Matematyka 7

z plusem

Podręcznik dla klasy siódmej szkoły podstawowej



Praca zbiorowa pod redakcją
Małgorzaty Dobrowolskiej

Matematyka 7
z plusem

Podręcznik dla klasy siódmej szkoły podstawowej

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe

Zespół autorów:

Zofia Bolałek ***Małgorzata Dobrowolska*** ***Marta Jucewicz***

Marcin Karpiński ***Jacek Lech*** ***Adam Mysior*** ***Krystyna Zarzycka***

Projekt graficzny: *Katarzyna Micun*, *Jarosław Zakrzewski*
Ilustracje: *Sławomir Kilian*, *Bartosz Polak*
Fotografie: *archiwum GWO*, *Shutterstock*
Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*, *Joanna Szyller*
Skład (TEX): *Maria Chojnicka*, *Joanna Szyller*, *Łukasz Sitko*
Fotoedycja: *Ilona Krasnopiórko*

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników szkolnych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie recenzji rzeczoznawców: dr. Macieja Bryńskiego, dr. Michała Krycha, dr. Krzysztofa Koca.

Etap edukacyjny: II
Typ szkoły: szkoła podstawowa
Rok dopuszczenia: 2017
Numer w wykazie: 780/4/2017

Książka jest zgodna z programem *Matematyka z plusem* i dostosowana do obowiązującej podstawy programowej.

ISBN 978-83-7420-939-7

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2020. Wydanie czwarte

Druk i oprawa: Interak, Czarnków

Podręcznik został wyprodukowany na papierze posiadającym certyfikaty FSC, PEFC, EU-Ecolabel oraz Blue Angel.



Spis treści

1 LICZBY I DZIAŁANIA

1. Liczby 10
2. Rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych 14
3. Zaokrąglanie liczb. Szacowanie wyników 18
4. Dodawanie i odejmowanie liczb dodatnich 24
5. Mnożenie i dzielenie liczb dodatnich 28
6. Wyrażenia arytmetyczne 34
7. Działania na liczbach dodatnich i ujemnych 38
8. Oś liczbowa. Odległości liczb na osi liczbowej 42

Przed klasówką 46

Zadania uzupełniające 48

2 PROCENTY

1. Procenty i ułamki 56
2. Diagramy procentowe 63
3. Jaki to procent? 68
4. Obliczanie procentu danej liczby 72
5. Podwyżki i obniżki 76
6. Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent 79
7. O ile procent więcej, o ile mniej. Punkty procentowe 84
8. Obliczenia procentowe 87

Przed klasówką 92

Zadania uzupełniające 94

3 FIGURY GEOMETRYCZNE

1. Proste i odcinki 100
2. Kąty 105
3. Trójkąty 110
4. Przystawanie trójkątów 114
5. Czworokąty 119
6. Wielokąty foremne 124

7. Pole prostokąta. Jednostki pola 128
8. Pola wielokątów 134
9. Układ współrzędnych 141
Przed klasówką 146
Zadania uzupełniające 148

4 WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

1. Do czego służą wyrażenia algebraiczne? 154
2. Wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych 159
3. Jednomiany 162
4. Sumy algebraiczne 165
5. Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych 168
6. Mnożenie jednomianów przez sumy algebraiczne 171
7. Mnożenie sum algebraicznych 174
Przed klasówką 178
Zadania uzupełniające 180

5 RÓWNANIA

1. Do czego służą równania? 186
2. Liczby spełniające równania 189
3. Rozwiązywanie równań 192
4. Zadania tekstowe 197
5. Procenty w zadaniach tekstowych 204
6. Przekształcanie wzorów 208
Przed klasówką 212
Zadania uzupełniające 214

6 POTĘGI I PIERWIASTKI

1. Potęga o wykładniku naturalnym 220
2. Iloczyn i iloraz potęg o jednakowych podstawach 225
3. Potęgowanie potęgi 229
4. Potęgowanie iloczynu i ilorazu 231
5. Działania na potęgach 233
6. Notacja wykładnicza 237
7. Notacja wykładnicza (cd.) 240
8. Pierwiastki 244
9. Działania na pierwiastkach 252
Przed klasówką 256
Zadania uzupełniające 258

7 **GRANIASTOSŁUPY**

1. Przykłady graniastosłupów 264
2. Siatki graniastosłupów. Pole powierzchni 270
3. Objętość prostopadłościanu. Jednostki objętości 274
4. Objętość graniastosłupa 279

Przed klasówką 283

Zadania uzupełniające 284

8 **STATYSTYKA**

1. Odczytywanie danych statystycznych 288
2. Co to jest średnia? 299
3. Zbieranie i opracowywanie danych statystycznych 303
4. Zdarzenia losowe 308

Przed klasówką 314

Zadania uzupełniające 316

ODPOWIEDZI 319

SKOROWIDZ 334

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

- ◉ zadanie nieelementarne
- ▢ zadanie na dowodzenie
- * zadanie trudne
- zadanie, do rozwiązania którego zaleca się użycie kalkulatora

15/44 odsyłacz do analogicznego zadania umieszczonego w rozdziale *Zadania uzupełniające*, tam oznaczonego symbolem →

Od autorów

Podręcznik składa się z ośmiu głównych rozdziałów, podzielonych na krótkie jednostki tematyczne. Każda jednostka tematyczna zawiera część teoretyczną i zadaniową. Część teoretyczna przekazuje najważniejsze informacje dotyczące danego tematu i przeplatana jest ćwiczeniami, stanowiącymi propozycję metodyczną wprowadzania nowego zagadnienia. Część zadaniowa zawiera zadania o różnym stopniu trudności i zakończona jest krótkim testem, opatrzonym tytułem *Sprawdź, czy umiesz*, który można wykorzystać jako podsumowanie lekcji.

Zestaw zadań *Przed klasówką* zamieszczony na końcu każdego rozdziału obejmuje tematykę w nim omawianą. Można go wykorzystać na zajęciach powtórzeniowych.

Zadania uzupełniające, umieszczone na końcu każdego rozdziału, pełnią rolę dodatkowego zbioru zadań. Łącznie w podręczniku znajduje się ponad 1300 zadań. Do wielu zadań podajemy odpowiedzi, a do niektórych można znaleźć też wskazówki dotyczące sposobu rozwiązania.

I LICZBY I DZIAŁANIA

1 Liczby

2 Rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych

3 Zaokrąglanie liczb. Szacowanie wyników

4 Dodawanie i odejmowanie liczb dodatnich

5 Mnożenie i dzielenie liczb dodatnich

6 Wyrażenia arytmetyczne

7 Działania na liczbach dodatnich i ujemnych

8 Oś liczbowa. Odległości liczb na osi liczbowej

↘ Przed klasówką, s. 46

↘ Zadania uzupełniające, s. 48

1 Liczby

Drogi Czytelniku! Do tej pory posługiwaliśmy się różnymi nazwami liczb. Była mowa o liczbach naturalnych, ułamkach zwykłych i dziesiętnych, liczbach dodatnich i ujemnych. Spróbujmy to uporządkować.

- Liczby $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ nazywamy **liczbami naturalnymi**.
- Liczby $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ nazywamy **liczbami całkowitymi**.

Przykłady liczb wymiernych:

$\frac{2}{3}$ $-\frac{4}{7}$ $1\frac{1}{8}$

-5 $0{,}7$

$-4{,}16$ 15 0

Każdą z liczb podanych w ramce obok można zapisać w postaci ułamka $\frac{l}{m}$, gdzie l, m są liczbami całkowitymi i $m \neq 0$. Na przykład $-\frac{4}{7} = \frac{-4}{7}$, $1\frac{1}{8} = \frac{9}{8}$.

- Liczby, które można przedstawić w postaci ilorazu liczb całkowitych, nazywamy **liczbami wymiernymi**.

☐ ĆWICZENIE. Uzasadnij, że liczby -5, $0{,}7$, $-4{,}16$, 15 i 0 są liczbami wymiernymi — przedstaw każdą z nich w postaci ułamka zwykłego.

Liczbami wymiernymi są wszystkie liczby całkowite oraz wszystkie ułamki (zwykłe i dziesiętne). Każdą liczbę wymierną można przedstawiać na różne sposoby:

Przykłady

$$\frac{17}{20} = \frac{17 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{85}{100} = 0{,}85 \qquad 0{,}424 = \frac{424}{1000} = \frac{212}{500} = \frac{106}{250} = \frac{53}{125}$$

$$5\frac{2}{7} = \frac{5 \cdot 7 + 2}{7} = \frac{37}{7} \qquad 14{,}45 = 14\frac{45}{100} = 14\frac{9}{20}$$

Z historii

Dziesiątkowy system pozycyjny, którym się posługujemy, stworzyli Hindusi ok. 1500 lat temu. Hindusi początkowo nie używali zera. Aby odróżnić np. liczbę 301 od 31, między znakami oznaczającymi 3 i 1 zostawiali puste miejsce, nazywając je *sunya*. Dopiero później pojawiło się w tym miejscu kółko, przypominające dzisiejsze zero. Hinduski system zapisywania liczb dotarł do Europy za pośrednictwem Arabów.

To, co Hindusi nazywali *sunya* (nic, zero), w języku Arabów brzmiało *sifr*. W Europie słowo *szifra* początkowo znaczyło nic, zero, z czasem tak zaczęto nazywać wszystkie znaki liczbowe. Nowy system zapisu liczb był w Europie przez długi czas zakazany, ludzie używali go po kryjomu, jak tajemnego kodu. Ciekawe jest, że w niektórych językach, np. francuskim, nie ma różnic między słowami oznaczającymi szyfr i cyfrę.

Zadania

1. Wykaż, że podane liczby są liczbami wymiernymi — przedstaw każdą z nich w postaci ułamka zwykłego.

a) $3\frac{1}{3}$ b) $-5{,}5$ c) 170 d) -1 e) $0{,}75$ f) $-4{,}8$

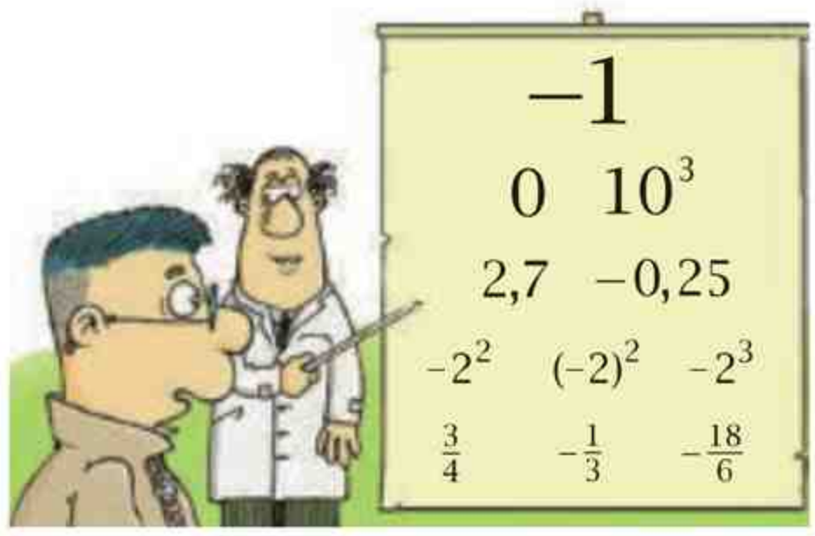
2. Poniżej zapisano dziewięć różnych liczb. Które z tych liczb są liczbami naturalnymi? Które są liczbami całkowitymi?

$1 \quad \frac{6}{3} \quad -5 \quad 0 \quad 0{,}7 \quad 2\frac{3}{4} \quad -\frac{1}{5} \quad -6{,}751 \quad 2501$

3. Odszukaj na rysunku liczby:

a) naturalne,
b) całkowite,
c) wymierne nieujemne,
d) całkowite mniejsze od -1,
e) wymierne większe od -1.

1/48



4. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

① Każda liczba całkowita jest liczbą naturalną.
② Każda liczba naturalna jest liczbą całkowitą.
③ Każda liczba całkowita nieujemna jest liczbą naturalną.
④ Każda liczba całkowita jest liczbą wymierną.
⑤ Każda liczba wymierna jest albo dodatnia, albo ujemna.

5. Zapisz podane liczby w postaci dziesiętnej.

$a = 3 + \frac{1}{10}$ $b = 2 + \frac{3}{100}$ $c = \frac{4}{10} + \frac{1}{100}$

$d = \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000}$ $e = 23 + \frac{3}{1000} + \frac{1}{10\,000}$

$f = 3 + \frac{7}{1000}$ $g = 4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100}$ $h = \frac{7}{100} + \frac{1}{10\,000}$

$\frac{1}{2} = 0{,}5$ $\frac{1}{8} = 0{,}125$

$\frac{1}{4} = 0{,}25$ $\frac{1}{20} = 0{,}05$

$\frac{1}{5} = 0{,}2$ $\frac{1}{25} = 0{,}04$

6. a) Zamień ułamki dziesiętne na nieskracalne ułamki zwykłe lub na liczby mieszane.

0,4 0,08 0,15 1,375 14,35 0,84

b) Zamień na ułamki dziesiętne.

$\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$ $3\frac{1}{2}$ $4\frac{2}{5}$ $1\frac{9}{20}$ $\frac{11}{25}$

7. Zapisz za pomocą nieskracalnego ułamka zwykłego:

a) jakie to części godziny: 45 min 25 min 1 s 15 s

b) jakie to części kilometra: 200 m 8 m 125 cm 1500 cm

8. Zapisz za pomocą ułamka dziesiętnego:

a) ile to złotych: 75 gr 9 zł 8 gr 1602 gr 132 250 gr

b) ile to godzin: 90 min 2 godz 15 min 105 min $\frac{1}{5}$ doby

9. Wśród poniższych liczb znajdź liczby różne od $\frac{9}{5}$.

$\frac{10}{18}$ $\frac{18}{10}$ $1\frac{4}{5}$ 1,80 $1\frac{15}{20}$ 9,5

5/48

10. Wskaż pary równych liczb.

$\frac{9}{4}$ $\frac{3}{2}$ 2,25 $2\frac{1}{3}$ $\frac{140}{60}$ 1,5

Liczba a	$\frac{3}{4}$	-3	1	$-0{,}5$	$1\frac{1}{5}$
Liczba przeciwna do liczby a	$-\frac{3}{4}$	3	-1	$0{,}5$	$-1\frac{1}{5}$
Odwrotność liczby a	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	-2	$\frac{5}{6}$

Liczbą przeciwną do 0 jest 0. Nie istnieje odwrotność liczby 0.

11. a) Wskaż pary liczb przeciwnych:

$-0{,}4$ $2\frac{1}{7}$ $\frac{2}{5}$ $-2\frac{1}{7}$ $\frac{-5}{2}$ 2,5

b) Znajdź odwrotności liczb:

$\frac{3}{5}$ 18 -5 $1\frac{5}{7}$ 0,2 -1 4,7

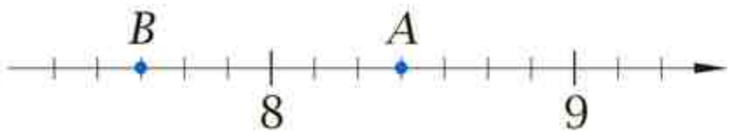
12. Czy odwrotność liczby przeciwnej do liczby $-4\frac{2}{7}$ jest równa liczbie przeciwnej do odwrotności liczby $-4\frac{2}{7}$?

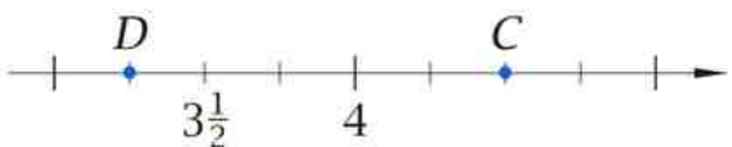
13. Dopasuj podane liczby do odpowiednich punktów na osi liczbowej.

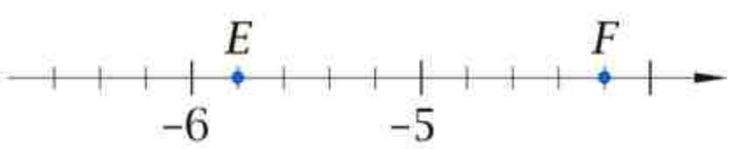
2,6 $-1\frac{1}{3}$ $\frac{8}{5}$ $-0{,}7$ $\frac{17}{30}$

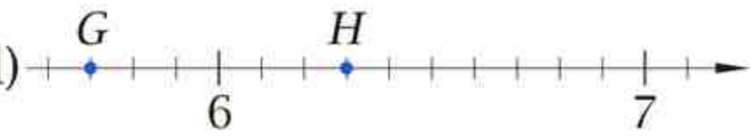
6/48

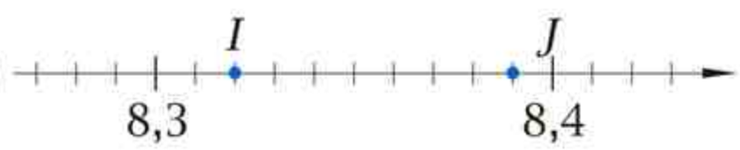
14. Podaj współrzędne punktów oznaczonych literami.

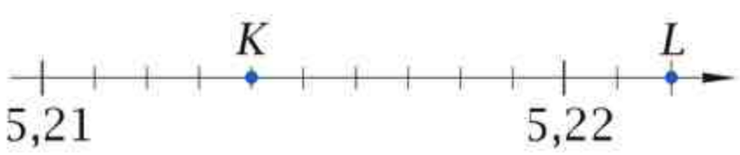
a)


b)


c)


d)


e)


f)


7/48

15. Która z liczb jest większa?

a) $\frac{1}{7}$ czy $\frac{1}{8}$

b) $\frac{2}{3}$ czy $\frac{2}{5}$

c) $5\frac{7}{15}$ czy $5\frac{1}{3}$

d) $\frac{7}{8}$ czy $\frac{8}{9}$

e) 0,6 czy 0,57

f) 0,27 czy 0,267

g) 6,801 czy 6,9

h) 2,02 czy 2,019

i) $\frac{3}{5}$ czy 0,7

j) 0,28 czy $\frac{1}{4}$

k) $\frac{1}{9}$ czy 0,1

l) $2\frac{1}{6}$ czy 2,2



16. a) Pięcioosobowa rodzina — rodzice i troje dzieci — zamówiła dwie takie same pizze. Rodzice podzielili swoją pizzę na 6 jednakowych kawałków i zjedli 5 z nich. Dzieci podzieliły pizzę na 8 części i zjadły 6 kawałków. Kto zjadł więcej pizzy — dzieci czy rodzice?

b) Wujek Staś odziedziczył $\frac{2}{7}$ spadku po dziadku Julku, a ciocia Krysia $\frac{4}{13}$. Które z nich odziedziczyło większą część spadku?

c) Zuzia przepłynęła basen 25-metrowy w 20 sekund. Kasia przepłynęła ten sam dystans ze średnią prędkością 1,3 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Która z dziewcząt płynęła szybciej?

8/48

17. a) Jakimi liczbami naturalnymi można zastąpić litery a, b, c i d?

$0 < \frac{a}{20} < \frac{1}{4}$ $\quad 0 < \frac{b}{15} < \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2} < \frac{c}{21} < 1$ $\quad 1 < \frac{d}{30} < 1\frac{1}{2}$

b) Podaj przykłady liczb x, y, z, w, które spełniają podane warunki.

$\frac{1}{7} < x < \frac{2}{7}$ $\quad \frac{3}{4} < y < \frac{7}{8}$ $\quad \frac{1}{3} < z < \frac{1}{2}$ $\quad \frac{2}{3} < w < \frac{3}{4}$

18. Punktom zaznaczonym kropkami na osi liczbowej odpowiadają podane liczby. Dopasuj te liczby do odpowiednich punktów.

a) –0,3 –1,5 –1,2 –1,7



b) $-\frac{1}{5}$ $-\frac{4}{5}$ $-\frac{3}{4}$ $-\frac{1}{4}$



19. Która liczba jest większa?

a) –0,3 czy –0,34

b) –4,36 czy –4,27

c) $-\frac{3}{4}$ czy $-\frac{1}{2}$

d) $-1\frac{1}{3}$ czy $-1\frac{1}{5}$

e) $-\frac{3}{8}$ czy –0,3

f) –7,4 czy $-7\frac{3}{5}$

20. Zapisz podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$1\frac{1}{3}$ $\quad -3{,}1$ $\quad 0$ $\quad -3$ $\quad 0{,}123$ $\quad \frac{1}{8}$

11/48

Sprawdź, czy umiesz

1. Ułamek 0,015 jest równy:

A. $\frac{3}{20}$ B. $\frac{3}{200}$ C. $\frac{1}{15}$ D. $\frac{3}{250}$

2. Ustawiając w kolejności od najmniejszej do największej liczby $t = \frac{8}{5}$, $o = 1{,}5$, $k = \frac{5}{4}$, otrzymamy:

A. *kto* B. *kot* C. *tok* D. *okt*

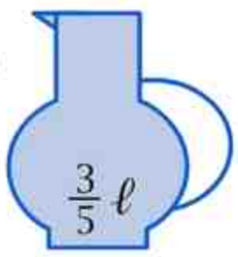
$-\frac{1}{3}$ $-\frac{7}{8}$ $\frac{1}{4}$ $-0{,}15$ 0

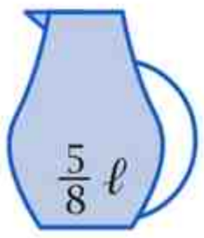
$-\frac{4}{7}$ $-0{,}499$ -1 $-0{,}51$

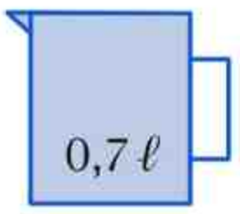
3. Ile liczb mniejszych od $-\frac{1}{2}$ zapisano w ramce obok?

A. jedną B. dwie C. trzy D. cztery

4. Który dzbanek ma największą pojemność?

A. 

B. 

C. 

D. 

→ zadania uzupełniające 1–11, str. 48

2 Rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych

$53 : 9 = \frac{53}{9}$

$\frac{7}{16} = 7 : 16$

Wiesz już, że ilorazy liczb można zapisywać, używając kreski ułamkowej. Każdy ułamek zwykły można także zinterpretować jako iloraz dwóch liczb. Tę własność możemy wykorzystać, gdy zamieniamy ułamki zwykłe na dziesiętne — wystarczy podzielić licznik przez mianownik.

ĆWICZENIE A. a) Zamień ułamki $\frac{7}{8}$ i $\frac{35}{32}$ na ułamki dziesiętne, wykonując dzielenie.

b) Podziel licznik przez mianownik w ułamkach $\frac{5}{6}$ i $\frac{18}{11}$.

Czasami, dzieląc licznik ułamka przez mianownik, otrzymamy ułamek dziesiętny o skończonej liczbie cyfr po przecinku. Mówimy wtedy, że ułamek ma rozwinięcie dziesiętne skończone. Niekiedy jednak dzielenie nigdy się nie kończy. Wówczas mówimy, że ułamek ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone.

Przykłady

$\frac{7}{16} = 7 : 16 = ?$

$$\begin{array}{r} 0{,}4375 \\ \hline 7:16 \\ 70 \\ -64 \\ \hline 60 \\ -48 \\ \hline 120 \\ -112 \\ \hline 80 \\ -80 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\frac{7}{16} = 0{,}4375$

$\frac{47}{90} = 47 : 90 = ?$

$$\begin{array}{r} 0{,}522 \\ \hline 47:90 \\ 470 \\ -450 \\ \hline 200 \\ -180 \\ \hline 200 \\ -180 \\ \hline 20 \\ \vdots \end{array}$$

$\frac{47}{90} = 0{,}522222...$

$5\frac{1}{33} = 5 + (1 : 33) = ?$

$$\begin{array}{r} 0{,}0303 \\ \hline 1:33 \\ 100 \\ -99 \\ \hline 100 \\ -99 \\ \hline 1 \\ \vdots \end{array}$$

$5\frac{1}{33} = 5{,}030303...$

Liczba $\frac{7}{16}$ ma rozwinięcie dziesiętne skończone, a liczby $\frac{47}{90}$ i $5\frac{1}{33}$ mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone.

Można zauważyć, że dzieląc sposobem pisemnym licznik przez mianownik ułamka, albo otrzymamy resztę równą 0, albo reszta się powtórzy, i od pewnego momentu dalsze czynności będą się powtarzać. Zatem albo otrzymamy rozwinięcie dziesiętne skończone, albo nieskończone, w którym powtarza się pewien układ cyfr.

Powtarzający się układ cyfr w rozwinięciach nieskończonych ułamków nazywamy **okresem**, a takie rozwinięcia nazywamy okresowymi. Można je zapisać w skróconej postaci.

	Rozwinięcie dziesiętne	Skrócony zapis
$\frac{17}{90}$	$= 0{,}18888888\ldots$	$= 0{,}1(8)$
$4\frac{3}{11}$	$= 4{,}27272727\ldots$	$= 4{,}(27)$
$\frac{71}{150}$	$= 0{,}473333333\ldots$	$= 0{,}47(3)$
$2\frac{5}{66}$	$= 2{,}075757575\ldots$	$= 2{,}0(75)$
$-3\frac{101}{1110}$	$= -3{,}0909909909\ldots$	$= -3{,}0(909)$

Uwaga. Zapisy 0,1(8) oraz 0,18(8) oznaczają tę samą liczbę, ale pierwszy zapis jest krótszy. Rozwinięcia dziesiętne warto zapisywać w możliwie najkrótszy sposób.

ĆWICZENIE B. Zapisz w skróconej postaci rozwinięcia dziesiętne liczb $\frac{47}{90}$ i $5\frac{1}{33}$.

Liczby, które można zapisać w postaci ilorazu liczb całkowitych, to liczby wymierne. Możemy więc powiedzieć, że:

Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne skończone albo nieskończone okresowe.

Poszukując rozwinięć dziesiętnych liczb wymiernych, można wykonać dzielenie za pomocą kalkulatora, ale trzeba przy tym uważać, gdyż kalkulatory zwykle zaokrąglają ostatnią cyfrę.



Na przykład na fotografii obok przedstawiony jest wynik dzielenia $5 : 12$. Gdybyśmy takie dzielenie wykonywali pisemnie, łatwo zauważylibyśmy, że $\frac{5}{12} = 0{,}41666\ldots = 0{,}41(6)$.

Uwaga. Pomijając problem zaokrąglenia ostatniej cyfry, za pomocą kalkulatora trudno jest ustalić okres, gdy ma on wiele cyfr albo gdy w rozwinięciu dziesiętnym układ cyfr powtarza się dopiero od pewnego miejsca po przecinku. Na przykład trudno byłoby ustalić za pomocą kalkulatora (takiego jak na fotografii) okres rozwinięcia liczby:

$$\frac{1}{70} = 0{,}0142857142857142\ldots = 0{,}0(142857)$$

Zadania

1. Znajdź rozwinięcia dziesiętne podanych liczb.

a) $\frac{2}{3}$ c) $1\frac{5}{12}$ e) $\frac{13}{8}$ g) $2\frac{3}{11}$

b) $10\frac{5}{9}$ d) $\frac{17}{15}$ f) $2\frac{11}{20}$ h) $11\frac{5}{6}$

12/49

2. a) Jaka jest piąta cyfra po przecinku liczby $12{,}(375)$?

b) Jaka jest siódma cyfra po przecinku liczby $2{,}0(14)$?

c) Jaka jest dziesiąta cyfra po przecinku liczby $5{,}3(52)$?

3. Jaka jest setna cyfra po przecinku liczby $7{,}6(15)$, a jaka liczby $0{,}(126)$?

4. Ustal, która z podanych liczb jest większa.

a) $0{,}(32)$ czy $0{,}32$ c) $\frac{1}{3}$ czy $0{,}33$ e) $5{,}(171)$ czy $5{,}(17)$

b) $3{,}(012)$ czy $3{,}0121$ d) $\frac{1}{8}$ czy $0{,}(125)$ f) $2{,}(307)$ czy $2{,}3(07)$

13,14/49

5. Podaj przykład liczby x, która spełnia podany warunek.

a) $0{,}1 < x < 0{,}(1)$ b) $0{,}(7) < x < 0{,}(8)$ c) $\frac{1}{2} < x < 0{,}(5)$

6. Ustal, która liczba jest większa, znajdując kilka początkowych cyfr rozwinięć dziesiętnych podanych liczb.

a) $\frac{4}{7}$ czy $\frac{5}{18}$ b) $\frac{25}{76}$ czy $\frac{12}{37}$ c) $\frac{357}{450}$ czy $\frac{276}{350}$

7. a) Znajdź rozwinięcia dziesiętne ułamków zapisanych obok. W każdej z trzech grup liczb można zauważyć pewne prawidłowości. Jak myślisz, jakie rozwinięcie dziesiętne mają liczby $\frac{7}{9999}$ i $\frac{158}{9999}$?

$\frac{1}{9}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{8}{9}$

$\frac{1}{99}$ $\frac{7}{99}$ $\frac{29}{99}$ $\frac{84}{99}$

$\frac{1}{999}$ $\frac{5}{999}$ $\frac{47}{999}$ $\frac{98}{999}$ $\frac{125}{999}$ $\frac{487}{999}$

b) Jak myślisz, jakie ułamki zwykłe są równe podanym liczbom? Swoje przypuszczenia sprawdź za pomocą kalkulatora.

0,(7) 0,(5) 0,(13) 0,(62) 0,(05) 0,(342) 0,(057)

Ciekawostka

Gdy ułamek zwykły skrócimy tak, że otrzymamy ułamek nieskracalny, to nie wykonując dzielenia, można rozpoznać, czy rozwinięcie dziesiętne będzie skończone, czy nieskończone okresowe.

Ułamek nieskracalny ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone, gdy jego mianownik dzieli się przez jakąś liczbę pierwszą różną od 2 i 5 (tzn. dzieli się przez 3 lub 7, lub 11, lub 13 itd.). Na przykład ułamek $\frac{104}{210}$ ma rozwinięcie nieskończone okresowe.

$$\frac{104}{210} = \frac{52}{105} = \frac{2\cdot2\cdot13}{5\cdot3\cdot7}$$

Gdy jedynymi dzielnikami (pierwszymi) mianownika ułamka nieskracalnego są liczby 2 lub 5, to ułamek ten ma rozwinięcie skończone. Takim ułamkiem jest na przykład $\frac{9}{120}$.

$$\frac{9}{120} = \frac{3}{40} = \frac{3}{2\cdot2\cdot2\cdot5} = \frac{3\cdot5\cdot5}{10\cdot10\cdot10} = \frac{75}{1000}$$

8. Przeczytaj ciekawostkę.

a) Wśród ułamków podanych niżej wskaż te, które mają rozwinięcie dziesiętne skończone.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \cdots \quad \frac{1}{28} \quad \frac{1}{29} \quad \frac{1}{30}$$

b) Uzasadnij, że każda z liczb:

$$\frac{56}{350} \qquad \frac{66}{528} \qquad \frac{147}{210}$$

ma rozwinięcie dziesiętne skończone.

c) Wśród liczb podanych poniżej jest tylko jedna liczba, która ma rozwinięcie dziesiętne skończone. Wskaż tę liczbę.

$$\frac{32}{28} \qquad \frac{127}{120} \qquad \frac{17}{24} \qquad \frac{162}{180}$$

Sprawdź, czy umiesz

1. Jaka jest trzynasta cyfra po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby 1,6(0518)?

A. 0 B. 5 C. 1 D. 8

2. Liczby $l = 3{,}34$, $m = 3{,}(3)$, $n = \frac{333}{100}$ ustawiono w kolejności od najmniejszej do największej. Otrzymano kolejność:

A. m, n, l B. n, m, l C. n, l, m D. l, n, m

zadania uzupełniające 12–15, str. 49

3 Zaokrąglanie liczb. Szacowanie wyników



Gdybyśmy zapytali konstruktora samochodu marki Ford Focus, jaką długość ma ten samochód w wersji czterodrzwiowej, odpowiedziałby, że 4,481 m. Gdyby to samo pytanie zadać właścicielowi takiego samochodu, odpowiedziałby zapewne, że jego auto ma około 4,5 m długości.

Inżynier podałby wymiar dokładnie, a kierowca w zaokrągleniu.

W życiu codziennym często posługujemy się zaokrągleniami. Nie podajemy np. swojego wzrostu z dokładnością do 1 milimetra, tylko z dokładnością do 1 centymetra. Odległości między miastami podawane są na ogół z dokładnością do 1 kilometra, a średnia odległość z Ziemi do Księżyca — z dokładnością do 100 kilometrów.

Poniżej przypominamy reguły zaokrąglania liczb dodatnich. Symbol $\approx$ czytamy: „równa się w przybliżeniu”.

Uwaga. Potrzeba zaokrąglania liczb ujemnych pojawia się w praktyce bardzo rzadko, więc nie będziemy się takimi zaokrągleniami zajmować.

ZAOKRĄGLANIE DO DZIESIĄTEK

$184 \approx 180$
$2372 \approx 2370$
$51 \approx 50$
$392 \approx 390$
$4393 \approx 4390$

Gdy cyfrą jedności jest 0, 1, 2, 3, 4, zaokrąglamy w dół.

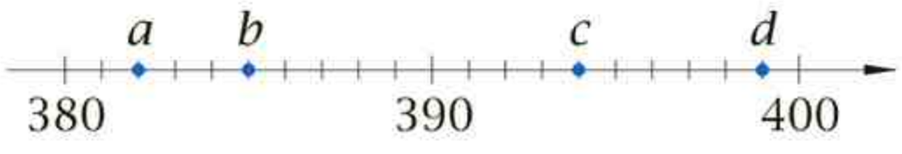
Gdy cyfrą jedności jest 5, 6, 7, 8, 9, zaokrąglamy w górę.

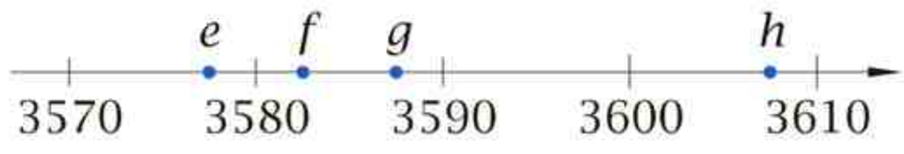
$185 \approx 190$
$2379 \approx 2380$
$57 \approx 60$
$1398 \approx 1400$
$4996 \approx 5000$

Zauważ, że gdy zaokrąglamy liczbę, której cyfrą jedności jest 0, to jej zaokrąglenie do dziesiątek jest równe tej liczbie.

Warto zwrócić uwagę, że wynikiem zaokrąglenia do dziesiątek jest zawsze wielokrotność liczby 10, czyli jedna z liczb 0, 10, 20, …, 90, 100, 110, 120, 130, …, 980, 990, 1000, 1010, …

ĆWICZENIE A. Na osiach liczbowych zaznaczono kilka liczb. Podaj zaokrąglenia do dziesiątek liczb oznaczonych literami.





Wynikiem zaokrąglenia do setek jest zawsze wielokrotność liczby 100, a wynikiem zaokrąglenia do tysięcy jest wielokrotność liczby 1000.

ZAOKRĄGLANIE DO SETEK

$4\underline{0}7 \approx 400$
$29\underline{9}39 \approx 29900$
$\underline{3}7 \approx 0$

Gdy cyfrą dziesiątek jest 0, 1, 2, 3, 4, zaokrąglamy w dół.

Gdy cyfrą dziesiątek jest 5, 6, 7, 8, 9, zaokrąglamy w górę.

$7\underline{5}0 \approx 800$
$234\underline{9}95 \approx 235000$
$\underline{6}1 \approx 100$

ZAOKRĄGLANIE DO TYSIĘCY

$34\underline{2}80 \approx 34000$
$5\underline{1}99 \approx 5000$
$\underline{4}87 \approx 0$

Gdy cyfrą setek jest 0, 1, 2, 3, 4, zaokrąglamy w dół.

Gdy cyfrą setek jest 5, 6, 7, 8, 9, zaokrąglamy w górę.

$1\underline{5}13 \approx 2000$
$39\underline{7}80 \approx 40000$
$7099\underline{7}83 \approx 7100000$



ĆWICZENIE B. W każdej z podanych liczb wskaż cyfrę dziesiątek oraz cyfrę części dziesiątych.

$a = 357{,}208 \quad b = 97{,}0145 \quad c = 2507{,}(57)$

Czy domyślasz się, jak zaokrąglić te liczby do jedności? A jak do części dziesiątych?

Ułamki dziesiętne możemy zaokrąglać, stosując analogiczne reguły.

ZAOKRĄGLANIE DO JEDNOŚCI

$120{,}\underline{3}07 \approx 120$
$1{,}\underline{4}2 \approx 1$
$13{,}\underline{0}9 \approx 13$

Gdy cyfrą części dziesiątych jest 0, 1, 2, 3, 4, zaokrąglamy w dół.

Gdy cyfrą części dziesiątych jest 5, 6, 7, 8, 9, zaokrąglamy w górę.

$13{,}\underline{5}74 \approx 14$
$9{,}\underline{8}1 \approx 10$
$19{,}\underline{9}5 \approx 20$

ZAOKRĄGLANIE DO CZĘŚCI DZIESIĄTYCH

$129{,}\underline{3}03 \approx 129{,}3$
$9{,}1\underline{1}8 \approx 9{,}1$
$400{,}4\underline{2}7 \approx 400{,}4$

Gdy cyfrą części setnych jest 0, 1, 2, 3, 4, zaokrąglamy w dół.

Gdy cyfrą części setnych jest 5, 6, 7, 8, 9, zaokrąglamy w górę.

$213{,}5\underline{7} \approx 213{,}6$
$149{,}9\underline{6} \approx 150{,}0$
$17{,}9\underline{5}2 \approx 18{,}0$

Uwaga. Gdy zaokrąglamy do dziesiątek, setek, części dziesiątych itp., możemy także powiedzieć, że zaokrąglamy z dokładnością do dziesiątek, setek, części dziesiątych itp.

Zaokrąglanie liczb się przydaje, gdy chcemy oszacować w pamięci wynik działania. Oto przykład, jak można szacować wyniki mnożenia.

Czy wystarczy 15 zł, aby kupić 3 długopisy po 4,99 zł za sztukę?

$4{,}99 \approx 5$ ← Cenę zaokrągliliśmy w górę, więc $3 \cdot 4{,}99 < 3 \cdot 5 = 15$. Czyli 15 zł wystarczy.

A co by było, gdyby długopis kosztował 5,10 zł?

$5{,}10 \approx 5$ ← Cenę zaokrągliliśmy w dół, więc $3 \cdot 5{,}10 > 3 \cdot 5 = 15$. Tym razem 15 zł to za mało.

Zadania

1. Każdą z podanych liczb zaokrąglij: a) do setek, b) do tysięcy.

$k = 1407$ $l = 78896$ $m = 23907$ $n = 107961$ $o = 347999$

16/49

2. W akcji *Góra grosza* zebrano 1 652 727,94 zł. Na pomoc dla dzieci przeznaczono 1 352 908,43 zł. Zapisz te dwie wielkości z dokładnością do: a) tysięcy złotych, b) dziesiątek tysięcy złotych.

3. Podane liczby zaokrąglij: a) do jedności, b) do części dziesiątych.

17/49

$p = 3{,}146$ $r = 56{,}07$ $s = 0{,}532$ $t = 510{,}954$ $u = 19{,}763$

4. Każdą z podanych liczb zaokrąglij do części setnych.

18/49

$a = 0{,}321$ $b = 12{,}798$ $c = 9{,}997$ $d = 2{,}(5)$ $e = 6{,}(23)$

***5.** Ile jest liczb naturalnych, których:

a) zaokrąglenie do dziesiątek jest równe 90,

b) zaokrąglenie do setek jest równe 2500?

6. Podaj zaokrąglenia ułamków $\frac{20}{3}$ oraz $\frac{1500}{7}$ do jedności, dziesiątek i setek.



7. Trzej wędkarze chwalili się swoimi osiągnięciami.

— *Wczoraj złowiłem karpia, który miał pół metra* — zaczął pan Zdzisław.

— *A ja pięciokilogramowego szczupaka* — kontynuował pan Władysław.

— *To jeszcze nic, mnie się udało złapać metrowego węgorza* — przechwalał się pan Bogusław.

W rzeczywistości karp miał 45 cm, szczupak ważył 3,5 kg, a węgorz miał zaledwie 65 cm. Wędkarze oczywiście przesadzili, ale czy któryś z nich może się tłumaczyć regułami zaokrąglania?

8. W tabeli zamieszczono dane dotyczące liczby uczestników kilku igrzysk olimpijskich. W zależności od źródeł dane te różnią się od siebie.

Nr igrzysk/rok	Miejsce	Liczba uczestników	
		wg MKOl	wg portalu www.sport.pl
I/1896	Ateny	241	245
II/1900	Paryż	997	1078
V/1912	Londyn	2008	2035
IX/1928	Amsterdam	2883	2884
XIV/1948	Londyn	4104	4092
XVII/1960	Rzym	5338	5313
XXII/1980	Moskwa	5179	5283
XXIII/1984	Los Angeles	6829	6797
XXV/1992	Barcelona	9356	9364

a) Dla każdej pary danych liczb podaj taką liczbę (jak najbliższą danym), aby była ona zaokrągleniem zarówno jednej liczby, jak i drugiej.

b) W 2004 roku igrzyska olimpijskie odbywały się ponownie w Atenach. Wszystkie źródła podają, że uczestniczyło w nich 10 500 zawodników. Liczba ta to pewne zaokrąglenie rzeczywistej liczby zawodników. Jaka jest różnica między największą a najmniejszą możliwą liczbą zawodników?

9. W każdym z poniższych wierszyków pierwszy, drugi i piąty wers powinny mieć tyle samo sylab. Podobnie powinno być także w wersach trzecim i czwartym. Poniższe wierszyki staną się limerykami, gdy odpowiednio zaokrąglimy występujące w nich liczby. Spróbuj poprawić te wierszyki.

Sprawdzał bystry geometra gdzieś w Bolonii
Jak daleko pada jabłko od jabłoni
151,6 cali wpisał ładnie
Nie wiadomo, czy dokładnie
Bo natychmiast zjadł to jabłko spod jabłoni.



Rak z jeziora gdzieś spod Kościerzyny
Zimą nie mógł odnaleźć rodziny
Gdzie te raki zimują?
Krewni plan mu rysują –
276,32 kroków na wschód od leszczyny.

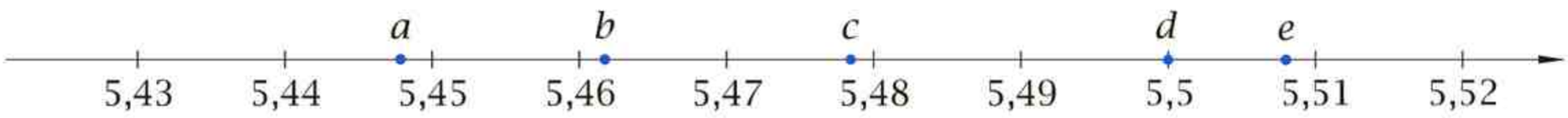


Raz turysta rzymski, goszcząc we wsi Pcim,
Odkrył, że w połowie drogi jest na Krym
Bo 897,6 mil od Rzymu
A 901,9 mil do Krymu
Teraz w Pcimiu każdy wie, gdzie Rzym, gdzie Krym.

Pewien kiepski kulomiot z Mrągowa
Rzut beretem zamierzał trenować
142,499 cale
Nie zachwyca go wcale
Więc ze wstydu pod łóżko się schował.

10. Podaj zaokrąglenia liczb zaznaczonych na osi liczbowej:

a) do części setnych, b) do części dziesiątych, c) do jedności.



11. Wymiary placu zaokrąglone do 1 m wynoszą 10 m × 20 m. Sprawdź, czy możliwe jest, by ten plac miał powierzchnię mniejszą niż 185 m^2? Czy może mieć powierzchnię większą niż 215 m^2?

12. Oszacuj wynik dodawania, nie wykonując dokładnych obliczeń. Jaki znak: < czy > należy wpisać w miejsce ◆ ?

a) $2258 + 496$ ◆ 2800
b) $4989 + 698$ ◆ 5700
c) $3401 + 725$ ◆ 4100
d) $198{,}7 + 496$ ◆ 700
e) $531{,}25 + 445{,}06$ ◆ 900
f) $502{,}725 + 488{,}11$ ◆ 1000

20/49

13. Oszacuj wynik mnożenia, nie wykonując dokładnych obliczeń. Jaki znak: < czy > należy wpisać w miejsce ◆ ?

a) $68 \cdot 3$ ◆ 210
b) $149 \cdot 4$ ◆ 500
c) $3248 \cdot 5$ ◆ 16 000
d) $4{,}8 \cdot 30$ ◆ 150
e) $60 \cdot 7{,}2$ ◆ 400
f) $6 \cdot 11{,}945$ ◆ 75

21/49

14. Poniżej podano kilka interesujących danych liczbowych. Łatwiej byłoby zapamiętać te dane, gdyby liczby podane były w zaokrągleniu. Zaproponuj, jak zaokrąglić te liczby.

Długość równika — 40 075 km

Odległość Ziemi od Księżyca — 384 400 km

Odległość Ziemi od Słońca — 149 000 000 km

Prędkość światła — 299 792 460 $\frac{m}{s}$

Prędkość dźwięku — 340 $\frac{m}{s}$

Powierzchnia Polski — 312 685 km^2

Powierzchnia Chin — 9 597 000 km^2

Powierzchnia Europy — 10 529 000 km^2

Powierzchnia Afryki — 30 305 000 km^2

Oszacuj:

a) Ile razy powierzchnia Afryki jest większa od powierzchni Europy?

b) Ile razy prędkość światła jest większa od prędkości dźwięku?

c) Ile razy trzeba okrążyć równik, aby pokonać drogę równą odległości Ziemi od Księżyca?

d) Ile razy powierzchnia Chin jest większa od powierzchni Polski?

e) Czy to prawda, że światło z Księżyca do Ziemi dociera w ciągu około 1 s?

f) Czy to prawda, że światło ze Słońca do Ziemi dociera w ciągu ok. 8 minut?

15. Rozwiąż poniższe zadania w pamięci, korzystając z odpowiednich zaokrągleń liczb.

a) Ile najwięcej czekolad po 3,99 zł za sztukę można kupić za 20 zł?

b) Ile biletów po 10,50 zł można kupić za 50 zł?

c) Czy kupując 19 batoników po 1,99 zł każdy, otrzymasz resztę z 50 zł mniejszą czy większą od 10 zł?

d) Wzdłuż ściany o długości 4,95 m ustawiono trzy regały, każdy o wymiarach 30 cm × 92 cm × 210 cm. Czy zmieści się jeszcze biurko o długości 152 cm?

e) Do pierwszej klasy w pewnej szkole podstawowej zgłosiło się 103 uczniów. W każdej klasie musi być co najmniej 19 uczniów. Jaka jest największa liczba klas pierwszych, które można utworzyć?

22–23/49

f) Pani Jola zaciągnęła kredyt w wysokości 2600 zł. Miesięczna rata wynosi 195 zł. Czy pani Jola spłaci kredyt w ciągu 1 roku?

16. Oszacuj, czy kwadrat, którego pole jest równe 80,997 cm^2, ma bok dłuższy czy krótszy od 9 cm.



17. W nowym opakowaniu było 3,6 kg proszku do prania. W miarce mieści się 148 g proszku. Zakładając, że na jedno pranie zużywa się jedną miarkę, a pranie wykonuje się co 3 dni, oszacuj, czy proszku wystarczy na dwa miesiące.

18. Działka rekreacyjna państwa Wrońskich ma kształt prostokąta o wymiarach 39,7 m × 19,9 m, a działka państwa Krukowskich ma kształt kwadratu o boku długości 30,3 m. Oszacuj, która z tych działek jest większa.

Sprawdź, czy umiesz

1. Gdy zaokrąglimy liczbę 3,(93) do części setnych, otrzymamy:

A. 4,00 B. 3,94 C. 3,93 D. 3,9

2. Gdy ustawimy liczby:

$k = 3{,}9 \cdot 40$ $l = 178 + 121$ $m = 21{,}5 \cdot 8$ $n = 87{,}42 + 52{,}87$

w kolejności od największej do najmniejszej, otrzymamy układ liter:

A. n, k, m, l B. n, m, k, l C. k, l, m, n D. l, m, k, n

zadania uzupełniające 16–23, str. 49

4 Dodawanie i odejmowanie liczb dodatnich

Przypomnijmy sobie, jak obliczamy sumy i różnice liczb wymiernych.

Dodając lub odejmując ułamki zwykłe, sprowadzamy je do wspólnego mianownika.

Przykłady

$\frac{3}{5} + \frac{1}{7} = \frac{21+5}{35} = \frac{26}{35}$ | *Wspólnym mianownikiem jest 35.*

$4\frac{1}{3} - \frac{7}{9} = 4\frac{3}{9} - \frac{7}{9} = 3\frac{12}{9} - \frac{7}{9} = 3\frac{5}{9}$ | $4\frac{3}{9} = 3\frac{12}{9}$

Dodając lub odejmując ułamki dziesiętne, postępujemy podobnie jak przy dodawaniu i odejmowaniu liczb naturalnych. Niektóre proste rachunki można wykonywać w pamięci, a gdy są bardziej skomplikowane — możemy wykonać działania sposobem pisemnym.

Przykłady

$0{,}9 + 0{,}4 = 1{,}3$ | *9 dziesiątych i 4 dziesiąte to 13 dziesiątych, czyli 1,3.*

$0{,}54 - 0{,}2 = 0{,}54 - 0{,}20 = 0{,}34$ | *54 setne odjąć 20 setnych to 34 setne.*

$$\begin{array}{r} 14{,}065 \\ +\ 0{,}97 \\ \hline 15{,}035 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27{,}3 \\ -\ 5{,}816 \\ \hline 21{,}484 \end{array}$$

Dodając i odejmując ułamki dziesiętne, zapisujemy przecinek pod przecinkiem.

Przy dodawaniu i odejmowaniu liczb wymiernych staramy się wszystkie ułamki przedstawić w tej samej postaci — ułamka zwykłego albo ułamka dziesiętnego.

Przykłady

$\frac{1}{5} + 0{,}75 = 0{,}2 + 0{,}75 = 0{,}95$ | *Zamieniamy ułamek zwykły na ułamek dziesiętny.*

$5\frac{1}{3} + 0{,}3 = 5\frac{1}{3} + \frac{3}{10} = 5\frac{10}{30} + \frac{9}{30} = 5\frac{19}{30}$ | *Zapisujemy ułamek dziesiętny w postaci ułamka zwykłego.*

Zadania

1. Oblicz w pamięci:

a) $\frac{7}{9}+\frac{4}{9}$ d) $1-\frac{3}{5}$ g) $\frac{4}{5}+\frac{2}{5}$ j) $8-\frac{1}{4}$ m) $5\frac{7}{9}-4\frac{2}{9}$

b) $1\frac{2}{7}+\frac{5}{7}$ e) $1-\frac{6}{11}$ h) $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$ k) $5-\frac{3}{7}$ n) $6-2\frac{7}{8}$

c) $2\frac{2}{5}+3\frac{3}{5}$ f) $1-\frac{19}{25}$ i) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ l) $10-\frac{2}{5}$ o) $2\frac{1}{5}-\frac{2}{5}$

24/50

2. Oblicz:

a) $\frac{1}{7}+\frac{5}{14}$ d) $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}$ g) $1\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$ j) $\frac{5}{6}-\frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{4}+\frac{5}{12}$ e) $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$ h) $1\frac{1}{3}-\frac{2}{9}$ k) $1\frac{1}{6}-\frac{7}{9}$

c) $\frac{8}{9}-\frac{5}{18}$ f) $1\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ i) $2\frac{3}{5}-\frac{7}{10}$ l) $2\frac{3}{8}-1\frac{5}{6}$

25/50

3. Na weselu goście rodziców panny młodej stanowili $\frac{2}{5}$, a rodziców pana młodego $\frac{3}{8}$ zaproszonych osób. Pozostali goście zostali zaproszeni przez młodą parę. Jaką część gości weselnych stanowiły osoby zaproszone przez młodą parę? Kto zaprosił najwięcej gości?

4. — *Trafiłyśmy do świetnej klasy* — powiedziała Basia — *większość, bo aż* $\frac{3}{4}$ *chłopaków, jest niezwykle zabawnych.*

— *No tak, ale zaledwie o* $\frac{1}{3}$ *chłopaków można powiedzieć, że są przystojni* — odparła Kasia.

Czy z tego fragmentu rozmowy dwóch koleżanek wynika, że w ich mniemaniu w klasie jest choć jeden zabawny przystojniak?



Ciekawostka

Każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci sumy **różnych** ułamków prostych.

Aby przedstawić w ten sposób liczbę 10, potrzeba ponad dwanaście tysięcy takich ułamków!

5. Ułamki o liczniku 1 nazywamy **ułamkami prostymi**. Zastąp symbole odpowiednimi ułamkami prostymi.

a) $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\blacksquare$ c) $\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\blacklozenge+\blacktriangle$

b) $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\bigstar$ *d) $\frac{7}{9}=\bullet+\heartsuit+\clubsuit$

27/50

6. Oblicz w pamięci:

a) $0{,}6 + 0{,}7$ d) $1{,}2 + 2{,}15$ g) $1 - 0{,}7$ j) $10 - 2{,}2$

b) $1{,}4 + 1{,}6$ e) $1{,}07 + 3{,}5$ h) $3 - 0{,}01$ k) $11 - 1{,}3$

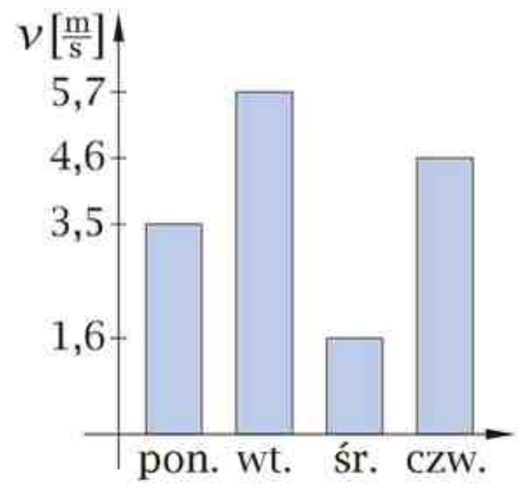
c) $0{,}05 + 5$ f) $2{,}34 + 8{,}7$ i) $1 - 0{,}09$ l) $1{,}3 - 0{,}8$

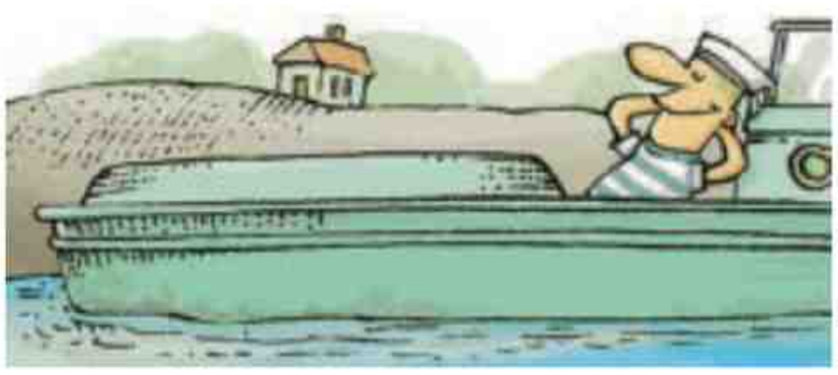
28/50

7. Na diagramie podano średnie prędkości wiatru w czterech kolejnych dniach tygodnia.

a) Którego dnia średnia prędkość wiatru była najmniejsza, a którego największa? Ile wynosiła różnica tych prędkości?

b) O ile mniejsza była średnia prędkość wiatru w środę niż w poniedziałek?





8. Barka na nieruchomej wodzie rozwija prędkość 1,4 $\frac{m}{s}$. Prędkość nurtu rzeki wynosi 0,28 $\frac{m}{s}$. Z jaką prędkością względem brzegu będzie poruszać się barka, płynąc po tej rzece z prądem, a z jaką — płynąc pod prąd?

9. Do przygotowania 2 litrów koktajlu mlecznego należy użyć 0,3 *l* soku z owoców leśnych i 0,25 *l* musu bananowego, a następnie dodać mleko. Ile należy dodać mleka?

Pini Sirupus

Skład syropu (zawartość w 120 g):

wyciąg sosnowy	7,92 g
wyciąg płynny z glistnika	0,192 g
nalewka z kopru włoskiego	1,2 g
mleczan wapnia	1,2 g
fosforan kodeiny	0,06 g
kwas fosforowy	0,12 g
cukier	74,4 g

oraz woda

10. W ramce obok przedstawiony jest skład syropu dla dzieci. Ile jest wody w 120 g tego syropu?

11. Oblicz sposobem pisemnym:

a) $15{,}27 + 9{,}83$ d) $62{,}34 - 28{,}71$

b) $37{,}6 + 4{,}82$ e) $700{,}3 - 39{,}8$

c) $29 + 38{,}2 + 6{,}957$ f) $56{,}8 - 7{,}451$

29/50



***12.** Przyjrzyj się podanym cenom. Ile powinny kosztować lody z bitą śmietaną?





lody z owocami	12,67 zł
galaretka z owocami	10,45 zł
galaretka z bitą śmietaną	8,68 zł

30/50

13. Oblicz w pamięci:

a) $\frac{1}{2}+0{,}5$ c) $0{,}75-\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{4}+0{,}25$ g) $1{,}2-\frac{1}{5}$

b) $1\frac{1}{2}-0{,}3$ d) $0{,}125-\frac{1}{8}$ f) $1{,}5-\frac{3}{4}$ h) $1\frac{1}{4}-0{,}5$

14. Oblicz, zamieniając ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne.

a) $1{,}16+\frac{1}{4}$ c) $65{,}8-\frac{3}{20}$ e) $\frac{7}{8}-0{,}15$ g) $2{,}5-\frac{2}{5}$

b) $3{,}9+\frac{1}{25}$ d) $3{,}65-1\frac{2}{5}$ f) $17\frac{3}{4}+1{,}7$ h) $3\frac{1}{8}-0{,}2$

31/50



15. Oblicz:

a) $3{,}6+\frac{2}{3}$ c) $2{,}75+\frac{2}{7}$ e) $3\frac{1}{3}-3{,}3$

b) $4\frac{1}{8}-1{,}11$ d) $0{,}125-\frac{1}{9}$ f) $1\frac{1}{5}-0{,}09$

32/50

16. W Ameryce Północnej znajduje się Kanada, USA, Meksyk oraz wiele innych krajów.

a) Kanada i USA zajmują po około $\frac{2}{5}$, a Meksyk około $\frac{2}{25}$ powierzchni całego kontynentu. Jaką część powierzchni zajmują pozostałe kraje?

b) 0,59 ludności Ameryki Północnej mieszka w USA, $\frac{1}{5}$ w Meksyku, a tylko $\frac{3}{50}$ w Kanadzie. Jaka część ludności zamieszkuje pozostałe kraje?

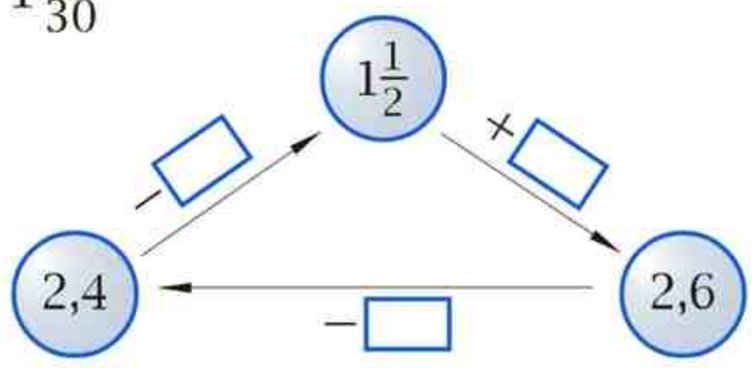
Sprawdź, czy umiesz

1. Wynikiem działania $4\frac{1}{6}-2{,}5$ jest:

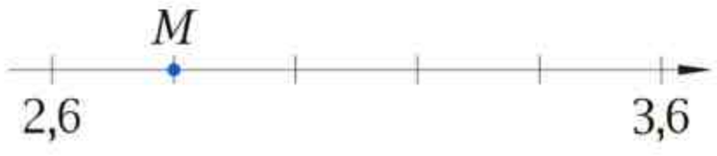
A. $2\frac{2}{3}$ B. $1\frac{2}{3}$ C. $2\frac{1}{4}$ D. $1\frac{29}{30}$

2. Suma liczb, które należy wstawić w puste kratki, wynosi:

A. 2 B. 1,8 C. 2,2 D. 6,5



3. Punkt M na osi liczbowej odpowiada liczbie:



A. $2\frac{5}{12}$ B. 2,625 C. 2,8 D. 2,85

zadania uzupełniające 24–32, str. 50

5 Mnożenie i dzielenie liczb dodatnich

Poniżej przypominamy, jak mnożymy oraz dzielimy ułamki zwykłe.

Przykłady

$2\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{5} \cdot \frac{2}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{8}{15}$

$1\frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{7}{\underset{3}{\cancel{6}}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$

Liczbę mieszaną zamieniamy na ułamek niewłaściwy, po skróceniu mnożymy licznik przez licznik i mianownik przez mianownik.

$\frac{3}{5} : \frac{7}{9} = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{7} = \frac{27}{35}$

$2\frac{2}{3} : 12 = \frac{8}{3} : 12 = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{3 \cdot \underset{3}{\cancel{12}}} = \frac{2}{9}$

Mnożymy pierwszy ułamek przez odwrotność drugiego.

Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych w praktyce wykonuje się najczęściej za pomocą kalkulatora. Nie warto jednak korzystać z kalkulatora, gdy mamy wykonać tak proste działania jak w poniższych przykładach.

Przykłady

$73{,}4 \cdot 10000 = 734\,000$ — *Przesuwamy przecinek w prawo o 4 miejsca.*

$5{,}12 : 1000 = 0{,}00512$ — *Przesuwamy przecinek w lewo o 3 miejsca (dopisując odpowiednią liczbę zer).*

$0{,}4 \cdot 0{,}21 = 0{,}084$ — *Obliczamy w pamięci $4 \cdot 21$, zapisujemy wynik i oddzielamy przecinkiem 3 miejsca (licząc od prawej strony).*

$0{,}02 \cdot 0{,}15 = 0{,}0030 = 0{,}003$ — *Obliczamy w pamięci $2 \cdot 15$, zapisujemy wynik i oddzielamy przecinkiem 4 miejsca (licząc od prawej strony).*

$3{,}2 : 0{,}8 = 32 : 8 = 4$

$\frac{0{,}036}{0{,}04} = \frac{3{,}6}{4} = 0{,}9$

Przesuwamy w obu liczbach przecinek o tyle samo miejsc, tak aby dzielnik był liczbą całkowitą.

ĆWICZENIE. Sprawdź, ile różnych wyników otrzymamy po wykonaniu poniższych działań.

$3{,}27 \cdot 100$ $\quad 3{,}27 : \frac{1}{100}$ $\quad 3{,}27 : 0{,}01$ $\quad \frac{3{,}27}{0{,}01}$

$3{,}27 : 100$ $\quad 3{,}27 \cdot \frac{1}{100}$ $\quad 3{,}27 \cdot 0{,}01$ $\quad \frac{3{,}27}{100}$

W kolejnych przykładach przypominamy, jak wykonuje się działania na ułamkach dziesiętnych sposobem pisemnym.

Przykłady

$$\begin{array}{r} 1{,}35 \\ \times\ 2{,}7 \\ \hline 945 \\ +270 \\ \hline 3{,}645 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2{,}04 \\ \times\ 0{,}017 \\ \hline 1428 \\ +\ 204 \\ \hline 0{,}03468 \end{array}$$

Wykonujemy mnożenie jak na liczbach naturalnych, a następnie oddzielamy przecinkiem tyle miejsc, ile było ich razem po przecinku w obu czynnikach.

$$30{,}24 : 1{,}5 = \begin{array}{r} 20{,}16 \\ \hline 302{,}4 : 15 \\ -30 \\ \hline 24 \\ -15 \\ \hline 90 \\ -90 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$67{,}2 : 0{,}24 = \begin{array}{r} 280 \\ \hline 6720 : 24 \\ -48 \\ \hline 192 \\ -192 \\ \hline 0 \end{array}$$

Przed wykonaniem dzielenia przesuwamy przecinek w obu liczbach tak, aby dzielnik stał się liczbą całkowitą.

Zadania

1. Oblicz w pamięci:

a) $\frac{3}{4} \cdot 4$ c) $10 \cdot \frac{1}{5}$ e) $2 \cdot \frac{3}{5}$ g) $\frac{8}{9} : 4$ i) $6 : 5$

b) $\frac{2}{7} \cdot 7$ d) $\frac{1}{8} \cdot 3$ f) $\frac{6}{7} : 2$ h) $\frac{6}{5} : 3$ j) $3 : 9$

2. Oblicz:

a) $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}$ d) $1\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{15}$ g) $6\frac{1}{2} : 3\frac{1}{4}$ j) $8\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} \cdot 3$

b) $\frac{5}{8} : \frac{7}{12}$ e) $2\frac{3}{5} : 5$ h) $7\frac{1}{3} : 2\frac{2}{5}$ k) $2\frac{1}{7} \cdot 7 \cdot 2\frac{2}{5}$

c) $\frac{7}{8} \cdot \frac{24}{33}$ f) $1\frac{5}{7} : 6$ i) $2 \cdot \frac{13 \cdot 4}{8}$ l) $4 \cdot \frac{15 \cdot 9}{12}$

33/50

3. Oblicz:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{12} : \frac{1}{12}$$

4. Dziewczęta stanowiły $\frac{13}{20}$ liczby uczniów Zielonej Szkoły. W czasie zajęć dziewczęta podzielono na 10 równolicznych grup, a chłopców na 5 równolicznych grup. Czy liczniejsze są grupy dziewcząt czy chłopców?

Aby obliczyć ułamek z liczby, wystarczy pomnożyć ułamek przez tę liczbę.

5. Oblicz w pamięci:

a) $\frac{2}{3}$ z 30 zł c) $\frac{5}{4}$ z 12 h e) $2\frac{3}{5}$ z 5 kg

b) $\frac{3}{4}$ z 8 kg d) $\frac{3}{5}$ z 60 zł f) $1\frac{1}{2}$ z 30 h

6. W pewnym roku szkolnym było 297 dni, z tego $\frac{10}{27}$ to były dni wolne od nauki. Same soboty i niedziele stanowiły $\frac{17}{22}$ wszystkich wolnych dni. Ile sobót i niedziel było wówczas w roku szkolnym?



W polskim sejmie zasiada 460 posłów. Gdy sejm uchwali jakąś ustawę, musi ją zatwierdzić senat, a potem prezydent. Jeśli prezydent nie zgadza się z ustawą sejmową, może zgłosić weto. Sejm może odrzucić weto prezydenta, jeśli w głosowaniu weźmie udział co najmniej połowa posłów, a za odrzuceniem będzie głosowało co najmniej $\frac{3}{5}$ obecnych.

7. Przeczytaj powyższą informację. Przypuśćmy, że prezydent zawetował pewną ustawę.

a) Ilu posłów musi głosować za odrzuceniem weta prezydenta, by sejm weto odrzucił, jeśli w głosowaniu biorą udział wszyscy posłowie?

b) W pewnym głosowaniu nad wetem prezydenta wzięło udział 328 posłów. Spośród nich 197 posłów było za odrzuceniem weta, 120 było przeciw, a 11 posłów wstrzymało się od głosu. Czy weto prezydenta zostało odrzucone?

8. Rozlewamy 42 *l* soku do butelek o pojemności $\frac{3}{4}$ *l*, wypełniając $\frac{7}{8}$ objętości każdej butelki. Ile butelek musimy przygotować?



$\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{14}} = \frac{2}{7} : \frac{3}{14}$

$\frac{\frac{2}{5}}{4} = \frac{2}{5} : 4$

9. Oblicz:

a) $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}}$ b) $\frac{\frac{3}{11}}{\frac{5}{11}}$ c) $\frac{\frac{5}{9}}{3}$ d) $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{7}{8}}$

34/50

***10.** Jakimi liczbami należy zastąpić symbole?

$\frac{3}{5} \cdot \frac{\heartsuit}{4} = 3$ $12 \cdot \frac{9}{\diamondsuit} = 5\frac{2}{5}$ $\frac{\spadesuit}{20} : \frac{3}{4} = 6$

11. Oblicz:

a) $1{,}0049 \cdot 0{,}1$ c) $92{,}03 \cdot \frac{1}{10\,000}$ e) $0{,}0167 : \frac{1}{10}$ g) $\frac{2{,}47}{100}$

b) $504{,}3 \cdot 0{,}001$ d) $1093{,}02 : 0{,}1$ f) $24{,}92 : 0{,}001$ h) $\frac{0{,}07}{100}$

35/51

12. W 100 g topionego sera jest 0,54 g wapnia. Ile wapnia zawiera 1 g tego sera? Ile wapnia zawiera 1 kg, a ile — 1 dag tego sera?

13. Pan Nowak przejechał swoim samochodem już 100 000 km. Do tej pory jego samochód spalał przeciętnie 7,2 *l* na 100 km. Ile litrów benzyny spalił dotychczas samochód pana Nowaka?

14. Wiedząc, że $\frac{1}{36} = 0{,}02(7)$, zapisz rozwinięcia dziesiętne podanych liczb.

a) $10 \cdot \frac{1}{36}$ b) $\frac{100}{36}$ c) $\frac{1}{360}$ d) $\frac{1}{3600}$

15. Wyraź podane wielkości we wskazanej jednostce:

a) [m]	0,22 km	17 cm	1,4 cm	6 dm
b) [cm]	0,3 m	$\frac{2}{5}$ m	72 dm	4 mm
c) [dag]	1,3 kg	$\frac{1}{5}$ kg	520 g	12 g
d) [g]	14 dag	1,7 dag	6 kg	0,3 kg

40/51

$0{,}7\ \text{km} = 0{,}7 \cdot 1000\ \text{m}$ (1 km)

$6{,}2\ \text{cm} = 6{,}2 \cdot \frac{1}{100}\ \text{m}$ ($\frac{1}{100}$ m = 1 cm)

16. Na mapie o skali 1 : 10 000 odcinek łączący dwa punkty ma długość 13,5 cm. Podaj, jaka jest odległość w terenie między tymi punktami — w centymetrach, w metrach oraz w kilometrach.

Ciekawostka

Dołączając *mili* do słowa *metr*, otrzymujemy milimetr, co oznacza tysięczną część metra. Podobnie miligram to tysięczna część grama, a mililitr to tysięczna część litra. Przedrostek *mili-* pochodzi od łacińskiego *mille* (tysiąc).

$1\ \text{mm} = 0{,}001\ \text{m}$

$1\ \text{mg} = 0{,}001\ \text{g} \qquad 1\ \text{ml} = 0{,}001\ l$

Z kolei od greckiego słowa *mikrón* (drobiazg) pochodzi nazwa jednostki długości — 1 mikron (1 μ). Mikron to milionowa część metra.

$1\ \mu = 0{,}000001\ \text{m}$

17. Wykonaj obliczenia.

a) 2,5 metra — ile to milimetrów?
8,5 milimetra — ile to metrów?

b) 0,6 grama — ile to miligramów?
20,5 miligramów — ile to gramów?

c) 0,0065 metra — ile to mikronów?
2734 mikrony — ile to metrów?

18. Zapisz odpowiednie równości.

a) 1 mikron — jaka to część milimetra?

b) 1 milimetr — ile to mikronów?

19. Oblicz:

a) $2{,}3 \cdot 2$ d) $1{,}3 \cdot 30$ g) $0{,}6 : 3$ j) $0{,}24 : 0{,}06$

b) $0{,}21 \cdot 4$ e) $0{,}3 \cdot 0{,}2$ h) $0{,}25 : 5$ k) $7 : 0{,}2$

c) $0{,}5 \cdot 20$ f) $0{,}2 \cdot 0{,}43$ i) $0{,}8 : 0{,}4$ l) $0{,}9 : 4{,}5$

41/51

20. Oblicz, ile to złotych.

a) 200 dwudziestogroszówek c) 280 pięciogroszówek

b) 500 dziesięciogroszówek d) 1400 dwugroszówek

36/51

21. Średnica bakterii wynosi około 0,006 mm, wirusa około 0,00002 mm, a atomu około 0,0000001 mm.

a) Ile razy średnica bakterii jest większa od średnicy wirusa?

b) Ile razy średnica wirusa jest większa od średnicy atomu?

c) Ile razy średnica bakterii jest większa od średnicy atomu?



22. Zobacz, jak sprytnie Krysia rozwiązywała zadanie: *Za 15 bułek zapłacono 9,60 zł. Ile trzeba by było zapłacić za 10 bułek?* Rozwiąż poniższe zadania w podobny sposób.

a) W trzech szklankach mieści się 0,63 kg mąki. Cztery szklanki mąki — ile to kilogramów mąki?

b) Za 400 g pewnej wędliny zapłacono 8,40 zł. Ile kosztuje 1 kg tej wędliny?

c) Za 3 kg cukierków zapłacono 33,90 zł. Ile trzeba zapłacić za 2 kg tych cukierków?

d) W łyżce o pojemności 15 ml mieści się 1,2 dag cukru. Ile cukru mieści się w szklance o pojemności 250 ml?

23. Oblicz sposobem pisemnym.

a) $3{,}22 \cdot 0{,}7$ c) $3{,}05 \cdot 0{,}016$ e) $62{,}72 : 7$ g) $364 : 0{,}14$

b) $90{,}6 \cdot 10{,}1$ d) $1{,}24 \cdot 3{,}15$ f) $3780 : 9{,}9$ h) $1{,}694 : 0{,}018$

24. a) Litr oleju waży 0,92 kg. Ile waży 2,5 litra oleju?

b) Ile waży litr rtęci, jeśli 7 litrów waży 94,5 kg?

38/51

25. W 1867 r. Rosja sprzedała Stanom Zjednoczonym Alaskę za 7,2 mln dolarów. Można przyjąć, że powierzchnia Alaski wynosiła wówczas ok. 1,5 mln km^2. Ile zapłacili Amerykanie za każdy km^2 Alaski?

W 1905 r. w RPA znaleziono słynny diament Cullinan, który ważył 621,2 g. Z Cullinana zrobiono 105 brylantów różnej wielkości o łącznej masie 212,73 g. Dwa największe otrzymane z Cullinana brylanty — Wielka Gwiazda Afryki i Mniejsza Gwiazda Afryki — mają 530,2 i 317,4 karatów (1 karat to 0,2 g) i przez ponad 100 lat były największymi brylantami świata. Jeden znajduje się w koronie, a drugi w berle królewskim Wielkiej Brytanii. Najcenniejsze diamenty w Polsce to wielki czarny diament w złotej puszce św. Stanisława i bezbarwny diament w koronie monstrancji Jana Kazimierza. Pierwszy z nich znajduje się na Wawelu. Drugi — 10-karatowy jest prezentowany w skarbcu klasztoru Paulinów na Jasnej Górze.

26. Przeczytaj informacje w ramce.

a) Ile gramów diamentu Cullinan stracono w trakcie obróbki? Jaka to część Cullinana? Wynik podaj w ułamku dziesiętnym z dokładnością do części setnych.

b) Jakie części Cullinana stanowią dwa największe brylanty z niego otrzymane?

c) Ile przeciętnie ważył każdy ze 103 mniejszych brylantów?

d) O ile więcej karatów miał Cullinan od diamentu umieszczonego w monstrancji Jana Kazimierza?



27. Przed wyjazdem do Londynu pani Zosia kupiła w kantorze Syrena euro za 870 zł. W Londynie wymieniła euro na funty.

a) Ile funtów otrzymała?

b) Ile funtów by otrzymała, gdyby za tę samą kwotę kupiła dolary amerykańskie i wymieniła je w Londynie na funty?



28. Oblicz (postaraj się liczyć w pamięci):

a) $0{,}5 \cdot \frac{1}{3}$
b) $0{,}75 \cdot \frac{1}{5}$
c) $1\frac{1}{4} : 1{,}25$
d) $0{,}25 : \frac{1}{2}$
e) $0{,}25 \cdot \frac{1}{2}$
f) $1{,}5 : \frac{1}{2}$
g) $2{,}125 : \frac{1}{8}$
h) $0{,}5 : \frac{1}{4}$

29. Oblicz:

a) $0{,}2 \cdot \frac{1}{8}$
b) $1\frac{1}{3} \cdot 2{,}7$
c) $1\frac{1}{3} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 0{,}2$
d) $\frac{3}{4} : 0{,}0375$
e) $0{,}48 : 1\frac{1}{7}$
f) $\frac{3\frac{7}{9}}{1{,}7} : 2$
g) $\left(2\frac{2}{11} : \frac{8}{3}\right) \cdot 0{,}11$
h) $1{,}8 : \left(1\frac{1}{3} \cdot 6\frac{3}{4}\right)$
i) $\frac{2\frac{1}{7} : \frac{5}{14}}{0{,}6}$

48/52

Sprawdź, czy umiesz

1. Iloraz $2\frac{5}{8} : 1{,}4$ jest równy:

A. $1\frac{7}{8}$ B. $\frac{8}{15}$ C. $\frac{147}{40}$ D. $10\frac{1}{2}$

2. $\frac{3}{5}$ godziny lekcyjnej — ile to minut?

A. 27 minut B. 36 minut C. 75 minut D. 3 minuty

3. Na rozbudowę stajni pan Wroński potrzebuje 1,5 mln zł. Z funduszy Unii Europejskiej może uzyskać $\frac{3}{5}$ tej kwoty. Ile własnych pieniędzy będzie musiał przeznaczyć na tę inwestycję?

A. 0,9 mln zł B. 0,09 mln zł C. 0,6 mln zł D. 0,06 mln zł

→ zadania uzupełniające 33–50, str. 50–52

6 Wyrażenia arytmetyczne

Obliczając wartości wyrażeń arytmetycznych, należy pamiętać o właściwej kolejności wykonywania działań.

Przykłady

$5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$

$18 : 3^2 \cdot 2 = 18 : 9 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$

Potęgowanie wykonujemy przed mnożeniem i dzieleniem. Gdy nie ma nawiasów, mnożenie i dzielenie wykonujemy od lewej do prawej.

$5 - 4 \cdot \frac{3}{4} + \frac{6}{7} : 2 = 5 - 3 + \frac{3}{7} = 2\frac{3}{7}$

Mnożenie i dzielenie wykonujemy przed dodawaniem i odejmowaniem.

$\frac{1}{2} : \left(7 - \frac{3}{2} \cdot (0{,}7 + 1{,}3)\right) =$

$= \frac{1}{2} : \left(7 - \frac{3}{2} \cdot 2\right) = \frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$

Zaczynamy od działań w tych nawiasach, które nie zawierają innych nawiasów.



Zadania

1. Które działanie należy wykonać jako pierwsze? Wykonaj obliczenia.

a) $34 - 4 \cdot 5$
b) $20 : 2^2$
c) $24 : (3 \cdot 4)$
d) $22 - (5 + 6)$
e) $2 \cdot (20 + 14 : 2)$
f) $(25 - (3 + 8)) \cdot 3$

51/52

2. Wykonaj obliczenia. Postaraj się liczyć w pamięci.

a) $\frac{1}{2} \cdot 4 - 2$
b) $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$
c) $1 + \frac{3}{7} : \frac{1}{7}$
d) $(0{,}6 + 0{,}9) : 3$
e) $10 \cdot \left(0{,}5 + \frac{1}{4}\right)$
f) $0{,}3 + 0{,}5 \cdot 4$
g) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - 0{,}5 \cdot 0{,}75$
h) $(1 - (0{,}1)^2) : 9$
i) $(0{,}1 + 0{,}1 \cdot 15) \cdot 10$

52/52

3. Pan Izydor zapłacił za swoje zakupy banknotem stuzłotowym i jako resztę otrzymał banknot dwudziestozłotowy, dwie dwuzłotówki i trzy dwudziestogroszówki. Ile kosztowały zakupy pana Izydora?

4. Oblicz:

a) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) : \frac{1}{2}$
b) $3{,}2 : \left(0{,}8 - \frac{2}{5}\right)$
c) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$
d) $4{,}8 + \frac{1}{3} \cdot (1{,}2 - 0{,}6)$
e) $\left(1 - \frac{7}{9}\right) \cdot (5{,}2 - 0{,}7)$
f) $123 : 10 + 0{,}2 \cdot 6{,}1$
g) $(6{,}5 - 4{,}7) : \left(4 - 2\frac{1}{5}\right)$
h) $\left(1{,}5 - 1\frac{1}{3}\right) \cdot 2\frac{2}{5} - 0{,}1$
i) $\left(6{,}25 - 2\frac{1}{2}\right) : 2\frac{1}{7} - 1$

54/53

5. Zapisz odpowiednie wyrażenie arytmetyczne i oblicz jego wartość.

a) Do liczby 7,5 dodaj iloczyn liczb 1,2 i $\frac{5}{12}$.
b) Od ilorazu liczby 2,5 przez $\frac{2}{5}$ odejmij $\frac{1}{4}$.
c) Od sumy liczb $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$ odejmij kwadrat liczby $\frac{1}{2}$.
d) Do sześcianu liczby 2 dodaj kwadrat liczby $\frac{2}{3}$.

6. Oblicz:

a) $5 \cdot \frac{7 + 19}{10}$
b) $6 \cdot \frac{7 - 3}{3}$
c) $\frac{14 - 9}{9 + 6} \cdot 3$
d) $21 \cdot \frac{\frac{1}{2} + 7}{7}$
e) $\frac{8}{9 - 4} : \frac{16 - 10}{12}$
f) $\left(14 \cdot \frac{81 - 17}{21}\right) : \frac{8}{3}$

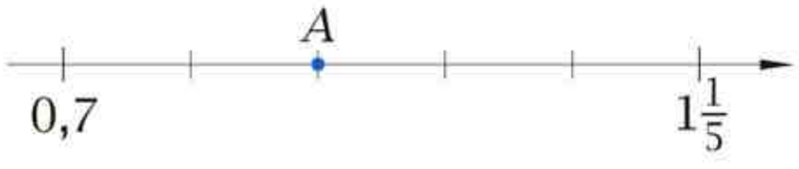
53/52

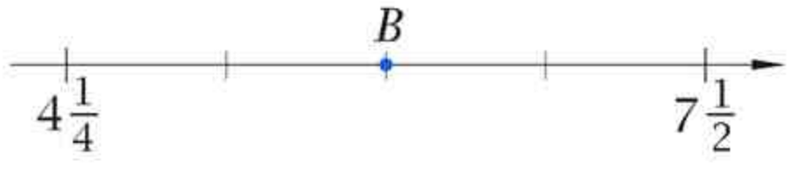
7. Oblicz:

a) $\frac{2{,}75 + 0{,}1 \cdot 10}{0{,}25 \cdot 5}$
b) $\frac{1{,}4}{\left(2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2}\right) \cdot 6}$
c) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 0{,}5}{0{,}2 - 0{,}8 \cdot \frac{1}{8}}$

8. Rysunki przedstawiają fragmenty osi liczbowych. Oblicz współrzędne punktów oznaczonych literami.

55/53





9. Kupując w sklepie internetowym, musimy dodatkowo zapłacić za przesyłkę zgodnie z taryfą podaną w tabeli.

Wartość zamówienia	Koszt przesyłki
do 99,99 zł	9,90 zł
od 100 zł do 149,99 zł	7,90 zł
od 150 zł	bez kosztów

Komplet flamastrów w sklepie internetowym kosztuje 25,59 zł, a w sklepie osiedlowym trzeba za niego zapłacić 29,10 zł. Ile można zaoszczędzić, kupując 5 takich kompletów w sklepie internetowym zamiast w osiedlowym?

10. Przyjrzyj się fotografii obok. Ile złotych można zaoszczędzić, kupując 30 litrów oranżady w butelkach dwulitrowych zamiast w butelkach półtoralitrowych?



11. Spiż jest stopem miedzi, cyny i cynku. Używa się go do wyrobu dzwonów. Miedź stanowi $\frac{22}{25}$ stopu, cyna $\frac{2}{25}$, resztę stanowi cynk. Spiżowy dzwon waży 0,5 t. Ile cynku użyto do wykonania tego dzwonu?

12. Ogrodnik zebrał 110 kg jabłek, które ułożył w trzech jednakowych skrzynkach. Jedna skrzynka ważyła brutto $34\frac{3}{4}$ kg, a druga — 36,3 kg. Trzy puste skrzynki ważą razem $6\frac{3}{4}$ kg. Ile ważyły jabłka w trzeciej skrzynce?

Waga **brutto** to waga towaru wraz z opakowaniem.

Waga **netto** to waga towaru bez opakowania.

Waga samego opakowania nazywana jest **tarą**.



13. Harcerze ugotowali 10 litrów grochówki. Zupa była bardzo gęsta, więc dolali jeszcze 3,4 litra wody. Każdy z harcerzy zjadł po $\frac{2}{5}$ litra zupy. W garnku zostało jeszcze 3,8 litra grochówki. Ilu było harcerzy?

14. Woda stanowi około 0,9 masy świeżych grzybów. Suszono 2,5 kg grzybów. Wyparowało $\frac{8}{9}$ wody. Ile ważyły suszone grzyby?

15. Beczka ma pojemność 67,2 litra, dzbanek — 1,6 litra, a kubek ma pojemność 5 razy mniejszą niż dzbanek. Napełnienie dzbanka wodą z kranu trwa 20 s, pokonanie drogi od kranu do beczki trwa 10 s i tyle samo trwa powrót do kranu. Wylewanie wody z dzbanka trwa 5 s.



a) Ile czasu zajmie napełnienie beczki wodą za pomocą dzbanka?

b) Ile czasu zajęłoby napełnienie beczki wodą za pomocą kubka? Przyjmijmy, że dojście do beczki i powrót do kranu z kubkiem w ręku trwa tyle samo, co z dzbankiem.

***16.** Firma Mixmax kupiła 20 kg rodzynek, 12 kg migdałów oraz 14 kg orzechów. Kilogram rodzynek kosztował 6,70 zł, migdałów — 40 zł, a orzechów — 23,50 zł. Bakalie wymieszano i zapakowano w woreczki, po 200 g do każdego. Jaka powinna być cena jednego woreczka bakalii, aby na każdym firma Mixmax zarobiła złotówkę (nie licząc kosztów pakowania ani kosztów woreczków)?

Sprawdź, czy umiesz

1. W przykładzie $7+9:\left(2\frac{3}{4}-0,5\cdot 1\frac{1}{2}\right)$ jako ostatnie należy wykonać:

A. dodawanie B. mnożenie C. dzielenie D. odejmowanie

2. Wartość wyrażenia $4-3:\left(2\frac{1}{4}+1,25\right)$ wynosi:

A. $\frac{7}{34}$ B. $\frac{2}{7}$ C. $3\frac{1}{7}$ D. $4\frac{6}{7}$

3. Dzbanek kosztuje 17,50 zł, a jedna szklanka 2,20 zł. Ile złotych trzeba zapłacić za dzbanek i 6 szklanek?

A. 20,70 zł B. 30,70 zł C. 107,00 zł D. 210,70 zł

4. Pan Przedsiębiorczy kupił w hurtowni 40 kg cukierków w cenie 15,60 zł za kilogram z zamiarem zarobienia na ich sprzedaży dwustu złotych. Jaką powinien ustalić cenę detaliczną sprzedawanych cukierków?

A. 16,10 zł B. 5 zł C. 20,60 zł D. 26 zł

zadania uzupełniające 51–66, str. 52–54

7 Działania na liczbach dodatnich i ujemnych

Z historii

Liczby ujemne zostały wynalezione przez Chińczyków w II w. p.n.e. Reguły działań na liczbach całkowitych (dodatnich i ujemnych) określili matematycy hinduscy w VII w. n.e.

W Europie liczby ujemne pojawiły się dopiero w XII w. Bardzo długo nie były jednak uznawane, nawet przez wybitnych matematyków. Uważano je za dziwne obiekty, przydatne co najwyżej przy rozwiązywaniu równań. Sytuacja zmieniła się w XVI w. wraz z pojawieniem się geometrycznej interpretacji liczb — osi liczbowej.

Liczby ujemne uznano w pełni dopiero w połowie XVIII w.

Wykonywanie działań na dowolnych liczbach wymiernych (dodatnich i ujemnych) jest nieco trudniejsze niż wykonywanie działań na samych liczbach dodatnich. Warto pamiętać, że każde odejmowanie liczby można zastąpić dodawaniem liczby do niej przeciwnej.

Przykłady

$7 + 12 = 19$

$-7 + (-12) = -19$

$7 + (-12) = -5$

$-7 + 12 = 5$

$7 - 12 = 7 + (-12) = -5$

$-7 - (-12) = -7 + 12 = 5$

$7 - (-12) = 7 + 12 = 19$

$-7 - 12 = -7 + (-12) = -19$



Zasady mnożenia i dzielenia liczb wymiernych są prostsze. Wystarczy tylko pamiętać, że:

- *iloczyn (iloraz) dwu liczb o tych samych znakach jest liczbą dodatnią,*
- *iloczyn (iloraz) dwu liczb o znakach przeciwnych jest liczbą ujemną.*

Przykłady

$15 \cdot 3 = 45$

$(-15) \cdot (-3) = 45$

$15 \cdot (-3) = -45$

$(-15) \cdot 3 = -45$

$51 : 3 = 17$

$(-51) : (-3) = 17$

$51 : (-3) = -17$

$(-51) : 3 = -17$



ĆWICZENIE. Podaj przykłady dwóch liczb, których:

a) suma jest liczbą ujemną, a iloczyn jest liczbą dodatnią,

b) suma i iloczyn są liczbami ujemnymi.

Zadania

1. Oblicz w pamięci:

a) $-27+12$ d) $16-60$ g) $-\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)$ j) $-1-\left(-\frac{4}{7}\right)$

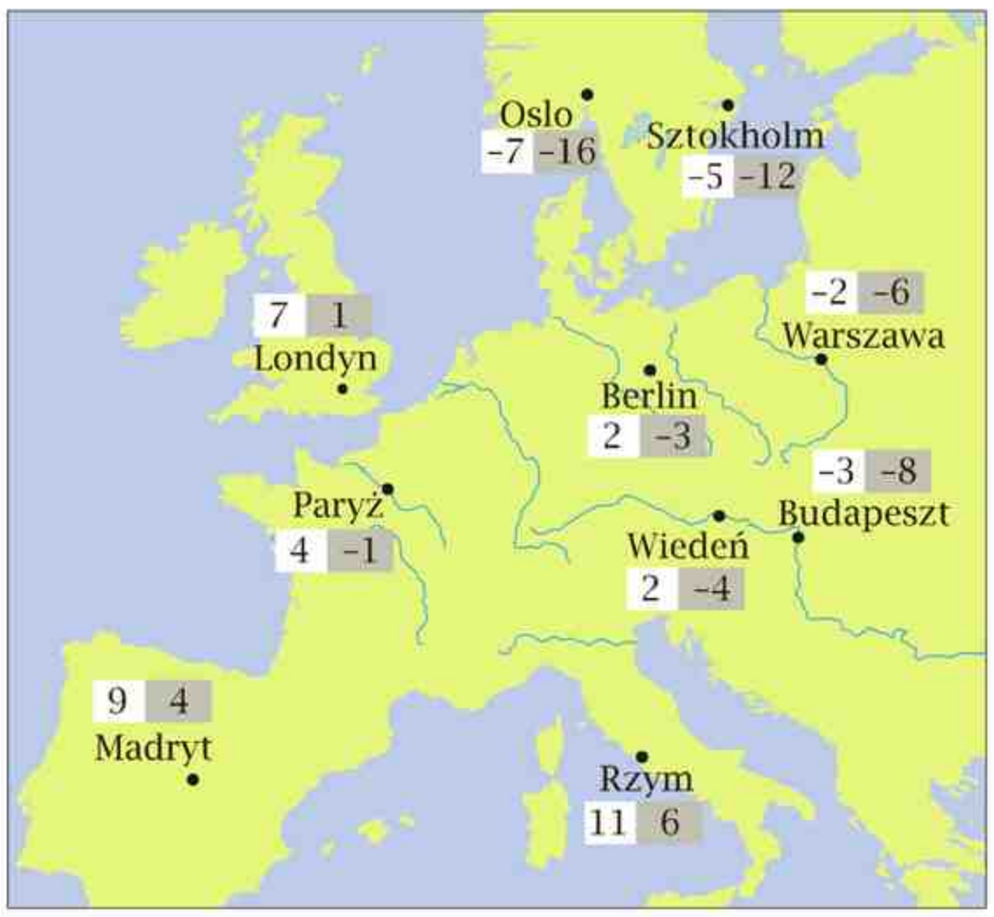
b) $-33+44$ e) $-15-25$ h) $0{,}2-0{,}7$ k) $5{,}5-(-0{,}8)$

c) $-23+(-17)$ f) $-30-(-50)$ i) $-0{,}6-0{,}4$ l) $-0{,}75+\frac{1}{4}$

2. Ustal, czy wynik działania jest liczbą dodatnią czy ujemną.

$a=-3\frac{1}{9}-\left(-4\frac{1}{17}\right)$ $c=2{,}66+\left(-2\frac{1}{3}\right)$ $e=-2\frac{1}{3}-(-3{,}8)$

$b=-2\frac{14}{15}+0{,}2$ $d=4{,}08-(-3{,}275)$ $f=-14{,}2-7{,}87$



3. Na mapie podano średnie temperatury (w °C) dzienną i nocną w kilku stolicach europejskich zanotowane pewnego zimowego dnia.

a) W którym z miast różnica między średnią temperaturą dnia i nocy była największa, a w którym najmniejsza, i ile wyniosły te różnice?

b) Znajdź miasta z najwyższą i najniższą średnią temperaturą dzienną. Oblicz różnicę tych temperatur.

c) O ile °C niższa była średnia nocna temperatura w stolicy Norwegii niż w stolicy Hiszpanii?

4. Oblicz:

a) $-2\frac{1}{5}+3{,}3$ d) $-4{,}5-2\frac{1}{4}$ g) $-5\frac{4}{7}+7$

b) $1\frac{5}{6}-3\frac{1}{3}$ e) $-3\frac{1}{6}-\left(-5\frac{5}{6}\right)$ h) $1{,}23-9$

c) $4{,}3-7{,}5$ f) $7\frac{1}{3}+\left(-4\frac{5}{6}\right)$ i) $-6-\left(-4\frac{5}{9}\right)$

67/54

5. Przedstaw liczbę $-2{,}5$ w postaci:

a) sumy dwóch liczb ujemnych,

b) sumy liczby dodatniej i ujemnej,

c) różnicy dwóch liczb ujemnych,

d) różnicy liczby ujemnej i dodatniej.



6. Zastąp symbole możliwie największymi liczbami całkowitymi tak, aby nierówności były prawdziwe.

♥ $- 6{,}25 < 0$ $\qquad 3\frac{2}{3} - \blacklozenge > 0$ $\qquad -4{,}75 + \spadesuit < 0$ $\qquad 7\frac{1}{3} - (-\clubsuit) < 0$

7. Oblicz:

a) $3 - 15 - 5$
b) $-7 + 11 - 6$
c) $5 - (-12) - 7 + 14$
d) $-2 - (-8) - 6 - 3$
e) $1{,}6 - 2\frac{1}{6} - 1$
f) $-3\frac{1}{4} + 2{,}75 - 0{,}6$

8. Oblicz sprytnie:

a) $15 - (-11) - 15 - 11$
b) $-10 - 7 - (-7) - 18$
c) $-\frac{5}{9} + \frac{2}{3} + \frac{5}{9} - \frac{5}{6} - \frac{2}{3}$
d) $-\frac{2}{7} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$
e) $-1{,}1 + 2{,}2 + 3{,}3 - 5{,}5 + 6{,}6$
f) $-3{,}7 + 2{,}85 + 4{,}7 - 4{,}85$
g) $1\frac{1}{4} - 0{,}5 - \frac{3}{7} - 0{,}25 + 1\frac{1}{2}$
h) $-\frac{1}{8} - \frac{1}{3} + 2{,}5 + 3\frac{1}{3} - (-0{,}125)$

69/54

9. Oblicz (postaraj się liczyć w pamięci):

a) $(-0{,}35) \cdot 2$
b) $2{,}5 \cdot (-2)$
c) $(-4) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$
d) $\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$
e) $(-1)^3 \cdot (-0{,}9)$
f) $(-0{,}1) \cdot (-10)^2$
g) $-2^2 : (-2)$
h) $(-2)^3 : 4$

70/54



10. Ustal, jaką liczbą — dodatnią czy ujemną — jest:

a) iloczyn trzynastu liczb ujemnych,
b) sześcian iloczynu dwóch liczb o przeciwnych znakach,
c) iloraz kwadratów dwóch liczb o przeciwnych znakach,
d) odwrotność iloczynu trzech liczb ujemnych,
e) odwrotność sumy dwóch liczb ujemnych.

11. Oblicz:

a) $-2 : (7 - 11)$
b) $\dfrac{6 - (-7) \cdot (-2)}{-4}$
c) $(-2 - 4) \cdot (-6) : (-3)^2$
d) $\dfrac{(-3) \cdot (-2 - 10) - 5}{7 - 9}$
e) $(-2)^3 + 45 : (-3^2)$
f) $\dfrac{15 - (-2) \cdot 4}{-11 + 4} + \dfrac{5 - 2}{2 - 3}$
g) $(-2) \cdot \dfrac{1 - 4}{4}$
h) $\dfrac{12 - 20}{2} \cdot 3$
i) $\dfrac{-8 + 4}{3} \cdot \dfrac{6}{-1 + 3}$



12. Wstaw nawiasy na cztery sposoby tak, aby uzyskać cztery różne wyniki.

$$-3 - 6 \cdot 5 - 1 : 8$$

13. Które zdanie jest prawdziwe?

① Suma liczby i liczby do niej przeciwnej jest równa 0.
② Iloczyn liczby i liczby do niej przeciwnej jest równy 1.
③ Suma liczby i jej odwrotności wynosi 0.
④ Iloczyn liczby i jej odwrotności jest równy 1.

14. Oblicz:

a) $\dfrac{-1{,}8 \cdot \frac{2}{3} - 0{,}8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2}{-0{,}9 \cdot \frac{5}{9} + \left(-\frac{1}{2}\right)}$

b) $\dfrac{-2 \cdot (-0{,}5)^2 + (-2)}{-0{,}1 \cdot [-1{,}3 + 6 \cdot (-0{,}2)]}$

15. Rysunki przedstawiają fragmenty osi. Oblicz współrzędne punktów oznaczonych literami.





Sprawdź, czy umiesz

1. W którym przykładzie wynik jest liczbą dodatnią?

A. $-9{,}85 + 3{,}4$ B. $-5{,}8 - 7{,}35$ C. $-3{,}7 - (-9{,}5)$ D. $4{,}5 - 6{,}25$

2. W którym przykładzie wynik jest liczbą ujemną?

A. $(-3{,}7)^2$ B. $(-7{,}6) \cdot (-3)$ C. $(-4{,}8) : (-2)$ D. $(-3{,}1) \cdot (-9)^2$

3. Wynikiem działania $-4{,}65 - 0{,}4$ jest liczba:

A. $-4{,}69$ B. $-4{,}25$ C. $-5{,}05$ D. $-4{,}61$

4. Wartość wyrażenia $\dfrac{(3-5)^3}{4-(-6)} - \dfrac{2(7-9)}{3:6}$ wynosi:

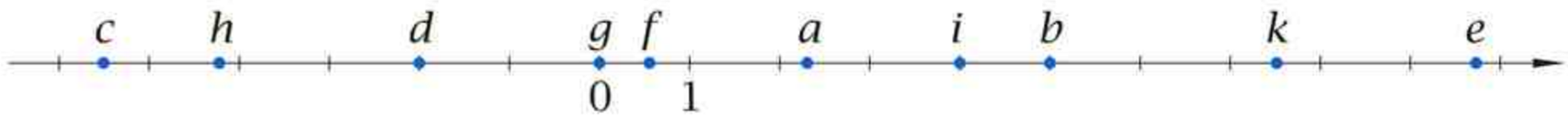
A. $-8{,}8$ B. $-2{,}8$ C. $7{,}2$ D. $8{,}8$

zadania uzupełniające 67–71, str. 54

8 Oś liczbowa. Odległości liczb na osi liczbowej

ĆWICZENIE A. Na poniższym rysunku każdy punkt oznaczony literą odpowiada pewnej liczbie. Wymień, które z tych liczb są:

a) większe od 4,
b) mniejsze od −1,
c) większe od −2 lub równe −2,
d) mniejsze od 5 lub równe 5.

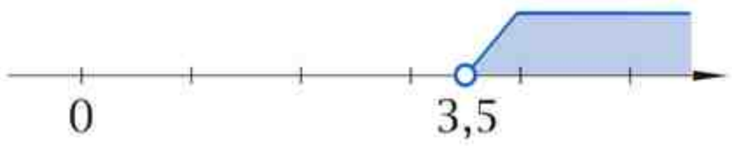


ĆWICZENIE B. Narysuj oś liczbową i zaznacz kilka liczb większych od −3,5. Zaproponuj, jak zaznaczyć na osi wszystkie liczby spełniające ten warunek.

Liczby, które rozważaliśmy w powyższych ćwiczeniach, musiały spełniać pewne warunki. Każdy z tych warunków można opisać za pomocą nierówności. Zbiory wszystkich liczb spełniających takie nierówności możemy zaznaczać na osi liczbowej.

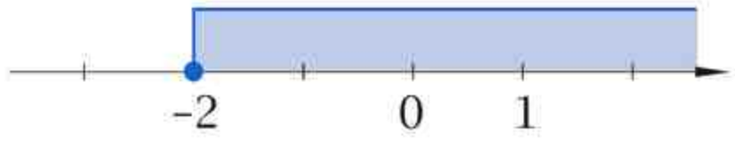
Liczby większe od 3,5 to te, które spełniają nierówność:

$x > 3{,}5$



Liczby większe od −2 lub równe −2 to te, które spełniają nierówność:

$x \geqslant -2$



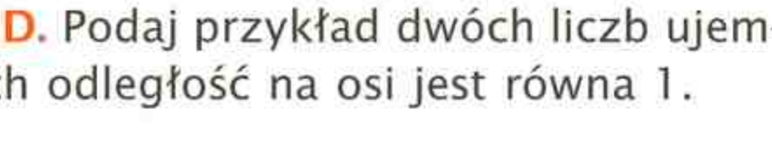
Liczby mniejsze od −1 to te, które spełniają nierówność:

$x < -1$



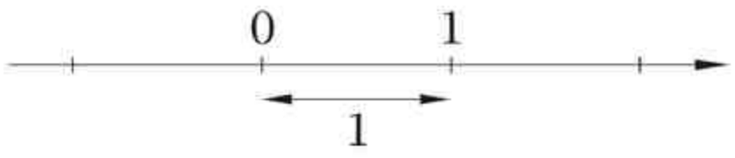
Liczby mniejsze od 5 lub równe 5 to te, które spełniają nierówność:

$x \leqslant 5$



ĆWICZENIE C. Poniższe nierówności opisują następujące zbiory liczbowe: liczby dodatnie, liczby ujemne, liczby nieujemne oraz liczby niedodatnie. Dla każdego z tych zbiorów wskaż odpowiednią nierówność.

Ⓐ $x < 0$ Ⓑ $x \geqslant 0$ Ⓒ $x > 0$ Ⓓ $x \leqslant 0$

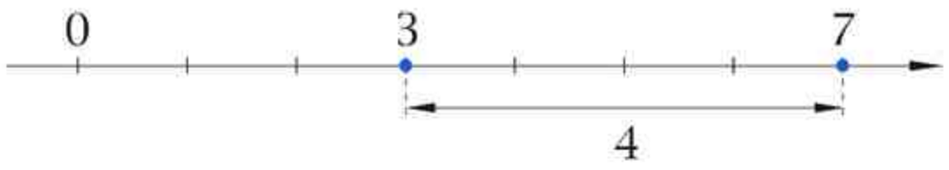


Odcinek jednostkowy ma długość 1.

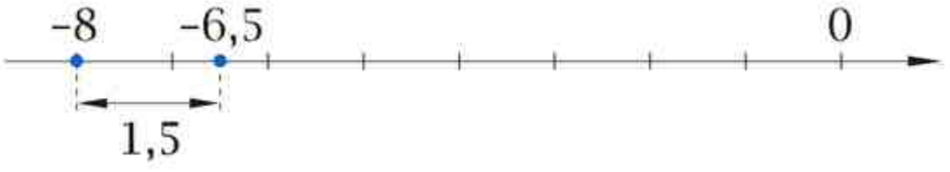
Przyjmujemy, że na osi liczbowej odcinek łączący liczby 0 i 1 ma długość 1 i nazywamy go **odcinkiem jednostkowym**.

ĆWICZENIE D. Podaj przykład dwóch liczb ujemnych, których odległość na osi jest równa 1.

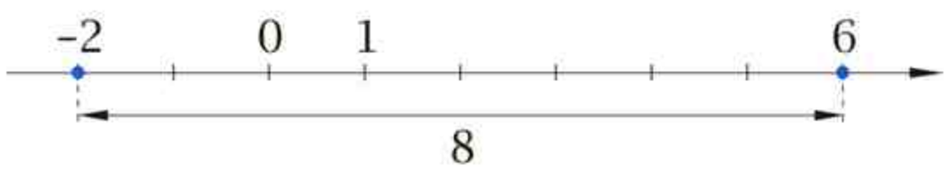
Odległość między dwiema dowolnymi liczbami na osi liczbowej jest równa długości odcinka łączącego punkty odpowiadające tym liczbom (jednostką długości jest odcinek jednostkowy).



Na osi liczbowej między liczbami 3 i 7 mieszczą się 4 odcinki jednostkowe, więc odległość między tymi liczbami wynosi 4.



Na osi liczbowej między liczbami -8 i $-6{,}5$ mieści się 1,5 odcinka jednostkowego. Odległość między tymi liczbami wynosi 1,5.



Na osi liczbowej między liczbami -2 i 6 mieści się 8 odcinków jednostkowych. Odległość między tymi liczbami wynosi 8.

ĆWICZENIE E. Zaznacz na osi liczbowej liczby $-5\frac{2}{3}$ i -2.

a) Jaka jest odległość między tymi liczbami?
b) Od większej z tych liczb odejmij liczbę mniejszą.

Aby obliczyć odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej, wystarczy od większej z tych liczb odjąć liczbę mniejszą.

Przykład

Jaka jest odległość na osi liczbowej między liczbami $a = -9{,}1$ i $b = -3{,}7$?

$-9{,}1 < -3{,}7$ | *Ustalamy, która liczba jest większa.*

$b - a = -3{,}7 - (-9{,}1) = -3{,}7 + 9{,}1 = 5{,}4$ | *Od większej z liczb odejmujemy liczbę mniejszą.*

Odp. Odległość między liczbami a i b wynosi 5,4.

Zadania

1. Zapisz odpowiednie nierówności:

a) Liczba x jest większa od $-2{,}5$.
b) Liczba a jest mniejsza od 11.
c) Liczba x jest ujemna.
d) Liczba x jest mniejsza lub równa 5.
e) Liczba y jest nieujemna.
f) Liczba b jest nie mniejsza od 8.
g) Liczba c jest nie większa od 11.

Uwaga. Liczba jest nie mniejsza od 8, gdy jest większa od 8 lub równa 8.

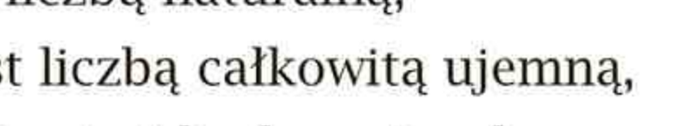
2. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podany warunek.

72/54

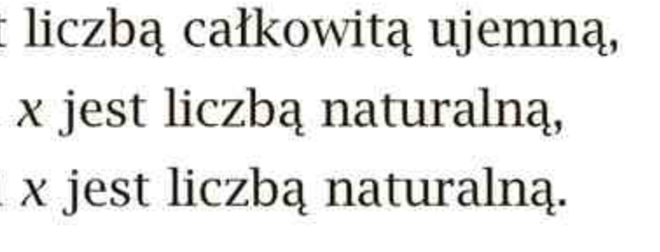
a) $x < -2$
b) $x \geqslant 10$
c) $x \leqslant 200$
d) $x < -1\frac{1}{4}$
e) $x \geqslant -3{,}5$
f) $x > \frac{7}{3}$

3. Zapisz nierówność, jaką spełniają wszystkie liczby z zaznaczonego zbioru (i tylko te liczby).

a)


b)


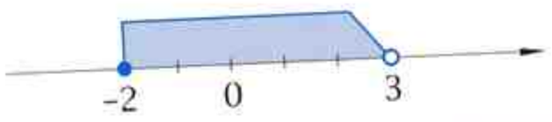
c)


d)


Jeżeli o liczbie x wiadomo, że jest większa lub równa -2, ale mniejsza od 3, to możemy to zapisać krócej:

$$-2 \leqslant x < 3$$

Na osi liczbowej liczby spełniające ten warunek możemy zaznaczyć tak:



4. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek:

a) $4 \leqslant x < 9$
b) $-3 < a < 0$
c) $-2{,}5 \leqslant s \leqslant 2{,}5$
d) $-1 < y \leqslant \frac{1}{2}$

5. Ustal, ile jest liczb spełniających warunek:

a) $x \leqslant 14$ i x jest liczbą naturalną,
b) $x > -6\frac{3}{7}$ i x jest liczbą całkowitą ujemną,
c) $-2{,}5 < x \leqslant 3{,}4$ i x jest liczbą naturalną,
d) $-105 \leqslant x \leqslant 95$ i x jest liczbą naturalną.

6. Jaka jest odległość na osi liczbowej między liczbami a i b, gdy:

a) $a = 3{,}5$, $b = 1$
b) $a = -12$, $b = 37$
c) $a = -1$, $b = -105$
d) $a = \frac{3}{4}$, $b = -1$

7. a) Jakie liczby leżą na osi liczbowej w odległości 15 od liczby -5?
b) Pewna liczba leży na osi liczbowej dokładnie w tej samej odległości od liczb -3 i 17. Co to za liczba?

8. Zaznacz na trzech różnych osiach podane zbiory liczbowe, a następnie opisz je za pomocą nierówności (zob. ramka powyżej).

① Zbiór liczb leżących w odległości mniejszej niż 5 od liczby 0.
② Zbiór liczb leżących w odległości nie większej niż 2 od liczby 1.
③ Zbiór liczb leżących w odległości mniejszej niż 10 od liczby -7.

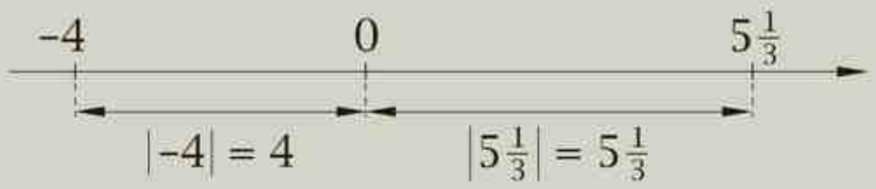
9. Na osi liczbowej zaznaczono punkt A o współrzędnej -5 oraz punkt B o współrzędnej 7. Następnie zaznaczono jeszcze dwa punkty C i D w taki sposób, że odległości między punktami C i A oraz D i B są równe 1,5. Jaka jest odległość między punktami C i D?

Ciekawostka

Symbol $|a|$ oznacza wartość bezwzględną liczby a. Bezwzględną wartością liczby dodatniej lub równej 0 jest ta sama liczba, a bezwzględną wartością liczby ujemnej jest liczba do niej przeciwna. Na przykład:

$\left|5\frac{1}{3}\right| = 5\frac{1}{3}$ $\quad |0| = 0$ $\quad |-4| = 4$

Wartość bezwzględna jest zawsze liczbą nieujemną. Zauważ, że dla każdej liczby jej odległość od zera na osi liczbowej jest równa wartości bezwzględnej tej liczby.



Gdy dla dowolnych dwóch liczb a i b najpierw obliczymy różnicę $a-b$, a potem obliczymy różnicę $b-a$, to otrzymamy dwie liczby przeciwne, a więc liczby, których wartości bezwzględne są równe.

Na przykład dla $a = 2$ i $b = -8$ otrzymamy:

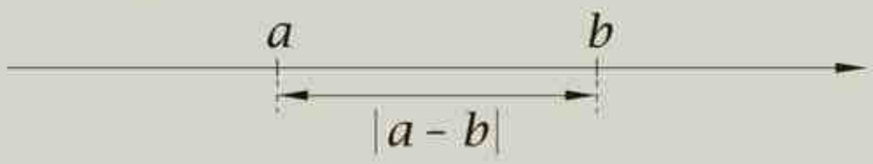
$|a-b| = |2-(-8)| = |10| = 10$

$|b-a| = |-8-2| = |-10| = 10$

Możemy więc powiedzieć, że dla dowolnych liczb a i b zachodzi równość:

$$|a-b| = |b-a|$$

Zatem, gdy chcemy określić odległość między dwiema dowolnymi liczbami na osi liczbowej, nie musimy ustalać, która z liczb jest większa, wystarczy obliczyć wartość bezwzględną z dowolnej różnicy tych liczb.



Do określania odległości między liczbami na osi liczbowej symbol wartości bezwzględnej przydaje się szczególnie wtedy, gdy nie wiemy, która z dwóch liczb jest większa.

10. a) Przeczytaj ciekawostkę i oblicz:

$|-5|$ $\quad |2{,}6|$ $\quad |0-6{,}7|$ $\quad |7{,}5-10|$ $\quad |-8-2|$ $\quad |6-(-2)|$

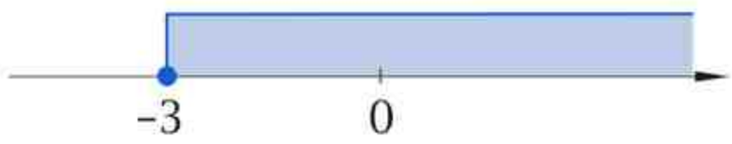
b) Zdanie: *Odległość liczby a od 7 jest równa 3* można opisać tak: $|a-7| = 3$. Ten warunek spełniają dwie liczby. Jakie?

c) Jakie liczby spełniają warunek $|x-12| = 15$?

75/54

Sprawdź, czy umiesz

1. Wśród liczb zaznaczonych na osi na pewno nie ma żadnej liczby:



A. dodatniej B. mniejszej od -3 C. nieujemnej D. mniejszej od 3

2. Odcinek, którego końce na osi mają współrzędne -4 oraz 12, ma długość:

A. 4 B. 8 C. 12 D. 16

3. Które z podanych liczb leżą na osi liczbowej w równej odległości od -2?

A. 1 i -5 B. 0 i 2 C. -4 i 4 D. -3 i -4

zadania uzupełniające 72–75, str. 54

Przed klasówką

1. W którym przykładzie liczba nie została przybliżona zgodnie z regułami zaokrąglania?

A. $34{,}863 \approx 35$
B. $8798{,}17 \approx 9000$
C. $7845{,}19 \approx 7800{,}2$
D. $900234 \approx 900200$

2. Oceń prawdziwość zdań.

a) Iloczyn dwóch liczb całkowitych jest zawsze liczbą całkowitą. TAK/NIE
b) Różnica dwóch liczb naturalnych jest zawsze liczbą naturalną. TAK/NIE
c) Suma dwóch liczb wymiernych jest zawsze liczbą wymierną. TAK/NIE
d) Iloraz dwóch liczb całkowitych jest zawsze liczbą całkowitą. TAK/NIE

3. Jakimi cyframi należy zastąpić kwadraciki?

a) Szóstą cyfrą po przecinku liczby $204{,}5(37)$ jest ■.
b) Dwudziestą cyfrą po przecinku liczby $58{,}(1234)$ jest ■.
c) Setną cyfrą po przecinku liczby $8{,}(059)$ jest ■.

4. Nie korzystając z kalkulatora, wskaż wyrażenie równe liczbie mniejszej od 1000.

A. $292{,}986 + 726{,}8734$
B. $5{,}14 \cdot 203{,}036$
C. $3 \cdot (205{,}124 + 101{,}0981)$
D. $4890{,}12 : 3{,}203$

5. Czy wartość danego wyrażenia jest liczbą całkowitą?

a) $67{,}32 \cdot 10 - 1{,}2$ TAK/NIE
b) $7\frac{7}{9} - 2\frac{6}{9} + \frac{8}{9}$ TAK/NIE
c) $11 \cdot 32\frac{5}{11} - 4$ TAK/NIE
d) $2{,}345 \cdot 100 + 7{,}85 \cdot 10$ TAK/NIE

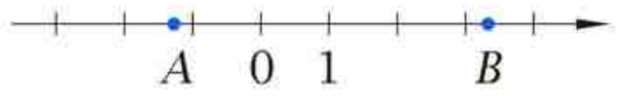
6. Dane są liczby:

$a = -12{,}386 + 3\frac{2}{7}$ $\quad k = -12{,}386 \cdot 3\frac{2}{7}$ $\quad r = -12{,}386 - 3\frac{2}{7}$ $\quad b = -12{,}386 : 3\frac{2}{7}$

Gdy liczby te ustawimy w kolejności rosnącej, to odpowiadające im litery utworzą wyraz:

A. karb B. krab C. bark D. brak

7. Przyjrzyj się osi liczbowej przedstawionej na rysunku. Jeśli d oznacza odległość między liczbami A i B, to spełniony jest warunek:



A. $3 < d < 4$ B. $4 < d < 5$ C. $5 < d < 6$ D. $6 < d < 7$

8. Wybieramy dwie liczby a oraz b, takie że każda z nich jest dodatnia i mniejsza od 1. Czy iloraz $a : b$ może być liczbą większą od 100? Wybierz odpowiedź „tak" lub „nie" oraz jej uzasadnienie spośród zdań od A do D.

Ⓘ Tak, ponieważ… Ⓘⓘ Nie, ponieważ…

A — …iloraz liczb mniejszych od 1 jest liczbą mniejszą od 1.

B — …liczba a może być większa od liczby b.

C — …można wskazać liczby spełniające podany warunek, np. $a = 0{,}0001$ i $b = 0{,}1$.

D — …warunek jest spełniony np. dla liczb $a = 0{,}2$ i $b = 0{,}001$.

Informacje do zadań 9 i 10:

W pewnym sklepie batony „Saturn" sprzedawane są na sztuki oraz w opakowaniach po cztery sztuki, po trzy sztuki i po dwie sztuki.



2 zł 3,90 zł 5,80 zł 7,60 zł

9. Kasia chce kupić 9 batonów „Saturn" i wydać jak najmniej pieniędzy. Które opakowania powinna wybrać?

A. Po jednym opakowaniu „Saturnów" XL, L oraz M.

B. Dwa opakowania „Saturnów" XL i jeden baton pojedynczy.

C. Trzy opakowania „Saturnów" L.

D. Cztery opakowania „Saturnów" M oraz jeden baton pojedynczy.

10. Jakub chciał kupić 30 batonów „Saturn" na swoje urodziny. Włożył do koszyka 10 opakowań po 3 sztuki, ale potem zmienił zdanie i w koszyku znalazło się 7 opakowań typu XL i jedno typu M. Ile zaoszczędził z powodu tej zmiany?

11. Uzasadnij, że iloczyn dwóch liczb dwucyfrowych nie może być liczbą pięciocyfrową.

Zadania uzupełniające

Liczby

1. Spośród liczb:

$-2 \quad -3^2 \quad -\frac{1}{5} \quad 0{,}36 \quad -\frac{15}{4} \quad (-3)^2 \quad -1{,}2$

wypisz liczby:

a) całkowite mniejsze od -1,

b) wymierne większe od -2,

c) całkowite nieujemne,

d) wymierne niedodatnie.

2. Ile jest liczb naturalnych:

a) dwucyfrowych,

b) trzycyfrowych,

c) większych od 300 i jednocześnie mniejszych od 1000,

d) parzystych mniejszych od 333,

e) trzycyfrowych podzielnych przez 5?

3. Podaj po dwa przykłady liczb, które można wstawić w miejsce litery, aby był spełniony warunek:

a) $-a$ jest liczbą naturalną,

b) $b^2 < b$,

c) $\frac{1}{c}$ jest liczbą całkowitą.

4. Poniżej zapisano tę samą liczbę na kilka różnych sposobów.

$\frac{65}{10} \quad 6{,}5 \quad 6\frac{5}{10} \quad 6+\frac{1}{2} \quad \frac{13}{2} \quad \frac{130}{20}$

Zapisz na różne sposoby liczbę $\frac{18}{4}$.

5. Które z podanych liczb są różne od 1,4?

$1\frac{1}{4} \quad \frac{14}{10} \quad 1\frac{2}{5} \quad \frac{140}{100} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{10}{14}$

6. Między jakimi kolejnymi liczbami całkowitymi leżą na osi podane liczby.

a) $\frac{13}{4}$ b) 12,75 c) $-0{,}01$ d) $-\frac{85}{9}$

7. Odczytaj współrzędne punktów oznaczonych literami.

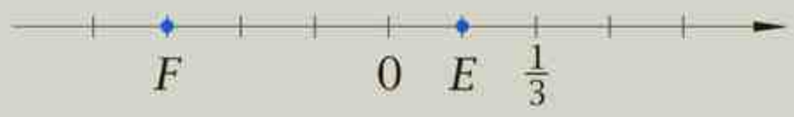
a)



b)



c)



d)



8. a) Marek przeszedł 0,7 km, a Jurek $\frac{6}{7}$ km. Który przebył dłuższą drogę?

b) Pani Ewa przejechała 46 km na rowerze w czasie 3 godzin, pani Ola przejechała tę samą drogę ze średnią prędkością 15,3 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Która z pań jechała szybciej?

9. W każdym z podanych ułamków licznik lub mianownik zastąpiono symbolem.

$a = \frac{\blacklozenge}{30} \qquad b = \frac{\spadesuit}{3} \qquad c = \frac{15}{\heartsuit} \qquad d = \frac{25}{\clubsuit}$

Podaj największe liczby naturalne, którymi należy zastąpić symbole, aby:

a) liczby a i b były mniejsze:

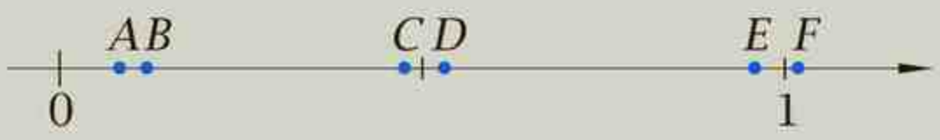
- od 1
- od $\frac{1}{2}$
- od $\frac{1}{3}$
- od 2

b) liczby c i d były większe:

- od $\frac{1}{2}$
- od $\frac{1}{3}$
- od 2
- od $1\frac{1}{4}$

10. Dopasuj podane liczby do odpowiednich punktów na osi liczbowej.

$\frac{1}{13} \quad \frac{308}{298} \quad \frac{19}{40} \quad \frac{135}{140} \quad \frac{16}{30} \quad \frac{1}{8}$



11. Wśród podanych liczb wskaż liczbę najmniejszą oraz największą.

a) $\frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad 0{,}1 \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{5}$

b) $-0{,}5 \quad -0{,}75 \quad -\frac{9}{10} \quad -\frac{1}{4}$

c) $-\frac{5}{7} \quad -\frac{7}{5} \quad -\frac{1}{7} \quad -\frac{1}{5} \quad -0{,}55$

Rozwinięcia dziesiętne liczb

12. Znajdź rozwinięcia dziesiętne podanych liczb.

a) $8\frac{1}{8}$ b) $\frac{33}{20}$ c) $\frac{121}{125}$ d) $\frac{21}{75}$

e) $\frac{4}{3}$ f) $1\frac{5}{6}$ g) $\frac{17}{90}$ h) $5\frac{11}{12}$

13. Uporządkuj liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) 2,(5) $2\frac{1}{2}$ 2,(50) 2,(505)

b) 3,(64) 3,64 3,6(4) $3\frac{2}{3}$

14. Uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$a = 0{,}12(345)$ $c = 0{,}12(34)$

$b = 0{,}(12345)$ $d = 0{,}1(234)$

15. Podaj przykład ułamka zwykłego, który ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone i którego odwrotność ma również rozwinięcie dziesiętne nieskończone.

Wskazówka. Przeczytaj ciekawostkę ze str. 17.

Zaokrąglanie liczb. Szacowanie wyników

16. Zaokrąglij podane kwoty do tysięcy złotych.

3472 zł 107291,50 zł

26534,05 zł 499783 zł

17. Podane poniżej liczby zaokrąglij:

a) do setek, c) do dziesiątek,

b) do jedności, d) do części dziesiątych.

$p = 3427{,}1$ $r = 8250{,}17$ $s = 48972{,}7$

$t = 74{,}012$ $u = 100{,}73$ $w = 239{,}56$

18. Zaokrąglij podane liczby do części setnych.

65,(4) 4,(73) 32,(527) 8,2(83)

19. Podaj zaokrąglenia do części setnych i części tysięcznych rozwinięć dziesiętnych liczb $4\frac{3}{7}$ i $\frac{13}{17}$.

20. Jaki znak: < czy > należy wpisać w miejsce ◆?

a) $449{,}08 + 189{,}3 \blacklozenge 650$

b) $7111{,}72 + 873{,}22 \blacklozenge 7900$

c) $42350{,}1 + 4907{,}8 \blacklozenge 47000$

d) $9999{,}99 + 222{,}22 \blacklozenge 12000$

e) $0{,}097 + 0{,}89 \blacklozenge 1$

21. Jaki znak: < czy > należy wpisać w miejsce znaku ◆?

a) $5{,}9 \cdot 7 \blacklozenge 42$

b) $14{,}99 \cdot 30 \blacklozenge 450$

c) $0{,}89 \cdot 90 \blacklozenge 81$

d) $1{,}05 \cdot 15 \blacklozenge 14$

e) $0{,}09 \cdot 25 \blacklozenge 3$

22. a) Pan Błoński przez rok zarobił 35 487 zł, a pan Wroński przez siedem miesięcy 21 275 zł. Oszacuj, który z nich miał wyższy średni miesięczny zarobek.

b) Pani Ania zarabia miesięcznie 2607 zł, a pani Kasia 3193 zł. Oszacuj, czy to prawda, że w ciągu roku pani Kasia zarobi o ponad 7200 zł więcej niż pani Ania.

c) W jednej skrzynce mieści się 19 kg jabłek. Oszacuj, czy wystarczy 248 takich skrzynek, aby przechować 5 t jabłek.

23. Przeczytaj ogłoszenia dwóch szkół językowych. Oszacuj, w której z nich tańsza jest godzina zajęć.

Szkoła BEST
zaprasza na kurs
języka angielskiego
60 godzin za 599 zł

77 godzin za 800 zł
Język angielski
w szkole MAX

Dodawanie i odejmowanie liczb dodatnich

24. Oblicz w pamięci:

a) $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$

b) $1\frac{5}{8}+2\frac{3}{8}$

c) $6-\frac{2}{7}$

d) $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$

e) $6\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}$

f) $5-3\frac{3}{7}$

25. Oblicz:

a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{5}$

b) $\frac{8}{9}-\frac{5}{6}$

c) $1\frac{1}{5}+8\frac{1}{7}$

d) $4\frac{7}{10}-2\frac{1}{3}$

e) $4\frac{1}{5}-\frac{7}{10}$

f) $6\frac{1}{8}-2\frac{3}{4}$

g) $10\frac{2}{3}-6\frac{7}{9}$

h) $9\frac{3}{8}-2\frac{5}{6}$

26. Jeżeli dodamy dwa ułamki, to otrzymamy liczbę o $\frac{4}{9}$ większą od pierwszego ułamka. Jeżeli odejmiemy od pierwszego ułamka drugi, to otrzymamy $\frac{1}{3}$. O jakich ułamkach mowa?

***27.** Podane liczby przedstaw w postaci sumy różnych ułamków prostych (zob. str. 25):

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{6}{5}$ d) $\frac{2}{5}$

28. Oblicz w pamięci:

a) $0{,}5+0{,}9$

b) $3{,}5+2{,}5$

c) $1{,}1+1{,}23$

d) $3{,}27+4{,}03$

e) $0{,}9-0{,}4$

f) $4-2{,}1$

g) $6-3{,}07$

h) $9{,}5-2{,}6$

29. Oblicz sposobem pisemnym.

a) $43{,}6+25{,}55$

b) $234{,}65-6{,}123$

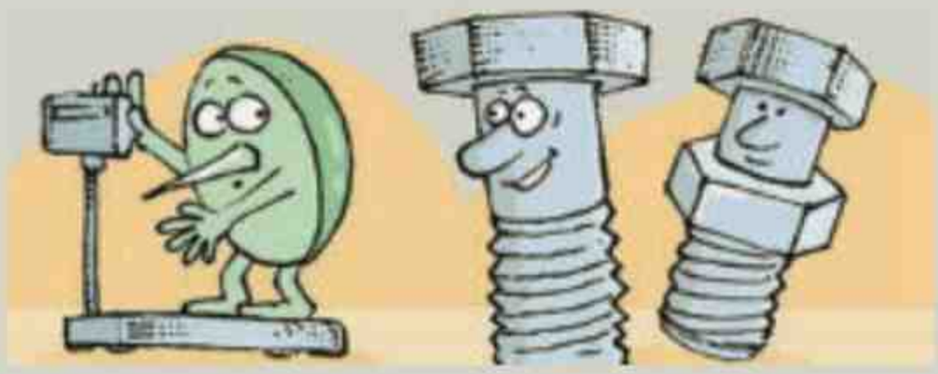
c) $0{,}346+19{,}87$

d) $205-13{,}16$

e) $32{,}76-6{,}4$

f) $37{,}04-15{,}409$

30. Gwóźdź i dwie śrubki ważą 4,7 g. Gwóźdź i dziesięć pinezek ważą 2,4 g, a gwóźdź i jedna śrubka ważą 2,8 g. Ile waży pinezka?



31. Oblicz, zamieniając ułamki zwykłe na dziesiętne.

a) $1{,}245+\frac{3}{4}$

b) $4{,}35-\frac{3}{200}$

c) $\frac{7}{8}-0{,}78$

d) $5{,}4-\frac{5}{4}$

e) $1\frac{2}{5}-0{,}85+3\frac{7}{20}$

f) $3\frac{3}{25}-\left(0{,}8-\frac{1}{4}\right)$

32. Oblicz:

a) $1{,}2+\frac{5}{6}$

b) $4{,}8-1\frac{1}{3}$

c) $33{,}3+\frac{1}{3}-1{,}25$

d) $3{,}25-1\frac{1}{3}-1{,}5$

Mnożenie i dzielenie liczb dodatnich

33. Oblicz:

a) $\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{8}$

b) $\frac{2}{8}\cdot\frac{5}{9}$

c) $\frac{4}{19}\cdot 2\frac{3}{8}$

d) $3\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{9}$

e) $\frac{7}{11}\cdot\frac{12}{24}$

f) $1\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$

g) $3\frac{1}{5}\cdot 2\frac{1}{4}$

h) $\frac{1}{9}\cdot 9\frac{1}{2}$

i) $\frac{3}{7}:\frac{7}{3}$

j) $4\frac{1}{5}:\frac{7}{10}$

k) $\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}$

l) $1\frac{1}{8}:8$

m) $\frac{4}{8}:\frac{1}{2}$

n) $3\frac{3}{11}:3$

o) $2\frac{3}{7}:4\frac{6}{7}$

34. Oblicz:

a) $\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}}{4}$

b) $\dfrac{1\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}:\frac{2}{3}}$

c) $\dfrac{1\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}}{2\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}$

d) $\dfrac{\frac{2}{5}:2\frac{1}{2}}{\frac{3}{7}\cdot 1\frac{1}{6}}$

35. Dana jest liczba $a = 54$. Znajdź liczby:

a) $10a$ d) $a \cdot 0{,}001$ g) $a : 0{,}0001$

b) $\frac{a}{100}$ e) $10\,000a$ h) $0{,}001a$

c) $\frac{a}{0{,}1}$ f) $\frac{0{,}01a}{1000}$ i) $\frac{a}{10} \cdot 0{,}0001$

36. Zapisz, ile to złotych, nie używając przecinka.

a) 2,54 tys. zł c) 1,5 mld zł

b) 0,07 mln zł d) 0,05 tys. zł

37. Na podstawie tabeli kursów ustal z dokładnością do jednego grosza wartość podanej kwoty w złotych.

a) 100 USD c) 1000 GBP

b) 10 EUR d) 10 JPY

TABELA KURSÓW (27.01.2017)	
1 EUR = 4,3413	1 USD = 4,0595
100 JPY = 3,5309	1 GBP = 5,0945

38. a) Pudełko ze spinaczami kosztuje 1,90 zł. W pudełku jest 100 spinaczy. Ile kosztuje jeden spinacz (wyniki podaj z dokładnością do 1 grosza)?

b) W ryzie papieru jest 500 kartek. Dwie ryzy papieru kosztują 29,80 zł. Ile kosztuje jedna kartka? Wyniki podaj z dokładnością do 1 grosza.

c) Karton zawierający 200 ołówków ważył 0,86 kg. Po sprzedaniu połowy ołówków karton z pozostałymi ołówkami ważył 0,5 kg. Ile ważył jeden ołówek?

39. Korzystając z informacji przedstawionych poniżej, podaj z dokładnością do 1 centymetra, jaki jest rozstaw szyn kolejowych w Polsce, jaki w Rosji, a jaki w Hiszpanii.

ROZSTAW SZYN KOLEJOWYCH

w Polsce: 1,435 m

w Rosji: 1,524 m

w Hiszpanii: 1,676 m

40. a) Zamień na centymetry.

72,25 m 25,6 m 7 mm 0,3 mm

b) Zamień na metry.

2,651 km 17,5 cm 2,5 dm 2,5 mm

c) Zamień na kilogramy.

8,5 t 25,05 dag 6,8 dag 34,5 g

41. Oblicz:

a) $4{,}6 \cdot 2$ e) $0{,}36 : 4$

b) $0{,}12 \cdot 0{,}5$ f) $8 : 0{,}04$

c) $0{,}08 \cdot 0{,}9$ g) $0{,}12 : 0{,}6$

d) $0{,}2 \cdot 0{,}4$ h) $0{,}01 : 2$

42. a) Ile to minut?

0,75 h 1,25 h $\frac{1}{12}$ h 0,5 h 0,2 h

b) Ile to sekund?

0,25 minuty $\frac{5}{6}$ minuty 1,1 minuty

43. a) Ile trzeba zapłacić za 0,3 kg sera, którego kilogram kosztuje 28,50 zł?

b) Jeden kilogram cukierków kosztuje 21,40 zł. Ile trzeba zapłacić za 35 dag tych cukierków?

44. Król Władysław Łokietek mierzył około 140 cm. Ile łokci wzrostu miał Łokietek? Przyjmij, że 1 łokieć = 59,6 cm.

Przykład

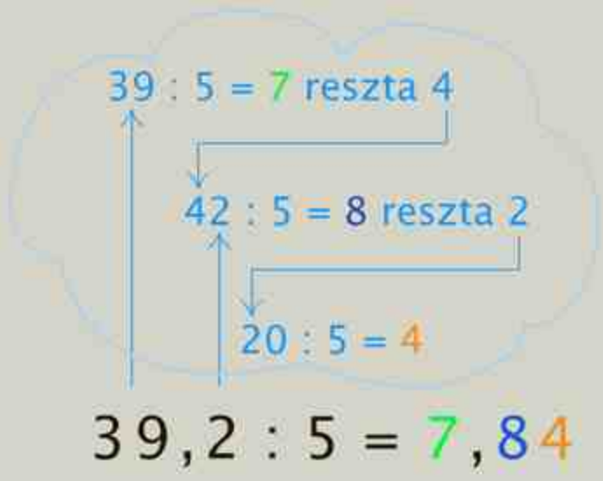
$\frac{0{,}28}{2{,}1} = \frac{28}{210} = \frac{2}{15}$

Iloraz zamieniamy na ułamek zwykły i skracamy ten ułamek.

45. Oblicz ilorazy, stosując metodę podaną powyżej:

a) $\frac{4{,}8}{3{,}2}$ c) $\frac{3{,}75}{6{,}25}$ e) $6{,}5 : 0{,}15$

b) $\frac{0{,}42}{3{,}6}$ d) $\frac{0{,}0024}{0{,}33}$ f) $3{,}5 : 0{,}028$



46. Powyżej pokazano, jak znaleźć wynik dzielenia, wykonując rachunki w pamięci. (Kolejne cyfry wyniku zostały zapisane po wykonaniu dzielenia z resztą odpowiedniej liczby przez 5). Oblicz w podobny sposób poniższe ilorazy.

a) $78{,}2 : 5$ c) $13{,}14 : 3$ e) $\frac{13{,}5}{4}$

b) $375{,}43 : 2$ d) $41{,}384 : 8$ f) $\frac{917}{7}$

47. Oto fragment pewnej kaszubskiej legendy:

— Zapłacę bez targów, ile pan zechce.

— Takiś ty hojny, mój bratku? A czy będziesz miał tylko tyle, co ja ci zacenię?

— Niechaj pan ceni, zobaczymy.

— A gdyby pięćdziesiąt talarów?

— Trzysta złotych! Piękny pieniądz!… Ale ja wiem, że z wielmożnym panem targów nie ma.

To mówiąc, wydobył z mieszka piętnaście dukatów.

Roman Zmorski, „Przeklęte jezioro”



Oblicz sprytnie:

a) Ile to złotych?

• 100 talarów • 10 talarów • 5 dukatów

b) Ile to talarów?

• 60 dukatów • 300 dukatów • 60 złotych

48. Oblicz:

a) $0{,}6 \cdot \frac{1}{4}$ d) $\frac{5}{9} : 1\frac{1}{4}$

b) $1\frac{1}{8} \cdot 0{,}1$ e) $2\frac{5}{6} : 3{,}4$

c) $3{,}75 \cdot 4 \cdot 0{,}01$ f) $0{,}18 : 2\frac{2}{5}$

49. Oblicz sprytnie:

a) $\frac{1}{6} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 100 \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{24}{25}$

b) $0{,}4 \cdot 1{,}4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot 10$

c) $6{,}6 \cdot \frac{9}{40} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{1}{3}$

d) $\frac{3{,}6}{7} \cdot \frac{0{,}08}{1{,}1} \cdot \frac{2{,}2}{1{,}2} \cdot \frac{2{,}1}{0{,}6}$

50. Każdą z liczb $-\frac{2}{3}$, -1, $-3\frac{1}{4}$, 12 przedstaw w postaci:

a) iloczynu trzech ułamków,

b) ilorazu dwóch ułamków o mianownikach różnych od 1.

Wyrażenia arytmetyczne

51. Oblicz w pamięci:

a) $12 - 2^2$ d) $25 + 4 : 2$

b) $7 \cdot (8 - 3)$ e) $65 - 6 \cdot (18 - 3^2 + 1)$

c) $48 : (6 \cdot 4)$ f) $(6 - 3)^2 + 12 : 4$

52. Oblicz w pamięci:

a) $\frac{2}{5} \cdot 5 + \frac{1}{3}$ d) $8 \cdot \left(\frac{1}{4} + 0{,}25\right)$

b) $3 + 2 \cdot \frac{2}{5}$ e) $1{,}6 - 0{,}6 : 2$

c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot 8$ f) $5\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot 10$

53. Oblicz:

a) $\frac{6}{0{,}5 + 0{,}1} \cdot 6$ c) $\frac{6+4}{6} \cdot \frac{8}{10+2}$

b) $9 : \frac{0{,}27}{9}$ d) $\frac{5+3}{\frac{1}{2} \cdot 8} : \frac{\frac{1}{3} \cdot 6}{3+6}$

54. Oblicz:

a) $5-\frac{3}{7}:\frac{3}{14}$

b) $\frac{0{,}12-0{,}04}{2}$

c) $0{,}6+0{,}4\cdot 10$

d) $0{,}2^2-0{,}1^2$

e) $6-1\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$

f) $7{,}5+2:5$

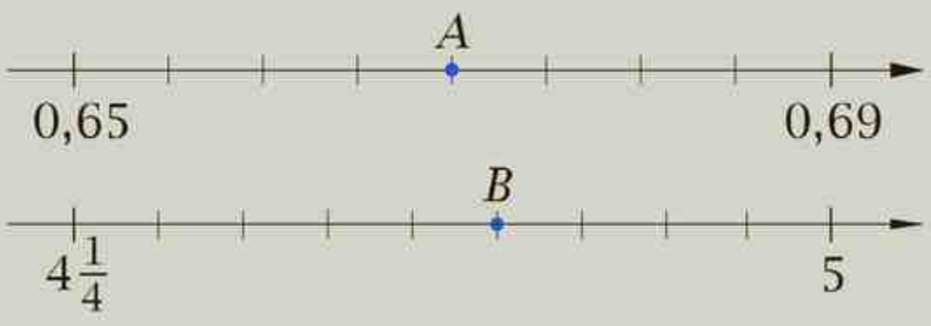
g) $6-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2$

h) $(1{,}3+2{,}7)\cdot 1\frac{1}{4}-1{,}2$

i) $\frac{4}{5}\cdot 0{,}5+\frac{2}{9}\cdot 0{,}9$

j) $3\frac{3}{4}\cdot 4-10\cdot\frac{2}{5}$

55. Znajdź współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.



56. Oblicz:

a) $\dfrac{1{,}2\cdot\frac{5}{2}}{0{,}16\cdot\frac{1}{4}}:\dfrac{4\frac{1}{4}:0{,}01}{6{,}25\cdot\frac{4}{25}}$

b) $\dfrac{0{,}5+0{,}2\cdot 0{,}6}{\frac{3}{4}-7:10}+\dfrac{0{,}7+0{,}2\cdot\frac{1}{4}}{0{,}7-0{,}4\cdot\frac{1}{2}}$

c) $\dfrac{3+2\frac{1}{2}\cdot 0{,}3}{3\frac{3}{4}:(4{,}8-3\cdot 0{,}6)}\cdot\dfrac{4+0{,}1\cdot 10}{1{,}6\cdot 5}$

57. Wyobraź sobie, że za kwotę 25 zł masz kupić cukierki. Wybierz co najmniej 3 rodzaje spośród przedstawionych na fotografii i dobierz ich ilości tak, aby reszta, którą otrzymasz, nie przekroczyła 1 zł.



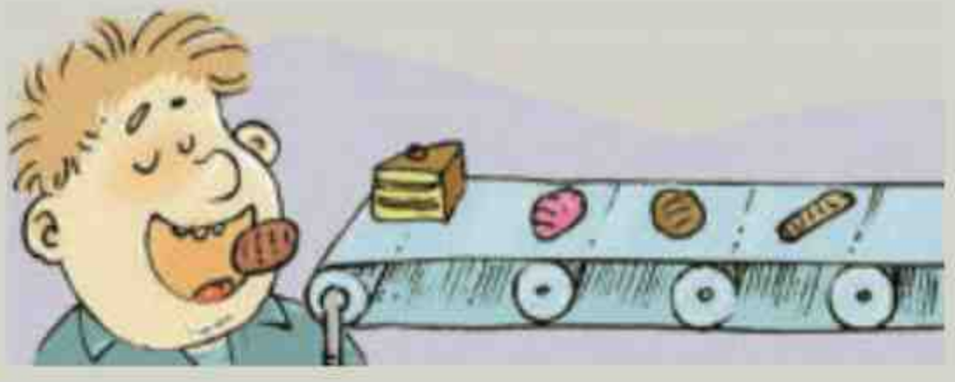
58. Oblicz, o ile więcej litrów wody zmieści się w akwarium o wymiarach 0,8 m × 0,48 m × 0,4 m niż w akwarium o wymiarach 46 cm × 35 cm × 30 cm.

59. Pani Jadzia przygotowała przecier jabłkowy, który rozlała do 17 słoików o pojemności $\frac{3}{4}$ litra. Jeden ze słoików został jednak napełniony tylko do połowy.

a) Ile litrów przecieru przygotowała pani Jadzia?

b) Ile na taką ilość przecieru należałoby przygotować słoików o pojemności 0,9 *l*?

60. Alcest, kolega Mikołajka, dostał 20 franków kieszonkowego i od razu pół franka zgubił. Za $\frac{1}{3}$ pieniędzy, które mu zostały, kupił sobie kilka batoników, a za $\frac{2}{5}$ — maślane ciasteczka. Resztę wydał na cztery ciastka z kremem. Ile kosztowało ciastko z kremem?



61. W skarbonce jest 11 złotówek, 7 dwuzłotówek, 24 pięćdziesięciogroszówki, 16 dwudziestogroszówek i 28 pięciogroszówek. Ile pieniędzy jest w skarbonce?

62. Pod koniec dnia w kasie było 466,34 zł. Wszystkie banknoty i monety o nominałach większych niż 20 gr stanowiły kwotę 457,50 zł. Oprócz tego w kasie było 17 dwudziestogroszówek, 35 dziesięciogroszówek, 24 pięciogroszówki oraz monety o nominale 2 gr. Oblicz, ile było dwugroszówek.

63. Czy $\frac{3}{4}$ m^3 desek o grubości 2,8 cm wystarczy do ułożenia podłogi w pokoju o powierzchni 28 m^2?

64. W 2015 r. firma X zatrudniała 340 pracowników, z czego $\frac{9}{17}$ stanowili mężczyźni. Rok później liczba zatrudnionych wzrosła o $\frac{1}{5}$, przy czym liczba mężczyzn wzrosła tylko o 15. Ile kobiet zatrudniała firma X w 2016 r.?

***65.** Nauczycielka matematyki napisała swoją interpretację baśni o Kopciuszku. Oto jej fragment:

Zła macocha wsypała dwie miski soczewicy do wiadra z popiołem i kazała Kopciuszkowi w ciągu godziny wybrać wszystkie ziarenka. Ziarna stanowiły $\frac{1}{4}$ ciężaru tej mieszanki. Najpierw przyleciały gołębie i wyłuskały z popiołu $\frac{2}{5}$ ziaren, potem przyleciały turkawki i wyłuskały 0,7 pozostałych ziaren, na koniec przyleciały wróble i wyjęły z popiołu ostatnie 18 dag ziaren.

Ile ważyła soczewica, a ile popiół?

***66.** Sprawdź, czy poniższa równość jest prawdziwa.

$$1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+2}}}}=2\frac{1}{21}$$

Działania na liczbach dodatnich i ujemnych

67. Oblicz:

a) $-7\frac{4}{9}-2\frac{1}{6}$

b) $3\frac{1}{4}-8\frac{5}{6}$

c) $-2\frac{3}{5}+7\frac{1}{3}$

d) $-3{,}12-6{,}1$

e) $6{,}4-10{,}25$

f) $4\frac{5}{6}-8{,}2$

68. Oblicz:

a) $-5{,}65+(-2{,}08)-1{,}35$

b) $6{,}51+(-2{,}775)-11{,}125$

c) $-\frac{10}{9}+\left(-\frac{1}{6}\right)+9\frac{3}{4}-(-6{,}25)$

d) $-9{,}3-\left(-12\frac{1}{5}\right)-(72{,}8-(-13{,}002))$

69. Oblicz jak najprostszym sposobem:

a) $12-\frac{2}{7}-7+13\frac{3}{7}$

b) $-5{,}8+2{,}7-2{,}2+0{,}3$

c) $-5\frac{1}{8}+1\frac{1}{12}+2\frac{7}{12}+\frac{1}{8}$

d) $-0{,}5-\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}-0{,}25$

70. Oblicz:

a) $-1\frac{1}{4}\cdot(-4)$

b) $-6\frac{2}{3}:2$

c) $-0{,}2\cdot(-0{,}2)$

d) $-3\frac{1}{3}\cdot(-3)$

e) $(-3)^2\cdot\frac{1}{3}$

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot(-9)$

g) $-6^2:\frac{1}{2}$

h) $3\frac{3}{4}:(-1{,}25)^2$

71. Czy liczba przeciwna do iloczynu dwóch liczb przeciwnych jest liczbą dodatnią czy ujemną?

Oś liczbowa. Odległości liczb na osi liczbowej

72. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podany warunek:

a) $x \geqslant -4$ b) $x < 7$ c) $x > 2\frac{3}{4}$

73. Ustal, ile liczb całkowitych leży na osi liczbowej w odległości:

a) mniejszej niż 20 od zera,

b) mniejszej niż 20 od liczby 15.

74. Podaj liczby, których odległość od liczby -2 na osi liczbowej wynosi:

a) 10 b) 3,5 c) 113 d) 1999

75. Zapisz, używając symbolu wartości bezwzględnej, równość opisującą podany warunek i znajdź liczby spełniające ten warunek:

a) Odległość liczby a od liczby 5 na osi liczbowej jest równa 3.

b) Odległość liczby b od liczby 4 na osi liczbowej jest równa 20.

c) Odległość liczby c od liczby -2 na osi liczbowej jest równa 1.

II PROCENTY

1 Procenty i ułamki

2 Diagramy procentowe

3 Jaki to procent?

4 Obliczanie procentu danej liczby

5 Podwyżki i obniżki

6 Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent

7 O ile procent więcej, o ile mniej. Punkty procentowe

8 Obliczenia procentowe

↘ Przed klasówką, s. 92

↘ Zadania uzupełniające, s. 94

1 Procenty i ułamki



Z symbolem % (czytamy: procent) spotykamy się niemal codziennie — w gazetach, sklepach, bankach, rocznikach statystycznych, internecie. O procentach mówi się często w radiu i w telewizji. Słowo *procent* pochodzi od łacińskiego wyrażenia *pro centum* i oznacza „na sto".

6% mężczyzn
to znaczy
$\frac{6}{100}$ wszystkich mężczyzn.

Ogólnie:
p% danej wielkości
to
$\frac{p}{100}$ tej wielkości.

$$p\% = \frac{p}{100}$$

Jeśli mówimy, że 6% mężczyzn nie odróżnia koloru czerwonego i zielonego, to oznacza, że przeciętnie na 100 mężczyzn jest 6 daltonistów. Możemy też powiedzieć, że $\frac{6}{100}$ liczby wszystkich mężczyzn to daltoniści.

Jeden **procent** danej wielkości to jedna setna tej wielkości. Procenty to zapisane w inny sposób ułamki o mianowniku 100.

$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$ $\quad 13\% = \frac{13}{100} = 0{,}13$

$6\% = \frac{6}{100} = 0{,}06$ $\quad 130\% = \frac{130}{100} = 1{,}3$

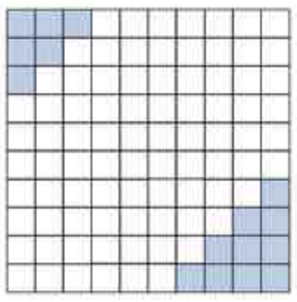
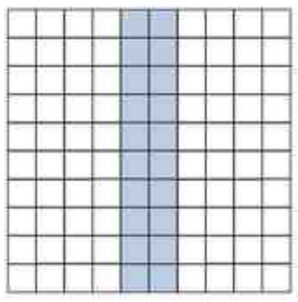
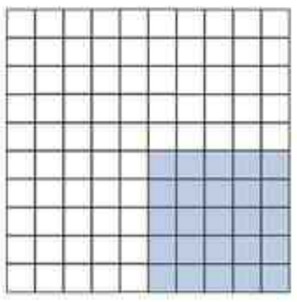
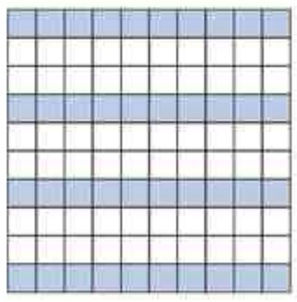
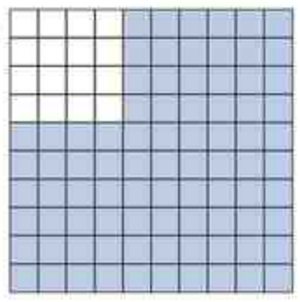
Uwaga. Należy pamiętać, że w praktyce procent nigdy nie występuje samodzielnie. Jest zawsze ułamkiem pewnej wielkości. Na przykład:

$45\% = \frac{45}{100} = 0{,}45$, ale 45% ceny to 0,45 ceny (a nie 0,45 zł).

$100\% = \frac{100}{100} = 1$, ale 100% lekarzy to $\frac{100}{100}$ liczby wszystkich lekarzy, czyli wszyscy lekarze (a nie 1 lekarz).

ĆWICZENIE A. Przyjrzyj się różnym informacjom na sąsiedniej stronie. Z kartonika z mlekiem można odczytać, że $\frac{2}{100}$ masy mleka stanowi tłuszcz, inaczej mówiąc, w każdych 100 g mleka są 2 g tłuszczu. Odczytaj w podobny sposób pozostałe informacje z wycinków prasowych na sąsiedniej stronie.

ĆWICZENIE B. Każdy z kwadratów podzielono na 100 jednakowych części. Jaki procent kwadratu zamalowano? Jaki to ułamek?

a)  b)  c)  d)  e) 

Aby sprawnie posługiwać się procentami, musimy opanować kilka umiejętności rachunkowych. W poniższych przykładach opisujemy, jak zamieniamy procenty na ułamki.

Przykłady

Zamień procenty na ułamki dziesiętne:

$40\% = \frac{40}{100} = 0{,}4$

$113\% = \frac{113}{100} = 1{,}13$

$12{,}5\% = \frac{12{,}5}{100} = 0{,}125$

$0{,}7\% = \frac{0{,}7}{100} = 0{,}007$

Zamień procenty na ułamki zwykłe:

$60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

$115\% = \frac{115}{100} = 1\frac{15}{100} = 1\frac{3}{20}$

$22{,}5\% = \frac{22{,}5}{100} = \frac{225}{1000} = \frac{9}{40}$

$5\frac{1}{3}\% = \frac{\frac{16}{3}}{100} = \frac{16}{300} = \frac{4}{75}$

Zwróć uwagę, że gdy procenty zamieniamy na ułamki dziesiętne, wystarczy przesunąć przecinek o 2 miejsca w lewo (dzielimy przez 100 i usuwamy znak %).

$76\% = 0{,}76$

$18{,}2\% = 0{,}182$

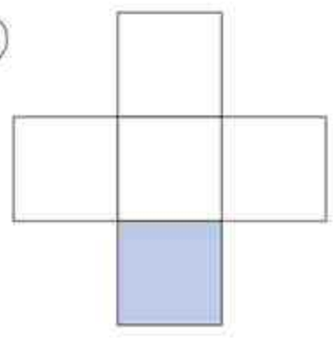
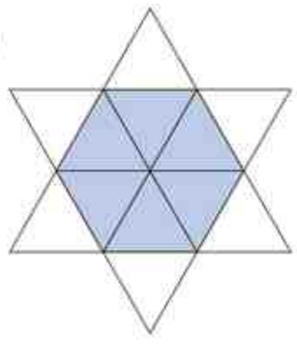
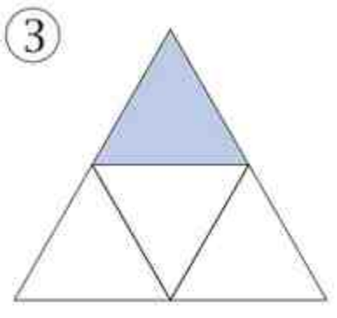
Warto zapamiętać, że:

100% to całość
50% to połowa
25% to ćwierć
75% to trzy czwarte
10% to jedna dziesiąta
20% to jedna piąta
150% to półtora

ĆWICZENIE C. a) Zamień podane procenty na ułamki zwykłe nieskracalne.

10% 20% 25% 50% 75% 150%

b) Jaki ułamek figury zamalowano? Jaki to procent tej figury?

①  ②  ③ 

Łatwo ułamek zamienić na procent, gdy można go zapisać w postaci ułamka o mianowniku 100.

Przykłady

Zamień ułamki dziesiętne na procenty:

$0{,}38 = \frac{38}{100} = 38\%$

$0{,}09 = \frac{9}{100} = 9\%$

$0{,}7 = \frac{7}{10} = \frac{70}{100} = 70\%$

$0{,}015 = \frac{15}{1000} = \frac{1{,}5}{100} = 1{,}5\%$

Zamień ułamki zwykłe na procenty:

$\frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\%$

$\frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 35\%$

$\frac{31}{25} = \frac{124}{100} = 124\%$

$1\frac{3}{4} = 1\frac{75}{100} = \frac{175}{100} = 175\%$

Ponieważ dla każdej liczby a zachodzi równość $a = \frac{a \cdot 100}{100}$, więc każdy z ułamków z powyższego przykładu moglibyśmy zamienić na procent, mnożąc go przez 100 i dopisując znak %.



