

NOWA MATeMATyka

2 PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM
ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

Nowość
EDYCJA 2024

ZMIANY
W PODSTAWACH
2024



podręcznik w pełni
dostosowany

nowa
era

NOWA MATeMATyka

2 PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM
ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

WOJCIECH BABIAŃSKI
LECH CHAŃKO
JOANNA CZARNOWSKA
GRZEGORZ JANOCZA
DOROTA PONCZEK
JOLANTA WESOŁOWSKA

NOWA MATEMATyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w zakresie podstawowym i rozszerzonym, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Edwarda Tutaja, mgr. Tadeusza Marczewskiego, dr hab. Anny Cegięły.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2025

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 988/2/2025/z1

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* (2024) autorstwa Agnieszki Kamińskiej i Doroty Ponczek.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2025
ISBN 978-83-267-5280-3

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Elżbieta Bagińska-Stawiarz, Urszula Cielniak, Ewa Kowalik, Katarzyna Radziwińska, Renata Sawicka, Agnieszka Trzpil-Gajek, Beata Zając

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska

Redakcja językowa: Paulina Szulim

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Piotr Stopczyński

Projekt okładki: Maciej Galiński

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Opracowanie graficzne infografik: Lech Chańko, Enzo di Giacomo, Ewa Sowulewska, Aleksandra Szpunar, Alicja Skupin-Podwojewska

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Quad/Graphics Europe Sp. z o.o.

Zdjęcia pochodzą ze zbiorów:

Zdjęcie na okładce: Getty Images/Moment/Andriy Onufriyenko.

Zdjęcia: BE&W: Alamy Stock Photo - FirePhoto s. 175, Historic Images s. 91 (Niels Henrik Abel), Old Images s. 25, Science History Images s. 91 (Girolamo Cardano), Forum: Gonzales Photo/Inaki Esnaola s. 9, Getty Images: Connect Images s. 49, E+/4x6 s. 317 (gitarzystą), iStock/Getty Images Plus - Antonio_Diaz s. 317 (dziewczyna z ręką przy uchu), Davel5957 s. 39 (Gateway Arch), Moment - Roberto Moiola/Sysaworld s. 117, shunli zhao s. 39 (łańcuch), Shutterstock: Daniel Prudek s. 130, Direk Yiamsaensuk s. 196, ID1974 s. 260, Jag_cz s. 61 (chusta), Nerthuz s. 322, Nicku s. 68, raphotography88 s. 289, remik44992 s. 162, Lech Chańko s. 41, M.C. Escher's "Symmetry Drawing E25" © 2025 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com s. 225.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Spis treści

► 1. Funkcja kwadratowa i jej zastosowania

1.1.	Równania kwadratowe – powtórzenie	10
1.2.	Nierówności kwadratowe – powtórzenie	14
R 1.3.	Równania sprowadzalne do równań kwadratowych	17
	Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej – przypomnij sobie	20
R 1.4.	Układy równań	21
R 1.5.	Wzory Viète’a	24
R 1.6.	Równania i nierówności kwadratowe z parametrem	27
1.7.	Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)	32
1.8.	Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)	35
	Powtórzenie	40
	Zadania z kontekstem realistycznym	43
	Sposób na zadanie	44
	Przed obowiązkową maturą z matematyki	45
	Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	48

► 2. Wielomiany

2.1.	Stopień i współczynniki wielomianu	50
2.2.	Dodawanie i odejmowanie wielomianów	53
2.3.	Mnożenie wielomianów	58
R 2.4.	Wzory skróconego mnożenia	62
	Trójkąt Pascala – dowiedz się więcej	66
2.5.	Rozkład wielomianu na czynniki (1)	67
R 2.6.	Rozkład wielomianu na czynniki (2)	70
2.7.	Równania wielomianowe	72
R 2.8.	Dzielenie wielomianów	76
	Schemat Hornera – dowiedz się więcej	80
R 2.9.	Równość wielomianów	82
R 2.10.	Twierdzenie Bézouta	84
R 2.11.	Pierwiastki całkowite wielomianu	88
	Równania wielomianowe. Wzór Cardano – dowiedz się więcej	91
R 2.12.	Pierwiastki wielokrotne wielomianu	92
R 2.13.	Wykres wielomianu	95
R 2.14.	Nierówności wielomianowe	100
R 2.15.	Wielomiany – zastosowania	105
	Powtórzenie	107

Zadania z kontekstem realistycznym	110
Sposób na zadanie	111
Przed obowiązkową maturą z matematyki	112
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	116
► 3. Funkcje wymierne	
3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$	118
3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor	121
R 3.3. Funkcja homograficzna	125
Hiperbola – dowiedz się więcej	129
3.4. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych	131
R 3.5. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych	135
3.6. Równania wymierne (1)	138
3.7. Równania wymierne (2)	140
R 3.8. Nierówności wymierne	144
3.9. Dziedzina funkcji. Funkcje wymierne	147
3.10. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (1)	151
R 3.11. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (2)	153
R 3.12. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (3)	157
3.13. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)	160
3.14. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)	162
Powtórzenie	164
Zadania z kontekstem realistycznym	168
Sposób na zadanie	169
Przed obowiązkową maturą z matematyki	170
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	174
► 4. Trygonometria	
4.1. Trójkąty prostokątne	176
Dowody twierdzenia Pitagorasa – dowiedz się więcej	181
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	183
4.3. Trygonometria – zastosowania	186
4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych	189
4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego	192
4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego	197
Współczynnik kierunkowy prostej – dowiedz się więcej	202
4.7. Pole trójkąta	203
Czworokąty wypukłe – przypomnij sobie	207
4.8. Pola czworokątów (1)	208
4.9. Pola czworokątów (2)	211

Odcinki w trapezie – dowiedz się więcej	214
Powtórzenie	215
Zadania z kontekstem realistycznym	218
Sposób na zadanie	219
Przed obowiązkową maturą z matematyki	220
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	224

► 5. Planimetria

5.1. Okrąg	226
5.2. Koło	229
5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej	232
Konstrukcja stycznej do okręgu. Konstrukcja wspólnej stycznej do dwóch okręgów rozłącznych zewnątrznie – dowiedz się więcej	236
5.4. Kąty w okręgu (1)	237
5.5. Kąty w okręgu (2)	241
5.6. Okrąg opisany na trójkącie	244
5.7. Okrąg wpisany w trójkąt	248
Okrąg dopisany do trójkąta – dowiedz się więcej	252
R 5.8. Okrąg opisany na czworokącie	253
Twierdzenie Ptolemeusza – dowiedz się więcej	256
R 5.9. Okrąg wpisany w czworokąt	257
5.10. Wielokąty foremne	261
Wartości funkcji trygonometrycznych kątów $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ$ – dowiedz się więcej	264
R 5.11. Twierdzenie sinusów	265
5.12. Twierdzenie cosinusów (1)	270
5.13. Twierdzenie cosinusów (2)	273
Konstrukcja wybranych wielokątów foremnych – dowiedz się więcej	277
Odcinki stycznych i siecznych – dowiedz się więcej	278
Powtórzenie	279
Zadania z kontekstem realistycznym	282
Sposób na zadanie	283
Przed obowiązkową maturą z matematyki	284
Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	288
► 6. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna	
Potęga o wykładniku całkowitym – przypomnij sobie	290
6.1. Potęga o wykładniku wymiernym – powtórzenie	291
6.2. Potęga o wykładniku rzeczywistym	293

6.3.	Funkcja wykładnicza	296
6.4.	Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej	300
6.5.	Logarytm	303
6.6.	Własności logarytmów	306
6.7.	Funkcja logarytmiczna	309
6.8.	Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej	313
R 6.9.	Zmiana podstawy logarytmu	318
6.10.	Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania	321
	Równania wykładnicze – dowiedz się więcej	324
	Równania logarytmiczne – dowiedz się więcej	325
	Powtórzenie	326
	Zadania z kontekstem realistycznym	329
	Sposób na zadanie	330
	Przed obowiązkową maturą z matematyki	331
	Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym	335
	Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	336
	Indeks	382
	Tablice wartości funkcji trygonometrycznych	385
	Wybrane wzory i twierdzenia matematyczne	386

Odpowiedzi do poleceń i rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Fioletowym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

R Temat w całości obowiązujący w zakresie rozszerzonym.

D Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

K Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu warto skorzystać z kalkulatora, oraz tematów ze wszystkimi takimi zadaniami.

* Oznaczenie trudniejszych zadań.

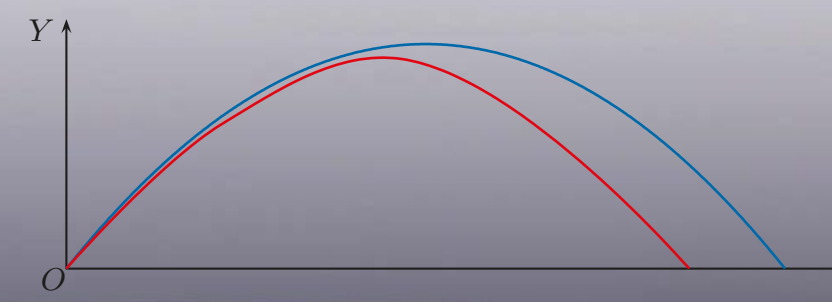
7. Zadania mniej typowe.

Sekcja **Przypomnij sobie** zawiera nieobowiązkowe powtórzenie przydatnych wiadomości przed wybranymi lekcjami.

Sekcja **Dowiedz się więcej** zawiera materiał nieobowiązkowy, rozszerzający treści z poprzedzających ją lekcji.

1 Funkcja kwadratowa i jej zastosowania

Jeśli pominie się opór powietrza, można przyjąć, że tor lotu piłki rzuconej pod kątem ostrym do poziomu lub pocisku wystrzelonego pod takim kątem jest fragmentem paraboli (kolor niebieski na rysunku). Jednak opór powietrza sprawia, że tor ten ma kształt **krzywej balistycznej** (kolor czerwony na rysunku).



1.1. Równania kwadratowe – powtórzenie

Równanie kwadratowe może mieć dwa pierwiastki, jeden pierwiastek lub nie mieć pierwiastków.

Twierdzenie

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, oraz jego wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa** pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma **jeden** pierwiastek podwójny:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

3. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie **nie ma** pierwiastków.

Przykład 1

a) Rozwiąż równanie $2x^2 - 9x + 9 = 0$.

Obliczamy wyróżnik równania kwadratowego.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 81 - 72 = 9 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 3}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 3}{4} = 3$$

b) Rozwiąż równanie $3x^2 + 3x - 1 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 9 + 12 = 21 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{21}$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{21}}{6}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6}$$

c) Rozwiąż równanie $\frac{9}{4}x^2 - 6x + 4 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot \frac{9}{4} \cdot 4 = 36 - 36 = 0$$

$\Delta = 0$, więc równanie ma jeden pierwiastek podwójny:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{\frac{9}{2}} = \frac{4}{3}$$

d) Rozwiąż równanie $3x^2 - 4x + 2 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8$$

$\Delta < 0$, więc równanie nie ma pierwiastków.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 + 3x - 18 = 0$ d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ g) $2x^2 - 5x + 4 = 0$
b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ e) $x^2 + 3x - 2 = 0$ h) $3x^2 - 2x - \frac{1}{2} = 0$
c) $5x^2 - 11x + 2 = 0$ f) $2x^2 + 4x - 1 = 0$ i) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$

Aby rozwiązać równanie kwadratowe postaci $ax^2 + bx = 0$, rozkładamy jego lewą stronę na czynniki.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $-3x^2 + 48x = 0$.

$$\begin{aligned} -3x(x - 16) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{lub} \quad x - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Iloczyn czynników jest równy zero, gdy któryś z nich jest równy zero.

Pierwiastkami równania są liczby 0 i 16.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

- a) $2x^2 - 6x = 0$ c) $3x + 4x^2 = 0$ e) $5x = 10x^2$
b) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{12}x = 0$ d) $-\frac{2}{3}x - 6x^2 = 0$ f) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x = \frac{2}{3}x^2$

Niektóre równania kwadratowe możemy rozwiązać, korzystając ze wzorów na różnicę kwadratów, kwadrat sumy lub kwadrat różnicy.

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $16x^2 - 1 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$\begin{aligned} (4x - 1)(4x + 1) &= 0 \\ 4x - 1 &= 0 \quad \text{lub} \quad 4x + 1 = 0 \\ 4x &= 1 \quad \text{lub} \quad 4x = -1 \end{aligned}$$

Zatem równanie ma dwa pierwiastki: $-\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{4}$.

b) Rozwiąż równanie $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

$$\begin{aligned} (2x + 1)^2 &= 0 \\ 2x + 1 &= 0 \\ 2x &= -1 \end{aligned}$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x = -\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

- a) $4x^2 - 25 = 0$ c) $x^2 + 14x + 49 = 0$ e) $25 + x^2 = 10x$
b) $1 - \frac{9}{4}x^2 = 0$ d) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ f) $4x^2 + 15 = 20x - 10$

Przypomnijmy, że postać $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią iloczynową** funkcji kwadratowej.

Wyrażenia $x - x_1$ i $x - x_2$ nazywamy **czynniki liniowymi**.

Liczby x_1 i x_2 występujące w postaci iloczynowej są miejscami zerowymi (pierwiastkami) trójmianu kwadratowego $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, czyli pierwiastkami równania $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można przedstawić w postaci iloczynowej (nie można go rozłożyć na czynniki liniowe).

Przykład 4

Przedstaw trójmian kwadratowy $y = 2x^2 - x - 3$ w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

Obliczamy wyróżnik:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25 > 0$, więc trójmian ma dwa pierwiastki. $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{4} = -1, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{4} = \frac{3}{2}$$

Postać iloczynowa trójmianu: $y = 2(x + 1)(x - \frac{3}{2})$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz pierwiastki trójmianu kwadratowego i przedstaw go, jeśli to możliwe, w postaci iloczynowej.

- a) $y = 6x^2 + x - 1$ d) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{7}{2}$ g) $y = -9x^2 + 1$
b) $y = 2x^2 - 5x + 2$ e) $y = x^2 + \sqrt{2}x - 4$ h) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 3x$
c) $y = -x^2 + \frac{10}{3}x - 1$ f) $y = -3x^2 + 2x + 2$ i) $y = 4x^2 - 4x + 2$

Zadania

1. Oblicz wyróżnik równania kwadratowego i określ liczbę jego pierwiastków.

- a) $x^2 - 3x + 4 = 0$ d) $4x^2 + 20x + 25 = 0$ g) $8x^2 + 3x = 0$
b) $5x^2 + 3x - 2 = 0$ e) $6x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{4} = 0$ h) $5x^2 - 9 = 0$
c) $-3x^2 + 2x + 9 = 0$ f) $-\frac{2}{3}x^2 - 2x + 6 = 0$ i) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2} = 0$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 - 6x - 7 = 0$ d) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$ g) $25x^2 + 5x - 6 = 0$
b) $2x^2 + 7x - 4 = 0$ e) $5x^2 + 2x + 1 = 0$ h) $2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$
c) $4x^2 + 5x + 1 = 0$ f) $-6x^2 + x + 1 = 0$ i) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 1 = 0$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 + 1 = 5 - 2x^2$ d) $(\frac{1}{2}x - 1)(\frac{1}{2}x + 1) = 2$ g) $(1 - x)^2 = \frac{1}{4}$
b) $3(x^2 + 1) = 5$ e) $(x + 1)^2 = (1 - 2x)^2$ h) $(3x + 1)^2 = 9$
c) $(x - 1)^2 = -2x$ f) $(3x - 2)^2 = (2x + 3)^2$ i) $(2x - 1)^2 = 4$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{1 - x^2}{2} = \frac{x^2 - 1}{3}$ c) $\frac{(x + 2)^2}{2} - 2 = \frac{(x + 3)^2}{3}$
b) $\frac{x - 2}{2} - \frac{x(x - 2)}{6} = 0$ d) $\frac{(x + 3)^2}{3} = x^2 + \frac{(x + 4)^2}{3}$

5. Liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji f . Oblicz $|x_1 - x_2|$.

- a) $f(x) = (x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})$ c) $f(x) = (x + 2 - \sqrt{5})(x + 2 + \sqrt{5})$
b) $f(x) = 4x(x - \sqrt{2})$ d) $f(x) = (x - \frac{1 - \sqrt{3}}{2})(x - \frac{1 + \sqrt{3}}{2})$

6. Wyznacz argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość równą p .

- a) $f(x) = x^2 + 4x - 13, p = 8$ c) $f(x) = -4x^2 + 24x, p = 9$
b) $f(x) = 3x^2 + 11x - 6, p = -2$ d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x, p = -3$

7. Wyznacz argumenty, dla których funkcje f i g przyjmują równe wartości.

- a) $f(x) = x^2 + 12, g(x) = -x^2 + 11x$ c) $f(x) = (2x - 1)^2, g(x) = 3x - 2$
b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x, g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x$ d) $f(x) = (3x + 2)^2, g(x) = (x - 4)^2$

8. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

- a) $y = x^2 + 2x - 24$ d) $y = -x^2 + 14x - 49$ g) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$
b) $y = 2x^2 - 11x + 15$ e) $y = -4x^2 - 12x - 9$ h) $y = \frac{4}{3}x^2 - 4x + 3$
c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$ f) $y = -3x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ i) $y = 3x^2 - 5x + 4$

1.2. Nierówności kwadratowe – powtórzenie

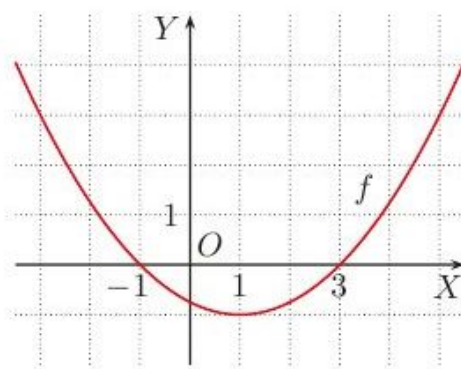
Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. Jej miejscami zerowymi są liczby -1 i 3 .

Z wykresu możemy odczytać rozwiązania odpowiednich nierówności, np.:

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \geq 0 \text{ dla } x \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty),$$

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \leq 0 \text{ dla } x \in [-1; 3].$$



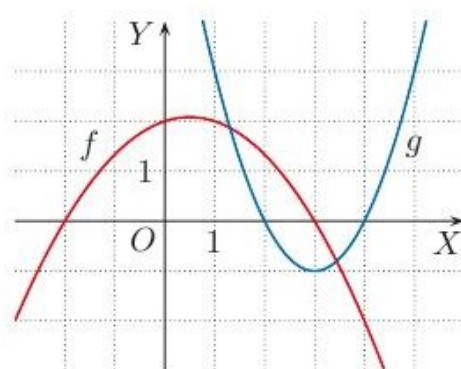
Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2$ i $g(x) = x^2 - 6x + 8$.

Korzystając z tych wykresów, podaj rozwiązanie nierówności.

a) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \geq 0$ c) $x^2 - 6x + 8 > 0$

b) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \leq 0$ d) $x^2 - 6x + 8 < 0$



Przykład 2

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 4x - 15 < 0$.

Zaczynamy od rozwiązania równania $3x^2 - 4x - 15 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15) = 16 + 180 = 196, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$$

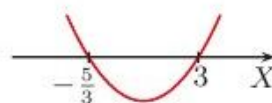
Pierwiastkami równania są liczby:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 14}{6} = -\frac{5}{3}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 14}{6} = 3$$

Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez punkty $-\frac{5}{3}$ i 3 na osi OX .

Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$3x^2 - 4x - 15 < 0 \text{ dla } x \in \left(-\frac{5}{3}; 3\right)$$



Rozwiązywanie nierówności kwadratowej składa się z kolejnych etapów:

- rozwiązanie odpowiedniego równania,
- naszkicowanie odpowiedniej paraboli,
- odczytanie z rysunku rozwiązania nierówności.

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-2x^2 + 7x - 4 < 0$.

Rozwiązujemy równanie $-2x^2 + 7x - 4 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) = 49 - 32 = 17, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$$

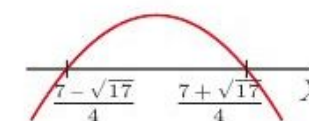
Pierwiastkami równania są liczby:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - \sqrt{17}}{-4} = \frac{7 + \sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + \sqrt{17}}{-4} = \frac{7 - \sqrt{17}}{4}$$

Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny), przechodzącą przez punkty $\frac{7 - \sqrt{17}}{4}$ i $\frac{7 + \sqrt{17}}{4}$ na osi OX .

Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$-2x^2 + 7x - 4 < 0 \text{ dla } x \in \left(-\infty; \frac{7 - \sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{7 + \sqrt{17}}{4}; \infty\right)$$



Zauważ, że zamiast nierówności $-2x^2 + 7x - 4 < 0$ możemy rozwiązać równoważną nierówność $2x^2 - 7x + 4 > 0$.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 + 5x < 0$

c) $2x^2 + 7x - 4 > 0$

e) $5x^2 - 2x - 1 \geq 0$

b) $-4x^2 + x \leq 0$

d) $-3x^2 + 11x - 6 \geq 0$

f) $-\frac{1}{2}x^2 - 3x + 3 < 0$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $9x^2 - 12x + 4 > 0$.

Rozwiązujemy równanie $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

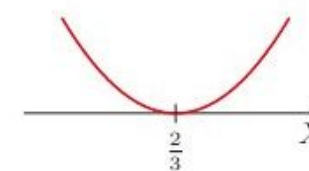
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry. Jedyne punkty wspólne paraboli z osią OX to $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

Odczytujemy rozwiązanie nierówności:

$$9x^2 - 12x + 4 > 0 \text{ dla } x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$$



Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $9x^2 - 12x + 4 \geq 0$

b) $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 < 0$

Ćwiczenie 4

Czy nierówność jest spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbb{R}$, czy jest sprzeczna?

a) $4x^2 + 1 \geq 0$

b) $-x^2 - 2 < 0$

c) $9x^2 + 4 \leq 0$

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

- a) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$ d) $-x^2 + 4x + 1 \geq 0$ g) $x^2 + 5x - 5 < 0$
b) $2x^2 + 5x - 3 > 0$ e) $-x^2 + \frac{1}{2}x + 3 < 0$ h) $-x^2 + 2x + 7 \leq 0$
c) $-4x^2 + 5x - 1 < 0$ f) $5x^2 - 3x - 1 > 0$ i) $2x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} < 0$

2. Rozwiąż nierówność.

- a) $-x^2 + 6x - 9 < 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 > 0$ e) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 5 \geq 0$
b) $9x^2 - 6x + 1 \geq 0$ d) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq 0$ f) $-\sqrt{2}x^2 + 3x \geq 3\sqrt{2}$

3. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 + 2x \geq x + 1$ c) $3x^2 - 2x + 1 < x$ e) $3x - x^2 \leq 3 - 3x^2$
b) $5x^2 + 4 \leq 10x - 20x^2$ d) $-2x^2 + 5x > 1$ f) $-x(2 - x) > 1 - x^2$

4. Rozwiąż nierówność.

- a) $(2x + 1)^2 + (x - 3)^2 < 10$ d) $(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3})^2 > \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$
b) $3x - (1 - x)^2 \geq (x - 2)(x + 2)$ e) $2 - x^2 \leq (2 - x)^2$
c) $(x - 3)^2 - 7 \leq (2x - 1)^2$ f) $(1 - \frac{1}{2}x)^2 - (\frac{1}{2} - x)^2 \geq 3x$

5. Dane są zbiory A i B . Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.

- a) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x + 1 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: 3x - x^2 \geq 0\}$
b) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3x + 1 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 4 < 0\}$
c) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x - 3 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: -x^2 + x + 12 \geq 0\}$

6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x(x-4)} + \sqrt{x}$.

Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których jej wzór ma sens. Wyrażenia pod pierwiastkami muszą być nieujemne, czyli muszą jednocześnie zachodzić nierówności:

$$x(x-4) \geq 0 \text{ i } x \geq 0$$

Pierwsza nierówność jest prawdziwa dla $x \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$.

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \{0\} \cup [4; \infty)$.

Wyznacz dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + \sqrt{x}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + \sqrt{16 - x^2}$
b) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x - 4} - \sqrt{1 - x}$ d) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 7x - 6} - \sqrt{4x - x^2}$

R 1.3. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

Równanie postaci $ax^4 + bx^2 + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$, nazywamy **równaniem dwukwadratowym**. Aby je rozwiązać, wprowadzamy niewiadomą pomocniczą $t = x^2$ (gdzie $t \geq 0$). Zauważ, że wówczas $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, zatem otrzymujemy równanie kwadratowe $at^2 + bt + c = 0$.

Przykład 1

Rozwiąż równanie $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Równanie możemy przedstawić w postaci $(x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0$. Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$\Delta = 100 - 36 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8$$

$$t_1 = \frac{10-8}{2} = 1 \geq 0, \quad t_2 = \frac{10+8}{2} = 9 \geq 0$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$x^2 = 1 \text{ lub } x^2 = 9 \\ x = -1 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = -3 \text{ lub } x = 3$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ c) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $x^4 - 10x^2 + 21 = 0$.

Równanie możemy przedstawić w postaci $(x^2)^2 - 10x^2 + 21 = 0$. Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 10t + 21 = 0$$

$$\Delta = 100 - 84 = 16, \quad \sqrt{\Delta} = 4$$

$$t_1 = \frac{10-4}{2} = 3 \geq 0, \quad t_2 = \frac{10+4}{2} = 7 \geq 0$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$x^2 = 3 \text{ lub } x^2 = 7 \\ x = -\sqrt{3} \text{ lub } x = \sqrt{3} \text{ lub } x = -\sqrt{7} \text{ lub } x = \sqrt{7}$$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ b) $x^4 - 8x^2 + 12 = 0$ c) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$.

Podstawiamy $t = x^2$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 + 8t - 9 = 0$$
$$\Delta = 64 + 36 = 100, \quad \sqrt{\Delta} = 10$$
$$t_1 = \frac{-8-10}{2} = -9 < 0, \quad t_2 = \frac{-8+10}{2} = 1 \geq 0$$

Rozwiązanie t_1 odrzucamy jako sprzeczne z założeniem.

Wracamy do niewiadomej x : $x^2 = 1$, czyli $x = -1$ lub $x = 1$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$ c) $x^4 + x^2 - 12 = 0$ e) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$
b) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ d) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ f) $9x^4 - 8x^2 - 1 = 0$

Ćwiczenie 4

Podaj liczbę rozwiązań równania.

- a) $x^4 - 9x^2 = 0$ c) $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$ e) $2x^4 + 3x^2 + 5 = 0$
b) $x^4 + 9x^2 = 0$ d) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ f) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ c) $x^4 - 12x^2 + 36 = 0$ e) $-x^4 + 7x^2 - 12 = 0$
b) $x^4 - 5x^2 + 36 = 0$ d) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ f) $x^4 - x^2 + 20 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$ c) $x^4 + 7x^2 - 2 = 0$ e) $4x^4 - 17x^2 + 18 = 0$
b) $9x^4 + 17x^2 - 2 = 0$ d) $9x^4 - 19x^2 + 2 = 0$ f) $9x^4 + 14x^2 - 8 = 0$

3. Wyznacz pierwiastki równania należące do podanego przedziału.

- a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$, $(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ c) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$, $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$
b) $x^4 - 9x^2 + 18 = 0$, $(-2; 0)$ d) $6x^4 - 7x^2 + 2 = 0$, $(-1; \frac{1}{2})$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $(x^2 - 3)^2 = (2x^2 - 1)(x^2 - 3)$ d) $x^4 + 4 = 3\sqrt{2}x^2$
b) $(x^2 + 2)^2 = (x^2 + 2)(3x^2 - 4)$ e) $x^4 + 4 = 3\sqrt{2}(\sqrt{2} - 2x^2)$
c) $(2x^2 + 3)^2 - 9 = 8 - (3 - x^2)^2$ f) $x^4 - 6 = 2\sqrt{3}x^2 - 9$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Aby rozwiązać równanie $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$, podstawiamy $t = x^3$ (gdzie $t \in \mathbb{R}$). Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$\Delta = 9 - 8 = 1, \quad t_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$x^3 = 1 \text{ lub } x^3 = 2, \text{ czyli } x = 1 \text{ lub } x = \sqrt[3]{2}$$

Rozwiąż równanie.

- a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ c) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Aby rozwiązać równanie $x^2 - 2|x| - 8 = 0$, podstawiamy $t = |x|$ (zakładamy, że $t \geq 0$). Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 2t - 8 = 0 \qquad x^2 = |x|^2 = t^2$$
$$\Delta = 4 + 32 = 36, \quad \sqrt{\Delta} = 6$$
$$t_1 = \frac{2-6}{2} = -2 < 0, \quad t_2 = \frac{2+6}{2} = 4 \geq 0$$

Rozwiązanie t_1 odrzucamy jako sprzeczne z założeniem.

Wracamy do niewiadomej x :

$$|x| = 4, \text{ czyli } x = -4 \text{ lub } x = 4$$

Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 - 4|x| + 4 = 0$ b) $x^2 - 7|x| + 10 = 0$ c) $x^2 - 5|x| - 6 = 0$

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż równanie $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$.

Zakładamy, że $x \geq 0$. Podstawiamy $t = \sqrt{x}$ (zakładamy, że $t \geq 0$) i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$\Delta = 9 - 8 = 1, \text{ zatem } t_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \geq 0, \quad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \geq 0$$

Wracamy do niewiadomej x :

$$\sqrt{x} = 1 \text{ lub } \sqrt{x} = 2, \text{ czyli } x = 1 \text{ lub } x = 4$$

Rozwiąż równanie.

- a) $x + \sqrt{x} - 6 = 0$ b) $x + 5\sqrt{x} + 6 = 0$ c) $6x - \sqrt{x} - 1 = 0$

Przypomnij sobie

Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

Obliczamy współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f :

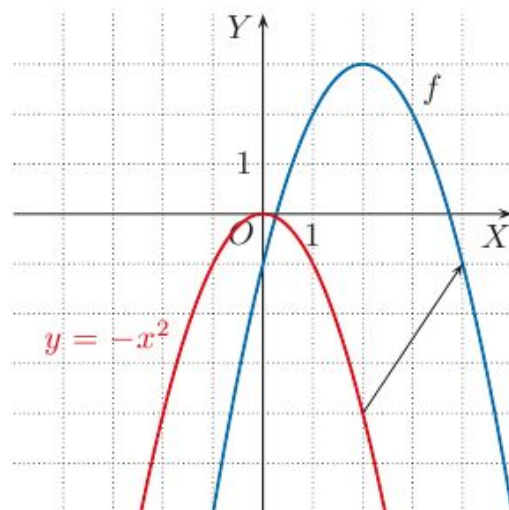
$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$y_w = f(x_w) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = 3$$

Korzystamy z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej $y = a(x - x_w)^2 + y_w$, gdzie $a \neq 0$, i otrzymujemy wzór funkcji f w postaci:

$$f(x) = -(x - 2)^2 + 3$$

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie paraboli $y = -x^2$ o wektor $[2, 3]$.



Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$.

Obliczamy współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f :

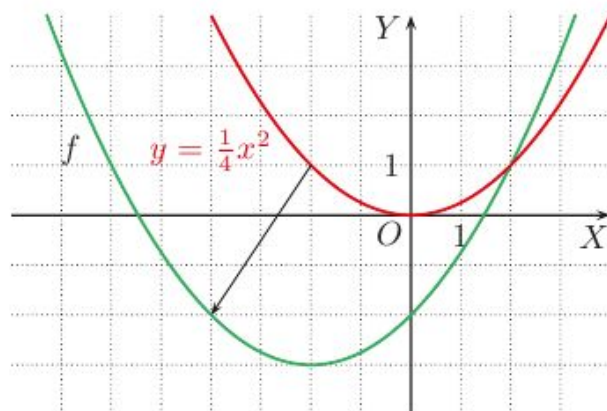
$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$y_w = f(x_w) = \frac{1}{4}(-2)^2 - 2 - 2 = -3$$

Funkcja f ma postać kanoniczną:

$$f(x) = \frac{1}{4}(x - (-2))^2 - 3$$

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$ o wektor $[-2, -3]$.



1. Zapisz w postaci kanonicznej wzór funkcji f , a następnie naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

e) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

f) $f(x) = -2x^2 + 12x - 14$

2. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g ?

a) $f(x) = 3x^2, g(x) = 3x^2 - 6x + 5$

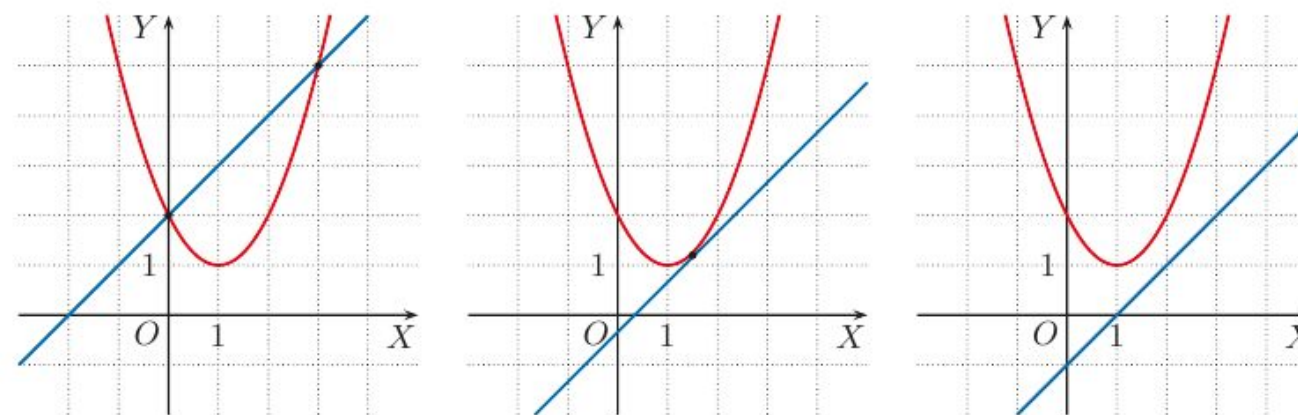
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2, g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$

b) $f(x) = 4x^2, g(x) = 4x^2 + 24x$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2, g(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 1$

R 1.4. Układy równań

Prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.



Prostą przecinającą parabolę w dwóch punktach nazywamy **sieczną** paraboli. Prostą, która nie jest równoległa do osi OY i ma z parabolą dokładnie jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną** do paraboli.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Porównujemy prawe strony obu równań i otrzymujemy równanie $x^2 = 2x$, czyli:

$$x^2 - 2x = 0$$

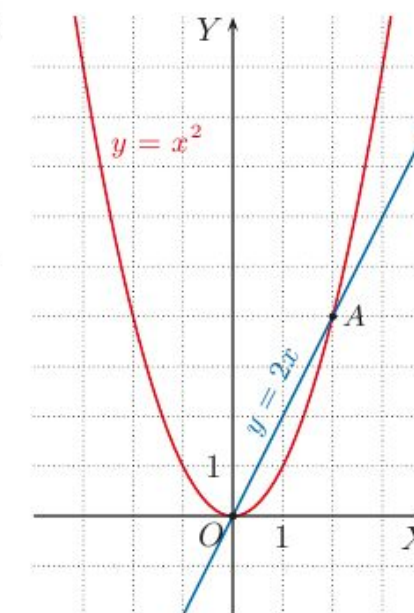
$$x(x - 2) = 0$$

Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 2.

Dla $x = 0$ mamy $y = 0$. Dla $x = 2$ mamy $y = 4$.

Układ równań spełniają zatem dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$



Prosta $y = 2x$ przecina parabolę $y = x^2$ w punktach $O(0,0)$ i $A(2,4)$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = -x \\ y = x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = -x^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ y = -x^2 \end{cases}$

D Przykład 2

Uzasadnij, że parabola $y = x^2$ ma jeden punkt wspólny z prostą $2x - y - 1 = 0$, natomiast nie ma punktów wspólnych z prostą $y - 2x = -4$.

Rozpatrzmy najpierw układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 2x - 1$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= x^2 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Równanie to ma jeden pierwiastek $x = 1$, zatem jedynym rozwiązaniem układu równań jest para liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{Prosta } y = 2x - 1 \text{ i parabola } y = x^2 \text{ mają jeden punkt wspólny.}$$

Rozpatrzmy teraz układ równań:

$$\begin{cases} y - 2x = -4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = 2x - 4$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= x^2 \\ x^2 - 2x + 4 &= 0 \\ \Delta &= (-2)^2 - 4 \cdot 4 = -12 < 0 \end{aligned}$$

Równanie nie ma rozwiązania, czyli układ równań jest sprzeczny, zatem prosta $y = 2x - 4$ nie ma punktów wspólnych z parabolą $y = x^2$.

Ćwiczenie 2

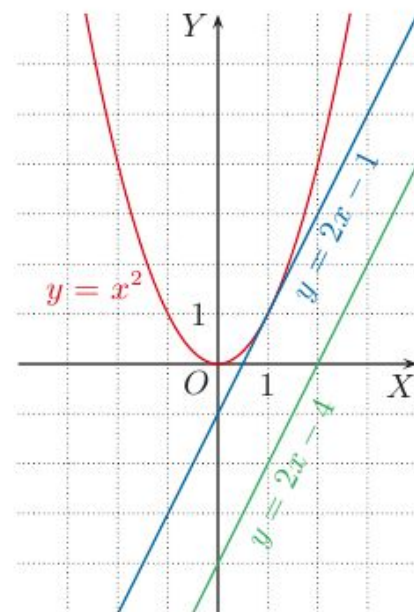
Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 4x + y + 2 = 0 \\ y = x^2 - 2x - 1 \end{cases} & \text{b)} \quad & \begin{cases} 4x - y + 5 = 0 \\ y = 2x^2 + 8x + 7 \end{cases} & \text{c)} \quad & \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 \end{cases} \end{aligned}$$

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że układ równań jest sprzeczny.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x + 3 \end{cases} & \text{b)} \quad & \begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ y = -2x^2 + 4x + 2 \end{cases} & \text{c)} \quad & \begin{cases} -4y = x^2 + 2x - 8 \\ \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$



Zadania

- Wyznacz współrzędne punktów przecięcia paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$ oraz podanej prostej (rysunek obok).

$$\text{a) } l_1: y = \frac{1}{2}x \quad \text{b) } l_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$$

- Ile punktów wspólnych wykresów funkcji f i g ma obie współrzędne całkowite?

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= -x + 2, \quad g(x) = x^2 - 2x & \text{c) } f(x) &= 2x - 4, \quad g(x) = -2x^2 \\ \text{b) } f(x) &= x - 6, \quad g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 3 & \text{d) } f(x) &= \frac{1}{2}x + 1, \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

- Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 4 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} x^2 - 4x - 2y = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases} & \text{e) } & \begin{cases} y = 2x^2 - 4x - 3 \\ 8x + y + 5 = 0 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ y = x^2 + 2x - 2 \end{cases} & \text{d) } & \begin{cases} x^2 + 4y - 16 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} & \text{f) } & \begin{cases} y = 2x^2 + 8x + 5 \\ x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Wykresy funkcji f i g przecinają się w punktach $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$, gdzie $x_1 < x_2$. Wyznacz wektor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

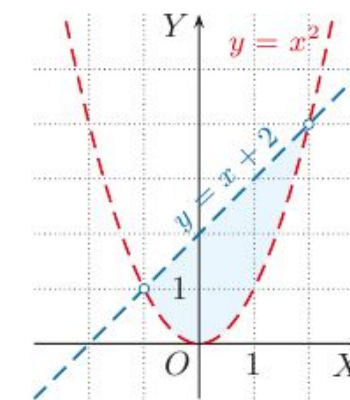
$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x + 1, \quad g(x) = x^2 + 1 & \text{c) } f(x) &= -2x + 3, \quad g(x) = x^2 \\ \text{b) } f(x) &= x + 1, \quad g(x) = -2x^2 + 3 & \text{d) } f(x) &= -x - 2, \quad g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2 \end{aligned}$$

- Przeczytaj podany w ramce przykład.

Na rysunku obok zaznaczono w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} y > x^2 \\ y < x + 2 \end{cases}$$

Zaznaczony obszar leży powyżej paraboli $y = x^2$ i jednocześnie poniżej prostej $y = x + 2$.



Zaznacz w układzie współrzędnych obszar opisany układem nierówności.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} y > x^2 - 2 \\ y < 2x + 1 \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} y > x - 1 \\ y \leq -x^2 + 1 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} y < -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \\ y \geq 0,5x^2 - 2 \end{cases} \end{aligned}$$

R 1.5. Wzory Viète'a

Korzystając ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego, można wyznaczyć ich sumę i iloczyn.

Twierdzenie – wzory Viète'a

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2 , to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Uwaga. Wzory Viète'a [czyt. wjeta] możemy stosować jedynie wtedy, gdy równanie ma pierwiastki, czyli gdy $\Delta \geq 0$.

D Ćwiczenie 1

Przeczytaj dowód wzoru na iloczyn pierwiastków równania kwadratowego.

Jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki, to dane są one wzorami:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

zatem:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

- a) Udowodnij wzór na sumę pierwiastków równania kwadratowego.
 b) Udowodnij, że jeśli $\Delta = 0$, czyli trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny x_0 , to wzory Viète'a mają postaci $2x_0 = -\frac{b}{a}$ i $x_0^2 = \frac{c}{a}$.

Przykład 1

Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

- a) $2x^2 - 20x + 15 = 0$ Najpierw sprawdzamy, czy równanie ma pierwiastki.
 $\Delta = 400 - 120 > 0$, zatem istnieją dwa pierwiastki x_1, x_2 .
 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{20}{2} = 10$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{15}{2} = 7,5$
 b) $3x^2 - 7x + 6 = 0$
 $\Delta = 49 - 72 < 0$, więc równanie nie ma pierwiastków.

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania.

- a) $x^2 - 9x - 7 = 0$ c) $6x^2 - 15x + 2 = 0$ e) $-\frac{2}{3}x^2 - 8x + 1 = 0$
 b) $-2x^2 + 3x + 7 = 0$ d) $-3x^2 + 4x - 2 = 0$ f) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$

Przykład 2

Określ znaki pierwiastków równania $7x^2 - 9x + 1 = 0$.

$\Delta = 81 - 28 > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki x_1, x_2 .

Korzystamy ze wzoru Viète'a na iloczyn pierwiastków:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{7}$$

Ponieważ $x_1 \cdot x_2 > 0$, liczby x_1, x_2 mają ten sam znak (obie są ujemne lub obie są dodatnie). Korzystamy ze wzoru Viète'a na sumę pierwiastków:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{9}{7}$$

Oba pierwiastki mają ten sam znak oraz $x_1 + x_2 > 0$, zatem x_1, x_2 są liczbami dodatnimi.

Zwróć uwagę na to, że aby określić znaki pierwiastków równania kwadratowego, nie musimy ich wyznaczać. Możemy skorzystać z podanych obok warunków.

Liczby x_1, x_2 są dodatnie, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$
 Liczby x_1, x_2 są ujemne, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$
 Liczby x_1, x_2 mają różne znaki, gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$.

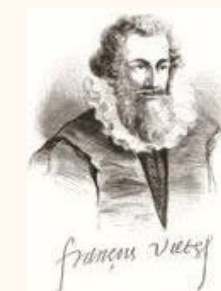
Ćwiczenie 3

Określ znaki pierwiastków równania.

- a) $x^2 - x - 25 = 0$ c) $12x^2 - 20x + 5 = 0$ e) $-2x^2 - 15x - 3 = 0$
 b) $2x^2 + 6x + 3 = 0$ d) $3x^2 + 5x + 4 = 0$ f) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{6}x + \frac{1}{2} = 0$

Czy wiesz, że...

François Viète (1540–1603) – francuski matematyk, z zawodu prawnik. Jako pierwszy konsekwentnie stosował w algebrze symbole literowe, chociaż jego notacja znacznie różniła się od używanej obecnie. Był tajnym doradcą na dworze Henryka III oraz Henryka IV, dla którego w 1590 r. złamał hiszpański szyfr liczący 500 znaków.



D Przykład 3

Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2 , to suma ich kwadratów jest równa $\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$.

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \\ &= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} \end{aligned}$$

Korzystamy ze wzorów Viète'a na sumę i iloczyn pierwiastków.

Przykład 4

Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania $6x^2 - 9x + 2 = 0$.

Ponieważ $\Delta = 81 - 48 > 0$, równanie ma dwa pierwiastki x_1, x_2 .

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{9}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{9}{4} - \frac{2}{3} = \frac{27-8}{12} = \frac{19}{12}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania.

a) $x^2 - x - 1 = 0$ b) $2x^2 + 6x - 3 = 0$ c) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

Zadania

1. Określ znaki pierwiastków równania.

a) $x^2 + x - 1 = 0$ c) $13x^2 - 13x + 3 = 0$ e) $\sqrt{3}x^2 - 5x + 2 = 0$
b) $15x^2 + 8x + 1 = 0$ d) $13x^2 + 13x + 4 = 0$ f) $-x^2 - x + \sqrt{2} = 0$

D 2. Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $c \neq 0$, ma pierwiastki, to suma ich odwrotności jest równa $-\frac{b}{c}$.

3. Oblicz sumę odwrotności pierwiastków równania.

a) $3x^2 - x - 1 = 0$ b) $-2x^2 - 8x - 3 = 0$ c) $4x^2 + 20x - 6 = 0$

4. Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania.

a) $x^2 + 9x + 6 = 0$ b) $-2x^2 + 6x + 3 = 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$

5. Oblicz kwadrat różnicy pierwiastków równania.

a) $3x^2 - x - 1 = 0$ b) $-2x^2 + 5x + 4 = 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - 2 = 0$

D 6. Uzasadnij, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $c \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2 , to suma odwrotności ich kwadratów jest równa $\frac{b^2}{c^2} - 2 \cdot \frac{a}{c}$.

Wskazówka. $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

7. Oblicz sumę odwrotności kwadratów pierwiastków równania.

a) $-x^2 + 10x + 10 = 0$ b) $\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0$ c) $-x^2 + 3x + 7 = 0$

8. Czy można ułożyć równanie kwadratowe tak, aby suma i iloczyn jego pierwiastków były odpowiednio równe: a) 7 i 3, b) 3 i 7?

9. Korzystając ze wzorów Viète'a, ułóż równanie kwadratowe, którego pierwiastkami będą liczby dwa razy większe od pierwiastków równania:

a) $x^2 - 5x + 1 = 0$, b) $-x^2 + 6x - 2 = 0$, c) $x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$.

R 1.6. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

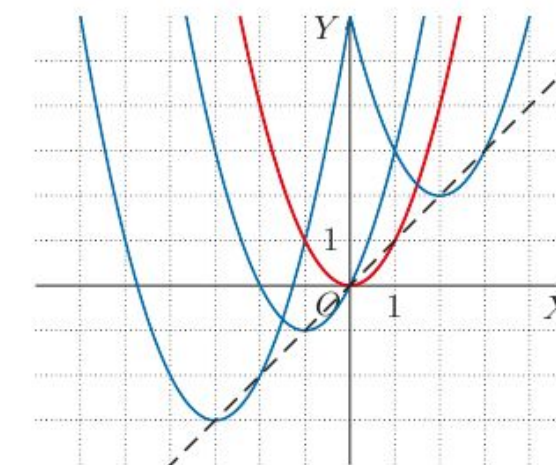
Przykład 1

Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = (x - m)^2 + m$ ma dwa miejsca zerowe?

Wykresem funkcji $y = (x - m)^2 + m$ jest parabola, której wierzchołek ma współrzędne (m, m) , czyli leży na prostej $y = x$. Z rysunku odczytujemy, że funkcja:

$$y = (x - m)^2 + m$$

ma dwa miejsca zerowe dla $m \in (-\infty; 0)$.



Ćwiczenie 1

Dla jakich wartości parametru m funkcja $y = (x - m)^2 + m$ ma dwa miejsca zerowe będące liczbami ujemnymi?

Przykład 2

Określ liczbę pierwiastków równania $2x^2 - mx + 2 = 0$ w zależności od parametru m . Wyznacz te pierwiastki.

$$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = m^2 - 16$$

• Równanie ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta = m^2 - 16 > 0$, czyli dla $m \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$. Wówczas:

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 16}}{4} \quad \text{ i } \quad x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 16}}{4}$$

• Równanie ma dokładnie jeden pierwiastek, gdy $\Delta = m^2 - 16 = 0$, czyli dla $m = -4$ (wówczas $x_0 = -1$) i dla $m = 4$ (wówczas $x_0 = 1$).

• Równanie nie ma pierwiastków, gdy $\Delta = m^2 - 16 < 0$, czyli dla $m \in (-4; 4)$.

Ćwiczenie 2

Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki? Wyznacz te pierwiastki.

a) $-3x^2 + 2x - m = 0$ b) $x^2 + (2m + 1)x + 5 = 0$ c) $x^2 + mx - m = 0$

Ćwiczenie 3

Określ liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru m .

a) $x^2 + (m - 1)x + 2m - 5 = 0$ b) $-2x^2 + 2mx + 2x + m - \frac{1}{2} = 0$

Przykład 3

Dla jakich wartości parametru k równanie $x^2 - kx + k - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki o jednakowych znakach?

Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$. Pierwiastki te mają jednakowe znaki, gdy iloczyn tych liczb jest dodatni: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$.

$$\Delta = k^2 - 4(k - 1) = k^2 - 4k + 4 = (k - 2)^2, \quad \frac{c}{a} = k - 1$$

Otrzymujemy zatem dwie nierówności, które muszą być spełnione jednocześnie:

$$(k - 2)^2 > 0 \quad \text{i} \quad k - 1 > 0 \\ k \neq 2 \quad \text{i} \quad k > 1$$

Równanie ma zatem dwa różne pierwiastki o jednakowych znakach wtedy i tylko wtedy, gdy $k \in (1; 2) \cup (2; \infty)$.

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości parametru k równanie ma pierwiastki o różnych znakach?

$$\text{a) } x^2 - (k + 2)x + k - 2 = 0 \quad \text{b) } x^2 + (k - 1)x - k = 0$$

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m + 1)x^2 - 4(m - 1)x + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest liczbą ujemną?

Rozpatrzmy dwa przypadki ze względu na współczynnik przy x^2 .

1° Dla $2m + 1 = 0$, czyli dla $m = -\frac{1}{2}$, równanie jest liniowe – ma tylko jeden pierwiastek. Nie są więc spełnione warunki zadania.

2° Dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ równanie jest kwadratowe – ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$.

$$\Delta = (-4(m - 1))^2 - 4 \cdot (2m + 1) \cdot 4 = 16m^2 - 64m \\ \Delta > 0, \quad \text{gdy} \quad 16m^2 - 64m > 0 \\ 16m(m - 4) > 0$$

$$\text{(I)} \quad m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 0) \cup (4; \infty) \quad m \neq -\frac{1}{2}$$

Sumę odwrotności pierwiastków wyznaczamy, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = \frac{4(m - 1)}{4} = m - 1$$

Warunek $m - 1 < 0$ jest spełniony, gdy:

$$\text{(II)} \quad m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 1) \quad m \neq -\frac{1}{2}$$

Zatem ostatecznie wyjściowe równanie ma dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest ujemna, gdy warunki (I) i (II) są jednocześnie spełnione, czyli gdy $m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 0)$.

Ćwiczenie 5

Dla jakich wartości parametru m suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania jest większa od -6 ?

$$\text{a) } (m + 3)x^2 + (m + 2)x + 1 = 0 \quad \text{b) } mx^2 + (m - 1)x + 1 = 0$$

Ćwiczenie 6

Dla jakich wartości parametru k suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 17?

$$\text{a) } x^2 + (k - 1)x + 4 = 0 \quad \text{b) } x^2 - (k - 2)x + \frac{1}{2}k^2 + 1 = 0$$

Przykład 5

Dla jakich wartości parametru m nierówność $(m + 2)x^2 - 2mx + m \geq 0$ jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

Rozpatrzmy dwa przypadki ze względu na współczynnik przy x^2 .

1° Dla $m = -2$ otrzymujemy nierówność liniową $4x - 2 \geq 0$. Nie spełnia ona warunków zadania.

2° Dla $m \neq -2$ otrzymujemy nierówność kwadratową.

Zachodzi ona dla każdego $x \in \mathbb{R}$, gdy jednocześnie spełnione są dwa warunki:

$$\begin{cases} m + 2 > 0 & \text{(I)} \\ \Delta \leq 0 & \text{(II)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Parabola ma ramiona skierowa-} \\ \text{ne do góry i ma co najwyżej je-} \\ \text{den punkt wspólny z osią } OX. \end{array}$$

Warunek (I): $m \in (-2; \infty)$

$$\text{Warunek (II): } \Delta = (-2m)^2 - 4m(m + 2) = 4m^2 - 4m^2 - 8m = -8m \\ \Delta \leq 0, \quad \text{gdy } m \in [0; \infty).$$

Zatem ostatecznie wyjściowa nierówność jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$, gdy $m \in [0; \infty)$.

Ćwiczenie 7

Dla jakich wartości parametru k podana nierówność zachodzi dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

$$\text{a) } x^2 - (k - 3)x + 4k \geq 0 \quad \text{b) } (k - 1)x^2 - 2kx + k - 1 \leq 0$$

Zadania

- D 1. Wykaż, że równanie $2x^2 + mx - 3 = 0$ ma rozwiązanie dla dowolnego $m \in \mathbb{R}$.
- D 2. Wykaż, że nie istnieje taka wartość parametru m , dla której równanie $x^2 + (m + 1)x + m^2 + 1 = 0$ ma rozwiązanie.

3. Dla jakich wartości parametru m równanie ma co najmniej jeden pierwiastek?
- a) $x^2 - 6x + 2m = 0$ c) $mx^2 - 4x + 1 = 0$
b) $\frac{1}{2}x^2 - (m-2)x + m - 2 = 0$ d) $(1-m)x^2 - (4m-4)x - 3m + 5 = 0$
4. Dla jakich wartości parametru k równanie ma dwa pierwiastki o różnych znakach?
- a) $x^2 - 2x + k + 3 = 0$ c) $x^2 + (2k+1)x - 2k + 2 = 0$
b) $x^2 - (k-4)x - k + 5 = 0$ d) $x^2 + (1-2k)x + 4 - 4k = 0$
5. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki, które są liczbami dodatnimi?
- a) $x^2 - (m+2)x + m + 5 = 0$ c) $x^2 + (2m-5)x + 2m - 6 = 0$
b) $x^2 + 4mx + m + 3 = 0$ d) $x^2 - (3m+1)x + 2m^2 - m - 6 = 0$
6. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki, które są liczbami ujemnymi?
- a) $\frac{1}{4}x^2 + x + m^2 - 4m = 0$ b) $-x^2 + \frac{m}{2}x - m + 1 = 0$
7. Dla jakich wartości parametru k nierówność zachodzi dla każdego $x \in \mathbb{R}$?
- a) $x^2 + 3x + k > 0$ d) $x^2 - kx + k + 1 \geq 0$
b) $x^2 + kx + 9 \geq 0$ e) $(k+1)x^2 - 2x - 1 \leq 0$
c) $x^2 - kx + k + 3 > 0$ f) $kx^2 + 2(k-1)x + k - 1 > 0$
8. Dla jakich wartości parametru k funkcja f jest określona dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$?
- a) $f(x) = \sqrt{x^2 + (k+2)x + 2k + 1}$ d) $f(x) = \sqrt{(k-4)x^2 + 2kx + 2k}$
b) $f(x) = \sqrt{(5-k)x^2 + (k-2)x + 1}$ e) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{kx^2 + 2kx + 2}}$
c) $f(x) = \sqrt{(2-k)x^2 - 2x + 2 - k}$ f) $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{\sqrt{kx^2 + (2k-1)x + 2k - 1}}$
9. Dla jakich wartości parametru a równanie ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające podany warunek?
- a) $x^2 - (a-4)x - 2a = 0, \quad x_1 + x_2 > 2$
b) $x^2 + (a+1)x + 4 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 = 2(x_1 + x_2)$
c) $x^2 + ax + 2a - 3 = 0, \quad x_1^2x_2 + x_1x_2^2 < 0$
d) $-x^2 + (2a-1)x + a = 0, \quad (x_1 - x_2)^2 = 5$

10. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 6?
- a) $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$ b) $x^2 - 6(a-3)x + a - 3 = 0$
11. Dla jakich wartości parametru a suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania jest równa 16?
- a) $x^2 - 2ax + 3 = 0$ b) $x^2 + (4-2a)x + a^2 + 1 = 0$
12. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + ax + 1 = 0$ jest równa 7?
13. Dla jakich wartości parametru a suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania $-x^2 - 2x + a^2 + a + 1 = 0$ przyjmuje największą wartość?
14. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie ma tylko jedno rozwiązanie.
- a) $x(x^2 - (2m-4)x + m - 2) = 0$ b) $(x+3)(x^2 + (m+3)x + m^2) = 0$
15. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(m)$, która każdemu argumentowi $m \in \mathbb{R}$ przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania.
- a) $(m-1)x^2 + 2x + m - 1 = 0$ b) $(m^2 + 2m)x^2 + 2mx + 3 = 0$
16. Niech $y = f(m)$ będzie funkcją określającą wartość iloczynu dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 - 2x + m^2 + 4m + 1 = 0$ w zależności od parametru m . Podaj dziedzinę funkcji f oraz wyznacz pierwiastki równania tak, aby ich iloczyn był najmniejszy.
17. Funkcja $y = f(m)$ opisuje sumę dwóch różnych pierwiastków równania:

$$\frac{1}{m}x^2 + (m+1)x + \frac{m}{64} = 0$$
Wyznacz pierwiastki równania tak, aby ich suma była największa.
18. Dla jakich wartości parametru m równanie ma cztery różne pierwiastki?
- a) $x^4 + mx^2 + 1 = 0$ c) $x^4 + mx^2 - m - 6 = 0$
b) $x^4 - x^2 + m = 0$ d) $x^4 + (m-2)x^2 + 4 - m = 0$
19. Wyznacz liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru m .
- a) $x^4 + mx^2 + 4 = 0$ b) $x^4 + x^2 + m = 0$ c) $*|x^2 + 2x - 8| = m$
20. Dla jakich wartości parametru m równanie $(m+3)x^2 + mx + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające nierówność $|x_1| + |x_2| \leq 1$?
- Wskazówka.** Obie strony nierówności $|x_1| + |x_2| \leq 1$ można podnieść do kwadratu.

1.7. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)

Przykład 1

Suma liczb p i q jest równa 12. Oblicz największą wartość iloczynu tych liczb.

$$p + q = 12, \text{ zatem } q = 12 - p.$$

$$\text{Iloczyn tych liczb to } p \cdot q = p(12 - p) = 12p - p^2 = -p^2 + 12p.$$

Wyznaczamy wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji danej wzorem:

$$f(p) = -p^2 + 12p \quad \text{Wykresem funkcji } f \text{ jest parabola o ramionach skierowanych w dół.}$$

$$p_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{-2} = 6, \quad f(p_w) = -6^2 + 12 \cdot 6 = -36 + 72 = 36$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa 36 (dla $p = q = 6$).

Ćwiczenie 1

Oblicz największą wartość iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa:

- a) 38, b) $\frac{1}{2}$, c) $\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 2

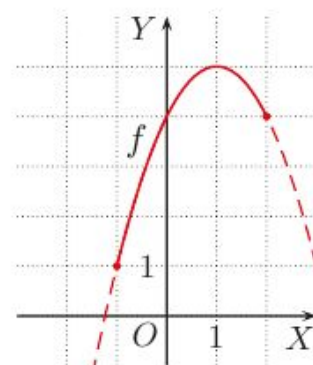
Suma liczby p i podwojonej liczby q jest równa 36. Oblicz największą wartość iloczynu liczb p i q .

Przykład 2

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ w przedziale $[-1; 2]$.

Obliczamy wartości funkcji f na końcach przedziału: $f(-1) = 1$ oraz $f(2) = 4$.

Wierzchołek paraboli ma współrzędne: $x_w = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_w = f(1) = 5$. Ponieważ $x_w \in [-1; 2]$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji w tym przedziale jest równa 5. Wartość najmniejsza jest przyjmowana dla $x = -1$ i wynosi 1.



Aby wyznaczyć najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ w przedziale $[p_1; p_2]$, należy obliczyć $f(p_1)$ i $f(p_2)$. Jeśli x_w (pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji) należy do przedziału $[p_1; p_2]$, to obliczamy również $y_w = f(x_w)$. Najmniejsza spośród tych wartości jest najmniejszą wartością funkcji w danym przedziale, a największa – największą wartością.

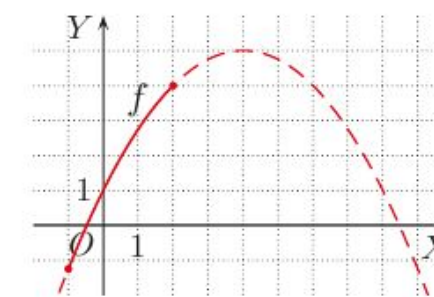
Przykład 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$ w przedziale $[-1; 2]$.

Obliczamy kolejno:

- $f(-1) = -\frac{5}{4}$ oraz $f(2) = 4$
- $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-\frac{1}{2}} = 4 \notin [-1; 2]$

Zatem wartość najmniejsza i wartość największa funkcji f przyjmowane są na końcach przedziału $[-1; 2]$, czyli są to odpowiednio $-\frac{5}{4}$ i 4.



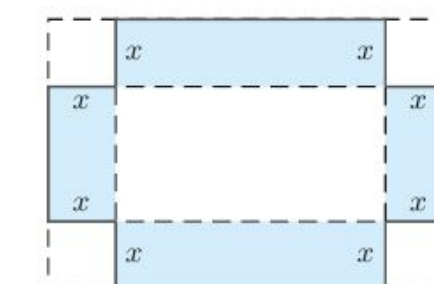
Ćwiczenie 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

- a) $f(x) = x^2 + 4x + 8, [-3; 1]$ c) $f(x) = -x^2 + 4x - 6, [-1; 3]$
b) $f(x) = -2x^2 - 4x - 1, [0; 4]$ d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 3, [-2; 1]$

Przykład 4

Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 60 cm i 40 cm wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.



Pole powierzchni bocznej pudełka w zależności od długości boków wyciętych kwadratów przedstawia funkcja:

$$P(x) = 2(40 - 2x) \cdot x + 2(60 - 2x) \cdot x = -8x^2 + 200x$$

Określamy dziedzinę funkcji P : $D = (0; 20)$.

$$x > 0, 2x < 40, 2x < 60$$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli $y = -8x^2 + 200x$:

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{-16} = 12,5, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{40\,000}{-32} = 1250$$

Ponieważ $x_w \in (0; 20)$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji P jest przyjmowana dla x_w .

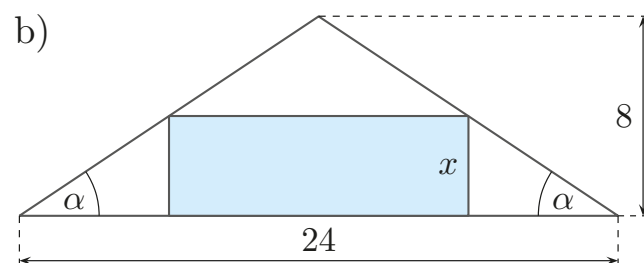
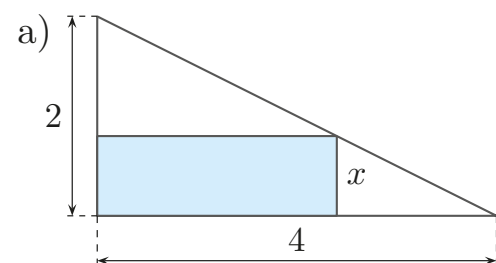
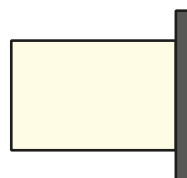
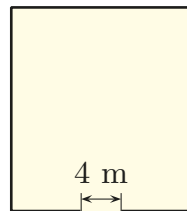
Pudełko ma zatem największe pole powierzchni bocznej, jeśli długość boków wyciętych kwadratów jest równa 12,5 cm. Pole to jest równe 1250 cm^2 .

Ćwiczenie 4

Z kwadratowego arkusza tektury o polu 1600 cm^2 wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.

Zadania

- Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ oraz funkcji $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ w przedziale: a) $[0; 4]$, b) $[-4; 6]$.
- Suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 8.
a) Wyznacz największe pole takiego trójkąta.
b) Wyznacz najmniejszą wartość kwadratu długości przeciwprostokątnej takiego trójkąta.
- Trzeba ogrodzić prostokątną rabatę kwiatową o jak największej powierzchni, przy czym nie będzie ona grodzona na jednym boku na odcinku 4 m (rysunek obok). Wiadomo, że potrzeba do tego 80 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Jakie wymiary ma ta rabata?
- Taras przylega jednym z boków do ściany domu (rysunek obok). Wiadomo, że na ogrodzenie tego tarasu potrzeba 28 m bieżących paneli osłonowych i że jego powierzchnia jest największa z możliwych. Jakie wymiary ma ten taras?
- Podstawą prostopadłościanu o wysokości 5 cm jest prostokąt o obwodzie 12 cm. Jakie powinny być wymiary podstawy tego prostopadłościanu, aby jego pole powierzchni całkowitej było największe?
- Szkielet prostopadłościanu wykonano z 56 cm drutu. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt, którego jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego. Jakie powinny być długości krawędzi tego prostopadłościanu, aby jego pole powierzchni całkowitej było największe?
- Wyraź pole prostokąta przedstawionego na rysunku jako funkcję zmiennej x . Podaj wymiary prostokąta o największym polu.



- Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 8}, [1; 4]$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-5x^2 - 10x + 4}}, [-2; 0]$

b) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 4}, [0; 4]$

d) $f(x) = (x^2 - 6x + 3)^2, [1; 5]$

1.8. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)

Przykład 1

Prostokątny trawnik ma powierzchnię 209 m^2 . Oblicz wymiary tego trawnika w przypadku, gdy różnią się one o 8 m.

Oznaczmy długość krótszego boku trawnika przez x ($x > 0$). Otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned} x(x + 8) &= 209 \\ x^2 + 8x - 209 &= 0 \\ \Delta &= 64 + 836 = 900, \sqrt{\Delta} = 30 \\ x_1 &= \frac{-8 - 30}{2} < 0, \quad x_2 = \frac{-8 + 30}{2} = 11 \end{aligned}$$

Pierwsze rozwiązanie odrzucamy, ponieważ nie spełnia warunków zadania. Zatem trawnik ma wymiary $11 \text{ m} \times 19 \text{ m}$.

Ćwiczenie 1

Prostokątny trawnik ma powierzchnię 216 m^2 . Oblicz wymiary tego trawnika w przypadku, gdy różnią się one o: a) 6 m, b) 15 m.

Przykład 2

Wokół prostokątnego trawnika o wymiarach $12 \text{ m} \times 6 \text{ m}$ ma zostać ułożony pas kostki brukowej o szerokości $x \text{ m}$ oraz powierzchni 63 m^2 (rysunek obok). Oblicz x .

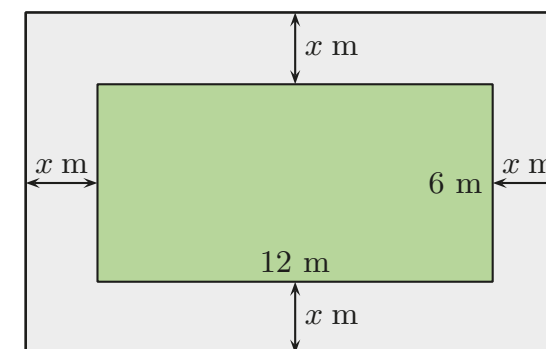
Powierzchnia pokryta kostką jest równa różnicy pól większego i mniejszego prostokąta:

$$(12 + 2x)(6 + 2x) - 12 \cdot 6 = 72 + 24x + 12x + 4x^2 - 72 = 4x^2 + 36x, \quad x > 0$$

Otrzymujemy równanie:

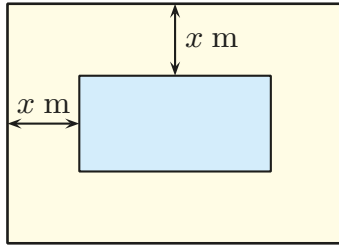
$$\begin{aligned} 4x^2 + 36x &= 63 \\ 4x^2 + 36x - 63 &= 0 \\ \Delta &= 1296 + 1008 = 2304, \sqrt{\Delta} = 48 \\ x_1 &= \frac{-36 - 48}{8} < 0, \quad x_2 = \frac{-36 + 48}{8} = 1,5 \end{aligned}$$

Pierwsze rozwiązanie odrzucamy, ponieważ nie spełnia warunków zadania. Zatem szerokość pasa jest równa $1,5 \text{ m}$.



Ćwiczenie 2

Wokół basenu o wymiarach $4\text{ m} \times 8\text{ m}$ wyłożono kafelkami pas o szerokości $x\text{ m}$ oraz powierzchni 45 m^2 (rysunek obok). Jaka jest szerokość tego pasa?



Przykład 3

Firma produkująca zabawki oszacowała roczną wielkość sprzedaży lalek na s sztuk w zależności od ceny $x\text{ zł}$ za sztukę (tabela poniżej). Okazało się, że jest to zależność liniowa $s(x) = -40x + 3600$.

Cena x w zł	40	50	60	70	80	90
Liczba lalek s	2000	1600	1200	800	400	0

Koszt wyprodukowania jednej lalki wynosi 20 zł . Ustal taką cenę za jedną lalkę, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Zysk ze sprzedaży jednej lalki, gdy kosztuje ona $x\text{ zł}$, jest równy $(x - 20)\text{ zł}$ (przyjmujemy, że $x \geq 20$). Określmy funkcję z opisującą roczny zysk ze sprzedaży s lalek dla ceny $x\text{ zł}$ za lalkę:

$$\begin{aligned} z(x) &= s(x) \cdot (x - 20) = (-40x + 3600)(x - 20) = \\ &= -40x^2 + 4400x - 72\,000, \text{ gdzie } x \in [20; 90] \end{aligned}$$

Funkcja z największą wartość przyjmuje w wierzchołku odpowiedniej paraboli:

$$x_w = -\frac{4400}{-80} = 55$$

Zatem zysk będzie największy dla ceny $x = 55\text{ zł}$.

Wielkość sprzedaży będzie wówczas równa:

$$s(55) = -40 \cdot 55 + 3600 = 1400$$

a roczny zysk będzie wynosił:

$$z_{\max} = z(55) = 1400 \cdot (55 - 20) = 1400 \cdot 35 = 49\,000\text{ [zł]}$$

Ćwiczenie 3

Koszt wyprodukowania jednego pluszowego misia wynosi 10 zł . Dla ceny 15 zł za misia wielkość sprzedaży wynosi 1000 sztuk rocznie. Każdorazowe podniesienie ceny o 1 zł powoduje spadek sprzedaży o 50 sztuk w ciągu roku.

a) Wyznacz wzór funkcji kwadratowej opisującej roczny zysk w zależności od ceny $x\text{ zł}$ za sztukę.

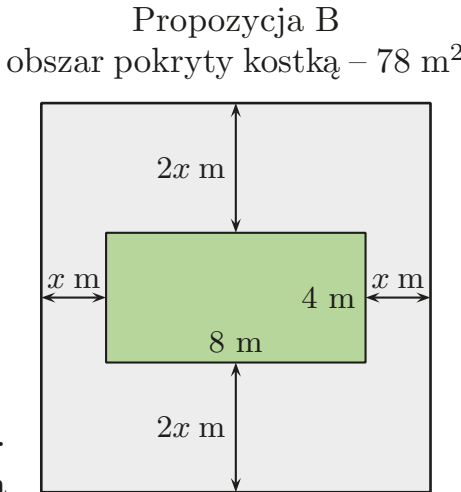
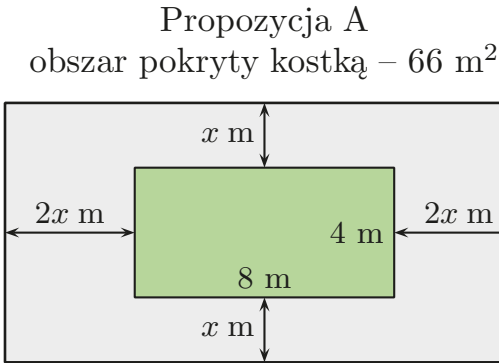
b) Ustal taką cenę za jednego misia, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Ćwiczenie 4

Sklep z odzieżą sportową sprzedaje dziennie 16 bluz dresowych. Zysk ze sprzedaży jednej sztuki wynosi 40 zł . Właściciel sklepu przewiduje, że każde obniżenie ceny o 5 zł spowoduje wzrost sprzedaży o 4 sztuki dziennie. O ile powinien on obniżyć cenę, aby mieć największy zysk?

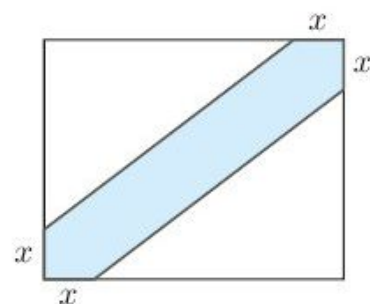
Zadania

- Plac zabaw ma kształt prostokąta o wymiarach $12\text{ m} \times 18\text{ m}$. Szerokość placu zwiększono o $x\text{ m}$, a długość o $2x\text{ m}$. Powierzchnia placu wzrosła wówczas o 144 m^2 . Oblicz x .
- Reprodukcję obrazu o powierzchni P oprawiono w prostokątną ramę o wymiarach zewnętrznych $x \times y$. Oblicz szerokość tej ramy, gdy:
a) $P = 2400\text{ cm}^2$, $x = 80\text{ cm}$, $y = 60\text{ cm}$,
b) $P = 2700\text{ cm}^2$, $x = 75\text{ cm}$, $y = 55\text{ cm}$.
- Wokół prostokątnego trawnika o wymiarach $4\text{ m} \times 8\text{ m}$ ma zostać ułożona kostka brukowa. Projektant przedstawił dwie propozycje: A i B (rysunki poniżej). Dla każdej z tych propozycji oblicz x .



- Dany jest prostokąt o wymiarach $21\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Jego długość i szerokość zwiększono o $x\text{ cm}$. Dla jakiej wartości x przekątna nowego prostokąta ma długość 25 cm ?
- Dany jest prostokąt o wymiarach $3\text{ cm} \times 10\text{ cm}$. Jego długość i szerokość zwiększono o $x\text{ cm}$. Dla jakich wartości x przekątna nowego prostokąta ma długość większą od 13 cm ?
- Szerokość pokoju jest o 2 m mniejsza od jego długości. Jakie wymiary może mieć ten pokój, jeśli przekątna podłogi jest niekrótsza niż 6 m i nie dłuższa niż 10 m ?

7. Bok BC trójkąta prostokątnego ABC jest o 2 cm krótszy od boku AB i o 7 cm dłuższy od boku AC . Oblicz obwód tego trójkąta.

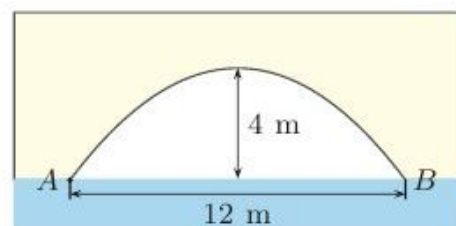


8. Boki prostokąta mają długości 8 i 10 (rysunek obok). Dla jakich wartości x zacieniowany obszar stanowi co najmniej 40% powierzchni prostokąta?

9. Powierzchnia stawu wynosiła 400 m^2 . Przez dwa kolejne lata, na skutek suszy, powierzchnia stawu się zmniejszała – w każdym roku o $p\%$. Po upływie dwóch lat staw miał powierzchnię 289 m^2 . Oblicz p .

- D** 10. Wykaż, że istnieje tylko jeden trójkąt prostokątny, którego boki mają długości równe kolejnym liczbom: a) naturalnym, b) parzystym.

11. Łuk przęsła mostu ma kształt paraboli (rysunek obok). Korzystając z wymiarów podanych na rysunku, znajdź równanie tej paraboli. Przyjmij, że początek układu współrzędnych znajduje się:



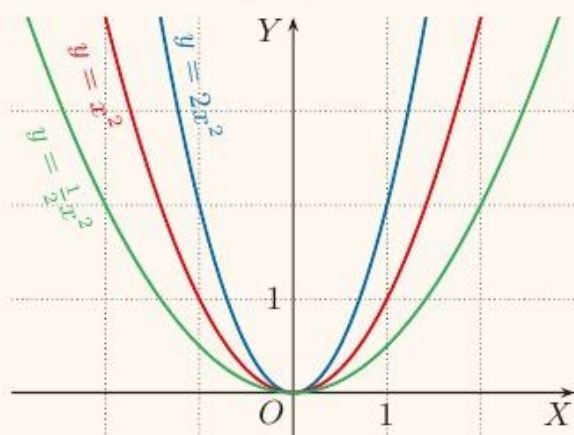
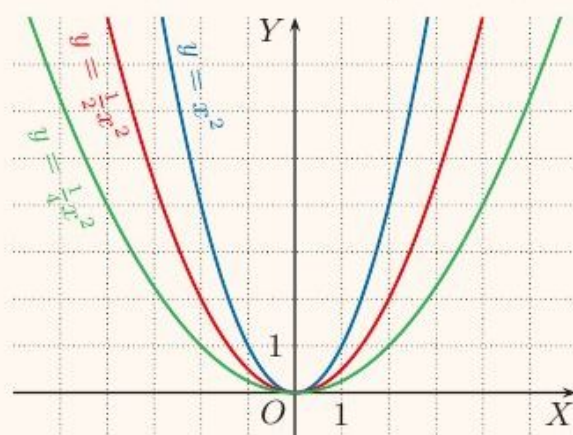
a) w punkcie A ,

b) w środku odcinka AB .

12. Czy pod mostem opisanym w zadaniu 11. przeplynie barka o szerokości 6 m, która po załadowaniu wystaje 3,1 m ponad powierzchnię wody? Przyjmij, że przekrojem poprzecznym barki jest prostokąt.

Czy wiesz, że...

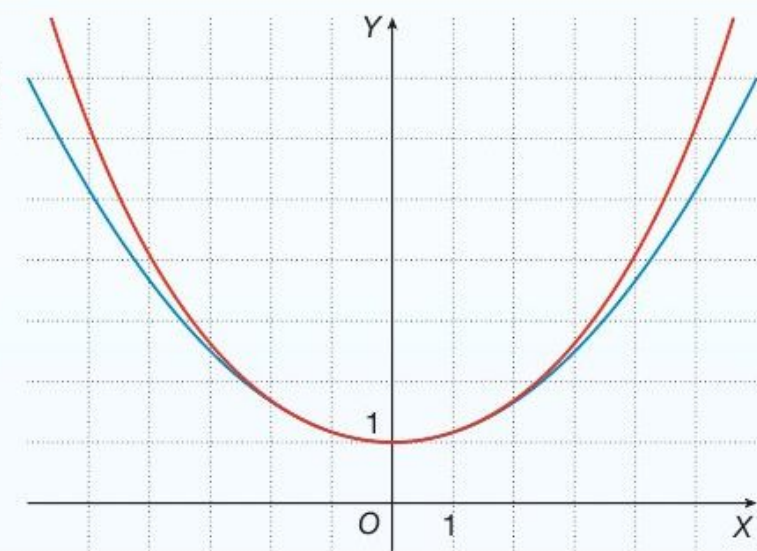
Wszystkie parabole są podobne. Aby się o tym przekonać, warto przyjrzeć się poniższym rysunkom (zauważ, że jednostki na osiach na rysunku po prawej są dwukrotnie większe niż na rysunku po lewej). Na przykład parabole narysowane kolorem czerwonym (na rysunku po prawej parabola dana wzorem $y = x^2$, a na rysunku po lewej parabola $y = \frac{1}{2}x^2$) są identyczne.



Krzywa łańcuchowa

Wiszący, zamocowany na końcach łańcuch przyjmuje kształt przypominający parabolę. W 1638 r. opisywał to już Galileusz, włoski fizyk i astronom. W drugiej połowie XVII w. wykazano, że jest to inna krzywa, zwana **krzywą łańcuchową** lub *catenarią* [czyt. katenarią], od łacińskiego słowa *catena* [czyt. katena] oznaczającego łańcuch.

Na rysunku obok przedstawiono **krzywą łańcuchową** (kolor czerwony) oraz **parabolę** (kolor niebieski), która dla wartości argumentów bliskich 0 jest bardzo dobrym przybliżeniem tej krzywej łańcuchowej.

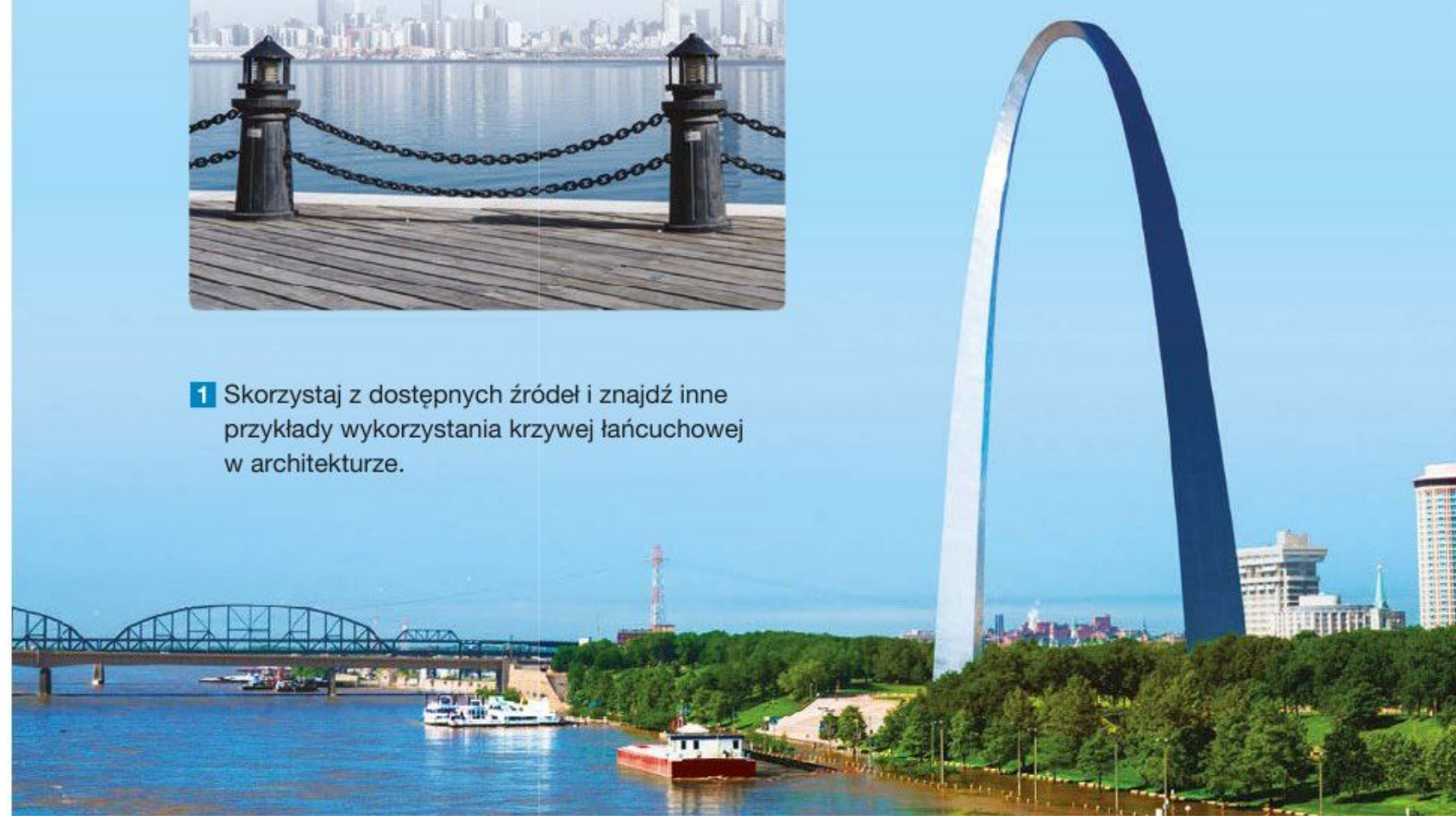


Kształt krzywej łańcuchowej przyjmują wiszące łańcuchy, liny lub przewody wysokiego napięcia.



Krzywa ta jest wykorzystywana w architekturze. Na zdjęciu monument Gateway Arch w Saint Louis w Stanach Zjednoczonych.

- 1** Skorzystaj z dostępnych źródeł i znajdź inne przykłady wykorzystania krzywej łańcuchowej w architekturze.



Powtórzenie

Zestaw I

1. Rozwiąż równanie.

a) $4x^2 - 5x = 0$ c) $25x^2 - 1 = 0$ e) $x(x + 2) = -1$
b) $x = \sqrt{2}x^2$ d) $1 - \frac{81}{16}x^2 = 0$ f) $x(x - 8) = 4(x - 9)$

2. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$ c) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0$ e) $x(x - 5) = 2x(x - 1)$
b) $2x^2 + 5x + 1 = 0$ d) $7x^2 + 2x = 1$ f) $2(1 - 5x) = (1 - x)^2$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 + x - 1 \geq 0$ c) $5x^2 - 5x + 2 < 0$ e) $4x - 3x^2 \leq 2 - x^2$
b) $4x^2 + 20x + 25 \leq 0$ d) $-3x^2 + 6x > 2$ f) $-x(4 - x) > 4 - x^2$

4. Dane są zbiory A i B . Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.

a) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x - 1 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + x \geq 0\}$
b) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 4x + 2 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - x - 6 < 0\}$
c) $A = \{x \in \mathbb{R}: 3x + 18 > x^2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x \leq 3\}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $(x^2 - 4)(x^2 + 9) = 0$ c) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ e) $x^4 - 16x^2 = 0$
b) $(9x^2 - 4)(x^2 - 3) = 0$ d) $x^4 + 16x^2 = 0$ f) $4x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

6. Rozwiąż równanie. Zastosuj odpowiednie podstawienie.

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ d) $8x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ g) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$
b) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ e) $x^4 - 6x^2 - 16 = 0$ h) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$
c) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$ f) $x^4 - 2x^2 - 5 = 0$ i) $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$

7. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

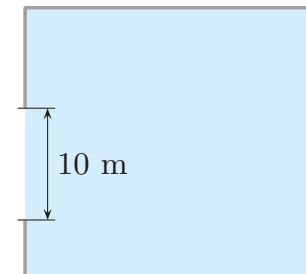
a) $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$

8. Naskicuj wykres funkcji f . Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x$, $[-2; 1]$ c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $[0; 2]$
b) $f(x) = -x^2 + 2x$, $[0; 4]$ d) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, $[-2; 2]$

9. Dla jakich wartości a i b suma $a^2 + b^2$ przyjmuje wartość najmniejszą, jeśli:
a) $a + b = 4$, b) $a - b = 3$, c) $2a + b = 1$?

10. Trzeba ogrodzić prostokątny plac, przy czym nie będzie on grodzony na jednym boku na odcinku 10 m (rysunek obok). Wiadomo, że na ogrodzenie tego placu potrzeba 240 m bieżących siatki ogrodzeniowej i że jego powierzchnia jest największa z możliwych. Jakie wymiary ma ten plac?



11. W sklepie zostaje codziennie sprzedanych 40 sztuk pewnego towaru. Zysk przypadający na jedną sztukę tego towaru wynosi 240 zł.

a) Ekspert A twierdzi, że obniżenie ceny o x zł spowoduje wzrost dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy obniżyć cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?

b) Ekspert B twierdzi, że podniesienie ceny o $(20 \cdot x)$ zł spowoduje spadek dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy podnieść cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?

12. Zdjęcie w kształcie prostokąta o bokach p dm i q dm oprawiono w ramę o szerokości x dm (rysunek obok). Pole powierzchni zdjęcia wraz z ramą jest równe P dm². Oblicz szerokość ramy.



a) $p = 3$, $q = 5$, $P = 29,25$

b) $p = 4$, $q = 6$, $P = 35$

Zestaw II

1. Dla jakich wartości parametru c funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe?

a) $f(x) = x^2 + 3x + c$ c) $f(x) = -x^2 + x + c + 1$

b) $f(x) = x^2 - 2\sqrt{5}x - c$ d) $f(x) = x^2 + cx + c$

2. Dla jakich wartości parametru b funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe?

a) $f(x) = x^2 + bx + 4$ b) $f(x) = -x^2 + 2bx - 1$

3. Wyznacz wspólne mniejsza zerowe funkcji f i g .

a) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$, $g(x) = x^4 - 9x^2 + 18$

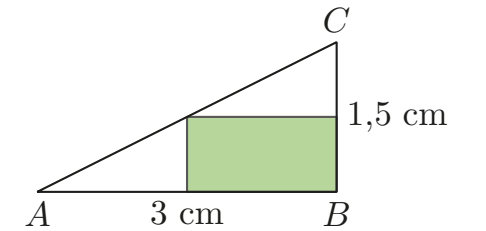
b) $f(x) = 6x^4 - 5x^2 + 1$, $g(x) = 6x^4 - 11x^2 + 4$



Zadania z kontekstem realistycznym

1. Według projektu pokój miał mieć wymiary $6 \text{ m} \times 9 \text{ m}$. W trakcie realizacji tego projektu krótszą ścianę pokoju wydłużono o $x \text{ m}$, a dłuższą skrócono o $x \text{ m}$ tak, aby powierzchnia tego pokoju była największa. Wyznacz x .

2. Na rysunku obok przedstawiono plan ścieżek w parku wykonany w skali $1:1000$. Prowadzą one wzdłuż boków trójkąta ABC . Między ścieżkami ma się znajdować prostokątny trawnik umieszczony jak na rysunku obok. Jaką największą powierzchnię może mieć taki trawnik?



3. Kawałek tkaniny ma kształt trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 2 m i 3 m . Aby uszyć prostokątną serwetę, krawcowa zamierza odciąć od niego dwa rogi. Jak powinna to zrobić, aby otrzymać serwetę o jak największej powierzchni?

4. Na klombie rosły w równych rzędach 24 krzaki róż. W każdym rzędzie posadzono jeszcze 2 krzaki i dodano jeden nowy rząd. Na klombie rośnie teraz 45 krzaków róż, po tyle samo w każdym rzędzie. Ile rzędów róż było na początku?

5. Z wysokości 5 m wypuszczono z łuku pionowo do góry strzałę z prędkością początkową 50 m/s . Wysokość strzały nad ziemią (w metrach) można przybliżyć wzorem:

$$h(t) = 5 + 50t - 5t^2$$

gdzie t jest czasem lotu strzały (w sekundach).

a) Uzupełnij tabelę wartości funkcji h i określ jej dziedzinę.

t [s]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h [m]	50	85	?	?	?	125	110	85	50	5

b) Po ilu sekundach od momentu wypuszczenia z łuku strzała ponownie osiągnie wysokość, z jakiej ją wypuszczono?

c) Po ilu sekundach od momentu wypuszczenia z łuku strzała osiągnie największą wysokość?

d) Na jaką największą wysokość doleci strzała?



4. Rozwiąż równanie. Zastosuj odpowiednie podstawienie.

a) $(x^2 - 2x)^2 + 5(x^2 - 2x) + 4 = 0$ c) $(x^2 - 5x)(x^2 - 5x + 2) = 24$

b) $(x^2 + 4x)^2 + 7(x^2 + 4x) + 12 = 0$ d) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 1) = 2$

5. Rozwiąż równanie. Sprawdź otrzymane rozwiązania.

a) $\sqrt{7x - x^2 - 12} \cdot (x^2 - 1) = 0$ b) $(x^2 + 2x - 15) \cdot \sqrt{x^2 - 4x} = 0$

D 6. Uzasadnij, że podane równanie ma dwa pierwiastki x_1, x_2 . Oblicz wartość wyrażenia $x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2$ bez wyznaczania tych pierwiastków.

a) $15x^2 - 12x - 20 = 0$ b) $(\sqrt{2} + 1)x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - 1 = 0$

7. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w przypadku, gdy:

a) do jej wykresu należy punkt $(0, -2)$, suma jej miejsc zerowych jest równa $\frac{8}{3}$, a suma ich odwrotności jest równa 4,

b) iloczyn jej miejsc zerowych jest równy 24, a parabola będąca jej wykresem ma wierzchołek w punkcie $(5, 2)$.

8. Dla jakich wartości parametru m podane równanie ma dwa pierwiastki o różnych znakach?

a) $x^2 + (m - 3)x + m = 0$ c) $\frac{1}{4}mx^2 + (m^2 - 1)x + m^3 - 4m = 0$

b) $\frac{1}{4}x^2 + (m + 1)x + 1 = 0$ d) $(3m - 2)x^2 + mx + 1 - \frac{3}{2}m = 0$

9. Dla jakich wartości parametru m równanie:

a) $2x^2 - mx + m + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie,

b) $-x^2 + (2m - 2)x + m^2 - 2m = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

10. Dla jakich wartości parametru m podana nierówność jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą x ?

a) $mx^2 + 4x + m - 1 \leq 0$ b) $(m - 3)x^2 + (3 - m)x + m > 0$

11. Wyznacz wartości parametru m , dla których zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[1; \infty)$.

a) $f(x) = x^2 + (2m + 2)x - m$ b) $f(x) = (m + 1)x^2 + (m + 1)x + m + 3$

12. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (k, m) , dla których równanie $x^2 + kx + m = 0$:

a) ma jedno rozwiązanie x_0 spełniające warunek $|x_0| \leq 2$,

b) ma dwa rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

**Przykład**

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 2?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

I sposób

Równanie to ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 2, gdy:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \end{cases}$$

Liczby $x_1 - 2$ i $x_2 - 2$ są ujemne, gdy ich iloczyn jest dodatni, a suma ujemna.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(m - 1) = 4m^2 - 4m + 4 \\ \Delta &= 4m^2 - 4m + 4 > 0 \text{ dla } m \in \mathbb{R} \text{ (sprawdź)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_1 - 2)(x_2 - 2) &= x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = \frac{c}{a} + 2 \cdot \frac{b}{a} + 4 = \\ &= m - 1 - 4m + 4 = -3m + 3 \end{aligned}$$

$$\text{Zatem } (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \Leftrightarrow -3m + 3 > 0.$$

Nierówność ta jest prawdziwa dla $m < 1$.

$$\begin{aligned} (x_1 - 2) + (x_2 - 2) &= x_1 + x_2 - 4 = -\frac{b}{a} - 4 = 2m - 4 \\ \text{Zatem } (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 &\Leftrightarrow 2m - 4 < 0. \end{aligned}$$

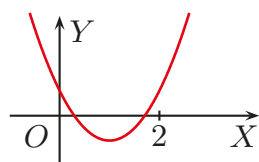
Nierówność ta jest prawdziwa dla $m < 2$.

Po uwzględnieniu powyższych warunków otrzymujemy: $m \in (-\infty; 1)$.

II sposób

Rozpatrzmy trójmian kwadratowy $f(x) = x^2 - 2mx + m - 1$. Ponieważ $a > 0$, podany w zadaniu warunek zachodzi, gdy:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_w < 2 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$



Dwa różne pierwiastki równania są mniejsze od 2, gdy pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli $x_w < 2$ oraz $f(2) > 0$ (dlaczego?).

$$\Delta > 0 \text{ dla } m \in \mathbb{R} \text{ (sprawdź)}.$$

$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2} = m$$

Zatem $x_w < 2$ dla $m < 2$.

$$f(2) = 2^2 - 2m \cdot 2 + m - 1 = -3m + 3$$

Nierówność $-3m + 3 > 0$ jest prawdziwa dla $m < 1$.

Odpowiedź: $m \in (-\infty; 1)$

➔ Zadanie 6, str. 48



W zadaniach 1–8 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Dwa różne pierwiastki dodatnie ma równanie

A. $x^2 - 4x + 5 = 0$

C. $x^2 - 5x + 6 = 0$

B. $x^2 - 3x - 4 = 0$

D. $x^2 + 5x - 6 = 0$

Zadanie 2 (0–1)

Pierwiastkami równania $2x^2 + bx + c = 0$ są liczby -3 i 4 , zatem

A. $b = -1$ i $c = -12$

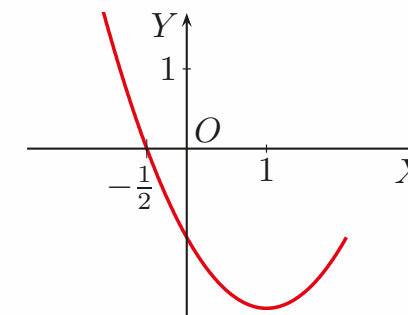
C. $b = 2$ i $c = -24$

B. $b = -2$ i $c = -24$

D. $b = 1$ i $c = -12$

Zadanie 3 (0–1)

Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli, której wierzchołkiem jest punkt $(1, -2)$. Drugim miejscem zerowym funkcji, której wykres jest ta parabola, jest liczba



A. $1\frac{1}{2}$

B. 2

C. $2\frac{1}{2}$

D. 3

Zadanie 4 (0–1)

Jednym z pierwiastków równania $4x^2 + 4x + \sqrt{2} - \frac{1}{2} = 0$ jest liczba

A. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

B. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $-\sqrt{2}$

D. $-2\sqrt{2}$

Zadanie 5 (0–1)

Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $[0; 2]$ jest liczbą dodatnią dla

A. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

C. $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

B. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$

D. $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$

Zadanie 6 (0–1)

Największa wartość funkcji $f(x) = 2x^2 + 4x$ w przedziale $[1; 2]$ jest równa

A. 16

B. 4

C. 3

D. 0

Zadanie 7 (0–1)

Pole prostokątnej działki, której jeden bok jest o 2 m dłuższy od drugiego boku, wynosi 288 m^2 . Obwód tej działki jest równy

A. 64 m

B. 68 m

C. 72 m

D. 76 m

Zadanie 8 (0–1)

Boki prostokąta P_1 o wymiarach $4 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ wydłużono o $x \text{ cm}$ i uzyskano prostokąt P_2 o polu równym 96 cm^2 . Przekątna prostokąta P_2 ma długość równą

A. $3\sqrt{10} \text{ cm}$

B. $4\sqrt{10} \text{ cm}$

C. $3\sqrt{13} \text{ cm}$

D. $4\sqrt{13} \text{ cm}$



Zadanie 9 (0-2)

Dana jest funkcja $f(x) = (2x - 6)^2 - 2$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f jest punkt

A. $(3, -2)$ B. $(3, 2)$ C. $(6, -2)$ D. $(-6, -2)$

2. Parabola będąca wykresem funkcji f przecina oś rzędnych w punkcie

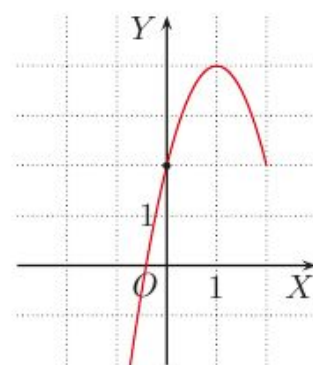
E. $(0, 34)$ F. $(0, -18)$ G. $(0, -38)$ H. $(0, -2)$

Zadanie 10 (0-1)

Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f . Oznaczmy przez x_1, x_2 miejsca zerowe funkcji f , a przez x_w odciętą wierzchołka paraboli będącej jej wykresem.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Suma miejsc zerowych funkcji f jest równa



A.	2,	ponieważ	1.	$x_w = 2(x_1 + x_2)$.
B.	1,		2.	$x_w = x_1 + x_2$.
			3.	$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Zadanie 11

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = -4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2})$.

Zadanie 11.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, -5)$.	P	F
Wykres funkcji f ma wierzchołek w punkcie $(-2, 5)$.	P	F

Zadanie 11.2 (0-1)

Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$.

Zadanie 12 (0-2)

Rozwiąż równanie $3x(x + 3) = (x + 3)^2$.



Zadanie 13 (0-2)

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}x - 4$.

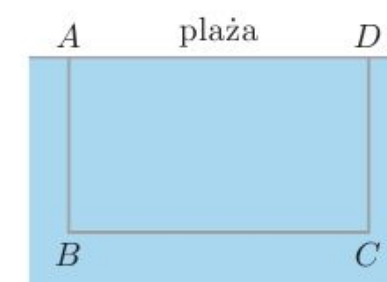
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale

$[-2; 0]$ jest równa -2 .	P	F
$[2; 4]$ jest równa -4 .	P	F
$[0; 2]$ jest równa -6 .	P	F

Zadanie 14 (0-2)

Przy brzegu jeziora ma być wydzielone kąpielisko za pomocą liny o długości 72 m. Lina ta ma wyznaczyć prostokąt $ABCD$ jak na rysunku obok (wzdłuż plaży nie będzie liny).



Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

Ogrodzone w ten sposób największe możliwe kąpielisko będzie miało powierzchnię równą $?$, a wejście do kąpieliska z plaży będzie miało wtedy długość $?$.

Zadanie 15 (0-2)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 2(x + 3)(x - 5)$.

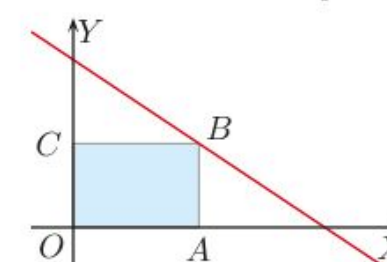
D Zadanie 16 (0-4)

Boki trapezu prostokątnego przedstawionego na rysunku obok spełniają warunki $x + y + z = 18$ oraz $z = 2x$. Uzasadnij, że jeśli taki trapez ma największe możliwe pole, to jego obwód jest niemniejszy od 27.



Zadanie 17 (0-4)

Rozpatrujemy prostokąty położone w I ćwiartce układu współrzędnych. Trzy wierzchołki tych prostokątów leżą na osiach układu współrzędnych, a czwarty leży na prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ (rysunek obok).



a) Podaj wzór opisujący pole prostokąta w zależności od współrzędnej x_0 punktu A.

b) Który spośród tych prostokątów ma największe pole? Podaj współrzędne jego wierzchołków.

**Zadanie 1 (0-2)**

Oblicz sumę dodatnich pierwiastków równania $36x^4 - 43x^2 + 12 = 0$.

Zadanie 2 (0-2)

Wyznacz największą całkowitą wartość parametru m , dla której równanie $(m-1)x^2 - 3x + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki.

Zadanie 3

Dane jest równanie z parametrem m .

$$\frac{1}{4}x^2 - x = mx$$

Zadanie 3.1 (0-2)

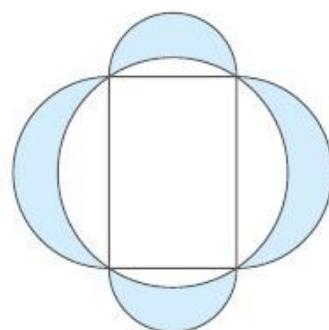
Rozwiąż to równanie dla $m = \frac{1}{2}$.

Zadanie 3.2 (0-2)

Określ liczbę rozwiązań równania w zależności od m .

D Zadanie 4 (0-5)

Każdy księżyc zbudowany na boku prostokąta jest ograniczony okręgiem opisanym na tym prostokącie oraz okręgiem, którego środkiem jest środek danego boku. Wykaż, że jeśli obwód prostokąta jest równy 8 cm, to pole zacieniowanego obszaru jest nie większe niż 4 cm^2 .

**Zadanie 5 (0-4)**

Naszkicuj wykres funkcji f , która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania $(m-1)x^2 + (m-1)x + 2 = 0$.

Zadanie 6 (0-4) → Przykład, str. 44

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m-1)x + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 4?

Zadanie 7 (0-5)

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - (3m - \frac{1}{2})x + 6 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| = 12$?

Zadanie 8 (0-4)

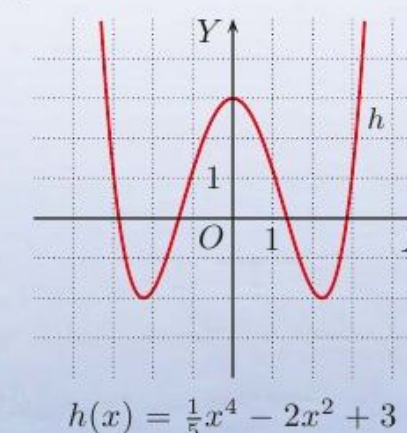
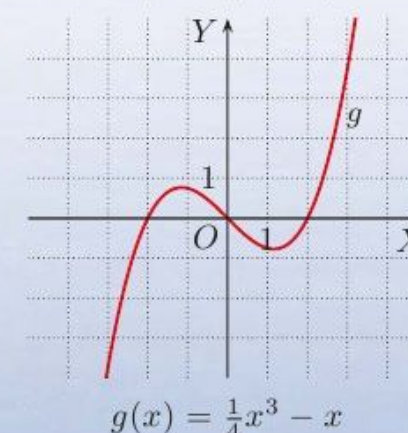
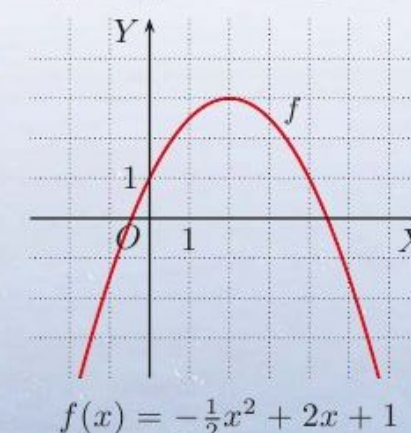
Dla jakich wartości parametru k suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2 + kx + \frac{1}{2}k = 0$ jest większa od 2?

Zadanie 9 (0-4)

Dla jakich wartości parametru m funkcje $f(x) = (m-2)x^2 + (m-2)x$ oraz $g(x) = x^2 + 6x - 7$ mają ten sam zbiór wartości?

2 Wielomiany

Omawiane w tym rozdziale funkcje, zwane wielomianami, służą do opisu wielu zjawisk. Za pomocą wielomianu można opisać na przykład zależność między liczbą obrotów na minutę silnika łodzi motorowej a jej prędkością. Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy przykładowych wielomianów.



2.1. Stopień i współczynniki wielomianu

Definicja

Jednomianem stopnia n nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}_+$.

Jednomianem stopnia 0 jest funkcja stała $y = a$, gdzie $a \neq 0$.

Funkcja $y = 0$ jest **jednomianem zerowym**, którego stopnia nie określamy.

Liczbę a nazywamy **współczynnikiem** jednomianu.

Ćwiczenie 1

Czy poniższa funkcja jest jednomianem? Jeśli tak, to podaj jego stopień.

a) $y = -5x^7$ b) $y = \frac{x}{4}$ c) $y = \frac{4}{x}$ d) $y = 6\sqrt{x}$ e) $y = \sqrt{2}x^3$

Sumę dwóch jednomianów różnych stopni nazywamy **dwumianem**, np.:

$$\begin{array}{ll} y = x^3 + 2x & \text{dwumian trzeciego stopnia} \\ y = 5x^4 + 1 & \text{dwumian czwartego stopnia} \end{array}$$

Sumę trzech jednomianów różnych stopni nazywamy **trójmianem**, np.:

$$\begin{array}{ll} y = x^2 + 2x + 1 & \text{trójmian drugiego stopnia (kwadratowy)} \\ y = 5x^6 - 2x^2 + 4 & \text{trójmian szóstego stopnia} \end{array}$$

Ogólnie sumę jednomianów nazywamy **wielomianem**, np.:

$$y = 6x^8 - 9x^6 + 2x^3 - x^2 \quad \text{wielomian ósmego stopnia}$$

Zwróć uwagę na to, że **stopniem wielomianu** jest najwyższy stopień spośród stopni występujących w nim jednomianów. Wielomian jest zapisany w sposób uporządkowany, gdy jednomiany, których jest sumą, są ustawione kolejno – od jednomianu najwyższego stopnia do jednomianu najniższego stopnia.

Definicja

Funkcję zmiennej rzeczywistej x daną wzorem:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_+$, nazywamy **wielomianem** stopnia n .

Jednomian w stopnia 0 nazywamy też **wielomianem stopnia 0**.

Jednomian zerowy ($w \equiv 0$) nazywamy też **wielomianem zerowym**.

Jednomiany występujące w wielomianie nazywamy też jego **wyrazami**.

Liczby: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu.

Współczynnik a_0 nazywamy **wyrazem wolnym**.

Stopień wielomianu w oznaczamy przez $\text{st}(w)$.

Zauważ, że – zgodnie z definicją – wielomianem jest zarówno funkcja liniowa, jak i funkcja kwadratowa.

Ćwiczenie 2

Uporządkuj wielomian w i podaj jego stopień.

a) $w(x) = x + x^3 + x^5 - 1 - x^2 - x^4$ c) $w(x) = 3x^4 - 2 + 6x - x^2 + x^7 + 2x^8$
b) $w(x) = 2x^6 - x^3 + \frac{2}{3}x^4 - x - \frac{3}{2}x^5$ d) $w(x) = 5 - \frac{1}{2}x + 2x^{10} - x^6 + 3x^2$

Przykład 1

Wypisz współczynniki wielomianu $w(x) = 5x^4 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 1$ i podaj jego stopień.

Współczynniki wielomianu: $a_4 = 5$, $a_3 = 0$, $a_2 = -2$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_0 = 1$, stopień wielomianu: $\text{st}(w) = 4$.

Ćwiczenie 3

Wypisz współczynniki wielomianu w i podaj jego stopień.

a) $w(x) = -2x^5 + x$ b) $w(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^5 + x^6 + x^2 + 1$ c) $w(x) = 2^{10}$

Ćwiczenie 4

Zapisz wielomian czwartego stopnia, dla którego:

a) $a_4 = a_2 = a_0 = -3$, $a_3 = a_1 = 0$, b) $a_n = (-1)^n$ dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Przykład 2

Oblicz wartości wielomianu $w(x) = 3x^4 - 5x^3 - 7$ dla: $x = 2$, $x = -2$ i $x = 0$.

$$w(2) = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot 8 - 7 = 48 - 40 - 7 = 1$$

$$w(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot (-8) - 7 = 48 + 40 - 7 = 81$$

$$w(0) = 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 7 = -7$$

Zauważ, że wartość $w(0)$ jest równa wyrazowi wolnemu wielomianu w .

Ćwiczenie 5

Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = 0$, $x = 2$ i $x = -2$.

a) $w(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$ c) $w(x) = x^5 - x^2 + 3x - 2$
b) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 6x + 1$ d) $w(x) = -x^6 + 2x^3 - x + 3$

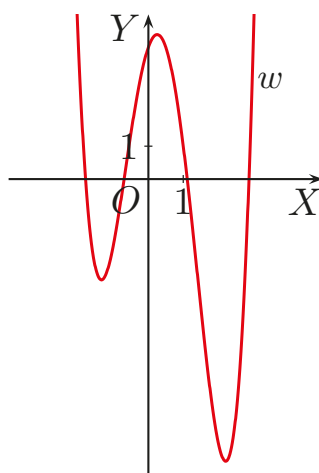
Ćwiczenie 6

Oblicz wartości wielomianu w dla: $x = -\frac{1}{2}$ i $x = \frac{3}{2}$.

a) $w(x) = -4x^3 - 2x^2 - 6x + 3$ b) $w(x) = 32x^4 - 8x^3 - 2x + \frac{1}{2}$

Zadania

- Dane są wielomiany: $u(x) = 2x^3 - 6x^2 + 0,1x^4$, $v(x) = -6x^2 + 4 + x^3$, $w(x) = 2x + 4x^4 - 3x^3 - 6x^5 - 1$. Wskaż wśród nich wielomian:
 - stopnia trzeciego; uporządkuj go i podaj współczynniki: a_3 , a_2 , a_1 i a_0 ,
 - stopnia piątego; uporządkuj go, podaj współczynniki: a_5 , a_4 , a_3 , a_2 , a_1 i a_0 oraz oblicz ich sumę (patrz zadanie 9.).
- Oblicz wartości wielomianu w dla $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$ i $x = \frac{1}{2}$.
 - $w(x) = 3x^3 + x^2 - 2x - 3$
 - $w(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 2$
 - $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 4$
 - $w(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x - 10$
- Punkty: $P(1, a)$, $Q(-1, b)$, $R(2, c)$, $S(3, d)$ należą do wykresu wielomianu $w(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x + 4$ (rysunek obok). Oblicz współrzędne: a , b , c i d .
- Które spośród punktów: P , Q należą do wykresu wielomianu u ?
 - $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$, $P(-2, 7)$, $Q(2, -5)$
 - $u(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{1}{2}$, $P(\frac{1}{2}, 2)$, $Q(-\frac{1}{2}, -1)$
- Oblicz współczynnik a wielomianu w .
 - $w(x) = ax^2 + x + 1$, $w(1) = 3$
 - $w(x) = 3x^3 - x^2 + a$, $w(3) = 0$
 - $w(x) = x^3 + ax^2 + 3$, $w(-4) = 3$
 - $w(x) = ax^4 + 4x + 2$, $w(2) = -6$
- Oblicz współczynniki a i b wielomianu w .
 - $w(x) = -3x^3 + ax^2 + bx + 2$, $w(-1) = 4$, $w(2) = 20$
 - $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2$, $w(-3) = 11$, $w(1) = 7$
- Określ stopień wielomianu w w zależności od parametru m .
 - $w(x) = (m^2 - 4)x^5 + (m + 2)x^3 + x$
 - $w(x) = (m^2 + 4m)x^6 + mx^4 - x^2$
- Podaj wielomian stopnia 4., którego współczynniki: a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 są takimi liczbami, że każda następna jest dwukrotnie większa od poprzedniej, a suma wszystkich jest równa 1.
- Uzasadnij, że suma współczynników dowolnego wielomianu w jest równa $w(1)$. Oblicz sumę współczynników wielomianu w .
 - $w(x) = (x^3 - 27)(2x^2 + 11x)(x^2 - 1)$
 - $w(x) = (2x^3 - 5x + 2)^{101}$



2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Aby wyznaczyć sumę wielomianów, dodajemy wyrazy podobne występujące w tych wielomianach. Suma wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz sumę wielomianów:

$$u(x) = 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5 \quad \text{ i } \quad w(x) = -3x^3 + 2x^2 - x$$

$$\begin{aligned} u(x) + w(x) &= (2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5) + (-3x^3 + 2x^2 - x) = \\ &= 2x^4 + \underline{9x^3} - \underline{6x^2} + \underline{3x} - 5 - \underline{3x^3} + \underline{2x^2} - \underline{x} = \\ &= 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 5 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz sumę wielomianów u i w . Podaj stopień wielomianu u , wielomianu w oraz stopień ich sumy.

$$\text{a) } u(x) = 17x^4 - 14x^2 + 7x - 5, \quad w(x) = 6x^3 + 11x^2 - 5x + 5$$

$$\text{b) } u(x) = 9x^7 - 13x^3 + 10x^2 - 2, \quad w(x) = -9x^7 + 6x^4 - 12x^2 + 7$$

Ćwiczenie 2

Podaj przykłady wielomianów u i w takich, że $\text{st}(u) = 4$, $\text{st}(w) = 4$ oraz:

$$\text{a) } \text{st}(u + w) = 4, \quad \text{c) } \text{st}(u + w) = 2, \quad \text{e) } \text{st}(u + w) = 0.$$

$$\text{b) } \text{st}(u + w) = 3, \quad \text{d) } \text{st}(u + w) = 1,$$

Twierdzenie

Jeśli wielomiany: u , w oraz $u + w$ są niezerowe i $\text{st}(u) \leq \text{st}(w)$, to:

$$\text{st}(u + w) \leq \text{st}(w)$$

Przykład 2

Wyznacz sumę wielomianów $u(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x$ i $w(x) = -8x^3 - 5x^2 + 7x$.

$$u(x) + w(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x - 8x^3 - 5x^2 + 7x = 0$$

Zatem suma $u + w$ jest wielomianem zerowym.

Ćwiczenie 3

Dany jest wielomian $u(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Co można powiedzieć o współczynnikach wielomianu w , jeśli $u + w$ jest wielomianem zerowym?

Aby wyznaczyć różnicę wielomianów, odejmujemy od wyrazów pierwszego wielomianu odpowiednie wyrazy podobne drugiego wielomianu. Różnica wielomianów jest wielomianem.

Przykład 3

Dane są wielomiany $u(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3$ i $w(x) = 4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x$. Wyznacz różnicę $u - w$.

$$\begin{aligned} u(x) - w(x) &= (6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3) - (4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x) = \\ &= \underline{6x^4} - \underline{3x^3} + \underline{2x^2} - 3 - \underline{4x^4} - \underline{2x^3} + \underline{x^2} + 5x = \\ &= 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

Zmieniamy znaki współczynników wielomianu w .

Ćwiczenie 4

Wyznacz różnicę $u - w$. Podaj stopnie wielomianów u , w i $u - w$.

a) $u(x) = 5x^9 + 2x^8 + 4x^4 + 2x + 1$, $w(x) = -2x^8 - 6x^4 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

b) $u(x) = \frac{3}{4}x^6 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + 1$, $w(x) = 0,75x^6 - 0,2x^4 + 0,125x^2$

Przykład 4

Dane są wielomiany $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1$ i $g(x) = 5x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x$. Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 2g(x)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= 3(3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1) - 2(5x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x) = \\ &= \underline{9x^4} - \underline{6x^3} - \underline{x^2} + 3 - \underline{10x^4} - \underline{2x^3} + \underline{4x^2} - 3x = \\ &= -x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 3x + 3 \end{aligned}$$

Mnożymy każdy wyraz wielomianu f przez 3 i każdy wyraz wielomianu g przez -2 .

Ćwiczenie 5

Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 4g(x)$. Oblicz $h(-1)$.

a) $f(x) = -2x^6 + 4x^3 - 8x + 5$, $g(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 6x + 2$

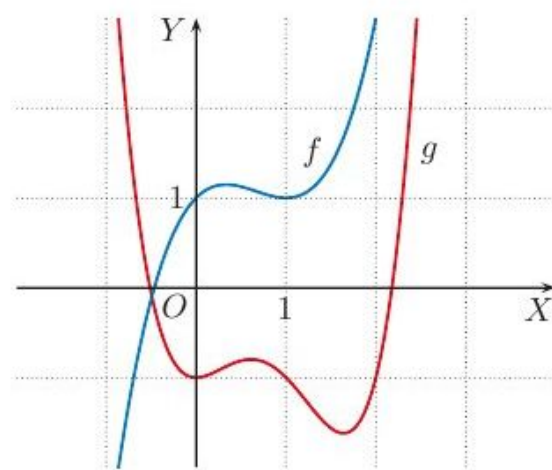
b) $f(x) = 2x^5 - 6x^4 - x^2 + 4x$, $g(x) = 1,5x^5 - x^4 + 3x^2 + 3x - 1$

Ćwiczenie 6

Na rysunku obok przedstawiono wykresy wielomianów $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ oraz $g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$.

a) Czy punkt $P(1, -2)$ należy do wykresu wielomianu $u(x) = 2f(x) + 4g(x)$?

b) Niech $w(x) = 2f(x) - 3g(x)$. Dla jakiej wartości współrzędnej a punkt $Q(0, a)$ należy do wykresu wielomianu w ?



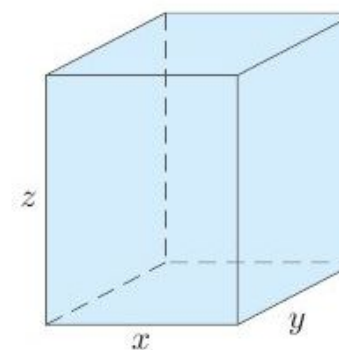
Oprócz wielomianów jednej zmiennej rozpatruje się również **wielomiany wielu zmiennych**, np.:

$u(x, y) = 3x^4y^2 - 7x^2y^3 - xy - 2y^4$ jest wielomianem dwóch zmiennych,

$w(x, y, z) = 9xy^2z + 4x^2y^3z^3 + 6yz$ jest wielomianem trzech zmiennych.

Przykład 5

Podaj wielomian opisujący pole powierzchni całkowitej oraz wielomian opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach długości x , y , z (rysunek obok).



$P(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$ dla $x, y, z > 0$ jest wielomianem trzech zmiennych opisującym pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu. Objętość tego prostopadłościanu opisuje wielomian $V(x, y, z) = xyz$.

Wyrazy wielomianu wielu zmiennych są **podobne**, gdy odpowiednie zmienne występują w nich w tych samych potęgach. Wyrazami podobnymi są na przykład $4x^3y^2$ i $6x^3y^2$. Aby wyznaczyć sumę (różnicę) wielomianów wielu zmiennych, należy dodać (odjąć) wyrazy podobne tych wielomianów.

Przykład 6

a) Wyznacz sumę $u + w$ wielomianów u i w .

$$u(x, y) = 3x^2y + 6xy^2 - 4xy, \quad w(x, y) = 5xy^3 + 4x^2y + xy + 2$$

$$\begin{aligned} u(x, y) + w(x, y) &= \underline{3x^2y} + \underline{6xy^2} - \underline{4xy} + \underline{5xy^3} + \underline{4x^2y} + \underline{xy} + 2 = \\ &= 7x^2y + 5xy^3 + 6xy^2 - 3xy + 2 \end{aligned}$$

b) Wyznacz różnicę $u - w$ wielomianów u i w .

$$u(x, y, z) = 5x^2y^2z^2 - 4xyz^2, \quad w(x, y, z) = 5x^2y^2z - 3xyz^2 + 2yz^2$$

$$\begin{aligned} u(x, y, z) - w(x, y, z) &= \underline{5x^2y^2z^2} - \underline{4xyz^2} - \underline{5x^2y^2z} + \underline{3xyz^2} - 2yz^2 = \\ &= 5x^2y^2z^2 - 5x^2y^2z - xyz^2 - 2yz^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 7

Wyznacz sumę $u + w$ i różnicę $u - w$ wielomianów u i w .

a) $u(x, y) = 4x^3y^2 - 3x^2y^2 + 2xy + 2$, $w(x, y) = 3x^2y^3 - 6x^2y^2 - 6xy - 3$

b) $u(x, y) = \frac{2}{3}x^4y + 3x^3y - \frac{1}{2}xy^2 + 1$, $w(x, y) = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{3}xy^2 - x + 4$

Ćwiczenie 8

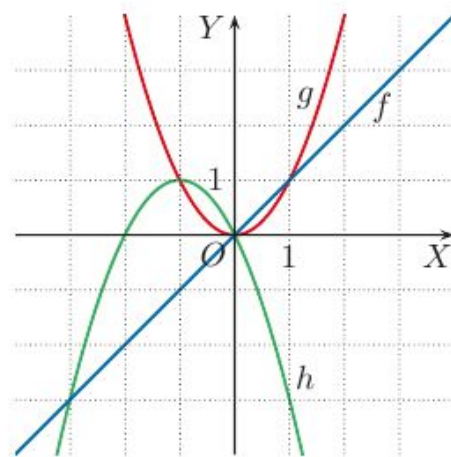
Wyznacz sumę $u + w$ i różnicę $u - w$ wielomianów u i w .

a) $u(x, y, z) = 4xy^2z^3 - 6x^2y^2z - xyz^3$, $w(x, y, z) = xy^2z^3 + 6x^2y^2z + 2xyz^3$

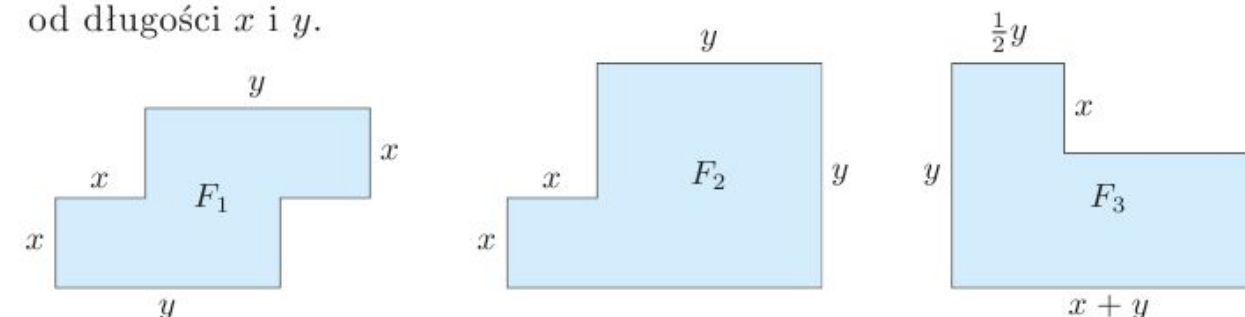
b) $u(x, y, z) = 8x^2y + 6xz^2 - 4y^2z - yz^2$, $w(x, y, z) = 8xz^2 + 4y^2z - 3yz^2 + z^3$

Zadania

- Wyznacz sumę $f + g$ oraz różnicę $f - g$ wielomianów f i g .
 - $f(x) = \frac{3}{4}x^6 - 2x^4 + \frac{5}{4}x^2 + 4$, $g(x) = \frac{1}{4}x^6 + 2x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2$
 - $f(x) = -2x^2 + 4x - x^6 + 2$, $g(x) = -5x + 3x^2 + x^6 - 3x^5$
 - $f(x) = 3x^4 + 2x^7 - 5 + 4x$, $g(x) = -3x + x^5 - 2x^7 + 2$
- Wyznacz wielomiany $w(x) = 2f(x) - 3g(x)$ oraz $u(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{3}f(x)$. Podaj stopień oraz sumę współczynników każdego z tych wielomianów.
 - $f(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 3$, $g(x) = -2x^4 + \frac{x^2}{3} + 2$
 - $f(x) = 3x^5 + 6x^3 - 9x$, $g(x) = 2x^5 + 4x^3 - 4x^2$
- Wiadomo, że $f(x) = u(x) + 2w(x)$, $g(x) = 2u(x) - 3w(x)$, gdzie u i w są pewnymi wielomianami. Oblicz:
 - $f(5)$ i $g(5)$, gdy $u(5) = 7$ i $w(5) = -2$,
 - $f(-3)$ i $g(-3)$, gdy $u(-3) = -4$ i $w(-3) = -6$,
 - $u(-\frac{1}{2})$ i $w(-\frac{1}{2})$, gdy $f(-\frac{1}{2}) = -9$ i $g(-\frac{1}{2}) = 13$.
- Co można powiedzieć o stopniu sumy wielomianów p i q ?
 - $\text{st}(p) = 5$, $\text{st}(q) = 4$
 - $\text{st}(p) = 5$, $\text{st}(q) = 5$
 - $\text{st}(p) = m$, $\text{st}(q) = n$
- Określ stopień wielomianu $u + w$ w zależności od parametru a .
 - $u(x) = 2x^4 - 3x + 6$, $w(x) = ax^6 + 5x^2 + 4$
 - $u(x) = 3x^6 - ax^5 + 2x^2 - x$, $w(x) = -3x^6 - 6x^5 - 2x^2 + 9$
 - $u(x) = (a + 1)x^3 - x^2 + 4x$, $w(x) = (a^2 - 1)x^4 + x^2 + 3$
- Określ stopień wielomianu $u + w$ w zależności od parametrów a i b .
 - $u(x) = ax^3 + x^2 - 6$, $w(x) = bx^5 + 7x^3 + x + 2$
 - $u(x) = ax^7 + 3x^2 + 4$, $w(x) = 3x^7 - bx^2 - 5x + 6$
 - $u(x) = (a + 1)x^4 - bx^3 + 2x^2 + 1$,
 $w(x) = (-1 - b)x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 9x$
- Niech $h(x) = p \cdot f(x) + q \cdot g(x)$, gdzie $f(x) = x$ oraz $g(x) = x^2$. Wykresy tych wielomianów przedstawiono na rysunku obok.
 - Oblicz wartości p i q .
 - Naszkicuj wykres wielomianu:
 $k(x) = 2h(x) + 4g(x)$



- Oblicz wartość wielomianu w dla podanych wartości x i y .
 - $w(x, y) = \frac{1}{3}x^2y^3 - 3xy^2 + x^3y$, $x = -2$, $y = 3$
 - $w(x, y) = x^5 - \frac{1}{4}x^2y^3 - \frac{1}{8}xy^2 - \frac{1}{16}xy^4$, $x = 2$, $y = -4$
- Wyznacz sumę $u + w$ oraz różnicę $u - w$ wielomianów u i w . Oblicz wartości sumy i różnicy dla $x = -2$ i $y = 3$.
 - $u(x, y) = \frac{1}{3}x^2y - 3xy^2 + x^3y$, $w(x, y) = \frac{1}{2}x^3y - x^2y + xy^2$
 - $u(x, y) = \frac{1}{4}xy^3 + \frac{1}{3}x^2y^2 - x^2y$, $w(x, y) = \frac{1}{6}xy^3 - x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2y$
- Wyznacz wielomian P opisujący sumę pól figur F_1 , F_2 i F_3 w zależności od długości x i y .



- Dla której trójki liczb, P czy Q , wartość wielomianu w jest większa?
 - $w(x, y, z) = 2x^2yz - 4xyz^2 + 5xy^2 - 6z$
 - $w(x, y, z) = 2x^6y^3 + x^5y^2z - 3xy^3z^5 + x$
 - $w(x, y, z) = \frac{1}{3}yz^5 - \frac{1}{2}xyz^2 + \frac{5}{6}x^2y^4z + 1$

$P \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

$Q \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$

Stopień jednomianu wielu zmiennych jest sumą wykładników zmiennych w nim występujących. Na przykład jednomian x^2y^3 ma stopień równy 5, a jednomian xy^3z^4 ma stopień równy 8.

Stopień wielomianu wielu zmiennych jest równy największemu spośród stopni występujących w nim jednomianów.

Wielomian $u(x, y) = 6x^4y^2 - 8x^3y^2 + 12xy^4 + 3x^5$ jest stopnia 6.

Wielomian $w(x, y, z) = -3xy^3z^5 + 4x^4yz^3 - 2x^6y^2 + 7xz^5$ jest stopnia 9.

- Wyznacz wielomian $v(x, y, z) = 2u(x, y, z) - 3w(x, y, z)$ oraz określ jego stopień.
 - $u(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2yz^2 + \frac{3}{2}x^2yz - xyz^2$, $w(x, y, z) = \frac{2}{3}x^2yz^2 - x^2yz + xyz$
 - $u(x, y, z) = 2x^3y^2z - xy^2z^2 + xyz$, $w(x, y, z) = 3xyz^2 - xyz - 2yz^2$
- Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości x , y , z oraz prostopadłościan o krawędziach długości $x + 1$, $y + 2$, $z + 3$. Podaj wielomian opisujący sumę pól powierzchni całkowitych tych prostopadłościanów.

2.3. Mnożenie wielomianów

Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Iloczyn wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x) = 2x - 3$ i $v(x) = x^2 - 2x + 2$.

$$\begin{aligned} u(x) \cdot v(x) &= (2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 2) = 2x(x^2 - 2x + 2) - 3(x^2 - 2x + 2) = \\ &= 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3x^2 + 6x - 6 = \\ &= 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 \end{aligned}$$

W wyniku pomnożenia wielomianu stopnia pierwszego przez wielomian stopnia drugiego otrzymaliśmy wielomian stopnia trzeciego.

Twierdzenie

Iloczyn wielomianów stopnia m i stopnia n jest wielomianem stopnia $m+n$.

$$\text{st}(u \cdot v) = \text{st}(u) + \text{st}(v)$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w . Podaj stopień otrzymanego wielomianu.

- a) $u(x) = x^3$, $w(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1$ c) $u(x) = x - 1$, $w(x) = x^2 + x + 1$
b) $u(x) = x^2 - 1$, $w(x) = x^5 - x + 1$ d) $u(x) = 5 - 3x + x^2$, $w(x) = x^2 - 1$

Przykład 2

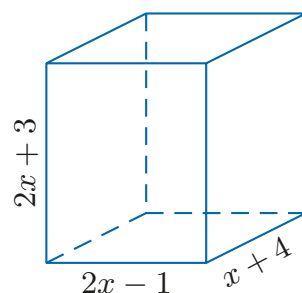
Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok.

Długości krawędzi prostopadłościanu są liczbami dodatnimi, zatem zakładamy, że:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{czyli } x > \frac{1}{2}$$

Objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} V(x) &= (2x - 1)(x + 4)(2x + 3) = (2x^2 + 8x - x - 4)(2x + 3) = \\ &= (2x^2 + 7x - 4)(2x + 3) = 4x^3 + 6x^2 + 14x^2 + 21x - 8x - 12 \\ V(x) &= 4x^3 + 20x^2 + 13x - 12 \text{ opisuje objętość prostopadłościanu dla } x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Ćwiczenie 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach długości: a , b , c .

- a) $a = x - 1$, $b = x + 1$, $c = x$ c) $a = 2x + 1$, $b = \frac{1}{2}x + 1$, $c = 2x - 1$
b) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = x + 3$ d) $a = x + 3$, $b = x + 3$, $c = x^2 - 9$

Mnożenie wielomianów wielu zmiennych przebiega analogicznie do mnożenia wielomianów jednej zmiennej. Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów wielu zmiennych, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu.

Przykład 3

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x, y) = x^2 - 2y$ i $w(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3y$.

$$\begin{aligned} u(x, y) \cdot w(x, y) &= (x^2 - 2y) \cdot (2x^2 + y^2 - 3y) = \\ &= x^2(2x^2 + y^2 - 3y) - 2y(2x^2 + y^2 - 3y) = \\ &= 2x^4 + x^2y^2 - 3x^2y - 4x^2y - 2y^3 + 6y^2 = \\ &= 2x^4 + x^2y^2 - 7x^2y - 2y^3 + 6y^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w .

- a) $u(x, y) = xy - 2x^2$, $w(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + x$
b) $u(x, y) = 3xy^2 - 2x + 1$, $w(x, y) = x^2y + 2xy - y$
c) $u(x, y) = 4x^2y + 3xy^2 - 2xy$, $w(x, y) = x^2y^2 - 3x^2y + xy$

Ćwiczenie 4

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w .

- a) $u(x, y, z) = x^2y + x^2z + yz$, $w(x, y, z) = 2xyz - yz$
b) $u(x, y, z) = 3xyz - 4xz^2 + y^2z$, $w(x, y, z) = x^2y - xy^2 + 2z$
c) $u(x, y, z) = xy^2z^2 + 2xyz^2 - xyz$, $w(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

Zadania

1. Wyznacz iloczyn. Podaj współczynnik przy najwyższej potędze otrzymanego wielomianu oraz jego wyraz wolny.

- a) $(2x - 1)(x^3 - 3x^2 + 7x)$ d) $(6 - 3x^2 - 2x^3)(x^3 - 4x + 1)$
b) $(x^2 + 2)(4x^2 - 3x + 4)$ e) $(2x^3 + \frac{1}{2}x + 1)(x^2 - x - \frac{1}{4})$
c) $(x^2 - x)(2x^4 - x + 1)$ f) $(2 - \sqrt{2}x^2 - x^4)(\sqrt{2} + x + 4x^2)$

2. Podaj stopień wielomianu w , współczynnik przy najwyższej potędze oraz jego wyraz wolny bez wykonywania mnożenia wielomianów.

- a) $w(x) = (x-1)(1-x+x^2)$ d) $w(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
b) $w(x) = (3x-2)(2x^2-x+3)$ e) $w(x) = (1-2x)(1+x)(3x^2+2)$
c) $w(x) = (1-x^2)(1-x^2+4x^3)$ f) $w(x) = (4x^2+1)(1-x^2)(6-3x)$

3. Wyznacz wielomian $v(x) = [w(x)]^2$ i podaj jego stopień.

- a) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ b) $w(x) = \sqrt{2}x^2 + x - 2\sqrt{2}$

4. Wyznacz wielomiany $f(x) = u(x) \cdot w(x)$ oraz $g(x) = [u(x)]^2 - w(x)$.

- a) $u(x) = x^2 + 3x - 1$, $w(x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2$
b) $u(x) = x^4 - x^2 + 1$, $w(x) = -6x^3 + 2x^2 - 1$
c) $u(x) = x^3 - x^2 + x + 1$, $w(x) = 3x^2 - 2x + 1$

5. Wyznacz wielomian zmiennej x wyrażający pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach długości: a , b , c .

- a) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = 2x - 4$ b) $a = x^2 + 4$, $b = x + 2$, $c = x^2 - 1$

6. Dla jakich wartości parametrów m i n wielomiany u i w mają równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej?

- a) $u(x) = (x^2 - 3x + 1)(x^2 + 4x)$, $w(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + 4x$
b) $u(x) = (x^2 - 2x^4)(2x^2 - x + 1)$, $w(x) = mx^6 + 2x^5 + nx^4 - x^3 + x^2$
c) $u(x) = (x^3 + 2x)(x^2 - 2x^4)$, $w(x) = (m+1)x^7 + (2n-1)x^5 + 2x^3$

7. Wyznacz wielomian $v(x, y) = [u(x, y)]^2 - 2w(x, y)$.

- a) $u(x, y) = 2x^2 - xy$, $w(x, y) = 6x^3y^2 - 3x^2y^2 + y^4$
b) $u(x, y) = 3x^2y + 2xy^2$, $w(x, y) = 2x^4y^4 + 4x^4y^2 + 3x^3y^3 - xy^4$

8. Wyznacz iloczyn.

- a) $(2x^2y + 3xy^2)(x - y - 4)$ c) $(x + y)(x^2 + y^2)(x^3 + y^3)$
b) $(x + y)(x - 2y)(x - xy + y^2)$ d) $(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)(2x^2 + \sqrt{6}xy + 3y^2)$

9. Wyznacz iloczyn.

- a) $(x - 2y)(y - 2z)(z - 2x)$ c) $(2x - y)(3y + 2z)(2x + y)(3y - 2z)$
b) $(x + y + z)(x - y - z)$ d) $(x + xy + xyz)(1 + x - yz)$

10. Wyznacz wielomian zmiennych x , y , z opisujący różnicę objętości prostopadłościanu o krawędziach długości: $x + 1$, $y + 2$, $z + 3$ oraz objętości prostopadłościanu o krawędziach długości: $x + 1$, $y + 1$, $z + 1$.

Powierzchnie

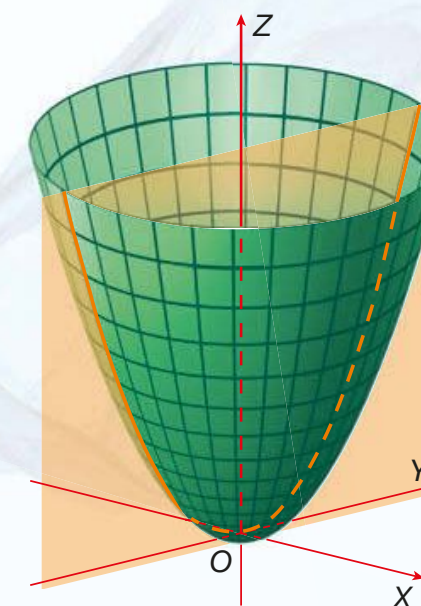
Funkcja f dwóch zmiennych to funkcja, której argumentami są pary liczb rzeczywistych (x, y) , a wartościami – liczby rzeczywiste z . Wykres funkcji $z = f(x, y)$ jest powierzchnią w trójwymiarowym układzie współrzędnych.

Wielomiany

Funkcja dwóch zmiennych może być wielomianem. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji określonej równaniem:

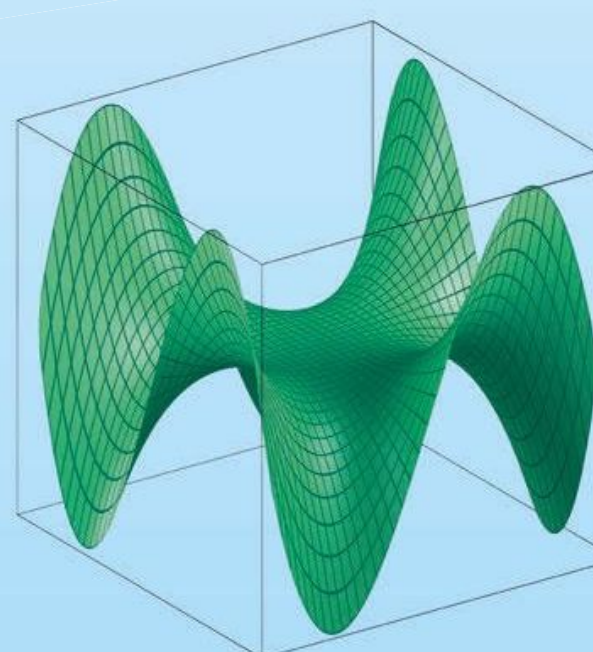
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Wykresem tej funkcji jest powierzchnia nosząca nazwę **paraboloidy obrotowej**. Zwróć uwagę na to, że część wspólna tej paraboloidy i płaszczyzny OYZ jest parabolą o równaniu $z = y^2$, a część wspólna paraboloidy i płaszczyzny OXZ – parabolą o równaniu $z = x^2$.

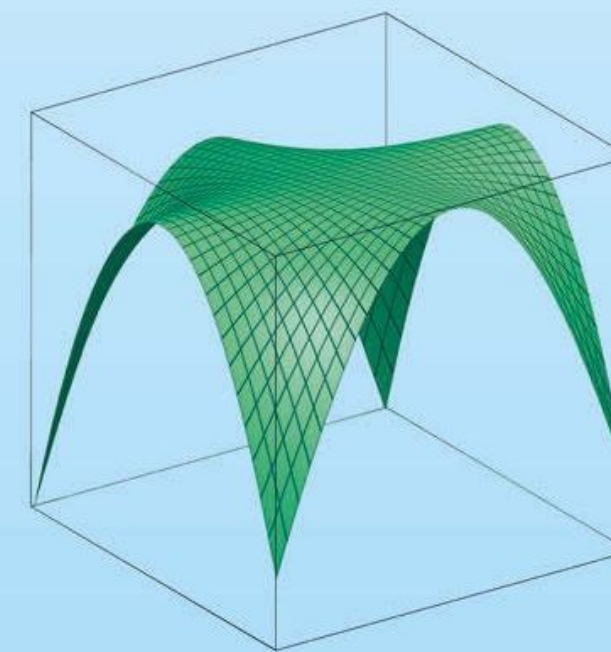


Poniżej przedstawiono inne przykłady powierzchni, które są wykresami wielomianów dwóch zmiennych.

$$f(x, y) = xy^3 - x^3y$$



$$f(x, y) = x^4y^2 - 10x^2y^2 - y^2$$



1 Za pomocą odpowiedniego programu komputerowego znajdź przykłady innych powierzchni będących wykresami wielomianów dwóch zmiennych.

