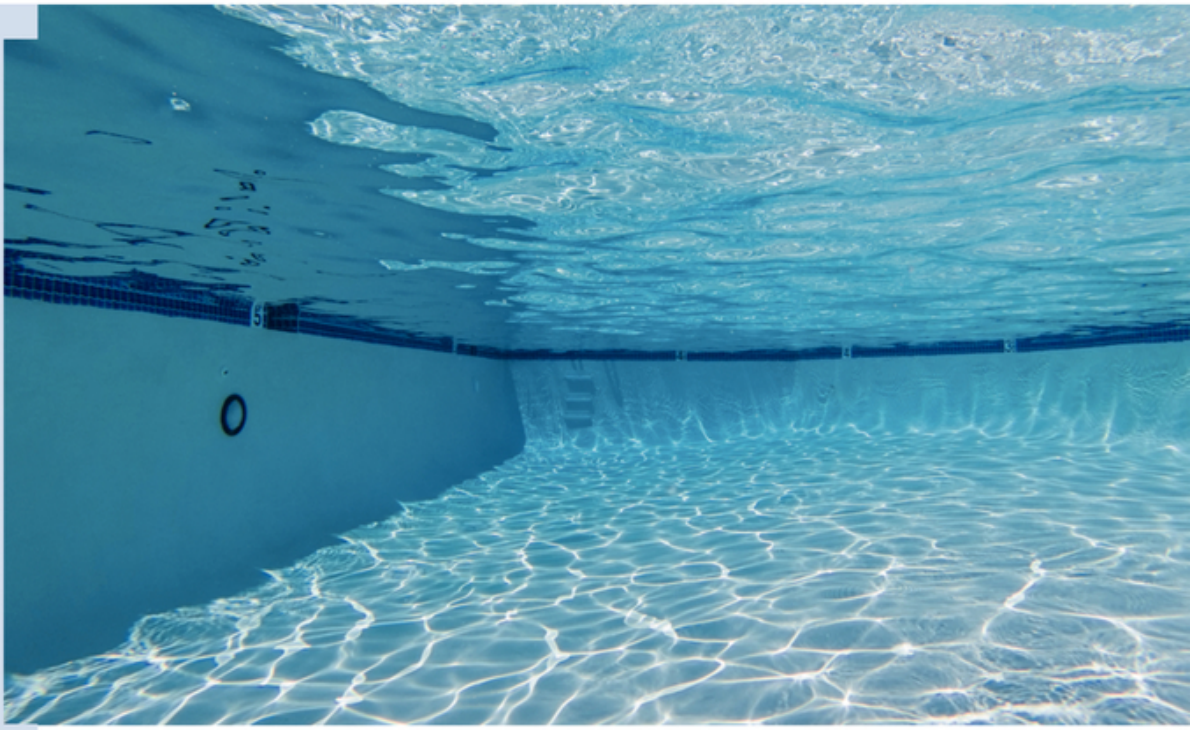
13. Środkowa CD trójkąta ABC ma długość 6, bok AB ma długość 8, a kąt ADC ma miarę 120°. Oblicz pole i obwód trójkąta ABC.

14. Obwód trójkąta przedstawionego na rysunku jest równy 18. Oblicz długości boków a oraz b.



Figury w przestrzeni

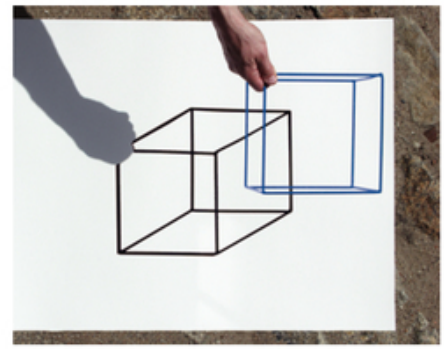
W basenach pływackich dno jest zwykle ukształtowane tak, że głębokość wody się zmienia: przy jednym końcu toru jest płytko, a przy drugim – głęboko. Woda w takim basenie przybiera kształt graniastosłupa. Obliczając jego objętość, ustalimy, ile litrów wody potrzeba, aby wypełnić basen.



Graniastosłupy ■ Ostrosłupy ■ Walec ■ Stożek ■ Kula ■ Powtórzenie

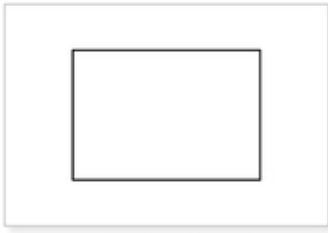
Kilka uwag o rysowaniu brył

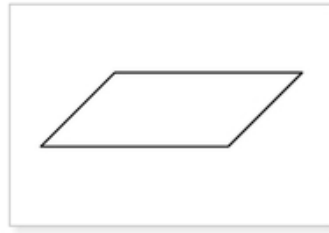
Na zdjęciu model sześcianu jest oświetlony światłem o równoległych promieniach. Na białym ekranie widać cień modelu.

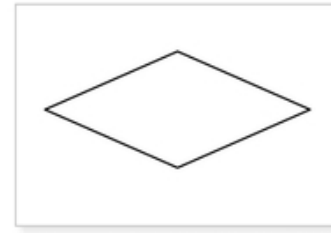


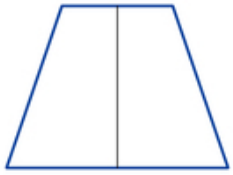


Gdybyśmy ramkę w kształcie kwadratu ustawili w różnych położeniach względem ekranu, otrzymalibyśmy różne cienie. Poniższe rysunki przedstawiają kilka możliwych cieni tej samej kwadratowej ramki. Każdy z nich jest równoległobokiem i cienie równoległych boków też są równoległe.

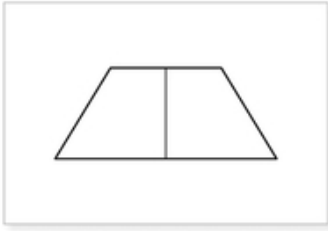


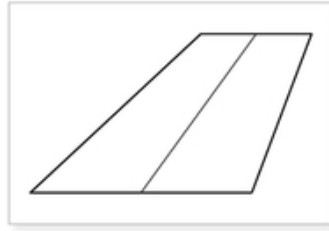


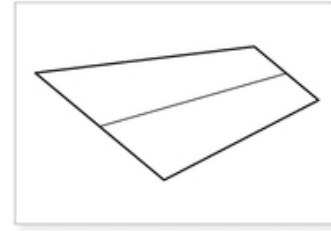




Kolejne rysunki przedstawiają cienie ramki w kształcie trapezu równoramiennego, w którym poprowadzono wysokość łączącą środki podstaw. Każda z otrzymanych figur jest trapezem i w każdym z nich cień wysokości nadal łączy środki podstaw, choć nie musi być do nich prostopadły.







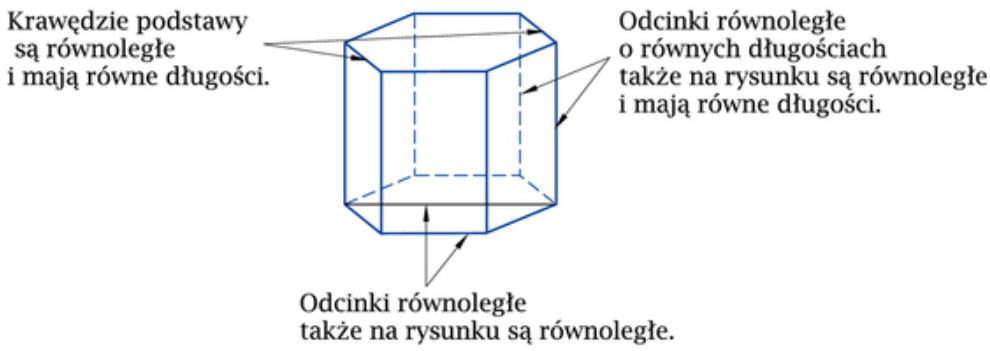
Sporządzając rysunek wielościanu na kartce, wykonujemy go tak, jakbyśmy rysowali cień rzucany przez krawędzie tego wielościanu.

Rysując bryły, musimy przestrzegać następujących reguł:

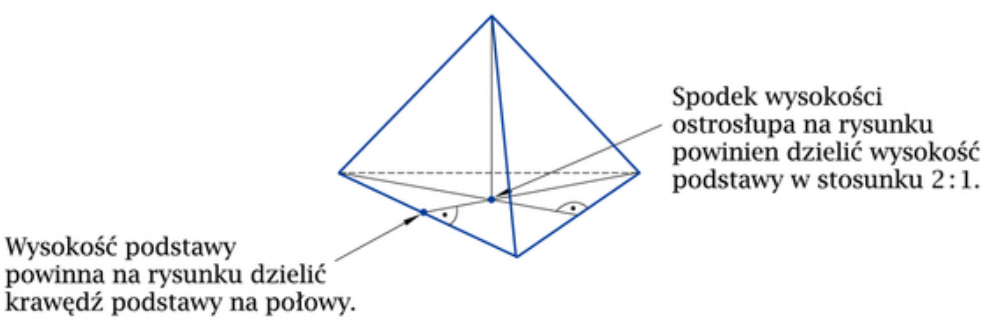
- Jeśli w bryle odcinki są równoległe, to odpowiadające im odcinki na rysunku także są równoległe.
- Jeśli w bryle odcinki są równoległe i równej długości, to odpowiadające im na rysunku odcinki też są równoległe i równej długości.
- Jeśli punkt dzieli odcinek w bryle w pewnym stosunku, to odpowiadający mu punkt na rysunku dzieli odcinek w tym samym stosunku.

Oto rysunki wykonane z zachowaniem powyższych reguł.

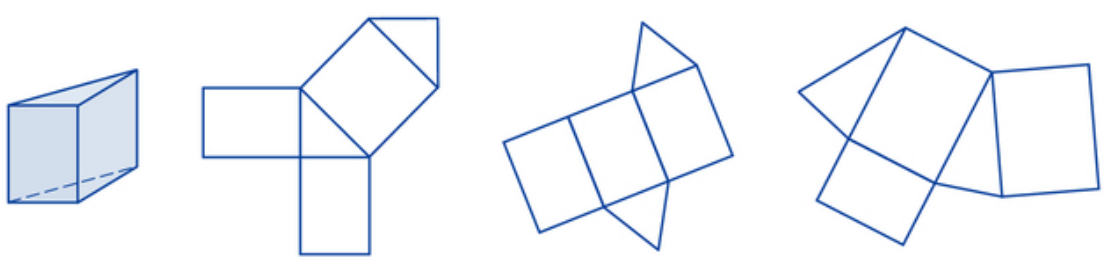
GRANIASTOSŁUP PRAWIDŁOWY SZEŚCIOKĄTNY



OSTROSŁUP PRAWIDŁOWY TRÓJKĄTNY

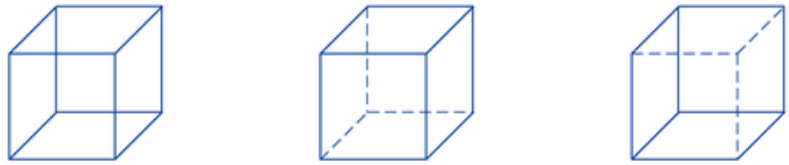


Uwaga. Na podstawie rysunku bryły na ogół nie możemy rozstrzygnąć, jaka to dokładnie jest bryła. Na przykład pierwszy z poniższych rysunków (przedstawiający graniastosłup) mógłby być każdym z graniastosłupów, których siatki są narysowane obok.



Ciekawostka

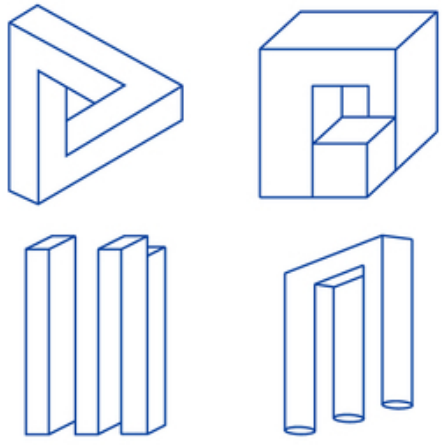
Rysowanie brył nie jest łatwe, gdyż musimy przedstawić w dwóch wymiarach figury, które są trójwymiarowe. Gotowe rysunki można na ogół interpretować na różne sposoby. Stąd biorą się niektóre złudzenia optyczne. Na przykład złudzeniu możemy ulec, patrząc na pierwszy rysunek sześcianu. Rysunek ten jest wieloznaczny. Sześcian możemy zobaczyć na dwa sposoby, zależnie od tego, które krawędzie uznamy za niewidoczne.



Inny przykład złudzenia optycznego to tzw. schody Zöllnera (czyt. celnera) przedstawione na rysunku poniżej (z lewej strony). Dwie osoby patrzące na ten rysunek mogą zobaczyć schody na różne sposoby, na przykład widziane z góry albo widziane od dołu. Kolejne rysunki pomagają dostrzec te dwie różne interpretacje (kropka wskazuje ścianę, którą powinniśmy zobaczyć bliżej nas).



Najbardziej zaskakujące są rysunki tzw. figur niemożliwych. Poniżej podajemy przykłady takich figur. Pozornie wydaje się, że rysunki przedstawiają rzeczywiste bryły i można zbudować ich modele. Jednak dokładniejsza analiza pokazuje, że jest to niemożliwe, gdyż bryły takie nie istnieją!

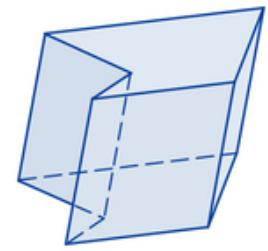


Na kanwie takich rysunków artyści potrafią stworzyć intrygujące obrazy. Przykładem wykorzystania pierwszego z nich jest grafika M.C. Eschera (czyt. eszera) „Wodospad".



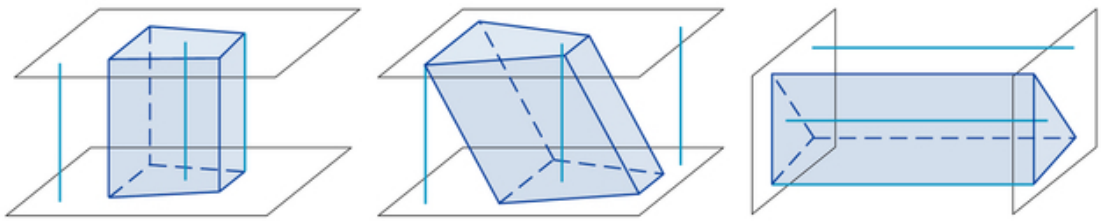
GRANIASTOSŁUPY

Przypomnijmy, że graniastosłup to wielościan, w którym dwie ściany (podstawy) są przystającymi wielokątami leżącymi na równoległych płaszczyznach, a pozostałe ściany (czyli ściany boczne) są równoległobokami.

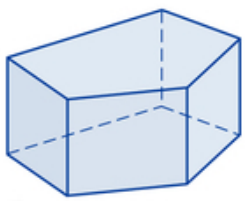


Krawędzie boczne graniastosłupa mają równe długości i są równoległe.

Wysokością graniastosłupa nazywamy każdy odcinek łączący płaszczyzny podstaw i prostopadły do obu tych płaszczyzn.



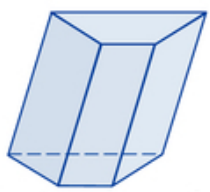
Uwaga. Pojęcie odcinka prostopadłego do płaszczyzny jest intuicyjnie jasne i taka intuicja wystarcza na potrzeby naszych rozważań. Dokładniej prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni omawiać będziemy w trzeciej klasie.



Graniastosłup prosty pięciokątny

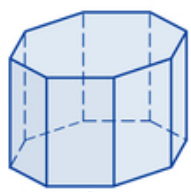
Graniastosłup, w którym krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, nazywamy **graniastosłupem prostym**. Wszystkie ściany boczne graniastosłupa prostego są prostokątami.

Uwaga. Szczególnym przypadkiem graniastosłupa prostego jest prostopadłościan, w którym wszystkie ściany są prostokątami i za podstawy można przyjąć dowolną parę ścian równoległych.



Graniastosłup pochyły czworokątny

Graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw, nazywamy **graniastosłupem pochyłym**. Wszystkie ściany boczne graniastosłupa pochyłego są równoległobokami.



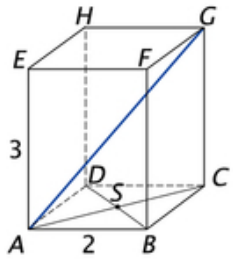
Graniastosłup prawidłowy ośmiokątny

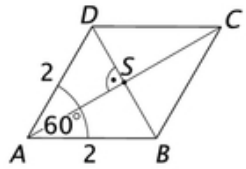
Graniastosłup prosty, w którym podstawy są wielokątami foremnymi, nazywamy **graniastosłupem prawidłowym**. Wszystkie ściany boczne graniastosłupa prawidłowego są przystającymi prostokątami.

Przekątna wielościanu to odcinek łączący dwa wierzchołki i nieleżący na żadnej ścianie.

zadania 1–4

II **PRZYKŁAD 1** Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku 2 i kącie ostrym 60°. Wysokość tego graniastosłupa jest równa 3. Oblicz długość dłuższej z jego przekątnych.





Sporządzamy rysunki pomocnicze — graniastosłup i podstawę graniastosłupa.

Trójkąt ABD jest równoboczny, a odcinek AS to wysokość tego trójkąta.

$|BD| = 2$

$|AS| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$|AC| = 2 \cdot |AS| = 2\sqrt{3}$

$|AG|^2 = |AC|^2 + |CG|^2$ Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACG.

$|AG|^2 = (2\sqrt{3})^2 + 3^2$

$|AG| = \sqrt{21}$

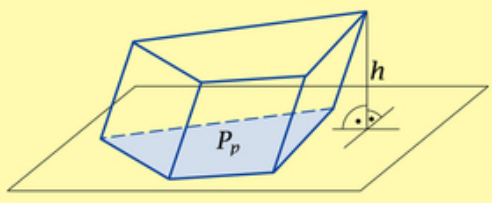
Odp. Dłuższa przekątna tego graniastosłupa ma długość $\sqrt{21}$.

ZADANIE Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 6 jest trapez prostokątny o podstawach długości 3 i 5 oraz wysokości 4. Oblicz długości przekątnych tego graniastosłupa.

zadania 5–12

III Suma pól wszystkich ścian bocznych graniastosłupa to jego pole powierzchni bocznej. Suma pól podstaw i pola powierzchni bocznej to pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

Objętość graniastosłupa jest równa iloczynowi pola podstawy i wysokości graniastosłupa.

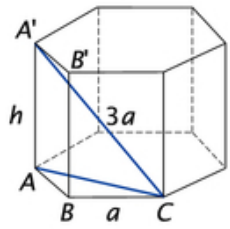


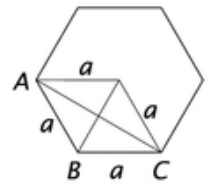
Objętość graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot h$$

P_p — pole podstawy graniastosłupa
h — wysokość graniastosłupa

PRZYKŁAD 2 W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość a, zaś krótsza przekątna ma długość $3a$. Oblicz pole powierzchni całkowitej oraz objętość tego graniastosłupa.





$|AC| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Krótsza przekątna podstawy jest 2 razy dłuższa niż wysokość trójkąta równobocznego o boku a.

$h = \sqrt{|A'C|^2 - |AC|^2} = \sqrt{(3a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{6}$

Trójkąt ACA' jest prostokątny.

$P_p = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$P_s = a \cdot h = a \cdot a\sqrt{6} = a^2\sqrt{6}$

$P_c = 2P_p + 6P_s = 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 6 \cdot a^2\sqrt{6} = \underline{3a^2(\sqrt{3} + 2\sqrt{6})}$

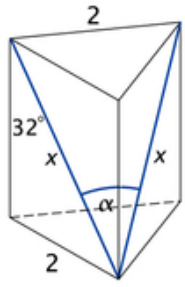
P_p – pole jednej podstawy
P_s – pole jednej ściany bocznej
P_c – pole powierzchni całkowitej

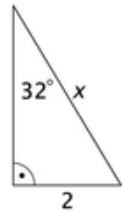
$V = P_p \cdot h = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{6} = \frac{3a^3\sqrt{18}}{2} = \underline{\frac{9a^3\sqrt{2}}{2}}$

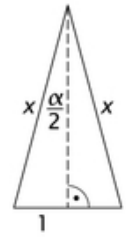
ZADANIE W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o wysokości a krótsza przekątna ma długość $4a$. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

zadania 13–23

IV **PRZYKŁAD 3** Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 2, a kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej i krawędzią boczną ma miarę 32°. Oblicz miarę kąta między przekątnymi ścian bocznych poprowadzonymi z jednego wierzchołka.







$\frac{2}{x} = \sin 32°$

$x = \frac{2}{\sin 32°}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{2}{\sin 32°}} = \frac{\sin 32°}{2} \approx 0{,}265$

$\frac{\alpha}{2} \approx 15°$, stąd $\underline{\alpha \approx 30°}$

ZADANIE Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 3, a kąt między przekątną ściany bocznej i krawędzią boczną ma miarę 40°. Oblicz miarę kąta między przekątnymi ścian bocznych poprowadzonymi z jednego wierzchołka.

zadania 24–28

ZESTAW ZADAŃ

I **1.** Przerysuj i uzupełnij tabelkę.

Graniastosłupy			
Liczba ścian	7		
Liczba krawędzi		9	
Liczba wierzchołków			12

2. **a)** Ile ścian bocznych ma graniastosłup o 100 wierzchołkach?

b) Czy graniastosłup może mieć 20 krawędzi?

c) Czy graniastosłup może mieć 10 ścian bocznych i 20 wierzchołków?

3. **a)** Czy istnieje graniastosłup, który nie ma przekątnych?

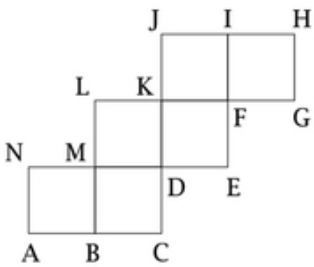
b) Czy w graniastosłupie prawidłowym wszystkie przekątne mają równą długość?

● **c)** Ile przekątnych ma graniastosłup n-kątny?

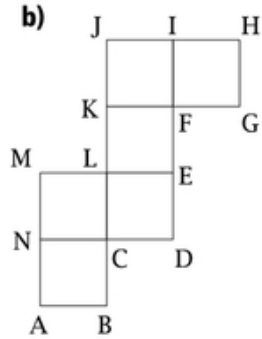
● **d)** Czy w każdym graniastosłupie czworokątnym dowolne dwie przekątne się przecinają?

4. Na rysunku przedstawiono siatkę sześcianu. Które punkty — po sklejeniu sześcianu — pokryją się z punktem A?

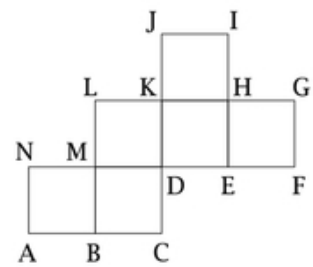
a)



b)



c)

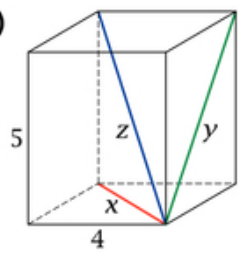


II **5.** **a)** Jaką długość ma przekątna sześcianu o krawędzi a?

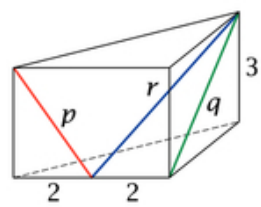
b) Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach a, b i c.

6. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy. Oblicz długości zaznaczonych odcinków.

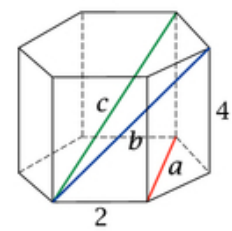
a)



b)

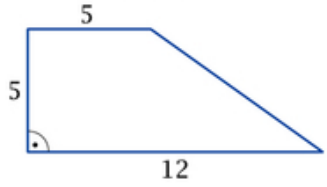


c)

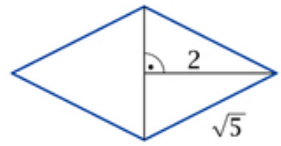


7. Graniastosłup prosty ma wysokość 3, a jego podstawą jest narysowany czworokąt. Znajdź długość krótszej przekątnej tego graniastosłupa.

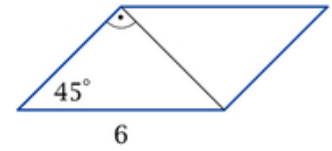
a) trapez



b) romb



c) równoległobok

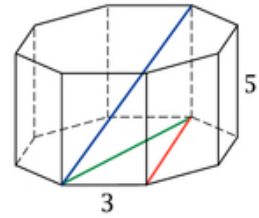


8. a) W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna ma długość 13, a przekątna ściany bocznej ma długość 12. Oblicz długości krawędzi graniastosłupa.

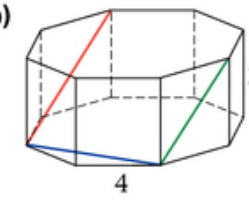
b) Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości 8 i 5. Oblicz długości przekątnych ścian bocznych tego graniastosłupa, jeśli wysokość graniastosłupa wynosi 10.

9. Na rysunku obok przedstawiono graniastosłup prawidłowy ośmiokątny. Oblicz długości zaznaczonych odcinków.

a)



b)



10. a) W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy a dłuższa przekątna jest równa p. Oblicz długość krótszej przekątnej graniastosłupa.

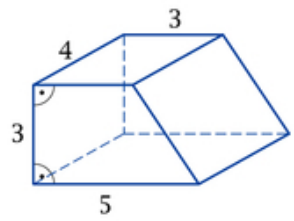
b) Oblicz długości przekątnych w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy a i wysokości h.

11. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny prostokątny. Przeciwprostokątna podstawy i przekątne dwóch ścian bocznych tworzą trójkąt równoboczny o boku a. Oblicz wysokość tego graniastosłupa.

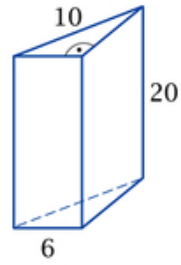
12. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość a. Jaką wysokość powinien mieć ten graniastosłup, aby trójkąt zbudowany z przekątnej ściany bocznej, dłuższej przekątnej podstawy i krótszej przekątnej graniastosłupa był równoramienny?

III **13.** Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego.

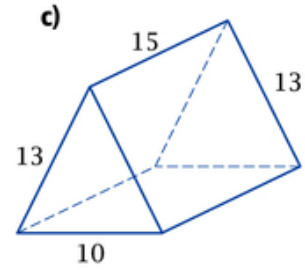
a)



b)

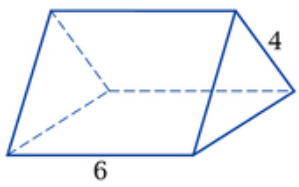


c)

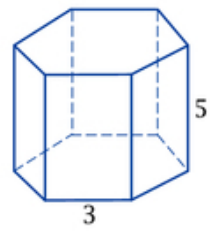


14. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy. Oblicz jego objętość.

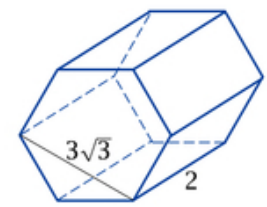
a)



b)



c)



15. Oblicz pole powierzchni całkowitej:

a) graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź podstawy ma długość $\sqrt{3}$, a wysokość wynosi 2,

b) graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości równej 4 i długości przekątnej 5.

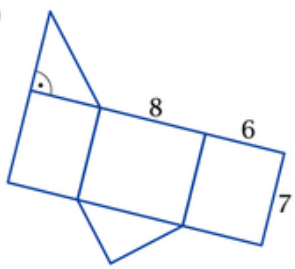
16. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości równej 2 cm jest trójkąt o bokach 12 cm, 10 cm, 10 cm. Oblicz pole powierzchni i objętość tego graniastosłupa.

17. **a)** Oblicz pole powierzchni i objętość sześcianu o przekątnej długości p.

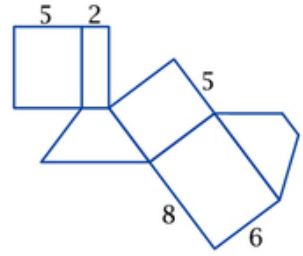
b) W prostopadłościanie o podstawie kwadratowej przekątna ściany bocznej ma długość p, a przekątna podstawy ma długość d. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.

18. Oblicz objętość graniastosłupa prostego o siatce przedstawionej na rysunku.

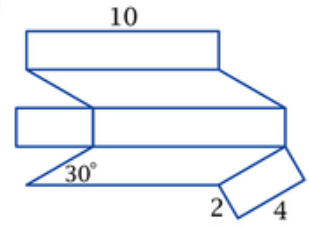
a)



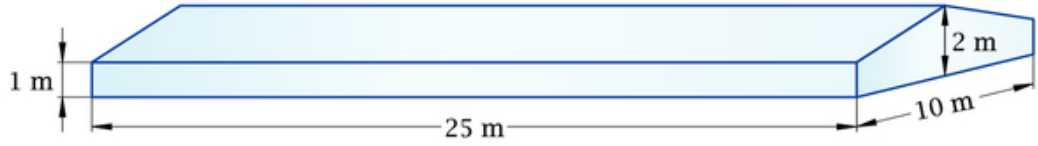
b)

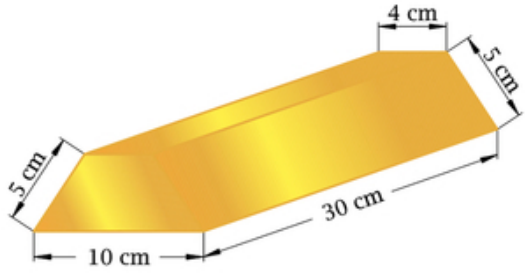


c)



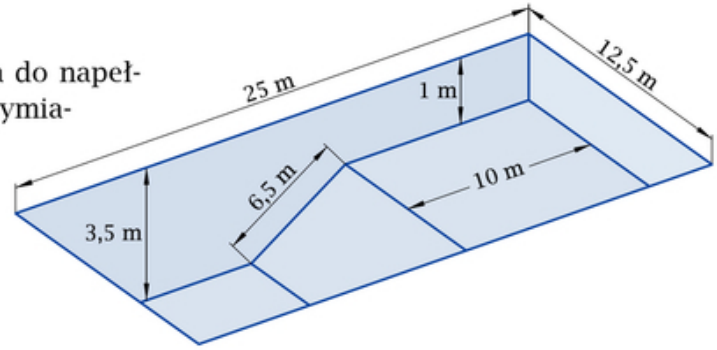
19. Na rysunku przedstawiona jest szklarnia, której dach i ściany zbudowano ze szkła o grubości 3 mm. Gęstość szkła wynosi 2400 kg/m^3. Oszacuj, ile waży szkło użyte do budowy tej szklarni.





20. Ile waży sztaba złota w kształcie graniastosłupa, którego podstawą jest trapez równoramienny i którego wymiary podano na rysunku? Przyjmij, że gęstość złota wynosi 19280 kg/m^3. Sprawdź, jaka jest aktualna cena złota, i oblicz wartość tej sztaby.

21. Ile litrów wody potrzeba do napełnienia basenu o kształcie i wymiarach podanych na rysunku?

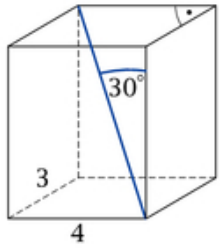


22. Jakie wymiary powinien mieć graniastosłup o podstawie kwadratowej, aby jego objętość była równa 4 cm^3, a pole powierzchni całkowitej wynosiło 16 cm^2?

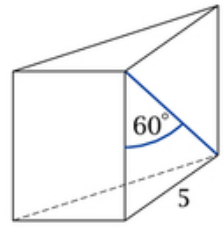
23. W prostopadłościanie pola trzech ścian o wspólnym wierzchołku są równe P_1, P_2 i P_3. Jaką objętość ma ten prostopadłościan?

IV **24.** Oblicz wysokość graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku.

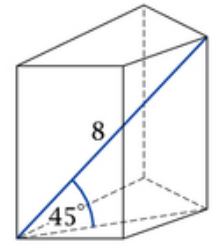
a)



b)

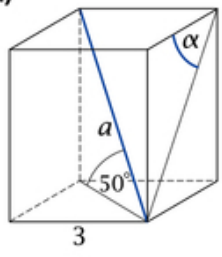


c)

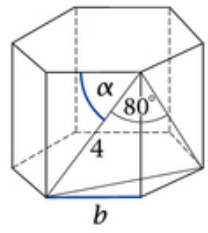


25. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy. Oblicz długość odcinka i miarę kąta oznaczonych literami.

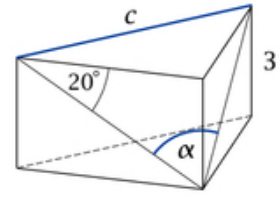
a)



b)

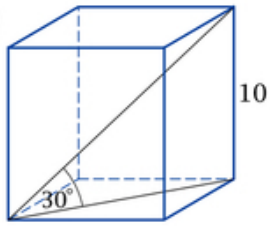


c)

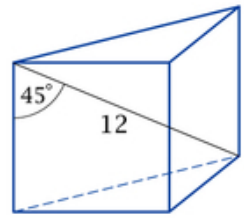


26. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy. Oblicz jego objętość.

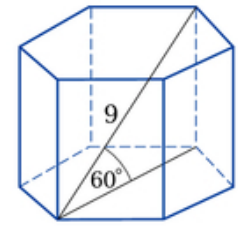
a)



b)

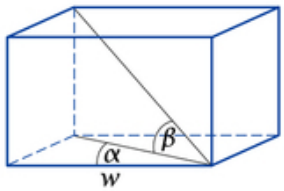


c)

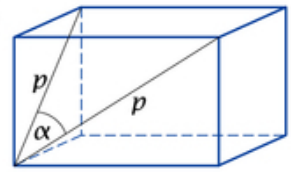


27. Podaj wzór na objętość narysowanego prostopadłościanu, gdy dane są wielkości oznaczone literami.

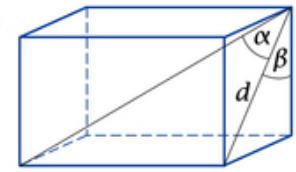
a)



b)



c)



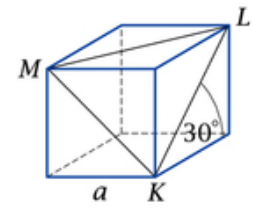
28. Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok o kącie ostrym α. Odległości między równoległymi ścianami bocznymi są równe k i l, a odległość między podstawami graniastosłupa wynosi h. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

MINISPRAWDZIAN

S1. Pewien graniastosłup ma 24 krawędzie. Podstawą tego graniastosłupa jest:

A. sześciokąt B. ośmiokąt C. dwunastokąt D. szesnastokąt

S2. Na rysunku obok przedstawiono graniastosłup prawidłowy czworokątny. Jaki obwód ma trójkąt KLM?