$0{,}38 = 0{,}38 \cdot 100\% = 38\%$

$0{,}09 = 0{,}09 \cdot 100\% = 9\%$

$0{,}7 = 0{,}7 \cdot 100\% = 70\%$

$0{,}015 = 0{,}015 \cdot 100\% = 1{,}5\%$

$\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \cdot 100\% = 80\%$

$\frac{7}{20} = \frac{7}{20} \cdot 100\% = 35\%$

$\frac{31}{25} = \frac{31}{25} \cdot 100\% = 124\%$

$1\frac{3}{4} = \frac{7}{4} \cdot 100\% = 175\%$

Zauważ, że gdy zamieniamy ułamki dziesiętne na procenty, wystarczy przesunąć przecinek o dwa miejsca w prawo (mnożymy przez 100 i dopisujemy znak %).

$0{,}14 = 14\%$

$0{,}027 = 2{,}7\%$

Metoda, która polega na mnożeniu przez 100 i dopisaniu znaku %, pozwala zamieniać na procenty także takie ułamki zwykłe, których nie da się rozszerzyć (ani skrócić) do mianownika 100, na przykład:

$$\frac{5}{7} = \frac{5}{7} \cdot 100\% = 71\frac{3}{7}\%$$

W praktyce najczęściej najpierw znajdujemy rozwinięcie dziesiętne takiego ułamka (dzieląc licznik przez mianownik), otrzymany wynik odpowiednio zaokrąglamy, a następnie zamieniamy na procent (przesuwając przecinek o dwa miejsca w prawo i dopisując znak %).

$$\frac{5}{7} = 0{,}714285\ldots \approx 0{,}7143 = 71{,}43\%$$

ĆWICZENIE D. Korzystając z kalkulatora, zamień na procenty ułamki: $\frac{12}{19}$, $\frac{3}{65}$ i $\frac{256}{233}$. Wyniki zaokrąglij do części dziesiątych procenta.

Czasami w różnych opracowaniach można się spotkać z symbolem ‰ (czytamy: promil). Słowo promil pochodzi od łacińskiego słowa *pro mille* i oznacza „na tysiąc".

5‰ kobiet
to
$\frac{5}{1000}$ wszystkich kobiet.

Ogólnie:
k‰ pewnej wielkości
to
$\frac{k}{1000}$ tej wielkości.

$$k‰ = \frac{k}{1000}$$

Jeśli mówimy, że 5‰ (czytamy: pięć promili) kobiet nie odróżnia koloru czerwonego i zielonego, to oznacza, że przeciętnie na 1000 kobiet jest 5 daltonistek.

Jeden **promil** danej wielkości to jej tysięczna część.

$$1‰ = \frac{1}{1000} \qquad 7‰ = \frac{7}{1000} \qquad 2{,}5‰ = \frac{2{,}5}{1000}$$

Ponieważ 1‰ to $\frac{1}{1000}$, a 1% to $\frac{1}{100}$, więc 1‰ to 10 razy mniej niż 1%, czyli:

$$\mathbf{1‰ = \frac{1}{10}\%} \qquad \mathbf{1\% = 10‰}$$

ĆWICZENIE E. a) 35‰ — jaki to ułamek? Ile to procent?

b) 0,27% — ile to promili? Jaki to ułamek?

c) Wymyśl, w jaki sposób można zamieniać ułamki na promile.

d) Korzystając z kalkulatora, zamień na promile ilorazy $\frac{7}{1410}$ i $\frac{1{,}2}{5700}$.

Zadania

1. a) Zamień podane procenty na ułamki dziesiętne.

21% 11,3% 4,13% 160% 0,5% 3,5%

b) Zamień podane procenty na ułamki zwykłe nieskracalne.

15% 24% 80% 48% 120% 32,5%

1/94

2. a) Poniższe informacje wyraź za pomocą ułamków.

- Ponad 39% Polaków mieszka na wsi.
- Prawie 41% Polaków ma wyższe wykształcenie.
- Kobiety stanowią więcej niż 50% ludności Polski.
- Około 15% mieszkańców Polski ma mniej niż 15 lat.

b) Pierwszą informację można wyrazić inaczej: „Około 61% Polaków mieszka w miastach". Przekształć w podobny sposób pozostałe zdania.

3. Podaj, ile to procent.

a) połowa
b) półtora
c) całość
d) ćwierć
e) dziesiąta część
f) piąta część
g) trzy czwarte
h) dwukrotność
i) dziesięciokrotność

4. Przekształć podane poniżej informacje tak, aby zawierały dane wyrażone w procentach.

a) Na każde sto drzew trzy zostały wycięte.

b) Połowa owoców na straganie to jabłka.

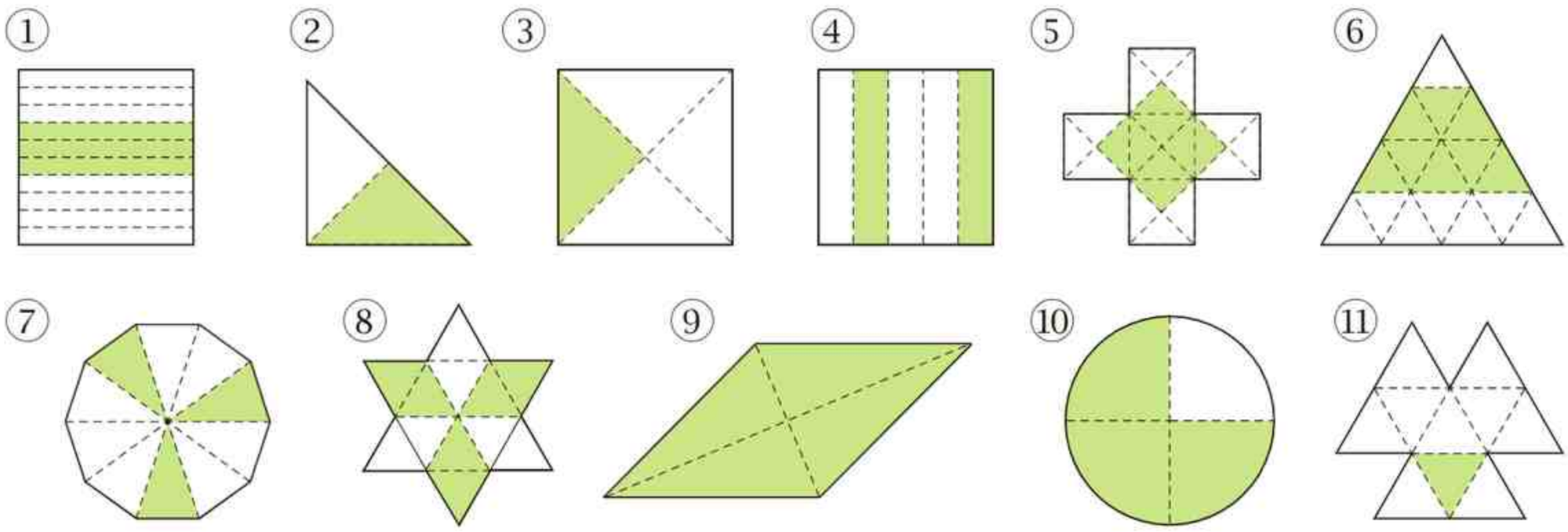
c) Co czwarty orzech jest pusty.

d) Jedną piątą koralików stanowią koraliki czerwone.

e) Pensja pana Nowaka to dwukrotność średniej płacy.

f) Obroty firmy A są trzykrotnie większe od obrotów firmy Z.

5. Wyraź w procentach, jakie części figur zostały zamalowane, a jakie nie zostały zamalowane.





6. a) Podczas transportu 6% jajek uległo uszkodzeniu. Ile procent jajek pozostało nieuszkodzonych?

b) Kolarz przejechał 65% trasy wyścigu. Jaki procent całej trasy pozostał mu do pokonania?

c) Podczas głosowania 30% obecnych na zebraniu było za przyjęciem wniosku, 59% — za odrzuceniem, a pozostali wstrzymali się od głosu. Ile procent obecnych na zebraniu wstrzymało się od głosu?

7. Zamień podane ułamki i liczby mieszane na procenty.

a) 0,23 0,6 1,2 0,015 6,05 14

b) $\frac{3}{5}$ $2\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{7}{20}$ $1\frac{3}{25}$ $\frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{3}$ $\frac{5}{6}$ $1\frac{1}{3}$ $\frac{3}{11}$ $1\frac{1}{9}$

1/94

Uwaga. W podpunkcie c) najpierw znajdź rozwinięcia dziesiętne ułamków, wyniki podaj z dokładnością do setnych części procenta.

8. Rzuć 20 razy monetą i policz, ile razy wypadła reszka. Jaki procent liczby twoich rzutów stanowi liczba uzyskanych reszek?

9. Co jest większe:

a) $\frac{1}{4}$ pewnej kwoty czy 23% takiej kwoty?

b) 45% pewnej masy czy $\frac{2}{5}$ tej masy?

c) $\frac{1}{3}$ pewnej ceny czy 30% tej ceny?

d) $\frac{1}{5}$ pewnej powierzchni czy 25% tej powierzchni?

e) $1\frac{2}{3}$ pewnej odległości czy 160% tej odległości?

f) $\frac{15}{4}$ pewnej długości czy 400% tej długości?

CO WAŻNEGO SIĘ WTEDY WYDARZYŁO?

15 VII 1410
3 V 1791
28 VI 1914
11 XI 1918
15 VIII 1920
1 IX 1939
1 VIII 1944
31 VIII 1980
13 XII 1981
1 V 2004

10. Ankieterzy badali znajomość 10 dat z historii Polski na trzech grupach osób. Za każdą poprawną odpowiedź ankietowany otrzymywał 1 punkt. W tabeli podano wyniki tego badania.

Grupa osób	Procent odpowiedzi	
	poniżej 3 punktów	powyżej 8 punktów
Siódmoklasiści	14,8	2,1
Maturzyści	2,2	19,7
Przypadkowi przechodnie	59,5	0,2
Ogółem wszyscy badani	21,4	10,6

Zaokrąglij dane zamieszczone w tabeli i podaj, jaki ułamek zwykły można wpisać w miejsce kwadracika.

a) Około ■ maturzystów zdobyło powyżej 8 punktów.

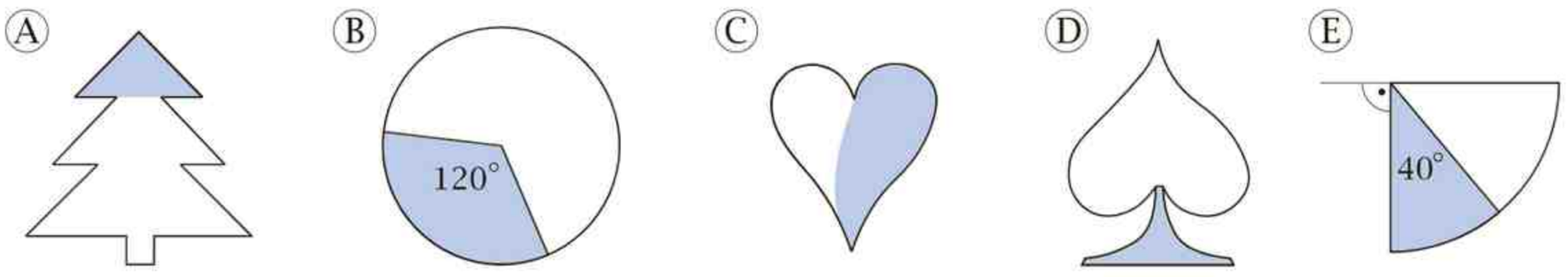
b) Około ■ ogółu badanych znało więcej niż 8 dat.

c) Prawie ■ przypadkowych przechodniów nie znało nawet trzech z podanych dat.

d) Prawie ■ maturzystów uzyskało wynik co najmniej 3 punkty i nie więcej niż 8 punktów.

e) Tylko około ■ siódmoklasistów i ■ przypadkowych przechodniów znało co najmniej 9 spośród podanych dat.

11. Na których rysunkach zamalowano więcej niż 40% figury?



12. Zamień podane ułamki na procenty. Wyniki zaokrąglij.

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{10}{9}$ c) $\frac{36}{47}$ d) $\frac{123}{17}$ e) $\frac{1,6}{3,42}$ f) $\frac{4,3}{1,12}$

13. Jaki ułamek masy 15 kg stanowi podana masa? Jaki to procent? Wynik podaj w zaokrągleniu do dziesiątych części procenta.

a) 11 kg b) 2 kg c) 0,3 kg d) 821 g e) 20 dag f) 15,5 dag

Karol	
j. polski	19 pkt/30 pkt
j. angielski	28 pkt/45 pkt
matematyka	23 pkt/40 pkt

14. Karol pisał pod koniec semestru trzy testy: z języka polskiego, z języka angielskiego i z matematyki. Test uznaje się za zaliczony, gdy zdający zdobędzie ponad 60% punktów. Które testy zaliczył Karol?

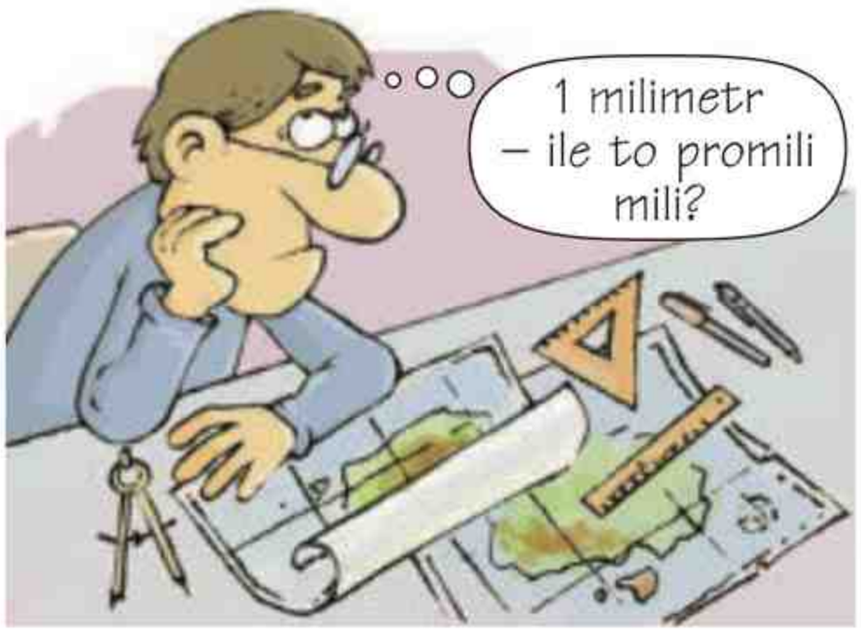
Zapis 19 pkt/30 pkt oznacza, że Karol uzyskał 19 punktów na 30 możliwych do zdobycia.

15. a) Zamień na ułamki: 7‰ 417‰ 5,6‰ 0,2‰ 0,008‰

b) Zamień na promile: 0,004 0,026 0,13 $\frac{3}{500}$ $\frac{17}{250}$

c) Zamień na procenty: 425‰ 16‰ 32,5‰ 4‰ 0,06‰

2/94



16. a) 1 mm — ile to promili metra?

b) 17 mg — ile to promili grama, a ile kilograma?

c) 20 ml — ile to promili litra?

17. W Polsce można prowadzić samochód, jeśli ilość alkoholu we krwi nie przekracza 0,2‰. Ile to procent?

18. a) Sformułuj podane informacje za pomocą ułamków.

- Zasolenie Morza Czerwonego wynosi 40‰.
- W wodzie morskiej brom stanowi 0,8‰.
- Ludność Warszawy to około 45‰ mieszkańców Polski.

b) Sformułuj podane informacje, używając promili.

- Na każde 1000 osób tylko 5 osób deklaruje, że lubi tran.
- W międzynarodowym teście piętnastolatków na 4000 badanych polskich uczniów tylko sześcioro rozwiązało wszystkie zadania.
- Tylko 0,58% spośród sportowców w Polsce uprawia kajakarstwo.

Sprawdź, czy umiesz

1. Po zamianie 2,5% na ułamek otrzymamy:

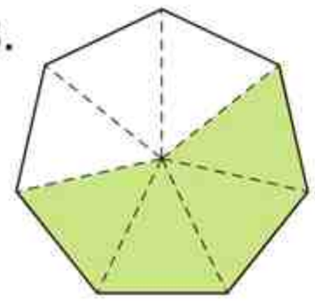
A. 2,5 B. 0,25 C. $\frac{1}{40}$ D. $\frac{2}{5}$

2. Na którym rysunku zamalowano więcej niż 60% obszaru?

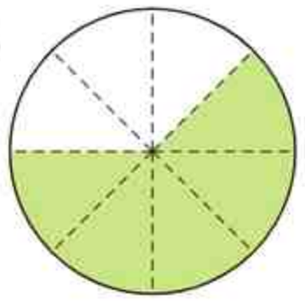
A.



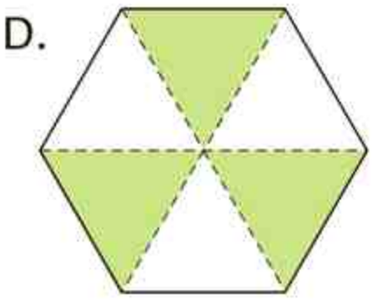
B.



C.



D.



3. Po zamianie ułamka $\frac{5}{16}$ na procenty otrzymamy:

A. 31,25% B. 5,16% C. 3,125% D. 32%

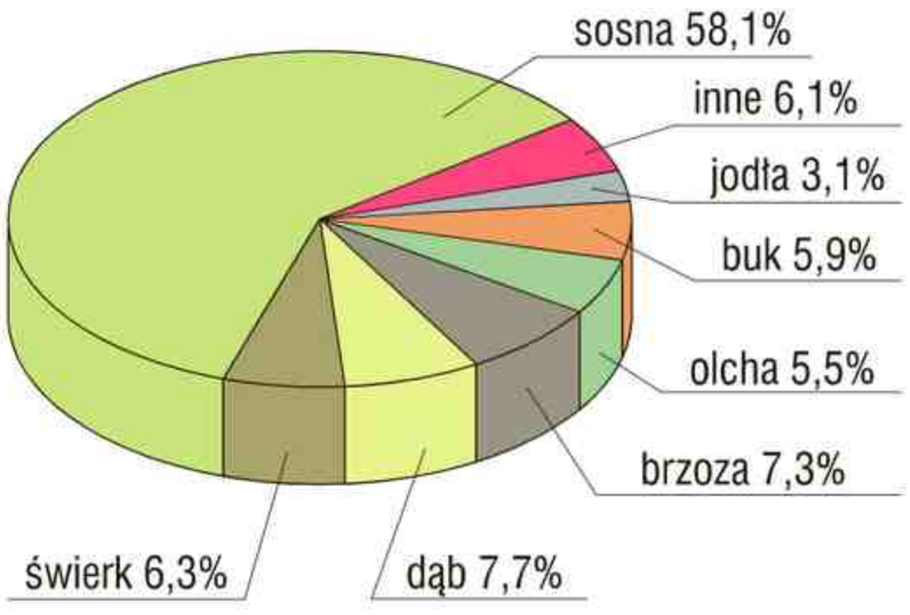
4. Na 2000 kibiców tylko 8 kupiło najdroższe bilety. Ile promili wszystkich kibiców stanowili kibice z najdroższymi biletami?

A. 0,8‰ B. 0,4‰ C. 4‰ D. 8‰

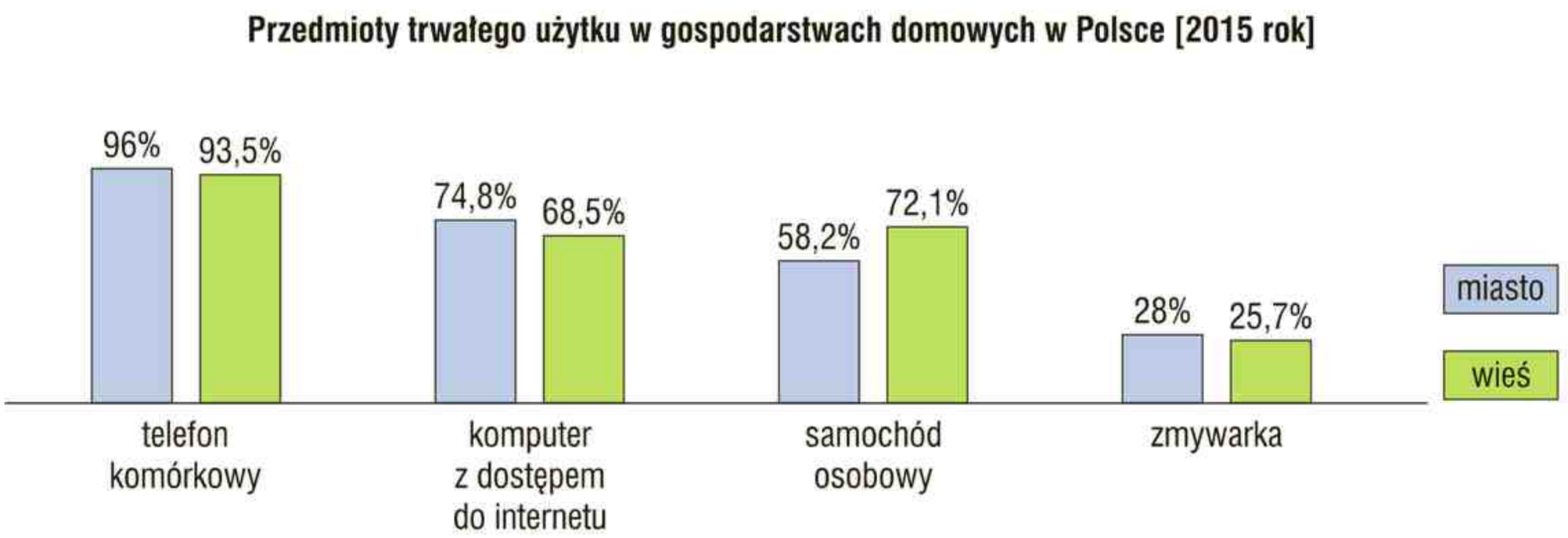
→ zadania uzupełniające 1–5, str. 94

2 Diagramy procentowe

Gdy chcemy porównywać dane liczbowe wyrażone w procentach, wygodnie jest posługiwać się diagramami. Z diagramu przedstawionego poniżej możemy się na przykład dowiedzieć, że:



- Zdecydowanie najwięcej jest w polskich lasach sosen.
- Buków jest więcej niż olch, ale mniej niż brzóz.
- Drzewa liściaste stanowią ponad 25%, zatem więcej niż $\frac{1}{4}$ wszystkich drzew w lasach.
- Wśród drzew iglastych dominują sosny, jest ich około 10 razy więcej niż świerków.

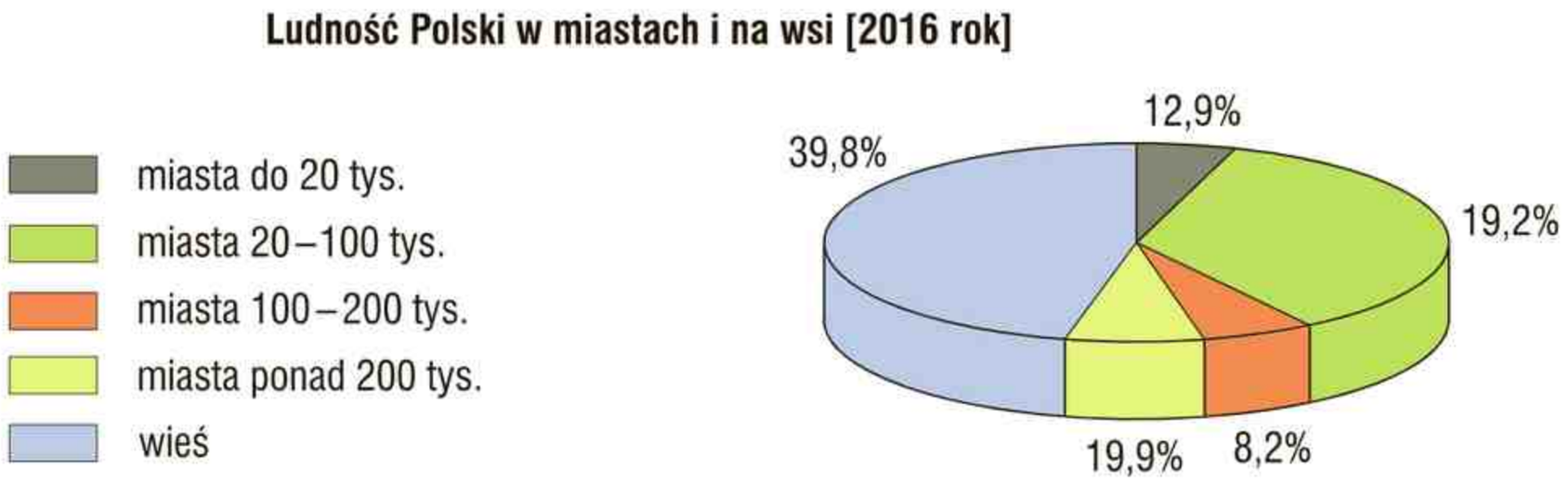


Z tego diagramu możemy na przykład wywnioskować, że w 2015 roku:

- Telefon komórkowy miało ponad 90% rodzin miejskich i wiejskich.
- Prawie $\frac{3}{4}$ rodzin w mieście i ponad $\frac{2}{3}$ rodzin na wsi miało komputer z dostępem do internetu.
- Na 100 rodzin wiejskich około 70 posiadało samochód, a na 100 rodzin miejskich auta miało mniej niż 60 rodzin.
- Więcej było rodzin miejskich, które posiadały komputer z dostępem do internetu, niż rodzin, które posiadały samochód.

ĆWICZENIE. Znajdź w gazecie, czasopiśmie, internecie jakieś dane wyrażone za pomocą diagramów i spróbuj te dane zinterpretować.

Zadania



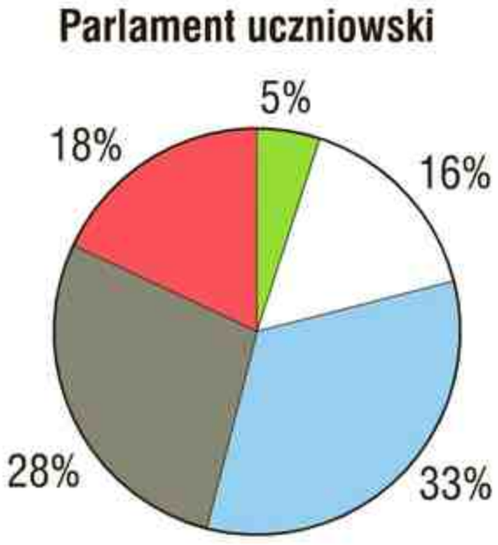
1. Na podstawie powyższego diagramu odpowiedz:

a) Ile procent ludności Polski mieszka na wsi? Czy jest to mniej, czy więcej niż $\frac{1}{3}$ liczby mieszkańców Polski?

b) Czy ludność wsi i małych miasteczek (do 20 tys. mieszkańców) to więcej niż połowa mieszkańców Polski?

c) Ile procent ludności Polski mieszka w dużych miastach (ponad 100 tys. mieszkańców)?

2. W parlamencie uczniowskim jest pięć stronnictw: Czerwoni, Zieloni, Biali, Niebiescy i Czarni (zob. diagram).

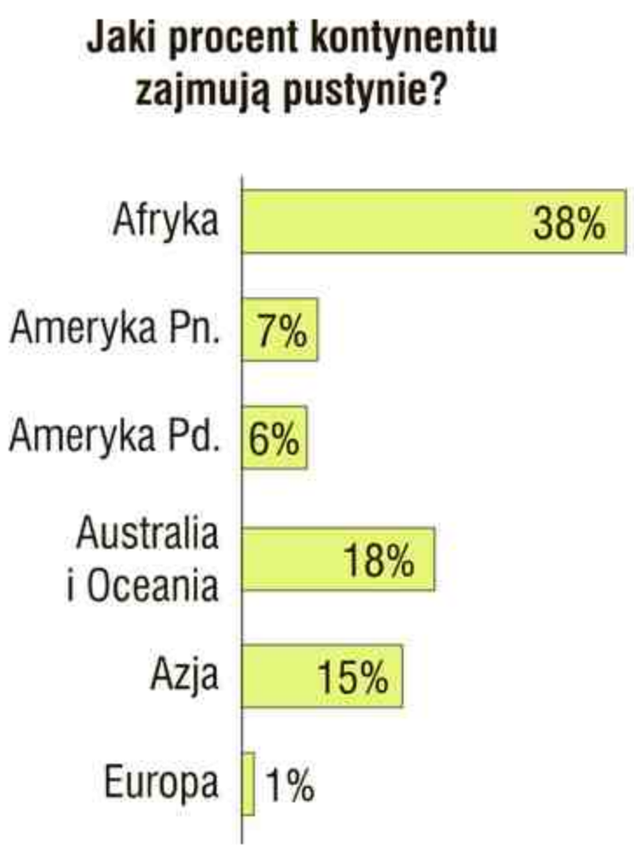


a) Czy Niebiescy i Biali mają razem przewagę w parlamencie?

b) Które stronnictwa mają mniej niż $\frac{1}{5}$ liczby wszystkich członków parlamentu?

c) Czy trzy najmniejsze stronnictwa stanowią więcej niż $\frac{1}{3}$ liczby wszystkich członków parlamentu?

d) Z jakim stronnictwem mogą połączyć się Biali, by razem mieć więcej członków niż Niebiescy?



3. a) Na podstawie diagramu obok ustal, które zdania są prawdziwe.

① Pustynie w Afryce to prawie $\frac{2}{5}$ powierzchni tego kontynentu.

② W Ameryce Północnej 93% powierzchni zajmują lasy.

③ Na każdym z wymienionych kontynentów pustynie zajmują ponad $\frac{1}{20}$ powierzchni.

④ Powierzchnia pustyń Australii i Oceanii jest 3 razy większa niż powierzchnia pustyń w Ameryce Południowej.

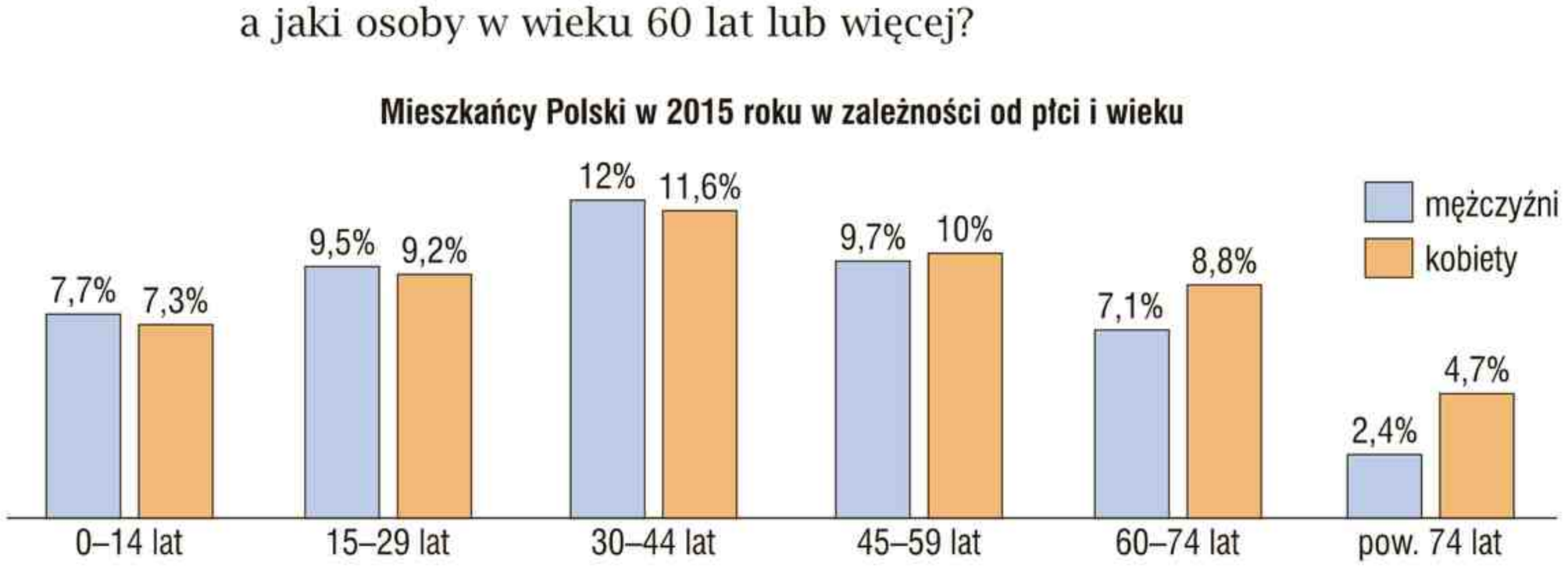
b) Czy z diagramu wynika, że 13% powierzchni obu Ameryk zajmują pustynie?

4. Przyjrzyj się poniższemu diagramowi.

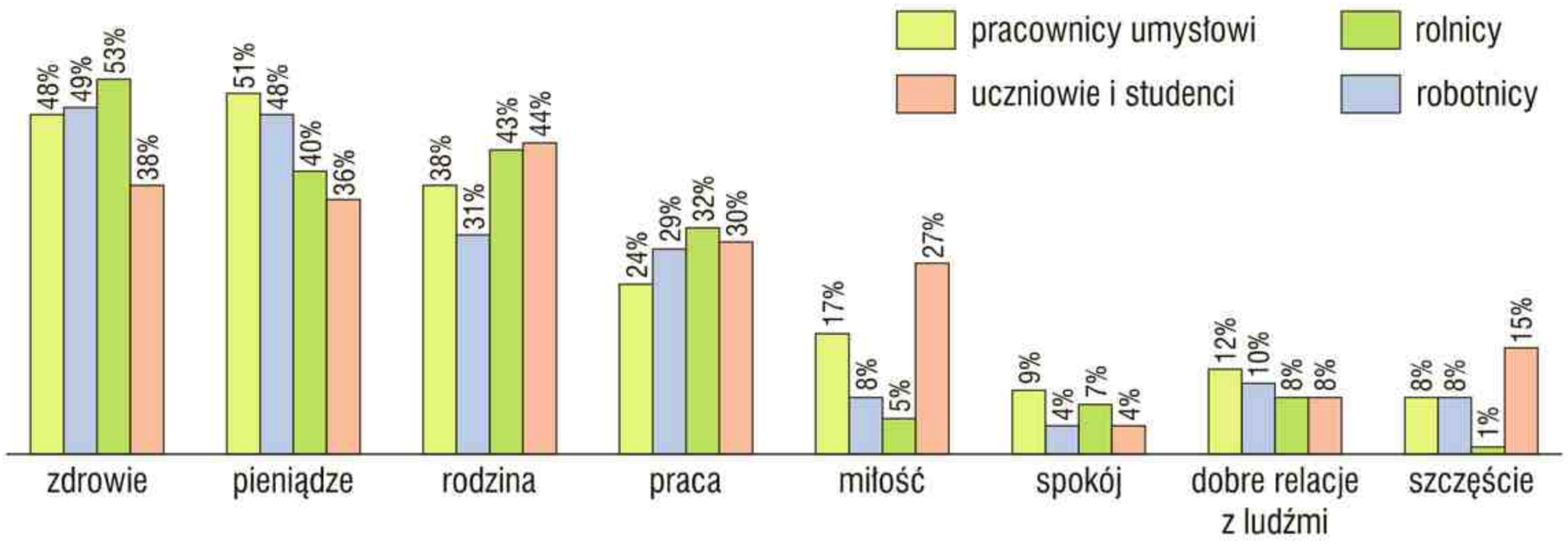
a) W których przedziałach wiekowych jest więcej mężczyzn niż kobiet?

b) Która grupa wiekowa jest najliczniejsza?

c) Jaki procent mieszkańców Polski stanowią dzieci w wieku do 14 lat, a jaki osoby w wieku 60 lat lub więcej?



5. Centrum Badania Opinii Społecznej (CBOS) zadało pytanie „Co jest najbardziej potrzebne, aby życie było udane?”. Ankietowani mogli wskazać nie więcej niż 3 odpowiedzi. Poniżej podajemy dane o najczęściej wybieranych odpowiedziach w różnych grupach osób.



a) Którą z wymienionych wartości najczęściej wskazywali uczniowie i studenci, a którą rolnicy?

b) W której grupie osób więcej niż $\frac{1}{4}$ badanych wskazało miłość?

c) Które grupy osób częściej wskazywały rodzinę niż pieniądze?

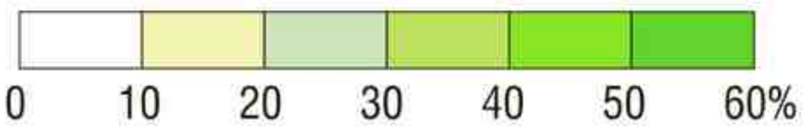
d) W której grupie tak samo często wskazywano miłość jak szczęście?

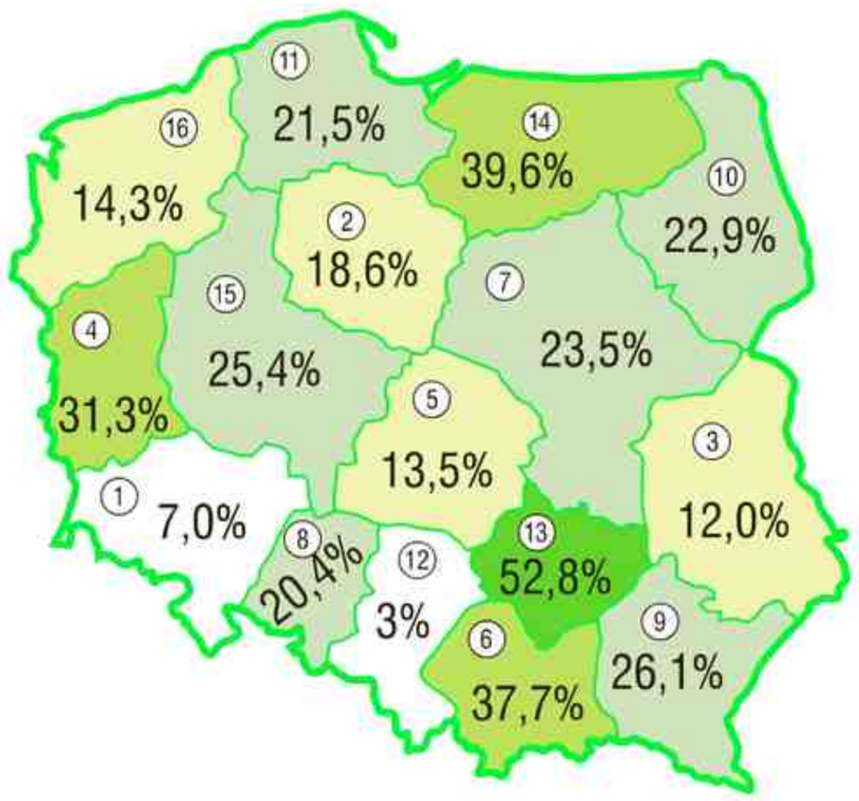
e) Która grupa wskazywała dwa razy częściej szczęście niż spokój?

f) Która grupa wskazywała trzy razy częściej pieniądze niż miłość?

6. Na mapie zaznaczono, jaki procent powierzchni województw w Polsce stanowią obszary chronione.

① dolnośląskie
② kujawsko-pomorskie
③ lubelskie
④ lubuskie
⑤ łódzkie
⑥ małopolskie
⑦ mazowieckie
⑧ opolskie
⑨ podkarpackie
⑩ podlaskie
⑪ pomorskie
⑫ śląskie
⑬ świętokrzyskie
⑭ warmińsko-mazurskie
⑮ wielkopolskie
⑯ zachodniopomorskie





Ustal, w których województwach:

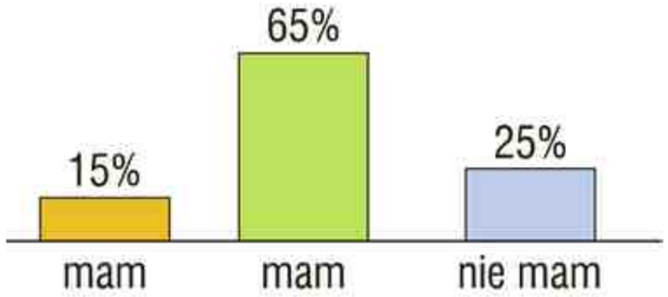
a) obszary chronione zajmują więcej niż połowę powierzchni,

b) obszary chronione stanowią więcej niż $\frac{1}{5}$ powierzchni,

c) ponad $\frac{3}{4}$ powierzchni nie podlega ochronie.

Obszary chronione stanowią ogółem 22,6% powierzchni Polski. Porównaj tę informację z danymi dotyczącymi twojego województwa.

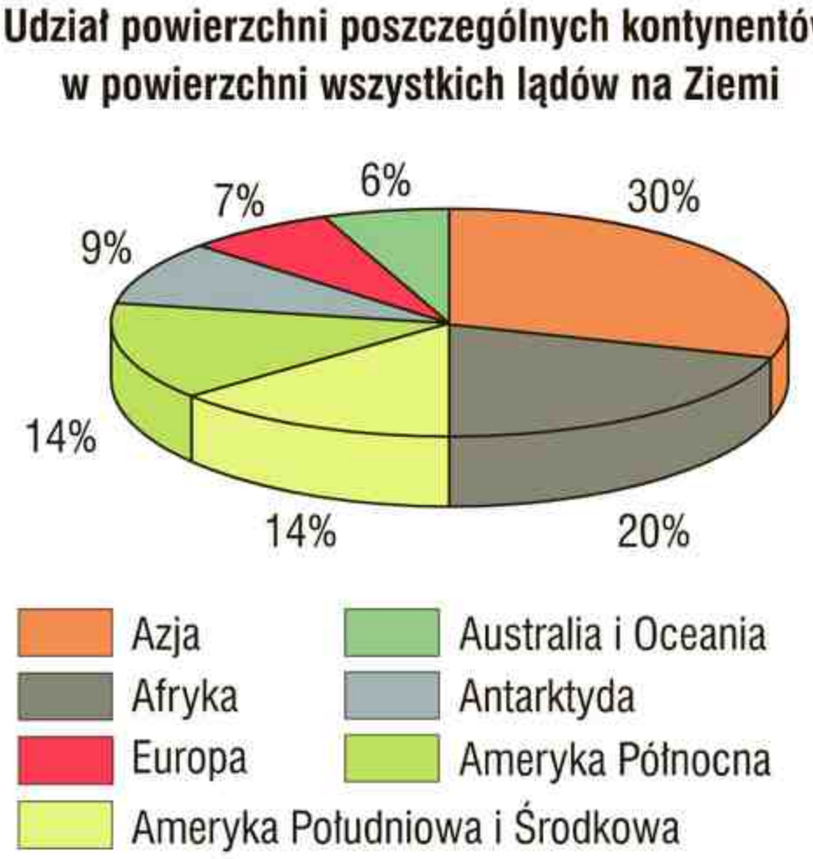
*7. Grupę kilkudziesięciu uczniów zapytano, czy mają w domu psa lub kota. Wykres przedstawia wyniki tej ankiety.



Ustal, ile procent ankietowanych:
a) nie ma psa,
b) ma kota i ma psa,
c) ma kota i nie ma psa,
d) ma psa i nie ma kota.

Sprawdź, czy umiesz

1. Które zdanie jest prawdziwe?



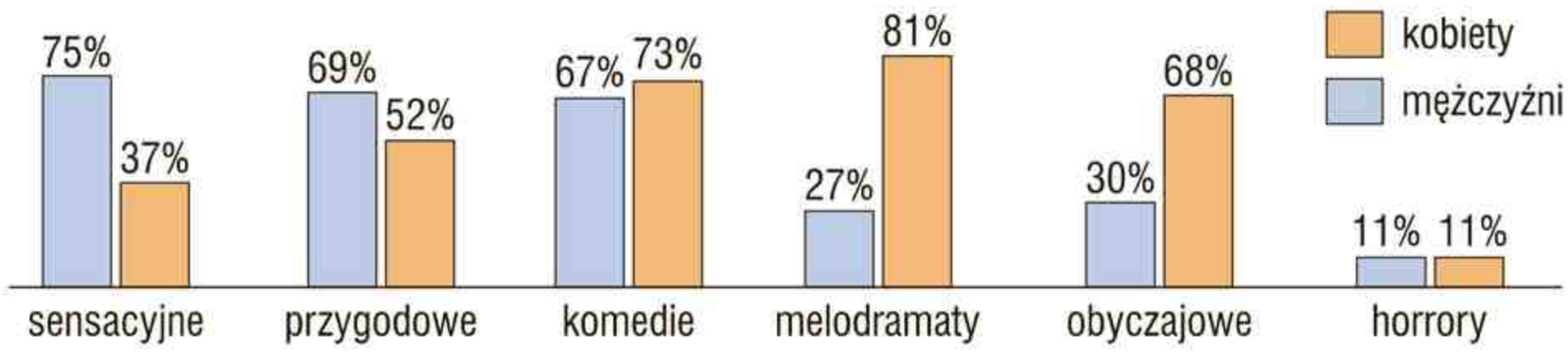
A. Antarktyda zajmuje najmniejszą powierzchnię spośród wszystkich kontynentów.

B. Afryka ma większą powierzchnię niż obie Ameryki razem.

C. Obie Ameryki i Europa zajmują razem mniejszą powierzchnię niż Australia z Oceanią.

D. Azja z Afryką zajmują razem taką samą powierzchnię jak wszystkie pozostałe kontynenty.

2. Grupie osób zadano pytanie „Jakie filmy oglądasz?". Diagram przedstawia wyniki tego badania.



Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

A. Mężczyźni częściej oglądają komedie niż filmy sensacyjne.

B. Kobiety najczęściej oglądają filmy przygodowe.

C. Kobiety wymieniają melodramaty 3 razy częściej niż mężczyźni.

D. Co trzydziesty mężczyzna lubi filmy obyczajowe.

zadania uzupełniające 6–7, str. 94

3 Jaki to procent?



ĆWICZENIE. a) Ilu muzyków gra na instrumentach smyczkowych? Jaka to część orkiestry? Podaj odpowiedź w postaci ułamka i zamień go na procent.

b) Ilu mężczyzn gra w tej orkiestrze? Jaki procent mężczyzn gra na instrumentach dętych?

c) Ile procent kobiet grających w tej orkiestrze to flecistki?

d) Jaki procent kobiet grających na instrumentach smyczkowych nosi okulary?

Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, zaczynamy od ustalenia, jakim ułamkiem jednej liczby jest druga, a następnie zamieniamy ten ułamek na procent.

Przykład

W wyborach przewodniczącego samorządu szkolnego brało udział 264 uczniów. Darek otrzymał 165 głosów. Ile procent wyborców głosowało na Darka?

$\frac{165}{264} = \frac{5}{8}$ | *Na Darka głosowało $\frac{165}{264}$, czyli $\frac{5}{8}$ wszystkich wyborców.*

Sposób I: $\frac{5}{8} = \frac{5}{8} \cdot 100\% = \frac{125}{2}\% = 62{,}5\%$ | *Zamieniamy ułamek na procent, mnożąc ułamek przez 100%.*

Sposób II: $\frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\%$ | *Zamieniamy ułamek zwykły na dziesiętny i przesuwamy przecinek.*

Odp. Na Darka głosowało 62,5% wyborców.

Zadania

1. a) Wśród 30 uczniów pewnej klasy piętnaścioro ma niebieskie oczy. Ile procent uczniów tej klasy ma niebieskie oczy?

b) Wśród 25 samochodów stojących na parkingu jest 12 fordów. Jaki procent samochodów stanowią fordy?

c) Wśród 200 zabawek w sklepie było 30 uszkodzonych. Jaki procent zabawek stanowiły zabawki nieuszkodzone?

d) W pewnym mieście na każde 500 mieszkańców 3 osoby są lekarzami. Wyraź w promilach, jaką część mieszkańców tego miasta stanowią lekarze.

2. Oblicz, jaki procent wszystkich wyrazów w tym zdaniu stanowią rzeczowniki. 12/95

Skuteczność koszykarza można wyrazić w procentach:

$$\frac{\text{liczba celnych rzutów}}{\text{liczba wszystkich rzutów}} \cdot 100\%$$

3. W meczu koszykówki Pioruny Sępkowo — Orły Osępino najlepszy zawodnik Piorunów oddał 48 rzutów do kosza, a trafił 9 razy, a najlepszy zawodnik Orłów oddał 50 rzutów, w tym 10 celnych. Który z tych zawodników wykazał się lepszą skutecznością?

4. Przeciętny orzeł waży 1,68 kg, a przeciętny wróbel — 25 g. Mózg orła waży 14 g, a mózg wróbla — 1 g. Oblicz, jakim procentem masy każdego z tych ptaków jest masa jego mózgu.



5. Niedaleko ujścia rzeki Oranje (płynącej w południowej Afryce) można znaleźć diamenty. W niektórych miejscach jest ich nawet 14 karatów w każdej tonie żwiru (jeden karat to 0,2 g). Ile promili tego żwiru stanowią diamenty?



6. Gdy Kasia otworzyła swoją skarbonkę, okazało się, że miała w niej 3 dziesięciogroszówki, 66 dwudziestogroszówek i 11 pięćdziesięciogroszówek.

a) Jaki procent liczby wszystkich monet stanowiły monety pięćdziesięciogroszowe?

b) Jaki procent kwoty w skarbonce był w pięćdziesięciogroszówkach? Wynik zaokrąglij.



7. Obok strumyka, który płynął z wolna, rozsiewał zioła pan Maj. Wysiał 25 g majeranku, 30 g tymianku, 25 g szałwii, 26 g bazylii, 20 g mięty oraz 24 g estragonu. Jaki procent wysianych przez niego ziół stanowił tymianek?

8. a) Zmieszano 2 kg grochu z 8 kg kapusty. Jaki procent stanowi groch w tej mieszance?

b) Do 3,5 kg wody wsypano 0,5 kg cukru. Jaki procent stanowi cukier w otrzymanym syropie?

c) Pewien chemik młody wlał 0,3 kg kwasu do 2,2 kg wody. Jakie jest stężenie procentowe kwasu w tym roztworze?

9. Do 2 kg zupy pomidorowej pani Krysia dodała pięć szczypt soli (każda szczypta to 0,2 g soli) i jedną łyżeczkę cukru (7 g). Jaki promil przyprawionej zupy stanowi sól, a jaki cukier? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 promila.



10. Aby zrobić zaprawę murarską, trzeba przed dodaniem wody zmieszać jedno wiadro cementu z jednym wiadrem wapna i sześcioma wiadrami piasku. Jaki procent objętości tej mieszaniny zajmuje piasek?



11. Ustal z dokładnością do setnych części procenta:

a) Jaki procent uczniów twojej klasy stanowią chłopcy?

b) Jaki procent chłopców w twojej klasie nosi okulary?

c) Jaki procent liczby wszystkich klas w twojej szkole stanowi liczba klas siódmych?

d) Jaki procent długości twojej dłoni stanowi długość twojego palca wskazującego?

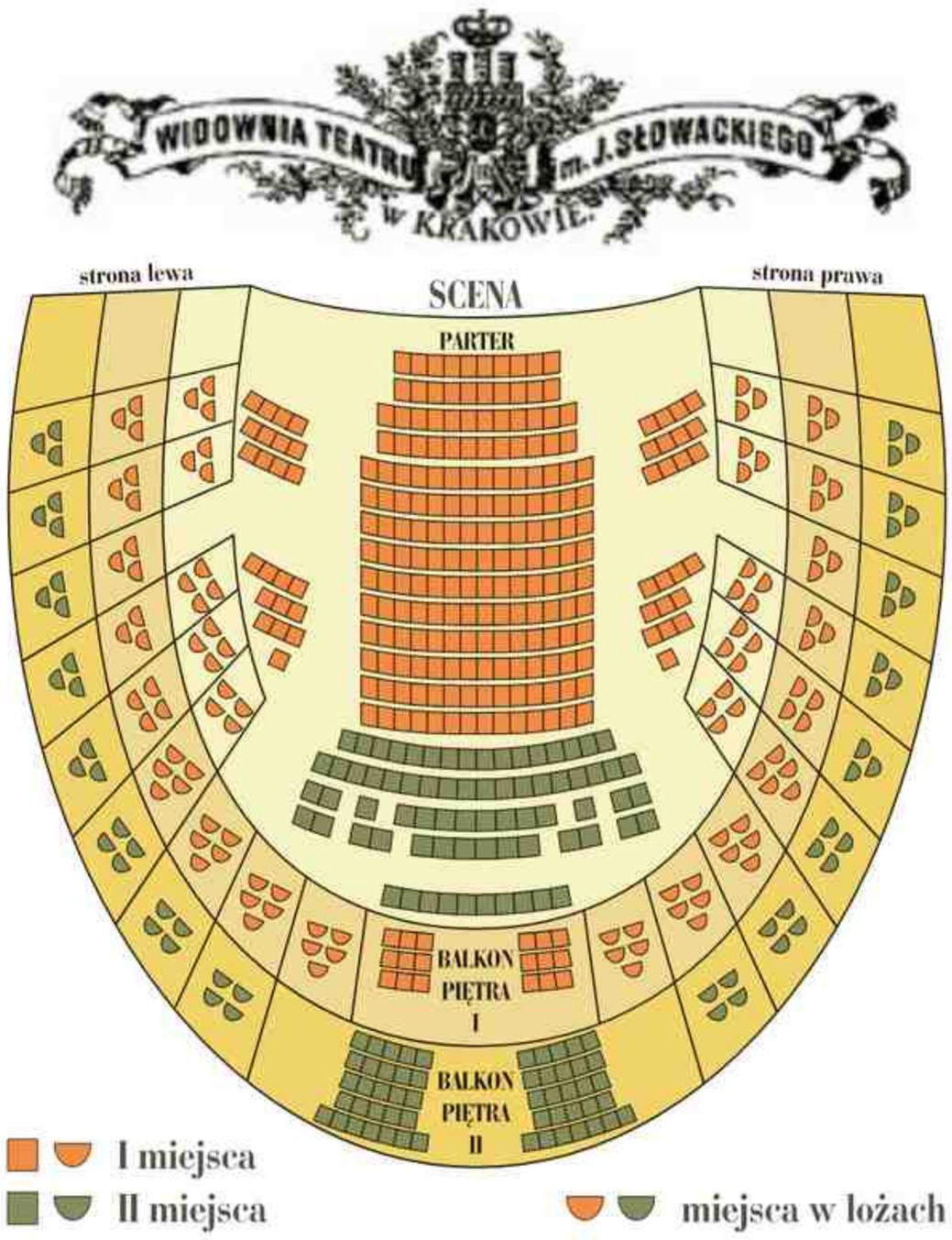
e) Jaki procent wszystkich zadań w tym rozdziale stanowią zadania ze znaczkiem kalkulatora?

f) Jaki procent minionej doby spędziłeś w szkole, jaki — przy komputerze, a jaki — oglądając telewizję?

g) Jaki procent w tym miesiącu stanowią dni szkolne, a jaki — wolne od szkoły?

12. W Polsce na 100 mężczyzn przypada około 107 kobiet. Czy kobiety stanowią więcej niż 52% wszystkich mieszkańców Polski?

13. Poniżej przedstawione są informacje o miejscach na widowni w Teatrze im. J. Słowackiego w Krakowie.



	I miejsca	II miejsca
Parter (w tym miejsca w lożach)	266 (36)	72 (—)
Balkon piętra I (w tym miejsca w lożach)	90 (72)	— (—)
Balkon piętra II (w tym miejsca w lożach)	— (—)	108 (54)

a) Jaki procent wszystkich miejsc stanowią miejsca na parterze?

b) Jaki procent miejsc na parterze stanowią miejsca w lożach?

c) Jaki procent wszystkich miejsc stanowią miejsca na balkonach?

d) Ile lóż jest w tym teatrze? Jaki procent wszystkich lóż stanowią loże na pierwszym piętrze?

e) Jaki procent miejsc w teatrze stanowią I miejsca, a jaki II miejsca? Wyniki zaokrąglij do 1%.

14. Przyjrzyj się każdemu z rysunków i oszacuj, jaki procent powierzchni prostokąta zajmuje część zamalowana. Wykonując odpowiednie pomiary i obliczenia, sprawdź, czy dobrze oszacowałeś.

a) 

b) 

c) 

15. Zmianę wymiarów odbitki kserograficznej określa się za pomocą procentów. Jeśli wybierzemy na kserokopiarce powiększenie 120%, to otrzymamy obrazek, którego wymiary stanowią 120% wymiarów oryginału. Poniżej przedstawiono obrazki i ich odbitki kserograficzne. Zmierz długości odpowiednich odcinków i oblicz, jaki procent wybrano na kserokopiarce, aby otrzymać te odbitki.

a)

oryginał



kopia



b)

oryginał



kopia



Sprawdź, czy umiesz

Klasa	VII a	VII b	VII c	VII d
Liczba uczniów	25	20	23	22
Liczba dziewcząt	12	9	11	10

1. W której klasie procent dziewcząt jest największy?

A. VII a C. VII c
B. VII b D. VII d

2. Dosypano 20 dag soli do 1,8 kg wody. Stężenie procentowe otrzymanej solanki wynosi:

A. $11\frac{1}{9}\%$ B. 1% C. 10% D. 9%

3. Paweł złożył komputer z części. Kosztowało go to 2100 zł. Najdroższą częścią był twardy dysk, za który zapłacił 462 zł. Jaki procent kosztu komputera stanowił twardy dysk?

A. $45\frac{1}{22}\%$ B. 78% C. 0,22% D. 22%

→ zadania uzupełniające 8–17, str. 94–95

4 Obliczanie procentu danej liczby

ĆWICZENIE. Przypomnij sobie, jak obliczamy ułamek danej liczby i oblicz:
a) $\frac{3}{4}$ kwoty 80 złotych, b) $\frac{2}{3}$ czasu lekcji, c) $\frac{7}{10}$ liczby dni w czerwcu.

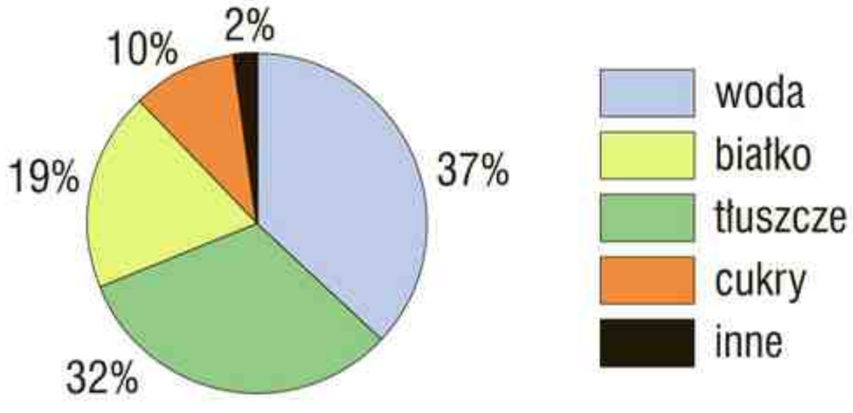


Diagram obok przedstawia skład procentowy kotleta schabowego. Wyobraź sobie, że dostałeś na obiad kotlet schabowy, który waży 150 g. Aby się dowiedzieć, ile białka dostarczysz swemu organizmowi, zjadając ten kotlet, musisz obliczyć 19% liczby 150.

Przykład

Ile gramów białka zawiera kotlet schabowy ważący 150 g?

$19\% = 0{,}19$ | *Zamieniamy procent na ułamek.*

$0{,}19 \cdot 150 = 28{,}5$ | *Mnożymy ułamek przez liczbę.*

Odp. W tym kotlecie jest 28,5 g białka.

Zadania

1. Oblicz w pamięci podany procent każdej z liczb zapisanych obok:

a) 1% 200 138 1112 15,7 6

b) 10% 10 25 120 3,7 2002

c) 20% 10 20,5 150 400 1,2

d) 25% 8 36 120 1,6 1600

e) 150% 10 8 50 2000 120

f) 0,1% 2700 500 200 1300

19/95

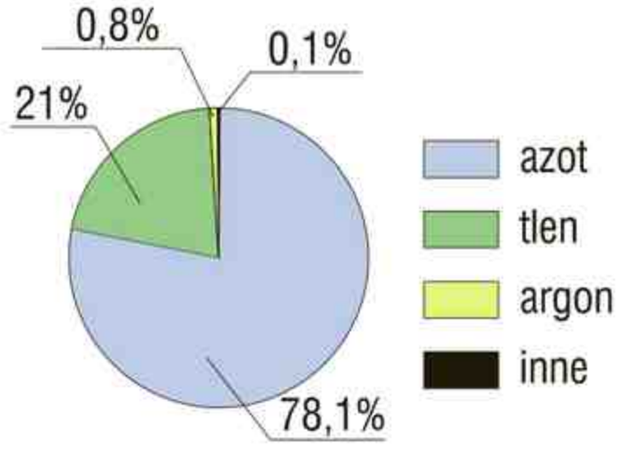
2. Oblicz:

a) 15% z 28 zł
b) 140% z 8 kg
c) 1,2% z 20 zł
d) 13% z 25 cm
e) 4,5% z 480 l
f) 270% z 2,5 km
g) 3‰ z 1500 kg
h) 7‰ z 20 tys. zł
i) 1,5‰ z 4 t

18/95

3. Pan Artur zarabia 1500 zł miesięcznie, a pan Piotr 2500 zł. Od zarobków płacą 19% podatku. O ile większą kwotę podatku płaci pan Piotr?

4. Diagram przedstawia, jaki procent objętości powietrza stanowią azot, tlen i argon. Oblicz masę azotu w powietrzu znajdującym się w sali o wymiarach 5 m × 4 m × 3 m. Przyjmij, że 1 m^3 azotu waży 1,15 kg.



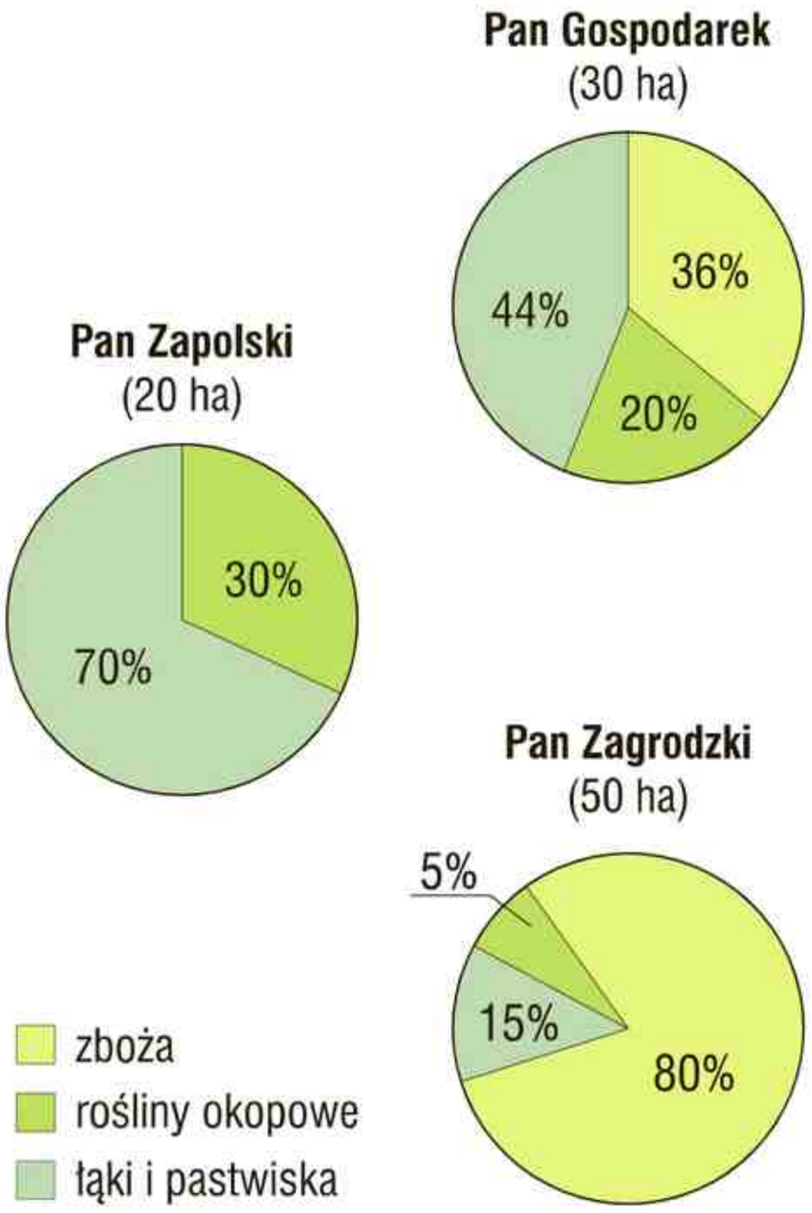


5. Popatrz, jak Marcin sprytnie obliczył 15% kwoty 90 zł. Oblicz w podobny sposób:

a) 15% ze 160 zł
b) 20% z 23,3 kg
c) 15% ze 122 zł
d) 2% ze 114 g
e) 3% z 2100 ml
f) 90% z 40 €
g) 99% z 500 ha
h) 0,5% z 24 000 l
i) 0,1% z 375 dag
j) 110% z 800 zł

18/95

6. Pierwsze trzy minuty lekcji zajęło sprawdzanie obecności, przez następnych kilkanaście minut uczniowie pisali sprawdzian, a resztę lekcji, czyli 60% godziny lekcyjnej, zajęło omawianie wyjazdu na wycieczkę. Ile minut uczniowie pisali sprawdzian?



7. Diagramy ilustrują, w jaki sposób trzej rolnicy użytkują swoją ziemię. W nawiasach podano, ile hektarów ziemi ma każdy z gospodarzy.

a) Który gospodarz ma największą powierzchnię łąk i pastwisk?

b) Pan Gospodarek na $\frac{1}{3}$ powierzchni przeznaczonej pod zboża zasiał żyto. Ile hektarów obsiał pan Gospodarek tym zbożem?

c) O ile hektarów więcej przeznaczył pan Zagrodzki na zboża niż na rośliny okopowe?

d) U pana Zapolskiego 80% powierzchni przeznaczonej na rośliny okopowe zajmują ziemniaki. Ile ton ziemniaków może się spodziewać pan Zapolski, jeśli przeciętny zbiór z 1 ha wynosi 16 ton?

8. *Dokończ zdanie: Najbardziej lubię, gdy nauczyciel jest…* . Takie zadanie otrzymało dwustu uczniów, każdy miał wpisać tylko jedną cechę. 24% uczniów odpowiedziało *sprawiedliwy*, 11% *sympatyczny*, 20% odpowiedziało *niewymagający* i tyle samo uczniów odpowiedziało *wymagający*. Przeciętnie co dwudziesty uczeń wpisał odpowiedź *nieobecny*, a 13 uczniów podało różne inne odpowiedzi. Pozostali uczniowie nie odpowiedzieli na to pytanie. Ilu ich było?

9. Kurs kroju i szycia rozpoczęło 200 osób, w tym 70% mężczyzn. Po pierwszym dniu zajęć wyjechało 60% mężczyzn i 10% kobiet. Ile osób kontynuowało naukę kroju i szycia w drugim dniu kursu?





10. *Idzie Grześ przez wieś, kopę jajek niesie,*
ale plaga nieszczęść ciągnie się za Grzesiem.
Dziurę w środku drogi wyryły złe moce,
straty w jajkach były — 25%.
Gdy po przyjacielsku klepnął go wuj Miłosz,
to 40% z tej reszty ubyło.
No i pies na koniec, jakby było mało,
5 jaj poszło w błoto. Ile jaj zostało?



11. Hrabina S., znana miłośniczka biżuterii, ma dużą kolekcję pierścionków, 40% z nich jest ze złota, a 30% złotych pierścionków to pierścionki z brylantami. Jaki procent całej kolekcji stanowią złote pierścionki z brylantami?

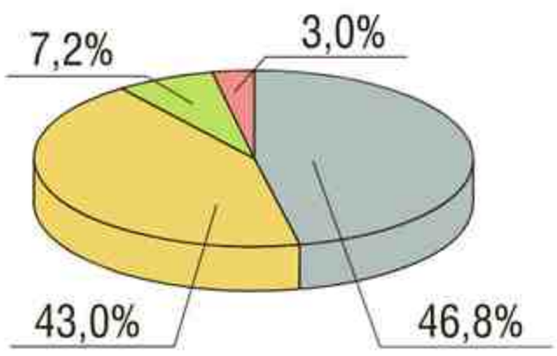
12. Oblicz (wynik zaokrąglij z dokładnością do 1 grosza):

a) 22% z 375,40 zł
b) 7% z 16,50 zł
c) 2,3% z 13 zł
d) 0,7% z 2541 zł
e) 136% z 12,15 zł
f) 110,5% z 375 zł

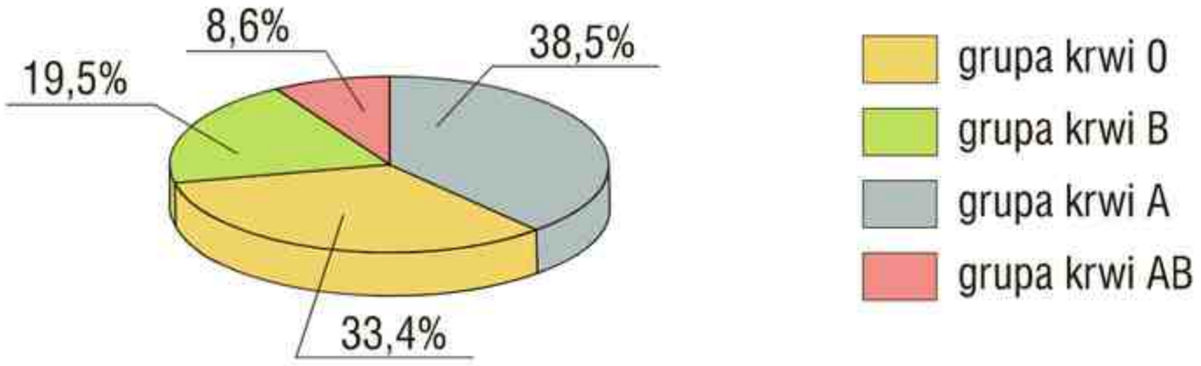
13. We wsi Nadlesie jest 800 mieszkańców, a we wsi Podlesie jest 912 mieszkańców. W Nadlesiu kobiety stanowią 56,25% mieszkańców, a w Podlesiu 56,25% stanowią mężczyźni. W której z tych wsi jest więcej kobiet i o ile?

14. W Polsce mieszka około 38 mln osób, a we Francji — 66 mln. Korzystając z poniższych diagramów, oblicz, w którym z tych krajów mieszka więcej osób z grupą krwi B.

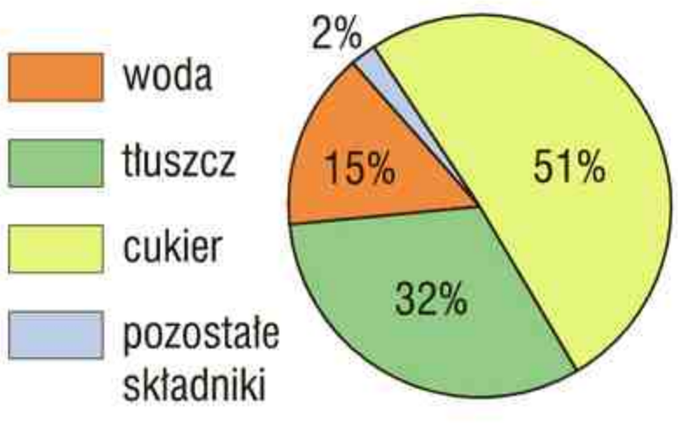
Francja



Polska



Sprawdź, czy umiesz



1. Na diagramie obok przedstawiony jest skład procentowy czekolady. Zosia zjadła tabliczkę czekolady, która ważyła 15 dag. Z diagramu wynika, że Zosia zjadła:

A. 32 g tłuszczu
B. 76,5 g cukru
C. prawie 75 g cukru
D. prawie 45 g tłuszczu

2. W składzie porcelany było 300 figurek porcelanowych. Słonie stanowiły 70% wszystkich figurek. Nieuważny sprzedawca stłukł 10% słoni. Ile słoni zostało w składzie porcelany?

A. 240
B. 189
C. 21
D. 279

zadania uzupełniające 18–24, str. 95–96

5 Podwyżki i obniżki



Często słyszymy zwroty: o 10% więcej, o 15% mniej. Czy wiesz, co to znaczy?

Zamiast mówić, że bilet na autobus podrożał o 10%, możemy powiedzieć, że nowa cena jest o 10% wyższa od poprzedniej. Lub inaczej — nowa cena to 110% starej ceny.

o 10% więcej niż 32 zł to
- 32 zł + 10% kwoty 32 zł
- 110% kwoty 32 zł

110% = 100% + 10%

ĆWICZENIE A. Ile kosztować będzie ten bilet po podwyżce?

Zamiast mówić, że rower jest o 20% tańszy, mówimy, że nowa cena jest o 20% niższa od początkowej, lub inaczej — nowa cena to 80% starej ceny.

o 20% mniej niż 520 zł to
- 520 zł − 20% kwoty 520 zł
- 80% kwoty 520 zł

80% = 100% − 20%

ĆWICZENIE B. Ile będzie kosztował rower po obniżeniu ceny?

ĆWICZENIE C. Z podanych wyżej informacji można na przykład odczytać, że ma nastąpić powiększenie parku o 40%. To oznacza, że powierzchnia nowego parku będzie stanowić 140% obecnej powierzchni parku. Zinterpretuj w podobny sposób inne informacje podane powyżej.

Przykład

W sklepie zapowiedziano sezonową obniżkę cen o 15%. Sweter kosztuje 170 zł. Ile będzie kosztował po obniżce?

I sposób:
$15\% = 0{,}15$ | *Zamieniamy procent na ułamek.*
$0{,}15 \cdot 170 = 25{,}5$ | *Obliczamy, o ile złotych obniży się cena.*
$170 - 25{,}5 = 144{,}5$ | *Obliczamy nową cenę.*

II sposób:
$100\% - 15\% = 85\%$ | *Obliczamy, jakim procentem starej ceny będzie nowa cena.*
$85\% = 0{,}85$ | *Zamieniamy procent na ułamek.*
$0{,}85 \cdot 170 = 144{,}5$ | *Obliczamy nową cenę.*

Odp. Nowa cena swetra będzie wynosić 144,50 zł.

Gdyby cenę jakiegoś towaru podniesiono o pewien procent, a potem obniżono o ten sam procent, to ostateczna cena nie będzie taka sama jak początkowa.

Przykład

Kostium kąpielowy kosztował w marcu 150 zł. W czerwcu podrożał o 20%, a we wrześniu staniał o 20%. Ile ten kostium kosztował we wrześniu?

cena w czerwcu:
120% ceny 150 zł | $100\% + 20\% = 120\%$
$1{,}2 \cdot 150 = 180$ zł

cena we wrześniu:
80% ceny 180 zł | $100\% - 20\% = 80\%$
$0{,}8 \cdot 180 = 144$ zł

Odp. We wrześniu kostium kosztował 144 zł.

Zadania

1. Oblicz w pamięci liczbę, która jest:
a) o 50% większa od 60,
b) o 10% większa od 120,
c) o 25% większa od 80,
d) o 100% większa od 35,
e) o 10% mniejsza od 90,
f) o 25% mniejsza od 20,
g) o 20% mniejsza od 50,
h) o 1% mniejsza od 200.

2. Znajdź liczbę:

a) o 75% większą od 28,

b) o 0,5% większą od 4,

c) o 110% większą od 52,

d) o 24% mniejszą od 45,

e) o 0,1% mniejszą od 250,

f) o 2,5% mniejszą od 32.

3. W sklepie sportowym Tadex ogłoszono sezonową piętnastoprocentową obniżkę cen. Wcześniej materac kosztował 30 zł, piłka plażowa 8 zł, a parasol plażowy 24 zł. Ile teraz kosztują te towary?

4. Buty, które kosztowały 300 zł, staniały najpierw o 20%, a potem jeszcze o 10%. Ile te buty kosztują obecnie?

5. Pan Karol przed urlopem ważył 80 kg, w czasie urlopu przytył o 12,5%, ale po półroczu ciężkiej pracy schudł o 10%. Ile waży teraz?

6. Który właściciel sklepu planuje większą podwyżkę?



7. a) Cenę pewnego towaru podniesiono o 10%, a po sezonie obniżono o 10%. Czy po sezonie cena była wyższa czy niższa od początkowej?

b) Cenę pewnego towaru obniżono o 10%, a w sezonie podwyższono o 10%. Czy w sezonie cena była wyższa czy niższa od początkowej?

27/96

8. Nos Pinokia po pierwszym kłamstwie urósł o 20%, a po następnym kłamstwie — o 25%. O ile procent wydłużył się nos Pinokia po obydwu kłamstwach?

wersja 1

Promocja!

krem XILAN

Za tę samą cenę otrzymasz o 20% więcej kremu.

***9.** W opakowaniu kremu Xilan było dotychczas 100 ml kremu i krem ten kosztował 12 zł. Producent przygotował dwie wersje promocji tego kremu. Która z tych promocji jest bardziej opłacalna dla klienta?

wersja 2

Promocja!

krem XILAN

Za tę samą ilość kremu zapłacisz o 20% mniej.

Sprawdź, czy umiesz

1. Liczba o 110% większa od 20 to:

A. 22 B. 42 C. 44 D. 33

2. Konferencja przewidywana na 2 godziny przedłużyła się o 35% planowanego czasu. Trwała więc:

A. 2 godziny 42 minuty
B. 2 godziny 7 minut
C. 3 godziny 10 minut
D. 3 godziny 5 minut

3. Garnitur, który kosztował 800 zł, przeceniono najpierw o 10%, a następnie jeszcze o 5%. Cena tego garnituru wynosi obecnie:

A. 120 zł B. 680 zł C. 684 zł D. 795 zł

→ zadania uzupełniające 25–28, str. 96

6 Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent



ĆWICZENIE A. a) Na tym fragmencie zdjęcia można zobaczyć tylko 50% uczniów z klasy Mikołaja. Ilu uczniów jest w tej klasie?

b) Wszystkie dziewczęta, pozując do tego zdjęcia, usiadły na ławce. Na fragmencie zdjęcia widać tylko 25% dziewcząt. Ile dziewcząt jest w klasie Mikołaja?

ĆWICZENIE B. Zastąp kwadraciki odpowiednimi liczbami.

a) 50% liczby ■ to 17
b) 25% kwoty ■ zł to 6 zł
c) 1% liczby ■ to 0,5
d) 10% masy ■ kg to 23 kg
e) 20% liczby ■ to 23
f) 200% liczby ■ to 105

Gdy wiemy, ile wynosi 50%, 10%, 25% czy 20% pewnej liczby, znajdziemy tę liczbę bez trudu. Na przykład wiadomo, że:

- kwota, której 25% wynosi 7 zł, jest 4 razy większa niż 7 zł, czyli wynosi 28 zł,
- jeśli 10% pewnej odległości to 2,5 km, to szukana odległość jest 10 razy większa, czyli wynosi 25 km.

Przy nieco trudniejszych zadaniach można posłużyć się równaniem.

Przykład

Znajdź liczbę, której 13% wynosi 52.

x — szukana liczba

13% liczby x to 52 | 13% = 0,13

$0{,}13 \cdot x = 52$

$x = 52 : 0{,}13$

$x = 400$

Odp. Szukaną liczbą jest 400.

Przykład

Cenę pewnego towaru podwyższono o 15% i wynosi ona obecnie 2760 zł. Jaka była cena tego towaru przed podwyżką?

x — szukana cena

115% liczby x to 2760 | 100% + 15% = 115%, *więc nowa cena towaru stanowi* 115% *starej ceny.*

$1{,}15 \cdot x = 2760$ | 115% = 1,15.

$x = 2760 : 1{,}15$

$x = 2400$

Odp. Przed podwyżką towar kosztował 2400 zł.

Zadania

1. Znajdź liczbę, której:

a) 40% jest równe 16,

b) 15% jest równe 36,

c) 32% jest równe 8,

d) 210% jest równe 63,

e) 140% jest równe 53,2,

f) 0,4% jest równe 23,2.

29/96

2. Pewnego dnia w klasie było nieobecnych trzech uczniów. Nauczyciel powiedział, że jest to 12% klasy. Ilu uczniów liczy ta klasa?



3. Stosując metodę Jacka, znajdź liczbę, której:

a) 40% jest równe 12,
b) 40% jest równe 20,
c) 30% jest równe 24,
d) 20% jest równe 3,
e) 80% jest równe 32,
f) 70% jest równe 140,
g) 90% jest równe 27,
h) 15% jest równe 24.

30/96

4. Oblicz (postaraj się liczyć w pamięci), jaka to liczba, której:

a) 0,5% wynosi 2,
b) 1,5% wynosi 12,
c) 0,2% wynosi 4,
d) 2,5% wynosi 3.

5. a) W tajemniczych okolicznościach zniknęły 44 g czekolady, co stanowi 40% tabliczki. Ile ważyła ta tabliczka czekolady?

b) Z niezrozumiałych powodów 24 uczniów myśli wyłącznie o wakacjach. Stanowią oni 80% klasy. Ilu uczniów liczy ta klasa?

c) W czerwcu z niejasnych przyczyn rachunek telefoniczny pani Kasi wyniósł aż 550 zł, co stanowiło 250% rachunku z maja. Ile złotych zapłaciła pani Kasia w maju?

6. *Raz sumienny leśniczy*
W lesie drzewa policzył
I drzewostan w tym lesie już zna.
Gmina żąda procentów,
Więc leśniczy przejęty
Liczy procent, gdzie tylko się da.

Sześćset w lesie jest sosen
— Siedemdziesiąt pięć procent,
Tym rachunkom dał radę raz dwa.
Ty nie jesteś leśniczym,
Ale możesz obliczyć,
Ile w lesie leśniczy drzew ma.





7. Dzienne zapotrzebowanie trzynastolatka na węglowodany wynosi 340 g, a na białko 75 g. Wyobraź sobie, że żywisz się tylko bananami. Oblicz, ile kilogramów bananów powinieneś zjadać dziennie, aby dostarczać organizmowi odpowiednią dawkę:

a) węglowodanów,
b) białka.



8. Przed wyjazdem na wycieczkę nad morze okazało się, że 3 osoby zapomniały wziąć ze sobą ręcznik. Stanowiły one 15% całej grupy. Ile osób pamiętało o zabraniu ręcznika?

9. Pani Marta 80% wszystkich prezentów gwiazdkowych kupiła w internecie. Tylko 4 prezenty kupiła w tradycyjny sposób w sklepach. Ile prezentów kupiła na Gwiazdkę pani Marta?

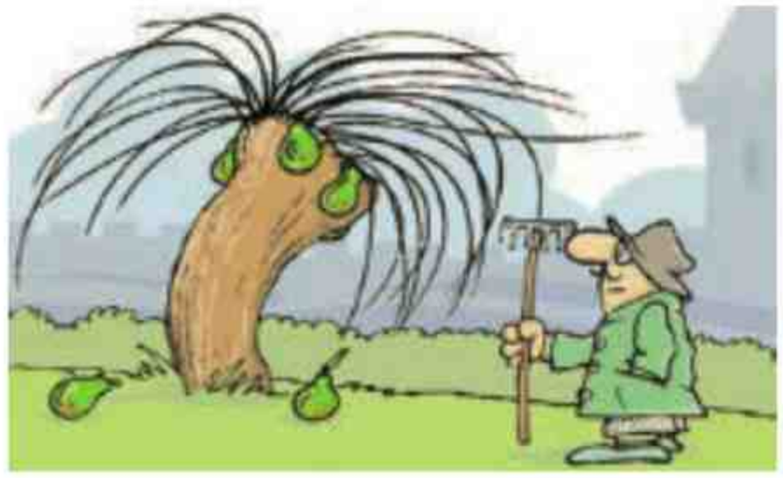
32/97

10. Pani Kasia otrzymała 270 zł podwyżki, co stanowiło 15% jej dotychczasowej pensji. Ile wynosi jej nowe wynagrodzenie?

11. W domu wczasowym „Bursztyn" przebywali na wakacjach dorośli i dzieci. Mężczyźni stanowili 28% wszystkich wczasowiczów, kobiety — 44%, a dzieci było czterdzieści dwoje. Ilu wczasowiczów spędzało wakacje w domu wczasowym Bursztyn?

36/97

12. W królewskim sadzie rosły gruszki na wierzbie. Pewnego dnia zerwał się porywisty wiatr i 40% gruszek spadło. Po kilku dniach ogrodnik zerwał 90% pozostałych owoców, zostawiając na drzewie 12 sztuk. Ile gruszek rosło na wierzbie?



13. Znajdź liczbę a, wiedząc, że:

a) liczba o 10% większa od a jest równa 55,

b) liczba o 15% mniejsza od a jest równa 170,

c) liczba o 70% mniejsza od a jest równa 360,

d) liczba o 120% większa od a jest równa 88.

14. a) Proszek „Zwykły" podrożał o 5% i kosztuje teraz 21 zł. Ile kosztował przed podwyżką?

b) Po obniżce cen o 10% za kurtkę zapłacono 450 zł. Ile kosztowała ta kurtka przed obniżką?

15. Prawdziwki po ususzeniu tracą ok. 92% swojej masy. Ile kilogramów prawdziwków trzeba zebrać, aby otrzymać 1 kg grzybów suszonych?

16. a) Lekcja w polskiej szkole trwa o 12,5% dłużej niż w szkole szwedzkiej. Ile minut trwa lekcja w Szwecji?

b) Lekcja w polskiej szkole trwa o 10% krócej niż lekcja w szkole brytyjskiej. Ile minut trwa lekcja w Wielkiej Brytanii?

17. Za telewizor kupiony po dziesięcioprocentowej obniżce cen państwo Lenarowie zapłacili 1440 zł. Ile zaoszczędzili dzięki tej obniżce?

18. Cenę garsonki przed sezonem podniesiono o 20%, a po kilku miesiącach obniżono o 10% i można było ją kupić za 270 zł. Ile kosztowała ta garsonka na początku?



19. Jacek z mamą za dwa bilety kolejowe do Pragi zapłacili w sumie 340 zł. Jacek jest studentem, więc przysługują mu zniżki. Jego bilet był o 30% tańszy od biletu mamy. Ile kosztował bilet mamy?

Sprawdź, czy umiesz

1. 16% liczby a to 80. Liczba a jest równa:

A. 5 B. 12,8 C. 92,8 D. 500

2. Cena biletu ulgowego stanowi 75% ceny biletu normalnego. Bilet ulgowy kosztuje 12 zł. Za bilet normalny zapłacimy:

A. 9 zł B. 15 zł C. 16 zł D. 21 zł

3. Egzamin pisemny miał trwać 1,5 godziny. 65% zdających oddało swoje prace przed czasem, a pozostałe 91 osób pisało egzamin przez 90 minut. Ile osób przystąpiło do tego egzaminu?

A. 140 B. 260 C. 156 D. 230

4. Liczba 26,4 jest o 20% większa od liczby a. Liczba a jest równa:

A. 22 B. 26,2 C. 31,68 D. 21,12

zadania uzupełniające 29–36, str. 96–97

7 O ile procent więcej, o ile mniej. Punkty procentowe

Pytanie, o ile procent wielkość A jest większa (mniejsza) od wielkości B, sprowadza się do obliczenia, jakim procentem wielkości B jest różnica między wielkościami A i B. Rozważmy następujący przykład:

Na targu ogórki kosztują 4 zł, a pomidory 5 zł za 1 kg. Jeśli pytamy, o ile procent pomidory są droższe od ogórków, to musimy obliczyć, jakim procentem ceny ogórków (kwoty 4 zł) jest różnica cen.

$$\frac{\text{różnica cen}}{\text{cena ogórków}} = \frac{5-4}{4} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Zatem pomidory są droższe od ogórków o 25%. Jeśli pytamy, o ile procent ogórki są tańsze od pomidorów, to musimy obliczyć, jakim procentem ceny pomidorów (kwoty 5 zł) jest różnica cen.

$$\frac{\text{różnica cen}}{\text{cena pomidorów}} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5} = 20\%$$

Zatem ogórki są tańsze od pomidorów o 20%.

ĆWICZENIE. a) Sukienka wieczorowa, która kosztowała 350 zł, przed karnawałem podrożała i kosztowała 392 zł. O ile procent podrożała?

b) Narty w październiku kosztowały 440 zł, a w grudniu kosztowały 550 zł. O ile procent tańsze były te narty w październiku niż w grudniu?



Przyjrzyj się wynikom ankiet podanym obok. Za każdym razem grupa badanych liczyła 1000 osób. Na zadane w ankiecie pytanie w 2012 roku „tak" odpowiedziało 12% ankietowanych, a w 2014 roku — 15%. Nie możemy jednak powiedzieć, że popularność kuchni dalekowschodniej między rokiem 2012 a rokiem 2014 wzrosła o 3%.

Takie stwierdzenie byłoby błędem, gdyż liczba osób, które próbowały potraw kuchni Dalekiego Wschodu:

w roku 2012 wynosiła	w roku 2014 wynosiła	zatem wzrost wyniósł:
$0{,}12 \cdot 1000 = 120$	$0{,}15 \cdot 1000 = 150$	$\frac{150-120}{120} = \frac{1}{4} = 25\%$

W sytuacjach takich, jak opisana powyżej, tzn. gdy wielkość wyrażona w procentach zwiększyła się lub zmniejszyła, używamy terminu **punkty procentowe**. Możemy więc powiedzieć, że zainteresowanie kuchnią dalekowschodnią wzrosło między rokiem 2012 a 2014 o 3 punkty procentowe.

Zadania

1. Ala dostaje 50 zł kieszonkowego, a jej młodszy brat Maciek 40 zł.

a) O ile procent kieszonkowe Ali jest większe od kieszonkowego Maćka?

b) O ile procent kieszonkowe Maćka jest mniejsze od kieszonkowego, które otrzymuje Ala?

2. Tabela przedstawia notowania akcji dwóch firm w dniach 15 i 25 listopada. O ile procent w ciągu tych 10 dni zmieniła się cena akcji firmy Kret, a o ile firmy Sowa?

	15 XI	25 XI
Kret SA	10 zł	12,50 zł
Sowa SA	15 zł	12,50 zł

37/97



3. Oblicz, o ile procent:

a) winogrona są droższe od bananów,

b) banany są tańsze od jabłek,

c) winogrona są droższe od jabłek.

39/97

4. W reklamie firmy produkującej trójnogie stoły przedstawiono rysunek, który miał pokazywać, jak dynamicznie rozwija się ta firma.

a) O ile procent wzrosła produkcja trójnogich stołów w roku 2015 w porównaniu z 2014?

b) O ile procent produkcja wzrosła w roku 2016 w porównaniu z rokiem 2014?



5. W sklepie sportowym obniżono ceny wszystkich towarów o taki sam procent. Jaka jest cena leżaka po obniżce?



6. W pewnej szkole uczy się 560 uczniów, w tym 240 dziewcząt. O ile procent więcej jest w tej szkole chłopców niż dziewcząt? O ile procent mniej jest dziewcząt niż chłopców?



7. Pan Zygmunt dostał podwyżkę i zamiast 3200 zł zarabia 3600 zł. Podwyższył więc kieszonkowe swojej córki o taki sam procent. Córka dostawała dotychczas 40 zł kieszonkowego. Ile będzie dostawać teraz?

40/97

8. W 1997 r. inflacja w Polsce wynosiła 13,2%, w 2007 r. wynosiła 3,2%, a w 2016 r. — tylko 0,8%. O ile punktów procentowych inflacja w 2007 r. była mniejsza w porównaniu z rokiem 1997? O ile punktów procentowych obniżyła się inflacja między rokiem 2007 a 2016?

9. W lutym poparcie dla Partii Postępu deklarowało 25% z 2000 mieszkańców pewnego miasteczka. W marcu poparcie wzrosło o 5 punktów procentowych.

a) Ilu mieszkańców miasteczka deklarowało poparcie dla Partii Postępu w lutym, a ilu w marcu?

b) O ile procent więcej osób zadeklarowało swoje poparcie w marcu w porównaniu z lutym?

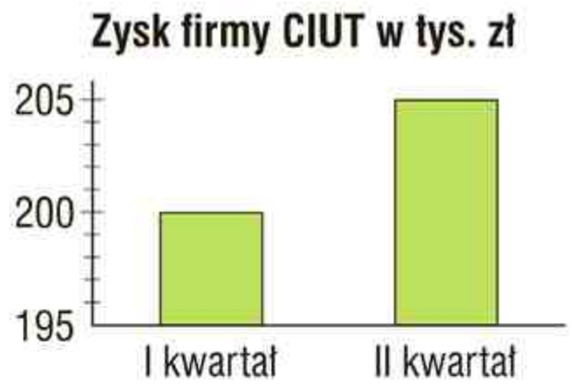
Sprawdź, czy umiesz

1. Kopa to 60 sztuk, a mendel to 15 sztuk. Kopa jest większa od mendla:

A. o 4% B. o 400% C. o 300% D. o 40%

2. Pani Ania zarabiała 3200 zł, a po pół roku podniesiono jej pensję i zarabiała już 3400 zł. O ile procent wzrosły zarobki pani Ani?

A. ok. 10% B. 6,25% C. ok. 5,9% D. $\frac{1}{16}\%$



3. Dyrektor firmy CIUT porównywał wyniki swojej firmy w I i II kwartale tego roku. Z rysunku wynika, że w porównaniu z I kwartałem zysk w II kwartale wzrósł o:

A. 100% B. 50% C. 25% D. 2,5%

zadania uzupełniające 37–41, str. 97

8 Obliczenia procentowe



ĆWICZENIE. a) Pani Gabrysia przygotowała na święta Bożego Narodzenia 20 różnych potraw, w tym 12 wigilijnych. Wyraź w procentach, jaka część wszystkich potraw nie została podana na wigilię.

b) W wigilii uczestniczyły 22 osoby, w tym 8 dzieci. O ile procent więcej było dorosłych niż dzieci?

c) Po kolacji wigilijnej goście zaśpiewali 15 kolęd. Tylko w 20% kolęd zaśpiewano więcej niż 2 zwrotki. W ilu kolędach zaśpiewano co najwyżej dwie zwrotki?

d) Dzieci otrzymały łącznie 24 prezenty i było to 60% wszystkich gwiazdkowych prezentów. Ile było wszystkich prezentów?

e) Bombki na choince były tylko w dwóch kolorach — czerwonym i złotym. Bombek czerwonych było 40, a złotych o 30% więcej. Ile bombek wisiało na choince?

W powyższym ćwiczeniu przypomnieliśmy wszystkie typy obliczeń procentowych. Niektóre zadania wymagają stosowania dwóch lub nawet trzech typów obliczeń.

Przykład

Pan Kowalski zarabia 1800 zł. Pan Nowak zarabia o 20% więcej niż pan Kowalski, a o 10% mniej niż pan Malinowski. Ile zarabia pan Nowak, a ile pan Malinowski?

Obliczamy zarobki pana Nowaka:

$1{,}2 \cdot 1800 = 2160$

Zarobki p. Nowaka to 120% *zarobków p. Kowalskiego.*

Obliczamy zarobki pana Malinowskiego:

x — zarobki pana Malinowskiego

$0{,}9 \cdot x = 2160$

Zarobki p. Nowaka to 90% *zarobków p. Malinowskiego.*

$x = 2160 : 0{,}9$

$x = 2400$

Odp. Pan Nowak zarabia 2160 zł, a pan Malinowski 2400 zł.

Zadania

1. Do szkolnego klubu sportowego Tęcza należy 36 chłopców i 24 dziewczynki.

a) Jaki procent uczniów należących do klubu stanowią dziewczęta?

b) W międzyszkolnych zawodach w tenisie stołowym uczestniczyło 37,5% wszystkich dziewcząt z Tęczy. Ile dziewcząt należących do klubu nie brało udziału w zawodach?

c) W zawodach lekkoatletycznych wzięło udział 85% członków klubu Tęcza. Stanowili oni 17% wszystkich uczestników zawodów. Ilu uczniów startowało w tych zawodach?

d) Do klubu Tęcza należy 10% wszystkich dziewcząt i 20% wszystkich chłopców w szkole. Ilu uczniów jest w tej szkole? O ile procent mniej jest w tej szkole chłopców niż dziewcząt?

e) Po sukcesie na zawodach liczba członków klubu wzrosła do 84 osób. O ile procent wzrosła liczba członków Tęczy?



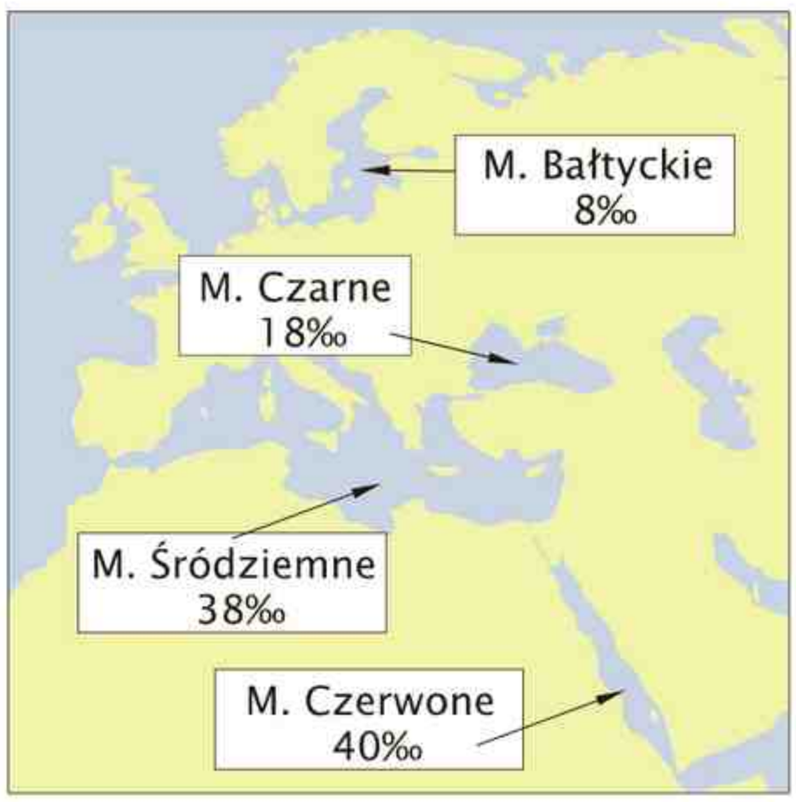
2. Biuro podróży Dookoła Świata podało, że aż 20 000 osób, czyli 40% klientów biura, odwiedziło Egipt. Ile osób korzystało z usług tego biura?

3. Na mapie podano informacje o zasoleniu niektórych mórz. Korzystając z tabeli, odpowiedz:

a) Ile soli jest w 20 kg wody z Bałtyku, a ile w tej samej ilości wody z Morza Śródziemnego?

b) Czy w 15 kg wody z Morza Czerwonego jest więcej czy mniej niż 0,5 kg soli?

c) Ile trzeba wziąć wody z Morza Czarnego, aby po jej odparowaniu otrzymać 5,4 kg soli?



d) Wyraź w procentach i w promilach, jakie byłoby zasolenie wody otrzymanej po zmieszaniu 5 kg wody z Bałtyku z 5 kg wody z Morza Czerwonego.

4. Załoga statku Pirat była o 20% liczniejsza od załogi statku Korsarz, a o 10% mniej liczna niż załoga statku Szyper. Załoga Korsarza liczyła 30 osób. Ilu członków załogi było na statku Szyper?



46, 51/98

5. Ania, Basia i Celina zbierają autografy sławnych ludzi. Ania ma o 40% więcej niż Basia, ale o 40% mniej niż Celina. Celina zebrała już 70 autografów. Ile autografów ma Ania, a ile Basia?

48/98



6. Przeczytaj ogłoszenie zamieszczone obok. Ustal, ile złotych należy wpłacić:

a) przy podpisywaniu umowy kupna mieszkania o wartości 220 tys. zł,

b) przy podpisywaniu umowy kupna mieszkania o powierzchni 60,2 m^2, którego cena za 1 m^2 wynosi 5 tys. zł,

c) przy odbiorze kluczy, jeśli przy zawieraniu umowy zapłaciliśmy 54 tys. zł.

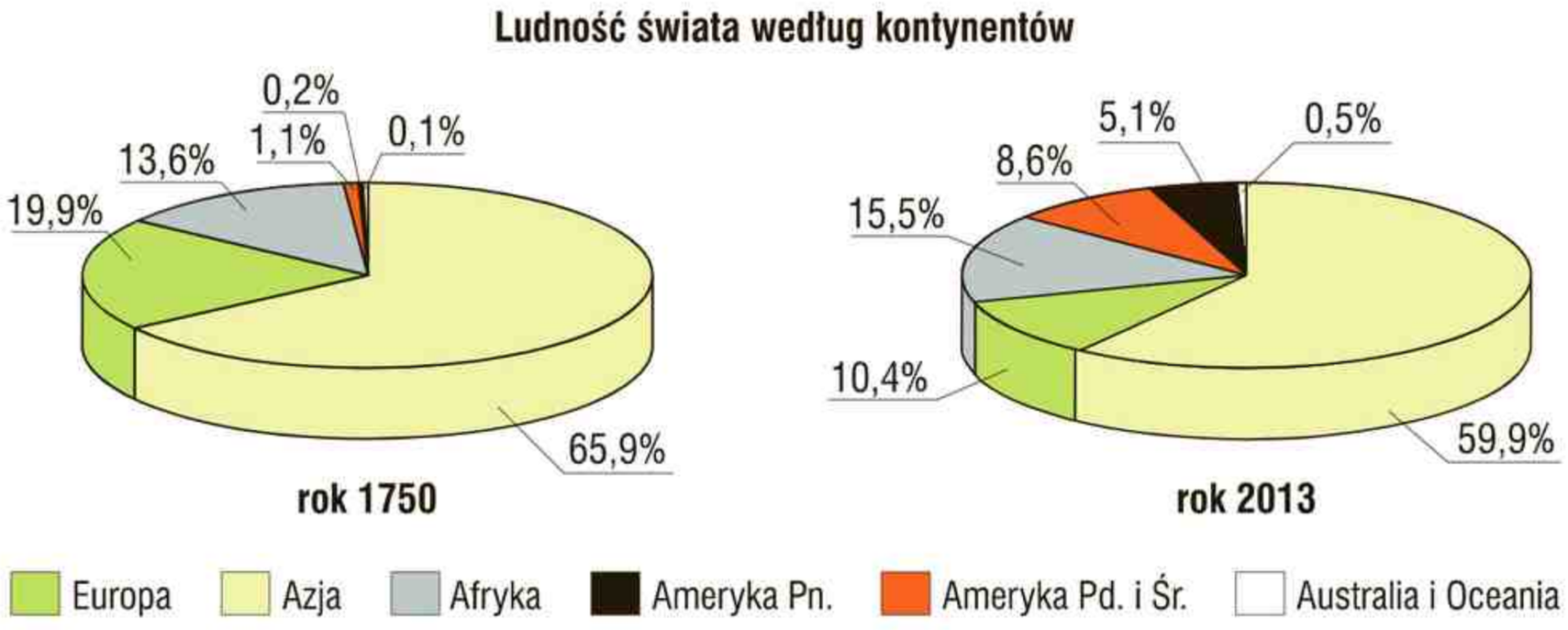
7. W 1750 roku żyło na świecie 733 mln ludzi, a w 2013 r. — 7162 mln ludzi. Na podstawie diagramów oblicz (wyniki podaj w zaokrągleniu):

a) Ile ludzi żyło w Azji w 1750 r., a ile w 2013 r.?

b) Czy w Europie żyło w 2013 r. więcej ludzi niż na całym świecie w roku 1750?

c) O ile procent zwiększyła się liczba ludności w Europie od 1750 r. do 2013 r.?

d) Ile razy w tym czasie zwiększyła się liczba ludności w Ameryce Pn.?



8. a) Nakład szkolnej gazetki zwiększono trzykrotnie. O ile procent zwiększono nakład gazetki?

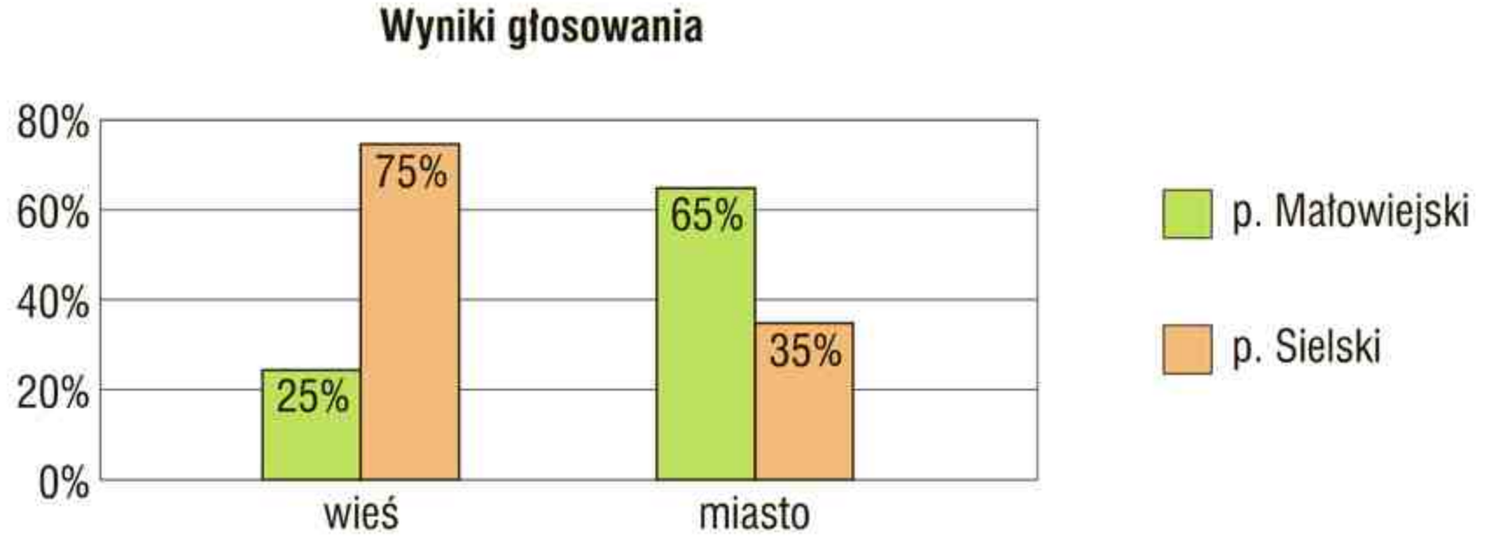
b) We wrześniu lodziarnia sprzedała 10 razy mniej lodów niż w sierpniu. O ile procent zmalała sprzedaż lodów we wrześniu w porównaniu z sierpniem?

c) Tomek w grudniu wysłał o 150% więcej sms-ów niż w listopadzie. Ile razy więcej sms-ów wysłał w grudniu?

d) W repertuarze pewnego kina jest o 40% mniej filmów polskich niż filmów zagranicznych. Jaki procent wszystkich filmów w repertuarze tego kina stanowią filmy polskie?

9. Paczka wafelków firmy Andrut kosztuje 2,10 zł. W paczce jest 12 wafelków, ale w ramach akcji promocyjnej firma Andrut proponuje po tej samej cenie paczkę zawierającą 15 wafelków. O ile procent tańszy jest teraz każdy wafelek?

10. W wyborach przewodniczącego pewnego stowarzyszenia startowało dwóch kandydatów: pan Małowiejski i pan Sielski. Poniższe diagramy przedstawiają wyniki głosowania na wsi i w miastach.

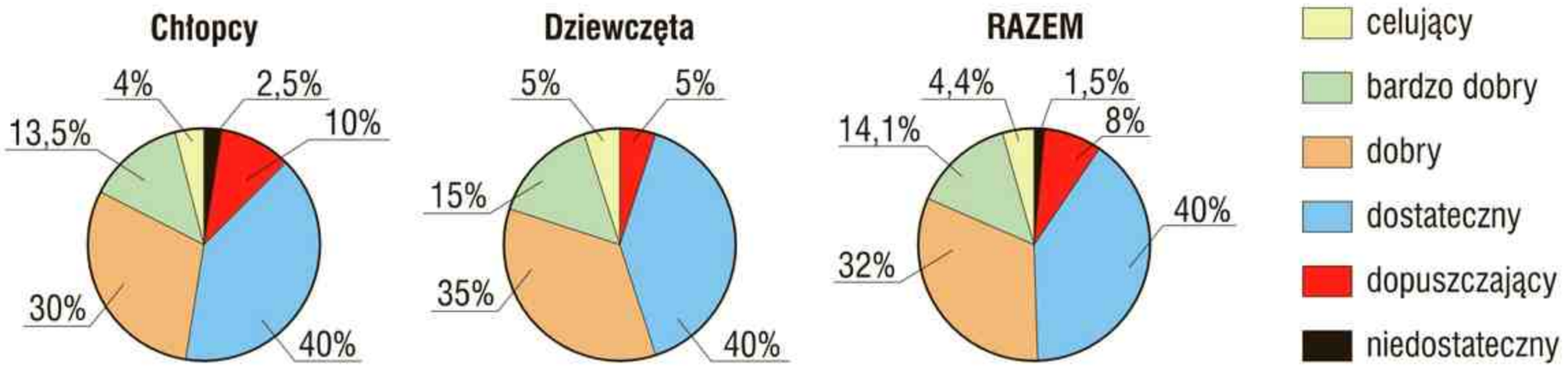


Spośród osób, które wzięły udział w wyborach, 30% mieszka na wsi, a 70% w mieście. Który z kandydatów otrzymał więcej głosów?

11. Dwaj sklepikarze, panowie A i B, kupują jabłka u tego samego hurtownika. W sklepie pana A cena detaliczna jest o 25% wyższa od hurtowej, a w sklepie pana B o 30% wyższa od hurtowej. Pan A sprzedał 160 kg jabłek, a pan B — 120 kg. Który z nich więcej zyskał na sprzedaży jabłek? O ile procent więcej?



***12.** Poniższe zestawienia dotyczą ocen na świadectwach uczniów pewnej szkoły. Wiadomo, że wszystkich ocen niedostatecznych było 15. Ile ocen celujących otrzymali chłopcy, a ile dziewczęta?



***13.** Po dziewięciu dniach podróży przez pustynię beduini zorientowali się, że wypili już 60% zapasów wody. Zostało im 48 bukłaków z wodą. O ile procent powinni zmniejszyć dzienne racje wody, jeśli ma jej wystarczyć na kolejne 8 dni?



***14.** W zeszłym tygodniu na szkolnej dyskotece było dokładnie tyle samo chłopców co dziewcząt. W tym tygodniu na dyskotece jest o 20% więcej osób niż tydzień temu, ale liczba dziewcząt stanowi tylko 45% liczby osób, które przyszły dzisiaj potańczyć. Czy w tym tygodniu na dyskotekę przyszło więcej czy mniej dziewcząt niż tydzień temu?

Sprawdź, czy umiesz

1. Pan Andrzej kupił akcje firmy Super i sprzedał je z dwudziestopięcioprocentowym zyskiem za 4800 zł. Kupił więc te akcje za:

A. 3840 zł B. 4000 zł C. 4600 zł D. 5760 zł

2. Jeżeli koń jest 10 razy cięższy od człowieka, to jest od niego cięższy:

A. o 100% B. o 1000% C. o 900% D. o 10%

zadania uzupełniające 42–52, str. 98

Przed klasówką

1. Jakimi liczbami należy zastąpić kwadraciki?

a) 36% z 50 litrów napoju to ■ litrów.

b) Kwota 90 zł to ■% kwoty 300 zł.

c) O 15% więcej od masy 5 kg to ■ kg.

d) Działka o 30% mniejsza od 500 m^2 ma powierzchnię ■ m^2.

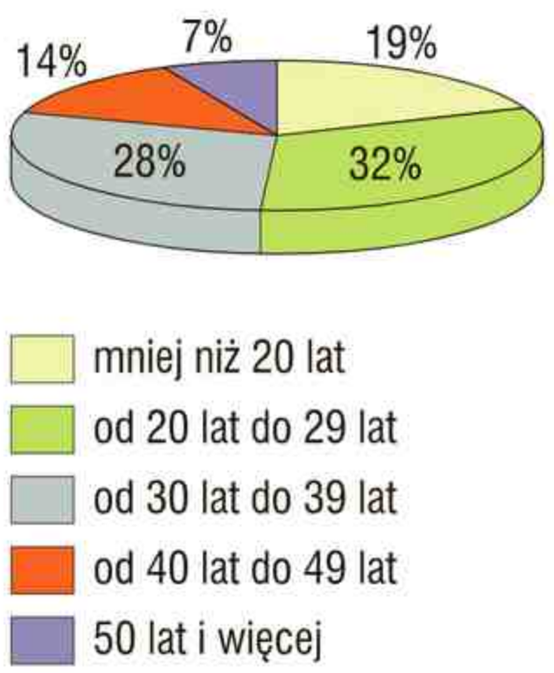
2. Na diagramie przedstawiono wiek uczestników maratonu. Czy poniższe zdania są prawdziwe czy fałszywe?

a) Czterdziestolatków i starszych było razem więcej niż zawodników w wieku do 20 lat. PRAWDA/FAŁSZ

b) Zawodników w wieku od 30 lat do 39 lat było 4 razy mniej niż tych, którzy mieli 50 lat lub więcej. PRAWDA/FAŁSZ

c) Nieco ponad połowę zawodników stanowili biegacze do 29 lat. PRAWDA/FAŁSZ

d) Nieco mniej niż $\frac{3}{4}$ zawodników było w wieku od 20 lat do 49 lat. PRAWDA/FAŁSZ



3. Cenę komputera obniżono o 20%. Czworo uczniów skomentowało tę obniżkę. Czy poszczególne zdania dobrze opisują zmianę ceny?

Ania: *Nowa cena komputera to $\frac{4}{5}$ starej ceny.* TAK/NIE

Bartek: *Stara cena komputera była o 20% większa od nowej.* TAK/NIE

Celina: *Nowa cena komputera wynosi 80% starej ceny.* TAK/NIE

Darek: *Stara cena komputera stanowiła 1,2 nowej ceny.* TAK/NIE

4. Czy 20% z $\frac{1}{3}$ tortu to więcej niż 25% z $\frac{1}{4}$ tortu? Wybierz odpowiedź „tak” lub „nie” oraz jej uzasadnienie spośród zdań od A do D.

Ⓘ Tak, ponieważ…

A — …25% to więcej niż 20%.

B — …$\frac{1}{3}$ to więcej niż $\frac{1}{4}$.

Ⓘⓘ Nie, ponieważ…

C — …$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$ to więcej niż $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$.

D — …$0{,}2 \cdot \frac{1}{3}$ to mniej niż $0{,}25 \cdot \frac{1}{4}$.

5. Wykład miał trwać 2 godziny zegarowe, ale przedłużył się o 15% planowanego czasu. Trwał więc:

A. 2 godziny 15 minut
B. 2 godziny 18 minut
C. 2 godziny 30 minut
D. 2 godziny 9 minut

Informacje do zadań 6–8:



6. Cenę rakiety tenisowej obniżono:

A. o 15% B. o 20% C. o 25% D. o 30%

7. Cena deskorolki po obniżce wynosi:

A. 95 zł B. 100 zł C. 102 zł D. 105 zł

8. Nowa cena rolek jest mniejsza od starej:

A. o 30% B. o około 20% C. o około 18% D. o 15%

Informacje do zadań 9 i 10:

W wesołym miasteczku głównymi atrakcjami są diabelski młyn i kolejka górska. W tabeli podano, ile biletów na te atrakcje kupiono pewnego dnia.

Atrakcja	Dzieci	Młodzież	Dorośli
Diabelski młyn	30	90	30
Kolejka górska	20	160	70

9. Ile procent biletów sprzedanych na obie atrakcje stanowiły bilety dla dzieci?

A. 15% B. 12,5% C. 7,5% D. 5%

10. Ile procent biletów na kolejkę górską kupili łącznie dorośli i młodzież?

A. 57,5% B. 92% C. 66% D. 87,5%

11. Ankieter pytał przechodniów, czy posiadają rower. Spośród zapytanych osób 36 odpowiedziało, że ma rower. Stanowili oni 30% ankietowanych. $\frac{3}{5}$ ankietowanych nie posiadało roweru, a pozostali odmówili udziału w ankiecie. Ile było takich osób?

12. Cena butów najpierw wzrosła o 10%, a następnie jeszcze o 5%. Uzasadnij, że gdyby podwyżek dokonano w odwrotnej kolejności (najpierw o 5%, potem o 10%), to końcowa cena byłaby taka sama.

Zadania uzupełniające

Procenty i ułamki

1. a) Zamień procenty na ułamki.

12% 4,5% 148% 0,2% 235%

b) Zamień ułamki na procenty.

0,2 0,0046 $\frac{4}{25}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{24}{5}$ $\frac{35}{8}$

2. a) Zamień promile na procenty.

20‰ 8‰ 0,3‰ 426‰ 5,2‰

b) Zamień procenty na promile.

20% 5% 0,4% 128% 0,007%

c) Zamień ułamki na promile.

0,007 0,0052 0,02 $\frac{63}{1000}$ $\frac{349}{100000}$

3. Spośród jabłek zebranych w sadzie 23% zakwalifikowano do gatunku I, 34% — do gatunku II, a pozostałe do gatunku III. Jaki procent zbioru jabłek stanowiły jabłka III gatunku?

4. Do trzech pojemników wsypano kaszę (zob. rysunek). Wyraź w procentach, jaką część każdego naczynia zajmuje kasza i jaka część naczynia jest pusta.



5. Liczniki ułamków zostały zamalowane. Jakie to mogły być liczby?

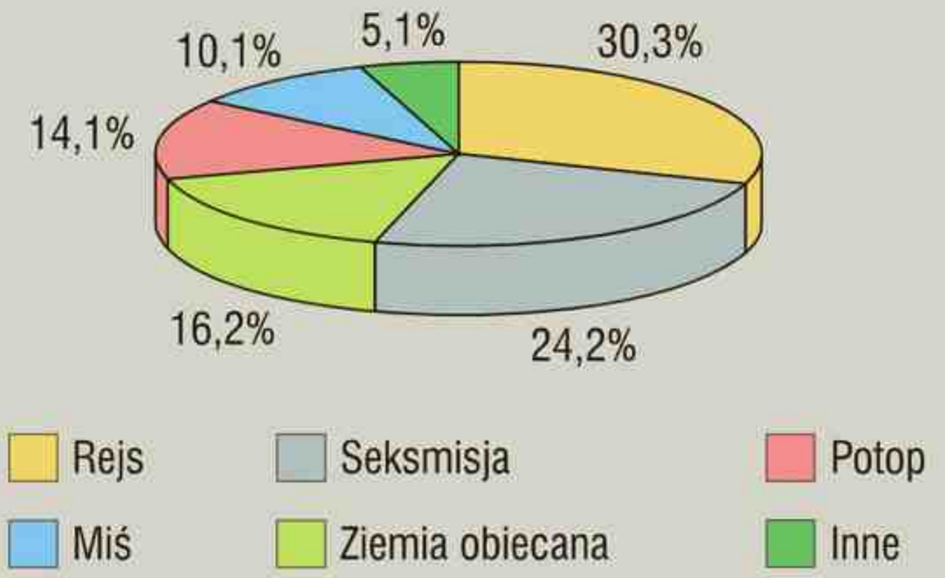
a) $\frac{\square}{30}$ to więcej niż 25%, ale mniej niż 100%.

b) $\frac{\square}{13}$ to więcej niż 100%, ale mniej niż 150%.

c) $\frac{\square}{70}$ to więcej niż 10%, ale mniej niż 50%.

Diagramy procentowe

6. Właściciel kina Tulipan przeprowadził wśród widzów ankietę na temat ulubionych filmów polskich. Wyniki, które otrzymał, przedstawia poniższy diagram.



Odczytaj kilka informacji z tego diagramu.

7. Odczytaj kilka informacji z poniższego diagramu.



Jaki to procent?

Tuzin to 12, mendel to 15, kopa to 60.

8. a) Tuzin — jaki to procent kopy, jaki to procent mendla?

b) Mendel — jaki to procent kopy, a jaki to procent tuzina?

9. a) 1 zł — ile to promili kwoty 2000 zł?

b) 5 ml — jaki to promil objętości 4 l?

10. Jaki procent spośród siedmiu dziewcząt z Albatrosa stanowi Jedyna?

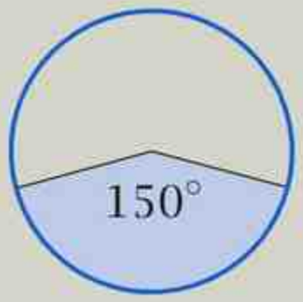


11. Jaki procent kąta pełnego stanowi zaznaczony kąt?

a)



b)



12. Ilu z poniższych słów nie rozumiesz? Jaki to procent podanych słów?

laik monstrualny szczodry biografia sztalugi synonim karykatura erudyta imigrant adwokat akapit ewakuacja absolwent durszlak imadło lakoniczny strzemię reflektor blefować sponsor

13. Z badań statystycznych tekstów napisanych po polsku wynika, że najczęściej używaną literą jest litera „a". Przeciętnie stanowi ona ok. 11% wszystkich użytych liter. Do zapisania tego zadania użyto 199 liter. Jaki procent tych liter stanowi litera „a"?

14. Jaki procent wszystkich liczb dwucyfrowych stanowią liczby dwucyfrowe mniejsze od 50?

15. Na filmie „Wesoły łoś" było w kinie 36 dorosłych i 44 dzieci. Jaki procent widzów stanowili dorośli, a jaki dzieci?

16. Nauczycielka wystawia oceny ze sprawdzianów według następujących reguł:

Procent maksymalnej punktacji	Ocena
powyżej 95%	celujący
pow. 85% do 95%	bardzo dobry
pow. 75% do 85%	dobry
pow. 55% do 75%	dostateczny
pow. 40% do 55%	dopuszczający
40% i mniej	niedostateczny

Na sprawdzianie można było zdobyć maksymalnie 30 punktów. Kasia zdobyła 27 pkt, Arek — 11,5 pkt, Tomek — 19 pkt, Asia — 25 pkt, Iwona — 13 pkt, a Karol — 23,5 pkt. Jakie oceny otrzymali?

17. W Warszawie mieszka 1,7 mln ludzi, a w całej Polsce 38,5 mln. W Japonii mieszka 126,6 mln ludzi, z czego w Tokio 13,5 mln. Jaki procent Japończyków mieszka w stolicy? Jaki procent Polaków mieszka w stolicy?



Obliczanie procentu danej liczby

18. Oblicz:

a) 40% ze 150 zł
b) 130% z 13 kg
c) 8,1% z 22 m
d) 4‰ z 32 km
e) 6,2‰ z 200 g
f) 0,06‰ z 8000 t

19. Oblicz w pamięci podany procent liczb zapisanych obok.

a)	5%	10	20	5	160
b)	2%	15	300	110	2400
c)	40%	50	60	40	150
d)	120%	20	300	80	250
e)	0,5%	700	90	440	82

20. Oszacuj, która z podanych wielkości jest większa:

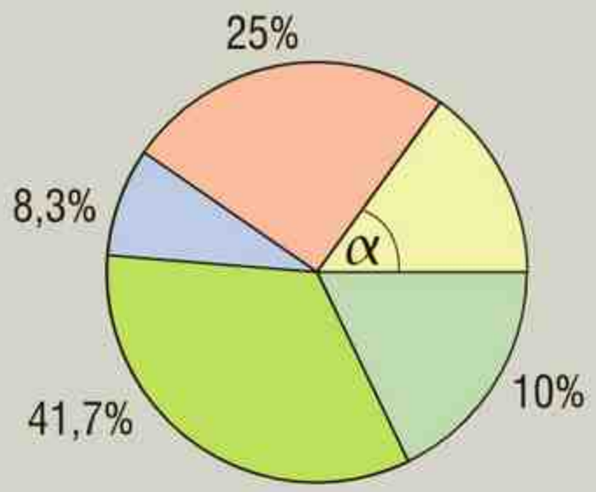
a) 60 zł czy 11% kwoty 600 zł,

b) 5,70 zł czy 10,5% kwoty 57 zł,

c) 40 $ czy 19,8% kwoty 200 $,

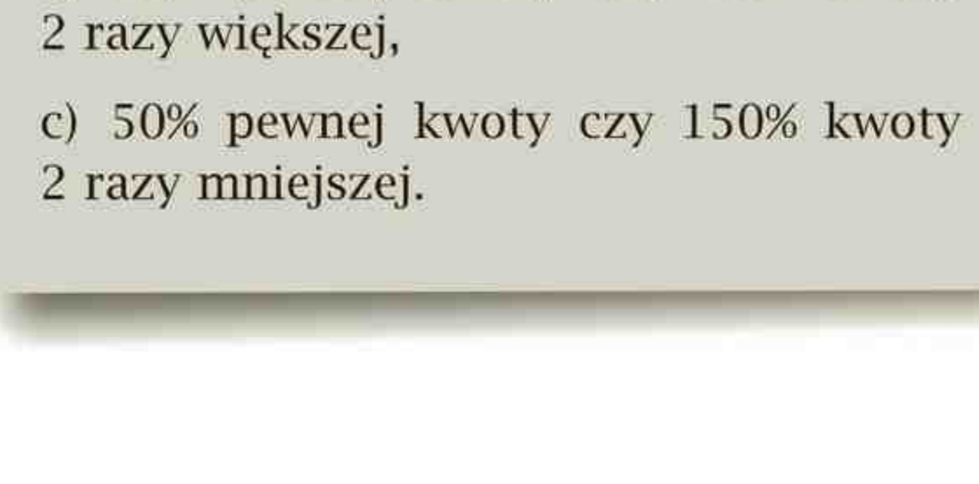
d) 5500 € czy 109% kwoty 5000 €.

21. Jaką miarę ma zaznaczony kąt α?



22. W pewnej szkole liczącej 520 uczniów 30% uczniów nigdy nie otrzymało oceny niedostatecznej. Ilu uczniów tej szkoły otrzymało co najmniej jedną ocenę niedostateczną?

23. W pudełku było 25 czekoladek. Antek zjadł 40% tych czekoladek, a jego siostra Agnieszka — 40% pozostałych. Oblicz, ile czekoladek zostawili w pudełku.



24. Ustal, która liczba jest większa:

a) 20% pewnej kwoty czy 3% kwoty 10 razy większej,

b) 25% pewnej kwoty czy 15% kwoty 2 razy większej,

c) 50% pewnej kwoty czy 150% kwoty 2 razy mniejszej.

Podwyżki i obniżki

25. Dzięki sponsorom liczba książek w pewnej bibliotece wzrosła w tym roku o 25% w porównaniu z rokiem ubiegłym. Pod koniec zeszłego roku były w tej bibliotece 4764 woluminy. Ile książek zakupiono dzięki sponsorom?

26. W 2015 roku w salonie Twoje Auto sprzedano 125 samochodów. W następnym roku liczba sprzedanych samochodów była o 12,8% mniejsza. Ile aut sprzedano w Twoim Aucie przez te dwa lata?

27. Która obniżka jest większa: najpierw o 20%, a potem o 25%, czy od razu o 45%?

28. Za 2 kg cukierków czekoladowych zapłacono o 25% więcej niż za 3 kg cukierków o smaku owocowym. Jeden kilogram cukierków owocowych kosztuje 10,40 zł. Ile kosztuje 1 kg cukierków czekoladowych?

Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent

29. Podaj (obliczając w pamięci) liczbę, której:

a) 10% jest równe 24,

b) 50% jest równe 12,5,

c) 20% jest równe 11,

d) 25% jest równe 9,

e) 200% jest równe 300,

f) 150% jest równe 30.

30. Znajdź liczbę, której:

a) 3% wynosi 120,

b) 23% wynosi 4,6,

c) 250% wynosi 12,

d) 105% wynosi 21,

e) 20% wynosi 400,

f) 35% wynosi 70,

g) 13% wynosi 52,

h) 220% wynosi 44,

i) 71% wynosi 7,1,

j) 17% wynosi 51.

31. W portmonetce po zakupach zostało 45 zł, co stanowi 15% sumy, jaka w niej była przed zakupami. Ile pieniędzy było w portmonetce przed zakupami?

32. Dorośli stanowili 70% osób jadących autobusem. Oprócz nich było jeszcze 12 dzieci. Ile osób jechało autobusem?

33. Po podwyżce o 20% cen biletów autobusowych za przejazd linią S trzeba było zapłacić 4,20 zł. Ile kosztował taki przejazd przed podwyżką?

34. Przedstawienie operowe rozpoczęło się o godzinie 19^{00}. Z powodu licznych przerw na oklaski przedłużyło się o 24 minuty. Obecny na widowni wielbiciel matematyki obliczył szybko, że przedstawienie trwało o 15% dłużej w porównaniu z czasem podanym w programie. O której godzinie się skończyło?

35. Pani Alina kupowała wieczorem na targu dwa koszyczki malin. Sprzedawczyni z powodu późnej pory obniżyła cenę malin o 10%. Pani Alina zapłaciła 19 zł 80 gr. Ile przedtem kosztował koszyczek malin?

36. W królestwie Krasnolandii 8% mieszkańców ubiera się na żółto, 9% na czerwono, 10% na zielono, 11% na niebiesko, a 60% na szaro. Jedynie czteroosobowa rodzina królewska oraz jej pięćdziesięcioosobowa świta może ubierać się wielobarwnie. Jaka jest liczba mieszkańców tego królestwa?



O ile procent więcej, o ile mniej. Punkty procentowe

37. a) Za jedną akcję firmy Kex trzeba było wczoraj zapłacić 52,50 zł, a dzisiaj o 4,20 zł więcej. O ile procent podrożały akcje tej firmy?

b) Za jedną akcję firmy Bax trzeba było wczoraj zapłacić 30 zł, a dzisiaj kosztują 28,50 zł. O ile procent staniały akcje tej firmy?

38. W klasie VII a jest 24 uczniów, a w klasie VII b o 25% więcej. O ile procent mniej uczniów jest w klasie VII a niż w VII b?

39. Cena jednego kilograma jabłek na targu wynosi 2,4 zł. Te same jabłka w sklepie kosztują 3 zł.

a) O ile procent cena jabłek w sklepie jest wyższa od ich ceny na targu?

b) O ile procent tańsze są jabłka na targu niż w sklepie?

40. Diagram przedstawia, jak zmieniało się poparcie dla partii $\mathcal{P}$ w czasie kampanii wyborczej w kolejnych miesiącach. O ile punktów procentowych wzrosło poparcie dla partii $\mathcal{P}$ we wrześniu w porównaniu z majem? Zakładając, że liczba ankietowanych w każdym miesiącu była jednakowa, oblicz, o ile procent więcej ankietowanych popierało partię $\mathcal{P}$ we wrześniu niż w maju.



41. Cenę pewnego towaru podwyższono z 450 zł na 540 zł, a po sezonie obniżono o taki sam procent. O ile procent cena tego towaru po sezonie była niższa od ceny początkowej?

Obliczenia procentowe

42. W galerii handlowej rozpoczęto posezonową wyprzedaż artykułów.

a) Torebka kosztowała 140 zł. Jaka jest cena torebki po obniżce o 35%?

b) Mikser po obniżce o 15% kosztuje 170 zł. Jaka była cena miksera przed obniżką?

c) Telewizor, który kosztował 2000 zł, kosztuje teraz 1740 zł. O ile procent obniżono jego cenę?

43. W restauracji Łakomy Kąsek do rachunku doliczany jest siedmioprocentowy napiwek. Do rachunku państwa Kucharskich doliczono 6,65 zł napiwku. Ile złotych zapłacili państwo Kucharscy za obiad w restauracji Łakomy Kąsek?

44. W tłusty czwartek piekarz Edek upiekł 2000 pączków. 30% sprzedała cukiernia Bajaderka, a resztę cukiernia Szarlotka. O ile procent więcej pączków sprzedano w Szarlotce?

45. W 2014 r. było na świecie 7266 mln ludzi, a w 2015 r. liczba ludzi na świecie wynosiła 7,349 mld. Podaj w promilach, jaki był w tym okresie przyrost naturalny na świecie.

46. Koń pociągowy waży około 700 kg. Taki koń jest średnio o 13% lżejszy od łosia, a o 40% cięższy od niedźwiedzia brunatnego. Oblicz, ile waży łoś, a ile niedźwiedź brunatny.

47. Piotr ma 153 cm wzrostu i jest niższy od Marcina o 15%. Gdy stanął na słupku, okazało się, że był od Marcina o 15% wyższy. Jaką wysokość miał słupek, na którym stanął Piotr?

48. Spodnie są o 60% droższe od kamizelki, a o 20% tańsze od marynarki. Marynarka kosztuje 200 zł. Ile kosztuje kamizelka?

49. 50% uczniów pewnej klasy nie wie, że 50% to pół, 50% tej połowy klasy nie wie nawet, że 100% to jeden, a 50% z nich, czyli 4 uczniów, nawet nie słyszało słowa „procent". Ilu uczniów liczy ta klasa?

50. W jednym plasterku cytryny jest ok. 2,4 mg witaminy C. Jagody zawierają 0,2% witaminy C, a przeciętna jagoda waży 0,4 g. Ile sztuk jagód zawiera tyle witaminy C co plasterek cytryny?

51. W pewnej szkole podstawowej są trzy klasy siódme. W klasie VII b, liczącej 30 uczniów, jest o 20% więcej uczniów niż w VII a, a w klasie VII c jest o 10% mniej uczniów niż w klasie VII b.

a) Ilu uczniów jest w klasie VII a?

b) Ilu uczniów jest w klasie VII c?

c) O ile procent więcej uczniów jest w klasie VII c niż w klasie VII a?

d) Jaki procent wszystkich uczniów klas siódmych stanowią uczniowie klasy VII b (odpowiedź podaj w zaokrągleniu)?

52. Hrabia Marnotrawny przegrał w ciągu miesiąca 50% fortuny odziedziczonej po wuju. W następnym miesiącu przegrał 75% tego, co zostało. Choć wygrał później 250 tys. dukatów, to został mu tylko milion. Ile dukatów warta była odziedziczona fortuna?



III FIGURY GEOMETRYCZNE

1 Proste i odcinki

2 Kąty

3 Trójkąty

4 Przystawanie trójkątów

5 Czworokąty

6 Wielokąty foremne

7 Pole prostokąta. Jednostki pola

8 Pola wielokątów

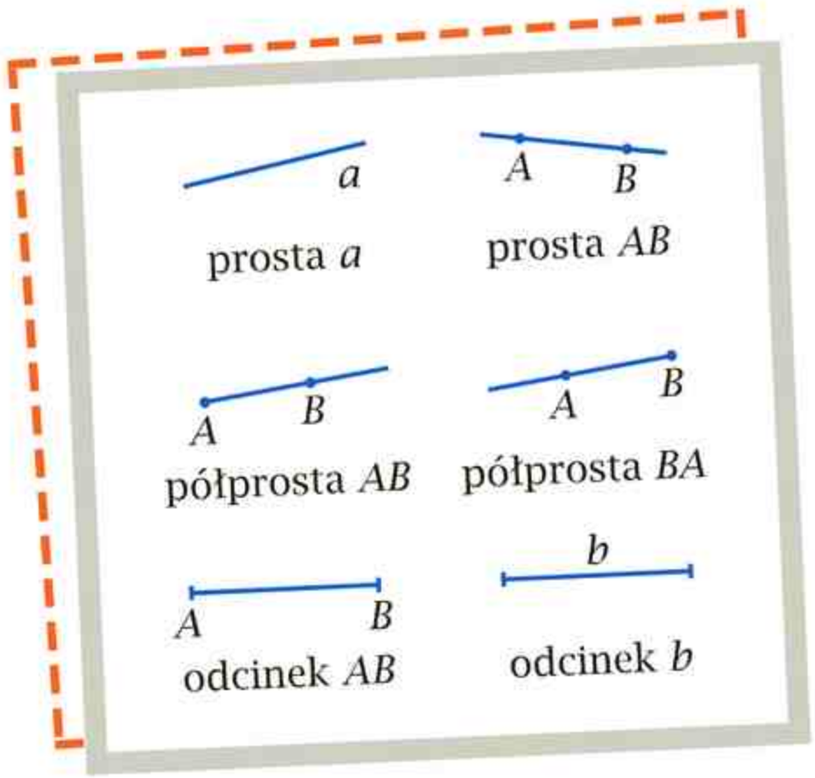
9 Układ współrzędnych

Przed klasówką, s. 146

Zadania uzupełniające, s. 148

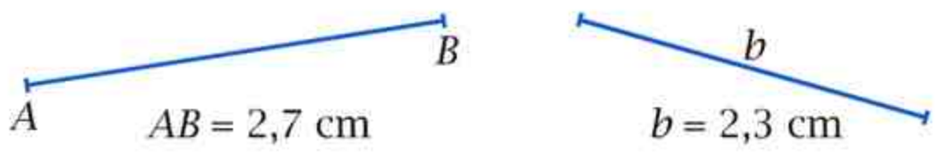
1 Proste i odcinki

W tym i w następnych rozdziałach przypomnimy i uporządkujemy podstawowe wiadomości o figurach geometrycznych na płaszczyźnie.



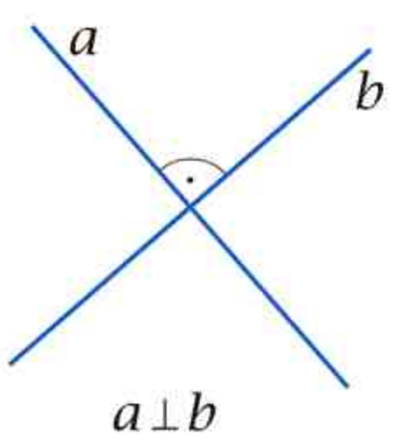
W ramce obok przedstawiono, jak można oznaczać proste, półproste i odcinki.

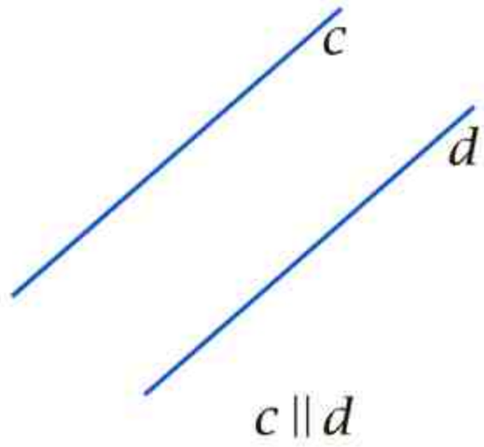
Uwaga. Odcinki możemy oznaczać za pomocą dwóch wielkich liter, np. AB, CD, KL, lub jednej małej litery: a, b, m itd. Przyjmujemy, że takie zapisy oznaczają zarówno odcinki, jak i ich długości.



Dwie proste leżące na płaszczyźnie mogą się przecinać lub mogą nie mieć punktów wspólnych.

O dwóch prostych, które przecinają się pod kątem prostym, mówimy, że są prostopadłe. O dwóch prostych, które nie mają punktów wspólnych, mówimy, że są równoległe.



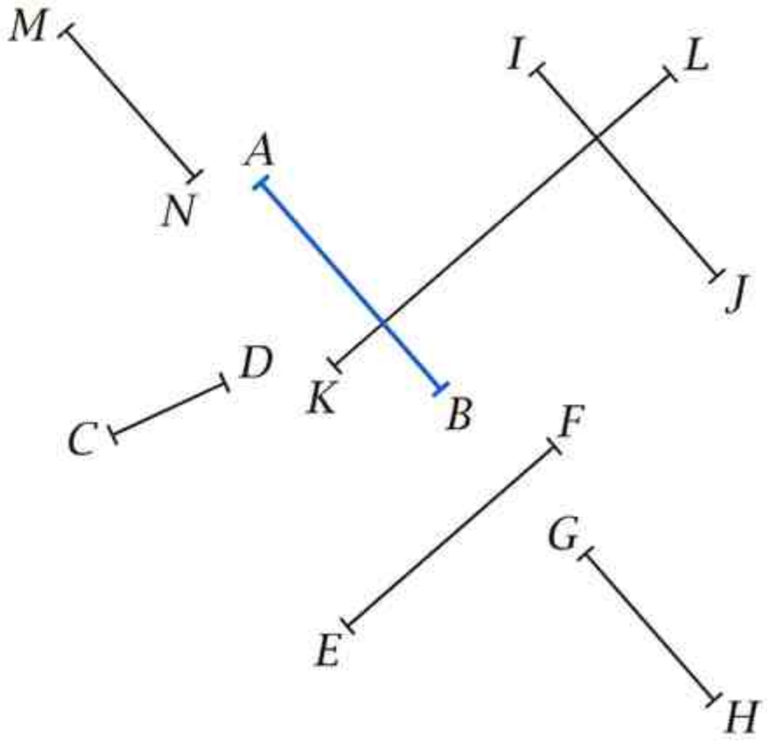


Przyjmujemy również, że prosta jest równoległa sama do siebie.

Mówimy, że dwa odcinki są prostopadłe, gdy leżą na prostych prostopadłych.

Dwa odcinki są równoległe, gdy leżą na prostych równoległych lub leżą na jednej prostej.

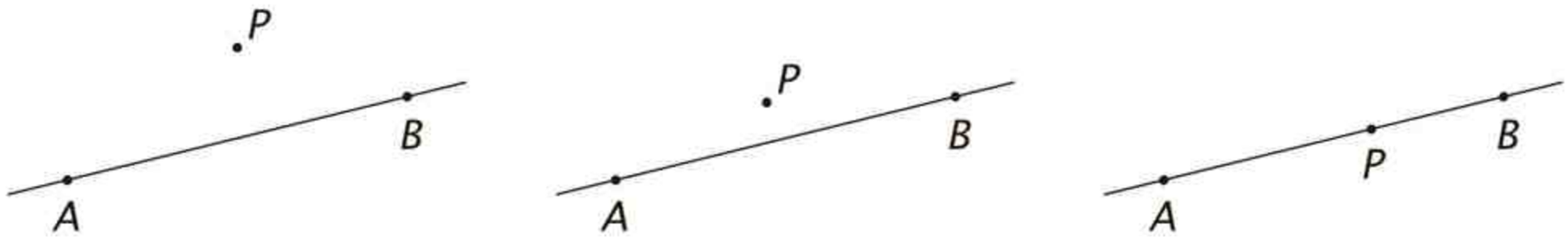
Uwaga. Przyjmujemy także, że odcinek jest równoległy sam do siebie.



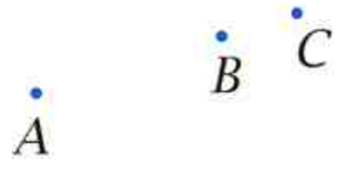
ĆWICZENIE A. Które z narysowanych odcinków są prostopadłe do odcinka AB? Które z narysowanych odcinków są równoległe do odcinka AB?

Wiadomo, że przez dwa punkty można poprowadzić prostą. Wiadomo również, że trzy punkty mogą leżeć na jednej prostej lub nie być współliniowe.

ĆWICZENIE B. Na którym rysunku odległość między punktami A i B jest równa sumie odległości $AP + PB$?



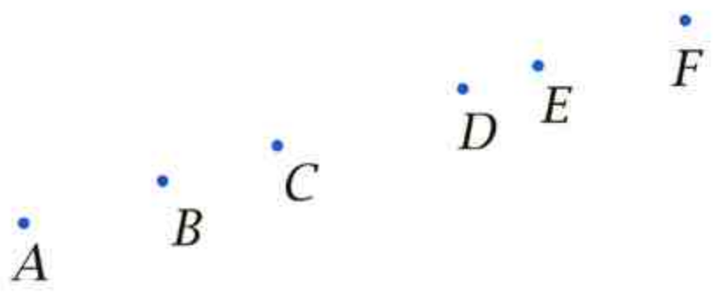
O tym, czy trzy punkty A, B, C są współliniowe, możemy zdecydować, odpowiednio porównując odległości między nimi. Jeżeli suma dwóch odcinków wyznaczonych przez te punkty jest równa trzeciemu odcinkowi, to punkty leżą na jednej prostej.



Jeśli $AB + BC = AC$, to punkty A, B i C są współliniowe.

Zadania

1. Prosta AB jest prostopadła do prostej BC, a prosta AC jest prostopadła do prostej CD. Czy z tego wynika, że prosta CD jest równoległa do prostej AB?



2. Zaznaczone punkty A, B, C, D, E i F są współliniowe (tzn. leżą na jednej prostej). Odpowiedz, które z tych punktów należą do półprostej BC, które do półprostej CB, a które do półprostej CD.

3. Narysuj dwie półproste tak, aby ich wspólna część była:

a) punktem, b) odcinkiem, c) półprostą.

3/148

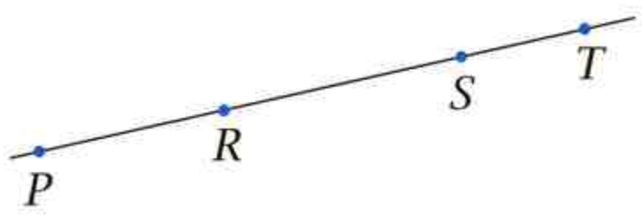
4. Ania narysowała prostą a, potem prostopadłą do niej prostą b, następnie prostą c prostopadłą do prostej b itd. W ten sposób narysowała jedenaście prostych: $a, b, c, \ldots, j, k$.

a) Czy prosta b jest prostopadła do prostej k?

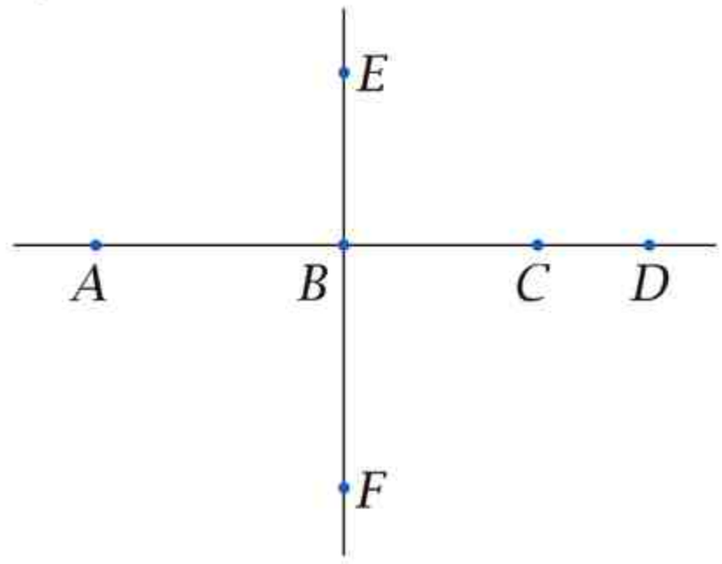
b) Czy prosta e jest równoległa do prostej j?

c) Ile prostych prostopadłych do prostej g narysowała Ania?

2/148



5. Na rysunku obok można znaleźć 6 odcinków równoległych do odcinka PS. Wypisz te odcinki. (Pamiętaj, że odcinek PS jest równoległy sam do siebie).



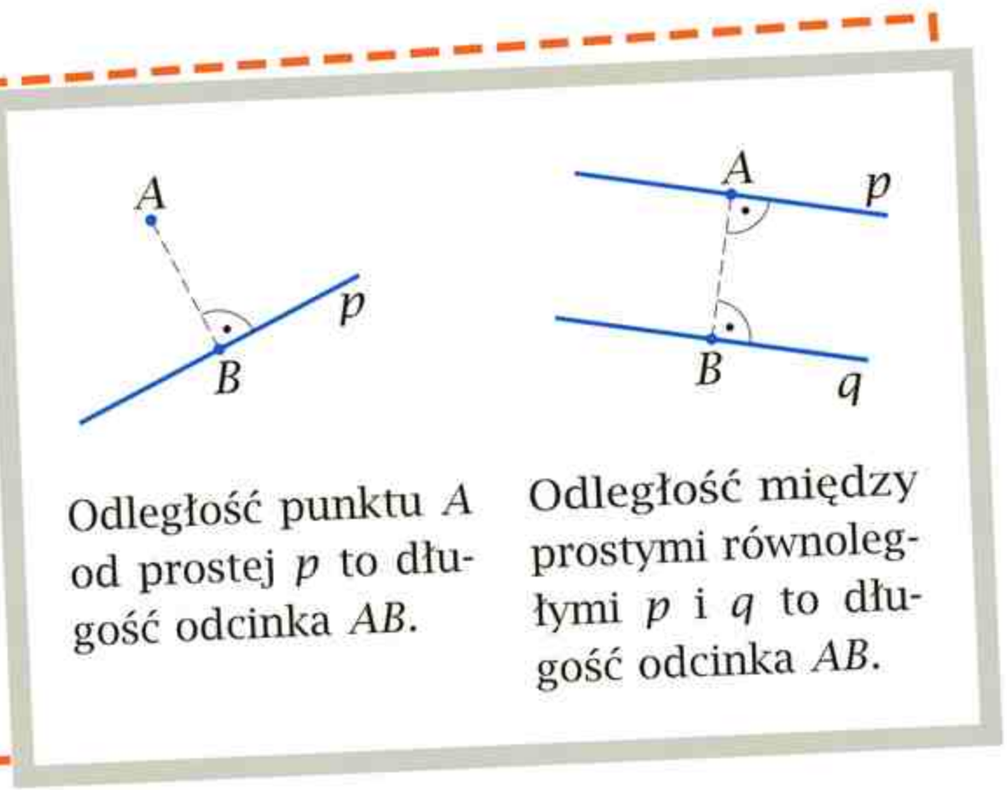
6. Na rysunku obok można znaleźć wiele par odcinków prostopadłych. Wypisz co najmniej 5 takich par. Podaj trzy pary odcinków prostopadłych, które nie mają punktów wspólnych.

7. Czy punkty P, R, S leżą na jednej prostej? Jeśli są współliniowe, to który z punktów leży pomiędzy pozostałymi punktami?

a) $PR = 8$, $PS = 2$, $RS = 10$
b) $RS = 9$, $PR = 6$, $PS = 5$
c) $PS = 13$, $PR = 6$, $RS = 7$
d) $RS = 16$, $PS = 8$, $RP = 8$

8. Punkt K leży na prostej LM. Ustal, jaka może być odległość między punktami K i M, jeśli wiadomo, że:

a) $LM = 3$, $LK = 5$,
b) $LM = 10$, $LK = 3$,
c) $LM = 1$, $LK = 100$.

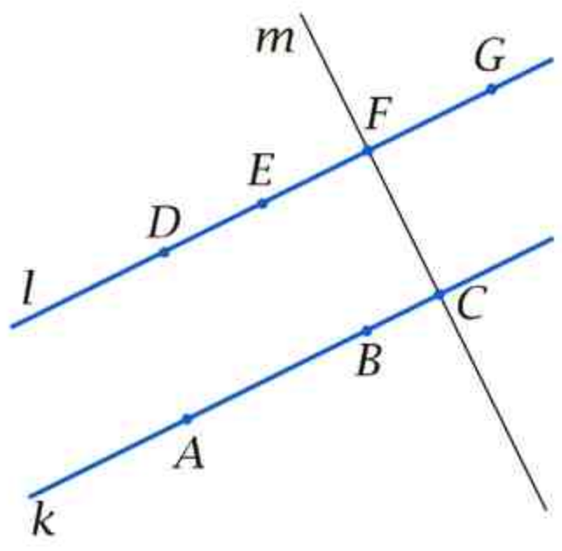


9. Odległość między punktami A i B wynosi 4 cm. Punkt A jest odległy od prostej k o 6 cm. Jaka może być najmniejsza, a jaka największa odległość punktu B od prostej k?

10. Proste l, m i n są równoległe. Odległość prostej l od prostej m wynosi 3 cm, a od prostej n wynosi 5 cm. Jaka może być odległość między prostymi m i n?

11. Proste k i l są prostopadłe do prostej m. Na rysunku obok wskaż odcinek, którego długość jest równa odległości:

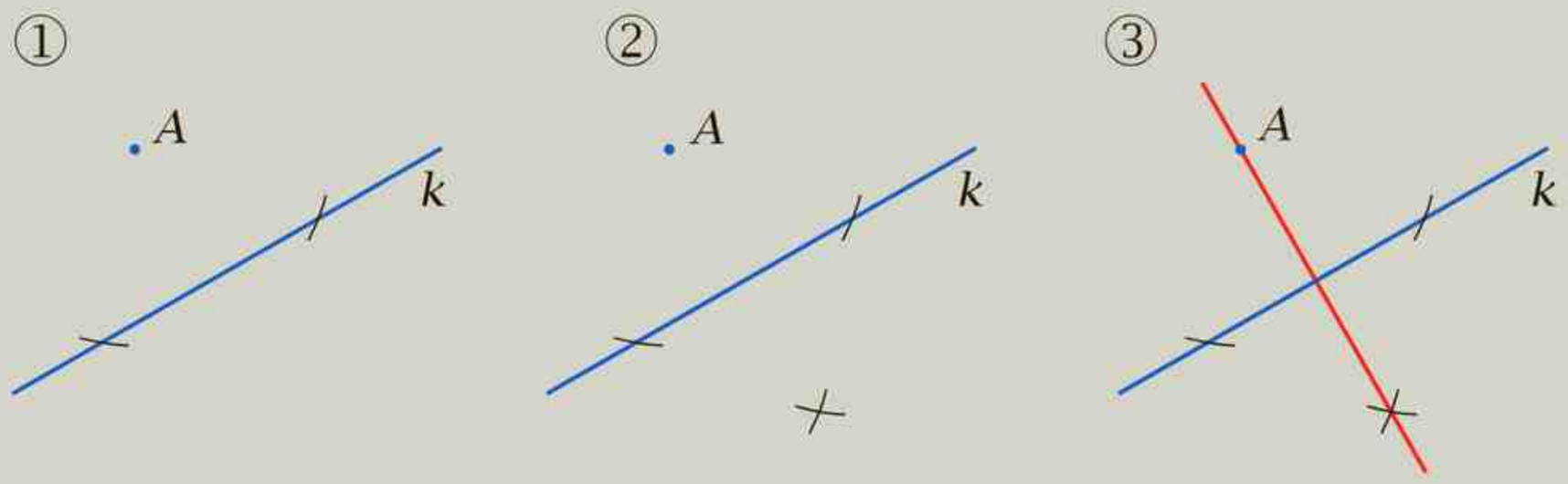
a) między prostymi k i l,
b) punktu A od prostej m,
c) punktu D od prostej k,
d) punktu B od prostej l,
e) punktu G od prostej m.



Ciekawostka

Umiesz już rysować proste prostopadłe i proste równoległe za pomocą ekierki i linijki. Takie konstrukcje można też wykonywać, posługując się wyłącznie cyrklem i linijką. Poniżej pokazujemy, w jaki sposób to zrobić.

Konstrukcja prostej przechodzącej przez dany punkt *A*, prostopadłej do danej prostej *k*

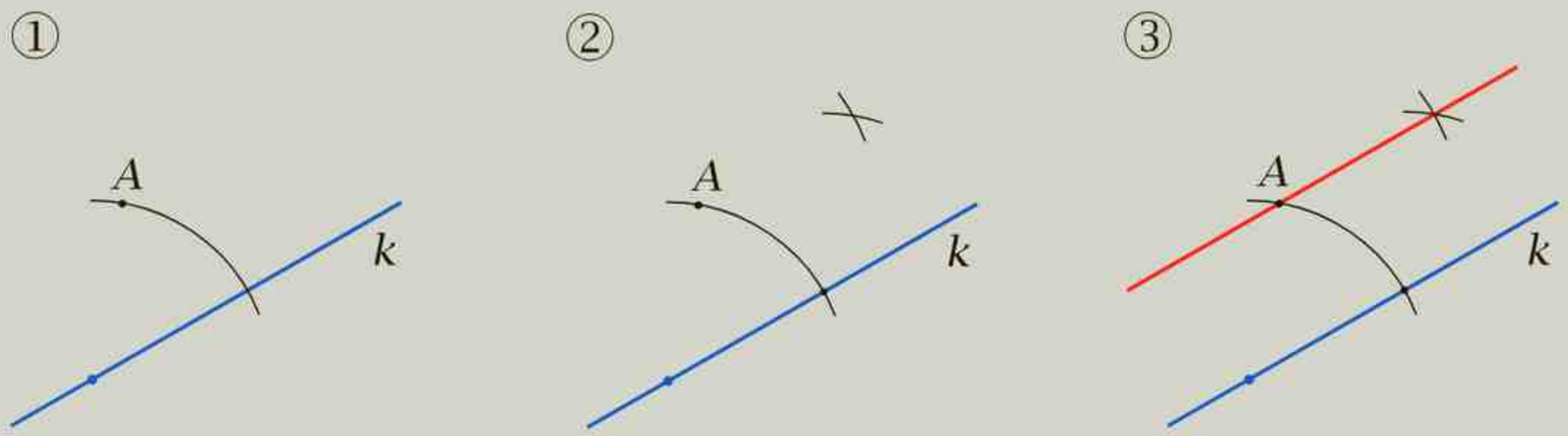


① Z punktu *A* kreślimy łuki o tym samym promieniu, przecinające prostą *k* w dwóch punktach.