R 2.4. Wzory skróconego mnożenia

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 && \text{sześcian sumy} \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 && \text{sześcian różnicy}\end{aligned}$$

Dowód wzoru na sześcian sumy

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

D Ćwiczenie 1

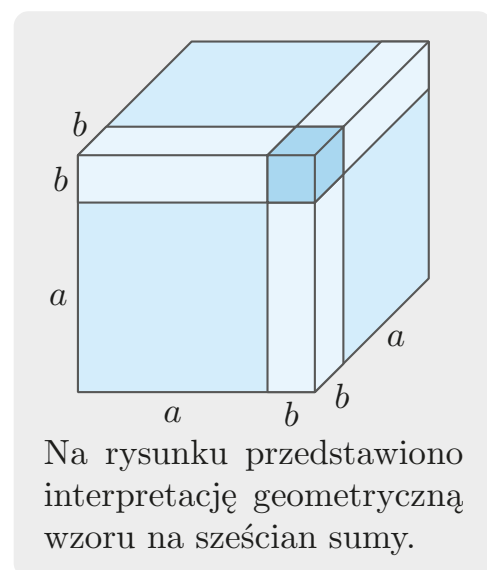
Wyprowadź wzór na sześcian różnicy, korzystając z tego, że:

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad (a-b)^3 &= (a-b)^2(a-b), \\ \text{b)} \quad (a-b)^3 &= (a+(-b))^3.\end{aligned}$$

Przykład 1

Zapisz $(x+2)^3$ w postaci sumy algebraicznej.

$$\begin{aligned}(\textcircled{x} + \textcircled{2})^3 &= \\ &= \textcircled{x}^3 + 3 \cdot \textcircled{x}^2 \cdot \textcircled{2} + 3 \cdot \textcircled{x} \cdot \textcircled{2}^2 + \textcircled{2}^3 = \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8\end{aligned}$$



Ćwiczenie 2

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad (x+1)^3 & \quad \text{c)} \quad (x+3)^3 & \quad \text{e)} \quad (2x+3)^3 & \quad \text{g)} \quad (3x+1)^3 \\ \text{b)} \quad (x-1)^3 & \quad \text{d)} \quad (x-4)^3 & \quad \text{f)} \quad (2x-1)^3 & \quad \text{h)} \quad (1-3x)^3\end{aligned}$$

Przykład 2

Oblicz $(2-\sqrt{3})^3$.

$$(2-\sqrt{3})^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3 = 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad (2+\sqrt{2})^3 & \quad \text{c)} \quad (3-\sqrt{3})^3 & \quad \text{e)} \quad (1+2\sqrt{5})^3 & \quad \text{g)} \quad (\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 \\ \text{b)} \quad (\sqrt{5}-1)^3 & \quad \text{d)} \quad (\sqrt{2}-4)^3 & \quad \text{f)} \quad (2\sqrt{3}-3)^3 & \quad \text{h)} \quad (\sqrt{3}-\sqrt{6})^3\end{aligned}$$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) && \text{suma sześciannów} \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) && \text{różnica sześciannów}\end{aligned}$$

D Ćwiczenie 4

Wyprowadź wzory na sumę sześciannów i różnicę sześciannów.

Ćwiczenie 5

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad (x+2)(x^2-2x+4) & \quad \text{d)} \quad (x^2-6x+36)(x+6) \\ \text{b)} \quad (x-1)(x^2+x+1) & \quad \text{e)} \quad (x-8)(x^2+8x+64) \\ \text{c)} \quad (x^2-x+1)(1+x) & \quad \text{f)} \quad (2x^2-1)(4x^4+2x^2+1)\end{aligned}$$

Przykład 3

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad (x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16) &= \\ &= (x^2-4)(x^4+4x^2+16) = && \text{Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.} \\ &= (x^2)^3 - 4^3 = x^6 - 64 && \text{Korzystamy ze wzoru na różnicę sześciannów.} \\ \text{b)} \quad (\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)(9x^4+3x^2+1) &= \\ &= (3x^2-1)(9x^4+3x^2+1) = && \text{Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.} \\ &= (3x^2)^3 - 1 = 27x^6 - 1 && \text{Korzystamy ze wzoru na różnicę sześciannów.}\end{aligned}$$

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad (x-1)(x+1)(x^4+x^2+1) & \quad \text{c)} \quad ((x+2)^2-4x)(x^4-4x^2+16) \\ \text{b)} \quad (3+x)(3-x)(x^4+9x^2+81) & \quad \text{d)} \quad (2x+5)^2(4x^2-20x+25)\end{aligned}$$

D Ćwiczenie 7

Wykaż prawdziwość podanego obok wzoru dla $n=5$.

Dla dowolnych $a \in \mathbb{R}$ i $n \geq 2$:

$$(a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1) = a^n - 1$$

Ćwiczenie 8

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad (x-1)(1+x+x^2+x^3) & \quad \text{c)} \quad (x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)(x^5+1) \\ \text{b)} \quad (x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1) & \quad \text{d)} \quad (x^3+x^2+x+1)(x^2-1)(x-1)\end{aligned}$$

Zarówno wzór $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1)$, jak i wzór na różnicę sześcianów $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ są szczególnymi przypadkami poniższego wzoru.

Twierdzenie

Dla $n \geq 2$ różnica n -tych potęg dowolnych liczb rzeczywistych a i b wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= \\ &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned}$$

D Ćwiczenie 9

Uzasadnij prawdziwość powyższego wzoru dla:

- a) $n = 4$, b) $n = 5$.

Ćwiczenie 10

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x-3)(x^3+3x^2+9x+27)$ b) $(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$

Zadania

- 1.** Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x+4)^3$ c) $(x-2)^3$ e) $(2x+1)^3$ g) $(x-\sqrt{2})^3$
b) $(x+5)^3$ d) $(x-3)^3$ f) $(5x-1)^3$ h) $(x+\sqrt{3})^3$

2. Oblicz objętość sześcianu o krawędzi a .

- a) $a = \sqrt{2} - 1$ b) $a = 3 + \sqrt{2}$ c) $a = 2\sqrt{5} - 1$ d) $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

- 3. Oblicz.**

- a) $(1 + \sqrt{2})^3 + (1 - \sqrt{2})^3$ c) $(2\sqrt{3} - 1)^3 - (2\sqrt{3} + 1)^3$
b) $(4 + \sqrt{2})^3 - (4 - \sqrt{2})^3$ d) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^3 + (\sqrt{5} + \sqrt{2})^3$

4. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(2x + y)^3$ c) $(3x + 2y)^3$ e) $(x + \frac{1}{3}y)^3$ g) $(\sqrt{3}x + y)^3$
b) $(x - 2y)^3$ d) $(2x - 3y)^3$ f) $(x - \frac{2}{3}y)^3$ h) $(\frac{\sqrt{3}}{3}x - y)^3$

5. a) Wyznacz sumę objętości sześcianu o krawędzi długości $2x + 2y$ i sześcianu o krawędzi długości $2x + 3y$.

- b) Wyznacz różnicę objętości sześcianu o krawędzi długości $3x + y$ i sześcianu o krawędzi długości $x + 3y$.

6. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x + 5)^2(x^2 - 5x + 25)$ c) $(3x - 1)^2(9x^2 + 3x + 1)$
b) $(x^2 + 5x + 25)(x - 5)^2$ d) $(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)$

7. Oblicz wartość wyrażenia:

- $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x^4 + 2x^2 + 4)$ dla $x = \sqrt[3]{9}$,
- $(9x^2 - 6x + 4)(3x + 2)$ dla $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$,
- $(x - \sqrt{5})^3 - 2x(x + 5)(x - 5) + (x + \sqrt{5})^3$ dla $x = \frac{1}{40}$,
- $(x + \sqrt{5})(x^2 - \sqrt{5}x + 5) - (\sqrt{5} - x)(x^2 + \sqrt{5}x + 5)$ dla $x = \sqrt[3]{4}$.

8. Rozwiąż równanie.

- a) $(x+3)(x^2-3x+9) = x^3+x$ c) $(4x^2+2x+1)(2x-1) = 26$
b) $(x-4)(x^2+4x+16) = x^3+8x$ d) $(\frac{1}{4}x^2-x+4)(\frac{1}{2}x+2) = -9$

- 9.** Skróć ułamek.

- a) $\frac{(a-1)(a^3+a^2+a+1)}{a^2+1}$ b) $\frac{(a^4+a^3+a^2+a+1)(a^2-1)}{a^5-1}, a \neq 1$

- D 10.** Uzasadnij prawdziwość wzoru.

- $$\begin{aligned} \text{a) } a^8 - b^8 &= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \\ \text{b) } a^9 - b^9 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^6 + a^3b^3 + b^6) \end{aligned}$$

- 11.** Przedstaw wielomian jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.

- a) $a^6 - b^6$ b) $a^6 + b^6$

- D 12.** Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba:

- a) $4^n - 1$ jest podzielna przez 3, b) $7^n - 1$ jest podzielna przez 6.

- 13.** Przeczytaj podany w ramce przykład.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}-2} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}-2} \cdot \frac{(\sqrt[3]{9})^2 + 2\sqrt[3]{9} + 2^2}{(\sqrt[3]{9})^2 + 2\sqrt[3]{9} + 2^2} = \frac{\sqrt[3]{81} + 2\sqrt[3]{9} + 4}{(\sqrt[3]{9})^3 - 2^3} = \frac{\sqrt[3]{81} + 2\sqrt[3]{9} + 4}{9-8} = 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9} + 4$$

Usuń niewymierność z mianownika.

- a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$ b) $\frac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{10}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$ d) $\frac{11}{3-2\sqrt[3]{2}}$

Trójkąt Pascala

Wzory skróconego mnożenia:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

są szczególnymi przypadkami rozwinięcia $(a + b)^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Współczynniki liczbowe występujące w rozwinięciu $(a + b)^n$ możemy znaleźć w kolejnych wierszach **trójkąta Pascala**.

$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n = 8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1

Każda liczba w trójkącie Pascala (z wyjątkiem skrajnych, które są jedynkami) jest sumą dwóch liczb znajdujących się nad nią (np. dla $n = 8$ mamy: $8 = 1 + 7$, $28 = 7 + 21$, $56 = 21 + 35$, $70 = 35 + 35$).

Odpowiednie wzory skróconego mnożenia:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

1. Podaj wzory na:

$$\text{a) } (a + b)^7, \quad \text{b) } (a - b)^7, \quad \text{c) } (a + b)^8, \quad \text{d) } (a - b)^8.$$

2. Wyznacz wiersze trójkąta Pascala dla $n = 9$ i $n = 10$ oraz podaj wzory na $(a + b)^9$ i $(a - b)^{10}$.

3. Korzystając z odpowiednich wzorów skróconego mnożenia, oblicz:

$$\text{a) } (\sqrt{2} + 1)^4, \quad \text{b) } (\sqrt{3} - 1)^4, \quad \text{c) } (\sqrt{2} + 1)^6, \quad \text{d) } (\sqrt{3} - 1)^6.$$

2.5. Rozkład wielomianu na czynniki (1)

Przedstawienie wielomianu jako iloczynu dwóch lub więcej wielomianów nazywamy **rozkładem wielomianu na czynniki**.

Przykład 1

Rozłóż wielomian $w(x) = 12x^5 - 8x^4$ na czynniki.

$$w(x) = 12x^5 - 8x^4 = 4x^4(3x - 2)$$

Wyłączamy $4x^4$ przed nawias.

Zauważ, że wielomian w został już rozłożony na czynniki liniowe (stopnia pierwszego), ponieważ można go zapisać jako $w(x) = 4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (3x - 2)$.

Przykład 2

Rozłóż wielomian w na czynniki.

$$\text{a) } w(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4 = x^4(x^2 - 6x + 9) = x^4(x - 3)^2$$

Wyłączamy x^4 przed nawias.

Korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$\text{b) } w(x) = x^5 - 16x = x(x^4 - 16) = x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

Wyłączamy x przed nawias.

Dwukrotnie korzystamy ze wzoru $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Zauważ, że czynnika $x^2 + 4$ nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

$$\text{c) } w(x) = 6x^5 - x^4 + x^3 = x^3(6x^2 - x + 1)$$

Wyłączamy x^3 przed nawias.

Czynnik $6x^2 - x + 1$ jest trójmianem kwadratowym, którego nie można rozłożyć na czynniki liniowe, gdyż $\Delta = -23 < 0$.

Podstawowe twierdzenie algebry

Każdy niezerowy wielomian można przedstawić jako iloczyn czynników stopnia co najwyżej drugiego.

Rozkład wielomianu na czynniki stopnia co najwyżej drugiego zawsze istnieje, natomiast nie zawsze potrafimy go wyznaczyć – czasem jest to zbyt skomplikowane obliczeniowo, a czasem niemożliwe (w przypadku niektórych wielomianów stopnia większego od 4).

Ćwiczenie 1

Rozłóż wielomian w na czynniki.

$$\text{a) } w(x) = x^4 - 7x^3$$

$$\text{e) } w(x) = 6x^3 + 12x^2 + 6x$$

$$\text{b) } w(x) = 18x^3 + 30x^2$$

$$\text{f) } w(x) = -3x^4 + 12x^3 - 12x^2$$

$$\text{c) } w(x) = -2x^5 - 8x^4$$

$$\text{g) } w(x) = -27x^6 + 18x^5 - 3x^4$$

$$\text{d) } w(x) = -54x^3 + 36x^2$$

$$\text{h) } w(x) = \frac{1}{4}x^5 + x^3 + x$$

D Ćwiczenie 2

Rozłóż wielomian w na czynniki. Jeżeli w rozkładzie pojawi się czynnik stopnia drugiego, uzasadnij, że nie da się go rozłożyć na czynniki liniowe.

- a) $w(x) = 3x^3 + 12x$ e) $w(x) = 7x^{11} - 5x^{10} + x^9$
b) $w(x) = \frac{1}{4}x^6 + \frac{3}{4}x^4$ f) $w(x) = \frac{1}{4}x^6 + x^5 + 2x^4$
c) $w(x) = -6x^5 - 42x^3$ g) $w(x) = -4x^5 + 3x^4 - 7x^3$
d) $w(x) = -\sqrt{2}x^7 - \sqrt{6}x^5$ h) $w(x) = 3\sqrt{2}x^5 - 2\sqrt{3}x^4 + \sqrt{6}x^3$

Przykład 3

Rozłóż wielomian $w(x) = 4x^5 + 3x^4 - x^3$ na czynniki.

$$w(x) = x^3(4x^2 + 3x - 1) \quad \text{Wylączamy } x^3 \text{ przed nawias.}$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $4x^2 + 3x - 1$:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 25$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 5}{8} = -1, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{8} = \frac{1}{4}$$

Zatem trójmian ten możemy zapisać w postaci iloczynowej:

$$4x^2 + 3x - 1 = 4(x + 1)(x - \frac{1}{4})$$

czyli wielomian w można przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych:

$$w(x) = 4x^3(x + 1)(x - \frac{1}{4})$$

Ćwiczenie 3

Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$ e) $w(x) = -2x^3 + 20x^2 - 10x$
b) $w(x) = 2x^5 - x^4 - x^3$ f) $w(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{5}{4}x^2$
c) $w(x) = -2x^3 - x^2 + 6x$ g) $w(x) = 2x^5 - 4x^4 + x^3$
d) $w(x) = 20x^5 + 14x^4 + 2x^3$ h) $w(x) = 4x^6 - 12x^5 + x^4$

Czy wiesz, że...

W 1799 r. Carl Friedrich Gauss [czyt. karl fridriś gałs] (1777–1855) podał dowód podstawowego twierdzenia algebry. Ze względu na swe wybitne osiągnięcia Gauss zyskał przydomek „princeps mathematicorum” [czyt. princeps matematikorum] (książę matematyków). Jako dziewiętnastoletni student Gauss wykazał możliwość konstrukcji (za pomocą cyrkla i linijki) siedemnastokąta foremego. Życzył sobie, by został on wyryty na jego nagrobku, ale jego życzenie nie zostało spełnione.



Zadania

1. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = 4x^3 - \frac{1}{9}x$ b) $w(x) = 16x^5 - 4x^3$ c) $w(x) = 2x^4 - 6x^2$

2. Wylącz przed nawias wskazany czynnik. Sprawdź, czy trójmian kwadratowy otrzymany w nawiasie można rozłożyć na czynniki liniowe. Jeśli tak, to podaj rozkład wielomianu w na czynniki liniowe.

a) $w(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3, x^3$ d) $w(x) = 6x^4 + 3x^3 - 3x^2, 6x^2$

b) $w(x) = x^4 - x^3 - 6x^2, x^2$ e) $w(x) = 6x^3 - 15x^2 + 9x, 6x$

c) $w(x) = 2x^6 - 4x^5 + 2x^4, 2x^4$ f) $w(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3, \frac{3}{4}x^3$

3. Rozłóż wielomian w na czynniki.

a) $w(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$ g) $w(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3)$

b) $w(x) = 2x^3 - 9x^2 - 5x$ h) $w(x) = (x^2 - 3x - 4)(x^2 + 5x + 4)$

c) $w(x) = -6x^5 + 5x^4 - x^3$ i) $w(x) = (2x^2 - 5x - 3)(2x^2 - 7x + 3)$

d) $w(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2$ j) $w(x) = (x^3 + x^2 - 2x)(x^3 + 2x^2 - 15x)$

e) $w(x) = x^3 + \sqrt{2}x^2 + x$ k) $w(x) = (x^4 + x^3 - 6x^2)(x^5 + 2x^4 + 3x^3)$

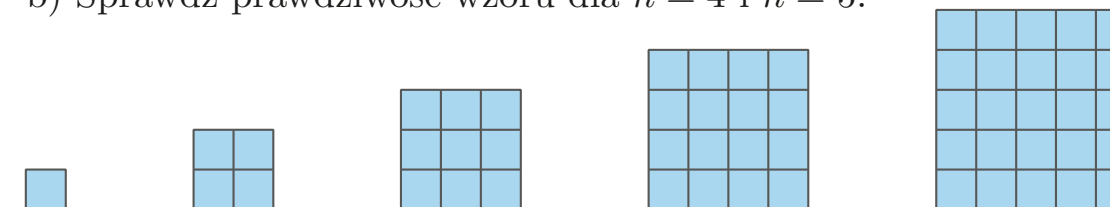
f) $w(x) = -\frac{1}{3}x^5 + \frac{8}{3}x^4 + 3x^3$ l) $w(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)(x^2 + 4x + 1)$

4. Sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych można wyrazić wzorem:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

a) Rozłóż wielomian $S(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ na czynniki.

b) Sprawdź prawdziwość wzoru dla $n = 4$ i $n = 5$.

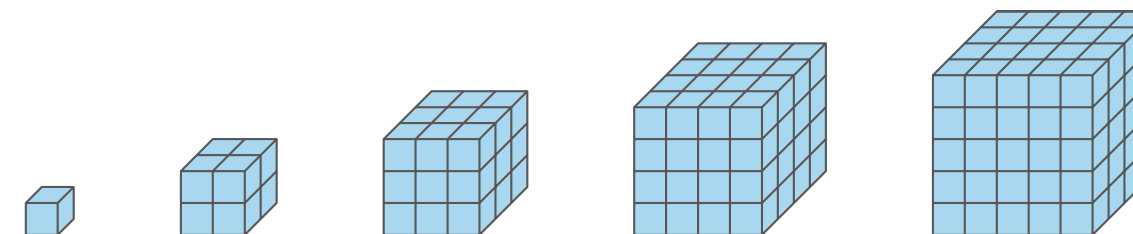


5. Sumę sześcianów kolejnych liczb naturalnych można wyrazić wzorem:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

a) Rozłóż wielomian $S(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$ na czynniki.

b) Oblicz sumę $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3$.



R 2.6. Rozkład wielomianu na czynniki (2)

Przykład 1

Rozłóż wielomian $w(x) = x^7 + 8x^4$ na czynniki.

$$\begin{aligned} w(x) &= x^7 + 8x^4 = x^4(x^3 + 8) = \\ &= x^4(x + 2)(x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

Korzystamy ze wzoru
na sumę sześcianów.

Czynnik $x^2 - 2x + 4$ jest nierozkładalny na czynniki liniowe, gdyż $\Delta < 0$.

Ćwiczenie 1

Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = 2x^5 + 2x^2$ c) $w(x) = 8x^4 - x$ e) $w(x) = 8x^6 - 27x^3$
b) $w(x) = -x^6 - 8x^3$ d) $w(x) = x^2 - 0,001x^5$ f) $w(x) = 0,054x^4 + 2x$

W pewnych przypadkach wielomian możemy rozłożyć na czynniki, grupując odpowiednio jego wyrazy.

Przykład 2

Rozłóż wielomian u na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $u(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8$

$$\begin{aligned} u(x) &= \underline{x^3 - 4x^2} + \underline{2x - 8} = \\ &= x^2(x - 4) + 2(x - 4) = (x^2 + 2)(x - 4) \end{aligned}$$

Z dwóch pierwszych i dwóch ostatnich wyrazów
można wyłączyć ten sam czynnik: $x - 4$.

b) $u(x) = 7x^3 + 2x^2 - 14x - 4$

$$\begin{aligned} u(x) &= \underline{7x^3 + 2x^2} - \underline{14x - 4} = x^2(7x + 2) - 2(7x + 2) = (x^2 - 2)(7x + 2) = \\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(7x + 2) \end{aligned}$$

c) $u(x) = 4x^5 - 2x^4 - 16x^3 + 8x^2$

$$\begin{aligned} u(x) &= \underline{4x^5 - 2x^4} - \underline{16x^3 + 8x^2} = 2x^4(2x - 1) - 8x^2(2x - 1) = \\ &= (2x^4 - 8x^2)(2x - 1) = 2x^2(x^2 - 4)(2x - 1) = 2x^2(x - 2)(x + 2)(2x - 1) \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Rozłóż wielomian u na czynniki, grupując jego wyrazy.

- a) $u(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5$ e) $u(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 100$
b) $u(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ f) $u(x) = \sqrt{5}x^3 - x^2 - \sqrt{5}x + 1$
c) $u(x) = 4x^3 + x^2 - 16x - 4$ g) $u(x) = 8x^5 + 16x^3 - x^2 - 2$
d) $u(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x$ h) $u(x) = x^5 - \sqrt{2}x^4 + \sqrt{3}x^3 - \sqrt{6}x^2$

Zadania

1. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = x^4 + 27x$ c) $w(x) = -x^4 - 64x$ e) $w(x) = 27x^6 + 8x^3$
b) $w(x) = x^5 - 8x^2$ d) $w(x) = -\frac{1}{8}x^5 + 64x^2$ f) $w(x) = 125x^8 - x^5$

2. Rozłóż wielomian w na czynniki, grupując jego wyrazy.

- a) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 8x - 16$ e) $w(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 3x + 1$
b) $w(x) = 14x^3 - 7x^2 + 4x - 2$ f) $w(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 - 6x + 27$
c) $w(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 15$ g) $w(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x - 2$
d) $w(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3$ h) $w(x) = \sqrt{3}x^4 + \sqrt{6}x^3 + x^2 + \sqrt{2}x$

3. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$
b) $w(x) = 4x^5 - 8x^4 - 4x^3 + 8x^2 + x - 2$
c) $w(x) = 3x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 9x - 6$

4. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = (20x^3 - 28x^2 + 8x)(x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 12x)$
b) $w(x) = (-\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 4x^2)(x^3 - 7x^2 - 4x + 28)$
c) $w(x) = (7x^4 + 14x^3 - 21x^2)(x^5 - 4x^3 - x^2 + 4)$
d) $w(x) = (3x^4 - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2)(x^6 - 1)$

5. Przeczytaj podane w ramce przykłady, a następnie rozłóż wielomian w na czynniki.

Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 =$
 $= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$
 $= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$
b) $w(x) = x^4 + 6x^2 + 25 =$
 $= (x^2 + 5)^2 - 10x^2 + 6x^2 =$
 $= (x^2 + 5)^2 - 4x^2 =$
 $= (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x + 5)$

- a) $w(x) = x^4 + 1$
b) $w(x) = 4x^4 + 9$
c) $w(x) = 9x^4 + 16$
d) $w(x) = x^4 + 5x^2 + 9$
e) $w(x) = 16x^4 - x^2 + 1$
f) $w(x) = 4x^4 + 8x^2 + 9$

6. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 2$ c) $w(x) = 8x^3 - 6x^2 - 3x + 1$
b) $w(x) = 3x^3 - 4x^2 - 4x + 3$ d) $w(x) = 64x^3 + 12x^2 - 3x - 1$

2.7. Równania wielomianowe

Równanie postaci $w(x) = 0$, gdzie w jest wielomianem, nazywamy **równaniem wielomianowym** z niewiadomą x .

Rozkład wielomianu w na czynniki może być wykorzystany do wyznaczenia jego **pierwiastków**, czyli takich argumentów x , dla których spełnione jest równanie $w(x) = 0$. Pierwiastki te nazywamy **rozwiązaniami równania**.

Przykład 1

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$.

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu w (czyli jego miejsca zerowe), rozwiązujemy równanie:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}x^3 - x^2 &= 0 \\ \frac{1}{4}x^2(x - 4) &= 0 \\ x^2 = 0 \text{ lub } x - 4 &= 0 \\ x = 0 \text{ lub } x &= 4\end{aligned}$$

$a \cdot b = 0$ wtedy
i tylko wtedy, gdy
 $a = 0$ lub $b = 0$.

Pierwiastkami wielomianu w są liczby 0 i 4.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$.

$$\begin{aligned}x(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\ x(x - 3)^2 &= 0 \quad \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.} \\ x = 0 \text{ lub } x &= 3\end{aligned}$$

Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 3.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 6x^4 + 2x^3 = 0 & \text{c) } x^6 + x = x + 2x^4 & \text{e) } \frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + 6x = 0 \\ \text{b) } -x^5 + 4x^3 = 0 & \text{d) } \frac{x^4 - 4x^3}{2} = \frac{x^5 - 6x^3}{3} & \text{f) } -4x^4 + 4x^3 - x^2 = 0 \end{array}$$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^5 - 2x^4 - 15x^3 = 0$.

$$\begin{aligned}x^3(x^2 - 2x - 15) &= 0 \\ x = 0 \text{ lub } x^2 - 2x - 15 &= 0\end{aligned}$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4 + 60 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8 \\ x_1 &= \frac{2-8}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{2+8}{2} = 5\end{aligned}$$

Zatem wyjściowe równanie ma trzy rozwiązania: -3 , 0 i 5 .

Przykład 4

Rozwiąż równanie $5x^3 + 4x^2 + 4x = 0$.

$$\begin{aligned}x(5x^2 + 4x + 4) &= 0 \\ x = 0 \text{ lub } 5x^2 + 4x + 4 &= 0 \quad \Delta = 16 - 80 = -64 < 0\end{aligned}$$

Równanie kwadratowe jest sprzeczne ($\Delta < 0$), zatem jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania jest liczba 0.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^3 - 7x^2 + 12x = 0 & \text{c) } 3x^3 + 4x^2 + x = 0 & \text{e) } 2x^2 - 3x = x - x^3 \\ \text{b) } -2x^4 + 9x^3 + 5x^2 = 0 & \text{d) } 4x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0 & \text{f) } 2x^6 - x^5 = x^5 + x^4 \end{array}$$

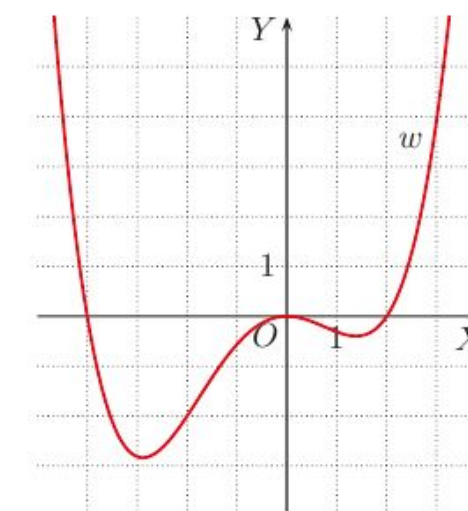
Przykład 5

Wyznacz punkty wspólne wykresu wielomianu $w(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ i osi OX .

Aby wyznaczyć pierwsze współrzędne punktów wspólnych wykresu wielomianu w oraz osi OX , rozwiązujemy równanie:

$$\begin{aligned}\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 &= 0 \\ \frac{1}{16}x^2(x^2 + 2x - 8) &= 0 \\ x = 0 \text{ lub } x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ \Delta &= 4 + 32 = 36 = 6^2 \\ x_1 &= \frac{-2-6}{2} = -4, \quad x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2\end{aligned}$$

Szukane punkty: $(-4, 0)$, $(0, 0)$ i $(2, 0)$.



$w(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$
Pierwiastki równania $w(x) = 0$
to miejsca zerowe wielomianu w .

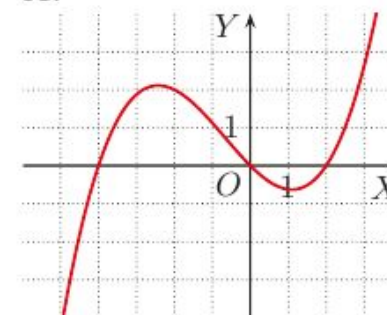
Ćwiczenie 3

Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy wielomianów:

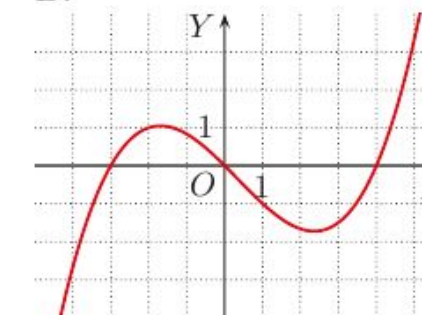
$$u(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x, \quad v(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - x, \quad w(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x$$

Rozwiąż odpowiednie równania i podaj pierwiastki tych wielomianów. Do każdego z nich dopasuj wykres.

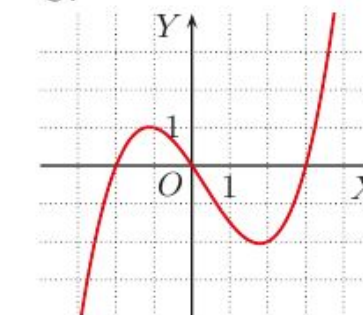
A.



B.



C.



Przykład 6

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$.

Rozkładamy wielomian w na czynniki metodą grupowania wyrazów:

$$\begin{aligned} w(x) &= x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x - 1) - 9(x - 1) = (x^2 - 9)(x - 1) = \\ &= (x - 3)(x + 3)(x - 1) \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu w , rozwiązujemy równanie:

$$\begin{aligned} (x - 3)(x + 3)(x - 1) &= 0 \\ x - 3 = 0 \quad \text{lub} \quad x + 3 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Zatem pierwiastkami wielomianu w są liczby: -3 , 1 i 3 .

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

- | | |
|----------------------------------|---|
| a) $x^3 - 9x^2 + 2x - 18 = 0$ | d) $3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 10x = 0$ |
| b) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$ | e) $x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32 = 0$ |
| c) $x^5 + 5x^4 + x^3 + 5x^2 = 0$ | f) $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x - 6 = 0$ |

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- | | | |
|------------------|-------------------|----------------------|
| a) $2x^3 = 4x^2$ | c) $x^4 = -27x^3$ | e) $x^5 - 16x = 0$ |
| b) $x^5 = 9x^3$ | d) $x^5 = 8x^2$ | f) $x^6 - 25x^2 = 0$ |

2. Rozwiąż równanie.

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|---|
| a) $x^5 - 2x^3 + x = 0$ | e) $2x^5 = 2x^4 + 12x^3$ | i) $x^3 + 4x = -5x^2$ |
| b) $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ | f) $10x^4 + x^3 = 2x^2$ | j) $-\frac{1}{2}x^4 + x^3 = \frac{1}{2}x^2$ |
| c) $x^4 = 4x^3 + 5x^2$ | g) $9x^6 + 6x^5 + x^4 = 0$ | k) $3x^5 = \frac{x^7 + 3x^6}{6}$ |
| d) $6x^3 + 9x^2 = 3x^4$ | h) $x^5 + 4x^4 = 12x^3$ | l) $\frac{20x^7 + x^3}{8} = \frac{x^7 - 2x^5}{2}$ |

3. Rozwiąż równanie.

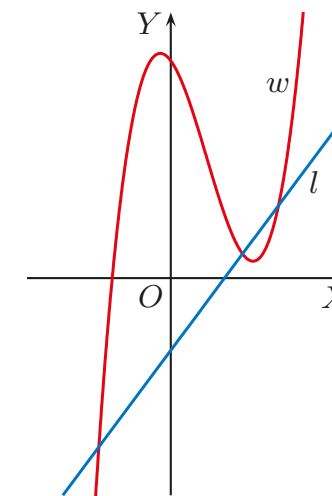
- | | | |
|---------------------------|-------------------------|--|
| a) $x^3 - 3x^2 = 12 - 4x$ | d) $1 - x^3 = x^2 - x$ | g) $x^3 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ |
| b) $2x^3 + 3 = x^2 + 6x$ | e) $x^4 - 8x = 8 - x^3$ | h) $\frac{x^3}{2} + \frac{3}{4}x^2 = 3 + 2x$ |
| c) $x^4 + 9x^3 = x + 9$ | f) $x^4 + 4x^3 = x + 4$ | i) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^2 - x^3$ |

4. Rozwiąż równanie.

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|--------------------------|
| a) $x^3 - 5x - 4 = 0$ | b) $x^3 - 3x + 2 = 0$ | c) $x^4 - 7x^2 + 6x = 0$ |
|-----------------------|-----------------------|--------------------------|

Wskazówka. W podpunkcie a) zapisz $-5x$ jako $-x - 4x$.

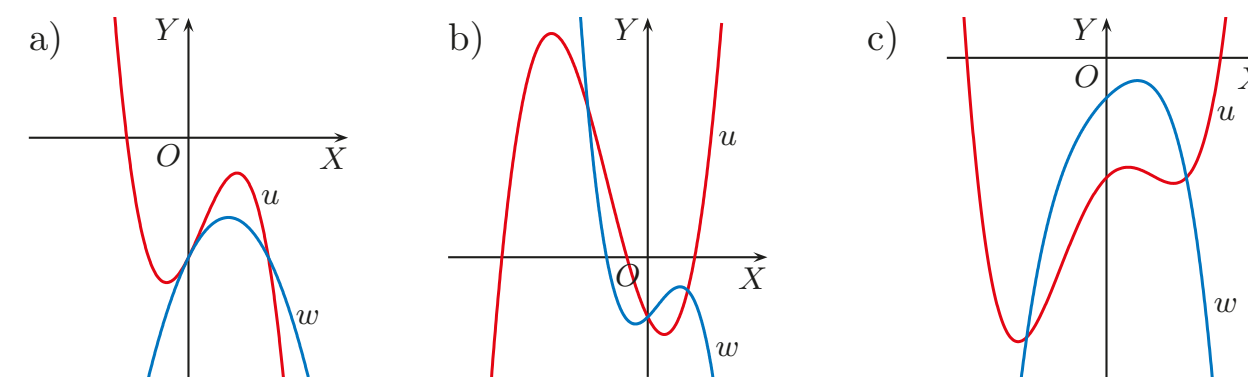
5. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu $w(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 9$ i prostą $l: y = 2x - 3$. Wyznacz punkty, w których prosta l przecina wykres wielomianu w .



6. Wyznacz punkty wspólne wykresu wielomianu w i prostej l .

- | |
|---|
| a) $w(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 2$, $l: y = 4x + 2$ |
| b) $w(x) = 4x^3 - x^2 - 5x + 3$, $l: y = 3x + 1$ |
| c) $w(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + x^2$, $l: y = 4x - 3$ |

7. Wyznacz punkty wspólne wykresów wielomianów u i w .



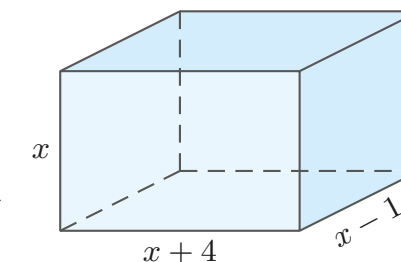
$u(x) = -x^3 + x^2 + 2x - 3$	$u(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2x - 3$	$u(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + x - 3$
$w(x) = -x^2 + 2x - 3$	$w(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 3$	$w(x) = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

8. Podaj przykład wielomianu czwartego stopnia, którego jedynymi pierwiastkami są liczby: a) $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$, b) 1 , 2 , 3 .

9. Podaj przykład wielomianu stopnia n , którego jedynymi pierwiastkami są liczby -2 i 3 , a wyraz wolny jest równy 1 .

- | | | |
|------------|------------|------------|
| a) $n = 2$ | b) $n = 4$ | c) $n = 6$ |
|------------|------------|------------|

10. Podaj wzór funkcji opisującej objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Dla jakiej wartości x objętość tego prostopadłościanu jest równa 12 ?



- D** 11. Dany jest prostopadłościan o krawędziach: x cm, $(x - 3)$ cm, $(x + 5)$ cm i objętości 30 cm³. Uzasadnij, że suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest mniejsza od 56 cm.

12. Dany jest prostopadłościan o krawędziach: x m, $(x + 1)$ m, $(4x - 3)$ m i objętości $0,75$ m³. Która ściana tego prostopadłościanu ma najmniejsze pole? Oblicz to pole.

R 2.8. Dzielenie wielomianów

Przypomnijmy, że jeśli n i m są liczbami całkowitymi (gdzie $m \neq 0$), to mówimy, że n jest podzielne przez m , jeśli istnieje taka liczba całkowita k , że $n = k \cdot m$.

Podobnie mówimy, że wielomian w jest podzielny przez wielomian niezerowy q ($q \neq 0$), jeśli istnieje wielomian p taki, że $w = p \cdot q$.

Przykład 1

$(x^3 + 5x^2 + 6x) : (x + 3) = x^2 + 2x$, ponieważ:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = (x^2 + 2x) \cdot (x + 3)$$

Dzielenie wielomianów wykonujemy podobnie jak dzielenie liczb naturalnych.

Przykład 2

Wykonaj dzielenie $(3x^2 - x - 4) : (x + 1)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\ -3x^2 - 3x \\ \hline -4x - 4 \\ 4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Poniżej wyjaśniamy, jak wyglądały kolejne kroki podczas wykonywania tego dzielenia.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x \\ -3x^2 - 3x \\ \hline -4x - 4 \end{array}$$

Dzielimy $3x^2$ przez pierwszy wyraz dzielnika. Mnożymy $3x$ przez dzielnik $x+1$ i zapisujemy wynik ze zmienionym znakiem. Dodajemy.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\ -3x^2 - 3x \\ \hline -4x - 4 \\ -4x - 4 \\ \hline 4x + 4 \\ 4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Dzielimy $-4x$ przez pierwszy wyraz dzielnika. Mnożymy -4 przez dzielnik $x+1$ i zapisujemy wynik ze zmienionym znakiem. Dodajemy. Otrzymaliśmy resztę równą 0.

Sprawdzenie: $(3x - 4)(x + 1) = 3x^2 + 3x - 4x - 4 = 3x^2 - x - 4$.

Ćwiczenie 1

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(x^2 - 6x + 8) : (x - 4)$

c) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$

b) $(9x^2 + 3x - 12) : (x - 1)$

d) $(2x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x) : (x + 2)$

Tak jak iloraz liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną, tak dla wielomianów w i q ($q \neq 0$) nie zawsze istnieje wielomian p taki, że $w : q = p$. W takiej sytuacji otrzymujemy iloraz oraz niezerową resztę.

Przykład 3

Wykonaj dzielenie $(5x^2 + 13x + 11) : (x + 2)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (5x^2 + 13x + 11) : (x + 2) = 5x + 3 \\ -5x^2 - 10x \\ \hline 3x + 11 \\ -3x - 6 \\ \hline 5 \end{array}$$

Dzielenie liczb naturalnych

$$\begin{array}{r} 752 : 9 = 83 \\ -72 \\ \hline 32 \\ -27 \\ \hline 5 \\ 752 = 83 \cdot 9 + 5 \end{array}$$

W wyniku dzielenia otrzymaliśmy iloraz równy $5x + 3$ oraz resztę równą 5, co oznacza, że: $5x^2 + 13x + 11 = (5x + 3)(x + 2) + 5$.

Sprawdzenie: $(5x + 3)(x + 2) + 5 = 5x^2 + 10x + 3x + 6 + 5 = 5x^2 + 13x + 11$

Przykład 4

Wykonaj dzielenie $(2x^3 - x^2 - 2x - 5) : (x - \frac{3}{2})$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (2x^3 - x^2 - 2x - 5) : (x - \frac{3}{2}) = 2x^2 + 2x + 1 \\ -2x^3 + 3x^2 \\ \hline 2x^2 - 2x - 5 \\ -2x^2 + 3x \\ \hline x - 5 \\ -x + \frac{3}{2} \\ \hline -3\frac{1}{2} \end{array}$$

Otrzymaliśmy resztę równą $-3\frac{1}{2}$.

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} (2x^2 + 2x + 1) \cdot (x - \frac{3}{2}) - 3\frac{1}{2} &= 2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x + x - \frac{3}{2} - 3\frac{1}{2} = \\ &= 2x^3 - x^2 - 2x - 5 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(x^2 - 8x + 19) : (x - 5)$

c) $(x^3 + 7x^2 + 7x - 16) : (x + 4)$

b) $(4x^2 + 6x + 7) : (x + \frac{1}{2})$

d) $(3x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4x) : (x - \frac{1}{3})$

Zwróćmy uwagę na to, że w wyniku dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$ otrzymujemy jako iloraz pewien wielomian p oraz resztę r , która jest funkcją stałą.

Ćwiczenie 3

Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$, gdzie wielomian p jest ilorazem, a r – resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian q .

- a) $w(x) = x^3 - 2x^2 + x$, $q(x) = x - 2$
- b) $w(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4$, $q(x) = x + 3$
- c) $w(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x$, $q(x) = x - 1$
- d) $w(x) = 3x^4 - x^2 + 9x - 1$, $q(x) = x + 2$

Wielomian w jest **podzielny** przez dwumian q , jeśli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian q jest równa zero (jest wielomianem zerowym).

Zadania

1. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?
 - a) $w(x) = 2x^2 - 5x - 12$, $q(x) = x - 4$
 - b) $w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, $q(x) = x + 2$
 - c) $w(x) = -2x^4 + 3x^2 + 6$, $q(x) = x - 3$
 - d) $w(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x - 9$, $q(x) = x + 3$
 - e) $w(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$, $q(x) = x - 1$
2. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.
 - a) $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$, $q(x) = x - 4$
 - b) $w(x) = x^3 + 3x + 7$, $q(x) = x + 3$
 - c) $w(x) = 3x^4 - x^2$, $q(x) = x - 1$
 - d) $w(x) = x^3 + 8x^2 + 11x - 4$, $q(x) = x + 6$
 - e) $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 3x - 2$, $q(x) = x + \frac{1}{2}$
 - f) $w(x) = 12x^3 + x^2 - x + 3$, $q(x) = x - \frac{1}{4}$
3. Sprawdź, czy dzielenie zostało wykonane poprawnie.
 - a) $(-2x^3 + 3x^2 + 12x - 9) : (x - 3) \stackrel{?}{=} -2x^2 - 3x + 3$
 - b) $(-3x^3 + 7x^2 + 6x - 6) : (x - 3) \stackrel{?}{=} -3x^2 - 2x + 2$
 - c) $(3x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 2x - 2) : (x - 2) \stackrel{?}{=} 3x^3 - 2x^2 + 1$
 - d) $(2x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x - 4) : (x - \frac{1}{2}) \stackrel{?}{=} 2x^3 - 4x + 8$

4. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Rozłóż wielomian w na czynniki, jeżeli wielomian w jest podzielny przez dwumian q .

- a) $w(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$, $q(x) = x - 1$
- b) $w(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$, $q(x) = x + 2$
- c) $w(x) = 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6$, $q(x) = x - 3$
- d) $w(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 4$, $q(x) = x + 4$

Czy wiesz, że...

Dowolny wielomian w możemy podzielić przez wielomian q , jeżeli wielomian q nie jest wielomianem zerowym. Jako iloraz otrzymujemy pewien wielomian p oraz resztę r . Reszta r albo jest wielomianem zerowym, albo zachodzi zależność: $\text{st}(r) < \text{st}(q)$.

Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Dla danych wielomianów w i q , gdzie $q \neq 0$, istnieją wielomiany p i r takie, że:

$$w = p \cdot q + r$$

oraz $r \equiv 0$ lub $\text{st}(r) < \text{st}(q)$.

Przykład

Wykonaj dzielenie $(2x^3 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3)$.

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 0x^2 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3) = 2x - 2 \\ \underline{-2x^3 - 2x^2 - 6x} \\ -2x^2 + 2x - 1 \\ \underline{2x^2 + 2x + 6} \\ 4x + 5 \end{array}$$

Otrzymaliśmy resztę $r(x) = 4x + 5$, czyli zachodzi następująca równość:

$$2x^3 + 8x - 1 = (2x - 2)(x^2 + x + 3) + 4x + 5$$

Zauważmy, że reszta jest wielomianem stopnia pierwszego.

5. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.
 - a) $w(x) = -3x^3 - x^2 + 3x - 4$, $q(x) = x^2 - 4$
 - b) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x + 2$, $q(x) = x^2 + x$
 - c) $w(x) = x^3 + 6$, $q(x) = x^2 + x + 1$
 - d) $w(x) = 4x^4 - 2x + 3$, $q(x) = x^2 - 1$

Schemat Hornera

Algorytm zwany **schematem Hornera** pozwala na zmniejszenie liczby wykonywanych operacji mnożenia podczas obliczania wartości wielomianu dla danego argumentu (William Horner – angielski matematyk, żył w latach 1786–1837).

Rozpatrzmy wielomian:

$$\begin{aligned} w(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= a_3 \cdot x \cdot x \cdot x + a_2 \cdot x \cdot x + a_1 \cdot x + a_0 \end{aligned}$$

Aby obliczyć wartość tego wielomianu dla danego argumentu, należy wykonać sześć mnożeń i trzy dodawania.

Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} w(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= (a_3x^2 + a_2x + a_1) \cdot x + a_0 = \\ &= ((a_3 \cdot x + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0 \end{aligned}$$

Korzystając z otrzymanej postaci wielomianu w , możemy obliczyć jego wartość dla argumentu $x = a$, wykonując trzy mnożenia i trzy dodawania.

Jeśli wprowadzimy oznaczenia:

$$\begin{aligned} w(a) &= ((a_3 \cdot a + a_2) \cdot a + a_1) \cdot a + a_0 \\ &\quad \begin{array}{l} b_3 = a_3 \\ b_2 = ab_3 + a_2 \\ b_1 = ab_2 + a_1 \\ b_0 = ab_1 + a_0 = w(a) \end{array} \end{aligned}$$

to obliczenia możemy przedstawić w postaci schematu:

$$\begin{array}{r|rrrr} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a & \downarrow & \nearrow + & \nearrow + & \nearrow + \\ & b_3 & ab_3 & ab_2 & ab_1 \\ & \downarrow & \nearrow + & \nearrow + & \nearrow + \\ & b_2 & ab_2 & ab_1 & ab_0 \end{array}$$

Przykład 1

Dany jest wielomian $w(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 20$. Korzystając ze schematu Hornera, oblicz $w(2)$.

$$\begin{aligned} b_3 &= 4 \\ b_2 &= 2 \cdot 4 - 5 = 3 \\ b_1 &= 2 \cdot 3 + 7 = 13 \\ b_0 &= 2 \cdot 13 - 20 = 6 \\ \text{Zatem } w(2) &= 6. \end{aligned}$$

Zapis w postaci schematu:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -5 & 7 & -20 \\ 2 & \downarrow & \nearrow + & \nearrow + & \nearrow + \\ & 4 & 8 & 6 & 26 \\ & \downarrow & \nearrow + & \nearrow + & \nearrow + \\ & 3 & 13 & 6 & 26 \end{array}$$

1. Oblicz wartość wielomianu w dla argumentu a . Skorzystaj ze schematu Hornera.

a) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 7, a = 3$

b) $w(x) = 5x^4 - 6x^3 - 3x^2 + x - 1, a = 2$

Schemat Hornera możemy również wykorzystać do wyznaczenia ilorazu i reszty z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$.

Rozpatrzmy wielomian $w(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Zgodnie z przyjętymi poprzednio oznaczeniami mamy:

$$\begin{aligned} w(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= b_3x^3 + (b_2 - ab_3)x^2 + (b_1 - ab_2)x + b_0 - ab_1 = \\ &= (b_3x^2 + b_2x + b_1)x - (b_3x^2 + b_2x + b_1)a + b_0 = \\ &= (b_3x^2 + b_2x + b_1)(x - a) + b_0 \end{aligned}$$

Zatem $b_3x^2 + b_2x + b_1$ jest ilorazem, a b_0 resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$.

Przykład 2

Wyznacz iloraz p i resztę r z dzielenia wielomianu $w(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 3$ przez dwumian $x - 2$. Wielomian w zapisz w postaci $w(x) = p(x)(x - 2) + r$.

Sporządzamy schemat:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & -7 & 3 & -3 \\ 2 & \downarrow & \nearrow + & \nearrow + & \nearrow + \\ & 5 & 10 & 6 & 18 \\ & \downarrow & \nearrow + & \nearrow + & \nearrow + \\ & 3 & 9 & 15 & 15 \end{array}$$

Ze schematu odczytujemy iloraz $p(x) = 5x^2 + 3x + 9$ i resztę $r = 15$. Zatem $w(x) = (5x^2 + 3x + 9)(x - 2) + 15$.

2. Wykonaj w sposób tradycyjny dzielenie $(3x^4 - 10x^3 - 29x + 2) : (x - 4)$. Porównaj zapis tego dzielenia z podanym niżej zapisem dzielenia wykorzystującym schemat Hornera.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -10 & 0 & -29 & 2 \\ 4 & \downarrow & \nearrow + & \nearrow + & \nearrow + & \nearrow + \\ & 3 & 12 & 8 & 32 & 12 \\ & \downarrow & \nearrow + & \nearrow + & \nearrow + & \nearrow + \\ & 3 & 2 & 8 & 3 & 14 \end{array}$$

Zwróć uwagę na współczynnik 0 przy x^2 .

3. Wykonaj dzielenie wielomianów, korzystając ze schematu Hornera.

a) $(6x^3 - 3x^2 - 10x + 9) : (x - 3)$

c) $(x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 8) : (x - 2)$

b) $(2x^3 + 4x^2 - 10x - 9) : (x + 2)$

d) $(x^4 - 5x^2 - x - 2) : (x + 2)$



R 2.9. Równość wielomianów

Dwa wielomiany są równe, gdy są wielomianami zerowymi lub mają ten sam stopień, równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej oraz równe wyrazy wolne.

Ćwiczenie 1

Czy istnieje taka wartość parametru a , że wielomian $w(x) = 3ax^2 - x + 2a^2$ jest równy wielomianowi u ?

a) $u(x) = 6x^2 - x + 8$ b) $u(x) = 3x^2 - x + 1$ c) $u(x) = -9x^2 - x + 18$

Przykład 1

Dla jakiej wartości parametru m równość:

$$3x^3 + 8x^2 - 5x - 6 = (3x^2 - x - 2)(x + m)$$

jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

Wykonujemy mnożenie:

$$\begin{aligned}(3x^2 - x - 2)(x + m) &= 3x^3 + 3mx^2 - x^2 - mx - 2x - 2m = \\ &= 3x^3 + (3m - 1)x^2 - (m + 2)x - 2m\end{aligned}$$

Aby wielomiany $3x^3 + 8x^2 - 5x - 6$ oraz $3x^3 + (3m - 1)x^2 - (m + 2)x - 2m$ były równe, muszą być spełnione warunki:

$$\begin{cases} 3m - 1 = 8 & \text{Współczynniki przy } x^2 \text{ muszą być równe.} \\ -m - 2 = -5 & \text{Współczynniki przy } x \text{ muszą być równe.} \\ -2m = -6 & \text{Wyrazy wolne muszą być równe.} \end{cases}$$

Wszystkie trzy równości są jednocześnie prawdziwe dla $m = 3$.

Przykład 2

Wyznacz wartość parametru a tak, aby iloczyn wielomianów $f(x) = ax - 4$ i $g(x) = ax - 1$ był równy wielomianowi $h(x) = 9x^2 + 15x + 4$.

Wyznaczamy iloczyn $f \cdot g$:

$$f(x) \cdot g(x) = (ax - 4)(ax - 1) = a^2x^2 - ax - 4ax + 4 = a^2x^2 - 5ax + 4$$

Aby wielomiany $f(x) \cdot g(x) = a^2x^2 - 5ax + 4$ oraz $h(x) = 9x^2 + 15x + 4$ były równe, muszą być równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej, czyli:

$$a^2 = 9, \text{ stąd } a = -3 \text{ lub } a = 3$$

$$-5a = 15, \text{ stąd } a = -3$$

Obie równości są jednocześnie prawdziwe dla $a = -3$.

Ćwiczenie 2

Dla jakiej wartości parametru m równość jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

a) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x^3 + x^2 + x + 1)(x - m)$

b) $x^4 - 2x^2 - 5x + 2 = (x^3 + 2x^2 + 2x - 1)(x - m)$

c) $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = (x^2 + 2x - 15)(x - m)$

Zadania

1. Dla jakiej wartości parametru m iloczyn wielomianów f i g jest równy wielomianowi h ?

a) $f(x) = x - m$, $g(x) = x + 7$, $h(x) = x^2 + 4x - 21$

b) $f(x) = \frac{1}{2}mx - 2$, $g(x) = x + 2m + 1$, $h(x) = x^2 + 3x - 10$

c) $f(x) = mx + 1$, $g(x) = x - 2m$, $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$

2. Dla jakiej wartości parametru a równość jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

a) $x^3 - x^2 - x - 15 = (x^2 + ax + 5)(x - 3)$

b) $x^3 + x^2 - 17x - 20 = (x^2 + ax - 5)(x + 4)$

c) $2x^3 - 4x^2 - 7x + 18 = (2x^2 + ax + 9)(x + 2)$

3. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian $u \cdot v - w$ jest wielomianem zerowym?

a) $u(x) = -x + 4$, $v(x) = 2x^2 + ax + b$, $w(x) = -2x^3 + 6x^2 + 5x + 12$

b) $u(x) = 2ax + b$, $v(x) = x^2 - x$, $w(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$

4. Dla jakich wartości parametrów a i b równość jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

a) $-x^4 + 5x^3 - x^2 + 8x - 15 = (-x^3 + ax^2 + bx + 3)(x - 5)$

b) $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3 = (2x^3 + ax^2 + bx + 3)(x - 1)$

c) $2x^4 - 3x^3 + 7x + 3 = (2x^3 + ax^2 + bx + 6)(x + \frac{1}{2})$

5. Przedstaw wielomian w jako iloczyn dwóch trójmianów kwadratowych o współczynnikach całkowitych.

a) $w(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$

b) $w(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 5x - 1$

c)* $w(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x + 2$

d)* $w(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 3$

e)* $w(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 11x - 5$

R 2.10. Twierdzenie Bézouta

Po podzieleniu wielomianu w przez dwumian $x - a$ otrzymujemy iloraz p oraz resztę r : $w(x) = p(x)(x - a) + r$. Reszta w tym przypadku jest wielomianem stopnia 0, zatem będziemy pisać krótko: reszta r .

Czasami interesuje nas tylko reszta z dzielenia – wtedy możemy postąpić jak w poniższym przykładzie.

Przykład 1

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = \frac{1}{8}x^3 + x^2 - 3x - 5$ przez dwumian $x - 4$, nie wykonując dzielenia.

Wielomian w zapisujemy w postaci $w(x) = p(x)(x - 4) + r$. Dla $x = 4$:

$$w(4) = p(4)(4 - 4) + r = 0 + r = r$$

Obliczamy resztę z dzielenia wielomianu w przez $x - 4$:

$$r = w(4) = \frac{1}{8} \cdot 4^3 + 4^2 - 3 \cdot 4 - 5 = 8 + 16 - 12 - 5 = 7$$

Twierdzenie o reszcie

Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$, to:

$$r = w(a)$$

D Ćwiczenie 1

Udowodnij twierdzenie o reszcie, korzystając z tego, że wielomian w można przedstawić w postaci $w(x) = p(x)(x - a) + r$.

Przykład 2

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$ przez dwumian $x + 2$, nie wykonując dzielenia.

$$r = w(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - (-2) + 5 = -16 + 12 + 2 + 5 = 3$$

Ćwiczenie 2

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q , nie wykonując dzielenia.

- a) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$, $q(x) = x - 3$
- b) $w(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$, $q(x) = x - \frac{1}{2}$
- c) $w(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$, $q(x) = x + 1$
- d) $w(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x + 6$, $q(x) = x + 2$

Rozważmy przypadek, gdy reszta r z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$ jest równa zeru ($r \equiv 0$), czyli gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Twierdzenie Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Zwrot „wtedy i tylko wtedy, gdy” w twierdzeniu Bézouta [czyt. bezu] oznacza, że jednocześnie prawdziwe są dwa zdania:

Jeżeli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w , to wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Jeżeli wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$, to liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w .

Dowód

Założmy, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w , czyli $w(a) = 0$. Jeśli podzielimy wielomian w przez dwumian $x - a$, to otrzymamy wielomian p i resztę r :

$$w(x) = p(x)(x - a) + r$$

Podstawiamy $x = a$:

$$w(a) = p(a)(a - a) + r = r$$

Ale $w(a) = 0$, więc $r = 0$, co oznacza, że wielomian w jest podzielny przez $x - a$.

Założmy teraz, że wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$, czyli istnieje taki wielomian p , że $w(x) = p(x)(x - a)$. Wówczas $w(a) = p(a)(a - a) = 0$, czyli a jest pierwiastkiem wielomianu w .

Przykład 3

Który z wielomianów: $w(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$ czy $u(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 6$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$?

$w(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 10 = 8 + 8 - 6 - 10 = 0$, zatem wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

$u(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 6 = 8 - 20 + 4 - 6 = -14 \neq 0$, zatem wielomian u nie jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q .

- a) $w(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1$, $q(x) = x - 1$
- b) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 9$, $q(x) = x + 1$
- c) $w(x) = -x^4 + x^3 + 3x^2 + 11$, $q(x) = x - 3$
- d) $w(x) = x^4 + 8x^2 + 2x + 16$, $q(x) = x + 2$

W pewnych przypadkach znajomość jednego z pierwiastków wielomianu umożliwia znalezienie pozostałych pierwiastków.

Przykład 4

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki.

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu w , więc na podstawie twierdzenia Bézouta wielomian ten można przedstawić w postaci:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = p(x)(x - 2)$$

Aby wyznaczyć wielomian p , wykonujemy dzielenie:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3 \\ -x^3 + 2x^2 \\ \hline -2x^2 + x + 6 \\ 2x^2 - 4x \\ \hline -3x + 6 \\ 3x - 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Zatem $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 2x - 3)(x - 2)$.

Pozostałymi pierwiastkami wielomianu w są pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x - 3$. Są to liczby -1 i 3 .

Ćwiczenie 4

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz jego pozostałe pierwiastki i rozłóż wielomian w na czynniki.

- $w(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$, $a = -4$
- $w(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$, $a = 1$
- $w(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$, $a = -2$
- $w(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$, $a = 3$

Jeśli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu trzeciego stopnia w , to pozostałe pierwiastki tego wielomianu (jeżeli istnieją) możemy wyznaczyć w następujący sposób:

- Dzielimy wielomian w przez dwumian $x - a$.
- Otrzymujemy trójmian kwadratowy, którego pierwiastki (jeżeli istnieją) są pozostałymi pierwiastkami wielomianu w . Wyznaczamy te pierwiastki.

Zadania

- Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q , nie wykonując dzielenia.
 - $w(x) = -3x^3 + 11x^2 + 8x - 6$, $q(x) = x + 1$
 - $w(x) = -2x^4 + 10x^2 + x - 8$, $q(x) = x - 2$
 - $w(x) = 8x^3 + 4x^2 + 4x - 4$, $q(x) = x - \frac{1}{2}$

- Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.
 - $w(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14$, $a = 1$
 - $w(x) = 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$, $a = -2$
 - $w(x) = x^3 + 2x^2 - 11x + 20$, $a = -5$
- Sprawdź, która z liczb: -1 , 1 czy 2 jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.
 - $w(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$
 - $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$
 - $w(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$
 - $w(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x - 2$
- Dla jakich wartości parametru m wielomian w jest podzielny przez q ?
 - $w(x) = x^3 + 5x^2 + mx + 3$, $q(x) = x + 3$
 - $w(x) = -2x^3 + m^2x^2 + x - 6$, $q(x) = x - 2$
 - $w(x) = m^2x^3 + mx^2 + x + 7$, $q(x) = x + 1$
- Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian w jest podzielny przez wielomian u .
 - $w(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, $u(x) = (x - 1)(x + 3)$
 - $w(x) = 7x^3 - 6x^2 + 3x + 1$, $u(x) = 2x^2 + x - 1$
 - $w(x) = 4x^4 + x^3 - 19x^2 - 4x + 12$, $u(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$

Czy wiesz, że...

Jeśli q jest wielomianem drugiego stopnia, to wielomian w można przedstawić w postaci $w(x) = p(x)q(x) + ax + b$, gdzie p jest pewnym wielomianem oraz $ax + b$ jest resztą z dzielenia wielomianu w przez wielomian q .

- Reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - 3$ wynosi 7 , a przez dwumian $x + 2$ wynosi -3 . Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez $(x - 3)(x + 2)$.
 - Reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - 1$ wynosi -1 , a przez dwumian $x - 2$ wynosi 3 . Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez $x^2 - 3x + 2$.
- Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez wielomian u , nie wykonując dzielenia.
 - $w(x) = x^7 - 33x + 11$, $u(x) = (x + 1)(x - 2)$
 - $w(x) = x^{99} - 1$, $u(x) = x^2 - 1$

R 2.11. Pierwiastki całkowite wielomianu

Aby znaleźć pierwiastki całkowite równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, możemy skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Dowód

Założmy, że $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$ oraz liczba całkowita x_1 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Wówczas:

$$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = 0$$

$$a_0 = -a_n x_1^n - a_{n-1} x_1^{n-1} - \dots - a_1 x_1 = x_1 (-a_n x_1^{n-1} - a_{n-1} x_1^{n-2} - \dots - a_1)$$

Liczba $-a_n x_1^{n-1} - a_{n-1} x_1^{n-2} - \dots - a_1$ jest całkowita, więc x_1 jest dzielnikiem a_0 .

Przykład 1

Znajdź pierwiastki całkowite wielomianu $w(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

Zgodnie z twierdzeniem, pierwiastków całkowitych wielomianu w szukamy wśród dzielników wyrazu wolnego $a_0 = 3$, czyli wśród liczb: 1, -1, 3 i -3.

$$w(1) = 2 + 3 - 8 + 3 = 0 \quad \text{Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu } w.$$

$$w(-1) = -2 + 3 + 8 + 3 \neq 0 \quad \text{Liczba -1 nie jest pierwiastkiem wielomianu } w.$$

$$w(3) = 54 + 27 - 24 + 3 \neq 0 \quad \text{Liczba 3 nie jest pierwiastkiem wielomianu } w.$$

$$w(-3) = -54 + 27 + 24 + 3 = 0 \quad \text{Liczba -3 jest pierwiastkiem wielomianu } w.$$

Zatem jedynymi pierwiastkami całkowitymi wielomianu w są liczby 1 i -3.

Ćwiczenie 1

Wypisz wszystkie dzielniki całkowite wyrazu wolnego wielomianu w i sprawdź, które z nich są jego pierwiastkami.

$$\text{a) } w(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{c) } w(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$\text{b) } w(x) = 3x^3 + 10x^2 - 9x - 4 \quad \text{d) } w(x) = x^4 - 7x^2 + 10$$

Ćwiczenie 2

Wyznacz pierwiastki całkowite równania.

$$\text{a) } \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{13}{6}x - 1 = 0 \quad \text{b) } \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{17}{4}x - \frac{5}{2} = 0$$

Wskazówka. W podpunkcie a) pomnóż obie strony równania przez 6.

Przykład 2

Rozwiąż równanie $5x^3 - 8x^2 - 5x + 2 = 0$.

Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = 2$ są liczby: 1, -1, 2, -2. Obliczamy wartości wielomianu $w(x) = 5x^3 - 8x^2 - 5x + 2$ dla tych liczb:

$$w(1) = -6 \neq 0, \quad w(-1) = -6 \neq 0, \quad w(2) = 0, \quad w(-2) = -60 \neq 0$$

Zatem liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem całkowitym równania.

Wykonujemy dzielenie:

$$(5x^3 - 8x^2 - 5x + 2) : (x - 2) = 5x^2 + 2x - 1$$

i wyznaczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $5x^2 + 2x - 1$:

$$\Delta = 4 + 20 = 24, \quad x_1 = \frac{-1 - \sqrt{6}}{5}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{6}}{5}$$

Zatem pierwiastkami równania są liczby: $\frac{-1 - \sqrt{6}}{5}$, $\frac{-1 + \sqrt{6}}{5}$ i 2.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie. Zaczynij od znalezienia pierwiastka całkowitego.

$$\text{a) } x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0 \quad \text{c) } x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$\text{b) } 3x^3 + 3x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{d) } 2x^3 + 8x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9 = 0$.

Wyraz wolny $a_0 = 9$ ma następujące dzielniki: 1, -1, 3, -3, 9, -9. Stwierdzamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem całkowitym tego równania. Zatem wielomian $w(x) = x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9$ jest podzielny przez $x - 1$:

$$(x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9) : (x - 1) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$$

Otrzymany wielomian rozkładamy na czynniki, grupując wyrazy:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 3x - 9 &= x^2(x + 3) - 3(x + 3) = (x^2 - 3)(x + 3) = \\ &= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 3) \end{aligned}$$

Stąd:

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9 = (x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 3)$$

Zatem rozwiązaniami równania są liczby: -3, $-\sqrt{3}$, 1 i $\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 20x + 15 = 0 \quad \text{d) } x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = 0$$

$$\text{b) } x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18 = 0 \quad \text{e) } \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{c) } 2x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0 \quad \text{f) } x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 12x + 4 = 0$$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- | | |
|--------------------------------|----------------------------------|
| a) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$ | e) $3x^3 + 11x^2 - 3x + 4 = 0$ |
| b) $x^3 - 7x - 6 = 0$ | f) $5x^2 - 2x = 1 - 6x^3$ |
| c) $2x^3 + 9x^2 + 10x + 3 = 0$ | g) $x^3 - 6 = 4x^2 - 5x$ |
| d) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 4 = 0$ | h) $-3x^3 + 15x^2 - 20x + 6 = 0$ |

2. Rozwiąż równanie.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $2x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x = 0$ | d) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$ |
| b) $x^4 + x^2 - 6x + 4 = 0$ | e) $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 19x - 6 = 0$ |
| c) $2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$ | f) $4x^4 + 12x^3 + 13x^2 + 6x + 1 = 0$ |

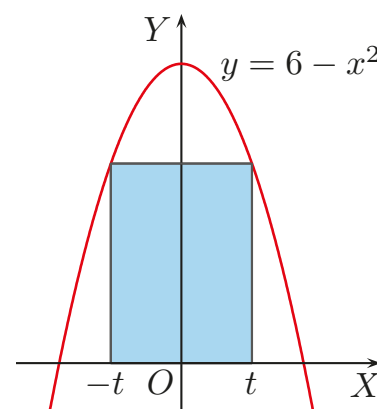
3. Rozwiąż równanie.

- | | |
|--|---|
| a) $\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = x^3$ | d) $\frac{1}{6}x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x + 1 = 0$ |
| b) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$ | e) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 = x + \frac{1}{2}$ |
| c) $\frac{x^3 + x^2}{15} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}$ | f) $2x^4 - 5x^3 - 3x^2 = (3x - 9)(2x^2 + x)$ |

4. Dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi OX , a dwa pozostałe – nad osią OX i należą do paraboli o równaniu $y = 6 - x^2$ (rysunek obok).

a) Podaj wzór wielomianu opisującego pole tego prostokąta w zależności od t . Jaka jest dziedzina tej funkcji?

b) Dla jakiej wartości t pole tego prostokąta jest równe 8?

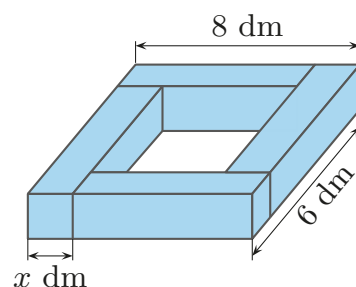


5. Dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi OX , a dwa pozostałe należą do paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Pole tego prostokąta jest równe 39. Wyznacz współrzędne jego wierzchołków.

6. Fragment drewnianej konstrukcji (rysunek obok) został wyprodukowany z belek, których przekrój jest kwadratem o boku x dm.

a) Objętość bryły, którą tworzy ta konstrukcja, jest równa 24 dm^3 . Oblicz x .

b) Objętość bryły, którą tworzy ta konstrukcja, jest równa 80 dm^3 . Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły.



Dowiedz się więcej

Równania wielomianowe. Wzór Cardano

Istnieją wzory pozwalające rozwiązywać dowolne równania wielomianowe stopnia trzeciego i czwartego. Odkryli je Włosi: Niccolò Fontana, zwany także Tartaglia [czyt. tartalja] (1499 lub 1500–1557), Girolamo Cardano [czyt. dzirolamo kardano] (1501–1576, rycina obok) i Lodovico Ferrari (1522–1565). W 1545 r. Cardano opublikował wzory pozwalające rozwiązać dowolne równanie postaci $x^3 + ax = b$.



1. Rozwiąż równanie $x^3 + x = 2$, korzystając:

a) z twierdzenia o pierwiastkach całkowitych,



b) z poniższego **wzoru Cardano** dla równania $x^3 + ax = b$.

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$



2. Rozwiąż równanie, korzystając ze wzoru Cardano.

a) $x^3 - 2x - 21 = 0$

b) $x^3 + 6x - 20 = 0$

3.* Przeczytaj informację w ramce.

Równanie postaci:

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

można sprowadzić do postaci $y^3 + ay = b$, podstawiając $x = y - \frac{a_2}{3}$.

a) Wyznacz pierwiastek równania $x^3 - 6x^2 + 18x - 18 = 0$, korzystając z powyższej informacji i wzoru Cardano.



b) Uzasadnij, że istnieją: pierwiastek x_1 równania $x^3 + 3x^2 + 9x + 9 = 0$ oraz pierwiastek x_2 równania $x^3 - 3x^2 + 9x - 5 = 0$ takie, że spełniony jest warunek $x_2 - x_1 = 2$.

Nie istnieje ogólna metoda znajdowania pierwiastków wielomianów stopnia $n \geq 5$. W 1803 r. ukazała się praca Włocha Paola Ruffiniego (1765–1822), w której dowodził on nieistnienia takiej metody dla wielomianów stopnia piętego. Dowód dla wielomianów stopnia $n \geq 5$ przedstawił w 1824 r. Norweg Niels Henrik Abel (1802–1829, rycina obok).



R 2.12. Pierwiastki wielokrotne wielomianu

Przykład 1

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$.

$$w(x) = x(x^2 - 8x + 16) = x(x - 4)^2$$

Zatem pierwiastkami wielomianu w są liczby 0 i 4.

W rozkładzie na czynniki wielomianu $w(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$ czynnik $x - 4$ występuje dwa razy. Dlatego liczbę 4 nazywamy **pierwiastkiem dwukrotnym** (podwójnym) wielomianu w . Liczba 0 jest **pierwiastkiem jednokrotnym** (pojedynczym) tego wielomianu.

Definicja

Jeżeli w rozkładzie wielomianu w na czynniki występuje czynnik $(x - a)^k$ i nie występuje czynnik $(x - a)^{k+1}$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$, to liczbę a nazywamy **pierwiastkiem k -krotnym** wielomianu w .

Przykład 2

Podaj pierwiastki wielomianu w i określ krotność każdego z nich.

a)

$$w(x) = x^3(x + 2)(x - 3)^2$$

↙	↓	↘
0	-2	3
pierwiastki:		
krotność:	trzykrotny	jednokrotny dwukrotny

b)

$$w(x) = x^2(x^2 - 9)(x + 3)^3 = x^2(x - 3)(x + 3)(x + 3)^3 = x^2(x - 3)(x + 3)^4$$

↙	↓	↘
0	3	-3
pierwiastki:		
krotność:	dwukrotny	jednokrotny czterokrotny

Ćwiczenie 1

Czy liczba 2 jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu w ?

a) $w(x) = (x - 2)(x^2 - 4)$ b) $w(x) = (x - 2)^2(x^2 - x - 2)$

Ćwiczenie 2

Podaj pierwiastki wielomianu w oraz określ krotność każdego z nich.

a) $w(x) = x^4(x + \frac{3}{2})^2(x - 1)$ c) $w(x) = (x - 4)^3(x^2 - 16)$
b) $w(x) = -3x(x^2 + 1)(x^2 + 2)$ d) $w(x) = 7x(x - 2)(5x + 3)(x^2 - 4)^2$

Możemy mówić również o pierwiastkach jednokrotnych lub wielokrotnych równania wielomianowego $w(x) = 0$.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$. Podaj krotność każdego pierwiastka.

Pierwiastków całkowitych wielomianu $w(x) = 4x^3 - 7x^2 + 2x + 1$ szukamy wśród dzielników jego wyrazu wolnego: $w(1) = 4 - 7 + 2 + 1 = 0$, czyli liczba 1 jest pierwiastkiem.

Wykonujemy dzielenie:

$$\begin{array}{r} (4x^3 - 7x^2 + 2x + 1) : (x - 1) = 4x^2 - 3x - 1 \\ -4x^3 + 4x^2 \\ \hline -3x^2 + 2x + 1 \\ 3x^2 - 3x \\ \hline -x + 1 \\ x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Wyznaczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $4x^2 - 3x - 1$:

$$\Delta = 9 + 16 = 25, \quad x_1 = \frac{3-5}{8} = -\frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{3+5}{8} = 1$$

Zatem pierwiastkami równania $4x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$ są liczby $-\frac{1}{4}$ i 1. Równanie można zapisać w postaci $4(x - 1)^2(x + \frac{1}{4}) = 0$, więc liczba 1 jest jego pierwiastkiem dwukrotnym, a liczba $-\frac{1}{4}$ – pierwiastkiem jednokrotnym.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie. Podaj krotność każdego pierwiastka.

a) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$ c) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4x = 0$
b) $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$ d) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$

Twierdzenie

Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Powyższe twierdzenie jest prostym wnioskiem z twierdzenia Bézouta.

Ćwiczenie 4

Poniżej podano wielomian w oraz wszystkie jego pierwiastki całkowite wraz z krotnościami każdego z nich. Czy wielomian ten może mieć jeszcze inne pierwiastki?

a) $w(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x + 3$, pierwiastki jednokrotne: $-3, 1, 2$
b) $w(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x + 9$, pierwiastek dwukrotny: 3

Zadania

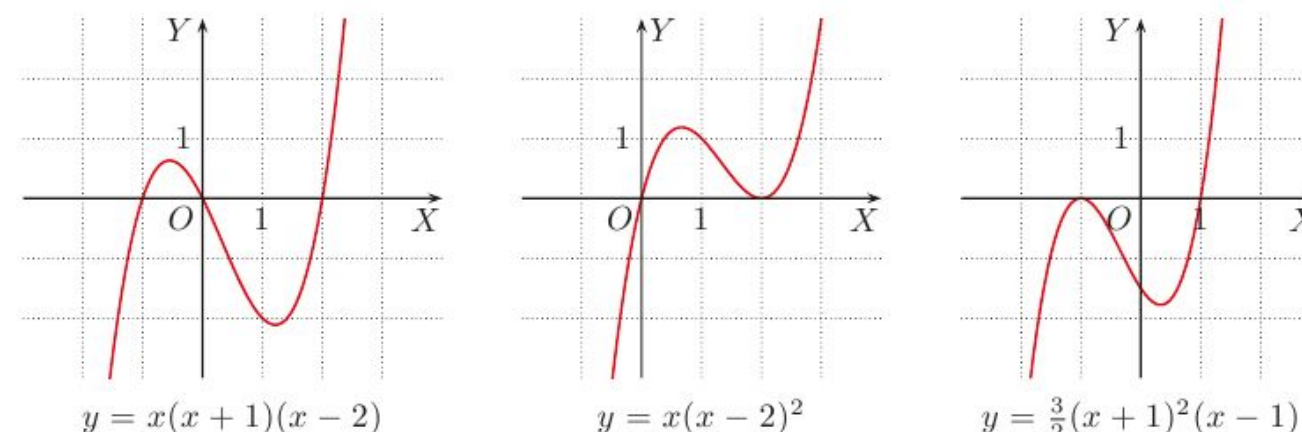
- Rozwiąż równanie. Podaj krotność każdego pierwiastka.
 - $(2x+1)(x^2+x-6)=0$
 - $(x+1)^2(2x-4)=0$
 - $(5-x)(x^2-7x+10)=0$
 - $(x^2+2x-3)(x-1)^3=0$
 - $(x^2-9)(x+3)^2=0$
 - $(x^2-x-6)(x^2+x-1)=0$
 - $(x^2-4)^2(x^4+3x^3-10x^2)=0$
 - $(x^3+x^2-12x)(x^4-5x^3+6x^2)=0$
- Uzasadnij, że równanie nie ma pierwiastków wielokrotnych.
 - $x^3-5x^2-2x+24=0$
 - $3x^3+x^2-12x-4=0$
 - $2x^3+8x^2+9x+2=0$
 - $x^3+6x^2+8x+15=0$
- Rozwiąż równanie. Podaj krotność każdego pierwiastka.
 - $x^3-3x^2-4x=0$
 - $x^5-6x^4+9x^3=0$
 - $x^4-2x^2+1=0$
 - $x^4-4x^2+4=0$
 - $x^4+4x^3+5x^2=0$
 - $x^5+4x^4+4x^3=0$
 - $x^3+3x^2-4x=0$
 - $3x^4-2x^3+x^2=0$
 - $x^7-16x^3=0$
- Liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.
 - $w(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x + 4, x_0 = 2$
 - $w(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x - 3, x_0 = -1$
 - $w(x) = -12x^3 + 16x^2 - 7x + 1, x_0 = \frac{1}{2}$
- Podaj przykład wielomianu, którego jedynymi pierwiastkami są liczby: $-3, 2, 4$ i którego stopień jest równy: a) 3, b) 4, c) 6.
- Podaj przykład wielomianu o wyrazie wolnym $a_0 = 2$, który ma tylko jeden pierwiastek dwukrotny równy 3 i którego stopień jest równy: a) 2, b) 4, c) 6.
- Dla jakich wartości parametru a liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w ?
 - $w(x) = (x+3)(x^2+ax+6), x_0 = -3$
 - $w(x) = (2x^2-7x-4)(x^2-4a^2), x_0 = 4$
- Czy istnieje taka wartość parametru a , dla której liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w ?
 - $w(x) = 6x^4 + 8x^3 - 8x^2 + ax + a + 10, x_0 = -1$
 - $w(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + (a+5)x + 4, x_0 = 2$

R 2.13. Wykres wielomianu

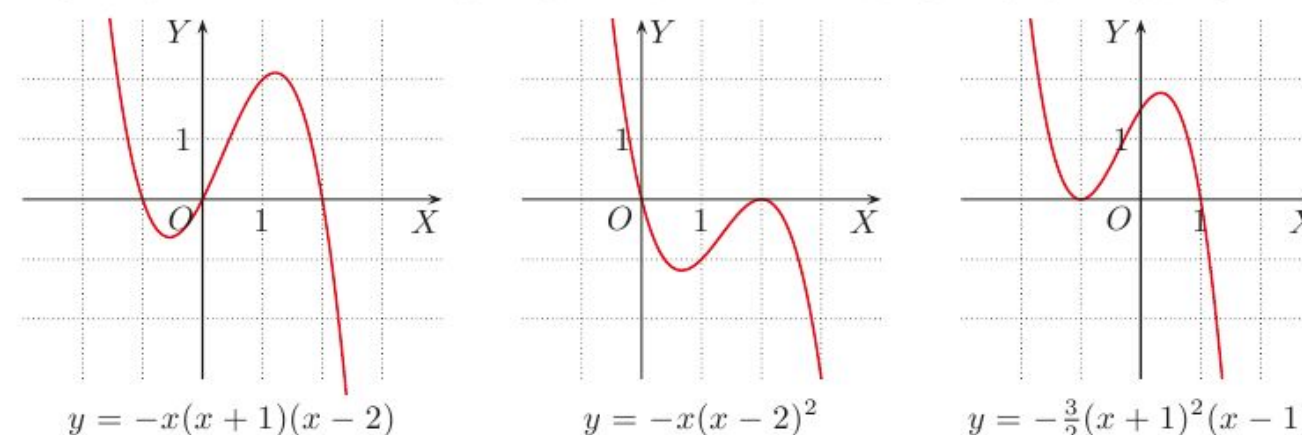
Wykresem wielomianu stopnia pierwszego, $w(x) = ax + b$, jest prosta, a wykresem wielomianu stopnia drugiego, $w(x) = ax^2 + bx + c$, jest parabola. Dokładne narysowanie wykresu wielomianu wyższego stopnia, bez korzystania z kalkulatora graficznego lub komputera, może okazać się bardzo pracochłonne. Można natomiast sprawnie naszkicować przybliżony kształt wykresu, gdy znamy pierwiastki wielomianu.

Poniżej przedstawiono wykresy kilku wielomianów trzeciego stopnia.

Wykresy wielomianów o dodatnim współczynniku przy najwyższej potęgde:



Wykresy wielomianów o ujemnym współczynniku przy najwyższej potęgde:



Zauważ, że gdy wykres wielomianu przechodzi przez pierwiastek jednokrotny, wartości wielomianu zmieniają znak z dodatniego na ujemny lub odwrotnie. Mówimy wtedy, że wielomian **zmienia znak**. Natomiast w pierwiastkach dwukrotnych wielomian nie zmienia znaku.

Znak wielomianu w przedziale $(a; \infty)$, gdzie a jest największym pierwiastkiem, jest taki sam jak znak współczynnika przy najwyższej potęgde. Wielomian zmienia znak tylko w pierwiastkach krotności nieparzystej.

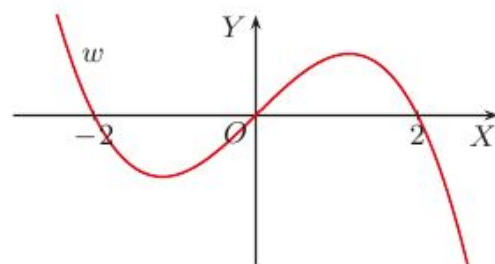
Przykład 1

Określ znak wielomianu w w przedziale $(a; \infty)$, gdzie a jest największym pierwiastkiem, i naszkicuj wykres tego wielomianu.

a) $w(x) = -x(x+2)(x-2)$

Wielomian w ma tylko pierwiastki jednokrotne: $-2, 0$ i 2 , co oznacza, że zmienia on znak w każdym z tych pierwiastków.

Współczynnik przy najwyższej potęgze jest ujemny, więc wielomian w przedziale $(2; \infty)$ przyjmuje wartości ujemne.

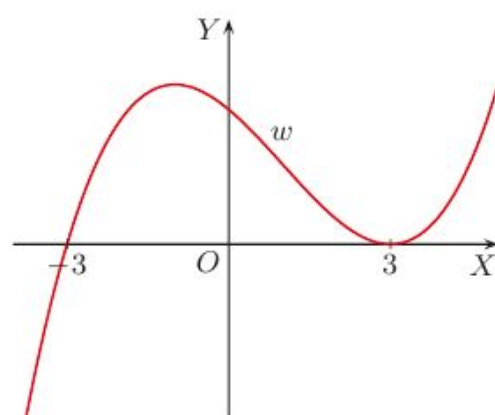


b) $w(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2(x+3)$

Pierwiastkami wielomianu w są liczby:

- -3 – pierwiastek jednokrotny – wielomian zmienia znak,
- 3 – pierwiastek dwukrotny – wielomian nie zmienia znaku.

Współczynnik przy najwyższej potęgze jest dodatni, więc wielomian w przedziale $(3; \infty)$ przyjmuje wartości dodatnie.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres wielomianu w .

a) $w(x) = (x-3)(x-1)(x+2)$

d) $w(x) = -x(x^2 + 2x + 1)$

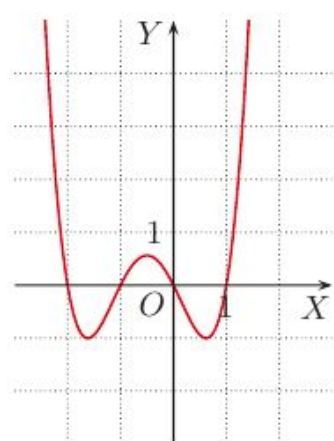
b) $w(x) = x(x+3)^2$

e) $w(x) = (1-x)(x^2 + 4x - 5)$

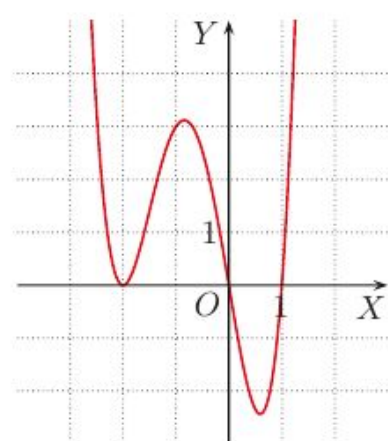
c) $w(x) = x^2(x-1)$

f) $w(x) = (2-x)(x^2 + 6x + 9)$

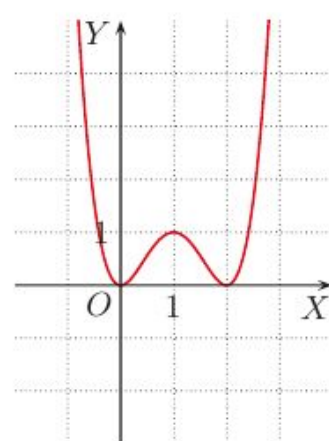
Poniżej przedstawiono wykresy kilku wielomianów czwartego stopnia o dodatnim współczynniku przy najwyższej potęgze.



$y = x(x+2)(x+1)(x-1)$

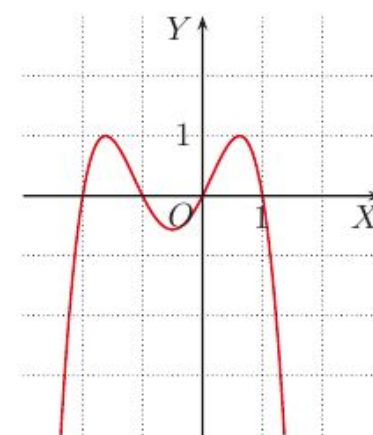


$y = \frac{3}{2}x(x-1)(x+2)^2$

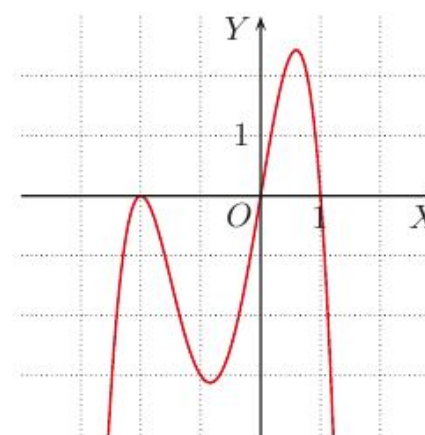


$y = x^2(x-2)^2$

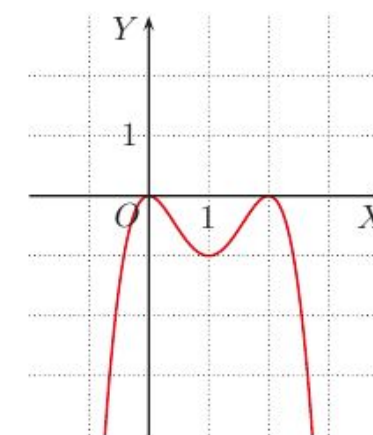
Poniżej przedstawiono wykresy kilku wielomianów czwartego stopnia o ujemnym współczynniku przy najwyższej potęgze.



$y = -x(x+2)(x+1)(x-1)$



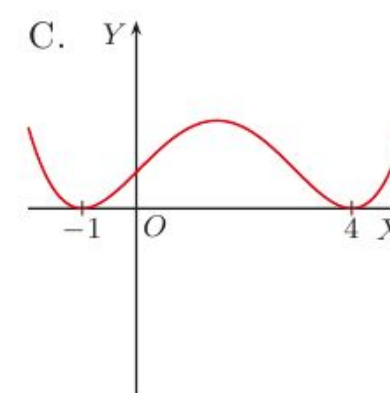
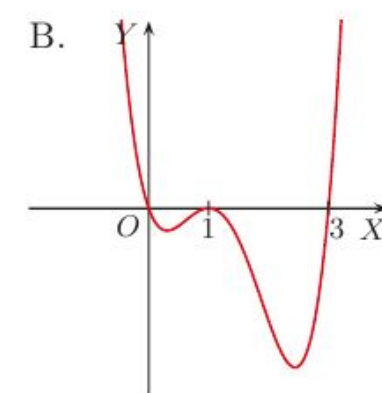
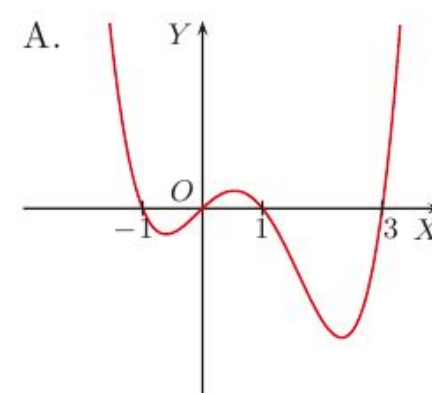
$y = -\frac{3}{2}x(x-1)(x+2)^2$



$y = -x^2(x-2)^2$

Ćwiczenie 2

Poniżej przedstawiono szkice wykresów wielomianów czwartego stopnia, dla których współczynnik przy najwyższej potęgze jest dodatni ($a_4 > 0$).

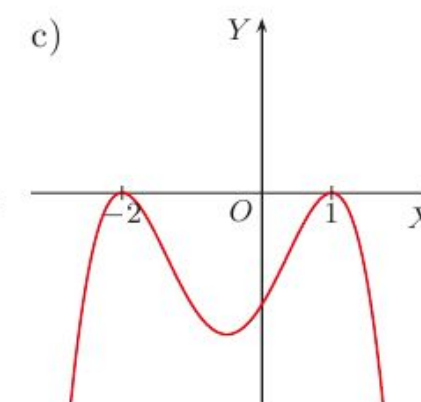
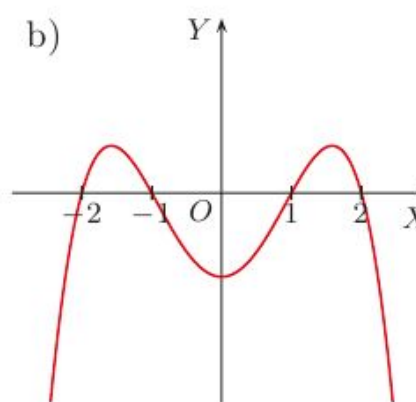
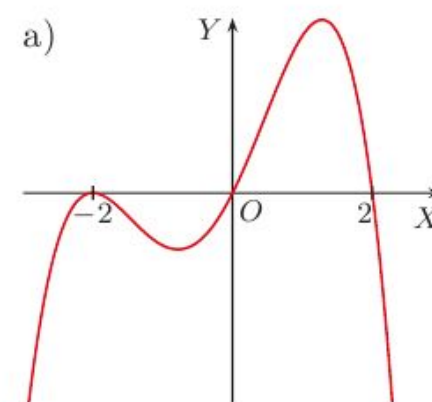


Dobierz szkic wykresu do każdego z podanych wielomianów:

$u(x) = x(x-1)^2(x-3)$, $v(x) = (x+1)^2(x-4)^2$, $w(x) = x(x+1)(x-1)(x-3)$.

Ćwiczenie 3

Poniżej przedstawiono szkic wykresu wielomianu czwartego stopnia o współczynniku $a_4 = -1$. Podaj wzór tego wielomianu.



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres wielomianu w .

- a) $w(x) = (x+3)(x+1)(x-2)^2$ c) $w(x) = -3x^2(x+4)(x-1)$
 b) $w(x) = 2x^2(x-3)^2$ d) $w(x) = -(x+2)(x-1)(2x^2-8)$

Przykład 2

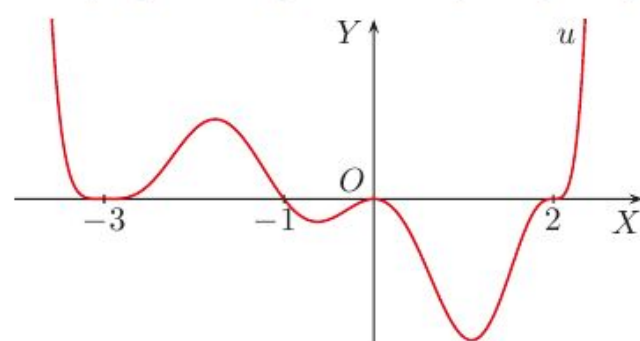
Naszkicuj wykres wielomianu $u(x) = 4x^2(x+3)^2(x+1)(x-2)^3$.

Stopień wielomianu: 8, jego pierwiastki: 0, -3, -1, 2.

Krotność pierwiastków wielomianu: -3, -1, 0, 2.
 dwukrotny jednokrotny dwukrotny trzykrotny

Współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, więc wielomian u w przedziale $(2; \infty)$ przyjmuje wartości dodatnie.

W pierwiastkach o parzystej krotności (czyli w -3 i 0) wielomian nie zmienia znaku.



Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres wielomianu w .

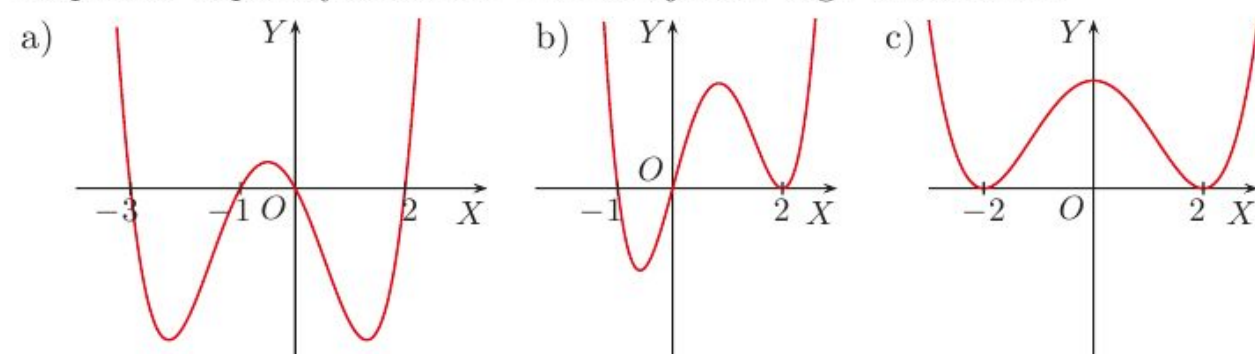
- a) $w(x) = (x-3)(2x+1)^2(x+1)^3$ c) $w(x) = -3(x-5)(x+1)^2(x-2)^2$
 b) $w(x) = \frac{1}{4}(x-3)(x+4)^2(x^2-9)$ d) $w(x) = -5(x-1)^2(x+3)^2(1-x^2)$

Zadania

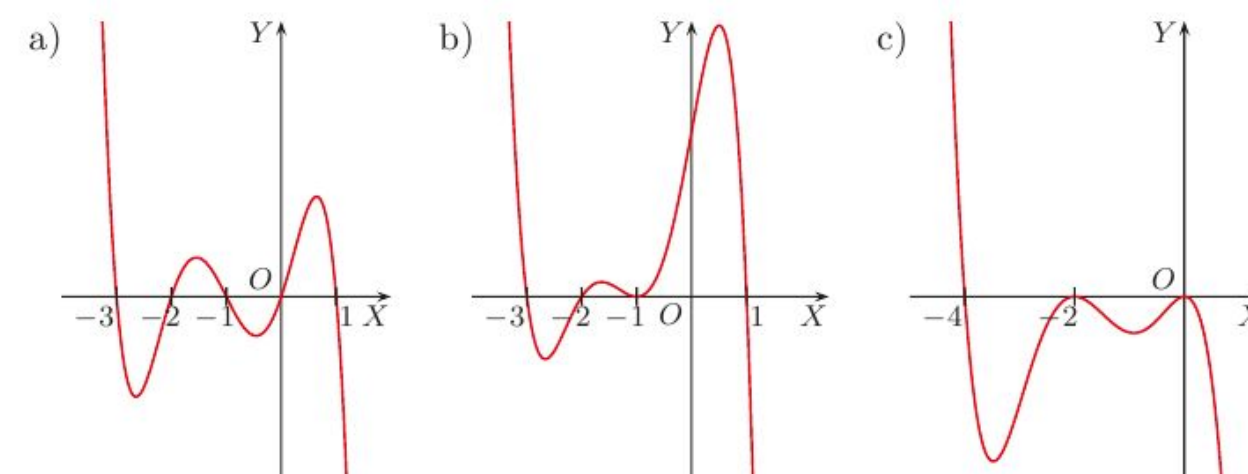
1. Naszkicuj wykres wielomianu w .

- a) $w(x) = (x-1)(x+2)(x+4)$ d) $w(x) = (3-x)^2(4-x^2)$
 b) $w(x) = -(x+3)(1+x)(2-x)$ e) $w(x) = 3(x-4)(x+2)^2(x+3)$
 c) $w(x) = -\frac{1}{2}(x+3)(-x-2)^2$ f) $w(x) = -2(x^2-2)(x^2-9)$

2. Na rysunku poniżej przedstawiono szkic wykresu wielomianu czwartego stopnia o współczynniku $a_4 = 1$. Podaj wzór tego wielomianu.



3. Na rysunku poniżej przedstawiono szkic wykresu wielomianu piątego stopnia o współczynniku $a_5 = -1$. Podaj wzór tego wielomianu.



4. Naszkicuj wykres wielomianu w . Dla jakich argumentów wielomian ten przyjmuje wartości ujemne?

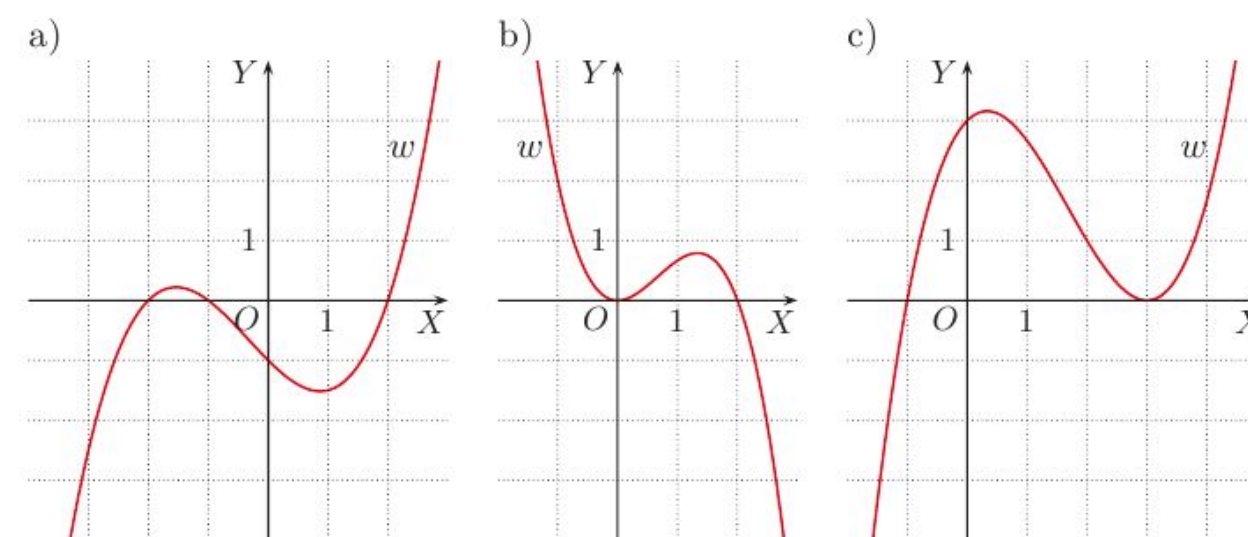
- a) $w(x) = (x-4)^2(x+3)$ d) $w(x) = 4x^2(x+1)(x-6)$
 b) $w(x) = (x^2-5)(x+2)$ e) $w(x) = -3(x^2-4)(x-2)^2$
 c) $w(x) = (1-x^2)(x-3)$ f) $w(x) = (x^2+6x+9)^2$

5. Naszkicuj wykres wielomianu w . Dla jakich argumentów wielomian ten przyjmuje wartości nieujemne?

- a) $w(x) = (x-2)(x-3)^3(x-4)^4$ d) $w(x) = 2x(x+2)(x^2-4)(3-x)^3$
 b) $w(x) = -x^2(x+1)^2(x+2)^2$ e) $w(x) = -7(x^2+3)(3-x^2)(3-x)^2$
 c) $w(x) = 6x(x^2-6x)(x^2-x)$ f) $w(x) = (9x^2-1)(3x-1)^2(x-3)$

6. Dany jest wykres wielomianu w trzeciego stopnia. Naszkicuj wykres wielomianu $v(x) = w(-x)$ i zapisz jego wzór w postaci:

$$v(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$



R 2.14. Nierówności wielomianowe

Przykład 1

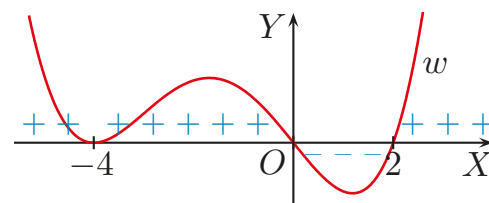
Na rysunku obok przedstawiono szkic wykresu wielomianu:

$$w(x) = x(x+4)^2(x-2)$$

Rozwiąż nierówność $x(x+4)^2(x-2) > 0$.

Z rysunku odczytujemy, że wielomian w przyjmuje wartości dodatnie dla:

$$x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (2; \infty)$$

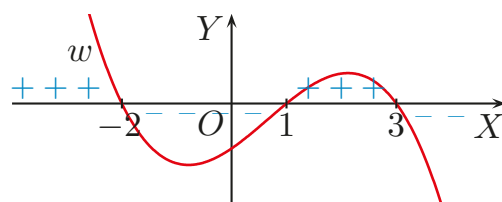


Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność, korzystając ze szkicu wykresu wielomianu:

$$w(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x-1)(x-3)$$

a) $-\frac{1}{4}(x+2)(x-1)(x-3) > 0$ b) $-\frac{1}{4}(x+2)(x-1)(x-3) \leq 0$



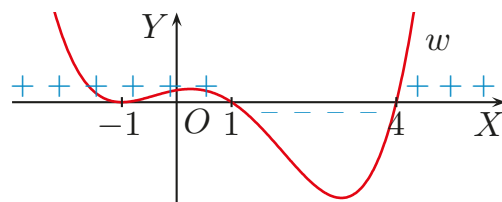
Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność, korzystając ze szkicu wykresu wielomianu:

$$w(x) = (x+1)^2(x-1)(x-4)$$

a) $(x+1)^2(x-1)(x-4) > 0$ c) $(x+1)^2(x-1)(x-4) \geq 0$

b) $(x+1)^2(x-1)(x-4) < 0$ d) $(x+1)^2(x-1)(x-4) \leq 0$



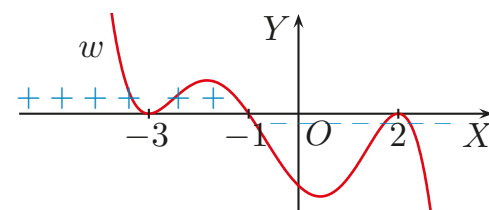
Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność, korzystając ze szkicu wykresu wielomianu:

$$w(x) = -(x+3)^2(x+1)(x-2)^2$$

a) $-(x+3)^2(x+1)(x-2)^2 > 0$ c) $-(x+3)^2(x+1)(x-2)^2 < 0$

b) $-(x+3)^2(x+1)(x-2)^2 \geq 0$ d) $-(x+3)^2(x+1)(x-2)^2 \leq 0$



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres odpowiedniego wielomianu i rozwiąż nierówność.

a) $3(x-5)(x+2)(x+4) < 0$ c) $\frac{4}{5}(x+3)^2(x-2) \geq 0$

b) $-2(x-5)(x+2)^2(x+4) < 0$ d) $-\frac{1}{2}(x-5)^2(x+2)^2 \geq 0$

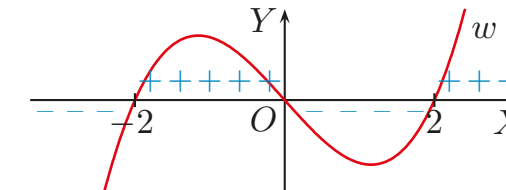
Przykład 2

Rozwiąż nierówność $x^3 - 4x > 0$.

Rozkładamy wielomian $w(x) = x^3 - 4x$ na czynniki:

$$w(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$$

Pierwiastkami wielomianu w są liczby: 0, 2 oraz -2. Szkicujemy wykres wielomianu w i odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności $w(x) > 0$: $x \in (-2; 0) \cup (2; \infty)$.



Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-x^4 + x^3 + 6x^2 \leq 0$.

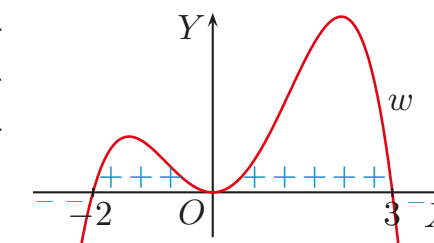
Rozkładamy wielomian $w(x) = -x^4 + x^3 + 6x^2$ na czynniki:

$$\begin{aligned} w(x) &= -x^4 + x^3 + 6x^2 = \\ &= -x^2(x^2 - x - 6) = \\ &= -x^2(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

Pierwiastkami trójmianu $x^2 - x - 6$ są liczby -2 i 3.

Pierwiastkami wielomianu w są liczby: 0 (pierwiastek dwukrotny), -2, 3. Szkicujemy wykres wielomianu w i odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności $w(x) \leq 0$:

$$x \in (-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [3; \infty)$$



Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność.

a) $-x^3 + 2x^2 - x < 0$ c) $x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0$ e) $2x^3 + x^2 - 8x - 4 > 0$

b) $-x^3 + x^2 + 6x \geq 0$ d) $-x^4 + 10x^3 + 11x^2 > 0$ f) $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 \leq 0$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $x(x+2)(x^2+x+3) < 0$.

Trójmian $x^2 + x + 3$ przyjmuje tylko wartości dodatnie. Zatem możemy obie strony nierówności podzielić przez ten trójmian. Otrzymujemy nierówność kwadratową:

$$x(x+2) < 0$$

której zbiorem rozwiązań jest przedział $(-2; 0)$ – jest to zbiór rozwiązań wyjściowej nierówności.

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

a) $(x^2 + 3x + 4)(x^2 + 3x - 4) > 0$ b) $x^3 - 3x^2 + x - 3 \leq 0$

Przykład 5

Rozwiąż nierówność $x^3 - 6x^2 + 8x - 3 \leq 0$.

Szukamy pierwiastków całkowitych wielomianu:

$$w(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 3$$

wśród dzielników jego wyrazu wolnego, czyli wśród liczb: 1, -1, 3, -3.

$w(1) = 0$, więc 1 jest pierwiastkiem wielomianu w . Wykonujemy dzielenie:

$$(x^3 - 6x^2 + 8x - 3) : (x - 1) = x^2 - 5x + 3$$

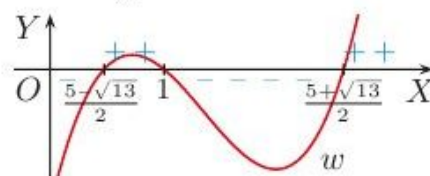
Obliczamy wyróżnik i pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 5x + 3$:

$$\Delta = 25 - 12 = 13, \quad x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

Szkicujemy wykres wielomianu w i odczytujemy

zbiór rozwiązań nierówności $w(x) \leq 0$:

$$x \in \left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[1; \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right]$$



Ćwiczenie 7

Wyznacz pierwiastki wielomianu w , a następnie rozwiąż nierówność $w(x) \leq 0$.

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $w(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ | c) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ |
| b) $w(x) = x^3 + 8x^2 + 17x + 4$ | d) $w(x) = -x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 8x$ |

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

- | | | |
|-------------------------|--------------------|-------------------------------|
| a) $9x^3 - 4x > 0$ | d) $x^4 < 8x$ | g) $2x^3 + 5x^2 - 3x > 0$ |
| b) $4x^3 + 3x^2 \geq 0$ | e) $x^4 \leq 8x^2$ | h) $-x^3 + 2x^2 + 4x \leq 0$ |
| c) $x^3 + 4x \leq 4x^2$ | f) $x^3 > 8x^4$ | i) $x^4 + 5x^3 - 2x^2 \geq 0$ |

2. Rozwiąż nierówność.

- | | |
|---|--|
| a) $x^3 + \sqrt{2}x^2 - x - \sqrt{2} \leq 0$ | e) $x^4 - 5x^3 + x - 5 < 0$ |
| b) $4x^3 + 12x^2 - x - 3 > 0$ | f) $x^4 + 2x^3 - 6x - 12 \geq 0$ |
| c) $2x^3 - 3x^2 - 10x + 15 \leq 0$ | g) $6x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 > 0$ |
| d) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - 6x - 2 < 0$ | h) $\sqrt{3}x^5 - \sqrt{6}x^4 - \sqrt{6}x^3 + 2\sqrt{3}x^2 \geq 0$ |

3. Rozwiąż nierówność.

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| a) $x^4 - x^3 - 2x - 4 \leq 0$ | e) $(x^2 + 2x + 1)(3x^2 - x - 1) < 0$ |
| b) $x^3 + 6x^2 + 6x > -5$ | f) $(x^2 + x - 2)(2x^2 - 3x + 1) > 0$ |
| c) $-x^3 + 2x^2 + 4x > 3$ | g) $3(x^4 - x^2 + 1) < 4 - x^4$ |
| d) $x^3 - 6x^2 + 12x \leq 8$ | h) $x^4 - x^2 + 24 \geq 12(x^2 - 1)$ |

4. Wyznacz zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.

- a) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^3 - 4x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x^3 - x^2 - 9x + 9 \leq 0\}$
b) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^4 - 16x^2 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0\}$
c) $A = \{x \in \mathbb{R}: 3x^3 - x^2 - 6x + 2 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: x - x^2 > 2x^3\}$

5. Wyznacz zbiór tych argumentów x , dla których spełnione są jednocześnie nierówności $f(x) > g(x)$ i $g(x) \geq h(x)$.

- a) $f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = 4x^3 + 8x^2$, $h(x) = 4x^2 - x$
b) $f(x) = x^4 + x^3$, $g(x) = 3x - x^2$, $h(x) = x^3 + 2x^2 - 9$
c) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 3x^3 - 3x + 1$

6. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g , a następnie odczytaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq g(x)$.

- a) $f(x) = x^3$, $g(x) = x$ b) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$

7. Dla jakiej wartości parametru m liczba a jest miejscem zerowym funkcji f ? Rozwiąż nierówność $f(x) \geq 0$ dla wyznaczonej wartości m .

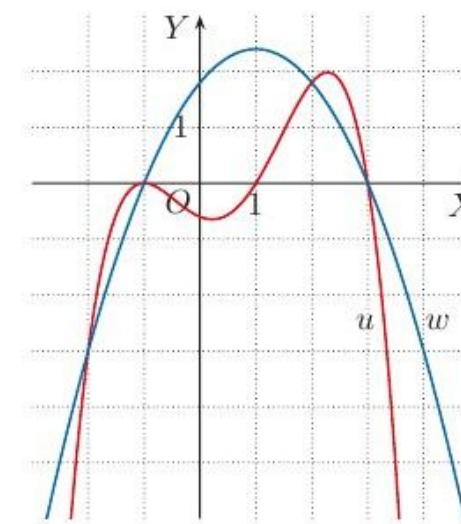
- a) $f(x) = x^3 - x^2 + mx + 4$, $a = 1$
b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx - 4$, $a = -2$
c) $f(x) = (2 - 3m)x^3 - 2x^2 + x - 2$, $a = -1$
d) $f(x) = x^3 + (m^2 - 4)x^2 - 7x - 6$, $a = 3$

8. Wyznacz dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2} + \sqrt{25 - x^2}$ d) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3 - 16x}$
b) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x^3 - 4x}} - \sqrt{x^2 - 9}$ e) $f(x) = \sqrt{x^3 - 7x^2 + 12x} + \frac{1}{\sqrt{x^4 - 16}}$
c) $f(x) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 8}$ f) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{9x^4 - 12x^2 + 4}} - \frac{2x^3 - 4x}{\sqrt{-4x^4 + 17x^2 - 4}}$

9. Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu u czwartego stopnia oraz wykres trójmianu kwadratowego w . Odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności.

- a) $u(x) \cdot w(x) > 0$
b) $u(x) \cdot w(x) \leq 0$
c) $u(x) - w(x) < 0$



Czy wiesz, że...

Nierówności wielomianowe można również rozwiązywać, korzystając z tak zwanej **siatki znaków**. Aby ją utworzyć, należy doprowadzić nierówność do postaci, w której po jednej stronie znajdzie się wielomian rozłożony na czynniki, a po drugiej stronie – zero. Na przykład:

$$(x + 4)(x - 1)(x - 3) < 0$$

Następnie należy określić znaki czynników w przedziałach wyznaczonych przez pierwiastki wielomianu.

	$x < -4$	-4	$-4 < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$x > 3$
$x + 4$	–	0	+	+	+	+	+
$x - 1$	–	–	–	0	+	+	+
$x - 3$	–	–	–	–	–	0	+
iloczyn	–	0	+	0	–	0	+

Z ostatniego wiersza tabeli odczytujemy, że nierówność zachodzi dla:

$$x \in (-\infty; -4) \cup (1; 3)$$

10. Rozwiąż nierówność, korzystając z siatki znaków.

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| a) $x(2x + 1)(x + 6) < 0$ | e) $x^3 + 3x^2 - 4 > 0$ |
| b) $(2 - 3x)(x^2 - 2) \geq 0$ | f) $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 \leq 0$ |
| c) $(x^2 - 4)(x - 3)^2 > 0$ | g) $x^3 - 7x - 6 < 0$ |
| d) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 \leq 0$ | h) $(x^2 - 4)(x^2 + x - 12) \geq 0$ |

11. Aby rozwiązać nierówność:

$$(x + 2)(x + 1)(x - 3) \geq 0$$

uczeń sporządził siatkę znaków. Trzy znaki w tabeli są wpisane błędnie. Wskaż błędy i podaj poprawny zbiór rozwiązań nierówności.

	$x < -2$	-2	$-2 < x < -1$	-1	$-1 < x < 3$	3	$x > 3$
$x + 2$	–	0	+	+	–	+	+
$x + 1$	–	–	–	0	+	+	+
$x - 3$	–	–	–	–	–	0	+
iloczyn	+	0	+	0	+	0	+

R 2.15. Wielomiany – zastosowania

Ćwiczenie 1

Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości 5 cm, 6 cm i 8 cm. Każdą jego krawędź zwiększono o x cm, w wyniku czego objętość prostopadłościanu wzrosła o 320 cm^3 . Oblicz x .

Ćwiczenie 2

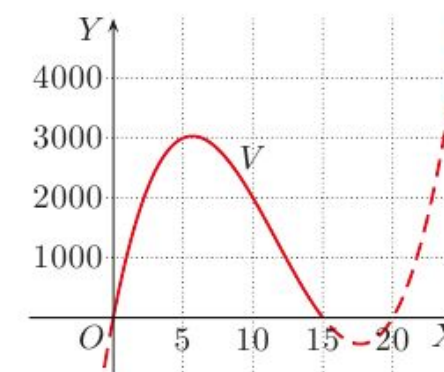
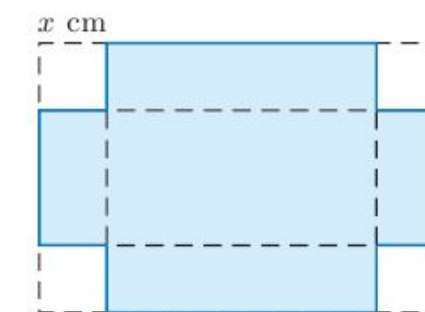
Z prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach $30 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ wycięto w narożnikach kwadraty o bokach długości x cm, a następnie sklejono go i otrzymano otwarte pudełko (rysunek obok).

a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość otrzymanego pudełka. Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu V . Na podstawie tego wykresu podaj przybliżone wymiary pudełka o największej objętości.

c) Czy zachodzi nierówność $V(10) > V(2,5)$?

d) Dla jakich wartości x objętość pudełka jest równa 2000 cm^3 ?



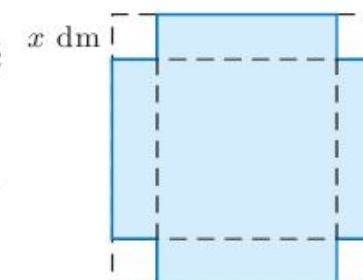
Ćwiczenie 3

Z kwadratowego arkusza kartonu o boku 12 dm wycięto w narożnikach kwadraty o bokach x dm, a następnie sklejono go i otrzymano otwarte pudełko (rysunek poniżej).

a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość otrzymanego pudełka. Określ dziedzinę tej funkcji.

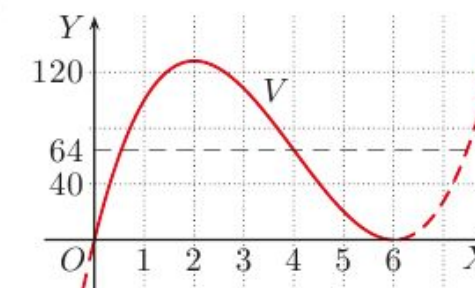
b) Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

x	1	2	3	4	5
$V(x)$	100	?	?	?	20



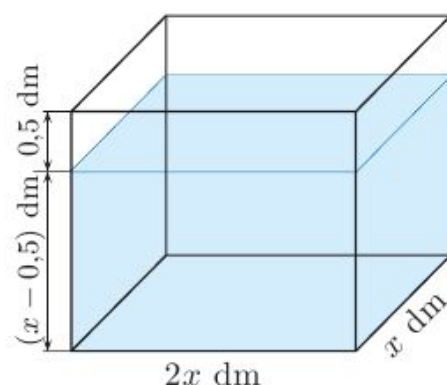
c) Na rysunku obok przedstawiono wykres wielomianu V . Odczytaj z wykresu przybliżone rozwiązanie nierówności $V(x) \leq 64$ dla $x \in (0; 6)$.

d) Rozwiąż algebraicznie nierówność $V(x) \leq 64$ dla $x \in (0; 6)$.



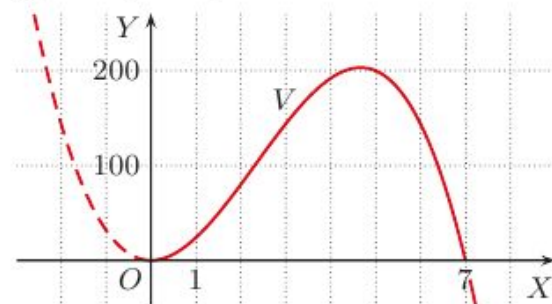
Zadania

- W prostopadłościanie, którego podstawą jest kwadrat o boku x dm, suma długości wszystkich krawędzi jest równa 40 dm.
 - Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość tego prostopadłościanu. Określ dziedzinę tej funkcji.
 - Dla jakich wartości x objętość tego prostopadłościanu jest równa 36 dm^3 ?

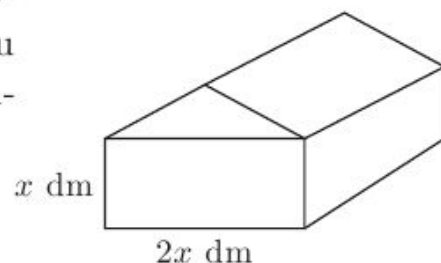


- Wyznacz wielomian V zmiennej x wyrażający objętość prostopadłościennego klocka o wymiarach $2x \text{ cm} \times 2x \text{ cm} \times (7 - x) \text{ cm}$. Określ dziedzinę tej funkcji.
 - Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

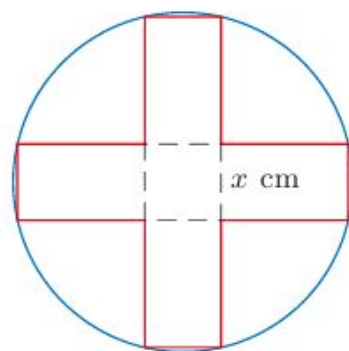
x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$V(x)$	?	?	?	?	?



- Ile jest równe pole powierzchni całkowitej tego klocka, jeśli wiadomo, że jego objętość jest równa $0,2 \text{ dm}^3$?
- Domek dla lalek ma kształt graniastosłupa prostego (rysunek obok). Wysokość tego domku w najwyższym punkcie wynosi 5 dm. Jego podłoga ma kształt prostokąta o obwodzie 32 dm.
 - Wyraż objętość domku V jako funkcję zmiennej x . Określ dziedzinę tej funkcji.
 - Dla jakich wartości x objętość domku jest mniejsza od 240 dm^3 ?



- Z tekturowego koła wycięto figurę w kształcie takim, jak pokazano na rysunku obok, i sklejono z niej otwarte prostopadłościenne pudełko. Podstawa pudełka jest kwadratem o boku $x \text{ cm}$, a wysokość pudełka jest równa $(2x - 1) \text{ cm}$. Jakie wartości może przyjmować pole koła, jeśli objętość pudełka jest większa od 112 cm^3 ?



Powtórzenie

Zestaw I

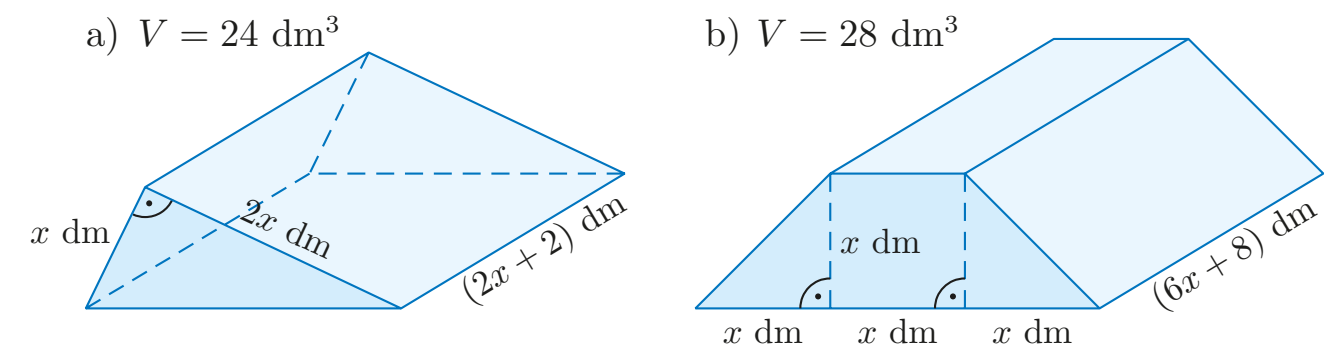
- Dane są wielomiany $w(x) = x^3 - 1$ oraz $p(x) = 2x^2 + 4x + 1$. Wyznacz wielomian u i podaj jego stopień.
 - $u(x) = 2w(x) + (1 - x)p(x)$
 - $u(x) = [w(x)]^2 - \frac{x^4}{2} \cdot p(x)$
- Dany jest wielomian w , dla którego $w(-1) = 4$ i $w(0) = 3$. Oblicz a i b .
 - $w(x) = x^3 + (a - b)x^2 - 4x + \frac{b}{2}$
 - $w(x) = -ax^3 + 3x^2 + a - 6b$
- Rozłóż wielomian w na czynniki.
 - $w(x) = 3x^4 - 3x^2$
 - $w(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x$
 - $w(x) = x^6 + 7x^5 + 6x^4$
 - $w(x) = 5x^5 - 10x^3 + 5x$
 - $w(x) = -3x^5 + 30x^3 - 75x$
 - $w(x) = 32x^6 - 16x^4 + 2x^2$
- Rozwiąż równanie.
 - $5x^2 + 2x^4 + x^3 = 0$
 - $-2x^3 - 6x^2 + 8x = 0$
 - $x^5 - 7x^4 + 12x^3 = 0$
 - $20x^6 + x^5 = x^4$
 - $4x^5 + x^3 = 4x^4$
 - $x^4 = 2x^6 + x^5$
- Rozłóż wielomian w na czynniki i podaj jego pierwiastki.
 - $w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$
 - $w(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$
 - $w(x) = 5x^3 + x^2 - 15x - 3$
 - $w(x) = 125x^3 - 27$
 - $w(x) = 27x^4 + \frac{1}{8}x$
 - $w(x) = -14x^3 + 7x$
- Rozwiąż równanie. Ile pierwiastków tego równania należy do przedziału $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$?
 - $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$
 - $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$
 - $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$
 - $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$
 - $81x^3 - 9x^2 - 9x + 1 = 0$
 - $x^4 + x^3 - 8x - 8 = 0$
 - $8x^4 + x^3 + 64x + 8 = 0$
 - $4x^5 - x^3 - 4x^2 + 1 = 0$
- Dla jakich wartości parametru m liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w ?
 - $w(x) = x^3 + (2m - 1)x^2 - 3x + 7, a = 2$
 - $w(x) = -x^3 + mx^2 - mx + 5, a = 3$
 - $w(x) = x^3 + 3x^2 + (m^2 - 2m)x + 2, a = -2$

8. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian p .
- $w(x) = x^3 + x + 1$, $p(x) = x - 3$
 - $w(x) = x^4 + x^2 + 1$, $p(x) = x + \frac{1}{2}$
 - $w(x) = 2x^4 - x^3 - x^2 - x + 6$, $p(x) = x - 1$
9. Dany jest wielomian w . Przedstaw go w postaci $w(x) = (x + 2)p(x) + r$.
- $w(x) = x^3 + 2x + 5$
 - $w(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$
 - $w(x) = 4x^4 + 8x^3 - x^2 - 2x$
 - $w(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$
10. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q .
- $w(x) = 7x^4 - x^3 + 1$, $q(x) = x - 1$
 - $w(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8$, $q(x) = x + 2$
 - $w(x) = -x^5 + 3x^2 + 10x$, $q(x) = x - 2$

■ Zestaw II

1. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.
- $w(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$, $a = -2$
 - $w(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 4$, $a = 4$
 - $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$, $a = \frac{1}{2}$
 - $w(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 1$, $a = 1$
 - $w(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$, $a = 2$
2. Rozwiąż równanie.
- $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
 - $x^3 - 6x^2 - 5x - 14 = 0$
 - $x^3 + 5x^2 + 8x + 6 = 0$
 - $x^3 - x^2 - 3x - 9 = 0$
 - $2x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$
 - $15x^3 + 8x^2 - 9x - 2 = 0$
 - $x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$
 - $x^4 - x^3 - 7x^2 + 5x + 10 = 0$
3. Dla jakich wartości parametru a wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?
- $w(x) = (a + 1)x^3 - x + a^3$, $q(x) = x - 1$
 - $w(x) = x^3 - 6x - 3a$, $q(x) = x - a$
4. Wyznacz wartość parametru a , dla której reszta z dzielenia wielomianu $w(x) = x^3 + ax - 3$ przez dwumian:
- $x - 1$ jest równa 4,
 - $x + 2$ jest równa 5.

5. Dla jakiej wartości parametru a wielomiany u i w są równe?
- $u(x) = (ax - 1)(ax + 2)$, $w(x) = 9x^2 - 3x - 2$
 - $u(x) = (x^2 - a)(ax + 1)$, $w(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$
 - $u(x) = -x^3 + (a^3 + a)x + 1$, $w(x) = ax^3 - 2x + a^2$
6. Rozwiąż nierówność.
- $(x + 1)(x^2 - 5x + 6) > 0$
 - $(x^2 - 1)^3(x^2 - 2x + 1) \leq 0$
 - $(-x^2 + x + 2)(x^2 - 4x - 5) \geq 0$
 - $(x - 3)^2(x^2 - 6x + 8) \geq 0$
 - $(x^2 - 1)(7 - x)(1 - x) \leq 0$
 - $(6 - x)^2(x - 3)(x + 5) \leq 0$
7. Rozwiąż nierówność.
- $x^3 + x^2 - 20x > 0$
 - $x^3 - 3x^2 + 2x < 0$
 - $-x^4 + 6x^3 - 9x^2 \leq 0$
 - $3x^4 + x^3 + x^2 < 0$
 - $x^3 + 4x^2 + x + 4 > 0$
 - $-x^3 + 3x^2 + 2x - 6 \leq 0$
 - $x^5 - x^3 - x^2 + 1 \geq 0$
 - $-x^5 + 3x^3 - 8x^2 + 24 < 0$
8. Drewniany klocek ma kształt graniastosłupa (rysunek poniżej), którego objętość jest równa V . Oblicz długość najdłuższej krawędzi tego klocka.



9. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $(2x - 3) \text{ dm}$, a jego wysokość jest równa $(x - \frac{1}{2}) \text{ dm}$. Objętość tego graniastosłupa jest równa $\frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ dm}^3$. Oblicz jego pole powierzchni całkowitej.
10. Niech $w(x) = (x^2 + 3x + 1)^2 - 1$. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $w(n)$ jest iloczynem czterech kolejnych liczb naturalnych.
11. Wykaż, że jeśli wielomian trzeciego stopnia $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ można przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych:

$$w(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

to zachodzą związki:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

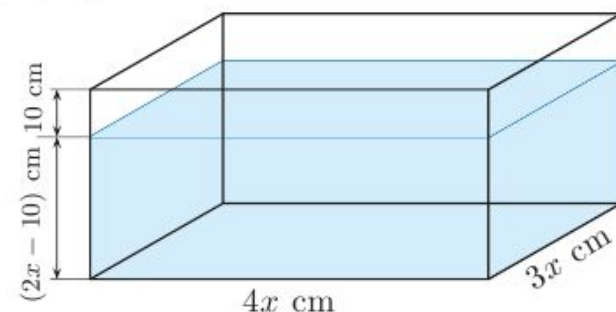
Są to wzory Viète'a dla wielomianu trzeciego stopnia.



Zadania z kontekstem realistycznym

1. Prostopadłościenne pudełko A ma wymiary $6\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 3\text{ cm}$. Prostopadłościenne pudełko B ma każdy wymiar mniejszy o $x\text{ cm}$ i objętość mniejszą o 42 cm^3 niż pudełko A . Oblicz x .

2. Do akwarium przedstawionego na rysunku obok wlewo 54 l wody. Głębokość wody wynosi $(2x - 10)\text{ cm}$. Oblicz sumę pól powierzchni ścianek bocznych tego akwarium.



3. Podstawą prostopadłościennego zbiornika jest kwadrat o boku $x\text{ m}$, a krawędź boczna jest o 2 m krótsza od krawędzi podstawy.

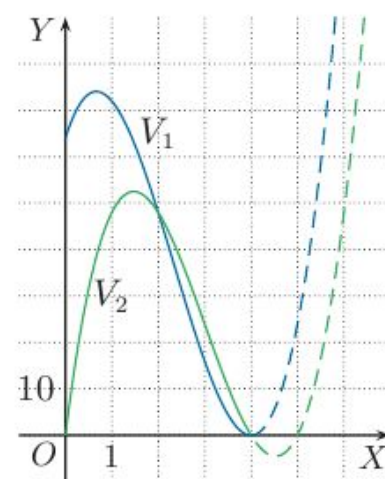
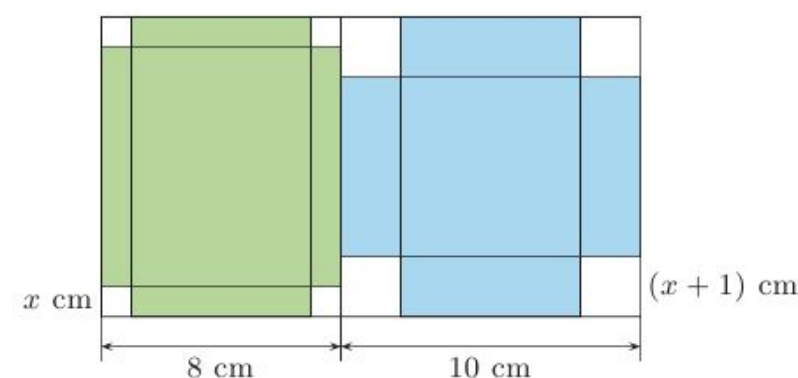
a) Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość tego zbiornika. Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Dla jakich wartości x objętość tego zbiornika jest większa od 32 m^3 ?

4. Prostokątny arkusz kartonu o wymiarach $18\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ przecięto na dwa arkusze, z których jeden jest kwadratem. Z arkuszy wycięto w narożnikach kwadraty o bokach $(x + 1)\text{ cm}$ oraz $x\text{ cm}$ (rysunek po lewej), a następnie pozostałe części sklejono i otrzymano dwa otwarte pudełka: P_1 – pudełko o podstawie kwadratowej oraz P_2 – pudełko o podstawie prostokątnej.

a) Wyznacz wielomian V_1 zmiennej x opisujący objętość pudełka P_1 oraz wielomian V_2 zmiennej x opisujący objętość pudełka P_2 . Określ dziedziny tych funkcji.

b) Na rysunku po prawej przedstawiono wykresy wielomianów V_1 i V_2 . Odczytaj z nich, dla jakich wartości x pudełko P_1 będzie miało mniejszą objętość niż pudełko P_2 . Sprawdź otrzymaną odpowiedź, rozwiązując nierówność $V_1(x) < V_2(x)$.



Sposób na zadanie

Przykład

Dla jakich wartości parametrów a i b liczba 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 9$?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

I sposób

Jeśli liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu w , to reszta z dzielenia tego wielomianu przez $x - 3$ jest równa 0.

$$\begin{array}{r} (x^3 + ax^2 + bx + 9) : (x - 3) = x^2 + (a + 3)x + 3a + b + 9 \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline (a + 3)x^2 + bx + 9 \\ -(a + 3)x^2 + 3(a + 3)x \\ \hline (3a + b + 9)x + 9 \\ -(3a + b + 9)x + 3(3a + b + 9) \\ \hline 9a + 3b + 36 \end{array}$$

Otrzymujemy iloraz $u(x) = x^2 + (a + 3)x + 3a + b + 9$ i resztę $r = 9a + 3b + 36$.

Przekształcamy równanie $9a + 3b + 36 = 0$ i otrzymujemy $b = -3a - 12$.

Zatem iloraz ma postać $u(x) = x^2 + (a + 3)x - 3$.

Liczba 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w , więc jest pierwiastkiem wielomianu u :

$$u(3) = 0 \Leftrightarrow 3^2 + (a + 3) \cdot 3 - 3 = 0 \Leftrightarrow a = -5$$

Obliczamy b : $b = -3 \cdot (-5) - 12 = 3$.

Otrzymaliśmy zatem: $a = -5$ i $b = 3$.

II sposób

Liczba 3 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu w , więc istnieją liczby $c, d \in \mathbb{R}$ takie, że zachodzi równość:

$$w(x) = (x - 3)^2(cx + d)$$

Stąd:

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + 9 &= (x^2 - 6x + 9)(cx + d) = \\ &= cx^3 + (-6c + d)x^2 + (-6d + 9c)x + 9d \end{aligned}$$

Porównujemy współczynniki przy x^3 oraz wyrazy wolne i otrzymujemy $c = 1$ i $d = 1$.

Obliczamy a : $a = -6c + d = -6 + 1 = -5$.

Obliczamy b : $b = -6d + 9c = -6 + 9 = 3$.

Odpowiedź: $a = -5$ i $b = 3$

➔ Zadanie 3, str. 116



W zadaniach 1–8 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Wielomian $w(x) = -2x^4 + ax^2 + 2x - 4$ spełnia warunek $w(\sqrt{2}) = -w(-\sqrt{2})$. Wynika stąd, że

- A. $a = 6$ B. $a = 4$ C. $a = 2$ D. $a = -2$

Zadanie 2 (0–1)

Dany jest wielomian $w(x) = (2 - x)(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)^2$. Współczynnik przy najwyższej potędze tego wielomianu jest równy

- A. $-8\sqrt{2}$ B. $-2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $8\sqrt{2}$

Zadanie 3 (0–1)

Wyrażenie $(4x^2 + 1 + 2x)(4x^2 + 1 - 2x)$ jest równe

- A. $16x^4 + 4x^3 + 1$ C. $16x^4 + 4x^2 + 1$
B. $16x^4 - 4x^3 + 1$ D. $16x^4 - 4x^2 + 1$

Zadanie 4 (0–1)

Która para punktów należy do wykresu funkcji $w(x) = x^3 - x^2 + 6$?

- A. $A_1(-1, 4), A_2(1, 6)$ C. $C_1(1, 6), C_2(-2, 2)$
B. $B_1(2, 8), B_2(-2, 6)$ D. $D_1(-2, 6), D_2(2, 10)$

Zadanie 5 (0–1)

Dany jest prostopadłościan o krawędziach $x - 4$, $x + 4$, $x^2 - 4$, gdzie $x > 4$. Objętość tego prostopadłościanu jest opisana wzorem

- A. $V(x) = x^4 - 16$ C. $V(x) = x^4 - 16x^2 + 16$
B. $V(x) = x^4 - 64$ D. $V(x) = x^4 - 20x^2 + 64$

Zadanie 6 (0–1)

Wszystkie rozwiązania równania $x(2x + 4)(2x - 5) = 0$ należą do przedziału

- A. $[-5; 1\frac{2}{3}]$ B. $[-3\frac{2}{3}; 2]$ C. $[-3; 2\frac{2}{3}]$ D. $[-1\frac{2}{3}; 6]$

Zadanie 7 (0–1)

Liczby -3 , 1 są jedynymi pierwiastkami równania

- A. $x^3 + 2x^2 = 3x$ C. $(x - 1)^2(x^2 + 6x + 9) = 0$
B. $x(x^2 + x - 3) = 0$ D. $(x^2 - 1)(x + 3)^2 = 0$

Zadanie 8 (0–1)

Wartość wielomianu $w(x, y, z) = 6x^2yz - 8xy^2z$ dla $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ i $z = -2$ jest równa

- A. $-3\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $3\frac{1}{2}$

**Zadanie 9 (0–1)**

Dane jest równanie $x(x + 3)(x - 2) = 0$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Podane równanie ma trzy różne pierwiastki.	P	F
Iloczyn niezerowych pierwiastków tego równania jest równy 6.	P	F

Zadanie 10 (0–1)

Niech $x = -2a$ oraz $y = 3b$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Wyrażenie $x^2 - y^2$ jest równe

A.	$(2a - 3b)(2a + 3b),$	a wyrażenie $xy(x - y)$ jest równe	1.	$12a^2b - 18a^2.$
			2.	$18ab^2 - 12a^2.$
B.	$(2a - 3b)(-2a + 3b),$		3.	$12a^2b + 18ab^2.$

Zadanie 11 (0–2)

Dany jest wielomian $w(x, y) = -2xy^2 - xy^3 + x^2y$.

Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj właściwe dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Numer zadania	Zdanie do uzupełnienia	Dokończenie zdania
11.1	Wartość $w(2, -2)$ jest równa	?
11.2	Wartość $w(-2, 2)$ jest równa	?

- A. -16 B. -8 C. 16 D. 32 E. 40

Zadanie 12 (0–1)

Dany jest wielomian $w(x) = 2x^4 - \sqrt{2}x^3 - x^2$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wartość wielomianu w dla $-\sqrt{2}$ jest równa 2.	P	F
Wartość wielomianu w dla $2\sqrt{2}$ jest równa 8.	P	F



Zadanie 13

Dany jest wielomian $w(x) = 2x^3 + m^2x^2 - 6x + 9$, gdzie $m \in \mathbb{R}$.

Zadanie 13.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeśli $m = -1$, to

dla $x = -2$ wielomian w przyjmuje wartość równą 9.	P	F
dla $x = -\frac{3}{2}$ wielomian w przyjmuje wartość większą od 13.	P	F

Zadanie 13.2 (0-2)

Rozwiąż równanie $w(x) - 6mx = (mx - 3)^2$.

Zadanie 14

Dany jest wielomian $w(x) = (x^2 + x + 1)(x - 3) + 3$.

Zadanie 14.1 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x wielomian w można zapisać w postaci

A.	$w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x,$	a jego wartość dla $x = -1$ jest równa	1.	0.
B.	$w(x) = x^3 - 2x^2 - 3x,$		2.	-1.
			3.	-2.

D Zadanie 14.2 (0-1)

Uzasadnij, że $w(\sqrt{2})$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 15

Dany jest wielomian $w(x) = x(x^2 - 4x + c)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$.

D Zadanie 15.1 (0-1)

Uzasadnij, że dla $c = 0$ suma pierwiastków tego wielomianu jest większa od sumy pierwiastków dla $c = 4$.

Zadanie 15.2 (0-1)

Wyznacz pierwiastki wielomianu w dla $c = -12$.

Zadanie 16 (0-2)

Oblicz średnią arytmetyczną pierwiastków wielomianu:

$$w(x) = x(2x - 1)(3x - 1)(6x - 1)$$



D Zadanie 17 (0-2)

Uzasadnij, że rozwiązaniem równania $0,75x^3 + 48 = 0$ jest liczba wymierna.

Zadanie 18 (0-2)

Oblicz $\sqrt{p}$, gdy p jest sumą pierwiastków równania $x(x - 1)(16x - 9) = 0$.

Zadanie 19 (0-2)

Ile wspólnych pierwiastków mają poniższe równania?

$$x^2 + x - 12 = 0 \quad \text{i} \quad (x + 4)(x^2 + 8x) = 0$$

Zadanie 20 (0-2)

Które liczby całkowite o wartości bezwzględnej mniejszej od 7 są pierwiastkami wielomianu $w(x) = x(\frac{2}{3}x + 4)(\frac{3}{4}x - 5)(\frac{4}{5}x + 6)$?

Zadanie 21

Dany jest wielomian $w(x) = (\frac{1}{4}x - \frac{1}{8})(x^2 - 7x + 12\frac{1}{4})$.

Zadanie 21.1 (0-2)

Wyznacz pierwiastki wielomianu w .

D Zadanie 21.2 (0-2)

Uzasadnij, że dla argumentów $1\frac{1}{2}$ i $4\frac{1}{2}$ wielomian w przyjmuje tę samą wartość.

Zadanie 22

Sumę sześciątów kolejnych liczb naturalnych można wyrazić wzorem:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

Zadanie 22.1 (0-1)

Sprawdź prawdziwość powyższego wzoru dla $n = 4$.

D Zadanie 22.2 (0-3)

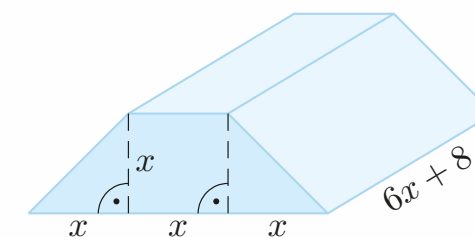
Korzystając z powyższego wzoru, uzasadnij, że suma sześciątów kolejnych liczb naturalnych od 1 do n jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

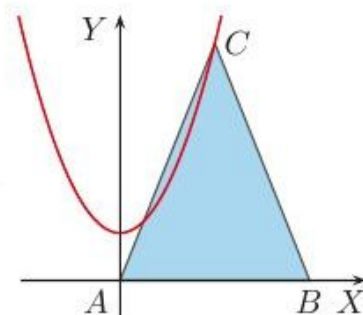
D Zadanie 23 (0-4)

Uzasadnij, że objętość prostopadłościanu o krawędziach $x - 2$, x , $x + 4$ jest opisana za pomocą wzoru $V(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$, gdzie $x > 2$. Sprawdź, czy dla $x = 2\sqrt{2}$ objętość tego prostopadłościanu jest liczbą wymierną.

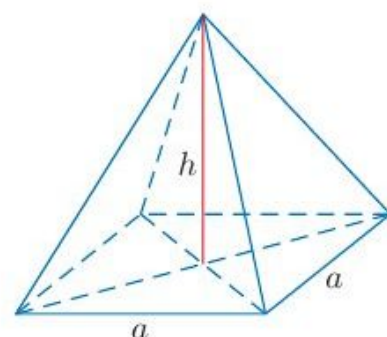
Zadanie 24 (0-2)

Objętość graniastosłupa przedstawionego na rysunku obok jest równa objętości sześcianu o krawędzi $3x$. Oblicz x .