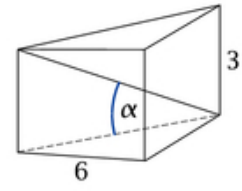
A. $2a\sqrt{3}$ C. $a(4+\sqrt{2})$

B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a}{3}\left(4\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)$

S3. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, którego przekątne mają długości 16 i 12. Krótsza przekątna tego graniastosłupa ma długość 13. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

A. 200 B. 248 C. 296 D. 392

S4. Na rysunku obok przedstawiono graniastosłup prawidłowy trójkątny. Która równość jest prawdziwa?

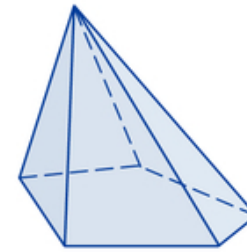


A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

B. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

OSTROSŁUPY

I Przypomnijmy, że ostrosłup to wielościan, w którym jedna ściana (podstawa) jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany (czyli ściany boczne) są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

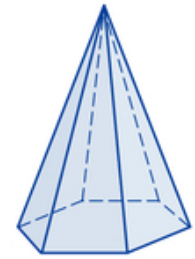


Wspólny wierzchołek wszystkich ścian bocznych ostrosłupa nazywamy **wierzchołkiem ostrosłupa**.

Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z płaszczyzną podstawy, prostopadły do tej płaszczyzny. Koniec wysokości leżący na płaszczyźnie podstawy nazywamy **spodkiem wysokości**.

Zauważ, że w graniastosłupie można wskazać wiele odcinków, które są wysokościami, a ostrosłup, który nie jest trójkątny, ma tylko jedną wysokość.

Ostrosłup, w którym podstawa jest wielokątem foremnym, a krawędzie boczne mają równe długości, nazywamy **ostrosłupem prawidłowym**.



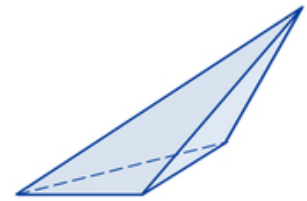
Ostrosłup prawidłowy sześciokątny

- Podstawa jest sześciokątem foremnym.
- Krawędzie boczne mają równe długości.

W ostrosłupie prawidłowym ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Ostrosłup trójkątny nazywamy **czworościanem**.

Uwaga. W czworościanie każdą ze ścian możemy uznać za podstawę. Czworościan ma zatem cztery wysokości.

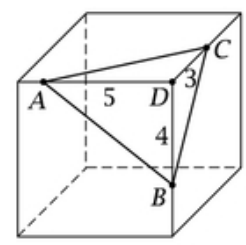


Czworościan (ostrosłup trójkątny)

Czworościan, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**.

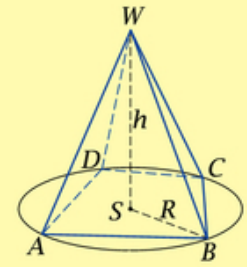
zadania 1–3

II ĆWICZENIE A Odcinając narożę sześcianu w sposób przedstawiony na rysunku obok, otrzymamy ostrosłup, który jest czworościanem. Przyjmijmy, że podstawą tego czworościanu jest ściana BCD. Oblicz wysokość tego czworościanu. Oblicz długości krawędzi bocznych.

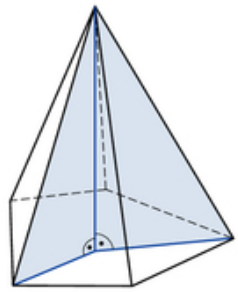


Twierdzenie

Jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają równe długości, to na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg. Środkiem tego okręgu jest spodek wysokości ostrosłupa.



Dowód

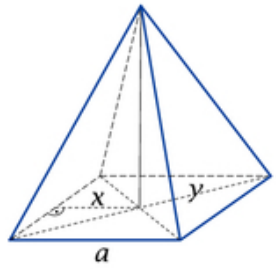


Rozważmy w ostrosłupie o równych krawędziach bocznych trójkąty, których dwoma bokami są wysokość ostrosłupa i krawędź boczna.

Wszystkie takie trójkąty są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną i przeciwprostokątne o tej samej długości. Wobec tego boki tych trójkątów leżące na podstawie ostrosłupa — odcinki łączące spodek wysokości z wierzchołkami podstawy — mają taką samą długość. Okrąg o promieniu równym temu odcinkowi i o środku w spodku wysokości jest więc opisany na podstawie ostrosłupa. □

Poniższe rysunki przedstawiają ostrosłupy prawidłowe. Spodek wysokości w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym leży na przecięciu przekątnych podstawy, w ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym leży na przecięciu dłuższych przekątnych podstawy, a w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym leży na przecięciu środkowych podstawy i dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1.

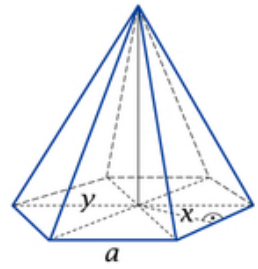
ostrosłup prawidłowy czworokątny



$x = \frac{a}{2}$

$y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

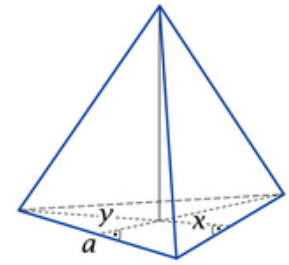
ostrosłup prawidłowy sześciokątny



$x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$y = a$

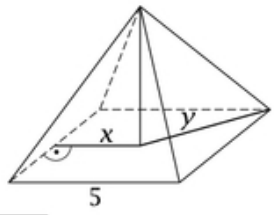
ostrosłup prawidłowy trójkątny

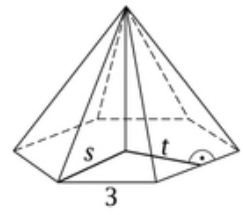


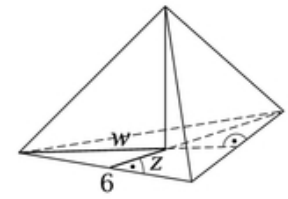
$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$

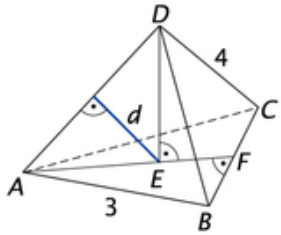
ĆWICZENIE B Na rysunkach przedstawiono ostrosłupy prawidłowe. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.







PRZYKŁAD 1 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 3, a jego krawędź boczna ma długość 4. Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od krawędzi bocznej.



$|AE| = \frac{2}{3}|AF| = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$|AE|^2 + |DE|^2 = |DA|^2$

$(\sqrt{3})^2 + |DE|^2 = 4^2$

$|DE| = \sqrt{13}$

$P_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{13} = \frac{\sqrt{39}}{2}$

$P_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot d = 2d$

$2d = \frac{\sqrt{39}}{2}$, stąd $d = \frac{\sqrt{39}}{4}$

Obliczamy pole trójkąta *AED* na dwa sposoby.

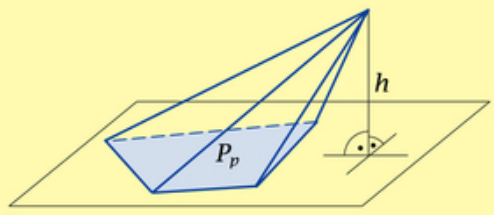
Odp. Odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznej wynosi $\frac{\sqrt{39}}{4}$.

ZADANIE Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4, a jego krawędź boczna ma długość 6. Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od krawędzi bocznej.

zadania 4–7

III Pole powierzchni ostrosłupa to suma pola podstawy i pola powierzchni bocznej, czyli sumy powierzchni ścian bocznych.

Objętość ostrosłupa stanowi $\frac{1}{3}$ objętości graniastosłupa o takich samych podstawie i wysokości.

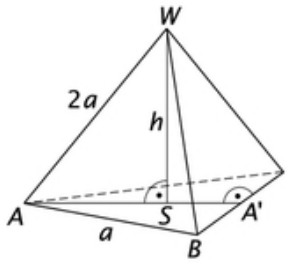


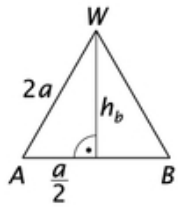
Objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$$

P_p — pole podstawy ostrosłupa
h — wysokość ostrosłupa

PRZYKŁAD 2 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a, a krawędź boczna ma długość $2a$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. Oblicz objętość tego ostrosłupa.





$$h_b = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{15}$$

$$P_c = P_p + 3P_s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{15} =$$

$$= \underline{\frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3} + 3\sqrt{15}\right)}$$

$$|AS| = \frac{2}{3}|AA'| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Wysokość trójkąta równobocznego o boku a wynosi $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, a spodek wysokości ostrosłupa dzieli ją w stosunku 1 : 2.

$$h = \sqrt{|AW|^2 - |AS|^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{3a^2}{9}} = a\sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{11}{3}} = \underline{\frac{a^3}{12}\sqrt{11}}$$

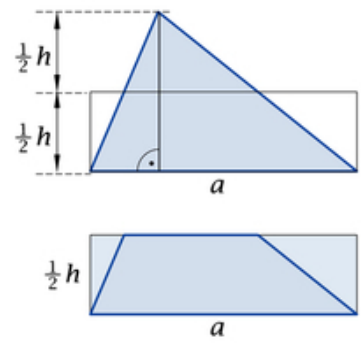
Pole trójkąta równobocznego o boku a jest równe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

ZADANIE Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 13, a wysokość tego ostrosłupa ma długość 5. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa.

zadania 8–13

Ciekawostka

Wzór na pole trójkąta można wyprowadzić ze wzoru na pole prostokąta. Wystarczy zauważyć, że trójkąt o podstawie a i wysokości h da się podzielić na części, z których można złożyć prostokąt o bokach $\frac{1}{2}h$ i a (zob. rysunki).

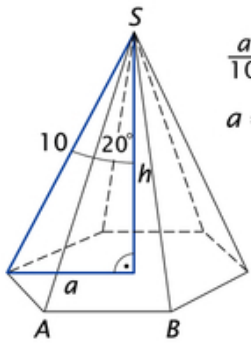


Czy nie można by w podobny sposób wyprowadzić wzoru na objętość ostrosłupa ze wzoru na objętość prostopadłościanu? To znaczy, czy można podzielić dowolny ostrosłup na skończoną liczbę części, z których da się ułożyć prostopadłościan?

To proste zdawałoby się pytanie okazało się trudnym i ważnym problemem matematycznym. Podczas II Międzynarodowego Kongresu Matematyków w roku 1900 zostało uznane przez Davida Hilberta za jeden z 23 najważniejszych problemów matematyki XX wieku. Zaskakującą odpowiedź na to pytanie znalazł jeszcze w tym samym roku Max Dehn (czyt. maks dejn) — uczeń Hilberta. Udowodnił on, że nie każdy ostrosłup można podzielić na części, z których da się ułożyć prostopadłościan.

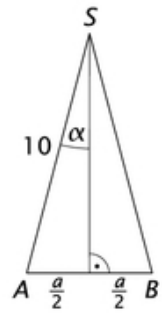
IV Podobnie jak w wypadku innych brył, przy rozwiązywaniu zadań dotyczących ostrosłupów przydają się funkcje trygonometryczne.

PRZYKŁAD 3 Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 10 cm, a kąt między tą krawędzią a wysokością ostrosłupa ma miarę 20°. Oblicz miarę kąta między sąsiednimi krawędziami bocznymi.



$\frac{a}{10} = \sin 20°$

$a = 10 \sin 20°$



$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{10} = \frac{a}{20} = \frac{10\sin 20°}{20} = \frac{\sin 20°}{2} \approx 0{,}171$$

$\alpha \approx 10°$

$|\sphericalangle ASB| = 2\alpha \approx 20°$

ZADANIE Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6, a kąt między tą krawędzią i wysokością ostrosłupa ma miarę 35°. Oblicz miarę kąta między sąsiednimi krawędziami bocznymi.

zadania 14–17

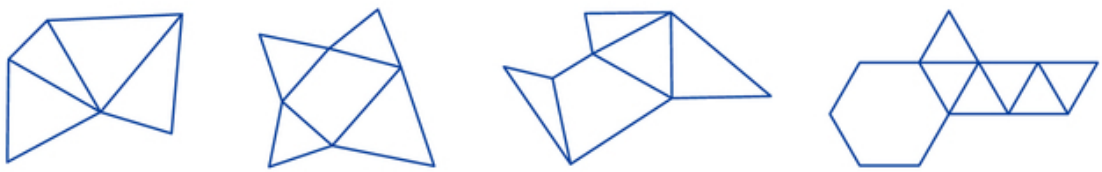
ZESTAW ZADAŃ

I **1.** **a)** Ile ścian bocznych ma ostrosłup o 100 krawędziach?

b) Czy ostrosłup może mieć 15 krawędzi?

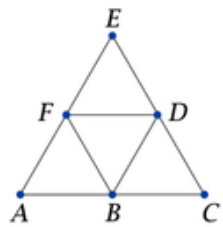
c) Czy ostrosłup może mieć 22 krawędzie i 12 ścian bocznych?

2. Wyjaśnij, dlaczego poniższe rysunki nie przedstawiają siatek ostrosłupów.

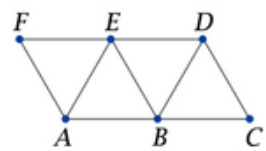


3. Na rysunku przedstawiono siatkę czworościanu foremnego. Które punkty — po sklejeniu czworościanu — pokryją się z punktem A?

a)

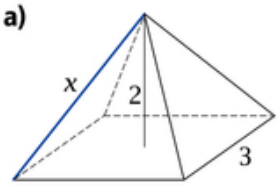


b)

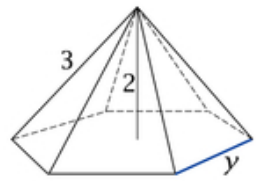


II **4.** Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy (pionowy odcinek to wysokość ostrosłupa). Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

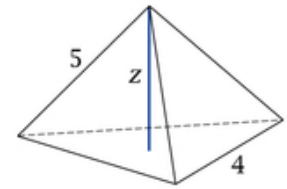
a)



b)



c)

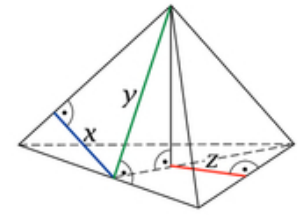


5. Na rysunku obok jest przedstawiony czworościan foremny o krawędzi a.

a) Oblicz długości odcinków oznaczonych literami x, y, z.

b) Oblicz wysokość tego czworościanu.

c) W jakim stosunku punkt przecięcia wysokości czworościanu foremnego dzieli każdą z nich?



6. **a)** Wysokość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 5, a wysokość jego ściany bocznej wynosi 10. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

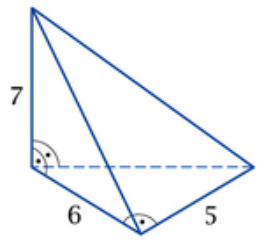
b) Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, którego boki mają długości 2 i 4, a wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa mają długość 7. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

7. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnej mającej długość 4. Wysokość ostrosłupa jest równa 8. Oblicz, jakie długości mają krawędzie boczne tego ostrosłupa, jeśli spodek wysokości jest:

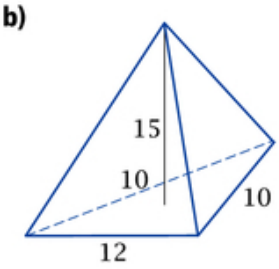
a) wierzchołkiem kąta prostego, **b)** środkiem przeciwprostokątnej.

III **8.** Oblicz objętość narysowanego ostrosłupa.

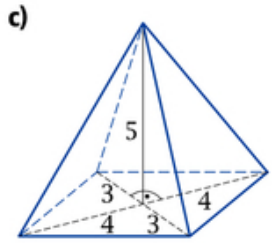
a)



b)

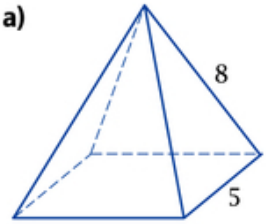


c)

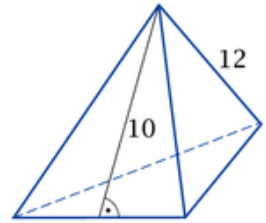


9. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy. Oblicz jego objętość.

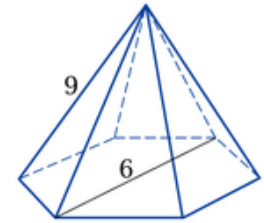
a)



b)



c)



10. Oblicz pole powierzchni całkowitej:

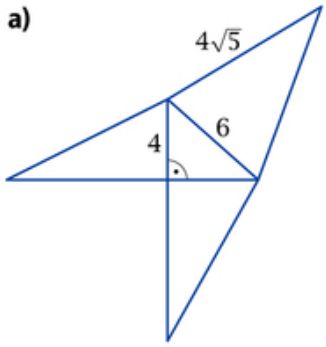
a) ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 2 i krawędzi bocznej 5,

b) ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 4 i wysokości 1.

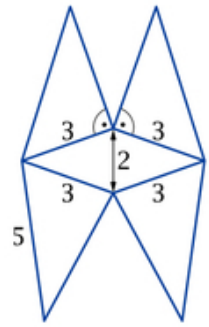
11. Jaką objętość ma czworościan foremny o krawędzi a?

12. Oblicz objętości ostrosłupa, którego siatkę przedstawiono na rysunku.

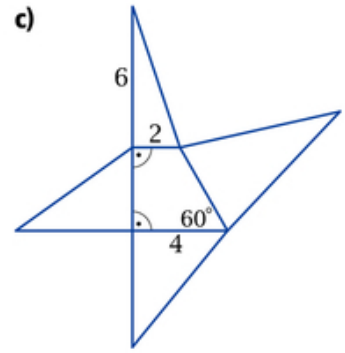
a)



b)



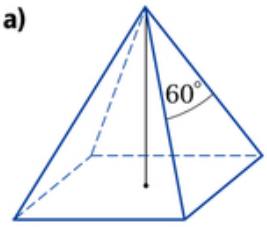
c)



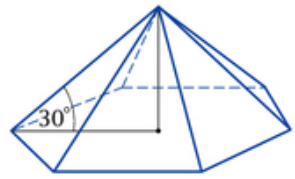
13. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa trójkątnego mają długość a, jego podstawa jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, a największa ściana — trójkątem równobocznym. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

IV **14.** Krawędź boczna narysowanego ostrosłupa prawidłowego ma długość 6. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

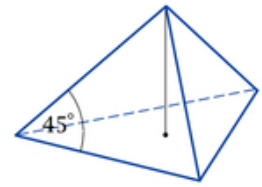
a)



b)

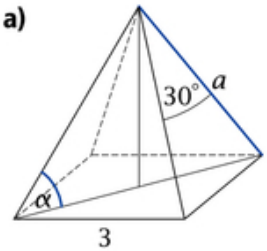


c)

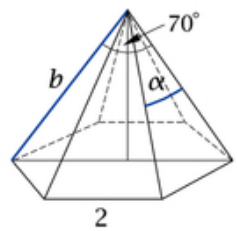


15. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy. Oblicz długość odcinka i miarę kąta oznaczonych literami.

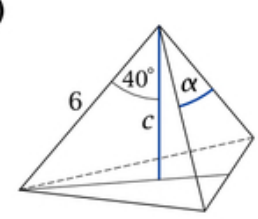
a)



b)

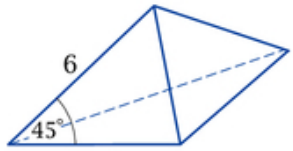


c)

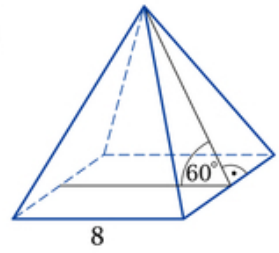


16. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy. Oblicz jego objętość.

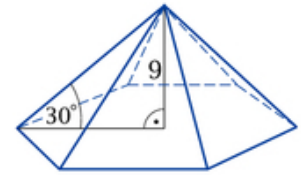
a)



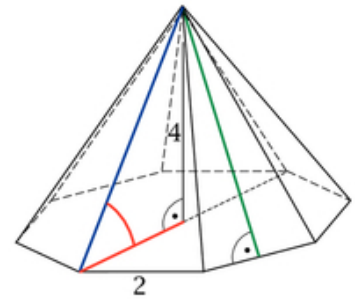
b)



c)



17. Na rysunku obok przedstawiono ostrosłup prawidłowy ośmiokątny. Oblicz długości zaznaczonych odcinków. Oblicz miarę zaznaczonego kąta.



MINISPRAWDZIAN

S1. Które zdanie jest prawdziwe?

A. *W każdym ostrosłupie wysokość jest krótsza od wszystkich krawędzi bocznych.*
B. *Podstawą każdego ostrosłupa jest wielokąt, na którym można opisać okrąg.*
C. *W każdym graniastosłupie liczba jego krawędzi jest podzielna przez 3.*
D. *W każdym graniastosłupie wysokość jest równa długości krawędzi bocznej.*

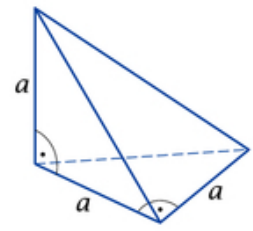
S2. Krawędź podstawy i wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego mają taką samą długość równą a. Krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość:

A. $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{13}{3}}$ B. $2a\sqrt{3}$ C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

S3. Graniastosłup prawidłowy trójkątny i ostrosłup prawidłowy czworokątny mają krawędź podstawy o tej samej długości. Ostrosłup ma dwa razy większą wysokość niż graniastosłup. Stosunek objętości graniastosłupa do ostrosłupa wynosi:

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{8\sqrt{3}}{9}$

S4. Podstawą ostrosłupa przedstawionego na rysunku jest trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych równych a. Wysokość ostrosłupa jest jedną z krawędzi bocznych i także ma długość a. Pole powierzchni tego ostrosłupa jest równe:



A. $\frac{3}{2}a^2$ C. $\frac{1}{6}a^3$
B. $a^2+\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ D. $a^2+a^2\sqrt{2}$

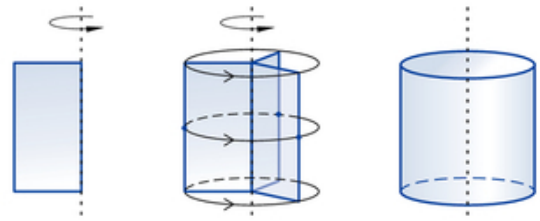
WALEC

Wyobraź sobie, że figurę płaską obracamy wokół pewnej prostej tak, że każdy punkt figury zakreśla okrąg o środku leżącym na tej prostej. Punkty wszystkich zakreślonych w taki sposób okręgów tworzą **bryłę obrotową**. Prostą, wokół której jest wykonywany obrót, nazywamy osią obrotu bryły obrotowej.

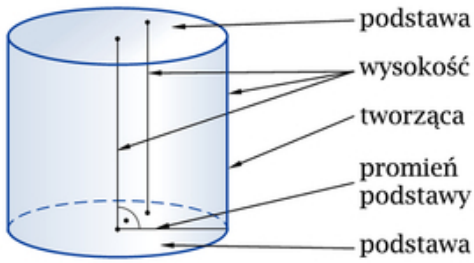




Jeśli prostokąt obrócimy w opisany wyżej sposób wokół prostej zawierającej jego bok, to otrzymaną bryłą obrotową jest **walec**.



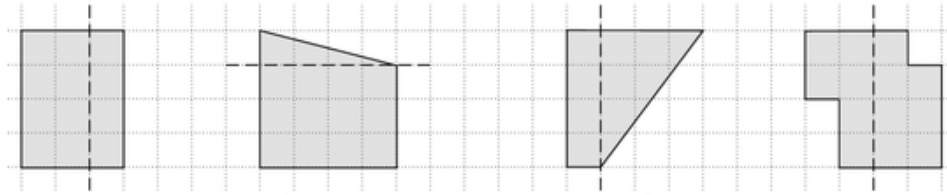
W walcu można wskazać dwie podstawy, które są przystającymi kołami leżącymi na równoległych płaszczyznach.



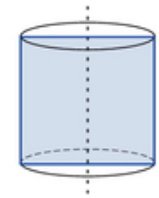
Każdy odcinek łączący płaszczyzny podstaw i prostopadły do nich nazywamy **wysokością walca**.

Wysokości, które łączą brzegi podstaw, tworzą powierzchnię boczną walca. Każdą taką wysokość nazywamy **tworzącą walca**.

ĆWICZENIE A Wyobraź sobie, że narysowane figury obracamy wokół wskazanych osi. Które z otrzymanych brył obrotowych są walcami? Podaj długości promieni podstaw i tworzących tych walców. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.

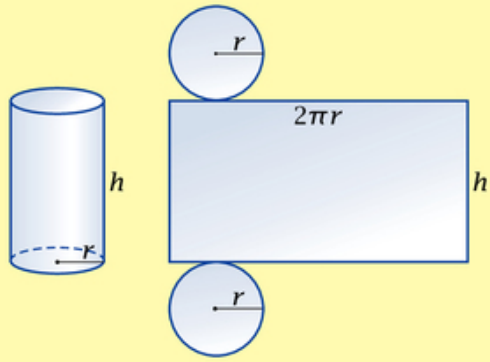


Przecinając bryłę obrotową płaszczyzną zawierającą oś obrotu, otrzymamy **przekrój osiowy** tej bryły. Przekrój osiowy walca jest prostokątem.



ĆWICZENIE B Czy przekroje dwóch walców o różnych wysokościach mogą być przystającymi prostokątami?

Jeśli walec ma promień podstawy r i wysokość h, to jego powierzchnia boczna po rozwinięciu na płaszczyznę jest prostokątem o bokach $2\pi r$ i h. Pole powierzchni całkowitej walca to suma pól dwóch podstaw i pola powierzchni bocznej.



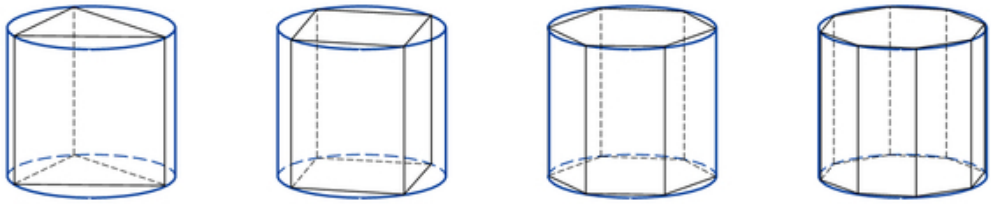
Pole powierzchni całkowitej walca:

$$P_c = 2P_p + P_b$$

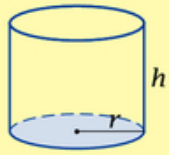
$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

P_p — pole podstawy
P_b — pole powierzchni bocznej
r — promień podstawy
h — wysokość walca

Wyobraź sobie, że w walec wpisujemy graniastosłupy prawidłowe o takiej samej wysokości jak walec (zob. rysunki poniżej). Im więcej boków ma wielokąt, który jest podstawą graniastosłupa, tym objętość graniastosłupa bliższa jest objętości walca.



Objętość walca, podobnie jak w wypadku graniastosłupa, jest równa iloczynowi pola jego podstawy i wysokości.



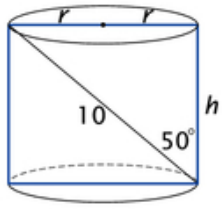
Objętość walca:

$$V = P_p \cdot h$$

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

P_p — pole podstawy
r — promień podstawy
h — wysokość walca

PRZYKŁAD Kąt między przekątną przekroju osiowego walca a tworzącą walca ma miarę 50°. Przekątna ma długość 10. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.



$$\frac{2r}{10} = \sin 50^\circ$$

$$r = 5\sin 50^\circ$$

$$\frac{h}{10} = \cos 50^\circ$$

$$h = 10\cos 50^\circ$$

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (5\sin 50^\circ)^2 \cdot 10\cos 50^\circ \approx 296$$

$$P_c = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 5\sin 50^\circ \cdot 10\cos 50^\circ + 2\pi \cdot (5\sin 50^\circ)^2 \approx 247$$

Odp. Objętość walca wynosi około 296, a pole jego powierzchni całkowitej — około 247.

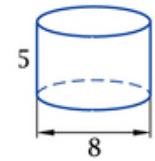
ZADANIE Kąt między przekątną przekroju osiowego a średnicą podstawy walca ma miarę 20°. Przekątna ma długość 8. Oblicz objętość i pole powierzchni tego walca.

zadania 1–18

ZESTAW ZADAŃ

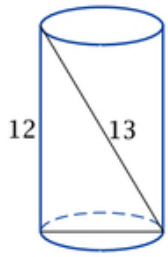
1. Który z walców przedstawionych na rysunku ma większą objętość? Który ma większe pole powierzchni całkowitej?



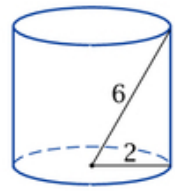


2. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca przedstawionego na rysunku.

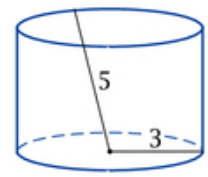
a)



b)

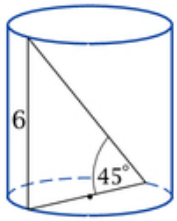


c)

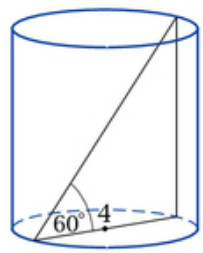


3. Oblicz objętość walca przedstawionego na rysunku.

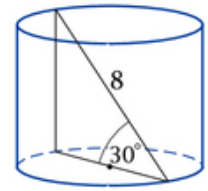
a)



b)

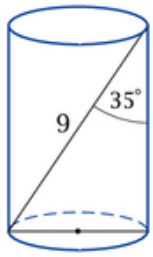


c)

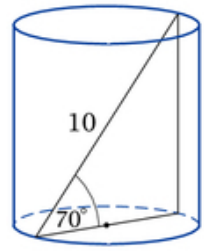


4. Oblicz objętość walca przedstawionego na rysunku.

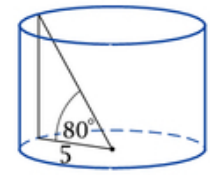
a)



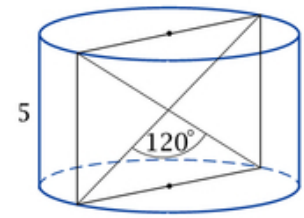
b)



c)



5. Oblicz objętość walca przedstawionego na rysunku obok.



6. **a)** Dwa różne walce mają taki sam przekrój osiowy, który jest prostokątem o wymiarach 4×6. Porównaj objętości i pola powierzchni całkowitej tych walców.

b) Rozważmy walec otrzymany w wyniku obrotu pewnego prostokąta wokół krótszego boku oraz walec, który otrzymamy w wyniku obrotu tego samego prostokąta wokół dłuższego boku. Który z tych walców będzie miał większą objętość, a który będzie miał większe pole powierzchni całkowitej?

7. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku a. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.

8. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem o boku a. Oblicz pole przekroju osiowego tego walca.

9. W walcu o promieniu r kąt między przekątną przekroju osiowego a tworzącą walca wynosi α. Uzasadnij, że objętość tego walca wynosi $\frac{2\pi r^3}{\operatorname{tg}\alpha}$.

10. Po rozwinięciu powierzchni bocznej walca otrzymano prostokąt, którego jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego, a przekątna ma długość p. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

11. Na świecę w kształcie walca o wysokości 8 cm i średnicy podstawy 5 cm potrzeba 150 g parafiny. Ile świec w kształcie walca o wysokości 10 cm i średnicy podstawy 4 cm można zrobić z 1,5 kg takiej parafiny?

12. W garnku o średnicy 20 cm i wysokości 20 cm woda sięga do wysokości 16 cm. Czy woda wyleje się z garnka, gdy włożymy do niego sześcienną kostkę ze stali o krawędzi równej 10 cm?

Ciekawostka

Benjamin Franklin, współtwórca amerykańskiej Deklaracji niepodległości, był znany z wielu pomysłowych eksperymentów. Jeden z nich był następujący: Franklin zauważył, że plama oleju na wodzie szybko rośnie wkrótce po powstaniu, ale po pewnym czasie przestaje się powiększać. Opuścił zatem kroplę oleju o objętości 0,1 cm^3 na spokojne wody jeziora i obserwował powstającą plamę. Gdy przestała się powiększać, zmierzył jej średnicę. Miała 710 cm. Przyjmując, że plama jest walcem, Franklin obliczył grubość warstwy oleju.

Wiele lat później okazało się, że wynik, jaki otrzymał Franklin, świadczy o tym, że plama oleju jest zbudowana z dokładnie jednej warstwy cząsteczek oleju (grubość warstwy i długość jednej cząsteczki oleju są jednakowe).

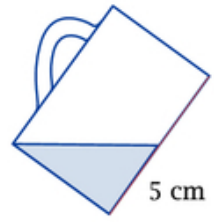
13. Przeczytaj ciekawostkę. Jaki wynik otrzymał Franklin?

14. Kubek w kształcie walca o średnicy podstawy 8 cm i wysokości 10 cm napełniono częściowo wodą i pochylono tak, jak pokazano na rysunku. Oblicz objętość wody w kubku.

a)



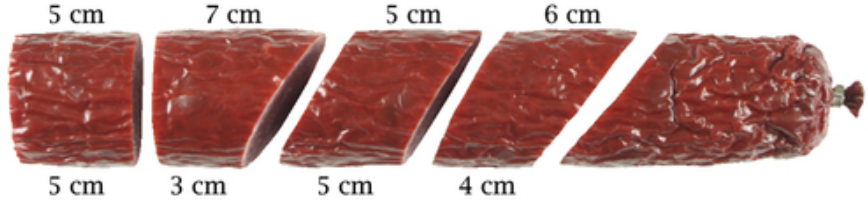
b)



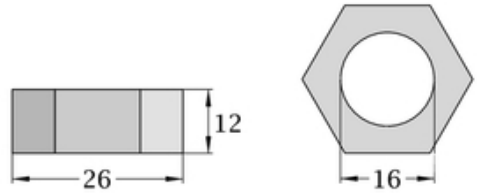
c)



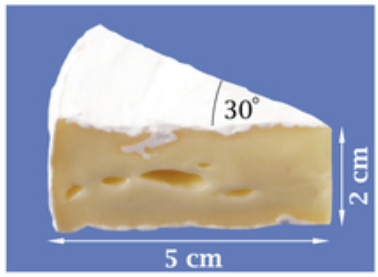
15. Cztery kawałki kiełbasy odcięto w sposób przedstawiony na rysunku. Czy każdy z tych kawałków waży tyle samo?

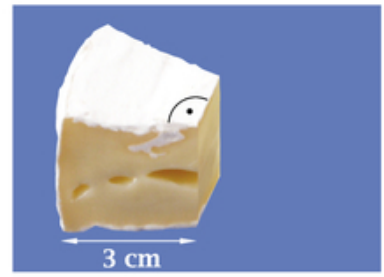


16. Rysunki przedstawiają nakrętkę widzianą z dwóch stron — z góry i z boku. Wymiary podano w milimetrach. Nakrętkę wykonano ze stali o gęstości 8000 kg/m^3. Oblicz masę 20 takich nakrętek.