② Z końców otrzymanego odcinka kreślimy przecinające się łuki o jednakowych promieniach.

③ Przez punkt przecięcia łuków oraz punkt *A* prowadzimy prostą.

Konstrukcja prostej przechodzącej przez punkt *A*, równoległej do danej prostej *k*



① Z dowolnego punktu na prostej *k* kreślimy łuk przechodzący przez punkt *A* i przecinający prostą *k*.

② Z otrzymanego punktu przecięcia łuku z prostą oraz z punktu *A* kreślimy, nie zmieniając rozwartości cyrkla, dwa przecinające się łuki.

③ Przez punkt *A* i punkt przecięcia łuków prowadzimy prostą.

12. Przeczytaj ciekawostkę na poprzedniej stronie.

a) Narysuj prostą i zaznacz dowolny punkt nieleżący na tej prostej. Skonstruuj prostą prostopadłą do narysowanej przez ciebie prostej, przechodzącą przez zaznaczony punkt.

b) Narysuj prostą i zaznacz na niej dowolny punkt. Skonstruuj prostą przechodzącą przez ten punkt i prostopadłą do narysowanej prostej.

c) Narysuj prostą i zaznacz punkt nieleżący na tej prostej. Skonstruuj prostą równoległą do narysowanej przez ciebie prostej i przechodzącą przez zaznaczony punkt.

d) Narysuj dowolny odcinek. Oznacz jego końce literami A i B. Skonstruuj dwie proste równoległe tak, aby były odległe od siebie o AB.

e) Narysuj dwie przecinające się proste, które nie są prostopadłe. Na każdej z nich wybierz po jednym punkcie i oznacz te punkty literami A i B. Skonstruuj taki odcinek CD, że punkty C i D leżą na narysowanych prostych oraz $AB \parallel CD$.

Sprawdź, czy umiesz

1. Dwa odcinki, które leżą na jednej prostej:

A. na pewno się przecinają,
B. na pewno mają punkt wspólny,
C. są równoległe,
D. są prostopadłe.

2. Narysowano trzy proste tak, że każda z nich jest prostopadła do jednej z pozostałych. W takim razie:

A. wszystkie proste przecinają się w jednym punkcie,
B. dwie z tych prostych są równoległe,
C. proste te przecinają się w trzech punktach,
D. dowolne dwie z tych prostych mają wspólny punkt.

3. Punkty K, L, M i N są współliniowe, punkt L leży pomiędzy punktami K i M, a punkt M leży pomiędzy punktami L i N. Która z równości jest fałszywa?

A. $KL + LM = KM$
B. $NM + KM = NK$
C. $MK + ML = KL$
D. $MN + LM = LN$

zadania uzupełniające 1–3, str. 148

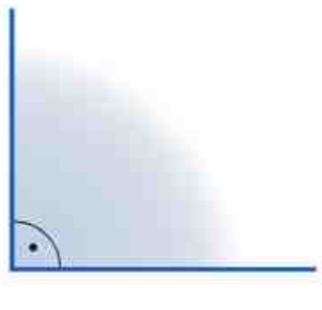
2 Kąty

Dwie półproste o wspólnym początku dzielą płaszczyznę na dwie części. Każda z tych części wraz z półprostymi to figura geometryczna, którą nazywamy kątem.



Półproste tworzące kąt nazywamy ramionami kąta, a ich wspólny punkt — wierzchołkiem kąta.

Rozróżniamy następujące rodzaje kątów:

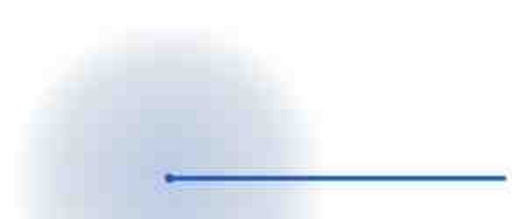


Kąt prosty

Ma miarę 90°.

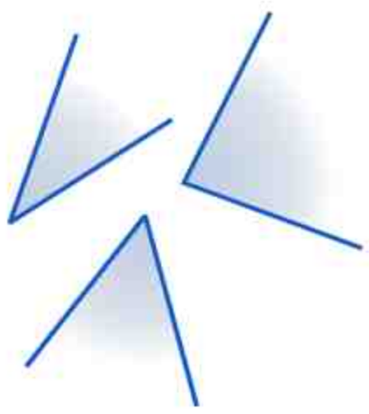
Kąt półpełny

Ma miarę 180°.



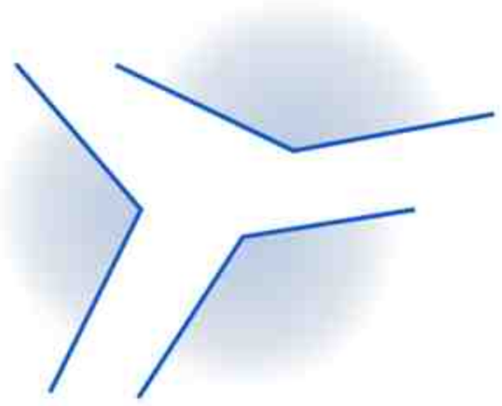
Kąt pełny

Ma miarę 360°.



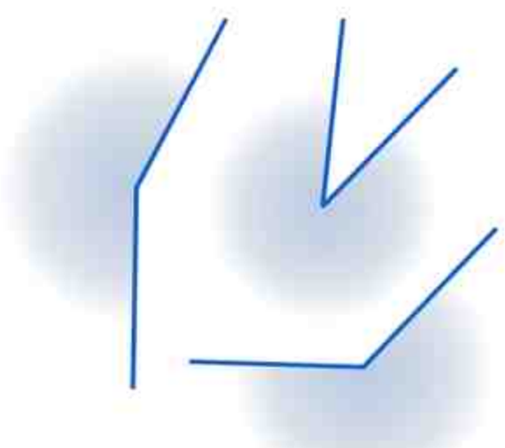
Kąty ostre

Mają mniej niż 90°.



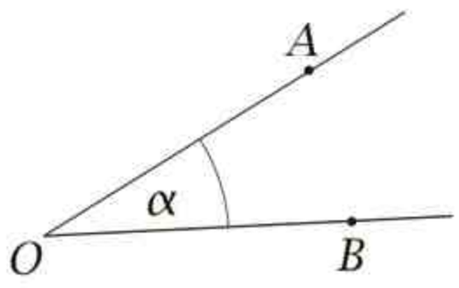
Kąty rozwarte

Mają więcej niż 90° i mniej niż 180°.



Kąty wklęsłe

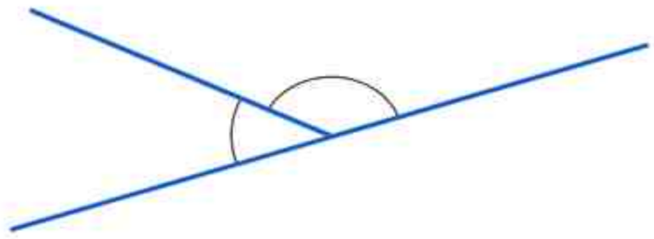
Mają więcej niż 180° i mniej niż 360°.



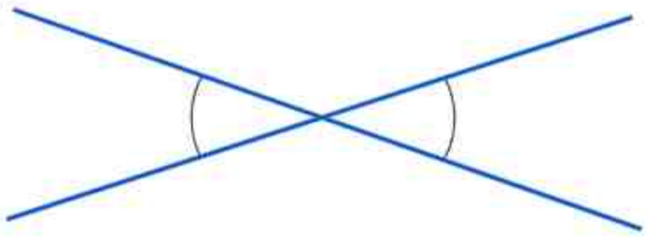
Uwaga. Kąty najczęściej oznaczamy małymi literami alfabetu greckiego: α — alfa, β — beta, γ — gamma, δ — delta.

Kąty możemy też oznaczać w inny sposób. Na przykład kąt α na rysunku obok można oznaczyć symbolem $\sphericalangle BOA$. Przyjmujemy, że taki zapis, podobnie jak zapis α, oznacza zarówno kąt, jak i jego miarę.

Kąty zaznaczone na rysunku obok mają wspólne ramię i tworzą razem kąt półpełny. Takie kąty nazywamy kątami przyległymi.



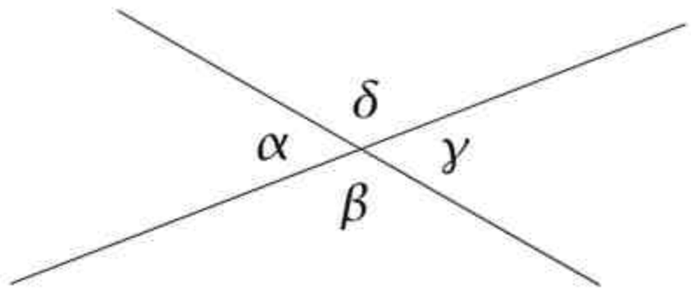
Kąty przyległe
Suma ich miar wynosi 180°.

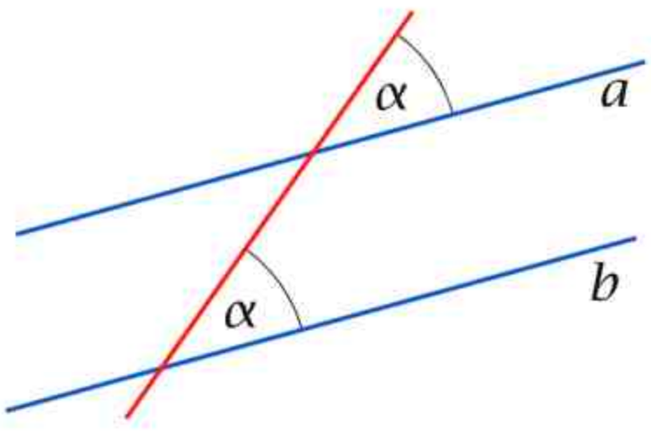


Kąty wierzchołkowe
Kąty te mają równe miary.

Kąty zaznaczone na kolejnym rysunku mają wspólny jedynie wierzchołek, a ich ramiona leżą na przecinających się prostych. Takie kąty nazywamy kątami wierzchołkowymi.

ĆWICZENIE A. Znajdź na rysunku cztery pary kątów przyległych oraz dwie pary kątów wierzchołkowych.

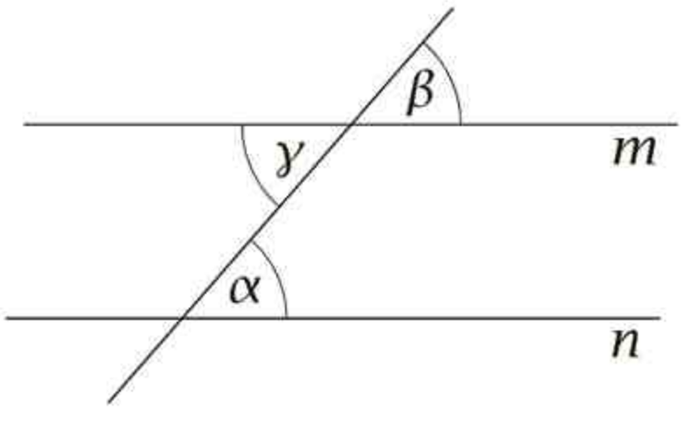




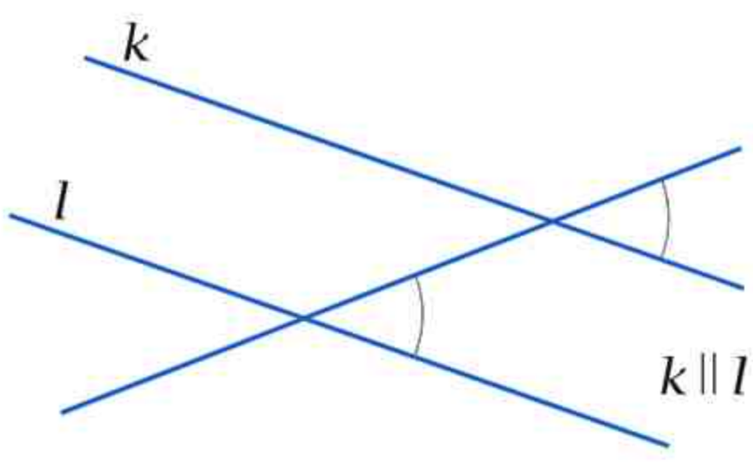
$a \parallel b$

Prosta, która przecina dwie proste równoległe, jest nachylona do każdej z nich pod takim samym kątem.

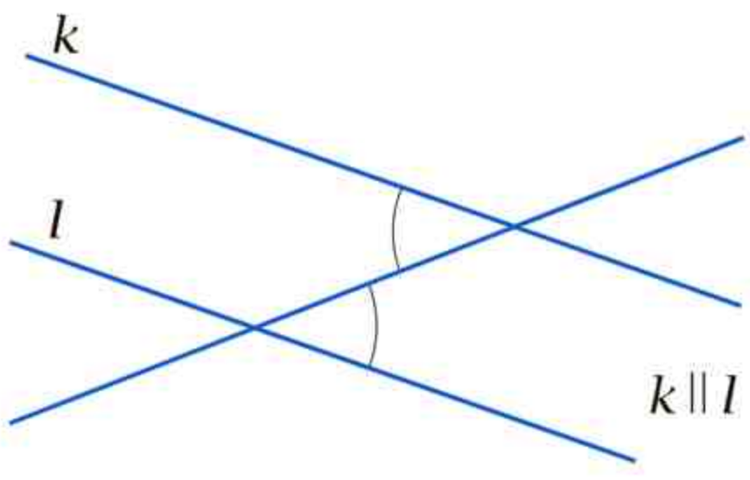
Kąty położone tak jak kąty α i β na rysunku obok nazywamy kątami odpowiadającymi. Kąty położone tak jak kąty α i γ nazywamy kątami naprzemianległymi.



ĆWICZENIE B. Na rysunku powyżej proste m i n są równoległe, a kąt α ma miarę 70°. Jaką miarę ma kąt β? Jaką miarę ma kąt γ?



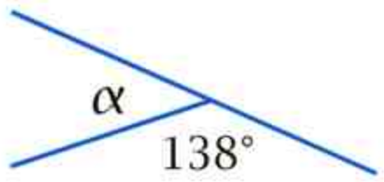
Kąty odpowiadające
Kąty te mają równe miary.

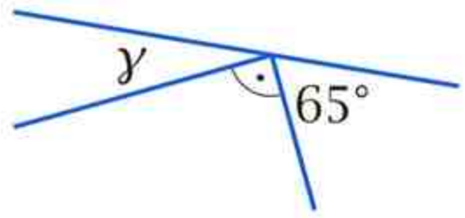


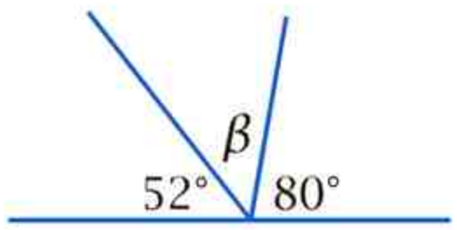
Kąty naprzemianległe
Kąty te mają równe miary.

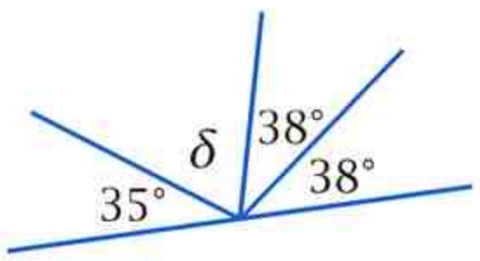
Zadania

1. Jakie miary mają kąty α, β, γ i δ?









2. a) Jaką miarę ma kąt przyległy do kąta o mierze 137°?
b) Czy kąt przyległy do kąta ostrego może być kątem ostrym?

Miary kątów możemy podawać w stopniach lub w minutach.

1 stopień to 60 minut kątowych. Zapisujemy to tak:

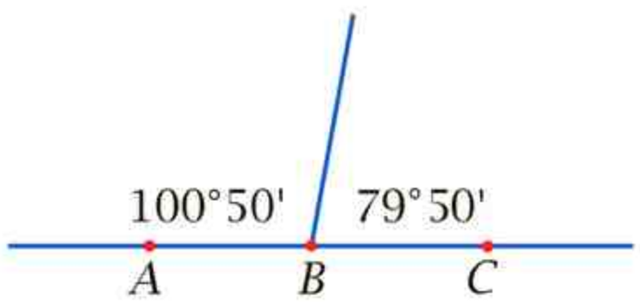
$1^\circ = 60'$

3. Podaj miarę kąta przyległego do kąta α:

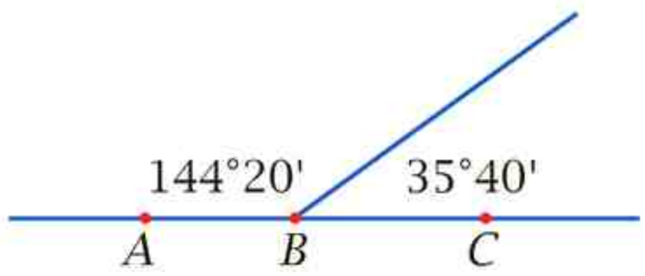
a) $\alpha = 0{,}5^\circ$
b) $\alpha = 2{,}5^\circ$
c) $\alpha = 90{,}5^\circ$
d) $\alpha = 179{,}25^\circ$
e) $\alpha = 42^\circ 15'$
f) $\alpha = 95^\circ 45'$
g) $\alpha = 60^\circ 59'$
h) $\alpha = 165^\circ 17'$

4. Czy punkty A, B i C są współliniowe?

a)



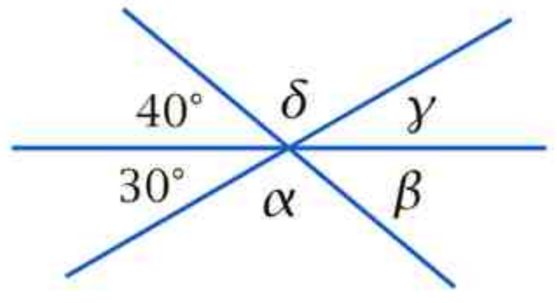
b)



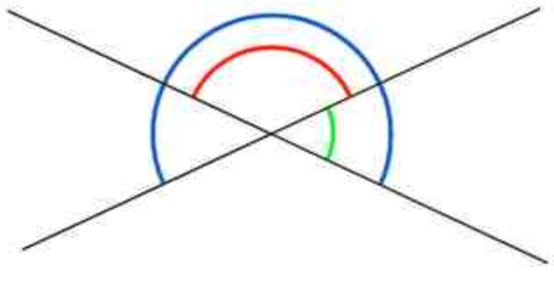
5. a) Jeden z kątów przyległych ma o 30° więcej od drugiego. Oblicz miary tych kątów.

b) Jeden z kątów przyległych ma trzy razy większą miarę od drugiego. Oblicz miary tych kątów.

6. Jakie miary mają kąty α, β, γ i δ przedstawione na rysunku obok?

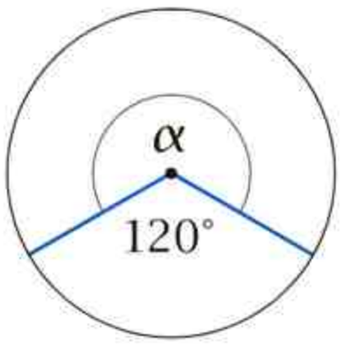


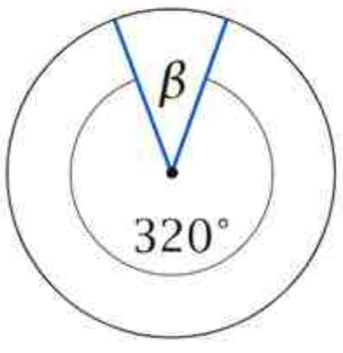
4/148

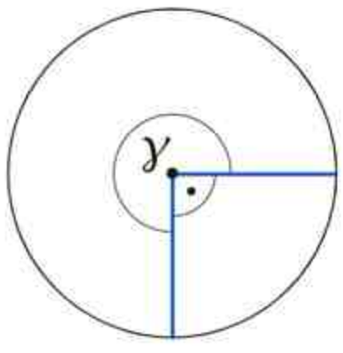


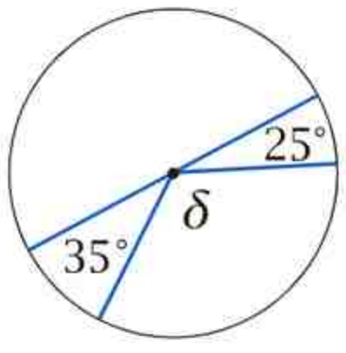
7. Kąt wklęsły zaznaczony niebieskim łukiem ma miarę 230°. Jaką miarę ma kąt zaznaczony łukiem czerwonym, a jaką — zielonym?

8. Oblicz miary kątów α, β, γ i δ. Które z tych kątów są wklęsłe?





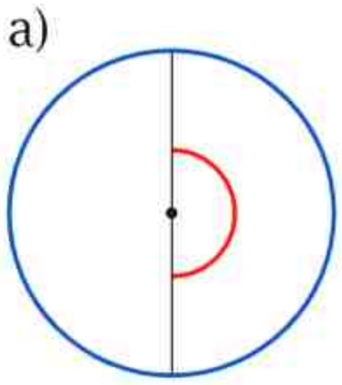




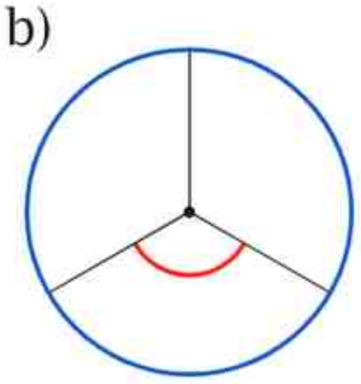
5/148

9. Koło podzielono na równe części. Jakie miary mają zaznaczone kąty?

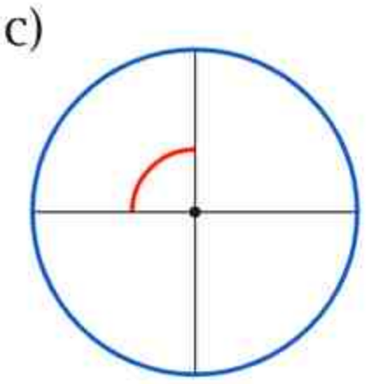
a)



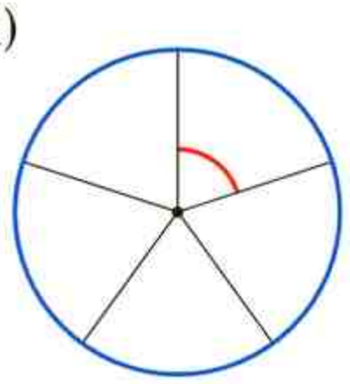
b)



c)



d)



10. a) Oblicz, o jaki kąt obróci się wskazówka minutowa w ciągu:

- kwadransa
- 5 minut
- 40 minut

b) Oblicz, o jaki kąt obróci się wskazówka godzinowa w ciągu:

- godziny
- 2,5 godziny
- 10 minut

11. Podaj miarę mniejszego z kątów, które tworzą duża i mała wskazówka o godzinie:

a) 11^{00} b) 10^{00} c) 10^{30} d) 5^{00}



6/148

12. O której pełnej godzinie mała i duża wskazówka zegara tworzą kąt półpełny, a o której — kąt pełny?

***13.** a) O ile minut kątowych obróci się wskazówka godzinowa w ciągu minuty? 1° to 60 minut kątowych ($1^\circ = 60'$).

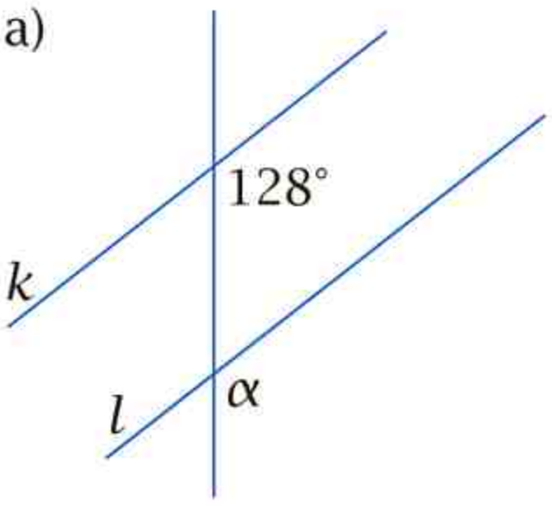
b) Ile sekund mija w czasie, gdy wskazówka godzinowa obraca się o 1 minutę kątową?

14. Narysuj dowolny kąt ostry i oznacz go literą α. Dorysuj takie kąty β, γ, δ, aby spełnione były warunki:

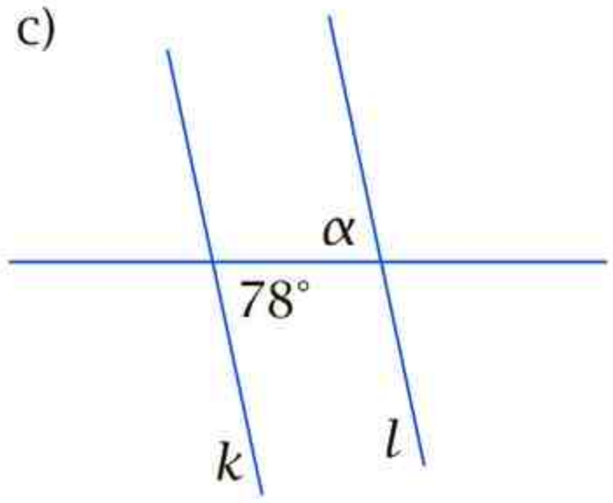
- kąty α i β są przyległe,
- kąty α i γ są wierzchołkowe,
- kąty α i δ są odpowiadające.

15. Na rysunkach proste k i l są równoległe. Oblicz miarę kąta α.

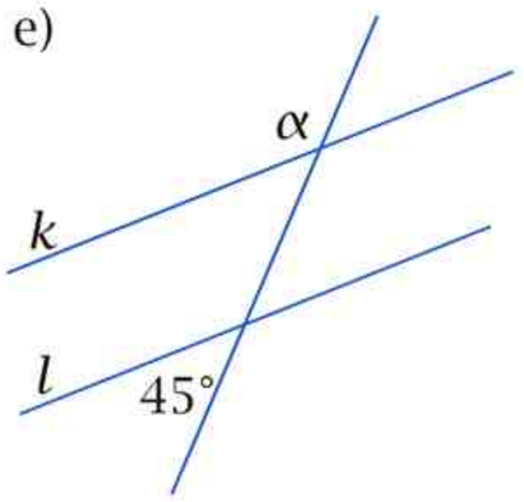
a)



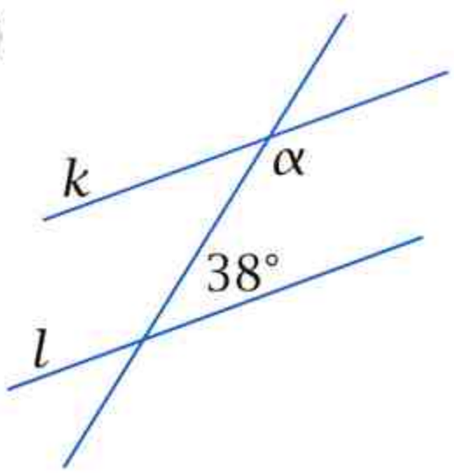
c)



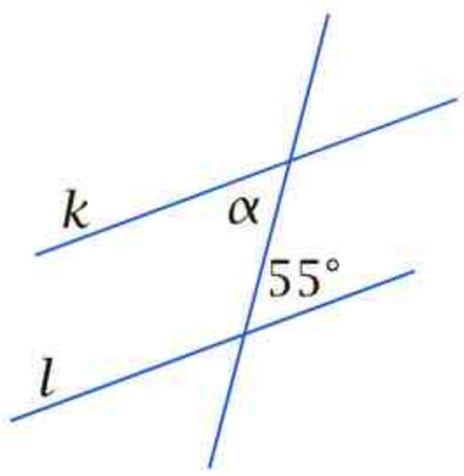
e)



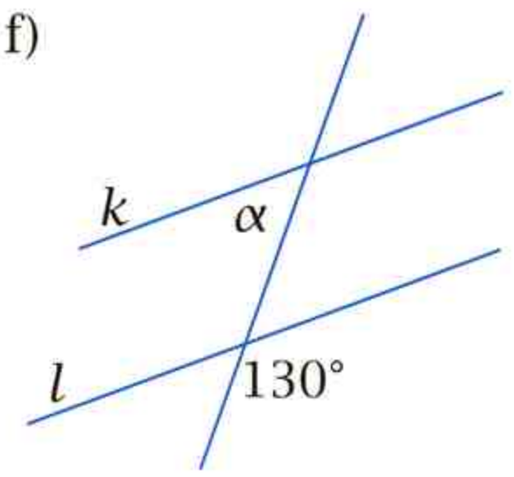
b)



d)



f)



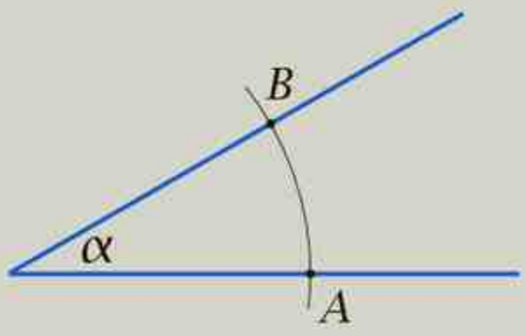
7/148

Ciekawostka

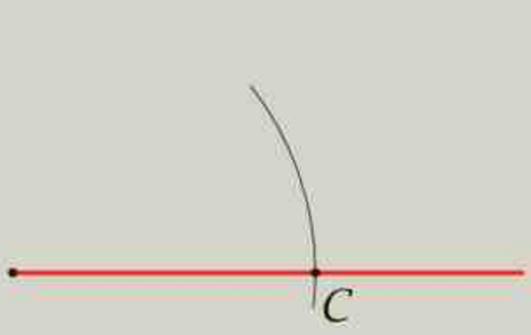
Gdy mamy dany kąt, to za pomocą cyrkla i linijki można skonstruować kąt o takiej samej mierze.

Konstrukcyjne przenoszenie danego kąta α

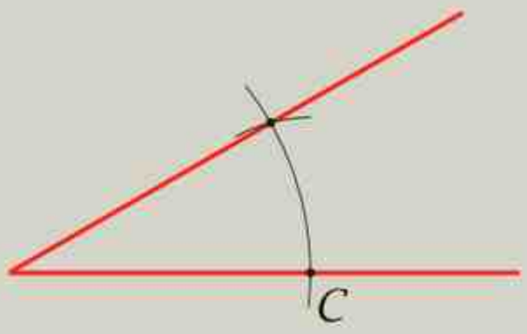
①



②



③



① Z wierzchołka kąta α kreślimy łuk (o dowolnym promieniu) przecinający ramiona kąta. Na rysunku punkty przecięcia oznaczone są literami A i B.

② Rysujemy półprostą i nie zmieniając rozwartości cyrkla kreślimy z początku tej półprostej łuk przecinający tę półprostą. Na rysunku punkt przecięcia oznaczony jest literą C.

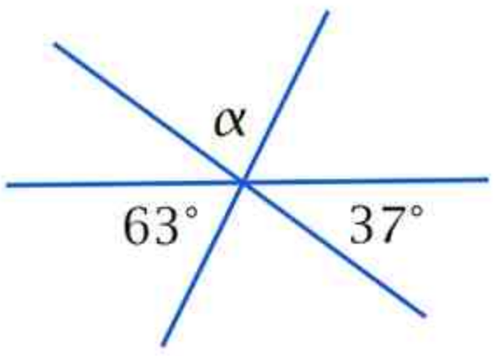
③ Z punktu C kreślimy łuk o promieniu AB. Przez punkt przecięcia łuków prowadzimy drugie ramię konstruowanego kąta.

16. Narysuj dowolny kąt ostry i zaznacz dowolny punkt P nienależący do tego kąta. Skonstruuj kąt, którego wierzchołkiem jest punkt P i który ma taką samą miarę jak narysowany przez ciebie kąt.

Sprawdź, czy umiesz

1. Jeden z kątów przyległych jest 4 razy większy od drugiego. Jaką miarę ma większy z tych kątów?

A. 140° B. 144° C. 120° D. 36°



2. Kąt α ma miarę:

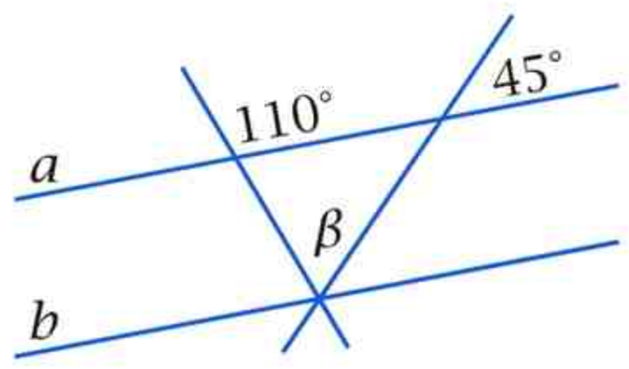
A. 37° B. 63° C. 80° D. 90°

3. Jaki kąt wklęsły tworzą wskazówki zegara o godzinie 17^{00}?

A. 30° B. 150° C. 210° D. 75°

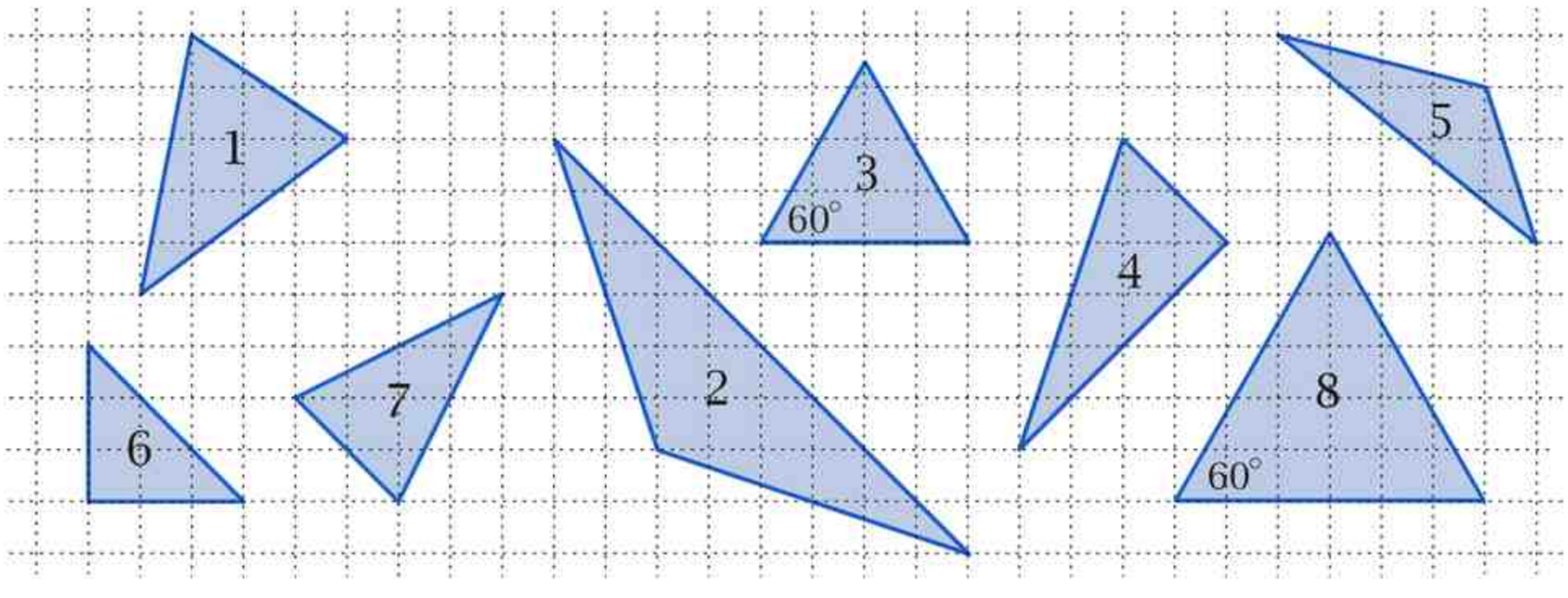
4. Proste a i b są równoległe. Kąt β ma miarę:

A. 45° B. 65° C. 70° D. 90°



zadania uzupełniające 4–7, str. 148

3 Trójkąty



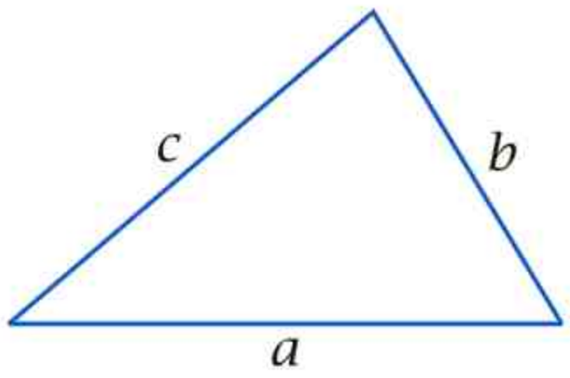
ĆWICZENIE A. Określ, które z narysowanych trójkątów są:

a) ostrokątne
b) prostokątne
c) rozwartokątne
d) równoboczne
e) równoramienne
f) prostokątne równoramienne

ĆWICZENIE B. Ustal, czy trójkąt może mieć boki długości:

a) 1 cm, 1 m i 1 m b) 1 m, 1 cm i 1 cm c) 1 cm, 1 cm i 2 cm

Długości boków trójkąta mogą być różne, jednak nie mogą być zupełnie dowolne.



Każdy bok trójkąta ma długość mniejszą od sumy długości dwóch pozostałych boków.

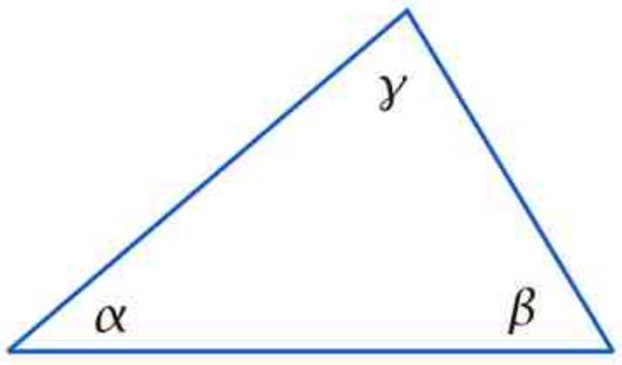
$$b + c > a \qquad a + c > b \qquad a + b > c$$

Zauważ, że gdy znamy długości trzech odcinków, to aby stwierdzić, czy można z nich zbudować trójkąt, wystarczy sprawdzić, czy suma dwóch krótszych odcinków jest większa niż najdłuższy odcinek.

Czy pamiętasz, jaki związek zachodzi między miarami kątów trójkąta?

ĆWICZENIE C. Ustal, czy kąty trójkąta mogą mieć miary:

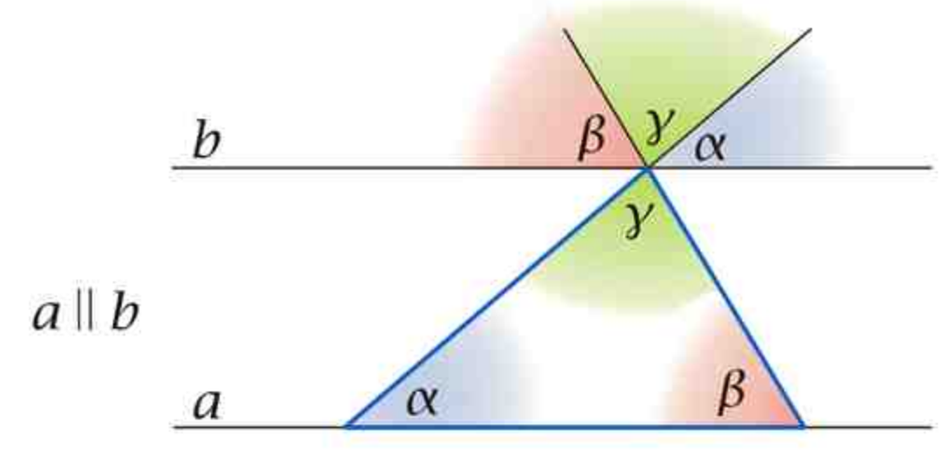
a) 30°, 70° i 100° b) 105°, 40° i 25° c) 2°, 3° i 175°



Suma miar kątów trójkąta jest równa 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Uwaga. Uzasadnienie tej własności można odczytać z rysunku obok.



Zadania

1. Czy boki trójkąta mogą mieć podane długości?

a) 5 cm, 7 cm, 6 cm c) 70 cm, 0,7 m, 1 cm

b) 2,5 m, 3,5 m, 6 m d) 10 cm, 10 m, 0,01 km

2. Odcinek o długości 5 cm podzielono na trzy części tak, że długość każdej części wyraża się całkowitą liczbą centymetrów. Z otrzymanych w ten sposób odcinków zbudowano trójkąt. Jakie są długości boków tego trójkąta?

3. a) Dwa boki trójkąta mają długości 3 i 5. Wykaż, że trzeci bok musi mieć długość większą niż 2 i mniejszą niż 8.

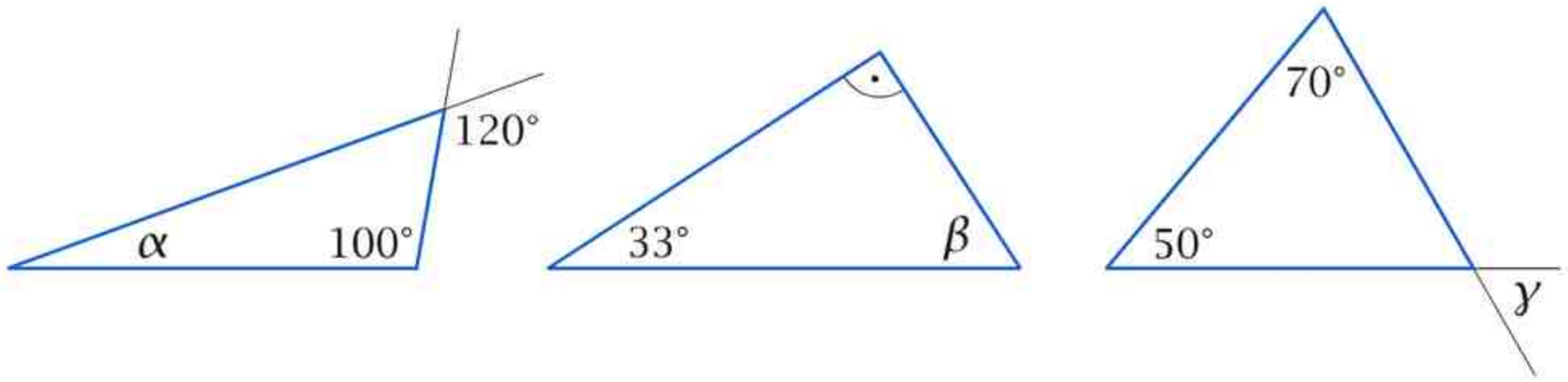
b) Dwa boki trójkąta mają długości 4 cm i 10 cm. Jakie warunki musi spełniać długość trzeciego boku trójkąta?

4. Czy bok trójkąta może mieć długość równą połowie obwodu trójkąta?

5. Czy kąty trójkąta mogą mieć podane miary?

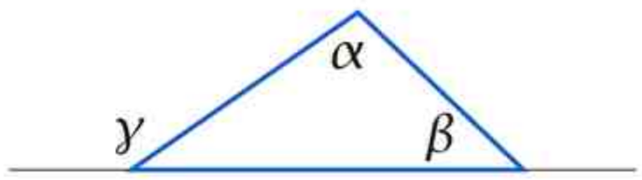
a) $35°, 65°, 90°$ b) $1{,}5°, 0{,}5°, 178°$ c) $25°16', 50°, 104°44'$

6. Oblicz miary kątów α, β i γ.



7. Na rysunku obok literami α, β i γ oznaczono trzy kąty. Uzasadnij, że zachodzi równość:

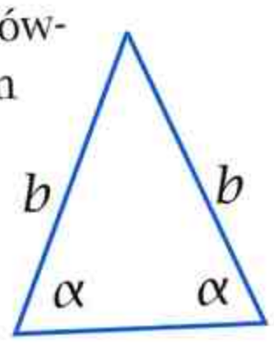
$$\gamma = \alpha + \beta$$



8. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

① Tylko jeden kąt trójkąta może być kątem rozwartym.
② Każdy kąt trójkąta równobocznego ma miarę $60°$.
③ Trójkąt rozwartokątny nie może być równoramienny.
④ Ramię trójkąta równoramiennego jest zawsze dłuższe od podstawy.

W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie mają równe miary.



9. a) Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma $170°$. Jakie są miary pozostałych kątów?

b) Jakie kąty ma trójkąt równoramienny prostokątny?

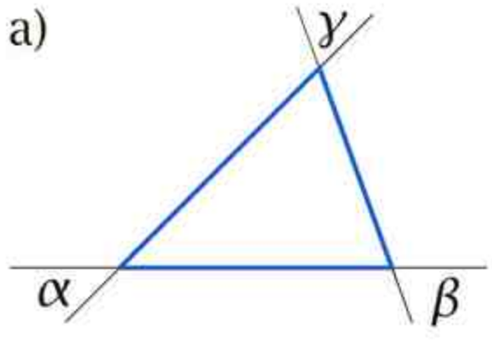
c) Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma $40°$. Jakie mogą być miary pozostałych kątów tego trójkąta?

9/148

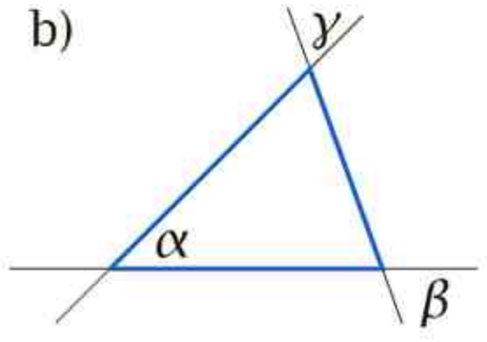
10. O trójkącie ABC wiadomo, że $AB = AC$ oraz $\sphericalangle ABC = 48°$. Oblicz miary $\sphericalangle BAC$ oraz $\sphericalangle ACB$.

11. Ile wynosi suma miar kątów α, β i γ?

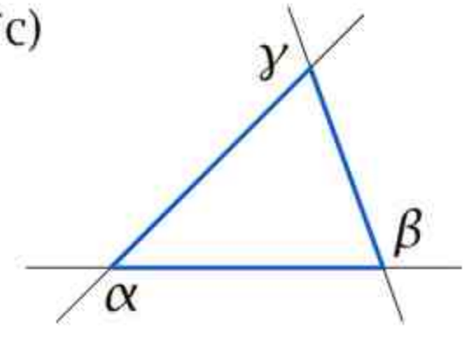
a)



b)

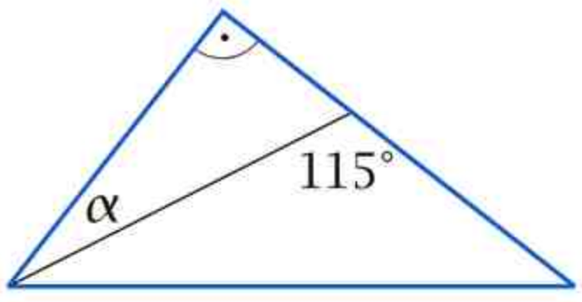


*c)

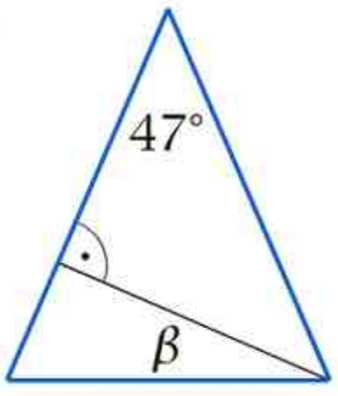


12. Trójkąty narysowane poniżej to trójkąt prostokątny, równoramienny i równoboczny. Oblicz miary kątów α, β i γ.

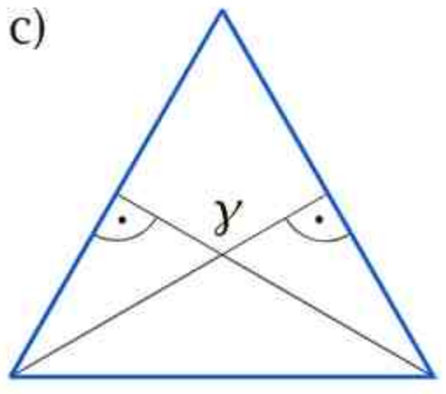
a)



b)



c)



13. W trójkącie prostokątnym ABC z wierzchołka kąta prostego A poprowadzono wysokość AD. Kąt DAC ma miarę $32°$. Jakie miary mają kąty trójkąta ABC?

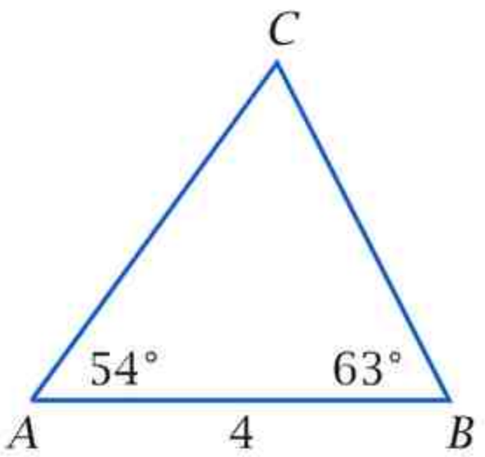
Sprawdź, czy umiesz

1. Dwa boki trójkąta mają długości 6 cm i 11 cm. Trzeci bok tego trójkąta na pewno nie może mieć długości:

A. 6 cm B. 11 cm C. 15 cm D. 17 cm

2. Jaką długość ma bok AC trójkąta ABC, który przedstawiono na rysunku obok?

A. 3 B. 4 C. 5 D. nie wiadomo



3. W każdym trójkącie prostokątnym:

A. wszystkie kąty są ostre,

B. każdy kąt ma inną miarę,

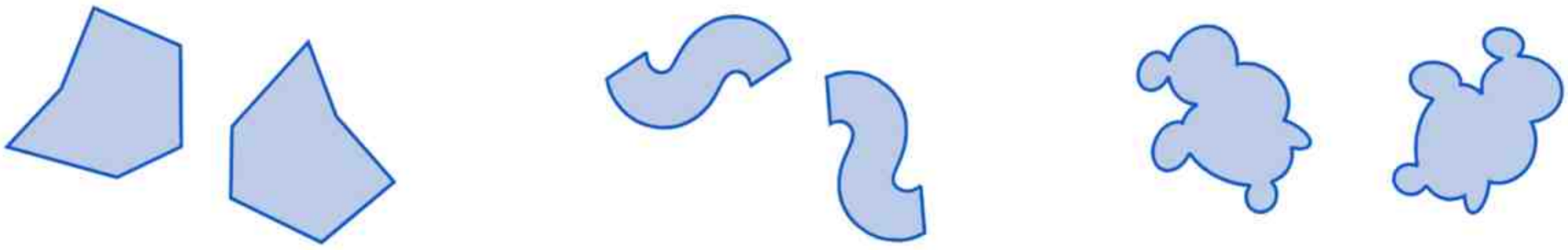
C. suma miar kątów ostrych wynosi $180°$,

D. suma miar kątów ostrych wynosi $90°$.

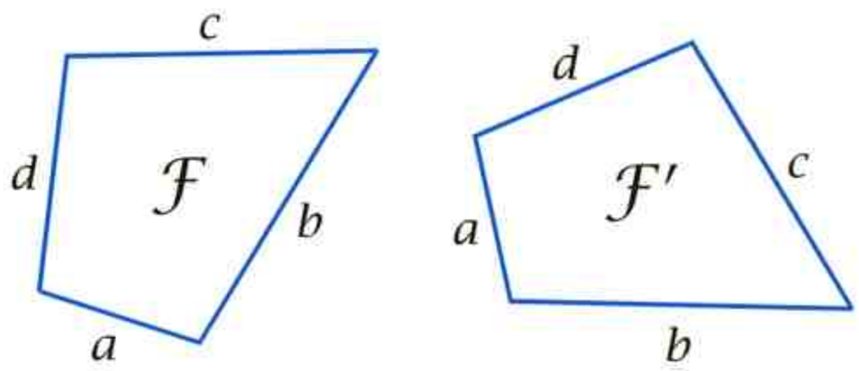
zadania uzupełniające 8–15, str. 148–149

4 Przystawanie trójkątów

Poniższe rysunki przedstawiają pary figur, które mają taki sam kształt i wielkość. Takie figury nazywamy przystającymi.



Gdybyśmy wycięli dwie figury przystające, to moglibyśmy przyłożyć jedną do drugiej tak, by dokładnie się pokrywały.

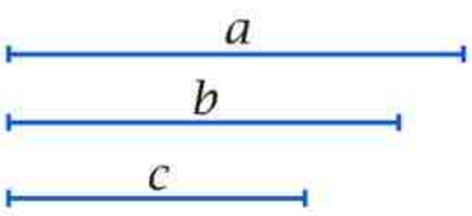


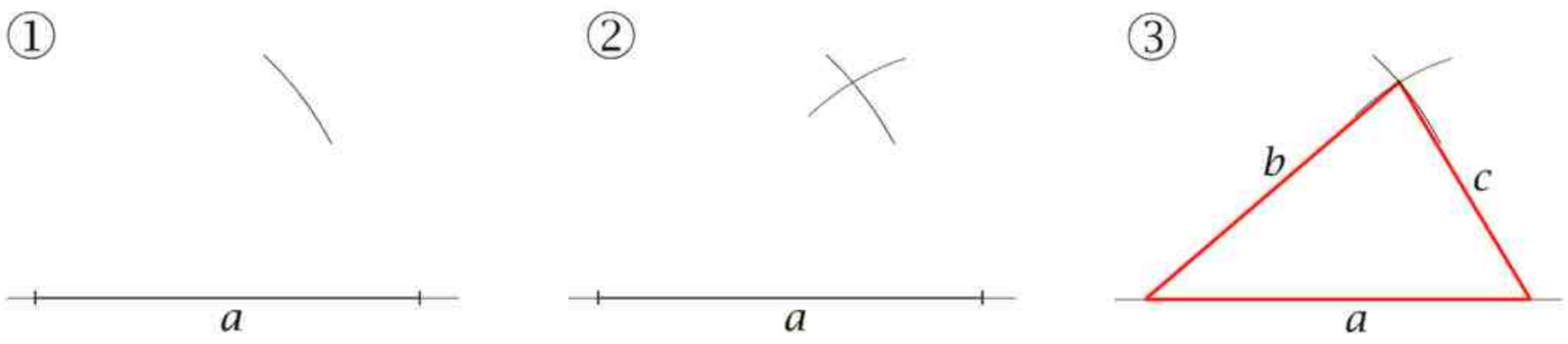
Na rysunku obok wielokąt $\mathcal{F}'$ jest przystający do wielokąta $\mathcal{F}$. Boki wielokąta $\mathcal{F}'$ mają takie same długości jak odpowiednie boki wielokąta $\mathcal{F}$. Kąty wielokąta $\mathcal{F}'$ są równe odpowiednim kątom wielokąta $\mathcal{F}$.

W dalszej części rozdziału będziemy się zajmować trójkątami przystającymi. Na początek przypomnijmy, jak się konstruuje trójkąt o trzech danych bokach.

Konstrukcja

Konstrukcja trójkąta o trzech danych bokach a, b, c.

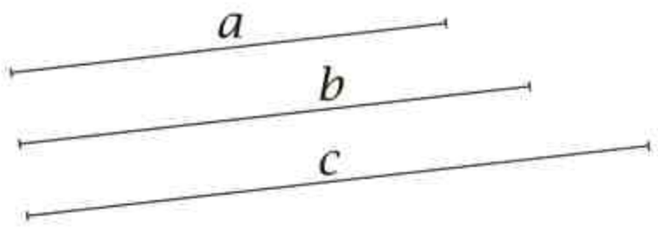




① Rysujemy dowolną prostą i zaznaczamy na niej odcinek a. Z jednego końca odcinka a kreślimy łuk o promieniu b.

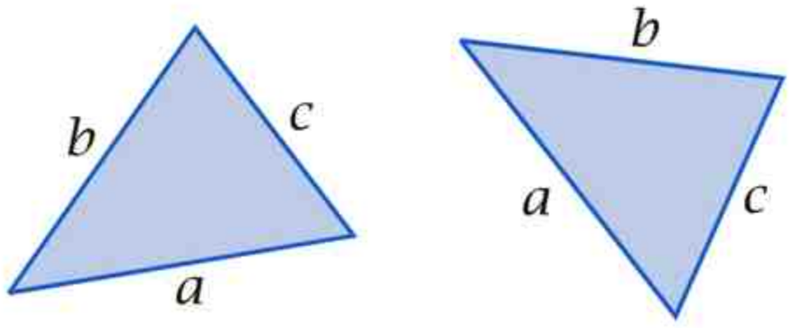
② Z drugiego końca odcinka a kreślimy łuk o promieniu c.

③ Punkt przecięcia łuków łączymy z końcami odcinka a.



ĆWICZENIE A. Skonstruuj trójkąt o bokach takiej długości jak odcinki a, b i c na rysunku obok. Wytnij ten trójkąt.

Porównaj trójkąt otrzymany po wykonaniu ćwiczenia A, z trójkątami, które otrzymali inni uczniowie. Sprawdź, że wasze trójkąty mają nie tylko takie same boki, ale także takie same kąty, tzn. że te trójkąty są przystające.



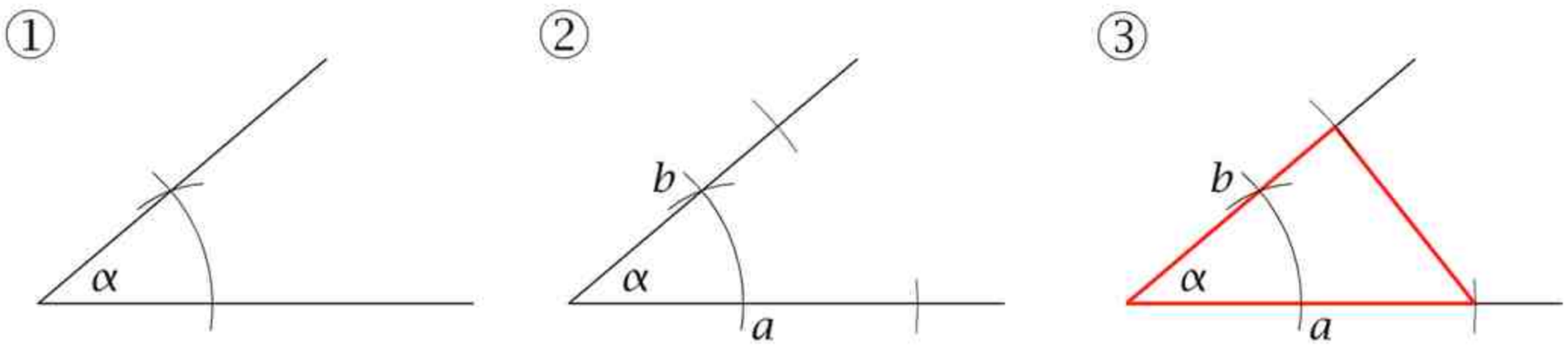
Jeżeli boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.

Tę własność nazywamy pierwszą cechą przystawania trójkątów i oznaczamy w skrócie *bbb* (bok, bok, bok).

Konstrukcja

Konstrukcja trójkąta o danych dwóch bokach a, b i kącie α zawartym między nimi.

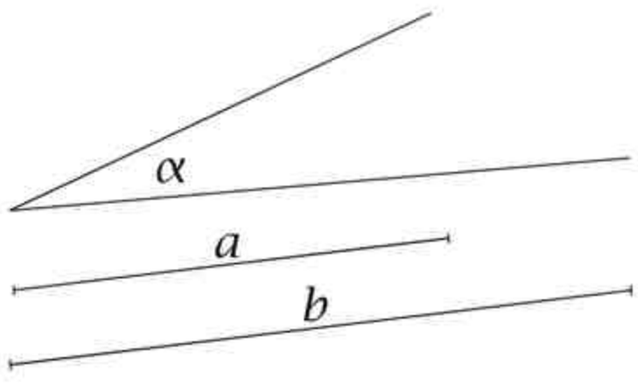




① Konstruujemy kąt równy kątowi α.

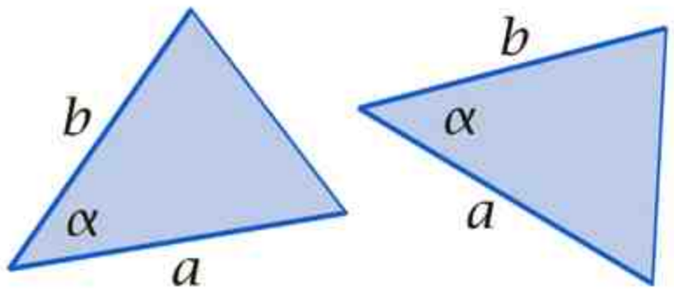
② Na jednym ramieniu kąta odkładamy od wierzchołka odcinek a. Na drugim ramieniu kąta odkładamy odcinek b.

③ Łączymy końce odłożonych odcinków.



ĆWICZENIE B. Skonstruuj trójkąt, którego dwa boki mają długości a i b, a kąt między nimi ma miarę α (zob. rysunek obok).

Porównaj trójkąt otrzymany po wykonaniu ćwiczenia B z trójkątami narysowanymi przez innych uczniów. Zauważ, że wasze trójkąty są przystające (mają takie same boki i takie same kąty).

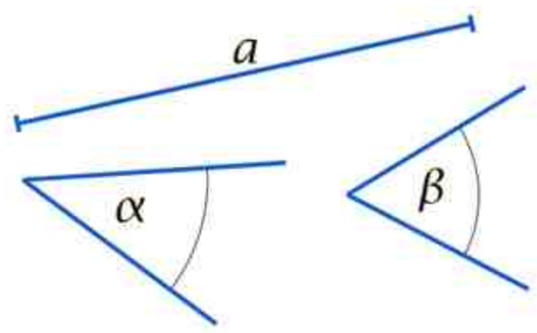


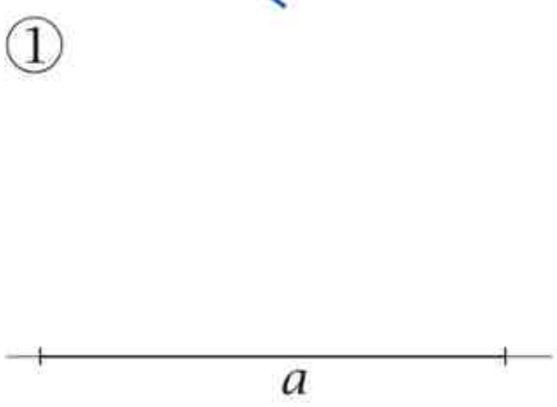
Jeżeli dwa boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta i kąty między tymi bokami mają jednakowe miary, to trójkąty są przystające.

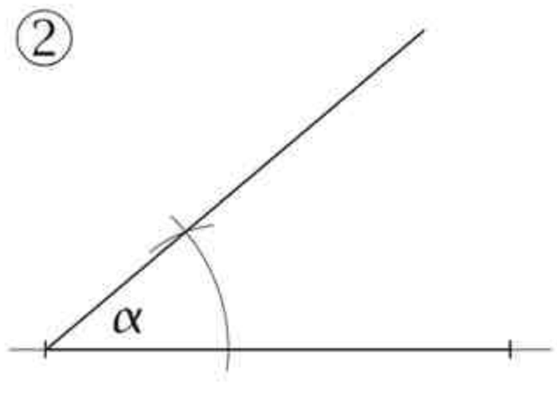
Tę własność nazywamy drugą cechą przystawania trójkątów i oznaczamy w skrócie *bkb* (bok, kąt, bok).

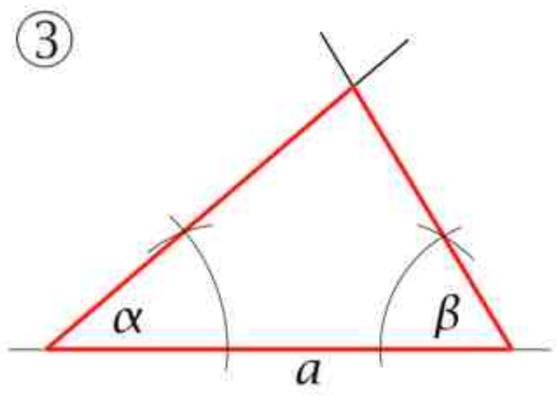
Konstrukcja

Konstrukcja trójkąta o danym boku a i dwóch kątach α i β leżących przy tym boku.





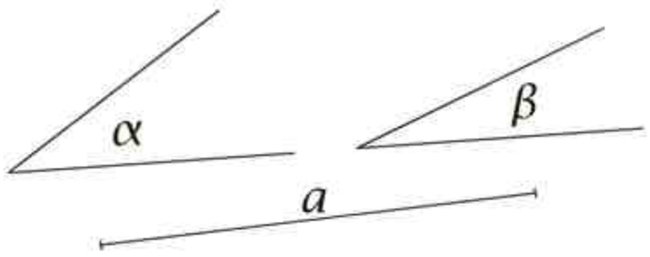




① Rysujemy dowolną prostą i zaznaczamy na niej odcinek a.

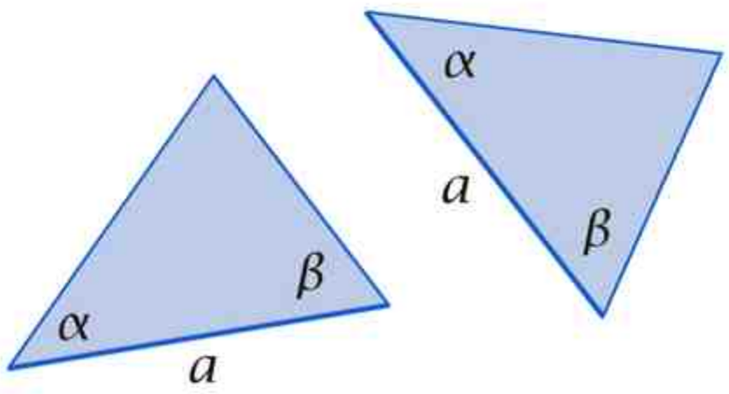
② Przy jednym z końców odcinka konstruujemy kąt α.

③ Przy drugim końcu odcinka konstruujemy kąt β. Punkt przecięcia ramion kątów α i β jest wierzchołkiem konstruowanego trójkąta.



ĆWICZENIE C. Skonstruuj trójkąt, w którym jeden z boków ma długość a, a kąty leżące przy tym boku mają miary α i β.

Jeśli ty i twój sąsiad lub sąsiadka z ławki rozwiązaliście ćwiczenie C, to otrzymaliście trójkąty przystające.



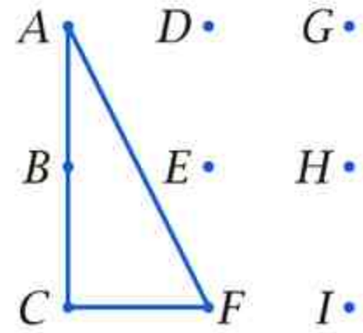
Jeżeli bok jednego trójkąta ma taką samą długość jak bok drugiego trójkąta, a kąty jednego trójkąta leżące przy tym boku mają takie same miary jak odpowiednie kąty drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.

Tę własność nazywamy trzecią cechą przystawania trójkątów i oznaczamy w skrócie *kbk* (kąt, bok, kąt).

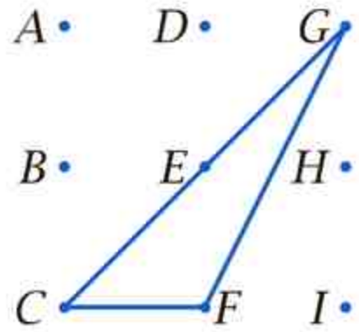
Zadania

1. Znajdź dwa trójkąty o wierzchołkach w punktach oznaczonych literami, przystające do narysowanego trójkąta.

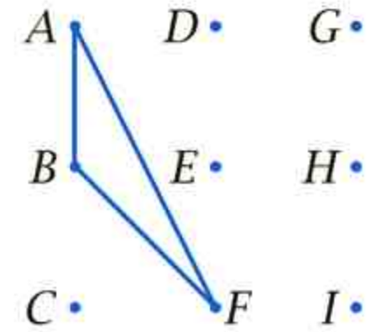
a)



b)

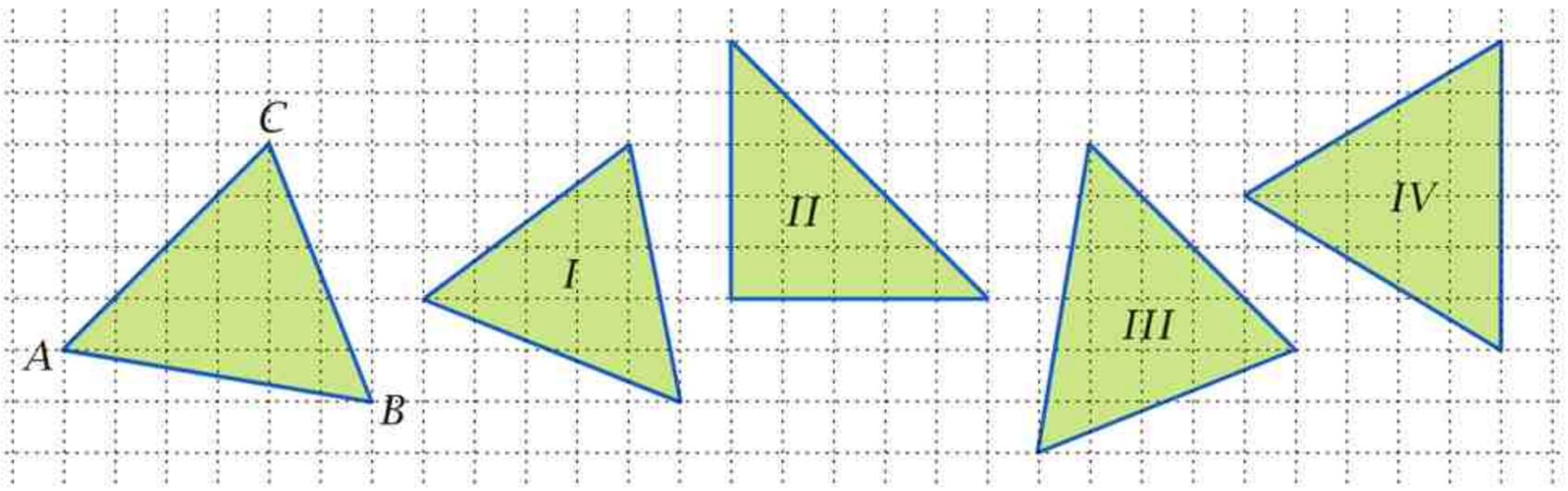


c)



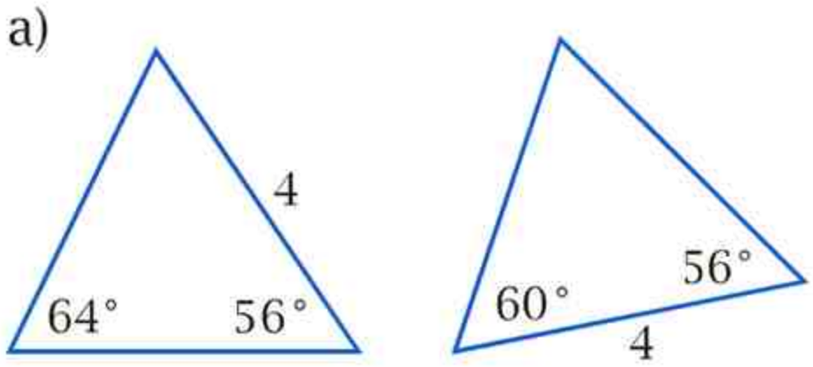
16/149

2. Który z narysowanych trójkątów jest przystający do trójkąta ABC?

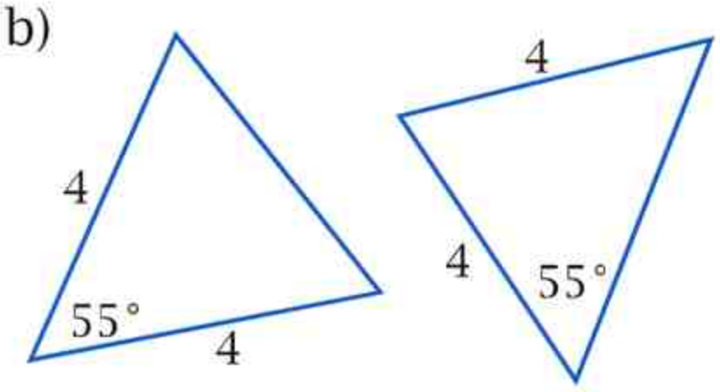


3. Czy narysowane trójkąty są przystające?

a)

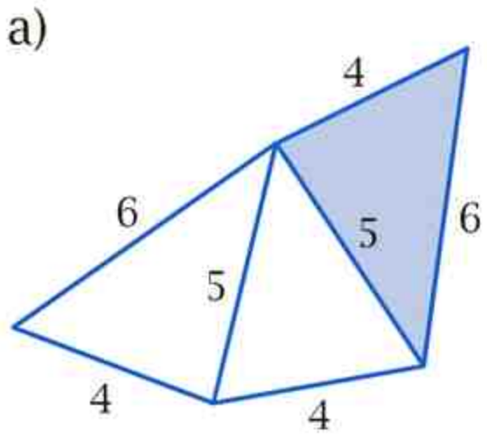


b)

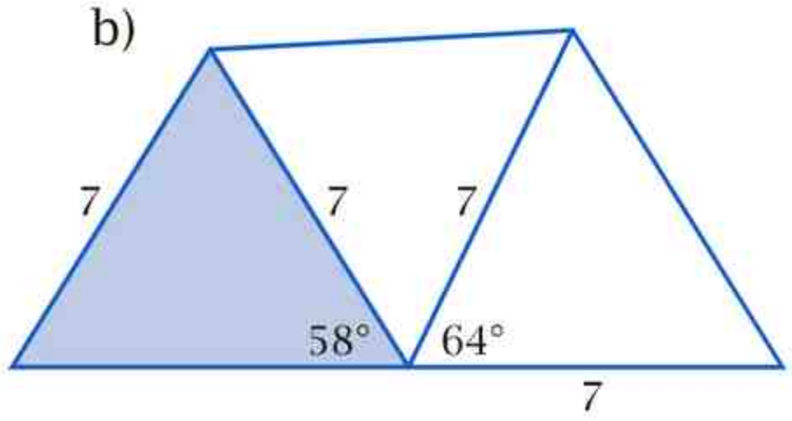


4. Znajdź na rysunku trójkąt, który jest przystający do zacieniowanego trójkąta.

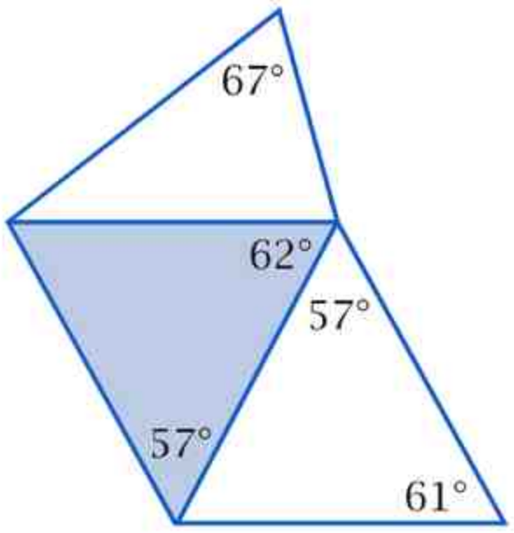
a)

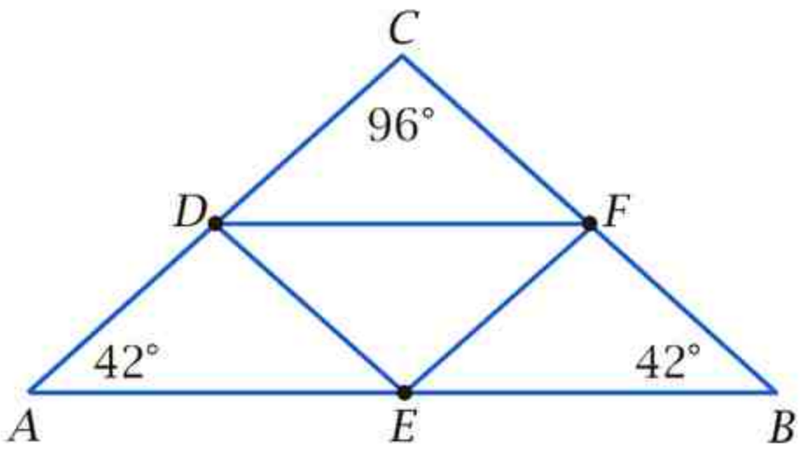


b)



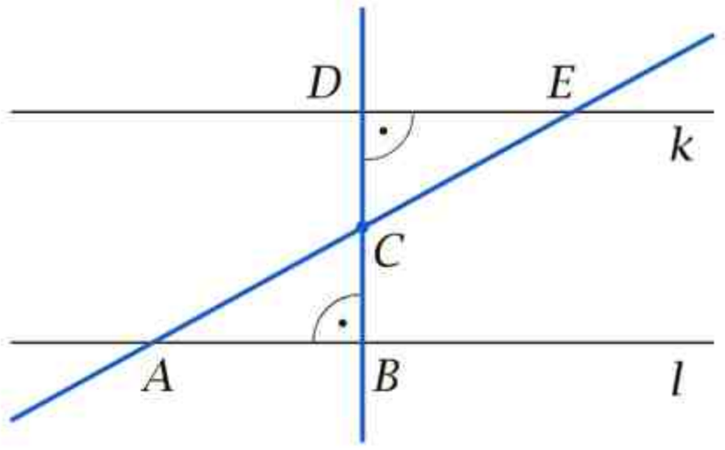
c)

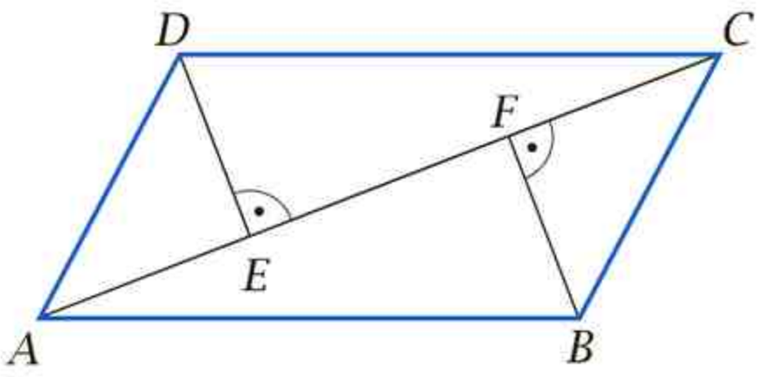




5. Punkty D, E i F są środkami boków trójkąta równoramiennego ABC. Boki trójkąta DFE są równoległe do odpowiednich boków trójkąta ABC. Uzasadnij, że trójkąty EBF, DEF i DFC są przystające do trójkąta AED.

6. Na rysunku obok proste k i l są równoległe, a punkt C jest środkiem odcinka DB. Uzasadnij, że $DE = AB$ i $AC = CE$.



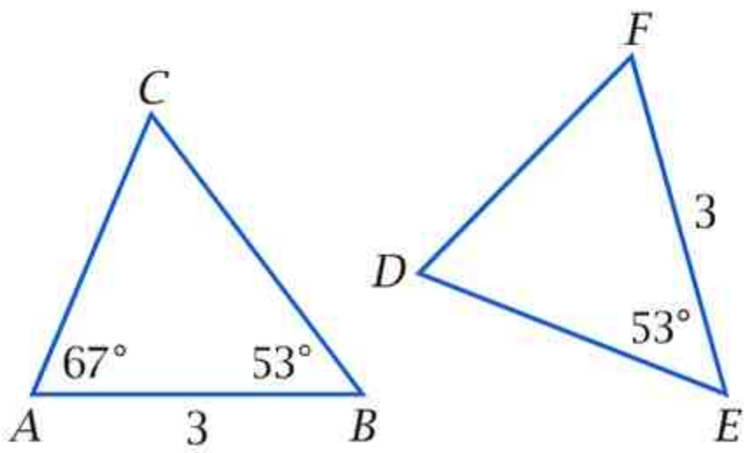


7. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Wykaż, że trójkąt ABF jest przystający do trójkąta CDE oraz że trójkąt AED jest przystający do trójkąta CFB.

Sprawdź, czy umiesz

1. Trójkąty narysowane obok są przystające. Wobec tego:

A. kąt przy wierzchołku D ma miarę $60°$,
B. kąt przy wierzchołku D ma miarę $67°$,
C. kąt przy wierzchołku F ma miarę $60°$,
D. kąt przy wierzchołku F ma miarę $53°$.

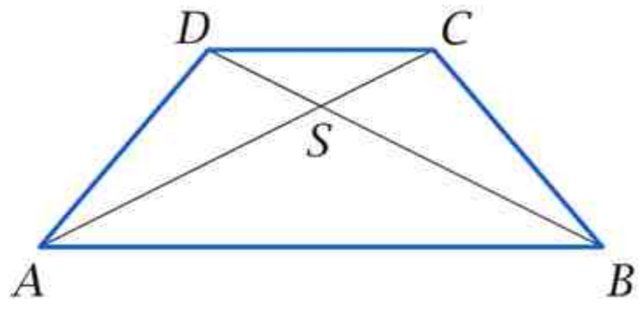


2. Trójkąt przystający do trójkąta ABC można skonstruować, gdy dane są:

A. bok AB i kąt BAC,
B. dwa boki trójkąta ABC,
C. trzy kąty trójkąta ABC,
D. kąt BAC i boki AB i AC.

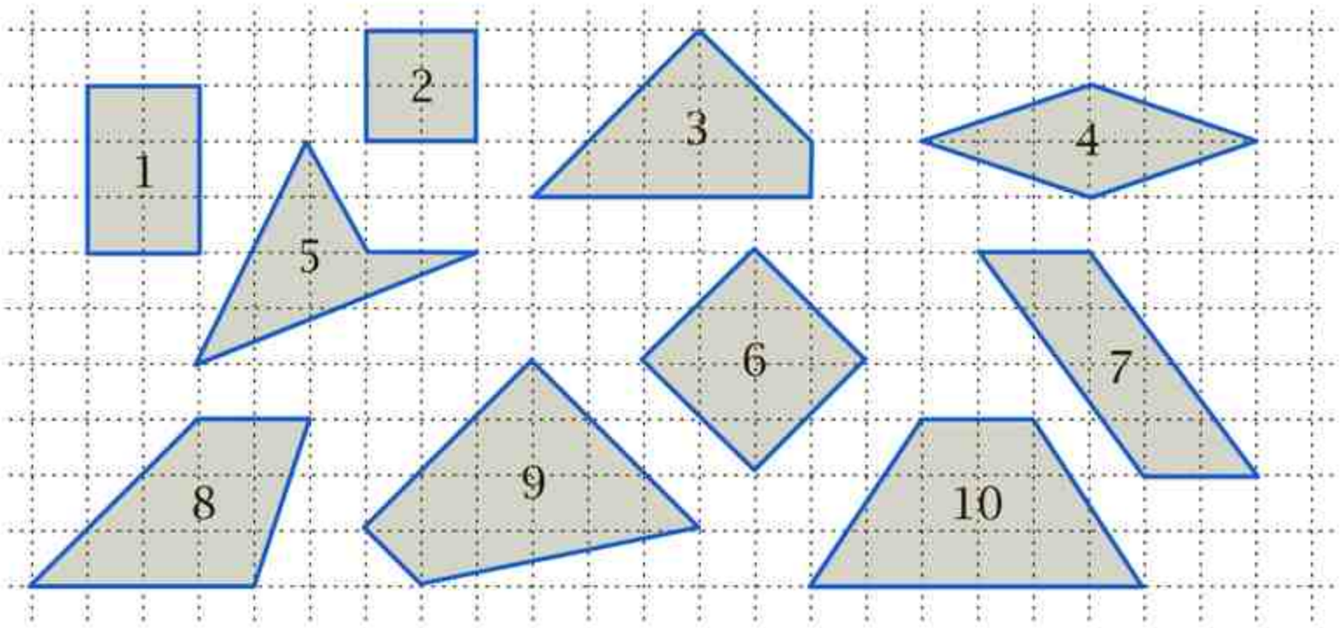
3. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym. Które trójkąty nie są przystające?

A. ABC i BDA
B. BCD i ADC
C. ASD i BSC
D. ABS i CSD



zadania uzupełniające 16–19, str. 149

5 Czworokąty

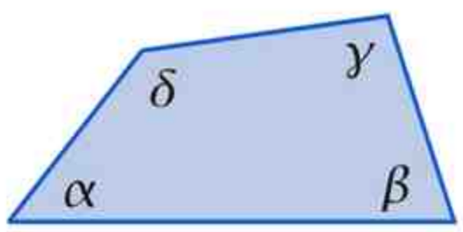


ĆWICZENIE A. Określ, które z narysowanych czworokątów są:

- kwadratami
- prostokątami
- równoległobokami
- rombami
- trapezami

Przypomnijmy sobie teraz najważniejsze wiadomości o czworokątach.

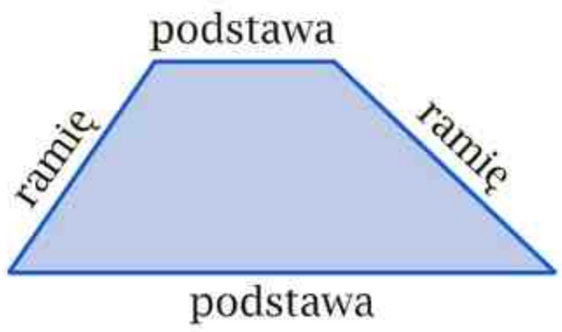
ĆWICZENIE B. Narysuj dowolny czworokąt i podziel go przekątną na dwa trójkąty. Ile wynosi suma miar kątów każdego z tych trójkątów? Ile wynosi suma miar kątów czworokąta?



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

***Suma miar kątów czworokąta wynosi* 360°.**

Trapez to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

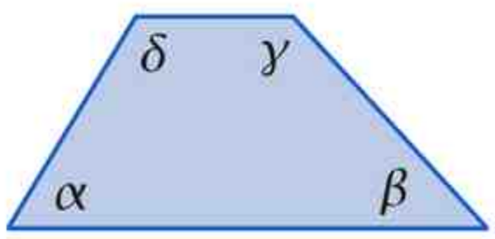


Równoległe boki trapezu nazywamy podstawami, a pozostałe boki — ramionami.

Trapez, w którym ramiona mają jednakowe długości, nazywamy **trapezem równoramiennym**. Trapez, który ma co najmniej jeden kąt prosty, nazywamy **trapezem prostokątnym**.

ĆWICZENIE C. a) Czy istnieje trapez prostokątny, który ma dokładnie jeden kąt prosty?

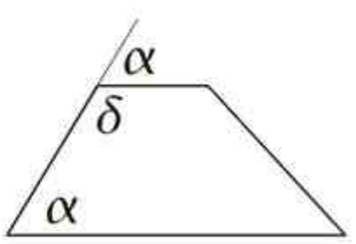
b) Jakie miary mają kąty trapezu prostokątnego równoramiennego?



$$\alpha + \delta = 180^\circ$$
$$\beta + \gamma = 180^\circ$$

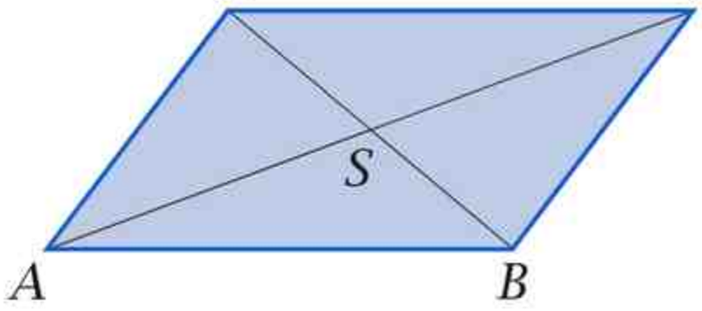
***Suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu trapezu jest równa* 180°.**

Uwaga. Na rysunku z prawej strony można odczytać uzasadnienie tej własności.



Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

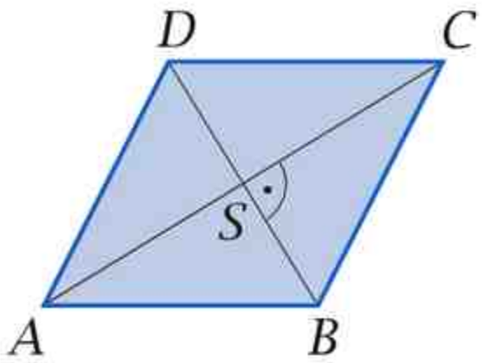
☐ **ĆWICZENIE D.** Narysuj równoległobok *ABCD* oraz jego przekątne *AC* i *BD*. Oznacz literą *S* punkt przecięcia przekątnych. Uzasadnij, że trójkąty *ABS* i *CSD* są przystające.



$AS = SC$
$BS = SD$

Przekątne równoległoboku przecinają się w połowie.

Romb to czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości. Każdy romb jest równoległobokiem.



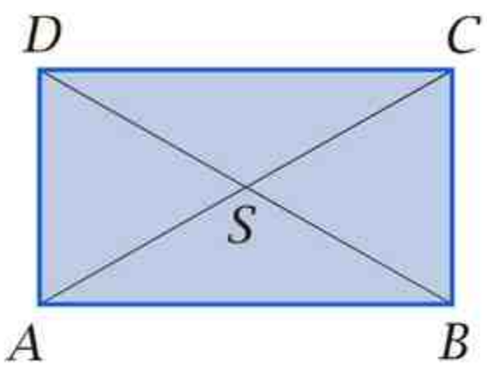
$AC \perp BD$
$AS = SC$
$BS = SD$

Przekątne rombu przecinają się w połowie i są prostopadłe.

Uwaga. Można wykazać, korzystając na przykład z cech przystawania trójkątów, że jeśli przekątne czworokąta przecinają się w połowie, to czworokąt jest równoległobokiem. Jeśli przekątne przecinają się w połowie i są prostopadłe, to czworokąt jest rombem.

ĆWICZENIE E. Narysuj romb, którego przekątne mają długości 6 cm i 8 cm.

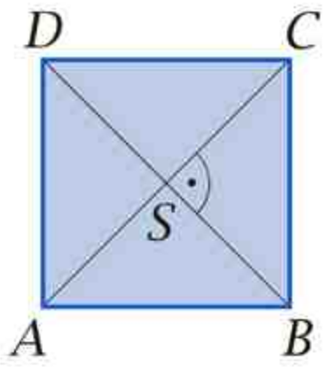
Prostokąt to czworokąt, który ma wszystkie kąty proste.



$AC = BD$
$AS = SC$
$BS = SD$

Przekątne prostokąta mają jednakową długość i przecinają się w połowie.

Kwadrat to prostokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.



$AC \perp BD$
$AC = BD$
$AS = SC$
$BS = SD$

Przekątne kwadratu mają jednakową długość, przecinają się w połowie i są prostopadłe.

Zadania

1. Czy kąty czworokąta mogą mieć podane miary?

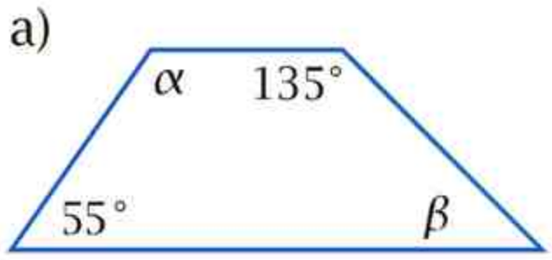
a) 123°, 37°, 158°, 42°

b) 72°, 73°, 74°, 175°

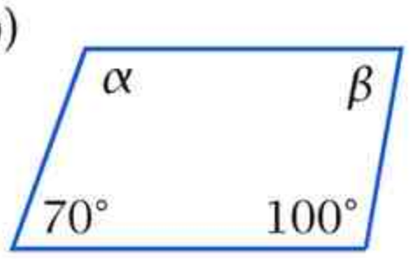
c) 89°, 91°, 91°, 89°

2. Narysowane poniżej czworokąty to trapezy. Oblicz miary kątów α i β.

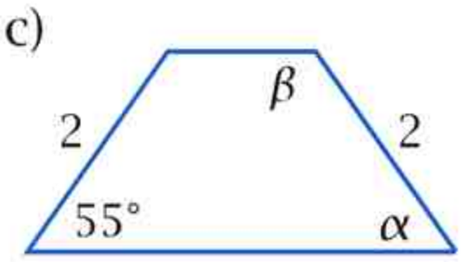
a)



b)



c)

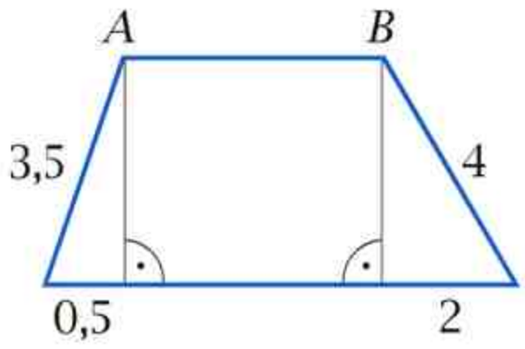


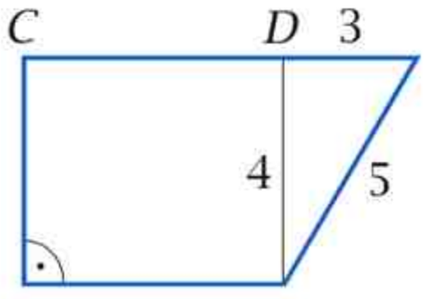
3. Kąt przy podstawie trapezu równoramiennego, który nie jest równoległobokiem, ma 50°. Przekątna tego trapezu jest prostopadła do ramienia.

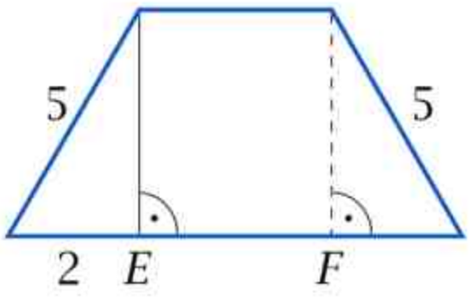
a) Jaką miarę ma kąt między przekątną a podstawą trapezu?

b) Jaką miarę ma kąt między przekątną a drugim ramieniem trapezu?

4. Obwód każdego z trapezów narysowanych poniżej jest równy 20. Jakie długości mają odcinki AB, CD i EF?







5. Oblicz miary kątów równoległoboków narysowanych poniżej.

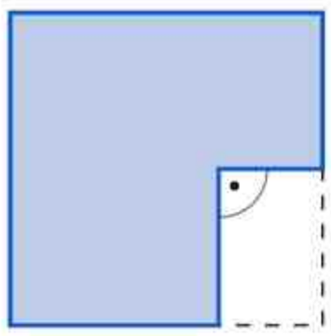
a)

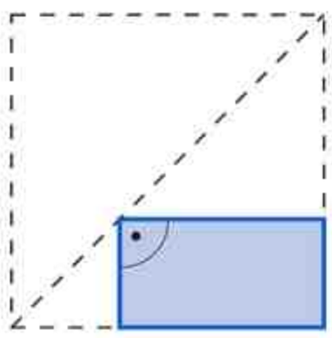
b)

c)

6. Narysowane poniżej czworokąty to równoległobok, romb i prostokąt. Oblicz miary kątów α, β i γ.

7. Z pięciu jednakowych kwadratów zbudowano prostokąt. Obwód każdego kwadratu był równy 8 cm. Jaki obwód ma ten prostokąt?

a) 

b) 

8. Każda z zacieniowanych figur powstała po odcięciu pewnego wielokąta od kwadratu o boku długości a. Jakie obwody mają zacieniowane figury?

9. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

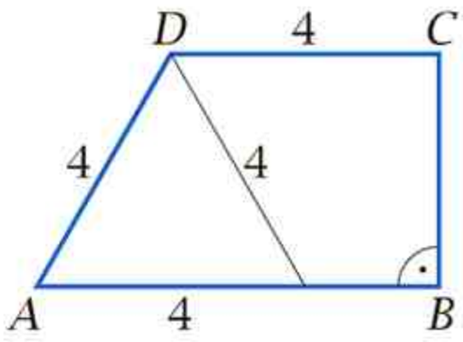
① Każdy równoległobok jest trapezem.

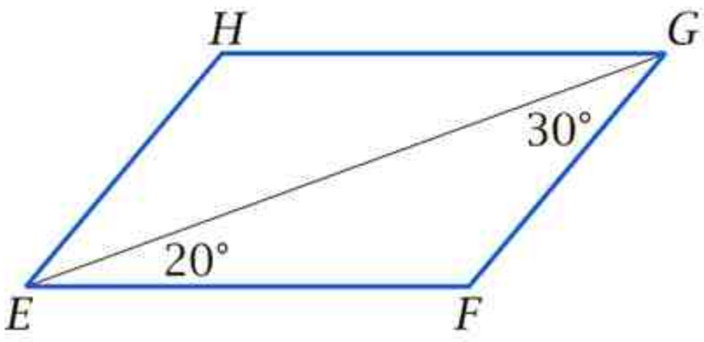
② Niektóre trapezy są prostokątami.

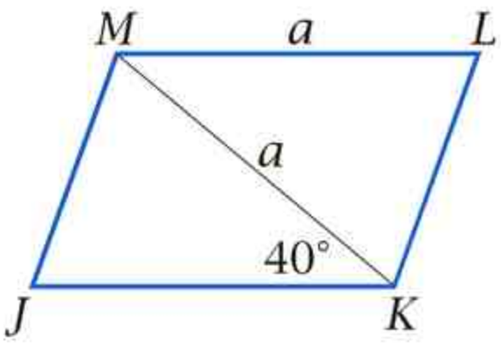
③ Każdy trapez o prostopadłych przekątnych jest kwadratem.

④ Każdy czworokąt, który ma dwie pary boków jednakowej długości, jest równoległobokiem.

10. Oblicz miary kątów trapezu $ABCD$ i równoległoboków $EFGH$ i $JKLM$.







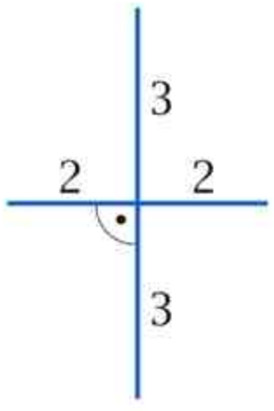
11. W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawa CD i ramię AD mają jednakowe długości. Kąt CAB ma miarę $47°$. Jakie miary mają kąty trapezu $ABCD$?

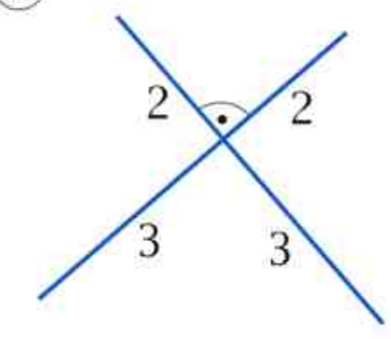
12. Na schematycznych rysunkach opisano wymiary przekątnych kilku czworokątów. Wskaż te rysunki, które nie przedstawiają:

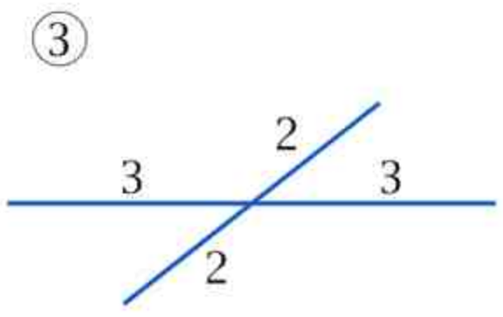
a) przekątnych rombu,

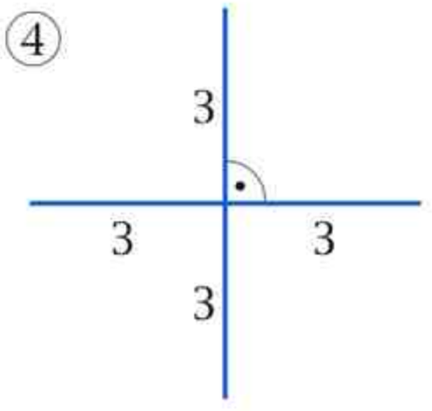
b) przekątnych równoległoboku,

c) przekątnych prostokąta.

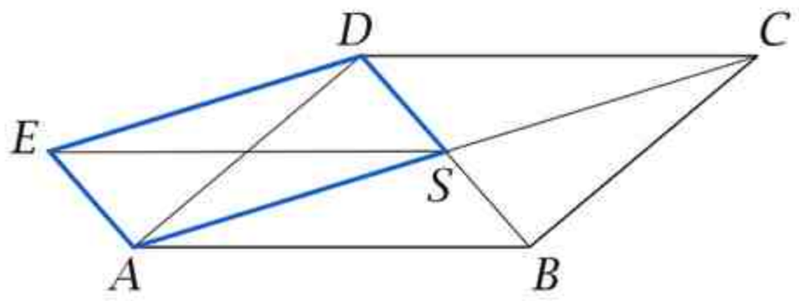
① 

② 

③ 

④ 

13. Popatrz na rysunek obok. Przekątne równoległoboku $ABCD$ mają długości 5 i 3. Oblicz obwód równoległoboku $ASDE$.



Każdy czworokąt, którego przekątne przecinają się w połowie, jest równoległobokiem.

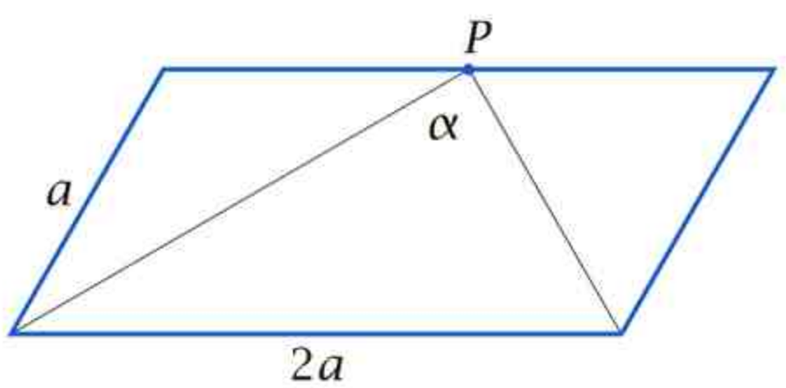
14. Korzystając z informacji w ramce, narysuj:

a) trzy różne równoległoboki, których przekątne mają długości 6 cm i 4 cm,

b) trzy różne prostokąty o przekątnej długości 5 cm,

c) romb o przekątnych długości 3 cm i 4 cm.

***15.** Punkt P jest środkiem boku narysowanego równoległoboku. Uzasadnij, że kąt α jest kątem prostym.



Sprawdź, czy umiesz

1. W każdym równoległoboku:

A. przekątne przecinają się pod kątem prostym,

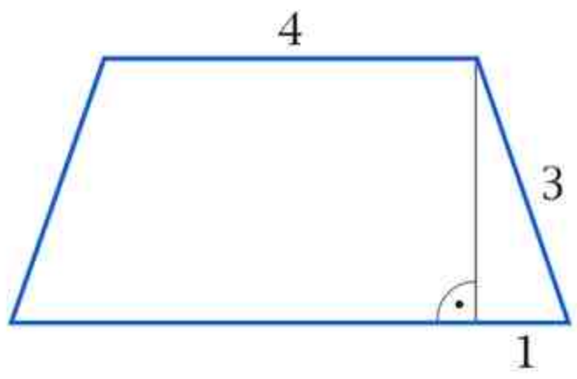
B. przekątne są równej długości,

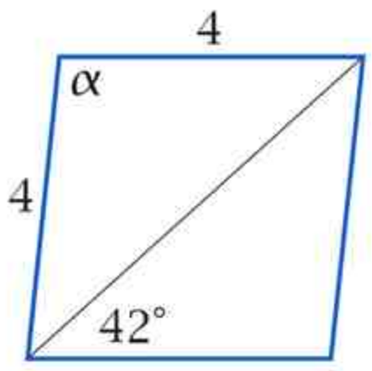
C. przekątne przecinają się w połowie,

D. obie przekątne nachylone są do jednego z boków pod takim samym kątem.

2. Jaki obwód ma trapez równoramienny narysowany obok?

A. 8 B. 11 C. 12 D. 16





3. Jaką miarę ma kąt α w rombie narysowanym obok?

A. 84° B. 96° C. 138°

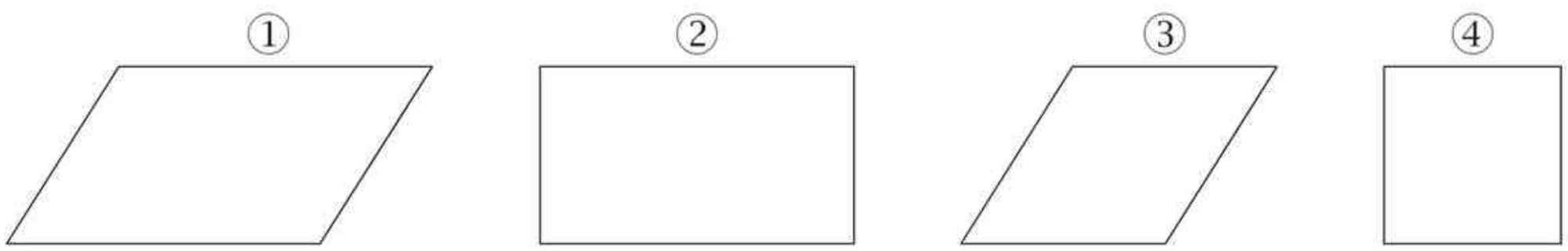
D. nie wiadomo — podano zbyt mało danych

zadania uzupełniające 20–25, str. 149–150

6 Wielokąty foremne

ĆWICZENIE A. Wśród narysowanych czworokątów wskaż te, które mają:

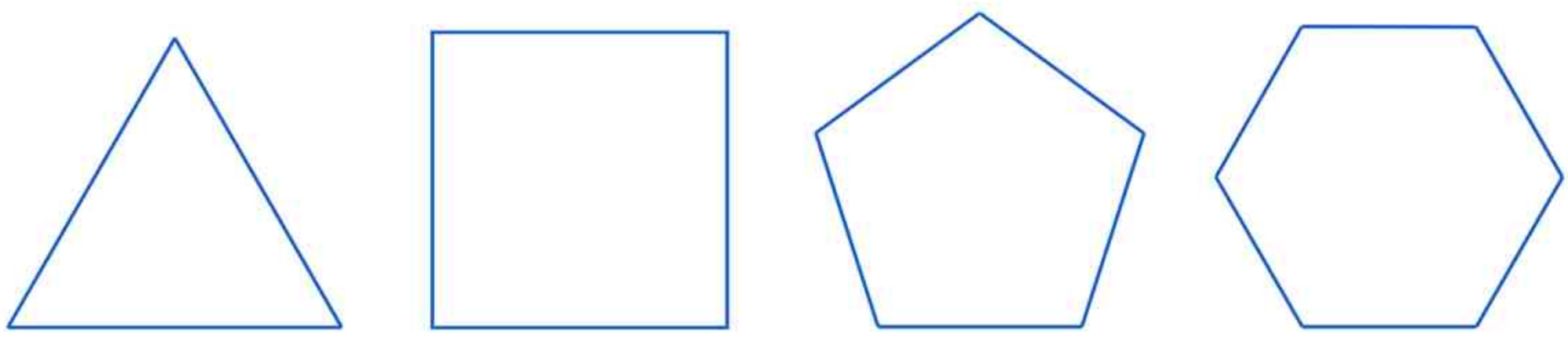
a) wszystkie boki jednakowej długości,
b) wszystkie kąty jednakowej miary,
c) wszystkie boki jednakowej długości i wszystkie kąty jednakowej miary.



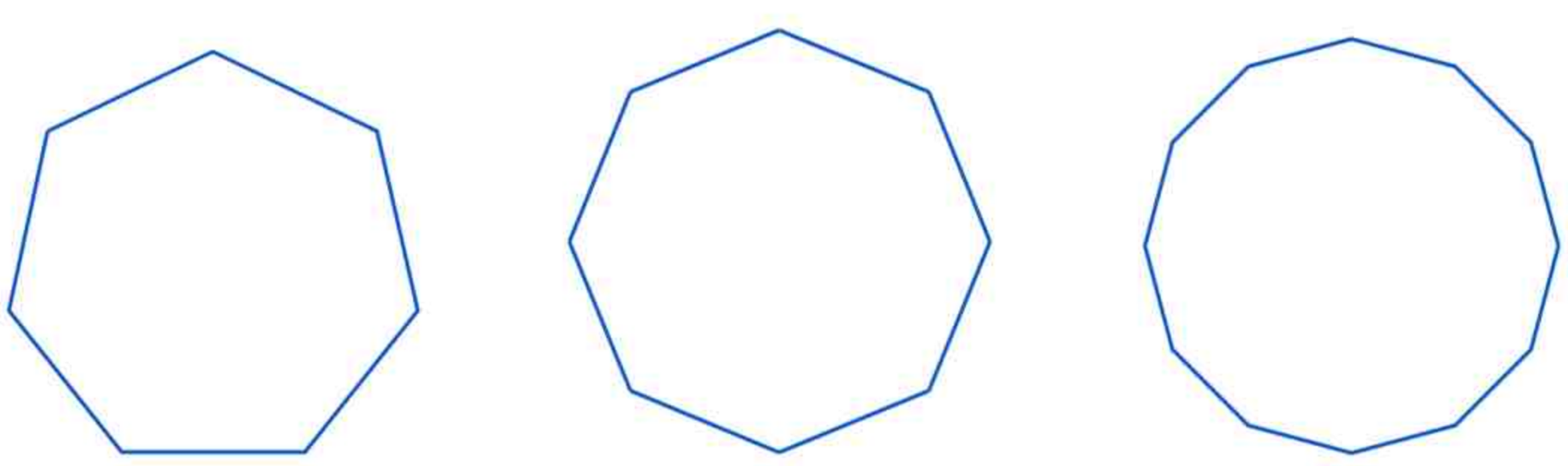
Niektóre z wielokątów mają bardzo regularny kształt. Na przykład wśród czworokątów wyróżnia się kwadrat. Boki kwadratu są jednakowej długości, a kąty mają jednakową miarę. Podobną własność ma także trójkąt równoboczny.

Wielokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości i wszystkie kąty jednakowej miary, nazywamy **wielokątem foremnym**.

Oto przykłady wielokątów foremnych:

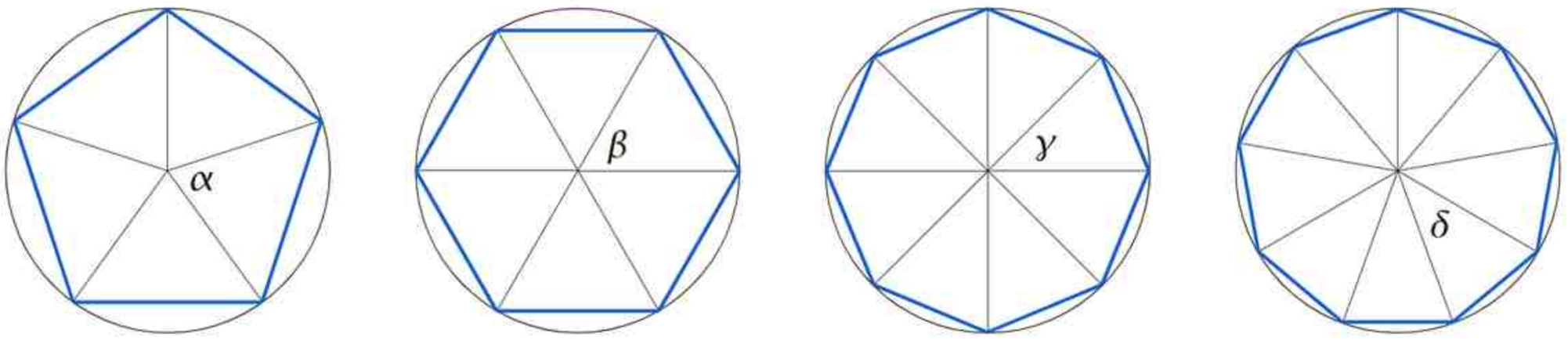


trójkąt foremny | czworokąt foremny | pięciokąt foremny | sześciokąt foremny



siedmiokąt foremny | ośmiokąt foremny | dwunastokąt foremny

Na poniższych rysunkach wierzchołki każdego wielokąta foremnego leżą na okręgu. Odcinki łączące środek okręgu z wierzchołkami dzielą wielokąty na przystające trójkąty równoramienne. Miara każdego z zaznaczonych kątów zależy od liczby boków wielokąta.



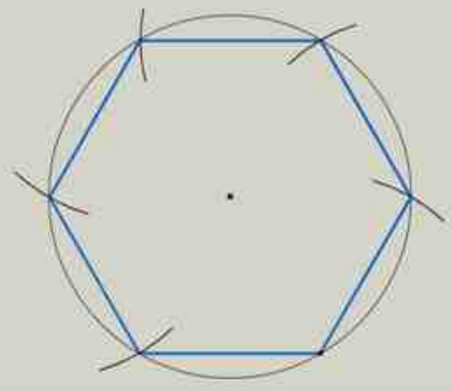
ĆWICZENIE B. Oblicz, jakie miary mają kąty α, β, γ i δ oraz jakie są miary kątów wewnętrznych wielokątów foremnych przedstawionych powyżej.

ĆWICZENIE C. a) Narysuj okrąg i posługując się kątomierzem, podziel go na pięć równych części, a następnie narysuj odpowiedni pięciokąt foremny.

b) Narysuj okrąg oraz sześciokąt foremny o wierzchołkach leżących na tym okręgu. Czy potrafisz to zrobić bez posługiwania się kątomierzem?

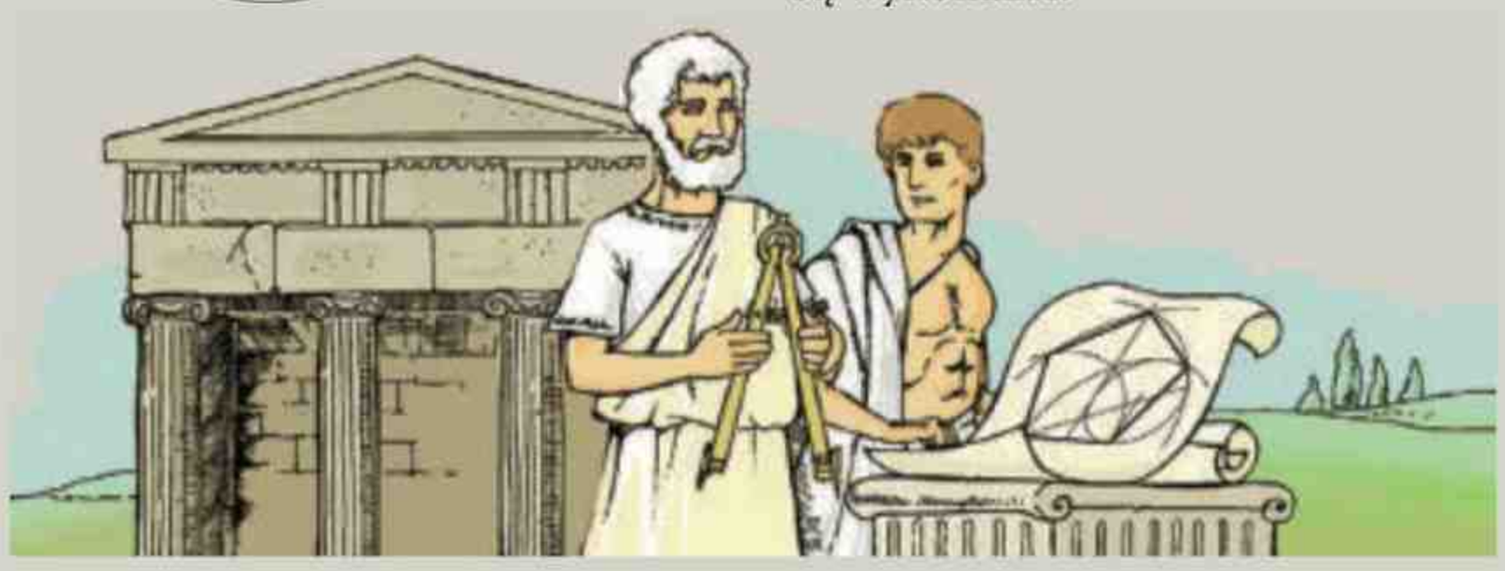
Ciekawostka

Niektóre wielokąty foremne można skonstruować, używając tylko cyrkla i linijki. Wiemy już, jak skonstruować trójkąt równoboczny i kwadrat. Łatwo jest także skonstruować sześciokąt foremny. Wystarczy narysować okrąg, i — nie zmieniając rozpiętości cyrkla — wyznaczyć na okręgu kolejnych sześć punktów, a następnie je połączyć.



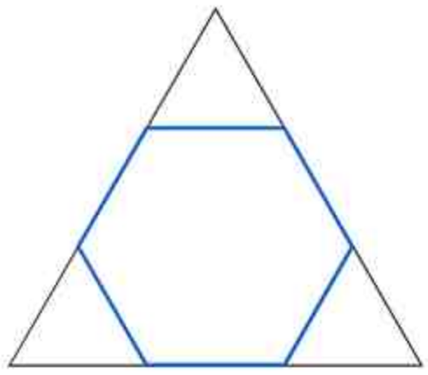
Konstrukcje wielokątów foremnych za pomocą cyrkla i linijki pasjonowały już starożytnych Greków. Potrafili oni skonstruować trójkąt równoboczny, kwadrat, sześciokąt foremny i ośmiokąt foremny. Znali także konstrukcję pięciokąta i dziesięciokąta foremnego.

Nie wiedzieli jednak, jak za pomocą cyrkla i linijki skonstruować siedmiokąt foremny i dziewięciokąt foremny. Przez ponad 2000 lat wielu matematyków starało się rozwiązać to zadanie. Dopiero w XIX wieku udowodniono, że rozwiązania nie ma — konstrukcje te za pomocą cyrkla i linijki nie są wykonalne.

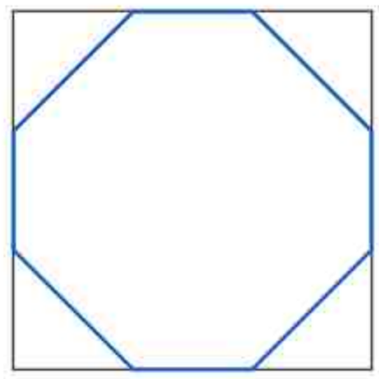


Zadania

1. Przyjrzyj się poniższym rysunkom.

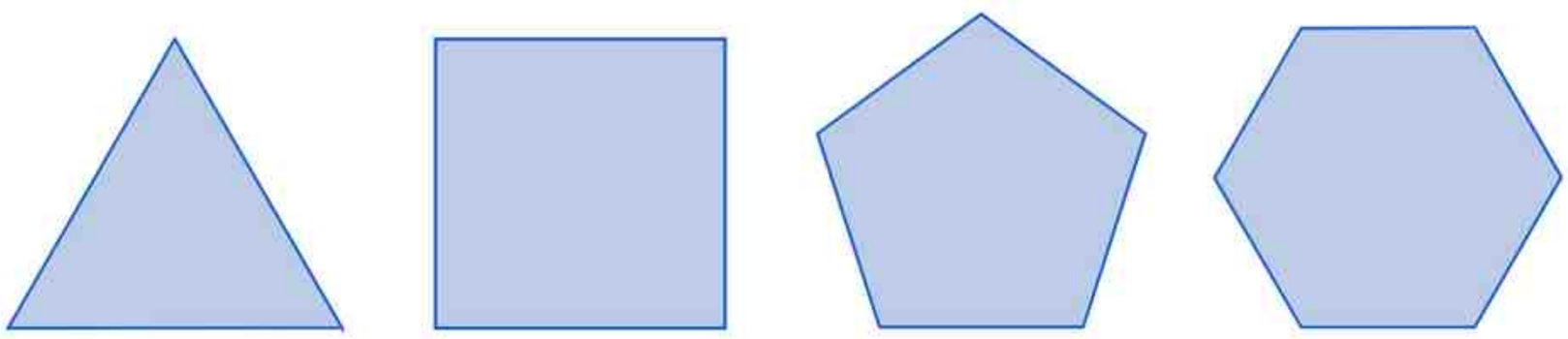


Wierzchołki sześciokąta dzielą boki trójkąta równobocznego na trzy równe części. Czy sześciokąt ten jest foremny?



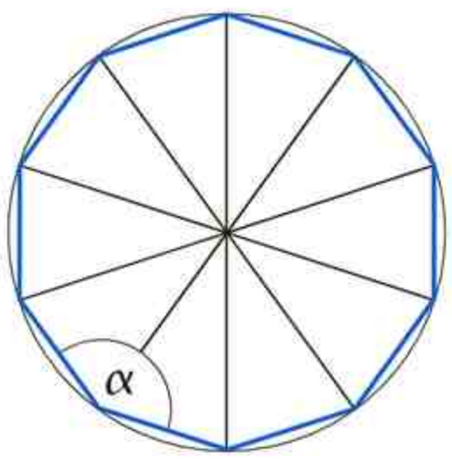
Wierzchołki ośmiokąta dzielą boki kwadratu na trzy równe części. Czy ośmiokąt ten jest foremny?

2. Jakie miary mają kąty wewnętrzne w narysowanych wielokątach foremnych?



3. Dłuższa przekątna sześciokąta foremnego ma 2 cm. Jaki obwód ma ten sześciokąt?

4. Przedstawiony na rysunku obok dziesięciokąt foremny został podzielony na dziesięć przystających trójkątów równoramiennych. Jakie miary mają kąty tych trójkątów? Jaką miarę ma kąt wewnętrzny dziesięciokąta foremnego?



5. Wierzchołki pewnego wielokąta foremnego leżą na okręgu o środku S. Cięciwa AB jest bokiem tego wielokąta. Jaką miarę ma kąt wewnętrzny tego wielokąta, jeśli kąt ASB ma miarę α?

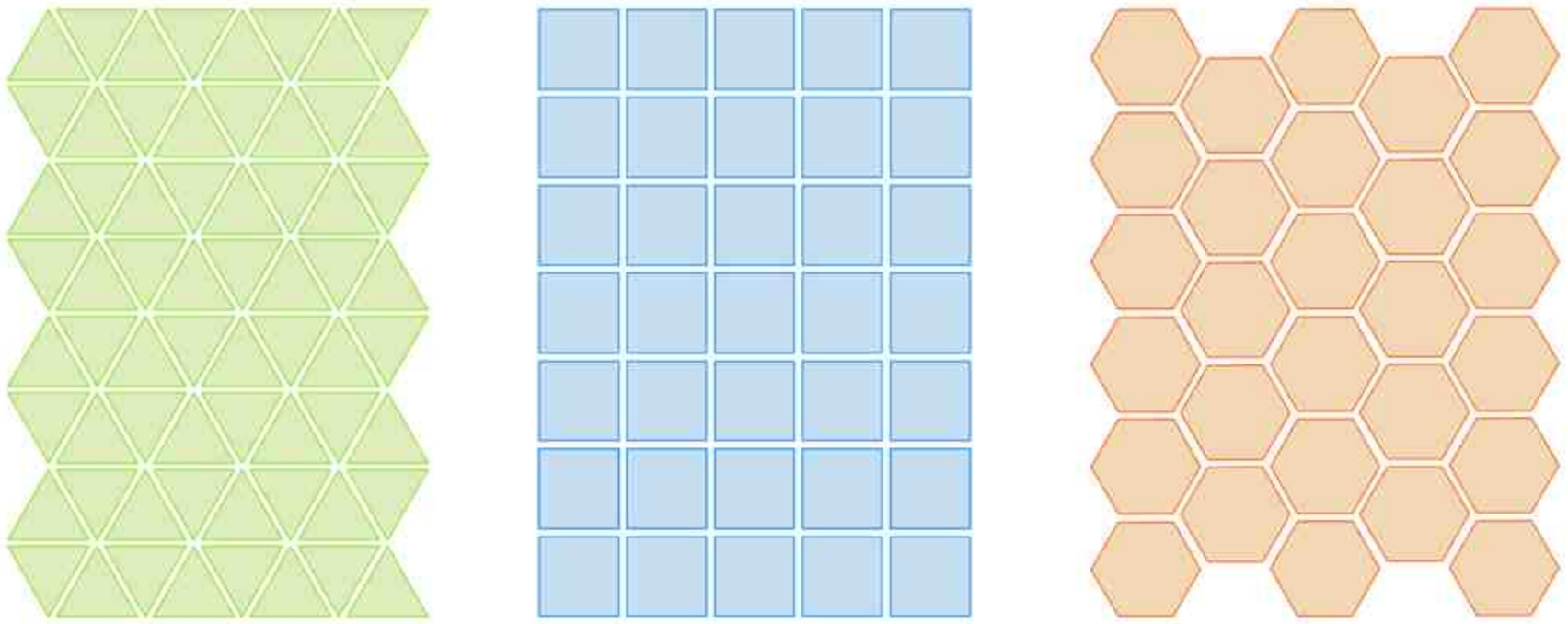
6. Podaj, jaką miarę ma kąt wewnętrzny:

a) ośmiokąta foremnego,
b) dwunastokąta foremnego,
c) osiemnastokąta foremnego,
d) stukąta foremnego.

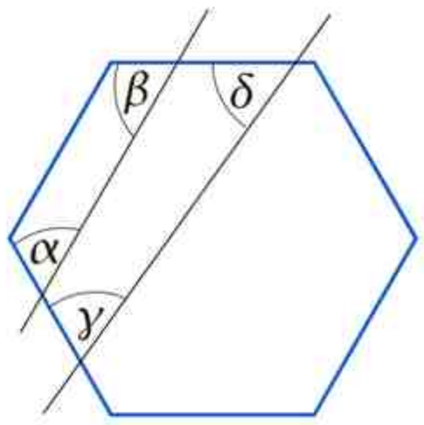
7. a) Kąt wewnętrzny pewnego wielokąta foremnego ma miarę 170°. Ile boków ma ten wielokąt?

b) Czy istnieje wielokąt foremny o kącie wewnętrznym 130°?

8. Na rysunku przedstawione są fragmenty posadzek ułożonych z płytek w kształcie trójkątów, czworokątów i sześciokątów foremnych. Czy podobną posadzkę można ułożyć z pięciokątów foremnych?



Wskazówka. Zastanów się, jaką miarę ma kąt wewnętrzny pięciokąta foremnego.



9. Na rysunku obok przedstawiono sześciokąt foremny przecięty dwiema prostymi. Uzasadnij, że suma miar kątów α i β jest równa 120° oraz że suma miar kątów α i β jest równa sumie miar kątów γ i δ.

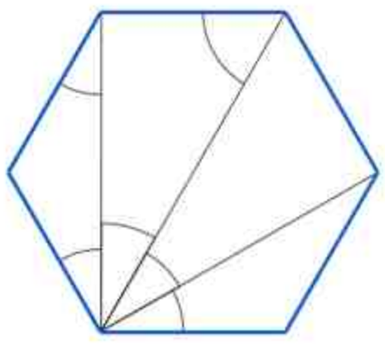
10. Z jednego z wierzchołków pięciokąta foremnego poprowadzono przekątne, które podzieliły kąt wewnętrzny pięciokąta na trzy kąty. Uzasadnij, że te kąty mają równe miary.

***11.** Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami wielokąta foremnego, którego kąt wewnętrzny ma miarę α. Jaką miarę ma kąt ostry między przekątnymi AC i BD?

Sprawdź, czy umiesz

1. Na rysunku przedstawiono sześciokąt foremny i zaznaczono w nim sześć kątów. Ile z zaznaczonych kątów ma 30°?

A. trzy
B. cztery
C. pięć
D. wszystkie

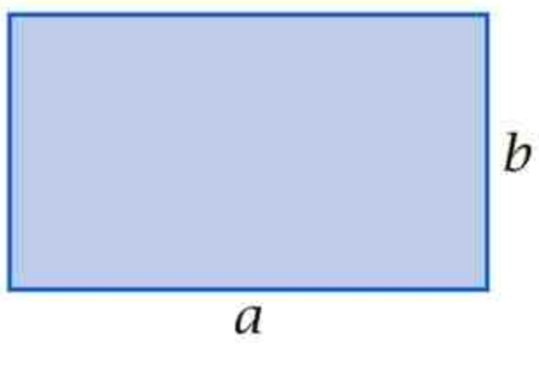


2. Kąt wewnętrzny dziewięciokąta foremnego ma miarę:

A. 100° B. 40° C. 70° D. 140°

zadania uzupełniające 26–29, str. 150

7 Pole prostokąta. Jednostki pola



Wzór na pole prostokąta jest ci zapewne doskonale znany.

Pole prostokąta: $P = a \cdot b$

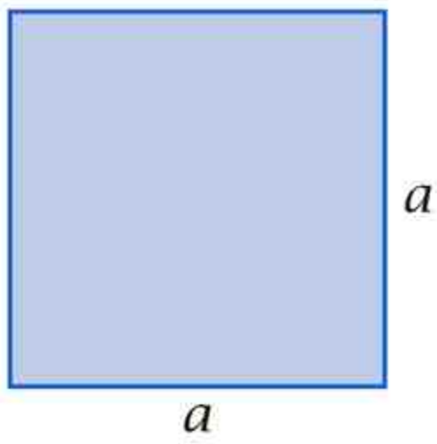
a, b — długości sąsiednich boków prostokąta

Uwaga. Przed skorzystaniem z tego wzoru należy się upewnić, czy długości boków prostokąta są wyrażone w tych samych jednostkach.

Ponieważ kwadrat jest prostokątem o bokach równej długości, więc pole kwadratu o boku a jest równe $a \cdot a$. Zatem obliczając pole kwadratu, możemy stosować wzór:

Pole kwadratu: $P = a^2$

a — długość boku kwadratu



ĆWICZENIE. Narysuj kwadrat o polu 1 dm^2.

a) Wyraź pole tego kwadratu w centymetrach kwadratowych.

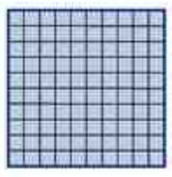
b) Ile milimetrów ma bok tego kwadratu? Wyraź pole tego kwadratu w milimetrach kwadratowych.

c) Wyraź długość boku tego kwadratu w metrach. Ile metrów kwadratowych ma pole tego kwadratu?

Najczęściej używanymi jednostkami pola są:

- 1 milimetr kwadratowy (1 mm^2)
- 1 centymetr kwadratowy (1 cm^2)
- 1 decymetr kwadratowy (1 dm^2)
- 1 metr kwadratowy (1 m^2)
- 1 kilometr kwadratowy (1 km^2)

Zależności między jednostkami pola wynikają z zależności między jednostkami długości.



$1\,cm^2 = 100\,mm^2$

$1\,cm = 10\,mm$

Zatem:

$\mathbf{1\,cm^2} = 10\,mm \cdot 10\,mm = \mathbf{100\,mm^2}$



$1\,mm^2 = 0{,}01\,cm^2$

$1\,mm = \frac{1}{10}\,cm$

Zatem:

$\mathbf{1\,mm^2} = \frac{1}{10}\,cm \cdot \frac{1}{10}\,cm = \frac{1}{100}\,cm^2 = \mathbf{0{,}01\,cm^2}$

$1\,\text{m} = 100\,\text{cm}$

Zatem:

$$\mathbf{1\,m^2} = 100\,\text{cm} \cdot 100\,\text{cm} = \mathbf{10\,000\,cm^2}$$

$$1\,\text{cm} = \frac{1}{100}\,\text{m}$$

Zatem:

$$\mathbf{1\,cm^2} = \frac{1}{100}\,\text{m} \cdot \frac{1}{100}\,\text{m} = \frac{1}{10\,000}\,\text{m}^2 = \mathbf{0{,}0001\,m^2}$$

Postępując w podobny sposób, otrzymamy:

$$1\,\text{dm}^2 = \underbrace{100}_{10 \cdot 10}\,\text{cm}^2 \qquad 1\,\text{km}^2 = \underbrace{1\,000\,000}_{1000 \cdot 1000}\,\text{m}^2$$

$$1\,\text{cm}^2 = \underbrace{0{,}01}_{0{,}1 \cdot 0{,}1}\,\text{dm}^2 \qquad 1\,\text{m}^2 = \underbrace{0{,}000001}_{0{,}001 \cdot 0{,}001}\,\text{km}^2$$

Przykład

Okno ma powierzchnię $0{,}8\,\text{m}^2$. Ile to centymetrów kwadratowych?

$1\,\text{m}^2 = 100\,\text{cm} \cdot 100\,\text{cm} = 10\,000\,\text{cm}^2$ | $1\,\text{m} = 100\,\text{cm}$

$0{,}8\,\text{m}^2 = 0{,}8 \cdot 1\,\text{m}^2 = 0{,}8 \cdot 10\,000\,\text{cm}^2 = 8000\,\text{cm}^2$

Odp. Okno ma powierzchnię $8000\,\text{cm}^2$.

Przykład

Pewne boisko piłkarskie ma powierzchnię $4500\,\text{m}^2$. Ile to kilometrów kwadratowych?

$1\,\text{m}^2 = \frac{1}{1000}\,\text{km} \cdot \frac{1}{1000}\,\text{km} = 0{,}000001\,\text{km}^2$

$4500\,\text{m}^2 = 4500 \cdot 1\,\text{m}^2 = 4500 \cdot 0{,}000001\,\text{km}^2 = 0{,}0045\,\text{km}^2$

Odp. Powierzchnia boiska wynosi $0{,}0045\,\text{km}^2$.

$1\ \text{a} = 100\ \text{m}^2$

$1\ \text{ha} = 100\ \text{a} = 10\,000\ \text{m}^2$

Powierzchnie działek, pól uprawnych, gruntów itp. podaje się często w arach lub hektarach.
1 ar (1 a) to pole kwadratu o boku długości 10 m,
1 hektar (1 ha) to pole kwadratu o boku 100 m.

Warto zapamiętać, że pas ziemi uprawnej o wymiarach 1 m × 100 m ma powierzchnię 1 a, zaś 100 takich pasów to 1 ha.

Przykład

a) Działka budowlana ma powierzchnię $850\ \text{m}^2$. Ile to arów?

$$1\ \text{m}^2 = \frac{1}{100}\ \text{a}$$

$$850\ \text{m}^2 = 850 \cdot \frac{1}{100}\ \text{a} = 8{,}5\ \text{a}$$

Odp. Działka ma powierzchnię 8,5 a.

b) Pole uprawne ma powierzchnię $7200\ \text{m}^2$. Ile to hektarów?

$$1\ \text{m}^2 = \frac{1}{10\,000}\ \text{ha}$$

$$7200\ \text{m}^2 = 7200 \cdot \frac{1}{10\,000}\ \text{ha} = 0{,}72\ \text{ha}$$

Odp. Pole uprawne ma powierzchnię 0,72 ha.

Zadania

1. Oblicz pola prostokątów o wymiarach:
a) 3 cm × 3 mm
b) 2 km × 10 m
c) 100 m × 100 cm
d) 0,5 dm × 50 cm

30/150

2. Słynny obraz Jana Matejki „Bitwa pod Grunwaldem" ma wymiary 426 cm × 987 cm. Jaką powierzchnię ma ten obraz w metrach kwadratowych? Wynik zaokrąglij do jedności.

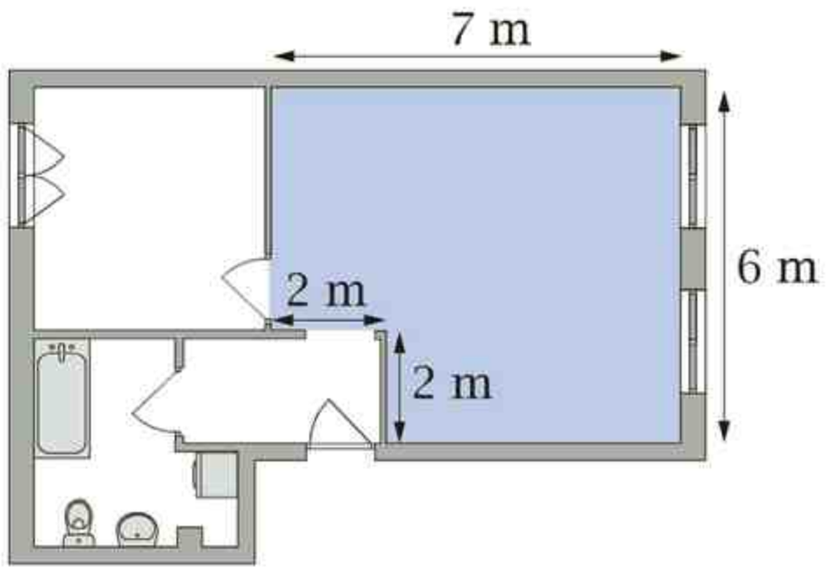
3. a) Jakie jest pole kwadratu o obwodzie 64 cm?
b) Jaki obwód ma kwadrat o polu 64 cm^2?

4. Ile jest różnych (nieprzystających) prostokątów o polu 36 cm^2, których boki mają długości wyrażające się całkowitą liczbą centymetrów?



5. Korektor do zamalowywania błędów to taśma o długości 12 m i szerokości 4,2 mm. Czy taśmy tej wystarczy do zamalowania całej kartki formatu A4 (210 mm × 297 mm)?

6. Na rysunku przedstawiono plan pewnego mieszkania. Jaką powierzchnię ma pomieszczenie zaznaczone na niebiesko?



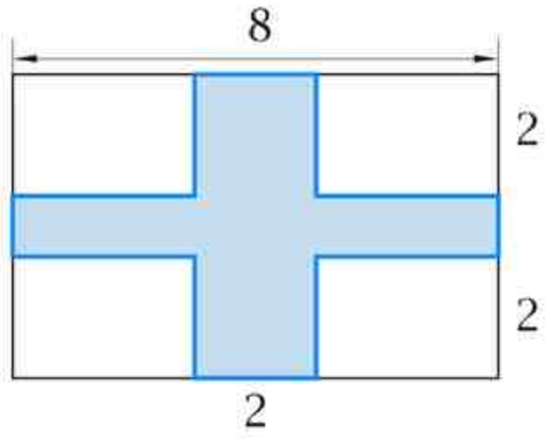


7. a) Wykładzina „Alik” ma 2,4 m szerokości i kosztuje 36,60 zł za 1 metr bieżący. Ile kosztuje metr kwadratowy tej wykładziny?

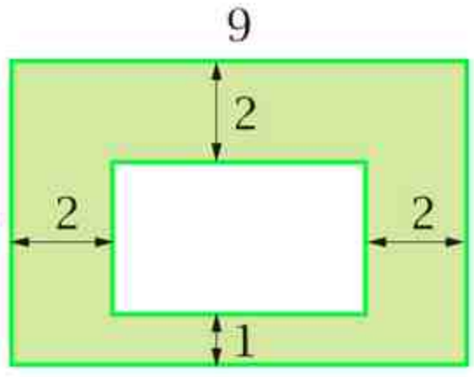
b) Wykładzina „Bielik” ma 2,5 m szerokości i kosztuje 14,80 zł za 1 metr kwadratowy. Ile kosztuje metr bieżący tej wykładziny?

8. Oblicz pola zamalowanych figur.

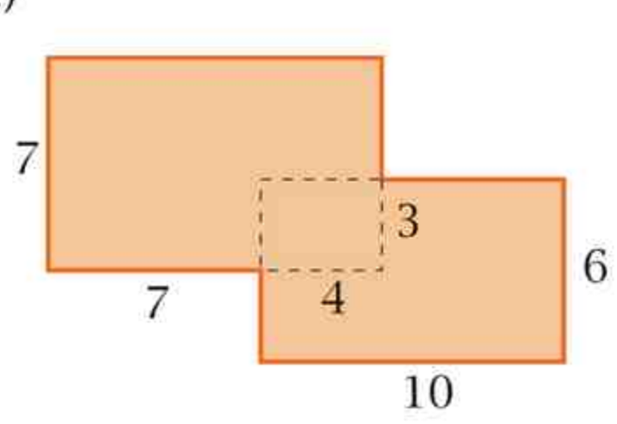
a)



b)



c)

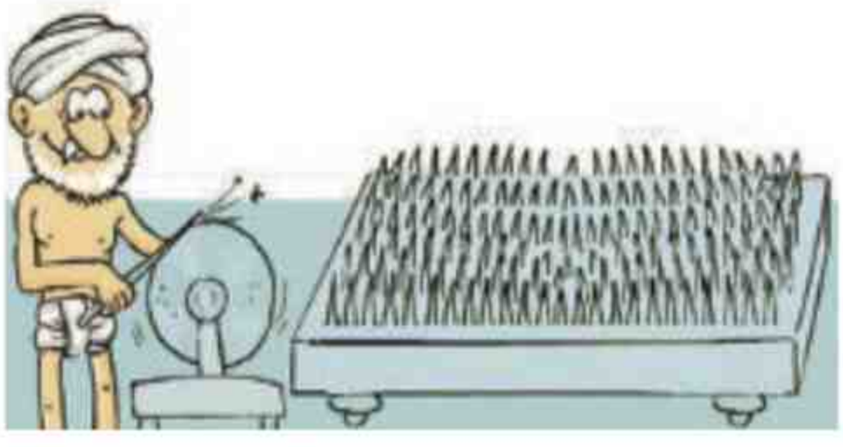


9. Wyraź podane powierzchnie we wskazanej jednostce.

a) [cm^2] 27,5 dm^2 2,5 m^2 0,1 m^2 1500 mm^2

b) [m^2] 0,5 km^2 2 km^2 12500 cm^2 2500 dm^2

31/150



10. Fakir położył się na 500 gwoździach, a czubek każdego gwoździa ma powierzchnię 1 mm^2. Ile centymetrów kwadratowych mają w sumie wszystkie czubki tych gwoździ?

Ciekawostka

Dodanie przedrostka hekto- do nazwy jednostki oznacza powiększenie tej jednostki sto razy. Tak więc: hektar (hekto + ar) oznacza sto arów. (Podobnie hektolitr to sto litrów, a hektopaskal — sto paskali).

Słowo *ar* pochodzi od łacińskiego słowa *area* oznaczającego plac, klepisko, boisko. Od tego samego łacińskiego słowa pochodzi też słowo *areał*, którego w języku polskim używamy na określenie obszaru, np. w rolnictwie i leśnictwie.

11. a) Zamień na ary.
0,02 ha 3200 m^2 0,5 km^2

b) Zamień na hektary.
320000 m^2 800 a 0,7 km^2

c) Zamień na metry kwadratowe.
250 a 0,4 ha $\frac{1}{4}$ a 2,7 ha

d) Zamień na kilometry kwadratowe.
150 ha 1 000 000 a 45 ha

32/150

SPRZEDAM

Działkę 12 a otoczoną Kaszubskim Parkiem Krajobrazowym u stóp góry Wieżyca. Cena 131 000 zł.

Bieszczady – działkę 6,5 ha w pięknym miejscu, widok na połoniny, cena 452 tys. zł.



Charzykowy – Park Narodowy Bory Tucholskie, działka nad jeziorem, 64 a, cena 350 000 zł.

12. Przeczytaj ogłoszenia. Która działka ma najniższą cenę za 1 m^2?

13. a) Powierzchnia skrzydeł muchy wynosi ok. 0,13 cm^2. Ile to milimetrów kwadratowych?

b) Największy skonstruowany na świecie latawiec miał powierzchnię 0,553 ara. Ile to metrów kwadratowych?

c) Skrzydła samolotu Boeing 747 B mają powierzchnię 511 m^2. Ile to arów?

d) Państwo Watykan ma powierzchnię 44 ha. Ile to kilometrów kwadratowych?

e) Jezioro Śniardwy ma powierzchnię 113,83 km^2. Ile to hektarów?

f) Pałac cesarski w Pekinie zbudowano na planie prostokąta o wymiarach 960 m × 750 m. Wyraź w hektarach powierzchnię zajmowaną przez ten pałac.

14. Jeden cal ma 2,54 cm, a jedna stopa to 12 cali. Ile centymetrów kwadratowych ma cal kwadratowy, a ile stopa kwadratowa?

15. Jedna mila to 1760 jardów. Jeden akr to 4840 jardów kwadratowych. Jedna mila kwadratowa — ile to jardów kwadratowych, a ile akrów?

Ciekawostka

W krajach anglosaskich do dziś często używa się dawnych jednostek pola — akrów. Jeden akr określany był jako obszar, który można w ciągu jednego dnia zaorać parą wołów. (1 akr ≈ 0,4 ha)

16. a) Powierzchnia Polski wynosi 312 683 km^2, a liczba ludności — około 38,6 mln. Ile hektarów powierzchni przypada na jednego mieszkańca?

b) Jednym z najgęściej zaludnionych państw na świecie jest Bangladesz. Jego powierzchnia wynosi 144 tys. km^2 i mieszka w nim ok. 120 mln ludzi. Ile hektarów powierzchni Bangladeszu przypada na jednego mieszkańca?

c) Jednym z najmniej zaludnionych krajów na świecie jest Namibia. Na jednego mieszkańca przypada tam 40,6 ha. Liczba ludności wynosi 2,03 mln. Ile kilometrów kwadratowych ma powierzchnia Namibii?

d) W Boliwii na jednego mieszkańca przypada ok. 0,14 km^2 powierzchni państwa. Ile to hektarów? Powierzchnia Boliwii wynosi 1084 tys. km^2. Ile osób mieszka w Boliwii?

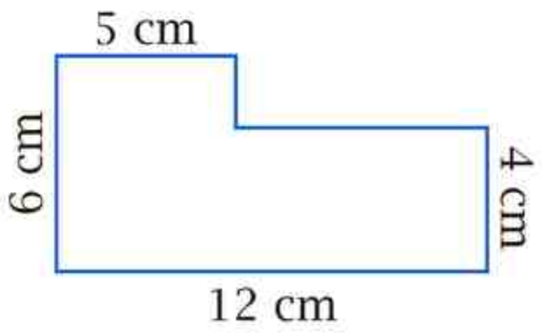
Sprawdź, czy umiesz

1. Powierzchnia 12,34 km^2 to:

A. 12 340 m^2
B. 123 400 m^2
C. 1 234 000 m^2
D. 12 340 000 m^2

2. Jeden bok prostokąta o polu 36 cm^2 ma długość 4 mm. Jaką długość ma drugi bok?

A. 0,009 m B. 0,9 m C. 9 m D. 90 m



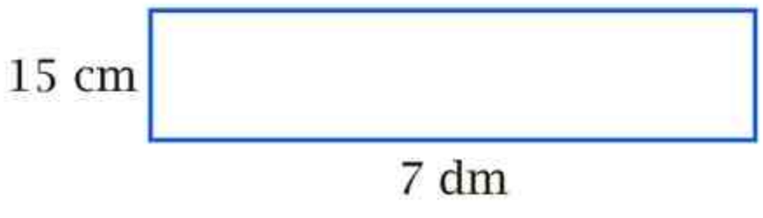
3. W figurze narysowanej obok sąsiednie boki są prostopadłe. Jakie pole ma ta figura?

A. 58 cm^2 B. 52 cm^2 C. 78 cm^2
D. Nie można tego policzyć — na rysunku podano za mało informacji.

4. Która z podanych powierzchni jest największa?

A. 0,5 ha B. 60 a C. 7000 m^2 D. 0,04 km^2

5. Pole prostokąta przedstawionego na rysunku obok jest równe:



A. 1,05 dm^2
B. 105 cm^2
C. 0,105 m^2
D. 10 500 m^2

→ zadania uzupełniające 30–35, str. 150–151

8 Pola wielokątów

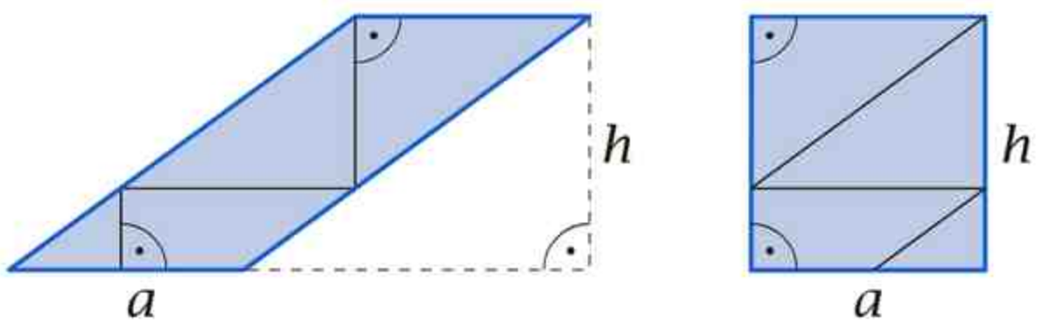
Na rysunku obok figura oraz kwadrat złożone są z jednakowych elementów. Zatem pole tej figury równe jest polu kwadratu. Tę obserwację będziemy wykorzystywać w dalszej części rozdziału.



Ciekawostka

Siedem elementów, z których zbudowane są obie figury, to tangram — stara chińska układanka. O pochodzeniu tangramu krąży wiele legend. Jedna z nich mówi, że jego pierwowzorem był zestaw siedmiu stolików, używany w czasach dynastii Song (X–XIII w.), których blaty miały właśnie takie kształty jak klocki tangramu. Stoliki te zestawiano w różny sposób, tworząc jeden stół, który mógł mieć blat w kształcie kwadratu lub innych figur. Tyle legenda, a pewne jest jedynie to, że pierwsza pisemna wzmianka o tangramie pojawiła się w 1913 roku w książce wydanej w Chinach.

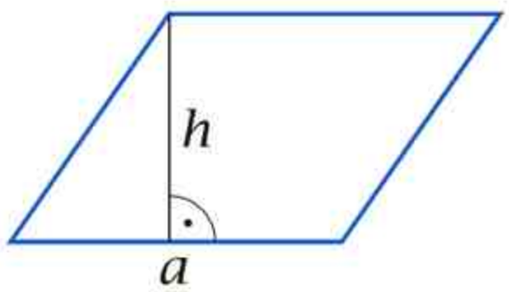
Przyjrzyj się rysunkom. Pokazano na nich, jak można podzielić równoległobok, aby z otrzymanych części złożyć prostokąt. W podobny sposób można podzielić każdy równoległobok na odpowiednio wiele części.



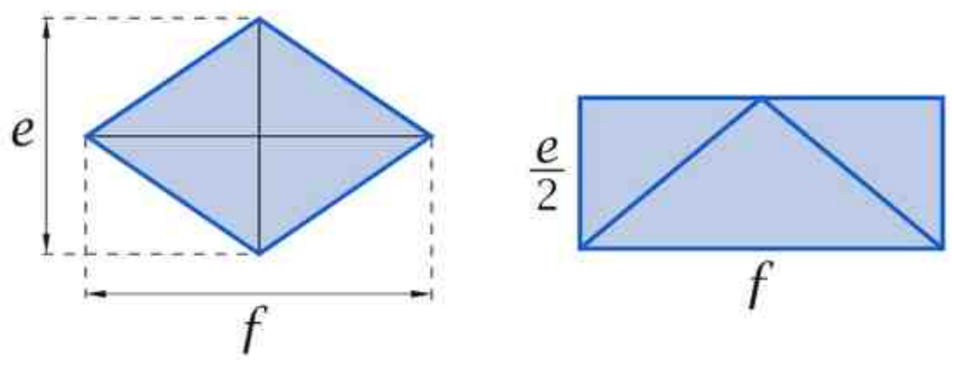
Równoległobok i prostokąt są złożone z tych samych elementów. Wynika stąd, że równoległobok o boku a i wysokości h ma takie samo pole jak prostokąt o bokach długości a i h.

Pole równoległoboku: $\boldsymbol{P = a \cdot h}$

a — długość boku równoległoboku
h — wysokość równoległoboku opuszczona na ten bok



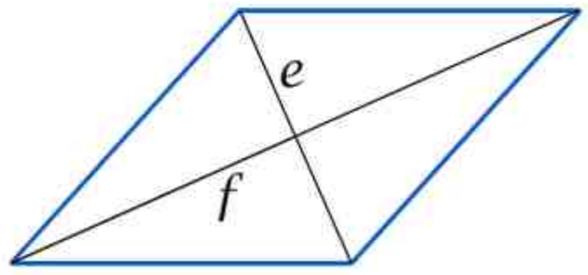
Romb to też równoległobok, więc jego pole możemy obliczać, korzystając z powyższego wzoru. Pole rombu możemy także obliczyć, gdy znamy długości jego przekątnych.



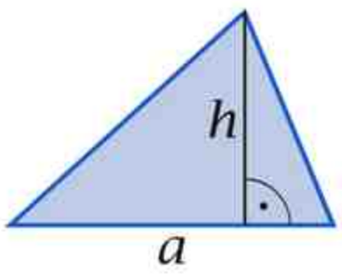
Romb o przekątnych długości e i f ma takie samo pole jak prostokąt o bokach długości $\frac{e}{2}$ i f.

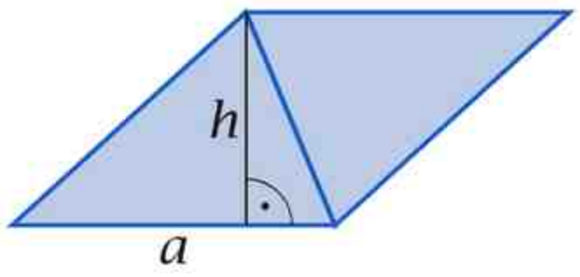
Pole rombu: $P = \frac{e \cdot f}{2}$

e, f – długości przekątnych rombu



Na poniższych rysunkach przedstawiony jest trójkąt oraz równoległobok złożony z dwóch takich trójkątów.



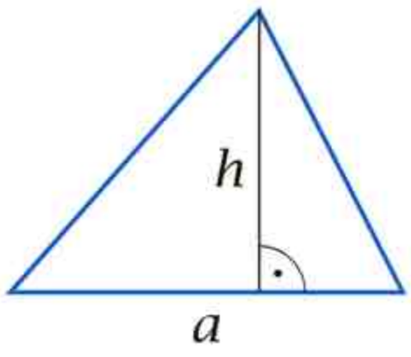


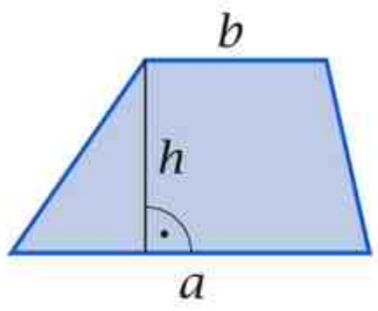
Pole trójkąta o podstawie długości a i wysokości h jest dwa razy mniejsze od pola równoległoboku o boku długości a i wysokości h.

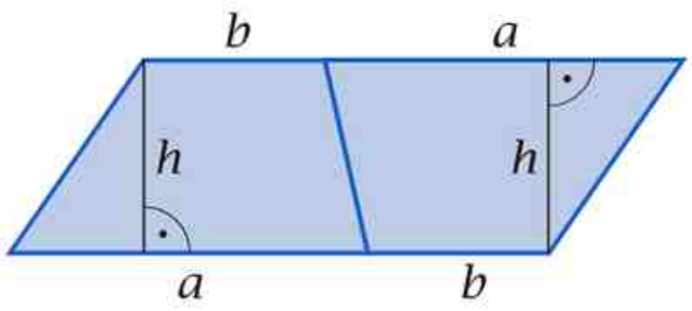
Pole trójkąta: $P = \frac{a \cdot h}{2}$

a — długość podstawy trójkąta

h — wysokość trójkąta opuszczona na tę podstawę





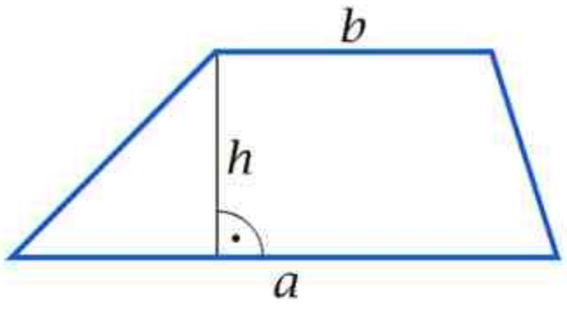


Z dwóch trapezów o podstawach długości a i b oraz wysokości h można złożyć równoległobok o tej samej wysokości i podstawie długości $a + b$.