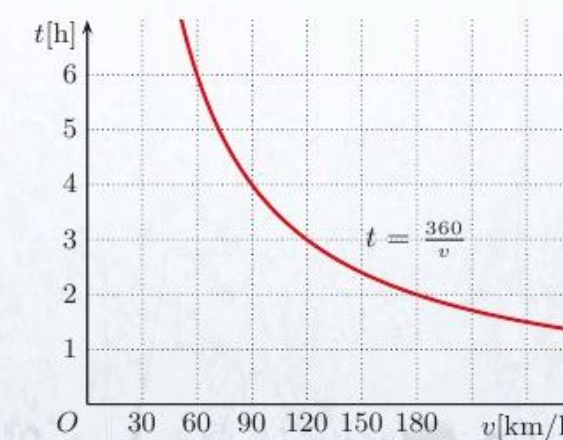
**Zadanie 1 (0-3)**Rozwiąż nierówność $x^4 + 4x^3 - 4x - 1 \leq 0$.**Zadanie 2 (0-3)**Dla jakich wartości parametru k wielomian $w(x) = 2x^3 - 6x^2 + k^2x - 4k + 8$ jest podzielny przez dwumian $x - k$?**Zadanie 3 (0-3) → Przykład, str. 111**Wyznacz wartości parametrów m i n , dla których liczba -2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $w(x) = 3x^3 + mx^2 + nx - 8$.**Zadanie 4 (0-4)**Na rysunku obok przedstawiono trójkąt równoramienny o podstawie AB i wierzchołkach $A(0,0)$, $B(x_0,0)$, gdzie $x_0 > 0$, oraz wierzchołku C należącym do paraboli $y = x^2 + 1$. Pole tego trójkąta jest równe 10. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C .**Zadanie 5 (0-4)**Dany jest trójkąt prostokątny ABC o wierzchołkach $A(x_0,0)$ i $B(-x_0,0)$, gdzie $x_0 > 0$, które są końcami jednej z przyprostokątnych. Pole tego trójkąta jest równe 8, a wierzchołek C należy do paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Oblicz obwód tego trójkąta.**D Zadanie 6 (0-3)**W pewnym wielomianie suma współczynników przy potęgach parzystych jest równa sumie współczynników przy potęgach nieparzystych. Wykaż, że liczba -1 jest pierwiastkiem tego wielomianu.**Zadanie 7 (0-4)**Wyznacz wielomian V zmiennej x opisujący objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości h , gdzie:

$$a = x + 3 \text{ i } h = 3(x^2 - 6x + 9)$$

Podaj dziedzinę funkcji V . Dla jakich wartości x zachodzi nierówność $V(x) \leq 256$?**Zadanie 8 (0-5)**Podstawą graniastoslupa prawidłowego jest ośmiokąt foremny o boku x dm. Wysokość tego graniastoslupa jest równa $(x + 2)$ dm, a jego objętość jest równa $6(1 + \sqrt{2})$ dm³. Oblicz x .

3 Funkcje wymierne

Czas potrzebny na przebycie pewnej ustalonej odległości jest tym krótszy, im większa jest prędkość, z jaką się poruszamy. Na wykresie obok przedstawiono zależność między prędkością a czasem potrzebnym na pokonanie odległości 360 km. Prędkość i czas (potrzebny do przebycia określonej drogi) to wielkości odwrotnie proporcjonalne.



3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$ – jest ona określona dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sporządzamy tabelę wartości funkcji f , a następnie szkicujemy jej wykres.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, oraz każdą krzywą powstałą z tego wykresu przez przesunięcie o wektor nazywamy **hiperbolą**.

Własności funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$:

- dla $x < 0$ funkcja f przyjmuje wartości ujemne, natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości dodatnie,
- funkcja f nie ma miejsc zerowych,
- funkcja f jest **malejąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$.

Uwaga. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ **nie jest** malejąca w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Zauważmy, że każda z gałęzi wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ „zbliża się” do prostej poziomej $y = 0$ oraz „zbliża się” do prostej pionowej $x = 0$. O takich prostych mówimy, że są **asymptotami** wykresu funkcji – odpowiednio **asymptotą poziomą** i **asymptotą pionową**.

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono jedną gałąź hiperboli $f(x) = \frac{4}{x}$.

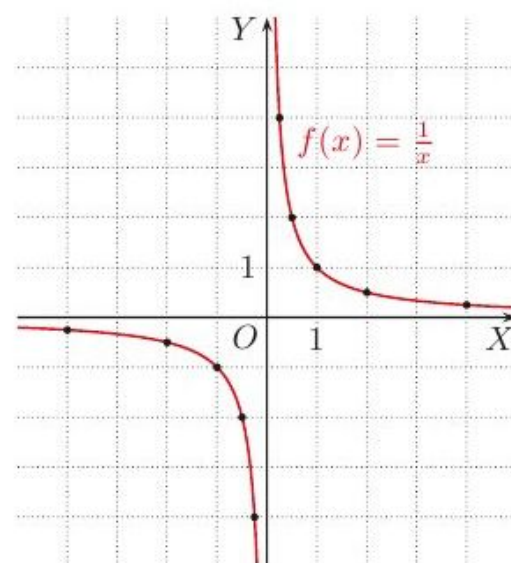
a) Podaj brakujące współrzędne punktów A , B , C , D i E .

b) Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj obie gałęzie tej hiperboli.

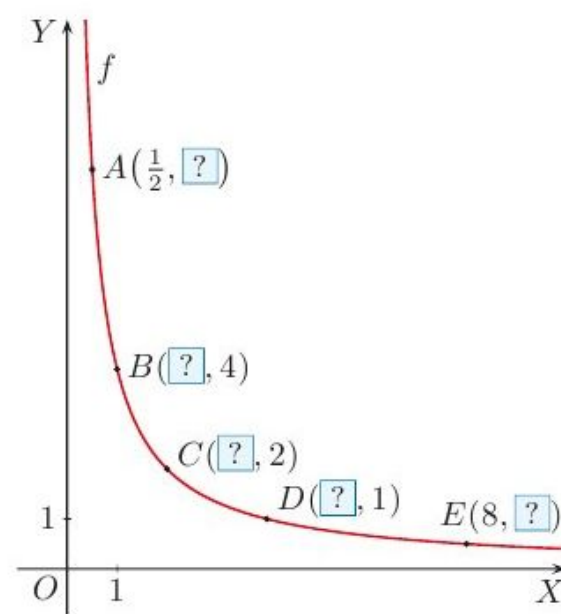
Ćwiczenie 2

Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{3}{x}$ c) $f(x) = \frac{8}{x}$



Hiperbola składa się z dwóch gałęzi.



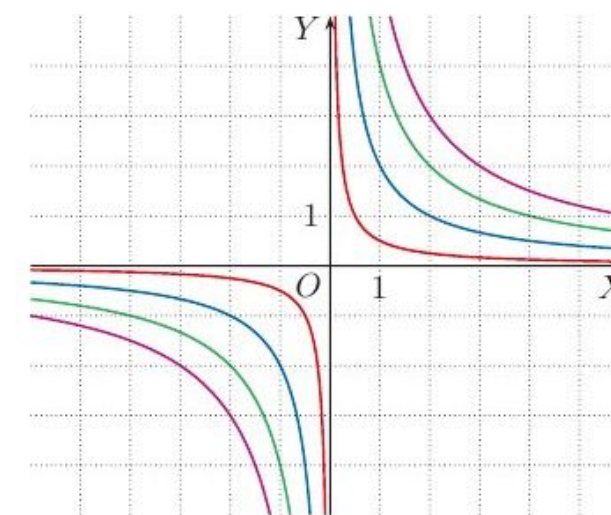
Ćwiczenie 3

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = \frac{1}{2x}$, $g(x) = \frac{2}{x}$, $h(x) = \frac{4}{x}$ oraz $k(x) = \frac{6}{x}$.

a) Oblicz wartości każdej z tych funkcji dla $x = 1$ oraz dla $x = -2$.

b) Dobierz wzór do każdego wykresu.

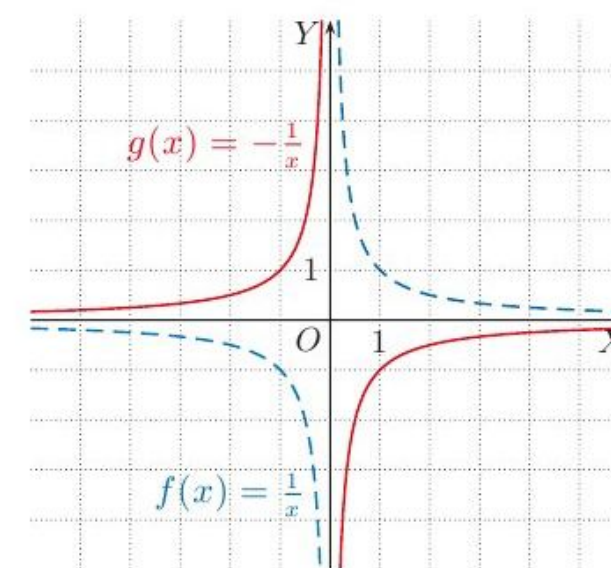
c) Do których hiperbol należą punkty: $A(2, 3)$, $B(\frac{2}{3}, 3)$, $C(4, \frac{1}{8})$, $D(-4, -\frac{1}{2})$, $E(-\frac{2}{3}, -6)$?



Aby naszkicować wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, można wykorzystać odpowiednią tabelę wartości funkcji lub odbić symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

Własności funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$:

- dla $x < 0$ funkcja g przyjmuje wartości dodatnie, natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości ujemne,
- funkcja g nie ma miejsc zerowych,
- funkcja g jest **rosnąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$, ale nie jest funkcją rosnącą w swojej dziedzinie,
- prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą, a prosta $x = 0$ – asymptotą pionową wykresu funkcji g .



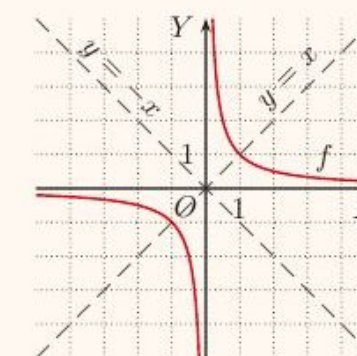
Ćwiczenie 4

Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = -\frac{2}{x}$ b) $f(x) = -\frac{3}{x}$ c) $f(x) = -\frac{4}{x}$ d) $f(x) = -\frac{0,5}{x}$

Czy wiesz, że...

- Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ ma dwie **osie symetrii**. Są to proste $y = x$ oraz $y = -x$.
 - Punkt $O(0, 0)$ jest **środkiem symetrii** wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.
- Ogólnie, proste $y = x$ i $y = -x$ są osiami symetrii, a punkt $O(0, 0)$ jest środkiem symetrii dowolnej hiperboli o równaniu $y = \frac{a}{x}$.



Zadania

1. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą w przedziale $[1; 2]$.

a) $f(x) = \frac{6}{x}$ b) $f(x) = -\frac{4}{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{2x}$ d) $f(x) = -\frac{5}{x}$

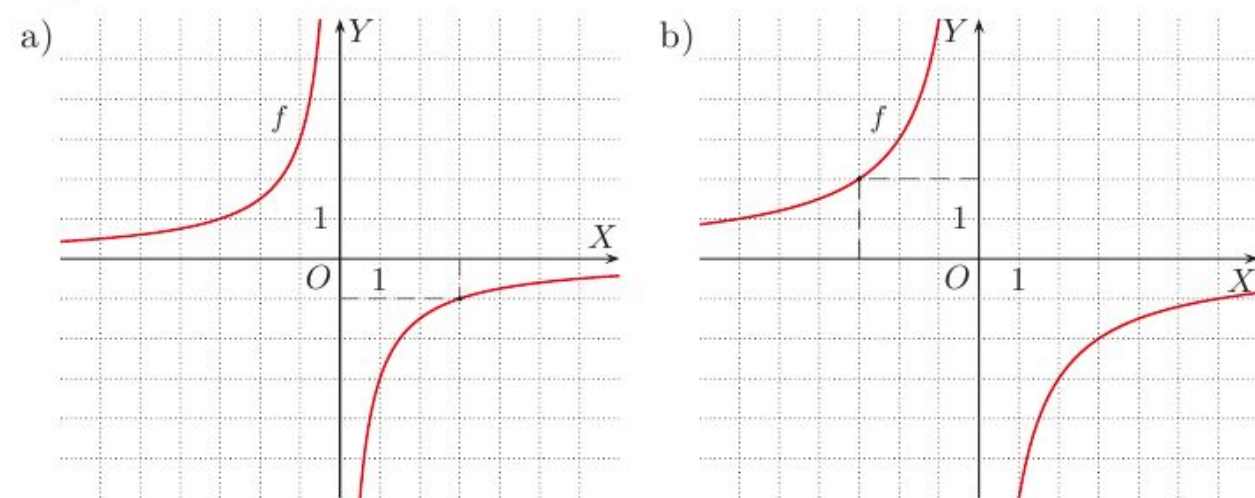
2. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$, której dziedziną jest zbiór D . Podaj zbiór wartości tej funkcji.

a) $D = [2; 8]$ b) $D = (-2; 0) \cup (0; 2)$ c) $D = (-\infty; -2] \cup [1; \infty)$

3. Dla jakiej wartości współczynnika a punkt P należy do hiperboli będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$? Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $x = -2\sqrt{2}$.

a) $P(-1, 8)$ b) $P(\frac{1}{2}, -32)$ c) $P(-4, 3\frac{1}{2})$ d) $P(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a . Znajdź współrzędne punktu, w którym hiperbola przecina prostą $y = -3$. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od -3 .



5. Dla jakiej wartości współczynnika a punkt P należy do hiperboli będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$? Naskicuj wykres tej funkcji i podaj wartość największą i wartość najmniejszą, jakie ta funkcja przyjmuje dla argumentów ze zbioru $[-4; -1] \cup [2; 6]$.

a) $P(2\sqrt{2} + 2, \sqrt{2} - 1)$ b) $P(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$ c) $P(\sqrt{6} - \sqrt{24}, \sqrt{6})$

6. Oblicz odległość między punktami przecięcia prostej $y = 2x$ z hiperbolą $y = \frac{2}{x}$.

7. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ przecina prostą $y = x$ w punktach P_1 i P_2 . Oblicz a , gdy: a) $|P_1P_2| = 4\sqrt{2}$, b) $|P_1P_2| = 8$.

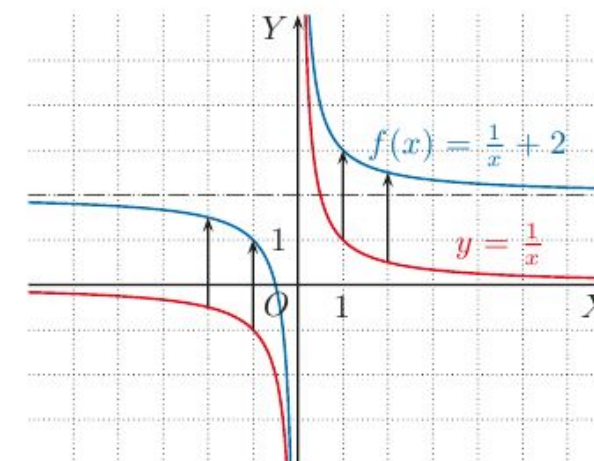
3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $y = \frac{1}{x}$ o 2 jednostki w górę, czyli o wektor $[0, 2]$.

Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.

Prosta $y = 2$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f , a prosta $x = 0$ – asymptotą pionową.



Ćwiczenie 1

Naskicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

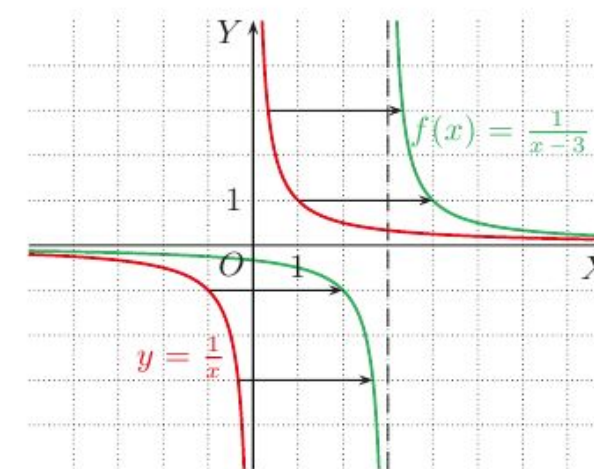
a) $f(x) = \frac{1}{x} + 3$ c) $f(x) = \frac{4}{x} - 3$ e) $f(x) = -\frac{3}{x} + 1$
 b) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ d) $f(x) = -\frac{1}{x} + 2$ f) $f(x) = -\frac{1}{2x} - 4$

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-3}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $y = \frac{1}{x}$ o 3 jednostki w prawo, czyli o wektor $[3, 0]$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Prosta $x = 3$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f , a prosta $y = 0$ – asymptotą poziomą.



Przypomnijmy, że wykres funkcji $y = f(x-p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w prawo wzdłuż osi OX .

Ćwiczenie 2

Naskicuj wykres funkcji f . Podaj dziedzinę i równania asymptot wykresu tej funkcji oraz jej przedziały monotoniczności.

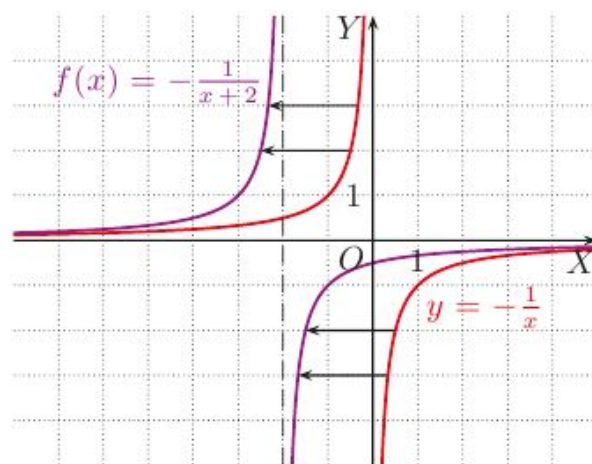
a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{2}{x-4}$ c) $f(x) = \frac{-1}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{x+2}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $y = -\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w lewo, czyli o wektor $[-2, 0]$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Asymptotą pionową jej wykresu jest prosta $x = -2$, a asymptotą poziomą – prosta $y = 0$.



Przypomnijmy, że wykres funkcji $y = f(x+p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w lewo wzdłuż osi OX .

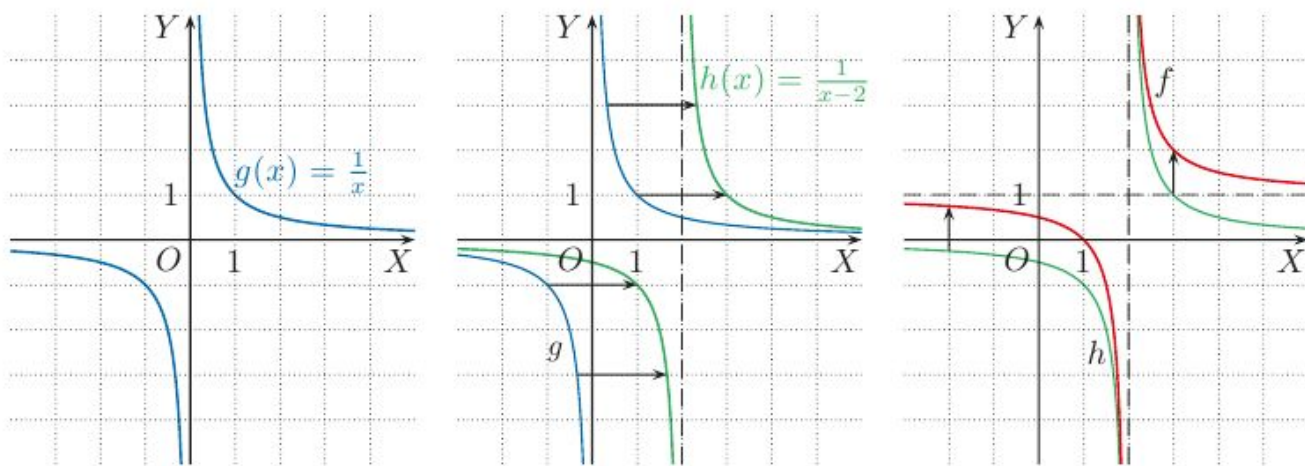
Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj dziedzinę tej funkcji i równania asymptot jej wykresu. Wyznacz punkt przecięcia wykresu z osią OY .

a) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{3}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{4}{x+4}$ d) $f(x) = -\frac{2}{x+3}$

Przykład 4

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$ o wektor $[2, 0]$, a następnie o wektor $[0, 1]$ (lub w odwrotnej kolejności). Można też od razu przesunąć wykres funkcji g o wektor $[2, 1]$.



Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Prosta $x = 2$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f , a prosta $y = 1$ jest jego asymptotą poziomą.

Przypomnijmy, że wykres funkcji $y = f(x-p) + q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[p, q]$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej dziedzinę, zbiór wartości oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$ b) $f(x) = -\frac{1}{x-1} + 2$ c) $f(x) = \frac{2}{x+1} + 3$

Ćwiczenie 5

Podaj wektor, o jaki należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g .

a) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x-4} - 6$ c) $f(x) = \frac{1}{2x}$, $g(x) = -3 + \frac{1}{2x-4}$
b) $f(x) = -\frac{5}{x}$, $g(x) = 2 - \frac{5}{x+2}$ d) $f(x) = -\frac{1}{3x}$, $g(x) = 1 + \frac{1}{9-3x}$

Ćwiczenie 6

O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać hiperbolę, której asymptotami są podane proste?

a) $f(x) = \frac{4}{x} + 2$, $x = 3$, $y = -6$ b) $f(x) = -\frac{2}{x+3} - \frac{5}{3}$, $x = -2$, $y = -\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 7

Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$, przesunięto o wektor $[p, q]$. Podaj wzór i równania asymptot otrzymanej hiperboli.

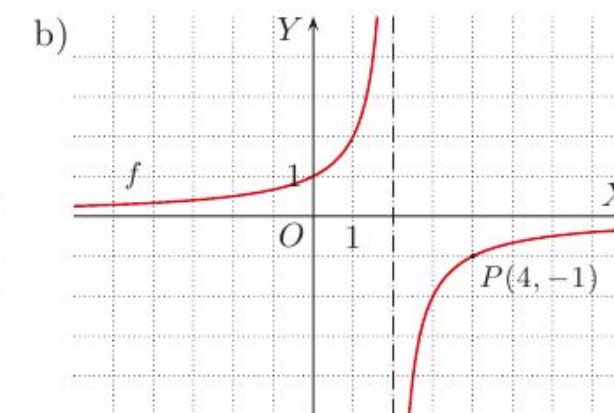
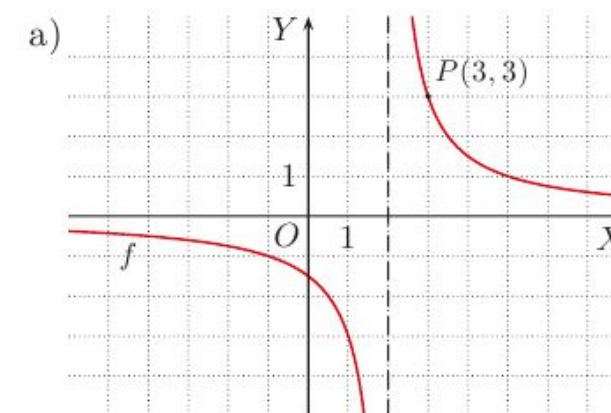
Zadania

1. Wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ o 3 jednostki w dół, c) $f(x) = -\frac{2}{x}$ o 2 jednostki w górę,
b) $f(x) = \frac{4}{x}$ o 3 jednostki w lewo, d) $f(x) = -\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w prawo.

Naszkicuj wykresy funkcji f i g . Podaj wzór funkcji g , jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot jej wykresu.

2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x-2}$. Podaj wartość współczynnika a i oblicz $f(1\frac{3}{4})$ i $f(-4)$.



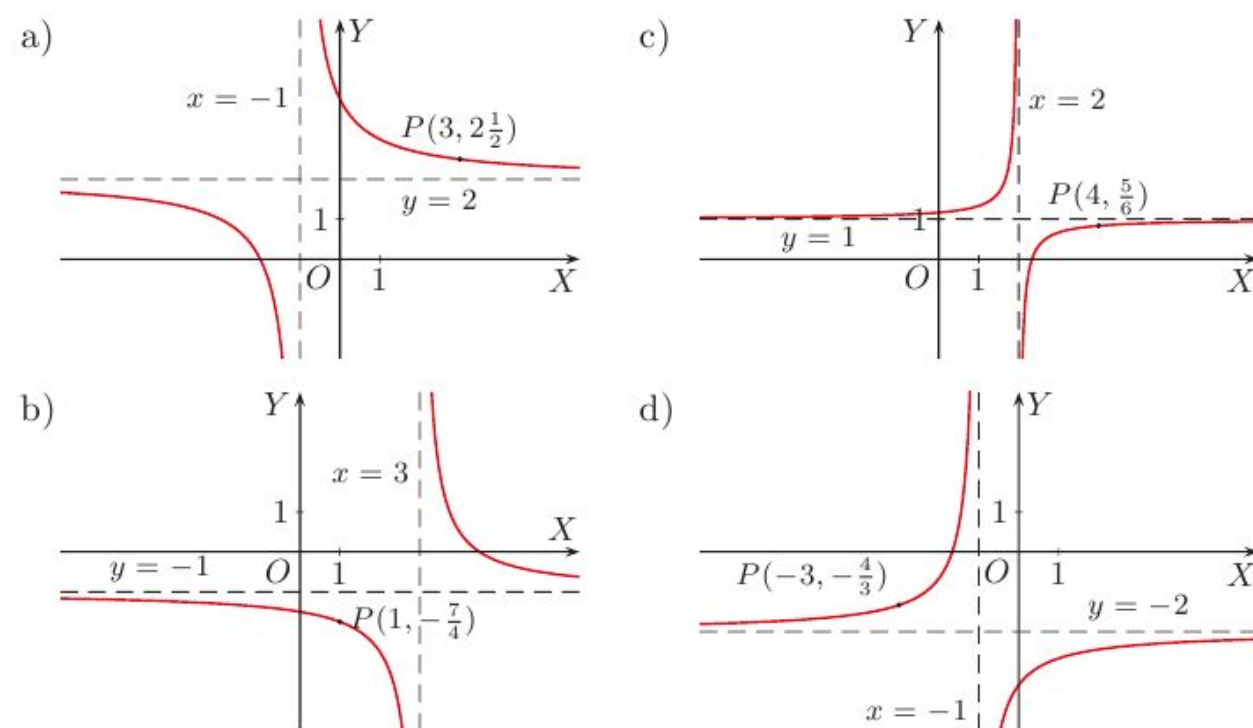
3. Przesuń wykres funkcji f o wektor $\vec{u}$. Podaj wzór otrzymanej funkcji, jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\vec{u} = [1, 4]$ c) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $\vec{u} = [-1, 3]$
 b) $f(x) = \frac{2}{x}$, $\vec{u} = [-2, -1]$ d) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $\vec{u} = [2, -4]$

4. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj liczbę punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do tego wykresu.

a) $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$ c) $f(x) = -\frac{1}{x+2} - 2$
 b) $f(x) = \frac{2}{x+3} - 1$ d) $f(x) = \frac{2}{-x+4} + 2$

5. Wyznacz równanie przedstawionej hiperboli na podstawie informacji podanych na rysunku.



6. Wykres funkcji g , do którego należy punkt P , otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor $\vec{u}$. Wyznacz wzór funkcji g .

a) $\vec{u} = [2, -9]$, $P(6, -8)$ c) $\vec{u} = [3, -\frac{3}{4}]$, $P(-2, -1)$
 b) $\vec{u} = [\frac{1}{2}, 5]$, $P(\frac{1}{3}, 1)$ d) $\vec{u} = [-\sqrt{2}, -6]$, $P(1, -3\sqrt{2})$

7. Podaj równania osi symetrii i współrzędne środka symetrii hiperboli o równaniu:

a) $y = \frac{3}{x} - 6$, b) $y = \frac{2}{x-4} + 1$, c) $y = \frac{5}{x+1} + 3$, d) $y = -\frac{1}{x-7} + 8$.

8. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$, przesunięto o wektor $[p, q]$. Podaj równania osi symetrii i współrzędne środka symetrii otrzymanej hiperboli.

R 3.3. Funkcja homograficzna

Funkcję postaci $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$, określoną dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, jeżeli nie jest ona funkcją stałą, nazywamy **funkcją homograficzną**.

Podaną w definicji postać wzoru funkcji homograficznej nazywamy **postacią ogólną**.

Wykresem funkcji homograficznej jest **hiperbola** – możemy ją otrzymać przez przesunięcie o wektor hiperboli $y = \frac{r}{x}$, gdzie r jest pewną stałą.

Przykład 1

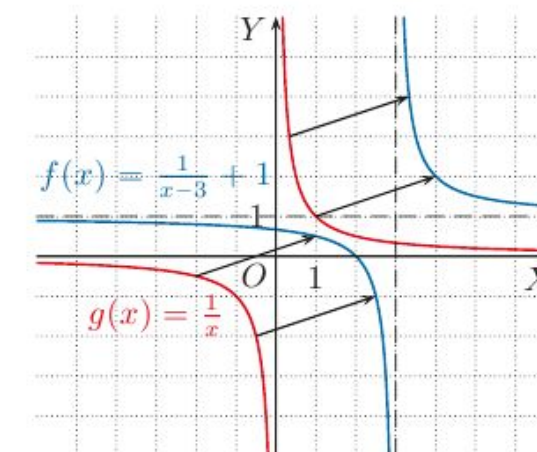
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Przekształcamy wzór funkcji:

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{(x-3)+1}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x-3} + 1$$

Wykres funkcji f otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$ o wektor $[3, 1]$.



Przykład 2

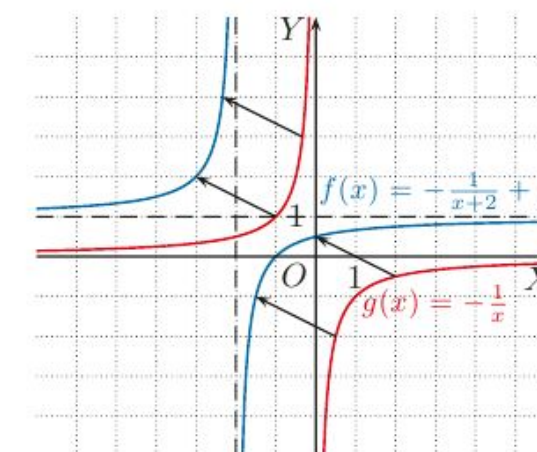
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Przekształcamy wzór funkcji:

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{(x+2)-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{x+2} + 1$$

Wykres funkcji f otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$ o wektor $[-2, 1]$.



Definicja

Postać $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{p\}$ i $r \neq 0$, nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji homograficznej.

Ćwiczenie 1

Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej i naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $f(x) = \frac{-x+1}{x}$ b) $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Ćwiczenie 2

Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej i naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $f(x) = \frac{x+3}{x+4}$ b) $f(x) = \frac{x-5}{x-4}$ c) $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$

Przykład 3

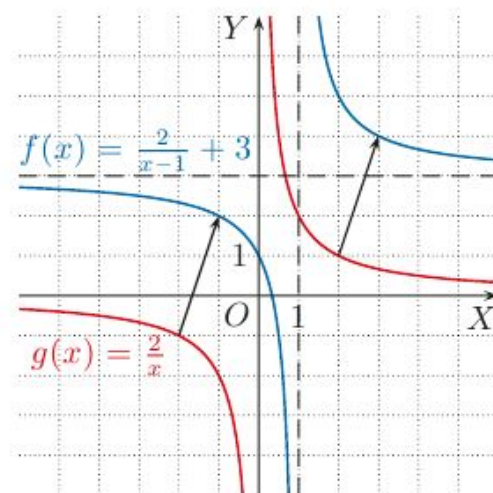
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$\frac{3x-1}{x-1} = \frac{3(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 3$$

Wykres funkcji f otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $g(x) = \frac{2}{x}$ o wektor $[1, 3]$.



Ćwiczenie 3

Wstaw w miejsce [?] odpowiednią liczbę. Zapisz wyrażenie w postaci kanonicznej.

a) $\frac{3x+4}{x+1} = \frac{3(x+1)+[?]}{x+1}$ c) $\frac{-2x+8}{x-3} = \frac{-2(x-3)+[?]}{x-3}$ e) $\frac{4x+9}{x+2} = \frac{4(x+2)+[?]}{x+2}$
 b) $\frac{3x+2}{x+1} = \frac{3(x+1)-[?]}{x+1}$ d) $\frac{-2x+5}{x-3} = \frac{-2(x-3)-[?]}{x-3}$ f) $\frac{4x-3}{x+2} = \frac{4(x+2)-[?]}{x+2}$

Z postaci kanonicznej funkcji homograficznej możemy odczytać równania asymptot jej wykresu.

Twierdzenie

Asymptotami wykresu funkcji $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{p\}$ i $r \neq 0$, są proste $x = p$ i $y = q$.

Przykład 4

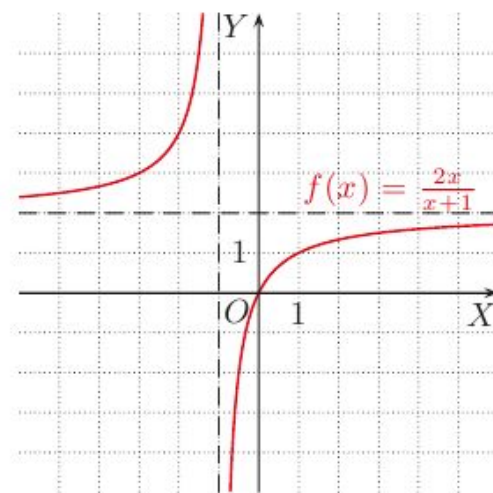
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$\frac{2x}{x+1} = \frac{2(x+1)-2}{x+1} = \frac{-2}{x+1} + 2$$

Asymptotą pionową wykresu funkcji f jest prosta $x = -1$, a asymptotą poziomą – prosta $y = 2$.



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj równania asymptot wykresu tej funkcji.

a) $f(x) = \frac{-2x-1}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{2x+5}{x+3}$ e) $f(x) = \frac{-3x-10}{x+4}$
 b) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{-x+1}{x-3}$ f) $f(x) = \frac{3x+2}{x-2}$

Zadania

1. Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Podaj równania asymptot wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{2x+8}{x+3}$ c) $f(x) = \frac{4x+6}{x+2}$ e) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x+2}{x+3}$
 b) $f(x) = \frac{-3x+10}{x-3}$ d) $f(x) = \frac{-2x+3}{x-4}$ f) $f(x) = \frac{4x}{2x+1}$

2. Naszkicuj wykres funkcji f , podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

a) $f(x) = \frac{x-3}{x-4}$ b) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{-4x-11}{x+2}$

3. Naszkicuj wykres funkcji f . Odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.

a) $f(x) = \frac{x-4}{x-5}$ b) $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ c) $f(x) = -\frac{2x}{x+1}$

4. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{3x-11}{x-4}$ c) $f(x) = \frac{-2x-5}{x+2}$ e) $f(x) = \frac{-3x+8}{-x+2}$
 b) $f(x) = \frac{-4x-5}{x+1}$ d) $f(x) = \frac{-4x+6}{x-2}$ f) $f(x) = \frac{-8x+6}{2x-1}$

5. Dla jakiej wartości parametru m punkt P należy do wykresu funkcji f ? Wyznacz równania asymptot wykresu tej funkcji dla otrzymanego m .

a) $f(x) = \frac{4x+m}{-3x-1}$, $P(-3, 2)$ b) $f(x) = \frac{mx-3}{2x+4}$, $P(-4, 1)$

6. Podaj przykład takiej funkcji homograficznej f , której dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{p\}$, a zbiorem wartości – zbiór $\mathbb{R} \setminus \{q\}$.

a) $p = 0$, $q = 1$ c) $p = 1$, $q = 4$ e) $p = 7$, $q = -3$
 b) $p = 0$, $q = -5$ d) $p = -7$, $q = 0$ f) $p = \sqrt{2}$, $q = \sqrt{2}$

7. Podaj równania asymptot wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{-6x+9}{3x+6}$
 b) $f(x) = \frac{10x+1}{\frac{1}{2}x-4}$

Wykres funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ma asymptotę pionową $x = -\frac{d}{c}$ i asymptotę poziomą $y = \frac{a}{c}$.

8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji $f(x) = \frac{7x-4}{x-1}$.

$$f(x) = \frac{7x-4}{x-1} = \frac{7(x-1)+7-4}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 7, \text{ gdzie } x \neq 1$$

Ponieważ 7 jest liczbą całkowitą, $f(x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}$. Zatem $x-1$ musi być dzielnikiem całkowitym liczby 3. Oznacza to, że:

$$x-1 \in \{-3, -1, 1, 3\}, \text{ czyli } x \in \{-2, 0, 2, 4\}$$

Istnieją cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f . Są to punkty: $(-2, 6)$, $(0, 4)$, $(2, 10)$, $(4, 8)$.

Wyznacz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{-3x-10}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{2x+4}{x-4}$

9. Określ wartości c , dla których funkcja f jest odpowiednio: funkcją homograficzną, liniową, stałą.

a) $f(x) = \frac{4x-6}{cx+3}$ b) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x-4}{x-c}$ c) $f(x) = \frac{6x}{cx-5}$

10. Czy funkcja f jest funkcją homograficzną? Naszkicuj wykres funkcji f (zwróć uwagę na jej dziedzinę).

a) $f(x) = \frac{3x-9}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{-2x-8}{\frac{1}{2}x+2}$ c) $f(x) = \frac{x-2}{4-2x}$

11. Przeczytaj podaną w ramce informację.

Funkcję homograficzną można przedstawić w postaci kanonicznej, wykonując dzielenie, np.:

$$f(x) = \frac{3x-10}{x-4} = \frac{2}{x-4} + 3$$

bo $(3x-10) : (x-4) = 3$ reszta 2.

Wykonaj dzielenie i przedstaw funkcję f w postaci $f(x) = \frac{r}{x+3} + q$.

a) $f(x) = \frac{4x+9}{x+3}$ b) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x-5}{x+3}$ c) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x}{x+3}$

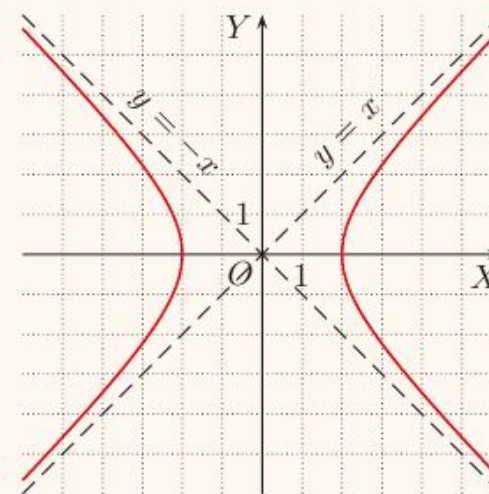
12. a) Suma dwóch liczb x i y jest równa ich iloczynowi. Podaj wzór funkcji opisującej zależność y od x i naszkicuj wykres tej funkcji.

b) Pole prostokąta o bokach długości x cm, y cm jest równe $2(x+y)$ cm². Podaj wzór funkcji opisującej zależność y od x . Określ dziedzinę tej funkcji i naszkicuj jej wykres.

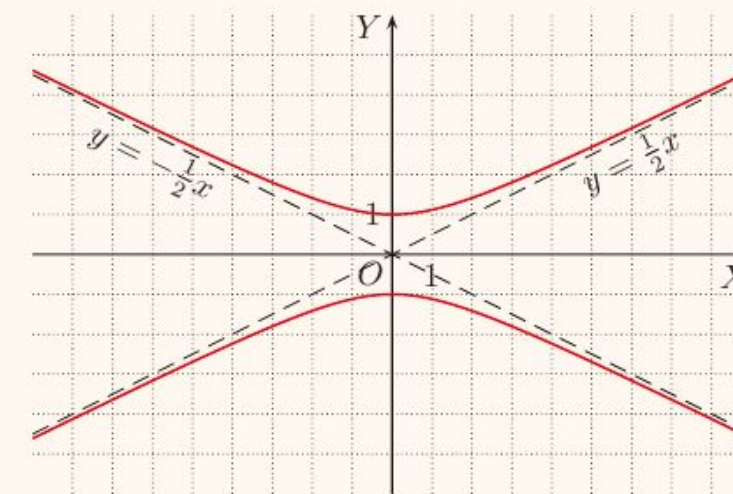
Dowiedz się więcej

Hiperbola

Rozpatruje się też hiperbole określone równaniami $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ lub $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, gdzie $a, b > 0$. Jeśli $a = b$, to asymptoty hiperboli są do siebie prostopadłe, a taką hiperbolę nazywamy **równoosiową** (rysunek po lewej).



Hiperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$



Hiperbola $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

W tabeli przedstawiono dane dotyczące punktów przecięcia hiperboli z osiami układu współrzędnych oraz równania jej asymptot.

Równanie hiperboli	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
Punkty przecięcia z osią OX	$(a, 0)$ i $(-a, 0)$	brak
Punkty przecięcia z osią OY	brak	$(0, a)$ i $(0, -a)$
Równania asymptot	$y = \frac{b}{a} \cdot x$ i $y = -\frac{b}{a} \cdot x$	$y = \frac{a}{b} \cdot x$ i $y = -\frac{a}{b} \cdot x$

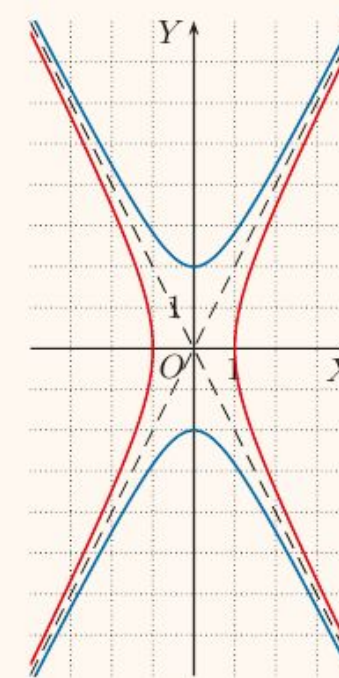
Na rysunku obok przedstawiono hiperbolę $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ (kolor czerwony) oraz hiperbolę $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ (kolor niebieski).

Mają one wspólne asymptoty: $y = -2x$ i $y = 2x$.

Hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ i $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ nazywamy **hiperbolami sprzężonymi**.

1. Wyznacz punkty przecięcia hiperboli z osiami układu współrzędnych oraz równania jej asymptot. Naszkicuj tę hiperbolę. Podaj równanie hiperboli sprzężonej.

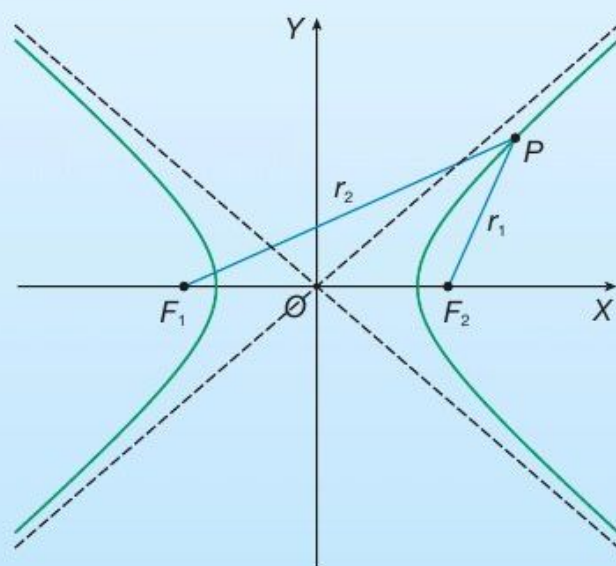
a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$
 b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ d) $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$



Hiperbola i hiperboloida

Ogólna definicja mówi, że hiperbola to zbiór tych wszystkich punktów P na płaszczyźnie, dla których wartość bezwzględna różnicy odległości od dwóch konkretnych punktów F_1 i F_2 , zwanych ogniskami, jest stała:

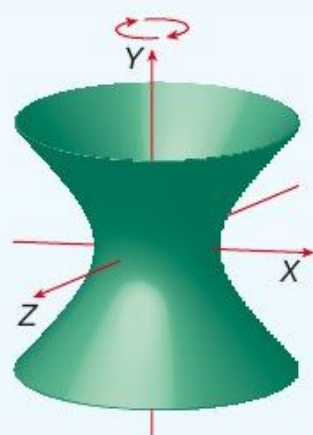
$$|r_1 - r_2| = \text{const.}$$



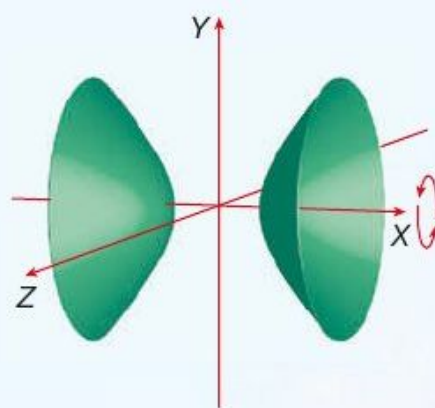
Obrót hiperboli

Hiperboloida to powierzchnia zakreślona w wyniku obrotu hiperboli wokół jej osi symetrii w przestrzeni trójwymiarowej.

Po obrocie pokazanej wyżej hiperboli wokół osi OY powstanie **hiperboloida jednopowłokowa**.



Po obrocie tej hiperboli wokół osi OX otrzymujemy **hiperboloidę dwupowłokową**.



Chłodnie kominowe

Chłodnie kominowe mają najczęściej kształt hiperboloidy jednopowłokowej. Pozwala to na oszczędne zużycie materiałów konstrukcyjnych. Mimo znacznych rozmiarów (wysokość chłodni przekracza zwykle 120 m, a średnica podstawy chłodni – 90 m) grubość żelbetowego płaszczu w najcieńszych miejscach wynosi zaledwie 12–18 cm. Taki kształt chłodni zwiększa również ich odporność na zginanie.



3.4. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Wyrażenie wymierne to ułamek, którego licznik i mianownik są wielomianami, np. $\frac{6x+4}{2}$, $\frac{7}{x}$, $\frac{x^2+3}{x-4}$, $\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}$, $\frac{x^2-4}{x^2+1}$.

Dziedziną wyrażenia wymiernego jest zbiór tych wszystkich liczb, dla których wyrażenie ma sens liczbowy. Należy zatem pamiętać, że miejsca zerowe mianownika nie należą do dziedziny wyrażenia wymiernego.

Przykład 1

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{2x^2-6x+5}{3x^2-7x}$.

$3x^2-7x = 3x(x-\frac{7}{3}) = 0$ dla $x = 0$ oraz dla $x = \frac{7}{3}$, więc dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{7}{3}\}$.

Ćwiczenie 1

Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartość dla $x = -1$.

- | | | | |
|--------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\frac{3x^5+2x^3+x}{x^2-9}$ | c) $\frac{19x^4+8x^3-6}{x^2-3x}$ | e) $\frac{6x-9}{x^2+5x+6}$ | g) $\frac{14x^4+8x^2+4}{x^5+27x^2}$ |
| b) $\frac{6x^2+3x-7}{4x^2-25}$ | d) $\frac{6x^2-5x+1}{2x^2+5x}$ | f) $\frac{4x^3+2x+1}{2x^2-7x+6}$ | h) $\frac{5x^2-10x}{x^3-5x^2+4x-20}$ |

Aby uprościć wyrażenie wymierne, rozkładamy wielomiany w liczniku i mianowniku na czynniki. Należy jednak pamiętać, że dziedziną wyrażenia uproszczonego jest dziedzina wyrażenia przed uproszczeniem.

Przykład 2

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}$, a następnie je uprość.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-4} = \frac{x^2(\cancel{x-2})^1}{(x+2)(\cancel{x-2})^1} = \frac{x^2}{x+2}$$

Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

- | | | | |
|--------------------------|------------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| a) $\frac{x^2-9}{3-x}$ | c) $\frac{2x^2+10x}{x^2-25}$ | e) $\frac{x^2-1}{x^4-x^3}$ | g) $\frac{x^3-3x^2}{x^2-6x+9}$ |
| b) $\frac{3x^2-6x}{x-2}$ | d) $\frac{x^3+4x}{x^2+4}$ | f) $\frac{4-x^2}{x^2-2x}$ | h) $\frac{x^2+4x+4}{x^4-16}$ |

Przykład 3

Wykonaj mnożenie $\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1}$.

Zakładamy, że $x^2 - 9 \neq 0$ i $2x - 1 \neq 0$, zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, \frac{1}{2}, 3\}$.

$$\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1} = \frac{1 \cancel{(2x-1)} (2x+1) \cancel{(x-3)}^1}{1 \cancel{(x-3)} (x+3) \cancel{(2x-1)}_1} = \frac{2x+1}{x+3}$$

Ćwiczenie 3

Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{4x-12}{x+2} \cdot \frac{2x+4}{2x-6} & \text{c)} \frac{-x^2+5x}{2x+1} \cdot \frac{4x^2-1}{x^2} & \text{e)} \frac{(x-2)^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{2+x}{x^2-4} \\ \text{b)} \frac{3-x}{x} \cdot \frac{2x+6}{x^2-9} & \text{d)} \frac{x^2-9}{x^2-4} \cdot \frac{0,5x+1}{9-3x} & \text{f)} \frac{3x^2-x^3}{2x-6} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^4-x^2} \end{array}$$

Przykład 4

Wykonaj dzielenie $\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12}$.

Zakładamy, że $x+4 \neq 0$ i $3x+12 \neq 0$, zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

$$\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12} = \frac{1 \cancel{2}}{1 \cancel{x+4}} \cdot \frac{3 \cancel{(x+4)}^1}{10 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

Ćwiczenie 4

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{6}{x-2} : \frac{3}{4x-8} & \text{c)} \frac{-6}{3-2x} : \frac{9}{4x-6} & \text{e)} \frac{7}{5x+35} : \frac{-35}{x+7} \\ \text{b)} \frac{-5}{2x+1} : \frac{10}{6x+3} & \text{d)} \frac{16}{3x+1} : \frac{12}{9x+3} & \text{f)} \frac{25}{6x+9} : \frac{15}{4x+6} \end{array}$$

Przykład 5

Wykonaj dzielenie $\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x}$.

Zakładamy, że $x^2 - 1 \neq 0$, $x + 2 \neq 0$ i $x^2 - x \neq 0$,
zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x} = \frac{x^2+2x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{1 \cancel{x} \cancel{(x+2)}}{1 \cancel{(x-1)} (x+1)} \cdot \frac{x \cancel{(x-1)}^1}{\cancel{x+2}_1} = \frac{x^2}{x+1}$$

Ćwiczenie 5

Wykonaj dzielenie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2x-6}{x} : \frac{x-3}{4x^2} & \text{c)} \frac{2x}{x^2-9} : \frac{6x^2}{x^2-6x+9} & \text{e)} \frac{x^3-1}{x-1} : \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \\ \text{b)} \frac{x^2-4}{x+1} : \frac{x+2}{x^2-1} & \text{d)} \frac{125-x^3}{x^2+2x+1} : \frac{x-5}{x+1} & \text{f)} \frac{x+4}{x^2-3x+9} : \frac{x^2+4x}{x^3+27} \end{array}$$

Zadania

1. Czy liczba 2 należy do dziedziny wyrażenia?

$$\text{a)} \frac{11x^2-5x-3}{x^2+4x+4} \quad \text{b)} \frac{17x^3-13x+2}{x^2-5x+6} \quad \text{c)} \frac{9x^4-2x^3+11x-6}{x^5-x^4-10x+4}$$

2. Które spośród liczb: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ nie należą do dziedziny wyrażenia?

$$\text{a)} \frac{16x^2+x+5}{x^3-9x^2} \quad \text{b)} \frac{x^2+6x+9}{x^4-4x^3+4x^2} \quad \text{c)} \frac{x^5-3x^4+x}{x^2-x-6} \quad \text{d)} \frac{2x^4-16x^3+9}{x^3-x^2-2x}$$

3. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz wartość tego wyrażenia dla $x = -1$, jeśli liczba -1 należy do jego dziedziny.

$$\text{a)} \frac{x^6-7x^4}{x^3} \quad \text{c)} \frac{x^2-1}{(x+1)^2} \quad \text{e)} \frac{x^4-3x^3}{x^4-9x^2} \quad \text{g)} \frac{-x^2+x^6}{x^4-2x^3+x^2}$$

$$\text{b)} \frac{2x^4+4x^3+2x^2}{x^3+x^2} \quad \text{d)} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4} \quad \text{f)} \frac{x^4-1}{x^4+2x^2+1} \quad \text{h)} \frac{2x^2+12x+18}{x^2+5x+6}$$

4. Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartości dla $x = -1$ i $x = -2$.

$$\text{a)} \frac{2x^2-6x-10}{x^2+3x} \quad \text{b)} \frac{x^3-3x+3}{\frac{1}{2}x^2-1} \quad \text{c)} \frac{4x^2+8x}{\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}} \quad \text{d)} \frac{4x^3+4x^2+x}{2x^2-7x-4}$$

5. Zapisz dziedzinę wyrażenia jako sumę przedziałów. Oblicz wartości wyrażenia dla: $x = -3$, $x = 1$ i $x = 3$.

$$\text{a)} \frac{x^2+2x}{x^2-4} \quad \text{b)} \frac{x^2+21}{x^2-3} \quad \text{c)} \frac{x+0,5}{4x^2-1} \quad \text{d)} \frac{3x^2-6x}{4x^2-9}$$

6. Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -2$.

$$\text{a)} \frac{4x+2}{x^2-x-2} \quad \text{c)} \frac{x^2+4x}{x^3+8x^2+16x} \quad \text{e)} \frac{x^3+x-2}{x^3-8}$$

$$\text{b)} \frac{2x^2+9x+4}{4x^2-1} \quad \text{d)} \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2} \quad \text{f)} \frac{x^4-x}{x^3-2x^2+x}$$

7. Dane są wyrażenia A i B . Wyznacz dziedziny wyrażeń A , B oraz $A \cdot B$.

$$\text{a)} A = \frac{x^2-2}{x^2-9x}, B = \frac{x^2+4x}{x^2+2x} \quad \text{c)} A = \frac{6x-5}{x^3-4x}, B = \frac{5x-6}{x^3-4x^2+4x}$$

$$\text{b)} A = \frac{4x^2-1}{x^2-4}, B = \frac{9x-x^3}{4x-x^3} \quad \text{d)} A = \frac{5x^2-2x+4}{x^3-2x^2-x+2}, B = \frac{3x^2-2x+5}{x^2+x-2}$$

8. Wykonaj mnożenie.

$$\text{a)} \frac{x-2}{x^2} \cdot \frac{3x}{2x-4} \quad \text{d)} \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^3+x^2}{x^4-1} \quad \text{g)} \frac{4x^2-16}{6-3x} \cdot \frac{x^2}{4x+8}$$

$$\text{b)} \frac{3x+4,5}{x-1} \cdot \frac{1-x}{x+1,5} \quad \text{e)} \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-1} \cdot \frac{(x+1)^2}{2x-1} \quad \text{h)} \frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{4-x^2}{x^2-1}$$

$$\text{c)} \frac{x^2}{3-x} \cdot \frac{3x-9}{x^4} \quad \text{f)} \frac{x^2-4}{x^3+3x^2} \cdot \frac{x^4-9x^2}{x^2+2x} \quad \text{i)} \frac{x^2+6x+9}{x^2+3x+9} \cdot \frac{x^3-27}{x^2-9}$$

9. Wykonaj dzielenie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{3x-3}{4x} : \frac{x-1}{6x} & \text{c)} \frac{10x+2}{x^2} : \frac{5x+1}{x} & \text{e)} \frac{x^3}{6x-2} : \frac{2x}{1-3x} \\ \text{b)} \frac{2x+4}{x-3} : \frac{3-x}{x+2} & \text{d)} \frac{6-4x}{(1-x)^2} : \frac{2x-3}{x-1} & \text{f)} \frac{x+1}{(x+2)^2} : \frac{x^2-1}{x^2-4} \end{array}$$

10. Uprość wyrażenie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{\frac{x^2+2x+1}{x-3}}{\frac{x+1}{x^2-9}} & \text{b)} \frac{\frac{x^2+8x+16}{6x-9}}{\frac{x^3-16x}{6x-4x^2}} & \text{c)} \frac{\frac{4x^2-1}{x^2+4x+4}}{\frac{4x^2-4x+1}{x^2-4}} \end{array}$$

11. Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} f(x) = \frac{\frac{-2}{x}}{\frac{1}{x}} & \text{c)} f(x) = \frac{\frac{3x-6}{x}}{\frac{x-2}{x}} & \text{e)} f(x) = \frac{\frac{x^2-x}{x-1}}{\frac{1}{x}} \\ \text{b)} f(x) = \frac{\frac{6}{x-1}}{\frac{3}{x-1}} & \text{d)} f(x) = \frac{\frac{4x}{x+2}}{\frac{2}{x+2}} & \text{f)} f(x) = \frac{\frac{2x-8}{x}}{\frac{2}{x^2}} \end{array}$$

12. Pole prostokąta wyraża się wzorem $P = \frac{6}{x^2-4}$, a długość jednego z jego boków jest równa $\frac{2}{x-2}$, gdzie $x > 2$. Wyznacz długość drugiego boku tego prostokąta.

a	b	P
$\frac{x+1}{x^2+1}$	$\frac{1}{x+1}$	?, $x > -1$
?	$\frac{x+2}{2}$	$\frac{3x+6}{x^2+4}$, $x > -2$
$\frac{4}{x-3}$	?	$\frac{4x^2+8}{x^2-9}$, $x > 3$

13. Dany jest prostokąt o bokach a , b i polu P . Przerysuj do zeszytu tabelę przedstawioną obok i ją uzupełnij.

14. Wykonaj mnożenie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x^2+6x+9}{2x^2-8} \cdot \frac{x^3-2x^2}{x^2+3x} & \text{b)} \frac{x^2-16}{x+1} \cdot \frac{1-x^2}{x+4} & \text{c)} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+2}{x^2-1} \end{array}$$

15. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Uprość wyrażenie $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^4-x^2y^2}{x^4-y^4}$.

Zakładamy, że $x \neq y$ i $x \neq -y$.

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^4-x^2y^2}{x^4-y^4} = \frac{\cancel{x^2+y^2}^1}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^2(\cancel{x^2-y^2}^1)}{\cancel{(x^2+y^2)}_1(\cancel{x^2-y^2})_1} = \frac{x^2}{x^2-y^2}$$

Uprość wyrażenie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{(x+y)^3(x-y)}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{x^3+xy^2}{x^4-y^4} & \text{b)} \frac{3x+y}{2x+y} \cdot \frac{8x^2+4xy}{9x^2-y^2} & \text{c)} \frac{6x+3y}{8x^3+y^3} \cdot \frac{4x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2} \end{array}$$

R 3.5. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Reguły dodawania wyrażeń wymiernych są analogiczne do reguł dodawania ułamków. Szczególną uwagę należy zwrócić na dziedziny dodawanych wyrażeń.

Przykład 1

Wykonaj dodawanie $\frac{-4}{2x+1} + \frac{2}{x}$. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$.

$$\begin{aligned} \frac{-4}{2x+1} + \frac{2}{x} &= \frac{-4x}{(2x+1)x} + \frac{2(2x+1)}{(2x+1)x} = \frac{-4x+4x+2}{(2x+1)x} = \frac{2}{(2x+1)x}. \end{aligned}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(2x+1)x$.

Przykład 2

Wykonaj odejmowanie $\frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{x^2-9}$. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{x^2-9} &= \frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} - \frac{1-x}{(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{x+3-(1-x)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+2}{x^2-9} \end{aligned}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x+3)(x-3)$.

Ćwiczenie 1

Wykonaj dodawanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2}{x-3} + \frac{4}{x+3} & \text{c)} \frac{x+3}{x+4} + \frac{x-4}{x-1} & \text{e)} \frac{2}{x^2+x} + \frac{2}{x^2-x} \\ \text{b)} \frac{x-5}{x} + \frac{x}{x+2} & \text{d)} \frac{x+6}{x^2-9} + \frac{x-2}{x+3} & \text{f)} \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+2x+1} \end{array}$$

Ćwiczenie 2

Wykonaj odejmowanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2}{x} - \frac{2}{x+3} & \text{c)} \frac{x-1}{x+4} - \frac{x}{x+1} & \text{e)} \frac{8}{x^2-16} - \frac{x+4}{x-4} + 1 \\ \text{b)} \frac{6}{x-2} - 3 & \text{d)} \frac{-4x}{x-4} - \frac{2x}{x+2} & \text{f)} \frac{3x}{x+1} - \frac{x+2}{x} - 2 \end{array}$$

Ćwiczenie 3

Czy funkcja f jest funkcją homograficzną?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = \frac{7x+7}{2x+4} + \frac{3x+5}{2x+4} - \frac{2x}{x+2} & \text{b)} f(x) = \frac{x}{6-3x} - \frac{3}{x-2} + \frac{4x}{3x-6} \end{array}$$

Przykład 3

Wykonaj odejmowanie $\frac{1}{x^2+2x} - \frac{2}{x^2-4}$.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+2x} - \frac{2}{x^2-4} &= \frac{1}{x(x+2)} - \frac{2}{(x+2)(x-2)} = \\ &= \frac{x-2}{x(x+2)(x-2)} - \frac{2x}{x(x+2)(x-2)} = \\ &= \frac{x-2-2x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{-(x+2)}{x(x+2)(x-2)} = \frac{-1}{x(x-2)} \end{aligned}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $x(x+2)(x-2)$.

Ćwiczenie 4

Wykonaj działania.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{3-x}{x^2+4x} - \frac{3+x}{x^2-4x} & \text{d)} \quad & \frac{x+1}{x^2-25} - \frac{x+1}{x^2-5x} + \frac{x-1}{x^2+5x} \\ \text{b)} \quad & \frac{x+3}{x^2-2x+1} - \frac{x-3}{x^2-1} & \text{e)} \quad & \frac{2x-4}{x^2-2x+1} - \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x-1} \\ \text{c)} \quad & \frac{2}{x} - \frac{4}{x-3} + \frac{2x-1}{x^2-3x} & \text{f)} \quad & \frac{6x-1}{4x^2-1} + \frac{3-2x}{2x^2-x} - \frac{1}{2x+1} \end{aligned}$$

D Przykład 4

Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$.

Przekształcamy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$f(x) = \frac{x+3-4}{x+3} = \frac{-4}{x+3} + 1$$

Niech $x_1, x_2 \in (-\infty; -3)$ oraz $x_1 < x_2$.

Badamy znak różnicy:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \left(\frac{-4}{x_2+3} + 1 \right) - \left(\frac{-4}{x_1+3} + 1 \right) = \frac{-4}{x_2+3} + \frac{4}{x_1+3} = \\ &= \frac{-4(x_1+3) + 4(x_2+3)}{(x_1+3)(x_2+3)} = \frac{4(x_2-x_1)}{(x_1+3)(x_2+3)} > 0 \end{aligned}$$

gdyż $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 + 3 < 0$, $x_2 + 3 < 0$.

Zatem $f(x_1) < f(x_2)$, czyli funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$.

D Ćwiczenie 5

Wykaż, że funkcja f jest monotoniczna w podanym przedziale.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & f(x) = \frac{x-5}{x+2}, \quad (-2; \infty) & \text{c)} \quad & f(x) = \frac{2x+5}{x+1}, \quad (-\infty; -1) \\ \text{b)} \quad & f(x) = \frac{x+3}{x-4}, \quad (-\infty; 4) & \text{d)} \quad & f(x) = \frac{-3x-7}{x-5}, \quad (-\infty; 5) \end{aligned}$$

Zadania

1. Wykonaj działania.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3} & \text{c)} \quad & \frac{3x-6}{x-1} + \frac{6x-1}{2x+2} & \text{e)} \quad & \frac{x}{x+5} + \frac{2-3x}{3x-1} \\ \text{b)} \quad & \frac{2}{x-4} - \frac{3}{x-1} & \text{d)} \quad & \frac{3x-1}{x} - \frac{x-7}{2x-4} & \text{f)} \quad & \frac{2x+1}{6-x} - \frac{3-2x}{x+6} \end{aligned}$$

2. Wykonaj działania.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{x-6}{x-1} + \frac{2x-6}{x^2-1} & \text{c)} \quad & \frac{3x}{x-1} + \frac{1-3x^2}{x^2-2x+1} & \text{e)} \quad & \frac{x+2}{x^2} - \frac{x+3}{x^2+x} \\ \text{b)} \quad & \frac{4x}{x^2-4} - \frac{4}{2+x} & \text{d)} \quad & \frac{2-x}{x+2} - \frac{x^2+3x+4}{x^2+4x+4} & \text{f)} \quad & \frac{x-1}{x^2+x} + \frac{x+1}{x^2-x} \end{aligned}$$

3. Wykonaj działania.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{3}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{x^2+4}{x^2-4} & \text{c)} \quad & \frac{x^2}{4x^2-9} + \frac{2-x}{2x-3} - \frac{6}{3-2x} \\ \text{b)} \quad & \frac{4}{x^2+6x} - \frac{1-x}{2x} + \frac{x-1}{x+6} & \text{d)} \quad & \frac{2x^2-7}{9x^2-6x+1} - \frac{2-3x^2}{3x-1} - x \end{aligned}$$

4. Uprość wyrażenie. Oblicz jego wartość dla $x = -3$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{x^2+x-3}{x^2-6x+9} - \frac{x+2}{2x-6} - 1 & \text{b)} \quad & \frac{-3x-3}{x^2-16} - \frac{x+1}{4-x} + \frac{5-x}{2x+8} \end{aligned}$$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

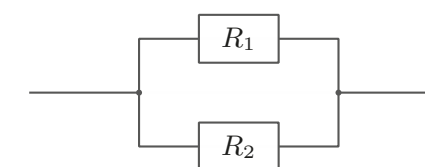
Wyznacz R_1 ze wzoru $\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R_c}{R_c \cdot R_2}$$

$$\text{Zatem } R_1 = \frac{R_c \cdot R_2}{R_2 - R_c}.$$



R_c jest oporem zastępczym układu dwóch oporników R_1 i R_2 połączonych równolegle.

Wyznacz R_2 oraz R_c ze wzoru $\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

6. Wyznacz ze wzoru wskazaną zmienną.

$$\text{a)} \quad P = \pi r^2 + \pi r l, \quad l \qquad \text{e)} \quad F = mg - m\omega^2 R, \quad R$$

$$\text{b)} \quad P = \frac{a+b}{2} \cdot h, \quad b \qquad \text{f)} \quad F = mg - m\omega^2 R, \quad m$$

$$\text{c)} \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad h \qquad \text{g)} \quad W = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right), \quad m$$

$$\text{d)} \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad r \qquad \text{h)} \quad W = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right), \quad r$$

3.6. Równania wymierne (1)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $\frac{-2x+8}{x-3} = 0$.

Zakładamy, że $x - 3 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. W wyznaczonej dziedzinie wyjściowe równanie jest równoważne równaniu:

$$\begin{aligned} -2x + 8 &= 0 && \text{Przyrównujemy licznik wyrażenia do zera.} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Liczba 4 spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } \frac{x+4}{x+2} = 0 \quad \text{b) } \frac{6x-2}{x} = 0 \quad \text{c) } \frac{4x+2}{2x-4} = 0 \quad \text{d) } \frac{2x-3}{2x+1} = 0$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\frac{\frac{3}{2}x-6}{x-4} = 0$.

Zakładamy, że $x - 4 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - 6 &= 0 && \text{Przyrównujemy licznik wyrażenia do zera.} \\ \frac{3}{2}x &= 6 && / \cdot \frac{2}{3} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Równanie jest sprzeczne, ponieważ liczba 4 nie spełnia założenia.

D Ćwiczenie 2

Wykaż, że podane równanie jest sprzeczne.

$$\text{a) } \frac{\frac{3}{2}x+3}{x+2} = 0 \quad \text{b) } \frac{-3x+\frac{9}{2}}{2x-3} = 0$$

Rozwiązywanie równania wymiernego $\frac{u(x)}{w(x)} = 0$ składa się z kilku etapów:

- wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu w i przyjęcie założeń,
- wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu u ,
- uwzględnienie założeń i sformułowanie odpowiedzi.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $\frac{(8x-4)(x+2)}{x(x-\frac{1}{2})} = 0$.

Zakładamy, że $x(x - \frac{1}{2}) \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$.

$$(8x - 4)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow 8x - 4 = 0 \text{ lub } x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ lub } x = -2$$

Liczba $\frac{1}{2}$ nie spełnia założenia, zatem jedynym rozwiązaniem równania jest liczba -2 .

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } \frac{x(x-3)}{x(x+2)} = 0 \quad \text{b) } \frac{(x+\frac{1}{2})(x+4)}{(x-3)(2x+1)} = 0 \quad \text{c) } \frac{(x+2)(x+3)}{x^2-9} = 0$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $\frac{x^2-2x}{x^2-4} = 0$.

Zakładamy, że $x^2 - 4 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ lub } x = 2$$

Odrzucamy $x = 2$ jako sprzeczne z założeniem, zatem jedynym rozwiązaniem równania jest liczba 0.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } \frac{x^2+4x}{x(x-6)} = 0 \quad \text{b) } \frac{x^2-16}{2x^2+8x} = 0 \quad \text{c) } \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = 0$$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } \frac{x-7}{x+3} = 0 \quad \text{b) } \frac{7x+21}{x-3} = 0 \quad \text{c) } \frac{-3x+9}{x-6} = 0$$

2. Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } \frac{(x-3)(x+6)}{(x+3)(x+2)} = 0 \quad \text{b) } \frac{(2x+8)(x-16)}{x^2-16} = 0 \quad \text{c) } \frac{(9-x)(2-6x)}{x^2-1} = 0$$

3. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x(x-5)(x+\frac{1}{3})}{(3x+1)(x+2)} &= 0 & \text{c) } \frac{(x-3)(6x-4)}{(2x-3)(x+3)x} &= 0 & \text{e) } \frac{x(3x-2)(9x-4)}{x^2(9x^2-4)} &= 0 \\ \text{b) } \frac{x(x+2)(x-4)}{x(x-2)(x+4)} &= 0 & \text{d) } \frac{x^2(x-3)(x+2)}{x(x+2)(4-x)} &= 0 & \text{f) } \frac{(2x+1)(x+3)}{x(4x^2-1)} &= 0 \end{aligned}$$

4. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2x^2+5x-3}{4x^2-4x+1} &= 0 & \text{c) } \frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6} &= 0 & \text{e) } \frac{2x^2-3x+1}{x^2-3x+2} &= 0 \\ \text{b) } \frac{9x^2+12x+4}{3x^2-x-2} &= 0 & \text{d) } \frac{x^2-5x+4}{x^2+x-2} &= 0 & \text{f) } \frac{6x^2+x-1}{3x^2+5x-2} &= 0 \end{aligned}$$

5. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x^3+2x^2+x}{(x+1)(x+2)} &= 0 & \text{c) } \frac{x^3+4x^2+4x}{x^2+2x} &= 0 & \text{e) } \frac{x^3-7x^2+12x}{2x^4-5x^3-3x^2} &= 0 \\ \text{b) } \frac{x^3-9x}{x^2-6x+9} &= 0 & \text{d) } \frac{2x^4+4x^3+x^2}{x^4-2x^2+1} &= 0 & \text{f) } \frac{x^3+3x^2+2x}{x^3+3x^2+4x} &= 0 \end{aligned}$$

3.7. Równania wymierne (2)

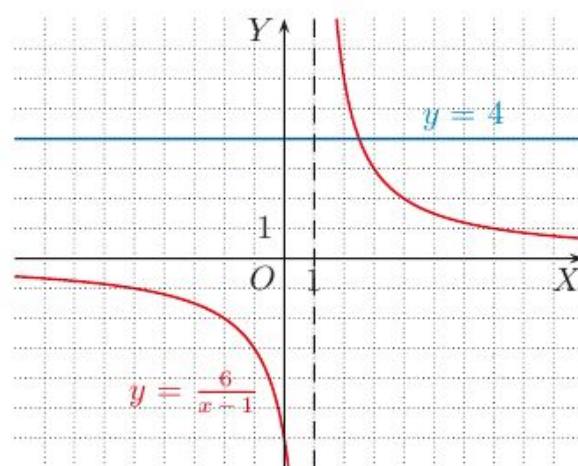
Przykład 1

Rozwiąż równanie $\frac{6}{x-1} = 4$.

Zakładamy, że $x-1 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned}\frac{6}{x-1} &= 4 \quad / \cdot (x-1) \\ 6 &= 4x - 4 \\ 10 &= 4x \\ x &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Liczba $\frac{5}{2}$ spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.



Hiperbola $y = \frac{6}{x-1}$ i prosta $y = 4$ przecinają się w punkcie o odciętej $\frac{5}{2}$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \quad \frac{6}{x+1} = 4 & \text{c)} \quad \frac{3}{-2x+7} = 1 & \text{e)} \quad \frac{7x+6}{1-3x} = -4 & \text{g)} \quad \frac{x-5}{3x+1} - 2 = 0 \\ \text{b)} \quad \frac{3x+2}{x} = 5 & \text{d)} \quad \frac{2x}{x-1} = 3 & \text{f)} \quad \frac{4-2x}{4-x} = -2 & \text{h)} \quad \frac{2x+4}{x-1} + 4 = 0 \end{array}$$

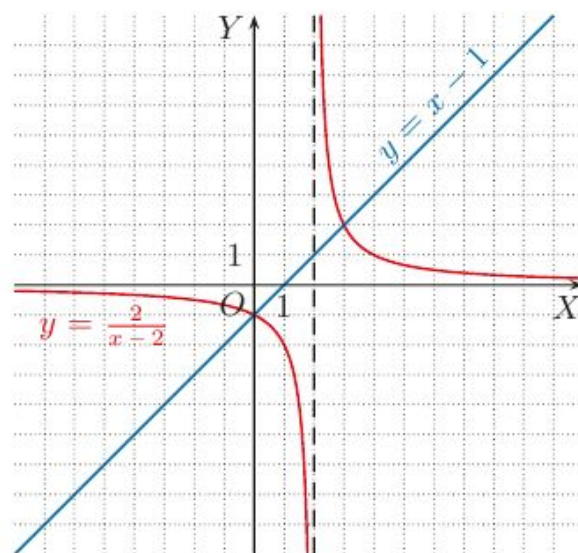
Przykład 2

Rozwiąż równanie $\frac{2}{x-2} = x-1$.

Zakładamy, że $x-2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-2} &= x-1 \quad / \cdot (x-2) \\ 2 &= (x-1)(x-2) \\ 2 &= x^2 - 3x + 2 \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \\ x &= 0 \text{ lub } x = 3\end{aligned}$$

Liczby 0 i 3 spełniają założenie, więc są rozwiązaniami równania.



Hiperbola $y = \frac{2}{x-2}$ i prosta $y = x-1$ przecinają się w punktach o odciętych 0 oraz 3.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \quad \frac{2}{x} = x+1 & \text{c)} \quad \frac{4}{x+3} = x+3 & \text{e)} \quad \frac{6}{x} - 5 = x & \text{g)} \quad \frac{3}{x+2} = x \\ \text{b)} \quad -\frac{1}{x} = x+2 & \text{d)} \quad \frac{9}{6-x} = x & \text{f)} \quad \frac{8}{x} + x = -6 & \text{h)} \quad -\frac{6}{x-3} = 2x+1 \end{array}$$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2}$.

Zakładamy, że $x+1 \neq 0$ i $x-2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

Przekształcamy równanie równoważnie przez pomnożenie „na krzyż”.

$$\begin{aligned}\frac{2}{x+1} &= \frac{3}{x-2} \\ 2(x-2) &= 3(x+1) \\ 2x-4 &= 3x+3 \\ x &= -7\end{aligned}$$

Liczba -7 spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.

Dla $b \neq 0$ i $d \neq 0$ równość:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

jest równoważna równości:

$$ad = bc$$

Mnożenie „na krzyż” jest tym samym co pomnożenie obu stron równania przez iloczyn mianowników:

$$(x+1)(x-2)$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \frac{7}{x+1} = \frac{3}{x+5} & \text{c)} \quad \frac{-2}{x-1} = \frac{4}{2x+3} & \text{e)} \quad \frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1} \\ \text{b)} \quad \frac{4}{x-4} = \frac{3}{x-6} & \text{d)} \quad \frac{4}{2x-1} = \frac{-3}{3x+2} & \text{f)} \quad \frac{x-3}{2x} = \frac{x-2}{2x+1} \end{array}$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $\frac{x+4}{2x+1} - \frac{5}{x+2} = 0$.

Zakładamy, że $2x+1 \neq 0$ i $x+2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -\frac{1}{2}\}$.

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{2x+1} &= \frac{5}{x+2} \\ (x+4)(x+2) &= 5(2x+1) \\ x^2 + 6x + 8 &= 10x + 5 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ \Delta &= (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4, \sqrt{\Delta} = 2 \\ x_1 &= \frac{4-2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{4+2}{2} = 3\end{aligned}$$

Liczby 1 i 3 spełniają założenie, więc są rozwiązaniami równania.

Przenosimy $\frac{5}{x+2}$ na drugą stronę równania. Mnożymy „na krzyż”.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \frac{5}{x-1} = \frac{x+1}{2x-5} & \text{c)} \quad \frac{x-1}{x} = \frac{2x-2}{x-8} & \text{e)} \quad \frac{x}{x+3} = \frac{6}{x+6} \\ \text{b)} \quad \frac{x+5}{2x+1} = \frac{1}{x+1} & \text{d)} \quad \frac{2x-2}{x-4} = \frac{x+3}{x} & \text{f)} \quad \frac{2x}{x-7} = \frac{x}{x+1} \end{array}$$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{4}{x} = \frac{3}{2+x} & \text{c)} \frac{x}{x-1} = \frac{x+2}{x} & \text{e)} \frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{2x+1} \\ \text{b)} \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} = 0 & \text{d)} \frac{x-3}{x-2} = \frac{x+3}{x+2} & \text{f)} \frac{x+1}{2x-1} - \frac{2}{x} = 0 \end{array}$$

2. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x+2}{x+4} - \frac{x+4}{x-2} = 0 & \text{c)} \frac{x+4}{2x-1} - \frac{1}{x} = 0 & \text{e)} \frac{8-2x}{x-1} + \frac{x-3}{x-4} = 0 \\ \text{b)} \frac{4}{x} + \frac{x}{x+1} = 0 & \text{d)} \frac{x+1}{x+2} + \frac{x}{x+1} = 0 & \text{f)} \frac{2-x}{x-1} - \frac{x-1}{x+2} = 0 \end{array}$$

3. Znajdź pierwiastki całkowite równania.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x}{-3} = \frac{-5}{x+2} & \text{c)} x+1 = \frac{2-2x}{x-1} & \text{e)} \frac{6x-4}{2-3x} = -2x \\ \text{b)} x = \frac{5x+3}{2x} & \text{d)} \frac{3}{x-1} = 2x-1 & \text{f)} 6x+1 = \frac{2}{x} \end{array}$$

4. Które z podanych równań nie mają rozwiązań, a które mają nieskończenie wiele rozwiązań?

$$\text{I. } \frac{3x-3}{x-1} = 2 \quad \text{II. } \frac{6x-2}{3x-1} = 2 \quad \text{III. } \frac{1-4x}{8x-2} = -0,5 \quad \text{IV. } \frac{3x+9}{10x+30} = 0,3$$

5. Podaj liczbę rozwiązań równania.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x+1 = \frac{2-2x}{x-1} & \text{c)} \frac{6x-4}{2-3x} = -2 & \text{e)} \frac{3-x}{2x-1} = \frac{2x-6}{2-4x} \\ \text{b)} \frac{2x-2}{x-2} = \frac{x}{x-1} & \text{d)} \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{3x+1} & \text{f)} x = \frac{3x-3}{x-1} \end{array}$$

6. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2}{5x+10} = \frac{-3}{x^2-4} & \text{c)} \frac{1}{1-x} + \frac{x}{x-1} = 1 & \text{e)} \frac{6}{x} - 1 = \frac{2}{x-1} \\ \text{b)} \frac{2x+5}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} & \text{d)} \frac{2x}{2x+3} - 1 = \frac{2x}{2x-3} & \text{f)} \frac{2x+1}{x^2-9} - \frac{3}{x-3} = 0 \end{array}$$

7. Dla jakiej wartości parametru a równanie $\frac{a^2x-4}{2x-4} = 0$ jest sprzeczne?

8. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x} = 2 & \text{e)} \frac{2}{x+4} + \frac{3}{x-4} = \frac{14}{x^2-16} \\ \text{b)} \frac{3-x}{4x^2+4x+1} - \frac{5x}{2x+1} = 0 & \text{f)} \frac{3}{x+2} + \frac{12}{x^2-4} + \frac{1}{2x} = 0 \\ \text{c)} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1-x}{x^2+2x+1} & \text{g)} \frac{x+5}{x-4} + \frac{3}{x} = \frac{36}{x^2-4x} \\ \text{d)} \frac{2x+1}{x^2+6x+9} + \frac{x-1}{9-x^2} = 0 & \text{h)} \frac{x}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{4}{x^2-4} \end{array}$$

9. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji $y = \frac{x+1}{x-2}$ i prostej $y = x - 3$.

Zakładamy, że $x - 2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, i rozwiązujemy równanie:

$$\frac{x+1}{x-2} = x-3 \quad / \cdot (x-2)$$

$$x+1 = (x-2)(x-3)$$

$$x+1 = x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

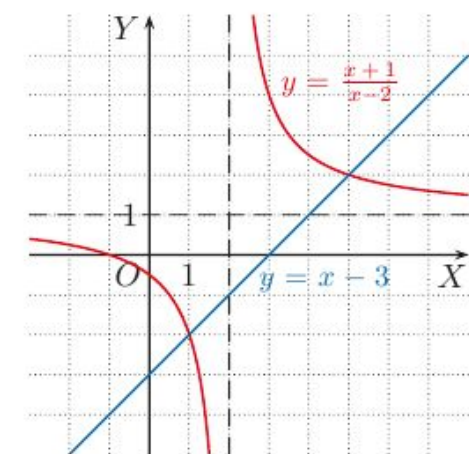
$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 5 = 16$$

$$x_1 = \frac{6-4}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{6+4}{2} = 5$$

Obliczamy drugie współrzędne punktów wspólnych:

$$y_1 = 1 - 3 = -2, \quad y_2 = 5 - 3 = 2$$

Zatem punktami wspólnymi hiperboli i prostej są $(1, -2)$ i $(5, 2)$.

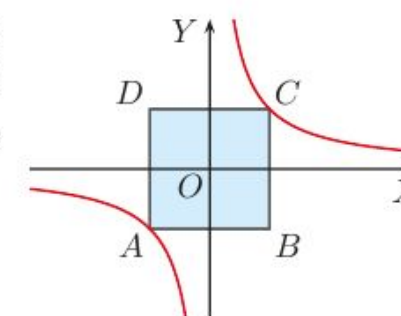


Wyznacz współrzędne punktów wspólnych hiperboli $y = \frac{2x+2}{x-1}$ i prostej:

$$\text{a)} y = x + 1, \quad \text{b)} y = 2x + 2, \quad \text{c)} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

10. Osie układu współrzędnych są osiami symetrii kwadratu $ABCD$ (rysunek obok). Wierzchołki A i C należą do hiperboli $y = \frac{a}{x}$. Podaj współrzędne wierzchołków kwadratu i oblicz jego pole dla:

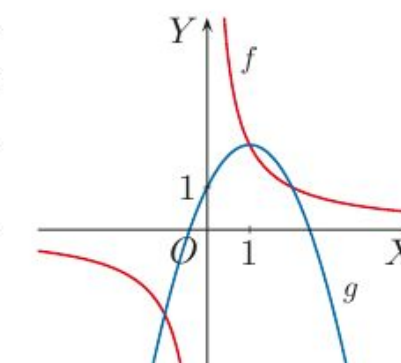
$$\text{a)} a = 4, \quad \text{b)} a = 3.$$



11. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = x + 2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} y = \frac{-4}{x-2} \\ y = -x - 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} y = \frac{-x-1}{x+3} \\ y = 2x + 5 \end{cases} \end{array}$$

12. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$ i $g(x) = -x^2 + 2x + 1$. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia tych wykresów.



13. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} y = \frac{x}{x+2} \\ y = x^2 + 2x \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} y = \frac{-2x}{x+1} \\ y = -x^2 \end{cases} \end{array}$$

R 3.8. Nierówności wymierne

Przykład 1

Rozwiąż nierówność $\frac{3}{x} < -1$.

Zakładamy, że $x \neq 0$.

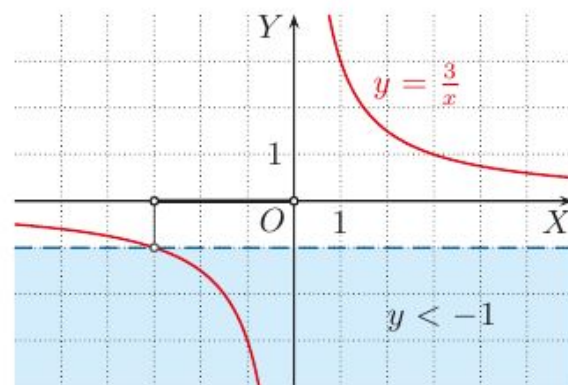
$$\frac{3}{x} < -1$$

$$\frac{3}{x} + 1 < 0$$

$$\frac{3+x}{x} < 0$$

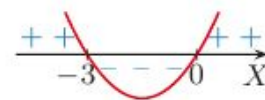
$$(3+x)x < 0$$

Iloraz dwóch liczb różnych od zera ma taki sam znak jak ich iloczyn.



Rozwiązanie nierówności $\frac{3}{x} < -1$ można również odczytać z wykresu.

Szkicujemy odpowiednią parabolę i, uwzględniając założenie, odczytujemy rozwiązanie nierówności: $x \in (-3; 0)$.



Uwaga. Nierówność $\frac{3}{x} < -1$ można również rozwiązać, mnożąc jej obie strony przez kwadrat mianownika (kwadrat wyrażenia różnego od zera jest zawsze dodatni). Otrzymujemy wtedy nierówność $3x < -x^2$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{4}{x} > 2$ c) $-\frac{3}{2x} \geq 2$

b) $\frac{2}{x} \leq -1$ d) $-\frac{3}{4x} < 2$

Dla $a \neq 0, b \neq 0$ znak ilorazu $\frac{a}{b}$ jest taki sam jak znak iloczynu $a \cdot b$.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $\frac{2x-5}{x-3} \leq 3$.

Zakładamy, że $x \neq 3$.

$$\frac{2x-5}{x-3} - 3 \leq 0$$

$$\frac{2x-5-3(x-3)}{x-3} \leq 0$$

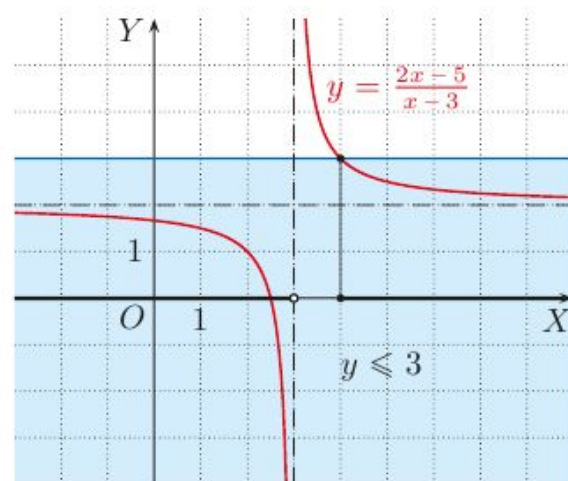
$$\frac{-x+4}{x-3} \leq 0$$

$$-(x-4)(x-3) \leq 0 \quad / \cdot (-1)$$

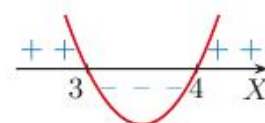
$$(x-4)(x-3) \geq 0$$

Szkicujemy odpowiednią parabolę i, uwzględniając założenie, odczytujemy rozwiązanie nierówności:

$$x \in (-\infty; 3) \cup [4; \infty)$$



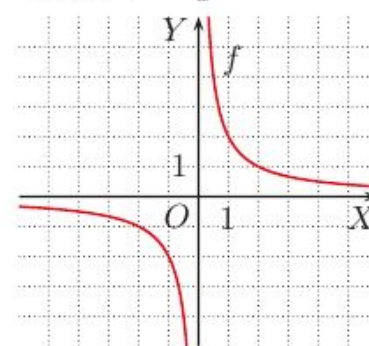
Rozwiązanie nierówności $\frac{2x-5}{x-3} \leq 3$ można również odczytać z wykresu.



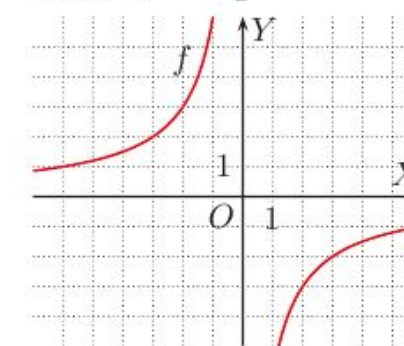
Ćwiczenie 2

Odczytaj z wykresu funkcji f zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 2$ oraz $f(x) \geq -2$. Sprawdź odpowiedzi, rozwiązując odpowiednie nierówności.

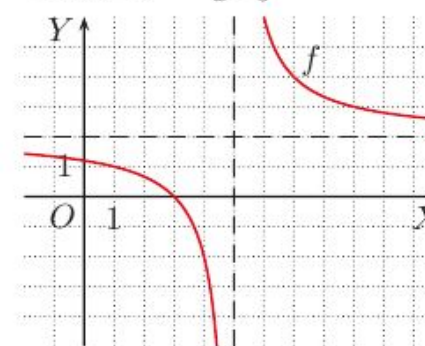
a) $f(x) = \frac{2}{x}$



b) $f(x) = -\frac{6}{x}$



c) $f(x) = \frac{2x-6}{x-5}$



Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3}{x-2} \geq 1$

c) $\frac{2}{4-x} < 3$

e) $\frac{1-x}{x} \leq -4$

g) $\frac{2x+3}{x+3} < 5$

b) $\frac{2x+7}{x-4} > 3$

d) $\frac{4x-7}{x-2} \leq 5$

f) $\frac{2x-2}{x+1} > 2$

h) $\frac{-7x+2}{x+\frac{1}{2}} \leq -6$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $\frac{x}{x-3} + \frac{x}{x+2} \geq 2$.

Zakładamy, że $x \neq -2$ i $x \neq 3$.

$$\frac{x(x+2)}{(x+2)(x-3)} + \frac{x(x-3)}{(x+2)(x-3)} \geq \frac{2(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x+2)(x-3)$.

$$\frac{x^2+2x}{(x+2)(x-3)} + \frac{x^2-3x}{(x+2)(x-3)} - \frac{2x^2-6x+4x-12}{(x+2)(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{x+12}{(x+2)(x-3)} \geq 0$$

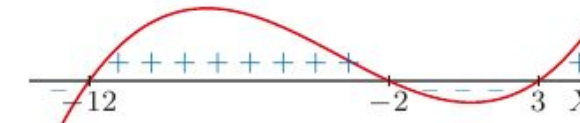
$$(x+12)(x+2)(x-3) \geq 0$$

Iloraz i iloczyn dwóch liczb mają ten sam znak.

Szkicujemy wykres wielomianu:

$$w(x) = (x+12)(x+2)(x-3)$$

Jego pierwiastkami są liczby: $-12, -2$ i 3 .



Odczytujemy rozwiązanie nierówności (z uwzględnieniem założeń):

$$x \in [-12; -2) \cup (3; \infty)$$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{2x}{x-3} - \frac{x-2}{x-1} \leq 1$

c) $\frac{x+3}{x-2} + 1 \leq \frac{7}{(x-2)^2}$

e) $\frac{3}{x+2} \geq \frac{6}{x} - \frac{7}{x+3}$

b) $\frac{x-1}{x+2} > 4 - \frac{3x}{x+4}$

d) $1 - \frac{x}{x+1} \geq \frac{x-2}{x-1}$

f) $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{-6x+1}{2x+2} < 4 & \text{c)} \frac{x+5}{x+7} > -2 & \text{e)} \frac{3x+2}{5x} \geq -1 & \text{g)} \frac{-4x-5}{5-x} \leq 9 \\ \text{b)} \frac{8x+6}{3-x} > -5 & \text{d)} \frac{3x+1}{5-2x} \leq 2 & \text{f)} \frac{3x+6}{1-2x} > -4 & \text{h)} \frac{-x+7}{2x+5} \geq 4 \end{array}$$

2. Rozwiąż układ nierówności.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 0 \leq \frac{2}{x+2} \leq 4 & \text{c)} -1 < \frac{3x+1}{x+1} < 3 & \text{e)} \frac{x+2}{x+1} \leq 1 \leq \frac{x+6}{x+3} \\ \text{b)} -2 \leq \frac{2}{2x+1} < 2 & \text{d)} -1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 & \text{f)} \frac{x+4}{x-2} \leq 0 \leq \frac{3-x}{x-5} \end{array}$$

3. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x-3}{x-4} \leq \frac{x-1}{x-3} & \text{c)} \frac{4-2x}{x+1} > \frac{1-x}{x} & \text{e)} \frac{4-x}{2x-2} \geq \frac{x-3}{1-2x} \\ \text{b)} \frac{x+3}{x+2} \geq \frac{x+3}{2x+7} & \text{d)} \frac{x+3}{1-x} < \frac{5-x}{x+2} & \text{f)} \frac{4x+2}{2x-6} \leq \frac{2x+2}{2x+3} \end{array}$$

4. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.

$$\begin{array}{l} \text{a)} A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{8}{x+2} > 2 \right\}, B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{4}{x+1} \geq -2 \right\} \\ \text{b)} A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x-1} < 1 \right\}, B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x-3} \geq \frac{x+1}{x-2} \right\} \\ \text{c)} A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{x+1} \geq 1 \right\}, B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{4x-1}{4x+3} \leq \frac{2x+3}{2x-5} \right\} \end{array}$$

5. Rozwiąż nierówność.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2} > 0 & \text{d)} \frac{2x-5}{x^2-16} \leq \frac{x}{x+4} & \text{g)} \frac{2x+1}{2x^2+7x} < \frac{2x+3}{2x^2+5x} \\ \text{b)} \frac{2x+1}{x^3+4x^2+4x} \leq 0 & \text{e)} \frac{x+3}{x^2-16} \geq \frac{2x}{x^2-4x} & \text{h)} \frac{2x}{x^2-1} \leq \frac{2x+3}{3x^2+3x} \\ \text{c)} \frac{x^3+4x^2}{x^2+x-12} \geq 0 & \text{f)} \frac{x-1}{x^2+2x} > \frac{2-x}{x^2+x} & \text{i)} \frac{x+1}{x-2} \leq \frac{6x+2}{x^2-4} \end{array}$$

6. Rozwiąż nierówność.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} \geq 2 & \text{e)} \frac{2}{9x^2-1} \leq \frac{3x+2}{3x-1} + 1 \\ \text{b)} \frac{1}{4-x} + \frac{3x}{x+2} < 3 & \text{f)} \frac{2x^2-3}{(x-1)^3} \geq \frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} \\ \text{c)} \frac{4}{x-3} - 1 \leq \frac{2x+3}{2x+1} & \text{g)} \frac{x+2}{x(x+1)} + \frac{1}{x+2} \geq \frac{2x+2}{x(x+2)} \\ \text{d)} \frac{3x}{x^2-4} > \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} & \text{h)} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} > \frac{2x+3}{x(x+1)} \end{array}$$

3.9. Dziedzina funkcji. Funkcje wymierne

Gdy jest podany wzór funkcji $y = f(x)$, ale nie została określona jej dziedzina, przyjmuje się, że dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których wzór funkcji ma sens liczbowy (taką dziedzinę nazywa się też **dziedziną naturalną** funkcji).

Przykład 1

Określ dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$.

Wzór funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ ma sens liczbowy, gdy $x \geq 0$ (ze względu na wyrażenie pod pierwiastkiem) oraz $x \neq 2$ (ze względu na mianownik ułamka). Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = [0; 2) \cup (2; \infty)$.

Ćwiczenie 1

Określ dziedzinę funkcji f .

$$\begin{array}{lll} \text{a)} f(x) = \sqrt{x-8} & \text{d)} f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} & \text{g)} f(x) = \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{x-1}} \\ \text{b)} f(x) = \sqrt{3-x} & \text{e)} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}} & \text{h)} f(x) = \frac{\sqrt{x+6}}{x^2\sqrt{3-x}} \\ \text{c)} f(x) = \sqrt{-x} & \text{f)} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}} & \text{i)} f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{(x^2-4)\sqrt{x+2}} \end{array}$$

Przykład 2

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}}$.

Wzór funkcji $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}}$ ma sens liczbowy, gdy $x+1 > 0$, zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-1; \infty)$.

Równość $x^2 - 4 = 0$ jest spełniona przez $x = -2$ oraz $x = 2$. Zauważ, że $-2 \notin D_f$, zatem jedynym miejscem zerowym funkcji f jest liczba 2.

Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f .

$$\begin{array}{lll} \text{a)} f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-4} & \text{c)} f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+2}} & \text{e)} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} \\ \text{b)} f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{2-x^2} & \text{d)} f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-3}} & \text{f)} f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{1-x}} \end{array}$$

Ćwiczenie 3

Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f .

$$\begin{array}{lll} \text{a)} f(x) = \frac{x^2-16}{|x|+4} & \text{b)} f(x) = \frac{5-|x|}{x^2-25} & \text{c)} f(x) = \frac{x(x-3)}{|x|-3} \end{array}$$

Definicja

Funkcję postaci $f(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$, gdzie v i w są wielomianami ($w \neq 0$), nazywamy **funkcją wymierną**. Dziedziną takiej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których $w(x) \neq 0$.

Ćwiczenie 4

Określ dziedzinę funkcji wymiernej $f(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$.

- a) $v(x) = 2x^6 - 1$, $w(x) = 3x^2 - 6$ d) $v(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $w(x) = x^4 + 1$
 b) $v(x) = x - 1$, $w(x) = x^4 - 16$ e) $v(x) = x^2 - 4$, $w(x) = x^3 - 2x^2 + x$
 c) $v(x) = 2x^2 - x$, $w(x) = 4x^3 + x^2$ f) $v(x) = x^3 + x$, $w(x) = x^3 + 7x^2 - 6$

Przykład 3

Określ dziedziny funkcji: f , g i h , a następnie uprość ich wzory.

$$f(x) = \frac{x^2}{x(x-1)}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad \text{wzór po uproszczeniu: } f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$g(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \text{wzór po uproszczeniu: } g(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$h(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)^2}, \quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \text{wzór po uproszczeniu: } h(x) = \frac{x}{x-1}$$

Funkcje f , g , h opisane są tym samym wzorem, ale mają różne dziedziny.

Definicja

Funkcje f i g o przeciwdziedzinie $\mathbb{R}$ są równe, jeśli mają tę samą dziedzinę D oraz dla każdego $x \in D$ zachodzi równość $f(x) = g(x)$.

Ćwiczenie 5

Zbadaj, czy funkcje f i g są równe. Naszkicuj ich wykresy.

- a) $f(x) = \frac{x^2}{x}$, $g(x) = x$ c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$, $g(x) = \frac{x+3}{(x+3)^2}$
 b) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ d) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{2x-1}{2x^2-3x+1}$

Ćwiczenie 6

Wyznacz sumę funkcji wymiernych f i g oraz określ jej dziedzinę.

- a) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{-2}{x-4}$
 b) $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, $g(x) = \frac{1-x}{2x+1}$

Suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcji wymiernych są funkcjami wymiernymi.

Przykład 4

Wyznacz iloraz $\frac{f}{g}$ funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ i $g(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}$.

Aby funkcje f , g oraz ich iloraz były określone, muszą być spełnione warunki: $x^2 - 1 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$, $x^2 + 2x \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2-1} : \frac{x^2+2x}{x+1} = \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x^2+2x} = \frac{1}{(x-1)\cancel{(x+1)}} \cdot \frac{\cancel{x+1}}{x(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

Ćwiczenie 7

Wyznacz iloczyn $f \cdot g$ oraz iloraz $\frac{f}{g}$ funkcji f i g . Określ dziedziny iloczynu i ilorazu.

- a) $f(x) = \frac{x-2}{2x+4}$, $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{4x^2-1}{x+3}$, $g(x) = \frac{x^2-9}{2x+1}$
 b) $f(x) = \frac{4x-2}{x^2-4}$, $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ d) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2-4x+5}{x^2+x}$

Zadania

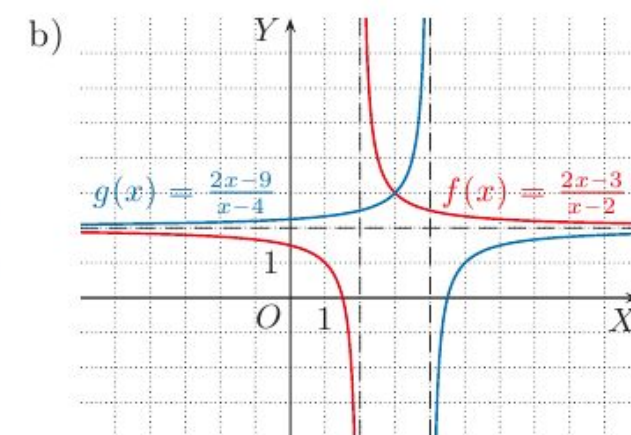
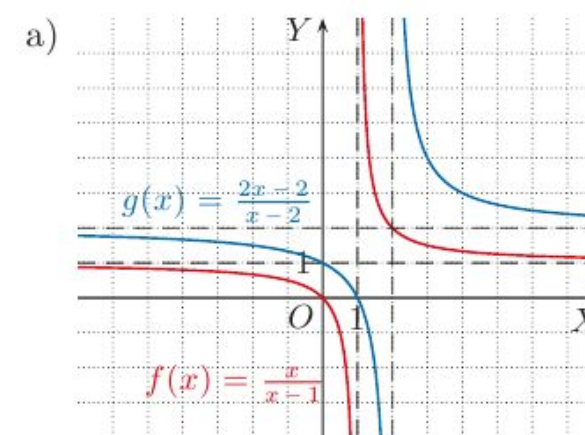
1. Określ dziedzinę i podaj miejsca zerowe funkcji f .

- a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ c) $f(x) = \frac{(4x-1)(x+1)(2x+1)}{4x^2-1}$
 b) $f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ d) $f(x) = \frac{x^3-6x^2+5x}{x^2-x}$

2. Funkcja h dana jest za pomocą wzoru $h(x) = f(x) + g(x)$. Określ dziedzinę funkcji h , podaj jej miejsca zerowe i wyznacz zbiór argumentów, dla których przyjmuje ona wartości nieujemne.

- a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$ c) $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{3x+6}$
 b) $f(x) = \frac{2}{3x+1}$, $g(x) = \frac{4}{1-x}$ d) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-4}$, $g(x) = \frac{3-x}{x+2}$

3. Odczytaj z rysunku, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od wartości funkcji g .



4. Podaj przykład funkcji wymiernej, której wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 6)$ i której dziedziną jest zbiór D .

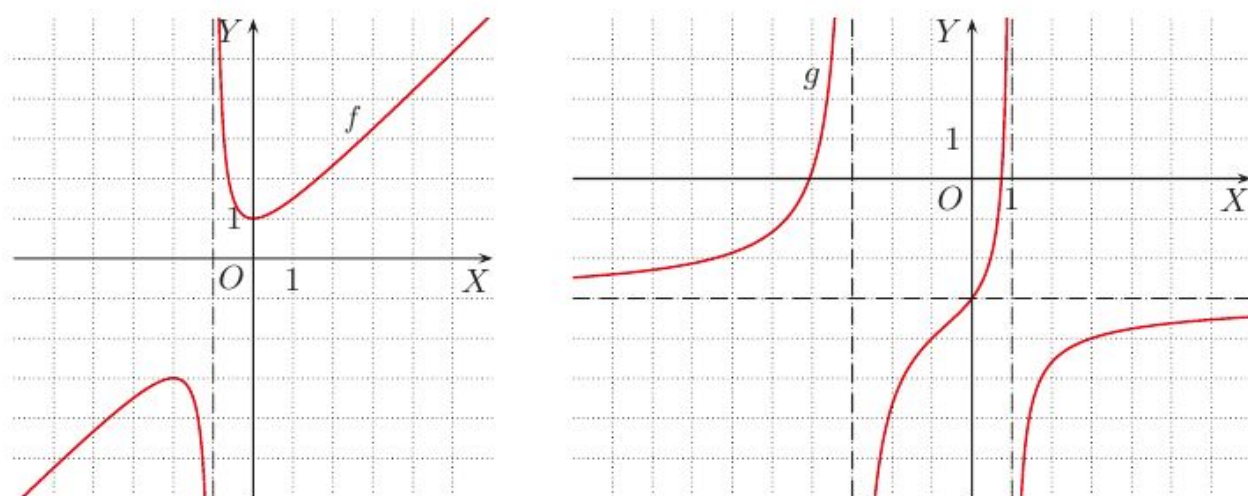
a) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$

5. Dla jakich wartości parametru k dziedziną funkcji f jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

a) $f(x) = \frac{4x-1}{x^2-kx+1}$ b) $f(x) = \frac{4x-1}{x^2-kx+k}$ c) $f(x) = \frac{4x-1}{kx^2+kx+1}$

6. Poniżej przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{-3x^2-10x+9}{x^2+2x-3}$$



- a) Określ dziedziny funkcji f i g . Dla każdej z tych funkcji podaj jej przedziały monotoniczności oraz argumenty, dla których przyjmuje ona wartości mniejsze od -3 .

- b) Podaj liczbę rozwiązań równań $f(x) = m$ oraz $g(x) = m$ w zależności od parametru m .

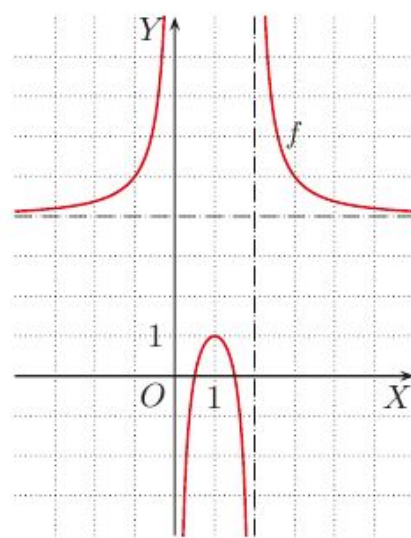
7. Niech $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^3-2x^2}$, $g(x) = \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^3+x}$ i $h(x) = \frac{x^3+2x^2+3x+6}{x^3+3x}$.

- a) Określ dziedziny i uprość wzory tych funkcji.
b) Rozwiąż równanie $f(x) + g(x) - 2h(x) = 0$.
c) Rozwiąż nierówność $f(x) \cdot g(x) - h(x) \leq 0$.

8. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{4x^2-8x+3}{x^2-2x}$$

- a) Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .
b) Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = |m|$ w zależności od parametru m .



3.10. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (1)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $|3x - 4| = 2$.

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= -2 \quad \text{lub} \quad 3x - 4 = 2 \\ 3x &= 2 \quad \text{lub} \quad 3x = 6 \\ x &= \frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Twierdzenie

Jeśli $a > 0$, to $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -a$ lub $x = a$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $|5x - 3| = 2$ b) $|9x + 5| = 4$ c) $|\frac{2}{3}x + 4| = 6$ d) $|6 - \frac{7}{5}x| = 1$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $|2x - 4| + |3x - 6| = 20$.

$$\begin{aligned} 2|x - 2| + 3|x - 2| &= 20 \\ 5|x - 2| &= 20 \quad / : 5 \\ |x - 2| &= 4 \\ x - 2 &= -4 \quad \text{lub} \quad x - 2 = 4 \\ x &= -2 \quad \text{lub} \quad x = 6 \end{aligned}$$

Twierdzenie

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $|x - 3| + |2x - 6| = 9$ c) $|4x + 2| - |2x + 1| + |6x + 3| = 4$
b) $|4x - 8| + |2 - x| = 5$ d) $|6x + 4| - |3x + 2| + |9x + 6| = 8$

Twierdzenie

Jeśli $a > 0$, to $|x| < a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-a < x < a$.

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $|2x + 3| < 5$.

$$\begin{aligned} -5 < 2x + 3 < 5 \quad / - 3 \quad &\text{Odejmujemy 3 od } -5, \text{ od } 2x + 3 \text{ i od } 5. \\ -8 < 2x < 2 \quad / : 2 \\ -4 < x < 1 \\ x &\in (-4; 1) \end{aligned}$$

Przykład 4Rozwiąż nierówność $|3x - 1| > 2$.

$$3x - 1 < -2 \quad \text{lub} \quad 3x - 1 > 2$$

$$3x < -1 \quad \text{lub} \quad 3x > 3$$

$$x < -\frac{1}{3} \quad \text{lub} \quad x > 1$$

$$x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; \infty)$$

Twierdzenie

Jeśli $a > 0$, to $|x| > a$
wtedy i tylko wtedy, gdy
 $x < -a$ lub $x > a$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

- a) $|3x - 5| \leq 2$ c) $|2x + 4| < 8$ e) $|6 - 3x| \geq 9$ g) $|\frac{3}{2}x + 6| \leq 9$
 b) $|4x - 2| > 8$ d) $|\frac{1}{3} + x| < \frac{1}{2}$ f) $|\frac{1}{3}x - 1| \leq 7$ h) $|\frac{2}{5}x - 2| > 3$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $|3x + 1| = 5$ c) $|\frac{3}{5}x + 1| = 2$ e) $|4x + 5| = 0$ g) $|x^2 - 1| = 3$
 b) $|2x - 3| = 1$ d) $|2 - \frac{2}{3}x| = 3$ f) $|2x - 6| = -4$ h) $|x^2 - 3| = 1$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $|3x - 6| = 7 + |x - 2|$ c) $|6 - x| + |\frac{1}{2}x - 3| + |2x - 12| = 7$
 b) $|4x + 6| + |6x + 9| = 10$ d) $|x - 2| + |2x - 4| + |4x - 8| = 7$

3. Rozwiąż nierówność.

- a) $|5x + 2| < 7$ c) $|\frac{1}{3}x + 2| \leq 1$ e) $|\frac{2}{3}x - 3| \geq 5$ g) $|2x - 3| > 0$
 b) $|3x - \frac{1}{2}| < \frac{3}{2}$ d) $|6x + 2| > 1$ f) $|3x - \frac{1}{4}| > \frac{1}{8}$ h) $|4x - 1| \leq 0$

4. Wyznacz zbiór liczb x spełniających podany warunek.

- a) $3 \leq |2x + 1| \leq 5$ c) $-2 \leq 4 - 3|x| \leq 3$
 b) $4 \leq |2 - 3x| \leq 7$ d) $3 \leq 5 - 2|x| \leq 6$

5. Rozwiąż nierówność.

- a) $|2x - 6| + |3x - 9| < 15$ d) $|x + 1| + |3x + 3| \leq 6 - 2|x + 1|$
 b) $|4x - 2| - |2x - 1| > 6$ e) $2|x - 4| + |3x - 12| \leq 4 + |8 - 2x|$
 c) $|3x - 3| - |1 - x| \geq 8$ f) $|2x + 4| + 1 \leq |3x + 6| - |2 + x| + 2$

6. Rozwiąż nierówność.

- a) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} + 2|x - 5| \leq 9$ c) $|2x + 8| + \sqrt{x^2 + 8x + 16} \geq 1$
 b) $\sqrt{4x + x^2 + 4} + 3|x + 2| > 20$ d) $\sqrt{1 - 2x + x^2} - |2x - 2| + 5 < 0$

R 3.11. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (2)**Przykład 1**Aby rozwiązać równanie $|x - 1| + 3x = 7$, rozpatrujemy dwa przypadki:

1° Jeśli $x - 1 < 0$, czyli $x \in (-\infty; 1)$, to równanie przybiera postać:
 2° Jeśli $x - 1 \geq 0$, czyli $x \in [1; \infty)$, to równanie przybiera postać:

$$-(x - 1) + 3x = 7$$

$$-x + 1 + 3x = 7$$

$$2x = 6$$

$$x = 3 \quad 3 \notin (-\infty; 1), \text{ sprzeczność}$$

$$(x - 1) + 3x = 7$$

$$4x = 8$$

$$x = 2 \quad 2 \in [1; \infty)$$

Zatem rozwiązaniem równania $|x - 1| + 3x = 7$ jest liczba 2.**Ćwiczenie 1**

Rozwiąż równanie.

- a) $|x - 1| - 2x = 4$ c) $|x + 4| + 1 = 2x$ e) $|2x + 4| - 2x = 4$
 b) $|x - 1| + x = 2$ d) $|3 - x| = x - 1$ f) $x|x - 4| = x^2 + 4x$

Przykład 2Aby rozwiązać nierówność $2|x + 2| + x \leq 1$, rozpatrujemy dwa przypadki:

1° Jeśli $x + 2 < 0$, czyli $x \in (-\infty; -2)$, to nierówność przybiera postać:
 2° Jeśli $x + 2 \geq 0$, czyli $x \in [-2; \infty)$, to nierówność przybiera postać:

$$-2(x + 2) + x \leq 1$$

$$-2x - 4 + x \leq 1$$

$$-x \leq 5$$

$$x \geq -5$$

$$x \in [-5; -2)$$

$$2(x + 2) + x \leq 1$$

$$2x + 4 + x \leq 1$$

$$3x \leq -3$$

$$x \leq -1$$

$$x \in [-2; -1]$$

Uwzględniamy
założenie.

Zatem nierówność $2|x + 2| + x \leq 1$ zachodzi dla $x \in [-5; -1]$.**Ćwiczenie 2**

Rozwiąż nierówność.

- a) $|x - 2| - 3x > 1$ c) $|x - 5| < x + 5$ e) $|3 - x| \leq x - |2x - 6|$
 b) $|2x + 6| + x \leq 3$ d) $|6 + x| \geq 2x + 6$ f) $x|1 - x| \leq x + x^2$

Przykład 3Rozwiąż równanie $2|x| - |x - 2| = 1$.1° Jeśli $x \in (-\infty; 0)$, to równanie przybiera postać:

$$\begin{aligned} -2x - (-(x - 2)) &= 1 \\ -2x + x - 2 &= 1 \\ -x &= 3 \\ x &= -3 \quad -3 \in (-\infty; 0) \end{aligned}$$

2° Jeśli $x \in [0; 2)$, to równanie przybiera postać:

$$\begin{aligned} 2x - (-(x - 2)) &= 1 \\ 2x + x - 2 &= 1 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \quad 1 \in [0; 2) \end{aligned}$$

3° Jeśli $x \in [2; \infty)$, to równanie przybiera postać:

$$\begin{aligned} 2x - (x - 2) &= 1 \\ 2x - x + 2 &= 1 \\ x &= -1 \quad -1 \notin [2; \infty), \text{ sprzeczność} \end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniami równania $2|x| - |x - 2| = 1$ są liczby -3 i 1 .**Przykład 4**Rozwiąż nierówność $|x - 3| + |x + 4| < 9$.1° Jeśli $x \in (-\infty; -4)$, to nierówność przybiera postać:

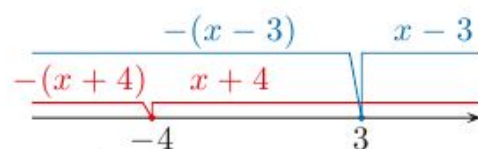
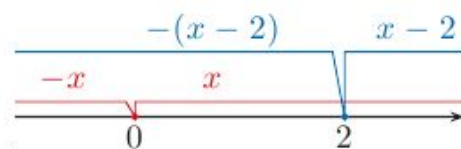
$$\begin{aligned} -(x - 3) - (x + 4) &< 9 \\ -2x &< 10 \\ x &> -5 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy: $x \in (-5; -4)$.2° Jeśli $x \in [-4; 3)$, to nierówność przybiera postać:

$$\begin{aligned} -(x - 3) + x + 4 &< 9 \\ 7 &< 9 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy: $x \in [-4; 3)$.3° Jeśli $x \in [3; \infty)$, to nierówność przybiera postać:

$$\begin{aligned} x - 3 + x + 4 &< 9 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu założenia otrzymujemy: $x \in [3; 4)$.Zatem nierówność $|x - 3| + |x + 4| < 9$ zachodzi dla $x \in (-5; 4)$.**Ćwiczenie 3**

Rozwiąż równanie.

- a) $|x| + |x - 3| = 5$ c) $|x| + |x - 2| = 2x - 2$
b) $|x + 4| - |2 - x| = 6$ d) $|x| + |x + 5| = 2x + 5$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

- a) $|x| + |x - 2| < 4$ c) $|x + 2| - |3 - x| \leq x - 1$
b) $|x - 1| + |3 - x| \geq 3$ d) $|x| - |5 - x| > x - 2$

Przykład 5Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem:

$$f(x) = |x - 1| + |x - 3| - 6$$

Na podstawie wykresu podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geq -2$.1° Dla $x \in (-\infty; 1)$:

$$f(x) = -(x - 1) - (x - 3) - 6 = -2x - 2$$

2° Dla $x \in [1; 3)$:

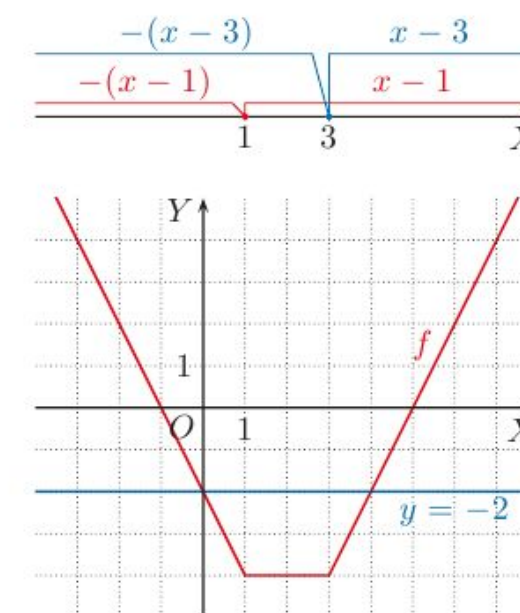
$$f(x) = (x - 1) - (x - 3) - 6 = -4$$

3° Dla $x \in [3; \infty)$:

$$f(x) = (x - 1) + (x - 3) - 6 = 2x - 10$$

Wzór funkcji f możemy więc zapisać w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -4 & \text{dla } x \in [1; 3) \\ 2x - 10 & \text{dla } x \in [3; \infty) \end{cases}$$

Nierówność $f(x) \geq -2$ jest prawdziwa dla $x \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$.**Ćwiczenie 5**Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Na podstawie wykresu podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \leq 4$.

- a) $f(x) = |x + 3| + x - 1$ c) $f(x) = 2x + |1 - x| + 2|x - 2|$
b) $f(x) = |x - 1| - |x + 1| + 1$ d) $f(x) = |x| + |x + 1| + |x - 2|$

Ćwiczenie 6Oblicz pole obszaru ograniczonego osią OX i wykresem funkcji f .

- a) $f(x) = |x + 4| + |x - 2| - 10$ b) $f(x) = |x + 2| - |x| - x$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} |x+1| - |x| = 0 & \text{c)} |x| - |x-4| = 2 & \text{e)} |x-2| + |x+2| = 4 \\ \text{b)} |x| + |x+5| = 7 & \text{d)} |x+3| + |x| = 3 & \text{f)} |2x+4| - |x-1| = 3 \end{array}$$

2. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sqrt{x^2 + 6x + 9} - |x-2| = x & \text{c)} |x-2| - |x-3| + |x| = 6 \\ \text{b)} \sqrt{4-4x+x^2} + \sqrt{x^2} = 6 & \text{d)} |4-x| - |x| = |x+3| \end{array}$$

3. Rozwiąż nierówność.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} |x-3| + |x| \leq 3 & \text{d)} |3x-6| - |x+2| < 8 \\ \text{b)} |1-x| - |1+x| \geq 2 & \text{e)} \sqrt{x^2 + 4x + 4} + |x| \leq 5 \\ \text{c)} |x-5| + |x-1| \geq 4 & \text{f)} \sqrt{9-6x+x^2} - 3 > \sqrt{x^2} \end{array}$$

4. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geq 0$.

$$\text{a)} f(x) = |x-2| + |x+1| - 5 \quad \text{b)} f(x) = |1-x| - |x-3|$$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż równanie $||x| - 3| = 5$.

Jeśli $a > 0$, to $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = a$ lub $x = -a$.

$$|x| - 3 = 5 \quad \text{lub} \quad |x| - 3 = -5$$

$$|x| = 8 \quad \text{lub} \quad |x| = -2 \quad \text{sprzeczność}$$

$$x = 8 \quad \text{lub} \quad x = -8$$

Rozwiązaniami równania $||x| - 3| = 5$ są liczby -8 i 8 .

Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} ||x| - 1| = 1 & \text{c)} ||x+1| + 5| = 4 & \text{e)} ||2x+3| + 3| = 3 \\ \text{b)} ||x| + 2| = 3 & \text{d)} ||x-3| - 6| = 2 & \text{f)} |||x| - 1| - 1| = 1 \end{array}$$

6. Rozwiąż nierówność.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} ||x| - 3| < 2 & \text{c)} ||x+4| - 3| > 2 & \text{e)} |2-x| + 5 \leq 6 \\ \text{b)} ||x| + 4| > 5 & \text{d)} |2x-1| + 2 \geq 3 & \text{f)} |7 - |2x+1|| \geq 7 \end{array}$$

7. Rozwiąż równanie.

$$\text{a)} |x + |x|| = |x| \quad \text{b)} ||x| - 1| = |x-1| \quad \text{c)} |x - |x-1|| = |x-1|$$

R 3.12. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (3)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $\frac{2}{|x-1|} = 1$.

Zakładamy, że $x \neq 1$.

Mnożymy obie strony równania przez $|x-1|$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |x-1| &= 2 \\ x-1 &= -2 \quad \text{lub} \quad x-1 = 2 \\ x &= -1 \quad \text{lub} \quad x = 3 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

$$\text{a)} \frac{3}{|x+2|} = 1 \quad \text{b)} \frac{2}{|7x-1|} = 5 \quad \text{c)} \frac{-5}{|2x-1|} = 3 \quad \text{d)} \frac{1}{|5x-2|} = 0$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\left| \frac{x+1}{x-2} \right| = 1$.

Zakładamy, że $x \neq 2$.

$$\frac{|x+1|}{|x-2|} = 1 \quad / \cdot |x-2|$$

$$|x+1| = |x-2|$$

$$x+1 = x-2 \quad \text{lub} \quad x+1 = -(x-2)$$

$$1 = -2 \quad \text{lub} \quad 2x = 1$$

$$\left| \frac{p}{q} \right| = \frac{|p|}{|q|}, \quad \text{gdy } q \neq 0$$

$$|p| = |q| \quad \text{oznacza, że:} \\ p = q \quad \text{lub} \quad p = -q$$

Pierwsze równanie jest sprzeczne, z drugiego otrzymujemy rozwiązanie $x = \frac{1}{2}$.

Uwaga. Równanie z przykładu 2. można też zapisać w równoważnej postaci:

$$\frac{x+1}{x-2} = -1 \quad \text{lub} \quad \frac{x+1}{x-2} = 1$$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

$$\text{a)} \left| \frac{2x-1}{6x+3} \right| = 1 \quad \text{b)} \left| \frac{2x+8}{-4x-1} \right| = 2 \quad \text{c)} \left| \frac{5x-1}{x-2} \right| = 4 \quad \text{d)} \left| \frac{5x-3}{3x-2} \right| = 0$$

Ćwiczenie 3

a) Rozwiąż równanie $\left| \frac{x}{x-3} \right| = 2$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x}{x-3}$. Odczytaj z wykresu rozwiązanie równania $|f(x)| = 2$.

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $\frac{5}{|3-x|} > 1$.

Zakładamy, że $x \neq 3$. Ponieważ mianownik jest zawsze dodatni, możemy obie strony nierówności pomnożyć przez $|3-x|$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |3-x| &< 5 \\ -5 &< 3-x < 5 \\ x &\in (-2; 8) \end{aligned}$$

Uwzględniamy założenie i otrzymujemy rozwiązanie: $x \in (-2; 3) \cup (3; 8)$.

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $\frac{1}{|x-2|} < 1$.

Zakładamy, że $x \neq 2$. Ponieważ mianownik jest zawsze dodatni, możemy obie strony nierówności pomnożyć przez $|x-2|$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |x-2| &> 1 \\ x-2 &< -1 \quad \text{lub} \quad x-2 > 1 \\ x &< 1 \quad \text{lub} \quad x > 3 \end{aligned}$$

Zatem $x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{2}{|x-1|} &> 1 & \text{b)} \quad \frac{7}{|x+2|} &\leq 1 & \text{c)} \quad \frac{6}{|3x+1|} - 2 &\geq 1 & \text{d)} \quad \left|1 + \frac{4}{x}\right| &\leq 3 \end{aligned}$$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{7}{|x-1|} &= 2 & \text{c)} \quad \frac{2}{|6-3x|} &= \frac{1}{2} & \text{e)} \quad \left|\frac{x-3}{x+6}\right| &= 5 & \text{g)} \quad \left|\frac{4x+1}{6x-1}\right| &= 0 \\ \text{b)} \quad \frac{6}{|2x+1|} &= 3 & \text{d)} \quad \frac{1}{|4x-1|} &= -2 & \text{f)} \quad \left|\frac{2x-3}{5-x}\right| &= 2 & \text{h)} \quad \left|\frac{x-3}{6-2x}\right| &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Rozwiąż nierówność.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{8}{|2x-6|} &> 1 & \text{d)} \quad \frac{2}{|x+3|} &< 1 & \text{g)} \quad \frac{-2}{|3x-2|} &\leq \frac{-3}{|3x-2|} + 1 \\ \text{b)} \quad \frac{1}{|4x-8|} &> -3 & \text{e)} \quad \frac{1}{|4-x|} &\leq 2 & \text{h)} \quad \frac{-3}{|x-2|} &> \frac{1}{|2x-4|} - 7 \\ \text{c)} \quad \frac{8}{|4-2x|} &\leq -2 & \text{f)} \quad \frac{6}{|1-2x|} &\geq 1 & \text{i)} \quad \frac{1}{|2x-1|} &\leq \frac{1}{|3-6x|} + 3 \end{aligned}$$

3. Rozwiąż nierówność.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \left|\frac{2x-3}{x-2}\right| &\leq 2 & \text{d)} \quad \left|\frac{x-1}{x+1}\right| &> 1 & \text{g)} \quad \frac{1}{|x+4|} &\leq \frac{1}{|x-2|} \\ \text{b)} \quad \left|\frac{3-x}{x+1}\right| &> 2 & \text{e)} \quad \left|\frac{x+2}{2x-3}\right| &\leq 4 & \text{h)} \quad \frac{6}{|4-x|} &> \frac{1}{|2x+1|} \\ \text{c)} \quad \left|\frac{x-1}{x+7}\right| &\leq 0 & \text{f)} \quad \left|\frac{x+3}{x-1}\right| &> 0 & \text{i)} \quad \frac{2}{|x-4|} &\geq \frac{1}{|2x+8|} \end{aligned}$$

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rozwiąż równanie $\frac{3x}{|x-2|} = 1$.

Zakładamy, że $x \neq 2$.

1° Dla $x > 2$ mamy $\frac{3x}{x-2} = 1$, czyli $3x = x-2$.

Stąd $x = -1$ – sprzeczne z założeniem, że $x > 2$.

2° Dla $x < 2$ mamy $\frac{3x}{-x+2} = 1$, czyli $3x = -x+2$.

Stąd $x = \frac{1}{2}$.

Zatem rozwiązaniem równania $\frac{3x}{|x-2|} = 1$ jest liczba $\frac{1}{2}$.

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{x}{|2x-1|} &= 1 & \text{b)} \quad \frac{1}{|x|} &= x+2 & \text{c)} \quad \frac{2x}{|x-3|} &= x-2 \end{aligned}$$

5.* Rozwiąż nierówność.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{|x-1|}{x} &> 0 & \text{c)} \quad \frac{|1-x|}{x} &< 0 & \text{e)} \quad \left|\frac{2}{|x|} - 1\right| &< 3 \\ \text{b)} \quad \frac{|x|}{x+2} &> 2 & \text{d)} \quad \left|\frac{2}{|x|} - 1\right| &\leq 0 & \text{f)} \quad \left|\frac{2}{|x|} - 1\right| &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6.* Naskicuj wykres funkcji f .

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(x) &= \frac{x-1}{|x|} & \text{b)} \quad f(x) &= \frac{|x|-1}{x} & \text{c)} \quad f(x) &= \frac{|x-1|}{x} \end{aligned}$$

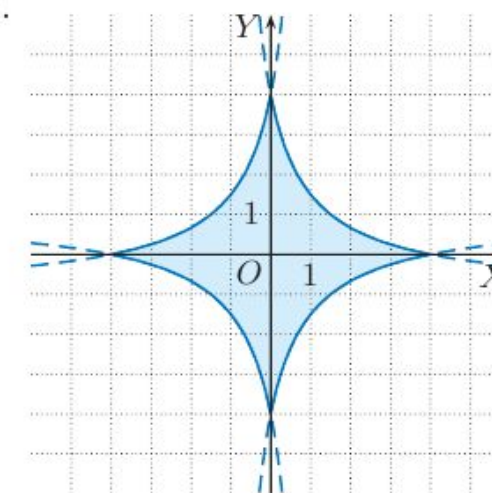
7.* Zaznacz zbiór A w układzie współrzędnych.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{|x+1|} \geq 1 \text{ i } |y| \leq 2 \right\} \\ \text{b)} \quad A &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{|5-x|} < \frac{1}{|x+1|} \right\} \end{aligned}$$

8.* Na rysunku obok przedstawiono zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają nierówność:

$$|y| \leq \frac{a}{|x|+1} - 1$$

Oblicz współczynnik a .



3.13. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)

Przykład 1

Licznik pewnego ułamka jest równy 6. Jeśli licznik tego ułamka zmniejszymy o 2, a mianownik o 3, to wartość ułamka się nie zmieni. Jaki to ułamek?

Szukany ułamek możemy zapisać w postaci $\frac{6}{x}$, wówczas nowy ułamek będzie miał postać $\frac{6-2}{x-3}$, czyli $\frac{4}{x-3}$. Otrzymujemy więc równanie:

$$\frac{6}{x} = \frac{4}{x-3}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$
$$6(x-3) = 4x$$
$$x = 9$$

Zatem szukany ułamek to $\frac{6}{9}$.

Ćwiczenie 1

a) Licznik pewnego ułamka jest równy 10. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 20, a mianownik o 30, to wartość ułamka się nie zmieni. Jaki to ułamek?

b) Dane są dwie liczby dodatnie. Jedna z tych liczb jest o 3 mniejsza od drugiej, a ich stosunek jest jak 75 do 100. Wyznacz te liczby.

Ćwiczenie 2

a) Ola kupiła cukierki A w cenie x zł/kg i zapłaciła 24 zł. Ala kupiła taką samą ilość cukierków B , droższych o 4 zł/kg, i zapłaciła 30 zł. Ile kosztuje kilogram cukierków A , a ile – cukierków B ?

b) Cena winogron to obecnie x zł/kg. Tydzień temu, kiedy winogrona były o 4 zł/kg droższe, Tomek wydał na ich zakup 20 zł. Gdyby obecna cena spadła o 1 zł/kg, to taką samą ilość winogron można by kupić za 12 zł. Jaka jest obecna cena winogron?

Zadania

- a) Licznik pewnego ułamka jest o 3 mniejszy od jego mianownika. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 4, a mianownik o 7, to wartość ułamka się nie zmieni. Wyznacz ten ułamek.
b) Licznik pewnego ułamka nieskracalnego jest o 2 mniejszy od jego mianownika. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 9, a mianownik o 5, to wartość ułamka dwukrotnie wzrośnie. Wyznacz ten ułamek.

- a) Mama Bartka jest o 6 lat młodsza od jego taty. Stosunek wieku mamy i taty jest jak 8 do 9. Ile lat ma mama Bartka, a ile jego tata?
b) Magda ma 25 lat, a jej młodsza siostra – 13 lat. Za ile lat stosunek wieku Magdy i jej siostry będzie równy $\frac{3}{2}$?
- a) Dany jest prostokąt o bokach 32 cm i 51 cm. Jego krótszy bok skrócono o x cm, a dłuższy bok – o $3x$ cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 3:4. O ile zmniejszył się obwód prostokąta? Rozpatrz wszystkie przypadki.
b) Dany jest prostokąt o bokach 30 cm i 18 cm. Jeden z tych boków wydłużono o x cm, a drugi – o $2x$ cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 5:9. O ile zwiększył się obwód tego prostokąta? Rozpatrz wszystkie przypadki.
- Przeczytaj podany w ramce przykład.

Piotrek potrzebuje 4 godzin na pomalowanie płotu wokół domu. Adam tę samą pracę wykonałby w ciągu 8 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie płotu, gdyby pracowali razem, każdy w swoim tempie?

Oznaczmy przez w pracę, którą należy wykonać. Wówczas:

$\frac{w}{4}$ – praca wykonana przez Piotrkę w ciągu godziny,

$\frac{w}{8}$ – praca wykonana przez Adama w ciągu godziny,

$\frac{w}{4} + \frac{w}{8} = \frac{3}{8}w$ – praca wykonana wspólnie w ciągu godziny.

Z tego wynika, że na wspólne wykonanie pracy chłopcy potrzebowaliby:

$$w : \frac{3}{8}w = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ [h]}$$

czyli 2 godzin i 40 minut.

Artur potrzebuje 10 godzin na pomalowanie pokoju, a Darek zrobiłby to w ciągu 6 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie pokoju, gdyby pracowali razem, każdy w swoim tempie?

- Dwie koparki, pracując razem, wykonują wykop w ciągu 8 dni. Gdyby pracowała tylko pierwsza z nich, wykop powstałby w ciągu 12 dni. Ile czasu zajęłoby wykonanie wykopu drugiej koparce?
- Pierwsza koparka wykonała połowę wykopu w ciągu 6 godzin, resztę wykopu wykonała druga koparka w ciągu 9 godzin. Ile czasu zajęłoby wykonanie wykopu, gdyby obie koparki pracowały jednocześnie, każda w swoim tempie?

3.14. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)

Przykład 1

Dwa samochody wyruszyły jednocześnie z Malborka. Każdy jechał ze stałą prędkością. Po pewnym czasie pierwszy znajdował się w odległości 320 km, a drugi – 240 km od tego miasta. Prędkość drugiego samochodu była o 20 km/h mniejsza od prędkości pierwszego. Oblicz prędkości obu samochodów.

Oznaczmy przez v_1 i v_2 prędkości samochodów w km/h. Wówczas:

$$\frac{320}{v_1} = \frac{240}{v_1 - 20} \quad \begin{array}{l} \text{Korzystamy ze wzoru } t = \frac{s}{v}, \\ \text{gdzie } t - \text{czas, } s - \text{droga.} \end{array}$$

$$320(v_1 - 20) = 240v_1, \text{ stąd } v_1 = 80 \text{ oraz } v_2 = 80 - 20 = 60$$

Prędkości samochodów wynosiły odpowiednio 80 km/h i 60 km/h.

Ćwiczenie 1

a) Samochód jadący z prędkością v pokonał odległość 195 km. Samochód jadący z prędkością o 20 km/h większą pokonał w tym samym czasie 260 km. Oblicz prędkości obu samochodów.

b) Droga między miastami A i B ma 350 km. Z tych miast wyruszyły jednocześnie naprzeciw siebie dwa samochody i jechały ze stałymi prędkościami. Pierwszy z nich jechał z prędkością o 30 km/h większą niż drugi. Samochody minęły się, gdy pierwszy pokonał $\frac{3}{5}$ trasy między miastami. Oblicz prędkości obu samochodów.

Ćwiczenie 2

a) Pociąg ekspresowy jechał z prędkością o 30 km/h większą niż pociąg osobowy i przebył trasę długości 360 km w czasie o godzinę krótszym. Oblicz prędkości tych pociągów.

b) Trasa kolejowa z miasta A do miasta B ma 510 km. Z tych miast wyruszyły jednocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi i jechały ze stałymi prędkościami. Prędkość pierwszego była o 10 km/h większa niż prędkość drugiego. Pociągi spotkały się w odległości 270 km od miasta A . Oblicz prędkości obu pociągów.



Zadania

1. Trasa rowerowa wokół jeziora ma długość 12 km. Dwóch rowerzystów wyruszyło jednocześnie z tego samego miejsca i okrążyło jezioro w tym samym kierunku w stałym tempie. Prędkość jednego z nich była o 5 km/h mniejsza niż prędkość drugiego. Do ponownego spotkania rowerzystów doszło, gdy szybszy z nich wykonał 4 okrążenia jeziora, a wolniejszy – 3. Oblicz prędkości obu rowerzystów.
2. Pociąg miał pokonać trasę między dwoma miastami w czasie określonym w rozkładzie jazdy. Z powodu awarii został zatrzymany na pół godziny na stacji pośredniej. Pozostałe 120 km przejechał z prędkością większą o 20 km/h i dzięki temu nadrobił powstałe opóźnienie. Oblicz, jaka powinna być średnia prędkość pociągu zgodnie z rozkładem jazdy.
3. Dwaj rowerzyści wyjechali jednocześnie na trasę długości 36 km. Prędkość pierwszego rowerzysty była o 6 km/h większa niż prędkość drugiego, więc pokonał on trasę w czasie o godzinę krótszym niż drugi. Oblicz prędkości obu rowerzystów.
4. Tomek przejechał na rowerze 32 km szosą i 20 km polną drogą w czasie 2 godzin i 40 minut. Prędkość jazdy po szosie była o 20 km/h większa od prędkości jazdy po polnej drodze. Oblicz prędkość na szosie i prędkość na polnej drodze.
5. a) Samochód przejechał drogę długości 120 km. Gdyby jechał z prędkością o 30 km/h większą, to czas jazdy byłby krótszy o 54 minuty. Jaka była prędkość samochodu?
b) Samochód przejechał drogę z miasta A do miasta B o długości 240 km z prędkością v . W drodze powrotnej przez godzinę jechał z prędkością v , a następnie zwiększył prędkość o połowę, w rezultacie drogę powrotną przejechał w czasie o godzinę krótszym. Wyznacz prędkość v .
- 6.* a) Samochód przejechał drogę z miasta A do miasta B ze średnią prędkością 40 km/h. Z jaką średnią prędkością powinien jechać w drodze powrotnej, aby jego średnia prędkość w czasie całej podróży wyniosła 60 km/h?



- b) Średnia prędkość jazdy samochodem z miasta A do miasta B wyniosła v_1 km/h, a podczas drogi powrotnej v_2 km/h. Wykaż, że średnia prędkość liczona dla całej podróży jest równa średniej harmonicznnej prędkości v_1 i v_2 .

Średnią harmoniczną liczb dodatnich a i b nazywamy liczbę:

$$\text{śr}_H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Powtórzenie

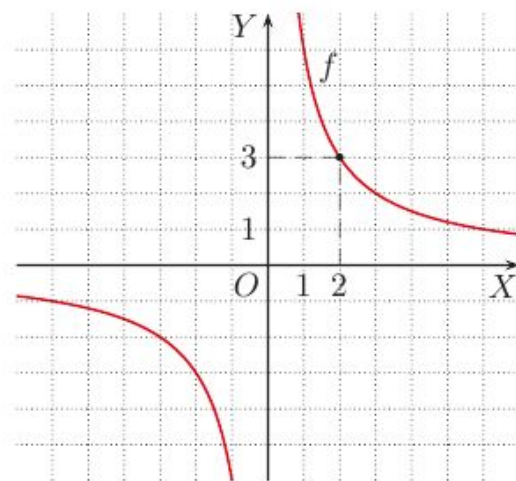
Zestaw I

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a .

a) Które spośród punktów: $P(-8, -\frac{3}{4})$, $Q(\frac{1}{2}, 12)$, $R(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ należą do wykresu funkcji f ?

b) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od -3 .

c) Rozwiąż nierówność $f(x) \leq 4$.



2. Naszkicuj wykresy funkcji f i g . Podaj dziedzinę funkcji g i równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x} + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x-4}$

b) $f(x) = -\frac{3}{x}$, $g(x) = -\frac{3}{x} - 2$

d) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x+2}$

3. Naszkicuj wykresy funkcji: f , g i h . Podaj dziedzinę i zbiór wartości każdej z tych funkcji.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x-1}$, $h(x) = \frac{2}{x-1} + 1$

b) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x+1}$, $h(x) = \frac{3}{x+1} - 1$

c) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $g(x) = -\frac{2}{x+2}$, $h(x) = -\frac{2}{x+2} + 3$

4. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$, aby otrzymać wykres funkcji f ? Naszkicuj ten wykres.

a) $f(x) = \frac{1}{x+3} + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{x-4} + 1$

c) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

5. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$. Naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $\vec{u} = [-2, 3]$

b) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $\vec{u} = [2, -3]$

6. Wyznacz ze wzoru podaną zmienną.

a) $\frac{m}{a} = \frac{2}{b}$, b

c) $\frac{m}{a} - 2 - \frac{1}{a} = n$, a

e) $S = \frac{a_1}{1-q}$, q

b) $\frac{E}{e} = \frac{R+r}{r}$, r

d) $m(m - \frac{2}{a}) = 2$, a

f) $S = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}$, a_1

7. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{x-1} = 2$

d) $-\frac{x}{x+2} = x$

g) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{2-x}{x+1}$

b) $\frac{x+1}{3-x} = 1$

e) $\frac{x}{x-4} = x-3$

h) $\frac{x+4}{x-2} - \frac{x-4}{x+2} = 0$

c) $\frac{2x-7}{x} = -5$

f) $\frac{2x+10}{x+5} = x-2$

i) $\frac{x-3}{1-x} + \frac{x+6}{x+2} = 0$

8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x^2+6x}{x^2-6x} = 0$

d) $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4x+4} = 0$

g) $\frac{x^2-2x-8}{x^2-x-2} = 0$

b) $\frac{x^2-4}{x^2+2x} = 0$

e) $\frac{4x^2-12x+9}{3x-2x^2} = 0$

h) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8} = 0$

c) $\frac{x^2-3x}{2x^2-18} = 0$

f) $\frac{8x^2-2}{4x^2+4x+1} = 0$

i) $\frac{3x^2+7x+2}{2x^2+5x+2} = 0$

9. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

a) $\frac{x^2-1}{x+1}$

b) $\frac{x^2+3x}{x^2-3x}$

c) $\frac{x+2}{x^2+5x+6}$

d) $\frac{x+5}{x^3+125}$

10. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{a-x}{x}$. Wyznacz współrzędne punktów, w których wykres funkcji f przecina prostą $y = 2$ oraz prostą $y = x$.

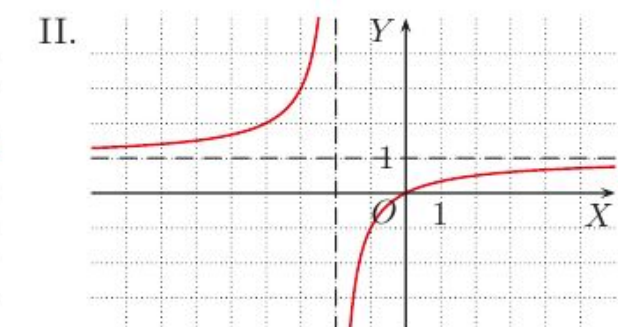
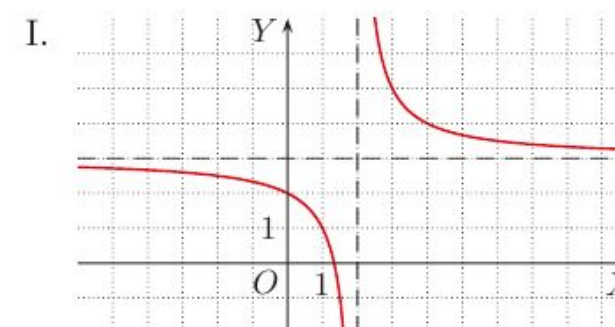
a) $a = 2$

b) $a = -1$

c) $a = 1$

d) $a = -2$

11. Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{x}{x+2}$ i $g(x) = \frac{3x-4}{x-2}$.



a) Dopasuj wzór do wykresu. Podaj miejsca zerowe funkcji f i g .

b) Rozwiąż równania: $g(x) = x$ oraz $f(x) = -x$.

12. Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj rozwiązanie nierówności $f(x) > 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x} & \text{dla } x \leq -1 \\ \frac{2}{x+2} & \text{dla } x > -1 \end{cases}$

13. Naszkicuj wykres funkcji f . Rozwiąż równanie $f(x) = x$.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x}$

c) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

e) $f(x) = 2 + \frac{x+1}{x+3}$

b) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$

d) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

f) $f(x) = -\frac{2-x}{1-x}$

Zestaw II

1. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x-5}{x-3} \geq 0$ c) $\frac{x-3}{x+1} \geq \frac{1}{2}$ e) $x - \frac{1}{x} < 0$
 b) $\frac{x+2}{x+6} < 0$ d) $\frac{x+2}{x-1} < -2$ f) $x + \frac{1}{x} \geq 2$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x(x+3)}{x-2} \leq 0$ c) $\frac{x(x-1)}{(x+2)(x+1)} < 0$ e) $\frac{x^2(x+2)}{(x-6)(3x+2)} \geq 0$
 b) $\frac{3x-4}{x(x-5)} \geq 0$ d) $\frac{(2x-1)(x+1)}{x(x+3)} > 0$ f) $\frac{(x+5)(3x-2)}{x^3(6x-4)} \leq 0$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{(2x-1)^2}{4x^2-1} \leq 0$ c) $\frac{x+2}{x^2-4x} < 0$ e) $\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x} \geq 0$
 b) $\frac{x^2-1}{x^2-5x+10} \geq 0$ d) $\frac{2x-1}{2x^2-8} > 0$ f) $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} \leq 0$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1}{x-3} < \frac{1}{x+3}$ b) $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-3}{x-1} > 2$ c) $\frac{x+3}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x^2+2x} \geq 0$

5. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R}: x \geq \frac{4}{x}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x-7}{x-4} \leq 2\right\}$
 b) $A = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x^2+1}{x+1} < 1\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{(x-2)^2(x+1)}{x+2} \geq 0\right\}$

6. Rozwiąż równanie.

a) $|4x| + 2x = 3$ d) $|x-1| + |x-3| = 2$ g) $|x-1| + |x-5| = 4$
 b) $|x+3| - x = 7$ e) $|2x-1| + |x-5| = 6$ h) $4|x+1| + |x-1| = 2$
 c) $|1-x| + 1 = x$ f) $|1-3x| - |x+6| = -3$ i) $|x-7| = 2 - |4-x|$

7. Wyznacz liczby naturalne x , które spełniają poniższy warunek.

a) $0 < \frac{3}{8-x} \leq \frac{1}{x}$ b) $\left|\frac{5}{x-4}\right| > 2$ c) $\left|\frac{x-10}{x}\right| \geq 1$

8. Wyznacz zbiór wartości funkcji f .

a) $f(x) = \frac{2x+1}{4x-1} - 1$ b) $f(x) = \frac{\sqrt{3}x-1}{x+3}$ c) $f(x) = \frac{x}{x+2} + \sqrt{2}$

9. Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$ c) $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $g(x) = |x|$
 b) $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$ d) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, $g(x) = \frac{(x-1)^2}{x-1}$

10. Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = -x^2$, $g(x) = \frac{-2}{x+1}$ b) $f(x) = 2(x-2)^2$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$

11. Rozwiąż graficznie równanie $f(x) = g(x)$.

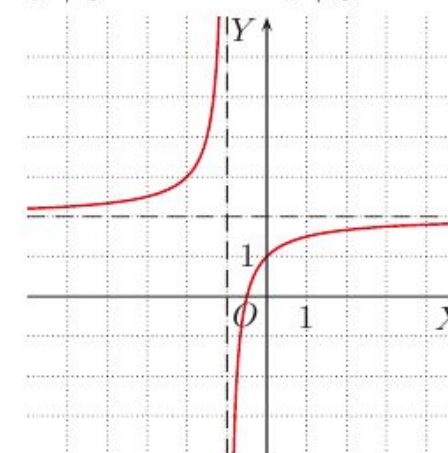
a) $f(x) = \frac{2x-2}{x-2}$, $g(x) = \frac{4}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{x}{x+3}$, $g(x) = \frac{-6-x}{x+3}$

12. Podaj wzór funkcji homograficznej, której wykres przedstawiono na rysunku obok.

a) O jaki wektor należy przesunąć ten wykres, aby otrzymać wykres funkcji g ?

$$g(x) = \frac{-x-3}{x+2}$$

b) O jaki wektor należy przesunąć ten wykres, aby osiami symetrii otrzymanej hiperboli były proste: $y = x - 4$ i $y = -x - 2$?



13. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$. Dla jakiej wartości parametru m przedział $(-8; 0)$ jest zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{4}{x} < m$?

14. Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = \frac{x-m}{x}$ i $g(x) = mx$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?

15. Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji f i g nie mają punktów wspólnych?

a) $f(x) = \frac{m}{x}$, $g(x) = -mx$ c) $f(x) = \frac{m}{x}$, $g(x) = (m-1)x$

b) $f(x) = \frac{m}{x}$, $g(x) = mx$ d) $f(x) = \frac{m-3}{x}$, $g(x) = x + m$

16. Dla jakich wartości parametru k równanie ma dwa rozwiązania ujemne?

a) $(k+1)x^2 - 2kx = k-1$ b) $(k-1)x^2 - (2k-1)x + k-2 = 0$

17. Dla jakich wartości parametru k dziedziną funkcji:

$$f(x) = \sqrt{(k-1)x^2 + 2(2k-1)x + 5k-1}$$

jest zbiór liczb rzeczywistych?

18. Dla jakich wartości parametru m dane proste są równoległe, a dla jakich prostopadłe?

a) $y = \frac{-m}{m-1}x + 3$ i $y = \frac{1-m}{m+2}x$ b) $y = \frac{1}{1-m^2}x - 5$ i $y = \frac{m+1}{m-1}x$

19. Dla jakich wartości parametru m nierówność jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

a) $\frac{mx+2}{x^2+1} > 0$ b) $\frac{3x^2-2x+1}{-x^2+mx-1} < 0$ c) $\frac{(m-3)x+3}{-x^2+x-2} > -2$



Zadania z kontekstem realistycznym

- Dwie kopiarki o różnej wydajności, pracując jednocześnie, skopiowały pewną liczbę ulotek. Skopiowanie tylu ulotek zajęłoby pierwszej z nich trzy razy więcej czasu, a drugiej – o 4 minuty więcej. Jak długo trwało kopiowanie ulotek?
- Dwóch egzaminatorów, pracując jednocześnie, sprawdziło wszystkie testy w ciągu 12 godzin. Gdyby najpierw pierwszy egzaminator sprawdził połowę testów, a potem drugi – pozostałą część, praca zajęłaby im 25 godzin. Ile czasu zajęłoby samodzielne sprawdzanie wszystkich testów każdemu z egzaminatorów?
- Zbiornik można napełnić wodą z dwóch rur jednocześnie w ciągu pół godziny. Napełnianie zbiornika jedną z tych rur trwa o 11 minut dłużej niż napełnianie drugą rurą. Ile czasu zajmie napełnianie zbiornika wyłącznie drugą rurą?
- * Woda do basenu może wpływać z trzech kranów. Jeżeli odkręcimy jednocześnie krany pierwszy i drugi, to napełnimy basen w ciągu 9 godzin, jeżeli odkręcimy krany drugi i trzeci – w ciągu 12 godzin, a jeżeli krany pierwszy i trzeci – w ciągu 18 godzin. W jakim czasie napełnimy ten basen, jeśli odkręcimy jednocześnie wszystkie trzy krany?
- Jeden z pasażerów spóźnił się na autobus jadący na lotnisko odległe o 20 km i wsiadł do taksówki 5 minut po odjeździe autobusu. Autobus i taksówka dojechały na lotnisko jednocześnie. Z jaką prędkością jechał autobus, jeśli wiadomo, że autobus i taksówka jechały ze stałymi prędkościami, a prędkość taksówki była o 20 km/h większa od prędkości autobusu?
- Odległość kolejowa między miastami A i B wynosi 210 km, a odległość drogowa między nimi jest równa 175 km. Pociąg wyjechał z miasta A do miasta B o godzinę później niż autobus. Oba pojazdy poruszały się ze stałymi prędkościami. Pociąg przebył całą trasę z prędkością o 40 km/h większą, niż wynosiła prędkość autobusu, i dotarł do miasta B 10 minut wcześniej. Oblicz prędkość każdego z pojazdów.
- Ze stacji A i B wyjechały jednocześnie naprzeciw siebie pociągi osobowy i pociąg pospieszny. Pociąg pospieszny przyjechał na stację B o 2 godziny wcześniej niż pociąg osobowy na stację A . Jak długo jechał pociąg osobowy, jeśli obydwa pociągi jechały ze stałą prędkością i spotkały się po 80 minutach od chwili wyjazdu?



Sposób na zadanie

Przykład

Rozwiąż nierówność $\frac{2x-2}{x-3} < 1$, gdzie $x \neq 3$.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Rozpatrujemy dwa przypadki ze względu na znak mianownika.

1° $x - 3 < 0$, czyli $x \in (-\infty; 3)$ 2° $x - 3 > 0$, czyli $x \in (3; \infty)$

$$\frac{2x-2}{x-3} < 1 \quad / \cdot (x-3)$$

Zmieniamy zwrot nierówności.

$$2x - 2 > x - 3$$

$$x > -1$$

Zatem $x \in (-1; 3)$.

$$\frac{2x-2}{x-3} < 1 \quad / \cdot (x-3)$$

Nie zmieniamy zwrotu nierówności.

$$2x - 2 < x - 3$$

$$x < -1$$

Sprzeczność z założeniem.

Nierówność $\frac{2x-2}{x-3} < 1$ jest prawdziwa dla $x \in (-1; 3)$.

II sposób

Mnożymy obie strony nierówności przez kwadrat mianownika ułamka.

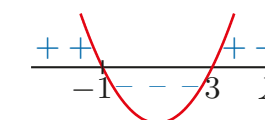
$$\frac{2x-2}{x-3} < 1 \quad / \cdot (x-3)^2 \quad (x-3)^2 > 0$$

$$(2x-2)(x-3) < (x-3)^2$$

$$(2x-2)(x-3) - (x-3)^2 < 0$$

$$(x-3)((2x-2) - (x-3)) < 0$$

$$(x-3)(x+1) < 0$$



Nierówność $\frac{2x-2}{x-3} < 1$ jest prawdziwa dla $x \in (-1; 3)$.

III sposób

Postępujemy następująco:

$$\frac{2x-2}{x-3} < 1$$

$$\frac{2x-2}{x-3} - 1 < 0$$

$$\frac{2x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} < 0$$

$$\frac{x+1}{x-3} < 0$$

Wykorzystujemy fakt, że iloraz i iloczyn mają ten sam znak, i rozwiązujemy nierówność $(x-3)(x+1) < 0$, tak jak w II sposobie.

Nierówność $\frac{2x-2}{x-3} < 1$ jest prawdziwa dla $x \in (-1; 3)$.

Odpowiedź: $x \in (-1; 3)$

→ Zadania 4, 9, str. 174



W zadaniach 1–10, 13.2 i 15.2 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{-4}{x-p} + q$ dla

- A. $p = -3, q = 0$ C. $p = 4, q = -3$
B. $p = 2, q = -1$ D. $p = 1, q = 2$

Zadanie 2 (0–1)

Funkcją rosnącą w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$ i $(-2; \infty)$ jest funkcja

- A. $f(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{x+2}$ B. $f(x) = \frac{6}{x+2}$ C. $f(x) = \frac{2-\sqrt{3}}{x+2}$ D. $f(x) = \frac{-2+\sqrt{5}}{x+2}$

Zadanie 3 (0–1)

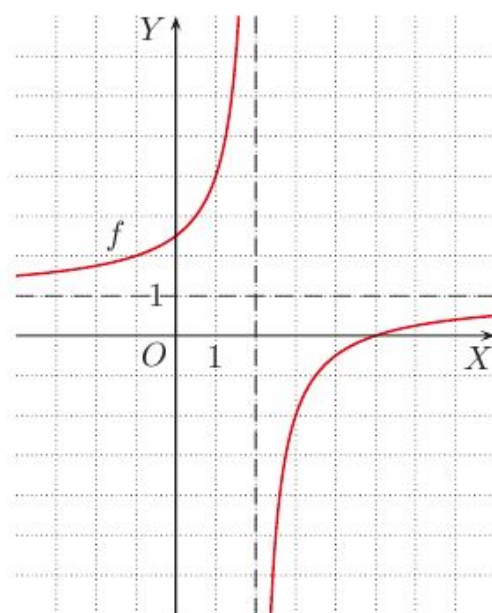
Miejsce zerowe funkcji $f(x) = \frac{a}{x+b} + 1$, której wykres przedstawiono na rysunku obok, jest równe 5. Zatem

- A. $a = 2$ i $b = 2$ C. $a = 3$ i $b = -2$
B. $a = -2$ i $b = 2$ D. $a = -3$ i $b = -2$

Zadanie 4 (0–1)

Punkty $P(1, 2)$ i $Q(3, 4)$ należą do wykresu funkcji

- A. $f(x) = \frac{3}{x-2} - 1$ C. $f(x) = \frac{-3}{x-4} + 1$
B. $f(x) = \frac{-3}{x-2} + 1$ D. $f(x) = \frac{2}{x+3} - 1$



Zadanie 5 (0–1)

Jeśli $\frac{a(n+1)}{n+2} - \frac{n-2}{n-1} = 0$, to

- A. $a = \frac{(n-2)(n+1)}{(n+2)(n-1)}$ B. $a = \frac{(n+2)(n-1)}{(n-2)(n+1)}$ C. $a = \frac{n^2+4}{n^2+1}$ D. $a = \frac{n^2-4}{n^2-1}$

Zadanie 6 (0–1)

Rozwiązaniem równania $\frac{x+2}{x+3} = \frac{x+4}{x+1}$ jest liczba

- A. $-\frac{7}{2}$ B. $-\frac{5}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

Zadanie 7 (0–1)

Liczby -5 i 1 są rozwiązaniami równania

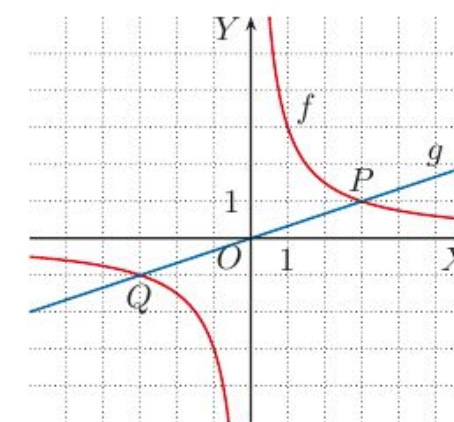
- A. $\frac{8-8x}{x-1} = x-3$ C. $\frac{6x+30}{x+5} = x+5$
B. $\frac{2-6x}{x+1} = x-3$ D. $\frac{x+5}{x+1} = x+5$



Zadanie 8 (0–1)

Wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ i $g(x) = bx$ przecinają się w punktach $P(3, 1)$ i $Q(-3, -1)$ (rysunek obok). Wynika stąd, że $a + b$ jest równe

- A. $-2\frac{2}{3}$ B. 0 C. $3\frac{1}{3}$ D. 6



Zadanie 9 (0–1)

Jednym z rozwiązań równania $\frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{x}$ jest

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3-\sqrt{11}}{2}$ C. $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ D. $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$

Zadanie 10 (0–1)

Liczba a jest rozwiązaniem równania $\frac{\frac{2}{3}x-3}{x-2} = 0$, a liczba b jest rozwiązaniem równania $\frac{\frac{3}{2}x-2}{x-3} = 0$. Suma liczb a i b jest równa

- A. $5\frac{5}{6}$ B. $5\frac{2}{3}$ C. $5\frac{1}{2}$ D. 5

Zadanie 11 (0–1)

Dane są dwa wyrażenia wymierne F i G określone dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2, 3\}$.

$$F = \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}, \quad G = \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$$

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Iloczyn $F \cdot G$ jest równy

A.	$\frac{x^2-x-6}{x^2+x-6},$	a iloraz $\frac{F}{G}$ jest równy	1.	$\frac{x^2+5x-6}{x^2+5x+6}.$
B.	$\frac{x^2+x-6}{x^2+x+6},$		2.	$\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}.$
			3.	$\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}.$

Zadanie 12 (0–1)

Dane jest równanie $|x + \sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wszystkie rozwiązania tego równania

są liczbami niewymiernymi.	P	F
należą do przedziału $(-2; 2)$.	P	F

**Zadanie 13**

Dane są dwa wyrażenia wymierne P i Q określone dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3, 4\}$.

$$P = \frac{x+4}{9-x^2}, \quad Q = \frac{x^2-3x}{x-4}$$

Zadanie 13.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dla $x = -\frac{9}{2}$ oba wyrażenia przyjmują wartości dodatnie.	P	F
Dla $x = \frac{9}{2}$ oba wyrażenia przyjmują wartości ujemne.	P	F

Zadanie 13.2 (0-1)

Iloczyn wyrażeń P i Q zapisano w postaci $\frac{-x^2+kx}{(x+3)(x-4)}$, gdzie k jest liczbą rzeczywistą. Wynika stąd, że

- A. $k = -6$ B. $k = -4$ C. $k = 4$ D. $k = 6$

Zadanie 14 (0-2)

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Dla argumentu równego -2 wartość równą -1 przyjmuje funkcja

- A. $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ C. $f(x) = \frac{-3x+2}{x+4}$ E. $f(x) = \frac{-2x-1}{-2x+3}$
 B. $f(x) = \frac{x+4}{2x+2}$ D. $f(x) = \frac{-3x-1}{2x-5}$ F. $f(x) = \frac{x-4}{-4x-2}$

Zadanie 15

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{\sqrt{2}-2x}{\sqrt{2x}-2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$.

Zadanie 15.1 (0-2)

Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Funkcja f dla $x = \sqrt{2} - 1$ przyjmuje wartość równą	?
Funkcja f dla $x = \sqrt{2} + 1$ przyjmuje wartość równą	?

- A. $-1 - \sqrt{2}$ B. $-2 + \sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $1 - \sqrt{2}$ E. $2 + \sqrt{2}$

Zadanie 15.2 (0-1)

Wykres funkcji f przecina osie układu współrzędnych w punktach $(a, 0)$ i $(0, b)$. Iloczyn ab jest równy

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

**Zadanie 16 (0-2)**

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Do jej wykresu należy punkt $(2\sqrt{5} - 3, 2\sqrt{5} + 3)$. Oblicz a .

Zadanie 17 (0-2)

Rozwiąż równanie $|x - 1 + \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$.

Zadanie 18

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{2x} + b$.

Zadanie 18.1 (0-2)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $[\frac{1}{2}; 6]$.

Zadanie 18.2 (0-2)

Rozwiąż równanie $f(x) = x$.

Zadanie 19 (0-2)

Rozwiąż równanie $\frac{x}{\sqrt{2x}-4} = \frac{1}{x-2\sqrt{2}}$.

D Zadanie 20 (0-3)

Uzasadnij, że do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x} + 1$ należy dokładnie sześć punktów o obu współrzędnych całkowitych.

Zadanie 21 (0-4)

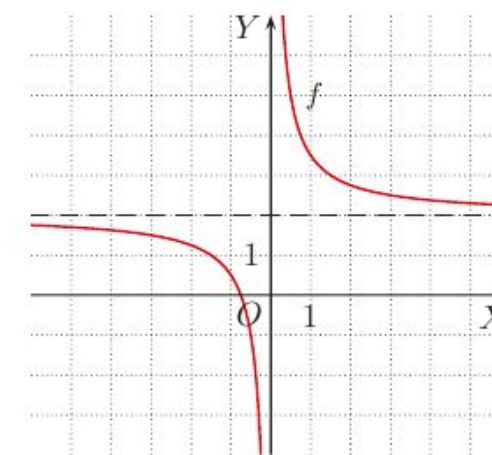
Dane są dwa prostokąty: jeden o bokach x cm i $(x+4)$ cm oraz drugi o bokach $(x+4)$ cm i $(2x+2)$ cm. Stosunek długości krótszego boku do dłuższego boku dla obu prostokątów jest taki sam. Oblicz sumę pól tych prostokątów.

Zadanie 22 (0-4)

Pierwszą połowę trasy pociąg przebył z prędkością v , a drugą połowę – z prędkością dwa razy mniejszą. Cała trasa ma długość 140 km. Wyznacz wzór opisujący zależność między czasem t , w jakim pociąg przebył całą trasę, a prędkością v . Oblicz t dla $v = 120$ km/h.

Zadanie 23 (0-4)

Kajakarz płynie po stojącej wodzie z prędkością 10 km/h. Gdy płynął z prądem rzeki, pokonał trasę o 50% dłuższą, niż byłby w stanie pokonać w tym samym czasie, gdyby płynął pod prąd. Oblicz prędkość prądu rzeki.



**Zadanie 1 (0-2)**

Stosunek długości boków prostokąta P_1 jest równy 6:5. Jeśli każdy bok tego prostokąta skrócimy o $2\frac{2}{3}$, to otrzymamy prostokąt P_2 , w którym stosunek boków jest równy 4:3. Oblicz obwód prostokąta P_1 .

D Zadanie 2 (0-3)

Liczba x_1 jest dodatnim pierwiastkiem równania $\frac{x}{2x-1} = \frac{x-1}{3x-2}$. Udowodnij, że prostokąt o bokach x_1 i 1 jest podobny do prostokąta o bokach 1 i $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Zadanie 3 (0-4)

Liczba x_0 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{14}{2x-1} - 3$. Rozwiąż równanie $|x - x_0| + |x - \frac{11}{6}| = 1$.

Zadanie 4 (0-3) → Przykład, str. 169

Liczba a jest najmniejszą, a liczba b największą liczbą naturalną spełniającą nierówność $\frac{x^2+66}{x+3} \leq 14$. Wyznacz iloraz $\frac{a}{b}$.

Zadanie 5 (0-5)

Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x^3-x^2-6x}{x^2-2x-8} \geq 0$, a zbiór B – zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x^2+4}{x^2-4} \leq 0$. Wyznacz zbiór $A \setminus B$.

Zadanie 6 (0-3)

Dana jest funkcja homograficzna $f(x) = \frac{mx-3}{m-x}$. Dla jakich wartości parametru m funkcja ta jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; m)$ i $(m; \infty)$?

Zadanie 7 (0-5)

Wykres funkcji g jest symetryczny względem prostej $x = -1$ do wykresu funkcji $f(x) = \frac{10-2x}{x-2}$. Rozwiąż nierówność $f(x) - g(x) \geq 0$.

Zadanie 8 (0-4)

Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$ oraz $g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$.

Zadanie 9 (0-4) → Przykład, str. 169

Miejsce zerowe funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{x+3}$ jest równe $\frac{1}{2}$, a asymptota pozioma wykresu tej funkcji przechodzi przez punkt $(2, -2)$. Rozwiąż nierówność $f(x) \leq x + \frac{1}{3}$.

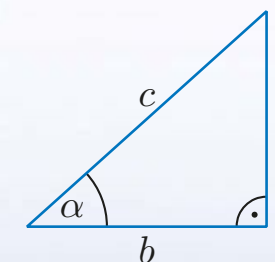
Zadanie 10 (0-3)

Z miasta A do oddalonego o 550 km miasta B wyruszył samochód jadący z prędkością v km/h. Godzinę później z miasta B tą samą drogą wyruszył samochód do miasta A z prędkością o 20 km/h większą. Samochody te minęły się w odległości 280 km od miasta A . Oblicz prędkości obu samochodów.

4 Trygonometria

Jedną z funkcji trygonometrycznych omawianych w tym rozdziale jest funkcja sinus – słowo to po łacinie oznacza zagięcie, zatokę. Jeśli znamy wartość sinusa kąta α (w skrócie $\sin \alpha$) oraz długość przeciwprostokątnej c trójkąta prostokątnego, możemy obliczyć długość przyprostokątnej a (rysunek obok), korzystając z równości $a = c \sin \alpha$.

Na przykład, chcąc się dowiedzieć, na jaką wysokość sięgnie drabina strażacka o długości 40 m podniesiona pod kątem 65° , wykonujemy mnożenie $40 \cdot \sin 65^\circ$. Ponieważ $\sin 65^\circ \approx 0,9$, więc wysokość ta jest równa około 36 m.

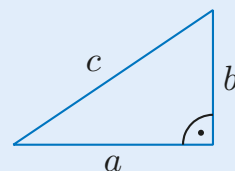


4.1. Trójkąty prostokątne

Twierdzenie Pitagorasa

Suma kwadratów długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Istnieje wiele dowodów tego twierdzenia. W poniższym dowodzie korzystamy z własności podobieństwa trójkątów.

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c . Prowadzimy w nim wysokość CD (rysunek poniżej). Na podstawie cechy KKK stwierdzamy, że trójkąty CBD , ACD i ABC są podobne. Z podobieństwa trójkątów ABC i CBD otrzymujemy:

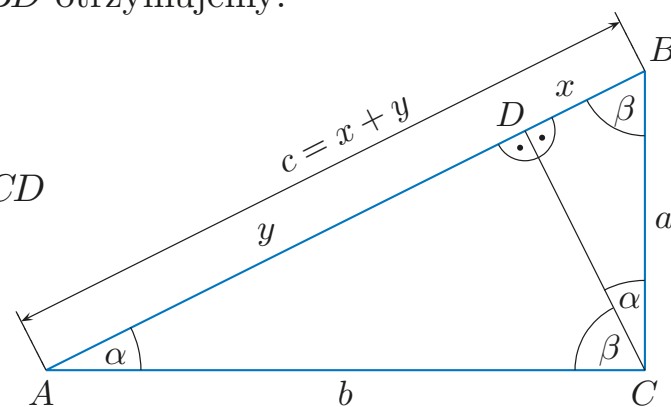
$$\frac{a}{c} = \frac{x}{a}$$

$$a^2 = cx$$

Z podobieństwa trójkątów ABC i ACD otrzymujemy:

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{b}$$

$$b^2 = cy$$



Zatem $a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y)$, ale $x + y = c$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.

Ćwiczenie 1

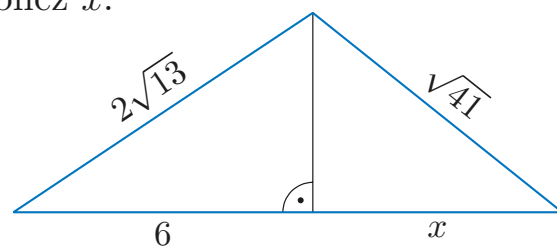
Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b .

- a) $a = 30$, $b = 40$ c) $a = 2\sqrt{2} - 1$, $b = 2\sqrt{2} + 1$ e) $a = b = 2\sqrt{2}$
 b) $a = \sqrt{5}$, $b = 2$ d) $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $b = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ f) $a = \frac{1}{b} = 2$

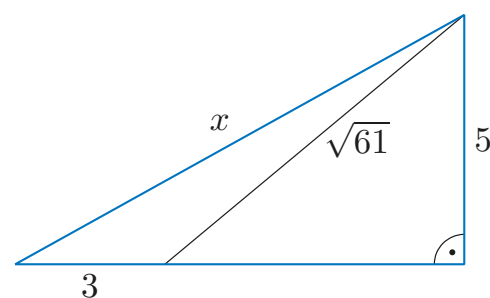
Ćwiczenie 2

Oblicz x .

a)



b)



Aby sprawdzić, czy dany trójkąt jest prostokątny, można wykorzystać poniższe twierdzenie.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt T o bokach długości a , b , c takich, że $a^2 + b^2 = c^2$, oraz trójkąt prostokątny T_1 o przyprostokątnych długości a i b .

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że przeciwprostokątna c_1 trójkąta T_1 spełnia warunek $c_1^2 = a^2 + b^2$. Zatem $c_1 = c$.

Oznacza to, że trójkąty T i T_1 są przystające na podstawie cechy BBB. Zatem trójkąt T jest trójkątem prostokątnym.

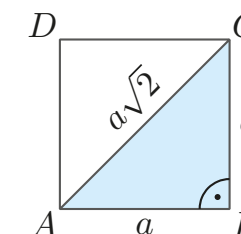
Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy trójkąt o podanych bokach jest trójkątem prostokątnym.

- a) 3, 4, 5 b) 6, 8, 10 c) 5, 9, 11 d) 2, 4, $2\sqrt{5}$

Szczególne znaczenie ma **trójkąt prostokątny będący połową kwadratu**, czyli trójkąt o kątach 45° , 45° , 90° .

Przekątna kwadratu o boku długości a jest równa $a\sqrt{2}$.

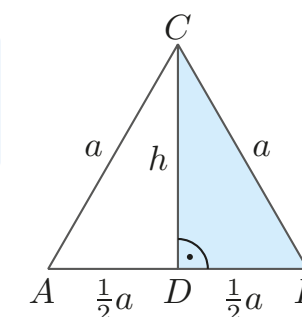


Ćwiczenie 4

- D** a) Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.
 b) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego pole jest równe 72 cm^2 .

Drugi ważny trójkąt prostokątny to **trójkąt będący połową trójkąta równobocznego**, czyli trójkąt o kątach 30° , 60° , 90° .

Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

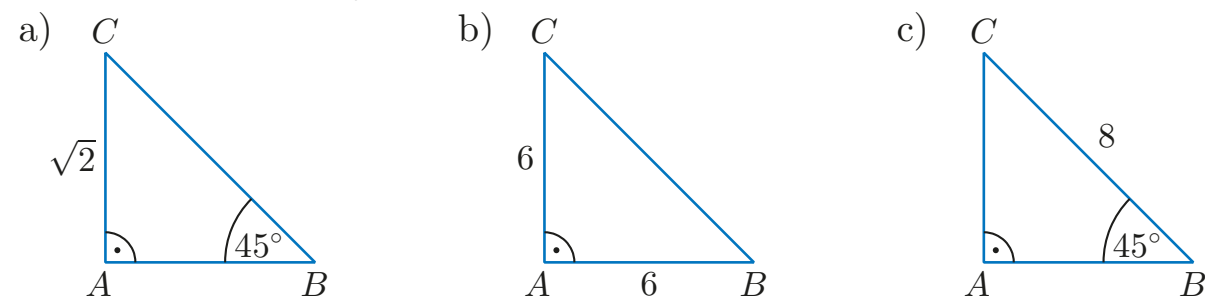


Ćwiczenie 5

- D** a) Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.
 b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 6 cm.

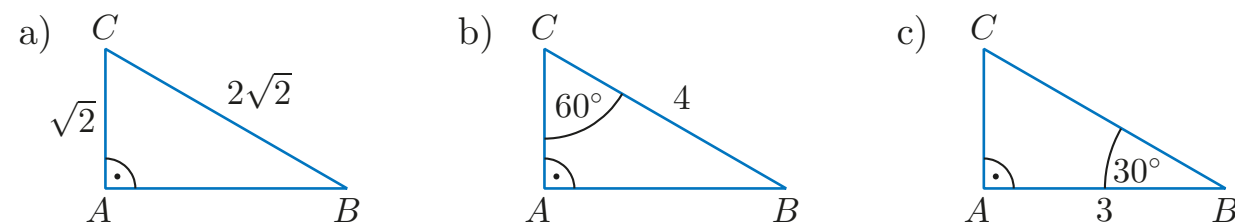
Ćwiczenie 6

Oblicz obwód trójkąta ABC .



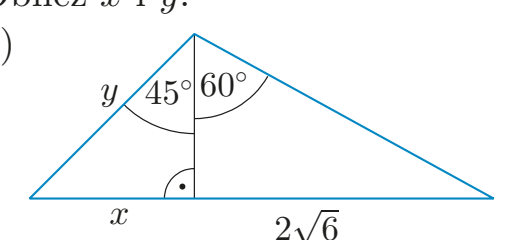
Ćwiczenie 7

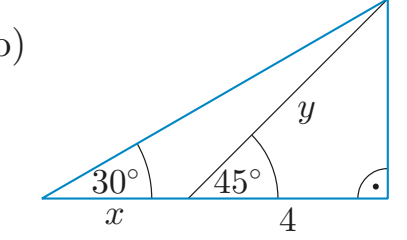
Oblicz obwód trójkąta ABC .



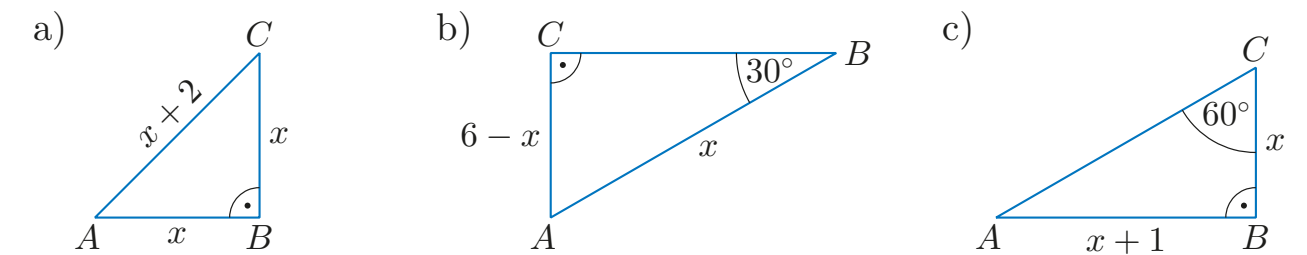
Zadania

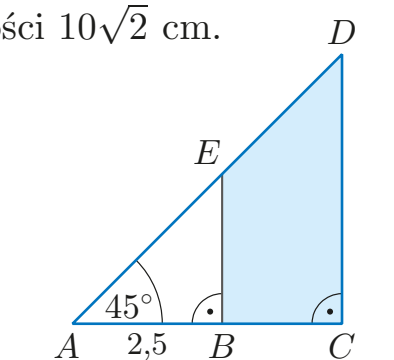
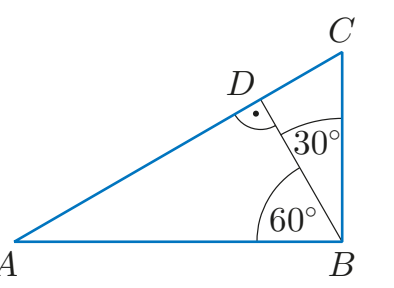
- Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego:
 - obwód jest równy $6(1 + \sqrt{2})$,
 - przeciwprostokątna jest o $2(\sqrt{2} - 1)$ dłuższa od przyprostokątnej,
 - środkowa poprowadzona na przyprostokątną ma długość $4\sqrt{5}$.
- Różnica długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa $12 - 4\sqrt{3}$. Jeden z kątów ostrych tego trójkąta jest dwa razy większy od drugiego kąta. Oblicz pole tego trójkąta.
- Oblicz x i y .

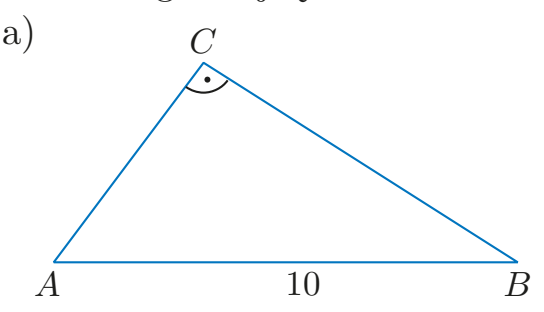
a) 

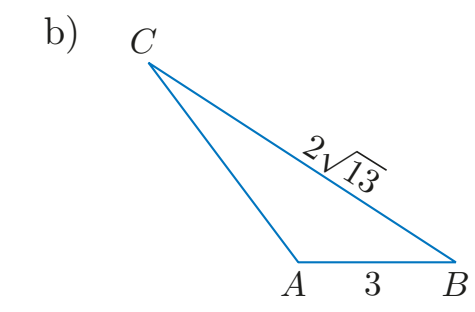
b) 
- Najdłuższy bok trójkąta równoramiennego ma długość $8\sqrt{3}$ cm, a jeden z jego kątów ma miarę 120° . Oblicz obwód tego trójkąta.
 - Kąty ostre trójkąta mają miary 30° i 45° , a wysokość opuszczona na najdłuższy bok jest równa 3 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.
- Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę 60° , a dłuższa przyprostokątna ma długość 18. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

- Oblicz obwód trójkąta ABC .



- Oblicz wysokość rombu o kącie ostrym 60° i obwodzie $32\sqrt{3}$ cm.
 - Oblicz obwód rombu o kącie ostrym 45° i wysokości $10\sqrt{2}$ cm.
- Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 4\sqrt{3}$ cm, $|AC| = |BC| = 4$ cm. Punkt P jest środkiem odcinka AB . Oblicz wysokości trójkąta APC .
- Krótsza przekątna trapezu $BCDE$ na rysunku obok ma długość $\frac{1}{2}\sqrt{41}$. Oblicz obwód trójkąta ACD .
 
- Pole trójkąta BCD przedstawionego na rysunku obok jest równe $8\sqrt{3}$. Oblicz obwód trójkąta ABD .
 
- Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest dwa razy większy od drugiego kąta, a suma długości przeciwprostokątnej i dłuższej przyprostokątnej jest równa $6(2 + \sqrt{3})$. Oblicz pole tego trójkąta.
- Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C ma długość 4. Oblicz obwód tego trójkąta.

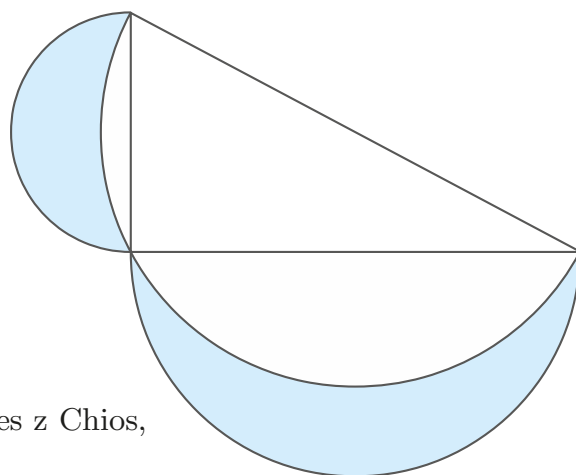
a) 

b) 
- Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.
 - Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę 60° , a jego przeciwprostokątna ma długość 12 cm. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

14. a) Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 30 cm, a jego najdłuższy bok ma długość 13 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.
b) Przeciwnprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 2 cm. Długość jednej z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną długości przeciwprostokątnej i drugiej przyprostokątnej. Oblicz obwód tego trójkąta.

15. Obwód rombu jest równy $4\sqrt{41}$ cm, a jedna z jego przekątnych jest o 2 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długości tych przekątnych.

- 16.* Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 8 cm i 15 cm. Boki trójkąta są średnicami półokręgów wyznaczających księżycy Hipokratesa (rysunek obok). Oblicz sumę pól tych księżyców i porównaj ją z polem trójkąta.



Księżycy Hipokratesa (Hipokrates z Chios, grecki matematyk z V w. p.n.e.)

- 17.* a) Z kwadratu o boku 1 odcięto na rogach trójkąty tak, że otrzymano ośmiokąt foremny. Oblicz obwód tego ośmiokąta.
b) Z kwadratu odcięto na rogach trójkąty tak, że otrzymano ośmiokąt foremny o boku 1. Oblicz obwód tego kwadratu.

Liczby naturalne a, b, c będące długościami boków trójkąta prostokątnego nazywamy **trójkami pitagorejskimi**. Są nimi na przykład:

3, 4, 5, bo $3^2 + 4^2 = 5^2$, również 6, 8, 10 czy 9, 12, 15

5, 12, 13, bo $5^2 + 12^2 = 13^2$, również 10, 24, 26

7, 24, 25, bo $7^2 + 24^2 = 25^2$, również 14, 48, 50

Wszystkie trójki pitagorejskie możemy otrzymać, korzystając ze wzorów:

$$a = x^2 - y^2, \quad b = 2xy, \quad c = x^2 + y^2, \quad \text{gdzie } x > y \text{ oraz } x, y \in \mathbb{N}_+$$

lub biorąc wielokrotności otrzymanych liczb.

- D** 18. Wykaż, że jeśli a, b, c są określone powyższymi wzorami, to $a^2 + b^2 = c^2$. Korzystając z tych wzorów, znajdź trójki pitagorejskie dla:

- a) $x = 4, y = 3$, c) $x = 6, y = 1$, e) $x = 3, y = 2$,
b) $x = 4, y = 1$, d) $x = 5, y = 2$, f) $x = 6, y = 3$.

Dowiedz się więcej

Dowody twierdzenia Pitagorasa

Znanych jest wiele dowodów twierdzenia Pitagorasa. Autorem pierwszego z przedstawionych poniżej dowodów jest 20. prezydent Stanów Zjednoczonych James Abram Garfield [czyt. dzejms abram garfild] (1831–1881).

Dowód 1

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c . Rysujemy trapez prostokątny $ABDE$ o podstawach a i b oraz wysokości $a + b$ (rysunek obok). Kąt ACE jest kątem prostym (uzasadnij). Pole P trapezu jest sumą pól trójkątów ABC , CDE i ACE :

$$P = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

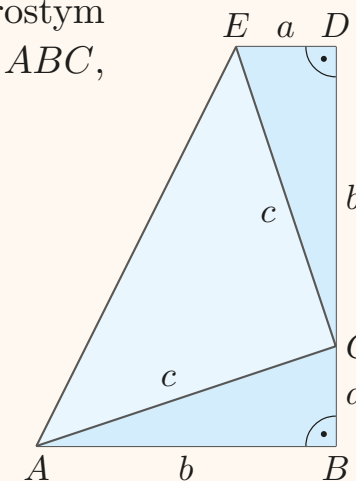
Korzystamy teraz ze wzoru na pole trapezu:

$$P = \frac{1}{2}(a + b)(a + b)$$

i otrzymujemy równość:

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2$$

Zatem $a^2 + b^2 = c^2$.



Dowód 2

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c . Rysujemy kwadrat o boku $a + b$ i wewnątrz niego kwadrat o boku c (rysunek poniżej).

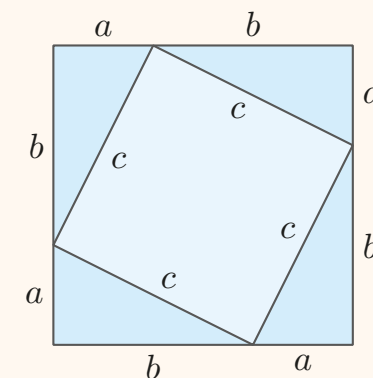
Duży kwadrat ma bok równy $a + b$, więc jego pole:

$$P = (a + b)^2$$

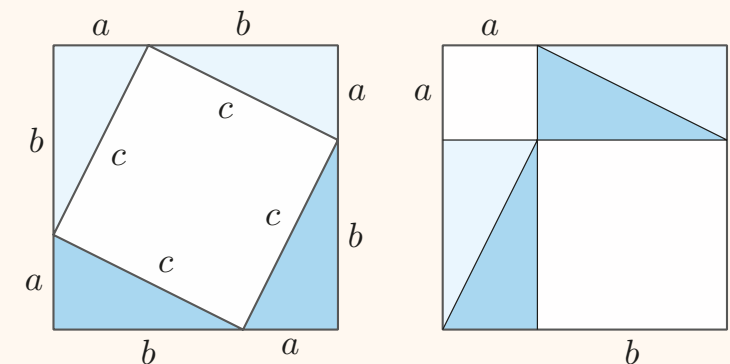
Pole dużego kwadratu jest równe sumie pola małego kwadratu i pól czterech trójkątów:

$$P = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot b$$

Zatem $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.



- D** 1. Przeprowadź dowód twierdzenia Pitagorasa, korzystając z rysunków przedstawionych obok. W tym celu porównaj pola białych kwadratów.

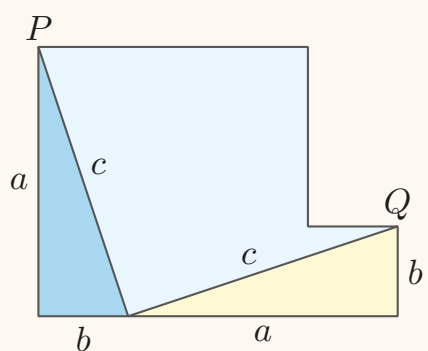


- D** 2. a) Udowodnij twierdzenie Pitagorasa, wyznaczając pole dużego kwadratu przedstawionego na rysunku obok.
- b) Przyjmij, że bok dużego kwadratu ma długość 8, a bok małego – długość 2. Oblicz długości przyprostokątnych a i b .

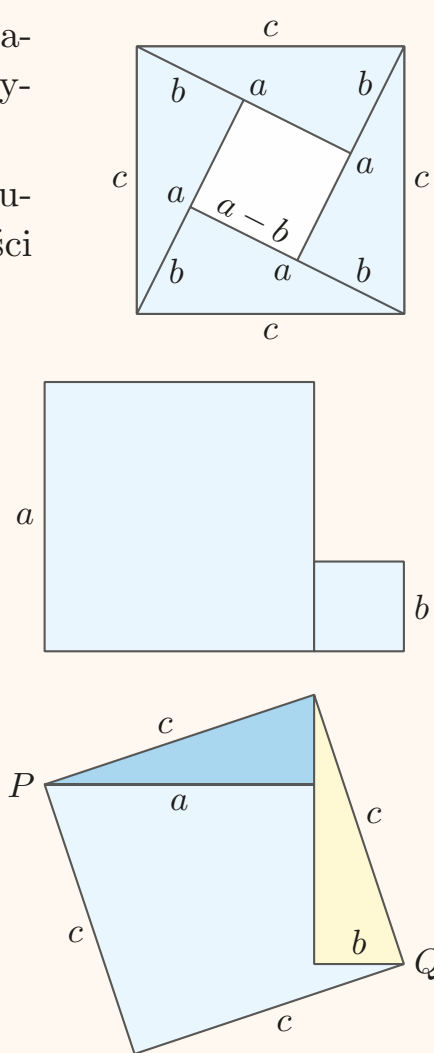
Dowód 3

Rozpatrzmy dwa kwadraty o bokach a i b położone jak na rysunku obok. Suma ich pól jest równa $a^2 + b^2$.

Trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c są przystające (rysunek poniżej).



Niebieski trójkąt obracamy wokół punktu P , a żółty – wokół punktu Q , aż otrzymamy kwadrat o boku c .
Zatem $a^2 + b^2 = c^2$.



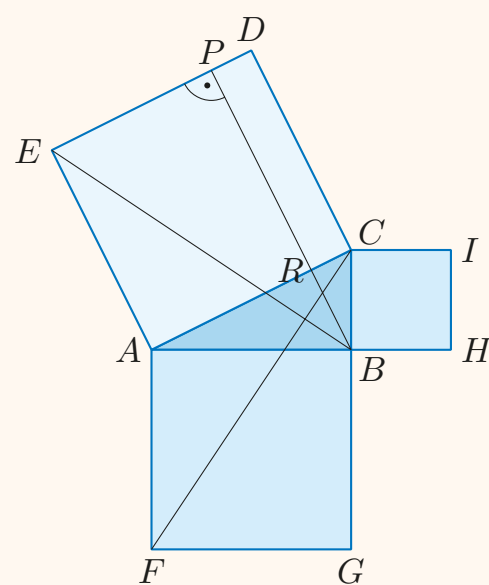
Twierdzenie Pitagorasa można sformułować następująco:

Pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego jest równe sumie pól kwadratów zbudowanych na jego przyprostokątnych.

Szkic dowodu 4

- Trójkąty FAC i BAE są przystające.
- Pole trójkąta FAC jest równe połowie pola kwadratu $AFGB$.
- Pole trójkąta BAE jest równe połowie pola prostokąta $AEPR$.
- Pole kwadratu $AFGB$ jest równe polu prostokąta $AEPR$.
- Pole kwadratu $CBHI$ jest równe polu prostokąta $DCRP$.

Przedstawione powyżej rozumowanie pochodzi z I księgi „Elementów” Euklidesa.



- D** 3. Uzasadnij kolejne etapy szkicu dowodu 4.

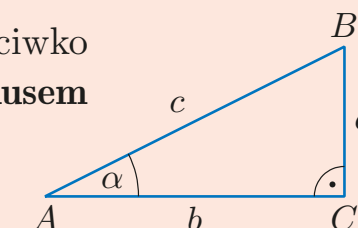
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Stosunki długości boków trójkąta prostokątnego są tak powszechnie stosowane, że otrzymały własne nazwy.

Definicja

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej nazywamy **sinusem** tego kąta.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$



Stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej nazywamy **cosinusem** tego kąta.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie nazywamy **tangensem** tego kąta.

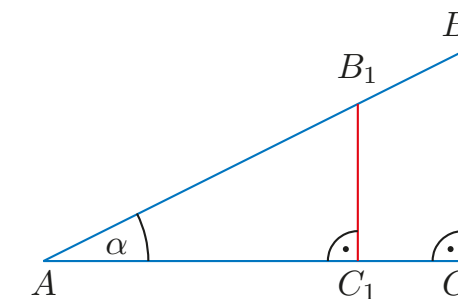
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Stosunki te nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi** kąta ostrego α .

Definiuje się też stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta. Jest to **cotangens** kąta: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$.

Zwróć uwagę na to, że stosunki te nie zależą od wielkości rozpatrywanego trójkąta, a jedynie od kąta α . Z podobieństwa trójkątów AB_1C_1 i AB_2C_2 wynikają równości:

$$\sin \alpha = \frac{|B_1C_1|}{|AB_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|AB_2|}$$



D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą nierówności:

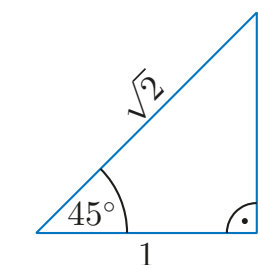
$$\sin \alpha < 1 \quad \text{i} \quad \cos \alpha < 1$$

Przykład 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 45° .

Rozpatrzmy trójkąt o kątach 45° , 45° , 90° (rysunek obok).

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

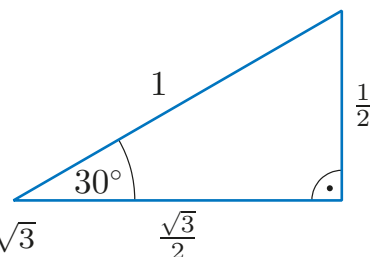


Przykład 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 30° .

Rozpatrzmy trójkąt o kątach 30° , 60° , 90° (rysunek obok).

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



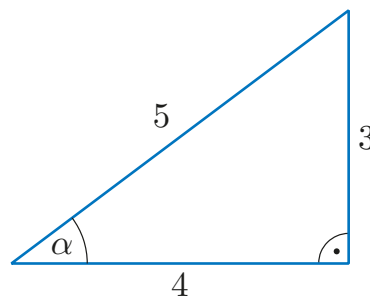
Ćwiczenie 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60° .

Przykład 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α w trójkącie na rysunku obok.

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$$



Ćwiczenie 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o bokach a , b , c .

$$\text{a) } a = 5, b = 12, c = 13 \quad \text{b) } a = 8, b = 15, c = 17 \quad \text{c) } a = \frac{1}{2}, b = \sqrt{2}, c = \frac{3}{2}$$

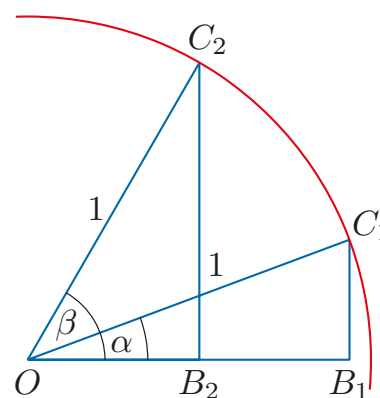
Można udowodnić, że:

- jeśli $\alpha < \beta < 90^\circ$, to $\sin \alpha < \sin \beta$,
- jeśli $\alpha < \beta < 90^\circ$, to $\cos \alpha > \cos \beta$.

Aby uzasadnić pierwszą zależność, rozpatrzmy trójkąty OB_1C_1 oraz OB_2C_2 takie, że punkty C_1 i C_2 leżą na łuku okręgu o środku w punkcie O i promieniu 1 (rysunek obok). Wówczas:

$$\sin \alpha = \frac{|B_1C_1|}{1} = |B_1C_1|, \quad \sin \beta = \frac{|B_2C_2|}{1} = |B_2C_2|$$

oraz $|B_1C_1| < |B_2C_2|$, zatem $\sin \alpha < \sin \beta$.



D Ćwiczenie 4

Uzasadnij drugą z podanych zależności.

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o podanych bokach.

- a) 6, 8, 10 c) 1, 4, $\sqrt{17}$ e) $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, 5
b) 7, 24, 25 d) 1, 4, $\sqrt{15}$ f) $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, 2

2. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	?	?
$\cos \alpha$	?	?	?
$\operatorname{tg} \alpha$	?	1	?

Czy wiesz, że...

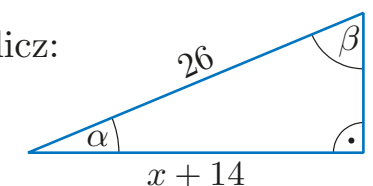
Skróty nazw funkcji trygonometrycznych pochodzą od łacińskich słów:

- $\sin$ od *sinus* – zagięcie, zatoka;
- $\cos$ od *complementi sinus* – sinus dopełnienia;
- tg od *tangens* – styczna.

3. Przekątna prostokąta o bokach długości 1 i 2 dzieli go na dwa trójkąty. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

4. Dla trójkąta przedstawionego na rysunku obok oblicz:

- a) długości przyprostokątnych,
b) wartości $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ oraz $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\operatorname{tg} \beta$.



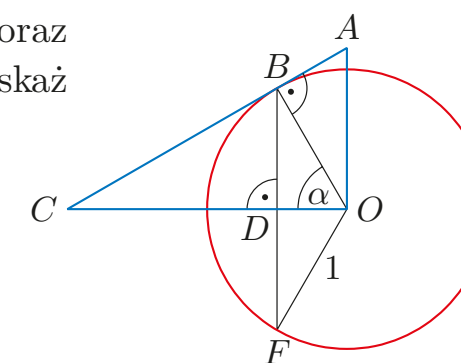
5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna jest trzy razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej.

6. Dany jest równoległobok (niebędący prostokątem) o bokach długości 9 i 10. Jedna z przekątnych dzieli ten równoległobok na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

7. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 6 i 10, a wysokość jest równa 5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między dłuższą podstawą trapezu a jego: a) przekątną, b) ramieniem.

8. Dane są okrąg o środku O i promieniu 1 oraz trójkąt prostokątny AOC (rysunek obok). Wskaż odcinek, którego długość jest równa:

- a) $\sin \alpha$, b) $\cos \alpha$, c) $\operatorname{tg} \alpha$.



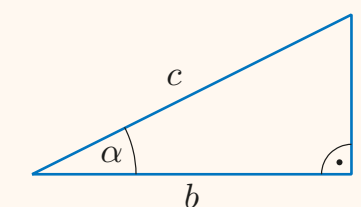
D 9. Uzasadnij, że na rysunku obok:

- a) $|CO| = \frac{1}{\cos \alpha}$, b) $|AO| = \frac{1}{\sin \alpha}$.

Czy wiesz, że...

W trójkącie prostokątnym rozpatruje się również funkcje trygonometryczne kąta ostrego:

- secans kąta α : $\sec \alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos \alpha}$
- cosecans kąta α : $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin \alpha}$

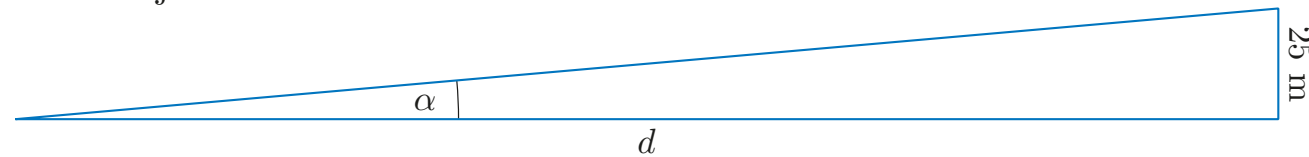


4.3. Trygonometria – zastosowania

Funkcje trygonometryczne wykorzystuje się w wielu sytuacjach praktycznych. Ich przybliżone wartości odczytamy z tablic wartości funkcji trygonometrycznych na str. 385. Możemy też skorzystać z odpowiedniego kalkulatora.

Przykład 1

Wierzchołek latarni morskiej znajduje się 25 m nad poziomem morza i widać go z jachtu pod kątem $\alpha = 5^\circ$. Jaka jest odległość jachtu od podnóża skarpy, na której stoi latarnia?



Do wyznaczenia szukanej wartości d wykorzystamy odczytaną z tablic przybliżoną wartość $\operatorname{tg} 5^\circ \approx 0,0875$.

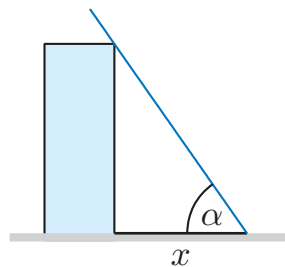
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{25}{d}, \quad \text{czyli} \quad d = \frac{25}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{25}{0,0875} \approx 286 \text{ [m]}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz wysokość budynku, którego cień ma długość x w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt α .

a) $x = 5 \text{ m}$, $\alpha = 58^\circ$

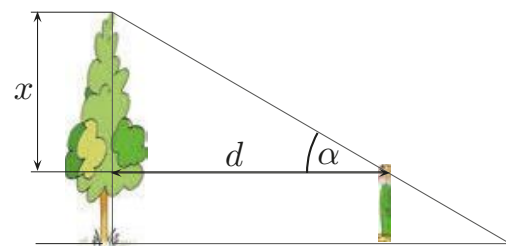
b) $x = 12 \text{ m}$, $\alpha = 39^\circ$



Przykład 2

Obserwator widzi czubek drzewa odległego o $d = 65 \text{ m}$ pod kątem $\alpha = 29^\circ$ (oczy ma na wysokości 1,5 m nad ziemią). Jaka jest wysokość tego drzewa?

$$\operatorname{tg} 29^\circ = \frac{x}{65}$$



Z tablic odczytujemy: $\operatorname{tg} 29^\circ \approx 0,5543$, czyli $x \approx 65 \cdot 0,5543 \approx 36 \text{ [m]}$.

Wysokość drzewa jest więc równa około $36 + 1,5 = 37,5 \text{ [m]}$.

Ćwiczenie 2

Przyjmij, jak w przykładzie 2., że obserwator ma oczy na wysokości 150 cm nad ziemią, i oblicz wysokość drzewa w przypadku, gdy:

a) $\alpha = 40^\circ$, $d = 22 \text{ m}$,

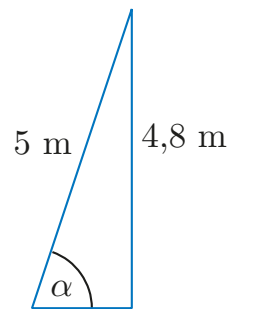
b) $\alpha = 14^\circ$, $d = 100 \text{ m}$.

Znajomość wartości funkcji trygonometrycznych może posłużyć do znajdowania miar kątów ostrych trójkąta prostokątnego.

Przykład 3

Drabinę o długości 5 m oparto o ścianę budynku tak, że dotyka jej na wysokości 4,8 m. Jaki kąt tworzy drabina z ziemią?

$$\sin \alpha = \frac{4,8}{5} = 0,96. \text{ Z tabeli odczytujemy: } \alpha \approx 74^\circ.$$



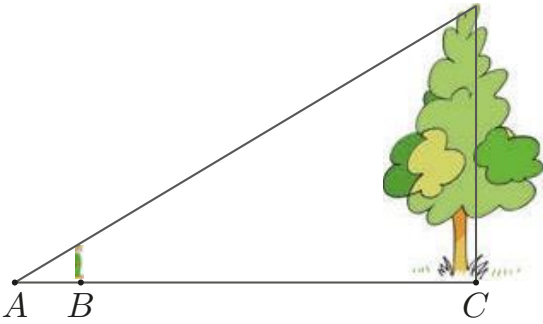
Ćwiczenie 3

Jaki kąt tworzy z ziemią drabina o długości:

a) 6,5 m, jeśli oparta o ścianę budynku sięga na wysokość 5,5 m,

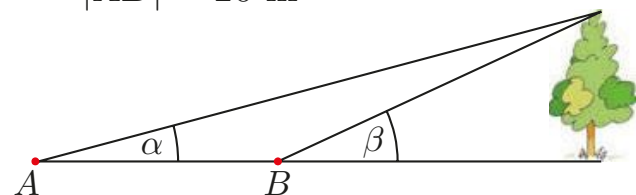
b) 4,5 m, jeśli jej koniec opierający się o ziemię jest odległy o 1 m od ściany budynku?

Zadania

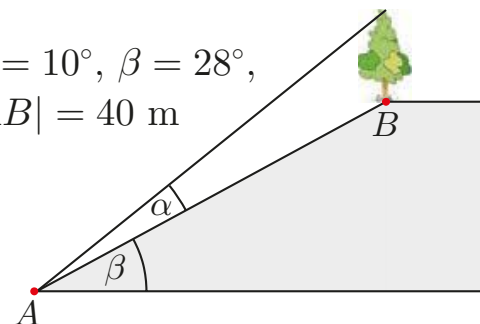
1. Naciągnięty sznurek długości 20 m, którego jeden koniec jest przymocowany do ziemi, a na drugim końcu jest przyczepiony latawiec, tworzy z poziomem kąt 70° . Na jakiej wysokości nad ziemią znajduje się latawiec?
2. O ile wyżej sięgnie sześciometrowa drabina ustawiona pod kątem 73° do poziomu ziemi od takiej samej drabiny ustawionej pod kątem 53° ?
3. Aby obliczyć wysokość drzewa, uczeń ustawił się tak, że koniec jego cienia pokrywał się z końcem cienia drzewa. Wiadomo, że uczeń ma 180 cm wzrostu, $|BC| = 18 \text{ m}$, a promienie słoneczne padają pod kątem 31° do powierzchni ziemi. Jaka jest wysokość drzewa?
4. Drabina wozu strażackiego może być rozsunięta na długość 20 m i podniesiona pod kątem 72° . Na jaką wysokość sięgnie drabina, jeśli jest zamocowana 2,4 m nad ziemią?
5. a) Drzewo o wysokości 20 m rzuca cień długości 17 m. Jaki kąt z powierzchnią ziemi tworzą w tym momencie promienie słoneczne?
b) Drabinę oparto o ścianę tak, że dotyka jej na wysokości 3,6 m i tworzy z ziemią kąt 54° . Jaki kąt będzie tworzyła z ziemią ta drabina, jeśli zostanie oparta o ścianę na wysokości 4 m?

6. Oblicz wysokość drzewa.

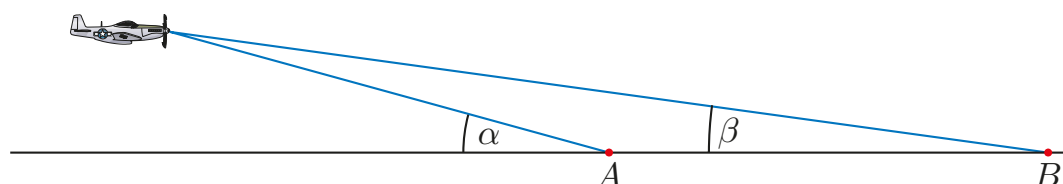
a) $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 25^\circ$,
 $|AB| = 20$ m



b) $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 28^\circ$,
 $|AB| = 40$ m



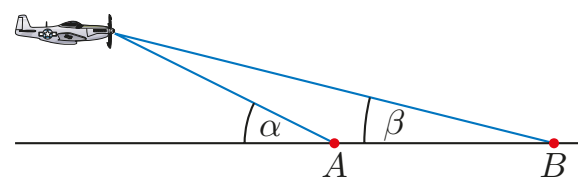
7. Pilot lecący samolotem na wysokości 50 m widzi początek pasa startowego pod kątem $\alpha = 30^\circ$, a jego koniec pod kątem $\beta = 10^\circ$. Samolot nadlatuje wzdłuż pasa startowego. Jaka jest długość tego pasa?



8. Samolot zbliżający się do lotniska leci na wysokości 2400 m. Do lądowania musi schodzić pod kątem 4° . Jak daleko od początku pasa startowego powinien rozpocząć ten manewr?

9. Startujący samolot wznosi się pod kątem 15° z prędkością 80 m/s. Jaką wysokość osiągnie samolot po 2 minutach od momentu oderwania się od ziemi?

10. Dwaj obserwatorzy stojący w punktach A i B (rysunek obok) w odległości 400 m od siebie widzą nadlatujący wzdłuż kierunku AB samolot pod kątami $\alpha = 20^\circ$ i $\beta = 8^\circ$. Na jakiej wysokości leci samolot?



11. a) Komin fabryczny ma wysokość 20 m. Jego wierzchołek widać z punktu A pod kątem 26° , a z punktu B pod kątem 40° . Podstawa komina oraz punkty A i B leżą na jednej prostej. Jaka jest odległość między punktami A i B? Rozpatrz dwa przypadki. W obliczeniach pomin grubość komina.

b) Wierzchołek komina jest widoczny z powierzchni ziemi pod kątem 42° , a po przejściu 50 m w kierunku komina – pod kątem 61° . Oblicz wysokość komina.

D 12. Obserwator stojący na szczycie latarni morskiej na wysokości a metrów nad poziomem morza zobaczył pod kątem α do poziomu łódź płynącą w kierunku latarni. Po pewnym czasie znów spojrzał w tym kierunku i zobaczył tę samą łódź pod kątem β wciąż płynącą w kierunku latarni. Wykaż, że odległość, jaką łódź przepłynęła między kolejnymi obserwacjami, była równa $a\left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta}\right)$.

4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

Rozwiązaniem trójkąta nazywamy wyznaczenie długości jego trzech boków oraz miar jego trzech kątów.

Aby **rozwiązać trójkąt prostokątny**, wystarczy znać:

- długości dowolnych dwóch boków lub
- długość dowolnego boku i miarę jednego z kątów ostrych.

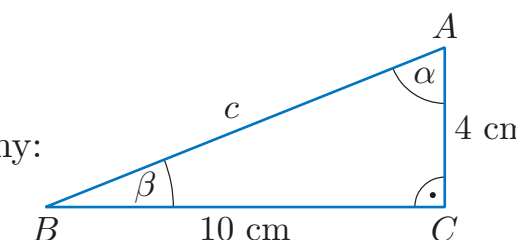
Przykład 1

Rozwiąż trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 4 cm i 10 cm.

Długość przeciwprostokątnej obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$c = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \text{ [cm]}$$

$\tan \beta = \frac{4}{10} = 0,4$. Z tablic (str. 385) odczytujemy:
 $\beta \approx 22^\circ$ i stąd $\alpha = 90^\circ - \beta \approx 68^\circ$.



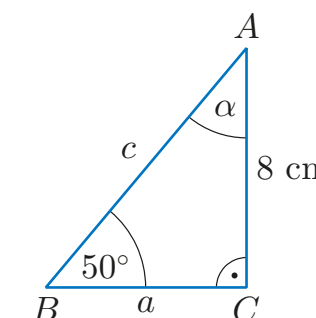
Przykład 2

Rozwiąż trójkąt prostokątny, którego przyprostokątna leżąca naprzeciwko kąta 50° ma długość 8 cm.

$$\alpha = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\frac{8}{c} = \sin 50^\circ \approx 0,766, \text{ stąd } c \approx 10,44 \text{ cm.}$$

$$\frac{8}{a} = \tan 50^\circ \approx 1,1918, \text{ stąd } a \approx 6,71 \text{ cm.}$$



Ćwiczenie 1

Rozwiąż trójkąt prostokątny, o którym wiadomo, że:

- dwa jego dłuższe boki mają długości 9 cm i 10 cm,
- długości jego przyprostokątnych są równe 5 cm i 13 cm,
- jego przeciwprostokątna ma długość 15 cm, a jeden z kątów ma miarę 37° ,
- długość jego przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta 54° jest równa 8 cm.

Jeśli potrzebna jest większa dokładność, to miarę kąta możemy podawać w stopniach i minutach, a nawet w sekundach.

1 minuta (oznaczana $1'$) jest równa $\frac{1}{60}$ stopnia.

1 sekunda (oznaczana $1''$) jest równa $\frac{1}{60}$ minuty.

Na przykład $24,5^\circ = 24^\circ 30'$.

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 60' \\ 1' &= 60'' \\ 1^\circ &= 3600'' \end{aligned}$$

Przykład 3

Wyraź w minutach i sekundach $\frac{1}{1000}$ kąta 45° .

$$\frac{45^\circ}{1000} = \frac{45}{1000} \cdot 3600'' = 162'' = 120'' + 42'' = 2'42''$$

Ćwiczenie 2

Wyraź w stopniach, minutach i sekundach $\frac{1}{100}$ kąta:

- a) 360° , b) 4° , c) 15° , d) 12° , e) 42° .

Przykład 4

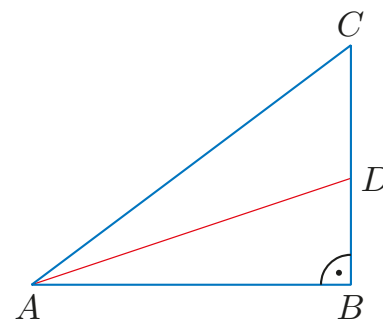
Dany jest trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok). Odcinek AD jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC . Wiadomo, że $|AB| = 8$ i $|BC| = 6$. Oblicz miary kątów trójkąta ADC .

$$\operatorname{tg} |\sphericalangle BAC| = \frac{6}{8} = 0,75, \text{ czyli } |\sphericalangle BAC| \approx 37^\circ$$

$$\text{Zatem: } |\sphericalangle CAD| \approx \frac{1}{2} \cdot 37^\circ = 18^\circ 30'$$

$$|\sphericalangle ACD| \approx 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$$

$$|\sphericalangle ADC| \approx 180^\circ - 18^\circ 30' - 53^\circ = 108^\circ 30'$$



Ćwiczenie 3

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A . Wiadomo, że $|\sphericalangle BCA| = 55^\circ$ oraz $|CB| = 10$. Na boku AB obrano punkt D w taki sposób, że odcinek CD jest:

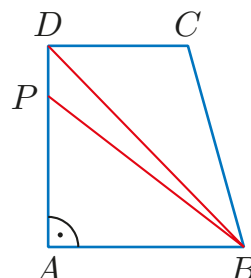
- a) zawarty w dwusiecznej kąta BCA , b) środkową trójkąta ABC .

Oblicz długość odcinka CD oraz miary kątów trójkąta BCD .

Zadania

1. W trapezie prostokątnym $ABCD$ (rysunek obok) kąt ADB ma miarę $43^\circ 46' 25''$, a kąt ABC – miarę $73^\circ 42' 10''$.

- a) Wyznacz miary kątów trójkąta BCD .
b) Wyznacz miary kątów trójkąta ABP w przypadku, gdy punkt P leży na dwusiecznej kąta ABC .



2. Rozwiąż trójkąt prostokątny o podanych długościach przyprostokątnych.

- a) 4 cm, 6 cm b) 1 cm, 7 cm c) 8 cm, 10 cm

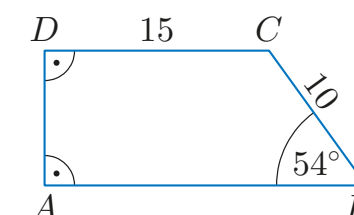
3. Rozwiąż trójkąt prostokątny ABC , o którym wiadomo, że ma kąt prosty przy wierzchołku C oraz:

- a) $|\sphericalangle CAB| = 34^\circ$, $|CB| = 6$, b) $|\sphericalangle CBA| = 66^\circ$, $|AB| = 10$.

4. a) Trapez równoramienny ma podstawy długości 6 dm i 10 dm, a jego obwód jest równy 32 dm. Oblicz miary kątów tego trapezu.

b) Trapez równoramienny ma podstawy długości 4 cm i 8 cm oraz wysokość 8 cm. Oblicz miarę kąta, jaki przekątna trapezu tworzy z jego podstawą.

c) Wysokość trapezu równoramiennego wynosi 5 cm. Przekątna tego trapezu ma długość 13 cm i tworzy z ramieniem kąt prosty. Oblicz miary kątów tego trapezu.



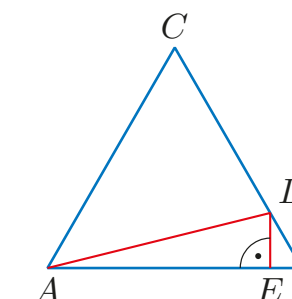
5. Oblicz długości boków AB i AD trapezu prostokątnego $ABCD$ oraz miarę kąta DCA (rysunek obok).

6. a) Przekątne deltoidu mają długości 20 i 30. Punkt przecięcia przekątnych dzieli dłuższą z nich w stosunku 2 : 1. Oblicz miary kątów deltoidu.

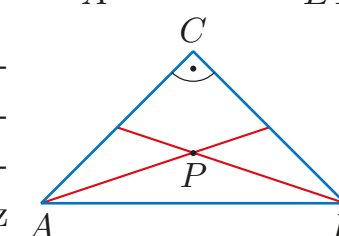
b) Obwód równoległoboku jest równy 90, a wysokość opuszczona na bok długości 30 jest równa 10. Oblicz miary kątów tego równoległoboku.

7. Wysokość rombu poprowadzona do jego boku podzieliła go w stosunku 1 : 3. Wyznacz kąty tego rombu.

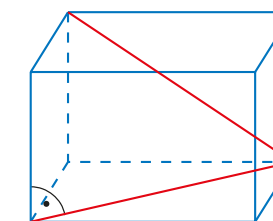
8. W trójkącie równobocznym ABC o boku 12 na boku CB obrano taki punkt D , że $3|DB| = |CD|$ (rysunek obok). Oblicz długość odcinka ED oraz długości boków trójkąta ABD .



9. Środkowe poprowadzone z wierzchołków A i B trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC o ramieniu długości 6 cm przecinają się w punkcie P (rysunek obok). Oblicz długości boków trójkąta ABP oraz przybliżone miary jego kątów.

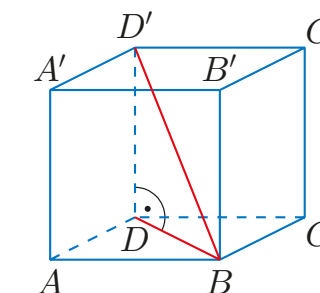


10. Dany jest prostopadłościan o krawędziach podstawy długości 1 i 3 oraz wysokości 2 (rysunek obok). Oblicz miarę kąta zawartego między przekątną podstawy a przekątną prostopadłościanu.



11. Dany jest sześcian o krawędzi a (rysunek obok). Wyznacz obwód i miary kątów ostrych trójkąta:

- a) BDD' ,
b) $DD'O$, gdzie O jest środkiem odcinka BD .



4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość, w której zapisie występują funkcje trygonometryczne, prawdziwą dla wszystkich wartości kąta, dla których jest określona.

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są zależności:

$$\blacksquare \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \blacksquare \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Uwaga. Zapis $\sin^2 \alpha$ oznacza $(\sin \alpha)^2$, analogicznie $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$ i $\operatorname{tg}^2 \alpha = (\operatorname{tg} \alpha)^2$.

Tożsamość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nazywamy **jedynką trygonometryczną**.

Dowód jedynki trygonometrycznej

Przy oznaczeniach takich jak na rysunku obok:

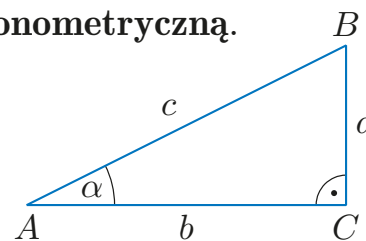
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{ i } \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

Z jedynki trygonometrycznej wynikają następujące tożsamości:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{ oraz } \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$



D Ćwiczenie 1

Udowodnij tożsamość trygonometryczną $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Jeżeli dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej, to – korzystając z tożsamości podanych wyżej – można wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.

Przykład 1

Kąt α jest ostry oraz $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Oblicz $\cos \alpha$.

Wartość $\cos \alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \cos^2 \alpha &= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \\ \cos \alpha &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie, dlatego wartość $-\frac{4}{5}$ odrzucamy.

Ćwiczenie 2

Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Oblicz $\sin \alpha$.

Przykład 2

Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α .

Wartość $\sin \alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{ Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie.}$$

Obliczamy wartość $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

Ćwiczenie 3

a) Kąt α jest kątem ostrym oraz $\sin \alpha = 0,8$. Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

b) Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{12}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

c) Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych, możemy wykorzystać odpowiedni trójkąt prostokątny.

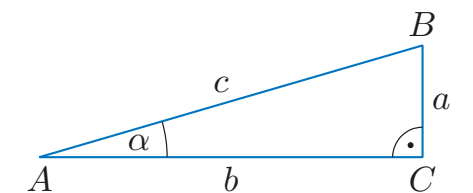
Przykład 3

Kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

Zauważ, że dla trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $a = 7$ i $b = 24$ otrzymamy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$. Długość przeciwprostokątnej obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$c = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

$$\text{Zatem } \sin \alpha = \frac{7}{25} \quad \text{ oraz } \quad \cos \alpha = \frac{24}{25}.$$



Ćwiczenie 4

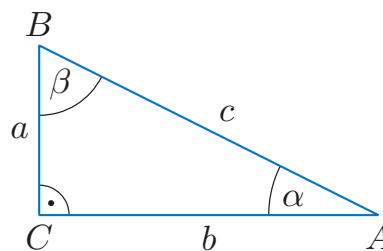
Narysuj odpowiedni trójkąt prostokątny i oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .

- | | | | |
|--|---|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\operatorname{tg} \alpha = 2$ | c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{21}{20}$ | e) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ | g) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ |
| b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ | f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ | h) $\cos \alpha = \frac{5}{6}$ |

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok).
W tym trójkącie $\beta = 90^\circ - \alpha$. Zauważmy, że:

$$\sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$$

i jednocześnie $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, zatem $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.



Twierdzenie

Dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą równości:

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij drugą i trzecią z podanych wyżej tożsamości trygonometrycznych.

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .

- a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{10}$ b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$

Zadania

1. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .

- a) $\cos \alpha = 0,8$ c) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ e) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$ g) $\operatorname{tg} \alpha = 2\frac{2}{5}$
b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ d) $\sin \alpha = 0,4$ f) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$ h) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$

2. a) Kąt α jest ostry oraz $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$. Oblicz $\sin \alpha$.

b) Kąt α jest ostry oraz $\cos \alpha = 2 \sin \alpha$. Oblicz $\cos \alpha$.

3. Czy istnieje kąt ostry α spełniający podane zależności?

- a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$ i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$
b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

4. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α , a przeciwprostokątna ma długość c . Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

- a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $c = 10$ cm b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$, $c = 39$ cm

5. Kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia.

- a) $\frac{6 \sin \alpha - 8 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$ b) $\frac{\sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1}{1 - \sin^2 \alpha}$

6. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Oblicz obwód tego trójkąta.

- a) $|AC| = 12$, $\sin |\sphericalangle BAC| = \frac{5}{13}$ c) $|BC| = \sqrt{3}$, $\sin |\sphericalangle ABC| = \frac{\sqrt{6}}{3}$
b) $|AC| = 4$, $\sin |\sphericalangle ABC| = \frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $|BC| = 6$, $\cos |\sphericalangle BAC| = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

7. Czy istnieje kąt ostry α spełniający podane zależności?

- a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$ c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
b) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ i $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = m$. Wyznacz wartość wyrażenia.

- a) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$ c) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$
b) $(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)$ d) $\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$

D 9. Uzasadnij podaną obok tożsamość. Korzystając z niej, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α w przypadku, gdy:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

- a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$.

10. Kąt α jest kątem ostrym i $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,4$. Oblicz wartość wyrażenia.

- a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ b) $\sin \alpha - \cos \alpha$ c) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$

D 11. Wykaż, że dla kąta ostrego α podana równość jest tożsamością.

- a) $(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$ d) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
b) $(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha) = \cos^2 \alpha$ e) $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$
c) $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha$ f) $\frac{\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1$

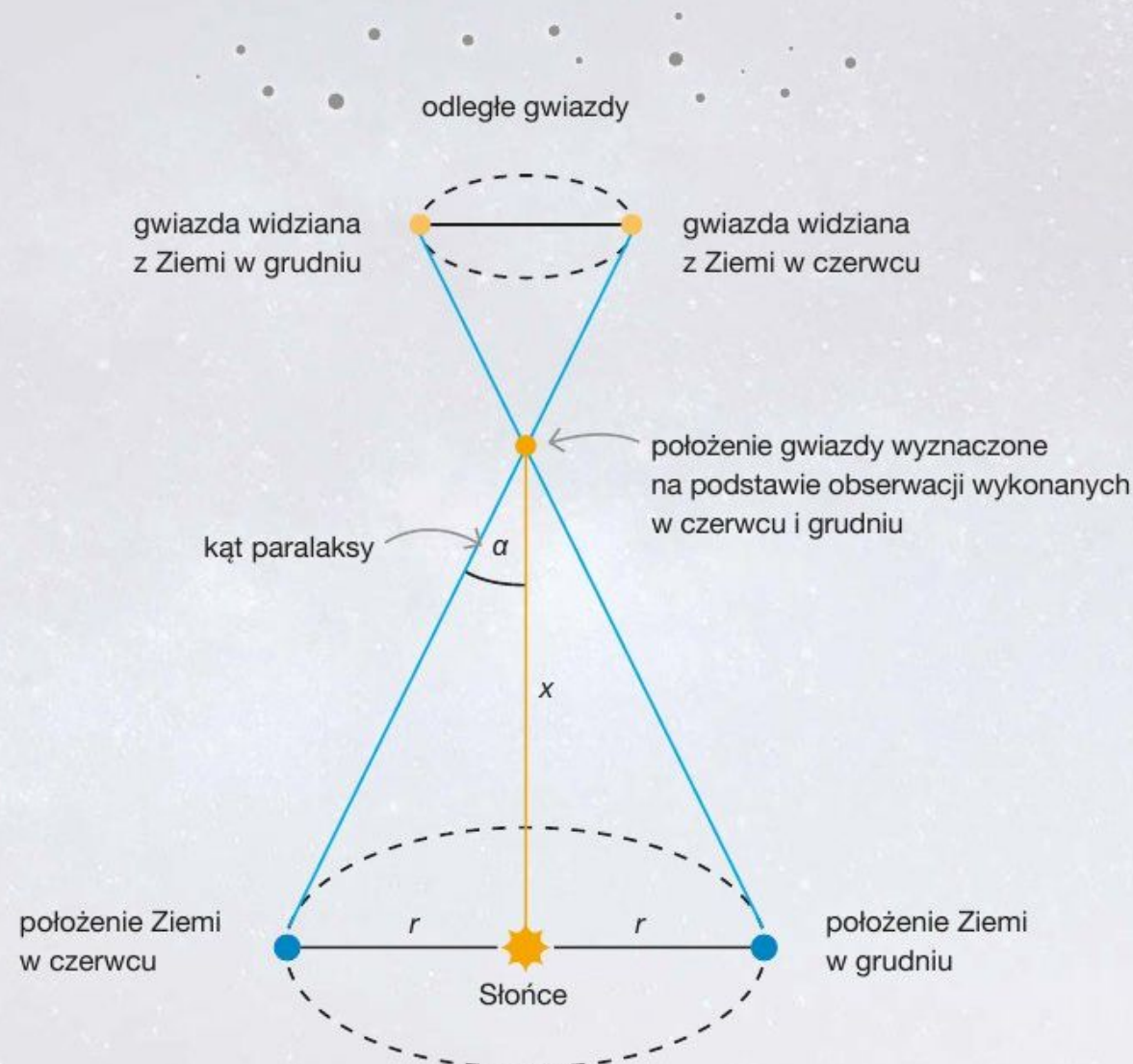
Czy wiesz, że...

Do oznaczania kątów zwykle używamy liter alfabetu greckiego.

A α alfa	H η eta	N ν ni	T τ tau
B β beta	Θ θ teta	Ξ ξ ksi	Υ υ ypsilon
Γ γ gamma	I ι jota	O o omikron	Φ ϕ fi
Δ δ delta	K κ kappa	Π π pi	X χ chi
E ε epsilon	Λ λ lambda	P ρ ro	Ψ ψ psi
Z ζ dzeta	M μ mi	Σ σ sigma	Ω ω omega

Trygonometria i astronomia

Odległości dzielące nas od stosunkowo bliskich gwiazd można obliczyć na podstawie obserwacji zmiany ich położenia na tle odległych gwiazd. Astronomowie w tym celu wyznaczają kąt, zwany kątem paralaksy. Ma on miarę rzędu setnych części sekundy.

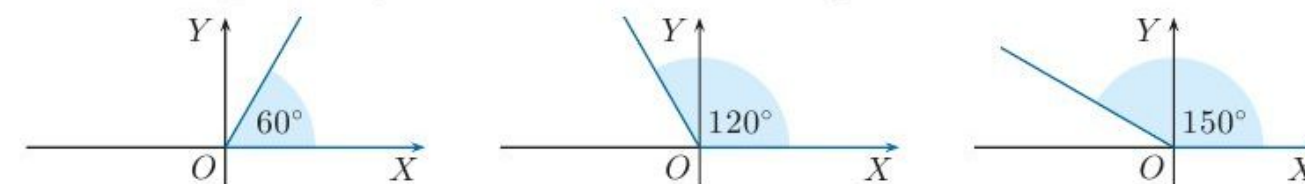


Do wyznaczenia kąta paralaksy możemy wykorzystać obserwacje wykonane w czerwcu i grudniu, gdy Ziemia znajduje się w dwóch przeciwnych położeniach na swojej orbicie wokół Słońca (patrz rysunek). Oznaczmy przez r średnią odległość Ziemi od Słońca, równą w przybliżeniu 150 mln km (wielkość ta została nazwana **jednostką astronomiczną**). Odległość x obliczamy, korzystając ze wzoru $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{x}$, gdzie α – kąt paralaksy.

- 1 Oblicz odległość od Słońca najbliższej nam gwiazdy spoza Układu Słonecznego – Proxymy Centauri, dla której kąt paralaksy $\alpha = 0,77''$. Przyjmij $\operatorname{tg} 0,77'' \approx 0,00000373$.

4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

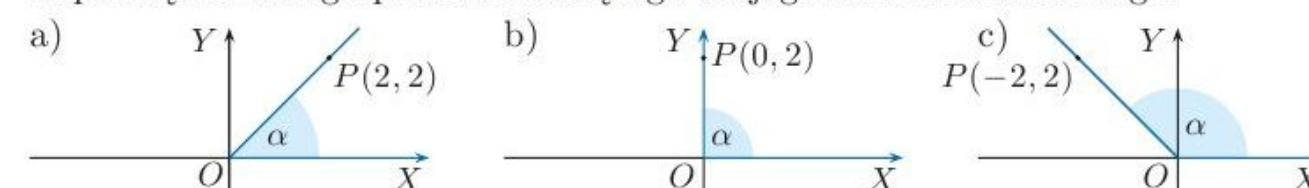
W tej i kolejnych lekcjach będziemy rozpatrywać kąty umieszczone w układzie współrzędnych w taki sposób, że początek układu jest wierzchołkiem kąta, a jedno z ramion kąta, zwane jego **ramieniem początkowym**, zawiera się w dodatniej półosi OX . Drugie ramię będziemy nazywać **ramieniem końcowym**. Kąt odłożony jest od ramienia początkowego do ramienia końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.



Figurę nazywamy **wypukłą**, gdy odcinek łączący dowolne dwa punkty należące do tej figury jest w niej zawarty. W tym rozdziale rozpatrujemy kąty **wypukłe**, których miary należą do przedziału $[0^\circ; 180^\circ]$. Przypominamy, że kąt nazywamy **rozwartym**, gdy jego miara należy do przedziału $(90^\circ; 180^\circ)$.

Ćwiczenie 1

Do ramienia końcowego kąta należy punkt P . Podaj miarę tego kąta oraz współrzędne innego punktu należącego do jego ramienia końcowego.



Przykład 1

Dany jest trójkąt POA , w którym $P(3, 2)$ i $A(3, 0)$. Oblicz długość odcinka OP i wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA .

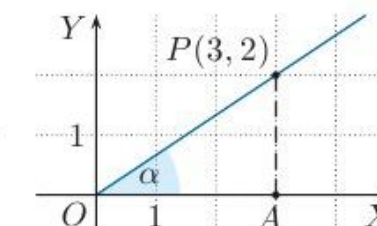
Rozważamy trójkąt prostokątny POA (rysunek obok).

Oznaczmy miarę kąta POA przez α .

Ponieważ $|OA| = 3$, $|AP| = 2$, z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$|OP| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Zatem } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \quad \text{ i } \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}.$$



Ćwiczenie 2

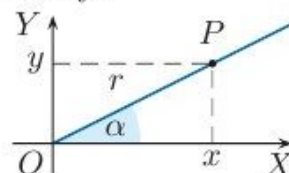
Oblicz długość odcinka OP i wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA .

- a) $P(3, 4)$, $A(3, 0)$ b) $P(6, 8)$, $A(6, 0)$ c) $P(\sqrt{3}, 1)$, $A(\sqrt{3}, 0)$

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta ostrego α . Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x},$$

$$\text{gdzie } r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



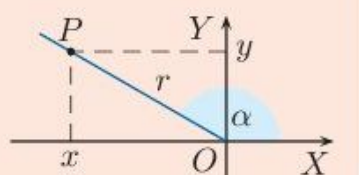
Podane wyżej wzory służą również do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ umieszczonego w układzie współrzędnych.

Definicja

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$. Wtedy:

$$\blacksquare \sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \blacksquare \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \text{gdzie } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\blacksquare \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0, \text{ czyli } \alpha \neq 90^\circ)$$



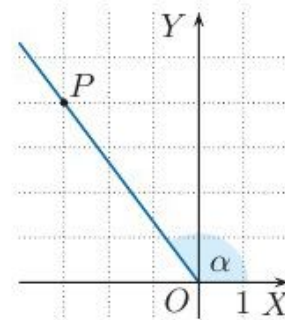
Przykład 2

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(-3, 4)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Punkt P ma współrzędne $(-3, 4)$, zatem $x = -3$, $y = 4$, czyli:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \text{ zatem } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5}.$$



Ćwiczenie 3

Do ramienia końcowego kąta α należą punkty P i Q . Przedstaw ten kąt na rysunku i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych, korzystając ze współrzędnych wybranego punktu.

$$\text{a) } P(-4, 3), Q(-8, 6) \quad \text{b) } P(-3, 3), Q(-4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}) \quad \text{c) } P(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), Q(-2, 6)$$

Ćwiczenie 4

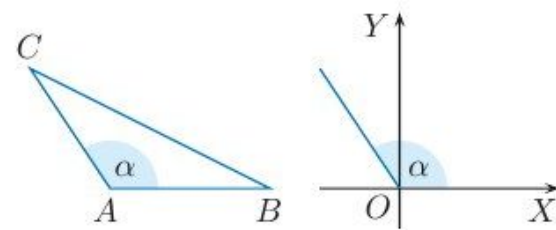
Wybierz dowolny punkt na ramieniu końcowym kąta α i oblicz wartości tych funkcji trygonometrycznych kąta α , które są dla niego określone.

$$\text{a) } \alpha = 0^\circ$$

$$\text{b) } \alpha = 90^\circ$$

$$\text{c) } \alpha = 180^\circ$$

Jako wartości funkcji trygonometrycznych kąta BAC w trójkącie ABC przyjmujemy wartości funkcji trygonometrycznych przystającego do niego kąta α umieszczonego w układzie współrzędnych.



Twierdzenie

Dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

Dla $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

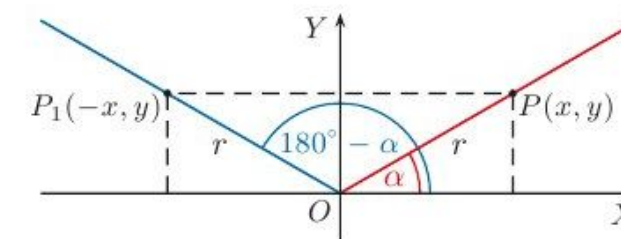
Rozpatrzmy punkt $P(x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta α oraz punkt $P_1(-x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$ (rysunek poniżej).

Zauważmy, że $|OP_1| = |OP| = r$, zatem:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin \alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{-x}{r} = -\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{-x} = -\operatorname{tg} \alpha.$$



Przykład 3

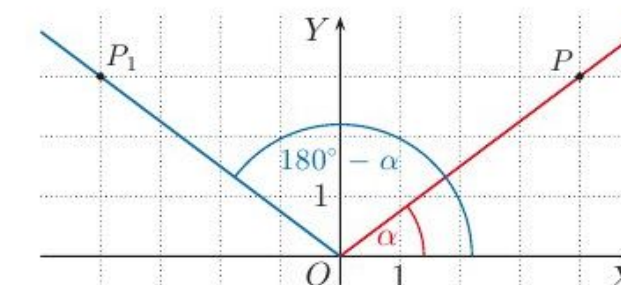
Punkt $P(4, 3)$ należy do ramienia końcowego kąta α , a punkt $P_1(-4, 3)$ – do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$.

$|OP_1| = |OP| = 5$, zatem:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{3}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{4}.$$



Ćwiczenie 5

Narysuj w układzie współrzędnych dwa kąty: α , do którego ramienia końcowego należy punkt $P(4, 2)$, oraz kąt $180^\circ - \alpha$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$.

Twierdzenie

Dla kąta $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ prawdziwe są wzory:

$$\blacksquare \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\blacksquare \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\blacksquare \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \text{ gdzie } \alpha \neq 90^\circ$$

Przykład 4

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120° .

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta:

- a) $\alpha = 135^\circ$, b) $\alpha = 150^\circ$.

D Ćwiczenie 7

- a) Uzasadnij podane obok twierdzenie.
b) Uzasadnij, że dla dowolnego kąta wypukłego α zachodzą nierówności:
 $\sin \alpha \leq 1$ i $\cos \alpha \leq 1$

Dla kąta $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ prawdziwe są zależności:

$$\begin{aligned} & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ & \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ gdzie } \alpha \neq 90^\circ \end{aligned}$$

Przykład 5

Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ spełniającego warunek $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej.

$$\cos^2 \alpha = \frac{15}{16}, \text{ stąd } \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ lub } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Dla $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ cosinus jest ujemny, więc $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

$$\text{Obliczamy wartość } \operatorname{tg} \alpha: \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

Ćwiczenie 8

Oblicz $\cos^2 \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ spełniającego warunek:

- a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, b) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ćwiczenie 9

Oblicz $\sin^2 \alpha$, $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ spełniającego warunek:

- a) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, b) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, c) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych podanego kąta (rysunek obok).

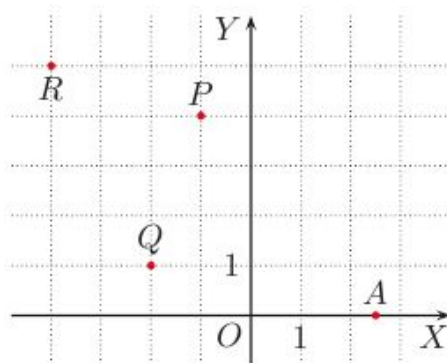
- a) $\angle AOP$ b) $\angle AOQ$ c) $\angle AOR$

2. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α , a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β . Oblicz $\sin \alpha - \sin \beta$.

- a) $P(-2, 4)$, $Q(4, 2)$ b) $P(-9, 3)$, $Q(2, 6)$

3. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α , a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β . Oblicz $\cos \alpha + \cos \beta$.

- a) $P(3, 1)$, $Q(-1, \frac{1}{2})$ b) $P(-2, 4)$, $Q(-4, 2)$ c) $P(-2, \sqrt{2})$, $Q(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$



4. Oblicz.

- a) $\sin 120^\circ + \sin 60^\circ$ b) $\sin 135^\circ \cdot \sin 150^\circ$ c) $4 \cos 150^\circ - 3 \operatorname{tg} 135^\circ$

5. Oblicz.

- a) $\frac{\sin 120^\circ - \cos 150^\circ}{3 \operatorname{tg} 150^\circ}$ c) $\frac{\operatorname{tg} 150^\circ - \operatorname{tg} 120^\circ}{\cos 120^\circ}$ e) $\frac{\cos 135^\circ + \cos 150^\circ}{\sin 120^\circ + \sin 135^\circ}$
b) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 30^\circ}{\sin 120^\circ}$ d) $\frac{\operatorname{tg} 135^\circ + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ \cdot \cos 135^\circ}$ f) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 30^\circ}{\cos 150^\circ + \cos 60^\circ}$

6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 385), oblicz przybliżone wartości $\sin 125^\circ$ i $\cos 168^\circ$.

$$\sin 125^\circ = \sin(180^\circ - 55^\circ) = \sin 55^\circ \approx 0,8192$$

$$\cos 168^\circ = \cos(180^\circ - 12^\circ) = -\cos 12^\circ \approx -0,9781$$

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz przybliżoną wartość:

- a) $\sin 105^\circ$, b) $\sin 165^\circ$, c) $\cos 130^\circ$, d) $\cos 175^\circ$, e) $\operatorname{tg} 142^\circ$, f) $\operatorname{tg} 163^\circ$.

7. Oblicz $\sin^2 \alpha$, $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta rozwartego α spełniającego warunek:

- a) $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$, b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, c) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

8. Oblicz $\cos^2 \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta rozwartego α spełniającego warunek:

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, b) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

9. Przeczytaj podany w ramce przykład.

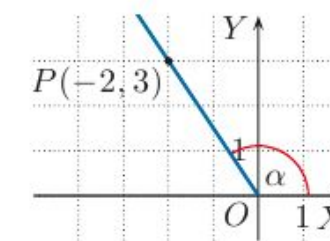
Narysuj w układzie współrzędnych kąt $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$, taki że $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

Wiemy, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, więc np. punkt $P(-2, 3)$ należy do ramienia końcowego kąta α . Zaznaczamy ten punkt w układzie współrzędnych i rysujemy ramię końcowe kąta α .

$$r = |OP| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

$$\text{stąd } \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

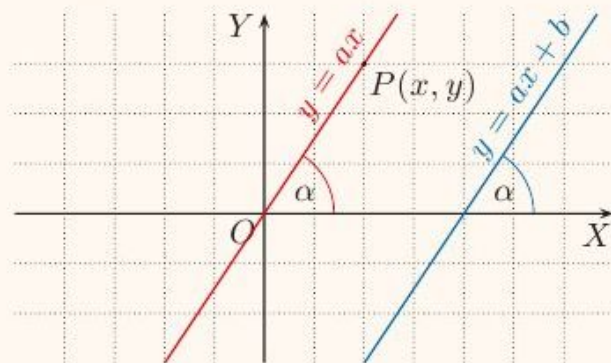


Narysuj w układzie współrzędnych kąt $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ spełniający podany warunek oraz oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

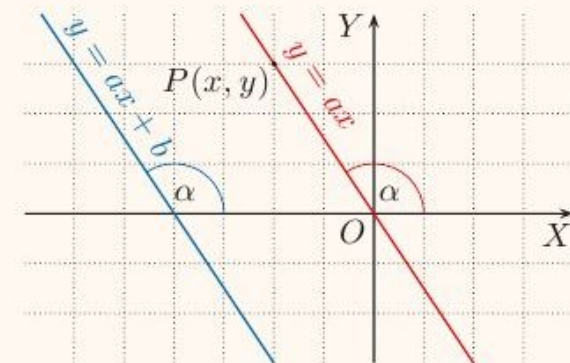
- a) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$ b) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$

Współczynnik kierunkowy prostej

$$a > 0$$



$$a < 0$$



Niech punkt $P(x, y)$ należy do prostej $y = ax$, gdzie $a \neq 0$, i leży w I lub II ćwiartce układu współrzędnych. Wówczas zgodnie z definicją funkcji tangens:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ czyli } y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x$$

Zauważ też, że dla dowolnego współczynnika b prosta $y = ax + b$ tworzy z osią OX taki sam kąt jak prosta $y = ax$. Wynika stąd poniższe twierdzenie.

Współczynnik kierunkowy a prostej $y = ax + b$, gdzie $a \neq 0$, jest równy tangensowi kąta α , który ta prosta tworzy z osią OX :

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

1. Wyznacz miarę kąta, który dana prosta tworzy z osią OX .

$$\text{a) } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \quad \text{b) } y = \sqrt{3}x \quad \text{c) } y + x = 0$$

2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz miarę kąta między prostymi:

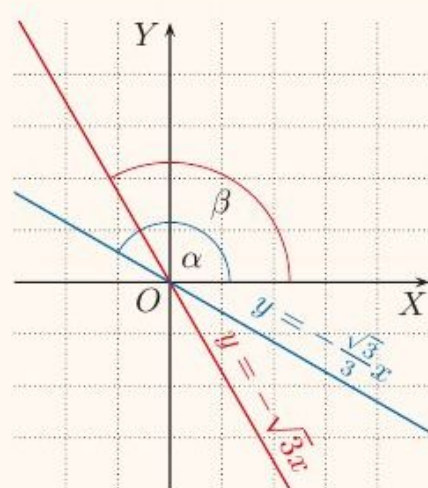
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ i } y = -\sqrt{3}x$$

Prosta $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ tworzy z osią OX kąt α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $\alpha = 150^\circ$.

Prosta $y = -\sqrt{3}x$ tworzy z osią OX kąt β taki, że $\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{3}$, czyli $\beta = 120^\circ$.

Kąt między tymi prostymi jest więc równy:

$$\alpha - \beta = 150^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$



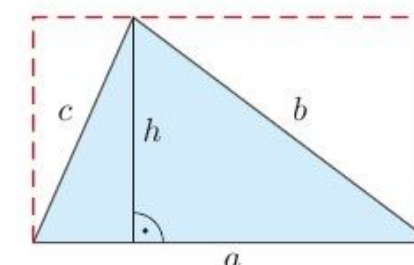
Wyznacz miarę kąta między prostymi:

$$\text{a) } y = -\sqrt{3}x \text{ i } y = x, \quad \text{b) } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 \text{ i } y = -x + 2.$$

4.7. Pole trójkąta

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = \frac{1}{2}ah$$



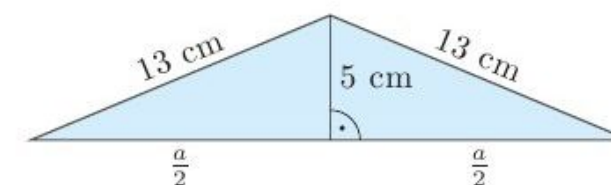
Przykład 1

Oblicz pole trójkąta równoramiennego, którego ramię ma długość 13 cm, a wysokość opuszczona na podstawę jest równa 5 cm.

Obliczmy połowę długości podstawy trójkąta, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$\frac{a}{2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ [cm]}$$

$$\text{Zatem } P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60 \text{ [cm}^2\text{]}.$$



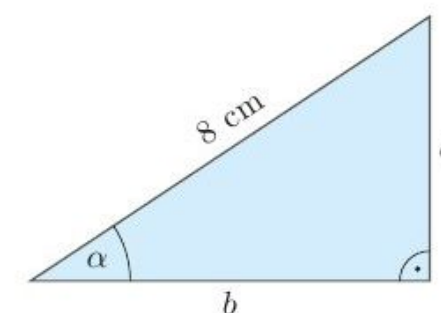
Przykład 2

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 8 cm, a $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ (rysunek obok). Oblicz pole tego trójkąta.

$$\cos \alpha = \frac{b}{8} = \frac{3}{4}, \text{ stąd } b = 6 \text{ [cm]}.$$

$$a = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \text{ [cm]}$$

$$\text{Zatem } P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot 6 = 6\sqrt{7} \text{ [cm}^2\text{]}.$$



Ćwiczenie 1

Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 28 cm. Oblicz pole tego trójkąta w przypadku, gdy:

- jego ramię jest o 4 cm krótsze od podstawy,
- cosinus kąta przy jego podstawie jest równy $\frac{2}{5}$.

Ćwiczenie 2

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 26 cm. Oblicz pole tego trójkąta w przypadku, gdy:

- sinus jednego z jego kątów ostrych jest równy $\frac{5}{13}$,
- tangens jednego z jego kątów ostrych jest równy 2,4,
- jego kąty ostre α i β spełniają warunek $\sin \alpha + \cos \beta = \sqrt{3}$.

Ćwiczenie 3

- a) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego o polu $4,5 \text{ cm}^2$.
 b) Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego o obwodzie równym $(30 + 15\sqrt{2}) \text{ cm}$.

Ćwiczenie 4

- D** a) Udowodnij podany obok wzór.
 b) Oblicz pole trójkąta równobocznego o obwodzie równym $30\sqrt{3} \text{ cm}$.

Pole trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

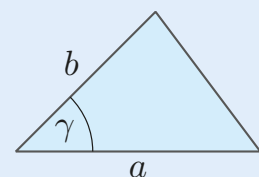
Ćwiczenie 5

- a) Oblicz pole trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 4 cm .
 b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego o polu równym $108\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi.

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$



Dowód

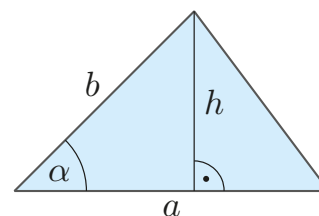
Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt α zawarty między bokami a i b trójkąta. Rozpatrzmy dwa z nich (przypadek trzeci – patrz ćwiczenie 6).

1° Kąt α jest kątem ostrym (rysunek obok).

Niech h będzie wysokością opuszczoną na bok a .

Wówczas $\frac{h}{b} = \sin \alpha$, więc $h = b \sin \alpha$.

Zatem $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$.



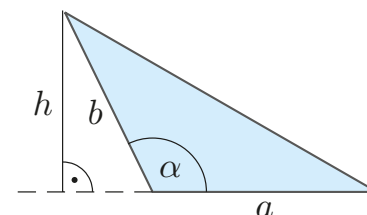
2° Kąt α jest kątem rozwartym (rysunek obok).

Niech h będzie wysokością opuszczoną na przedłużenie boku a .

Wówczas $\frac{h}{b} = \sin(180^\circ - \alpha)$, więc $h = b \sin(180^\circ - \alpha)$.

Korzystamy ze wzoru $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ i otrzymujemy $h = b \sin \alpha$.

Zatem $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$.



D Ćwiczenie 6

Uzasadnij prawdziwość wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$ w przypadku, gdy kąt α zawarty między bokami a i b jest kątem prostym.

Przykład 3

Dany jest trójkąt ABC o bokach $|AB| = 6\sqrt{3}$, $|AC| = 4$ i kącie $|\angle BAC| = 60^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta.

Kąt BAC jest zawarty między bokami AB i AC , zatem:

$$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$$

Ćwiczenie 7

Oblicz pole trójkąta ABC , o którym wiadomo, że:

- a) $|AB| = 6$, $|BC| = 10$ i $|\angle ABC| = 30^\circ$,
 b) $|AB| = 10$, $|AC| = 12$ i $|\angle CAB| = 120^\circ$,
 c) $|AB| = 4\sqrt{3}$, $|AC| = \sqrt{3}$, $|\angle ABC| = 35^\circ$ i $|\angle ACB| = 100^\circ$,
 d) $|AB| = |AC| = 3\sqrt{2}$ i $|\angle ABC| = 15^\circ$.

Ćwiczenie 8

Oblicz długość boku AC trójkąta ABC , którego pole jest równe 12 cm^2 , bok AB ma długość 4 cm , a kąt CAB ma miarę: a) 30° , b) 45° , c) 120° .

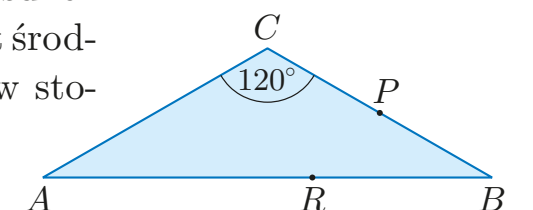
Zadania

1. a) Dany jest trójkąt ABC o bokach $|AB| = 7 \text{ cm}$, $|AC| = 5 \text{ cm}$ oraz kącie $|\angle CAB| = 120^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta.

b) Oblicz pole trójkąta równoramiennego, którego ramię ma długość 8 cm , a kąt przy podstawie ma miarę $22^\circ 30'$.

2. Obwód trójkąta równoramiennego ABC (rysunek obok) jest równy $(12 + 8\sqrt{3}) \text{ cm}$. Punkt P jest środkiem boku BC , a punkt R dzieli bok AB w stosunku $3:2$. Oblicz pole trójkąta:

a) APC , b) ARC , c) PRB .

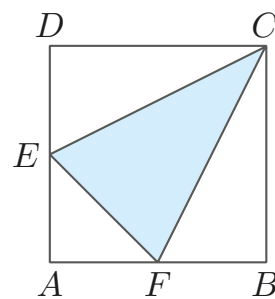


3. a) Podstawa trójkąta równoramiennego jest cztery razy dłuższa od wysokości opuszczonej na tę podstawę. Pole trójkąta jest równe 36 cm^2 . Oblicz obwód tego trójkąta.

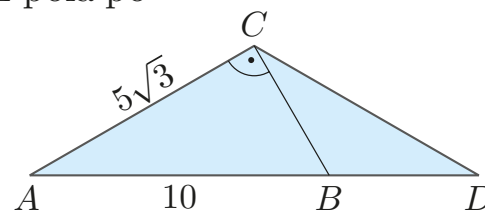
b) W trójkącie równoramiennym o polu $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ stosunek wysokości opuszczonej na podstawę do długości tej podstawy jest równy $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Oblicz miary kątów tego trójkąta oraz jego obwód.

4. Stosunek długości ramienia trójkąta równoramiennego do jego obwodu wynosi $0,3$. Pole trójkąta jest równe $8\sqrt{5}$. Oblicz długości jego boków.

5. W kwadracie $ABCD$ o boku 8 cm punkty E i F są środkami odpowiednio boków AD i AB (rysunek obok). Oblicz pole trójkąta EFC oraz jego obwód.



6. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 12 i tworzy z podstawą kąt o mierze 45° . Z wierzchołka tego trójkąta poprowadzono do podstawy odcinek dzielący kąt między ramionami w stosunku $2:1$. Oblicz pola powstałych trójkątów.



7. Na rysunku obok $|BC| = |BD|$. Oblicz obwód i pole trójkąta BCD .
8. Rozpatrzmy trójkąty o dwóch danych bokach a i b . Jaka powinna być miara kąta między tymi bokami, aby pole trójkąta było największe?
9. Dany jest trójkąt o bokach długości a i $2a$ oraz kącie między tymi bokami o mierze 120° . Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest dwukrotnie większe od pola trójkąta równobocznego o boku długości a .

Jeżeli dane są długości boków a, b, c trójkąta, to można obliczyć jego pole, korzystając ze **wzoru Herona** (Heron z Aleksandrii, I w. n.e.):

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

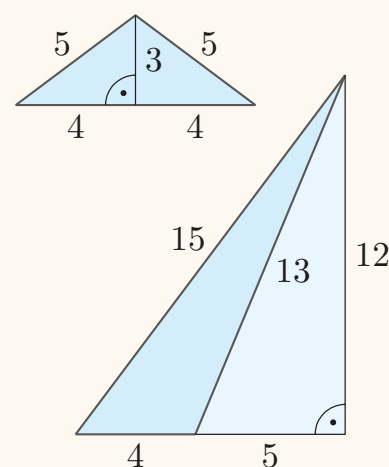
gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu tego trójkąta.

10. Oblicz pole trójkąta o podanych bokach, korzystając ze wzoru Herona.
- a) 3, 4, 5 b) 4, 5, 7 c) 5, 5, 6 d) 9, 10, 17

Czy wiesz, że...

Trójkątami Herona nazywamy trójkąty, których długości boków oraz pole wyrażają się liczbami naturalnymi.

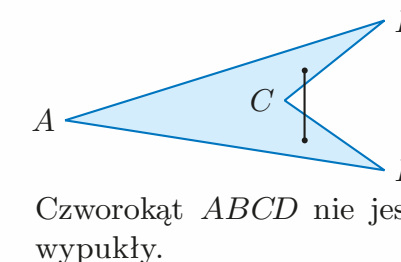
Przykładami trójkątów Herona są trójkąt o bokach 5, 5, 8 (który powstał przez złączenie dwóch trójkątów prostokątnych o bokach 3, 4, 5) oraz trójkąt o bokach 4, 13, 15 (który powstał przez odcięcie z trójkąta prostokątnego o bokach 9, 12, 15 trójkąta prostokątnego o bokach 5, 12, 13).



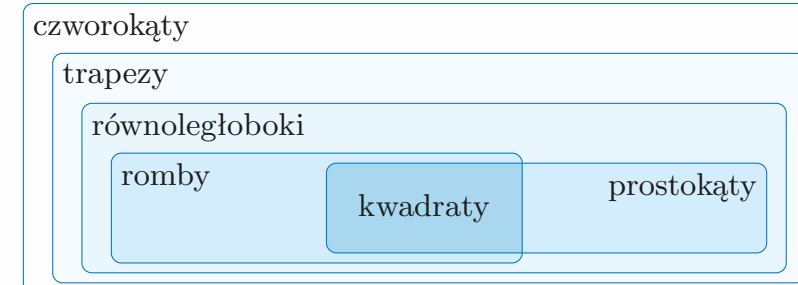
Przypomnij sobie

Czworokąt wypukły

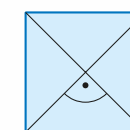
Wielokąt nazywamy **wypukłym**, gdy odcinek łączący dowolne dwa jego punkty jest w nim zawarty. Wszystkie kąty wewnętrzne wielokąta wypukłego są wypukłe. Wielokąt, który nie jest wypukły, nazywamy **wklęsłym**.



Czworokątami wypukłymi są m.in.: kwadraty, romby, prostokąty, równoległoboki i trapezy.

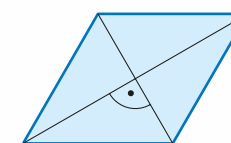


Kwadrat



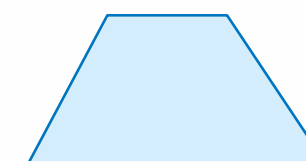
- Wszystkie kąty są proste, wszystkie boki są równej długości.
- Przekątne są równej długości, są do siebie prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

Romb



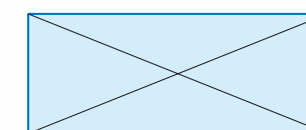
- Wszystkie boki są równej długości, przeciwległe boki są równoległe, przeciwległe kąty są równe.
- Przekątne są do siebie prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.
- Suma miar kątów wewnętrznych przy jednym boku jest równa 180° .

Trapez



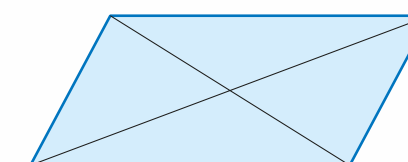
- Ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
- Suma miar kątów wewnętrznych przy każdym z ramion jest równa 180° .

Prostokąt



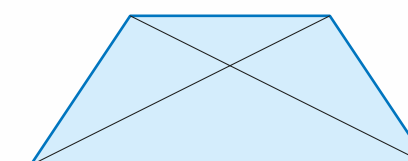
- Wszystkie kąty są proste, przeciwległe boki są równe i równoległe.
- Przekątne są równej długości, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

Równoległobok



- Przeciwległe boki są równe i równoległe, przeciwległe kąty są równe.
- Punkt przecięcia przekątnych dzieli je na połowy.
- Suma miar kątów wewnętrznych przy jednym boku jest równa 180° .

Trapez równoramienny



- W trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem, przekątne są równej długości, a punkt ich przecięcia dzieli je w tym samym stosunku.

4.8. Pola czworokątów (1)

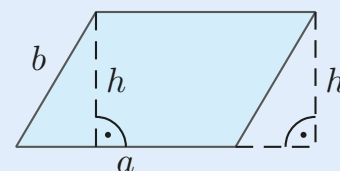
Aby obliczyć pole dowolnego czworokąta, możemy podzielić go na dwa trójkąty, a następnie obliczyć pola tych trójkątów i je dodać. Do obliczania pól szczególnych czworokątów, takich jak równoległobok, romb i trapez, możemy stosować odpowiednie wzory.

Równoległobokiem nazywamy czworokąt mający dwie pary boków równoległych.

Twierdzenie

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = a \cdot h$$



Przykład 1

Pole równoległoboku o bokach długości 6 cm i 9 cm jest równe 24 cm². Oblicz wysokość tego równoległoboku.

Oznaczmy przez h_1 wysokość opuszczoną na bok długości 6 cm, a przez h_2 wysokość opuszczoną na bok długości 9 cm.

Wówczas $6h_1 = 24$, czyli $h_1 = 4$ cm, oraz $9h_2 = 24$, czyli $h_2 = \frac{24}{9} = 2\frac{2}{3}$ [cm].

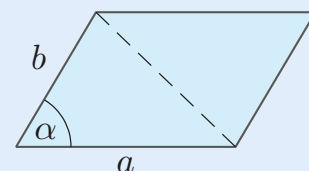
Ćwiczenie 1

Boki równoległoboku mają długości 6 cm i 10 cm, a jego pole jest równe 90 cm². Oblicz różnicę wysokości tego równoległoboku.

Twierdzenie

Pole równoległoboku o bokach a i b oraz kącie α zawartym między nimi wyraża się wzorem:

$$P = ab \sin \alpha$$



Dowód

Przekątna równoległoboku dzieli go na dwa trójkąty przystające (cecha BKB) o bokach a , b i kącie między nimi równym α . Zatem:

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \alpha = ab \sin \alpha$$

Ćwiczenie 2

Oblicz pole równoległoboku, którego boki mają długości 8 i 12, a kąt:

a) ostry ma miarę 45°, b) rozwarty jest pięć razy większy od kąta ostrego.

Ćwiczenie 3

Równoległobok o bokach 6 cm i 12 cm ma pole P . Oblicz miarę kąta ostrego tego równoległoboku.

a) $P = 36$ cm² b) $P = 36\sqrt{2}$ cm² c) $P = 36\sqrt{3}$ cm²

Ćwiczenie 4

Oblicz wysokości równoległoboku, którego boki mają długości 6 i $6\sqrt{3}$, a kąt rozwarty ma miarę 120°.

Ćwiczenie 5

- D** a) Uzasadnij, że przekątne równoległoboku dzielą go na cztery trójkąty o równych polach.
b) Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne mają długości 5 cm i 10 cm oraz przecinają się pod kątem 30°.

Rombem nazywamy czworokąt mający wszystkie boki równe.

Aby obliczyć pole rombu, możemy zastosować wzór na pole równoległoboku lub skorzystać z tego, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, a ich punkt przecięcia dzieli je na połowy.

D Ćwiczenie 6

Udowodnij podany obok wzór.

Pole rombu o przekątnych długości d_1 , d_2 wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

Przykład 2

Pole rombu jest równe 108 cm², a jedna z jego przekątnych ma długość 18 cm. Oblicz długość drugiej przekątnej.

Oznaczmy przez d_2 długość drugiej przekątnej. Wówczas $\frac{1}{2} \cdot 18d_2 = 108$, skąd $d_2 = 12$ cm.

Przykład 3

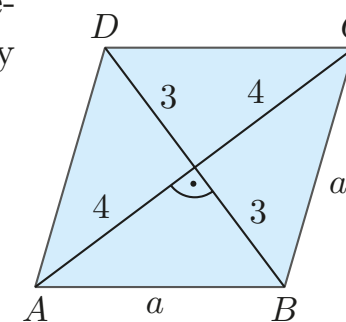
Ile jest równa wysokość rombu o przekątnych długości 6 cm i 8 cm?

Długość boku rombu obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $a^2 = 3^2 + 4^2$, czyli $a = 5$ cm. Obliczamy pole rombu:

$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Jednocześnie $P = ah$, czyli $h = \frac{P}{a}$, zatem:

$$h = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ [cm]}$$



Ćwiczenie 7

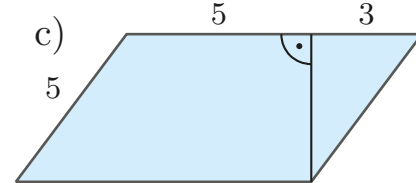
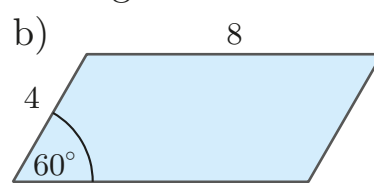
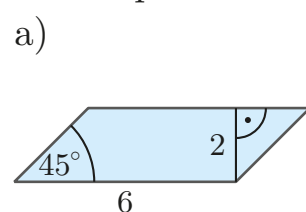
Oblicz pole i wysokość rombu:

- o boku 13 i jednej z przekątnych równej 24,
- o boku 6 i kącie ostrym α takim, że $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Zadania

- Oblicz pole równoległoboku, którego kąt rozwarty ma miarę 150° , a boki mają długości 4 cm i 9 cm.
 - Pole równoległoboku wynosi 8 cm^2 , obwód 24 cm, a sinus jego kąta ostrego jest równy 0,25. Oblicz wysokości tego równoległoboku.

- Oblicz pole i obwód równoległoboku.



- D** 3. a) Wykaż, że jeśli przekątne równoległoboku o długościach p i q przecinają się pod kątem α , to pole równoległoboku wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} pq \sin \alpha$$

- b) Przekątne równoległoboku o długościach 6 cm i 10 cm tworzą z jednym z boków odpowiednio kąty 12° i 33° . Oblicz pole tego równoległoboku.

- D** 4. Przekątne równoległoboku o polu równym $16\sqrt{2} \text{ cm}^2$ przecinają się pod kątem, którego sinus wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Jedna z przekątnych tego równoległoboku jest trzykrotnie dłuższa od drugiej. Uzasadnij, że krótsze boki tego równoległoboku są prostopadłe do jednej z jego przekątnych. Oblicz obwód tego równoległoboku.

- Oblicz sinus kąta ostrego rombu o przekątnych długości 12 cm i 16 cm.
 - Oblicz wysokość rombu o polu równym 120 cm^2 i obwodzie 48 cm.
- W rombie o boku długości 4 cm i kącie ostrym 60° połączono odcinkami środki sąsiednich boków i otrzymano prostokąt. Oblicz jego pole.
 - Jedna z przekątnych rombu o obwodzie 104 cm jest o 28 cm dłuższa od drugiej przekątnej. Oblicz pole tego rombu.
- W prostokącie o przekątnej długości 12 cm połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Otrzymany romb ma pole równe $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego tego rombu.

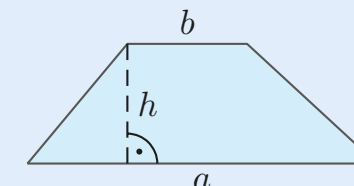
4.9. Pola czworokątów (2)

Trapezem nazywamy czworokąt mający co najmniej jedną parę boków równoległych.

Twierdzenie

Pole trapezu o podstawach długości a , b i wysokości h wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

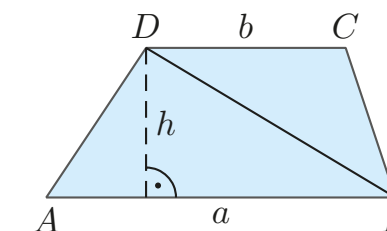


Dowód

Pole trapezu $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów ABD i BCD . Trójkąty te mają taką samą wysokość h , a ich pola są równe:

$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} ah, \quad P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} bh$$

Zatem pole trapezu $P = \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} (a+b)h$.



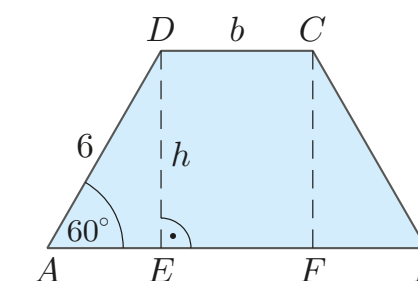
Ćwiczenie 1

Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, którego:

- podstawy mają długości 10 i 6, a przekątna ma długość 9,
- ramię ma długość 7, krótsza podstawa 5, a wysokość jest równa $3\sqrt{5}$.

Przykład 1

Podstawa AB trapezu równoramiennego $ABCD$ ma długość 10, jego ramię ma długość 6, a kąt ostry ma miarę 60° (rysunek obok). Oblicz pole tego trapezu.



Obliczamy wysokość trapezu: $h = 6 \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Zatem $|AE|^2 = 6^2 - h^2 = 9$, czyli $|AE| = 3$, oraz $b = |AB| - 2|AE| = 4$.

Pole trapezu: $P = \frac{1}{2} (4+10) \cdot 3\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 2

Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, którego:

- krótsza podstawa ma długość $3\sqrt{3}$, dłuższa podstawa $7\sqrt{3}$, a miara kąta rozwartego wynosi 150° ,
- jedna z podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej, przekątna ma długość 9, a wysokość jest równa $3\sqrt{5}$.

Przykład 2

Dany jest trapez $ABCD$ o kątach ostrych α i β , krótszej podstawie długości 4 i wysokości równej 6 (rysunek obok). Pole tego trapezu jest równe 42, a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$. Oblicz $\operatorname{tg} \beta$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|DE|}{|AE|}, \text{ stąd } |AE| = \frac{6}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{6}{\frac{3}{2}} = 4.$$

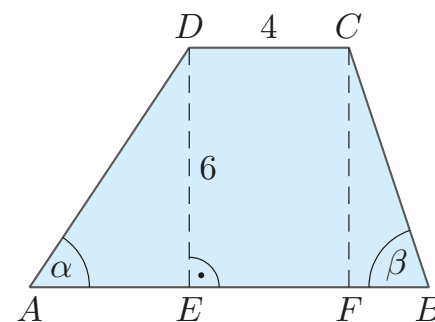
Pole trapezu:

$$P = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot h = \frac{1}{2}(|AB| + 4) \cdot 6 = 42$$

Zatem $|AB| + 4 = 14$, czyli $|AB| = 10$. Obliczamy długość odcinka FB :

$$|FB| = |AB| - (|AE| + |CD|) = 10 - (4 + 4) = 2$$

$$\text{Stąd } \operatorname{tg} \beta = \frac{|CF|}{|FB|} = \frac{6}{2} = 3.$$



Ćwiczenie 3

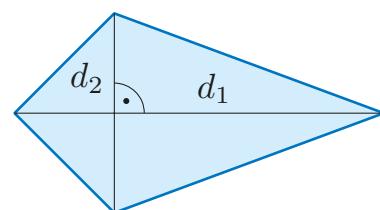
Dany jest trapez o wysokości 4 cm, krótszej podstawie $5\sqrt{5}$ cm oraz kątach ostrych α i β takich, że $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\sin \beta = \frac{4\sqrt{21}}{21}$. Oblicz pole tego trapezu.

Definicja

Deltoid to czworokąt, którego przekątne przecinają się pod kątem prostym i jedna z nich dzieli drugą na połowy.

D Ćwiczenie 4

Na rysunku obok przedstawiono deltoid o przekątnych d_1 i d_2 . Uzasadnij, że jego pole wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2}d_1d_2$.



Przykład 3

Pole deltoidu jest równe 24 cm^2 , a jedna z jego przekątnych jest trzy razy dłuższa od drugiej. Oblicz długości tych przekątnych.

Długość krótszej przekątnej oznaczmy przez x . Druga przekątna ma wtedy długość $3x$. Wyznaczamy pole deltoidu:

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot 3x = 24$$

Stąd $x^2 = 16$. Zatem przekątne mają długości $x = 4 \text{ cm}$ oraz $3x = 12 \text{ cm}$.

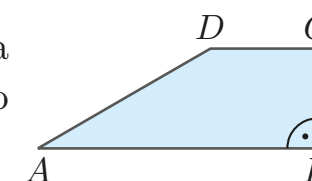
Ćwiczenie 5

Boki deltoidu mają długości $3\sqrt{2}$ i 5, a krótsza przekątna ma długość 6. Oblicz pole tego deltoidu.

Zadania

1. W trapezie prostokątnym o polu 90 cm^2 i kącie ostrym 45° dłuższa przekątna tworzy z podstawami kąt α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz obwód tego trapezu.

2. W trapezie prostokątnym na rysunku obok sinus kąta DAB jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$, a boki AD i AB mają odpowiednio długości 10 cm i 14 cm. Oblicz pole tego trapezu.

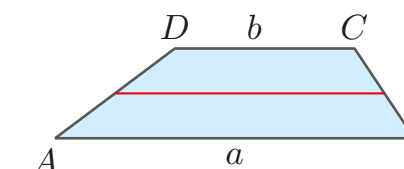


3. Trapez równoramienny o podstawach długości 2 cm i 4 cm ma pole równe 18 cm^2 . Oblicz sinus kąta, pod jakim przecinają się przekątne tego trapezu.

4. Działkę budowlaną w kształcie trapezu o kolejnych bokach długości 50 m, 25 m, 20 m i 25 m podzielono linią równoległą do podstaw tak, że obwody nowo powstałych działek są równe. Ile metrów bieżących siatki potrzeba do ogrodzenia obu działek (siatka między działkami jest wspólna), jeżeli będą one miały furtki o szerokości 1,5 m? Oblicz pola tych działek.

D 5. Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie E . Wykaż, że trójkąty AED i BEC mają równe pola.

D 6. Udowodnij, że odcinek łączący środki ramion AD i BC trapezu $ABCD$ (rysunek obok) ma długość $\frac{a+b}{2}$.



7. Ramiona trapezu mają długości 3 cm i 4 cm, krótsza podstawa ma 7,5 cm, a odcinek łączący środki ramion – 10 cm. Oblicz długość dłuższej podstawy tego trapezu i jego pole.

8.* Ramiona trapezu mają długości 7 cm i 9 cm, a suma długości jego podstaw wynosi 16 cm. Odcinek łączący środki ramion dzieli trapez na dwie części, których stosunek pól jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole tego trapezu.

9.* Przekątne trapezu równoramiennego o polu S zawierają się w dwusiecznych jego kątów ostrych. Jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz miary kątów i długości boków tego trapezu.

10. Działkę budowlaną w kształcie trapezu równoramiennego o bokach długości 50 m, 20 m, 50 m, 80 m podzielono na dwie części o równych polach powierzchni płotem równoległym do podstaw trapezu. Jaka jest długość płotu rozdzielającego te części?

Odcinki w trapezie

Twierdzenie

Dany jest trapez o podstawach a i b . Odcinek łączący ramiona tego trapezu równoległy do jego podstaw oraz przechodzący przez punkt przecięcia jego przekątnych ma długość równą średniej harmonicznej długości podstaw:

$$\frac{2ab}{a+b}$$

Szkic dowodu

Trójkąty ABP i CDP są podobne, więc $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$.

Z podobieństwa trójkątów GDP i ADB :

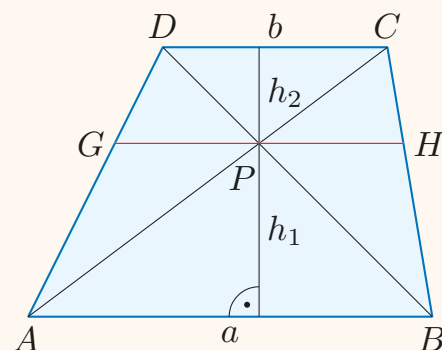
$$\frac{a}{|GP|} = \frac{h_1+h_2}{h_2} = \frac{h_1}{h_2} + 1 = \frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$$

Stąd $|GP| = \frac{ab}{a+b}$.

$\triangle PHC \sim \triangle ABC$, zatem analogicznie:

$$\frac{a}{|PH|} = \frac{a+b}{b}, \text{ czyli } |PH| = \frac{ab}{a+b}.$$

Stąd $|GH| = |GP| + |PCH| = \frac{2ab}{a+b}$.



Twierdzenie

Dany jest trapez o podstawach a i b . Odcinek równoległy do podstaw tego trapezu dzielący go na dwa trapezy o równych polach ma długość równą średniej kwadratowej długości podstaw trapezu: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Szkic dowodu

Pole trapezu $ABCD$: $P = \frac{a+b}{2}(h_1+h_2)$.

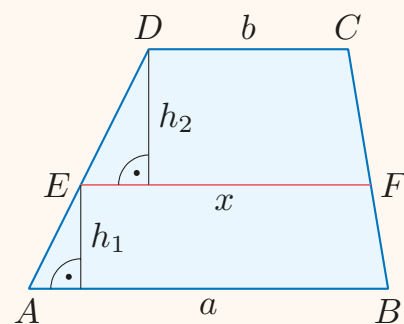
Odcinek EF jest równoległy do podstaw trapezu $ABCD$ i dzieli go na dwa trapezy o równych polach, zatem: $\frac{a+x}{2} \cdot h_1 = \frac{P}{2}$, więc $h_1 = \frac{P}{a+x}$, oraz $\frac{b+x}{2} \cdot h_2 = \frac{P}{2}$, więc $h_2 = \frac{P}{b+x}$.

Stąd otrzymujemy:

$$P = \frac{a+b}{2} \left(\frac{P}{a+x} + \frac{P}{b+x} \right) \quad / \cdot \frac{2(a+x)(b+x)}{P}$$

$$2(a+x)(b+x) = (a+b)(b+x+a+x)$$

Z ostatniego równania wyznaczamy $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.



- D** 1. Uzupełnij powyższe szkice dowodów o niezbędne uzasadnienia.

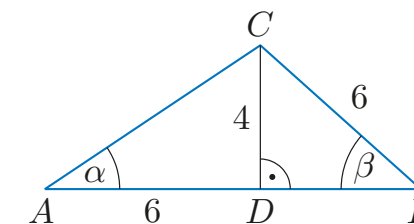


Powtórzenie

Zestaw I

1. Przekątna prostokąta ma długość 10, a obwód każdego z trójkątów powstałych przez podział prostokąta przekątną jest równy 24. Oblicz pole prostokąta.

2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i β trójkąta ABC przedstawionego na rysunku obok.



3. a) Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 60, a tangens jednego z jego kątów ostrych wynosi 2,4. Oblicz długości boków tego trójkąta.
b) Pole trójkąta prostokątnego jest równe $4\sqrt{2}$, a sinus jednego z jego kątów ostrych jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz obwód tego trójkąta.
c) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 16. Kąty ostre α i β spełniają zależność $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{8}$. Oblicz pole tego trójkąta.

4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta ABC .

- a) $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(0,2)$ c) $A(-6,1)$, $B(6,-4)$, $C(6,1)$
b) $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$ d) $A(-1,-5)$, $B(4,5)$, $C(-4,1)$

5. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α spełniającego podany warunek.

- a) $\sin \alpha = 0,1$ c) $\cos \alpha = \frac{1}{6}$ e) $\tan \alpha = \frac{8}{15}$ g) $\tan \alpha = \frac{1}{4}$
b) $\cos \alpha = 0,9$ d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ f) $\tan \alpha = \sqrt{5}$ h) $\tan \alpha = 2\sqrt{3}$

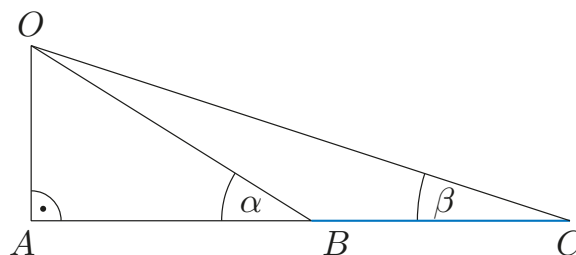
6. Oblicz długość podstawy AB oraz długość ramienia trójkąta równoramiennego ABC , którego:

- a) wysokość CD jest równa 6 cm, a $|\angle ACB| = 40^\circ$,
b) pole jest równe 12 cm^2 , a $|\angle CAB| = 40^\circ$.

7. a) Obserwator widzi wierzchołek 70-metrowej wieży stojącej na płaskim terenie pod kątem 12° do poziomu. Jaka jest odległość obserwatora od podstawy wieży? W obliczeniach pomin wzrost obserwatora.
b) Linę podtrzymującą maszt przymocowano do niego na wysokości 110 m nad ziemią i zakotwiczono w ziemi w odległości 40 m od podstawy masztu. Oblicz miarę kąta, jaki lina tworzy z poziomem.



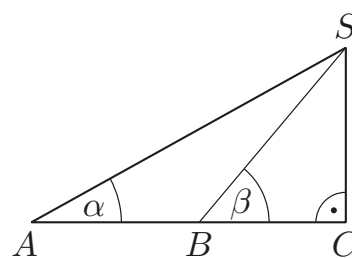
8. Z punktu obserwacyjnego O znajdującego się na wysokości 4,5 m nad ziemią widać brzegi rzeki pod kątami $\alpha = 32^\circ$ i $\beta = 18^\circ$ (rysunek obok). Oblicz szerokość rzeki w tym miejscu.



9. Turysta idzie prostą drogą wznoszącą się pod kątem 5° .
- Jaką różnicę poziomów pokona po przejściu 0,5 km?
 - Jak długo musiałby iść tą drogą z prędkością 4,5 km/h, aby pokonać różnicę poziomów równą 130 m?



10. Z punktów A i B oddległych od siebie o 800 m widać szczyt góry S pod kątami $\alpha = 29^\circ$ i $\beta = 50^\circ$ (rysunek obok). Oblicz wysokość SC tej góry.



Zestaw II

- W trójkącie ABC kąt ACB ma miarę 75° , bok AC ma długość $4\sqrt{3}$ cm, a wysokość opuszczona z wierzchołka C jest równa 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.
- Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 6 cm i kącie przy podstawie 30° . Oblicz odległości punktu przecięcia prostych zawierających wysokości tego trójkąta od jego wierzchołków.



3. Przeczytaj informację w ramce, a następnie rozwiąż zadanie.

Punkt trójkąta taki, że suma jego odległości od wierzchołków tego trójkąta jest najmniejsza, nosi nazwę **punktu Fermata** (punktu Torricellego). Można wykazać, że:

- jeśli któryś z kątów trójkąta ma miarę 120° lub większą, to punktem Fermata jest wierzchołek tego kąta;
- jeśli wszystkie kąty trójkąta mają miary mniejsze od 120° , to punkt Fermata leży wewnątrz trójkąta i każdy z boków trójkąta widać z tego punktu pod kątem 120° .

Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o przeciwprostokątnej długości 2. Niech punkt P będzie takim punktem tego trójkąta, że suma jego odległości od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza. Wykaż, że suma ta jest równa $1 + \sqrt{3}$.

- Trapez prostokątny ma kąt ostry α , dłuższą podstawę a , krótszą podstawę b i wysokość h . Oblicz obwód i długości przekątnych tego trapezu.
 - $\alpha = 60^\circ$, $a = 8$ cm, $h = 6\sqrt{3}$ cm
 - $\alpha = 30^\circ$, $b = 10$ cm, $h = 4$ cm

- Przekątne trapezu równoramiennego $ABCD$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie P . Podstawy trapezu mają długości $|AB| = 12$ cm i $|CD| = 4$ cm. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta PAD .

- Podstawy trapezu mają długości 10 i 4, a jego ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty 45° i 60° . Oblicz pole tego trapezu.

- W trapezie równoramiennym przekątna o długości 10 cm tworzy z jednym z ramion kąt 90° , a z drugim – kąt 30° . Oblicz obwód tego trapezu.

- Narysuj w układzie współrzędnych kąt α , do którego ramienia końcowego należy punkt P . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

- $P(1, 4)$
- $P(-1, 4)$
- $P(-3, 2)$
- $P(-2, 3)$

9. Uzasadnij, że nie istnieje kąt $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ spełniający podane równanie.

- $\frac{1}{3} \cos \alpha + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cos \alpha$
- $\sqrt{5} \sin \alpha = 5 - \sqrt{5}$
- $3 \cos \alpha + \sqrt{3} = 6$

10. Oblicz.

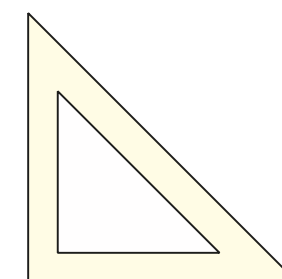
- $\sin 30^\circ (\cos 0^\circ - 2 \cos 135^\circ)$
- $(\cos 30^\circ + \cos 150^\circ) \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$
- $\frac{\sin 150^\circ - 2 \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ} - \operatorname{tg} 135^\circ$
- $\frac{\sin 45^\circ + \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ} \cdot \cos 180^\circ$
- $\cos 135^\circ \cdot \sin 90^\circ - \sin 135^\circ \cdot \cos 90^\circ$
- $\sin 15^\circ \cdot (\operatorname{tg} 135^\circ + 1) + \cos^2 0^\circ$
- $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 30^\circ - \cos 150^\circ} + \sin^2 180^\circ$
- $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ}{\sin 60^\circ} : \sin 90^\circ$

11. Uzasadnij, że podane wyrażenie przyjmuje wartość 1.

- $\sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ$
- $\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ$
- $\sin 20^\circ \cdot \cos 70^\circ + \cos^2 20^\circ$
- $\sin^2 26^\circ + \sin 64^\circ \cdot \cos 26^\circ$

Wskazówka. Skorzystaj z zależności $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

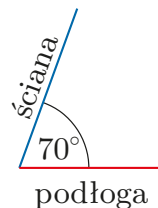
- Ekierki mające kształt połowy kwadratu o boku 20 cm są produkowane z drewnianych listew o szerokości 2 cm i grubości 2 mm. Jaka jest objętość drewna zużytego do wyprodukowania 1000 takich ekierek? Pomijamy objętość odpadów. Jaka byłaby objętość drewna zużytego do wyprodukowania z takich samych listew 1000 ekierek mających kształt połowy trójkąta równobocznego o boku 24 cm?



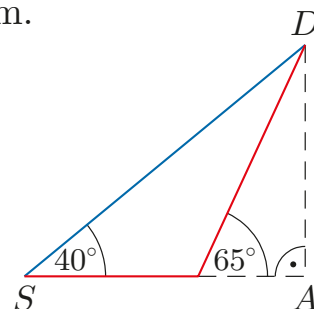


Zadania z kontekstem realistycznym

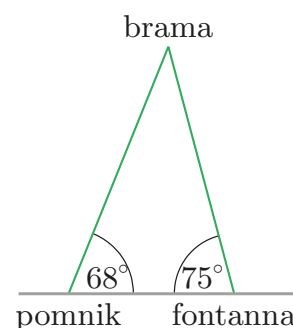
1. Ściana pokoju na poddaszu jest nachylona do podłogi pod kątem 70° . W jakiej najmniejszej odległości od krawędzi podłogi można ustawić biurko o wysokości 60 cm? Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 cm.



2. Wzdłuż stromej ulicy zamontowano barierkę o długości 200 m. Pierwsze 100 m barierki jest nachylone pod kątem 4° do poziomu, a drugie 100 m – pod kątem 6° do poziomu. Oblicz różnicę wysokości między końcem barierki a jej początkiem z dokładnością do 0,01 m.