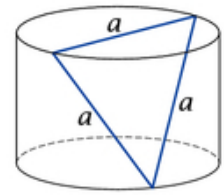


17. Ser w kształcie walca o promieniu podstawy 5 cm podzielono na 12 jednakowych części, takich jak na pierwszej fotografii. Od jednej z takich części odcięto trochę sera tak, że został taki kawałek, jak pokazano na drugiej fotografii. Jaka to część całego sera?





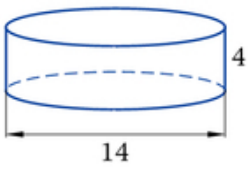
18. Końce średnicy podstawy walca połączono odcinkami z punktem leżącym na brzegu drugiej podstawy, tworząc w ten sposób trójkąt równoboczny o boku a. Jakie jest pole powierzchni całkowitej walca?



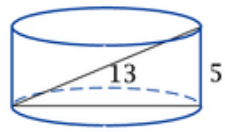
MINISPRAWDZIAN

S1. Który z poniższych walców ma największą objętość?

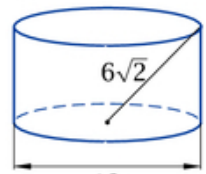
A.



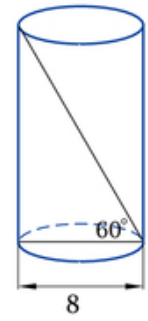
B.



C.



D.



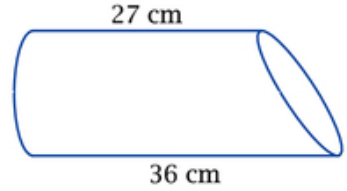
S2. Powierzchnia boczna walca jest po rozwinięciu kwadratem o boku a. Objętość tego walca jest równa:

A. πa^3 B. $2\pi a^3$ C. $\frac{a^3}{2\pi}$ D. $\frac{a^3}{4\pi}$

S3. Z drewnianego prostopadłościennego klocka o wymiarach $8\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ chcemy wyciąć walec. Maksymalna objętość tego walca w centymetrach sześciennych wynosi:

A. 72π B. 96π C. 108π D. 144π

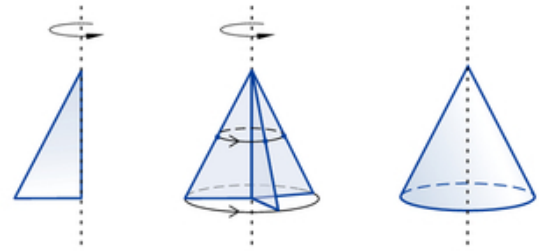
S4. Z sera w kształcie walca o długości 36 cm odcięto kawałek w sposób pokazany na rysunku. Jaką część sera odcięto?



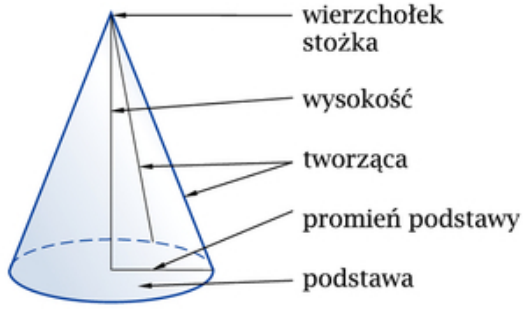
A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

STOŻEK

Jeżeli trójkąt prostokątny obrócimy wokół prostej, która zawiera jedną z przyprostokątnych, to otrzymaną bryłą obrotową jest **stożek**.



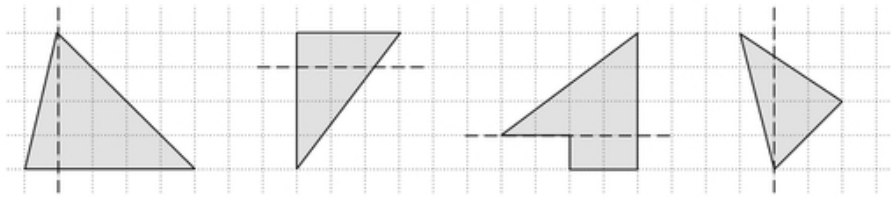
W stożku można wskazać podstawę, która jest kołem, oraz wierzchołek (zob. rysunek poniżej).



Odcinek łączący wierzchołek ze środkiem podstawy stożka nazywamy **wysokością stożka**.

Odcinki, które łączą wierzchołek z brzegiem podstawy, tworzą powierzchnię boczną stożka. Każdy taki odcinek nazywamy **tworzącą stożka**.

ĆWICZENIE A Wyobraź sobie, że narysowane figury obracamy wokół wskazanych osi. Które z otrzymanych brył obrotowych są stożkami? Podaj długości promieni podstaw i długości tworzących tych stożków. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.



Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym. Kąt między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia stożka**. Kąt przy podstawie tego trójkąta to kąt nachylenia tworzącej do podstawy stożka.

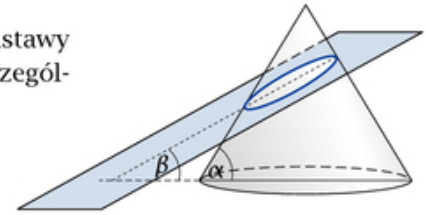


ĆWICZENIE B Kąt rozwarcia stożka ma 120°. Jaką miarę ma kąt nachylenia tworzącej do podstawy stożka?

Ciekawostka

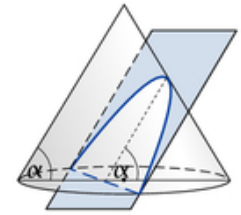
Na poniższych rysunkach przedstawiono fragmenty płaszczyzn przecinających stożek i nachylonych pod różnymi kątami do podstawy stożka. Wspólne części tych płaszczyzn i powierzchni bocznej stożka tworzą trzy rodzaje linii. (Kąty między płaszczyznami oraz przekroje brył będą dokładniej omawiane w klasie trzeciej).

Gdy płaszczyzna nie przecina podstawy stożka, otrzymujemy elipsę (w szczególnym przypadku okrąg).



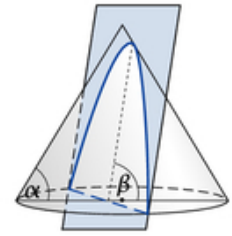
elipsa ($\beta < \alpha$)

Gdy płaszczyzna przecina podstawę i jest do niej nachylona pod takim samym kątem jak tworząca stożka, otrzymujemy fragment paraboli.



parabola

Gdy płaszczyzna jest nachylona do podstawy pod kątem większym niż tworząca, otrzymujemy fragment hiperboli.

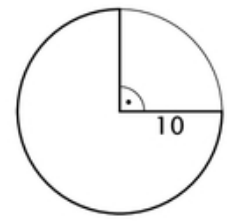


hiperbola ($\beta > \alpha$)

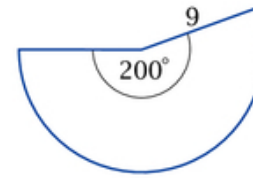
Właśnie z tego powodu elipsa, parabola i hiperbola są nazywane krzywymi stożkowymi. Ciekawe, że orbity ciał niebieskich są krzywymi stożkowymi. Na przykład planety krążą po elipsach, a niektóre komety poruszają się po hiperbolach.

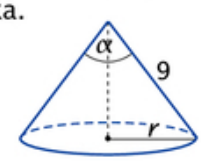
Słowa *elipsa*, *hiperbola* i *parabola* są też używane w teorii literatury. Elipsa to celowe opuszczenie pewnej części zdania, której można się domyślić, hiperbola to zamierzona przesada w opisie (np. w zwrocie *umrzeć ze śmiechu*), a parabola — to inaczej przypowieść alegoryczna.

ĆWICZENIE C Koło, którego promień ma długość 10, rozcięto na dwie części w sposób pokazany na rysunku obok. Z każdej z tych części utworzono powierzchnię boczną stożka. Oblicz obwody podstaw tych stożków. Oblicz długości promieni podstaw tych stożków.



PRZYKŁAD Z wycinka koła, który przedstawiono na rysunku obok, można utworzyć powierzchnię boczną stożka. Oblicz, jaką miarę będzie miał kąt rozwarcia tego stożka.





$2\pi r = \frac{200^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 9$

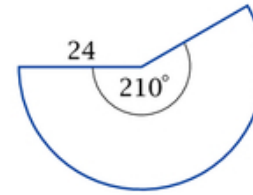
Obwód podstawy stożka jest równy długości łuku wycinka koła.

$r = 5$

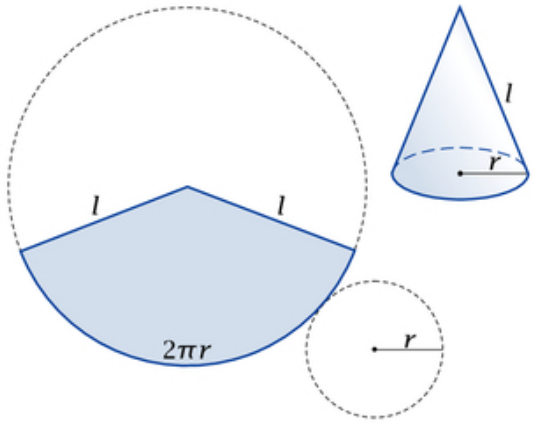
$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{9} = \frac{5}{9}$

$\frac{\alpha}{2} \approx 34^\circ$, stąd $\alpha \approx \underline{68^\circ}$

ZADANIE Z wycinka koła, który przedstawiono na rysunku, można utworzyć powierzchnię boczną stożka. Oblicz, jaką miarę będzie miał kąt między tworzącą a średnicą podstawy tego stożka.



Powierzchnia boczna stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l po rozłożeniu na płaszczyźnie jest wycinkiem koła o promieniu l. Łuk tego wycinka ma długość $2\pi r$.

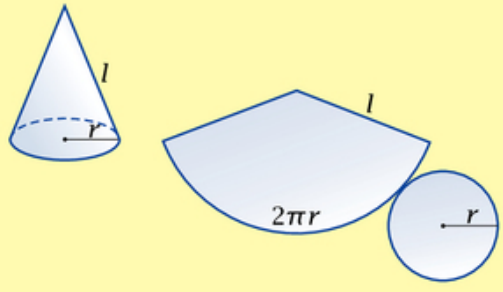


Pole wycinka koła możemy obliczyć, korzystając z następującej proporcji:

$$\frac{\text{Pole wycinka koła}}{\text{Pole koła}} = \frac{\text{Długość łuku wycinka}}{\text{Obwód koła}}$$

$$\frac{P_b}{\pi l^2} = \frac{2\pi r}{2\pi l}$$

$$P_b = \pi r l$$



Pole powierzchni bocznej stożka:

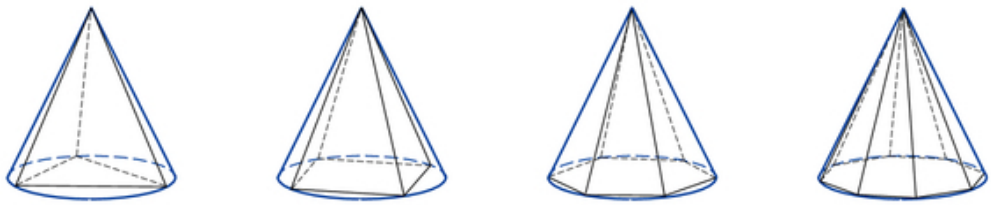
$$P_b = \pi r l$$

Pole powierzchni całkowitej stożka:

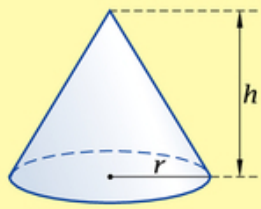
$$P_c = \pi r^2 + \pi r l$$

r — długość promienia podstawy stożka
l — długość tworzącej

Wyobraź sobie, że wpisujemy w stożek ostrosłupy prawidłowe o tej samej wysokości co stożek (zob. rysunki poniżej). Im więcej boków miałby wielokąt w podstawie ostrosłupa, tym objętość ostrosłupa byłaby bliższa objętości stożka.



Objętość stożka stanowi $\frac{1}{3}$ objętości walca o takiej samej podstawie i wysokości.



Objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

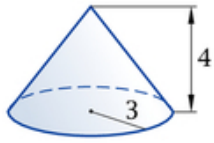
r — promień podstawy
h — wysokość stożka

zadania 1–16

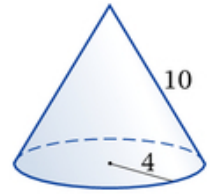
ZESTAW ZADAŃ

I **1.** Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej narysowanego stożka.

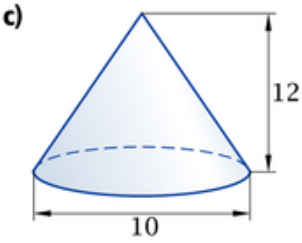
a)



b)



c)



2. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej narysowanego stożka.

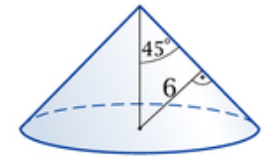
a)



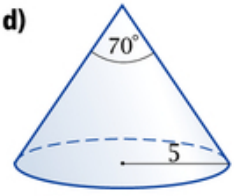
b)



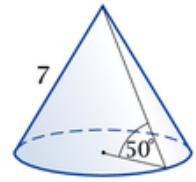
c)



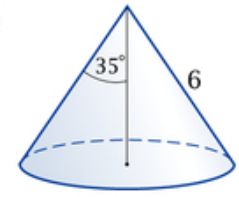
d)



e)



f)



3. Przekrój osiowy stożka o wysokości 3 jest trójkątem prostokątnym. Oblicz objętość tego stożka.

4. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka o kącie rozwarcia 120° i wysokości 5.

5. Stożek otrzymano w wyniku obrotu trójkąta równoramiennego wokół wysokości opuszczonej na jego podstawę. Kąt między ramionami tego trójkąta ma 90°, a jego podstawa ma 6 cm. Oblicz objętość tego stożka.

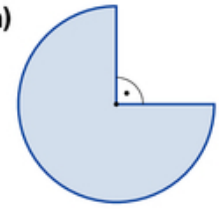
6. Trójkąt prostokątny ma przyprostokątne o długościach 5 cm i 12 cm. Rozważmy stożek, który otrzymano w wyniku obrotu tego trójkąta wokół krótszej przyprostokątnej, i stożek, który otrzymano w wyniku obrotu tego trójkąta wokół dłuższej przyprostokątnej. Porównaj ich objętości i pola powierzchni całkowitej.

7. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym. Jaką miarę ma kąt środkowy wycinka koła, z którego można utworzyć powierzchnię boczną tego stożka?

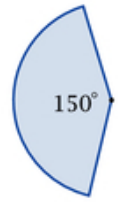
8. Stożek o kącie rozwarcia 90° ma objętość 9. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

9. Na rysunku przedstawiono wycinek koła o promieniu 10. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka, którego powierzchnią boczną po rozcięciu jest ten wycinek.

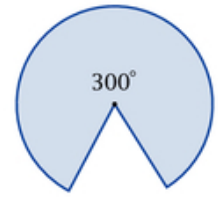
a)



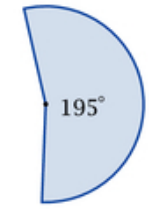
b)



c)



d)



10. Z wycinka koła o promieniu 10 chcemy utworzyć powierzchnię boczną stożka o wysokości 6. Oblicz, jaką miarę powinien mieć kąt środkowy tego wycinka.

11. Koło podzielono na dwa wycinki kołowe o kątach środkowych 60° i 300°. Z każdego z tych wycinków tworzymy powierzchnię boczną stożka.

a) Jaki jest stosunek długości promieni podstaw tych stożków?

b) Jakie miary mają kąty rozwarcia stożków?

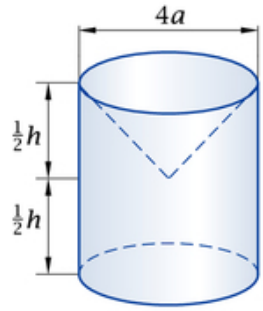
c) Jaki jest stosunek długości wysokości stożków?

d) W którym z tych stożków kąt nachylenia tworzącej do podstawy jest większy? Jaką ma miarę?

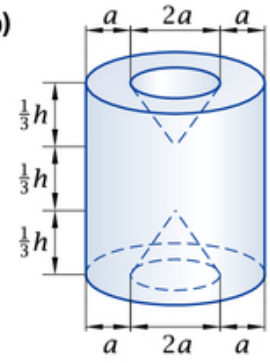
12. Koło o promieniu R rozcięto na dwa wycinki i z każdego z nich utworzono powierzchnię boczną stożka. Wykaż, że suma długości promieni podstaw tych stożków jest równa R.

13. Oblicz objętość bryły przedstawionej na rysunku.

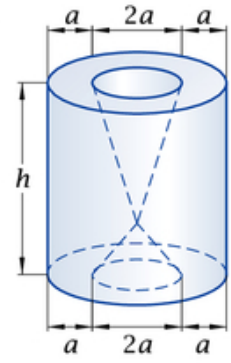
a)



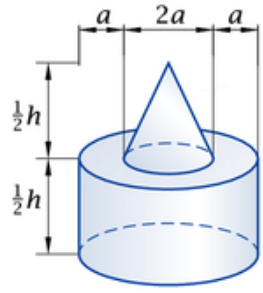
b)



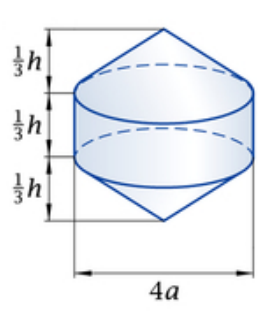
c)



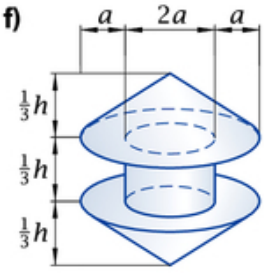
d)



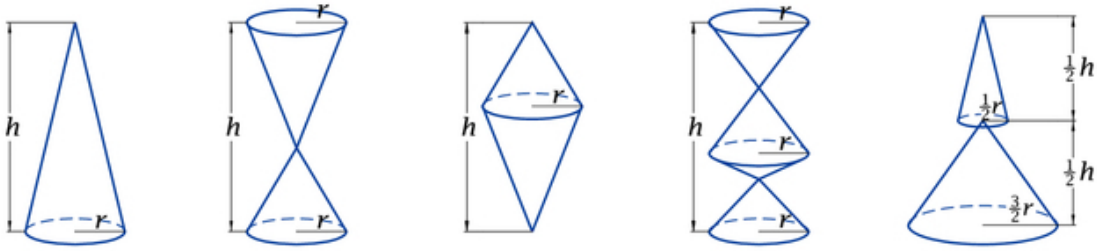
e)



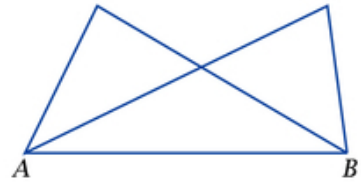
f)

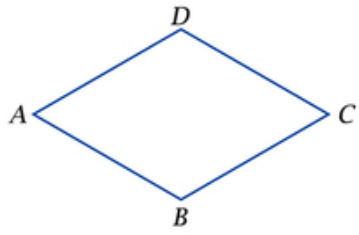


14. Która z narysowanych brył ma największą objętość?



● **15.** Trójkąty na rysunku obok mają równe wysokości opuszczone na bok AB. Wykaż, że objętości brył otrzymanych w wyniku obrotu tych trójkątów wokół prostej AB są równe.





16. Bok narysowanego rombu ma długość 2 cm, a kąt ostry ma miarę 60°. Oblicz objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu tego rombu:

a) wokół prostej BD,

b) wokół prostej AC,

c) wokół prostej przechodzącej przez punkt A i równoległej do prostej BD,

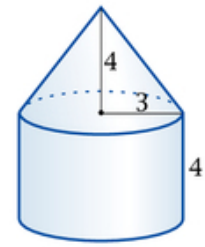
● **d)** wokół prostej AB.

MINISPRAWDZIAN

S1. Jaką wysokość ma stożek o promieniu podstawy r i objętości V?

A. $\frac{V}{\pi r^2}$ B. $3V - \pi r^2$ C. $\frac{\pi r^2}{3V}$ D. $\frac{3V}{\pi r^2}$

S2. Jakie pole powierzchni całkowitej ma bryła przedstawiona na rysunku?



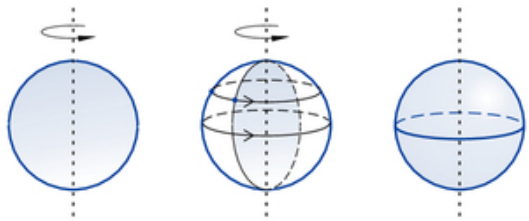
A. 57π B. 48π C. 24π D. 66π

S3. Jaki kąt środkowy powinien mieć wycinek koła, który po zwinięciu utworzy powierzchnię boczną stożka mającego tworzącą długości 18 i obwód podstawy równy 20?

A. około 64° B. około 57° C. 78° D. 90°

KULA

I

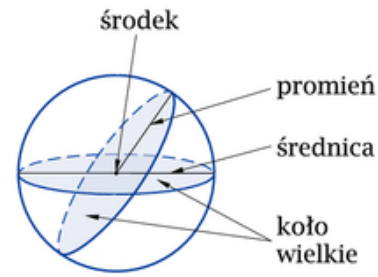


Jeśli koło obracamy wokół prostej zawierającej średnicę koła, to otrzymaną bryłą obrotową jest **kula**.

Powierzchnię kuli nazywamy **sferą**.

Zauważ, że tę samą kulę możemy otrzymać, obracając koło wokół prostej zawierającej dowolną średnicę koła. Każda taka prosta to oś obrotu tej kuli.

Kula o środku S i promieniu r jest zbiorem wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu S jest nie większa od r. Zbiór punktów, dla których odległość ta jest równa r, nazywamy sferą.

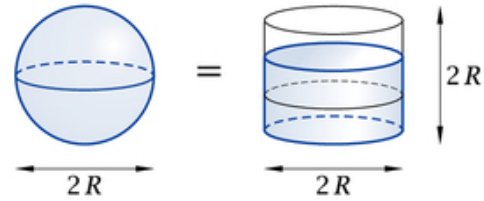


Każdy przekrój kuli jest kołem.

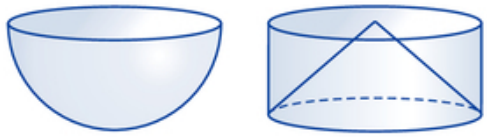
Przekrój kuli, który zawiera jej środek, nazywamy **kołem wielkim kuli**.

Ciekawostka

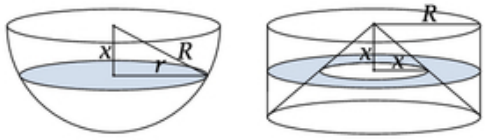
Wzór na objętość kuli potrafił uzasadnić już Archimedes (287–212 p.n.e.). W niezwykle pomysłowy sposób wykazał on bowiem, że objętość kuli to $\frac{2}{3}$ objętości walca, którego średnica podstawy i wysokość są równe średnicy kuli.



Rozumowanie Archimedesa przebiegało mniej więcej tak (dla uproszczenia rozważania przeprowadzimy dla półkuli):



Wyobraź sobie dwa naczynia o jednakowej wysokości i średnicy. Jedno ma kształt półkuli (a właściwie półsfery). Drugie naczynie ma kształt walca pustego w środku, do którego wklejono stożek o takiej samej podstawie i wysokości jak walec.



$P = \pi r^2$

$r^2 = R^2 - x^2$

$P = \pi(R^2 - x^2)$

$P = \pi R^2 - \pi x^2$

$P = \pi(R^2 - x^2)$

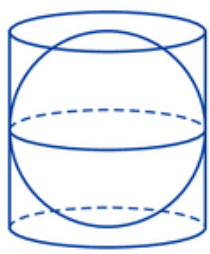
Gdyby te naczynia stojące obok siebie przeciąć płaszczyzną poziomą, to otrzymalibyśmy dwa przekroje — jeden w kształcie koła, a drugi w kształcie pierścienia. Archimedes zauważył, że oba te przekroje mają równe pola.

Argumentacja Archimedesa przebiegała dalej w następujący sposób:

Przypuśćmy teraz, że do każdego z tych naczyń nalewamy jednocześnie wodę takim samym strumieniem (w każdej chwili tyle samo wody). Skoro na każdym poziomie przekroje obu naczyń mają równe pola, to naczynia napełnione zostaną w tym samym momencie i będą zawierać tyle samo wody. Wynika stąd, że mają taką samą pojemność.

Teraz możemy już obliczyć objętość V kuli o promieniu R. Połowa tej objętości jest równa różnicy między objętością walca i stożka opisanych powyżej:

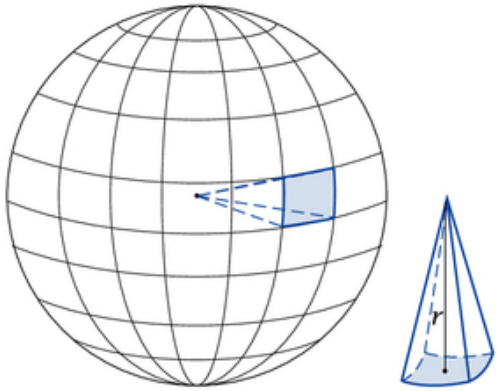
$$\frac{1}{2}V = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3, \qquad \text{zatem} \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$



Archimedes był tak dumny z odkrycia, że objętość kuli jest równa $\frac{2}{3}$ objętości walca opisanego na tej kuli, iż kazał na swym nagrobku wyryć rysunek ilustrujący to twierdzenie.

Właśnie dzięki temu rysunkowi 137 lat po śmierci Archimedesa Cyceron odnalazł w Syrakuzach na Sycylii jego zarośnięty już i zniszczony grób.

Już od czasów Archimedesa wiadomo, że objętość kuli o promieniu r wynosi $\frac{4}{3}\pi r^3$. Korzystając z tego, można uzasadnić wzór pozwalający obliczać pole powierzchni kuli. Wyobraź sobie, że kulę o promieniu r dzielimy na n brył przypominających ostrosłupy o wspólnym wierzchołku w środku kuli.



Wspólną część każdej takiej bryły i powierzchni kuli (sfery) nazwijmy podstawą bryły. Niech $P_1, P_2, \ldots, P_n$ oznaczają pola podstaw brył, na które podzielono kulę. Suma tych pól jest równa polu powierzchni kuli:

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_n = P$$

Zauważ, że im mniejsze pola podstaw tych brył, tym bardziej bryły te przypominają ostrosłupy o objętościach:

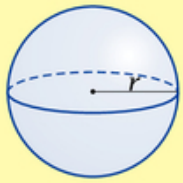
$$\frac{1}{3}P_1 r,\ \frac{1}{3}P_2 r,\ \ldots,\ \frac{1}{3}P_n r$$

Suma objętości tych brył jest wówczas równa objętości kuli:

$$\frac{1}{3}P_1 \cdot r + \frac{1}{3}P_2 \cdot r + \ldots + \frac{1}{3}P_n \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{1}{3}r(P_1 + P_2 + \ldots + P_n) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Stąd otrzymujemy równość: $P = 4\pi r^2$



Objętość kuli: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Pole powierzchni kuli: $P = 4\pi r^2$

r — promień kuli

zadania 1–13

ZESTAW ZADAŃ

1. **a)** Oblicz pole powierzchni kuli o objętości 36π.

b) Oblicz objętość kuli o polu powierzchni 100π.

2. Koło wielkie kuli ma pole 16π. Oblicz objętość i pole powierzchni tej kuli.

3. Na pomalowanie kuli zużyto 10 litrów farby. Ile potrzeba tej farby, aby pomalować półkulę o takim samym promieniu?

4. **a)** Zgodnie z przepisami gry w tenisa stołowego piłeczka ma mieć średnicę 40 mm. Dawniej, przed rokiem 2000, grano mniejszymi piłeczkami — o średnicy 38 mm. O ile procent zwiększyła się powierzchnia piłeczki po zmianie przepisów?

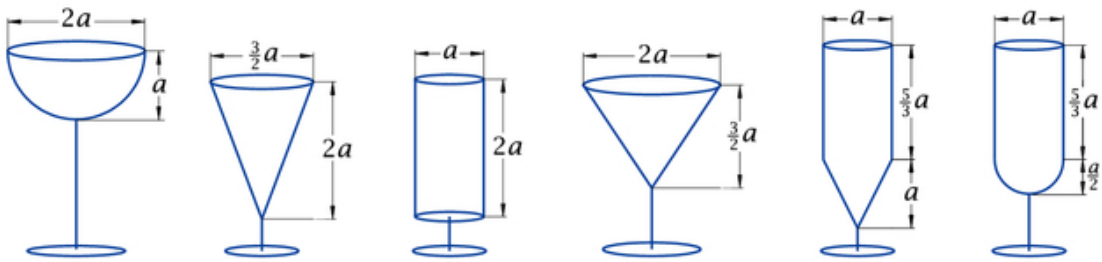
b) Przepisy koszykówki dopuszczają do gry piłki o obwodzie od 74,9 cm do 78 cm. O ile procent objętość największej piłki jest większa od objętości najmniejszej piłki zgodnej z przepisami?

5. **a)** Dwie ołowiane kule o średnicach 8 cm i 4 cm przetopiono na jedną kulę. Jaka jest średnica tej kuli?

b) Mosiężną kulę o średnicy 12 cm przetopiono na jednakowe kule o średnicy 2 cm. Ile małych kul otrzymano?

6. Do pojemnika w kształcie walca o średnicy 10 cm nalano wody i wrzucono do niego 30 metalowych kulek, każda o promieniu 1 cm. Kulki całkowicie zanurzyły się w wodzie. O ile centymetrów podniósł się poziom wody w naczyniu?

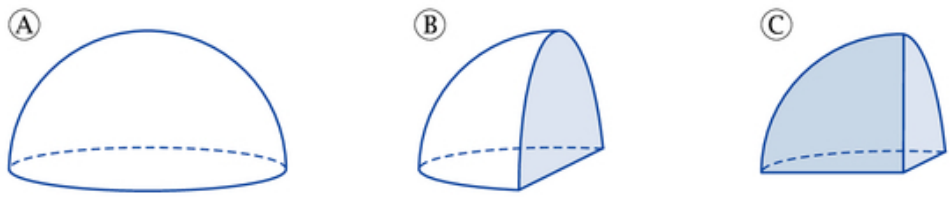
7. Który z kieliszków przedstawionych na rysunkach ma największą pojemność, a który — najmniejszą?



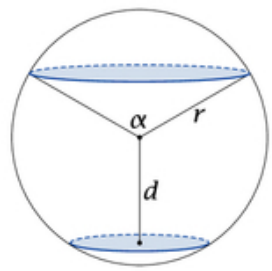
8. Przedstawione na rysunkach bryły to półkula, ćwiartka i $\frac{1}{8}$ kuli. Wszystkie są wycięte z tej samej kuli.

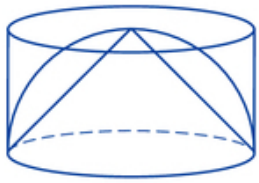
a) Ile razy powierzchnia bryły Ⓐ jest większa od powierzchni bryły Ⓑ?

b) Ile razy powierzchnia bryły Ⓑ jest większa od powierzchni bryły Ⓒ?



9. Przyjrzyj się rysunkowi. Przyjmij, że $r = 13$ cm, $d = 5$ cm, $\alpha = 120°$. Który z zaznaczonych przekrojów ma większe pole powierzchni? O ile większe?





10. W walec o wysokości równej promieniowi podstawy wpisano półkulę i stożek w sposób przedstawiony na rysunku. Wykaż, że różnica między objętością walca i półkuli jest taka sama jak różnica między objętością półkuli i stożka.

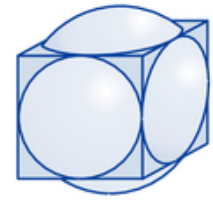
11. **a)** Oblicz stosunek objętości kuli opisanej na sześcianie do objętości kuli wpisanej w ten sześcian.

b) Ile razy większą powierzchnię ma kula opisana na sześcianie niż kula wpisana w ten sześcian?

12. **a)** Oblicz stosunek pola powierzchni kuli do pola powierzchni całkowitej walca opisanego na tej kuli.

b) Wykaż, że objętość walca o polu powierzchni całkowitej P, opisanego na kuli o promieniu r, jest równa $\frac{1}{3}Pr$.

13. Na rysunku obok przedstawiono kulę styczną do wszystkich krawędzi sześcianu. Czy objętość tej kuli jest większa od objętości sześcianu?



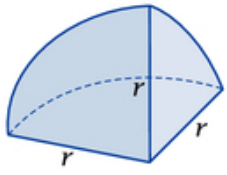
MINISPRAWDZIAN

S1. Koło wielkie kuli ma pole powierzchni równe 12π. Jaką objętość ma ta kula?

A. $24\sqrt{3}\pi$ B. $32\sqrt{3}\pi$ C. 48π D. $8\sqrt{3}\pi$

S2. Jedna z dwóch kul ma trzy razy większą średnicę niż druga. Ile razy większą ma objętość?

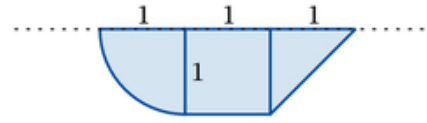
A. $\sqrt[3]{3}$ razy B. 3 razy C. 9 razy D. 27 razy



S3. Na rysunku przedstawiono fragment kuli o promieniu r (zaznaczone na rysunku odcinki o długości r są parami prostopadłe). Powierzchnia całej kuli jest równa 160 cm^2. Jaka jest powierzchnia narysowanej bryły?

A. 60 cm^2 B. 50 cm^2 C. 40 cm^2 D. 20 cm^2

S4. Figurę przedstawioną na rysunku obok obracamy wokół zaznaczonej prostej. Jakie pole powierzchni ma otrzymana bryła?

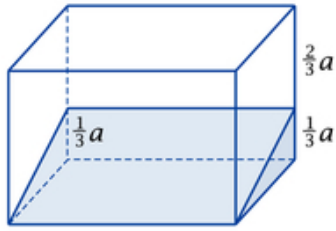


A. $\pi(4+\sqrt{2})$ C. $\pi(8+\sqrt{2})$
B. $\pi(6+\sqrt{2})$ D. 2π

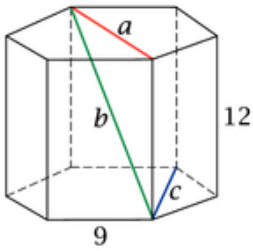
POWTÓRZENIE

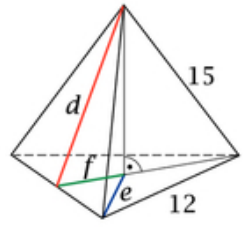
1. W pewnym graniastosłupie liczba wszystkich krawędzi, ścian i wierzchołków jest równa 80. Ile ścian ma ten graniastosłup?