Pole trapezu: $P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$

a, b — długości podstaw trapezu

h — wysokość trapezu



Ciekawostka

Długość odcinka możemy zmierzyć za pomocą linijki. Mało kto wie, że istnieje przyrząd do mierzenia pól różnych figur. Takie urządzenie, planimetr, wynalazł w roku 1814 niemiecki inżynier J. M. Hermann. Mierzenie pola figury polega na prowadzeniu specjalnego wodzika wzdłuż linii ograniczającej tę figurę.

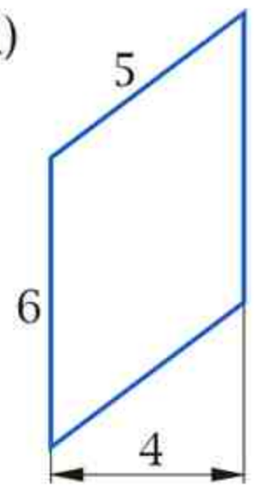
Planimetr najczęściej używany jest przez geodetów do mierzenia pól obszarów zaznaczonych na mapie.



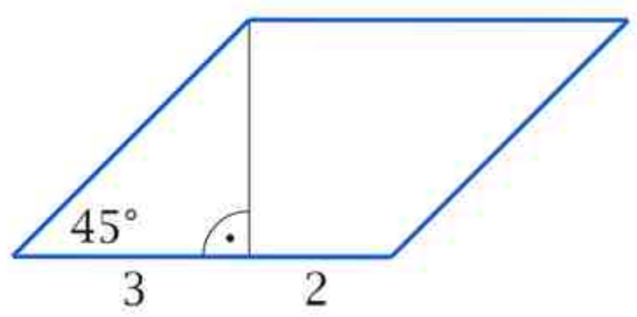
Zadania

1. Oblicz pola równoległoboków narysowanych poniżej.

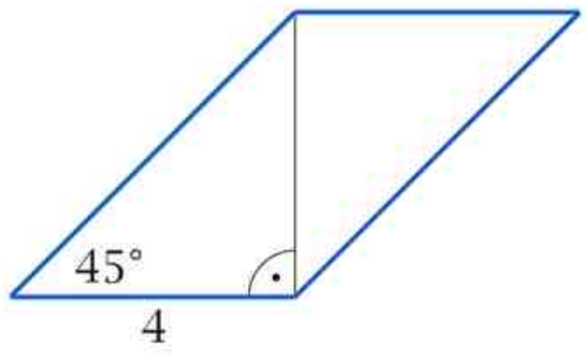
a)



b)



c)



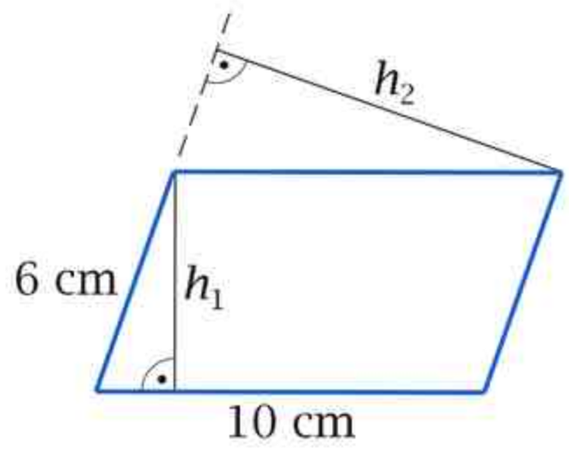
36/151

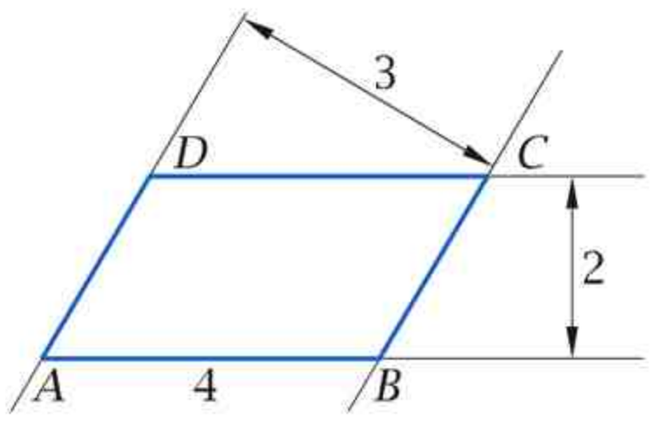
2. Narysuj na kartce w kratkę pięć równoległoboków o polu 5 cm^2.

3. a) Korzystając ze wzoru na pole rombu, oblicz pole kwadratu, którego przekątna ma 6 cm.

b) Czy kwadrat o boku 4 cm ma przekątną dłuższą niż 6 cm?

4. Pole równoległoboku przedstawionego na rysunku jest równe 48 cm^2. Oblicz wysokości h_1 i h_2.



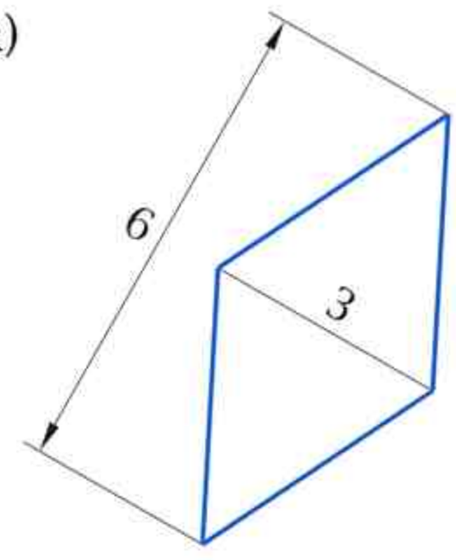


5. Jaką długość ma bok BC równoległoboku $ABCD$ narysowanego obok?

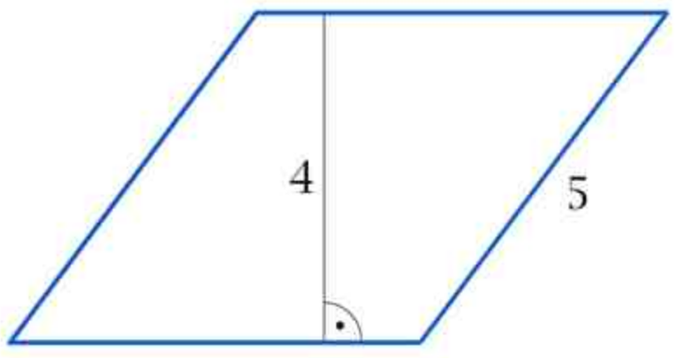
6. W pewnym rombie o boku 5 cm i wysokości 4,8 cm jedna z przekątnych ma 6 cm. Romb rozcięto wzdłuż przekątnych na cztery trójkąty i ułożono z nich prostokąt. Jakie wymiary może mieć ten prostokąt?

7. Oblicz pola rombów przedstawionych na rysunkach.

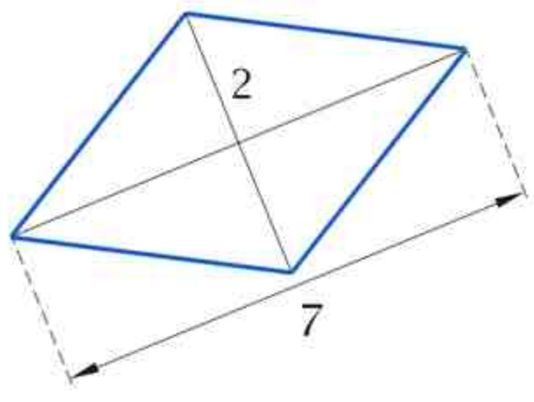
a)



b)

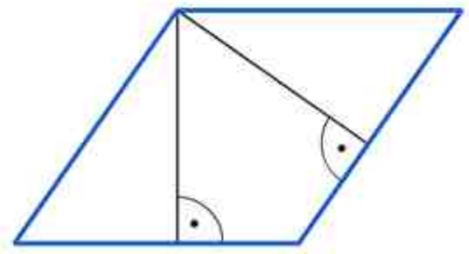


c)

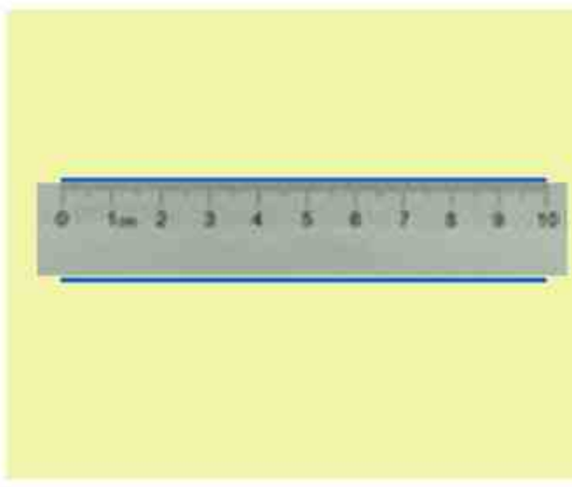


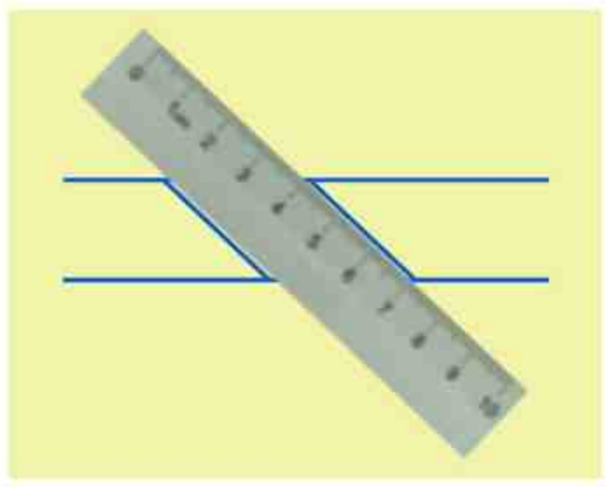
37/151

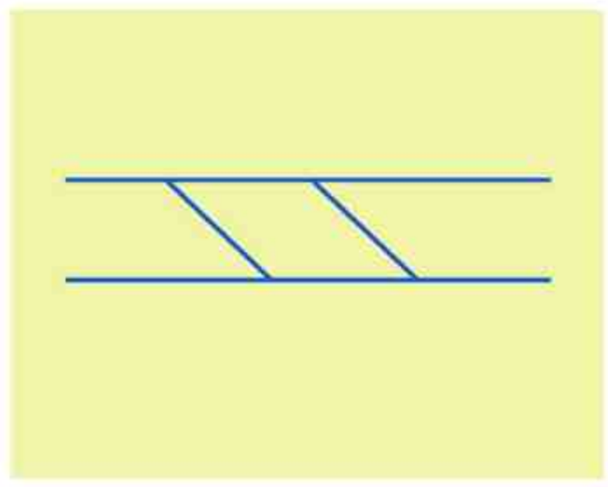
8. Dwie narysowane wysokości równoległoboku przedstawionego obok są równe. Czy wynika stąd, że równoległobok jest rombem? Odpowiedź uzasadnij.



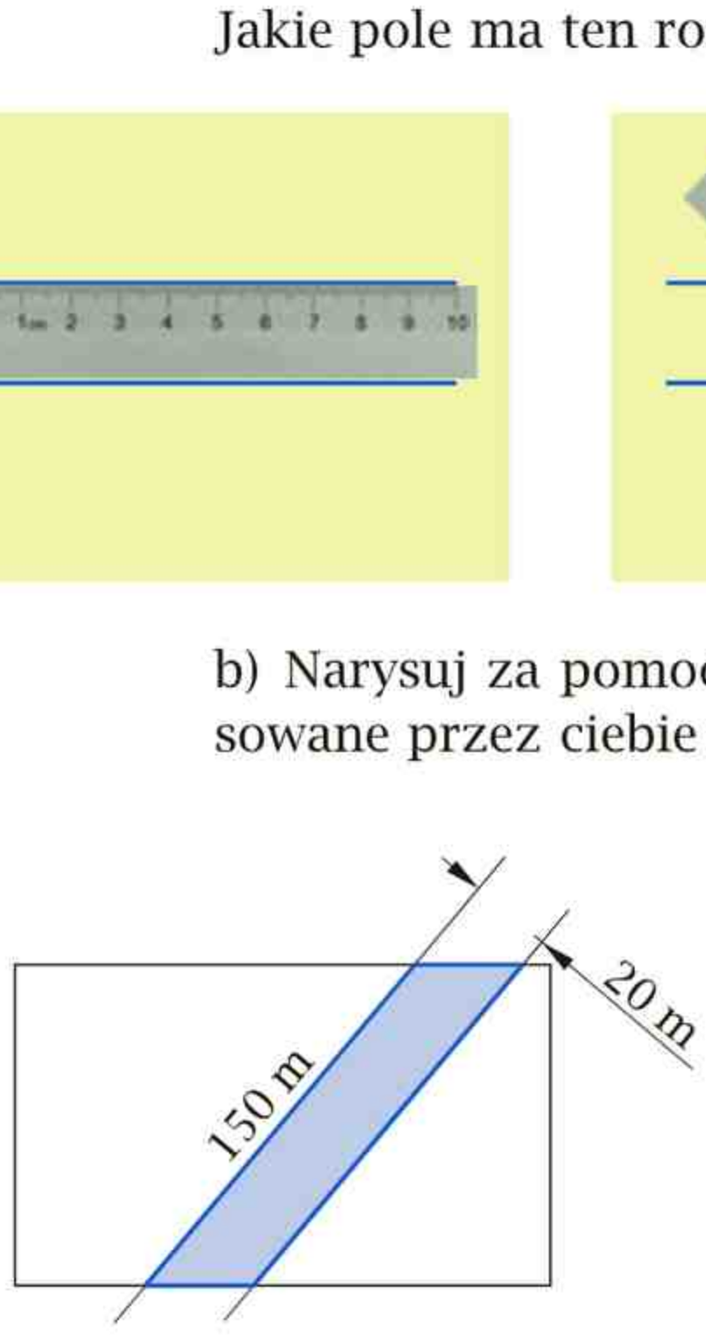
9. a) Marcin wymyślił sposób, jak za pomocą linijki można narysować romb. Na rysunkach pokazano, jak to zrobił. Linijka Marcina miała szerokość 2,5 cm. Jaką wysokość ma narysowany przez niego romb? Jakie pole ma ten romb?





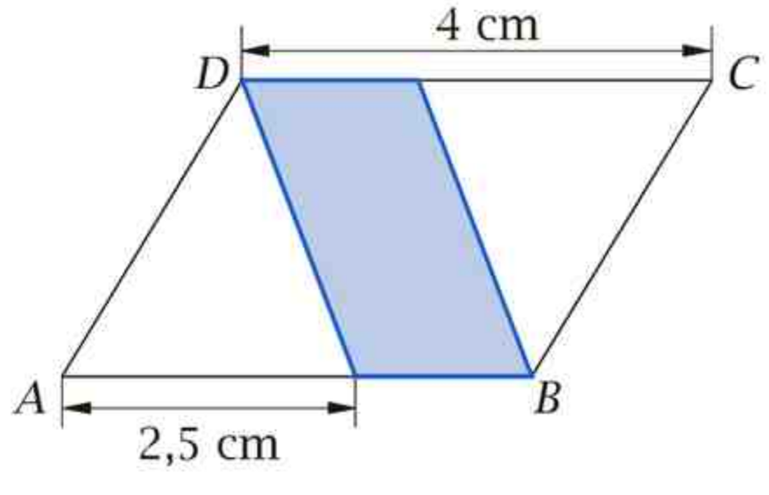


b) Narysuj za pomocą linijki trzy różne romby. Jakie pola mają narysowane przez ciebie figury?



10. Przez prostokątne pole o powierzchni 8 ha przebiegać ma odcinek drogi o długości 150 m i szerokości 20 m (zob. rysunek obok). Ile hektarów pola pozostanie do wykorzystania po przeprowadzeniu tej inwestycji?

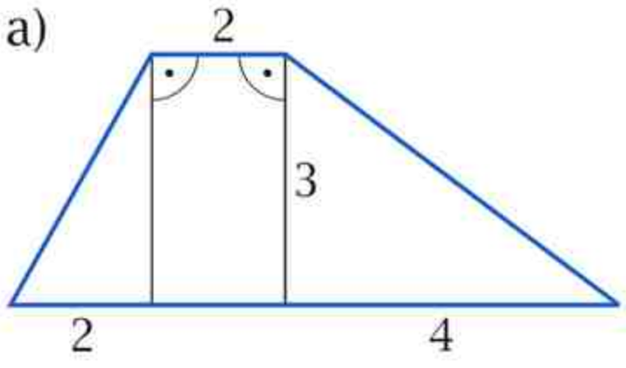
11. Pole równoległoboku $ABCD$ na rysunku obok jest równe 10 cm^2. Oblicz pole zaznaczonego równoległoboku.



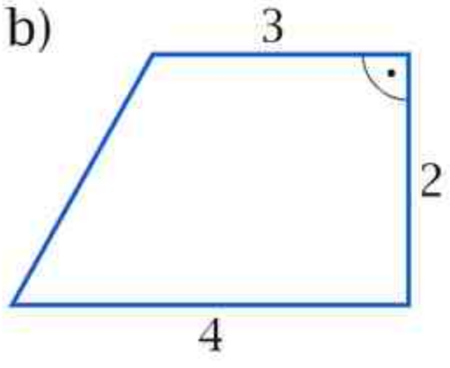
12. Bok rombu ma 5 cm, a wysokość tego rombu wynosi 4,8 cm. Jedna z przekątnych ma 6 cm. Jaką długość ma druga przekątna tego rombu?

13. Oblicz pola trapezów narysowanych poniżej.

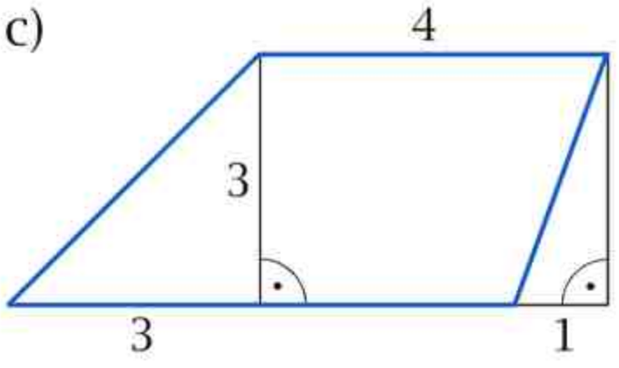
a)



b)



c)



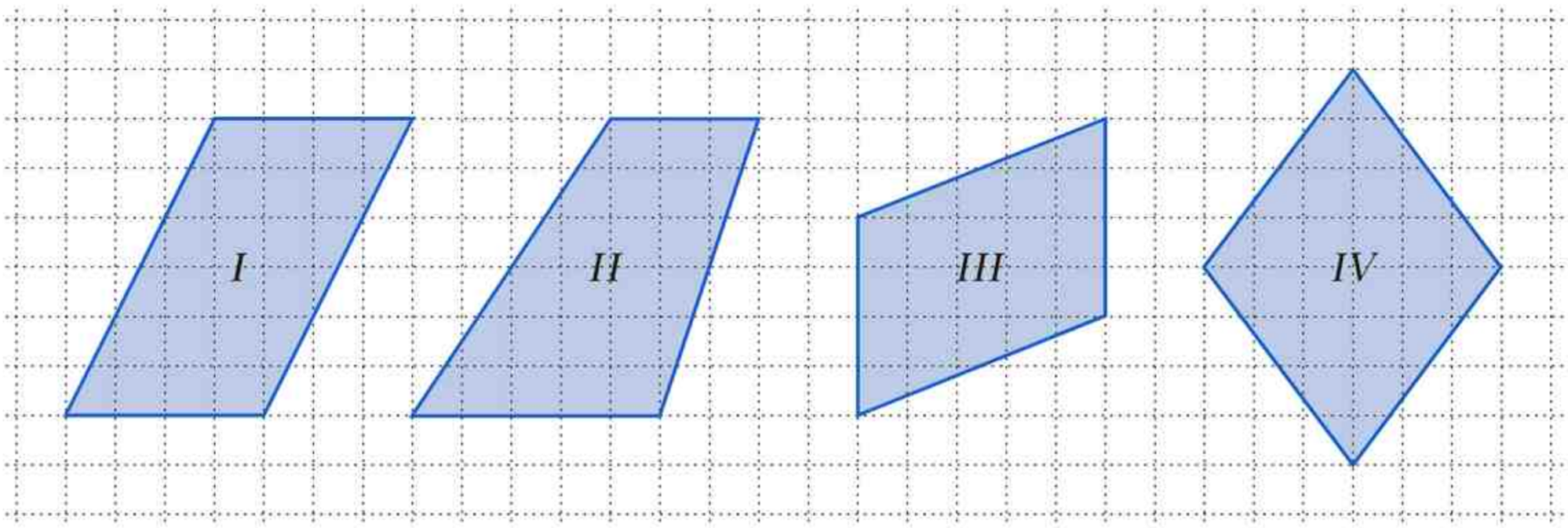
38/151

14. W trapezie równoramiennym podstawy mają długości 3 cm i 7 cm, a kąt przy dłuższej podstawie ma miarę 45°. Oblicz pole tego trapezu.

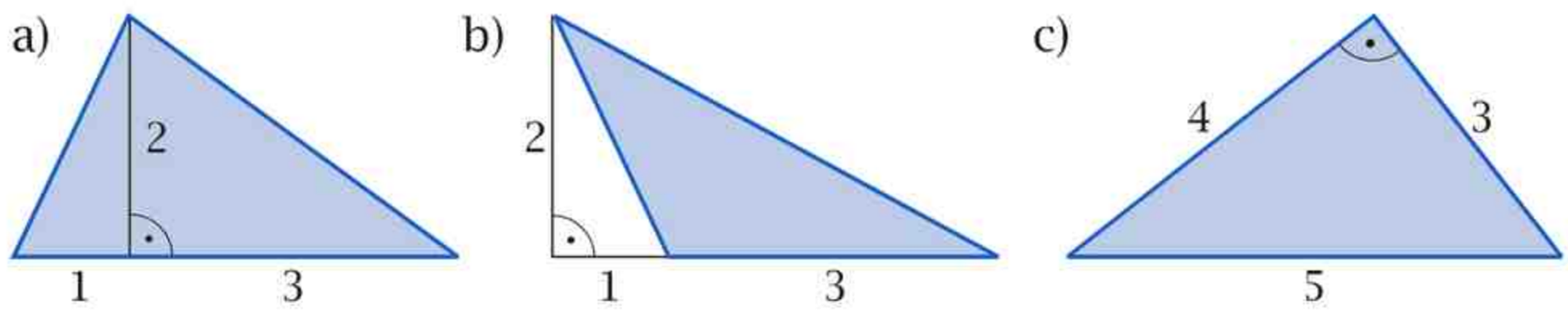
15. Podstawy trapezu mają długości 3 cm i 11 cm, pole wynosi 56 cm^2. Oblicz wysokość tego trapezu.

16. W trapezie równoramiennym ramiona mają długość 7 cm, a wysokość 4 cm. Pole trapezu wynosi 50 cm^2. Jaki jest obwód tego trapezu?

17. Który z narysowanych czworokątów ma najmniejsze pole?



18. Oblicz pola zacieniowanych trójkątów.



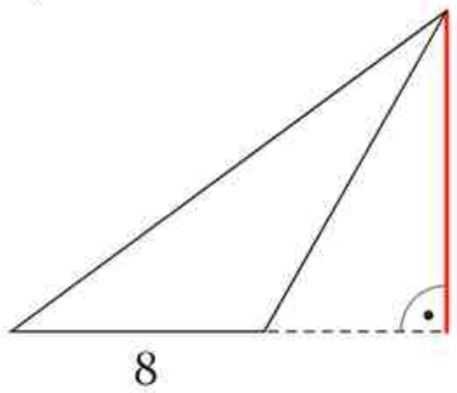
39/151

19. Czy trójkąt, w którym każdy bok ma długość większą od 1 m, może mieć pole równe 1 cm^2?

40/151

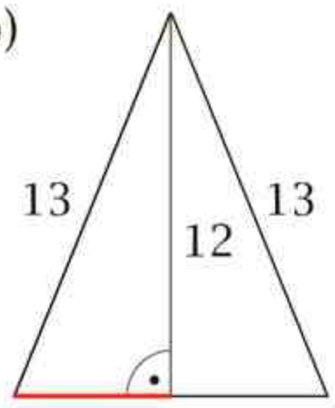
20. Oblicz długości odcinków zaznaczonych kolorem czerwonym.

a)



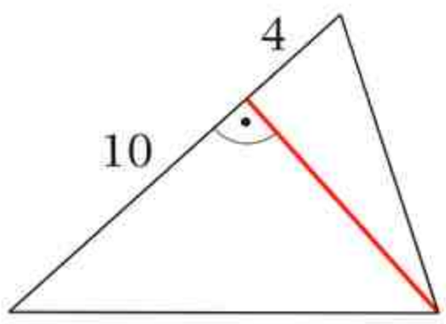
pole = 40

b)



pole = 60

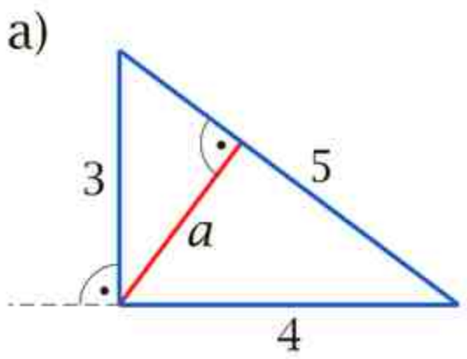
c)



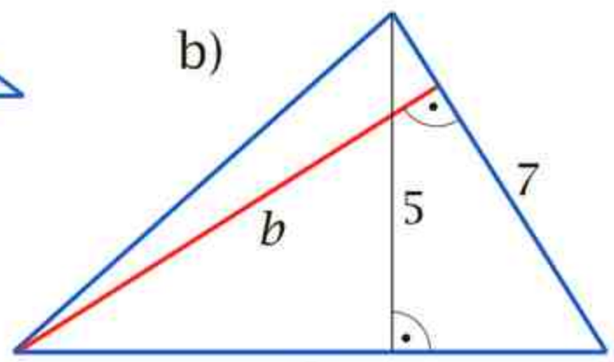
pole = 63

21. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

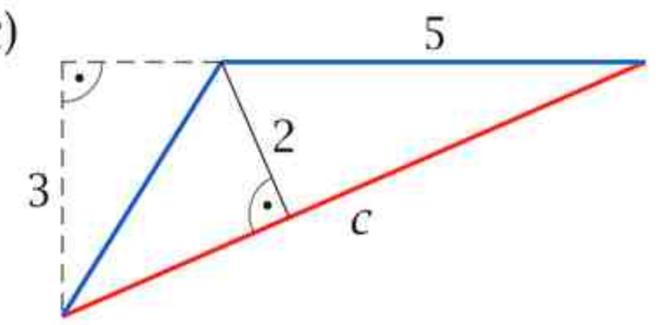
a)



b)

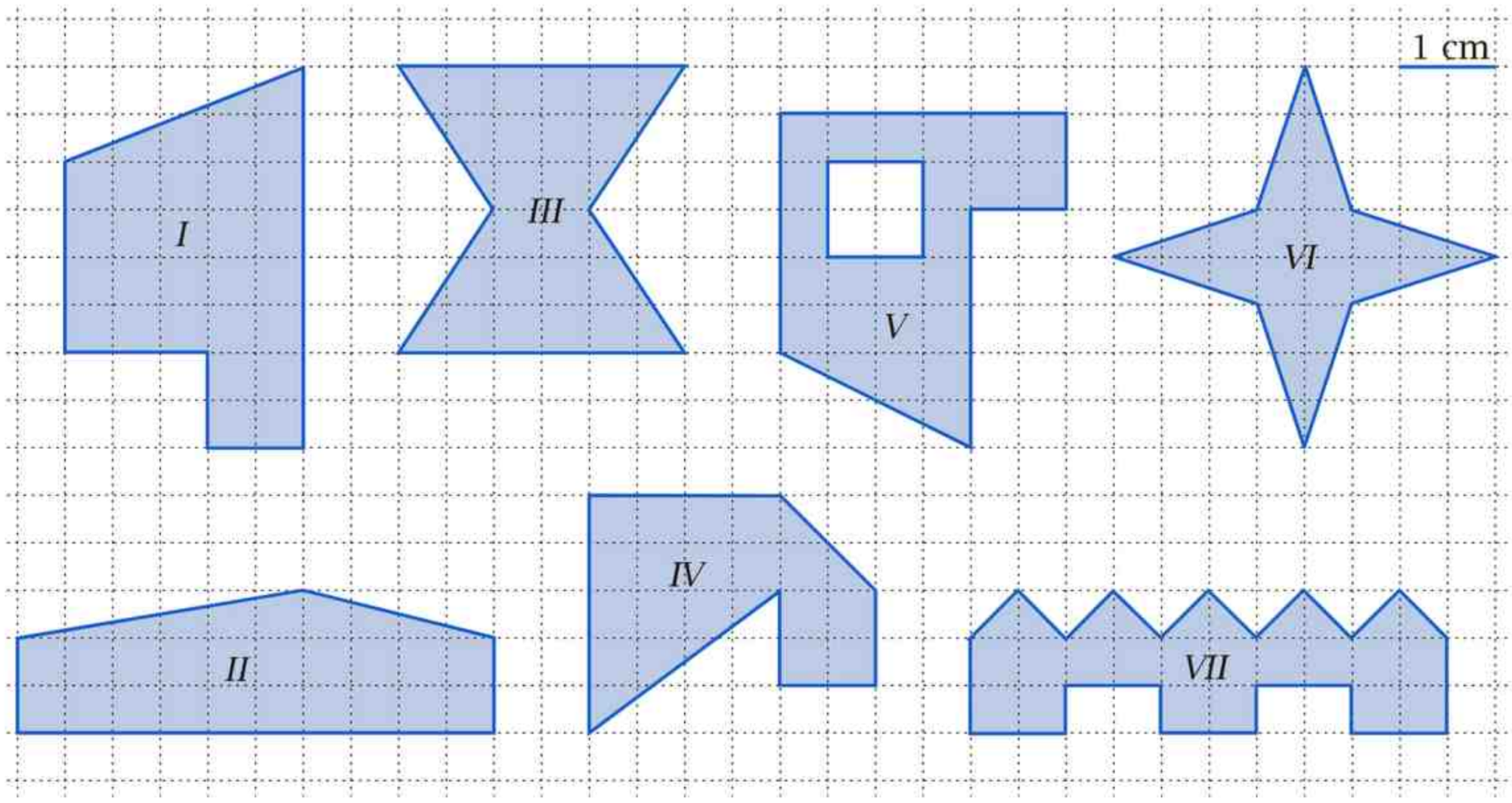


c)



22. W trójkącie prostokątnym o polu $49\,\text{cm}^2$ jedna z przyprostokątnych ma 7 cm. Jaką długość ma druga przyprostokątna?

23. Oblicz pola figur przedstawionych na rysunku.



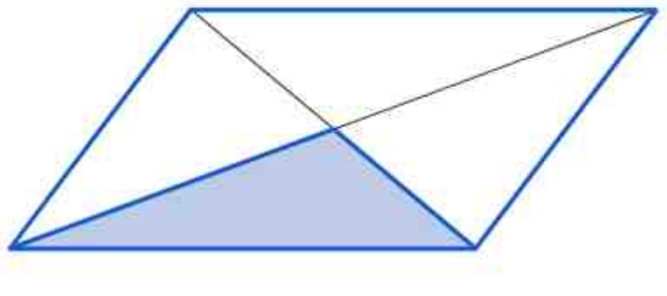
24. W trójkącie ABC o polu $12\ \text{cm}^2$ dane są: $AB = 5$ cm i $BC = 6$ cm.

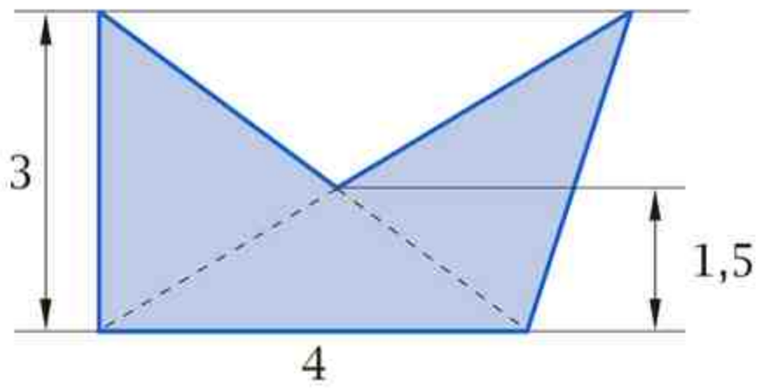
a) Czy kąt przy wierzchołku B jest prosty?

b) Czy jedna z wysokości trójkąta ABC może mieć długość 2 cm?

c) Czy jedna z wysokości trójkąta ABC może mieć długość 4,8 cm?

25. Zaznaczony trójkąt ma pole równe $3\ \text{cm}^2$. Uzasadnij, że pole równoległoboku jest 4 razy większe.

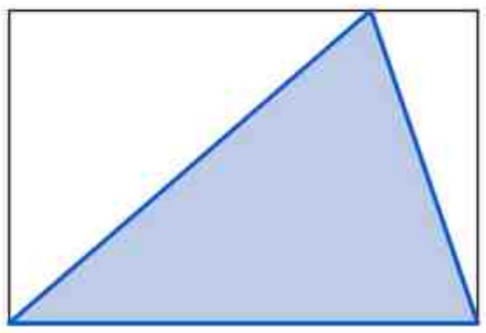




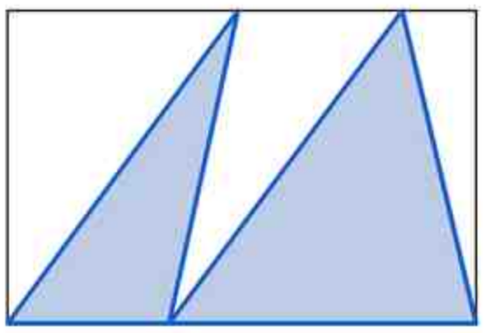
26. Oblicz pole zacieniowanej figury.

***27.** Pole każdego z narysowanych prostokątów jest równe 6 cm^2. Oblicz pola zacieniowanych części prostokąta.

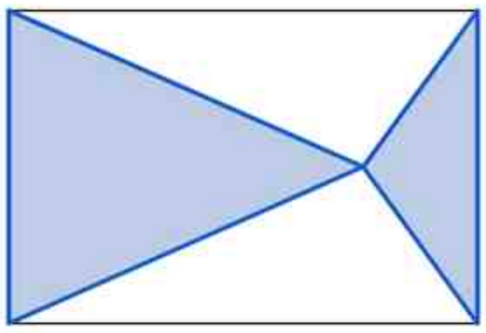
a)



b)

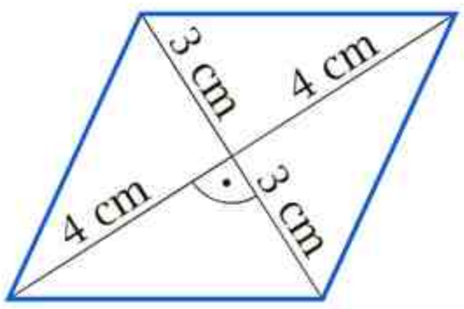


c)

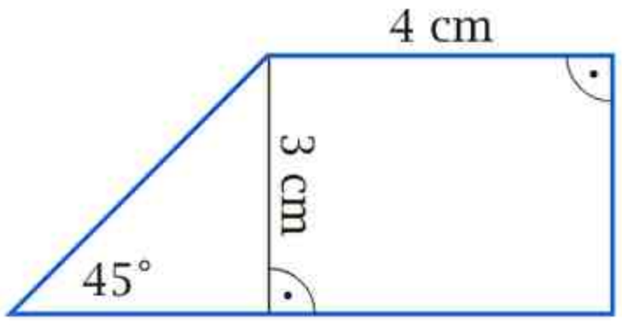


Sprawdź, czy umiesz

1. Pole czworokąta przedstawionego na rysunku obok jest równe:



A. 12 cm^2
B. 24 cm^2
C. 25 cm^2
D. 48 cm^2

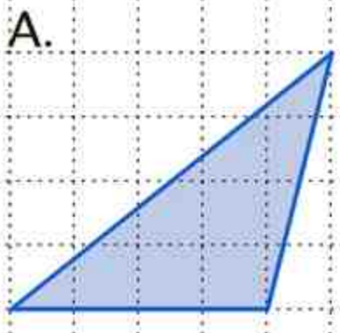


2. Pole trapezu narysowanego obok jest równe:

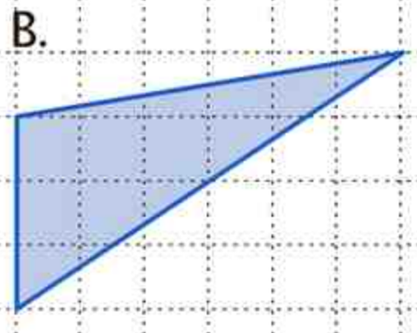
A. 12 cm^2
B. 10,5 cm^2
C. 24 cm^2
D. 16,5 cm^2

3. Który z narysowanych trójkątów ma największe pole?

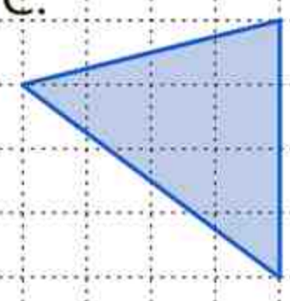
A.



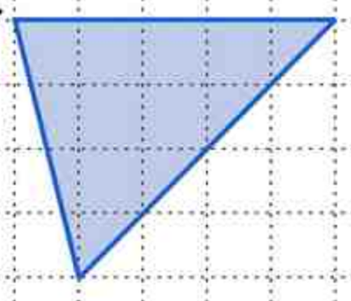
B.



C.

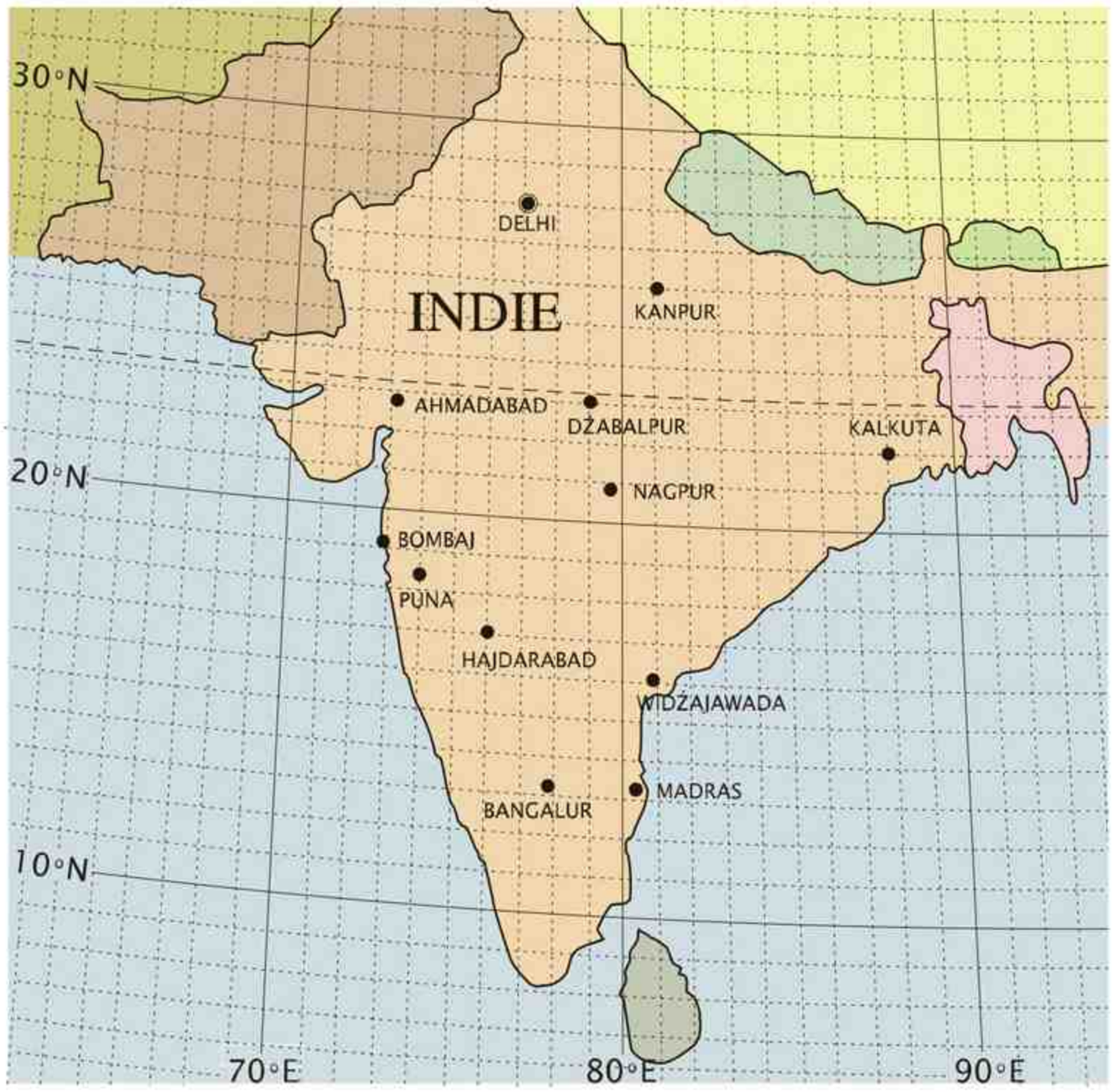


D.



zadania uzupełniające 36–45, str. 151–152

9 Układ współrzędnych



ĆWICZENIE A.

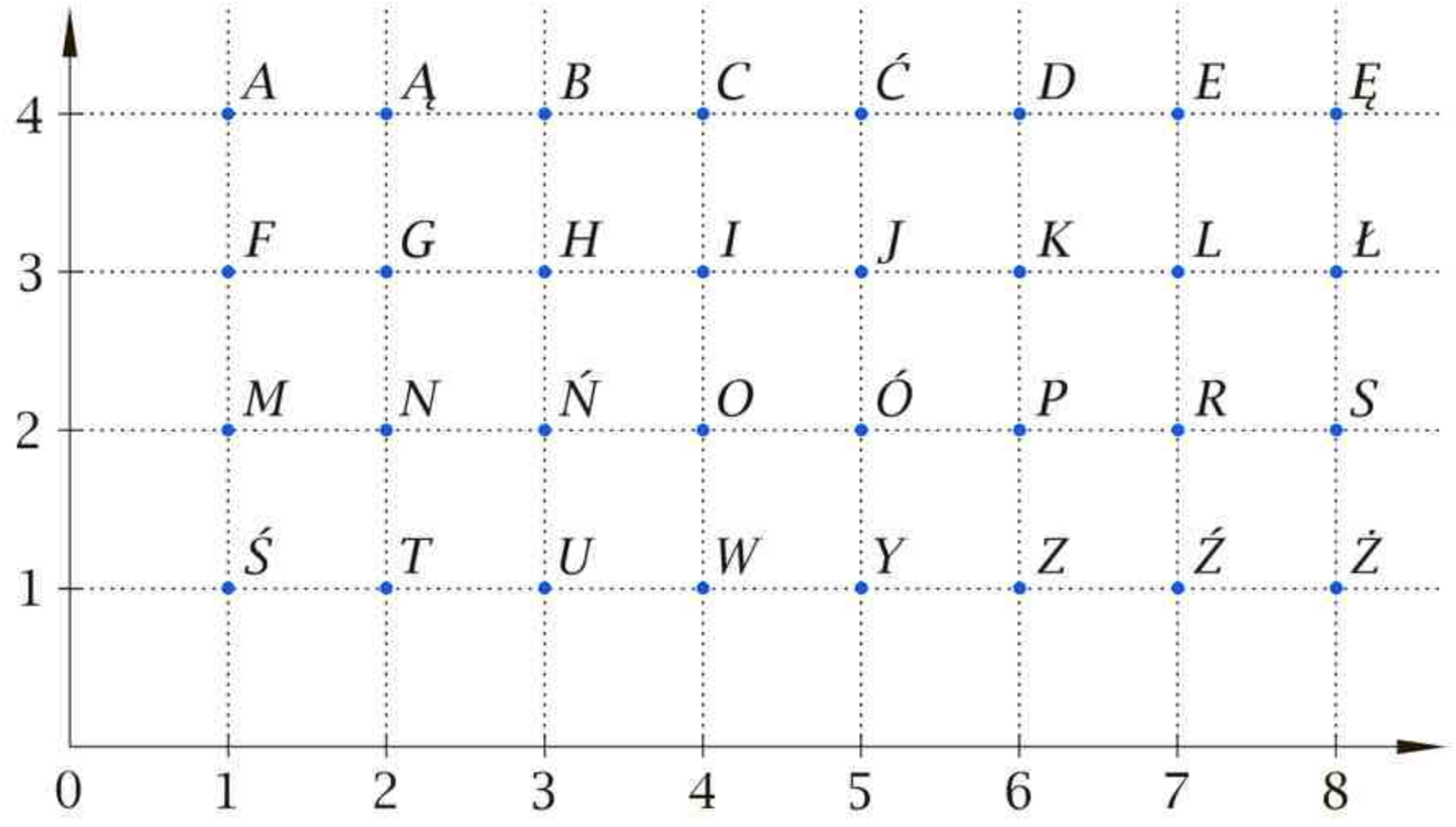
a) Odszukaj na mapie Indii miasto, którego współrzędne geograficzne wynoszą 77°E i 28°N.

b) Określ położenie (tzn. długość i szerokość geograficzną) miast: Kalkuta, Dżabalpur, Widżajawada i Hajdarabad.

c) Wskaż zwrotnik Raka (23°27' N).

d) Które z zaznaczonych miejscowości leżą między południkami 70°E i 80°E oraz między równoleżnikami 10°N i 22°N?

ĆWICZENIE B. Na rysunku poniżej każdej literze odpowiada para liczb, na przykład literze A odpowiada para (1, 4), a literze Ń para (3, 2).

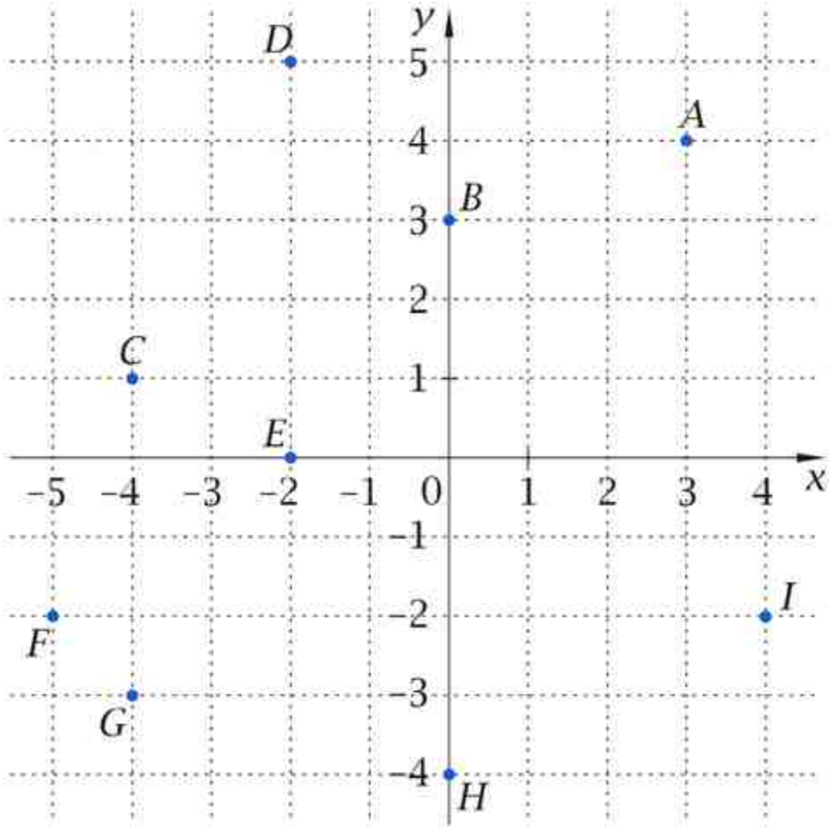


a) Odszyfruj słowo:

(8, 3) (1, 4) (6, 3) (4, 2) (4, 4) (4, 3) (7, 4)

b) Zaszyfruj w podobny sposób swoje imię i nazwisko.

Na osi liczbowej położenie każdego punktu określa jedna liczba — współrzędna tego punktu. Za pomocą liczb można także określać położenie punktów na płaszczyźnie. Potrzebne do tego są dwie osie, tworzące tzw. **układ współrzędnych**.



Popatrz na rysunek obok. Osie układu współrzędnych są prostopadłe. Punkt przecięcia osi nazywamy **początkiem układu współrzędnych**.

W układzie współrzędnych położenie każdego punktu na płaszczyźnie określają dwie liczby, zwane **współrzędnymi** punktu. Pierwszą liczbą jest współrzędna x, odczytywana na osi poziomej. Drugą liczbą jest współrzędna y, odczytywana na osi pionowej.

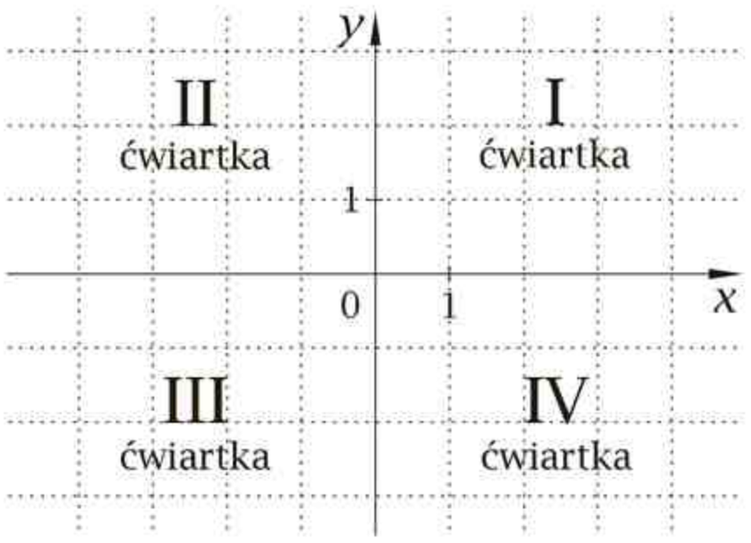
$A = (3, 4)$ — współrzędna x punktu A; współrzędna y punktu A

$B = (0, 3)$ — współrzędna x punktu B; współrzędna y punktu B

$C = (-4, 1)$ — współrzędna x punktu C; współrzędna y punktu C

ĆWICZENIE C. Odczytaj współrzędne punktów D, E, F, G, H, I. Jakie współrzędne ma początek układu współrzędnych?

Osie układu współrzędnych dzielą płaszczyznę na cztery części, nazywane **ćwiartkami układu**.



Uwaga. Przyjmujemy, że punkty leżące na osiach nie należą do żadnej ćwiartki.

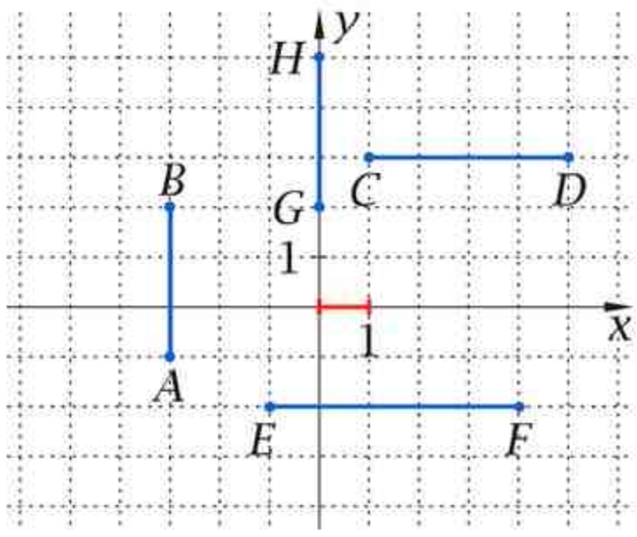
Z historii

Odkrycie układu współrzędnych stało się podstawą zupełnie nowej metody uprawiania matematyki. Metoda ta polega na opisywaniu figur geometrycznych za pomocą równań i nierówności. Za twórcę tego połączenia geometrii z algebrą uważany jest francuski matematyk i filozof René Descartes [czyt. rene dekart], znany bardziej jako Kartezjusz.

Kartezjusz (1596–1650) wywarł wielki wpływ na filozofię i naukę następnych stuleci. Jest autorem jednej z najsłynniejszych sentencji filozoficznych:

Myślę, więc jestem.

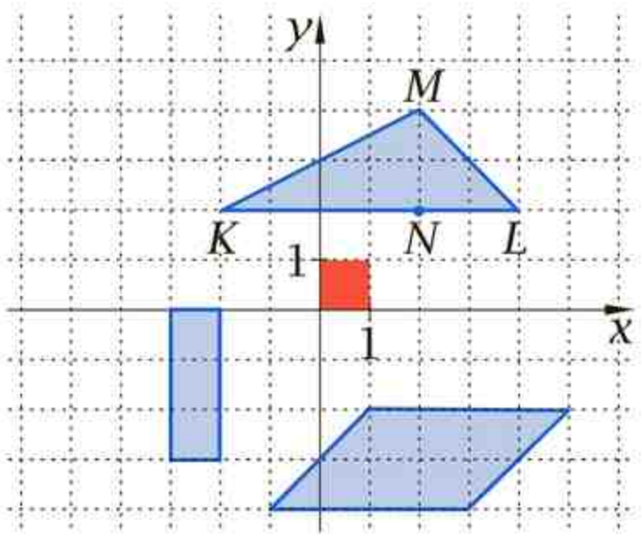
W układzie współrzędnych możemy określać długości odcinków, a także obliczać pola figur.



Na rysunku obok odcinek zaznaczony czerwonym kolorem to odcinek jednostkowy. Przyjmujemy, że jego długość jest równa 1.

Odcinek AB jest 3 razy dłuższy od odcinka jednostkowego, czyli ma długość 3 ($AB = 3$).

ĆWICZENIE D. Jakie długości mają pozostałe odcinki?



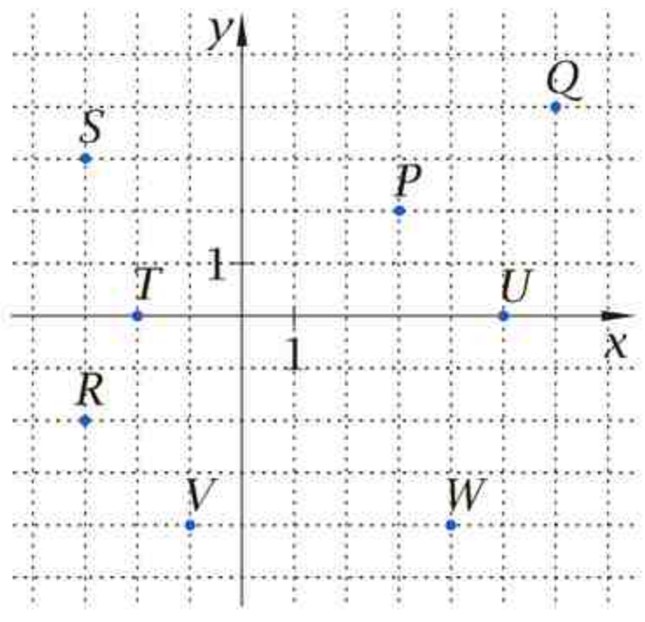
Na kolejnym rysunku zaznaczono kwadrat jednostkowy. Przyjmujemy, że pole tego kwadratu jest równe 1. Pole trójkąta KLM można obliczyć w następujący sposób:

Ponieważ $KL = 6$ i $MN = 2$, więc pole trójkąta KLM jest równe $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6$.

ĆWICZENIE E. Jakie pole ma prostokąt, a jakie równoległobok na rysunku obok?

Zadania

1. Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na rysunku obok.



46/152

2. Narysuj układ współrzędnych i zaznacz w nim poniższe punkty.

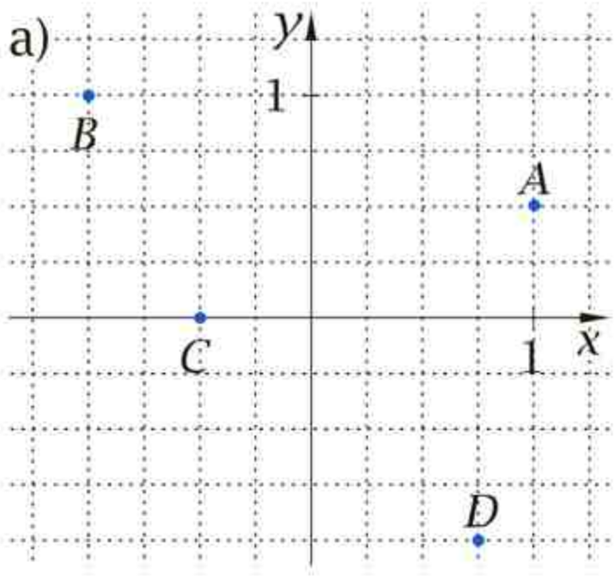
$A = (-2, 3)$ $D = (-2, -1)$ $G = (4, 3)$

$B = (-4, 0)$ $E = (2, -4)$ $H = (0, 2)$

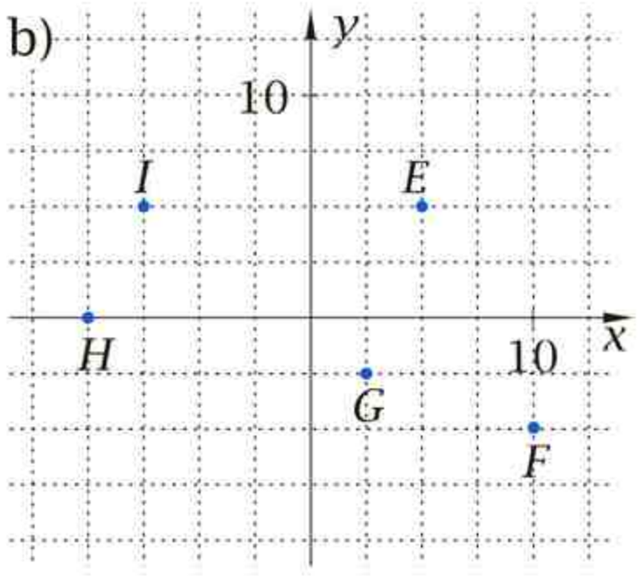
$C = (-4, -3)$ $F = (4, -1)$ $I = (-3, 3)$

3. Odczytaj współrzędne zaznaczonych punktów.

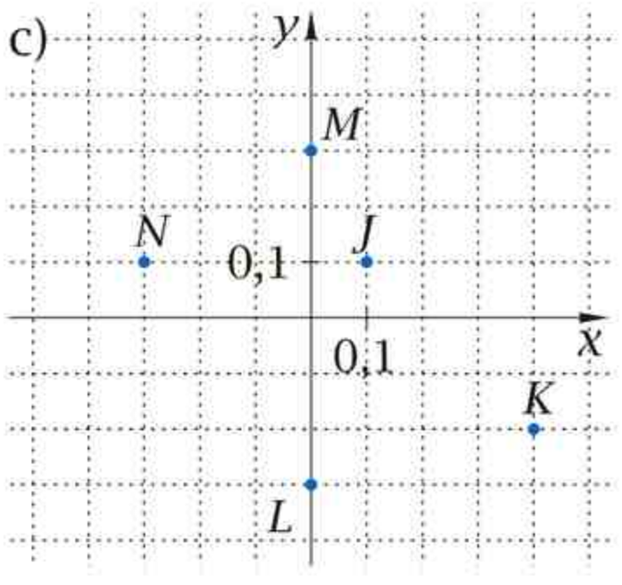
a)



b)



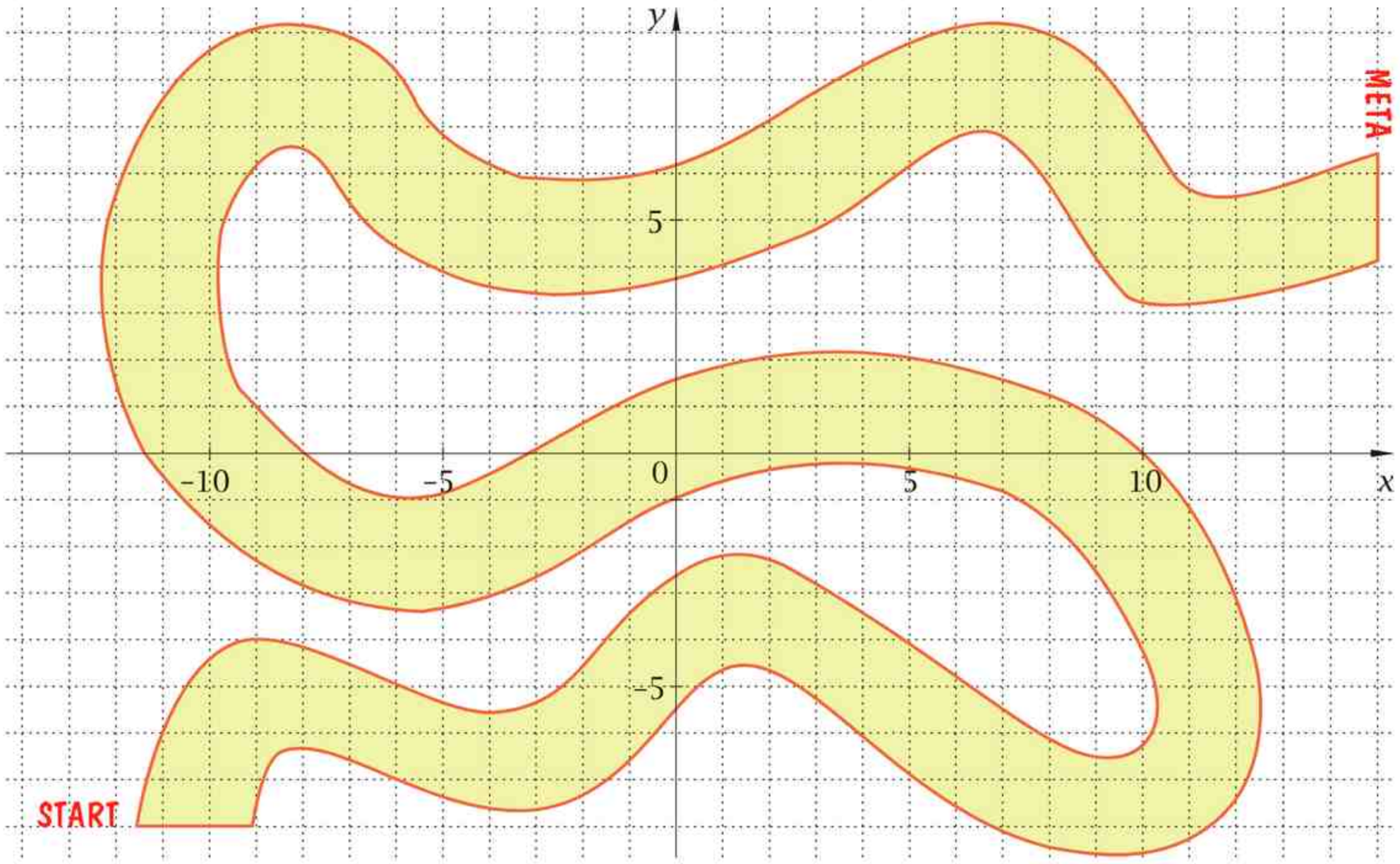
c)



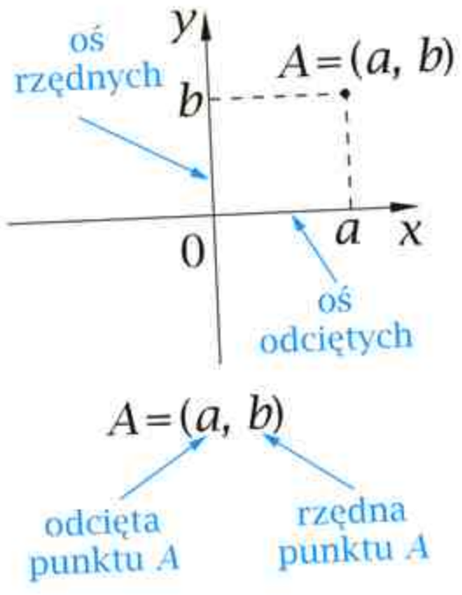
4. Narysuj układ współrzędnych, dobierz odpowiednią jednostkę i zaznacz punkty: $A = \left(\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}\right)$, $B = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $C = \left(1\frac{1}{6}, 1\frac{1}{3}\right)$, $D = \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$.

Reguły wyścigu: Od STARTU do METY poruszamy się wewnątrz trasy, wzdłuż linii prostych. Zakręcać wolno tylko w punktach o obu współrzędnych całkowitych.

5. Weź udział w wyścigu. Wygrywa ten, kto wykona najmniej zakrętów. Zaplanuj swój przejazd — wypisz współrzędne punktów, w których będziesz zakręcać.



Oś pozioma nazywana jest **osią odciętych**, a oś pionowa — **osią rzędnych**. Odpowiednie współrzędne punktu nazywane są **odciętą** i **rzędną punktu**.



6. a) Gdzie znajdują się punkty o pierwszej współrzędnej (odciętej) równej 0?

b) Gdzie znajdują się punkty, których druga współrzędna (rzędna) jest równa 0?

c) W której ćwiartce układu znajdują się punkty o obu współrzędnych ujemnych?

d) W której ćwiartce znajdują się punkty o odciętej dodatniej i rzędnej ujemnej?

e) Co można powiedzieć o odciętych punktów leżących w II i III ćwiartce układu?

f) Co można powiedzieć o rzędnych punktów leżących w III i IV ćwiartce?

g) Co można powiedzieć o rzędnych punktów leżących nad osią odciętych?

7. Punkty A, B, C są wierzchołkami pewnego prostokąta. Jakie współrzędne ma czwarty wierzchołek?

a) $A = (-4, -2)$, $B = (1, -2)$, $C = (1, 3)$

b) $A = (9, 240)$, $B = (9, 210)$, $C = (99, 210)$

8. Punkty $(-2, 1)$, $(4, 1)$ i $(3, 4)$ są wierzchołkami równoległoboku. Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka.

Uwaga. Są trzy możliwe położenia tego wierzchołka.

***9.** Punkty $A = (-1, 1)$, $B = (7, 1)$ i $C = (2, 3)$ są wierzchołkami trójkąta. Znajdź punkt D taki, że trójkąty ABC i ABD są przystające i $C \neq D$.

Uwaga. Są trzy takie punkty.

10. Oblicz:

a) długość odcinka o końcach $K = (-5, 2)$ i $L = (3, 2)$,

b) długość odcinka o końcach $P = (25, -4)$ i $R = (25, 7)$,

c) pole trójkąta o wierzchołkach $A = (-1, -1)$, $B = (5, -1)$, $C = (1, 4)$,

d) pole trójkąta o wierzchołkach $E = (-4, -2)$, $F = (-4, 1)$, $G = (3, 3)$.

11. Oblicz pole czworokąta, którego wierzchołkami są punkty $A = (-3, -2)$, $B = (2, -2)$, $C = (0, 4)$, $D = (-3, 3)$.

52/152

12. Odcinek o końcach $A = (1, 2)$ i $B = (5, 2)$ jest podstawą trójkąta równoramiennego ABC o polu 8. Jakie współrzędne ma punkt C?

53/152

Sprawdź, czy umiesz

1. Punkt o pierwszej współrzędnej dodatniej, a drugiej ujemnej leży:

A. w I ćwiartce B. w II ćwiartce C. w III ćwiartce D. w IV ćwiartce

2. Pole trójkąta ABC, gdzie $A = (-2, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (-2, 4)$, wynosi:

A. 10 B. 2 C. 4 D. 20

3. Który z poniżej podanych punktów jest odległy od punktu $D = (-3, 2)$ o 10 jednostek?

A. $(-7, 2)$ B. $(-3, 13)$ C. $(-3, 8)$ D. $(7, 2)$

zadania uzupełniające 46–53, str. 152

Przed klasówką

1. Którym wyrażeniem należy zastąpić kwadracik w poniższych zdaniach?

① mniejsza niż ② większa niż ③ taka sama jak

a) Suma miar kątów czworokąta jest ■ miara kąta pełnego.

b) Suma miar kątów przyległych jest ■ miara kąta półpełnego.

c) Suma miar dwóch kątów rozwartych jest ■ miara kąta pełnego.

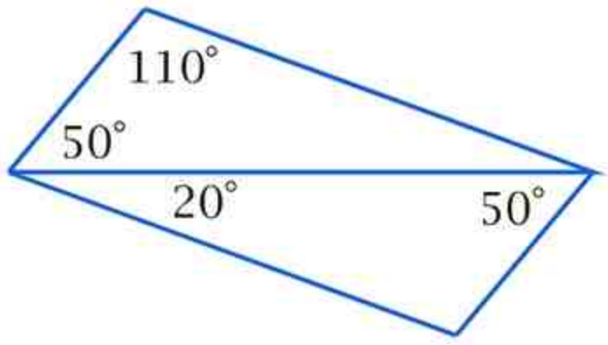
d) Suma miar kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest ■ miara kąta prostego.

2. Która z podanych powierzchni jest najmniejsza?

A. 0,015 ha B. 15 000 m^2 C. 150 a D. 15 mln cm^2

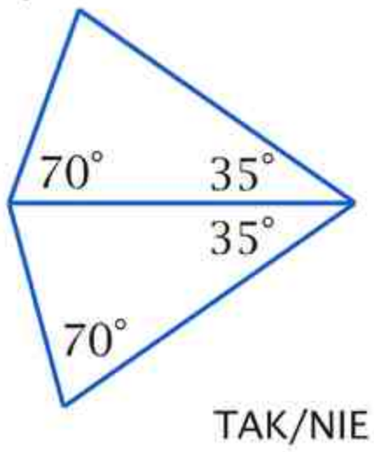
3. Czy przedstawione na rysunkach informacje pozwalają stwierdzić, że narysowane trójkąty są przystające? Jeśli uważasz, że trójkąty są przystające, to podaj cechę przystawania, z której to wynika.

a)



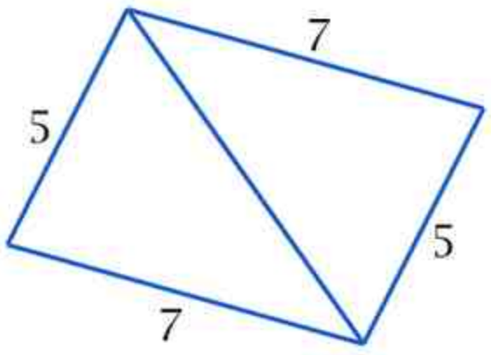
TAK/NIE

b)



TAK/NIE

c)



TAK/NIE

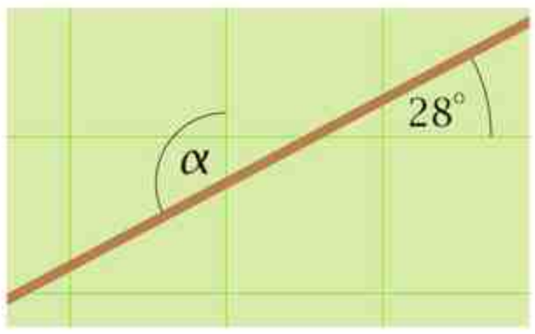
4. Wierzchołkami sześciokąta są punkty $A = (-3, -4)$, $B = (0, -4)$, $C = (0, 0)$, $D = (2, 0)$, $E = (2, 4)$, $F = (-3, 4)$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

a) Najdłuższy bok sześciokąta *ABCDEF* ma długość 5. PRAWDA/FAŁSZ

b) Obwód sześciokąta *ABCDEF* wynosi 26. PRAWDA/FAŁSZ

c) Pole sześciokąta *ABCDEF* jest równe 32. PRAWDA/FAŁSZ

5. Na podłodze wyłożonej kafelkami leży kij od miotły. Tworzy on z jedną z linii wyznaczonej przez brzegi płytek kąt 28° (zob. rysunek). Jaką miarę ma kąt α zaznaczony na rysunku?



A. 62° B. 146° C. 152° D. 118°

6. Poniżej podano pola powierzchni kilku obiektów. Jakimi liczbami należy zastąpić kwadraciki?

Zdjęcie	Staw	Kleks	Billboard	Miasto
200 cm^2	20 ha	200 mm^2	20 m^2	200 km^2

a) Zdjęcie zasłania ■ razy większą powierzchnię niż kleks.

b) Billboard ma powierzchnię ■ razy większą niż zdjęcie.

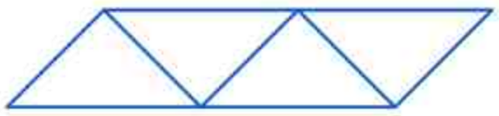
c) Staw ma powierzchnię ■ razy mniejszą niż miasto.

7. Kwadrat przedstawiony na rysunku 1. rozcięto na jednakowe trójkąty i ułożono z nich taki równoległobok jak na rysunku 2. Czy ten równoległobok ma taki sam obwód jak kwadrat? Wybierz odpowiedź „tak" lub „nie" oraz jej uzasadnienie spośród zdań A, B i C.

Rys. 1.



Rys. 2.



Ⓘ Tak, ponieważ… Ⓘⓘ Nie, ponieważ…

A — …obie figury zbudowane są z tych samych części.

B — …dłuższy bok równoległoboku jest równy połowie obwodu kwadratu.

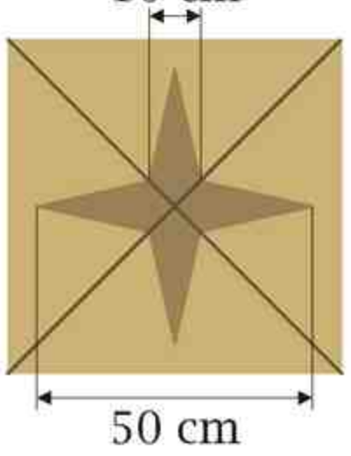
C — …kwadrat ma zawsze mniejszy obwód niż równoległobok.

8. Jaką miarę ma kąt wewnętrzny dwunastokąta foremnego?

A. 30° B. 130° C. 75° D. 150°

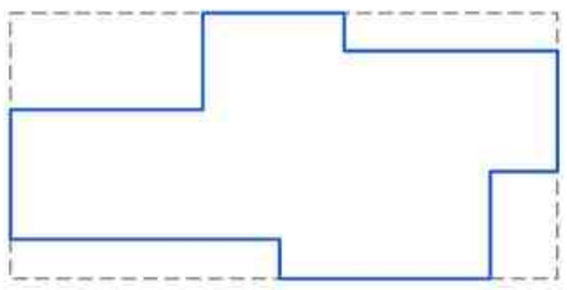
9. Okno na zdjęciu ma kształt ośmiokąta podzielonego na pięć jednakowych kwadratów i cztery jednakowe trójkąty. Czy to okno ma kształt ośmiokąta foremnego? Odpowiedź uzasadnij.





10. Na zdjęciu przedstawiono fragment drewnianej posadzki w kształcie czteroramiennej gwiazdy. Każde ramię tej gwiazdy ma taką samą długość. Oblicz pole tej gwiazdy.

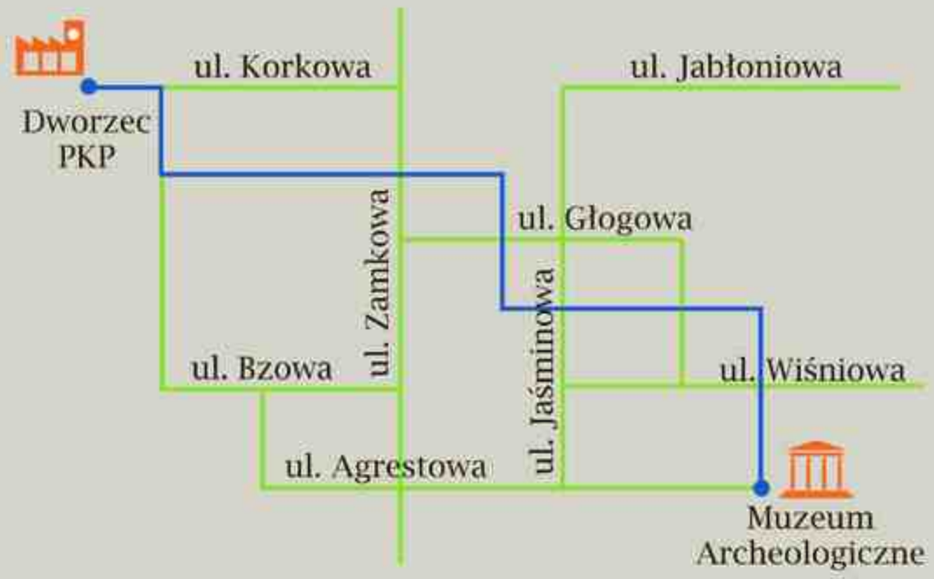
11. Od pewnego prostokąta odcięto w narożnikach mniejsze prostokąty w sposób przedstawiony na rysunku obok. Uzasadnij, że otrzymana figura ma taki sam obwód, jak początkowy prostokąt.



Zadania uzupełniające

Proste i odcinki

1. Opisz zaznaczoną na rysunku trasę przejazdu z dworca PKP do Muzeum Archeologicznego, używając określeń „ulica równoległa do…" lub „ulica prostopadła do…".



2. O sześciu różnych prostych a, b, c, d, e, f wiadomo, że $a \perp b$, $b \parallel c$, $c \perp d$, $d \perp e$, $e \parallel f$. Jak położone są względem siebie proste a i e, a jak proste c i f?

3. Półprosta AB jest prostopadła do półprostej BC oraz równoległa do półprostej BD i do półprostej CE.

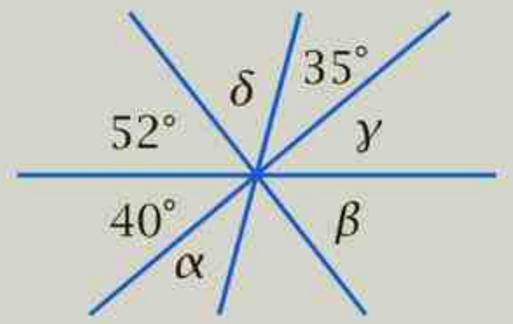
a) Czy wynika stąd, że punkt D leży na półprostej AB?

b) Czy odcinek DE może być prostopadły do odcinka AB?

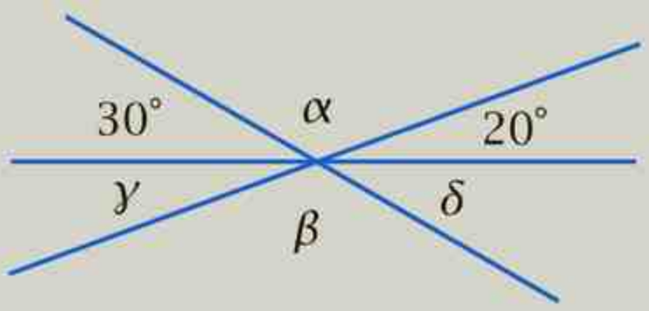
Kąty

4. Jakie miary mają kąty α, β, γ i δ?

a)

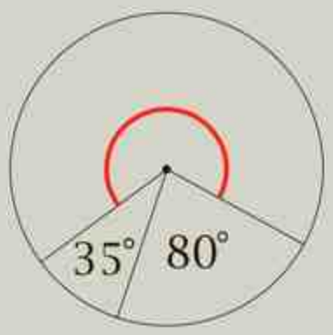


b)

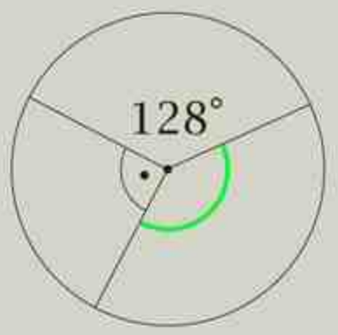


5. Oblicz miary zaznaczonych kątów.

a)



b)



6. Jaką miarę ma mniejszy kąt, który tworzą wskazówki zegara o godzinie:

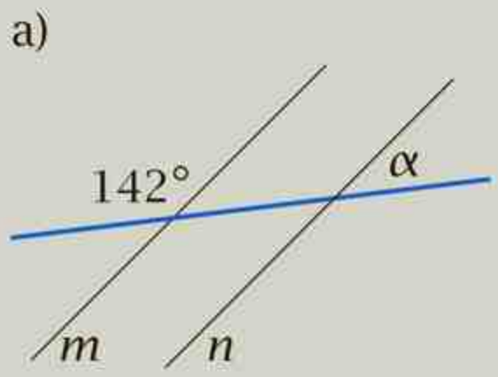
a) 11^{30}, b) 8^{15}?



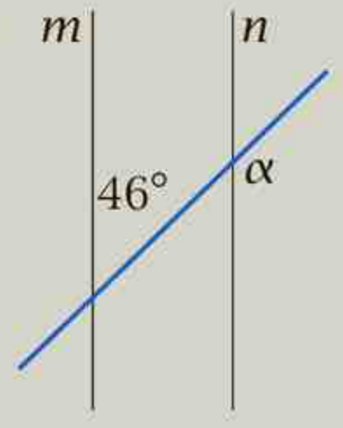


7. Na rysunku proste m i n są równoległe. Oblicz miarę kąta α.

a)



b)



Trójkąty

8. Dwa boki trójkąta równoramiennego mają długości 2 cm i 5 cm. Jaką długość ma trzeci bok?

9. Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 10 cm, a jeden z boków ma 4 cm. Jakie są długości pozostałych boków?

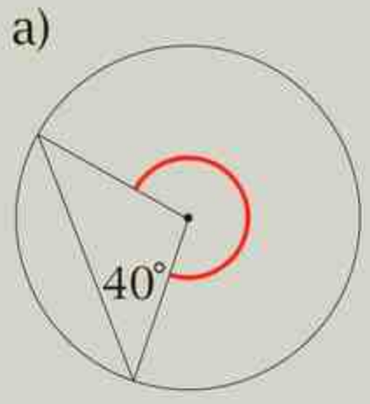
10. Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma miarę 100°. Jakie są miary pozostałych kątów tego trójkąta?

11. Dwa kąty trójkąta mają podane miary. Czy ten trójkąt jest równoramienny?

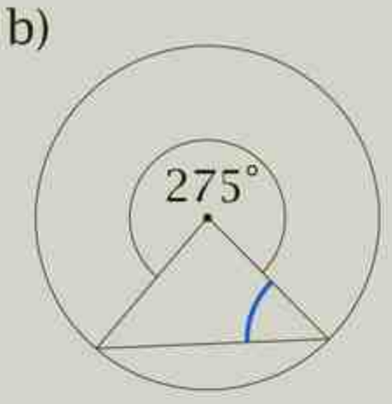
a) 65° i 50° b) 60° i 55° c) 60° i 60°

12. Jaką miarę ma zaznaczony kąt?

a)

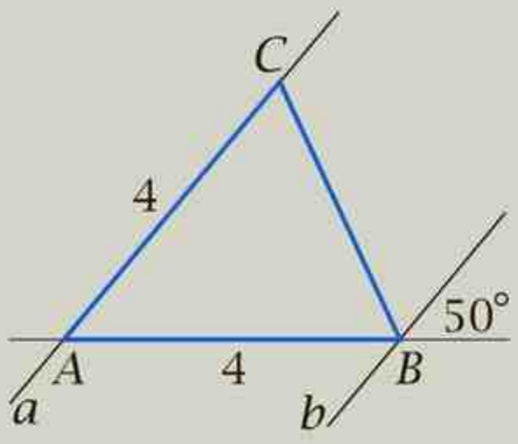


b)

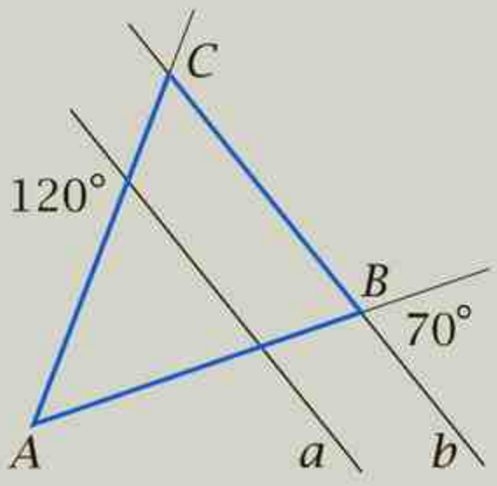


13. Proste a i b na rysunkach są równoległe. Oblicz miary kątów trójkąta ABC.

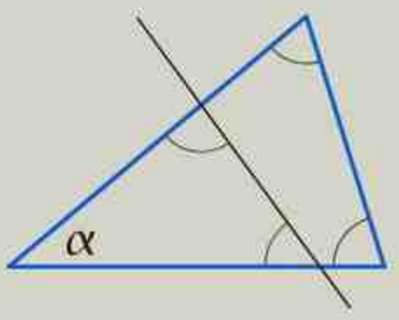
a)



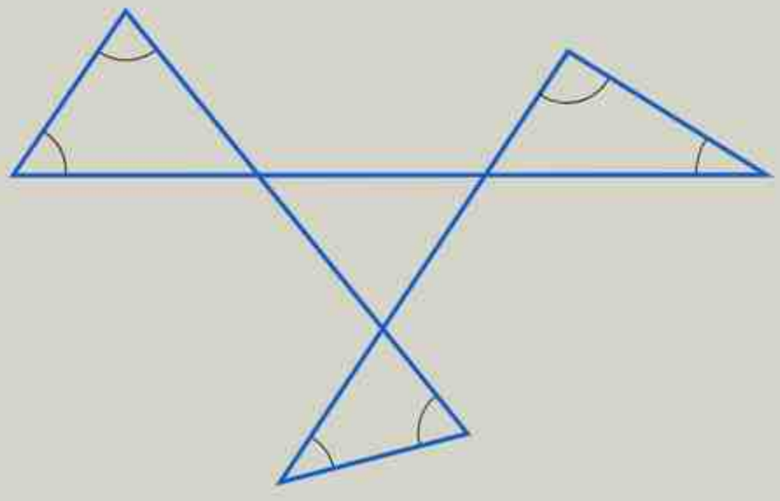
b)



14. Suma miar czterech kątów zaznaczonych na rysunku łukami jest równa 280°. Jaką miarę ma kąt α?

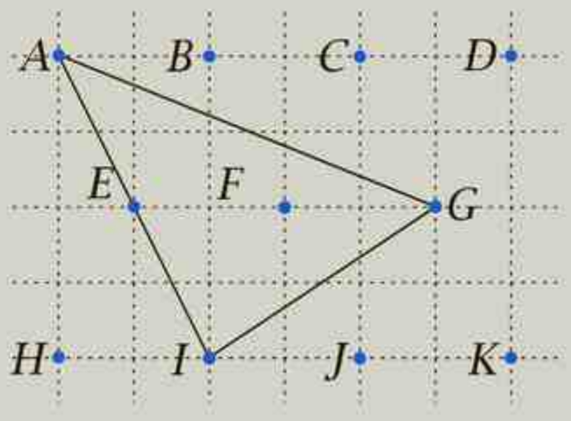


***15.** Oblicz sumę miar wszystkich kątów zaznaczonych na poniższym rysunku.



Przystawanie trójkątów

16. Znajdź kilka trójkątów przystających do trójkąta AIG, o wierzchołkach w zaznaczonych punktach.



17. Punkty A, B i C dzielą okrąg o środku O na trzy równe części. Uzasadnij, że trójkąty ABO i BOC są przystające.

18. W trójkącie prostokątnym ABC kąt BAC jest prosty, a kąt ABC ma 40°. W trójkącie DEF kąt przy wierzchołku D jest prosty. Uzasadnij, że aby trójkąt DEF był przystający do trójkąta ABC, wystarczy, że spełnione są podane warunki.

a) $DF = AC$ i $DE = AB$

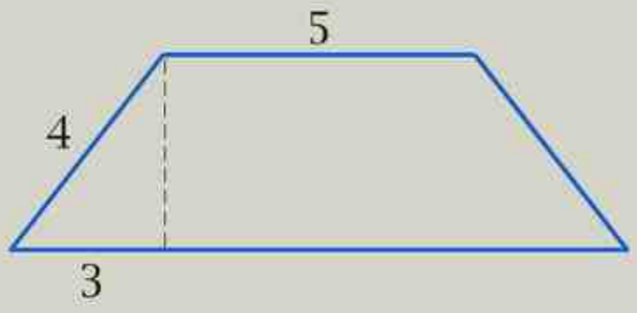
b) $\sphericalangle EFD = 50°$ i $EF = BC$

c) $\sphericalangle EFD = 50°$ i $DF = AC$

19. W trójkącie ostrokątnym boki AC i BC mają takie same długości. Z wierzchołków A i B poprowadzono wysokości AD i BE. Wykaż, że trójkąty ABD i ABE są przystające.

Czworokąty

20. Jaki obwód ma trapez równoramienny narysowany poniżej?



21. Narysuj dowolny prostokąt i połącz odcinkami środki sąsiednich boków. Uzasadnij, że czworokąt, który otrzymałeś, jest równoległobokiem.

22. Jedna z przekątnych rombu ma taką samą długość jak bok rombu. Jakie miary mają kąty tego rombu?

23. Skonstruuj równoległobok, który nie jest prostokątem i w którym wysokości mają 3 cm i 4 cm.

24. W trapezie równoramiennym o obwodzie 60 cm suma długości podstaw jest równa 35 cm. Jaką długość mają ramiona tego trapezu?

25. W trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD poprowadzono wysokość DE. Kąt ADE ma miarę 41°. Jakie miary mają kąty trapezu $ABCD$?

Wielokąty foremne

26. a) Narysuj sześciokąt, który ma wszystkie boki równej długości, lecz nie jest sześciokątem foremnym.

b) Narysuj sześciokąt, który ma wszystkie kąty równej miary, lecz nie jest sześciokątem foremnym.

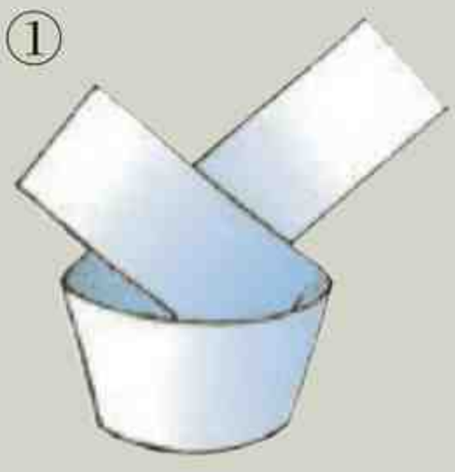
27. Narysuj sześciokąt foremny. Podziel go na:

a) dwa trapezy równoramienne,

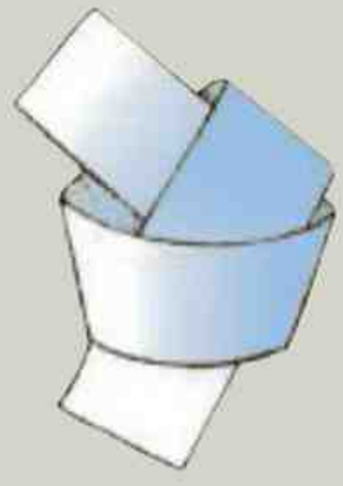
b) trzy romby.

28. Przyjrzyj się rysunkom. Złóż pasek papieru tak, aby otrzymać pięciokąt foremny.

①



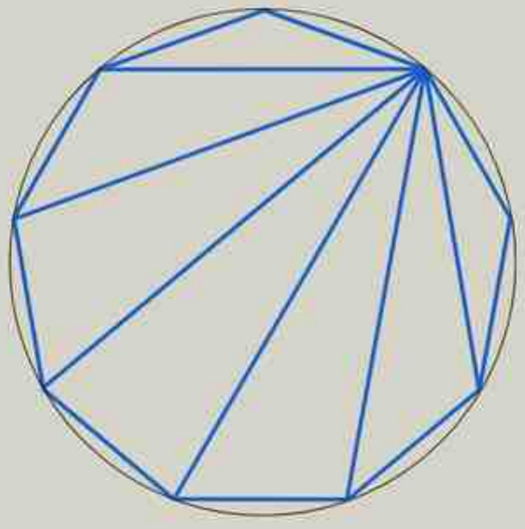
②



***29.** Wielokąt foremny o n bokach podzielono na trójkąty przekątnymi wychodzącymi z jednego wierzchołka.

a) Ile jest tych trójkątów?

b) Ile wynosi suma miar wszystkich kątów występujących w tych trójkątach? Porównaj tę sumę z sumą miar wszystkich kątów wewnętrznych wielokąta.



c) Podaj wzór określający miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego.

Pole prostokąta. Jednostki pola

30. Oblicz pola prostokątów o podanych wymiarach. Wyraź to pole w centymetrach kwadratowych.

a) $3\text{ cm} \times 0{,}7\text{ m}$ c) $0{,}6\text{ m} \times 0{,}5\text{ m}$

b) $8\text{ cm} \times 6\text{ mm}$ d) $2\text{ dm} \times 2\text{ mm}$

31. a) Zamień na metry kwadratowe.

6 km^2 $0{,}05\text{ km}^2$ 75 dm^2 45 cm^2

b) Zamień na milimetry kwadratowe.

16 cm^2 $3{,}2\text{ cm}^2$ $2{,}1\text{ dm}^2$ $0{,}35\text{ m}^2$

32. a) Zamień na hektary.

3 km^2 $0{,}02\text{ km}^2$ 620 m^2 135 a

b) Zamień na ary.

30 km^2 $0{,}5\text{ km}^2$ 1,2 ha 470 m^2

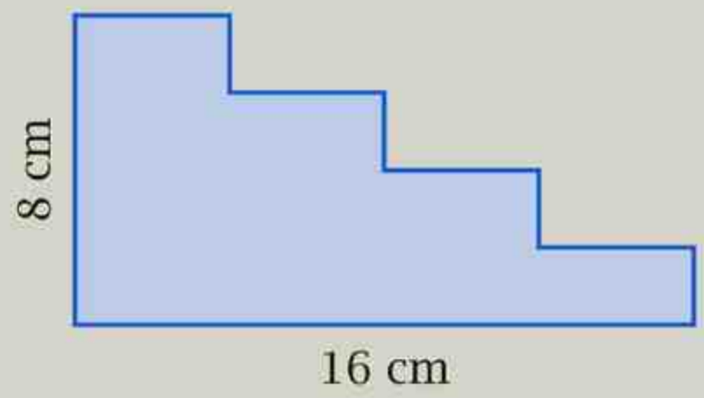
33. W Polsce produkuje się 284 km^2 tkanin bawełnianych rocznie. Przypuśćmy, że całą roczną produkcję wykonano w postaci jednej tkaniny o szerokości 140 cm. Ile razy można by tą tkaniną opasać Ziemię? (Obwód równika wynosi ok. 40 000 km).

34. a) Popatrz na rysunek. Ile sztuk kafelków „LAZUR" znajduje się w jednym pudełku?



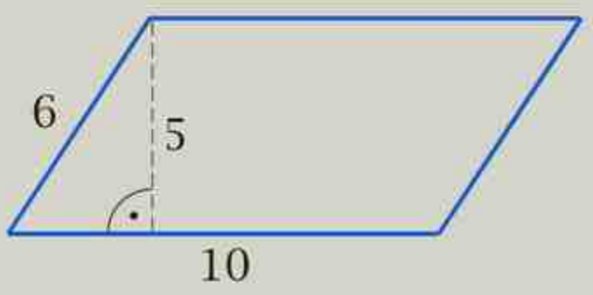
b) Przypuśćmy, że chcesz kupić 1,8 m² kafelków „Lazur". Sprzedawca dał ci jedno pełne pudełko. Ile jeszcze powinien dołożyć kafelków?

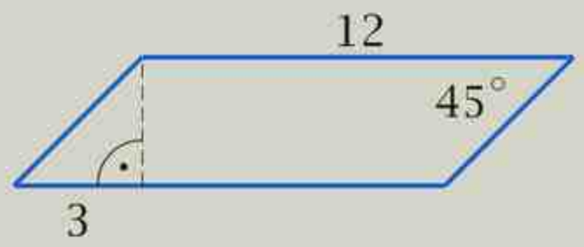
35. Figura na poniższym rysunku kształtem przypomina schody. Każdy stopień ma taką samą wysokość i taką samą długość. Jakie pole ma ta figura?



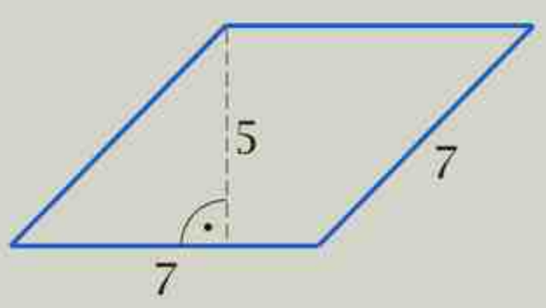
Pola wielokątów

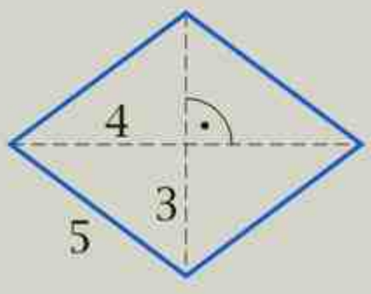
36. Oblicz pola równoległoboków.



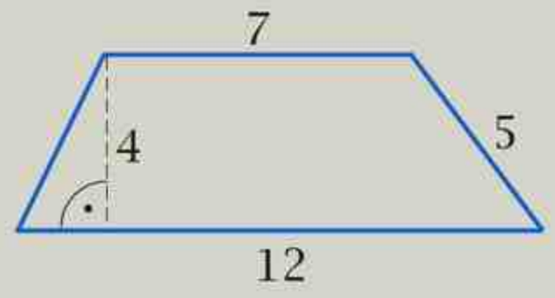


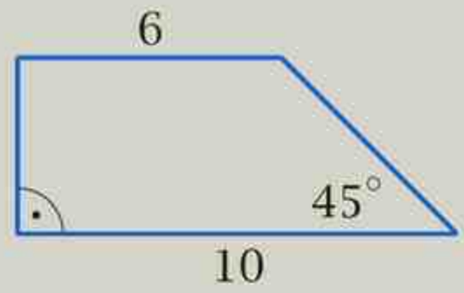
37. Oblicz pola rombów.

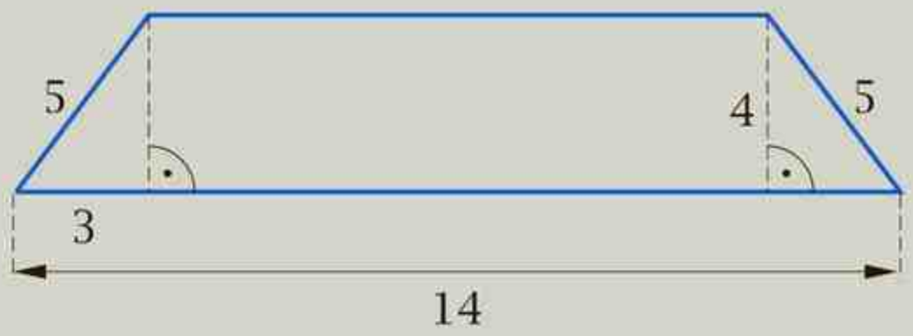




38. Oblicz pola trapezów.

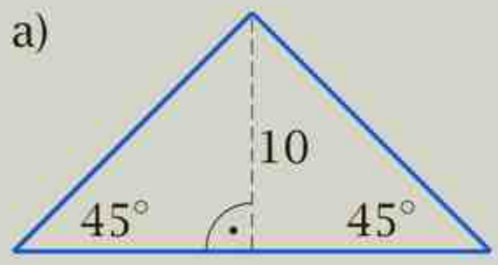


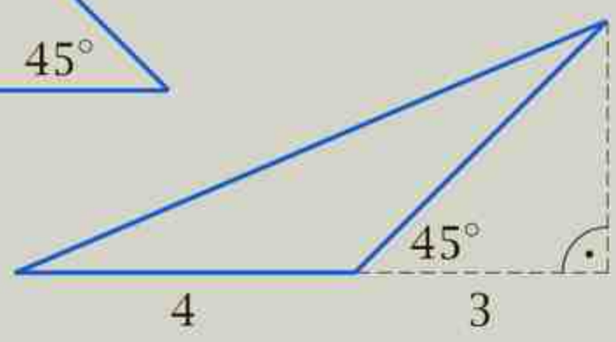




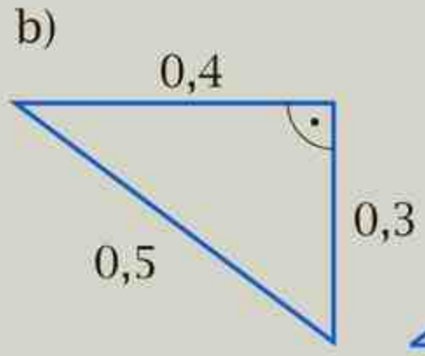
39. Oblicz pola trójkątów.

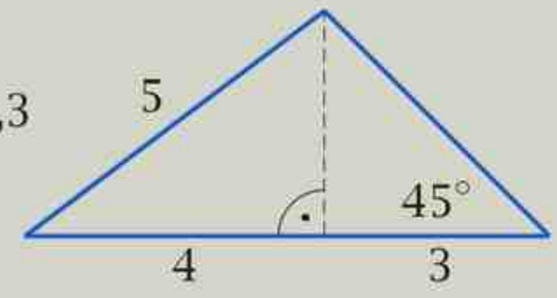
a)





b)



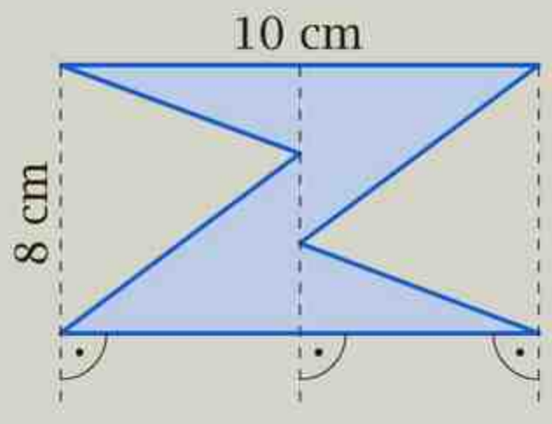


40. Czy trójkąt, w którym jedna z wysokości ma 1 cm, może mieć pole większe niż 1 m²?

41. Wysokości trójkąta prostokątnego mają długości 60 cm, 65 cm i 156 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

42. Prostokąt ma pole 20 cm². Jakie jest pole czworokąta, którego wierzchołkami są środki boków tego prostokąta?

43. Z prostokąta o bokach 8 cm i 10 cm wycięto figurę przedstawioną na rysunku. Oblicz pole tej figury.

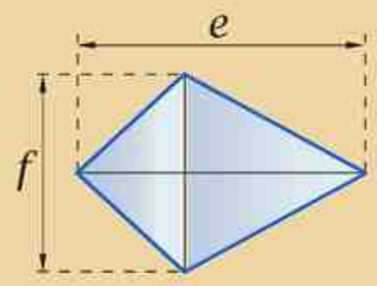


Ciekawostka

Czworokąt, w którym dwa sąsiednie boki są równe i dwa pozostałe też są równe, nazywamy deltoidem (lub latawcem). Przekątne deltoidu są prostopadłe.

$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

e, f – długości przekątnych

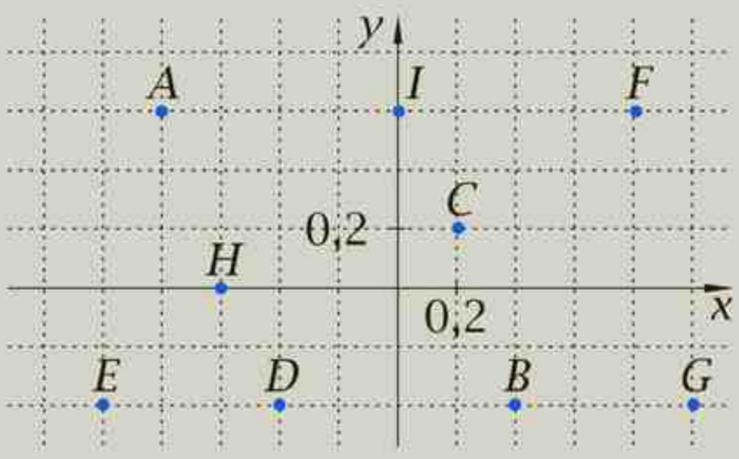


44. Narysuj deltoid, który nie jest rombem i którego pole jest równe 12 cm^2.

45. Jakie pole ma deltoid, którego przekątne mają długości 4 cm i 7 cm?

Układ współrzędnych

46. Odczytaj współrzędne zaznaczonych punktów.



47. Znajdź dwa punkty leżące na tej samej prostej co punkty A i B.

a) $A = (-7, 12)$, $B = (-12, 12)$

b) $A = (-5, -5)$, $B = (-5, 0)$

48. Punkt A leży w drugiej ćwiartce układu współrzędnych i jest odległy od osi x o 5 jednostek, a od osi y o 3 jednostki. Jakie współrzędne ma punkt A?

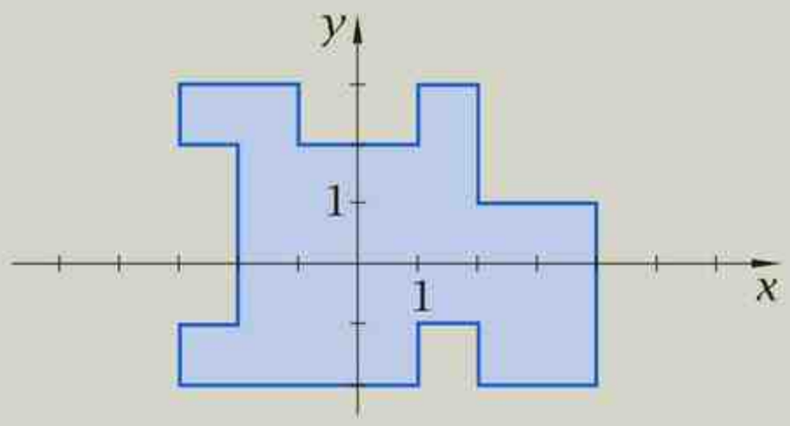
49. Podaj współrzędne punktów wspólnych osi układu współrzędnych i okręgu o środku S i promieniu r, jeśli:

a) $S = (0, 0)$, $r = 3$

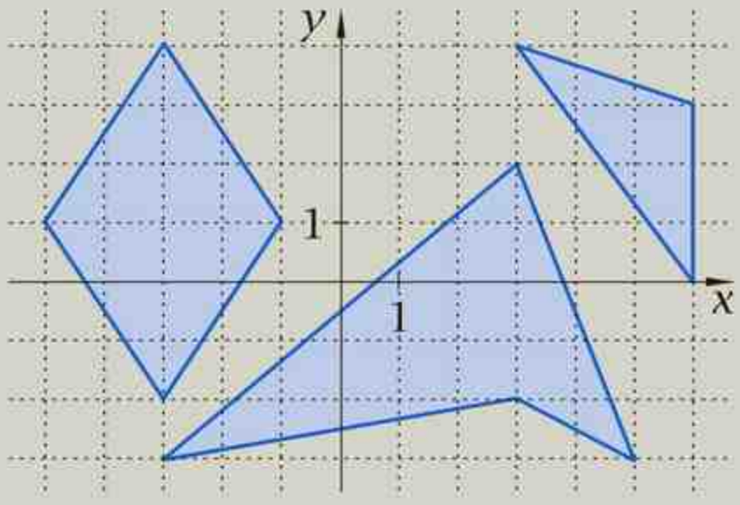
b) $S = (-5, 5)$, $r = 5$

c) $S = (0, -100)$, $r = 11$

50. Oblicz obwód narysowanej figury.



51. Oblicz pola poniższych wielokątów.



52. Oblicz pola wielokątów o podanych wierzchołkach:

a) $(-3, -1)$ $(5, -1)$ $(1, 4)$ $(-2, 4)$

b) $(-1, 4)$ $(-1, -2)$ $(2, 2)$ $(2, 6)$

c) $(-1, -1)$ $(3, -1)$ $(3, 2)$ $(2, 4)$ $(-1, 2)$

53. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A = (-3, 2)$, $B = (4, 2)$. Znajdź taki punkt C, aby trójkąt ABC był:

a) prostokątny i miał pole 10,5,

b) równoramienny i miał pole 21,

c) rozwartokątny i miał pole 14.

IV WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

1 Do czego służą wyrażenia algebraiczne?

2 Wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych

3 Jednomiany

4 Sumy algebraiczne

5 Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

6 Mnożenie jednomianów przez sumy algebraiczne

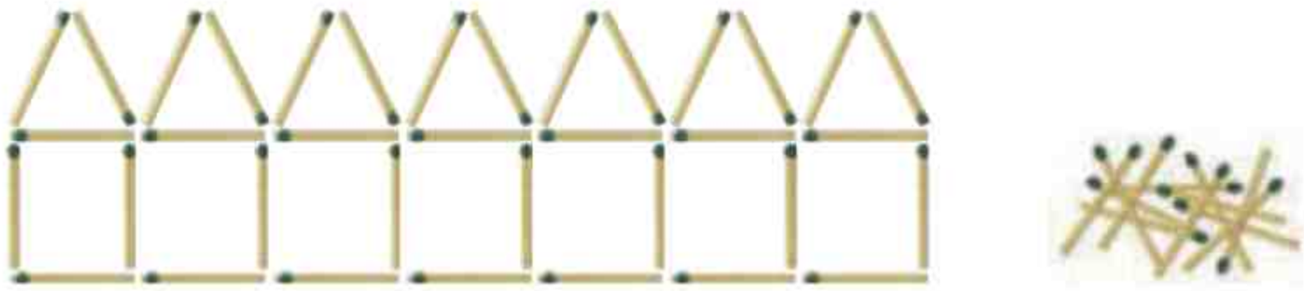
7 Mnożenie sum algebraicznych

Przed klasówką, s. 178

Zadania uzupełniające, s. 180

1 Do czego służą wyrażenia algebraiczne?

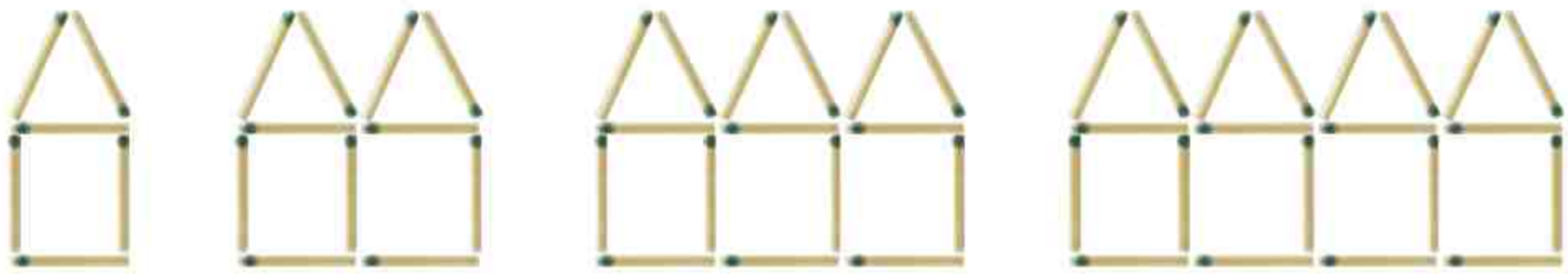
Przyjrzyj się domkom budowanym z zapałek.



Rozważmy następujący problem:

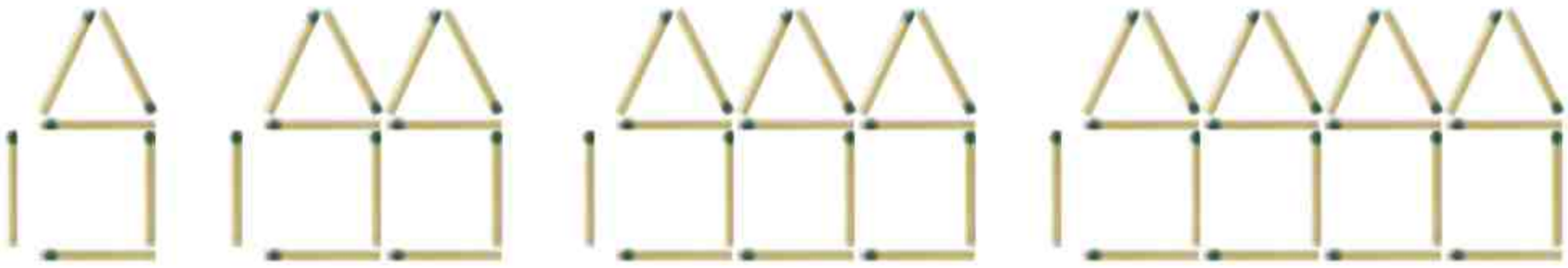
Ile zapałek potrzeba do zbudowania stu takich domków?

Policzmy zapałki w kilku szeregowcach.



domków:	1	2	3	4
zapałek:	6	11	16	21

Czy dostrzegasz jakąś regułę? Popatrz na to inaczej:



domków:	1	2	3	4
zapałek:	$1+5$	$1+2\cdot 5$	$1+3\cdot 5$	$1+4\cdot 5$

Zauważ, że do zbudowania n domków potrzeba byłoby $1+n\cdot 5$ zapałek. Łatwo więc policzyć, że do zbudowania 100 domków potrzeba $1+100\cdot 5$, czyli 501 zapałek.

Aby rozwiązać powyższy problem, znaleźliśmy ogólną regułę. Do jej opisu posłużyło nam wyrażenie:

$$1+n\cdot 5$$

Litera n w tym wyrażeniu oznacza liczbę domków.

Takie uogólnienia, formułowane za pomocą wyrażeń zawierających litery, stosuje się w matematyce bardzo często.

Wyrażenia, w których obok liczb i znaków działań występują litery, nazywamy wyrażeniami algebraicznymi.

Przykłady wyrażeń algebraicznych:

$2x+7$ $\quad \frac{ah}{2}$ $\quad a^2+b^2$

$3(a+b)-c$ $\quad (x+y)\cdot 43$

$\frac{2x-5}{x^2+1}$

Uwaga. Wyrażenie $2x+7$ oznacza to samo co $2\cdot x+7$. Kropki jako znaku mnożenia nie należy pomijać, jeśli po tej kropce znajduje się liczba wyrażona cyframi, np. w wyrażeniach:

$1+n\cdot 5$ $\quad (x+y)\cdot 43$

Za pomocą wyrażeń algebraicznych zapisujemy różne zwroty matematyczne, wzory, twierdzenia oraz równania i nierówności.

Poniżej podano przykłady, jak można zwroty matematyczne zapisać za pomocą wyrażeń algebraicznych.

liczba o 5 mniejsza od p

$p-5$

iloczyn liczb x i y

xy

suma liczb a i b

$a+b$

5% liczby z

$0{,}05z$

kwadrat różnicy liczb k i m

$(k-m)^2$

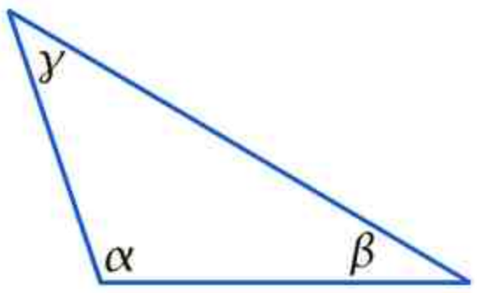
iloraz liczby a przez sumę liczb b i c

$\frac{a}{b+c}$

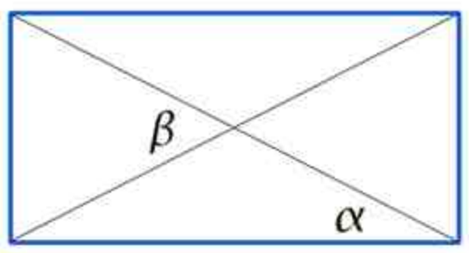
ĆWICZENIE A. Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne:

a) Liczba o 7 większa od a.
b) Kwadrat sumy liczb x i y.
c) Połowa sumy liczb k i m.
d) Iloraz sumy liczb a i b przez ich iloczyn.
e) 80% liczby a.
f) Liczba o 10% mniejsza od x.

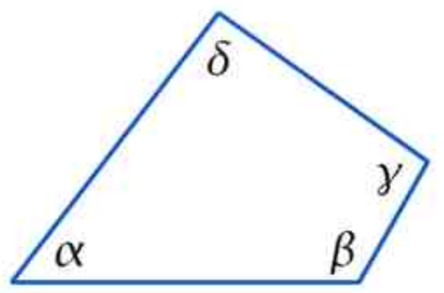
ĆWICZENIE B. Poniżej zilustrowano pewne twierdzenia za pomocą wyrażeń algebraicznych i rysunków. Spróbuj sformułować te twierdzenia, nie używając wyrażeń algebraicznych.



$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$



$\beta=2\alpha$



$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$

Z historii

Literowe oznaczenia dla wielkości niewiadomych stosował już starożytny myśliciel Diofantos. Jako pierwszy oznaczenia literowe, nie tylko dla niewiadomych, ale i dla współczynników, wprowadził matematyk francuski François Viète [czyt. fransua wiet]. Miało to ogromne znaczenie dla rozwoju algebry.

Viète (1540–1603) w czasie wojny Francji z Hiszpanią, stosując metody matematyczne, znalazł klucz do szyfru używanego przez Hiszpanów. Król Hiszpanii nie mógł uwierzyć, że człowiek potrafi złamać szyfr składający się z ponad 500 symboli. Wniósł nawet skargę do papieża, zarzucając Francuzom stosowanie czarnej magii.

Zadania

1. a) Określ, na ile części podzielimy prostą, jeżeli zaznaczymy na niej:
- 1 punkt
- 2 punkty
- 3 punkty
- n punktów

b) Na ile części zostanie podzielone koło, jeżeli narysujemy w nim:
- 1 średnicę
- 2 średnice
- 3 średnice
- n średnic

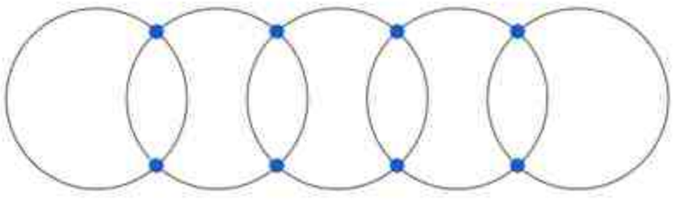
2. Figury przedstawione na rysunkach zbudowane są z jednakowych sześciokątów, o wszystkich bokach długości 1.



a) Jaki obwód ma figura zbudowana z jednego sześciokąta, jaki — z dwóch sześciokątów, a jaki — z pięciu sześciokątów?

2/180

b) Jaki obwód będzie miała figura zbudowana w podobny sposób z n takich sześciokątów?



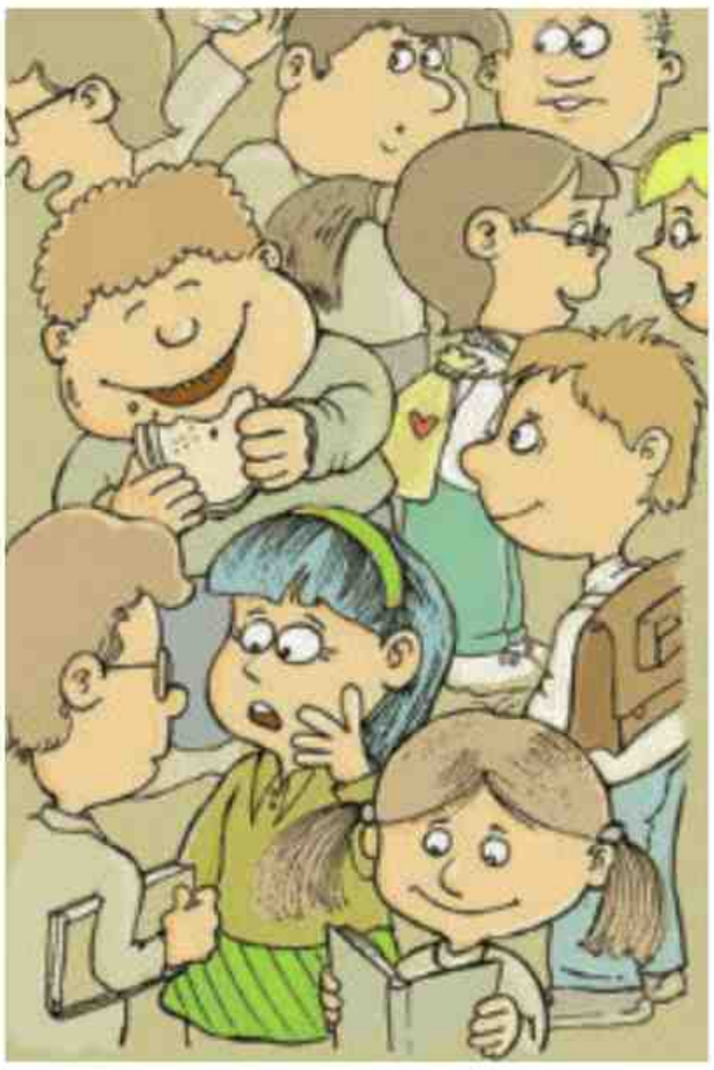
3. W łańcuszku, który utworzono z pięciu okręgów, jest 8 punktów przecięcia (zob. rysunek). Ile punktów przecięcia byłoby w łańcuszku utworzonym z n okręgów?

4. Dla liczby dodatniej n zapisz:
a) liczbę 2 razy większą od n,
b) liczbę o 7 mniejszą od n,
c) liczbę 4 razy mniejszą od kwadratu liczby n,
d) liczbę, która jest połową sumy liczb n i n^3,
e) liczbę równą 75% liczby n,
f) liczbę o 20% większą od n.

6/180

5. Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych odpowiedzi na poniższe pytania.
a) a metrów i b centymetrów — ile to centymetrów?
a metrów i b centymetrów — ile to metrów?
b) x tygodni i y dni — ile to dni?
x tygodni i y dni — ile to tygodni?
c) g godzin i m minut — ile to minut?
g godzin i m minut — ile to godzin?

6. Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne:
a) a metrów, b centymetrów i c milimetrów — ile to metrów?
b) g godzin, m minut i s sekund — ile to minut?



7. Oznaczmy przez a liczbę dziewcząt w pewnej klasie i przez b liczbę chłopców w tej klasie.

a) Ilu uczniów jest w tej klasie?

b) Ilu uczniów liczyłaby klasa, gdyby chłopców było trzy razy mniej, a dziewcząt o trzy więcej?

c) Ilu uczniów jest na lekcji, skoro nieobecni są dwaj chłopcy i połowa dziewcząt?

d) W tej klasie okulary nosi $\frac{1}{4}$ dziewcząt i co piąty chłopak. Ilu uczniów nie nosi okularów?

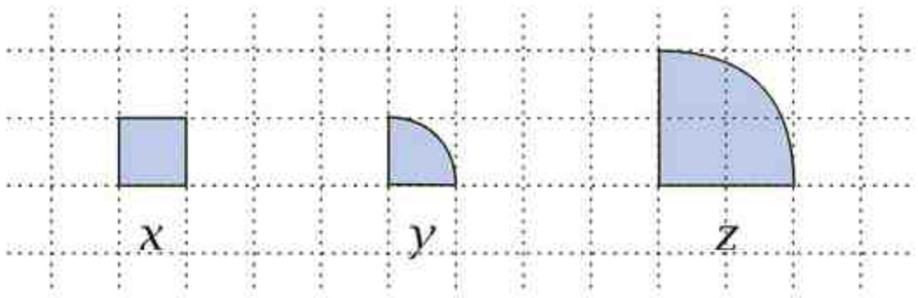
e) Uczniowie siedzą przy dwuosobowych stolikach. Jeśli wszyscy są obecni, to 4 miejsca pozostają wolne. Ile jest stolików w klasie?

Uwaga. W punkcie b) należy przyjąć założenie, że liczba b jest podzielna przez 3. Jakie założenia należy przyjąć w punktach c), d), e)?

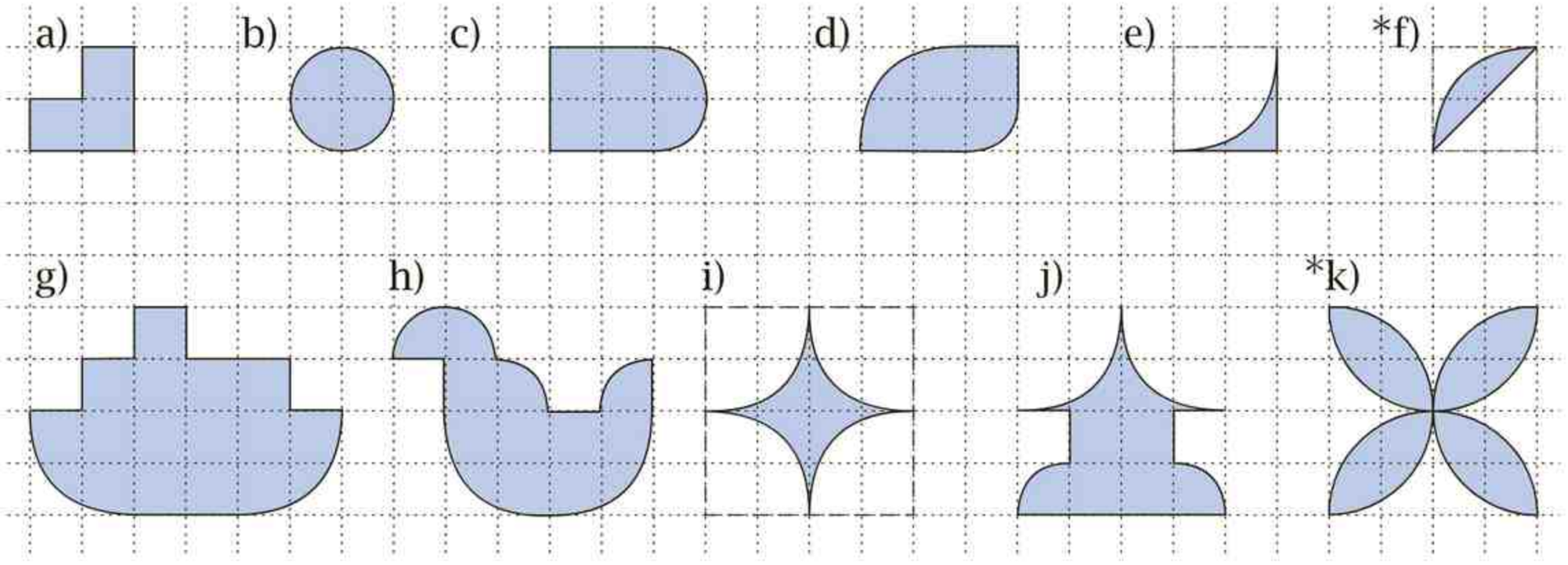
7/180

8. Przyjmijmy, że k oznacza liczbę całkowitą. Zapisz trzy kolejne liczby:
a) całkowite następujące po liczbie k,
b) całkowite następujące po liczbie $2k$,
c) nieparzyste następujące po liczbie $2k$,
d) parzyste następujące po liczbie $2k$,
e) parzyste poprzedzające liczbę $2k + 1$.

9. Przyjmijmy, że litery x, y i z oznaczają pola figur narysowanych obok.



Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych pola poniższych figur.



10. W styczniu nową stronę internetową odwiedziło x osób. W każdym kolejnym miesiącu liczba osób odwiedzających tę stronę się podwajała. Ile osób odwiedziło tę stronę w czerwcu?

11. W pewnej rodzinie co dwa lata na świat przychodziło dziecko.

a) Ile lat ma teraz najmłodsze, piąte dziecko, jeśli najstarsze dziecko ma x lat?

b) Rok temu najmłodsze, piąte dziecko, miało y lat. Ile lat ma teraz dziecko, które urodziło się jako trzecie z kolei?





12. Radek ma x lat i jest o 5 lat starszy od Marka i 3 razy młodszy od Filipa.

a) Ile lat ma Marek, a ile Filip?

b) Ile lat będzie miał Marek za 7 lat?

c) Ile lat miał Radek, gdy urodził się Marek?

d) O ile lat Filip jest starszy od Radka?

*e) Ile lat miał Filip, gdy urodził się Marek?

***13.** Paweł jest cztery razy młodszy od dziadka. Ile razy był młodszy od dziadka, gdy był dwa razy młodszy, niż jest teraz?

Wskazówka. Oznacz przez a wiek Pawła, gdy był dwa razy młodszy niż teraz.



14. W wiadrze jest x litrów wody, a w beczce y litrów wody. Zapisz, ile litrów wody będzie w wiadrze, a ile w beczce, jeśli:

a) z wiadra do beczki przelejemy pół litra wody,

b) najpierw przelejemy połowę zawartości wiadra do beczki, a potem 2 litry z beczki do wiadra,

c) najpierw z beczki przelejemy 1 litr wody do wiadra, a następnie połowę zawartości wiadra przelejemy do beczki,

d) do wiadra dolejemy 0,75 l wody ze studni, a potem trzecią część zawartości wiadra przelejemy do beczki.

15. Zapisz za pomocą wyrażeń algebraicznych i znaku równości następujące prawa:

a) Suma liczby i liczby do niej przeciwnej jest równa 0.

b) Sześcian ilorazu liczb jest równy ilorazowi sześcianów tych liczb.

c) Wartość ilorazu nie zmieni się, jeśli dzielną i dzielnik pomnożymy przez 5.

Sprawdź, czy umiesz

1. Liczba o 3 większa od liczby dwa razy większej od x^2 to:

A. $2x^2+3$ B. $\frac{x+3}{2}$ C. $\frac{x^2}{2}+3$ D. $2(x^2+3)$

2. Ania ma y lat, Ewa jest od niej o 2 lata młodsza. Ile lat będzie miała Ewa za 5 lat?

A. $5(y-2)$ C. $\frac{1}{2}y+5$

B. $y-2+5$ D. $-y+5$

3. W pewnej szkole są trzy klasy siódme, w których jest 82 uczniów. W klasie VII a jest n uczniów, w klasie VII b o m więcej niż w VII a. Ilu uczniów jest w klasie VII c?

A. $82-n-m$ C. $82-n-m-n$

B. $82-n+m$ D. $82-n-n+m$

zadania uzupełniające 1–9, str. 180

2 Wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych

W miejsce liter występujących w wyrażeniu algebraicznym możemy podstawiać różne liczby. Otrzymujemy wtedy **wartości liczbowe** wyrażenia algebraicznego.

Przykład

a) Oblicz wartość liczbową wyrażenia $2x^2-3x+7$ dla $x=-2$.

$2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+7=8+6+7=\underline{\underline{21}}$ | *Wstawiamy −2 w miejsce x.*

b) Oblicz wartość liczbową wyrażenia $2(-x+4)(y-2)$ dla $x=-10$ i $y=1$.

$2\cdot(-(-10)+4)(1-2)=2\cdot(10+4)\cdot(-1)=$
$=2\cdot 14\cdot(-1)=\underline{\underline{-28}}$ | *Wstawiamy −10 w miejsce x i 1 w miejsce y.*

Zadania

1. Oblicz w pamięci wartości liczbowe wyrażenia $x^2 + 1$ dla:

$x = 2$ $\quad x = -1$ $\quad x = 100$ $\quad x = -5$ $\quad x = 0$ $\quad x = \frac{1}{2}$



2. Najpopularniejszym sposobem oceny wagi ciała człowieka jest metoda francuskiego lekarza Paula Broca. Wprowadził on pojęcia waga prawidłowa oraz waga idealna i dla osoby o wzroście a cm podał następujące wzory:

Waga prawidłowa (w kg): $a - 100$

Waga idealna dla mężczyzn: $a - 100 - \frac{1}{10}(a - 100)$

Waga idealna dla kobiet: $a - 100 - \frac{3}{20}(a - 100)$

a) Oblicz wagę prawidłową i idealną dla mężczyzny o wzroście 180 cm oraz kobiety o wzroście 164 cm.

b) Porównaj wagę rzeczywistą z wagą idealną dla modelki o wzroście 180 cm i masie 60 kg oraz koszykarza o wzroście 216 cm i masie 136 kg.

c) Wskaźniki Broca są zupełnie nieprzydatne do oceny wagi dzieci. Oblicz wagę idealną dla dziewczynki o wzroście 110 cm oraz wagę prawidłową dla chłopca o wzroście 95 cm.

3. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $x^2 - x$ dla $x = 7$

b) $a^2 - 3a + 1$ dla $a = -4$

c) $1 + x(x + 4)$ dla $x = -11$

d) $x - 2y$ dla $x = 1$ i $y = -1$

e) $2x^2 - y(x + 1)$ dla $x = -2$ i $y = 5$

f) $(m + 1)(n - 2)$ dla $m = 2$ i $n = 1$

10/181

4. a) Oblicz wartość wyrażenia $100a + 10b + c$ dla $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

b) Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego liczbę dwucyfrową o cyfrze dziesiątek x i cyfrze jedności y.

5. Oceń, czy prawdziwe są zdania:

① Wyrażenie $(1 - a)^2 : 6 + 9$ dla każdej liczby a przyjmuje wartość dodatnią.

② Wyrażenie $a^2 + a$ dla każdej liczby a przyjmuje wartość dodatnią.

③ Wartością wyrażenia $0{,}05a^2$ nie może być liczba całkowita.



6. Wyrażenie

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

przedstawia, ile różnych trzyosobowych delegacji można wybrać spośród n osób.

a) Ile takich delegacji można wybrać spośród 5 osób, a ile spośród uczniów w twojej klasie?

b) W lodziarni jest 10 rodzajów lodów. Wybieramy 3 gałki lodów o różnych smakach. Na ile różnych sposobów można dokonać takiego wyboru?

7. Nazwijmy punktem kratowym każdy punkt przecięcia linii na kartce papieru w kratkę. Jeżeli wielokąt ma wierzchołki w punktach kratowych, to jego pole można obliczyć ze wzoru

$$\frac{1}{2}b + w - 1$$

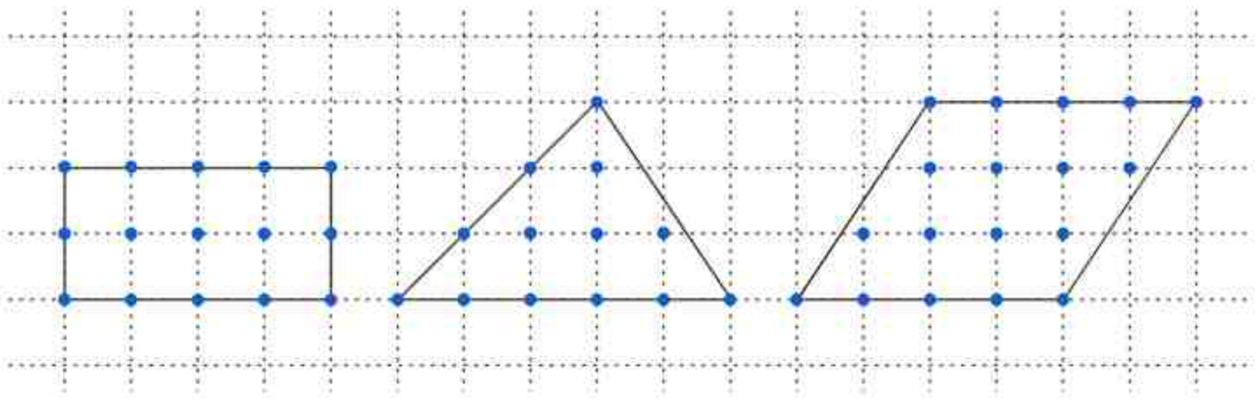
gdzie b oznacza liczbę punktów kratowych na brzegu, a w — liczbę punktów kratowych wewnątrz wielokąta. (Jednostką tego pola jest jedna kratka).

Ciekawostka

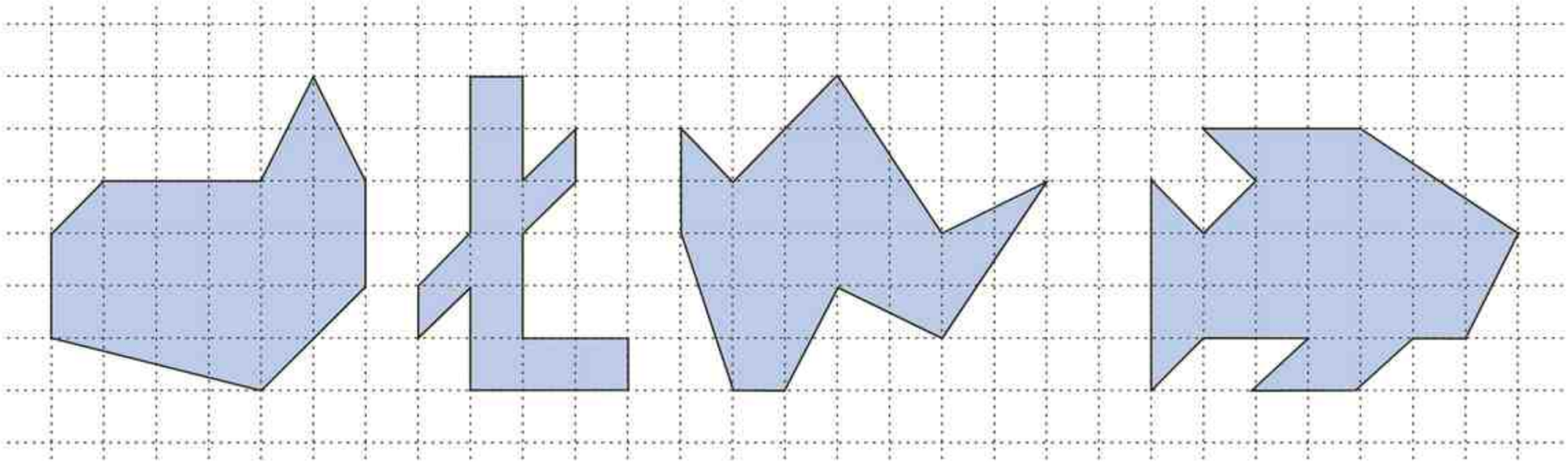
Ten ciekawy i pożyteczny wzór odkrył w 1899 r. matematyk niemiecki Georg Pick [czyt. pik].

Wzór Picka służy nie tylko do obliczania pól wielokątów. Dzięki niemu można także obliczać z dużą dokładnością pola figur o różnych nieregularnych kształtach.

a) Sprawdź ten wzór dla poniższych trzech figur.



b) Oblicz pola figur narysowanych poniżej, korzystając ze wzoru Picka.



c) Narysuj na kartce papieru w kratkę dowolny wielokąt o wierzchołkach w punktach kratowych i oblicz jego pole.

Sprawdź, czy umiesz

1. Wartość liczbowa wyrażenia $1000a + 100b + c$ dla $a = 2$, $b = 7$, $c = 3$ wynosi:

A. 273 B. 2730 C. 2703 D. 1273

2. Wartością liczbową wyrażenia $2x - (x^2 - 5)$ dla $x = -2$ jest:

A. -13 B. -3 C. 5 D. -5

3. Które z podanych wyrażeń algebraicznych przyjmuje dla $x = 5$ i $y = \frac{1}{2}$ wartość różną od 10?

A. $\frac{1}{2}(5x - 10y)$ B. $2x - 2y + 1$ C. $\frac{1}{2}x + 15y - 5$ D. $\frac{4}{9}(x - y)^2 + 1$

4. Które z podanych wyrażeń przyjmuje wartość ujemną dla $x = 274$?

A. $(x - 147)(x + 350)$ C. $x(138 - x)$

B. $(128 - x)^2$ D. $2x - (x - 159)$

→ zadania uzupełniające 10–12, str. 181

3 Jednomiany

Wyrażenia algebraiczne mogą być czasami bardzo skomplikowane. W tym rozdziale i w następnych będziemy uczyć się zapisywania wyrażeń algebraicznych w jak najprostszej postaci.

Wyrażenie

$$\frac{-3b + x + 2y^3z^2}{12 + 4x^2}$$

zbudowane jest z następujących prostszych wyrażeń:

$$-3b \qquad x \qquad 2y^3z^2 \qquad 12 \qquad 4x^2$$

Takie podstawowe wyrażenia, które są pojedynczymi liczbami, literami lub iloczynami liczb i liter, nazywamy **jednomianami**.

Uwaga. W jednomianach $2y^3z^2$ i $4x^2$ iloczyny takich samych czynników zostały zapisane w postaci potęg.

Wszystkie wyrażenia algebraiczne zbudowane są z jednomianów. Aby wyrażenie algebraiczne było czytelne, występujące w nim jednomiany powinny być **uporządkowane**, czyli zapisane w jak najprostszej postaci.

Przykłady

$\frac{1}{2}x \cdot 4z = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \cdot z = 2xz$

$(-3a) \cdot (-2b) = (-3) \cdot (-2) \cdot a \cdot b = 6ab$

Mnożymy czynniki liczbowe, wynik zapisujemy na początku jednomianu.

$2x^2x = 2 \cdot x \cdot x \cdot x = 2x^3$

$bxbx^2 = b \cdot b \cdot x \cdot x^2 = b^2x^3$

Iloczyny takich samych czynników literowych zapisujemy w postaci potęg.

Uwaga. Czynniki literowe jednomianu zapisujemy na ogół w kolejności alfabetycznej. Czasami odstępujemy jednak od tej zasady, szczególnie w wyrażeniach algebraicznych występujących w fizyce.

Liczbę występującą na początku uporządkowanego jednomianu nazywamy **współczynnikiem liczbowym** jednomianu.

Współczynnikami liczbowymi jednomianów:

$12xy \quad -5t^2z \quad 0{,}2ab \quad ab^2 \quad -yz^2$

są liczby:

$12 \quad -5 \quad 0{,}2 \quad 1 \quad -1$

$ab^2 = 1 \cdot ab^2$

$xy = 1 \cdot xy$

$-z^2 = (-1) \cdot z^2$

Zadania

1. Uporządkuj jednomiany.

a) $d \cdot (-3) \cdot c$

b) $3(-x)(-a)$

c) $zy \cdot \frac{1}{2}y$

d) $2cd \cdot (-9) \cdot d$

e) $\frac{1}{4}abb \cdot (-2a)$

f) $\frac{1}{2}a^2 \cdot 4 \cdot (-a) \cdot (-5)$

g) $3x^2y \cdot (-\frac{1}{6}xy)$

h) $-3(-x)(-x)(-y)$

i) $0{,}2tsts^2 \cdot (-15)$

13/181



2. Uporządkuj jednomiany.

a) *karafka*

b) *xylometazolin*

3. Zapisz i uporządkuj jednomian utworzony z wszystkich liter twojego imienia.

4. Zapisz w najprostszej postaci.

14/181

a) $\frac{2x \cdot 4y}{2}$ b) $\frac{3a^2 \cdot 6a}{6}$ c) $\frac{12y \cdot (-4y)}{-4}$ d) $\frac{8x \cdot 10y \cdot 2k}{\frac{1}{2}}$

Zauważ, że iloczyn jednomianów jest jednomianem.

$4x \cdot 4y = 16xy$

$2x \cdot (-3xy) = -6x^2y$

5. Zapisz w postaci uporządkowanej wynik mnożenia podanych jednomianów.

a) $3b$, $6a$ c) $-5b$, $\frac{1}{3}ab$ e) $-x$, $-x^2$

b) $-2t$, $-st$ d) pr, $2pr$ f) $\frac{1}{2}ab$, $-\frac{1}{6}a^2$

6. Jednomian $9x^3y^2$ przedstaw na cztery różne sposoby w postaci iloczynu dwóch jednomianów.

7. Zastąp symbole odpowiednimi jednomianami.

$3ab^2 = 3b \cdot ♠$ $6a^3b = ♥ \cdot (-2a)$ $-4p^2r^3 = \frac{1}{2}pr^2 \cdot ♣$

8. Szerokość prostokąta jest równa x, a długość jest 4 razy większa od szerokości. Przedstaw w postaci jednomianu pole tego prostokąta. Oblicz to pole dla $x = 5$.

16/181

***9.** Krótszy bok prostokąta ma dwa razy więcej milimetrów niż dłuższy centymetrów. Zapisz w postaci jednomianu pole tego prostokąta, gdy:

a) dłuższy bok ma a centymetrów, b) krótszy bok ma b milimetrów.

Sprawdź, czy umiesz

1. Które z wyrażeń nie jest jednomianem?

A. x^2 B. 17 C. $a + 3$ D. k

2. Po uporządkowaniu jednomianu $y \cdot 3x \cdot (-4) \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot y$ otrzymamy:

A. $-6xy^2$ B. $-6x^2y^2$ C. $6x^2y$ D. $6x^2y^2$

3. Po uporządkowaniu jednomianu *tokarka* otrzymamy takie samo wyrażenie jak po uporządkowaniu jednomianu:

A. *tatarak* B. *traktor* C. *karotka* D. *kotara*

zadania uzupełniające 13–18, str. 181

4 Sumy algebraiczne

Wyrażenie algebraiczne, które powstaje przez dodawanie jednomianów, nazywamy **sumą algebraiczną**. Jednomiany, które dodajemy, nazywamy **wyrazami sumy**.

Uwaga. Sumy algebraiczne nazywane są też **wielomianami**.

Sumę algebraiczną

$$2a + (-5x) + 7ab^2 + (-4)$$

można zapisać bez nawiasów:

$$2a - 5x + 7ab^2 - 4$$

Wyrazami tej sumy są jednomiany: $2a$, $-5x$, $7ab^2$, -4.

Przykłady

Suma algebraiczna:	$2a - 3ab + 4x^2y$	$3a^2 - 4xy - (-2)$
Inna postać tej sumy:	$2a + (-3ab) + 4x^2y$	$3a^2 + (-4xy) + 2$
Wyrazy sumy:	$2a,\ -3ab,\ 4x^2y$	$3a^2,\ -4xy,\ 2$

ĆWICZENIE A. Wypisz wyrazy sum algebraicznych:

a) $2ab - 4a - \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}$ b) $x^2 - y^2 + 2xy - 6x - y$

Jednomiany $bc \cdot 3$, $-5cb$, bc są podobne.

Jednomiany $2ab^3$ i $2ab^2$ nie są podobne.

Mówimy, że **jednomiany są podobne**, jeśli po uporządkowaniu mają takie same czynniki literowe. Jednomiany podobne mogą się różnić jedynie współczynnikami liczbowymi lub kolejnością czynników.

ĆWICZENIE B. Czy podane jednomiany są podobne?

a) $-2x$, $-2x^2$ b) $2a^3b^2$, $2a^2b^3$ c) $3xy^2$, $5y^2x$

Po dodaniu wyrazów podobnych otrzymujemy prostszą postać sumy algebraicznej. Takie upraszczanie sumy nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.

Przykłady

$3x - 5x + x = -x$

Gdy dodajemy jednomiany podobne, wystarczy dodać współczynniki.

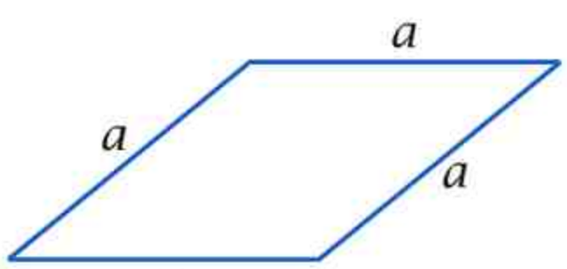
$5a + 7 - 0{,}8a = 4{,}2a + 7$

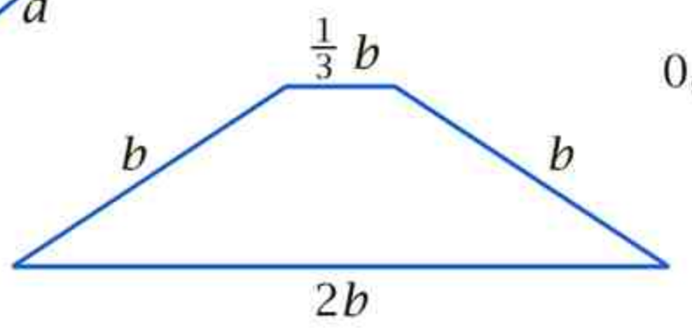
$9x - 3x^2 + 7 - 4x + x^2 + x = -2x^2 + 6x + 7$

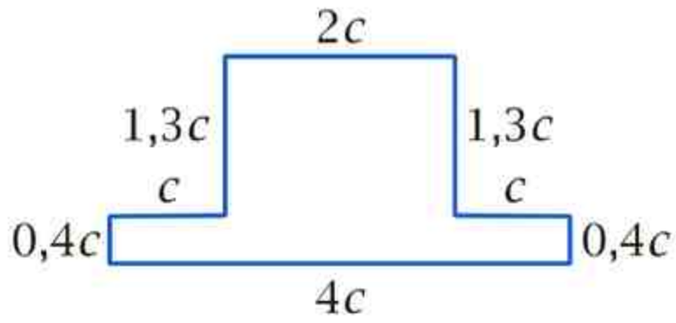
Aby łatwo odróżnić wyrazy podobne, podkreślamy je w jednakowy sposób.

Zadania

1. Przedstaw obwód każdej z narysowanych figur w postaci jednomianu.







2. Zapisz w jak najprostszej postaci (postaraj się liczyć w pamięci).

a) $x+x$ $x+3x$ $\frac{3}{4}x+x$ $x+0{,}5x$ $1{,}2x+x$

b) $5x+2x$ $3x+0{,}6x$ $2x+\frac{3}{4}x$ $3x+\frac{x}{2}$ $0{,}6x+1{,}2x$

c) $x-\frac{1}{2}x$ $x-\frac{1}{3}x$ $x-\frac{3}{4}x$ $x-0{,}6x$ $x-0{,}85x$

d) $5x-x$ $3x-0{,}5x$ $5x-\frac{2}{5}x$ $1{,}8x-1{,}2x$ $20x-10{,}5x$

e) $-5x+x$ $-2x-3x$ $5x-(-x)$ $-10x-(-x)$ $\frac{x}{2}-x$



3. W większym kubku było 1,5 raza więcej soku niż w mniejszym. Jacek wypił $\frac{3}{4}$ soku z mniejszego kubka, a Marcin $\frac{4}{5}$ soku z większego kubka. W którym kubku zostało więcej soku?

4. Uzasadnij, że jeżeli liczba całkowita n jest podzielna przez 12, to liczba $\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}n+\frac{1}{4}n$ jest całkowita i podzielna przez 13.

5. Spośród podanych jednomianów wybierz jednomiany podobne.

a) $3a$, $\frac{1}{2}a^2$, $-5a$, $\frac{3}{4}a$

b) $6x^3$, $6x^2$, x^3, $-x^3$

c) $8x^2y$, $-8xy^2$, x^3y, $-6x^2y$

d) $\frac{2}{3}xy^2$, $7y^2x$, $\frac{2}{7}xy^2$, $\frac{4}{5}y^2x$

6. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $-2-2a+3$

b) $2a-3b+3a-2b$

c) $2y-6y+4x-2x$

d) $2x+3-6x-10$

e) $-x+2x+(-6)+x-4$

f) $2ab-6-ab-(-3)$

g) $3x^2-2y^2-6x^2-2y^2$

h) $3{,}5b-2{,}4c-0{,}6c-0{,}5b$

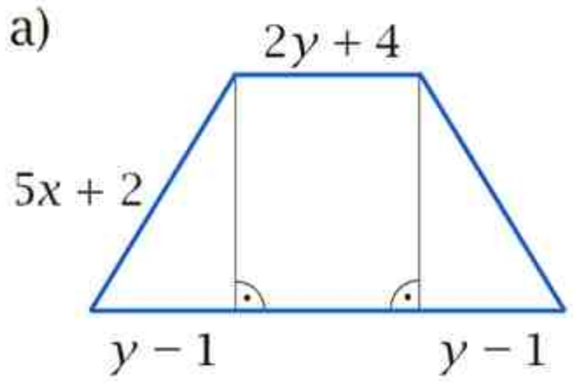
i) $3x^2-2x+1+x-4x^2-2$

j) $2m^2+3mn-n+mn+3n-m^2$

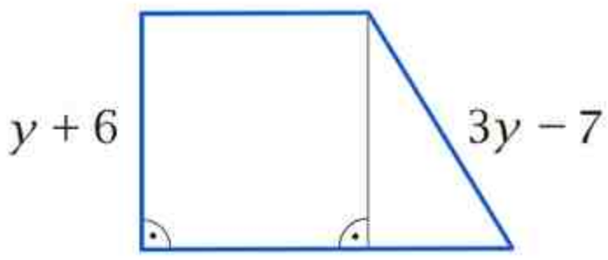
19/181

7. Zapisz w jak najprostszej postaci obwody narysowanych trapezów.

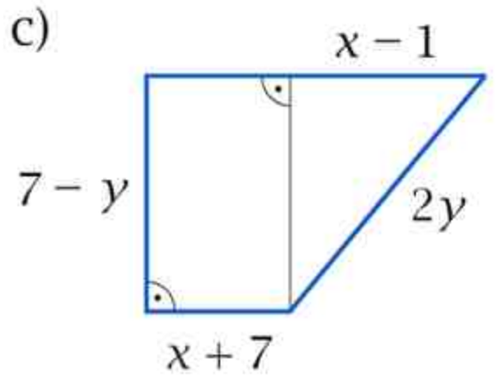
a)



b)



c)



8. Oblicz wartości liczbowe sum (najpierw zredukuj wyrazy podobne):

a) $2a + 3 - a + 6 + 7a$ dla $a = -2$

b) $2z + t - 3z + 4t - 1$ dla $z = 5$ i $t = 0{,}1$

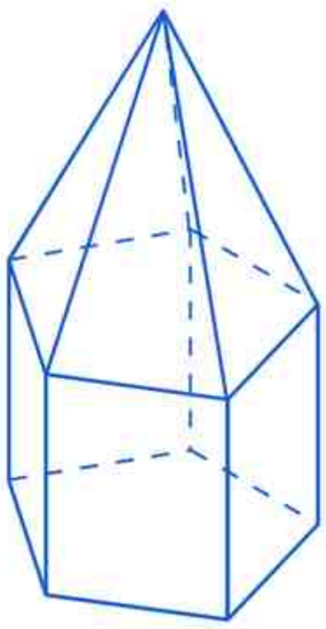
c) $13x - 2y + 7 - 9x + y - 4 + x - 3$ dla $x = 0{,}2$, $y = -1$

d) $n^2 + n - 7 + 3n^2 - n - 9 - n + 16$ dla $n = -\frac{1}{2}$

20/181

9. Zapisz jakąś skomplikowaną sumę algebraiczną, która po zredukowaniu wyrazów podobnych będzie miała podaną postać.

a) $3x + 7$ b) $-x + y$ c) $2xy + y^2 - 3$



10. Przyjmijmy dla wielościanu następujące oznaczenia:

S — liczba ścian, W — liczba wierzchołków, K — liczba krawędzi.

Oblicz wartość sumy $S + W - K$ dla:

a) graniastosłupa, którego podstawą jest pięciokąt,

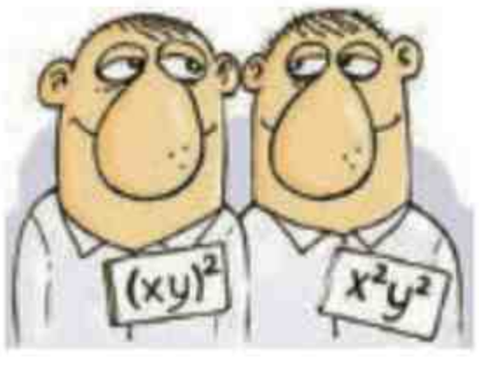
b) ostrosłupa, którego podstawą jest wielokąt o m bokach,

c) wielościanu powstałego przez sklejenie podstawami graniastosłupa i ostrosłupa (podstawami są takie same wielokąty o n bokach).

Z historii

Po rozwiązaniu zadania otrzymasz pewną zależność między liczbą ścian, wierzchołków i krawędzi w wielościanie. Zależność tę odkrył w 1752 r. matematyk szwajcarski Leonhard Euler [czyt. leonard ojler].

Euler (1707–1783) jest uważany za jednego z najwybitniejszych matematyków w historii. Napisał prawie 900 prac naukowych, co stanowiło do niedawna rekord wszechczasów, odnotowany w Księdze Guinnessa. Wiele bardzo trudnych problemów rozwiązywał w pamięci — od 1766 r. był niewidomy.



11. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

① Jednomiany x^2y^2, xy^2 są podobne.

② Wyrażenie $x \cdot x^2$ można zapisać w postaci x^3.

③ Wyrażenie $3x^2 - x^2 + y$ można zapisać w postaci $3 + y$.

④ Wyrażenie $4b^2 - 3b^2 + 1$ ma zawsze wartość dodatnią.

Sprawdź, czy umiesz

1. Wskaż parę jednomianów, które nie są podobne:

A. $-ab$ i $\frac{1}{2}ab$

B. $3x^2$ i $-x^2$

C. $-xz$ i $\frac{1}{2}zx$

D. $3x^3y^2$ i $3x^2y^3$

2. W którym przykładzie niepoprawnie dodano wyrazy podobne?

A. $x^2 + 2xy - y^2 + 2x^2 - 2xy + y^2 = 3x^2$

B. $2a - b + 3a - 2b = 5a - 3b$

C. $ab + c - ba - 2c = -c$

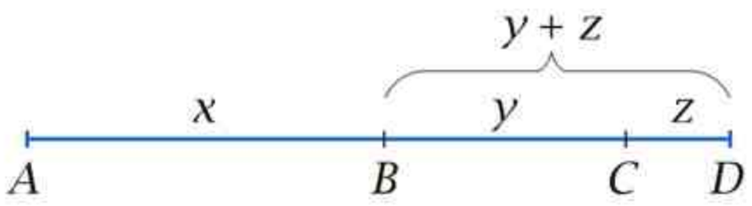
D. $x^2 + 2x + 7 - x^2 - 3x + 3 = x + 10$

3. Dla $x = 0{,}2$ i $y = \frac{1}{2}$ wartość liczbowa sumy $2x - 4y + 3y + 3x - 5y - x + 1$ jest równa:

A. $-8{,}2$ B. 3 C. $-3{,}2$ D. $-1{,}2$

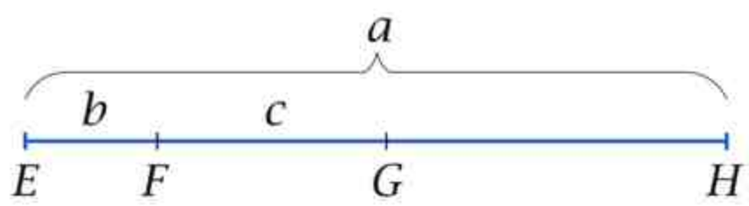
zadania uzupełniające 19–22, str. 181

5 Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych



Odcinek AD można otrzymać, dodając do odcinka AB odcinek BD albo dodając najpierw odcinek BC, a następnie odcinek CD. Zachodzi więc równość:

$$x + (y + z) = x + y + z$$



Odcinek GH można otrzymać, odejmując od odcinka EH odcinek EG albo odejmując najpierw odcinek EF, a następnie odcinek FG. Zachodzi więc równość:

$$a - (b + c) = a - b - c$$

Powyższe równości są prawdziwe dla wszystkich liczb (nie tylko dla dodatnich). Z równości tych możemy korzystać, gdy dodajemy lub odejmujemy sumy algebraiczne.

Przykłady

$2a + (b - 3) = 2a + b - 3$

$(2x + 3y) + (4z - 5) = 2x + 3y + 4z - 5$

Jeżeli składnik sumy algebraicznej występuje w nawiasie, który jest poprzedzony znakiem **plus**, to nawias możemy opuścić. Nawias możemy też opuścić, gdy nie jest poprzedzony żadnym znakiem.

$3a - (b + 2) = 3a - b - 2$

$-(5a - 3) - 2b = -5a + 3 - 2b$

Jeżeli składnik sumy algebraicznej występuje w nawiasie, który jest poprzedzony znakiem **minus**, to nawias możemy opuścić, zmieniając znak każdego wyrazu występującego w nawiasie na przeciwny.

Zadania

1. Zapisz wyrażenia, nie używając nawiasów. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $2a + (3a - 7)$

b) $(2x - 3) + x$

c) $7 - (5x + 4)$

d) $3x - (y - 2x)$

e) $-(3a + 6) - 4$

f) $-(x - 2y) - 3x$

g) $(2p - 1) + (3 + 5p)$

h) $(4 - 2x) - (7x - 2)$

i) $-(2x - 1) + (3x + 1)$

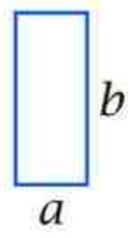
j) $(2m + 4n) + (m - 0{,}5n)$

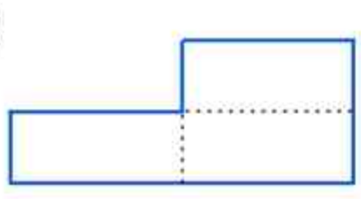
k) $(4a - 7b) - (2a + 3b)$

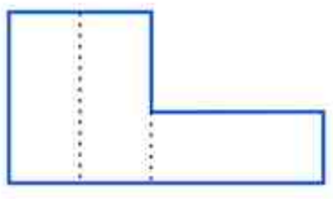
l) $-(2p - r) - (2r - p)$

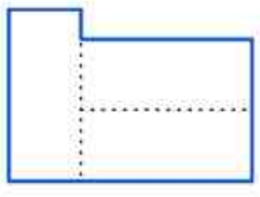
23/182

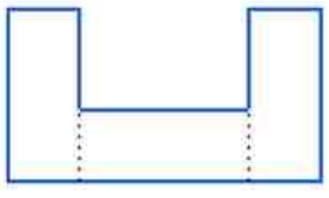
2. Litery a i b oznaczają długości boków prostokąta narysowanego obok. Zapisz w jak najprostszej postaci obwody poniższych figur.

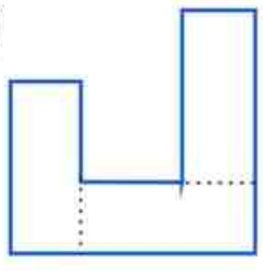


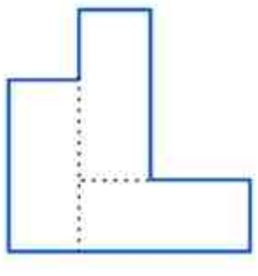
a) 

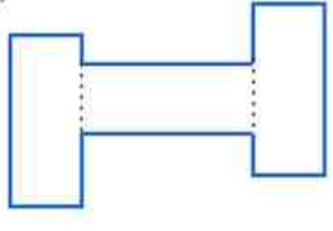
b) 

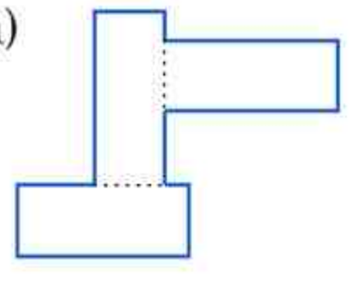
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

3. Sprawdź, czy poniższe kwadraty są kwadratami magicznymi.

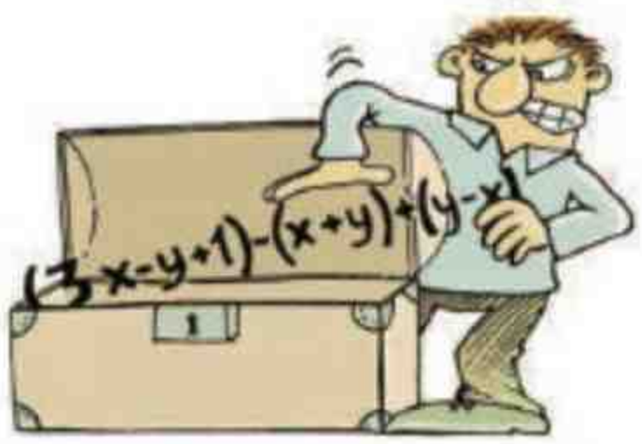
W kwadracie magicznym sumy wyrazów w każdym wierszu, w każdej kolumnie oraz na przekątnych są równe.

a)

$6 - a$	$5 - 3a$	$a + 4$
$a + 3$	$5 - a$	$7 - 3a$
$6 - 3a$	$a + 5$	$4 - a$

b)

$2x - 1$	$4x - 2$	$x + 1$
$2x - 2$	$2x + 1$	$3x - 1$
$3x + 1$	$x - 1$	$3x - 2$



4. Zapisz w jak najprostszej postaci i oblicz ich wartości dla $x = 2$ i $y = -3$.

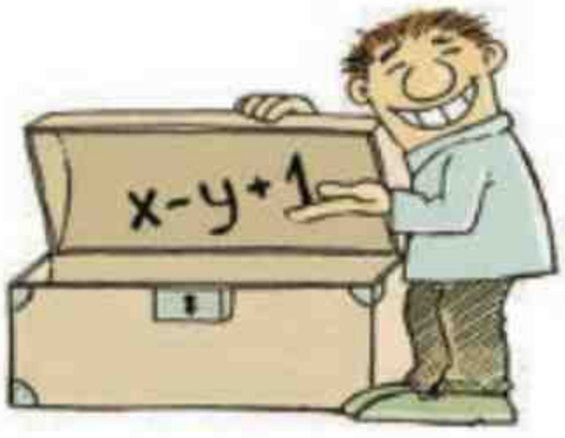
a) $(x + y) + (x - 4) - (5 - y)$

b) $-(2x + y) - (3 - x) + (2y - 5)$

c) $(3x - y + 1) - (x + y) + (y - x)$

d) $-(2x^2 - 3xy) - (2y - 3x^2) + (-xy - y)$

25/182



5. Niech A oznacza sumę algebraiczną $3x - y$, niech B oznacza $x - 1$, a C niech oznacza sumę $-3x - y$. Wykonaj podane działania i zapisz wynik w jak najprostszej postaci:

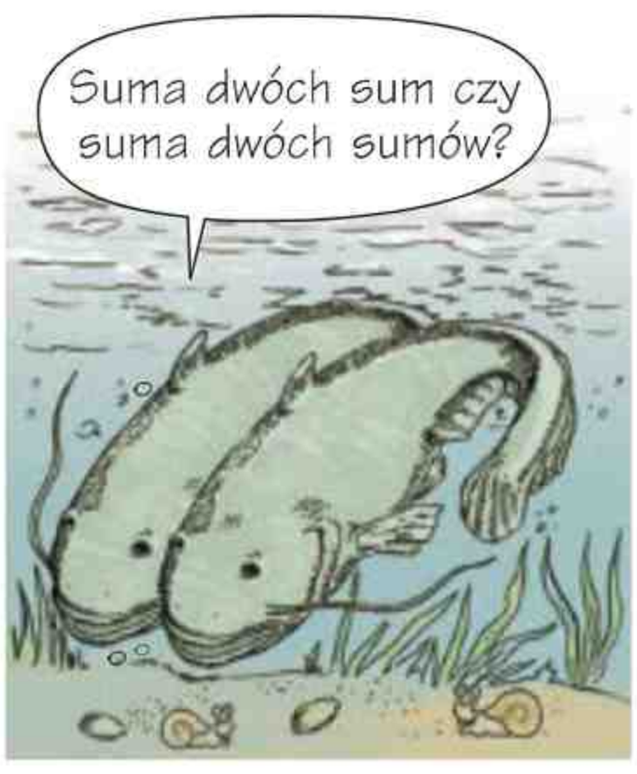
a) $A + B$ b) $A + B - C$ c) $A - B - C$ d) $A - (B - C)$

6. Wykonaj podane działania.

a) Do sumy liczb a i b dodaj ich różnicę.

b) Od sumy liczb a i b odejmij ich różnicę.

c) Od różnicy liczb a i b odejmij sumę podwojonej liczby a i połowy liczby b.



7. Przedstaw wyrażenie $4a^2 - 3ab$ w postaci:

a) sumy dwóch sum algebraicznych,

b) różnicy dwóch sum algebraicznych.

8. Jaką sumę algebraiczną należy wpisać w nawiasie, aby otrzymać sumę zapisaną z prawej strony?

a) $(\,?\,) + (2x^2 - 3xy)$ $\quad 6x^2 + xy - 7$

b) $(5x^2 - 4x + 3) - (\,?\,)$ $\quad 10 + x$

c) $(\,?\,) - (6ab - 6a + 6b)$ $\quad 6ab - a + 1$

26/182

***9.** W wyrażeniu $x^2 - 1 - 2x^2 + 7$ wstaw nawiasy tak, aby niezależnie od wartości x otrzymane wyrażenie miało wartość:

a) ujemną, b) dodatnią.

10. Zapisz w jak najprostszej postaci podane wyrażenia.

a) $x + [x - (z - x)]$ $\quad$ c) $a - [b - (a + b)]$

b) $-(-a) + (-b + a)$ $\quad$ d) $x - \{x - [x - (x + 1) - (x - 1) - x] + (1 - x)\}$

Sprawdź, czy umiesz

1. Po uproszczeniu wyrażenia $(2x-3y)+(2y-3x)-(x-y)$ otrzymamy:

A. $-2x$ B. $-2x-4y$ C. $4x-4y$ D. $-2x+2y$

2. Dane są wyrażenia $P: 4x-2xy-1$ oraz $D: -5x+xy+1$. Po wykonaniu działania $P-D$ otrzymamy:

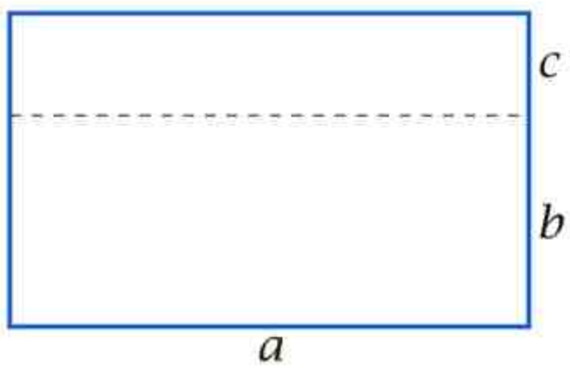
A. $-x-3xy$ B. $-x-xy-2$ C. $9x-3xy$ D. $9x-3xy-2$

3. Po dodaniu do sumy liczb $2x$ i y różnicy $x-2y$ otrzymamy:

A. $3x+3y$ B. $3x-3y$ C. $3x-y$ D. $x+3y$

→ zadania uzupełniające 23–27, str. 182

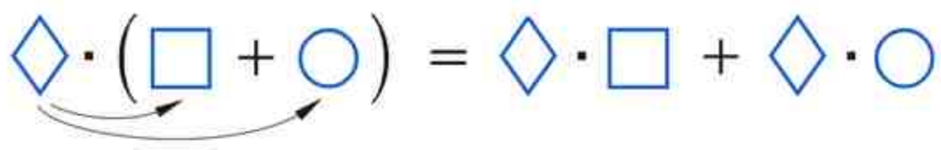
6 Mnożenie jednomianów przez sumy algebraiczne



Rysunek przedstawia prostokąt o bokach długości a i $b+c$. Pole tego prostokąta jest równe $a(b+c)$. Zauważ, że pole tego prostokąta jest sumą pól dwóch mniejszych prostokątów, czyli można je też zapisać w postaci $ab+ac$. Zachodzi więc równość:

$$a(b+c)=ab+ac$$

Powyższa równość, nazywana prawem rozdzielności mnożenia względem dodawania, jest prawdziwa dla dowolnie wybranych liczb a, b, c. Z równości tej będziemy korzystać przy mnożeniu jednomianów przez sumy algebraiczne.



Przykłady

$5(x+2y)=5x+10y$

$5\cdot x \quad 5\cdot 2y$

Mnożymy jednomian przez każdy składnik sumy.

$-3(a-3)=-3a+9$

Wyrażenie $-3(a-3)$ oznacza to samo co $(-3)\cdot(a-3)$.

$5\cdot\frac{2x-3}{3}=\frac{5}{3}(2x-3)=\frac{10}{3}x-5$

W podobny sposób dzielimy sumy algebraiczne przez liczby.

Przykłady

$(12x - 2) : 4 = 3x - \frac{1}{2}$ | *Każdy składnik sumy dzielimy przez 4.*

$12x : 4 \qquad (-2) : 4$

$\frac{3x - 6y + 1}{3} = \frac{3x}{3} - \frac{6y}{3} + \frac{1}{3} = x - 2y + \frac{1}{3}$ | *Wyrażenie* $\frac{3x - 6y + 1}{3}$ *oznacza to samo co* $(3x - 6y + 1) : 3 = 3x : 3 - 6y : 3 + 1 : 3$.

$3 - \frac{2y - 5}{2} = 3 - \frac{1}{2}(2y - 5) = 3 - y + \frac{5}{2}$ | *Zwróć uwagę na dopisane nawiasy!*

Zadania

1. Przekształć iloczyny na sumy.

a) $3(a - 2)$
b) $-4(x + y)$
c) $-5(-x + 1)$
d) $-3a\left(\frac{1}{3} - a\right)$
e) $(t - 2s - 1) \cdot 7$
f) $\frac{1}{2}(2a - 4b + 1)$
g) $m(3m - 2n - 4)$
h) $3p(2r + 5p - 1)$
i) $xy(2x - 3y + 5)$

28/182

2. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $3(2x - 1) + 4(1 - x)$
b) $2(7x + 5) - 6(x - 2)$
c) $-2x(8 - x) - 5(x^2 + 3x)$
d) $5(3 - 2x) - (4x + 6) \cdot 3$

29/182

3. Przekształć ilorazy na sumy.

a) $(-4x + 8) : 4$
b) $\frac{5x + 10y}{5}$
c) $(6p^2 - 8pr) : (-2)$
d) $\frac{3x - 6xy + 1}{-3}$
e) $(x^2 + x - 1) : \left(-\frac{1}{6}\right)$
f) $\frac{2{,}5x^2 - 0{,}5x + 1}{5}$

30/182

4. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $2x + 5 - \frac{3x - 12}{3}$
b) $\frac{12x + 16}{4} - \frac{10x + 15}{5}$
c) $\frac{9 - 6x}{3} - \frac{21 - 14x}{7}$
d) $\frac{4x - 8}{2} - 3 \cdot \frac{10x - 50}{5}$

5. Niech A oznacza wyrażenia algebraiczne $3x^2 - xy$, niech B oznacza $-2y$, a C niech oznacza wyrażenie $3x$. Wykonaj działania:

a) $(A \cdot B) \cdot C$
b) $A \cdot (B \cdot C)$
c) $(A + B) \cdot C$
d) $A \cdot C + B \cdot C$

6. a) Ile wynosi średnia arytmetyczna liczb $2k-1$ i $2k+1$?

b) Oblicz średnią arytmetyczną liczb $2k-3$, $2k+1$ i $2k+5$.

c) Ile wynosi średnia arytmetyczna trzech kolejnych liczb naturalnych następujących bezpośrednio po liczbie $2k$?

Średnia arytmetyczna liczb a i b to:
$$\frac{a+b}{2}$$
Średnia arytmetyczna liczb a, b i c to:
$$\frac{a+b+c}{3}$$



7. Przeczytaj rozmowę Jasia i Małgosi na rysunku obok. Zapisz wypowiedź Jasia w postaci wyrażenia algebraicznego. Przekształć to wyrażenie do prostszej postaci. Jaką liczbę pomyślała Małgosia na początku?

8. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $2x(x-5)-3(x^2-2x)+(x-2)x$

b) $a(a+b+c)-b(a-b+c)-c(a-b-c)$

c) $x(x^2+2x+1)-(-4x^3+8x^2-6):2$

d) $12b\cdot\frac{b-1}{4}+14\cdot\frac{b^2-2b}{21}-\frac{b-b^2}{3}$

31/182

9. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $3(x^2-2x+3)-2(x^2-5x-1)$ dla $x=2$,

b) $a(2ab+b)-b(a-2ab+a^2)$ dla $a=0{,}1$ i $b=-10$.

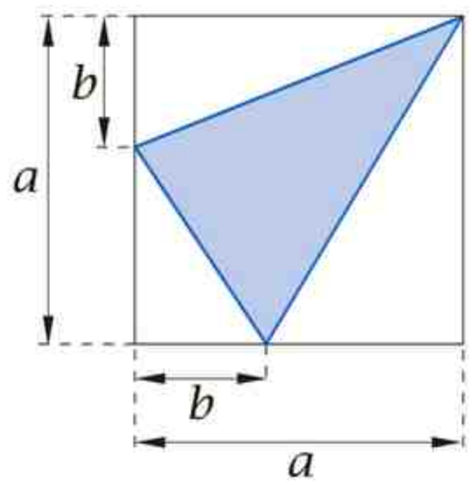
10. Dany jest trapez o podstawach a i b oraz wysokości h. Zwiększamy każdą z podstaw trapezu o 2, a wysokość zwiększamy 3 razy. O ile większe pole ma nowy trapez?

11. Zastąp symbole odpowiednimi jednomianami.

$(a+b)c+(a-b)c+\blacklozenge=0$ $\qquad$ $a(b-c)-b(a-c)+\heartsuit=bc$

***12.** Zapisz pole zacieniowanego trójkąta w postaci wyrażenia algebraicznego. Oblicz to pole dla $a=5$ i $b=1$.

Uwaga. Zapis $a=5$ jest skróconą formą zapisu $a=5$ *jednostek długości*. Podobne uproszczenie stosujemy także w innych zadaniach tego typu.



Sprawdź, czy umiesz

1. W którym przykładzie działanie zostało wykonane niepoprawnie?

A. $4(k+3) = 4k+12$

B. $-3(x-y) = -3x+3y$

C. $(12k-4):(-4) = 1-3k$

D. $(2x-1):\frac{1}{2} = x-\frac{1}{2}$

2. Po przekształceniu wyrażenia $-x(-2x-1)-(4x^2-10x):2$ otrzymamy:

A. $-4x^2-6x$ B. $-4x$ C. $-4x^2-4x$ D. $6x$

3. Dany jest równoległobok o podstawie a i wysokości h ($h > 1$). O ile mniejsze jest pole równoległoboku, który ma taką samą podstawę, a wysokość o 1 mniejszą?

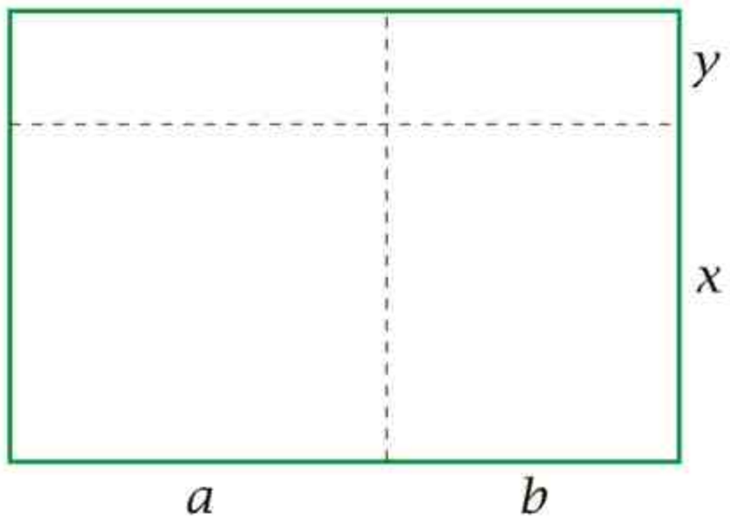
A. h B. a C. 1 D. ah

4. Liczba a jest mniejszą z dwóch kolejnych liczb nieparzystych. Iloczyn tych liczb jest równy:

A. $2a+1$ B. a^2+1 C. $3a^2-1$ D. a^2+2a

zadania uzupełniające 28–32, str. 182

7 Mnożenie sum algebraicznych

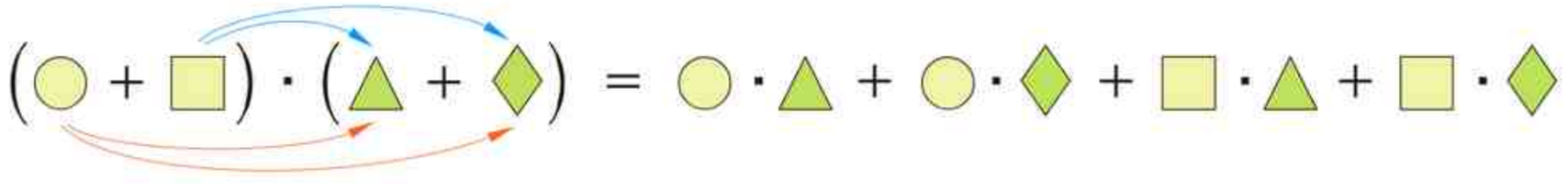


Na rysunku obok przedstawiony jest prostokąt o bokach $a+b$ i $x+y$. Pole tego prostokąta jest równe $(a+b)(x+y)$.

Zauważ, że pole tego prostokąta jest sumą pól czterech mniejszych prostokątów, czyli można je też zapisać w postaci $ax+ay+bx+by$. Otrzymujemy więc równość:

$$(a+b)(x+y) = ax+ay+bx+by$$

Równość ta pokazuje, w jaki sposób możemy przekształcać iloczyn dwóch sum algebraicznych.



Przykłady

$(2a+7)(x+3) = 2ax + 6a + 7x + 21$

$2a \cdot x \quad 2a \cdot 3 \quad 7 \cdot x \quad 7 \cdot 3$

Mnożymy każdy składnik pierwszej sumy przez każdy składnik drugiej sumy.

$(a+5)(x-3y+1) = ax - 3ay + a + 5x - 15y + 5$

$a \cdot x \quad a \cdot (-3y) \quad a \cdot 1 \quad 5 \cdot x \quad 5 \cdot (-3y) \quad 5 \cdot 1$

Zadania

1. Wykonaj mnożenie.

a) $(x+2)(y+1)$

b) $(2a+1)(3-b)$

c) $(a-1)(a^2-b^2)$

d) $(2x-1)(y-3)$

2. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $(x+1)(x+2)$

b) $(3a+4)(a-5)$

c) $(2t+1)(1-3t)$

d) $(3ab-7)(3-7ab)$

e) $(-x+y)(5x+6y)$

f) $(x+5y)(7x-y)$

g) $(2x-y)(x+y)$

h) $(ab-a)(2ab+6a)$

33/183

3. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $(t+1)(t^2+2t+3)$

b) $(p-2)(3p^2-5p+1)$

c) $(2m-1)(-2m^2+3m-5)$

d) $(4-5w)(3w^2-w-2)$

4. Zapisz w postaci sumy algebraicznej pole:

a) prostokąta o bokach $x+5$ i $x-2$,

b) trójkąta o podstawie $x+3$ i wysokości $x-3$,

c) trapezu o podstawach x, $x+2$ i wysokości $x+1$.

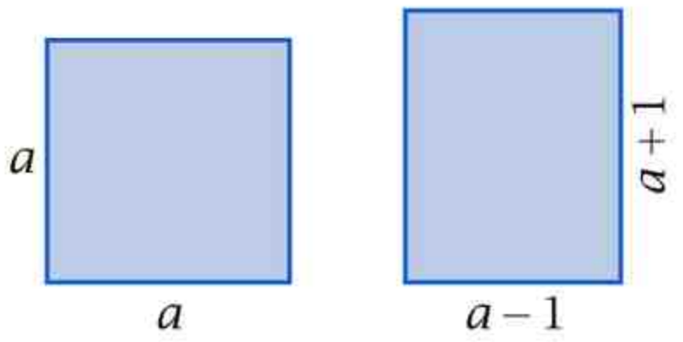
5. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

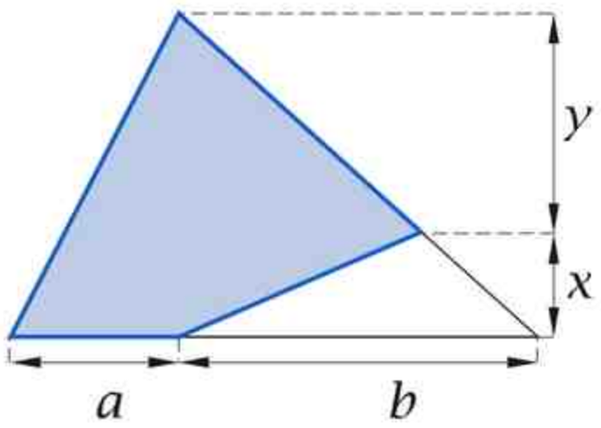
a) $(x+3)^2$

b) $(a-2)^2$

c) $(2x+5)^2$

6. Która figura ma większe pole: kwadrat o boku a czy prostokąt o bokach $a-1$ i $a+1$?





7. Zapisz w postaci sumy algebraicznej wzór na pole zacieniowanej figury, przedstawionej na rysunku obok.

8. Zapisz w postaci sumy algebraicznej pole trójkąta prostokątnego o bokach:

$$4n^2-3, \quad 4n^2-4, \quad 4n^2-11$$

Ciekawostka

W jednym z dzieł słynnego matematyka greckiego Diofantosa (III w. n.e.) znajduje się następujące zadanie:

Suma dwóch liczb wynosi 20, a suma kwadratów tych liczb wynosi 208. Jakie to liczby?

***9.** Przeczytaj zadanie Diofantosa i rozwiąż je.

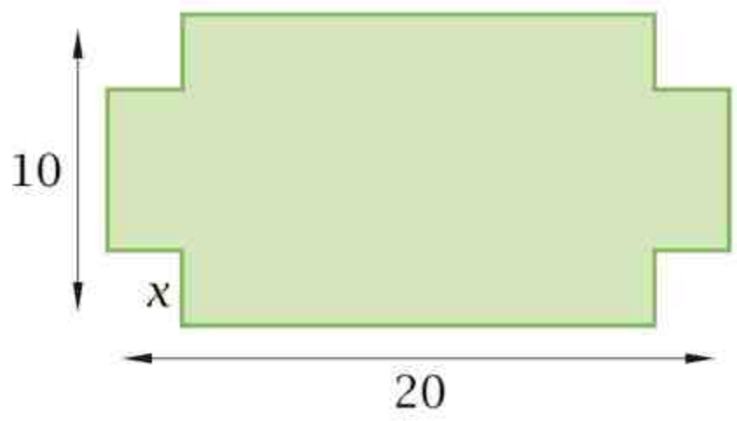
Wskazówka. Zauważ, że jedna z szukanych liczb musi być mniejsza od 10. Można ją więc zapisać w postaci $10-x$. W jakiej postaci można zapisać drugą z szukanych liczb?

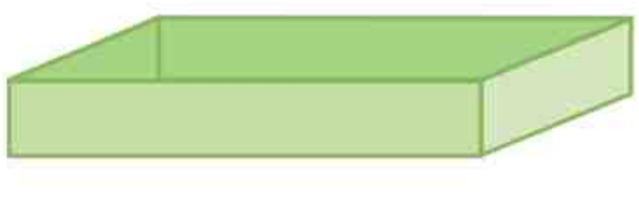
10. Z prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach 20×10 odcinamy w rogach cztery jednakowe kwadraty o boku x i składamy pudełko.

a) Zapisz w postaci sumy algebraicznej wzór na objętość pudełka.

b) Oblicz tę objętość dla $x=2$ i dla $x=4$.

c) Oblicz wartość otrzymanej sumy algebraicznej dla $x=5$. Zinterpretuj wynik.





11. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$ b) $(x+1)(x^3-x^2+x-1)$

***12.** Znajdź jak najprostszą postać wyrażenia:

$$(x-1)(x^{99}+x^{98}+\ldots+x^2+x+1)$$

35/183

13. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+1)(x+2)(x+3)$

b) $(x-2)(x+5)(2x-1)$

c) $(x-4)(x+1)^2$

d) $(2x-3)^2(x+2)$

14. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $(x+1)(x-2)+(x+2)(x-1)$

b) $(5k+n)(k-2n)-k(4k+n)$

c) $(4y+3)(y-2)-2y(4-2y)$

d) $-(3c-2)(c-1)-c(c-2)$

e) $2(3a^2-1)-(a+2)(a+2)$

f) $5x^2(x^2+1)-(x^2-2)(x^2+3)$

36/183

15. Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa dla dowolnej liczby x.

a) $x(x+2)+1=(x+1)(x+1)$

b) $(x+5)(x+5)=(x-5)(x-5)+20x$

16. a) Wykaż, że dla dowolnej wartości zmiennej x wartość liczbowa wyrażenia $(x-6)(x+8)-2(x-25)$ jest dodatnia.

b) Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n(n+2)-(n-7)(n-5)$ jest podzielna przez 7.

17. Resztą z dzielenia pewnej liczby n przez 3 jest 2. Wykaż, że jeśli do kwadratu liczby n dodamy 2, to otrzymamy liczbę podzielną przez 3.

18. Resztą z dzielenia pewnej liczby n przez 6 jest 5. Wykaż, że resztą z dzielenia kwadratu liczby n przez 6 jest 1.

Sprawdź, czy umiesz

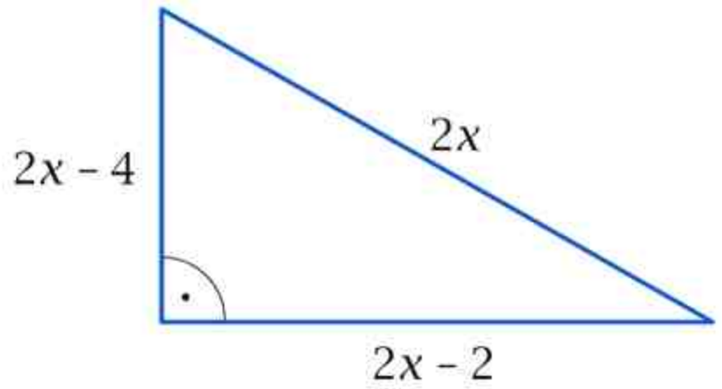
1. W którym przykładzie poprawnie wykonano mnożenie sum?

A. $(x+3)(x^2-1)=x^3-3$

B. $(a-6)(3+a)=a^2+9a-18$

C. $(2x-3)(1-4x)=-8x^2-14x-3$

D. $(3a-1)(5a+1)=15a^2-2a-1$



2. Która suma algebraiczna opisuje pole narysowanego trójkąta prostokątnego?

A. $4x^2-12x+8$

B. $2x^2-6x+4$

C. $4x^2-8$

D. x^2-3x+2

3. Wyrażenie $-(4x-3)(x-2)-(2x+6)(-2x-1)$ można zapisać w postaci:

A. $25x$

B. $-8x^2+3x-12$

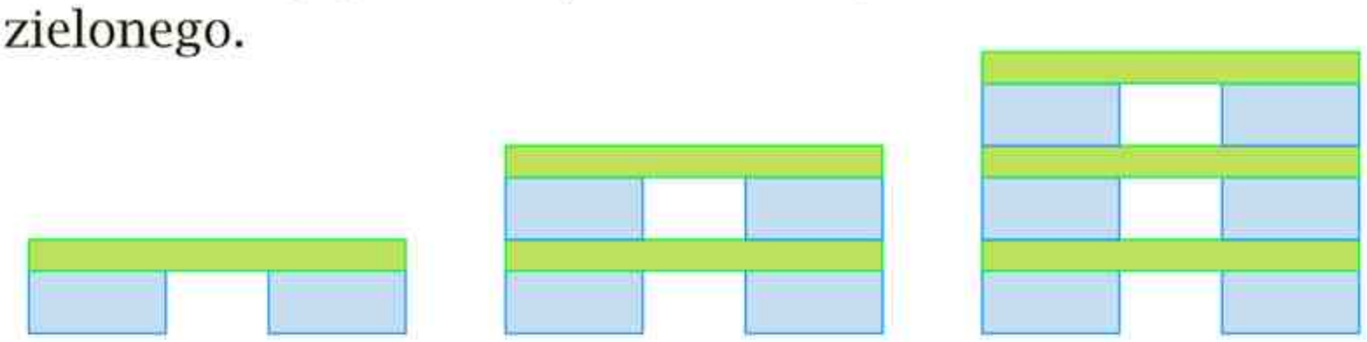
C. $x-12$

D. $-8x^2+21x$

zadania uzupełniające 33–51, str. 183–184

Przed klasówką

1. Dominika buduje wieże z klocków — jednopiętrową, dwupiętrową, trzypiętrową itd. Każde piętro wieży składa się z dwóch klocków niebieskich i jednego zielonego.



a) Ile zielonych i ile niebieskich klocków potrzeba do zbudowania wieży o n piętrach?

b) Ile pięter ma wieża, jeśli do jej zbudowania Dominika użyła n niebieskich klocków?

2. Do połowy liczby x dodano 5 i liczbę otrzymaną w ten sposób pomnożono przez 7. Wynik tych działań można przedstawić w postaci wyrażenia:

A. $\frac{x}{2}+5\cdot 7$ B. $7\cdot(2x+5)$ C. $\frac{x+5}{2}\cdot 7$ D. $7\cdot\left(\frac{x}{2}+5\right)$

3. Ile wyrażeń spośród podanych w ramce obok przyjmuje dla $n=-5$ wartość mniejszą od -3?

A. jedno B. dwa C. trzy D. cztery

$n-n^2$	$4n+14$
$8-n$	$\frac{n+1}{2}$

4. Jakim jednomianem należy zastąpić kwadracik?

a) $5m^2p^3=10mp\cdot\square$ b) $6mp^4=3p^2\cdot\square$ c) $4{,}5m^3p^2=9m^2p\cdot\square$

5. Czy po przekształceniu podanego wyrażenia można otrzymać wyrażenie w ramce?

a) $(4a-2b)-(6b-2a)-6a$	$-8b$	TAK/NIE
b) $10xy^2\cdot\frac{1}{2}xy-2x$	$3xy^3$	TAK/NIE
c) $(3m+2)(5-3m)-9m$	$10-9m^2$	TAK/NIE

6. Po przekształceniu wyrażenia $6x-3x(2-x)(5x+1)$ otrzymamy:

A. $-15x^3-33x^2$ C. $5x^3-30x^2-12x$

B. $15x^3+27x^2+12x$ D. $15x^3-27x^2$

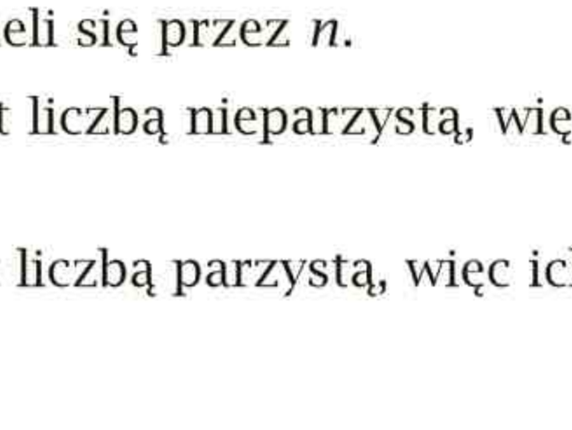
7. Jeśli Ania ma a lat, a Kasia jest od niej o 5 lat młodsza, to za siedem lat Kasia będzie miała lat:

A. $a-2$ B. $a+2$ C. $a+12$ D. $a+7$

8. W skarbonce było m monet, wśród nich 4 złotówki, a reszta to dwuzłotówki. Jaka kwota (w złotych) była w skarbonce?

A. $2m$ B. $2m-8$ C. $2m+4$ D. $2m-4$

9. Zielony pasek papieru ma długość a i szerokość b. Niebieski pasek papieru jest o 20% dłuższy i o 10% węższy od zielonego.



Pole powierzchni niebieskiego paska wynosi:

A. $ab-1{,}08$ C. $0{,}88ab$

B. $1{,}08ab$ D. $0{,}02ab$

10. Czy dla każdej liczby naturalnej n liczba $n(n+1)$ jest parzysta? Wybierz odpowiedź „tak” lub „nie” oraz jej uzasadnienie spośród zdań od A do D.

Ⓘ Tak, ponieważ… Ⓘⓘ Nie, ponieważ…

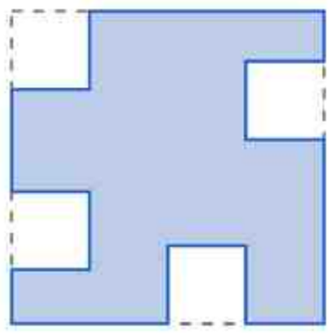
A — …$n+1$ jest liczbą nieparzystą.

B — …$n(n+1)=n^2+n$, a każdy składnik tej sumy dzieli się przez n.

C — …jedna z dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą, więc ich iloczyn jest liczbą nieparzystą.

D — …jedna z dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą parzystą, więc ich iloczyn jest liczbą parzystą.

11. Z kwadratu o boku a wycięto cztery kwadraty o boku x w sposób przedstawiony na rysunku.

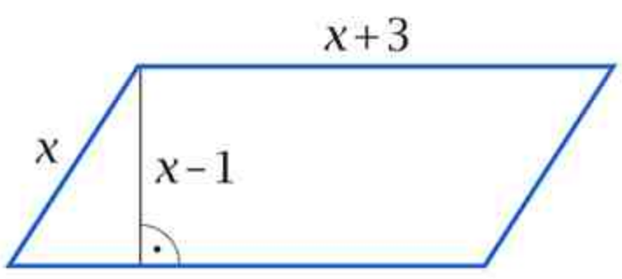


a) Jakie jest pole otrzymanej figury?

b) Jaki jest obwód tej figury?

12. Na rysunkach przedstawiono równoległobok i trapez. Czy ich pola zostały prawidłowo obliczone?

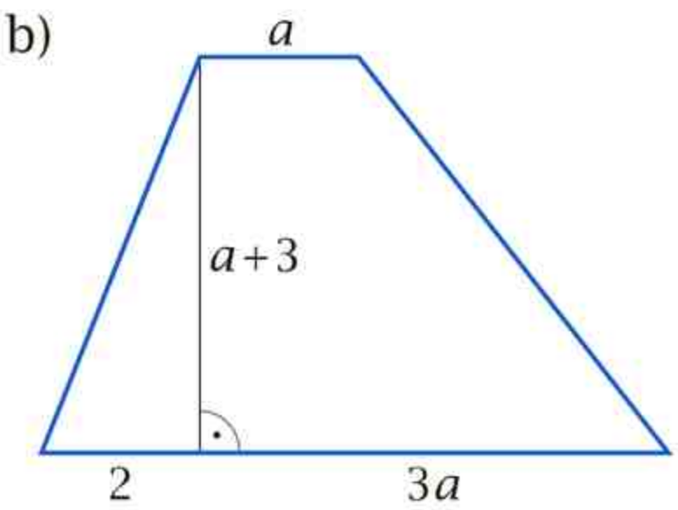
a)



Pole $= x^2+2x-3$

TAK/NIE

b)



Pole $= 2a^2+3a+1$

TAK/NIE

13. Który czworokąt ma większe pole: kwadrat o boku długości a czy prostokąt o wymiarach $(a-5)\times(a+5)$? O ile większe?

Zadania uzupełniające

Do czego służą wyrażenia algebraiczne?

1. Przyjrzyj się rysunkom. Z jednakowych figur L budujemy coraz większe figury o takim samym kształcie. Ilu figur potrzeba, aby zbudować figurę w skali $n:1$?

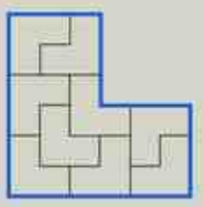
figura L



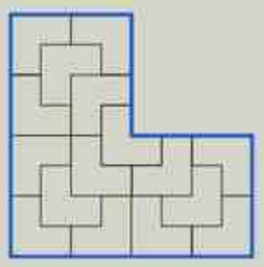
skala 2:1



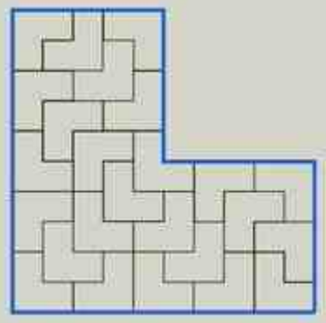
skala 3:1



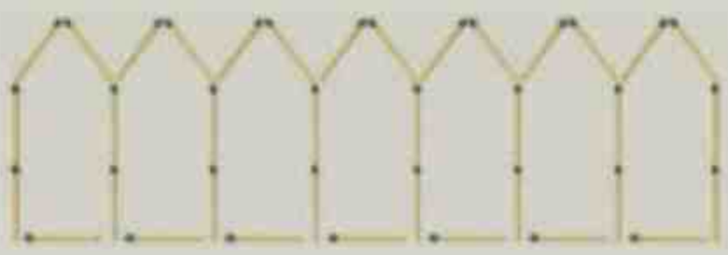
skala 4:1



skala 5:1



2. Z zapałek budujemy płotek.

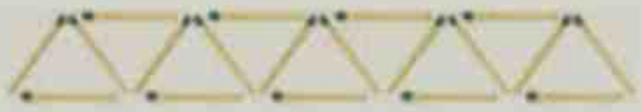


a) Ten płotek składa się z 7 sztachetek. Ile zapałek użyto do jego zbudowania?

b) Ilu zapałek potrzeba do zbudowania płotka składającego się z n sztachetek?

c) Ilu zapałek potrzeba, aby ogrodzić takim płotkiem kwadrat o boku długości n zapałek?

3. Z zapałek budujemy szlaczek.



a) Szlaczek przedstawiony na rysunku składa się z 9 trójkątów. Z ilu zapałek został zbudowany?

b) Ilu zapałek potrzeba, aby zbudować szlaczek złożony z n trójkątów?

c) Wyjaśnij, dlaczego taki szlaczek nie może składać się ze 100 zapałek.

4. Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne:

a) c kilometrów na godzinę — ile to metrów na sekundę?

b) c metrów na sekundę — ile to kilometrów na godzinę?

5. Ile jest liczb parzystych, a ile nieparzystych wśród liczb $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, k$, gdy k jest liczbą:

a) parzystą, b) nieparzystą?

6. Zapisz:

a) sumę liczby x i liczby o 1 większej od x,

b) sumę liczby a i sześcianu liczby b,

c) liczbę o 3 mniejszą od iloczynu liczb a i b,

d) liczbę 3 razy większą niż suma liczb n^2 i 25,

e) iloraz sumy liczb a i b przez 4.

7. Oznaczmy przez g cenę guzika w groszach i przez k cenę kołka w złotych. Zapisz, używając wyrażeń algebraicznych:



a) Ile groszy kosztuje kołek, a ile złotych kosztuje guzik?

b) O ile groszy więcej od guzika kosztuje kołek?

c) Ile złotych trzeba zapłacić za 20 guzików i 3 kołki?

8. Zapisz liczbę, jaką otrzymamy, gdy do liczby dwucyfrowej k dopiszemy:

a) na początku cyfrę 1,

b) na końcu cyfrę 1,

c) na początku i na końcu cyfrę 5.

9. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego liczbę trzycyfrową, której cyfrą jedności jest a, cyfrą dziesiątek b, a cyfrą setek jest suma cyfr a i b. Jaki warunek muszą spełniać liczby a i b?

Wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych

10. Oblicz wartość liczbową wyrażenia:

a) $x^2 + x - 1$ dla $x = -1$,

b) $1 - y + x$ dla $x = 2$ i $y = -1$.

11. Dla pewnych liczb x i y wartość wyrażenia $x - y$ jest równa $\frac{1}{2}$. Oblicz dla tych samych liczb wartości wyrażeń:

a) $(x - y)^2$

b) $\frac{2}{x - y}$

c) $y - x$

d) $(y - x)^2$

12. Czy istnieją liczby całkowite m i n, dla których wartość wyrażenia $\frac{1}{4}m + \frac{1}{3}n + \frac{1}{2}$ jest liczbą całkowitą?

Jednomiany

13. Uporządkuj jednomiany.

a) $-3x \cdot \frac{1}{3}x$

b) $-x \cdot (-2x)$

c) $\frac{1}{2}y \cdot 3t \cdot 2y$

d) $-xy \cdot (-xy)$

14. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $\frac{2x \cdot (-3y)}{-2}$

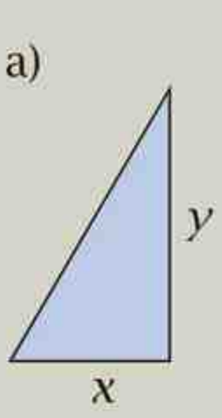
b) $\frac{6p \cdot 2q}{4}$

c) $\frac{0{,}5ab \cdot (-a)}{\frac{1}{4}}$

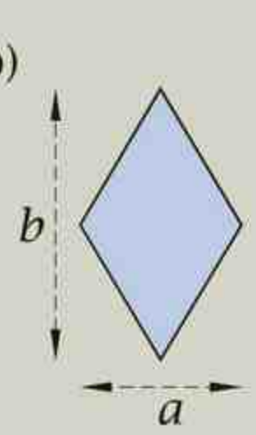
d) $\frac{2y \cdot 3ty \cdot 0{,}6t}{0{,}1}$

15. Przedstaw w postaci jednomianów pola niebieskich figur.

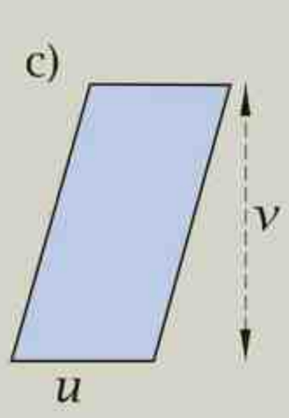
a)



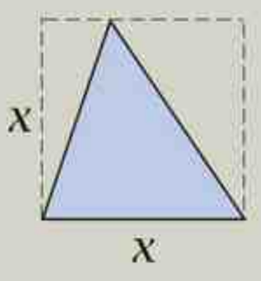
b)



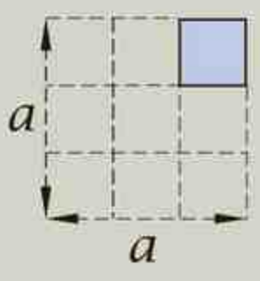
c)



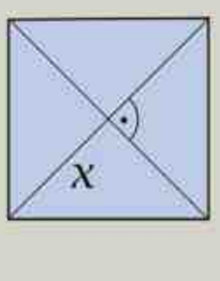
d)



e)



f)



16. Podstawą graniastosłupa jest kwadrat o boku długości $3a$. Wysokość tego graniastosłupa jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Przedstaw w postaci jednomianu objętość tego graniastosłupa. Oblicz tę objętość dla $a = 1\frac{1}{3}$.

17. Zapisz w postaci jednomianu:

a) liczbę, która stanowi 70% liczby a,

b) liczbę o 300% większą od a,

c) liczbę o 10% mniejszą od liczby b,

d) liczbę o 1% większą od liczby x,

e) liczbę o 20% większą od liczby o 20% mniejszej od liczby y,

18. W spiżarni jest x półek, a na każdej stoi y słoików. Słoiki z dżemem stanowią 30% wszystkich słoików, a co trzeci dżem jest truskawkowy. Ile słoików z dżemem truskawkowym jest w spiżarni?

Sumy algebraiczne

19. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $-4x - 7 - 3x + 7$

b) $x - 2xy + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}xy$

c) $-x^2 + y^2 - 2x^2 - 2y^2$

d) $-x^2 + 2x - 3x + x^2$

e) $4x + 4 - 7x - \frac{1}{2}$

20. Zredukuj wyrazy podobne i oblicz wartości podanych sum algebraicznych dla $x = \frac{1}{3}$ i $y = 9$.

a) $2x^2 - xy^2 - 5x^2 + 2xy^2$

b) $-\frac{1}{2}x^3y - \frac{2}{3}xy + \frac{1}{2}x^3y - \frac{1}{3}xy$

21. Zapisz dowolną sumę algebraiczną, której wartość liczbowa dla $x = 3$ i $y = -2$ wynosi 7.

22. Jakimi jednomianami należy zastąpić symbole?

a) $-6a^2 + \clubsuit + 8a + \heartsuit - 7 = 8a^2 - 7$

b) $-x^2 + \bullet - 2x + \blacksquare - 3 + \blacktriangle = x^2 - x$

Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

23. Wykonaj działania.

a) $a+(a-b)$

b) $2x-(x+4)$

c) $7-(-x+6)$

d) $-(x+4)+(x-5)$

e) $1-(t+p)-(t-2)$

f) $-(-y+2)+(-2y-4)$

24. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $(a+b)-(2a-b)-(a-2b)$

b) $(3x-y+1)-(x+y)+(y-x)$

c) $-(kx+ny)-(3kx+2ny)+(5kx-3ny)$

d) $(2ab+a+3)-(3ab-a+3)$

e) $(4x^2-3x)-(x+0{,}1x^2)-(x^2-0{,}1x)$

25. Oblicz wartość liczbową wyrażenia:

a) $(x^2+1)-(x^2-x)+10$ dla $x=2{,}2$,

b) $(a+4b)-(5+2a)-(3b-5)$ dla $a=-0{,}1$ i $b=0{,}2$,

c) $(-a^2+2ab-1)+(a^2-4ab+5)$ dla $a=\frac{1}{4}$ i $b=2$.

26. Jaką sumę algebraiczną należy dodać do sumy $2x^2-3x+8$, aby otrzymać wyrażenie $4x^2-x$?

27. Udowodnij, że wartość liczbowa poniższego wyrażenia jest taka sama dla każdej liczby x.

$$(5x-1)-(3x+2)-[1-(1-x)-(-x+2)]$$

Mnożenie jednomianów przez sumy algebraiczne

28. Przekształć iloczyny na sumy:

a) $\frac{1}{2}(3a-2)$

b) $\frac{2}{3}(1{,}5+3x)$

c) $k(3l+2m)$

d) $-p(r-5s)$

29. Wykonaj działania.

a) $6(x-4)-2$

b) $2(x+1)-3(x-1)$

c) $-3(y-2)+4(y+2)$

d) $5(x-y-1)-4(x+2)$

e) $2(3a+b)-2(a-b)$

f) $\frac{1}{2}(4x-4)-2x$

g) $x(x-1)-3(x^2-x)$

h) $5a(a-3)-3a(a-5)$

30. Uprość podane wyrażenia.

a) $\frac{3x-6}{3}-5$

b) $\frac{3a-9b}{3}-\frac{2a-4b}{2}$

c) $\frac{2x+6}{2}-\frac{6x-9}{3}$

d) $4\cdot\frac{x-7}{2}+9\cdot\frac{x-1}{3}$

31. Uprość podane wyrażenia.

a) $4p\left(\frac{1}{2}p-\frac{1}{3}\right)-3p\left(\frac{1}{6}p+\frac{1}{9}\right)$

b) $-5\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y\right)+3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}y\right)$

c) $\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{5}\right):2+\left(\frac{1}{2}m+\frac{2}{5}\right):4$

d) $\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b\right):6-\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right):4$

e) $6\left(\frac{1}{9}u+\frac{1}{12}\right)-\left(\frac{1}{2}u+\frac{3}{4}\right):3$

32. Wartość wyrażenia

$$\frac{a^2b+3ab^2-ab}{2c}$$

dla pewnych liczb wynosi 12. Oblicz dla tych samych liczb wartości wyrażeń:

a) $\frac{a^2b+3ab^2-ab}{4c}$

b) $\frac{2a^2b+6ab^2-2ab}{c}$

c) $\frac{3ab-3a^2b-9ab^2}{4c}$

Mnożenie sum algebraicznych

33. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne (jeśli to możliwe).

a) $(x+7)(2x-1)$

b) $(2a-1)(a+4)$

c) $(4a-1)(2-3a)$

d) $(a^5-1)(a+1)$

e) $(2k^2-1)(2k+1)$

f) $(3-p^3)(p^2+1)$

34. Zapisz w postaci sumy algebraicznej:

a) iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych, z których mniejszą jest $n-2$,

b) iloczyn dwóch kolejnych liczb parzystych, następujących po liczbie $2n$,

c) iloczyn dwóch kolejnych liczb nieparzystych, poprzedzających liczbę $2n+1$.

***35.** Znajdź jak najprostszą postać wyrażenia:

$(x+1)(x^{99}-x^{98}+x^{97}-\ldots-x^2+x-1)$

36. Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne.

a) $(m+n)(m-2)+(m-n)(m+1)$

b) $(3x-2)(3x-2y+1)-4x(2x-3y+1)$

c) $3(m+1)(n-2)+2(n+1)(m-2)$

d) $x(x+1)(x+2)-x(x-1)(x-2)$

37. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne (jeśli to możliwe).

a) $n^2(n-1)(n^2+1)$

b) $n^2(n+1)(n^2-1)$

c) $(x+2)(x^2-3x+1)$

d) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

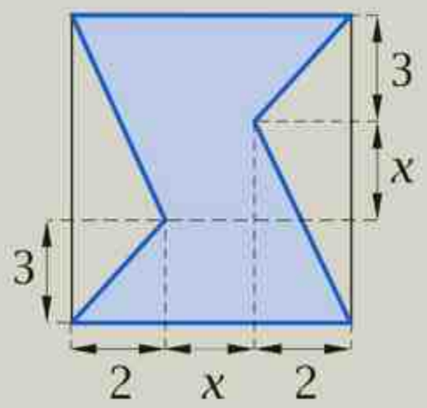
38. Zapisz w postaci jak najprostszej sumy algebraicznej:

a) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

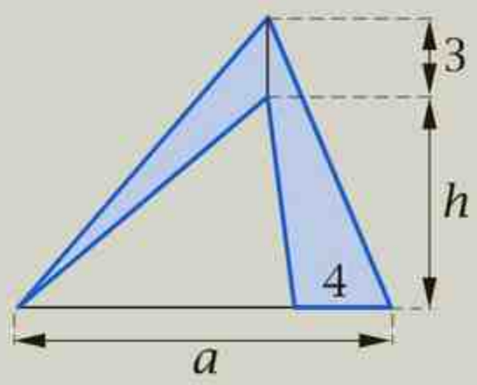
b) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

39. Zapisz w postaci sum algebraicznych wzory na pola poniższych figur.

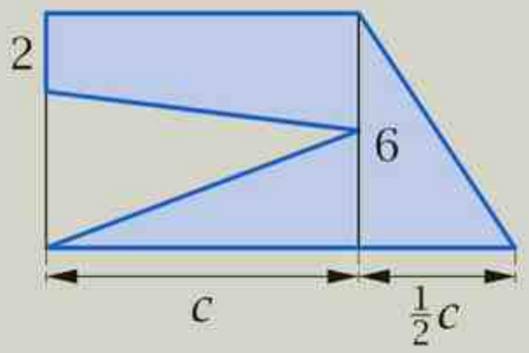
a)



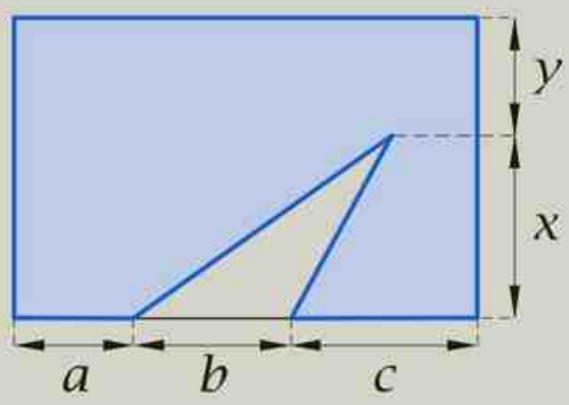
b)



c)



d)



40. Wykaż, że zachodzi równość:

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

41. Przekształć podane wyrażenia tak, aby otrzymać iloraz sum algebraicznych.

a) $\frac{1}{a+1}+\frac{2}{a}$

b) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$

c) $\frac{2p-1}{2p+1}-\frac{1}{2p}$

d) $\frac{6k}{3k-1}+\frac{2k}{1-k}$

42. Zapisz w jak najprostszej postaci, ile wynosi średnia arytmetyczna liczb:

a) $\frac{1}{a+b}$ i $\frac{1}{a-b}$

b) $\frac{a}{a+b}$ i $\frac{b}{a-b}$

□ *43. Z liczby dwucyfrowej a utworzono dwie liczby: pierwszą przez dopisanie cyfry 1 na początku, drugą przez dopisanie cyfry 1 na końcu. Uzasadnij, że iloczyn otrzymanych liczb pomniejszony o liczbę a jest podzielny przez 10.

Ciekawostka

Przekształcając niektóre wyrażenia algebraiczne możemy korzystać z następujących równości zwanych wzorami skróconego mnożenia.

Kwadrat sumy:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kwadrat różnicy:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Iloczyn sumy przez różnicę:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Uwaga. Ostatnią równość można zapisać w postaci $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ i nazywana jest ona wzorem na różnicę kwadratów.

Każdy z tych wzorów można uzasadnić, przekształcając odpowiednio lewą stronę równości. Na przykład uzasadnienie pierwszego wzoru można zapisać tak:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = \\ = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

□ **44.** Przeczytaj ciekawostkę. Uzasadnij wzory skróconego mnożenia.

45. Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, przedstaw podane wyrażenia w postaci sum algebraicznych.

a) $(k+2)^2$
b) $(3x+1)^2$
c) $(2k+m)^2$
d) $(b-1)^2$
e) $(5-x)^2$
f) $(4a-b)^2$
g) $(a+2)(a-2)$
h) $(10x+1)(10x-1)$

46. Oblicz, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia.

a) 102^2
b) 99^2
c) 301^2
d) 45^2
e) $9{,}8^2$
f) $5{,}1^2$

Wskazówka. $102^2 = (100+2)^2$.

47. Oblicz średnią arytmetyczną kwadratów liczb: $n-1$, n, $n+1$.

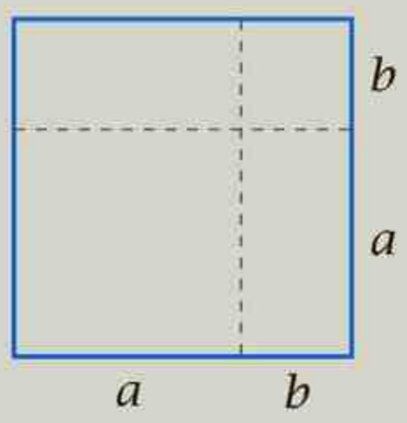
48. Oblicz sprytnie:

a) $53^2 - 47^2$
b) $137^2 - 37^2$
c) $33^2 - 32^2$
d) $102 \cdot 98$
e) $18 \cdot 22$
f) $37 \cdot 43$

Wskazówka. $102 \cdot 98 = (100+2)(100-2)$.

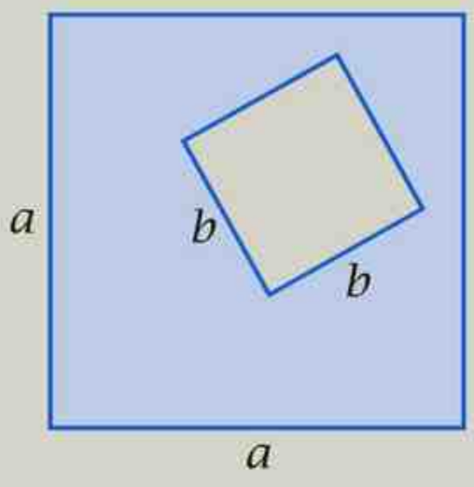
□ **49.** a) Uzasadnij, że liczba $165^2 - 152^2$ jest podzielna przez 13.
b) Uzasadnij, że liczba $199^4 - 1$ jest podzielna przez 200.

50. Poniższy rysunek jest interpretacją geometryczną jednego ze wzorów skróconego mnożenia. Którego?



Wskazówka. Przedstaw pole największego kwadratu na dwa sposoby.

○ **51.** Skonstruuj za pomocą cyrkla i linijki prostokąt, którego pole jest równe polu zacieniowanej figury.



V RÓWNANIA

1 Do czego służą równania?

2 Liczby spełniające równania

3 Rozwiązywanie równań

4 Zadania tekstowe

5 Procenty w zadaniach tekstowych

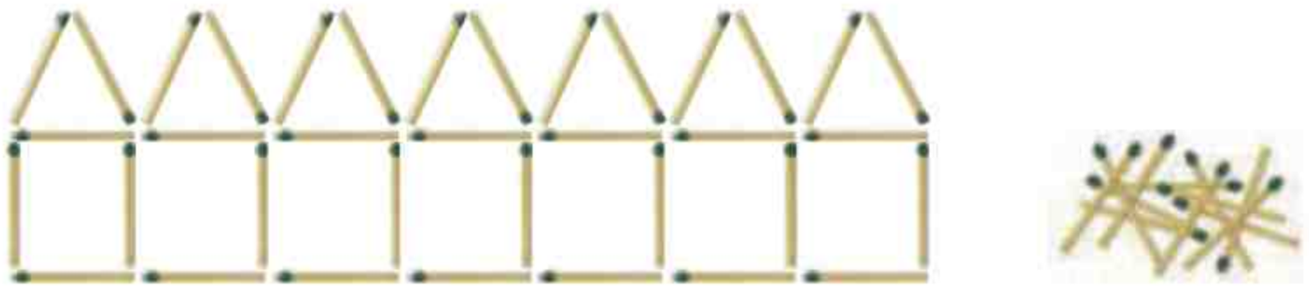
6 Przekształcanie wzorów

↘ Przed klasówką, s. 212

↘ Zadania uzupełniające, s. 214

1 Do czego służą równania?

Przypomnij sobie zapałczane domki z rozdziału *Do czego służą wyrażenia algebraiczne?*



Rozważmy następujący problem:

Ile domków można zbudować w ten sposób z 46 zapałek?

Z poprzednich rozważań wiemy już, że do zbudowania n domków potrzeba $5n + 1$ zapałek. Powyższy problem można więc sformułować następująco:

Dla jakiej liczby n liczba $5n + 1$ jest równa 46?

Innymi słowy, szukamy liczby, która spełnia równanie:

$$5n + 1 = 46$$

Łatwo zauważyć, że równanie to spełnia liczba $n = 9$, gdyż $5 \cdot 9 + 1 = 46$. Z 46 zapałek można zbudować 9 domków.

Przykłady równań:

$2x - 5 = 7$ $\qquad$ $4(u + 5) = 2$

$5x + y = 17$

$x^2 + 2x + 1 = 0$ $\qquad$ $t^3 - 8 = 0$

Litera w równaniu oznacza liczbę, której nie znamy — **niewiadomą**.

Równania służą do zapisywania i rozwiązywania wielu zagadnień i problemów z matematyki, fizyki oraz innych dziedzin wiedzy.

W równaniu może występować jedna, dwie lub więcej niewiadomych. W tym rozdziale zajmować się będziemy równaniami z jedną niewiadomą.

ĆWICZENIE. Podane informacje można zapisać za pomocą równań. Dla każdej informacji dobierz odpowiednie równanie.

a) Suma liczby x i liczby od niej o 2 większej jest równa 149.

b) Gdy do liczby x dodano liczbę dwukrotnie od niej mniejszą, otrzymano 149.

$x + \frac{1}{2} = 149$ $\qquad$ $x + 2x = 149$ $\qquad$ $x + \frac{1}{2}x = 149$

$x + 2 = 149$ $\qquad$ $x + x + 2 = 149$ $\qquad$ $x + x - 2 = 149$

Zadania

1. Zapisz podane zdania w postaci równań:

a) Jeżeli liczbę x powiększymy o 12, to otrzymamy 41.

b) Liczba 27 jest 2 razy większa od x.

c) Liczba 2 razy mniejsza od y jest równa 35.

d) Liczba 21 jest o 8 większa od z.

e) Liczba 47 jest o 16 mniejsza od t.

1/214

2. Zapisz podane zdania w postaci równań:

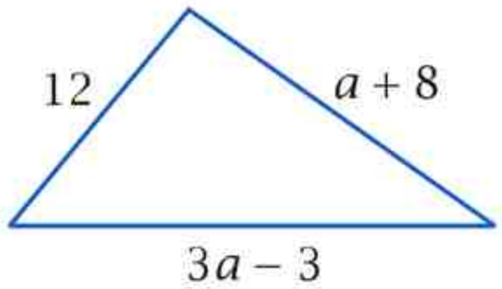
a) Liczba o 5 mniejsza od x stanowi 80% liczby x.

b) Liczba o 15% mniejsza od liczby x jest równa 17.

c) Liczba 13 jest o 10% większa od liczby u.

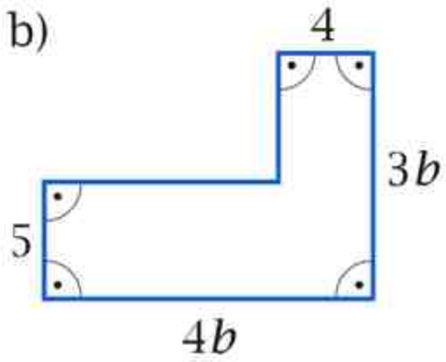
3. Ułóż odpowiednie równania:

a)



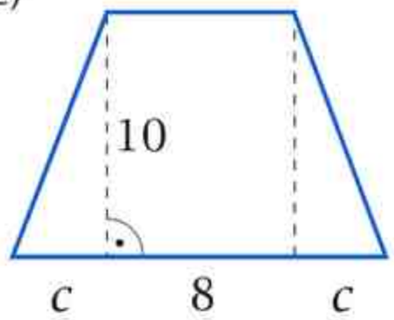
obwód = 49

b)



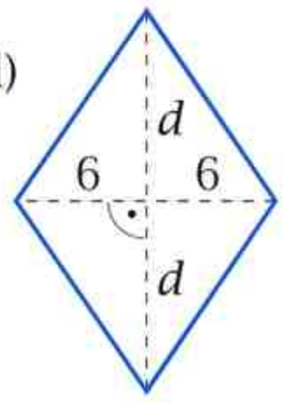
obwód = 49

c)



pole = 120

d)



pole = 96

4. Prostokąt ma boki długości 5 cm i 8 cm. Zapisz w postaci równań następujące problemy:

a) O ile centymetrów należy wydłużyć dłuższy bok prostokąta, aby obwód prostokąta zwiększył się dwukrotnie?

b) O ile centymetrów należy skrócić dłuższy bok prostokąta, aby pole prostokąta zmniejszyło się o 5 cm^2?



5. Napisz odpowiednie równania:

a) Jaś złowił x okoni, dwa razy więcej płotek niż okoni i jednego szczupaka, razem 19 ryb.

b) W klasie liczącej 27 uczniów jest x chłopców, a dziewcząt jest o 5 więcej niż chłopców.

c) Paczka rodzynek kosztuje x złotych. Paczka orzechów jest o 2 zł droższa. Trzy paczki rodzynek kosztują tyle samo, co dwie paczki orzechów.

d) Pewien towar kosztował x złotych. Jego cenę najpierw podwojono, a potem obniżono o 5 zł. Nowa cena jest o 10 zł większa od starej.

2/214



6. Ustal niewiadomą, oznacz ją dowolną literą i zapisz podane zdania za pomocą równań.

a) Dwie nauczycielki, trzynaście dziewcząt i kilkunastu chłopców zajęło w autobusie 33 miejsca.

b) Za trzy czekolady, których ceny nie pamiętam, i za bombonierkę, która kosztowała 18 zł, zapłaciłam 27,60 zł.

c) Ala obliczyła, że jeśli co miesiąc będzie wydawać tylko 10 zł z kieszonkowego, to odkładając resztę, uzbiera w ciągu pięciu miesięcy 75 zł.

7. Zapisz odpowiednie równanie:

a) Jaśmina napisała x wierszy, a Sylwia o 30% mniej. W sumie napisały już 34 wiersze.

b) Komputer kosztował x złotych. Najpierw obniżono jego cenę o 7%, a potem jeszcze o 300 zł. Teraz kosztuje 2500 zł.

4/214

c) W klasie liczącej x uczniów jest 12 chłopców. Dziewczęta stanowią 60% tej klasy.

Sprawdź, czy umiesz

1. *Dwukrotność liczby x jest liczbą o 2 większą od x*. Zdanie to można zapisać w postaci równania:

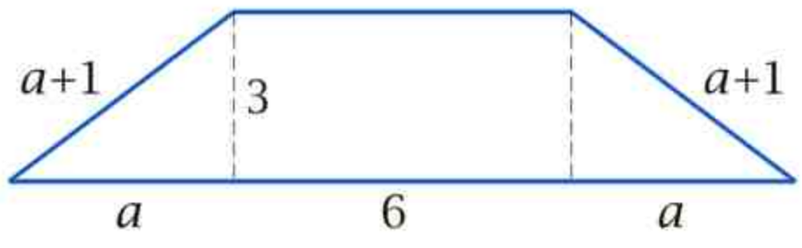
A. $2x = x + 2$
C. $2x + 2 = x$
B. $x = 2(x + 2)$
D. $2(x - 2) = x$

2. Do Szkoły Muzycznej im. Henryka Wieniawskiego uczęszcza 250 uczniów, w tym c chłopców. Dziewcząt jest o 15 mniej niż chłopców. Wynika stąd, że:

A. $250 = c + 15$
C. $250 - 15 + c = c$
B. $c + c - 15 = 250$
D. $c + 15c = 250$

3. Z rysunku obok wynika, że:

A. $2a + 2a + 1 + 12 = 30$
B. $4a + 8 = 30$
C. $4a + 14 = 30$
D. $\frac{1}{2}(2a + 12) \cdot 3 = 30$



obwód = 30

zadania uzupełniające 1–5, str. 214

2 Liczby spełniające równania

ĆWICZENIE A. Zgadnij, jakie liczby spełniają równanie:

a) $\frac{1}{2}x = 15$ b) $x^3 + 1 = 0$ c) $2x = x + x$ d) $x^2 = 9$

Każdą liczbę spełniającą dane równanie nazywamy **rozwiązaniem równania** (lub **pierwiastkiem równania**).

Przykład

Sprawdź, czy któraś z liczb 8 lub -5 jest rozwiązaniem podanego równania.

$$2x - 7 = -32 - 3x$$

Dla $x = 8$ otrzymujemy:

$L = 2 \cdot 8 - 7 = 16 - 7 = 9$ | *Obliczamy wartość lewej strony dla* $x = 8$.

$P = -32 - 3 \cdot 8 = -32 - 24 = -56$ | *Obliczamy wartość prawej strony dla* $x = 8$.

$L \neq P$ | *Porównujemy otrzymane wartości.*

Dla $x = -5$ otrzymujemy:

$L = 2 \cdot (-5) - 7 = -10 - 7 = -17$ | *Obliczamy wartość lewej strony dla* $x = -5$.

$P = -32 - 3 \cdot (-5) = -32 + 15 = -17$ | *Obliczamy wartość prawej strony dla* $x = -5$.

$L = P$

Odp. Liczba 8 nie jest rozwiązaniem równania $2x - 7 = -32 - 3x$, a liczba -5 jest rozwiązaniem tego równania.

Równania z jedną niewiadomą mogą mieć różną liczbę rozwiązań.

- Równanie $5x + 6 = 31$ ma jedno rozwiązanie: $x = 5$.
- Równanie $x^2 = 9$ ma dwa rozwiązania: $x = 3$, $x = -3$.
- Równanie $x(x + 1)(x - 2) = 0$ ma trzy rozwiązania: $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$.
- Równanie $3x = 2x + x$ ma nieskończenie wiele rozwiązań; równanie to spełnia każda liczba.
- Równanie $x = x + 1$ nie ma rozwiązań; żadna liczba nie spełnia tego równania.

Równanie, które spełniają wszystkie liczby, nazywamy **równaniem tożsamościowym**. Równanie, którego nie spełnia żadna liczba, nazywamy **równaniem sprzecznym**.

Zbiór wszystkich liczb spełniających dane równanie nazywamy zbiorem rozwiązań równania.

ĆWICZENIE B. Dwa spośród poniższych równań mają ten sam zbiór rozwiązań. Wskaż te równania.

$x + 2 = 4$ $\quad 2x = -4$ $\quad x^2 = 4$ $\quad x + 2 = 0$

Jeśli dwa równania mają ten sam zbiór rozwiązań, to nazywamy je **równaniami równoważnymi**.

Zadania

1. Sprawdź w pamięci, które z podanych liczb spełniają dane równanie:

a) $2x - 1 = 7$ $\quad 1, \quad 4, \quad 5$

b) $6 = 3 - 3t$ $\quad -1, \quad 1, \quad 2$

c) $x^2 + 3 = 28$ $\quad 25, \quad 5, \quad -5$

d) $2n(n - 7) = 0$ $\quad -7, \quad 0, \quad 7$

6/214

2. Sprawdź, czy podana liczba spełnia dane równanie:

a) $5(n + 1) - 10 = 3n + 1$ $\quad 3$

b) $2(a + 1) - 3(a - 5) = 7a$ $\quad 2$

c) $3x\,(x - 5) = (x - 2)(3x - 3)$ $\quad -1$

d) $\frac{3}{5}x - \left(\frac{7}{9}x - \frac{1}{4}\right) = \frac{2 - (x + 3)}{4}$ $\quad 0$

7/214

8/214

3. Równanie $x^2 + 18 = 9x$ ma dwa rozwiązania. Oba rozwiązania są liczbami naturalnymi mniejszymi od 7. Znajdź te liczby.

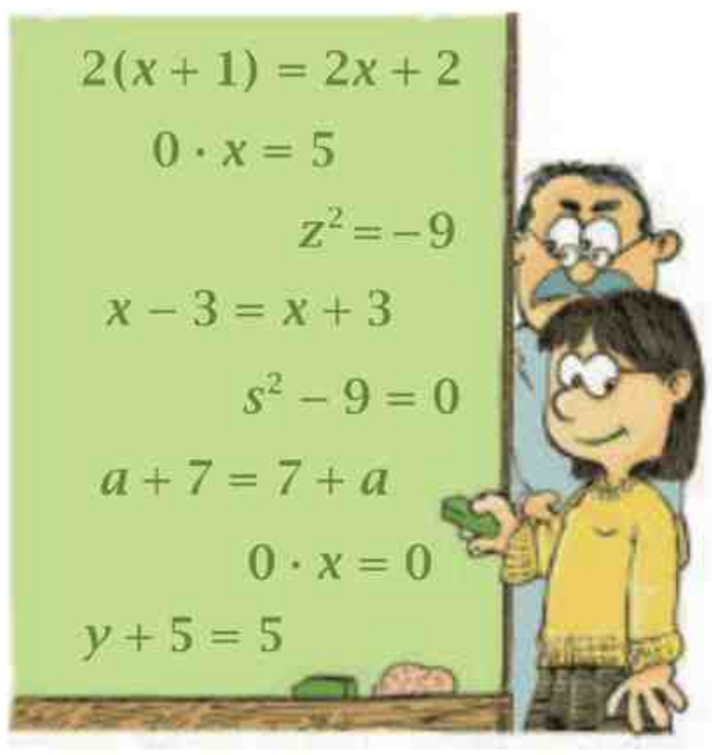
4. Jaką liczbą należy zastąpić literę a w podanym równaniu, aby otrzymać równanie, którego rozwiązaniem jest liczba 10?

a) $5x + 3 = a$ $\quad$ b) $2x - 4 = x + a$ $\quad$ c) $3 - 4x = a - 5$ $\quad$ d) $2(x + 1) + x = a$

5. Napisz jakieś skomplikowane równanie, którego rozwiązaniem jest liczba 27.

9/214

6. Odszukaj na rysunku trzy równania, które mają nieskończenie wiele rozwiązań, oraz trzy, które nie mają żadnych rozwiązań.



7. Które z poniższych równań są sprzeczne (nie mają rozwiązań)?

① $x^2 + 1 = 0$

② $x^2 = -16$

③ $y^3 = -8$

④ $u = u - 1$

⑤ $x^3 = 0$

⑥ $-x^2 = (-5)^2$

Symbol $|x|$ czytamy: *wartość bezwzględna liczby* x. Wartość bezwzględna liczby nieujemnej jest równa tej liczbie. Wartość bezwzględna liczby ujemnej jest liczbą do niej przeciwną. Np.:

$|5| = 5$ $\quad |-7| = 7$ $\quad |3{,}4| = 3{,}4$

$|0| = 0$ $\quad \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$ $\quad |-4{,}5| = 4{,}5$

8. Które z równań są sprzeczne?

① $|x| = 0$ ③ $|x| = -2$ ⑤ $|x| + 1 = |x|$

② $|x| = 7$ ④ $|x| = x$ ⑥ $|x| = -|x|$

9. Zastąp kwadracik w równaniu:

$$2x + 7 = x + \square$$

takim wyrażeniem, by otrzymać równanie:
a) tożsamościowe, b) sprzeczne.

10. Uzasadnij, że w każdej z ramek zapisano równania równoważne.

$4x = 20$ $2x = 10$	$x^2 = 25$ $(x-5)(x+5) = 0$	$x^2 + 1 = 0$ $x + 1 = x$	$2x = 5x - 3x$ $0{,}5x = \frac{x}{2}$

11. Napisz po dwa równania równoważne podanym równaniom.

a) $3x = 15$ b) $4x - 12 = 0$ c) $7 - x = 5$

Sprawdź, czy umiesz

1. Rozwiązaniem równania $4(t-1) = t + 5$ jest liczba:

A. 2 B. 1 C. −1 D. 3

2. Liczba 3 spełnia równanie:

A. $\frac{1}{3}x - 2 = 5 - \frac{2}{3}x$ C. $x - 4 = 3(2x + 5)$

B. $\frac{2}{3}x + 2 = \frac{1}{3}(x + 9)$ D. $4x + 2 = 5x - (x - 1)$

3. Które z podanych równań jest tożsamościowe?

A. $4x - 3 = 3 - 4x$ C. $2x = 0$

B. $y + 2 = \frac{1}{2}(2y + 4)$ D. $3(x + 1) = 3x + 1$

4. Parę równań równoważnych stanowią równania:

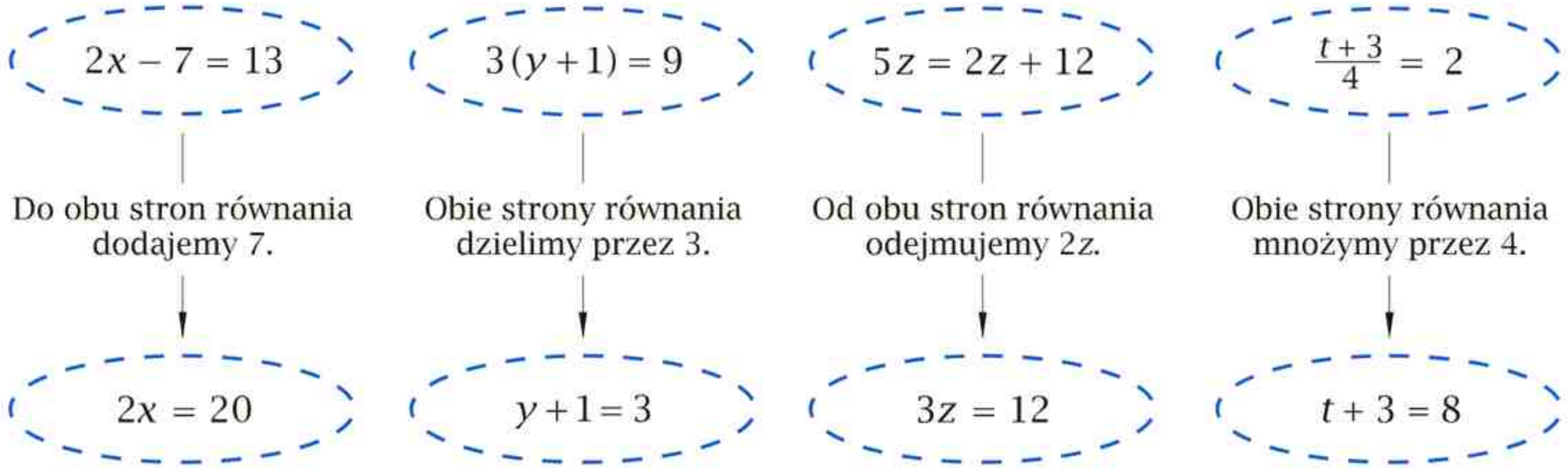
A. $3x = 9$ i $\frac{1}{3}x = 3$ C. $x^2 = 4$ i $x = 2$

B. $x + 1 = 1$ i $x + 2 = 2$ D. $x + 3 = 5$ i $x + 6 = 10$

zadania uzupełniające 6–9, str. 214

3 Rozwiązywanie równań

Przyjrzyj się poniższym schematom. W każdej parze drugie równanie powstało z pierwszego w wyniku pewnego przekształcenia. Możemy sprawdzić, że oba równania spełnia ta sama liczba.



ĆWICZENIE. Zgadnij, jaka liczba spełnia równanie w dolnym rzędzie. Sprawdź, czy ta liczba spełnia także odpowiednie równanie w górnym rzędzie.

Rozwiązując równanie, staramy się zapisywać coraz prostsze równania równoważne danemu. W tym celu możemy:

- do obu stron równania dodać to samo wyrażenie,
- od obu stron równania odjąć to samo wyrażenie,
- obie strony równania pomnożyć przez tę samą liczbę różną od zera,
- obie strony równania podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Taką metodę rozwiązywania równań nazywamy **metodą równań równoważnych**.

Przykłady

$3x + 6 = -2x + 4 \quad \mid + 2x$	*Do obu stron równania dodajemy* $2x$.
$5x + 6 = 4 \quad \mid - 6$	*Od obu stron równania odejmujemy* 6.
$5x = -2 \quad \mid : 5$	*Obie strony równania dzielimy przez* 5.
$x = -\frac{2}{5}$	*Rozwiązaniem równania jest liczba* $-\frac{2}{5}$.
$3(x + 3) = 6x + 1 - 3x$	*Przekształcamy obie strony równania.*
$3x + 9 = 3x + 1 \quad \mid - 3x$	*Od obu stron równania odejmujemy* $3x$.
$9 = 1$	
Równanie sprzeczne.	*Równanie nie ma rozwiązań.*

Przykład

$4 - \frac{3x-2}{2} = 5 - 1{,}5x \quad | \cdot 2$ | *Mnożymy obie strony równania przez 2.*

$8 - (3x - 2) = 10 - 3x$ | *Przekształcamy obie strony równania.*

$8 - 3x + 2 = 10 - 3x \quad | + 3x$ | *Do obu stron równania dodajemy* $3x$.

$10 = 10$ | *Rozwiązaniem równania jest każda liczba.*

Równanie tożsamościowe.

Dodanie do obu stron równania tego samego wyrażenia (lub odjęcie od obu stron) można interpretować jako przenoszenie tego wyrażenia na drugą stronę równania ze znakiem zmienionym na przeciwny.

Rozwiązywanie równania można zatem opisać na dwa sposoby. Oto przykład:

OPIS 1. Odejmujemy od obu stron równania wyrażenie $2x$, a następnie dodajemy do obu stron liczbę 1.

$3x - 1 = 2x + 5 \quad | - 2x$

$x - 1 = 5 \quad | + 1$

$x = 6$

OPIS 2. Przenosimy (zmieniając znak na przeciwny) wyrażenie $2x$ na lewą stronę równania, a liczbę -1 na prawą.

$3x - 1 = 2x + 5$

$3x - 2x = 5 + 1$

$x = 6$

Z historii

Jednym z najwybitniejszych uczonych średniowiecza był arabski astronom i matematyk Muhammed Alchwarizmi. Dzięki niemu Europa poznała używany od dawna przez Hindusów dziesiątkowy system zapisywania liczb. Odtąd *cyfry arabskie* weszły na stałe do powszechnego użycia.

Alchwarizmi, rozwiązując równania, przenosił wyrazy z jednej strony na drugą. Operacja ta po arabsku nazywała się al-dżabr; od tego słowa pochodzi dzisiejsza nazwa *algebry* — nauki o działaniach na symbolach literowych.
Przez wiele stuleci słowo *algebra* było bardziej popularne jako termin chirurgiczny, oznaczający składanie połamanych kości. Do dziś w języku angielskim słowo to ma dwa znaczenia.

Zadania

1. Rozwiąż równania.

a) $6x = 3$
b) $-3x = 7$
c) $2x = \frac{1}{5}$
d) $1{,}2x = 4{,}8$
e) $\frac{1}{3}x = 3$
f) $-\frac{3}{5}x = -5$
g) $\frac{3}{4}x = -\frac{4}{9}$
h) $0{,}1x = -7$

2. Rozwiąż równania.

a) $10x + 4 = 7$
b) $4x - 3 = 9$
c) $-2x + 2 = -7$
d) $6x + 5 = 4x$
e) $9x - 3 = 2x + 5$
f) $-3x + 4 = -5x - 1$

3. Rozwiąż równania.

a) $-(2x-1)=4$

b) $2(x+1)=x$

c) $2t-(3t+1)=6$

d) $-(4+x)=2(3-x)$

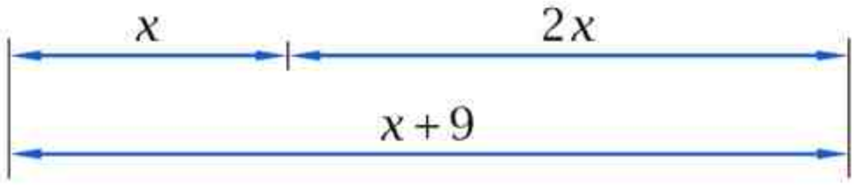
e) $3(y+6)-y=2(y+9)$

f) $x-7-2(3x+5)=3$

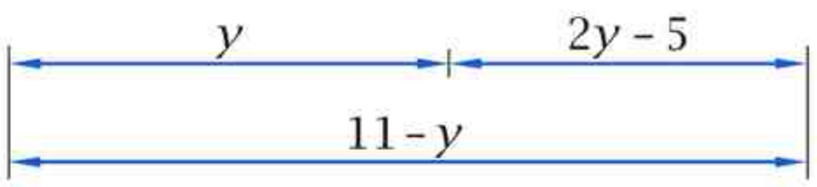
10/214

4. Ułóż i rozwiąż odpowiednie równania.

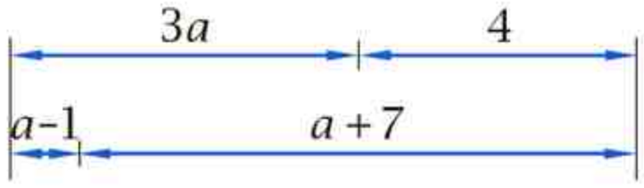
a)



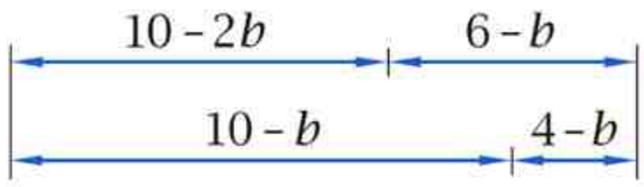
b)



c)



d)



5. Rozwiąż równania.

a) $0{,}1x+0{,}2=-0{,}3$

b) $0{,}25x+0{,}4=0{,}35$

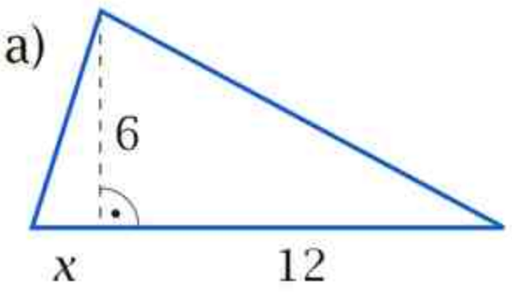
c) $1-0{,}2x=-0{,}3x$

d) $0{,}01x-1=0{,}1x-0{,}1$

11/214

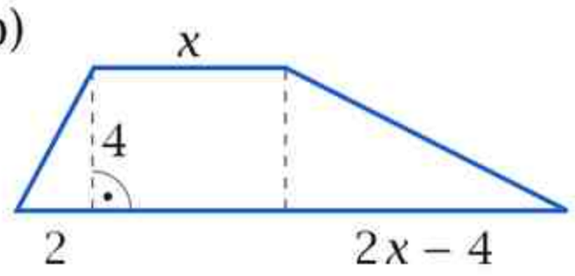
6. Figury na rysunkach to trójkąt, trapez i równoległobok. Zapisz i rozwiąż odpowiednie równania.

a)



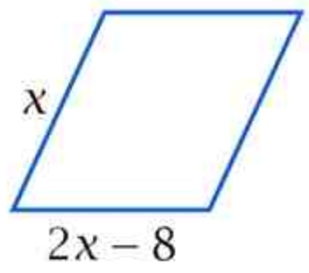
pole = 42

b)



pole = 44

c)



obwód = 28

17/215

7. Zapisz i rozwiąż odpowiednie równania.

a) Liczba o 15 większa od x jest równa 70.

b) Liczba 87 jest 2 razy większa od liczby x.

c) Liczba 3 razy mniejsza od x jest równa 12.

d) Liczba o 5 większa od x i dwukrotność liczby $x+1$ są równe.

8. Ułóż i rozwiąż odpowiednie równania.

a) Jaka to liczba, której 12% wynosi 6?

b) Liczbę y zmniejszono o 14% i otrzymano 40,42. Znajdź liczbę y.

c) Liczba o 10% większa od pewnej liczby a jest równa 143. Znajdź liczbę a.

d) Liczba o 110% większa od liczby x jest równa 23,1. Znajdź liczbę x.

9. Ułóż i rozwiąż odpowiednie równania.

a) Średnia arytmetyczna liczby x i liczby o 7 większej od x wynosi 20.

b) Średnia arytmetyczna trzech liczb: liczby y, trzykrotności liczby y i liczby o 10 większej od y wynosi 16.

c) Do liczby 15 dodano liczbę y, a od liczby 51 odjęto y i otrzymano równe liczby.

10. Rozwiąż równania.

a) $\frac{1}{3}x - 2 = x + 2$

b) $1 - \frac{6}{7}x = \frac{4}{7}$

c) $6\left(\frac{1}{4}x - 2\right) = 18$

d) $\frac{x}{6} - \frac{1}{6} = 1$

e) $-2(2x - 1) = \frac{x}{3}$

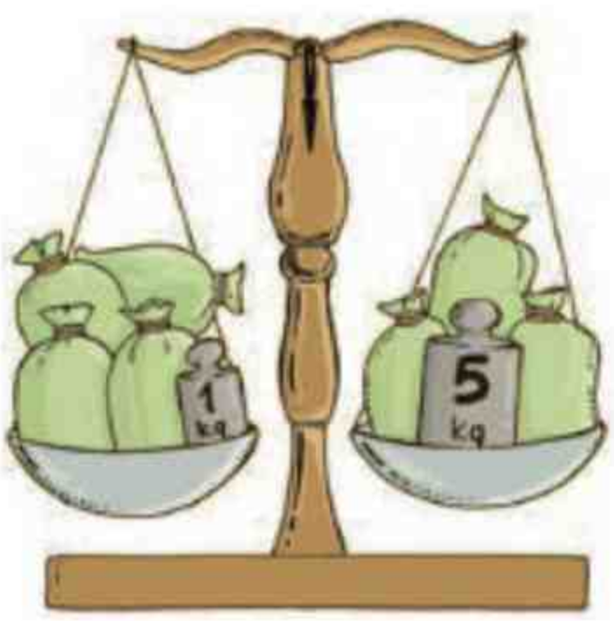
f) $\frac{2}{5}(3 - x) = -2$

g) $\frac{3}{4}(2 - 3x) = -6$

h) $\frac{1}{5}(x - 3) = 9 - x$

i) $\frac{0{,}6 + x}{2} = x + 1$

12/215



11. Oblicz, dla jakiej wartości x:

a) wartości wyrażeń $4x + 1$ i $3x + 5$ są równe,

b) wartość wyrażenia $x - 3$ jest o 5 mniejsza od wartości wyrażenia $2(x - 8)$,

c) wartość wyrażenia $7x - 1$ jest równa $\frac{1}{3}$ wartości wyrażenia $x + 7$,

d) wartość wyrażenia $x^2 + 3$ jest o 2 większa od wartości wyrażenia $x(x + 1) + 2$.

12. Rozwiąż równania.

a) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{5}{6} + \frac{x}{2}$

b) $\frac{2x - 3}{4} = \frac{1}{2} + x$

c) $\frac{x + 2}{9} + \frac{x - 1}{3} = 1$

d) $\frac{2x + 3}{5} = \frac{2 - x}{3} + x$

e) $\frac{3x - 5}{2} - \frac{5x - 1}{10} = 0$

f) $\frac{x}{2} = \frac{2}{5}(4 - x) - 4$

g) $\frac{2x - 1}{5} - \frac{x - 2}{2} = 0{,}7x$

h) $2x - \frac{3x + 5}{4} = -\frac{1}{4}x - 1$

13/215

13. Rozwiąż równania.

a) $(x + 3)(x + 2) - x^2 = 0$

b) $(x - 4)(x + 5) - x^2 = 3$

c) $x^2 - (x - 3)(x - 1) = 1$

d) $2x^2 - (2x + 1)(x - 2) = 5$

e) $x^2 - 2 = (x + 2)(x + 4)$

f) $(x - 3)(4x + 2) = 4x^2 + 3$

14/215

14. Rozwiąż sprytnie równania. Zastanów się, jaki sposób rozwiązywania jest najprostszy.

a) $87(2x-3)=87(x-4)$ b) $68(5x+4)-68(3x+2)=0$

15. Rozwiąż w pamięci równania (spróbuj się domyślić, jaką liczbę trzeba wstawić w miejsce x).

a) $2{,}5x=5$ c) $\frac{1}{6}x=1$ e) $7-x=6{,}5$ g) $x+\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$

b) $0{,}2x=2$ d) $\frac{x}{4}=5$ f) $11x=0$ h) $0{,}1x=-1$

16. Rozwiąż w pamięci równania.

a) $(2x-1)^2=0$ c) $(1-x)^3=-1$ e) $(x-1)(x+2)=0$

b) $(x+2)^3=1$ d) $5x(x+5)=0$ f) $(4-x)(2+x)=0$

***17.** Dla jakich całkowitych wartości a:

a) rozwiązanie równania $ax+12=17$ jest liczbą całkowitą,

b) rozwiązanie równania $ax+13=7$ jest liczbą naturalną?

Sprawdź, czy umiesz

1. Rozwiązanie równania $3x-2=5(x+1)$ jest liczbą:

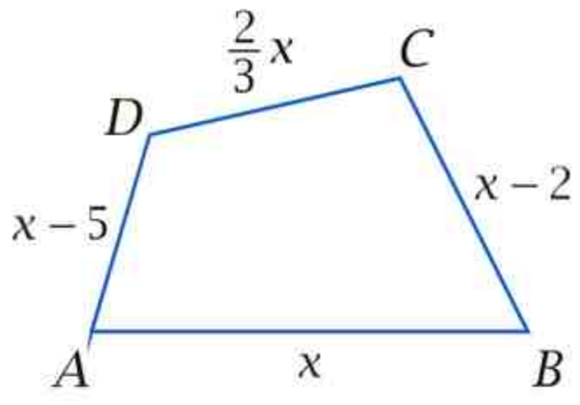
A. nieujemną C. mniejszą od -3

B. całkowitą ujemną D. większą od 3

2. Jeśli obie strony równania $\frac{x+3}{2}-\frac{x+4}{4}=2$ pomnożymy przez 4, to otrzymamy równanie:

A. $2x+3-x+4=8$ C. $2x+6-x-4=2$

B. $2(x+3)-x+4=8$ D. $2x+6-x-4=8$



obwód = 37

3. Która informacja o czworokącie $ABCD$ przedstawionym na rysunku obok jest prawdziwa?

A. Najkrótszy bok ma długość 8.

B. Najdłuższy bok ma długość 10.

C. Suma długości wszystkich boków jest równa 30.

D. Bok AB jest o 4 dłuższy od boku CD.

→ zadania uzupełniające 10–17, str. 214–215

4 Zadania tekstowe

Przykład

W sadzie dziadka Eugeniusza rosną śliwy, jabłonie i grusze. Jabłoni jest 2 razy więcej niż śliw, a grusz jest o 3 mniej niż jabłoni. Razem w sadzie rośnie 17 drzew. Ile jest wśród nich śliw, ile jabłoni, a ile grusz?

x — liczba śliw
$2x$ — liczba jabłoni
$2x - 3$ — liczba grusz
17 — liczba wszystkich drzew

Oznaczamy przez x liczbę śliw i na podstawie treści zadania zapisujemy liczby pozostałych drzew.

$x + 2x + (2x - 3) = 17$ | *Układamy równanie.*

$5x - 3 = 17 \quad | + 3$
$5x = 20 \quad | : 5$
$x = 4$

Rozwiązujemy równanie.

liczba śliw: 4
liczba jabłoni: $2 \cdot 4 = 8$
liczba grusz: $2 \cdot 4 - 3 = 5$

Sprawdzenie:
$4 + 8 + 5 = 17$

Odp. W sadzie dziadka Eugeniusza rosną 4 śliwy, 8 jabłoni i 5 grusz.

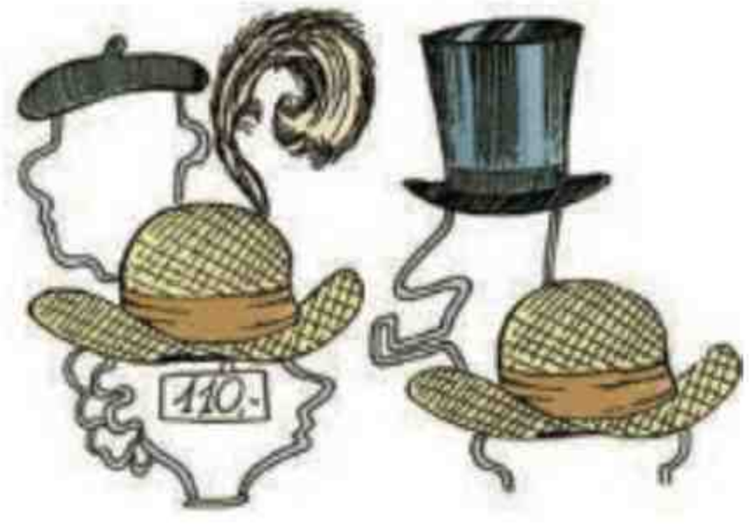
Rozwiązując to zadanie, moglibyśmy przez x oznaczyć liczbę jabłoni. Wówczas otrzymalibyśmy równanie $\frac{1}{2}x + x + (x - 3) = 17$, które także prowadziłoby do poprawnego rozwiązania zadania.

Zadania

1. Na siedemdziesiąte urodziny dziadka Eugeniusza przyjechało 48 osób. Wśród gości było 3 razy więcej dzieci niż dorosłych. Ile było dzieci, a ilu było dorosłych?



2. Gdy zmieszamy błękit paryski z czerwienią cynobrową w ten sposób, że farby niebieskiej będzie 1,5 raza więcej niż czerwonej, to otrzymamy farbę koloru ultramaryna. Ile należy wziąć kilogramów błękitu, a ile czerwieni, aby otrzymać 1,5 kg ultramaryny?



3. Kapelusz z piórkiem kosztuje 110 zł. Kapelusz jest droższy od piórka o 100 zł. Ile kosztuje kapelusz, a ile piórko?

4. Zegar z kukułką waży 5,5 kg. Kukułka jest o 5 kg lżejsza od zegara. Ile waży zegar, a ile kukułka?

18/215

5. Pani Kowalska zarabia miesięcznie o 200 zł więcej od pana Kowalskiego. W ciągu roku oboje razem zarobili 72 tys. zł. Jakie jest miesięczne wynagrodzenie pani Kowalskiej, a jakie pana Kowalskiego?

6. Bogdan wziął na obóz w góry 80 zł. Na napoje wydał 2 razy więcej niż na lody, a o 5 zł mniej niż na napoje wydał na słodycze. Za 15 zł kupił upominki dla rodziców. Wrócił bez pieniędzy, gdyż ostatniego dnia zgubił 10 zł. Ile pieniędzy wydał na lody?

7. Krzyś rozbił skarbonkę i policzył, że było w niej 32 zł w monetach o nominałach 2 zł, 1 zł, 50 gr i 20 gr. Dwuzłotówek było 2 razy mniej niż złotówek, a pięćdziesięciogroszówek było 2 razy więcej niż złotówek. Dwudziestogroszówek było 10. Ile monet było w skarbonce?

8. Jaś kupował haczyki w sklepie wędkarskim. Duży haczyk był o 7 groszy droższy od małego. Za 8 dużych haczyków i 6 małych zapłacił 3,50 zł. Ile kosztował duży haczyk, a ile mały?



9. Mamy rozlać 60 litrów miodu do słoików jednolitrowych i półlitrowych. Oblicz, ile większych i ile mniejszych słoików powinniśmy przygotować, aby po rozlaniu miodu:

a) słoików mniejszych i większych było tyle samo,

b) słoików półlitrowych było 3 razy tyle co słoików jednolitrowych,

c) słoików jednolitrowych było o 9 mniej niż półlitrowych.



10. Na bardzo nudnym wykładzie połowa studentów drzemie, a jedna trzecia rozwiązuje krzyżówki. Wśród pozostałych sześciu słuchaczy pięć osób czyta książkę i tylko jedna studentka pilnie notuje. Ilu studentów jest obecnych na tym wykładzie?

21/215



11. *Piraci z Łajby z tego są znani,*
Że zawsze modnie chodzą ubrani.
Kiedyś nosili koszulki w paski,
Teraz ich oczy zdobią przepaski.
Co trzeci pirat z owej załogi
Przepaską lewe oko ozdobił.
Prawe pod taką przepaską chowa
Całej załogi równo połowa.
Siedmiu z powodu kiepskiego wzroku
Nie chce przepaski nosić na oku.
I to już wszyscy — starsi i młodzież.
Ilu piratów uległo modzie?

12. Książki Ali stoją na trzech półkach. Na drugiej półce jest o 15 książek mniej niż na pierwszej i 2 razy więcej niż na trzeciej. Na pierwszej i trzeciej półce jest razem 2 razy więcej książek niż na drugiej. Ile książek ma Ala?

13. Kolejka elektryczna jadąca z Gdańska do Gdyni zatrzymuje się na kilkunastu stacjach, między innymi w Oliwie i w Sopocie.



Oblicz, jak długo kolejka elektryczna jedzie z Gdańska Głównego do Gdyni Głównej, jeśli wiadomo, że:

- jedną czwartą tego czasu jedzie z Oliwy do Sopotu,
- z Gdańska do Sopotu jedzie 21 min,
- z Oliwy do Gdyni jedzie 19 min.

14. Hrabia Barszczyk wezwał swoich poddanych do zbierania grzybów.

Ogłaszam grzybobranie!

Za każdy przyniesiony mi grzyb jadalny zapłacę talara, ale za każdy grzyb trujący odbiorę 3 talary.

Hrabia Barszczyk

Antek przyniósł hrabiemu 50 grzybów i zarobił 18 talarów. Ile zebrał grzybów jadalnych, a ile trujących?



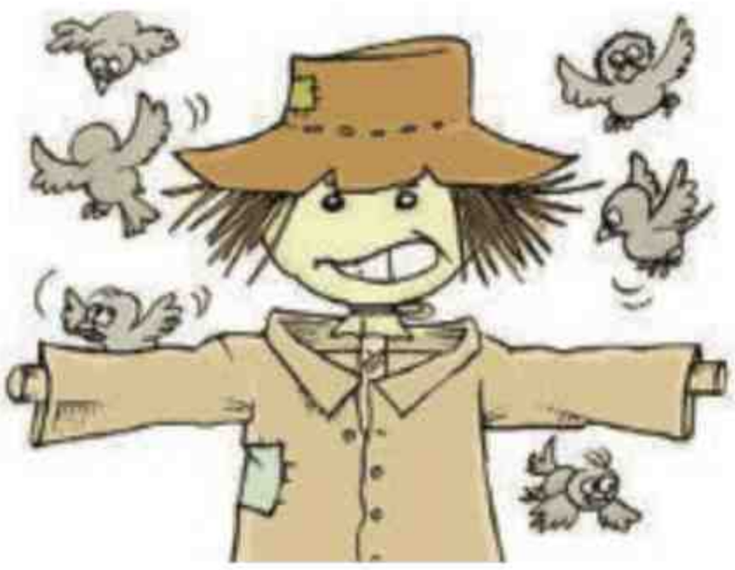
15. Koszykarze podczas pewnego meczu wykonali łącznie 37 skutecznych rzutów za 2 i za 3 punkty, zdobywając łącznie 82 punkty. Ile było rzutów za 2 punkty, a ile — za 3 punkty?



16. Szymon zdobył 54 punkty ze sprawdzianu składającego się z piętnastu zadań. Za każdą dobrą odpowiedź otrzymywał 5 punktów, a za złą lub brak odpowiedzi tracił 2 punkty. Ile zadań rozwiązał prawidłowo?

17. Agnieszka i Jacek zbierali kasztany. Jacek uzbierał 3 razy więcej kasztanów niż Agnieszka. Gdyby oddał Agnieszce 15 z nich, to oboje mieliby tyle samo kasztanów. Ile kasztanów ma Agnieszka, a ile Jacek?

18. Siedziały wróble na strachu na wróble. Początkowo na lewym ramieniu siedziało dwa razy więcej wróbli niż na prawym. Potem cztery wróble przeniosły się z lewego ramienia na prawe i wówczas po obu stronach było tyle samo wróbli. Ile wróbli siedziało na strachu na wróble?





19. Ile złotych kieszonkowego po podwyżce będzie dostawać Kasia (zob. rysunek)?

20. — *Teraz jestem siedem razy starsza od mojej córki. Za 20 lat będę od niej dwa razy starsza* — powiedziała pewna pani. Ile lat ma ta pani?

25/216

21. Za 3 lata Grześ będzie 3 razy starszy niż 3 lata temu. Ile lat ma Grześ?

***22.** — *4 lata temu byłem 4 razy młodszy od mamy, a 10 lat temu byłem od niej młodszy 10 razy.* Ile lat ma autor wypowiedzi?



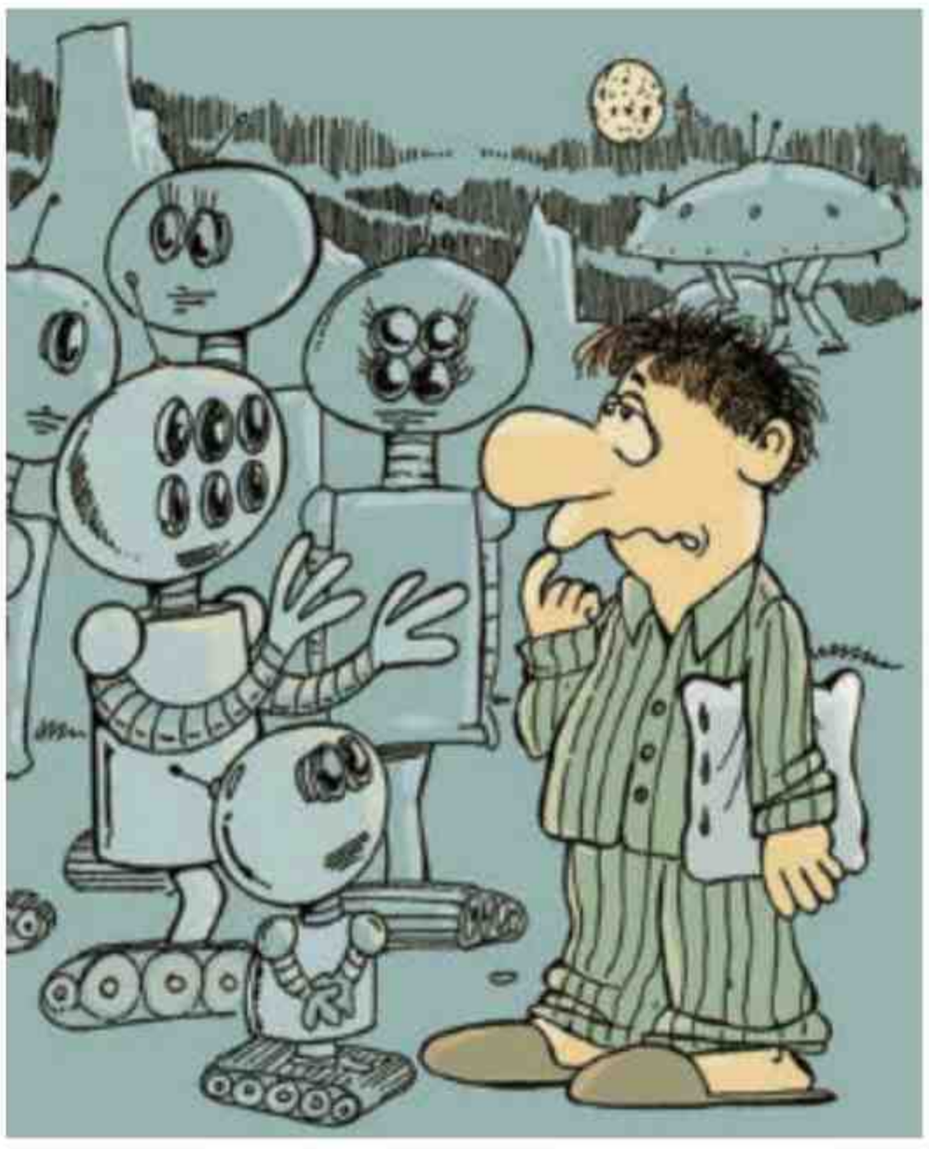
23. — *Dziadku, ile masz lat?*
— *Jestem o 10 lat starszy od cioci Asi, a o 20 lat młodszy od stryjenki Michasi.*
— *A ciocia Asia ile ma lat?*
— *Jest 2 razy starsza od Jurka.*
— *A ile lat ma stryjenka Michasia?*
— *Jest 3 razy starsza od Jurka.*
— *A Jurek ile ma lat?*
— *To już oblicz sobie sama.*

Ile lat ma Jurek? Ile lat ma dziadek?

24. Krzyś postanowił, że będzie czytał po 40 stron książki dziennie. Niestety, czytał tylko 30 stron dziennie i przeczytanie całej książki zabrało mu 3 dni więcej, niż planował. W ciągu ilu dni Krzyś przeczytał całą książkę? Ile stron liczyła owa lektura?

***25.** Gdy pan N. A. Iwniak zaczynał grę z panem O. Szustem, miał tyle samo gotówki co on. Na początku wygrał 20 zł, ale potem przegrał dwie trzecie tego, co posiadał. W rezultacie miał cztery razy mniej pieniędzy niż O. Szust. Z jaką kwotą obaj panowie rozpoczynali grę?





***26.** *Sen miałem dziwny. A tak to było:*
W tłumie kosmitów na placu stałem.
Dwieście ich oczu na mnie patrzyło,
Ale zarysów ciał nie widziałem.
Wtem usłyszałem — Hej, Ziemianinie,
Zadam ci teraz trudne pytanie.
Musisz się spieszyć, bo gdy noc minie,
Chcemy gotowe mieć rozwiązanie.
Kilku z nas ma, jak ty, oczu parę.
O siedmiu więcej ma ich dwie pary.
A czworo oczu ponad twą miarę
Mam ja, ma brat mój i ojciec stary.
Połowę grupy już omówiłem,
Reszta mych druhów ma oko jedno.
Z jak liczną grupą tutaj przybyłem?
Spróbuj obliczyć, nim gwiazdy zbledną.

Zadania geometryczne

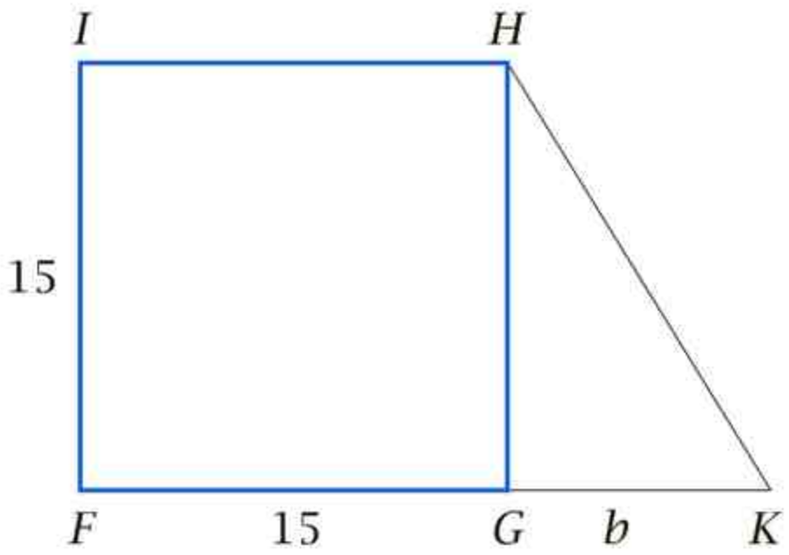
30/216

27. W pewnym trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę o 33° mniejszą niż kąt przy podstawie. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

28. W pewnym trójkącie jeden z kątów jest dwa razy większy od drugiego i o 20° mniejszy od trzeciego. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

31/216

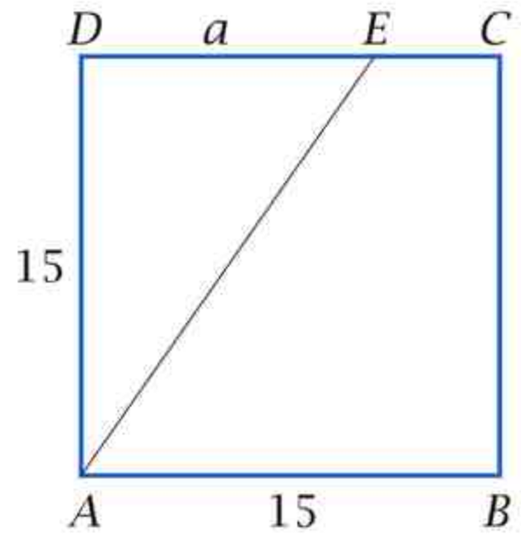
29. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę 2 razy mniejszą niż suma miar dwóch pozostałych kątów. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

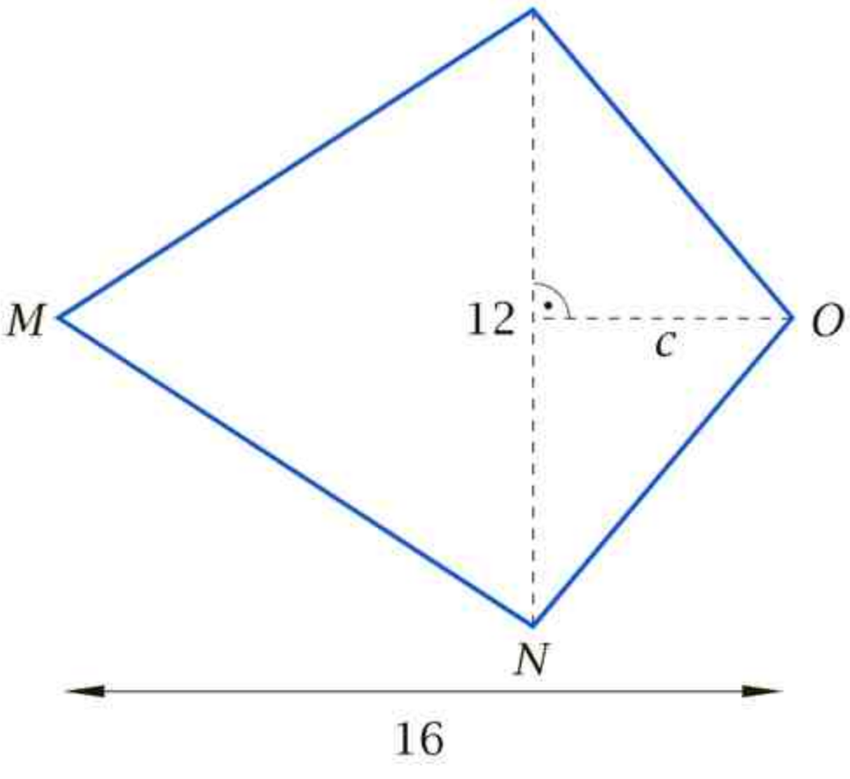


30. Popatrz na rysunek obok. Jaką długość powinien mieć odcinek b, aby pole trapezu $FKHI$ było o 90 większe od pola kwadratu $FGHI$?

31. W trapezie o polu 18 cm^2 wysokość jest równa 3 cm, a jedna z podstaw jest o 5 cm krótsza od drugiej podstawy. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

32. Czworokąt $ABCD$ przedstawiony na rysunku obok jest kwadratem. Ustal, jaką długość powinien mieć odcinek a, aby pole trapezu $ABCE$ było 2 razy większe od pola trójkąta AED.





33. Na rysunku obok trójkąt LNO ma pole 3 razy mniejsze od pola trójkąta LMN. Jaką długość ma odcinek c?

34. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach 6 cm i 5 cm. Jaką wysokość powinien mieć ten prostopadłościan, aby pole jego powierzchni całkowitej było równe 280 cm^2?

35. Z prostokąta, którego jeden bok jest półtora raza dłuższy od drugiego, odcięto dwa paski, każdy o szerokości 1 cm. Jeden pasek odcięto wzdłuż dłuższego boku, a drugi — wzdłuż krótszego. W otrzymanym prostokącie jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego. Jakie wymiary ma otrzymany prostokąt?

***36.** Obwód czworokąta $PRST$ jest pięć razy większy od długości przekątnej RT. Obwód trójkąta PRT jest równy 40, a obwód trójkąta RST jest równy 23. Jaką długość ma przekątna RT?

Sprawdź, czy umiesz

1. Suma dwóch liczb wynosi 29. Jedna z tych liczb jest o 5 większa od drugiej. Iloczyn tych liczb wynosi:

A. 200 B. 12 C. 204 D. 209

2. Lody z bitą śmietaną i rodzynkami kosztują 11 zł. Lody są 2 razy droższe od bitej śmietany i o 5 zł droższe od rodzynek. Cenę lodów (bez bitej śmietany i rodzynek) otrzymamy po rozwiązaniu równania:

A. $t + 2t + t - 5 = 11$

B. $t + \frac{1}{2}t + t + 5 = 11$

C. $t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t - 5 = 11$

D. $t + \frac{1}{2}t + t - 5 = 11$

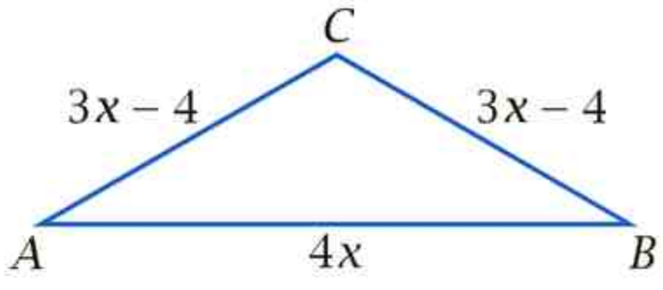
3. Pan Wojtek jest teraz 2 razy starszy od syna. 18 lat temu był od niego starszy 3 razy. Wynika z tego, że:

A. Pan Wojtek jest o 18 lat starszy od syna.

B. Syn pana Wojtka już od 18 lat jest pełnoletni.

C. Pan Wojtek 18 lat temu obchodził pięćdziesiąte urodziny.

D. Syn pana Wojtka jest uczniem szkoły podstawowej.



4. Trójkąt ABC przedstawiony na rysunku obok ma obwód 50. Wynika stąd, że podstawa AB tego trójkąta ma długość:

A. 5,8 B. 23,2 C. 4,2 D. 16,8

zadania uzupełniające 18–40, str. 215–217

5 Procenty w zadaniach tekstowych

Przykład

Pani Ewa kupiła w sklepie sukienkę, żakiet oraz kapelusz i zapłaciła w sumie 384 zł. Kapelusz był o 20% tańszy od sukienki, a żakiet o 40% droższy od sukienki. Ile kosztowała sukienka, ile żakiet, a ile kapelusz?

Rozwiązanie:

x — cena sukienki

$0{,}8x$ — cena kapelusza | *Cena kapelusza to 80% ceny sukienki.*

$1{,}4x$ — cena żakietu | *Cena żakietu to 140% ceny sukienki.*

$x + 0{,}8x + 1{,}4x = 384$ | *Układamy równanie.*

$3{,}2x = 384 \quad | : 3{,}2$ | *Rozwiązujemy równanie.*

$x = 120$ | *Cena sukienki.*

$0{,}8 \cdot 120 = 96$ | *Obliczamy cenę kapelusza.*

$1{,}4 \cdot 120 = 168$ | *Obliczamy cenę żakietu.*

Odp. Sukienka kosztowała 120 zł, kapelusz 96 zł, a żakiet 168 zł.

ĆWICZENIE. Rozpuszczono 2 kg cukru w 3 kilogramach wody, otrzymując 5 kg syropu. Nazwijmy ten syrop *Pim*.

a) Jaki procent masy syropu *Pim* stanowi cukier?

b) Do syropu *Pim* dosypano jeszcze 1 kilogram cukru. Jaka jest masa nowego syropu? Jaki jej procent stanowi cukier?

c) Do syropu *Pim* dolano jeszcze 4 kilogramy wody. Jaka jest masa nowego syropu? Jaki procent tej masy stanowi cukier?

Rozpuszczając jakąś substancję w wodzie, otrzymujemy roztwór. Mówimy, że roztwór jest pięcioprocentowy, gdy masa rozpuszczonej substancji stanowi 5% masy całego roztworu.

$s = 0{,}05 \cdot r$

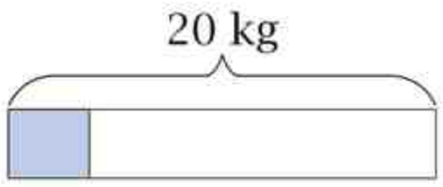
s — masa rozpuszczonej substancji
r — masa roztworu

Uwaga. Syrop to roztwór cukru, a solanka to roztwór soli.

Przykład

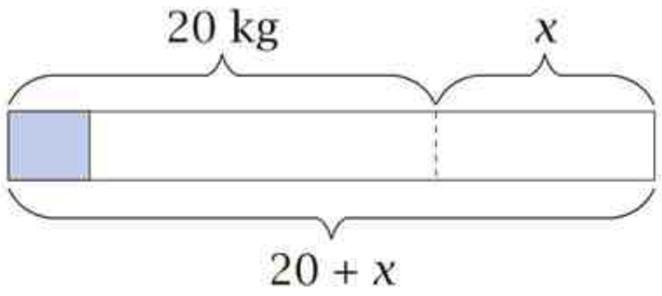
a) Ile wody należy dolać do 20 kilogramów solanki sześcioprocentowej, aby otrzymać solankę czteroprocentową?

Stary roztwór
sól to 6% z 20 kg



x — masa dolanej wody (w kilogramach)

Nowy roztwór
masa soli: $0{,}06 \cdot 20$ kg
masa roztworu: $(20 + x)$ kg



Masa soli w nowym roztworze jest taka sama jak w starym.

$$0{,}06 \cdot 20 = 0{,}04 \cdot (20 + x) \quad | \cdot 100$$

Masa soli w nowym roztworze to 4% masy nowego roztworu.

$$6 \cdot 20 = 4 \cdot (20 + x)$$

$$120 = 80 + 4x$$

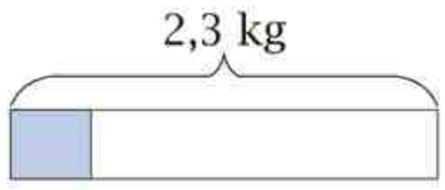
$$4x = 40$$

$$x = 10$$

Odp. Należy dolać 10 kilogramów wody.

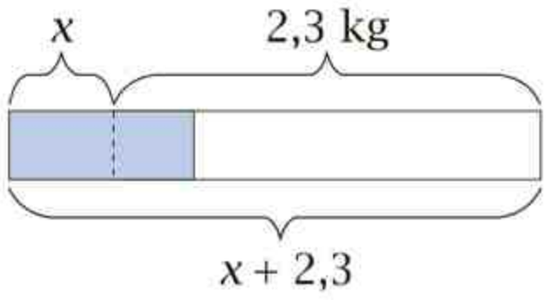
b) Ile soli należy dosypać do 2,3 kg sześcioprocentowej solanki, aby otrzymać solankę ośmioprocentową?

Stary roztwór
sól to 6% z 2,3 kg



x — masa dosypanej soli (w kilogramach)

Nowy roztwór
masa soli: $(0{,}06 \cdot 2{,}3 + x)$ kg
masa roztworu: $(x + 2{,}3)$ kg



Masa soli w nowym roztworze jest o x kilogramów większa niż w starym.

$$0{,}06 \cdot 2{,}3 + x = 0{,}08 \cdot (x + 2{,}3)$$

Masa soli w nowym roztworze to 8% masy nowego roztworu.

$$0{,}138 + x = 0{,}08x + 0{,}184$$

$$0{,}92x = 0{,}046$$

$$x = 0{,}05$$

Odp. Należy dosypać 0,05 kg, czyli 5 dag soli.

Zadania

1. Dwaj sąsiedzi, pan Jan i pan Kazimierz, hodują gołębie. Mają ich razem 47. Pan Jan ma o 12% gołębi mniej niż pan Kazimierz. Ile gołębi ma każdy z tych panów?

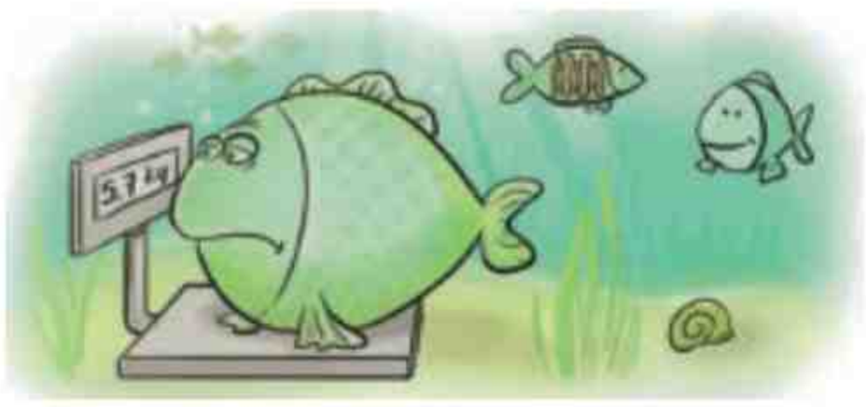
2. Na placu zabaw bawią się dzieci. Połowa z nich gra w piłkę, 10% biega bez celu i krzyczy, 20% gra w gumę, a reszta, czyli sześcioro dzieci, bawi się w piaskownicy. Ile dzieci jest na placu zabaw?



3. Pani Anna ważyła o 3 kg mniej niż pani Zofia. Po kuracji odchudzającej pani Anna waży o 15% mniej, a pani Zofia o 15 kg mniej i obie ważą tyle samo. Ile kilogramów ważyła każda z tych pań przed kuracją odchudzającą?

4. W pewnym prostokącie jeden z boków jest o 6 cm dłuższy od drugiego. Gdy parę dłuższych boków skrócono o 20%, a parę krótszych przedłużono o 25%, otrzymano prostokąt o takim samym obwodzie. Jaki obwód ma każdy z tych prostokątów?

5. W Szkole Podstawowej Nr 14 uczy się 930 uczniów. Liczba dziewcząt stanowi 86% liczby chłopców. Oblicz, ilu chłopców i ile dziewcząt uczy się w tej szkole.



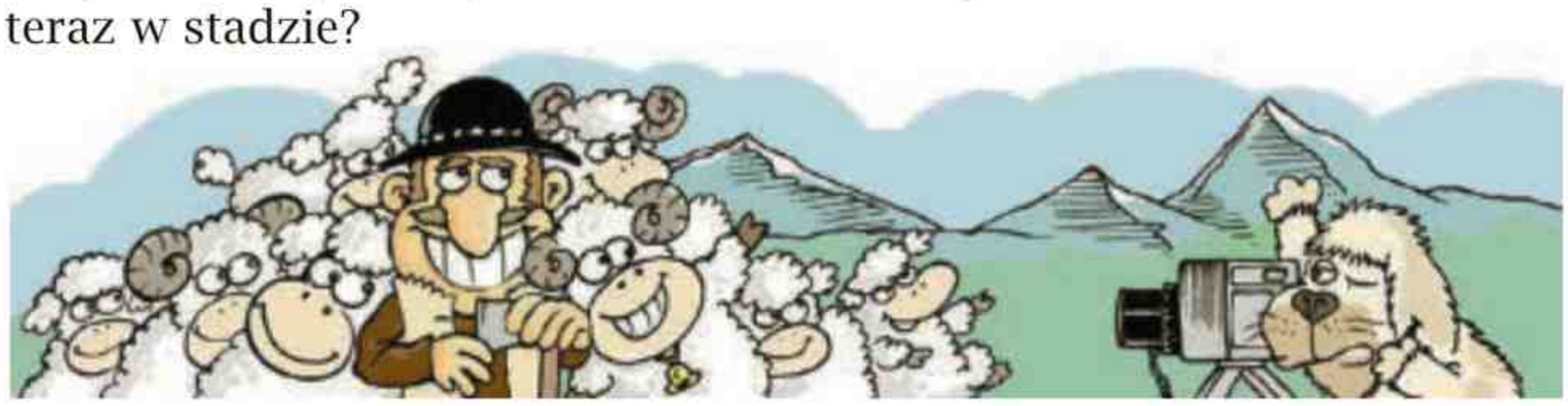
6. W stawie pana Ludwika pływają grube ryby, a także płotki i leszcze. Grube ryby stanowią 5% wszystkich ryb, a płotki — 80% pozostałych. Leszczy w tym stawie jest 38. Ile grubych ryb pływa w tym stawie?

7. Hurtownik kupił 2 tony bananów. $\frac{4}{5}$ bananów sprzedał z zyskiem 12%, a resztę sprzedał z zyskiem 5%. Na całej transakcji zarobił 424 zł. Ile zapłacił za wszystkie banany?



8. W fabryce Cudne Rzeczy wyprodukowano 1000 rzeczy, w tym niestety 8% bubli. Ile naprawdę cudnych rzeczy (bez braków) trzeba dodatkowo wyprodukować, by nie przekroczyć dopuszczalnej normy, tzn. by braków było tylko 5%?

9. Gazda Stach do swojego stada liczącego 28 owiec i 2 barany dokupił nowe stado, w którym było 15% baranów. W połączonym stadzie barany stanowiły 10%. Jak liczne stado dokupił Stach? Ile baranów ma teraz w stadzie?



10. a) Ile soli trzeba wsypać do 1,8 kg wody, aby otrzymać roztwór dziesięcioprocentowy?

b) Ile wody należy dodać do 2 kg pięcioprocentowej solanki, aby otrzymać solankę dwuprocentową?

c) Ile soli należy dosypać do 9 kg pięcioprocentowej solanki, aby otrzymać roztwór dziesięcioprocentowy?

d) Do trzydziestoprocentowego syropu dodano 20 kg wody i otrzymano syrop dwudziestoprocentowy. Jaka jest całkowita masa otrzymanego syropu?

45/218

11. a) Z 30 kg solanki dwuprocentowej odparowano wodę i otrzymano solankę trzyprocentową. Ile wody odparowano?

b) Z solanki pięcioprocentowej odparowano 10 kg wody i otrzymano solankę sześcioprocentową. Ile solanki było na początku?

***12.** Ile kilogramów roztworu osiemdziesięcioprocentowego należy zmieszać z 4 kilogramami roztworu sześćdziesięcioprocentowego, aby otrzymać roztwór siedemdziesięciopięcioprocentowy?

46/218

Sprawdź, czy umiesz

1. W firmie Wiertnik S.A. zatrudnieni byli jedynie mężczyźni. Było ich 40. Po zatrudnieniu kilku kobiet okazało się, że kobiety stanowią teraz 20% załogi. Ile kobiet zatrudniono?

A. 8 B. 10 C. 30 D. 50

2. Ile wody trzeba dolać do 10 kg czteroprocentowego roztworu, aby otrzymać roztwór trzyprocentowy?

A. 0,3 kg B. $3\frac{1}{3}$ kg C. 10 kg D. $13\frac{1}{3}$ kg

zadania uzupełniające 41–46, str. 218

6 Przekształcanie wzorów

Maratończyk przebiegł 42 km 195 m w ciągu 2,5 godziny. Obliczmy, z jaką średnią prędkością pokonał ten dystans.

Prędkość średnia to iloraz przebytej drogi przez czas, w jakim została przebyta.

$$v = \frac{s}{t}$$

v — średnia prędkość
s — droga
t — czas

Znamy drogę (dystans biegu maratońskiego) oraz czas, w jakim maratończyk ją przebył. Średnią prędkość obliczymy, korzystając ze wzoru:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{42{,}195}{2{,}5} \approx 16{,}9 \text{ [km/h]}$$

Wyobraźmy sobie, że maratończyk mógłby biec z taką prędkością z Zakopanego do Gdańska (czyli 672 km). Ile czasu zająłby mu bieg?



Tym razem znamy prędkość i drogę. Aby wyznaczyć czas biegu, możemy przekształcić wzór, z którego wcześniej korzystaliśmy.

$v = \frac{s}{t} \quad | \cdot t$ | *Obie strony równości mnożymy przez t (możemy to zrobić, gdyż na pewno $t \neq 0$).*

$v \cdot t = s \quad | : v$ | *Obie strony równości dzielimy przez v (wiemy, że $v \neq 0$).*

$t = \frac{s}{v}$

Otrzymaliśmy wzór, z którego możemy obliczyć czas biegu.

$$t = \frac{672}{16{,}9} \approx 40 \text{ [godzin]}$$

Uwaga. Zauważ, że można to zadanie rozwiązać, wstawiając od razu odpowiednie liczby do wzoru $v = \frac{s}{t}$. Na ogół jednak operowanie symbolami literowymi jest wygodniejsze i mniej pracochłonne niż posługiwanie się wielocyfrowymi liczbami.

Przekształcając wzory, postępujemy podobnie jak przy rozwiązywaniu równań. Możemy więc:

- do obu stron równości dodać (lub od nich odjąć) to samo wyrażenie,
- obie strony równości pomnożyć (lub podzielić) przez to samo wyrażenie (musimy przy tym wiedzieć, że wartość tego wyrażenia jest różna od zera lub przyjąć odpowiednie założenie).

Uwaga. Przy przekształcaniu wzorów możemy też przenosić dowolne wyrażenia na drugą stronę równości, zmieniając ich znak na przeciwny.

Przykład

Ze wzoru $z = a + 3b$ wyznacz b.

$z = a + 3b \quad | - a$ | *Od obu stron równości odejmujemy a.*

$z - a = 3b \quad | : 3$ | *Obie strony równości dzielimy przez 3.*

$\frac{z-a}{3} = b$

$b = \frac{z-a}{3}$ | *Zamieniamy miejscami strony równości, aby wzór miał postać wygodniejszą do odczytania.*

W poniższym przykładzie, aby odpowiednio przekształcić wzór, trzeba mnożyć oraz dzielić obie strony równości przez wyrażenia zawierające zmienną. Zwróć uwagę, jakie przy tym należy przyjąć założenia.

Przykład

Ze wzoru $R = \frac{w}{a-b}$ wyznacz a.

$R = \frac{w}{a-b} \quad | \cdot (a-b) \qquad$ Zał. $a - b \neq 0$ | *Zakładamy, że $a - b \neq 0$. Obie strony równości mnożymy przez $a - b$.*

$R(a-b) = w$ | *Przekształcamy lewą stronę równości.*

$Ra - Rb = w$ | *Przenosimy wyrażenie $-Rb$ na prawą stronę, zmieniając znak przenoszonego wyrażenia na przeciwny.*

$Ra = w + Rb \quad | : R \qquad$ Zał. $R \neq 0$ | *Zakładamy, że $R \neq 0$. Dzielimy obie strony równości przez R.*

$a = \frac{w+Rb}{R}$

Uwaga. W związku z przyjętymi założeniami otrzymany wzór jest prawdziwy, gdy $a - b \neq 0$ i $R \neq 0$ (dla $R = 0$ początkowy wzór przyjmowałby postać $0 = \frac{w}{a-b}$, stąd $w = 0$, zaś $a - b$ może być dowolną liczbą różną od zera, zatem z takiej równości nie da się wyznaczyć a w sposób jednoznaczny).

Zadania

1. Wyznacz ze wzoru wskazaną wielkość.

a) $k = \frac{1}{4}a$; a

b) $y = 2t - 1$; t

c) $2p - d = f$; p

d) $Ma - 10m = b$; m

e) $D = 3(e + f)$; f

f) $P - K = \frac{st + 2}{2}$; t

47/218

2. Wyznacz ze wzoru wskazaną wielkość. Przyjmij odpowiednie założenia.

a) $v = \frac{s}{t}$; s

b) $P = mF$; F

c) $E = mgh$; h

d) $K = \frac{a}{R}$; R

e) $R = \frac{ax}{b}$; x

f) $S = \frac{bt}{am}$; m

g) $T = \frac{1}{abt}$; t

h) $v = \frac{at^2}{2}$; a

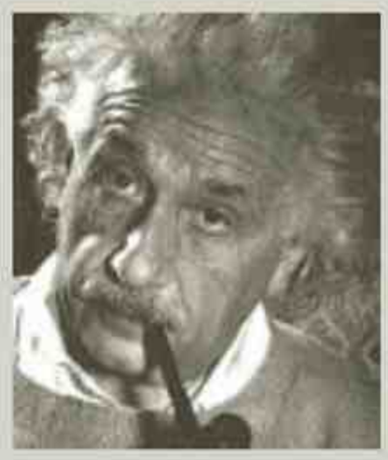
i) $R = \frac{abc}{4P}$; P

48/218

3. Wzór $E = mc^2$, chyba najbardziej znany na świecie, opisuje dla dowolnego ciała fizycznego związek między całkowitą energią E tego ciała, jego masą m i prędkością światła c. Wyznacz z tego wzoru masę m.

Z historii

Wzór $E = mc^2$ został odkryty przez genialnego matematyka i fizyka Alberta Einsteina (1879–1955). Wzór ten jest częścią jego tzw. szczególnej teorii względności, ogłoszonej w 1905 r. Einstein miał wówczas 26 lat i był podrzędnym pracownikiem biura patentowego. Dziesięć lat później ogłosił tzw. ogólną teorię względności. Tworząc teorię względności, Einstein wykorzystywał nie tylko wiedzę z fizyki, ale także korzystał z rozmaitych teorii matematycznych.



4. Napisz wzór na pole trójkąta o boku długości a i wysokości h poprowadzonej do tego boku. Wyznacz z tego wzoru a.

5. Napisz wzór na pole trapezu i przekształć go tak, aby otrzymać:

a) wzór pozwalający obliczać wysokość trapezu,

b) wzór pozwalający obliczać długość jednej z podstaw trapezu.

6. Równość $\heartsuit = \frac{\clubsuit + \spadesuit}{\diamondsuit}$ przekształć tak, aby wyznaczyć $\diamondsuit$.

7. Z każdego z poniższych wzorów wyznacz k. Przyjmij odpowiednie założenia.

a) $V = 5(a + 2k)$

b) $T + p = 3(a^2 + 2ak)$

c) $A - 2b = p(3 - pk)$

d) $d = \frac{b}{k-1}$

e) $e = \frac{a-1}{k+1}$

f) $5f = \frac{2c-3}{1-2k}$

g) $k(a + b) - 1 = c$

h) $3 + 2k(M - 2) = D$

i) $F + 2 = H - 10k(E + 2)$

8. **和宏** (czyt. Kazuhiro), gimnazjalista z Japonii, pokazywał polskim kolegom, jak wyglądałoby przekształcanie wzorów zapisanych w alfabecie japońskim. Ze wzoru:

$$久 = \frac{宏}{男} \cdot 正$$

miał wyznaczyć **正**. Znajdź błąd w jego rozwiązaniu. Czy potrafisz podać prawidłowy wynik?

$$久 = \frac{宏}{男} \cdot 正 / :宏$$

$$\frac{久}{宏} = 男 \cdot 正 / :男$$

$$正 = \frac{久}{男 \cdot 宏}$$

9. Podaj wzór pozwalający obliczyć wysokość trójkąta równobocznego, gdy znamy jego pole P i obwód L.

Sprawdź, czy umiesz

1. Liczby P, k i r są dodatnie oraz $P = \frac{k}{r}$, zatem:

A. $r = kP$ B. $r = \frac{1}{Pk}$ C. $r = \frac{k}{P}$ D. $r = \frac{P}{k}$

2. Jeśli $n = 0{,}8b$, to:

A. $b = 0{,}2n$ B. $b = 1{,}25n$ C. $b = 0{,}8n$ D. $b = 0{,}25n$

3. Pole pewnego trójkąta jest równe P. Wysokość h tego trójkąta, poprowadzoną do boku o długości a, można obliczyć ze wzoru:

A. $h = \frac{1}{2}aP$ B. $h = 2Pa$ C. $h = \frac{P}{2a}$ D. $h = \frac{2P}{a}$

zadania uzupełniające 47–49, str. 218

Przed klasówką

1. Do każdego z poniższych zdań dobierz jedno z sześciu równań, które to zdanie opisuje.

① $a+(a-1)=a+1$ ③ $a+(a+1)=a-1$ ⑤ $a+(a+1)=a+1$

② $a-(a-1)=a+2$ ④ $a-(a+1)=a-2$ ⑥ $a-(a-1)=a-2$

a) Suma liczby a i liczby o 1 od niej większej jest liczbą o 1 mniejszą od a.

b) Różnica liczby a i liczby o 1 mniejszej od a jest liczbą o 2 mniejszą od a.

2. Czy podane zdanie jest prawdziwe czy fałszywe?

a) Liczba -5 spełnia równanie $3(4x+12)=4(5x+19)$. PRAWDA/FAŁSZ

b) Liczba 7 spełnia równanie $\frac{2x-14}{3}=\frac{1}{2}(21-3x)$. PRAWDA/FAŁSZ

c) Liczba 0 spełnia równanie $3x(27x-32)=4x^2-x$. PRAWDA/FAŁSZ

3. Które z podanych równań ma nieskończenie wiele rozwiązań?

A. $4(x-5)=3x-3+x-2$ C. $4x+3+5x=3(3x+1)$

B. $6x-11=3(2x-9)+2$ D. $2(3x-1)=5(3x-1)$

4. Które z podanych równań ma inne rozwiązanie niż równanie $6x-12=3$?

A. $2x-4=1$ B. $6x-10=5$ C. $x-2=3$ D. $12x-10=20$

5. Ile wynosi suma liczb $x+y+z$, jeśli te liczby spełniają podane równania?

$$98x+79=x(98+79) \qquad 93(y+11)=93(2y+13)$$

$$54(z-47)+54(z+47)=0$$

A. -96 B. -2 C. -1 D. 0

6. Jeśli liczby a, b, c, L są dodatnie oraz $L=\frac{2a+b}{c}$, to:

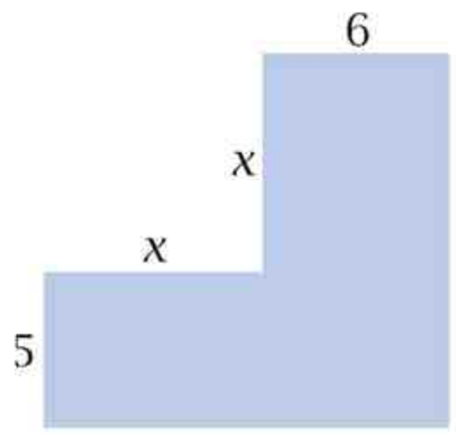
A. $b=\frac{Lc}{2a}$ B. $b=Lc-2a$ C. $b=L+c-2a$ D. $b=Lc+2a$

7. Suma dwóch liczb wynosi 27. Jedna z nich jest o 3 mniejsza od drugiej. Iloczyn tych liczb wynosi:

A. 648 B. 180 C. 9 D. 270

8. Obwód figury narysowanej obok jest równy 50. Jaką długość ma bok x?

A. 9,75 B. 19,5 C. 7 D. 14





9. Pan Jerzy kupił nowy telewizor i dzięki piętnastoprocentowej obniżce cen wydał o 510 zł mniej. Ile złotych zapłacił za telewizor?

A. 7650 zł C. 2890 zł
B. 3400 zł D. 600 zł

10. Dwie dziewczynki rozwiązywały równanie $6x = 36 - 18x$. Czy sposoby ich rozwiązania są prawidłowe czy nieprawidłowe?

Ola: Najpierw podzieliłam obie strony równania przez 6. Potem do obu stron równania dodałam $3x$, a następnie obie strony równania podzieliłam przez 4.

Krysia: Najpierw do obu stron równania dodałam $18x$, a następnie obie strony podzieliłam przez 24.

11. Czy średnia artymetyczna dwóch liczb całkowitych różniących się o 5 może być równa 17,5? Wybierz odpowiedź „tak” lub „nie” oraz jej uzasadnienie spośród zdań od A do D.

Ⓘ Tak, ponieważ… Ⓘⓘ Nie, ponieważ…

A — …równanie $\frac{x+(x+5)}{2} = 17{,}5$ ma rozwiązanie będące liczbą całkowitą.

B — …równanie $\frac{x+(x-5)}{2} = 17{,}5$ nie ma rozwiązań całkowitych.

C — …średnia arytmetyczna dwóch liczb całkowitych musi być liczbą całkowitą.

D — …można podać liczby, np. 13 i 18, które różnią się o 5, a ich średnia arytmetyczna nie jest równa 17,5.

12. Tuż przed Wielkanocą jajka podrożały aż o 30 gr i za 6 sztuk płaciło się tyle samo co przedtem za 8 sztuk. Ile kosztowały jajka przed podwyżką?



13. Uzasadnij, że równanie $x^2 + 3 = 0$ nie ma rozwiązań.

Zadania uzupełniające

Do czego służą równania?

1. Zapisz odpowiednie równania.

a) O 6 mniej od x to 71.

b) O liczbie x wiemy, że po pomnożeniu jej przez 6 i dodaniu 5 otrzymujemy liczbę o 25 większą od x.

2. Zapisz odpowiednie równania.

a) Marek zebrał m kg makulatury, Jola o 3 kg więcej, a Ela 3 razy więcej niż Marek. Razem zebrali 28 kg makulatury.

b) W skarbonce jest x pięćdziesięciogroszówek, o 10 więcej dwudziestogroszówek, razem 14,60 zł.

c) W ciągu 3 dni wędrowiec przeszedł x km. Pierwszego dnia przeszedł $\frac{1}{4}$ trasy, drugiego dnia o 6 km więcej, a trzeciego dnia o 10 km więcej niż drugiego.

3. Przeczytaj uważnie oferty firm X i Y.



Pan Wojtek wypożyczył łódź w firmie X. Po n godzinach zwrócił łódź i okazało się, że gdyby skorzystał z oferty firmy Y, to zapłaciłby o 5 zł mniej. Zapisz odpowiednie równanie z niewiadomą n.

4. Pan Rozrzutny miał x zł oszczędności. W poniedziałek wypłacił 25% całej kwoty, we wtorek o 60 zł więcej niż w poniedziałek i na koncie zostało 20 zł.

***5.** Jeśli do liczby dwucyfrowej a dopiszemy na początku i na końcu cyfrę 1, to otrzymamy liczbę 101 razy większą. Zapisz odpowiednie równanie z niewiadomą a.

Liczby spełniające równania

6. Wskaż równania, których rozwiązaniem jest liczba 0.

$-2x = 0$ $\quad 5y + 5 = 5$ $\quad 2z - 7 = 7$

$7t + 9t = 0$ $\quad 0 = 3 + 11d$

7. Czy podana liczba spełnia równanie?

a) $2x + 1 = 9 - 2x$, $\quad 2$

b) $3(2x - 5) = 1 - 4x$, $\quad 1\frac{1}{2}$

c) $4(y - 6) - 3y = 2(y - 9)$, $\quad -6$

8. Równanie $x^3 = 2x^2 + 8x$ ma trzy rozwiązania, które są liczbami całkowitymi większymi od -5 i mniejszymi od 5. Znajdź te liczby.

9. Wymyśl dwa równania, które mają to samo rozwiązanie — wybraną przez ciebie liczbę.

Rozwiązywanie równań

10. Rozwiąż równania.

a) $4x - 3 = 3x + 5$

b) $5x + 2 = 7 - 3x$

c) $3(x - 1) = 0$

d) $-6(x + 1) = 24$

e) $-7(x - 2) = 3x - 1$

f) $4(x - 1) = 6(1 + x)$

11. Rozwiąż równania.

a) $0{,}2x + 0{,}3 = -0{,}5$

b) $0{,}4 + 0{,}25x = -2$

c) $2{,}1 - 0{,}3x = 0{,}4x$

d) $-1{,}5x - 3 = 0{,}2x + 6$

12. Rozwiąż równania.

a) $\frac{1}{2}x - 4 = x - 6$

b) $x - 5 = \frac{1}{3}x + 1$

c) $\frac{x}{4} - \frac{1}{4} = 2$

d) $\frac{x}{5} - 3 = x + \frac{1}{5}$

e) $\frac{5}{6}(x - 1) = 4$

f) $-\frac{1}{2}(-x - 6) = -x$

13. Rozwiąż równania.

a) $\frac{2x+3}{5} = \frac{2-x}{3} - x$

b) $\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{1}{4}$

c) $\frac{4x+7}{2} - \frac{5x-1}{6} = x + 5$

d) $\frac{x+5}{4} - \frac{2x+1}{8} = \frac{1}{2}(2 - x)$

14. Rozwiąż równania.

a) $(3x - 2)(x + 1) = 3x^2 - 5$

b) $(4 - 5x)(2 + x) = -(4 + 5x^2)$

c) $4x^2 - 2x = (2x + 1)(2x - 3)$

d) $3x(2x + 5) = (x + 3)(6x + 1)$

15. Rozwiąż równania.

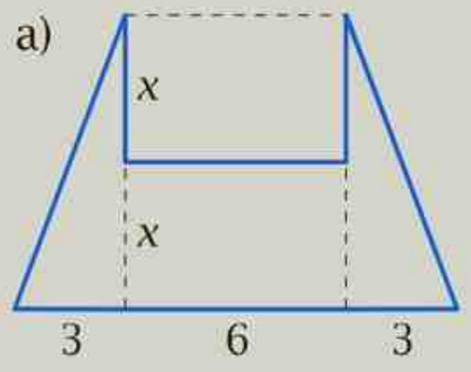
a) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}[x - (4x + 1)] = 1 - \frac{x+1}{4}$

b) $\frac{2}{3}(3x - 1) - \frac{3}{2}[2x + 3(x - 2)] = 1$

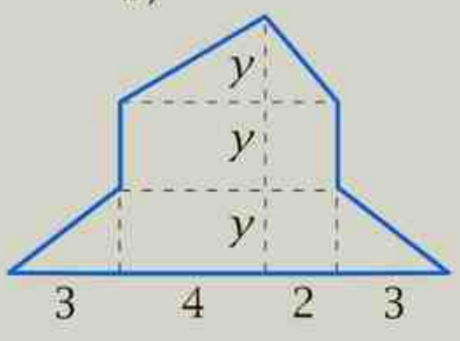
16. Dla jakiej wartości a rozwiązaniem równania $a(x - 1) - a = 2x + 5$ jest liczba -2? Dla jakiej wartości a równanie to nie ma rozwiązań?

17. Pole każdej z poniższych figur jest równe 48. Oblicz wartości x i y.

a)



b)



Zadania tekstowe

18. Ela z Marcinem wybrali się na pieszą wycieczkę. Postanowili przejść trasę o długości 21 km. Po trzech godzinach marszu Marcin powiedział do Eli:
— *Pozostało nam do przejścia o 5 km mniej, niż już przeszliśmy.*

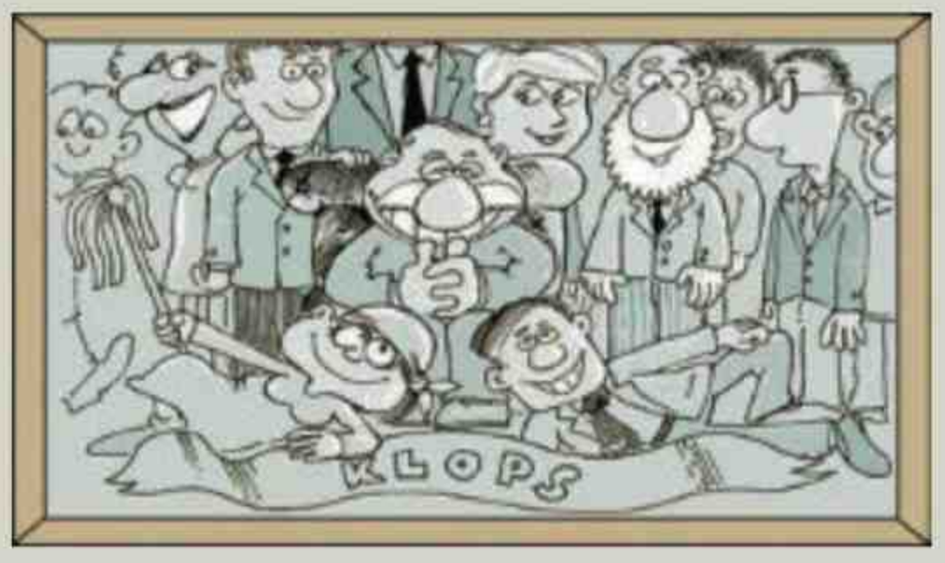
Jaką odległość pokonali w ciągu pierwszych trzech godzin wycieczki?

19. W czasie kwesty zebrano do puszki 150 zł. Wśród 41 zebranych monet była tylko jedna złotówka, a poza tym tylko dwuzłotówki i pięciozłotówki. Ile było pięciozłotówek, a ile dwuzłotówek?

20. Aby uzyskać eliksir łagodności, należy zmieszać ze sobą jedną miarkę naparu z melisy, dwie miarki lubczyku, ćwierć miarki kropli walerianowych i 3 miarki sekretnego składnika, którego nazwy nie można zdradzić. Ile litrów powinna mieć taka miarka, by można było eliksirem obdzielić liczącą 500 osób grupę agresywnych kibiców, tak aby każdy kibic dostał 50 ml eliksiru?



21. Dwie trzecie wszystkich pracowników firmy handlowej Klops stanowią sprzedawcy, a jedną piątą urzędnicy. Oprócz tego firma ta zatrudnia sprzątaczkę, dyrektora i dwóch zastępców dyrektora. Ile osób pracuje w Klopsie?



22. W konkursie matematycznym było 18 zadań, w tym 10 zadań za 4 punkty i 8 za 5 punktów. Za każde wskazanie błędnej odpowiedzi odejmowano $\frac{1}{4}$ punktów możliwych do zdobycia za zadanie. Marta wskazała odpowiedzi przy wszystkich pytaniach. W zadaniach za 4 punkty wszystkie jej odpowiedzi były poprawne. W sumie zdobyła 67,5 punktu. Na ile pytań odpowiedziała prawidłowo?

23. Grządzielka ma trzy razy więcej pętelek niż kompałka. Gdyby kompałka miała sześć pętelek więcej, to miałaby ich tyle samo co grządzielka. Ile pętelek mają grządzielka z kompałką?

24. Tomek ma 14 lat, a jego mama 38. Oblicz, kiedy mama była od Tomka pięć razy starsza. Za ile lat będzie od niego dwa razy starsza?

25. Dorota jest cztery razy starsza od Maćka. Za dwa lata będzie od niego trzy razy starsza.

a) Ile lat ma Maciek? Ile lat ma Dorota?

b) Za ile lat Dorota będzie dwa razy starsza od Maćka?

26. W przepełnionym wagonie II klasy było cztery razy więcej pasażerów niż w wagonie klasy I. Gdy 54 osoby przeniosły się z klasy II do klasy I, w obu wagonach było tyle samo pasażerów. Ilu pasażerów jechało w obu wagonach?

27. W wyborach na przewodniczącego Związku Miłośników Równań startowało dwóch kandydatów: Andrzej Iksiński i Bartosz Igrekowicz. Głosowało na nich łącznie 168 osób. Wygrał wyraźnie Igrekowicz. Nawet gdyby 20 głosujących na niego oddało swe głosy Iksińskiemu, Bartosz miałby dwa razy więcej głosów niż Andrzej. Ile głosów dostał Andrzej Iksiński, a ile Bartosz Igrekowicz?

***28.** O godzinie 9:00 z miejscowości Mini do odległej o 175 km miejscowości Maksi wyjechał samochodem pan X, a w tym samym czasie z miejscowości Maksi wyjechał do Mini pan N. Obaj panowie jechali ze stałą prędkością, pan N jechał o 10 km/h szybciej niż pan X. Minęli się o 10:15. O której godzinie pan N. dojechał do Mini?



Zadania geometryczne

29. Jeden z kątów przyległych jest o 70° większy od drugiego. Jakie miary mają te kąty?

30. W pewnym trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie jest o 30° większy od kąta między ramionami. Jakie miary mają kąty tego trójkąta?

31. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów jest czterokrotnie mniejszy od sumy dwóch pozostałych. Podaj miary kątów ostrych tego trójkąta.

32. W trapezie równoramiennym o obwodzie 32 cm jedna z podstaw jest o 2 cm krótsza od drugiej i dwa razy krótsza od ramienia. Oblicz długości boków tego trapezu.

33. Jeżeli dwa przeciwległe boki pewnego kwadratu przedłużymy o 8 cm, a dwa pozostałe skrócimy o 2 cm, to obwód czworokąta zwiększy się dwukrotnie. Oblicz długość boku kwadratu.

Zadania historyczne

Zadania od 34 do 40 pochodzą z różnych stuleci. Być może niektóre z nich były rozwiązywane przez twojego prapra-pra... przodka.

34. Matematyk Alkuin (VIII–IX w. n.e.) jest autorem takiego zadania:

Chart ujrzał zająca w odległości 150 stóp i ruszył w pogoń. Skok zająca ma 7 stóp, a skok charta wykonany w tym samym czasie 9 stóp. Po ilu skokach chart dogonił zająca?

35. Leciało stadko dzikich gęsi. Zobaczyła je gęś domowa i zawołała:

— *Witaj setko gęsi.*

— *Wcale nie jest nas sto* — odpowiedziała przewodniczka stada. — *Gdyby nas było jeszcze raz tyle, jeszcze połowa i jeszcze ćwierć, a do tego ty na dodatek, to dopiero wtedy byłoby nas sto. Policz sama, ile nas jest.*

36. Sławny grecki matematyk i filozof Pitagoras (VI–V w. p.n.e.) tak odpowiedział na pytanie o liczbę swoich uczniów:

— *Połowa moich uczniów studiuje matematykę, czwarta część uprawia muzykę, szósta część ćwiczy się w sztuce milczenia i są jeszcze trzy kobiety.*

Ilu uczniów miał Pitagoras?

37. Oto jedno z zadań matematyka hinduskiego Bhaskary (XII w. n.e.).

Trzecia część pszczelej gromadki usiadła na kwiatach lotosu, piąta część — na kwiatach magnolii, a tyle pszczół, co potrojona różnica tych liczb — odleciało ku krzewom jaśminu. Z całej gromadki tylko jedna pszczółka krążyła nad słodko pachnącym kwieciem koniczyny. Ile pszczół było w tej gromadce?

38. Na kamieniu nagrobnym greckiego matematyka Diofantosa (III w. n.e.) wyryto napis:

Przechodniu!
Tu spoczywają prochy Diofantosa, który zmarł w głębokiej starości. Przez szóstą część życia był dzieckiem, przez dwunastą młodzieńcem. Jeszcze siódma część życia minęła, zanim się ożenił. W pięć lat później urodził mu się syn, któremu okrutny los dał życie dwakroć krótsze niż ojcu. W cztery lata po śmierci syna Diofantos zasnął snem wiecznym.

Ile lat żył Diofantos?

***39.** Stara legenda głosi, że czeska królewna Libusza obiecała oddać swą rękę temu z trzech ubiegających się o nią rycerzy, który rozwiąże takie oto zadanie:

Ile brzoskwiń mieści koszyk, z którego połowę całej zawartości oraz jedną brzoskwinię oddam pierwszemu, połowę reszty i jedną brzoskwinię drugiemu, a trzeciemu połowę pozostałych owoców i ostatnie trzy brzoskwinie?

40. Rzecze raz czart do żebraka:
— *Niech umowa będzie taka.*
Gdy przebiegniesz ten most cały,
Zdwoję twoje kapitały.
Żądam tylko, byś w nagrodę,
Po ośm groszy rzucał w wodę.
Żebrak chętnie przez most leci,
Raz i drugi, nawet trzeci.
Tu dopiero spostrzegł: — *Zdrada!*
Ani grosza nie posiadam!
Teraz prędko rachuj mały,
Jakie dziad miał kapitały.



Procenty w zadaniach tekstowych

41. — *Podobno po spektaklu dostała pani setki kwiatów i do tego wszystkie czerwone* — zapytał dziennikarz gwiazdę teatru.

— *Ach nie, nie* — odrzekła gwiazda — *sporo było różowych, dokładnie 20% wszystkich i tylko o 6 mniej białych. Czerwonych było tylko 221.*

— *A innych kolorów nie było?*

— *Była jeszcze jedna łososiowa róża, bardzo piękna* — powiedziała gwiazda z rozmarzeniem.

Ile kwiatów dostała gwiazda?



42. Pan Kowalski sprzedawał czereśnie po takiej samej cenie jak pan Nowak. Pod wieczór obniżyli ceny — Kowalski o 20%, a Nowak o 4,50 zł. Okazało się, że cena czereśni u Kowalskiego była o 10% wyższa niż u Nowaka. Ile kosztowały czereśnie przed obniżką?

43. W wielkiej loterii promocyjnej przygotowano 900 losów. Okazało się, że tylko 5% tych losów wygrywało. Ile jeszcze losów wygrywających trzeba przygotować, aby spełniona była zasada, że wygrywa 10% losów?



44. W trzydziestoosobowej klasie 30% stanowiły dziewczęta. W II półroczu odeszło kilka z nich i teraz stanowią one 16% klasy. Ile dziewcząt odeszło z klasy?

45. a) Ile soli trzeba wsypać do 23 kg wody, aby otrzymać roztwór ośmioprocentowy?

b) Ile soli trzeba wsypać do 21 kg solanki pięcioprocentowej, aby otrzymać solankę siedmioprocentową?

c) Ile wody trzeba dolać do 3 kg solanki dziesięcioprocentowej, aby otrzymać solankę sześcioprocentową?

***46.** Ile solanki sześcioprocentowej należy wlać do 12 kg solanki dwuprocentowej, aby otrzymać solankę trzyprocentową?

Przekształcanie wzorów

47. Wyznacz wskazane wielkości.

a) $k = 7n$; n

b) $a = k + 6$; k

c) $z = 7 - y$; y

d) $d = a + bc$; c

e) $x = 2k + 1$; k

f) $2k = 7n + 5$; n

g) $t = \frac{1}{a} - 5xa$; x

h) $w = \frac{1}{2a} + \frac{p}{a}$; a

48. Z podanych wzorów fizycznych wyznacz wskazane wielkości.

a) $P = \frac{d}{M}RT$; M

b) $s = ar(x + r)$; x

c) $s = vt + \frac{at^2}{2}$; a

d) $F = G\frac{Mm}{r^2}$; m

49. Przed lekcją matematyki ktoś napisał na tablicy następującą równość:



Nauczycielowi bardzo się spodobał ten wzór. Poprosił Jasia o wyznaczenie z tej równości J, a Olę o wyznaczenie L. Jakie wzory powinni otrzymać?

VI POTĘGI I PIERWIASTKI

1 Potęga o wykładniku naturalnym

2 Iloczyn i iloraz potęg o jednakowych podstawach

3 Potęgowanie potęgi

4 Potęgowanie iloczynu i ilorazu

5 Działania na potęgach

6 Notacja wykładnicza

7 Notacja wykładnicza (cd.)

8 Pierwiastki

9 Działania na pierwiastkach

Przed klasówką, s. 256

Zadania uzupełniające, s. 258

1 Potęga o wykładniku naturalnym

Spróbuj sobie wyobrazić ogromny arkusz cieniutkiej bibułki o grubości 0,01 mm. Arkusz ten składamy na pół, potem jeszcze raz na pół i jeszcze raz na pół itd.



Po pierwszym złożeniu bibułka składałaby się z dwóch warstw i jej grubość wynosiłaby:

$$2 \cdot 0{,}01\,\text{mm}$$

Po drugim złożeniu grubość otrzymanej bibułki byłaby 2 razy większa od poprzedniej:

$$2 \cdot 2 \cdot 0{,}01\,\text{mm}$$

Po trzecim złożeniu grubość bibułki byłaby znowu 2 razy większa i wynosiłaby:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0{,}01\,\text{mm}$$

Grubość bibułki po dziesiątym złożeniu to:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0{,}01\,\text{mm}$$

W powyższych wyrażeniach występują iloczyny takich samych czynników. Takie iloczyny można zapisać krócej w postaci potęgi.

$2 \cdot 2 = 2^2$ — czytamy: *dwa do potęgi drugiej*

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ — czytamy: *dwa do potęgi trzeciej*

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}$ — czytamy: *dwa do potęgi dziesiątej*

ĆWICZENIE. Zapisz za pomocą potęgi liczby 2, jaką grubość miałaby bibułka, gdybyśmy złożyli ją 23 razy, a jaką — gdybyśmy ją złożyli 50 razy.

Przypuśćmy, że możliwe byłoby złożenie bibułki 50 razy. Jak myślisz, z czym można byłoby porównać grubość otrzymanej w ten sposób bibułki — z długością ołówka, ze wzrostem człowieka, a może z odległością z Gdańska do Warszawy? Okazuje się, że złożona bibułka miałaby grubość ponad 25 razy większą niż odległość z Ziemi do Księżyca!

$2^9 = 512$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

$2^{10} = 1024$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

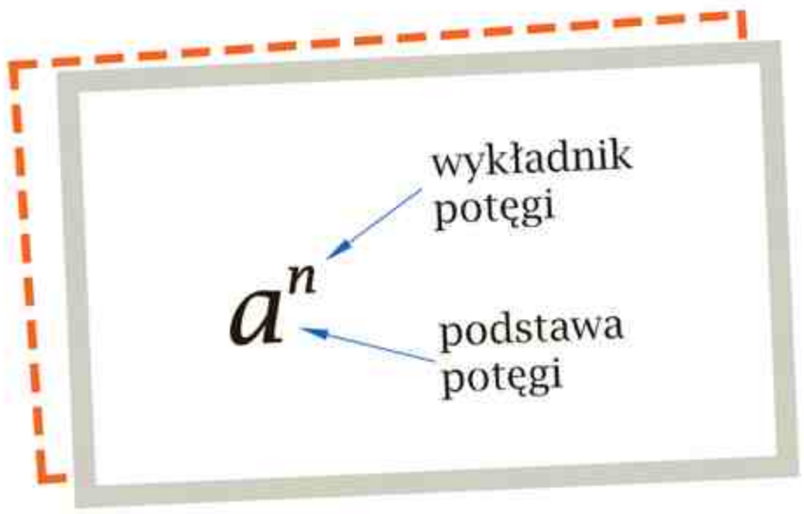
$2^{11} = 2048$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

$2^{12} = 4096$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

W języku polskim słowo *potęga* jest równoznaczne z wielkością, siłą, mocą. Nie bez powodu wielokrotne mnożenie przez siebie takiego samego czynnika zostało nazwane potęgowaniem.

Obliczając kolejne potęgi liczby 2, bardzo szybko otrzymujemy ogromne liczby. Zauważ, że obliczając kolejne potęgi ułamka $\frac{1}{2}$, otrzymujemy coraz mniejsze liczby.

Gdy n jest liczbą naturalną większą od 1, to iloczyn n jednakowych czynników równych a oznaczamy a^n i nazywamy potęgą liczby a o wykładniku n.



$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Przyjmujemy ponadto, że:

$$a^1 = a \qquad \text{oraz} \qquad a^0 = 1 \text{ dla } a \neq 0$$

Uwaga. Wartość potęgi 0^0 nie jest określona, tzn. zapis 0^0 nie oznacza żadnej liczby.

Przykłady

$0{,}3^4 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}0081$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 2^4 = 16$

$\left(-1\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8}$

$(-2)^1 = -2$

$\left(\frac{7}{9}\right)^1 = \frac{7}{9}$

$(-1{,}37)^0 = 1$

Zauważ, że potęgę liczby ujemnej można zapisać w innej postaci. Sposób, w jaki przekształcamy takie potęgi, zależy od tego, czy wykładnik jest liczbą parzystą czy nieparzystą.

$(-3)^4 = 3^4$ $\qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$ $\qquad (-0{,}1)^6 = 0{,}1^6$ $\qquad (-x)^4 = x^4$

$(-3)^5 = -3^5$ $\qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -\left(\frac{1}{2}\right)^7$ $\qquad (-0{,}1)^7 = -0{,}1^7$ $\qquad (-x)^5 = -x^5$

Zadania

1. Oblicz:

a) $5^3 \quad 2^5 \quad (-3)^4 \quad (-4)^3$

b) $0^6 \quad \left(1\frac{3}{7}\right)^1 \quad (-1)^4 \quad (-10)^0$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^4 \quad 0{,}2^6 \quad (-0{,}03)^3$

d) $(-1{,}1)^2 \quad \left(1\frac{1}{4}\right)^3 \quad \left(-2\frac{1}{5}\right)^3 \quad 1{,}3^2$

e) $-3^4 \quad -(-1{,}5)^3 \quad -1{,}1^2 \quad -\left(-\frac{2}{3}\right)^4$

f) $\frac{2^3}{3} \quad \frac{(-3)^2}{2} \quad \frac{2}{3^2} \quad \frac{-5^3}{(-3)^2}$

2. Oblicz:

$5^1 \quad 5^0 \quad (-5)^1 \quad 1^5 \quad 0^5 \quad (-1)^1 \quad (-5)^0 \quad 0^1 \quad (-1)^5 \quad (-1)^0 \quad 1^0$

3. Oblicz:

a) $10^5 \quad 10^7 \quad 100^2 \quad 1000^3$

b) $0{,}1^3 \quad 0{,}1^5 \quad 0{,}01^2 \quad 0{,}001^3$

4. Zapisz w postaci potęgi liczby 10:

a) tysiąc, b) sto tysięcy, c) milion, d) miliard.

5. Oblicz sumę cyfr liczby, która jest wynikiem odejmowania $10^{101} - 3$.

6. Czy podana liczba jest dodatnia czy ujemna?

a) $(-17)^5$ c) $(-0{,}9)^7$ e) $(-8{,}6)^{20}$ g) -1^{102} i) $-(-12)^8$

b) $(-14)^6$ d) $(-26)^{19}$ f) $(-1)^{100}$ h) -17^{10} j) $-(-3{,}5)^{11}$

7. Ustal bez wykonywania obliczeń, czy wynik to liczba dodatnia czy ujemna.

a) $\left(-\frac{5}{21}\right)^3 \cdot \left(-\frac{7}{18}\right)^4$ b) $\frac{-18^4 \cdot (-27)^5}{(-2{,}5)^0}$ c) $\frac{-(-11)^4 \cdot (-5)^7}{-13^6 \cdot (-12)^4}$

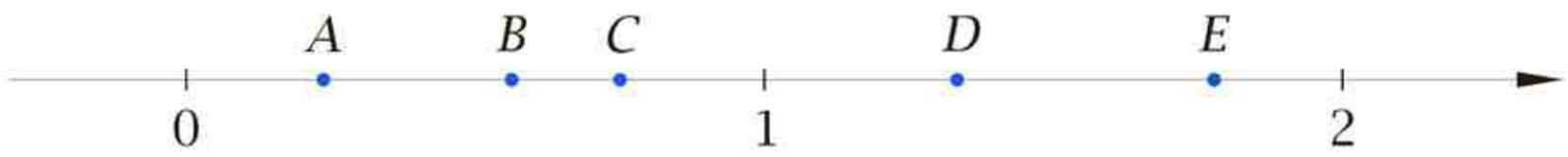
8. Oto fragment zeszytu pewnego ucznia. Które obliczenia uczeń ten wykonał błędnie?

a) $-2^3 = 8$ c) $\frac{3}{4}^2 = \frac{9}{4}$ e) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 1\frac{1}{4}$ g) $\frac{1}{2}^5 = \frac{1}{32}$

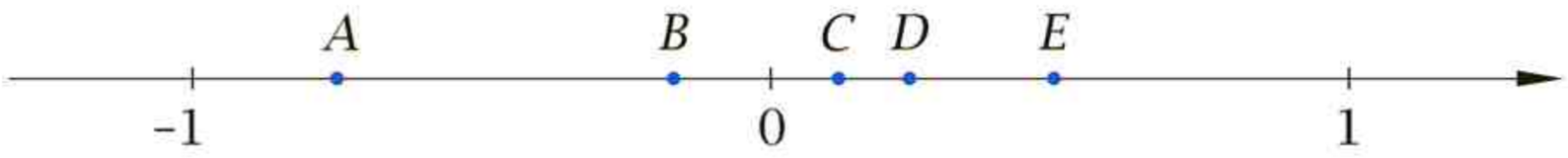
b) $-1^6 = -1$ d) $(-2)^4 = -16$ f) $(-1)^8 = 1$ h) $(-2)^5 = -32$

9. Podane liczby zaznaczono kropkami na osi liczbowej. Wskaż litery odpowiadające tym liczbom.

a) $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{3}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ $\left(\frac{4}{3}\right)^2$



b) $-0{,}7$ $(-0{,}7)^2$ $(-0{,}7)^4$ $(-0{,}7)^5$ $(-0{,}7)^6$



10. Jaki znak: $<$, $=$ czy $>$ należy wpisać w miejscu ◆?

a) $2{,}5^4$ ◆ $2{,}5$ e) $(-4{,}3)^5$ ◆ $-4{,}3$ i) $8{,}5^{20}$ ◆ $8{,}5^{30}$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^7$ ◆ $\frac{3}{5}$ f) $(-1{,}2)^6$ ◆ $-1{,}2$ j) $(-6)^9$ ◆ $(-6)^7$

c) $\left(\frac{5}{4}\right)^9$ ◆ $\frac{5}{4}$ g) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ ◆ $-\frac{1}{3}$ k) $\left(\frac{1}{3}\right)^7$ ◆ $\left(\frac{1}{3}\right)^8$

d) $0{,}1^8$ ◆ $0{,}1$ h) $\left(-\frac{5}{7}\right)^9$ ◆ $-\frac{5}{7}$ l) $(-0{,}2)^7$ ◆ $(-0{,}2)^3$

11. Uporządkuj liczby rosnąco.

a) $a = 5^7 \quad b = (-7)^8 \quad c = (-5)^8$

b) $a = -2^4 \quad b = (-2)^4 \quad c = -3^8$

c) $a = \left(-\frac{2}{9}\right)^8 \quad b = \left(-\frac{2}{9}\right)^{11} \quad c = \left(\frac{2}{9}\right)^{15}$

d) $a = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \quad b = \left(\frac{3}{2}\right)^5 \quad c = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

12. Ustal, dla jakich liczb naturalnych n:

a) liczba 3^n jest większa od 100 i mniejsza od 1000,

b) liczba n^3 jest większa od 100 i mniejsza od 1000.

13. Wiedząc, że $2^{10} = 1024$, oblicz:

$(-2)^{10} \qquad -2^{10} \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} \qquad -0{,}5^{10} \qquad (-0{,}5)^{10} \qquad 2^{11} \qquad 2^9$

Każdą liczbę naturalną złożoną można przedstawić w postaci iloczynu potęg liczb pierwszych. Mówimy wówczas, że rozkładamy liczbę na czynniki pierwsze. Poniżej pokazujemy, jak znaleźć rozkład liczby na czynniki pierwsze.

$56 = 2 \cdot 28 = 2 \cdot 2 \cdot 14 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$

360	2
360 : 2 → 180	2
180 : 2 → 90	2
90 : 2 → 45	3
45 : 3 → 15	3
15 : 3 → 5	5
5 : 5 → 1	

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

14. a) Korzystając z rozkładów liczb 3087, 5746 i 41 503 na czynniki pierwsze, zapisz każdą z tych liczb w postaci iloczynu potęg liczb pierwszych.

3087	3	5746	2	41503	7
1029	3	2873	13	5929	7
343	7	221	13	847	7
49	7	17	17	121	11
7	7	1		11	11
1				1	

b) Każdą z podanych poniżej liczb przedstaw w postaci iloczynu potęg liczb pierwszych.

648 2800 10 125 1936

15. a) W tabeli obok zaszyfrowano liczby według pewnej reguły. Zaszyfruj (zgodnie z tą regułą) liczby: 10, 45, 16, 121.

b) Rozszyfruj liczby:

0 – 1 – 0 – 1 – 2

0 – 0 – 0 – 2 – 1

5 – 2 – 0 – 1

0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 1 – 1

Liczba	Iloczyn potęg kolejnych liczb pierwszych	Szyfr
2940	$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2$	2 – 1 – 1 – 2
200	$2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^2$	3 – 0 – 2
7	$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^1$	0 – 0 – 0 – 1
1	2^0	0
2	2^1	1
81	$2^0 \cdot 3^4$	0 – 4

16. Oblicz wartości wyrażeń (pamiętaj, że potęgowanie wykonujemy przed mnożeniem i dzieleniem).

a) $2^5 - (-2)^5$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{-1}{3}\right)^4$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 3^3$

d) $10^3 \cdot 0{,}1^2$

e) $\frac{1}{3} \cdot 3^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2$

f) $2 \cdot 0{,}2^3 - 0{,}2^3$

g) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{6}\right)^2 - (-2)^3$

i) $(-0{,}1)^4 \cdot 20^3 - (-2)^4$

j) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3 : 0{,}5^4 + 1{,}5^1$

k) $3^3 - (-2)^2 - (-1)^6$

l) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{3^2}{5} + \frac{3}{5^2}$

3/258

17. Piłeczka upuszczona z wysokości 3 m na posadzkę odbija się od niej na wysokość równą $\frac{2}{5}$ wysokości, z jakiej ją puszczono. Jak wysoko wzniesie się piłeczka po czwartym odbiciu? Po którym odbiciu wzniesie się na wysokość niższą niż 1 cm?



18. Ustal, jaka jest ostatnia cyfra każdej z podanych liczb.

5^{17} 11^{10} 36^{25} 9^9 29^{100} 23^{23}

Gra o miliony dolarów!
Możesz zarobić duże pieniądze!

Wyślij jednego dolara osobie z numerem 1. Przepisz ten list w 10 egzemplarzach, usuwając pierwsze nazwisko i wpisując na końcu swoje nazwisko (z numerem 10). Wyślij przepisane listy do dziesięciu różnych osób.

1. C.Waniak POK SA 134578-749502-001
2. O.Szust OKPI Bank 782034-8263-35
3. S.P.Ryciarz Banca Credita 7265-937652
4. C.Lever Fortuna Bank 6628-8363-013
5. Ł.Obuz Karib Bank 729374-2774-972
6. Akiro Taka Wyga YAKI Bank 12346814-193-139
7. L.A.Wirant Bank Nadorski 7265-2863-0298
8. Mrs.Hope Lord's Bank 17263-389-01
9. G.Smith WallStreet Bank 8734-20949717
10. N.A.Dziana PKS BM 1236594-23366

Już wkrótce Ty znajdziesz się na początku listy osób i otrzymasz wielką fortunę!

***19.** Przeczytaj list zamieszczony obok. Pan N.A. Iwniak dał się wciągnąć w tę grę. Załóżmy, że każda osoba, która otrzyma taki list, zastosuje się do instrukcji i wciągnie do gry 10 nowych osób. Ile osób oprócz pana N.A. Iwniaka musiałoby wziąć udział w grze, aby otrzymał on fortunę?

20. Uzasadnij równości:

$$2^9 + 2^9 = 2^{10}$$

$$(-3)^3 + (-3)^3 + (-3)^3 = -3^4$$

***21.** Ustal, ile siódemek należy dodać, aby otrzymać liczbę:

a) 7^2 b) 7^3 c) 7^{92}

Sprawdź, czy umiesz

1. Po podniesieniu liczby $-2\frac{1}{2}$ do kwadratu otrzymamy:

A. $4\frac{1}{4}$ B. $2\frac{1}{4}$ C. $6\frac{1}{4}$ D. $-\frac{25}{4}$

2. Po ustawieniu liczb $a = \left(\frac{5}{2}\right)^{18}$, $o = \left(\frac{2}{5}\right)^{18}$, $p = \left(\frac{2}{5}\right)^{16}$, $r = \left(\frac{5}{2}\right)^{16}$ w kolejności rosnącej otrzymamy układ liter:

A. o, p, a, r B. r, o, p, a C. p, o, r, a D. o, p, r, a

3. Wynikiem działania $-2^4 - (-3)^2 \cdot 2$ jest:

A. 34 B. -34 C. -2 D. 50

4. W którym z przykładów znaku ◆ nie można zastąpić znakiem $=$?

A. $(-5) \cdot (-5)$ ◆ 5^2 C. $7^8 - (-1)^5$ ◆ $7^8 - 1$

B. $2^6 + 2^6$ ◆ 2^7 D. $1^5 + 0^5 - 5^0$ ◆ 0

zadania uzupełniające 1–7, str. 258

2 Iloczyn i iloraz potęg o jednakowych podstawach

ĆWICZENIE. Zastąp symbole ♥, ◆, ♠ i ♣ odpowiednimi liczbami.

$2^3 \cdot 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{\heartsuit}$

$y^4 \cdot y^2 = y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = y^{\diamondsuit}$

$4^7 : 4^5 = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = 4^{\clubsuit}$

$x^5 : x^2 = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x} = x^{\spadesuit}$ dla $x \neq 0$

Mnożąc lub dzieląc potęgi o tych samych podstawach, możemy korzystać z następujących równości:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$ | *Podstawa się nie zmienia, wykładniki dodajemy.*

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ dla } a \neq 0$$ | *Podstawa się nie zmienia, wykładniki odejmujemy.*

Uwaga. Drugą równość można też zapisać w postaci: $a^m : a^n = a^{m-n}$

Przykłady

$(-5)^7 \cdot (-5)^9 = (-5)^{16} = 5^{16}$

$\frac{3^7 \cdot 3^5}{3^{10}} = \frac{3^{12}}{3^{10}} = 3^2 = 9$

$(-2)^3 \cdot 2^{15} = -2^3 \cdot 2^{15} = -2^{18}$

$\frac{(-6)^{12}}{-6^{10}} = \frac{6^{12}}{-6^{10}} = -\frac{6^{12}}{6^{10}} = -6^2 = -36$

Zadania

1. Zapisz w postaci jednej potęgi.

a) $13^5 \cdot 13^6$

b) $(-123)^3 \cdot (-123)^9$

c) $6^{11} \cdot 6 \cdot 6^{12}$

d) $\frac{(-17)^9}{(-17)^5}$

e) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{13} : 1\frac{1}{3}$

f) $\frac{8^{14} \cdot 8^{16}}{8^{15}}$

g) $\frac{a^9 \cdot a^6}{a^4}$

h) $\frac{x^{11} \cdot x^5 \cdot x}{x^9}$

i) $\frac{b^7 \cdot b^3 : b}{b^4 \cdot b^2}$

2. Zapisz w postaci jednej potęgi.

8/258

a) $25 \cdot 5^7$ b) $8^4 : 64$ c) $27 \cdot 3^{11} : 3^{10}$ d) $125 \cdot 5^7 : 5^8$

3. Ile razy liczba m jest większa od liczby n?

a) $m = 3^{15}$, $n = 3^{12}$ b) $m = 2^9$, $n = 32$ c) $m = 5^{15}$, $n = 5^6 \cdot 125$

4. Zastąp gwiazdki odpowiednimi liczbami.

a) $6^3 \cdot 6^{\star} \cdot 6^7 = 6^{21}$

9/258

b) $11^{\star} : 11^3 = 11^6$

c) $8^{19} : 8^{\star} = 8^8$

d) $36 \cdot 6^{\star} = 6^{11}$

e) $25 \cdot 5^{\star} \cdot 125 = 5^{10}$

f) $144 \cdot 12^8 : 12^{\star} = 12^5$

5. Zapisz krócej.

a) $(-5)^3 \cdot 5^4$

b) $(-7)^6 \cdot 7^5$

c) $6^4 \cdot (-6)^4 \cdot 6$

d) $\frac{(-7)^{13}}{7^4}$

e) $5^{10} : (-5)^4$

f) $\frac{12^5}{(-12)^3 \cdot 12}$

g) $a^5 \cdot (-a)$

h) $\frac{(-z)^7 \cdot z}{z^2}$

i) $\frac{x^7 \cdot (-x)^5}{(-x)^3}$

Wskazówka. $(-5)^3 = -5^3$, $(-7)^6 = 7^6$

6. Oblicz:

a) $2^6 \cdot (-2)^3 : (-2)^8$

b) $\frac{5^7 \cdot (-5)^{24}}{5^{13} \cdot 5^{18}}$

c) $\frac{(-7)^{10}}{7^8 \cdot (-7)}$

d) $\left(-\frac{1}{4}\right)^5 : 0{,}25^2$

e) $(-0{,}1)^3 \cdot 0{,}1^4 : 0{,}1^2$

f) $\frac{(-0{,}2)^3 \cdot 0{,}2^4 \cdot (-0{,}2)^4}{-(-0{,}2^4 \cdot 0{,}2^6)}$

10/259

7. Zapisz w postaci potęgi liczby 10:

a) dziesięć miliardów,

b) sto bilionów,

c) tysiąc trylionów.

tysiąc — 10^3	sekstylion — 10^{36}
milion — 10^6	septylion — 10^{42}
miliard — 10^9	oktylion — 10^{48}
bilion — 10^{12}	nonilion — 10^{54}
trylion — 10^{18}	decylion — 10^{60}
kwadrylion — 10^{24}	googol — 10^{100}
kwintylion — 10^{30}	centylion — 10^{600}

8. Nazwij inaczej liczby:

a) tysiąc miliardów,

b) bilion milionów,

c) trylion trylionów.

9. Ile razy jest większy:

a) miliard niż tysiąc,

b) septylion niż bilion,

c) nonilion niż trylion,

d) oktylion niż milion?

Ciekawostka

Nazwy wielkich liczb podane w powyższej tabeli są używane w Polsce, w większości państw europejskich i w wielu innych krajach na świecie, ale nie we wszystkich. W niektórych krajach anglojęzycznych podobnie brzmiące nazwy oznaczają inne liczby.

Na przykład amerykański *billion* to 10^9 (czyli europejski miliard), a amerykański *trillion* to 10^{12} (czyli europejski bilion). W systemie amerykańskim w ogóle nie używa się nazwy miliard.

10. Przeczytaj ciekawostkę. PKB to skrót oznaczający Produkt Krajowy Brutto (po angielsku *Gross Domestic Product*, czyli GDP). Jest to wartość wszystkich wytworzonych dóbr i usług na terenie danego kraju. Przetłumacz poniższe fragmenty — angielski tekst na polski i na odwrót.

In 2013 USA Gross Domestic Product was $ 16.8 trillion.

W 2013 roku PKB Polski wyniósł 526 miliardów dolarów.

Ciekawostka

Największa liczba zapisana za pomocą trzech cyfr to 9^{9^9}. Zapisanie jej w systemie dziesiątkowym zapełniłoby 33 książki po 800 stron i 14000 cyfr na stronie.

11. Czy w zapisie dziesiętnym liczby $10^{10^{10}}$ występuje więcej niż milion zer?

$$1\,\text{km} = 10^3\,\text{m} = 10^3 \cdot \underbrace{10^3\,\text{mm}}_{\uparrow\ 1\,\text{m}} = 10^6\,\text{mm}$$

$$1\,\text{t} = 10^3\,\text{kg} = 10^3 \cdot \underbrace{10^2\,\text{dag}}_{\uparrow\ 1\,\text{kg}} = 10^5\,\text{dag}$$

12. Zapisz odpowiedź w postaci potęgi liczby 10.

a) 100 km — ile to milimetrów?

b) 1000 km — ile to decymetrów?

c) 1000 t — ile to dekagramów?

d) 100 t — ile to miligramów?

13. a) Kwadrat o boku 1 m podzielono na kwadraciki o boku 1 mm i ułożono jeden za drugim. Jaką długość ma otrzymana linia?

b) Sześcian o krawędzi 1 m rozpiłowano na sześcianiki o krawędzi 1 mm i ułożono jeden za drugim. Czy otrzymana linia byłaby dłuższa niż odległość z Gdańska do Zakopanego?



Sprawdź, czy umiesz

1. Wartość wyrażenia $\frac{(-0{,}5)^{12}}{(-0{,}5)^6} \cdot \frac{-0{,}5}{(-0{,}5)^3 \cdot (-0{,}5)^2}$ wynosi:

A. 1 B. 0,25 C. –0,25 D. –0,5

2. Liczba 17^{20} jest większa od liczby 17^5:

A. 4 razy B. 17^4 razy C. 17^{15} razy D. 15 razy

3. Połowa liczby 2^{16} to:

A. 2^8 B. 1^{16} C. 2^{15} D. 1^8

zadania uzupełniające 8–11, str. 258–259

3 Potęgowanie potęgi

ĆWICZENIE. Zastąp symbole ♥ i ◆ odpowiednimi liczbami.

$(4^2)^3 = 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = 4^{\heartsuit}$ $\qquad$ $(t^3)^4 = t^3 \cdot t^3 \cdot t^3 \cdot t^3 = t^{\blacklozenge}$

Potęgując potęgę, możemy korzystać z następującej równości:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Podstawa się nie zmienia; wykładniki mnożymy.

Przykłady

$\left(\left(\frac{1}{6}\right)^3\right)^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^{12}$ $\qquad$ $125^7 = (5^3)^7 = 5^{21}$

$\left((-0{,}3)^5\right)^2 = (-0{,}3)^{10} = 0{,}3^{10}$ $\qquad$ $-64^5 = -(2^6)^5 = -2^{30}$

Zadania

1. Zapisz w postaci jednej potęgi.

a) $(7^8)^9$ $\qquad$ c) $\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^6\right)^8$ $\qquad$ e) $\left((4^6)^8\right)^3$ $\qquad$ g) $(x^5)^{15}$

b) $\left((-2)^3\right)^7$ $\qquad$ d) $(0{,}5^7)^{12}$ $\qquad$ f) $\left((-6^3)^2\right)^7$ $\qquad$ h) $\left((a^3)^4\right)^5$

2. Znajdź liczby spełniające równania:

$(3^5)^n = 3^{20}$ $\qquad$ $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{21}$ $\qquad$ $(3{,}8^m)^5 = 3{,}8^{30}$

3. Zastąp litery odpowiednimi liczbami.

a) $4^8 = 2^a$ $\qquad$ c) $9^9 = 3^c$ $\qquad$ e) $7^6 = e^3$ $\qquad$ g) $2^{20} = g^{10}$

b) $8^3 = 2^b$ $\qquad$ d) $36^8 = 6^d$ $\qquad$ f) $5^6 = f^2$ $\qquad$ h) $3^{15} = h^5$

4. Zapisz w postaci potęgi o podstawie mniejszej od 10.

a) 16^4 $\qquad$ b) 25^2 $\qquad$ c) 32^3 $\qquad$ d) 27^6 $\qquad$ e) 125^5

12/259

5. a) Zapisz podane liczby w postaci potęgi liczby 10:

100^9 1000^7 $100\,000^{11}$

b) Zapisz podane liczby w postaci potęgi liczby 0,1:

$0{,}01^4$ $0{,}001^9$ $0{,}00001^8$

6. Jakimi liczbami należy zastąpić kwadraciki?

$1\,m = 10^2\,cm$

$1\,m^2 = (10^2)^2\,cm^2$

a) $1\,km^2 = 10^{\square}\,m^2$

$100\,km^2 = 10^{\square}\,m^2$

b) $1\,m^2 = 10^{\square}\,cm^2$

$10^5\,m^2 = 10^{\square}\,cm^2$

c) $1\,cm^2 = 10^{\square}\,mm^2$

$10\,cm^2 = 10^{\square}\,mm^2$

d) $1\,km^2 = 10^{\square}\,cm^2$

$10\,km^2 = 10^{\square}\,cm^2$

7. Jaki znak: $<$, $=$ czy $>$ należy wpisać w miejscu symbolu ◆?

a) $(5^2)^3$ ◆ $(5^3)^2$

b) $(8^4)^2$ ◆ 8^{4^2}

c) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^5$ ◆ $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^6$

d) 2^{20} ◆ 4^{10}

e) $0{,}5^6$ ◆ $0{,}25^4$

f) $\left(\frac{1}{49}\right)^8$ ◆ $\left(\frac{1}{7}\right)^{12}$

g) 16^8 ◆ 64^5

h) $0{,}027^5$ ◆ $0{,}09^9$

i) $\left(\frac{4}{9}\right)^3$ ◆ $\left(\frac{8}{27}\right)^2$

8. Uporządkuj rosnąco liczby:

13/259

a) $16^8, 64^5, 8^{12}, 4^{17}$ b) $27^{15}, 9^{17}, 3^{40}, 81^9$ c) $2^{3^4}, 2^{4^3}, 4^{2^3}, 4^{3^2}$

Ciekawostka

Wielkimi liczbami posługiwał się już Archimedes (287 p.n.e. — 212 p.n.e.). Oprócz znanej Grekom liczby miriada (10 000) wprowadził liczbę miriada miriad. W swoim dziele *Rachmistrz piasku* szacował, ile ziaren piasku jest na plaży. Obliczał także, ile ziaren piasku wypełniłoby wszechświat. W czasach Archimedesa za wszechświat uważano część Układu Słonecznego, która sięgała do planety Saturn. Wynik, jaki otrzymał Archimedes, dzisiaj zapisalibyśmy jako 10^{52}.

9. Przeczytaj ciekawostkę. Do jakiej potęgi należy podnieść liczbę miriada, aby otrzymać liczbę 10^{52}?

***10.** Przyjmijmy, że symbol $\triangle a$ oznacza a^a. Zapisz w postaci potęgi liczby 2:



Sprawdź, czy umiesz

1. W którym przykładzie symbolu ◆ nie można zastąpić znakiem = ?

A. $0{,}3^6 \blacklozenge (0{,}3^2)^3$

B. $3^{5^2} \blacklozenge 3^{2^5}$

C. $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^4\right)^3 \blacklozenge \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^4$

D. $8^{10} \blacklozenge 32^6$

2. W którym przykładzie liczby ustawione są w kolejności rosnącej?

A. $(2^2)^3, (3^2)^3, (-4^2)^3$

B. $(6^3)^2, 6^{2^3}, 6^{3^2}$

C. $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)^5, \left(\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)^6, \left(\left(\frac{1}{3}\right)^6\right)^7$

D. $2^{20}, 4^{15}, 8^8$

→ zadania uzupełniające 12–16, str. 259

4 Potęgowanie iloczynu i ilorazu

ĆWICZENIE A. Wykonaj obliczenia. Czy podane liczby są równe?

a) $3^2 \cdot 2^2 \quad (3 \cdot 2)^2$ b) $\frac{2^3}{5^3} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^3$ c) $(100 \cdot 0{,}01)^4 \quad 100^4 \cdot 0{,}01^4$

ĆWICZENIE B. Zastąp symbole ♥ i ◆ odpowiednimi liczbami.

a) $(2k)^3 = 2k \cdot 2k \cdot 2k = 2^{\blacktriangledown} \cdot k^{\blacklozenge}$ b) $\left(\frac{5}{7}\right)^4 = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5^{\blacktriangledown}}{7^{\blacklozenge}}$

Potęgując iloczyny lub ilorazy, możemy korzystać z równości:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$ | *Potęga iloczynu jest równa iloczynowi potęg.*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{dla } b \neq 0$$ | *Potęga ilorazu jest równa ilorazowi potęg.*

Uwaga. Drugą równość można też zapisać w postaci: $(a : b)^n = a^n : b^n$

Przykłady

$(2 \cdot 10)^6 = 2^6 \cdot 10^6 = 64\,000\,000$

$\left(\frac{3}{10}\right)^5 = \frac{3^5}{10^5} = \frac{243}{10^5} = 0{,}00243$

$\left(1\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}\right)^4 = 2^4 = 16$

$\frac{16^3}{4^3} = \left(\frac{16}{4}\right)^3 = 4^3 = 64$

Zadania

1. Podnieś do potęgi podane iloczyny i ilorazy.

a) $(2 \cdot 10)^4$ c) $(3x)^3$ e) $(-xy)^8$ g) $(-3xy^2)^4$ i) $\left(\frac{a}{2}\right)^4$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ d) $(-2a)^5$ f) $(-ab^2)^3$ h) $(-x^2y^3)^5$ j) $\left(-\frac{x}{2}\right)^3$

17/259

2. Znajdź liczby m i n.

a) $(6 \cdot 11^3)^5 = 6^m \cdot 11^n$ c) $(2^3 \cdot 5^9)^2 = 2^m \cdot 5^n$ e) $\left(\frac{10^4}{11^7}\right)^5 = \frac{10^m}{11^n}$

b) $\left(\frac{3^4}{5}\right)^7 = \frac{3^m}{5^n}$ d) $(7^{10} \cdot 3^5)^6 = 7^m \cdot 3^n$ f) $\left(\frac{6^{12}}{13^5}\right)^3 = \frac{6^m}{13^n}$

3. Zapisz w postaci jednej potęgi i oblicz:

a) $2^7 \cdot 5^7$ c) $16^{10} : 8^{10}$ e) $0{,}2^3 \cdot 10^3$ g) $(-0{,}2)^9 : 0{,}1^9$

18/259

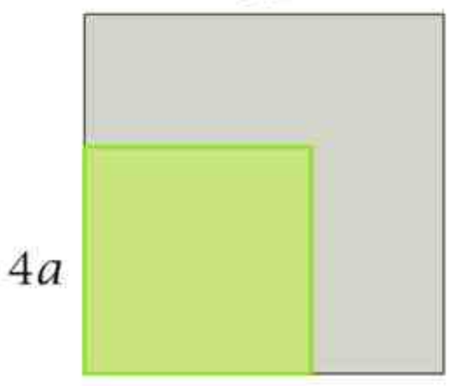
b) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 4^5$ d) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 : \left(\frac{1}{5}\right)^4$ f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{1}{9}\right)^3$ h) $\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$

4. a) Kwadrat ma bok długości a. Jakie jest pole kwadratu, którego bok jest 3 razy dłuższy?

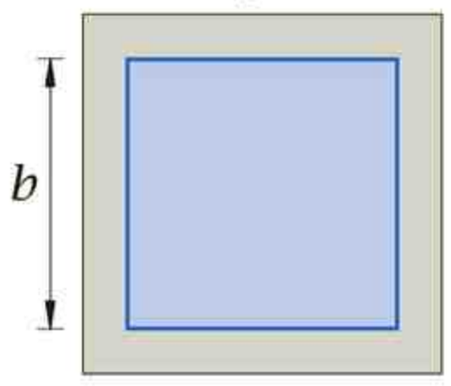
b) Sześcian ma krawędź długości x. Jaka jest objętość sześcianu o krawędzi 2 razy dłuższej?

5. Ile razy pole większego kwadratu jest większe od pola mniejszego kwadratu?

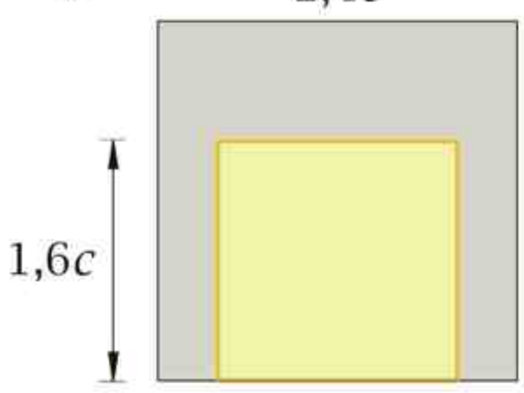
a)



b)



c)



6. Oblicz sprytnie:

a) $4^5 \cdot 5^6$ b) $\left(\frac{3}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^6$ c) $\left(\frac{4}{9}\right)^7 : \left(\frac{2}{9}\right)^8$ d) $\left(1\frac{4}{9}\right)^5 : \left(4\frac{1}{3}\right)^4$

19/259

Wskazówka. $5^6 = 5^5 \cdot 5$

Sprawdź, czy umiesz

1. Wyrażenie $(2ab^2)^3$ można zapisać w postaci:

A. $8ab^5$ B. $8ab^6$ C. $2a^3b^6$ D. $8a^3b^6$

2. Wynikiem działania $0{,}05^6 \cdot 4^6$ jest:

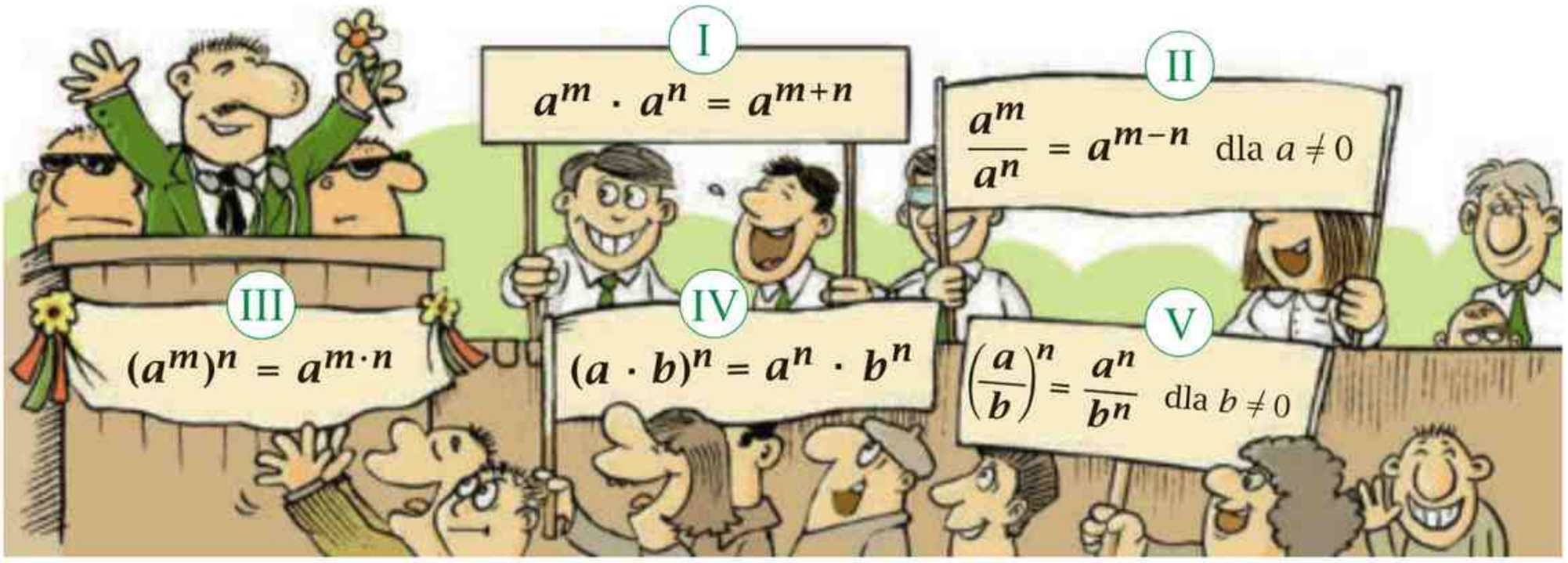
A. 0,000064 B. 0,64 C. 6400 D. 64 000 000

3. Iloraz $(-60)^{30} : 30^{30}$ jest równy:

A. $(-2)^0$ B. -2^{30} C. 2^{30} D. $(-2)^{60}$

→ zadania uzupełniające 17–19, str. 259

5 Działania na potęgach



Znasz już pięć wzorów dotyczących działań na potęgach. Stosując te wzory, można uprościć wiele na pozór skomplikowanych obliczeń.

Przykłady

$$\frac{25^7}{5^{12}} = \frac{(5^2)^7}{5^{12}} = \frac{5^{14}}{5^{12}} = 5^2 = 25$$

$$\frac{2^{10} \cdot 3^{10}}{6^8} = \frac{(2 \cdot 3)^{10}}{6^8} = \frac{6^{10}}{6^8} = 6^2 = 36$$

$$\frac{39^4}{13^5} = \frac{(3 \cdot 13)^4}{13^5} = \frac{3^4 \cdot 13^4}{13^4 \cdot 13} = \frac{3^4}{13} = \frac{81}{13}$$

$$\frac{5^5 \cdot 5^4}{10^6} = \frac{5^9}{2^6 \cdot 5^6} = \frac{5^3}{2^6} = \frac{125}{64}$$

ĆWICZENIE. Przeczytaj powyższe przykłady. Ustal, jakie wzory wykorzystano przy kolejnych przekształceniach.

Wróćmy do przykładu składanej bibułki (zob. str. 220). Wiemy już, że grubość bibułki po pięćdziesiątym złożeniu wynosiłaby $2^{50} \cdot 0{,}01\,\text{mm}$.

Korzystając z poznanych wzorów, możemy tę wielkość porównać z odległością Ziemi od Księżyca. Grubość bibułki po złożeniu oszacujemy, korzystając z tego, że $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$.

$$2^{50} \cdot 0{,}01\ \text{mm} = (2^{10})^5 \cdot 0{,}01\ \text{mm} \approx (10^3)^5 \cdot \frac{1}{100}\ \text{mm} = 10^{13}\ \text{mm}$$

Odległość Księżyca od Ziemi wynosi około 400000 km.

$$400\,000\,\text{km} = 4 \cdot 10^5\,\text{km} = 4 \cdot 10^5 \cdot 10^6\,\text{mm} = 4 \cdot 10^{11}\,\text{mm}$$

Porównajmy otrzymane wyniki:

$$\frac{\text{grubość bibułki}}{\text{odległość Księżyca od Ziemi}} \approx \frac{10^{13}}{4 \cdot 10^{11}} = \frac{10^2}{4} = 25$$

Wynika stąd, że grubość bibułki byłaby ponad 25 razy większa niż odległość z Ziemi do Księżyca.

Zadania

1. Uporządkuj podane liczby w kolejności rosnącej.

$a = 7^3 \cdot 7^4$ $\quad b = 7^{12} : 7^4$ $\quad c = (7^3)^4$ $\quad d = (7 \cdot 7^2)^3$ $\quad e = (7^4 : 7^2)^3$

2. a) Która z liczb $(8^3)^5$ czy $8^3 \cdot 8^5$ jest większa? Ile razy większa?

b) Która z liczb $14^7 : 2^7$ czy $7^{13} : 7^5$ jest większa? Ile razy większa?

3. Ile razy objętość sześcianu o krawędzi $3a$ jest większa od objętości sześcianu o krawędzi $\frac{3}{2}a$?

4. Oblicz, korzystając z poznanych wzorów.

a) $(2 \cdot 10)^4$ $\quad$ b) $(2 \cdot 10^2)^3$ $\quad$ c) 20^3 $\quad$ d) 200^5 $\quad$ e) 2000^4

5. Korzystając z tabeli, oblicz:

a) 400^4 $\quad$ c) $0{,}04^3$ $\quad$ e) 60^6

b) $0{,}6^5$ $\quad$ d) $0{,}006^4$ $\quad$ f) $0{,}04^4$

n	3	4	5	6
4^n	64	256	1024	4096
6^n	216	1296	7776	46656

6. Przedstaw w postaci potęgi liczby 2.

a) $\dfrac{(2^4)^7}{2^3 \cdot 2^5}$ $\quad$ b) $4 \cdot 2^8$ $\quad$ c) $(4^4)^3$ $\quad$ d) 32^3 $\quad$ e) $(16 \cdot 2^3)^4$

7. Przedstaw w postaci jednej potęgi.

a) $3^4 \cdot 9^2$ c) $8^3 : 2^5$ e) $\left(\frac{1}{9}\right)^4 : \left(\frac{1}{3}\right)^3$ g) $0{,}1^9 : 0{,}001^2$

b) $4^5 \cdot 8^3$ d) $125^7 : 25^{10}$ f) $0{,}5^9 : \left(\frac{1}{4}\right)^4$ h) $\frac{5^8}{32} \cdot \frac{2^{10}}{125}$

8. Ustal wartości m i n.

a) $(2^{10} \cdot 2^5 \cdot 7^4)^2 = 2^m \cdot 7^n$ c) $4 \cdot \left(\frac{2^3}{3^4}\right)^{10} = \frac{2^m}{3^n}$

b) $\frac{(3^4 \cdot 5^7)^3}{5^9} = 3^m \cdot 5^n$ d) $\left(\frac{7^3}{5^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{5^3}{7^5}\right)^4 = \frac{5^m}{7^n}$

9. Przedstaw w postaci iloczynu potęg liczb pierwszych.

a) $9 \cdot 6^3$ b) $4^2 \cdot 10^3$ c) $15^4 \cdot 21^5$ d) $10^2 \cdot 6^3 \cdot 15^2$

10. Która z poniższych liczb jest równa połowie liczby 8^{90}?

4^{90} 8^{45} 2^{135} 4^{45} 2^{269}

22/259

***11.** Uporządkuj podane liczby rosnąco.

a) 44^4 4^{44} $(4^4)^4$ 4^{4^4} b) 32^9 16^{11} 65^8 3^{22}

12. Ustal, ile zer na końcu ma liczba:

a) $2^5 \cdot 5^7$ b) $2^6 \cdot 5^3$ c) $4 \cdot 5^5$ d) $4^8 \cdot 75^5$ e) $12^4 \cdot 50^3$

13. Oblicz:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^5 : \frac{1}{2^8}$ c) $2^9 : (-6^7 : 3^7)$ e) $\frac{81^4}{27^5}$ g) $\frac{2^{10} \cdot 3^{10}}{6^8}$

b) $\frac{(-6)^4 \cdot (-2)^4}{12^2}$ d) $\frac{32^3}{8^2}$ f) $\frac{25^2 \cdot 4^7}{2^9 \cdot 5^4}$ h) $\frac{5^8 \cdot 2^9}{10^7}$

21/259

14. Uzasadnij, że:

a) liczba 5 razy mniejsza od 10^{16} jest 2 razy większa od 10^{15},

b) czwarta część liczby 10^{20} jest 25 razy większa od liczby 10^{18}.

15. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n:

a) $2^n + 2^n + 2^n + 2^n = 2^{n+2}$ b) $(2^n + 2^n)^2 = 4 \cdot 4^n$

Przedrostek	Symbol	Wielokrotność
deka	da	10
hekto	h	10^2
kilo	k	10^3
mega	M	10^6
giga	G	10^9
tera	T	10^{12}
peta	P	10^{15}
eksa	E	10^{18}

16. W tabelce zamieszczono przedrostki oznaczające wielokrotności jednostek podstawowych. Dodając na przykład przedrostek giga- do słowa metr, otrzymujemy gigametr, czyli 10^9 metrów (1 Gm = 10^9 m).

a) Ile dekagramów jest w megagramie?

b) Ile dekagramów jest w eksagramie?

c) Ile hektometrów jest w gigametrze?

d) 100 megametrów — ile to dekametrów?

e) 1000 petagramów — ile to kilogramów?

Ciekawostka

Liczba 10^{100}, którą można zapisać jako jedynkę i sto zer, nazywa się googol (czyt. gugol). Jest to liczba olbrzymia — znacznie większa niż liczba wszystkich cząstek elementarnych we wszechświecie. Do opisu wszystkich zjawisk otaczającego nas świata wystarczą liczby mniejsze od googola.

Dziwnie brzmiącą nazwę googol wymyślił w 1920 r. dziewięcioletni chłopiec, siostrzeniec amerykańskiego matematyka Edwarda Kasnera.

W 1997 r. twórcy pewnego programu komputerowego chcieli go nazwać googol dla zilustrowania ogromnej liczby informacji, które przetwarzał. Niestety, jeden z nich, rejestrując jego nazwę, pomylił się. Dlatego jedna z najbardziej znanych wyszukiwarek internetowych na świecie nosi nazwę Google, a nie Googol.

17. Przeczytaj powyższą ciekawostkę.

a) Zapisz za pomocą potęgi liczby dziesięć: sto googoli, milion googoli, jedna tysięczna googola i googol googoli.

b) Ile razy liczba miliard miliardów jest mniejsza od googola?



18. Szacuje się, że na świecie żyje około 10^{18} owadów. Ludzi na świecie jest około 7 mld. Zakładając, że owad waży przeciętnie 0,1 g, a człowiek waży przeciętnie 50 kg, oblicz:

a) Czy wszystkie owady razem ważą więcej niż wszyscy ludzie?

b) Ile kilogramów owadów przypada średnio na jednego człowieka?

19. Spośród polskich jezior najwięcej wody zawiera jezioro Mamry — ok. 10^{12} *l*. Woda zawarta w dużej chmurze ma masę ok. 10^6 t. Ile takich chmur powstałoby, gdyby wyparowała cała woda z jeziora Mamry?

Sprawdź, czy umiesz

1. Trzecia część liczby 9^9 to:

A. 3^9 B. 9^3 C. 3^{17} D. 3^{26}

2. Liczba $(4^6)^3$ jest równa liczbie:

A. 64^9 B. 2^{18} C. 8^{12} D. 4^9

3. Wynikiem działania $\frac{(-30)^{11} \cdot 0{,}1^{11}}{3^9}$ jest:

A. -10 B. -9 C. -3^9 D. $(-3)^{13}$

→ zadania uzupełniające 20–24, str. 259–260

6 Notacja wykładnicza



ĆWICZENIE A. Oblicz: a) $4 \cdot 10^3$ b) $2{,}5 \cdot 10^5$ c) $1 \cdot 10^9$

W powyższych przykładach różne wielkości zapisano w postaci iloczynów, w których pierwszy czynnik jest liczbą większą od 1 i mniejszą od 10 (lub równą 1), a drugi czynnik jest potęgą liczby 10. Taki sposób zapisu liczb nazywamy **notacją wykładniczą**.

ĆWICZENIE B. Zastąp kwadraciki odpowiednimi liczbami.

$500\,000 = 5 \cdot 10^{\square}$ $72\,000 = 7{,}2 \cdot 10^{\square}$

Przykład

Zapisz w notacji wykładniczej:

$\underbrace{360000000}_{\text{8 cyfr}} = 3{,}6 \cdot 10^8$ ← wykładnik równy 8

Liczba 3,6 *spełnia warunek* $1 \leqslant 3{,}6 < 10$.

Wykonując obliczenia dotyczące liczb zapisanych w notacji wykładniczej, możemy korzystać z poznanych własności działań na potęgach.

Przykład

Masa Słońca wynosi około $2 \cdot 10^{30}$ kg, a masa Ziemi — około $6 \cdot 10^{24}$ kg. Ile razy masa Słońca jest większa od masy Ziemi?

$$\frac{2 \cdot 10^{30}}{6 \cdot 10^{24}} = \frac{10^6}{3} = \frac{10}{3} \cdot 10^5 \approx 3{,}3 \cdot 10^5$$

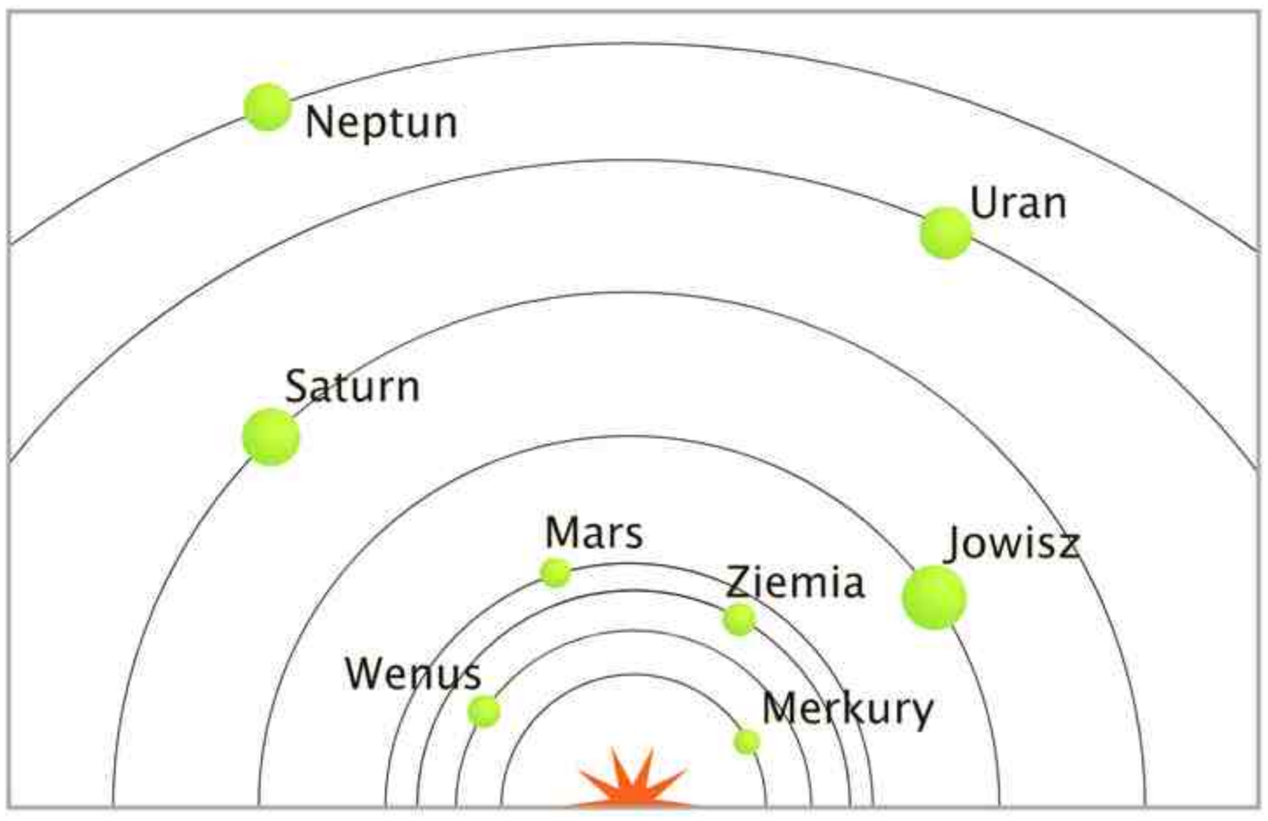
Odp. Masa Słońca jest ok. $3{,}3 \cdot 10^5$ (330000) razy większa od masy Ziemi.

Zadania

1. Zapisz podane odległości między obiektami astronomicznymi, stosując notację wykładniczą:

- średnia odległość Księżyca od Ziemi — 380000 km
- średnia odległość Ziemi od Słońca — 150000000 km
- najmniejsza odległość Ziemi od Marsa — 55000000 km
- odległość Słońca od Gwiazdy Polarnej — 4070000000000000 km
- odległość Słońca od Alfa Centauri — 41500000000000 km

2. Na podstawie rysunku i tabeli dopasuj symbole planet do ich nazw.



Odległość od Słońca (w km)	Symbol planety
$5{,}79 \cdot 10^7$	☿
$2{,}279 \cdot 10^8$	♂
$4{,}4966 \cdot 10^9$	♆
$1{,}083 \cdot 10^8$	♀
$1{,}496 \cdot 10^8$	⊕
$2{,}8696 \cdot 10^9$	♃
$1{,}427 \cdot 10^9$	♄
$7{,}776 \cdot 10^8$	♃

3. Zapisz podane liczby w notacji wykładniczej. Która z tych liczb jest największa, a która — najmniejsza?

$a = 57 \cdot 10^8$ $\quad b = 465 \cdot 10^7$ $\quad c = 26{,}5 \cdot 10^9$ $\quad d = 33{,}6 \cdot 10^9$

Wskazówka. $57 = 5{,}7 \cdot 10$, $465 = 4{,}65 \cdot 10^2$

4. Zapisz w notacji wykładniczej.

a) $3{,}7 \cdot 10^{15}$ km — ile to metrów?

b) $6{,}61 \cdot 10^{30}$ kg — ile to dekagramów?

c) $5 \cdot 10^{8}$ m — ile to centymetrów?

5. Zapisz w notacji wykładniczej.

a) 550 m — ile to milimetrów?

b) 2500 kg — ile to dekagramów?

c) 46 km — ile to centymetrów?

d) 286 t — ile to gramów?

25/260

6. Oblicz $a \cdot b$ i $\frac{a}{b}$, wynik zapisz w notacji wykładniczej.

a) $a = 2{,}4 \cdot 10^{15}$, $b = 2 \cdot 10^{7}$

b) $a = 6 \cdot 10^{23}$, $b = 5 \cdot 10^{19}$

c) $a = 1{,}2 \cdot 10^{20}$, $b = 4 \cdot 10^{10}$

Powierzchnia Polski to około $3{,}13 \cdot 10^{5}$ km^2.

Powierzchnia Księżyca to około $3{,}8 \cdot 10^{7}$ km^2.

Powierzchnia Ziemi to około $5{,}1 \cdot 10^{8}$ km^2.

7. Oblicz i zapisz w notacji wykładniczej.

a) Ile razy powierzchnia Księżyca jest większa od powierzchni Polski?

b) Ile razy powierzchnia Księżyca jest mniejsza od powierzchni Ziemi?

Ciekawostka

W 2009 roku NASA (ang. National Aeronautics and Space Administration) odkryła planetę niezwykle podobną do Ziemi. Nadano jej nazwę Kepler-22b. Jest ona odległa od nas o 600 lat świetlnych. Rok świetlny to odległość, którą pokonuje światło w ciągu roku. Oznacza to, że gdyby na planecie Kepler-22b ktoś mógł odbierać sygnały świetlne z Ziemi, to właśnie teraz dotarłyby do niego sygnały wysłane w czasach bitwy pod Grunwaldem.

8. Przeczytaj ciekawostkę. Ile kilometrów jest od Ziemi do Keplera-22b? Przyjmij, że prędkość światła wynosi $3 \cdot 10^{5}$ km/s, a rok to $3{,}15 \cdot 10^{7}$ s.



Sprawdź, czy umiesz

1. 2000 kg to:

A. $2 \cdot 10^6$ mg B. $2 \cdot 10^5$ mg C. $2 \cdot 10^9$ mg D. $2 \cdot 10^8$ mg

2. Ziemia, obiegając Słońce, porusza się ze średnią prędkością około 30 km/s. W ciągu roku pokonuje drogę równą około:

A. $9{,}5 \cdot 10^8$ km B. 10 950 km C. $1{,}6 \cdot 10^7$ km D. $2{,}6 \cdot 10^6$ km

→ zadania uzupełniające 25–27, str. 260

7 Notacja wykładnicza (cd.)

Wiesz już, jak obliczać potęgi o wykładnikach naturalnych. Można również rozpatrywać potęgi o wykładnikach całkowitych ujemnych.

potęga, *n*-ta potęga liczby *a*, dla $n > 0$ iloczyn $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, w którym występuje *n* czynników, a każdy z nich jest równy *a*. Liczbę *a* nazywamy podstawą potęgi, a liczbę naturalną *n* – wykładnikiem potęgi. Potęgę o wykładniku *n* i podstawie *a* (lub krócej *n*-tą potęgę liczby *a*) oznacza się symbolem a^n. Przyjmuje się ponadto, że

$a^1 = a$ oraz że $a^0 = 1$ (dla $a \neq 0$).

Powyższą definicję można uogólnić, dopuszczając także wykładniki całkowite ujemne. Przyjmuje się mianowicie, dla $a \neq 0$:

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ i konsekwentnie $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$.

Encyklopedia szkolna. Matematyka

ĆWICZENIE A. Przeczytaj zamieszczoną obok notkę encyklopedyczną i oblicz:

2^{-1} 5^{-1} 10^{-1} 7^{-2} 10^{-2} 10^{-3}

Dla $a \neq 0$ przyjmujemy, że:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

Ogólnie, jeżeli *n* jest liczbą naturalną, to dla $a \neq 0$:

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Zauważmy, że potęgi liczby 10 o wykładnikach całkowitych ujemnych to inaczej zapisane pewne ułamki dziesiętne.

$$\mathbf{10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1} \qquad \mathbf{10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01} \qquad \mathbf{10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001}$$

ĆWICZENIE B. Zapisz podane liczby w postaci potęgi liczby 10.

0,1 0,00001 $\frac{1}{1\,000\,000}$ 0,0000001

Masa atomu wodoru
ok. $1{,}674 \cdot 10^{-27}$ kg

Masa wirusa grypy
$7 \cdot 10^{-16}$ kg



Rosnący włos
$5 \cdot 10^{-9}$ m/s





Grzyb rosnący po deszczu
$8 \cdot 10^{-5}$ m/s



Pyłek kwiatu niezapominajki
ok. $4 \cdot 10^{-14}$ kg

ĆWICZENIE C. Oblicz: a) $7 \cdot 10^{-2}$ b) $4{,}8 \cdot 10^{-3}$ c) $2 \cdot 10^{-5}$

$$a \cdot 10^n$$

liczba spełniająca warunek $1 \leqslant a < 10$

potęga liczby 10 o wykładniku całkowitym

Powyższe przykłady pokazują, że za pomocą potęgi liczby 10 można zapisywać w notacji wykładniczej nie tylko bardzo duże liczby, ale też dowolnie małe.

Notację wykładniczą nazywamy też notacją naukową.

ĆWICZENIE D. Zastąp kwadraciki odpowiednimi liczbami:

$0{,}7 = 7 \cdot 10^{\square}$ $0{,}02 = 2 \cdot 10^{\square}$

Przykład

Zapisz w notacji wykładniczej:

$0{,}0000576 = 5{,}76 \cdot 10^{-5}$ | $0{,}0000576 = \frac{5{,}76}{10^5} = 5{,}76 \cdot \frac{1}{10^5}$

5 cyfr po przecinku

wykładnik równy -5

Wykonując obliczenia na ujemnych potęgach liczby 10, możemy stosować te same reguły działań, które omawialiśmy wcześniej.

Przykłady

Wyraź podaną długość w metrach, a masę — w kilogramach.

$3{,}6 \cdot 10^{-10}$ cm $= 3{,}6 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-2}$ m $= 3{,}6 \cdot 10^{-12}$ m | $1\text{ cm} = 10^{-2}\text{ m}$

$7 \cdot 10^{5}$ g $= 7 \cdot 10^{5} \cdot 10^{-3}$ kg $= 7 \cdot 10^{2}$ kg | $1\text{ g} = 10^{-3}\text{ kg}$

Przykład

Teren w okolicach Elbląga obniża się o $6{,}91 \cdot 10^{-6}$ metra w ciągu doby. O ile centymetrów obniżył się ten teren w ciągu stu lat?

$100 \cdot 365 \cdot 6{,}91 \cdot 10^{-6}\ \text{m} = 2522{,}15 \cdot 10^{2} \cdot 10^{-6}\ \text{m} =$

$= 2522{,}15 \cdot 10^{-4}\ \text{m}$

$2522{,}15 \cdot 10^{-4}\ \text{m} \approx 2{,}5 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-4}\ \text{m} =$

$= 2{,}5 \cdot 10^{-1}\ \text{m} = 0{,}25\ \text{m} = 25\ \text{cm}$

W ciągu 100 lat jest ok. 25 lat przestępnych, ale dodanie 25 dni nie wpłynie na wynik, dlatego można przyjąć, że każdy rok miał 365 dni.

Odp. W ciągu stu lat teren w okolicach Elbląga obniżył się o ok. 25 cm.

Gdy trzeba dodać lub odjąć liczby zapisane w notacji wykładniczej, a potęgi dziesiątki w tych zapisach są różne, to najpierw jedną z tych liczb trzeba przekształcić.

Przykłady

$3{,}2 \cdot 10^{5} + 7 \cdot 10^{6} = 3{,}2 \cdot 10^{5} + 70 \cdot 10^{5} = 73{,}2 \cdot 10^{5} = 7{,}32 \cdot 10^{6}$

$6{,}6 \cdot 10^{-8} - 2 \cdot 10^{-10} = 6{,}6 \cdot 10^{-8} - 0{,}02 \cdot 10^{-8} = 6{,}58 \cdot 10^{-8}$

Zadania

1. Przedstaw podane wielkości w notacji wykładniczej:
- masa ziarenka maku — 0,0005 g
- prędkość, z jaką rośnie bambus — 0,000012 m/s
- masa wirusa ospy — 0,000000000007 g
- masa atomu wodoru — 0,000000000000000000000001674 g

2. Zapisz podane liczby w notacji wykładniczej i ustal, która z nich jest największa, a która najmniejsza.

$a = 0{,}38 \cdot 10^{-6}$ $b = 0{,}06 \cdot 10^{-5}$ $c = 23{,}5 \cdot 10^{-11}$ $d = 0{,}8 \cdot 10^{-9}$

Wskazówka. $0{,}38 = 3{,}8 \cdot 10^{-1}$, $0{,}06 = 6 \cdot 10^{-2}$

3. Zapisz w notacji wykładniczej.

a) $3{,}5 \cdot 10^{-6}$ m — ile to milimetrów?
b) $2{,}1 \cdot 10^{-7}$ g — ile to kilogramów?
c) $6 \cdot 10^{-3}$ ml — ile to litrów?
d) $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ kg — ile to gramów?

4. Zapisz w notacji wykładniczej.

a) 465 mm — ile to metrów?
b) 40 000 cm — ile to kilometrów?
c) 326 g — ile to kilogramów?
d) 550 g — ile to ton?

28/260

5. Jedna z największych chmar szarańczy pojawiła się w Kenii w 1954 roku i liczyła 10 miliardów owadów. Jeden osobnik szarańczy waży około 2,5 g. Zapisz w notacji wykładniczej, ile ton ważyła ta chmara szarańczy.

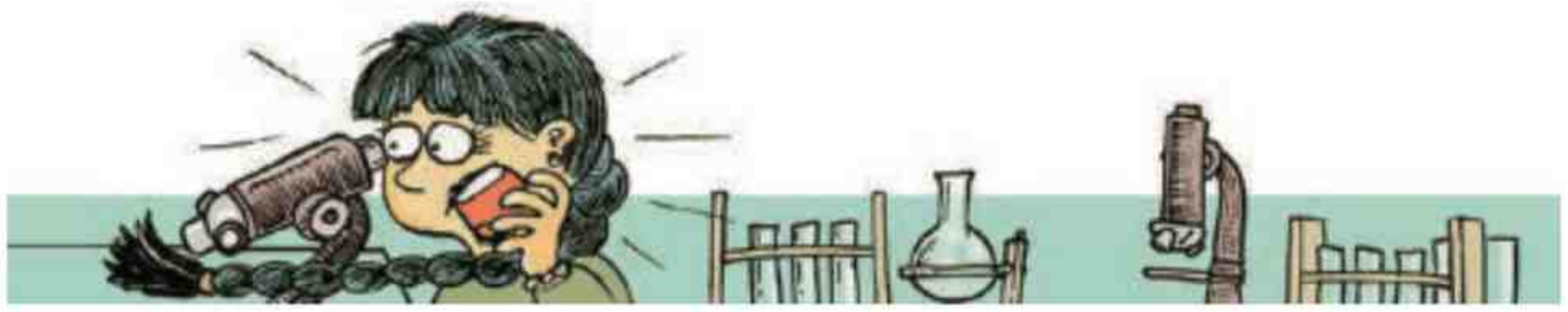
6. Włos ludzki ma średnicę ok. 10^{-4} m. Odpowiedzi na poniższe pytania podaj w notacji wykładniczej.

a) Ile milimetrów wynosi średnica włosa?

b) Jak gruby byłby włos powiększony tysiąc razy?

c) Jaką grubość miałby włos powiększony milion razy?

d) W 1983 roku za pomocą szlifierki diamentów Large Optics Diamonds rozdzielono wzdłuż ludzki włos na 3000 części. Jaka była średnia grubość każdej części?



7. Masa protonu wynosi ok. $1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg, a masa elektronu $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg. Ile razy proton jest cięższy od elektronu?

8. Z Wisły do Bałtyku wpływa w ciągu 1 godziny około $3{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}^3$ wody, a z Odry — około $1{,}9 \cdot 10^6\ \text{m}^3$.

a) Ile razem wody wpływa do Bałtyku z obu rzek w ciągu godziny?

b) O ile więcej wody wpływa z Wisły niż z Odry w ciągu godziny?

9. Oblicz $a+b$ i $a-b$, wynik zapisz w notacji wykładniczej.

a) $a = 6 \cdot 10^7$, $b = 2{,}5 \cdot 10^6$

b) $a = 5{,}2 \cdot 10^{-4}$, $b = 3{,}7 \cdot 10^{-5}$

c) $a = 1{,}2 \cdot 10^{13}$, $b = 9{,}8 \cdot 10^{12}$

10. Dwa największe afrykańskie obszary pustynne to Sahara ($9{,}1 \cdot 10^6\ \text{km}^2$) i Kalahari ($5{,}7 \cdot 10^5\ \text{km}^2$). O ile ich łączna powierzchnia jest mniejsza od powierzchni Europy ($1{,}02 \cdot 10^7\ \text{km}^2$)?

11. Dla zwiększenia wytrzymałości szyb pomiędzy dwiema warstwami szkła umieszcza się warstwę folii. Jaka jest grubość takiej szyby, jeśli każda z warstw szkła ma grubość $3 \cdot 10^{-3}$ m, a warstwa folii ma grubość $7{,}6 \cdot 10^{-4}$ m?

Sprawdź, czy umiesz

1. Która z poniższych równości jest prawdziwa?

A. $1\,\text{km}^2 = 10^2\,\text{m}^2$
B. $1\,\text{mm}^2 = 10^{-4}\,\text{m}^2$
C. $1\,\text{cm}^2 = 10^{-2}\,\text{mm}^2$
D. $1\,\text{dm}^2 = 10^{-8}\,\text{km}^2$

2. 500 mm to:

A. $5 \cdot 10^{-8}$ km B. $5 \cdot 10^{-4}$ km C. $5 \cdot 10^{8}$ km D. $5 \cdot 10^{-6}$ km

3. Która nierówność jest prawdziwa?

A. $2{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{kg} < 25\ \text{mg}$
B. $4 \cdot 10^{5}\ \text{mm} < 4{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{km}$
C. $3{,}6 \cdot 10^{3}\ \text{cm} < 4{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{km}$
D. $9{,}8 \cdot 10^{6}\ \text{dag} < 9 \cdot 10^{2}\ \text{t}$

→ zadania uzupełniające 28–31, str. 260

8 Pierwiastki

ĆWICZENIE A. Podaj dwie liczby, których kwadrat jest równy:

a) 36 b) 1 c) $\frac{4}{25}$ d) 0,04

ĆWICZENIE B. Podaj liczbę nieujemną, której kwadrat jest równy:

a) 49 b) $\frac{9}{64}$ c) 0,01 d) 0

Ćwiczenia A i B polegały na znajdowaniu liczb, których kwadraty były dane, ale w ćwiczeniu B należało wskazać tylko liczbę nieujemną. Taką operację jak w ćwiczeniu B nazywamy obliczaniem pierwiastka kwadratowego z liczby. **Pierwiastek kwadratowy z liczby nieujemnej *a*** to taka liczba nieujemna, której kwadrat jest równy a. Liczbę tę oznaczamy symbolem $\sqrt{a}$.

$\sqrt{a}$

symbol pierwiastka kwadratowego

liczba podpierwiastkowa (może to być tylko liczba nieujemna)

$\sqrt{121} = 11$, bo $11^2 = 121$

$\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, bo $1{,}2^2 = 1{,}44$

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, bo $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

$\sqrt{0} = 0$, bo $0^2 = 0$

Pierwiastek kwadratowy nazywamy też pierwiastkiem drugiego stopnia.

Przykłady

$2\sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$ | $2\sqrt{9} = 2 \cdot \sqrt{9}$

$2\sqrt{3\frac{1}{16}} = 2\sqrt{\frac{49}{16}} = 2 \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{2}$

$3\sqrt{0{,}16} = 3 \cdot \sqrt{\frac{16}{100}} = 3 \cdot \frac{4}{10} = 1{,}2$

$\frac{\sqrt{169-25}}{2} = \frac{\sqrt{144}}{2} = \frac{12}{2} = 6$ | *Działania pod pierwiastkiem wykonujemy w pierwszej kolejności.*

We wszystkich dotychczasowych przykładach pierwiastki były liczbami całkowitymi lub ułamkami, czyli liczbami wymiernymi. Nie zawsze jednak możemy wskazać taką liczbę wymierną, której kwadrat jest równy danej liczbie.

ĆWICZENIE C. Spróbuj, używając kalkulatora, znaleźć z jak największą dokładnością liczbę, której kwadrat jest równy 2. Wykonaj to polecenie, nie używając klawisza z symbolem $\sqrt{\ }$.

Kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$, czyli liczby, której kwadrat jest równy 2, można znaleźć w następujący sposób:

- Liczba $\sqrt{2}$ jest większa od 1,4 (bo $1{,}4^2 < 2$) i mniejsza od 1,5 (bo $2 < 1{,}5^2$). Zatem pierwszą cyfrą po przecinku jest 4.

$$\sqrt{2} = 1{,}4.....$$

- Liczba $\sqrt{2}$ jest większa od 1,41 (bo $1{,}41^2 < 2$) i mniejsza od 1,42 (bo $2 < 1{,}42^2$). Zatem:

$$\sqrt{2} = 1{,}41.....$$

- Liczba $\sqrt{2}$ jest większa od 1,414 (bo $1{,}414^2 < 2$) i mniejsza od 1,415 (bo $2 < 1{,}415^2$). Zatem:

$$\sqrt{2} = 1{,}414.....$$

Rozumując dalej w ten sposób, otrzymalibyśmy:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504880168872420969807856 96\ldots$$

Kolejnych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$ moglibyśmy szukać w nieskończoność, ale nie udałoby się wskazać miejsca, od którego cyklicznie powtarza się pewien układ cyfr. Innymi słowy rozwinięcie dziesiętne liczby $\sqrt{2}$ nie jest okresowe.

Ciekawostka

Można wykazać, że liczby $\sqrt{2}$ nie da się przedstawić w postaci ułamka $\frac{k}{m}$, gdzie k i m są liczbami całkowitymi. Inaczej mówiąc, liczba $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

Już starożytni Grecy ze słynnej szkoły Pitagorasa dowiedli, że nie istnieje liczba wymierna, której kwadrat jest równy 2. Długo utrzymywali ten fakt w tajemnicy, gdyż burzył on ich wyobrażenie o świecie liczb.

Legenda głosi, że uczeń, który zdradził ten sekret, został utopiony w morzu. Ale już 200 lat później starożytny filozof Platon o fakcie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, powiadał: *Grecy, to jest rzecz, której wstyd nie wiedzieć!*

Można podać wiele przykładów liczb niewymiernych. Na przykład niewymierne są pierwiastki z liczb naturalnych, które nie są kwadratami liczb naturalnych, czyli:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{10} \text{ itd.}$$

Liczbami niewymiernymi są też liczby typu:

$$2\sqrt{5},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ 1+\sqrt{2},\ 5-\sqrt{3},\ 4+2\sqrt{5}$$

W rozwinięciach dziesiętnych takich liczb nigdy nie powtarza się żaden układ liczb w sposób regularny. Mówimy, że liczby niewymierne mają rozwinięcia nieskończone nieokresowe.

ĆWICZENIE D. Podaj liczbę, której sześcian jest równy:

a) 8 b) −27 c) 0,001 d) 0 e) $-\frac{125}{64}$

Operację, którą wykonywaliśmy w ćwiczeniu D, nazywamy obliczaniem pierwiastka sześciennego z liczby. **Pierwiastek sześcienny z dowolnej liczby *a*** to taka liczba, której trzecia potęga jest równa a. Liczbę tę oznaczamy symbolem $\sqrt[3]{a}$.

$$\sqrt[3]{a}$$

symbol pierwiastka trzeciego stopnia

liczba podpierwiastkowa (w tym wypadku może to być dowolna liczba)

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ bo } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{-64} = -4, \text{ bo } (-4)^3 = -64$$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{125}} = -\frac{1}{5}, \text{ bo } \left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125}$$

$$\sqrt[3]{0} = 0, \text{ bo } 0^3 = 0$$

Pierwiastek sześcienny nazywamy też pierwiastkiem trzeciego stopnia.

Przykłady

$5\sqrt[3]{8} = 5 \cdot 2 = 10$ $\quad 5\sqrt[3]{-27} = 5 \cdot (-3) = -15$ $\quad 2\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$

Zauważ, że pod pierwiastkiem kwadratowym musi być zawsze liczba nieujemna. Inaczej jest w wypadku pierwiastków sześciennych.

Zwróć uwagę, że $\sqrt[3]{-8}$ jest liczbą przeciwną do liczby $\sqrt[3]{8}$, więc zachodzi równość: $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$, czyli minus można wyciągnąć przed znak pierwiastka trzeciego stopnia. Podobną równość możemy zapisać dla dowolnej liczby a:

$$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$$

Wyrażenia, w których występują pierwiastki, możemy przekształcać w podobny sposób jak wyrażenia algebraiczne.

Przykłady

$\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

$3\sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} - 1 = 2\sqrt{5} - 3$

$\frac{6 - 9\sqrt{2}}{3} = 2 - 3\sqrt{2}$

$4\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{-3} = 4\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$

$4\sqrt{2} + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt{2} + \sqrt[3]{-2} = 3\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{2}$

$\frac{\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{7}}{2\sqrt[3]{7}} = \frac{4\sqrt[3]{7}}{2\sqrt[3]{7}} = 2$

ĆWICZENIE E. Uzasadnij, że podane zapisy oznaczają tę samą liczbę.

a) 9 $\quad \sqrt{9^2} \quad (\sqrt{9})^2 \quad \sqrt{9} \cdot \sqrt{9}$

b) 7 $\quad \sqrt{7^2} \quad (\sqrt{7})^2 \quad \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$

c) 8 $\quad \sqrt[3]{8^3} \quad (\sqrt[3]{8})^3 \quad \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8}$

d) 5 $\quad \sqrt[3]{5^3} \quad (\sqrt[3]{5})^3 \quad \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5}$

Rozwiązując powyższe ćwiczenie, można zauważyć, że:

Dla $a \geqslant 0$:

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

Dla dowolnej liczby a:

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a$$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$$

Korzystając z tych równości oraz z własności działań, możemy obliczać wartości niektórych wyrażeń zawierających pierwiastki.

Przykłady

$(5\sqrt{8})^2 = 5^2(\sqrt{8})^2 = 25 \cdot 8 = 200$

$\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 5 = 10$

$\sqrt{7^6} = \sqrt{(7^3)^2} = 7^3 = 343$

$(\sqrt{10})^4 = ((\sqrt{10})^2)^2 = 10^2 = 100$

$\left(\frac{\sqrt[3]{-6}}{2}\right)^3 = \frac{(\sqrt[3]{-6})^3}{2^3} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$

$4\sqrt[3]{6} \cdot 2(\sqrt[3]{6})^2 = 8 \cdot (\sqrt[3]{6})^3 = 8 \cdot 6 = 48$

$\sqrt[3]{8^{12}} = \sqrt[3]{(8^4)^3} = 8^4 = 4096$

$(\sqrt[3]{-7})^9 = \left((\sqrt[3]{-7})^3\right)^3 = (-7)^3 = -343$

Zadania

1. Oblicz:

a) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{0{,}01}$ e) $\sqrt{0{,}36}$ g) $\sqrt{121}$

b) $\sqrt{1}$ d) $\sqrt{\frac{16}{81}}$ f) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ h) $\sqrt{169}$

32/261

2. Oblicz:

a) $\sqrt[3]{27}$ c) $\sqrt[3]{0}$ e) $\sqrt[3]{-1}$ g) $\sqrt[3]{0{,}064}$

b) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$ d) $\sqrt[3]{1}$ f) $\sqrt[3]{-8000}$ h) $\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$

33/261

3. Znajdź za pomocą kalkulatora kilka początkowych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{3}$, nie używając klawisza z symbolem pierwiastka.

4. a) Jaką długość ma bok kwadratu o polu 10?

b) Jaką długość ma bok kwadratu o polu równym polu prostokąta o bokach długości 18 i 8?

c) Jaką długość ma krawędź sześcianu, którego objętość jest równa objętości prostopadłościanu o wymiarach 1 m × 0,5 m × 0,25 m?

5. Zastąp litery odpowiednimi liczbami.

a) $\sqrt{a} = 7$ c) $\sqrt{c} = \frac{2}{5}$ e) $\sqrt[3]{e} = 3$ g) $\sqrt[3]{g} = 0$

b) $\sqrt{b} = 100$ d) $\sqrt{d} = 1$ f) $\sqrt[3]{f} = -\frac{1}{2}$ h) $\sqrt[3]{h} = -0{,}1$

6. Zastąp litery odpowiednimi liczbami.

35/261

$\sqrt{x+3} = 10$ $\sqrt{4y} = 0{,}2$ $\sqrt[3]{z+5} = -1$ $\sqrt[3]{\frac{t}{10}} = 5$

7. Oblicz:

a) $\sqrt{81} + 5$ e) $2\sqrt[3]{125} - 3$ i) $\sqrt{169} + \sqrt{36} - \sqrt{49}$

b) $\sqrt[3]{1000} - 100$ f) $\frac{6}{\sqrt{144}} + 1$ j) $\sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt{9}$

c) $4\sqrt{\frac{1}{121}}$ g) $\frac{3\sqrt[3]{-8}}{4} - 5$ k) $\sqrt{900} : \sqrt[3]{27} + \sqrt{49}$

d) $\frac{\sqrt[3]{-27}}{18}$ h) $\sqrt{16} + \sqrt[3]{125}$ l) $3\sqrt{36} + 5\sqrt[3]{-64}$

8. Oblicz:

a) $\sqrt{\sqrt{256}}$ b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{4}{\sqrt{16}}}}}$ c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{4}}}}$

$2 < \sqrt{5} < 3$
bo
$2^2 < 5 < 3^2$

9. O liczbie $\sqrt{5}$ wiadomo, że jest większa od 2 i mniejsza od 3. Dobierz dwie kolejne liczby całkowite tak, aby jedna była mniejsza, a druga większa od podanej liczby.

a) $\sqrt{15}$ c) $\sqrt{70}$ e) $\sqrt{156}$ g) $\sqrt[3]{50}$ i) $\sqrt[3]{-130}$

b) $\sqrt{41}$ d) $\sqrt{130}$ f) $\sqrt{404}$ h) $\sqrt[3]{-13}$ j) $\sqrt[3]{1250}$

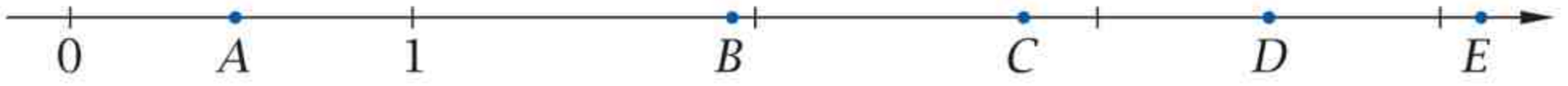
39/261

10. a) Podaj przykład liczby naturalnej n spełniającej warunek $9 < \sqrt{n} < 10$. Ile jest takich liczb?

b) Ile jest liczb spełniających warunek $4 < \sqrt[3]{n} < 5$?

11. Punktom zaznaczonym na osi liczbowej odpowiadają podane liczby. Przyporządkuj te liczby do odpowiednich punktów.

$a = \sqrt{34} - 3$ $b = \sqrt{10} + 1$ $c = \frac{1}{2}\sqrt{50}$ $d = \frac{1}{4}\sqrt[3]{7}$ $e = \sqrt{99} - 8$



$\sqrt{2} \approx 1{,}41$

$\sqrt{3} \approx 1{,}73$

12. Podaj zaokrąglenia do części dziesiątych liczb:

a) $1 + \sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $3\sqrt{2}$ d) $3 - \sqrt{3}$ f) $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

40/261

13. Zapisz w prostszej postaci.

a) $\frac{3\sqrt{5}}{15}$ b) $\frac{4\sqrt{6}}{10\sqrt{6}}$ c) $\frac{4 + 2\sqrt[3]{3}}{2}$ d) $\frac{-6 + 18\sqrt[3]{5}}{-6}$

14. Zapisz w prostszej postaci.

a) $2\sqrt{7} + \sqrt{7}$

b) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$

c) $9\sqrt{6} - \sqrt{6}$

d) $7\sqrt{7} - 4\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$

e) $\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5}$

f) $\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{3} - 5\sqrt[3]{3}$

g) $\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{-7}$

h) $2\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{-11} + 7\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{11}$

15. Zapisz w prostszej postaci.

a) $5\sqrt{3} - 6 + 2\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{6} + 2 - \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}$

c) $\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$

d) $4\sqrt[3]{2} - 4{,}5 + 0{,}5\sqrt[3]{2} - 3$

e) $3\sqrt[3]{7} - 8\sqrt{3} - 5\sqrt[3]{7} + \sqrt{3}$

f) $1{,}2\sqrt{3} - 1{,}2\sqrt[3]{5} + 0{,}8\sqrt{3} - 0{,}2\sqrt[3]{5}$

16. Zapisz w prostszej postaci.

a) $6\sqrt{7}+2(3-2\sqrt{7})$

b) $3-2\sqrt{5}-(4\sqrt{5}-6)$

c) $-3\sqrt{6}-3(1-2\sqrt{6})$

d) $5(2+4\sqrt{3})+2(\sqrt{3}-5)$

e) $3(2-\sqrt[3]{2})-(5\sqrt[3]{2}+4)$

f) $-2(5-\sqrt[3]{7})-3(2\sqrt[3]{7}+3)$

17. Oblicz:

a) $\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2}$

b) $(\sqrt{13})^2$

c) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}$

d) $(\sqrt{1{,}3})^2$

e) $\sqrt[3]{5^3}$

f) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3$

g) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{9}$

h) $\left(-\sqrt[3]{2}\right)^3$

18. Oblicz:

a) $4(\sqrt{3})^2$

b) $(2\sqrt{2})^2$

c) $\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{7}$

d) $2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}$

e) $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2$

f) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)^2$

g) $(-0{,}1\sqrt{10})^2$

h) $-3\sqrt{15}\cdot 2\sqrt{15}$

19. Oblicz:

a) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}\right)^3$

b) $\left(-2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^3$

c) $\left(-10\sqrt[3]{-0{,}1}\right)^3$

d) $3\sqrt[3]{7}\cdot 2\left(\sqrt[3]{7}\right)^2$

e) $5\left(\sqrt[3]{-6}\right)^2\cdot 4\sqrt[3]{-6}$

f) $\left(-7\sqrt[3]{-2}\right)^2\cdot\sqrt[3]{-2}$

42/261

20. Tylko jedna spośród poniższych liczb nie jest równa pozostałym. Która?

$(\sqrt{3})^2$ $\quad\sqrt[3]{3^3}$ $\quad\sqrt{(-3)^2}$ $\quad(\sqrt[3]{3})^3$ $\quad(-\sqrt[3]{3})^3$ $\quad\sqrt{\sqrt{(-3)^4}}$ $\quad\sqrt{3\sqrt{(-3)^2}}$

21. Zapisz w prostszej postaci.

a) $\sqrt{5}(3-\sqrt{5})$

b) $\sqrt{2}(5\sqrt{2}-3)$

c) $-\sqrt{3}(2\sqrt{3}+5)$

d) $2\sqrt{7}(4+\sqrt{7})$

e) $3\sqrt{5}(3-2\sqrt{5})$

f) $-4\sqrt{2}(3\sqrt{2}-1)$

22. Zapisz w postaci sumy.

44/262

a) $(2+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$

b) $(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+2)$

c) $4(5\sqrt{2}-6)+(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})$

d) $-3(2\sqrt{7}+3)-(4-\sqrt{7})(3\sqrt{7}+1)$

23. Oblicz:

45/262

a) $\sqrt{7^4}$

b) $\sqrt{2^6}$

c) $\sqrt[3]{4^9}$

d) $\sqrt[3]{12^6}$

e) $(\sqrt{10})^6$

f) $(\sqrt{2})^8$

g) $(\sqrt[3]{2})^9$

h) $(\sqrt[3]{5})^{12}$

i) $(-\sqrt{3})^6$

j) $(\sqrt[3]{2})^6$

***24.** Wśród podanych liczb jest pięć liczb naturalnych. Wskaż te liczby.

$a = \sqrt{123^{123}}$ $\quad c = \sqrt{5^{16^5}}$ $\quad e = \sqrt[3]{123^{123}}$ $\quad g = \sqrt{(11^{12})^{13}}$

$b = \sqrt{234^{234}}$ $\quad d = \sqrt{5^{5^{16}}}$ $\quad f = \sqrt[3]{1234^{1234}}$ $\quad h = \sqrt[3]{(11^{12})^{13}}$

47/262

Ciekawostka

Wyrażenia typu $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{3}{5\sqrt{2}}$ można przekształcić tak, aby pozbyć się pierwiastków z mianownika. Po usunięciu niewymierności z mianownika łatwiej jest oszacować wartości wyrażeń.

$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx \frac{2\cdot 1{,}73}{3} \approx 1{,}15$ | *Mnożymy licznik i mianownik przez* $\sqrt{3}$.

$\frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5\cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{10} \approx \frac{3\cdot 1{,}41}{10} \approx 0{,}42$ | *Mnożymy licznik i mianownik przez* $\sqrt{2}$.

25. Oszacuj podane liczby. Możesz skorzystać z metody pokazanej w ciekawostce. Przyjmij, że $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, $\sqrt{3} \approx 1{,}7$.

a) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ $\quad$ b) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ $\quad$ c) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$ $\quad$ d) $\frac{3}{5\sqrt{3}}$

Sprawdź, czy umiesz

1. Liczba $a = \sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{4+9}$ spełnia warunek:

A. $9 < a < 10$ $\quad$ B. $8 < a < 9$ $\quad$ C. $a = 10$ $\quad$ D. $a = \sqrt{18}$

2. Wynikiem działania $(3\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{3})^2$ jest:

A. 27 $\quad$ B. 93 $\quad$ C. 111 $\quad$ D. 369

3. Która z podanych liczb jest całkowita?

$a = \sqrt{17^2}$ $\quad b = (2\sqrt{5})^2$ $\quad c = \sqrt{11}\cdot\sqrt{11}$ $\quad d = \sqrt{15\cdot 3\cdot 5}$

A. jedynie c $\quad$ B. b i c $\quad$ C. wszystkie $\quad$ D. żadna

4. Po uproszczeniu wyrażenia $\sqrt[3]{-5} + 2(-\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{-5})$ otrzymamy:

A. $3\sqrt[3]{5}$ $\quad$ B. $-9\sqrt[3]{5}$ $\quad$ C. 0 $\quad$ D. $5\sqrt[3]{5}$

zadania uzupełniające 32–47, str. 261–262

9 Działania na pierwiastkach

ĆWICZENIE A. Sprawdź, czy poniższe równości są prawdziwe (oblicz oddzielnie lewe i prawe strony równości).

$\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{8 \cdot 1000}$

$\sqrt{9} : \sqrt{16} = \sqrt{9 : 16}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{64 : 8} = \sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{8}$

Przykłady z powyższego ćwiczenia ilustrują następujące własności pierwiastków:

Pierwiastek z iloczynu jest równy iloczynowi pierwiastków.

Dla $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Dla dowolnych liczb a i b:

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

Pierwiastek z ilorazu jest równy ilorazowi pierwiastków.

Dla $a \geqslant 0$ i $b > 0$:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Dla dowolnej liczby a i $b \neq 0$:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Korzystając z tych równości, możemy uprościć obliczanie wartości niektórych pierwiastków. Możemy także niektóre pierwiastki przedstawiać w innej postaci.

Przykłady

Oblicz:

$$\sqrt{4900} = \sqrt{49 \cdot 100} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = 70$$

$$\sqrt{1{,}21} = \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{100}} = \frac{11}{10} = 1{,}1$$

$$\sqrt[3]{-27\,000} = -\sqrt[3]{27\,000} = -\sqrt[3]{27 \cdot 1000} = -\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{1000} = -30$$

$$\sqrt[3]{0{,}064} = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

ĆWICZENIE B. Zamień na iloczyn lub iloraz pierwiastków i oblicz.

a) $\sqrt{8100}$ $\qquad$ c) $\sqrt{16 \cdot 25}$ $\qquad$ e) $\sqrt{0{,}36 \cdot 6400}$

b) $\sqrt[3]{0{,}125}$ $\qquad$ d) $\sqrt[3]{27 \cdot 0{,}008}$ $\qquad$ f) $\sqrt[3]{27 \cdot 8000}$

Przykłady

Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka:

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$ | $\sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{252} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7} = 6\sqrt{7}$ | *Liczbę 252 rozkładamy na czynniki pierwsze:* $252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$.

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$ | $\sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{-54} = -\sqrt[3]{54} = -\sqrt[3]{27 \cdot 2} = -3\sqrt[3]{2}$ | $-\sqrt[3]{27 \cdot 2} = -\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2}$

Zadania

1. Oblicz:

a) $\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5}$ b) $\sqrt[3]{6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3}$ c) $\sqrt{5^2 \cdot 4^2}$ d) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 7^3}$

2. Rozłóż liczby podpierwiastkowe na czynniki pierwsze, a następnie oblicz wartości pierwiastków:

a) $\sqrt{324}$ d) $\sqrt[3]{216}$

b) $\sqrt{576}$ e) $\sqrt[3]{-729}$

c) $\sqrt{484}$ f) $\sqrt[3]{1728}$

784 | 2	3375 | 3
392 | 2	1125 | 3
196 | 2	375 | 3
98 | 2	125 | 5
49 | 7	25 | 5
7 | 7	5 | 5
1	1

$\sqrt{784} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 7^2} = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$

$\sqrt[3]{3375} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3} = 3 \cdot 5 = 15$

3. Oblicz wartości pierwiastków.

a) $\sqrt{7^4 \cdot 4^2}$ b) $\sqrt[3]{3^6 \cdot 10^3}$ c) $\sqrt{5^4 \cdot 2^6 \cdot 7^2}$ d) $\sqrt[3]{3^3 \cdot 10^6 \cdot 2^9}$

4. Przedstaw w prostszej postaci (zakładamy, że litery x, y i z oznaczają liczby dodatnie).

a) $\sqrt{16x^2}$ b) $\sqrt{x^6}$ c) $\sqrt{\frac{4x^2}{y^4}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}x^3}$ e) $\sqrt[3]{27x^6y^9}$

5. Zapisz krócej.

a) $7\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3}$ c) $3\sqrt[3]{3} \cdot 4\sqrt[3]{7}$ e) $\frac{4\sqrt[3]{-6}}{2\sqrt[3]{-2}}$ g) $\sqrt{3{,}5} : \left(2\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$

b) $\frac{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{2\sqrt{2}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot 2\sqrt[3]{6}$ f) $1 - \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{125}}$ h) $\frac{\sqrt{0{,}8} : \sqrt{0{,}008}}{(-0{,}1)^2}$

48/262

6. Zastąp symbole odpowiednimi liczbami.

a) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \heartsuit\sqrt{3}$

$\sqrt{175} = \sqrt{7 \cdot 25} = \diamondsuit\sqrt{7}$

$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = \clubsuit\sqrt[3]{4}$

$\sqrt[3]{-80} = \sqrt[3]{-8 \cdot 10} = \spadesuit\sqrt[3]{10}$

b) $\sqrt{20} = \heartsuit\sqrt{5}$

$\sqrt{300} = \diamondsuit\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{54} = \clubsuit\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{-10\,000} = \spadesuit\sqrt[3]{10}$

c) $\sqrt{18} = 3\sqrt{\heartsuit}$

$\sqrt{28} = 2\sqrt{\diamondsuit}$

$\sqrt[3]{250} = 5\sqrt[3]{\clubsuit}$

$\sqrt[3]{-56} = -2\sqrt[3]{\spadesuit}$

7. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

50/262

a) $\sqrt{50}$ $\sqrt{28}$ $\sqrt{72}$ $\sqrt{200}$ $\sqrt{1800}$

b) $\sqrt[3]{16}$ $\sqrt[3]{24}$ $\sqrt[3]{-128}$ $\sqrt[3]{3000}$

8. Zapisz krócej, a następnie wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12}$

b) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{9}$

c) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{12}$

e) $\sqrt{35} : \sqrt{28}$

f) $\sqrt[3]{30} : \sqrt[3]{48}$

Wskazówka. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{7 \cdot 7 \cdot 2} = 7\sqrt{2}$

9. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka i zapisz krócej:

a) $\sqrt{12} + 5\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{48} + 2\sqrt{3}$

53/262

c) $3\sqrt{20} + \sqrt{5}$

d) $\sqrt{18} - 2\sqrt{8}$

e) $\sqrt{90} + \sqrt{40} + \sqrt{250}$

f) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135}$

g) $2\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80}$

h) $\dfrac{\sqrt{50} + \sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

i) $\dfrac{\sqrt{48} + \sqrt{75}}{\sqrt{27}}$

540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

$\sqrt{540} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} =$
$= 2 \cdot 3\sqrt{3 \cdot 5} = 6\sqrt{15}$

10. Rozłóż liczbę podpierwiastkową na czynniki pierwsze i wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{432}$

b) $\sqrt{448}$

c) $\sqrt{864}$

d) $\sqrt{972}$

e) $\sqrt[3]{432}$

f) $\sqrt[3]{1375}$

g) $\sqrt[3]{-375}$

h) $\sqrt[3]{-3645}$

11. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{6^3}$

b) $\sqrt{7^5}$

c) $\sqrt{3^9}$

d) $\sqrt{5^7}$

e) $\sqrt[3]{5^4}$

f) $\sqrt[3]{4^5}$

12. Zapisz krócej.

a) $\sqrt[3]{7^4} + \sqrt[3]{7}$

b) $2\sqrt{2^3} - 3\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{5^5} + \sqrt[3]{-25}$

$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}$

13. Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

a) $5\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{\frac{5}{6}}$ e) $0{,}1\sqrt{2000}$ g) $0{,}2\sqrt[3]{50}$

b) $7\sqrt{2}$ d) $\frac{1}{2}\sqrt{12}$ f) $4\sqrt[3]{\frac{3}{32}}$ h) $0{,}3\sqrt{40}$

14. Uporządkuj rosnąco liczby:

a) $3\sqrt{3}$ $2\sqrt{6}$ $\sqrt{29}$ $4\sqrt{2}$ b) $2\sqrt[3]{5}$ $5\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{123}$ $4\sqrt[3]{3}$

Wskazówka. Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

***15.** Zastąp symbole odpowiednimi liczbami.

$\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\spadesuit}$ $2\sqrt{3} = 3\sqrt{\heartsuit}$ $\frac{3}{2}\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{\diamondsuit}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt[3]{\clubsuit}$

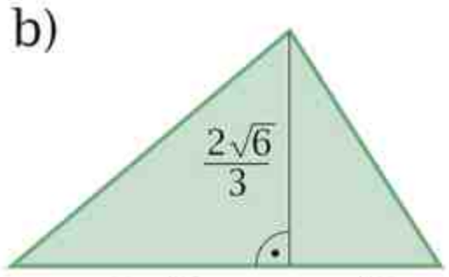
16. Oblicz pola poniższych figur.

a)



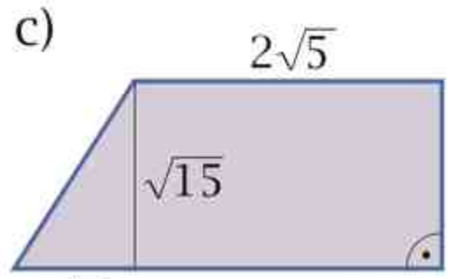
$5\sqrt{3}$

b)



$2\sqrt{2}$

c)



$\sqrt{2}$ $\sqrt{5}$

17. Spośród liczb $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$ wybierz:

a) dwie liczby, których iloczyn jest liczbą naturalną,

b) trzy liczby, których iloczyn jest liczbą naturalną,

c) dwie liczby, których iloraz jest liczbą naturalną.

Sprawdź, czy umiesz

1. Liczba 3 nie jest wynikiem działania:

A. $\sqrt{30} \cdot \sqrt{0{,}3}$ B. $\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3}$ C. $\sqrt{2\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3\frac{6}{7}}$ D. $\sqrt{0{,}036} : \sqrt{0{,}4}$

2. Liczbę $\sqrt{98} + \sqrt{72}$ można zapisać w postaci:

A. $2\sqrt{7} + 2\sqrt{6}$ B. $13\sqrt{2}$ C. $\sqrt{170}$ D. $4\sqrt{7} + 4\sqrt{6}$

3. Liczba $\frac{2}{3}\sqrt{0{,}9}$ jest równa:

A. $\sqrt{0{,}4}$ B. $\sqrt{0{,}12}$ C. $\sqrt{1{,}2}$ D. $\sqrt{0{,}6}$

zadania uzupełniające 48–56, str. 262

Przed klasówką

1. Która z poniższych liczb nie jest równa 100 mln?

A. 100^4 B. 1000^3 C. $10\,000^2$ D. 10^8

2. Liczba $\frac{(7^4)^5}{7^4 \cdot 7^5}$ jest równa:

A. 1 B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{1}{7^{11}}$ D. 7^{11}

3. Czy wyniki przedstawionych poniżej działań są poprawne?

a) $3^2 \cdot 3^6 : 3^4 = 27$ TAK/NIE

b) $\frac{(5^3)^3}{5^6} = 1$ TAK/NIE

c) $\frac{12^3}{6^3} \cdot 3^2 = 72$ TAK/NIE

d) $\frac{7^2 + 7^2}{7^4} = 1$ TAK/NIE

4. Ile jest w ramce liczb mniejszych od 0,0002?

10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}

A. jedna B. dwie C. trzy D. cztery

5. Liczba różna od 1 podniesiona do potęgi 10 jest zawsze większa od tej samej liczby podniesionej do potęgi 5. Czy to prawda? Wybierz odpowiedź „tak” lub „nie” oraz jej uzasadnienie spośród zdań od A do D.

Ⓘ Tak, ponieważ… Ⓘⓘ Nie, ponieważ…

A — …im większy jest wykładnik, tym większy wynik potęgowania.

B — …na przykład $2^5 = 32$, a $2^{10} = 1024$.

C — …na przykład liczba $(-2)^5$ będzie ujemna, a $(-2)^{10}$ będzie dodatnia.

D — …na przykład $(0{,}1)^5$ to więcej niż $(0{,}1)^{10}$.

6. Które z poniższych wyrażeń nie jest równe 3^8?

A. $3^7 + 3^7 + 3^7$ B. $(3^4)^2$ C. $3^{24} : 3^3$ D. $3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2$

7. Jakimi liczbami należy zastąpić kwadraciki?

a) $320\,\text{m} = 3{,}2 \cdot 10^{\square}\,\text{cm}$

b) $0{,}21\,\text{mm} = 2{,}1 \cdot 10^{\square}\,\text{cm}$

c) $56\,\text{km} = 5{,}6 \cdot 10^{\square}\,\text{m}$

d) $45\,\text{mm} = 4{,}5 \cdot 10^{\square}\,\text{m}$

Powierzchnia Niemiec	$\approx 3{,}57 \cdot 10^5\ \text{km}^2$
Powierzchnia Polski	$\approx 3{,}13 \cdot 10^5\ \text{km}^2$

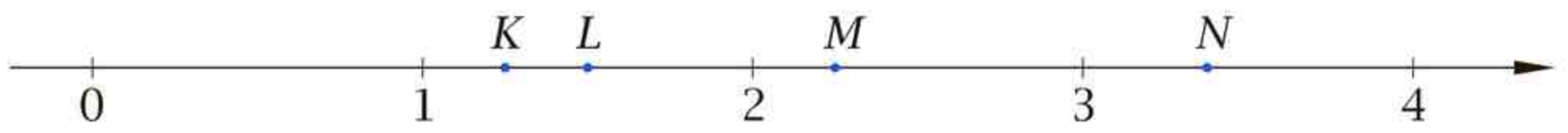
8. Z informacji podanych obok wynika, że powierzchnia Niemiec jest większa od powierzchni Polski o około:

A. $440\ \text{km}^2$ C. $44\,000\ \text{km}^2$

B. $4400\ \text{km}^2$ D. $440\,000\ \text{km}^2$

9. Linie na papierze milimetrowym dzielą go na kwadraty o boku długości 1 mm. Ile jest takich kwadratów na arkuszu papieru milimetrowego o wymiarach $1{,}2\ \text{m} \times 90\ \text{cm}$. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej. Przyjmij, że linie zaczynają się na brzegu kartki.

10. Jeden z punktów zaznaczonych na osi liczbowej odpowiada takiej liczbie a, że $\sqrt[3]{a} = 1{,}5$. Który to punkt?



11. Która z podanych liczb jest ujemna?

A. $\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{-12}$ B. $-\sqrt[3]{-15}$ C. $2 + \sqrt[3]{-27}$ D. $-1 - \sqrt[3]{-2}$

12. Jakim znakiem: $>$, $<$ czy $=$ należy zastąpić kwadracik?

a) $\sqrt{95} - \sqrt{81} \square 1$

b) $\sqrt{17} - \sqrt{5} \square 9$

c) $\sqrt{130} + \sqrt{150} \square \sqrt{390}$

d) $4\sqrt{80} \square 6\sqrt{37}$

13. Oceń, czy równości są prawdziwe.

a) Jeżeli $\sqrt{p} = 2{,}6$, to $\sqrt{4p} = 5{,}2$ TAK/NIE

b) Jeżeli $\sqrt{q} = 18$, to $\sqrt{\frac{q}{9}} = 6$ TAK/NIE

c) Jeżeli $\sqrt[3]{r} = 0{,}74$, to $\sqrt[3]{r : 1000} = 0{,}074$ TAK/NIE

14. Która z poniższych liczb jest równa $12\sqrt{6}$?

A. $3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{12} \cdot 6\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}$ D. $2\sqrt{24} \cdot \sqrt{3}$

15. Ustaw litery w kolejności od oznaczającej liczbę najmniejszą do oznaczającej liczbę największą.

$a = \sqrt{50}$ $y = 2\sqrt{2} + \sqrt{2}$ $r = 2\sqrt{8}$ $t = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ $n = 3 \cdot 2\sqrt{2}$

16. Dla jakich liczb a, b, c zachodzi poniższa równość?

$$(3 + \sqrt{2})(2 - 3\sqrt{5}) + \sqrt{5}(3\sqrt{2} + 9) = a + b\sqrt{c}$$

Zadania uzupełniające

Potęga o wykładniku naturalnym

1. a) Przedstaw każdą z podanych liczb w postaci potęgi o podstawie 2 lub 3.

8 32 27 1 128 243

b) Przedstaw każdą z poniższych liczb w postaci potęgi o wykładniku 3 lub 4.

16 64 216 81 0 625

2. Która z podanych liczb jest większa?

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ czy $\frac{2^2}{5}$

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^7$ czy $\frac{2}{7^7}$

c) $\frac{-2^6}{3^6}$ czy $\left(-\frac{2}{3}\right)^6$

d) $\frac{-2^9}{-9^9}$ czy $\left(-\frac{2}{9}\right)^9$

3. Oblicz:

a) $\frac{1}{2} \cdot [(-1)^8 + (-1)^8]$

b) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 0{,}3^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^2$

c) $\left(1\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-3\frac{3}{4}\right)^2 : 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$

d) $(-0{,}3)^2 : 0{,}1 - 0{,}2^3 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^2$

e) $(-0{,}1)^4 \cdot 20^3 + \left(1\frac{1}{2}\right)^3 : (-0{,}3)^2$

***4.** Które z podanych ułamków nie przedstawiają liczb naturalnych?

① $\frac{10^{354}+8}{9}$ ② $\frac{10^{101}+9}{9}$ ③ $\frac{10^{454}-1}{9}$

④ $\frac{10^{111}+5}{6}$ ⑤ $\frac{10^{321}+2}{6}$ ⑥ $\frac{9^{140}-1}{10}$

5. Oblicz:

a) 2^{2^3} b) $(-1)^{3^2}$ c) 5^{4^0} d) $\left(1\frac{1}{7}\right)^{0^5}$

***6.** Każdą z poniższych liczb zapisano za pomocą czterech dwójek. Ustal, która z tych liczb jest największa, a która — najmniejsza.

2^{222} 2^{22^2} $2^{2^{22}}$ $2^{2^{2^2}}$

Ciekawostka

W stosowanym przez nas systemie dziesiątkowym używa się dziesięciu cyfr (od 0 do 9) i potęg liczby 10.

$305 = 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

$7204 = 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

W informatyce często stosowany jest system dwójkowy, w którym używa się dwóch cyfr (0 i 1) oraz potęg liczby 2.

$1101_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13$

liczba zapisana w systemie dwójkowym — liczba zapisana w systemie dziesiątkowym

$110_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6$

W ten sam sposób można zapisywać liczby w systemie trójkowym, czwórkowym itd. W systemie trójkowym używa się trzech cyfr 0, 1, 2 i potęg liczby 3, w systemie czwórkowym — cyfr 0, 1, 2, 3 i potęg liczby 4, itd.

7. a) Liczby $1100_{(2)}$, $100_{(2)}$, $111110_{(2)}$ zapisz w systemie dziesiątkowym.

b) Liczby $201_{(3)}$, $111_{(3)}$, $10121_{(3)}$ zapisz w systemie dziesiątkowym.

c) Każdą z liczb 4, 9, 20 i 32 zapisz w systemie dwójkowym oraz trójkowym.

Iloczyn i iloraz potęg o jednakowych podstawach

8. Zapisz w postaci jednej potęgi:

a) $25 \cdot 5^3 \cdot 5^0$

b) $\frac{1}{81} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7$

c) $\frac{9 \cdot 3^9 \cdot 27}{3^7 : 3^4}$

d) $\frac{7^{11} : 49}{7^4 \cdot 7^3}$

9. Jakimi liczbami należy zastąpić kwadraciki?

a) $9 \cdot 3^{\square} \cdot 81 = 3^{10}$

b) $2^{\square} \cdot 16 = 2^7$

10. Zapisz w postaci jednej potęgi.

a) $\frac{1000 \cdot (-10)^8}{10^9}$

b) $81 \cdot (-3)^5 \cdot (-27)$

c) $\left(-\frac{1}{32}\right) \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$

d) $\frac{36 \cdot (-6)^7 \cdot (-6)^8}{6^{14} : (-6)}$

11. Zapisz w postaci jednej potęgi.

a) $2^7 + 2^7$

b) $5^{10} + 5^{10} + 5^{10} + 5^{10} + 5^{10}$

c) $3 \cdot (3^{15} + 3^{15} + 3^{15})$

Potęgowanie potęgi

12. Każdą z podanych liczb przedstaw w postaci potęgi o podstawie 2, 3 lub 5.

64^3 27^5 32^5 9^9 25^{11} 125^7 16^9

13. Zapisz poniższe liczby w kolejności rosnącej.

16^{20} 64^{15} 32^{17} 2^{60} 4^{50}

***14.** Zastąp litery odpowiednimi liczbami.

a) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^a\right)^2 = \frac{1}{64}$

b) $\frac{16^3}{2^b} = 8$

c) $64^2 = c^6$

d) $\frac{3^{10}}{27^d} = 3$

e) $\frac{125^e}{5^4} = 5^5$

f) $(81^2)^f : 9 = 3^6$

15. Ustal, dla jakiej wartości a zachodzi równość:

a) $(5^3)^a = 5^8 \cdot 5^a$

b) $3^a \cdot 3^{15} = (3^a)^4$

***16.** Uporządkuj poniższe liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

2^{500} 3^{400} 4^{300} 5^{200}

Potęgowanie iloczynu i ilorazu

17. Wykonaj potęgowanie:

a) $(3ab^2)^3$

b) $\left(\frac{1}{2}a^2b^3\right)^4$

c) $\left(\frac{2ab^5}{c^2}\right)^2$

d) $\left(\frac{a^5b^6}{3x^2}\right)^5$

18. Oblicz:

a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^6$

b) $(0{,}8)^4 : \left(2\frac{2}{3}\right)^4$

c) $\left(4\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (-2)^3$

d) $\left(2\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 0{,}6^4 : (-15)^4$

19. Oblicz sprytnie:

a) $1{,}5^4 \cdot 2^5$

b) $0{,}4^6 \cdot 5^5$

c) $\left(\frac{7}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{10}$

d) $1{,}2^5 : 0{,}6^6$

Działania na potęgach

20. Ustal, jakim znakiem: $<$, $=$ czy $>$ należy zastąpić kwadracik?

a) $\frac{2^7 \cdot 3^{15}}{3^{11} \cdot 2^4}$ ■ $2^3 \cdot 3^5$

b) $\frac{5^8 \cdot 3^2 \cdot 3^7}{3^9 \cdot 5^7}$ ■ 5

c) $\frac{81^4}{6^9 : 2^9}$ ■ 27

d) $\frac{2^9 \cdot 49^2}{14^4}$ ■ 2^6

21. Oblicz:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 2^7$

b) $0{,}1^8 \cdot 0{,}2^8 : 0{,}02^6$

c) $0{,}5^6 \cdot (-0{,}5)^7 : 0{,}05^{13}$

d) $\frac{44^4}{22^3}$

e) $\frac{64^2 \cdot 36^2}{6^3 \cdot 2^7}$

f) $\frac{4^6 \cdot 8^6}{32^5}$

22. Która z poniższych liczb jest równa czwartej części liczby 8^{100}?

8^{25} 2^{100} 2^{25} 8^{96} 4^{149}

23. Która z podanych dwóch liczb jest większa? Ile razy większa?

a) $a = 12^{10}$, $b = 24^5$

b) $a = 64^{16}$, $b = 16^{64}$

24. W 1859 roku do Australii sprowadzono pierwsze 22 króliki. Znalazły tu doskonałe warunki do życia. Już w 1887 roku było ich tak dużo, że rząd postanowił przyznać nagrodę temu, kto wymyśli sposób zmniejszenia ich populacji.

Przypuśćmy, że liczba królików podwajała się co rok; oszacuj, ile — przy takim założeniu — mogło być królików w Australii pod koniec 1887 roku.



Notacja wykładnicza

25. Zapisz w notacji wykładniczej:

a) 136 km — ile to centymetrów?

b) 2800 kg — ile to gramów?

26. Największa odległość między Ziemią a Księżycem wynosi ok. $4 \cdot 10^5$ km. Czy Jowisz zmieściłby się między Ziemią a Księżycem? Czy wszystkie planety Układu Słonecznego (bez Ziemi) ustawione obok siebie zmieściłyby się między Ziemią a Księżycem?

Nazwa planety	Średnica (w tys. km)	Nazwa planety	Średnica (w tys. km)
Merkury	5	Saturn	121
Wenus	12	Uran	51
Mars	7	Neptun	50
Jowisz	143		

27. a) Ile razy objętość wody w Bałtyku ($2 \cdot 10^{13}$ m^3) jest większa od objętości wody w Morskim Oku ($1 \cdot 10^7$ m^3)?

b) Ile razy wieloryb o masie $1{,}2 \cdot 10^8$ g jest cięższy od żubra o masie $6 \cdot 10^5$ g?

c) Ile razy powierzchnia Grenlandii ($2{,}16 \cdot 10^{12}$ m^2) jest większa od powierzchni wyspy Wolin ($2{,}7 \cdot 10^8$ m^2)?

Notacja wykładnicza (cd.)

28. Zapisz w notacji wykładniczej:

a) 0,07 g — ile to ton?

b) 0,037 mm — ile to metrów?

c) 0,015 cm — ile to kilometrów?

29. Oblicz zapisując wyniki w notacji wykładniczej:

a) $2{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-5}$

b) $4{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^8$

30. Przeciętnie w organizmie człowieka jest $2 \cdot 10^{13}$ czerwonych krwinek. Każda z nich ma średnicę około $7{,}5 \cdot 10^{-6}$ m. Wyobraź sobie, że ustawiamy wszystkie te krwinki w szeregu, jedna obok drugiej. Jaką długość miałby ten szereg?



czerwone krwinki widziane pod mikroskopem

31. Zewnętrzna warstwa skóry nazywa się naskórkiem, a wewnętrzna — skórą właściwą. Pewien fragment skóry ma naskórek grubości $4{,}5 \cdot 10^{-4}$ m i skórę właściwą grubości $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ m. Jaka jest grubość tego fragmentu skóry?

Pierwiastki

32. Oblicz:

a) $\sqrt{225}$ $\sqrt{144}$ $\sqrt{10\,000}$

b) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ $\sqrt{2\frac{14}{25}}$ $\sqrt{1\frac{48}{121}}$

c) $\sqrt{\frac{3}{48}}$ $\sqrt{\frac{8}{50}}$ $\sqrt{\frac{20}{45}}$

d) $\sqrt{0{,}0004}$ $\sqrt{1{,}69}$ $\sqrt{1{,}21}$

33. Oblicz:

a) $\sqrt[3]{125}$ $\sqrt[3]{64\,000}$ $\sqrt[3]{-125}$

b) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

c) $\sqrt[3]{0{,}027}$ $\sqrt[3]{-0{,}008}$ $-\sqrt[3]{-0{,}064}$

34. Oblicz:

a) $\sqrt{\sqrt{400}:5}$

b) $\sqrt{\sqrt{36}+\sqrt{100}}$

c) $\sqrt[3]{25\sqrt{25}}$

d) $\sqrt{\sqrt{8\sqrt[3]{2\sqrt[3]{64}}}}$

35. Zastąp symbole odpowiednimi liczbami.

a) $\sqrt{3+\blacklozenge}=6$

b) $\sqrt{\clubsuit^2+11}=6$

c) $\sqrt[3]{1-\heartsuit}=-2$

d) $\sqrt[3]{\spadesuit^2-3}=1$

36. Oszacuj, jakie wymiary powinien mieć kwadratowy plac, który pomieściłby wszystkich mieszkańców Polski, zakładając, że na jedną osobę przypada 1 m^2.



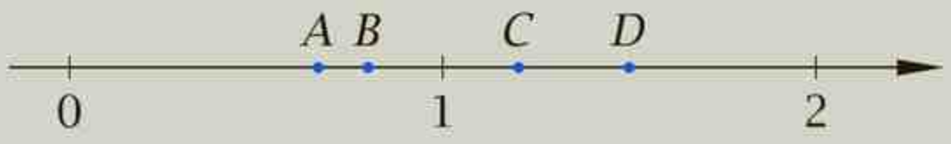
Do obliczeń przyjmij, że w Polsce mieszka 38 mln osób.

37. Na osi liczbowej zaznaczono podane liczby. Dopasuj te liczby do odpowiednich punktów.

a) $\frac{9}{16}$ $\sqrt{\frac{9}{16}}$ $\frac{16}{9}$ $\sqrt{\frac{16}{9}}$



b) $\frac{2}{3}$ $\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\frac{3}{2}$ $\sqrt{\frac{3}{2}}$



38. Ile jest liczb naturalnych n spełniających podany warunek?

a) $11 \leqslant \sqrt{n} \leqslant 12$ b) $15 \leqslant \sqrt{n} \leqslant 16$

39. Dobierz dwie kolejne liczby całkowite tak, aby jedna była mniejsza, a druga większa od podanej liczby.

a) $\sqrt{55}$ d) $\sqrt{899}$ g) $\sqrt[3]{-4}$

b) $\sqrt{12}$ e) $\sqrt[3]{30}$ h) $\sqrt[3]{-9}$

c) $\sqrt{87}$ f) $\sqrt[3]{100}$ i) $\sqrt[3]{-60}$

40. Uporządkuj podane liczby w kolejności rosnącej.

$a=4-\sqrt{2}$ $b=\sqrt{2}+1$ $c=3\sqrt{2}-1$

$d=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ $e=4\sqrt{3}-3$

41. Zapisz w prostszej postaci.

a) $\frac{-\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}+2\sqrt[3]{5}$

c) $\frac{25\sqrt{10}-15}{5}$

d) $2\sqrt[3]{5}-2(1+\sqrt[3]{5})$

e) $10-4(2-\sqrt{6})$

f) $3(1-\sqrt[3]{-5})+3\sqrt[3]{5}$

42. Oblicz:

a) $(2\sqrt{7})^2$

b) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$

c) $4\sqrt{5^2}$

d) $\frac{1}{3}\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{6}$

e) $7\sqrt[3]{5^3}$

f) $(2\sqrt[3]{3})^3$

43. Zapisz w prostszej postaci:

a) $5(\sqrt{3}-4)+\sqrt{3}(6+2\sqrt{3})$

b) $2\sqrt{6}(2+5\sqrt{6})-3(5-4\sqrt{6})$

c) $4\sqrt{2}(5\sqrt{2}-6)+3\sqrt{2}(7-4\sqrt{2})$

d) $5(3+2\sqrt[3]{7})-2(3\sqrt[3]{7}-4)$

44. Przekształć iloczyny na sumy.

a) $(\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-2)$ c) $(\sqrt{2}+1)(5-2\sqrt{2})$

b) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+1)$ d) $(2+\sqrt{2})(2\sqrt{2}+3)$

45. Oblicz:

a) $\sqrt{11\cdot 11^3}$ d) $\sqrt{6\cdot 6^2\cdot 6^3}$ g) $((\sqrt{3})^3)^2$

b) $\sqrt{5^6}$ e) $\sqrt[3]{(7^3)^2}$ h) $\left((\sqrt[3]{2})^2\right)^3$

c) $\sqrt{(2^2)^3}$ f) $\sqrt[3]{10^6}$ i) $((-\sqrt{5})^2)^3$

46. Uporządkuj liczby $\sqrt{7^4}$, $\sqrt{4^7}$, $\sqrt[3]{27^2}$, $\sqrt[3]{2^{27}}$ w kolejności rosnącej.

***47.** Wśród podanych liczb są trzy liczby, które nie są naturalne. Wskaż te liczby.

$\sqrt{16^3}$ $\sqrt{3^{16}}$ $\sqrt{11^{22}}$ $\sqrt{22^{11}}$

$\sqrt[3]{100^{99}}$ $\sqrt[3]{99^{100}}$ $\sqrt{6^9}$ $\sqrt{9^6}$

Działania na pierwiastkach

48. Zapisz krócej.

a) $3\sqrt{75}:\sqrt{3}$ e) $7\sqrt{8}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

b) $2\sqrt[3]{24}:\sqrt[3]{3}$ f) $\frac{\sqrt[3]{24}}{6\sqrt[3]{3}}$

c) $3\sqrt[3]{4}\cdot 5\sqrt[3]{2}$ g) $\frac{\sqrt[3]{9}\cdot 2\sqrt[3]{6}}{3\sqrt[3]{2}}$

d) $\frac{4\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}$ h) $\frac{4\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$

49. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $\sqrt{2}(\sqrt{5}+2\sqrt{5})$ c) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)^2$

b) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{3})$ d) $(3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{-2})^3$

50. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{75}$ e) $\sqrt[3]{2000}$

b) $\sqrt{128}$ d) $\sqrt[3]{81}$ f) $\sqrt[3]{88}$

51. Zapisz w postaci $a\sqrt{b}$, tak aby liczba pod pierwiastkiem była jak najmniejsza.

a) $6\sqrt{18}$ c) $\sqrt{35}\cdot\sqrt{21}$

b) $\frac{3}{4}\sqrt{20}$ d) $2\sqrt{8}\cdot\sqrt{27}$

52. Zastąp litery odpowiednimi liczbami.

a) $2\sqrt{a}=\sqrt{24}$ c) $c\sqrt{24}=\sqrt{2}$

b) $b\sqrt{3}=\sqrt{24}$ d) $2\sqrt{d}=\sqrt{3}$

53. Oblicz:

a) $\frac{\sqrt{32}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{27}-\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{2\sqrt{50}+\sqrt{72}}{2\sqrt{2}}$

54. Które z podanych liczb są równe 7^4?

$\sqrt{7^8}$ $7\sqrt{7^6}$ $\sqrt[3]{7^{12}}$ $\sqrt{7^2}\cdot\sqrt{7^2}$

55. Poniżej podano długość i szerokość czterech prostokątów. Który z tych prostokątów ma największe pole?

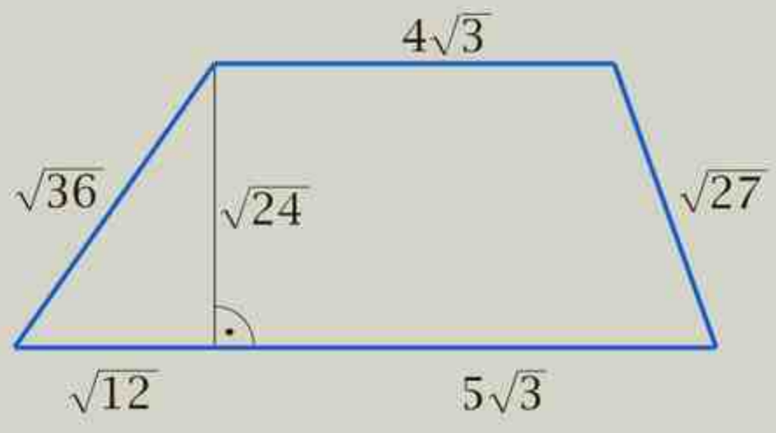
Prostokąt A: $\sqrt{12}$ cm, $\sqrt{2}$ cm

Prostokąt B: $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{5}$ cm

Prostokąt C: $\sqrt{6}$ cm, 2 cm

Prostokąt D: $2\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{2}$ cm

56. Oblicz obwód i pole trapezu narysowanego poniżej.



VII GRANIASTOSŁUPY

1 Przykłady graniastosłupów

2 Siatki graniastosłupów. Pole powierzchni

3 Objętość prostopadłościanu. Jednostki objętości

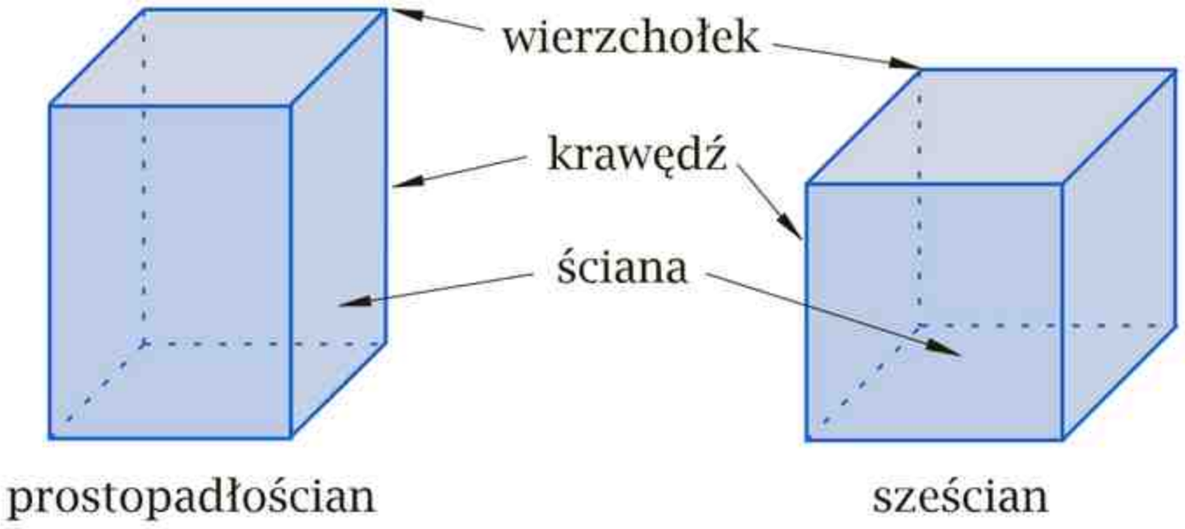
4 Objętość graniastosłupa

Przed klasówką, s. 283

Zadania uzupełniające, s. 284

1 Przykłady graniastosłupów

W tym i w kilku następnych rozdziałach przypomnimy i uporządkujemy wiadomości o figurach geometrycznych w przestrzeni.



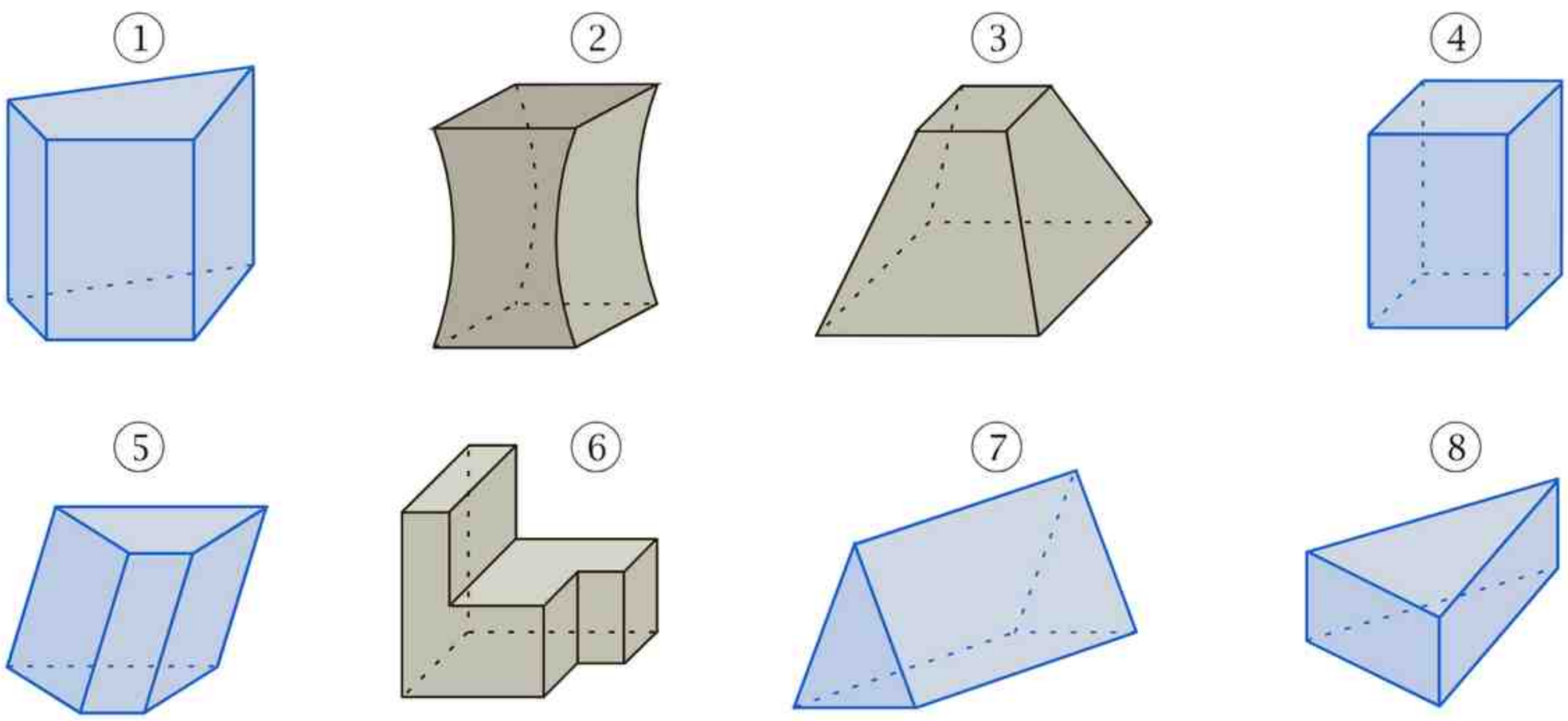
prostopadłościan sześcian

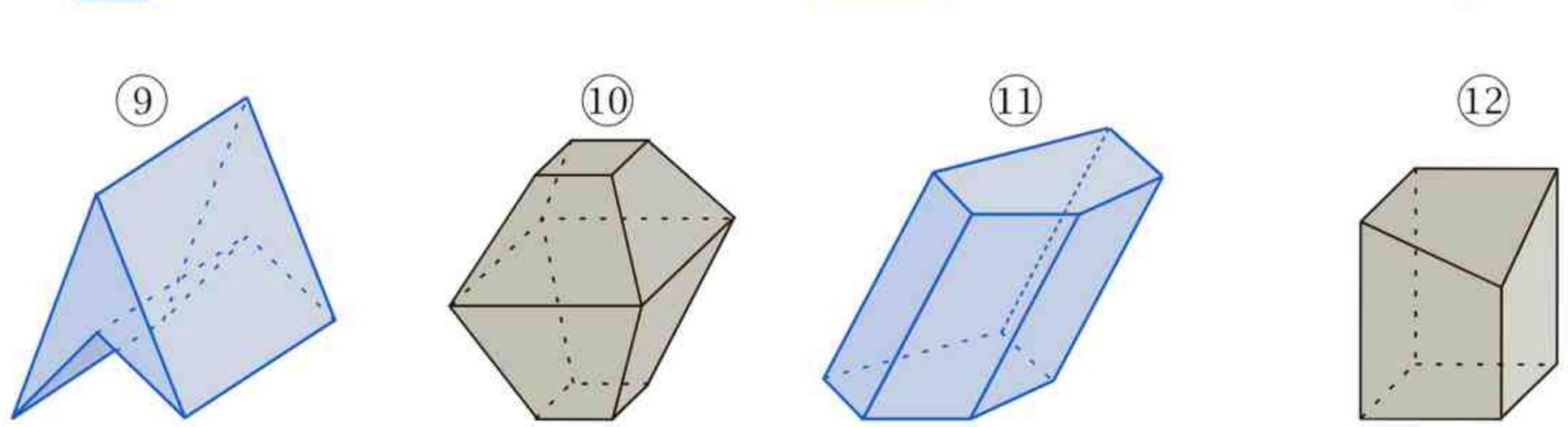
Zapewne pamiętasz, jak wyglądają prostopadłościany i sześciany. Ściany prostopadłościanu są prostokątami. Ściany sześcianu są przystającymi kwadratami.

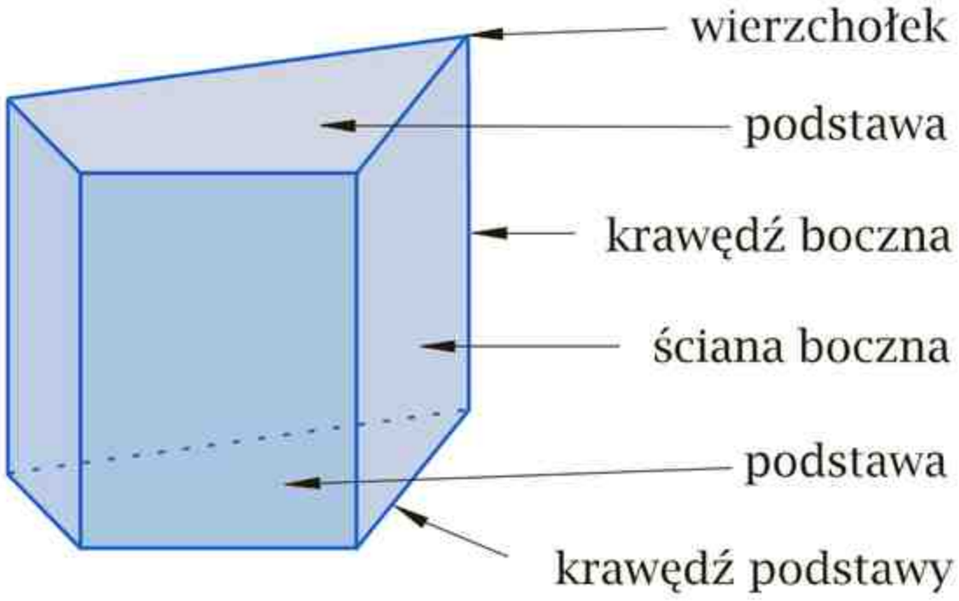
ĆWICZENIE A. Weź model prostopadłościanu.

a) Wskaż i policz jego ściany, krawędzie i wierzchołki.
b) Wskaż pary ścian równoległych i pary ścian prostopadłych.
c) Wskaż pary krawędzi równoległych i pary krawędzi prostopadłych.

Na rysunku przedstawiono różne modele figur przestrzennych. Figury zaznaczone na niebiesko to **graniastosłupy**.







graniastosłup czworokątny

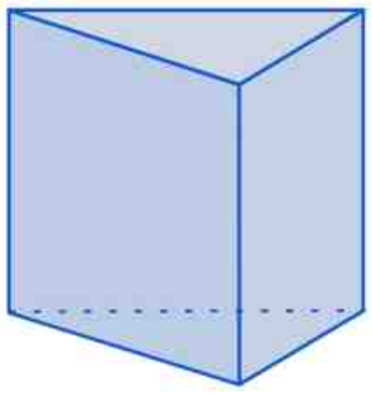
W każdym graniastosłupie można wskazać:

- dwie podstawy, które są równoległymi i przystającymi wielokątami,
- ściany boczne, które są równoległobokami.

Uwaga. Krawędzie boczne graniastosłupa mają jednakową długość i są równoległe.

Jeśli podstawy graniastosłupa są trójkątami, to nazywamy go trójkątnym, jeśli podstawy są czworokątami, to czworokątnym itd.

ĆWICZENIE B. Wskaż podstawy i ściany boczne każdego z graniastosłupów przedstawionych na poprzedniej stronie. Nazwij te graniastosłupy.



graniastosłup prosty trójkątny

Gdy krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, graniastosłup nazywamy **prostym**.

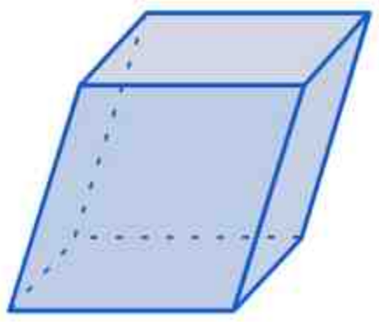
W graniastosłupie prostym:

- krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw,
- ściany boczne są prostokątami.

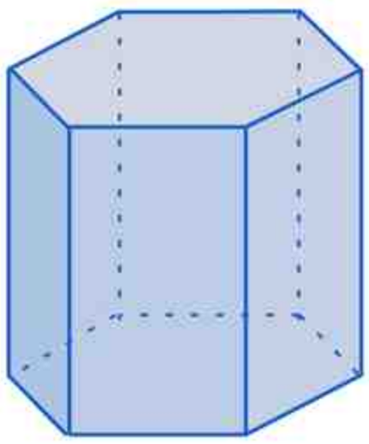
Uwaga. Prostopadłościan jest graniastosłupem prostym czworokątnym. Podstawą prostopadłościanu może być dowolna ściana.

Graniastosłup, który nie jest prosty, nazywamy **pochyłym**. W graniastosłupie pochyłym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw.

ĆWICZENIE C. Na poprzedniej stronie narysowano dwa graniastosłupy pochyłe. Wskaż je.



graniastosłup pochyły czworokątny



graniastosłup prawidłowy sześciokątny

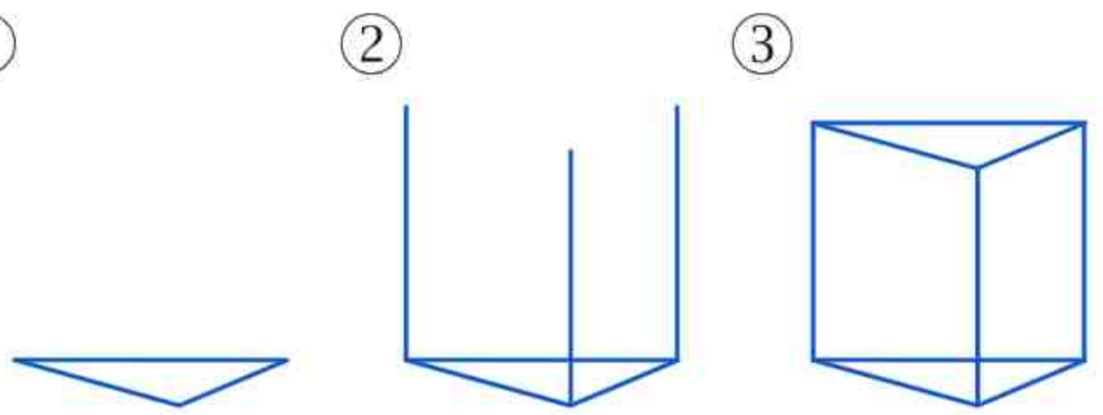
Graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny (np. trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny), nazywamy **prawidłowym**.

W graniastosłupie prawidłowym:

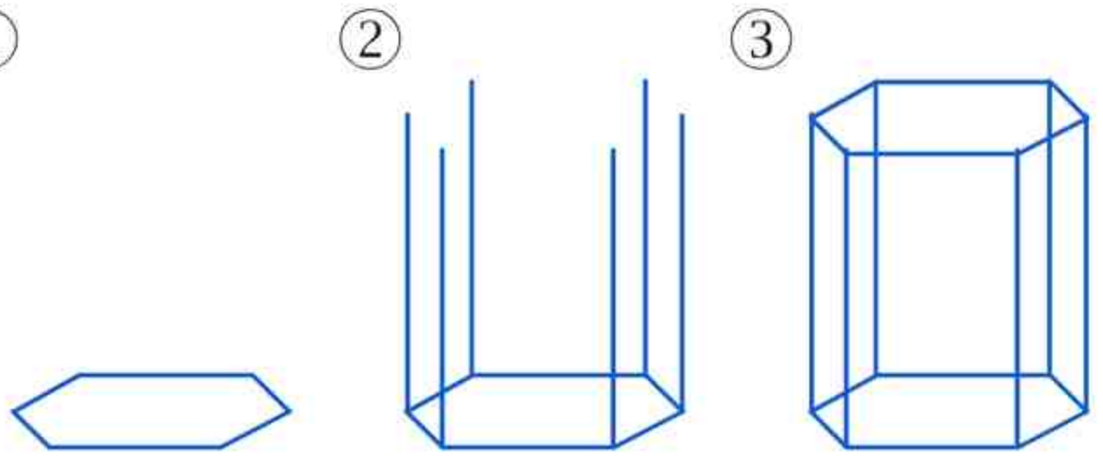
- podstawy są wielokątami foremnymi,
- ściany boczne są przystającymi prostokątami.

Graniastosłupy są figurami przestrzennymi, jednak często przydaje się umiejętność przedstawiania ich na rysunku. Poniżej pokazano, w jaki sposób możemy wykonać rysunki graniastosłupów prostych.

graniastosłup trójkątny



graniastosłup sześciokątny



① Zaczynamy od naszkicowania jednej podstawy.

② Rysujemy krawędzie boczne, czyli pionowe odcinki równej długości.

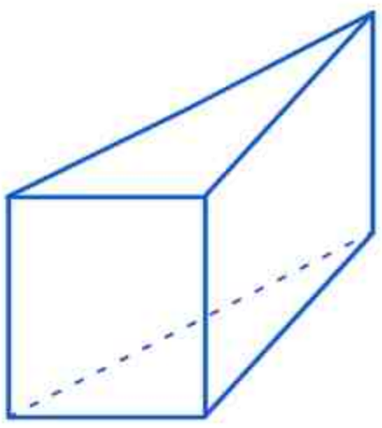
③ Dorysowujemy drugą podstawę, łącząc odpowiednio odcinkami końce krawędzi bocznych. (Aby rysunek był bardziej czytelny, możemy narysować niewidoczne krawędzie przerywaną linią albo pogrubić krawędzie widoczne).

Uwaga. Z płaskiego rysunku bez dodatkowych informacji nie można odczytać, czy graniastosłup jest prawidłowy.

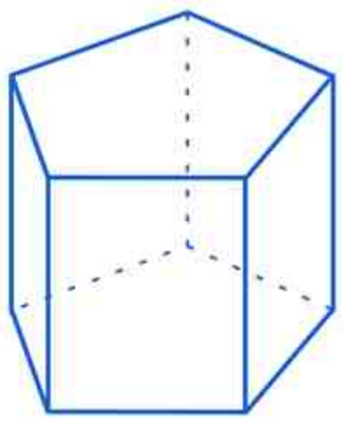
Zadania

1. Ile krawędzi, ścian i wierzchołków mają narysowane graniastosłupy?

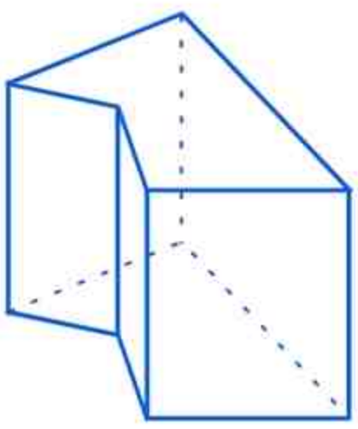
a)



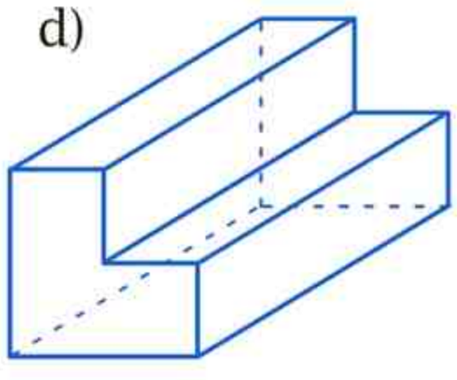
b)



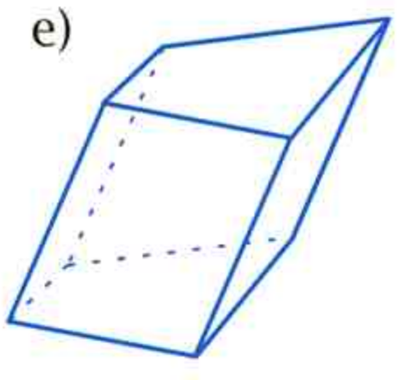
c)



d)



e)



2. Ile krawędzi, ścian i wierzchołków ma graniastosłup:

a) siedmiokątny,
b) dwudziestokątny,
c) stukątny,
d) n-kątny?

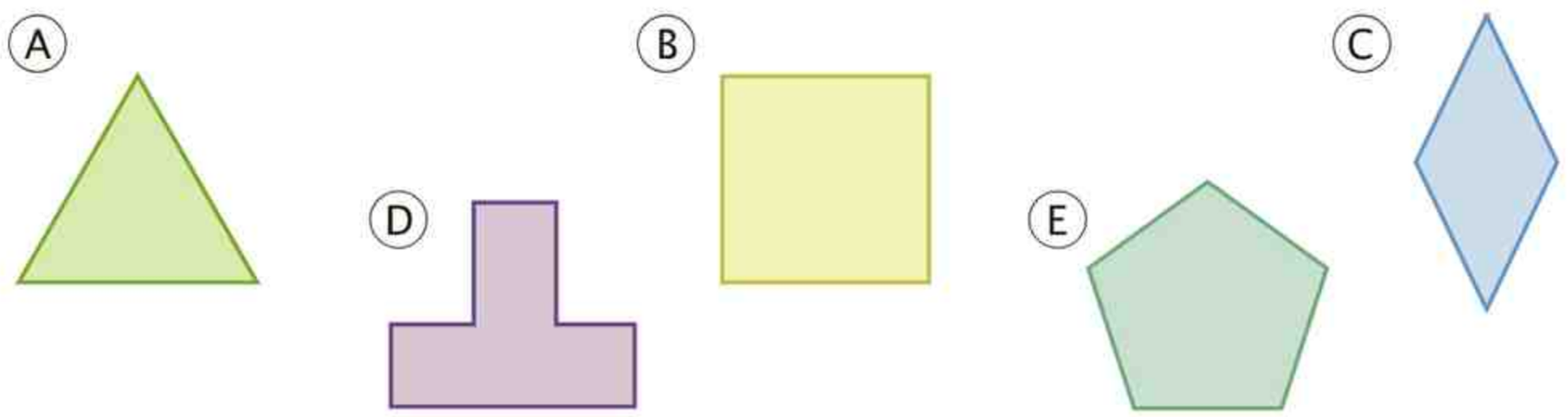
3. a) Ile krawędzi ma graniastosłup o 10 wierzchołkach?
b) Ile ścian bocznych ma graniastosłup o 30 krawędziach?
c) Ile wierzchołków ma graniastosłup o 20 ścianach bocznych?

4. Ustal, czy graniastosłup może mieć:

a) 15 wierzchołków, b) 9 ścian, c) 16 krawędzi.

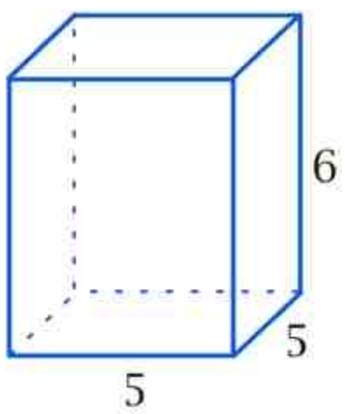
2/284

5. Nazwij graniastosłupy proste, których podstawami są narysowane wielokąty (figury na rysunkach A, B i E to wielokąty foremne).



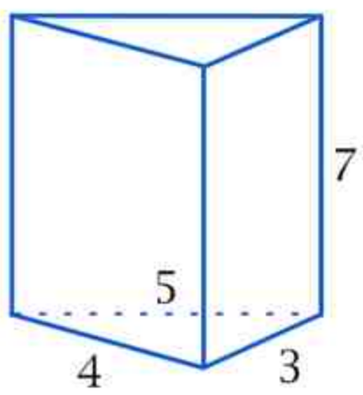
6. Oblicz sumy długości krawędzi narysowanych graniastosłupów.

a)



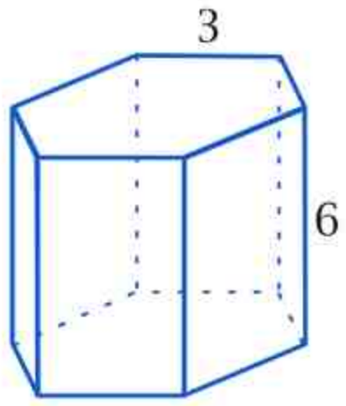
graniastosłup
prawidłowy
czworokątny

b)



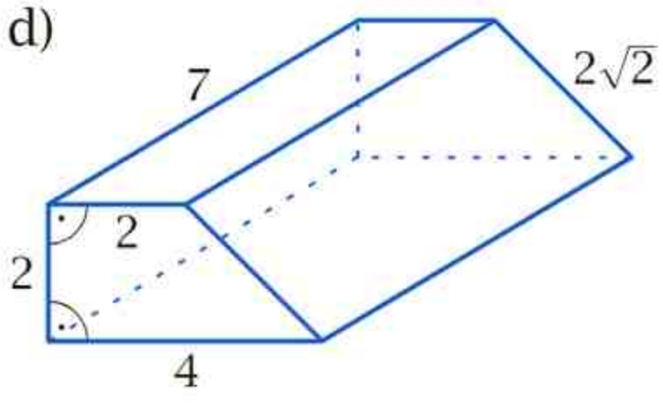
graniastosłup
prosty
trójkątny

c)



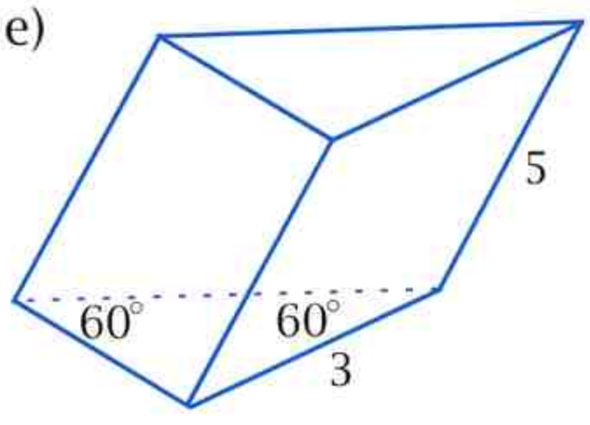
graniastosłup
prawidłowy
sześciokątny

d)



graniastosłup
prosty
czworokątny

e)



graniastosłup
pochyły
trójkątny

7. Które z podanych zdań są prawdziwe dla każdego graniastosłupa?

① Krawędzie boczne są równoległe.

② Krawędzi bocznych jest tyle, ile pozostałych krawędzi.

③ Liczba wszystkich krawędzi jest podzielna przez 3.

④ Z każdego wierzchołka wychodzą 3 krawędzie.

⑤ Liczba wierzchołków jest parzysta.

⑥ Ściany boczne są przystającymi prostokątami.

⑦ Ścian bocznych jest tyle, ile krawędzi bocznych.

8. Z drutu o długości 240 cm zbudowano szkielet graniastosłupa. Podaj, jaka jest długość krawędzi bocznej, jeśli podstawa jest:

a) rombem o boku 10 cm,

b) dwunastokątem foremnym o boku 5 cm,

c) trójkątem równobocznym o boku 8 cm.

9. Które zdania są prawdziwe?

① Każdy prostopadłościan jest graniastosłupem prostym.

② Każdy graniastosłup prawidłowy czworokątny jest sześcianem.

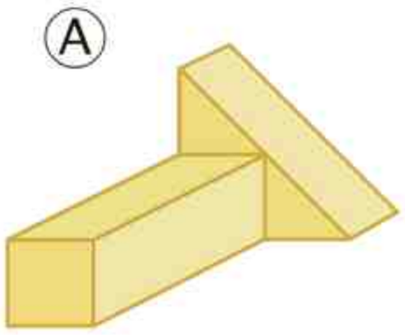
③ Każdy sześcian jest graniastosłupem prawidłowym czworokątnym.

④ Każdy graniastosłup, którego podstawy są trójkątami równobocznymi, jest graniastosłupem prawidłowym.

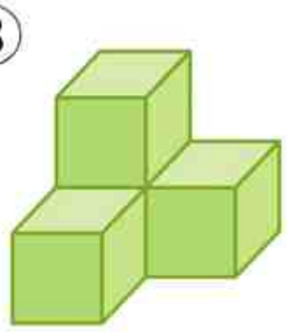
6/284

10. Każdą z tych brył można rozciąć na dwa lub więcej graniastosłupów. Nazwij graniastosłupy, które można w ten sposób otrzymać.

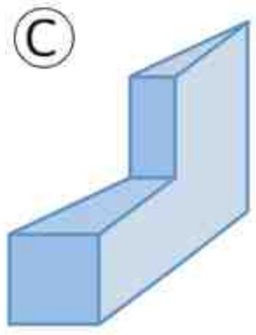
Ⓐ



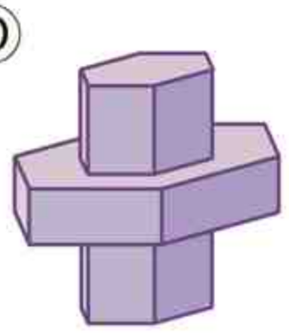
Ⓑ



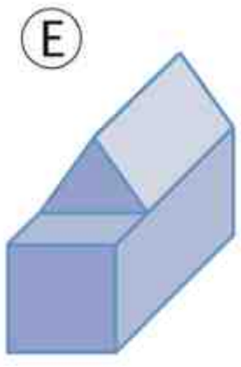
Ⓒ



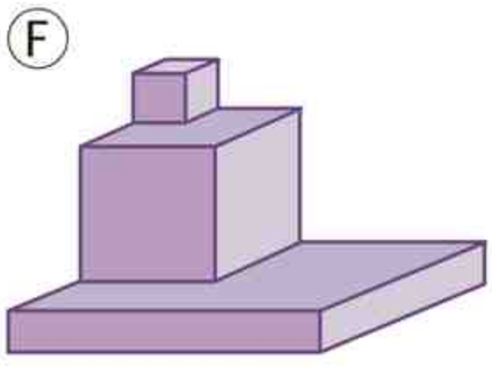
Ⓓ



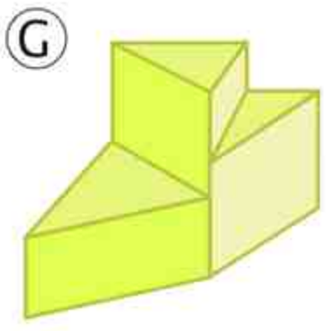
Ⓔ



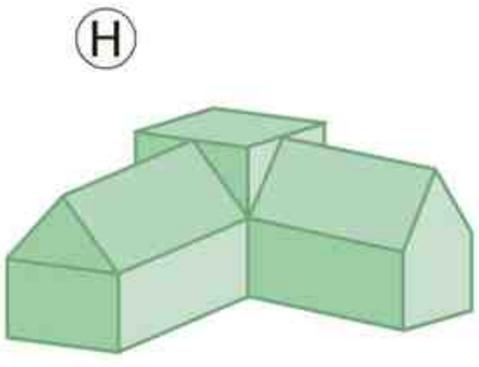
Ⓕ



Ⓖ



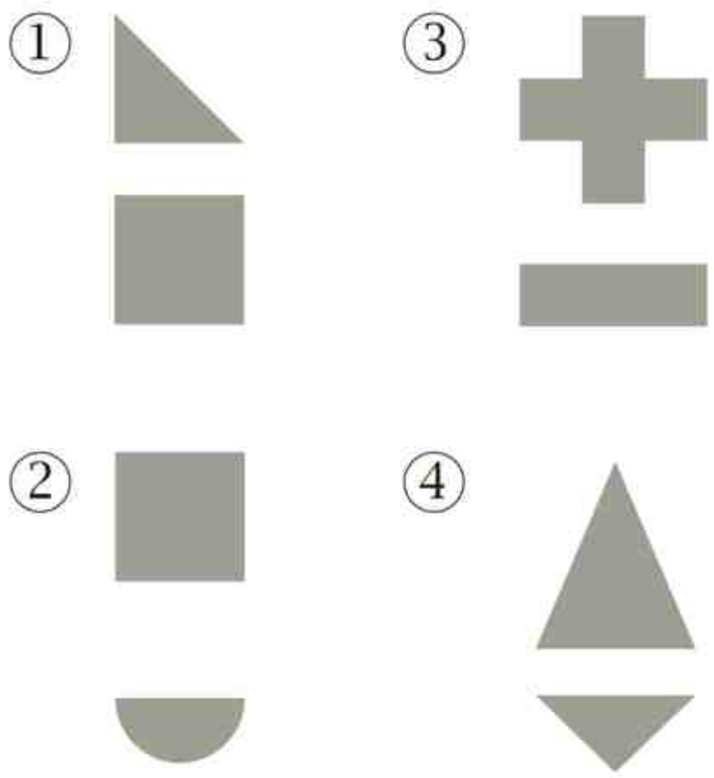
Ⓗ



11. Narysuj graniastosłup prosty:

a) czworokątny, b) sześciokątny, c) trójkątny, d) pięciokątny.

***12.** Przyjrzyj się rysunkowi. Gdy pewne bryły umieszczono w miejscu prostopadłościanu, to otrzymano narysowane niżej pary cieni. Które z tych brył mogą być graniastosłupami?





Sprawdź, czy umiesz

1. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

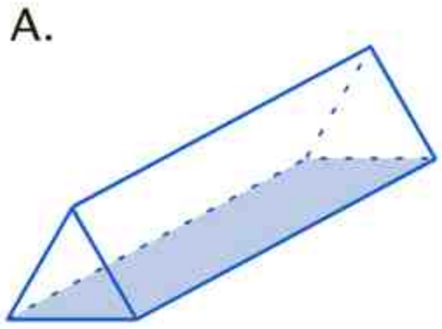
A. Krawędzie boczne graniastosłupa mają równe długości.

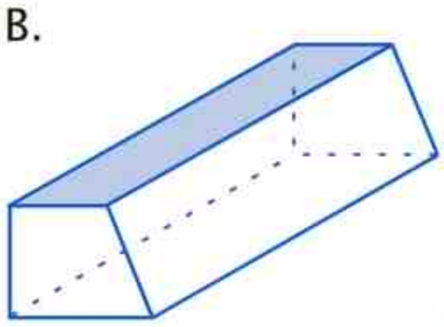
B. Ściany boczne graniastosłupa prawidłowego są przystającymi prostokątami.

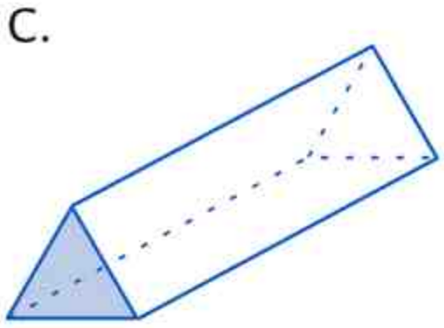
C. Podstawy graniastosłupa są przystającymi wielokątami.

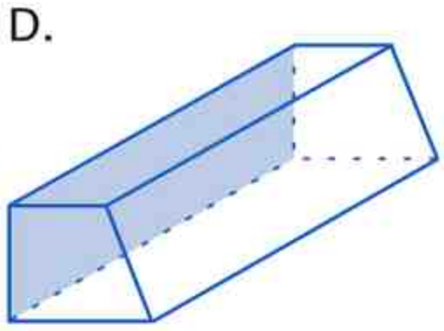
D. Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego mają równe długości.

2. Rysunki przedstawiają graniastosłupy proste. Na którym rysunku zaciemniowano podstawę?

A. 

B. 

C. 

D. 

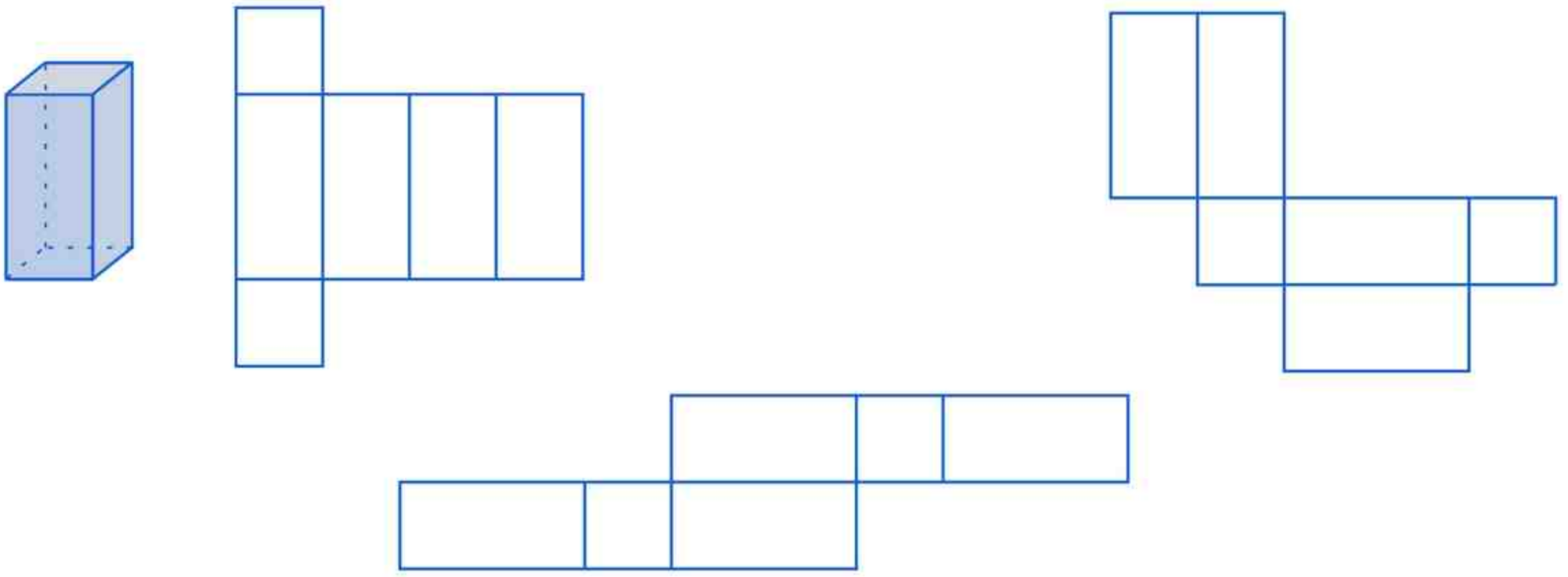
3. Podstawą graniastosłupa, który ma 24 krawędzie, jest:

A. czworokąt
B. sześciokąt
C. ośmiokąt
D. dwunastokąt

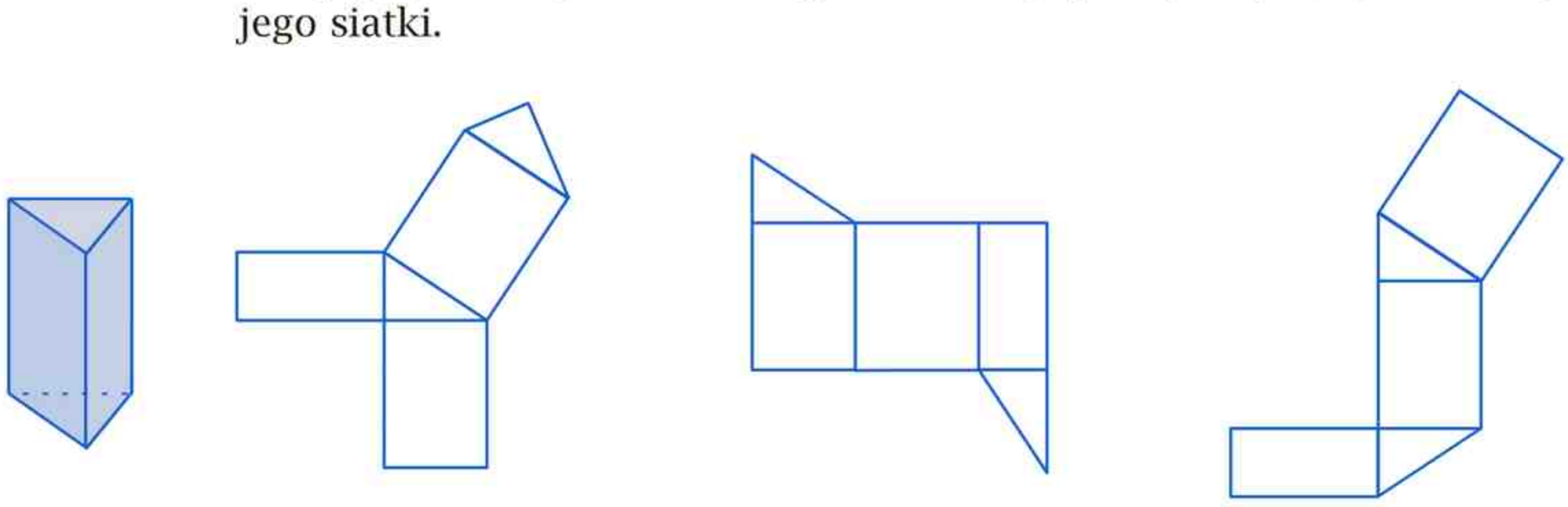
→ zadania uzupełniające 1–6, str. 284

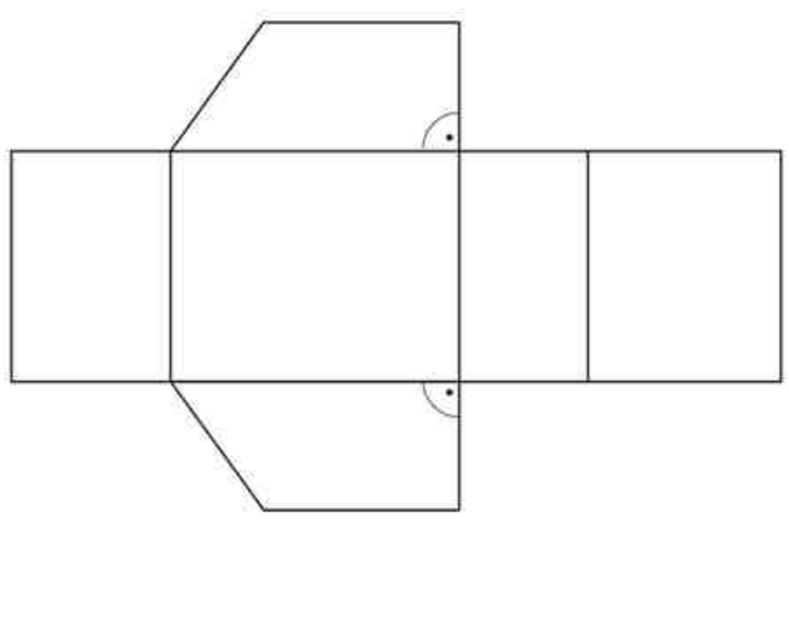
2 Siatki graniastosłupów. Pole powierzchni

Na rysunku przedstawiony jest graniastosłup prawidłowy czworokątny oraz trzy przykłady jego siatek.



Kolejny rysunek przedstawia graniastosłup prosty trójkątny oraz trzy jego siatki.





ĆWICZENIE. Rysunek obok przedstawia siatkę graniastosłupa. Zmierz na siatce długości odpowiednich odcinków i oblicz pole powierzchni podstawy oraz pola powierzchni ścian bocznych.

Pole powierzchni graniastosłupa jest równe polu powierzchni jego siatki; jest to suma pól wszystkich ścian bocznych i dwóch podstaw.

Pole powierzchni graniastosłupa:

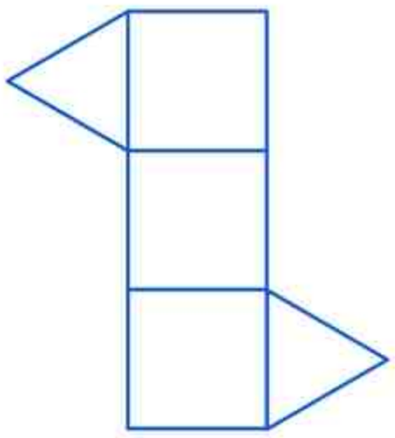
$$P_c = 2P_p + P_b$$

P_c — pole powierzchni całkowitej
P_p — pole podstawy
P_b — pole powierzchni bocznej

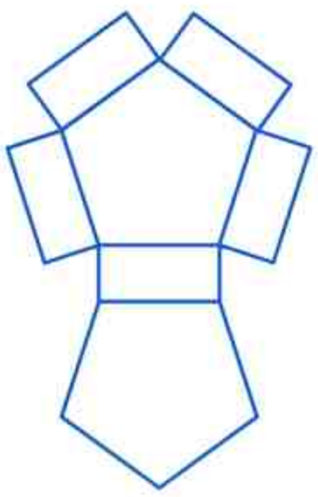
Zadania

1. Nazwij graniastosłupy, których siatki narysowano poniżej.

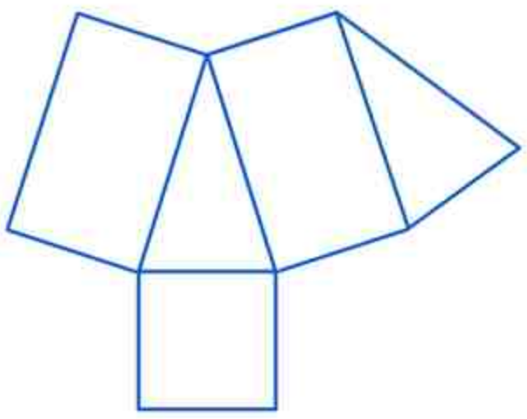
Ⓐ



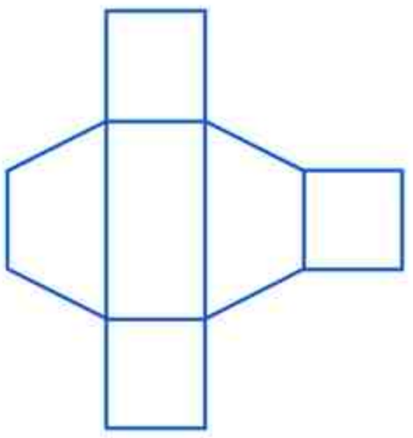
Ⓑ



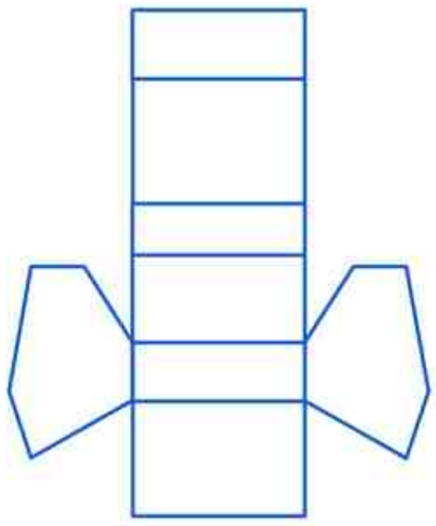
Ⓒ



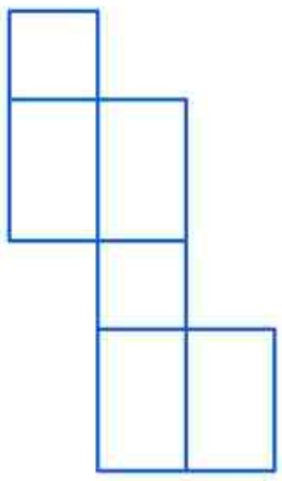
Ⓓ



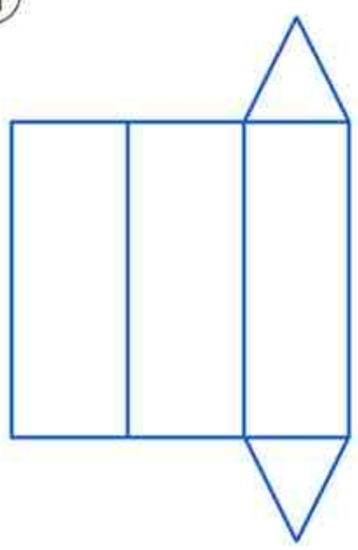
Ⓔ



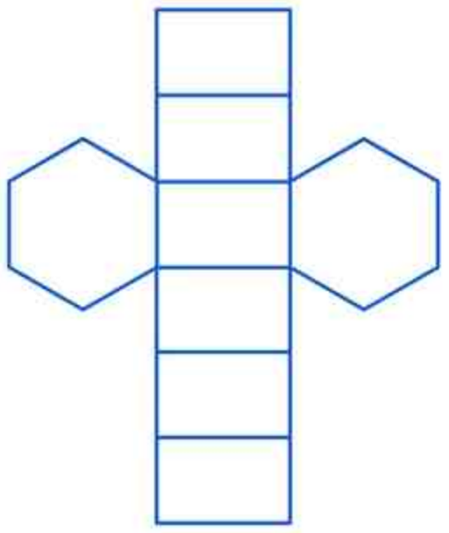
Ⓕ



Ⓖ



Ⓗ

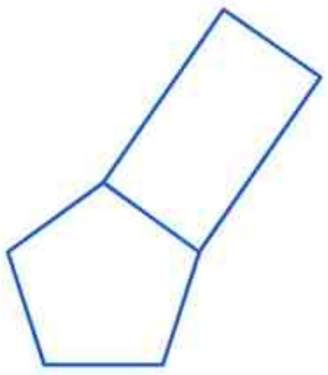


2. Rysunki przedstawiają fragmenty siatek pewnych graniastosłupów prostych. Nazwij te graniastosłupy. Które z nich są prawidłowe?

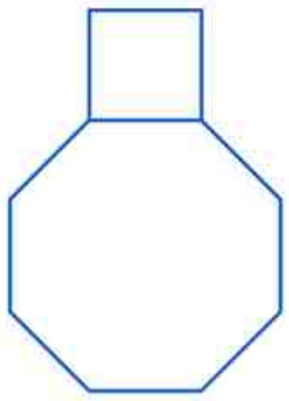
Ⓐ



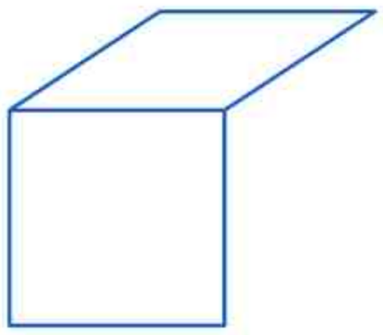
Ⓑ



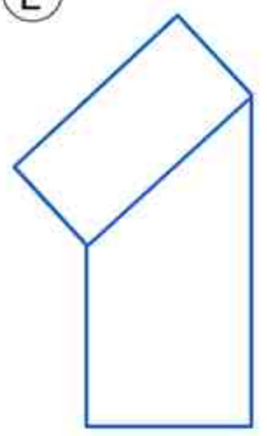
Ⓒ



Ⓓ



Ⓔ



3. Narysuj siatkę:

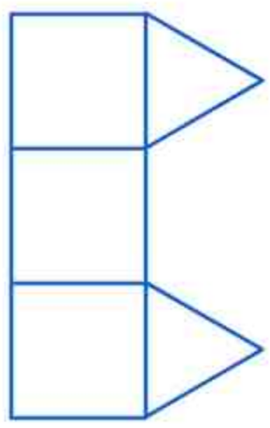
a) graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 2 cm i krawędzi bocznej 3 cm,

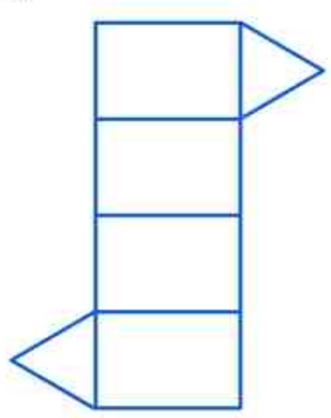
b) graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 3 cm i krawędzi bocznej 2 cm,

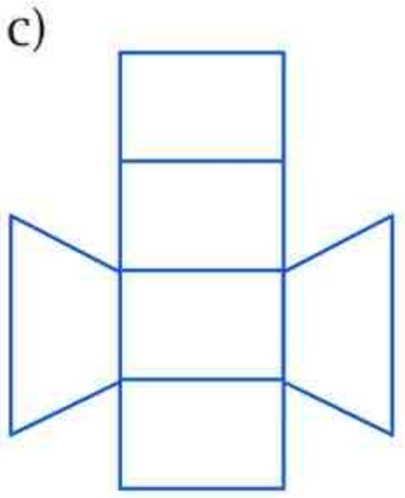
c) graniastosłupa prostego, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 cm i 4 cm, a krawędź boczna ma 1 cm,

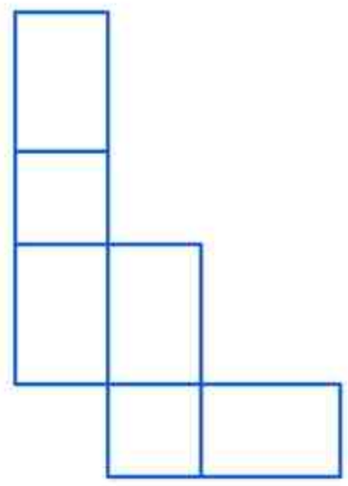
d) graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wszystkie krawędzie mają 2 cm.

4. Żaden z poniższych rysunków nie przedstawia siatki graniastosłupa. Wyjaśnij, dlaczego.

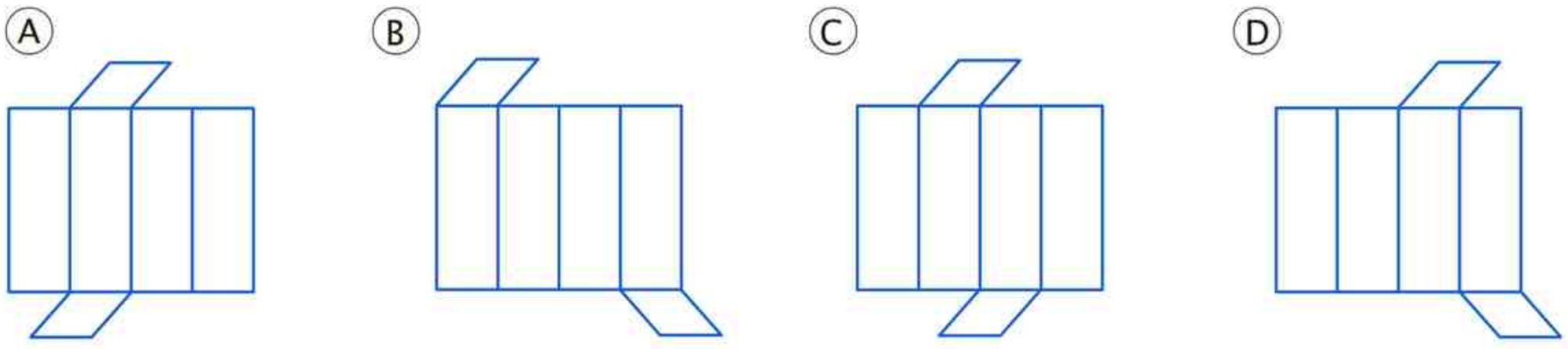
a) 

b) 

c) 

d) 

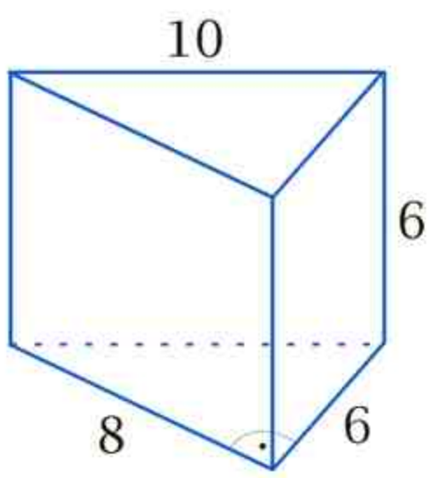
***5.** Tylko jeden rysunek przedstawia siatkę graniastosłupa. Który?

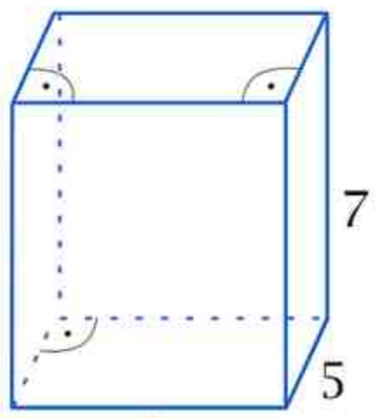


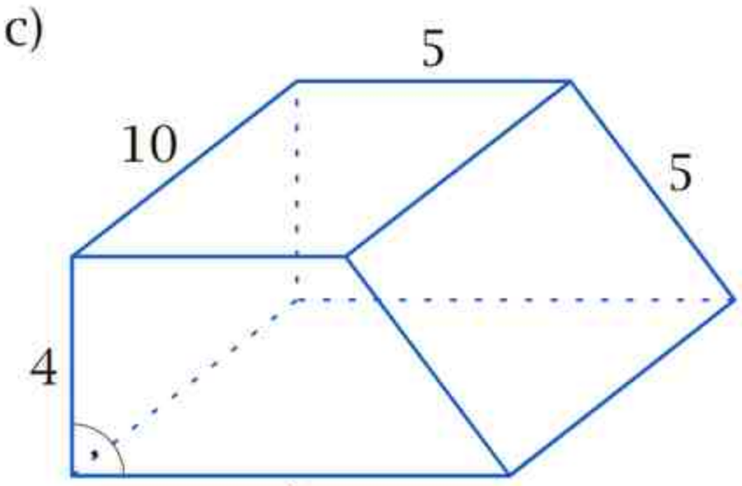
6. a) Oblicz pole powierzchni prostopadłościanu o krawędziach długości 3 cm, 4 cm i 1 dm.

b) Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu wynosi 216 cm. Oblicz pole powierzchni tego sześcianu.

7. Na rysunkach są przedstawione graniastosłupy proste. Oblicz ich pola powierzchni.

a) 

b) 

c) 

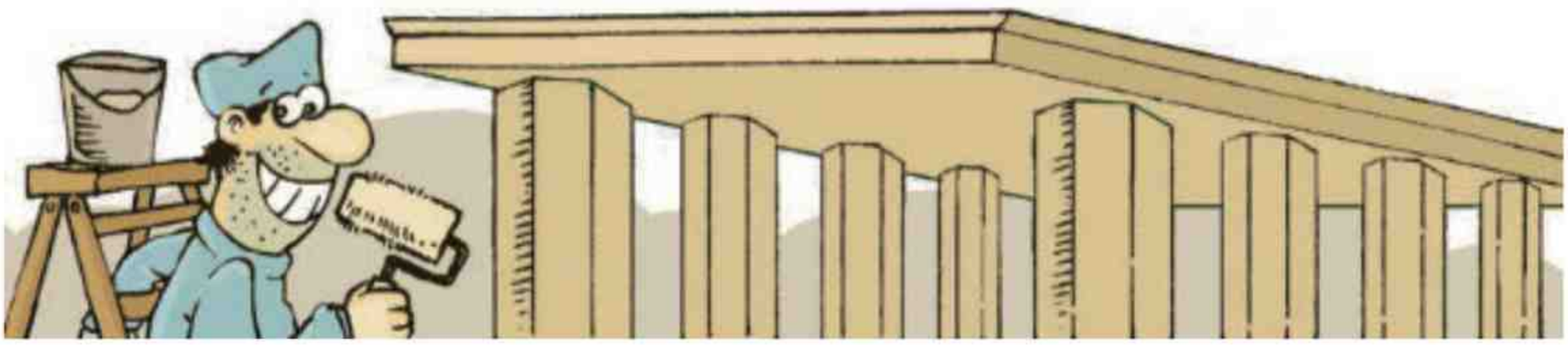
8. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa prostego, którego krawędź boczna ma 20 cm, a podstawa jest:

a) trójkątem prostokątnym o bokach 5 cm, 12 cm i 13 cm,

b) trapezem prostokątnym o podstawach 20 cm i 23 cm oraz ramionach długości 4 cm i 5 cm.

9. W graniastosłupie prostym o wysokości 10 podstawa jest siedmiokątem o obwodzie 24. Jakie jest pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa?

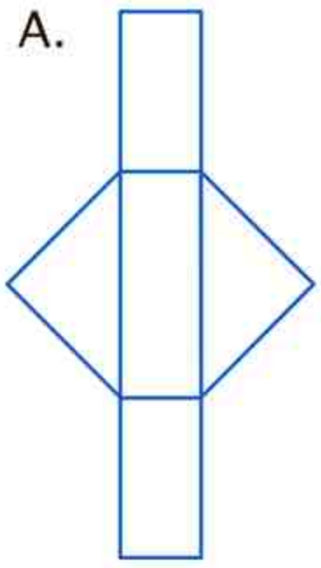
10. Kolumna ma kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o wysokości 4 m i krawędzi podstawy 50 cm. Osiem takich kolumn mamy pomalować farbą, której 1 litr wystarcza na pomalowanie 10 m^2 powierzchni. Ile farby zużyjemy?



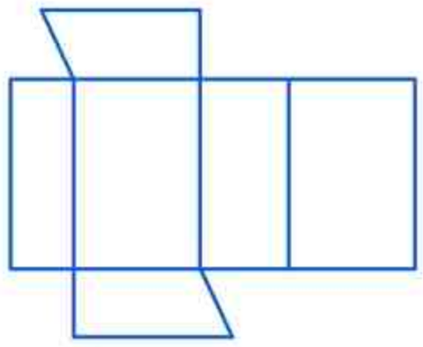
Sprawdź, czy umiesz

1. Który rysunek nie przedstawia siatki graniastosłupa?

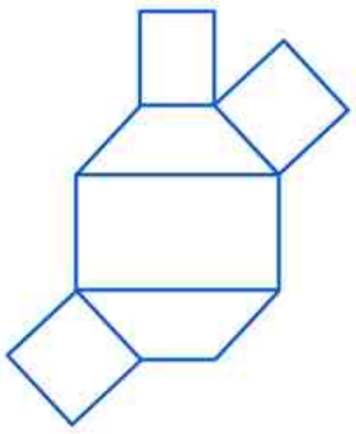
A.



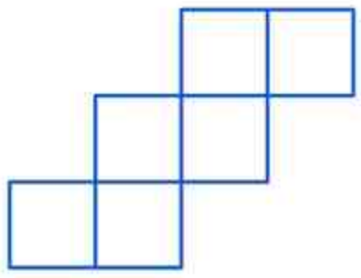
B.



C.

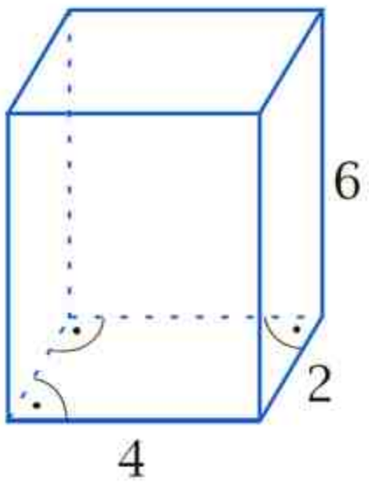


D.

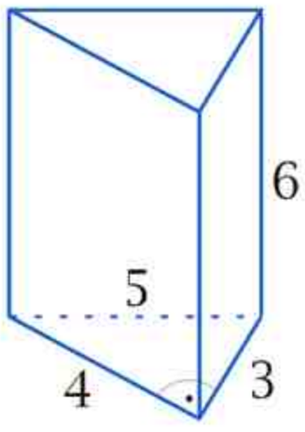


2. Który z narysowanych poniżej graniastosłupów prostych ma najmniejsze pole powierzchni?

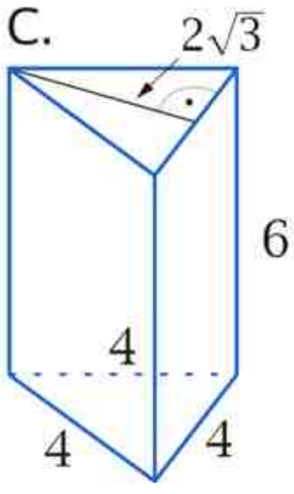
A.



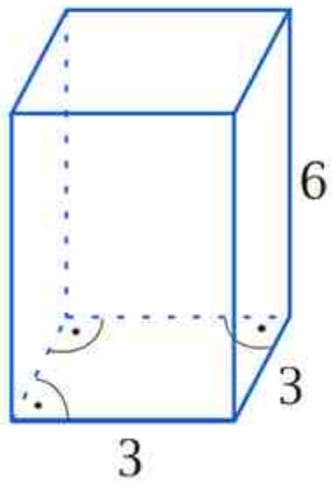
B.



C.



D.



zadania uzupełniające 7–11, str. 284–285

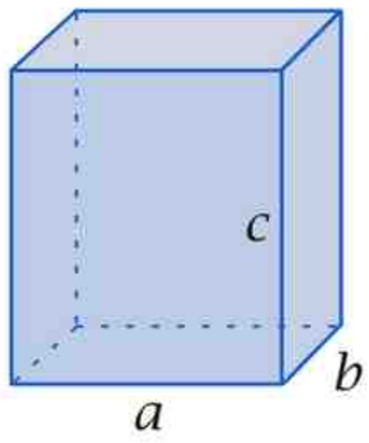
3 Objętość prostopadłościanu. Jednostki objętości

ĆWICZENIE A. a) Z jednakowych kostek sześciennych ułożono różne prostopadłościany. Ile kostek użyto do zbudowania każdego z nich?



b) Ile kostek sześciennych o krawędzi 1 cm potrzeba do zbudowania prostopadłościanu o wymiarach 6 cm × 5 cm × 8 cm? Jaka jest jego objętość?

Zapewne doskonale znasz wzór na objętość prostopadłościanu.



Objętość prostopadłościanu:

$$V = abc$$

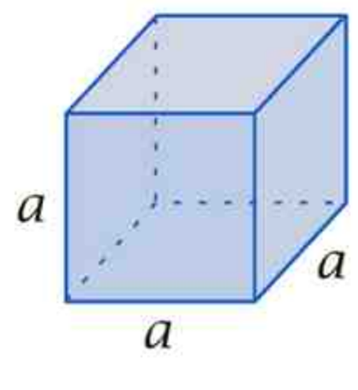
a, b, c — długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka prostopadłościanu

Uwaga. Przed skorzystaniem z tego wzoru należy się upewnić, czy długości krawędzi wyrażone są w tych samych jednostkach.

Sześcian jest prostopadłościanem o krawędziach jednakowej długości, zatem jego objętość możemy obliczać z następującego wzoru:

$$V = a^3$$

a — długość krawędzi sześcianu



Najczęściej używane jednostki objętości:

- 1 metr sześcienny (1 m^3)
- 1 decymetr sześcienny (1 dm^3)
- 1 centymetr sześcienny (1 cm^3)
- 1 milimetr sześcienny (1 mm^3)

ĆWICZENIE B. Wyobraź sobie sześcian, którego objętość jest równa 1 dm^3.

a) Ile centymetrów ma krawędź tego sześcianu? Wyraź objętość tego sześcianu w centymetrach sześciennych.

b) Wyraź długość krawędzi tego sześcianu w metrach. Wyraź objętość tego sześcianu w metrach sześciennych.

Zależności między jednostkami objętości wynikają z zależności między jednostkami długości.

$1\ \text{cm} = 10\ \text{mm}$, więc:

$1\ \text{cm}^3 = 10\,\text{mm} \cdot 10\,\text{mm} \cdot 10\,\text{mm} = 10^3\ \text{mm}^3 = 1000\ \text{mm}^3$

$1\,\text{mm} = \frac{1}{10}\,\text{cm} = 0{,}1\,\text{cm}$, więc:

$1\ \text{mm}^3 = 0{,}1\,\text{cm} \cdot 0{,}1\,\text{cm} \cdot 0{,}1\,\text{cm} = 0{,}1^3\ \text{cm}^3 = 0{,}001\ \text{cm}^3$

Postępując w podobny sposób, otrzymamy:

$1\ \text{m}^3 = 100^3\ \text{cm}^3 = (10^2)^3\,\text{m}^3 = 10^6\ \text{cm}^3$

$1\,\text{cm}^3 = 0{,}01^3\,\text{m}^3 = (10^{-2})^3\,\text{m}^3 = 10^{-6}\,\text{m}^3$

$1\ \text{km}^3 = 1000^3\ \text{m}^3 = (10^3)^3\,\text{m}^3 = 10^9\ \text{m}^3$

$1\ \text{m}^3 = 0{,}001^3\ \text{km}^3 = (10^{-3})^3\,\text{m}^3 = 10^{-9}\ \text{km}^3$

Przykład

$1{,}25\ \text{dm}^3$ — ile to milimetrów sześciennych, a ile metrów sześciennych?

$1\ \text{dm}^3 = 10^6\ \text{mm}^3$ | $1\ \text{dm} = 10^2\ \text{mm}$

$1{,}25\ \text{dm}^3 = 1{,}25 \cdot 10^6\ \text{mm}^3 = 1250000\ \text{mm}^3$ | Przeliczamy dm^3 na mm^3.

$1\ \text{dm}^3 = 0{,}1^3\ \text{m}^3$ | $1\ \text{dm} = 0{,}1\ \text{m}$

$1{,}25\ \text{dm}^3 = 1{,}25 \cdot 0{,}001\ \text{m}^3 = 0{,}00125\ \text{m}^3$ | Przeliczamy dm^3 na m^3.

$1\ l = 1\ \text{dm}^3$

$1\ \text{ml} = 0{,}001\ l$

$1\ \text{cl} = 0{,}01\ l$

$1\ \text{hl} = 100\ l$

Objętość płynów najczęściej wyraża się w litrach, mililitrach, centylitrach lub hektolitrach.

1 litr to objętość równa $1\,\text{dm}^3$

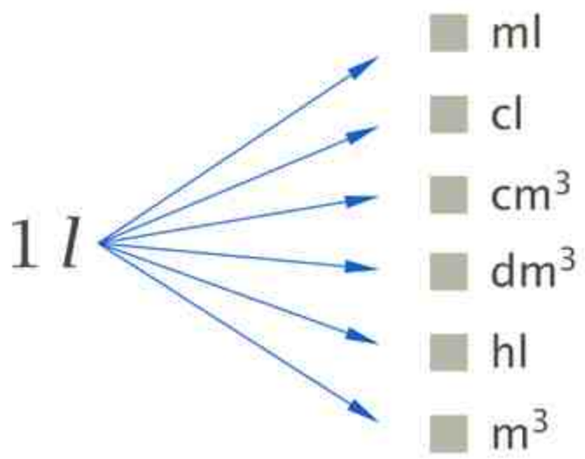
1 ml (mililitr) to jednostka 1000 razy mniejsza od litra,
1 cl (centylitr) to jednostka 100 razy mniejsza od litra,
1 hl (hektolitr) to jednostka 100 razy większa od litra.

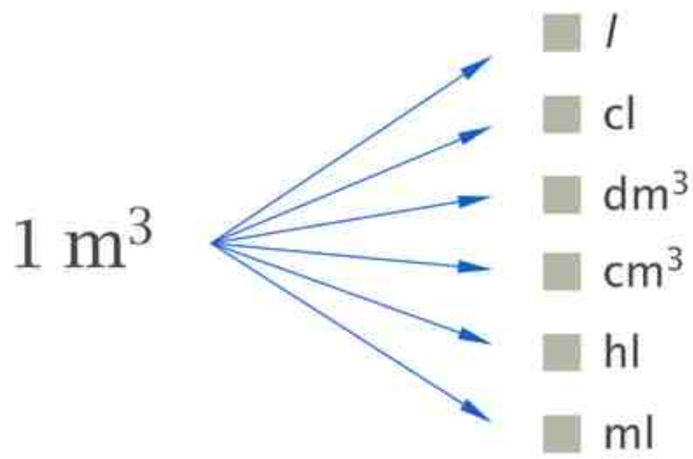
Ciekawostka

Podstawową jednostką objętości w światowym handlu ropą jest baryłka (ok. 159 litrów). Miara ta została wprowadzona już w połowie XIX w. przez jedną z amerykańskich firm naftowych, używającą do transportu ropy naftowej standardowych wówczas beczek na śledzie lub wino.

Używanie jednostki objętości w handlu ropą nie jest zbyt wygodne, bo (jak każda substancja) zmienia ona objętość wraz ze zmianą temperatury. Gdybyśmy kupili 100 tys. baryłek ropy w Kuwejcie przy temperaturze 40°C, a sprzedawalibyśmy ją w Polsce przy temperaturze 0°C, mielibyśmy o około 4 tys. baryłek mniej.

ĆWICZENIE C. Przedstaw 1 litr i 1 m^3 za pomocą różnych jednostek objętości. Ustal, jakimi liczbami należy zastąpić kwadraciki.





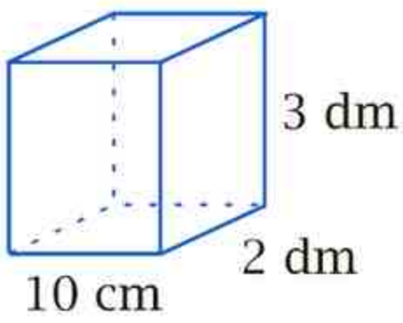
Zadania

1. Ile waży powietrze wypełniające salę lekcyjną, która ma kształt prostopadłościanu o wymiarach 4 m × 8 m × 3 m? Przyjmij, że 1 m^3 powietrza waży 1,2 kg.

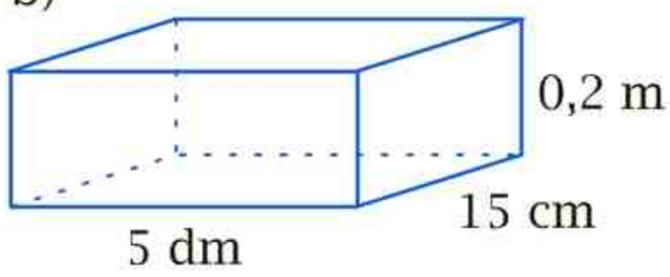


2. Oblicz objętości prostopadłościanów przedstawionych na rysunkach.

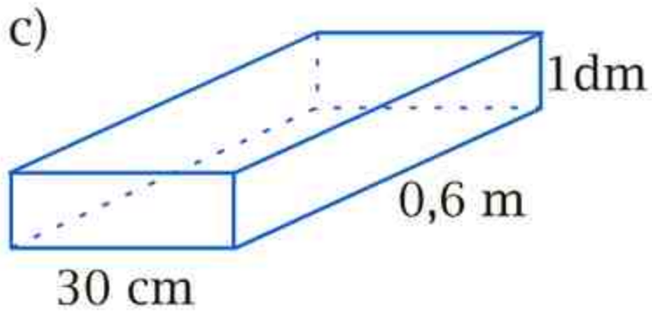
a)



b)



c)



3. Uzasadnij, że krawędź sześcianu, który ma dwa razy większą objętość od sześcianu o krawędzi 5 m, jest dłuższa niż 6 m i krótsza niż 7 m.

Z historii

Według legendy, gdy na greckiej wyspie Delos panowała zaraza, mieszkańcy poprosili boga Apolla, opiekuna wyspy, o pomoc. W zamian za pomoc Apollo zażądał podwojenia objętości jego ołtarza w kształcie sześcianu.

Chcąc dokładnie zrealizować żądanie opiekuna wyspy, mieszkańcy musieliby skonstruować (za pomocą cyrkla i linijki) krawędzie sześcianu, którego objętość byłaby dwukrotnie większa od objętości danego sześcianu.

Problem ten, zwany podwojeniem sześcianu, starało się rozwiązać wielu matematyków zarówno w starożytności, jak i w czasach nowożytnych. Dopiero w XIX wieku udowodniono, że problem nie ma rozwiązania.

Problemy: podwojenia sześcianu, kwadratury koła i trysekcji kąta tworzą trójkę klasycznych zadań, których nie można rozwiązać konstrukcyjnie.

4. Wyraź podane objętości we wskazanej jednostce.

a) [cm^3] $3\,dm^3$ $2{,}5\,dm^3$ $300\,mm^3$

b) [m^3] $2\,km^3$ $6500\,dm^3$ $500\,000\,cm^3$

c) [l] $0{,}07\,hl$ $1200\,ml$ $5\,ml$

d) [cl] $30\,l$ $0{,}75\,l$ $100\,ml$ $0{,}1\,hl$

12/285

5. Znajdź pary zapisów, które wyrażają te same objętości.

$1\,l$ $1\,ml$ $1\,hl$ $1\,dm^3$ $100\,l$ $10\,hl$ $1\,cm^3$ $1\,m^3$

6. Jakimi liczbami należy zastąpić kwadraciki?

a) $20\,ml = \square\,cm^3$

b) $500\,ml = \square\,dm^3$

c) $0{,}6\,m^3 = \square\,l$

d) $3000\,l = \square\,m^3$

e) $200\,hl = \square\,m^3$

f) $0{,}6\,hl = \square\,m^3$

7. Z akwarium o długości 50 cm i szerokości 40 cm odlano $3\,l$ wody. O ile centymetrów obniżył się poziom wody w tym akwarium?



8. Czy w kartonie o wymiarach zewnętrznych $6{,}3\,cm \times 9{,}5\,cm \times 17\,cm$ zmieści się 1 litr mleka? Przyjmij, że grubość ścianki wynosi 0,5 mm.

9. Zaprojektuj prostopadłościenną walizkę, która będzie miała taką samą objętość jak plecak o pojemności $50\,l$.

10. Rzeka Amazonka wlewa do Oceanu Atlantyckiego około $120000\,m^3$ wody w ciągu sekundy.

a) Jakie wymiary powinien mieć prostopadłościenny basen o głębokości 3 m z dnem w kształcie kwadratu, aby pomieścić taką ilość wody?

b) W basenie olimpijskim mieści się 2 300 000 litrów wody. Ile takich basenów mogłaby napełnić w ciągu sekundy rzeka Amazonka?

11. Jakimi jednostkami — mm^3, dm^3, cm^3, km^3 czy m^3 — należy zastąpić kółeczka?

beczka — pojemność 50 ○

lodówka — pojemność 150 ○

krew w ciele człowieka — objętość 5000 ○

buteleczka kropli do nosa — pojemność 5000 ○

woda w jeziorze Bajkał — objętość 23 000 ○

Z historii

Archimedes (ok. 287 p.n.e.–212 p.n.e.), genialny grecki uczony, miał zbadać, czy złotnik wykonujący koronę dla króla Herona nie oszukał władcy, dodając do złota zbyt wiele srebra. Wiedział, że srebro waży mniej niż złoto o tej samej objętości. Rozwiązanie problemu przyszło mu do głowy, gdy się kąpał. Odkrył wtedy, że:

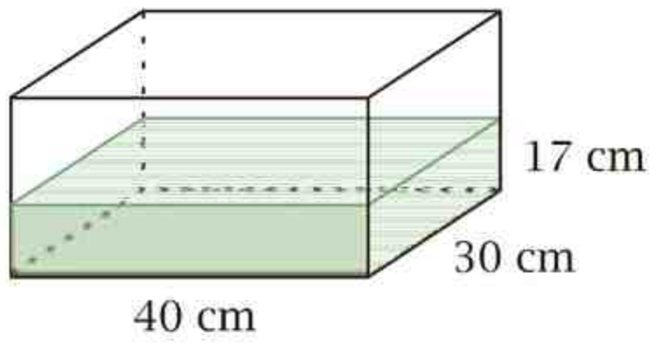
Objętość cieczy wypartej przez zanurzone ciało jest równa objętości ciała.

Uczony, zachwycony swoim spostrzeżeniem, podobno wyskoczył nagi z wanny i wybiegł na miasto z okrzykiem „Eureka" (odkryłem).

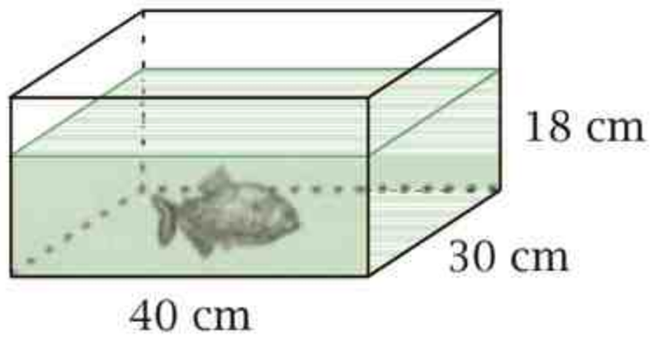
Archimedes był autorem różnych wynalazków. Dokonał też wielu ważnych odkryć w fizyce i matematyce. Pokazał na przykład, jak za pomocą dodatkowego (obok cyrkla i linijki) przyrządu rozwiązać problem kwadratury koła.

Do legendy przeszła śmierć Archimedesa. Słynnemu z mądrości uczonemu powierzono kierowanie obroną rodzinnych Syrakuz podczas wojny z Rzymianami. Przez dwa lata Archimedes z powodzeniem wypełniał swą rolę, ale w końcu najeźdźcy zawładnęli miastem. Przed uczonym, zajętym problemem geometrycznym, stanął żołnierz rzymski, który wezwał go do poddania się. Skupiony na rysowaniu na piasku Archimedes skarcił żołnierza: „Nie niszcz moich figur". Oburzony Rzymianin pchnął Archimedesa mieczem.

12. Przeczytaj ciekawostkę i popatrz na rysunki obok. Jaką objętość ma pirania?



13. Akwarium w kształcie prostopadłościanu ma długość 60 cm, a szerokość 25 cm. Kostka sześcienna o krawędzi 10 cm wrzucona do tego akwarium całkowicie zanurzyła się w wodzie. Ustal, o ile centymetrów podniósł się poziom wody w akwarium.





14. Basen, którego wymiary wynoszą 25 m × 10 m × 2 m, napełniono wodą do wysokości 1,98 m. Ile litrów wody wyleje się z basenu, jeżeli zanurkuje w nim jednocześnie 100 osób? W obliczeniach przyjmij, że ciało człowieka ma objętość około 0,06 m^3.

15. Każdą z krawędzi prostopadłościanu wydłużono trzykrotnie. Ile razy zwiększyła się objętość tego prostopadłościanu?

Sprawdź, czy umiesz

1. Siedem litrów wody zmieści się w pojemniku o objętości:

A. 5000 cm^3 B. 0,01 m^3 C. 0,8 dm^3 D. 0,01 hl

2. Objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok wynosi:

A. 16 dm^3 C. 0,016 cm^3

B. 1600 cm^3 D. $16 \cdot 10^{10}$ mm^3

3. Do szklanki, w której mieści się 250 ml, wlano 200 ml wody i wrzucono do niej dwie sześcienne kostki do gry, które opadły na dno. Krawędź każdej kostki jest równa 2 cm. Ile takich kostek trzeba by jeszcze dorzucić do szklanki, aby woda zaczęła się wylewać?

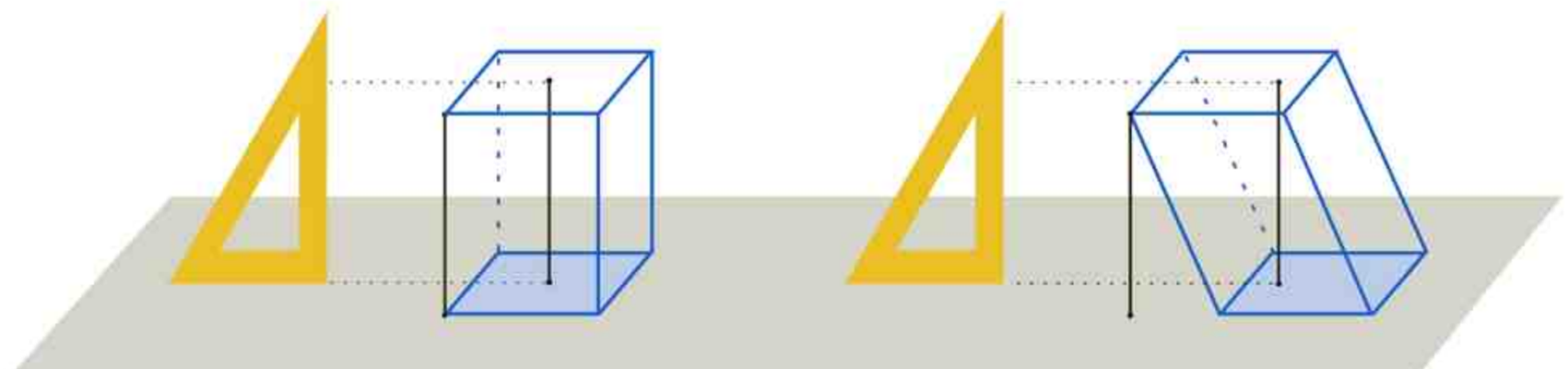
A. trzy B. cztery C. pięć D. sześć

→ zadania uzupełniające 12–21, str. 285–286

4 Objętość graniastosłupa

ĆWICZENIE A. Weź model graniastosłupa prostego i wskaż odcinek prostopadły do tych podstaw łączący podstawy graniastosłupa.

Na każdym z poniższych rysunków odcinki zaznaczone czarnym kolorem łączą w graniastosłupie pewien punkt jednej z podstaw z płaszczyzną drugiej podstawy i są prostopadłe do obu podstaw. Każdy taki odcinek nazywamy wysokością graniastosłupa. Wysokością graniastosłupa nazywać będziemy także długość tego odcinka.



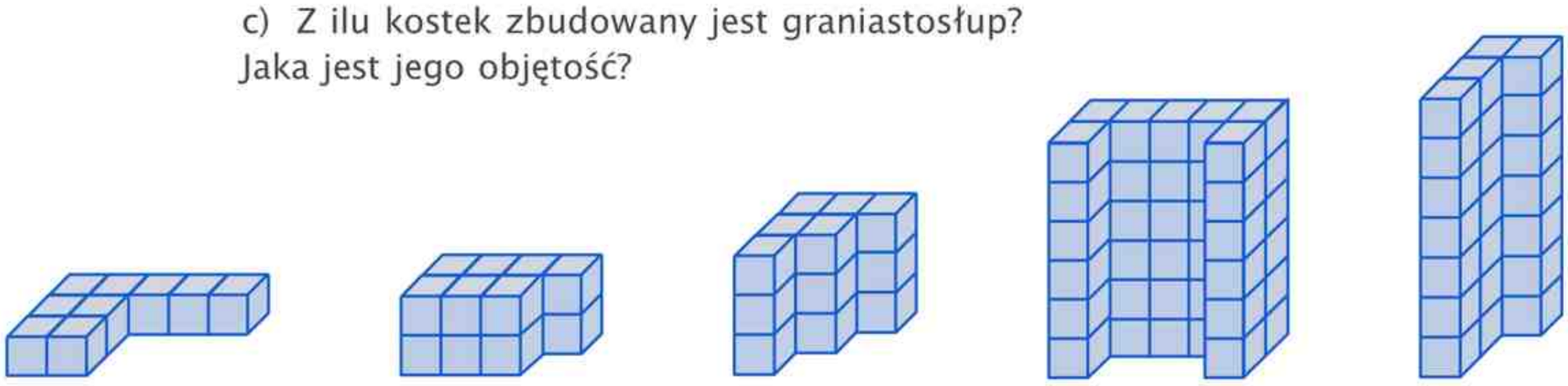
Zwróć uwagę, że w graniastosłupie prostym krawędź boczna jest wysokością, a w graniastosłupie pochyłym nie jest.

ĆWICZENIE B. Z jednakowych kostek sześciennych o krawędzi długości 1 cm zbudowano różne graniastosłupy. Dla każdego z tych graniastosłupów ustal:

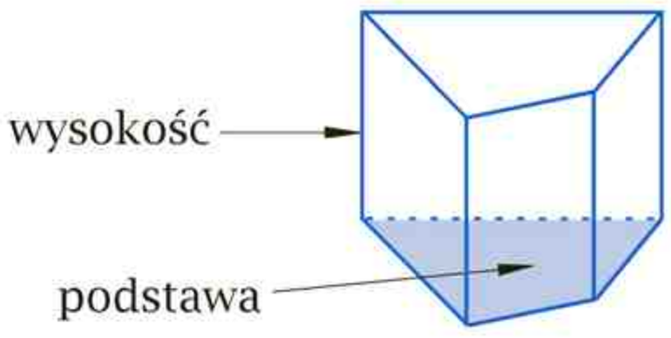
a) Ile kostek jest w jednej warstwie? Jakie jest pole podstawy graniastosłupa?

b) Ile jest warstw kostek? Jaka jest wysokość graniastosłupa?

c) Z ilu kostek zbudowany jest graniastosłup?
Jaka jest jego objętość?



Objętość graniastosłupa obliczamy, mnożąc pole podstawy przez wysokość graniastosłupa.



Objętość graniastosłupa:

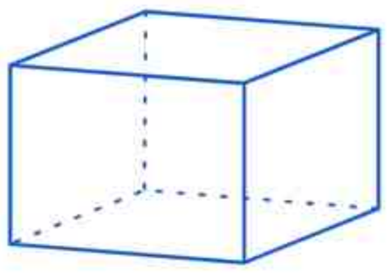
$$V = P_p \cdot H$$

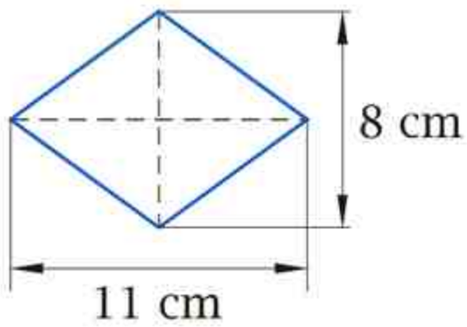
P_p — pole podstawy graniastosłupa
H — wysokość graniastosłupa

Uwaga. Wzór ten dotyczy zarówno graniastosłupa prostego, jak i pochyłego.

Przykład

W graniastosłupie prostym czworokątnym podstawa jest rombem o przekątnych 8 cm i 11 cm. Krawędź boczna graniastosłupa ma długość 5 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.





Rysujemy graniastosłup i jego podstawę (podstawa jest rombem o przekątnych 8 cm i 11 cm).

$P = \frac{8 \cdot 11}{2} = 44 \quad [\text{cm}^2]$ | *Obliczamy pole podstawy.*

$V = P_p \cdot H$

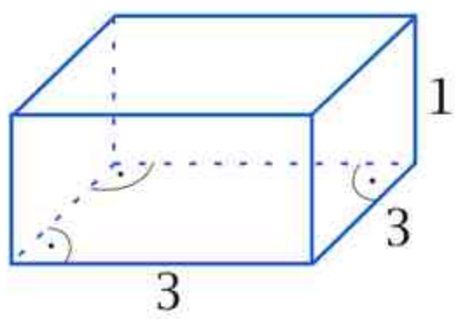
$V = 44 \cdot 5 = 220 \quad [\text{cm}^3]$ | *Obliczamy objętość graniastosłupa.*

Odp. Graniastosłup ma objętość $220\ \text{cm}^3$.

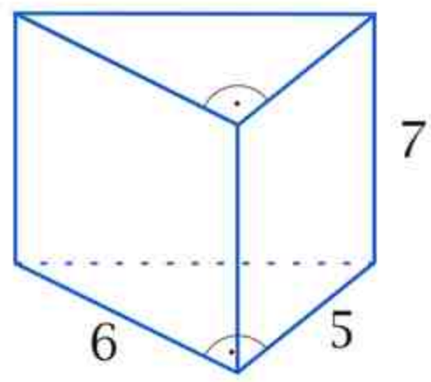
Zadania

1. Na rysunkach są przedstawione graniastosłupy proste. Oblicz ich objętości.

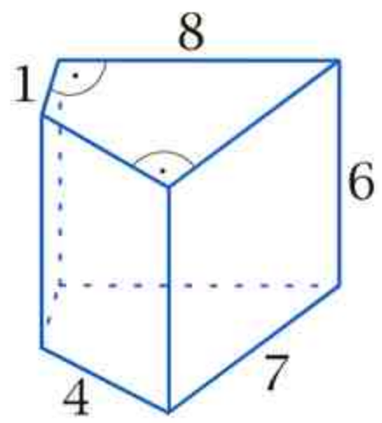
a)



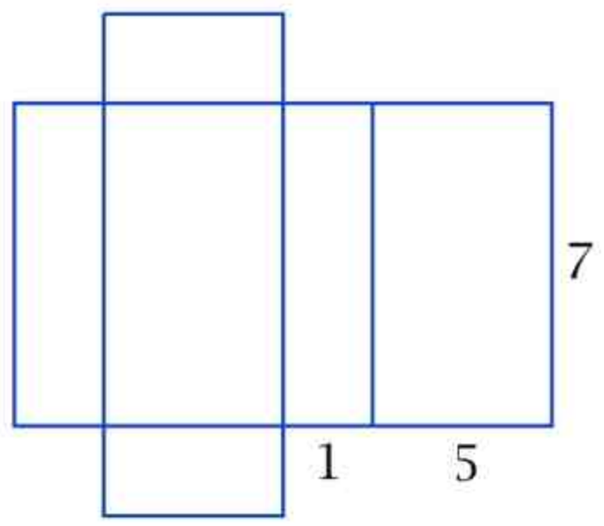
b)



c)



2. Oblicz objętość graniastosłupa, którego siatkę przedstawiono na rysunku obok.



3. Ustal, jak zmieni się objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, jeśli:

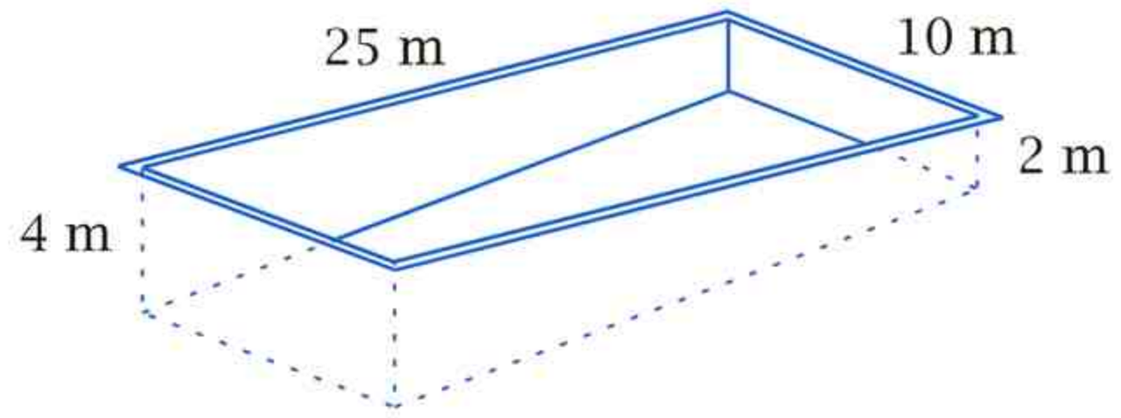
a) podstawy nie zmienimy, a wysokość zwiększymy dwukrotnie,

b) wysokości nie zmienimy, a każdą z krawędzi podstawy zwiększymy dwukrotnie,

c) wszystkie krawędzie graniastosłupa zwiększymy dwukrotnie.

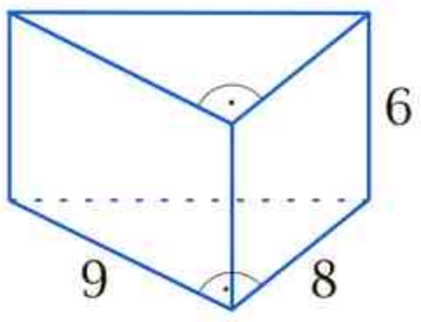


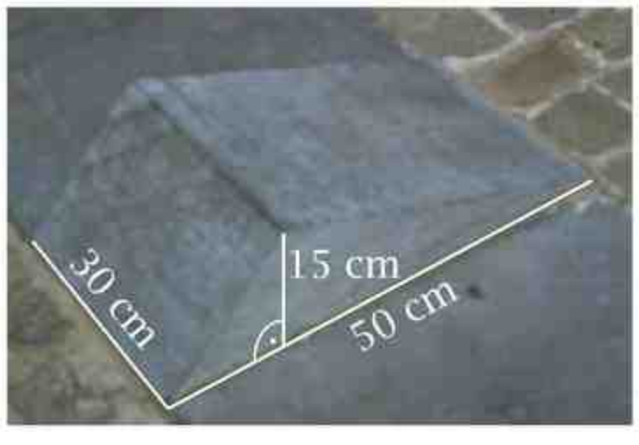
4. Za $1\,m^3$ wody trzeba zapłacić 6,50 zł. Odprowadzenie $1\,m^3$ ścieków kosztuje tyle samo. Ile kosztuje wymiana wody (nie licząc dodatkowych kosztów, np. podgrzania) w basenie, którego wymiary i kształt można odczytać na rysunku?



5. Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi $40\ cm^3$, a krawędź boczna jest pięć razy dłuższa od krawędzi podstawy. Jakie długości mają krawędzie tego graniastosłupa?

6. Na rysunku obok jest przedstawiony graniastosłup prosty. Ustal, jaką długość musiałaby mieć krawędź sześcianu, aby miał on taką samą objętość jak ten graniastosłup.

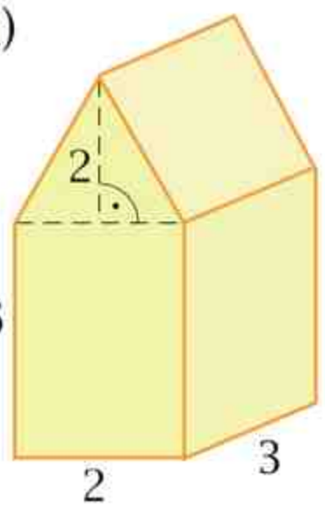




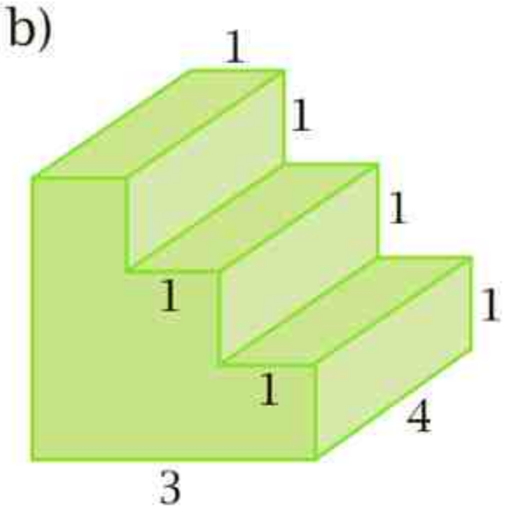
7. Na zdjęciu obok widoczny jest wykonany z betonu element pewnej budowli. Jeden metr sześcienny betonu waży 2400 kg (po zaokrągleniu do pełnych kilogramów). Oblicz masę tego elementu.

8. Oblicz objętości narysowanych graniastosłupów prostych.

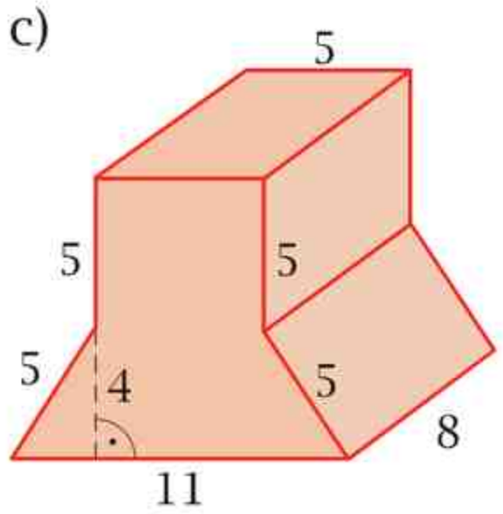
a)



b)



c)

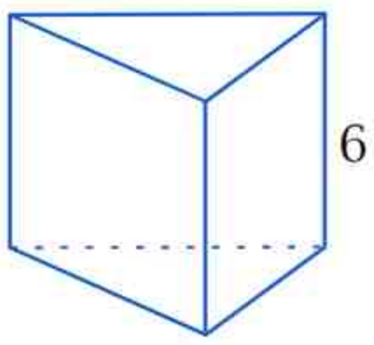


9. Podstawa graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma pole równe 100 cm^2, a pole powierzchni ściany bocznej wynosi 50 cm^2. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

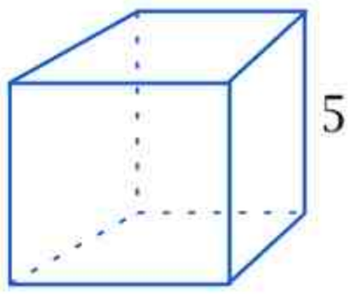
Sprawdź, czy umiesz

1. Wszystkie narysowane graniastosłupy mają taką samą objętość. Który z nich ma podstawę o największym polu?

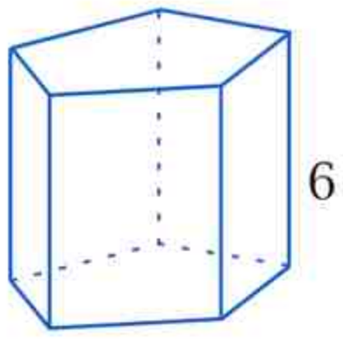
A.



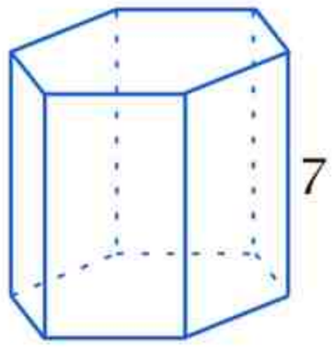
B.



C.

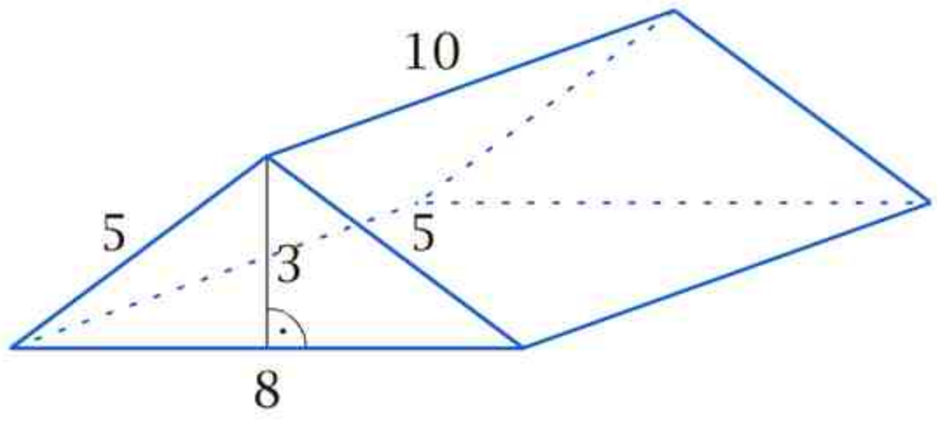


D.



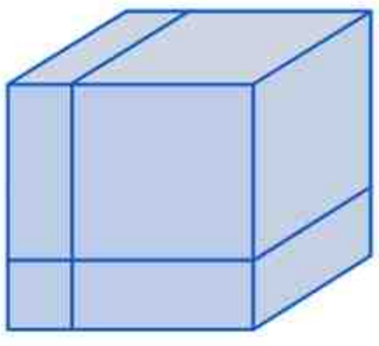
2. Jaką objętość ma przedstawiony na rysunku graniastosłup prosty?

A. 120
B. 125
C. 240
D. 250



→ zadania uzupełniające 22–27, str. 286

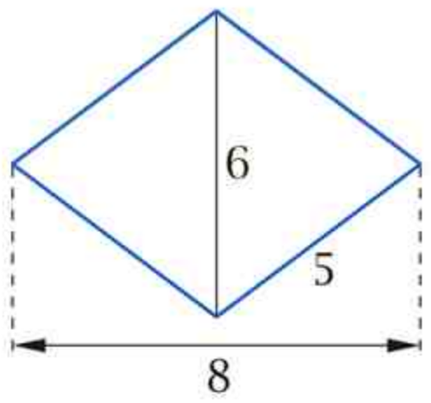
Przed klasówką

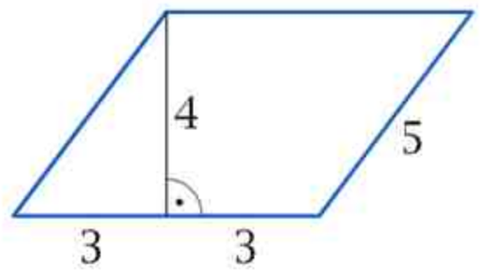


1. Sześcian o krawędzi 10 cm rozcięto na cztery prostopadłościany, tak jak na rysunku obok. Suma pól powierzchni tych czterech prostopadłościanów jest równa:

A. $700\,cm^2$ B. $800\,cm^2$ C. $1000\,cm^2$ D. $1200\,cm^2$

2. Dwa graniastosłupy proste czworokątne mają taką samą wysokość równą 5. Ich podstawami są romb oraz równoległobok przedstawione na rysunkach obok.





Czy pola powierzchni całkowitej tych graniastosłupów są równe? Wybierz odpowiedź „tak” lub „nie” oraz jej uzasadnienie spośród zdań od A do D.

Ⓘ Tak, ponieważ… Ⓘⓘ Nie, ponieważ…

A — …graniastosłupy mają tę samą wysokość, a ich podstawy mają równe pola.

B — …w obu graniastosłupach podstawy są równoległobokami, a ściany boczne są przystającymi prostokątami.

C — …podstawy mają równe pola i różne obwody.

D — …podstawy mają równe obwody i różne pola.

3. Pewna firma sprzedaje mleko w prostopadłościennych kartonach o wymiarach (wewnętrznych) $19\,cm \times 9\,cm \times 6\,cm$. Karton zawiera 1 litr mleka. Jaka jest objętość pustej przestrzeni w kartonie po wlaniu do niego 1 litra mleka?

A. 13 ml B. 19 ml C. 26 ml D. 54 ml

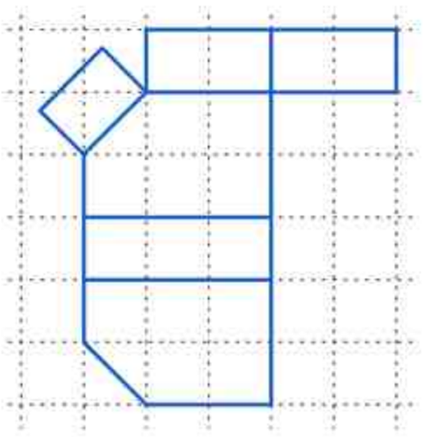
4. Odpowiedz na pytania.

a) W wiadrze mieści się 12 litrów wody. Ile to centymetrów sześciennych?

b) Cysterna do przewozu mleka ma pojemność $25\,m^3$. Ile to litrów?

c) Butelka zawiera $0{,}2\,dm^3$ szamponu. Ile to mililitrów?

5. Przerysuj rysunek przedstawiony obok i dorysuj brakującą ścianę tak, aby powstała siatka graniastosłupa prostego. Oblicz objętość tego graniastosłupa. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.

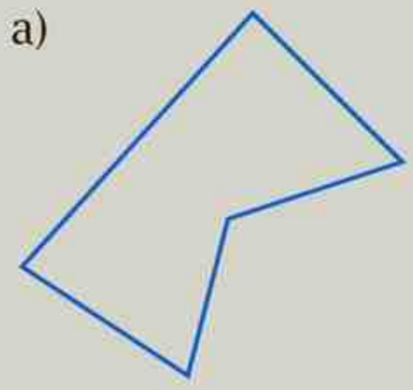


Zadania uzupełniające

Przykłady graniastosłupów

1. Na rysunku przedstawione są podstawy graniastosłupów. Ustal, ile ścian i ile krawędzi mają graniastosłupy, których jedna z podstaw przedstawiona jest na rysunku.

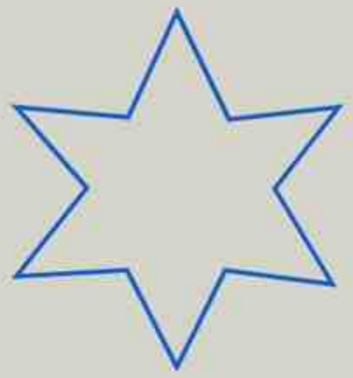
a)



b)



c)



2. Czy graniastosłup może mieć:

a) 21 krawędzi i 9 ścian bocznych,

b) 30 wierzchołków i 60 krawędzi,

c) 36 wierzchołków i 18 ścian bocznych?

3. Ściana boczna pewnego graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego jest prostokątem o wymiarach $5\,\text{cm} \times 7\,\text{cm}$. Ile wynosi suma długości krawędzi tego graniastosłupa? Rozpatrz dwa przypadki.

4. Oblicz sumę długości krawędzi graniastosłupa prawidłowego ośmiokątnego, w którym krawędź podstawy ma długość 6, a krawędź boczna jest 2 razy dłuższa.

5. Suma długości krawędzi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 336. Krawędź boczna jest o 2 dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz obwód podstawy tego graniastosłupa.

6. Zastanów się, czy zawsze graniastosłup prosty jest graniastosłupem prawidłowym, jeżeli:

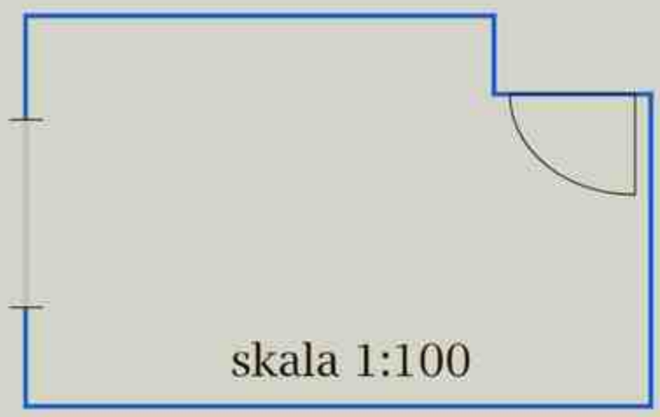
a) dwie ściany są przystającymi kwadratami,

b) wszystkie krawędzie podstawy mają jednakową długość,

c) ściany boczne są przystającymi prostokątami.

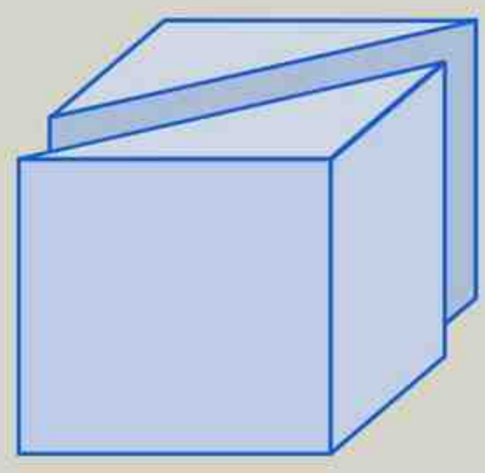
Siatki graniastosłupów. Pole powierzchni

7. Rysunek przedstawia plan pokoju. Ściany i sufit pokoju trzeba pomalować farbą, której 1 litr wystarcza na $6\,\text{m}^2$ powierzchni. Pokój ma wysokość 2,5 m, a okna i drzwi zajmują ok. $3\,\text{m}^2$. Ile litrowych puszek farby należy kupić?



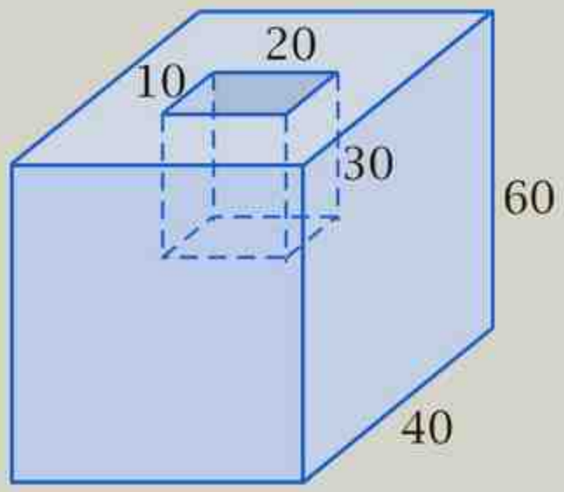
8. Dwa graniastosłupy proste czworokątne mają taką samą wysokość. Podstawą jednego z nich jest kwadrat, a drugiego romb, który nie jest kwadratem. Obwody obu podstaw są równe. Który graniastosłup ma większe pole powierzchni?

9. Sześcian o krawędzi 8 cm rozcięto na dwa graniastosłupy trójkątne w sposób przedstawiony na rysunku. Narysuj siatkę jednej z otrzymanych brył.



10. Suma długości wszystkich krawędzi każdego z trzech graniastosłupów prawidłowych: trójkątnego, czworokątnego i sześciokątnego jest równa 36 cm. Wszystkie krawędzie każdej z tych brył mają jednakową długość. Który z tych graniastosłupów ma największe pole powierzchni bocznej?

***11.** Na poniższym rysunku przedstawiony jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, z którego wycięto prostopadłościan. Oblicz pole powierzchni całkowitej otrzymanej w ten sposób bryły.



Objętość prostopadłościanu. Jednostki objętości

12. Wyraź objętości we wskazanej jednostce.

a)	[l]	14 dm^3	0,24 hl	300 cm^3
b)	[m^3]	600 l	1,2 km^3	1800 dm^3
c)	[ml]	74 cm^3	0,04 l	4500 mm^3
d)	[mm^3]	2 ml	0,5 cl	0,002 dm^3
e)	[cl]	0,5 l	200 ml	350 cm^3

13. Suma długości krawędzi sześcianu wynosi 240 cm. Wyraź objętość tego sześcianu w centymetrach sześciennych i w litrach.

14. Pojemnik w kształcie prostopadłościanu ma krawędzie długości 12 cm, 15 cm, 2 cm. Ile litrów wody zmieści się w tym pojemniku?

15. Wielkość opadów deszczu opisuje się, podając grubość warstwy wody, jaka zebrałaby się na powierzchni ziemi, gdyby woda nie wsiąkała. Oblicz, ile litrów wody spadło na 1 m^2 powierzchni, podczas opadów o wielkości 1 cm.

16. Standardowa zapałka ma wymiary 43 mm × 2,2 mm × 2,2 mm, a pudełko zapałek 53 mm × 36 mm × 16 mm. Czy w pudełku zmieści się 100 zapałek?

17. a) W basenie znajduje się 450 hl wody. Ile litrów wody należy dolać, aby ilość wody w basenie zwiększyła się o 20%?



b) Do 1 dm^3 soku w dzbanku dolano 200 cm^3 tego soku. O ile procent zwiększyła się ilość soku w dzbanku?

c) Z naczynia zawierającego 20 cl mleka odlano 30 ml mleka. Jaki procent mleka pozostał w naczyniu?

18. Z nieszczelnego kranu co 2 sekundy spada kropla wody. Każda kropla ma objętość 200 mm^3. Ile litrów wody wycieknie z tego kranu w ciągu doby?

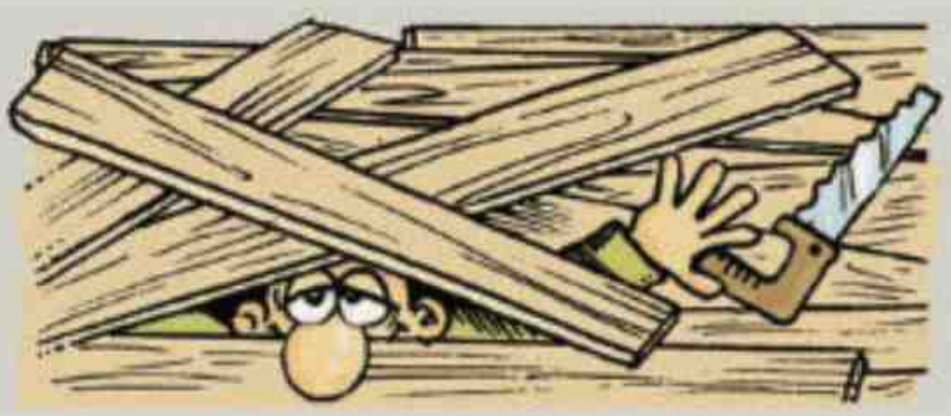


19. Jak zmieni się objętość prostopadłościanu, gdy każdy jego wymiar:

a) zwiększymy dwukrotnie,

b) zmniejszymy trzykrotnie?

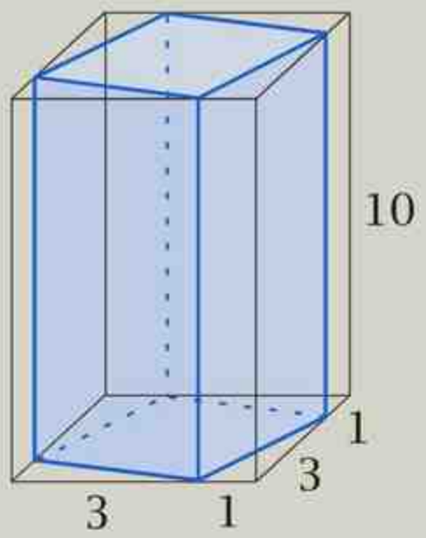
○ **20.** Deska podłogowa ma grubość 2,5 cm. Masz do dyspozycji 3 m^3 takich desek. Jak dużą powierzchnię możesz nimi pokryć?



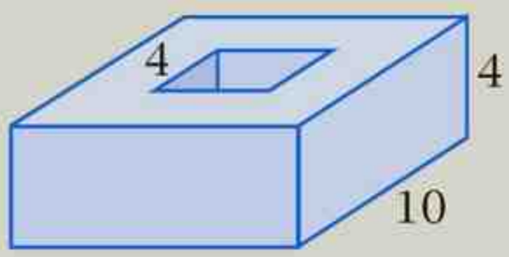
***21.** Do akwarium, którego podstawa jest prostokątem o bokach długości 20 cm i 40 cm, wlewamy 2 l wody, a następnie wkładamy metalowy klocek sześcienny o krawędzi 8 cm. Czy poziom wody podniesie się na tyle, by woda całkowicie przykryła klocek?

Objętość graniastosłupa

22. Od graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 10 i krawędzi podstawy długości 4 odcięto cztery jednakowe graniastosłupy trójkątne (zob. rysunek) i otrzymano nowy graniastosłup prawidłowy. Oblicz objętość otrzymanego graniastosłupa.

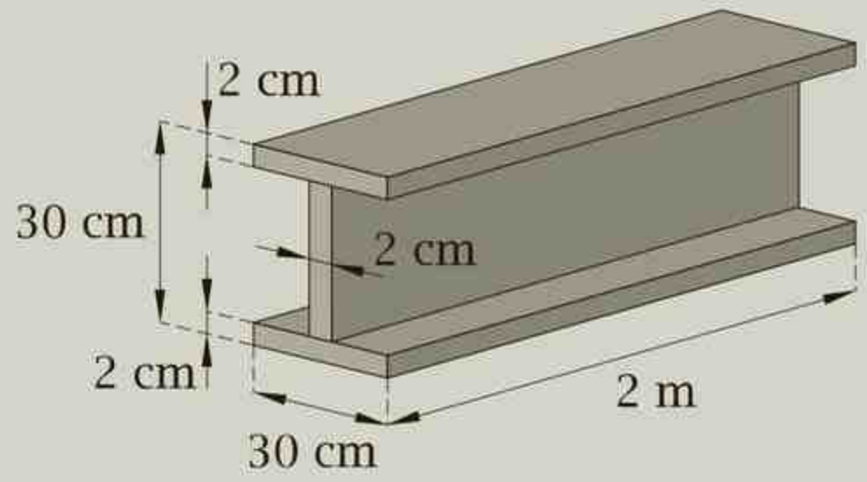


23. Z graniastosłupa prawidłowego wycięto sześcian (zob. rys.). Oblicz, jaką objętość ma otrzymana bryła.



24. Pole podstawy graniastosłupa jest równe 72 cm^2, a jego wysokość wynosi 12 cm. O ile centymetrów należy zwiększyć wysokość tego graniastosłupa, aby jego objętość wzrosła o 20%?

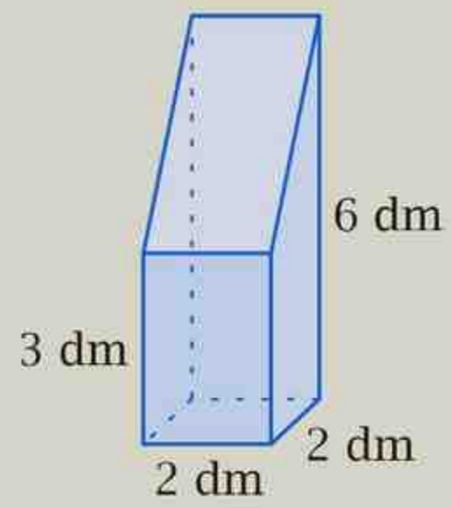
25. W budownictwie stosowane są belki stalowe, które mają kształt graniastosłupów o różnych podstawach. Na poniższym rysunku przedstawiono jedną z takich belek.



a) Oblicz jej objętość.

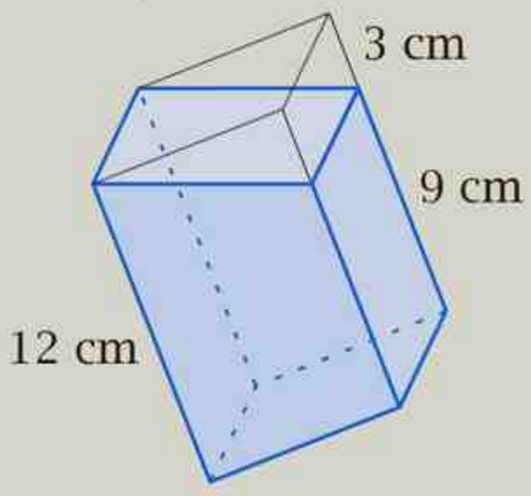
b) Oblicz jej masę, wiedząc, że 1 cm^3 stali, z której jest wykonana, waży 7,5 g.

26. Z prostopadłościennego klocka o wymiarach 2 dm × 2 dm × 6 dm wycięto bryłę przedstawioną na rysunku. Jaką objętość ma ta bryła?

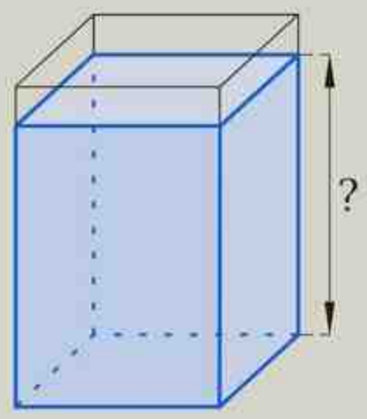


○ **27.** Prostopadłościenne naczynie wypełniono wodą. Po przechyleniu naczynia w sposób przedstawiony na rys. 1 część wody się wylała. Do jakiej wysokości będzie sięgać woda po ponownym postawieniu naczynia na stole (zob. rys. 2)?

rys. 1



rys. 2



VIII STATYSTYKA

1 Odczytywanie danych statystycznych

2 Co to jest średnia?

3 Zbieranie i opracowywanie danych statystycznych

4 Zdarzenia losowe

↘ Przed klasówką, s. 314

↘ Zadania uzupełniające, s. 316

1 Odczytywanie danych statystycznych

Przeciętna długość życia kobiet w Polsce wynosiła w 1950 roku 64 lata, a mężczyzn 59 lat. W roku 2013 średnia długość życia kobiet wynosiła 81 lat, a mężczyzn 73 lata.

Spośród obywateli polskich wyjeżdżających za granicę w 2014 roku około 23% wyjechało do Grecji, 21% do Egiptu, a 15% do Turcji.

W 2014 roku w Polsce na tysiąc mieszkańców 670 korzystało z dostępu do internetu, w Indiach tylko 190, a w Kanadzie – aż 930.

Aby zebrać powyższe dane, trzeba było przeanalizować wiele informacji. Statystyka to nauka, która zajmuje się zbieraniem i opracowywaniem tego typu danych.

Dane statystyczne można przedstawiać w rozmaity sposób. W poniższej tabeli zebrano informacje dotyczące liczby uczniów w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych w pewnym mieście.

Rodzaj szkoły	Liczba dziewcząt	Liczba chłopców	RAZEM
Szkoła Podstawowa nr 1 (SP1)	293	270	563
Szkoła Podstawowa nr 2 (SP2)	148	151	299
Liceum Ogólnokształcące (LO)	364	211	575
Technikum Samochodowe (TS)	15	279	294
Technikum Odzieżowe (TO)	238	53	291
Technikum Elektroniczne (TE)	112	369	481
RAZEM	1170	1333	2503

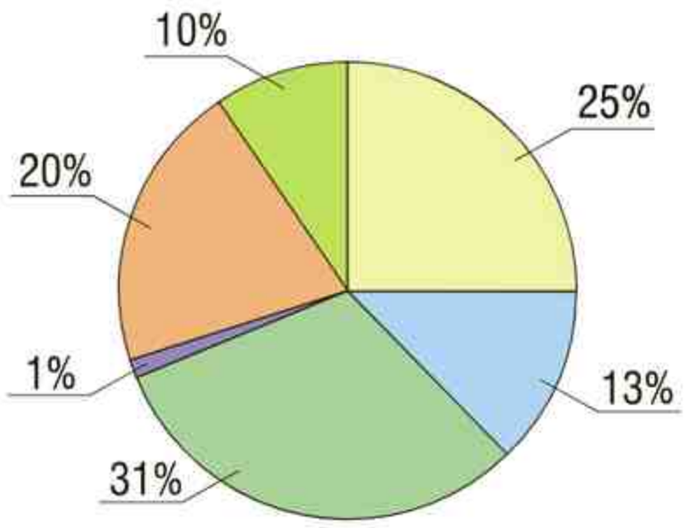
Informacje te można przedstawić za pomocą różnego rodzaju diagramów słupkowych.

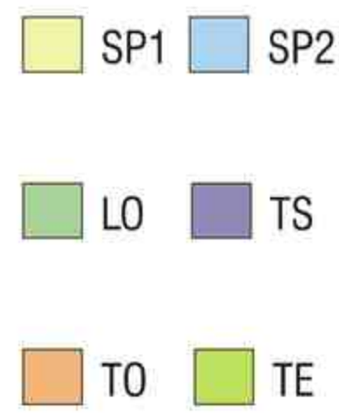
A

B

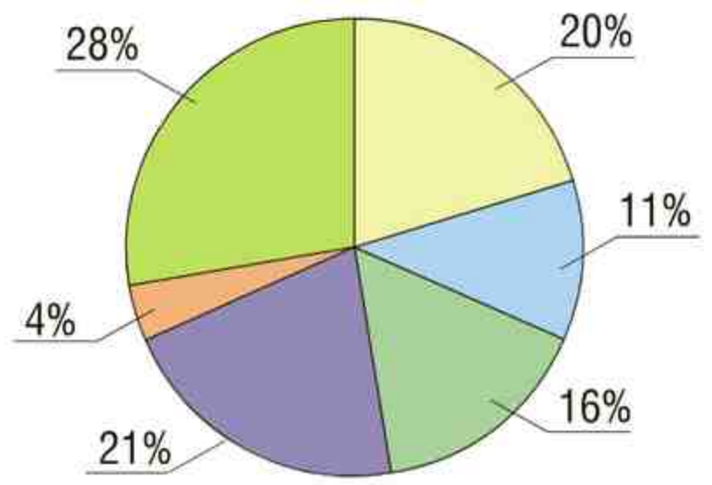
Dane o uczniach można także zilustrować za pomocą diagramów kołowych (procenty podano w zaokrągleniu).

Ⓒ **Dziewczęta (łącznie 1170)**

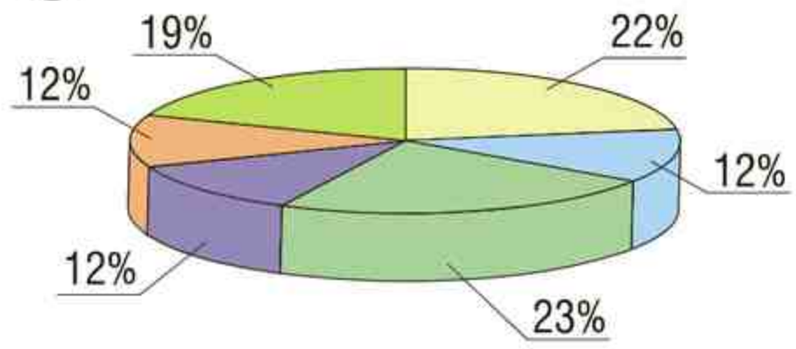




Ⓓ **Chłopcy (łącznie 1333)**



Ⓔ **Dziewczęta i chłopcy (2503)**



ĆWICZENIE A. a) Odczytaj z tabeli:

- W której szkole jest najwięcej dziewcząt? O ile więcej jest w tej szkole dziewcząt niż chłopców?
- Ilu uczniów uczy się w szkołach podstawowych?

b) Odczytaj z diagramu Ⓐ:

- W której szkole jest najwięcej chłopców?
- W której szkole różnica między liczbą dziewcząt a liczbą chłopców jest najmniejsza?

c) Odczytaj z diagramu Ⓑ:

- W których szkołach jest więcej niż 500 uczniów?
- W których szkołach dziewczęta stanowią więcej niż połowę uczniów?

d) Odczytaj z diagramów Ⓒ i Ⓓ:

- Czy uczennice szkół podstawowych stanowią więcej czy mniej niż połowę dziewcząt uczących się w szkołach podstawowych i ponadpodstawowych?
- Czy w technikach uczy się więcej chłopców niż w szkołach podstawowych?

e) Odczytaj z diagramu Ⓔ:

- Czy w Technikum Elektronicznym uczy się więcej uczniów niż w Liceum Ogólnokształcącym?
- Jaką część uczniów wszystkich szkół stanowią uczniowie szkół podstawowych?

ĆWICZENIE B. Uzasadnij, że odpowiedź na pytanie: *W której szkole jest najwięcej uczniów?* można łatwo odczytać z każdego z diagramów Ⓐ, Ⓑ i Ⓔ. Odpowiedź na to pytanie można także odczytać z diagramów Ⓒ i Ⓓ. Wyjaśnij, jak to zrobić.

Z historii

Dane statystyczne zbierano już w czasach starożytnych w Egipcie, Persji, Chinach i Rzymie. Spisy ludności wykonywano tam głównie do celów podatkowych i wojskowych. Chyba najbardziej znany jest opisany w Biblii spis ludności Cesarstwa Rzymskiego, przeprowadzony w roku narodzin Chrystusa.

W Anglii do dzisiaj przechowywana jest *Księga Sądu Ostatecznego* (*Doomsday Book*) z roku 1086. Jest to spis własności wykonany na zlecenie Wilhelma Zdobywcy. Nazwa tej księgi wywodzi się z przekonania, że dokonany w niej zapis jest tak samo decydujący, jak wyrok w dniu Sądu Ostatecznego.

W czasach nowożytnych najwcześniej regularne spisy ludności wykonywano w Szwecji (od 1749 r.). Pierwszego (niepełnego) spisu ludności w Polsce dokonano w 1777 r. Według spisu z 1790 r. liczba ludności Rzeczypospolitej wynosiła 7 660 787, z czego 2 344 020 przypadało na Wielkie Księstwo Litewskie.

Zadania

Do każdego z zadań od 1. do 9. spróbuj ułożyć jeszcze jedno pytanie.

1. Przyjrzyj się poniższej tabeli.

PRZECIĘTNE MIESIĘCZNE SPOŻYCIE NIEKTÓRYCH ARTYKUŁÓW ŻYWNOŚCIOWYCH NA 1 OSOBĘ W GOSPODARSTWACH DOMOWYCH

Artykuły żywnościowe	Gospodarstwa domowe o liczbie osób					
	1	2	3	4	5	6 i więcej
Pieczywo (w kg)	8,16	7,42	6,59	6,28	6,59	6,88
Ziemniaki (w kg)	7,73	7,66	6,74	5,93	6,54	6,85
Owoce i przetwory (w kg)	7,55	5,69	4,39	3,64	2,92	2,31
Jajka (w szt.)	18,89	17,26	13,42	12,04	11,20	10,06

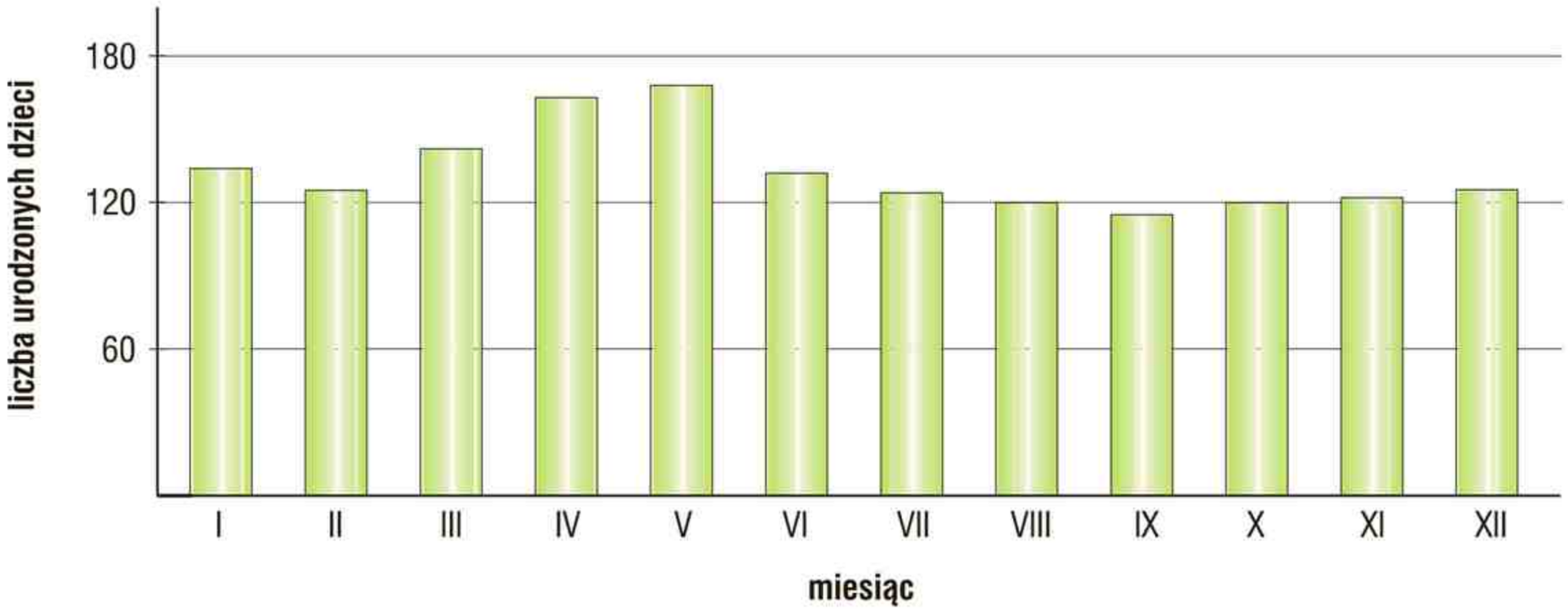
a) W iluosobowej rodzinie spożycie pieczywa na jedną osobę jest najmniejsze?

b) Z ilu osób składają się rodziny, w których spożywa się na osobę mniej pieczywa niż ziemniaków?

c) O ile kilogramów więcej owoców i ich przetworów spożywa miesięcznie osoba mieszkająca samotnie od osoby z rodziny pięcioosobowej?

d) Ile jajek miesięcznie spożywa przeciętnie pięcioosobowa rodzina, a ile kilogramów ziemniaków — rodzina trzyosobowa?

2. Diagram przedstawia liczbę dzieci urodzonych w ciągu roku w pewnym szpitalu.



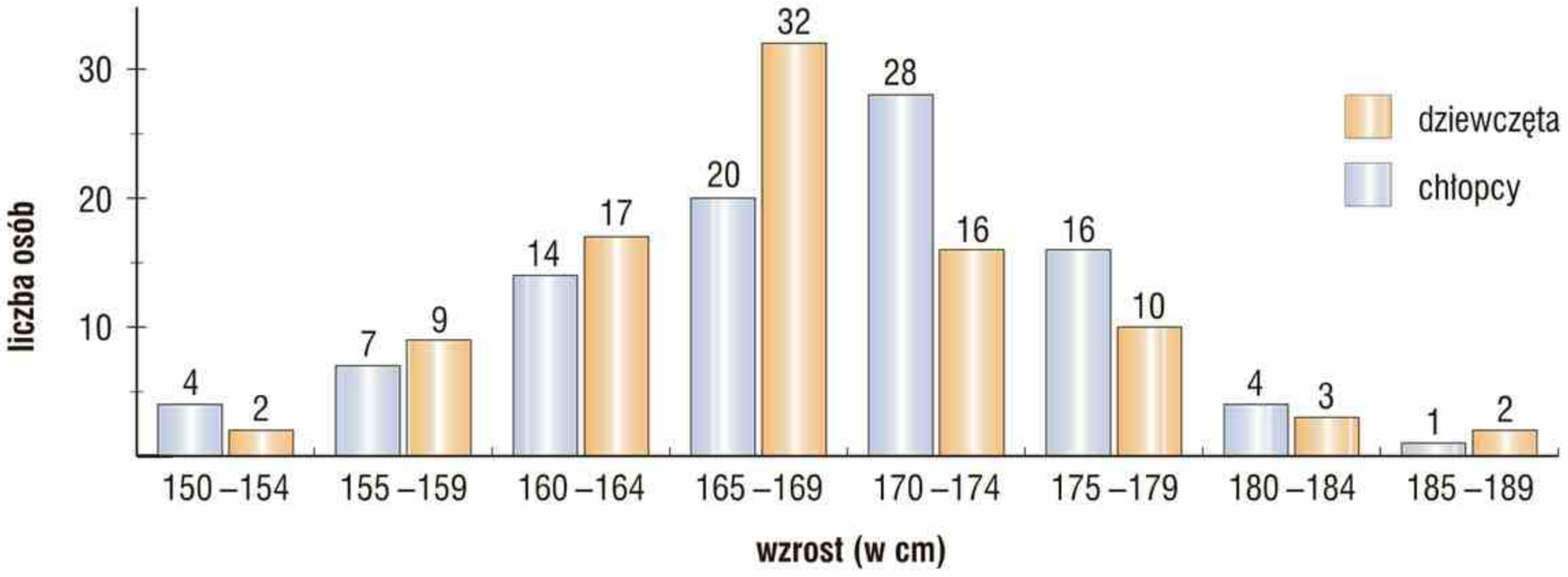
a) Ile dzieci urodziło się w sierpniu?

b) W którym miesiącu urodziło się najmniej dzieci, a w którym — najwięcej?

c) Czy więcej dzieci urodziło się w pierwszym czy w drugim półroczu?

d) Wskaż miesiące, w których urodziło się więcej dzieci niż w miesiącu poprzednim.

3. Diagram przedstawia wyniki pomiaru wzrostu pewnej liczby dziewcząt i chłopców w wieku czternastu lat.

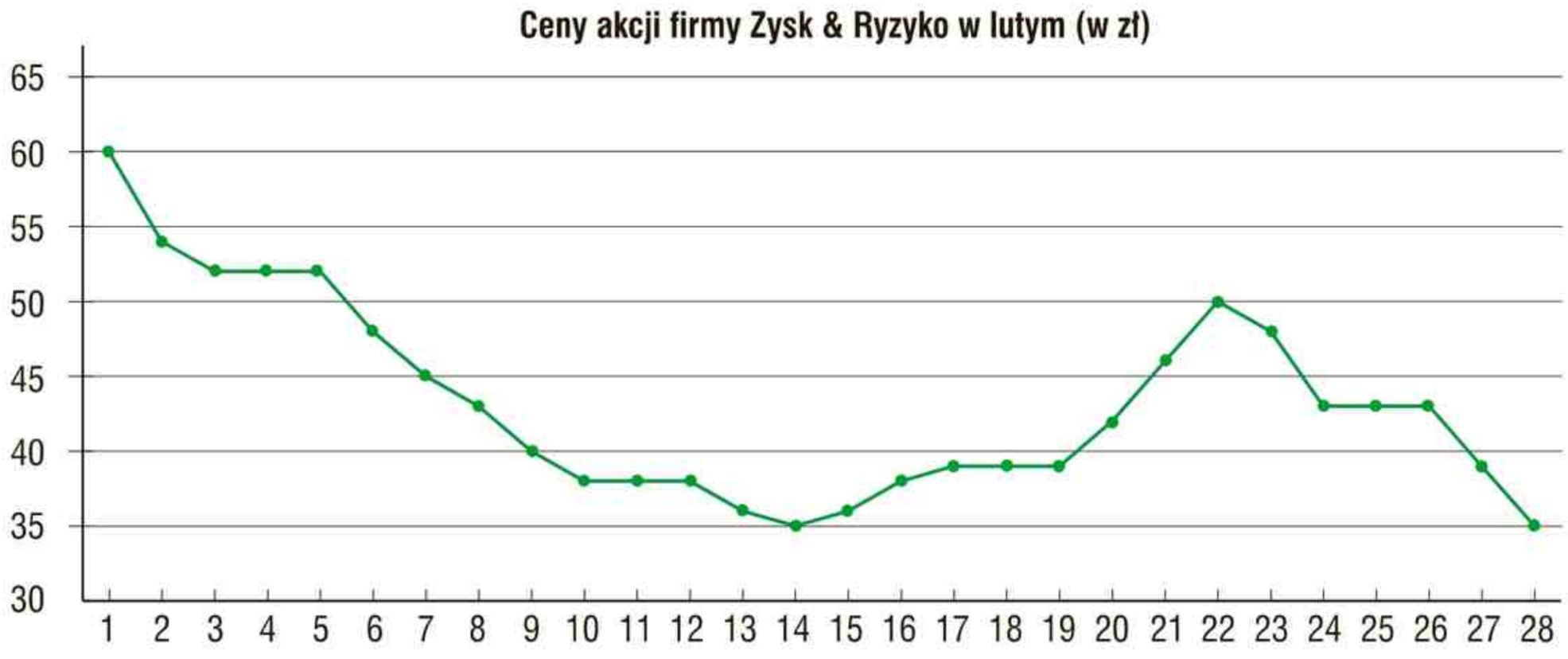


a) Ile wśród badanych czternastolatków było osób, które miały mniej niż 160 cm wzrostu?

b) Badanych podzielono na 8 grup — o wzroście 150–154 cm, o wzroście 155–159 cm, o wzroście 160–164 cm itd. W której z tych grup było najwięcej dziewcząt, a w której — najwięcej było chłopców?

c) W badaniu uczestniczyło 185 osób. Jaka część badanych miała wzrost od 160 cm do 179 cm?

4. Wykres przedstawia cenę akcji (w zł) firmy Zysk & Ryzyko w kolejnych dniach lutego pewnego roku.

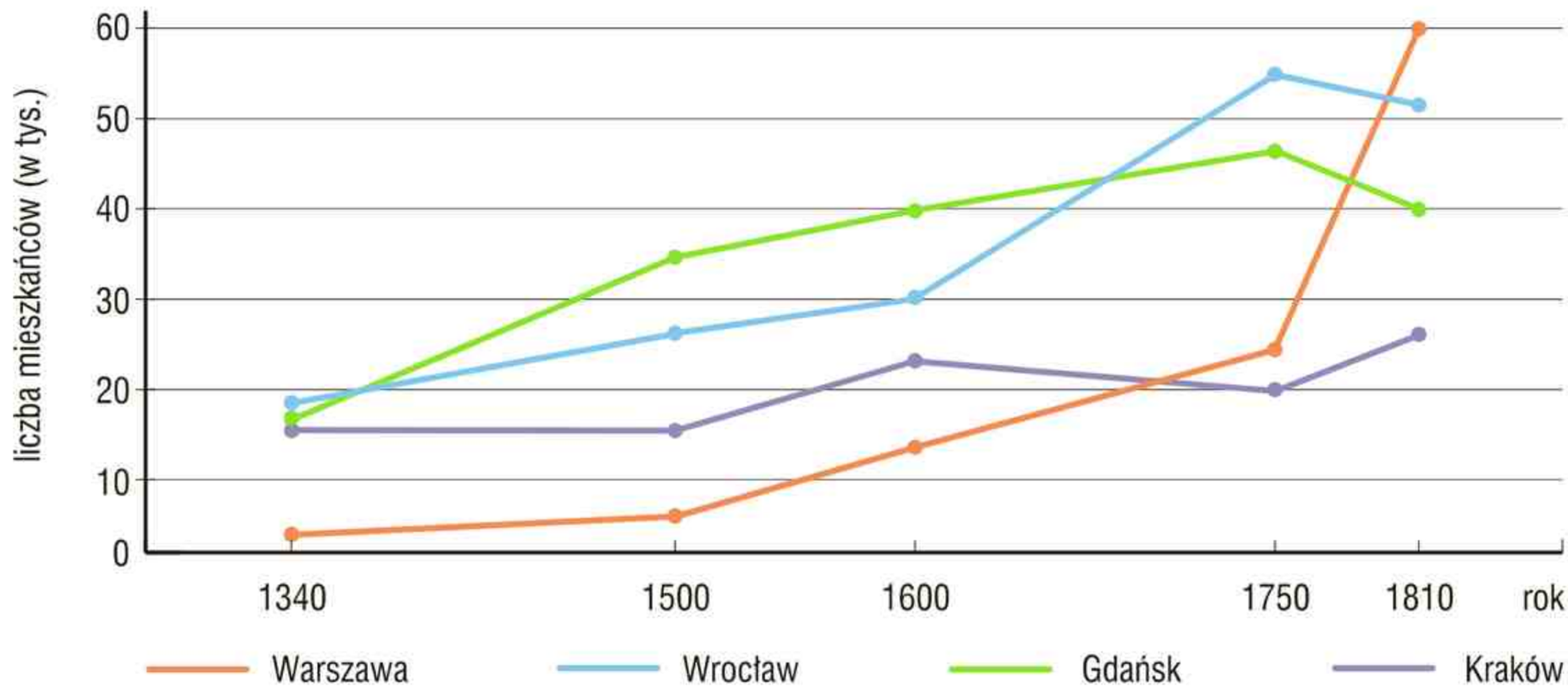


a) O ile złotych spadła w lutym wartość tych akcji?

b) W jakich dniach lutego należało kupować akcje, a w jakich je sprzedawać, aby zysk w ciągu tego miesiąca był możliwie największy?

c) W soboty i niedziele giełda jest nieczynna. Czy domyślasz się, w których dniach lutego tamtego roku były poniedziałki?

5. Na wykresach podano liczbę ludności kilku miast w różnych latach.



a) W którym roku (spośród podanych) Wrocław miał najwięcej mieszkańców?

b) O ilu więcej mieszkańców miał Gdańsk od Wrocławia w roku 1600?

c) W którym z miast między rokiem 1750 a 1810 liczba ludności rosła najszybciej?

d) Porównaj zmiany liczby ludności Krakowa i Warszawy w okresie od roku 1600 do 1750. Z czego wynikały te zmiany?

6. Diagram procentowy przedstawia wyniki wyborów prezesa stowarzyszenia Sami Swoi. Stowarzyszenie ma 800 członków.



a) Ilu członków stowarzyszenia nie wzięło udziału w głosowaniu?

b) O ilu wyborców więcej głosowało na A. Ślicznego niż na L. Wygadanego?

c) Czy L. Wygadany wygrałby wybory, gdyby przekonał do siebie połowę niebiorących udziału w głosowaniu?

d) Ile osób spośród niebiorących udziału w wyborach musiałby przekonać do siebie L. Wygadany, aby wygrać wybory?

7. W 2014 roku zdarzyło się w Polsce 34 970 wypadków drogowych, z czego 28 716 zdarzeń wynikało z winy kierujących pojazdami, a 3050 — z winy pieszych.



Na powyższym diagramie przedstawiono podział wypadków ze względu na ich przyczyny.

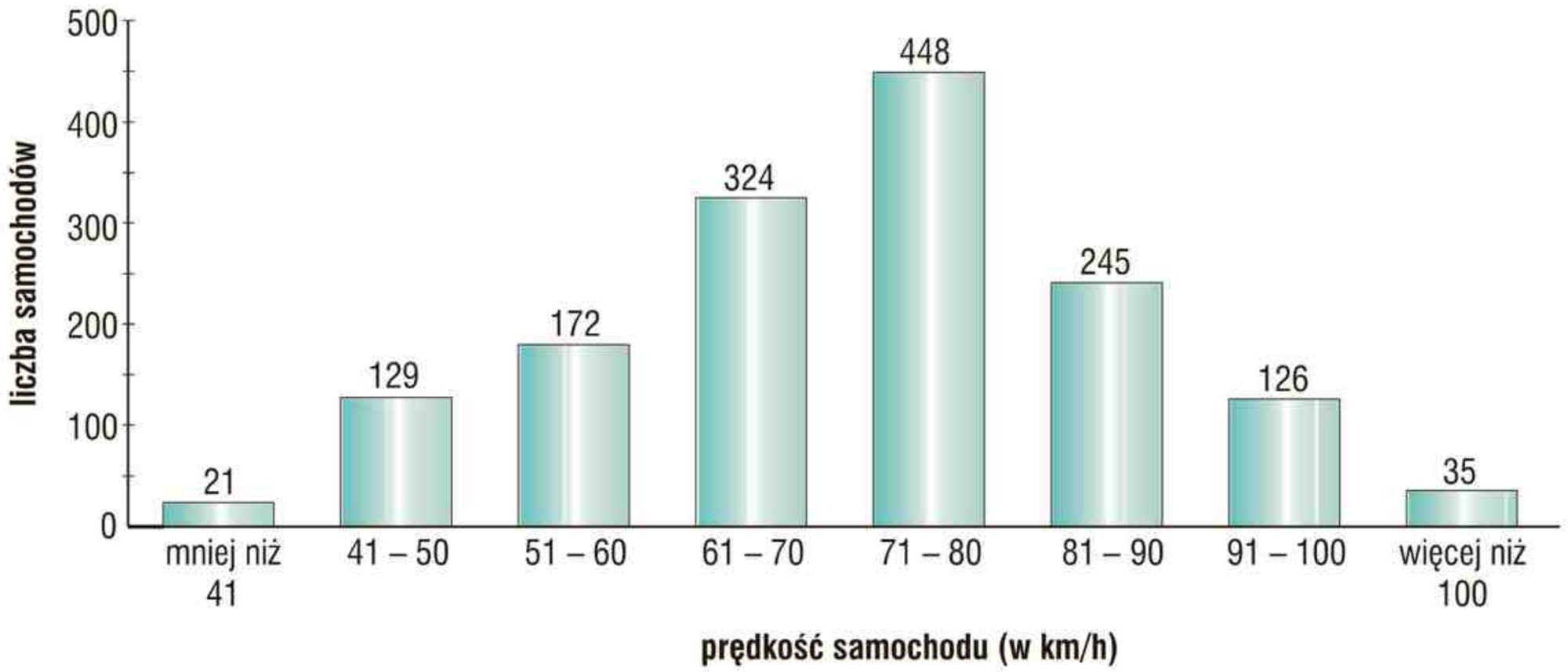
a) Jaka jest najczęstsza przyczyna wypadków?

b) Ile było wypadków, w których kierowca nie ustąpił pierwszeństwa pieszemu?

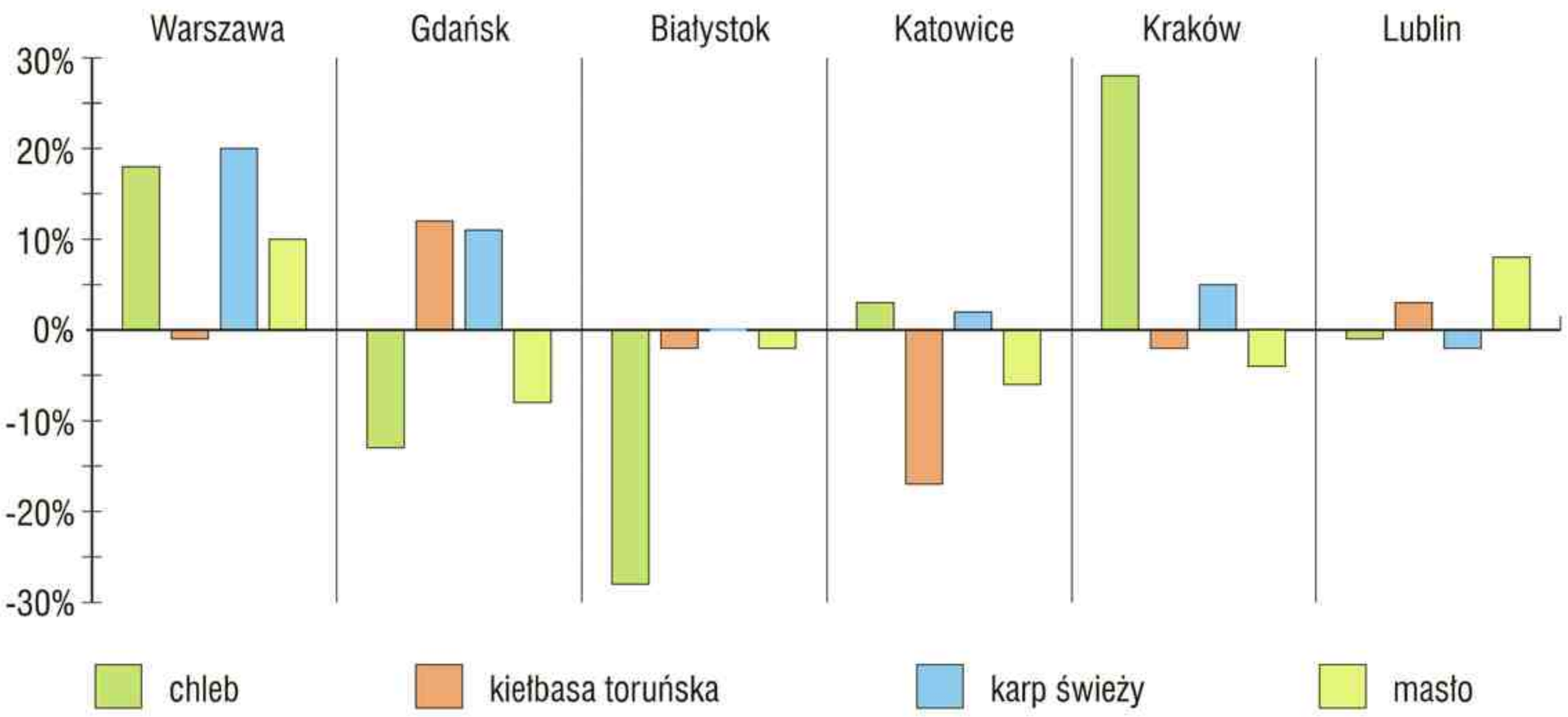
c) Jaki procent wypadków spowodowali piesi?

d) Ile wypadków spowodowanych przez kierowców stanowiły te wypadki, których przyczyną była nadmierna prędkość pojazdów?

8. Poniższy diagram przedstawia prędkości 1500 samochodów, zmierzone w pewnym punkcie drogi Warszawa — Gdańsk. Dozwolona prędkość w tym miejscu wynosiła 80 km/h. Ilu kierowców przekroczyło dozwoloną prędkość? Czy to prawda, że mniej więcej co czwarty kierowca jechał z nadmierną prędkością?



9. Diagram pokazuje, o ile procent różnią się ceny niektórych artykułów w wybranych miastach od średniej ceny w Polsce.



a) Dla każdego z artykułów wskaż miasto, w którym jest on najtańszy, i miasto, w którym jest najdroższy.

b) Porównaj ceny poszczególnych produktów w Gdańsku i Katowicach.

c) W których miastach wszystkie wymienione produkty są tańsze niż w Krakowie?

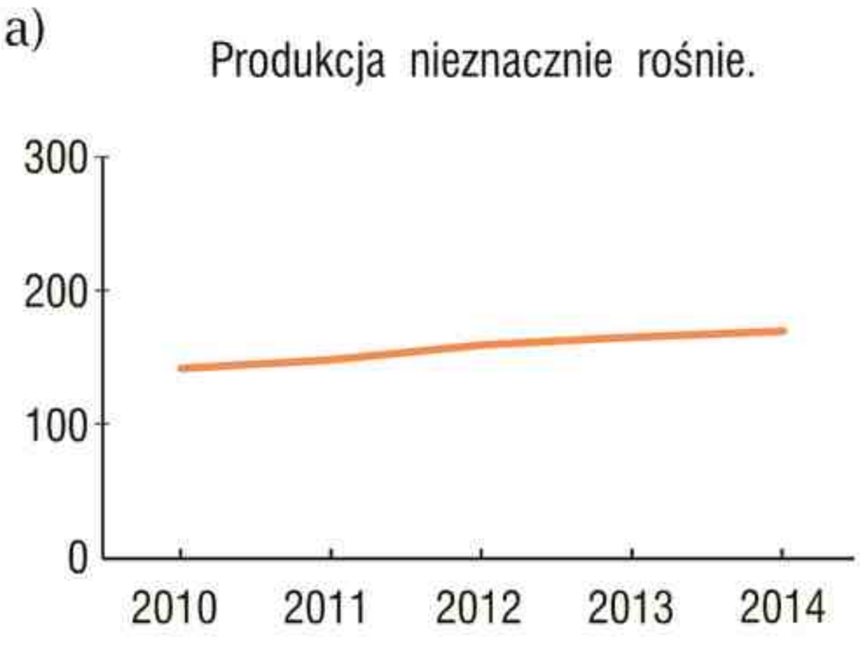
d) W którym z miast ceny wszystkich rozważanych artykułów różnią się o mniej niż 10% od średniej ceny w kraju?

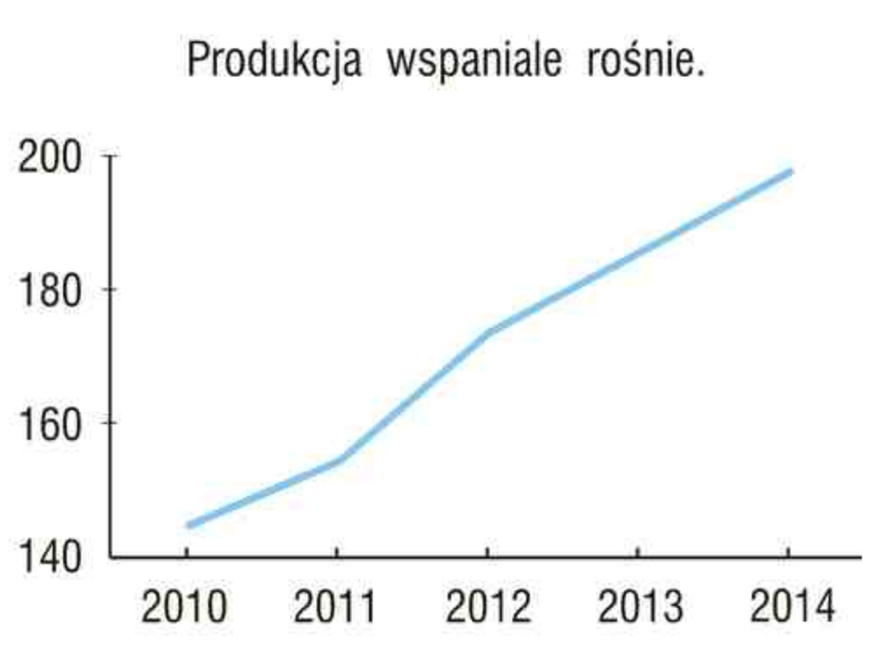
10. Weź dowolną gazetę. Odszukaj w niej i odczytaj jakieś dane liczbowe przedstawione za pomocą tabel, diagramów lub wykresów. Sformułuj kilka wniosków wynikających z tych informacji.

11. Diagramy należy czytać bardzo uważnie. Czasami sposób prezentacji danych może służyć manipulowaniu opinią publiczną.

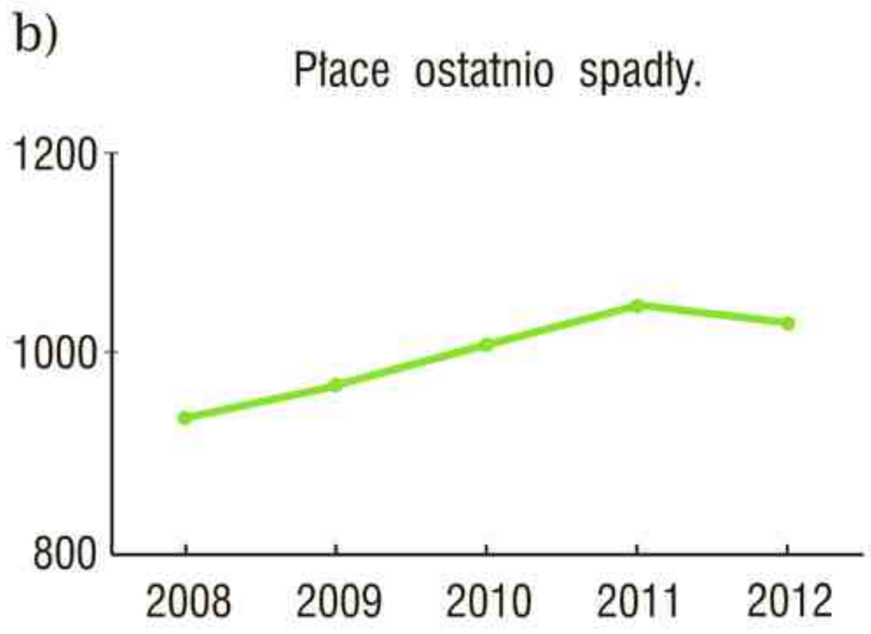
Diagram z lewej strony i diagram z prawej strony prezentują te same dane, a mimo to komentarze są różne. Przyjrzyj się dokładnie każdej parze diagramów i wyjaśnij, na czym polega manipulacja.

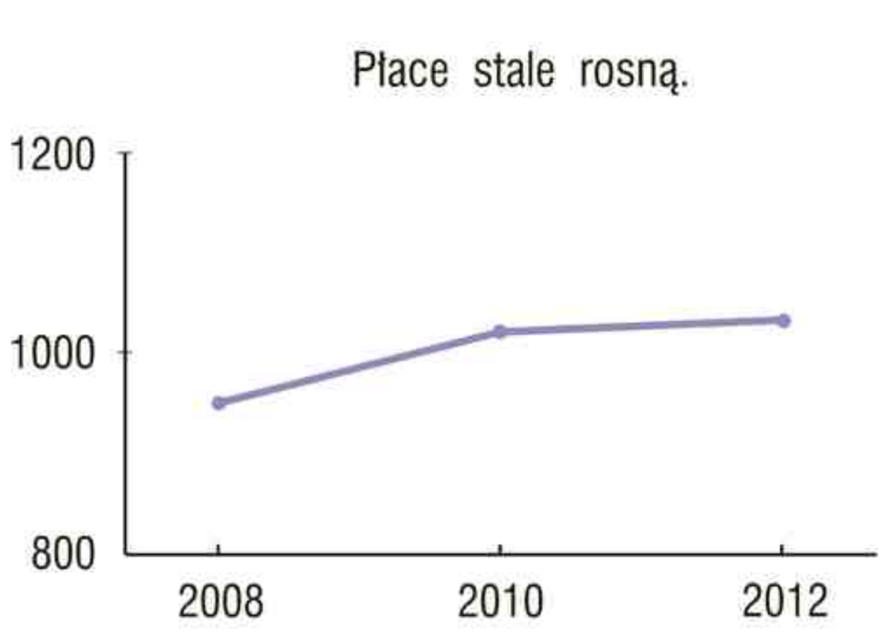
a)





b)





c)





12. Popatrz na diagram i ustal, które zdania są prawdziwe.



① Produkcja łutów szczęścia w roku 2004 wzrosła dwukrotnie w porównaniu z poprzednim rokiem.

② Produkcja łutów szczęścia w roku 2005 była o 20% wyższa niż w roku 2003.

③ W 2005 roku wyprodukowano o 25% łutów szczęścia mniej niż w roku poprzednim.

④ W 2003 roku produkcja łutów była o 25% mniejsza niż w roku 2005.

Ciekawostka

WZROST UCZNIÓW KLASY 7a
(w cm)

15	7 7 8 9
16	1 2 2 2 5 5 6 7 7 8 9
17	0 0 3 3 4 5 5 6 8
18	0 2

pierwsze dwie cyfry — ostatnia cyfra

Niektóre zestawy danych można przedstawić za pomocą tzw. tabeli łodygowo-listkowej, która pozwala w prosty sposób zarówno odczytywać, jak i porównywać dane. Obok podano przykład takiej tabeli.

Zapisano w niej, że uczniowie klasy 7a od najniższego do najwyższego mają wzrost: 157 cm, 157 cm, 158 cm, 159 cm, 161 cm, …, 180 cm, 182 cm.

Z tabeli tej można odczytać na przykład, że:
- trzech uczniów ma 162 cm wzrostu,
- uczniów o wzroście od 160 cm do 169 cm jest więcej niż uczniów o wzroście od 170 do 179 cm,
- większość uczniów ma poniżej 170 cm wzrostu.

11	7 9
12	2 2 5
13	0 1 1 2 6
14	3 4 4 6
15	3 7
16	5

13. W tabeli łodygowo-listkowej przedstawiono wyniki (w cm) szkolnych zawodów skoku wzwyż chłopców.

a) Jaki był najsłabszy wynik?

b) Jakie były rezultaty trzech najlepszych zawodników?

c) Ilu chłopców brało udział w zawodach?

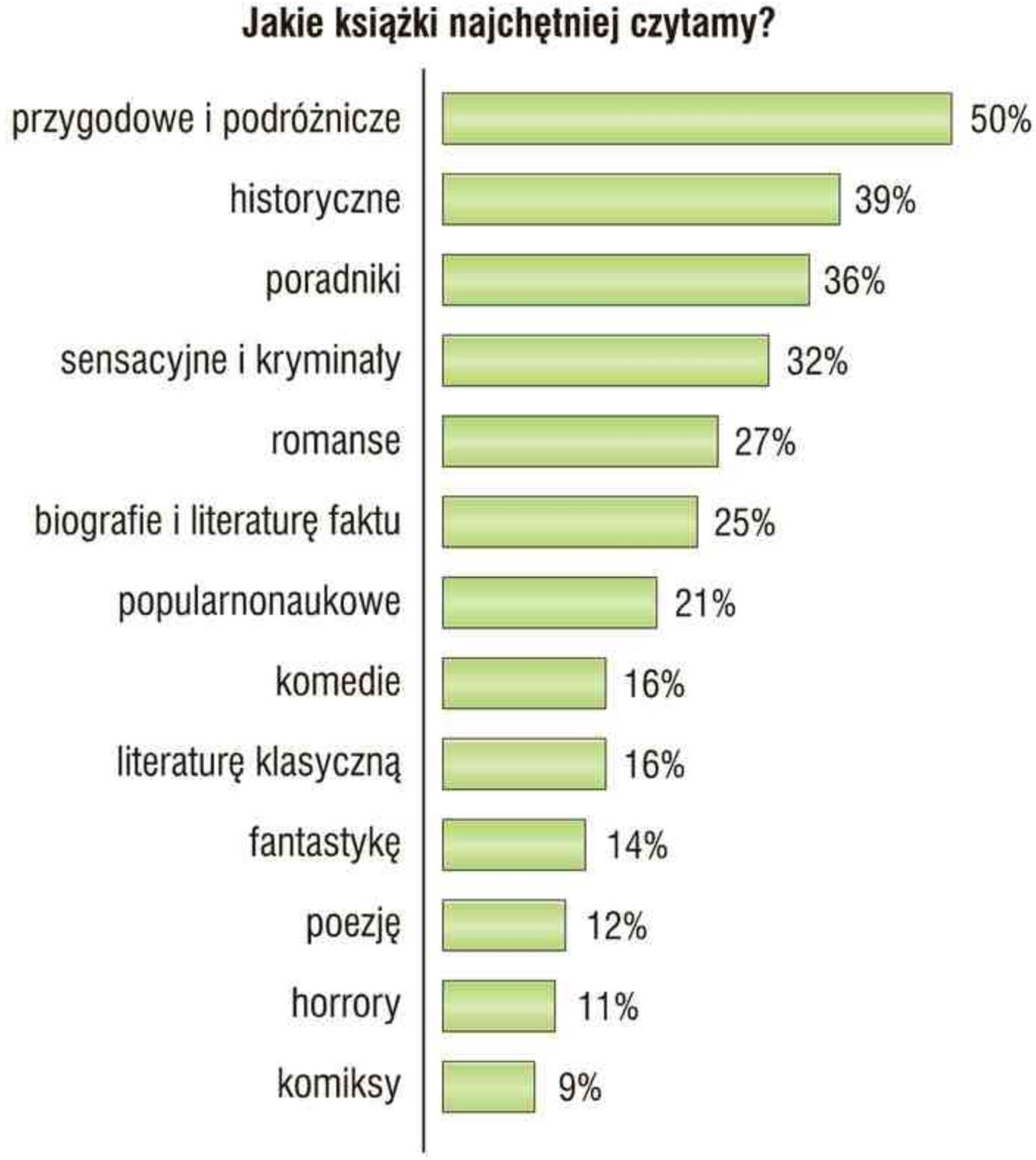
d) Ilu uczniów skoczyło wyżej niż 145 cm?

14. Obok podano wagę 30 ziaren fasoli (w gramach). Odczytaj, ile spośród ważonych ziaren miało wagę większą niż 1,29 g i jednocześnie mniejszą niż 1,59 g.

1,0	6 8
1,1	3 5 8
1,2	2 2 6 7 8
1,3	0 4 5 8 8 9
1,4	2 3 3 4 4 4 5 7 9
1,5	0 2 2 4
1,6	1

15. Z pewnego badania przeprowadzonego przez Centrum Badania Opinii Społecznej na reprezentatywnej próbie osób wynika, że aż 32% dorosłych Polaków nie czyta żadnych książek.

Na diagramie przedstawiono, jakie książki czytają ci Polacy, którzy deklarują, że w ogóle książki czytają. Osoby badane odpowiadały również na pytanie, czy w ciągu ostatniego miesiąca przeczytały jakąś książkę. 72% wszystkich badanych odpowiedziało „nie".



a) Czy to prawda, że jest ponad 2 razy więcej Polaków, którzy deklarują, że czytają książki, niż tych, którzy w ogóle nie czytają?

b) Czy badani, wskazując rodzaj czytanych książek, mogli wybrać więcej niż jedną odpowiedź?

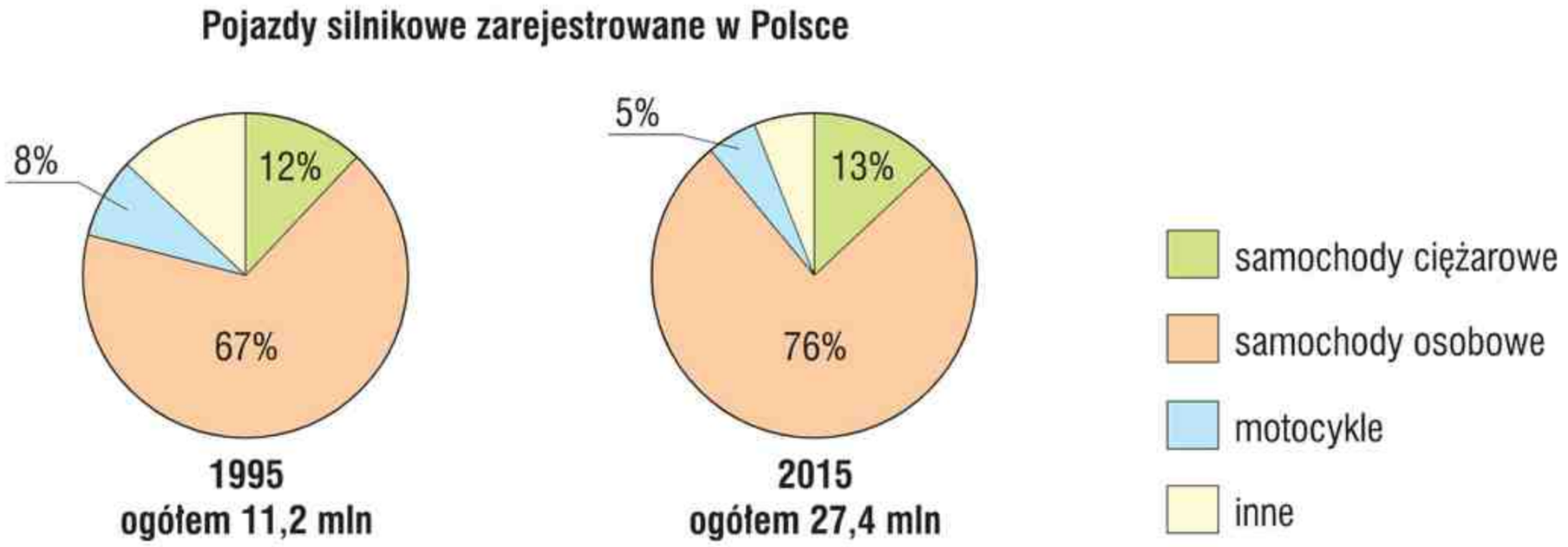
c) Czy z przedstawionego diagramu wynika, że wśród osób czytających książki przygodowe i podróżnicze są też tacy, którzy czytają książki historyczne lub popularnonaukowe?

d) Jaki procent wszystkich badanych stanowią osoby, które chętnie czytają książki przygodowe i podróżnicze?

e) Czy więcej jest tych dorosłych Polaków, którzy nie czytają książek, czy tych, którzy czytają książki sensacyjne i kryminały?

f) Jaki procent badanych przeczytało jakąś książkę w ciągu miesiąca poprzedzającego badanie? Jaka to część tych, którzy zadeklarowali się jako czytający?

Sprawdź, czy umiesz



1. Korzystając z informacji przedstawionych na diagramach, oblicz w przybliżeniu, o ile procent większa była liczba zarejestrowanych w Polsce motocykli w roku 2015 w porównaniu z rokiem 1995.

A. o ok. 35% B. o ok. 53% C. o ok. 65% D. o ok. 47,4%

W tabeli przedstawiono liczbę wypadków na drogach krajowych w latach 2012 i 2015. Skorzystaj z tych informacji, rozwiązując zadania 2 i 3.

Miesiąc	2012 r.	2015 r.
I	478	382
II	431	409
III	329	484
IV	512	402
V	555	438
VI	600	538
VII	719	582
VIII	676	607
IX	709	547
X	688	549
XI	573	502
XII	525	577
Razem	6795	6017

2. Ile było miesięcy w 2015 roku, w których na drogach krajowych zdarzało się przeciętnie więcej niż 18 wypadków dziennie?

A. cztery C. sześć
B. pięć D. dwanaście

3. Które zdanie nie jest prawdziwe?

A. Liczba wypadków na drogach krajowych w 2012 roku była o prawie 13% większa niż w roku 2015.

B. W październiku 2015 roku liczba wypadków na drogach krajowych była o ponad 20% mniejsza w porównaniu do października 2012 roku.

C. W sierpniu 2015 roku wypadków było ponad 1,5 raza więcej niż w kwietniu.

D. W miesiącu, w którym w 2012 roku było najwięcej wypadków, było również najwięcej wypadków w roku 2015.

→ zadania uzupełniające 1–3, str. 316

2 Co to jest średnia?

W tabelach przedstawiono oceny na koniec roku z matematyki w dwóch klasach.

KLASA VII A

numer ucznia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ocena	2	4	3	4	4	6	2	4	3	4	3	5	4	5	4	4	3	4	6	5

KLASA VII B

numer ucznia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
ocena	3	4	3	3	4	5	3	4	6	2	3	3	2	3	4	2	6	4	4	3	3	5	4	4	5

Patrząc na tabele, trudno stwierdzić, która z tych klas ma lepsze wyniki. Aby porównać poziom klas, najczęściej liczy się średnią arytmetyczną ocen.

$$\text{średnia ocen} = \frac{\text{suma ocen}}{\text{liczba ocen}}$$

Średnia ocen klasy VII a wynosi:

$$\frac{79}{20} = 3{,}95$$

Średnia ocen klasy VII b wynosi:

$$\frac{92}{25} = 3{,}68$$

Obliczyliśmy, że klasa VII a ma wyższą średnią ocen z matematyki.

ĆWICZENIE. Oblicz, jaka byłaby średnia ocen w klasie VII a, gdyby jeden z uczniów otrzymał ocenę o stopień wyższą.

Obliczmy średnią ocen z matematyki w obu tych klasach razem. Wynosi ona:

$$\frac{79+92}{20+25} = 3{,}80$$

Zauważ, że nie można obliczać średniej ocen w klasach siódmych, dodając średnią klasy VII a oraz klasy VII b i dzieląc otrzymany wynik przez 2 (otrzymalibyśmy wtedy ok. 3,82). Takie postępowanie to częsty błąd przy obliczaniu średniej dwóch lub więcej zestawów danych.

Zadania

1. Test z matematyki pisało 15 osób. Liczby zdobytych punktów były następujące: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 10, 11, 12. Oblicz średnią arytmetyczną zdobytych punktów.

2. W tabeli podano wagi (w kg) uczniów pewnej klasy. Oblicz średnią wagę dziewcząt, średnią wagę chłopców oraz średnią wagę wszystkich uczniów.

Dziewczęta	54	53	56	48	57	55	57	62	64	58	65	51	54	52	59
Chłopcy	58	62	67	65	64	68	70	67							

3. Korzystajac z tabeli obok, ustal, jaka jest średnia ocen z matematyki w klasie VII a.

OCENY Z MATEMATYKI KLASY VII a

Ocena	Liczba ocen
celujący	1
bardzo dobry	4
dobry	11
dostateczny	13
dopuszczający	3
niedostateczny	0

4. Ala oraz jej 21 koleżanek i kolegów pisali test z języka angielskiego. Można było zdobyć co najwyżej 44 punkty. Średni wynik piszących ten test to 28 punktów. Nikt nie napisał poniżej średniej. Ile punktów otrzymała Ala?

5. W tabeli przedstawiono, jak duże porcje lodów kupowali klienci cukierni pewnej soboty.

a) Ile gałek kupowano najczęściej?

b) Jaka była średnia liczba kupowanych gałek?

Liczba gałek	1	2	3	4	5
Liczba klientów	7	18	20	3	2



6. Grupie dzieci zadano pytanie: *Ile bananów zjadłaś/zjadłeś wczoraj?* Wyniki tej ankiety przedstawiono na diagramie. Ile średnio bananów zjadła każda z tych osób?

7. Ania wszystkie swoje książki trzyma na sześciu półkach. Na jednej półce jest średnio 20 książek. Ustal, jak zmieni się średnia liczba książek na półce, gdy Ania:

a) przeniesie 10 książek z najwyższej półki na najniższą,

b) na każdą półkę dołoży jeszcze po 1 książce,

c) dokupi jeszcze 12 książek i wszystkie ułoży na jednej z półek,

d) sprzeda $\frac{1}{4}$ wszystkich swoich książek.



8. Karol znalazł pięć ofert kursów przygotowujących do egzaminu na patent żeglarski. Średnia cena wynosiła 720 zł. Po pewnym czasie cena jednej z tych pięciu ofert zmniejszyła się o 50 zł. Ile teraz wynosi średnia cena rozważanych przez Karola ofert?

9. Jurek miał z matematyki cztery oceny. Średnia tych ocen to 3,5. O ile wzrosła średnia ocen, gdy Jurek otrzymał jeszcze szóstkę?



10. Zuzanna ma na świadectwie oceny z 12 przedmiotów, same czwórki i piątki. Średnia jej ocen wynosi 4,75. Ile piątek ma na świadectwie?

8/317

***11.** Średnia temperatura pierwszych dwunastu dni grudnia wyniosła 3°C, a pierwszych trzynastu dni grudnia 2°C. Jaką temperaturę zanotowano 13 grudnia?

12. a) W klubie sportowym trenują dwie drużyny koszykarzy. W jednej gra 11 zawodników o średniej wzrostu 192 cm, a w drugiej — 9 zawodników o średniej wzrostu 187 cm. Jaki jest średni wzrost wszystkich koszykarzy w tym klubie?

b) W pewnym domu są 3 klatki schodowe. W klatce A mieszkają 62 osoby, w klatce B — 54 osoby, a w klatce C — 44 osoby. Średnia wieku mieszkańców tych klatek wynosi odpowiednio 28 lat, 32 lata i 54 lata. Jaka jest średnia wieku mieszkańców całego domu?

13. W każdej z dziesięciu szklanek znajduje się średnio s mililitrów syropu. Zapisz wyrażenie algebraiczne, które przedstawia, ile średnio syropu będzie w każdej szklance, gdy:

a) do każdej szklanki dolejemy 40 ml syropu,

b) z każdej szklanki odlejemy połowę tego, co się w niej znajduje,

c) do jednej szklanki dolejemy 100 ml syropu,

d) do trzech szklanek dolejemy po 100 ml syropu,

e) do tych dziesięciu szklanek dołączymy szklankę, w której będzie 150 ml syropu,

f) do tych dziesięciu szklanek dołączymy pustą szklankę.

14. Jak dużą podwyżkę dostanie szef?



15. W firmie Biurokracja pracuje 20 osób. Dwaj niemłodzi referenci zarabiali po 1200 zł, ale zażądali, by ich pensje były równe średniej zarobków w firmie, tzn. 1500 zł. Gdy ich żądania zostały spełnione, zauważyli ze zdziwieniem, że znowu zarabiają poniżej średniej płacy w Biurokracji, mimo że żaden z pozostałych pracowników nie dostał podwyżki. Nie wzięli pod uwagę, że po zwiększeniu ich pensji wzrośnie także średnia płaca. O ile złotych mniej od nowej średniej płacy zarabiają teraz niemłodzi referenci?

***16.** Średnia wzrostu dwudziestopięcioosobowej klasy piłkarskiej 7a wynosiła 160 cm. Gdy jeden z uczniów przeszedł z tej klasy do dwudziestotrzyosobowej klasy koszykarskiej 7b, średnia wzrostu w klasie 7a obniżyła się o 1 cm, a w klasie 7b wzrosła o 0,5 cm. Jaki wzrost miał uczeń przechodzący z klasy 7a do 7b? Jaka była poprzednio średnia wzrostu uczniów klasy 7b?

Sprawdź, czy umiesz

1. W firmie pana Wacka czterech pracowników zarabia 1800 zł, sześciu 1200 zł, jeden 2100 zł, a pozostałe cztery osoby zarabiają po 1500 zł. Średnie wynagrodzenie w firmie pana Wacka wynosi:

A. 1500 zł B. 1425 zł C. 1280 zł D. 1200 zł

2. Pewien pisarz pisał opowiadanie przez 10 dni. Podczas pierwszych czterech dni powstawały średnio 4 strony dziennie. W pozostałe dni pisał średnio 5 stron dziennie. Ile stron dziennie pisał średnio ten pisarz podczas tworzenia opowiadania?

A. 4,4 B. 4,5 C. 4,6 D. 4,8

→ zadania uzupełniające 4–9, str. 317

3 Zbieranie i opracowywanie danych statystycznych

Odpowiednio opracowane dane statystyczne pozwalają zaobserwować różne prawidłowości. Dzięki statystyce możemy badać na przykład:

- jak zmieniała się przeciętna długość życia w ciągu stuleci,
- jak zmieniła się liczebność poszczególnych gatunków zwierząt,
- jaki jest związek między ilością sprzedanych papierosów a liczbą zachorowań na raka płuc,
- jakie są preferencje wyborcze obywateli,
- jakie formy wypoczynku wybierają najczęściej uczniowie,
- czy liczba zawieranych małżeństw zależy od pory roku,
- czy wyższe wykształcenie daje większą szansę zdobycia pracy,
- w jakich państwach jest największy przyrost naturalny.

Pokażemy teraz, jak zbierając i porządkując dane, można porównać języki różnych narodowości.

Wyraz w jakimś języku i jego odpowiednik w innym języku mają na ogół różną liczbę liter. Zbadaliśmy 500 pierwszych słów powieści napisanej w języku niemieckim i w jej polskim tłumaczeniu. Wyniki naszych badań przedstawione są w poniższej tabeli.

Liczba liter	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Razem
Liczba wyrazów w tekście niemieckim	0	58	123	67	52	58	24	22	17	19	15	21	8	6	4	3	3	500
Liczba wyrazów w tekście polskim	45	50	52	44	78	43	54	46	30	29	16	11	1	1	0	0	0	500

Tak opracowane dane pozwalają wyciągać różne interesujące wnioski.

- Korzystając z tej tabeli, możemy na przykład odczytać, że w tekście niemieckim w ogóle nie ma wyrazów jednoliterowych, a najwięcej jest wyrazów trzyliterowych.
- W tekście polskim były zaledwie dwa wyrazy, które miały więcej niż 12 liter, a w tekście niemieckim takich wyrazów było aż 24.

ĆWICZENIE A. Wyrazów o jakiej liczbie liter jest najwięcej w tekście polskim?

W kolejnej tabeli dane uporządkowano nieco inaczej — wyrazy podzielone zostały na kategorie.

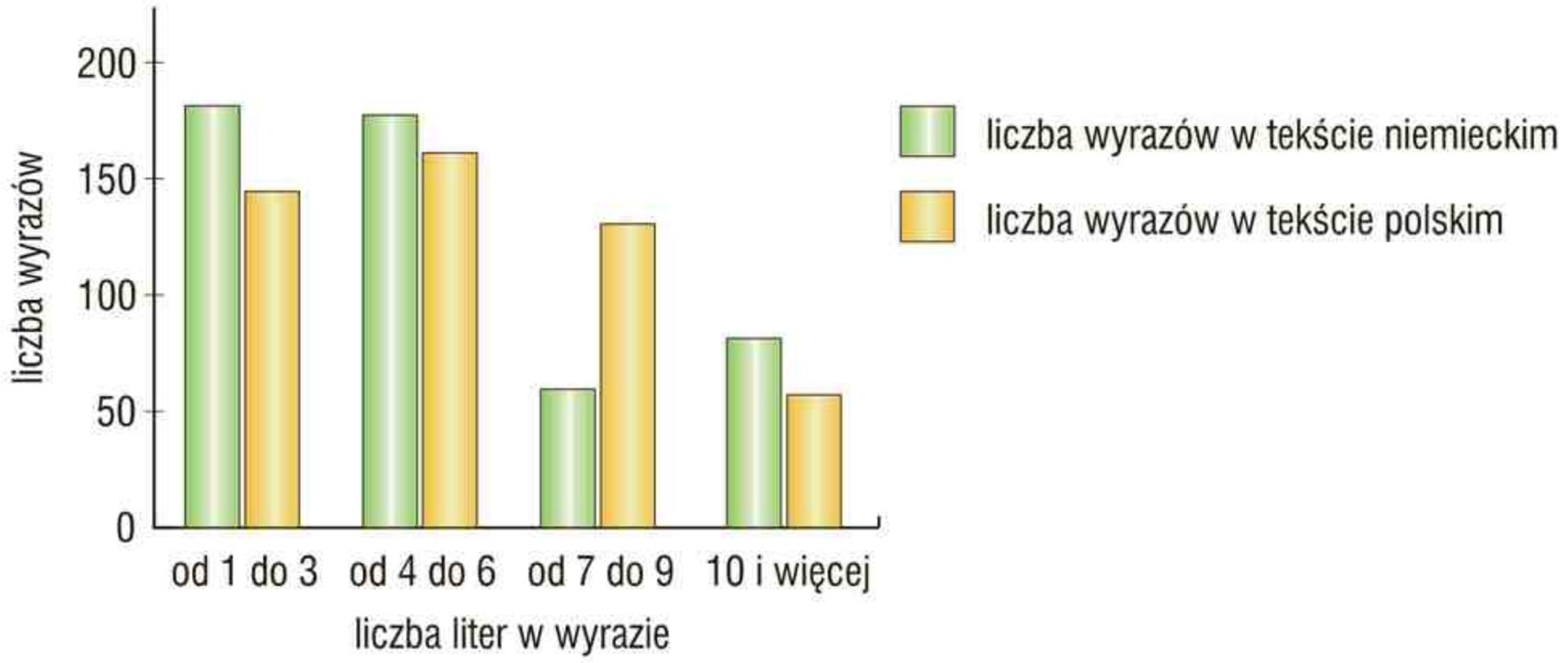
Liczba liter	od 1 do 3	od 4 do 6	od 7 do 9	10 i więcej	Razem
Liczba wyrazów w tekście niemieckim	181	177	63	79	500
Liczba wyrazów w tekście polskim	147	165	130	58	500

Z tej tabeli możemy na przykład obliczyć, jaki procent wszystkich wyrazów w tekście polskim stanowią wyrazy, które mają mniej niż cztery litery:

$$\frac{147}{500} \cdot 100\% \approx 29\%$$

ĆWICZENIE B. Oblicz, jaki procent wszystkich wyrazów w tekście niemieckim stanowią wyrazy, które mają mniej niż 4 litery.

Długości wyrazów w obu tekstach bardziej obrazowo przedstawia diagram.



Na diagramie wyraźnie widać, że długich wyrazów (dłuższych niż dziewięć liter) jest więcej w tekście niemieckim, a wyrazów, które mają od 7 do 9 liter, jest znacznie więcej w tekście polskim niż w niemieckim.

ĆWICZENIE C. W której z czterech wymienionych kategorii wyrazów różnica między liczbą wyrazów niemieckich i polskich jest najmniejsza?

Zbadaliśmy niezbyt długie próbki tekstów. Nie możemy więc mieć pewności, że odkryte prawidłowości dotyczą całego języka. Okazuje się jednak, że gdybyśmy zanalizowali w podobny sposób wiele różnych tekstów w języku niemieckim i polskim, otrzymalibyśmy bardzo podobne wyniki.

Czasami zebranie wszystkich danych na interesujący nas temat nie jest możliwe. W takich wypadkach statystycy zbierają tylko część danych, dobrze reprezentującą badane zjawisko (tzw. próbkę reprezentatywną), i na jej podstawie wyciągają wnioski.

Na przykład: Centrum Badania Opinii Społecznej (CBOS), badając oglądalność jakiegoś programu telewizyjnego, nie przepytuje wszystkich telewidzów. Wybierana jest pewna grupa osób (około 1000) w różnym wieku, różnej płci, o różnym wykształceniu i miejscu zamieszkania. Wyniki otrzymane w ten sposób pozwalają formułować wnioski dotyczące wszystkich telewidzów.

Ciekawostka

Oto dwa przykłady zastosowania statystyki.

Przykład 1. W 1985 roku odnaleziono w Anglii wiersz, który stylem bardzo przypominał wiersze Szekspira. Aby sprawdzić, czy autorem rzeczywiście był Szekspir, użyto metod statystycznych. Porównano częstotliwość występowania poszczególnych wyrazów w utworach Szekspira i w utworach innych, współczesnych mu autorów oraz w badanym wierszu. Po dość skomplikowanej analizie uznano, że odnaleziony wiersz może być uznany za dzieło Szekspira.

Przykład 2. Dla sprawdzenia, czy wzrost dorosłego człowieka się nie zmienia, mierzono przez wiele dni — rano oraz wieczorem — wzrost kilkuset osób. Okazało się, że wyniki porannego mierzenia są przeciętnie o 2 cm większe od wyników pomiaru wieczornego. Oznacza to, że ludzie w ciągu dnia „kurczą się" nieco, a nocą trochę „rosną".

Zadania

1. Informacje o liczbie liter w słowach pewnego tekstu angielskiego i w jego tłumaczeniu na język polski przedstawia poniższa tabela.

Liczba liter	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Razem
Liczba wyrazów w tekście angielskim	11	63	141	112	72	45	24	14	8	6	3	1	500
Liczba wyrazów w tekście polskim	39	46	60	48	83	41	54	50	34	26	13	6	500

Pogrupuj te dane i przedstaw za pomocą diagramu tak, jak zrobiono to na stronie 304.

2. Andrzej spytał 20 przypadkowo spotkanych dorosłych osób, ile mają dzieci. Otrzymał kolejno następujące odpowiedzi:

2, 2, 3, 0, 1, 1, 0, 2, 3, 4, 0, 2, 1, 1, 0, 4, 5, 0, 1, 0

Przedstaw te wyniki na diagramie słupkowym.

3. Joasia badała liczbę osób w samochodach osobowych przejeżdżających obok jej domu. Oto jej notatki. (Jedna kreska oznacza jeden samochód, czyli 𝍸 to 5 samochodów).

Liczba osób w samochodzie	Liczba samochodów
1	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 | | |
2	𝍸 𝍸 𝍸 | |
3	𝍸 𝍸 𝍸
4	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 | |
5	𝍸 𝍸 |



Sporządź tabelę i diagram słupkowy, przedstawiając w ten sposób informacje zebrane przez Joasię.

4. Weź dowolną gazetę z programami telewizyjnymi na cały tydzień. Wybierz kilka stacji telewizyjnych i zbadaj, ile filmów nadają te stacje w kolejnych dniach tygodnia. Przedstaw te dane w czytelny sposób.

Wyniki środowych meczów NBA: Boston – Indiana 104:113, Philadelphia – New Jersey 92:90, Atlanta – Houston 116:100, Charlotte – Cleveland 103:95, Detroit – Toronto 115:108 (po dogr.), Miami – Golden State 115:100, Orlando – Washington 107:96, Milwaukee – New York 103:109, Dallas – Seattle 106:117, Denver – San Antonio 97:106, Utah – Chicago 113:86, Portland – LA Clippers 107:100, LA Lakers – Minnesota 114:81.

5. a) Przerysuj poniższą tabelę i wypełnij ją na podstawie przedstawionej obok notatki z gazety.

Różnica punktów między zwycięzcami a przegranymi	0–5	6–10	11–15	16 i więcej
Liczba meczów				

b) Zapisz w tabeli łodygowo-listkowej punkty zdobyte przez drużyny (zob. str. 296).

6. Zmierzono puls 30 wypoczętym osobom. Osoby te wykonały ćwiczenia fizyczne, po których ponownie zmierzono im puls. Wyniki pomiarów są przedstawione w tabeli.

Puls	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100 –109	110–120
Przed ćwiczeniem (liczba osób)	2	2	5	7	4	6	3	1
Po ćwiczeniu (liczba osób)	0	0	2	2	10	4	7	5

Informacje zebrane w tabeli przedstaw na diagramie słupkowym.

7. Weź dowolną gazetę. Policz, ile wyrazów mają tytuły artykułów.

a) Przedstaw zebrane informacje w tabeli i na diagramie.

b) Oblicz, ile przeciętnie wyrazów mają tytuły w tej gazecie.

8. a) Jak myślisz, dla którego z podanych haseł wyszukiwarka internetowa znajdzie najwięcej wyników?

matematyka statystyka liczba algebra geometria figura

Sprawdź swoje przypuszczenia. Przedstaw liczby odpowiednich wyników na diagramie słupkowym.

b) Wybierz kilka haseł związanych ze sportem. Sprawdź liczby wyników w wyszukiwarce internetowej. Przedstaw dane w czytelny sposób.

9. Narysuj na gładkiej kartce odcinek długości 77 mm. Poproś co najmniej dwadzieścia osób, by — bez mierzenia — oszacowały (w milimetrach) jego długość. Zapisz wszystkie odpowiedzi.

a) Pogrupuj zebrane dane tak, jak pokazuje to poniższa tabela.

Podana długość (w mm)	mniej niż 60	60–64	65–69	70–74	75–79	80–84	85–89	90–94	95–99	100 i więcej
Liczba odpowiedzi										

b) Przedstaw dane z tabeli w postaci diagramu słupkowego.

c) Oblicz, o ile różni się średnia arytmetyczna długości podanych przez ankietowanych od rzeczywistej długości odcinka.

SKALA OCEN

Uczucia	Ocena
bardzo negatywne	−2
negatywne	−1
obojętne	0
pozytywne	1
bardzo pozytywne	2

10. Przerysuj poniższe symbole. Poproś 20 kobiet i 20 mężczyzn o wyrażenie (w skali podanej w tabeli), jakie uczucia wywołuje w nich każdy z tych obrazków. Zanotuj, jakiej płci jest odpowiadająca osoba. Uporządkuj otrzymane wyniki tak, aby można było ocenić, czy wywołane uczucia zależą od płci ankietowanego.

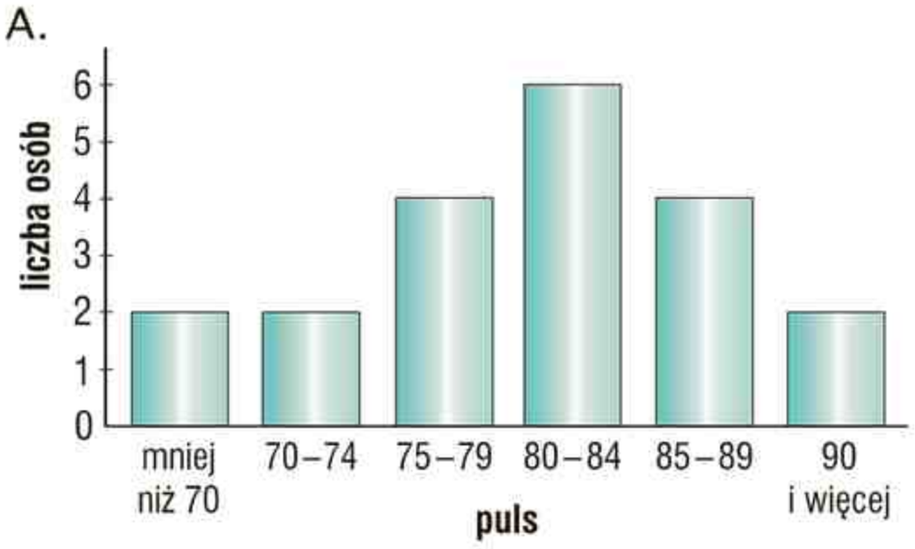


Wskazówka. Ustal, jaką sumę punktów przydzielili każdemu obrazkowi mężczyźni, a jaką — kobiety.

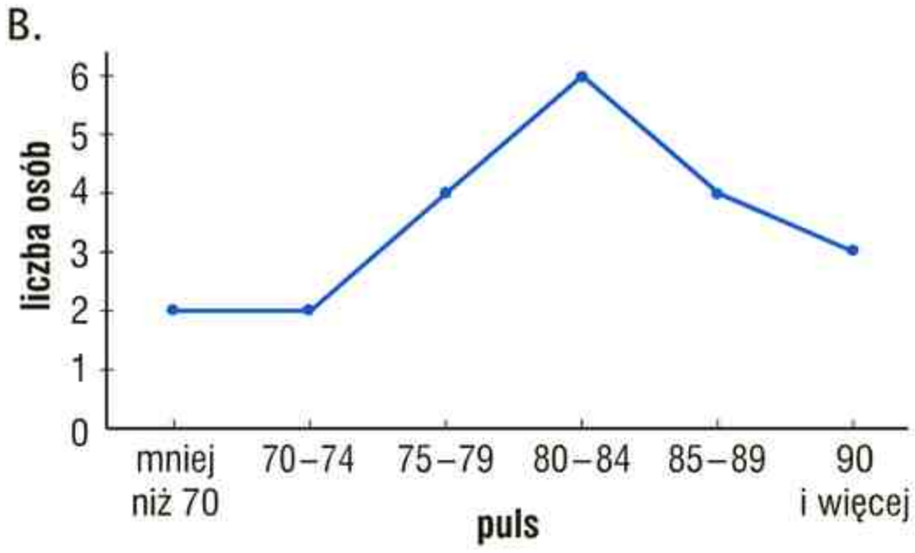
Sprawdź, czy umiesz

1. Zmierzono puls (liczbę uderzeń serca na minutę) dwudziestu kobietom i otrzymano następujące wyniki: 68 69 73 74 76 78 79 79 83 83 84 84 84 84 87 88 89 89 90 91. Wyniki te przedstawiono na cztery różne sposoby. W jednym przypadku popełniono błąd. W którym?

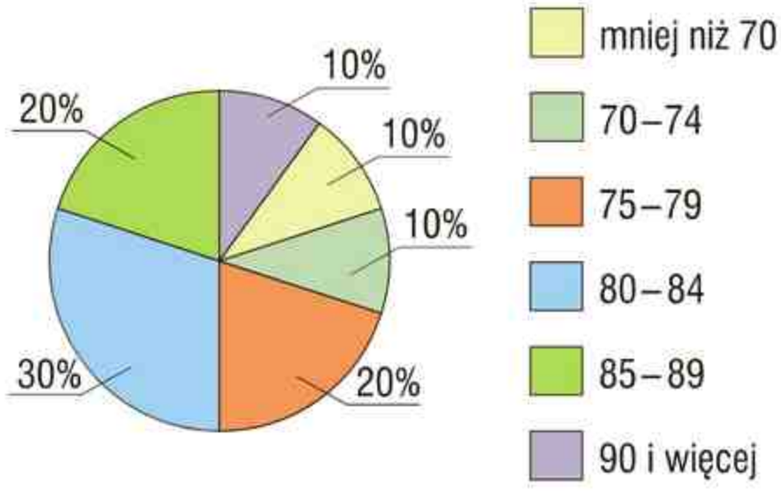
A.



B.



C.



D.

Puls	Liczba osób
mniej niż 70	2
70–74	2
75–79	4
80–84	6
85–89	4
90 i więcej	2

→ zadania uzupełniające 10–11, str. 317

4 Zdarzenia losowe



Wyobraź sobie, że masz do wyboru dwie możliwości i nie możesz się zdecydować, którą wybrać. W takiej sytuacji możesz powierzyć decyzję losowi: rzucić monetą i dokonać wyboru w zależności od tego, czy wypadnie orzeł, czy reszka. W ten sposób każda możliwość ma jednakową szansę.

Wyniki rzutu monetą mogą być dwa: orzeł lub reszka. Oba wyniki są jednakowo prawdopodobne. Szansa, że wypadnie orzeł, jest jak jeden do dwóch (1 : 2). Mówimy, że prawdopodobieństwo wypadnięcia orła jest równe $\frac{1}{2}$.

ĆWICZENIE A. Mamy rzucić sześcienną kostką do gry.

a) Ile jest możliwych wyników rzutu?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadnie szóstka?

Wyobraź sobie teraz loterię, w której wśród 20 losów jest jeden wygrywający. Kupując los, nie możesz przewidzieć, jaki los otrzymasz, możesz jednak ocenić szansę wygranej. Tylko 1 los wśród 20 jest wygrywający, zatem szansa wybrania go jest jak jeden do dwudziestu (1 : 20). Prawdopodobieństwo kupienia losu wygrywającego jest równe $\frac{1}{20}$.

Zastanówmy się, jaka byłaby szansa wygranej, gdyby w loterii było 30 losów, w tym 4 wygrywające. Szansa kupienia losu wygrywającego jest jak cztery do trzydziestu (4 : 30). Zatem prawdopodobieństwo kupienia losu wygrywającego jest równe $\frac{4}{30}$, czyli $\frac{2}{15}$.

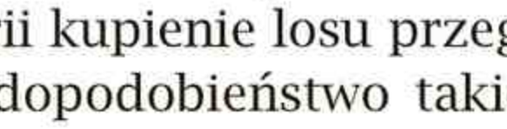
ĆWICZENIE B. Jakie jest prawdopodobieństwo kupienia losu przegrywającego w każdej z omawianych loterii?

Gdyby w loterii wszystkie losy były wygrywające, kupienie losu wygrywającego byłoby zdarzeniem pewnym. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest równe 1. W takiej loterii kupienie losu przegrywającego jest zdarzeniem niemożliwym. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest równe 0.

Prawdopodobieństwo wygranej w loterii to iloraz liczby losów wygrywających przez liczbę wszystkich losów. Podobnie obliczamy prawdopodobieństwo w innych sytuacjach.

Przykład

Rzucamy sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania jedynki lub szóstki?

Liczba możliwych wyników: $N = 6$ | *Możliwe wyniki to* 

Liczba interesujących nas wyników: $n = 2$ | *Interesujące nas wyniki to*

$p = \frac{n}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ | *p — szukane prawdopodobieństwo*

Odp. Prawdopodobieństwo wypadnięcia jedynki lub szóstki jest równe $\frac{1}{3}$.

Obliczając prawdopodobieństwo, musimy starannie policzyć wszystkie możliwe wyniki zdarzenia oraz wyniki nas interesujące. Nie zawsze łatwo te liczby podać. Czasami w tym celu najwygodniej jest wypisać wszystkie możliwości.

ĆWICZENIE C. Rzucamy dwiema monetami — dwuzłotówką i pięciozłotówką. Jeden z możliwych wyników to: na dwuzłotówce wypadnie reszka, na pięciozłotówce — orzeł. Wymień pozostałe możliwe wyniki.

Przykład

Rzucamy raz dwiema monetami. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wypadną dwie reszki?

I moneta	II moneta
O	O
O	R
R	O
R	R

Liczba możliwych wyników: $N = 4$

Liczba interesujących nas wyników: $n = 1$

Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki; kolorem niebieskim zapisano wyniki na pierwszej monecie, a kolorem czarnym wyniki na drugiej monecie.

$p = \frac{n}{N} = \frac{1}{4}$ | *Obliczamy prawdopodobieństwo.*

Odp. Prawdopodobieństwo tego, że wypadną dwie reszki, jest równe $\frac{1}{4}$.

ĆWICZENIE D. Nauczycielka matematyki na początku lekcji zaproponowała:

— Rzucę dwiema monetami. Jeśli wypadną dwa orły — pytam dziewczęta, jeśli wypadną dwie reszki — pytam chłopców, jeśli wypadnie orzeł i reszka — nie pytam nikogo.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że nikt nie będzie pytany?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pytane będą dziewczęta?

c) Czy bardziej prawdopodobne jest to, że ktoś będzie pytany, czy to, że nikt nie będzie pytany?

Zadania

1. Rzucamy sześcienną kostką do gry.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymamy piątkę lub szóstkę?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej 3 oczek?

c) Czy bardziej prawdopodobne jest to, że otrzymamy liczbę oczek większą od 4, czy to, że otrzymamy liczbę oczek mniejszą od 4?

d) Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba oczek będzie mniejsza od 7?

2. Rzucamy dwa razy monetą. Ustal, co jest bardziej prawdopodobne:

a) otrzymanie dwóch orłów czy otrzymanie dwóch reszek,

b) otrzymanie dwóch orłów czy otrzymanie orła w pierwszym rzucie i reszki w drugim,

c) otrzymanie dwóch orłów czy otrzymanie różnych wyników w obu rzutach.

Ciekawostka

Talia kart składa się z 52 kart. Trefle i piki są czarne, a kara i kiery są czerwone. Wśród kart jest po 13 trefli (♣), kar (♦), kierów (♥) i pików (♠). W każdej takiej trzynastce kart są cztery figury (as, król, dama i walet) oraz dziewięć kart oznaczonych liczbami od 2 do 10.

3. Z talii kart losowo wyciągamy jedną kartę. Ustal, co jest bardziej prawdopodobne:

a) wyciągnięcie asa czy wyciągnięcie trefla,

b) wyciągnięcie króla czy wyciągnięcie dziesiątki,

c) wyciągnięcie figury czy wyciągnięcie kiera,

d) wyciągnięcie karty koloru czerwonego czy wyciągnięcie figury.

4. W jednej szkatułce jest 10 monet złotych i 14 srebrnych, a w drugiej jest 70 monet złotych i 100 srebrnych. Możesz wylosować jedną monetę z jednej z tych szkatułek. Którą szkatułkę wybierzesz, aby mieć większą szansę wylosowania złotej monety?

5. Do worka wrzucono 3 kule czarne, 5 czerwonych i 8 białych.

a) Losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula jest biała?

b) Z urny usunięto po jednej kuli w każdym kolorze. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli?

6. Rzucamy złotówką, dwuzłotówką i pięciozłotówką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na wszystkich trzech monetach wypadnie reszka?



7. W loterii jest 12 losów wygrywających i 84 losy przegrywające. Przed tobą kupiono 6 losów, w tym 4 wygrywające. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że kupując los, otrzymasz los wygrywający?

8. W szufladzie było 8 par skarpetek, w tym 3 pary skarpetek białych. Zuzia wyciągnęła już jedną skarpetkę (białą) i losowo wybiera drugą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że druga skarpetka też będzie biała?



9. Około 10% ludzi to osoby leworęczne. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przypadkowo spotkana osoba jest leworęczna?

10. W pewnej loterii wygrywa co czwarty los. Niestety, tylko 10% losów wygrywających gwarantuje otrzymanie nagrody, reszta to losy, które pozwalają losować jeszcze raz. Kupujemy jeden los.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania losu przegrywającego?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania losu gwarantującego nagrodę?

c) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania losu pozwalającego losować dalej?

11. Na trzech kartkach zapisujemy litery *A*, *R*, *Z*, po jednej na każdej kartce. Kartki wrzucamy do woreczka, po czym wyciągamy po jednej i układamy obok siebie (od lewej do prawej strony). Ile różnych napisów trzyliterowych można otrzymać? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ułożymy wyraz *RAZ*?





12. Nauczycielka zapowiedziała, że na sprawdzianie będzie tylko jedno zadanie, losowo wybrane ze strony 248 tej książki. Ela umie rozwiązać tylko cztery z tych zadań. Ustal, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że Ela dobrze napisze sprawdzian.



13. Na zdjęciu obok przedstawiono kostkę o czterech ścianach ponumerowanych liczbami: 1, 2, 3 i 4. Ustal, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po rzuceniu tą kostką:

a) suma liczb na trzech widocznych ścianach będzie równa 7,

b) suma liczb na trzech widocznych ścianach będzie większa od 7,

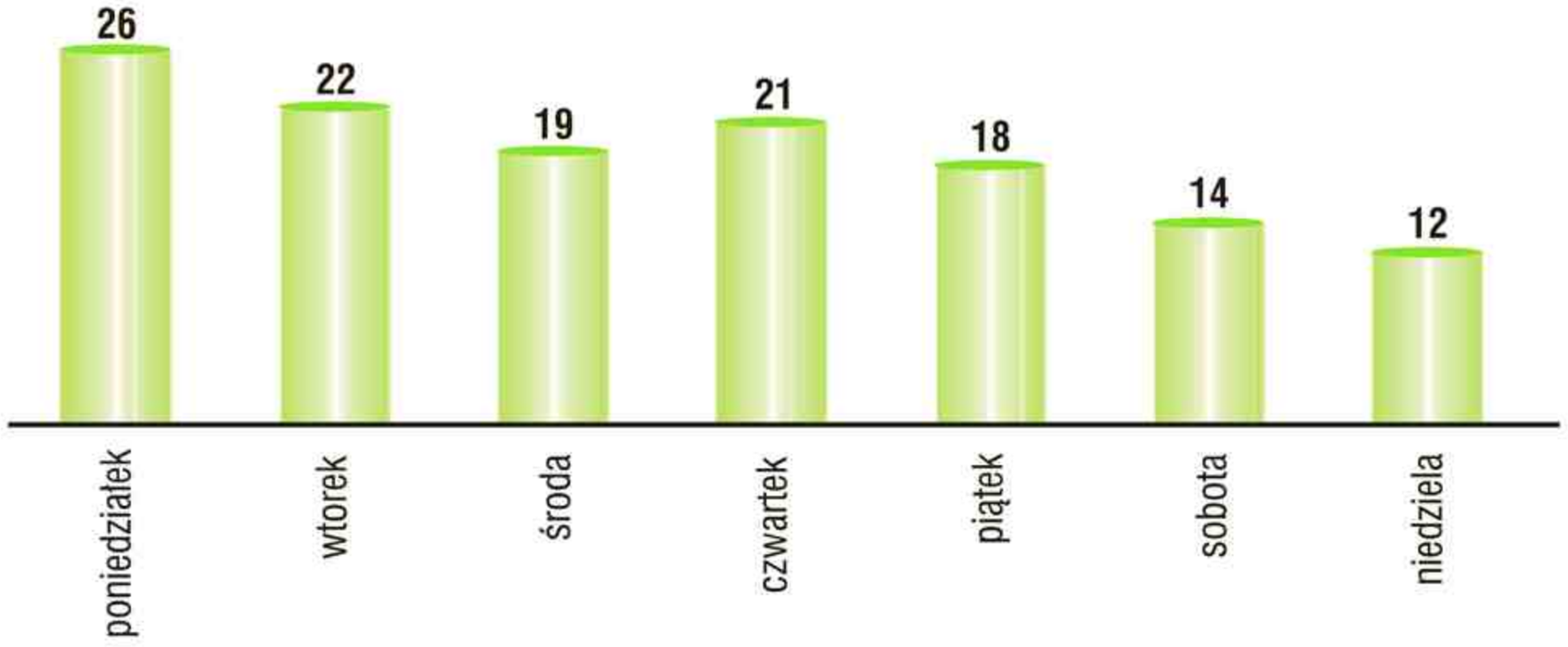
c) suma liczb na trzech widocznych ścianach będzie równa 5.

14. Diagram przedstawia, ilu uczniów klas siódmych pewnej szkoły urodziło się w poszczególnych dniach tygodnia. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany siódmoklasista:

a) urodził się w niedzielę,

b) nie urodził się ani w sobotę, ani w niedzielę?

Liczby osób urodzonych w poszczególnych dniach tygodnia



Sprawdź, czy umiesz

1. Rzucasz dwiema monetami. Prawdopodobieństwo tego, że na każdej monecie będzie inny wynik, jest równe:

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

2. Rzucasz sześcienną kostką do gry. Które z poniższych zdarzeń jest najbardziej prawdopodobne?

A. Otrzymasz jedynkę lub szóstkę.

B. Otrzymasz mniej niż trzy oczka.

C. Otrzymasz więcej niż dwa oczka.

D. Otrzymasz nieparzystą liczbę oczek.

3. W loterii było 10 losów wygrywających i 100 losów przegrywających. Kupiono już 20 losów i nikt jeszcze nie wygrał. Prawdopodobieństwo tego, że kupując los, otrzymasz los wygrywający, jest równe:

A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{5}$

zadania uzupełniające 12–17, str. 318

Przed klasówką

1. Grupę dzieci zapytano, który z trzech soków lubią najbardziej — sok z jabłek, z pomarańczy czy z czarnej porzeczki. Odpowiedzi przedstawiono na diagramie. Czy poniższe wnioski wynikają z tego diagramu?



a) Sok z czarnej porzeczki wybrało pięcioro dzieci. TAK/NIE

b) Sok jabłkowy wybrało dwa razy więcej dziewczynek niż chłopców. TAK/NIE

c) Najwięcej dzieci wybrało sok pomarańczowy. TAK/NIE

d) Chłopców w tej grupie było więcej niż dziewczynek. TAK/NIE

2. Na diagramie przedstawiono, jak zmieniała się liczba wypadków na ruchliwym skrzyżowaniu w kolejnych miesiącach roku. Jakimi nazwami miesięcy lub jakimi liczbami należy zastąpić kwadraciki?



a) W lutym było tyle samo wypadków co w ■.

b) We wrześniu wydarzyły się o ■ wypadki więcej niż w sierpniu.

c) W ciągu ostatnich trzech miesięcy roku wydarzyło się ■ wypadków.

d) W pierwszym półroczu na tym skrzyżowaniu wydarzyło się średnio około ■ wypadków w ciągu miesiąca, a w drugim półroczu średnia zmniejszyła się do około ■ wypadków miesięcznie.

3. W dwóch workach były kule w różnych kolorach. W obu było po tyle samo kul i liczba zielonych kul w obu workach była taka sama. Kule z obu worków wrzucono do jednego worka. Czy to prawda, że prawdopodobieństwo wylosowania jednej zielonej kuli jest teraz 2 razy większe niż prawdopodobieństwo wylosowania zielonej kuli z jednego worka przed połączeniem kul? Wybierz odpowiedź „tak" lub „nie" oraz jej uzasadnienie spośród zdań od A do D.

Ⓘ Tak, ponieważ… Ⓘⓘ Nie, ponieważ…

A — …zielonych kul jest teraz dwa razy więcej.

B — …liczba wszystkich kul zwiększyła się dwukrotnie.

C — …nie zmieniła się różnica między liczbą kul zielonych i innych niż zielone.

D — …nie zmienił się stosunek liczby zielonych kul do liczby wszystkich kul.

4. Średnia masa piłek do tenisa producenta A jest równa 57 g, a średnia masa piłek producenta B — 58 g. Tenisista ma 10 piłek producenta A i 15 piłek producenta B. Oblicz średnią masę piłek tenisisty.

5. Ania wygra cukierka, jeśli rzuci monetą i wypadnie orzeł. Basia wygra cukierka, jeśli rzuci kostką sześcienną i wypadnie 1 oczko lub 3 oczka. Celina wygra cukierka, jeśli rzuci kostką sześcienną i wypadnie 5 lub 6 oczek. Czy poniższe zdania są prawdziwe?

a) Prawdopodobieństwo, że Basia wygra cukierka, jest równe $\frac{1}{3}$. PRAWDA/FAŁSZ

b) Największe prawdopodobieństwo wygrania cukierka ma Ania. PRAWDA/FAŁSZ

c) Dwie dziewczynki z takim samym prawdopodobieństwem mogą wygrać cukierka. PRAWDA/FAŁSZ

6. W loterii jest 20 losów, w tym 5 wygrywających i 15 przegrywających. Wśród pierwszych trzech osób, które kupiły losy, jedna kupiła los wygrywający, a dwie — przegrywające. Jakie jest prawdopodobieństwo, że czwarta osoba kupująca los trafi na los wygrywający?

A. $\frac{4}{13}$ B. $\frac{2}{17}$ C. $\frac{3}{20}$ D. $\frac{4}{17}$

7. Na wieszaku w sklepie wiszą koszulki w czterech kolorach: czerwonym, niebieskim, żółtym i białym. W tabeli podano liczbę koszulek w każdym z kolorów. Przedstaw informacje zawarte w tabeli w postaci diagramu kołowego.

Kolor koszulki	czerwony	niebieski	żółty	biały
Liczba koszulek	8	4	20	4

Zadania uzupełniające

Odczytywanie danych statystycznych

NIEKTÓRE ZWIERZĘTA W PARKACH NARODOWYCH W POLSCE (w tys. osobników)

Zwierzęta	2011 r.	2013 r.	2014 r.
łosie	1	1,1	1,3
sarny	8,1	8,4	7,3
dziki	4,9	4,1	4,3
lisy	1,7	1,6	1,5
bobry	1,5	3,2	3,3
jelenie	6,2	6,3	5,7

1. Odczytaj z powyższej tabeli.

a) Liczebność których gatunków zwierząt w latach 2011–2014 stale rosła?

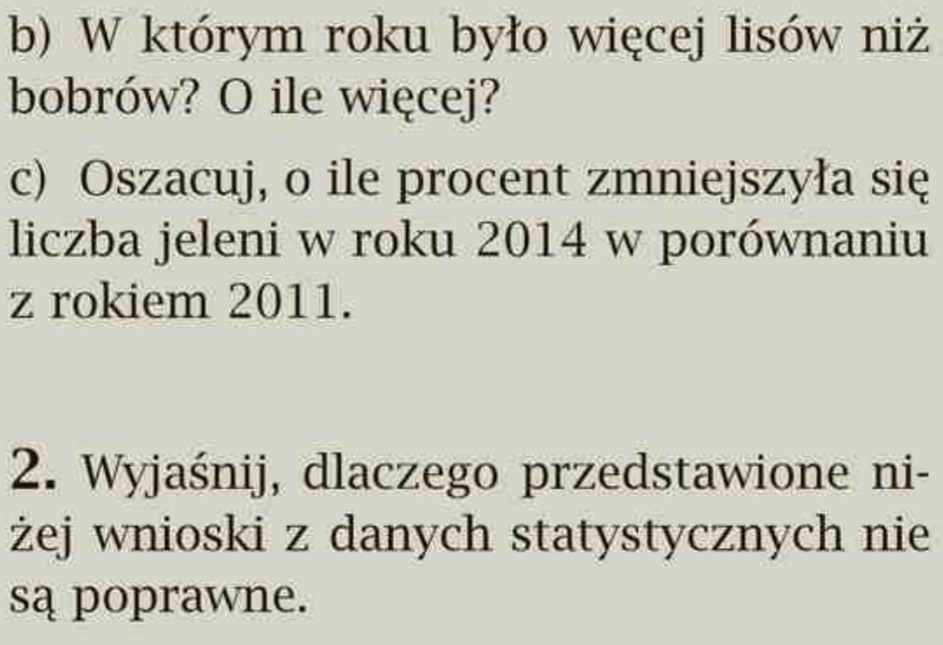
b) W którym roku było więcej lisów niż bobrów? O ile więcej?

c) Oszacuj, o ile procent zmniejszyła się liczba jeleni w roku 2014 w porównaniu z rokiem 2011.

2. Wyjaśnij, dlaczego przedstawione niżej wnioski z danych statystycznych nie są poprawne.

a) Najwięcej ludzi umiera w szpitalach. Wynika stąd, że osoba bardzo chora powinna unikać szpitala.

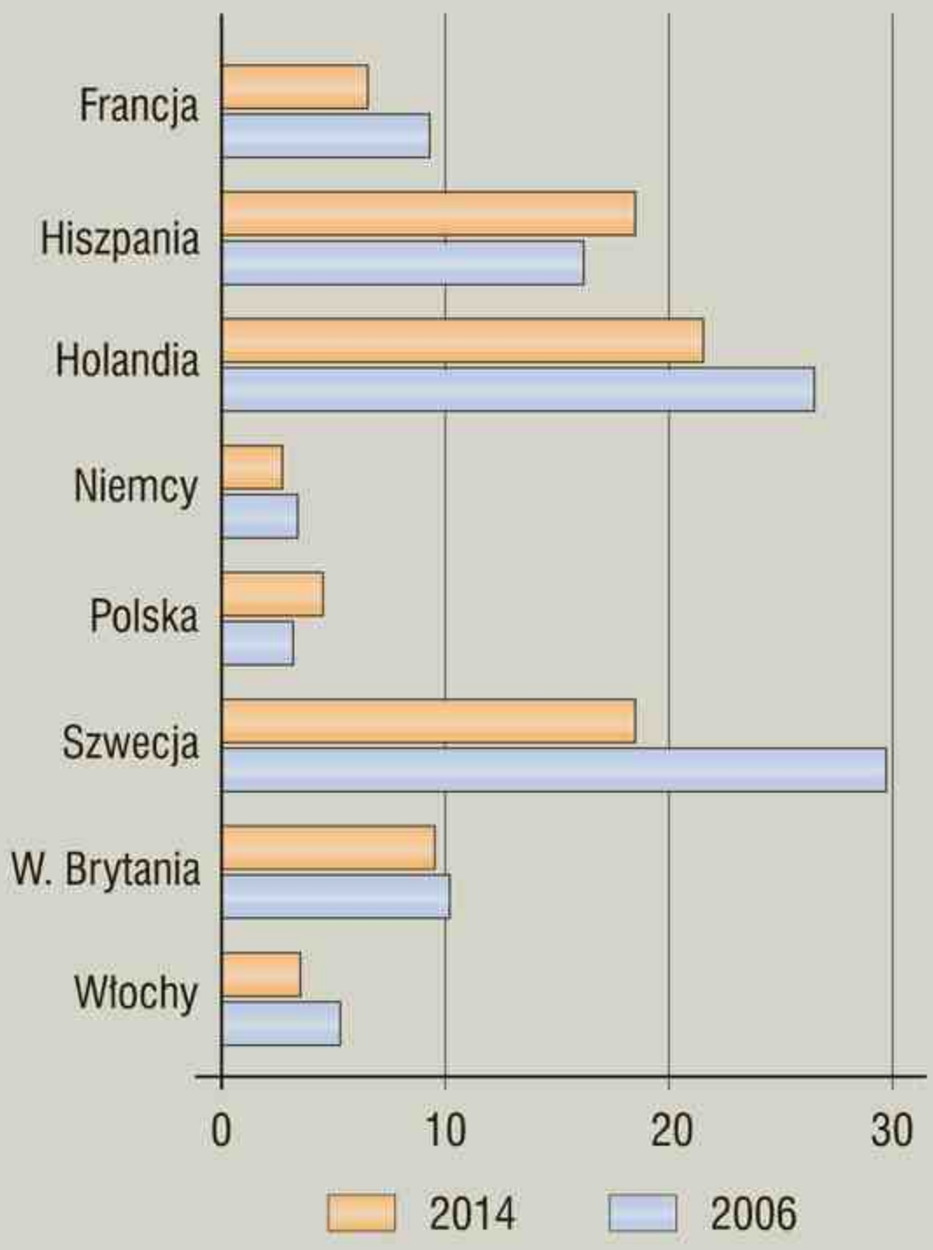
b) Ponad 80% mężczyzn, którzy wyłysieli, jadło w dzieciństwie słodycze. Wynika stąd, że słodycze powodują wypadanie włosów.



c) Z danych statystycznych wynika, że najmniej wypadków samochodowych zdarza się przy prędkości większej niż 150 km/h. Wynika stąd, że szybsza jazda jest bezpieczniejsza.

d) Badania statystyczne dowodzą, że dzieci, które mają większe stopy, popełniają mniej błędów ortograficznych niż dzieci o mniejszych stopach. Wynika stąd, że długość stóp decyduje o znajomości ortografii.

Połowy ryb morskich i słodkowodnych na 1 mieszkańca w wybranych krajach (w kg)



3. Odczytaj z powyższego diagramu:

a) W którym z krajów wielkość połowów na 1 mieszkańca wzrosła w latach 2006–2014, a w którym — zmalała?

b) Który z krajów przodował w połowach ryb na 1 mieszkańca w roku 2006, a który — w 2014?

c) W 2014 roku w Polsce było około 38 mln mieszkańców, a we Włoszech — 61 mln. Jak myślisz, w którym z tych krajów złowiono więcej ryb?

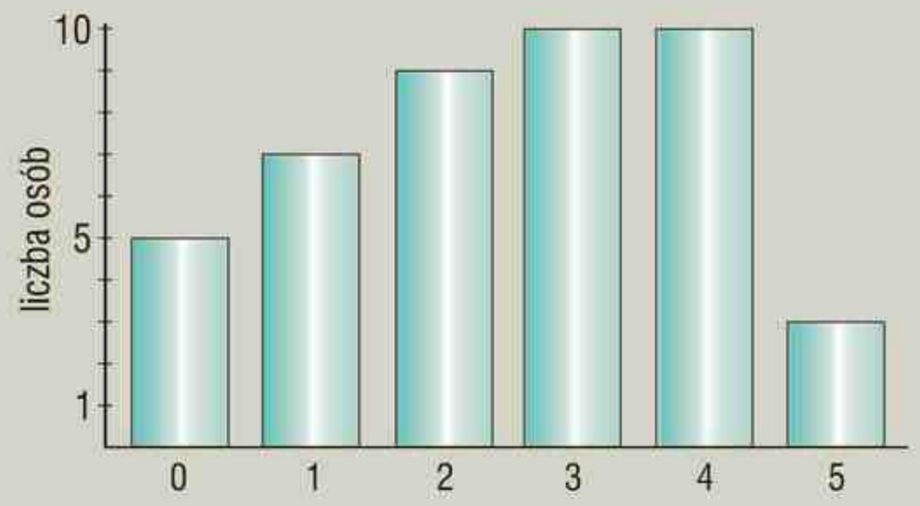
Co to jest średnia?

4. Średnia długość słowa w tekstach angielskich wynosi ok. 4,2 litery, a w tekstach polskich — ok. 5,4 litery. Poniżej przedstawiono dwa zaszyfrowane teksty — polski i angielski. Jedna litera szyfrogramu odpowiada jednej literze oryginału. Jak myślisz, który z nich odpowiada tekstowi polskiemu?

QWER ASDFGHJKLP ZXC MLPOKNJIUH AP QWSACDFG JSOAWMD OAS UNJI PQAKE DG AXCMDIW UD KSDMEL ZKWMC ZPWMJDY IWMDJO QNSJUC

PSMJ A KDLOZAQ O JDMC OKL KDCOEK EM LOD KDMCI KCDPWLSYK OY MDOCHY LKDIE L MDCKLEOW SU JDI KDLOWPSMX AWCYDKBZ LPEPSR

5. Grupie nastolatków zadano pytanie: *Ile razy w tygodniu uprawiasz sport?* Wyniki ankiety przedstawia diagram. Ile średnio razy w tygodniu uprawia sport każda z tych osób?



6. Ustal, o ile zwiększy się twoja średnia ocen z 10 przedmiotów, gdy:

a) poprawisz ocenę z jakiegoś przedmiotu o jeden stopień,

b) poprawisz wszystkie oceny o jeden stopień.

7. W firmie Równość pracuje 9 osób i dyrektor. Średnia płaca wynosi 1800 zł. Wszyscy pracownicy zarabiają tyle samo, tylko dyrektor otrzymuje 4500 zł. Ile zarabia każdy z pracowników?

8. Kasia ma średnią ocen (liczoną z 10 przedmiotów) równą 5,3. Z tych przedmiotów ma tylko piątki i szóstki. Ile ma szóstek?

9. W tabeli podano wagi noworodków urodzonych w dwóch kolejnych dniach w pewnym szpitalu.

Dzień	Waga dziecka (w gramach)
poniedziałek	2500, 3800, 2800, 2900
wtorek	3800, 2900, 2700, 3200, 2900, 3000

a) Oblicz średnią wagę dzieci urodzonych w poniedziałek i średnią wagę dzieci urodzonych we wtorek.

b) Jaka była średnia waga noworodków urodzonych w tych dwóch dniach?

Zbieranie i opracowywanie danych statystycznych

10. Przerysuj tabelę zamieszczoną niżej. Poproś jak najwięcej osób o skreślenie trzech liczb.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Uporządkuj wyniki tych badań i przedstaw je tak, by można było sprawdzić, czy prawdziwe jest zdanie: *Osoby wypełniające kupony rzadziej skreślają liczby umieszczone przy brzegu kuponu.*

11. Ten podręcznik ma 8 rozdziałów. Przedstaw za pomocą diagramu, ile stron liczy każdy z tych rozdziałów. Oblicz średnią liczbę stron w rozdziale.

Zdarzenia losowe

12. Rzucamy monetą i kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymamy orła i szóstkę?



13. W woreczku są 4 kule złote, 4 białe, 5 czerwonych i 1 czarna.



a) Losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to złota kula?

b) Losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana kula nie będzie biała ani czarna?

c) Ile złotych kul trzeba dorzucić, aby prawdopodobieństwo wylosowania złotej kuli wyniosło $\frac{1}{2}$?

14. W loterii jest 150 losów, ale tylko 20 losów wygrywających. Przed tobą losowało już 30 osób i żadna nie wygrała.

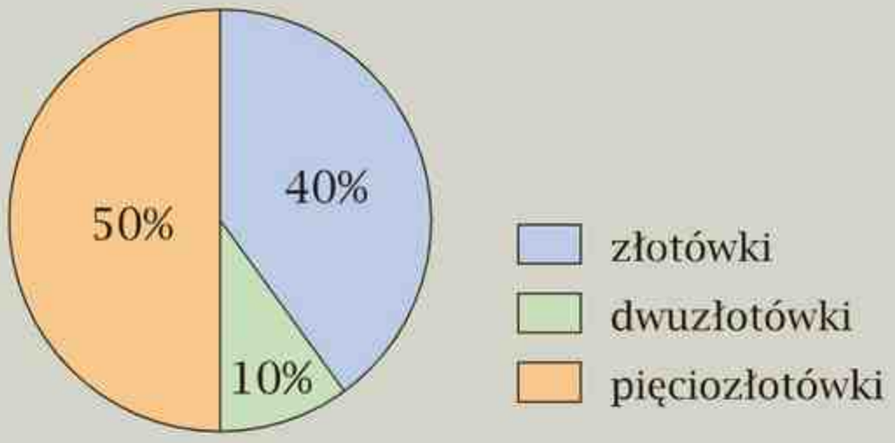
a) Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia pustego losu?



15. W portmonetce znajduje się 20 monet: złotówki, dwuzłotówki i pięciozłotówki. Na diagramie przedstawiono, jaki procent wszystkich monet stanowią te trzy rodzaje monet. W tabeli podano masy tych monet.

MONETY W PORTMONETCE



Moneta	Masa (w gramach)
złotówka	5
dwuzłotówka	5,21
pięciozłotówka	6,54

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosowana z portmonetki moneta nie będzie dwuzłotówką?

b) Jaka jest średnia masa monet w portmonetce?

***16.** Z zapisanych na oddzielnych kartkach cyfr 1, 2, 3 i 4 losujemy jedną, a następnie drugą. Układamy je kolejno od lewej do prawej. Jakie jest prawdopodobieństwo ułożenia liczby większej niż 25?



***17.** W loterii jest 110 losów, w tym 2 wygrywające. Ile losów wygrywających trzeba dołożyć, aby prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego:
a) było równe $\frac{1}{5}$, b) było większe od $\frac{1}{3}$?

Odpowiedzi

str. 11–13: **4.** ②, ③ i ④. **5.** $a = 3{,}1$, $b = 2{,}03$, $c = 0{,}41$, $d = 0{,}735$, $e = 23{,}0031$, $f = 3{,}007$, $g = 4{,}21$, $h = 0{,}0701$. **6. a)** $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{25}$; $\frac{3}{20}$; $1\frac{3}{8}$; $14\frac{7}{20}$; $\frac{21}{25}$, **b)** 0,75; 0,625; 3,5; 4,4; 1,45; 0,44. **7. a)** $\frac{3}{4}$ h; $\frac{5}{12}$ h; $\frac{1}{3600}$ h; $\frac{1}{240}$ h, **b)** $\frac{1}{5}$ km; $\frac{1}{125}$ km; $\frac{1}{800}$ km; $\frac{3}{200}$ km. **8. a)** 0,75 zł; 9,08 zł; 16,02 zł; 1322,50 zł, **b)** 1,5 h; 2,25 h; 1,75 h; 4,8 h. **11. a)** $-0{,}4$ i $\frac{2}{5}$, $2\frac{1}{7}$ i $-2\frac{1}{7}$, $-\frac{5}{2}$ i 2,5, **b)** $\frac{5}{3}$; $\frac{1}{18}$; $-\frac{1}{5}$; $\frac{7}{12}$; 5; -1; $\frac{10}{47}$. **12.** Tak. **13.** $A = -1\frac{1}{3}$, $B = -0{,}7$, $C = \frac{17}{30}$, $D = \frac{8}{5}$, $E = 2{,}6$. **14. a)** $A = 8\frac{3}{7}$, $B = 7\frac{4}{7}$, **b)** $C = 4\frac{1}{2}$, $D = 3\frac{1}{4}$, **c)** $E = -5{,}8$, $F = -4{,}2$, **d)** $G = 5{,}7$, $H = 6{,}3$, **e)** $I = 8{,}32$, $J = 8{,}39$, **f)** $K = 5{,}214$, $L = 5{,}222$. **15. a)** $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$, **b)** $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$, **c)** $5\frac{7}{15} > 5\frac{1}{3}$, **d)** $\frac{7}{8} < \frac{8}{9}$, **e)** $0{,}6 > 0{,}57$, **f)** $0{,}27 > 0{,}267$, **g)** $6{,}801 < 6{,}9$, **h)** $2{,}02 > 2{,}019$, **i)** $\frac{3}{5} < 0{,}7$, **j)** $0{,}28 > \frac{1}{4}$, **k)** $\frac{1}{9} > 0{,}1$, **l)** $2\frac{1}{6} < 2{,}2$. **16. a)** Rodzice, **b)** ciocia Krysia, **c)** Kasia. **18. a)** $A = -1{,}7$, $B = -1{,}5$, $C = -1{,}2$, $D = -0{,}3$, **b)** $E = -\frac{4}{5}$, $F = -\frac{3}{4}$, $G = -\frac{1}{4}$, $H = -\frac{1}{5}$. **19. a)** $-0{,}3 > -0{,}34$, **b)** $-4{,}36 < -4{,}27$, **c)** $-\frac{3}{4} < -\frac{1}{2}$, **d)** $-1\frac{1}{3} < -1\frac{1}{5}$, **e)** $-\frac{3}{8} < -0{,}3$, **f)** $-7{,}4 > -7\frac{3}{5}$. **20.** $-3{,}1$; -3; 0; 0,123; $\frac{1}{8}$; $1\frac{1}{3}$.

str. 16–17: **1. a)** 0,(6), **b)** 10,(5), **c)** 1,41(6), **d)** 1,1(3), **e)** 1,625, **f)** 2,55, **g)** 2,(27), **h)** 11,8(3). **2. a)** 7, **b)** 4, **c)** 5. **3.** 1; 1. **4. a)** $0{,}(32) > 0{,}32$, **b)** $3{,}(012) < 3{,}0121$, **c)** $\frac{1}{3} > 0{,}33$, **d)** $\frac{1}{8} < 0{,}(125)$, **e)** $5{,}(171) < 5{,}(17)$, **f)** $2{,}(307) > 2{,}3(07)$. **7. b)** $\frac{7}{9}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{13}{99}$; $\frac{62}{99}$; $\frac{5}{99}$; $\frac{342}{999}$; $\frac{57}{999}$. **8. b)** $\frac{56}{350} = \frac{4}{5 \cdot 5}$; $\frac{66}{528} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}$; $\frac{147}{210} = \frac{7}{2 \cdot 5}$. Wskazówka. Najpierw skróć ułamki. **c)** $\frac{162}{180}$.

str. 20–23: **5. a)** Dziesięć, **b)** sto. **7.** Pan Zdzisław (do dziesiątek) i pan Bogusław (do setek). **8. a)** 200; 1000; 2000; 2880; 4100; 5300; 5000; 6800; 9360, **b)** 99. **9.** 200 cali; 900 mil; 900 mil; 300 kroków; 142 cale. **10. a)** $a \approx 5{,}45$, $b \approx 5{,}46$, $c \approx 5{,}48$, $d \approx 5{,}50$, $e \approx 5{,}51$, **b)** $a \approx 5{,}4$, $b \approx 5{,}5$, $c \approx 5{,}5$, $d \approx 5{,}5$, $e \approx 5{,}5$, **c)** $a \approx 5$, $b \approx 5$, $c \approx 5$, $d \approx 6$, $e \approx 6$. **11.** Nie; tak. **12. a)** <, **b)** <, **c)** >, **d)** <, **e)** >, **f)** <. **13. a)** <, **b)** >, **c)** >, **d)** <, **e)** >, **f)** <. **14. a)** Ok. 3 razy, **b)** ok. 1 mln razy, **c)** ok. 9,5 razy, **d)** ok. 30 razy, **e)** tak, **f)** tak. **15. a)** 5, **b)** 4, **c)** większą, **d)** tak, **e)** 5, **f)** nie. **16.** Krótszy. **17.** Wystarczy. **18.** Działka państwa Krukowskich jest większa.

str. 25–27: **2. a)** $\frac{1}{2}$, **b)** $1\frac{1}{6}$, **c)** $\frac{11}{18}$, **d)** $1\frac{1}{12}$, **e)** $\frac{1}{10}$, **f)** $1\frac{1}{6}$, **g)** $1\frac{7}{8}$, **h)** $1\frac{1}{9}$, **i)** $1\frac{9}{10}$, **j)** $\frac{7}{12}$, **k)** $\frac{7}{18}$, **l)** $\frac{13}{24}$. **3.** $\frac{9}{40}$; rodzice panny młodej. **4.** Tak. **5. a)** $\frac{1}{6}$, **b)** $\frac{1}{20}$, **c)** $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, **d)** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$. Wskazówka. Przedstaw liczbę $\frac{7}{9}$ jako sumę ułamków o mianownikach równych 18. **7. a)** 4,1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, **b)** o 1,9 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **8.** Płynąc z prądem — 1,68 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, płynąc pod prąd — 1,12 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **9.** 1,45 litra. **10.** 34,908 g. **11. a)** 25,1, **b)** 42,42, **c)** 74,157, **d)** 33,63, **e)** 660,5, **f)** 49,349. **12.** 10,90 zł. **14. a)** 1,41, **b)** 3,94, **c)** 65,65, **d)** 2,25, **e)** 0,725,

f) 19,45, **g)** 2,1, **h)** 2,925. **15. a)** $4\frac{4}{15}$, **b)** 3,015, **c)** $3\frac{1}{28}$, **d)** $\frac{1}{72}$, **e)** $\frac{1}{30}$, **f)** 1,11. **16. a)** $\frac{3}{25}$, **b)** 0,15.

str. 29–33: **2. a)** $\frac{1}{3}$, **b)** $1\frac{1}{14}$, **c)** $\frac{7}{11}$, **d)** $\frac{3}{10}$, **e)** $\frac{13}{25}$, **f)** $\frac{2}{7}$, **g)** 2, **h)** $3\frac{1}{18}$, **i)** 13, **j)** 15, **k)** 36, **l)** 45. **3.** 1. **4.** Grupy chłopców. **6.** 85 sobót i niedziel. **7. a)** 276 posłów, **b)** tak. **8.** 64 butelki. **9. a)** $\frac{2}{3}$, **b)** $\frac{3}{5}$, **c)** $\frac{5}{27}$, **d)** $\frac{32}{49}$. **10.** 20; 20; 90. **11. d)** 10 930,2, **e)** 0,167, **f)** 24 920, **g)** 0,0247, **h)** 0,0007. **12.** 0,0054 g; 5,4 g; 0,054 g. **13.** 7200 litrów. **14. b)** 2,(7), **c)** 0,002(7), **d)** 0,0002(7). **15. a)** 220 m; 0,17 m; 0,014 m; 0,6 m, **b)** 30 cm; 40 cm; 720 cm; 0,4 cm, **c)** 130 dag; 20 dag; 52 dag; 1,2 dag, **d)** 140 g; 17 g; 6000 g; 300 g. **16.** 135 000 cm; 1350 m; 1,35 km. **17. a)** 2500 mm; 0,0085 m, **b)** 600 mg; 0,0205 g, **c)** 6500 μ; 0,002734 m. **18. a)** 0,001 mm, **b)** 1000 μ. **20. a)** 40 zł, **b)** 50 zł, **c)** 14 zł, **d)** 28 zł. **21. a)** 300 razy, **b)** 200 razy, **c)** 60 000 razy. **22. a)** 0,84 kg, **b)** 21 zł, **c)** 22,60 zł, **d)** 20 dag. **23. a)** 2,254, **b)** 915,06, **c)** 0,0488, **d)** 3,906, **e)** 8,96, **f)** 381,(81), **g)** 2600, **h)** 94,(1). **24. a)** 2,3 kg, **b)** 13,5 kg. **25.** 4,8 dolara. **26. a)** 408,47 g; 0,66, **b)** 0,17 i 0,1, **c)** około 0,42 g, **d)** o 3096 karatów. **27. a)** ok. 153 funty, **b)** ok. 163 funty. **28. a)** $\frac{1}{6}$, **b)** $\frac{3}{20}$, **c)** 1, **d)** $\frac{1}{2}$, **e)** $\frac{1}{8}$, **f)** 3, **g)** 17, **h)** 2. **29. a)** 0,025, **b)** $3\frac{3}{5}$, **c)** 1, **d)** 20, **e)** 0,42, **f)** $1\frac{1}{9}$, **g)** 0,09, **h)** $\frac{1}{5}$, **i)** 10.

str. 35–37: **1. a)** 14, **b)** 5, **c)** 2, **d)** 11, **e)** 54, **f)** 42. **2. a)** 0, **b)** $\frac{7}{16}$, **c)** 4, **d)** 0,5, **e)** 7,5, **f)** 2,3, **g)** 0, **h)** 0,11, **i)** 16. **3.** 75,40 zł. **4. a)** 1,1, **b)** 8, **c)** $\frac{2}{9}$, **d)** 5, **e)** 1, **f)** 13,52, **g)** 1, **h)** 0,3, **i)** $\frac{3}{4}$. **5. a)** 8, **b)** 6, **c)** $\frac{1}{4}$, **d)** $8\frac{4}{9}$. **6. a)** 13, **b)** 8, **c)** 1, **d)** 22,5, **e)** $3\frac{1}{5}$, **f)** 16. **7. a)** 3, **b)** 0,2, **c)** $6\frac{2}{3}$. **8.** $A = 0{,}9$, $B = 5\frac{7}{8}$. **9.** 9,65 zł. **10.** 6,20 zł. **11.** 20 kg. **12.** 43,45 kg. **13.** 24 harcerzy. **14.** 0,5 kg. **15. a)** 31 min 20 s, **b)** 1 h 27 min 20 s. Wskazówka. Czas liczymy od rozpoczęcia napełniania dzbanka do napełnienia beczki. Napełnienie kubka trwa 5 razy krócej niż napełnianie dzbanka. **16.** 5,10 zł.

str. 39–41: **2.** Liczby dodatnie: a, c, d, e; liczby ujemne: b, f. **3. b)** Rzym i Oslo; różnica wynosi 18°C, **c)** o 20°C. **4. a)** 1,1, **b)** −1,5, **c)** −3,2, **d)** −6,75, **e)** $2\frac{2}{3}$, **f)** 2,5, **g)** $1\frac{3}{7}$, **h)** −7,77, **i)** $-1\frac{4}{9}$. **6.** 6; 3; 4; −8. **7. a)** −17, **b)** −2, **c)** 24, **d)** −3, **e)** $-1\frac{17}{30}$, **f)** −1,1. **8. a)** 0, **b)** −28, **c)** $-\frac{5}{6}$, **d)** $\frac{1}{8}$, **e)** 5,5, **f)** −1, **g)** $1\frac{4}{7}$, **h)** 5,5. **9. a)** −0,7, **b)** −5, **c)** 3, **d)** $-\frac{1}{5}$, **e)** 0,9, **f)** −10, **g)** 2, **h)** −2. **10. a)** Ujemną, **b)** ujemną, **c)** dodatnią, **d)** ujemną, **e)** ujemną. **11. a)** $\frac{1}{2}$, **b)** 2, **c)** 4, **d)** $-15\frac{1}{2}$, **e)** −13, **f)** $-6\frac{2}{7}$, **g)** $\frac{3}{2}$, **h)** −12, **i)** −4. **13.** ① i ④. **14. a)** 1,65, **b)** −10. **15.** $A = -6{,}2$, $B = -3$.

str. 43–45: **5. a)** 15, **b)** 6, **c)** 4, **d)** 96. **6. a)** 2,5, **b)** 49, **c)** 104, **d)** $1\frac{3}{4}$. **7. a)** −20 i 10, **b)** 7. **9.** Zadanie ma trzy odpowiedzi: 15, 12 i 9. **10. b)** 4 i 10, **c)** $x = -3$ lub $x = 27$.

str. 48–54: **2. a)** 90, **b)** 900, **c)** 699, **d)** 167, **e)** 180. **5.** $1\frac{1}{4}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{10}{14}$. **8. a)** Jurek, **b)** pani Ewa. **11. a)** 0,1; $\frac{3}{4}$, **b)** $-\frac{9}{10}$; $-\frac{1}{4}$, **c)** $-\frac{7}{5}$; $-\frac{1}{7}$. **12. a)** 8,125, **b)** 1,65, **c)** 0,968, **d)** 0,28, **e)** 1,(3), **f)** 1,8(3), **g)** 0,1(8), **h)** 5,91(6). **13. a)** $2\frac{1}{2}$; 2,(50); 2,(505); 2,(5), **b)** 3,64; 3,6(4); 3,(64); $3\frac{2}{3}$. **14.** $d < c < b < a$. **18.** 65,44; 4,74; 32,53; 8,28. **19.** Dla $4\frac{3}{7}$: 4,43 i 4,429; dla $\frac{13}{17}$: 0,76 i 0,765. **22. a)** Pan Wroński, **b)** nie, **c)** nie wystarczy. **23.** W szkole Best. **25. a)** $\frac{17}{30}$, **b)** $\frac{1}{18}$, **c)** $9\frac{12}{35}$, **d)** $2\frac{11}{30}$, **e)** 3,5, **f)** $3\frac{3}{8}$, **g)** $3\frac{8}{9}$, **h)** $6\frac{13}{24}$. **26.** $\frac{7}{9}$ i $\frac{4}{9}$. **27. a)** $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, **b)** $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$, **c)** $\frac{6}{5} = \frac{1}{1} + \frac{1}{5}$, **d)** $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. **30.** 0,15 g. **31. a)** 1,995, **b)** 4,335, **c)** 0,095, **d)** 4,15, **e)** 3,9, **f)** 2,57. **32. a)** $2\frac{1}{30}$, **b)** $3\frac{7}{15}$, **c)** $32\frac{23}{60}$, **d)** $\frac{5}{12}$. **33. a)** $\frac{15}{28}$, **b)** $\frac{5}{36}$, **c)** $\frac{1}{2}$, **d)** 3, **e)** $\frac{7}{22}$, **f)** 1, **g)** $7\frac{1}{5}$, **h)** $1\frac{1}{18}$, **i)** $\frac{9}{49}$, **j)** 6, **k)** $\frac{2}{5}$, **l)** $\frac{9}{64}$, **m)** 1, **n)** $1\frac{1}{11}$, **o)** $\frac{1}{2}$. **34. a)** $\frac{1}{15}$, **b)** 1, **c)** $\frac{4}{7}$, **d)** $\frac{8}{25}$. **35. a)** 540, **b)** 0,54, **c)** 540, **d)** 0,054, **e)** 540 000, **f)** 0,00054, **g)** 540 000, **h)** 0,054, **i)** 0,00054. **37. a)** 405,95 zł, **b)** 43,41 zł, **c)** 5094,50 zł, **d)** 0,35 zł. **38. a)** Około 2 gr, **b)** około 3 gr, **c)** 3,6 g. **40. b)** 2651 m; 0,175 m; 0,25 m; 0,0025 m, **c)** 8500 kg; 0,2505 kg; 0,068 kg; 0,0345 kg. **42. a)** 45 min; 75 min; 5 min; 30 min; 12 min, **b)** 15 s; 50 s; 66 s. **43. a)** 8,55 zł, **b)** 7,49 zł. **44.** Około 2,3 łokcia. **45. a)** 1,5, **b)** $\frac{7}{60}$, **c)** 0,6, **d)** $\frac{2}{275}$, **e)** $43\frac{1}{3}$, **f)** 125. **46. a)** 15,64, **b)** 187,715, **c)** 4,38, **d)** 5,173, **e)** 3,375, **f)** 131. **47. a)** 600 zł; 60 zł; 100 zł, **b)** 200 talarów; 1000 talarów; 10 talarów. **48. a)** $\frac{3}{20}$, **b)** $\frac{9}{80}$, **c)** 0,15, **d)** $\frac{4}{9}$, **e)** $\frac{5}{6}$, **f)** $\frac{3}{40}$. **49. a)** 16, **b)** 0,6, **c)** 0,3, **d)** 0,24. **51. e)** 5, **f)** 12. **52. a)** $2\frac{1}{3}$, **b)** $3\frac{4}{5}$, **c)** $2\frac{3}{4}$, **d)** 4, **e)** 1,3, **f)** $3\frac{1}{5}$. **53. a)** 60, **b)** 300, **c)** $1\frac{1}{9}$, **d)** 9. **54. a)** 3, **b)** 0,04, **c)** 4,6, **d)** 0,03, **e)** 5, **f)** 7,9, **g)** 5,5, **h)** 3,8, **i)** $\frac{3}{5}$, **j)** 11. **55.** $A = 0{,}67$, $B = 4\frac{2}{3}$. **56. a)** $\frac{3}{17}$, **b)** 13,9, **c)** $1\frac{7}{8}$. **58.** O 105,3 litra. **59. a)** 12,375 litra, **b)** 14 słoików. **60.** 1,30 franka. **61.** 41,60 zł. **62.** 37. **63.** Nie wystarczy. **64.** 213 kobiet. **65.** Soczewica: 1 kg, popiół: 3 kg. **66.** Tak. **67. a)** $-9\frac{11}{18}$, **b)** $-5\frac{7}{12}$, **c)** $4\frac{11}{15}$, **d)** −9,22, **e)** −3,85, **f)** $-3\frac{11}{30}$. **68. a)** −9,08, **b)** −7,39, **c)** $14\frac{13}{18}$, **d)** −82,902. **69. a)** $18\frac{1}{7}$, **b)** −5, **c)** $-1\frac{1}{3}$, **d)** 0. **70. a)** 5, **b)** $-3\frac{1}{3}$, **c)** 0,04, **d)** 10, **e)** 3, **f)** −1, **g)** −72, **h)** $2\frac{2}{5}$. **71.** Dodatnią. **73. a)** 39, **b)** 39. **74. a)** −12 i 8, **b)** −5,5 i 1,5, **c)** −115 i 111, **d)** −2001 i 1997.

str. 59–62: **5.** ① 30% i 70%, ② 50% i 50%, ③ 25% i 75%, ④ 40% i 60%, ⑤ 40% i 60%, ⑥ 50% i 50%, ⑦ 30% i 70%, ⑧ 50% i 50%, ⑨ 100% i 0%, ⑩ 75% i 25%, ⑪ 10% i 90%. **7. c)** 33,33%; 83,33%; 133,33%; 27,27%; 111,11%. **9. a)** $\frac{1}{4}$ kwoty, **b)** 45% masy, **c)** $\frac{1}{3}$ ceny, **d)** 25% powierzchni, **e)** $1\frac{2}{3}$ odległości, **f)** 400% długości. **10. a)** $\frac{1}{5}$, **b)** $\frac{1}{10}$, **c)** $\frac{3}{5}$, **d)** $\frac{4}{5}$, **e)** $\frac{1}{50}$ i $\frac{1}{500}$. **11.** Ⓒ i Ⓔ. **13. a)** $\frac{11}{15}$; 73,3%, **b)** $\frac{2}{15}$; 13,3%, **c)** $\frac{1}{50}$; 2,0%, **d)** $\frac{821}{15\,000}$; 5,5%, **e)** $\frac{1}{75}$; 1,3%, **f)** $\frac{31}{3000}$; 1%. **14.** Z języka angielskiego i z języka polskiego. **15. a)** 0,007; 0,417; 0,0056; 0,0002; 0,000008, **b)** 4‰; 26‰; 130‰; 6‰; 68‰, **c)** 42,5%; 1,6%; 3,25%; 0,4%; 0,006%. **16. a)** 1‰, **b)** 17‰; 0,017‰, **c)** 20‰. **17.** 0,02%. **18. a)** $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{1250}$; $\frac{9}{200}$, **b)** 5‰; 1,5‰; 5,8‰.

str. 64–67: **2. d)** Z Czerwonymi lub Czarnymi. **3. a)** ①, **b)** nie. **4. c)** 15%; 23%. **7. a)** 35%, **b)** 5%, **c)** 10%, **d)** 60%.

str. 69–71: **2.** 40%. **3.** Zawodnik Orłów. **4.** Wróbel — 4%, orzeł — ok. 0,83%. **5.** 0,0028‰. **6. a)** 13,75%, **b)** ok. 29%. **7.** 20%. **8. a)** 20%, **b)** 12,5%, **c)** 12%. **9.** Ok. 0,5‰; ok. 3,5‰. **10.** 75%. **12.** Nie. **13. a)** Ok. 63%, **b)** ok. 11%, **c)** ok. 37%, **d)** 44 loże; ok. 41%, **e)** I miejsca — ok. 66%, II miejsca — ok. 34%. **14. a)** 60%, **b)** ok. 20%, **c)** ok. 70%. **15. a)** 75%, **b)** ok. 110%.

str. 73–75: **1. f)** 2,7; 0,5; 0,2; 1,3. **2. a)** 4,20 zł, **b)** 11,2 kg, **c)** 24 gr, **d)** 3,25 cm, **e)** 21,6 l, **f)** 6,75 km, **g)** 4,5 kg, **h)** 140 zł, **i)** 6 kg. **3.** O 190 zł. **4.** Ok. 54 kg. **5. a)** 24 zł, **b)** 4,66 kg, **c)** 18,30 zł, **d)** 2,28 g, **e)** 63 ml, **f)** 36 €, **g)** 495 ha, **h)** 120 l, **i)** 3,75 g, **j)** 880 zł. **6.** 15 min. **7. a)** Pan Zapolski, **b)** 3,6 h, **c)** o 37,5 ha więcej, **d)** 76,8 t. **8.** 27 uczniów. **9.** 110 osób. **10.** 22 jajka. **11.** 12%. **12. a)** 82,59 zł, **b)** 1,16 zł, **c)** 0,30 zł, **d)** 17,79 zł, **e)** 16,52 zł, **f)** 414,38 zł. **13.** W Nadlesiu jest więcej o 51 kobiet. **14.** W Polsce.

str. 77–78: **2. a)** 49, **b)** 4,02, **c)** 109,2, **d)** 34,2, **e)** 249,75, **f)** 31,2. **3.** Materac — 25,50 zł, piłka plażowa — 6,80 zł, parasol plażowy — 20,40 zł. **4.** 216 zł. **5.** 81 kg. **6.** Ten drugi. **7. a)** Niższa, **b)** niższa. **8.** O 50%. **9.** Wersja 2.

str. 80–83: **1. a)** 40, **b)** 240, **c)** 25, **d)** 30, **e)** 38, **f)** 5800. **2.** 25 uczniów. **3. a)** 30, **b)** 50, **c)** 80, **d)** 15, **e)** 40, **f)** 200, **g)** 30, **h)** 160. **4. a)** 400, **b)** 800, **c)** 2000, **d)** 120. **5. a)** 110 g, **b)** 30 uczniów, **c)** 220 zł. **6.** 800 drzew. **7. a)** 2 kg, **b)** 7,5 kg. **8.** 17 osób. **9.** 20 prezentów. **10.** 2070 zł. **11.** 150 osób. **12.** 200 gruszek. **13. a)** 50, **b)** 200, **c)** 1200, **d)** 40. **14. a)** 20 zł, **b)** 500 zł. **15.** 12,5 kg. **16. a)** 40 minut, **b)** 50 minut. **17.** 160 zł. **18.** 250 zł. **19.** 200 zł. Wskazówka. Ile procent ceny biletu normalnego stanowi kwota, którą zapłacili razem za bilety Jacek i jego mama?

str. 85–86: **1. a)** O 25%, **b)** o 20%. **2.** Cena akcji firmy Kret wzrosła o 25%, a firmy Sowa zmalała o $16\frac{2}{3}$%. **3. a)** O 20%, **b)** o 12,5%, **c)** o 5%. **4. a)** O 3%, **b)** o 5%. **5.** 110 zł. **6.** O $33\frac{1}{3}$%; o 25%. **7.** 45 zł. **8.** O 10 punktów procentowych; o 2,4 punktów procentowych. **9. a)** W lutym — 500 osób; w marcu — 600 osób, **b)** o 20%.

str. 88–91: **1. a)** 40%, **b)** 15 dziewcząt, **c)** 300 uczniów, **d)** 420 uczniów; o 25%, **e)** o 40%. **2.** 50 000 osób. **3. a)** 0,16 kg; 0,76 kg, **b)** więcej, **c)** 300 kg, **d)** 2,4%, czyli 24‰. **4.** 40 osób. **5.** Ania ma 42 autografy, Basia — 30 autografów. **6. a)** 33 tys. zł,

b) 45 150 zł, **c)** 306 tys. zł. **7. a)** W 1750 r. — ok. 483 mln; w 2013 r. — ok. 4290 mln, **b)** tak, **c)** o ok. 410%, **d)** ok. 250 razy. **8. a)** O 200%, **b)** o 90%, **c)** 2,5 razy więcej, **d)** 37,5%. **9.** O 20%. **10.** Pan Małowiejski. **11.** Pan A zyskał o ok. 11% więcej od pana B. **12.** Chłopcy — 24, dziewczęta — 20. Wskazówka. Oceny niedostateczne mieli tylko chłopcy. **13.** O 25%. **14.** Więcej.

str. 94–98: **2. a)** 2%; 0,8%; 0,03%; 42,6%; 0,52%, **b)** 200‰; 50‰; 4‰; 1280‰; 0,07‰, **c)** 7‰; 5,2‰; 20‰; 63‰; 3,49‰. **3.** 43%. **4.** W kolejnych naczyniach kasza zajmuje: 80%, 30% i 25%, puste części naczyń stanowią odpowiednio: 20%, 70% i 75%. **8. a)** 20%; 80%, **b)** 25%; 125%. **9. a)** 0,5‰, **b)** 1,25‰. **10.** Ok. 14%. **11. a)** $16\frac{2}{3}$%, **b)** $41\frac{2}{3}$%. **13.** Ok. 11%. **14.** $44\frac{4}{9}$%. **15.** Dorośli — 45%, dzieci — 55%. **16.** Kasia — bardzo dobry, Arek — niedostateczny, Tomek — dostateczny, Asia — dobry, Iwona — dopuszczający, Karol — dobry. **17.** Ok. 11%; ok. 4%. **18. a)** 60 zł, **b)** 16,9 kg, **c)** 1,782 m, **d)** 0,128 km, **e)** 1,24 g, **f)** 0,48 t. **20. a)** 11% kwoty 600 zł, **b)** 10,5% kwoty 57 zł, **c)** 40 $, **d)** 5500 €. **21.** $\alpha = 54°$. **22.** 364 uczniów. **23.** 9 czekoladek. **24. a)** 3% większej kwoty, **b)** 15% większej kwoty, **c)** 150% mniejszej kwoty. **25.** 1191 książek. **26.** 234. **27.** Od razu o 45%. **28.** 19,50 zł. **30. a)** 4000, **b)** 20, **c)** 4,8, **d)** 20, **e)** 2000, **f)** 200, **g)** 400, **h)** 20, **i)** 10, **j)** 300. **31.** 300 zł. **32.** 40 osób. **33.** 3,50 zł. **34.** O 22^{04}. **35.** 11 zł. **36.** 2700 mieszkańców. **37. a)** O 8%, **b)** o 5%. **38.** O 20%. **39. a)** O 25%, **b)** o 20%. **40.** O 12 pkt procentowych; o 50%. **41.** O 4%. **42. a)** 91 zł, **b)** 200 zł, **c)** o 13%. **43.** 101,65 zł. **44.** O 133%. **45.** Ok. 11,4‰. **46.** Łoś — ok. 805 kg, niedźwiedź — ok. 500 kg. **47.** 54 cm. **48.** 100 zł. **49.** 32 uczniów. **50.** 3 jagody. **51. a)** 25 uczniów, **b)** 27 uczniów, **c)** o 8%, **d)** około 36,6%. **52.** 6 mln dukatów.

str. 101–104: **5.** PR, PS, PT, RS, RT, ST. **7. a)** Tak, P, **b)** nie, **c)** tak, R, **d)** tak, P. **8. a)** 2 lub 8, **b)** 7 lub 13, **c)** 99 lub 101. **10.** 2 cm lub 8 cm. **11. a)** FC, **b)** AC, **c)** FC, **d)** FC, **e)** FG.

str. 107–109: **2. a)** 43°, **b)** nie. **3. a)** 179°30′, **b)** 177°30′, **c)** 89°30′, **d)** 45′, **e)** 137°45′, **f)** 84°15′, **g)** 119°1′, **h)** 14°43′. **5. a)** 75° i 105°, **b)** 45° i 135°. **6.** $\alpha = 110°$, $\beta = 40°$, $\gamma = 30°$, $\delta = 110°$. **7.** Czerwony — 130°, zielony — 50°. **10. a)** 90°; 30°; 240°, **b)** 30°; 75°; 5°. **11. a)** 30°, **b)** 60°, **c)** 135°, **d)** 150°. **13. a)** O 30′, **b)** 2 sekundy.

str. 111–113: **1. a)** Tak, **b)** nie, **c)** tak, **d)** tak. **2.** 1 cm, 2 cm i 2 cm. **4.** Nie. **5. a)** Nie, **b)** tak, **c)** tak. **6.** $\alpha = 20°$, $\beta = 57°$, $\gamma = 60°$. **8.** ① i ②. **9. a)** 5° i 5°, **b)** 45°, 45°, 90°, **c)** 40° i 100° lub 70° i 70°. **10.** $\sphericalangle BAC = 84°$; $\sphericalangle ACB = 48°$. **11. a)** 180°, **b)** 180°, **c)** 360°. **12. a)** $\alpha = 25°$, **b)** $\beta = 23{,}5°$, **c)** $\gamma = 120°$. **13.** 32°, 58°, 90°.

str. 117–118: **2.** III. **3. a)** Tak, **b)** nie.

str. 121–123: **1. a)** Tak, **b)** nie, **c)** tak. **2. a)** $\alpha = 125°$, $\beta = 45°$, **b)** $\alpha = 110°$, $\beta = 80°$, **c)** $\alpha = 55°$, $\beta = 125°$. **3. a)** 40°, **b)** 10°. **4.** $AB = 5$, $CD = 4$, $EF = 3$. **5. a)** 56°, 124°, 56°, 124°, **b)** 33°, 147°, 33°, 147°, **c)** 93°, 87°, 93°, 87°. **6.** $\alpha = 50°$, $\beta = 80°$, $\gamma = 24°$. **7.** 24 cm. **8. a)** $4a$, **b)** $2a$. **9.** ① i ②. **10.** Trapez $ABCD$: 60°, 90°, 90°, 120°; równoległobok $EFGH$: 50°, 130°, 50°, 130°; równoległobok $JKLM$: 70°, 110°, 70°, 110°. **11.** 94°, 94°, 86°, 86°. **12. a)** ② i ③, **b)** ②, **c)** ①, ② i ③. **13.** 8. **15.** Wskazówka. Ten równoległobok jest połową pewnego rombu.

str. 126–127: **1.** Tak; nie. **2.** 60°, 90°, 108°, 120°. **3.** 6 cm. **4.** 36°, 72°, 72°; $\alpha = 144°$. **5.** $180° - \alpha$. **6. a)** 135°, **b)** 150°, **c)** 160°, **d)** 176,4°. **7. a)** 36, **b)** nie. **8.** Nie. **11.** $180° - \alpha$.

str. 130–133: **2.** 42 m^2. **3. a)** 256 cm^2, **b)** 32 cm. **4.** Pięć. **5.** Nie. **6.** 38 m^2. **7. a)** 15,25 zł, **b)** 37 zł. **8. a)** 16, **b)** 39, **c)** 125. **9. a)** 2750 cm^2; 25 000 cm^2; 1000 cm^2; 15 cm^2, **b)** 500 000 m^2; 2 000 000 m^2; 1,25 m^2; 25 m^2. **10.** 5 cm^2. **11. a)** 2 a; 32 a; 5000 a, **b)** 32 ha; 8 ha; 70 ha, **c)** 25 000 m^2; 4000 m^2; 25 m^2; 27 000 m^2, **d)** 1,5 km^2; 100 km^2; 0,45 km^2. **12.** Działka w Bieszczadach. **13. a)** 13 mm^2, **b)** 55,3 m^2, **c)** 5,11 a, **d)** 0,44 km^2, **e)** 11 383 ha, **f)** 72 ha. **14.** Cal kwadratowy $\approx 6,45$ cm^2; stopa kwadratowa ≈ 929 cm^2. **15.** 3 097 600 jardów kwadratowych; 640 akrów. **16. a)** Ok. 0,81 ha, **b)** 0,12 ha, **c)** 824 180 km^2, **d)** 14 ha; ok. 7,7 mln.

str. 136–140: **1. a)** 24, **b)** 15, **c)** 16. **3. a)** 18 cm^2, **b)** nie. **4.** $h_1 = 4,8$ cm, $h_2 = 8$ cm. **5.** $BC = 2\frac{2}{3}$. **6.** 3 cm × 8 cm lub 4 cm × 6 cm. **7. a)** 9, **b)** 20, **c)** 14. **8.** Tak. **9. a)** 2,5 cm; 7,5 cm^2. **10.** 7,7 ha. **11.** 3,75 cm^2. **12.** 8 cm. **13. a)** 15, **b)** 7, **c)** 15. **14.** 10 cm^2. **15.** 8 cm. **16.** 39 cm. **17.** III. **18. a)** 4, **b)** 3, **c)** 6. **19.** Tak. **20. a)** 10, **b)** 5, **c)** 9. **21. a)** $a = 2,4$, **b)** $b = 6\frac{3}{7}$, **c)** $c = 7,5$. **22.** 14 cm. **23.** $P_I = 7,25$ cm^2, $P_{II} = 6,25$ cm^2, $P_{III} = 6$ cm^2, $P_{IV} = 5$ cm^2, $P_V = 6$ cm^2, $P_{VI} = 4$ cm^2, $P_{VII} = 5,25$ cm^2. **24. a)** Nie, **b)** nie, **c)** tak. **26.** 9. **27. a)** 3 cm^2, **b)** 3 cm^2, **c)** 3 cm^2.

str. 143–145: **3. a)** $A = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, $B = (-1, 1)$, $C = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $D = \left(\frac{3}{4}, -1\right)$, **b)** $E = (5, 5)$, $F = (10, -5)$, $G = (2,5, -2,5)$, $H = (-10, 0)$, $I = (-7,5, 5)$, **c)** $J = (0,1, 0,1)$, $K = (0,4, -0,2)$, $L = (0, -0,3)$, $M = (0, 0,3)$, $N = (-0,3, 0,1)$. **6. a)** Na osi rzędnych, **b)** na osi odciętych, **c)** w trzeciej ćwiartce, **d)** w czwartej ćwiartce, **e)** są ujemne, **f)** są ujemne, **g)** są dodatnie. **7. a)** $(-4, 3)$, **b)** $(99, 240)$. **8.** $(-3, 4)$ lub $(-1, -2)$ lub $(9, 4)$. **9.** $D = (2, -1)$ lub $D = (4, 3)$ lub $D = (4, -1)$. **10. a)** 8, **b)** 11, **c)** 15, **d)** 10,5. **11.** 22,5. Wskazówka. Podziel czworokąt na dwa trójkąty. **12.** $C = (3, 6)$ lub $C = (3, -2)$.

str. 148–152: **2.** $a \perp e$, $c \parallel f$. **3. a)** Nie, **b)** tak. **4. a)** $\alpha = 35°$, $\beta = 52°$, $\gamma = 40°$, $\delta = 53°$, **b)** $\alpha = 130°$, $\beta = 130°$, $\gamma = 20°$, $\delta = 30°$. **6. a)** 165°, **b)** 157,5°. **8.** 5 cm. **9.** 4 cm i 2 cm lub 3 cm i 3 cm. **10.** 40° i 40°. **11. a)** Tak, **b)** nie, **c)** tak. **12. a)** 260°, **b)** 47,5°. **13. a)** 50°, 65°, 65°, **b)** 50°, 60°, 70°. **14.** 40°. **15.** 360°. **20.** 24. **22.** 60°, 120°, 60°, 120°. **24.** 12,5 cm. **25.** 49°, 49°, 131°, 131°. **29. a)** $n-2$, **b)** $180° \cdot (n-2)$, **c)** $\frac{180° \cdot (n-2)}{n}$. **30. c)** 3000 cm^2, **d)** 4 cm^2. **31. a)** 6 000 000 m^2; 50 000 m^2; 0,75 m^2; 0,0045 m^2, **b)** 1600 mm^2; 320 mm^2; 21 000 mm^2; 350 000 mm^2. **32. a)** 300 ha; 2 ha; 0,062 ha; 1,35 ha, **b)** 300 000 a; 5000 a; 120 a; 4,7 a. **33.** Ok. 5 razy. **34. a)** 24 sztuki, **b)** 16 sztuk. **35.** 80 cm^2. **36.** 50; 36. **37.** 35; 24. **38.** 38; 32; 44. **39. a)** 100; 6, **b)** 0,06; 10,5. **40.** Tak. **41.** 5070 cm^2. **42.** 10 cm^2. **43.** 40 cm^2. **45.** 14 cm^2. **46.** $A = (-0{,}8, 0{,}6)$, $B = (0{,}4, -0{,}4)$, $C = (0{,}2, 0{,}2)$, $D = (-0{,}4, -0{,}4)$, $E = (-1, -0{,}4)$, $F = (0{,}8, 0{,}6)$, $G = (1, -0{,}4)$, $H = (-0{,}6, 0)$, $I = (0, 0{,}6)$. **48.** $(-3, 5)$. **49. a)** $(3, 0)$; $(0, 3)$; $(-3, 0)$; $(0, -3)$, **b)** $(0, 5)$ i $(-5, 0)$, **c)** $(0, -89)$ i $(0, -111)$. **50.** 30. **51.** 12; 4,5; 16. **52. a)** 27,5, **b)** 15, **c)** 16.

str. 156–158: **1. a)** Dwie; trzy; cztery; $n+1$, **b)** dwie; cztery; sześć; $2n$. **2. a)** 6; 10; 22, **b)** $4n+2$. **3.** $2(n-1)$ punktów. **4. a)** $2n$, **b)** $n-7$, **c)** $\frac{1}{4}n^2$, **d)** $\frac{n+n^3}{2}$, **e)** $0{,}75n$, **f)** $1{,}2n$. **5. a)** $100a+b$; $a+\frac{b}{100}$, **b)** $7x+y$; $x+\frac{y}{7}$, **c)** $60g+m$; $g+\frac{m}{60}$. **6. a)** $a+0{,}01b+0{,}001c$, **b)** $60g+m+\frac{s}{60}$. **7. a)** $a+b$, **b)** $a+\frac{1}{3}b+3$, **c)** $\frac{1}{2}a+b-2$, **d)** $\frac{3}{4}a+\frac{4}{5}b$, **e)** $\frac{a+b}{2}+2$. Założenia: c) liczba a jest parzysta i $b \geqslant 2$, d) liczba a jest podzielna przez 4, a liczba b jest podzielna przez 5 (stąd $a \geqslant 4$ i $b \geqslant 5$), e) liczba $a+b$ jest parzysta. **8. a)** $k+1, k+2, k+3$, **b)** $2k+1, 2k+2, 2k+3$, **c)** $2k+1, 2k+3, 2k+5$, **d)** $2k+2, 2k+4, 2k+6$, **e)** $2k-4, 2k-2, 2k$. **9. d)** $x+y+z$, **e)** $4x-z$, **f)** $z-2x$, **g)** $9x+2z$, **h)** $x+4y+2z$, **i)** $16x-4z$, **j)** $12x+2y-2z$, **k)** $8z-16x$. Wskazówka. Skorzystaj z wyrażenia zapisanego w podpunkcie f). **10.** $32x$ osób. **11. a)** $x-8$ lat, **b)** $y+5$ lat. **12. a)** $x-5$ lat; $3x$ lat, **b)** $x+2$ lata, **c)** 5 lat, **d)** o $2x$ lat, **e)** $2x+5$ lat. **13.** 7 razy. **14. a)** $x-\frac{1}{2}; y+\frac{1}{2}$, **b)** $\frac{1}{2}x+2; \frac{1}{2}x+y-2$, **c)** $\frac{1}{2}(x+1); \frac{1}{2}x+y-\frac{1}{2}$, **d)** $\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}; \frac{1}{3}x+y+\frac{1}{4}$. **15. a)** $a+(-a)=0$, **b)** $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$, **c)** $\frac{a}{b} = \frac{5a}{5b}$.

str. 160–161: **2. a)** Mężczyzna: 80 kg i 72 kg; kobieta: 64 kg i 54,4 kg, **b)** waga rzeczywista modelki jest o 8 kg mniejsza od jej wagi idealnej, a waga rzeczywista koszykarza jest o 31,6 kg większa od jego wagi idealnej, **c)** dziewczynka: 8,5 kg; chłopiec: otrzymamy wartość −5. **3. a)** 42, **b)** 29, **c)** 78, **d)** 3, **e)** 13, **f)** −3. **5.** ① Tak, ② nie, ③ nie. **6. a)** 10, **b)** 120. **7. b)** $21\frac{1}{2}$; 10; 20; 24.

str. 163–164: **4. a)** $4xy$, **b)** $3a^3$, **c)** $12y^2$, **d)** $320kxy$. **5. a)** $18ab$, **b)** $2st^2$, **c)** $-\frac{5}{3}ab^2$, **d)** $2p^2r^2$, **e)** x^3, **f)** $-\frac{1}{12}a^3b$. **7.** ab; $-3a^2b$; $-8pr$. **8.** $4x^2$; 100. **9. a)** $\frac{1}{5}a^2$, **b)** $5b^2$.

str. 166–167: **1.** $4a$; $4\frac{1}{3}b$; $11{,}4c$. **3.** W większym. **6. a)** $-2a+1$, **b)** $5a-5b$, **c)** $2x-4y$, **d)** $-4x-7$, **e)** $2x-10$, **f)** $ab-3$, **g)** $-3x^2-4y^2$, **h)** $3b-3c$, **i)** $-x^2-x-1$, **j)** $m^2+2n+4mn$. **7. a)** $10x+6y+10$, **b)** $8x+4y+7$, **c)** $3x+y+20$. **8. a)** -7, **b)** $-5{,}5$, **c)** 2, **d)** $1\frac{1}{2}$. **10. a)** 2, **b)** 2, **c)** 2. **11.** ② i ④.

str. 169–170: **1. a)** $5a-7$, **b)** $3x-3$, **c)** $3-5x$, **d)** $5x-y$, **e)** $-3a-10$, **f)** $-4x+2y$, **g)** $7p+2$, **h)** $-9x+6$, **i)** $x+2$, **j)** $3m+3{,}5n$, **k)** $2a-10b$, **l)** $-p-r$. **2. a)** $4a+4b$, **b)** $4a+4b$, **c)** $2a+4b$, **d)** $2a+6b$, **e)** $2a+6b$, **f)** $4a+4b$, **g)** $2a+6b$, **h)** $2a+6b$. **3. a)** Tak, **b)** nie. **4. a)** -11, **b)** -13, **c)** 6, **d)** 1. **5. a)** $4x-y-1$, **b)** $7x-1$, **c)** $5x+1$, **d)** $-x-2y+1$. **6. a)** $2a$, **b)** $2b$, **c)** $-a-\frac{3}{2}b$. **8. a)** $4x^2+4xy-7$, **b)** $5x^2-5x-7$, **c)** $12ab-7a+6b+1$. **10. a)** $3x-z$, **b)** $2a-b$, **c)** $2a$, **d)** $-x-1$.

str. 172–173: **2. a)** $2x+1$, **b)** $8x+22$, **c)** $-3x^2-31x$, **d)** $-22x-3$. **3. a)** $-x+2$, **b)** $x+2y$, **c)** $-3p^2+4pr$, **d)** $-x+2xy-\frac{1}{3}$, **e)** $-6x^2-6x+6$, **f)** $0{,}5x^2-0{,}1x+0{,}2$. **4. a)** $x+9$, **b)** $x+1$, **c)** 0, **d)** $-4x+26$. **5. a)** $-18x^3y+6x^2y^2$, **b)** $-18x^3y+6x^2y^2$, **c)** $9x^3-3x^2y-6xy$, **d)** $9x^3-3x^2y-6xy$. **6. a)** $2k$, **b)** $2k+1$, **c)** $2k+2$. **7.** $\frac{((x+4)\cdot 2-8)\cdot 3}{2}=3x$; 6. **8. a)** $-6x$, **b)** $a^2+b^2+c^2$, **c)** $3x^3-2x^2+x+3$, **d)** $4b^2-4\frac{2}{3}b$. **9. a)** 23, **b)** 19,9. **10.** O $(a+b+6)h$. **11.** $-2ac$; ac. **12.** $\frac{a^2+b^2-ab}{2}$; 10,5.

str. 175–177: **1. c)** $a^3-ab^2-a^2+b^2$, **d)** $2xy-6x-y+3$. **2. a)** x^2+3x+2, **b)** $3a^2-11a-20$, **c)** $-6t^2-t+1$, **d)** $-21a^2b^2+58ab-21$, **e)** $-5x^2+6y^2-xy$, **f)** $7x^2-5y^2+34xy$, **g)** $2x^2+xy-y^2$, **h)** $2a^2b^2-6a^2+4a^2b$. **3. a)** t^3+3t^2+5t+3, **b)** $3p^3-11p^2+11p-2$, **c)** $-4m^3+8m^2-13m+5$, **d)** $-15w^3+17w^2+6w-8$. **4. a)** $x^2+3x-10$, **b)** $\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{2}$, **c)** x^2+2x+1. **5. c)** $4x^2+20x+25$. **6.** Kwadrat. **7.** $\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}by$. **8.** $8n^4-30n^2+22$. Wskazówka. Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem trójkąta. **9.** 8 i 12. **10. a)** $4x^3-60x^2+200x$, **b)** 192; 96, **c)** 0; nie da się złożyć pudełka. **11. a)** x^4-1, **b)** x^4-1. **12.** $x^{100}-1$. **13. a)** $x^3+6x^2+11x+6$, **b)** $2x^3+5x^2-23x+10$, **c)** x^3-2x^2-7x-4, **d)** $4x^3-4x^2-15x+18$. **14. a)** $2x^2-4$, **b)** $k^2-10kn-2n^2$, **c)** $8y^2-13y-6$, **d)** $-4c^2+7c-2$, **e)** $5a^2-4a-6$, **f)** $4x^4+4x^2+6$. **15.** Wskazówka. Przekształć najpierw lewą, a potem prawą stronę równości.

str. 180–184: **1.** Potrzeba n^2 figur. **2. a)** 37, **b)** $5n+2$, **c)** $20n$. **3. a)** Z 19 zapałek, **b)** $2n+1$ zapałek. **4. a)** $\frac{5}{18}c$, **b)** $3{,}6c$. **5. a)** $\frac{k}{2}$ parzystych i $\frac{k}{2}$ nieparzystych, **b)** $\frac{k-1}{2}$ parzystych i $\frac{k-1}{2}+1$ nieparzystych. **6. a)** $2x+1$, **b)** $a+b^3$, **c)** $ab-3$, **d)** $3(n^2+25)$, **e)** $\frac{a+b}{4}$. **7. a)** $100k$; $\frac{g}{100}$, **b)** o $100k-g$, **c)** $\frac{g}{5}+3k$. **8. a)** $100+k$, **b)** $10k+1$, **c)** $5000+10k+5$. **9.** $100(a+b)+10b+a=101a+110b$; $0<a+b\leqslant 9$. **10. a)** -1, **b)** 4. **11. a)** $\frac{1}{4}$, **b)** 4, **c)** $-\frac{1}{2}$, **d)** $\frac{1}{4}$. **12.** Tak, np. $m=10$, $n=0$. **13. a)** $-x^2$, **b)** $2x^2$,

c) $3ty^2$, **d)** x^2y^2. **14. a)** $3xy$, **b)** $3pq$, **c)** $-2a^2b$, **d)** $36t^2y^2$. **15. a)** $\frac{1}{2}xy$, **b)** $\frac{1}{2}ab$, **c)** uv, **d)** $\frac{1}{2}x^2$, **e)** $\frac{1}{9}a^2$, **f)** $2x^2$. **16.** $54a^3$; 128. **17. a)** $0{,}7a$, **b)** $4a$, **c)** $0{,}9b$, **d)** $1{,}01x$, **e)** $0{,}96y$. **18.** $0{,}1xy$. **20. a)** $26\frac{2}{3}$, **b)** -3. **22. a)** $14a^2$; $-8a$, **b)** $2x^2$; x; 3. **24. a)** $-2a+4b$, **b)** $x-y+1$, **c)** $kx-6ny$, **d)** $-ab+2a$, **e)** $2{,}9x^2-3{,}9x$. **25. a)** 13,2, **b)** 0,3, **c)** 3. **26.** $2x^2+2x-8$. **29. a)** $6x-26$, **b)** $-x+5$, **c)** $y+14$, **d)** $x-5y-13$, **e)** $4a+4b$, **f)** -2, **g)** $-2x^2+2x$, **h)** $2a^2$. **30. a)** $x-7$, **b)** $-b$, **c)** $-x+6$, **d)** $5x-17$. **31. a)** $\frac{3}{2}p^2-\frac{5}{3}p$, **b)** $x-4y$, **c)** $\frac{3}{8}m$, **d)** $\frac{1}{36}a$, **e)** $\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}$. **32. a)** 6, **b)** 48, **c)** -18. **34. a)** n^2-3n+2, **b)** $4n^2+12n+8$, **c)** $4n^2-8n+3$. **35.** $x^{100}-1$. **36. a)** $2m^2-m-3n$, **b)** $x^2+6xy-7x+4y-2$, **c)** $5mn-4m-n-10$, **d)** $6x^2$. **37. a)** $n^5-n^4+n^3-n^2$, **b)** $n^5+n^4-n^3-n^2$, **c)** x^3-x^2-5x+2, **d)** x^4+x^2+1. **38. a)** a^3-b^3, **b)** a^3+b^3. **39. a)** $x^2+8x+12$, **b)** $1{,}5a+2h$, **c)** $5{,}5c$, **d)** $ax+\frac{1}{2}bx+cx+ay+by+cy$. **41. a)** $\frac{3a+2}{a^2+a}$, **b)** $\frac{1}{a^2+3a+2}$, **c)** $\frac{4p^2-4p-1}{4p^2+2p}$, **d)** $\frac{4k}{-3k^2+4k-1}$. **42. a)** $\frac{a}{a^2-b^2}$, **b)** $\frac{a^2+b^2}{2(a^2-b^2)}$. **47.** $\frac{3n^2+2}{3}$.

str. 187–188: **1. a)** $x+12=41$, **b)** $2x=27$, **c)** $\frac{y}{2}=35$, **d)** $z+8=21$, **e)** $t-16=47$. **2. a)** $x-5=0{,}8x$, **b)** $0{,}85x=17$, **c)** $1{,}1u=13$. **3. a)** $4a+17=49$, **b)** $14b=49$, **c)** $\frac{1}{2}(16+2c)\cdot 10=120$, **d)** $\frac{1}{2}\cdot 2d\cdot 12=96$. **4. a)** $2\cdot 5+2\cdot(8+x)=2\cdot(2\cdot 5+2\cdot 8)$, **b)** $5\cdot(8-x)=5\cdot 8-5$. **5. a)** $x+2x+1=19$, **b)** $x+x+5=27$, **c)** $3x=2(x+2)$, **d)** $2x-5=x+10$. **6. a)** x — liczba chłopców; $2+13+x=33$, **b)** x — cena czekolady; $3x+18=27{,}60$, **c)** x — miesięczna kwota kieszonkowego; $5(x-10)=75$. **7. a)** $x+0{,}7x=$ $=34$, **b)** $0{,}93x-300=2500$, **c)** $x-12=0{,}6x$.

str. 190–191: **2. a)** Tak, **b)** nie, **c)** tak, **d)** nie. **3.** 3 i 6. **4. a)** $a=53$, **b)** $a=6$, **c)** $a=-32$, **d)** $a=32$. **6.** Równania, które mają nieskończenie wiele rozwiązań, to: $2(x+1)=2x+2$, $a+7=7+a$, $x\cdot 0=0$; równania, które nie mają rozwiązań, to: $0\cdot x=5$, $z^2=-9$, $x-3=x+3$. **7.** ①, ②, ④ i ⑥. **8.** ③ i ⑤.

str. 193–196: **2. a)** $x=0{,}3$, **b)** $x=3$, **c)** $x=4{,}5$, **d)** $x=-2{,}5$, **e)** $x=\frac{8}{7}$, **f)** $x=-2{,}5$. **3. a)** $x=-1{,}5$, **b)** $x=-2$, **c)** $t=-7$, **d)** $x=10$, **e)** równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, **f)** $x=-4$. **4. a)** $x=4{,}5$, **b)** $y=4$, **c)** $a=2$, **d)** $b=2$. **5. a)** $x=-5$, **b)** $x=-\frac{1}{5}$, **c)** $x=-10$, **d)** $x=-10$. **6. a)** $x=2$, **b)** $x=6$, **c)** $x=7\frac{1}{3}$. **7. a)** $x=55$, **b)** $x=43{,}5$, **c)** $x=36$, **d)** $x=3$. **8. a)** 50, **b)** $y=47$, **c)** $a=130$, **d)** $x=11$. **9. a)** $x=16{,}5$, **b)** $y=7{,}6$, **c)** $y=18$. **10. a)** $x=-6$, **b)** $x=\frac{1}{2}$, **c)** $x=20$, **d)** $x=7$, **e)** $x=\frac{6}{13}$, **f)** $x=8$, **g)** $x=3\frac{1}{3}$, **h)** $x=8$, **i)** $x=-1{,}4$. **11. a)** $x=4$, **b)** $x=18$, **c)** $x=\frac{1}{2}$, **d)** $x=-1$. **12. a)** $x=1$, **b)** $x=-2{,}5$, **c)** $x=2{,}5$, **d)** $x=-\frac{1}{4}$, **e)** $x=2{,}4$, **f)** $x=-2\frac{2}{3}$, **g)** $x=1$, **h)** $x=\frac{1}{6}$. **13. a)** $x=-1{,}2$, **b)** $x=23$, **c)** $x=1$, **d)** $x=1$, **e)** $x=-\frac{5}{3}$, **f)** $x=-0{,}9$. **14. a)** $x=-1$, **b)** $x=-1$. **17. a)** Dla a równego: -5, -1, 1 lub 5, **b)** dla a równego: -6, -3, -2 lub -1.

str. 197–203: **1.** 13 dorosłych i 36 dzieci. **2.** 0,6 kg czerwieni i 0,9 kg błękitu. **3.** Kapelusz — 105 zł, piórko — 5 zł. **4.** Zegar — 5,25 kg, kukułka — 0,25 kg. **5.** Pan Kowalski — 2900 zł, pani Kowalska — 3100 zł. **6.** 12 zł. **7.** 45 monet. **8.** Duży haczyk — 28 gr, mały haczyk — 21 gr. **9. a)** 40 większych i 40 mniejszych, **b)** 24 większe i 72 mniejsze, **c)** 37 większych i 46 mniejszych. **10.** 36 studentów. **11.** 35 piratów. **12.** 90 książek. **13.** 32 minuty. **14.** 42 grzyby jadalne i 8 grzybów trujących. **15. a)** 29 rzutów za 2 pkt, 8 rzutów za 3 pkt. **16.** 12 zadań. **17.** Agnieszka — 15, Jacek — 45. **18.** 24 wróble. **19.** 12,50 zł. **20.** 28 lat. **21.** 6 lat. **22.** 13 lat. **23.** Jurek ma 30 lat, a dziadek — 70 lat. **24.** 12 dni; 360 stron. **25.** 100 zł. **26.** Wszystkich kosmitów było 92. **27.** 71°, 71°, 38°. **28.** 32°, 64°, 84°. **29.** 30°, 60°, 90°. **30.** 12. **31.** 3,5 cm i 8,5 cm. **32.** 10. **33.** 4. **34.** 10 cm. **35.** 1 cm × 2 cm. **36.** $RT = 9$.

str. 206–207: **1.** Kazimierz — 25 gołębi, Jan — 22 gołębie. **2.** 30 dzieci. **3.** Pani Zofia — 83 kg, pani Anna — 80 kg. **4.** 108 cm. **5.** 500 chłopców i 430 dziewcząt. **6.** 10 grubych ryb. **7.** 4000 zł. **8.** 600 sztuk. **9.** Dokupił 20 sztuk owiec i baranów; ma teraz 5 baranów. **10. a)** 0,2 kg, **b)** 3 kg, **c)** 0,5 kg, **d)** 60 kg. **11. a)** 10 kg, **b)** 60 kg. **12.** 12 kg.

str. 210–211: **1. a)** $a = 4k$, **b)** $t = \frac{y+1}{2}$, **c)** $p = \frac{d+f}{2}$, **d)** $m = \frac{Ma-b}{10}$, **e)** $f = \frac{D-3e}{3}$, **f)** $t = \frac{2P-2K-2}{s}$; $s \neq 0$. **2. a)** $s = v \cdot t$, $t \neq 0$, **b)** $F = \frac{P}{m}$; $m \neq 0$, **c)** $h = \frac{E}{mg}$; $m \neq 0$ i $g \neq 0$, **d)** $R = \frac{a}{K}$; $R \neq 0$, $K \neq 0$, **e)** $x = \frac{Rb}{a}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, **f)** $m = \frac{bt}{Sa}$; $S \neq 0$, $a \neq 0$, $m \neq 0$, **g)** $t = \frac{1}{Tab}$; $T \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $t \neq 0$, **h)** $a = \frac{2v}{t^2}$; $t \neq 0$, **i)** $P = \frac{abc}{4R}$; $P \neq 0$, $R \neq 0$. **3.** $m = \frac{E}{c^2}$. **4.** $P = \frac{1}{2}ah$; $a = \frac{2P}{h}$. **5.** $P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$; **a)** $h = \frac{2P}{a+b}$, **b)** $a = \frac{2P}{h} - b$. **6.** ◆ = $\frac{♣+♠}{♥}$; ◆ $\neq 0$, ♥ $\neq 0$. **7. a)** $k = \frac{V-5a}{10}$, **b)** $k = \frac{T+p-3a^2}{6a}$; $a \neq 0$, **c)** $k = \frac{3p-A+2b}{p^2}$; $p \neq 0$, **d)** $k = \frac{b+d}{d}$; $d \neq 0$, $k \neq 1$, **e)** $k = \frac{a-e-1}{e}$; $e \neq 0$, $k \neq -1$, **f)** $k = \frac{5f-2c+3}{10f}$; $f \neq 0$, $k \neq \frac{1}{2}$, **g)** $k = \frac{c+1}{a+b}$; $a \neq -b$, **h)** $k = \frac{D-3}{2(M-2)}$; $M \neq 2$, **i)** $k = \frac{H-F-2}{10(E+2)}$; $E \neq -2$. **9.** $h = \frac{6P}{L}$.

str. 214–218: **3.** $7n - 5 = 21 + 5(n-2)$. **4.** $x - 0{,}25x - 0{,}25x - 60 = 20$. **5.** $1001 + 10a = 101a$. **6.** $-2x = 0$, $5y + 5 = 5$, $7t + 9t = 0$. **7. a)** Tak, **b)** nie, **c)** tak. **8.** 0, −2, 4. **10. a)** $x = 8$, **b)** $x = \frac{5}{8}$, **c)** $x = 1$, **d)** $x = -5$, **e)** $x = 1{,}5$, **f)** $x = -5$. **11. a)** $x = -4$, **b)** $x = -9{,}6$, **c)** $x = 3$, **d)** $x = -5\frac{5}{17}$. **12. a)** $x = 4$, **b)** $x = 9$, **c)** $x = 9$, **d)** $x = -4$, **e)** $x = 5\frac{4}{5}$, **f)** $x = -2$. **13. a)** $x = \frac{1}{26}$, **b)** $x = -3{,}5$, **c)** $x = 8$, **d)** $x = -\frac{1}{4}$. **14. a)** $x = -3$, **b)** $x = 2$, **c)** $x = -1{,}5$, **d)** $x = -\frac{3}{4}$. **15. a)** $x = 0$, **b)** $x = 1\frac{1}{3}$. **16.** Dla $a = -\frac{1}{4}$; dla $a = 2$. **17. a)** $x = 4$, **b)** $y = 2\frac{2}{3}$. **18.** 13 km. **19.** 17 dwuzłotówek i 23 pięciozłotówki. **20.** 4 litry. **21.** 30 osób. **22.** 16 pytań. **23.** 12 pętelek. **24.** 8 lat temu; za 10 lat. **25. a)** Maciek — 4 lata, Dorota — 16 lat, **b)** za 8 lat. **26.** 180 pasażerów. **27.** Andrzej Iksiński dostał 36

głosów, a Bartosz Igrekowicz —132 głosy. **28.** O 11^{20}. **29.** 55°, 125°. **30.** 40°, 70°, 70°. **31.** 36° i 54°. **32.** 5 cm, 7 cm, 10 cm i 10 cm. **33.** 3 cm. **34.** Po 75 skokach. **35.** 36 gęsi. **36.** 36 uczniów. **37.** 15 pszczół. **38.** 84 lata. **39.** 30 brzoskwiń. **40.** 7 groszy. **41.** 360 kwiatów. **42.** 16,50 zł. **43.** 50 losów wygrywających. **44.** 5 dziewcząt. **45. a)** 2 kg, **b)** około 0,45 kg, **c)** 2 kg. **46.** 4 kg. **49.** $J = \frac{\heartsuit - \mathrm{OLA}}{\mathrm{AŚ}}$, $A \neq 0$, $Ś \neq 0$; $L = \frac{\heartsuit - \mathrm{JAŚ}}{\mathrm{OA}}$, $A \neq 0$, $O \neq 0$.

str. 221–224: **1. a)** 125, 32, 81, –64, **b)** 0, $1\frac{3}{7}$, 1, 1, **c)** $\frac{1}{32}$, $\frac{81}{625}$, 0,000064, –0,000027, **d)** 1,21, $1\frac{61}{64}$, $-10\frac{81}{125}$, 1,69, **e)** –81, $\frac{27}{8} = 3{,}375$, –1,21, $-\frac{16}{81}$, **f)** $\frac{8}{3}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{2}{9}$, $-\frac{125}{9}$. **2.** 5, 1, –5, 1, 0, –1, 1, 0, –1, 1, 1. **3. b)** 0,001, 0,00001, 0,0001, 0,000000001. **4. a)** 10^3, **b)** 10^5, **c)** 10^6, **d)** 10^9. **5.** Suma cyfr wynosi 907. **6.** Liczby dodatnie są w podpunktach: b, e, f, j. Pozostałe liczby są ujemne. **7. a)** Ujemna, **b)** dodatnia, **c)** ujemna. **8.** Błędne obliczenia: a, d, e, g. **9. a)** $A = \left(\frac{3}{4}\right)^5$, $B = \left(\frac{3}{4}\right)^2$, $C = \frac{3}{4}$, $D = \frac{4}{3}$, $E = \left(\frac{4}{3}\right)^2$, **b)** $A = -0{,}7$, $B = (-0{,}7)^5$, $C = (-0{,}7)^6$, $D = (-0{,}7)^4$, $E = (-0{,}7)^2$. **10.** Znak $<$ należy wstawić w podpunktach: b, d, e, i, j. W pozostałych podpunktach należy wstawić znak $>$. **11. a)** a, c, b, **b)** c, a, b, **c)** b, c, a, **d)** c, a, b. **12. a)** Dla $n = 5$ i $n = 6$, **b)** dla $n = 5$, $n = 6$, $n = 7$, $n = 8$ i $n = 9$. **13.** 1024; –1024; $\frac{1}{1024}$; $-\frac{1}{1024}$; $\frac{1}{1024}$; 2048; 512. **14. a)** $3087 = 3^2 \cdot 7^3$, $5746 = 2 \cdot 13^2 \cdot 17$, $41\,503 = 7^3 \cdot 11^2$, **b)** $648 = 2^3 \cdot 3^4$, $2800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, $10\,125 = 3^4 \cdot 5^3$, $1936 = 2^4 \cdot 11^2$. **15. a)** 1-0-1; 0-2-1; 4; 0-0-0-0-2, **b)** 2541, 539, 2016, 323. **16. a)** 64, **b)** $\frac{2}{81}$, **c)** 3, **d)** 10, **e)** 4, **f)** 0,008, **g)** $\frac{11}{18}$, **h)** $12\frac{1}{2}$, **i)** –15,2, **j)** 55,5, **k)** 22, **l)** $-1\frac{8}{25}$. **17.** Na wysokość 7,68 cm; po siódmym odbiciu. **18.** 5, 1, 6, 9, 1, 7. **19.** 11 111 111 110 osób. **21. a)** 7, **b)** 7^2, **c)** 7^{91}.

str. 226–228: **1. a)** 13^{11}, **b)** 123^{12}, **c)** 6^{24}, **d)** 17^4, **e)** $\left(1\frac{1}{3}\right)^{12}$, **f)** 8^{15}, **g)** a^{11}, **h)** x^8, **i)** b^3. **2. a)** 5^9, **b)** 8^2, **c)** 3^4, **d)** 5^2. **3. a)** 27 razy, **b)** 16 razy, **c)** 15 625 razy. **4. a)** 11, **b)** 9, **c)** 11, **d)** 9, **e)** 5, **f)** 5. **5. a)** -5^7, **b)** 7^{11}, **c)** 6^9, **d)** -7^9, **e)** 5^6, **f)** –12, **g)** $-a^6$, **h)** $-z^6$, **i)** x^9. **6. a)** –2, **b)** 1, **c)** –7, **d)** $-\frac{1}{64}$, **e)** –0,00001, **f)** –0,2. **7. a)** 10^{10}, **b)** 10^{14}, **c)** 10^{21}. **9. a)** Milion razy, **b)** kwintylion razy, **c)** sekstylion razy, **d)** septylion razy. **11.** Tak. **12. a)** 10^8 mm, **b)** 10^7 dm, **c)** 10^8 dag, **d)** 10^{11} mg. **13. a)** 1 km, **b)** tak.

str. 229–230: **2.** $n = 4$, $k = 7$, $m = 6$. **3. a)** $a = 16$, **b)** $b = 9$, **c)** $c = 18$, **d)** $d = 16$, **e)** $e = 49$, **f)** $f = 125$ lub $f = -125$, **g)** $g = 4$ lub $g = -4$, **h)** $h = 27$. **4. a)** 2^{16} lub 4^8, **b)** 5^4, **c)** 2^{15} lub 8^5, **d)** 3^{18} lub 9^9, **e)** 5^{15}. **5. a)** 10^{18}, 10^{21}, 10^{55}, **b)** $0{,}1^8$, $0{,}1^{27}$, $0{,}1^{40}$. **6. a)** 6; 8, **b)** 4; 9, **c)** 2; 3, **d)** 10; 11. **7. a)** =, **b)** <, **c)** <, **d)** =, **e)** >, **f)** <, **g)** >, **h)** >, **i)** =. **8. a)** 64^5, 16^8, 4^{17}, 8^{12}, **b)** 9^{17}, 81^9, 3^{40}, 27^{15}, **c)** 4^{2^3}, 4^{3^2}, 2^{4^3}, 2^{3^4}. **9.** Do potęgi 13. **10.** 2^2, 2^8, 2^{2048}.

str. 232: **1. a)** $160\,000$, **b)** $\frac{1}{125}$, **c)** $27x^3$, **d)** $-32a^5$, **e)** x^8y^8, **f)** $-a^3b^6$, **g)** $81x^4y^8$, **h)** $-x^{10}y^{15}$, **i)** $\frac{a^4}{16}$, **j)** $-\frac{x^3}{8}$. **2. a)** $m=5$, $n=15$, **b)** $m=28$, $n=7$, **c)** $m=6$, $n=18$, **d)** $m=60$, $n=30$, **e)** $m=20$, $n=35$, **f)** $m=36$, $n=15$. **3. a)** $10^7=10\,000\,000$, **b)** $2^5=32$, **c)** $2^{10}=1024$, **d)** $3^4=81$, **e)** $2^3=8$, **f)** $-3^3=-27$, **g)** $-2^9=-512$, **h)** $1^3=1$. **4. a)** $P=9a^2$, **b)** $V=8x^3$. **5. a)** 2,25 razy, **b)** $1\frac{7}{9}$ razy, **c)** 2,25 razy. **6. a)** $16\,000\,000$, **b)** $\frac{5}{3}$, **c)** 576, **d)** $\frac{13}{729}$.

str. 234–236: **1.** $e<a<b<d<c$. **2. a)** $(8^3)^5$; 8^7 razy, **b)** $7^{13}:7^5$; 7 razy. **3.** 8 razy. **4. a)** $160\,000$, **b)** $8\,000\,000$, **c)** 8000, **d)** $320\,000\,000\,000$, **e)** $16\,000\,000\,000\,000$. **6. a)** 2^{20}, **b)** 2^{10}, **c)** 2^{24}, **d)** 2^{15}, **e)** 2^{28}. **7. a)** 3^8, **b)** 2^{19}, **c)** 2^4, **d)** 5^1, **e)** $\left(\frac{1}{3}\right)^5$, **f)** $0{,}5^1$, **g)** $0{,}1^3$, **h)** 10^5. **8. a)** $m=30$, $n=8$, **b)** $m=12$, $n=12$, **c)** $m=32$, $n=40$, **d)** $m=6$, $n=11$. **9. a)** $2^3\cdot3^5$, **b)** $2^7\cdot5^3$, **c)** $3^9\cdot5^4\cdot7^5$, **d)** $2^5\cdot3^5\cdot5^4$. **10.** 2^{269}. **11. a)** Wskazówka. $44^4<(4^3)^4$, **b)** wsk. $65^8>64^8$, $3^{22}<4^{22}$; **a)** 44^4, $(4^4)^4$, 4^{44}, 4^{4^4}, **b)** 3^{22}, 16^{11}, 32^9, 65^8. **12. a)** 5, **b)** 3, **c)** 2, **d)** 10, **e)** 6. **13. a)** $\frac{1}{4}$, **b)** 144, **c)** -4, **d)** 512, **e)** 3, **f)** 32, **g)** 36, **h)** 20. **16. a)** 10^5 dag, **b)** 10^{17} dag, **c)** 10^7 hm, **d)** 10^7 dm, **e)** 10^{15} kg. **17. a)** 10^{102}; 10^{106}; 10^{97}; 10^{200}, **b)** 10^{82} razy. **18. a)** Tak, **b)** ok. 14 tys. **19.** Około 1000 chmur.

str. 238–239: **2.** Neptun — ♆; Uran — ♅; Saturn — ♄; Jowisz — ♃; Mars — ♂; Ziemia — ⊕; Wenus — ♀; Merkury — ☿. **3.** $a=5{,}7\cdot10^9$, $b=4{,}65\cdot10^9$, $c=2{,}65\cdot10^{10}$, $d=$ $=3{,}36\cdot10^{10}$; największa — d, najmniejsza — b. **4. a)** $3{,}7\cdot10^{18}$ m, **b)** $6{,}61\cdot10^{32}$ dag, **c)** $5\cdot10^{10}$ cm. **5. a)** $5{,}5\cdot10^5$ mm, **b)** $2{,}5\cdot10^5$ dag, **c)** $4{,}6\cdot10^6$ cm, **d)** $2{,}86\cdot10^8$ g. **6. a)** $4{,}8\cdot10^{22}$; $1{,}2\cdot10^8$, **b)** $3\cdot10^{43}$; $1{,}2\cdot10^4$, **c)** $4{,}8\cdot10^{30}$, $3\cdot10^9$. **7. a)** Ok. $1{,}21\cdot10^2$ razy, **b)** ok. $1{,}3\cdot10$ razy. **8.** $5{,}67\cdot10^{15}$ km.

str. 242–243: **1.** $5\cdot10^{-4}$ g; $1{,}2\cdot10^{-5}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $7\cdot10^{-12}$ g; $1{,}674\cdot10^{-24}$ g. **2.** $a=3{,}8\cdot10^{-7}$, $b=6\cdot10^{-7}$, $c=2{,}35\cdot10^{-10}$, $d=8\cdot10^{-10}$; największa — b, najmniejsza — c. **3. a)** $3{,}5\cdot10^{-3}$ mm, **b)** $2{,}1\cdot10^{-10}$ kg, **c)** $6\cdot10^{-6}$ l, **d)** $2{,}5\cdot10^{-2}$ g. **4. a)** $4{,}65\cdot10^{-1}$ m, **b)** $4\cdot10^{-1}$ km, **c)** $3{,}26\cdot10^{-1}$ kg, **d)** $5{,}5\cdot10^{-4}$ t. **5.** $2{,}5\cdot10^4$ t. **6. a)** 10^{-1} mm, **b)** miałby średnicę 10^{-1} m, **c)** miałby średnicę 10^2 m, **d)** $3{,}3\cdot10^{-8}$ m. **7.** Ok. 1870 razy. **8. a)** $5{,}3\cdot10^6$ m^3, **b)** o $1{,}5\cdot10^6$ m^3. **9. a)** $6{,}25\cdot10^7$; $5{,}75\cdot10^7$, **b)** $5{,}57\cdot10^{-4}$; $4{,}83\cdot10^{-4}$, **c)** $2{,}18\cdot10^{13}$; $2{,}2\cdot10^{12}$. **10.** $5{,}3\cdot10^5$ km. **11.** $6{,}76\cdot10^{-3}$ m.

str. 248–251: **1. f)** $\frac{5}{3}$, **g)** 11, **h)** 13. **2. e)** -1, **f)** -20, **g)** 0,4, **h)** $\frac{5}{4}$. **4. a)** $\sqrt{10}$, **b)** 12, **c)** 0,5 m. **5. a)** $a=49$, **b)** $b=10\,000$, **c)** $c=\frac{4}{25}$, **d)** $d=1$, **e)** $e=27$, **f)** $f=-\frac{1}{8}$, **g)** $g=0$, **h)** $h=-0{,}001$. **6.** $x=97$, $y=0{,}01$, $z=-6$, $t=1250$. **7. a)** 14, **b)** -90, **c)** $\frac{4}{11}$, **d)** $-\frac{1}{6}$, **e)** 7, **f)** 1,5, **g)** $-6\frac{1}{2}$, **h)** 9, **i)** 12, **j)** 30, **k)** 17, **l)** -2. **8. a)** 4, **b)** 1, **c)** 2. **9. a)** 3 i 4, **b)** 6 i 7, **c)** 8 i 9, **d)** 11 i 12, **e)** 12 i 13, **f)** 20 i 21, **g)** 3 i 4, **h)** -3 i -2, **i)** -6 i -5, **j)** 10 i 11. **10. a)** $81<n<100$; jest 18 takich liczb. **b)** Jest 60 takich liczb. **11.** a — C, b — E, c — D, d — A, e — B. **12. a)** 2,4, **b)** 4,2, **c)** 3,5, **d)** 1,3,

e) 3,1, **f)** 8,0. **13. a)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$, **b)** 0,4, **c)** $2+\sqrt[3]{3}$, **d)** $1-3\sqrt[3]{5}$. **14. a)** $3\sqrt{7}$, **b)** $10\sqrt{5}$, **c)** $8\sqrt{6}$, **d)** $\sqrt{7}$, **e)** $3\sqrt[3]{5}$, **f)** $-6\sqrt[3]{3}$, **g)** $2\sqrt[3]{7}$, **h)** $9\sqrt[3]{11}$. **15. a)** $7\sqrt{3}-6$, **b)** $2{,}5\sqrt{6}+2{,}5$, **c)** $3\sqrt{5}-4\sqrt{3}$, **d)** $4{,}5\sqrt[3]{2}-7{,}5$, **e)** $-2\sqrt[3]{7}-7\sqrt{3}$, **f)** $2\sqrt{3}-1{,}4\sqrt[3]{5}$. **16. a)** $2\sqrt{7}+6$, **b)** $9-6\sqrt{5}$, **c)** $3\sqrt{6}-3$, **d)** $22\sqrt{3}$, **e)** $-8\sqrt[3]{2}+2$, **f)** $-4\sqrt[3]{7}-19$. **17. a)** $\frac{3}{7}$, **b)** 13, **c)** 15, **d)** 1,3, **e)** 5, **f)** 7, **g)** 9, **h)** −2. **18. a)** 12, **b)** 8, **c)** 21, **d)** 30, **e)** $\frac{4}{5}$, **f)** $\frac{8}{3}$, **g)** 0,1, **h)** −90. **19. a)** $\frac{3}{2}$, **b)** −2, **c)** 100, **d)** 42, **e)** −120, **f)** −98. **21. a)** $3\sqrt{5}-5$, **b)** $10-3\sqrt{2}$, **c)** $-6-5\sqrt{3}$, **d)** $8\sqrt{7}+14$, **e)** $9\sqrt{5}-30$, **f)** $-24+4\sqrt{2}$. **22. a)** $3\sqrt{3}+5$, **b)** $\sqrt{5}+1$, **c)** $23\sqrt{2}-20$, **d)** $-17\sqrt{7}+8$. **23. a)** 49, **b)** 8, **c)** 64, **d)** 144, **e)** 1000, **f)** 16, **g)** 8, **h)** 625, **i)** 27, **j)** 4. **24.** b, c, e, g, h. **25. a)** $2\sqrt{2}\approx 2{,}8$, **b)** $2\sqrt{3}\approx 3{,}4$, **c)** $\frac{\sqrt{2}}{3}\approx 0{,}47$, **d)** $\frac{\sqrt{3}}{5}\approx 0{,}34$.

str. 253–255: **1. a)** 10, **b)** 18, **c)** 20, **d)** 14. **2. a)** 18, **b)** 24, **c)** 22, **d)** 6, **e)** −9, **f)** 12. **3. a)** 196, **b)** 90, **c)** 1400, **d)** 2400. **4. a)** $4x$, **b)** x^3, **c)** $\frac{2x}{y^2}$, **d)** $\frac{1}{2}x$, **e)** $3x^2y^3$. **5. a)** $21\sqrt{6}$, **b)** $\frac{3\sqrt{15}}{2}$, **c)** $12\sqrt[3]{21}$, **d)** $2\sqrt[3]{2}$, **e)** $2\sqrt[3]{3}$ **f)** $\frac{2}{5}$, **g)** 1, **h)** 1000. **6. a)** 2; 5; 2; −2, **b)** 2; 10; 3, −10, **c)** 2; 7; 2; 7. **7. a)** $5\sqrt{2}$, $2\sqrt{7}$, $6\sqrt{2}$, $10\sqrt{2}$, $30\sqrt{2}$, **b)** $2\sqrt[3]{2}$, $2\sqrt[3]{3}$, $-4\sqrt[3]{2}$, $10\sqrt[3]{3}$. **8. a)** $6\sqrt{2}$, **b)** $3\sqrt[3]{2}$, **c)** $6\sqrt{5}$, **d)** $4\sqrt[3]{3}$, **e)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$, **f)** $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$. **9. a)** $7\sqrt{3}$, **b)** $10\sqrt{3}$, **c)** $7\sqrt{5}$, **d)** $-\sqrt{2}$, **e)** $10\sqrt{10}$, **f)** $5\sqrt[3]{5}$, **g)** $8\sqrt{5}$, **h)** 11, **i)** 3. **10. a)** $12\sqrt{3}$, **b)** $8\sqrt{7}$, **c)** $12\sqrt{6}$, **d)** $18\sqrt{3}$, **e)** $6\sqrt[3]{2}$, **f)** $5\sqrt[3]{11}$, **g)** $-5\sqrt[3]{3}$, **h)** $-9\sqrt[3]{5}$. **11. a)** $6\sqrt{6}$, **b)** $49\sqrt{7}$, **c)** $81\sqrt{3}$, **d)** $125\sqrt{5}$, **e)** $5\sqrt[3]{5}$, **f)** $8\sqrt[3]{2}$. **12. a)** $8\sqrt[3]{7}$, **b)** $\sqrt{2}$, **c)** $4\sqrt[3]{25}$. **13. a)** $\sqrt{75}$, **b)** $\sqrt{98}$, **c)** $\sqrt{30}$, **d)** $\sqrt{3}$, **e)** $\sqrt{20}$, **f)** $\sqrt[3]{6}$, **g)** $\sqrt[3]{0{,}4}$, **h)** $\sqrt{3{,}6}$. **15.** 8; $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{3}$; 25. **16. a)** $30\sqrt{2}$, **b)** $2\sqrt{3}$, **c)** $\frac{25\sqrt{3}}{2}$.

str. 258–262: **2. a)** $\frac{2^2}{5}$, **b)** $\frac{2}{7^7}$, **c)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^6$, **d)** $\frac{-2^9}{-9^9}$. **3. a)** 1, **b)** $-\frac{7}{90}$, **c)** 11, **d)** 0,85, **e)** 38,3. **4.** ② i ④. **5. a)** 256, **b)** −1, **c)** 5, **d)** 1. **6.** Największa: $2^{2^{22}}$, najmniejsza: $2^{2^{2^2}}$. **7. a)** 12, 4, 62, **b)** 19, 13, 97, **c)** $100_{(2)}$, $11_{(3)}$, $1001_{(2)}$, $100_{(3)}$, $10100_{(2)}$, $202_{(3)}$, $100000_{(2)}$, $1012_{(3)}$. **8. a)** 5^5, **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{13}$, **c)** 3^{11}, **d)** 7^2. **9. a)** 4, **b)** 3. **10. a)** 10^2, **b)** 3^{12}, **c)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{15}$, **d)** 6^4. **11. a)** 2^8, **b)** 5^{11}, **c)** 3^{17}. **12.** 2^{18}; 3^{15}; 2^{25}; 3^{18}; 5^{22}; 5^{21}; 2^{36}. **13.** 2^{60}, 16^{20}, 32^{17}, 64^{15}, 4^{50}. **14. a)** $a=3$, **b)** $b=9$, **c)** $c=4$, **d)** $d=3$, **e)** $e=3$, **f)** $f=1$. **15. a)** Dla $a=4$, **b)** dla $a=5$. **16.** 5^{200}, 2^{500}, 4^{300}, 3^{400}. Wskazówka. Przedstaw te liczby w postaci potęg o jednakowych wykładnikach. **18. a)** $\frac{1}{64}$, **b)** 0,0081, **c)** 216, **d)** 0,0001. **19. a)** 162, **b)** 12,8, **c)** $\frac{9}{49}$, **d)** $53\frac{1}{3}$. **20. a)** <, **b)** =, **c)** >, **d)** <. **21. a)** −1, **b)** 0,0004, **c)** -10^{13}, **d)** 352, **e)** 192, **f)** 32. **22.** 4^{149}. **23. a)** Liczba 12^{10} jest większa 6^5 razy od liczby 24^5, **b)** liczba 16^{64} jest 2^{160} razy większa od liczby 64^{16}. **24.** $2^{28}\cdot 22\approx 6$ mld. **25. a)** $1{,}36\cdot 10^7$ cm, **b)** $2{,}8\cdot 10^6$ g. **26.** Tak; tak. **29. a)** $9{,}2\cdot 10^{-8}$, **b)** $2{,}1\cdot 10^3$. **30.** $1{,}5\cdot 10^8$ m. **32. a)** 15, 12, 100, **b)** $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{13}{11}$, **c)** $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$, **d)** 0,02; 1,3; 1,1. **33. a)** 5, 40, −5, **b)** $-1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{3}$, **c)** 0,3; −0,2; 0,4. **34. a)** 2, **b)** 4, **c)** 5, **d)** 2. **35. a)** 33, **b)** 5 lub −5, **c)** 9, **d)** 2 lub −2. **36.** Około 6200 m × 6200 m. **37. a)** $A-\frac{9}{16}$, $B-\sqrt{\frac{9}{16}}$, $C-\sqrt{\frac{16}{9}}$, $D-\frac{16}{9}$, **b)** $A-\frac{2}{3}$, $B-\sqrt{\frac{2}{3}}$, $C-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $D-\frac{3}{2}$. **38. a)** 24, **b)** 32. **40.** b, a, d, c, e. **41. a)** $-\frac{5\sqrt{3}}{4}$,

b) $\frac{5\sqrt[3]{5}}{2}$, **c)** $5\sqrt{10}-3$, **d)** -2, **e)** $2+4\sqrt{6}$, **f)** $6\sqrt[3]{5}+3$. **42. a)** 28, **b)** $6\frac{3}{4}$, **c)** 20, **d)** 6, **e)** 35, **f)** 24. **43. a)** $11\sqrt{3}-14$, **b)** $16\sqrt{6}+45$, **c)** $-3\sqrt{2}+16$, **d)** $4\sqrt[3]{7}+23$. **44. a)** 4, **b)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$, **c)** $3\sqrt{2}+1$, **d)** $7\sqrt{2}+10$. **45. a)** 121, **b)** 125, **c)** 8, **d)** 216, **e)** 49, **f)** 100, **g)** 27, **h)** 4, **i)** 125. **46.** $\sqrt[3]{27^2}$, $\sqrt{7^4}$, $\sqrt{4^7}$, $\sqrt[3]{2^{27}}$. **47.** $\sqrt{22^{11}}$, $\sqrt[3]{99^{100}}$, $\sqrt{6^9}$. **48. a)** 15, **b)** 4, **c)** 30, **d)** 4, **e)** 84, **f)** $\frac{1}{3}$, **g)** 2, **h)** 8. **49. a)** $3\sqrt{10}$, **b)** 9, **c)** $1\frac{1}{8}$, **d)** 128. **50. a)** $3\sqrt{3}$, **b)** $8\sqrt{2}$, **c)** $5\sqrt{3}$, **d)** $3\sqrt[3]{3}$, **e)** $10\sqrt[3]{2}$, **f)** $2\sqrt[3]{11}$. **52. a)** $a=6$, **b)** $b=2\sqrt{2}$, **c)** $c=\frac{\sqrt{3}}{6}$, **d)** $d=\frac{3}{4}$. **53. a)** 5, **b)** 7, **c)** 1, **d)** 8. **54.** $\sqrt{7^8}$, $7\sqrt{7^6}$, $\sqrt[3]{7^{12}}$. **55.** Prostokąt B. **56.** Obwód $= 14\sqrt{3}+6$, $P=33\sqrt{2}$.

str. 266–269: **2. a)** 21 krawędzi, 9 ścian, 14 wierzchołków, **b)** 60 krawędzi, 22 ściany, 40 wierzchołków, **c)** 300 krawędzi, 102 ściany, 200 wierzchołków, **d)** $3n$ krawędzi, $n+2$ ścian, $2n$ wierzchołków. **3. a)** 15 krawędzi, **b)** 10 ścian bocznych, **c)** 40 wierzchołków. **4. a)** Nie, **b)** tak, **c)** nie. **6. a)** 64, **b)** 45, **c)** 72, **d)** $44+4\sqrt{2}$, **e)** 33. **7.** ①, ③, ④, ⑤, ⑦. **8. a)** 40 cm, **b)** 10 cm, **c)** 64 cm. **9.** ① i ③. **12.** ① i ③.

str. 271–273: **1.** A — prawidłowy trójkątny, B — prawidłowy pięciokątny, C — prosty trójkątny, D — prosty czworokątny, E — prosty sześciokątny, F — prostopadłościan, G — prosty trójkątny, H — prawidłowy sześciokątny. **2.** A — prawidłowy trójkątny, B — prawidłowy pięciokątny, C — prawidłowy ośmiokątny, D — czworokątny, E — czworokątny. **5.** Ⓒ. **6. a)** 164 cm^2, **b)** 1944 cm^2. **7. a)** 192, **b)** 190, **c)** 272. **8. a)** 660 cm^2, **b)** 1212 cm^2. **9.** 240. **10.** 9,6 litra farby.

str. 276–278: **1.** 115,2 kg. **2. a)** 6 dm^3, **b)** 15 dm^3, **c)** 18 dm^3. **4. a)** 3000 cm^3, 2500 cm^3, 0,3 cm^3, **b)** 2 000 000 000 m^3, 6,5 m^3, 0,5 m^3, **c)** 7 l, 1,2 l, 0,005 l, **d)** 3000 cl, 75 cl, 10 cl, 1000 cl. **6. a)** 20, **b)** 0,5, **c)** 600, **d)** 3, **e)** 20, **f)** 0,06. **7.** O 1,5 cm. **8.** Nie. **10. a)** 200 m × 200 m × 3 m, **b)** 52 baseny. **11.** dm^3; dm^3; cm^3; mm^3; km^3. **12.** 1200 cm^3. **13.** O około 0,7 cm. **14.** 1000 l. **15.** 27 razy.

str. 281–282: **1. a)** 9, **b)** 105, **c)** 108. **2.** 35. **3. a)** Zwiększy się dwukrotnie, **b)** zwiększy się czterokrotnie, **c)** zwiększy się ośmiokrotnie. **4.** 9750 zł. **5.** Krawędź podstawy — 2 cm, krawędź boczna — 10 cm. **6.** 6. **7.** 27 kg. **8. a)** 42, **b)** 24, **c)** 456. **9.** 500 cm^3.

str. 284–286: **1. a)** 7 ścian, 15 krawędzi, **b)** 9 ścian, 21 krawędzi, **c)** 14 ścian, 36 krawędzi. **2. a)** Nie, **b)** nie, **c)** tak. **3.** 85 cm lub 95 cm. **4.** 192. **5.** 108. **6. a)** Nie, **b)** nie, **c)** nie. **7.** Siedem. **8.** Ten o podstawie kwadratowej. **10.** Graniastosłup trójkątny. **11.** 14 600. **12. a)** 14 *l*, 24 *l*, 0,3 *l*, **b)** 0,6 m^3, $1{,}2\cdot10^9$ m^3, 1,8 m^3, **c)** 74 ml, 40 ml, 4,5 ml, **d)** 2000 mm^3, 5000 mm^3, 2000 mm^3, **e)** 50 cl, 20 cl, 35 cl. **13.** 8000 cm^3, czyli 8 litrów. **14.** 0,36 litra. **15.** 10 *l*. **16.** Tak. **17. a)** 90 hl, **b)** o 20%, **c)** 85%.

18. 8,64 litra. **19. a)** Zwiększy się ośmiokrotnie, **b)** zmniejszy się 27 razy. **20.** 120 m^2. **21.** Nie. **22.** 100. **23.** 336. **24.** O 2,4 cm. **25. a)** 34 400 cm^3, **b)** 258 kg. **26.** 18 dm^3. **27.** 10,5 cm.

str. 290–297: **2. a)** 120 dzieci, **b)** we wrześniu; w maju, **c)** w pierwszym, **d)** III, IV, V, X, XI i XII. **3. a)** 22 osoby, **b)** w grupie 165–169 było najwięcej dziewcząt, a w grupie 170–174 najwięcej chłopców, **c)** $\frac{153}{185} \approx 83\%$. **4. a)** O 25 zł, **b)** tak; kupić 14 II, a sprzedać 22 II, **c)** 6 II, 13 II, 20 II i 27 II. **5. a)** W 1750 roku, **b)** o 10 tys. mieszkańców, **c)** w Warszawie, **d)** liczba ludności Warszawy rosła, a Krakowa — malała. **6. a)** 160 członków, **b)** o 112 wyborców, **c)** nie, **d)** 113 osób. **7. a)** Nieprzestrzeganie pierwszeństwa przejazdu, **b)** około 2297 wypadków, **c)** około 9% wypadków, **d)** około 7466 wypadków. **8.** 406 kierowców; tak. **9. a)** Chleb: Białystok, Kraków; kiełbasa toruńska: Katowice, Gdańsk; karp świeży: Lublin, Warszawa; masło: Gdańsk, Warszawa, **c)** w Katowicach, **d)** w Lublinie. **12.** ② i ③. **13. a)** 117 cm, **b)** 153 cm, 157 cm i 165 cm, **c)** 17 chłopców, **d)** 4 uczniów. **14.** 19 ziaren. **15. a)** Tak, **b)** tak, **c)** nie, **d)** 34%, **e)** więcej jest tych, którzy nie czytają, **f)** 28%; około 41%.

str. 300–302: **1.** 7. **2.** Dziewczęta — około 56,3 kg, chłopcy — około 65,1 kg, wszyscy uczniowie — około 59,4 kg. **3.** 3,59. **4.** 28 pkt. **5. a)** 3 gałki, **b)** 2,5 gałki. **6.** 1,32 banana. **7. a)** Nie zmieni się, **b)** wzrośnie o 1, **c)** wzrośnie o 2, **d)** zmaleje o 5. **8.** 710 zł. **9.** O 0,5. **10.** 9 piątek. **11.** −10°C. **12. a)** 189,75 cm **b)** 36,5 lat. **13. a)** $s + 40$, **b)** $\frac{s}{2}$, **c)** $s + 10$, **d)** $s + 30$, **e)** $\frac{10s + 150}{11}$, **f)** $\frac{10}{11}s$. **14.** 700 zł. **15.** O 30 zł. **16.** 184 cm; 172 cm.

str. 305–307: **5. a)** 1, 6, 3, 3.

str. 310–313: **1. a)** $\frac{1}{3}$, **b)** $\frac{2}{3}$, **c)** mniejszą od 4, **d)** 1. **2. a)** Oba zdarzenia są jednakowo prawdopodobne, **b)** oba zdarzenia są jednakowo prawdopodobne, **c)** otrzymanie różnych wyników w obu rzutach. **3. a)** Wyciągnięcie trefla, **b)** oba zdarzenia są jednakowo prawdopodobne, **c)** wyciągnięcie figury, **d)** wyciągnięcie karty koloru czerwonego. **4.** Pierwszą szkatułkę. **5. a)** $\frac{1}{2}$, **b)** $\frac{7}{13}$. **6.** $\frac{1}{8}$. **7.** $\frac{4}{45}$. **8.** $\frac{1}{3}$. **9.** $\frac{1}{10}$. **10. a)** $\frac{3}{4}$, **b)** $\frac{1}{40}$, **c)** $\frac{9}{40}$. **11.** 6 napisów, $\frac{1}{6}$. **12.** $\frac{1}{2}$. **13. a)** $\frac{1}{4}$, **b)** $\frac{1}{2}$, **c)** 0. **14. a)** $\frac{1}{11}$, **b)** $\frac{53}{66}$.

str. 316–318: **1. a)** Łosie i bobry, **b)** w 2011 r.; o 200 sztuk, **c)** około 8%. **3. a)** Wzrosła w Hiszpanii i Polsce, zmalała w pozostałych krajach, **b)** w 2006 r. — Szwecja, 2014 r. — Holandia, **c)** we Włoszech. **4.** Pierwszy. **5.** 2,5 razy. **6. a)** O 0,1, **b)** o 1. **7.** 1500 zł. **8.** Trzy. **9. a)** 3000 g; ok. 3083 g, **b)** 3050 g. **12.** $\frac{1}{12}$. **13. a)** $\frac{2}{7}$, **b)** $\frac{9}{14}$, **c)** 6 kul złotych. **14. a)** $\frac{1}{6}$, **b)** $\frac{5}{6}$. **15. a)** 0,9, **b)** 5,791 g. **16.** $\frac{1}{2}$. **17. a)** 25 losów, **b)** 53 losy lub więcej.

Skorowidz

akr 132
Alchwarizmi Muhammed 193
Alkuin 217
algebra 193
Archimedes 230, 278

Bhaskara 217

cechy przystawania trójkątów 115–116
centylion 227

ćwiartki układu współrzędnych 142

Descartes René (Kartezjusz) 142
decylion 227
deltoid 152
Diofantos 155, 176

Einstein Albert 210
Euler Leonhard 167

figury przystające 114

googol 227, 236
graniastosłup
— pochyły 265
— prawidłowy 265
— prosty 265

hektolitr 275
Hermann J.M. 135

jednomian 162
— uporządkowany 163
jednomiany podobne 165
jednostki objętości 274–275
jednostki pola 128, 130

kąt 105
kąty
— naprzemianległe 106
— odpowiadające 106
— przyległe 106
— wierzchołkowe 106
kolejność wykonywania działań 34
konstrukcja
— prostej prostopadłej do danej prostej 103
— przenoszenia kąta 109
— równoległej do danej prostej 103
— sześciokąta foremnego 125
— trójkąta 114–116
krawędź graniastosłupa 264
kwadrat magiczny 169
kwadratura koła 276
kwadrylion 227
kwintylion 227

liczba podpierwiastkowa 244, 246
liczby
— całkowite 10
— naturalne 10
— niewymierne 246
— ujemne 38
— wymierne 10

metoda równań równoważnych 192
mikron 31
miriada 230

niewiadoma 186
nonilion 227
notacja wykładnicza 237, 241

objętość
— graniastosłupa 280
— prostopadłościanu 274
— sześcianu 274
odcięta punktu 144
odcinki
— prostopadłe 100
— równoległe 100
oktylion 227
oś
— odciętych 144
— rzędnych 144

Pick Georg 161
pierwiastek
— kwadratowy 244
— sześcienny 246

pierwiastek równania 189
Pitagoras 217, 246
planimetr 135
początek układu współrzędnych 142
podstawa
— potęgi 221
— graniastosłupa 265
podwojenie sześcianu 276
pola czworokątów 128, 134–135
pole powierzchni całkowitej graniastosłupa 270
potęga 221, 240
prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania 171
procent 56
prostopadłościan 264
promil 59
proste
— prostopadłe 100
— równoległe 100
punkt kratowy 161
punkty procentowe 84

redukcja wyrazów podobnych 165
romb 120
rozkład liczby na czynniki pierwsze 223
roztwór 204
rozwinięcie dziesiętne liczby 14
rozwiązanie równania 189
równoległobok 120
równania równoważne 190
równanie
— sprzeczne 189
— tożsamościowe 189
rzędna punktu 144

sekstylion 227
septylion 227
siatka graniastosłupa 270
solanka 204
suma algebraiczna 165
syrop 204
system
— dwójkowy 258
— dziesiątkowy 10, 193, 258
— trójkowy 258
sześcian 264

ściana boczna graniastosłupa 265
średnia arytmetyczna 173, 299

tabelka łodygo-listkowa 296
trapez 119
trylion 227
trysekcja kąta 276

twierdzenie
— o długościach boków trójkąta 111
— o sumie kątów czworokąta 119
— o sumie kątów trójkąta 111

układ współrzędnych 142
ułamki proste 25
usuwanie niewymierności z mianownika 251

Viète François 155

wartość bezwzględna liczby 45, 191
wartość liczbowa wyrażenia algebraicznego 159
wielokąt foremny 124
wielomian 165
włączanie czynnika pod znak pierwiastka 255
współczynnik liczbowy jednomianu 163
współrzędne punktu 142
wykładnik potęgi 221
wyłącznie czynnika przed znak pierwiastka 253
wyrazy sumy algebraicznej 165
wyrażenie algebraiczne 155
wyrażenie arytmetyczne 34
wysokość graniastosłupa 280
wzór
— Eulera 167
— Picka 161

zbiór rozwiązań równania 190

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl
lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80–876 Gdańsk 52, skr. poczt. 59
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
http://www.gwo.pl e-mail: handel@gwo.pl

ISBN 978-83-7420-939-7

Podręcznik spełnia kryteria *Ustawy o systemie oświaty* i obowiązującej podstawy programowej. Został dopuszczony do użytku szkolnego.
Numer w wykazie MEN: 780/4/2017

Ucząc się matematyki z tym podręcznikiem, dowiesz się m.in.:

- Czy cyfry arabskie wymyślili Arabowie?
- W którym roku Rosja sprzedała Stanom Zjednoczonym Alaskę?
- Co to jest spiż?
- Jakiego wzrostu był Władysław Łokietek?
- Jaki procent objętości powietrza stanowi tlen?
- Jakie wymiary ma obraz Jana Matejki „Bitwa pod Grunwaldem”?
- Co to jest planimetr?
- Jak otrzymać kolor o nazwie *ultramaryna*?
- Czy amerykański billion to więcej czy mniej niż polski bilion?
- Jakiej jednostki objętości używa się w międzynarodowym handlu ropą?
- Skąd się wzięła nazwa Google?
- Jaka jest średnia długość słowa w tekstach angielskich, a jaka – w tekstach polskich?

www.gwo.pl