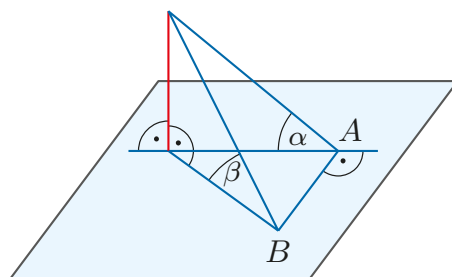
4. Wieża widokowa stoi na płaskim terenie. Z punktu A widać jej wierzchołek pod kątem 40° , a z punktu B, leżącego o 100 m dalej od wieży niż punkt A, widać go pod kątem 15° . Oblicz wysokość wieży z dokładnością do 1 m.



5. W parku od bramy wejściowej do alei głównej prowadzą dwie ścieżki: jedna biegnie do pomnika, druga do fontanny (rysunek obok). Od bramy do pomnika jest 345 m. Oblicz długość trasy spaceru od bramy wejściowej do pomnika, następnie do fontanny i z powrotem do bramy. Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 m.

6. Przekrój poprzeczny wału ochronnego ma kształt trapezu równoramiennego. Szerokość wału u szczytu wynosi 5 m, a boczne nasypy o długości 6 m są nachylone do poziomu pod kątem 40° . Oblicz szerokość wału u podstawy z dokładnością do 0,1 m.

7. Z punktu A położonego na wschód od wieży widać jej szczyt pod kątem $\alpha = 40^\circ$. Z punktu B leżącego 800 m dalej na południe niż punkt A widać szczyt wieży pod kątem $\beta = 20^\circ$ (rysunek obok). Oblicz wysokość wieży z dokładnością do 1 m.



Sposób na zadanie

Przykład

Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 4 cm i ramionach długości 6 cm. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną na jego ramię.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Możemy skorzystać z podobieństwa trójkątów APB i CDB (cecha KKK): $\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CB|}$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $|CD| = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ [cm].

Zatem: $|AP| = \frac{|AB| \cdot |CD|}{|CB|} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{6} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ [cm]

II sposób

Kąt β jest kątem ostrym trójkąta CDB :

$$\cos \beta = \frac{|DB|}{|CB|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Zatem $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Kąt β jest również kątem ostrym trójkąta ABP , więc $\frac{|AP|}{|AB|} = \sin \beta$, stąd:

$$|AP| = |AB| \cdot \sin \beta = 4 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$
 [cm]

III sposób

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy wysokość CD trójkąta ABC :

$$|CD| = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$
 [cm]

Pole trójkąta ABC obliczamy na dwa sposoby:

$$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$
 [cm²]

$$P = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AP| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot |AP| = 3|AP|$$
 [cm²]

Porównujemy wyznaczone wyrażenia i otrzymujemy:

$$3|AP| = 8\sqrt{2}, \text{ stąd } |AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$
 cm

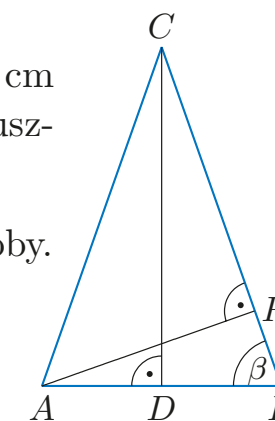
IV sposób

Oznaczmy $|PB| = x$, wówczas $|PC| = 6 - x$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów APB oraz APC i otrzymujemy równania: $|AP|^2 = 4^2 - x^2$ oraz $|AP|^2 = 6^2 - (6 - x)^2$. Rozwiązujemy równanie $4^2 - x^2 = 6^2 - (6 - x)^2$ i otrzymujemy: $x = \frac{4}{3}$ cm oraz $|AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm.

Odpowiedź: $|AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm

→ Zadanie 15, str. 222

→ Zadanie 9, str. 224





W zadaniach 1–8, 11.1 i 13.2 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość c , może mieć pole równe

- A. $\frac{1}{4}c^2$ B. $\frac{1}{3}c^2$ C. $\frac{1}{2}c^2$ D. c^2

Zadanie 2 (0–1)

Dany jest trapez równoramienny, którego ramiona są tej samej długości co krótsza podstawa, a dłuższa podstawa jest dwa razy dłuższa od krótszej. Przekątne tego trapezu przecinają się pod kątem

- A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°

Zadanie 3 (0–1)

Dla $\alpha = 60^\circ$ prawdziwa jest równość

- A. $\sqrt{3}\sin\alpha + \frac{1}{2} = \operatorname{tg} 30^\circ$ C. $\cos\alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$
B. $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$ D. $2\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$

Zadanie 4 (0–1)

Jeśli α jest kątem ostrym oraz $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, to α należy do przedziału

- A. $(0^\circ; 30^\circ)$ B. $(30^\circ; 45^\circ)$ C. $(45^\circ; 60^\circ)$ D. $(60^\circ; 90^\circ)$

Zadanie 5 (0–1)

Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

- A. $\sin 40^\circ - \cos 50^\circ$ C. $2\sin^2 30^\circ - 2\cos^2 30^\circ$
B. $\sin 29^\circ + \cos 61^\circ$ D. $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \frac{1}{4}\operatorname{tg} 45^\circ$

Zadanie 6 (0–1)

Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

- A. $\sin 61^\circ + \cos 151^\circ$ C. $\sin 151^\circ \cdot \cos 61^\circ$
B. $\sin 151^\circ - \cos 61^\circ$ D. $\sin 151^\circ : \cos 61^\circ$

Zadanie 7 (0–1)

Wartość wyrażenia $(\sin 150^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ) \cdot \frac{\operatorname{tg} 120^\circ}{\cos 150^\circ}$ jest liczbą przeciwną do liczby

- A. -1 B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

Zadanie 8 (0–1)

Pole rombu o boku $4\sqrt{2}$ cm i kącie rozwartym 135° jest równe

- A. 8 cm^2 B. $8\sqrt{2} \text{ cm}^2$ C. 16 cm^2 D. $16\sqrt{2} \text{ cm}^2$



Zadanie 9 (0–1)

Dany jest trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość 41 cm, a jedna z przyprostokątnych ma długość 40 cm.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Cosinus jednego z kątów tego trójkąta jest równy $\frac{9}{41}$.	P	F
Tangens jednego z kątów tego trójkąta jest równy $4\frac{4}{9}$.	P	F

Zadanie 10 (0–4)

Na rysunku obok przedstawiono trójkąt prostokątny ABC .

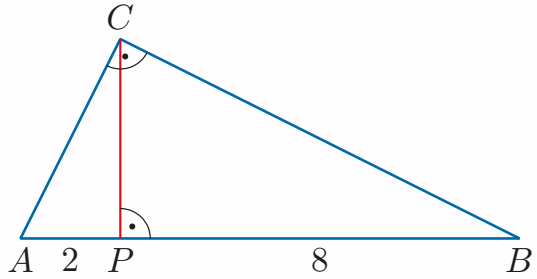
Uzupełnij zdania tak, aby były prawdziwe.

Długość boku BC jest równa $\boxed{?}$.

Obwód trójkąta ABC jest równy $\boxed{?}$.

Sinus kąta ABC jest równy $\boxed{?}$.

Cosinus kąta ACP jest równy $\boxed{?}$.



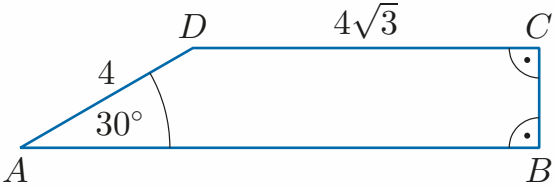
Zadanie 11

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ (rysunek obok).

Zadanie 11.1 (0–1)

Tangens kąta CAB jest równy

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{9}$



Zadanie 11.2 (0–2)

Oblicz sinus kąta ADC oraz pole trójkąta ADC .

Zadanie 12 (0–2)

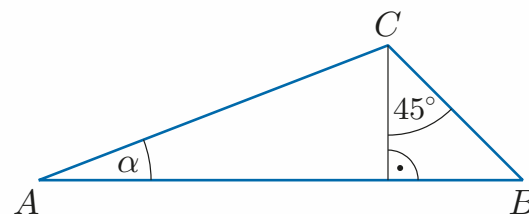
Kąt ostry α spełnia warunek $\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Sinus kąta α jest równy $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.	P	F
Iloczyn $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ jest równy $\frac{1}{5}$.	P	F
Tangens kąta α jest równy $\frac{1}{2}$.	P	F

**Zadanie 13**

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok), w którym $\sin \alpha = 0,4$ oraz $|AC| = 10$.

**Zadanie 13.1 (0-1)**

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Cosinus kąta α jest równy 0,6.	P	F
Sinus kąta $90^\circ - \alpha$ jest równy $\frac{\sqrt{21}}{5}$.	P	F

Zadanie 13.2 (0-1)

Długość boku BC jest równa

- A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{2}$

Zadanie 14 (0-1)

Dany jest równoległobok o bokach długości 4 cm i 8 cm. Kąt rozwarty tego równoległoboku ma miarę α taką, że $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Sinus kąta α jest równy

A.	$\frac{\sqrt{15}}{4}$,	a pole równoległoboku jest równe	1.	$8\sqrt{15} \text{ cm}^2$.
B.	$\frac{1}{4}$,		2.	$4\sqrt{15} \text{ cm}^2$.
			3.	8 cm^2 .

Zadanie 15 (0-1) → Przykład, str. 219

Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 12 cm i ramieniu długości 10 cm.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Trójkąt ten jest rozwartokątny.	P	F
Wysokość tego trójkąta opuszczona na jego ramię ma długość 9,4 cm.	P	F

Zadanie 16 (0-2)

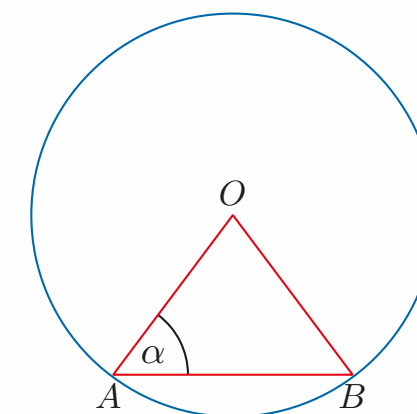
Tangens kąta ostrego α jest równy $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Oblicz $\cos \alpha$.

**Zadanie 17 (0-2)**

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $\sqrt{2}$ i $2\sqrt{2}$ oraz kątach ostrych α i β . Oblicz $\sin \alpha \cdot \sin \beta$.

Zadanie 18 (0-2)

Dany jest okrąg o środku O i promieniu 6 (rysunek obok). Wiadomo, że $\sin \alpha = 0,8$. Oblicz długość cięciwy AB .

**Zadanie 19 (0-2)**

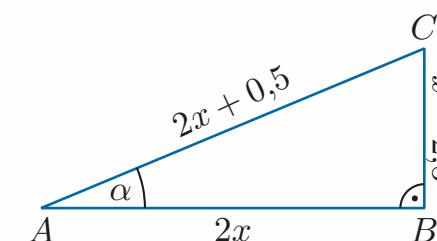
Dany jest trójkąt ABC o bokach $|BC| = 6$ i $|AB| = |AC| = 8$. Punkt P jest spodkiem wysokości tego trójkąta opuszczonej z wierzchołka C . Oblicz długości odcinków AP i BP .

Zadanie 20 (0-2)

Kwadrat odwrotności sinusa pewnego kąta rozwartego jest równy 5. Oblicz cosinus tego kąta.

Zadanie 21 (0-4)

Oblicz obwód trójkąta ABC na rysunku obok oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

**Zadanie 22 (0-4)**

Długości boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych α i β są kolejnymi liczbami parzystymi. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin \alpha + \sin \beta)^2$.

Zadanie 23 (0-4)

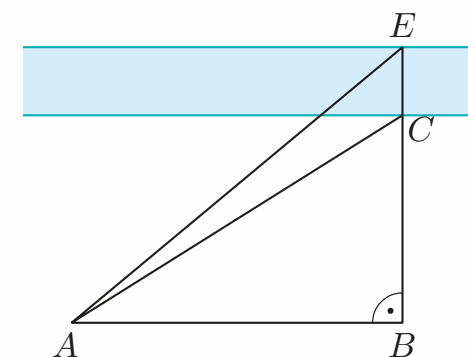
Dany jest trapez o podstawach długości 4 cm i $(7 + 3\sqrt{3})$ cm oraz wysokości równej 3 cm. Jeden z dwóch kątów ostrych przylegających do dłuższej podstawy ma miarę 45° . Oblicz iloczyn cosinusów kątów rozwartych tego trapezu.

Zadanie 24 (0-4)

Przekątne rombu mają długości 4 cm i 8 cm. Oblicz cosinus kąta ostrego tego rombu.

Zadanie 25 (0-4)

Aby obliczyć szerokość rzeki (długość odcinka CE na rysunku obok), wykonano pomiary w terenie: $|AC| = 120$ m, $|\sphericalangle CAB| = 32^\circ$, $|\sphericalangle CAE| = 8^\circ$. Oblicz szerokość rzeki.



**Zadanie 1 (0-2)**

Kąty α i β spełniają warunki: $\alpha < \beta$, $\alpha + \beta = 180^\circ$, $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $1 + \cos \beta$.

Zadanie 2 (0-2)

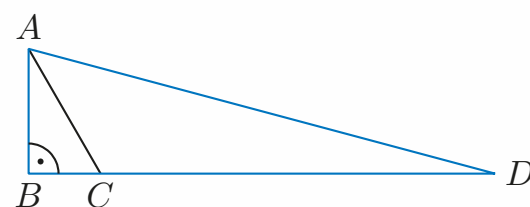
Wiadomo, że $\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1$. Oblicz $\sin 22^\circ 30'$.

Zadanie 3 (0-4)

Dany jest trapez $ABCD$, w którym $|BC| = |CD| = |DA| = 5$, $|AB| = 11$, punkt M jest środkiem boku AD , a P – punktem przecięcia prostych CM i AB . Oblicz pole i obwód trójkąta APM .

Zadanie 4 (0-5)

Kąt BAC na rysunku obok ma miarę 30° , kąt CAD – miarę 45° , a odcinek $|AB|$ ma długość 6. Oblicz pole trójkąta ABD .

**D Zadanie 5 (0-3)**

Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości a i kącie przy podstawie o mierze 15° . Uzasadnij, że jeśli wysokość opuszczona na podstawę jest równa h , to ramię tego trójkąta ma długość $\sqrt{2ah}$.

D Zadanie 6 (0-3)

Miary kątów trójkąta wynoszą odpowiednio α , β , γ , a jego pole jest równe P . Wykaż, że:

$$a = \sqrt{\frac{2P \sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

gdzie a jest długością boku leżącego naprzeciw kąta α .

D Zadanie 7 (0-4)

Kąt ostry rombu ma miarę 30° , a jego pole jest równe P . Wykaż, że suma długości przekątnych tego rombu jest równa $2\sqrt{3P}$.

Zadanie 8 (0-5)

D a) Wykaż, że długości dwóch dowolnych boków trójkąta są odwrotnie proporcjonalne do wysokości opuszczonych na te boki.

b) Oblicz wysokości trójkąta o bokach długości 4, 5 i 7.

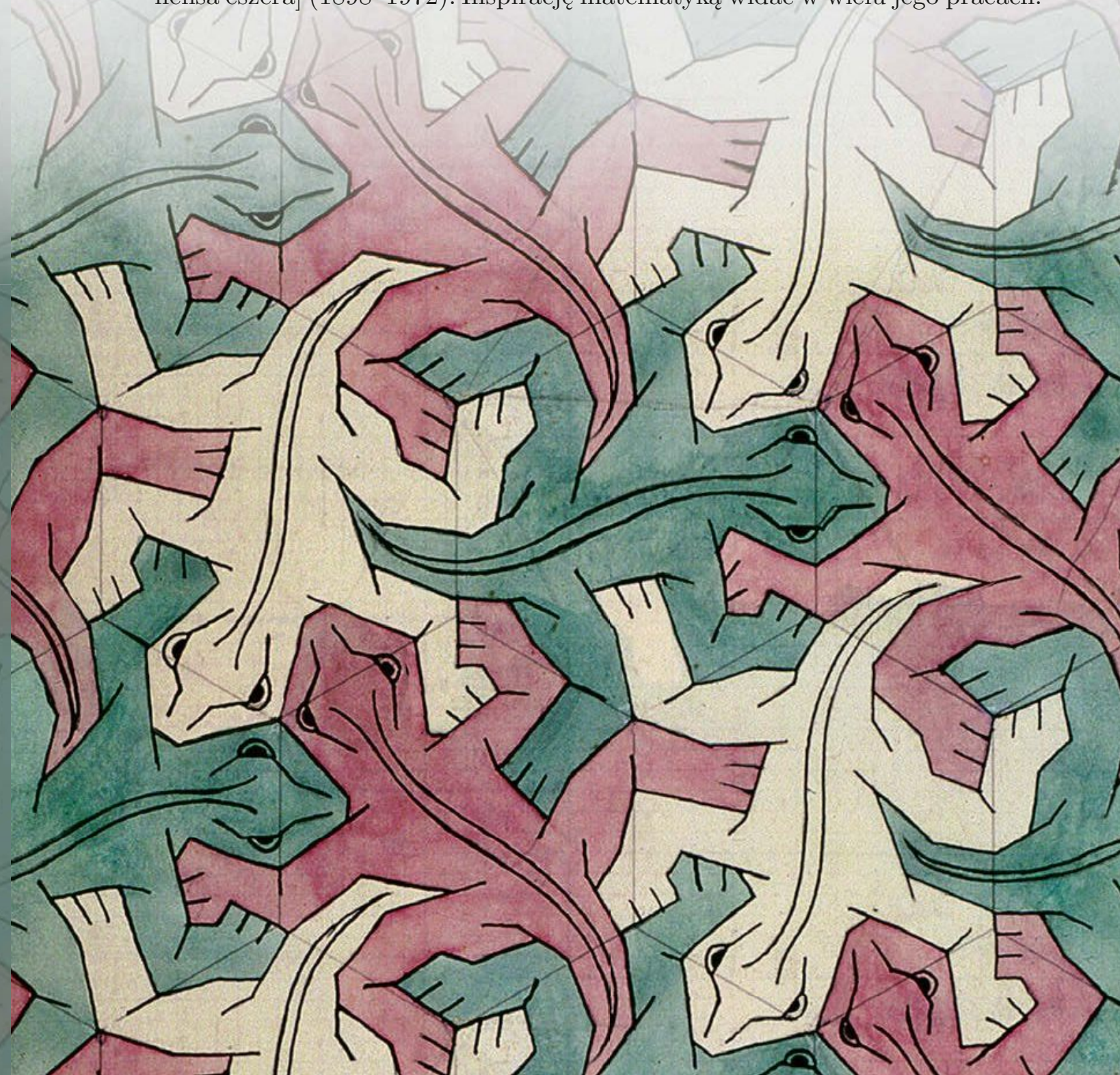
Zadanie 9 (0-3) → Przykład, str. 219

Dany jest trójkąt równoramienny ABC o podstawie $|AB| = 20$ oraz ramionach długości 26. Oblicz długości odcinków, na które wysokość tego trójkąta opuszczona z wierzchołka A dzieli ramię BC .

5 Planimetria

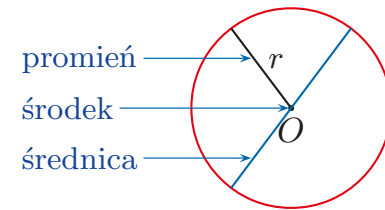
Z regularnym podziałem płaszczyzny możemy mieć do czynienia w sytuacjach praktycznych, takich jak układanie kafelków lub bruku.

Bardzo ciekawe przykłady podziałów płaszczyzny znajdziemy w pracach holenderskiego malarza i grafika Mauritsa Cornelisa Eschera [czyt. małrica kornelisa eszera] (1898–1972). Inspirację matematyką widać w wielu jego pracach.



5.1. Okrąg

Okręgiem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r .



Stosunek długości okręgu do jego średnicy jest stały. Oznaczamy go grecką literą π . Oznaczenie to zostało wprowadzone przez brytyjskiego matematyka Williama Jonesa [czyt. hiliama džonsa] w 1706 roku. Liczba π jest niewymierna, w obliczeniach często wykorzystujemy jej przybliżoną wartość: $\pi \approx 3,14$.

$$\frac{\text{długość okręgu}}{\text{średnica okręgu}} = \pi$$

Długość okręgu o promieniu r wyraża się wzorem $l = 2\pi r$.

Przykład 1

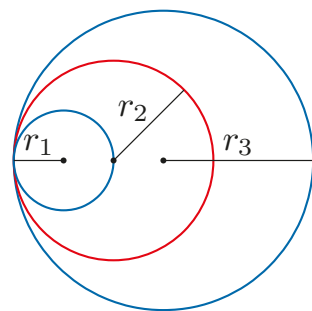
Oblicz długości okręgów o promieniach $r_1 = 0,5$ cm, $r_2 = 1$ cm, $r_3 = 1,5$ cm (rysunek obok).

Długości okręgów wynoszą odpowiednio:

$$l_1 = 2\pi \cdot r_1 = 2\pi \cdot 0,5 = \pi \text{ [cm]}$$

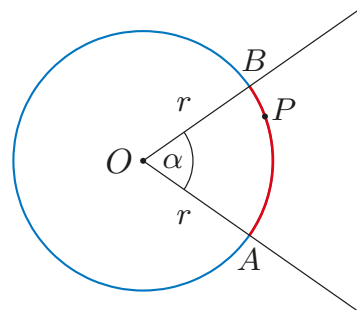
$$l_2 = 2\pi \cdot r_2 = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \text{ [cm]}$$

$$l_3 = 2\pi \cdot r_3 = 2\pi \cdot 1,5 = 3\pi \text{ [cm]}$$



Kąt środkowy to kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu.

Na rysunku obok ramiona kąta środkowego α przecinają okrąg w punktach A i B , które dzielą ten okrąg na dwa łuki. Jeśli nie są one półkami, to mówiąc „łuk AB ”, będziemy mieć na myśli krótszy z nich, chyba że jest powiedziane inaczej. Łuk taki oznaczamy $\widehat{AB}$. Czasami stosujemy oznaczenie trzyliterowe, np. czerwony łuk na rysunku to łuk $\widehat{APB}$.



Długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem $L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$.

Ćwiczenie 1

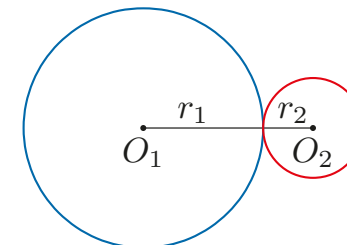
Punkty A, B leżące na okręgu o środku O i promieniu $r = 12$ cm wyznaczają łuk długości 3π cm. Jaką miarę ma kąt AOB ?

Ćwiczenie 2

W okręgu o średnicy 24 cm poprowadzono cztery promienie tak, że stosunek miar kątów pomiędzy kolejnymi promieniami wynosi $1:3:5:7$. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez końce kolejnych promieni leżące na okręgu.

Okręgi mające tylko jeden punkt wspólny (zwany **punktem styczności**) nazywamy **okręgami stycznymi**. Promienie okręgów stycznych poprowadzone do punktu styczności leżą na jednej prostej.

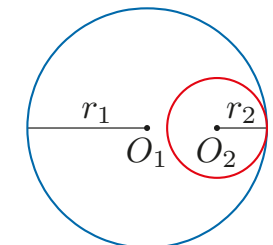
Okręgi styczne zewnętrznie



$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$

Odległość między środkami okręgów jest równa sumie ich promieni.

Okręgi styczne wewnętrznie

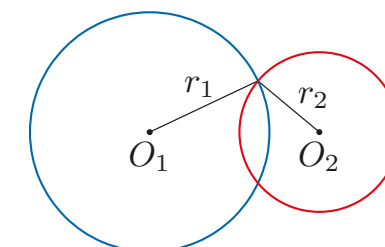


$$|O_1O_2| = |r_1 - r_2|$$

Jeśli $r_1 > r_2$, to odległość między środkami okręgów jest równa $r_1 - r_2$.

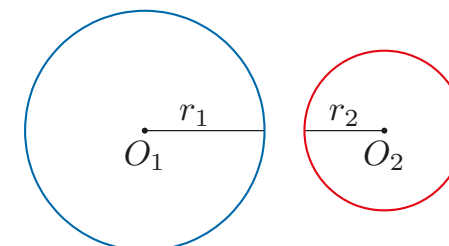
Dwa różne okręgi mogą też mieć dwa punkty wspólne (**okręgi przecinające się**) lub nie mieć punktów wspólnych (**okręgi rozłączne**).

Okręgi przecinające się



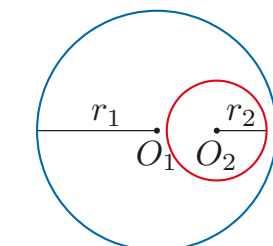
$$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$$

Okręgi rozłączne zewnętrznie



$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$

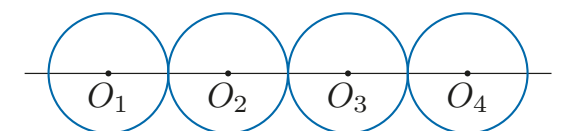
Okręgi rozłączne wewnętrznie



$$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$$

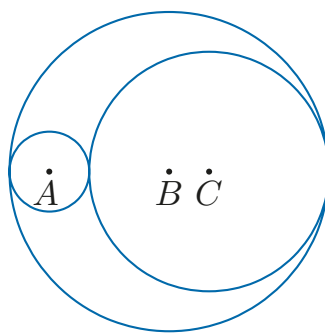
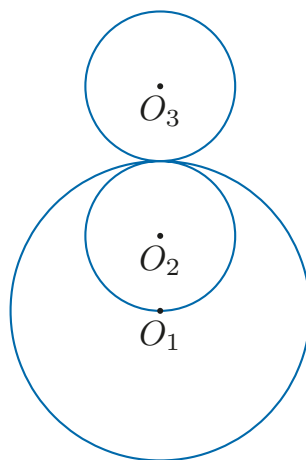
Ćwiczenie 3

Cztery okręgi o równych promieniach są odpowiednio styczne (rysunek obok), a ich środki leżą na jednej prostej i $|O_1O_4| = 48$. Oblicz średnicę każdego z tych okręgów.



Zadania

- Punkty A, B należą do okręgu o średnicy 10 cm oraz $|AB| = 5$ cm. Oblicz długość okręgu oraz długość łuku $\widehat{AB}$.
- Oblicz długość łuku okręgu o średnicy d wyznaczonego przez kąt środkowy α .
a) $d = 12$ cm, $\alpha = 75^\circ$ b) $d = 30$ cm, $\alpha = 15^\circ$ c) $d = 5$ cm, $\alpha = 330^\circ$
- Łuk okręgu wyznaczony przez kąt środkowy o mierze 20° ma długość 2π cm. Oblicz średnicę tego okręgu.
- Na okręgu o średnicy 18 cm kąt środkowy wyznacza łuk o długości 4π cm. Oblicz miarę tego kąta.
- Oblicz wartości x , dla których okrąg o środku w punkcie $P(x, 0)$ i promieniu $r_1 = 5$ oraz okrąg o środku w punkcie $Q(-1, 0)$ i promieniu $r_2 = 3$ są styczne: a) zewnętrznie, b) wewnętrznie.
- Narysuj w układzie współrzędnych okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 oraz okrąg o środku O_2 i promieniu r_2 . Podaj odległość między środkami tych okręgów. Ile mają one punktów wspólnych?
a) $O_1(-2, 0)$, $r_1 = 4$, $O_2(-1, 0)$, $r_2 = 2$
b) $O_1(0, -2)$, $r_1 = 4$, $O_2(0, 3)$, $r_2 = 1$
c) $O_1(1, 3)$, $r_1 = 2$, $O_2(4, 3)$, $r_2 = 5$
- Punkty O_1, O_2 i O_3 , będące środkami odpowiednio stycznych okręgów (rysunek obok), leżą na jednej prostej. Dwa mniejsze okręgi mają równe promienie oraz $|O_1O_3| = 18$. Oblicz średnicę każdego z tych okręgów.
- Końce przekątnej prostokąta o bokach długości 4 cm i 8 cm są środkami dwóch okręgów stycznych zewnętrznie. Punkt styczności dzieli przekątną prostokąta w stosunku 1 : 3. Oblicz długości tych okręgów.
- Punkty A, B i C , będące środkami odpowiednio stycznych okręgów (rysunek obok), leżą na jednej prostej oraz $|AB| = 3$ i $|AC| = 4$. Oblicz promień każdego z tych okręgów.
- Środki trzech okręgów parami stycznych zewnętrznie są wierzchołkami trójkąta o bokach 5, 6, 7. Oblicz promienie tych okręgów.



5.2. Koło

Kołem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r .

Zwróć uwagę na to, że punkty należące do okręgu ograniczającego koło należą do tego koła.

Wzór na pole koła został udowodniony przez Archimedesesa.

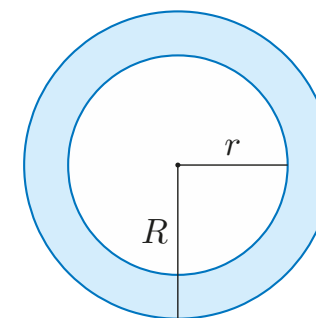
Pole koła o promieniu r wyraża się wzorem $P = \pi r^2$.

Ćwiczenie 1

- Oblicz pole największego koła zawartego w kwadracie o polu 36 cm².
- Oblicz długość okręgu ograniczającego koło o polu $2,25\pi$ cm².

Część płaszczyzny ograniczoną przez dwa współśrodkowe okręgi (wraz z tymi okręgami) nazywamy **pierścieniem kołowym**.

Opisując pierścień kołowy, podajemy jego **promień zewnętrzny** i **promień wewnętrzny**. Różnicę tych promieni nazywamy **szerokością pierścienia**. Dla pierścienia na rysunku obok jest ona równa $R - r$.



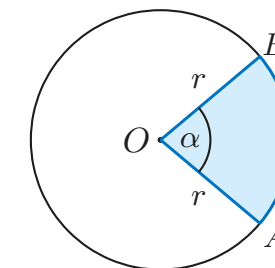
Ćwiczenie 2

- Oblicz pole pierścienia kołowego o promieniu zewnętrznym 25 cm i promieniu wewnętrznym 24 cm. Podaj promień koła, którego pole jest równe polu tego pierścienia.
- Pole pierścienia kołowego o szerokości 1 cm wynosi 17π cm². Oblicz promień zewnętrzny i promień wewnętrzny tego pierścienia.

Część koła o środku O ograniczoną łukiem $\widehat{AB}$ i promieniami OA i OB (wraz z brzegiem tej części) nazywamy **wycinkiem koła** lub **wycinkiem kołowym**.

Pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$



Ćwiczenie 3

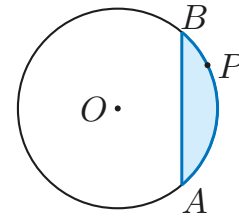
Oblicz pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy α .

- $r = 12$, $\alpha = 75^\circ$
- $r = 2$, $\alpha = 22^\circ 30'$
- $r = \sqrt{3}$, $\alpha = 315^\circ$

Ćwiczenie 4

Pole wycinka koła o promieniu 6 wyznaczonego przez kąt α jest równe 2π . Oblicz miarę kąta α .

Część koła ograniczoną łukiem $\widehat{APB}$ i cięciwą AB (wraz z brzegiem tej części) nazywamy **odcinkiem koła** lub **odcinkiem kołowym**.



Przykład 1

Oblicz pole odcinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez cięciwę AB i kąt AOB o mierze $\alpha = 45^\circ$ (rysunek poniżej).

Obliczamy pole wycinka koła AOB :

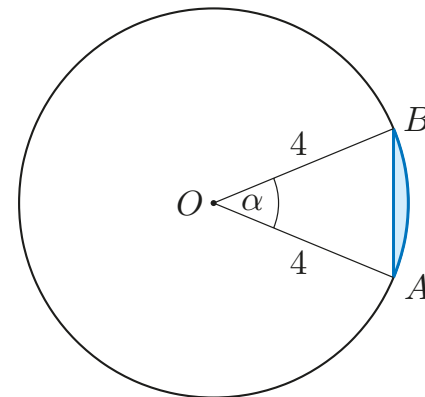
$$P_1 = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 = 2\pi$$

Następnie obliczamy pole trójkąta AOB :

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$$

Zatem pole odcinka koła:

$$P = P_1 - P_2 = 2\pi - 4\sqrt{2}$$



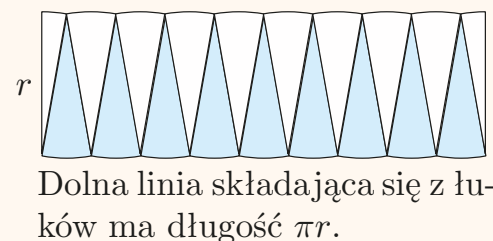
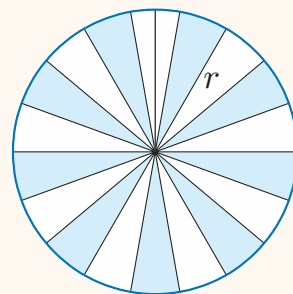
Ćwiczenie 5

Punkty A, B należące do okręgu o środku O i promieniu 12 wyznaczają kąt środkowy AOB . Oblicz pole odcinka kołowego wyznaczonego przez ten kąt.

- a) $|\sphericalangle AOB| = 90^\circ$ b) $|\sphericalangle AOB| = 60^\circ$ c) $|\sphericalangle AOB| = 30^\circ$

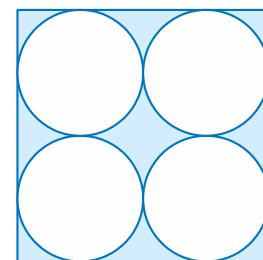
Czy wiesz, że...

Do uzasadnienia wzoru na pole koła wykorzystuje się ustawienie wycinków koła w figurę taką jak na rysunku obok.

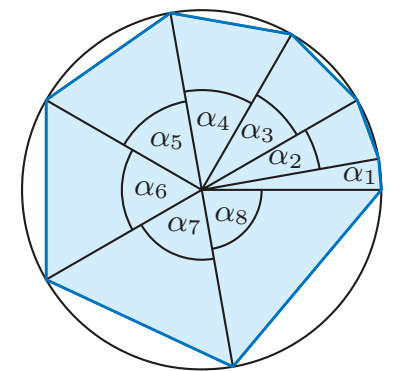


Zadania

- D** 1. Bok kwadratu ma długość 6. Wykaż, że pole zacieniowanego obszaru jest mniejsze od 9 (rysunek obok).
2. Cięciwa łącząca punkty A i B leżące na okręgu o promieniu 5 ma długość $5\sqrt{3}$. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez te punkty oraz pola odpowiednich wycinków.
3. W kole o środku O i promieniu 4 poprowadzono cięciwę AB . Pole trójkąta AOB jest równe $4\sqrt{2}$. Oblicz pola figur, na które cięciwa podzieliła to koło.

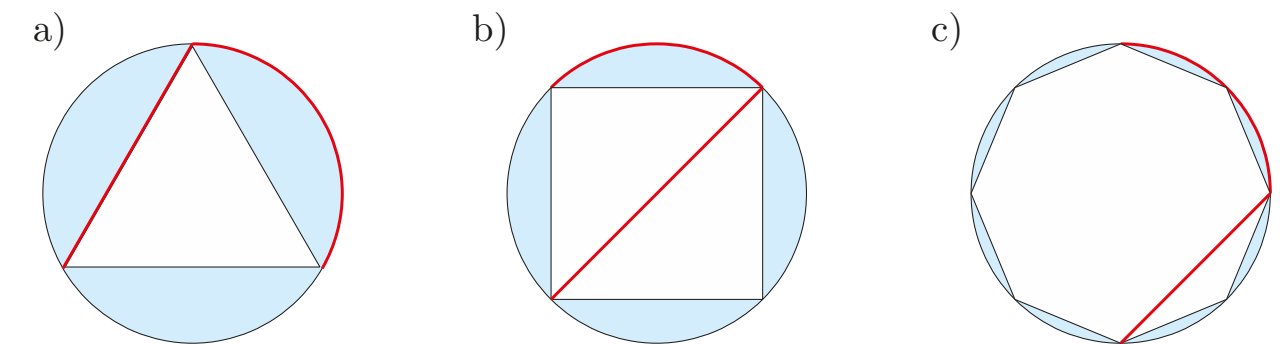


4. Wierzchołki ośmiokąta (rysunek obok) należą do okręgu o promieniu 3. Spośród kolejnych kątów środkowych $\alpha_1, \dots, \alpha_8$ każdy następny jest o 10° większy od poprzedniego.



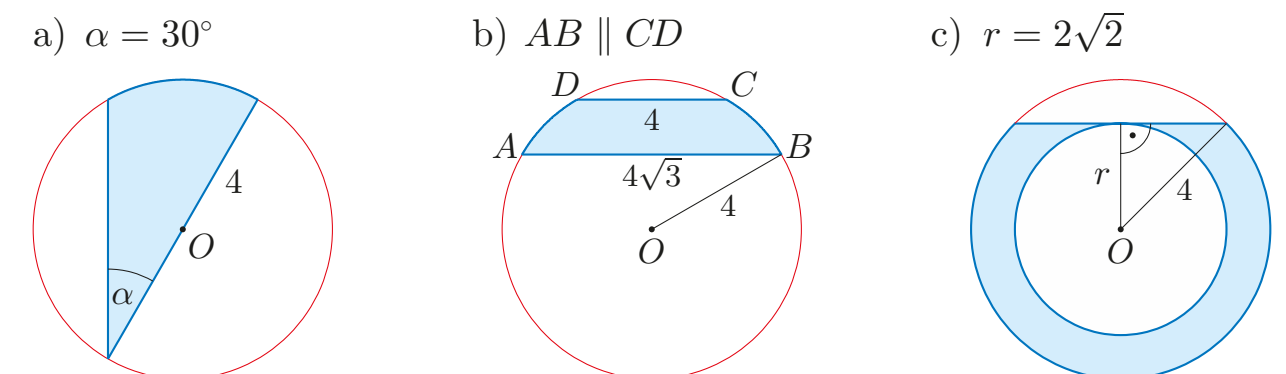
- a) Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt α_8 .
- b) Oblicz sumę pól odcinków koła wyznaczonych przez kąty α_3 i α_6 .

5. Dany jest wielokąt foremny, którego wierzchołki należą do okręgu o promieniu 2. Oblicz długość czerwonej linii oraz pole zacieniowanego obszaru.

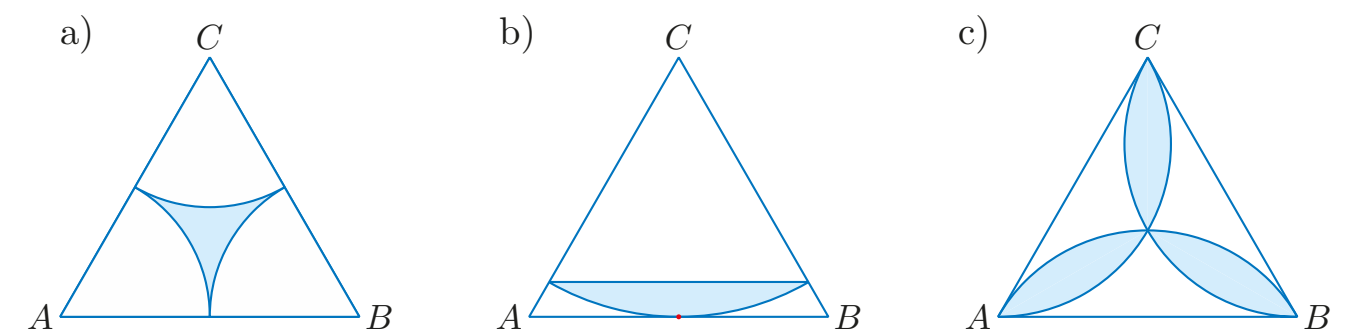


- D** 6. Uzasadnij, że pole odcinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 60° jest równe $\frac{1}{12}r^2(2\pi - 3\sqrt{3})$.

7. Oblicz pole zacieniowanej figury.



8. Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości 6 cm. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

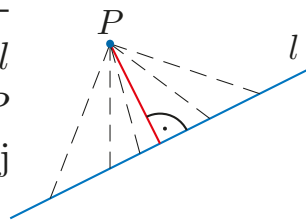


5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej

D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że spośród odcinków łączących dany punkt P z punktem leżącym na prostej l ($P \notin l$) najkrótszy jest ten, który jest do tej prostej prostopadły.

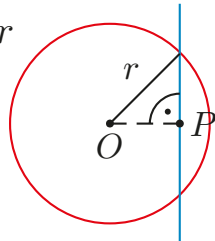
Odległością punktu P od prostej l nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z punktem na prostej l (odcinek ten jest prostopadły do prostej l). Jeśli punkt P leży na prostej l , to przyjmujemy, że jego odległość od tej prostej jest równa zero.



Okrąg i prosta mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

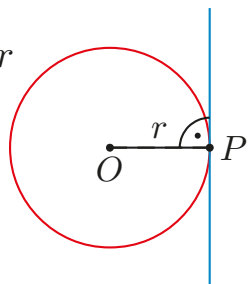
Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej.

$$|OP| < r$$



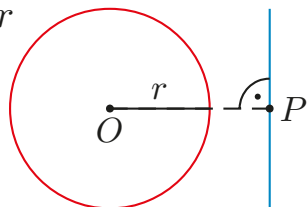
Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy jego **sieczną**. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.

$$|OP| = r$$



Jeśli prosta ma z okręgiem jeden punkt wspólny, to mówimy, że jest **styczna** do okręgu (wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**). Promień okręgu poprowadzony do punktu styczności z prostą jest do niej prostopadły. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.

$$|OP| > r$$



Na rysunku obok okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

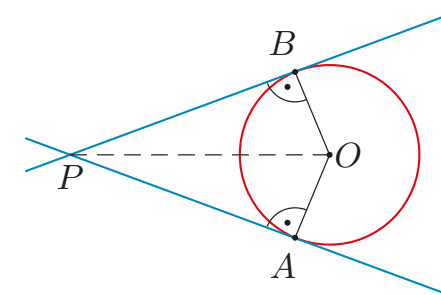
Ćwiczenie 2

- Prosta l jest styczna do okręgu o promieniu 6 cm w punkcie P . Punkt A leży na prostej l i $|PA| = 4$ cm. Oblicz odległość punktu A od środka okręgu.
- Prosta AB jest styczna do okręgu o środku w punkcie O . Punkt styczności P jest środkiem odcinka AB . Wiadomo, że $|AO| = 20$ cm i $|AB| = 32$ cm. Oblicz promień okręgu.

Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeśli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to:

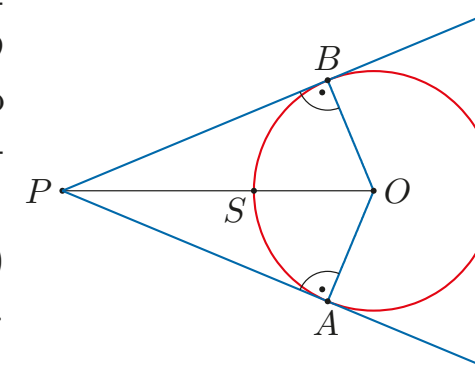
$$|PA| = |PB|$$



Powyższe twierdzenie można udowodnić, korzystając z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów PAO i PBO .

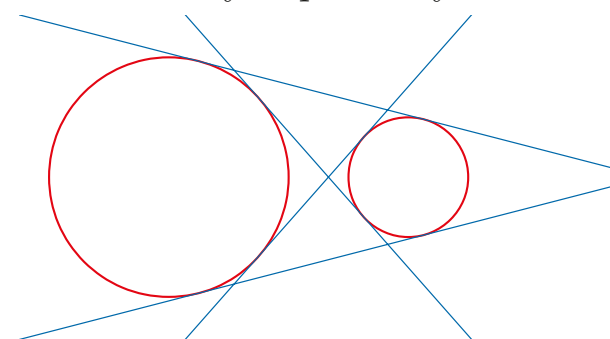
Ćwiczenie 3

- Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu 6 cm. Z punktu P odległego od punktu O o 10 cm poprowadzono dwie proste styczne do okręgu w punktach A i B . Oblicz obwód czworokąta $PAOB$.
- Obwód czworokąta $PAOB$ (rysunek obok) jest równy 34 cm, a odcinek PS ma długość 8 cm. Oblicz promień okręgu o środku w punkcie O .

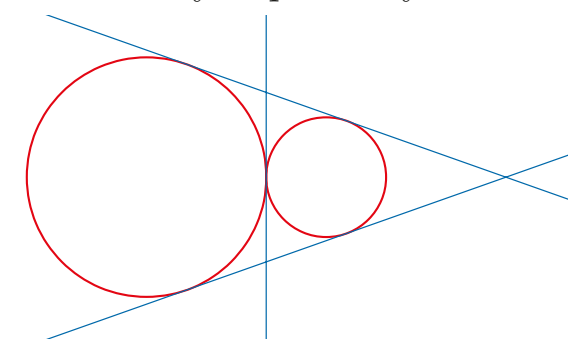


Liczba wspólnych stycznych dwóch okręgów zależy od położenia tych okręgów.

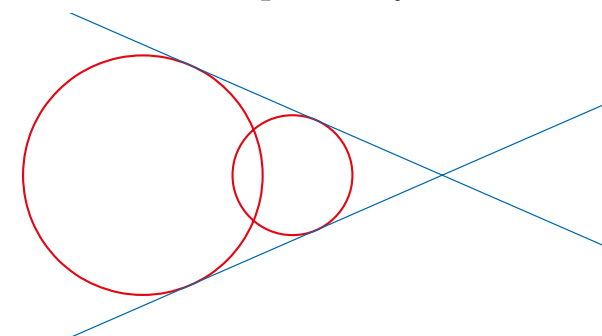
Okręgi rozłączne zewnętrznie;
cztery wspólne styczne



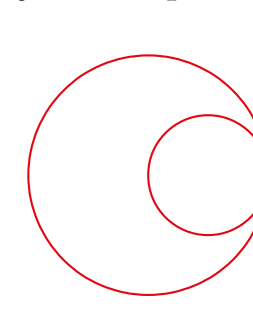
Okręgi styczne zewnętrznie;
trzy wspólne styczne



Okręgi przecinające się;
dwie wspólne styczne



Okręgi styczne wewnętrznie;
jedna wspólna styczna



Okręgi rozłączne wewnętrznie nie mają wspólnych stycznych.

Ćwiczenie 4

Dane są okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 oraz okrąg o środku O_2 i promieniu r_2 . Określ liczbę wspólnych stycznych tych okręgów.

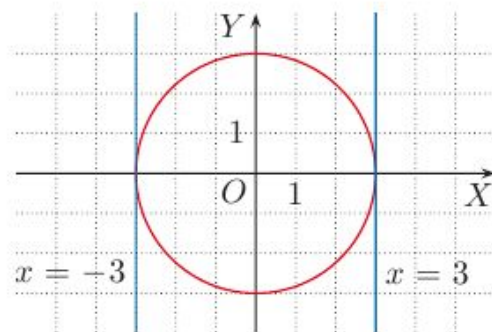
- a) $r_1 = 3\frac{1}{2}$, $r_2 = 4\frac{1}{2}$, $|O_1O_2| = 5\frac{1}{2}$ c) $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = \frac{1}{2}$, $|O_1O_2| = \frac{1}{6}$
 b) $r_1 = 11$, $r_2 = 13$, $|O_1O_2| = 24$ d) $r_1 = \sqrt{2}$, $r_2 = \sqrt{3}$, $|O_1O_2| = 4$

Przykład 1

Dany jest okrąg o środku $O(0,0)$ i promieniu 3. Ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma prosta $x = m$ w zależności od parametru m ?

Prosta $x = m$ z danym okręgiem:

- ma jeden punkt wspólny dla $m \in \{-3, 3\}$,
- ma dwa punkty wspólne dla $m \in (-3; 3)$,
- nie ma punktów wspólnych dla $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.

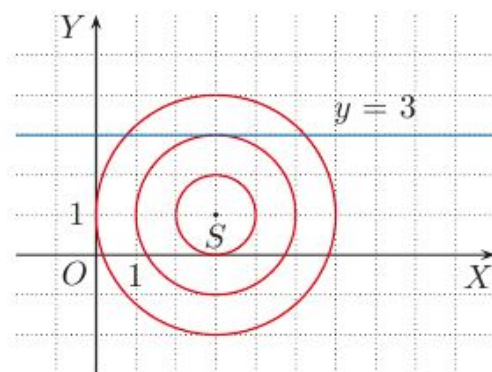


Przykład 2

Ile punktów wspólnych ma prosta $y = 3$ z okręgiem o środku $S(3,1)$ w zależności od promienia r tego okręgu?

Prosta $y = 3$ z okręgiem o środku S :

- ma jeden punkt wspólny dla $r = 2$,
- ma dwa punkty wspólne dla $r \in (2; \infty)$,
- nie ma punktów wspólnych dla $r \in (0; 2)$.



Ćwiczenie 5

Ile punktów wspólnych ma prosta k z okręgiem o środku S w zależności od promienia r tego okręgu?

- a) $k: y = 3$, $S(3, -1)$ b) $k: x = -1$, $S(-\frac{3}{2}, 4)$ c) $k: x = \sqrt{2}$, $S(-1, 1)$

Przykład 3

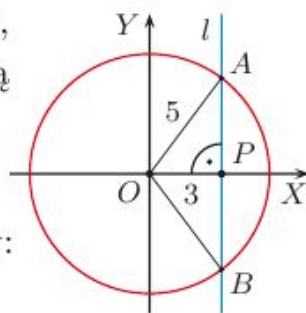
Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty wspólne prostej $l: x = 3$ i okręgu o środku $O(0,0)$ i promieniu 5.

Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej l , a punkty A, B niech będą punktami przecięcia okręgu z tą prostą. Wówczas $|OP| = 3$, zatem:

$$|AP| = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Trójkąty OPA i OPB są przystające, więc długość cięciwy:

$$|AB| = 2 \cdot |AP| = 8$$

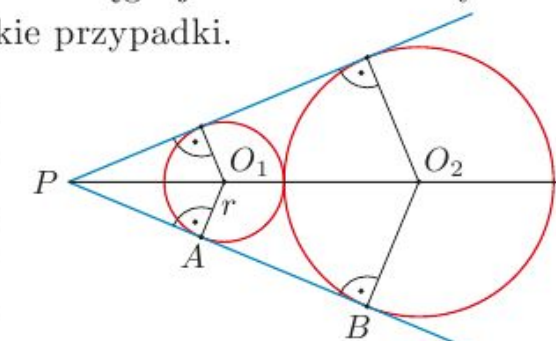
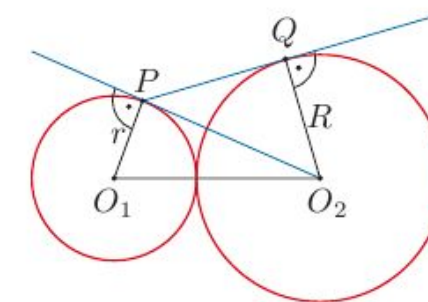


Ćwiczenie 6

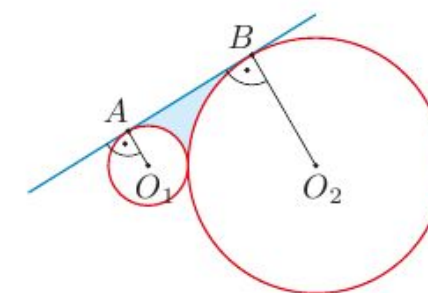
- a) Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej $y = -3$ oraz okręgu o środku w punkcie $(2, 0)$ i promieniu 4.
 b) Cięciwa długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej $x = 1$ oraz okręgu o środku w punkcie $(-3, 2)$. Oblicz promień tego okręgu.

Zadania

- Prosta równoległa do osi OY przecina okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 10 w punktach A i B . Wyznacz równanie tej prostej dla:
 a) $|AB| = 12$, b) $|AB| = 10\sqrt{2}$, c) $|AB| = 10$, d) $|AB| = 20$.
- Odległość między dwiema prostymi równoległymi to długość odcinka prostopadłego do tych prostych o końcach należących do prostych. Oblicz promień okręgu stycznego do dwóch prostych równoległych, jeśli wiadomo, że odległość między nimi jest równa 5 cm.
- Okręgi o środkach O_1 i O_2 oraz promieniach r i R są styczne zewnętrznie (rysunek obok). Prosta PO_2 jest styczna do okręgu o środku O_1 , a prosta PQ – do okręgu o środku O_2 . Wyznacz obwód czworokąta PO_1O_2Q .
- Dany jest okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 11. Cięciwa AB tego okręgu jest równoległa do osi OX i ma długość 20. Punkt P należy do tej cięciwy i jego odległość od środka okręgu jest równa 5. Wyznacz współrzędne punktu P . Rozważ wszystkie przypadki.



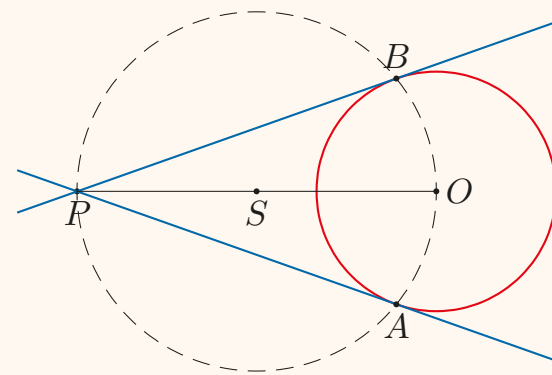
- Punkty A i B leżą na okręgu o średnicy 12 cm, a odległość między nimi jest równa promieniowi tego okręgu. Styczne do okręgu poprowadzone przez punkty A i B przecinają się w punkcie P . Oblicz pole trójkąta APB .
- Dane są okręgi o środkach O_1 i O_2 i promieniach $|O_1A| = 4$ cm i $|O_2B| = 12$ cm (rysunek obok). Prosta AB jest wspólną styczną tych okręgów. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.



Konstrukcja stycznej do okręgu

Aby skonstruować styczną do danego okręgu o środku O przechodzącą przez punkt P leżący na zewnątrz okręgu, postępujemy w następujący sposób.

- Wyznaczamy środek odcinka OP – punkt S na rysunku poniżej.
- Rysujemy okrąg, którego promieniem jest odcinek SO – okrąg ten przecina dany okrąg w punktach A i B .
- Prosta PA jest styczna do danego okręgu. Zauważ, że $PA \perp OA$ (aby to uzasadnić, można rozpatrzyć kąty trójkątów równoramiennych PSA i OSA). Drugą styczną jest prosta PB .

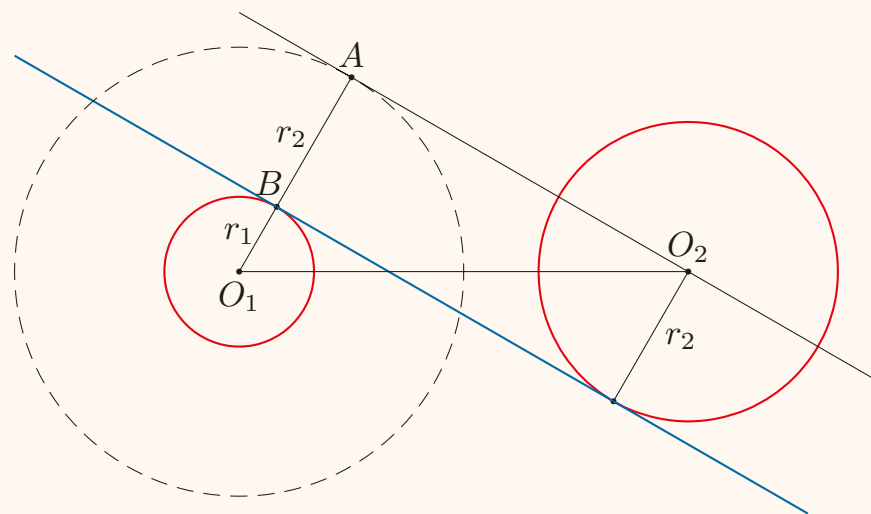


1. Opisz konstrukcję stycznej do danego okręgu przechodzącej przez punkt należący do tego okręgu.

Konstrukcja wspólnej stycznej do dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie

Rozpatrzmy okrąg L_1 o środku O_1 i promieniu r_1 oraz rozłączny z nim zewnętrznie okrąg L_2 o środku O_2 i promieniu r_2 (rysunek poniżej).

- Rysujemy okrąg L_3 o środku w punkcie O_1 i promieniu równym $r_1 + r_2$.



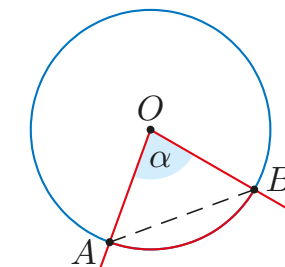
- Rysujemy prostą O_2A – styczną do okręgu L_3 przechodzącą przez punkt O_2 .
- Wyznaczamy punkt B – punkt przecięcia odcinka O_1A z okręgiem L_1 .
- Rysujemy styczną do okręgu L_1 przechodzącą przez punkt B . Jest ona jednocześnie styczną do okręgu L_2 (uzasadnij).

- 2.* Opisz, jak skonstruować pozostałe wspólne styczne do dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie.

5.4. Kąty w okręgu (1)

Kąt środkowy α przedstawiony na rysunku obok jest wyznaczony przez łuk $\widehat{AB}$ zaznaczony kolorem czerwonym.

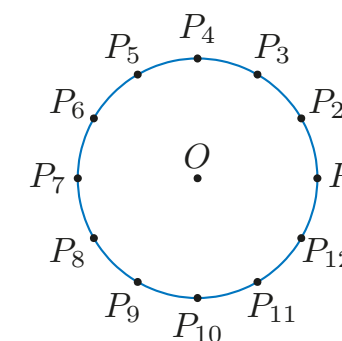
Mówimy też, że kąt środkowy α jest oparty na łuku $\widehat{AB}$ lub na cięciwie AB .



Ćwiczenie 1

Punkty $P_1, P_2, \dots, P_{12}$ dzielą okrąg na 12 łuków o równej długości. Podaj miarę kąta środkowego opartego na łuku:

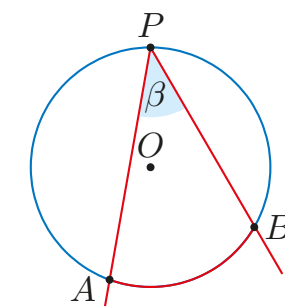
- a) $\widehat{P_1P_2P_3}$,
- b) $\widehat{P_4P_7P_{12}}$,
- c) $\widehat{P_6P_1P_7}$.



Definicja

Kąt wpisany w okrąg to kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramionami są półproste zawierające cięciwy tego okręgu.

O kącie wpisanym β (rysunek obok) mówimy, że jest oparty na łuku $\widehat{AB}$.



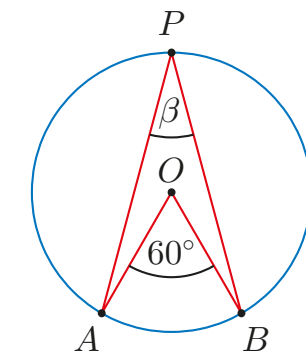
Twierdzenie

Kąt środkowy w okręgu ma miarę dwa razy większą od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Dowód – patrz zadanie 9., str. 240.

Ćwiczenie 2

- a) Podaj miarę kąta β (rysunek obok).
- b) Narysuj w dowolnym okręgu kąt środkowy $\alpha = 120^\circ$ i trzy różne kąty wpisane oparte na tym samym łuku co kąt α . Podaj miary tych kątów.



Ćwiczenie 3

Podaj miarę kąta środkowego opartego na tym samym łuku co kąt wpisany β .

- a) $\beta = 15^\circ$
- b) $\beta = 48^\circ$
- c) $\beta = 137^\circ$
- d) $\beta = 74^\circ 30'$

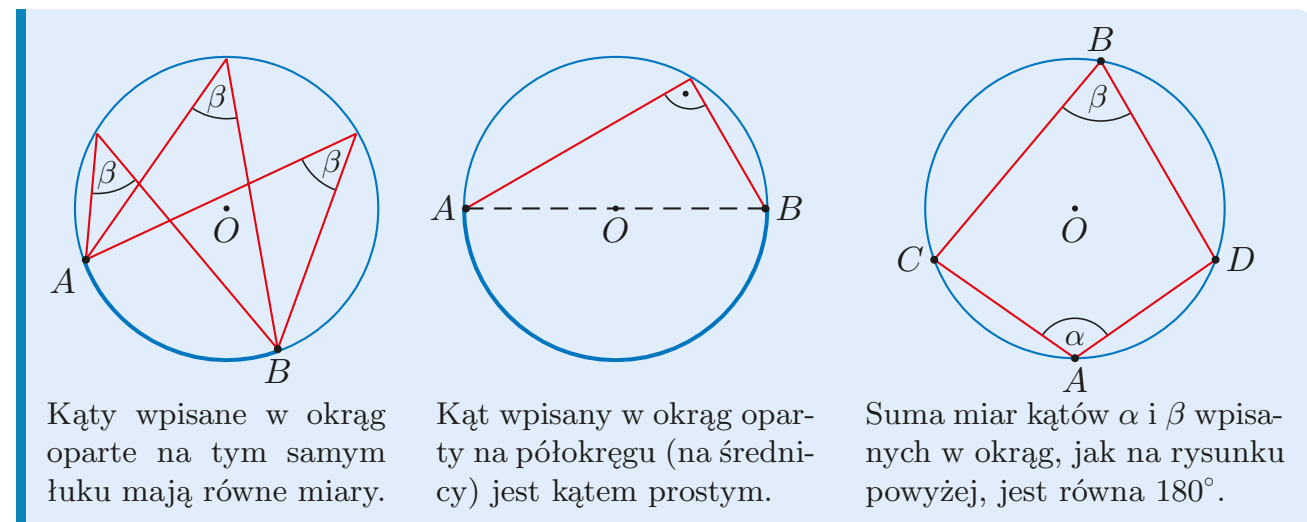
Ćwiczenie 4

Kąt wpisany β jest oparty na tym samym łuku co kąt środkowy α . Oblicz miarę kąta $\alpha + \beta$ dla:

- a) $\alpha = 110^\circ$, b) $\alpha = 45^\circ$, c) $\beta = 17^\circ$, d) $\beta = 105^\circ$.

Z twierdzenia o kątach środkowym i wpisanym wynikają następujące wnioski:

Twierdzenie

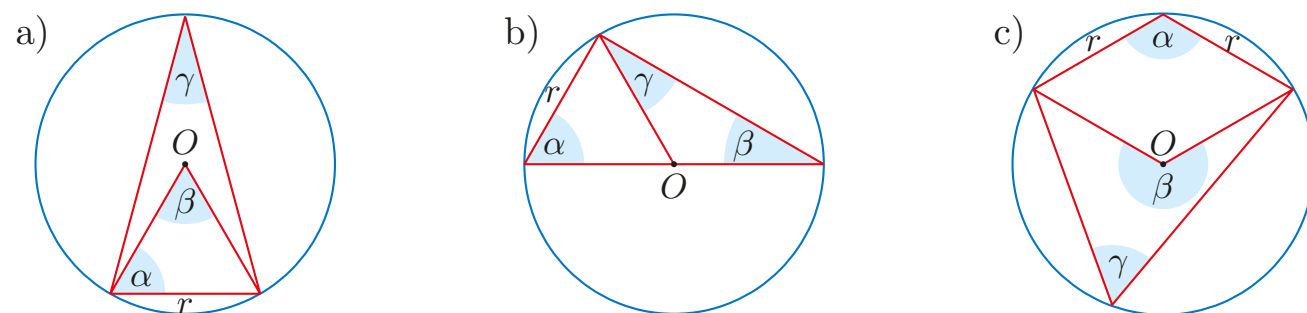


Ćwiczenie 5

Uzasadnij każdy z powyższych wniosków.

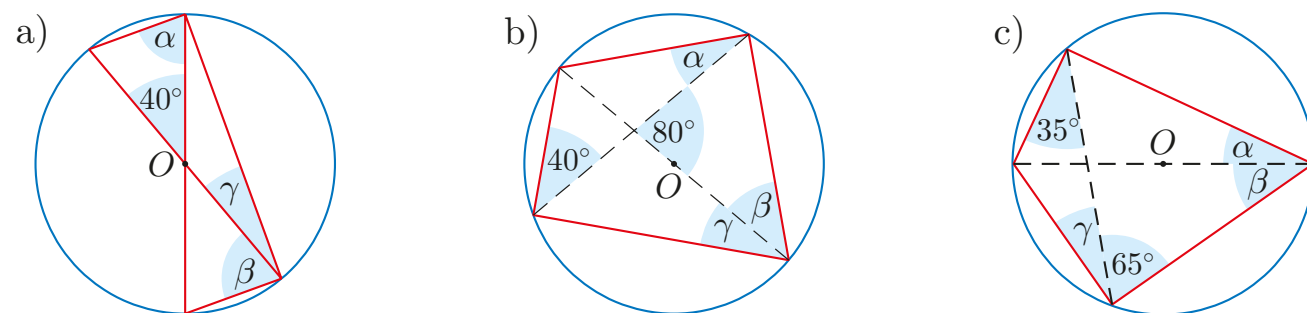
Ćwiczenie 6

Promień okręgu jest równy r . Oblicz miary kątów α , β i γ .



Ćwiczenie 7

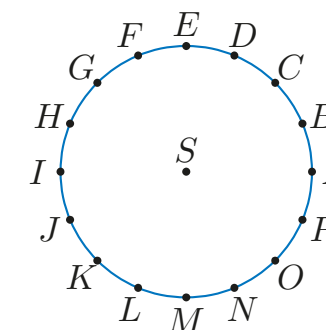
Oblicz miary kątów α , β i γ .



Zadania

1. Punkty $A, B, C, \dots, P$ dzielą okrąg na 16 łuków o równej długości. Punkt A leży na jednym z ramion kąt środkowego β . Który z punktów leży na drugim ramieniu tego kąta?

- a) $\beta = 45^\circ$ c) $\beta = 225^\circ$
b) $\beta = 112,5^\circ$ d) $\beta = 315^\circ$



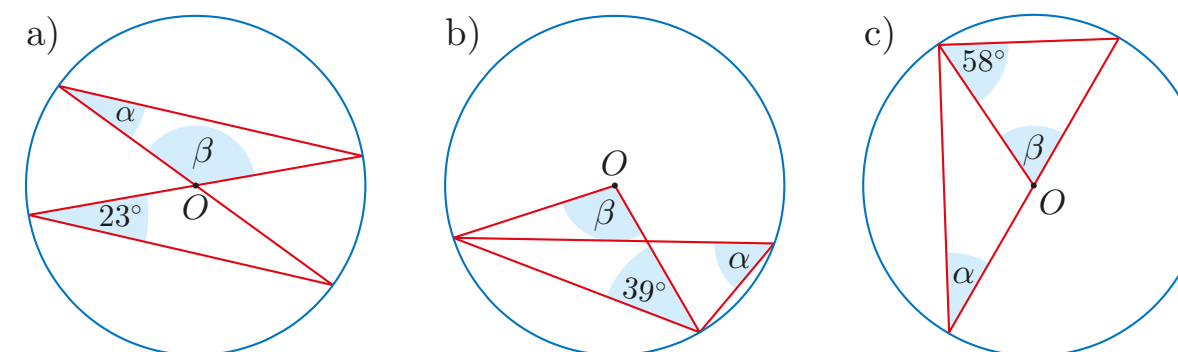
2. Dany jest okrąg o promieniu 6. Podaj miary kątów środkowego oraz wpisanego opartych na łuku o podanej długości.

- a) 2π b) 3π c) $\frac{15}{2}\pi$ d) $\frac{\pi}{4}$

3. Odcinek BD jest średnicą okręgu, a odcinek AC jest cięciwą prostopadłą do odcinka BD . Oblicz miary kątów trójkąta ADC w przypadku, gdy:

- a) $|\sphericalangle ACB| = 70^\circ$, b) $|\sphericalangle ABC| = 130^\circ$.

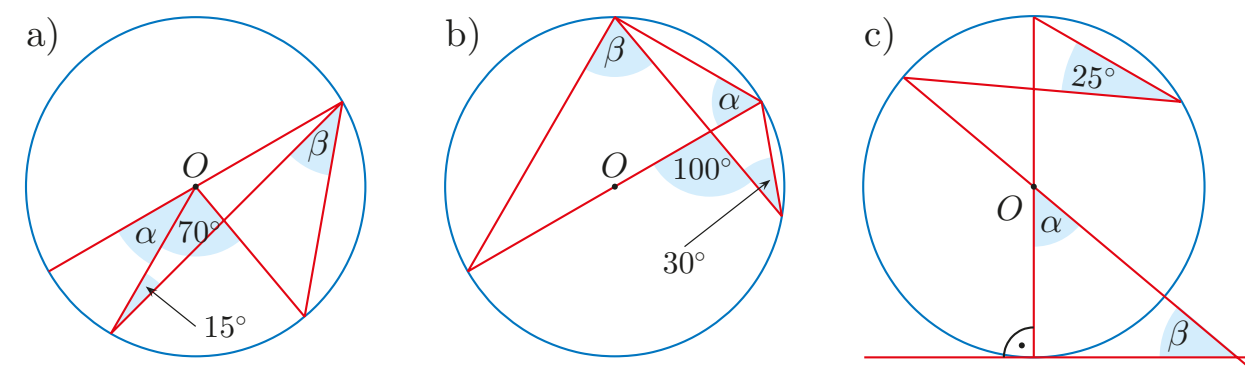
4. Oblicz miary kątów α i β .



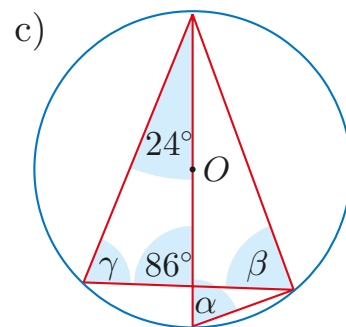
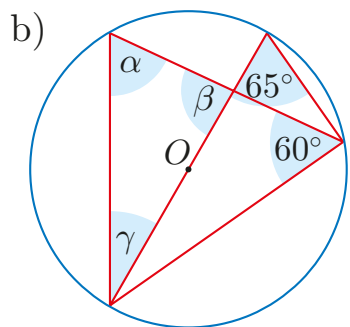
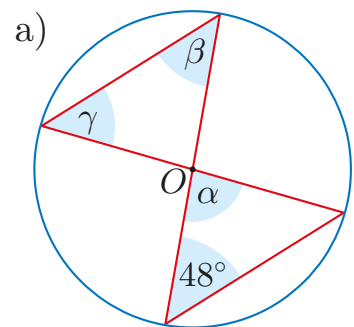
5. Kąt β jest kątem wpisanym w okrąg opartym na tym samym łuku co kąt środkowy α . Oblicz miary kątów α i β .

- a) $\alpha + \beta = 111^\circ$ b) $\alpha = \beta + 56^\circ 30'$ c) $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta = 48^\circ$

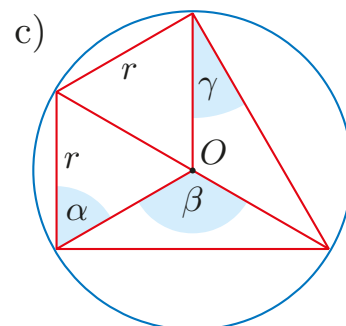
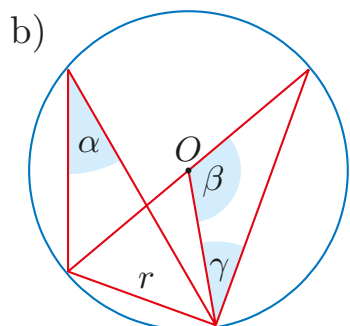
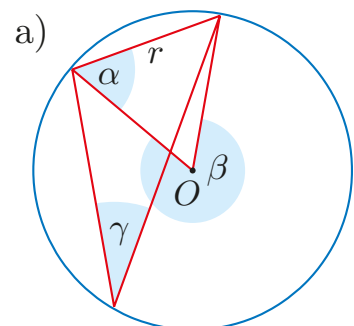
6. Oblicz miary kątów α i β .



7. Oblicz miary kątów α , β i γ .



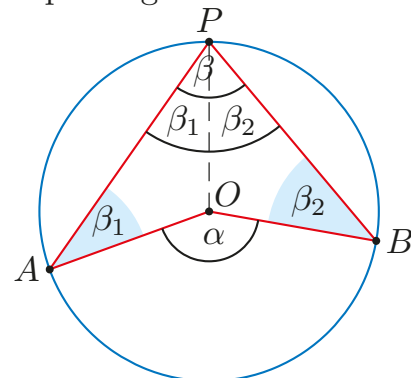
8. Promień okręgu jest równy r . Oblicz miary kątów α , β i γ .



D 9. Przeczytaj informację w ramce oraz dowód przypadku I, a następnie przeprowadź dowody przypadków II i III.

Aby udowodnić, że kąt środkowy α w okręgu ma miarę dwa razy większą od miary kąta wpisanego β opartego na tym samym łuku, wystarczy rozpatrzyć trzy przypadki.

I. Środek O okręgu leży wewnątrz kąta wpisanego.



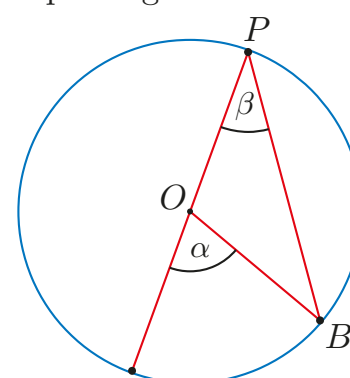
Dowód przypadku I

Z punktu P prowadzimy promień PO . Wówczas $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

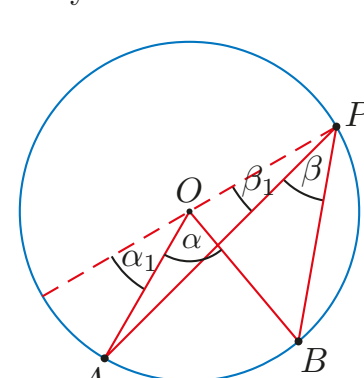
Wyznaczamy miarę kąta środkowego:

$$\alpha = 360^\circ - (180^\circ - 2\beta_1) - (180^\circ - 2\beta_2) = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$$

II. Środek O okręgu leży na ramieniu kąta wpisanego.



III. Środek O okręgu leży poza kątem wpisanym.



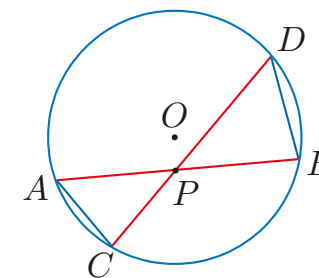
Wskazówka do przypadku III. Rozważ kąty $\alpha + \alpha_1$ i $\beta + \beta_1$.

5.5. Kąty w okręgu (2)

Twierdzenie o cięciwach

Jeśli w okręgu dwie cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P , to:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$



Dowód

Kąty ACD i ABD są kątami wpisanymi opartymi na tym samym łuku, zatem $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ABD|$. Analogicznie uzasadniamy, że $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CDB|$. Również $|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle BPD|$ (uzasadnij), zatem na podstawie cechy KKK podobieństwa trójkątów stwierdzamy, że $\triangle APC \sim \triangle BPD$. Stąd otrzymujemy:

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|}$$

czyli $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

Przykład 1

Oblicz długość odcinka PB (rysunek obok).

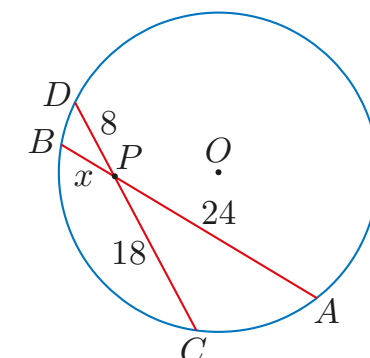
Na podstawie twierdzenia o cięciwach:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

czyli:

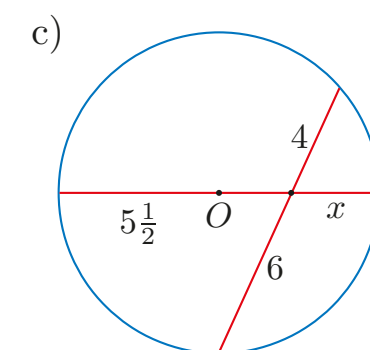
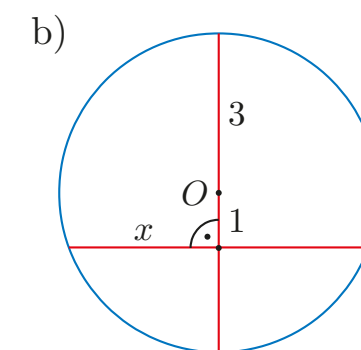
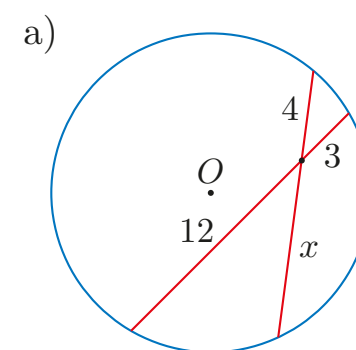
$$24 \cdot x = 18 \cdot 8$$

$$x = \frac{18 \cdot 8}{24} = 6$$



Ćwiczenie 1

Oblicz x .



Ćwiczenie 2

Średnica okręgu AB przecina cięciwę CD w punkcie P oraz $|PB| = 1$ cm, $|PC| = 2$ cm, $|PD| = 3$ cm. Oblicz długość tego okręgu.

Ćwiczenie 3

- a) Dany jest okrąg o promieniu 11 cm. Przez punkt P , odległy od środka okręgu o 5 cm, poprowadzono cięciwę o długości 20 cm. Oblicz długości odcinków, na które punkt P dzieli cięciwę.
- b) Cięciwa przecina średnicę okręgu pod kątem prostym i dzieli ją na odcinki o długościach 6 cm i 24 cm. Oblicz długość tej cięciwy.

Przykład 2

Prosta AP jest styczna do okręgu o środku O w punkcie A . Kąt PAB ma miarę 40° . Oblicz miarę kąta ACB .

Promień OA jest prostopadły do stycznej AP , zatem:

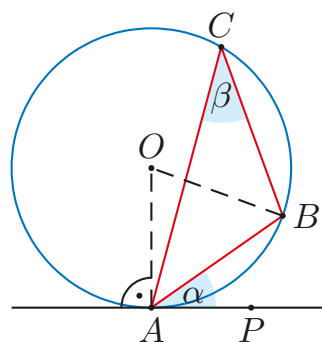
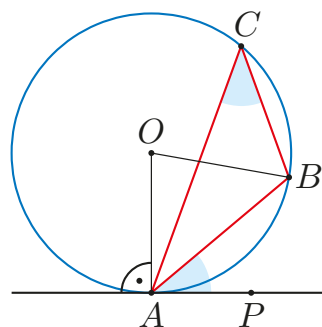
$$|\sphericalangle OAB| = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

Trójkąt AOB jest równoramienny, więc:

$$|\sphericalangle AOB| = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ$$

Kąt ACB jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy AOB , zatem:

$$|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2} |\sphericalangle AOB| = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$$

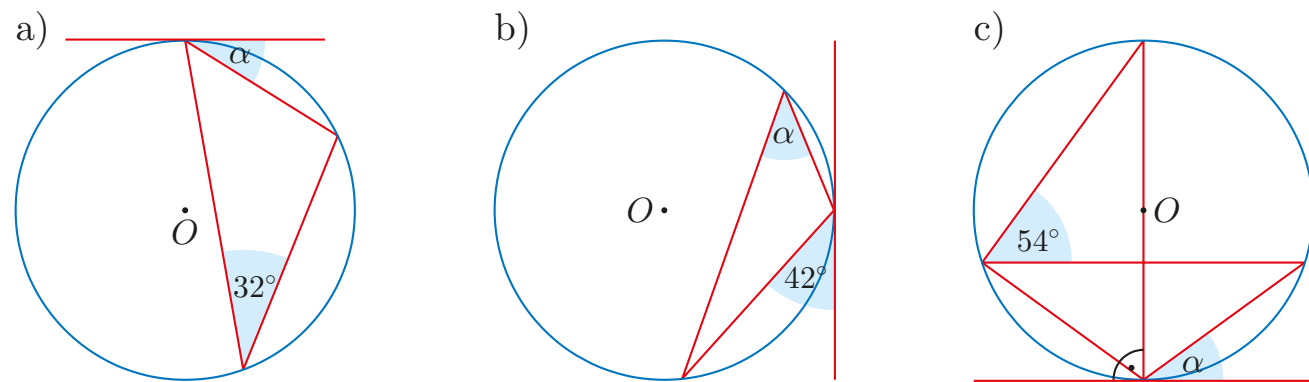


Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że kąty α i β na rysunku obok są równe, czyli że kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu opartemu na tej cięciwie.

Ćwiczenie 5

Wyznacz miarę kąta α .

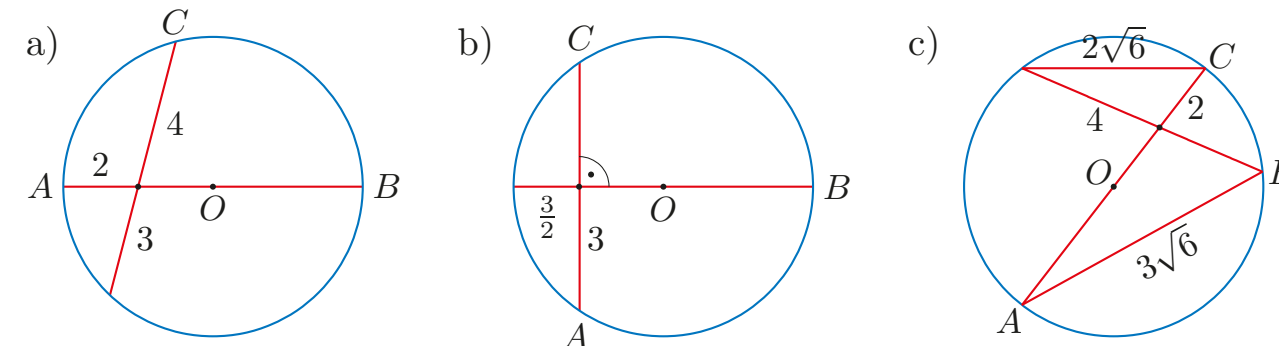


Ćwiczenie 6

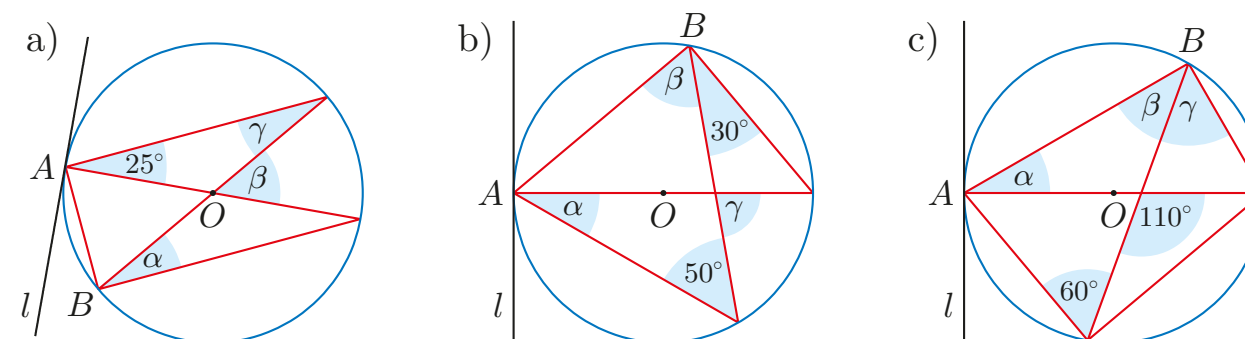
Wierzchołki trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB leżą na okręgu. Kąt między bokiem BC a styczną do okręgu w punkcie B ma miarę 50° . Oblicz miary kątów tego trójkąta.

Zadania

1. Oblicz promień okręgu oraz pole trójkąta ABC .



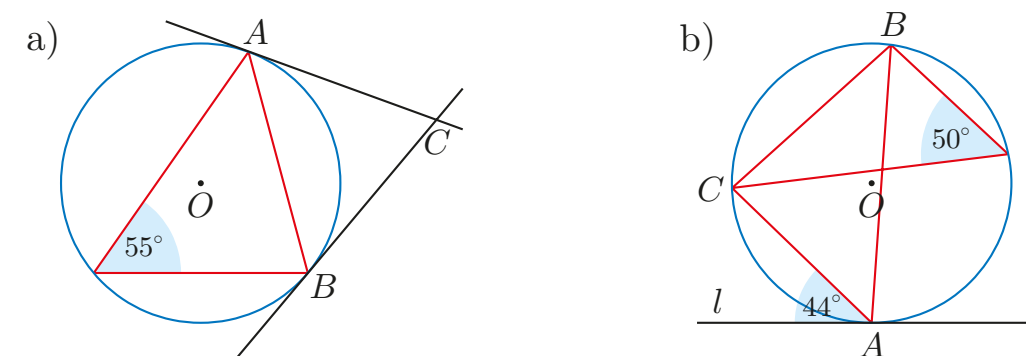
2. Wyznacz miary kątów α , β , γ oraz miarę kąta ostrego δ między cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie A .



3. a) W okręgu o środku O poprowadzono cięciwę AB . Jeden z kątów trójkąta AOB ma miarę 96° . Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną przez punkt A .

b) W okręgu o promieniu 6 cm poprowadzono cięciwę AB . Długość łuku $\widehat{AB}$ jest równa π cm. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną przez punkt B .

4. Proste przedstawione na rysunku są styczne do okręgu w odpowiednich punktach. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC .



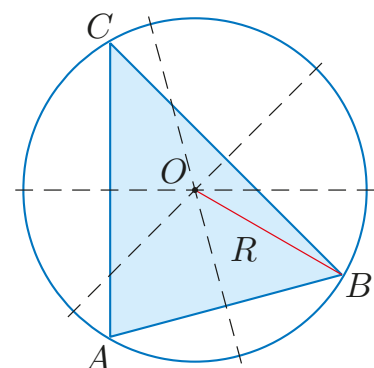
5. Punkt przecięcia dwóch cięciw okręgu dzieli jedną z nich na odcinki długości x i 18, a drugą – na odcinki długości $x + 3$ i $x + 6$. Oblicz długości tych cięciw.

5.6. Okrąg opisany na trójkącie

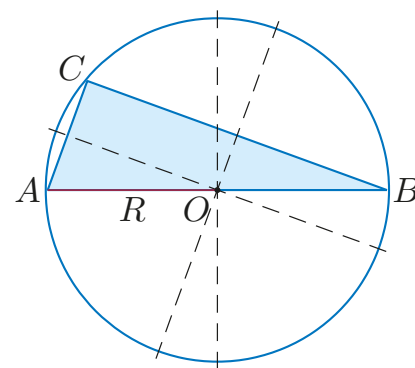
Okrąg nazywamy opisanym na trójkącie, jeżeli wszystkie wierzchołki trójkąta należą do okręgu. Mówimy też, że trójkąt jest wpisany w okrąg. Na każdym trójkącie można opisać okrąg – mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

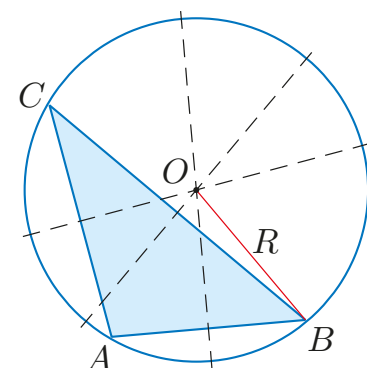
Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.



Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.



Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży na zewnątrz tego trójkąta.

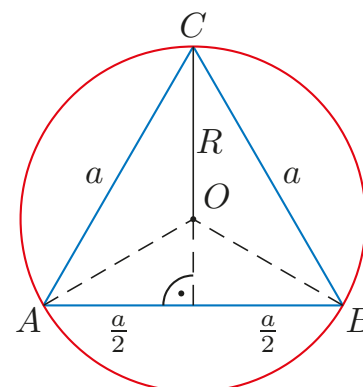
Ćwiczenie 1

Udowodnij, że symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówka. Rozpatrz najpierw odległości punktu przecięcia symetralnych dwóch boków trójkąta od jego wierzchołków.

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku a wyraża się wzorem:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



Ćwiczenie 2

Udowodnij powyższe twierdzenie.

Mówimy, że koło jest opisane na trójkącie, gdy jest na nim opisany okrąg ograniczający to koło.

Ćwiczenie 3

- Oblicz pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o polu $64\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
- Oblicz wysokość oraz pole trójkąta równobocznego, na którym opisano okrąg o promieniu 6 cm.

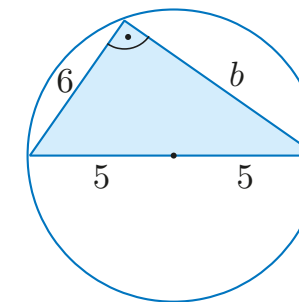
Przykład 1

Na trójkącie prostokątnym o jednej z przyprostokątnych długości 6 opisano okrąg o promieniu 5. Oblicz pole tego trójkąta.

Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej (jest ona średnicą tego okręgu), czyli przeciwprostokątna ma długość:

$$c = 2R = 2 \cdot 5 = 10$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $b^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, zatem $b = 8$, więc pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.



Ćwiczenie 4

- Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 7 cm i 12 cm.
- Pole trójkąta prostokątnego jest równe 18 cm^2 . Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 4 cm. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.

Ćwiczenie 5

Oblicz obwód trójkąta prostokątnego wpisanego w okrąg o promieniu 5, jeśli:

- jest to trójkąt równoramienny,
- jedna przyprostokątna jest trzy razy dłuższa od drugiej.

Ćwiczenie 6

Odległości środka okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym od jego przyprostokątnych wynoszą 4 i 6. Oblicz pole trójkąta.

Przykład 2

Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ma miarę 30° , a podstawa trójkąta ma długość 2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie oraz odległość środka tego okręgu od podstawy trójkąta.

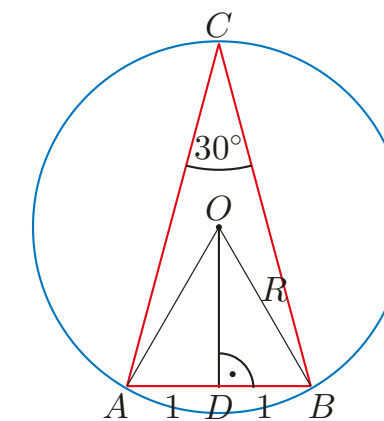
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Wówczas kąt AOB jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany ACB , czyli:

$$|\sphericalangle AOB| = 2|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$$

Zatem trójkąt AOB jest równoboczny, więc:

$$R = |OA| = |OB| = |AB| = 2$$

Odległość środka okręgu od podstawy trójkąta jest równa $|OD|$, a odcinek OD jest wysokością trójkąta równobocznego: $|OD| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

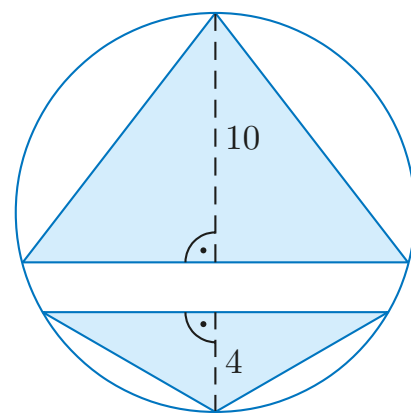


Ćwiczenie 7

- a) W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę 45° , a podstawa ma długość 4 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
- b) W okrąg o promieniu 5 cm jest wpisany trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta. Rozpatrz dwa przypadki.

Ćwiczenie 8

Na rysunku obok przedstawiono trójkąty równoramienne wpisane w okrąg o promieniu 8. Oblicz stosunek pól tych trójkątów.



Ćwiczenie 9

Trójkąt równoramienny o kącie między ramionami równym 120° jest wpisany w okrąg o promieniu 4. Oblicz pole tego trójkąta.

Poniższe twierdzenie pokazuje, jaka zależność łączy ze sobą długości boków trójkąta, jego pole oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Twierdzenie

Pole trójkąta o bokach długości a , b , c wpisanego w okrąg o promieniu R wyraża się wzorem:

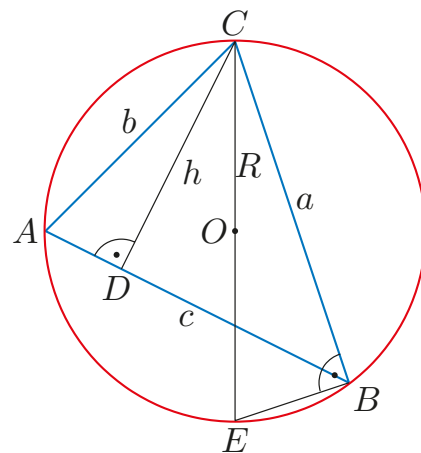
$$P = \frac{abc}{4R}$$

Dowód

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości a , b , c (rysunek obok) wpisany w okrąg o środku O i promieniu R . Odcinek CD jest wysokością trójkąta, a odcinek CE – średnicą okręgu. Kąty CAB i CEB są równe (dlaczego?). Zatem trójkąty ACD i ECB są podobne, czyli:

$$\frac{h}{b} = \frac{a}{2R}, \text{ stąd } h = \frac{ab}{2R}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}c \cdot \frac{ab}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

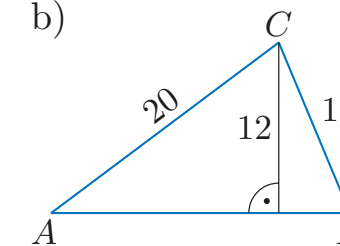
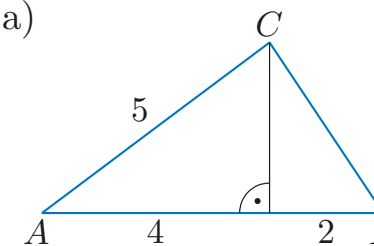
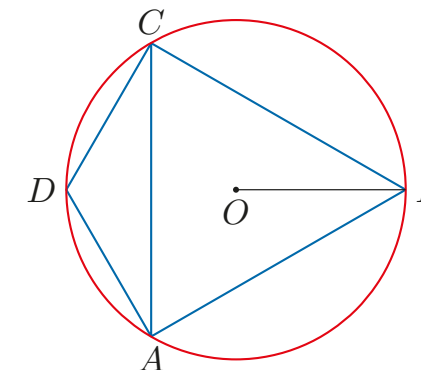


Ćwiczenie 10

- a) Oblicz pole trójkąta o bokach długości 4 cm, 13 cm, 15 cm wpisanego w okrąg o promieniu równym $\frac{65}{8}$ cm.
- b) Dany jest trójkąt o bokach długości 13 cm, 14 cm, 15 cm i polu równym 84 cm^2 . Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadania

- Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym w przypadku, gdy:
 - pole tego trójkąta wynosi 8 cm^2 , a wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa 2 cm,
 - krótsza przyprostokątna tego trójkąta ma długość 5 cm, a jeden z jego kątów ostrych jest dwa razy większy od drugiego,
 - jest to trójkąt równoramienny, a jego obwód wynosi 6 cm.
- Stosunek długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równy 3:4. Pole koła opisanego na tym trójkącie wynosi $6,25\pi \text{ cm}^2$. Oblicz pole tego trójkąta.
- W okrąg o promieniu $4\sqrt{3}$ wpisano trójkąt równoboczny ABC i trójkąt równoramienny ACD (rysunek obok). Oblicz pole czworokąta $ABCD$.
- Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie 8 cm w przypadku, gdy:
 - ramię tego trójkąta ma długość $4\sqrt{5}$ cm,
 - sinus kąta przy podstawie jest równy $\frac{3}{5}$.
- Do podstawy trójkąta równoramiennego poprowadzono wysokość h . Opisany na nim okrąg ma promień równy 13 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.
 - $h = 20$ cm
 - $h = 6$ cm
- Oblicz pole trójkąta ABC oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
 -
 -



- Dane są punkty $A(-1, -2)$ i $B(5, -2)$. Odcinek AB jest podstawą trójkąta równoramiennego ABC . Okrąg opisany na tym trójkącie ma promień równy 5. Wyznacz współrzędne wierzchołka C .
- Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie o bokach 12, 17, 25.

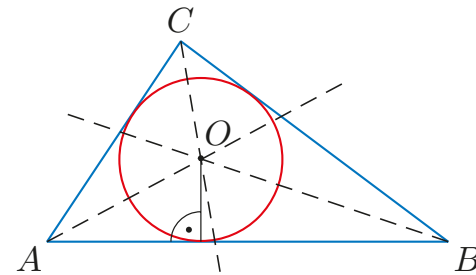
5.7. Okrąg wpisany w trójkąt

Okrąg nazywamy wpisanym w trójkąt, jeżeli wszystkie boki trójkąta są styczne do tego okręgu. Mówimy też, że trójkąt jest opisany na okręgu.

W każdy trójkąt można wpisać okrąg – mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



D Ćwiczenie 1

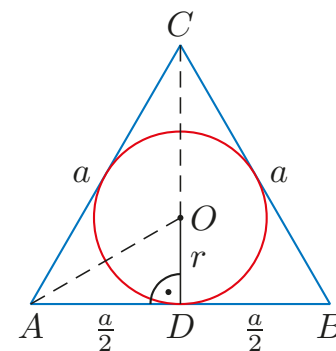
Udowodnij, że dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówka. Rozpatrz najpierw odległości punktu przecięcia dwusiecznych dwóch kątów wewnętrznych trójkąta od jego boków.

Twierdzenie

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a wyraża się wzorem:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



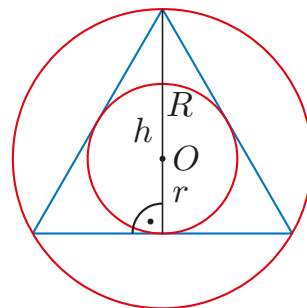
Dowód

Odcinek AO (rysunek powyżej) jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC , czyli $|\angle OAD| = 30^\circ$. Zatem $\frac{r}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg} |\angle OAD| = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, stąd $r = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ćwiczenie 2

- Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 18.
- Oblicz obwód trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o długości 10π .

Zwróć uwagę na okrąg wpisany w trójkąt równoboczny i okrąg opisany na tym trójkącie – mają one wspólny środek (punkt O na rysunku obok). Punkt ten dzieli wysokość h trójkąta równobocznego w stosunku 2:1, gdy liczymy od wierzchołka, czyli $r = \frac{1}{3}h$, $R = \frac{2}{3}h$.



Ćwiczenie 3

Oblicz sumę długości okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o obwodzie równym 36 cm i okręgu opisanego na tym trójkącie.

Przykład 1

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 i 12.

Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

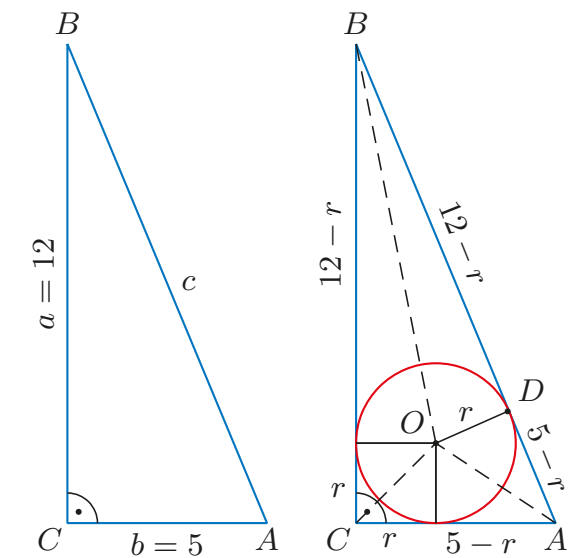
$$c = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Przy oznaczeniach jak na rysunku obok:

$$|AD| = 5 - r \quad \text{ i } \quad |BD| = 12 - r$$

Zatem $(5 - r) + (12 - r) = 13$.

Stąd otrzymujemy $r = 2$.



Ćwiczenie 4

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości: a) 3 i 4, b) 7 i 24.

Ćwiczenie 5

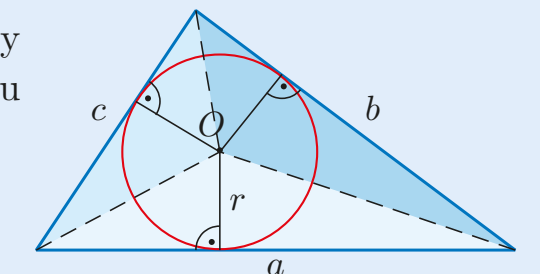
- Na okręgu o promieniu 4 cm opisano trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 10 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.
- Na okręgu o promieniu 2 cm opisano trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 10 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Poniższe twierdzenie pokazuje, jaka zależność łączy ze sobą obwód trójkąta, jego pole oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe iloczynowi połowy obwodu tego trójkąta i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$



Uwaga. Jeśli przez p oznaczymy połowę obwodu trójkąta: $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, to $P = p \cdot r$.

D Ćwiczenie 6

Uzasadnij podany wzór na pole trójkąta, korzystając z powyższego rysunku.

Ćwiczenie 7

Oblicz pole trójkąta o bokach 5, 5 i 6 opisanego na okręgu długości 3π .

Przykład 2

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 9 i 12.

Oznaczmy $a = 9$ i $b = 12$. Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$$

Obwód trójkąta jest równy $a + b + c = 36$, a pole $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$. Przekształcamy wzór na pole trójkąta $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt:

$$r = \frac{2P}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 54}{36} = \frac{108}{36} = 3$$

Promień r okręgu wpisanego w trójkąt o bokach a , b , c oraz polu P wyraża się wzorem:

$$r = \frac{2P}{a+b+c}$$

Ćwiczenie 8

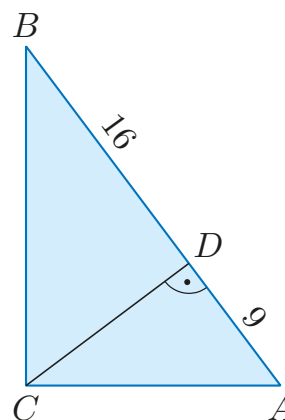
Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości: a) 12 i 16, b) 1 i 1, c) 10 i 24, d) 2 i $\sqrt{5}$.

Mówimy, że koło jest wpisane w trójkąt, gdy jest w niego wpisany okrąg ograniczający to koło.

Ćwiczenie 9

Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego trójkąta ABC dzieli jego przeciwprostokątną na odcinki o długościach 9 i 16 (rysunek obok).

- D** a) Uzasadnij, że trójkąty ABC , ACD i CBD są podobne.
b) Oblicz długości boków trójkąta ABC .
c) Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt ABC .
d) Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt ACD oraz promień i pole koła wpisanego w trójkąt CBD .



Ćwiczenie 10

Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość x , a jego ramię – długość y . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

- a) $x = 12$, $y = 10$ b) $x = 10$, $y = 13$

Ćwiczenie 11

- a) Na okręgu o promieniu 3 opisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami równym 120° . Oblicz długości boków tego trójkąta.
b) W trójkąt równoramienny o kącie przy podstawie równym 30° wpisano okrąg o promieniu 2. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadania

- D** 1. Uzasadnij, że pole trójkąta równobocznego o boku długości a wyraża się wzorem $P = \frac{3}{2}ar$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.
2. a) Oblicz pole trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o promieniu 2.
b) Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie równobocznym o boku długości a do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
3. a) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 8, a jeden z kątów ostrych ma miarę 30° . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
b) Krótsza przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 6, a jeden z kątów ma miarę 60° . Oblicz długość okręgu wpisanego w ten trójkąt.

- D** 4. Uzasadnij, że promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a , b oraz przeciwprostokątnej c wyraża się wzorem:

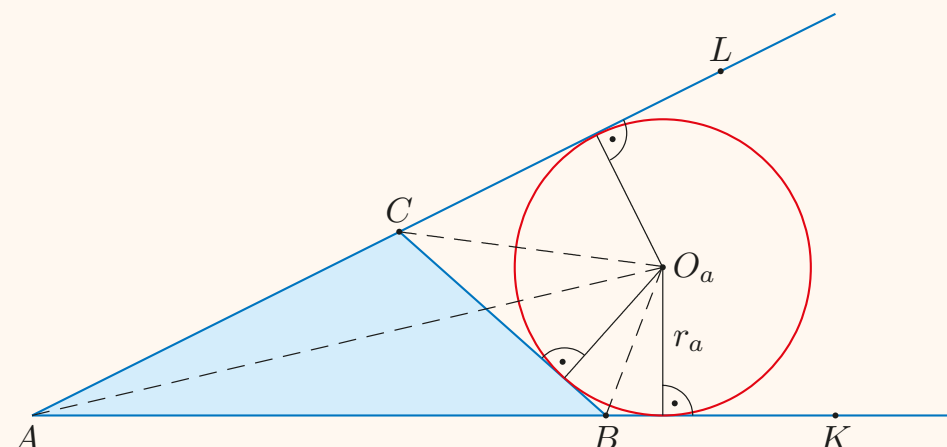
$$r = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

5. Na okręgu o promieniu 2 opisano trójkąt prostokątny. Odległość środka okręgu od wierzchołka jednego z kątów ostrych trójkąta jest równa $2\sqrt{10}$. Oblicz pole tego trójkąta.
6. Obwód trójkąta równoramiennego o ramieniu długości x jest równy q . Oblicz długość okręgu wpisanego w ten trójkąt.
a) $x = 15$, $q = 54$ b) $x = 13$, $q = 50$
7. Na okręgu opisano trójkąt równoramienny o podstawie długości 8. Środek okręgu dzieli wysokość trójkąta opuszczoną na podstawę w stosunku 2:3 (liczymy od podstawy trójkąta). Oblicz promień tego okręgu.
8. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm i wysokości 4 cm wpisano koło oraz w trójkąt równoramienny o podstawie długości 8 cm i wysokości 3 cm wpisano koło. Oblicz różnicę pól tych kół.
9. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 4 cm i ramieniu długości 6 cm wpisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu oraz odległości środka okręgu od wierzchołków tego trójkąta.
10. W trójkąt wpisano okrąg o promieniu 4. Jeden z boków tego trójkąta został podzielony przez punkt styczności okręgu na odcinki o długościach 4 i $4\sqrt{3}$. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Dowiedz się więcej

Okąg dopisany do trójkąta

Określenie Określenie dopisanym do trójkąta nazywamy okąg styczny do jednego z boków trójkąta oraz przedłużeń dwóch pozostałych jego boków.



Środkiem okęgu dopisanego (rysunek powyżej) jest punkt przecięcia dwusiecznych dwóch kątów zewnętrznych trójkąta – kąta CBK i kąta BCL oraz dwusiecznej kąta BAC (uzasadnij, że dwusieczne te przecinają się w jednym punkcie). Dla dowolnego trójkąta ABC istnieją trzy okęgi dopisane, styczne odpowiednio do boków AB , AC i BC .

Twierdzenie

Jeśli trójkąt ABC o bokach $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ ma pole równe P , to promień r_a okęgu dopisanego do tego trójkąta i stycznego do boku BC jest równy:

$$r_a = \frac{2P}{b + c - a}$$

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku powyżej. Otrzymujemy:

$$P_{\triangle ACO_a} = \frac{1}{2}br_a, \quad P_{\triangle ABO_a} = \frac{1}{2}cr_a, \quad P_{\triangle CBO_a} = \frac{1}{2}ar_a$$

Wyznaczamy pole trójkąta ABC :

$$\begin{aligned} P &= P_{\triangle ACO_a} + P_{\triangle ABO_a} - P_{\triangle CBO_a} = \\ &= \frac{1}{2}br_a + \frac{1}{2}cr_a - \frac{1}{2}ar_a = \frac{1}{2}r_a(b + c - a) \end{aligned}$$

$$\text{Stąd } r_a = \frac{2P}{b + c - a}.$$

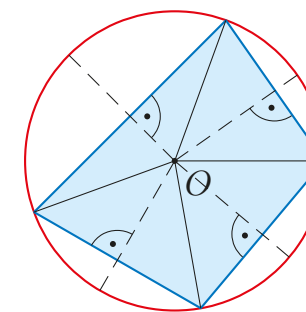
1. Oblicz promień okęgu dopisanego do trójkąta równobocznego o boku 1.
2. Oblicz promienie okęgów dopisanych do trójkąta prostokątnego o bokach równych 3, 4, 5.

R 5.8. Okąg opisany na czworokącie

Okąg jest opisany na czworokącie, jeżeli wszystkie wierzchołki czworokąta należą do okęgu. Mówimy też, że czworokąt jest wpisany w okąg.

Na czworokącie można opisać okąg wtedy i tylko wtedy, gdy symetralne boków tego czworokąta przecinają się w jednym punkcie (uzasadnij). Punkt ten jest środkiem okęgu opisanego.

Nie na każdym czworokącie można opisać okąg.



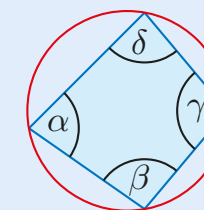
D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że równoległobok, na którym można opisać okąg, jest prostokątem.

Twierdzenie

Na czworokącie można opisać okąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe i mają po 180° :

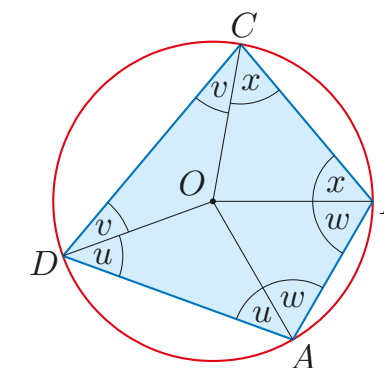
$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$



D Ćwiczenie 2

Udowodnij, że jeżeli na czworokącie można opisać okąg, to sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe i mają po 180° . Skorzystaj:

- a) z rysunku obok,
- b) z twierdzenia o kącie środkowym i kącie wpisanym opartych na tym samym łuku (str. 237).



Ćwiczenie 3

Kąty α i β to sąsiednie kąty wewnętrzne czworokąta, na którym można opisać okąg. Oblicz miary pozostałych kątów tego czworokąta.

- a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$
- b) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 50^\circ$
- c) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 150^\circ$

Ćwiczenie 4

Na czworokącie $ABCD$ można opisać okąg oraz spełnione są podane warunki. Oblicz miary kątów wewnętrznych tego czworokąta.

- a) $\angle A = 2\angle C$, $\angle B = \frac{1}{2}\angle D$
- b) $\angle A = 3\angle C$, $\angle B = 2\angle C$

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że trapez, na którym można opisać okrąg, jest równoramienny.

Ćwiczenie 6

Na trapezie o kolejnych kątach: α , β , γ i δ takich, że α i β są kątami przy tej samej podstawie, można opisać okrąg oraz wiadomo, że $\gamma = 4\alpha$. Oblicz miary kątów tego trapezu.

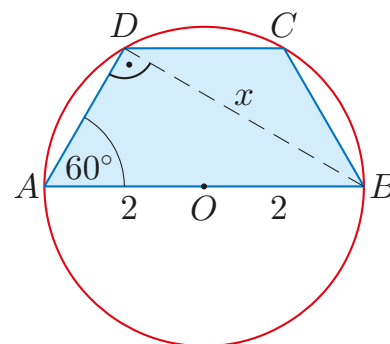
Przykład 1

Jedna z podstaw trapezu $ABCD$ wpisanego w okrąg o promieniu 2 jest średnicą tego okręgu, a jeden z kątów tego trapezu ma miarę 60° . Oblicz długości jego przekątnych.

Na trapezie można opisać okrąg, więc jest to trapez równoramienny – jego przekątne mają równą długość. Kąt ADB jest kątem prostym (jest oparty na średnicy), zatem $\sin 60^\circ = \frac{x}{4}$ i stąd:

$$x = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Każda z przekątnych ma długość $2\sqrt{3}$.



Ćwiczenie 7

a) Oblicz obwód trapezu z powyższego przykładu.

b) Jedna z podstaw trapezu jest średnicą opisanego na nim okręgu. Ramię trapezu ma długość 1 cm, a jego przekątne przecinają się pod kątem 60° . Oblicz obwód tego trapezu.

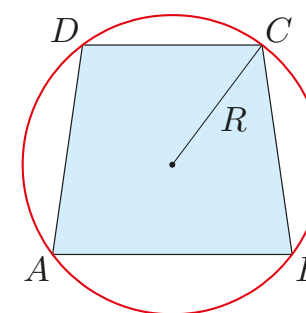
Mówimy, że koło jest opisane na czworokącie, gdy jest na nim opisany okrąg ograniczający to koło.

Zadania

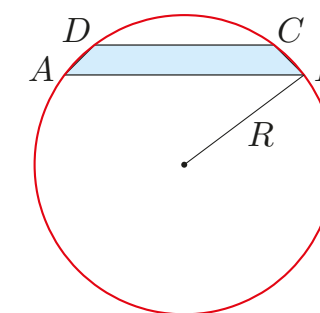
- Czy na czworokącie o podanych kolejnych kątach, gdzie $\alpha > 0$, można opisać okrąg?
 - α , 2α , 3α , 4α
 - 2α , α , 4α , 5α
 - 3α , 4α , 3α , 2α
- Oblicz pole koła opisanego na prostokącie o bokach długości 6 i 10.
 - W okrąg o promieniu 20 wpisano prostokąt. Stosunek długości jego boków jest równy 3:4. Oblicz pole tego prostokąta.
- Przekątne prostokąta przecinają się pod kątem 60° . Oblicz pole koła opisanego na tym prostokącie, jeśli wiadomo, że długość równą 6 cm ma jego:
 - krótszy bok,
 - dłuższy bok.

- Na trapezie, którego wysokość jest równa 4 cm, opisano okrąg o promieniu 5 cm. Jedna z podstaw trapezu jest średnicą tego okręgu. Oblicz obwód tego trapezu.
 - Jedna z podstaw trapezu jest średnicą opisanego na nim okręgu. Kąt między przekątną trapezu a tą podstawą ma miarę 30° , a wysokość trapezu jest równa 2 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.
- Na trapezie $ABCD$ o podstawach $|AB| = 8$ oraz $|CD| = 6$ opisano okrąg o promieniu $R = 5$ (rysunek poniżej). Oblicz pole tego trapezu.

a)



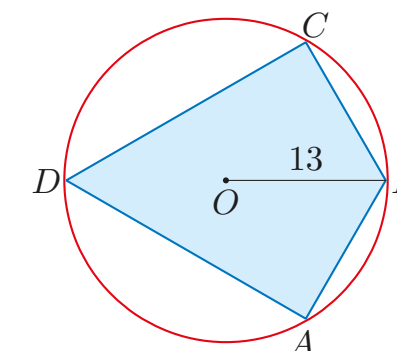
b)



- Na trapezie $ABCD$, którego wysokość jest równa h , opisano okrąg o środku w punkcie O i promieniu R . Kąt między dłuższą podstawą AB a promieniem okręgu poprowadzonym do punktu A jest równy 30° . Oblicz długości podstaw tego trapezu.
 - $R = 4$ cm, $h = 5$ cm
 - $R = 10$ cm, $h = 3$ cm
- W trapezie równoramiennym jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej, a przekątna jest dwusieczną kąta przy dłuższej podstawie. Pole trapezu jest równe 9 cm^2 . Oblicz długości jego boków oraz pole koła na nim opisanego.

D

- Udowodnij, że jeśli na deltoidzie o bokach x i y można opisać okrąg, to pole tego deltoidu wyraża się za pomocą wzoru: $P = xy$.
 - Oblicz promień okręgu opisanego na deltoidzie o bokach długości 7 cm i 24 cm.
- Na deltoidzie o polu równym 312 jest opisany okrąg o promieniu 13 (rysunek obok). Oblicz obwód deltoidu oraz pole trójkąta AOD .
- Jeden z kątów deltoidu wpisanego w okrąg o promieniu 6 ma miarę α . Oblicz pole tego deltoidu.
 - $\alpha = 30^\circ$
 - $\alpha = 45^\circ$



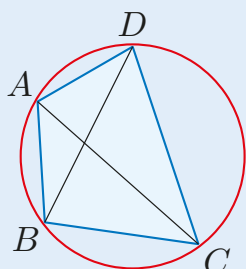
Twierdzenie Ptolemeusza

Poniższe twierdzenie przypisuje się Klaudiuszowi Ptolemeuszowi, greckiemu astronomowi i matematykowi żyjącemu w Aleksandrii w II w. n.e.

Twierdzenie

Jeśli na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, to suma iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta jest równa iloczynowi długości jego przekątnych:

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$$



Dowód

Na przekątnej AC wybieramy punkt P tak, aby kąty ADB i CDP były równe. Ponieważ kąty ABD i ACD są równe (jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku), trójkąty ABD i PCD są podobne.

Zatem $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|PC|}$ i stąd:

$$|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |PC| \quad (I)$$

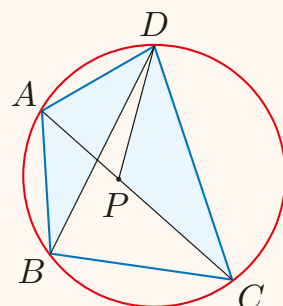
Kąty CAD i CBD są równe (jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku) oraz kąty BDC i ADP są równe (dlaczego?), więc trójkąty BCD i APD są podobne.

Zatem $\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AP|}$ i stąd:

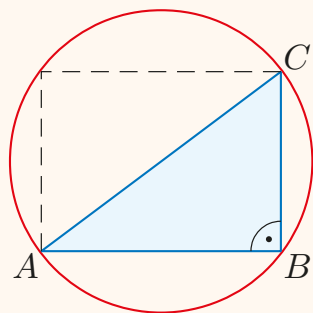
$$|AD| \cdot |BC| = |BD| \cdot |AP| \quad (II)$$

Równości (I) i (II) dodajemy stronami i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| &= |BD| \cdot |AP| + |BD| \cdot |PC| = \\ &= |BD| \cdot (|AP| + |PC|) = |BD| \cdot |AC| \end{aligned}$$

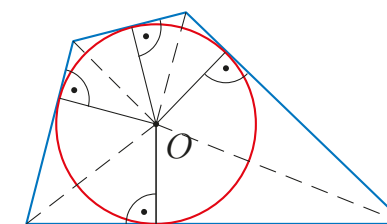


- D 1.** Korzystając z twierdzenia Ptolemeusza, udowodnij twierdzenie Pitagorasa.



R 5.9. Okrąg wpisany w czworokąt

Okrąg jest wpisany w czworokąt, jeżeli wszystkie boki czworokąta są styczne do tego okręgu. Mówimy też, że czworokąt jest opisany na okręgu.



W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne kątów wewnętrznych tego czworokąta przecinają się w jednym punkcie (uzasadnij). Punkt ten jest środkiem okręgu wpisanego. Nie w każdy czworokąt można wpisać okrąg.

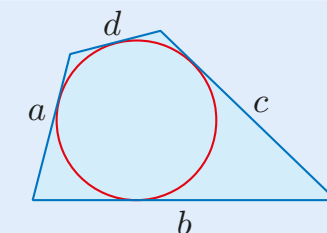
D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że prostokąt, w który można wpisać okrąg, jest kwadratem.

Twierdzenie

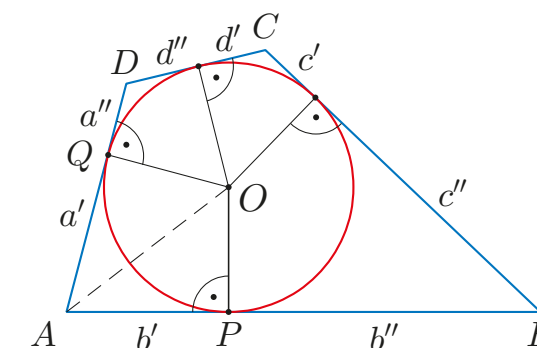
W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe:

$$a + c = b + d$$



D Ćwiczenie 2

Skorzystaj z rysunku obok i udowodnij, że jeśli w czworokąt wypukły można wpisać okrąg, to sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.



Ćwiczenie 3

Czy w czworokąt wypukły o podanych długościach kolejnych boków można wpisać okrąg?

- a) 1, 5, 3, 7 b) 14, 9, 8, 13 c) 25, 16, 15, 24

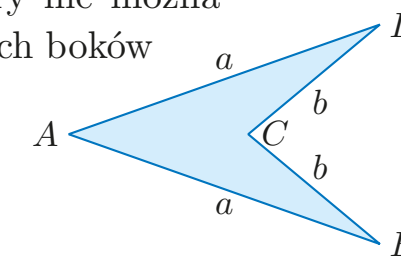
D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że równoległobok, w który można wpisać okrąg, jest rombem.

Na rysunku obok przedstawiono czworokąt, w który nie można wpisać okręgu, mimo że sumy długości przeciwległych boków są równe:

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$$

Przykład ten pokazuje, że w twierdzeniu powyżej założenie, że czworokąt jest wypukły, jest istotne.



Przykład 1

Ramię trapezu równoramiennego ma długość 5, a jego dłuższa podstawa ma długość 8. W trapez ten wpisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu oraz pole trapezu.

W trapez wpisano okrąg, zatem sumy długości przeciwległych boków tego trapezu są równe:

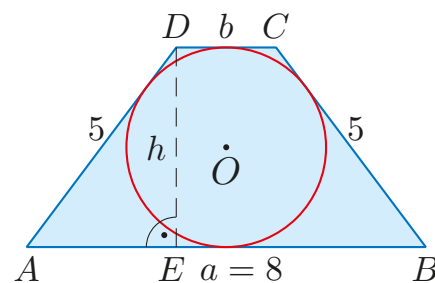
$8 + b = 5 + 5$, stąd $b = 2$. Zauważmy, że:

$$|AE| = \frac{a-b}{2} = \frac{8-2}{2} = 3$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość trapezu: $h^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, czyli $h = 4$.

Promień okręgu wpisanego w ten trapez jest równy połowie jego wysokości, czyli $r = 2$.

Pole trapezu: $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{8+2}{2} \cdot 4 = 20$.



Ćwiczenie 5

a) W trapez równoramienny o podstawach długości 8 cm i 18 cm jest wpisany okrąg. Oblicz pole tego trapezu.

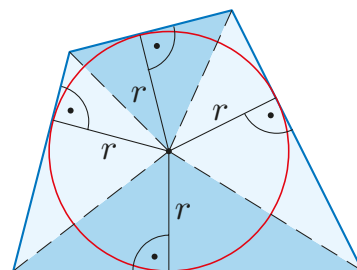
b) Na okręgu o promieniu 2 cm opisano trapez, którego ramiona mają długości 5 cm i 7 cm. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

c) W trapezie równoramiennym opisanym na okręgu o promieniu 4 cm jedna z podstaw jest o 12 cm dłuższa od drugiej. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

D Ćwiczenie 6

Skorzystaj z rysunku obok i uzasadnij, że pole P czworokąta o obwodzie równym l opisanego na okręgu o promieniu r wyraża się wzorem:

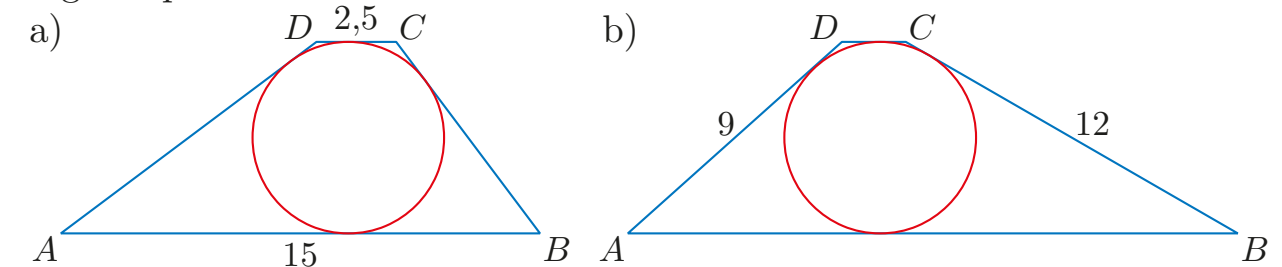
$$P = \frac{1}{2}rl$$



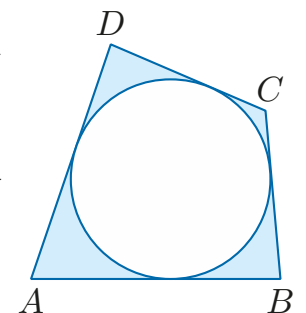
Zadania

- a) Podstawy trapezu równoramiennego, w który można wpisać okrąg, mają długości 5 cm i 9 cm. Oblicz długość ramion i pole tego trapezu.
b) Podstawy trapezu prostokątnego, w który można wpisać okrąg, mają długości 1 cm i 3 cm. Oblicz długości ramion tego trapezu.
- Oblicz pole trapezu równoramiennego o ramieniu długości 10 cm opisanego na okręgu o promieniu 4 cm.
- W trapez równoramienny (niebędący rombem) o kącie ostrym 45° wpisano okrąg o promieniu 1 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

- Trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu o promieniu 3. Oblicz pole i obwód tego trapezu.



- W trapez o kątach ostrych przy dłuższej podstawie 30° i 60° wpisano okrąg o promieniu 1 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu.
- Dłuższa z podstaw trapezu prostokątnego ma długość 6 cm, a promień okręgu wpisanego w trapez jest równy 1 cm. Oblicz długość krótszej podstawy tego trapezu.
- a) W romb o boku długości 2 cm i kącie ostrym 60° wpisano koło. Oblicz pole tego koła.
b) W romb o kącie ostrym 30° wpisano okrąg o promieniu 2 cm. Oblicz pole tego rombu.
- Czworokąt $ABCD$ (rysunek obok) jest opisany na okręgu o promieniu 2. Wiadomo, że $|AB| = 5$ oraz $|CD| = 3,4$. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

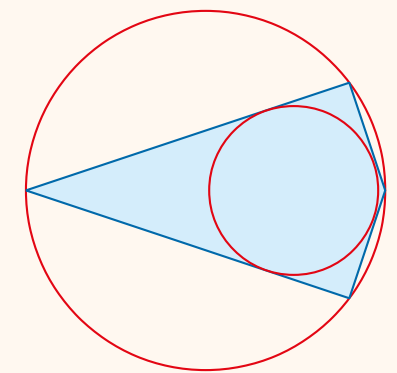


- Wykaż, że jeśli w trapez równoramienny (niebędący rombem) można wpisać okrąg, to wysokość tego trapezu h jest średnią geometryczną długości jego podstaw a i b , czyli $h = \sqrt{ab}$.
- a) Uzasadnij, że w dowolny deltoid można wpisać okrąg.
b) Pole deltoidu wynosi 42 cm^2 , a jego obwód jest równy 28 cm. Oblicz pole koła wpisanego w ten deltoid.

Czy wiesz, że...

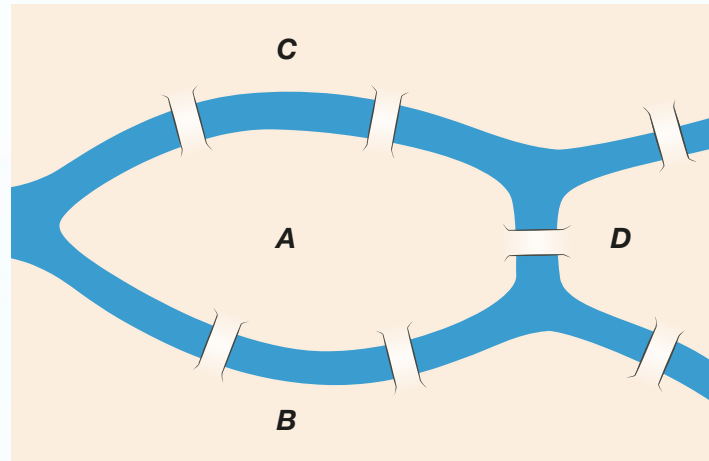
Czworokątem bicentrycznym nazywamy czworokąt, w który można wpisać okrąg i na którym można opisać okrąg. Przykładem takiego czworokąta jest kwadrat lub deltoid o dwóch kątach prostych. Pole czworokąta bicentrycznego o bokach długości a, b, c, d wyraża się wzorem:

$$P = \sqrt{abcd}$$

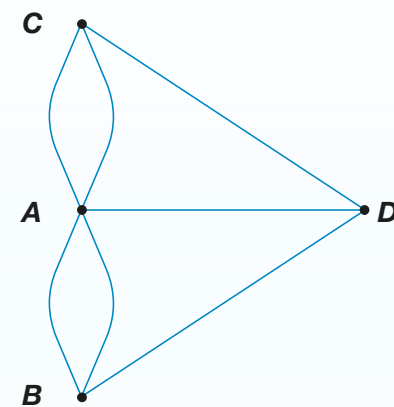


Problem mostów królewieckich

W XVIII w. w Królewcu, mieście nad Pregolą, było aż siedem mostów. Czy można było przejść kolejno przez wszystkie mosty tak, aby każdy z nich przekroczyć tylko raz i wrócić do miejsca, z którego się wyruszyło? Na to pytanie odpowiedział w 1736 r. Leonhard Euler [czyt. leonard ojler], a zaproponowane przez niego rozwiązanie zapoczątkowało rozwój teorii grafów.



Układ mostów w XVIII-wiecznym Królewcu: jeden most łączy dwie wyspy (oznaczone A i D), sześć mostów łączy te wyspy z resztą miasta (litery B i C).



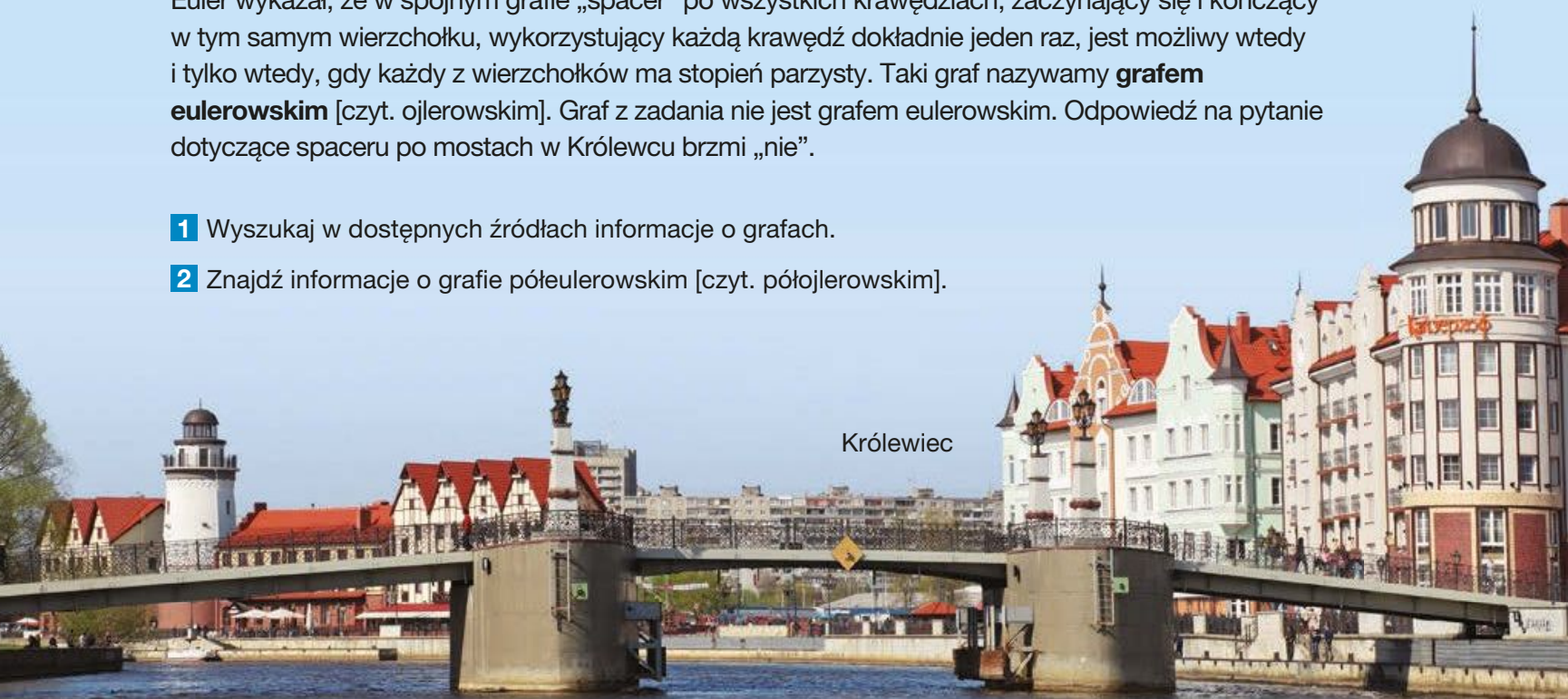
Układ mostów przedstawiony za pomocą grafu. Części miasta oznaczone na mapie jako A, B, C i D są wierzchołkami, a mosty – krawędziami grafu.

Stopniem wierzchołka grafu nazywamy liczbę krawędzi wychodzących z tego wierzchołka. W powyższym grafie stopień wierzchołka A jest równy 5, a stopnie wierzchołków B, C i D są równe 3. Jest to przykład **grafu spójnego**, w którym między dwoma dowolnymi wierzchołkami wiedzie droga prowadząca po jego krawędziach.

Euler wykazał, że w spójnym grafie „spacer” po wszystkich krawędziach, zaczynający się i kończący w tym samym wierzchołku, wykorzystujący każdą krawędź dokładnie jeden raz, jest możliwy wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z wierzchołków ma stopień parzysty. Taki graf nazywamy **grafem eulerowskim** [czyt. ojlerowskim]. Graf z zadania nie jest grafem eulerowskim. Odpowiedź na pytanie dotyczące spaceru po mostach w Królewcu brzmi „nie”.

1 Wyszukaj w dostępnych źródłach informacje o grafach.

2 Znajdź informacje o grafie półeulerowskim [czyt. półojlerowskim].



5.10. Wielokąty foremne

Wielokątem foremnym nazywamy wielokąt, który ma wszystkie boki równe oraz wszystkie kąty równe.

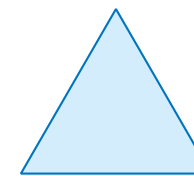
Ćwiczenie 1

Narysuj czworokąt oraz sześciokąt niebędące wielokątami foremnymi, które mają równe wszystkie: a) boki, b) kąty.

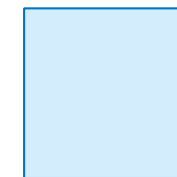
Ćwiczenie 2

Ile osi symetrii ma przedstawiony wielokąt foremny?

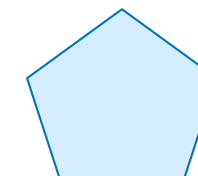
a) trójkąt



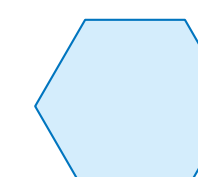
b) kwadrat



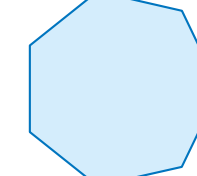
c) pięciokąt



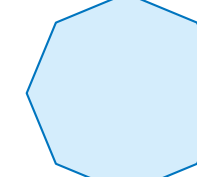
d) sześciokąt



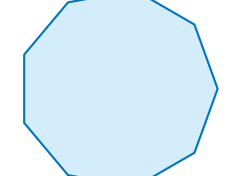
e) siedmiokąt



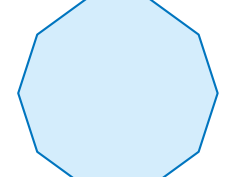
f) ośmiokąt



g) dziewięciokąt



h) dziesięciokąt



Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia symetralnych boków tego wielokąta.

Mówimy, że koło jest opisane na wielokącie, gdy jest na nim opisany okrąg ograniczający to koło.

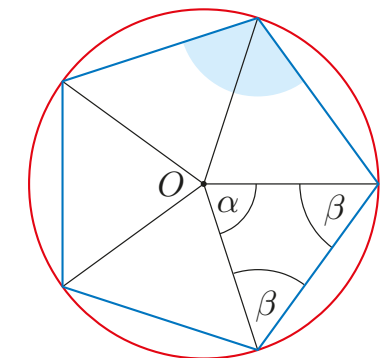
Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O opisany na pięciokącie foremnym. Oblicz miarę kąta wewnętrznego tego pięciokąta.

Kąt α ma miarę $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, czyli:

$$\beta = \frac{1}{2}(180^\circ - 72^\circ) = 54^\circ$$

Zatem kąt wewnętrzny ma miarę równą $2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$.

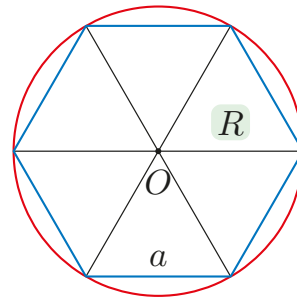


D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że kąt wewnętrzny n -kąta foremnego ma miarę równą $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O opisany na sześciokącie foremnym o boku a . Zauważ, że dłuższe przekątne sześciokąta dzielą go na sześć przystających trójkątów równobocznych. Zatem promień okręgu opisanego na sześciokącie foremnym ma długość równą długości boku sześciokąta:

$$R = a$$



Ćwiczenie 4

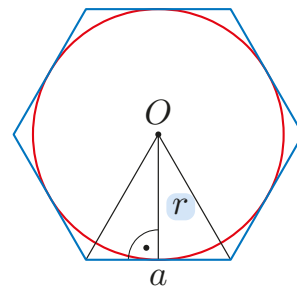
- Oblicz długość okręgu opisanego na sześciokącie foremnym o polu $150\sqrt{3}$.
- Oblicz pole sześciokąta foremnego wpisanego w koło o polu 32π .

W dowolny wielokąt foremny można wpisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów tego wielokąta.

Mówimy, że koło jest wpisane w wielokąt, gdy jest w niego wpisany okrąg ograniczający to koło.

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O wpisany w sześciokąt foremny o boku a . Promień tego okręgu wyraża się wzorem:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Ćwiczenie 5

- Oblicz pole koła wpisanego w sześciokąt foremny o obwodzie 54 cm.
- Oblicz długości przekątnych sześciokąta foremnego opisanego na okręgu o długości 12π cm.

D Ćwiczenie 6

Dany jest n -kąt foremny o boku długości a opisany na okręgu o promieniu r . Uzasadnij, że pole tego wielokąta jest równe $\frac{1}{2}n \cdot a \cdot r$.

Zadania

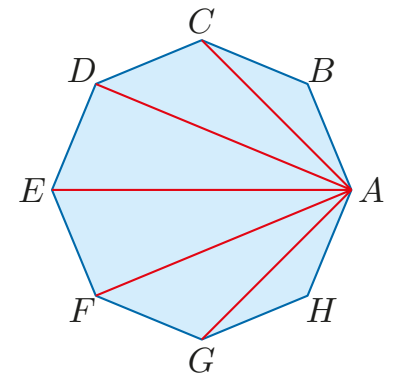
- Oblicz miarę kąta wewnętrznego:
 - ośmiokąta foremnego,
 - dziesięciokąta foremnego.
- Ile boków ma wielokąt foremny, którego suma miar kątów wewnętrznych jest równa: a) 720° , b) 900° , c) 1260° , d) 1440° , e) 1620° ?
- Wyznacz różnicę między polem koła opisanego na podanym wielokącie oraz polem koła wpisanego w ten wielokąt.
 - kwadrat o boku a
 - sześciokąt foremny o boku a

- Sześciokąt foremny ma bok długości a i pole P . Promień okręgu opisanego na tym sześciokącie jest równy R , a promień okręgu w niego wpisanego jest równy r . Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

a	R	r	P
4 cm	?	?	?
?	6 cm	?	?
?	?	?	16 cm^2
?	?	12 cm	?

- Podaj liczbę przekątnych sześciokąta foremnego.
 - Uzasadnij, że liczba przekątnych dowolnego n -kąta jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$.

- Przekątne ośmiokąta foremnego poprowadzone z jednego wierzchołka podzieliły ten ośmiokąt na sześć trójkątów (rysunek obok). Wyznacz miary kątów tych trójkątów.



- Uzasadnij, że pole ośmiokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 jest równe $2\sqrt{2}$.
- Uzasadnij, że promień okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym o boku a jest równy $\frac{1}{2}a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.
- Uzasadnij, że promień okręgu wpisanego w ośmiokąt foremny o boku a jest równy $\frac{1}{2}a(1+\sqrt{2})$.
- Dany jest n -kąt foremny o boku długości 2 cm. Uzasadnij, że różnica między polem koła opisanego na tym wielokącie i polem koła wpisanego w ten wielokąt jest równa $\pi \text{ cm}^2$ niezależnie od liczby boków wielokąta.
- Dany jest wielokąt foremny o boku a . Promień okręgu opisanego na tym wielokącie jest równy R , a promień okręgu wpisanego w ten wielokąt jest równy r . Uzasadnij, że $a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$.
- Uzasadnij, że bok n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu R ma długość $2R \sin \frac{180^\circ}{n}$.
 - Uzasadnij, że promień okręgu wpisanego w n -kąt foremny o boku długości a jest równy $\frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$.

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów 18° , 36° , 54° , 72°

Twierdzenie

Przekątna pięciokąta foremnego o boku 1 ma długość równą $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Dowód

Rozważmy pięciokąt foremny $ABCDE$ o boku 1 (rysunek obok). Oznaczmy przez d długość jego przekątnej oraz niech:

$$|FA| = x$$

Trójkąty ABD i FAB są podobnymi trójkątami równoramiennymi o kątach równych 72° , 72° , 36° (sprawdź). Zatem:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{d}$$

$$dx = 1$$

Trójkąt BFD jest równoramienny (jego kąty są równe 36° , 36° , 108°), więc $|FB| = |FD| = d - x$. W trójkącie FAB mamy: $|FB| = |AB| = 1$, stąd $d - x = 1$. Podstawiamy $x = d - 1$ do równania $dx = 1$ i otrzymujemy:

$$d(d - 1) = 1$$

$$d^2 - d - 1 = 0$$

$$d = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{lub} \quad d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dodatnim rozwiązaniem tego równania jest liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Przykład

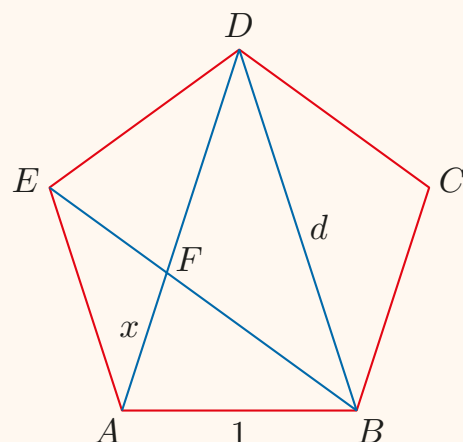
Oblicz $\sin 54^\circ$.

Zauważmy, że $\angle DCB = 108^\circ$ (rysunek powyżej), zatem:

$$\sin 54^\circ = \frac{\frac{1}{2}|DB|}{|DC|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

- Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 18° , 36° , 54° , 72° (rozpatrz trójkąty równoramiennie ABD oraz BCD z rysunku w dowodzie powyżej), a następnie przerysuj do zeszytu przedstawioną obok tabelę i ją uzupełnij.

α	18°	36°	54°	72°
$\sin \alpha$	?	?	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	?
$\cos \alpha$	?	?	?	?
$\operatorname{tg} \alpha$	?	?	?	?