2. Jaką część objętości prostopadłościanu przedstawionego na rysunku stanowi objętość zacieniowanej bryły?



3. W graniastosłupie prawidłowym oraz ostrosłupie prawidłowym zaznaczono pewne odcinki. Oblicz ich długości.





4. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 12 cm jest romb. Przekątne graniastosłupa mają 13 cm i 16 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

5. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości 1 i $\sqrt{2}$. Najkrótsza krawędź boczna jest prostopadła do podstawy, a najdłuższa krawędź boczna ma długość 2. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

6. Jaką objętość ma czworościan foremny o polu powierzchni całkowitej równym $3\sqrt{3}$?

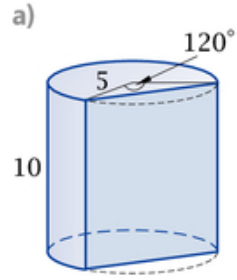
7. Oblicz wysokość walca o promieniu podstawy r, który ma taką samą objętość jak kula o promieniu r.

8. Oblicz objętość stożka o kącie rozwarcia 90° i wysokości 10.

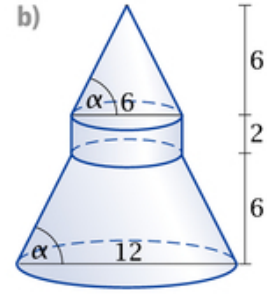
9. Z koła o promieniu 10 odcięto wycinek o kącie środkowym 30°. Z pozostałej części koła utworzono powierzchnię boczną stożka. Oblicz wysokość tego stożka.

10. Oblicz objętości brył przedstawionych na rysunku.

a)



b)



11. Gałki lodów mają kształt półkuli. Ile razy więcej waży gałka takich samych lodów o promieniu 5 cm od gałki o promieniu 4 cm?

12. Metalową kulę przetopiono bez straty materiału na kule o dwukrotnie mniejszym promieniu. Ile takich mniejszych kul otrzymano?

Statystyka

Wielkość bramki piłkarskiej została ustalona w drugiej połowie XIX wieku i od tego czasu się nie zmieniła. Obecnie bramkarze mają jednak dużo łatwiejsze zadanie niż bramkarze sprzed 100 lat. Badania statystyczne wykazały bowiem, że przeciętny wzrost mężczyzny zwiększył się w tym czasie aż o około 10 cm. Z tego powodu władze piłkarskie rozważały nawet zmianę wymiarów bramki.



Przybliżenia ■ Średnia arytmetyczna, mediana, dominanta ■ Średnia ważona ■ Odchylenie standardowe ■ Powtórzenie

PRZYBLIŻENIA

ĆWICZENIE A Przypuśćmy, że rower kosztuje 827,60 zł, a telewizor 7208,99 zł. Jak myślisz, jakie ceny mogą zapamiętać klienci, którzy zainteresowali się rowerem lub telewizorem?



Jeśli cena jakiegoś towaru wynosi na przykład 17,95 zł, klienci na ogół zapamiętują ją w pewnym przybliżeniu: „około 17 zł", „około 18 zł", „około 20 zł". Każde z tych przybliżeń różni się o pewną kwotę od dokładnej ceny.

Różnicę między dokładną wartością a wartością przybliżoną obliczamy, odejmując od większej z tych wartości mniejszą. Tę różnicę nazywamy **błędem bezwzględnym** przybliżenia. Inaczej mówiąc, błąd bezwzględny to wartość bezwzględna różnicy między wartością dokładną i przybliżoną.

$$\textit{błąd bezwzględny} = |\textit{przybliżenie} - \textit{dokładna wartość}|$$

Gdy przybliżenie jest mniejsze od dokładnej wartości, mówimy, że jest to przybliżenie z niedomiarem, a gdy jest większe od dokładnej wartości, mówimy, że jest to przybliżenie z nadmiarem. Na przykład:

17,95 zł ≈ 17 zł z błędem bezwzględnym 0,95 zł (z niedomiarem)
17,95 zł ≈ 18 zł z błędem bezwzględnym 0,05 zł (z nadmiarem)
17,95 zł ≈ 20 zł z błędem bezwzględnym 2,05 zł (z nadmiarem)
17,95 zł ≈ 17,90 zł z błędem bezwzględnym 0,05 zł (z niedomiarem)

ĆWICZENIE B Korzystając z podanej dokładnej wartości i jej przybliżenia, oblicz błąd bezwzględny tego przybliżenia.

a) 16 250 m ≈ 16 000 m b) 350 m ≈ 400 m c) 8 950 m ≈ 9 000 m

Zauważ, że przybliżenie liczby to nie zawsze to samo, co jej zaokrąglenie.

$17{,}95 \approx 17$ — przybliżenie, które nie jest zaokrągleniem

$17{,}95 \approx 18$ — przybliżenie, które jest zaokrągleniem do jedności

Przyjrzyj się tabeli. Podano w niej masy dwóch zwierząt — małego oraz bardzo dużego, a także pewne przybliżenia tych mas.

	świnka morska	słoń
Masa	0,6 kg	5282,4 kg
Masa w przybliżeniu	1 kg	5282 kg
Błąd bezwzględny przybliżenia	0,4 kg	0,4 kg

W obu wypadkach błąd bezwzględny przybliżenia jest taki sam. Widzimy jednak, że w wypadku świnki morskiej błąd ma dużo większe znaczenie: masę zwierzęcia zawyżono niemal dwukrotnie.

zadania 1–5

II Obliczając stosunek błędu bezwzględnego do dokładnej wielkości, możemy lepiej ocenić błąd przybliżenia. Ten stosunek nazywamy **błędem względnym**. Często wyrażany jest w procentach i wówczas nazywamy go **błędem procentowym**.

$$\textit{błąd względny} = \frac{\textit{błąd bezwzględny przybliżenia}}{\textit{dokładna wartość}}$$

Korzystając z tabeli, otrzymujemy:

błąd procentowy przybliżenia masy świnki morskiej $= \frac{0{,}4}{0{,}6} \approx 0{,}666 \approx 67\%$

błąd procentowy przybliżenia masy słonia $= \frac{0{,}4}{5282{,}4} \approx 0{,}00008 = 0{,}008\%$

Łatwo zauważyć, że dokładność przybliżenia masy w wypadku słonia jest nieporównanie większa niż w wypadku świnki morskiej.

ĆWICZENIE C Korzystając z podanej dokładnej wartości i jej przybliżenia, oblicz błąd bezwzględny oraz błąd względny tego przybliżenia.

a) 22,7 kg ≈ 25 kg b) 303,7 m ≈ 300 m c) 11,73 ha ≈ 11,8 ha

zadania 6–11

ZESTAW ZADAŃ

I **1.** Oszacuj wynik działania, a następnie oblicz dokładny wynik za pomocą kalkulatora i określ błąd bezwzględny swojego oszacowania.

a) $79{,}284 : 4$ **c)** $7 \cdot 2{,}98 - 3{,}5$ **e)** $253{,}8 \cdot 4 - 900{,}24$

b) $5{,}246 + 17{,}789$ **d)** $33{,}123 - 4 \cdot 7{,}93$ **f)** $252{,}4 : 49{,}5 + 359{,}9 : 5{,}9$

Ciekawostka

$$\pi \approx 3{,}1415926535898$$

Starożytni Grecy używali przybliżenia $\pi \approx \frac{22}{7}$. W III w. n.e. chiński matematyk Liu Hui (czyt. ljioł hłej) przyjmował, że $\pi \approx 3\frac{7}{50}$. W XIII w. włoski matematyk Fibonacci (czyt. fibonaczczi) korzystał z przybliżenia $\pi \approx \frac{864}{275}$.

2. Która z liczb podanych w ciekawostce przybliża liczbę π z błędem bezwzględnym nie większym niż 0,001?

3. Podaj, jaki może być największy błąd bezwzględny przybliżenia, gdy zaokrąglamy liczbę rzeczywistą:

a) do dziesiątek, **b)** do jedności, **c)** do części setnych.

4. Na podstawie podanych informacji oblicz dokładne wartości liczb a i b.

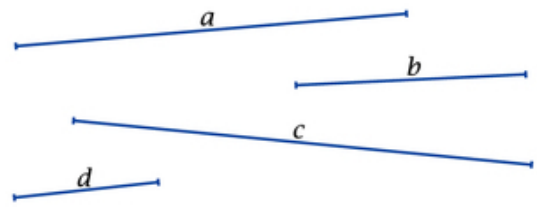
$a \approx 12{,}5$ z błędem bezwzględnym 0,37; 12,5 to przybliżenie liczby a z nadmiarem

$b \approx 45$ z błędem bezwzględnym 2,46; 45 to przybliżenie liczby b z niedomiarem

5. a) Prostokątny plac ma wymiary 84 m × 90 m. Podano je z błędem bezwzględnym 50 cm. W jakim przedziale mieści się rzeczywiste pole powierzchni tego placu?

b) Samochód jechał przez około pół godziny ze średnią prędkością około 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. W jakim przedziale mieści się przejechana odległość, jeśli czas podano z błędem bezwzględnym równym 1 min, a prędkość — z błędem bezwzględnym 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

6. Oszacuj „na oko" długości narysowanych odcinków. Ich rzeczywiste wymiary to: 5,45 cm, 4,62 cm, 2,77 cm i 1,71 cm. O ile różnią się twoje oszacowania od dokładnych długości? Oblicz w każdym przypadku błąd względny.



7. Zaokrąglij podaną liczbę do dziesiątek i oblicz błąd bezwzględny oraz błąd procentowy przybliżenia.

a) 2572 **b)** 95 **c)** 289,7

8. Liczba 350 to przybliżenie z nadmiarem pewnej liczby, a błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 10,37. Oblicz błąd względny tego przybliżenia.

9. Oblicz, jaki może być największy, a jaki najmniejszy możliwy błąd procentowy przybliżenia, gdy zaokrąglamy liczbę czterocyfrową do setek.

10. a) Przybliżenie pewnej liczby naturalnej a z nadmiarem jest równe 3600, a błąd procentowy tego przybliżenia to około 7%. Znajdź liczbę a.

b) Przybliżenie z niedomiarem liczby naturalnej b jest równe 540, a błąd procentowy tego przybliżenia to około 8%. Znajdź liczbę b.

11. a) Koszt remontu oszacowano na 35 000 zł. Po zakończeniu prac okazało się, że koszt był wyższy i błąd względny oszacowania wyniósł 0,3. Jaki był rzeczywisty koszt tego remontu?

b) Kierowca oszacował, że masa jego samochodu ciężarowego z ładunkiem wynosi 28 ton. Po zważeniu okazało się, że ta masa jest mniejsza, a błąd procentowy tego oszacowania jest równy 12%. Jaka była rzeczywista masa samochodu z ładunkiem?

MINISPRAWDZIAN

S1. Przybliżona długość prostokątnego stołu wynosi 142 cm, a jego przybliżona szerokość 64 cm. Wiadomo, że oba wymiary podano z błędem bezwzględnym 0,5 cm. Które z poniższych pól nie może być polem powierzchni tego stołu?

A. 9008 cm^2 B. 9017 cm^2 C. 9080,5 cm^2 D. 9223,5 cm^2

S2. Jurek oszacował na 10 minut czas, w którym przebiegł 3 km. W rzeczywistości czas ten był nieco dłuższy, a błąd procentowy oszacowania Jurka wynosi 6,25%. W rzeczywistości bieg Jurka trwał zatem:

A. 10 minut 15 sekund
B. 10 minut 24 sekundy
C. 10 minut 40 sekund
D. 11 minut

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA, MEDIANA, DOMINANTA

Słowo „statystyka" pochodzi od łacińskiego słowa *status*, które oznacza „państwo". Po raz pierwszy użył go XVIII-wieczny niemiecki uczony Gottfried Achenwall (czyt. gotfrid achenwal). Według niego statystyka to „gromadzenie, przetwarzanie i wykorzystywanie danych przez państwo".

Ciekawostka

Pierwsze dane statystyczne pochodziły ze spisów ludności przeprowadzanych już 5 tys. lat temu. Służyły one władcom do podejmowania racjonalnych decyzji dotyczących podatków, praw własnościowych, liczebności armii itp. Do dziś spisy ludności służą podobnym celom.

Wzmianki o takich spisach można znaleźć na przykład w Biblii. W Starym Testamencie wspomina się w Księdze Liczb o spisie przeprowadzonym 1500 lat p.n.e. Według Nowego Testamentu Maria z Józefem znaleźli się w Betlejem właśnie z powodu spisu przeprowadzanego w Cesarstwie Rzymskim.

Współcześnie wiele instytucji zbiera różne informacje w celach statystycznych. Jednak samo zebranie danych jeszcze niewiele daje. Dopiero ich opracowanie i uporządkowanie pozwala je właściwie wykorzystać.

Jedną z podstawowych metod opisywania zestawu danych liczbowych jest ustalenie ich wartości przeciętnych. Opiszemy teraz trzy najczęściej stosowane sposoby określania takich wartości na przykładzie danych zebranych poniżej.

W pewnej klasie wszystkim obecnym uczniom zadano pytanie: *Ile jest kieszeni w ubraniu, które masz na sobie?* Odpowiedzi zostały przedstawione w tabelach.

Dziewczęta

Liczba kieszeni	0	1	2	3	4	7
Liczba wskazań	7	3	5	1	1	2

Chłopcy

Liczba kieszeni	3	4	5	6	7	8	10
Liczba wskazań	1	2	3	3	1	1	1

Z pierwszej tabeli można odczytać, że 7 dziewcząt nie miało kieszeni, 3 dziewczęta miały jedną kieszeń itd. Sumy liczb z dolnych wierszy tabeli oznaczają, że w badaniu wzięło udział 19 dziewcząt i 12 chłopców.

Obliczymy teraz na trzy sposoby przeciętną liczbę kieszeni u uczniów tej klasy, którzy wzięli udział w ankiecie.

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ to liczba $\overline{x}$ obliczana według wzoru:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Średnia arytmetyczna liczb kieszeni u dziewcząt to średnia arytmetyczna dziewiętnastu liczb: 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 7, 7. Wynosi ona:

$$\overline{x}_{\mathrm{d}} = \frac{7\cdot 0 + 3\cdot 1 + 5\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 7}{19} = \frac{34}{19} \approx 1{,}79$$

Średnia arytmetyczna liczb kieszeni u chłopców wynosi:

$$\overline{x}_{\mathrm{ch}} = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + 3\cdot 6 + 1\cdot 7 + 1\cdot 8 + 1\cdot 10}{12} = \frac{69}{12} = 5{,}75$$

Średnia arytmetyczna liczb kieszeni u ucznia z tej klasy jest równa:

$$\overline{x}_{\mathrm{u}} = \frac{34 + 69}{19 + 12} = \frac{103}{31} \approx 3{,}32$$

Uwaga. Nie można obliczać średniej arytmetycznej dla całej klasy, dodając średnią liczbę kieszeni dziewcząt do średniej liczby kieszeni chłopców i dzieląc otrzymany wynik przez 2. (Otrzymalibyśmy wtedy około 3,77).

MEDIANA

Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oznacza zestaw liczb, w którym każda następna liczba jest nie mniejsza od poprzedniej.

Gdy *n* jest liczbą nieparzystą, to **medianą** liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **jest środkowa liczba.**

Gdy *n* jest liczbą parzystą, to **medianą** liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **jest średnia arytmetyczna dwóch środkowych liczb.**

Mediana liczb:

środek

1, 2, 3, 3, 4, 5, 7, 11, 13

jest równa 4

Mediana liczb:

środek

1, 3, 7, 8, 9, 10, 10, 11

jest równa $\frac{8+9}{2} = 8{,}5$

Zwróć uwagę, że mediana dzieli zestaw uporządkowanych danych na dwie równoliczne części: liczby z pierwszej części są mniejsze od mediany lub jej równe. Liczby drugiej części są większe od mediany lub jej równe.

Aby obliczyć medianę liczby kieszeni u dziewcząt i u chłopców, należy zapisać zebrane dane w takiej kolejności, aby każda następna liczba była nie mniejsza od poprzedniej.

Dziewczęta:

Liczb jest 19, więc na środku wypada dziesiąta liczba.

środek

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 7, 7

Mediana = 1

Chłopcy:

Liczb jest 12, więc środek wypada między szóstą i siódmą liczbą.

środek

3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 10

Mediana = $\frac{5+6}{2} = 5{,}5$

ĆWICZENIE A Znajdź medianę liczb:

a) 17, 2, 8, 8, 15, 11, 5, 4, 12, 9, 8

b) 21, 21, 13, 7, 17, 1, 3, 5, 7, 14

Uwaga. Gdy mamy zestaw danych, to medianę można także znaleźć w następujący sposób: najpierw skreślamy najmniejszą i największą z liczb w zestawie, potem najmniejszą i największą z pozostałych itd. Na końcu zostanie jedna liczba (będzie to mediana) lub dwie liczby (medianą będzie ich średnia arytmetyczna).

Zapisywanie długiej listy danych może być pracochłonne. Czasami jednak łatwo ustalić, które liczby zestawu są środkowe, bez wypisywania wszystkich danych.

Przyjrzyj się poniższej tabeli. Zebrano w niej dane o liczbie kieszeni u wszystkich badanych uczniów.

Liczba kieszeni	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
Liczba wskazań	7	3	5	2	3	3	3	3	1	1

Suma liczb w dolnym wierszu jest równa 31. Zatem gdybyśmy liczby kieszeni uczniów klasy ustawili w odpowiedniej kolejności, to otrzymalibyśmy listę 31 liczb, więc mediana byłaby szesnastą liczbą na tej liście.

Z tabeli widać, że pierwszych 7 liczb tej listy to zera, następne 3 liczby to jedynki itd. Analizując dalej tabelkę w ten sposób, można zauważyć, że szesnasta liczba, a więc szukana mediana, to liczba 3.

DOMINANTA

Dominanta zestawu danych to taka wartość, która w tym zestawie występuje najczęściej. Jeśli w zestawie kilka wartości występuje z tą samą (najwyższą) częstością, to każda z tych wartości jest dominantą.

Jeśli wszystkie wartości w zestawie występują z tą samą częstością, to przyjmujemy, że zestaw nie ma dominanty.

Uwaga. Dominanta nazywana jest też modą lub wartością modalną.

Na przykład dominantą zestawu liczb: 5, 1, 12, 5, 8, 6, 1, 6, 10, 1 jest 1. Zestaw liczb: 4, 3, 1, 2, 3, 2, 1, 5 ma natomiast trzy dominanty: 1, 2 i 3.

Z tabelek na stronie 270 łatwo odczytać, że dominanta liczby kieszeni u dziewcząt jest równa 0, gdyż największa grupa dziewcząt nie ma kieszeni, a u chłopców są dwie dominanty: 5 i 6. Z tabelki umieszczonej powyżej wynika, że dominanta liczby kieszeni dla całej klasy wynosi 0.

ĆWICZENIE B Zbierz w tabelkach dane o liczbie kieszeni u uczniów w twojej klasie. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę oraz dominantę tych danych.

Mając zestaw danych liczbowych, możemy obliczyć zarówno ich średnią arytmetyczną, medianę, jak i dominantę, jednak nie zawsze wszystkie te wielkości są tak samo użyteczne. Na przykład producentów odzieży czy sprzętu sportowego na pewno najbardziej interesuje najczęstsza (dominująca) opinia klientów, czyli dominanta.

ĆWICZENIE C Pewien piekarz badał, po ile bułek kupują jego klienci. W tabeli przedstawiono zebrane przez niego dane. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę liczby kupowanych bułek.

Liczba kupionych bułek	1	2	3	4	6	7	8	10	12
Liczba klientów	7	18	8	18	31	1	5	8	4

Piekarz chce sprzedawać część bułek zapakowanych w woreczki. Którą z obliczonych wartości przeciętnych powinien wziąć pod uwagę przy ustalaniu liczby bułek w woreczku?

Zdarzają się też sytuacje, w których należy wziąć pod uwagę wszystkie trzy wielkości — średnią arytmetyczną, medianę i dominantę — aby we właściwy sposób zinterpretować dane.

Na przykład z informacji podanych obok wynika, że w 2016 roku mimo, że średnia pensja wynosiła 3094 zł, to co najmniej połowa zatrudnionych zarabiała nie więcej niż 2512 zł, a najczęstsza płaca wynosiła 1511 zł netto.

Główny Urząd Statystyczny

PŁACE NETTO W 2016 ROKU W SEKTORZE PRZEDSIĘBIORSTW

średnia płaca — 3094 zł

mediana płac — 2512 zł

dominanta płac — 1511 zł

II SKALA CENTYLOWA

zadania 1–18

Aby określić, jak dany wynik wypada względem całego zestawu danych, możemy obliczyć, jaki procent danych jest nie większy od tego wyniku. Gdy dane opisane są w ten sposób, to mówimy, że są przedstawione w **skali centylowej**.

W tabeli zebrano informacje o ocenach z matematyki na koniec roku szkolnego grupy 2000 uczniów.

Ocenę 1 otrzymało 40 uczniów, czyli 2% wszystkich uczniów. Mówimy, że ocena 1 odpowiada 2. (drugiemu) centylowi.

Ocenę 2 lub niższą otrzymało 160 uczniów, czyli 8% wszystkich uczniów. Mówimy, że ocena 2 odpowiada 8. (ósmemu) centylowi.

Ocenę 3 lub niższą otrzymało 840 uczniów, czyli 42% wszystkich uczniów. Mówimy, że ocena 3 odpowiada 42. (czterdziestemu drugiemu) centylowi.

Ocena	Liczba uczniów	
1	40	2%
2	120	8%
3	680	42%
4	580	71%
5	420	92%
6	160	100%

Skali centylowej używa się często do opisywania wzrostu i wagi osób, a także wyników egzaminów. Jeśli na przykład dany wynik egzaminu odpowiada 35. centylowi, to możemy przyjąć, że 35% uczniów ma wynik z tego egzaminu taki sam lub niższy.

ĆWICZENIE D Janek Kowalski zdawał maturę w roku 2019. Oto jego wyniki z egzaminów z zakresu podstawowego — z języka polskiego i matematyki.

	wynik procentowy	centyl
język polski	70%	87
matematyka	78%	76

Ile procent uczniów uzyskało lepszy niż Janek Kowalski wynik z egzaminu z języka polskiego, a ile — z matematyki?

Jak myślisz, na którym z tych egzaminów było trudniej uzyskać dobry wynik?

Ciekawostka

Z metod statystycznych korzysta się niemal w każdej dziedzinie życia. Opracowanie danych pozwala czasem potwierdzić lub odrzucić różne hipotezy albo dokonać nowych odkryć. Oto przykłady zastosowań statystyki:

- W 1985 roku odnaleziono wiersz nieznanego XVII-wiecznego autora. Dwaj statystycy, B. Efron (czyt. efron) i R. Thisted (czyt. fystyt), przeprowadzili analizę częstości występowania słów w utworach różnych poetów tego okresu i ustalili, że wiersz ten jest prawdopodobnie dziełem Szekspira.
- Około 100 lat temu duński uczony J. Schmidt (czyt. szmit) badał liczbę kręgów i promieni płetw u ryb. Analizując dane o rybach złowionych w różnych miejscach świata, zauważył, że u węgorzy, w przeciwieństwie do innych gatunków, występują zaskakująco niewielkie różnice badanych cech. Wywnioskował stąd, że wszystkie węgorze muszą mieć wspólne tarlisko. Zostało ono później odkryte w Morzu Sargassowym.
- W 1844 roku belgijski matematyk A. Quételet (czyt. ketle) porównał dane dotyczące wzrostu wszystkich Francuzów z danymi na temat wzrostu poborowych przyjętych do armii. Zastosowane przez niego metody statystyczne pozwoliły obliczyć, że około 2000 mężczyzn uchyliło się od służby wojskowej, pozorując, że ich wzrost jest niższy od wymaganego.

zadania 19–21

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu liczb:

a) 120, 102, 108, 102, 98

b) 16, 13, 7, 25, 14, 5

c) 1, 4, 5, 8, 3, 2, 7, 2, 2, 3, 5

d) 9, 9, 9, 3, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 2, 2

2. W dwóch grupach osób przeprowadzono ankietę, zadając każdej osobie pytanie: *Ile gazet kupujesz tygodniowo?* Wyniki tej ankiety są przedstawione w tabelkach.

a) Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę liczby kupowanych gazet dla każdej z tych grup.

b) Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę dla obu tych grup razem.

GRUPA I

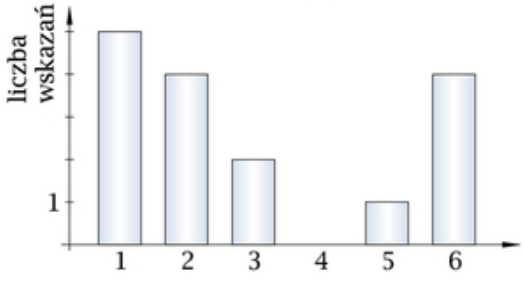
Liczba gazet	1	3	5	6	10
Liczba wskazań	4	2	1	3	5

GRUPA II

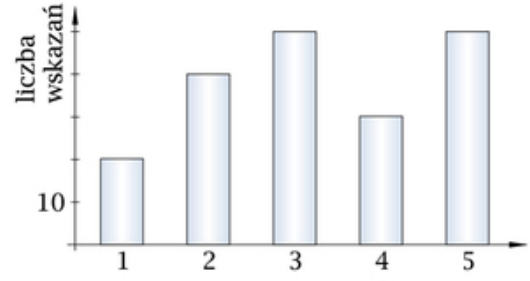
Liczba gazet	2	5	6	8	10
Liczba wskazań	12	14	3	10	13

3. Przechodniom w dwóch różnych punktach miasta zadano pytanie: *Ile osób mieszka w Twoim mieszkaniu?* Wyniki ankiety są przedstawione na diagramach (na osi poziomej zaznaczono liczby podawane przez pytanych przechodniów). Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zebranych danych dla każdej z grup przechodniów i dla obu grup razem.

GRUPA I



GRUPA II



4. Określ średnią arytmetyczną, medianę i dominantę podanego zestawu danych.

a) Czasy trwania filmów wyświetlanych pewnego dnia w Kinoplexie:

3 godz. 25 min 2 godz. 10 min 1 godz. 45 min 1 godz. 30 min
2 godz. 20 min 1 godz. 40 min 2 godz. 15 min 1 godz. 45 min

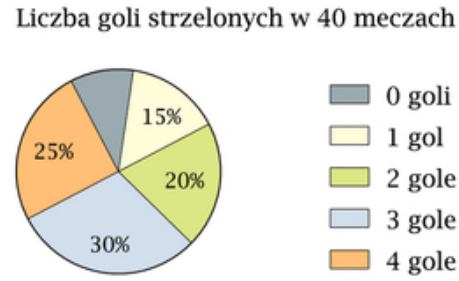
b) Wyniki ważenia kilku czekolad tego samego rodzaju:

100,4 g 101,2 g 98,8 g 99,6 g 99,3 g 100,7 g 100,4 g 100,1 g 100,4 g

5. W tabeli podano dane o liczbie zapałek w kilkudziesięciu pudełkach. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę tego zestawu danych.

Liczba zapałek w pudełku	37	38	39	40	41	42
Liczba pudełek	2	4	9	10	6	1

6. Na diagramie kołowym przedstawiono informacje o bramkach, które padły w 40 meczach piłkarskich. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę liczby bramek w tych meczach.



7. Wyobraź sobie, że w dziewięciu jednakowych szklankach jest woda. Zaproponuj, jak należy postępować, aby wskazać szklankę, w której znajduje się ilość wody odpowiadająca medianie, a jak — aby wskazać szklankę z ilością wody odpowiadającą dominancie. W jaki sposób można by znaleźć ilość wody odpowiadającą średniej arytmetycznej?

8. **a)** Czy mediana trzydziestu różnych liczb może być równa jednej z tych liczb?

b) Czy w zestawie dziesięciu liczb może być 6 dominant?

c) Czy średnia arytmetyczna dwudziestu liczb może być większa od dziewiętnastu z tych liczb?

9. Podaj przykład zestawu dziesięciu liczb spełniających warunek:

a) mediana jest równa 10, a dominanta jest równa 1,

b) dziewięć liczb jest mniejszych od średniej arytmetycznej całego zestawu,

c) średnia arytmetyczna, dominanta i mediana to te same liczby, choć nie wszystkie liczby w zestawie są równe,

d) mediana jest większa od średniej arytmetycznej,

e) dominanta jest mniejsza od średniej arytmetycznej.

10. Właściciel kawiarni zanotował, po ile kostek cukru klienci używają do osłodzenia kawy, a następnie określił średnią arytmetyczną, medianę i dominantę tych danych. Ustal, którą z tych wielkości powinien wziąć pod uwagę, aby:

a) co najmniej połowa klientów była zadowolona z podanej im liczby kostek cukru,

b) określić, ile cukru należy zakupić,

c) liczba podawanych kostek była dobrana tak, aby jak największa grupa klientów otrzymywała dokładnie tyle kostek, ile potrzebuje do osłodzenia kawy.

11. **a)** Oblicz, dla jakich wartości a i b średnia arytmetyczna liczb $1, 2, 4, 7, 2, 4, 6, a, b$ wynosi 3,5, a dominanta jest równa 4.

b) Mediana liczb $13, 9, 12, 9, 9, 5, 5, 5, c, d$ wynosi 8, a dominanta jest równa 5. Znajdź wartości c i d.

c) Dla pewnych liczb naturalnych e i f średnia arytmetyczna liczb $3, 9, 4, 11, 7, 8, 5, e, f$ wynosi 6, a mediana jest równa 7. Znajdź wartości e i f.

12. Dla każdego zestawu danych podano ich średnią arytmetyczną. Oblicz wartość a. Określ dominantę i medianę tych zestawów danych.

a) $\overline{x} = 5{,}2$

Wartość x	1	2	a	12
Liczba wskazań	5	8	5	7

b) $\overline{x} = 6{,}65$

Wartość x	2	5	7	11
Liczba wskazań	1	7	9	a

c) $\overline{x} = 6{,}5$

Wartość x	3	6	7	10
Liczba wskazań	a	a	2	10

d) $\overline{x} = 5{,}6$

Wartość x	1	3	7	6
Liczba wskazań	a	$3a$	$6a$	10

13. a) Średnia arytmetyczna wzrostu pięciu koszykarzy grających w pierwszym zespole wynosi 1,95 m. Średnia arytmetyczna wzrostu dziesięciu zawodników rezerwowych wynosi 1,92 m. Oblicz średnią wzrostu wszystkich piętnastu koszykarzy.

b) Na parterze pewnego biura pracuje 12 osób, które wypijają dziennie średnio 2,5 filiżanki kawy na osobę. Na pierwszym piętrze pracuje 15 osób, osoby te wypijają średnio 2,8 filiżanki kawy dziennie. Z kolei 16 osób pracujących na ostatnim — drugim piętrze codziennie wypija średnio 1,5 filiżanki kawy na osobę. Oblicz, ile średnio filiżanek kawy wypija dziennie pracownik tego biura.

14. a) W sadzie zebrano 130 kg jabłek, które średnio ważyły 20,8 dag. Spośród nich wybrano 150 jabłek większych, które ważyły przeciętnie 24 dag. Jaka była średnia waga pozostałych jabłek?

b) Zbiór 112 kg ogórków, z których każdy ważył średnio 14 dag, podzielono na dwie części, oddzielając większe i mniejsze ogórki. Większy ogórek ważył średnio 15 dag, a mniejszy 10 dag. Ile razem ważyły większe, a ile — mniejsze ogórki?

15. Cztery babcie grały w brydża. Średnia ich wieku wynosiła 74 lata. Gdy po pierwszym robrze babcia Matylda zrezygnowała z gry, pozostałe babcie dalej grały „z dziadkiem”*, a średnia wieku grających zmniejszyła się o 2 lata. Trzeciego robra wytrwałe babcie rozegrały już z dziadkiem Stefanem, który ma 76 lat. Ile lat ma babcia Matylda? Jaka była średnia wieku rozgrywających trzeciego robra?

* W brydżu gra „z dziadkiem” oznacza grę w trzy osoby.

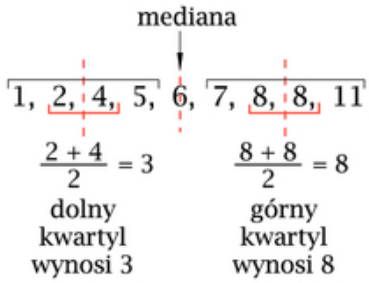
16. W firmie „Komin” pracuje 25 osób, łącznie z szefem. Średnia płaca wynosiła do niedawna 1500 zł, ale ostatnio wszyscy oprócz szefa dostali 10% podwyżki i średnia ta wzrosła do 1600 zł. Ile zarabia szef „Komina”?

17. W pewnej firmie płace 20% pracowników wzrosły o 50 zł. O ile złotych wzrosła średnia płaca w tej firmie?

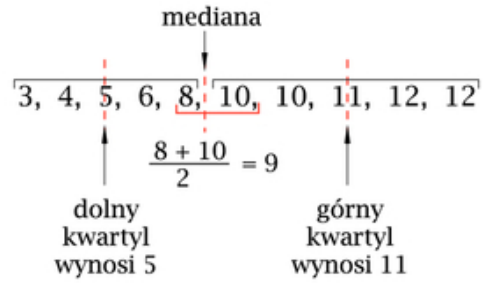
Ciekawostka

Mediana dzieli zestaw danych na dwie części. Mediany poszczególnych części nazywane są **dolnym kwartylem** (lub pierwszym kwartylem) oraz **górnym kwartylem** (lub trzecim kwartylem). Poniżej dla dwóch zestawów liczb obliczono ich mediany oraz dolne i górne kwartyle.

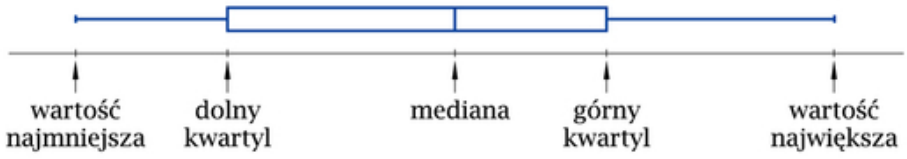
Zestaw I:



Zestaw II:



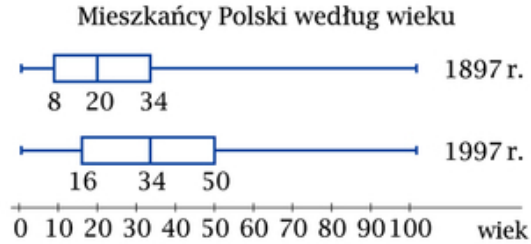
Dolny kwartyl, mediana i górny kwartyl dzielą zestaw danych na cztery równoliczne części (tzn. w każdej części znajduje się tyle samo danych). Oznacza to, że między najmniejszą wartością w zestawie a dolnym kwartylem mieści się około 25% danych, między dolnym kwartylem a medianą mieści się również około 25% danych itd. Wartość najmniejsza i największa w zestawie danych oraz kwartyle i medianę danych można przedstawić graficznie za pomocą diagramu zwanego diagramem pudełkowym albo „pudełkiem z wąsami".



Oto diagramy pudełkowe dla powyższych zestawów liczb:



18. Przeczytaj ciekawostkę. Przyjrzyj się diagramom narysowanym poniżej.



a) Określ, jaka część Polaków miała ponad 34 lata w 1897 r., a jaka — w 1997 r.

b) Czy grupa dzieci w wieku poniżej 8 lat stanowiła większy procent społeczeństwa w roku 1897 czy w roku 1997?

c) Opisz, jak zmieniła się struktura wieku Polaków w ciągu 100 lat. Jak myślisz, czym te zmiany można tłumaczyć?

19. Ogłaszając wynik pewnego egzaminu, który zdawało 300 uczniów, podano liczbę punktów zdobytych przez ucznia i centyl, który odpowiadał temu wynikowi.

a) Pewien uczeń zdobył 60 punktów i wynik ten odpowiadał 45. centylowi. Ilu uczniów zdających ten egzamin osiągnęło wynik równy co najwyżej 60 punktów?

b) Wynik 50 punktów odpowiadał 43. centylowi, a wynik 70 punktów — 62. centylowi. Ilu było uczniów, którzy zdobyli więcej niż co najmniej 50 punktów, ale co najwyżej 70 punktów?

20. Poniżej przedstawiono fragmenty tabel wyników egzaminów z biologii i chemii.

Biologia			
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	1	50	78
2	2	52	80
3	4	53	81
5	8	55	83
7	12	57	84
…	…	…	…

Chemia			
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	2	50	70
2	4	52	72
3	7	53	73
5	10	55	75
7	12	57	77
…	…	…	…

a) Z którego z tych przedmiotów większy procent zdających uzyskał wynik równy co najwyżej 5%?

b) Z którego z tych przedmiotów większy procent zdających uzyskał wynik wyższy niż 55%?

c) Z którego z tych przedmiotów większy procent zdających uzyskał wynik wyższy niż 3%, ale co najwyżej 53%?

21. Dwie uczelnie przyjmują kandydatów na studia na podstawie wyników egzaminów maturalnych z języka polskiego i matematyki na poziomie podstawowym. Uczelnia X dodaje wyniki punktowe z obu egzaminów, a uczelnia Y dodaje centyle odpowiadające wynikom. W tabeli przedstawiono wyniki trzech kandydatów na studia.

Kandydat	Wyniki egzaminu			
	język polski		matematyka	
	punkty (na 100)	centyle	punkty (na 100)	centyle
A	70	87	70	66
B	53	54	90	89
C	80	97	56	48

a) Oblicz dla każdego kandydata jego wyniki na uczelniach X i Y. Który z kandydatów był najlepszy, a który — najsłabszy według regulaminów tych uczelni?

b) Który ze sposobów obliczania wyników — przez uczelnię X czy uczelnię Y — pozwala lepiej ocenić kandydatów?

MINISPRAWDZIAN

S1. Jeśli oznaczymy średnią arytmetyczną zestawu liczb 5, 2, 2, 3, 8, 8, 9, 7, 2, 7 literą s, medianę tego zestawu — literą m, a dominantę — literą d, to:

A. $s < m < d$ B. $d < s < m$ C. $m < d < s$ D. $d < m < s$

S2. W tabeli przedstawiono niektóre dane o asach serwisowych wykonanych przez tenisistę w rozegranych ostatnio meczach.

Liczba asów	0	1	2	3
Liczba meczów	8	1		5

Średnia arytmetyczna liczby asów w jednym meczu wyniosła 1,25. Jaka jest mediana tych danych?

A. 0 B. 0,5 C. 1 D. 1,5

S3. Adam i Bogdan z pięcioma innymi uczniami pisali test z języka angielskiego. Zarówno średnia ocen z testu wszystkich tych uczniów, jak i mediana tych ocen wynoszą 4. Adam uzyskał ocenę wyższą niż Bogdan, a pozostali uczniowie otrzymali oceny: 3, 3, 6, 6, 5. Wynika stąd, że Bogdan otrzymał ocenę:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

S4. Grupę 12 dzieci o średniej wzrostu 154 cm dołączono do grupy 8 dzieci o średniej wzrostu 158 cm. Średnia wzrostu w połączonej grupie dzieci wynosi:

A. 155,2 cm B. 155,6 cm C. 156 cm D. 157,1 cm

ŚREDNIA WAŻONA

Gdy obliczamy średnią arytmetyczną liczb, wszystkie te liczby traktujemy jednakowo (żadna z nich nie jest wyróżniona). Czasami jednak do niektórych danych przywiązujemy większą wagę i chcemy to uwzględnić przy obliczaniu wartości przeciętnej. Oto przykład:

Egzamin kończący pewien kurs językowy składa się z części pisemnej i ustnej. Ustalono, że wynik egzaminu pisemnego jest cztery razy ważniejszy od wyniku egzaminu ustnego. Dlatego przyjęto, że wynik końcowy egzaminu jest „średnią" obliczoną według następującego wzoru:

$$w = \frac{4 \cdot p + 1 \cdot u}{5}$$

p — wynik egzaminu pisemnego
u — wynik egzaminu ustnego
w — końcowy wynik egzaminu

Zwróć uwagę, że ten sposób obliczania wyników egzaminu można rozumieć jako obliczanie średniej arytmetycznej liczb p, p, p, p, u.

W takim razie zdający, który z części pisemnej otrzymał ocenę 5, a z części ustnej — ocenę 3, uzyska końcowy wynik:

$$\frac{4 \cdot 5 + 1 \cdot 3}{5} = 4{,}6$$

ĆWICZENIE A Oblicz końcowy wynik zdającego, który otrzymał oceny:

a) z egzaminu pisemnego: 3, z egzaminu ustnego: 5

b) z egzaminu pisemnego: 4, z egzaminu ustnego: 4

Ten rodzaj średniej kilku danych wielkości, w którym nie każda wielkość jest jednakowo ważna, nazywamy średnią ważoną. Liczby, które opisują znaczenie, jakie chcemy nadać poszczególnym wielkościom, nazywamy wagami średniej ważonej.

Średnia ważona liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z wagami odpowiednio $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oznaczają liczby dodatnie) to liczba $\overline{x}_w$ obliczana według wzoru:

$$\overline{x}_w = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

Uwaga. Gdy wszystkie wagi są równe, średnia ważona jest równa średniej arytmetycznej.

ĆWICZENIE B Oblicz średnią ważoną liczb 3, 5, 7 i 10 z wagami odpowiednio 1, 1, 3 i 5.

Przyglądając się wzorowi na średnią ważoną, łatwo zauważyć, że rachunki bardzo się upraszczają, gdy suma wag jest równa 1. Dlatego w wielu sytuacjach, w których występuje średnia ważona n liczb, przyjmuje się wagi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tak, żeby spełniona była równość $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$.

ĆWICZENIE C Oblicz średnią ważoną liczb 100, 130, 400 z wagami odpowiednio 0,6, 0,1 i 0,3.

Uwaga. W opisanych na początku tego rozdziału zasadach ustalanie wyniku egzaminu kończącego kurs językowy można było przyjąć, że waga egzaminu pisemnego wynosi 0,8, a egzaminu ustnego 0,2. Zachowana byłaby wówczas zasada, że egzamin pisemny jest 4 razy ważniejszy od ustnego, i uzyskalibyśmy takie same rezultaty.

zadania 1–10

ZESTAW ZADAŃ

1. W tabeli podano liczby i odpowiadające im wagi. Oblicz średnią ważoną liczb.

a)

Liczba	18	6
Waga	2	3

b)

Liczba	2	3	4
Waga	7	2	1

c)

Liczba	3	5	7	8	10
Waga	2	4	1	1	2

d)

Liczba	2	5	1	4
Waga	0,3	0,1	0,5	0,1

2. Na pewną uczelnię artystyczną kandydatów przyjmuje się na podstawie średniej ważonej trzech wielkości: wyniku procentowego egzaminu praktycznego z wagą 5, wyniku procentowego egzaminu ustnego z wagą 3 i wyniku procentowego wybranego przedmiotu maturalnego z wagą 4. Jakie rezultaty osiągnęli kandydaci, których wyniki procentowe podano w tabeli?

Kandydat	Egzamin praktyczny	Egzamin ustny	Wybrany przedmiot
A. Nerwowa	30%	30%	50%
A. Wygadany	30%	50%	40%

3. a) Sprawdź, że średnia ważona wartości p, q, r, s z wagami odpowiednio 25, 10, 10 i 5 jest taka sama jak średnia ważona tych wielkości z wagami 0,5, 0,2, 0,2 i 0,1.

b) Znajdź takie liczby a, b, c, aby spełniona była równość $a + b + c = 1$ oraz aby średnia ważona wielkości x, y, z z wagami odpowiednio a, b i c była taka sama jak średnia ważona tych wartości z wagami odpowiednio 4, 7, 9.

4. a) Pewien nauczyciel ustala ocenę semestralną, licząc średnią ważoną następujących liczb: średniej ocen ze sprawdzianów (z wagą 0,3), średniej ocen z klasówek (z wagą 0,5) oraz oceny za pracę na lekcjach (z wagą 0,2), a następnie otrzymaną liczbę zaokrągla do liczby całkowitej. Oblicz, jakie oceny otrzymał Stefan Nierówny za pierwszy oraz za drugi semestr.

Nazwisko i imię	I semestr			Ocena za I semestr	II semestr			Ocena za II semestr	Ocena roczna
	Sprawdziany	Klasówki	Praca na lekcji		Sprawdziany	Klasówki	Praca na lekcji		
Nierówny Stefan	2 3 5 1	1 4 2 5 2	3		4 6 2 3	3 4 6 5 4	4		

b) Aby zdopingować uczniów do pracy w drugim semestrze nauczyciel oblicza ocenę roczną jako średnią ważoną oceny za pierwszy semestr (z wagą 0,4) i oceny za drugi semestr (z wagą 0,6). Oblicz, jaką ocenę roczną otrzymał Stefan Nierówny.

5. Pewna uczelnia przyjmuje kandydatów na studia na podstawie średniej ważonej wyników procentowych z niektórych przedmiotów ze świadectwa maturalnego. W tabeli przedstawiono wyniki maturalne trzech kandydatów.

Kod kandydata	JL3/95	MK2/55	MD6/18
Język polski	40%	90%	50%
Język obcy	40%	90%	50%
Historia	30%	90%	50%
Matematyka	90%	40%	40%
Fizyka	50%	30%	40%
Chemia	40%	40%	50%

a) Na jednym z wydziałów tej uczelni średnią oblicza się na podstawie wyników procentowych z następujących przedmiotów: język polski (z wagą 0,4), historia (z wagą 0,4), język obcy (z wagą 0,2). Oblicz tę średnią ważoną wyników dla każdego z kandydatów.

b) Na innym wydziale oblicza się średnią ważoną wyników procentowych z następujących przedmiotów: matematyka (z wagą 0,3), fizyka (z wagą 0,3), chemia (z wagą 0,2), język polski (z wagą 0,1) i język obcy (z wagą 0,1). Oblicz tę średnią ważoną dla każdego z kandydatów.

6. O przyjęciu na studia na pewnej uczelni decyduje średnia ważona wyników procentowych z egzaminów maturalnych z matematyki. Wynik z zakresu podstawowego ma wagę 0,4, a wynik z zakresu rozszerzonego ma wagę 0,6. Maciek z zakresu podstawowego uzyskał 84%. Jaki co najmniej wynik matury z matematyki w zakresie rozszerzonym musiałby otrzymać, aby rezulatat przy rekrutacji był większy niż 75%? (Uwaga. Wynik matury to zawsze całkowita liczba procentów).

Ciekawostka

Każdy pierwiastek występuje w przyrodzie w postaci kilku izotopów. Podawana w tablicach chemicznych masa atomowa pierwiastka jest równa średniej ważonej liczb masowych wszystkich jego izotopów. Jako wagi przyjmuje się zawartość procentową izotopów. Na przykład około 75% atomów chloru stanowi izotop ^{35}Cl (o liczbie masowej 35), a około 25% atomów to izotop ^{37}Cl (o liczbie masowej 37). Masa atomowa chloru wynosi $\frac{0{,}75 \cdot 35 + 0{,}25 \cdot 37}{0{,}75 + 0{,}25} = 35{,}5$.

7. Przeczytaj ciekawostkę. Korzystając z informacji podanych w tabeli, oblicz masy atomowe wymienionych w niej pierwiastków.

Pierwiastek	Izotopy i ich zawartość
Potas	$^{39}K - 93\%$ $^{41}K - 7\%$
Miedź	$^{63}Cu - 69\%$ $^{65}Cu - 31\%$
Żelazo	$^{54}Fe - 6\%$ $^{56}Fe - 92\%$ $^{57}Fe - 2\%$
Siarka	$^{32}S - 95\%$ $^{33}S - 0{,}75\%$ $^{34}S - 4{,}25\%$
Ołów	$^{204}Pb - 1{,}5\%$ $^{206}Pb - 24\%$ $^{207}Pb - 22\%$ $^{208}Pb - 52{,}5\%$

Ciekawostka

Średnia ważona może pomóc w dokonaniu racjonalnego wyboru. Załóżmy na przykład, że wahamy się, który z trzech kursów językowych wybrać. Możemy wtedy ustalić kilka najważniejszych cech kursu, a ponieważ zwykle cechy te nie są dla nas tak samo istotne, więc przydzielamy im odpowiednie wagi. Następnie cechy poszczególnych kursów możemy ocenić, przyznając punkty — na przykład w skali od 1 do 10. Oto jak mogłaby wyglądać tabelka, na podstawie której dokonamy racjonalnego wyboru. Średnia ważona punktów pozwala ustalić, który kurs powinniśmy wybrać.

	Cena kursu (z wagą 0,6)	Opinia znajomych (z wagą 0,3)	Czas i miejsce kursu (z wagą 0,1)	Średnia ważona
Kurs I	2	3	9	$0{,}6 \cdot 2 + 0{,}3 \cdot 3 + 0{,}1 \cdot 9 = 3$
Kurs II	5	6	4	$0{,}6 \cdot 5 + 0{,}3 \cdot 6 + 0{,}1 \cdot 4 = 5{,}2$
Kurs III	6	5	3	$0{,}6 \cdot 6 + 0{,}3 \cdot 5 + 0{,}1 \cdot 3 = 5{,}4$

Według przyjętych kryteriów najlepszy okazał się kurs III.

8. Który z kursów językowych opisanych w ciekawostce zostałby wybrany przez osobę, która przyjęłaby dla poszczególnych cech kursu inne wagi: dla ceny kursu — 0,2, dla opinii znajomych — 0,2, a dla czasu i miejsca kursu — 0,6?

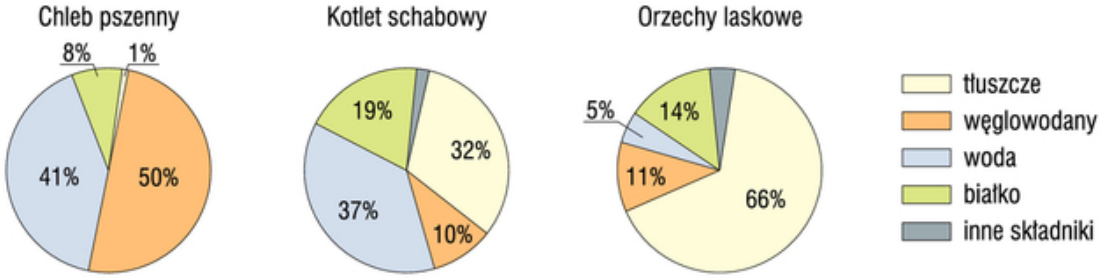
9. **a)** Przeczytaj ciekawostkę. Marek waha się, który obóz letni wybrać. Aby podjąć najlepszą decyzję, sporządził poniższą tabelkę. Który z obozów powinien wybrać?

	Koszt (z wagą 0,4)	Termin (z wagą 0,1)	Towarzystwo (z wagą 0,3)	Atrakcyjność (z wagą 0,2)
Obóz wędkarski	8	2	8	4
Obóz żeglarski	4	4	6	7
Obóz rowerowy	7	6	5	5

b) W tabeli zamieszczono parametry trzech samochodów. Przy poszczególnych parametrach najlepszej wartości przydziel 10, a pozostałym odpowiednio mniej. Następnie przydziel podanym parametrom wagi. Oblicz średnią ważoną punktów i przekonaj się, który z samochodów jest najlepszy według twoich kryteriów.

Samochód	Moc silnika w KM	Maksymalna pojemność bagażnika w l	Przyspieszenie od 0 km/h do 100 km/h w sek.	Prędkość maksymalna w km/h	Zużycie paliwa w l/100 km	Cena w złotych
Kia Rio 1.4	100	1103	12,2	176	6,0	51 990
Hyundai i20	84	1042	13,1	170	6,1	54 400
Panda 1.2	69	870	14,8	164	5,4	45 100

10. Wartość energetyczną pokarmu można oszacować, obliczając średnią ważoną wartości energetycznych zawartych w nim białek, tłuszczy i węglowodanów. Wagami są procentowe udziały każdego z tych składników. Korzystając z informacji przedstawionych na diagramach, oszacuj, ile kilokalorii zawiera 100 g każdego z wymienionych produktów. Wiadomo, że wartość energetyczna tłuszczu wynosi 900 kcal/100 g, białka — 400 kcal/100 g, a węglowodanów — 400 kcal/100 g.



MINISPRAWDZIAN

S1. Ocena semestralna z pewnego przedmiotu jest średnią ważoną trzech elementów: średniej ocen z prac klasowych (z wagą 0,5), średniej ocen ze sprawdzianów (z wagą 0,2) oraz średniej ocen z prac domowych (z wagą 0,3) po zaokrągleniu do jedności. W tabeli przedstawiono średnie oceny trzech uczniów.

Średnia ocen	z prac klasowych	ze sprawdzianów	z prac domowych
Andrzej	4	5	3
Bogdan	5	3	5
Czarek	3	4	6

Jeśli oznaczymy ocenę semestralną Andrzeja literą a, Bogdana — literą b, Czarka — literą c, to:

A. $a < b < c$ B. $a = c < b$ C. $b < a = c$ D. $b = c < a$

S2. Pewien konkurs wiedzy składa się z dwóch etapów: łatwiejszego i trudniejszego. Wynik końcowy ustala się jako średnią ważoną liczby punktów zdobytych w każdym etapie. Przyjęto, że suma wag wynosi 1.

W tabeli podano liczby punktów zdobytych w obu etapach przez dwóch zawodników. Wynik końcowy zawodnika A to 23 punkty. Wynik końcowy zawodnika B wynosi zatem:

Zawodnik	Etap 1	Etap 2
A	32	20
B	28	30

A. 25 punktów C. 28,5 punktu
B. 28 punktów D. 29,5 punktu

ODCHYLENIE STANDARDOWE

I

ĆWICZENIE A Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę dla zestawów danych liczbowych, które przedstawiono obok.

Zestaw I
5, 5, 5, 5, 5, 5

Zestaw II
1, 5, 5, 5, 5, 9

Zestaw III
1, 4, 5, 5, 6, 9

Zestaw IV
2, 3, 5, 5, 7, 8

Zestawy liczb w ramce obok są tak dobrane, że średnie arytmetyczne, mediany oraz dominanty we wszystkich czterech przypadkach są równe.

W zestawie I wszystkie dane są jednakowe, w drugim większość danych (poza dwiema skrajnymi) to te same liczby.

W trzecim i w czwartym zestawie dane są zróżnicowane. O danych z zestawów III i IV możemy powiedzieć, że są bardzo rozproszone. Trudno na pierwszy rzut oka ocenić, czy bardziej rozproszony jest zestaw III czy zestaw IV.

Aby zmierzyć poziom rozproszenia, możemy porównać dane z ich średnią arytmetyczną. Wielkością, która dobrze opisuje, jak bardzo dane różnią się od średniej arytmetycznej, jest odchylenie standardowe.

Odchyleniem standardowym zestawu danych liczbowych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę σ, którą obliczamy ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}},$$

gdzie $\overline{x}$ oznacza średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Uwaga. Litera σ (czyt. sigma), którą oznaczamy odchylenie standardowe, to mała litera alfabetu greckiego.

Wyrażenie $\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$ występujące w powyższym wzorze pod pierwiastkiem nazywane jest **wariancją**. Łatwo zauważyć, że wariancja jest równa σ^2.

Zauważ, że odchylenie standardowe jest tym większe, im bardziej dane różnią się od ich średniej arytmetycznej.

Obliczmy odchylenia standardowe trzeciego i czwartego zestawu liczb z poprzedniej strony.

$$\sigma_{III} = \sqrt{\frac{(1-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(9-5)^2}{6}} = \sqrt{\frac{34}{6}} = \sqrt{\frac{17}{3}} \approx 2{,}38$$

$$\sigma_{IV} = \sqrt{\frac{(2-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2}{6}} = \sqrt{\frac{26}{6}} = \sqrt{\frac{13}{3}} \approx 2{,}08$$

Odchylenie standardowe zestawu IV jest mniejsze niż zestawu III. Możemy powiedzieć, że w zestawie IV dane są mniej rozproszone niż w zestawie III.

Zwróć uwagę, że odchylenie standardowe zestawu I jest równe 0 (żadna z danych w tym zestawie nie różni się od średniej).

ĆWICZENIE B Oblicz odchylenie standardowe zestawu II.

Aby ustalić odchylenie standardowe, na ogół wygodnie jest uporządkować rachunki, zapisując wyniki kolejnych obliczeń w tabelce.

PRZYKŁAD 1 Poniżej przedstawiono wagi ośmiu cieląt urodzonych w pewnym gospodarstwie. Oblicz odchylenie standardowe tego zestawu danych.

38 kg 40 kg 42 kg 42 kg 45 kg 48 kg 50 kg 51 kg

$$\overline{x} = \frac{38+40+42+42+45+48+50+51}{8} = 44{,}5$$

Obliczamy średnią arytmetyczną.

x_k	$x_k - \overline{x}$	$(x_k - \overline{x})^2$
38	−6,5	42,25
40	−4,5	20,25
42	−2,5	6,25
42	−2,5	6,25
45	0,5	0,25
48	3,5	12,25
50	5,5	30,25
51	6,5	42,25
	Suma	160,0

Zapisujemy wyniki kolejnych obliczeń w tabelce.

$$\sigma = \sqrt{\frac{160}{8}} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$$

Odp. Odchylenie standardowe tego zestawu danych jest równe około 4,47 kg.

ZADANIE Karol kupił 5 jabłek, które ważyły: 18 dag, 23 dag, 24 dag, 19 dag i 16 dag. Oblicz odchylenie standardowe mas tych pięciu jabłek.

zadania 1–5

PRZYKŁAD 2 W tabeli zapisano wagi kilkudziesięciu cieląt urodzonych na dużej farmie. Oblicz odchylenie standardowe.

Waga	33	35	38	40	43	46	48	50	51
Liczba cieląt	5	6	6	7	6	10	6	3	1

$$\overline{x} = \frac{5\cdot 33 + 6\cdot 35 + 6\cdot 38 + 7\cdot 40 + 6\cdot 43 + 10\cdot 46 + 6\cdot 48 + 3\cdot 50 + 1\cdot 51}{50} = 41{,}8$$

c_k	x_k	$x_k - \overline{x}$	$(x_k - \overline{x})^2$	$c_k(x_k - \overline{x})^2$
5	33	−8,8	77,44	387,20
6	35	−6,8	46,24	277,44
6	38	−3,8	14,44	86,64
7	40	−1,8	3,24	22,68
6	43	1,2	1,44	8,64
10	46	4,2	17,64	176,40
6	48	6,2	38,44	230,64
3	50	8,2	67,24	201,72
1	51	9,2	84,64	84,64
			Suma	1476

x_k oznacza wagę cielęcia
c_k oznacza liczbę cieląt o wadze x_k

$$\sigma = \sqrt{\frac{1476}{50}} \approx 5{,}43$$

Odp. Odchylenie standardowe tego zestawu danych jest równe około 5,43 kg.

ZADANIE W tabeli przedstawiono masy jabłek zebranych z jednego drzewa. Oblicz odchylenie standardowe.

Masa (g)	90	100	110	120	130	140
Liczba jabłek	10	20	25	25	15	5

Na podstawie danych oraz wyników obliczeń w powyższych dwóch przykładach możemy stwierdzić, że:

- cielęta z gospodarstwa ważyły przeciętnie więcej niż te, które urodziły się na farmie,
- dane w pierwszym przykładzie były mniej rozproszone niż dane w przykładzie drugim, tzn. wagi cieląt z gospodarstwa mniej różniły się od średniej niż w wypadku cieląt urodzonych na farmie.

W obu powyższych przykładach dane liczbowe dotyczyły zwierząt tego samego gatunku i tych samych ich cech. Mogliśmy zatem bezpośrednio porównać ich parametry statystyczne. Gdyby jednak jeden zestaw danych dotyczył cieląt, a drugi na przykład prosiąt, to porównywanie parametrów statystycznych byłoby bardziej skomplikowane. Łatwo bowiem zauważyć, że odchylenie standardowe równe 1 kg w wypadku cieląt oznacza niewielkie rozproszenie, a odchylenie 1 kg w wypadku prosiąt oznacza duże zróżnicowanie danych (prosięta po urodzeniu ważą nie więcej niż 1,5 kg).

Przekształcając wyrażenie występujące pod pierwiastkiem we wzorze na odchylenie standardowe, możemy otrzymać inną postać tego wyrażenia i dzięki temu powstanie inny wzór, który jest wygodniejszy przy wykonywaniu obliczeń.

$$\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n}=\frac{(x_1^2-2x_1\overline{x}+\overline{x}^2)+(x_2^2-2x_2\overline{x}+\overline{x}^2)+\ldots+(x_n^2-2x_n\overline{x}+\overline{x}^2)}{n}=$$

$$=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-2\overline{x}\,\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{n}+\frac{n\overline{x}^2}{n}=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-2\overline{x}^2+\overline{x}^2=$$

$$=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-\overline{x}^2$$

Odchylenie standardowe możemy obliczać, korzystając ze wzoru:

$$\sigma=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-\overline{x}^2}$$

PRZYKŁAD 3 W tabelce podano wyniki klasówki dla dwóch grup uczniów. Oblicz odchylenie standardowe ocen w każdej z grup. W której z grup wyniki klasówki są bardziej wyrównane?

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen w grupie I	1	4	2	1	1	1
Liczba ocen w grupie II	1	3	6	4	4	2

Grupa I

$$\overline{x}_I=\frac{1+4\cdot2+2\cdot3+4+5+6}{1+4+2+1+1+1}=3$$

c_k	x_k	x_k^2	$c_kx_k^2$
1	1	1	1
4	2	4	16
2	3	9	18
1	4	16	16
1	5	25	25
1	6	36	36
		Suma:	112

$$\sigma_I=\sqrt{\frac{112}{10}-3^2}\approx1{,}48$$

Grupa II

$$\overline{x}_{II}=\frac{1+3\cdot2+6\cdot3+4\cdot4+4\cdot5+2\cdot6}{1+3+6+4+4+2}=3{,}65$$

c_k	x_k	x_k^2	$c_kx_k^2$
1	1	1	1
3	2	4	12
6	3	9	54
4	4	16	64
4	5	25	100
2	6	36	72
		Suma:	303

$$\sigma_{II}=\sqrt{\frac{303}{20}-3{,}65^2}\approx1{,}35$$

Odp. Wyniki grupy II są bardziej wyrównane, bo $\sigma_{II}<\sigma_I$.

ZADANIE W tabeli podano informację o dwóch odmianach grochu. W której z odmian liczby ziaren w strąku są bardziej wyrównane?

Liczba ziaren w strąku	0	1	2	3	4	5
Liczba strąków odmiany A	3	2	3	4	5	2
Liczba strąków odmiany B	1	1	0	6	3	5

zadania 6–15

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz odchylenie standardowe zestawu danych:

a) 2, 4, 5, 9, 10

b) 10, 20, 20, 30, 40, 40, 50

c) −4, −3, −1, 0, 2, 3

d) 1, 1, 1, 4, 7, 8, 9, 9

2. Liczby w zestawach danych oznaczają wyniki pięciu rzutów kostką. Spróbuj odgadnąć, w którym z trzech zestawów średnia arytmetyczna jest największa, a w którym — najmniejsze jest odchylenie standardowe. Następnie sprawdź swoje przypuszczenia, wykonując odpowiednie obliczenia.

a) Zestaw I: 1, 2, 3, 4, 5
Zestaw II: 1, 2, 4, 5, 6
Zestaw III: 1, 2, 3, 5, 6

b) Zestaw I: 1, 1, 1, 1, 6
Zestaw II: 1, 6, 6, 6, 6
Zestaw III: 3, 3, 3, 3, 3

c) Zestaw I: 1, 1, 1, 6, 6
Zestaw II: 1, 1, 6, 6, 6
Zestaw III: 1, 1, 3, 6, 6

d) Zestaw I: 1, 2, 2, 2, 6
Zestaw II: 1, 3, 3, 3, 6
Zestaw III: 1, 5, 5, 5, 6

3. Oblicz średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe dwóch podanych zestawów danych. Porównaj obliczone wielkości.

a) Czasy finalistów w biegu na 100 m podczas olimpiady w Sydney w roku 2000.

kobiety: 10,75 s, 11,12 s, 11,18 s, 11,19 s, 11,20 s, 11,21 s, 11,21 s, 11,29 s

mężczyźni: 9,87 s, 9,99 s, 10,04 s, 10,08 s, 10,09 s, 10,13 s, 10,17 s

b) Średnia miesięczna temperatura powierzchni wód.

Miesiąc	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
M. Bałtyckie	2,7°	1,7°	1,9°	3,7°	7,5°	12,8°	15,8°	15,9°	14,2°	11,5°	8,9°	4,9°
M. Czerwone	25,8°	25,4°	26,3°	27,7°	29,2°	30,3°	31,0°	31,4°	31,6°	30,9°	28,6°	26,7°

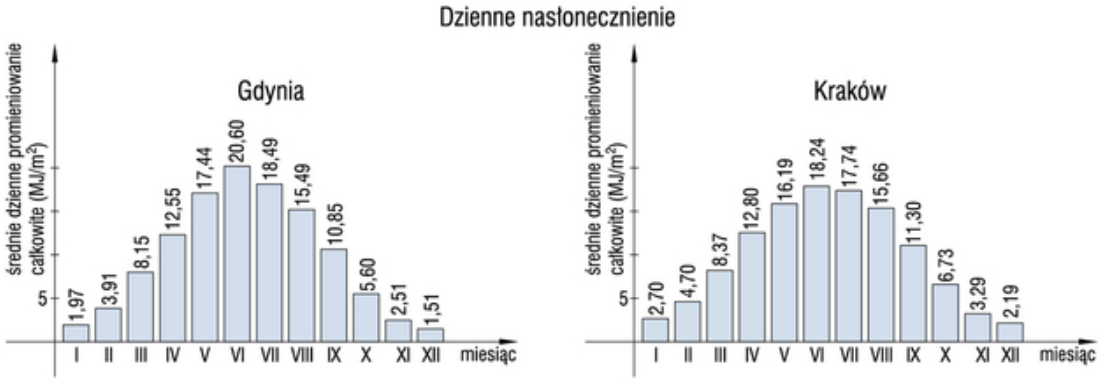
c) Miejsca Adama Małysza i Svena Hannawalda w ostatnich 10 konkursach indywidualnych Pucharu Świata w skokach narciarskich w 2003 roku.

Miejsce konkursu	Sapporo	Tauplitz		Willingen		Oslo	Lahti		Planica	
Adam Małysz	6	3	4	—	—	1	1	1	2	4
Sven Hannawald	—	2	1	1	36	14	3	10	4	2

4. W tabeli podano ceny trzech produktów w kilku sklepach. Oblicz odchylenia standardowe cen tych produktów.

Sklep	I	II	III	IV	V	VI	VII
Cena (w zł) 1 l wody mineralnej	1,99	2,29	2,59	2,30	2,29	1,99	2,59
Cena (w zł) puszki groszku	1,39	1,29	1,39	1,26	1,10	1,39	1,29
Cena (w zł) 1 kg cukru	2,49	2,49	2,49	2,49	2,49	2,49	2,49

5. Porównaj średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe dziennego nasłonecznienia w Gdyni i w Krakowie.



II **6.** Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe zestawu danych.

a) Liczba płatków w kwiatach powojnika.

Liczba płatków	4	5	6
Liczba kwiatów	10	21	9

b) Liczba ziarenek fasoli w strąku.

Liczba ziarenek	3	4	5	6
Liczba strąków	7	12	24	17

c) Liczba pestek w winogronach.

Liczba pestek	0	1	2	3
Liczba owoców	6	54	35	5

7. Zmierz długości palców jednej dłoni. Oblicz odchylenie standardowe otrzymanego zestawu danych.

8. **a)** Przyjrzyj się zestawom danych I i II. Każda liczba z zestawu II jest o 1 większa od odpowiedniej liczby z zestawu I. Porównaj średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe tych zestawów danych.

Zestaw I: 2, 5, 6, 8, 9 Zestaw II: 3, 6, 7, 9, 10

b) Niech $\overline{x}_1$ oznacza średnią arytmetyczną, a σ_1 — odchylenie standardowe zestawu czterech liczb a, b, c, d i niech $\overline{x}_2$ oznacza średnią arytmetyczną, a σ_2 — odchylenie standardowe zestawu liczb $a+k$, $b+k$, $c+k$, $d+k$. Uzasadnij, że:

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_1 + k \quad \text{oraz} \quad \sigma_2 = \sigma_1$$

9. **a)** Przyjrzyj się zestawom danych A i B. Każda liczba z zestawu B jest 10 razy większa od odpowiedniej liczby z zestawu A. Porównaj średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe tych zestawów danych.

Zestaw A: 1, 3, 6, 10 Zestaw B: 10, 30, 60, 100

b) Niech $\overline{x}_1$ oznacza średnią arytmetyczną, a σ_1 — odchylenie standardowe zestawu liczb a, b, c, d i niech $\overline{x}_2$ oznacza średnią arytmetyczną, a σ_2 — odchylenie standardowe zestawu liczb ka, kb, kc, kd, gdzie $k > 0$. Uzasadnij, że:

$$\overline{x}_2 = k \cdot \overline{x}_1 \quad \text{oraz} \quad \sigma_2 = k \cdot \sigma_1$$

10. W tabeli przedstawiono średnie miesięczne temperatury powietrza (w °C) i miesięczne sumy opadów (w mm) dla trzech miast leżących w różnych strefach klimatycznych. Porównując średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe miesięcznych temperatur oraz opadów, opisz różnice między klimatami: równikowym wilgotnym, zwrotnikowym wilgotnym i śródziemnomorskim.

Typ klimatu	Miejsce	Miesiące											
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
równikowy wilgotny	Manaus, Brazylia	25,9 276	25,8 277	25,8 301	25,9 287	26,4 193	26,6 93	26,9 61	27,5 41	26,9 62	27,7 112	27,3 165	26,7 228
zwrotnikowy wilgotny	Bombaj, Indie	23,9 4	24,0 2	26,1 1	28,1 1	29,6 17	28,6 484	27,3 616	25,9 340	27,0 264	27,9 65	27,2 14	25,5 2
śródziemnomorski	Rzym, Włochy	6,9 77	7,9 89	10,7 78	13,9 77	18,1 64	22,1 47	24,7 14	24,6 22	21,6 68	16,5 129	11,6 116	8,5 106

11. Przeprowadź badanie statystyczne. Zbierz odpowiednie dane i opracuj wyniki. Możesz wybrać jedno z podanych poniżej zagadnień lub zaproponować własne.