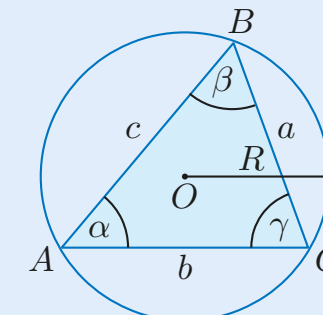
R 5.11. Twierdzenie sinusów

Przypomnijmy, że **rozwiązaniem trójkąta** nazywamy wyznaczenie długości jego trzech boków i miar jego trzech kątów. Jednym z twierdzeń wykorzystywanych do rozwiązywania trójkątów jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są równe średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

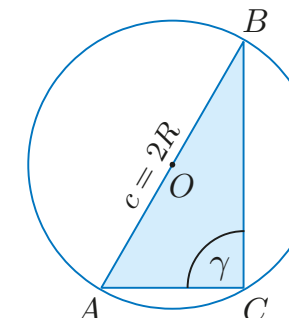
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



Dowód. Udowodnimy, że $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$. (Równości $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ oraz $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$ dowodzi się analogicznie). Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt γ .

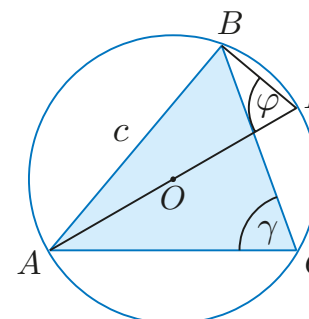
1° Kąt γ jest kątem prostym (rysunek po prawej).

Mamy $c = 2R$ oraz $\sin \gamma = 1$, stąd $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.



2° Kąt γ jest kątem ostrym (rysunek po lewej).

Prowadzimy średnicę AD i rozważamy trójkąt ABD . Kąt ABD jest kątem prostym, zatem $\frac{c}{2R} = \sin \varphi$.



Kąty γ i φ są oparte na tym samym łuku, czyli są równe, więc $\frac{c}{2R} = \sin \gamma$. Stąd otrzymujemy:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

3° Kąt γ jest kątem rozwartym (rysunek poniżej).

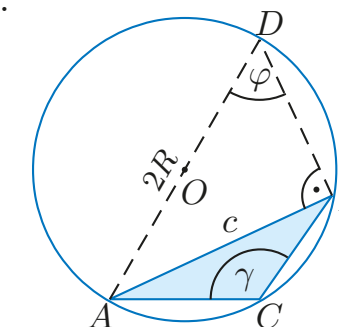
Prowadzimy średnicę AD i rozważamy trójkąt ABD . Kąt ABD jest kątem prostym, zatem:

$$\frac{c}{\sin \varphi} = 2R$$

Suma kątów γ i φ jest równa 180° , stąd:

$$\sin \gamma = \sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$$

Zatem zachodzi równość $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.



Uwaga. W tym podręczniku, jeżeli nie jest powiedziane inaczej, przyjmujemy oznaczenia wierzchołków, boków i kątów trójkąta jak na rysunku przy twierdzeniu.

Jeśli dane są dwa kąty i bok trójkąta, to do jego rozwiązania możemy skorzystać z twierdzenia sinusów. Tam, gdzie jest to potrzebne, odpowiednie wartości można odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 385).

Przykład 1

Rozwiąż trójkąt ABC (rysunek obok), w którym dane są kąty $\alpha = 50^\circ$ i $\beta = 67^\circ$ oraz bok $c = 4$.

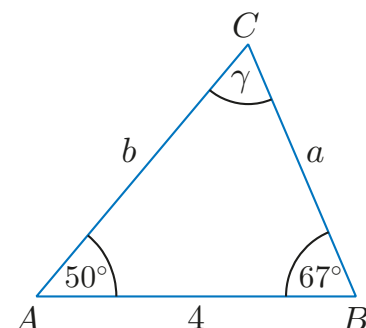
Obliczamy miarę kąta γ :

$$\gamma = 180^\circ - (50^\circ + 67^\circ) = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$$

Długości boków a i b obliczamy, korzystając z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}, \text{ zatem } a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{4 \sin 50^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 3,44,$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}, \text{ zatem } b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{4 \sin 67^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 4,13.$$



Ćwiczenie 1

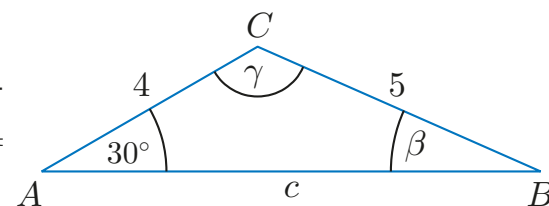
Rozwiąż trójkąt o danych kątach i boku.

- a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $c = 6$ c) $\alpha = 40^\circ$, $\gamma = 50^\circ$, $b = 10$
 b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 105^\circ$, $c = 8$ d) $\beta = 69^\circ$, $\gamma = 35^\circ$, $a = 5$

Twierdzenie sinusów pozwala również rozwiązać trójkąt, gdy dane są dwa jego boki i kąt leżący naprzeciw jednego z tych boków.

Przykład 2

Rozwiąż trójkąt ABC (rysunek obok), w którym dane są długości boków $a = 5$ i $b = 4$ oraz kąt $\alpha = 30^\circ$.



Na podstawie twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad \sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{4 \sin 30^\circ}{5} = 0,4$$

Z tablic odczytujemy, że $\beta \approx 24^\circ$, $\sin \beta = 0,4$ również dla $\beta \approx 156^\circ$, ale tę możliwość odrzucamy, gdyż $156^\circ + 30^\circ > 180^\circ$.
 zatem $\gamma \approx 180^\circ - (30^\circ + 24^\circ) = 126^\circ$.

Z równości $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$ obliczamy długość boku c :

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} \approx \frac{5 \sin 126^\circ}{\sin 30^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0,809}{0,5} = 8,09 \quad \sin 126^\circ = \sin(180^\circ - 54^\circ) = \sin 54^\circ \approx 0,809$$



Ćwiczenie 2

Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

- a) $a = 7$, $b = 6$, $\alpha = 80^\circ$ c) $b = 9$, $c = 10$, $\gamma = 45^\circ$
 b) $a = 3$, $b = 6$, $\alpha = 30^\circ$ d) $b = 5$, $c = 4$, $\beta = 60^\circ$



Przykład 3

Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt o bokach $a = 3$, $b = 9$ i kącie $\alpha = 30^\circ$.

Założmy, że taki trójkąt istnieje. Wówczas na podstawie twierdzenia sinusów prawdziwa jest równość:

$$\frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{9}{\sin \beta}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\sin \beta = 9 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{3} = \frac{3}{2} > 1$$

Z otrzymanej sprzeczności wynika, że taki trójkąt nie istnieje.



Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt spełniający podane warunki.

- a) $a = 3$, $b = 2$, $\beta = 60^\circ$ b) $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 45^\circ$

Przykład 4

Rozwiąż trójkąt o bokach $a = 5$ i $b = 8$ oraz kącie $\alpha = 30^\circ$.

Wyznaczamy miarę kąta β :

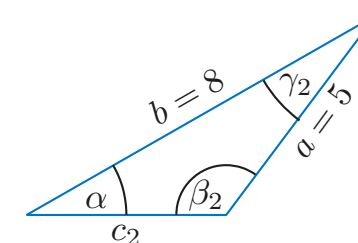
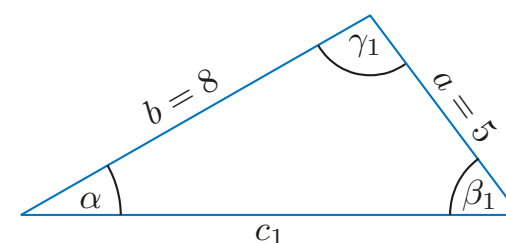
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad \text{Korzystamy z twierdzenia sinusów.}$$

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{8 \sin 30^\circ}{5} = 0,8$$

Z tablic (str. 385) odczytujemy, że $\sin \beta = 0,8$ dla kąta ostrego $\beta_1 \approx 53^\circ$.
 Zauważmy, że $\sin \beta = 0,8$ również dla kąta $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 127^\circ$. Kąt β_2 spełnia warunki zadania, gdyż $127^\circ + 30^\circ < 180^\circ$.

Zatem warunki zadania spełniają dwa trójkąty:

- trójkąt o kątach: $\alpha = 30^\circ$, $\beta_1 \approx 53^\circ$, $\gamma_1 \approx 180^\circ - (30^\circ + 53^\circ) = 97^\circ$
- trójkąt o kątach: $\alpha = 30^\circ$, $\beta_2 \approx 127^\circ$, $\gamma_2 \approx 180^\circ - (30^\circ + 127^\circ) = 23^\circ$

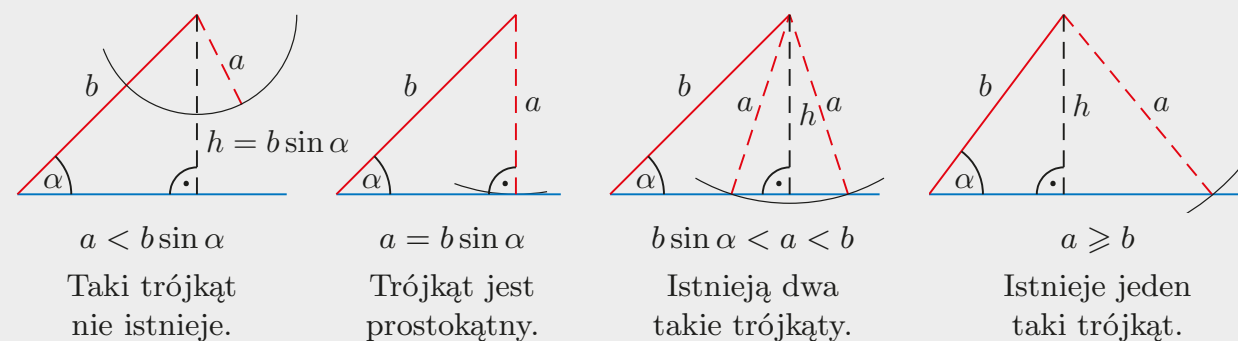


Z równania $\frac{c_1}{\sin \gamma_1} = \frac{a}{\sin \alpha}$ obliczamy: Z równania $\frac{c_2}{\sin \gamma_2} = \frac{a}{\sin \alpha}$ obliczamy:

$$c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha} \approx 9,9$$

$$c_2 = \frac{a \sin \gamma_2}{\sin \alpha} \approx 3,9$$

Rozpatrzmy dwa odcinki a i b oraz kąt ostry α , z których chcemy zbudować trójkąt taki, że kąt α będzie leżał naprzeciwko boku a . Może wówczas zachodzić jedna z poniższych sytuacji:



Ćwiczenie 4

Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

- a) $a = 3, b = 5, \alpha = 30^\circ$ c) $a = 9, b = 10, \alpha = 60^\circ$
b) $a = 8, b = 10, \alpha = 45^\circ$ d) $a = 1, b = 2, \beta = 45^\circ$

Zadania

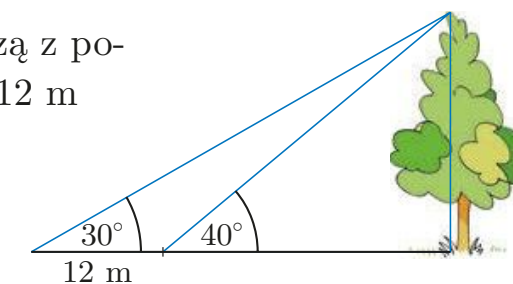
- Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta ABC .
a) $|AB| = \sqrt{6}, |BC| = 3, |\sphericalangle BAC| = 60^\circ$
b) $|AC| = 3\sqrt{6}, |BC| = 9, |\sphericalangle BAC| = 120^\circ$
- a) Bok trójkąta położony naprzeciw kąta o mierze 120° ma długość 10. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
b) Kąt rozwarty trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 6 ma miarę 135° . Oblicz długość boku trójkąta położonego naprzeciw tego kąta.

- D** c) Kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego ma miarę 15° . Uzasadnij, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy długości podstawy trójkąta.

- D** **3.** Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.
a) $a = 4, b = 6, \alpha = 30^\circ$ c) $b = 11, c = 12, \beta = 60^\circ$
b) $a = 9, b = 10, \alpha = 45^\circ$ d) $a = 10, c = 20, \gamma = 150^\circ$

- Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC w przypadku, gdy:
a) $a = 4, \alpha = 135^\circ$, d) $a = 7, \alpha = 120^\circ$,
b) $a = 7, \beta = 107^\circ, \gamma = 43^\circ$, e) $a = 3, \beta = 30^\circ, \alpha = 4\gamma$,
c) $b = 10, \beta = 135^\circ$, f) $c = 11, \alpha = \beta = 45^\circ$.

- D** **5.** W momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 30° , cień drzewa jest o 12 m dłuższy niż wtedy, gdy tworzą one kąt 40° . Oblicz wysokość drzewa.

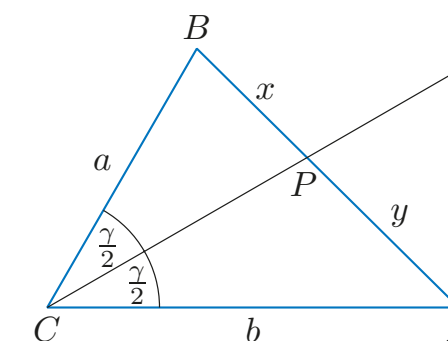


- D** **6.** Rozwiąż trójkąt ABC w przypadku, gdy:
a) $b = 10, \alpha = 30^\circ, \beta = 75^\circ$, d) $b = 6, c = 5, \beta = 20^\circ$,
b) $b = 6, \alpha = 45^\circ, \gamma = 75^\circ$, e) $a = 5, c = 7, \gamma = 110^\circ$,
c) $a = 12, b = 16, \alpha = 30^\circ$, f) $a = 6, c = 3, \gamma = 40^\circ$.

- D** **7.** Dane są kąty α i β trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 6 cm. Oblicz obwód trójkąta w przypadku, gdy:
a) $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ$, b) $\alpha = 30^\circ, \beta = 135^\circ$.

- D** **8.** Półprosta CP jest dwusieczną kąta γ w trójkącie ABC (rysunek obok). Korzystając z twierdzenia sinusów, udowodnij równość:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$



- D** **9.** Dany jest trójkąt o bokach a, b, c oraz kątach α, β, γ . Wyprowadź wzór:
- $$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

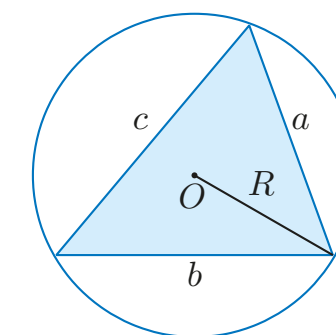
korzystając z tego, że pole dowolnego trójkąta wyraża każda z równości:

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma, \quad P = \frac{1}{2} ac \sin \beta, \quad P = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

- D** **10.** Uzasadnij, korzystając z twierdzenia sinusów, że pole dowolnego trójkąta o bokach a, b, c wyraża się za pomocą wzoru:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

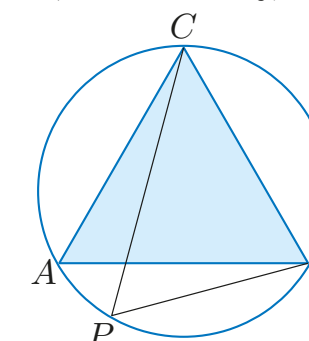


- D** **11.** Niech α i β będą kątami ostrymi trójkąta takimi, że $\alpha > \beta$. Uzasadnij, że bok a jest dłuższy od boku b .

- 12.** W okrąg wpisano trójkąt równoboczny ABC (rysunek obok). Punkt P należy do łuku $\widehat{AB}$.

a) Oblicz sinus kąta PAC w przypadku, gdy $|AC| = 6$ oraz $|PC| = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

- D** b) Wykaż, że $|AP| + |BP| = |CP|$.



5.12. Twierdzenie cosinusów (1)

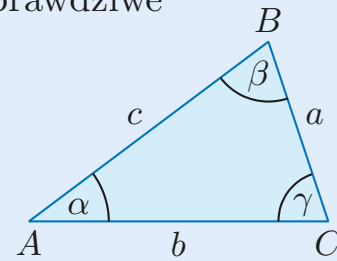
Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta (oznaczenia jak na rysunku) prawdziwe są następujące zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Dowód. Udowodnimy zależność $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. (Pozostałych dwóch zależności dowodzi się analogicznie). Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt γ . Rozpatrzmy dwa z nich (przypadek trzeci – patrz ćwiczenie 1.).

1° Kąt γ jest kątem prostym, czyli trójkąt ABC jest prostokątny.

Wówczas $\cos \gamma = 0$ i równość przybiera postać:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Jest ona prawdziwa na podstawie twierdzenia Pitagorasa.

2° Kąt γ jest kątem ostrym (rysunek poniżej).

Dowód przeprowadzimy przy założeniu, że $\angle BAC$ jest ostry. Z wierzchołka B opuszczamy wysokość h . Punkt D dzieli bok AC na dwa odcinki o długościach:

$$|DC| = a \cos \gamma, \quad |AD| = b - a \cos \gamma$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów CBD oraz ABD i otrzymujemy odpowiednio:

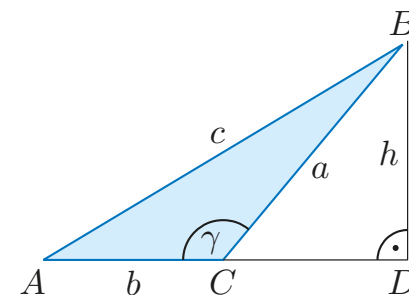
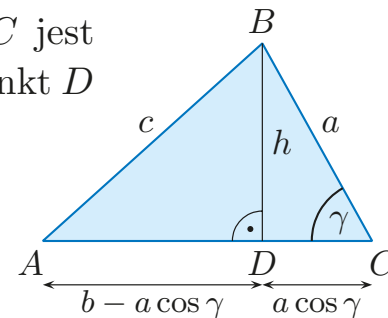
$$h^2 = a^2 - (a \cos \gamma)^2 \quad \text{oraz} \quad h^2 = c^2 - (b - a \cos \gamma)^2$$

Zatem:

$$c^2 - (b - a \cos \gamma)^2 = a^2 - (a \cos \gamma)^2$$

$$c^2 - b^2 + 2ab \cos \gamma - a^2 \cos^2 \gamma = a^2 - a^2 \cos^2 \gamma$$

Ostatecznie $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.



D Ćwiczenie 1

Udowodnij, że $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ w przypadku, gdy γ jest kątem rozwartym (rysunek obok).

Wskazówka. Zauważ, że $|CD| = a \cos(180^\circ - \gamma)$, a następnie wyznacz h^2 , korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCD oraz dla trójkąta BAD .

D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że z twierdzenia cosinusów wynika twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

D Przykład 1

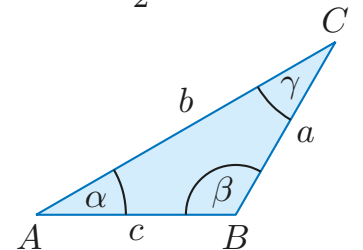
Uzasadnij, że trójkąt o bokach $a = 2\sqrt{3}$, $b = 6$ i kącie $\gamma = 30^\circ$ jest równoramienny. Oblicz miary pozostałych kątów tego trójkąta.

Aby obliczyć długość boku c , korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$c^2 = (2\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ = 12 + 36 - 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$$

Stąd $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Zatem jest to trójkąt równoramienny. Z twierdzenia cosinusów wynika, że $\cos \beta < 0$ (sprawdź), zatem β jest kątem rozwartym. Stąd $\alpha = 30^\circ$ oraz $\beta = 120^\circ$.



Ćwiczenie 3

Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC .

a) $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 60^\circ$

c) $a = 3$, $c = 2\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$

b) $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 150^\circ$

d) $b = 3$, $c = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 135^\circ$

Twierdzenie cosinusów pozwala również wyznaczyć kąty trójkąta, gdy dane są długości wszystkich jego boków.

Przykład 2

Wyznacz miary kątów trójkąta o bokach $a = 6$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{10}$.

Wyznaczamy miarę kąta γ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{36 + 18 - 90}{36\sqrt{2}} = -\frac{36}{36\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem $\gamma = 135^\circ$.

Wyznaczamy miarę kąta α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

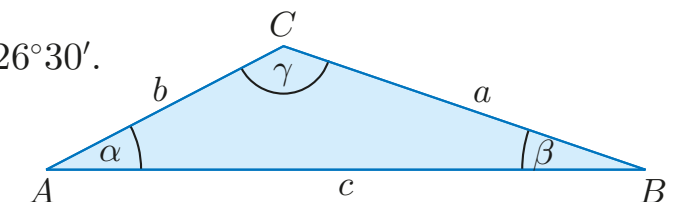
Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18 + 90 - 36}{18\sqrt{20}} = \frac{72}{36\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,8944$$

Z tablic (str. 385) odczytujemy: $\alpha \approx 26^\circ 30'$.

Wyznaczamy miarę kąta β :

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \approx 18^\circ 30'$$



Ćwiczenie 4

Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

- a) $a = 1, b = 1, c = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ b) $a = \sqrt{2}, b = 2, c = 1 + \sqrt{3}$

Zadania

- Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC .
a) $a = 4, b = \sqrt{3}, \gamma = 30^\circ$ c) $a = 2, b = 6, \gamma = 120^\circ$
b) $b = 5, c = 3\sqrt{2}, \alpha = 45^\circ$ d) $a = 2\sqrt{3}, c = 4, \beta = 150^\circ$
- Dane są długości dwóch boków trójkąta ABC : $a = 6, b = 10$ oraz wiadomo, że $\sin \gamma = \frac{4}{5}$. Oblicz długość boku c w przypadku, gdy kąt γ jest:
a) ostry, b) rozwarty.
- Dane są długości a, b dwóch sąsiednich boków równoległoboku oraz kąt γ wyznaczony przez te boki. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.
a) $a = 2, b = 4\sqrt{3}, \gamma = 30^\circ$ c) $a = 5, b = 3, \gamma = 60^\circ$
b) $a = 4, b = 2\sqrt{2}, \gamma = 45^\circ$ d) $a = 6, b = 8, \gamma = 120^\circ$
- Oblicz miarę kąta β trójkąta ABC .
a) $a = 5, b = \sqrt{19}, c = 3$ b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{10}, c = 2$
- Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.
a) $a = 2\sqrt{3}, b = 4\sqrt{3}, c = 6$ b) $a = \sqrt{6}, b = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{3} + 3$
-  a) Jeden z boków trójkąta jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt zawarty między nimi jest równy 60° . Trzeci bok tego trójkąta ma długość 7. Oblicz długości dwóch pozostałych boków.
b) Jeden z boków trójkąta jest czterokrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt zawarty między nimi jest równy 120° . Trzeci bok tego trójkąta ma długość 21. Oblicz długości dwóch pozostałych boków.
- W trapezie $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość $8\sqrt{3}$, a kąt BAD jest równy 60° . Przekątna AC ma długość 6 i zawiera się w dwusiecznej kąta BAD . Oblicz obwód tego trapezu.

5.13. Twierdzenie cosinusów (2)

Aby rozwiązać trójkąt, gdy mamy dane długości jego dwóch boków i miarę kąta położonego naprzeciwko jednego z nich, możemy skorzystać z twierdzenia sinusów lub postąpić tak jak w przykładzie poniżej.

Przykład 1

W trójkącie ABC (rysunek obok) dane są długości boków $|AC| = 4, |BC| = 5$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$. Oblicz długość boku AB .

Korzystamy ze wzoru $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$:

$$25 = 16 + c^2 - 2 \cdot 4 \cdot c \cdot \cos 60^\circ$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$c^2 - 4c - 9 = 0$$

$$\Delta = 16 + 36 = 52, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{13}$$

Stąd:

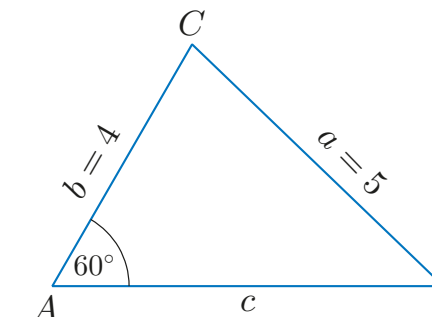
$$c = \frac{4 - 2\sqrt{13}}{2} = 2 - \sqrt{13} < 0 \text{ (sprzeczność)}$$

lub

$$c = \frac{4 + 2\sqrt{13}}{2} = 2 + \sqrt{13}$$

Zatem bok AB ma długość równą $2 + \sqrt{13}$.

Zauważ, że równanie $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, gdzie nieznaną jest bok c , może mieć dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie lub nie mieć rozwiązań.



Ćwiczenie 1

Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC .

- a) $|AC| = 8, |BC| = 7, |\sphericalangle BAC| = 60^\circ$
b) $|AC| = 5, |AB| = 8, |\sphericalangle ABC| = 45^\circ$

Ćwiczenie 2

W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 2\sqrt{6}$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$ oraz miara kąta BAC równa 30° . Rozwiąż ten trójkąt.



Ćwiczenie 3

Rozwiąż trójkąt ABC w przypadku, gdy:

- a) $b = 6, c = 6\sqrt{2}, \beta = 45^\circ$, c) $a = 3 + \sqrt{3}, b = 3\sqrt{2}, \beta = 60^\circ$,
b) $a = 4, b = 2 + 2\sqrt{3}, \gamma = 30^\circ$, d) $a = 2\sqrt{7}, c = 2, \alpha = 120^\circ$.

Twierdzenie

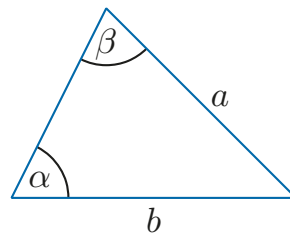
W trójkącie naprzeciwko większego kąta leży dłuższy bok.

Dowód

Niech α będzie kątem ostrym. Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt β .

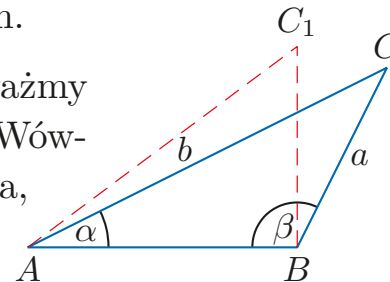
1° Kąt β jest kątem ostrym (rysunek obok). Załóżmy, że $\alpha < \beta$, wówczas $\sin \alpha < \sin \beta$, czyli $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < 1$. Na podstawie twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ zatem } a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < b$$



2° Kąt β jest kątem prostym. Wtedy β jest największym kątem trójkąta, a przeciwprostokątna jest jego najdłuższym bokiem.

3° Kąt β jest kątem rozwartym (rysunek obok). Rozważmy trójkąt prostokątny ABC_1 taki, że $|BC_1| = |BC|$. Wówczas $a < |AC_1|$ oraz z twierdzenia cosinusów wynika, że $|AC_1| < b$ (gdyż $\cos \beta < 0$). Zatem $a < b$.



Ćwiczenie 4

- a) Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, którego dwa krótsze boki mają długości 2 cm i $2\sqrt{3}$ cm, a jeden z kątów ma miarę 150° .
- b) Suma miar dwóch kątów trójkąta ostrokątnego jest równa 135° , a jego dwa dłuższe boki mają długości $3\sqrt{2}$ cm i $(3 + \sqrt{3})$ cm. Oblicz długość trzeciego, najkrótszego boku tego trójkąta.

D Przykład 2

Dany jest trójkąt o bokach 2, 3 i 4. Kąt α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, a kąt β – największym. Wykaż, że dla kątów tego trójkąta zachodzą zależności: $\sin \beta = 2 \sin \alpha$ oraz $\cos \beta = -\frac{2}{7} \cos \alpha$.

Kąt α leży naprzeciwko najkrótszego boku trójkąta, a kąt β – naprzeciwko najdłuższego. Z twierdzenia sinusów:

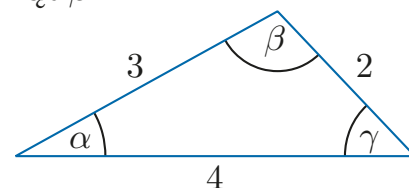
$$\frac{2}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \beta}$$

zatem $\sin \beta = 2 \sin \alpha$.

Korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \alpha = \frac{4^2 + 3^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$
$$\cos \beta = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Zatem $\cos \beta = -\frac{2}{7} \cos \alpha$.



D Ćwiczenie 5

Dany jest trójkąt o bokach 4, 5 i 6. Kąt α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, a β – największym. Wykaż, że $\sin \beta = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

D Przykład 3

a) Wykaż, że trójkąt o bokach długości: $a = 4$, $b = 6$ i $c = 9$ jest rozwartokątny.

Bok c jest najdłuższym bokiem trójkąta, zatem kąt γ jest jego największym kątem. Obliczamy $\cos \gamma$, korzystając z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4^2 + 6^2 - 9^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{-29}{48}$$

Otrzymaliśmy $\cos \gamma < 0$, więc $\gamma \in (90^\circ; 180^\circ)$. Oznacza to, że trójkąt jest rozwartokątny.

b) Wykaż, że trójkąt o bokach długości: $a = 9$, $b = 7$ i $c = 6$ jest ostrokątny.

Bok a jest najdłuższym bokiem trójkąta, zatem kąt α jest jego największym kątem. Obliczamy $\cos \alpha$, korzystając z twierdzenia cosinusów.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 6^2 - 9^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

Otrzymaliśmy $\cos \alpha > 0$, więc $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$. Największy kąt trójkąta jest kątem ostrym, co oznacza, że trójkąt jest ostrokątny.

Ćwiczenie 6

Oblicz cosinus kąta leżącego naprzeciw najdłuższego boku trójkąta o podanych bokach. Czy trójkąt ten jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny?

a) $a = 8$, $b = 7$, $c = 5$

c) $a = 10$, $b = 11$, $c = 4$

b) $a = 25$, $b = 7$, $c = 24$

d) $a = 6$, $b = 20$, $c = 21$

Zadania

1. Oblicz cosinus największego kąta trójkąta o podanych bokach. Czy środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz trójkąta?

a) $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$

c) $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = 1$

b) $a = 10$, $b = 7$, $c = 5$

d) $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$

2. Boki trójkąta mają długości 5, 6 i 7. Oblicz:

a) cosinus kąta leżącego naprzeciw najdłuższego boku,

b) długość środkowej poprowadzonej do boku o długości 6,

c) promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3. Dane są dwa boki a i b pewnego trójkąta oraz jego pole P . Oblicz cosinus kąta wyznaczonego przez te boki, a następnie oblicz długość boku c .

a) $a = 4, b = 10, P = 12$ b) $a = 5, b = 6, P = 10\sqrt{2}$

4. Oblicz $\cos \gamma$, $\sin \gamma$ i pole trójkąta o bokach a, b, c .

a) $a = 3, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{5}$ b) $a = 2, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{3}$

5. a) Oblicz długość przekątnej trapezu równoramiennego, którego dłuższa podstawa ma długość 10 cm, ramię ma długość 6 cm, a kąt między ramieniem i dłuższą podstawą ma miarę 60° .

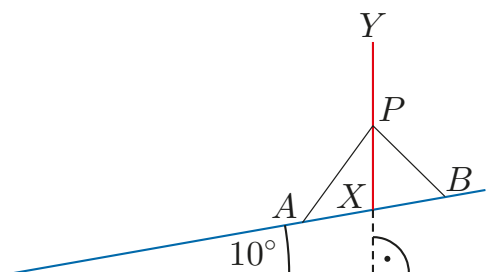
b) Podstawy trapezu mają długości 3 cm i 6 cm, a jego ramiona są równe 4 cm i 5 cm. Oblicz długości przekątnych tego trapezu.

6. a) Oblicz długości przekątnych rombu o obwodzie równym 16, jeśli wiadomo, że cosinus kąta rozwartego tego rombu jest równy $-\frac{1}{8}$.

b) Kąt rozwarty równoległoboku jest dwukrotnie większy od jego kąta ostrego, a jeden z jego boków jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku. Obwód równoległoboku jest równy 16. Oblicz długości jego przekątnych.

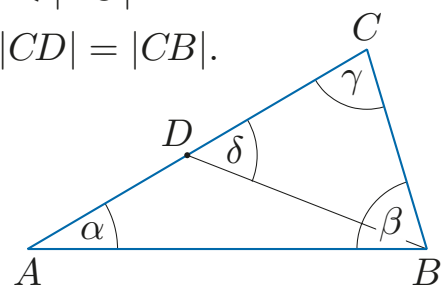


7. Na stoku o kącie nachylenia 10° ustawiono słup XY wysokości 14 m. Jakiej długości są odciagi poprowadzone z punktu P , położonego w środku wysokości słupa, do punktów A i B znajdujących się 6 m od podstawy słupa (rysunek obok)?



8. Przeczytaj podany w ramce szkic dowodu twierdzenia mówiącego, że kąt leżący naprzeciwko dłuższego boku trójkąta jest większy od kąta leżącego naprzeciwko krótszego boku.

Rozpatrujemy trójkąt ABC , w którym $|BC| < |AC|$.
Na boku AC wyznaczamy punkt D taki, że $|CD| = |CB|$.
1. Zauważamy, że $\alpha < \delta$.
2. $|\sphericalangle CBD| < \beta$ oraz $\delta = |\sphericalangle CBD|$ (trójkąt BCD jest równoramienny), więc $\alpha < \beta$.



Uzasadnij spostrzeżenie, że w powyższym szkicu dowodu $\alpha < \delta$.

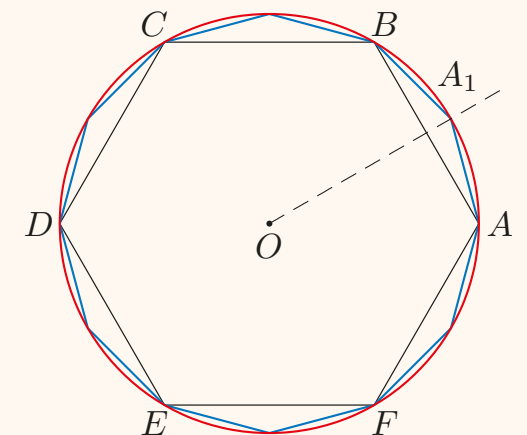
Dowiedz się więcej

Konstrukcja wybranych wielokątów foremnych

Nie wszystkie n -kąty foremne można skonstruować, korzystając tylko z cyrkla i linijki. Carl F. Gauss udowodnił twierdzenie mówiące, dla jakich liczb n jest to możliwe. Na przykład dla $n < 20$ są to: $n \in \{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17\}$.

Konstrukcja sześciokąta foremnego i dwunastokąta foremnego wpisanego w okrąg

- Na okręgu wybieramy dowolny punkt A i zaczynając od tego punktu, odmierzamy łuki o promieniach równych promieniowi okręgu. Wyznaczone w ten sposób punkty: A, B, C, D, E i F są wierzchołkami sześciokąta foremnego.



- Konstruujemy symetralną odcinka AB . Przecina ona okrąg w punkcie A_1 . Odcinek AA_1 jest bokiem dwunastokąta foremnego wpisanego w ten okrąg.

- Następnie, zaczynając od punktu A_1 , odmierzamy łuki okręgów o promieniu $|AA_1|$. Punkty przecięcia tych łuków z okręgiem są pozostałymi wierzchołkami dwunastokąta.

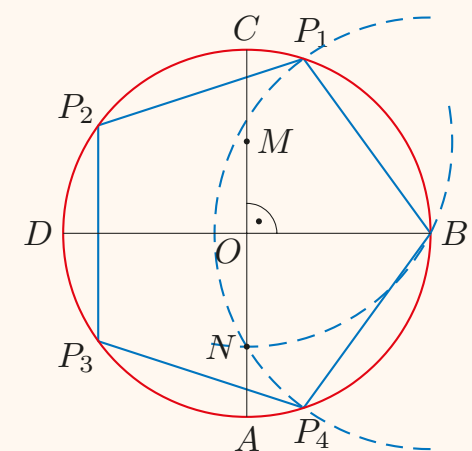
1. Skonstruuj kwadrat i ośmiokąt foremny wpisane w dany okrąg.

Konstrukcja pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg

- Rysujemy dwie prostopadłe średnice AC i BD .
- Wyznaczamy punkt M – środek odcinka OC , gdzie O jest środkiem okręgu.

- Rysujemy łuk okręgu o środku M i promieniu $|BM|$. Łuk ten przecina średnicę AC w punkcie N .

- Odcinek BN ma długość boku szukanego pięciokąta – odkładamy go kolejno na okręgu i otrzymujemy pozostałe wierzchołki pięciokąta: P_1, P_2, P_3 i P_4 .



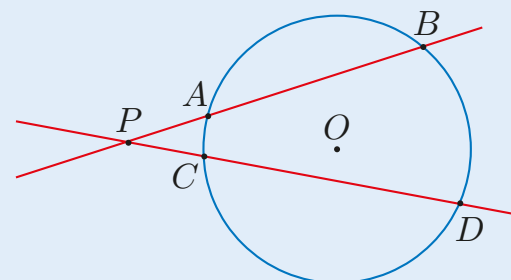
2. Powyżej opisano konstrukcję pięciokąta foremnego wpisanego w dany okrąg. Opisz, jak za pomocą cyrkla i linijki skonstruować pięciokąt foremny, gdy dany jest bok tego pięciokąta.

Odcinki stycznych i siecznych

Twierdzenie o siecznych

Jeśli dwie sieczne poprowadzone z punktu P leżącego na zewnątrz okręgu przecinają okrąg odpowiednio w punktach A i B oraz C i D , to:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$



Dowód

Czworokąt $ACDB$ jest wpisany w okrąg, stąd $|\sphericalangle CAB| = 180^\circ - |\sphericalangle PDB|$.

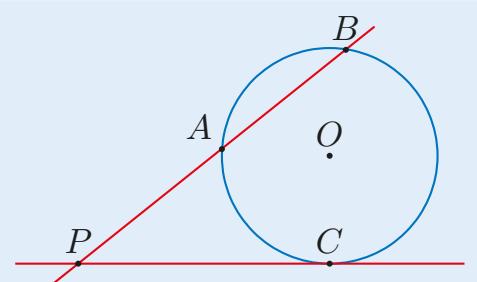
$|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PDB|$, co oznacza, że trójkąty PAC i PDB są podobne.

Z proporcji $\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|}$ otrzymujemy równość $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

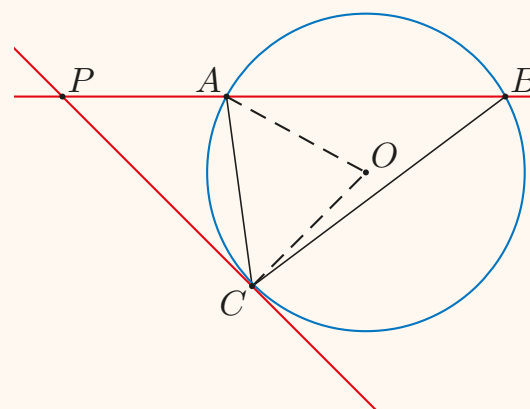
Twierdzenie o stycznej i siecznej

Jeśli przez punkt P przechodzi styczna do okręgu w punkcie C oraz sieczna przecinająca okrąg w punktach A i B , to:

$$|PC|^2 = |PA| \cdot |PB|$$



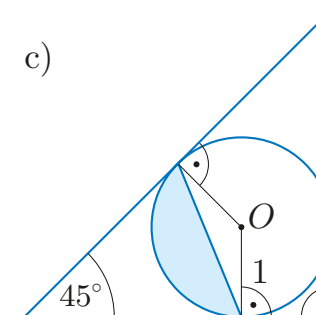
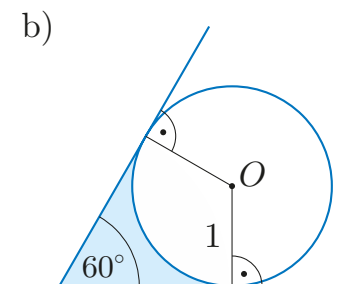
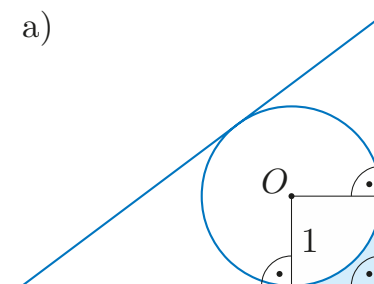
- D** 1. Dany jest okrąg o środku w punkcie O . Z punktu P poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie C oraz sieczną przecinającą okrąg w punktach A i B . Udowodnij twierdzenie o stycznej i siecznej, wykazując kolejno, że:
- $\triangle PCA \sim \triangle PBC$,
 - $|PC|^2 = |PA| \cdot |PB|$.
2. Oblicz odległość punktu P od środka okręgu o promieniu 2,5 cm, jeśli wiadomo, że:
- styczna do tego okręgu poprowadzona z punktu P ma z okręgiem punkt wspólny A taki, że $|PA| = 6$ cm,
 - sieczna poprowadzona z punktu P przecina ten okrąg w punktach C i D takich, że $|PC| = 2$ cm i $|PD| = 5$ cm.



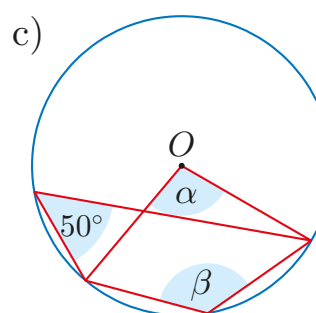
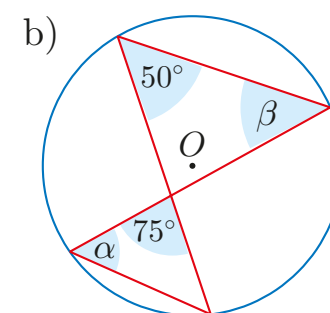
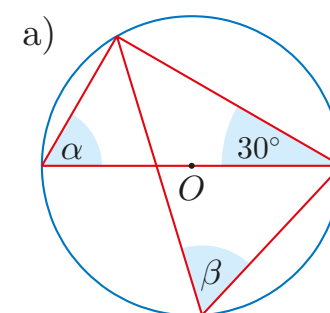
Powtórzenie

Zestaw I

1. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.



2. Wyznacz miary kątów α i β .

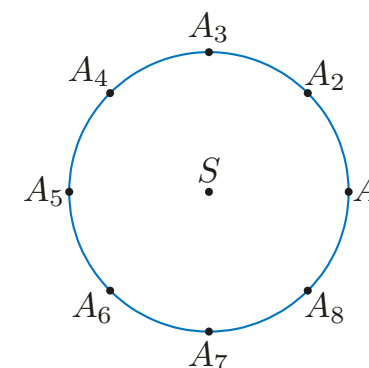


3. Odcinek AC jest średnicą okręgu o promieniu 2. Cięciwa AB tego okręgu ma długość $2\sqrt{3}$. Wyznacz miarę kąta ostrego między:

- cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie B ,
- cięciwą BC a styczną do okręgu w punkcie C .

4. Punkty: $A_1, A_2, \dots, A_8$ dzielą okrąg na 8 łuków o równej długości (rysunek obok). Wyznacz miarę kąta ostrego między:

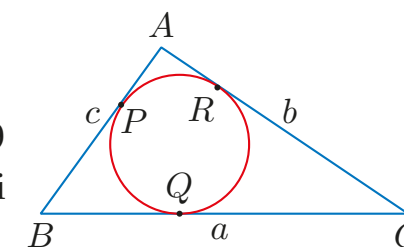
- cięciwą A_1A_2 a styczną do okręgu w punkcie A_1 ,
- cięciwą A_3A_8 a styczną do okręgu w punkcie A_8 .



5. Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt:

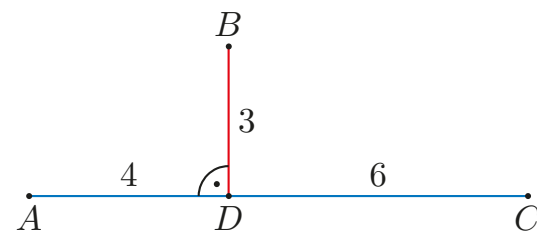
- prostokątny równoramienny, którego wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa 3,
- o bokach długości 20, 21 i 29.

6. W trójkąt o bokach: $a = 16$, $b = 13$ oraz $c = 9$ wpisano okrąg (rysunek obok). Oblicz długości odcinków: AP , BQ i CR .



- D** 7. Wykaż, że suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa sumie średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt i okręgu na nim opisanego.

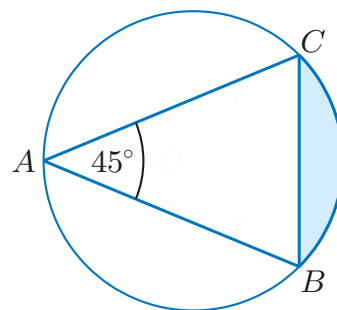
8. Oblicz promień okręgu przechodzącego przez punkty A , B , D oraz promień okręgu przechodzącego przez punkty A , B , C (rysunek obok). Oblicz odległość między środkami tych okręgów.



9. W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z przeciwprostokątną podzielił ją na odcinki długości 6 i 9. Oblicz pole tego trójkąta oraz promień wpisanego okręgu.
10. Okrąg o promieniu 1 cm jest wpisany w trójkąt równoramienny o podstawie 4 cm. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.
11. Jeden z boków trójkąta wpisanego w okrąg jest jego średnicą i ma długość 5 cm. Oblicz pole tego trójkąta w przypadku, gdy:
- stosunek długości jego pozostałych boków jest równy $\frac{1}{3}$,
 - jest on równoramienny.

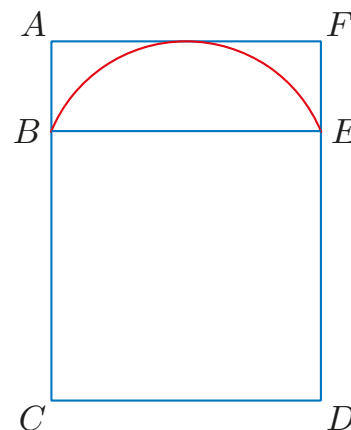
12. Trójkąt równoramienny ABC o kącie między ramionami 45° jest wpisany w okrąg o promieniu 8 (rysunek obok). Oblicz:

- długości łuków $\widehat{AB}$ i $\widehat{BC}$,
- pole zacieniowanego odcinka koła,
- obwód trójkąta ABC .



Zestaw II

1. Dany jest równoległobok o bokach a i $2a$ oraz kącie ostrym 30° . Wyznacz długości przekątnych tego równoległoboku.
2. Bok kwadratu $BCDE$ ma długość 6 (rysunek obok), a przekątna prostokąta $ACDF$ ma długość 10. Oblicz promień okręgu, którego łukiem jest $\widehat{BE}$.
3. Długości podstaw trapezu równoramiennego są równe 5 i 3. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie w przypadku, gdy jego:
- wysokość jest równa 3,
 - kąt ostry ma miarę 30° .

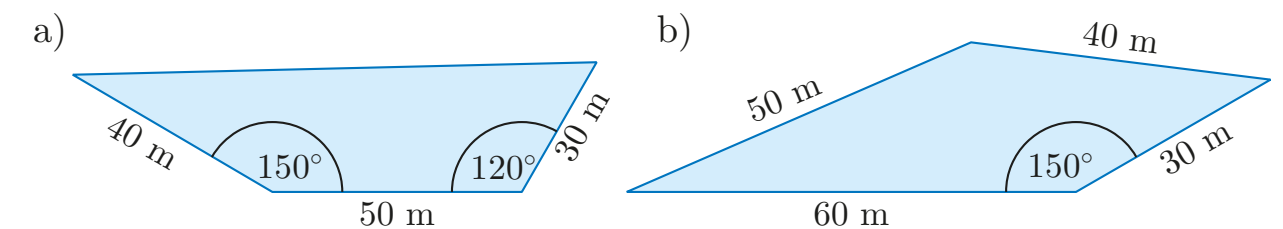


4. Oblicz pole ośmiokąta foremnego:
- opisanego na kole o polu równym $4\pi \text{ cm}^2$,
 - którego najkrótsza przekątna ma długość 2 cm.

5. Oblicz obwód i pole trójkąta ABC .

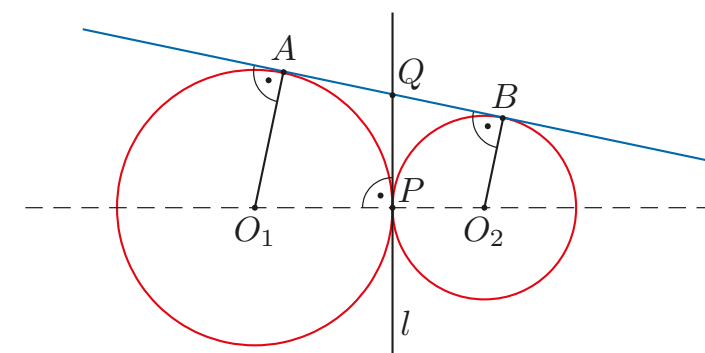
- $a = 10$, $b = 8$, $\gamma = 60^\circ$
- $b = 4$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$

6. Działka budowlana ma kształt czworokąta. Wyniki pomiarów wykonanych przez geodetę są przedstawione na rysunku. Oblicz pole powierzchni tej działki.



7. Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg o promieniu 6. Boki AD i DC mają równe długości, a kąt ABC ma miarę 120° . Stosunek pól trójkątów ABD i BCD jest równy 2 : 1. Oblicz pole tego czworokąta.
8. Środek okręgu opisanego na trapezie leży na jednej z jego podstaw. Podstawy te mają długości 15 i 9. Oblicz długości ramion tego trapezu.
9. W trapez równoramienny wpisano okrąg. Oblicz pole tego trapezu, jeśli:
- jego wysokość ma 2 cm, a suma długości ramion jest równa 10 cm,
 - promień okręgu jest równy 6 cm, a kąt ostry trapezu ma miarę 30° .
10. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości a i $3a$. Ile powinna być równa wysokość tego trapezu, aby można było w niego wpisać okrąg?

- D** 11. Uzasadnij, że prosta l na rysunku poniżej dzieli odcinek AB na połowy. Następnie przyjmij, że promień większego okręgu jest równy 16, a mniejszego 9, i oblicz promień okręgu:

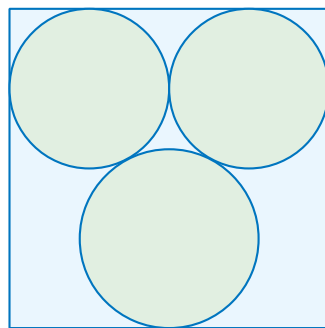


- opisanego na czworokącie O_1PQA ,
- wpisanego w czworokąt O_1PQA .

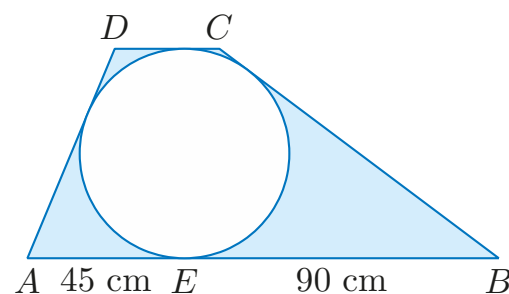


Zadania z kontekstem realistycznym

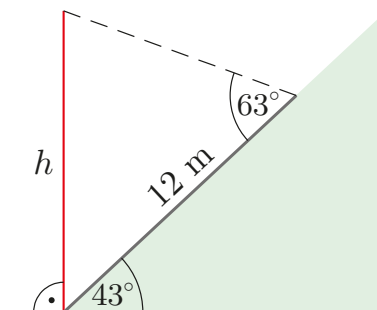
1. Na kwadratowym placu o boku 32 m wyznaczono trzy trawniki w kształcie kół. Koła te są parami styczne zewnętrznie, promienie kół stycznych do jednego boku są równe (rysunek obok). Zakupiono nasiona pozwalające obsiać 600 m^2 powierzchni. Czy taka ilość nasion wystarczy do obsiania tych trzech trawników?



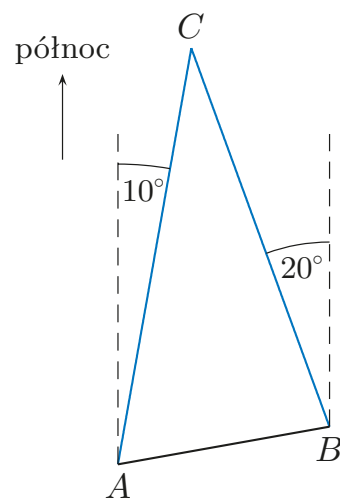
2. Z kawałka materiału mającego kształt trapezu (rysunek obok) krawcowa wycięła serwetkę w kształcie koła o promieniu 30 cm. Punkt E jest punktem styczności koła z podstawą AB trapezu i dzieli ją na odcinki o długościach 45 cm i 90 cm. Oblicz, jaki procent materiału został odrzucony jako ścinki (obszar zaznaczony na rysunku na niebiesko).



3. Do białej szpilki przyczepiono dwie nitki, każda o długości 1 metra. Obie te nitki naprężono. Jaka powinna być odległość między ich nieprzyczepionymi do szpilki końcami, aby kąt zawarty między nitkami miał miarę 1° ? Wynik zaokrąglij do centymetrów.



4. Maszt o wysokości h rzuca cień długości 12 m na zbocze nachylone do poziomu pod kątem 43° (rysunek obok). Kąt padania promieni słonecznych na zbocze wynosi 63° . Oblicz wysokość masztu z dokładnością do 0,1 m.



5. Dwaj obserwatorzy znajdują się w punktach A i B oddalonych od siebie o 500 m (rysunek obok). Obserwator A zameldował, że punkt C jest odchylony o 10° , a punkt B – o 80° na wschód od kierunku północnego. Obserwator B stwierdził, że punkt C znajduje się o 20° na zachód od kierunku północnego. Oblicz, z dokładnością do 0,1 m, odległość każdego z obserwatorów od punktu C .



Sposób na zadanie

Przykład

Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AD| = |AC|$, $|BD| = 1$, $|CD| = 5$ i $|BC| = 4\sqrt{2}$. Oblicz obwód trójkąta ADC .

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

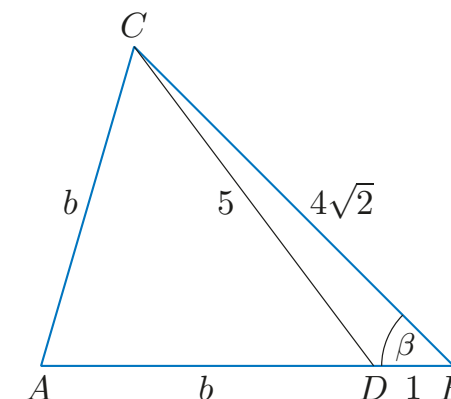
Aby obliczyć $\cos \beta$, korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD :

$$5^2 = (4\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos \beta$$

$$25 = 33 - 8\sqrt{2} \cos \beta$$

$$8\sqrt{2} \cos \beta = 8$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Obliczamy b , korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC :

$$b^2 = (b+1)^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot (b+1) \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos \beta$$

$$b^2 = b^2 + 2b + 1 + 32 - 8b - 8$$

$$6b = 25$$

$$b = 4\frac{1}{6}$$

Obwód trójkąta ADC jest równy $2 \cdot 4\frac{1}{6} + 5 = 13\frac{1}{3}$.

II sposób

Aby obliczyć $\cos \delta$ (rysunek obok), korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD :

$$(4\sqrt{2})^2 = 5^2 + 1^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \cos \delta$$

$$32 = 26 - 10 \cos \delta$$

$$10 \cos \delta = -6$$

$$\cos \delta = -\frac{3}{5}$$

Zatem:

$$\cos |\angle ADC| = \cos(180^\circ - \delta) = -\cos \delta = \frac{3}{5}$$

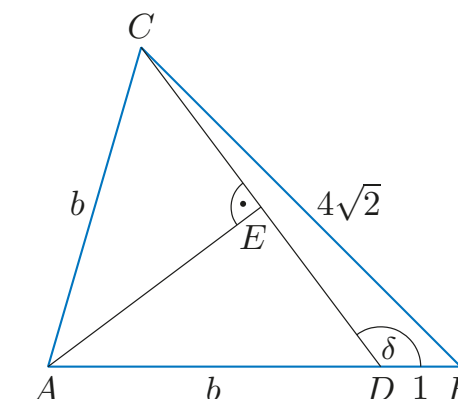
Prowadzimy wysokość AE trójkąta równoramiennego ACD . Trójkąt ADE jest prostokątny oraz $|ED| = \frac{5}{2}$, więc:

$$\cos |\angle ADC| = \cos |\angle ADE| = \frac{|ED|}{|AD|}$$

Stąd:

$$\frac{3}{5} = \frac{\frac{5}{2}}{b}, \text{ czyli } b = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = 4\frac{1}{6}$$

Obwód trójkąta ADC jest równy $2 \cdot 4\frac{1}{6} + 5 = 13\frac{1}{3}$.



Odpowiedź: $Ob_{\triangle ADC} = 13\frac{1}{3}$

→ Zadanie 24, str. 287



W zadaniach 1–8 i 12.1 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Dany jest okrąg o promieniu $a\sqrt{2}$. Pole sześciokąta foremnego wpisanego w ten okrąg jest równe

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ B. $6a^2$ C. $3\sqrt{3}a^2$ D. $6\sqrt{3}a^2$

Zadanie 2 (0–1)

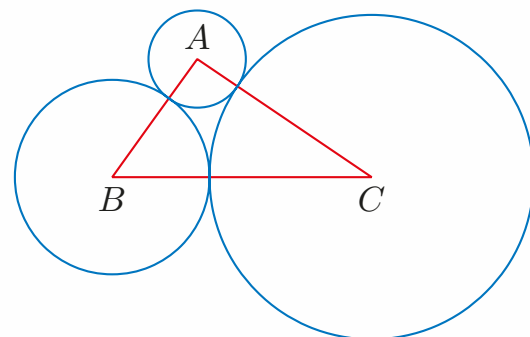
Pole wycinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez kąt 54° jest równe

- A. $0,6\pi$ B. $1,2\pi$ C. $1,8\pi$ D. $2,4\pi$

Zadanie 3 (0–1)

Dane są trzy okręgi o środkach A , B , C parami styczne zewnętrznie (rysunek obok). Promienie tych okręgów są odpowiednio równe 3, 6 i 10. Cosinus największego kąta trójkąta ABC wynosi

- A. $-\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{16}$ C. $-\frac{1}{39}$ D. 0



Zadanie 4 (0–1)

W trójkąt równoramienny o kącie między ramionami 120° wpisano okrąg o średnicy 12. Podstawa tego trójkąta ma długość

- A. $6 + 4\sqrt{3}$ B. $12\sqrt{3}$ C. $24 + 12\sqrt{3}$ D. $36 + 24\sqrt{3}$

Zadanie 5 (0–1)

Cosinus kąta przy wierzchołku trójkąta równoramiennego jest równy $\frac{1}{50}$, a jego ramię ma długość 30. Obwód tego trójkąta jest równy

- A. 108 B. 102 C. 96 D. 92

Zadanie 6 (0–1)

W trójkącie ABC dane są: $|\angle BAC| = 120^\circ$, $|AB| = \sqrt{2} - 1$ i $|AC| = \sqrt{2} + 1$. Wskaż długość boku BC tego trójkąta.

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{2}$

Zadanie 7 (0–1)

Dany jest trójkąt o bokach 2, $2\sqrt{2}$ i $\sqrt{6}$. Cosinus największego kąta tego trójkąta jest równy

- A. $\frac{\sqrt{6}}{12}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{8}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{8}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

Zadanie 8 (0–1)

Sąsiednie boki równoległoboku mają długości 4 i $2 + 2\sqrt{3}$, a jego kąt rozwarty ma miarę 150° . Jedna z przekątnych tego równoległoboku ma długość

- A. $2 + \sqrt{2}$ B. $2 + \sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

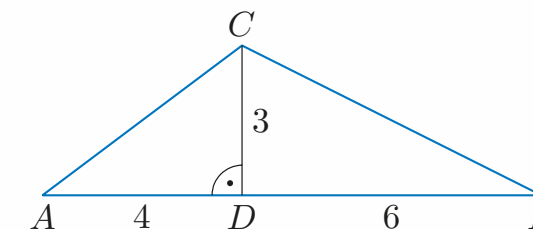


Zadanie 9 (0–1)

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok).

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.

Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Promień okręgu opisanego na trójkącie BCD jest równy 4,5.	P	F
Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 5.	P	F

Zadanie 10 (0–1)

Kąty trójkąta równoramiennego ABC mają miary: α , α i 4α , a jego ramię ma długość 2.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

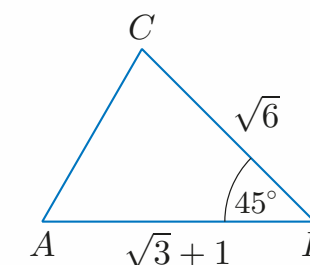
Obwód trójkąta ABC jest równy $4 + 4\sqrt{3}$.	P	F
Jedna ze środkowych trójkąta ABC ma długość $\sqrt{7}$.	P	F

Zadanie 11 (0–1)

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok).

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Bok AC ma długość równą



A.	2,	a pole trójkąta ABC jest równe	1.	$\frac{3+\sqrt{2}}{2}$.
B.	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$,		2.	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.
C.	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$,		3.	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$.

Zadanie 12

Dany jest romb o obwodzie 16 i kącie rozwartym α takim, że $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

Zadanie 12.1 (0–1)

Pole tego rombu jest równe

- A. $4\sqrt{15}$ B. $6\sqrt{15}$ C. $8\sqrt{5}$ D. $8\sqrt{15}$

Zadanie 12.2 (0–2)

Oblicz długość krótszej przekątnej tego rombu.



Zadanie 13 (0-2)

Punkty $A_1, A_2, \dots, A_8$ dzielą okrąg na osiem równych łuków.

Uzupełnij zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi wybrane spośród oznaczonych literami A–F i wpisz te litery w wyznaczonych miejscach.

Miarę równą $22^\circ 30'$ mają oraz .

A. $\sphericalangle A_1 A_4 A_3$

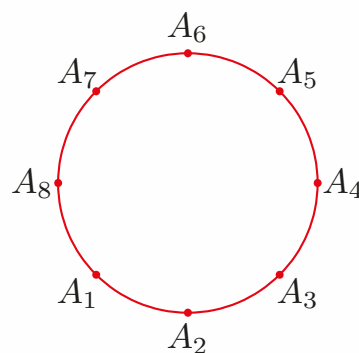
C. $\sphericalangle A_6 A_8 A_7$

E. $\sphericalangle A_2 A_6 A_3$

B. $\sphericalangle A_8 A_1 A_5$

D. $\sphericalangle A_2 A_7 A_8$

F. $\sphericalangle A_5 A_2 A_3$



Zadanie 14

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C i przyprostokątnych o długościach 10 cm oraz 24 cm.

Zadanie 14.1 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Pole koła opisanego na tym trójkącie jest równe

A.	$169\pi \text{ cm}^2$,	ponieważ średnica tego koła jest równa	1.	12 cm.
B.	$144\pi \text{ cm}^2$,		2.	24 cm.
			3.	26 cm.

Zadanie 14.2 (0-2)

Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty. Oblicz długości okręgów opisanych na tych trójkątach.

Zadanie 15 (0-2)

Dany jest trójkąt o bokach długości 4, 5 i 6. Najmniejszy kąt tego trójkąta jest równy α , a największy β .

Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj właściwe dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Numer zadania	Zdanie do uzupełnienia	Dokończenie zdania
15.1	$\cos \alpha$ jest równy	?
15.2	$\cos \beta$ jest równy	?

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

E. $\frac{4}{5}$



Zadanie 16 (0-2)

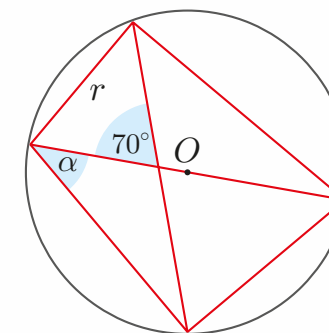
Pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy $\alpha < 180^\circ$ jest równe P . Ile jest równe pole wycinka koła o promieniu $2r$ wyznaczonego przez kąt 2α ?

Zadanie 17 (0-2)

Oblicz różnicę między polem koła opisanego na kwadracie o boku $\sqrt{2} + 1$ a polem koła wpisanego w ten kwadrat.

Zadanie 18 (0-3)

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O i promieniu r . Wyznacz kąt α .



Zadanie 19 (0-2)

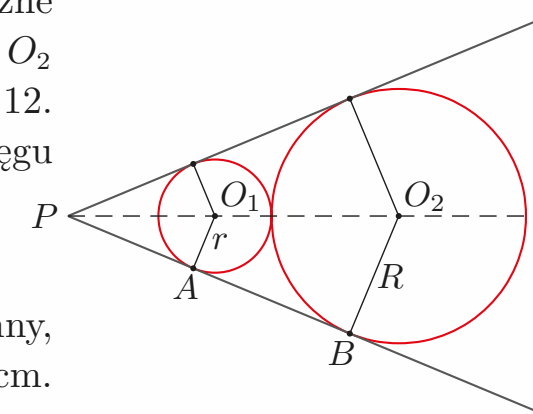
Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego najdłuższy bok ma długość 65, a najkrótszy 25.

Zadanie 20 (0-4)

Kąt rozwarty równoległoboku jest trzy razy większy od jego kąta ostrego, a stosunek długości jego boków jest równy $1:2\sqrt{2}$. Jego krótsza przekątna ma długość $2\sqrt{5}$. Oblicz pole i obwód tego równoległoboku.

Zadanie 21 (0-4)

Dane są dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 styczne zewnętrznie (rysunek obok). Okrąg o środku O_2 ma promień $R = 5$ oraz wiadomo, że $|PB| = 12$. Oblicz sinus kąta O_1PA oraz promień r okręgu o środku O_1 .



Zadanie 22 (0-4)

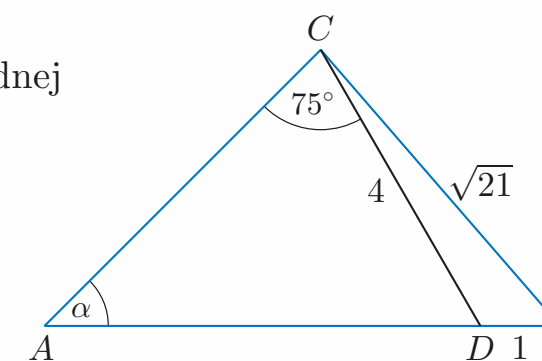
Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny, którego przeciwprostokątna ma długość 8 cm. Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 23 (0-4)

Wyznacz miary kątów rombu o boku a i jednej z przekątnych długości $a\sqrt{2} - \sqrt{2}$.

D Zadanie 24 (0-4) → Przykład, str. 283

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok). Uzasadnij, że kąt α ma miarę 45° , i oblicz obwód trójkąta ABC .



**Zadanie 1 (0–2)**

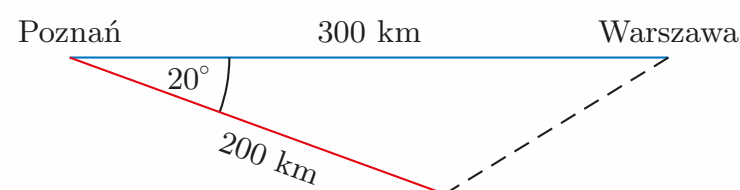
Czworokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 4$ cm, $|BC| = 5$ cm, jest opisany na okręgu o średnicy 3 cm. Oblicz pole tego czworokąta.

Zadanie 2 (0–2)

W trójkącie ABC dane są: $|\sphericalangle ABC| = 23^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 64^\circ$ i $|BC| = 800$. Oblicz długość boku AC tego trójkąta i zaokrąglij ją do najbliższej liczby całkowitej.

Zadanie 3 (0–2)

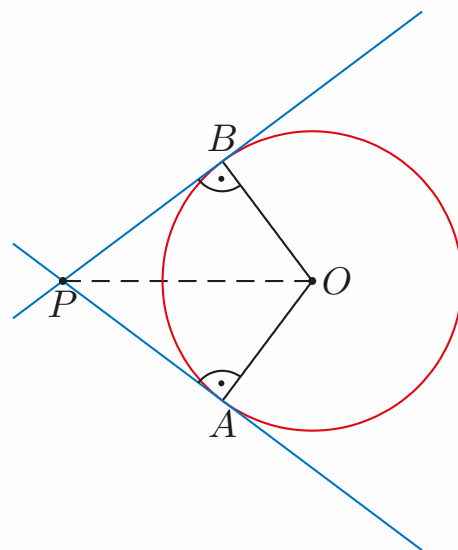
Odległość między Poznaniem a Warszawą jest równa 300 km. Pilot lecący samolotem z Poznania do Warszawy po przebyciu 200 km zorientował się, że pomylił kurs o 20° . W jakiej odległości (z dokładnością do 1 km) znajdował się wówczas od Warszawy?

**Zadanie 4 (0–4)**

Oblicz pole koła wpisanego w trapez równoramienny o podstawach długości 8 cm i 18 cm.

Zadanie 5 (0–5)

Proste AP i BP są styczne do okręgu o środku w punkcie O i promieniu $r = 3$ cm (rysunek obok). Odległość punktu O od punktu P jest równa 5 cm. Oblicz promień okręgu wpisanego w czworokąt $PAOB$.

**Zadanie 6 (0–4)**

Dany jest trójkąt o bokach 6 cm, 5 cm i 4 cm. Oblicz długość środkowej tego trójkąta poprowadzonej do najdłuższego boku.

Zadanie 7 (0–4)

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 12$, $|AC| = 6$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D . Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABD .

Zadanie 8 (0–4)

Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość $2\sqrt{10}$. Punkt A leży na odcinku CD oraz $|AD| = 2$, $|BD| = 8$. Oblicz obwód trójkąta ABC .

6 Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Do opisu niektórych wielkości fizycznych wykorzystujemy **skalę logarytmiczną**. Jedną z takich wielkości jest poziom głośności różnych źródeł dźwięku (tabela obok) – dziesięciokrotnemu wzrostowi natężenia dźwięku odpowiada wzrost poziomu głośności o 10 decybeli (patrz str. 317).

Źródło dźwięku	Poziom głośności
Odrzutowiec	160 decybeli
Koncert rockowy	120 decybeli
Cicha rozmowa	40 decybeli
Szelest liści	10 decybeli
Próg słyszalności	0 decybeli



Przypomnij sobie

Potęga o wykładniku całkowitym

1. Oblicz:

a) 2^n dla $n = 0, 1, 2, \dots, 10$, b) 3^n dla $n = 0, 1, \dots, 6$.

2. Oblicz.

a) $(-3)^4$ b) $(-2)^5$ c) $(-6)^3$ d) $(-5)^0$

Definicja

Dla liczby naturalnej $n \geq 1$ i liczby $a \neq 0$ definiujemy: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

3. Oblicz.

a) 4^{-2} c) 6^{-3} e) $(-4)^{-1}$ g) $(-2)^{-4}$
b) 5^{-4} d) 9^{-3} f) $(-5)^{-2}$ h) $(-3)^{-5}$

4. Oblicz.

a) $(\frac{1}{4})^3$ c) $(1\frac{1}{2})^6$ e) $(\frac{5}{9})^{-1}$ g) $(1\frac{1}{4})^{-3}$
b) $(\frac{2}{3})^4$ d) $(\frac{13}{7})^0$ f) $(\frac{2}{3})^{-3}$ h) $(3\frac{1}{3})^{-4}$

5. Która z liczb jest większa: x czy y ?

a) $x = 2^{10}$, $y = (-2)^{11}$ c) $x = (-3)^4$, $y = (-4)^4$
b) $x = 5^4$, $y = (-5)^6$ d) $x = (-5)^3$, $y = (-7)^3$

Twierdzenie

Dla $x, y \in \mathbb{Z}$ i $a, b \neq 0$:

■ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ■ $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ ■ $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
■ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ■ $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$

6. Przedstaw liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^4 \cdot 2^6$ d) $(2^3 \cdot 2^4) : 2^0$ g) $2^{-4} : 2^{-6}$
b) $4^2 \cdot 2^4$ e) $2^{-3} \cdot 2^5$ h) $(2^2)^3 \cdot 2$
c) $2^7 : 2^3$ f) $2 \cdot 2^4 \cdot 2^5$ i) $2 \cdot 2^{15} : 2^3$

7. Przedstaw liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^4 \cdot 4^3 \cdot 2^{-1}$ c) $(16^{-2} : 2^{-3}) \cdot 4$ e) $32^{-3} \cdot (2^{-3})^{-5}$
b) $4^3 \cdot 2^4 : 8^{-4}$ d) $(4^3)^{-2} : 64^{-3}$ f) $(8^{-6} : 4^{-6})^{-1}$

6.1. Potęga o wykładniku wymiernym – powtórzenie

Definicja

Dla dowolnej liczby $a \geq 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

a) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ b) $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$ c) $(\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $81^{\frac{1}{2}}$ c) $(\frac{1}{64})^{\frac{1}{2}}$ e) $169^{\frac{1}{2}}$ g) $8^{\frac{1}{3}}$ i) $81^{\frac{1}{4}}$ k) $256^{\frac{1}{4}}$
b) $100^{\frac{1}{2}}$ d) $(\frac{1}{121})^{\frac{1}{2}}$ f) $441^{\frac{1}{2}}$ h) $27^{\frac{1}{3}}$ j) $64^{\frac{1}{6}}$ l) $1024^{\frac{1}{10}}$

Definicja

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Przykład 2

a) $8^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$ b) $9^{-\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $8^{\frac{2}{3}}$ b) $32^{\frac{4}{5}}$ c) $81^{2,5}$ d) $625^{-\frac{1}{4}}$ e) $64^{-\frac{2}{3}}$ f) $(\frac{1}{81})^{-\frac{3}{2}}$

Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach całkowitych.

Przykład 3

a) $2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}} = 2^4 = 16$
b) $8^{\frac{7}{3}} : 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{7}{3} - \frac{2}{3}} = 8^{\frac{5}{3}} = 2^5 = 32$
c) $25^{\frac{3}{2}} : 125^{\frac{2}{3}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} : (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5$

Dla $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{Q}$:

■ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
■ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
■ $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
■ $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$
■ $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a) $16^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{6}}$
- c) $3^{\frac{3}{2}} : \sqrt{3}$
- e) $15^{0,5} \cdot 0,36^{0,25}$
- g) $\left(6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}\right) : 6^{\frac{1}{6}}$
- b) $\left(\frac{3}{20}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{1}{4}}$
- d) $(25\sqrt{5}) : 5^{\frac{3}{2}}$
- f) $20^{\frac{1}{3}} \cdot 2,5^{-\frac{1}{3}}$
- h) $7 : \left(7^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{7}\right)$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $\sqrt{16^5}$
- b) $\sqrt[3]{27^2}$
- c) $\sqrt[5]{32^4}$
- d) $\left(\sqrt[6]{125}\right)^2$

2. Przedstaw liczbę w postaci a^m , gdzie $m \in \mathbb{Q}$.

- a) $7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$
- c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$
- e) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}} \cdot 9^2$
- b) $3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$
- d) $\frac{1}{5} \cdot (5^2)^{-\frac{1}{3}}$
- f) $25^{-0,5} \cdot \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{-6}$

3. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 5.

- a) $\sqrt{5}$
- b) $\sqrt[3]{5}$
- c) $\sqrt{125}$
- d) $\sqrt[3]{25}$
- e) $\sqrt[4]{125}$

4. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

- a) $\sqrt[4]{3}$
- b) $\sqrt[3]{3^4}$
- c) $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$
- d) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
- e) $3 \cdot \sqrt[4]{3}$

5. Zapisz liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$.

- a) $\sqrt[4]{5^{\frac{1}{2}}}$
- c) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[4]{3}$
- e) $2 : 8^{\frac{2}{3}}$
- g) $3^{\frac{1}{8}} \cdot 12^{\frac{3}{4}} : \sqrt{8}$
- b) $(\sqrt{5})^3$
- d) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3}$
- f) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}} : 8^{\frac{2}{3}}$
- h) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3}$

6. Oblicz.

- a) $9^{\frac{5}{2}}$
- d) $8^{-\frac{2}{3}}$
- g) $10\,000^{1,25}$
- j) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$
- b) $125^{\frac{4}{3}}$
- e) $27^{-\frac{4}{3}}$
- h) $81^{-0,375}$
- k) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$
- c) $16^{\frac{3}{4}}$
- f) $25^{-\frac{1}{2}}$
- i) $144^{-0,5}$
- l) $5^3 \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$

7. Oblicz.

- a) $0,09^{\frac{3}{2}}$
- c) $0,008^{\frac{2}{3}}$
- e) $0,0625^{-\frac{3}{4}}$
- g) $0,008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$
- b) $0,25^{-\frac{1}{2}}$
- d) $0,0081^{-\frac{3}{4}}$
- f) $0,00032^{\frac{4}{5}}$
- h) $0,0256^{\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[3]{10})^9$

8. Przedstaw liczbę w postaci a^m , gdzie $a \in \mathbb{N}$.

- a) $3^4 \cdot (81 \cdot 9^{-6})^{-1}$
- c) $0,01 \cdot 16 \cdot 5^4$
- e) $32^{-2} : \left(64^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right)$
- b) $125^3 \cdot 0,2^{-7}$
- d) $2^4 \cdot 9^2 \cdot 36^{-5}$
- f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} \cdot 1,5^6$

6.2. Potęga o wykładniku rzeczywistym

Potrafimy określić wartość liczbową potęgi a^x (nie określamy potęgi 0^0), gdy wykładnik x jest liczbą naturalną, całkowitą lub wymierną.

Pokażemy na przykładach, jak można określić wartość liczbową potęgi a^x , gdy x jest liczbą niewymierną (w celu sformułowania ścisłej definicji wykorzystuje się pojęcie granicy ciągu – zostanie ono omówione w dalszym toku nauki).

Przykład 1

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $3^{\sqrt{2}}$.

$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$, zatem rozpatrujemy kolejno:

$3^{1,4}$	$\approx 4,655536722$
$3^{1,41}$	$\approx 4,706965002$
$3^{1,414}$	$\approx 4,727695035$
$3^{1,4142}$	$\approx 4,728733930$
$\vdots$	$\vdots$
$3^{1,414213562}$	$\approx 4,728804386$

Podane w tabeli przybliżenia możemy obliczyć, korzystając z odpowiedniego kalkulatora lub komputera.

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenia liczby $3^{\sqrt{2}}$.

Zauważmy, że gdy wykładnik x „zbliża się” do $\sqrt{2}$, to 3^x „zbliża się” do pewnej liczby rzeczywistej, którą oznaczamy $3^{\sqrt{2}}$. Korzystając z kalkulatora, możemy obliczyć przybliżoną wartość $3^{\sqrt{2}} \approx 4,72880438784$.

Przykład 2

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $5^{\sqrt{2}}$.

$5^{1,4}$	$\approx 9,518269694$
$5^{1,4142}$	$\approx 9,738305174$
$5^{1,414213}$	$\approx 9,738508928$
$5^{1,414213562}$	$\approx 9,738517736$
$\vdots$	$\vdots$
$5^{\sqrt{2}}$	$\approx 9,738517742$

$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenia liczby $5^{\sqrt{2}}$.



Ćwiczenie 1

Podaj przybliżenia dziesiętne liczb $5^{\sqrt{3}}$ i $5^{\sqrt{5}}$ z dokładnością do 0,0001.

Przykład 3

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby 2^π .

$2^{3,14}$	$\approx 8,815240927$
$2^{3,14159}$	$\approx 8,824961595$
$2^{3,14159265}$	$\approx 8,824977805$
$\vdots$	$\vdots$
2^π	$\approx 8,824977827$

$$\pi = 3,14159265\dots$$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby π otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenia liczby 2^π .



Ćwiczenie 2

Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, podaj z dokładnością do 0,0001 przybliżenie dziesiętne podanej liczby.

- a) 3^π b) 5^π c) π^π

Podane w poprzedniej lekcji wzory dla potęg o wykładnikach wymiernych są prawdziwe również dla potęg o wykładnikach rzeczywistych (zarówno wymiernych, jak i niewymiernych).

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}_+$ i dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ prawdziwe są wzory:

$$\begin{aligned} \blacksquare a^x \cdot a^y &= a^{x+y} & \blacksquare a^x \cdot b^x &= (ab)^x & \blacksquare (a^x)^y &= a^{x \cdot y} \\ \blacksquare \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} & \blacksquare \frac{a^x}{b^x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Który z powyższych wzorów wykorzystano w obliczeniach?

- a) $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 2^2 = 4$ c) $6^\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\pi = \left(6 \cdot \frac{3}{2}\right)^\pi = 9^\pi$
b) $\frac{6^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}} = \left(\frac{6}{2}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$ d) $5^{\sqrt{2}} \cdot 5^{1-\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = 5$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ c) $(5^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}$ e) $7^{\sqrt{2}} \cdot 49^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ g) $\frac{2^{\sqrt{3}+6}}{2^{\sqrt{3}+1}}$
b) $(3^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}}$ d) $(2^{\sqrt{7}-\sqrt{2}})^{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ f) $9^{\sqrt{5}} \cdot 3^{1-2\sqrt{5}}$ h) $\frac{6^{\sqrt{3}+1} \cdot 2^{-\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}}}$

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

- a) $3^4 \cdot 3^{1-\sqrt{2}}$ c) $(3^{\sqrt{7}-\sqrt{3}})^{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ e) $6^{\sqrt{7}} : 2^{\sqrt{7}}$
b) $3^3 : 3^{2-\sqrt{2}}$ d) $(3^{\sqrt{3}})^{1-\sqrt{3}}$ f) $(\sqrt{3})^\pi \cdot (\sqrt{3})^\pi$

2. Oblicz.

- a) $6^{1-\sqrt{2}} \cdot 6^{\sqrt{2}+1}$ d) $2^{3\sqrt{5}} \cdot 8^{-\sqrt{5}}$ g) $6^{\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 2^{-\sqrt{3}}$
b) $5^{\pi+3} : 5^\pi$ e) $4^{\sqrt{3}} : 2^{2\sqrt{3}}$ h) $4^{\pi+3} \cdot 3^\pi : 12^\pi$
c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\sqrt{6}-1} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\sqrt{6}+2}$ f) $\frac{7^{\frac{5}{6}}}{7^{\frac{1}{3}\sqrt{7}}} \cdot \frac{7^{\sqrt{5}+5}}{7^{\sqrt{5}+2}}$ i) $\frac{6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}}{6^{\frac{1}{6}}} \cdot (6^{\sqrt{5}-2})^{\sqrt{5}+2}$

3. Przedstaw liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$.

- a) $2^{\sqrt{7}-2} \cdot 4^3$ c) $9^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot 27^{-1}$ e) $\frac{1}{3} \cdot 9^{\pi+\frac{1}{2}} : 81^{2\pi}$
b) $2^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$ d) $27 \cdot (3^{-\sqrt{3}})^2$ f) $7^{-2\sqrt{2}} : 49^{\pi+\sqrt{2}}$

4. Sprawdź, czy liczba q należy do przedziału $(3; 6)$. Nie korzystaj z kalkulatora, tylko z podanych przybliżeń.

- a) $q = 4^{\sqrt{3}-1} : \frac{1}{4}$ c) $q = 6^{\sqrt{3}} : (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ $2^{\sqrt{3}} \approx 3,32199709$
b) $q = 0,5^{\sqrt{3}+1} \cdot 6^{\sqrt{3}}$ d) $q = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ $3^{\sqrt{3}} \approx 6,70499185$
 $6^{\sqrt{3}} \approx 22,2739634$

5. Spośród liczb x, y, z wybierz takie dwie, z których jedna jest odwrotnością drugiej.

- a) $x = 2^{4\sqrt{2}}$, $y = 4^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $z = 8^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}$
b) $x = 1,5^{4-2\sqrt{3}}$, $y = \left(\frac{4}{9}\right)^{2+\sqrt{3}}$, $z = \left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{3}-2}$
c) $x = 125^{1-2\sqrt{5}}$, $y = 25^{2-3\sqrt{5}}$, $z = 0,0016 \cdot 5^{\sqrt{180}}$

6. Wstaw w miejsce $?$ jeden ze znaków: $>$, $<$ lub $=$, tak by powstało zdanie prawdziwe.

- a) $2^{5\sqrt{5}} \cdot 32^{2-\sqrt{5}} ? 4^5$ c) $\frac{4^{2\sqrt{3}} \cdot 8}{16^{\sqrt{3}+1}} ? \frac{1}{2}$ e) $\frac{\pi^{1-\sqrt{2}} \cdot \pi^{1+\sqrt{2}}}{\pi^2} ? \frac{1}{\pi^3}$
b) $9^{\frac{\sqrt{7}}{2}} \cdot 27^{-\frac{\sqrt{7}}{3}} ? 3$ d) $\frac{9^{-2\sqrt{5}} \cdot 27^{\frac{1}{3}}}{81^{1-\sqrt{5}}} ? \frac{1}{27}$ f) $\frac{2^{2\pi} \cdot 9^\pi}{36^{\pi-1}} ? 6$

7. Dla jakiej liczby x prawdziwa jest równość?

- a) $5^{\sqrt{2}} \cdot 5^x = 1$ b) $5^{1-\pi} \cdot 5^x = 5$ c) $(5^{\sqrt{2}})^x = 25$

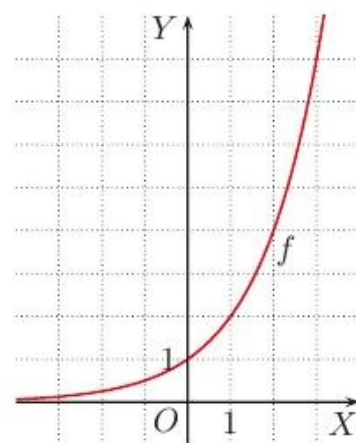
6.3. Funkcja wykładnicza

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2^x$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(0; \infty)$.



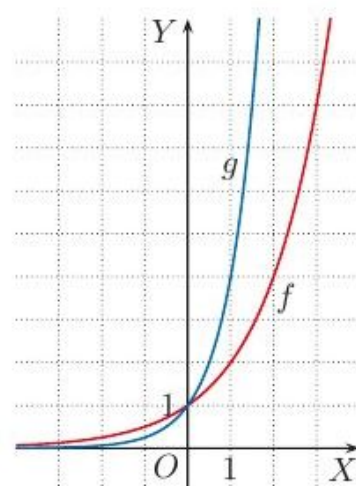
Przykład 2

Wykres funkcji $g(x) = 4^x$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(0; \infty)$.

Wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $f(x) = 2^x$ dla porównania naszkicowano w tym samym układzie współrzędnych.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ i $h(x) = 4^x$ określonych dla $x \in \mathbb{R}$. Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.

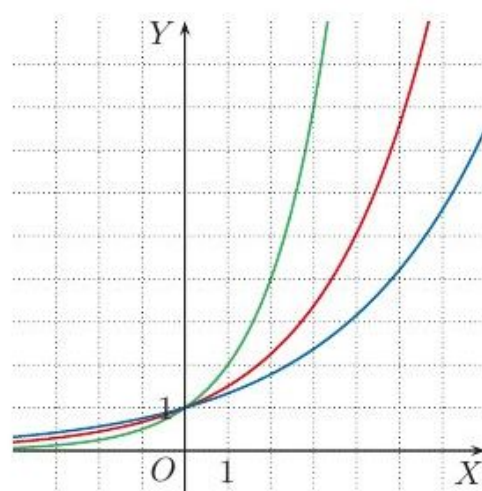
Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = 2^x$, $g(x) = (\frac{3}{2})^x$, $h(x) = (\frac{4}{3})^x$.

- Dobierz wzór do każdego wykresu.
- Punkty $P(4, a)$, $Q(-2, b)$, $R(c, 3\frac{3}{8})$ należą do wykresu funkcji g . Wyznacz niewiadome współrzędne tych punktów.
- Które spośród punktów:

$$A(4, 3\frac{15}{81}), B(-4, \frac{81}{256}), C(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

należą do wykresu funkcji h ?

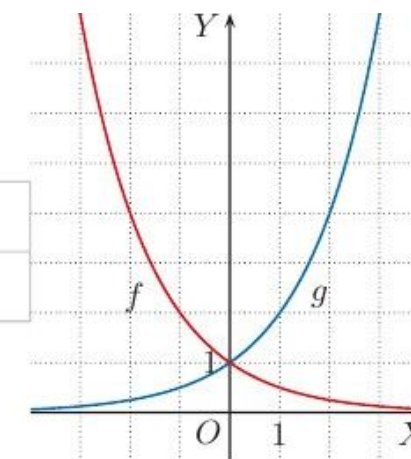


Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

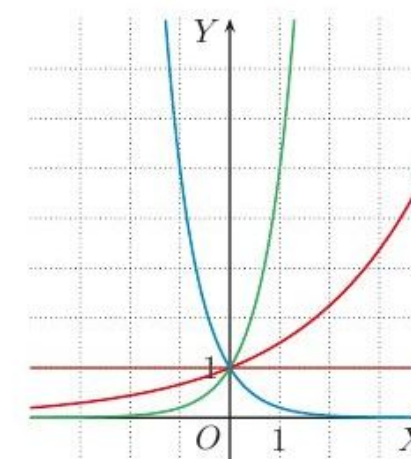
x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	8	4	2	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Uwaga. Wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ można otrzymać przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $g(x) = 2^x$ względem osi OY , ponieważ $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x} = g(-x)$.



Ćwiczenie 3

- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (\frac{1}{3})^x$.
- Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $h(x) = (\frac{1}{4})^x$.

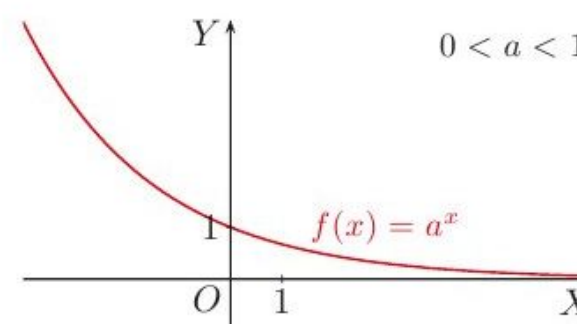


Ćwiczenie 4

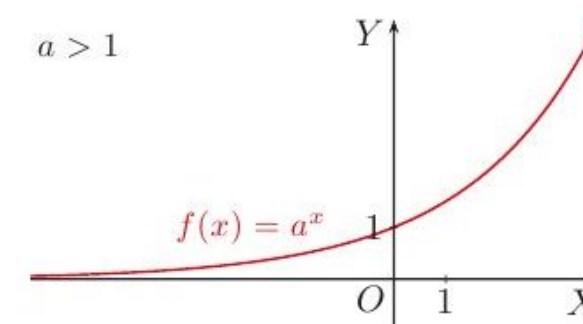
Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = 5^x$, $g(x) = 0,2^x$, $h(x) = 1,5^x$ i $k(x) = 1^x$. Dobierz wzór do każdego wykresu.

Definicja

Funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \mathbb{R}$ nazywamy **funkcją wykładniczą**.



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca.

Dziedziną funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla dowolnego $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ jest zbiór liczb rzeczywistych, a jej zbiorem wartości – przedział $(0; \infty)$. Wykres funkcji wykładniczej przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$, natomiast nie ma punktów wspólnych z osią OX , która jest jego asymptotą poziomą.

Uwaga. Dla $a = 1$ funkcja $f(x) = a^x$ jest funkcją stałą: $f(x) = 1$.

Przykład 4

Zapisz liczby $10^{\sqrt{2}}$, $10^{1,4}$, $10^{1,5}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

Funkcja $y = 10^x$ jest rosnąca i $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, stąd:

$$10^{1,4} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1,5}$$

Przykład 5

Zapisz liczby $0,9^{\sqrt{3}}$, $0,9^{1,7}$, $0,9^{1,8}$ w kolejności od najmniejszej do największej.

Funkcja $y = 0,9^x$ jest malejąca i $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, stąd:

$$0,9^{1,8} < 0,9^{\sqrt{3}} < 0,9^{1,7}$$

Ćwiczenie 5

Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

- a) $5^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{3}}$, $5^{0,3}$, $5^{0,33}$ c) $0,6^{\frac{1}{2}}$, $0,6^{\frac{1}{3}}$, $0,6^{\frac{3}{7}}$, $0,6^{\frac{3}{8}}$, $0,6^{0,35}$
 b) $7^{3,1}$, $7^{3,2}$, 7^{π} , $7^{\sqrt{5}}$ d) $(\frac{1}{3})^2$, $(\frac{1}{3})^{1,5}$, $(\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}$, $(\frac{1}{3})^{\sqrt{3}}$, $(\frac{1}{3})^{\frac{\pi}{2}}$

Zadania

- Oblicz wartości funkcji f dla $x \in \{-4, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, 4\}$.
 a) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = (\frac{1}{4})^x$ e) $f(x) = 8^x$
 b) $f(x) = 4^x$ d) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ f) $f(x) = 100^x$
- Punkt $P(2, 16)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f ?
 a) $Q(\frac{1}{2}, 2)$ b) $Q(5, 1024)$ c) $Q(-3, \frac{1}{16})$ d) $Q(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
- Punkt $P(2, 2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f ?
 a) $Q(1, 1)$ b) $Q(4, 4)$ c) $Q(8, 8)$ d) $Q(-8, \frac{1}{16})$
- Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt M . Naszkicuj wykres tej funkcji.
 a) $M(2, \frac{1}{9})$ b) $M(-3, 8)$ c) $M(\frac{1}{2}, 2)$ d) $M(3, 3\frac{3}{8})$
- Określ monotoniczność funkcji f .
 a) $f(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^x$ b) $f(x) = (\sqrt{3} - 1)^x$ c) $f(x) = (\sqrt{5} - 1)^x$
- Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.
 a) $2^{\frac{3}{2}}$, $2^{\frac{7}{5}}$, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt[3]{\pi}$, $\pi^{\frac{1}{2}}$, $\pi^{\frac{3}{7}}$, $\pi^{\frac{1}{\pi}}$
 b) $(\frac{3}{4})^5$, $(\frac{3}{4})^6$, $(\frac{3}{4})^{2\sqrt{6}}$, $(\frac{3}{4})^{\sqrt{26}}$ d) 9^0 , 9^{-2} , $9^{-\sqrt{3}}$, $9^{-\sqrt{\pi}}$

- Zapisz liczby w kolejności od największej do najmniejszej.

a) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $8^{\frac{1}{2}}$, $16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$, $32^{\frac{\pi}{10}}$, $256^{\frac{1}{4}}$ b) $(\frac{1}{3})^{3\sqrt{2}}$, $(\frac{1}{9})^{2,6}$, $(\frac{1}{27})^{\frac{3}{2}}$, $(\frac{1}{81})^{\frac{3}{2}}$, $\frac{1}{243}$

- Podaj współrzędne trzech punktów należących do wykresu funkcji f , tak aby każda z tych współrzędnych była liczbą wymierną. Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = (\sqrt{3})^x$ b) $f(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^x$ c) $f(x) = (\sqrt[3]{2})^x$

- Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g . Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq g(x)$.

a) $f(x) = 3^x$, $g(x) = 4x + 1$ d) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$, $g(x) = x + 4$
 b) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$ e) $f(x) = (\frac{1}{4})^x$, $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$
 c) $f(x) = 4^x$, $g(x) = 5 - x$ f) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, $g(x) = |x| + 1$

- Podaj zbiór rozwiązań nierówności, korzystając z odpowiednich wykresów.

a) $2^x > 3^x$ b) $3^x \leq 4^x$ c) $(\frac{1}{2})^x \leq (\frac{1}{3})^x$ d) $(\frac{1}{4})^x < 3^x$

Czy wiesz, że...

W opisach niektórych zagadnień praktycznych korzysta się z funkcji wykładniczej $f(x) = e^x$. Liczba e (oznaczenie to wprowadził Leonhard Euler [czyt. ojler]) jest liczbą niewymierną:

$$e = 2,718281828\dots$$

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = e^x$ oraz dla porównania wykresy funkcji $g(x) = 2^x$ i $h(x) = 3^x$.

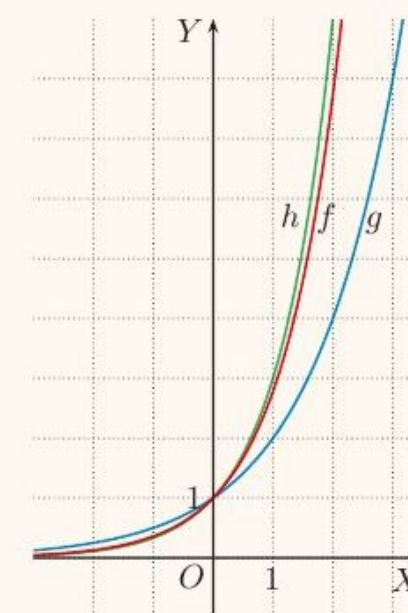
Coraz dokładniejsze przybliżenia liczby e otrzymujemy, obliczając wartości wyrażenia:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

dla coraz większych liczb naturalnych:

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2,5937\dots, \quad \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,7048\dots,$$

$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,7169\dots, \quad \left(1 + \frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2,7182\dots$$



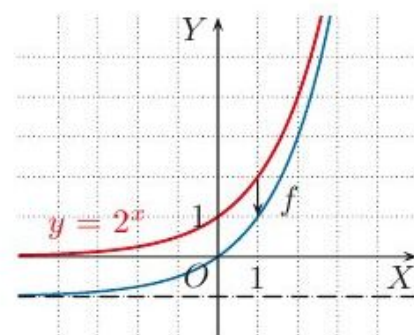
- Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby: 9 , $2\sqrt{2}$, $(\sqrt{e})^4$, $e^{1,5}$, $e^{\sqrt{3}}$.

6.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2^x - 1$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2^x$ o 1 jednostkę w dół, czyli o wektor $[0, -1]$.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-1; \infty)$. Prosta $y = -1$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f .



Ćwiczenie 1

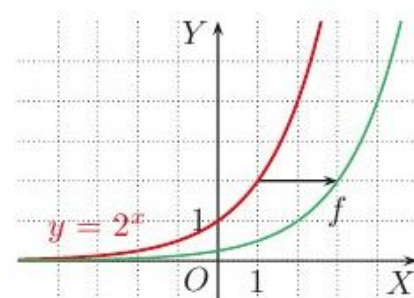
Naszkicuj wykres funkcji g . Podaj zbiór wartości tej funkcji i równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

- a) $g(x) = 3^x - 2$ b) $g(x) = 2^x + 1$ c) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = 2^{x-2}$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2^x$ o 2 jednostki w prawo, czyli o wektor $[2, 0]$.

Funkcja f przyjmuje wartość równą 1 dla argumentu $x = 2$.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f . Dla jakiego argumentu funkcja ta przyjmuje wartość równą 1?

- a) $f(x) = 3^{x-1}$ b) $f(x) = 2^{x+2}$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

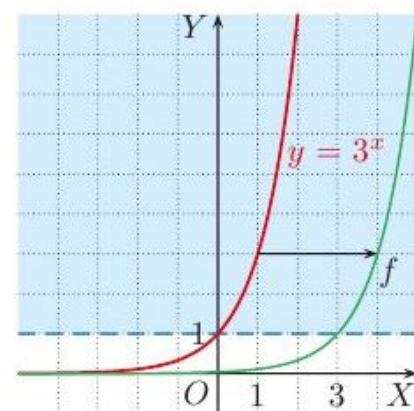
Przykład 3

Jak należy przekształcić wykres funkcji $y = 3^x$, aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = \frac{3^x}{27}$? Dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości większe od 1?

$$f(x) = \frac{3^x}{27} = \frac{3^x}{3^3} = 3^{x-3}$$

Wykres funkcji $y = 3^x$ należy przesunąć o 3 jednostki w prawo, czyli o wektor $[3, 0]$.

Nierówność $f(x) > 1$ zachodzi dla $x \in (3; \infty)$.



Ćwiczenie 3

Jak należy przekształcić wykres funkcji $y = 2^x$, aby otrzymać wykres funkcji f ? Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

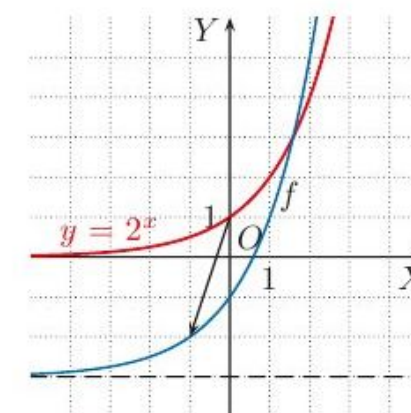
- a) $f(x) = \frac{2^x}{16}$ b) $f(x) = \frac{2^x}{1024}$ c) $f(x) = \sqrt{2} \cdot 2^x$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2^{x+1} - 3$. Podaj jej zbiór wartości oraz równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2^x$ o wektor $[-1, -3]$.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-3; \infty)$, a asymptotą poziomą jej wykresu – prosta $y = -3$.



Ćwiczenie 4

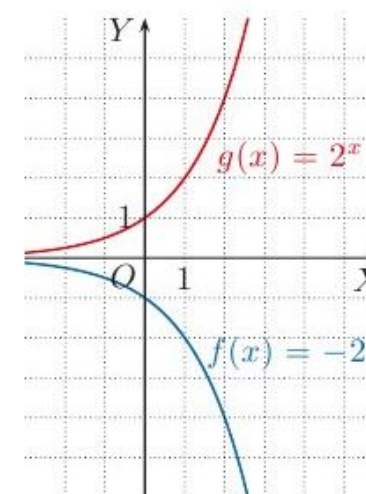
Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej zbiór wartości oraz równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

- a) $f(x) = 2^{x-1} + 2$ b) $f(x) = \frac{2^x}{4} - 2$ c) $f(x) = \frac{2^{x+3} + 4}{4}$

Przykład 5

Wykres funkcji $f(x) = -2^x$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $g(x) = 2^x$ względem osi OX (rysunek obok).

Funkcja g jest funkcją rosnącą, a funkcja f – funkcją malejącą.



Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji g i określ jej monotoniczność.

- a) $g(x) = -3^x$ b) $g(x) = -4^x$ c) $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

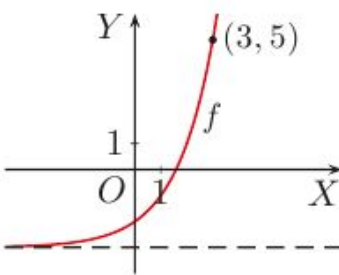
Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = a^{-x}$, gdzie $a > 0$, możemy odbić symetrycznie względem osi OY wykres funkcji $y = a^x$ lub skorzystać z zależności $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

Ćwiczenie 6

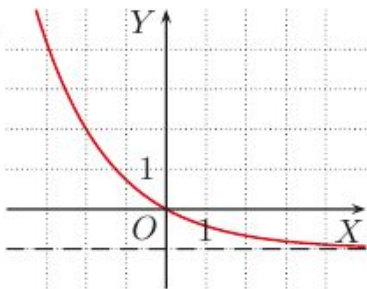
Naszkicuj kolejno wykresy funkcji f , g i h .

- a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{-x}$, $h(x) = 2^{-x} + 2$
b) $f(x) = 4^x$, $g(x) = 4^{-x}$, $h(x) = 4^{-x} - 1$

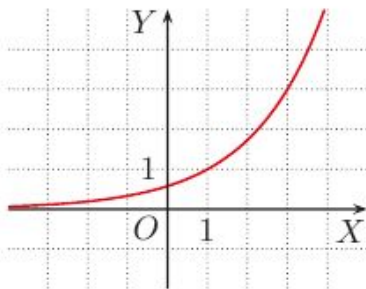
Zadania

- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji f oraz równanie asymptoty poziomej jej wykresu.
 - $f(x) = 2^x + 2$
 - $f(x) = 3^x - 1$
 - $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$
 - $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$
 - $f(x) = 4^{-x} - 4$
 - $f(x) = 3^{-x} + 1$
- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$. Podaj wartość współczynnika a .
 
- Wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$ przechodzi przez punkt P . Podaj wartość współczynnika a .
 - $P(0, -3)$
 - $P(2, 7)$
 - $P(4, 0)$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Odczytaj z niego zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.
 - $f(x) = 4 \cdot 2^x$
 - $f(x) = \frac{2^x}{8}$
 - $f(x) = \frac{0,04}{5^x}$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Odczytaj z niego zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq -1$.
 - $f(x) = -2^{x-2}$
 - $f(x) = -3^{x+1}$
 - $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$
- Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i g .
 - $f(x) = 2^x - 3$
 - $f(x) = 3^x + 1$
 - $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$
- Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = (\sqrt{3})^{x-1}$, $g(x) = (\sqrt{3})^x - 1$ i $h(x) = (\sqrt{3})^{-x} - 1$. Dopasuj wzór do wykresu.

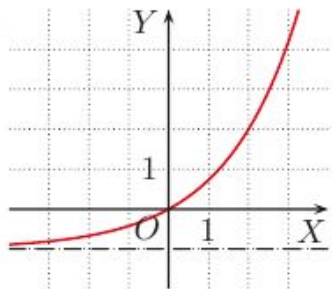
I.



II.



III.


- Wykres funkcji $f(x) = 5^x$ przesunięto o wektor $\vec{v}$ i otrzymano wykres funkcji g . Podaj wzór funkcji g i jej zbiór wartości.
 - $\vec{v} = [0, -3]$
 - $\vec{v} = [1, 2]$
 - $\vec{v} = [-2, 4]$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej miejsce zerowe oraz zbiór wartości.
 - $f(x) = 2^{x-2} - 4$
 - $f(x) = 3^{x+1} - 1$
 - $f(x) = \frac{4}{2^x} + 2$
 - $f(x) = 3 - \frac{9}{3^x}$
 - $f(x) = (\sqrt{2})^{2x-4} - 1$
 - $f(x) = 1 - 2^{-x+3}$

6.5. Logarytm

Przypomnijmy, że **logarytmem** z liczby dodatniej b przy podstawie a (gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę logarytmowaną b .

$$\log_a b = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^x = b$$

Przykład 1

- $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.
- $\log_2 1024 = 10$, ponieważ $2^{10} = 1024$.
- $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

$$\log_a b = x$$

$\swarrow$ liczba logarytmowana
 $\leftarrow$ logarytm
 $\swarrow$ podstawa logarytmu

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- | | | | |
|----------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| a) $\log_2 32$ | c) $\log_2 1$ | e) $\log_2 \frac{1}{64}$ | g) $\log_2 \sqrt{8}$ |
| b) $\log_2 2$ | d) $\log_2 \frac{1}{4}$ | f) $\log_2 \sqrt{2}$ | h) $\log_2 \sqrt[3]{4}$ |

Ćwiczenie 2

Oblicz.

- | | | | |
|--------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|----------------------------|
| a) $\log_3 81$ | d) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$ | g) $\log_7 7\sqrt{7}$ | j) $\log_{\frac{1}{2}} 16$ |
| b) $\log_3 \frac{1}{9}$ | e) $\log_9 3$ | h) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ | k) $\log_6 \sqrt[3]{36}$ |
| c) $\log_3 \frac{1}{27}$ | f) $\log_9 \frac{1}{27}$ | i) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$ | l) $\log_6 216$ |

Zauważmy, że wartość logarytmu może być dodatnia, ujemna lub równa 0. Z definicji logarytmu wynikają własności podane obok.

Dla $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Przykład 2

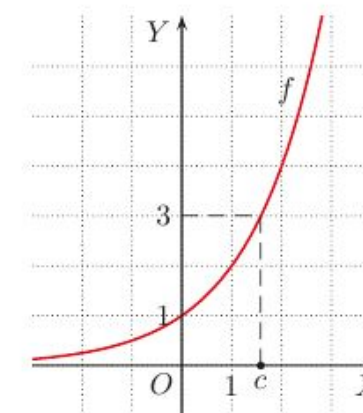
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x$.

Zauważmy, że $\log_2 3$ to taka liczba c , że $2^c = 3$. Z wykresu możemy odczytać, że:

$$1 < \log_2 3 < 2$$

Korzystamy z odpowiedniego kalkulatora i otrzymujemy przybliżenie: $\log_2 3 \approx 1,5849625$.

Udowodnimy, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.



Liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

Dowód

Przyjmijmy przeciwnie, że $\log_2 3$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją różne od zera liczby naturalne m i n , takie że $\log_2 3 = \frac{m}{n}$. Zatem:

$$\begin{aligned} 3 &= 2^{\frac{m}{n}} \\ 3^n &= 2^m \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Podnosimy obie strony} \\ \text{równości do potęgi } n. \end{array}$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ prawa strona równości jest liczbą podzielną przez 2, a lewa nie. Zatem liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

Ćwiczenie 3

Wykaż, że podana liczba jest liczbą niewymierną.

- a) $\log_2 5$ b) $\log_3 5$ c) $\log_2 6$ d) $\log_6 2$

Bezpośrednio z definicji logarytmu wynikają podane obok własności.

Dla $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$:

$$\begin{aligned} \log_a a^x &= x \\ a^{\log_a b} &= b \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $\log_2 2^{100}$ c) $\log_{1,1} 1,1^{10}$ e) $2^{\log_2 3}$ g) $0,4^{\log_{0,4} 10}$
b) $\log_6 6^{15}$ d) $\log_\pi \pi^{-3}$ f) $3^{\log_3 7}$ h) $5^{\log_5 1}$

Przypomnijmy, że **logarytmy dziesiętne** to logarytmy o podstawie 10.

Zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$, np. $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$.

Poniżej zamieszczono fragment tablicy, w której znajdują się przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych liczb.

b	$b + 0,00$	$b + 0,01$	$b + 0,02$	$b + 0,03$	$b + 0,04$	$b + 0,05$	$b + 0,06$	$b + 0,07$	$b + 0,08$	$b + 0,09$
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279

Ćwiczenie 5

Korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych, podaj przybliżoną wartość:

- a) $\log 1,5$, b) $\log 1,11$, c) $\log 1,62$, d) $\log 1,68$.

Zadania

1. Oblicz.

- a) $\log_2 64$ e) $\log_2 0,125$ i) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}}$ m) $\log_3 \sqrt{27}$
b) $\log_2 512$ f) $\log_4 2$ j) $\log_{\sqrt{2}} 4$ n) $\log_3 \frac{1}{81}$
c) $\log_2 \frac{1}{32}$ g) $\log_4 8$ k) $\log_{\sqrt{2}} 32$ o) $\log_5 625$
d) $\log_2 \frac{1}{1024}$ h) $\log_4 \frac{1}{1024}$ l) $\log_3 \sqrt{3}$ p) $\log_5 0,04$

2. Oblicz.

- a) $\log_{\frac{1}{3}} 3$ c) $\log_{0,5} \frac{1}{128}$ e) $\log_{0,2} 125$ g) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$
b) $\log_{0,1} 10^6$ d) $\log_{0,25} 16$ f) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$ h) $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$

3. Oblicz.

- a) $2^{\log_2 9}$ c) $(\frac{1}{2})^{\log_2 9}$ e) $4^{\log_2 9}$ g) $\sqrt{2}^{\log_2 9}$
b) $(\frac{1}{3})^{\log_{\frac{1}{3}} 5}$ d) $(\frac{1}{4})^{\log_4 \frac{1}{3}}$ f) $81^{\log_3 0,5}$ h) $\sqrt{3}^{\log_3 16}$

4. Oblicz.

- a) $\log 1000$ c) $\log 10^6$ e) $\log \sqrt{10}$
b) $\log 0,1$ d) $\log 0,0001$ f) $\log 10\sqrt{10}$

5. Oblicz.

- a) $\log 100 + \log_4 \frac{1}{8}$ c) $\log_6 \frac{1}{36} + \log \sqrt[3]{10}$ e) $\log_{1,5} \frac{9}{4} - \log_\pi 1$
b) $\log 10^7 - \log_{0,5} 8$ d) $\log_9 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[4]{3}$ f) $\log_{\frac{2}{3}} 1,5 - \log_{1,5} \frac{8}{27}$

6. Dla jakiej podstawy logarytmu a podana równość jest prawdziwa?

- a) $\log_a 25 = 2$ b) $\log_a \frac{1}{8} = 3$ c) $\log_a 0,25 = -1$ d) $\log_a 64 = -3$

7. Dla jakiej liczby logarytmowanej b podana równość jest prawdziwa?

- a) $\log_2 b = 5$ c) $\log_{27} b = \frac{2}{3}$ e) $\log_{\frac{1}{16}} b = -\frac{3}{4}$ g) $\log b = 6$
b) $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$ d) $\log_7 b = 0$ f) $\log_{\sqrt{2}} b = -6$ h) $\log b = -1$

8. Oblicz.

- a) $\log_2(\log 100)$ c) $\log_{\frac{1}{9}}(\log_2 8)$ e) $\log_9(\log_8(\log_3 9))$
b) $\log_{0,1}(\log_2 1024)$ d) $\log_{\sqrt{2}}(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16})$ f) $\log_8(\log_{\frac{1}{4}}(\log_4 2))$

9. Podaj konieczne założenia i oblicz wartość wyrażenia.

- a) $\log_a a^3$ b) $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}}$ c) $\log_a \frac{\sqrt{a}}{a^3}$ d) $\log_{a^2} a^{10}$ e) $\log_{\sqrt{a}} a^4$

6.6. Własności logarytmów

Twierdzenie o logarytmie iloczynu

Jeżeli a , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia: $\log_a x = p$ oraz $\log_a y = q$, wtedy:

$$x = a^p \quad \text{i} \quad y = a^q \quad \text{Korzystamy z definicji logarytmu.}$$

$$x \cdot y = a^p \cdot a^q \quad \text{Korzystamy z własności działań na potęgach.}$$

$$x \cdot y = a^{p+q}$$

$$\log_a(x \cdot y) = p + q \quad \text{Korzystamy z definicji logarytmu.}$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Twierdzenie o logarytmie ilorazu

Jeżeli a , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

D Ćwiczenie 1

Udowodnij twierdzenie o logarytmie ilorazu.

Przykład 1

a) Sprawdź, czy równość $\log_2 96 = 5 + \log_2 3$ jest prawdziwa.

$$\log_2 96 = \log_2(32 \cdot 3) = \log_2 32 + \log_2 3 = 5 + \log_2 3 \quad \text{Równość jest prawdziwa.}$$

b) Sprawdź, czy równość $\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - 2$ jest prawdziwa.

$$\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - \log_3 9 = \log_3 7 - 2 \quad \text{Równość jest prawdziwa.}$$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa.

$$\text{a) } \log_2 6 = 1 + \log_2 3$$

$$\text{c) } \log_2 \frac{8}{3} = 3 - \log_2 3$$

$$\text{b) } \log 500 = 2 + \log 5$$

$$\text{d) } \log 0,07 = -2 + \log 7$$

Przykład 2

Oblicz.

$$\text{a) } \log 125 + \log 4 - \log 5 = \log \frac{125 \cdot 4}{5} = \log 100 = 2$$

$$\text{b) } \log_3 36 - \log_3 2 + \log_3 \frac{1}{6} = \log_3 \left(\frac{36}{2} \cdot \frac{1}{6} \right) = \log_3 3 = 1$$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

$$\text{a) } \log_6 4 + \log_6 9$$

$$\text{d) } \log_5 15 - \log_5 75$$

$$\text{g) } \log_5 0,04 - \log_5 0,008$$

$$\text{b) } \log 8 + \log 125$$

$$\text{e) } \log_7 19 - \log_7 \frac{19}{49}$$

$$\text{h) } \log 6 - \log 2 - \log 3$$

$$\text{c) } \log_3 54 - \log_3 2$$

$$\text{f) } \log_{\frac{1}{2}} 0,6 - \log_{\frac{1}{2}} 0,15$$

$$\text{i) } \log \frac{7}{4} - \log 14 - \log 125$$

Twierdzenie o logarytmie potęgi

Jeżeli a i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$:

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Dowód

Niech $\log_a x = q$, wtedy z definicji logarytmu $x = a^q$. Zatem:

$$x^p = (a^q)^p$$

$$x^p = a^{p \cdot q}$$

Korzystamy z własności działań na potęgach.

$$\log_a x^p = p \cdot q$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Przykład 3

Niech x będzie taką liczbą, że $\log_2 x = 0,3$. Oblicz $\log_2 x^5$ i $\log_2 \frac{1}{x}$.

$$\log_2 x^5 = 5 \log_2 x = 5 \cdot 0,3 = 1,5$$

$$\log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x = -0,3$$

Ćwiczenie 4

Niech x będzie taką liczbą, że $\log x = \frac{1}{3}$. Oblicz wartość podanego wyrażenia.

$$\text{a) } \log x^6$$

$$\text{b) } \log \frac{1}{x^3}$$

$$\text{c) } \log \sqrt{x}$$

$$\text{d) } \log \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\text{e) } \log \frac{x^3}{\sqrt{x}}$$

Przykład 4

Przedstaw wyrażenie $3 + \log_2 7$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$3 + \log_2 7 =$$

Zapisujemy 3 jako $\log_2 8$.

$$= \log_2 8 + \log_2 7 =$$

Korzystamy z twierdzenia o logarytmie iloczynu.

$$= \log_2(8 \cdot 7) = \log_2 56$$

Ćwiczenie 5

Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu pewnej liczby.

$$\text{a) } 2 + \log_3 5$$

$$\text{b) } 3 \log_2 10 - 1$$

$$\text{c) } 2 \log_{\frac{1}{2}} 6 - 2$$

$$\text{d) } 4 - 2 \log_3 6$$

Zadania

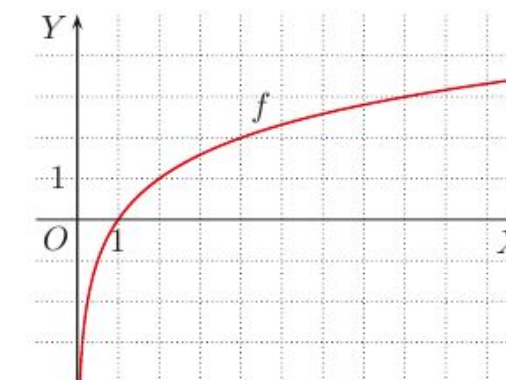
- Oblicz.
 - $\log_{12} 2 + \log_{12} 8 + \log_{12} 9$
 - $\log_3 \frac{1}{12} + \log_3 \frac{14}{15} + \log_3 \frac{10}{21}$
 - $\log 0,12 - \log 0,3 + \log 25$
 - $\log_{0,2} 0,3 - \log_{0,2} 0,5 - \log_{0,2} 15$
- Wykaż, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ podana równość jest prawdziwa.
 - $\log x^2 y^2 = \log x + \log y + \log xy$
 - $\log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} = -\frac{1}{2} \log y^4$
 - $\log xyz = \log \frac{x}{y} + \log y^2 z$
 - $\log xy + \log \frac{z^2}{y} = \log xyz - \log \frac{y}{z}$
 - $2 \log \frac{x^3}{y} - 3 \log x^2 z = 2 \log \left(\frac{y}{z}\right)^{-1} - 5 \log z$
- Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie przedstaw je w postaci logarytmu pewnej liczby.
 - $\log x^3 + 2 \log x$
 - $\log \sqrt{x} - \frac{3}{2} \log x$
 - $\frac{1}{2} \log x^4 + 1$
 - $1 - 2 \log_{\frac{1}{2}} x$
 - $2 \log_3 x + \log_3 y + 1$
 - $\frac{1}{3} \log_5 8x^3 - 2 \log_5 y \sqrt{x} + \frac{1}{2}$
 - $\frac{1}{2} \log_2 x - \log_2 y - 2$
 - $\frac{1}{2} \log 4x^4 + \frac{1}{3} \log 8x^6 + \frac{1}{4} \log 16x^8 - 3$
- Oblicz.
 - $(2 \log_8 \sqrt{2} + \log_8 32 - 1)^{\log_3 5}$
 - $(\log_2 \frac{1}{8} - \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 4,5)^{\log_{\sqrt{2}} 4}$
 - $6^{0,25 \log_6 81 - 2 \log_6 0,5}$
 - $9^{\log_{64} 4 + 0,5 \log_{27} 3}$
- Niech x będzie taką liczbą, że $\log_3 x = -\frac{1}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia.
 - $\log_3 9x^8$
 - $\log_3 \frac{x^4}{81}$
 - $\log_3 \sqrt[4]{3x^6}$
 - $\log_3 \frac{27 \sqrt[3]{x}}{x}$
- Niech $p = \log 2$. Wyraź liczbę a za pomocą p .
 - $a = \log 200$
 - $a = \log 0,02$
 - $a = \log 0,04$
 - $a = \log 1600$
- Niech $p = \log_3 2$ oraz $q = \log_3 5$. Wyraź liczbę a za pomocą p i q .
 - $a = \log_3 20$
 - $a = \log_3 100$
 - $a = \log_3 \frac{2}{25}$
 - $a = \log_3 0,4$
 - $a = \log_3 3 \frac{1}{8}$
 - $a = \log_3 \frac{\sqrt{5}}{2}$
 - $a = \log_3 \sqrt{10}$
 - $a = \log_3 0,2 \sqrt{2}$
- Wiadomo, że $\log 4 \approx 0,6$ oraz $\log 5 \approx 0,7$. Oblicz przybliżoną wartość:
 - $\log 80$
 - $\log 50$
 - $\log \frac{5}{4}$
 - $\log 0,5$
 - $\log 2,5$
 - $\log 0,64$
 - $\log 5 \sqrt{2}$
 - $\log 25 \sqrt[3]{4}$

6.7. Funkcja logarytmiczna

Przykład 1

Jeśli każdej liczbie dodatniej x przyporządkujemy wartość $\log_2 x$, to otrzymamy funkcję $f(x) = \log_2 x$ określoną dla $x \in (0; \infty)$. Jej wykres przedstawiono na rysunku obok.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3



Definicja

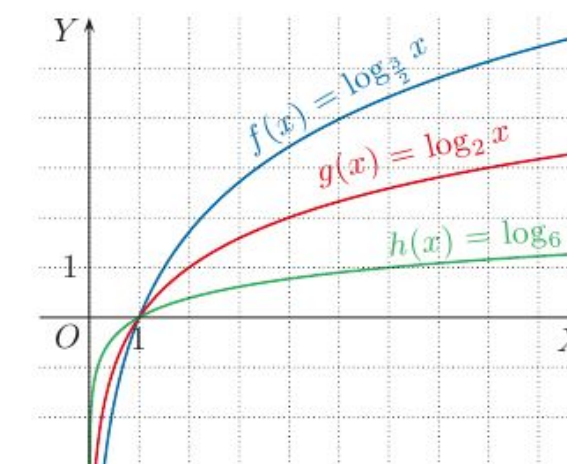
Funkcję $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ oraz $a \neq 1$, określoną dla $x \in (0; \infty)$ nazywamy **funkcją logarytmiczną**.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = \log_3 x, \quad h(x) = \log_4 x$$

Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.



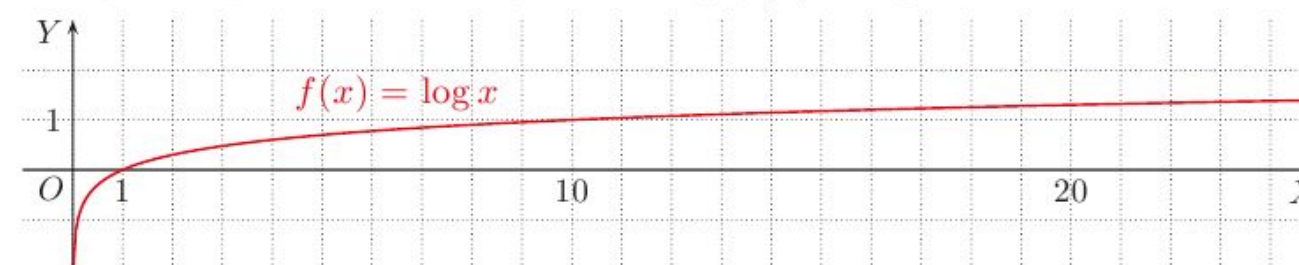
Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji: $f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$, $g(x) = \log_2 x$ oraz $h(x) = \log_6 x$. Do którego z tych wykresów należy podany punkt?

- a) $(8, 3)$ b) $(2\frac{1}{4}, 2)$ c) $(36, 2)$

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log x$.



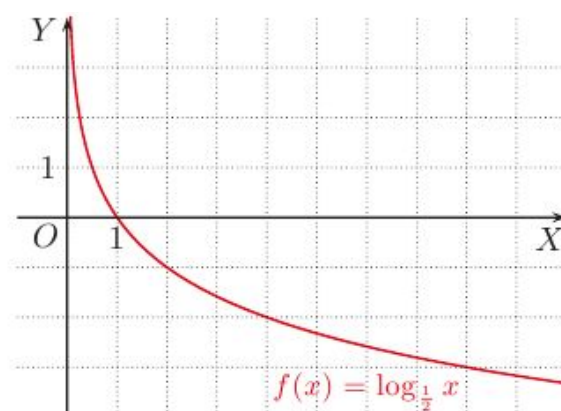
Ćwiczenie 3

Dla jakiego argumentu funkcja $f(x) = \log x$ przyjmuje wartość: a) 2, b) 6?

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ określonej dla $x \in (0; \infty)$ szkicujemy, korzystając z poniższej tabeli.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3

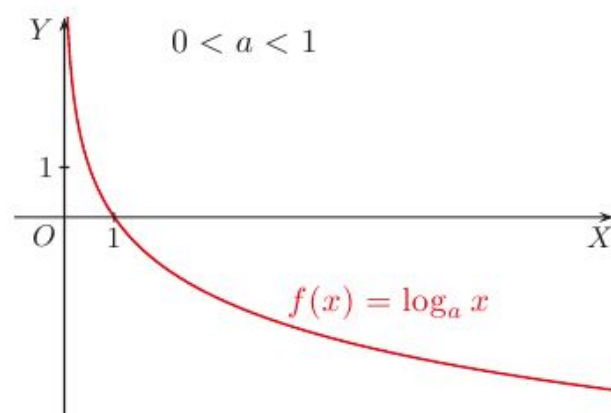


Ćwiczenie 4

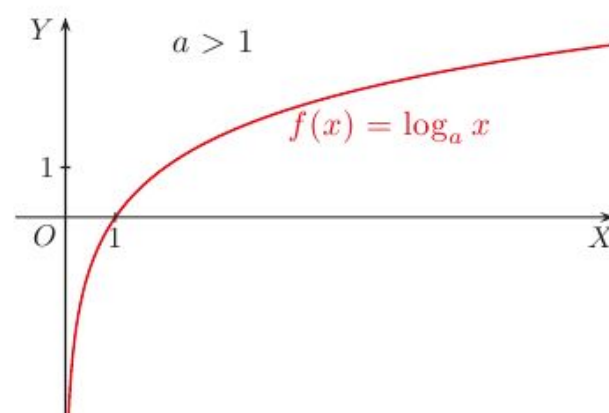
Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

Dziedziną funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, a jej zbiorem wartości – zbiór liczb rzeczywistych. Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$, a punkt $(1, 0)$ jest punktem przecięcia tego wykresu z osią OX .



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest malejąca.



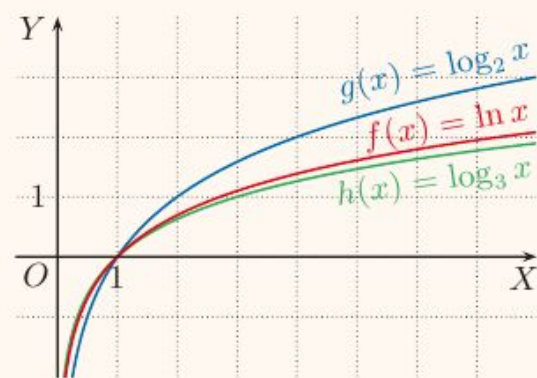
Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca.

Czy wiesz, że...

W zastosowaniach, obok logarytmu dziesiętnego, często występuje logarytm przy podstawie e , gdzie $e = 2,718281828\dots$ (patrz str. 299).

Logarytm ten nazywamy **logarytmem naturalnym**. Zamiast pisać $\log_e x$, używamy oznaczenia $\ln x$.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \ln x$. Dla porównania w tym samym układzie współrzędnych narysowano wykresy funkcji $g(x) = \log_2 x$ i $h(x) = \log_3 x$.



Ćwiczenie 5

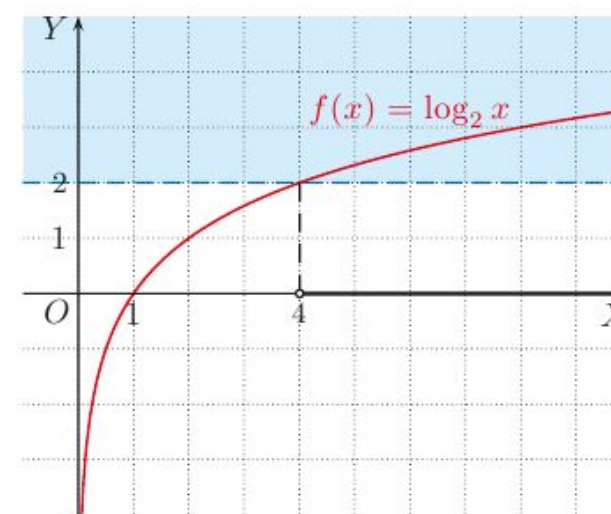
Dla jakich argumentów x funkcja $f(x) = \log_a x$ przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne w przypadku, gdy: a) $a \in (1; \infty)$, b) $a \in (0; 1)$?

Przykład 4

Korzystając z wykresu, podaj zbiór rozwiązań nierówności $\log_2 x > 2$.

Równanie $\log_2 x = 2$ jest prawdziwe dla $x = 4$.

Funkcja $f(x) = \log_2 x$ jest funkcją rosnącą określoną dla $x \in (0; \infty)$. Zatem zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(4; \infty)$.

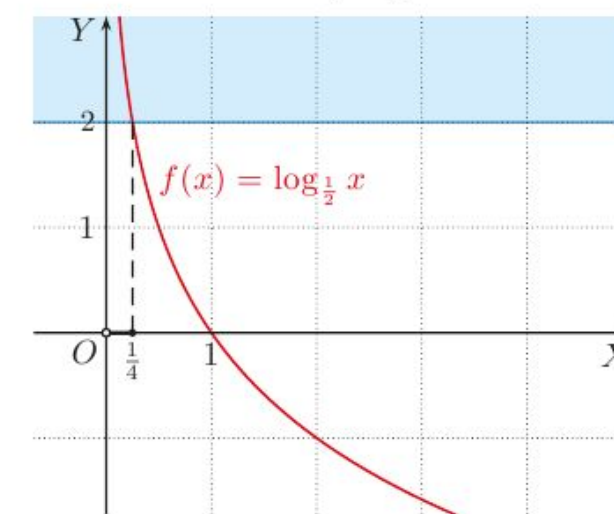


Przykład 5

Korzystając z wykresu, podaj zbiór rozwiązań nierówności $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 2$.

Równanie $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$ jest prawdziwe dla $x = \frac{1}{4}$.

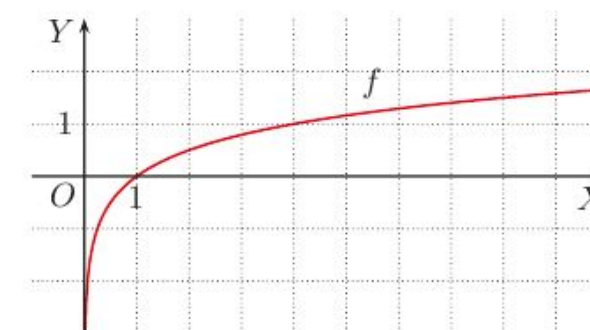
Funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ jest funkcją malejącą określoną dla $x \in (0; \infty)$. Zatem zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(0; \frac{1}{4}]$.



Ćwiczenie 6

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_4 x$. Korzystając z tego wykresu, podaj zbiór rozwiązań nierówności.

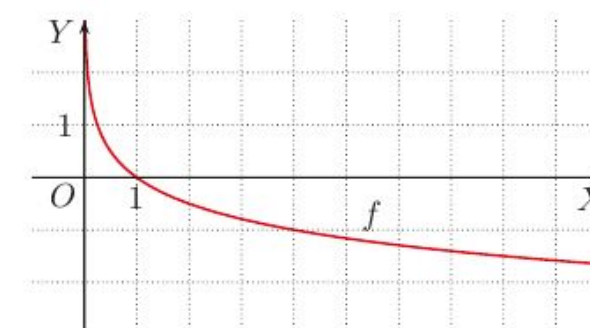
- a) $\log_4 x \geq 1$
- b) $\log_4 x < 1$
- c) $\log_4 x > -1$
- d) $\log_4 x \leq -1$



Ćwiczenie 7

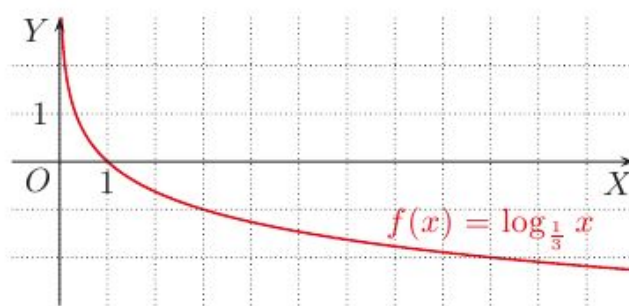
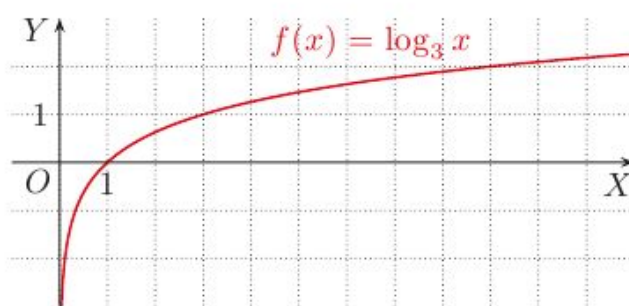
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$. Korzystając z tego wykresu, podaj zbiór rozwiązań nierówności.

- a) $\log_{\frac{1}{4}} x > 1$
- b) $\log_{\frac{1}{4}} x \leq 1$
- c) $\log_{\frac{1}{4}} x \geq -1$
- d) $\log_{\frac{1}{4}} x < -1$



Zadania

- Dla jakiej wartości a punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$?
a) $P(27, 3)$ b) $P(625, 4)$ c) $P(32, -5)$ d) $P(4, 4)$
- Do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$ należy punkt P . Naskicuj ten wykres.
a) $P(5, 1)$ b) $P(5, -1)$ c) $P(2, \frac{1}{3})$ d) $P(2, 2)$
- Podaj zbiór wartości funkcji $f(x) = \log_2 x$ o dziedzinie D_f .
a) $D_f = (0; 1)$ b) $D_f = [2; \infty)$ c) $D_f = [\frac{1}{2}; 8]$ d) $D_f = [\frac{\sqrt{2}}{2}; 1024]$
- Podaj zbiór wartości funkcji f o dziedzinie D_f .
a) $f(x) = \log_3 x, D_f = [\frac{1}{3}; 1]$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, D_f = [\frac{1}{2}; 8]$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, D_f = [\frac{1}{9}; 27]$ d) $f(x) = \log_8 x, D_f = [\frac{1}{2}; \sqrt{2}]$
- Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?
a) $f(x) = \log_{2m} x$ b) $f(x) = \log_{1-m} x$ c) $f(x) = \log_{m^2} x$
- Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest malejąca?
a) $f(x) = \log_{m-2} x$ b) $f(x) = \log_{4m^2} x$ c) $f(x) = \log_{1-m^2} x$
- Korzystając z wykresu funkcji f (rysunek obok), określ, dla jakich liczb rzeczywistych zachodzi podana nierówność.
a) $\log_3 x > 1$ c) $\log_3 x \geq 2$
b) $\log_3 x \leq 1$ d) $\log_3 x < -2$
- Korzystając z wykresu funkcji f (rysunek obok), określ, dla jakich liczb rzeczywistych zachodzi podana nierówność.
a) $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$ c) $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 2$
b) $\log_{\frac{1}{3}} x \leq 1$ d) $\log_{\frac{1}{3}} x < -2$

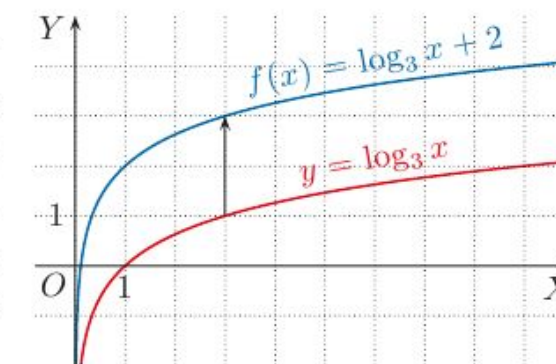


- 9.*** Uzasadnij, że wykres funkcji $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0, a \neq 1, x > 0$, jest symetryczny względem prostej $y = x$ do wykresu funkcji $g(x) = a^x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

6.8. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

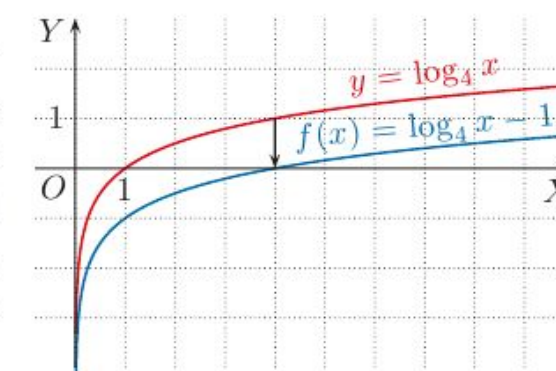
Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_3 x + 2$.
Wykres funkcji f możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_3 x$ o 2 jednostki w górę, czyli o wektor $[0, 2]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_4 x - 1$.
Wykres funkcji f możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_4 x$ o 1 jednostkę w dół, czyli o wektor $[0, -1]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



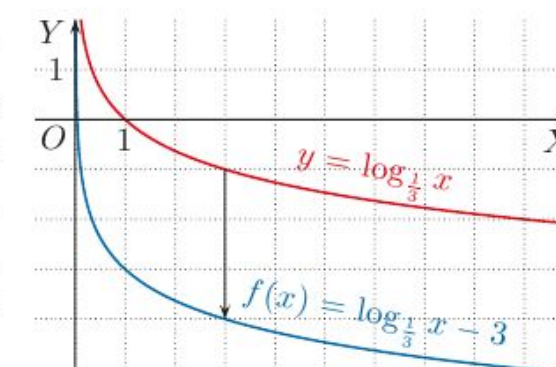
Ćwiczenie 1

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f, g i h .

- $f(x) = \log_2 x, g(x) = \log_2 x + 1, h(x) = \log_2 x - 3$
- $f(x) = \log_5 x, g(x) = \log_5 x + 2, h(x) = \log_5 x - 1$

Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 3$.
Wykres funkcji f możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ o 3 jednostki w dół, czyli o wektor $[0, -3]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



Ćwiczenie 2

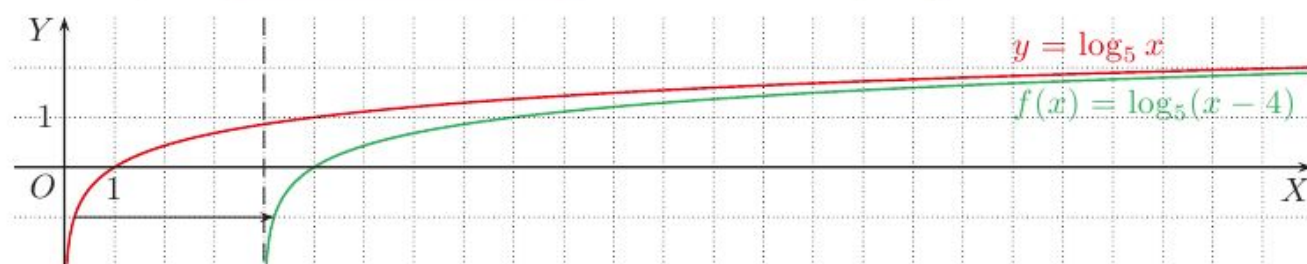
Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f, g i h .

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2, h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 4$$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_5(x - 4)$.

Wykres funkcji f możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_5 x$ o 4 jednostki w prawo, czyli o wektor $[4, 0]$.

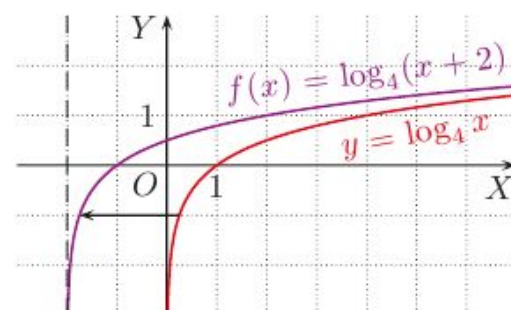


Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (4; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 4$. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 5.

Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_4(x + 2)$. Dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości nieujemne?

Wykres funkcji f możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_4 x$ o 2 jednostki w lewo, czyli o wektor $[-2, 0]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-2; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = -2$. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba -1 .



Nierówność $\log_4(x + 2) \geq 0$ zachodzi dla $x \in [-1; \infty)$.

Ćwiczenie 3

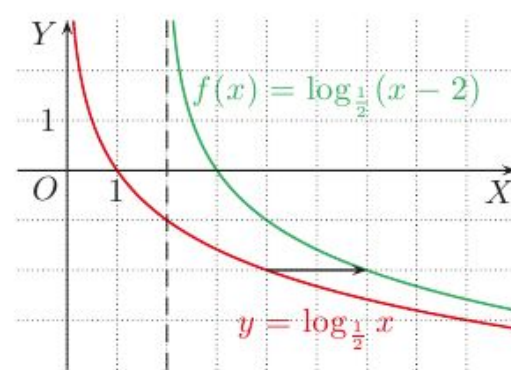
Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji oraz równanie asymptoty pionowej jej wykresu. Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

- a) $f(x) = \log_2(x - 1)$ b) $f(x) = \log_2(x + 2)$ c) $f(x) = \log_3(x + 4)$

Przykład 6

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$.

Wykres funkcji f możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ o 2 jednostki w prawo, czyli o wektor $[2, 0]$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (2; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 2$.

**Ćwiczenie 4**

Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej wykresu tej funkcji.

- a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 3)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 4)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2)$

Przykład 7

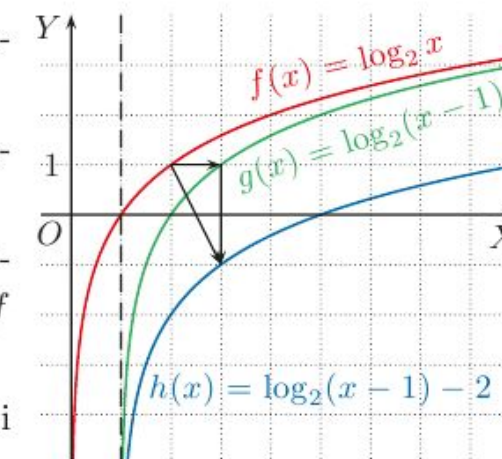
W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2(x - 1)$, $h(x) = \log_2(x - 1) - 2$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $[1, 0]$.

Wykres funkcji h możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji g o wektor $[0, -2]$.

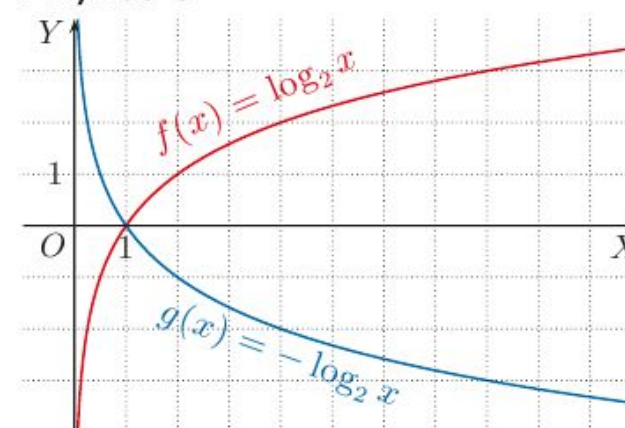
Zauważmy, że wykres funkcji h możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $[1, -2]$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $(0; \infty)$, a funkcji g i h – zbiór $(1; \infty)$.