- Którą z liczb od 1 do 10 i którą z liczb od 10 do 20 najczęściej wybierają ludzie?
- Czy ludzie są na ogół zadowoleni ze swego wzrostu — jaki wzrost mają, a jaki chcieliby mieć?
- Z ilu liter składają się imiona, a z ilu liter — nazwiska?
- Ile monet i ile banknotów przeciętnie mają ludzie przy sobie?

Ciekawostka

Aby doświadczalnie wyznaczyć badaną wielkość (np. czas spadania przedmiotu z pewnej wysokości), zwykle wielokrotnie powtarza się eksperyment, za każdym razem dokonując pomiarów.

Na ogół nie można mieć pewności, czy błąd popełniony w trakcie pomiarów nie wypacza wyników doświadczeń. Dokładność pomiarów można ocenić na podstawie odchylenia standardowego. Można bowiem przyjąć, że im większe jest odchylenie standardowe serii pomiarów (tzn. im bardziej wyniki różnią się od wartości przeciętnej), tym mniejsza jest dokładność tych pomiarów.

Oto przykład takich rozważań. Dwie osoby mierzyły czas spadania piłki z wysokości 5 m. W ten sposób otrzymano dwie serie wyników:

seria I
0,8 s, 1,2 s, 0,9 s, 1 s, 0,7 s, 1,2 s, 1,3 s

seria II
0,7 s, 1,2 s, 1,3 s, 0,8 s, 1,2 s, 0,7 s

Odchylenia standardowe tych serii wynoszą: $\sigma_I \approx 0{,}21$, a $\sigma_{II} \approx 0{,}25$, więc możemy uznać, że wyniki serii I są dokładniejsze.

Na podstawie wyników takiego eksperymentalnego badania przyjmuje się, że mierzona wielkość jest równa średniej arytmetycznej wyników pomiaru z dokładnością do odchylenia standardowego. Zapisujemy to tak:

$$\overline{x} \pm \sigma \text{ lub } \left\langle \overline{x} - \sigma ; \overline{x} + \sigma \right\rangle$$

Ponieważ $\overline{x}_I \approx 1{,}01$ i $\overline{x}_{II} \approx 0{,}98$, możemy powiedzieć, że według jednego z eksperymentatorów czas spadania piłki wynosił $1{,}01 \pm 0{,}21$ sekundy, a według drugiego — czas spadania wynosił $0{,}98 \pm 0{,}25$ sekundy.

Uwaga. Aby rozważany przykład był bardziej przejrzysty, w obu seriach podaliśmy tylko kilka pomiarów. W badaniach statystycznych rzetelne wnioski można wyciągnąć dopiero na podstawie dużej liczby danych.

12. Przeczytaj ciekawostkę. W pewnym doświadczeniu badano, o ile centymetrów wydłuża się sprężyna, gdy zawieszamy na niej pewien ciężarek. Powtarzając eksperyment, otrzymano następujące wyniki:

27,3 cm 26,8 cm 27,1 cm 27,3 cm 26,6 cm 26,9 cm

Oblicz odchylenie standardowe tych pomiarów i ustal, w jakim przedziale mieścić się będą wyniki pomiarów.

13. Dawniej na opakowaniach pewnych produktów pojawiały się napisy typu: „masa 170 g ±6 g", co oznaczało, że średnia masa zawartości opakowania powinna wynosić 170 g, a odchylenie standardowe 6 g. Wartości te ustalano, sprawdzając odpowiednio liczną próbkę opakowań produktu. Ustal, jaki napis zgodnie z tymi regułami powinien się znaleźć na opakowaniu herbatników, jeśli wyniki ważenia próbek wynoszą:

256 g 244 g 252 g 242 g 250 g 258 g 245 g

Uwaga. Obecnie przepisy nakazują, by masa towaru nie była mniejsza, niż podano na opakowaniu.

Ciekawostka

Przyjrzyj się diagramom.





Zjawiska opisywane za pomocą tych diagramów nie mają ze sobą nic wspólnego, chociaż diagramy wyglądają podobnie. Każdy z nich ma charakterystyczny kształt dzwonu.

W obu wypadkach wartości średnie występują najczęściej, a najmniejsze i największe — najrzadziej. Można powiedzieć, że krzywe na rysunkach mają osie symetrii, wyznaczone przez wartości średnie.

Tego typu rozkład danych nazywany jest rozkładem normalnym. Gdy mamy do czynienia z rozkładem normalnym, około 68% wszystkich danych różni się od wartości średniej $\overline{x}$ nie więcej niż o odchylenie standardowe σ, tzn. mieści się w przedziale $(\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma)$. Około 95% danych mieści się w przedziale $(\overline{x}-2\sigma;\overline{x}+2\sigma)$, a ponad 99% danych mieści się w przedziale $(\overline{x}-3\sigma;\overline{x}+3\sigma)$.

Rozkład normalny spotkać można w różnych zestawach danych, na przykład dotyczących wzrostu i wagi ludzi, rozmiaru skrzydeł ptaków danego gatunku, przychodów ludności, liczby ziarenek grochu w strąkach itd.

14. Przeczytaj ciekawostkę. Korzystając z informacji w tabeli, odpowiedz:

a) W jakim przedziale mieści się wzrost 68% dorosłych Polek, a w jakim — 68% dorosłych Polaków (mężczyzn)?

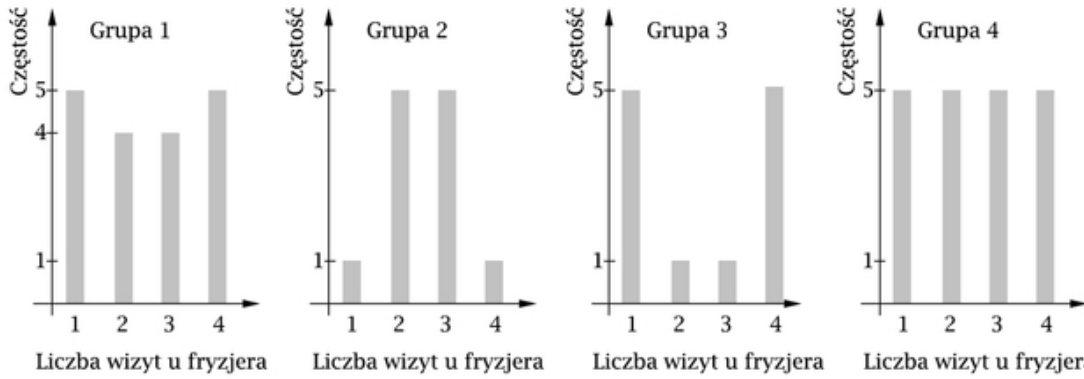
b) W jakim przedziale mieści się wzrost 95% mężczyzn w Japonii, a w jakim — 95% mężczyzn w Polsce?

c) W jakim przedziale mieści się wzrost 99% Holenderek, a w jakim — 99% Polek?

PRZECIĘTNY WZROST I ODCHYLENIE STANDARDOWE (w cm)

	Japonia		Holandia		Polska	
	$\overline{x}$	σ	$\overline{x}$	σ	$\overline{x}$	σ
kobiety	153	4,8	169,6	6,7	164,2	5,6
mężczyźni	165,5	5,8	182,5	7,5	176,0	7,4

15. Przyjrzyj się poniższym diagramom. Oceń, który z nich przedstawia zestaw danych o najmniejszym odchyleniu standardowym, a następnie sprawdź swoje przypuszczenie za pomocą obliczeń.



MINISPRAWDZIAN

S1. W tabeli przedstawiono liczbę dzieci w pięćdziesięciu losowo wybranych rodzinach.

Liczba dzieci w rodzinie	0	1	2	3	4
Liczba rodzin	5	11	20	7	7

Odchylenie standardowe zebranych danych zaokrąglone do części setnych wynosi:

A. 1,15 B. 1,32 C. 1,86 D. 0,45

S2. Średnia arytmetyczna zestawu czterech liczb 3, 1, a, b wynosi 3, a odchylenie standardowe jest równe $\sqrt{6}$. Wynika stąd, że $a^2 + b^2$ jest równe:

A. 5 B. 10 C. 14 D. 50

S3. Dane są dwa zestawy danych:

zestaw A: 1, 2, 3, 6

zestaw B: 11, 12, 13, 16

Odchylenie standardowe w zestawie B jest:

A. o 10 większe od odchylenia standardowego w zestawie A

B. o 10 mniejsze od odchylenia standardowego w zestawie A

C. 10 razy większe od odchylenia standardowego w zestawie A

D. takie samo jak odchylenie standardowe w zestawie A

POWTÓRZENIE

1. Oblicz błąd bezwzględny i błąd względny każdego z przybliżeń:

9,50 zł ≈ 10 zł 199 zł ≈ 200 zł

2. Rowerzysta przebył pewną trasę w ciągu 2 h 36 min, ale powiedział, że pokonał ją w 2,5 godziny. Oblicz błąd względny takiego przybliżenia.

3. Na opakowaniu podano, że towar ma masę około 100 g, a błąd względny wynosi 5%. Jaka jest rzeczywista masa tego towaru, jeśli przybliżoną masę na opakowaniu podano z niedomiarem?

4. Określ średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu liczb:

a) 9, 7, 7, 3, 5, 7, 5, 5, 3

b) 5, 3, 4, 3, 4, 5, 2, 3

5. Określ średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu danych dotyczących długości snu uczniów pewnej klasy:

Liczba godzin snu	6	7	8	9	10	11
Liczba wskazań	3	6	12	6	2	1

6. Średnia arytmetyczna liczb 1, 1, 5, 1, 6, 3, 2, 5, 2, 5, a, b wynosi 3, a dominanta jest równa 1. Znajdź wartości a i b oraz medianę tych liczb.

7. Średnia waga ośmiu wioślarzy pewnej osady wioślarskiej wynosi 85 kg, a waga sternika tej osady jest równa 58 kg. Oblicz średnią wagę wszystkich zawodników tej osady.

8. Oblicz średnią ważoną liczb: 5 (z wagą 3), 4 (z wagą 2) i 7 (z wagą 1).

9. Zgodnie z regulaminem pewnej uczelni wynik końcowy studiów jest średnią ważoną średniej arytmetycznej ocen wpisanych do indeksu (z wagą 0,5), oceny z pracy dyplomowej (z wagą 0,25) i oceny z egzaminu dyplomowego (z wagą 0,25). Agata uzyskała średnią ocen z indeksu równą 4,43, jej pracę dyplomową oceniono na 5, a egzamin dyplomowy na 4,5. Określ wynik końcowy Agaty.

10. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe podanego zestawu danych.

a) Wagi plecaków uczniowskich:

2 kg, 6 kg, 5 kg, 2 kg, 1 kg, 8 kg

b) Wizyty u stomatologa w ciągu roku:

Liczba wizyt	0	1	2	3	4	5
Liczba wskazań	12	9	8	12	5	4

11. Oblicz średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe długości pstrągów i lipieni, a następnie porównaj obliczone wielkości.

Długość (w cm)	25	30	35	40	45
Liczba pstrągów	2	4	11	48	35
Liczba lipieni	18	72	8	2	0

12. Niech $\overline{x}$ oznacza średnią arytmetyczną liczb a, b, c. Uzasadnij, że odchylenie standardowe zestawu trzech liczb: $a - \overline{x}$, $b - \overline{x}$, $c - \overline{x}$ jest takie samo jak odchylenie standardowe zestawu liczb a, b, c.

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0°	0	1	0	—	46°	0,7193	0,6947	1,0355	0,9657
1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	47°	0,7314	0,6820	1,0724	0,9325
2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	48°	0,7431	0,6691	1,1106	0,9004
3°	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	49°	0,7547	0,6561	1,1504	0,8693
4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	50°	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	51°	0,7771	0,6293	1,2349	0,8098
6°	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	52°	0,7880	0,6157	1,2799	0,7813
7°	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	53°	0,7986	0,6018	1,3270	0,7536
8°	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	54°	0,8090	0,5878	1,3764	0,7265
9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	55°	0,8192	0,5736	1,4281	0,7002
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	56°	0,8290	0,5592	1,4826	0,6745
11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	57°	0,8387	0,5446	1,5399	0,6494
12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	58°	0,8480	0,5299	1,6003	0,6249
13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	59°	0,8572	0,5150	1,6643	0,6009
14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	60°	0,8660	0,5000	1,7321	0,5774
15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	61°	0,8746	0,4848	1,8040	0,5543
16°	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	62°	0,8829	0,4695	1,8807	0,5317
17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	63°	0,8910	0,4540	1,9626	0,5095
18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	64°	0,8988	0,4384	2,0503	0,4877
19°	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	65°	0,9063	0,4226	2,1445	0,4663
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	66°	0,9135	0,4067	2,2460	0,4452
21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	67°	0,9205	0,3907	2,3559	0,4245
22°	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68°	0,9272	0,3746	2,4751	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	69°	0,9336	0,3584	2,6051	0,3839
24°	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	70°	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	71°	0,9455	0,3256	2,9042	0,3443
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	72°	0,9511	0,3090	3,0777	0,3249
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	73°	0,9563	0,2924	3,2709	0,3057
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	74°	0,9613	0,2756	3,4874	0,2867
29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	75°	0,9659	0,2588	3,7321	0,2679
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	76°	0,9703	0,2419	4,0108	0,2493
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	77°	0,9744	0,2250	4,3315	0,2309
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	78°	0,9781	0,2079	4,7046	0,2126
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	79°	0,9816	0,1908	5,1446	0,1944
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	80°	0,9848	0,1736	5,6713	0,1763
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	81°	0,9877	0,1564	6,3138	0,1584
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	82°	0,9903	0,1392	7,1154	0,1405
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	83°	0,9925	0,1219	8,1443	0,1228
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	84°	0,9945	0,1045	9,5144	0,1051
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	85°	0,9962	0,0872	11,4301	0,0875
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	86°	0,9976	0,0698	14,3007	0,0699
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	87°	0,9986	0,0523	19,0811	0,0524
42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	88°	0,9994	0,0349	28,6363	0,0349
43°	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	89°	0,9998	0,0175	57,2900	0,0175
44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	90°	1	0	—	0
45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000					

ODPOWIEDZI

str. 13–14: **1.** a) $\frac{7x^5-5x^7}{2}$, st. 7; $\sqrt{3}z^{105}+\frac{z^5}{3}$, st. 105, b) $8^{\frac{1}{2}}$, st. 0, c) $0{,}2t+6t^3-1{,}4t^{10}$, st. 10; $-3w^7$, st. 7. **2.** a) $-\frac{1}{18}x^8$, b) $(1+\sqrt{2})x^2$, c) $1{,}3x^5$, d) $-2x^2$. **3.** a) $-2x^5+7x-2$, b) $5x^7-6{,}5x^5-x^2-0{,}5$, c) $3x^5+1{,}2x^3-0{,}4x^2-0{,}6x$, d) $\frac{1}{2}x^{13}+\frac{1}{3}x^8-\frac{1}{2}x^7+\frac{1}{6}x^6$, e) $-\frac{25}{6}x^5+4x^4+\frac{5}{6}x$, f) $13x^6+6x^4+4x^3$, g) $11x^6-9x^3-2$, h) $-5{,}6x^3+0{,}6x^2+9{,}6x-3{,}6$, i) $4x^{11}-2x^{10}-\frac{46}{3}x^5+\frac{23}{3}x^4$, j) $-11x^5-2x^4+4x^3+7{,}5x^2+1{,}5x$, k) $7x^8-\frac{17}{3}x^6+\frac{2}{3}x^4+2x^2-\frac{4}{3}$, l) $0{,}2x^{10}+0{,}7x^8-1{,}5x^6-0{,}2x^5+0{,}3x^3$. **4.** a) $-2x^3-x^2-x+5$, b) $x^3+4x^2-11{,}5$, c) $2x^5-14x^4+12x^3-x^2+7x-6$. **5.** a) st. 5, 15, −3, b) st. 3, −3, −70, c) st. 8, 1, 162, d) st. 5, 1, −13, e) st. 4, −2, −3, f) st. 9, −3, 0. **6.** a) m, b) m, c) $m+n$, d) $2m$. **8.** a) 990, b) 95, c) 0,09994, d) $\frac{5}{14}$, e) 1. **9.** a) $r=-2$, $s=3$, $t=-4$, b) $a=\sqrt{2}$, $b=3$, $c=-10$. **10.** a) 650 pączków. **11.** a) Nie ma takich wartości. b) Nie ma takich wartości. c) Dla $p=0$, $q=-2$, $r=0$, d) dla $p=-2$, $q=-3$, $r=5{,}5$, e) dla $p=10$, $q=23$, $r=-10$, f) dla $p=0$, $q=-4$, $r=0$. **12.** a) Dla $m=3$ i $n=-4$.

str. 19–21: **1.** a) $x^3(x^2-1)$, b) $x^2(x^2-x+1)$, c) $4x^6(x+2)$, d) $5x^2(3x^3-4x+1)$, e) $-3x^3\cdot(3x^3-6x+4)$, f) $7x^5(2x^3-3x^2-4)$. **2.** a) $(x+4)(x^2+1)$, b) $(6x-5)(x^2+1)$, c) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+1)$, d) $(x^3-x)(2x+5)$, e) $(3x-4)(x^5-x^2)$, f) $(1-x^2)(7x+6)$. **3.** a) $(x+5)(x^2+3)$, b) $(2x-3)\cdot(x^2+3)$, c) $(2x-3)(x^2+2)$, d) $(2-5x)(3x^2+1)$, e) $(5x-\sqrt{7})(x^2+2)$, f) $(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(x^2+5)$. **4.** a) $x(3x-2)(5x^2+2)$, b) $-x(2x-5)(5x^2+4)$, c) $x^2(x^2+1)(x+10)$, d) $x(x+3)(2x^2+3)$, e) $x^2(x-5)(2x^2+1)$, f) $-x^2(2x-1)(3x^2+2)$. **5.** a) $5x^2(x+3)(2x-3)$, b) $x^2(x+1)(x-5)$, c) $2x(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, d) $x^3(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$, e) $2x(x^2+3)(x-4)$, f) $-10x(x-8)(x^2+2)$. **6.** a) $(x-4)(x+4)$, b) $(2x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{5})$, c) $\left(\sqrt{7}x-\frac{1}{3}\right)\left(\sqrt{7}x+\frac{1}{3}\right)\left(7x^2+\frac{1}{9}\right)$, d) $x^5(x+10)(x-10)$, e) $(x-3)^2$, f) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)^2$, g) $(x-1)^2(x+1)^2$, h) $(x+4)^2$, i) $(x-3)(x^2+3x+9)$, j) $(x+1)(x^2-x+1)$, k) $\left(\frac{1}{3}x-2\right)\left(\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{3}x+4\right)$, l) $x^7(4x+1)(16x^2-4x+1)$. **7.** a) $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$, b) $(2x-1)(16x^4+8x^3+4x^2+2x+1)$, c) $(x-2)(x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x+32)$, d) $(x-\sqrt[5]{3})\cdot(x^4+\sqrt[5]{3}x^3+\sqrt[5]{9}x^2+\sqrt[5]{27}x+\sqrt[5]{81})$, e) $(x-\sqrt{3})(x^5+\sqrt{3}x^4+3x^3+3\sqrt{3}x^2+9x+9\sqrt{3})$. **8.** a) $-x(3x+7)\cdot(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, b) $-x^3(x+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, c) $-x^2(x+2)(x-2)(2x-5)$, d) $5x^3(3x-2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$, e) $x(3x+2\sqrt{5})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$, f) $-x(2\sqrt{6}x+\sqrt{5})(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)$. **9.** a) $(x+1)(x^2-x+1)(3x^2+x+2)$, b) $(x+\sqrt[3]{5})(x^2-\sqrt[3]{5}x+\sqrt[3]{25})(x^2-x+1)$, c) $(x+2)(x-1)(x-2)(x^2+2x+4)$, d) $(2x^2+x+3)(x-1)(x^2+x+1)$, e) $(x^2+2x+2)(x-2)(x^2+2x+4)$, f) $(x-1)(x^2+x+1)\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$. **10.** a) $(x+5)(x^2+3)$. Wskazówka. Zauważ, że znak tego wielomianu zależy tylko od wartości wyrażenia $x+5$. b) $(x-2)\cdot(4x^2+3)$, dla $-x<2$, c) $-(2x-1)(6x^4+1)$. **11.** a) x^2+1, b) $\frac{15}{4}x-\frac{3}{4}$, c) $\frac{x-1}{x^2-4}$. **12.** a) $n(n-1)(n+1)$. Wskazówka. Zauważ, że otrzymane wyrażenie jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych. **13.** a) 3; $(x^2+1)(3x^2+2x+1)$, b) 3; $(x^2+1)(5x^2-7x+3)$, c) -2; $-2(x+5)(x^2+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$, d) -6; $-(3x^2-2x+1)(3x^2+2)$. **14.** a) $(x^2+2)(x^2+x+1)$, b) $(x^2+4)(x-1)^2$, c) $3(x^2+1)(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)$, d) $2x(x^2+1)(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$, e) $(x-1)(x+1)\left(x+\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$, f) $(x-2)(x+2)(x^2+x+1)$. **15.** a) $(x+1)(2x^2-2x+3)$, b) $(x+2)(x^2-2x+5)$, c) $3(x-1)\left(x+\frac{3+\sqrt{33}}{6}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{33}}{6}\right)$, d) $(x+2)\cdot(x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3})$, e) $(x-2)\left(x^2+2x+3\right)$, f) $(x+4)(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$, g) $2(x+3)\left(x-\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)$, h) $2(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$. **16.** a) $(x^2-\sqrt{6}x+3)(x^2+\sqrt{6}x+3)$, b) $(x^2-2\sqrt{5}x+10)(x^2+2\sqrt{5}x+10)$, c) $(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)$, d) $(3x^2-\sqrt{30}x+5)(3x^2+\sqrt{30}x+5)$.

str. 26–29: **1.** a) $x = -\frac{5}{2}$, $x = 3$ lub $x = \frac{4}{3}$, b) $x = -5$, $x = -\sqrt{5}$, $x = \sqrt{5}$ lub $x = 4$, c) $x = -3$, $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = 0$, d) $x = 0$, $x = \frac{3}{4}$ lub $x = 2$, e) $x = -1$, $x = 0$ lub $x = 1$, f) $x = -2$ lub $x = -\sqrt[3]{2}$. **2.** a) Nie, b) tak, c) nie. **3.** a) $x = -3$, $x = 0$ lub $x = 3$, b) $x = -\frac{2}{3}$, $x = 0$ lub $x = 1$, c) $x = -2$, $x = 0$ lub $x = 5$, d) $x = -3$, $x = 0$ lub $x = 2{,}5$, e) $x = 0$, $x = 3$ lub $x = 4$, f) $x = -1{,}4$, $x = 0$ lub $x = 2$. **4.** a) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = -1$, b) $x = -3$, $x = 3$, lub $x = -1$, c) $x = \frac{7}{2}$, d) $x = -\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$, $x = \sqrt[4]{\frac{2}{5}}$ lub $x = \frac{2}{3}$, e) $x = -2$ lub $x = 2$, f) $x = -2$, $x = \sqrt[3]{4}$ lub $x = 2$, g) $x = \sqrt[3]{6}$, h) $x = -1$, $x = 1$ lub $x = \frac{5}{3}$. **5.** a) $W(x) = -(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+3)(x+1)(x-2)$; $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $x = -1$, $x = 2$, b) $W(x) = (\sqrt{3}x+2)(\sqrt{3}x-2)(x-1)(x^2+x+1)$; $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x = 1$, c) $W(x) = 2(x-2)(x^2+2x+4)(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$; $x = 2$, $x = -1$, $x = \frac{3}{2}$, d) $W(x) = 4x(7x+5)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x-1)^2$; $x = 0$, $x = -\frac{5}{7}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$. **6.** a) $x = 2$, $x = -1$, $x = 1$ lub $x = -3$, b) $x = -2$, $x = 1$, lub $x = 2$, c) $x = -5$ lub $x = 1$, d) $x = -1$, e) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, f) $x = -2$, $x = -1$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** a) $x = 0$ lub $x = \frac{3}{2}$, b) $x = 0$ lub $x = \sqrt[3]{2}$, c) $x = 0$, $x = -\sqrt[4]{5}$ lub $x = \sqrt[4]{5}$, d) $x = 0$ lub $x = 7$, e) $x = -6$ lub $x = 0$, f) $x = 0$ lub $x = \frac{5}{6}$, g) $x = -5$, $x = -2$ lub $x = 2$, h) $x = -3$ lub $x = 3$, i) $x = 0$, $x = \frac{1}{3}$ lub $x = 2$. **8.** a) Nie, b) tak, c) tak, d) nie, e) nie, f) tak, g) nie, h) tak, i) tak. **10.** a) $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ lub $x = 3$, b) $x = -\sqrt{5}$, $x = -2$, $x = 2$ lub $x = \sqrt{5}$, c) $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 1$, d) $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ lub $x = \sqrt{3}$, e) $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x = 0$ lub $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$, f) $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ lub $x = \sqrt{3}$, g) $x = -1$ lub $x = 2$, h) $x = -\sqrt[3]{3}$, $x = -\sqrt[3]{2}$ lub $x = 0$, i) $x = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$, $x = 0$ lub $x = 1$. **11.** a) $x = 1$, b) $x = -2$, $x = -\sqrt{2}$, $x = -1$, $x = 1$ lub $x = \sqrt{2}$, c) $x = -3$, $x = -2$ lub $x = 2$, d) $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$ lub $x = 2$. **12.** a) $x = -1$ lub $x = 1$, b) $x = -2$, $x = 0$ lub $x = 2$, c) $x = -1$ lub $x = 1$, d) $x = 0$ lub $x = 2$, e) $x = 1$ lub $x = 5$, f) $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1$, $x = 0$ lub $x = \frac{1}{2}$. **13.** a) $x = -4{,}5$ lub $x = 5{,}5$, b) $x = 7$, c) $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{5}$ lub $x = \sqrt{5}$. **14.** a) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 0 lub $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, b) 3, c) $-\sqrt{2}$ lub $\sqrt{2}$. **17.** a) $x = -5$ — pierwiastek pięciokrotny, $x = -2$ — pierwiastek jednokrotny, $x = 0$ — pierwiastek siedmiokrotny, $x = 1$ — pierwiastek trzykrotny, b) $x = -3$ — pierwiastek trzykrotny, $x = \frac{1}{2}$ — pierwiastek trzykrotny, $x = 0$ — pierwiastek jednokrotny, c) $x = -2$ — pierwiastek siedmiokrotny, $x = -\frac{4}{3}$ — pierwiastek dwukrotny, d) $x = -3$ — pierwiastek dwukrotny, $x = 3$ — pierwiastek pięciokrotny. **18.** a) $x = -5$ — pierwiastek dwukrotny, $x = -3$ — pierwiastek jednokrotny, $x = 3$ — pierwiastek trzykrotny, b) $x = -3$ — pierwiastek trzykrotny, $x = \frac{1}{2}$ — pierwiastek jednokrotny, c) $x = 0$ — pierwiastek trzykrotny, $x = 1$ — pierwiastek dwukrotny, $x = 4$ — pierwiastek jednokrotny, d) $x = -1$ — pierwiastek czterokrotny, $x = \frac{1}{3}$ — pierwiastek jednokrotny, e) $x = -1$ — pierwiastek dwukrotny, $x = 0$ — pierwiastek czterokrotny, $x = 1$ — pierwiastek czterokrotny, f) $x = -1$ — pierwiastek jednokrotny, $x = 0$ — pierwiastek dwukrotny, $x = 1$ — pierwiastek dwukrotny. **19.** a) $x = -4$ — pierwiastek siedmiokrotny, $x = 2$ — pierwiastek dziewięciokrotny, b) $x = 2$ — pierwiastek czterokrotny, $x = -4$ — pierwiastek trzykrotny, $x = -13$ — pierwiastek jednokrotny, c) $x = 2$ — pierwiastek czterokrotny, $x = -4$ — pierwiastek trzykrotny, $x = -\frac{7}{4}$ — pierwiastek jednokrotny. **21.** a) $p = 54$, $q = -27$, b) $p = \frac{1}{27}$, $q = -\frac{1}{3}$, c) $p = 150$, $q = 60$, d) $p = \frac{3}{4}$, $q = 1$ lub $p = -\frac{3}{4}$, $q = -1$. Wskazówka. Wielomian trzeciego stopnia, który ma pierwiastek trzykrotny, można przedstawić w postaci $(ax+b)^3$. **22.** Dla $p \in \left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ równanie nie ma pierwiastków, dla $p = -2\sqrt{2}$ lub $p = 2\sqrt{2}$ równanie ma jeden pierwiastek czterokrotny, dla $p \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; +\infty\right)$ równanie ma dwa pierwiastki dwukrotne. **23.** a) Krotność równa $k+m$, b) krotność równa $2k$, c) krotność równa m.

str. 33–36: **2.** a) x^2-3x+2, b) $3x^2-4x-2$, c) x^3-x^2+1, d) $-4x^3-5x+2$, e) x^4+2x^3+1, f) $-x^4+5x+7$. **3.** a) $W(x)=2x^2+5x-3$, b) $W(x)=5x^3-2x^2-1$, c) $W(x)=3x^3+2x^2-1$, d) $W(x)=3x^2+2x-1$. **4.** a) ④, b) ⑤, c) ②, d) ①. **5.** a) Kolejno: 6, 1, 2, 3, b) kolejno: −2, 6, 5, 5. **6.** a) x^2-3x+7 reszta 7, b) $2x^2+x-1$ reszta 2, c) $3x^3-2x^2-5x-1$ reszta −2, d) $-4x^3+x^2+2$ reszta 3, e) x^4-2x+3 reszta 7, f) $3x^4+2x^3-x+2$ reszta 4. **7.** a) $W(x)=3x^2-14x+6$, b) $W(x)=x^3+5x^2-5x-18$. **9.** a) Liczbą 10, b) zwiększyć o 5. **10.** a) $W_1(x)=(2x^2-x-9)(x-5)-47$, $W_2(x)=(3x^3+4)(x-5)+4$, $W_1(x)+W_2(x)=$ $=(3x^3+2x^2-x-5)(x-5)-43$. **12.** a) x^2-4x+4, b) x^3+x+3, c) $2x^3+5$, d) x^4-3x^3+2 reszta −1, e) $5x^4-2x^3-3x^2+x+4$ reszta 4, f) $-3x^3+6x^2-12x+26$ reszta −55.

str. 39–40: **1.** a) Tak, b) tak, c) nie, d) tak. **2.** a) 5, b) 34. **3.** a) Dla $a=20$, b) dla $p=\frac{1}{8}$. **5.** a) $x=-2$, $x=\frac{1}{2}$, b) $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$, c) $x=-5$, d) $x=1{,}5$, e) $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$, $x=4$, f) $x=-3$. **6.** $x=5$. **7.** a) $W(x)=3(x-10)(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)$, b) $W(x)=10(x+7)\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, c) $W(x)=(x+6)(x+1)(x-2)(x+2)$, d) $W(x)=2(x-4)\left(x+2\frac{1}{2}\right)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

str. 45–47: **1.** a) $\frac{2}{5}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $-\frac{5}{6}$, d) $-3\frac{1}{2}$. **2.** a) $x=3$, b) $x=-1$, $x=1$, c) $x=-2$, $x=1$, $x=4$, d) $x=-3$, e) $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, f) $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=5$. **4.** a) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{2}{5}$, $x_3=1$, b) $x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{4}$, $x_3=\frac{1}{3}$, c) $x_1=-2$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, d) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$. **5.** a) $x=-3{,}5$, b) $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{2}{3}$, c) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$, d) $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{3}$, e) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{3}$, $x_4=3$, f) $x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{2}$, $x_4=1$. **6.** a) $x_1=-1$, $x_2=\frac{-5-\sqrt{5}}{10}$, $x_3=\frac{-5+\sqrt{5}}{10}$, b) $x_1=-3$, $x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{6}$, $x_3=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$, c) $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{2}{5}$, d) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$, e) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{3}{4}$, $x_3=3$, f) $x_1=-3$, $x_2=1$, g) $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=\frac{1}{2}$, $x_4=2$, h) $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=1$. **7.** a) $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=2$, b) $x_1=-5$, $x_2=-2$, $x_3=-\frac{1}{2}$, c) $x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=1$, $x_3=2$, d) $x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{1}{2}$, e) $x_1=-\frac{1}{5}$, $x_2=\frac{2}{5}$, f) $x_1=-\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{3}{2}$. **8.** a) $x_1=-3$, $x_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $x=-1$, c) $x_1=-2$, $x_2=5$, d) $x_1=1$, $x_2=\frac{1-\sqrt{11}}{5}$, $x_3=\frac{1+\sqrt{11}}{5}$, e) $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_4=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, f) $x_1=-\frac{1}{5}$, $x_2=1$. **9.** a) $2x^3-2x^2-3x-2=0$, $x=2$, b) $x^3-6x^2+3x+10=0$, $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=5$, c) $2x^3-3x^2-8x-3=0$, $x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=3$, d) $3x^3+4x^2-x-2=0$, $x_1=-1$, $x_2=\frac{2}{3}$, e) $x^3+3x^2-4=0$, $x_1=-2$, $x_2=1$, f) $4x^3-3x+1=0$, $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}$. **10.** Gdy $n=0$, to $x=-3$. Gdy n jest liczbą nieparzystą, to $x=-1$. **13.** Wskazówka. Skorzystaj z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych. **14.** Dla $m\in\{-2,4,8,10\}$. **15.** $a=-3$, $b=11$, $c=-9$, $d=-7$.

str. 48: **1.** a) $x^4+6x^3+1{,}5x^2-6x-1$, b) $-12x^5-23x^4+15x^3+18x^2-9x$. **2.** a) $A=C=0$, $B=-4$ lub $A=6$, $B=-10x$, $C=2$, b) $A=-8$, $B=-\frac{3}{4}x^4$, $C=-24$. **3.** 0. **4.** a) $2(5x-6)(5x+6)$, b) $5(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$, c) $-4x^2(x-6)(x-\frac{1}{2})$, d) $(2x+5)(x^2+3)$, e) $(x+2)(x^2-2x+4)(x^2-2x+7)$, f) $(x-\sqrt[3]{3})(x^2+\sqrt[3]{3}x+\sqrt[3]{9})$. **5.** $(2-x)(x^2+3)$. **6.** a) $x=-7$, $x=\frac{2}{5}$, $x=12$, b) $x=-\frac{4}{5}$, $x=0$, $x=5$, c) $x=-\sqrt{7}$, $x=\sqrt{7}$, d) $x=\frac{4}{5}$. **7.** a) $-1-\sqrt{2}$, 0, $-1+\sqrt{2}$. **8.** a) $x=-11$ — pierwiastek dwukrotny, $x=-2$ — pierwiastek pięciokrotny, $x=3$ — pierwiastek jednokrotny, $x=0$ — pierwiastek pięciokrotny, b) $x=-\frac{1}{2}$ — pierwiastek dwukrotny, $x=1$ — pierwiastek dwukrotny, $x=2$ — pierwiastek dwukrotny, c) $x=-2$ — pierwiastek dwukrotny, $x=0$ — pierwiastek dwukrotny, $x=2$ — pierwiastek dwukrotny. **9.** a) $3x^2-2x+5$, b) $-x^3-2x^2-x+1$

reszta -3. **10.** a) Dla $p = -7$, b) dla $p = 12$. **11.** Dla $m = 3$, $n = 9$. **12.** a) $x = -1$, $x = -\sqrt{5}$, $x = 1{,}5$, $x = \sqrt{5}$. **13.** a) $x = \frac{2}{3}$, b) nie.

str. 55–58: **1.** a) $\alpha = 30°$, $\beta = 150°$, b) $\alpha = 37°$, $\beta = 53°$, c) $\alpha = 30°$, $\beta = 120°$. **2.** 240°. **4.** a) $|\sphericalangle DOB| = 215°$, $|\sphericalangle EOA| = 215°$, $|\sphericalangle COD| = 305°$, $|\sphericalangle EOF| = 270°$, b) np. $\sphericalangle DOF$ i $\sphericalangle COA$; dwie pary, c) dwanaście par. **5.** a) $\alpha = \gamma = 53°$, $\beta = \delta = 127°$, b) $\alpha = 117°$, $\beta = 63°$, $\gamma = 74°$, $\delta = 106°$, c) $\alpha = 50°$, $\beta = 29°$. **6.** $|\sphericalangle ACD| = \alpha$, $|\sphericalangle EHF| = \beta$, $|\sphericalangle IKL| = \gamma$, $|\sphericalangle JLK| = \delta$. **7.** a) 42°, 48°, 90°, b) 24°, 66°, 90°, c) 37°, 53°, 90°. **8.** a) $\alpha = \beta$, b) $\alpha + \beta = 90°$, c) $\alpha + 2\beta = 90°$. **9.** a) 35°, 55°, 90°, b) 30°, 60°, 90° lub 22,5°, 67,5°, 90°, c) 15°, 75°, 90°. **10.** 9°, 81°, 90°. **12.** a) 20°, 20°, 140°, b) 50°, 50°, 80°. **13.** 80°. **14.** 36°. **17.** a) 40°, 90°, 140°, 90°, b) 48°, 100°, 63°, 149°, c) 27°, 270°, 28°, 35°. **18.** a) $\alpha = 70°$; największy kąt ma 140°, najmniejszy — 60°, b) 5 razy ($\alpha = 30°$). **19.** a) 55°, 125°, 55°, 125°, b) 80°, 100°, 80°, 100°, c) 47°, 133°, 47°, 133°. **20.** a) 45°, 35°, 145°, 135°, b) 40°, 110°, 70°, 140°, c) 40°, 38°, 142°, 140°. **21.** 50°, 130°, 50°, 130° lub 65°, 115°, 65°, 115°. **22.** 60°, 90°, 90°, 120° lub 60°, 120°, 30°, 150°.

str. 60–61: **1.** a) BC — najdłuższy, AC — najkrótszy, b) β — największy, γ — najmniejszy. **2.** a) $\sphericalangle ACB$ — największy, $\sphericalangle BAC$ — najmniejszy, b) AC — najdłuższy, AB — najkrótszy. **3.** a) Tak, b) nie, c) tak, d) nie. **4.** a) 3 cm lub 5 cm, b) 7 km, c) b, d) a lub b. **5.** Nie. **6.** a) Nie, b) tak, c) nie. **7.** Nie. **8.** $P_{\mathrm{I}} = 15$, $P_{\mathrm{II}} = 12{,}5$, $P_{\mathrm{III}} = 12{,}5$, $P_{\mathrm{IV}} = 14$, $P_{\mathrm{V}} = 12$, $P_{\mathrm{VI}} = 10$. **9.** $P_{ADC} = 35$, $P_{DBC} = 45$, $P_{ABC} = 80$. **10.** a) 4, b) $4{,}5\sqrt{2}$. **11.** 11,2 i $7\sqrt{2}$. **12.** $P_{KLO} = 4{,}5$, $P_{KLM} = 10{,}5$, $P_{OLM} = 6$. **13.** 27. **14.** 13, 14 i 15.

str. 66–69: **1.** a) $a = 6$, b) $b = 3$, c) $c = \sqrt{14}$, d) $d = \sqrt[4]{8}$. **2.** a) $x = 2\sqrt{5}$, b) $y = 2\sqrt{11}$, c) $z = 2\sqrt{10}$, d) $w = 3$. **3.** Trójkąt; o $2\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - 10$. **4.** $2\sqrt{5}$ cm. **5.** a) $3\sqrt{91}$, b) $4 + 4\sqrt{10}$. **6.** $\sqrt{45 - 12\sqrt{5}}$. Wskazówka. Zapisz pole trójkąta ABC na dwa sposoby. **7.** $\frac{\sqrt{35}}{2}$. **8.** 15. **9.** a) $a = 2\sqrt{\frac{P}{\sqrt{3}}}$, b) $d = 2\sqrt{3}h$, c) $P = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$, d) $d = 6\sqrt{\frac{P}{\sqrt{3}}}$. **10.** a) $P = 50$, Obwód $= 20 + 10\sqrt{2}$ lub $P = 25$, Obwód $= 10 + 10\sqrt{2}$, b) Obwód $= 60 + 20\sqrt{3}$ lub Obwód $= 20 + 20\sqrt{3}$, lub Obwód $= 30 + 10\sqrt{3}$. **11.** $4\sqrt{7}$. **12.** a) $\frac{\sqrt{51}}{2}$ m $\approx 3{,}6$ m, b) wyżej; $\frac{\sqrt{101}}{2}$ m ≈ 5 m. **13.** Nie. **14.** Tak. **15.** a) Nie, b) tak, c) tak, d) tak, e) nie, f) tak. **16.** Na trzecim rysunku. **17.** Nie. **18.** 2, 3, $\sqrt{13}$; 1, 2, $\sqrt{5}$; 2, $\sqrt{5}$, 3; 1,5, 2, 2,5; $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $3\sqrt{2}$. **19.** a) Tak, b) nie. **20.** a) $2a$, $a\sqrt{3}$. **21.** Nie. **22.** c) 12, 16, 20, d) 16, 30, 34.

str. 76–80: **1.** a) Trójkąt BDC, b) trójkąt BEC oraz trójkąt BDE, c) trójkąt CBE oraz trójkąt ACD. **13.** 96. **14.** $\sqrt{d^2 - \frac{1}{4}a^2}$, $\sqrt{d^2 - \frac{1}{4}b^2}$, $\sqrt{d^2 - \frac{1}{4}c^2}$. **15.** $\sqrt{26 + 6\sqrt{13}}$. **17.** 130°. **19.** a) 30°, 80°, 70°, b) 40°, 60°, 80°, c) 20°, 50°, 110°. **20.** 3,75. **21.** Wskazówka. a) Skorzystaj z twierdzenia o dwusiecznej dla trójkąta ADC. b) Skorzystaj z równości z punktu a). c) Zauważ, że $\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. **22.** a) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, c) 6, d) $100\sqrt{3}$. **23.** $\frac{30}{7}$, $\frac{5}{7}$, 5. **24.** $2\sqrt{2}$. **25.** Wskazówka. Zauważ, że środkowa trójkąta dzieli go na dwa trójkąty o równych polach. **27.** a) 97°, b) 30°. **28.** 4,5. **29.** b) $\frac{1}{2}\sqrt{2m^2 + 2k^2 - l^2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 + 2l^2 - m^2}$. Wskazówka. Skorzystaj z równości w punkcie a). c) Wskazówka. Skorzystaj ze wzorów udowodnionych w punkcie b).

str. 84–87: **1.** a) Równoległobok: 15, trapez: 24, romb: 12, prostokąt: 18, b) równoległobok: 24, trapez: $21-4{,}5\sqrt{3}$, kwadrat: 18, równoległobok: $4\sqrt{3}+2\sqrt{39}$. **2.** Największe pole — druga; równe pola — pierwsza i czwarta. **3.** a) $\frac{1}{2}d^2$, b) $4\sqrt{P}$, c) $\frac{1}{4}bh$, d) $2\sqrt{e^2+f^2}$, e) $\frac{1}{4}(a+b)\sqrt{4r^2-(a-b)^2}$, f) $a+b+2\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}+\frac{4P^2}{(a+b)^2}}$. **4.** 45. **5.** $25(3+2\sqrt{2})$. **6.** 20. **7.** $2\sqrt{3}$. **8.** $\frac{9-\sqrt{17}}{4}$ i $\frac{17-\sqrt{17}}{4}$. Wskazówka. Zauważ, że dłuższe ramię trapezu musi mieć długość większą niż 2. **9.** $4\sqrt{65}$ cm. **10.** $(21+\sqrt{29})$ cm. **11.** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$, b) $2\sqrt{3}a^2$, c) $4a+4b$. **12.** Kwadrat: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, kwadrat: $\frac{10}{3}$, romb: $10(\sqrt{2}-1)$, trójkąt: $5(\sqrt{3}-1)$. **13.** $9+1{,}5\sqrt{65}$; 13,75; 14. **14.** a) $\sqrt{2}:1$, b) $(2\sqrt{2}-1)$ razy. **15.** $(5-2\sqrt{3})$ m $\approx 1{,}54$ m. **16.** 39 cm. **19.** a) Fałszywe, b) prawdziwe, c) prawdziwe, d) fałszywe.

str. 88: **1.** $\gamma = 40°$. **2.** 2, 2, 3 lub 3, 3, 1. **3.** $\frac{1}{4}$. **4.** $\frac{4\sqrt{14}}{3}$. **5.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **6.** Tak; 5, 15 i $\frac{3\sqrt{10}}{2}$. **7.** 42. **10.** $P=\frac{9\sqrt{3}}{8}$, Obwód $=\frac{5}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}$ lub $P=\frac{9\sqrt{3}}{4}$, Obwód $=4\sqrt{3}+3$. **12.** $\frac{4}{5}$.

str. 94–97: **1.** a) $f\to y=\frac{1}{2}x+1$, $g\to y=x+1$, $h\to y=-x+1$, $k\to y=-\frac{1}{2}x+1$, b) $f\to y=x+3$, $g\to y=3x+2$, $h\to y=-x-2$, $k\to y=-2x+3$. **2.** a) $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$, b) $y=3x+6$. **3.** a) $f(x)=-4x+3$, b) $f(x)=-\frac{3}{14}x-\frac{6}{7}$. **4.** a) $y=-5x+5$, b) $y=\frac{1}{3}x+3$. **6.** a) $y=\begin{cases}x+1 & \text{dla } x\in\langle -3;1\rangle\\ -2x+4 & \text{dla } x\in(1;3\rangle\end{cases}$, b) $y=\begin{cases}-\frac{4}{3}x-2 & \text{dla } x\in(-3;0\rangle\\ -2 & \text{dla } x\in(0;3)\end{cases}$, c) $y=\begin{cases}\frac{1}{2}x+3 & \text{dla } x\in\langle -4;-2\rangle\\ 2 & \text{dla } x\in(-2;1\rangle\\ -2x+4 & \text{dla } x\in(1;3)\end{cases}$. **7.** a) $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x+5)$, $g(x)=\frac{1}{2}(x+2)(x-5)$, $h(x)=-\frac{1}{2}(x+2)(x-5)$, b) $f(x)=-2(x+2)^2+5$, $g(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+5$, $h(x)=-2(x-2)^2+5$, c) $f(x)=x^2+2x+4$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+4$, $h(x)=x^2-2x-4$, d) $f(x)=-(x+4)^2+8$, $g(x)=-(x+2)(x-3)$, $h(x)=-x^2+6x-5$. **8.** a) $y=-\frac{1}{4}(x+3)(x-4)$, b) $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+3$, c) $y=-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x-1$. **10.** a) $f(x)=\begin{cases}x(2-x) & \text{dla } x\leqslant 2\\ 6x-12 & \text{dla } x>2\end{cases}$, b) $f(x)=\begin{cases}-x(x+2) & \text{dla } x\leqslant 0\\ -x(x-4)+1 & \text{dla } x>0\end{cases}$, c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{3}-3 & \text{dla } x\in(-3;3)\\ x+3 & \text{dla } x\in\mathbb{R}\setminus(-3;3)\end{cases}$. **11.** Ⓐ — k, Ⓑ — h, Ⓒ — f, Ⓓ — g. **12.** $g(x)=(\pi-3)x^5$. **13.** a) Dziedzina funkcji: $\langle -3;4\rangle$, zbiór wartości: $\langle -13{,}5;0\rangle\cup\{4\}$, funkcja rosnąca w $\langle -3;0\rangle$, stała w $(0;4\rangle$, $y>0$ dla $x\in(0;4\rangle$, $y<0$ dla $x\in\langle -3;0)$, b) dziedzina funkcji: $(-2;3\rangle$, zbiór wartości: $\langle -81;-16\rangle\cup\langle 0;4\rangle$, funkcja malejąca, $y>0$ dla $x\in(-2;2)$, $y<0$ dla $x\in(2;3\rangle$. **14.** b) $x\in(0;+\infty)$. **15.** 3 dla obu wykładników parzystych lub obu — nieparzystych, 2 — dla jednego wykładnika parzystego i drugiego — nieparzystego. **16.** a) W jednym; jedno, b) w dwóch, dwa, c) jedno. **17.** b) $x\in(-\infty;-2\rangle$. **18.** a) $f_1(x)=-\frac{1}{2}x^4$, $f_2(x)=\frac{1}{2}(x-3)^4$, $f_3(x)=-\frac{1}{2}(x+3)^4-1$, b) $f_1(x)=\frac{1}{5}x^5-3$, $f_2(x)=\frac{1}{5}(x+3)^5$, $f_3(x)=-\frac{1}{5}(x+3)^5$.

str. 100–102: **1.** a) $x\in(-\infty;1)\cup(3;4)$, b) $x\in\langle 3;+\infty)$, c) $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;1)$, d) $x\in\langle 2;3\rangle$, e) $x\in(-\infty;-4)\cup(-3;-1)\cup(2;+\infty)$, f) $x\in(-\infty;-4\rangle\cup\langle -1;+\infty)$. **2.** a) $x\in\langle 5;+\infty)\cup\{2\}$, b) $x\in(-\infty;-4\rangle\cup\langle -2;2\rangle$, c) $x\in\langle -4;0\rangle\cup\langle 2;3\rangle$. **3.** a) $f(x)\cdot g(x)>0$, b) $f(x)\cdot g(x)\geqslant 0$, c) $f(x)\cdot g(x)>0$. **4.** a) $x\in(-\infty;-1\rangle\cup\langle 0;+\infty)$, b) $x\in(0;9)$, c) $x\in(-2;0)$, d) $x\in(0;5)\cup(5;+\infty)$, e) $x\in(-2;0)\cup(2;+\infty)$, f) $x\in(-\infty;1-\sqrt{2}\rangle\cup\langle 0;1+\sqrt{2}\rangle$. **5.** a) $x\in(-\infty;-\sqrt{2}\rangle\cup\langle 1;\sqrt{2}\rangle$, b) $x\in(-\infty;-2\rangle\cup\langle 3;+\infty)$,

c) $x \in \left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$, d) $x \in \{-4\} \cup \langle 3;+\infty)$, e) $x \in \langle -2;0\rangle \cup \{5\}$, f) $x \in \left(-\sqrt{10};-\frac{2\sqrt{15}}{3}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{2\sqrt{15}}{3};\sqrt{10}\right)$, g) $x \in \left(-\infty;1-2\sqrt{3}\right\rangle \cup \langle 0;1\rangle \cup \langle 1+2\sqrt{3};+\infty)$, h) $x \in (-\infty;-4) \cup (-1;1) \cup (5;+\infty)$. **6.** a) $x \in (-\infty;0) \cup (0;10)$, b) $x \in (-\infty;0\rangle \cup \langle \frac{1}{2};+\infty)$, c) $x \in (-\infty;-2) \cup (0;3)$, d) $x \in \left(-\frac{1}{2};0\right) \cup (2;+\infty)$, e) $x \in (-\infty;-1) \cup \left(\frac{3}{4};1\right)$, f) $x \in \langle -3;\frac{1}{2}\rangle \cup \langle 3;+\infty)$, g) $x \in (-\infty;-5\rangle$, h) $x \in \left(-\infty;-1\right\rangle \cup \langle 2;+\infty)$. **7.** a) Dla $p \in \left(-3;-1\right) \cup \left(3;+\infty\right)$, b) dla $n = 3$ lub $n = 4$. **8.** a) $\langle -2;2\rangle \cup \langle 3;+\infty)$, b) $\mathbb{R}$, c) $\left(-3;-\frac{1}{2}\right) \cup \left(5;+\infty\right)$, d) $\left(-5;-3\right\rangle \cup \langle 3;+\infty)$. **9.** Dla $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

str. 105–107: **1.** f i h. **3.** a) 6, b) 4, c) 5. **4.** a) ③, b) ①, c) ②. **5.** Parzystokrotne: -3, -1, 4, nieparzystokrotne: 1, 2, 3; wszystkie sześć. **7.** ② i ③. **8.** a) $(1,20)$, b) $a \neq 0$, $b = 0$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ lub $a = 0$, $b = 0$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ c) $a \neq 0$, $2b^3 - 9abc = 0$ lub $a = 0$, $b = 0$, $c \in \mathbb{R}$.

str. 109–110: **1.** a) $x \in \langle \frac{1}{2};1\rangle \cup \{3\}$, b) $x \in \left(-\infty;0\right\rangle \cup \{3\}$, c) $x \in \left(-\sqrt{3};0\right) \cup \left(0;\sqrt{2}\right)$, d) $x \in (1;7) \cup (7;+\infty)$, e) $x \in (-\infty;-2) \cup (0;1)$, f) $x \in \left(-\infty;\frac{4}{5}\right)$, g) $x \in \left(-\infty;\frac{1}{2}\right\rangle \cup$ $\cup \{2\} \cup \langle 3;+\infty)$, h) $x \in \left(-\infty;\frac{3}{2}\right) \setminus \{1\}$. **2.** a) $x \in \left(-\infty;-5\right\rangle \cup \langle -3;5\rangle \cup \langle 13;+\infty)$, b) $x \in \langle -\infty;-10\rangle \cup \langle 3;10\rangle$, c) $x \in \left(-\sqrt{2};\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};\sqrt{2}\right)$, d) $x \in (-\infty;-2) \cup (2;5) \cup (5;+\infty)$. **3.** a) $x \in \left(-\infty;-5\right\rangle \cup \{5\}$, b) $x \in (-\infty;2{,}5) \cup (2{,}5;3)$, c) $x \in (-2;0) \cup (2;+\infty)$, d) $x \in \left(-\infty;5\right\rangle$, e) $x \in (-1;1) \cup (3;+\infty)$, f) $x \in \left(-\infty;-1\right\rangle \cup \langle \frac{1}{2};\frac{2}{3}\rangle \cup \langle 1;+\infty)$. **4.** a) $x \in \langle -2;+\infty)$, b) $x \in (-\infty;-2) \cup (1;2)$, c) $x \in \left(-\infty;-3\right\rangle \cup \{0,1\}$, d) $x \in (-\infty;-3) \cup$ $\cup (0;3) \cup (3;+\infty)$. **5.** a) Dla $x \in (-1;0)$, b) dla $x \in (-5;1)$, c) dla $x \in (-\infty;-4) \cup$ $\cup (4;+\infty)$. **6.** a) $x \in \emptyset$, b) $x \in (-5;4) \cup (6;9)$, c) $x \in (-\infty;-3) \cup (-3;-1) \cup$ $\cup (-1;1) \cup (6;+\infty)$. **7.** a) $x \in \langle -5;-2\rangle \cup \langle 2;+\infty)$, b) $x \in (-\infty;-3) \cup \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, c) $x \in \langle 0;7\rangle$, d) $x \in (5;+\infty)$. **9.** a) $x \in \langle -5;-2\rangle \cup \langle 2;+\infty)$, b) $x \in \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};3\right)$.

str. 116–120: **1.** ① — f, ② — k, ③ — g, ④ — h. **2.** a i d, b i g, h i j. **3.** a) Dla $a = 2$, b) dla $a = \frac{1}{3}$. **4.** a) Dla $a = \frac{1}{3}$ i $b = 6$, b) dla $a = 16$ i $b = \frac{1}{2}$. **5.** ① i ③. **6.** a) $\left(2;+\infty\right)$, b) $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$, c) $\left(-\infty;-3\right) \cup \left(3;+\infty\right)$, d) $\left(-\infty;-2\right) \cup \left(5;+\infty\right)$, e) $\left(0;+\infty\right) \setminus \{1\}$, f) $\left(3;+\infty\right) \setminus \{4\}$, g) $\left(0;+\infty\right) \setminus \{1\}$, h) $\left(0;2\right) \setminus \{1\}$, i) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **7.** Ⓐ — ②, Ⓑ — ⑥, Ⓒ — ①, Ⓓ — ④, Ⓔ — ③, Ⓕ — ⑤. **8.** a) $a = \log\frac{1}{3}$, $b = 5$, b) $a = 10^{-8}$, $b = -\frac{1}{2}$. **9.** a) Dla $a = 5$ i $b = -3$, b) dla $a = 4$ i $b = -2$. **10.** ③. **11.** ① — h, ② — g, ③ — f, ④ — k. **13.** ① — f, ② — h, ③ — m, ④ — g, ⑤ — l, ⑥ — k. **14.** Asymptoty — funkcji f: $y = 2$, funkcji g: $y = -5$, funkcji h: $y = 0$, funkcji k: $y = 0$; a) f, b) f, h, c) g, d) f, g, h, k. **15.** a) $y = 5$, $(0,6)$, b) $y = 0$, $\left(0,\frac{1}{16}\right)$, c) $y = 7$, $\left(0,7\frac{1}{1000}\right)$, d) $y = -1$, $(0,0)$, e) $y = -3$, $(0,-2)$, f) $y = -5$, $\left(0,-4\frac{24}{25}\right)$. **18.** h i m, i i l, j i g. **19.** f — Ⓒ, g — Ⓐ, d — Ⓓ, k — Ⓑ. **20.** $D_f = \left(13;+\infty\right)$, $D_g = \left(-10;+\infty\right)$, $D_h = \left(0;+\infty\right)$, $D_k = \left(0;+\infty\right)$; asymptoty — funkcji f: $x = 13$, funkcji g: $x = -10$, funkcji h: $x = 0$, funkcji k: $x = 0$; a) f, g, b) f, g, h, k, c) g, d) f, g, h, k. **21.** a) $x = 2$, $(3,0)$, b) $x = -3$, $(-2,0)$, c) $x = 0$, $\left(\frac{1}{9},0\right)$, d) $x = 0$, $\left(\frac{1}{16},0\right)$, e) $x = 0$, $(5,0)$, f) $x = 5$, $\left(5\frac{1}{10},0\right)$. **24.** a) $f_1(x) = -5^x$, $g_1(x) = -\log x$, b) $f_2(x) = 5^{-x}$, $g_2(x) = \log(-x)$, c) $f_3(x) = \log_5 x$, $g_3(x) = 10^x$, d) $f_4(x) = \log_5\left(-\frac{1}{x}\right)$, $g_4(x) = -10^{-x}$.

str. 126–128: **1.** a) $x = -3$, b) $x = -4$, c) $x = \frac{3}{2}$, d) $x = -\frac{2}{3}$, e) $x = -10$, f) $x = \frac{2}{3}$, g) $x = \frac{1}{4}$, h) $x = -4$, i) $x = -\frac{9}{2}$, j) $x = 2{,}5$, k) $x = -\frac{1}{4}$, l) $x = \frac{2}{3}$. **2.** a) $x = 1$, b) $x = 2$, c) $x = -2$,

d) $x = 2$, e) $x = \frac{1}{2}$, f) $x = -\frac{1}{2}$, g) $x = -5$, h) $x = 2$, i) $x = -1$, j) $x = -\frac{3}{2}$, k) $x = \frac{5}{3}$, l) $x = -\frac{1}{4}$, m) $x = -\frac{4}{5}$, n) $x = \frac{17}{2}$, o) $x = -4$. **3.** a) $x = \log_7 3$, b) $x = \log_6 2$, c) $x = \log_3 4 - 1$, d) $x = \log_5 2$, e) $x = \frac{1}{2}\log_3 10$, f) $x = \frac{1}{3}\log_7 \frac{1}{3}$, g) $x = \frac{1}{3}\log_2 5 + \frac{1}{3}$, h) $x = \frac{\log_4 3 - 3}{2}$, i) $x = 3 + \log_{\frac{2}{3}} 2$. **4.** a) $\left(-2, \frac{1}{9}\right)$, b) $\left(\frac{1}{4}, \sqrt[4]{5}\right)$. **5.** a) $x = \frac{1}{2}$, $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, b) $x = \log_{\frac{1}{2}} 5$, $x \in \left(\log_{\frac{1}{2}} 5; +\infty\right)$, c) $x = -2$, $x \in \left(-\infty; -2\right)$, d) $x = \log_6 5$, $x \in \left(-\infty; \log_6 5\right)$. **6.** a) $x = \log_{\frac{7}{3}} 5$, b) $x = \log_{\frac{2}{5}} 3$, c) $x = \log_{2,5} 2$, d) $x = \log_{1,5} 0{,}5$, e) $x = \log_{20} 4$, f) $x = \log_6 5$, g) $x = \log_5 2$, h) $x = \log_7 3$, i) $x = \log_{0,5} 5$. **7.** a) $x = 125$, b) $x = 9$, c) $x = \sqrt{6}$, d) $x = 16$, e) $x = 125$, f) $x = \frac{1}{16}$. **8.** a) Równanie sprzeczne, b) $x = 2$, c) $x = 3$, d) równanie sprzeczne, e) równanie sprzeczne, f) $x = 2$. **9.** a) $x = 20$, b) $x = \frac{8}{3}$, c) $x = \frac{7}{4}$, d) $x = \frac{8}{25}$, e) $x = 12$, f) $x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, g) $x = 100$, h) $x = 25$. **10.** a) $x = 32$, b) $x = \frac{1}{4}$, c) $x = 1{,}55$, d) $x = -5\frac{7}{8}$, e) $x_1 = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}$, f) $x_1 = -\frac{\sqrt{78}}{9}$, $x_2 = \frac{\sqrt{78}}{9}$. **11.** a) $x = 5$, b) $x = 1{,}5$, c) $x = 5$, d) $x = 75$, e) $x = 6$, f) $x = \frac{5}{8}$. **12.** a) $x = 81$, b) $x = 8$, c) $x = 16$. **13.** a) $x_1 = 64$, $x_2 = \frac{1}{64}$, b) $x_1 = 3125$, $x_2 = \frac{1}{3125}$, c) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{4}$, d) $x_1 = 1000$, $x_2 = \frac{1}{10}$, e) $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = 2$, f) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 81$, g) $x_1 = 3\sqrt{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, h) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 4$. **14.** a) $x = 10$, b) $x = \frac{1}{5}$, c) $x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, d) $x = \frac{1}{8}$, e) $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{8}$, f) $x = 3\sqrt[3]{3}$, g) $x = \frac{1}{162}$, h) $x = 343$. **15.** a) $\left(\sqrt{10}, \frac{1}{2}\right)$, b) $(9, 6)$. **16.** a) $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 25$, b) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 8$, c) $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = 1$. Wskazówka. Logarytmy obu stron równania muszą być równe.

str. 133–137: **1.** $L(t) = 30{,}5 \cdot 1{,}013^t$, gdzie t — czas (w latach) od 1962 r., a) około 33,8 mln, c) około 2001 roku. **2.** a) $a = 50$, $b = 0{,}4^{\frac{1}{6}} \approx 0{,}86$, b) $m_1 \approx 43$ mg, $m_{24} \approx 1{,}3$ mg, c) po 10 godzinach. **3.** a) Po około 4 latach, b) około 9 lat. **4.** a) $10^{-11}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$, b) 10^7 razy mniejsze, c) około 103 dB, d) około 40 dB, e) około 120 dB, f) 100 młotów. **5.** a) Około 420 pracowników; około 498 pracowników (czyli prawie wszyscy), b) około 16% kierowców; po około 10 dniach. **6.** b) Około 0,63 g, c) po około 8 godzinach i 18 minutach, d) około 30 lat. **7.** a) 425 cyfr. **8.** a) Około 61%, b) nie, c) około 96%, d) około 12 117 lat. **9.** $T(t) = 20 + 70 \cdot 0{,}88^t$, gdzie t — czas (w minutach). **10.** a) 225°C, b) około 95°C, c) po około 35 minutach. **11.** Około 15:18.

str. 138: **1.** $x = -7$, $x = -1 - \sqrt{3}$, $x = -1 + \sqrt{3}$, $x = 48$, funkcja rosnąca w $\left(-\infty; -4\right\rangle$, $\left\langle -1; 4\right\rangle$, funkcja malejąca w $\left\langle -4; -1\right\rangle$, $\left\langle 4; +\infty\right)$. **2.** n — liczba parzysta, $a < 0$, $b < 0$. **3.** a) $x \in \left\langle -6; 0\right\rangle \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$, b) $x \in \left(-\sqrt{2}; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$, c) $x \in \left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right) \cup \left(5; +\infty\right)$. **4.** Dla $x \in \left(-\infty; -2\right) \cup \left(5; +\infty\right)$. **5.** a) $x \in \left(-\infty; -5\right) \cup \left(-5; -2\right)$, b) $x \in \left(-2; 0\right) \cup \left(0; 4\right) \cup \left(4; +\infty\right)$. **6.** Dla $x \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(2; +\infty\right)$. **7.** $f \to ①$, $g \to ②$, $h \to ③$, $k \to ④$. **8.** a) Miejsce zerowe: $x = 5$, równanie asymptoty: $x = 5$, b) miejsce zerowe: $x = -4$, równanie asymptoty: $x = 0$, c) miejsca zerowe: $x = \frac{1}{8}$, $x = 8$, równanie asymptoty: $x = 0$. **9.** a) $a = \frac{1}{2}$, $b = 5$, b) $a = 7$, $b = \frac{1}{3}$. **10.** a) $x = -1{,}5$, b) $x = -1$, c) $x = \log_6 9$, d) $x = 9$, e) $x = \frac{1}{16}$, $x = 16$, f) $x = 0{,}03$. **11.** Około 27 minut.

str. 143–145: **1.** a) 49π, b) 36π, c) 17π, d) $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$, e) $\frac{5}{2\pi}$, f) $4\sqrt{\pi}$. **2.** a) $l = d\pi$, b) $P = \frac{l^2}{4\pi}$, c) $d = \frac{2\sqrt{P\pi}}{\pi}$, d) $l = 2\sqrt{P\pi}$. **3.** a) 16π cm, b) 384π cm, c) 4π cm, d) 12π cm. **4.** 5π, $48 - 6{,}5\pi$, $36 - 9\pi$, $18\pi - 36$. **5.** $\frac{R\sqrt{6}}{6}$. **6.** b) Niebieska. **7.** a) $r\sqrt{\pi}$, b) kwadrat;

$\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}$ razy. **8.** Około 29 800; około 500; około 8. **9.** 5. **10.** Około 107 600 km/h. **11.** Około 1668,19 km/h; jest o około 0,26 km/h większa od prędkości punktu na powierzchni Ziemi. **12.** a) $l = 6\pi$, $P = 36\pi$, b) $l = 5\pi$, $P = 37{,}5\pi$, c) $l = 15\pi$, $P = 150\pi$, d) $l = 16\pi$, $P = 96\pi$, e) $l = \frac{40}{3}\pi$, $P = 100\pi$. **13.** a) Są równe. b) Dolny; 2 razy. **14.** a) 8, b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **15.** a) $P = \frac{5}{4}\pi$, $l = \frac{13}{6}\pi$, b) $P = 4\pi - 8$, $l = 6\pi$, c) $P = \sqrt{3}$, $l = \frac{5}{3}\pi$, d) $P = 9\pi$, $l = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$. **16.** 360π m $\approx$ 1131 m. **17.** a) $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ$, b) $\frac{\pi}{2}$ radianów. **18.** $\frac{11}{288}\pi$ m $\approx$ 12 cm; 27,5 sekundy.

str. 148–150: **1.** $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 32^\circ$, $\gamma = 37^\circ$, $\delta = 29^\circ$. **2.** $\alpha = 258^\circ$, $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 110^\circ$, $\delta = 110^\circ$. **4.** 30° lub 150°. **5.** 40 cm^2. **6.** a) 70°, 90°, 20°, b) 90°, 115°, 90°, 65°, c) 20°, 40°, 120°, d) 45°, 65°, 70°. **7.** $\frac{1}{6}$. **8.** 45°. **10.** 6 m. **11.** a) $|\sphericalangle DCB| = 57^\circ 12'$, $|\sphericalangle ADB| = 31^\circ 46'$, b) $|\sphericalangle DCB| = 27^\circ 14'$, $|\sphericalangle ADB| = 125^\circ 20'$.

str. 155–158: **1.** a) 1, b) nie, c) mniejszy niż 1, d) większy niż 2 i mniejszy niż 3, e) większy niż 1 i mniejszy niż 2, f) 4. **2.** a) 36°, b) 42°, c) 45°. **3.** $2\alpha + \beta = 180^\circ$. **4.** $5\sqrt{2}$. **5.** 10. **6.** 10π. **7.** a) Około 4372 m, b) o około 9453 m, c) tak. **8.** a) 68, b) 66. **9.** 24 cm. **11.** a) $\beta = \alpha$, b) $\beta = 90^\circ - \alpha$, c) $\beta = \frac{1}{2}\alpha$. **14.** a) 7 cm, b) 1 cm, c) większa niż 1 cm i mniejsza niż 7 cm, d) mniejsza niż 1 cm lub większa niż 7 cm. **15.** 5; 8. **16.** a) 6, 3, 1,5, b) 4, 4, c) 3,5, 3,5. **17.** 2,5 lub 12,5. **18.** 5, 3, 7. **19.** $2r(\sqrt{2} - 1)$. **20.** $(6{,}38 + 3{,}19\sqrt{3})$ cm $\times$ 12,76 cm $\times$ 6,38 cm, czyli w przybliżeniu 11,9 cm $\times$ 12,8 cm $\times$ 6,4 cm. **21.** $2r$. **22.** $\frac{r}{3}$. **23.** a) $5r^2$, b) $-\frac{3}{4}r^2$, c) $20r^2$.

str. 162–164: **1.** a) Nie, b) tak, c) tak. **2.** a) 6,5, b) 5. **3.** ②, ③, ④, ⑤. **4.** $2(3 + \sqrt{5})$ cm. **5.** a) 6,5 cm, b) $5\sqrt{2}$ cm. **6.** a) Tak, b) nie, c) tak. **7.** a) 90°, 117°, 90°, 63°, b) 89°, 76°, 91°, 104°, c) 84°, 79°, 96°, 101°. **8.** a) Nie, b) Ich suma musi mieć 180°, jeśli podane w zadaniu kąty są przeciwległe, lub mogą mieć miary 98° i 82°, jeśli podane w zadaniu kąty są kątami sąsiednimi. **10.** 110° i 110°. **11.** Wskazówka. Rozważ czworokąt $AD'BC$, gdzie D' jest punktem symetrycznym do punktu D względem odcinka AB. **12.** Tak, ale tylko wtedy, gdy kolejne kąty tego czworokąta mają miary: 87°, 91°, 93°, 89°. **13.** Wskazówka. Zauważ, że $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle PCA|$.

str. 168–169: **1.** a) $|\sphericalangle CAB| = 40^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$, $|\sphericalangle BCA| = 80^\circ$, $\alpha_1 = 130^\circ$, $\alpha_2 = 110^\circ$, $\alpha_3 = 120^\circ$, $|\sphericalangle FDE| = 70^\circ$, $|\sphericalangle DEF| = 70^\circ$, $|\sphericalangle EFD| = 40^\circ$, $\beta_1 = 110^\circ$, $\beta_2 = 125^\circ$, $\beta_3 = 125^\circ$, $|\sphericalangle IGH| = 90^\circ$, $|\sphericalangle GHI| = 40^\circ$, $|\sphericalangle HIG| = 50^\circ$, $\gamma_1 = 115^\circ$, $\gamma_2 = 135^\circ$, $\gamma_3 = 110^\circ$. **3.** 140°. **5.** 15°. **6.** Wskazówka. Skorzystaj z własności kątów środkowych i wpisanych opartych na tym samym łuku. **7.** a) 36, b) 42, c) 38. **8.** a) Tak, b) nie, c) tak. **9.** Tak, o ile pary przeciwległych boków tego czworokąta to: $n - 1$ i $n + 1$ oraz n i $n + 2$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ (czyli najdłuższy bok leży naprzeciw najkrótszego). **11.** 5 i 5. **14.** $\frac{30\sqrt{61}}{61}$. **15.** a) $r = 3$, $R = 8{,}5$, b) $r = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$, c) $r = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{11}}{2}$, $R = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

str. 173–177: **1.** a) 900°, 17 640°, b) 8, c) nie, d) 150°. **4.** a) 27; 19 700, b) 15, c) nie; tak, d) tak. **5.** a) 2880°, b) 4140°. **6.** a) $\frac{20}{3}\pi\sqrt{3}$, b) $\frac{5}{3}\pi\sqrt{3}$. **7.** a) 4 razy, b) $\frac{2}{9}\pi\sqrt{3}$ razy.