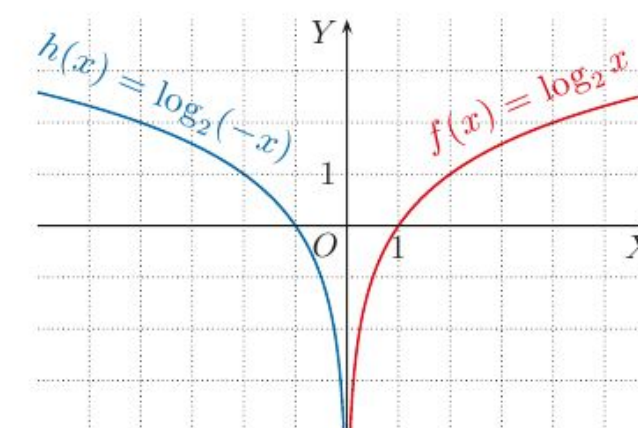
**Ćwiczenie 5**

Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej wykresu tej funkcji.

- a) $f(x) = \log_2(x - 2) + 1$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 3) + 2$
 b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) - 2$ e) $f(x) = \log_4(x - 1) - 3$
 c) $f(x) = \log_3(x + 2) - 1$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x + 2) - 2$

Przykład 8

Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi OY . $D_f = D_g = (0; \infty)$. Zauważ, że: $-\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} x$.



Wykresy funkcji f i h są symetryczne względem osi OY . $D_f = (0; \infty)$, $D_h = (-\infty; 0)$.

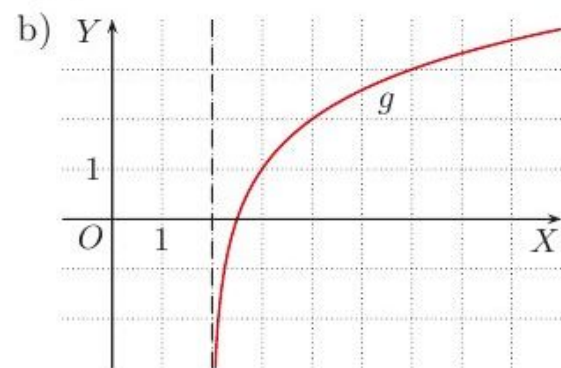
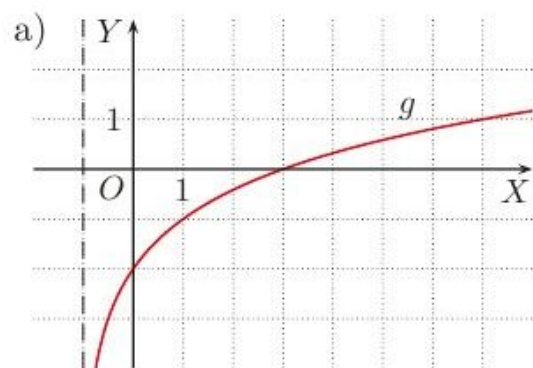
Ćwiczenie 6

Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.

a) $f(x) = \log_3(-x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x) + 2$

Zadania

- Naskicuj wykres funkcji f . Wyznacz jej miejsce zerowe.
a) $f(x) = \log_2 x - 2$ b) $f(x) = \log_3 x + 1$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 2$
- Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej tego wykresu.
a) $f(x) = \log_2(x + 3)$ b) $f(x) = \log_3(x - 1)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 2)$
- Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.
a) $f(x) = \log_2(x + 1) - 2$ d) $f(x) = \log_3(x + 3) - 1$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) - 1$ e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 4) + 1$
c) $f(x) = \log_3(x - 2) + 3$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) - 3$
- O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $f(x) = \log_2 x$, aby otrzymać wykres funkcji g ? Podaj wzór funkcji g .



- Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.
a) $f(x) = 2 - \log_2 x$ c) $f(x) = \log_3(-x) - 2$
b) $f(x) = -1 - \log_{\frac{1}{3}} x$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 3$
- Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.
a) $f(x) = \log_2(1 - x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-2 - x)$ c) $f(x) = \log_3(-1 - x)$
- Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.
a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \leq \log_2(x + 5)\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \geq |x + 2|\}$
b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \leq \log_2(x + 4)\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \leq \log_2(-x)\}$

Skala logarytmiczna

Gdy porównujemy wielkości fizyczne, które przyjmują wartości z szerokiego zakresu, wygodniej jest porównywać ich logarytmy. W ten sposób powstaje **skala logarytmiczna**, na której w równych odstępach umieszczone są logarytmy wartości tych wielkości fizycznych.

Dźwięk

Natężenie dźwięku i poziom natężenia dźwięku to wielkości fizyczne związane z falą dźwiękową. Zachodzi między nimi zależność:

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

gdzie:

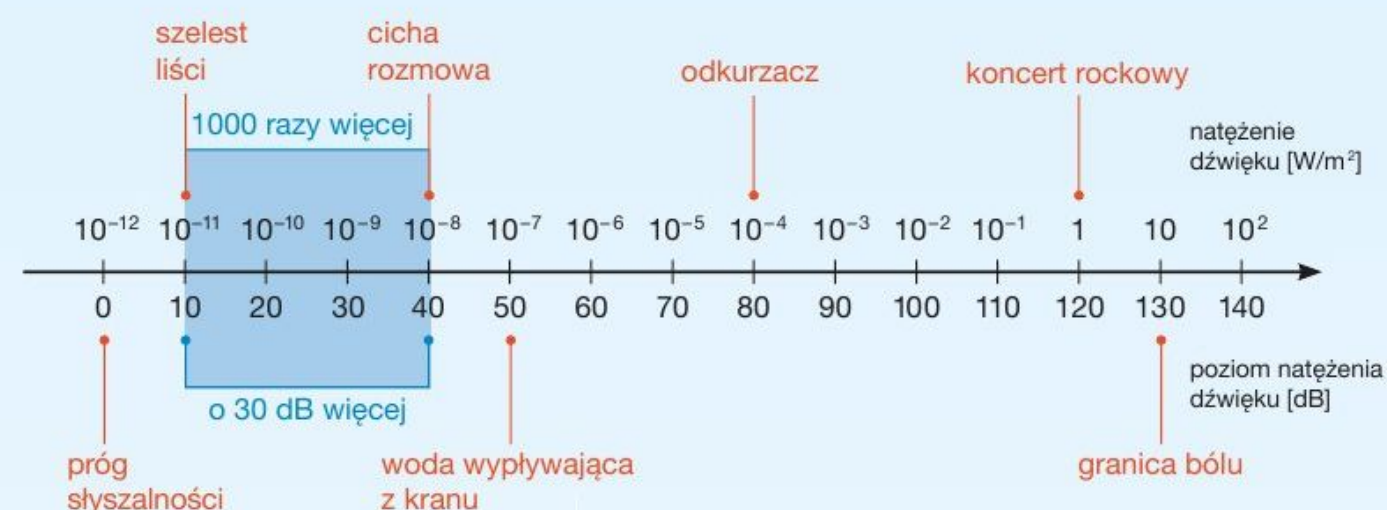
I – natężenie badanej fali dźwiękowej w watach na metr kwadratowy (W/m^2),
 $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ – próg słyszalności (dolna granica zakresu słyszalności człowieka dla częstotliwości 1000 Hz),
 L – poziom natężenia dźwięku.
 Poziom natężenia dźwięku podaje się w **decybelach** (dB).

Na przykład jeżeli podczas koncertu rockowego natężenie dźwięku jest równe 1 W/m^2 , to poziom natężenia dźwięku wynosi:

$$L = 10 \cdot \log \frac{1}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{12} = 10 \cdot 12 = 120 \text{ [dB]}$$



Na osi poniżej pokazano natężenia dźwięków z różnych źródeł (skala liniowa) i odpowiadające im poziomy natężenia dźwięków (skala logarytmiczna). Zwróć uwagę, że wzrost poziomu natężenia dźwięku o 30 dB oznacza tysiąckrotny wzrost natężenia tego dźwięku.



- O ile decybeli wzrośnie poziom natężenia dźwięku, jeżeli natężenie dźwięku wzrośnie dwukrotnie?

R 6.9. Zmiana podstawy logarytmu

Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu

Jeśli a , b i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$ i $b \neq 1$, to:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Dowód

Niech a , b i x będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$ i $b \neq 1$. Niech $\log_b x = p$, $\log_a b = q$, wówczas:

$$x = b^p, \quad b = a^q \quad \text{Korzystamy z definicji logarytmu.}$$

$$x = (a^q)^p = a^{q \cdot p} \quad \text{Korzystamy z własności działań na potęgach.}$$

$$q \cdot p = \log_a x \quad \text{Korzystamy z definicji logarytmu.}$$

$$\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x / : \log_a b \quad \log_a b \neq 0, \text{ gdyż } b \neq 1.$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Przykład 1

a) Przedstaw $\log_4 9$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 9}{2} = \frac{1}{2} \log_2 9 = \log_2 9^{\frac{1}{2}} = \log_2 3$$

b) Przedstaw $\log_4 9$ w postaci logarytmu o podstawie 0,25.

$$\log_4 9 = \frac{\log_{0,25} 9}{\log_{0,25} 4} = \frac{\log_{0,25} 9}{-1} = -\log_{0,25} 9 = \log_{0,25} 9^{-1} = \log_{0,25} \frac{1}{9}$$

Ćwiczenie 1

Przedstaw podany logarytm w postaci logarytmu o podstawie c .

a) $\log_{0,1} 7$, $c = 10$

c) $\log_7 11$, $c = 49$

e) $\log_2 6$, $c = \frac{1}{2}$

b) $\log_8 3$, $c = 2$

d) $\log 625$, $c = 0,1$

f) $\log_{\frac{1}{3}} 12$, $c = 3$

Wzór z twierdzenia o zmianie podstawy logarytmu czasem wygodnie jest zapisać w postaci iloczynu:

$$\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x$$

D Ćwiczenie 2

Udowodnij podaną równość.

a) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = 3$

b) $\log 0,1 \cdot \log_{0,1} 0,01 \cdot \log_{0,01} 0,001 \cdot \log_{0,001} 0,0001 = -4$

D Ćwiczenie 3

Udowodnij podaną równość dla $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ i $x \in \mathbb{R}_+$.

a) $\log_{\sqrt{a}} x = \log_a x^2$

b) $\log_{a^2} x = \log_a \sqrt{x}$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij podany obok wzór.

Jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a \neq 1$ i $b \neq 1$, to:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

D Przykład 2

Udowodnij własność: jeśli $a > 1$ i $b > 1$, to $\log_a b + \log_b a \geq 2$.

Podstawiamy $t = \log_a b$. Ponieważ $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, otrzymujemy:

$$t + \frac{1}{t} \geq 2$$

Przy podanych założeniach $t > 0$, zatem obie strony nierówności mnożymy przez t :

$$t^2 + 1 \geq 2t$$

$$t^2 - 2t + 1 \geq 0$$

$$(t - 1)^2 \geq 0$$

Zwróć uwagę na to, że kolejne nierówności są równoważne.

co kończy dowód, gdyż ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$.

D Ćwiczenie 5

Udowodnij podaną własność.

a) Jeśli $a \in (0; 1)$ i $b \in (0; 1)$, to $\log_a b + \log_b a \geq 2$.

b) Jeśli $a \in (1; \infty)$ i $b \in (0; 1)$, to $\log_a b + \log_b a \leq -2$.

Zadania

1. Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu o podstawie 2.

a) $\log_{16} 3$

c) $\log_{\sqrt{2}} 11$

e) $\log_4 6 + \log_8 6$

b) $\log_{0,5} 7$

d) $\log_{\frac{1}{8}} 9$

f) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{1}{4}} 3 + \log_{0,125} 3$

D 2. Wykaż, że podana równość jest prawdziwa.

a) $\log_2 25 + \log_4 25 = \log_2 125$

c) $\log_3 4 + \log_9 4 = \log_{\frac{1}{3}} 0,125$

b) $\log_{0,1} 4 + \log_{0,01} 16 = \log \frac{1}{16}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 9 + \log_4 9 = \log_2 \frac{1}{3}$

3. Wyraż liczbę a za pomocą p , gdzie $p = \log_3 2$.

a) $a = \log_9 2$

c) $a = \log_{\sqrt{3}} 4$

e) $a = \log_{\frac{1}{3}} 18$

g) $a = \log_{27} \frac{1}{48}$

b) $a = \log_{\frac{1}{27}} 2$

d) $a = \log_{81} \sqrt{2}$

f) $a = \log_{\sqrt[3]{3}} 6$

h) $a = \log_{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Oblicz x .

a) $\log_4 x = \log_{64} 125$

c) $\log_4 x = \log_8 27$

b) $\log_4 x = \log_{\sqrt{2}} 3$

d) $\log_4 x = \log_{2\sqrt{2}} 10^5$

D 5. Niech $a = \log_2 3$. Uzasadnij podany wzór.

a) $\log_4 3 = \frac{a}{2}$

d) $\log_6 2 = \frac{1}{a+1}$

b) $\log_{\sqrt{2}} 3 = 2a$

e) $\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 2} + \frac{1}{\log_9 2} = 2,5a$

c) $\frac{1}{\log_3 \frac{1}{8}} = -\frac{1}{3}a$

f) $\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 2} + \frac{1}{\log_9 4} = 1,5a$

D 6. Niech a i x będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. Uzasadnij własność.

a) Jeśli $\log_{\sqrt{a}} x = t$, to $\log_{a^2} x = \frac{t}{4}$. b) Jeśli $\log_{a^3} x = t$, to $\log_{\sqrt[3]{a}} x = 9t$.

D 7. Wykaż, że dla $a > 0$, $a \neq 1$ i $x > 0$ podany wzór jest prawdziwy.

a) $\log_{a^2} x^2 = \log_a x$

d) $\log_{a^n} x^n = \log_a x$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$

b) $\log_{\sqrt[3]{a}} x = \log_a x^3$

e) $\log_{\sqrt[3]{a}} x = \log_a x^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$

c) $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

f) $\log_{a^p} x = \log_a x^{\frac{1}{p}}$, gdzie $p \neq 0$

8. Wiadomo, że $\log_d a = \frac{1}{2}$. Podaj konieczne założenia i oblicz wartość wyrażenia.

a) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d$

b) $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} \cdot \log_b \frac{1}{c} \cdot \log_{\frac{1}{c}} \frac{1}{d}$

D 9. Wykaż, że dla $a \in (0; 1)$ i $b \in (1; \infty)$ zachodzi podana nierówność.

a) $\log_a b - \log_a^2 b < 0$

c) $\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b a} \leq -2$

b) $\log_b^2 a + \log_{\frac{1}{a}} b > 0$

d) $\log_a^2 b + \log_{\sqrt{a}} b \geq -1$

10.* Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \log_2 \sqrt{x} + \log_4 x$

c) $f(x) = \log_4 x^2 + 2 \log_{\frac{1}{2}} x$

b) $f(x) = \log_2 x^4 - \log_{\sqrt{2}} x$

d) $f(x) = \log_8 x^3 - \frac{1}{4} \log_{\sqrt{2}} x$

D 11. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, oblicz wartość $\log_3 5$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

$$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \approx \frac{0,69897}{0,47712} \approx 1,465$$

Oblicz wartość logarytmu z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

a) $\log_3 7$

b) $\log_6 3$

c) $\log_{0,5} 9$

6.10. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania

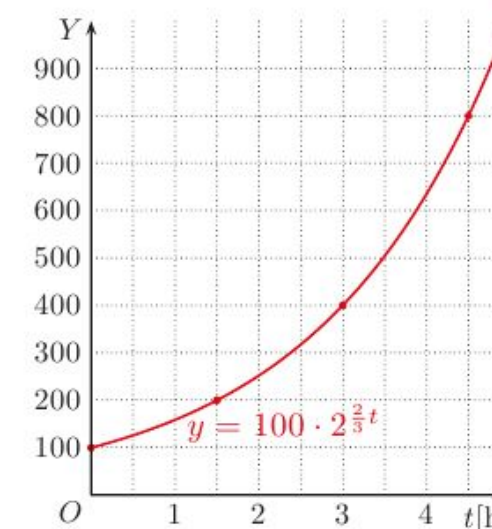
Wzrost wykładniczy

Liczbę bakterii hodowanych w warunkach laboratoryjnych, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór: $y = y_0 \cdot a^t$, gdzie y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a – pewną stałą.

Przykład 1

Pewne doświadczenie polegało na badaniu wzrostu liczebności kolonii bakterii. Na początku doświadczenia było 100 bakterii. Ustalono, że liczba bakterii podwaja się w ciągu 1,5 godziny. Wyznacz wzór opisujący liczebność kolonii bakterii w zależności od czasu.

Zauważmy, że $y_0 = 100$ oraz dla $t = 1,5$ zachodzi równość $200 = 100 \cdot a^{1,5}$. Stąd $a = 2^{\frac{2}{3}}$. Otrzymujemy więc wzór $y = 100 \cdot 2^{\frac{2}{3}t}$.



Ćwiczenie 1

Po dwóch godzinach od rozpoczęcia pewnego doświadczenia liczba bakterii była równa 1200, a po sześciu godzinach wzrosła do 10 800. Oblicz, ile było bakterii na początku doświadczenia, a ile po 10 godzinach.

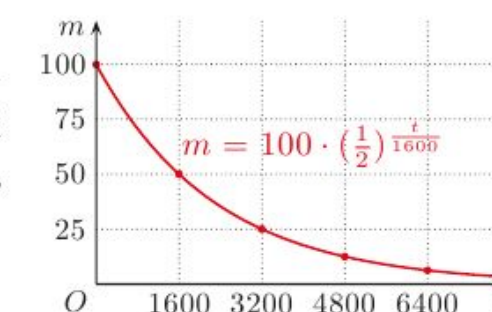
Rozpad promieniotwórczy

Okres połowicznego rozpadu to czas, po którym masa izotopu zmniejsza się o połowę. Wzór $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ opisuje masę próbki promieniotwórczego izotopu o okresie połowicznego rozpadu T po upływie czasu t (m_0 oznacza masę początkową próbki).

Przykład 2

Okres połowicznego rozpadu radu-226 jest równy 1600 lat. Jeśli masa początkowa m_0 próbki tego izotopu była równa 100 mg, to jego masa po upływie t lat wyraża się wzorem:

$$m = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$



Ćwiczenie 2

Po jakim czasie z próbki radu-226 o masie:

- a) 100 mg zostanie 12,5 mg tego izotopu,
- b) 10,24 mg zostanie 0,01 mg tego izotopu?

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a = \left(\frac{1}{2}\right)^b, \text{ gdy } a = b.$$

Ćwiczenie 3

Okres połowicznego rozpadu strontu-90 jest równy 28 lat. Po jakim czasie początkowa masa próbki tego izotopu zmniejszy się o 75%, a po jakim czasie o 87,5%?

W żyjącym organizmie (roślinnym lub zwierzęcym) stosunek ilości radioaktywnego izotopu węgla ^{14}C do izotopu nieradioaktywnego ^{12}C wynosi około $1,5 \cdot 10^{-12}$. Po śmierci organizmu ilość radioaktywnego izotopu ^{14}C maleje (okres jego połowicznego rozpadu wynosi około 5700 lat), a ilość izotopu ^{12}C pozostaje niezmienną. Podczas prac archeologicznych pomiar zawartości izotopu ^{14}C może więc stanowić podstawę określenia wieku znalezisk.



Przykład 3

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest równa 66% początkowej zawartości tego izotopu.

Korzystamy ze wzoru $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, gdzie $T = 5700$ lat.

$m = 0,66m_0$, zatem otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 0,66 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}} \\ \log 0,66 &= \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}} \\ \log 0,66 &= \frac{t}{5700} \log 0,5 \\ t &= 5700 \cdot \frac{\log 0,66}{\log 0,5} \approx 3417 \end{aligned}$$

Jeśli $a = b > 0$, to
 $\log a = \log b$.



Znalezisko ma około 3417 lat.

Ćwiczenie 4

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 50%, b) 75%.



Ćwiczenie 5

W pewnym znalezisku stosunek ilości izotopu węgla ^{14}C do izotopu ^{12}C wynosi $1,875 \cdot 10^{-13}$. Oblicz przybliżony wiek znaleziska.

Zadania

1. a) Z próbki jodu-131 o masie 4,8 g po szesnastu dniach zostało 1,2 g. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu.
b) Po siedmiu dniach z 40 g neptunu-239 zostało 5 g tego izotopu. Oblicz okres jego połowicznego rozpadu.
2. Jednym z radioaktywnych odpadów w elektrowniach jądrowych jest pluton-239. Po 100 000 lat jego masa zmniejsza się o 75%. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu.
3. Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 20%, b) 80%.
4. Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym stosunek ilości izotopu ^{14}C do ilości izotopu ^{12}C jest równy $1 : 10^{13}$.
5. Oblicz, ile procent początkowej zawartości izotopu ^{14}C znajduje się w:
a) egipskiej mumii mającej 3330 lat,
b) kości zwierzęcia mającej 17 000 lat.

Czy wiesz, że...

W niektórych modelach wzrostu liczby ludności zakłada się, że wzrost ten ma charakter wykładniczy. Przyjmijmy, że wzrost liczby ludności wyraża wzór:

$$N = N_0 \cdot e^{kt}$$

(liczba e – patrz str. 299), gdzie N_0 jest początkową liczbą ludności, t – czasem mierzonym w latach, N – liczbą ludności po upływie czasu t oraz k – odpowiednio dobraną stałą.

Wyznamy stałą k dla USA w latach 1900–2000.

Z tabeli odczytujemy: $N_0 = 76$ mln, $N = 275$ mln, $t = 100$ lat. Otrzymujemy więc:

$$275 = 76 \cdot e^{100k}$$

Rok 1900	Rok 2000
76 mln	275 mln

Liczba ludności USA

Stąd $100k = \ln \frac{275}{76}$ (logarytm naturalny – patrz str. 310), zatem $k \approx 0,013$.

Aby oszacować liczbę ludności USA w wybranym roku XX w., możemy skorzystać ze wzoru $N = 76 \cdot e^{0,013t}$, gdzie t oznacza liczbę lat, które upłynęły od 1900 r. Obliczmy na przykład liczbę ludności w latach 1950 i 1990:

$$N_{1950} = 76 \cdot e^{0,013 \cdot 50} \approx 146 \text{ mln}, \quad N_{1990} = 76 \cdot e^{0,013 \cdot 90} \approx 245 \text{ mln}$$

Uwaga. W rzeczywistości liczba ludności USA w 1950 r. wynosiła około 152 mln, a w 1990 r. – około 250 mln.

Równania wykładnicze

1. Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie rozwiąż równanie.

- a) $5^x = 6^{x+1}$
 b) $11^{x-3} = 13^{3-x}$
 c) $7^{x+1} = 3^{2x-2}$
 d) $3^{2x} = 2^x \cdot 4^{x-1}$
 e) $4 \cdot 2^{x-3} = 10^x \cdot 3^{x-1}$

2. Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie rozwiąż równanie.

- a) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^x = 63$
 b) $3^x + 3^{x-1} - 24 = 0$
 c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 12$
 d) $20 \cdot 4^{x-1} + \sqrt{2}^{4x} = 6$
 e) $16^{x+1} + 4^{2x} + 2^{4x} = \frac{9}{8}$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $4^x - 8 \cdot 2^x + 16 = 0$ c) $4 \cdot 16^x = 4^{x+1} - 1$ e) $\frac{1}{4^x} - \frac{3}{2^x} + 2 = 0$
 b) $5^{x+1} + 25^x = 6$ d) $4^x + 8 = 3 \cdot 2^{x+1}$ f) $7^x - 14 \cdot 7^{-x} = 5$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$ b) $\frac{3}{2^x - 1} + \frac{2}{2 - 2^x} = 0$ c) $\frac{1 - 4^x}{1 - 2^x} = 2^x + 1$

5. Rozwiąż równanie.

- a) $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^{-x} = 2$ b) $(3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x = 2$

Wskazówka. W podpunkcie a) zauważ, że $2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$.

6. Rozwiąż równanie.

- a) $8^x - 4^{x+1} + 2^{x+2} = 0$ d) $81^x - 9^x + 9^{1-x} - 9 = 0$
 b) $8^x - 4^{x+0,5} - 2^x + 2 = 0$ e) $9^{\sqrt{x}} - 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 9 = 0$
 c) $16^x - 5 \cdot 8^x + 4^{x+1} = 0$ f) $2 \cdot 4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 4 = 0$

Rozwiąż równanie $7^x = 4^{x+2}$.

$$7^x = 4^2 \cdot 4^x$$

$$7^x = 16 \cdot 4^x$$

$$\frac{7^x}{4^x} = 16$$

$$\left(\frac{7}{4}\right)^x = 16$$

$$x = \log_{\frac{7}{4}} 16$$

Rozwiąż równanie $2^{x+3} + 2^x = 54$.

$$2^x \cdot 2^3 + 2^x = 54$$

$$8 \cdot 2^x + 2^x = 54$$

$$9 \cdot 2^x = 54 \quad / : 9$$

$$2^x = 6$$

$$x = \log_2 6$$

Równania logarytmiczne

1. Przeczytaj podany w ramce przykład. Rozwiąż równanie.

- a) $\log_3(x^2 - 7) = 2$
 b) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) = -1$
 c) $\log_2(9x - x^2) = 3$
 d) $\log_2|x^2 - 1| = 3$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $\log_4(\log_2 x) = -\frac{1}{2}$
 b) $\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x) = 1$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $\log_{0,3}(\log_5(x^2 + 1)) = 0$
 b) $\log_3(\log_3(\log_3 x)) = 0$

4. Rozwiąż równanie. Podaj wykorzystane własności logarytmu.

- a) $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$ d) $\log_2 x + \log_2(x + 3) = 2$
 b) $\log(2x + 1) + \log(x + 1) = 1$ e) $\log_3 x = 1 - \log_3(x - 2)$
 c) $\log_3(4 - x) - \log_3 x = 2$ f) $\log_{\frac{1}{2}}(4x + 8) - \log_{\frac{1}{2}}(10 - x) = -3$

5. Rozwiąż równanie.

- a) $\log_4 x + \log_2 x = 9$ c) $\log_2 x - 2 \log_4(x - 1) = 2$
 b) $\log x - \log_{0,1}(x + 3) = 1$ d) $\log\left(\frac{1}{2}x + x^2\right) = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{10}}(x - x^2)$

6. Rozwiąż równanie.

- a) $\log_x(1 - x) = 1$ b) $\log_x|x - 1| = 0$ c) $\log_{(x-1)}(3x - 5) = 2$

7. Rozwiąż równanie.

- a) $\log_3^2 x + 3 \log_3 x = 0$ f) $\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 2 = 0$
 b) $\log_2^2 x - \log_2 x^4 = 0$ g) $\log^2 x - \log x^2 = 8$
 c) $\log x - \frac{1}{\log x} = 0$ h) $\frac{1}{\log x - 1} + \frac{3}{\log x + 1} = 2$
 d) $\log_2 x + 2\sqrt{\log_2 x} = 8$ i) $\frac{\log(x+1)}{\log(2x-1)} = 1$
 e) $2 \log_4 x = 1 + \frac{1}{\log_4 x}$ j) $\frac{\log(4x+1)}{\log(x+1)} = 2$

Wskazówka. W podpunkcie a) zastosuj podstawienie $t = \log_3 x$.

Rozwiąż równanie $\log_3(2x - 4) = 2$.

Zakładamy, że $2x - 4 > 0$, czyli $x > 2$.

$$\log_3(2x - 4) = 2$$

$$2x - 4 = 3^2$$

Stąd $2x = 13$, czyli $x = 6,5$.



Powtórzenie

Zestaw I

- Oblicz.
a) $\frac{2^{-3} \cdot 4^{-2}}{2^{-6}}$ b) $\frac{10^{-2}}{5^{-6} \cdot 25^2}$ c) $\frac{6^4 \cdot 9^{-4}}{4^2 \cdot 12^{-1}}$ d) $\frac{16^{-2} \cdot 125^{-3}}{10^{-4} \cdot 25^{-2}}$
- Oblicz.
a) $25^{\frac{3}{2}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$ b) $64^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{5}{3}}$ c) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 32^{-\frac{3}{5}}$ d) $0,001^{-\frac{1}{3}} \cdot 0,09^{\frac{1}{2}}$
- Oblicz.
a) $5^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{5} \cdot 5^{-\frac{4}{3}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{7}{6}}$ c) $\sqrt[3]{100} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ d) $\frac{11^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{44}} \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^3$
- Zapisz liczbę w postaci potęgi a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$.
a) $3^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sqrt{27}}{9}$ b) $\sqrt[4]{3\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$ d) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{8}}$
- Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.
a) $5^{\sqrt{5}}; 25\sqrt{5}; 125^{\frac{4}{5}}; 25^{1,1}; 5^{2\sqrt{2}}$ c) $9^{\frac{1}{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt[4]{27}; (\sqrt[3]{3})^{-2}; 3^{-0,5\pi}$
b) $\frac{1}{\sqrt{8}}; (\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}; 0,5; 16^{-\frac{1}{3}}; 4^{-0,5\sqrt{3}}$ d) $4,5^{-2}; \sqrt{0,4}^{\sqrt{12}}; 2,5^{-2,4}; 0,064$
- Wyznacz przybliżoną wartość potęgi z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Skorzystaj z przybliżenia: $\sqrt[10]{10} \approx 1,258925$.
a) $10^{1,1}$ b) $10^{-0,9}$ c) $10^{-1,9}$ d) $10^{-2,9}$
- Naszkicuj wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$, o którym wiadomo, że przechodzi przez punkt P .
a) $P(\frac{5}{2}, 32)$ b) $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ c) $P(-6, 729)$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz jej miejsca zerowe.
a) $f(x) = 2^x - 4$ c) $f(x) = 4^{x+2} - 3$ e) $f(x) = 2 + 2^{-x}$
b) $f(x) = 3^{x-1} + 2$ d) $f(x) = 4 - 2^x$ f) $f(x) = 1 - 3^{-x}$
- Oblicz.
a) $\log_3 27$ d) $\log_{\frac{1}{27}} 3$ g) $\log_{\sqrt{3}} 27$ j) $27^{\log_3 2}$
b) $\log_{27} 3$ e) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ h) $\log_{27} 3\sqrt{3}$ k) $\sqrt{27}^{\log_3 2}$
c) $\log_3 \frac{1}{243}$ f) $\log_{27} \sqrt{3}$ i) $\log_{\sqrt{27}} 3$ l) $3^{1-\log_3 2}$

- Oblicz $\sqrt{ab}$.
a) $a = \log_3 9, b = \log_2 256$ b) $\log_2 a = 5, \log_4 b = \frac{1}{2}$
- Oblicz x .
a) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$ b) $\log_4 x = \frac{3}{2}$ c) $\log_{\frac{1}{8}} x^2 = \frac{1}{3}$ d) $\log_{2\sqrt{2}} |x| = 4$
- Oblicz x .
a) $\log_6 x = \log_6 4 + \log_6 9$ c) $\log x = 2 \log 5 + \log 4$
b) $\log_3 x = \log_3 18 - \log_3 2$ d) $\log x = \log 80 - 3 \log 2$

Zestaw II

- Oblicz.
a) $49^{0,7} \cdot 7^{-1,4} \cdot 27^{\frac{4}{3}}$ b) $\sqrt[4]{32} \cdot 10^{0,75} \cdot 5^{\frac{1}{4}}$ c) $6^{-0,5} \cdot 2^{2,5} \cdot 27^{\frac{1}{2}}$
- Oblicz.
a) $18^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{4}} - 16^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$ c) $(3^{-0,75})^{-4} : (9^{-1,5})^{\frac{1}{3}}$
- Podaj konieczne założenia, a następnie uprość wyrażenie.
a) $\left(\frac{1}{9}x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}}\right) : \left(\frac{1}{27}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{4}{3}}\right)$ c) $\left(a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}}\right)^{-2} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$
b) $\left(x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ d) $(x^{1,5} \cdot y^{-0,25}) : (x^{0,5} \cdot y^{-1,25})$
- Która z liczb jest większa: x czy y ?
a) $x = (2^{-3})^{-2}, y = (2\sqrt{5} + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{2}}$
b) $x = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 12^{-0,5}, y = 9^{-0,75} \cdot 9^{\frac{1}{4}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}$
- Oblicz.
a) $\log_4(\log_2 16)$ c) $\log_8(\log_4 2)$ e) $\log_6 \left(\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 \sqrt{3})\right)$
b) $\log_2(\log_4 16)$ d) $\log_3(\log_8 2)$ f) $\log_8 \left(\log_9 \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}\right)\right)$
- Oblicz.
a) $\log_3 6 \cdot \log_6 8 \cdot \log_8 9$ b) $\log_6 9 \cdot \log_3 8 \cdot \log_2 36$
- Przedstaw podaną liczbę w postaci logarytmu o podstawie 3.
a) $\log_{27} 8$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 0,2$ c) $\log_{3\sqrt{3}} 64$ d) $\log_{\frac{1}{9}} 25$
- Przedstaw podane wyrażenie za pomocą $p = \log_4 3$.
a) $\log_3 64$ b) $\log_2 27$ c) $\log_{\sqrt{2}} 24$



Zadania z kontekstem realistycznym

9. Przedstaw podaną liczbę za pomocą a i b , gdzie $a = \log_2 3$, $b = \log_4 5$.

a) $\log_3 1024 + \log_5 1024$ b) $\log_4 121 \cdot \log_{11} 27 - \log_8 0,04$

10. Oblicz.

a) $3^{\log_{3\sqrt{3}} 27}$ b) $(\sqrt[3]{4})^{\log_{4\sqrt{2}} 32}$ c) $5^{\log_3 7} - 7^{\log_3 5}$

11. Znajdź liczbę x spełniającą podany warunek.

a) $\log(\log_4 x) = 0$ b) $\log_5(\log_4 x) = 1$ c) $\log_4(\log_4 x) = \frac{1}{2}$

12. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Naskicuj wykres funkcji g oraz podaj jej wzór i zbiór wartości.

a) $g(x) = f(x-1) - 1$ b) $g(x) = -f(x+2)$ c) $g(x) = -f(-x)$

13. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj, dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości nieujemne.

a) $f(x) = 4 \cdot 2^{2x} - 4$ b) $f(x) = \frac{1}{64} \cdot 2^{x+3} - 2$ c) $f(x) = \frac{9}{3^{-x+1}} - 3$

14. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej tego wykresu.

a) $f(x) = \log_6(x-3) - 1$ d) $f(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+4) - 1$ e) $f(x) = \log_5(-x) - 1$
c) $f(x) = -\log_4(x-2)$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x) + 1$

15. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres.

a) $f(x) = \frac{\log x}{|\log x|}$ b) $f(x) = \frac{|\log_{0,5} x|}{\log_{0,5} x}$ c) $f(x) = \frac{|\log |x||}{\log |x|}$

16. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = \log_{0,5}(1-x^3)$ d) $f(x) = \log_3(x^2+x+1)$
b) $f(x) = \log_{0,1}(x^2-1)$ e) $f(x) = \log_2(x^2-5x+4)$
c) $f(x) = \log_{0,1}|2x+3|$ f) $f(x) = -1 + \log|x^2-1|$

17. Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \geq g(x)$.

a) $f(x) = \log_2(x+1)$, $g(x) = 1 + \log_{0,5} x$
b) $f(x) = 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$, $g(x) = -1 + \log_3(x-3)$

18. Dla jakiego argumentu funkcja f przyjmuje wartość równą m ?

a) $f(x) = \log_3(3-x) - \log_3(x+1)$, $m = 0$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x-6) + \log_{\frac{1}{4}}(10-x)$, $m = -1$

1. Skala Richtera jest skalą logarytmiczną służącą do określania siły trzęsienia ziemi. Miarą tej siły jest liczba:

$$M = \log \frac{A}{A_0}$$

gdzie A – maksymalna amplituda drgań (w centymetrach) zarejestrowana w odległości 100 km od epicentrum, A_0 – wartość wzorcowa równa 10^{-4} cm (drgania niewyczuwalne przez człowieka). Liczbę M wyraża się w stopniach skali Richtera.

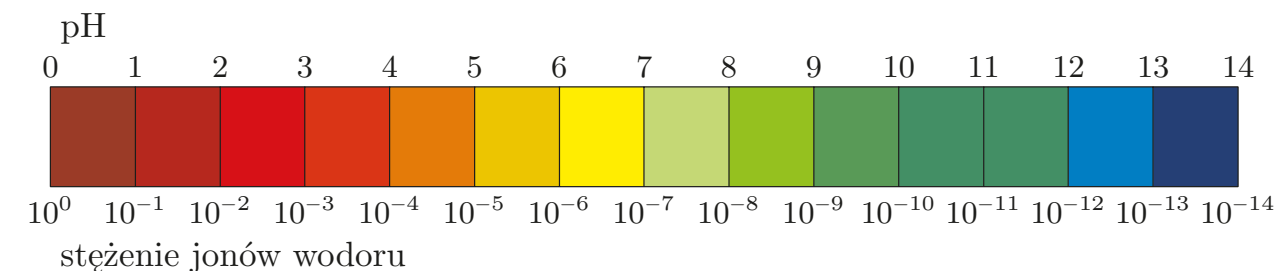
a) Oblicz siłę trzęsienia ziemi o amplitudzie drgań 1000 razy większej od wartości wzorcowej A_0 .

b) 20 kwietnia 2013 r. w południowych Chinach odnotowano trzęsienie ziemi o sile 6,6 stopni w skali Richtera. Oblicz, ile razy większą amplitudę drgań miało to trzęsienie ziemi od amplitudy najsilniejszego ze wstrząsów wtórnych, który miał siłę 5,1 stopnia.



2. Przykładem wykorzystania skali logarytmicznej jest stosowana w chemii skala pH, opisująca odczyn roztworu.

pH roztworu określa się za pomocą wzoru $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$, gdzie $[\text{H}^+]$ oznacza stężenie jonów wodoru w roztworze, mierzone w molach na dm^3 . Woda o $\text{pH} = 7$ ma odczyn obojętny. Roztwory o pH mniejszym niż 7 mają odczyn kwasowy, roztwory o pH większym niż 7 – odczyn zasadowy.



Oblicz pH roztworu o podanym stężeniu jonów H^+ . Odpowiedź podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku. Czy jest to roztwór zasadowy, czy kwasowy?

- a) Sok pomarańczowy – stężenie jonów H^+ wynosi $6,8 \cdot 10^{-5}$ moli na dm^3 .
b) Wino – stężenie jonów H^+ wynosi $4 \cdot 10^{-4}$ moli na dm^3 .
c) Woda morska – stężenie jonów H^+ wynosi $2,2 \cdot 10^{-9}$ moli na dm^3 .



3. W jonizacyjnych czujnikach dymu wykorzystuje się izotop ameryku ^{241}Am o okresie połowicznego rozpadu $T = 432$ lata. Po jakim czasie próbka ameryku straci 5% swojej masy?



Rozwiązywanie zadań takich jak poniższe przykłady rozpoczynamy od wyznaczenia dziedziny wskazanej funkcji.

Przykład 1

Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x^2 - 2x + 8)$. Dla jakiego argumentu jest ona przyjmowana?

Dziedziną funkcji f jest zbiór tych liczb x , dla których spełniony jest warunek:

$$-x^2 - 2x + 8 > 0$$

Rozwiązujemy tę nierówność i otrzymujemy: $x \in (-4; 2)$ – sprawdź.

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-4; 2)$.

Zauważmy, że funkcja logarytmiczna o podstawie $a \in (0; 1)$ jest funkcją malejącą. Oznacza to, że funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla największej możliwej wartości wyrażenia $-x^2 - 2x + 8$ dla $x \in (-4; 2)$.

Wyznaczamy największą wartość trójkątnu kwadratowego:

$$y = -x^2 - 2x + 8$$

$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1 \in (-4; 2)$$

$$y_w = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 8 = 9$$

Zatem najmniejsza wartość funkcji f jest równa: $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$.

Odpowiedź: Funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość równą -2 dla $x = -1$.

→ Zadanie 7, str. 335

Przykład 2

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \log_3 \frac{1}{5}(1-x)(x-7)$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór tych liczb x , dla których:

$$\frac{1}{5}(1-x)(x-7) > 0$$

$$x \in (1; 7)$$

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (1; 7)$.

Liczba x jest miejscem zerowym funkcji f , gdy $\frac{1}{5}(1-x)(x-7) = 1$.

$$\frac{1}{5}(1-x)(x-7) = 1 \quad / \cdot 5$$

$$-x^2 + 8x - 7 = 5$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

Rozwiązaniami ostatniego równania są liczby 2 i 6.

Zatem $f(x) = 0$ dla $x \in \{2, 6\}$.

Odpowiedź: $x = 2, x = 6$

→ Zadanie 8, str. 335



W zadaniach 1–10 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Do wykresu funkcji $f(x) = 4^x$ należy punkt o współrzędnych

- A. $(-1, -4)$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ C. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{4}, 1)$

Zadanie 2 (0–1)

Wartość funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ jest liczbą całkowitą dla

- A. $x = \frac{1}{2}$ C. $x = 2$
B. $x = -3$ D. $x = 10$

Zadanie 3 (0–1)

Wartość funkcji $f(x) = (\sqrt{2})^x$ jest liczbą wymierną dla

- A. $x = 1$ C. $x = -3$
B. $x = -1$ D. $x = -6$

Zadanie 4 (0–1)

Funkcją rosnącą jest funkcja

- A. $f(x) = (\sqrt{3} - 1)^x$ C. $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
B. $f(x) = (\sqrt{5} - 1)^x$ D. $f(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^x$

Zadanie 5 (0–1)

Która funkcja ma dodatnie miejsce zerowe?

- A. $f(x) = 6^x - 6$ C. $h(x) = (\frac{1}{2})^x - 2$
B. $g(x) = 4^x + 4$ D. $k(x) = (\frac{1}{2})^x + 2$

Zadanie 6 (0–1)

Prawdziwa jest nierówność

- A. $3^{\sqrt{2}} \leq 3^{1,5}$ C. $2^\pi \leq 2^{3,14}$
B. $0,5^{\sqrt{2}} \leq 0,5^{1,5}$ D. $4^\pi \leq 4^{3,141}$

Zadanie 7 (0–1)

Prawdziwa jest nierówność

- A. $\log_2 8 < \log_3 9$ C. $\log_2 \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{3}} 3$
B. $\log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{3}} 9$ D. $\log_{\frac{1}{2}} 1 > \log_3 3$

Zadanie 8 (0–1)

Punkt $(8, -3)$ należy do wykresu funkcji

- A. $f(x) = \log_6(x - 6) - 6$ C. $f(x) = \log_3(x - 3) - 3$
B. $f(x) = \log_4(x - 4) - 4$ D. $f(x) = \log_2(x - 2) - 2$



Zadanie 9 (0-1)

Wartość funkcji $f(x) = 10^{-2x}$ dla $x = -(\sqrt[6]{81})^{\frac{3}{2}}$ należy do przedziału

- A. $(0; 1]$ C. $(100; 1000]$
B. $(1; 100]$ D. $(10\,000; \infty)$

Zadanie 10 (0-1)

Jeśli $a = \log_3 2$ i $b = \log_3 5$, to $\log_3 31,25$ jest równy

- A. $3a - 2b$ B. $2a - 3b$ C. $3b - 2a$ D. $2b - 3a$

Zadanie 11 (0-1)

Dane są liczby $x = 25^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{5}$ i $y = 125^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Iloczyn $x \cdot y$ jest równy 5.	P	F
Iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy $\sqrt{5}$.	P	F

Zadanie 12 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$\log x^2 y^3 = 2 \log xy + \log y$.	P	F
$\log x^2 y^3 = \log x + 2 \log y + \log xy$.	P	F

Zadanie 13 (0-2)

Dana jest funkcja $f(x) = (\sqrt{2})^x - 8$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Miejsce zerowe funkcji f jest równe

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 8

2. Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie

- E. $(-8, 0)$ F. $(-7, 0)$ G. $(0, -7)$ H. $(0, -8)$

Zadanie 14 (0-3)

Uzupełnij zdanie.

Dziedzina funkcji $f(x) = \log_2(x + 4)$ jest przedział $?$, jej miejscem zerowym jest $?$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $?$.



Zadanie 15 (0-1)

Dane są funkcja $f(x) = 3^{-x}$ oraz liczby $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Prawdziwa jest nierówność

A.	$f(x_1) < f(x_2)$,	ponieważ	1.	$x_1 < x_2$ i f jest funkcją rosnącą.
B.	$f(x_1) > f(x_2)$,		2.	$x_1 > x_2$ i f jest funkcją malejącą.
			3.	$x_1 > x_2$ i f jest funkcją rosnącą.

Zadanie 16

Dane są liczby $x = \log_a(\sqrt{3} + 1)$ i $y = \log_a(\sqrt{3} - 1)$.

D Zadanie 16.1 (0-2)

Uzasadnij, że dla $a = 4$ zachodzi równość $x + y = \frac{1}{2}$.

Zadanie 16.2 (0-1)

Równość $x - y = 1$ zachodzi dla

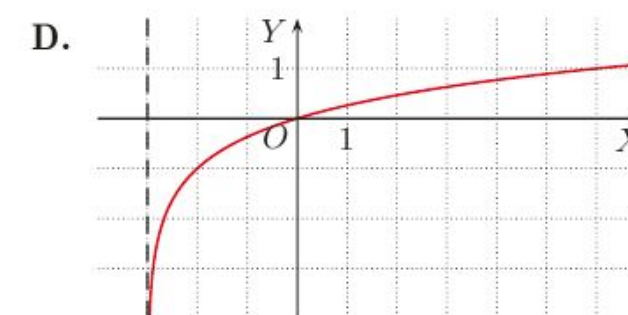
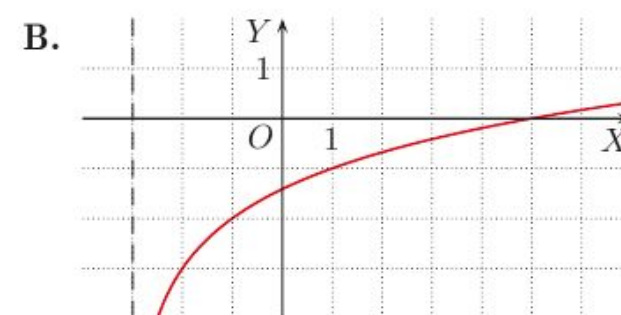
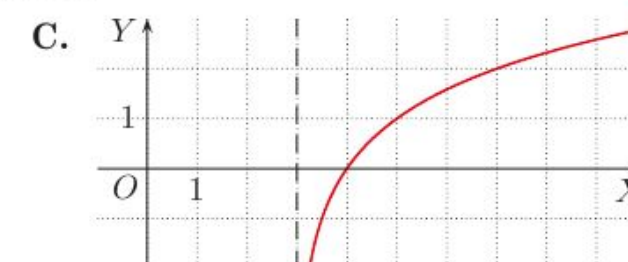
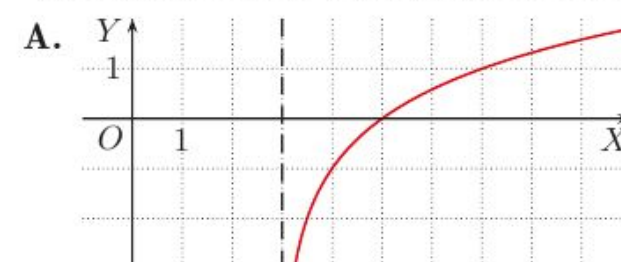
- A. $a = 2$ B. $a = 2\sqrt{3}$ C. $a = 2 - \sqrt{3}$ D. $a = 2 + \sqrt{3}$

Zadanie 17

Dana jest funkcja $f(x) = \log_2(x + 3) - 3$.

Zadanie 17.1 (0-1)

Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku



Zadanie 17.2 (0-1)

Oblicz $f(1) - f(13)$.



Zadanie 18 (0-2)

Wyznacz liczbę, której 80% jest równe $2^{3+2\sqrt{3}} : 4^{\sqrt{3}}$.

Zadanie 19 (0-2)

Ile dzielników będących liczbami naturalnymi ma liczba n spełniająca równanie $8 = (\sqrt[4]{2})^n$?

Zadanie 20 (0-2)

Punkt $P(8, \frac{3}{2})$ należy do wykresu funkcji $y = \log_a x$. Wyznacz a .

D Zadanie 21 (0-2)

Udowodnij równość $4 \log_9 3 + 9 \log_3 9 = 5 \log_3 81$.

D Zadanie 22 (0-2)

Uzasadnij, że liczba $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{3}$ jest wymierna.

Zadanie 23 (0-3)

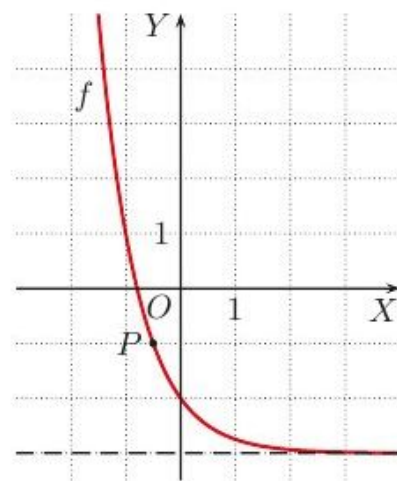
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = a^x - 3$$

Punkt P ma współrzędne $(-\frac{1}{2}, -1)$. Oblicz wartość funkcji f dla $x = -5$.

Zadanie 24 (0-4)

Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = 3^x$ i $g(x) = 9 \cdot 3^x$. Prosta $y = 100$ przecina wykres funkcji f w punkcie P , a wykres funkcji g w punkcie Q . Oblicz długość odcinka PQ .



Zadanie 25 (0-4)

Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $a = \log_{\frac{1}{2}} 2^{-5}$ i $b = \log_3 3^{15} - \log_3 27$.

Zadanie 26 (0-4)

Liczba p jest rozwiązaniem równania $x \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$, a liczba q – rozwiązaniem równania $4^6 x - 2^{10} = 4 \cdot 2^8$. Oblicz sumę odwrotności kwadratów tych liczb.

Zadanie 27 (0-4)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = a^x + b$, gdzie $a = \log_9 \sqrt{3}$ oraz $b = \log_3 \frac{1}{9}$.



Zadanie 1 (0-2)

Wyraź liczbę:

$$\frac{1}{\log_4 3} + \frac{1}{\log_{2\sqrt{2}} 9}$$

za pomocą a , gdzie $a = \log_3 2$.

Zadanie 2 (0-3)

Dane są liczby $a = \log_2 5$ oraz $b = \log_5 3$. Wyraź $\log_4 36$ za pomocą a i b .

Zadanie 3 (0-3)

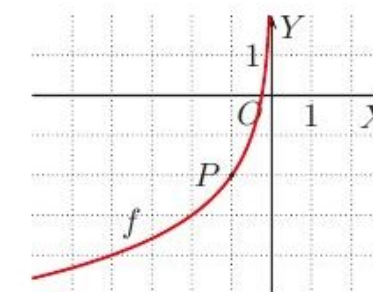
Liczba m jest rozwiązaniem równania:

$$(\sqrt{7})^{2m} + \left(\frac{1}{7}\right)^{-m} = 98$$

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = m^x - 4$.

Zadanie 4 (0-3)

Do wykresu funkcji $f(x) = \log_p(-4x)$ należy punkt P (rysunek obok). Wyznacz miejsca zerowe funkcji f oraz funkcji $g(x) = f(x+2)$.



D Zadanie 5 (0-3)

Do wykresu funkcji $f(x) = a^x$ należy punkt o współrzędnych (p, q) , gdzie $p = \log_{\frac{1}{4}} 256$ oraz $q = \log_{2\sqrt{2}} 64$. Uzasadnij, że liczba naturalna:

$$n = f(-6) - f(-2)$$

jest liczbą doskonałą (czyli jest sumą wszystkich swoich dzielników mniejszych od niej samej).

D Zadanie 6 (0-4)

Dana jest funkcja $f(x) = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$. Udowodnij własność: jeśli $x_1, x_2 \in D_f$ oraz $x_1 + x_2 = 0$, to $f(x_1) + f(x_2) = 0$.

Zadanie 7 (0-4) → Przykład 1, str. 330

Wyznacz największą wartość funkcji $f(x) = \log_3(x+4) + \log_3(2-x)$ w przedziale $[-3; 1]$.

Zadanie 8 (0-3) → Przykład 2, str. 330

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \log_9(x^2 + 4x - 5)$.

D Zadanie 9 (0-3)

Uzasadnij, że dla $a, b \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ wyrażenie $\log_a b^2 \cdot \log_b \sqrt[3]{a}$ przyjmuje stałą wartość.

Zadanie 10 (0-4)

Dla jakiej wartości parametru a miejsce zerowe funkcji $f(x) = 2^x - |\log_a 2 + 1|$ jest równe 1?

Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

1.1. Równania kwadratowe – powtórzenie

- Ć 1.** a) $x = -6, x = 3$
 b) $x = -2, x = 0,5$
 c) $x = 2, x = 0,2$ d) $x = 1,5$
 e) $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}, x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$
 f) $x = \frac{-2-\sqrt{6}}{2}, x = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$
 g) sprzeczne
 h) $x = \frac{2-\sqrt{10}}{6}, x = \frac{2+\sqrt{10}}{6}$
 i) $x = \sqrt{2}, x = 2\sqrt{2}$
- 2.** a) $x = 0, x = 3$ b) $x = 0, x = \frac{5}{9}$
 c) $x = -\frac{3}{4}, x = 0$ d) $x = -\frac{1}{9}, x = 0$
 e) $x = 0, x = \frac{1}{2}$ f) $x = -\frac{3}{2}, x = 0$
- 3.** a) $x = -\frac{5}{2}, x = \frac{5}{2}$ b) $x = -\frac{2}{3}, x = \frac{2}{3}$
 c) $x = -7$ d) $x = -\frac{1}{3}$
 e) $x = 5$ f) $x = \frac{5}{2}$
- 4.** a) $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}, y = 6(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$
 b) $x = \frac{1}{2}, x = 2, y = 2(x - \frac{1}{2})(x - 2)$
 c) $x = \frac{1}{3}, x = 3, y = -(x - \frac{1}{3})(x - 3)$
 d) $x = -1, x = 7, y = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 7)$
 e) $x = -2\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, y = (x + 2\sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
 f) $x = \frac{1-\sqrt{7}}{3}, x = \frac{1+\sqrt{7}}{3}, y = -3(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3})(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3})$
 g) $x = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{3}, y = -9(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})$
 h) $x = -12, x = 0, y = -\frac{1}{4}x(x + 12)$
 i) brak pierwiastków, brak postaci iloczynowej
- 5.** a) $\Delta = -7; 0$ b) $\Delta = 49; 2$
 c) $\Delta = 112; 2$ d) $\Delta = 0; 1$
 e) $\Delta = \frac{1}{4}; 2$ f) $\Delta = 20; 2$
 g) $\Delta = 9; 2$ h) $\Delta = 180; 2$
 i) $\Delta = -\frac{3}{2}; 0$
- 2.** a) $x = -1, x = 7$
 b) $x = -4, x = \frac{1}{2}$
 c) $x = -1, x = -\frac{1}{4}$ d) $x = \frac{1}{4}$
 e) sprzeczne f) $x = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{2}$
 g) $x = -\frac{3}{5}, x = \frac{2}{5}$ h) $x = \frac{3}{2}\sqrt{2}$
 i) $x = \frac{1}{3}, x = 2$
- 3.** a) $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
 b) $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}, x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ c) sprzeczne
 d) $x = -2\sqrt{3}, x = 2\sqrt{3}$
 e) $x = 0, x = 2$ f) $x = -\frac{1}{5}, x = 5$
 g) $x = \frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}$ h) $x = -\frac{4}{3}, x = \frac{2}{3}$
 i) $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}$
- 4.** a) $x = -1, x = 1$ b) $x = 2, x = 3$
 c) $x = -3\sqrt{2}, x = 3\sqrt{2}$ d) sprzeczne
- 5.** a) $\frac{5}{6}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $\sqrt{3}$
- 6.** a) $x = -7, x = 3$
 b) $x = -4, x = \frac{1}{3}$
 c) $x = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}, x = \frac{6+3\sqrt{3}}{2}$
 d) $x = -6 - 3\sqrt{3}, x = -6 + 3\sqrt{3}$
- 7.** a) $x = \frac{3}{2}, x = 4$ b) $x = -\frac{3}{2}, x = 0$
 c) $x = \frac{3}{4}, x = 1$ d) $x = -3, x = \frac{1}{2}$
- 8.** a) $y = (x + 6)(x - 4)$
 b) $y = 2(x - 3)(x - \frac{5}{2})$
 c) $y = \frac{1}{2}(x - 2 + \sqrt{10})(x - 2 - \sqrt{10})$
 d) $y = -(x - 7)^2$ e) $y = -4(x + \frac{3}{2})^2$
 f) $y = -3(x - \frac{2+\sqrt{7}}{6})(x - \frac{2-\sqrt{7}}{6})$
 g) $y = \frac{1}{4}(x + 4)^2$ h) $y = \frac{4}{3}(x - \frac{3}{2})^2$
 i) brak postaci iloczynowej

1.2. Nierówności kwadratowe – powtórzenie

- Ć 1.** a) $x \in [-2; 3]$
 b) $x \in (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; 2) \cup (4; \infty)$ d) $x \in (2; 4)$
- 2.** a) $x \in (-5; 0)$
 b) $x \in (-\infty; 0] \cup [\frac{1}{4}; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; -4) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
 d) $x \in [\frac{2}{3}; 3]$
 e) $x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{6}}{5}] \cup [\frac{1+\sqrt{6}}{5}; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; -3 - \sqrt{15}) \cup (-3 + \sqrt{15}; \infty)$
- 3.** a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x = \frac{2}{3}$ c) sprzeczna
- 4.** a), b) $x \in \mathbb{R}$ c) sprzeczna

- Z 1.** a) $x \in [-1; \frac{1}{3}]$
 b) $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (1; \infty)$
 d) $x \in [2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}]$
 e) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (2; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{29}}{10}) \cup (\frac{3+\sqrt{29}}{10}; \infty)$
 g) $x \in (\frac{-5-3\sqrt{5}}{2}; \frac{-5+3\sqrt{5}}{2})$
 h) $x \in (-\infty; 1 - 2\sqrt{2}) \cup [1 + 2\sqrt{2}; \infty)$
 i) $x \in (\frac{3-\sqrt{17}}{8}; \frac{3+\sqrt{17}}{8})$
- 2.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$
 b), c), e) $x \in \mathbb{R}$
 d) $x = -\frac{3}{2}$ f) sprzeczna
- 3.** a) $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \infty)$
 b), c) sprzeczna
 d) $x \in (\frac{5-\sqrt{17}}{4}; \frac{5+\sqrt{17}}{4})$
 e) $x \in [\frac{-3-\sqrt{33}}{4}; \frac{-3+\sqrt{33}}{4}]$
 f) $x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \infty)$
- 4.** a) $x \in (0; \frac{2}{5})$ b) $x \in [-\frac{1}{2}; 3]$
 c) $x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{1}{3}; \infty)$
 d), e) $x \in \mathbb{R}$
 f) $x \in [-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}]$
- 5.** a) $A \cap B = [2 - \sqrt{3}; 3], A \setminus B = (3; 2 + \sqrt{3}]$
 b) $A \cap B = (1; 4), A \setminus B = (-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 1] \cup [4; \infty)$
 c) $A \cap B = [-3; 2 - \sqrt{7}), A \setminus B = (-\infty; -3) \cup (2 + \sqrt{7}; \infty)$
- 6.** a) $D_f = [3; \infty)$
 b) $D_f = (-\infty; -4] \cup [\frac{1}{2}; 1]$
 c) $D_f = [-4; -2] \cup [3; 4]$
 d) $D_f = [\frac{2}{3}; 4]$

1.3. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

- Ć 1.** a) $x = -2, x = -1, x = 1, x = 2$
 b) $x = -4, x = -1, x = 1, x = 4$
 c) $x = -4, x = -2, x = 2, x = 4$
- 2.** a) $x = -\sqrt{5}, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}, x = \sqrt{5}$
 b) $x = -\sqrt{6}, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, x = \sqrt{6}$
 c) $x = -3, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, x = 3$

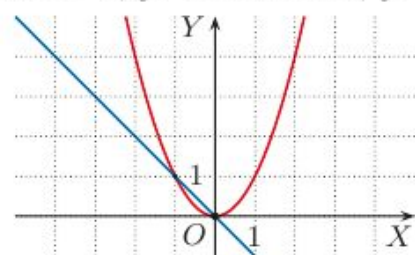
- 3.** a) $x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$
 b) sprzeczne c) $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$
 d) $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$ e) $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$
 f) $x = -1, x = 1$
- 4.** a) 3 b) 1 c) 2 d) 4 e) 0 f) 2
- Z 1.** a) $x = -3, x = -2, x = 2, x = 3$
 b), d), f) sprzeczne
 c) $x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$
 e) $x = -2, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}, x = 2$
- 2.** a) $x = -\sqrt{3}, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, x = \sqrt{3}$
 b) $x = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{3}$
 c) $x = -\sqrt{\frac{\sqrt{57}-7}{2}}, x = \sqrt{\frac{\sqrt{57}-7}{2}},$
 d) $x = -\sqrt{2}, x = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{3}, x = \sqrt{2}$
 e) $x = -\frac{3}{2}, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, x = \frac{3}{2}$
 f) $x = -\frac{2}{3}, x = \frac{2}{3}$
- 3.** a) $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$ b) $x = -\sqrt{3}$
 c) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = \sqrt{2}$
 d) $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 4.** a), b) $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$
 c) sprzeczne
 d) $x = -\sqrt[4]{8}, x = -\sqrt[4]{2}, x = \sqrt[4]{2}, x = \sqrt[4]{8}$
 e) $x = -\sqrt{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}, x = \sqrt{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$
 f) $x = -\sqrt[4]{3}, x = \sqrt[4]{3}$
- 5.** a) $x = 1, x = 2$ b) $x = -1, x = 2$
 c) $x = -2, x = 2$
- 6.** a) $x = -2, x = 2$
 b) $x = -5, x = -2, x = 2, x = 5$
 c) $x = -6, x = 6$
- 7.** a) $x = 4$ b) sprzeczne c) $x = \frac{1}{4}$

Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej

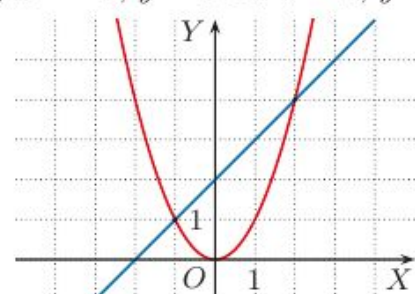
- 1.** a) $f(x) = (x - 1)^2 - 4$
 b) $f(x) = -(x + 1)^2 + 2$
 c) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2$
 d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$
 e) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 3$
 f) $f(x) = -2(x - 3)^2 + 4$
- 2.** a) $[1, 2]$ b) $[-3, -36]$
 c) $[3, 1]$ d) $[-\frac{1}{2}, -\frac{17}{16}]$

1.4. Układy równań

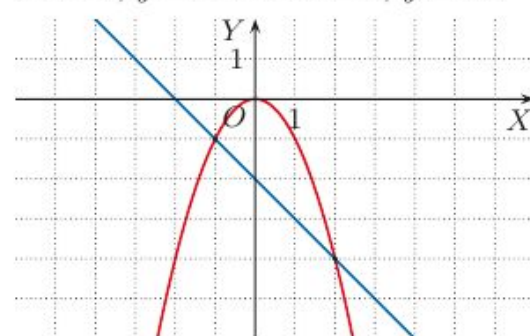
- Ć 1. a) $x = -1, y = 1$ lub $x = 0, y = 0$



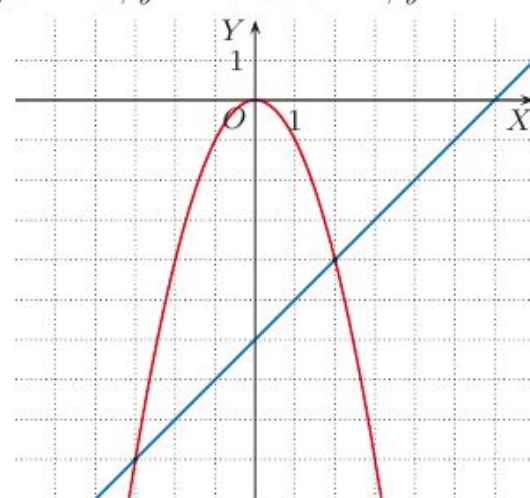
- b) $x = -1, y = 1$ lub $x = 2, y = 4$



- c) $x = -1, y = -1$ lub $x = 2, y = -4$



- d) $x = -3, y = -9$ lub $x = 2, y = -4$



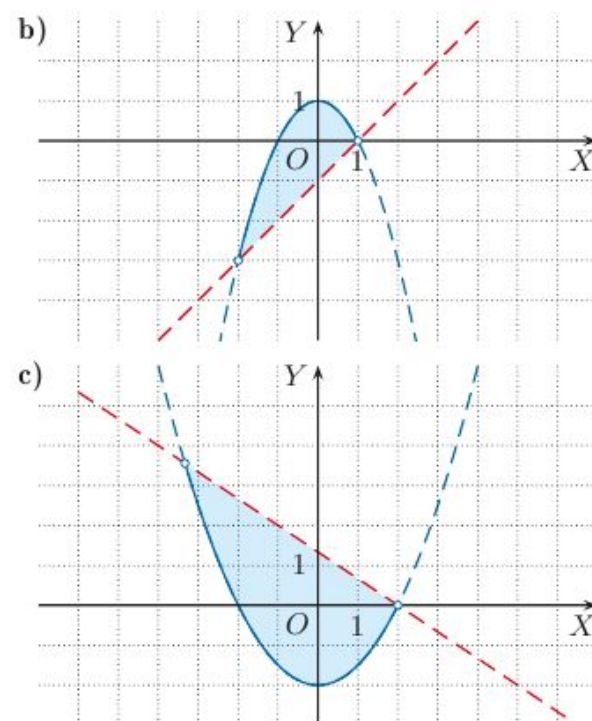
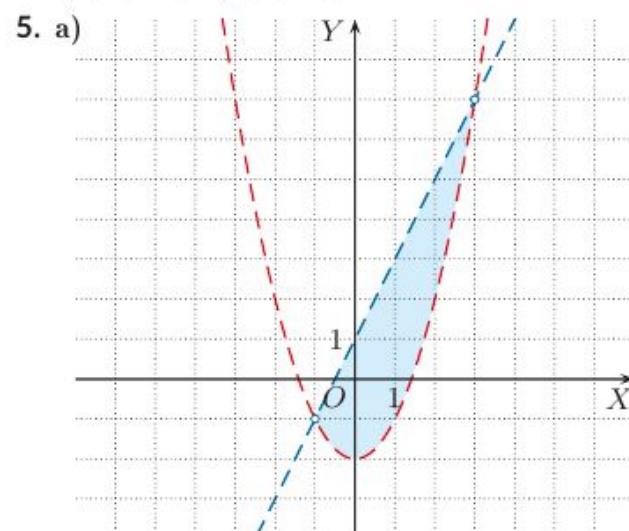
2. a) $x = -1, y = 2$
b) $x = -1, y = 1$
c) $x = 2 - 2\sqrt{2}, y = 4\sqrt{2} - 6$
lub $x = 2 + 2\sqrt{2}, y = -4\sqrt{2} - 6$

- Z 1. a) $(0, 0), (2, 1)$
b) $(-4, 4), (2, 1)$

2. a) 2 b) 0 c) 2 d) 1

3. a) $x = 0, y = 4$ lub $x = 3, y = 1$
b) $x = -4, y = 6$ lub $x = 0, y = -2$
c) $x = -2, y = 6$ lub $x = 2, y = -2$
d) $x = -4, y = 0$ lub $x = 2, y = 3$
e) $x = -1, y = 3$ f) układ sprzeczny

4. a) $[1, 1]$ b) $\left[\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2}\right]$
c) $[4, -8]$ d) $[3, -3]$



1.5. Wzory Viète'a

- Ć 2. a) $x_1 + x_2 = 9, x_1 x_2 = -7$
b) $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}, x_1 x_2 = -\frac{7}{2}$
c) $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, x_1 x_2 = \frac{1}{3}$
d) brak pierwiastków
e) $x_1 + x_2 = -12, x_1 x_2 = -\frac{3}{2}$
f) $x_1 + x_2 = -6, x_1 x_2 = -\frac{1}{2}$

3. a) różne
b), e) ujemne
c), f) dodatnie
d) brak pierwiastków

4. a) 3 b) 12
c) brak pierwiastków

- Z 1. a), f) różne
b) ujemne
c), e) dodatnie
d) brak pierwiastków

3. a) -1 b) $-\frac{8}{3}$ c) $\frac{10}{3}$

4. a) 69 b) 12 c) 12

5. a) $\frac{13}{9}$ b) $\frac{57}{4}$ c) $\frac{65}{4}$

7. a) $\frac{6}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{23}{49}$

8. a) tak b) nie

9. a) np. $x^2 - 10x + 4 = 0$
b) np. $x^2 - 12x + 8 = 0$
c) np. $x^2 - 6x + 2 = 0$

1.6. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

- Ć 1. $m \in (-\infty; -1)$
2. a) $m \in (-\infty; \frac{1}{3})$;
 $x_1 = \frac{1+\sqrt{1-3m}}{3}, x_2 = \frac{1-\sqrt{1-3m}}{3}$
b) $m \in (-\infty; \frac{-1-2\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-1+2\sqrt{5}}{2}; \infty)$;
 $x_1 = \frac{-2m-1-\sqrt{4m^2+4m-19}}{2},$
 $x_2 = \frac{-2m-1+\sqrt{4m^2+4m-19}}{2}$
c) $m \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$;
 $x_1 = \frac{-m-\sqrt{m^2+4m}}{2}, x_2 = \frac{-m+\sqrt{m^2+4m}}{2}$
3. a) 0 dla $m \in (3; 7)$,
1 dla $m \in \{3, 7\}$,
2 dla $m \in (-\infty; 3) \cup (7; \infty)$
b) 0 dla $m \in (-4; 0)$,
1 dla $m \in \{-4, 0\}$,
2 dla $m \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$
4. a) $k \in (-\infty; 2)$
b) $k \in (0; \infty)$
5. a) $m \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 4)$
b) $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 3 - 2\sqrt{2}) \cup (3 + 2\sqrt{2}; 7)$

6. a) $k \in \{-4, 6\}$
b) $k = -\frac{15}{4}$

7. a) $k \in [11 - 4\sqrt{7}; 11 + 4\sqrt{7}]$
b) $k \in (-\infty; \frac{1}{2}]$

- Z 3. a) $m \in (-\infty; \frac{9}{2}]$
b) $m \in (-\infty; 2] \cup [4; \infty)$
c) $m \in (-\infty; 4]$
d) $m \in (-\infty; -1] \cup (1; \infty)$

4. a) $k \in (-\infty; -3)$
b) $k \in (5; \infty)$
c), d) $k \in (1; \infty)$

5. a) $m \in (4; \infty)$
b) $m \in (-3; -\frac{3}{4})$
c) nie ma takiego m
d) $m \in (2; \infty)$

6. a) $m \in (2 - \sqrt{5}; 0) \cup (4; 2 + \sqrt{5})$
b) nie ma takiego m

7. a) $k \in (\frac{9}{4}; \infty)$
b) $k \in [-6; 6]$
c) $k \in (-2; 6)$
d) $k \in [2 - 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}]$
e) $k \in (-\infty; -2]$
f) $k \in (1; \infty)$

8. a) $k \in [0; 4]$ b) $k \in [-4; 4]$
c) $k \in (-\infty; 1]$ d) $k \in [8; \infty)$
e) $k \in [0; 2]$ f) $k \in (\frac{1}{2}; \infty)$

9. a) $a \in (6; \infty)$
b) nie ma takiego a
c) $a \in (-\infty; 0) \cup (\frac{3}{2}; 2) \cup (6; \infty)$
d) $a = -1, a = 1$

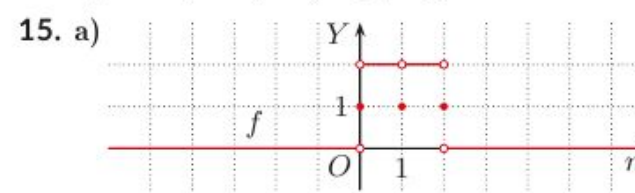
10. a) $a = -8$
b) $a \in (-\infty; 3) \cup (\frac{28}{9}; \infty)$

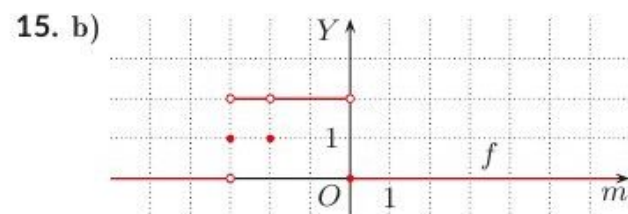
11. a) $a = -\frac{\sqrt{22}}{2}, a = \frac{\sqrt{22}}{2}$
b) $a = 4 - \sqrt{17}$

12. $a = -3, a = 3$

13. $a = -\frac{1}{2}$

14. a) $m \in [2; 3)$
b) $m \in (-\infty; -1) \cup [3; \infty)$





16. $D = (-4; 0)$, $x = -1$, $x = 3$

17. $x = \frac{2-\sqrt{3}}{16}$, $x = \frac{2+\sqrt{3}}{16}$

18. a) $m \in (-\infty; -2)$

b) $m \in (0; \frac{1}{4})$

c) $m \in (-\infty; -6)$

d) $m \in (-\infty; -2\sqrt{3})$

19. a) 0 dla $m \in (-4; \infty)$,

2 dla $m = -4$,

4 dla $m \in (-\infty; -4)$

b) 0 dla $m \in (0; \infty)$,

1 dla $m = 0$,

2 dla $m \in (-\infty; 0)$

c) 0 dla $m \in (-\infty; 0)$,

2 dla $m \in \{0\} \cup (9; \infty)$,

3 dla $m = 9$,

4 dla $m \in (0; 9)$

20. $m \in (6; \infty)$

1.7. Funkcja kwadratowa - zastosowania (1)

1. a) 361 b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{2}$

2. 162

3. a) najmniejsza: $f(-2) = 4$,

największa: $f(1) = 13$

b) najmniejsza: $f(4) = -49$,

największa: $f(0) = -1$

c) najmniejsza: $f(-1) = -11$,

największa: $f(2) = -2$

d) najmniejsza: $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{7}{2}$,

największa: $f(-2) = f(1) = 1$

4. boki - 10 cm,

pole powierzchni bocznej - 800 cm²

1. a) najmniejsze: $f(0) = f(4) = -1$,

$g(0) = -3$,

największe: $f(2) = 3$, $g(4) = 9$

b) najmniejsze: $f(-4) = -33$,

$g(-1) = -\frac{7}{2}$,

największe: $f(2) = 3$, $g(6) = 21$

2. a) 8 b) 32

3. 21 m × 21 m

4. 7 m × 14 m

5. 3 cm × 3 cm

6. 3 cm × 6 cm × 5 cm

7. a) $P(x) = -2x^2 + 4x$, $x \in (0; 2)$, 1×2

b) $P(x) = -3x^2 + 24x$, $x \in (0; 8)$, 4×12

8. a) najmniejsza: $f(4) = \frac{1}{8}$,

największa: $f(2) = \frac{1}{4}$

b) najmniejsza: $f(0) = f(4) = 2$,

największa: $f(2) = 2\sqrt{2}$

c) najmniejsza: $f(-1) = \frac{1}{3}$,

największa: $f(-2) = f(0) = \frac{1}{2}$

d) najmniejsza: $f(1) = f(5) = 4$,

największa: $f(3) = 36$

1.8. Funkcja kwadratowa - zastosowania (2)

1. a) 12 m × 18 m

b) 9 m × 24 m

2. 1,5 m

3. a) $z(x) = -50x^2 + 2250x - 17500$,

$x \in [10; 35]$

b) cena misia: 22,50 zł,

wielkość sprzedaży: 625 sztuk,

zysk: 7812,50 zł

4. o 10 zł

1. $x = 3$

2. a) 10 cm

b) $\frac{65-20\sqrt{7}}{2} \approx 6$ [cm]

3. w obu przypadkach 1,5 m

4. $x = 3$

5. $x > 2$

6. Jeśli przez x oznaczymy szerokość pokoju

w metrach, to $x \in [\sqrt{17} - 1; 6]$.

7. 40 cm

8. $x \in [2; 8]$

9. 15

11. a) $y = -\frac{1}{9}(x-6)^2 + 4 = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$

b) $y = -\frac{1}{9}(x-6)(x+6) = -\frac{1}{9}x^2 + 4$

12. nie

Zestaw I

1. a) $x = 0$, $x = \frac{5}{4}$

b) $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $x = -\frac{1}{5}$, $x = \frac{1}{5}$

d) $x = -\frac{4}{9}$, $x = \frac{4}{9}$

e) $x = -1$ f) $x = 6$

2. a) $x = -1$, $x = 5$

b) $x = \frac{-5-\sqrt{17}}{4}$, $x = \frac{-5+\sqrt{17}}{4}$

c) $x = 6$

d) $x = -\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$, $x = \frac{-1+2\sqrt{2}}{7}$

e) $x = -3$, $x = 0$

f) $x = -4 - \sqrt{17}$, $x = -4 + \sqrt{17}$

3. a) $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \infty)$

b) $x = -\frac{5}{2}$ c) sprzeczna

d) $x \in (1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{3})$

e) $x \in \mathbb{R}$

f) $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}; \infty)$

4. a) $A \cap B = [-1 - \sqrt{2}; -1] \cup [0; -1 + \sqrt{2}]$,

$A \setminus B = (-1; 0)$

b) $A \cap B = (-2 + \sqrt{2}; 3)$,

$A \setminus B = (-\infty; -2 - \sqrt{2}) \cup [3; \infty)$

c) $A \cap B = [2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7}]$,

$A \setminus B = (-3; 2 - \sqrt{7}) \cup (2 + \sqrt{7}; 6)$

5. a) $x = -2$, $x = 2$

b) $x = -\sqrt{3}$, $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $x = \sqrt{3}$

c) $x = -1$, $x = 1$

d) $x = 0$

e) $x = -4$, $x = 0$, $x = 4$

f) sprzeczne

6. a) $x = -2$, $x = 2$

b) $x = -2$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $x = 2$

c) sprzeczne

d) $x = -\frac{\sqrt{3+\sqrt{105}}}{4}$, $x = \frac{\sqrt{3+\sqrt{105}}}{4}$

e) $x = -2\sqrt{2}$, $x = 2\sqrt{2}$

f) $x = -\sqrt{1+\sqrt{6}}$, $x = \sqrt{1+\sqrt{6}}$

g) $x = -2$, $x = 2$

h) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

i) sprzeczne

7. a) $x = -2$, $y = 1$ lub $x = 1$, $y = 4$

b) $x = 1$, $y = -2$ lub $x = 2$, $y = 1$

c) $x = 1$, $y = 0$ lub $x = 3$, $y = 4$

8. a) najmniejsza: $f(-1) = -2$,

największa: $f(1) = 6$

b) najmniejsza: $f(4) = -8$,

największa: $f(1) = 1$

c) najmniejsza: $f(0) = 1$,

największa: $f(2) = 9$

d) najmniejsza: $f(-2) = -12$,

największa: $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$

9. a) $a = b = 2$

b) $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$

c) $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$

10. 62,5 m × 62,5 m

11. a) o 100 zł; zysk zwiększył się o 10000 zł

b) o 280 zł; zysk zwiększył się o 3920 zł

12. a) 0,75 dm b) 0,5 dm

Zestaw II

1. a) $c = \frac{9}{4}$ b) $c = -5$

c) $c = -\frac{5}{4}$ d) $c = 0$, $c = 4$

2. a) $b \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$

b) $b \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

3. a) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

b) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. a) $x = 1$

b) $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$

c) $x = \frac{5-\sqrt{41}}{2}$, $x = 2$, $x = 3$, $x = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$

d) $x = -1 - \sqrt{3}$, $x = -1$, $x = -1 + \sqrt{3}$

5. a) $x = 3$, $x = 4$

b) $x = -5$, $x = 0$, $x = 4$

6. a) $\frac{1048}{75}$ b) $7 - 2\sqrt{2}$

7. a) $f(x) = -3x^2 + 8x - 2$

b) $f(x) = -2x^2 + 20x - 48$

8. a) $m \in (-\infty; 0)$

b) nie ma takich m

c) $m \in (-2; 0) \cup (0; 2)$

d) $m \neq \frac{2}{3}$

9. a) $m \in (4 + 4\sqrt{2}; \infty)$

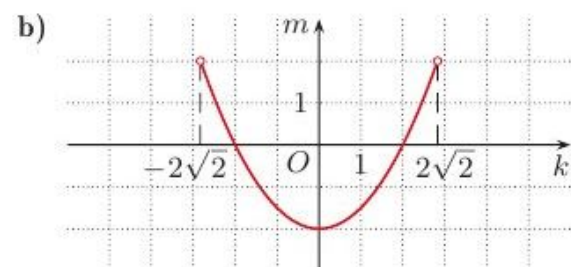
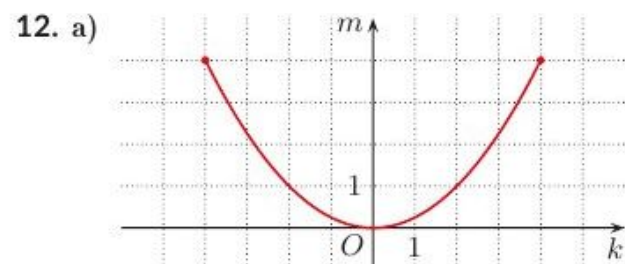
b) $m \in (0; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

10. a) $m \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}]$

b) $m \in [3; \infty)$

11. a) $m = -2$, $m = -1$

b) nie ma takich m



Zadania z kontekstem realistycznym

1. $x = 1,5$
2. $112,5 \text{ m}^2$
3. Cięcia powinny przechodzić przez środki boków trójkąta.
4. 8
5. a) $D = [0; 5 + \sqrt{26}]$; kolejno uzupełniamy: 110, 125, 130
b) po 10 s c) po 5 s d) 130 m

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. C 2. B 3. C 4. A 5. C 6. A 7. B
8. D
9. AE
10. A3
- 11.1. FF
- 11.2. $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$
12. $x = -3, x = \frac{3}{2}$
13. FPF
14. $648 \text{ m}^2, 36 \text{ m}$
15. -32
17. a) $P(x_0) = -\frac{2}{3}x_0^2 + 4x_0, x_0 \in (0; 6)$
b) $O(0, 0), A(3, 0), B(3, 2), C(0, 2)$

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. $\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $m = 3$
- 3.1. $x = 0, x = 6$

- 3.2. 1 dla $m = -1$,
2 dla $m \neq -1$



6. $m \in (-4; -3) \cup (5; \infty)$
7. $m = \frac{1-4\sqrt{42}}{6}, m = \frac{1+4\sqrt{42}}{6}$
8. $k \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
9. $m = 66$

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu

1. a) tak, stopnia 7
b) tak, stopnia 1
c), d) nie
e) tak, stopnia 3
2. a) $w(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$,
 $\text{st}(w) = 5$
b) $w(x) = 2x^6 - \frac{3}{2}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - x^3 - x$,
 $\text{st}(w) = 6$
c) $w(x) = 2x^8 + x^7 + 3x^4 - x^2 + 6x - 2$,
 $\text{st}(w) = 8$
d) $w(x) = 2x^{10} - x^6 + 3x^2 - \frac{1}{2}x + 5$,
 $\text{st}(w) = 10$
3. a) $a_5 = -2, a_4 = a_3 = a_2 = 0$,
 $a_1 = 1, a_0 = 0, \text{st}(w) = 5$
b) $a_6 = 1, a_5 = -\frac{1}{2}, a_4 = 1, a_3 = 0$,
 $a_2 = 1, a_1 = 0, a_0 = 1, \text{st}(w) = 6$
c) $a_0 = 2^{10}, \text{st}(w) = 0$
4. a) $w(x) = -3x^4 - 3x^2 - 3$
b) $w(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
5. a) $w(0) = -4, w(2) = 10, w(-2) = -26$
b) $w(0) = 1, w(2) = 21, w(-2) = 13$
c) $w(0) = -2, w(2) = 32, w(-2) = -44$
d) $w(0) = 3, w(2) = -47, w(-2) = -75$

6. a) $w(-\frac{1}{2}) = 6, w(\frac{3}{2}) = -24$
b) $w(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{2}, w(\frac{3}{2}) = \frac{265}{2}$
7. 1. a) $v(x) = x^3 - 6x^2 + 4$,
 $a_3 = 1, a_2 = -6, a_1 = 0, a_0 = 4$
b) $w(x) = -6x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x - 1$,
 $a_5 = -6, a_4 = 4, a_3 = -3, a_2 = 0$,
 $a_1 = 2, a_0 = -1$,
 $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -4$

2. a) $w(0) = -3, w(2) = 21$,
 $w(-2) = -19, w(\frac{1}{2}) = -3\frac{3}{8}$
b) $w(0) = 2, w(2) = -20, w(-2) = 32$,
 $w(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$
c) $w(0) = -4, w(2) = -6$,
 $w(-2) = -34, w(\frac{1}{2}) = -3\frac{3}{8}$
d) $w(0) = -10, w(2) = 6$,
 $w(-2) = -58, w(\frac{1}{2}) = -11\frac{7}{16}$
3. $a = 1, b = -2, c = -8, d = 4$
4. a) Q b) P
5. a) $a = 1$ b) $a = -72$
c) $a = 4$ d) $a = -1$
6. a) $a = \frac{20}{3}, b = \frac{23}{3}$ b) $a = 3, b = 1$
7. a) 5 dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,
3 dla $m = 2, 1$ dla $m = -2$
b) 6 dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$,
4 dla $m = -4, 2$ dla $m = 0$
8. $w(x) = \frac{16}{31}x^4 + \frac{8}{31}x^3 + \frac{4}{31}x^2 + \frac{2}{31}x + \frac{1}{31}$
9. a) 0 b) -1

2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

1. a) $u(x) + w(x) = 17x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 2x$,
 $\text{st}(u) = 4, \text{st}(w) = 3, \text{st}(u+w) = 4$
b) $u(x) + w(x) = 6x^4 - 13x^3 - 2x^2 + 5$,
 $\text{st}(u) = 7, \text{st}(w) = 7, \text{st}(u+w) = 4$
2. a) np. $u(x) = x^4 + 1, w(x) = x^4$
b) np. $u(x) = -x^4 + 1, w(x) = x^4 + x^3$
c) np. $u(x) = -x^4 - x + 1, w(x) = x^4 + x^2$
d) np. $u(x) = -x^4 + 1, w(x) = x^4 + x + 1$
e) np. $u(x) = -x^4 + 1, w(x) = x^4 + 1$
3. Współczynniki wielomianu w są liczbami przeciwnymi do odpowiednich współczynników wielomianu u .
4. a) $u(x) - w(x) =$
 $= 5x^9 + 4x^8 + 10x^4 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$,
 $\text{st}(u) = 9, \text{st}(w) = 8, \text{st}(u-w) = 9$
b) $u(x) - w(x) = \frac{2}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$,
 $\text{st}(u) = 6, \text{st}(w) = 6, \text{st}(u-w) = 4$
5. a) $h(x) = -10x^6 + 8x^4 + 7, h(-1) = 5$
b) $h(x) = -14x^4 - 15x^2 + 4$,
 $h(-1) = -25$
6. a) tak b) $a = 5$

7. a) $u(x, y) + w(x, y) =$
 $= 4x^3y^2 + 3x^2y^3 - 9x^2y^2 - 4xy - 1$,
 $u(x, y) - w(x, y) =$
 $= 4x^3y^2 - 3x^2y^3 + 3x^2y^2 + 8xy + 5$
b) $u(x, y) + w(x, y) =$
 $= \frac{2}{3}x^4y + \frac{10}{3}x^3y - \frac{1}{6}xy^2 - x + 5$,
 $u(x, y) - w(x, y) =$
 $= \frac{2}{3}x^4y + \frac{8}{3}x^3y - \frac{5}{6}xy^2 + x - 3$
8. a) $u(x, y, z) + w(x, y, z) =$
 $= 5xy^2z^3 - 6x^2y^2z + 6x^2yz^2 + xyz^3$,
 $u(x, y, z) - w(x, y, z) =$
 $= 3xy^2z^3 - 6x^2y^2z - 6x^2yz^2 - 3xyz^3$
b) $u(x, y, z) + w(x, y, z) =$
 $= 8x^2y + 14xz^2 - 4yz^2 + z^3$,
 $u(x, y, z) - w(x, y, z) =$
 $= 8x^2y - 2xz^2 - 8yz^2 + 2yz^2 - z^3$
9. 1. a) $f(x) + g(x) = x^6 + x^3 + x^2 - 2x + 6$,
 $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^6 - 4x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$
b) $f(x) + g(x) = -3x^5 + x^2 - x + 2$,
 $f(x) - g(x) = -2x^6 + 3x^5 - 5x^2 + 9x + 2$
c) $f(x) + g(x) = x^5 + 3x^4 + x - 3$,
 $f(x) - g(x) = 4x^7 - x^5 + 3x^4 + 7x - 7$
2. a) $w(x) = 2x^5 + 6x^4, \text{st}(w) = 5, S_w = 8$,
 $u(x) = -\frac{1}{3}x^5 - x^4, \text{st}(u) = 5, S_u = -\frac{4}{3}$
b) $w(x) = 12x^2 - 18x, \text{st}(w) = 2$,
 $S_w = -6, u(x) = -2x^2 + 3x, \text{st}(u) = 2$,
 $S_u = 1$
3. a) $f(5) = 3, g(5) = 20$
b) $f(-3) = -16, g(-3) = 10$
c) $u(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{7}, w(-\frac{1}{2}) = -\frac{31}{7}$
4. a) $\text{st}(p+q) = 5$
b) $\text{st}(p+q) \leq 5$ lub $p+q \equiv 0$
c) Jeśli $m \neq n$, to $\text{st}(p+q) = \max(m, n)$.
Jeśli $m = n$, to $\text{st}(p+q) \leq n$ lub $p+q \equiv 0$.
5. a) $\text{st}(u+w) = 6$ dla $a \neq 0$,
 $\text{st}(u+w) = 4$ dla $a = 0$
b) $\text{st}(u+w) = 5$ dla $a \neq -6$,
 $\text{st}(u+w) = 1$ dla $a = -6$
c) $\text{st}(u+w) = 4$ dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,
 $\text{st}(u+w) = 3$ dla $a = 1$,
 $\text{st}(u+w) = 1$ dla $a = -1$
6. a) $\text{st}(u+w) = 5$ dla $a \in \mathbb{R}$ i $b \neq 0$,
 $\text{st}(u+w) = 2$ dla $a = -7$ i $b = 0$,
 $\text{st}(u+w) = 3$ dla $a \neq -7$ i $b = 0$

6. b) $\text{st}(u+w) = 7$ dla $a \neq -3$ i $b \in \mathbb{R}$,
 $\text{st}(u+w) = 1$ dla $a = -3$ i $b = 3$,
 $\text{st}(u+w) = 2$ dla $a = -3$ i $b \neq 3$
 c) $\text{st}(u+w) = 4$ dla $a \neq b$,
 $\text{st}(u+w) = 3$ dla $a = b \neq -4$,
 $\text{st}(u+w) = 1$ dla $a = b = -4$
7. a) $p = -2$, $q = -1$ b) $k(x) = 2x^2 - 4x$
8. a) $w(-2, 3) = 66$ b) $w(2, -4) = 60$
9. a) $u(x, y) + w(x, y) = \frac{3}{2}x^3y - \frac{2}{3}x^2y - 2xy^2$,
 $u(x, y) - w(x, y) = \frac{1}{2}x^3y + \frac{4}{3}x^2y - 4xy^2$,
 $(u+w)(-2, 3) = -8$, $(u-w)(-2, 3) = 76$
 b) $u(x, y) + w(x, y) =$
 $= -\frac{2}{3}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{5}{12}xy^3$,
 $u(x, y) - w(x, y) = \frac{4}{3}x^2y^2 - \frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{12}xy^3$,
 $(u+w)(-2, 3) = -52, 5$,
 $(u-w)(-2, 3) = 25, 5$
10. $P(x, y) = \frac{5}{2}xy + 2y^2$
11. a) Q b) P c) P
12. a) $v(x, y, z) = -x^2yz^2 + 6x^2yz - 2xyz^2 +$
 $-3xyz$, $\text{st}(v) = 5$
 b) $v(x, y, z) = 4x^3y^2z - 2xy^2z^2 - 9xyz^2 +$
 $+5xyz + 6yz^2$, $\text{st}(v) = 6$
13. $P(x, y, z) = 4xy + 4xz + 4yz + 10x +$
 $+8y + 6z + 22$

2.3. Mnożenie wielomianów

- ☞ 1. a) $u(x) \cdot w(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 - x^3$,
 $\text{st}(u \cdot w) = 7$
 b) $u(x) \cdot w(x) = x^7 - x^5 - x^3 + x^2 + x - 1$,
 $\text{st}(u \cdot w) = 7$
 c) $u(x) \cdot w(x) = x^3 - 1$, $\text{st}(u \cdot w) = 3$
 d) $u(x) \cdot w(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5$,
 $\text{st}(u \cdot w) = 4$
2. a) $V(x) = x^3 - x$, $D = (1; \infty)$
 b) $V(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $D = (-1; \infty)$
 c) $V(x) = 2x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}x - 1$, $D = (\frac{1}{2}; \infty)$
 d) $V(x) = x^4 + 6x^3 - 54x - 81$, $D = (3; \infty)$
3. a) $(u \cdot w)(x, y) =$
 $= -4x^4 + 2x^3y - 2x^3 + 6x^2y^2 + x^2y - 3xy^3$
 b) $(u \cdot w)(x, y) = 3x^3y^3 - 2x^3y +$
 $+6x^2y^3 - 3x^2y - 3xy^3 + 4xy - y$
 c) $(u \cdot w)(x, y) = 4x^4y^3 - 12x^4y^2 +$
 $+3x^3y^4 - 11x^3y^3 + 10x^3y^2 + 3x^2y^3 - 2x^2y^2$

4. a) $(u \cdot w)(x, y, z) = 2x^3y^2z + 2x^3yz^2 +$
 $-x^2y^2z - x^2yz^2 + 2xy^2z^2 - y^2z^2$
 b) $(u \cdot w)(x, y, z) =$
 $= 3x^3y^2z - 4x^3yz^2 - 2x^2y^3z + 4x^2y^2z^2 +$
 $-xy^4z + 6xyz^2 - 8xz^3 + 2y^2z^2$
 c) $(u \cdot w)(x, y, z) =$
 $= x^3y^2z^2 + 2x^3yz^2 - x^3yz + 2xy^4z^2 +$
 $+4xy^3z^2 - 2xy^3z + 3xy^2z^4 + 6xyz^4 - 3xyz^3$
- ☐ 1. a) $2x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 7x$, $a_4 = 2$, $a_0 = 0$
 b) $4x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 6x + 8$, $a_4 = 4$, $a_0 = 8$
 c) $2x^6 - 2x^5 - x^3 + 2x^2 - x$, $a_6 = 2$, $a_0 = 0$
 d) $-2x^6 - 3x^5 + 8x^4 + 16x^3 - 3x^2 - 24x + 6$,
 $a_6 = -2$, $a_0 = 6$
 e) $2x^5 - 2x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{1}{4}$, $a_5 = 2$,
 $a_0 = -\frac{1}{4}$
 f) $-4x^6 - x^5 - 5\sqrt{2}x^4 - \sqrt{2}x^3 + 6x^2 +$
 $+2x + 2\sqrt{2}$, $a_6 = -4$, $a_0 = 2\sqrt{2}$
2. a) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = 1$, $a_0 = -1$
 b) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = 6$, $a_0 = -6$
 c) $\text{st}(w) = 5$, $a_5 = -4$, $a_0 = 1$
 d) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = 1$, $a_0 = -6$
 e) $\text{st}(w) = 4$, $a_4 = -6$, $a_0 = 2$
 f) $\text{st}(w) = 5$, $a_5 = 12$, $a_0 = 6$
3. a) $v(x) = x^6 - 8x^5 + 16x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 9$,
 $\text{st}(v) = 6$
 b) $v(x) = 2x^4 + 2\sqrt{2}x^3 - 7x^2 - 4\sqrt{2}x + 8$,
 $\text{st}(v) = 4$
4. a) $f(x) = x^6 - 3x^5 - 21x^4 + 2x^2$,
 $g(x) = 12x^3 + 9x^2 - 6x + 1$
 b) $f(x) = -6x^7 + 2x^6 + 6x^5 - 3x^4 - 6x^3 +$
 $+3x^2 - 1$,
 $g(x) = x^8 - 2x^6 + 3x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2$
 c) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 6x^3 - x + 1$,
 $g(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^2 + 4x$
5. a) $P(x) = 10x^2 + 2x - 20$, $D = (2; \infty)$
 b) $P(x) = 2x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 6x + 4$,
 $D = (-2; -1) \cup (1; \infty)$
6. a) $m = 1$, $n = -11$ b) $m = -4$, $n = 0$
 c) $m = -3$, $n = -1$
7. a) $v(x, y) =$
 $= 4x^4 - 12x^3y^2 - 4x^3y + 7x^2y^2 - 2y^4$
 b) $v(x, y) =$
 $= -4x^4y^4 + x^4y^2 + 6x^3y^3 + 4x^2y^4 + 2xy^4$

8. a) $2x^3y + x^2y^2 - 8x^2y - 3xy^3 - 12xy^2$
 b) $-x^3y + x^3 + 2x^2y^2 - x^2y + xy^3 - 2xy^2 +$
 $-2y^4$
 c) $x^6 + x^5y + x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$
 d) $2\sqrt{2}x^3 - 3\sqrt{3}y^3$
9. a) $-2x^2y + 4x^2z + 4xy^2 - 7xyz - 2xz^2 +$
 $-2y^2z + 4yz^2$ b) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$
 c) $36x^2y^2 - 16x^2z^2 - 9y^4 + 4y^2z^2$
 d) $x^2yz + x^2y + x^2 - xy^2z^2 - xy^2z + xy + x$
10. $2xy + xz + 5x + 2y + z + 5$, gdzie $x > -1$,
 $y > -1$, $z > -1$

2.4. Wzory skróconego mnożenia

- ☞ 2. a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
 c) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
 d) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$
 e) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
 f) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
 g) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$
 h) $1 - 9x + 27x^2 - 27x^3$
3. a) $2(10 + 7\sqrt{2})$ b) $8(\sqrt{5} - 2)$
 c) $6(9 - 5\sqrt{3})$ d) $2(25\sqrt{2} - 44)$
 e) $46\sqrt{5} + 61$ f) $3(26\sqrt{3} - 45)$
 g) $11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$ h) $3(7\sqrt{3} - 5\sqrt{6})$
5. a) $x^3 + 8$ b) $x^3 - 1$ c) $x^3 + 1$
 d) $x^3 + 216$ e) $x^3 - 512$ f) $8x^6 - 1$
6. a) $x^6 - 1$ b) $-x^6 + 729$
 c) $x^6 + 64$ d) $16x^4 - 200x^2 + 625$
8. a) $x^4 - 1$ b) $x^6 - 1$
 c) $x^{10} - 1$ d) $x^6 - x^4 - x^2 + 1$
10. a) $x^4 - 81$ b) $x^5 - 32$
- ☐ 1. a) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
 b) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$
 c) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
 d) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
 e) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
 f) $125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$
 g) $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2}$
 h) $x^3 + 3\sqrt{3}x^2 + 9x + 3\sqrt{3}$
2. a) $5\sqrt{2} - 7$ b) $45 + 29\sqrt{2}$
 c) $46\sqrt{5} - 61$ d) $4(3\sqrt{6} + 5\sqrt{2})$
3. a) 14 b) $100\sqrt{2}$ c) -74 d) $22\sqrt{5}$

4. a) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$
 b) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
 c) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$
 d) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
 e) $x^3 + x^2y + \frac{1}{3}xy^2 + \frac{1}{27}y^3$
 f) $x^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2 - \frac{8}{27}y^3$
 g) $3\sqrt{3}x^3 + 9x^2y + 3\sqrt{3}xy^2 + y^3$
 h) $\frac{\sqrt{3}}{9}x^3 - x^2y + \sqrt{3}xy^2 - y^3$
5. a) $16x^3 + 60x^2y + 78xy^2 + 35y^3$
 b) $26x^3 + 18x^2y - 18xy^2 - 26y^3$
6. a) $x^4 + 5x^3 + 125x + 625$
 b) $x^4 - 5x^3 - 125x + 625$
 c) $81x^4 - 27x^3 - 3x + 1$
 d) $x^6 - 1$
7. a) 73 b) -1 c) 2 d) 8
8. a) $x = 27$ b) $x = -8$ c) $x = \frac{3}{2}$
 d) $x = -2\sqrt[3]{17}$
9. a) $a^2 - 1$ b) $a + 1$
11. a) $(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
 b) $(a^2+b^2)(a^2+\sqrt{3}ab+b^2) \cdot$
 $\cdot (a^2-\sqrt{3}ab+b^2)$
13. a) $\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$
 b) $\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3} + 4$
 c) $2(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$
 d) $9 + 6\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{4}$

Trójkąt Pascala

1. a) $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 +$
 $+35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$
 b) $(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 +$
 $+35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$
 c) $(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 +$
 $+70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$
 d) $(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 +$
 $+70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$
2. $(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 +$
 $+126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 +$
 $+9ab^8 + b^9$,
 $(a-b)^{10} = a^{10} - 10a^9b + 45a^8b^2 +$
 $-120a^7b^3 + 210a^6b^4 - 252a^5b^5 + 210a^4b^6 +$
 $-120a^3b^7 + 45a^2b^8 - 10ab^9 + b^{10}$
3. a) $12\sqrt{2} + 17$ b) $4(7 - 4\sqrt{3})$
 c) $70\sqrt{2} + 99$ d) $8(26 - 15\sqrt{3})$

2.5. Rozkład wielomianu na czynniki (1)

- Ć 1. a) $x^3(x-7)$ b) $6x^2(3x+5)$
 c) $-2x^4(x+4)$ d) $-18x^2(3x-2)$
 e) $6x(x+1)^2$ f) $-3x^2(x-2)^2$
 g) $-3x^4(3x-1)^2$ h) $\frac{1}{4}x(x^2+2)^2$
2. a) $w(x) = 3x(x^2+4)$,
 $x^2+4 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$
 b) $w(x) = \frac{1}{4}x^4(x^2+3)$,
 $x^2+3 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$
 c) $w(x) = -6x^3(x^2+7)$,
 $x^2+7 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$
 d) $w(x) = -\sqrt{2}x^5(x^2+\sqrt{3})$,
 $x^2+\sqrt{3} > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$
 e) $w(x) = x^9(7x^2-5x+1)$, $\Delta = -3 < 0$
 f) $w(x) = x^4(\frac{1}{4}x^2+x+2)$, $\Delta = -1 < 0$
 g) $w(x) = -x^3(4x^2-3x+7)$,
 $\Delta = -103 < 0$
 h) $w(x) = x^3(3\sqrt{2}x^2-2\sqrt{3}x+\sqrt{6})$,
 $\Delta = 12-24\sqrt{3} < 0$
3. a) $x^2(x-3)(x+1)$ b) $2x^3(x+\frac{1}{2})(x-1)$
 c) $-2x(x-\frac{3}{2})(x+2)$
 d) $20x^3(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{5})$
 e) $-2x(x-5+2\sqrt{5})(x-5-2\sqrt{5})$
 f) $x^2(x-\frac{1}{2})(x-\frac{5}{2})$
 g) $2x^3(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2})(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2})$
 h) $4x^4(x-\frac{3}{2}+\sqrt{2})(x-\frac{3}{2}-\sqrt{2})$
- Z 1. a) $4x(x-\frac{1}{6})(x+\frac{1}{6})$
 b) $16x^3(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$
 c) $2x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$
2. a) $x^3(x^2-2x+5)$ b) $x^2(x-3)(x+2)$
 c) $2x^4(x-1)^2$ d) $6x^2(x-\frac{1}{2})(x+1)$
 e) $6x(x-\frac{3}{2})(x-1)$
 f) $\frac{3}{4}x^3(x+\frac{1}{3})(x-2)$
3. a) $x^2(x-2)(x-3)$ b) $2x(x+\frac{1}{2})(x-5)$
 c) $-6x^3(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2})$
 d) $x^2(x^2+3x+4)$
 e) $x(x^2+\sqrt{2}x+1)$ f) $-\frac{1}{3}x^3(x-9)(x+1)$
 g) $(x-3)(x-2)(x-1)(x+1)$
 h) $(x-4)(x+1)^2(x+4)$
 i) $4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x-3)^2$
 j) $x^2(x-3)(x-1)(x+2)(x+5)$

- k) $x^5(x-2)(x+3)(x^2+2x+3)$
 l) $x(x-2)(x-1)(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})$

4. a) $S(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

5. a) $S(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ b) 3025

2.6. Rozkład wielomianu na czynniki (2)

- Ć 1. a) $2x^2(x+1)(x^2-x+1)$
 b) $-x^3(x+2)(x^2-2x+4)$
 c) $x(2x-1)(4x^2+2x+1)$
 d) $x^2(1-0,1x)(1+0,1x+0,01x^2)$
 e) $x^3(2x-3)(4x^2+6x+9)$
 f) $2x(0,3x+1)(0,09x^2-0,3x+1)$
2. a) $(x^2+1)(x+5)$
 b) $(x-1)(x+1)(x+3)$
 c) $(x-2)(x+2)(4x+1)$
 d) $x(x^2+1)(x+3)$
 e) $(x-5)(x+5)(x+4)$
 f) $(x-1)(x+1)(\sqrt{5}x-1)$
 g) $(2x-1)(4x^2+2x+1)(x^2+2)$
 h) $x^2(x^2+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})$
- Z 1. a) $x(x+3)(x^2-3x+9)$
 b) $x^2(x-2)(x^2+2x+4)$
 c) $-x(x+4)(x^2-4x+16)$
 d) $-\frac{1}{8}x^2(x-8)(x^2+8x+64)$
 e) $27x^3(x+\frac{2}{3})(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9})$
 f) $125x^5(x-\frac{1}{5})(x^2+\frac{1}{5}x+\frac{1}{25})$
2. a) $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)$
 b) $(2x-1)(7x^2+2)$
 c) $(x-3)(2x^2+5)$
 d) $(x-3)(x+1)(x^2-x+1)$
 e) $\frac{1}{6}(3x-1)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$
 f) $\frac{1}{3}(2x-9)(x-3)(x+3)$
 g) $(x-\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2})$
 h) $\sqrt{3}x(x+\sqrt{2})(x^2+\frac{\sqrt{3}}{3})$
3. a) $(x+1)^3(x-1)^2$
 b) $4(x-2)(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2$
 c) $3(x+\frac{2}{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)$
4. a) $20x^2(x-\frac{2}{5})(x-1)(x+6)(x^2+2)$
 b) $-\frac{1}{4}x^2(x-7)(x-2)(x+2)(x+4)^2$
 c) $7x^2(x-2)(x-1)^2(x+2)(x+3) \cdot (x^2+x+1)$

4. d) $3x^2(x-\frac{1}{3})^2(x-1)(x+1)(x^2-x+1) \cdot (x^2+x+1)$

5. a) $(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

b) $4(x^2-\sqrt{3}x+\frac{3}{2})(x^2+\sqrt{3}x+\frac{3}{2})$

c) $9(x^2-\frac{2}{3}\sqrt{6}x+\frac{4}{3})(x^2+\frac{2}{3}\sqrt{6}x+\frac{4}{3})$

d) $(x^2-x+3)(x^2+x+3)$

e) $16(x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4})(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4})$

f) $4(x^2-x+\frac{3}{2})(x^2+x+\frac{3}{2})$

6. a) $2(x-1)(x^2-\frac{3}{2}x+1)$

b) $3(x+1)(x-\frac{7-\sqrt{13}}{6})(x-\frac{7+\sqrt{13}}{6})$

c) $8(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{4})(x-1)$

d) $64(x-\frac{1}{4})(x^2+\frac{7}{16}x+\frac{1}{16})$

2.7. Równania wielomianowe

- Ć 1. a) $x = -\frac{1}{3}$, $x = 0$
 b) $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$
 c) $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$
 d) $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$ e) $x = -6$, $x = 0$
 f) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$
2. a) $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$
 b) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = 5$
 c) $x = -1$, $x = -\frac{1}{3}$, $x = 0$ d) $x = 0$
 e) $x = -1-\sqrt{5}$, $x = 0$, $x = -1+\sqrt{5}$
 f) $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
3. u: $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$, wykres C;
 v: $x = -3$, $x = 0$, $x = 4$, wykres B;
 w: $x = -4$, $x = 0$, $x = 2$, wykres A
4. a) $x = 9$ b) $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$
 c) $x = -5$, $x = 0$
 d) $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$, $x = \frac{5}{3}$
 e) $x = -2$, $x = 2$ f) $x = 3\sqrt{2}$
- Z 1. a) $x = 0$, $x = 2$
 b) $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$
 c) $x = -27$, $x = 0$ d) $x = 0$, $x = 2$
 e) $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$
 f) $x = -\sqrt{5}$, $x = 0$, $x = \sqrt{5}$
2. a) $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$
 b) $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$
 c) $x = -1$, $x = 0$, $x = 5$
 d) $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$
 e) $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$
 f) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{2}{5}$
 g) $x = -\frac{1}{3}$, $x = 0$

- h) $x = -6$, $x = 0$, $x = 2$
 i) $x = -4$, $x = -1$, $x = 0$
 j) $x = 0$, $x = 1$
 k) $x = -6$, $x = 0$, $x = 3$ l) $x = 0$

3. a) $x = 3$ b) $x = -\sqrt{3}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{3}$

c) $x = -9$, $x = 1$ d) $x = -1$, $x = 1$

e) $x = -1$, $x = 2$ f) $x = -4$, $x = 1$

g) $x = -\sqrt{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{2}$

h) $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$, $x = 2$

i) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. a) $x = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$, $x = -1$, $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

b) $x = -2$, $x = 1$

c) $x = -3$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$

5. $(-2, -7)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$

6. a) $(-3, -10)$, $(0, 2)$, $(3, 14)$

b) $(-\sqrt{2}, 1-3\sqrt{2})$, $(\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$, $(\sqrt{2}, 1+3\sqrt{2})$

c) $(-1, -7)$, $(1, 1)$, $(3, 9)$

7. a) $(0, -3)$, $(2, -3)$

b) $(-3, \frac{15}{2})$, $(0, -3)$, $(2, -\frac{5}{3})$

c) $(-2, -7)$, $(2, -3)$

10. $V(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$, $D = (1; \infty)$,

$V(x) = 12$ dla $x = 2$

12. ściana o krawędziach: $(2\sqrt{3}-3)$ m, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m;

$P = (3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}) \text{ m}^2 \approx 0,4 \text{ m}^2$

2.8. Dzielenie wielomianów

- Ć 1. a) $x-2$ b) $9x+12$
 c) x^2-2x+1 d) $2x^3+x^2-x$
2. a) $x-3$, reszta 4 b) $4x+4$, reszta 5
 c) x^2+3x-5 , reszta 4
 d) $3x^3+3x^2-6x-6$, reszta -2
3. a) $w(x) = (x^2+1)(x-2)+2$
 b) $w(x) = (-2x^2+9x-27)(x+3)+85$
 c) $w(x) = (x^3+2x^2-x)(x-1)$
 d) $w(x) = (3x^3-6x^2+11x-13)(x+2)+25$
- Z 1. a), e) jest b), c), d) nie jest
2. a) $w(x) = (2x^2+9x+37)(x-4)+147$
 b) $w(x) = (x^2-3x+12)(x+3)-29$
 c) $w(x) = (3x^3+3x^2+2x+2)(x-1)+2$
 d) $w(x) = (x^2+2x-1)(x+6)+2$
 e) $w(x) = (2x^2+6x)(x+\frac{1}{2})-2$
 f) $w(x) = (12x^2+4x)(x-\frac{1}{4})+3$
3. a) tak b), c), d) nie

4. a) $w(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$
 b) $w(x) = 2(x + 3)(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$
 c) $w(x) = 3(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 3)$
 d) $w(x) = (x + 4)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$
5. a) $w(x) = (-3x - 1)(x^2 - 4) - 9x - 8$
 b) $w(x) = (2x^2 - 5x + 5)(x^2 + x) - 10x + 2$
 c) $w(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 7$
 d) $w(x) = (4x^2 + 4)(x^2 - 1) - 2x + 7$

Schemat Hornera

1. a) $w(3) = 4$
 b) $w(2) = 21$
3. a) $6x^2 + 15x + 35$, reszta 114
 b) $2x^2 - 10$, reszta 11
 c) $x^3 - 4x^2 - 2x - 4$, reszta -16
 d) $x^3 - 2x^2 - x + 1$, reszta -4

2.9. Równość wielomianów

- Ć 1. a) tak, $a = 2$ b) nie
 c) tak, $a = -3$
2. a) $m = 2$ b) $m = 2$ c) $m = 4$
- Z 1. a) $m = 3$ b) $m = 2$
 c) nie ma takiego m
2. a) $a = 2$ b) $a = -3$ c) $a = -8$
3. a) $a = 2, b = 3$ b) $a = \frac{1}{2}, b = -5$
4. a) $a = 0, b = -1$
 b) $a = 1, b = 3$
 c) $a = -4, b = 2$
5. a) $w(x) = (x^2 + x - 1)(x^2 + x + 1)$
 b) $w(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 2x - 1)$
 c) $w(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 2x + 2)$
 d) $w(x) = (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 1)$
 e) $w(x) = (x^2 - x - 5)(x^2 + 2x + 1)$

2.10. Twierdzenie Bézouta

- Ć 2. a), b), d) 0 c) -1
3. a), b) jest
 c), d) nie jest
4. a) $w(x) = (x + 4)(x + 2)(x - 1)$
 b) $w(x) = (x - 1)\left(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$
 c) $w(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 4)$
 d) $w(x) = (x + 2)(x - 3)^2$
- Z 1. a) 0 b) 2 c) 0

2. a) $w(x) = (x - 7)(x - 1)(x + 2)$
 b) $w(x) = 2(x + 2)\left(x + \frac{3}{2}\right)(x + 1)$
 c) $w(x) = (x + 5)(x^2 - 3x + 4)$
3. a) $2, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ b) -1, -3, $\frac{1}{2}$
 c) $1, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ d) $2, -2, \frac{1}{2}$
4. a) $m = 7$ b) $m = -\sqrt{5}, m = \sqrt{5}$
 c) $m = -2, m = 3$
5. a), c) jest b) nie jest
6. a) $2x + 1$ b) $4x - 5$
7. a) $10x + 53$ b) $x - 1$

2.11. Pierwiastki całkowite wielomianu

- Ć 1. a) dzielniki: -1, 1, -3, 3;
 pierwiastek całkowity: 1
 b) dzielniki: -1, 1, -2, 2, -4, 4;
 pierwiastki całkowite: -4, 1
 c) dzielniki: -1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6;
 pierwiastki całkowite: -2, 1, 3
 d) dzielniki: -1, 1, -2, 2, -5, 5, -10, 10;
 brak pierwiastków całkowitych
2. a) $x = -2, x = 3$
 b) $x = 1, x = 2, x = 5$
3. a) $x = 1, x = 4$ b) $x = -2$
 c) $x = -3, x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$
 d) $x = -3, x = -\frac{1}{2}$
4. a) $x = 1, x = 3$
 b) $x = -3, x = -2, x = 1, x = 3$
 c) $x = -1, x = 5$
 d) $x = -3, x = 1, x = 2$ e) $x = 1$
 f) $x = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}, x = -2, x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}, x = 2$
- Z 1. a) $x = -5, x = 1$
 b) $x = -2, x = -1, x = 3$
 c) $x = -3, x = -1, x = -\frac{1}{2}$
 d) $x = \frac{1-\sqrt{33}}{4}, x = 1, x = \frac{1+\sqrt{33}}{4}$
 e) $x = -4$ f) $x = -1, x = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{2}$
 g) $x = 3$
 h) $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, x = 3$
2. a) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = 1, x = 3$
 b) $x = 1$ c) $x = 1, x = 2$
 d) $x = -1, x = -\frac{2}{3}, x = 1$
 e) $x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, x = -2, x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, x = 3$
 f) $x = -1, x = -\frac{1}{2}$

3. a), b) $x = 2$
 c) $x = -3, x = 1$ d) $x = -1$
 e) $x = -\sqrt{2}, x = -1, x = \sqrt{2}$
 f) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = 3$
4. a) $P(t) = -2t^3 + 12t, t \in (0; \sqrt{6})$
 b) $t = \sqrt{3} - 1, t = 2$
5. $(-3, 0), (3, 0), (3, \frac{13}{2}), (-3, \frac{13}{2})$
6. a) $x = 1$ dm b) $P = 160$ dm²

Równania wielomianowe. Wzór Cardano

1. a) $x = 1$
 b) $x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{28}{27}}} - 1$
2. a) $x = 3$ b) $x = 2$
3. a) $x = 2 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$

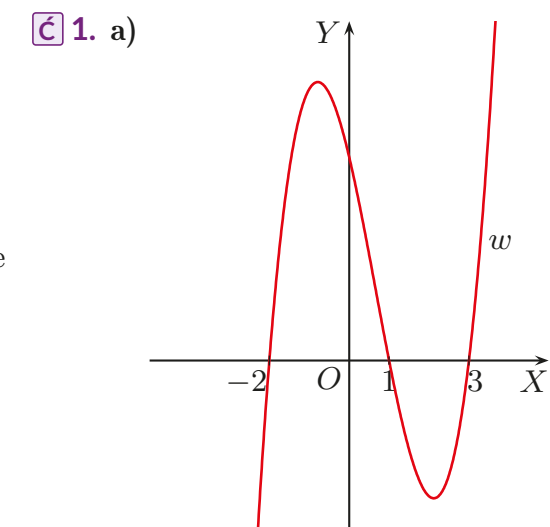
2.12. Pierwiastki wielokrotne wielomianu

- Ć 1. a) $w(x) = (x - 2)^2(x + 2)$, jest
 b) $w(x) = (x - 2)^3(x + 1)$, nie jest
2. a) $x = -\frac{3}{2}$ - dwukrotny,
 $x = 0$ - czterokrotny,
 $x = 1$ - jednokrotny
 b) $x = 0$ - jednokrotny
 c) $x = -4$ - jednokrotny,
 $x = 4$ - czterokrotny
 d) $x = -2$ - dwukrotny,
 $x = -\frac{3}{5}, x = 0$ - jednokrotne,
 $x = 2$ - trzykrotny
3. a) $x = -3$ - jednokrotny,
 $x = -1$ - dwukrotny
 b) $x = -2$ - dwukrotny,
 $x = 3$ - jednokrotny
 c) $x = 0, x = 4$ - jednokrotne,
 $x = 1$ - dwukrotny
 d) $x = 1, x = 2$ - dwukrotne
4. a) nie może b) może
- Z 1. a) $x = -3, x = -\frac{1}{2}, x = 2$ - jednokrotne
 b) $x = -1$ - dwukrotny,
 $x = 2$ - jednokrotny
 c) $x = 2$ - jednokrotny,
 $x = 5$ - dwukrotny
 d) $x = -3$ - jednokrotny,
 $x = 1$ - czterokrotny

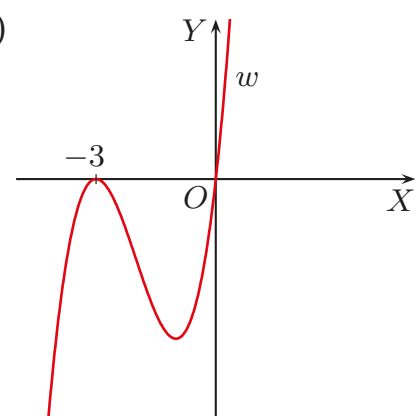
- e) $x = -3$ - trzykrotny,
 $x = 3$ - jednokrotny
 f) $x = -2, x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x = 3$ - jednokrotne
 g) $x = -5$ - jednokrotny,
 $x = -2, x = 0$ - dwukrotne,
 $x = 2$ - trzykrotny
 h) $x = -4, x = 2$ - jednokrotne,
 $x = 0$ - trzykrotny, $x = 3$ - dwukrotny

3. a) $x = -1, x = 0, x = 4$ - jednokrotne
 b) $x = 0$ - trzykrotny, $x = 3$ - dwukrotny
 c) $x = -1, x = 1$ - dwukrotne
 d) $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$ - dwukrotne
 e) $x = 0$ - dwukrotny
 f) $x = -2$ - dwukrotny,
 $x = 0$ - trzykrotny
 g) $x = -4, x = 0, x = 1$ - jednokrotne
 h) $x = 0$ - dwukrotny
 i) $x = 0$ - trzykrotny,
 $x = -2, x = 2$ - jednokrotne
4. a) $x = -\frac{1}{3}$ b) $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$
 c) $x = \frac{1}{3}$
5. a) $w(x) = (x + 3)(x - 2)(x - 4)$
 b) $w(x) = (x + 3)^2(x - 2)(x - 4)$
 c) $w(x) = (x + 3)^3(x - 2)^2(x - 4)$
6. a) $w(x) = \frac{2}{9}(x - 3)^2$
 b) $w(x) = \frac{2}{9}(x - 3)^2(x^2 + 1)$
 c) $w(x) = \frac{1}{9}(x - 3)^2(x^4 + x^2 + 2)$
7. a) $a = 5$ b) $a = -2, a = 2$
8. a) tak, $a = -16$ b) nie

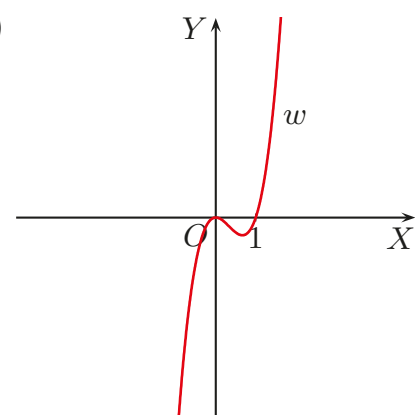
2.13. Wykres wielomianu



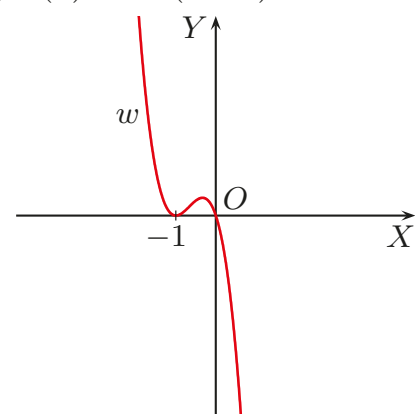
1. b)



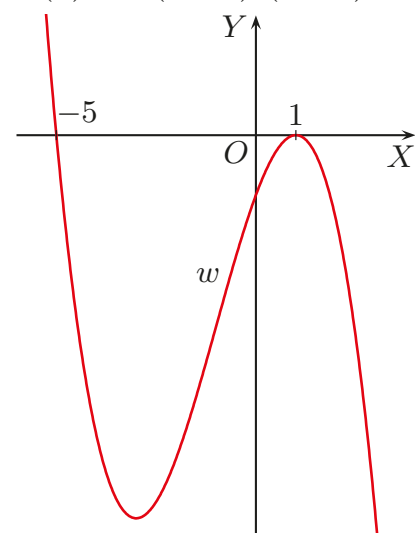
c)



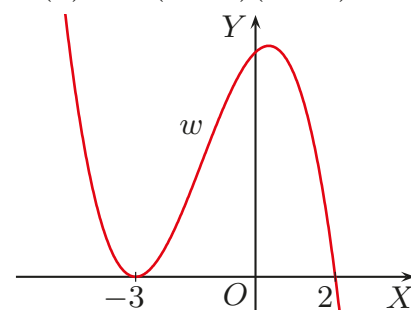
d) $w(x) = -x(x+1)^2$



e) $w(x) = -(x-1)^2(x+5)$



f) $w(x) = -(x-2)(x+3)^2$



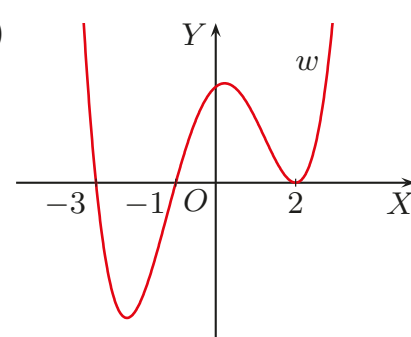
2. A - w, B - u, C - v

3. a) $w(x) = -x(x+2)^2(x-2)$

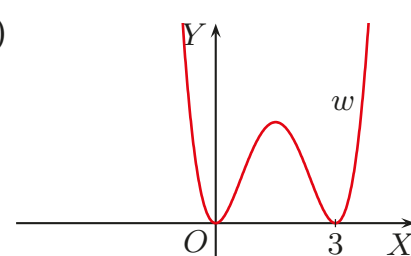
b) $w(x) = -(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

c) $w(x) = -(x+2)^2(x-1)^2$

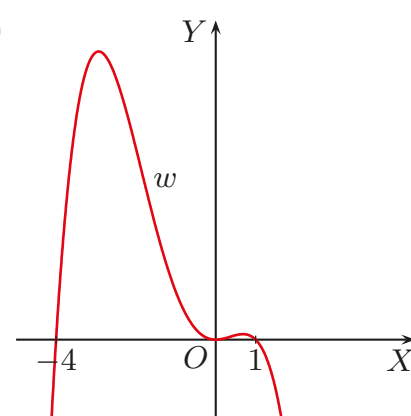
4. a)



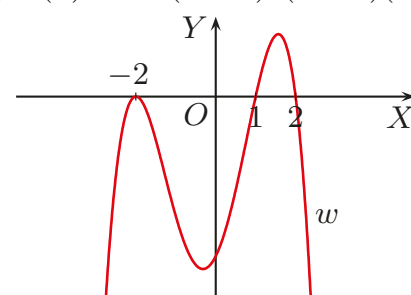
b)



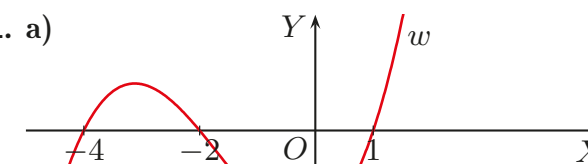
c)



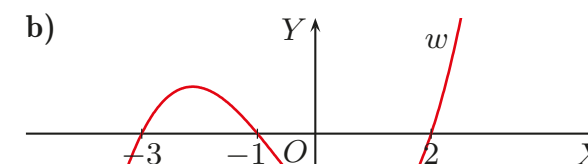
d) $w(x) = -2(x+2)^2(x-1)(x-2)$



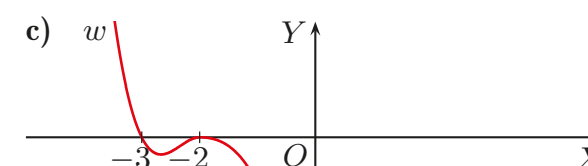
1. a)



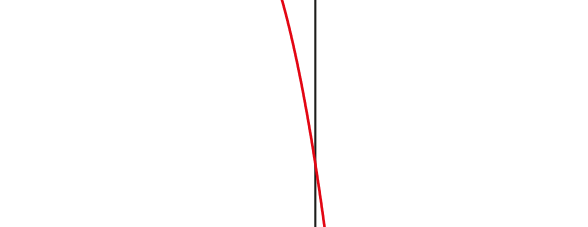
b)



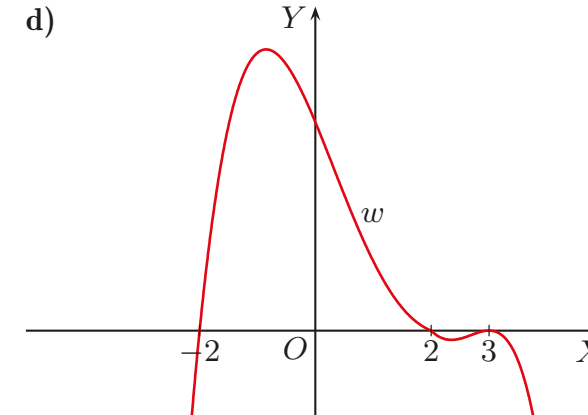
c)



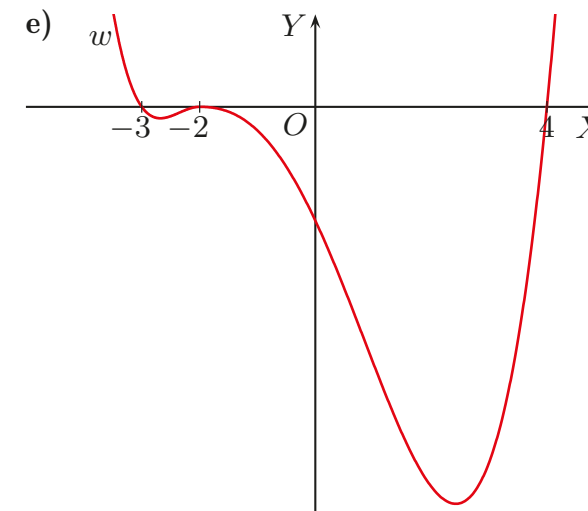
d)



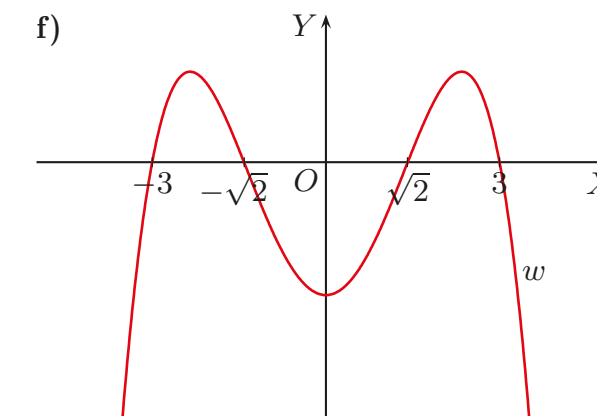
e)



f)



f)



2. a) $w(x) = x(x+3)(x+1)(x-2)$

b) $w(x) = x(x+1)(x-2)^2$

c) $w(x) = (x+2)^2(x-2)^2$

3. a) $w(x) = -x(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)$

b) $w(x) = -(x+3)(x+2)(x+1)^2(x-1)$

c) $w(x) = -x^2(x+4)(x+2)^2$

4. a) $x \in (-\infty; -3)$

b) $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-2; \sqrt{5})$

c) $x \in (-1; 1) \cup (3; \infty)$

d) $x \in (-1; 0) \cup (0; 6)$

e) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

f) nie istnieją takie argumenty

5. a) $x \in (-\infty; 2] \cup [3; \infty)$

b) $x \in \{-2, -1, 0\}$

c) $x \in [0; 1] \cup [6; \infty)$

d) $x \in (-\infty; 0] \cup [2; 3]$

e) $x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; \infty)$

f) $x \in [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}] \cup [3; \infty)$

6. a) $v(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x - 1$

b) $v(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2$

c) $v(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - x + 3$

2.14. Nierówności wielomianowe

1. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 3)$

b) $x \in [-2; 1] \cup [3; \infty)$

2. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (4; \infty)$

b) $x \in (1; 4)$

c) $x \in (-\infty; 1] \cup [4; \infty)$

d) $x \in \{-1\} \cup [1; 4]$

3. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1)$

b) $x \in (-\infty; -1] \cup \{2\}$

c) $x \in (-1; 2) \cup (2; \infty)$

d) $x \in \{-3\} \cup [-1; \infty)$

4. a) $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 5)$
 b) $x \in (-\infty; -4) \cup (5; \infty)$
 c) $x \in \{-3\} \cup [2; \infty)$
 d) $x \in \{-2, 5\}$
5. a) $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$
 b) $x \in (-\infty; -2] \cup [0; 3]$
 c) $x \in (-\infty; -1] \cup \{1\}$
 d) $x \in (-1; 0) \cup (0; 11)$
 e) $x \in (-2; -\frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\frac{2}{3}; \sqrt{2}]$
6. a) $x \in (-\infty; -4) \cup (1; \infty)$
 b) $x \in (-\infty; 3]$
7. a) $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}] \cup [-1; -1 + \sqrt{2}]$
 b) $x \in (-\infty; -4] \cup [-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}]$
 c) $x \in (-\infty; 3]$
 d) $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$
1. a) $x \in (-\frac{2}{3}; 0) \cup (\frac{2}{3}; \infty)$
 b) $x \in [-\frac{3}{4}; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; 0] \cup \{2\}$
 d) $x \in (0; 2)$
 e) $x \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$
 f) $x \in (0; \frac{1}{8})$
 g) $x \in (-3; 0) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
 h) $x \in [1 - \sqrt{5}; 0] \cup [1 + \sqrt{5}; \infty)$
 i) $x \in (-\infty; -\frac{5+\sqrt{33}}{2}] \cup \{0\} \cup [\frac{-5+\sqrt{33}}{2}; \infty)$
2. a) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [-1; 1]$
 b) $x \in (-3; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\frac{3}{2}; \sqrt{5}]$
 d) $x \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (-\frac{1}{3}; 2\sqrt{3})$
 e) $x \in (-1; 5)$
 f) $x \in (-\infty; -2] \cup [\sqrt[3]{6}; \infty)$
 g) $x \in (\frac{3}{2}; \infty)$
 h) $x \in [-\sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{2}] \cup [\sqrt{2}; \infty)$
3. a) $x \in [-1; 2]$
 b) $x \in (-5; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 3)$
 d) $x \in (-\infty; 2]$
 e) $x \in (\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6})$
 f) $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; \infty)$
 g) $x \in (-1; 1)$
 h) $x \in (-\infty; -3] \cup [-2; 2] \cup [3; \infty)$

4. a) $A \cap B = (2; 3]$,
 $A \setminus B = (-2; 0) \cup (3; \infty)$
 b) $A \cap B = (-4; -2] \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup [2; 4)$, $A \setminus B = (-2; -1) \cup (1; 2)$
 c) $A \cap B = (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$,
 $A \setminus B = [\frac{1}{2}; \sqrt{2}]$
5. a) $\{-\frac{1}{2}\}$
 b) $(-\infty; -3] \cup [-\sqrt{3}; 0) \cup (1; \sqrt{3}]$
 c) $[\frac{1}{3}; 1)$
6. a) $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$
 b) $(-\infty; 1]$
7. a) $m = -4$, $x \in [-2; 1] \cup [2; \infty)$
 b) $m = 0$, $x \in \{-2\} \cup [1; \infty)$
 c) $m = \frac{7}{3}$, $x \in (-\infty; -1]$
 d) $m = -2$ lub $m = 2$,
 $x \in [-2; -1] \cup [3; \infty)$
8. a) $\{0\} \cup [4; 5]$
 b) $[3; \infty)$
 c) $(-\infty; -2] \cup [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cup [2; \infty)$
 d) $[-1; 0] \cup [4; \infty)$
 e) $(2; 3] \cup [4; \infty)$
 f) $(-2; -\frac{\sqrt{6}}{3}) \cup (-\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{6}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{6}}{3}; 2)$
9. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$
 b) $x \in [-1; 1] \cup \{3\}$
 c) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 2) \cup (3; \infty)$
10. a) $x \in (-\infty; -6) \cup (-\frac{1}{2}; 0)$
 b) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\frac{2}{3}; \sqrt{2}]$
 c) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$
 d) $x \in \{0\} \cup [1; 4]$
 e) $x \in (1; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; 3]$
 g) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 3)$
 h) $x \in (-\infty; -4] \cup [-2; 2] \cup [3; \infty)$
11. $[-2; -1] \cup [3; \infty)$

2.15. Wielomiany – zastosowania

1. $x = 2$
2. a) $V(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$,
 $D = (0; 15)$
 b) $28 \text{ cm} \times 18 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$
 c) nie
 d) $x = \frac{25-5\sqrt{17}}{2}$, $x = 10$

3. a) $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$, $D = (0; 6)$
 b) kolejno: 128, 108, 64
 c) $x \in (0; \frac{1}{2}] \cup [4; 6)$
 d) $x \in (0; 4 - 2\sqrt{3}] \cup [4; 6)$
1. a) $V(x) = -2x^3 + 10x^2$, $D = (0; 5)$
 b) $x = 3$, $x = 1 + \sqrt{7}$
2. $4 \text{ dm} \times 8 \text{ dm} \times 4 \text{ dm}$
3. $V(x) = -4x^3 + 28x^2$, $D = (0; 7)$
 a) kolejno: $6\frac{1}{2}$, 24, $49\frac{1}{2}$, 80, $112\frac{1}{2}$
 b) 280 cm^2 lub $56(1 + \sqrt{11}) \text{ cm}^2$
4. a) $V(x) = -2x^3 + 6x^2 + 80x$, $D = (0; 5)$
 b) $x \in (0; 3)$
5. większe od $85\pi \text{ cm}^2$

Zestaw I

1. a) $u(x) = -2x^2 + 3x - 1$, $\text{st}(u) = 2$
 b) $u(x) = -2x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 1$, $\text{st}(u) = 5$
2. a) $a = 4$, $b = 6$ b) $a = -2$, $b = -\frac{5}{6}$
3. a) $w(x) = 3x^2(x - 1)(x + 1)$
 b) $w(x) = 2x(x + 1)^2$
 c) $w(x) = x^4(x + 1)(x + 6)$
 d) $w(x) = 5x(x - 1)^2(x + 1)^2$
 e) $w(x) = -3x(x - \sqrt{5})^2(x + \sqrt{5})^2$
 f) $w(x) = 32x^2(x - \frac{1}{2})^2(x + \frac{1}{2})^2$
4. a) $x = 0$
 b) $x = -4$, $x = 0$, $x = 1$
 c) $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$
 d) $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$, $x = \frac{1}{5}$
 e) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$
 f) $x = -1$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$
5. a) $w(x) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - 2)$,
 pierwiastki: $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 2
 b) $w(x) = x(x + 2)(x + 1)(x - 2)$,
 pierwiastki: -2, -1, 0, 2
 c) $w(x) = 5(x + \sqrt{3})(x + \frac{1}{5})(x - \sqrt{3})$,
 pierwiastki: $-\sqrt{3}$, $-\frac{1}{5}$, $\sqrt{3}$
 d) $w(x) = 5(x - \frac{3}{5})(25x^2 + 15x + 9)$,
 pierwiastek: $\frac{3}{5}$
 e) $w(x) = 27x(x + \frac{1}{6})(x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{36})$,
 pierwiastki: $-\frac{1}{6}$, 0
 f) $w(x) = -14x(x + \frac{\sqrt{2}}{2})(x - \frac{\sqrt{2}}{2})$,
 pierwiastki: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. a) $x = 2$; 0
 b) $x = -5$, $x = -1$, $x = 1$; 1
 c) $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$; 0
 d) $x = -3$, $x = 1$, $x = 3$; 1
 e) $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{9}$, $x = \frac{1}{3}$; 3
 f) $x = -1$, $x = 2$; 0
 g) $x = -2$, $x = -\frac{1}{8}$; 1
 h) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$; 2
7. a) $m = -\frac{5}{8}$
 b) $m = \frac{11}{3}$
 c) $m = -1$, $m = 3$
8. a) $x^2 + 3x + 10$, reszta 31
 b) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{5}{8}$, reszta $\frac{21}{16}$
 c) $2x^3 + x^2 - 1$, reszta 5
9. a) $w(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 6) - 7$
 b) $w(x) = (x + 2)(x^2 + 1) - 1$
 c) $w(x) = (x + 2)(4x^3 - x)$
 d) $w(x) = (x + 2)(x^2 + x - 11) + 20$
10. a) 7 b) 0 c) 0

Zestaw II

1. a) $x = 3$, $x = 4$,
 $w(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 4)$
 b) $x = -1 - \sqrt{2}$, $x = -1 + \sqrt{2}$,
 $w(x) = (x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})(x - 4)$
 c) nie ma więcej pierwiastków,
 $w(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x^2 + x + 1)$
 d) $x = -2 - \sqrt{3}$, $x = -2 + \sqrt{3}$,
 $w(x) = (x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})(x - 1)$
 e) $x = -3$, $w(x) = (x + 3)(x - 2)^2$
2. a) $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$
 b) $x = 7$
 c) $x = -3$
 d) $x = 3$
 e) $x = 5$
 f) $x = -1$, $x = -\frac{1}{5}$, $x = \frac{2}{3}$
 g) $x = -2$, $x = -\sqrt{2}$, $x = 1$, $x = \sqrt{2}$
 h) $x = -\sqrt{5}$, $x = -1$, $x = 2$, $x = \sqrt{5}$
3. a) $a = 0$
 b) $a = -3$, $a = 0$, $a = 3$
4. a) $a = 6$ b) $a = -8$
5. a) $a = -3$ b) $a = 2$
 c) $a = -1$

6. a) $x \in (-1; 2) \cup (3; \infty)$ b) $x \in [-1; 1]$
 c) $x \in \{-1\} \cup [2; 5]$
 d) $x \in (-\infty; 2] \cup \{3\} \cup [4; \infty)$
 e) $x \in [-1; 7]$
 f) $x \in [-5; 3] \cup \{6\}$
7. a) $x \in (-5; 0) \cup (4; \infty)$
 b) $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$
 c) $x \in \mathbb{R}$
 d) sprzeczna
 e) $x \in (-4; \infty)$
 f) $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cup [3; \infty)$
 g) $x \in [-1; \infty)$
 h) $x \in (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$

8. a) 6 dm b) 14 dm
 9. $3(\sqrt{3} + 3) \text{ dm}^2$

Zadania z kontekstem realistycznym

1. $x = 1$
 2. 6300 cm^2
 3. a) $V(x) = x^2(x - 2)$, $D = (2; \infty)$
 b) $x > 4$
 4. a) $V_1(x) = 4(4 - x)^2(x + 1)$, $D_1 = (0; 4)$,
 $V_2(x) = 4x(4 - x)(5 - x)$, $D_2 = (0; 4)$
 b) $x \in (2; 4)$

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. A 2. B 3. C 4. A 5. D 6. C 7. C 8. D
 9. PF
 10. A3
 11.1. B 11.2. E
 12. FF
 13.1. PP
 13.2. $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$
 14.1. A2
 15.2. $x = -2$, $x = 0$, $x = 6$
 16. $\frac{1}{4}$
 18. $\frac{5}{4}$
 19. jeden
 20. -6 , 0
 21.1. $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{7}{2}$
 23. jest
 24. $x = \frac{16}{15}$

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. $x \in [-2 - \sqrt{3}; -1] \cup [-2 + \sqrt{3}; 1]$
 2. $k = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $k = 2$
 3. $m = 10$, $n = 4$
 4. $B(4, 0)$, $C(2, 5)$
 5. $4(2 + \sqrt{2})$
 7. $V(x) = (x + 3)^2(x - 3)^2$,
 $D = (-3; 3) \cup (3; \infty)$,
 $V(x) \leq 256$ dla $x \in (-3; 3) \cup (3; 5]$
 8. $x = 1$

3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

1. a) $A(\frac{1}{2}, 8)$, $B(1, 4)$, $C(2, 2)$, $D(4, 1)$,
 $E(8, \frac{1}{2})$
 3. a) $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(-2) = -\frac{1}{4}$, $g(1) = 2$,
 $g(-2) = -1$, $h(1) = 4$, $h(-2) = -2$,
 $k(1) = 6$, $k(-2) = -3$
 b) czerwony $-f$, niebieski $-g$,
 zielony $-h$, fioletowy $-k$
 c) $A - k$, $B - g$, $C - f$, $D - g$, $E - h$
1. a) najmniejsza: 3, największa: 6
 b) najmniejsza: -4 , największa: -2
 c) najmniejsza: $\frac{1}{4}$, największa: $\frac{1}{2}$
 d) najmniejsza: -5 , największa: $-\frac{5}{2}$
2. a) $f(D) = [\frac{1}{2}; 2]$
 b) $f(D) = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
 c) $f(D) = [-2; 0) \cup (0; 4]$
3. a) $a = -8$, $f(-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$
 b) $a = -16$, $f(-2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$
 c) $a = -14$, $f(-2\sqrt{2}) = \frac{7\sqrt{2}}{2}$
 d) $a = \frac{1}{4}$, $f(-2\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{16}$
4. a) $a = -3$, $P(1, -3)$,
 $f(x) > -3$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$
 b) $a = -6$, $P(2, -3)$,
 $f(x) > -3$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$
5. a) $a = 2$, najmniejsza: -2 , największa: 1
 b) $a = -4$, najmniejsza: -2 ,
 największa: 4
 c) $a = -6$, najmniejsza: -3 ,
 największa: 6
6. $2\sqrt{5}$
 7. a) $a = 4$ b) $a = 8$

3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor

1. a) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$,
 asymptoty: $x = 0$, $y = 3$
 b) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
 asymptoty: $x = 0$, $y = -1$
 c) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,
 asymptoty: $x = 0$, $y = -3$
 d) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
 asymptoty: $x = 0$, $y = 2$
 e) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
 asymptoty: $x = 0$, $y = 1$
 f) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$,
 asymptoty: $x = 0$, $y = -4$
2. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
 asymptoty: $x = 2$, $y = 0$,
 maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, asymptoty: $x = 4$, $y = 0$,
 maleje w $(-\infty; 4)$ i w $(4; \infty)$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, asymptoty: $x = 1$, $y = 0$,
 rośnie w $(-\infty; 1)$ i w $(1; \infty)$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, asymptoty: $x = 2$, $y = 0$,
 rośnie w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$
3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
 asymptoty: $x = -1$, $y = 0$, $P(0, -1)$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,
 asymptoty: $x = -2$, $y = 0$, $P(0, \frac{3}{2})$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$,
 asymptoty: $x = -4$, $y = 0$, $P(0, 1)$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,
 asymptoty: $x = -3$, $y = 0$, $P(0, -\frac{2}{3})$
4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,
 asymptoty: $x = -2$, $y = -3$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
 asymptoty: $x = 1$, $y = 2$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$,
 asymptoty: $x = -1$, $y = 3$
5. a) $[4, -6]$ b) $[-2, 2]$ c) $[2, -3]$ d) $[3, 1]$
 6. a) $[3, -8]$ b) $[1, \frac{7}{6}]$
 7. $g(x) = \frac{a}{x-p} + q$, asymptoty: $x = p$, $y = q$
1. a) $g(x) = \frac{1}{x} - 3$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,
 asymptoty: $x = 0$, $y = -3$

- b) $g(x) = \frac{4}{x+3}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 asymptoty: $x = -3$, $y = 0$
 c) $g(x) = -\frac{2}{x} + 2$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, asymptoty: $x = 0$, $y = 2$
 d) $g(x) = -\frac{1}{x-2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
 $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, asymptoty: $x = 2$, $y = 0$
2. a) $a = 3$, $f(1\frac{3}{4}) = -12$, $f(-4) = -\frac{1}{2}$
 b) $a = -2$, $f(1\frac{3}{4}) = 8$, $f(-4) = \frac{1}{3}$
3. a) $g(x) = \frac{1}{x-1} + 4$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$,
 asymptoty: $x = 1$, $y = 4$
 b) $g(x) = \frac{2}{x+2} - 1$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
 asymptoty: $x = -2$, $y = -1$
 c) $g(x) = -\frac{1}{x+1} + 3$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$,
 asymptoty: $x = -1$, $y = 3$
 d) $g(x) = -\frac{2}{x-2} - 4$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$,
 asymptoty: $x = 2$, $y = -4$
4. a) 6 b) 4 c) 2 d) 4
 5. a) $y = \frac{2}{x+1} + 2$ b) $y = \frac{3}{2(x-3)} - 1$
 c) $y = -\frac{1}{3(x-2)} + 1$
 d) $y = -\frac{4}{3(x+1)} - 2$
6. a) $g(x) = \frac{4}{x-2} - 9$
 b) $g(x) = \frac{2}{3(x-\frac{1}{2})} + 5$
 c) $g(x) = \frac{5}{4(x-3)} - \frac{3}{4}$
 d) $g(x) = \frac{3\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} - 6$
7. a) $y = x - 6$, $y = -x - 6$, $S(0, -6)$
 b) $y = x - 3$, $y = -x + 5$, $S(4, 1)$
 c) $y = x + 4$, $y = -x + 2$, $S(-1, 3)$
 d) $y = x + 1$, $y = -x + 15$, $S(7, 8)$
8. $y = x - p + q$, $y = -x + p + q$, $S(p, q)$

3.3. Funkcja homograficzna

1. a) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 b) $f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
 c) $f(x) = \frac{2}{x-1} + 1$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
2. a) $f(x) = -\frac{1}{x+4} + 1$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$
 b) $f(x) = -\frac{1}{x-4} + 1$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$
 c) $f(x) = -\frac{2}{x+3} + 1$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

3. a) $1, \frac{1}{x+1} + 3$ b) $1, \frac{-1}{x+1} + 3$
 c) $2, \frac{2}{x-3} - 2$ d) $1, \frac{-1}{x-3} - 2$
 e) $1, \frac{1}{x+2} + 4$ f) $11, \frac{-11}{x+2} + 4$
4. a) $f(x) = \frac{1}{x+1} - 2, x = -1, y = -2$
 b) $f(x) = \frac{3}{x-1} + 2, x = 1, y = 2$
 c) $f(x) = \frac{-1}{x+3} + 2, x = -3, y = 2$
 d) $f(x) = \frac{-2}{x-3} - 1, x = 3, y = -1$
 e) $f(x) = \frac{2}{x+4} - 3, x = -4, y = -3$
 f) $f(x) = \frac{8}{x-2} + 3, x = 2, y = 3$
1. a) $f(x) = \frac{2}{x+3} + 2, x = -3, y = 2$
 b) $f(x) = \frac{1}{x-3} - 3, x = 3, y = -3$
 c) $f(x) = \frac{-2}{x+2} + 4, x = -2, y = 4$
 d) $f(x) = \frac{-5}{x-4} - 2, x = 4, y = -2$
 e) $f(x) = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{2}, x = -3, y = \frac{1}{2}$
 f) $f(x) = \frac{-1}{x+\frac{1}{2}} + 2, x = -\frac{1}{2}, y = 2$
2. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}, f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
 c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$
3. a) $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; 4) \cup (5; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (4; 5)$
 b) $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; -2)$
 c) $f(x) > 0$ dla $x \in (-1; 0)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$
4. a) maleje w $(-\infty; 4)$ i w $(4; \infty)$
 b) rośnie w $(-\infty; -1)$ i w $(-1; \infty)$
 c) rośnie w $(-\infty; -2)$ i w $(-2; \infty)$
 d) rośnie w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$
 e) rośnie w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$
 f) maleje w $(-\infty; \frac{1}{2})$ i w $(\frac{1}{2}; \infty)$
5. a) $m = 28, x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{4}{3}$
 b) $m = \frac{1}{4}, x = -2, y = \frac{1}{8}$
6. np.: a) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$
 b) $f(x) = \frac{1}{x} - 5$
 c) $f(x) = \frac{1}{x-1} + 4$
 d) $f(x) = \frac{1}{x+7}$
 e) $f(x) = \frac{1}{x-7} - 3$
 f) $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{2}} + \sqrt{2}$
7. a) $x = -2, y = -2$
 b) $x = 8, y = 20$

8. a) $(-2, 1), (2, -3), (4, 7), (8, 3)$
 b) $(-6, -2), (-4, -1), (-3, 1), (-1, -7),$
 $(0, -5), (2, -4)$ c) $(-8, 1), (-2, 0),$
 $(0, -1), (1, -2), (2, -4), (3, -10), (5, 14),$
 $(6, 8), (7, 6), (8, 5), (10, 4), (16, 3)$
9. a) dla $c = -2$ stała,
 dla $c = 0$ liniowa,
 dla $c \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ homograficzna
 b) dla $c = 8$ stała,
 dla $c \neq 8$ homograficzna
 c) dla $c = 0$ liniowa,
 dla $c \neq 0$ homograficzna
10. a), b), c) funkcja nie jest homograficzna
11. a) $f(x) = \frac{-3}{x+3} + 4$
 b) $f(x) = \frac{-6}{x+3} + \frac{1}{3}$
 c) $f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{6}$
12. a) $f(x) = \frac{x}{x-1}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 b) $f(x) = \frac{2x}{x-2}, D_f = (2; \infty)$

Hiperbola

1. a) $(-3, 0), (3, 0), y = -\frac{2}{3}x, y = \frac{2}{3}x,$
 hiperbola sprzężona: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$
 b) $(-4, 0), (4, 0), y = -\frac{5}{4}x, y = \frac{5}{4}x,$
 hiperbola sprzężona: $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$
 c) $(0, -4), (0, 4), y = -2x, y = 2x,$
 hiperbola sprzężona: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$
 d) $(0, -3), (0, 3), y = -3x, y = 3x,$
 hiperbola sprzężona: $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$

3.4. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

1. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, \frac{3}{4}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\}, \frac{4}{21}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}, \frac{5}{4}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, 0\}, -4$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}, -7,5$
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}, 2\}, -\frac{1}{3}$
 g) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}, 1$
 h) $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}, -\frac{1}{2}$
2. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}, -x - 3$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, 3x$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}, \frac{2x}{x-5}$
 d) $D = \mathbb{R}, x$

2. e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{x+1}{x^3}$
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, -\frac{x+2}{x}$
 g) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}, \frac{x^2}{x-3}$
 h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \frac{x+2}{(x-2)(x^2+4)}$
3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}, 4$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}, -\frac{2}{x}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}, -\frac{(2x-1)(x-5)}{x}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\}, -\frac{x+3}{6(x-2)}$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \frac{x-2}{(x+2)^2}$
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 3\}, -\frac{x+1}{2(x-1)}$
4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, 8$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}, -\frac{3}{2}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}, \frac{4}{3}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}, 4$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-7\}, -\frac{1}{25}$
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}, \frac{10}{9}$
5. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}, 8x$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}, (x-2)(x-1)$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}, \frac{x-3}{3x(x+3)}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}, -\frac{x^2+5x+25}{x+1}$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, x^2 + 1$
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 0\}, \frac{x+3}{x}$
1. a) tak b), c) nie
2. a) 0 b) 0, 2
 c) -2, 3 d) -1, 0, 2
3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, x^3 - 7x, 6$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, 2(x+1), -1 \notin D$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{x-1}{x+1}, -1 \notin D$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \frac{x+2}{x-2}, -\frac{1}{3}$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}, \frac{x}{x+3}, -\frac{1}{2}$
 f) $D = \mathbb{R}, \frac{x^2-1}{x^2+1}, 0$
 g) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{(x^2+1)(x+1)}{x-1}, 0$
 h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}, \frac{2(x+3)}{x+2}, 4$
4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\},$
 wartości kolejno: 1, -5
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\},$
 wartości kolejno: -10, 1
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\},$
 wartości kolejno: $\frac{16}{3}, 0$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 4\},$
 wartości kolejno: $-\frac{1}{5}, -1$

5. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\},$
 wartości kolejno: $\frac{3}{5}, -1, 3$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\},$
 wartości kolejno: 5, -11, 5
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\},$
 wartości kolejno: $-\frac{1}{14}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\},$
 wartości kolejno: $\frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}$
6. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, -\frac{3}{2}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}, -\frac{2}{5}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}, \frac{1}{2}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, \frac{1}{4}$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \frac{3}{4}$ f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, -1$
7. a) $D_A = \mathbb{R} \setminus \{0, 9\}, D_B = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\},$
 $D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 9\}$
 b) $D_A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, D_B = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\},$
 $D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
 c) $D_A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}, D_B = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\},$
 $D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
 d) $D_A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}, D_B = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\},$
 $D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$
8. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \frac{3}{2x}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, 1\}, -3$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}, -\frac{3}{x^2}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{1}{2}, 1\}, \frac{x+1}{2(x-1)}$
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\}, \frac{(x-2)(x-3)}{x}$
 g) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, -\frac{x^2}{3}$
 h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}, -\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$
 i) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, x + 3$
9. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{9}{2}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}, -\frac{2(x+2)^2}{(x-3)^2}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{5}, 0\}, \frac{2}{x}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{3}{2}\}, -\frac{2}{x-1}$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}, -\frac{x^2}{4}$
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}, \frac{x-2}{(x+2)(x-1)}$
10. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 3\}, (x+1)(x+3)$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, \frac{3}{2}, 4\}, -\frac{2(x+4)}{3(x-4)}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}, 2\}, \frac{(2x+1)(x-2)}{(x+2)(2x-1)}$

11. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = -2$



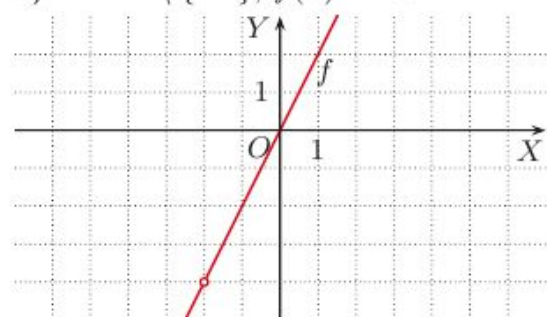
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = 2$



c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, f(x) = 3$



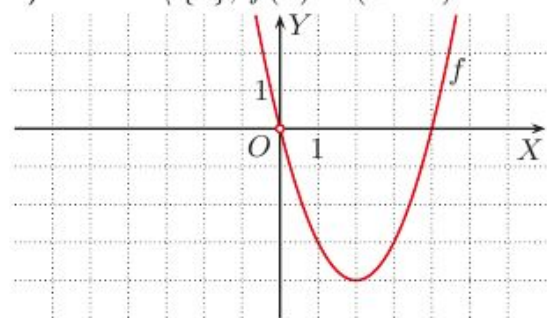
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f(x) = 2x$



e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, f(x) = x^2$



f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = (x-2)^2 - 4$



12. $\frac{3}{x+2}$

13. kolejno w wierszach: $\frac{1}{x^2+1}, \frac{6}{x^2+4}, \frac{x^2+2}{x+3}$

14. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 2\}, \frac{x(x+3)}{2(x+2)}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}, -(x-1)(x-4)$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{x+2}{x-1}$

15. a) $x \neq -y, x \neq y, x$

b) $x \neq -\frac{1}{2}y, x \neq -\frac{1}{3}y, x \neq \frac{1}{3}y, \frac{4x}{3x-y}$

c) $x \neq -\frac{1}{2}y, \frac{3}{x^2+y^2}$

3.5. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Ć 1. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, \frac{6x-6}{x^2-9}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}, \frac{2x^2-3x-10}{x(x+2)}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}, \frac{2x^2+2x-19}{(x+4)(x-1)}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, \frac{x^2-4x+12}{x^2-9}$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \frac{4}{x^2-1}$

f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{2x}{(x-1)(x+1)^2}$

2. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}, \frac{6}{x(x+3)}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \frac{12-3x}{x-2}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}, -\frac{4x+1}{(x+4)(x+1)}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}, -\frac{6x^2}{(x-4)(x+2)}$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}, -\frac{8x+24}{(x-4)(x+4)}$

f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, -\frac{5x+2}{x(x+1)}$

3. a) nie b) tak

4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}, -\frac{2(x^2+12)}{x(x^2-16)}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{8x}{(x-1)^2(x+1)}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}, -\frac{7}{x(x-3)}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, 5\}, \frac{x-11}{x^2-25}$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{2(x^2-x-1)}{x(x-1)^2}$

f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}, \frac{4x+3}{x(4x^2-1)}$

Z 1. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}, \frac{7x-1}{(x-3)(x+2)}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}, \frac{-x+10}{(x-1)(x-4)}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{12x^2-13x-11}{2(x^2-1)}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \frac{5x^2-7x+4}{2x(x-2)}$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, \frac{1}{3}\}, \frac{-14x+10}{(x+5)(3x-1)}$

f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-6, 6\}, \frac{28x-12}{36-x^2}$

2. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{x^2-3x-12}{x^2-1}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \frac{8}{x^2-4}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \frac{1-3x}{(x-1)^2}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \frac{-2x^2-3x}{(x+2)^2}$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \frac{2}{x^2(x+1)}$

f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \frac{2(x^2+1)}{x(x^2-1)}$

3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \frac{2x}{x^2-4}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-6, 0\}, \frac{3x^2+3x+2}{2x(x+6)}$

3. c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}, \frac{-x^2+13x+24}{4x^2-9}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}, \frac{5x^2-7x-5}{(3x-1)^2}$

4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}, \frac{-x^2+15x-18}{2(x-3)^2}, -1$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}, \frac{x^2+13x-18}{2(x^2-16)}, \frac{24}{7}$

5. $R_2 = \frac{R_1 R_c}{R_1 - R_c}, R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

6. a) $l = \frac{P - \pi r^2}{\pi r}$ b) $b = \frac{2P}{h} - a$

c) $h = \frac{3V}{\pi r^2}$ d) $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

e) $R = \frac{mg - F}{m\omega^2}$ f) $m = \frac{F}{g - \omega^2 R}$

g) $m = \frac{W r R}{G M (R - r)}$

h) $r = \frac{R G M m}{W R + G M m}$

3.6. Równania wymierne (1)

Ć 1. a) $x = -4$ b) $x = \frac{1}{3}$

c) $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = \frac{3}{2}$

3. a) $x = 3$ b) $x = -4$ c) $x = -2$

4. a) $x = -4$ b) $x = 4$

c) sprzeczne

Z 1. a) $x = 7$ b) $x = -3$ c) $x = 3$

2. a) $x = -6, x = 3$ b) $x = 16$

c) $x = \frac{1}{3}, x = 9$

3. a) $x = 0, x = 5$ b) $x = -2, x = 4$

c) $x = \frac{2}{3}, x = 3$ d) $x = 3$

e) $x = \frac{4}{9}$ f) $x = -3$

4. a) $x = -3$ b) sprzeczne

c) $x = -1$ d) $x = 4$

e) $x = \frac{1}{2}$ f) $x = -\frac{1}{2}$

5. a) $x = 0$ b) $x = -3, x = 0$

c) sprzeczne

d) $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, x = 0$

e) $x = 4$ f) $x = -2, x = -1$

3.7. Równania wymierne (2)

Ć 1. a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = 1$ c) $x = 2$

d) $x = 3$ e) $x = 2$ f) $x = 3$

g) $x = -\frac{7}{5}$ h) $x = 0$

2. a) $x = -2, x = 1$ b) $x = -1$

c) $x = -5, x = -1$ d) $x = 3$

e) $x = -6, x = 1$

f) $x = -4, x = -2$

g) $x = -3, x = 1$

h) $x = 1, x = \frac{3}{2}$

3. a) $x = -8$ b) $x = 12$ c) $x = -\frac{1}{4}$

d) $x = -\frac{5}{18}$ e) $x = 4$ f) $x = -3$

4. a) $x = 4, x = 6$ b) $x = -2$

c) $x = -8, x = 1$ d) sprzeczne

e) $x = -3\sqrt{2}, x = 3\sqrt{2}$

f) $x = -9, x = 0$

Z 1. a) $x = -8$ b) $x = 8$ c) $x = 2$

d) $x = 0$ e) $x = -1$ f) $x = 1, x = 2$

2. a) $x = -\frac{5}{2}$ b) $x = -2$ c) $x = -1$

d) $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $x = 6 - \sqrt{7}, x = 6 + \sqrt{7}$

f) $x = \frac{1-\sqrt{7}}{2}, x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$

3. a) $x = -5, x = 3$ b) $x = 3$ c) $x = -3$

d) $x = 2$ e) $x = 1$

f) brak pierwiastków całkowitych

4. nie ma rozwiązania: I; mają nieskończenie wiele rozwiązań: II, III, IV

5. a) 1 b) 0 c) nieskończenie wiele d) 2

e) nieskończenie wiele f) 1

6. a) $x = -5,5$ b) $x = -6$ c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

d) $x = -\frac{3+3\sqrt{2}}{2}, x = \frac{-3+3\sqrt{2}}{2}$

e) $x = 2, x = 3$ f) $x = -8$

7. $a = -\sqrt{2}, a = 0, a = \sqrt{2}$

8. a) $x = 0, x = \frac{1}{2}$

b) $x = \frac{-3-\sqrt{39}}{10}, x = \frac{-3+\sqrt{39}}{10}$

c) sprzeczne d) $x = 0, x = 7$ e) $x = 2$

f) $x = \frac{2}{7}$ g) $x = -12$ h) $x = -1$

9. a) $P_1(-1, 0), P_2(3, 4)$

b) $P_1(-1, 0), P_2(2, 6)$

c) $P_1(-1, 0), P_2(5, 3)$

10. a) $A(-2, -2), B(2, -2), C(2, 2),$

$D(-2, 2), P = 16$

b) $A(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}), B(\sqrt{3}, -\sqrt{3}),$

$C(\sqrt{3}, \sqrt{3}), D(-\sqrt{3}, \sqrt{3}), P = 12$

11. a) $x = -3, y = -1$ lub $x = 1, y = 3$

b) $x = -2, y = 1$ lub $x = 3, y = -4$

c) $x = -4, y = -3$ lub $x = -2, y = 1$

12. $P_1(-1, -2), P_2(1, 2), P_3(2, 1)$

13. a) $x = -3, y = 3$ lub $x = -1, y = -1$

lub $x = 0, y = 0$

b) $x = -2, y = -4$ lub $x = 0, y = 0$

lub $x = 1, y = -1$

3.8. Nierówności wymierne

- Ć 1.** a) $x \in (0; 2)$ b) $x \in [-2; 0)$
 c) $x \in [-\frac{3}{4}; 0)$
 d) $x \in (-\infty; -\frac{3}{8}) \cup (0; \infty)$
- 2.** a) $f(x) > 2$ dla $x \in (0; 1)$,
 $f(x) \geq -2$ dla $x \in (-\infty; -1] \cup (0; \infty)$
 b) $f(x) > 2$ dla $x \in (-3; 0)$,
 $f(x) \geq -2$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup [3; \infty)$
 c) $f(x) > 2$ dla $x \in (5; \infty)$,
 $f(x) \geq -2$ dla $x \in (-\infty; 4] \cup (5; \infty)$
- 3.** a) $x \in (2; 5]$ b) $x \in (4; 19)$
 c) $x \in (-\infty; 3\frac{1}{3}) \cup (4; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; 2) \cup [3; \infty)$
 e) $x \in [-\frac{1}{3}; 0)$
 f) $x \in (-\infty; -1)$
 g) $x \in (-\infty; -4) \cup (-3; \infty)$
 h) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup [5; \infty)$
- 4.** a) $x \in (-\infty; 1) \cup [\frac{9}{7}; 3)$
 b) $x \in (-\infty; -4) \cup (-\frac{12}{5}; -2)$
 c) $x \in [-\frac{3}{2}; 2) \cup (2; 3]$
 d) $x \in (-1; 1 - \sqrt{2}] \cup (1; 1 + \sqrt{2}]$
 e) $x \in (-3; -\frac{9}{4}] \cup (-2; 0) \cup [4; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup (-1; 0) \cup (-1 + \sqrt{2}; 1)$
- Ż 1.** a) $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$
 b) $x \in (-7; 3)$
 c) $x \in (-\infty; -7) \cup (-\frac{19}{3}; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; \frac{9}{7}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$
 e) $x \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (0; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$
 g) $x \in (-\infty; 5) \cup [10; \infty)$
 h) $x \in (-\frac{5}{2}; -\frac{13}{9}]$
- 2.** a) $x \in [-\frac{3}{2}; \infty)$
 b) $x \in (-\infty; -1] \cup (0; \infty)$
 c) $x \in (-\frac{1}{2}; \infty)$ d) $x \in (0; \infty)$
 e) $x \in (-3; -1)$ f) sprzeczny
- 3.** a) $x \in (3; 4) \cup [5; \infty)$
 b) $x \in (-\infty; -5] \cup (-\frac{7}{2}; -3] \cup (-2; \infty)$
 c) $x \in (-1; 0) \cup (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$
 d) $x \in (-2; -\frac{1}{11}) \cup (1; \infty)$
 e) $x \in [-2; \frac{1}{2}) \cup (1; \infty)$
 f) $x \in [-3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}; -\frac{3}{2}) \cup [-3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}; 3)$

- 4.** a) $A \cup B = (-\infty; -3] \cup (-2; \infty)$,
 $A \cap B = (-1; 2)$, $A \setminus B = (-2; -1]$
 b) $A \cup B = (-\infty; 2) \cup (3; 5]$,
 $A \cap B = (-\infty; 1)$, $A \setminus B = \emptyset$
 c) $A \cup B = (-\infty; -1) \cup (-\frac{3}{4}; -\frac{1}{10}] \cup$
 $\cup [0; \infty)$, $A \cap B = (\frac{5}{2}; \infty)$,
 $A \setminus B = (-\infty; -1) \cup [0; \frac{5}{2}]$
- 5.** a) $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
 b) $x \in [-\frac{1}{2}; 0)$
 c) $x \in \{0\} \cup (3; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; -4) \cup [1; 4) \cup [5; \infty)$
 e) $x \in (-\infty; -5] \cup (-4; 0) \cup (0; 4)$
 f) $x \in (-2; -\frac{\sqrt{10}}{2}) \cup (-1; 0) \cup (\frac{\sqrt{10}}{2}; \infty)$
 g) $x \in (-\infty; -\frac{7}{2}) \cup (-\frac{5}{2}; -2) \cup (0; \infty)$
 h) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$
 i) $x \in (-2; 0] \cup (2; 3]$
- 6.** a) $x \in (-\infty; -3) \cup [-\frac{5}{2}; -2)$
 b) $x \in (-2; \frac{22}{7}) \cup (4; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 3) \cup$
 $\cup [2 + 2\sqrt{2}; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
 e) $x \in (-\infty; \frac{-3-\sqrt{17}}{12}] \cup (-\frac{1}{3}; \frac{-3+\sqrt{17}}{12}] \cup$
 $\cup (\frac{1}{3}; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; 1) \cup [\frac{3}{2}; \infty)$
 g) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; \infty)$
 h) $x \in (-1; 0) \cup (1; \infty)$

3.9. Dziedzina funkcji. Funkcje wymierne

- Ć 1.** a) $[8; \infty)$ b) $(-\infty; 3]$ c) $(-\infty; 0]$
 d) $(0; \infty)$ e) $(2; \infty)$ f) $(-2; \infty)$
 g) $(1; 6]$ h) $[-6; 0) \cup (0; 3)$
 i) $(-2; 2) \cup (2; 4]$
- 2.** a) $D = (-2; 2) \cup (2; \infty)$,
 nie ma miejsc zerowych
 b) $D = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; 0]$, $f(0) = 0$
 c) $D = (-2; 1]$, $f(1) = 0$
 d) $D = (3; \infty)$, nie ma miejsc zerowych
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nie ma miejsc zerowych
 f) $D = \{1\}$, $f(1) = 0$
- 3.** a) $D = \mathbb{R}$, $f(-4) = f(4) = 0$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$,
 nie ma miejsc zerowych
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, $f(0) = 0$

- 4.** a) $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
 b) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
 c) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}, 0\}$
 d) $\mathbb{R}$ e) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
 f) $\mathbb{R} \setminus \{-3 - \sqrt{15}, -1, -3 + \sqrt{15}\}$
- 5.** a), c), d) nie są równe b) są równe
- 6.** a) $\frac{x-12}{x(x-4)}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$
 b) $\frac{4x-1}{4x^2-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$
- 7.** a) $f(x) \cdot g(x) = \frac{x-2}{2(x+1)}$,
 $D_{f \cdot g} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$;
 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-2)(x+1)}{2(x+2)^2}$, $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$
 b) $f(x) \cdot g(x) = \frac{2(2x-1)^2}{(x-2)(x+2)^2}$,
 $D_{f \cdot g} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$;
 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{x-2}$, $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}, 2\}$
 c) $f(x) \cdot g(x) = (2x-1)(x-3)$,
 $D_{f \cdot g} = \mathbb{R} \setminus \{-3, -\frac{1}{2}\}$;
 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(2x-1)(2x+1)^2}{(x-3)(x+3)^2}$,
 $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-3, -\frac{1}{2}, 3\}$
 d) $f(x) \cdot g(x) = \frac{(x^2-4)(x^2-4x+5)}{x^3(x+1)}$,
 $D_{f \cdot g} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$;
 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^2-4)(x+1)}{x(x^2-4x+5)}$, $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

- Ż 1.** a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x = 1$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, nie ma miejsc zerowych
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, $x = -1$, $x = \frac{1}{4}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $x = 5$
- 2.** a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, $h(x) = 0$ dla $x = \frac{1}{2}$,
 $h(x) \geq 0$ dla $x \in (-1; \frac{1}{2}] \cup (2; \infty)$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, 1\}$,
 $h(x) = 0$ dla $x = -\frac{3}{5}$,
 $h(x) \geq 0$ dla $x \in (-\infty; -\frac{3}{5}] \cup (-\frac{1}{3}; 1)$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}\}$, nie ma miejsc zerowych,
 $h(x) \geq 0$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $h(x) = 0$ dla $x = 1$,
 $h(x) \geq 0$ dla $x \in (-2; 1] \cup (2; \infty)$
- 3.** a) $x \in (1; 2)$ b) $x \in (2; 3) \cup (4; \infty)$
- 4.** a) np. $y = \frac{-18}{x-3}$ b) np. $y = \frac{-12}{(x+2)(x-1)}$
 c) np. $y = \frac{-36}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

- 5.** a) $k \in (-2; 2)$ b) $k \in (0; 4)$ c) $k \in [0; 4)$
- 6.** a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
 f rośnie w $(-\infty; -2] \cup [0; \infty)$,
 f maleje w $[-2; -1]$ i w $(-1; 0]$,
 $f(x) < -3$ dla $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$,
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$,
 g rośnie w: $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$, $(1; \infty)$,
 $g(x) < -3$ dla $x \in (-3; 0) \cup (1; \infty)$
 b) liczba rozwiązań równania $f(x) = m$:
 0 dla $m \in (-3; 1)$,
 1 dla $m \in \{-3, 1\}$,
 2 dla $m \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$;
 liczba rozwiązań równania $g(x) = m$:
 1 dla $m = -3$,
 2 dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
- 7.** a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, $f(x) = \frac{x+2}{x}$,
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g(x) = \frac{x+2}{x}$,
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $h(x) = \frac{x+2}{x}$
 b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ c) $x \in (-\infty; -2]$
- 8.** a) 0 dla $m \in (1; 4]$,
 1 dla $m = 1$,
 2 dla $m \in (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$
 b) 0 dla $m \in [-4; -1) \cup (1; 4]$,
 1 dla $m \in \{-1, 1\}$,
 2 dla $m \in (-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (4; \infty)$

3.10. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (1)

- Ć 1.** a) $x = \frac{1}{5}$, $x = 1$ b) $x = -1$, $x = -\frac{1}{9}$
 c) $x = -15$, $x = 3$ d) $x = \frac{25}{7}$, $x = 5$
- 2.** a) $x = 0$, $x = 6$ b) $x = 1$, $x = 3$
 c) $x = -1$, $x = 0$ d) $x = -\frac{4}{3}$, $x = 0$
- 3.** a) $x \in [1; \frac{7}{3}]$
 b) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$
 c) $x \in (-6; 2)$ d) $x \in (-\frac{5}{6}; \frac{1}{6})$
 e) $x \in (-\infty; -1] \cup [5; \infty)$
 f) $x \in [-18; 24]$ g) $x \in [-2; 10]$
 h) $x \in (-\infty; -\frac{25}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$
- Ż 1.** a) $x = -2$, $x = \frac{4}{3}$ b) $x = 1$, $x = 2$
 c) $x = -5$, $x = \frac{5}{3}$ d) $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{15}{2}$
 e) $x = -\frac{5}{4}$ f) sprzeczne
 g) $x = -2$, $x = 2$
 h) $x = -2$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $x = 2$

2. a) $x = -\frac{3}{2}, x = \frac{11}{2}$
 b) $x = -\frac{5}{2}, x = -\frac{1}{2}$
 c) $x = 4, x = 8$ d) $x = 1, x = 3$

3. a) $x \in (-\frac{9}{5}; 1)$ b) $x \in (-\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$
 c) $x \in [-9; -3]$
 d) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{6}; \infty)$
 e) $x \in (-\infty; -3] \cup [12; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; \frac{1}{24}) \cup (\frac{1}{8}; \infty)$
 g) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ h) $x = \frac{1}{4}$

4. a) $x \in [-3; -2] \cup [1; 2]$
 b) $x \in [-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}] \cup [2; 3]$
 c) $x \in [-2; -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}; 2]$
 d) $x \in [-1; 1]$

5. a) $x \in (0; 6)$
 b) $x \in (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (\frac{7}{2}; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; -3] \cup [5; \infty)$
 d) $x \in [-2; 0]$ e) $x \in [\frac{8}{3}; \frac{16}{3}]$
 f) $x \in \mathbb{R}$

6. a) $x \in [2; 8]$
 b) $x \in (-\infty; -7) \cup (3; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; -\frac{13}{3}] \cup [-\frac{11}{3}; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; -4) \cup (6; \infty)$

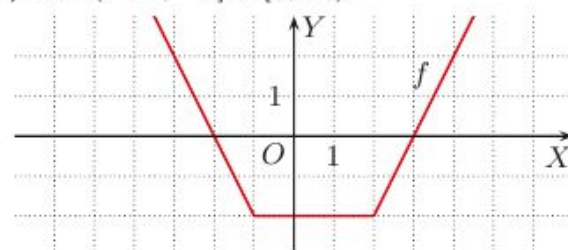
3.11. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (2)

1. a) $x = -1$ b) $x = 1,5$
 c) $x = 5$ d) $x = 2$
 e) $x \in [-2; \infty)$ f) $x = 0$
2. a) $x \in (-\infty; \frac{1}{4})$ b) $x \in [-9; -1]$
 c) $x \in (0; \infty)$ d) $x \in (-\infty; 0]$
 e) $x \in [\frac{9}{4}; \frac{9}{2}]$ f) $x \in \mathbb{R}$
3. a) $x = -1, x = 4$ b) $x \in [2; \infty)$
 c) $x \in [2; \infty)$ d) $x \in [0; \infty)$
4. a) $x \in (-1; 3)$
 b) $x \in (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [\frac{7}{2}; \infty)$
 c) $x \in [-4; 0] \cup [6; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; 7)$
5. a) $x \in (-\infty; 1]$ b) $x \in \mathbb{R}$
 c) $x = 1$ d) $x \in [-1; 1]$
6. a) 32 b) 4
7. a) $x = -\frac{1}{2}$ b) $x = -6, x = 1$
 c) $x = 3$ d) $x \in [-3; 0]$
 e) $x \in [-2; 2]$ f) $x = -8, x = 0$

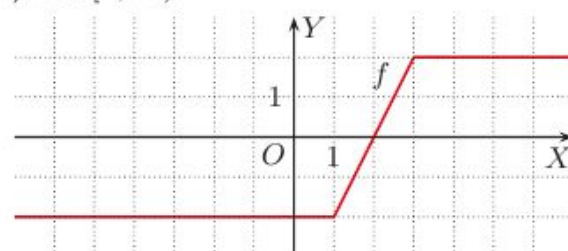
2. a) $x = -5, x = -1, x = 5$
 b) $x = -2, x = 4$ c) $x = -7, x = 5$
 d) $x = -7, x = \frac{1}{3}$

3. a) $x \in [0; 3]$ b) $x \in (-\infty; -1]$ c) $x \in \mathbb{R}$
 d) $x \in (-1; 8)$ e) $x \in [-\frac{7}{2}; \frac{3}{2}]$
 f) sprzeczna

4. a) $x \in (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$



- b) $x \in [2; \infty)$



5. a) $x = -2, x = 0, x = 2$
 b) $x = -1, x = 1$ c) sprzeczne
 d) $x = -5, x = -1, x = 7, x = 11$
 e) $x = -\frac{3}{2}$
 f) $x = -3, x = -1, x = 1, x = 3$

6. a) $x \in (-5; -1) \cup (1; 5)$
 b) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; -9) \cup (-5; -3) \cup (1; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; 0] \cup [1; \infty)$ e) $x \in [1; 3]$
 f) $x \in (-\infty; -\frac{15}{2}] \cup \{-\frac{1}{2}\} \cup [\frac{13}{2}; \infty)$

7. a) $x = 0$ b) $x \in [0; \infty)$
 c) $x = 0, x = \frac{2}{3}, x = 2$

3.12. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (3)

1. a) $x = -5, x = 1$ b) $x = \frac{3}{35}, x = \frac{1}{5}$
 c), d) sprzeczne
2. a) $x = -1, x = -\frac{1}{4}$ b) $x = -1, x = 1$
 c) $x = -7, x = 1$ d) $x = \frac{3}{5}$
3. a) $x = 2, x = 6$
4. a) $x \in (-1; 1) \cup (1; 3)$
 b) $x \in (-\infty; -9] \cup [5; \infty)$
 c) $x \in [-1; -\frac{1}{3}] \cup (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$
 d) $x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$

1. a) $x = -\frac{5}{2}, x = \frac{9}{2}$
 b) $x = -\frac{3}{2}, x = \frac{1}{2}$
 c) $x = \frac{2}{3}, x = \frac{10}{3}$
 d) sprzeczne
 e) $x = -\frac{33}{4}, x = -\frac{9}{2}$
 f) $x = \frac{13}{4}$
 g) $x = -\frac{1}{4}$
 h) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

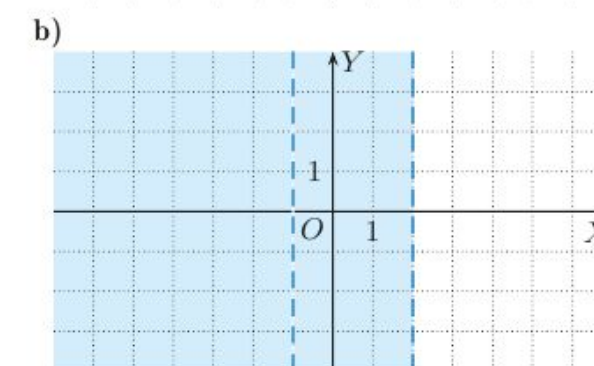
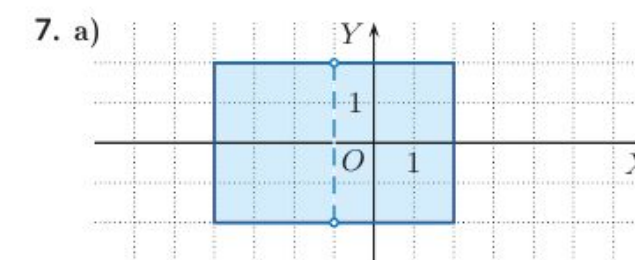
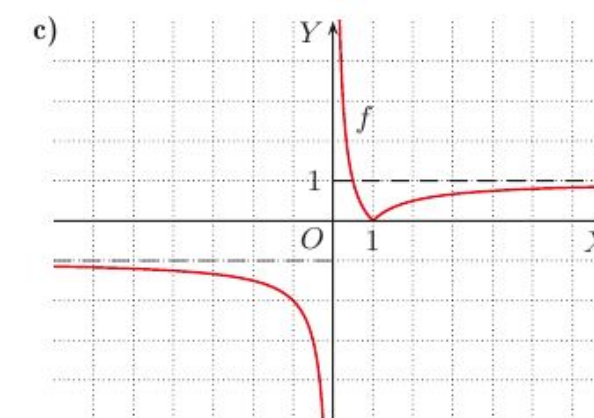
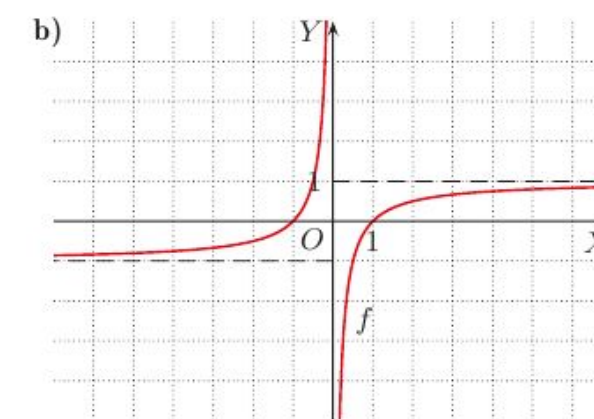
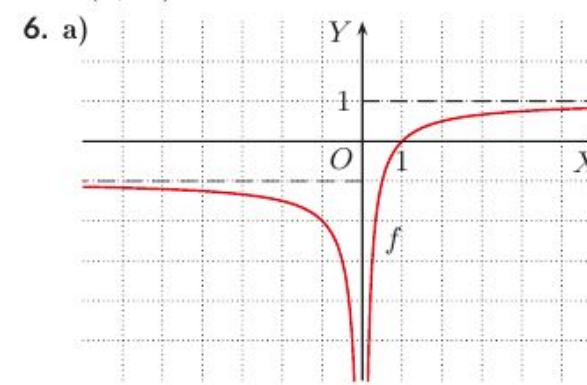
2. a) $x \in (-1; 3) \cup (3; 7)$
 b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ c) sprzeczna

- d) $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; \infty)$
 e) $x \in (-\infty; \frac{7}{2}] \cup [\frac{9}{2}; \infty)$
 f) $x \in [-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2}; \frac{7}{2}]$
 g) $x \in (-\infty; \frac{1}{3}] \cup [1; \infty)$
 h) $x \in (-\infty; \frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$
 i) $x \in (-\infty; \frac{7}{18}] \cup [\frac{11}{18}; \infty)$

3. a) $x \in (-\infty; \frac{7}{4}]$
 b) $x \in (-5; -1) \cup (-1; \frac{1}{3})$ c) $x = 1$
 d) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$
 e) $x \in (-\infty; \frac{10}{9}] \cup [2; \infty)$
 f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$
 g) $x \in [-1; 2) \cup (2; \infty)$
 h) $x \in (-\infty; -\frac{10}{11}) \cup (-\frac{2}{13}; 4) \cup (4; \infty)$
 i) $x \in (-\infty; -\frac{20}{3}) \cup [-\frac{12}{5}; 4) \cup (4; \infty)$

4. a) $x = \frac{1}{3}, x = 1$
 b) $x = -1, x = -1 + \sqrt{2}$
 c) $x = 6$

5. a) $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$
 b) $x \in (-2; -\frac{4}{3})$
 c) $x \in (-\infty; 0)$
 d) $x = -2, x = 2$
 e) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
 f) $x \in (-\infty; -4) \cup (-\frac{4}{3}; 0) \cup (0; \frac{4}{3}) \cup (4; \infty)$



8. $a = 5$

3.13. Wyrażenia wymierne - zastosowania (1)

1. a) $\frac{10}{15}$ b) 9 i 12
2. a) cukierki A - 16 zł/kg, cukierki B - 20 zł/kg b) 8,50 zł/kg
3. a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{3}{5}$
2. a) mama - 48 lat, tata - 54 lata
 b) za 11 lat

3. a) o 40 cm lub o 96 cm
b) o 72 cm lub o 1080 cm
4. 3 h 45 min
5. 24 dni
6. 7 h 12 min

3.14. Wyrażenia wymierne - zastosowania (2)

1. a) 60 km/h, 80 km/h
b) 90 km/h, 60 km/h
2. a) 120 km/h, 90 km/h
b) 90 km/h, 80 km/h

1. 15 km/h, 20 km/h
2. 60 km/h
3. 12 km/h, 18 km/h
4. 32 km/h, 12 km/h
5. a) 50 km/h b) 60 km/h
6. a) 120 km/h

Zestaw I

1. a) 6 a) P, Q
b) $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$
c) $x \in (-\infty; 0) \cup [\frac{3}{2}; \infty)$
2. a) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}, x = 0, y = 1$
b) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}, x = 0, y = -2$
c) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}, x = 4, y = 0$
d) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, x = -2, y = 0$
3. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}, g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}, h(D_h) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, h(D_h) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, h(D_h) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
4. a) $[-3, 3]$ b) $[4, 1]$ c) $[1, 1]$
5. a) $g(x) = \frac{2}{x+2} + 3$
b) $g(x) = -\frac{1}{x-2} - 3$
6. a) $b = \frac{2a}{m}$ b) $r = \frac{eR}{E-e}$ c) $a = \frac{m-1}{n+2}$
d) $a = \frac{2m}{m^2-2}$ e) $q = 1 - \frac{a_1}{S}$
f) $a_1 = \frac{S(1-q)}{1-q^n}$

7. a) $x = 2$ b) $x = 1$ c) $x = 1$
d) $x = -3, x = 0$
e) $x = 2, x = 6$
f) $x = 4$ g) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}, x = \frac{\sqrt{10}}{2}$
h) $x = 0$ i) $x = 0$
8. a) $x = -6$ b) $x = 2$ c) $x = 0$
d) $x = 0$ e) sprzeczne f) $x = \frac{1}{2}$
g) $x = -2, x = 4$ h) $x = 3$ i) $x = -\frac{1}{3}$

9. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x - 1$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}, \frac{x+3}{x-3}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}, \frac{1}{x+3}$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}, \frac{1}{x^2-5x+25}$
10. a) z prostą $y = 2: (\frac{2}{3}, 2);$
z prostą $y = x: (1, 1), (-2, -2)$
b) z prostą $y = 2: (-\frac{1}{3}, 2);$
z prostą $y = x - \text{brak}$
c) z prostą $y = 2: (\frac{1}{3}, 2);$ z prostą $y = x:$
 $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}), (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$
d) z prostą $y = 2: (-\frac{2}{3}, 2);$
z prostą $y = x - \text{brak}$
11. a) $f - \text{II}, x = 0; g - \text{I}, x = \frac{4}{3}$
b) $g(x) = x$ dla $x = 1, x = 4,$
 $f(x) = -x$ dla $x = -3, x = 0$
12. a) $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$
b) $x \in (-2; 0)$
13. a) sprzeczne b) $x = -1, x = 3$
c) $x = 0$ d) sprzeczne
e) $x = -\sqrt{7}, x = \sqrt{7}$
f) $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$

Zestaw II

1. a) $x \in (-\infty; 3) \cup [5; \infty)$
b) $x \in (-6; -2)$
c) $x \in (-\infty; -1) \cup [7; \infty)$
d) $x \in (0; 1)$
e) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$
f) $x \in (0; \infty)$
2. a) $x \in (-\infty; -3] \cup [0; 2)$
b) $x \in (0; \frac{4}{3}] \cup (5; \infty)$
c) $x \in (-2; -1) \cup (0; 1)$
d) $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
e) $x \in [-2; -\frac{2}{3}] \cup \{0\} \cup (6; \infty)$
f) $x \in [-5; 0)$

3. a) $x \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$
b) $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 4)$
d) $x \in (-2; \frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$
e) $x \in (-\infty; -2) \cup [-1; 0) \cup [3; \infty)$
f) $x \in (-3; -2]$
4. a) $x \in (-3; 3)$
b) $x \in (-7; 1) \cup (5; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -2) \cup [-\frac{1}{2}; 0) \cup (2; \infty)$
5. a) $A \cup B = (-\infty; 1] \cup [2; \infty),$
 $A \cap B = [-2; 0) \cup (4; \infty), A \setminus B = [2; 4]$
b) $A \cup B = \mathbb{R}, A \cap B = (-\infty; -2) \cup (0; 1),$
 $A \setminus B = [-2; -1)$
6. a) $x = -\frac{3}{2}, x = \frac{1}{2}$ b) $x = -5$
c) $x \in [1; \infty)$ d) $x \in [1; 3]$
e) $x = 0, x = 2$
f) $x = -\frac{1}{2}, x = 2$
g) $x \in [1; 5]$
h) $x = -1$ i) sprzeczne
7. a) 1, 2 b) 2, 3, 5, 6 c) 1, 2, 3, 4, 5
8. a) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3}\}$
c) $\mathbb{R} \setminus \{1 + \sqrt{2}\}$
9. a) $x = -1, x = 1$
b) $x = -4, x = 2$
c) $x = 2$ d) $x = -1$
10. a) $x = 1$ b) $x = 3$
11. a) $x = 3$ b) sprzeczne
12. $y = \frac{-1}{x+1} + 2$ a) $[-1, -3]$ b) $[2, -5]$
13. $m = -\frac{1}{2}$
14. $m = -\frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}$
15. a) $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
b) nie ma takich m
c) $m \in [0; 1]$ d) $m \in (-6; 2)$
16. a) $k \in (-1; -\frac{\sqrt{2}}{2})$ b) $k \in (\frac{7}{8}; 1)$
17. $k \in [2; \infty)$
18. a) równoległe dla $m = \frac{1}{4},$
prostokątne dla $m = -1$
b) nigdy nie są równoległe,
prostokątne dla $m = 0$ i dla $m = 2$
19. a) $m = 0$ b) $m \in (-2; 2)$
c) $m \in (1 - 2\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2})$

Zadania z kontekstem realistycznym

1. 8 min
2. 20 h i 30 h
3. 55 min
4. 8 h
5. 60 km/h
6. pociąg: 90 km/h, autobus: 50 km/h
7. 4 h

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. D 2. A 3. D 4. C 5. D 6. B 7. B
8. C 9. D 10. A
11. A3
12. PF
- 13.1. FF 13.2. B
14. BF
- 15.1. DA 15.2. A
16. $a = 11$
17. $x = 0, x = 2 - 2\sqrt{3}$
- 18.1. $2\frac{1}{4}$ 18.2. $x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}, x = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$
19. $x = \sqrt{2}$
21. 312 cm^2
22. $t = \frac{210}{v}, v > 0, t = 1 \text{ h } 45 \text{ min}$
23. 2 km/h

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. $29\frac{1}{3}$
3. $x \in [\frac{11}{6}; \frac{17}{6}]$
4. $\frac{1}{6}$
5. $[2; 3] \cup (4; \infty)$
6. $m \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$
7. $x \in (-4; -1] \cup (2; \infty)$
- 8.
9. $x \in [-\frac{16}{3}; -3] \cup [0; \infty)$
10. 70 km/h i 90 km/h

4.1. Trójkąty prostokątne

- Ć 1. a) 50 b) 3 c) $3\sqrt{2}$
d) 4 e) 4 f) $\frac{\sqrt{17}}{2}$
2. a) $x = 5$ b) $x = \sqrt{106}$
3. a), b), d) jest c) nie jest
4. b) $12(2 + \sqrt{2})$ cm
5. b) $12\sqrt{3}$ cm
6. a) $2(\sqrt{2} + 1)$ b) $6(\sqrt{2} + 2)$
c) $8(\sqrt{2} + 1)$
7. a) $3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ b) $2(\sqrt{3} + 3)$
c) $3(\sqrt{3} + 1)$
- Z 1. a) 9 b) 2 c) 32
2. $24\sqrt{3}$
3. a) $x = 2\sqrt{2}$, $y = 4$
b) $x = 4(\sqrt{3} - 1)$, $y = 4\sqrt{2}$
4. a) $8(2 + \sqrt{3})$ cm
b) $3(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm
5. $3\sqrt{21}$, $3\sqrt{39}$
6. a) $2(3\sqrt{2} + 4)$
b) $2(\sqrt{3} + 3)$
c) $2\sqrt{3} + 3$
7. a) 12 cm b) 80 cm
8. $\sqrt{3}$ cm, 2 cm, $2\sqrt{3}$ cm
9. $4,5(2 + \sqrt{2})$
10. $12(1 + \sqrt{3})$
11. $18\sqrt{3}$
12. a) $2(5 + 3\sqrt{5})$
b) $2(4 + \sqrt{13})$
13. a) $\sqrt{73}$ cm, $2\sqrt{13}$ cm
b) $3\sqrt{7}$ cm, $3\sqrt{13}$ cm
14. a) 5 cm, 12 cm b) 4,8 cm
15. 8 cm i 10 cm
16. Suma pól księżyców jest równa 60 cm^2 i równa się polu trójkąta.
17. a) $8(\sqrt{2} - 1)$
b) $4(1 + \sqrt{2})$
18. a) 7, 24, 25 b) 8, 15, 17
c) 12, 35, 37 d) 20, 21, 29
e) 5, 12, 13 f) 27, 36, 45

Dowody twierdzenia Pitagorasa

2. b) $a = \sqrt{31} + 1$, $b = \sqrt{31} - 1$

4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

- Ć 2. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$
3. a) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{12}{13}$,
 $\tan \alpha = \frac{5}{12}$, $\tan \beta = \frac{12}{5}$
b) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{8}{17}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{15}{17}$,
 $\tan \alpha = \frac{8}{15}$, $\tan \beta = \frac{15}{8}$
c) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{3}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,
 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\tan \beta = 2\sqrt{2}$
- Z 1. a) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{4}{5}$,
 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $\tan \beta = \frac{4}{3}$
b) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{7}{25}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{24}{25}$,
 $\tan \alpha = \frac{7}{24}$, $\tan \beta = \frac{24}{7}$
c) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{17}}{17}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$,
 $\tan \alpha = \frac{1}{4}$, $\tan \beta = 4$
d) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{4}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$,
 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$, $\tan \beta = \sqrt{15}$
e) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = 2$
f) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$,
 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan \beta = \sqrt{2}$
3. $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = 2$
4. a) 10, 24
b) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{12}{13}$,
 $\tan \alpha = \frac{5}{12}$, $\tan \beta = \frac{12}{5}$
5. $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, $\tan \beta = 3$
6. $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{9}{10}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{19}}{10}$,
 $\tan \alpha = \frac{9\sqrt{19}}{19}$, $\tan \beta = \frac{\sqrt{19}}{9}$
7. a) $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{89}}{89}$, $\cos \alpha = \frac{8\sqrt{89}}{89}$, $\tan \alpha = \frac{5}{8}$
b) $\sin \beta = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos \beta = \frac{2\sqrt{29}}{29}$,
 $\tan \beta = \frac{5}{2}$
8. a) BD i DF b) DO c) BC

4.3. Trygonometria – zastosowania

- Ć 1. a) około 8 m b) około 9,72 m
2. a) około 19,96 m b) około 26,43 m
3. a) około 58° b) około 77°
- Z 1. około 18,79 m
2. około 95 cm
3. około 12,62 m
4. około 21,42 m
5. a) około 50° b) około 64°
6. a) około 12,59 m b) około 8,81 m
7. około 197 m
8. około 34,33 km
9. około 2484,48 m
10. około 91,53 m
11. a) około 17,17 m lub 64,84 m
b) około 89,88 m

4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

- Ć 1. a) $\sqrt{19}$ cm; około 26° , około 64°
b) $\sqrt{194}$ cm; około 21° , około 69°
c) 53° ; około 9,03 cm, około 11,98 cm
d) 36° ; około 5,81 cm, około 9,89 cm
2. a) $3^\circ 36'$ b) $2' 24''$ c) $9'$ d) $7' 12''$ e) $25' 12''$
3. a) $|CD| \approx 6,47$; $27^\circ 30'$, 35° , $117^\circ 30'$
b) $|CD| \approx 7,05$; 35° , około 126° , około 19°
- Z 1. a) $\angle BCD = 106^\circ 17' 50''$,
 $\angle DBC = 27^\circ 28' 35''$,
 $\angle BDC = 46^\circ 13' 35''$
b) $\angle PAB = 90^\circ$, $\angle ABP = 36^\circ 51' 5''$,
 $\angle BPA = 53^\circ 8' 55''$
2. a) $2\sqrt{13}$ cm, około 34° , około 56°
b) $5\sqrt{2}$ cm, około 8° , około 82°
c) $2\sqrt{41}$ cm, około 39° , około 51°
3. a) $\angle ABC = 56^\circ$, $|AC| \approx 8,9$,
 $|AB| \approx 10,73$
b) $\angle CAB = 24^\circ$, $|BC| \approx 4,07$,
 $|AC| \approx 9,14$
4. a) około $75^\circ 30'$, około $104^\circ 30'$
b) około 53°
c) około 67° , około 113°
5. $|AB| \approx 20,88$, $|AD| \approx 8,09$,
 $\angle DCA \approx 28^\circ$

6. a) 90° , około 53° , około $108^\circ 30'$,
około $108^\circ 30'$
b) około 42° , około 138°
7. około $75^\circ 30'$, około $104^\circ 30'$
lub około 41° , około 139°
8. $|AB| = 12$, $|BD| = 3$, $|AD| = 3\sqrt{13}$,
 $|ED| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
9. około $18^\circ 30'$, około $18^\circ 30'$, około 143° ;
 $6\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{5}$ cm, $2\sqrt{5}$ cm
10. około 32°
11. a) $Ob = a(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$,
kąty: około 35° , około 55°
b) $Ob = \frac{a}{2}(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$,
kąty: około 35° , około 55°

4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego

- Ć 2. $\frac{3}{4}$
3. a) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\tan \alpha = \frac{4}{3}$
b) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\tan \alpha = \frac{5}{12}$
c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\tan \alpha = \sqrt{15}$
4. a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$
b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$
c) $\sin \alpha = \frac{21}{29}$, $\cos \alpha = \frac{20}{29}$
d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
e) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
f) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\tan \alpha = \frac{\sqrt{14}}{7}$
g) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan \alpha = 2$
h) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\tan \alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$
6. a) $\cos \alpha = \frac{3}{10}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$, $\tan \alpha = \frac{\sqrt{91}}{3}$
b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \alpha = \sqrt{3}$
c) $\tan \alpha = \frac{5}{3}$, $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{34}}{34}$, $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{34}}{34}$
- Z 1. a) $\sin \alpha = 0,6$, $\tan \alpha = 0,75$
b) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\tan \alpha = \frac{4}{3}$
c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$
d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$
e) $\sin \alpha = \frac{6}{7}$, $\tan \alpha = \frac{6\sqrt{13}}{13}$
f) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$
g) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$
h) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$
2. a) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. a) tak b) nie c) nie d) tak

4. a) $2\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm
b) $6\sqrt{13}$ cm, $9\sqrt{13}$ cm

5. a) -1 b) $\frac{5}{9}$

6. a) 30 b) $4(\sqrt{5} + 3)$
c) $\sqrt{6} + \sqrt{3} + 3$ d) $3(\sqrt{13} + 5)$

7. a), c), d) tak b) nie

8. a) m^2 b) $1 - 2m^2$
c) $1 + 2m\sqrt{1 - m^2}$
d) $m + \sqrt{1 - m^2}$

9. a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
b) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$
c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$

10. a) 0,48 b) $-0,2$ lub $0,2$
c) $-0,296$ lub $0,296$

Trygonometria i astronomia

1. około 40214477211796 km

4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Ć1. a) 45° , np. $(1, 1)$ b) 90° , np. $(0, 1)$
c) 135° , np. $(-1, 1)$

2. a) $|OP| = 5$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
b) $|OP| = 10$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
c) $|OP| = 2$, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3. a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$
b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -1$
c) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -3$

4. a) $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$
b) $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$
c) $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$,
 $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$

5. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$,
 $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{2}$

6. a) $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$

b) $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. a) $\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$
b) $\cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$
c) $\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$

9. a) $\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$
b) $\sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -2\sqrt{2}$
c) $\sin^2 \alpha = \frac{9}{10}$, $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = -3$

Z1. a) $\sin |\sphericalangle AOP| = \frac{4\sqrt{17}}{17}$,
 $\cos |\sphericalangle AOP| = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg} |\sphericalangle AOP| = -4$
b) $\sin |\sphericalangle AOQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\cos |\sphericalangle AOQ| = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} |\sphericalangle AOQ| = -\frac{1}{2}$
c) $\sin |\sphericalangle AOR| = \frac{5\sqrt{41}}{41}$,
 $\cos |\sphericalangle AOR| = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\operatorname{tg} |\sphericalangle AOR| = -\frac{5}{4}$

2. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

3. a) $\frac{3\sqrt{10}-4\sqrt{5}}{10}$ b) $\frac{-3\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$

4. a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $3 - 2\sqrt{3}$

5. a) -1 b) -3 c) $-\frac{4}{3}\sqrt{3}$ d) $2 - \sqrt{2}$
e) -1 f) $\frac{3}{2}(3 + \sqrt{3})$

6. a) 0,9659 b) 0,2588 c) $-0,6428$
d) $-0,9962$ e) $-0,7813$ f) $-0,3057$

7. a) $\sin^2 \alpha = \frac{15}{16}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}$
b) $\sin^2 \alpha = \frac{5}{9}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$
c) $\sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -2$

8. a) $\cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$
b) $\cos^2 \alpha = \frac{7}{16}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$
c) $\cos^2 \alpha = \frac{4}{9}$, $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

9. a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$
b) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$
c) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$

Współczynnik kierunkowy prostej

1. a) 30° b) 60° c) 135°

2. a), b) 75°

4.7. Pole trójkąta

Ć1. a) $12\sqrt{7}$ cm² b) $8\sqrt{21}$ cm²

2. a) 120 cm² b) 120 cm² c) $\frac{169}{2}\sqrt{3}$ cm²

3. a) $3(2 + \sqrt{2})$ cm b) 112,5 cm²

4. b) $75\sqrt{3}$ cm²

5. a) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ cm² b) $36\sqrt{3}$ cm

7. a) 15 b) $30\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2}$ d) 4,5

8. a) 12 cm b) $6\sqrt{2}$ cm c) $4\sqrt{3}$ cm

Z1. a) $\frac{35\sqrt{3}}{4}$ cm² b) $16\sqrt{2}$ cm²

2. a) $6\sqrt{3}$ cm² b) $\frac{36}{5}\sqrt{3}$ cm²
c) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$ cm²

3. a) $6(2\sqrt{2} + \sqrt{10})$ cm

b) 30° , 30° , 120° ,
 $Ob = 4(2\sqrt{3} + 3)$ cm

4. 6, 6, 8

5. $P = 24$ cm²,
 $Ob = 4(\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$ cm

6. $P_1 = 36(\sqrt{3} - 1)$,
 $P_2 = 36(3 - \sqrt{3})$

7. $Ob = 5(2 + \sqrt{3})$, $P = \frac{25}{4}\sqrt{3}$

8. 90°

10. a) 6 b) $4\sqrt{6}$ c) 12 d) 36

4.8. Pola czworokątów (1)

Ć1. 6 cm

2. a) $48\sqrt{2}$ b) 48

3. a) 30° b) 45° c) 60°

4. $3\sqrt{3}$, 9

5. b) 12,5 cm²

7. a) $P = 120$, $h = \frac{120}{13}$
b) $P = 24\sqrt{2}$, $h = 4\sqrt{2}$

Z1. a) 18 cm² b) 1 cm, 2 cm

2. a) $P = 12$, $Ob = 4(3 + \sqrt{2})$

b) $P = 16\sqrt{3}$, $Ob = 24$

c) $P = 32$, $Ob = 26$

3. b) $15\sqrt{2}$ cm²

4. $8(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm

5. a) 0,96 b) 10 cm

6. a) $4\sqrt{3}$ cm² b) 480 cm²

7. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4.9. Pola czworokątów (2)

Ć1. a) $P = 8\sqrt{17}$, $Ob = 2(8 + \sqrt{21})$
b) $P = 21\sqrt{5}$, $Ob = 28$

2. a) $P = 10\sqrt{3}$, $Ob = 2(5\sqrt{3} + 4)$
b) $P = 18\sqrt{5}$, $Ob = 6(\sqrt{6} + 2)$

3. $26\sqrt{5}$ cm²

5. 21 lub $\frac{\sqrt{1751}}{2}$

Z1. $6(6 + \sqrt{2})$ cm

2. $\frac{320}{9}\sqrt{5}$ cm²

3. 0,8

4. 161 m siatki, $P_1 = 188$ m², $P_2 = 512$ m²

7. 12,5 cm, $P = 24$ cm²

8. $24\sqrt{5}$ cm²

9. kąty: 60° , 120° , ramiona: $\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$,
podstawy: $\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$, $\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$

10. $10\sqrt{34} \approx 58,3$ [m]

Zestaw I

1. 48

2. $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$,
 $\sin \beta = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. a) 10, 24, 26 b) $4(\sqrt{2} + 2)$ c) $16\sqrt{7}$

4. a) $\sin \beta = \cos \gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\cos \beta = \sin \gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
 $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{2}$
b) $\sin \alpha = \cos \gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\cos \alpha = \sin \gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{2}$
c) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{12}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$
d) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{3}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4}$

5. a) $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{11}}{33}$
b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{19}}{9}$
c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{35}$
d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\cos \alpha = \frac{15}{17}$
f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$
g) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$
h) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{39}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$

6. a) $|AB| \approx 4,37$ cm, $|AC| \approx 6,39$ cm
b) $|AB| \approx 7,56$ cm, $|AC| \approx 4,94$ cm
7. a) około 329,26 m
b) około 70°
8. około 6,65 m
9. a) około 43,6 m
b) około 20 min
10. około 829 m

Zestaw II

1. $6(3 + \sqrt{3})$ cm²
2. 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm
4. a) $Ob = 2(11 + 3\sqrt{3})$ cm,
 $d_1 = 4\sqrt{7}$ cm, $d_2 = 2\sqrt{43}$ cm
b) $Ob = 4(8 + \sqrt{3})$ cm, $d_1 = 2\sqrt{29}$ cm,
 $d_2 = 2\sqrt{41 + 20\sqrt{3}}$ cm
5. $\sin |\sphericalangle PAD| = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos |\sphericalangle PAD| = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
 $\operatorname{tg} |\sphericalangle PAD| = \frac{1}{3}$
6. $21(3 - \sqrt{3})$
7. $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ cm
8. a) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = 4$
b) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -4$
c) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$
d) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$
10. a) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ b) 0 c) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) 1
g) $3 - \sqrt{3}$ h) $-\frac{8}{3}$
12. około 22651 cm³, około 17543 cm³

Zadania z kontekstem realistycznym

1. 22 cm
2. 17,43 m
3. niebieska – 498 m, czerwona – 585 m
4. 39 m
5. 891 m
6. 14,2 m
7. 323 m

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. A 2. B 3. C 4. D 5. D 6. D 7. B 8. D
9. PP
10. $4\sqrt{5}$, $10 + 6\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- 11.1. D 11.2. $\sin |\sphericalangle ADC| = \frac{1}{2}$, $P = 4\sqrt{3}$
12. FFP
- 13.1. FP 13.2. C
14. A1
15. FF
16. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
17. $\frac{2}{5}$
18. 7,2
19. $|AP| = 5,75$, $|BP| = 2,25$
20. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$
21. $Ob = 28$, $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $\cos \alpha = \frac{24}{25}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$
22. $\frac{49}{25}$
23. $\frac{\sqrt{6}}{4}$
24. $\frac{3}{5}$
25. około 21,8 m

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. $1 - \frac{\sqrt{15}}{4}$
2. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
3. $P = 5$, $Ob = 7,5 + \frac{\sqrt{185}}{2}$
4. $18(2 + \sqrt{3})$
8. b) $\frac{8\sqrt{6}}{7}$, $2\sqrt{6}$, $\frac{8\sqrt{6}}{5}$
9. $7\frac{9}{13}$, $18\frac{4}{13}$

5.1. Okrąg

- Ć 1. 45°
2. $\frac{3}{2}\pi$ cm, $\frac{9}{2}\pi$ cm, $\frac{15}{2}\pi$ cm, $\frac{21}{2}\pi$ cm
3. 16

- Z 1. okrąg: 10π cm, łuk: $\frac{5}{3}\pi$ cm
2. a) $\frac{5}{2}\pi$ cm b) $\frac{5}{4}\pi$ cm c) $\frac{55}{12}\pi$ cm
3. 36 cm
4. 80°
5. a) $x = -9$, $x = 7$ b) $x = -3$, $x = 1$

6. a) $|O_1O_2| = 1$; 0 b) $|O_1O_2| = 5$; 1
c) $|O_1O_2| = 3$; 1
7. 24, 12, 12
8. $2\sqrt{5}\pi$ cm, $6\sqrt{5}\pi$ cm
9. $r_A = 1$, $r_B = 4$, $r_C = 3$
10. 2, 3, 4

5.2. Koło

- Ć 1. a) 9π cm² b) 3π cm
2. a) $P = 49\pi$ cm², $r = 7$ cm
b) $r = 8$ cm, $R = 9$ cm
3. a) 30π b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{21}{8}\pi$
4. 20°
5. a) $36(\pi - 2)$ b) $12(2\pi - 3\sqrt{3})$
c) $12(\pi - 3)$
- Z 2. $L_1 = \frac{10}{3}\pi$, $L_2 = \frac{20}{3}\pi$,
 $P_1 = \frac{25}{3}\pi$, $P_2 = \frac{50}{3}\pi$
3. $P_1 = 2\pi - 4\sqrt{2}$, $P_2 = 14\pi + 4\sqrt{2}$
lub $P_1 = 6\pi - 4\sqrt{2}$, $P_2 = 10\pi + 4\sqrt{2}$
4. a) 2π b) $\frac{9}{4}(\pi - \sqrt{3} - 1)$
5. a) $l = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$, $P = 4\pi - 3\sqrt{3}$
b) $l = 4 + \pi$, $P = 4(\pi - 2)$
c) $l = 2\sqrt{2} + \pi$, $P = 4(\pi - 2\sqrt{2})$
7. a) $\frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3}$ b) $\frac{8}{3}\pi$ c) $4(\pi + 2)$
8. a) $9(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$ cm² b) $\frac{9}{4}(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm²
c) $6(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm²

5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej

- Ć 2. a) $2\sqrt{13}$ cm b) 12 cm
3. a) 28 cm b) 5 cm
4. a) 2 b) 3 c) 1 d) 4
5. a) 0 dla $r \in (0; 4)$, 1 dla $r = 4$,
2 dla $r \in (4; \infty)$
b) 0 dla $r \in (0; \frac{1}{2})$, 1 dla $r = \frac{1}{2}$,
2 dla $r \in (\frac{1}{2}; \infty)$
c) 0 dla $r \in (0; 1 + \sqrt{2})$,
1 dla $r = 1 + \sqrt{2}$, 2 dla $r \in (1 + \sqrt{2}; \infty)$
6. a) $2\sqrt{7}$ b) 5
- Z 1. a) $x = -8$ lub $x = 8$
b) $x = -5\sqrt{2}$ lub $x = 5\sqrt{2}$
c) $x = -5\sqrt{3}$ lub $x = 5\sqrt{3}$ d) $x = 0$
2. 2,5 cm
3. $2r + 2R + \sqrt{2rR}$

4. $P(-2, -\sqrt{21})$ lub $P(-2, \sqrt{21})$
lub $P(2, -\sqrt{21})$ lub $P(2, \sqrt{21})$
5. $\frac{20}{9}$
6. $3\sqrt{3}$ cm²
7. $(64\sqrt{3} - \frac{88}{3}\pi)$ cm²

5.4. Kąty w okręgu (1)

- Ć 1. a) 60° b) 240° c) 330°
2. a) 30° b) 60°
3. a) 30° b) 96°
c) 274° d) 149°
4. a) 165° b) $67,5^\circ$
c) 51° d) 315°
6. a) $\alpha = \beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
b) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = \gamma = 30^\circ$
c) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 240^\circ$, $\gamma = 60^\circ$
7. a) $\alpha = \beta = 70^\circ$, $\gamma = 20^\circ$
b) $\alpha = \gamma = 30^\circ$, $\beta = 40^\circ$
c) $\alpha = \gamma = 25^\circ$, $\beta = 35^\circ$
- Z 1. a) C lub O b) F lub L
c) G lub K d) C lub O
2. a) 30° , 60° b) 45° , 90°
c) $112,5^\circ$, 225° d) $3,75^\circ$, $7,5^\circ$
3. a) $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle CAD| = 20^\circ$,
 $|\sphericalangle ADC| = 140^\circ$
b) $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle CAD| = 65^\circ$,
 $|\sphericalangle ADC| = 50^\circ$
4. a) $\alpha = 23^\circ$, $\beta = 134^\circ$
b) $\alpha = 51^\circ$, $\beta = 102^\circ$
c) $\alpha = 32^\circ$, $\beta = 64^\circ$
5. a) $\alpha = 74^\circ$, $\beta = 37^\circ$
b) $\alpha = 113^\circ$, $\beta = 56^\circ 30'$
c) $\alpha = 72^\circ$, $\beta = 36^\circ$
6. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 35^\circ$
b) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 70^\circ$
c) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 40^\circ$
7. a) $\alpha = 84^\circ$, $\beta = \gamma = 48^\circ$
b) $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 85^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
c) $\alpha = \gamma = 70^\circ$, $\beta = 66^\circ$
8. a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 300^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
b) $\alpha = \gamma = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$
c) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$

5.5. Kąty w okręgu (2)

- Ć 1. a) $x = 9$ b) $x = 2\sqrt{2}$ c) $x = 3$
2. 7π cm
3. a) 8 cm, 12 cm b) 24 cm
5. a) $\alpha = 32^\circ$ b) $\alpha = 42^\circ$ c) $\alpha = 36^\circ$
6. $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$
- Z 1. a) $r = 4, P = 4\sqrt{15}$
b) $r = 3\frac{3}{4}, P = 18$
c) $r = 4, P = 3\sqrt{15}$
2. a) $\alpha = \gamma = \delta = 25^\circ, \beta = 50^\circ$
b) $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 80^\circ, \delta = 50^\circ$
c) $\alpha = 30^\circ, \beta = 40^\circ, \gamma = 50^\circ, \delta = 60^\circ$
3. a) 48° b) 15°
4. a) $\alpha = \beta = 55^\circ, \gamma = 70^\circ$
b) $\alpha = 50^\circ, \beta = 44^\circ, \gamma = 86^\circ$
5. 15 i 21 lub 21 i 24

5.6. Okrąg opisany na trójkącie

- Ć 3. a) $\frac{256}{3}\pi$ cm²
b) $h = 9$ cm, $P = 27\sqrt{3}$ cm²
4. a) $\frac{\sqrt{193}}{2}$ cm b) 9π cm
5. a) $10(1 + \sqrt{2})$ b) $2(5 + 2\sqrt{10})$
6. 48
7. a) $2\sqrt{2}$ cm
b) $3\sqrt{10}$ cm lub $\sqrt{10}$ cm
8. $\frac{5\sqrt{5}}{4}$
9. $4\sqrt{3}$
10. a) 24 cm² b) $8,125$ cm
- Z 1. a) 4 cm b) 5 cm
c) $3(\sqrt{2} - 1)$ cm
2. 6 cm²
3. $48\sqrt{3}$
4. a) 5 cm b) $\frac{25}{6}$ cm
5. a) $4\sqrt{10}(\sqrt{3} + \sqrt{13})$ cm
b) $4\sqrt{3}(\sqrt{13} + \sqrt{10})$ cm
6. a) $P = 9, R = \frac{5\sqrt{13}}{6}$
b) $P = 126, R = \frac{65}{6}$
7. $(2, -11)$ lub $(2, -3)$ lub $(2, -1)$ lub $(2, 7)$
8. $\frac{85}{6}$

5.7. Okrąg wpisany w trójkąt

- Ć 2. a) $6\sqrt{3}\pi$ b) $30\sqrt{3}$
3. $12\sqrt{3}\pi$ cm
4. a) 1 b) 3
5. a) 24 cm i 26 cm b) 6 cm i 8 cm
7. 12
8. a) 4 b) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ c) 4 d) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
9. b) 15, 20, 25 c) $r = 5, P = 25\pi$
d) $r_1 = 3, P_1 = 9\pi; r_2 = 4, P_2 = 16\pi$
10. a) 3 b) $\frac{10}{3}$
11. a) $2(3 + 2\sqrt{3}), 2(3 + 2\sqrt{3}), 6(2 + \sqrt{3})$
b) $\frac{28}{3}\sqrt{3} + 16$
- Z 2. a) $12\sqrt{3}$ b) 4
3. a) $2(\sqrt{3} - 1)$ b) $6\pi(\sqrt{3} - 1)$
5. 24
6. a) 8π b) $4,8\pi$
7. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$
8. $\frac{17}{36}\pi$ cm²
9. $r = \sqrt{2}$ cm, $|OA| = |OB| = \sqrt{6}$ cm,
 $|OC| = 3\sqrt{2}$ cm
10. $4(\sqrt{3} + 3), 8(\sqrt{3} + 1)$

Okrąg dopisany do trójkąta

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. 2, 3, 6

5.8. Okrąg opisany na czworokącie

- Ć 3. a) $120^\circ, 135^\circ$ b) $80^\circ, 130^\circ$ c) $30^\circ, 60^\circ$
4. a) $|\sphericalangle A| = 120^\circ, |\sphericalangle B| = 60^\circ, |\sphericalangle C| = 60^\circ,$
 $|\sphericalangle D| = 120^\circ$
b) $|\sphericalangle A| = 135^\circ, |\sphericalangle B| = 90^\circ, |\sphericalangle C| = 45^\circ,$
 $|\sphericalangle D| = 90^\circ$
6. $\alpha = \beta = 36^\circ, \gamma = \delta = 144^\circ$
7. a) 10 b) 5 cm
- Z 1. a) nie b), c) tak
2. a) 34π b) 768
3. a) 36π cm² b) 12π cm²
4. a) $4(4 + \sqrt{5})$ cm b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm
5. a) 49 b) 7
6. a) $4\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{7}$ cm b) $10\sqrt{3}$ cm, 12 cm
7. $4\sqrt[4]{3}$ cm, $2\sqrt[4]{3}$ cm, $2\sqrt[4]{3}$ cm, $2\sqrt[4]{3}$ cm,
 $P = 4\pi\sqrt{3}$ cm²

8. b) 12,5 cm
9. $Ob = 20\sqrt{13}, P = 78$
10. a) 36 b) $36\sqrt{2}$

5.9. Okrąg wpisany w czworokąt

- Ć 3. a) nie b), c) tak
5. a) 156 cm²
b) $Ob = 24$ cm, $P = 24$ cm²
c) $Ob = 40$ cm, $P = 80$ cm²
- Z 1. a) $c = 7$ cm, $P = 21\sqrt{5}$ cm²
b) $c = 2,5$ cm, $h = 1,5$ cm
2. 80 cm²
3. $2(\sqrt{2} - 1)$ cm, $2(\sqrt{2} + 1)$ cm
4. a) $P = 52,5, Ob = 35$ b) $P = 63, Ob = 42$
5. $2(1 + \sqrt{3})$ cm, $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ cm
6. 1,2 cm
7. a) $\frac{3}{4}\pi$ cm² b) 32 cm²
8. $16,8 - 4\pi$
10. b) 9π cm²

5.10. Wielokąty foremne

- Ć 2. a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7 f) 8
g) 9 h) 10
4. a) 20π b) $48\sqrt{3}$
5. a) $\frac{243}{4}\pi$ cm²
b) 12 cm, $8\sqrt{3}$ cm
- Z 1. a) 135° b) 144°
2. a) 6 b) 7 c) 9 d) 10 e) 11
3. a), b) $\frac{a^2}{4}\pi$
4. $R = a$

R	r	P
4 cm	$2\sqrt{3}$ cm	$24\sqrt{3}$ cm ²
6 cm	$3\sqrt{3}$ cm	$54\sqrt{3}$ cm ²
$\frac{4}{3}\sqrt[4]{12}$ cm	$\frac{2}{3}\sqrt[4]{108}$ cm	16 cm ²
$8\sqrt{3}$ cm	12 cm	$288\sqrt{3}$ cm ²

5. a) 9
6. $\triangle ABC$ i $\triangle AHG$: $22,5^\circ, 135^\circ, 22,5^\circ$
 $\triangle ACD$ i $\triangle AGF$: $22,5^\circ, 112,5^\circ, 45^\circ$
 $\triangle ADE$ i $\triangle AFE$: $22,5^\circ, 90^\circ, 67,5^\circ$

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ$

1.

α	18°	36°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$

α	54°	72°
$\sin \alpha$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

5.11. Twierdzenie sinusów

- Ć 1. a) $\gamma = 75^\circ, a \approx 4,39, b \approx 5,38$
b) $\gamma = 45^\circ, a = 4\sqrt{2}, b \approx 10,93$
c) $\beta = 90^\circ, a \approx 6,43, c \approx 7,66$
d) $\alpha = 76^\circ, b \approx 4,81, c \approx 2,96$
2. a) $\beta \approx 57,5^\circ, \gamma \approx 42,5^\circ, c \approx 4,8$
b) $\beta = 90^\circ, \gamma = 60^\circ, c = 3\sqrt{3}$
c) $\beta \approx 39,5^\circ, \alpha \approx 95,5^\circ, a \approx 14,08$
d) $\gamma \approx 44^\circ, \alpha \approx 76^\circ, a \approx 5,6$
4. a) $\beta_1 \approx 56,5^\circ, \beta_2 \approx 123,5^\circ, \gamma_1 \approx 93,5^\circ,$
 $\gamma_2 \approx 26,5^\circ, c_1 \approx 6, c_2 \approx 2,7$
b) $\beta_1 \approx 62^\circ, \beta_2 \approx 118^\circ, \gamma_1 \approx 73^\circ,$
 $\gamma_2 \approx 17^\circ, c_1 \approx 10,8, c_2 \approx 3,3$
c) $\beta_1 \approx 74^\circ, \beta_2 \approx 106^\circ, \gamma_1 \approx 46^\circ,$
 $\gamma_2 \approx 14^\circ, c_1 \approx 7,5, c_2 \approx 2,5$
d) $\alpha \approx 21^\circ, \gamma \approx 114^\circ, c \approx 2,6$
- Z 1. a) $|\sphericalangle ABC| = 75^\circ, |\sphericalangle ACB| = 45^\circ$
b) $|\sphericalangle ABC| = 45^\circ, |\sphericalangle ACB| = 15^\circ$
2. a) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ b) $6\sqrt{2}$
3. a) $c \approx 7,85, \beta \approx 48,5^\circ, \gamma \approx 101,5^\circ$
lub $c \approx 2,48, \beta \approx 131,5^\circ, \gamma \approx 18,5^\circ$
b) $c \approx 12,63, \beta \approx 52^\circ, \gamma \approx 83^\circ$
lub $c \approx 1,55, \beta \approx 128^\circ, \gamma \approx 7^\circ$
c) $a \approx 9,59, \alpha \approx 49^\circ, \gamma \approx 71^\circ$
lub $a \approx 2,42, \alpha \approx 11^\circ, \gamma \approx 109^\circ$
d) $b \approx 10,7, \alpha \approx 14,5^\circ, \beta \approx 15,5^\circ$

4. a) $2\sqrt{2}$ b) 7 c) $5\sqrt{2}$
d) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ e) $\sqrt{3}$ f) 5,5
5. około 22,2 m
6. a) $a \approx 5,18$, $c = 10$, $\gamma = 75^\circ$
b) $a \approx 4,9$, $c \approx 6,7$, $\beta = 60^\circ$
c) $c \approx 22,83$, $\beta \approx 42^\circ$, $\gamma \approx 108^\circ$
lub $c \approx 4,99$, $\beta \approx 138^\circ$, $\gamma \approx 12^\circ$
d) $a \approx 10,35$, $\alpha \approx 143,5^\circ$, $\gamma \approx 16,5^\circ$
e) $b \approx 3,5$, $\alpha \approx 42^\circ$, $\beta \approx 28^\circ$
f) Taki trójkąt nie istnieje.
7. Informacja do zadania:
 $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
a) $3(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}) \approx 30,47$ [cm]
b) $3(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}) \approx 17,59$ [cm]
12. a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

5.12. Twierdzenie cosinusów (1)

- ☞ 3. a) $c = \sqrt{39}$ b) $c = \sqrt{74 + 35\sqrt{3}}$
c) $b = \sqrt{5}$ d) $a = \sqrt{29}$

4. a) $\gamma = 150^\circ$, $\alpha = \beta = 15^\circ$
b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 105^\circ$

- ☒ 1. a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{13}$ c), d) $2\sqrt{13}$

2. a) 8 b) $4\sqrt{13}$

3. a) $d_1 = 2\sqrt{7}$, $d_2 = 2\sqrt{19}$ b) $d_1 = 2\sqrt{2}$,
 $d_2 = 2\sqrt{10}$ c) $d_1 = \sqrt{19}$, $d_2 = 7$
d) $d_1 = 2\sqrt{13}$, $d_2 = 2\sqrt{37}$

4. a) 60° b) 135°

5. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 60^\circ$
b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 105^\circ$

6. a) $\alpha \approx 29^\circ$, $\beta \approx 46,5^\circ$, $\gamma \approx 104,5^\circ$
b) $\alpha \approx 22^\circ$, $\beta \approx 38^\circ$, $\gamma \approx 120^\circ$

7. a) $\sqrt{7}$, $3\sqrt{7}$ b) $\sqrt{21}$, $4\sqrt{21}$

8. $12\sqrt{3} + 2\sqrt{21}$

5.13. Twierdzenie cosinusów (2)

- ☞ 1. a) $|AB| = 3$ lub $|AB| = 5$
b) Taki trójkąt nie istnieje.
2. $c = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 15^\circ$
lub $c = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 105^\circ$
3. a) $a = 6$, $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 90^\circ$
b) $c = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 105^\circ$
c) $c = 3 - \sqrt{3}$, $\alpha \approx 105^\circ$, $\gamma \approx 15^\circ$
lub $c = 2\sqrt{3}$, $\alpha \approx 75^\circ$, $\gamma \approx 45^\circ$

- d) $b = 4$, $\beta \approx 41^\circ$, $\gamma \approx 19^\circ$

4. a) $2\sqrt{7}$ cm b) $2\sqrt{3}$ cm

6. a) $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, ostrokątny
b) $\cos \alpha = 0$, prostokątny
c) $\cos \beta = -\frac{1}{16}$, rozwartokątny
d) $\cos \gamma = -\frac{1}{48}$, rozwartokątny

- ☒ 1. a) $\cos \gamma = \frac{1}{4}$, tak b) $\cos \alpha = -\frac{13}{35}$, nie
c) $\cos \beta = -\frac{3}{4}$, nie d) $\cos \alpha = 0$, nie

2. a) $\frac{1}{5}$ b) $2\sqrt{7}$ c) $R = \frac{35\sqrt{6}}{24}$, $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

3. a) $\cos \gamma = \frac{4}{5}$, $c = 2\sqrt{13}$
lub $\cos \gamma = -\frac{4}{5}$, $c = 6\sqrt{5}$
b) $\cos \gamma = \frac{1}{3}$, $c = \sqrt{41}$
lub $\cos \gamma = -\frac{1}{3}$, $c = 9$

4. a) $\cos \gamma = \sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $P = \frac{3}{2}$
b) $\cos \gamma = \frac{3\sqrt{5}}{10}$, $\sin \gamma = \frac{\sqrt{55}}{10}$, $P = \frac{\sqrt{11}}{2}$

5. a) $2\sqrt{19}$ cm b) 5 cm, $2\sqrt{13}$ cm

6. a) 6, $2\sqrt{7}$ b) $2\sqrt{7}$, $2\sqrt{13}$

7. $|PA| \approx 9,98$ m, $|PB| \approx 8,39$ m

Odcinki stycznych i siecznych

2. a) 6,5 cm b) $\frac{\sqrt{65}}{2}$ cm

Zestaw I

1. a) $1 - \frac{\pi}{4}$ b) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ c) $\frac{3}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{4}$

2. a) $\alpha = \beta = 60^\circ$
b) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 55^\circ$
c) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 130^\circ$

3. a) 60° b) 30°

4. a) $22,5^\circ$ b) $67,5^\circ$

5. a) $6\pi(\sqrt{2} - 1)$ b) 12π

6. $|AP| = 3$, $|BQ| = 6$, $|CR| = 10$

8. promień okręgu przechodzącego przez punkty A, B, D : 2,5,
promień okręgu przechodzącego przez punkty A, B, C : $\frac{5\sqrt{5}}{2}$,
odległość między środkami okręgów: 5

9. $P = 54$, $r = 3$

10. $\frac{10}{3}$ cm

11. a) 3,75 cm² b) 6,25 cm²

12. a) 6π , 4π b) $16(\pi - 2)$
c) $8(\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2} + 2})$

Zestaw II

1. $a\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$, $a\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$

2. $\frac{13}{4}$

3. a) $\frac{5\sqrt{10}}{6}$ b) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

4. a) $32(\sqrt{2} - 1)$ cm² b) $4\sqrt{2}$ cm²

5. a) $Ob = 2(9 + \sqrt{21})$, $P = 20\sqrt{3}$
b) $Ob = 2(2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6})$,
 $P = 4(1 + \sqrt{3})$

6. a) około 1750 m² b) około 926 m²

7. $\frac{243}{7}\sqrt{3}$

8. $3\sqrt{5}$

9. a) 10 cm² b) 288 cm²

10. $a\sqrt{3}$

11. a) 10 b) $\frac{48}{7}$

Zadania z kontekstem realistycznym

1. nie
2. około 43%
3. 2 cm
4. 11,4 m
5. $|AC| = 984,8$ m, $|BC| = 939,7$ m

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. C 2. D 3. C 4. C 5. B 6. C 7. A 8. C
9. FF

10. FP

11. A2

- 12.1. A 12.2. $2\sqrt{6}$

13. CE

- 14.1. A3 14.2. 10π cm, 24π cm

- 15.1. D 15.2. A

16. $8P$

17. $\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\pi$

18. 40°

19. 20π

20. $P = 8$, $Ob = 4(1 + 2\sqrt{2})$

21. $\sin |\sphericalangle O_1PA| = \frac{5}{13}$, $r = 2\frac{2}{9}$

22. $16\pi(3 - 2\sqrt{2})$ cm²

23. 45° , 135°

24. $3 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{21}$

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 13,5 cm²
2. 313
3. 131 km
4. 36π cm²
5. $\frac{12}{7}$ cm
6. $\frac{\sqrt{46}}{2}$ cm
7. $4\sqrt{3}$
8. $2(4 + \sqrt{10})$

Potęga o wykładniku całkowitym

1. a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024
b) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729
2. a) 81 b) -32 c) -216 d) 1
3. a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{625}$ c) $\frac{1}{216}$ d) $\frac{1}{729}$
e) $-\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{25}$ g) $\frac{1}{16}$ h) $-\frac{1}{243}$
4. a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{16}{81}$ c) $11\frac{25}{64}$ d) 1
e) $1\frac{4}{5}$ f) $3\frac{3}{8}$ g) $\frac{64}{125}$ h) $\frac{81}{10000}$
5. a) x b) y c) y d) x
6. a) 2^{10} b) 2^8 c) 2^4 d) 2^7 e) 2^2
f) 2^{10} g) 2^2 h) 2^7 i) 2^{13}
7. a) 2^9 b) 2^{22} c) 2^{-3}
d) 2^6 e) 2^0 f) 2^6

6.1. Potęga o wykładniku wymiernym – powtórzenie

- ☞ 1. a) 9 b) 10 c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{11}$ e) 13 f) 21
g) 2 h) 3 i) 3 j) 2 k) 4 l) 2

2. a) 4 b) 16 c) 59049 d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{1}{16}$ f) 729

3. a) 4 b) $\frac{1}{2}$ c) 3 d) 5 e) 3
f) 2 g) 36 h) $\sqrt[6]{7}$

- ☒ 1. a) 1024 b) 9 c) 16 d) 5
2. np.: a) $7^{\frac{5}{6}}$ b) $3^{\frac{13}{4}}$ c) $(\frac{2}{3})^{\frac{1}{6}}$
d) $5^{-\frac{5}{3}}$ e) $3^{\frac{10}{3}}$ f) 5^{-3}
3. a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{1}{3}}$ c) $5^{\frac{3}{2}}$ d) $5^{\frac{2}{3}}$ e) $5^{\frac{3}{4}}$
4. a) $3^{\frac{1}{4}}$ b) $3^{\frac{4}{3}}$ c) $3^{-\frac{1}{5}}$ d) $3^{-\frac{3}{2}}$ e) $3^{\frac{5}{4}}$
5. a) $5^{\frac{1}{8}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$ c) $3^{\frac{1}{12}}$ d) $3^{\frac{5}{6}}$
e) 2^{-1} f) $2^{\frac{3}{2}}$ g) $3^{\frac{7}{8}}$ h) $3^{\frac{5}{3}}$

6. a) 243 b) 625 c) 8 d) $\frac{1}{4}$
 e) $\frac{1}{81}$ f) $\frac{1}{5}$ g) 100000 h) $\frac{\sqrt{3}}{9}$
 i) $\frac{1}{12}$ j) $\frac{1}{3}$ k) 16 l) 25
 7. a) 0,027 b) 2 c) 0,04 d) $\frac{1000}{27}$
 e) 8 f) 0,0016 g) 1 h) 64
 8. np.: a) 3^{12} b) 5^{16} c) 10^2 d) 6^{-6}
 e) 2^{-31} f) 1^1

6.2. Potęga o wykładniku rzeczywistym

- Ć 1. $5^{\sqrt{3}} \approx 16,2425$, $5^{\sqrt{5}} \approx 36,5548$
 2. a) $3^\pi \approx 31,5443$
 b) $5^\pi \approx 156,9925$
 c) $\pi^\pi \approx 36,4622$
 3. a) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ b) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
 c) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ d) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
 4. a) 125 b) 81 c) 25 d) 32 e) 1
 f) 3 g) 32 h) 6
 Z 1. a) $3^{5-\sqrt{2}}$ b) $3^{1+\sqrt{2}}$ c) 3^4 d) $3^{\sqrt{3}-3}$
 e) $3^{\sqrt{7}}$ f) 3^π
 2. a) 36 b) 125 c) $\frac{125}{27}$ d) 1 e) 1
 f) 343 g) 3 h) 64 i) 216
 3. a) $2^{\sqrt{7}+4}$ b) $2^{\sqrt{3}+\frac{1}{2}}$ c) $3^{\sqrt{5}-3}$
 d) $3^{3-2\sqrt{3}}$ e) $3^{-6\pi}$ f) $7^{-4\sqrt{2}-2\pi}$
 4. a) nie b) tak c) nie d) nie
 5. a) y, z b) x, z c) y, z
 6. a), c), d) =
 b) <
 e), f) >
 7. a) $x = -\sqrt{2}$ b) $x = \pi$ c) $x = \sqrt{2}$

6.3. Funkcja wykładnicza

- Ć 1. (0, 1)
 2. a) zielony – f , czerwony – g ,
 niebieski – h
 b) $a = \frac{81}{16}$, $b = \frac{4}{9}$, $c = 3$ c) B, C
 4. zielony – f , niebieski – g , czerwony – h ,
 brązowy – k
 5. a) $5^{0,3} < 5^{0,33} < 5^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{2}}$
 b) $7^{\sqrt{5}} < 7^{3,1} < 7^\pi < 7^{3,2}$
 c) $0,6^{\frac{1}{2}} < 0,6^{\frac{3}{7}} < 0,6^{\frac{3}{8}} < 0,6^{0,35} < 0,6^{\frac{1}{3}}$
 d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\pi}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$

- Z 1. a) $f(-4) = \frac{1}{81}$, $f(-3) = \frac{1}{27}$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
 $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{3}$, $f(3) = 27$, $f(4) = 81$
 b) $f(-4) = \frac{1}{256}$, $f(-3) = \frac{1}{64}$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$,
 $f(\frac{1}{2}) = 2$, $f(3) = 64$, $f(4) = 256$
 c) $f(-4) = 256$, $f(-3) = 64$, $f(-\frac{1}{2}) = 2$,
 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{1}{64}$, $f(4) = \frac{1}{256}$
 d) $f(-4) = 16$, $f(-3) = 8$, $f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$,
 $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(3) = \frac{1}{8}$, $f(4) = \frac{1}{16}$
 e) $f(-4) = \frac{1}{4096}$, $f(-3) = \frac{1}{512}$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{2}$, $f(3) = 512$,
 $f(4) = 4096$ f) $f(-4) = 10^{-8}$,
 $f(-3) = 10^{-6}$, $f(-\frac{1}{2}) = 0,1$, $f(\frac{1}{2}) = 10$,
 $f(3) = 10^6$, $f(4) = 10^8$

2. a) tak b) tak c) nie d) tak

3. a) nie b) tak c) nie d) tak

4. a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
 c) $f(x) = 4^x$ d) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

5. a), b) malejąca c) rosnąca

6. a) $2^{\frac{7}{5}} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{\sqrt{3}}$
 b) $\left(\frac{3}{4}\right)^6 < \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{26}} < \left(\frac{3}{4}\right)^5 < \left(\frac{3}{4}\right)^{2\sqrt{6}}$
 c) $\pi^{\frac{1}{\pi}} < \sqrt[3]{\pi} < \pi^{\frac{3}{7}} < \pi^{\frac{1}{2}}$
 d) $9^{-2} < 9^{-\sqrt{\pi}} < 9^{-\sqrt{3}} < 9^0$

7. a) $256^{\frac{1}{4}} > 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} > 32^{\frac{\pi}{10}} > 8^{\frac{1}{2}} > 16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$
 b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{3}{2}} > \frac{1}{243} > \left(\frac{1}{9}\right)^{2,6} >$
 $> \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{2}}$

8. a) np. $(-2, \frac{1}{3})$, $(0, 1)$, $(2, 3)$

b) np. $(-2, 2)$, $(0, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$

c) np. $(-3, \frac{1}{2})$, $(0, 1)$, $(3, 2)$

9. a) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{0, 2\}$,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$
 b) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{0, 2\}$,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$
 c) $f(x) = g(x)$ dla $x = 1$,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in [1; \infty)$
 d) $f(x) = g(x)$ dla $x = -1$,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1]$
 e) $f(x) = g(x)$ dla $x = -1$,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1]$
 f) $f(x) = g(x)$ dla $x \in \{-1, 0\}$,
 $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in (-\infty; -1] \cup \{0\}$

10. a) $(-\infty; 0)$ b) $[0; \infty)$
 c) $(-\infty; 0]$ d) $(0; \infty)$
 11. $2\sqrt{2} < e^{1,5} < e^{\sqrt{3}} < (\sqrt{e})^4 < 9$

6.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej

- Ć 1. a) $g(D) = (-2; \infty)$, $y = -2$
 b) $g(D) = (1; \infty)$, $y = 1$
 c) $g(D) = (2; \infty)$, $y = 2$
 2. a) $x = 1$ b) $x = -2$ c) $x = 1$
 3. a) przesunąć o wektor $[4, 0]$; $[4; \infty)$
 b) przesunąć o wektor $[10, 0]$; $[10; \infty)$
 c) przesunąć o wektor $[-\frac{1}{2}, 0]$;
 $[-\frac{1}{2}; \infty)$
 4. a) $g(D) = (2; \infty)$, $y = 2$
 b) $g(D) = (-2; \infty)$, $y = -2$
 c) $g(D) = (1; \infty)$, $y = 1$
 5. a), b) malejąca c) rosnąca
 Z 1. a) $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych,
 asymptota: $y = 2$
 b), c) $f(D) = (-1; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = 0$, asymptota: $y = -1$
 d) $f(D) = (-3; \infty)$, $f(x) = 0$ dla
 $x = -1$, asymptota: $y = -3$
 e) $f(D) = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla
 $x = -1$, asymptota: $y = -4$
 f) $f(D) = (1; \infty)$, brak miejsc zerowych,
 asymptota: $y = 1$
 2. $a = -3$
 3. a) $a = -4$ b) $a = 3$ c) $a = -16$
 4. a) $x \in [-2; \infty)$ b) $x \in [3; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; -2]$
 5. a) $x \in (-\infty; 2]$
 b) $x \in (-\infty; -1]$
 c) $x \in [-3; \infty)$
 6. a) $f(D_f) = (-3; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; 3)$
 b) $f(D_f) = (1; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; -1)$
 c) $f(D_f) = (-2; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; 2)$
 7. $f - \text{II}$, $g - \text{III}$, $h - \text{I}$
 8. a) $g(x) = 5^x - 3$, $g(D) = (-3; \infty)$
 b) $g(x) = 5^{x-1} + 2$, $g(D) = (2; \infty)$
 c) $g(x) = 5^{x+2} + 4$, $g(D) = (4; \infty)$

9. a) $f(x) = 0$ dla $x = 4$, $f(D) = (-4; \infty)$
 b) $f(x) = 0$ dla $x = -1$, $f(D) = (-1; \infty)$
 c) brak miejsc zerowych, $f(D) = (2; \infty)$
 d) $f(x) = 0$ dla $x = 1$, $f(D) = (-\infty; 3)$
 e) $f(x) = 0$ dla $x = 2$, $f(D) = (-1; \infty)$
 f) $f(x) = 0$ dla $x = 3$, $f(D) = (-\infty; 1)$

6.5. Logarytm

- Ć 1. a) 5 b) 1 c) 0 d) -2 e) -6
 f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{2}{3}$
 2. a) 4 b) -2 c) -3 d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{3}{2}$
 g) $\frac{3}{2}$ h) 3 i) $-\frac{1}{2}$ j) -4 k) $\frac{2}{3}$ l) 3
 4. a) 100 b) 15 c) 10 d) -3
 e) 3 f) 7 g) 10 h) 1
 5. a) 0,1761 b) 0,0453
 c) 0,2095 d) 0,2253
 Z 1. a) 6 b) 9 c) -5 d) -10 e) -3 f) $\frac{1}{2}$
 g) $\frac{3}{2}$ h) -5 i) $-\frac{1}{4}$ j) 4 k) 10 l) $\frac{1}{2}$
 m) $\frac{3}{2}$ n) -4 o) 4 p) -2
 2. a) -1 b) -6 c) 7 d) -2 e) -3 f) 3
 g) $-\frac{1}{2}$ h) $-\frac{3}{2}$
 3. a) 9 b) 5 c) $\frac{1}{9}$ d) 3 e) 81 f) $\frac{1}{16}$ g) 3
 h) 4
 4. a) 3 b) -1 c) 6 d) -4 e) $\frac{1}{2}$ f) $1\frac{1}{2}$
 5. a) $\frac{1}{2}$ b) 10 c) $-1\frac{2}{3}$ d) 0 e) 2 f) 2
 6. a) $a = 5$ b) $a = \frac{1}{2}$ c) $a = 4$ d) $a = \frac{1}{4}$
 7. a) $b = 32$ b) $b = 2$ c) $b = 9$ d) $b = 1$
 e) $b = 8$ f) $b = \frac{1}{8}$ g) $b = 10^6$ h) $b = \frac{1}{10}$
 8. a) 1 b) -1 c) $-\frac{1}{2}$ d) 4 e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{3}$
 9. a) $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a a^3 = 3$
 b) $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2}$
 c) $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_a \frac{\sqrt{a}}{a^3} = -\frac{5}{2}$
 d) $a \neq -1$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $\log_{a^2} a^{10} = 5$
 e) $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_{\sqrt{a}} a^4 = 8$

6.6. Własności logarytmów

- Ć 2. Wszystkie równości są prawdziwe.
 3. a) 2 b) 3 c) 3 d) -1 e) $\frac{1}{4}$
 f) -2 g) 1 h) 0 i) -3
 4. a) 2 b) -1 c) $\frac{1}{6}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{6}$
 5. a) $\log_3 45$ b) $\log_2 500$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 144$
 d) $\log_3 \frac{9}{4}$

1. a) 2 b) -3 c) 1 d) 2

3. a) $x > 0, \log x^5$ b) $x > 0, \log \frac{1}{x}$
 c) $x \neq 0, \log 10x^2$ d) $x > 0, \log \frac{1}{2x^2}$
 e) $x > 0, y > 0, \log_3 3x^2y$
 f) $x > 0, y > 0, \log_5 \frac{2\sqrt{5}}{y^2}$
 g) $x > 0, y > 0, \log_2 \frac{\sqrt{x}}{4y}$
 h) $x \neq 0, \log \frac{x^6}{125}$

4. a) 1 b) 16 c) 12 d) 3

5. a) 0 b) -5 c) $-\frac{1}{8}$ d) $3\frac{1}{6}$

6. a) $2+p$ b) $p-2$ c) $2p-2$ d) $4p+2$

7. a) $2p+q$ b) $2p+2q$ c) $p-2q$

- d) $p-q$ e) $2q-3p$ f) $\frac{1}{2}q-p$

- g) $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q$ h) $\frac{1}{2}p - q$

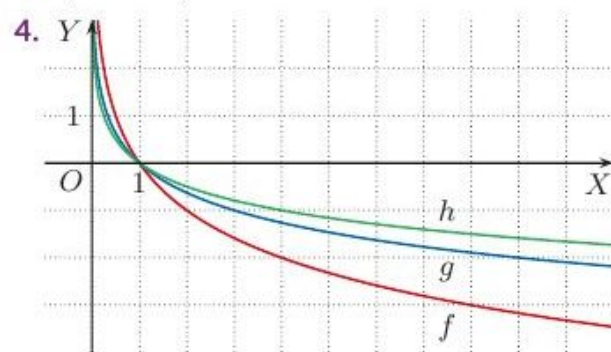
8. a) 1,9 b) 1,7 c) 0,1 d) -0,3 e) 0,4
 f) -0,2 g) 0,85 h) 1,6

6.7. Funkcja logarytmiczna

1. (1,0)

2. a) g b) f c) h

3. a) 100 b) 1000000



5. a) $f(x) > 0$ dla $x \in (1; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 1)$

- b) $f(x) > 0$ dla $x \in (0; 1)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (1; \infty)$

6. a) $x \in [4; \infty)$ b) $x \in (0; 4)$
 c) $x \in (\frac{1}{4}; \infty)$ d) $x \in (0; \frac{1}{4}]$

7. a) $x \in (0; \frac{1}{4})$ b) $x \in [\frac{1}{4}; \infty)$
 c) $x \in (0; 4]$ d) $x \in (4; \infty)$

1. a) $a = 3$ b) $a = 5$
 c) $a = \frac{1}{2}$ d) $a = \sqrt{2}$

2. a) $f(x) = \log_5 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$
 c) $f(x) = \log_8 x$ d) $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$

3. a) $(-\infty; 0)$ b) $[1; \infty)$ c) $[-1; 3]$
 d) $[-\frac{1}{2}; 10]$

4. a) $[-1; 0]$ b) $[-3; 2]$ c) $[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}]$
 d) $[-\frac{1}{3}; \frac{1}{6}]$

5. a) $m \in (\frac{1}{2}; \infty)$ b) $m \in (-\infty; 0)$
 c) $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

6. a) $m \in (2; 3)$
 b) $m \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; \frac{1}{2})$
 c) $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

7. a) $x \in (3; \infty)$ b) $x \in (0; 3]$
 c) $x \in [9; \infty)$ d) $x \in (0; \frac{1}{9})$

8. a) $x \in (0; \frac{1}{3})$ b) $x \in [\frac{1}{3}; \infty)$
 c) $x \in (0; \frac{1}{9}]$ d) $x \in (9; \infty)$

6.8. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

1. a) $D = (1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$,
 asymptota: $x = 1$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in [3; \infty)$
 b) $D = (-2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -1$,
 asymptota: $x = -2$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in [0; \infty)$
 c) $D = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -3$,
 asymptota: $x = -4$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in [-1; \infty)$

4. a) $D = (3; \infty)$, $x = 3$
 b) $D = (-4; \infty)$, $x = -4$
 c) $D = (2; \infty)$, $x = 2$

5. a) $D = (2; \infty)$, $x = 2$
 b) $D = (1; \infty)$, $x = 1$
 c) $D = (-2; \infty)$, $x = -2$
 d) $D = (-3; \infty)$, $x = -3$
 e) $D = (1; \infty)$, $x = 1$
 f) $D = (-2; \infty)$, $x = -2$

6. a), b), c) $D = (-\infty; 0)$

1. a) $x = 4$ b) $x = \frac{1}{3}$ c) $x = \frac{1}{9}$

2. a) $D = (-3; \infty)$, $x = -3$
 b) $D = (1; \infty)$, $x = 1$
 c) $D = (-2; \infty)$, $x = -2$

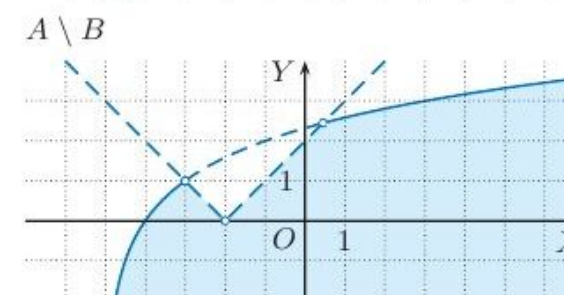
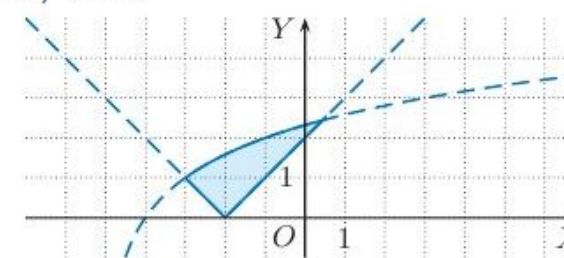
3. a) $D = (-1; \infty)$; $x \in (-1; 3)$
 b) $D = (1; \infty)$; $x \in (\frac{3}{2}; \infty)$
 c) $D = (2; \infty)$; $x \in (2; \frac{55}{27})$
 d) $D = (-3; \infty)$; $x \in (-3; 0)$
 e) $D = (-4; \infty)$; $x \in (-2; \infty)$
 f) $D = (1; \infty)$; $x \in (\frac{28}{27}; \infty)$

4. a) $[-1, -2]$; $g(x) = \log_2(x+1) - 2$
 b) $[2, 1]$; $g(x) = \log_2(x-2) + 1$

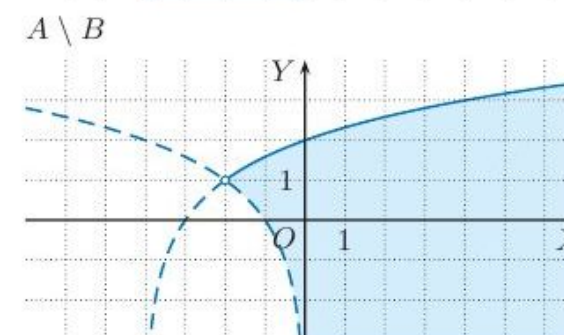
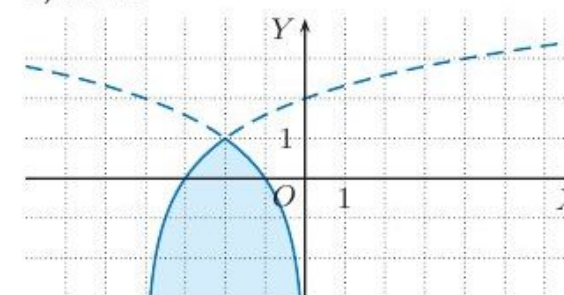
5. a), b) $D = (0; \infty)$ c), d) $D = (-\infty; 0)$

6. a) $D = (-\infty; 1)$ b) $D = (-\infty; -2)$
 c) $D = (-\infty; -1)$

7. a) $A \cap B$



- b) $A \cap B$



6.9. Zmiana podstawy logarytmu

1. a) $\log \frac{1}{7}$ b) $\log_2 \sqrt[3]{3}$ c) $\log_{49} 121$
 d) $\log_{0,1} \frac{1}{625}$ e) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}$ f) $\log_3 \frac{1}{12}$

1. a) $\log_2 \sqrt[4]{3}$ b) $\log_2 \frac{1}{7}$ c) $\log_2 121$
 d) $\log_2 9^{-\frac{1}{3}}$ e) $\log_2 6^{\frac{5}{6}}$ f) $\log_2 3^{-\frac{11}{6}}$

3. a) $a = \frac{1}{2}p$ b) $a = -\frac{1}{3}p$ c) $a = 4p$
 d) $a = \frac{1}{8}p$ e) $a = -2 - p$ f) $a = 3 + 3p$
 g) $a = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}p$ h) $a = -\frac{1}{3}p$

4. a) $x = 5$ b) $x = 81$ c) $x = 9$
 d) $x = 10^6 \cdot \sqrt[3]{100}$

8. a, b, c, d $\in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ a) 2 b) -2

10. $D = \mathbb{R}_+$, np.:

- a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$

- c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ d) $f(x) = \log_4 x$

11. a) 1,771 b) 0,613 c) -3,170

6.10. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna - zastosowania

1. $y_0 = 400$, po 10 godzinach: 97200
 2. a) po 4800 latach b) po 16000 lat
 3. o 75% po 56 latach, o 87,5% po 84 latach
 4. a) 5700 lat b) 11400 lat
 5. 17100 lat
 1. a) 8 dni b) 56 h
 2. 50000 lat
 3. a) 1835 lat b) 13235 lat
 4. 22269 lat
 5. a) około 67% b) około 13%

Równania wykładnicze

1. a) $x = \log_{\frac{5}{6}} 6$ b) $x = 3$ c) $x = \log_{\frac{9}{7}} 63$
 d) $x = \log_{\frac{9}{8}} \frac{1}{4}$ e) $x = \log_{15} \frac{3}{2}$
 2. a) $x = 2$ b) $x = \log_3 18$ c) $x = -1$
 d) $x = 0$ e) $x = -1$
 3. a) $x = 2$ b) $x = 0$
 c) $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = 1, x = 2$
 e) $x = -1, x = 0$ f) $x = 1$
 4. a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = 2$ c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 5. a) $x = 0$ b) $x = 0$
 6. a) $x = 1$ b) $x = 0, x = 1$
 c) $x = 0, x = 2$ d) $x = 0, x = \frac{1}{2}$
 e) $x = 4$ f) $x = 4$

Równania logarytmiczne

1. a) $x = -4, x = 4$
 b) $x = -1, x = 2$
 c) $x = 1, x = 8$
 d) $x = -3, x = 3$
 2. a) $x = \sqrt{2}$ b) $x = \frac{1}{8}$
 c) $x = -16, x = 16$
 d) $x = -3, x = 3$

3. a) $x = -2, x = 2$ b) $x = 27$
 c) $x = -6, x = 6$ d) $x = 1$
 4. a) $x = 4$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $x = \frac{2}{5}$
 d) $x = 1$ e) $x = 3$ f) $x = 6$
 5. a) $x = 64$ b) $x = 2$
 c) $x = \frac{4}{3}$ d) $x = \frac{1}{4}$
 6. a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = 2$ c) $x = 3$
 7. a) $x = \frac{1}{27}, x = 1$ b) $x = 1, x = 16$
 c) $x = \frac{1}{10}, x = 10$ d) $x = 16$
 e) $x = \frac{1}{2}, x = 4$ f) $x = \frac{1}{4}, x = 2$
 g) $x = \frac{1}{100}, x = 10000$
 h) $x = 1, x = 100$ i) $x = 2$ j) $x = 2$

Zestaw I

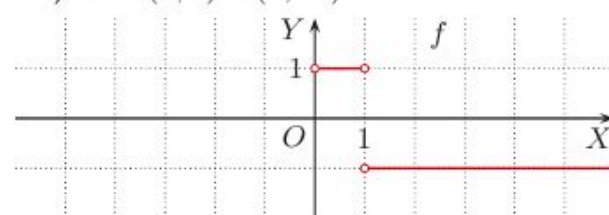
1. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{4}{27}$ d) $\frac{1}{80}$
 2. a) 25 b) 4 c) $\frac{1}{2}$ d) 3
 3. a) 1 b) 2 c) 20 d) $\frac{4}{121}$
 4. a) $3^{-\frac{1}{6}}$ b) $3^{\frac{3}{8}}$ c) $5^{\frac{7}{8}}$ d) $2^{\frac{53}{24}}$
 5. a) $25^{1,1} < 5^{\sqrt{5}} < 125^{\frac{4}{5}} < 25\sqrt{5} < 5^{2\sqrt{2}}$
 b) $4^{-0,5\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{8}} < 16^{-\frac{1}{3}} < 0,5 < (\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$
 c) $3^{-0,5\pi} < (\sqrt[3]{3})^{-2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 9^{\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{27}$
 d) $4,5^{-2} < 0,064 < 2,5^{-2,4} < \sqrt{0,4}^{\sqrt{12}}$
 6. a) 12,5893 b) 0,1259 c) 0,0126
 d) 0,0013
 7. a) $f(x) = 4^x$ b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
 c) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$
 8. a) $f(D) = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$
 b) $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych
 c) $f(D) = (-3; \infty)$,
 $f(x) = 0$ dla $x = \log_4 3 - 2$
 d) $f(D) = (-\infty; 4)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$
 e) $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych
 f) $f(D) = (-\infty; 1)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$
 9. a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) -5 d) $-\frac{1}{3}$ e) -3 f) $\frac{1}{6}$
 g) 6 h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{2}{3}$ j) 8 k) $2\sqrt{2}$ l) $\frac{3}{2}$
 10. a) 4 b) 8
 11. a) $x = 16$ b) $x = 8$
 c) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 d) $x = -64, x = 64$
 12. a) $x = 36$ b) $x = 9$
 c) $x = 100$ d) $x = 10$

Zestaw II

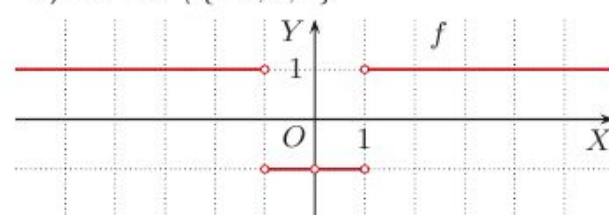
1. a) 81 b) 20 c) 12
 2. a) 15 b) -2 c) 81
 3. a) $x > 0, y \neq 0, \frac{3}{xy}$
 b) $x > 0, y > 0, \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$
 c) $a \neq 0, b > 0, \frac{1}{ab}$
 d) $x > 0, y > 0, xy$
 4. a) x b) y
 5. a) 1 b) 1 c) $-\frac{1}{3}$ d) -1 e) 0 f) $-\frac{1}{3}$
 6. a) 2 b) 12
 7. a) $\log_3 2$ b) $\log_3 5$ c) $\log_3 16$ d) $\log_3 \frac{1}{5}$
 8. a) $\frac{3}{p}$ b) $6p$ c) $4p + 6$
 9. a) $\frac{10}{a} + \frac{5}{b}$ b) $3a + \frac{4}{3}b$
 10. a) 9 b) $2\sqrt[3]{2}$ c) 0
 11. a) $x = 4$ b) $x = 1024$ c) $x = 16$
 12. a) $g(x) = (\frac{1}{2})^{x-1} - 1, g(D) = (-1; \infty)$
 b) $g(x) = -(\frac{1}{2})^{x+2}, g(D) = (-\infty; 0)$
 c) $g(x) = -2^x, g(D) = (-\infty; 0)$
 13. a) $[0; \infty)$ b) $[4; \infty)$ c) $[0; \infty)$
 14. a) $D = (3; \infty), x = 3$
 b) $D = (-4; \infty), x = -4$
 c) $D = (2; \infty), x = 2$
 d) $D = (-3; \infty), x = -3$
 e), f) $D = (-\infty; 0), x = 0$
 15. a) $D = (0; 1) \cup (1; \infty)$



b) $D = (0; 1) \cup (1; \infty)$



c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$



16. a) $D = (-\infty; 1), f(x) = 0$ dla $x = 0$
 b) $D = (-\infty; -1) \cup (1; \infty),$
 $f(x) = 0$ dla $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\},$
 $f(x) = 0$ dla $x = -2, x = -1$
 d) $D = \mathbb{R}, f(x) = 0$ dla $x = -1, x = 0$
 e) $D = (-\infty; 1) \cup (4; \infty),$
 $f(x) = 0$ dla $x = \frac{5-\sqrt{13}}{2}, x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},$
 $f(x) = 0$ dla $x = -\sqrt{11}, x = \sqrt{11}$

17. a) $x \in [1; \infty)$

b) $x \in (3; 6]$

18. a) $x = 1$ b) $x = 8$

Zadania z kontekstem realistycznym

1. a) 3 stopnie w skali Richtera
 b) około 31,6 razy
 2. a) około 4,2 – kwasowy
 b) około 3,4 – kwasowy
 c) około 8,7 – zasadowy
 3. po około 32 latach

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. C 2. B 3. D 4. B 5. A 6. A 7. B 8. B
 9. D 10. C
 11. PP
 12. PP
 13. CG
 14. $(-4; \infty), x = -3, x = -4$
 15. A2
 16.2. D

17.1. B 17.2. -2

18. 10

19. sześć

20. $a = 4$

23. 1021

24. $|PQ| = 2$

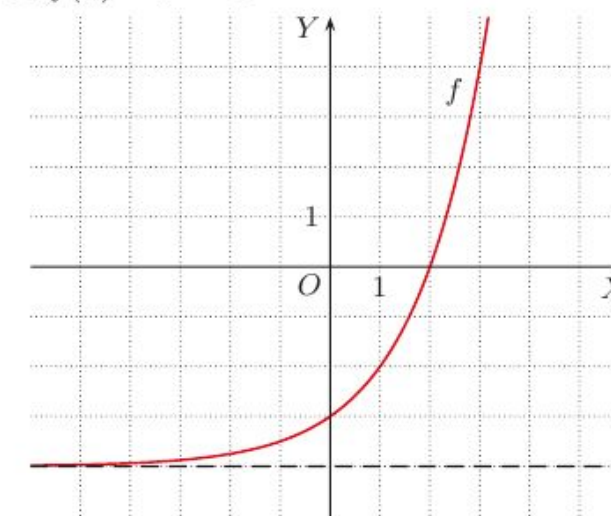
25. 30

26. $p = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{2}, \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = 13$

27. $f(x) = (\frac{1}{4})^x - 2$

Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. $2\frac{3}{4}a$
 2. $1 + ab$
 3. $f(x) = 2^x - 4$



4. $f(x) = 0$ dla $x = -\frac{1}{4},$
 $g(x) = 0$ dla $x = -2\frac{1}{4}$

7. 2

8. $x = -2 - \sqrt{10}, x = -2 + \sqrt{10}$

10. $a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, a = 2$

Indeks

alfabet grecki 195
asymptota 118
 hiperboli 118, 126, 127, 129
 pionowa 118
 pozioma 118

cosinus kąta 183, 198
cotangens kąta 183
czworokąt
 bicentryczny 259
 wypukły 207

deltoid 212
długość
 łuku okręgu 226
 okręgu 226
dwumian 50
działania na potęgach 290, 291, 294
dziedzina
 naturalna funkcji 147
 wyrażenia wymiernego 131

funkcja
 dwóch zmiennych 61
 homograficzna 125
 logarytmiczna 309
 wykładnicza 297
 wymierna 148
funkcje równe 148
funkcje trygonometryczne
 kąta ostrego 183
 kąta wypukłego 198

hiperbola 118, 125
 równoosiowa 129
hiperbole sprzężone 129
hiperboloida 130

iloczyn pierwiastków równania
 kwadratowego 24
iloczyn potęg o tych samych
 podstawach 290, 291, 294
 wykładnikach 290, 291, 294

iloraz potęg o tych samych
 podstawach 290, 291, 294
 wykładnikach 290, 291, 294

jednomian
 stopnia n 50
 zerowy 50
jedynka trygonometryczna 192

kąt
 środkowy w okręgu 226, 237
 wpisany w okrąg 237, 238
koło 229
konstrukcja
 dwunastokąta foremnego wpisanego
 w okrąg 277
 pięciokąta foremnego wpisanego
 w okrąg 277
 stycznej do okręgu 236
 sześciokąta foremnego wpisanego
 w okrąg 277
 wspólnej stycznej do dwóch okręgów
 rozłącznych zewnętrznie 236
krzywa łańcuchowa 39
kwadrat 207

liczba
 e 299, 310
 π 226
 logarytmowana 303
 pierwiastków równania
 kwadratowego 10
logarytm 303
 dziesiętny 304
 naturalny 310

najmniejsza wartość funkcji kwadratowej
 w przedziale domkniętym 32
największa wartość funkcji kwadratowej
 w przedziale domkniętym 32
nierówność
 kwadratowa 14, 27
 wielomianowa 100
 wymierna 144

odcinek koła (kołowy) 230
odcinki w trapezie 214
odległość punktu od prostej 232
okrąg 226
 dopisany do trójkąta 252
okręgi
 przecinające się 227, 233
 rozłączne 227, 233
 rozłączne wewnętrznie 227
 rozłączne zewnętrznie 227, 233
 styczne 227, 233
 styczne wewnętrznie 227, 233
 styczne zewnętrznie 227, 233
oś symetrii hiperboli 119

parabola 39
paraboloida obrotowa 61
pierścień kołowy 229
pierwiastek
 dwukrotny wielomianu 92
 jednokrotny wielomianu 92
 k -krotny wielomianu 92
 równania kwadratowego 10
 wielomianu 72, 85, 88
podstawa logarytmu 303
podstawowe twierdzenie algebry 67
pole
 deltoidu 212
 koła 229
 rombu 209
 równoległoboku 208
 trapezu 211
 trójkąta 203, 204, 206
 trójkąta opisanego na okręgu 249
 trójkąta równobocznego 204
 trójkąta wpisanego w okrąg 246
 wycinka koła (kołowego) 229
postać
 iloczynowa funkcji kwadratowej 12
 kanoniczna funkcji homograficznej 125
 ogólna funkcji homograficznej 125
potęgą potęgi 290, 291, 294
promień
 okręgu dopisanego do trójkąta 252
 okręgu opisanego na trójkącie
 równobocznym 244
 okręgu wpisanego w trójkąt 250

promień
 okręgu wpisanego w trójkąt
 równoboczny 248
 wewnętrzny pierścienia kołowego 229
 zewnętrzny pierścienia kołowego 229
prostokąt 207
przekątna kwadratu 177
punkt
 Fermata 216
 styczności 227, 232

ramię
 końcowe kąta 197
 początkowe kąta 197
romb 207, 209
rozpad promieniotwórczy 321
rozwiązanie trójkąta 189
równanie
 dwukwadratowe 17
 hiperboli 129
 kwadratowe 10, 27
 logarytmiczne 325
 wielomianowe 72
 wykładnicze 324
 wymierne 138, 140
równoległobok 207, 208
różnica
 n -tych potęg 64
 sześcianów 63

schemat Hornera 80
siatka znaków 104
sieczna
 okręgu 232
 paraboli 21
sinus kąta 183, 198
skala logarytmiczna 317
stopień
 iloczynu wielomianów 58
 jednomianu wielu zmiennych 57
 sumy wielomianów 53
 wielomianu 50
 wielomianu wielu zmiennych 57
styczna
 do okręgu 232
 do paraboli 21

suma
 pierwiastków równania
 kwadratowego 24
 sześciánów 63
szerokość pierścienia kołowego 229
sześcián
 różnicy 62
 sumy 62

śródek
 okręgu dopisanego do trójkąta 252
 okręgu opisanego na trójkącie 244
 okręgu wpisanego w trójkąt 248
 symetrii hiperboli 119

tangens kąta 183, 198
tożsamość trygonometryczna 192, 194,
 195, 199, 200
trapez 207, 211
 równoramienny 207
trójką pitagorejska 180
trójkąt
 Herona 206
 Pascala 66
trójmian 50
twierdzenie
 Bézouta 85
 cosinusów 270
 o cięciwach 241
 o logarytmie iloczynu 306
 o logarytmie ilorazu 306
 o logarytmie potęgi 307
 o odcinkach stycznych 233
 o pierwiastkach całkowitych
 wielomianu 88
 o pierwiastkach wielomianu
 stopnia n 93

twierdzenie
 o reszcie z dzielenia wielomianu
 przez dwumian 84
 o siecznych 278
 o stycznej i siecznej 278
 o zmianie podstawy logarytmu 318
 odwrotne do twierdzenia
 Pitagorasa 177
 Pitagorasa 176, 181
 Ptolemeusza 256
 sinusów 265

warunek
 opisania okręgu na czworokącie 253
 wpisania okręgu w czworokąt 257
wielokąt
 foremny 261
 wklęsły 207
 wypukły 207
wielomian
 stopnia n 50
 wielu zmiennych 55
 zerowy 50
współczynnik
 jednomianu 50
 kierunkowy prostej 202
 wielomianu 50
wycinek koła (kołowy) 229
wyraz wolny wielomianu 50
wyrazy wielomianu 50
wyrażenie wymierne 131
wysokość trójkąta równobocznego 177
wzory Viète’a 24
wzór
 Cardano 91
 Herona 206
wzrost wykładniczy 321

Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,430
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,301
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,081
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,636
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,290

Wartość bezwzględna

Dla $a \in \mathbb{R}$:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$$

$$|-a| = |a|$$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $b \neq 0$:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Pierwiastek kwadratowy

Dla $a \geq 0$:

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a \text{ i } b \geq 0$$

Dla $a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Dla $a, b \geq 0$:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Dla $a \geq 0$ i $b > 0$:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Pierwiastek n -tego stopnia

Dla $a \geq 0$ i parzystego n :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b \geq 0 \text{ i } b^n = a$$

Dla $a \in \mathbb{R}$ i nieparzystego n :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Wzory skróconego mnożenia

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

Potęgi i pierwiastki

Dla $a > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$:

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k} \quad \bullet \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Dla $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Logarytmy

Dla $a, b > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

Dla $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, $p \in \mathbb{R}$:

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^p = p \log_a b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Dla $a, b, x > 0$, $a, b \neq 1$:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Równania

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot b = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a = 0 \text{ lub } b = 0$$

Dla $b \neq 0$, $d \neq 0$:

$$\text{równanie: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

jest równoważne równaniu:

$$ad = bc$$

Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Dla $a > 0$:

$$|x| = a \Leftrightarrow (x = -a \text{ lub } x = a)$$

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow (x < -a \text{ lub } x > a)$$

Równanie prostej

$$\bullet \text{ Równanie kierunkowe: } y = ax + b$$

$$\bullet \text{ Równanie ogólne: } Ax + By + C = 0, \text{ gdzie } A \neq 0 \text{ lub } B \neq 0$$

$$\bullet \text{ Równanie prostej o współczynniku kierunkowym } a \text{ przechodzącej przez punkt } (x_1, y_1):$$

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

$$\bullet \text{ Współczynnik kierunkowy prostej:}$$

$$y = ax + b$$

przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

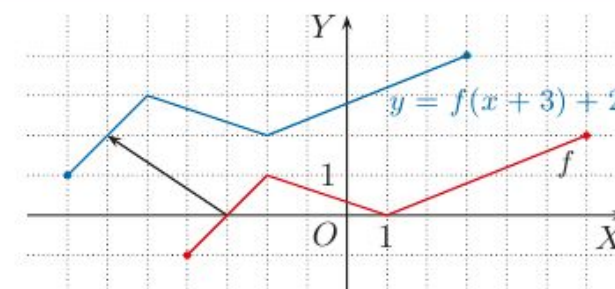
$$\bullet \text{ Proste } y = a_1x + b_1 \text{ i } y = a_2x + b_2 \text{ są:}$$

– równoległe, gdy $a_1 = a_2$,

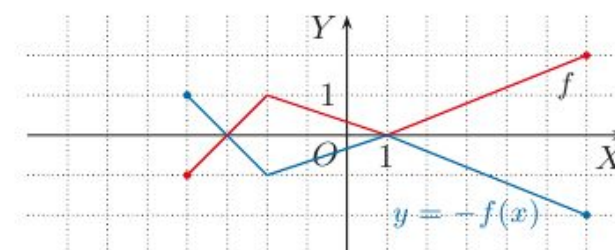
– prostopadłe, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Przekształcanie wykresów funkcji

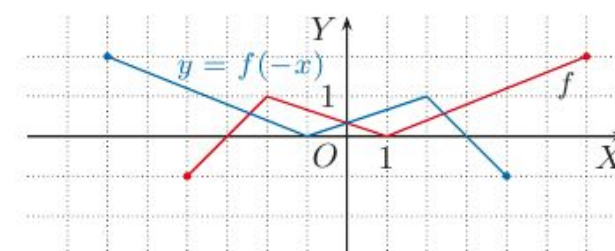
$$\bullet \text{ Wykres funkcji } y = f(x - p) + q \text{ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji } y = f(x) \text{ o wektor } [p, q].$$



$$\bullet \text{ Wykres funkcji } y = -f(x) \text{ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji } y = f(x) \text{ względem osi } OX.$$



$$\bullet \text{ Wykres funkcji } y = f(-x) \text{ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji } y = f(x) \text{ względem osi } OY.$$



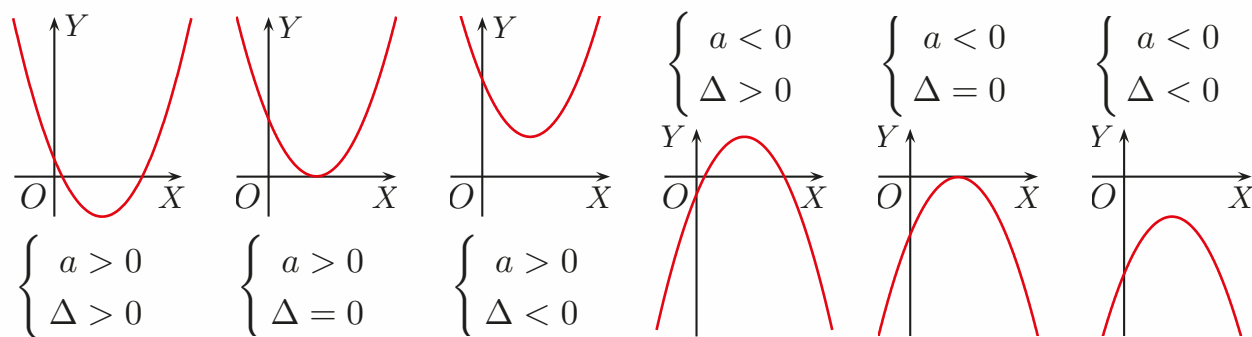
Równanie kwadratowe

- Wyróżnik równania kwadratowego
 $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$:
 $\Delta = b^2 - 4ac$
- Pierwiastki równania kwadratowego:
 - jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki:
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
 - jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek (podwójny):
 $x_0 = -\frac{b}{2a}$
 - jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

Wzór funkcji kwadratowej

- Postać ogólna:
 $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
 Współrzędne wierzchołka paraboli:
 $(p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
- Postać kanoniczna:
 $f(x) = a(x - p)^2 + q, a \neq 0$
- Postać iloczynowa:
 - jeśli $\Delta > 0$, to:
 $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), a \neq 0$,
 gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami,
 - jeśli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$,
 gdzie x_0 jest pierwiastkiem,
 - jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma postaci iloczynowej.

Położenie paraboli względem osi OX



Wzory Viète'a

Jeżeli równanie kwadratowe:
 $ax^2 + bx + c = 0$
 ma pierwiastki x_1 i x_2 , to:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Twierdzenie Bézouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Twierdzenie o reszcie

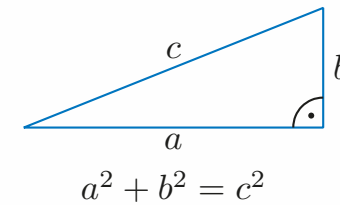
Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$, to:
 $r = w(a)$

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych

Jeżeli wielomian:
 $w(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$
 (gdzie $a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Twierdzenie Pitagorasa

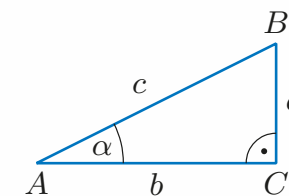
W trójkącie prostokątnym:



Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

W trójkącie prostokątnym:

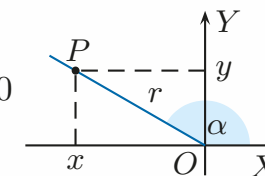
- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$



Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Dla $P(x, y)$ oraz $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

- $\sin \alpha = \frac{y}{r}, r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$
- $\cos \alpha = \frac{x}{r}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, x \neq 0$



Wzory trygonometryczne

Dla $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$:

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

Dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$:

- $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

Dla $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \alpha \neq 90^\circ$

Tożsamości trygonometryczne

Dla $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

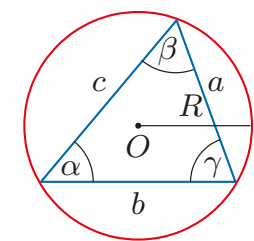
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq 90^\circ$

Wartości funkcji trygonometrycznych

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Twierdzenie sinusów

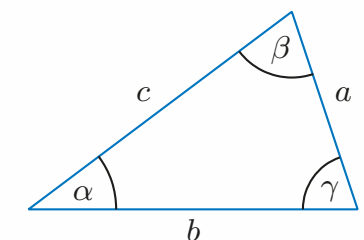
Dla dowolnego trójkąta:



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta:

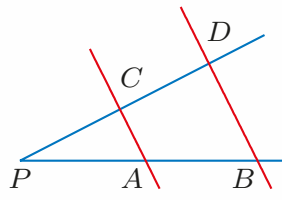


$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

Twierdzenie Talesa

Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to:

- $\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|AB|}$
- $\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|PD|}{|PB|}$



Trójkąty

- Dowolny trójkąt

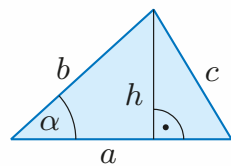
$$P = \frac{1}{2}ah$$

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = p \cdot r$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



R – promień okręgu opisanego,
 r – promień okręgu wpisanego,
 p – połowa obwodu

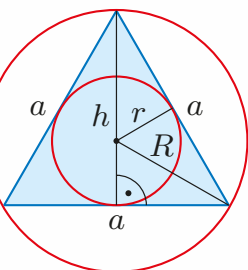
- Trójkąt równoboczny

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

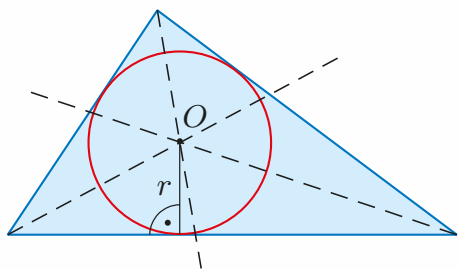
$$R = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



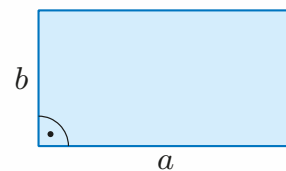
Okrąg wpisany w trójkąt

Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

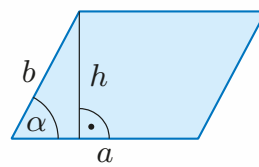


Czworokąty

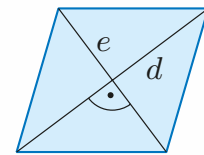
- Prostokąt
 $P = ab$



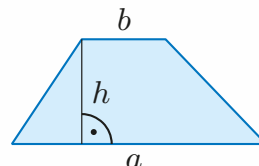
- Równoległobok
 $P = ah$
 $P = ab \sin \alpha$



- Romb
 $P = \frac{1}{2}de$



- Trapez
 $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$



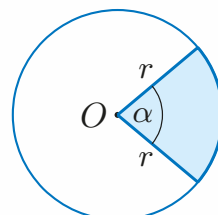
Koło i okrąg

- Długość okręgu:
 $l = 2\pi r$

- Pole koła:
 $P = \pi r^2$

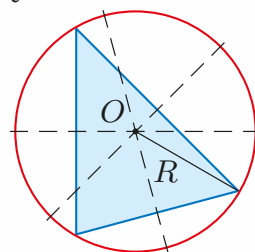
- Pole wycinka koła:
 $P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$

- Długość łuku okręgu:
 $L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$



Okrąg opisany na trójkącie

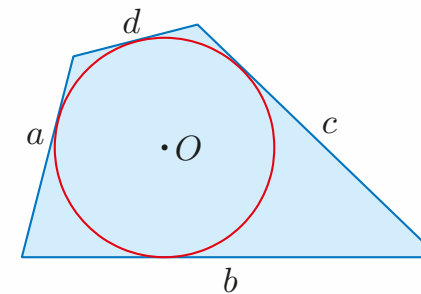
Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Okrąg wpisany w czworokąt

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy:

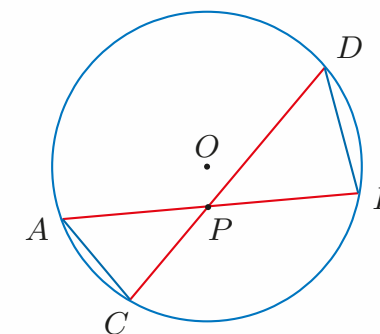
$$a + c = b + d$$



Twierdzenie o cięciwach

Jeśli w okręgu dwie cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P , to:

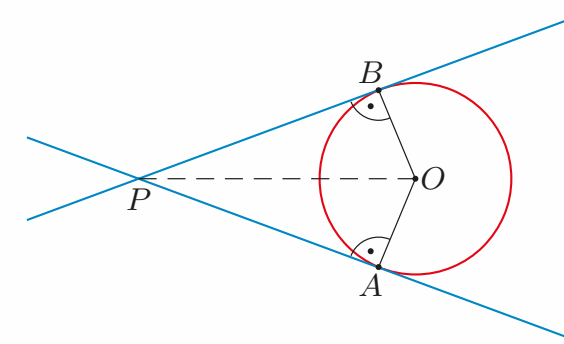
$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$



Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeśli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to:

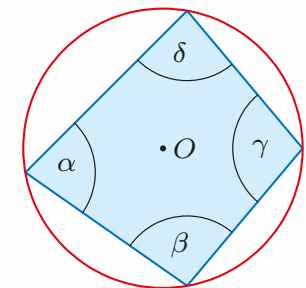
$$|PA| = |PB|$$



Okrąg opisany na czworokącie

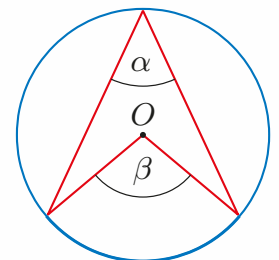
Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

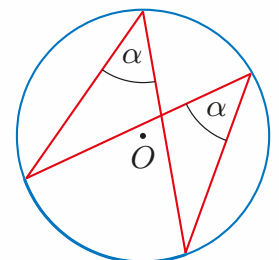


Kąty w okręgu

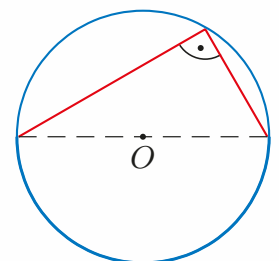
- Kąt α wpisany w okrąg i kąt środkowy β oparte na tym samym łuku:
 $\beta = 2\alpha$



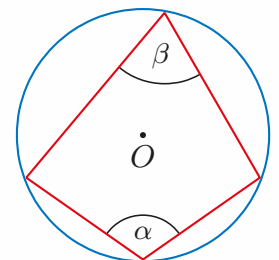
- Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku mają równe miary.



- Kąt wpisany w okrąg oparty na półokręgu (na średnicy) jest kątem prostym.



- Suma miar kątów α i β wpisanych w okrąg, jak na rysunku obok, jest równa 180° .



Za co polubisz podręcznik NOWA MATeMATyka 2?

Powód 1



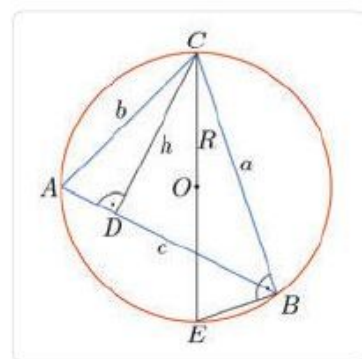
Jest tu wszystko, czego potrzebujesz. Ten podręcznik jest dostosowany do aktualnej podstawy programowej dla zakresu rozszerzonego.



Powód 2



Czytelne rysunki merytoryczne. Czy to przydatne? Tak. Lepiej zrozumiesz to, o czym jest mowa w podręczniku, i rozwiążesz zadania.



Powód 3



Matura. Dobrze jest mieć podręcznik, który uczy rozwiązywania takich zadań, jakie mogą pojawić się na maturze. Dzięki temu możesz mieć pewność, że wiesz, umiesz, zdasz.