8. a) 12, b) $6\sqrt{3}$. **9.** O $5(\sqrt{2}-1)$ cm. **10.** a) $\frac{75\sqrt{3}}{2}$, b) $10\pi\sqrt{3}$. **11.** a) 4, $2\sqrt{3}$, b) 36. **12.** b) $6a(1+\sqrt{3})$; $(1+\sqrt{3})$ razy. **13.** a) Tak, b) tak. **14.** $\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt[4]{108}}{2}$ razy. **15.** Tak. **18.** b) $\frac{a}{1+\sqrt{2}} = a(\sqrt{2}-1)$. **19.** $4\sqrt{4+2\sqrt{2}}$, $4\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 4(1+\sqrt{2})$, $4\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Wskazówka. Rozważ najmniejszy z kwadratów, w którym mieści się ośmiokąt foremny. **20.** a) 45°, b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, c) $50\sqrt{2}$. **22.** a) 4, b) nie, c) jest parzysta; $\frac{n}{2}$. **23.** a) 12, b) nie. **24.** a) 162°, b) 360, c) nie, tak. **25.** $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle AGC| = |\sphericalangle AFB| = 108°$, $|\sphericalangle ECA| = |\sphericalangle AEB| = 36°$. **26.** a) 15°, b) 30°, c) 60°. **27.** 15. **28.** Dla każdego $n \geqslant 3$ będącego dzielnikiem liczby 36. **29.** $180°-\alpha$.

str. 178: **1.** $5\pi r$. **2.** $90°-\frac{\alpha+\beta}{2}$. **3.** a) $10+10\sqrt{3}$, b) $(2+4\sqrt{2})r$. **4.** 65°, 65° i 50° lub 15°, 50° i 115°. **6.** 6,25. **7.** 60°. **8.** 65°, 60° i 55°. **9.** 72. **10.** a) 20, b) 16, c) o $n-1$ więcej. **11.** a) 360 boków, b) nie; tak. **12.** Kwadrat.

str. 182–184: **1.** a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{7}$, b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{6}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{6}{7}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7\sqrt{15}}{15}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{15}}{7}$, d) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$. **2.** a) $\frac{5}{3}$, b) $\frac{\sqrt{11}}{2}$, c) $\frac{3}{7}$. **3.** a) 0,3, b) 5. **4.** a) 4,5, b) 4, c) $\sqrt{3}$, d) 4. **5.** 9 cm. **6.** 108 cm^2. **10.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$; 25%. **11.** a) $\operatorname{tg}\beta$, b) największa — $\operatorname{tg}76°$, najmniejsza — $\operatorname{tg}1°$, c) γ. **12.** a) 45°, b) $\operatorname{tg}46°$, $\operatorname{tg}80°$, $\operatorname{tg}89°$. **13.** Nie. **14.** Wskazówka. Oblicz tangensy odpowiednich kątów.

str. 187–189: **1.** $\sin\alpha = \frac{n}{m}$, $\cos\alpha = \frac{p}{m}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{n}{p}$, $\sin\beta = \frac{y}{z}$, $\cos\beta = \frac{x}{z}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{x}$, $\sin\gamma = \frac{|BC|}{|AC|}$, $\cos\gamma = \frac{|AB|}{|AC|}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{|BC|}{|AB|}$. **2.** a) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\beta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{2}$, b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$. **3.** a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\beta = \frac{3}{4}$, b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, c) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{5}$. **4.** $\alpha = \sphericalangle EDF$, $\beta = \sphericalangle LKM$, $\gamma = \sphericalangle ACB$, $\delta = \sphericalangle HGI$. **5.** a) Kolejno: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$. **6.** a) $\frac{5}{3}$, b) 4,5, c) 5,6. **7.** a) $p\cdot\sin\alpha$, $p\cdot\cos\alpha$, b) $\frac{m}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{m}{\sin\alpha}$. **10.** $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \sin\alpha$, $c = \cos\alpha$, $d = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. **11.** a) $\sin\alpha < \sin\beta$, b) $\cos\gamma < \cos\delta$. **12.** a) α, b) β. **13.** a) $\frac{h^2}{\operatorname{tg}\alpha}$, b) $d^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ lub $d^2\cdot\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$, lub $d^2\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$, c) $\frac{a}{\cos\alpha}+a$.

str. 193–195: **1.** a) Około 3,63, b) około 2,8, c) około 2,46, d) około 4,48. **2.** Około 102,5 cm^2. **3.** a) Około 0,37, b) około 0,31, c) około 0,67. **4.** a) Około 3,27, b) około 3,73, c) około 1,88. **5.** a) 66°, $b \approx 2{,}25$, $c \approx 2{,}46$, b) 32°, $a \approx 9{,}6$, $c \approx 11{,}32$, c) 54°, $a \approx 4{,}11$, $b \approx 5{,}66$. **6.** Około 20,1 cm^2 lub około 33,6 cm^2. **7.** Około 21 cm^2. **8.** Około 2,9 cm i około 7,9 cm. **9.** Około 4,7 cm. **10.** a) $|AC| = |BC| \approx 7{,}8$, b) $|EF| \approx 13{,}1$, $|DE| \approx 8{,}9$, c) $|GI| \approx 11{,}5$, $|HI| \approx 4$, $|GH| \approx 10{,}2$. **11.** Około 6,6 cm i około 9,4 cm. **12.** Około 4,5 cm i około 8,9 cm. **13.** a) Około 6,9, b) około 6,4, c) około 10,7. **14.** a) Około 4,7 cm, b) około 3,2 cm, około 3,1 cm. **15.** a) Około 44°, b) około 54°, c) około 39°. **16.** I — 90°, około 59°, około 31°, II — 90°, około 54°, około 36°, III — 90°, około 86°, około 4°, IV — 45°, około 82°, około 53°, V — około 76°, około 76°, około 28°, VI — 90°, około 37°, około 53°. **17.** Około 27°, około 63°. **18.** Około 73°, około 73°, około 34°. **19.** a) $\alpha = 45°$, $\beta \approx 27°$, $\gamma \approx 18°$, b) $a \approx 0{,}8$, $b \approx 0{,}9$, $c \approx 1$. **20.** a) 60°, 120°, 60°, 120°, b) 90°, około 53°, około 127°, 90°, c) około 78°, około 78°, około 102°, około 102°, d) około 53°, około 42°, około 138°, około 127°, e) około 74°, około 106°, około 74°, około 106°, f) około 42°, około 138°, około 42°, około 138°.

str. 198–200: **1.** Polanica — około 19,7°, Goryczkowa — około 20,3°, Hala Szrenicka — około 10,2°, Łabski Szczyt — około 16,1°. **2.** O około 6°. **3.** Kolejno: o około 5,44°, o około 5,36°, o około 3,37°, o około 0,42°. **4.** a) Około 3,2 m, b) około 1,5 m, c) około 160 m, d) około 230,5 m. **5.** Nie mniejsza niż około 11,5 m. **6.** Około 22°. **7.** Około 48°, około 2°. **8.** Około 51°. **9.** Wysokość około 80 m; długość około 510 m. **10.** a) A — ok. 35,9 m, B — ok. 6,1 m, b) ok. 1,3 m. **11.** a) Około 20,7 m, około 23,8 m, około 28,3 m, b) około 7,6 m, około 7 m. **12.** a) Około 27,5 m, b) około 11,1 m. **13.** Około 58 cm. **14.** O około 31°. **15.** $\left(20\sqrt{21}+\frac{76}{3}\pi\right)$ cm $\approx$ 171 cm. **16.** $(60\sqrt{3}+60\pi)$ cm $\approx$ 292 cm.

str. 202–203: **1.** a) $a=\frac{5\sqrt{3}}{3}$, $b=\frac{10\sqrt{3}}{3}$, b) $c=d=3\sqrt{2}$, c) $e=3{,}5\sqrt{3}$, $f=3{,}5$. **2.** a) 8, b) $\sqrt{6}$, c) $4\sqrt{3}$. **3.** a) $10+5\sqrt{3}$, b) $6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$, c) $7{,}5+2{,}5\sqrt{3}+2{,}5\sqrt{6}$. **4.** a) 45, b) $\frac{121\sqrt{3}}{6}$, c) $36+\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **5.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm^2. **6.** 6 cm i $6\sqrt{3}$ cm. **7.** 8 cm. **8.** Nie.

str. 206–207: **1.** a) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, b) $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$, c) $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{15}$, d) $\sin\alpha=\frac{12\sqrt{313}}{313}$, $\cos\alpha=\frac{13\sqrt{313}}{313}$. **2.** $\cos 22{,}5^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\operatorname{tg}22{,}5^\circ=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$. **4.** a) $\operatorname{tg}\alpha$, b) $2\cos^2\alpha$, c) 1, d) $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$, e) 1, f) 1. **7.** a) 1, b) 1, c) 1. **8.** a) $\sin 54^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\sin 36^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, b) $\operatorname{tg}15^\circ=2-\sqrt{3}$, c) $\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **9.** a) 70°, b) 50°, c) 25°. **10.** a) $\alpha=30^\circ$, $\beta=60^\circ$, b) $\alpha=45^\circ$, $\beta=45^\circ$, c) $\alpha=60^\circ$, $\beta=30^\circ$.

str. 212–214: **1.** a) $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=2$, b) $\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\beta=-\frac{1}{3}$, c) $\sin\gamma=\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\gamma=\frac{-2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\gamma=-\frac{3}{2}$. **2.** $\cos 100^\circ$, $\operatorname{tg}105^\circ$. **4.** a) $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$, b) $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{35}$, c) $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$. **5.** a) Około −0,1763, b) około −0,1736, c) około 0,8192, d) około −0,7002. **6.** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, c) $-\frac{1}{2}$, d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** a) $1+\sqrt{2}$, b) 0. **8.** a) 14°, b) 114°, c) 44° lub 136°, d) 40°. **9.** a) Około 17,41, b) około 76,95. **10.** Około 16,4, około 13,6, około 23,9, $32\sqrt{3}$. **11.** a) Około 71°, około 109°, około 71°, około 109°, b) około 26°, około 77°, około 77° lub około 154°, około 13°, około 13°. **12.** a) $P=ab\sin\alpha$, b) $P=\frac{d_1d_2}{2}\sin\beta$. **13.** a) 11,5, b) $8\sqrt{3}$. **14.** a) Około 53,9, b) około 5,1, c) około 10,6, d) około 23,5. **15.** a) 30° lub 150°. Wskazówka. Zadanie ma dwa rozwiązania, gdyż można wskazać dwa kąty spełniające warunek $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, gdy $0^\circ<\alpha<180^\circ$. b) Około 53° lub około 127°. **16.** a) 0,9, około 42°, b) −0,7, około 145°, c) −0,5, około 153°. **17.** a) $y=\sqrt{3}x$, b) $y=-\sqrt{3}x$, c) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$. **18.** $y=\sqrt{3}x+6-4\sqrt{3}$ i $y=-x+10$ lub $y=-\sqrt{3}x+6+4\sqrt{3}$ i $y=x+2$.

str. 218–219: **1.** a) Około 3,8, b) około 3,6, c) około 6,1. **2.** a) Nie, b) tak. **3.** Około 3,5. **4.** a) Około 49°, b) około 27°, c) 75°. **5.** a) $|\sphericalangle BAC|=45^\circ$, $|\sphericalangle ACB|=75^\circ$, b) $|\sphericalangle BAC|=45^\circ$, $|\sphericalangle ACB|=105^\circ$ lub $|\sphericalangle BAC|=135^\circ$, $|\sphericalangle ACB|=15^\circ$. **6.** a) $6\sqrt{2}$, b) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, c) $3\sqrt{6}$. **7.** a) $\frac{a\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$, b) $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin 2\alpha\sin(\beta-\alpha)}$, c) $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(90^\circ+\beta)\sin(\beta-\alpha)}$. **9.** 3,9, $\sqrt{2}$, 49°.

str. 223–225: **1.** a) $\sqrt{43}$, b) $\sqrt{106-45\sqrt{2}}$, c) około 8,6. **2.** a) Około 47°, b) około 44°, c) około 113°. **3.** a) Prostokątny, b) ostrokątny, c) rozwartokątny. **4.** $\sqrt{7}$ i $\sqrt{13}$. **6.** $\sqrt{20+8\sqrt{3}}$ mili $\approx$ 5,8 mili. **7.** Około 29 m. **8.** $\sqrt{7-3\sqrt{2}}$ km $\approx$ 1,7 km. **9.** $\frac{3\sqrt{15}}{8}$. **10.** $|CD|=\sqrt{29-10\sqrt{3}}$, $|CE|=\sqrt{41-20\sqrt{3}}$. **11.** 1,4. **12.** $\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{7}}{2}$. **13.** $\sqrt{13}$.

str. 226: **1.** Około 50°, około 27°, około 103°. **2.** $\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{2}$. **3.** a) $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{15}$, b) $\cos\beta = -\frac{12}{13}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$. **5.** a) $\frac{20}{3}\pi - 4$, b) około 12,07. **6.** Około 108°. **7.** Około 5. **8.** a) Około 63°, b) około 25° lub około 155°, c) około 22°. **9.** a) $\sqrt{21}$, b) $2\sqrt{2}$, c) około 11. **10.** Ostrokątny. **11.** Około 6,1 lub około 1,6. **12.** Nie. **13.** $P = 12\sqrt{3}$, obwód $= 8 + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{19}$. **14.** $a = 5 + \sqrt{13}$, $b = 5 - \sqrt{13}$.

str. 234–238: **1.** 7 ścian, 15 krawędzi, 10 wierzchołków; 5 ścian, 9 krawędzi, 6 wierzchołków; 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków. **2.** a) 50, b) nie, c) tak. **3.** a) Tak, graniastosłup trójkątny, b) nie, c) $n(n-3)$, d) Nie. Wskazówka. Rozważ graniastosłup, którego podstawami są czworokąty niewypukłe. **4.** a) I, b) I, c) G, I. **5.** a) $a\sqrt{3}$, b) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **6.** a) $x = 4\sqrt{2}$, $y = \sqrt{41}$, $z = \sqrt{57}$, b) $p = \sqrt{13}$, $q = 5$, $r = \sqrt{21}$, c) $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{7}$, $c = 4\sqrt{2}$. **7.** a) $\sqrt{59}$, b) $\sqrt{13}$, c) $3\sqrt{3}$. **8.** a) 5, $\sqrt{119}$, b) $5\sqrt{5}$, $2\sqrt{41}$, $3\sqrt{21}$. **9.** a) Czerwony: $\sqrt{27 + 18\sqrt{2}} = 3 + 3\sqrt{2}$, zielony: $3\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$, niebieski: $\sqrt{61 + 18\sqrt{2}}$, b) niebieski: $4\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, zielony: 5, czerwony: $\sqrt{41 + 16\sqrt{2}}$. **10.** a) $\sqrt{p^2 - a^2}$, b) $\sqrt{3a^2 + h^2}$, $\sqrt{4a^2 + h^2}$. **11.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **12.** $a\sqrt{3}$ lub a. **13.** a) $V = 48$, $P_c = 68 + 4\sqrt{13}$, b) $V = 480$, $P_c = 528$, c) $V = 900$, $P_c = 660$. **14.** a) $24\sqrt{3}$, b) $67{,}5\sqrt{3}$, c) $27\sqrt{3}$. **15.** a) $7{,}5\sqrt{3}$, b) $9 + 24\sqrt{2}$. **16.** $P_c = 160$ cm, $V = 96$ cm. **17.** a) $P_c = 2p^2$, $V = \frac{p^3\sqrt{3}}{9}$, b) $d^2 + 2d\sqrt{2p^2 - d^2}$. **18.** a) $42\sqrt{7}$, b) 120, c) 40. **19.** Około 2412 kg. **20.** 16,1952 kg. **21.** 687,5 m^3 = 687 500 litrów. **22.** Krawędź podstawy równa 2 i wysokość równa 1 lub krawędź podstawy równa $\sqrt{5} - 1$ i wysokość równa $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **23.** $V = \sqrt{P_1P_2P_3}$. **24.** a) $5\sqrt{3}$, b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, c) $4\sqrt{2}$. **25.** a) $a = \frac{3\sqrt{2}}{\cos 50^\circ} \approx 6{,}6$, $\alpha \approx 59°$, b) $b = \frac{8\sin 40^\circ}{\sqrt{3}} \approx 2{,}97$, $\alpha \approx 42°$, c) $c = \frac{3}{\operatorname{tg} 20^\circ} \approx 8{,}2$, $\alpha = 56°$. **26.** a) 1500, b) $108\sqrt{6}$, c) $\frac{6561}{64}$. **27.** a) $V = w^3 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$, b) $V = 2p^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = p^3(1 - \cos\alpha)\sqrt{\cos\alpha}$, c) $V = d^3 \sin\beta\cos\beta\operatorname{tg}\alpha$. **28.** $V = \frac{hkl}{\sin\alpha}$.

str. 243–246: **1.** a) 50, b) nie, c) nie. **3.** a) E, C, b) C. **4.** a) $\sqrt{8{,}5}$, b) $\sqrt{5}$, c) $\frac{\sqrt{177}}{3}$. **5.** a) $x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $y = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $z = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, b) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$, c) w stosunku 1 : 3. **6.** a) 10, b) $2\sqrt{11}$. **7.** a) 8, $4\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, b) $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$. **8.** a) 35, b) 240, c) 40. **9.** a) $\frac{25\sqrt{206}}{6}$, b) $\frac{704}{3}$, c) $27\sqrt{6}$. **10.** a) $6\sqrt{6} + \sqrt{3}$, b) $8\sqrt{5} + 16$. **11.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **12.** a) $\frac{32\sqrt{5}}{3}$, b) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$, c) $12\sqrt{2}$. **13.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **14.** a) $3\sqrt{2}$, b) 3, c) $2\sqrt{3}$. **15.** a) $a = \frac{1{,}5}{\sin 15^\circ} \approx 5{,}8$, $\alpha \approx 69°$, b) $b = \frac{2}{\sin 35^\circ} \approx 3{,}5$, $\alpha \approx 33°$, c) $c = 6\cos 40° \approx 4{,}6$, $\alpha \approx 68°$. **16.** a) 36, b) $\frac{256\sqrt{3}}{3}$, c) $\frac{2187\sqrt{3}}{2}$. **17.** Czerwony: $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$, zielony: $\sqrt{19 + 2\sqrt{2}}$, niebieski: $\sqrt{20 + 2\sqrt{2}}$; $\alpha \approx 57°$.

str. 249–252: **1.** Drugi ma większą objętość, a pierwszy ma większe pole powierzchni całkowitej. **2.** a) $72{,}5\pi$, b) $(1 + 2\sqrt{2})8\pi$, c) 42π. **3.** a) 54π, b) $16\sqrt{3}\pi$, c) 48π. **4.** a) Około 49π, b) około 27π, c) około 709π. **5.** $\frac{375}{4}\pi$. **6.** a) $V_1 = 24\pi$, $V_2 = 36\pi$, $P_1 = 32\pi$, $P_2 = 42\pi$; Objętości tych walców różnią się o 12π, a pola powierzchni całkowitej o 10π. b) Walec obracany wokół krótszego boku prostokąta ma większą objętość i pole powierzchni całkowitej. **7.** $V = \frac{a^3\pi}{4}$, $P_c = \frac{3\pi a^2}{2}$. **8.** $\frac{a^2}{\pi}$. **10.** $\frac{p^2(4\pi+1)}{10\pi}$ lub $\frac{2p^2(\pi+1)}{5\pi}$. **11.** 12 świec. **12.** Tak. **13.** Około $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ cm. **14.** a) 80π cm^3, b) 40π cm^3, c) 8π cm^3. **15.** Tak. **16.** Około 0,46 kg. **17.** $\frac{1}{12} - \frac{2\sqrt{3}}{75\pi} \approx 0{,}07$. **18.** $\frac{a^2\pi}{2}(1 + \sqrt{2})$.

str. 256–258: **1.** a) $V = 12\pi$, $P_c = 24\pi$, b) $V = \frac{32\sqrt{21}}{3}\pi$, $P_c = 56\pi$, c) $V = 100\pi$, $P_c = 90\pi$. **2.** a) $V = 30{,}375\sqrt{3}\pi$, $P_b = 40{,}5\pi$, b) $V = 27\sqrt{3}\pi$, $P_b = 72\pi$, c) $V = 144\sqrt{2}\pi$,

$P_b = 72\sqrt{2}\pi$, d) $V = \frac{125\pi}{3\operatorname{tg}35^\circ} \approx 59{,}5\pi$, $P_b = \frac{25\pi}{\sin 35^\circ} \approx 43{,}6\pi$, e) $V = \frac{343\pi \sin 50^\circ \cos^2 50^\circ}{3} \approx 36{,}2\pi$, $P_b = 49\pi \cos 50^\circ \approx 31{,}5\pi$, f) $V = 72\pi \sin^2 35^\circ \cos 35^\circ \approx 19{,}4\pi$, $P_b = 36\pi \sin 35^\circ \approx 20{,}6\pi$. **3.** 9π. **4.** $(75 + 50\sqrt{3})\pi$. **5.** $9\pi\text{cm}^3$. **6.** Większe pole powierzchni całkowitej i objętość ma stożek otrzymany w wyniku obrotu trójkąta wokół krótszej przyprostokątnej. **7.** 180°. **8.** $9\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\pi}$. **9.** a) $131{,}25\pi$, b) $\frac{2125}{36}\pi$, c) $\frac{1375}{9}\pi$, d) $\frac{12025}{144}\pi$. **10.** 288°. **11.** a) $\frac{1}{5}$, b) około 19° i około 113°, c) $\sqrt{\frac{35}{11}} \approx 1{,}8$, d) w pierwszym; około 80°. **13.** a) $\frac{10}{3}\pi a^2 h$, b) $\frac{34}{9}\pi a^2 h$, c) $\frac{11}{3}\pi a^2 h$, d) $\frac{13}{6}\pi a^2 h$, e) $\frac{20}{9}\pi a^2 h$, f) $\frac{11}{9}\pi a^2 h$. **14.** Ostatnia (pozostałe bryły mają równe objętości). **16.** a) 2π cm^3, b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ cm^3, c) 12π cm^3, d) 6π cm^3.

str. 261–263: **1.** a) 36π, b) $\frac{500\pi}{3}$. **2.** $V = \frac{256\pi}{3}$, $P = 64\pi$. **3.** 7,5 litra farby. **4.** a) O około 11%, b) o około 13%. **5.** a) $4\sqrt[3]{9}$ cm, b) 216 kul. **6.** O 1,6 cm. **7.** Największą — pierwszy, najmniejszą — drugi. **8.** a) 1,5 raza, b) 1,6 razy. **9.** Dolny; o $17{,}25\pi$ cm^2. **11.** a) $3\sqrt{3}$, b) 3 razy. **12.** a) $\frac{2}{3}$. **13.** Tak, stosunek objętości wynosi $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi \approx 1{,}5$.

str. 264: **1.** 15 ścian. **2.** $\frac{1}{6}$. **3.** $a = 18$, $b = 6\sqrt{13}$, $c = 9\sqrt{3}$, $d = 3\sqrt{21}$, $e = 4\sqrt{3}$, $f = 2\sqrt{3}$. **4.** $120\sqrt{7}$ cm^3. **5.** $\frac{3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **7.** $\frac{4}{3}r$. **8.** $\frac{1000\pi}{3}$. **9.** $\frac{5\sqrt{23}}{6}$. **10.** a) $\frac{500}{3}\pi + \frac{125}{2}\sqrt{3}$, b) 162π. **11.** $\frac{125}{64} \approx 1{,}95$ razy. **12.** 8 kul.

str. 267–269: **2.** $\pi \approx \frac{864}{275}$. **3.** a) 5, b) 0,5, c) 0,005. **4.** $a = 12{,}13$, $b = 47{,}46$. **5.** a) $\langle 7473{,}25\text{ m}^2 ; 7647{,}25\text{ m}^2 \rangle$, b) $\langle 31\frac{5}{12}\text{ km} ; 38{,}75\text{ km} \rangle$. **7.** a) 2570, 2, 0,08%, b) 100, 5, 5,26%, c) 290, 0,3, 0,1%. **8.** Około 3,05%. **9.** Największy: około 4,76%, najmniejszy: 0%. **10.** a) $a \in \langle 3349 ; 3380 \rangle \cap \mathbb{N}$, b) $b \in \langle 584 ; 590 \rangle \cap \mathbb{N}$. **11.** a) 50 000 zł, b) 25 t.

str. 274–279: **1.** a) $\overline{x} = 106$, mediana — 102, dominanta — 102, b) $\overline{x} = 13\frac{1}{3}$, mediana — 13,5, dominanty brak, c) $\overline{x} = 3{,}(81)$, mediana — 3, dominanta — 2, d) $\overline{x} = 5\frac{1}{3}$, mediana — 5, dominanta — 3. **2.** a) Grupa I: $\overline{x} = 5{,}5(3)$, mediana — 6, dominanta — 10, grupa II: $\overline{x} \approx 6{,}19$, mediana — 5,5, dominanta — 5, b) $\overline{x} \approx 6{,}04$, mediana — 6, dominanta — 10. **3.** Grupa I: $\overline{x} = 3$, mediana — 2, dominanta — 1, grupa II: $\overline{x} \approx 3{,}26$, mediana — 3, dominanty — 3 i 5, obie grupy: $\overline{x} = 3{,}24$, mediana — 3, dominanta — 3. **4.** a) $\overline{x} = 2$ h 6 min 15 s, mediana — 1 h 57 min 30 s, dominanta — 1 h 45 min, b) $\overline{x} = 100{,}1$ g, mediana — 100,4 g, dominanta — 100,4 g. **5.** $\overline{x} \approx 39{,}53$ zapałek, mediana — 40 zapałek, dominanta — 40 zapałek. **6.** $\overline{x} = 2{,}45$ gola, mediana — 3 gole, dominanta — 3 gole. **8.** a) Nie, b) nie, c) tak. **10.** a) Medianę, b) średnią arytmetyczną, c) dominantę. **11.** a) $a = 4$, $b = 1{,}5$ lub $a = 1{,}5$, $b = 4$, b) $c = 5$, $d = 7$ lub $c = 7$, $d = 5$, c) $e = 0$, $f = 7$ lub $e = 7$, $f = 0$. **12.** a) $a = 5$, dominanta — 2, mediana — 2, b) $a = 3$, dominanta — 7, mediana — 7, c) $a = 9$, dominanta — 10, mediana — 6, d) $a = 1$, dominanta — 6, mediana — 6,5. **13.** a) 1,93 m, b) około 2,2 filiżanek kawy. **14.** a) Około 19,8 dag, b) większe — 96 kg, mniejsze — 16 kg. **15.** 80 lat; 73 lata. **16.** 12 500 zł. **17.** O 10 zł. **18.** a) W 1897 roku: około 25% Polaków, a w 1997 roku około 50% Polaków, b) w 1897 roku. **19.** a) 135 uczniów, b) 57 uczniów. **20.** a) Z chemii, b) z chemii, c) z biologii. **21.** a) Uczelnia X: kandydat A: 140 pkt, kandydat B: 143 pkt, kandydat C: 136 pkt, Uczelnia Y: kandydat A: 153 pkt, kandydat B: 143 pkt, kandydat C: 145 pkt; Według

regulaminu uczelni X najlepszy kandydat to B, a najsłabszy kandydat to C. Według regulaminu uczelni Y najlepszy kandydat to A, a najsłabszy kandydat to B.

str. 282–285: **1.** a) 10,8, b) 2,4, c) 6,1, d) 2. **2.** A. Nerwowa: 36,(6)%, A. Wygadany: 38,(3)%. **3.** b) $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{7}{20}$, $c = \frac{9}{20}$. **4.** a) Za pierwszy semestr: 3, za drugi: 4, b) 4. **5.** a) JL3/95: 36%, MK2/55: 90%, MD6/18: 50%, b) JL3/95: 58%, MK2/55: 47%, MD6/18: 44%. **6.** 70%. **7.** Potas: 39,14, miedź: 63,62, żelazo: 55,9, siarka: 32,0925, ołów: 207,24. **8.** Kurs I. **9.** a) Obóz wędkarski. **10.** Chleb pszenny: 241 kcal/100 g, kotlet schabowy: 404 kcal/100 g, orzechy laskowe: 694 kcal/100 g.

str. 290–295: **1.** a) Około 3,03, b) około 13,09, c) 2,5, d) około 3,43. **2.** a) Średnia największa w zestawie II, a odchylenie najmniejsze w zestawie I, b) średnia największa w zestawie II, a odchylenie najmniejsze w zestawie III, c) średnia największa w zestawie II, a odchylenie najmniejsze w zestawie III, d) średnia największa w zestawie III, a odchylenie najmniejsze w zestawie II. **3.** a) Kobiety: $\overline{x} \approx 11{,}14$ s, $\sigma \approx 0{,}16$ s, mężczyźni: $\overline{x} \approx 10{,}05$ s, $\sigma \approx 0{,}09$ s, b) M. Bałtyckie: $\overline{x} \approx 8{,}46°$, $\sigma \approx 5{,}23°$, M. Czerwone: $\overline{x} \approx 28{,}74°$, $\sigma \approx 2{,}21°$, c) Adam Małysz: $\overline{x} = 2{,}75$, $\sigma \approx 1{,}71$, Sven Hannawald: $\overline{x} \approx 8{,}11$, $\sigma \approx 10{,}73$. **4.** Woda mineralna: $\sigma \approx 0{,}23$ zł, puszka groszku: $\sigma \approx 0{,}10$ zł, cukier: $\sigma = 0$ zł. **5.** Średnia arytmetyczna dziennego nasłonecznienia w Gdyni jest mniejsza niż w Krakowie, a odchylenie standardowe dziennego nasłonecznienia w Gdyni jest większe niż w Krakowie. **6.** a) $\overline{x} = 4{,}975$, $\sigma \approx 0{,}69$, b) $\overline{x} = 4{,}85$, $\sigma \approx 0{,}96$, c) $\overline{x} = 1{,}39$, $\sigma \approx 0{,}68$. **8.** a) Średnia arytmetyczna danych zestawu I jest mniejsza niż średnia arytmetyczna danych zestawu II, a odchylenia standardowe są równe (zestaw I: $\overline{x} = 6$, $\sigma \approx 2{,}45$, zestaw II: $\overline{x} = 7$, $\sigma \approx 2{,}45$). **9.** a) Średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe zestawu danych A są mniejsze niż dla zestawu B (zestaw A: $\overline{x} = 5$, $\sigma \approx 3{,}39$, zestaw B: $\overline{x} = 50$, $\sigma \approx 33{,}91$). **12.** 0,26 cm; $\langle 26{,}74\text{ cm}; 27{,}26\text{ cm}\rangle$. **13.** $249{,}6 \pm 5{,}7$ g. **14.** a) Wzrost Polek: $(158{,}6; 169{,}8)$, wzrost Polaków: $(168{,}6; 183{,}4)$, b) wzrost mężczyzn w Japonii: $(153{,}9; 177{,}1)$, wzrost mężczyzn w Polsce: $(161{,}2; 190{,}8)$, c) wzrost Holenderek: $(149{,}5; 189{,}7)$, wzrost Polek: $(147{,}4; 181)$. **15.** Grupa 2. Wskazówka. Zauważ, że w każdej grupie średnia arytmetyczna danych jest równa 2,5. Najmniejsze odchylenie standardowe jest w tej grupie, w której największa część danych jest bliska średniej arytmetycznej.

str. 296: **1.** Błąd bezwzględny = 0,5, błąd względny $\approx 5{,}3\%$; błąd bezwzględny = 1, błąd względny $\approx 0{,}5\%$. **2.** 3,8%. **3.** Około 105 g. **4.** a) $\overline{x} = 5\frac{2}{3}$, mediana = 5, dominanty to 5 i 7, b) $\overline{x} = 3{,}625$, mediana = 3,5, dominanta to 3. **5.** $\overline{x} \approx 8{,}03$ godzin, mediana to 8 godzin, dominanta to 8 godzin. **6.** $a = 1$, $b = 4$ lub $a = 4$, $b = 1$; mediana = 2,5. **7.** 82 kg. **8.** 5. **9.** 4,59. **10.** a) $\overline{x} = 4$ kg, $\sigma \approx 2{,}5$ kg, b) $\overline{x} = 2{,}02$, $\sigma \approx 1{,}58$. **11.** Pstrągi: $\overline{x} = 40{,}5$ cm, $\sigma \approx 4{,}44$ cm; lipienie: $\overline{x} = 29{,}7$ cm, $\sigma \approx 2{,}9$ cm.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia prosimy nadsyłać pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80–305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
http://www.gwo.pl e-mail: handel@gwo.pl

Podręcznik jest przeznaczony do nauki matematyki w czteroletnim liceum lub pięcioletnim technikum. Spełnia on kryteria *Ustawy o systemie oświaty* i jest zgodny z najnowszą podstawą programową z 2018 roku.

Został dopuszczony przez MEN do użytku szkolnego i wpisany do wykazu podręczników.
Numer dopuszczenia: 963/2/2020

www.gwo.pl

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe