

NOWA

MATeMATyka

2

PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM

ZAKRES PODSTAWOWY

Nowość
EDYCJA 2024

ZMIANY
W PODSTAWACH
2024



podręcznik w pełni
dostosowany

nowa
era

NOWA MATeMATyka

2 PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM
ZAKRES PODSTAWOWY

WOJCIECH BABIAŃSKI
LECH CHAŃKO
JOANNA CZARNOWSKA
GRZEGORZ JANOCZA
DOROTA PONCZEK

NOWA MATEMATyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w zakresie podstawowym, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Gustawa Trelińskiego, dr. Jacka Stańdo, mgr Teresy Kosyry-Cieślak.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2025

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 971/2/2025/z1

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* (2024) autorstwa Agnieszki Kamińskiej i Doroty Ponczek.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2025
ISBN 978-83-267-5278-0

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Elżbieta Bagińska-Stawiarz, Urszula Cielniak, Ewa Kowalik, Katarzyna Radziwińska, Renata Sawicka, Agnieszka Trzpil-Gajek, Beata Zając

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska

Redakcja językowa: Paulina Szulim

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Piotr Stopczyński

Projekt okładki: Maciej Galiński

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Opracowanie graficzne infografik: Lech Chańko, Enzo di Giacomo, Ewa Sowulewska, Aleksandra Szpunar, Alicja Skupin-Podwojewska

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Quad/Graphics Europe Sp. z o.o.

Zdjęcia pochodzą ze zbiorów:

Zdjęcie na okładce: Getty Images/Moment/Andriy Onufriyenko.

Zdjęcia: BE&W: Alamy Stock Photo/FirePhoto s. 125, Forum: Gonzales Photo/Inaki Esnaola s. 9, Getty Images: Connect Images s. 59, iStock/Getty Images Plus/Davel5957 s. 39 (Gateway Arch), Moment/shunli zhao s. 39 (łańcuch), Moment/Roberto Moiola/Sysaworld s. 87, Shutterstock: Daniel Prudek s. 108, Direk Yiamsaensuk s. 145, ID1974 s. 199, Lech Chańko s. 53, M.C. Escher's "Symmetry Drawing E25" © 2025 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com s. 173.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Spis treści

► 1. Funkcja kwadratowa

1.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$	10
Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych – przypomnij sobie	13
1.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OY i osi OX	14
Wzory skróconego mnożenia – przypomnij sobie	17
1.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (1)	18
Obliczanie wartości trójmianu kwadratowego – przypomnij sobie	22
1.4. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (2)	23
1.5. Równania kwadratowe (1)	26
1.6. Równania kwadratowe (2)	29
1.7. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (1)	33
1.8. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (2)	36
1.9. Nierówności kwadratowe	40
1.10. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)	44
1.11. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)	47
Powtórzenie	51
Sposób na zadanie	54
Przed obowiązkową maturą z matematyki	55

► 2. Wielomiany

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu	60
2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów	63
2.3. Mnożenie wielomianów	67
2.4. Równania wielomianowe (1)	70
Rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki – przypomnij sobie	73
2.5. Równania wielomianowe (2)	74
2.6. Wielomiany – zastosowania	77
Powtórzenie	79
Sposób na zadanie	82
Przed obowiązkową maturą z matematyki	83

► 3. Funkcje wymierne

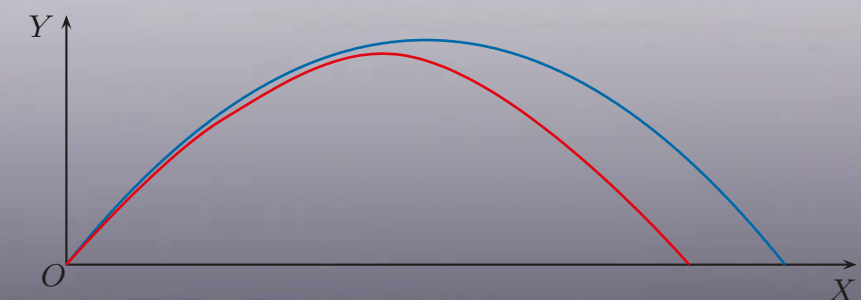
Proporcjonalność odwrotna – przypomnij sobie	88
3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$	89
3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ wzdłuż osi OY i osi OX	92

3.3. Wyrażenia wymierne i funkcje wymierne	97
Działania na liczbach wymiernych – przypomnij sobie	100
3.4. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych	101
3.5. Równania wymierne	104
3.6. Równania z wartością bezwzględną	109
3.7. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)	112
3.8. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)	115
Powtórzenie	117
Sposób na zadanie	120
Przed obowiązkową maturą z matematyki	121
► 4. Trygonometria	
4.1. Trójkąty prostokątne	126
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	131
4.3. Trygonometria – zastosowania	134
4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych	138
4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego	141
4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (1)	146
4.7. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (2)	150
Pole trójkąta prostokątnego – przypomnij sobie	153
4.8. Pole trójkąta	154
Czworokąty wypukłe – przypomnij sobie	158
4.9. Pola czworokątów (1)	159
4.10. Pola czworokątów (2)	162
Powtórzenie	165
Sposób na zadanie	168
Przed obowiązkową maturą z matematyki	169
► 5. Planimetria	
5.1. Okrąg	174
5.2. Koło	177
5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej	180
5.4. Kąty w okręgu (1)	184
5.5. Kąty w okręgu (2)	188
5.6. Okrąg opisany na trójkącie	191
5.7. Okrąg wpisany w trójkąt	195
5.8. Wielokąty foremne	200
Wykorzystanie funkcji trygonometrycznych – przypomnij sobie	203
5.9. Twierdzenie cosinusów (1)	204

5.10. Twierdzenie cosinusów (2)	207
Powtórzenie	210
Sposób na zadanie	213
Przed obowiązkową maturą z matematyki	214
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	218
Indeks	249
Tablice wartości funkcji trygonometrycznych	251
Wybrane wzory i twierdzenia matematyczne	252

1 Funkcja kwadratowa

Jeśli pominie się opór powietrza, można przyjąć, że tor lotu piłki rzuconej pod kątem ostrym do poziomu lub pocisku wystrzelonego pod takim kątem jest fragmentem paraboli (kolor niebieski na rysunku). Jednak opór powietrza sprawia, że tor ten ma kształt **krzywej balistycznej** (kolor czerwony na rysunku).



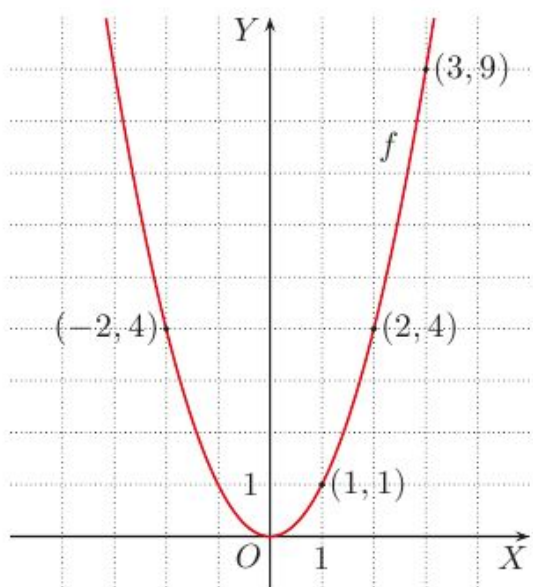
Odpowiedzi do poleceń i rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

-  Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.
-  Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu warto skorzystać z kalkulatora, oraz tematów ze wszystkimi takimi zadaniami.

Sekcja *Przypomnij sobie* zawiera nieobowiązkowe powtórzenie przydatnych wiadomości przed wybranymi lekcjami.

1.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$

Na poniższym rysunku przedstawiono **parabolę**, która jest wykresem funkcji $f(x) = x^2$. Jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, a zbiorem wartości – przedział $[0; \infty)$. Z wykresu możemy odczytać następujące własności:



- **ramiona** paraboli są skierowane do góry,
- oś OY jest **osią symetrii** paraboli,
- punkt $(0, 0)$ jest **wierzchołkiem** paraboli,
- funkcja f jest **malejąca** w przedziale $(-\infty; 0]$ oraz **rosnąca** w przedziale $[0; \infty)$,
- dla $x = 0$ funkcja f przyjmuje **wartość najmniejszą** równą zero, natomiast dla każdego $x \neq 0$ prawdziwa jest nierówność $f(x) > 0$,
- funkcja f nie przyjmuje **wartości największej**.

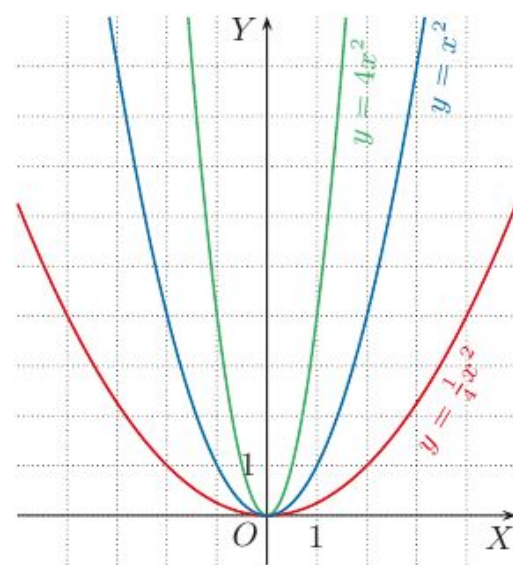
Ćwiczenie 1

Na powyższym rysunku podano współrzędne czterech punktów należących do wykresu funkcji $f(x) = x^2$. Podaj współrzędne czterech innych punktów należących do tego wykresu.

Ćwiczenie 2

Sporządź tabele wartości funkcji $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^2$ i $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$ oraz w jednym układzie współrzędnych naszkicuj ich wykresy, łącząc punkty wykresu odpowiednią krzywą (patrz wyżej).

Parabole $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = x^2$, $y = 4x^2$ zostały dla porównania naszkicowane w jednym układzie współrzędnych. Zwróć uwagę na zależność między współczynnikiem a w równaniu paraboli $y = ax^2$ i rozchyleniem ramion tej paraboli.

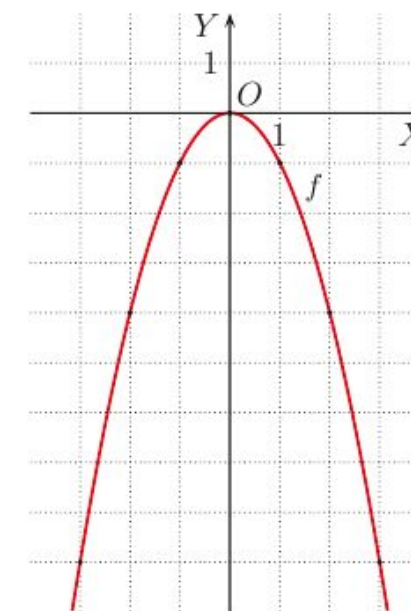


Ćwiczenie 3

Czy punkt P należy do paraboli $y = 4x^2$?

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| a) $P(-\frac{1}{4}, 1)$ | c) $P(\frac{1}{2}, 1)$ |
| b) $P(4, 32)$ | d) $P(-2, 16)$ |

Na rysunku obok przedstawiono parabolę, która jest wykresem funkcji $f(x) = -x^2$. Jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, a zbiorem wartości – przedział $(-\infty; 0]$. Zwróć uwagę na to, że ramiona tej paraboli są skierowane w dół.



Ćwiczenie 4

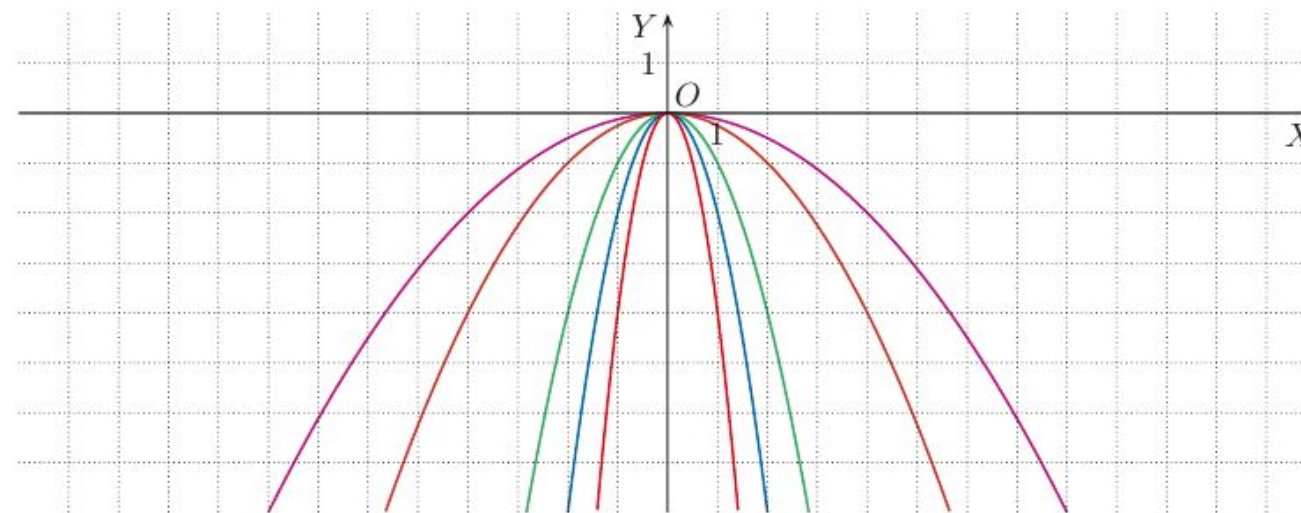
- Podaj przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -x^2$.
- Podaj równanie osi symetrii i współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = -x^2$.

Ćwiczenie 5

Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy funkcji:

$$f_1(x) = -x^2, f_2(x) = -2x^2, f_3(x) = -4x^2, f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2 \text{ i } f_5(x) = -\frac{1}{8}x^2$$

- Dopasuj do każdej funkcji odpowiedni wykres.
- Dla każdej spośród funkcji f_2 , f_4 i f_5 podaj po cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do jej wykresu.



Wartość współczynnika a we wzorze funkcji $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$, decyduje o tym, czy ramiona paraboli będącej jej wykresem skierowane są do góry (gdy $a > 0$), czy w dół (gdy $a < 0$), oraz o tym, jak bardzo są rozchylone.

Ćwiczenie 6

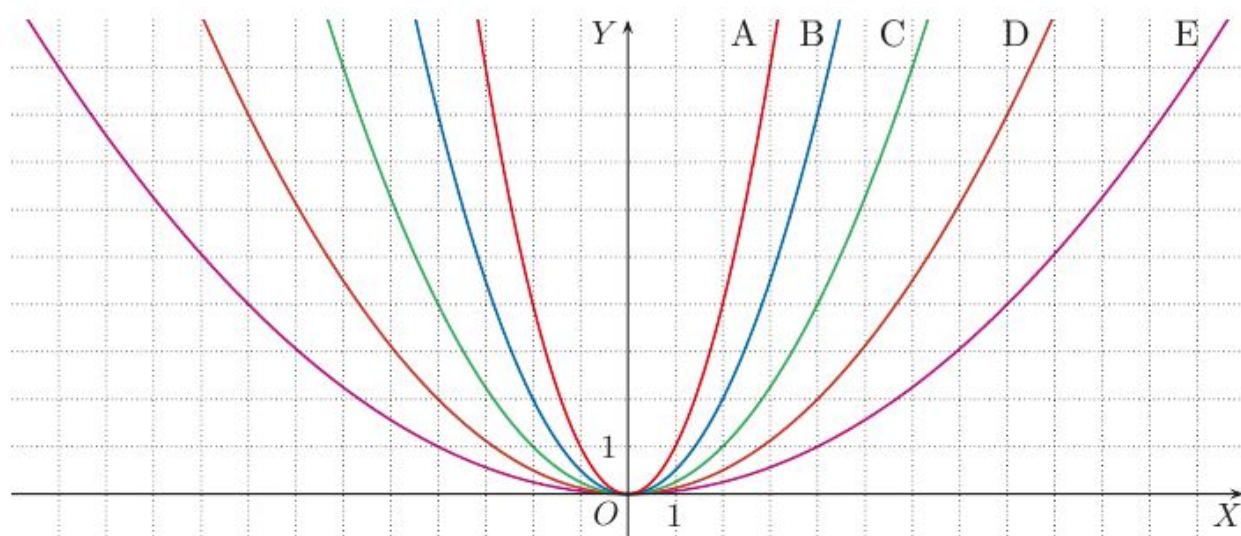
Do wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ należy punkt P . Naszkicuj ten wykres i podaj pięć punktów o obu współrzędnych całkowitych, które do niego należą.

- | | | | |
|---------------|-------------------------|---------------|----------------------|
| a) $P(2, -2)$ | b) $P(\frac{1}{2}, -1)$ | c) $P(-1, 3)$ | d) $P(\sqrt{3}, -1)$ |
|---------------|-------------------------|---------------|----------------------|

Zadania

- Naszkicuj wykres funkcji f o dziedzinie D . Podaj zbiór wartości tej funkcji.

a) $f(x) = x^2, D = [-3; 3]$	e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2, D = (-2; 4)$
b) $f(x) = x^2, D = [0; 3]$	f) $f(x) = \frac{1}{4}x^2, D = [-4; 2]$
c) $f(x) = -x^2, D = (-3; 3]$	g) $f(x) = 3x^2, D = (-1; 2)$
d) $f(x) = -x^2, D = [-3; 1]$	h) $f(x) = -2x^2, D = [1; 2]$
- Dopasuj do równań $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{8}x^2$ odpowiednie parabole spośród A–E. Podaj równania pozostałych parabol.



- Dla której spośród trzech podanych funkcji odległość od osi OX punktu o odciętej $x = 1$ należącego do wykresu tej funkcji jest najmniejsza?

a) $y = x^2, y = 4x^2, y = -6x^2$	b) $y = -\frac{1}{3}x^2, y = 3x^2, y = 2\sqrt{3}x^2$
-----------------------------------	--
- Dla jakiej wartości współczynnika a punkt Q należy do paraboli $y = ax^2$?

a) $Q(1, 6)$	b) $Q(2, 8)$	c) $Q(-4, 8)$	d) $Q(-8, 48)$
--------------	--------------	---------------	----------------
- Punkty $O(0, 0), A(x, 3)$ i $B(-x, 3)$ należą do paraboli $y = ax^2$. Pole trójkąta AOB jest równe 12. Naszkicuj tę parabolę.

Sprawdź się

- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ax^2$, do którego należy punkt P .

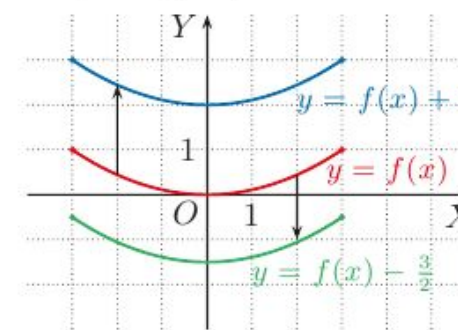
a) $P(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	b) $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	c) $P(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$	d) $P(-\sqrt{3}, \frac{3}{2})$
-----------------------------------	----------------------------------	------------------------------------	--------------------------------
- Naszkicuj wykres funkcji f o dziedzinie $D = [-2; 2]$. Podaj zbiór wartości tej funkcji.

a) $f(x) = x^2$	b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$	c) $f(x) = -x^2$	d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$
-----------------	----------------------------	------------------	-----------------------------

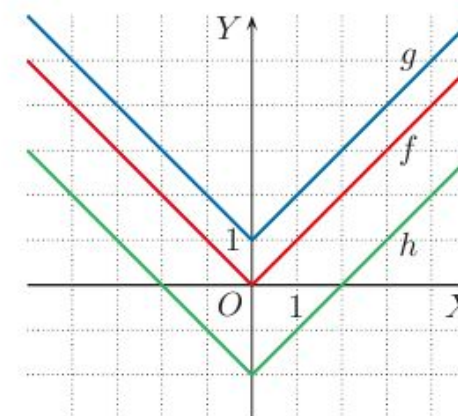
Przypomnij sobie

Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych

- Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o q jednostek w górę wzdłuż osi OY .
- Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o q jednostek w dół wzdłuż osi OY .

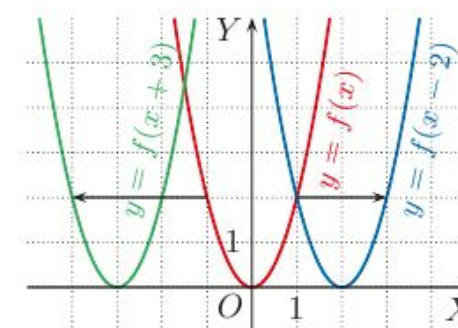


- Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = |x|$ oraz wykresy funkcji g i h , które otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi OY .
 - Podaj wzory funkcji g i h oraz ich zbiory wartości.
 - Naszkicuj wykresy funkcji $k(x) = |x| + 2$, $l(x) = |x| - 3$ i podaj ich zbiory wartości.

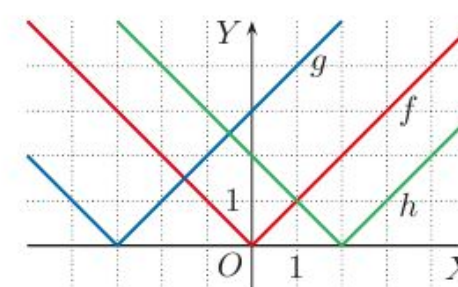


- Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = 2x, g(x) = 2x + 1$ i $h(x) = 2x - 3$. Dla każdej funkcji wyznacz punkt, w którym jej wykres przecina oś OY .

- Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o p jednostek w prawo wzdłuż osi OX .
- Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o p jednostek w lewo wzdłuż osi OX .



- Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = |x|$ oraz wykresy funkcji g i h , które otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi OX .
 - Podaj wzory funkcji g i h oraz ich zbiory wartości.
 - Naszkicuj wykresy funkcji $k(x) = |x - 3|$ oraz $l(x) = |x + 1|$ i podaj ich miejsca zerowe.



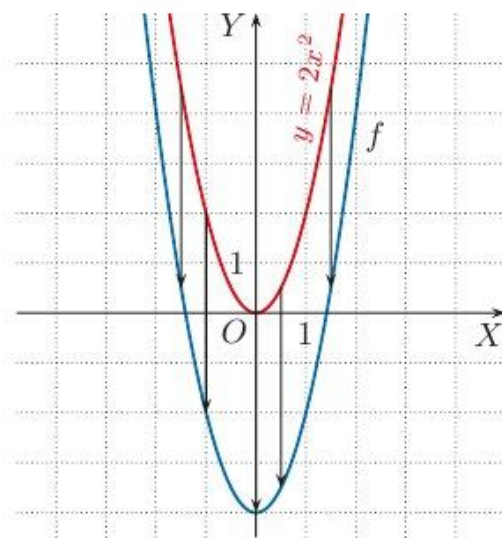
- Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = 2x, g(x) = 2(x + 1)$ i $h(x) = 2(x - 3)$. Dla każdej funkcji wyznacz punkt, w którym jej wykres przecina oś OX .

1.2. Przesunięcie wykresu funkcji

$f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OY i osi OX

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2x^2 - 4$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 4 jednostki w dół (rysunek obok).



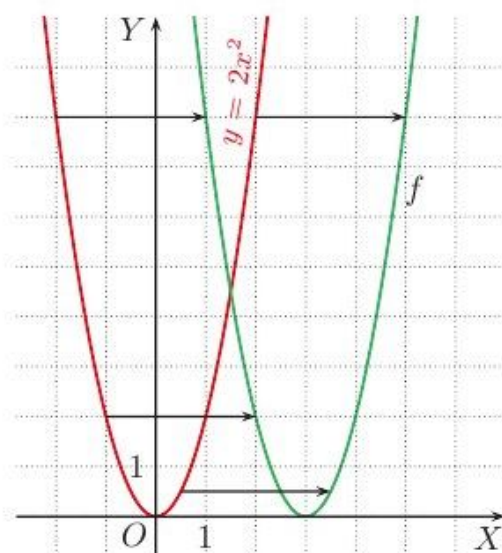
Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f i określ jej zbiór wartości.

- a) $f(x) = x^2 - 3$ c) $f(x) = -2x^2 - 4$
b) $f(x) = x^2 + 1$ d) $f(x) = -2x^2 + 2$

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = 2(x - 3)^2$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 3 jednostki w prawo (rysunek obok).



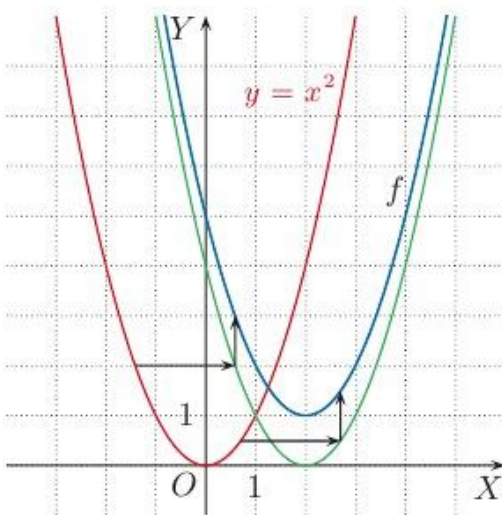
Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej przedziały monotoniczności.

- a) $f(x) = (x + 3)^2$ c) $f(x) = -2(x + 2)^2$
b) $f(x) = (x - 1)^2$ d) $f(x) = -2(x - 2)^2$

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo, a następnie o 1 jednostkę w górę (rysunek obok).



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj współrzędne wierzchołka otrzymanej paraboli.

- a) $f(x) = (x - 3)^2 - 2$
b) $f(x) = (x + 2)^2 + 1$

Twierdzenie

Wykresem funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, jest parabola o wierzchołku w punkcie (p, q) . Jej osią symetrii jest prosta $x = p$.

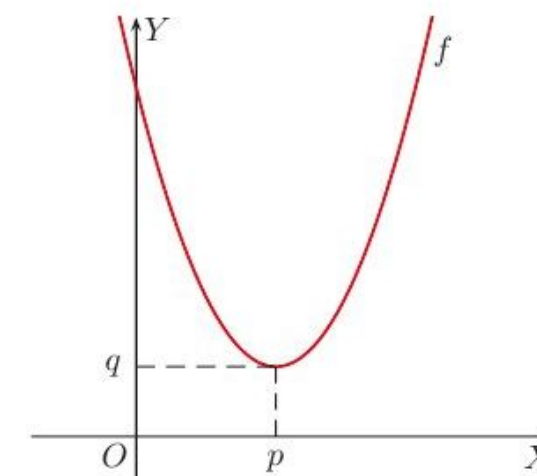
Ćwiczenie 4

Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f . W jaki sposób należy przesunąć parabolę daną wzorem $y = 2x^2$, aby otrzymać wykres funkcji f ?

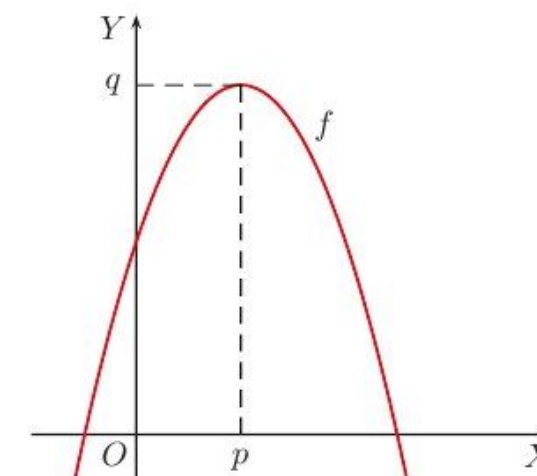
- a) $f(x) = 2(x + 6)^2 - 3$ b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$

Poniższe własności funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$ zależą od współczynnika a .

$a > 0$
• ramiona paraboli są skierowane do góry • dla $x = p$ funkcja osiąga wartość najmniejszą $y = q$ • funkcja maleje w przedziale $(-\infty; p]$ • funkcja rośnie w przedziale $[p; \infty)$ • zbiorem wartości funkcji jest przedział $[q; \infty)$



$a < 0$
• ramiona paraboli są skierowane w dół • dla $x = p$ funkcja osiąga wartość największą $y = q$ • funkcja rośnie w przedziale $(-\infty; p]$ • funkcja maleje w przedziale $[p; \infty)$ • zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty; q]$



Ćwiczenie 5

Podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości funkcji f oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem. Naszkicuj tę parabolę.

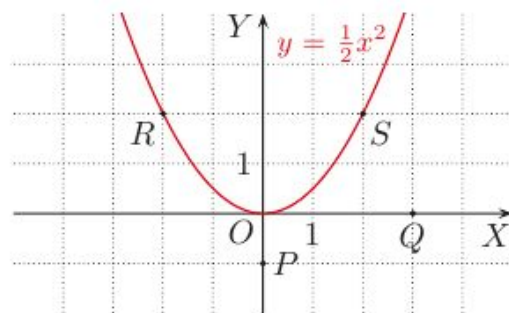
- a) $f(x) = 2(x - 3)^2 - 4$ c) $f(x) = -(x + 4)^2 - 1$
b) $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)^2 + 2$ d) $f(x) = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 + 3$

Zadania

- Wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$:
a) o 3 jednostki w prawo, b) o 2 jednostki w lewo.
Podaj wzór funkcji f , jej przedziały monotoniczności i naszkicuj jej wykres.
- Wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = -x^2$:
a) o 2 jednostki w lewo i 3 jednostki w górę,
b) o 1 jednostkę w prawo i 2 jednostki w dół.
Podaj wzór funkcji f i naszkicuj jej wykres.
- Naszkicuj parabolę o podanym wzorze. Wyznacz współrzędne jej wierzchołka oraz równanie jej osi symetrii.
a) $y = x^2 + 2$ c) $y = (x - 2)^2$ e) $y = (x - 1)^2 - 4$
b) $y = x^2 - 4$ d) $y = (x + 1)^2$ f) $y = (x + 3)^2 + 1$
- Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.
a) $f(x) = -x^2 + 4$ d) $f(x) = -2(x - 2)^2 + 1$ g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
b) $f(x) = -(x - 2)^2 - 1$ e) $f(x) = 2(x - 2)^2 + 1$ h) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$
c) $f(x) = -(x + 3)^2 + 1$ f) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 8$ i) $f(x) = 2x^2 - 4$

Sprawdź się

- Podaj zbiór wartości funkcji f , jej przedziały monotoniczności i współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.
a) $f(x) = 3x^2 - 6$ d) $f(x) = -5x^2 + 9$ g) $f(x) = (2 - x)^2 + 1$
b) $f(x) = 3(x - 4)^2$ e) $f(x) = -5(x + 8)^2$ h) $f(x) = 4 - \frac{2}{3}(x - 1)^2$
c) $f(x) = 3(x + 2)^2 + 5$ f) $f(x) = -5(x - 3)^2 - 2$ i) $f(x) = (3 + x)^2 - \sqrt{2}$
- Wykresem funkcji f jest parabola otrzymana przez przesunięcie paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$ (rysunek obok). Podaj wzór funkcji f przy założeniu, że wierzchołkiem jej wykresu jest punkt:
a) P , b) Q , c) R , d) S .
- Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.
a) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$ c) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 2$ e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
b) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 4$ d) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$ f) $f(x) = -2x^2 - 1$



Przypomnij sobie

Wzory skróconego mnożenia

- Uzasadnij podane obok wzory. W tym celu wykonaj mnożenie $(a+b)(a+b)$ oraz $(a-b)(a-b)$.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{kwadrat sumy}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{kwadrat różnicy}$$
- Zapisz w postaci sumy algebraicznej.
a) $(x+1)^2$ c) $(x+3)^2$ e) $(x-1)^2$ g) $(x-4)^2$
b) $(x+2)^2$ d) $(x+6)^2$ f) $(x-2)^2$ h) $(x-5)^2$
- Zapisz w postaci sumy algebraicznej.
a) $(x + \frac{1}{2})^2$ c) $(x + \frac{2}{3})^2$ e) $(x - \frac{1}{2})^2$ g) $(x - \frac{3}{4})^2$
b) $(x + \frac{1}{4})^2$ d) $(x + \frac{3}{2})^2$ f) $(x - \frac{1}{3})^2$ h) $(x - \frac{4}{3})^2$
- Zapisz w postaci sumy algebraicznej.
a) $(2x+1)^2$ c) $(3x+2)^2$ e) $(2x-1)^2$ g) $(3x-5)^2$
b) $(2x+3)^2$ d) $(3x+4)^2$ f) $(3x-1)^2$ h) $(4x-3)^2$
- Wyznacz liczbę a , dla której wyrażenie $(x+a)^2$ jest równe podanej sumie algebraicznej.
a) $x^2 + 4x + 4$ c) $x^2 + 10x + 25$ e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$
b) $x^2 + 8x + 16$ d) $x^2 + 16x + 64$ f) $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$
- Wyznacz liczbę a , dla której wyrażenie $(x-a)^2$ jest równe podanej sumie algebraicznej.
a) $x^2 - 2x + 1$ c) $x^2 - 14x + 49$ e) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$
b) $x^2 - 6x + 9$ d) $x^2 - 20x + 100$ f) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$
- Uzasadnij podany obok wzór.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{różnica kwadratów}$$
- Zapisz w postaci sumy algebraicznej.
a) $(x-2)(x+2)$ c) $(x+4)(4-x)$ e) $(2x-1)(2x+1)$
b) $(x-3)(x+3)$ d) $(x+8)(x-8)$ f) $(2+3x)(3x-2)$
- Przedstaw podaną sumę algebraiczną w postaci iloczynu $(x-a)(x+a)$ dla pewnej liczby a .
a) $x^2 - 25$ b) $x^2 - 49$ c) $x^2 - 2$ d) $x^2 - \frac{1}{36}$

1.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (1)

Definicja

Postać: $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
nazywamy **postacią ogólną** funkcji kwadratowej.

Postać: $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a, p, q \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji kwadratowej.

Funkcję kwadratową nazywamy też **trójmianem kwadratowym**.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj przykłady w ramce pokazujące, w jaki sposób przejść od postaci kanonicznej funkcji kwadratowej do postaci ogólnej.

- $y = 3(x - 4)^2 - 7 =$ Postać kanoniczna
 $= 3(x^2 - 8x + 16) - 7 =$ Korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
 $= 3x^2 - 24x + 41$ Postać ogólna
- $y = -4(x + \frac{1}{2})^2 + 1 =$ Postać kanoniczna
 $= -4(x^2 + x + \frac{1}{4}) + 1 =$ Korzystamy ze wzoru $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
 $= -4x^2 - 4x$ Postać ogólna

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej.

a) $y = -2(x - 3)^2 + 6$ b) $y = -\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$ c) $y = 3(x - 5)^2 + 9$

Aby przejść od postaci ogólnej funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej, należy zastosować uzupełnienie do kwadratu.

Przykład 1

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.

a) $y = x^2 + 6x + 10 =$ Postać ogólna
 $= x^2 + 2 \cdot 3x + 10 =$ Współczynnik 6 zapisujemy jako $2 \cdot 3$.
 $= x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 - 9 + 10 =$ Dodajemy $9 = 3^2$, czyli uzupełniamy wyrażenie $x^2 + 2 \cdot 3x$ do kwadratu, i odejmujemy 9.
 $= (x + 3)^2 - 9 + 10 =$ Korzystamy ze wzoru $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
 $= (x + 3)^2 + 1$ Postać kanoniczna

b) $y = x^2 - x - 2 =$

$= x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x - 2 =$

$= x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 - 2 =$

$= (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 =$

$= (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$

Postać ogólna

Współczynnik -1 zapisujemy jako $-2 \cdot \frac{1}{2}$.

Dodajemy i odejmujemy $(\frac{1}{2})^2$.

Korzystamy ze wzoru
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Postać kanoniczna

Ćwiczenie 2

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

a) $y = x^2 + 6x + 6$

c) $y = x^2 - 6x - 2$

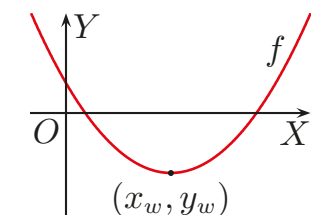
e) $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$

b) $y = x^2 + 4x + 8$

d) $y = x^2 - 8x + 1$

f) $y = x^2 - 3x + 1$

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = a(x - p)^2 + q$ jest parabola o wierzchołku (p, q) . Współrzędne wierzchołka paraboli oznaczamy także (x_w, y_w) .



Twierdzenie

Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac, \quad a \neq 0$$

Wyrażenie Δ nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego.

Dowód

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x) + c = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Jest to postać kanoniczna funkcji $y = a(x - p)^2 + q$ dla $p = -\frac{b}{2a}$ i $q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, zatem $x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$.

Przykład 2

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego $y = -x^2 + 5x - 2$.

Współczynniki trójmianu: $a = -1$, $b = 5$ i $c = -2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 25 - 8 = 17$$

Ćwiczenie 3

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.

a) $y = x^2 + 3x + 1$

c) $y = x^2 - 4x + 4$

e) $y = -2x^2 + 4$

b) $y = 2x^2 + 4x + 1$

d) $y = -2x^2 + 6x - 6$

f) $y = 2x^2 - 3x$

Przykład 3

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $y = 2x^2 - 6x + 1$, a następnie zapisz tę funkcję w postaci kanonicznej.

Współczynniki trójmianu: $a = 2$, $b = -6$ i $c = 1$.

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 36 - 8 = 28$$
$$y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{28}{8} = -\frac{7}{2}$$

Zatem wierzchołkiem paraboli jest punkt o współrzędnych $(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2})$.

Postać kanoniczna: $y = 2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{7}{2}$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem podanej funkcji, a następnie zapisz tę funkcję w postaci kanonicznej.

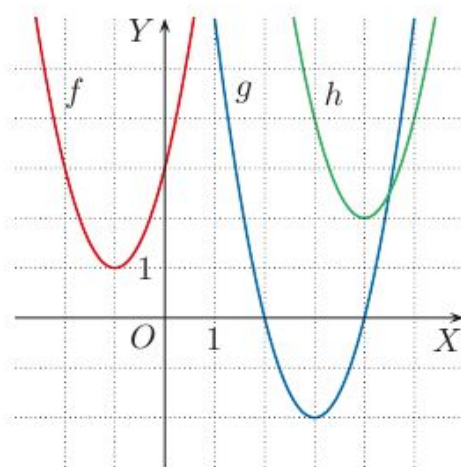
a) $y = 4x^2 + 6x + 3$ b) $y = -2x^2 + 4x + 1$ c) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

Zadania

1. Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej.

a) $y = (x - \frac{1}{2})^2 + 4$ c) $y = 2(x - 3)^2 + 1$ e) $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$
b) $y = -(x - 4)^2 - 3$ d) $y = -3(x + 2)^2 - 4$ f) $y = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 4$

2. Wykresy funkcji kwadratowych f , g i h (rysunek obok) otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = 2x^2$. Odczytaj z rysunku współrzędne wierzchołków otrzymanych parabol. Podaj wzór każdej z funkcji f , g i h w postaciach kanonicznej i ogólnej.



3. Zapisz w postaciach kanonicznej oraz ogólnej wzór funkcji g , której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji:

a) $f(x) = 3x^2$ o 3 jednostki w prawo i 2 jednostki w dół,
b) $f(x) = -4x^2$ o 5 jednostek w lewo i 100 jednostek w górę.

4. Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.

a) $y = -2x^2 + 5x + 7$ c) $y = -2x^2 + 3x - 1$ e) $y = \frac{1}{2}x^2 + 6x - 3$
b) $y = 2x^2 + 3x + 2$ d) $y = 4x^2 - 12x + 9$ f) $y = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 5$

5. Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tego trójmianu.

a) $y = x^2 + 4x - 3$ c) $y = 2x^2 + 4x - 5$ e) $y = 3x^2 - 2x + \frac{1}{2}$
b) $y = -x^2 + 6x - 1$ d) $y = -3x^2 + 6x - 2$ f) $y = -\frac{3}{4}x^2 + x + 1$

6. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f , a następnie przedstaw tę funkcję w postaci kanonicznej.

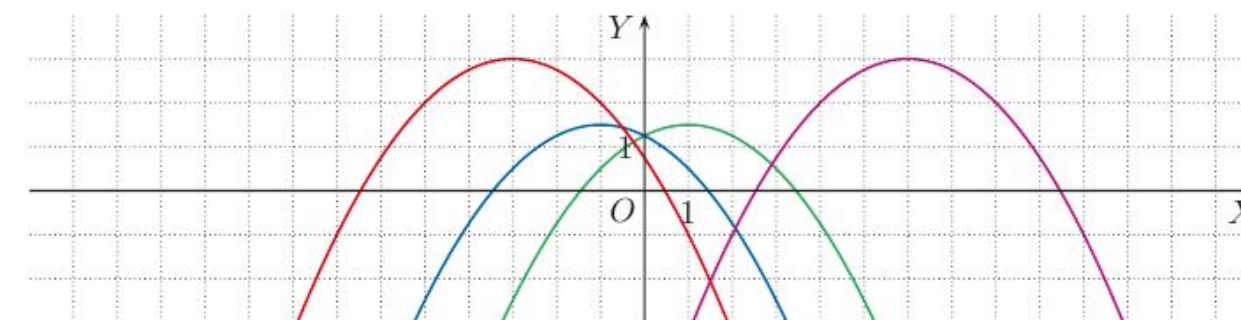
a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ c) $f(x) = -4x^2 + 8x + 1$ e) $f(x) = x^2 - x$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$ d) $f(x) = 2x^2 + 8x - 7$ f) $f(x) = -2x^2 + 6x$

7. Do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 - 4x + c$ należy punkt P . Oblicz współczynnik c i zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

a) $P(0, 1)$ b) $P(0, -2)$ c) $P(1, 4)$ d) $P(2, 2)$ e) $P(-2, -4)$

8. Na poniższym rysunku przedstawiono wykresy funkcji:

$$f_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}, \quad f_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4},$$
$$f_3(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 6, \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$$



a) Zapisz wzór każdej funkcji w postaci kanonicznej.
b) Dopasuj do każdej funkcji odpowiedni wykres.

Sprawdź się

9. Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.

a) $y = x^2 - 3x - 4$ b) $y = 3x^2 + 5x + 2$ c) $y = -x^2 - 4x + 1$

10. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli.

a) $y = 4x^2 - 8x + 1$ c) $y = x^2 + 6x - 10$ e) $y = x^2 + x$
b) $y = -4x^2 + 6x + 2$ d) $y = -x^2 - 3x + 2$ f) $y = -2x^2 - 3x$

11. Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.

a) $y = x^2 - 4x - 2$ c) $y = -3x^2 + 5x - \frac{1}{2}$ e) $y = 8x^2 - x$
b) $y = 2x^2 - 8x + 1$ d) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ f) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$

Obliczanie wartości trójmianu kwadratowego

- Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -2$ i dla $x = -3$.
 a) $x^2 - 3x - 6$ b) $2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ c) $-3x^2 + 2x - 1$
- Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -\frac{1}{2}$ i dla $x = \frac{1}{4}$.
 a) $4x^2 - 2x + 3$ b) $-8x^2 + 4x - 1$ c) $-2x^2 - 6x + \frac{1}{2}$
- Oblicz wartości funkcji f , g , h dla argumentu $x = -2$ i uporządkuj je od najmniejszej do największej.
 a) $f(x) = -x^2 + 6x + 1$, $g(x) = 2x^2 + 10x - 5$, $h(x) = -3x^2 - \frac{1}{2}x + 4$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 7$, $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - 8$, $h(x) = -\frac{17}{8}x^2 - x - 4$
- Oblicz współczynnik c funkcji $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + c$, która spełnia warunek:
 a) $f(-2) = 9$, b) $f(4) = -2$, c) $f(-2\sqrt{2}) = -6$.
- Sprawdź, które spośród punktów:

$$A(-1, 2 - 3\sqrt{2}), B(-\sqrt{2}, 10 - 2\sqrt{2}), C(-2, 8),$$

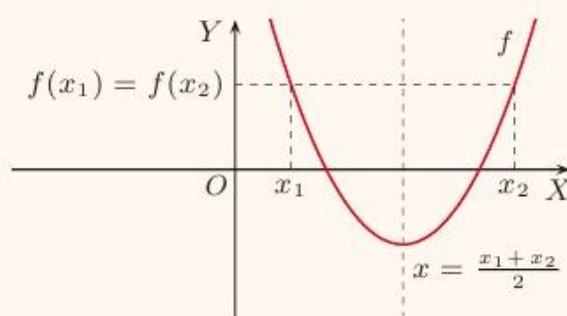
$$D(1 + \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}), E(\sqrt{2}, 8 - 2\sqrt{2})$$

nie należą do wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$.

Czy wiesz, że...

Jeśli dla dwóch różnych argumentów x_1, x_2 funkcja kwadratowa przyjmuje tę samą wartość, to oś symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji jest prostą określoną za pomocą równania:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



- Sprawdź, czy $f(-3) = f(1)$. Podaj równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f oraz współrzędne wierzchołka tej paraboli.
 a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ b) $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$
- Oblicz $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ i $f(2)$. Podaj równanie osi symetrii oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .
 a) $f(x) = x^2 - x - 2$ c) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$
 b) $f(x) = 2x^2 - 6x - 2$ d) $f(x) = -6x^2 - 6x + 8$

1.4. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (2)

Przykład 1

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli $y = -x^2 + 6x - 5$. Naszkicuj tę parabolę.

$a = -1$, $b = 6$, $c = -5$, zatem:

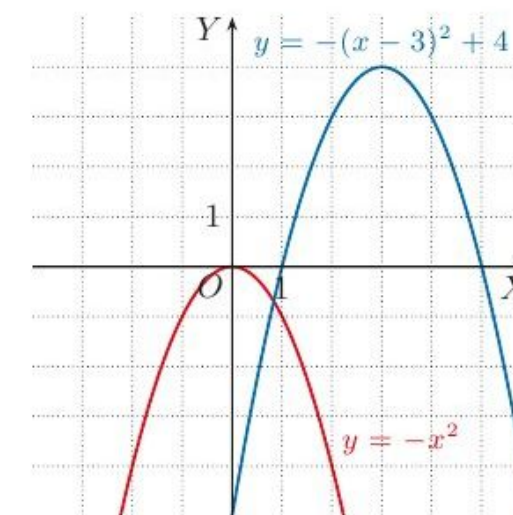
$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16$$

$$y_w = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-16}{-4} = 4$$

Trójmian kwadratowy zapisujemy w postaci kanonicznej: $y = -(x - 3)^2 + 4$.

Szukaną parabolę otrzymujemy w wyniku przesunięcia paraboli $y = -x^2$ o 3 jednostki w prawo i 4 jednostki w górę.



Ćwiczenie 1

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli, a następnie przedstaw trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej. Naszkicuj tę parabolę.

- | | | |
|------------------------|-------------------------|---|
| a) $y = x^2 + 4x + 1$ | c) $y = 2x^2 + 4x + 2$ | e) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$ |
| b) $y = -x^2 + 2x - 3$ | d) $y = -2x^2 - 8x - 5$ | f) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ |

Zauważmy, że jeśli wyznaczymy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f , to jego drugą współrzędną możemy obliczyć, korzystając z tego, że $y_w = f(x_w)$.

Ćwiczenie 2

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji:

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 1$$

$$a = -2, b = 8, \text{ więc } x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2.$$

$$\text{Współrzędna } y_w = f(x_w) = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 1 = 7.$$

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(2, 7)$.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------------------|
| a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ | b) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$ | c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 10$ |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------------------|

Przykład 2

Prosta $x = 1$ jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = 3x^2 + bx - 4$. Oblicz współczynnik b .

Ośią symetrii paraboli jest prosta $x = -\frac{b}{2a}$, zatem $-\frac{b}{2 \cdot 3} = 1$. Stąd $b = -6$.

Ćwiczenie 3

Prosta l jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f . Oblicz współczynnik b .

- a) $f(x) = x^2 + bx + 4$, $l: x = 2$ c) $f(x) = 2x^2 + bx - 1$, $l: x = -1$
b) $f(x) = -x^2 + bx - 3$, $l: x = 4$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx - 7$, $l: x = -6$

Przykład 3

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku $(3, -2)$. Punkt $P(4, 1)$ należy do tej paraboli. Zapisz wzór funkcji f w postaciach kanonicznej i ogólnej.

Wzór funkcji zapisujemy w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

gdzie punkt (p, q) jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f :

$$f(x) = a(x - 3)^2 - 2 \quad \text{Wierzchołkiem paraboli jest punkt } (3, -2).$$

Podstawiamy współrzędne punktu P do powyższego wzoru: $1 = a(4 - 3)^2 - 2$, czyli $a = 3$. Zatem otrzymujemy postać kanoniczną funkcji:

$$f(x) = 3(x - 3)^2 - 2$$

Następnie wyznaczamy postać ogólną:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x - 3)^2 - 2 = 3(x^2 - 6x + 9) - 2 = \\ &= 3x^2 - 18x + 27 - 2 = 3x^2 - 18x + 25 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku w punkcie W . Punkt P należy do tej paraboli. Zapisz wzór funkcji f w postaciach kanonicznej i ogólnej.

- a) $P(3, 1)$, $W(2, 2)$ b) $P(3, -2)$, $W(4, 0)$ c) $P(-2, -4)$, $W(-1, -6)$

Ćwiczenie 5

Do paraboli $y = ax^2 + bx + c$ należy punkt P , a wierzchołkiem tej paraboli jest punkt W . Oblicz współczynniki a , b , c .

- a) $P(0, 2)$, $W(2, 0)$ c) $P(3, 1)$, $W(0, 3)$ e) $P(2, 1)$, $W(1, 2)$
b) $P(0, 0)$, $W(-1, -1)$ d) $P(-2, 0)$, $W(-1, 3)$ f) $P(1, 2)$, $W(2, 4)$

Zadania

- Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Naskicuj jej wykres, podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości.
a) $f(x) = x^2 - 6x + 2$ c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$
b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ d) $f(x) = -2x^2 + 2x$ f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$
- Wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2 + 6x - 8$ jest parabola o wierzchołku, którego pierwsza współrzędna jest równa x_w . Zapisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.
a) $x_w = -3$ c) $x_w = -6$ e) $x_w = \frac{3}{2}$
b) $x_w = 3$ d) $x_w = 12$ f) $x_w = -\frac{3}{2}$
- Punkt W jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $y = x^2 + bx + c$. Oblicz współczynniki b i c .
a) $W(2, 4)$ c) $W(\frac{1}{2}, -1)$ e) $W(10, 0)$
b) $W(-1, -3)$ d) $W(0, 3)$ f) $W(-4, 4)$
- Wykres funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest symetryczny względem prostej l i przecina oś OY w punkcie P . Oblicz współczynniki b i c . Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.
a) $l: x = 1$, $P(0, 1)$ b) $l: x = -4$, $P(0, 2)$ c) $l: x = 3$, $P(0, -6)$
- Punkty $A(0, -2)$ i $B(1, 1)$ należą do paraboli będącej wykresem funkcji f . Wyznacz wzór tej funkcji przy założeniu, że wierzchołkiem tej paraboli jest punkt: a) A , b) B .
- Wykres funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabolą o wierzchołku w punkcie (p, q) . Uzasadnij, że $b = -2p$ i $c = p^2 + q$.

Sprawdź się

- Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej, a następnie naskicuj jej wykres, przesuwając odpowiednio parabolę $y = x^2$ lub parabolę $y = -x^2$.
a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ c) $f(x) = x^2 + 2x$ e) $f(x) = x^2 - 6x + 8$
b) $f(x) = x^2 + 2x + 4$ d) $f(x) = -x^2 + 4x$ f) $f(x) = -x^2 + 8x - 8$
- Do paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f należy punkt P , a wierzchołkiem tej paraboli jest punkt W . Wyznacz wzór tej funkcji.
a) $P(2, 5)$, $W(1, 4)$ b) $P(-3, 6)$, $W(-2, 3)$ c) $P(-4, -8)$, $W(-3, -4)$

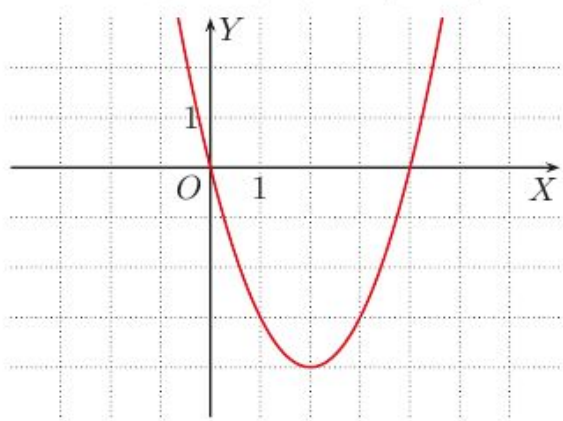
1.5. Równania kwadratowe (1)

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji i odczytaj z niego miejsca zerowe tej funkcji.

a) $y = x^2 - 4x$

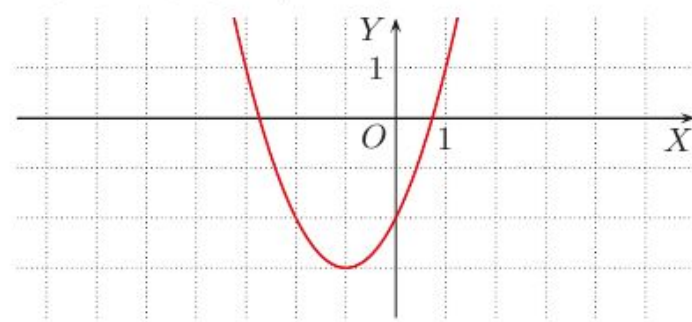
Po przekształceniu do postaci kanonicznej mamy: $y = (x - 2)^2 - 4$.



Z wykresu można odczytać miejsca zerowe: $x = 0$ i $x = 4$.

b) $y = x^2 + 2x - 2$

Po przekształceniu do postaci kanonicznej mamy: $y = (x + 1)^2 - 3$.

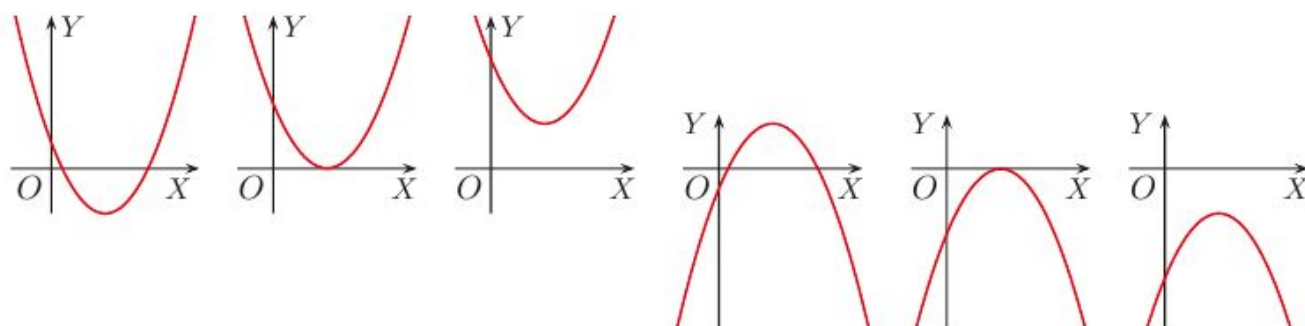


Z wykresu można odczytać tylko przybliżone wartości miejsc zerowych. Wyznaczenie ich dokładnych wartości wymaga rozwiązania równania $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) to miejsca zerowe funkcji $y = ax^2 + bx + c$.

Ćwiczenie 1

Na poniższych rysunkach przedstawiono możliwe położenia wykresu funkcji kwadratowej względem osi OX . Ile rozwiązań może mieć równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$?



Rozwiązanie równania z niewiadomą x polega na wyznaczeniu wszystkich wartości x , dla których to równanie jest spełnione. Zbiór tych x nazywamy **zbiorem rozwiązań równania**.

Rozwiązania równania nazywane są również jego **pierwiastkami**.

Przykład 2

Podaj zbiór rozwiązań równania $4x^2 - 8x = 0$.

Lewą stronę równania rozkładamy na czynniki:

$$4x(x - 2) = 0$$

czyli $x = 0$ lub $x - 2 = 0$, zatem $x = 0$ lub $x = 2$.

Zbiorem rozwiązań równania jest zbiór $\{0, 2\}$.

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$:
 $a \cdot b = 0$
 wtedy i tylko wtedy, gdy
 $a = 0$ lub $b = 0$.

Ćwiczenie 2

Podaj zbiór rozwiązań równania.

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $7x - 3x^2 = 0$ c) $2x^2 = 5x$ d) $8x = \frac{1}{2}x^2$

W niektórych przykładach przy rozkładzie trójmianu kwadratowego na czynniki liniowe możemy skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 9 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów: $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$.

$$(2x + 3)(2x - 3) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \text{ lub } 2x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ lub } x = \frac{3}{2}$$

Rozwiązaniami równania są liczby $-\frac{3}{2}$ i $\frac{3}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $16x^2 - 25 = 0$ b) $100x^2 - 9 = 0$ c) $4x^2 - 121 = 0$ d) $\frac{9}{4}x^2 - 4 = 0$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

$$(x - 2)^2 = 0, \text{ czyli } x - 2 = 0$$

Zatem liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem tego równania.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 8x + 16 = 0$ c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ e) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$
 b) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ f) $3x^2 + 9 = 2x^2 - 6x$

Przykład 5

a) Rozwiąż równanie $4x^2 - 7 = 0$.

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 7 \quad / : 4 \\ x^2 &= \frac{7}{4} \\ x &= -\sqrt{\frac{7}{4}} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{\frac{7}{4}} \end{aligned}$$

Rozwiązania równania: $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ i $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $6x^2 - 18 = 0$ b) $x^2 + 4 = 0$ c) $\frac{4}{5}x^2 - 2 = 0$ d) $4x^2 + 1 = 0$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $-7x^2 + 42x = 0$ c) $36x^2 = 6x$ e) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x = 0$
b) $9x^2 + \frac{1}{3}x = 0$ d) $2x + 18x^2 = 0$ f) $\sqrt{3}x = -3x^2$

2. Rozwiąż równanie.

a) $100x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 + 64 = 16x$ g) $x^2 = (1-x)(1+x)$
b) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9} = 0$ e) $24x - x^2 = 144$ h) $\frac{1}{2}x(6-x) = 2+x$
c) $x^2 + 10x + 25 = 0$ f) $1 + 9x^2 + 6x = 0$ i) $(x-3)(x-2) = 7x-30$

3. Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych.

a) $y = 3x^2 - 12x$ c) $y = 3x^2 + 12$ e) $y = 900x^2 + 4$
b) $y = 3x^2 - 12$ d) $y = 900x^2 + 4x$ f) $y = 900x^2 - 4$

4. Wyznacz wspólne miejsce zerowe funkcji f i g .

a) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$
b) $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$
c) $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$

Sprawdź się

5. Rozwiąż równanie.

a) $1 - x^2 = 1 - x$ c) $1 - 6x = -9x^2$ e) $x(x+1) = 9x - 16$
b) $4 - x = \frac{1}{3}x^2 + 4$ d) $x^2 = 12x - 36$ f) $(2-x)x = 4 - 2x$

6. Ile rozwiązań ma równanie?

a) $54x^2 - 6x = 0$ b) $54x^2 + 6 = 0$ c) $54x^2 - 6 = 0$

1.6. Równania kwadratowe (2)

Przykład 1

Rozwiąż równanie $4x^2 + 20x + 25 = 0$.

Korzystamy ze wzoru $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned} (2x+5)^2 &= 0 \\ 2x+5 &= 0 \end{aligned}$$

Równanie ma jeden pierwiastek: $x = -\frac{5}{2}$.

Czy wiesz, że...

Równania kwadratowe były rozwiązywane już przez starożytnych Babilończyków około 1800 r. p.n.e. Świadczą o tym zachowane gliniane tabliczki z pismem klinowym.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ b) $25x^2 + 40x + 16 = 0$ c) $4x^2 - 28x + 49 = 0$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 27 = 0$.

$$\begin{aligned} (2x-5)^2 - 25 + 27 &= 0 \\ (2x-5)^2 &= -2 \end{aligned}$$

Zauważ, że:
 $(2x-5)^2 - 25 = 4x^2 - 20x$.

Równanie to jest sprzeczne, gdyż $(2x-5)^2 \geq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że podane równanie jest sprzeczne.

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ b) $x^2 + 6x + 12 = 0$ c) $4x^2 + 4x + 5 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 20x + 23 = 0$.

$$\begin{aligned} (2x-5)^2 - 25 + 23 &= 0 \\ (2x-5)^2 &= 2 \end{aligned}$$

Zauważ, że:
 $(2x-5)^2 - 25 = 4x^2 - 20x$.

$$\begin{aligned} 2x-5 &= -\sqrt{2} \quad \text{lub} \quad 2x-5 = \sqrt{2} \\ 2x &= 5 - \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad 2x = 5 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Równanie ma dwa pierwiastki: $x = \frac{5-\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{5+\sqrt{2}}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $x^2 + 6x + 8 = 0$ c) $x^2 + 6x + 7 = 0$

Postępując tak jak w przykładach 1–3, możemy rozwiązać dowolne równanie kwadratowe. Zwykle korzystamy jednak ze wzorów podanych w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa** pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac$$

- Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma **jeden** pierwiastek:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Jeśli $\Delta < 0$, to równanie **nie ma** pierwiastków (jest sprzeczne).

Dowód

Zapiszmy trójmian w postaci kanonicznej: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

Stąd $ax^2 + bx + c = 0$, gdy $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$, co oznacza, że:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

- Jeśli $\Delta < 0$, to powyższe równanie jest sprzeczne.
- Jeśli $\Delta = 0$, to otrzymujemy równanie:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Jego rozwiązaniem jest liczba $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to otrzymujemy:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Rozwiązaniami równania są liczby $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

W przypadku, gdy $\Delta = 0$, pierwiastek $x_0 = -\frac{b}{2a}$ nazywamy **pierwiastkiem podwójnym** (zauważ, że dla $\Delta = 0$ ze wzorów: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ otrzymujemy $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$).

Ćwiczenie 4

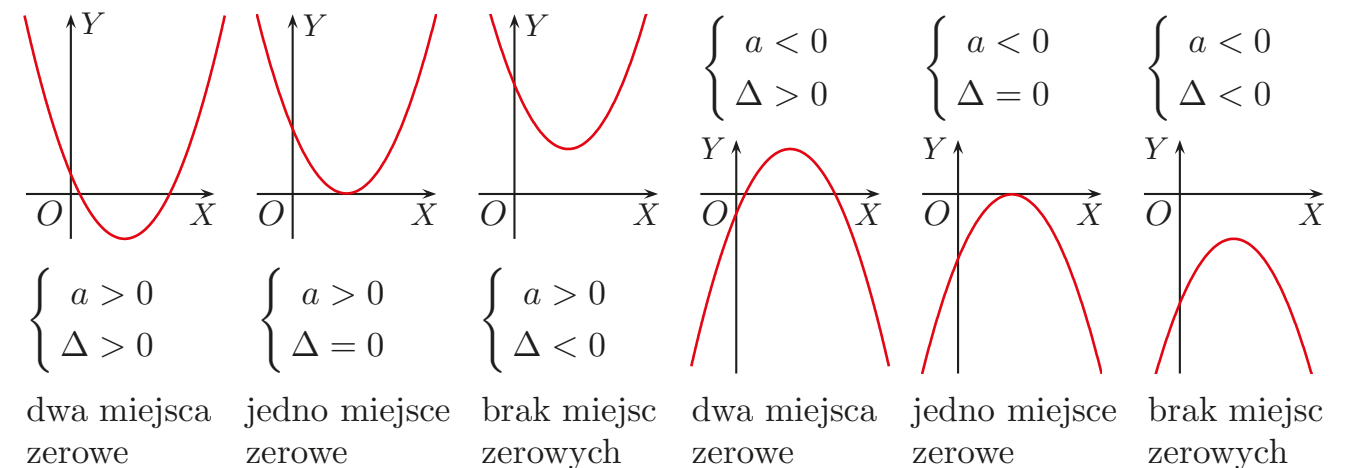
Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego i podaj liczbę rozwiązań równania.

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|--|
| a) $x^2 + 8x + 15 = 0$ | d) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ | g) $-3x^2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{3} = 0$ |
| b) $x^2 - 4x + 6 = 0$ | e) $\frac{9}{5}x^2 - 6x + 5 = 0$ | h) $\sqrt{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ |
| c) $5x^2 + 5x - \frac{1}{2} = 0$ | f) $-x^2 + 4x - 7 = 0$ | i) $4\sqrt{2}x^2 + 3x = 0$ |

Interpretacja geometryczna równania kwadratowego

Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ są miejscami zerowymi funkcji $y = ax^2 + bx + c$. Są one zatem odciętymi punktów przecięcia odpowiedniej paraboli z osią OX .

Poniżej przedstawiono możliwe położenia paraboli $y = ax^2 + bx + c$ względem osi OX w zależności od współczynnika a i wyróżnika Δ .



Przykład 4

Rozwiąż równanie.

a) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 16 + 24 = 40$. Ponieważ $\Delta > 0$, równanie ma dwa pierwiastki.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 - \sqrt{10}}{3}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$$

b) $4x^2 + 6x + \frac{9}{4} = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{9}{4} = 36 - 36 = 0$, równanie ma zatem jeden pierwiastek podwójny.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

c) $7x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 9 - 56 = -47 < 0$, więc równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

- | | | |
|------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$ | d) $28x^2 - 4x + \frac{1}{7} = 0$ | g) $-3x^2 + 2x - 3 = 0$ |
| b) $4x^2 - x - 5 = 0$ | e) $-x^2 + 6x + 1 = 0$ | h) $6x^2 - 2x - 1 = 0$ |
| c) $3x^2 - 5x - 2 = 0$ | f) $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = 0$ | i) $2x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ |

Zadania

1. Rozwiąż równanie.
- a) $2x^2 - 9x - 35 = 0$ d) $5x^2 - 6x + 6 = 0$ g) $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$
b) $4x^2 - 13x + 3 = 0$ e) $-2x^2 + 5x - 3 = 0$ h) $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$
c) $-6x^2 + 13x + 5 = 0$ f) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ i) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9} = 0$
2. Rozwiąż równanie.
- a) $2x^2 + 3 = -7x$ d) $-2x - 3x^2 + 6 = 0$ g) $4(x^2 + 5) = x$
b) $x + 10 = 3x^2$ e) $5x^2 = 2 - 2x$ h) $x^2 + x = 4x + 7$
c) $16x^2 + 24\sqrt{2}x = -18$ f) $5x^2 = 8x - 5$ i) $3x^2 + 1 = 7x$
3. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.
- a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 12$
b) $f(x) = 2x^2 + 6x + 3$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$
c) $f(x) = -4x^2 + x + 3$ f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x + 1$
4. Rozwiąż równanie.
- a) $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)^2$ d) $(\frac{1}{2}x - 3)(x + 2) = (5 - x)(6 - x)$
b) $6x^2 + 7x + 2 = (2 - 3x)(3x + 2)$ e) $(x - 3)(x + 5) = (2x + 3)(x - 4)$
c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 9 = (x - 3)(x - 5)$ f) $(4x - 1)(x - 4) = (3x + 2)(x - 7)$
5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania.
- a) $(\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x + 2 = 0$ b) $13x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x + \frac{1}{8} = 0$

Sprawdź się

6. Rozwiąż równanie.
- a) $x^2 - 4x + 4 = 0$ c) $-4x^2 + 6x - 1 = 0$ e) $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 8 = 0$
b) $x^2 - 4x + 7 = 0$ d) $-4x^2 + 6x - 3 = 0$ f) $\frac{1}{4}x^2 + 3x - 8 = 0$
7. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f .
- a) $f(x) = x^2 + 2x - 15$ b) $f(x) = 3 + 5x - 2x^2$
8. Rozwiąż równanie.
- a) $x(x - 5) = 2x(x - 1)$ c) $\frac{x^2 - 5x + 4}{5} = \frac{1 - 3x}{2}$
b) $2(1 - 5x) = (1 - x)^2$ d) $\frac{(x + 1)^2}{3} = \frac{(x + 2)^2 - 2}{2}$

1.7. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (1)

Definicja

Postać $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **postacią iloczynową** funkcji kwadratowej.

Przedstawienie wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej nazywamy również **rozkładem na czynniki liniowe**. Rozkład na czynniki liniowe można zapisać na różne sposoby, np.:

$$y = (3x + 2)(x - 7) = \text{Czynniki liniowe: } 3x + 2 \text{ i } x - 7.$$
$$= 3(x + \frac{2}{3})(x - 7) \quad \text{Czynniki liniowe: } x + \frac{2}{3} \text{ i } x - 7.$$

Aby przejść od postaci iloczynowej do ogólnej, wystarczy wykonać mnożenie.

Na przykład dla trójkmianu $y = 2(x - 3)(x + 5)$ mamy:

$$y = 2(x - 3)(x + 5) = 2(x^2 + 5x - 3x - 15) = 2x^2 + 4x - 30$$

Ćwiczenie 1

Przedstaw trójkmian kwadratowy w postaci ogólnej.

a) $y = -\frac{1}{3}(x + 3)(x - 9)$ b) $y = 4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$ c) $y = \frac{1}{6}x(x + 2)$

Liczby x_1 i x_2 występujące w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ są miejscami zerowymi (pierwiastkami) trójkmianu kwadratowego, czyli pierwiastkami równania $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Przykład 1

Postać ogólna	Postać iloczynowa	Czynniki liniowe	Pierwiastki
$y = x^2 - 9x + 14$	$y = (x - 2)(x - 7)$	$x - 2$ i $x - 7$	$x_1 = 2$ i $x_2 = 7$
$y = 4x^2 + 4x + 1$	$y = 4(x + \frac{1}{2})^2$	$x + \frac{1}{2}$ (czynnik podwójny)	$x_0 = -\frac{1}{2}$ (pierwiastek podwójny)
$y = 2x^2 + 6$	nie można rozłożyć na czynniki liniowe		brak pierwiastków

Ćwiczenie 2

Odczytaj czynniki liniowe i podaj pierwiastki trójkmianu kwadratowego.

a) $y = 4(x - 3)(x - 5)$ c) $y = -(x + 4)(x + 8)$ e) $y = -3(x - 2)^2$
b) $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x + 6)$ d) $y = 8x(x - 9)$ f) $y = 13(x + 7)^2$

Ćwiczenie 3

Podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego.

a) $y = -2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})$ b) $y = (x - 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{2})$

Ćwiczenie 4

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej.

a) $y = 5x^2 - 3x$ b) $y = 16x^2 - 1$ c) $y = 9x^2 - 8$

Twierdzenie

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

Przykład 2

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = 25 + 24 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$, zatem:

$$x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3, \quad x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

Postać iloczynowa: $y = 2(x + 3)(x - \frac{1}{2})$.

b) $y = x^2 - 2x - 1$

$\Delta = 4 + 4 = 8$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$, zatem:

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Postać iloczynowa: $y = (x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2}))$, którą możemy zapisać: $y = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$.

c) $y = -2x^2 + x - 4$

$\Delta = 1 - 32 = -31 < 0$, więc trójmian nie ma pierwiastków i nie można go rozłożyć na czynniki liniowe.

Ćwiczenie 5

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = x^2 - 8x + 15$ d) $y = 12x^2 + 11x + 2$ g) $y = 2x^2 - 3x + 4$
b) $y = x^2 + 3x - 28$ e) $y = -2x^2 - 2x + 24$ h) $y = x^2 - 2x - 2$
c) $y = 3x^2 - 7x + 2$ f) $y = -4x^2 + 3x + 1$ i) $y = 2x^2 - 2x - 1$

Zadania

1. Podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisz go w postaci ogólnej.

a) $y = (x + 10)(x - 20)$ d) $y = (2x - 4)(2x - 1)$ g) $y = -x(x + 3)$
b) $y = 6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$ e) $y = (2x + 1)(3x + 1)$ h) $y = \frac{1}{2}x(2x - 1)$
c) $y = 2(x + 3)(3x - 4)$ f) $y = (5x - 2)(4x - 3)$ i) $y = (7 - 3x)x$

2. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej.

a) $y = x^2 - x - 6$ d) $y = -2x^2 + 4x - 1$ g) $y = 3x^2 - 10x - 8$
b) $y = -x^2 + x + 6$ e) $y = 3x^2 - 7x + 4$ h) $y = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$
c) $y = 2x^2 - 3x - 2$ f) $y = -4x^2 + 2x + 1$ i) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 7$

3. Przedstaw funkcję f w postaci iloczynowej. Podaj jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = 4x^2 - 1$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x$ e) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$
b) $f(x) = 9x^2 - 16$ d) $f(x) = 6x - 9x^2$ f) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$

D 4. a) Uzasadnij, że trójmian kwadratowy $y = \sqrt{2}x^2 + (3 - \sqrt{2})x + \frac{1}{4}$ można przedstawić w postaci iloczynowej.

b) Uzasadnij, że trójmianu kwadratowego $y = \sqrt{3}x^2 + (3 - \sqrt{3})x + \frac{1}{2}$ nie można przedstawić w postaci iloczynowej.

5. Przedstaw funkcję f w postaciach iloczynowej i kanonicznej. Naskicuj parabolę, która jest wykresem tej funkcji.

a) $f(x) = -x^2 - 4x$ c) $f(x) = 2x^2 + 2x$ e) $f(x) = -x^2 - 4x - 3$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ f) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 1$

Sprawdź się

6. Oblicz pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisz go w postaci iloczynowej.

a) $y = x^2 - 5x - 6$ c) $y = -6x^2 - 7x + 3$ e) $y = (x - 2)^2 - 4$
b) $y = 2x^2 - 8x + 6$ d) $y = -x^2 + 4x - 4$ f) $y = -2(x - 2)^2 + 2$

7. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

a) $y = x^2 + \sqrt{3}x - 6$ b) $y = \sqrt{3}x^2 + 6x$ c) $y = \sqrt{3}x^2 + 9$

8. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych.

a) $y = x(x + 6)$ c) $y = (x + 2)(x - 4)$ e) $y = -(2x + 4)(6x - 3)$
b) $y = -\frac{1}{2}x(x - 3)$ d) $y = (x - 6)(x + \frac{1}{2})$ f) $y = (2x - 3)(4x + 5)$

1.8. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (2)

Przykład 1

Oblicz współczynniki b i c trójkątnu kwadratowego $y = x^2 + bx + c$, którego pierwiastkami są liczby -4 i 2 .

Trójkątnu zapisujemy w postaci iloczynowej, a następnie przekształcamy ją do postaci ogólnej: $y = (x + 4)(x - 2) = x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 + 2x - 8$.

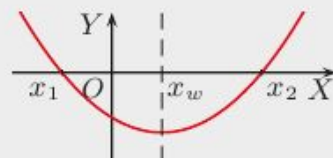
Wynika stąd, że $b = 2$ i $c = -8$.

Ćwiczenie 1

Oblicz współczynniki b i c trójkątnu kwadratowego $y = x^2 + bx + c$, którego pierwiastkami są podane liczby.

- a) 3 i 5 b) 4 i -3 c) -5 i -2 d) -2 i $\frac{1}{2}$ e) $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$

Znajomość miejsc zerowych x_1, x_2 funkcji kwadratowej pozwala wyznaczyć oś symetrii paraboli i współrzędną x_w jej wierzchołka, gdyż $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$.



Przykład 2

Wyznacz równanie osi symetrii oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = 2(x - 1)(x - 5)$.

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby $x_1 = 1$ i $x_2 = 5$, zatem współrzędna wierzchołka $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3$.

Ośią symetrii paraboli jest prosta $x = 3$. Wyznaczamy rzędną wierzchołka:

$$y_w = f(x_w) = f(3) = 2(3 - 1)(3 - 5) = -8$$

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(3, -8)$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz równanie osi symetrii paraboli oraz współrzędne jej wierzchołka.

- a) $y = x(x - 6)$ c) $y = \frac{1}{2}(x + 6)(x - 2)$ e) $y = (2x + 1)(2x - 3)$
b) $y = -x(x - 10)$ d) $y = -2(x + 3)(x - 4)$ f) $y = (4x - 1)(5 - 4x)$

Ćwiczenie 3

Miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2)$ spełniają podane warunki. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .

- a) $x_2 = 2x_1, x_1 + x_2 = 6$ b) $x_2 = 3x_1, x_1 + x_2 = -12$

Przykład 3

Wyznacz trójkątnu kwadratowy, którego pierwiastkami są liczby 2 i 4 , a zbiorem wartości jest przedział $[-2; \infty)$.

Trójkątnu zapisujemy w postaci iloczynowej: $y = a(x - 2)(x - 4)$.

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli: $x_w = \frac{2 + 4}{2} = 3$; zbiorem wartości funkcji jest przedział $[-2; \infty)$, zatem $y_w = -2$.

Podstawiamy $x = 3$ i $y = -2$ do wzoru $y = a(x - 2)(x - 4)$ i otrzymujemy $-2 = a(3 - 2)(3 - 4)$, więc $a = 2$. Zatem trójkątnu ma postać $y = 2(x - 2)(x - 4)$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz trójkątnu kwadratowy o pierwiastkach x_1, x_2 i zbiorze wartości Y .

- a) $x_1 = -1, x_2 = 3, Y = [-4; \infty)$ c) $x_1 = -8, x_2 = 2, Y = (-\infty; 10]$
b) $x_1 = -4, x_2 = 0, Y = (-\infty; 2]$ d) $x_1 = 0, x_2 = 6, Y = [-6; \infty)$

Przykład 4

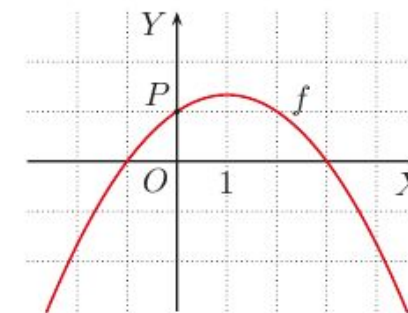
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej f . Zapisz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.

Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 3$, zatem jej wzór można zapisać w postaci iloczynowej $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$.

Do wzoru funkcji podstawiamy współrzędne punktu $P(0, 1)$ i otrzymujemy równanie:

$$1 = a(0 + 1)(0 - 3)$$

Stąd $a = -\frac{1}{3}$, zatem postać iloczynowa funkcji: $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 1)(x - 3)$.



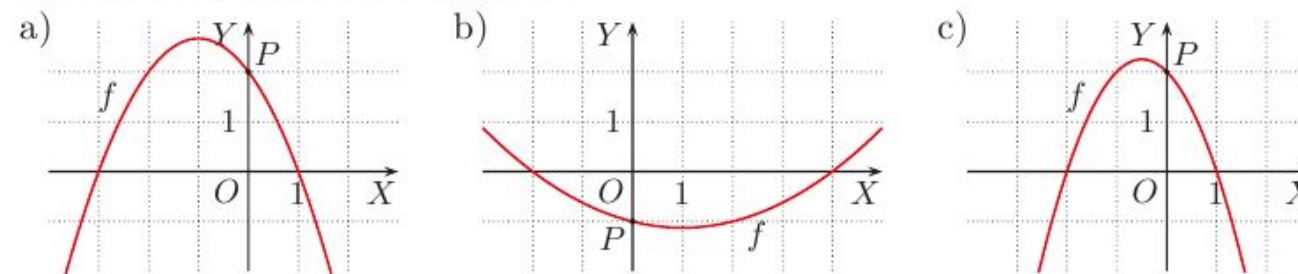
Ćwiczenie 5

Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby -1 oraz 3 . Do wykresu tej funkcji należy punkt P . Wyznacz wzór funkcji f w postaci iloczynowej.

- a) $P(1, -2)$ b) $P(2, 3)$ c) $P(-3, -2)$

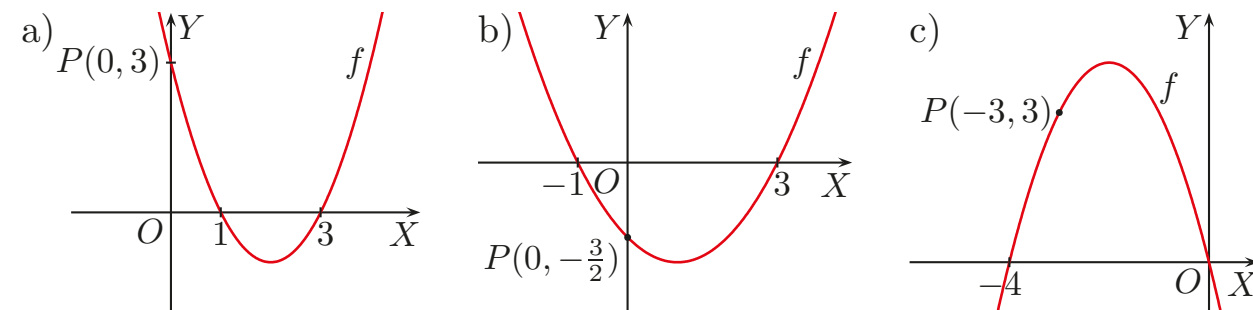
Ćwiczenie 6

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji kwadratowej f . Zapisz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.



Zadania

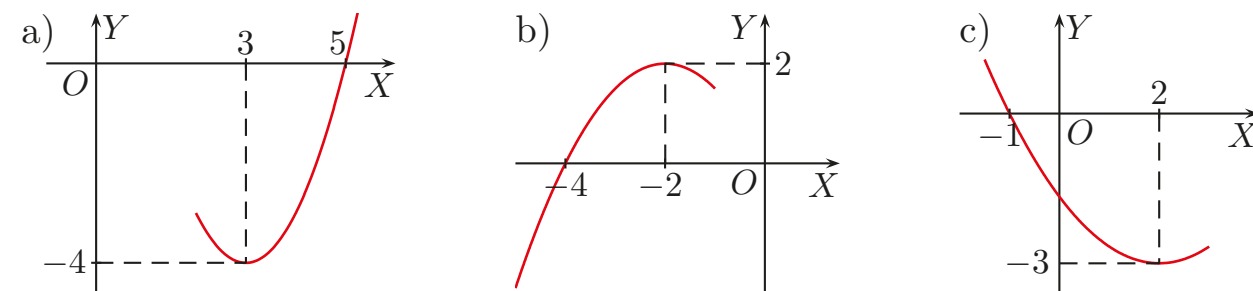
1. Na rysunku przedstawiono parabolę, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Wyznacz wzór tej funkcji w postaciach iloczynowej i ogólnej.



2. Wyznacz w postaciach iloczynowej i ogólnej równanie paraboli przechodzącej przez punkty A , B i C .

- a) $A(1, 0)$, $B(4, 0)$, $C(3, -4)$ c) $A(-5, 0)$, $B(-3, 10)$, $C(2, 0)$
b) $A(-6, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, -6)$ d) $A(0, -9)$, $B(1, 0)$, $C(3, 0)$

3. Na rysunku przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Znajdź miejsce zerowe tej funkcji niezaznaczone na rysunku. Wyznacz wzór funkcji f w postaciach iloczynowej i kanonicznej.



4. Wykres funkcji f można otrzymać przez przesunięcie paraboli $y = 2x^2$. Wyznacz wzór funkcji f w postaciach ogólnej i kanonicznej przy założeniu, że jej miejscami zerowymi są liczby: a) -3 i -1 , b) 0 i 2 , c) 3 i 7 .

Sprawdź się

5. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz wyznacz współrzędne jej wierzchołka. Naskicuj tę parabolę.

- a) $y = -x(x + 6)$ b) $y = (x - 1)(x - 5)$ c) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)(x - 1)$

6. Wyznacz trójmian kwadratowy o pierwiastkach x_1, x_2 i zbiorze wartości Y . Odpowiedź podaj w każdej z postaci wymienionych w ramce.

- a) $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $Y = [-6; \infty)$
b) $x_1 = -6$, $x_2 = 0$, $Y = (-\infty; 8]$
c) $x_1 = 1$, $x_2 = 7$, $Y = (-\infty; 2]$

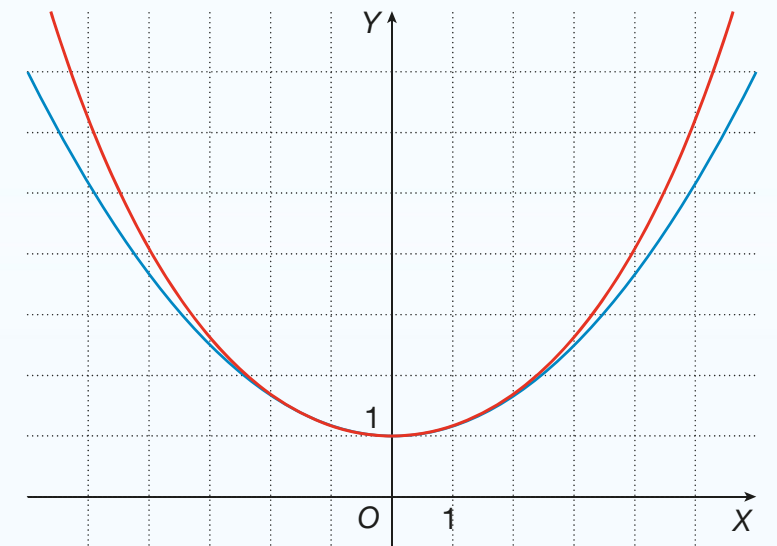
Postać ogólna: $y = ax^2 + bx + c$
Postać kanoniczna: $y = a(x - p)^2 + q$
Postać iloczynowa: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

Krzywa łańcuchowa

Wiszący, zamocowany na końcach łańcuch przyjmuje kształt przypominający parabolę. W 1638 r. opisywał to już Galileusz, włoski fizyk i astronom.

W drugiej połowie XVII w. wykazano, że jest to inna krzywa, zwana **krzywą łańcuchową** lub *catenarią* [czyt. katenarią], od łacińskiego słowa *catena* [czyt. katena] oznaczającego łańcuch.

Na rysunku obok przedstawiono **krzywą łańcuchową** (kolor czerwony) oraz **parabolę** (kolor niebieski), która dla wartości argumentów bliskich 0 jest bardzo dobrym przybliżeniem tej krzywej łańcuchowej.



Kształt krzywej łańcuchowej przyjmują wiszące łańcuchy, liny lub przewody wysokiego napięcia.



Krzywa ta jest wykorzystywana w architekturze. Na zdjęciu monument Gateway Arch w Saint Louis w Stanach Zjednoczonych.



- 1 Skorzystaj z dostępnych źródeł i znajdź inne przykłady wykorzystania krzywej łańcuchowej w architekturze.

1.9. Nierówności kwadratowe

Jeśli mamy wykres funkcji kwadratowej i znamy jej miejsca zerowe, możemy wyznaczyć zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności kwadratowej.

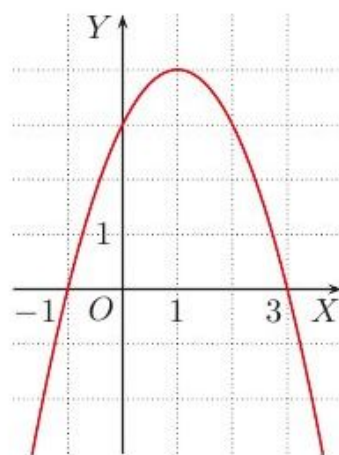
Przykład 1

Dany jest wykres funkcji $y = -x^2 + 2x + 3$. Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x + 3 > 0$.

Z wykresu odczytujemy, że:

$$-x^2 + 2x + 3 > 0 \text{ dla } x \in (-1; 3)$$

Uwaga. Zauważ, że do rozwiązywania nierówności kwadratowej nie potrzebujemy dokładnego wykresu odpowiedniej funkcji. Wystarczy znajomość jej miejsc zerowych i informacja o tym, czy ramiona paraboli, będącej wykresem tej funkcji, są skierowane do góry, czy w dół.



Przykład 2

a) Rozwiąż nierówność $2x^2 - 6x > 0$.

W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji $y = 2x^2 - 6x$ rozwiązujemy równanie $2x^2 - 6x = 0$, czyli $2x(x - 3) = 0$. Zatem $x = 0$ lub $x = 3$.

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$2x^2 - 6x > 0 \text{ dla } x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$$



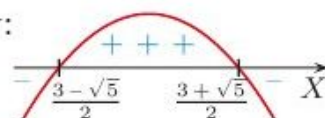
b) Rozwiąż nierówność $-x^2 + 3x - 1 \geq 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 3x - 1 = 0$.

$$\Delta = 9 - 4 = 5, \text{ zatem } x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$-x^2 + 3x - 1 \geq 0 \text{ dla } x \in \left[\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right]$$



Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

a) $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$ b) $2x^2 + x - 1 \leq 0$ c) $-x^2 + 2x + 4 > 0$

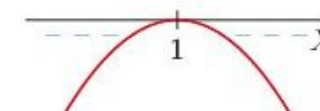
Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 2x - 1 = 0$, czyli $-(x - 1)^2 = 0$. Zatem $x = 1$ (jest to pierwiastek podwójny). Rozwiązanie równania zaznaczamy na osi OX i szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół.

Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$-x^2 + 2x - 1 \geq 0 \text{ dla } x = 1$$



Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

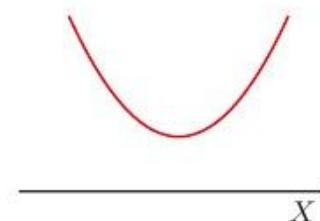
a) $-x^2 + 2x - 1 \leq 0$ b) $-x^2 + 2x - 1 < 0$ c) $-x^2 + 2x - 1 > 0$

Przykład 4

a) Rozwiąż nierówność $5x^2 - 3x + 2 < 0$.

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -31 < 0$$

Równanie $5x^2 - 3x + 2 = 0$ nie ma pierwiastków oraz współczynnik przy x^2 jest dodatni. Parabola znajduje się zatem nad osią OX , a to oznacza, że nierówność jest sprzeczna.



b) Rozwiąż nierówność $-3x^2 + 2x - 1 < 0$.

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -8 < 0$$

Równanie $-3x^2 + 2x - 1 = 0$ nie ma pierwiastków oraz współczynnik przy x^2 jest ujemny. Parabola znajduje się zatem pod osią OX , a to oznacza, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnego x , czyli $x \in \mathbb{R}$.



Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $4x^2 + 2x + 1 > 0$ b) $x^2 + x + 3 < 0$ c) $-2x^2 + \sqrt{2}x - 1 \leq 0$

Przykład 5

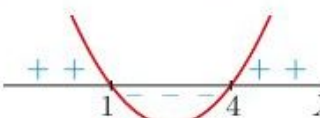
Rozwiąż nierówność $2(2 - x) < -x(x - 3)$.

$$4 - 2x < -x^2 + 3x$$

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

Wykonujemy mnożenie.
Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę nierówności.

Rozwiązujemy równanie $x^2 - 5x + 4 = 0$ i otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 4$. Szkicujemy parabolę i odczytujemy, że nierówność jest spełniona dla $x \in (1; 4)$.



Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

- a) $x - x^2 \leq 3 - 3x^2$ c) $(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3})^2 > \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$ e) $(2x+1)^2 + (x-3)^2 < 10$
b) $-x(2-x) > 1 - x^2$ d) $2 - x^2 < (2-x)^2$ f) $3x - (1-x)^2 \geq x^2 - 4$

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej składa się z kolejnych etapów:

- rozwiązanie odpowiedniego równania,
- naszkicowanie odpowiedniej paraboli,
- odczytanie z rysunku rozwiązania nierówności,
- zapisanie odpowiedzi.

Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 > 25$ d) $x^2 - x \geq 6$ g) $9x + 5 \geq 2x^2$ j) $6x^2 - x > 12$
b) $x^2 \leq 16$ e) $x^2 - 4 \leq 3x$ h) $2x^2 + 5x > 3$ k) $3x + 8 \geq \frac{1}{2}x^2$
c) $4x^2 \geq 9$ f) $4x + 5 > x^2$ i) $3x^2 + 1 < x$ l) $\frac{2}{3}x^2 + 6 \leq x$

2. Ile liczb całkowitych spełnia podaną nierówność?

- a) $9 - \frac{1}{4}x^2 \geq 0$ b) $\frac{1}{3}x^2 > x$ c) $2x^2 - 10 \leq x$ d) $2 - x > x^2$

3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające podaną nierówność.

- a) $x^2 - 6x + 3 \leq 0$ b) $-3x^2 + 6x + 5 > 0$ c) $2x^2 + 2x - 15 < 0$

4. Rozwiąż nierówność.

- a) $-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} < 0$ d) $x^2 + 2x + 2 > 0$ g) $2x^2 - x + \frac{1}{2} \leq 0$
b) $-3x^2 + 2x - \frac{1}{3} \leq 0$ e) $-9x^2 + 2x - \frac{1}{9} < 0$ h) $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$
c) $3x^2 + 14x - 5 \geq 0$ f) $-2x^2 - 7x + 4 \leq 0$ i) $x^2 + x + 1 < 0$

5. a) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = x^2 - 6x + 5$ przyjmuje wartości większe od 5, a dla jakich mniejsze od -3 ?

b) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = x^2 - 8x + 15$ przyjmuje wartości należące do przedziału $(3; 8)$?

6. Rozwiąż nierówność.

- a) $(2x-2)(x-3) < (x-3)(x-4)$ d) $(2x-2)^2 \geq (3x-2)(x-3)$
b) $(3x-1)(x+2) \geq (x-3)(2x-1)$ e) $2x^2 - 3x + 4 \geq -(x-1)^2 - 6$
c) $(4x-1)(4-x) \leq (2-3x)(x+1)$ f) $(2x+3)^2 - 9 < 8 - (3-x)^2$

7. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

- a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ b) $f(x) = 3x^2 - x$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x$

8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x(x-4)}$.

Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór funkcji ma sens. We wzorze funkcji f występuje pierwiastek, zatem wyrażenie pod nim musi być nieujemne:

$$x(x-4) \geq 0$$

Nierówność ta zachodzi dla $x \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$.

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$.

Wyznacz dziedzinę funkcji f .

- a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$
b) $f(x) = \sqrt{8 - x^2}$ e) $f(x) = \sqrt{6x^2 - 7x - 5}$
c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}x - 24}$

9. Dane są zbiory A i B . Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$, gdy:

- a) A – zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 4x + 1 \leq 0$,
 B – zbiór rozwiązań nierówności $3x - x^2 \geq 0$,
b) A – zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 5x + 6 > 0$,
 B – zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 5x + 4 < 0$.

Sprawdź się

10. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 \leq 8$ d) $2 > -x^2$ g) $x^2 + 4x - 21 \geq 0$
b) $x^2 > 9$ e) $x^2 \leq 4x - 4$ h) $-x^2 + 2x + 15 > 0$
c) $x^2 \geq x$ f) $6x > -x^2 - 9$ i) $6x^2 - x - 1 < 0$

11. Które dzielniki całkowite liczby 12 spełniają podaną nierówność?

- a) $x^2 - 2x + 4 \leq 0$ c) $-2x^2 + 3x + 1 > 0$ e) $2x^2 - 1 > 1 - 3x$
b) $x^2 - 4x + 9 > 0$ d) $-x^2 + 4x + 1 \leq 0$ f) $1 - x \leq x^2$

12. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x) = x + 4$.

- a) $f(x) = x^2 + 5x + 7$ b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ c) $f(x) = 4x^2 + x + 3$

1.10. Funkcja kwadratowa – zastosowania (1)

Przykład 1

Suma liczb p i q jest równa 12. Oblicz największą wartość iloczynu tych liczb.

$$p + q = 12, \text{ zatem } q = 12 - p.$$

$$\text{Iloczyn tych liczb to } p \cdot q = p(12 - p) = 12p - p^2 = -p^2 + 12p.$$

Wyznaczamy wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji danej wzorem:

$$f(p) = -p^2 + 12p \quad \text{Wykresem funkcji } f \text{ jest parabola o ramionach skierowanych w dół.}$$

$$p_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{-2} = 6, \quad f(p_w) = -6^2 + 12 \cdot 6 = -36 + 72 = 36$$

Największa wartość iloczynu liczb p i q jest równa 36 (dla $p = q = 6$).

Ćwiczenie 1

Oblicz największą wartość iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa:

- a) 38, b) $\frac{1}{2}$, c) $\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 2

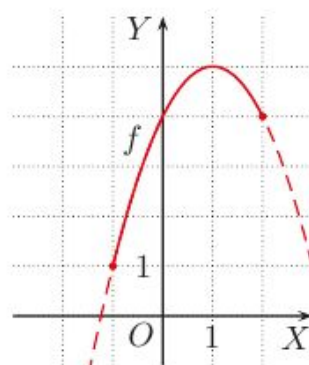
Suma liczby p i podwojonej liczby q jest równa 36. Oblicz największą wartość iloczynu liczb p i q .

Przykład 2

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ w przedziale $[-1; 2]$.

Obliczamy wartości funkcji f na końcach przedziału: $f(-1) = 1$ oraz $f(2) = 4$.

Wierzchołek paraboli ma współrzędne: $x_w = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_w = f(1) = 5$. Ponieważ $x_w \in [-1; 2]$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji w tym przedziale jest równa 5. Wartość najmniejsza jest przyjmowana dla $x = -1$ i wynosi 1.



Aby wyznaczyć najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ w przedziale $[p_1; p_2]$, należy obliczyć $f(p_1)$ i $f(p_2)$. Jeśli x_w (pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji) należy do przedziału $[p_1; p_2]$, to obliczamy również $y_w = f(x_w)$. Najmniejsza spośród tych wartości jest najmniejszą wartością funkcji w danym przedziale, a największa – największą wartością.

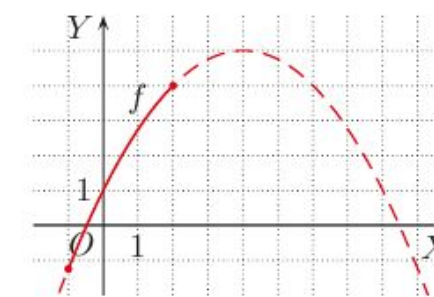
Przykład 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$ w przedziale $[-1; 2]$.

Obliczamy kolejno:

- $f(-1) = -\frac{5}{4}$ oraz $f(2) = 4$
- $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-\frac{1}{2}} = 4 \notin [-1; 2]$

Zatem wartość najmniejsza i wartość największa funkcji f przyjmowane są na końcach przedziału $[-1; 2]$, czyli są to odpowiednio $-\frac{5}{4}$ i 4.



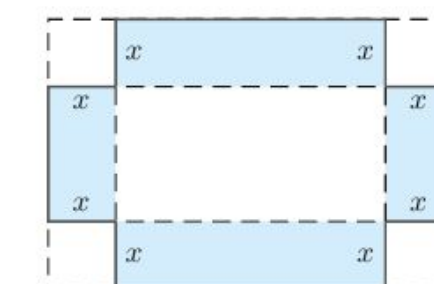
Ćwiczenie 3

Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji f w podanym przedziale.

- a) $f(x) = x^2 + 4x + 8, [-3; 1]$ c) $f(x) = -x^2 + 4x - 6, [-1; 3]$
 b) $f(x) = -2x^2 - 4x - 1, [0; 4]$ d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 3, [-2; 1]$

Przykład 4

Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 60 cm i 40 cm wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.



Pole powierzchni bocznej pudełka w zależności od długości boków wyciętych kwadratów opisuje funkcja:

$$P(x) = 2(40 - 2x) \cdot x + 2(60 - 2x) \cdot x = -8x^2 + 200x$$

Określamy dziedzinę funkcji P : $D = (0; 20)$.

$$x > 0, 2x < 40, 2x < 60$$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli $y = -8x^2 + 200x$:

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{-16} = 12,5, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{40\,000}{-32} = 1250$$

Ponieważ $x_w \in (0; 20)$ oraz ramiona paraboli są skierowane w dół, największa wartość funkcji P jest przyjmowana dla x_w .

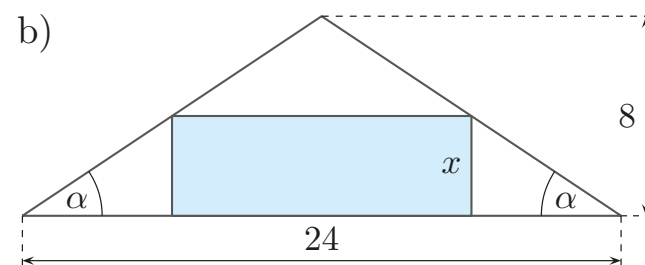
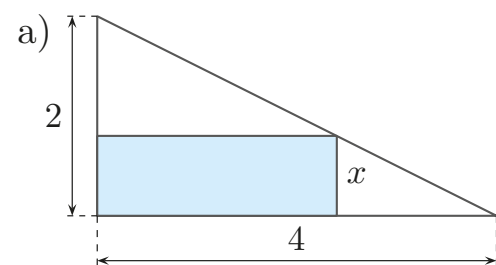
Pudełko ma zatem największe pole powierzchni bocznej, jeśli długość boków wyciętych kwadratów jest równa 12,5 cm. Pole to jest równe 1250 cm².

Ćwiczenie 4

Z kwadratowego arkusza tektury o polu 1600 cm² wycinamy w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu pozostałej części otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz to pole.

Zadania

1. Wyznacz wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ oraz funkcji $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ w przedziale: a) $[0; 4]$, b) $[-4; 6]$.
2. Suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 8.
a) Wyznacz największe pole takiego trójkąta.
b) Wyznacz najmniejszą wartość kwadratu długości przeciwprostokątnej takiego trójkąta.
3. Trzeba ogrodzić prostokątną rabatę kwiatową o jak największej powierzchni, przy czym nie będzie ona grodzona na jednym boku na odcinku 4 m (rysunek obok). Wiadomo, że potrzeba do tego 80 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Jakie wymiary ma ta rabata?
4. Taras przylega jednym z boków do ściany domu (rysunek obok). Wiadomo, że na ogrodzenie tego tarasu potrzeba 28 m bieżących paneli osłonowych i że jego powierzchnia jest największa z możliwych. Jakie wymiary ma ten taras?
5. Podstawą prostopadłościanu o wysokości 5 cm jest prostokąt o obwodzie 12 cm. Jakie powinny być wymiary podstawy tego prostopadłościanu, aby jego pole powierzchni całkowitej było największe?
6. Wyraż pole prostokąta przedstawionego na rysunku jako funkcję zmiennej x . Podaj wymiary prostokąta o największym polu.



Sprawdź się

7. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.
a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, $[0; 3]$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$, $[-6; 3]$
8. Pan Adam kupił prostokątną działkę budowlaną. Na jej ogrodzenie potrzebuje 240 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Wiadomo, że działka ma powierzchnię największą z możliwych. Jakie wymiary ma ta działka?

1.11. Funkcja kwadratowa – zastosowania (2)

Przykład 1

Prostokątny trawnik ma powierzchnię 209 m^2 . Oblicz wymiary tego trawnika w przypadku, gdy różnią się one o 8 m.

Oznaczmy długość krótszego boku trawnika przez x ($x > 0$). Otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned}x(x + 8) &= 209 \\x^2 + 8x - 209 &= 0 \\ \Delta &= 64 + 836 = 900, \sqrt{\Delta} = 30 \\x_1 &= \frac{-8 - 30}{2} < 0, \quad x_2 = \frac{-8 + 30}{2} = 11\end{aligned}$$

Pierwsze rozwiązanie odrzucamy, ponieważ nie spełnia warunków zadania. Zatem trawnik ma wymiary $11 \text{ m} \times 19 \text{ m}$.

Ćwiczenie 1

Prostokątny trawnik ma powierzchnię 216 m^2 . Oblicz wymiary tego trawnika w przypadku, gdy różnią się one o: a) 6 m, b) 15 m.

Przykład 2

Wokół prostokątnego trawnika o wymiarach $12 \text{ m} \times 6 \text{ m}$ ma zostać ułożony pas kostki brukowej o szerokości $x \text{ m}$ oraz powierzchni 63 m^2 (rysunek obok). Oblicz x .

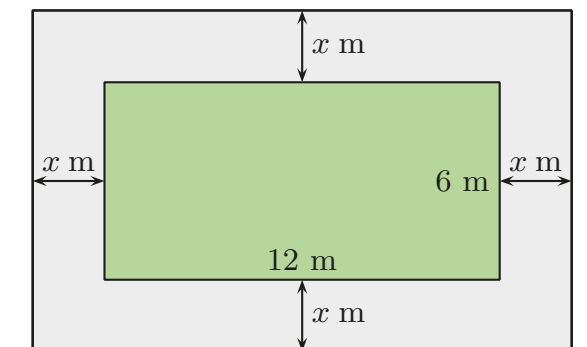
Powierzchnia pokryta kostką jest równa różnicy pól większego i mniejszego prostokąta:

$$(12 + 2x)(6 + 2x) - 12 \cdot 6 = 72 + 24x + 12x + 4x^2 - 72 = 4x^2 + 36x, \quad x > 0$$

Otrzymujemy równanie:

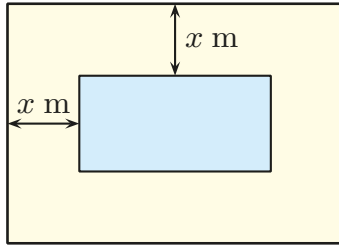
$$\begin{aligned}4x^2 + 36x &= 63 \\4x^2 + 36x - 63 &= 0 \\ \Delta &= 1296 + 1008 = 2304, \sqrt{\Delta} = 48 \\x_1 &= \frac{-36 - 48}{8} < 0, \quad x_2 = \frac{-36 + 48}{8} = 1,5\end{aligned}$$

Pierwsze rozwiązanie odrzucamy, ponieważ nie spełnia warunków zadania. Zatem szerokość pasa jest równa 1,5 m.



Ćwiczenie 2

Wokół basenu o wymiarach $4\text{ m} \times 8\text{ m}$ wyłożono kafelkami pas o szerokości $x\text{ m}$ oraz powierzchni 45 m^2 (rysunek obok). Jaka jest szerokość tego pasa?



Przykład 3

Firma produkująca zabawki oszacowała roczną wielkość sprzedaży lalek na s sztuk w zależności od ceny $x\text{ zł}$ za sztukę (tabela poniżej). Okazało się, że jest to zależność liniowa $s(x) = -40x + 3600$.

Cena x w zł	40	50	60	70	80	90
Liczba lalek s	2000	1600	1200	800	400	0

Koszt wyprodukowania jednej lalki wynosi 20 zł . Ustal taką cenę za jedną lalkę, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Zysk ze sprzedaży jednej lalki, gdy kosztuje ona $x\text{ zł}$, jest równy $(x - 20)\text{ zł}$ (przyjmujemy, że $x \geq 20$). Określmy funkcję z opisującą roczny zysk ze sprzedaży s lalek dla ceny $x\text{ zł}$ za lalkę:

$$\begin{aligned} z(x) &= s(x) \cdot (x - 20) = (-40x + 3600)(x - 20) = \\ &= -40x^2 + 4400x - 72\,000, \text{ gdzie } x \in [20; 90] \end{aligned}$$

Funkcja z największą wartość przyjmuje w wierzchołku odpowiedniej paraboli:

$$x_w = -\frac{4400}{-80} = 55$$

Zatem zysk będzie największy dla ceny $x = 55\text{ zł}$.

Wielkość sprzedaży będzie wówczas równa:

$$s(55) = -40 \cdot 55 + 3600 = 1400$$

a roczny zysk będzie wynosił:

$$z_{\max} = z(55) = 1400 \cdot (55 - 20) = 1400 \cdot 35 = 49\,000\text{ [zł]}$$

Ćwiczenie 3

Koszt wyprodukowania jednego pluszowego misia wynosi 10 zł . Dla ceny 15 zł za misia wielkość sprzedaży wynosi 1000 sztuk rocznie. Każdorazowe podniesienie ceny o 1 zł powoduje spadek sprzedaży o 50 sztuk w ciągu roku.

a) Wyznacz wzór funkcji kwadratowej opisującej roczny zysk w zależności od ceny $x\text{ zł}$ za sztukę.

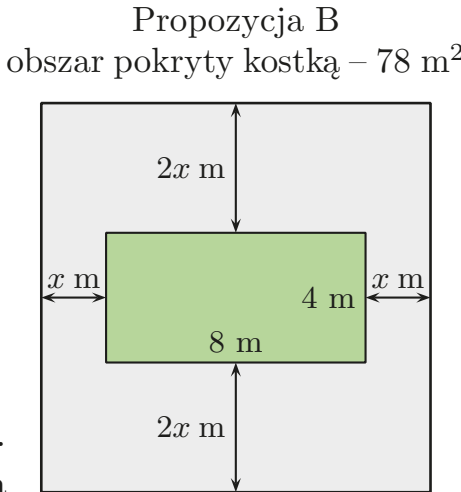
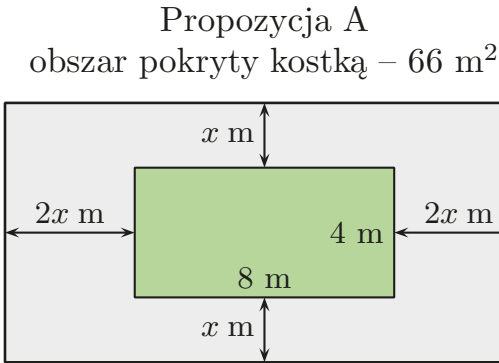
b) Ustal taką cenę za jednego misia, aby roczny zysk firmy był największy. Jaka będzie wtedy wielkość sprzedaży i jaki zysk?

Ćwiczenie 4

Sklep z odzieżą sportową sprzedaje dziennie 16 bluz dresowych. Zysk ze sprzedaży jednej sztuki wynosi 40 zł . Właściciel sklepu przewiduje, że każde obniżenie ceny o 5 zł spowoduje wzrost sprzedaży o 4 sztuki dziennie. O ile powinien on obniżyć cenę, aby mieć największy zysk?

Zadania

- Plac zabaw ma kształt prostokąta o wymiarach $12\text{ m} \times 18\text{ m}$. Szerokość placu zwiększono o $x\text{ m}$, a długość o $2x\text{ m}$. Powierzchnia placu wzrosła wówczas o 144 m^2 . Oblicz x .
- Reprodukcję obrazu o powierzchni P oprawiono w prostokątną ramę o wymiarach zewnętrznych $x \times y$. Oblicz szerokość tej ramy, gdy:
a) $P = 2400\text{ cm}^2$, $x = 80\text{ cm}$, $y = 60\text{ cm}$,
b) $P = 2700\text{ cm}^2$, $x = 75\text{ cm}$, $y = 55\text{ cm}$.
- Wokół prostokątnego trawnika o wymiarach $4\text{ m} \times 8\text{ m}$ ma zostać ułożona kostka brukowa. Projektant przedstawił dwie propozycje: A i B (rysunki poniżej). Dla każdej z tych propozycji oblicz x .



- Dany jest prostokąt o wymiarach $21\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Jego długość i szerokość zwiększono o $x\text{ cm}$. Dla jakiej wartości x przekątna nowego prostokąta ma długość 25 cm ?
- Dany jest prostokąt o wymiarach $3\text{ cm} \times 10\text{ cm}$. Jego długość i szerokość zwiększono o $x\text{ cm}$. Dla jakich wartości x przekątna nowego prostokąta ma długość większą od 13 cm ?
- Szerokość pokoju jest o 2 m mniejsza od jego długości. Jakie wymiary może mieć ten pokój, jeśli przekątna podłogi jest niekrótsza niż 6 m i nie dłuższa niż 10 m ?

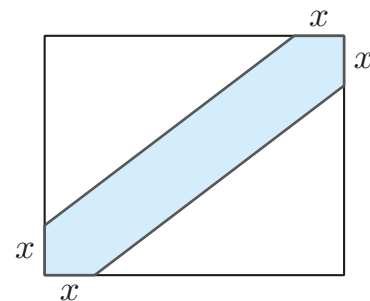


Powtórzenie

Zestaw I

- Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej i naszkicuj jej wykres.
 - $f(x) = x^2 + 4$
 - $f(x) = -x^2 - 2x$
 - $f(x) = x^2 + 2x - 1$
 - $f(x) = x^2 - 6x + 5$
 - $f(x) = -x^2 + 4x - 3$
 - $f(x) = -x^2 - 6x - 1$
- Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby x_1 i x_2 , a do jej wykresu należy punkt P . Zapisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.
 - $x_1 = 1, x_2 = 3, P(0, -4)$
 - $x_1 = -2, x_2 = 4, P(2, 4)$
- Rozwiąż równanie.
 - $x^2 - 49 = 0$
 - $x^2 - 144 = 0$
 - $9x^2 - 1 = 0$
 - $36x^2 - 1 = 0$
 - $4x^2 - 81 = 0$
 - $25x^2 - 36 = 0$
- Rozwiąż równanie.
 - $x^2 - 50 = 0$
 - $2x^2 - 7 = 0$
 - $3x^2 - 24 = 0$
 - $28x^2 - 14 = 0$
 - $27x^2 - 18 = 0$
 - $9x^2 + 4 = 0$
- Znajdź miejsca zerowe funkcji f . Wyznacz równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji.
 - $f(x) = x^2 - 8x$
 - $f(x) = x^2 + 6x$
 - $f(x) = 2x^2 - 3x$
 - $f(x) = 2x + 6x^2$
 - $f(x) = x^2 + 14x + 49$
 - $f(x) = 16x^2 + 8x + 1$
- Rozwiąż równanie.
 - $x^2 + 4x - 21 = 0$
 - $6 - x - x^2 = 0$
 - $x - x^2 + 12 = 0$
 - $2x^2 + 5x - 3 = 0$
 - $-6x^2 - 7x + 5 = 0$
 - $\frac{9}{4}x^2 - 12x + 16 = 0$
 - $2x^2 - 3x - 1 = 0$
 - $3x^2 + 5x + 1 = 0$
 - $-x^2 + 3\sqrt{2}x - 5 = 0$
- Rozwiąż równanie.
 - $(x - 3)^2 = (2x - 1)(x - 3)$
 - $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(3x - 4)$
 - $9x^2 - (2x - 1)^2 = 0$
 - $4x^2 = (1 - x)^2$
- Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz współrzędne jej wierzchołka. Naszkicuj tę parabolę.
 - $y = x^2 + 4x$
 - $y = -x^2 + 2x$
 - $y = 2x^2 - 8x$
 - $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$
 - $y = -x^2 + 2x + 8$
 - $y = x^2 + 6x + 8$

7. Bok BC trójkąta prostokątnego ABC jest o 2 cm krótszy od boku AB i o 7 cm dłuższy od boku AC . Oblicz obwód tego trójkąta.



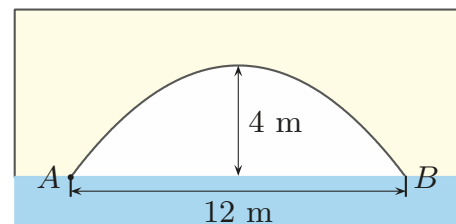
8. Boki prostokąta mają długości 8 i 10 (rysunek obok). Dla jakich wartości x zacieniowany obszar stanowi co najmniej 40% powierzchni prostokąta?

9. Powierzchnia stawu wynosiła 400 m². Przez dwa kolejne lata, na skutek suszy, powierzchnia stawu się zmniejszała – w każdym roku o $p\%$. Po upływie dwóch lat staw miał powierzchnię 289 m². Oblicz p .

- D** 10. Wykaż, że istnieje tylko jeden trójkąt prostokątny, którego boki mają długości równe kolejnym liczbom:

- a) naturalnym, b) parzystym.

11. Łuk przęsła mostu ma kształt paraboli (rysunek obok). Korzystając z wymiarów podanych na rysunku, znajdź równanie tej paraboli. Przyjmij, że początek układu współrzędnych znajduje się:



- a) w punkcie A , b) w środku odcinka AB .

12. Czy pod mostem opisanym w zadaniu 11. przeplynie barka o szerokości 6 m, która po załadowaniu wystaje 3,1 m ponad powierzchnię wody? Przyjmij, że przekrojem poprzecznym barki jest prostokąt.

Sprawdź się

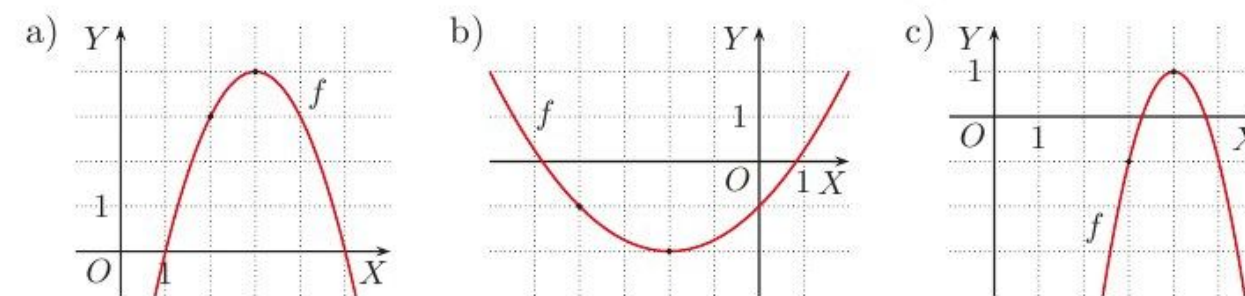
13. Zdjęcie o wymiarach 6 cm $\times$ 9 cm oprawiono w prostokątną ramkę o stałej szerokości. Powierzchnia obramowania jest równa powierzchni zdjęcia. Oblicz szerokość obramowania.
14. Trawnik ma kształt trójkąta prostokątnego. Oblicz obwód i pole tego trawnika przy założeniu, że długości jego boków wyrażone w metrach są równe:
- a) $x, x + 7, x + 8$, b) $x, x + 1, x - 17$.
15. Ogrodnik ma dwie kwadratowe działki, z których jedna ma pole powierzchni 2,25 razy większe niż druga. Do ogrodzenia większej działki potrzebuje on o 40 m więcej siatki niż do ogrodzenia mniejszej. Ile metrów siatki potrzebuje do ogrodzenia obu działek?

9. Wyznacz zbiór wartości funkcji f oraz jej przedziały monotoniczności.
- a) $f(x) = x^2 - 8x$ c) $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$ e) $f(x) = -2x^2 - 12x + 1$
b) $f(x) = 6x - x^2$ d) $f(x) = -4x^2 + 4x + 2$ f) $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 2x - 2$
10. Do wykresu funkcji f należy punkt P . Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji oraz naskicuj jej wykres.
- a) $f(x) = a(x - 2)^2 - 4$, $P(4, -2)$ c) $f(x) = a(x - 2)^2 - 2$, $P(6, 6)$
b) $f(x) = a(x + 1)^2 + 2$, $P(-3, -2)$ d) $f(x) = a(x - 3)^2 + 6$, $P(1, -2)$

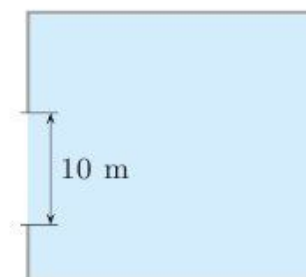
Zestaw II

1. Przedstaw funkcję f w postaci iloczynowej.
- a) $f(x) = 2x^2 - 6x$ c) $f(x) = -x^2 - 2x + 15$ e) $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$
b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x$ d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ f) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$
2. Liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej f . Punkt P jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem tej funkcji. Wyznacz jej drugie miejsce zerowe. Zapisz jej wzór w postaci kanonicznej.
- a) $P(5, 4)$ b) $P(-3, -6)$ c) $P(\frac{1}{2}, 2)$ d) $P(\frac{5}{4}, 6)$
3. Rozwiąż nierówność.
- a) $3x^2 - 1 \geq 0$ c) $x^2 < x + 12$ e) $4x^2 + 4x > 3$
b) $4 - x^2 > 0$ d) $x^2 \geq 5 - 4x$ f) $3x \leq 14 - 2x^2$
4. Rozwiąż nierówność.
- a) $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ d) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 \leq 0$ g) $x(x - 5) < 2x(x - 1)$
b) $2x^2 + 5x + 1 > 0$ e) $7x^2 + 2x < 1$ h) $2(1 - 5x) > (1 - x)^2$
c) $3x^2 - 14x - 5 \geq 0$ f) $-3x^2 + x + 1 \geq 0$ i) $\frac{1}{5}(x^2 + 4) \leq \frac{1}{2}(1 - x)$
5. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną spełniającą podaną nierówność.
- a) $x^2 + 120 \leq 22x$ c) $10x - 23 > x^2$ e) $x^2 - 12x + 33 \leq 0$
b) $\frac{1}{6}x^2 - 2x + \frac{2}{3} \leq 0$ d) $-3x^2 + 6x > 2$ f) $x^2 - 6x < -3 - x^2$
6. Ile liczb całkowitych spełnia podaną nierówność?
- a) $(2x + 3)^2 \leq (x - 3)^2$ b) $(1 - \frac{1}{2}x)^2 > (\frac{3}{2}x - 5)^2$
7. Zaznacz na osi liczbowej zbiory $X \cup Y$, $X \cap Y$ i $X \setminus Y$, gdzie:
- X – zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - x - 6 \leq 0$,
 Y – zbiór rozwiązań nierówności $-x^2 \leq 4x + 2$.

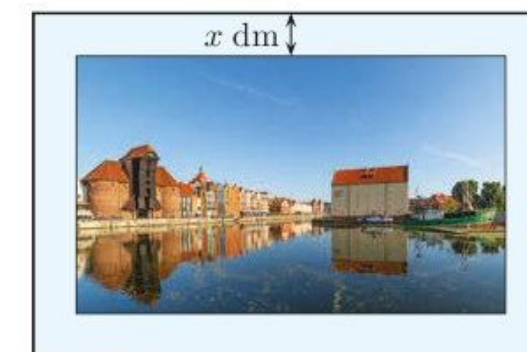
8. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej f . Zapisz w postaci kanonicznej wzór tej funkcji. Rozwiąż nierówność $f(x) \geq 0$.



9. Naskicuj wykres funkcji f . Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.
- a) $f(x) = 2x^2 + 4x$, $[-2; 1]$ c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $[0; 2]$
b) $f(x) = -x^2 + 2x$, $[0; 4]$ d) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, $[-2; 2]$
10. Dla jakich wartości a i b suma $a^2 + b^2$ przyjmuje wartość najmniejszą, jeśli:
- a) $a + b = 4$, b) $a - b = 3$, c) $2a + b = 1$?
11. Trzeba ogrodzić prostokątny plac, przy czym nie będzie on grodzony na jednym boku na odcinku 10 m (rysunek obok). Wiadomo, że na ogrodzenie tego placu potrzeba 240 m bieżących siatki ogrodzeniowej i że jego powierzchnia jest największa z możliwych. Jakie wymiary ma ten plac?



12. W sklepie zostaje codziennie sprzedanych 40 sztuk pewnego towaru. Zysk przypadający na jedną sztukę tego towaru wynosi 240 zł.
- a) Ekspert A twierdzi, że obniżenie ceny o x zł spowoduje wzrost dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy obniżyć cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?
- b) Ekspert B twierdzi, że podniesienie ceny o $(20 \cdot x)$ zł spowoduje spadek dziennej sprzedaży tego towaru o x sztuk. O ile należy podnieść cenę, aby zysk był największy? O ile zwiększy się wtedy zysk?
13. Zdjęcie w kształcie prostokąta o bokach p dm i q dm oprawiono w ramę o szerokości x dm (rysunek obok). Pole powierzchni zdjęcia wraz z ramą jest równe P dm². Oblicz szerokość ramy.
- a) $p = 3$, $q = 5$, $P = 29,25$
b) $p = 4$, $q = 6$, $P = 35$

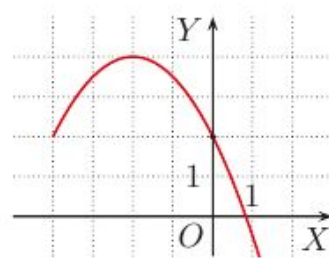




Jeśli w zadaniu należy wyznaczyć wzór funkcji kwadratowej, ale nie jest powiedziane, czy chodzi o postać ogólną, kanoniczną czy iloczynową, możemy wybrać taką, która jest dla nas najwygodniejsza.

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji f . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $(-2, 4)$. Wyznacz wzór funkcji f . Ile liczb całkowitych spełnia nierówność $f(x) \geq \frac{1}{2}x + 2$?



Wzór funkcji f zapisujemy w postaci kanonicznej. Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(-2, 4)$, więc:

$$f(x) = a(x + 2)^2 + 4$$

Z rysunku odczytujemy, że do wykresu funkcji f należy punkt $(0, 2)$, zatem $2 = a(0 + 2)^2 + 4$ i stąd $a = -\frac{1}{2}$, czyli $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4$.

Rozwiązujemy nierówność:

$$-\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4 \geq \frac{1}{2}x + 2 \quad / \cdot (-2)$$

$$x^2 + 4x + 4 - 8 \leq -x - 4$$

$$x^2 + 5x \leq 0$$

$$x(x + 5) \leq 0$$

Zatem $x \in [-5; 0]$, czyli nierówność tę spełnia sześć liczb całkowitych.

Odpowiedź: $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4$; sześć liczb

→ Zadanie 20, str. 58

D Przykład 2

Obwód prostokąta jest równy 14, a jeden z jego boków ma długość x . Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego prostokąta w zależności od x i podaj jej dziedzinę. Uzasadnij, że jeśli ten prostokąt nie jest kwadratem, to jego pole jest mniejsze od $12\frac{1}{4}$.

Długość drugiego boku prostokąta oznaczmy przez y . Wtedy $2x + 2y = 14$, czyli $y = 7 - x$. Pole tego prostokąta opisuje funkcja kwadratowa, której wzór zapisujemy w postaci iloczynowej, a następnie przekształcamy go do postaci ogólnej:

$$P(x) = x \cdot (7 - x) = -x^2 + 7x, \text{ gdzie } x \in (0; 7)$$

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku w punkcie o odciętej $x_w = -\frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$. Obliczamy rzędną wierzchołka:

$$P\left(\frac{7}{2}\right) = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 7 \cdot \frac{7}{2} = \frac{-49}{4} + \frac{49}{2} = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$$

Funkcja P przyjmuje wartość $12\frac{1}{4}$ dla $x = y = \frac{7}{2}$, czyli gdy prostokąt jest kwadratem. Zatem dla prostokąta niebędącego kwadratem pole jest mniejsze od $12\frac{1}{4}$.

→ Zadanie 21, str. 58



W zadaniach 1–9 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Przedział $(-\infty; -2]$ jest zbiorem wartości funkcji

- A. $y = x^2 + 2$ B. $y = x^2 - 2$ C. $y = -x^2 + 2$ D. $y = -x^2 - 2$

Zadanie 2 (0–1)

Dwa różne pierwiastki dodatnie ma równanie

- A. $x^2 - 4x + 5 = 0$ C. $x^2 - 5x + 6 = 0$
B. $x^2 - 3x - 4 = 0$ D. $x^2 + 5x - 6 = 0$

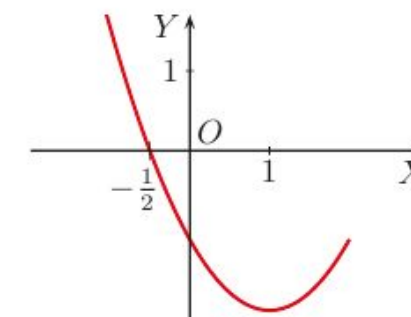
Zadanie 3 (0–1)

Pierwiastkami równania $2x^2 + bx + c = 0$ są liczby -3 i 4 , zatem

- A. $b = -1$ i $c = -12$ C. $b = 2$ i $c = -24$
B. $b = -2$ i $c = -24$ D. $b = 1$ i $c = -12$

Zadanie 4 (0–1)

Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli, której wierzchołkiem jest punkt $(1, -2)$. Drugim miejscem zerowym funkcji, której wykresem jest ta parabola, jest liczba



- A. $1\frac{1}{2}$ B. 2 C. $2\frac{1}{2}$ D. 3

Zadanie 5 (0–1)

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $2x^2 > 3$ jest

- A. $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ C. $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$
B. $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$ D. $\left(-\infty; -\frac{3\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$

Zadanie 6 (0–1)

Jednym z pierwiastków równania $4x^2 + 4x + \sqrt{2} - \frac{1}{2} = 0$ jest liczba

- A. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ B. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $-\sqrt{2}$ D. $-2\sqrt{2}$

Zadanie 7 (0–1)

Największa wartość funkcji $f(x) = 2x^2 + 4x$ w przedziale $[1; 2]$ jest równa

- A. 16 B. 4 C. 3 D. 0

Zadanie 8 (0–1)

Pole prostokątnej działki, której jeden bok jest o 2 m dłuższy od drugiego boku, wynosi 288 m^2 . Obwód tej działki jest równy

- A. 64 m B. 68 m C. 72 m D. 76 m



Zadanie 9 (0-1)

Boki prostokąta P_1 o wymiarach $4 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ wydłużono o $x \text{ cm}$ i uzyskano prostokąt P_2 o polu równym 96 cm^2 . Przekątna prostokąta P_2 ma długość równą

- A. $3\sqrt{10} \text{ cm}$ B. $4\sqrt{10} \text{ cm}$ C. $3\sqrt{13} \text{ cm}$ D. $4\sqrt{13} \text{ cm}$

Zadanie 10 (0-2)

Punkt P jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji danej wzorem $f(x) = x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{173}{16}$.

Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj właściwe dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Numer zadania	Zdanie do uzupełnienia	Dokończenie zdania
10.1	Odcięta punktu P jest równa	?
10.2	Rzędna punktu P jest równa	?

- A. $6\frac{1}{4}$ B. $5\frac{1}{4}$ C. $4\frac{3}{4}$ D. $3\frac{1}{4}$ E. $2\frac{3}{4}$

Zadanie 11 (0-1)

Dana jest nierówność $(x - \sqrt{17})(x + 4\sqrt{17}) \leq 0$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Nierówności tej nie spełnia żadna liczba całkowita ujemna.	P	F
Nierówność ta jest spełniona przez 5 liczb całkowitych dodatnich.	P	F

Zadanie 12 (0-2)

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}x - 4$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale

$[-2; 0]$ jest równa -2 .	P	F
$[2; 4]$ jest równa -4 .	P	F
$[0; 2]$ jest równa -6 .	P	F



Zadanie 13 (0-2)

Dana jest funkcja $f(x) = (2x - 6)^2 - 2$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f jest punkt

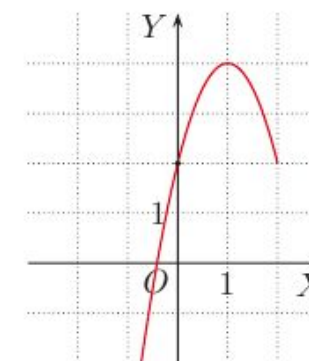
- A. $(3, -2)$ B. $(3, 2)$ C. $(6, -2)$ D. $(-6, -2)$

2. Parabola będąca wykresem funkcji f przecina oś rzędnych w punkcie

- E. $(0, 34)$ F. $(0, -18)$ G. $(0, -38)$ H. $(0, -2)$

Zadanie 14 (0-1)

Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f . Oznaczmy przez x_1, x_2 miejsca zerowe funkcji f , a przez x_w odciętą wierzchołka paraboli będącej jej wykresem.



Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Suma miejsc zerowych funkcji f jest równa

A.	2,	ponieważ	1.	$x_w = 2(x_1 + x_2)$.
B.	1,		2.	$x_w = x_1 + x_2$.
			3.	$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Zadanie 15

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = -4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2})$.

Zadanie 15.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, -5)$.	P	F
Wykres funkcji f ma wierzchołek w punkcie $(-2, 5)$.	P	F

Zadanie 15.2 (0-1)

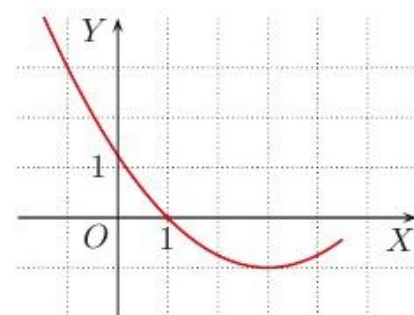
Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$.

Zadanie 16 (0-2)

Rozwiąż równanie $3x(x + 3) = (x + 3)^2$.

**Zadanie 17 (0-2)**Rozwiąż nierówność $2x^2 + 7x \geq 4$.**Zadanie 18 (0-2)**Rozwiąż nierówność $(x+1)(2x+3) \leq (x+1)(5-x)$.**Zadanie 19 (0-2)**Oblicz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 2(x+3)(x-5)$.**D Zadanie 20 (0-4) → Przykład 1, str. 54**

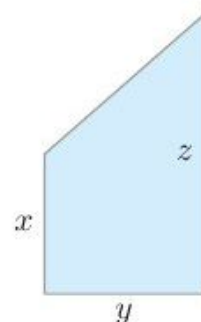
Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji f . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $(3, -1)$. Wyznacz wzór funkcji f i uzasadnij, że żadna liczba niewymierna nie spełnia nierówności $f(x) \leq -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$.

**D Zadanie 21 (0-4) → Przykład 2, str. 54**

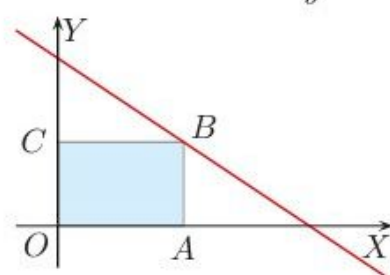
Jedna z przekątnych rombu ma długość x , a suma długości obu przekątnych jest równa $10\frac{1}{2}$. Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego rombu w zależności od x . Podaj jej dziedzinę. Uzasadnij, że dla dowolnego całkowitego argumentu funkcja ta przyjmuje wartość mniejszą od $\frac{441}{32}$.

D Zadanie 22 (0-4)

Boki trapezu prostokątnego przedstawionego na rysunku obok spełniają warunki: $x + y + z = 18$ oraz $z = 2x$. Uzasadnij, że jeśli taki trapez ma największe możliwe pole, to jego obwód jest niemniejszy od 27.

**Zadanie 23 (0-4)**

Rozpatrujemy prostokąty położone w I ćwiartce układu współrzędnych. Trzy wierzchołki tych prostokątów leżą na osiach układu współrzędnych, a czwarty leży na prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ (rysunek obok).

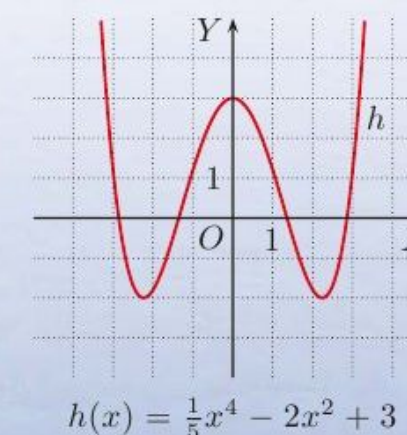
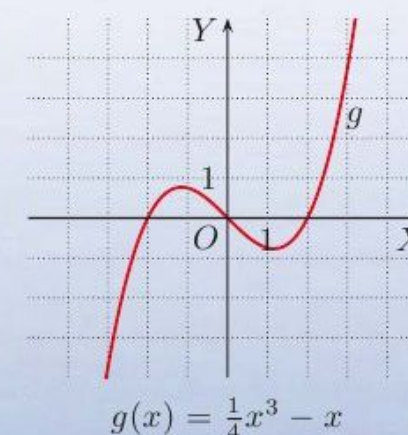
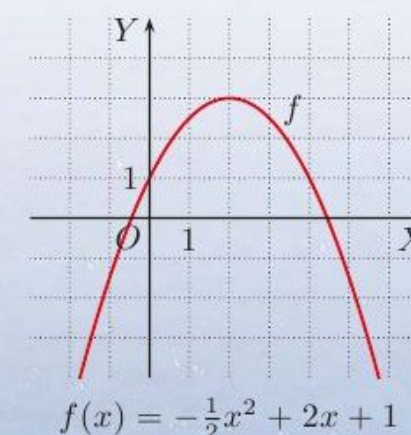


a) Podaj wzór opisujący pole prostokąta w zależności od współrzędnej x_0 punktu A.

b) Który spośród tych prostokątów ma największe pole? Podaj współrzędne jego wierzchołków.

2 Wielomiany

Omawiane w tym rozdziale funkcje, zwane wielomianami, służą do opisu wielu zjawisk. Za pomocą wielomianu można opisać na przykład zależność między liczbą obrotów na minutę silnika łodzi motorowej a jej prędkością. Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy przykładowych wielomianów.



2.1. Stopień i współczynniki wielomianu

Definicja

Jednomianem stopnia n nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}_+$.

Jednomianem stopnia 0 jest funkcja stała $y = a$, gdzie $a \neq 0$.

Funkcja $y = 0$ jest **jednomianem zerowym**, którego stopnia nie określamy.

Liczbę a nazywamy **współczynnikiem** jednomianu.

Ćwiczenie 1

Czy poniższa funkcja jest jednomianem? Jeśli tak, to podaj jego stopień.

a) $y = -5x^7$ b) $y = \frac{x}{4}$ c) $y = \frac{4}{x}$ d) $y = 6\sqrt{x}$ e) $y = \sqrt{2}x^3$

Sumę dwóch jednomianów różnych stopni nazywamy **dwumianem**, np.:

$$\begin{array}{ll} y = x^3 + 2x & \text{dwumian trzeciego stopnia} \\ y = 5x^4 + 1 & \text{dwumian czwartego stopnia} \end{array}$$

Sumę trzech jednomianów różnych stopni nazywamy **trójmianem**, np.:

$$\begin{array}{ll} y = x^2 + 2x + 1 & \text{trójmian drugiego stopnia (kwadratowy)} \\ y = 5x^6 - 2x^2 + 4 & \text{trójmian szóstego stopnia} \end{array}$$

Ogólnie sumę jednomianów nazywamy **wielomianem**, np.:

$$y = 6x^8 - 9x^6 + 2x^3 - x^2 \quad \text{wielomian ósmego stopnia}$$

Zwróć uwagę na to, że **stopniem wielomianu** jest najwyższy stopień spośród stopni występujących w nim jednomianów. Wielomian jest zapisany w sposób uporządkowany, gdy jednomiany, których jest sumą, są ustawione kolejno – od jednomianu najwyższego stopnia do jednomianu najniższego stopnia.

Definicja

Funkcję zmiennej rzeczywistej x daną wzorem:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_+$, nazywamy **wielomianem** stopnia n .

Jednomian w stopnia 0 nazywamy też **wielomianem stopnia 0**.

Jednomian zerowy ($w \equiv 0$) nazywamy też **wielomianem zerowym**.

Jednomiany występujące w wielomianie nazywamy też jego **wyrazami**.

Liczby $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu.

Współczynnik a_0 nazywamy **wyrazem wolnym**.

Stopień wielomianu w oznaczamy przez $\text{st}(w)$.

Zauważ, że – zgodnie z definicją – wielomianem jest zarówno funkcja liniowa, jak i funkcja kwadratowa.

Ćwiczenie 2

Uporządkuj wielomian w i podaj jego stopień.

a) $w(x) = x + x^3 + x^5 - 1 - x^2 - x^4$ c) $w(x) = 3x^4 - 2 + 6x - x^2 + x^7 + 2x^8$

b) $w(x) = 2x^6 - x^3 + 3x^4 - x - 3x^5$ d) $w(x) = 5 - 2x + 2x^{10} - x^6 + 3x^2$

Przykład 1

Wypisz współczynniki wielomianu $w(x) = 5x^4 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 1$ i podaj jego stopień.

Współczynniki wielomianu: $a_4 = 5$, $a_3 = 0$, $a_2 = -2$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_0 = 1$, stopień wielomianu: $\text{st}(w) = 4$.

Ćwiczenie 3

Wypisz współczynniki wielomianu w i podaj jego stopień.

a) $w(x) = -2x^5 + x$ b) $w(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^5 + x^6 + x^2 + 1$ c) $w(x) = 2^{10}$

Ćwiczenie 4

Zapisz wielomian czwartego stopnia, dla którego:

a) $a_4 = a_2 = a_0 = -3$, $a_3 = a_1 = 0$, b) $a_n = (-1)^n$ dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Przykład 2

Oblicz wartości wielomianu $w(x) = 3x^4 - 5x^3 - 7$ dla $x = 2$, $x = -2$ i $x = 0$.

$$w(2) = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot 8 - 7 = 48 - 40 - 7 = 1$$

$$w(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^3 - 7 = 3 \cdot 16 - 5 \cdot (-8) - 7 = 48 + 40 - 7 = 81$$

$$w(0) = 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 7 = -7$$

Zauważ, że wartość $w(0)$ jest równa wyrazowi wolnemu wielomianu w .

Ćwiczenie 5

Oblicz wartości wielomianu w dla $x = 0$, $x = 2$ i $x = -2$.

a) $w(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$ c) $w(x) = x^5 - x^2 + 3x - 2$

b) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 6x + 1$ d) $w(x) = -x^6 + 2x^3 - x + 3$

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości wielomianu w dla $x = \frac{1}{2}$ i $x = -\frac{1}{2}$.

a) $w(x) = -4x^3 - 2x^2 - 6x + 3$ b) $w(x) = 32x^4 - 8x^3 - 2x + \frac{1}{2}$

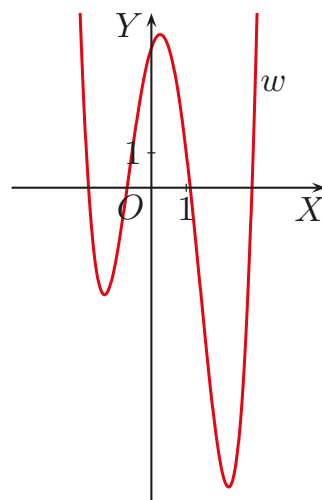
Zadania

1. Dane są wielomiany $u(x) = 2x^3 - 6x^2 + 0,1x^4$, $v(x) = -6x^2 + 4 + x^3$, $w(x) = 2x + 4x^4 - 3x^3 - 6x^5 - 1$. Wskaż wśród nich wielomian:
- a) stopnia trzeciego; uporządkuj go i podaj współczynniki a_3 , a_2 , a_1 i a_0 ,
b) stopnia piątego; uporządkuj go, podaj współczynniki a_5 , a_4 , a_3 , a_2 , a_1 i a_0 oraz oblicz ich sumę.

D 2. Uzasadnij, że suma współczynników dowolnego wielomianu w jest równa $w(1)$.

3. Oblicz wartości wielomianu w dla $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$ i $x = \frac{1}{2}$.
- a) $w(x) = 3x^3 + x^2 - 2x - 3$ c) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 4$
b) $w(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 2$ d) $w(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x - 10$

4. Punkty $P(1, a)$, $Q(-1, b)$, $R(2, c)$, $S(3, d)$ należą do wykresu wielomianu $w(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x + 4$ (rysunek obok). Oblicz współrzędne a, b, c i d .



5. Które spośród punktów P, Q należą do wykresu wielomianu u ?

- a) $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$, $P(-2, 7)$, $Q(2, -5)$
b) $u(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{1}{2}$, $P(\frac{1}{2}, 2)$, $Q(-\frac{1}{2}, -1)$

6. Oblicz współczynnik a wielomianu w .

- a) $w(x) = ax^2 + x + 1$, $w(1) = 3$ c) $w(x) = x^3 + ax^2 + 3$, $w(-4) = 3$
b) $w(x) = 3x^3 - x^2 + a$, $w(3) = 0$ d) $w(x) = ax^4 + 4x + 2$, $w(2) = -6$

7. Oblicz współczynniki a i b wielomianu w .

- a) $w(x) = -3x^3 + ax^2 + bx + 2$, $w(-1) = 4$, $w(2) = 20$
b) $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2$, $w(-3) = 11$, $w(1) = 7$

Sprawdź się

8. Które spośród punktów $A(1, 1)$, $B(2, -45)$, $C(-1, -3)$ należą do wykresu wielomianu w ?

- a) $w(x) = -3x^3 - 8x^2 + 3x + 5$ b) $w(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 3$

9. Oblicz współczynnik a wielomianu w .

- a) $w(x) = x^2 - ax + 3$, $w(2) = 1$ b) $w(x) = 2ax^4 - ax^3 - 5$, $w(-1) = 4$

2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Aby wyznaczyć sumę wielomianów, dodajemy wyrazy podobne występujące w tych wielomianach. Suma wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz sumę wielomianów:

$$u(x) = 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5 \quad \text{ i } \quad w(x) = -3x^3 + 2x^2 - x$$

$$\begin{aligned} u(x) + w(x) &= (2x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 5) + (-3x^3 + 2x^2 - x) = \\ &= 2x^4 + \underline{9x^3} - \underline{6x^2} + \underline{3x} - 5 - \underline{3x^3} + \underline{2x^2} - \underline{x} = \\ &= 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 5 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz sumę wielomianów u i w . Podaj stopień wielomianu u , wielomianu w oraz stopień ich sumy.

- a) $u(x) = 17x^4 - 14x^2 + 7x - 5$, $w(x) = 6x^3 + 11x^2 - 5x + 5$
b) $u(x) = 9x^5 - 13x^3 + 10x^2 - 2$, $w(x) = -9x^5 + 6x^4 - 12x^2 + 7$

Ćwiczenie 2

Podaj przykłady wielomianów u i w takich, że $\text{st}(u) = 4$, $\text{st}(w) = 4$ oraz:

- a) $\text{st}(u + w) = 4$, c) $\text{st}(u + w) = 2$, e) $\text{st}(u + w) = 0$.
b) $\text{st}(u + w) = 3$, d) $\text{st}(u + w) = 1$,

Twierdzenie

Jeśli wielomiany u , w oraz $u + w$ są niezerowe i $\text{st}(u) \leq \text{st}(w)$, to:

$$\text{st}(u + w) \leq \text{st}(w)$$

Przykład 2

Wyznacz sumę wielomianów $u(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x$ i $w(x) = -8x^3 - 5x^2 + 7x$.

$$u(x) + w(x) = 8x^3 + 5x^2 - 7x - 8x^3 - 5x^2 + 7x = 0$$

Zatem suma $u + w$ jest wielomianem zerowym.

Ćwiczenie 3

Dany jest wielomian $u(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Co można powiedzieć o współczynnikach wielomianu w , jeśli $u + w$ jest wielomianem zerowym?

Aby wyznaczyć różnicę wielomianów, odejmujemy od wyrazów pierwszego wielomianu odpowiednie wyrazy podobne drugiego wielomianu. Różnica wielomianów jest wielomianem.

Przykład 3

Dane są wielomiany $u(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3$ i $w(x) = 4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x$. Wyznacz różnicę $u - w$.

$$\begin{aligned} u(x) - w(x) &= (6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3) - (4x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x) = \text{Zmieniamy znaki współczynników wielomianu } w. \\ &= \underline{6x^4} - \underline{3x^3} + \underline{2x^2} - 3 - \underline{4x^4} - \underline{2x^3} + \underline{x^2} + 5x = \\ &= 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Wyznacz różnicę $u - w$. Podaj stopnie wielomianów u , w i $u - w$.

- a) $u(x) = 5x^9 + 2x^8 + 4x^4 + 2x + 1$, $w(x) = -2x^8 - 6x^4 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$
b) $u(x) = \frac{3}{4}x^6 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{3}{8}x^2 + 1$, $w(x) = 0,75x^6 - 0,2x^4 + 0,125x^2$

Przykład 4

Dane są wielomiany $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1$ i $g(x) = 5x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x$. Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 2g(x)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= 3(3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1) - 2(5x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x) = \text{Mnożymy każdy wyraz wielomianu } f \text{ przez } 3 \text{ i każdy wyraz wielomianu } g \text{ przez } -2. \\ &= \underline{9x^4} - \underline{6x^3} - \underline{x^2} + 3 - \underline{10x^4} - \underline{2x^3} + \underline{4x^2} - 3x = \\ &= -x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 3x + 3 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

Wyznacz wielomian $h(x) = 3f(x) - 4g(x)$. Oblicz $h(-1)$.

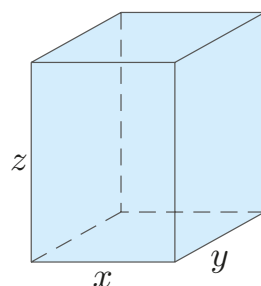
- a) $f(x) = -2x^6 + 4x^3 - 8x + 5$, $g(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 6x + 2$
b) $f(x) = 2x^5 - 6x^4 - x^2 + 4x$, $g(x) = 1,5x^5 - x^4 + 3x^2 + 3x - 1$

Oprócz wielomianów jednej zmiennej rozpatruje się również **wielomiany wielu zmiennych**, np.:

$u(x, y) = 3x^4y^2 - 7x^2y^3 - xy - 2y^4$ jest wielomianem dwóch zmiennych,
 $w(x, y, z) = 9xy^2z + 4x^2y^3z^3 + 6yz$ jest wielomianem trzech zmiennych.

Przykład 5

$P(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$ dla $x, y, z > 0$ jest wielomianem trzech zmiennych opisującym pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach długości x , y , z (rysunek obok). Objętość tego prostopadłościanu opisuje wielomian trzech zmiennych $V(x, y, z) = xyz$.



Wyrazy wielomianu wielu zmiennych są **podobne**, gdy odpowiednie zmienne występują w nich w tych samych potęgach. Wyrazami podobnymi są na przykład $4x^3y^2$ i $6x^3y^2$. Aby wyznaczyć sumę (różnicę) wielomianów wielu zmiennych, należy dodać (odjąć) wyrazy podobne tych wielomianów.

Przykład 6

a) Wyznacz sumę $u + w$ wielomianów u i w .

$$u(x, y) = 3x^2y + 6xy^2 - 4xy, \quad w(x, y) = 5xy^3 + 4x^2y + xy + 2$$

$$\begin{aligned} u(x, y) + w(x, y) &= \underline{3x^2y} + 6xy^2 - \underline{4xy} + 5xy^3 + \underline{4x^2y} + \underline{xy} + 2 = \\ &= 7x^2y + 5xy^3 + 6xy^2 - 3xy + 2 \end{aligned}$$

b) Wyznacz różnicę $u - w$ wielomianów u i w .

$$u(x, y, z) = 5x^2y^2z^2 - 4xyz^2, \quad w(x, y, z) = 5x^2y^2z - 3xyz^2 + 2yz^2$$

$$\begin{aligned} u(x, y, z) - w(x, y, z) &= 5x^2y^2z^2 - \underline{4xyz^2} - 5x^2y^2z + \underline{3xyz^2} - 2yz^2 = \\ &= 5x^2y^2z^2 - 5x^2y^2z - xyz^2 - 2yz^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6

Wyznacz sumę $u + w$ i różnicę $u - w$ wielomianów u i w .

- a) $u(x, y) = 4x^3y^2 - 3x^2y^2 + 2xy + 2$, $w(x, y) = 3x^2y^3 - 6x^2y^2 - 6xy - 3$
b) $u(x, y) = 2x^4y + 3x^3y - 2xy^2 + 1$, $w(x, y) = 3x^3y + 4xy^2 - x + 4$
c) $u(x, y, z) = 4xy^2z^3 - 6x^2y^2z - xyz^3$, $w(x, y, z) = xy^2z^3 + 6x^2y^2z + 2xyz^3$
d) $u(x, y, z) = 8x^2y + 6xz^2 - 4y^2z - yz^2$, $w(x, y, z) = 8xz^2 + 4y^2z - 3yz^2 + z^3$

Zadania

- Wyznacz sumę $f + g$ oraz różnicę $f - g$ wielomianów f i g .
 - $f(x) = \frac{3}{4}x^6 - 2x^4 + \frac{5}{4}x^2 + 4$, $g(x) = \frac{1}{4}x^6 + 2x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2$
 - $f(x) = -2x^2 + 4x - x^6 + 2$, $g(x) = -5x + 3x^2 + x^6 - 3x^5$
 - $f(x) = 3x^4 + 2x^7 - 5 + 4x$, $g(x) = -3x + x^5 - 2x^7 + 2$
- Wyznacz wielomiany $w(x) = 2f(x) - 3g(x)$ oraz $u(x) = 2g(x) - 3f(x)$. Podaj stopień oraz sumę współczynników każdego z tych wielomianów.
 - $f(x) = x^5 + 2x^2 + 3$, $g(x) = -2x^4 + 3x^2 + 2$
 - $f(x) = 3x^5 + 6x^3 - 9x$, $g(x) = 2x^5 + 4x^3 - 4x^2$
- Co można powiedzieć o stopniu sumy wielomianów p i q ?
 - $\text{st}(p) = 5$, $\text{st}(q) = 4$
 - $\text{st}(p) = 5$, $\text{st}(q) = 5$

4. Określ stopień wielomianu $u + w$ w zależności od współczynnika a .

a) $u(x) = 2x^4 - 3x + 6$, $w(x) = ax^6 + 5x^2 + 4$

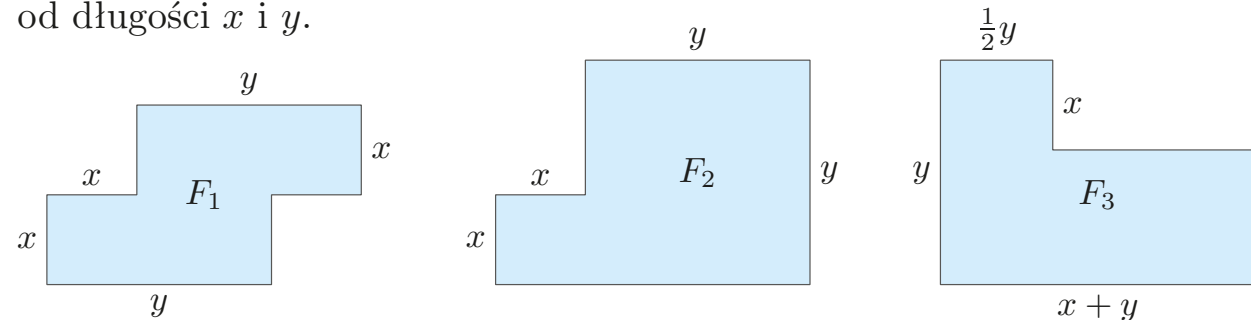
b) $u(x) = 3x^6 - ax^5 + 2x^2 - x$, $w(x) = -3x^6 - 6x^5 - 2x^2 + 9$

5. Wyznacz sumę $u + w$ oraz różnicę $u - w$ wielomianów u i w . Oblicz wartości sumy i różnicy dla $x = -2$ i $y = 3$.

a) $u(x, y) = \frac{1}{3}x^2y - 3xy^2 + x^3y$, $w(x, y) = \frac{1}{2}x^3y - x^2y + xy^2$

b) $u(x, y) = \frac{1}{4}xy^3 + \frac{1}{3}x^2y^2 - x^2y$, $w(x, y) = \frac{1}{6}xy^3 - x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2y$

6. Wyznacz wielomian P opisujący sumę pól figur F_1 , F_2 i F_3 w zależności od długości x i y .



7. Dla której trójki liczb, P czy Q , wartość wielomianu w jest większa?

a) $w(x, y, z) = 2x^2yz - 4xyz^2 + 5xy^2 - 6z$

b) $w(x, y, z) = 2x^6y^3 + x^5y^2z - 3xy^3z^5 + x$

c) $w(x, y, z) = \frac{1}{3}yz^5 - \frac{1}{2}xyz^2 + \frac{5}{6}x^2y^4z + 1$

$$P \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad Q \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

8. Wyznacz wielomian $v(x, y, z) = 2u(x, y, z) - 3w(x, y, z)$.

a) $u(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2yz^2 + \frac{3}{2}x^2yz - xyz^2$, $w(x, y, z) = \frac{2}{3}x^2yz^2 - x^2yz + xyz$

b) $u(x, y, z) = 2x^3y^2z - xy^2z^2 + xyz$, $w(x, y, z) = 3xyz^2 - xyz - 2yz^2$

Sprawdź się

9. Dane są wielomiany $u(x) = 4x^3 + 2x^2 - 1$ i $w(x) = 2x^3 - x^2 + 1,5$. Wyznacz wielomian v .

a) $v(x) = u(x) + 3w(x)$

b) $v(x) = 2u(x) - w(x)$

10. Wyznacz wielomian $v(x) = u(x) - 2w(x)$. Oblicz $v(1)$, $v(-1)$ i $v(-2)$.

a) $u(x) = -3x^4 + 2x^2$, $w(x) = x^4 - 1,5x^2 + 3x$

b) $u(x) = 8x^3 - 2x^2 + x$, $w(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x$

11. Oblicz wartości wielomianów $w + u$ oraz $w - u$ dla $x = -2$ i $y = 3$.

a) $w(x, y) = \frac{1}{3}x^2y^3 - 3xy^2 + x^3y$, $u(x, y) = \frac{2}{3}x^2y^3 + 3xy^2 + x$

b) $w(x, y) = x^5 - \frac{1}{4}x^2y^3 - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{4}xy^4$, $u(x, y) = -\frac{3}{4}x^2y^3 + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{4}xy^4$

2.3. Mnożenie wielomianów

Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Iloczyn wielomianów jest wielomianem.

Przykład 1

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x) = 2x - 3$ i $v(x) = x^2 - 2x + 2$.

$$\begin{aligned} u(x) \cdot v(x) &= (2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 2) = 2x(x^2 - 2x + 2) - 3(x^2 - 2x + 2) = \\ &= 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3x^2 + 6x - 6 = \\ &= 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 \end{aligned}$$

W wyniku pomnożenia wielomianu stopnia pierwszego przez wielomian stopnia drugiego otrzymaliśmy wielomian stopnia trzeciego.

Twierdzenie

Iloczyn wielomianów stopnia m i stopnia n jest wielomianem stopnia $m + n$.

$$\text{st}(u \cdot v) = \text{st}(u) + \text{st}(v)$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w . Podaj stopień otrzymanego wielomianu.

a) $u(x) = x^3$, $w(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1$ c) $u(x) = x - 1$, $w(x) = x^2 + x + 1$

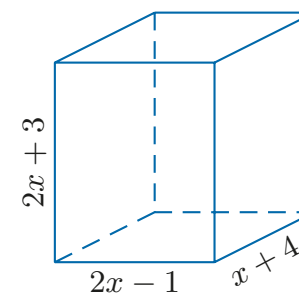
b) $u(x) = x^2 - 1$, $w(x) = x^5 - x + 1$ d) $u(x) = 5 - 3x + x^2$, $w(x) = x^2 - 1$

Przykład 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok.

Długości krawędzi prostopadłościanu są liczbami dodatnimi, zatem zakładamy, że:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{czyli } x > \frac{1}{2}$$



Objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} V(x) &= (2x - 1)(x + 4)(2x + 3) = (2x^2 + 8x - x - 4)(2x + 3) = \\ &= (2x^2 + 7x - 4)(2x + 3) = 4x^3 + 6x^2 + 14x^2 + 21x - 8x - 12 \end{aligned}$$

$V(x) = 4x^3 + 20x^2 + 13x - 12$ opisuje objętość prostopadłościanu dla $x > \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach długości a , b , c .

- a) $a = x - 1$, $b = x + 1$, $c = x$ c) $a = 2x + 1$, $b = \frac{1}{2}x + 1$, $c = 2x - 1$
b) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = x + 3$ d) $a = x + 3$, $b = x + 3$, $c = x^2 - 9$

Mnożenie wielomianów wielu zmiennych przebiega analogicznie do mnożenia wielomianów jednej zmiennej. Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów wielu zmiennych, mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu.

Przykład 3

Wyznacz iloczyn wielomianów $u(x, y) = x^2 - 2y$ i $w(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3y$.

$$\begin{aligned} u(x, y) \cdot w(x, y) &= (x^2 - 2y) \cdot (2x^2 + y^2 - 3y) = \\ &= x^2(2x^2 + y^2 - 3y) - 2y(2x^2 + y^2 - 3y) = \\ &= 2x^4 + x^2y^2 - 3x^2y - 4x^2y - 2y^3 + 6y^2 = \\ &= 2x^4 + x^2y^2 - 7x^2y - 2y^3 + 6y^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w .

- a) $u(x, y) = xy - 2x^2$, $w(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + x$
b) $u(x, y) = 3xy^2 - 2x + 1$, $w(x, y) = x^2y + 2xy - y$
c) $u(x, y) = 4x^2y + 3xy^2 - 2xy$, $w(x, y) = x^2y^2 - 3x^2y + xy$

Ćwiczenie 4

Wyznacz iloczyn wielomianów u i w .

- a) $u(x, y, z) = x^2y + x^2z + yz$, $w(x, y, z) = 2xyz - yz$
b) $u(x, y, z) = 3xyz - 4xz^2 + y^2z$, $w(x, y, z) = x^2y - xy^2 + 2z$
c) $u(x, y, z) = xy^2z^2 + 2xyz^2 - xyz$, $w(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

Zadania

1. Wyznacz iloczyn. Podaj współczynnik przy najwyższej potęgze otrzymanego wielomianu oraz jego wyraz wolny.
- a) $(2x - 1)(x^3 - 3x^2 + 7x)$ d) $(6 - 3x^2 - 2x^3)(x^3 - 4x + 1)$
b) $(x^2 + 2)(4x^2 - 3x + 4)$ e) $(2x^3 + \frac{1}{2}x + 1)(x^2 - x - \frac{1}{4})$
c) $(x^2 - x)(2x^4 - x + 1)$ f) $(2 - \sqrt{2}x^2 - x^4)(\sqrt{2} + x + 4x^2)$

2. Podaj stopień wielomianu w , współczynnik przy najwyższej potęgde oraz jego wyraz wolny bez wykonywania mnożenia wielomianów.

- a) $w(x) = (x - 1)(1 - x + x^2)$ d) $w(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$
b) $w(x) = (3x - 2)(2x^2 - x + 3)$ e) $w(x) = (1 - 2x)(1 + x)(3x^2 + 2)$
c) $w(x) = (1 - x^2)(1 - x^2 + 4x^3)$ f) $w(x) = (4x^2 + 1)(1 - x^2)(6 - 3x)$

3. Wyznacz wielomian $v(x) = [w(x)]^2$ i podaj jego stopień.

- a) $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ b) $w(x) = 2x^2 + x - 4$

4. Wyznacz wielomiany $f(x) = u(x) \cdot w(x)$ oraz $g(x) = [u(x)]^2 - w(x)$.

- a) $u(x) = x^2 + 3x - 1$, $w(x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2$
b) $u(x) = x^4 - x^2 + 1$, $w(x) = -6x^3 + 2x^2 - 1$
c) $u(x) = x^3 - x^2 + x + 1$, $w(x) = 3x^2 - 2x + 1$

5. Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach a , b , c .

- a) $a = x + 1$, $b = x + 2$, $c = 2x - 4$ b) $a = x^2 + 4$, $b = x + 2$, $c = x^2 - 1$

6. Wyznacz wielomian $v(x, y) = [u(x, y)]^2 - 2w(x, y)$.

- a) $u(x, y) = 2x^2 - xy$, $w(x, y) = 6x^3y^2 - 3x^2y^2 + y^4$
b) $u(x, y) = 3x^2y + 2xy^2$, $w(x, y) = 2x^4y^4 + 4x^4y^2 + 3x^3y^3 - xy^4$

7. Wyznacz iloczyn.

- a) $(2x^2y + 3xy^2)(x - y - 4)$ c) $(x + y)(x^2 + y^2)(x^3 + y^3)$
b) $(2x - 3y)(2x^2 + 6xy + 3y^2)$ d) $(x + y)(x - 2y)(x - xy + y^2)$

Sprawdź się

8. Wyznacz iloczyn. Oblicz jego wartości dla $x \in \{-1, 0, 1\}$.

- a) $4x^2(2x^5 - 3x^2)$ c) $(x + 4)(x^2 - x)$ e) $(x - 2)(x^2 - 3x + 1)$
b) $-9x^3(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x)$ d) $(x^2 - 3)(2x^4 - x)$ f) $(3x + \frac{1}{2})(2x^3 - 4x - 6)$

9. Wykonaj działania. Uporządkuj otrzymany wielomian.

- a) $x(x^2 - 1) + 4(x^2 - 2)(x + 1)$ c) $(x^2 + 4)(2 - x)^2 - x^2(x^2 + 2x + 3)$
b) $(2x + 2)(x^2 - 3) - (x^2 + 1)x$ d) $x(x - 3)(x - 2)^2 - x(x + 4)(x - 5)$

10. Wyznacz iloczyn.

- a) $(x - 2y)(y - 2z)(z - 2x)$ c) $(2x - y)(3y + 2z)(2x + y)(3y - 2z)$
b) $(x + y + z)(x - y - z)$ d) $(x + xy + xyz)(1 + x - yz)$

2.4. Równania wielomianowe (1)

Równanie postaci $w(x) = 0$, gdzie w jest wielomianem, nazywamy **równaniem wielomianowym** z niewiadomą x .

Przykład 1

a) Rozwiąż równanie $2x^3 - 250 = 0$.

$$\begin{aligned}2x^3 &= 250 \quad / : 2 \\ x^3 &= 125\end{aligned}$$

Jedyną liczbą spełniającą równanie jest $\sqrt[3]{125}$, czyli $x = 5$.

b) Rozwiąż równanie $5x^3 + 40 = 0$.

$$\begin{aligned}5x^3 &= -40 \quad / : 5 \\ x^3 &= -8\end{aligned}$$

Jedyną liczbą spełniającą równanie jest $\sqrt[3]{-8}$, czyli $x = -2$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

- | | | |
|--------------------|--------------------|-----------------------|
| a) $7x^3 - 56 = 0$ | c) $8x^3 - 1 = 0$ | e) $5x^3 + 0,625 = 0$ |
| b) $2x^3 + 54 = 0$ | d) $27x^3 + 8 = 0$ | f) $3x^3 - 192 = 0$ |

Jeśli wielomian w jest przedstawiony w postaci iloczynowej, to możemy łatwo wyznaczyć jego **pierwiastki**, czyli takie argumenty x , dla których jest spełnione równanie $w(x) = 0$. Pierwiastki te nazywamy **rozwiązaniami równania**.

Przykład 2

a) Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = 6x^2(x - 3)$.

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu w (czyli jego miejsca zerowe), rozwiązujemy równanie:

$$\begin{aligned}6x^2(x - 3) &= 0 \\ x^2 &= 0 \quad \text{lub} \quad x - 3 = 0 \\ x &= 0 \quad \text{lub} \quad x = 3\end{aligned}$$

$a \cdot b = 0$ wtedy
i tylko wtedy, gdy
 $a = 0$ lub $b = 0$.

Pierwiastkami wielomianu w są liczby 0 i 3.

b) Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = \frac{1}{3}(x - 1)(2x + 1)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(x - 1)(2x + 1) &= 0 \\ x - 1 &= 0 \quad \text{lub} \quad 2x + 1 = 0 \\ x &= 1 \quad \text{lub} \quad x = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Pierwiastkami wielomianu w są liczby $-\frac{1}{2}$ i 1.

Ćwiczenie 2

Wyznacz pierwiastki wielomianu w .

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|------------------------------|
| a) $w(x) = 3x^2(x + 6)$ | c) $w(x) = x^2(3x - 4)$ | e) $w(x) = (x + 4)(x - 6)$ |
| b) $w(x) = 6x^2(2x - 5)$ | d) $w(x) = 2x^3(5x + 1)$ | f) $w(x) = (3x - 2)(2x + 3)$ |

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $x(x + 2)(x - 3) = 0$.

Korzystamy z własności podanej obok i otrzymujemy:

$a \cdot b \cdot c = 0$ wtedy i tylko wtedy,
gdy $a = 0$ lub $b = 0$ lub $c = 0$.

$x = 0$ lub $x + 2 = 0$ lub $x - 3 = 0$.

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: -2 , 0 i 3 .

b) Rozwiąż równanie $(\frac{1}{3}x - 1)(x + 2)(2x - 1) = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x - 1 &= 0 \quad \text{lub} \quad x + 2 = 0 \quad \text{lub} \quad 2x - 1 = 0 \\ x &= 3 \quad \text{lub} \quad x = -2 \quad \text{lub} \quad x = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: -2 , $\frac{1}{2}$ i 3 .

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

- | | |
|---------------------------|-----------------------------------|
| a) $x(x - 2)(x - 4) = 0$ | d) $(x + 1)(x + 9)(3x - 1) = 0$ |
| b) $x(x - 5)(x + 6) = 0$ | e) $(x - 9)(2x + 1)(2x - 3) = 0$ |
| c) $x(x + 1)(2x + 6) = 0$ | f) $(4x + 1)(6x - 9)(2x - 8) = 0$ |

Rozwiązanie równania możemy podać na dwa sposoby: wymieniając liczby, które spełniają to równanie, lub podając **zbiór rozwiązań** (czyli zbiór liczb spełniających to równanie).

Przykład 4

Wyznacz zbiór rozwiązań równania $2x^2(\frac{1}{3}x - 2)(3x + 2)(x - 6) = 0$.

$$\begin{aligned}x^2 &= 0 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{3}x - 2 = 0 \quad \text{lub} \quad 3x + 2 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 6 = 0 \\ x &= 0 \quad \text{lub} \quad x = 6 \quad \text{lub} \quad x = -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x = 6\end{aligned}$$

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: $-\frac{2}{3}$, 0 , 6 .

Zbiorem rozwiązań równania jest zbiór $\{-\frac{2}{3}, 0, 6\}$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz zbiór rozwiązań równania.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a) $5x(x - 3)(x + 6)(x + 8) = 0$ | c) $(\frac{1}{4}x + 3)(\frac{1}{2}x - 3)(2x - 7)(x + 6) = 0$ |
| b) $x^2(x + 7)(2x - 9)(2x + 5) = 0$ | d) $(\frac{3}{4}x - 6)(\frac{2}{3}x + 8)(x + 3)(\frac{1}{5}x - 2) = 0$ |

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $3x^3 + 27 = 51$ c) $2x^3 + 300 = 50$ e) $0,01x^3 + x = 10 + x$
 b) $64x^3 + 7 = 8$ d) $27x^3 + 9 = 8$ f) $125x^3 + x^2 = x^2 + 64$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $x(x^2 + 2) = 2(x + 32)$ c) $x(x^2 - 4) = -4(x + 2)$
 b) $3(9 + x^2) = x^2(x + 3)$ d) $x^2(x + 6) = 6(x^2 - 36)$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $4x^2(x + 6) = 0$ d) $x(x - \frac{1}{3})(3x - 1) = 0$
 b) $\frac{1}{3}x^3(7x - 1) = 0$ e) $\frac{2}{5}x^2(x - \frac{1}{5})(x + \frac{1}{4}) = 0$
 c) $x(x + 8)(x - 2) = 0$ f) $x^4(x + \frac{2}{3})(3x + 2) = 0$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $(x - 1)(x - 2)(x - 5) = 0$ d) $x(x + 4)(x - 3)(x - 2) = 0$
 b) $(x + 1)(x + 6)(4x + 1) = 0$ e) $(x - 5)(6x - 1)(2x - 1)(x + 6) = 0$
 c) $(x + 9)(2x - 5)(5x - 2) = 0$ f) $(4x + 3)(3x - 4)(x + 4)(6x - 8) = 0$

5. Wyznacz zbiór rozwiązań równania.

- a) $(x - 4)(x - 2)(x - 1) = 0$ c) $(3x - 1)(3x - 5)(2x - \frac{1}{2}) = 0$
 b) $(x - 6)(x + 3)(2x - 5) = 0$ d) $(\frac{2}{3}x - 1)(\frac{3}{2}x + 1)(2 + 3x) = 0$

6. Podaj liczby spełniające jednocześnie oba równania.

- a) $\begin{cases} x(x + 4)(x - 3) = 0 \\ x(3 - x)(x - 4) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2(x - \frac{1}{4})(x - \frac{2}{3}) = 0 \\ x^2(4x + 1)(6x - 4) = 0 \end{cases}$

Sprawdź się

7. Rozwiąż równanie.

- a) $(x - 3)(x + 4)(6x - 3) = 0$ d) $x(\frac{2}{3}x - 8)(\frac{3}{4}x + 6)(x + 8) = 0$
 b) $(x + 3)(5x - 3)(2x + 6) = 0$ e) $x^2(x - 9)(2x - 6)(x + 1) = 0$
 c) $(2x - 3)(6 - 4x)(\frac{1}{3}x + 5) = 0$ f) $\frac{2}{5}x(4x - 1)(6x + 3)(8x - 4) = 0$

8. Oblicz sumę rozwiązań równania.

- a) $x(8x + 6)(\frac{1}{2}x - 3) = 0$ b) $(3x - 1)(\frac{2}{3}x - 8)(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}) = 0$

Przypomnij sobie

Rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki

1. Zapisz jako iloczyn dwóch czynników liniowych.

- a) $x^2 + 8x$ c) $4x^2 + 28x$ e) $9x^2 + 6x$
 b) $x^2 - \frac{3}{2}x$ d) $6x^2 - 18x$ f) $12x^2 - 18x$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= x(x + 6) \\ 2x^2 - 18x &= 2x(x - 9) \end{aligned}$$

2. Rozłóż na czynniki liniowe, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów.

- a) $x^2 - 36$ b) $x^2 - \frac{1}{4}$ c) $4x^2 - 9$ d) $9x^2 - 49$

3. Oblicz pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisz go w postaci iloczynowej.

- a) $y = x^2 - 3x + 2$ d) $y = x^2 + 5x + 6$
 b) $y = x^2 - 9x + 8$ e) $y = x^2 + 2x - 3$
 c) $y = x^2 + 5x + 4$ f) $y = x^2 - 4x - 5$

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 5x + 4 \\ \Delta &= 25 - 16 = 9, \sqrt{\Delta} = 3 \\ x_1 &= \frac{5-3}{2} = 1 \\ x_2 &= \frac{5+3}{2} = 4 \\ y &= (x - 1)(x - 4) \end{aligned}$$

4. Oblicz pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisz go w postaci iloczynowej.

- a) $y = 2x^2 + 5x - 3$ d) $y = 3x^2 + 7x + 2$
 b) $y = 2x^2 + 7x + 5$ e) $y = 3x^2 + 7x - 6$
 c) $y = 2x^2 + 5x + 3$ f) $y = 6x^2 + 7x + 2$

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 5x - 3 \\ \Delta &= 25 + 24 = 49, \sqrt{\Delta} = 7 \\ x_1 &= \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{5+7}{4} = 3 \\ y &= 2(x + \frac{1}{2})(x - 3) \end{aligned}$$

5. Oblicz pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisz go w postaci iloczynowej.

- a) $y = x^2 - 4x + 1$ d) $y = 2x^2 + x - 2$
 b) $y = x^2 + 4x + 2$ e) $y = 2x^2 - 2x - 1$
 c) $y = x^2 - 6x + 2$ f) $y = 3x^2 + 2x - 2$

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x - 1 \\ \Delta &= 4 + 4 = 8, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2} \\ x_1 &= \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 &= \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \\ y &= (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

D 6. Uzasadnij, że trójmianu kwadratowego nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

- a) $y = x^2 - x + 1$ d) $y = x^2 + 1$
 b) $y = x^2 - 3x + 3$ e) $y = x^2 + 4$
 c) $y = x^2 + 4x + 5$ f) $y = 4x^2 + 1$

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2x + 2 \\ \Delta &= 4 - 8 = -4 < 0 \\ \text{Zatem trójmianu} \\ &\text{nie można rozłożyć} \\ &\text{na czynniki liniowe.} \end{aligned}$$

7. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeżeli jest to możliwe.

- a) $y = x^2 - 9x + 18$ d) $y = 2x^2 - 5x - 3$ g) $y = x^2 - 3x - 3$
 b) $y = x^2 - 6x + 12$ e) $y = 3x^2 + 11x - 4$ h) $y = -2x^2 + x - 2$
 c) $y = -x^2 + 3x - 6$ f) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$ i) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 6x - 27$

2.5. Równania wielomianowe (2)

Przykład 1

a) Rozwiąż równanie $x^3 - 4x^2 = 0$.

$$\begin{aligned}x^2(x - 4) &= 0 \\x^2 &= 0 \quad \text{lub} \quad x - 4 = 0 \\x &= 0 \quad \text{lub} \quad x = 4\end{aligned}$$

Wielomian $x^3 - 4x^2$ zapisujemy w postaci iloczynowej – wyłączamy x^2 przed nawias.

Zatem równanie ma dwa rozwiązania: 0 i 4.

b) Rozwiąż równanie $x^3 - 4x = 0$.

$$\begin{aligned}x(x^2 - 4) &= 0 \\x &= 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - 4 = 0\end{aligned}$$

Wyłączamy x przed nawias.

Równość $x^2 - 4 = 0$ zachodzi, gdy $x = -2$ lub $x = 2$.

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: -2 , 0 i 2 .

c) Rozwiąż równanie $x^3 + 9x = 0$.

$$\begin{aligned}x(x^2 + 9) &= 0 \\x &= 0 \quad \text{lub} \quad x^2 + 9 = 0\end{aligned}$$

Wyłączamy x przed nawias.

Równanie $x^2 + 9 = 0$ jest sprzeczne.

Zatem jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania jest liczba 0.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

- | | | |
|--------------------|----------------------|------------------|
| a) $x^3 + 8x = 0$ | c) $4x^3 - x = 0$ | e) $x^3 = 36x$ |
| b) $x^3 + 64x = 0$ | d) $2x^4 + 4x^3 = 0$ | f) $x^5 = -4x^3$ |

Przykład 2

Rozwiąż równanie $(x^2 + x)(x - 4) = 0$.

$$\begin{aligned}x(x + 1)(x - 4) &= 0 \\x &= 0 \quad \text{lub} \quad x + 1 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 4 = 0\end{aligned}$$

Wyłączamy x przed nawias.

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: -1 , 0 i 4 .

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| a) $(x^2 + 2x)(x - 1) = 0$ | d) $(4x^2 - 8x)(x + 5) = 0$ |
| b) $(x^2 - 3x)(x + 6) = 0$ | e) $(x + 4)(x^2 + 3x) = 0$ |
| c) $(2x^2 + x)(x - 3) = 0$ | f) $(2x - 1)(x^2 - 2x) = 0$ |

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$.

$$\begin{aligned}x(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\x(x - 3)^2 &= 0 \\x &= 0 \quad \text{lub} \quad x = 3\end{aligned}$$

Wyłączamy x przed nawias.

Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.

Rozwiązaniami równania są więc liczby 0 i 3.

b) Rozwiąż równanie $x^3 - 2x^2 - 15x = 0$.

$$\begin{aligned}x(x^2 - 2x - 15) &= 0 \\x &= 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - 2x - 15 = 0\end{aligned}$$

Wyłączamy x przed nawias.

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4 + 60 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8 \\x_1 &= \frac{2-8}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{2+8}{2} = 5\end{aligned}$$

Zatem wyjściowe równanie ma trzy rozwiązania: -3 , 0 i 5 .

c) Rozwiąż równanie $5x^3 + 4x^2 + 4x = 0$.

$$\begin{aligned}x(5x^2 + 4x + 4) &= 0 \\x &= 0 \quad \text{lub} \quad 5x^2 + 4x + 4 = 0\end{aligned}$$

Wyłączamy x przed nawias.

$$\Delta = 16 - 80 = -64 < 0$$

Równanie kwadratowe jest sprzeczne ($\Delta < 0$), zatem jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania jest liczba 0.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|
| a) $x^3 + 4x^2 + 4x = 0$ | c) $8x^4 + 8x^3 + 2x^2 = 0$ | e) $4x^5 - 9x^3 = 0$ |
| b) $3x^5 + 6x^4 + 3x^3 = 0$ | d) $3x^5 - 27x^3 = 0$ | f) $\frac{1}{2}x^6 = \frac{1}{8}x^4$ |

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| a) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$ | c) $-2x^4 + 9x^3 + 5x^2 = 0$ | e) $2x^2 - 3x = x - x^3$ |
| b) $3x^3 + 4x^2 + x = 0$ | d) $4x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$ | f) $2x^6 - x^5 = x^5 + x^4$ |

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- | | | |
|------------------|-------------------|-----------------------|
| a) $2x^3 = 4x^2$ | c) $x^4 = -27x^3$ | e) $x^5 + 16x = 0$ |
| b) $x^5 = 9x^3$ | d) $x^5 = 8x^4$ | f) $4x^6 + 25x^4 = 0$ |

2. Rozwiąż równanie.

a) $x(x^2 - 3x + 2) = 0$ c) $x(x^2 + 3x + 1) = 0$ e) $x^2(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3) = 0$
b) $x^2(x^2 + 6x + 5) = 0$ d) $x^3(x^2 - 2x - 1) = 0$ f) $x^2(\frac{9}{2}x^2 + 3x + 2) = 0$

3. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$ c) $x^3 - x^2 = 12x$ e) $16x = 8x^2 - x^3$
b) $x^3 - 3x^2 - 10x = 0$ d) $x^3 - 15x = 2x^2$ f) $10x = 3x^2 - x^3$

4. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 6x^3 + 5x^2 = 0$ d) $x^4 - 12x^3 + 36x^2 = 0$
b) $x^4 + 6x^3 + 8x^2 = 0$ e) $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 = 0$
c) $x^4 - 2x^3 - 24x^2 = 0$ f) $12x^4 + 5x^3 - 2x^2 = 0$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{4}x^3 - x^2 = 0$ c) $x^4 - 2x^3 = 0$ e) $2x^5 - 10x^4 = 0$
b) $3x^3 + 9x^2 = 0$ d) $6x^4 + x^3 = 0$ f) $3x^6 - 4x^5 = 0$

6. Rozwiąż równanie.

a) $x(x^2 - 4x) = 0$ d) $(x^2 + x)(x - 6) = 0$
b) $x(4x^2 + x) = 0$ e) $(2x^2 - x)(2x + 1) = 0$
c) $(x^2 - x)(x + 2) = 0$ f) $(4x^2 - x)(6x - 2) = 0$

7. Podaj liczby spełniające jednocześnie oba równania.

a) $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0$, $(x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0$
b) $(x - 4)(2x + 1)(2x + 8) = 0$, $(4x^2 - 1)(x^2 - 16) = 0$

Sprawdź się

8. Rozwiąż równanie.

a) $(x^2 - x)(x + 2) = 0$ c) $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$
b) $(x^2 + x)(x - 3) = 0$ d) $x^3 + 5x^2 - 6x = 0$

9. Wyznacz największą liczbę spełniającą równanie.

a) $9x^3 - 6x^2 + x = 0$ b) $2x^3 + 6x^2 - 5x = 0$

10. Ile rozwiązań równania należy do podanego przedziału?

a) $x^3 - 16x = 0$, $[-2; 6]$ d) $4x - x^3 = 0$, $(-2; 4)$
b) $x^3 - 25x = 0$, $[-3; 5)$ e) $4x + x^3 = 0$, $(-4; 0]$
c) $x^3 - 3x = 0$, $(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ f) $x^3 - 6x = 30x$, $(-8; 8]$

2.6. Wielomiany – zastosowania

Przykład 1

Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku x dm. Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest równa 40 dm.

a) Wyznacz wielomian opisujący objętość tego prostopadłościanu w zależności od x . Określ dziedzinę tej funkcji.

Oznaczmy przez h wysokość prostopadłościanu w dm (rysunek obok). Wówczas $4h + 8x = 40$, czyli $h = 10 - 2x$.

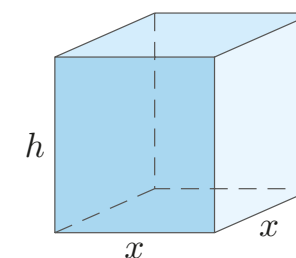
Objętość prostopadłościanu:

$$V(x) = x^2(10 - 2x) = 2x^2(5 - x)$$

gdzie $x > 0$ oraz $10 - 2x > 0$, czyli $x \in (0; 5)$.

b) Dla jakiego $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ objętość tego prostopadłościanu jest największa?

$V(1) = 8$, $V(2) = 24$, $V(3) = 36$, $V(4) = 32$, zatem spośród podanych argumentów objętość prostopadłościanu jest największa dla $x = 3$.



Ćwiczenie 1

Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach x dm i $2x$ dm. Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest równa 48 dm.

a) Wyznacz wielomian opisujący objętość tego prostopadłościanu w zależności od x . Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Dla jakiego $x \in \{1, 2, 3\}$ objętość tego prostopadłościanu jest największa?

Ćwiczenie 2

Z kwadratowego arkusza kartonu o boku 12 dm wycięto w narożnikach kwadraty o bokach x dm, a następnie sklejono go i otrzymano otwarte pudełko (rysunek obok).

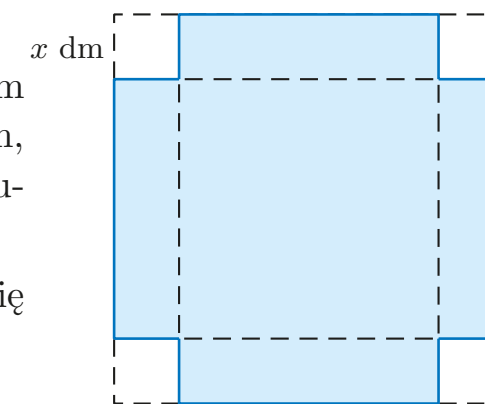
D a) Uzasadnij, że objętość tego pudełka wyraża się za pomocą wzoru:

$$V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x, \text{ gdzie } x \in (0; 6)$$

b) Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę wartości funkcji V dla wybranych argumentów x .

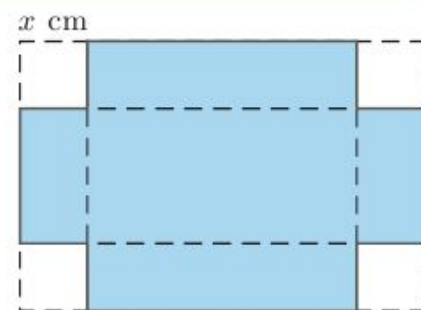
x	1	2	3	4	5
$V(x)$	100	?	?	?	20

c) Jaka jest objętość tego pudełka, gdy ma ono kształt sześcianu?



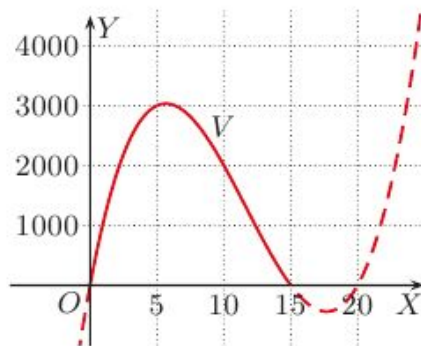
Zadania

1. Z prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach $30 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ wycięto w narożnikach kwadraty o bokach długości $x \text{ cm}$, a następnie sklejono go i otrzymano otwarte pudełko (rysunek obok).



a) Wyznacz wzór funkcji V opisującej objętość otrzymanego pudełka w zależności od x . Określ dziedzinę tej funkcji.

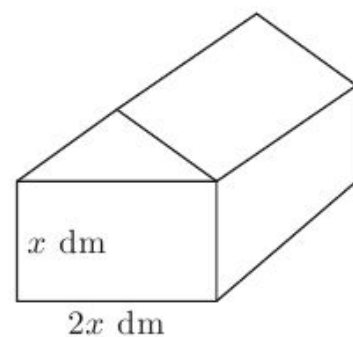
b) Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji V . Na podstawie tego wykresu podaj przybliżone wymiary pudełka o największej objętości.



c) Sprawdź, czy spełniona jest nierówność:

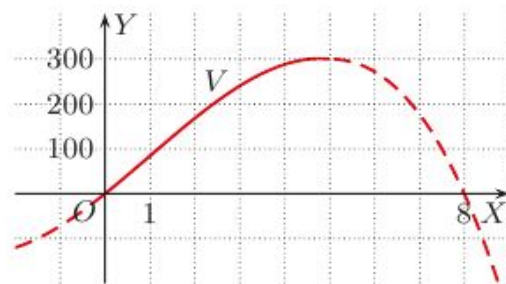
$$V(10) > V(2,5)$$

2. Domek dla lalek ma kształt graniastosłupa prostego (rysunek obok). Wysokość tego domku w najwyższym punkcie wynosi 5 dm . Jego podłoga ma kształt prostokąta o obwodzie 32 dm .



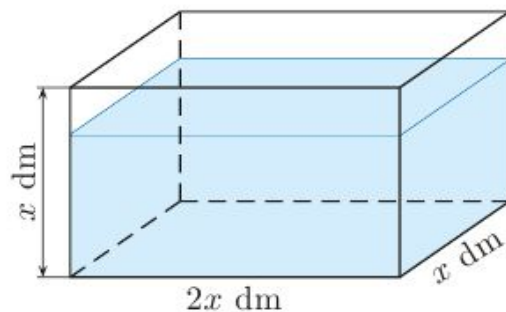
D a) Uzasadnij, że objętość tego domku wyraża się za pomocą wzoru $V(x) = -2x^3 + 6x^2 + 80x$, gdzie $x \in (0; 5)$.

b) Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji V . Korzystając z wykresu, podaj przybliżone wymiary podstawy domku, którego objętość jest równa 200 dm^3 .



Sprawdź się

3. Do akwarium o wymiarach podanych na rysunku wiano wodę do wysokości $(x - 0,5) \text{ dm}$.



a) Wyznacz wzór opisujący, ile litrów wody znajduje się w akwarium w zależności od x . Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Ile litrów wody znajduje się w akwarium, jeśli wiadomo, że jego dno ma kształt prostokąta o polu równym 32 dm^2 ?

Powtórzenie

Zestaw I

1. Zredukuj wyrazy podobne wielomianu w . Oblicz jego wartość dla $x = -2$.

a) $w(x) = 2x^2 - x^4 + 8x^3 + 3x^4 - 7 - 2x^4 - 5x^3$

b) $w(x) = \frac{1}{2}x^5 + x^4 - \frac{1}{3}x^5 + 2x - x^4 - \frac{1}{6}x^5 + 3$

2. Wyznacz sumę wielomianów v i w . Oblicz jej wartość dla $x = 2$.

a) $v(x) = \frac{2}{3}x^4 + 2x - 1$, $w(x) = \sqrt{2\frac{7}{9}}x^4 + x^2 - 3x$

b) $v(x) = \frac{3}{\sqrt{3}}x^3 - x^2 + 2$, $w(x) = -\sqrt{3}x^3 + 3x^2 - 1$

3. Oblicz wartości wielomianu w dla $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{4}$ i $x = \frac{1}{4}$.

a) $w(x) = 4x^2 - 8x$ b) $w(x) = -8x^3 + 2x$ c) $w(x) = 16x^4 - x^2$

4. Sprawdź, czy dla wielomianu $w(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ spełniony jest podany warunek.

a) Wartość wielomianu w dla $x = 2$ jest większa od 5.

b) Wartość wielomianu w dla $x = -3$ jest nie mniejsza niż -70 .

c) Wartość wielomianu w dla $x = -4$ jest nie większa niż -12^2 .

5. Wyznacz iloczyn.

a) $(2x^3 - x^2)(x^2 + 3x)$ c) $(x^3 - 2x^2 + x)(-2x^2 + 6x)$

b) $(4x^5 - x^4)(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2)$ d) $(2x^4 + x^3 - 3x^2)(x^2 - 3x + 1)$

6. Dane są wielomiany $w(x) = x^3 - 1$ i $p(x) = 2x^2 + 4x + 1$. Wyznacz wielomian u i podaj jego stopień.

a) $u(x) = 2w(x) + (1 - x)p(x)$ b) $u(x) = [w(x)]^2 - \frac{x^4}{2} \cdot p(x)$

7. Podaj sumę współczynników wielomianu u .

a) $u(x) = (2x^2 - 1)^2 - (2x - 1)^2$ c) $u(x) = (x^2 - 2)^2 - (x - 2)^2$

b) $u(x) = (x^2 + 8)(\sqrt{8} - x)(x + 2\sqrt{2})$ d) $u(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

8. Która z liczb -3 , -1 , 1 spełnia podane równanie?

a) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ c) $6x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$

b) $x^3 + 8x^2 + 17x + 6 = 0$ d) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

9. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 + 64 = 0$ c) $2x^3 - 128 = 0$ e) $128x^3 - 54 = 0$

b) $8x^3 - 27 = 0$ d) $5x^3 + 135 = 0$ f) $162x^3 + 48 = 0$

10. Rozwiąż równanie.

- a) $6x(x+7)(x-9)=0$ c) $(x-2)(x+3)(4x+1)=0$
b) $\frac{1}{4}x(2x-1)(5x+2)=0$ d) $(x+5)(x-4)(2x-4)=0$

11. Rozwiąż równanie. Wypisz pierwiastki tego równania spełniające warunek $|x| < \sqrt{2}$.

- a) $x(x-2)(x+1)=0$ c) $x(2x+1)(3x+1)=0$
b) $x(x+\frac{3}{2})(x-6)=0$ d) $x(3x-2)(2x+3)=0$

■ Zestaw II

1. Rozwiąż równanie.

- a) $x(x^2-16)=0$ c) $x(4x^2+1)=0$ e) $x(x^2-4x+4)=0$
b) $x(x^2+16)=0$ d) $x(x^2+2x+1)=0$ f) $x(4x^2-4x+1)=0$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3+6x^2=0$ c) $4x^3-x=0$ e) $\sqrt{2}x^6=x^5$
b) $3x^4-81x=0$ d) $8x^5+x^2=0$ f) $\frac{\sqrt{2}}{4}x^3-\sqrt{2}x=0$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $x(x^2-5x+4)=0$ c) $x^2(2x^2+x-3)=0$
b) $x(x^2+4x-21)=0$ d) $x^2(4x^2+3x+1)=0$

4. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3-6x^2+8x=0$ c) $4x^4-7x^3-2x^2=0$
b) $x^3-4x^2-12x=0$ d) $2x^4+4x^3+x^2=0$

5. Rozwiąż równanie. Wypisz pierwiastki tego równania spełniające warunek $|x| > 2$.

- a) $(x^2-x)(x-3)=0$ d) $(x-\frac{1}{2})(x^2+4x)=0$
b) $(x^2-6x)(2x+3)=0$ e) $(5x-1)(2x^2-4x)=0$
c) $(x^2+3x)(3x+8)=0$ f) $(3x+6)(x-3x^2)=0$

6. Czy dla $m=2$ liczba a jest pierwiastkiem podanego równania?

- a) $-3x^3+2x^2+mx-3=0$, $a=-1$
b) $x^3+(2m-1)x^2-3x+7=0$, $a=2$
c) $-x^3+mx^2-mx+5=0$, $a=3$
d) $x^3+3x^2+(m^2-2m)x-4=0$, $a=-2$

7. Zbiór A jest zbiorem miejsc zerowych wielomianu u , zbiór B – zbiorem miejsc zerowych wielomianu v , zbiór C – zbiorem miejsc zerowych wielomianu w . Wyznacz zbiór $(A \cup B) \setminus C$.

- a) $u(x)=x^3-x^2$, $v(x)=x^3+2x^2$, $w(x)=x^3-4x$
b) $u(x)=x^4-3x^2$, $v(x)=x^4+9x^2$, $w(x)=\frac{1}{3}x^4+9x^3$

8. Wyznacz ujemne rozwiązania równania.

- a) $(x^2-4)(x+4)=0$ d) $(4x^2-1)(9x^2-4)=0$
b) $(x^2+8)(x^2-9)=0$ e) $(x^3-8)(x^2-5)=0$
c) $(x^2-2)(x^2-3)=0$ f) $(x^3+1)(x^3+8)=0$

9. Rozwiąż równanie.

- a) $x^3+x=2x^2$ e) $2x^5=2x^4+12x^3$ i) $x^3+4x=-5x^2$
b) $3x^3+2x=-x^2$ f) $10x^4+x^3=2x^2$ j) $-\frac{1}{2}x^4+x^3=\frac{1}{2}x^2$
c) $x^3=4x^2+5x$ g) $9x^6+6x^5+x^4=0$ k) $\frac{1}{6}x^3+2x^2=-6x$
d) $6x^2+9x=3x^3$ h) $x^5+4x^4=12x^3$ l) $\frac{x^4}{2}+x^2=\sqrt{2}x^3$

10. Dany jest wielomian w , dla którego $w(-1)=4$ i $w(0)=3$. Oblicz a i b .

- a) $w(x)=x^3+(a-b)x^2-4x+\frac{b}{2}$ b) $w(x)=-ax^3+3x^2+a-6b$

11. Podaj przykład wielomianu czwartego stopnia, którego jedynymi pierwiastkami są podane liczby.

- a) -2 i 2 b) $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ c) $1, 2, 3$

12. Rozwiąż równanie.

- a) $3x^5=\frac{x^7+3x^6}{6}$ b) $\frac{20x^4+x^2}{8}=\frac{x^4-2x^3}{2}$ c) $\frac{x^4-4x^3}{2}=\frac{x^5-6x^3}{3}$

13. Wyznacz wielomian $v(x,y)=3u(x,y)-2w(x,y)$. Oblicz wartość tego wielomianu dla $x=\frac{1}{2}$ i $y=-2$.

- a) $u(x,y)=2x^2y-6xy^2+4x^2y^3$, $w(x,y)=3x^2y-2xy^2+4x^2y^3$
b) $u(x,y)=\frac{2}{3}xy-\frac{1}{6}xy^3+y^4$, $w(x,y)=-\frac{1}{4}xy+xy^3+\frac{3}{2}y^4$

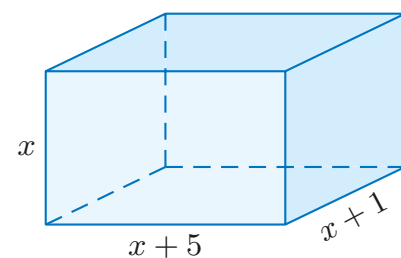
14. Wyznacz wielomian $v(x,y)=4u(x,y)-(w(x,y))^2$.

- a) $u(x,y)=2x^2y^2$, $w(x,y)=2x^2+2y^2$
b) $u(x,y)=-\frac{1}{2}x^2y^2$, $w(x,y)=\frac{1}{2}x^2-y^2$

15. Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości x, y, z oraz prostopadłościan o krawędziach długości $x+1, y+2, z+3$. Podaj wielomian opisujący sumę pól powierzchni całkowitych tych prostopadłościanów. Określ dziedzinę tej funkcji.

**Przykład 1**

Dla jakiej wartości x objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok jest dwa razy większa od objętości sześcianu o krawędzi x ?



Objętość tego prostopadłościanu:

$$V_p(x) = x(x+1)(x+5) = x^3 + 6x^2 + 5x, \text{ gdzie } x > 0.$$

Objętość sześcianu o krawędzi x :

$$V_s(x) = x^3, \text{ gdzie } x > 0$$

Z zależności $V_p = 2V_s$ otrzymujemy:

$$x^3 + 6x^2 + 5x = 2x^3$$

$$x^3 - 6x^2 - 5x = 0$$

$$x(x^2 - 6x - 5) = 0$$

Zatem $x = 0$ (sprzeczne z założeniem) lub:

$$x^2 - 6x - 5 = 0$$

$$\Delta = 36 + 20 = 56, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{14}$$

$$x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{14}}{2} = 3 - \sqrt{14} < 0 \quad \text{sprzeczne z założeniem}$$

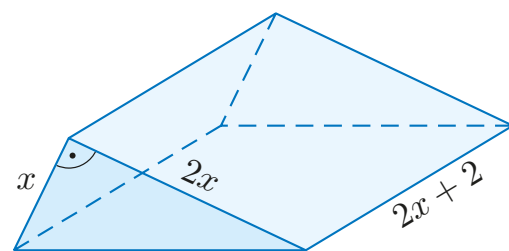
$$x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{14}}{2} = 3 + \sqrt{14}$$

Odpowiedź: $x = 3 + \sqrt{14}$

→ Zadanie 24, str. 86

Przykład 2

Dla jakiej wartości x objętość graniastosłupa przedstawionego na rysunku obok jest cztery razy większa od objętości sześcianu o krawędzi x ?



Objętość tego graniastosłupa:

$$V_g(x) = \frac{1}{2}x \cdot 2x(2x+2) = 2x^3 + 2x^2, \text{ gdzie } x > 0.$$

Objętość sześcianu o krawędzi x : $V_s(x) = x^3$, gdzie $x > 0$.

Z zależności $V_g = 4V_s$ otrzymujemy:

$$2x^3 + 2x^2 = 4x^3$$

$$2x^3 - 2x^2 = 0$$

$$2x^2(x - 1) = 0$$

Zatem $x = 0$ (sprzeczne z założeniem) lub $x = 1$.

Odpowiedź: $x = 1$

→ Zadanie 24, str. 86

Zakładamy, że:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 5 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$$

czyli $x > 0$.

Zakładamy, że:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x > 0 \\ 2x + 2 > 0 \end{cases}$$

czyli $x > 0$.



W zadaniach 1–8 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Wielomian $w(x) = -2x^4 + ax^2 + 2x - 4$ spełnia warunek $w(\sqrt{2}) = -w(-\sqrt{2})$.

Wynika stąd, że

- A. $a = 6$ B. $a = 4$ C. $a = 2$ D. $a = -2$

Zadanie 2 (0–1)

Dany jest wielomian $w(x) = (2 - x)(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)^2$. Współczynnik przy najwyższej potędze tego wielomianu jest równy

- A. $-8\sqrt{2}$ B. $-2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $8\sqrt{2}$

Zadanie 3 (0–1)

Wyrażenie $(4x^2 + 1 + 2x)(4x^2 + 1 - 2x)$ jest równe

- A. $16x^4 + 4x^3 + 1$ C. $16x^4 + 4x^2 + 1$
B. $16x^4 - 4x^3 + 1$ D. $16x^4 - 4x^2 + 1$

Zadanie 4 (0–1)

Która para punktów należy do wykresu funkcji $w(x) = x^3 - x^2 + 6$?

- A. $A_1(-1, 4), A_2(1, 6)$ C. $C_1(1, 6), C_2(-2, 2)$
B. $B_1(2, 8), B_2(-2, 6)$ D. $D_1(-2, 6), D_2(2, 10)$

Zadanie 5 (0–1)

Dany jest prostopadłościan o krawędziach $x - 4, x + 4, x^2 - 4$, gdzie $x > 4$.

Objętość tego prostopadłościanu jest opisana wzorem

- A. $V(x) = x^4 - 16$ C. $V(x) = x^4 - 16x^2 + 16$
B. $V(x) = x^4 - 64$ D. $V(x) = x^4 - 20x^2 + 64$

Zadanie 6 (0–1)

Wszystkie rozwiązania równania $x(2x + 4)(2x - 5) = 0$ należą do przedziału

- A. $[-5; 1\frac{2}{3}]$ B. $[-3\frac{2}{3}; 2]$ C. $[-3; 2\frac{2}{3}]$ D. $[-1\frac{2}{3}; 6]$

Zadanie 7 (0–1)

Liczby $-3, 1$ są jedynymi pierwiastkami równania

- A. $x^3 + 2x^2 = 3x$ C. $(x - 1)^2(x^2 + 6x + 9) = 0$
B. $x(x^2 + x - 3) = 0$ D. $(x^2 - 1)(x + 3)^2 = 0$

Zadanie 8 (0–1)

Wartość wielomianu $w(x, y, z) = 6x^2yz - 8xy^2z$ dla $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$ i $z = -2$ jest równa

- A. $-3\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $3\frac{1}{2}$



Zadanie 9 (0-1)

Dane jest równanie $x(x + 3)(x - 2) = 0$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Podane równanie ma trzy różne pierwiastki.	P	F
Iloczyn niezerowych pierwiastków tego równania jest równy 6.	P	F

Zadanie 10 (0-1)

Niech $x = -2a$ oraz $y = 3b$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Wyrażenie $x^2 - y^2$ jest równe

A.	$(2a - 3b)(2a + 3b),$	a wyrażenie $xy(x - y)$ jest równe	1.	$12a^2b - 18a^2.$
B.	$(2a - 3b)(-2a + 3b),$		2.	$18ab^2 - 12a^2.$
			3.	$12a^2b + 18ab^2.$

Zadanie 11 (0-2)

Dany jest wielomian $w(x, y) = -2xy^2 - xy^3 + x^2y$.

Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj właściwe dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Numer zadania	Zdanie do uzupełnienia	Dokończenie zdania
11.1	Wartość $w(2, -2)$ jest równa	?
11.2	Wartość $w(-2, 2)$ jest równa	?

A. -16 **B.** -8 **C.** 16 **D.** 32 **E.** 40

Zadanie 12 (0-1)

Dany jest wielomian $w(x) = 2x^4 - \sqrt{2}x^3 - x^2$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wartość wielomianu w dla $-\sqrt{2}$ jest równa 2.	P	F
Wartość wielomianu w dla $2\sqrt{2}$ jest równa 8.	P	F



Zadanie 13

Dany jest wielomian $w(x) = 2x^3 + m^2x^2 - 6x + 9$, gdzie $m \in \mathbb{R}$.

Zadanie 13.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeśli $m = -1$, to

dla $x = -2$ wielomian w przyjmuje wartość równą 9.	P	F
dla $x = -\frac{3}{2}$ wielomian w przyjmuje wartość większą od 13.	P	F

Zadanie 13.2 (0-2)

Rozwiąż równanie $w(x) - 6mx = (mx - 3)^2$.

Zadanie 14

Dany jest wielomian $w(x) = (x^2 + x + 1)(x - 3) + 3$.

Zadanie 14.1 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x wielomian w można zapisać w postaci

A.	$w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x,$	a jego wartość dla $x = -1$ jest równa	1.	0.
B.	$w(x) = x^3 - 2x^2 - 3x,$		2.	-1.
			3.	-2.

D Zadanie 14.2 (0-1)

Uzasadnij, że $w(\sqrt{2})$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 15

Dany jest wielomian $w(x) = x(x^2 - 4x + c)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$.

D Zadanie 15.1 (0-1)

Uzasadnij, że dla $c = 0$ suma pierwiastków tego wielomianu jest większa od sumy pierwiastków dla $c = 4$.

Zadanie 15.2 (0-1)

Wyznacz pierwiastki wielomianu w dla $c = -12$.

Zadanie 16 (0-2)

Oblicz średnią arytmetyczną pierwiastków wielomianu:

$$w(x) = x(2x - 1)(3x - 1)(6x - 1)$$

**D Zadanie 17 (0-2)**

Uzasadnij, że rozwiązaniem równania $0,75x^3 + 48 = 0$ jest liczba wymierna.

Zadanie 18 (0-2)

Oblicz $\sqrt{p}$, gdy p jest sumą pierwiastków równania $x(x-1)(16x-9) = 0$.

Zadanie 19 (0-2)

Ile wspólnych pierwiastków mają poniższe równania?

$$x^2 + x - 12 = 0 \quad \text{ i } \quad (x+4)(x^2 + 8x) = 0$$

Zadanie 20 (0-2)

Które liczby całkowite o wartości bezwzględnej mniejszej od 7 są pierwiastkami wielomianu $w(x) = x(\frac{2}{3}x + 4)(\frac{3}{4}x - 5)(\frac{4}{5}x + 6)$?

Zadanie 21

Dany jest wielomian $w(x) = (\frac{1}{4}x - \frac{1}{8})(x^2 - 7x + 12\frac{1}{4})$.

Zadanie 21.1 (0-2)

Wyznacz pierwiastki wielomianu w .

D Zadanie 21.2 (0-2)

Uzasadnij, że dla argumentów $1\frac{1}{2}$ i $4\frac{1}{2}$ wielomian w przyjmuje tę samą wartość.

Zadanie 22

Sumę sześcianów kolejnych liczb naturalnych można wyrazić wzorem:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

Zadanie 22.1 (0-1)

Sprawdź prawdziwość powyższego wzoru dla $n = 4$.

D Zadanie 22.2 (0-3)

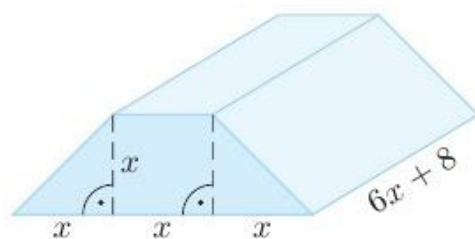
Korzystając z powyższego wzoru, uzasadnij, że suma sześcianów kolejnych liczb naturalnych od 1 do n jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

D Zadanie 23 (0-4)

Uzasadnij, że objętość prostopadłościanu o krawędziach $x-2$, x , $x+4$ jest opisana za pomocą wzoru $V(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$, gdzie $x > 2$. Sprawdź, czy dla $x = 2\sqrt{2}$ objętość tego prostopadłościanu jest liczbą wymierną.

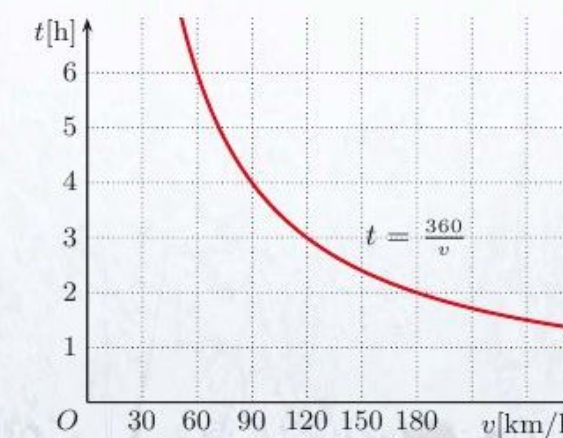
Zadanie 24 (0-2) → Przykłady 1 i 2, str. 82

Objętość graniastoslupa przedstawionego na rysunku obok jest równa objętości sześcianu o krawędzi $3x$. Oblicz x .



3 Funkcje wymierne

Czas potrzebny na przebycie pewnej ustalonej odległości jest tym krótszy, im większa jest prędkość, z jaką się poruszamy. Na wykresie obok przedstawiono zależność między prędkością a czasem potrzebnym na pokonanie odległości 360 km. Prędkość i czas (potrzebny do przebycia określonej drogi) to wielkości odwrotnie proporcjonalne.



Proporcjonalność odwrotna

Funkcję postaci $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x > 0$ oraz $a \in \mathbb{R}_+$, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**. Wielkości x i y nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi**, a stałą a – **współczynnikiem proporcjonalności**.

1. Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne. Podaj współczynnik tej proporcjonalności i jej wzór. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

$$a = xy$$

x	$\frac{1}{2}$	1	2	?	4	6	9	10	?
y	?	?	?	6	?	3	?	?	1

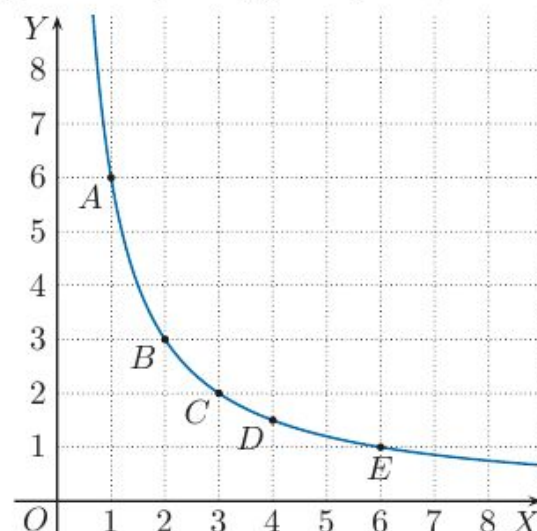
2. Niech x oznacza cenę w złotych za kilogram gruszek, a y – liczbę kupionych kilogramów tych owoców.

a) Na zakup gruszek przeznaczono 6 zł. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres zależności y od x . Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

	A	B	C	D	E
x [zł]	1	?	?	?	?
y [kg]	6	?	?	?	?

b) Na zakup gruszek przeznaczono 8 zł. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Naszkicuj wykres zależności y od x .

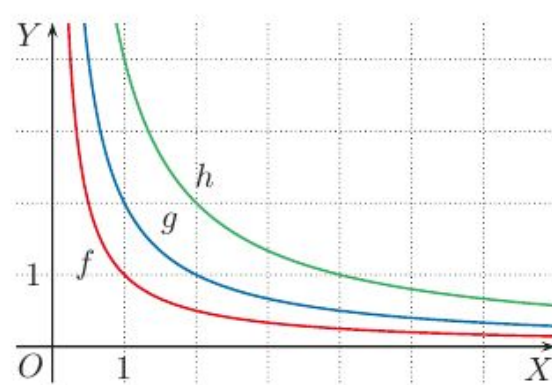
x [zł]	1	2	3	4	5
y [kg]	?	?	?	?	?



3. Podaj wzór proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$, do której wykresu należy punkt: a) $(3, 6)$, b) $(\frac{1}{2}, 8)$, c) $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, d) $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$.

4. Na rysunku przedstawiono wykresy proporcjonalności odwrotnych: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x}$, $h(x) = \frac{4}{x}$. Do którego z tych wykresów należy podany punkt?

- a) $(3, \frac{2}{3})$ d) $(\frac{8}{3}, \frac{3}{4})$
 b) $(\frac{5}{3}, \frac{3}{5})$ e) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
 c) $(\frac{4}{3}, 3)$ f) $(2, 5, 1, 6)$

3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$ – jest ona określona dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sporządzamy tabelę wartości funkcji f , a następnie łączymy wyznaczone punkty krzywą jak na rysunku poniżej.

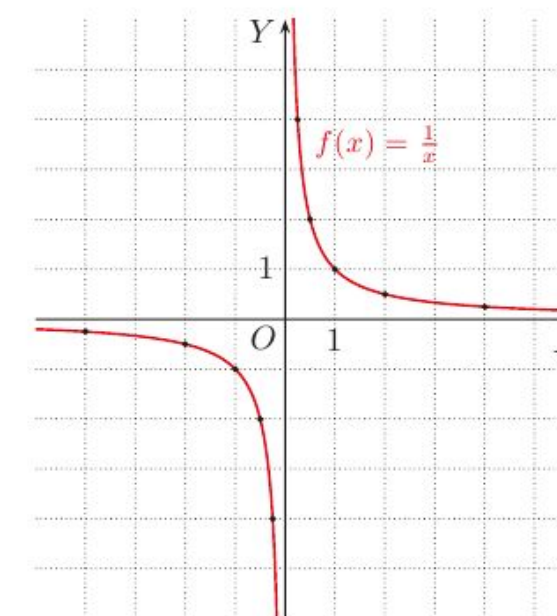
x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, oraz każdą krzywą powstałą z tego wykresu przez przesunięcie nazywamy **hiperbolą**.

Własności funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$:

- dla $x < 0$ funkcja f przyjmuje wartości ujemne, natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości dodatnie,
- funkcja f nie ma miejsc zerowych,
- funkcja f jest **malejąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$.

Uwaga. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ **nie jest** malejąca w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.



Hiperbola składa się z dwóch gałęzi.

Zauważmy, że każda z gałęzi wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ „zbliża się” do prostej poziomej $y = 0$ oraz „zbliża się” do prostej pionowej $x = 0$. O takich prostych mówimy, że są **asymptotami** wykresu funkcji – odpowiednio **asymptotą poziomą** i **asymptotą pionową**.

Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono jedną gałąź hiperboli $f(x) = \frac{4}{x}$.

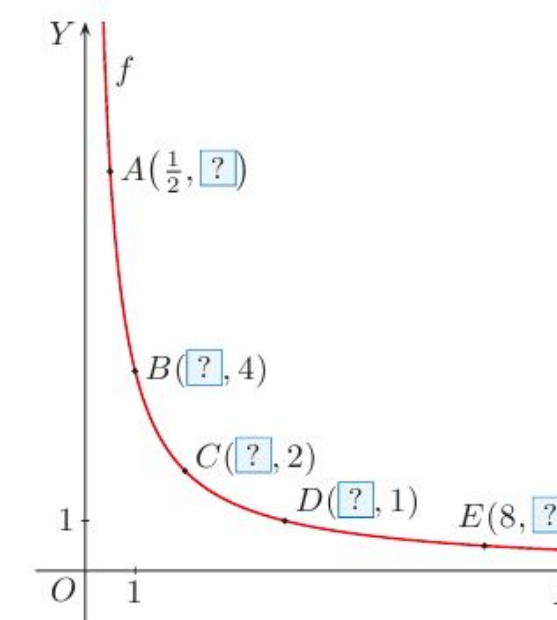
a) Podaj brakujące współrzędne punktów A, B, C, D i E .

b) Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj obie gałęzie tej hiperboli.

Ćwiczenie 2

Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{3}{x}$ c) $f(x) = \frac{8}{x}$



Ćwiczenie 3

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji:

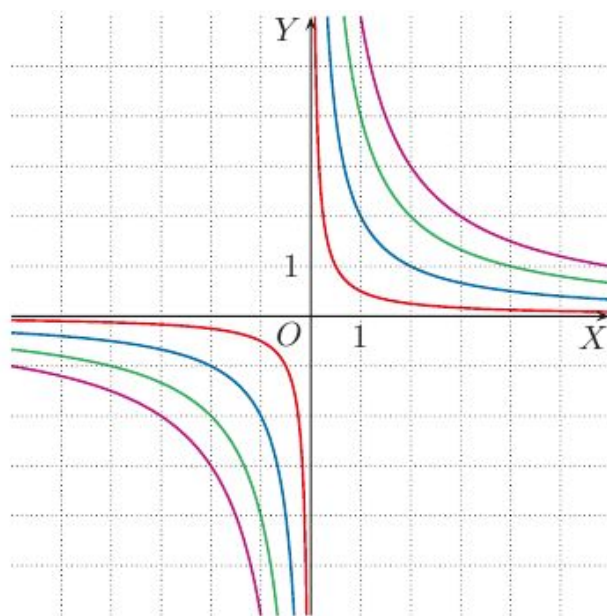
$$f(x) = \frac{1}{2x}, \quad g(x) = \frac{2}{x}, \\ h(x) = \frac{4}{x}, \quad k(x) = \frac{6}{x}.$$

a) Oblicz wartości każdej z tych funkcji dla $x = 1$.

b) Dobierz wzór do każdego wykresu.

c) Do których hiperbol należą punkty:

$$A(2, 3), \quad B\left(\frac{2}{3}, 3\right), \quad C\left(4, \frac{1}{8}\right), \\ D\left(-4, -\frac{1}{2}\right), \quad E\left(-\frac{2}{3}, -6\right)?$$

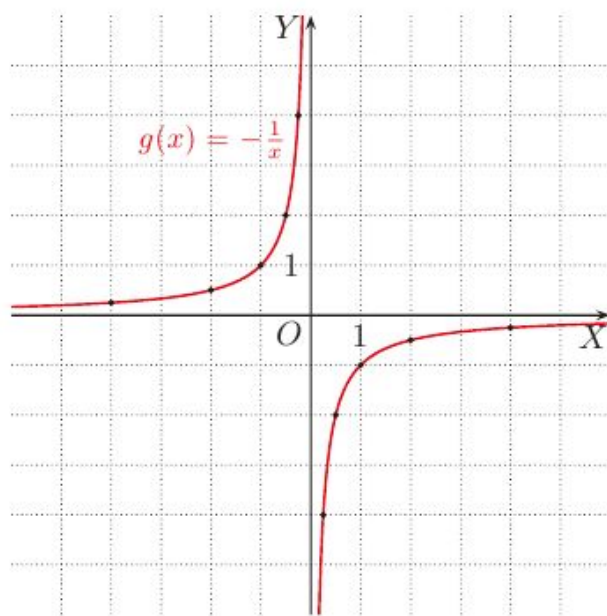


Aby naszkicować wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sporządzamy tabelę wartości funkcji g , a następnie łączymy wyznaczone punkty odpowiednią krzywą. Na rysunku poniżej przedstawiono hiperbolę otrzymaną w ten sposób.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

Własności funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$:

- dla $x < 0$ funkcja g przyjmuje wartości dodatnie, natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości ujemne,
- funkcja g nie ma miejsc zerowych,
- funkcja g jest **rosnąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$, ale nie jest funkcją rosnącą w swojej dziedzinie,
- prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą, a prosta $x = 0$ – asymptotą pionową wykresu funkcji g .



Ćwiczenie 4

Sporządź odpowiednią tabelę wartości funkcji i naszkicuj hiperbolę, która jest wykresem funkcji g .

$$\text{a) } g(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{b) } g(x) = -\frac{3}{x} \quad \text{c) } g(x) = -\frac{4}{x} \quad \text{d) } g(x) = -\frac{0,5}{x}$$

Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$, której dziedziną jest zbiór D . Podaj zbiór wartości tej funkcji.

$$\text{a) } D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{b) } D = (-\infty; -1) \quad \text{c) } D = [2; 8]$$

2. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartość najmniejszą i wartość największą w przedziale $[1; 2]$.

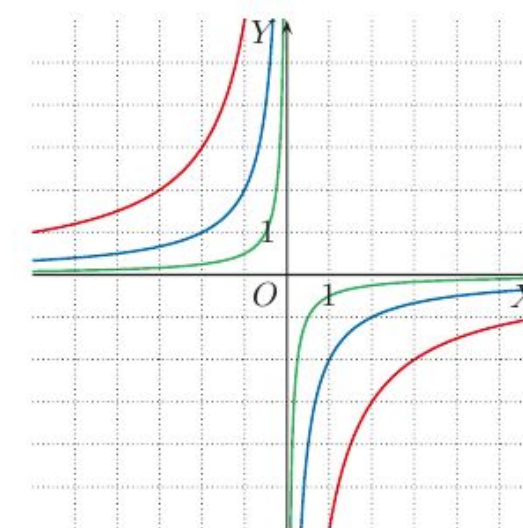
$$\text{a) } f(x) = \frac{6}{x} \quad \text{b) } f(x) = -\frac{4}{x} \quad \text{c) } f(x) = \frac{1}{2x} \quad \text{d) } f(x) = -\frac{5}{x}$$

3. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = -\frac{6}{x}, \quad g(x) = -\frac{2}{x}, \quad h(x) = -\frac{1}{2x}$$

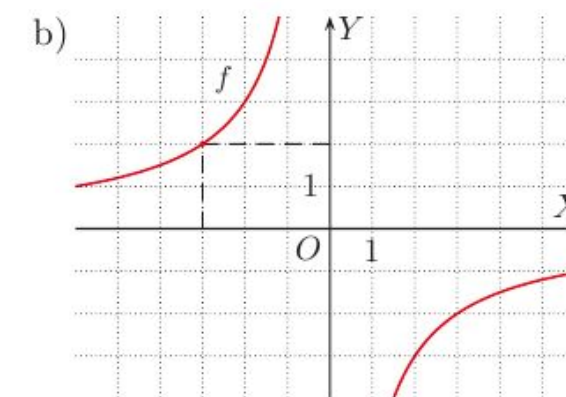
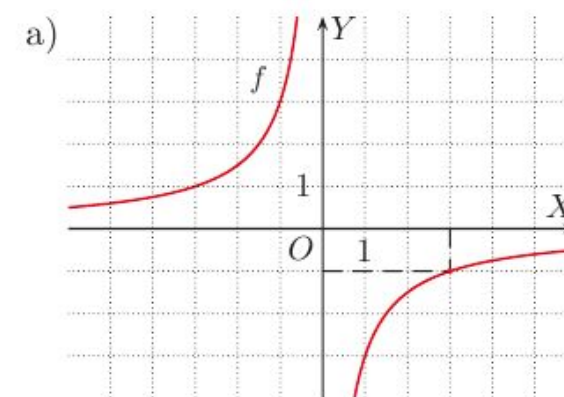
a) Dobierz wzór do każdego wykresu.

b) Które spośród punktów $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $Q(-\frac{1}{2}, 4)$ i $R(3\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ należą do wykresu funkcji g ?



4. Podaj sześć punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{6}{x}$.

5. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a . Znajdź współrzędne punktu, w którym hiperbola przecina prostą $y = -3$. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od -3 .



Sprawdź się

6. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ należy punkt P . Naszkicuj ten wykres.

$$\text{a) } P(4, \frac{1}{2}) \quad \text{b) } P(-\frac{1}{9}, -3) \quad \text{c) } P(8, -\frac{1}{2}) \quad \text{d) } P(-\frac{1}{8}, 16)$$

7. Dla jakiej wartości współczynnika a punkt P należy do hiperboli $y = \frac{a}{x}$?

$$\text{a) } P(-1, 8) \quad \text{b) } P(4, -16) \quad \text{c) } P(-\frac{1}{7}, 2) \quad \text{d) } P(-5, -25)$$

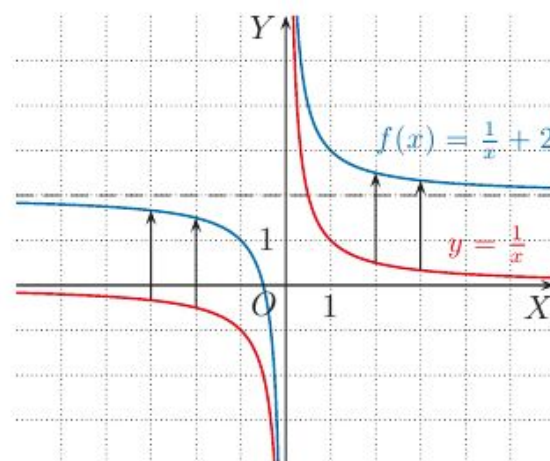
3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ wzdłuż osi OY i osi OX

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $y = \frac{1}{x}$ o 2 jednostki w górę (rysunek obok).

Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.

Prosta $y = 2$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f , a prosta $x = 0$ – jego asymptotą pionową.



Przypomnijmy, że:

- wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w górę wzdłuż osi OY,
- wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w dół wzdłuż osi OY.

Ćwiczenie 1

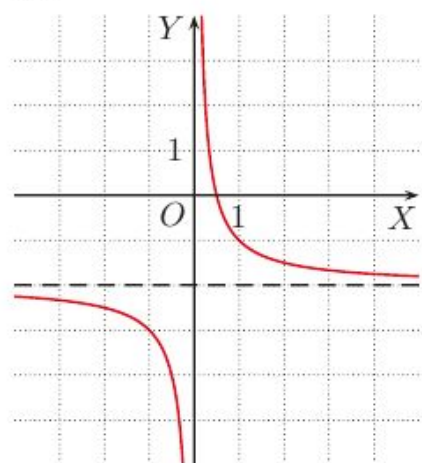
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, a następnie, stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji g . Podaj zbiór wartości funkcji g oraz równania asymptot jej wykresu.

- a) $g(x) = \frac{1}{x} + 3$ b) $g(x) = \frac{1}{x} - 1$ c) $g(x) = \frac{1}{x} - 3$

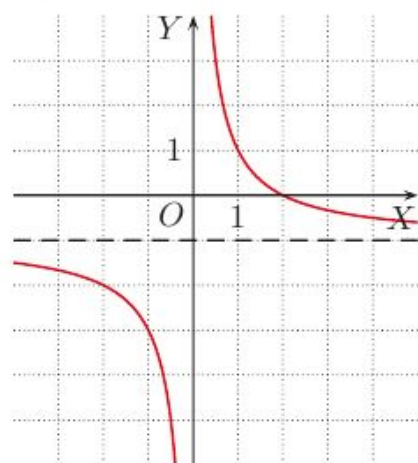
Ćwiczenie 2

Poniżej przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{2}{x} - 2$, $g(x) = \frac{2}{x} - 1$ oraz $h(x) = \frac{1}{x} - 2$. Dopasuj wzór każdej z tych funkcji do odpowiedniego wykresu.

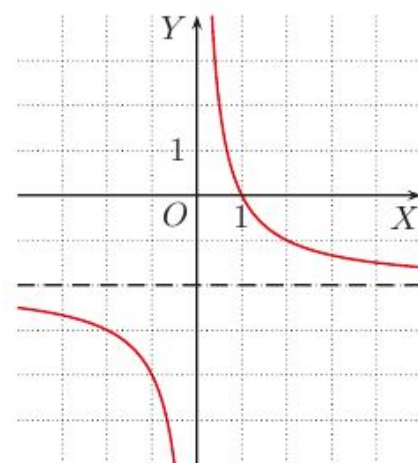
A.



B.



C.

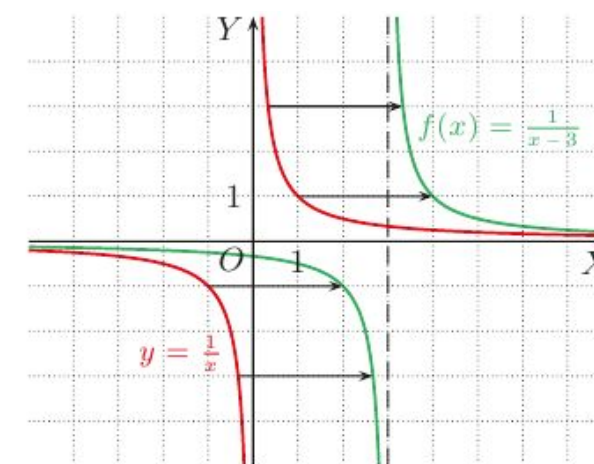


Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-3}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $y = \frac{1}{x}$ o 3 jednostki w prawo (rysunek obok).

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Prosta $x = 3$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f , a prosta $y = 0$ – jego asymptotą poziomą.



Przypomnijmy, że wykres funkcji $y = f(x-p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w prawo wzdłuż osi OX.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj dziedzinę i przedziały monotoniczności tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

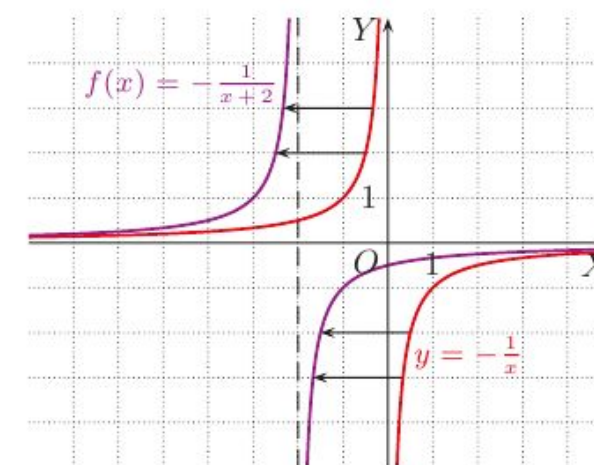
- a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{2}{x-4}$ c) $f(x) = \frac{-1}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{x+2}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $y = -\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w lewo (rysunek obok).

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Asymptotą pionową jej wykresu jest prosta $x = -2$, a asymptotą poziomą – prosta $y = 0$.



Przypomnijmy, że wykres funkcji $y = f(x+p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w lewo wzdłuż osi OX.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj dziedzinę i przedziały monotoniczności tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

- a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{4}{x+4}$ e) $f(x) = -\frac{2}{x+3}$
 b) $f(x) = \frac{3}{x+2}$ d) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ f) $f(x) = -\frac{4}{x+4}$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x-3}$, a następnie wykres funkcji:

$$g(x) = \frac{2}{x-3} + 2$$

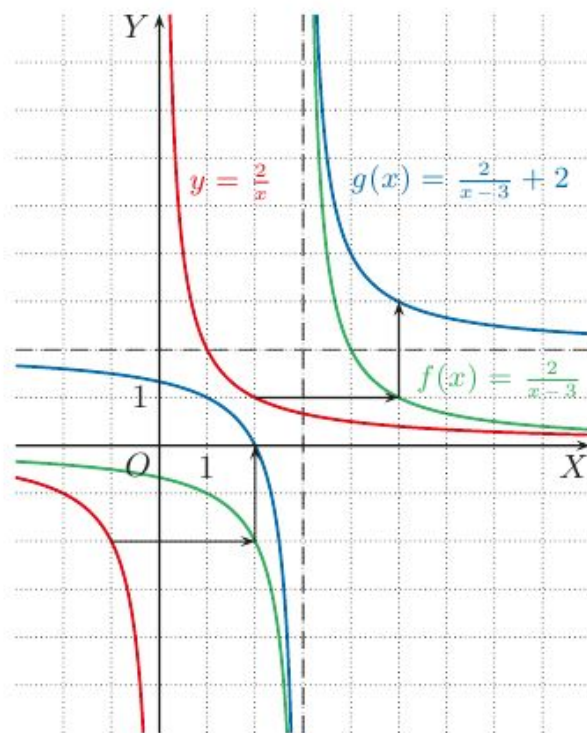
Podaj ich dziedziny i zbiory wartości oraz równania asymptot ich wykresów.

Wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x-3}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $y = \frac{2}{x}$ o 3 jednostki w prawo (rysunek obok).

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, a zbiorem wartości $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Asymptotą pionową jej wykresu jest prosta $x = 3$, a asymptotą poziomą – prosta $y = 0$.

Wykres funkcji $g(x) = \frac{2}{x-3} + 2$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w górę.

Dziedziną funkcji g jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, a zbiorem wartości $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Asymptotą pionową jej wykresu jest prosta $x = 3$, a asymptotą poziomą – prosta $y = 2$.



Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji g . Podaj ich dziedziny i zbiory wartości oraz równania asymptot ich wykresów.

a) $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $g(x) = \frac{2}{x-1} - 3$ b) $f(x) = -\frac{2}{x+1}$, $g(x) = -\frac{2}{x+1} + 2$

Zadania

1. Wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji:

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ o 2 jednostki w górę, b) $f(x) = -\frac{4}{x}$ o 2 jednostki w dół.

Naszkicuj wykresy funkcji f i g . Podaj wzór funkcji g , jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot jej wykresu.

2. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{2}{x} - 1$ c) $f(x) = 1 + \frac{4}{x}$ e) $f(x) = \frac{6}{x} - 3$
 b) $f(x) = \frac{3}{x} - 2$ d) $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$ f) $f(x) = -\frac{4}{x} + 1$

3. Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{6}{x-4}$, $P(2, -4)$ b) $f(x) = \frac{-2}{x+4}$, $P(-6, -1)$

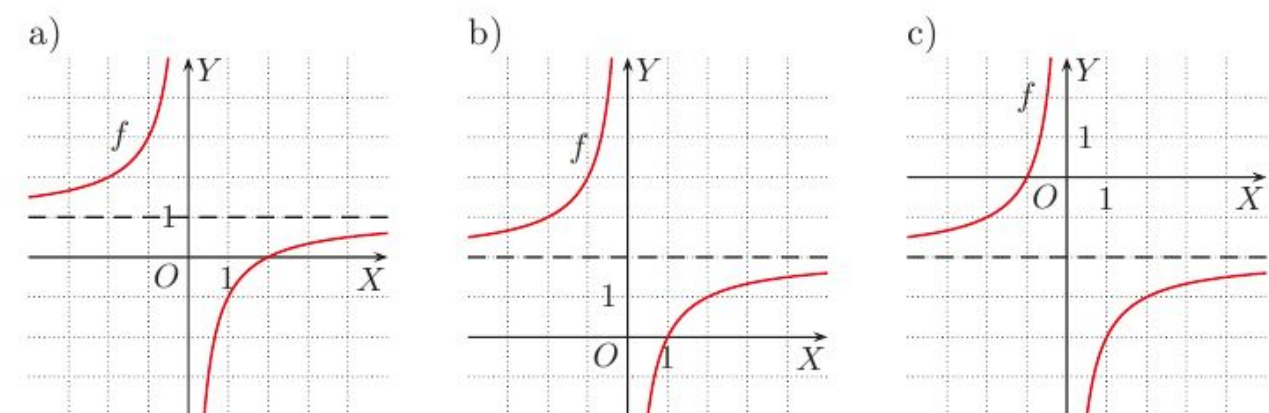
4. Wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji:

a) $f(x) = \frac{3}{x}$ o 1 jednostkę w lewo, c) $f(x) = -\frac{2}{x}$ o 3 jednostki w prawo,

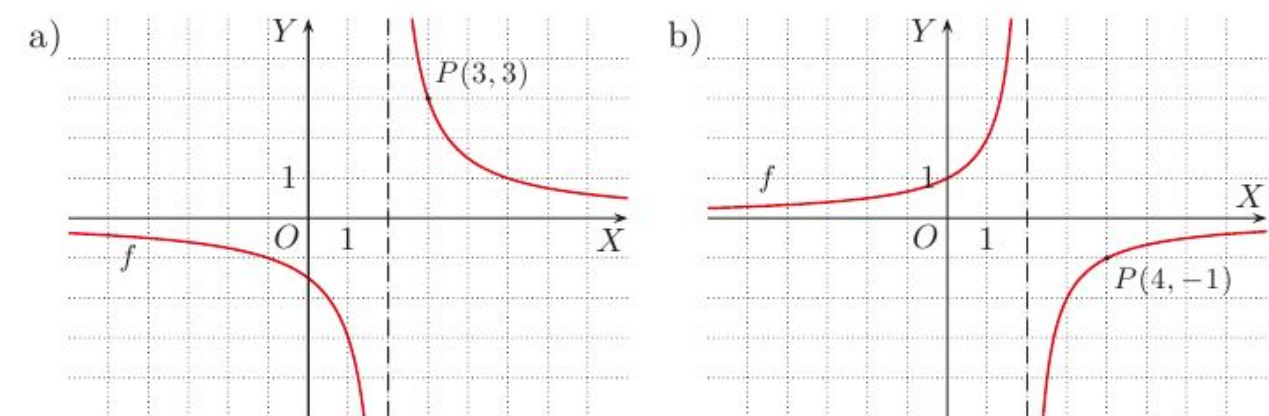
b) $f(x) = \frac{4}{x}$ o 3 jednostki w lewo, d) $f(x) = -\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w prawo.

Naszkicuj wykresy funkcji f i g . Podaj wzór funkcji g , jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot jej wykresu.

5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{x} + a$. Podaj wartość współczynnika a oraz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f .



6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x-2}$. Podaj wartość współczynnika a i oblicz $f(\frac{1}{2})$ oraz $f(-4)$.



7. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji g . Podaj równania asymptot tych wykresów.

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ b) $f(x) = \frac{4}{x+1}$, $g(x) = \frac{4}{x+1} - 2$

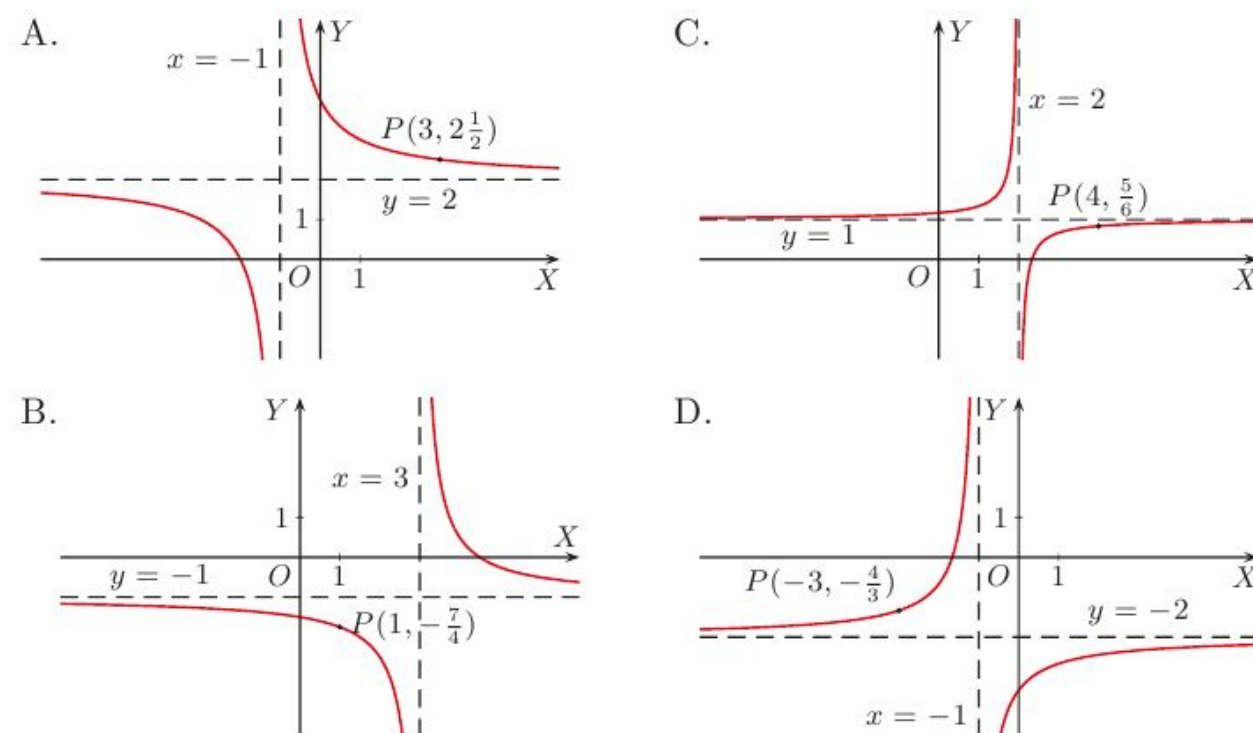
8. Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj liczbę punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do tego wykresu.

a) $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$ c) $f(x) = \frac{6}{x-2} + 1$ e) $f(x) = -\frac{1}{x+2} - 2$
 b) $f(x) = \frac{2}{x+3} - 1$ d) $f(x) = \frac{3}{x+1} + 3$ f) $f(x) = \frac{-2}{x-4} + 2$

9. Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{x-2} + 1, g(x) = \frac{2}{x+1} + 2, h(x) = \frac{-\frac{4}{3}}{x+1} - 2, k(x) = \frac{\frac{3}{2}}{x-3} - 1$$

Do każdego wykresu dopasuj odpowiedni wzór funkcji.



Sprawdź się

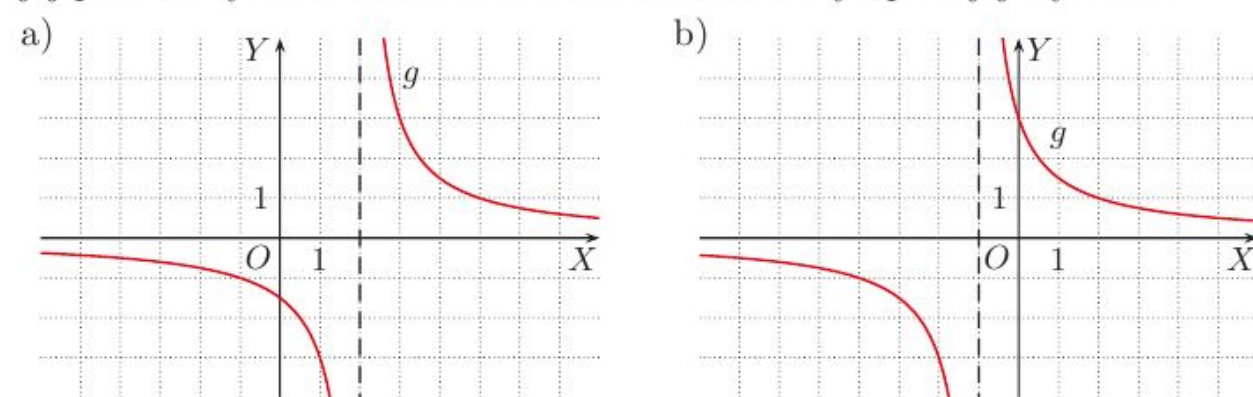
10. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej dziedzinę i przedziały monotoniczności oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{1}{x-4}$ b) $f(x) = \frac{-4}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{-1}{x+3}$ d) $f(x) = \frac{2}{x-2}$

11. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x} + q$ należy punkt P . Naskicuj wykres tej funkcji i podaj jej zbiór wartości.

a) $P(1, 6)$ b) $P(2, -3)$ c) $P(-4, -4)$ d) $P(-\frac{1}{2}, 5)$

12. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji g , który otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{x}$ wzdłuż osi OX . Podaj wzór funkcji g , jej przedziały monotoniczności oraz równania asymptot jej wykresu.



3.3. Wyrażenia wymierne i funkcje wymierne

Wyrażenie wymierne to ułamek, którego licznik i mianownik są wielomianami, np. $\frac{6x+4}{2}$, $\frac{7}{x}$, $\frac{x^2+3}{x-4}$, $\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}$, $\frac{x^2-4}{x^2+1}$.

Dziedziną wyrażenia wymiernego jest zbiór tych wszystkich liczb, dla których wyrażenie ma sens liczbowy. Należy zatem pamiętać, że miejsca zerowe mianownika nie należą do dziedziny wyrażenia wymiernego.

Przykład 1

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{2x^2-6x+5}{2x+8}$.

$2x+8=0$ dla $x=-4$, więc dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Ćwiczenie 1

Podaj dziedzinę wyrażenia.

a) $-\frac{3}{4x}$ b) $\frac{\sqrt{6}x+2}{x-5}$ c) $\frac{x-3}{2x+6}$ d) $\frac{-x^2+9}{-2x+7}$

Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartości dla $x=1$ oraz $x=-1$.

a) $\frac{x+1}{x}$ b) $\frac{2x+4}{x-3}$ c) $\frac{4x}{x^2-9}$ d) $\frac{x+3}{x^2+\sqrt{3}}$

Aby uprościć wyrażenie wymierne, rozkładamy wielomiany w liczniku i mianowniku na czynniki. Należy jednak pamiętać, że dziedziną wyrażenia uproszczonego jest dziedzina wyrażenia przed uproszczeniem.

Przykład 2

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}$, a następnie je uprość.

Dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-4} = \frac{x^2(x-2)^1}{(x+2)(x-2)^1} = \frac{x^2}{x+2}$$

Ćwiczenie 3

Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

a) $\frac{x^2-9}{3-x}$ c) $\frac{2x^2+10x}{x^2-25}$ e) $\frac{x^2-1}{x^4-x^3}$ g) $\frac{x^3-3x^2}{x^2-6x+9}$
 b) $\frac{3x^2-6x}{x-2}$ d) $\frac{x^3+4x}{x^2+4}$ f) $\frac{4-x^2}{x^2-2x}$ h) $\frac{x^2+4x+4}{x^4-16}$

Dziedziną naturalną funkcji nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór funkcji ma sens liczbowy.

Jeżeli mamy wyznaczyć dziedzinę funkcji i nie są podane dodatkowe warunki, które ma ona spełniać, to zadanie to polega właśnie na wyznaczeniu dziedziny naturalnej tej funkcji.

Definicja

Funkcją wymierną nazywamy funkcję postaci $f(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$, gdzie v i w są wielomianami (w nie jest wielomianem zerowym). Dziedziną takiej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których $w(x) \neq 0$.

Przykład 3

a) Funkcja dana wzorem $f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 4}{x}$ jest funkcją wymierną. Jej dziedziną jest zbiór $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Funkcja dana wzorem $g(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 - 9}$ jest funkcją wymierną. Jej dziedziną jest zbiór $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

Ćwiczenie 4

Określ dziedzinę funkcji f . Oblicz $f(0)$, $f(-1)$ i $f(1)$.

a) $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x - 4}$ b) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$ c) $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 4x + 4}$

Przykład 4

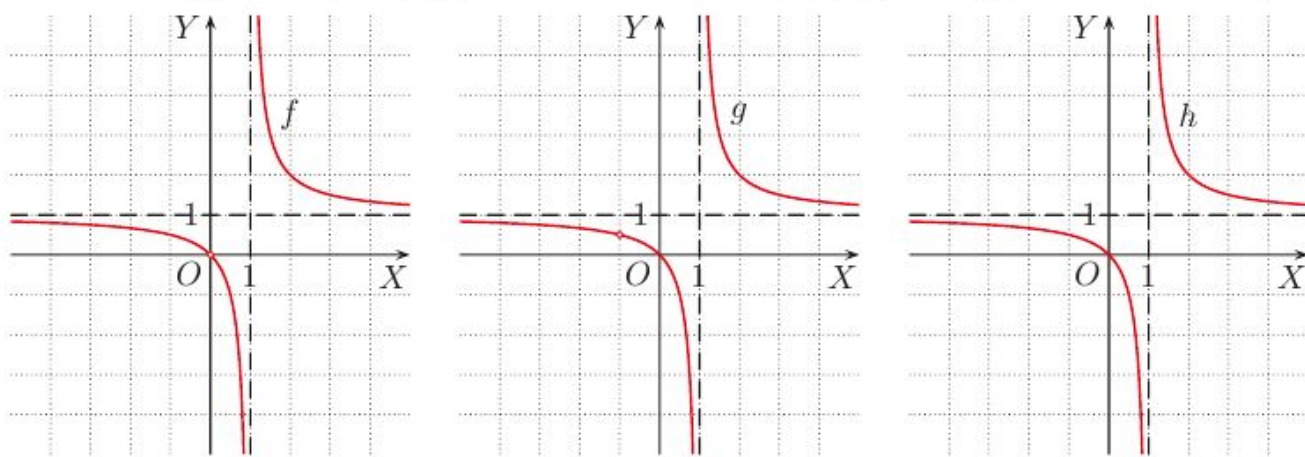
Określ dziedziny funkcji f i g , a następnie uprość ich wzory.

$f(x) = \frac{x^2}{x(x-1)}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, wzór po uproszczeniu: $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$g(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, wzór po uproszczeniu: $g(x) = \frac{x}{x-1}$

$h(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)^2}$, $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, wzór po uproszczeniu: $h(x) = \frac{x}{x-1}$

Zwróć uwagę na to, że f , g i h to różne funkcje, gdyż mają różne dziedziny.



Ćwiczenie 5

Określ dziedzinę funkcji f i uprość jej wzór.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$ b) $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x + 4}$ c) $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x}$ d) $f(x) = \frac{4x - 4}{x^2 - x}$

Zadania

1. Czy liczba 2 należy do dziedziny wyrażenia?

a) $\frac{x-2}{x+2}$ b) $\frac{2}{4x-8}$ c) $\frac{2x-4}{x^2-4}$ d) $\frac{x^2-2x}{x^2+4}$

2. Podaj dziedzinę wyrażenia.

a) $\frac{-3x^2+1}{x-1}$ c) $\frac{5x-\sqrt{19}}{3x+9}$ e) $\frac{6x+8}{x^2-16}$ g) $\frac{3x^2-12}{9x^2-1}$
b) $\frac{3x^2-6x}{2x-6}$ d) $\frac{5x^4-2x}{2x+5}$ f) $\frac{x^2+3x}{x^2-2}$ h) $\frac{x^3-\sqrt{3}}{4x^2-9}$

3. Rozłóż mianownik wyrażenia na czynniki i podaj dziedzinę tego wyrażenia.

a) $\frac{19x^4+8x^3-6}{x^2-3x}$ d) $\frac{4x^3+2x+1}{2x^2-7x+6}$ g) $\frac{-x^3+2x-7}{x^3+9x}$
b) $\frac{6x^2-5x+1}{2x^2+5x}$ e) $\frac{8x^3+4x+1}{x^3-2x^2}$ h) $\frac{5x^3-x^2+2}{x^3-9x}$
c) $\frac{6x-9}{x^2+5x+6}$ f) $\frac{2x^3-4x^2-x}{x^3+9x^2}$ i) $\frac{9x^2-6x+1}{x^3-6x^2+9x}$

4. Podaj dziedzinę funkcji f . Oblicz $f(-3)$, $f(1)$ i $f(3)$.

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-4}$ e) $f(x) = \frac{x^2+21}{x^2-3}$
b) $f(x) = \frac{x^2-3x}{3x-1}$ d) $f(x) = \frac{6x}{x^2+9}$ f) $f(x) = \frac{x^3+3x^2}{x^2-4}$

Sprawdź się

5. Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz jego wartości dla $x = \frac{1}{2}$ oraz dla $x = -\frac{3}{2}$.

a) $\frac{72}{18x}$ c) $\frac{4x+8}{x+2}$ e) $\frac{x^2+x}{2x}$ g) $\frac{x^2-9}{x-3}$
b) $\frac{16x}{2x^2}$ d) $\frac{x-5}{2x-10}$ f) $\frac{x^2-\frac{1}{2}x}{x}$ h) $\frac{2x+6}{x^2-9}$

6. Podaj dziedzinę funkcji f , a następnie uprość jej wzór.

a) $f(x) = \frac{x^2+4x}{x^2-16}$ d) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$ g) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$
b) $f(x) = \frac{4x-2}{4x^2-1}$ e) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^3-4x}$ h) $f(x) = \frac{x^3-9x}{x^2+3x}$
c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ f) $f(x) = \frac{2x^2+6x}{x^3-9x}$ i) $f(x) = \frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$

Działania na liczbach wymiernych

1. Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{36}{32} \cdot \frac{24}{27} & \text{c)} \frac{12}{25} : \frac{18}{10} & \text{e)} 3\frac{3}{5} \cdot (-2\frac{2}{9}) & \text{g)} (-1\frac{3}{4}) : 1\frac{2}{5} \\ \text{b)} \frac{72}{78} \cdot \frac{52}{54} & \text{d)} \frac{48}{14} : \frac{40}{56} & \text{f)} (-5\frac{1}{3}) \cdot (-6\frac{3}{4}) & \text{h)} 6\frac{2}{3} : (-4\frac{4}{9}) \end{array}$$

2. Oblicz.

$$\text{a)} \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{10}{21} \quad \text{b)} \frac{3}{16} \cdot \frac{32}{35} \cdot \frac{7}{15} \quad \text{c)} \frac{33}{8} \cdot \frac{22}{45} \cdot \frac{27}{121} \quad \text{d)} \frac{25}{27} \cdot \frac{49}{20} \cdot \frac{36}{35}$$

3. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} & \text{c)} \frac{5}{12} + \frac{5}{18} & \text{e)} \frac{3}{5} + \frac{4}{15} - \frac{2}{25} \\ \text{b)} 1\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\frac{3}{4} & \text{d)} \frac{11}{45} - \frac{9}{30} & \text{f)} \frac{5}{12} - \frac{2}{15} - \frac{3}{10} \end{array}$$

4. Dla jakiej wartości parametru m wartość wyrażenia jest równa 0?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + m & \text{c)} 1\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4} - 2m & \text{e)} 1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}m - 0,75 \\ \text{b)} \frac{2}{5} - \frac{3}{4} + m & \text{d)} 3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{6} + \frac{7}{3}m & \text{f)} 0,125m - \frac{3}{5} - 1\frac{1}{4} \end{array}$$

5. Zaokrąglij liczbę p do liczby całkowitej.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} p = (\frac{6}{5} - 0,75) : (\frac{1}{6} - 0,125) & \text{c)} p = (8 - (-2\frac{1}{2})) : (1\frac{4}{5} : \frac{14}{15} - 2) \\ \text{b)} p = (2\frac{1}{6} - \frac{11}{4}) : (2\frac{1}{9} - \frac{13}{6}) & \text{d)} p = \frac{1}{3}(2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2}) : (\frac{5}{12} - \frac{5}{6}) \end{array}$$

6. Podaj największą liczbę całkowitą mniejszą od liczby p .

$$\begin{array}{lll} \text{a)} p = 4\frac{2}{5} : (\frac{7}{15} - \frac{1}{10}) & \text{c)} p = \frac{1\frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{1}{4}}{1\frac{1}{6} - \frac{5}{12}} & \text{e)} p = \frac{\frac{4}{5} + 2\frac{1}{10} - \frac{1}{2}}{0,6 - \frac{2}{15} + \frac{1}{5}} \\ \text{b)} p = 1\frac{3}{8} : (\frac{5}{4} - \frac{7}{6}) & \text{d)} p = \frac{1\frac{1}{4} - 2\frac{1}{8} - 1,5}{-\frac{1}{12} - 1\frac{1}{6}} & \text{f)} p = \frac{3\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} - \frac{5}{18} + 1} \end{array}$$

7. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x - \frac{2}{3} = \frac{3}{5} & \text{c)} 1\frac{1}{5} + x = 2\frac{9}{10} & \text{e)} \frac{1}{2} - \frac{1}{18}x = \frac{5}{9} \\ \text{b)} x + \frac{5}{9} = \frac{5}{6} & \text{d)} 2\frac{3}{7} - x = \frac{2}{21} & \text{f)} 1\frac{3}{4} + 1\frac{5}{6}x = 2\frac{2}{3} \end{array}$$

8. Oblicz sumę, różnicę, iloczyn i iloraz liczb x i y spełniających warunki:

$$(\frac{3}{4} - \frac{5}{6})x = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \quad \text{i} \quad (\frac{7}{5} - \frac{3}{2})(\frac{1}{2} - y) = -\frac{1}{8}$$

9. a) Suma dwóch liczb jest równa 1530 i wiadomo, że pierwsza z nich stanowi $\frac{13}{17}$ drugiej. Znajdź te liczby.

b) Suma trzech liczb jest równa 134 i wiadomo, że pierwsza z nich stanowi $\frac{15}{16}$ drugiej, a druga $\frac{4}{9}$ trzeciej. Znajdź te liczby.

3.4. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Przykład 1

Wykonaj mnożenie $\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1}$.

Zakładamy, że $x^2 - 9 \neq 0$ i $2x - 1 \neq 0$, zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, \frac{1}{2}, 3\}$.

$$\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1} = \frac{1(2x-1)(2x+1)(x-3)^1}{1(x-3)(x+3)(2x-1)1} = \frac{2x+1}{x+3}$$

Ćwiczenie 1

Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{4x-12}{x+2} \cdot \frac{2x+4}{2x-6} & \text{c)} \frac{-x^2+5x}{2x+1} \cdot \frac{4x^2-1}{x^2} & \text{e)} \frac{(x-2)^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{2+x}{x^2-4} \\ \text{b)} \frac{3-x}{x} \cdot \frac{2x+6}{x^2-9} & \text{d)} \frac{x^2-9}{x^2-4} \cdot \frac{0,5x+1}{9-3x} & \text{f)} \frac{3x^2-x^3}{2x-6} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^4-x^2} \end{array}$$

Przykład 2

Wykonaj dzielenie $\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12}$.

Zakładamy, że $x+4 \neq 0$ i $3x+12 \neq 0$, zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

$$\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12} = \frac{2}{x+4} \cdot \frac{3(x+4)^1}{10 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

dla $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

Ćwiczenie 2

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{6}{x-2} : \frac{3}{4x-8} & \text{c)} \frac{-6}{3-2x} : \frac{9}{4x-6} & \text{e)} \frac{7}{5x+35} : \frac{-35}{x+7} \\ \text{b)} \frac{-5}{2x+1} : \frac{10}{6x+3} & \text{d)} \frac{16}{3x+1} : \frac{12}{9x+3} & \text{f)} \frac{25}{6x+9} : \frac{15}{4x+6} \end{array}$$

Przykład 3

Wykonaj dzielenie $\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x}$.

Zakładamy, że $x^2 - 1 \neq 0$, $x+2 \neq 0$ i $x^2 - x \neq 0$, zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x} = \frac{x^2+2x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{x(x+2)^1}{1(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x(x-1)^1}{x+2} = \frac{x^2}{x+1}$$

Ćwiczenie 3

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2x-6}{x} : \frac{x-3}{4x^2} & \text{b)} \frac{x^2-4}{x+1} : \frac{x+2}{x^2-1} & \text{c)} \frac{2x}{x^2-9} : \frac{6x^2}{x^2-6x+9} \end{array}$$

Ćwiczenie 4

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 2x + 1} : \frac{x - 5}{x + 1}$ b) $\frac{x^2 - 4}{x - 1} : \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 1}$ c) $\frac{x + 4}{x^2 - 6x + 9} : \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 9}$

Przykład 4

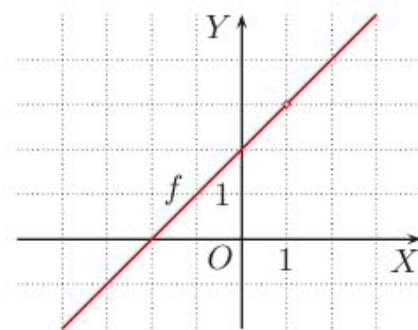
Podaj dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{2x+4}{\frac{x-1}{2}}$ i naszkicuj jej wykres.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Upraszczamy wzór funkcji f :

$$f(x) = \frac{2x+4}{\frac{x-1}{2}} = \frac{2(x+2)}{\frac{x-1}{2}} = \frac{2(x+2)}{1} \cdot \frac{2}{x-1} = x + 2$$

Wykresem funkcji f jest prosta bez punktu o współrzędnych (1, 3).



Ćwiczenie 5

Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = \frac{-2}{\frac{x}{1}}$ c) $f(x) = \frac{3x-6}{\frac{x}{x-2}}$ e) $f(x) = \frac{\frac{x^2-x}{x-1}}{\frac{1}{x}}$
 b) $f(x) = \frac{6}{\frac{x-1}{3}}$ d) $f(x) = \frac{4x}{\frac{x+2}{2}}$ f) $f(x) = \frac{\frac{2x-8}{x}}{\frac{2}{x^2}}$

Zadania

1. Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{14}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{7}$ c) $\frac{x^2}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{x}$ e) $\frac{4x^2-1}{4} \cdot \frac{6}{2x-1}$
 b) $\frac{24}{x^2-16} \cdot \frac{x-4}{3}$ d) $\frac{2x}{x+6} \cdot \frac{x^2-36}{x^2}$ f) $\frac{3x+2}{3} \cdot \frac{12}{9x^2-4}$

2. Dane są wyrażenia A i B . Wyznacz dziedzinę wyrażeń A , B oraz $A \cdot B$.

a) $A = \frac{x^2-2}{x^2-9x}$, $B = \frac{x^2+4x}{x^2+2x}$ c) $A = \frac{6x-5}{x^3-4x}$, $B = \frac{5x-6}{x^3-4x^2+4x}$
 b) $A = \frac{4x^2-1}{x^2-4}$, $B = \frac{9x-x^3}{4x-x^3}$ d) $A = \frac{5x^2-2x+4}{x^2-2x+1}$, $B = \frac{3x^2-2x+5}{x^2+x-2}$

3. Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{x-2}{x^2} \cdot \frac{3x}{2x-4}$ d) $\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x^3+x^2}{x^4-1}$ g) $\frac{4x^2-16}{6-3x} \cdot \frac{x^2}{4x+8}$
 b) $\frac{3x+4,5}{x-1} \cdot \frac{1-x}{x+1,5}$ e) $\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-1} \cdot \frac{(x+1)^2}{2x-1}$ h) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+4} \cdot \frac{4-x^2}{x^2-1}$
 c) $\frac{x^2}{3-x} \cdot \frac{3x-9}{x^4}$ f) $\frac{x^2-4}{x^3+3x^2} \cdot \frac{x^4-9x^2}{x^2+2x}$ i) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x} \cdot \frac{x^2}{x^2-9}$

4. Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{x^2+6x+9}{2x^2-8} \cdot \frac{x^3-2x^2}{x^2+3x}$ b) $\frac{x^2-16}{x+1} \cdot \frac{1-x^2}{x+4}$ c) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+2}{x^2-1}$

5. Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{8}{2x-9} : \frac{7}{4x-18}$ c) $\frac{18}{2x-6} : \frac{-3}{4x-12}$ e) $\frac{9x}{2x+4} : \frac{6}{x+2}$
 b) $\frac{-8}{3x-2} : \frac{2}{9x-6}$ d) $\frac{-6}{3-2x} : \frac{9}{4x-6}$ f) $\frac{10x^2}{x-5} : \frac{5}{10-2x}$

6. Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{3x-3}{4x} : \frac{x-1}{6x}$ c) $\frac{10x+2}{x^2} : \frac{5x+1}{x}$ e) $\frac{x^3}{6x-2} : \frac{2x}{1-3x}$
 b) $\frac{2x+4}{x-3} : \frac{3-x}{x+2}$ d) $\frac{6-4x}{(1-x)^2} : \frac{2x-3}{x-1}$ f) $\frac{x+1}{(x+2)^2} : \frac{x^2-1}{x^2-4}$

7. Uprość wyrażenie.

a) $\frac{\frac{x^2+2x+1}{x-3}}{\frac{x+1}{x^2-9}}$ b) $\frac{\frac{x^2+8x+16}{6x-9}}{\frac{x^3-16x}{6x-4x^2}}$ c) $\frac{\frac{4x^2-1}{x^2+4x+4}}{\frac{4x^2-4x+1}{x^2-4}}$

8. Pole prostokąta wyraża się wzorem $P = \frac{6}{x^2-4}$, a długość jednego z jego boków jest równa $\frac{2}{x-2}$, gdzie $x > 2$. Wyznacz długość drugiego boku tego prostokąta.

a	b	P
$\frac{x+1}{x^2+1}$	$\frac{1}{x+1}$	?, $x > -1$
?	$\frac{x+2}{2}$	$\frac{3x+6}{x^2+4}$, $x > -2$
$\frac{4}{x-3}$	?	$\frac{4x^2+8}{x^2-9}$, $x > 3$

9. Dany jest prostokąt o bokach a , b i polu P . Przerysuj do zeszytu tabelę przedstawioną obok i ją uzupełnij.

Sprawdź się

10. Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{1}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{2x}$ b) $\frac{x}{x^2+5x} \cdot \frac{x^2-25}{x+2}$ c) $\frac{4x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x}{2x^2+x}$

11. Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{x^2-6x}{x+3} : \frac{x}{x+2}$ b) $\frac{x}{6-x} : \frac{x^2+x}{x^2-36}$ c) $\frac{x^2-1}{x^2+x} : \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

D 12. Uzasadnij, że podane wyrażenie przyjmuje stałą wartość dla tych x , dla których jest określone.

a) $\frac{4x}{x+2} \cdot \frac{2x^2+4x}{x^2}$ b) $\frac{4-x^2}{x-2} \cdot \frac{6x}{x^2+2x}$ c) $\frac{(x-1)^2}{1-x^2} \cdot \frac{x+1}{x-1}$

3.5. Równania wymierne

Przykład 1

Rozwiąż równanie $\frac{-2x+8}{x-3} = 0$.

Zakładamy, że $x-3 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. W wyznaczonej dziedzinie wyjściowe równanie jest równoważne równaniu:

$$\begin{aligned} -2x + 8 &= 0 && \text{Przyrównujemy licznik wyrażenia do zera.} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Liczba 4 spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } \frac{x+4}{x+2} = 0 \quad \text{b) } \frac{6x-2}{x} = 0 \quad \text{c) } \frac{4x+2}{2x-4} = 0 \quad \text{d) } \frac{2x-3}{2x+1} = 0$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $\frac{\frac{3}{2}x-6}{x-4} = 0$.

Zakładamy, że $x-4 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - 6 &= 0 && \text{Przyrównujemy licznik wyrażenia do zera.} \\ \frac{3}{2}x &= 6 \quad / \cdot \frac{2}{3} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Równanie jest sprzeczne, ponieważ liczba 4 nie spełnia założenia.

D Ćwiczenie 2

Wykaż, że podane równanie jest sprzeczne.

$$\text{a) } \frac{\frac{3}{2}x+3}{x+2} = 0 \quad \text{b) } \frac{-3x+\frac{9}{2}}{2x-3} = 0$$

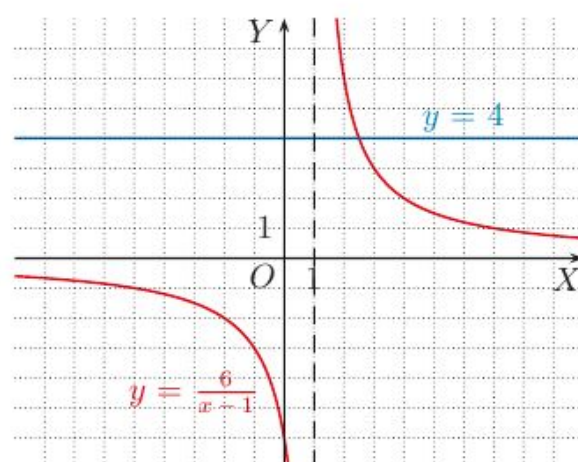
Przykład 3

Rozwiąż równanie $\frac{6}{x-1} = 4$.

Zakładamy, że $x-1 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned} \frac{6}{x-1} &= 4 \quad / \cdot (x-1) \\ 6 &= 4x - 4 \\ 10 &= 4x \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Liczba $\frac{5}{2}$ spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.



Hiperbola $y = \frac{6}{x-1}$ i prosta $y = 4$ przecinają się w punkcie o odciętej $\frac{5}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{6}{x+1} &= 4 & \text{c) } \frac{3}{-2x+7} &= 1 & \text{e) } \frac{7x+6}{1-3x} &= -4 & \text{g) } \frac{x-5}{3x+1} - 2 &= 0 \\ \text{b) } \frac{3x+2}{x} &= 5 & \text{d) } \frac{2x}{x-1} &= 3 & \text{f) } \frac{4-2x}{4-x} &= -2 & \text{h) } \frac{2x+4}{x-1} + 4 &= 0 \end{aligned}$$

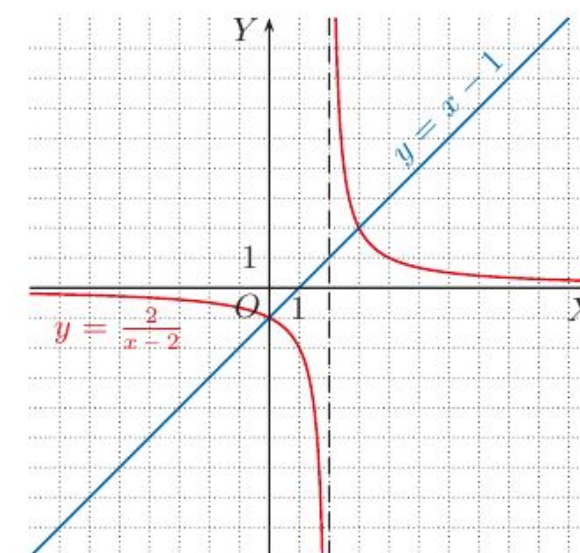
Przykład 4

Rozwiąż równanie $\frac{2}{x-2} = x-1$.

Zakładamy, że $x-2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-2} &= x-1 \quad / \cdot (x-2) \\ 2 &= (x-1)(x-2) \\ 2 &= x^2 - 3x + 2 \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \\ x &= 0 \text{ lub } x = 3 \end{aligned}$$

Liczby 0 i 3 spełniają założenie, więc są rozwiązaniami równania.



Hiperbola $y = \frac{2}{x-2}$ i prosta $y = x-1$ przecinają się w punktach o odciętych 0 oraz 3.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2}{x} &= x+1 & \text{c) } \frac{4}{x+3} &= x+3 & \text{e) } \frac{6}{x} - 5 &= x & \text{g) } \frac{3}{x+2} &= x \\ \text{b) } -\frac{1}{x} &= x+2 & \text{d) } \frac{9}{6-x} &= x & \text{f) } \frac{8}{x} + x &= -6 & \text{h) } -\frac{6}{x-3} &= 2x+1 \end{aligned}$$

Przykład 5

Rozwiąż równanie $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-2}$.

Zakładamy, że $x+1 \neq 0$ i $x-2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

Przekształcamy równanie równoważnie przez pomnożenie „na krzyż”.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} &= \frac{3}{x-2} \\ 2(x-2) &= 3(x+1) \\ 2x-4 &= 3x+3 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

Liczba -7 spełnia założenie, więc jest rozwiązaniem równania.

Dla $b \neq 0$ i $d \neq 0$ równość:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

jest równoważna równości:

$$ad = bc$$

Mnożenie „na krzyż” jest tym samym co pomnożenie obu stron równania przez iloczyn mianowników:

$$(x+1)(x-2)$$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{7}{x+1} = \frac{3}{x+5}$ b) $\frac{-2}{x-1} = \frac{4}{2x+3}$ c) $\frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$

Przykład 6

Rozwiąż równanie $\frac{x+4}{2x+1} - \frac{5}{x+2} = 0$.

Zakładamy, że $2x+1 \neq 0$ i $x+2 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -\frac{1}{2}\}$.

$$\frac{x+4}{2x+1} = \frac{5}{x+2} \quad \begin{array}{l} \text{Przenosimy } \frac{5}{x+2} \text{ na} \\ \text{drugą stronę równania.} \\ \text{Mnożymy „na krzyż”.} \end{array}$$

$$(x+4)(x+2) = 5(2x+1)$$

$$x^2 + 6x + 8 = 10x + 5$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4, \sqrt{\Delta} = 2$$

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$

Liczby 1 i 3 spełniają założenie, więc są rozwiązaniami równania.

Ćwiczenie 6

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5}{x-1} = \frac{x+1}{2x-5}$ c) $\frac{x-1}{x} = \frac{2x-2}{x-8}$ e) $\frac{x}{x+3} = \frac{6}{x+6}$
b) $\frac{x+5}{2x+1} = \frac{1}{x+1}$ d) $\frac{2x-2}{x-4} = \frac{x+3}{x}$ f) $\frac{2x}{x-7} = \frac{x}{x+1}$

Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5}{x} = 4$ c) $\frac{-7}{x-1} = 8$ e) $\frac{x}{2x+1} = 1$ g) $\frac{x+2}{x+5} = 0$
b) $\frac{-6}{x} = -\frac{1}{2}$ d) $\frac{6}{x+4} = -3$ f) $\frac{-6x}{2x-5} = 2$ h) $\frac{3x-15}{x-5} = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x}{x-3} - 1 = 0$ c) $\frac{x-2}{2x+1} + 6 = 5$ e) $\frac{5x+4}{2x-1} - 3 = 0$
b) $\frac{3x}{x+2} + 4 = 0$ d) $\frac{2x-1}{x-1} - 3 = 1$ f) $\frac{1}{2} - \frac{4x-2}{3-2x} = 0$

3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{x} = \frac{3}{2+x}$ c) $\frac{x}{x-1} = \frac{x+2}{x}$ e) $\frac{x-3}{2x} - \frac{x-2}{2x+1} = 0$
b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} = 0$ d) $\frac{x-3}{x-2} = \frac{x+3}{x+2}$ f) $\frac{3x-2}{x+1} + \frac{1-3x}{x-3} = 0$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{-3} = \frac{-5}{x+2}$ c) $x+1 = \frac{2-2x}{x-1}$ e) $\frac{6x-4}{2-3x} = -2x$
b) $x = \frac{5x+3}{2x}$ d) $\frac{2x-2}{x+2} = \frac{x}{x-1}$ f) $6x+1 = \frac{2}{x}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{2x+1}$ c) $\frac{x+4}{2x-1} - \frac{1}{x} = 0$ e) $\frac{8-2x}{x-1} + \frac{x-3}{x-4} = 0$
b) $\frac{4}{x} + \frac{x}{x+1} = 0$ d) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x}{x+1} = 0$ f) $\frac{2-x}{x-1} - \frac{x-1}{x+2} = 0$

6. Które z podanych równań nie mają rozwiązania, a które mają nieskończenie wiele rozwiązań?

I. $\frac{3x-3}{x-1} = 2$ II. $\frac{6x-2}{3x-1} = 2$ III. $\frac{1-4x}{8x-2} = -0,5$ IV. $\frac{3x+9}{10x+30} = 0,3$

7. Rozwiąż równanie A. Które spośród rozwiązań równania A są rozwiązaniami równania B?

a) A: $2x(x-4) = 0$, B: $\frac{2x(x-4)}{2x-8} = 0$
b) A: $(3x+12)x = 0$, B: $\frac{(3x+12)x}{x+4} = 0$
c) A: $3x(x+2) = 0$, B: $\frac{3x(x+2)}{2x-6} = 0$
d) A: $-x(6x+9) = 0$, B: $\frac{-x(6+9x)}{(3x+2)x} = 0$

Sprawdź się

8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x-7}{x+3} = 0$ b) $\frac{7x+21}{x-3} = 0$ c) $\frac{-3x+9}{x-6} = 0$

9. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4}{x+1} = 3$ c) $\frac{5}{x+3} = 3$ e) $\frac{3}{2x+1} = 5$
b) $\frac{-6}{x-2} = 2$ d) $\frac{2}{x-4} = -1$ f) $\frac{-2}{3x-2} = 3$

10. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4x+5}{2x} = 4$ c) $x = \frac{7x-4}{2x-2}$ e) $\frac{2x+7}{x+1} = x-1$
b) $\frac{15}{x} = x-2$ d) $x+2 = \frac{2-2x}{x}$ f) $\frac{6x+2}{-1-3x} = -2x-2$

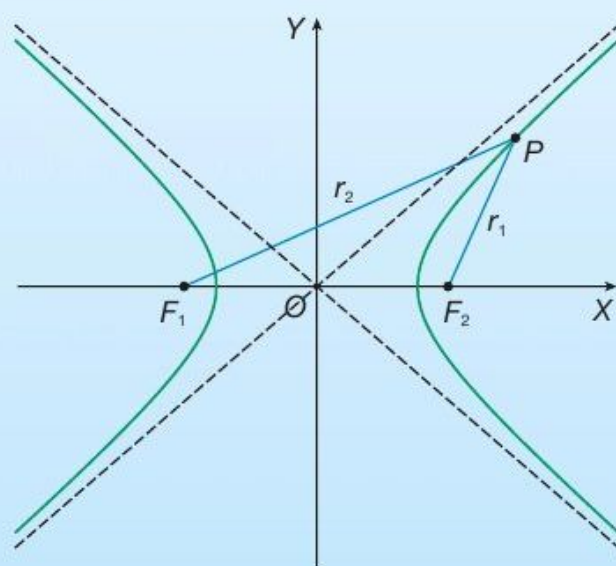
11. Ile rozwiązań ma podane równanie?

a) $\frac{x+1}{x} = \frac{2x+2}{x-1}$ c) $\frac{6}{x} = \frac{3x}{x-2}$ e) $\frac{3-x}{2x-1} = \frac{2x-6}{2-4x}$
b) $\frac{4}{x} + \frac{4-3x}{x-1} = 0$ d) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{3x+1}$ f) $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{6x-3}{x-1}$

Hiperbola i hiperboloida

Ogólna definicja mówi, że hiperbola to zbiór tych wszystkich punktów P na płaszczyźnie, dla których wartość bezwzględna różnicy odległości od dwóch konkretnych punktów F_1 i F_2 , zwanych ogniskami, jest stała:

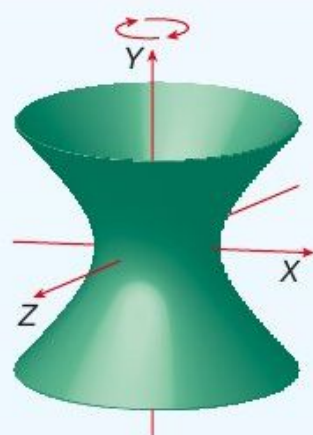
$$|r_1 - r_2| = \text{const.}$$



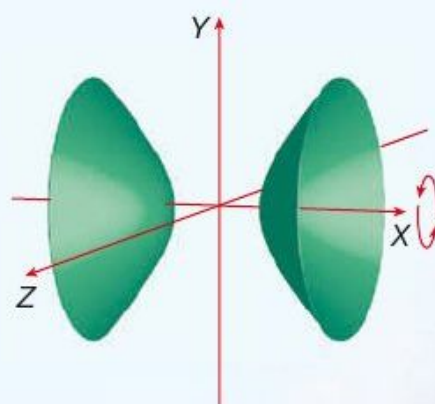
Obrót hiperboli

Hiperboloida to powierzchnia zakreślona w wyniku obrotu hiperboli wokół jej osi symetrii w przestrzeni trójwymiarowej.

Po obrocie pokazanej wyżej hiperboli wokół osi OY powstanie **hiperboloida jednopowłokowa**.



Po obrocie tej hiperboli wokół osi OX otrzymujemy **hiperboloidę dwupowłokową**.



Chłodnie kominowe

Chłodnie kominowe mają najczęściej kształt hiperboloidy jednopowłokowej. Pozwala to na oszczędne zużycie materiałów konstrukcyjnych. Mimo znacznych rozmiarów (wysokość chłodni przekracza zwykle 120 m, a średnica podstawy chłodni – 90 m) grubość żelbetowego płaszcza w najcieńszych miejscach wynosi zaledwie 12–18 cm. Taki kształt chłodni zwiększa również ich odporność na zginanie.

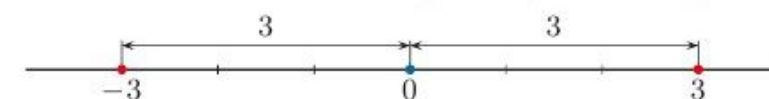


3.6. Równania z wartością bezwzględną

Przypomnijmy, że interpretacją geometryczną wartości bezwzględnej liczby a jest jej odległość na osi liczbowej od 0.

Przykład 1

Zaznacz na osi liczbowej liczby spełniające warunek $|x| = 3$.



$|x| = 3$ dla $x = -3$ oraz dla $x = 3$.

Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$:

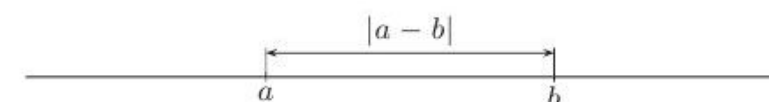
$$|-a| = |a|$$

Ćwiczenie 1

Zaznacz na osi liczbowej liczby spełniające warunek:

- a) $|x| = 1$, b) $|x| = 4$, c) $|x| = 0$.

Zauważmy, że odległość na osi liczbowej między liczbami a i b jest równa $|a - b|$.



Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|a - b| = |b - a|$$

Odległość między liczbami a i b na osi liczbowej jest taka sama jak odległość między liczbami b i a .

Ćwiczenie 2

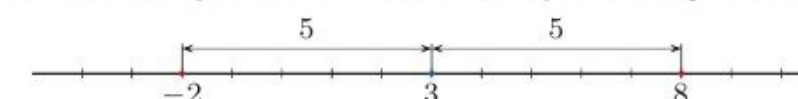
Zaznacz na osi liczbowej liczby a i b . Sprawdź, czy $|a - b| = |b - a|$.

- a) $a = 2, b = 5$ b) $a = -5, b = -1$ c) $a = -2, b = 3$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $|x - 3| = 5$.

Szukamy na osi liczbowej takich liczb x , których odległość od 3 wynosi 5.



Zatem $x = -2$ lub $x = 8$.

Sprawdzenie:

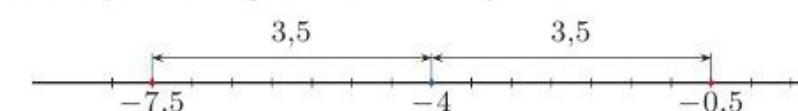
dla $x = -2$: $|-2 - 3| = |-5| = 5$,

dla $x = 8$: $|8 - 3| = |5| = 5$.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x + 4| = 3,5$.

Równanie zapisujemy w postaci: $|x - (-4)| = 3,5$ i szukamy na osi liczbowej takich liczb x , których odległość od -4 wynosi 3,5.



Zatem $x = -7,5$ lub $x = -0,5$ (sprawdź).

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

- a) $|x - 2| = 3$ c) $|x + 6| = 2$ e) $|6 - x| = 1$ g) $|x + \frac{1}{4}| = \frac{1}{2}$
b) $|x - 4| = 3,5$ d) $|x + 1| = \frac{1}{2}$ f) $|3 + x| = 4$ h) $|2 + x| = \sqrt{3}$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $|x - 4| = -2$.

Wartość bezwzględna dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemna, zatem równanie jest sprzeczne.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

- a) $|x + 1| = -1$ b) $|x - 5| = 0$ c) $|x + 9| = 0$ d) $|x - 2| = 1 - \sqrt{2}$

Przykład 5

- a) Rozwiąż równanie $|x - 1| = 6$.

$$\begin{aligned} x - 1 &= -6 \quad \text{lub} \quad x - 1 = 6 \\ x &= -5 \quad \text{lub} \quad x = 7 \end{aligned}$$

Jeśli $a > 0$, to $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -a$ lub $x = a$.

Rozwiązaniami równania są liczby -5 i 7 .

- b) Rozwiąż równanie $|3x - 4| = 2$.

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= -2 \quad \text{lub} \quad 3x - 4 = 2 \\ 3x &= 2 \quad \text{lub} \quad 3x = 6 \\ x &= \frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Rozwiązaniami równania są liczby $\frac{2}{3}$ i 2 .

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

- a) $|5x - 3| = 2$ c) $|9x + 5| = 4$ e) $|\frac{2}{3}x + 4| = 6$ g) $|6 - \frac{7}{5}x| = 1$
b) $|2x - 1| = 1$ d) $|3x + 2| = 4$ f) $|\frac{1}{2}x - 3| = 1$ h) $|5 + \frac{3}{2}x| = 1$

Przykład 6

Rozwiąż równanie $|x - 5| + 2|x - 5| = 12$.

$$\begin{aligned} 3|x - 5| &= 12 \quad / : 3 \\ |x - 5| &= 4 \\ x - 5 &= -4 \quad \text{lub} \quad x - 5 = 4 \\ x &= 1 \quad \text{lub} \quad x = 9 \end{aligned}$$

Rozwiązaniami równania są liczby 1 i 9 .

Przykład 7

Rozwiąż równanie $|2x - 4| + |x - 2| = 12$.

$$\begin{aligned} 2|x - 2| + |x - 2| &= 12 \\ 3|x - 2| &= 12 \quad / : 3 \\ |x - 2| &= 4 \\ x - 2 &= -4 \quad \text{lub} \quad x - 2 = 4 \\ x &= -2 \quad \text{lub} \quad x = 6 \end{aligned}$$

Rozwiązaniami równania są liczby -2 i 6 .

Ćwiczenie 6

Rozwiąż równanie.

- a) $|x - 3| + |2x - 6| = 9$ c) $|4x - 8| + |2 - x| = 5$
b) $|3x - 6| - |x - 2| = 8$ d) $|5x - 20| - |2x - 8| = 15$

Zadania

1. Rozwiąż równanie, korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej.

- a) $|x - 5| = 1$ c) $|x + 6| = 4$ e) $|x - \frac{1}{3}| = \frac{1}{6}$ g) $|7 - x| = \frac{1}{2}$
b) $|x - 8| = 9$ d) $|x + 9| = 2$ f) $|x + \frac{1}{4}| = \frac{3}{8}$ h) $|\frac{1}{3} + x| = \frac{2}{3}$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $|3x + 1| = 5$ c) $|\frac{3}{5}x + 1| = 2$ e) $|4x + 5| = 0$ g) $|3x + 5| = 2$
b) $|2x - 3| = 1$ d) $|2 - \frac{2}{3}x| = 3$ f) $|3x - 6| = 4$ h) $|x + \sqrt{3}| = \sqrt{3}$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $|4x + 6| + |6x + 9| = 10$ c) $|x - 6| + |4x - 24| + |2x - 12| = 7$
b) $|11x - 33| - |2x - 6| = 27$ d) $|6x + 4| - |3x + 2| + |9x + 6| = 8$

Sprawdź się

4. Rozwiąż równanie.

- a) $|x - 3| = 7$ c) $|2x - 8| = 4$ e) $|\frac{1}{2}x - 1| = 3$ g) $|10 - x| = 4$
b) $|x + 2| = 6$ d) $|4x + 2| = 6$ f) $|\frac{2}{3}x + 4| = 2$ h) $|1 - 3x| = 6$

5. Rozwiąż równanie.

- a) $|x - 1| + |3x - 3| = 16$ c) $|9x + 18| - |7x + 14| = 10$
b) $|6x - 9| + |4x - 6| = 20$ d) $|6x + 10| + |9x + 15| = 25$

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

3.7. Wyrażenia wymierne – zastosowania (1)

Przykład 1

Licznik pewnego ułamka jest równy 6. Jeśli licznik tego ułamka zmniejszymy o 2, a mianownik o 3, to wartość ułamka się nie zmieni. Jaki to ułamek?

Szukany ułamek możemy zapisać w postaci $\frac{6}{x}$, wówczas nowy ułamek będzie miał postać $\frac{6-2}{x-3}$, czyli $\frac{4}{x-3}$. Otrzymujemy więc równanie:

$$\begin{aligned}\frac{6}{x} &= \frac{4}{x-3}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\} \\ 6(x-3) &= 4x \\ x &= 9\end{aligned}$$

Zatem szukany ułamek to $\frac{6}{9}$.

Ćwiczenie 1

- Licznik pewnego ułamka jest równy 10. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 20, a mianownik o 30, to wartość ułamka się nie zmieni. Jaki to ułamek?
- Licznik pewnego ułamka nieskracalnego jest o 2 mniejszy od jego mianownika. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 9, a mianownik o 5, to wartość ułamka wzrośnie dwukrotnie. Wyznacz ten ułamek.
- Dane są dwie liczby dodatnie. Jedna z tych liczb jest o 3 mniejsza od drugiej, a ich stosunek jest jak 75 do 100. Wyznacz te liczby.

Przykład 2

Jeden bok prostokąta jest o 4 cm dłuższy od boku pewnego kwadratu, a drugi bok jest o 2 cm krótszy od boku tego kwadratu. Stosunek długości boków tego prostokąta jest równy 2 : 1. Oblicz jego obwód.

Oznaczmy przez x długość boku kwadratu. Prostokąt ma wówczas boki długości $x+4$ i $x-2$. Zatem:

$$\frac{x+4}{x-2} = 2, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{2\}$$

czyli $x+4 = 2x-4$. Stąd $x = 8$ cm, a obwód prostokąta jest równy 36 cm.

Ćwiczenie 2

- Obwód kwadratu jest równy 52 cm. Jeden bok tego kwadratu wydłużono o x cm, a drugi skrócono o x cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 4 : 3. Oblicz pole tego prostokąta.
- Pole kwadratu jest równe 324 cm². Jeden bok tego kwadratu wydłużono o $(x+1)$ cm, a drugi – o $2x$ cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 5 : 6. Oblicz obwód tego prostokąta.

Przykład 3

Robert kupił kilka kilogramów jabłek w cenie x zł/kg i zapłacił 26 zł oraz kupił taką samą liczbę kilogramów gruszek, droższych o 2 zł/kg, i zapłacił 34 zł. Ile kosztuje kilogram jabłek, a ile – gruszek?

Liczba kupionych kilogramów jabłek jest równa $\frac{26}{x}$, a liczba kupionych kilogramów gruszek: $\frac{34}{x+2}$. Zatem:

$$\begin{aligned}\frac{26}{x} &= \frac{34}{x+2}, \text{ gdzie } x \in (0; \infty) \\ 26x + 52 &= 34x \\ 8x &= 52 \\ x &= 6,5\end{aligned}$$

Kilogram jabłek kosztuje 6,50 zł, a kilogram gruszek 8,50 zł.

Ćwiczenie 3

- Ola kupiła cukierki A w cenie x zł/kg i zapłaciła 24 zł. Ala kupiła taką samą ilość cukierków B , droższych o 4 zł/kg, i zapłaciła 30 zł. Ile kosztuje kilogram cukierków A , a ile – cukierków B ?
- Cena winogron to obecnie x zł/kg. Tydzień temu, kiedy winogrona były o 4 zł/kg droższe, Tomek wydał na ich zakup 20 zł. Gdyby obecna cena spadła o 1 zł/kg, to taką samą ilość winogron można by kupić za 12 zł. Jaka jest obecna cena winogron?

Przykład 4

Za osiem lat stosunek wieku Ali i jej o 4 lata młodszej siostry będzie wynosił 6 : 5. Ile lat ma Ala, a ile – jej siostra?

Oznaczmy przez x wiek Ali w latach, wówczas jej siostra ma $(x-4)$ lata. Za 8 lat będą one miały odpowiednio $(x+8)$ lat i $(x+4)$ lata. Zatem:

$$\begin{aligned}\frac{x+8}{x+4} &= \frac{6}{5}, \text{ gdzie } x \in (4; \infty) \\ 5x + 40 &= 6x + 24 \\ x &= 16\end{aligned}$$

Ala ma 16 lat, a jej siostra ma 12 lat.

Ćwiczenie 4

- Mama Bartka jest o 6 lat młodsza od jego taty. Stosunek wieku mamy i taty jest jak 8 do 9. Ile lat ma mama Bartka, a ile – jego tata?
- Wujek Stefana jest o 4 lata starszy od jego cioci. Stosunek podwojonego wieku wujka do wieku cioci jest równy 20 : 9. Ile lat ma wujek, a ile – ciocia?

Zadania

- a) Boki prostokąta mają długości x cm i $2x$ cm. Gdyby jego krótszy bok wydłużyć o 6 cm, a dłuższy – o 5 cm, to stosunek długości boków byłby równy 2:3. Oblicz obwód tego prostokąta.
b) Dany jest prostokąt o bokach 30 cm i 18 cm. Jeden z tych boków wydłużono o x cm, a drugi – o $2x$ cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 5:9. O ile zwiększył się obwód tego prostokąta? Rozpatrz wszystkie przypadki.
- Dane są sześcián o krawędzi x cm oraz prostopadłościan o krawędziach $(x + 1)$ cm, $(x + 2)$ cm i $(x + 3)$ cm. Stosunek sumy długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu do sumy długości wszystkich krawędzi sześciánu jest równy 5:4. Oblicz objętość sześciánu.
- Cena wiśni dwa dni temu była o 3 zł/kg niższa niż dziś. Dwa dni temu pani Ala wydała na zakup wiśni 45 zł. Aby kupić dziś tyle samo tych owoców, musiałaby wydać o 9 zł więcej. Jaka była cena wiśni dwa dni temu?
- a) Magda ma 25 lat, a jej młodsza siostra – 13 lat. Za ile lat stosunek wieku Magdy i jej siostry będzie równy $\frac{3}{2}$?
b) Babcia Krysi jest o 8 lat młodsza od jej dziadka. Stosunek wieku babci do wieku dziadka 34 lata temu był jak 2 do 3. Ile lat ma babcia?

Sprawdź się

- a) Licznik pewnego ułamka jest o 6 większy od jego mianownika. Jeśli licznik i mianownik zwiększymy o 11, to otrzymamy ułamek równy $\frac{4}{3}$. Znajdź wyjściowy ułamek.
b) Licznik pewnego ułamka jest liczbą dodatnią i jest o 3 mniejszy od jego mianownika. Jeśli licznik i mianownik zwiększymy o 10, to otrzymamy ułamek dwa razy większy. Znajdź wyjściowy ułamek.
- a) Boki prostokąta mają długości x cm i $(x + 4)$ cm. Jeśli oba boki skrócimy o 4 cm, to stosunek ich długości będzie równy 3:5. Oblicz obwód tego prostokąta.
b) Dany jest prostokąt o bokach 32 cm i 51 cm. Jego krótszy bok skrócono o x cm, a dłuższy bok – o $3x$ cm i otrzymano prostokąt, w którym stosunek długości boków jest równy 3:4. O ile zmniejszył się obwód prostokąta? Rozpatrz dwa przypadki.

3.8. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)

Przykład 1

Dwa samochody wyruszyły jednocześnie z Malborka. Każdy jechał ze stałą prędkością. Po pewnym czasie pierwszy znajdował się w odległości 320 km, a drugi – 240 km od tego miasta. Prędkość drugiego samochodu była o 20 km/h mniejsza od prędkości pierwszego. Oblicz prędkości obu samochodów.

Oznaczmy przez v_1 i v_2 prędkości samochodów. Wówczas:

$$\frac{320}{v_1} = \frac{240}{v_1 - 20} \quad \text{Korzystamy ze wzoru } t = \frac{s}{v}, \text{ gdzie } t - \text{czas, } s - \text{droga.}$$
$$320(v_1 - 20) = 240v_1$$

Stąd $v_1 = 80$ oraz $v_2 = 80 - 20 = 60$.

Prędkości samochodów wynosiły odpowiednio 80 km/h i 60 km/h.

Ćwiczenie 1

- Samochód jadący z prędkością v pokonał odległość 195 km. Samochód jadący z prędkością o 20 km/h większą pokonał w tym samym czasie 260 km. Oblicz prędkości obu samochodów.
- Pociąg ekspresowy na trasie długości 360 km jechał z prędkością o 30 km/h większą niż pociąg osobowy i pokonał tę trasę w czasie równym 0,75 czasu przejazdu pociągu osobowego. Oblicz prędkości obu pociągów.

Przykład 2

Piotrek potrzebuje 4 godzin na pomalowanie płotu wokół domu. Adam tę samą pracę wykonałby w ciągu 8 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie płotu, gdyby pracowali razem, każdy w swoim tempie?

Oznaczmy przez w pracę, którą należy wykonać. Wówczas:

$\frac{1}{4}w$ – praca wykonana przez Piotrką w ciągu godziny,

$\frac{1}{8}w$ – praca wykonana przez Adama w ciągu godziny,

$\frac{1}{4}w + \frac{1}{8}w = \frac{3}{8}w$ – praca wykonana wspólnie w ciągu godziny.

Z tego wynika, że na wspólne wykonanie pracy chłopcy potrzebowaliby:

$$w : \frac{3}{8}w = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ [h]}$$

czyli 2 godzin i 40 minut.

Ćwiczenie 2

Artur potrzebuje 10 godzin na pomalowanie pokoju, a Darek zrobiłby to w ciągu 6 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie pokoju, gdyby pracowali razem, każdy w swoim tempie?

Zadania

1. Droga między miastami A i B ma 350 km. Z tych miast wyruszyły jednocześnie naprzeciw siebie dwa samochody i jechały ze stałymi prędkościami. Pierwszy z nich jechał z prędkością o 30 km/h większą niż drugi. Samochody minęły się, gdy pierwszy pokonał $\frac{3}{5}$ trasy między miastami. Oblicz prędkości obu samochodów.
2. Trasa kolejowa z miasta A do miasta B ma 510 km. Z tych miast wyruszyły jednocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi i jechały ze stałymi prędkościami. Prędkość pierwszego była o 10 km/h większa niż prędkość drugiego. Pociągi spotkały się w odległości 270 km od miasta A . Oblicz prędkości obu pociągów.
3. Trasa rowerowa wokół jeziora ma długość 12 km. Dwóch rowerzystów wyruszyło jednocześnie z tego samego miejsca i okrążyło jezioro w tym samym kierunku w stałym tempie. Prędkość jednego z nich była o 5 km/h mniejsza niż prędkość drugiego. Do ponownego spotkania rowerzystów doszło, gdy szybszy z nich wykonał 4 okrążenia jeziora, a wolniejszy – 3. Oblicz prędkości obu rowerzystów.
4. Pierwsza koparka wykonała połowę wykopu w ciągu 6 godzin, resztę wykopu wykonała druga koparka w ciągu 9 godzin. Ile czasu zajęłoby wykonanie wykopu, gdyby obie koparki pracowały jednocześnie, każda w swoim tempie?
5. W tabeli podano, ile czasu potrzeba na wypompowanie wody ze zbiornika przy wykorzystaniu pompy A lub B . Ile czasu zajmie wypompowanie wody, jeśli wykorzystamy jednocześnie obie pompy?

Pompa A	10 godzin
Pompa B	6 godzin

Sprawdź się

6. Droga między miastami A i B ma 210 km. Z tych miast wyjechały jednocześnie naprzeciw siebie dwa samochody. Każdy z nich jechał ze stałą prędkością, przy czym jeden jechał o 15 km/h szybciej niż drugi. Minęły się one w odległości 90 km od miasta A . Oblicz prędkość każdego z nich.
7. Rodzice Roberta mają na działce truskawki. Zebranie truskawek zajęłoby Robertowi 4 godziny, a jego młodszemu bratu – 6 godzin. Ile czasu zajmie im zbiór truskawek, jeśli będą pracować razem, każdy w swoim tempie?



Powtórzenie

Zestaw I

1. Do wykresu proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$ należy punkt A . Podaj wzór tej proporcjonalności oraz współrzędne trzech innych punktów należących do jej wykresu.

a) $A(3, 8)$ b) $A(\frac{1}{2}, 4)$ c) $A(7, \frac{1}{28})$ d) $A(27, \frac{1}{9})$

2. Oblicz wartości funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla:

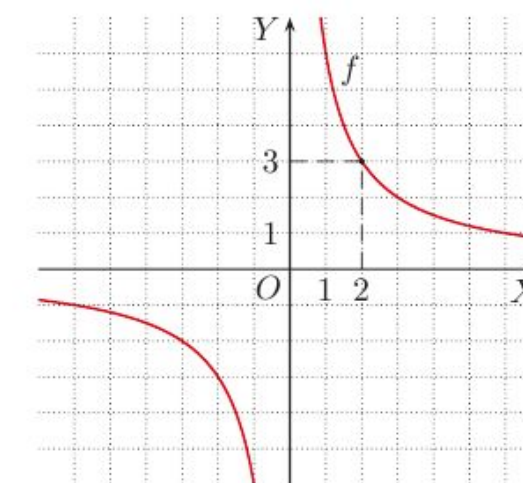
a) $x \in \{-4, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$, $a = -2$, c) $x \in \{-9, \frac{9}{10}, 1\frac{1}{2}\}$, $a = 1\frac{1}{5}$,
 b) $x \in \{-2, -1, \frac{1}{4}\}$, $a = \frac{1}{2}$, d) $x \in \{\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{8}, \sqrt{2} - 1\}$, $a = \sqrt{2} + 1$.

3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz a .

a) Które spośród punktów: $P(-8, -\frac{3}{4})$, $Q(\frac{1}{2}, 12)$, $R(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ należą do wykresu funkcji f ?

b) Odczytaj z wykresu rozwiązanie nierówności $f(x) > -3$.

c) Odczytaj z wykresu rozwiązanie nierówności $f(x) \leq 3$.



4. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{5}{x}$, której dziedziną jest zbiór D . Podaj zbiór wartości tej funkcji.

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) $D = (-\infty; -1)$ c) $D = [1; 5]$ d) $D = [-1; 1] \setminus \{0\}$

5. Naskicuj wykresy funkcji f i g . Podaj dziedzinę funkcji g i równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x} + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x-4}$
 b) $f(x) = -\frac{3}{x}$, $g(x) = -\frac{3}{x} - 2$ d) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x+2}$

6. Naskicuj wykresy funkcji f , g i h . Podaj dziedzinę i zbiór wartości każdej z tych funkcji.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{2}{x-1}$, $h(x) = \frac{2}{x-1} + 1$
 b) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x+1}$, $h(x) = \frac{3}{x+1} - 1$
 c) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $g(x) = -\frac{2}{x+2}$, $h(x) = -\frac{2}{x+2} + 3$

7. Prosta równoległa do osi OY przecina wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ w podanym punkcie P . W jakim punkcie ta prosta przecina wykres funkcji $g(x) = -\frac{a}{x}$? Podaj wzory i naszkicuj wykresy funkcji f i g .
- a) $P(2, \frac{1}{2})$ b) $P(1, 2)$ c) $P(1, -3)$ d) $P(2, 3)$
8. Które spośród liczb $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ nie należą do dziedziny wyrażenia?
- a) $\frac{16x^2 + x + 5}{x^3 - 9x^2}$ b) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^4 - 4x^3 + 4x^2}$ c) $\frac{x^5 - 3x^4 + x}{x^2 - x - 6}$ d) $\frac{2x^4 - 16x^3 + 9}{x^3 - x^2 - 2x}$
9. Wyznacz dziedzinę funkcji f . Oblicz $f(-3)$, $f(1)$ i $f(3)$.
- a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ c) $f(x) = \frac{x + 0,5}{4x^2 - 1}$
b) $f(x) = \frac{x^2 + 21}{x^2 - 3}$ d) $f(x) = \frac{3x^2 - 6x}{4x^2 - 9}$
10. Wykonaj działania. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.
- a) $\frac{x-4}{4x} \cdot \frac{6x}{2x-8}$ c) $\frac{6}{x^2(2x+1)} \cdot \frac{x(4x+2)}{x+1}$ e) $\frac{x^2}{x+2} : \frac{\frac{1}{2}x}{3x+6}$
b) $\frac{x^2}{x-3} \cdot \frac{3x-9}{2x}$ d) $\frac{x^2-9}{x-3} \cdot \frac{3x}{2x+6}$ f) $\frac{x^2-4}{x+1} : \frac{x-2}{x^2-1}$
11. Wyznacz pole trapezu o podstawach a , b i wysokości h ($x > 0$).
- a) $a = 3x$, $b = x + 2$, $h = \frac{5}{6x+3}$
b) $a = x^2 + 4x$, $b = 2x^2 + 8x$, $h = \frac{6}{x^2 + 4x}$

Zestaw II

1. Rozwiąż równanie.
- a) $\frac{6x-3}{x-3} = 0$ c) $\frac{\frac{2}{3}x-1}{x-\frac{1}{3}} = 0$ e) $\frac{\frac{3}{2}x-6}{\frac{3}{4}x+6} = 0$ g) $\frac{6-4x}{2x-3} = 0$
b) $\frac{2x+1}{4x+1} = 0$ d) $\frac{x-\frac{2}{3}}{6x-4} = 0$ f) $\frac{12x+8}{\frac{3}{2}x+4} = 0$ h) $\frac{3-2x}{\frac{3}{2}-x} = 2$
2. Rozwiąż równanie.
- a) $\frac{4}{x+3} = -2$ c) $\frac{x}{x-1} = 2$ e) $\frac{x+1}{3-x} = 1$ g) $\frac{-1}{x} - 4 = x$
b) $\frac{7}{2x-1} = 5$ d) $\frac{-2x}{x+5} = -3$ f) $\frac{2x-7}{x} = -5$ h) $\frac{6}{x} + 5 = x$
3. Rozwiąż równanie.
- a) $\frac{-4}{x+2} = 4x$ d) $-\frac{x}{x+2} = x$ g) $x - 1 = \frac{x+4}{x-2}$
b) $\frac{x}{x+1} = x$ e) $\frac{x}{x-4} = x - 3$ h) $2x+1 = \frac{6-8x}{4x-3}$
c) $\frac{x^2}{x-4} = x$ f) $\frac{2x+10}{x+5} = x - 2$ i) $4x - 4 = -\frac{1}{x}$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5x-2}{5x} = \frac{x-1}{x+1}$ d) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{2-x}{x+1}$ g) $\frac{2x}{5x+10} = \frac{-3}{x-4}$
b) $\frac{2x}{x+4} = \frac{6x+2}{3x+6}$ e) $\frac{x+4}{x-2} = \frac{2x-4}{x+2}$ h) $\frac{2x+5}{x-1} = \frac{1}{x+1}$
c) $\frac{2x-5}{2x+1} = \frac{x-1}{x+3}$ f) $\frac{x-3}{1-x} = \frac{x+6}{x+2}$ i) $\frac{2x+1}{x-9} = \frac{3}{x-3}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x-7}{x-3} - \frac{2x-6}{x+1} = 0$ b) $\frac{x-9}{x-5} - \frac{3x}{3x-4} = 0$

6. Rozwiąż równanie dla $a = 0$ oraz dla $a = 1$.

a) $\frac{x+8}{2x} = a$ b) $\frac{x+9}{2-x} = a$ c) $\frac{4x-4}{x} = ax$ d) $\frac{ax+2}{x+1} = x$

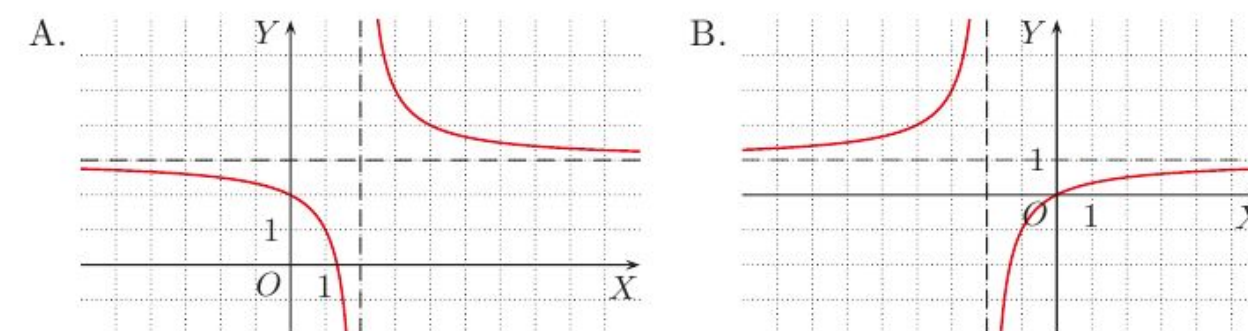
7. Wyznacz ze wzoru podaną zmienną.

a) $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, b c) $P = \pi r^2 + \pi r l$, l e) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, r
b) $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, h d) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, h f) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, r

8. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x} - 1$. Wyznacz współrzędne punktów, w których wykres funkcji f przecina prostą $y = 2$ oraz prostą $y = x$.

a) $a = 2$ b) $a = -1$ c) $a = 1$ d) $a = -2$

9. Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{-2}{x+2} + 1$ oraz $g(x) = \frac{2}{x-2} + 3$.



- a) Dopasuj wzór do wykresu. Podaj miejsca zerowe funkcji f i g .
b) Rozwiąż równania $g(x) = x$ oraz $f(x) = -x$.

10. Rozwiąż równanie.

a) $|x - 8| = 3$ c) $|x + 6| - 2 = 0$ e) $6 - |x + 6| = 0$
b) $|x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$ d) $|x - 9| - 9 = 0$ f) $4 + |x - 1| = 0$

11. Rozwiąż równanie.

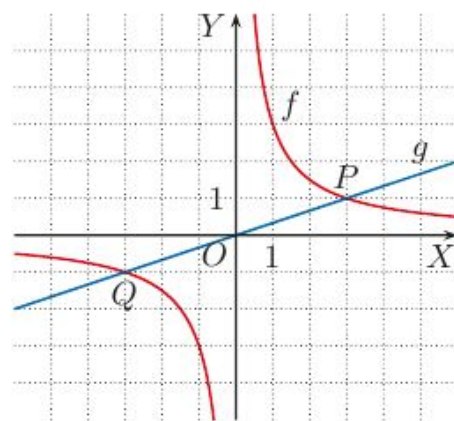
a) $|2x - 6| = 4$ c) $|4 - 2x| = 7$ e) $|x - 3| + |3x - 9| = 8$
b) $|4x + 8| = 2$ d) $|-4x - 1| = 9$ f) $|6x + 3| - |4x + 2| = 4$



Zadanie 8 (0-1)

Wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ i $g(x) = bx$ przecinają się w punktach $P(3, 1)$ i $Q(-3, -1)$ (rysunek obok). Wynika stąd, że $a + b$ jest równe

- A. $-2\frac{2}{3}$ B. 0 C. $3\frac{1}{3}$ D. 6



Zadanie 9 (0-1)

Jednym z rozwiązań równania $\frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{x}$ jest

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3-\sqrt{11}}{2}$ C. $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ D. $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$

Zadanie 10 (0-1)

Liczba a jest rozwiązaniem równania $\frac{\frac{2}{3}x-3}{x-2} = 0$, a liczba b jest rozwiązaniem równania $\frac{\frac{3}{2}x-2}{x-3} = 0$. Suma liczb a i b jest równa

- A. $5\frac{5}{6}$ B. $5\frac{2}{3}$ C. $5\frac{1}{2}$ D. 5

Zadanie 11 (0-1)

Dane są dwa wyrażenia wymierne F i G określone dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2, 3\}$.

$$F = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}, \quad G = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$$

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Iloczyn $F \cdot G$ jest równy

A.	$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 6}$,	a iloraz $\frac{F}{G}$ jest równy	1.	$\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 5x + 6}$.
B.	$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + x + 6}$,		2.	$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6}$.
			3.	$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 5x + 6}$.

Zadanie 12 (0-1)

Dane jest równanie $|x + \sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wszystkie rozwiązania tego równania

są liczbami niewymiernymi.	P	F
należą do przedziału $(-2; 2)$.	P	F



Zadanie 13

Dane są dwa wyrażenia wymierne P i Q określone dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3, 4\}$.

$$P = \frac{x+4}{9-x^2}, \quad Q = \frac{x^2-3x}{x-4}$$

Zadanie 13.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dla $x = -\frac{9}{2}$ oba wyrażenia przyjmują wartości dodatnie.	P	F
Dla $x = \frac{9}{2}$ oba wyrażenia przyjmują wartości ujemne.	P	F

Zadanie 13.2 (0-1)

Iloczyn wyrażeń P i Q zapisano w postaci $\frac{-x^2+kx}{(x+3)(x-4)}$, gdzie k jest liczbą rzeczywistą. Wynika stąd, że

- A. $k = -6$ B. $k = -4$ C. $k = 4$ D. $k = 6$

Zadanie 14 (0-2)

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Dla argumentu równego -2 wartość równą -1 przyjmuje funkcja

- A. $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ C. $f(x) = \frac{-3x+2}{x+4}$ E. $f(x) = \frac{-2x-1}{-2x+3}$
 B. $f(x) = \frac{x+4}{2x+2}$ D. $f(x) = \frac{-3x-1}{2x-5}$ F. $f(x) = \frac{x-4}{-4x-2}$

Zadanie 15

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{\sqrt{2}-2x}{\sqrt{2}x-2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$.

Zadanie 15.1 (0-2)

Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Funkcja f dla $x = \sqrt{2} - 1$ przyjmuje wartość równą	?
Funkcja f dla $x = \sqrt{2} + 1$ przyjmuje wartość równą	?

- A. $-1 - \sqrt{2}$ B. $-2 + \sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $1 - \sqrt{2}$ E. $2 + \sqrt{2}$

Zadanie 15.2 (0-1)

Wykres funkcji f przecina osie układu współrzędnych w punktach $(a, 0)$ i $(0, b)$. Iloczyn ab jest równy

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

**Zadanie 16 (0-2)**

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Do jej wykresu należy punkt $(2\sqrt{5} - 3, 2\sqrt{5} + 3)$. Oblicz a .

Zadanie 17 (0-2)

Rozwiąż równanie $|x - 1 + \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$.

Zadanie 18

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{2x} + b$.

Zadanie 18.1 (0-2)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $[\frac{1}{2}; 6]$.

Zadanie 18.2 (0-2)

Rozwiąż równanie $f(x) = x$.

Zadanie 19 (0-2)

Rozwiąż równanie $\frac{x}{\sqrt{2x-4}} = \frac{1}{x-2\sqrt{2}}$.

D Zadanie 20 (0-3)

Uzasadnij, że do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x} + 1$ należy dokładnie sześć punktów o obu współrzędnych całkowitych.

Zadanie 21 (0-4)

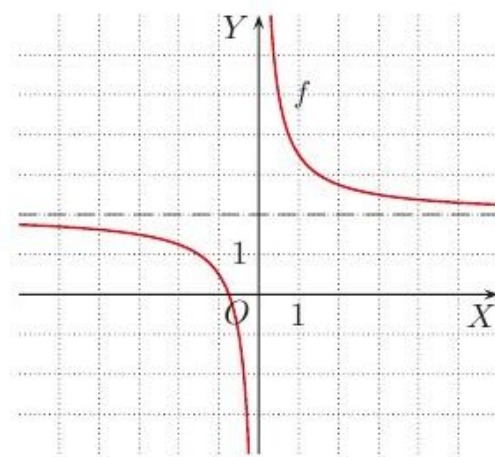
Dane są dwa prostokąty: jeden o bokach x cm i $(x+4)$ cm oraz drugi o bokach $(x+4)$ cm i $(2x+2)$ cm. Stosunek długości krótszego boku do dłuższego boku dla obu prostokątów jest taki sam. Oblicz sumę pól tych prostokątów.

Zadanie 22 (0-4)

Pierwszą połowę trasy pociąg przebył z prędkością v , a drugą połowę – z prędkością dwa razy mniejszą. Cała trasa ma długość 140 km. Wyznacz wzór opisujący zależność między czasem t , w jakim pociąg przebył całą trasę, a prędkością v . Oblicz t dla $v = 120$ km/h.

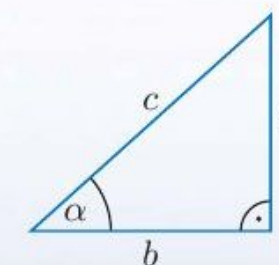
Zadanie 23 (0-4) → Przykład, str. 120

Kajakarz płynie po stojącej wodzie z prędkością 10 km/h. Gdy płynął z prądem rzeki, pokonał trasę o 50% dłuższą, niż byłby w stanie pokonać w tym samym czasie, gdyby płynął pod prąd. Oblicz prędkość prądu rzeki.



4 Trygonometria

Jedną z funkcji trygonometrycznych omawianych w tym rozdziale jest funkcja sinus – słowo to po łacinie oznacza zagięcie, zatokę. Jeśli znamy wartość sinusa kąta α (w skrócie $\sin \alpha$) oraz długość przeciwprostokątnej c trójkąta prostokątnego, możemy obliczyć długość przyprostokątnej a (rysunek obok), korzystając z równości $a = c \sin \alpha$.



Na przykład, chcąc się dowiedzieć, na jaką wysokość sięgnie drabina strażacka o długości 40 m podniesiona pod kątem 65° , wykonujemy mnożenie $40 \cdot \sin 65^\circ$. Ponieważ $\sin 65^\circ \approx 0,9$, więc wysokość ta jest równa około 36 m.

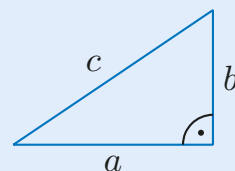


4.1. Trójkąty prostokątne

Twierdzenie Pitagorasa

Suma kwadratów długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Istnieje wiele dowodów tego twierdzenia. W poniższym dowodzie korzystamy z własności podobieństwa trójkątów.

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c . Prowadzimy w nim wysokość CD (rysunek poniżej). Na podstawie cechy KKK stwierdzamy, że trójkąty CBD , ACD i ABC są podobne. Z podobieństwa trójkątów ABC i CBD otrzymujemy:

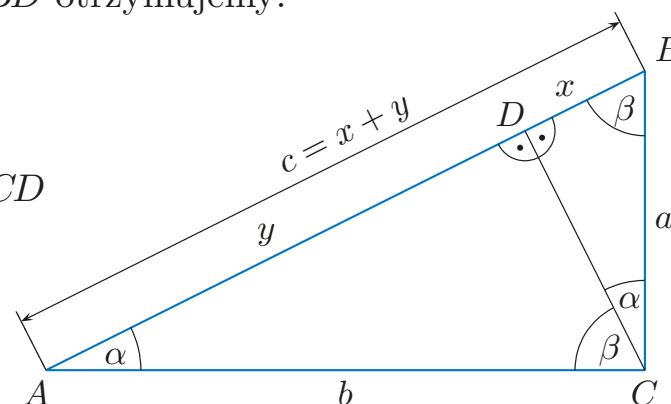
$$\frac{a}{c} = \frac{x}{a}$$

$$a^2 = cx$$

Z podobieństwa trójkątów ABC i ACD otrzymujemy:

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{b}$$

$$b^2 = cy$$



Zatem $a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y)$, ale $x + y = c$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.

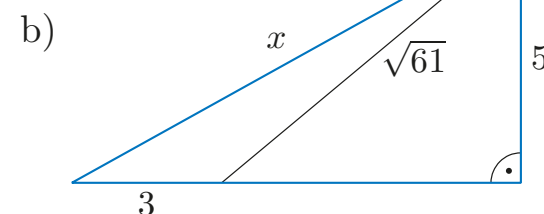
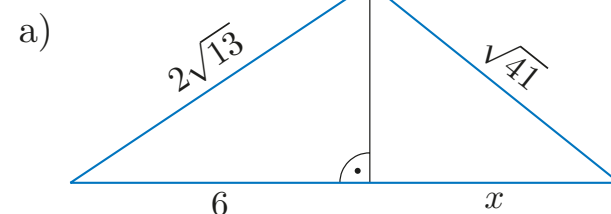
Ćwiczenie 1

Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b .

- a) $a = 30, b = 40$ c) $a = 2\sqrt{2} - 1, b = 2\sqrt{2} + 1$ e) $a = b = 2\sqrt{2}$
 b) $a = \sqrt{5}, b = 2$ d) $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}, b = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ f) $a = \frac{1}{b} = 2$

Ćwiczenie 2

Oblicz x .



Aby sprawdzić, czy dany trójkąt jest prostokątny, można wykorzystać poniższe twierdzenie.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt T o bokach długości a, b, c takich, że $a^2 + b^2 = c^2$, oraz trójkąt prostokątny T_1 o przyprostokątnych długości a i b .

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że przeciwprostokątna c_1 trójkąta T_1 spełnia warunek $c_1^2 = a^2 + b^2$. Zatem $c_1 = c$.

Oznacza to, że trójkąty T i T_1 są przystające na podstawie cechy BBB. Zatem trójkąt T jest trójkątem prostokątnym.

Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy trójkąt o podanych bokach jest trójkątem prostokątnym.

- a) 3, 4, 5 b) 6, 8, 10 c) 5, 9, 11 d) 2, 4, $2\sqrt{5}$

Liczby naturalne a, b, c będące długościami boków trójkąta prostokątnego nazywamy **trójkami pitagorejskimi**. Najbardziej znana z nich to trójka 3, 4, 5.

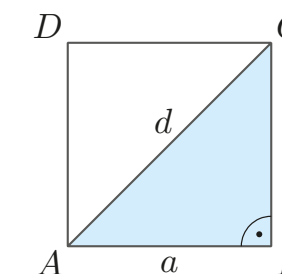
D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że podana trójka liczb jest trójką pitagorejską.

- a) 5, 12, 13 b) 8, 15, 17 c) 7, 24, 25 d) 9, 40, 41

Szczególne znaczenie ma **trójkąt prostokątny będący połową kwadratu**, czyli trójkąt o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

Przekątna kwadratu o boku długości a jest równa $a\sqrt{2}$.



D Ćwiczenie 5

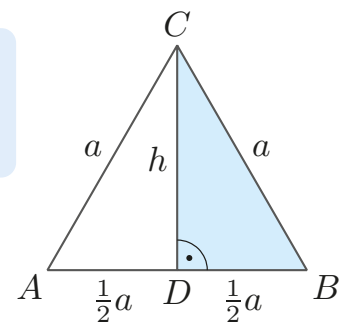
Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.

Ćwiczenie 6

- a) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego pole jest równe 72 cm^2 .
 b) Oblicz obwód i pole trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego przeciwprostokątna ma długość 4 cm.

Drugi ważny trójkąt prostokątny to **trójkąt będący połową trójkąta równobocznego**, czyli trójkąt o kątach 30° , 60° , 90° .

Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



D Ćwiczenie 7

Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.

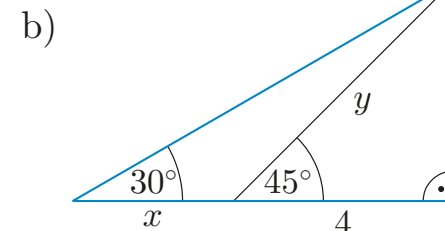
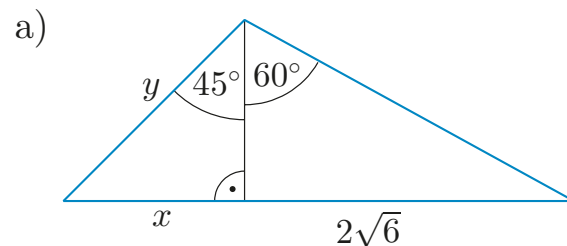
Ćwiczenie 8

- Oblicz wysokość trójkąta równobocznego, którego obwód jest równy 48 cm.
- Oblicz obwód trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 6 cm.

Zadania

- Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego:
 - obwód jest równy $6(1 + \sqrt{2})$,
 - przeciwprostokątna jest o $2(\sqrt{2} - 1)$ dłuższa od przyprostokątnej,
 - środkowa poprowadzona na przyprostokątną ma długość $4\sqrt{5}$.

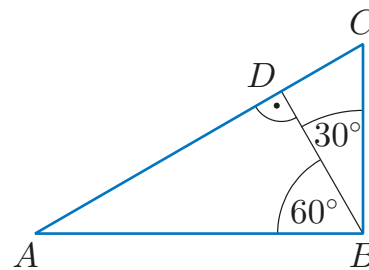
- Oblicz x i y .



- Najdłuższy bok trójkąta równoramiennego ma długość $8\sqrt{3}$ cm, a jeden z jego kątów ma miarę 120° . Oblicz obwód tego trójkąta.
 - Kąty ostre trójkąta mają miary 30° i 45° , a wysokość opuszczona na najdłuższy bok jest równa 3 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

- Pole trójkąta BCD przedstawionego na rysunku obok jest równe $8\sqrt{3}$. Oblicz obwód trójkąta ABD .

- Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest dwa razy większy od drugiego kąta, a suma długości przeciwprostokątnej i dłuższej przyprostokątnej jest równa $6(2 + \sqrt{3})$. Oblicz pole tego trójkąta.



- Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

- Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę 60° , a jego przeciwprostokątna ma długość 12 cm. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

- Dokończ przedstawiony poniżej dowód twierdzenia Pitagorasa.

- Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c . Rysujemy trapez prostokątny $ABDE$ o podstawach a i b oraz wysokości $a + b$ (rysunek obok). Kąt ACE jest kątem prostym (uzasadnij). Pole P trapezu jest sumą pól trójkątów ABC , CDE i ACE :

$$P = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

Korzystamy teraz ze wzoru na pole trapezu:

$$P = \frac{1}{2}(a + b)(a + b)$$

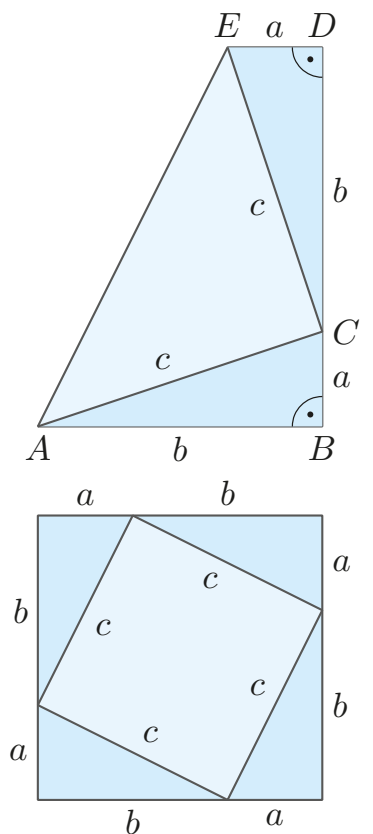
- Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c . Rysujemy kwadrat o boku $a + b$ i wewnątrz niego kwadrat o boku c (rysunek obok).

Duży kwadrat ma bok równy $a + b$, więc jego pole:

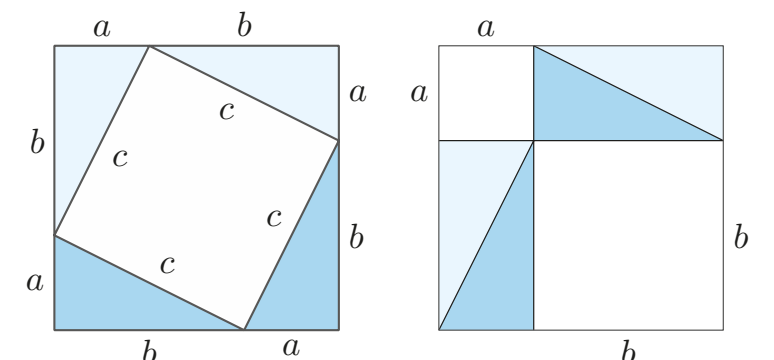
$$P = (a + b)^2$$

Pole dużego kwadratu jest równe sumie pola małego kwadratu i pól czterech trójkątów:

$$P = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot b$$



- Przeprowadź dowód twierdzenia Pitagorasa, korzystając z rysunków przedstawionych obok. W tym celu porównaj pola białych kwadratów.

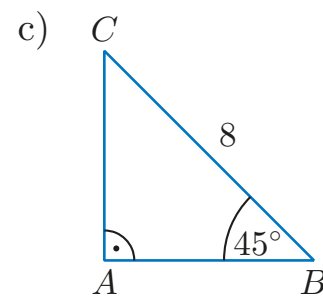
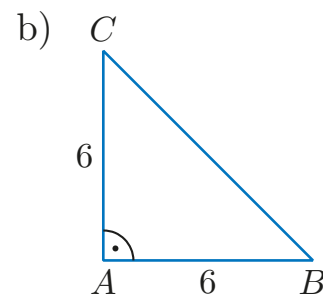
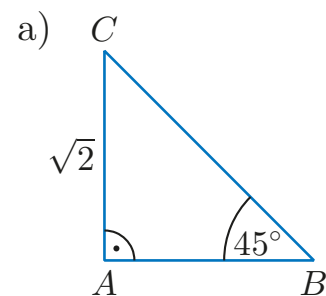


- Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 30 cm, a jego najdłuższy bok ma długość 13 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

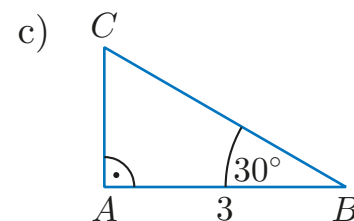
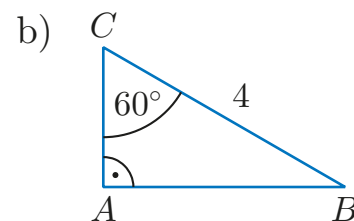
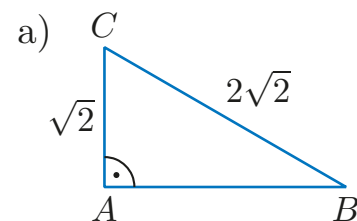
10. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 2 cm. Długość jednej z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną długości przeciwprostokątnej i drugiej przyprostokątnej. Oblicz obwód tego trójkąta.
11. Obwód rombu jest równy $4\sqrt{41}$ cm, a jedna z jego przekątnych jest o 2 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długości tych przekątnych.

Sprawdź się

12. Oblicz obwód trójkąta ABC .



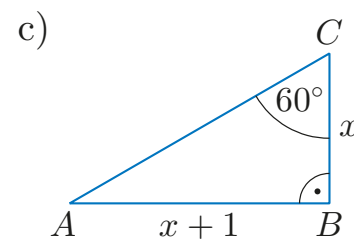
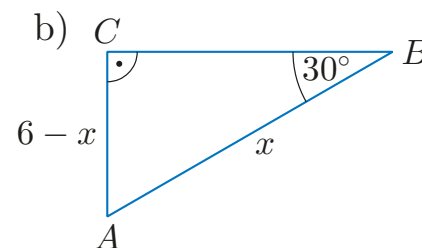
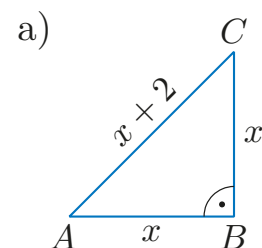
13. Oblicz obwód trójkąta ABC .



14. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest dwukrotnie większy od drugiego kąta. Oblicz pole tego trójkąta w przypadku, gdy:

- a) jego obwód jest równy $6 + 2\sqrt{3}$,
b) różnica długości jego przyprostokątnych jest równa $12 - 4\sqrt{3}$.

15. Oblicz obwód trójkąta ABC .



16. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę 60° , a dłuższa przyprostokątna ma długość 18. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

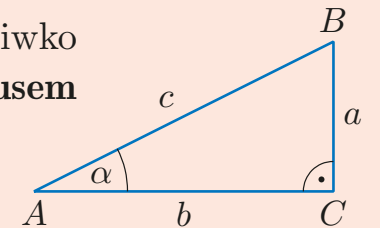
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Stosunki długości boków trójkąta prostokątnego są tak powszechnie stosowane, że otrzymały własne nazwy.

Definicja

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej nazywamy **sinusem** tego kąta.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$



Stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej nazywamy **cosinusem** tego kąta.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie nazywamy **tangensem** tego kąta.

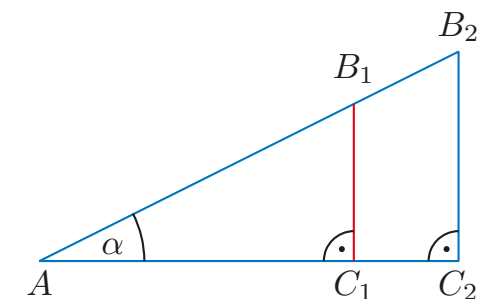
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Stosunki te nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi** kąta ostrego α .

Definiuje się też stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta. Jest to **cotangens** kąta: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$.

Zwróć uwagę na to, że stosunki te nie zależą od wielkości rozpatrywanego trójkąta, a jedynie od kąta α . Z podobieństwa trójkątów AB_1C_1 i AB_2C_2 wynikają równości:

$$\sin \alpha = \frac{|B_1C_1|}{|AB_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|AB_2|}$$



Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą nierówności:

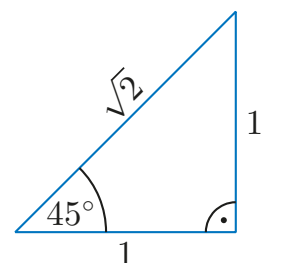
$$\sin \alpha < 1 \quad \text{i} \quad \cos \alpha < 1$$

Przykład 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 45° .

Rozpatrzmy trójkąt o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (rysunek obok).

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

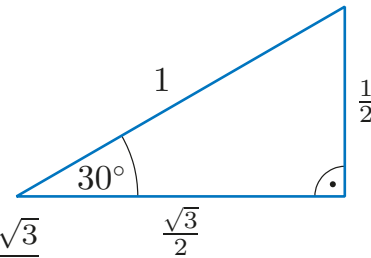


Przykład 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 30° .

Rozpatrzmy trójkąt o kątach 30° , 60° , 90° (rysunek obok).

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



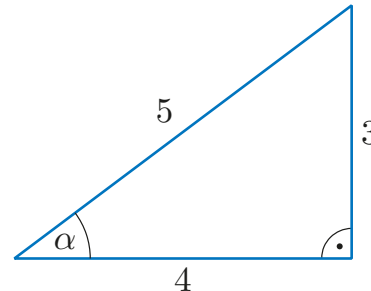
Ćwiczenie 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60° .

Przykład 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α w trójkącie na rysunku obok.

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$$



Ćwiczenie 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o bokach a , b , c .

$$\text{a) } a = 5, b = 12, c = 13 \quad \text{b) } a = 8, b = 15, c = 17 \quad \text{c) } a = \frac{1}{2}, b = \sqrt{2}, c = \frac{3}{2}$$

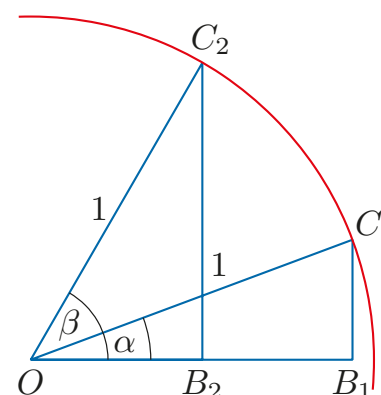
Można udowodnić, że:

- jeśli $\alpha < \beta < 90^\circ$, to $\sin \alpha < \sin \beta$,
- jeśli $\alpha < \beta < 90^\circ$, to $\cos \alpha > \cos \beta$.

Aby uzasadnić pierwszą zależność, rozpatrzmy trójkąty OB_1C_1 oraz OB_2C_2 takie, że punkty C_1 i C_2 leżą na łuku okręgu o środku w punkcie O i promieniu 1 (rysunek obok). Wówczas:

$$\sin \alpha = \frac{|B_1C_1|}{1} = |B_1C_1|, \quad \sin \beta = \frac{|B_2C_2|}{1} = |B_2C_2|$$

oraz $|B_1C_1| < |B_2C_2|$, zatem $\sin \alpha < \sin \beta$.



D Ćwiczenie 4

Uzasadnij drugą z podanych zależności.

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o podanych bokach.

- a) 6, 8, 10 c) 1, 4, $\sqrt{17}$ e) $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, 5
b) 7, 24, 25 d) 1, 4, $\sqrt{15}$ f) $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, 2

2. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	?	?
$\cos \alpha$	?	?	?
$\operatorname{tg} \alpha$	?	1	?

Czy wiesz, że...

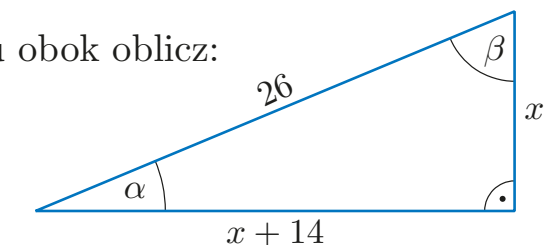
Skróty nazw funkcji trygonometrycznych pochodzą od łacińskich słów:

- *sin* od *sinus* – zagięcie, zatoka;
- *cos* od *complementi sinus* – sinus dopełnienia;
- *tg* od *tangens* – styczna.

3. Przekątna prostokąta o bokach długości 1 dm i 2 dm dzieli prostokąt na dwa trójkąty. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

4. Dla trójkąta przedstawionego na rysunku obok oblicz:

- a) długości przyprostokątnych,
b) wartości $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ oraz $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\operatorname{tg} \beta$.



5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna jest trzy razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej.

6. Dany jest równoległobok (niebędący prostokątem) o bokach długości 10 cm i 9 cm. Jedna z przekątnych dzieli ten równoległobok na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

7. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 6 i 10, a wysokość jest równa 5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między dłuższą podstawą trapezu a jego:

- a) przekątną, b) ramieniem.

Sprawdź się

8. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b .

- a) $a = 2$, $b = 6$ b) $a = 2$, $b = \sqrt{3}$ c) $a = 2$, $b = \sqrt{5}$

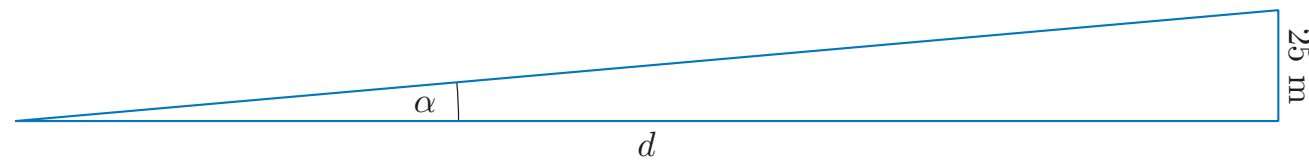
9. Dany jest prostokąt $ABCD$ o obwodzie równym 10 cm i krótszym boku BC długości 2 cm. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta ABC .

4.3. Trygonometria – zastosowania

Funkcje trygonometryczne wykorzystuje się w wielu sytuacjach praktycznych. Ich przybliżone wartości odczytamy z tablic wartości funkcji trygonometrycznych na str. 251. Możemy też skorzystać z odpowiedniego kalkulatora.

Przykład 1

Wierzchołek latarni morskiej znajduje się 25 m nad poziomem morza i widać go z jachtu pod kątem $\alpha = 5^\circ$. Jaka jest odległość jachtu od podnóża skarpy, na której stoi latarnia?



Do wyznaczenia szukanej wartości d wykorzystamy odczytaną z tablic przybliżoną wartość $\operatorname{tg} 5^\circ \approx 0,0875$.

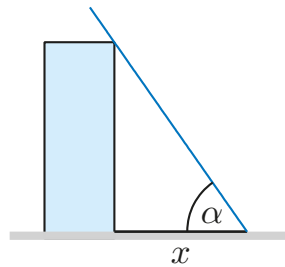
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{25}{d}, \quad \text{czyli} \quad d = \frac{25}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{25}{0,0875} \approx 286 \text{ [m]}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz wysokość budynku, którego cień ma długość x w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt α .

a) $x = 5 \text{ m}$, $\alpha = 58^\circ$

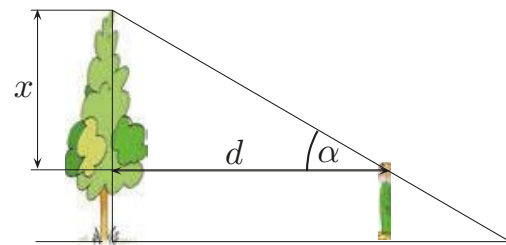
b) $x = 12 \text{ m}$, $\alpha = 39^\circ$



Przykład 2

Obserwator widzi czubek drzewa odległego o $d = 65 \text{ m}$ pod kątem $\alpha = 29^\circ$ (oczy ma na wysokości 1,5 m nad ziemią). Jaka jest wysokość tego drzewa?

$$\operatorname{tg} 29^\circ = \frac{x}{65}$$



Z tablic odczytujemy: $\operatorname{tg} 29^\circ \approx 0,5543$, czyli $x \approx 65 \cdot 0,5543 \approx 36 \text{ [m]}$.

Wysokość drzewa jest więc równa około $36 + 1,5 = 37,5 \text{ [m]}$.

Ćwiczenie 2

Przyjmij, jak w przykładzie 2., że obserwator ma oczy na wysokości 150 cm nad ziemią, i oblicz wysokość drzewa w przypadku, gdy:

a) $\alpha = 40^\circ$, $d = 22 \text{ m}$,

b) $\alpha = 14^\circ$, $d = 100 \text{ m}$.

Przykład 3

Przekątna prostokątnej działki budowlanej ma długość 30 m i tworzy z krótszym bokiem działki kąt α taki, że $\cos \alpha = 0,6$. Ile metrów bieżących siatki potrzeba na ogrodzenie działki, jeżeli na bramę wjazdową należy zostawić 3 m?

Obliczamy długość jednego boku działki:

$$\frac{y}{30} = \cos \alpha = 0,6, \quad \text{czyli} \quad y = 30 \cdot 0,6 = 18 \text{ [m]}.$$

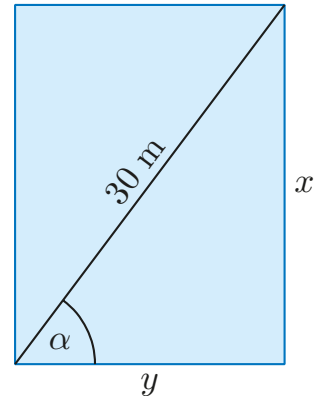
Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$x^2 = 30^2 - y^2 = 900 - 324 = 576$$

$$x = \sqrt{576} = 24 \text{ [m]}$$

Obliczamy obwód działki: $2x + 2y = 48 + 36 = 84 \text{ [m]}$.

Na ogrodzenie potrzeba więc $84 - 3 = 81 \text{ [m]}$ siatki.



Ćwiczenie 3

Oblicz obwód prostokąta, którego przekątna długości d tworzy z jednym z boków kąt o mierze α .

a) $d = 15$, $\cos \alpha = \frac{1}{5}$

b) $d = 8$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Znajomość wartości funkcji trygonometrycznych może posłużyć do znajdowania miar kątów ostrych trójkąta prostokątnego.

Ćwiczenie 4

Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (str. 251), podaj przybliżoną miarę kąta α , dla którego:

a) $\sin \alpha = 0,4067$,

c) $\operatorname{tg} \alpha = 0,5735$,

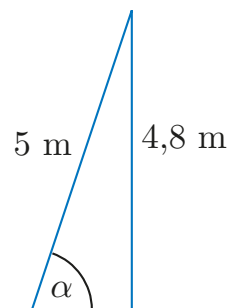
b) $\sin \alpha = 0,4226$,

d) $\cos \alpha = 0,9200$.

Przykład 4

Drabinę o długości 5 m oparto o ścianę budynku tak, że dotyka jej na wysokości 4,8 m. Jaki kąt tworzy drabina z ziemią?

$$\sin \alpha = \frac{4,8}{5} = 0,96. \quad \text{Z tablic odczytujemy: } \alpha \approx 74^\circ.$$



Ćwiczenie 5

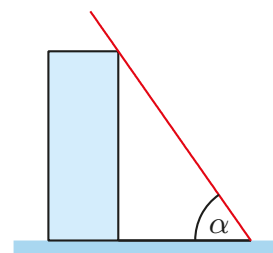
Jaki kąt tworzy z ziemią drabina o długości:

a) 6,5 m, jeżeli oparta o ścianę budynku sięga na wysokość 5,5 m,

b) 4,5 m, jeżeli jej koniec opierający się o ziemię jest odległy o 1 m od ściany budynku?

Zadania

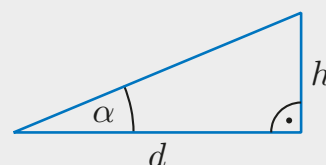
1. Budynek rzuca cień długości 19 m w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt $\alpha = 55^\circ$ (rysunek obok). Oblicz wysokość tego budynku.
2. Oblicz długość cienia rzucanego przez budynek o wysokości 25 m w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 40° .
3. Drzewo jest odległe od punktu obserwacji na poziomie ziemi o 80 m. Z tego punktu czubek drzewa widać pod kątem 25° . Oblicz wysokość drzewa oraz długość cienia rzucanego przez to drzewo, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 70° .
4. Naciągnięty sznurek długości 20 m, którego jeden koniec jest przymocowany do ziemi, a na drugim końcu jest przyczepiony latawiec, tworzy z poziomem kąt 70° . Na jakiej wysokości nad ziemią znajduje się latawiec?



Nachylenie drogi jest zwykle podawane w procentach:

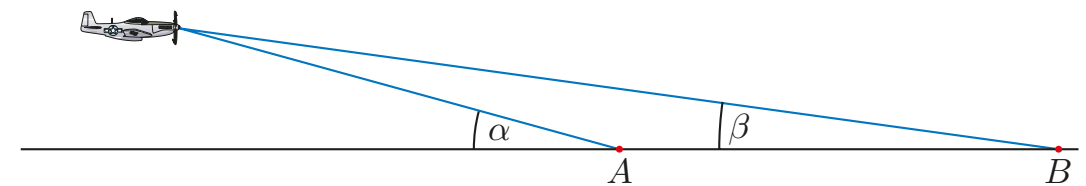
$$n = \frac{h}{d} \cdot 100\%$$

Zauważ, że $\frac{h}{d} = \tan \alpha$.

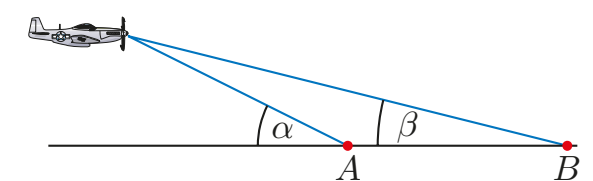


5. Wyznacz kąt α (rysunek powyżej) dla drogi, której nachylenie jest równe:
 - a) 10%,
 - b) 30%,
 - c) 50%,
 - d) 100%.
6. Podjazd dla wózków jest nachylony do poziomu pod kątem α . Wyraż w procentach nachylenie tego podjazdu. Czy spełnia on wymóg, że nachylenie podjazdu ma być mniejsze od 8%?
 - a) $\alpha = 3^\circ$
 - b) $\alpha = 4^\circ$
 - c) $\alpha = 5^\circ$
7. Drabina wozu strażackiego może być rozsunięta na długość 20 m i podniesiona pod kątem 72° . Na jaką wysokość sięgnie drabina, jeśli jest zamocowana 2,4 m nad ziemią?
8. Drabinę oparto o ścianę tak, że dotyka jej na wysokości 3,6 m i tworzy z ziemią kąt 54° . Jaki kąt będzie tworzyła z ziemią ta drabina, jeśli zostanie oparta o ścianę na wysokości 4 m?
9. Przekrój poprzeczny strychu jest trójkątem równoramiennym o podstawie długości 9 m i ramionach długości 6 m. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

10. Pilot lecący samolotem na wysokości 50 m widzi początek pasa startowego pod kątem $\alpha = 30^\circ$, a jego koniec pod kątem $\beta = 10^\circ$. Samolot nadlatuje wzdłuż pasa startowego. Jaka jest długość tego pasa?

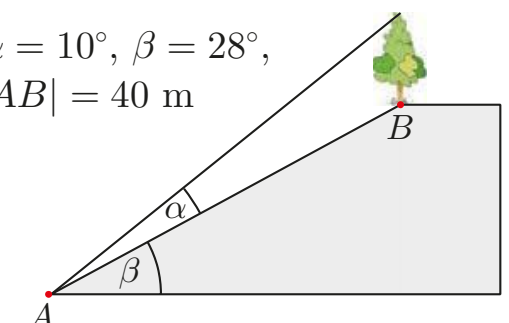
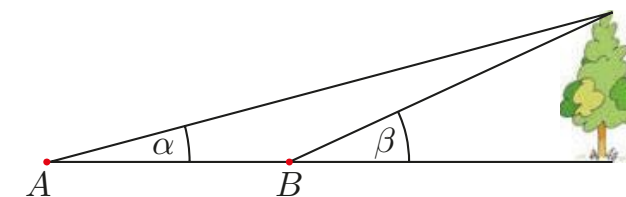


11. Samolot zbliżający się do lotniska leci na wysokości 2400 m. Do lądowania musi schodzić pod kątem 4° . Jak daleko od początku pasa startowego powinien rozpocząć ten manewr?
12. Startujący samolot wznosi się pod kątem 15° z prędkością 80 m/s. Jaka wysokość osiągnie samolot po 2 minutach od momentu oderwania się od ziemi?
13. Dwaj obserwatorzy stojący w punktach A i B (rysunek obok) w odległości 400 m od siebie widzą nadlatujący wzdłuż kierunku AB samolot pod kątami $\alpha = 20^\circ$ i $\beta = 8^\circ$. Na jakiej wysokości leci samolot?
14. Komin fabryczny ma wysokość 20 m. Jego wierzchołek widać z punktu A pod kątem 26° , a z punktu B pod kątem 40° . Podstawa komina oraz punkty A i B leżą na jednej prostej. Jaka jest odległość między punktami A i B? Rozpatrz dwa przypadki. W obliczeniach pominij grubość komina.



Sprawdź się

15. Jaki kąt z powierzchnią ziemi tworzą promienie słoneczne, jeśli budynek o wysokości 30 m rzuca cień długości: a) 20 m, b) 30 m, c) 60 m?
16. O ile wyżej sięgnie sześciometrowa drabina ustawiona pod kątem 73° do poziomu ziemi od takiej samej drabiny ustawionej pod kątem 53° ?
17. Oblicz wysokość drzewa.
 - a) $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 25^\circ$, $|AB| = 20$ m
 - b) $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 28^\circ$, $|AB| = 40$ m





4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

Rozwiązaniem trójkąta nazywamy wyznaczenie długości jego trzech boków oraz miar jego trzech kątów.

Aby **rozwiązać trójkąt prostokątny**, wystarczy znać:

- długości dowolnych dwóch boków
lub
- długość dowolnego boku i miarę jednego z kątów ostrych.

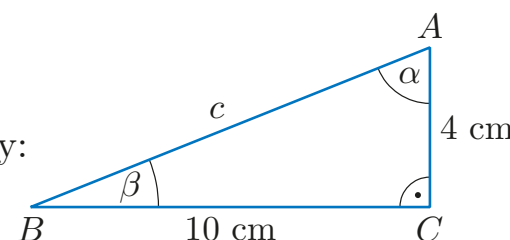
Przykład 1

Rozwiąż trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 4 cm i 10 cm.

Długość przeciwprostokątnej obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$c = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \text{ [cm]}$$

$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{10} = 0,4$. Z tablic (str. 251) odczytujemy:
 $\beta \approx 22^\circ$ i stąd $\alpha = 90^\circ - \beta \approx 68^\circ$.



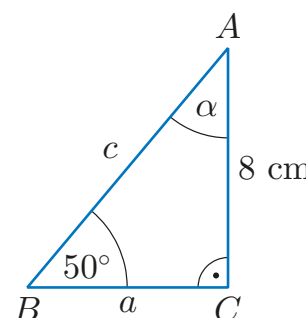
Przykład 2

Rozwiąż trójkąt prostokątny, którego przyprostokątna leżąca naprzeciwko kąta 50° ma długość 8 cm.

$$\alpha = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\frac{8}{c} = \sin 50^\circ \approx 0,766, \text{ stąd } c \approx 10,44 \text{ cm.}$$

$$\frac{8}{a} = \operatorname{tg} 50^\circ \approx 1,1918, \text{ stąd } a \approx 6,71 \text{ cm.}$$



Ćwiczenie 1

Rozwiąż trójkąt prostokątny, o którym wiadomo, że:

- dwa jego dłuższe boki mają długości 9 cm i 10 cm,
- długości jego przyprostokątnych są równe 5 cm i 13 cm,
- jego przeciwprostokątna ma długość 15 cm, a jeden z kątów ma miarę 37° ,
- długość jego przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta 54° jest równa 8 cm.

Jeśli potrzebna jest większa dokładność, to miarę kąta możemy podawać w stopniach i minutach, a nawet w sekundach.

1 minuta (oznaczana $1'$) jest równa $\frac{1}{60}$ stopnia.

1 sekunda (oznaczana $1''$) jest równa $\frac{1}{60}$ minuty.

Na przykład $24,5^\circ = 24^\circ 30'$.

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 60' \\ 1' &= 60'' \\ 1^\circ &= 3600'' \end{aligned}$$

Przykład 3

Wyraź w minutach i sekundach $\frac{1}{1000}$ kąta 45° .

$$\frac{45^\circ}{1000} = \frac{45}{1000} \cdot 3600'' = 162'' = 120'' + 42'' = 2'42''$$

Ćwiczenie 2

Wyraź w stopniach, minutach i sekundach $\frac{1}{100}$ kąta:

- 360° ,
- 4° ,
- 15° ,
- 12° ,
- 42° .

Przykład 4

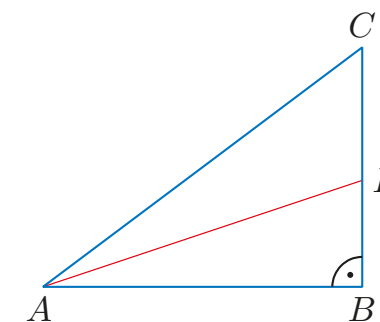
Dany jest trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok). Odcinek AD jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC . Wiadomo, że $|AB| = 8$ i $|BC| = 6$. Oblicz miary kątów trójkąta ADC .

$$\operatorname{tg} |\angle BAC| = \frac{6}{8} = 0,75, \text{ czyli } |\angle BAC| \approx 37^\circ$$

$$\text{Zatem: } |\angle CAD| \approx \frac{1}{2} \cdot 37^\circ = 18^\circ 30'$$

$$|\angle ACD| \approx 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$$

$$|\angle ADC| \approx 180^\circ - 18^\circ 30' - 53^\circ = 108^\circ 30'$$



Ćwiczenie 3

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A . Wiadomo, że $|\angle BCA| = 55^\circ$ oraz $|CB| = 10$. Na boku AB obrano punkt D w taki sposób, że odcinek CD jest:

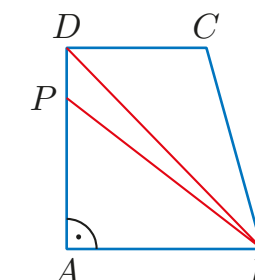
- zawarty w dwusiecznej kąta BCA ,
- środkową trójkąta ABC .

Oblicz długość odcinka CD oraz miary kątów trójkąta BCD .

Zadania

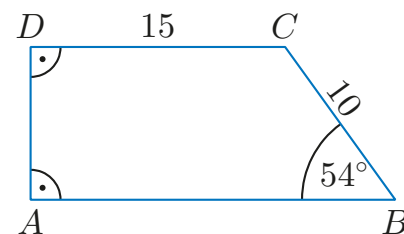
- W trapezie prostokątnym $ABCD$ kąt ADB ma miarę $43^\circ 30'$, a kąt ABC – miarę $73^\circ 40'$ (rysunek obok).

- Wyznacz miary kątów trójkąta BCD .
- Wyznacz miary kątów trójkąta ABP w przypadku, gdy punkt P leży na dwusiecznej kąta ABC .

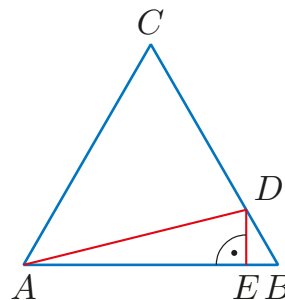


- Rozwiąż trójkąt prostokątny o podanych długościach przyprostokątnych.
 - 4 cm, 6 cm
 - 1 cm, 7 cm
 - 8 cm, 10 cm
- Rozwiąż trójkąt prostokątny ABC , o którym wiadomo, że ma kąt prosty przy wierzchołku C oraz:
 - $|\angle CAB| = 34^\circ$, $|CB| = 6$,
 - $|\angle CBA| = 66^\circ$, $|AB| = 10$.

4. Oblicz obwód i pole trójkąta równoramiennego:
- o ramieniu długości 4 i kącie przy podstawie 37° ,
 - o podstawie długości 10 i kącie między ramionami 70° .
5. a) Trapez równoramienny ma podstawy długości 6 dm i 10 dm, a jego obwód jest równy 32 dm. Oblicz miary kątów tego trapezu.
b) Trapez równoramienny ma podstawy długości 4 cm i 8 cm oraz wysokość 8 cm. Oblicz miarę kąta, jaki przekątna trapezu tworzy z podstawą.
c) Wysokość trapezu równoramiennego wynosi 5 cm. Przekątna tego trapezu ma długość 13 cm i tworzy z ramieniem kąt prosty. Oblicz miary kątów tego trapezu.



6. Oblicz długości boków AB i AD trapezu prostokątnego $ABCD$ oraz miarę kąta DCA (rysunek obok).
7. Przekątne deltoidu mają długości 20 cm i 30 cm. Punkt przecięcia przekątnych dzieli dłuższą z nich w stosunku 2:1. Oblicz miary kątów deltoidu.
8. Wysokość rombu poprowadzona do jego boku podzieliła ten bok w stosunku 1:3. Oblicz miary kątów tego rombu.
9. W trójkącie równobocznym ABC o boku 12 na boku CB obrano taki punkt D , że $3|DB| = |CD|$ (rysunek obok). Oblicz długość odcinka ED oraz długości boków trójkąta ABD .



Sprawdź się

10. Rozwiąż trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości:
- 5 cm i 12 cm,
 - 8 cm i 15 cm,
 - 12 cm i 16 cm.
11. Rozwiąż trójkąt prostokątny, o którym wiadomo, że długość jego:
- przeciwprostokątnej jest równa 12, a przyprostokątnej 10,
 - przeciwprostokątnej jest równa 7, a jeden z kątów ma miarę 43° ,
 - przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta o mierze 26° jest równa 12,5,
 - przyprostokątnej leżącej przy kącie o mierze 69° jest równa 15.
12. Równoległobok ma boki długości 10 cm i 30 cm. Jego krótsza przekątna tworzy z jednym bokiem kąt 90° . Oblicz miary kątów tego równoległoboku.

4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość, w której zapisie występują funkcje trygonometryczne, prawdziwą dla wszystkich wartości kąta, dla których jest określona.

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są zależności:

$$\blacksquare \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \blacksquare \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Uwaga. Zapis $\sin^2 \alpha$ oznacza $(\sin \alpha)^2$, analogicznie $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$ i $\operatorname{tg}^2 \alpha = (\operatorname{tg} \alpha)^2$.

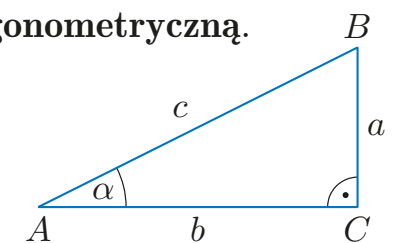
Tożsamość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nazywamy **jedynką trygonometryczną**.

Dowód jedynki trygonometrycznej

Przy oznaczeniach takich jak na rysunku obok:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{ i } \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

Z jedynki trygonometrycznej wynikają następujące tożsamości:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{ oraz } \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

Ćwiczenie 1

Udowodnij tożsamość trygonometryczną $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Jeżeli dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej, to – korzystając z tożsamości podanych wyżej – można wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.

Przykład 1

Kąt α jest kątem ostrym oraz $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Oblicz $\cos \alpha$.

Wartość $\cos \alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \cos^2 \alpha &= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \\ \cos \alpha &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie, dlatego odrzucamy wartość $-\frac{4}{5}$.

Ćwiczenie 2

Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Oblicz $\sin \alpha$.

Przykład 2

Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α .

Wartość $\sin \alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie.}$$

Obliczamy wartość $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

Ćwiczenie 3

a) Kąt α jest kątem ostrym oraz $\sin \alpha = 0,8$. Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

b) Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{12}{13}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

c) Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$.

Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych, możemy wykorzystać odpowiedni trójkąt prostokątny.

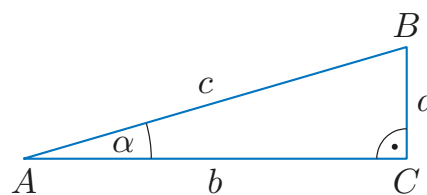
Przykład 3

Kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

Zauważ, że dla trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $a = 7$ i $b = 24$ otrzymamy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$. Długość przeciwprostokątnej obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$c = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

Zatem $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ oraz $\cos \alpha = \frac{24}{25}$.



Ćwiczenie 4

Przedstaw poniższą zależność, rysując odpowiedni trójkąt prostokątny. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .

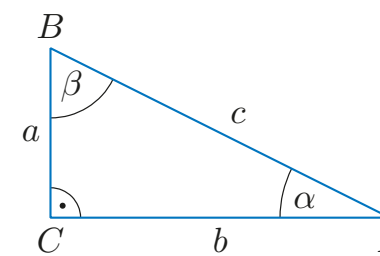
a) $\operatorname{tg} \alpha = 2$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{21}{20}$ e) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ g) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ h) $\cos \alpha = \frac{5}{6}$

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok). W tym trójkącie $\beta = 90^\circ - \alpha$. Zauważmy, że:

$$\sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$$

i jednocześnie $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, zatem $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.



Twierdzenie

Dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą równości:

$$\blacksquare \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\blacksquare \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\blacksquare \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij drugą i третią z podanych wyżej tożsamości trygonometrycznych.

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .

a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{10}$ b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$

Zadania

1. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .

a) $\cos \alpha = 0,8$ c) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ e) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$ g) $\operatorname{tg} \alpha = 2\frac{2}{5}$

b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ d) $\sin \alpha = 0,4$ f) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$ h) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$

2. a) Sinus kąta ostrego α jest trzy razy większy od cosinusa tego kąta. Oblicz $\sin \alpha$.

b) Cosinus kąta ostrego α jest dwa razy większy od sinusa tego kąta. Oblicz $\cos \alpha$.

3. Czy istnieje kąt ostry α spełniający podane zależności?

a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$ i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$

b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

4. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α , a przeciwprostokątna ma długość c . Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $c = 10$ cm b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$, $c = 39$ cm

5. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Oblicz obwód tego trójkąta.
- a) $|AC| = 12$, $\sin |\sphericalangle BAC| = \frac{5}{13}$ c) $|BC| = \sqrt{3}$, $\sin |\sphericalangle ABC| = \frac{\sqrt{6}}{3}$
b) $|AC| = 4$, $\sin |\sphericalangle ABC| = \frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $|BC| = 6$, $\cos |\sphericalangle BAC| = \frac{3\sqrt{13}}{13}$
6. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .
- a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{4}$ e) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{5}$
b) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{5}{13}$ d) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ f) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = 2$
7. Przedstaw w prostszej postaci.
- a) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$ c) $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$ e) $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$
b) $(1 + \sin(90^\circ - \alpha))(1 - \cos \alpha)$ d) $\sin \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ f) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$
8. Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (str. 251), wyznacz przybliżone wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α .
- a) $\sin \alpha = 0,91$ b) $\cos \alpha = 0,91$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 0,55$ d) $\operatorname{tg} \alpha = 4$

Czy wiesz, że...

Do oznaczania kątów zwykle używamy liter alfabetu greckiego.

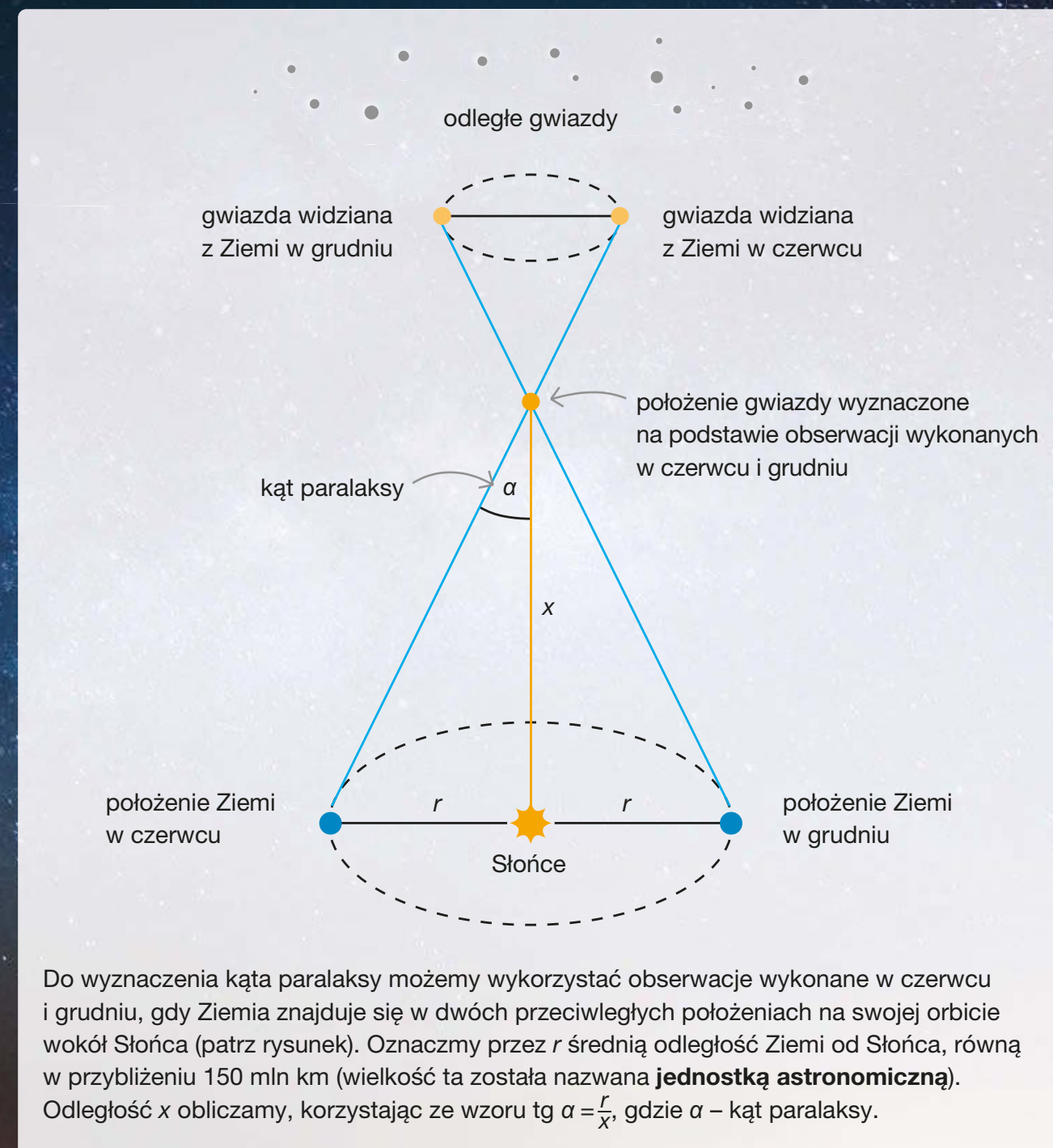
$A \ \alpha$ alfa	$H \ \eta$ eta	$N \ \nu$ ni	$T \ \tau$ tau
$B \ \beta$ beta	$\Theta \ \theta$ teta	$\Xi \ \xi$ ksi	$\Upsilon \ \upsilon$ ypsilon
$\Gamma \ \gamma$ gamma	$I \ \iota$ jota	$O \ o$ omikron	$\Phi \ \phi$ fi
$\Delta \ \delta$ delta	$K \ \kappa$ kappa	$\Pi \ \pi$ pi	$X \ \chi$ chi
$E \ \varepsilon$ epsilon	$\Lambda \ \lambda$ lambda	$P \ \rho$ ro	$\Psi \ \psi$ psi
$Z \ \zeta$ dzeta	$M \ \mu$ mi	$\Sigma \ \sigma$ sigma	$\Omega \ \omega$ omega

Sprawdź się

9. Czy istnieje kąt ostry α spełniający podane zależności?
- a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ d) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$
b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ i $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ e) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$ f) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ i $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
10. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α , a przeciwprostokątna ma długość c . Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.
- a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $c = 15$ cm b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$, $c = 39$ cm

Trygonometria i astronomia

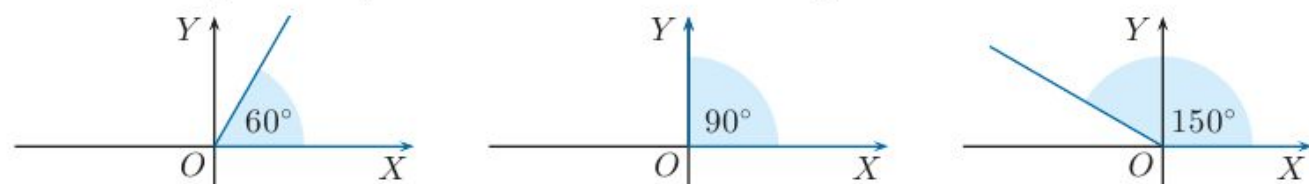
Odległości dzielące nas od stosunkowo bliskich gwiazd można obliczyć na podstawie obserwacji zmiany ich położenia na tle odległych gwiazd. Astronomowie w tym celu wyznaczają kąt, zwany kątem paralaksy. Ma on miarę rzędu setnych części sekundy.



- 1 Oblicz odległość od Słońca najbliższej nam gwiazdy spoza Układu Słonecznego – Proximy Centauri, dla której kąt paralaksy $\alpha = 0,77''$. Przyjmij $\operatorname{tg} 0,77'' \approx 0,00000373$.

4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (1)

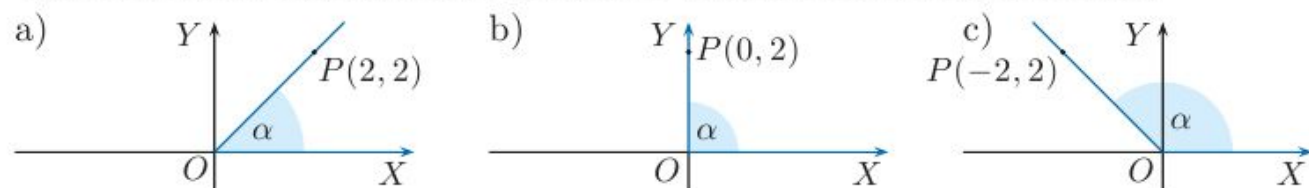
W tej i kolejnych lekcjach będziemy rozpatrywać kąty umieszczone w układzie współrzędnych w taki sposób, że początek układu jest wierzchołkiem kąta, a jedno z ramion kąta, zwane jego **ramieniem początkowym**, zawiera się w dodatniej półosi OX . Drugie ramię będziemy nazywać **ramieniem końcowym**. Kąt odłożony jest od ramienia początkowego do ramienia końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.



Figurę nazywamy **wypukłą**, gdy odcinek łączący dowolne dwa punkty należące do tej figury jest w niej zawarty. W tym rozdziale rozpatrujemy kąty **wypukłe**, których miary należą do przedziału $[0^\circ; 180^\circ]$. Przypominamy, że kąt nazywamy **rozwartym**, gdy jego miara należy do przedziału $(90^\circ; 180^\circ)$.

Ćwiczenie 1

Do ramienia końcowego kąta należy punkt P . Podaj miarę tego kąta oraz współrzędne innego punktu należącego do jego ramienia końcowego.



Przykład 1

Dany jest trójkąt POA , w którym $P(3, 2)$ i $A(3, 0)$. Oblicz długość odcinka OP i wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA .

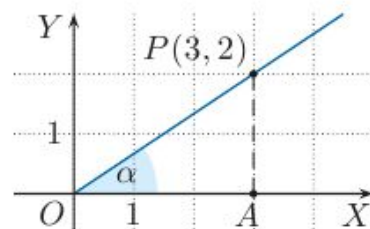
Rozważamy trójkąt prostokątny POA (rysunek obok).

Oznaczmy miarę kąta POA przez α .

Ponieważ $|OA| = 3$, $|AP| = 2$, z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$|OP| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Zatem $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.



Ćwiczenie 2

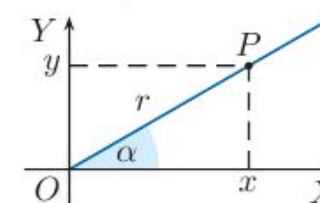
Oblicz długość odcinka OP i wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA .

- a) $P(3, 4)$, $A(3, 0)$ b) $P(6, 8)$, $A(6, 0)$ c) $P(\sqrt{3}, 1)$, $A(\sqrt{3}, 0)$

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta ostrego α . Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x},$$

$$\text{gdzie } r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



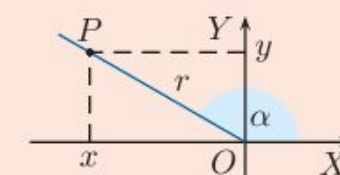
Podane wyżej wzory służą również do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ umieszczonego w układzie współrzędnych.

Definicja

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$. Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \text{gdzie } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0, \text{ czyli } \alpha \neq 90^\circ)$$



Zauważ, że każdy ze stosunków $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$ zależy wyłącznie od położenia ramienia końcowego kąta, a nie zależy od położenia punktu P na tym ramieniu.

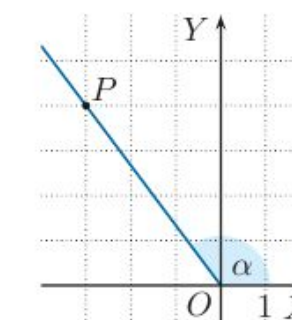
Przykład 2

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(-3, 4)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Punkt P ma współrzędne $(-3, 4)$, zatem $x = -3$, $y = 4$, czyli:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \text{ zatem } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5}.$$



Ćwiczenie 3

Do ramienia końcowego kąta α należą punkty P i Q . Przedstaw ten kąt na rysunku i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych, korzystając ze współrzędnych wybranego punktu.

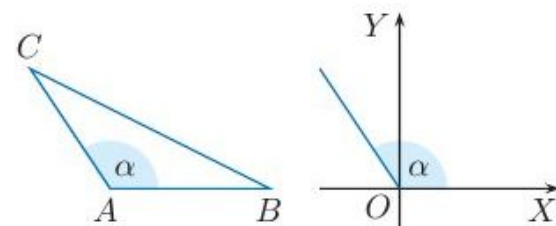
- a) $P(-4, 3)$, $Q(-8, 6)$ b) $P(-3, 3)$, $Q(-4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ c) $P(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $Q(-2, 6)$

Ćwiczenie 4

Wybierz dowolny punkt na ramieniu końcowym kąta α i oblicz wartości tych funkcji trygonometrycznych kąta α , które są dla niego określone.

- a) $\alpha = 0^\circ$ b) $\alpha = 90^\circ$ c) $\alpha = 180^\circ$

Jako wartości funkcji trygonometrycznych kąta BAC w trójkącie ABC przyjmujemy wartości funkcji trygonometrycznych przystającego do niego kąta α umieszczonego w układzie współrzędnych.



Dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

Dla $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

Ćwiczenie 5

Określ, czy liczba a jest dodatnia, czy ujemna.

a) $a = \cos 110^\circ + \operatorname{tg} 115^\circ$ b) $a = \cos 130^\circ \cdot \operatorname{tg} 140^\circ$ c) $a = \sin 160^\circ \cdot \operatorname{tg} 170^\circ$

Ćwiczenie 6

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(-3, 1)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta. Sprawdź, czy dla obliczonych wartości zachodzi podana równość.

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ b) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

Poznane wcześniej tożsamości trygonometryczne zachodzą dla dowolnych kątów wypukłych.

D Ćwiczenie 7

- a) Uzasadnij podane obok twierdzenie.
b) Uzasadnij, że dla dowolnego kąta wypukłego α zachodzą nierówności:
 $\sin \alpha \leq 1$ i $\cos \alpha \leq 1$

Dla kąta $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ prawdziwe są zależności:

■ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

■ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, gdzie $\alpha \neq 90^\circ$

Przykład 3

Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ spełniającego warunek $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej.

$\cos^2 \alpha = \frac{15}{16}$, stąd $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ lub $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Dla $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ cosinus jest ujemny, więc $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Obliczamy wartość $\operatorname{tg} \alpha$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Ćwiczenie 8

Oblicz $\cos^2 \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ spełniającego warunek:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, b) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ćwiczenie 9

Oblicz $\sin^2 \alpha$, $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ spełniającego warunek:

a) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, b) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, c) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych podanego kąta (rysunek obok).

a) $\angle AOP$ b) $\angle AOQ$ c) $\angle AOR$

2. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α , a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β . Oblicz $\sin \alpha - \sin \beta$.

a) $P(-2, 4)$, $Q(4, 2)$ b) $P(-9, 3)$, $Q(2, 6)$

3. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α , a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β . Oblicz $\cos \alpha + \cos \beta$.

a) $P(3, 1)$, $Q(-1, \frac{1}{2})$ b) $P(-2, 4)$, $Q(-4, 2)$ c) $P(-2, \sqrt{2})$, $Q(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

4. Oblicz $\sin^2 \alpha$, $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ dla kąta rozwartego α spełniającego warunek:

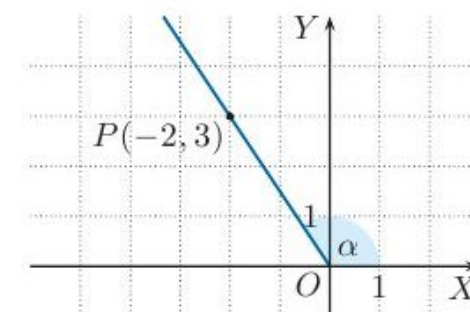
a) $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$, b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, c) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

W układzie współrzędnych narysowano kąt $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$, taki że $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$. Oblicz $\sin \alpha$.

$r = |OP| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, stąd:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$



Narysuj w układzie współrzędnych kąt $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ spełniający podany warunek oraz oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

a) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$ b) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$

Sprawdź się

6. Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $P(5, 12)$ b) $P(-5, 12)$ c) $P(\sqrt{5}, 2)$ d) $P(-\sqrt{3}, 1)$ e) $P(-\sqrt{3}, \sqrt{6})$

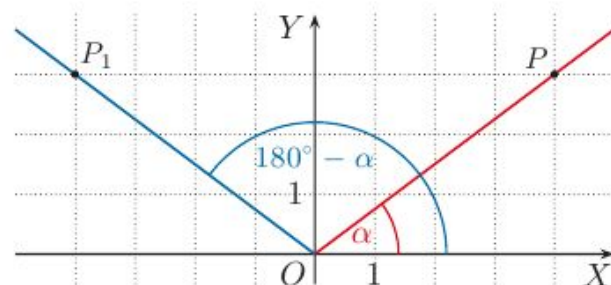
4.7. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (2)

Przykład 1

Punkt $P(4, 3)$ należy do ramienia końcowego kąta α , a punkt $P_1(-4, 3)$ – do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$.

$|OP_1| = |OP| = 5$, zatem:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{3}{5}, & \sin(180^\circ - \alpha) &= \frac{3}{5}, \\ \cos \alpha &= \frac{4}{5}, & \cos(180^\circ - \alpha) &= -\frac{4}{5}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{3}{4}, & \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\frac{3}{4}.\end{aligned}$$



Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych dwa kąty: α , do którego ramienia końcowego należy punkt $P(4, 2)$, oraz kąt $180^\circ - \alpha$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$.

Przykład 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 150° .

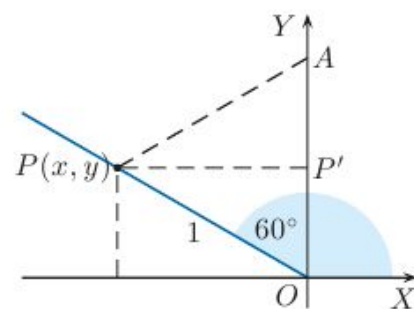
Zauważmy, że $150^\circ = 90^\circ + 60^\circ$.

Rozpatrzmy trójkąt równoboczny POA (rysunek obok) o boku długości 1. Wówczas:

$$|OP'| = \frac{1}{2}, \quad |PP'| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zatem punkt P należący do ramienia końcowego kąta 150° ma współrzędne $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, a stąd:

$$\begin{aligned}\sin 150^\circ &= \frac{y}{|OP|} = \frac{1}{2} \\ \cos 150^\circ &= \frac{x}{|OP|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} 150^\circ &= \frac{y}{x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$



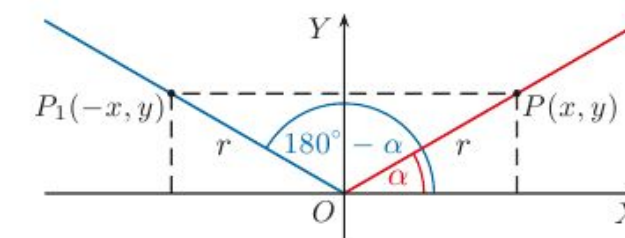
D Ćwiczenie 2

- Uzasadnij, że punkt $P(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ należy do ramienia końcowego kąta 135° , i oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.
- Uzasadnij, że punkt $P(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ należy do ramienia końcowego kąta 120° , i oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Rozpatrzmy punkt $P(x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta α oraz punkt $P_1(-x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$ (rysunek poniżej).

Zauważmy, że $|OP_1| = |OP| = r$, zatem:

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \frac{y}{r} = \sin \alpha, \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= \frac{-x}{r} = -\cos \alpha, \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= \frac{y}{-x} = -\operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$



Twierdzenie

Dla kąta $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ prawdziwe są wzory:

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, gdzie $\alpha \neq 90^\circ$

Przykład 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120° .

$$\begin{aligned}\sin 120^\circ &= \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 120^\circ &= \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} 120^\circ &= \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta:

- $\alpha = 135^\circ$,
- $\alpha = 150^\circ$.

Zadania

- Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	?	?	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	?	?	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	?	?	?
$\cos \alpha$	?	?	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	?	?	$-\frac{1}{2}$	?	?	?
$\operatorname{tg} \alpha$	?	?	1	?	$\times$	$-\sqrt{3}$	?	?	?

- Oblicz.

- $\sin 120^\circ + \sin 60^\circ$
- $\cos 150^\circ - \cos 30^\circ$
- $\sin 135^\circ \cdot \sin 150^\circ$
- $\cos 120^\circ \cdot \cos 150^\circ$
- $4 \cos 150^\circ - 3 \operatorname{tg} 135^\circ$
- $8 \operatorname{tg} 120^\circ + 6 \operatorname{tg} 150^\circ$

3. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{\sin 120^\circ - \cos 150^\circ}{3 \operatorname{tg} 150^\circ} & \text{c)} \frac{\operatorname{tg} 150^\circ - \operatorname{tg} 120^\circ}{\cos 120^\circ} & \text{e)} \frac{\cos 135^\circ + \cos 150^\circ}{\sin 120^\circ + \sin 135^\circ} \\ \text{b)} \frac{\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 30^\circ}{\sin 120^\circ} & \text{d)} \frac{\operatorname{tg} 135^\circ + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ \cdot \cos 135^\circ} & \text{f)} \frac{\operatorname{tg} 120^\circ - \cos 30^\circ}{\cos 150^\circ + \cos 60^\circ} \end{array}$$

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 251), oblicz przybliżone wartości $\sin 125^\circ$ i $\cos 168^\circ$.

$$\sin 125^\circ = \sin(180^\circ - 55^\circ) = \sin 55^\circ \approx 0,8192$$

$$\cos 168^\circ = \cos(180^\circ - 12^\circ) = -\cos 12^\circ \approx -0,9781$$

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz przybliżoną wartość:

a) $\sin 105^\circ$, b) $\sin 165^\circ$, c) $\cos 130^\circ$, d) $\cos 175^\circ$, e) $\operatorname{tg} 142^\circ$, f) $\operatorname{tg} 163^\circ$.

5. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, sprawdź, czy prawdziwa jest podana nierówność.

$$\text{a)} \sin 160^\circ + \cos 130^\circ < 0 \quad \text{b)} \sin 105^\circ + \cos 145^\circ > 0$$

6. Dane są $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = \frac{2}{3}$ oraz $\operatorname{tg} \gamma = \frac{5}{6}$. Oblicz:

$$\text{a)} \sin(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \beta),$$

$$\text{b)} 2 \sin(180^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \beta) + \operatorname{tg}(180^\circ - \gamma).$$

7. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, wyznacz przybliżoną miarę kąta rozwartego β .

$$\text{a)} \sin \beta = 0,9397 \quad \text{c)} \cos \beta = -0,9613 \quad \text{e)} \operatorname{tg} \beta = -0,7265$$

$$\text{b)} \sin \beta = 0,4695 \quad \text{d)} \cos \beta = -0,4226 \quad \text{f)} \operatorname{tg} \beta = -2,9042$$

Sprawdź się

8. Jakie miary kąta można wpisać w miejsce $?$, aby – korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 251) – można było podać przybliżoną wartość funkcji? Podaj tę wartość.

$$\text{a)} \sin 111^\circ = \sin(180^\circ - ?) \quad \text{c)} \cos 123^\circ = -\cos(180^\circ - ?)$$

$$\text{b)} \sin 132^\circ = \sin(180^\circ - ?) \quad \text{d)} \cos 107^\circ = -\cos(180^\circ - ?)$$

9. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz przybliżoną wartość:

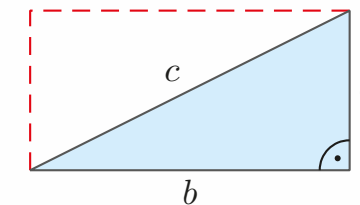
$$\text{a)} \sin 160^\circ, \quad \text{b)} \sin 95^\circ, \quad \text{c)} \cos 100^\circ, \quad \text{d)} \cos 147^\circ, \quad \text{e)} \operatorname{tg} 102^\circ.$$

Przypomnij sobie

Pole trójkąta prostokątnego

Pole trójkąta prostokątnego jest równe połowie iloczynu długości jego przyprostokątnych.

$$P = \frac{1}{2}ab$$



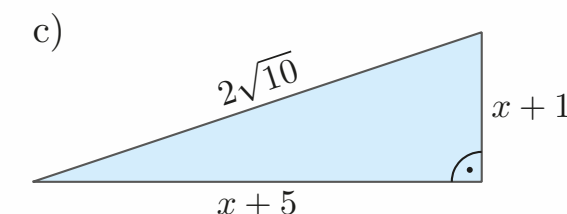
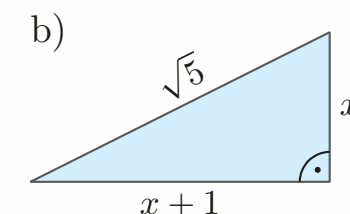
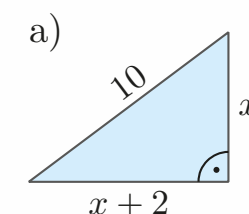
1. Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest prostokątny. Jeśli tak – oblicz pole tego trójkąta.

$$\text{a)} 5, 6, 8$$

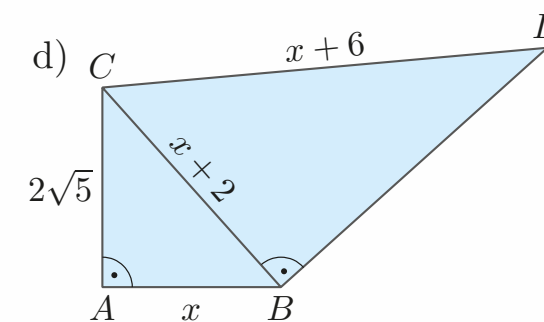
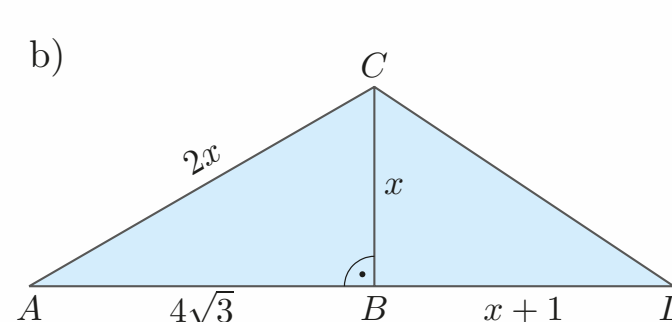
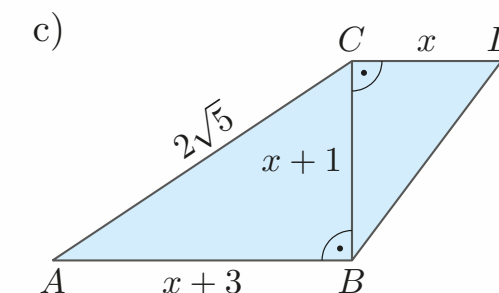
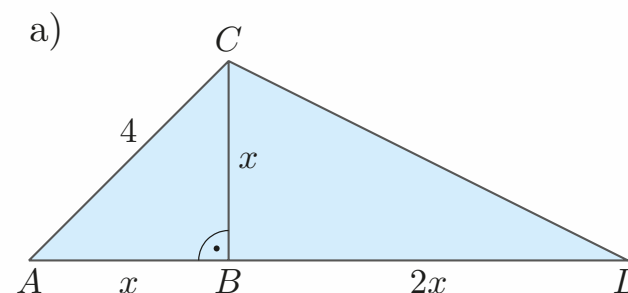
$$\text{b)} 15, 12, 9$$

$$\text{c)} 4, 8, 4\sqrt{3}$$

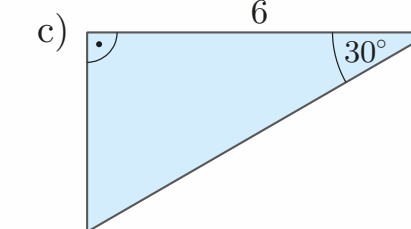
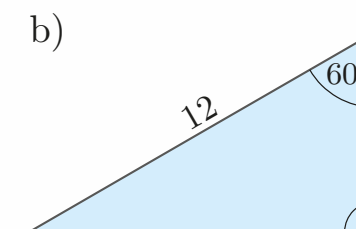
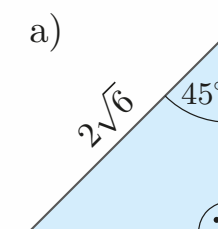
2. Oblicz pole i obwód trójkąta.



3. Oblicz pola trójkątów ABC i BDC .



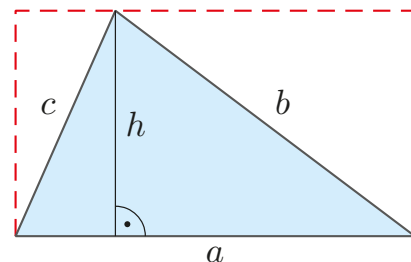
4. Oblicz pole trójkąta.



4.8. Pole trójkąta

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = \frac{1}{2}ah$$



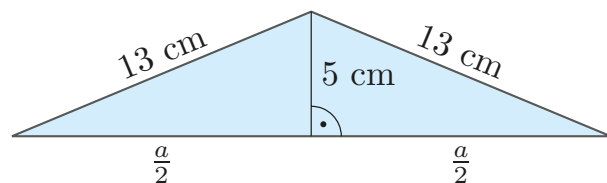
Przykład 1

Oblicz pole trójkąta równoramiennego, którego ramię ma długość 13 cm, a wysokość opuszczona na podstawę jest równa 5 cm.

Obliczmy połowę długości podstawy trójkąta, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$\frac{a}{2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ [cm]}$$

$$\text{Zatem } P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60 \text{ [cm}^2\text{]}.$$



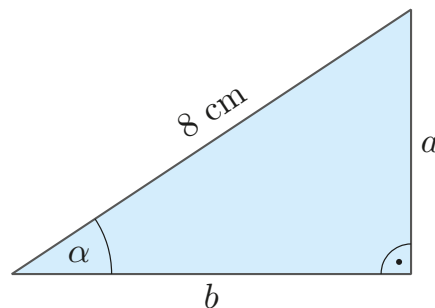
Przykład 2

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 8 cm, a $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ (rysunek obok). Oblicz pole tego trójkąta.

$$\cos \alpha = \frac{b}{8} = \frac{3}{4}, \text{ stąd } b = 6 \text{ [cm]}.$$

$$a = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \text{ [cm]}$$

$$\text{Zatem } P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot 6 = 6\sqrt{7} \text{ [cm}^2\text{]}.$$



Ćwiczenie 1

Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 28 cm. Oblicz pole tego trójkąta w przypadku, gdy:

- jego ramię jest o 4 cm krótsze od podstawy,
- cosinus kąta przy jego podstawie jest równy $\frac{2}{5}$.

Ćwiczenie 2

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 26 cm. Oblicz pole tego trójkąta w przypadku, gdy:

- sinus jednego z jego kątów ostrych jest równy $\frac{5}{13}$,
- tangens jednego z jego kątów ostrych jest równy 2,4,
- jego kąty ostre α i β spełniają warunek $\sin \alpha + \cos \beta = \sqrt{3}$.

Ćwiczenie 3

- Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego o polu $4,5 \text{ cm}^2$.
- Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego o obwodzie równym $(30 + 15\sqrt{2}) \text{ cm}$.

Ćwiczenie 4

- D**
 - Udowodnij podany obok wzór.
 - Oblicz pole trójkąta równobocznego o obwodzie równym $30\sqrt{3} \text{ cm}$.

Pole trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

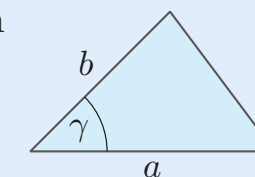
Ćwiczenie 5

- Oblicz pole trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 4 cm.
- Oblicz obwód trójkąta równobocznego o polu równym $108\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi.

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$



Dowód

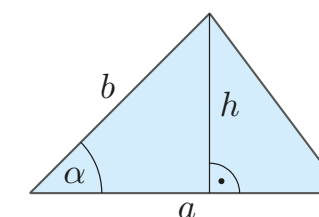
Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt α zawarty między bokami a i b trójkąta. Rozpatrzmy dwa z nich (przypadek trzeci – patrz ćwiczenie 6).

1° Kąt α jest kątem ostrym (rysunek obok).

Niech h będzie wysokością opuszczoną na bok a .

$$\text{Wówczas } \frac{h}{b} = \sin \alpha, \text{ więc } h = b \sin \alpha.$$

$$\text{Zatem } P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin \alpha.$$



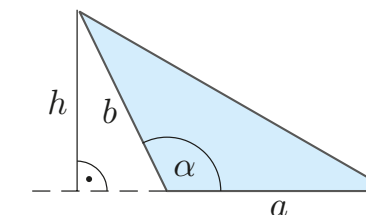
2° Kąt α jest kątem rozwartym (rysunek obok).

Niech h będzie wysokością opuszczoną na przedłużenie boku a .

$$\text{Wówczas } \frac{h}{b} = \sin(180^\circ - \alpha), \text{ więc } h = b \sin(180^\circ - \alpha).$$

Korzystamy ze wzoru $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ i otrzymujemy $h = b \sin \alpha$.

$$\text{Zatem } P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin \alpha.$$



D Ćwiczenie 6

Uzasadnij prawdziwość wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$ w przypadku, gdy kąt α zawarty między bokami a i b jest kątem prostym.

Przykład 3

Dany jest trójkąt ABC o bokach $|AB| = 6\sqrt{3}$, $|AC| = 4$ i kącie $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta.

Kąt BAC jest zawarty między bokami AB i AC , zatem:

$$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$$

Ćwiczenie 7

Oblicz pole trójkąta ABC , o którym wiadomo, że:

- $|AB| = 6$, $|BC| = 10$ i $|\sphericalangle ABC| = 30^\circ$,
- $|AB| = 10$, $|AC| = 12$ i $|\sphericalangle CAB| = 120^\circ$,
- $|AB| = 4\sqrt{3}$, $|AC| = \sqrt{3}$, $|\sphericalangle ABC| = 35^\circ$ i $|\sphericalangle ACB| = 100^\circ$,
- $|AB| = |AC| = 3\sqrt{2}$ i $|\sphericalangle ABC| = 15^\circ$.

Ćwiczenie 8

Oblicz długość boku AC trójkąta ABC , którego pole jest równe 12 cm^2 , bok AB ma długość 4 cm , a kąt CAB ma miarę: a) 30° , b) 45° , c) 120° .

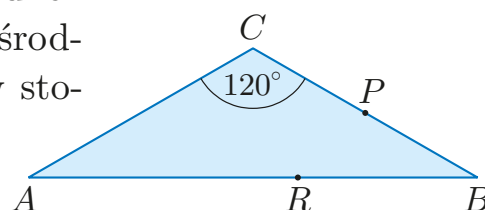
Zadania

1. a) Dany jest trójkąt ABC o bokach $|AB| = 7 \text{ cm}$, $|AC| = 5 \text{ cm}$ oraz kącie $|\sphericalangle CAB| = 120^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta.

b) Oblicz pole trójkąta równoramiennego, którego ramię ma długość 8 cm , a kąt przy podstawie ma miarę $22^\circ 30'$.

2. Obwód trójkąta równoramiennego ABC (rysunek obok) jest równy $(12 + 8\sqrt{3}) \text{ cm}$. Punkt P jest środkiem boku BC , a punkt R dzieli bok AB w stosunku $3:2$. Oblicz pole trójkąta:

a) APC , b) ARC , c) PRB .

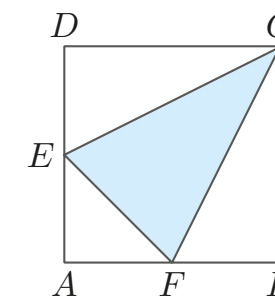


3. a) Podstawa trójkąta równoramiennego jest cztery razy dłuższa od wysokości opuszczonej na tę podstawę. Pole trójkąta jest równe 36 cm^2 . Oblicz obwód tego trójkąta.

b) W trójkącie równoramiennym o polu $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ stosunek wysokości opuszczonej na podstawę do długości tej podstawy jest równy $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Oblicz miary kątów tego trójkąta oraz jego obwód.

4. Stosunek długości ramienia trójkąta równoramiennego do jego obwodu wynosi $0,3$. Pole trójkąta jest równe $8\sqrt{5}$. Oblicz długości jego boków.

5. W kwadracie $ABCD$ o boku 8 cm punkty E i F są środkami odpowiednio boków AD i AB (rysunek obok). Oblicz pole trójkąta EFC oraz jego obwód.



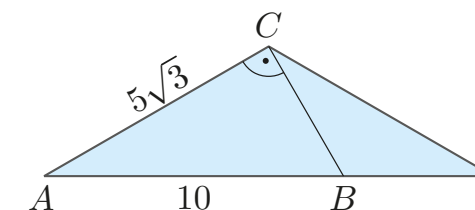
6. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 12 i tworzy z podstawą kąt o mierze 45° .

a) Oblicz wysokość tego trójkąta poprowadzoną do podstawy.

b) Z wierzchołka tego trójkąta poprowadzono do podstawy odcinek dzielący kąt między ramionami w stosunku $2:1$.

Oblicz pola powstałych trójkątów.

7. Na rysunku obok $|BC| = |BD|$. Oblicz obwód i pole trójkąta BCD .



8. Rozpatrzmy trójkąty o dwóch danych bokach a i b . Jaka powinna być miara kąta między tymi bokami, aby pole trójkąta było największe?

- D** 9. Dany jest trójkąt o bokach długości a i $2a$ oraz kącie między tymi bokami o mierze 120° . Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest dwukrotnie większe od pola trójkąta równobocznego o boku długości a .

Jeżeli dane są długości boków a, b, c trójkąta, to można obliczyć jego pole, korzystając ze **wzoru Herona** (Heron z Aleksandrii, I w. n.e.):

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu tego trójkąta.

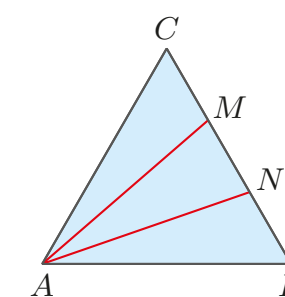
10. Oblicz pole trójkąta o podanych bokach, korzystając ze wzoru Herona.

a) 3, 4, 5 b) 4, 5, 7 c) 5, 5, 6 d) 9, 10, 17

Sprawdź się

11. Dany jest trójkąt ABC o bokach $|AC| = 3 + 3\sqrt{3}$, $|AB| = 6$ oraz kątach $|\sphericalangle ABC| = 105^\circ$, $|\sphericalangle BCA| = 45^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta.

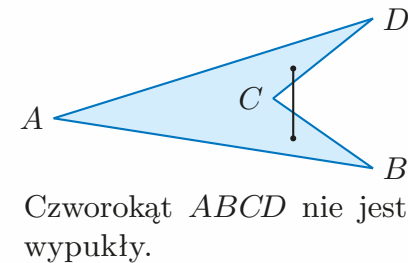
12. W trójkącie równobocznym ABC o boku długości 6 punkty M i N dzielą bok BC na trzy równe części (rysunek obok). Oblicz pola trójkątów BAM i NAM .



Przypomnij sobie

Czworokąty wypukłe

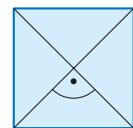
Wielokąt nazywamy **wypukłym**, gdy odcinek łączący dowolne dwa jego punkty jest w nim zawarty. Wszystkie kąty wewnętrzne wielokąta wypukłego są wypukłe. Wielokąt, który nie jest wypukły, nazywamy **wklęsłym**.



Czworokątami wypukłymi są m.in.: kwadraty, romby, prostokąty, równoległoki i trapezy.

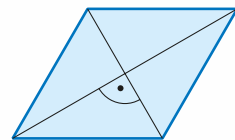


Kwadrat



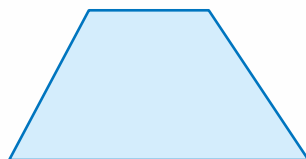
- Wszystkie kąty są proste, wszystkie boki są równej długości.
- Przekątne są równej długości, są do siebie prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

Romb



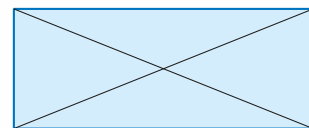
- Wszystkie boki są równej długości, przeciwległe boki są równoległe, przeciwległe kąty są równe.
- Przekątne są do siebie prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.
- Suma miar kątów wewnętrznych przy jednym boku jest równa 180° .

Trapez



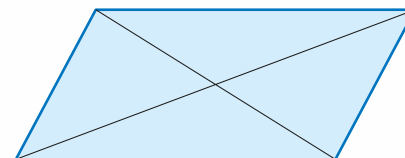
- Ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
- Suma miar kątów wewnętrznych przy każdym z ramion jest równa 180° .

Prostokąt



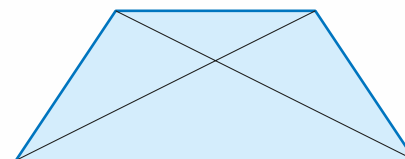
- Wszystkie kąty są proste, przeciwległe boki są równe i równoległe.
- Przekątne są równej długości, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

Równoległobok



- Przeciwległe boki są równe i równoległe, przeciwległe kąty są równe.
- Punkt przecięcia przekątnych dzieli je na połowy.
- Suma miar kątów wewnętrznych przy jednym boku jest równa 180° .

Trapez równoramienny



- W trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem, przekątne są równej długości, a punkt ich przecięcia dzieli je w tym samym stosunku.

4.9. Pola czworokątów (1)

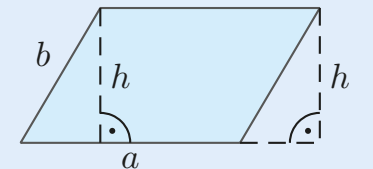
Aby obliczyć pole dowolnego czworokąta, możemy podzielić go na dwa trójkąty, a następnie obliczyć pola tych trójkątów i je dodać. Do obliczania pól szczególnych czworokątów, takich jak równoległobok, romb i trapez, możemy stosować odpowiednie wzory.

Równoległobokiem nazywamy czworokąt mający dwie pary boków równoległych.

Twierdzenie

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = a \cdot h$$



Przykład 1

Pole równoległoboku o bokach długości 6 cm i 9 cm jest równe 24 cm^2 . Oblicz wysokość tego równoległoboku.

Oznaczmy przez h_1 wysokość opuszczoną na bok długości 6 cm, a przez h_2 wysokość opuszczoną na bok długości 9 cm.

Wówczas $6h_1 = 24$, czyli $h_1 = 4 \text{ cm}$, oraz $9h_2 = 24$, czyli $h_2 = \frac{24}{9} = 2\frac{2}{3} [\text{cm}]$.

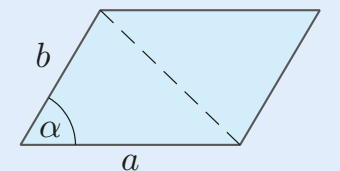
Ćwiczenie 1

Boki równoległoboku mają długości 6 cm i 10 cm, a jego pole jest równe 90 cm^2 . Oblicz różnicę wysokości tego równoległoboku.

Twierdzenie

Pole równoległoboku o bokach a i b oraz kącie α zawartym między nimi wyraża się wzorem:

$$P = ab \sin \alpha$$



Dowód

Przekątna równoległoboku dzieli go na dwa trójkąty przystające (cecha BKB) o bokach a , b i kącie między nimi równym α . Zatem:

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \alpha = ab \sin \alpha$$

Ćwiczenie 2

Oblicz pole równoległoboku, którego boki mają długości 8 i 12, a kąt:

a) ostry ma miarę 45° , b) rozwarty jest pięć razy większy od kąta ostrego.

Ćwiczenie 3

Równoległobok o bokach 6 cm i 12 cm ma pole P . Oblicz miarę kąta ostrego tego równoległoboku.

- a) $P = 36 \text{ cm}^2$ b) $P = 36\sqrt{2} \text{ cm}^2$ c) $P = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Ćwiczenie 4

Oblicz wysokości równoległoboku, którego boki mają długości 6 i $6\sqrt{3}$, a kąt rozwarty ma miarę 120° .

Ćwiczenie 5

- D** a) Uzasadnij, że przekątne równoległoboku dzielą go na cztery trójkąty o równych polach.
b) Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne mają długości 5 cm i 10 cm oraz przecinają się pod kątem 30° .

Rombem nazywamy czworokąt mający wszystkie boki równe.

Aby obliczyć pole rombu, możemy zastosować wzór na pole równoległoboku lub skorzystać z tego, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, a ich punkt przecięcia dzieli je na połowy.

D Ćwiczenie 6

Udowodnij podany obok wzór.

Pole rombu o przekątnych długości d_1, d_2 wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2}d_1d_2$.

Przykład 2

Pole rombu jest równe 108 cm^2 , a jedna z jego przekątnych ma długość 18 cm. Oblicz długość drugiej przekątnej.

Oznaczmy przez d_2 długość drugiej przekątnej. Wówczas $\frac{1}{2} \cdot 18d_2 = 108$, skąd $d_2 = 12 \text{ cm}$.

Przykład 3

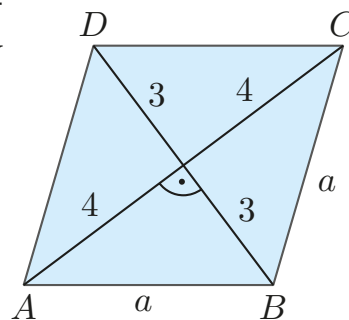
Ile jest równa wysokość rombu o przekątnych długości 6 cm i 8 cm?

Długość boku rombu obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa: $a^2 = 3^2 + 4^2$, czyli $a = 5 \text{ cm}$. Obliczamy pole rombu:

$$P = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 [\text{cm}^2]$$

Jednocześnie $P = ah$, czyli $h = \frac{P}{a}$, zatem:

$$h = \frac{24}{5} = 4,8 [\text{cm}]$$



Ćwiczenie 7

Oblicz pole i wysokość rombu:

- a) o boku 13 i jednej z przekątnych równej 24,
b) o boku 6 i kącie ostrym α takim, że $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Zadania

1. a) Oblicz pole równoległoboku, którego kąt rozwarty ma miarę 150° , a boki mają długości 4 cm i 9 cm.
b) Pole równoległoboku wynosi 8 cm^2 , obwód 24 cm, a sinus jego kąta ostrego jest równy 0,25. Oblicz wysokości tego równoległoboku.

- D** 2. a) Wykaż, że jeśli przekątne równoległoboku o długościach p i q przecinają się pod kątem α , to pole równoległoboku wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2}pq \sin \alpha$$

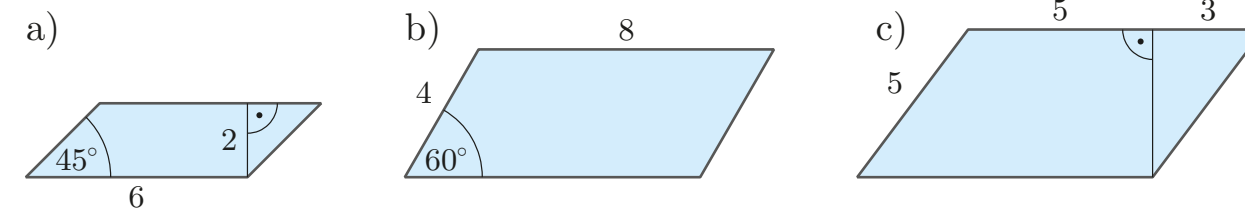
- b) Przekątne równoległoboku o długościach 6 cm i 10 cm tworzą z jednym z boków odpowiednio kąty 12° i 33° . Oblicz pole tego równoległoboku.

- D** 3. Przekątne równoległoboku o polu równym $16\sqrt{2} \text{ cm}^2$ przecinają się pod kątem, którego sinus wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Jedna z przekątnych tego równoległoboku jest trzykrotnie dłuższa od drugiej. Uzasadnij, że krótsze boki tego równoległoboku są prostopadłe do jednej z jego przekątnych. Oblicz obwód tego równoległoboku.

4. a) Oblicz sinus kąta ostrego rombu o przekątnych długości 12 cm i 16 cm.
b) Oblicz wysokość rombu o polu równym 120 cm^2 i obwodzie 48 cm.
5. W prostokącie o przekątnej długości 12 cm połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Otrzymany romb ma pole równe $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego tego rombu.

Sprawdź się

6. Oblicz pole i obwód równoległoboku.



7. W rombie o boku długości 4 cm i kącie ostrym 60° połączono odcinkami środki sąsiednich boków i otrzymano prostokąt. Oblicz jego pole.

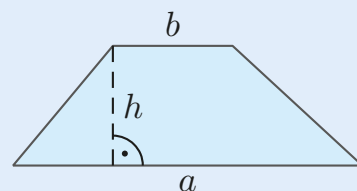
4.10. Pola czworokątów (2)

Trapezem nazywamy czworokąt mający co najmniej jedną parę boków równoległych.

Twierdzenie

Pole trapezu o podstawach długości a , b i wysokości h wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

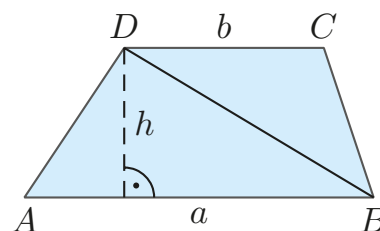


Dowód

Pole trapezu $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów ABD i BCD . Trójkąty te mają taką samą wysokość h , a ich pola są równe:

$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}ah, \quad P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}bh$$

Zatem pole trapezu $P = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b)h$.



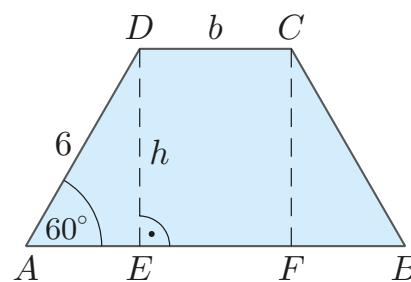
Ćwiczenie 1

Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, którego:

- podstawy mają długości 10 i 6, a przekątna ma długość 9,
- ramię ma długość 7, krótsza podstawa 5, a wysokość jest równa $3\sqrt{5}$.

Przykład 1

Podstawa AB trapezu równoramiennego $ABCD$ ma długość 10, jego ramię ma długość 6, a kąt ostry ma miarę 60° (rysunek obok). Oblicz pole tego trapezu.



Obliczamy wysokość trapezu: $h = 6 \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Zatem $|AE|^2 = 6^2 - h^2 = 9$, czyli $|AE| = 3$, oraz $b = |AB| - 2|AE| = 4$.

Pole trapezu: $P = \frac{1}{2}(4+10) \cdot 3\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$.

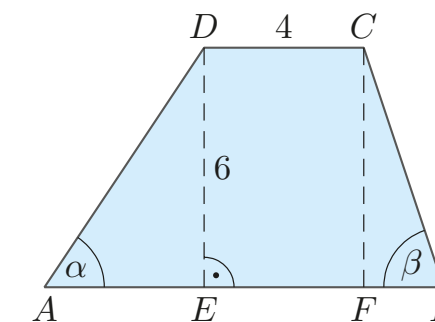
Ćwiczenie 2

Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, którego:

- krótsza podstawa ma długość $3\sqrt{3}$, dłuższa podstawa $7\sqrt{3}$, a miara kąta rozwartego wynosi 150° ,
- jedna z podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej, przekątna ma długość 9, a wysokość jest równa $3\sqrt{5}$.

Przykład 2

Dany jest trapez $ABCD$ o kątach ostrych α i β , krótszej podstawie długości 4 i wysokości równej 6 (rysunek obok). Pole tego trapezu jest równe 42, a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$. Oblicz $\operatorname{tg} \beta$.



$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|DE|}{|AE|}$, stąd $|AE| = \frac{6}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{6}{\frac{3}{2}} = 4$.

Pole trapezu:

$$P = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot h = \frac{1}{2}(|AB| + 4) \cdot 6 = 42$$

Zatem $|AB| + 4 = 14$, czyli $|AB| = 10$. Obliczamy długość odcinka FB :

$$|FB| = |AB| - (|AE| + |CD|) = 10 - (4 + 4) = 2$$

Stąd $\operatorname{tg} \beta = \frac{|CF|}{|FB|} = \frac{6}{2} = 3$.

Ćwiczenie 3

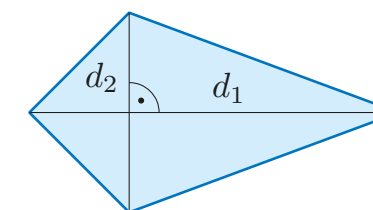
Dany jest trapez o wysokości 4 cm, krótszej podstawie $5\sqrt{5}$ cm oraz kątach ostrych α i β takich, że $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\sin \beta = \frac{4\sqrt{21}}{21}$. Oblicz pole tego trapezu.

Definicja

Deltoid to czworokąt, którego przekątne przecinają się pod kątem prostym i jedna z nich dzieli drugą na połowy.

D Ćwiczenie 4

Na rysunku obok przedstawiono deltoid o przekątnych d_1 i d_2 . Uzasadnij, że jego pole wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2}d_1d_2$.



Przykład 3

Pole deltoidu jest równe 24 cm^2 , a jedna z jego przekątnych jest trzy razy dłuższa od drugiej. Oblicz długości tych przekątnych.

Długość krótszej przekątnej oznaczmy przez x . Druga przekątna ma wtedy długość $3x$. Wyznaczamy pole deltoidu:

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot 3x = 24$$

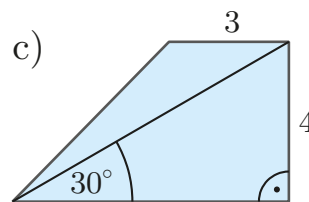
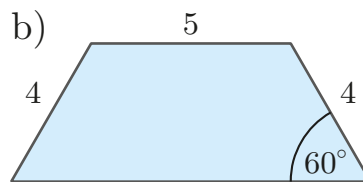
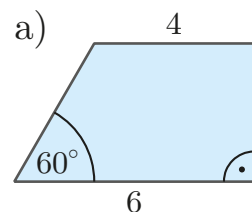
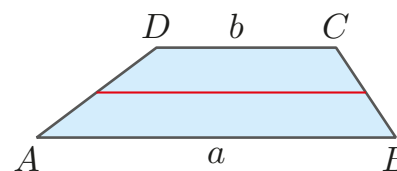
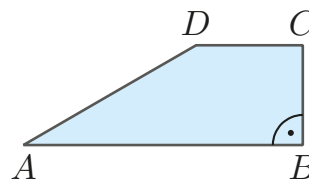
Stąd $x^2 = 16$. Zatem przekątne mają długości $x = 4 \text{ cm}$ oraz $3x = 12 \text{ cm}$.

Ćwiczenie 5

Boki deltoidu mają długości $3\sqrt{2}$ i 5, a krótsza przekątna ma długość 6. Oblicz pole tego deltoidu.

Zadania

1. W trapezie prostokątnym o polu 90 cm^2 i kącie ostrym 45° dłuższa przekątna tworzy z podstawami kąt α taki, że $\text{tg } \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz obwód tego trapezu.
2. W trapezie prostokątnym na rysunku obok sinus kąta DAB jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$, a boki AD i AB mają odpowiednio długości 10 cm i 14 cm. Oblicz pole tego trapezu.
3. Trapez równoramienny o podstawach długości 2 cm i 4 cm ma pole równe 18 cm^2 . Oblicz sinus kąta, pod jakim przecinają się przekątne tego trapezu.
4. Działkę budowlaną w kształcie trapezu o kolejnych bokach długości 50 m, 25 m, 20 m i 25 m podzielono linią równoległą do podstaw tak, że obwody nowo powstałych działek są równe. Ile metrów bieżących siatki potrzeba do ogrodzenia obu działek (siatka między działkami jest wspólna), jeżeli będą one miały furtki o szerokości 1,5 m? Oblicz pola tych działek.
5. Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie E . Wykaż, że trójkąty AED i BEC mają równe pola.
6. Udowodnij, że odcinek łączący środki ramion AD i BC trapezu $ABCD$ (rysunek obok) ma długość $\frac{a+b}{2}$.
7. Ramiona trapezu mają długości 3 cm i 4 cm, krótsza podstawa ma 7,5 cm, a odcinek łączący środki ramion – 10 cm. Oblicz długość dłuższej podstawy tego trapezu i jego pole.
8. Boki deltoidu mają długości 5 cm i 12 cm, a dłuższa przekątna ma długość 13 cm. Oblicz pole tego deltoidu.

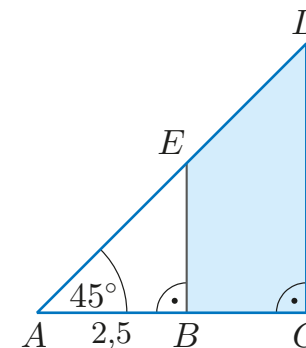


10. Oblicz obwód i pole trapezu równoramiennego o krótszej podstawie 12 cm, kącie ostrym 30° i wysokości 4 cm.

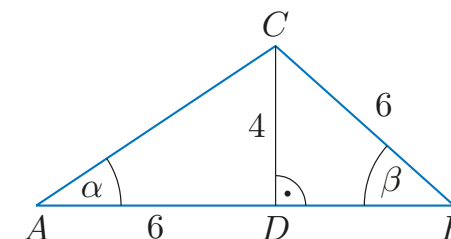
Powtórzenie

Zestaw I

1. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 4\sqrt{3} \text{ cm}$, $|AC| = |BC| = 4 \text{ cm}$. Punkt P jest środkiem odcinka AB . Oblicz wysokości trójkąta APC .
2. Krótsza przekątna trapezu $BCDE$ na rysunku obok ma długość równą $\frac{1}{2}\sqrt{41}$. Oblicz obwód trójkąta ACD .



3. Przekątna prostokąta ma długość 10, a obwód każdego z trójkątów powstałych przez podział prostokąta przekątną jest równy 24. Oblicz pole tego prostokąta.
4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i β trójkąta ABC przedstawionego na rysunku obok.



5. a) Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 60. Tangens jednego z jego kątów ostrych wynosi 2,4. Oblicz długości boków tego trójkąta.
b) Pole trójkąta prostokątnego jest równe $4\sqrt{2}$. Sinus jednego z jego kątów ostrych jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz obwód tego trójkąta.
c) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 16. Kąty ostre α i β spełniają zależność $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{8}$. Oblicz pole tego trójkąta.
6. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta ABC .
a) $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(0,2)$ c) $A(-6,1)$, $B(6,-4)$, $C(6,1)$
b) $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$ d) $A(-1,-5)$, $B(4,5)$, $C(-4,1)$
7. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α spełniającego podany warunek.
a) $\sin \alpha = 0,1$ c) $\cos \alpha = \frac{1}{6}$ e) $\text{tg } \alpha = \frac{8}{15}$ g) $\text{tg } \alpha = \frac{1}{4}$
b) $\cos \alpha = 0,9$ d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ f) $\text{tg } \alpha = \sqrt{5}$ h) $\text{tg } \alpha = 2\sqrt{3}$
8. Oblicz długość podstawy AB oraz długość ramienia trójkąta równoramiennego ABC , którego:
a) wysokość CD jest równa 6 cm, a $|\angle ACB| = 40^\circ$,
b) pole jest równe 12 cm^2 , a $|\angle CAB| = 40^\circ$.

9. a) Obserwator widzi wierzchołek 70-metrowej wieży stojącej na płaskim terenie pod kątem 12° do poziomu. Jaka jest odległość obserwatora od podstawy wieży? W obliczeniach pominiń wzrost obserwatora.

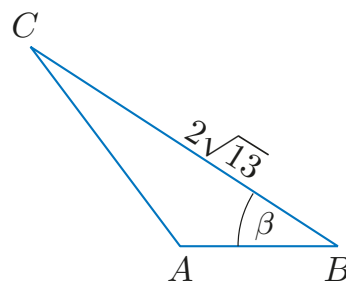
b) Linę podtrzymującą maszt przymocowano do niego na wysokości 110 m nad ziemią i zakotwiczono w ziemi w odległości 40 m od podstawy masztu. Oblicz miarę kąta, jaki lina tworzy z poziomem.

10. Turysta idzie prostą drogą wznoszącą się pod kątem 5° .

a) Jaką różnicę poziomów pokona po przejściu 0,5 km?

b) Jak długo musiałby iść tą drogą z prędkością 4,5 km/h, aby pokonać różnicę poziomów równą 130 m?

11. Wysokość trójkąta ABC (rysunek obok) opuszczona z wierzchołka C jest równa 4. Oblicz z dokładnością do czterech miejsc po przecinku wartości funkcji trygonometrycznych kąta ABC .



Zestaw II

1. W trójkącie ABC kąt ACB ma miarę 75° , bok AC ma długość $4\sqrt{3}$ cm, a wysokość opuszczona z wierzchołka C jest równa 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

2. Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 6 cm i kącie przy podstawie 30° . Oblicz odległości punktu przecięcia prostych zawierających wysokości tego trójkąta od jego wierzchołków.

3. a) Obwód rombu jest równy 52 cm, a jedna z jego przekątnych ma długość 10 cm. Oblicz pole tego rombu oraz sinus kąta ostrego.

b) Pole rombu o obwodzie równym 48 cm wynosi 108 cm^2 . Oblicz sinus kąta ostrego tego rombu.

4. Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Kąt BAD ma miarę 60° , a przekątna BD ma długość $6\sqrt{3}$ i jest prostopadła do boku AD . Oblicz sinusy kątów ostrych trójkąta ABP .

5. W równoległoboku o obwodzie 32 cm jeden bok jest trzy razy dłuższy od drugiego, a kąt rozwarty ma miarę 120° . Oblicz długości przekątnych i pole tego równoległoboku.

6. Wysokość trapezu równoramiennego jest równa 2 cm. Dłuższa podstawa tego trapezu ma długość 6 cm, kąt między przekątną a tą podstawą ma miarę α , a $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Oblicz pole tego trapezu.

7. Trapez prostokątny ma kąt ostry α , dłuższą podstawę a , krótszą podstawę b i wysokość h . Oblicz obwód i długości przekątnych tego trapezu.
a) $\alpha = 60^\circ$, $a = 8 \text{ cm}$, $h = 6\sqrt{3} \text{ cm}$ b) $\alpha = 30^\circ$, $b = 10 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$

8. Przekątne trapezu równoramiennego $ABCD$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie P . Podstawy trapezu mają długości $|AB| = 12 \text{ cm}$ i $|CD| = 4 \text{ cm}$. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta PAD .

9. Podstawy trapezu mają długości 10 i 4, a jego ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty 45° i 60° . Oblicz pole tego trapezu.

10. Dany jest trapez równoramienny o kącie ostrym 30° i podstawach długości 16 i 12. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

11. Narysuj w układzie współrzędnych kąt α , do którego ramienia końcowego należy punkt P . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $P(1, 4)$ b) $P(-1, 4)$ c) $P(-3, 2)$ d) $P(-2, 3)$

12. Uzasadnij, że nie istnieje kąt $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ spełniający podane równanie.

a) $\frac{1}{3} \cos \alpha + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cos \alpha$ b) $\sqrt{5} \sin \alpha = 5 - \sqrt{5}$ c) $3 \cos \alpha + \sqrt{3} = 6$

13. Oblicz.

a) $\sin 30^\circ (\cos 0^\circ - 2 \cos 135^\circ)$ e) $\cos 135^\circ \cdot \sin 90^\circ - \sin 135^\circ \cdot \cos 90^\circ$

b) $(\cos 30^\circ + \cos 150^\circ) \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$ f) $\sin 15^\circ \cdot (\operatorname{tg} 135^\circ + 1) + \cos^2 0^\circ$

c) $\frac{\sin 150^\circ - 2 \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ} - \operatorname{tg} 135^\circ$ g) $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 30^\circ - \cos 150^\circ} + \sin^2 180^\circ$

d) $\frac{\sin 45^\circ + \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ} \cdot \cos 180^\circ$ h) $\frac{\operatorname{tg} 120^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ}{\sin 60^\circ} : \sin 90^\circ$

14. Uzasadnij, że podane wyrażenie przyjmuje wartość 1.

a) $\sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ$

c) $\sin 20^\circ \cdot \cos 70^\circ + \cos^2 20^\circ$

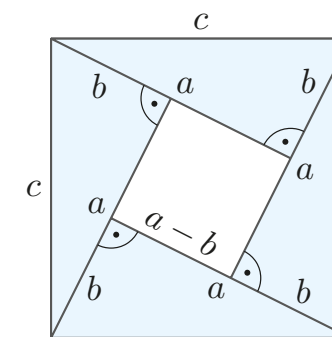
b) $\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ$

d) $\sin^2 26^\circ + \sin 64^\circ \cdot \cos 26^\circ$

Wskazówka. Skorzystaj z zależności $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

15. a) Udowodnij twierdzenie Pitagorasa, korzystając z rysunku obok. W tym celu wyznacz pole dużego kwadratu.

b) Przyjmij, że bok dużego kwadratu ma długość 8, a bok małego – długość 2. Oblicz długości przyprostokątnych a i b niebieskich trójkątów.



**Przykład**

Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 4 cm i ramionach długości 6 cm. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną na jego ramię.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Możemy skorzystać z podobieństwa trójkątów APB

i CDB (cecha KKK): $\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CB|}$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $|CD| = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ [cm].

Zatem: $|AP| = \frac{|AB| \cdot |CD|}{|CB|} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{6} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ [cm]

II sposób

Kąt β jest kątem ostrym trójkąta CDB :

$$\cos \beta = \frac{|DB|}{|CB|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Zatem $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Kąt β jest również kątem ostrym trójkąta ABP , więc $\frac{|AP|}{|AB|} = \sin \beta$, stąd:

$$|AP| = |AB| \cdot \sin \beta = 4 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ [cm]}$$

III sposób

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy wysokość CD trójkąta ABC :

$$|CD| = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

Pole trójkąta ABC obliczamy na dwa sposoby:

$$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AP| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot |AP| = 3|AP| \text{ [cm}^2\text{]}$$

Porównujemy wyznaczone wyrażenia i otrzymujemy:

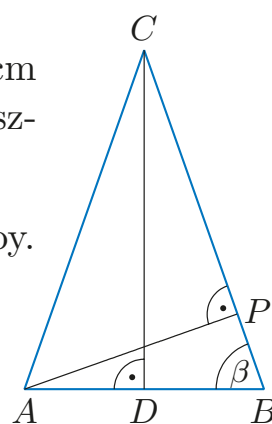
$$3|AP| = 8\sqrt{2}, \text{ stąd } |AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

IV sposób

Oznaczmy $|PB| = x$, wówczas $|PC| = 6 - x$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów APB oraz APC i otrzymujemy równania: $|AP|^2 = 4^2 - x^2$ oraz $|AP|^2 = 6^2 - (6 - x)^2$. Rozwiązujemy równanie $4^2 - x^2 = 6^2 - (6 - x)^2$ i otrzymujemy: $x = \frac{4}{3}$ cm oraz $|AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm.

Odpowiedź: $|AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm

→ Zadanie 15, str. 171



W zadaniach 1–8, 11.1 i 13.2 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość c , może mieć pole równe

- A. $\frac{1}{4}c^2$ B. $\frac{1}{3}c^2$ C. $\frac{1}{2}c^2$ D. c^2

Zadanie 2 (0–1)

Dany jest trapez równoramienny, którego ramiona są tej samej długości co krótsza podstawa, a dłuższa podstawa jest dwa razy dłuższa od krótszej. Przekątne tego trapezu przecinają się pod kątem

- A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°

Zadanie 3 (0–1)

Dla $\alpha = 60^\circ$ prawdziwa jest równość

- A. $\sqrt{3} \sin \alpha + \frac{1}{2} = \operatorname{tg} 30^\circ$ C. $\cos \alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$
B. $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1$ D. $2 \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$

Zadanie 4 (0–1)

Jeśli α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, to α należy do przedziału

- A. $(0^\circ; 30^\circ)$ B. $(30^\circ; 45^\circ)$ C. $(45^\circ; 60^\circ)$ D. $(60^\circ; 90^\circ)$

Zadanie 5 (0–1)

Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

- A. $\sin 40^\circ - \cos 50^\circ$ C. $2 \sin^2 30^\circ - 2 \cos^2 30^\circ$
B. $\sin 29^\circ + \cos 61^\circ$ D. $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \frac{1}{4} \operatorname{tg} 45^\circ$

Zadanie 6 (0–1)

Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

- A. $\sin 61^\circ + \cos 151^\circ$ C. $\sin 151^\circ \cdot \cos 61^\circ$
B. $\sin 151^\circ - \cos 61^\circ$ D. $\sin 151^\circ : \cos 61^\circ$

Zadanie 7 (0–1)

Wartość wyrażenia $(\sin 150^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ) \cdot \frac{\operatorname{tg} 120^\circ}{\cos 150^\circ}$ jest liczbą przeciwną do liczby

- A. -1 B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

Zadanie 8 (0–1)

Pole rombu o boku $4\sqrt{2}$ cm i kącie rozwartym 135° jest równe

- A. 8 cm^2 B. $8\sqrt{2} \text{ cm}^2$ C. 16 cm^2 D. $16\sqrt{2} \text{ cm}^2$



Zadanie 9 (0–1)

Dany jest trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość 41 cm, a jedna z przyprostokątnych ma długość 40 cm.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Cosinus jednego z kątów tego trójkąta jest równy $\frac{9}{41}$.	P	F
Tangens jednego z kątów tego trójkąta jest równy $4\frac{4}{9}$.	P	F

Zadanie 10 (0–4)

Na rysunku obok przedstawiono trójkąt prostokątny ABC .

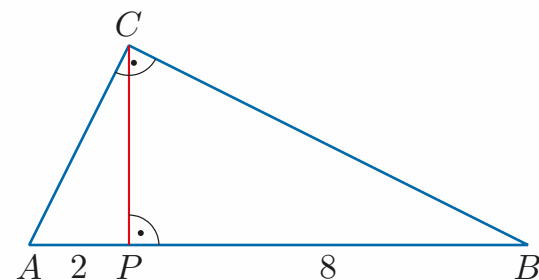
Uzupełnij zdania tak, aby były prawdziwe.

Długość boku BC jest równa $?$.

Obwód trójkąta ABC jest równy $?$.

Sinus kąta ABC jest równy $?$.

Cosinus kąta ACP jest równy $?$.



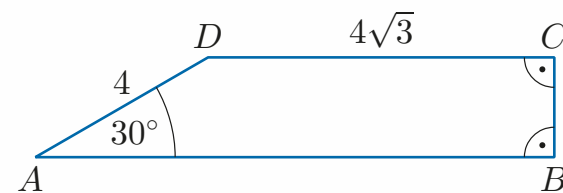
Zadanie 11

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ (rysunek obok).

Zadanie 11.1 (0–1)

Tangens kąta CAB jest równy

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{9}$



Zadanie 11.2 (0–2)

Oblicz sinus kąta ADC oraz pole trójkąta ADC .

Zadanie 12 (0–2)

Kąt ostry α spełnia warunek $\sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha$.

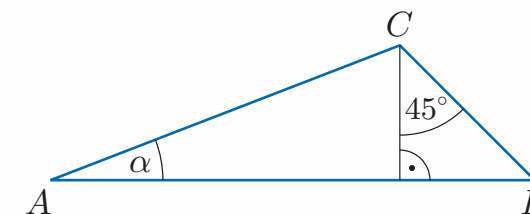
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Sinus kąta α jest równy $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.	P	F
Iloczyn $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ jest równy $\frac{1}{5}$.	P	F
Tangens kąta α jest równy $\frac{1}{2}$.	P	F



Zadanie 13

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok), w którym $\sin \alpha = 0,4$ oraz $|AC| = 10$.



Zadanie 13.1 (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Cosinus kąta α jest równy 0,6.	P	F
Sinus kąta $90^\circ - \alpha$ jest równy $\frac{\sqrt{21}}{5}$.	P	F

Zadanie 13.2 (0–1)

Długość boku BC jest równa

- A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{2}$

Zadanie 14 (0–1)

Dany jest równoległobok o bokach długości 4 cm i 8 cm. Kąt rozwarty tego równoległoboku ma miarę α taką, że $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Sinus kąta α jest równy

A.	$\frac{\sqrt{15}}{4}$,	a pole równoległoboku jest równe	1.	$8\sqrt{15} \text{ cm}^2$.
			2.	$4\sqrt{15} \text{ cm}^2$.
B.	$\frac{1}{4}$,		3.	8 cm^2 .

Zadanie 15 (0–1) → Przykład, str. 168

Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 12 cm i ramieniu długości 10 cm.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Trójkąt ten jest rozwartokątny.	P	F
Wysokość tego trójkąta opuszczona na jego ramię ma długość 9,4 cm.	P	F

Zadanie 16 (0–2)

Tangens kąta ostrego α jest równy $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Oblicz $\cos \alpha$.

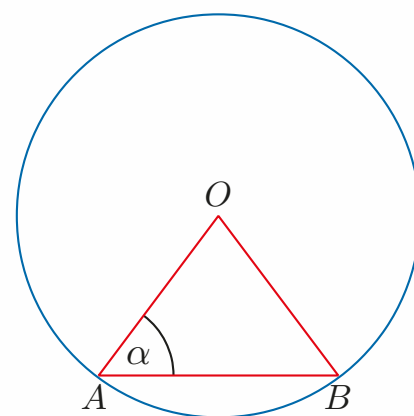


Zadanie 17 (0-2)

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $\sqrt{2}$ i $2\sqrt{2}$ oraz kątach ostrych α i β . Oblicz $\sin \alpha \cdot \sin \beta$.

Zadanie 18 (0-2)

Dany jest okrąg o środku O i promieniu 6 (rysunek obok). Wiadomo, że $\sin \alpha = 0,8$. Oblicz długość cięciwy AB .



Zadanie 19 (0-2)

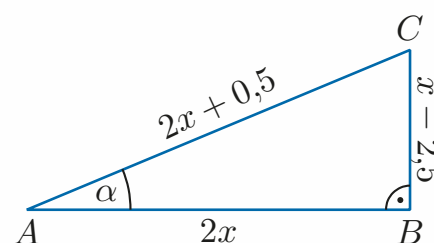
Dany jest trójkąt ABC o bokach $|BC| = 6$ i $|AB| = |AC| = 8$. Punkt P jest spodkiem wysokości tego trójkąta opuszczonej z wierzchołka C . Oblicz długości odcinków AP i BP .

Zadanie 20 (0-2)

Kwadrat odwrotności sinusa pewnego kąta rozwartego jest równy 5. Oblicz cosinus tego kąta.

Zadanie 21 (0-4)

Oblicz obwód trójkąta ABC na rysunku obok oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .



Zadanie 22 (0-4)

Długości boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych α i β są kolejnymi liczbami parzystymi. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin \alpha + \sin \beta)^2$.

Zadanie 23 (0-4)

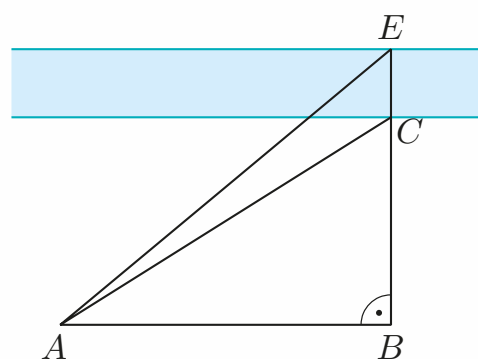
Dany jest trapez o podstawach długości 4 cm i $(7 + 3\sqrt{3})$ cm oraz wysokości równej 3 cm. Jeden z dwóch kątów ostrych przylegających do dłuższej podstawy ma miarę 45° . Oblicz iloczyn cosinusów kątów rozwartych tego trapezu.

Zadanie 24 (0-4)

Przekątne rombu mają długości 4 cm i 8 cm. Oblicz cosinus kąta ostrego tego rombu.

Zadanie 25 (0-4)

Aby obliczyć szerokość rzeki (długość odcinka CE na rysunku obok), wykonano pomiary w terenie: $|AC| = 120$ m, $|\sphericalangle CAB| = 32^\circ$, $|\sphericalangle CAE| = 8^\circ$. Oblicz szerokość rzeki.



5 Planimetria

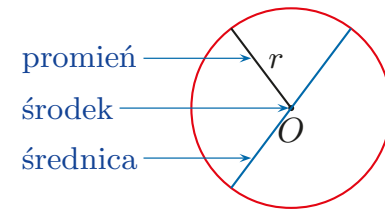
Z regularnym podziałem płaszczyzny możemy mieć do czynienia w sytuacjach praktycznych, takich jak układanie kafelków lub bruku.

Bardzo ciekawe przykłady podziałów płaszczyzny znajdziemy w pracach holenderskiego malarza i grafika Mauritsa Cornelisa Eschera [czyt. małpica kornelisa eszera] (1898–1972). Inspirację matematyką widać w wielu jego pracach.



5.1. Okrąg

Okręgiem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r .



Stosunek długości okręgu do jego średnicy jest stały. Oznaczamy go grecką literą π . Oznaczenie to zostało wprowadzone przez brytyjskiego matematyka Williama Jonesa [czyt. hiliama džonsa] w 1706 roku. Liczba π jest niewymierna, w obliczeniach często wykorzystujemy jej przybliżoną wartość: $\pi \approx 3,14$.

$$\frac{\text{długość okręgu}}{\text{średnica okręgu}} = \pi$$

Długość okręgu o promieniu r wyraża się wzorem $l = 2\pi r$.

Przykład 1

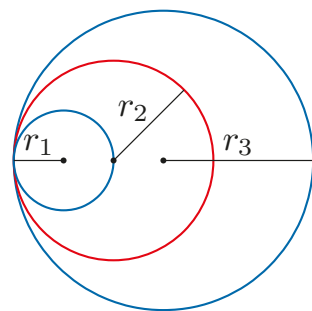
Oblicz długości okręgów o promieniach $r_1 = 0,5$ cm, $r_2 = 1$ cm, $r_3 = 1,5$ cm (rysunek obok).

Długości okręgów wynoszą odpowiednio:

$$l_1 = 2\pi \cdot r_1 = 2\pi \cdot 0,5 = \pi \text{ [cm]}$$

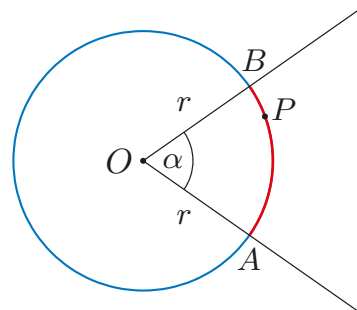
$$l_2 = 2\pi \cdot r_2 = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \text{ [cm]}$$

$$l_3 = 2\pi \cdot r_3 = 2\pi \cdot 1,5 = 3\pi \text{ [cm]}$$



Kąt środkowy to kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu.

Na rysunku obok ramiona kąta środkowego α przecinają okrąg w punktach A i B , które dzielą ten okrąg na dwa łuki. Jeśli nie są one półkami, to mówiąc „łuk AB ”, będziemy mieć na myśli krótszy z nich, chyba że jest powiedziane inaczej. Łuk taki oznaczamy $\widehat{AB}$. Czasami stosujemy oznaczenie trzyliterowe, np. czerwony łuk na rysunku to łuk $\widehat{APB}$.



Długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem $L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$.

Ćwiczenie 1

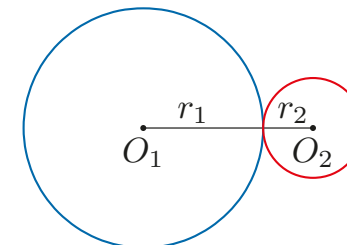
Punkty A, B leżące na okręgu o środku O i promieniu $r = 12$ cm wyznaczają łuk długości 3π cm. Jaką miarę ma kąt AOB ?

Ćwiczenie 2

W okręgu o średnicy 24 cm poprowadzono cztery promienie tak, że stosunek miar kątów pomiędzy kolejnymi promieniami wynosi $1:3:5:7$. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez końce kolejnych promieni leżące na okręgu.

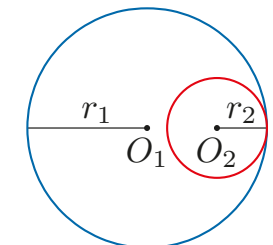
Okręgi mające tylko jeden punkt wspólny (zwany **punktem styczności**) nazywamy **okręgami stycznymi**. Promienie okręgów stycznych poprowadzone do punktu styczności leżą na jednej prostej.

Okręgi styczne zewnętrznie



$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$

Okręgi styczne wewnętrznie



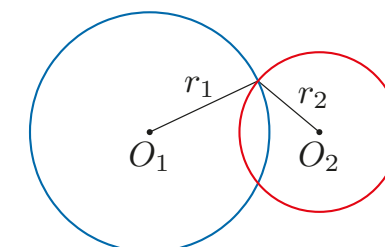
$$|O_1O_2| = |r_1 - r_2|$$

Odległość między środkami okręgów jest równa sumie ich promieni.

Jeśli $r_1 > r_2$, to odległość między środkami okręgów jest równa $r_1 - r_2$.

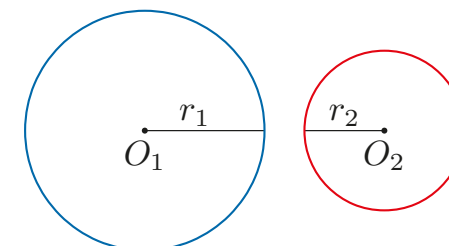
Dwa różne okręgi mogą też mieć dwa punkty wspólne (**okręgi przecinające się**) lub nie mieć punktów wspólnych (**okręgi rozłączne**).

Okręgi przecinające się



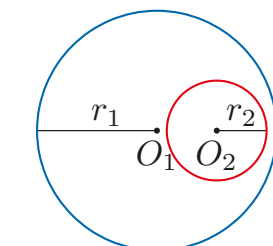
$$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$$

Okręgi rozłączne zewnętrznie



$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$

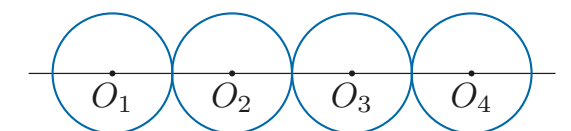
Okręgi rozłączne wewnętrznie



$$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$$

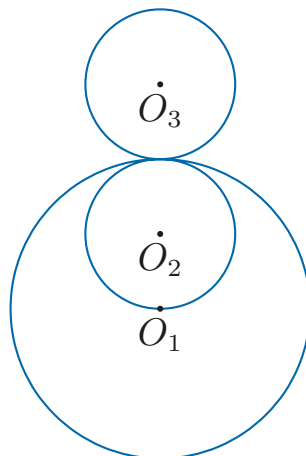
Ćwiczenie 3

Cztery okręgi o równych promieniach są odpowiednio styczne (rysunek obok), a ich środki leżą na jednej prostej i $|O_1O_4| = 48$. Oblicz średnicę każdego z tych okręgów.



Zadania

- Punkty A, B należą do okręgu o średnicy 10 cm oraz $|AB| = 5$ cm. Oblicz długość okręgu oraz długość łuku $\widehat{AB}$.
- Oblicz długość łuku okręgu o średnicy d wyznaczonego przez kąt środkowy α .
a) $d = 12$ cm, $\alpha = 75^\circ$ b) $d = 30$ cm, $\alpha = 15^\circ$ c) $d = 5$ cm, $\alpha = 330^\circ$
- Łuk okręgu wyznaczony przez kąt środkowy o mierze 20° ma długość 2π cm. Oblicz średnicę tego okręgu.
- Na okręgu o średnicy 18 cm kąt środkowy wyznacza łuk o długości 4π cm. Oblicz miarę tego kąta.
- Oblicz wartości x , dla których okrąg o środku w punkcie $P(x, 0)$ i promieniu $r_1 = 5$ oraz okrąg o środku w punkcie $Q(-1, 0)$ i promieniu $r_2 = 3$ są styczne: a) zewnętrznie, b) wewnętrznie.
- Narysuj w układzie współrzędnych okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 oraz okrąg o środku O_2 i promieniu r_2 . Podaj odległość między środkami tych okręgów. Ile mają one punktów wspólnych?
a) $O_1(-2, 0)$, $r_1 = 4$, $O_2(-1, 0)$, $r_2 = 2$
b) $O_1(0, -2)$, $r_1 = 4$, $O_2(0, 3)$, $r_2 = 1$
c) $O_1(1, 3)$, $r_1 = 2$, $O_2(4, 3)$, $r_2 = 5$
- Punkty O_1, O_2 i O_3 , będące środkami odpowiednio stycznych okręgów (rysunek obok), leżą na jednej prostej. Dwa mniejsze okręgi mają równe promienie oraz $|O_1O_3| = 18$. Oblicz średnicę każdego z tych okręgów.



Sprawdź się

- Oblicz promień okręgu, w którym kąt środkowy α wyznacza łuk długości L .
a) $\alpha = 40^\circ$, $L = 6\pi$ b) $\alpha = 270^\circ$, $L = \frac{\pi}{2}$ c) $\alpha = 7^\circ 30'$, $L = \pi$
- Odległość między środkami przecinających się okręgów o promieniach 3 i 5 jest równa n , gdzie $n \in \mathbb{N}$. Podaj możliwe wartości n .
- Końce przekątnej prostokąta o bokach długości 4 cm i 8 cm są środkami dwóch okręgów stycznych zewnętrznie. Punkt styczności dzieli przekątną prostokąta w stosunku 1 : 3. Oblicz długości tych okręgów.

5.2. Koło

Kołem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r .

Zwróć uwagę na to, że punkty należące do okręgu ograniczającego koło należą do tego koła.

Wzór na pole koła został udowodniony przez Archimedesesa.

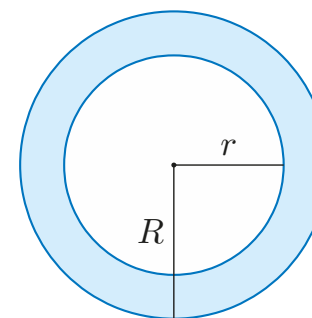
Pole koła o promieniu r wyraża się wzorem $P = \pi r^2$.

Ćwiczenie 1

- Oblicz pole największego koła zawartego w kwadracie o polu 36 cm².
- Oblicz długość okręgu ograniczającego koło o polu $2,25\pi$ cm².

Część płaszczyzny ograniczoną przez dwa współśrodkowe okręgi (wraz z tymi okręgami) nazywamy **pierścieniem kołowym**.

Opisując pierścień kołowy, podajemy jego **promień zewnętrzny** i **promień wewnętrzny**. Różnicę tych promieni nazywamy **szerokością pierścienia**. Dla pierścienia na rysunku obok jest ona równa $R - r$.



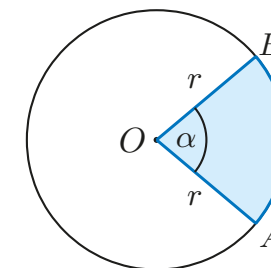
Ćwiczenie 2

- Oblicz pole pierścienia kołowego o promieniu zewnętrznym 25 cm i promieniu wewnętrznym 24 cm. Podaj promień koła, którego pole jest równe polu tego pierścienia.
- Pole pierścienia kołowego o szerokości 1 cm wynosi 17π cm². Oblicz promień zewnętrzny i promień wewnętrzny tego pierścienia.

Część koła o środku O ograniczoną łukiem $\widehat{AB}$ i promieniami OA i OB (wraz z brzegiem tej części) nazywamy **wycinkiem koła** lub **wycinkiem kołowym**.

Pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$



Ćwiczenie 3

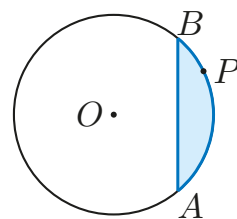
Oblicz pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy α .

- $r = 12$, $\alpha = 75^\circ$ b) $r = 2$, $\alpha = 22^\circ 30'$ c) $r = \sqrt{3}$, $\alpha = 315^\circ$

Ćwiczenie 4

Pole wycinka koła o promieniu 6 wyznaczonego przez kąt α jest równe 2π . Oblicz miarę kąta α .

Część koła ograniczoną łukiem $\widehat{APB}$ i cięciwą AB (wraz z brzegiem tej części) nazywamy **odcinkiem koła** lub **odcinkiem kołowym**.



Przykład 1

Oblicz pole odcinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez cięciwę AB i kąt AOB o mierze $\alpha = 45^\circ$ (rysunek poniżej).

Obliczamy pole wycinka koła AOB :

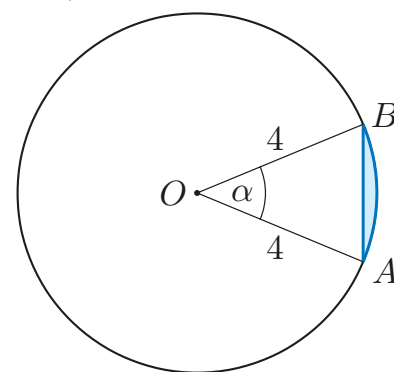
$$P_1 = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 = 2\pi$$

Następnie obliczamy pole trójkąta AOB :

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$$

Zatem pole odcinka koła:

$$P = P_1 - P_2 = 2\pi - 4\sqrt{2}$$



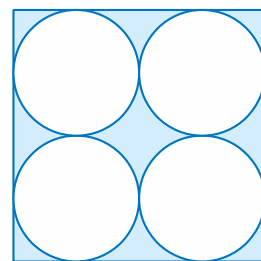
Ćwiczenie 5

Punkty A, B należące do okręgu o środku O i promieniu 12 wyznaczają kąt środkowy AOB . Oblicz pole odcinka kołowego wyznaczonego przez ten kąt.

- a) $|\sphericalangle AOB| = 90^\circ$ b) $|\sphericalangle AOB| = 60^\circ$ c) $|\sphericalangle AOB| = 30^\circ$

Zadania

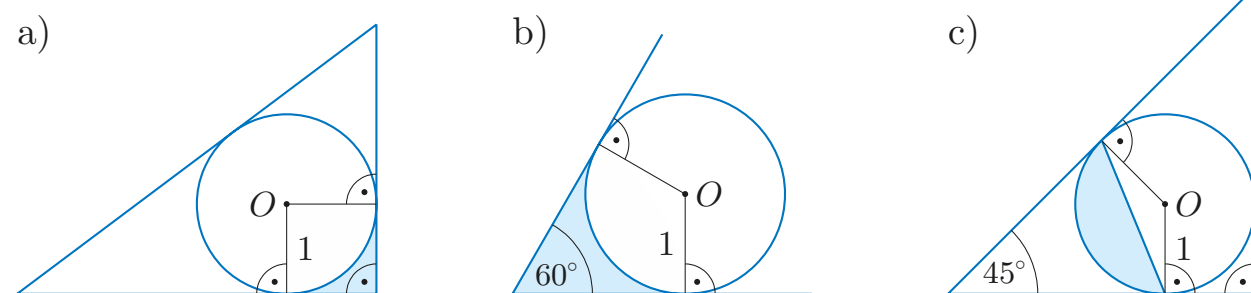
- D** 1. Bok kwadratu ma długość 6. Wykaż, że pole zacieniowanego obszaru jest mniejsze od 9 (rysunek obok).



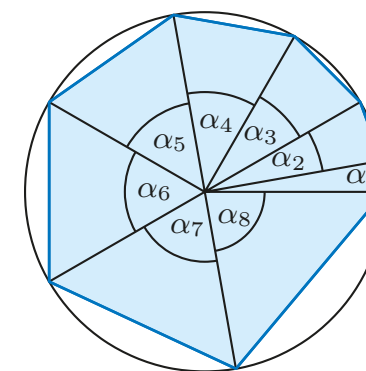
2. Cięciwa łącząca punkty A i B leżące na okręgu o promieniu 5 ma długość $5\sqrt{3}$. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez te punkty oraz pola odpowiednich wycinków.

3. W kole o środku O i promieniu 4 poprowadzono cięciwę AB . Pole trójkąta AOB jest równe $4\sqrt{2}$. Oblicz pola figur, na które cięciwa podzieliła to koło.

4. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

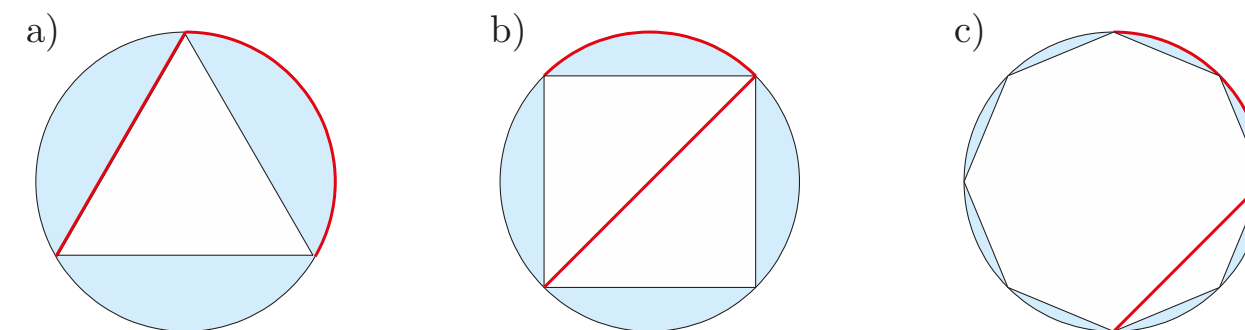


5. Wierzchołki ośmiokąta (rysunek obok) należą do okręgu o promieniu 3. Spośród kolejnych kątów środkowych $\alpha_1, \dots, \alpha_8$ każdy następny jest o 10° większy od poprzedniego.



- a) Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt α_8 .
b) Oblicz sumę pól odcinków koła wyznaczonych przez kąty α_3 i α_6 .

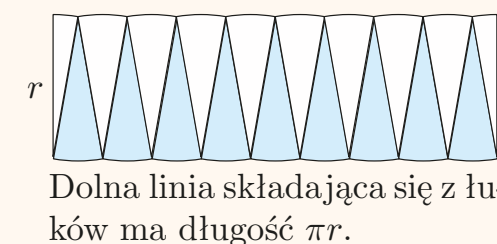
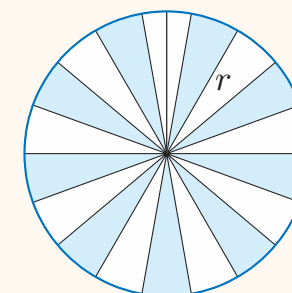
6. Dany jest wielokąt foremny, którego wierzchołki należą do okręgu o promieniu 2. Oblicz długość czerwonej linii oraz pole zacieniowanego obszaru.



- D** 7. Uzasadnij, że pole odcinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 60° jest równe $\frac{1}{12}r^2(2\pi - 3\sqrt{3})$.

Czy wiesz, że...

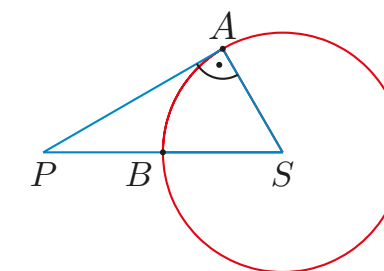
Do uzasadnienia wzoru na pole koła wykorzystuje się ustawienie wycinków koła w figurę taką jak na rysunku obok.



Sprawdź się

8. Oblicz promień koła, którego wycinek wyznaczony przez kąt α ma pole P .
a) $\alpha = 45^\circ, P = 0,75\pi$ b) $\alpha = 140^\circ, P = 7\pi$ c) $\alpha = 300^\circ, P = 18\pi$

9. Punkt A należy do okręgu o środku w punkcie S (rysunek obok). Odległość od punktu P do środka okręgu jest równa 2 cm, a do punktu A jest równa $\sqrt{3}$ cm. Oblicz pole:



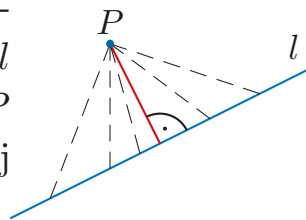
- a) trójkąta PSA , b) wycinka koła BSA .

5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej

D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że spośród odcinków łączących dany punkt P z punktem leżącym na prostej l ($P \notin l$) najkrótszy jest ten, który jest do tej prostej prostopadły.

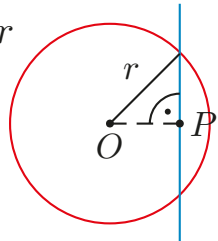
Odległością punktu P od prostej l nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z punktem na prostej l (odcinek ten jest prostopadły do prostej l). Jeśli punkt P leży na prostej l , to przyjmujemy, że jego odległość od tej prostej jest równa zero.



Okrąg i prosta mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

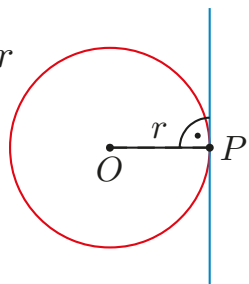
Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej.

$$|OP| < r$$



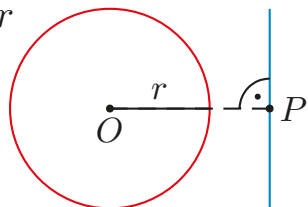
Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy jego **sieczną**. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.

$$|OP| = r$$



Jeśli prosta ma z okręgiem jeden punkt wspólny, to mówimy, że jest **styczna** do okręgu (wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**). Promień okręgu poprowadzony do punktu styczności z prostą jest do niej prostopadły. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.

$$|OP| > r$$



Na rysunku obok okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

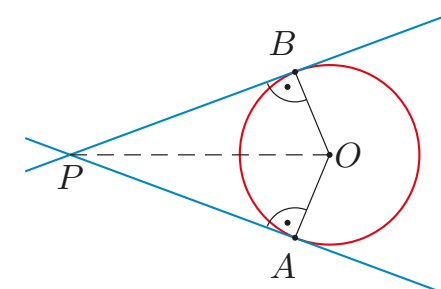
Ćwiczenie 2

- Prosta l jest styczna do okręgu o promieniu 6 cm w punkcie P . Punkt A leży na prostej l i $|PA| = 4$ cm. Oblicz odległość punktu A od środka okręgu.
- Prosta AB jest styczna do okręgu o środku w punkcie O . Punkt styczności P jest środkiem odcinka AB . Wiadomo, że $|AO| = 20$ cm i $|AB| = 32$ cm. Oblicz promień okręgu.

Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeśli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to:

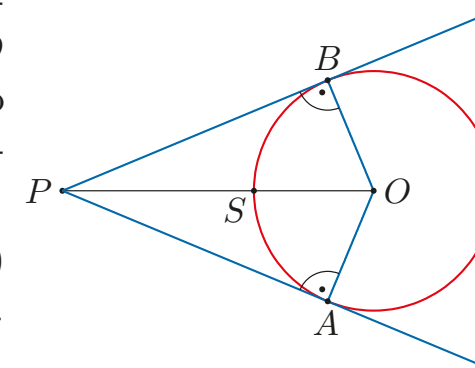
$$|PA| = |PB|$$



Powyższe twierdzenie można udowodnić, korzystając z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów PAO i PBO .

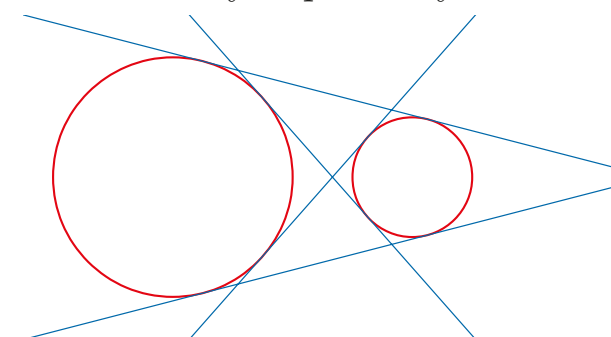
Ćwiczenie 3

- Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu 6 cm. Z punktu P odległego od punktu O o 10 cm poprowadzono dwie proste styczne do okręgu w punktach A i B . Oblicz obwód czworokąta $PAOB$.
- Obwód czworokąta $PAOB$ (rysunek obok) jest równy 34 cm, a odcinek PS ma długość 8 cm. Oblicz promień okręgu o środku w punkcie O .

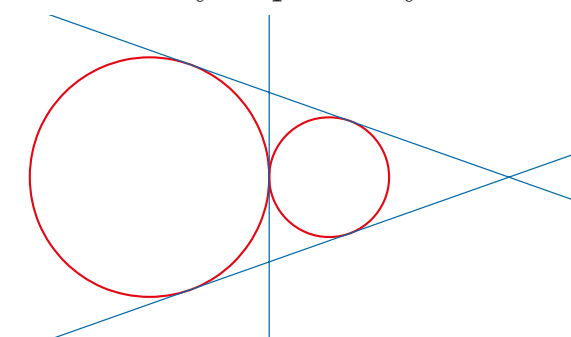


Liczba wspólnych stycznych dwóch okręgów zależy od położenia tych okręgów.

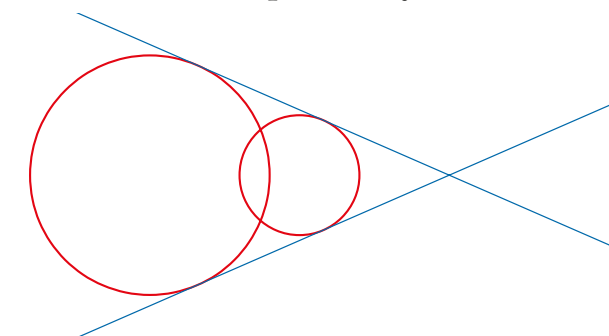
Okręgi rozłączne zewnętrznie;
cztery wspólne styczne



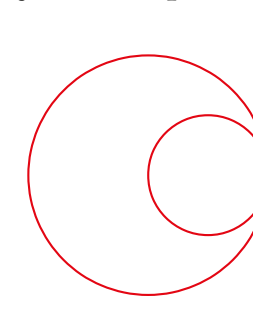
Okręgi styczne zewnętrznie;
trzy wspólne styczne



Okręgi przecinające się;
dwie wspólne styczne



Okręgi styczne wewnętrznie;
jedna wspólna styczna



Okręgi rozłączne wewnętrznie nie mają wspólnych stycznych.

Ćwiczenie 4

Dane są okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 oraz okrąg o środku O_2 i promieniu r_2 . Określ liczbę wspólnych stycznych tych okręgów.

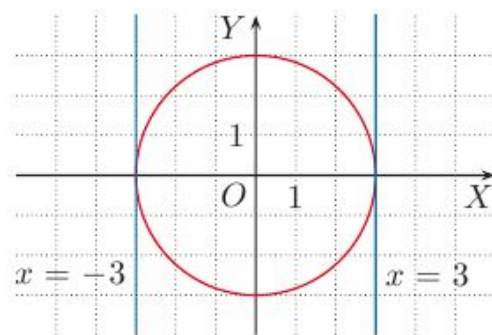
- a) $r_1 = 3\frac{1}{2}$, $r_2 = 4\frac{1}{2}$, $|O_1O_2| = 5\frac{1}{2}$ c) $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = \frac{1}{2}$, $|O_1O_2| = \frac{1}{6}$
 b) $r_1 = 11$, $r_2 = 13$, $|O_1O_2| = 24$ d) $r_1 = \sqrt{2}$, $r_2 = \sqrt{3}$, $|O_1O_2| = 4$

Przykład 1

Dany jest okrąg o środku $O(0,0)$ i promieniu 3. Ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma prosta $x = m$ w zależności od parametru m ?

Prosta $x = m$ z danym okręgiem:

- ma jeden punkt wspólny dla $m \in \{-3, 3\}$,
- ma dwa punkty wspólne dla $m \in (-3, 3)$,
- nie ma punktów wspólnych dla $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.



Ćwiczenie 5

Dany jest okrąg o środku $S(0,2)$ i promieniu 4. Ile punktów wspólnych z tym okręgiem ma prosta $y = m$ w zależności od parametru m ?

Przykład 2

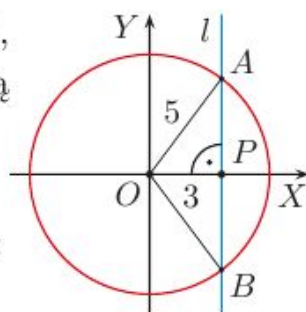
Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty wspólne prostej $l: x = 3$ i okręgu o środku $O(0,0)$ i promieniu 5.

Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej l , a punkty A, B niech będą punktami przecięcia okręgu z tą prostą. Wówczas $|OP| = 3$, zatem:

$$|AP| = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Trójkąty OPA i OPB są przystające, więc długość cięciwy:

$$|AB| = 2 \cdot |AP| = 8$$



Ćwiczenie 6

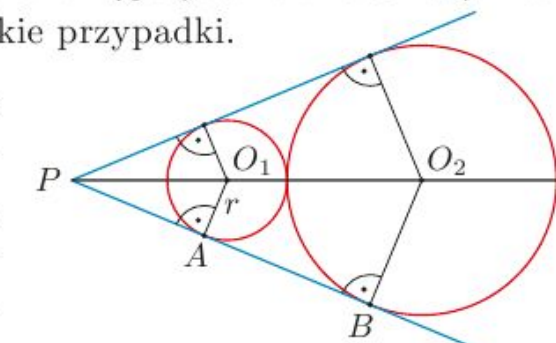
- a) Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej $y = -3$ oraz okręgu o środku w punkcie $(2,0)$ i promieniu 4.
 b) Cięciwa długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej $x = 1$ oraz okręgu o środku w punkcie $(-3,2)$. Oblicz promień tego okręgu.

Zadania

1. Prosta równoległa do osi OY przecina okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu 10 w punktach A i B . Wyznacz równanie tej prostej dla:
 a) $|AB| = 12$, b) $|AB| = 10\sqrt{2}$, c) $|AB| = 10$, d) $|AB| = 20$.

2. Dany jest okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu 11. Cięciwa AB tego okręgu jest równoległa do osi OX i ma długość 20. Punkt P należy do tej cięciwy i jego odległość od środka okręgu jest równa 5. Wyznacz współrzędne punktu P . Rozważ wszystkie przypadki.

3. Z punktu P poprowadzono wspólne styczne do okręgów o środkach w punktach O_1 i O_2 (rysunek obok). Wiadomo, że $|O_2B| = 5$ i $|O_2P| = 13$. Oblicz promień r okręgu o środku w punkcie O_1 .

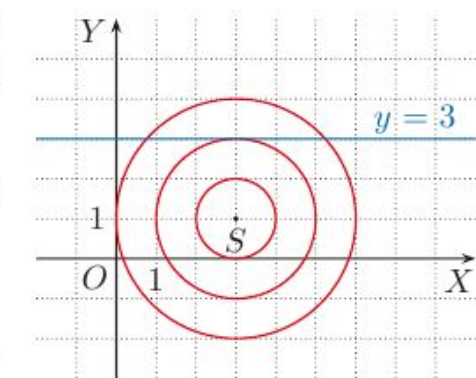


4. Punkty A i B leżą na okręgu o średnicy 12 cm, a odległość między nimi jest równa promieniowi tego okręgu. Styczne do okręgu poprowadzone w punktach A i B przecinają się w punkcie P . Oblicz pole trójkąta APB .
 5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Ile punktów wspólnych ma prosta $y = 3$ z okręgiem o środku $S(3,1)$ w zależności od promienia r tego okręgu?

Prosta $y = 3$ z okręgiem o środku $S(3,1)$:

- ma jeden punkt wspólny dla $r = 2$,
- ma dwa punkty wspólne dla $r \in (2; \infty)$,
- nie ma punktów wspólnych dla $r \in (0; 2)$.



Ile punktów wspólnych ma prosta k z okręgiem o środku S w zależności od promienia r tego okręgu?

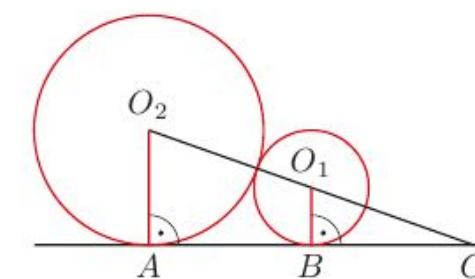
- a) $k: y = 3$, $S(3, -1)$ b) $k: x = -1$, $S(-\frac{3}{2}, 4)$ c) $k: x = \sqrt{2}$, $S(-1, 1)$

Sprawdź się

6. Punkty A i B należą do okręgu o środku S i promieniu r . Oblicz pole trójkąta ASB .

- a) $|AB| = 4$ cm, $r = 2\sqrt{10}$ cm b) $|AB| = 14$ cm, $r = 25$ cm

7. Dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 oraz promieniach odpowiednio 1 i 2 są styczne zewnętrznie (rysunek obok). Prosta AB jest ich wspólną styczną. Oblicz długość odcinka CO_1 oraz pole trapezu ABO_1O_2 .



5.4. Kąty w okręgu (1)

Kąt środkowy α przedstawiony na rysunku obok jest wyznaczony przez łuk $\widehat{AB}$ zaznaczony kolorem czerwonym.

Mówimy też, że kąt środkowy α jest oparty na łuku $\widehat{AB}$ lub na cięciwie AB .

Ćwiczenie 1

Punkty $P_1, P_2, \dots, P_{12}$ dzielą okrąg na 12 łuków o równej długości. Podaj miarę kąta środkowego opartego na łuku:

- a) $\widehat{P_1P_2P_3}$, b) $\widehat{P_4P_7P_{12}}$, c) $\widehat{P_6P_1P_7}$.

Definicja

Kąt wpisany w okrąg to kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramionami są półproste zawierające cięciwy tego okręgu.

O kącie wpisanym β (rysunek obok) mówimy, że jest oparty na łuku $\widehat{AB}$.

Twierdzenie

Kąt środkowy w okręgu ma miarę dwa razy większą od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Dowód – patrz zadanie 7, str. 187.

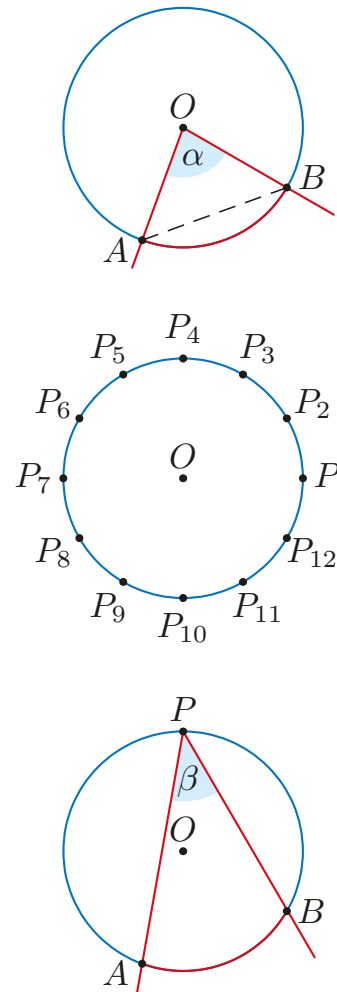
Ćwiczenie 2

- a) Podaj miarę kąta β (rysunek obok).
b) Narysuj w dowolnym okręgu kąt środkowy $\alpha = 120^\circ$ i trzy różne kąty wpisane oparte na tym samym łuku co kąt α . Podaj miary tych kątów.

Ćwiczenie 3

Podaj miarę kąta środkowego opartego na tym samym łuku co kąt wpisany β .

- a) $\beta = 15^\circ$ b) $\beta = 48^\circ$ c) $\beta = 137^\circ$ d) $\beta = 74^\circ 30'$



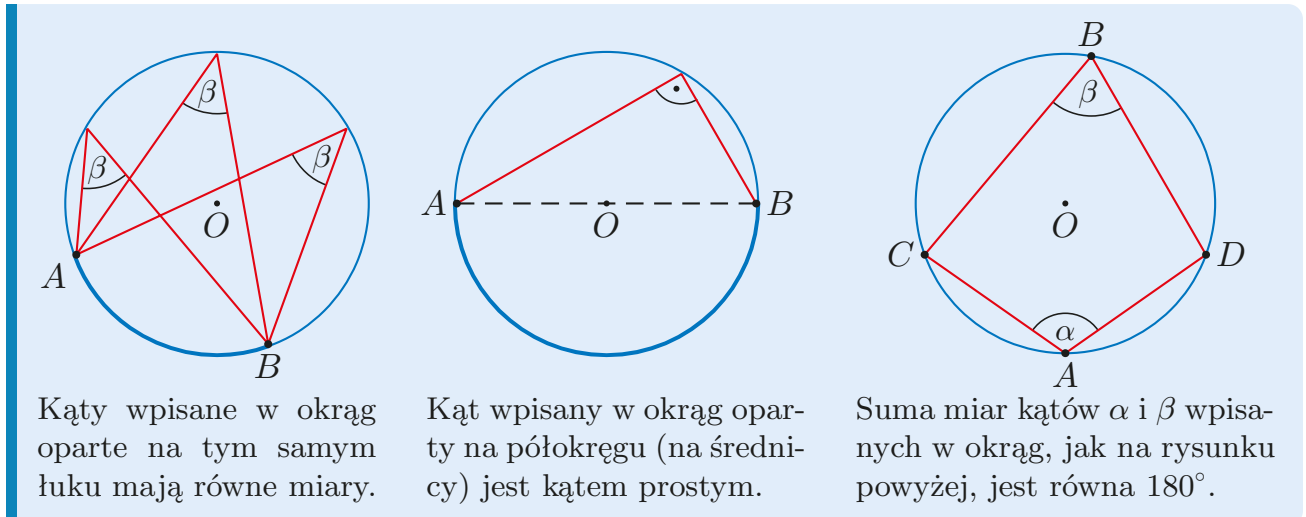
Ćwiczenie 4

Kąt wpisany β jest oparty na tym samym łuku co kąt środkowy α . Oblicz miarę kąta $\alpha + \beta$ dla:

- a) $\alpha = 110^\circ$, b) $\alpha = 45^\circ$, c) $\beta = 17^\circ$, d) $\beta = 105^\circ$.

Z twierdzenia o kątach środkowym i wpisanym wynikają następujące wnioski:

Twierdzenie

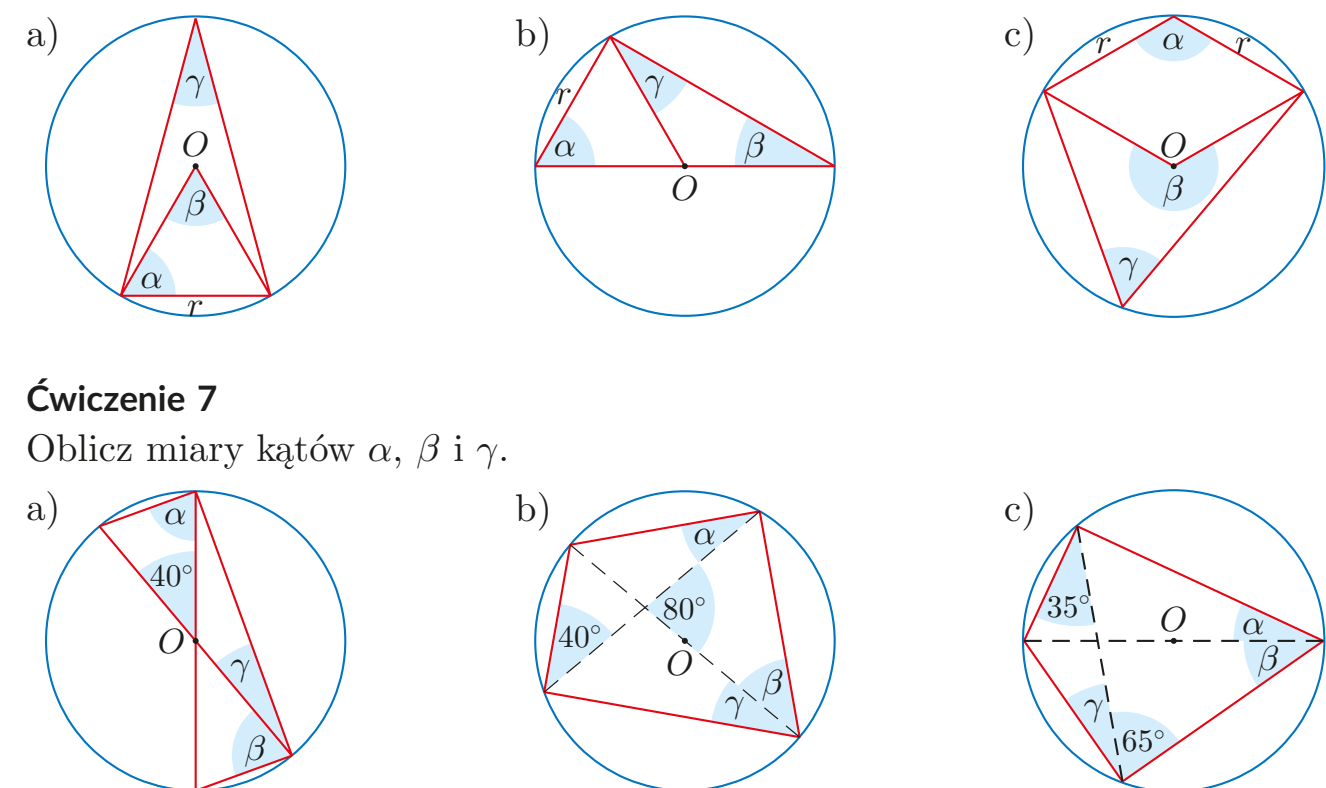


Ćwiczenie 5

Uzasadnij każdy z powyższych wniosków.

Ćwiczenie 6

Promień okręgu jest równy r . Oblicz miary kątów α , β i γ .

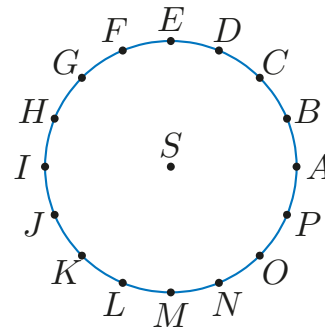


Ćwiczenie 7

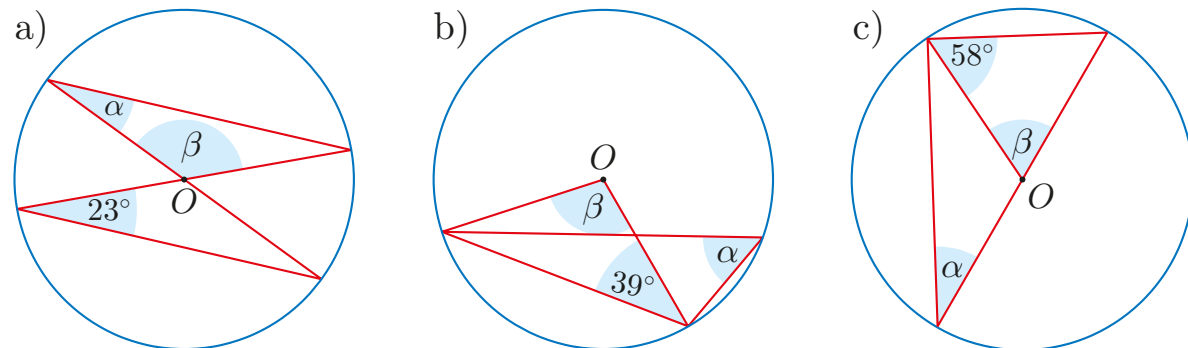
Oblicz miary kątów α , β i γ .

Zadania

- Punkty $A, B, C, \dots, P$ dzielą okrąg na 16 łuków o równej długości. Punkt A leży na jednym z ramion kąta środkowego β . Który z punktów leży na drugim ramieniu tego kąta?
 a) $\beta = 45^\circ$ c) $\beta = 225^\circ$
 b) $\beta = 112,5^\circ$ d) $\beta = 315^\circ$
- Dany jest okrąg o promieniu 6. Podaj miary kątów środkowego oraz wpisanego opartych na łuku o podanej długości.
 a) 2π b) 3π c) $\frac{15}{2}\pi$ d) $\frac{\pi}{4}$
- Odcinek BD jest średnicą okręgu, a odcinek AC jest cięciwą prostopadłą do odcinka BD . Oblicz miary kątów trójkąta ADC w przypadku, gdy:
 a) $|\sphericalangle ACB| = 70^\circ$, b) $|\sphericalangle ABC| = 130^\circ$.



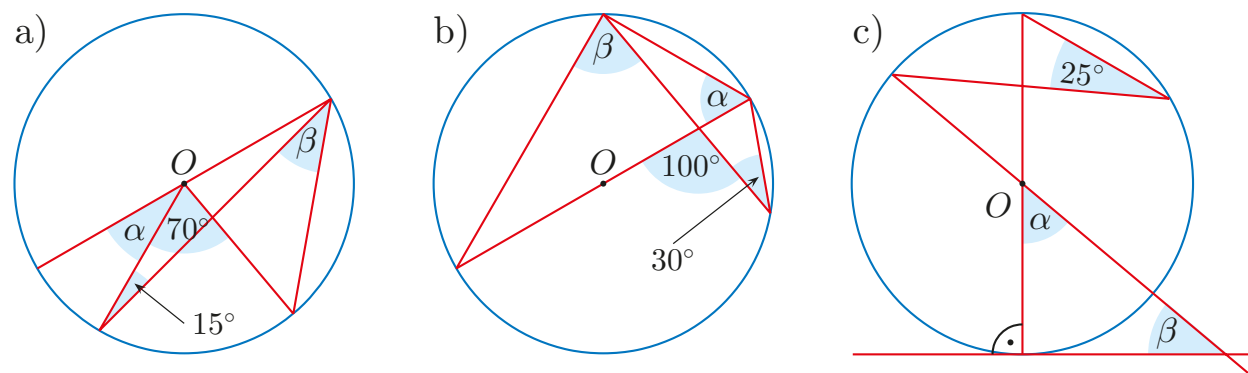
- Oblicz miary kątów α i β .



- Kąt β jest kątem wpisanym w okrąg opartym na tym samym łuku co kąt środkowy α . Oblicz miary kątów α i β .

- a) $\alpha + \beta = 111^\circ$ b) $\alpha = \beta + 56^\circ 30'$ c) $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta = 48^\circ$

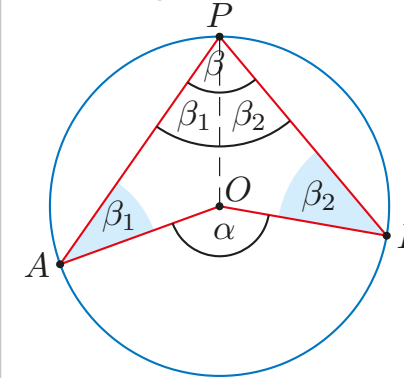
- Oblicz miary kątów α i β .



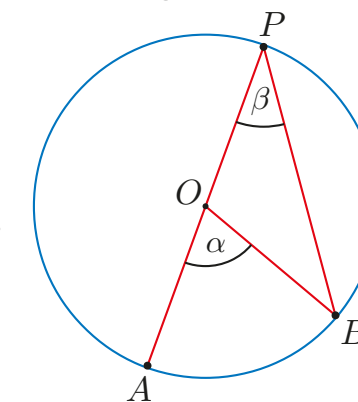
- Przeczytaj informację w ramce oraz dowód przypadku I, a następnie przeprowadź dowody przypadków II i III.

Aby udowodnić, że kąt środkowy α w okręgu ma miarę dwa razy większą od miary kąta wpisanego β opartego na tym samym łuku, wystarczy rozpatrzyć trzy przypadki.

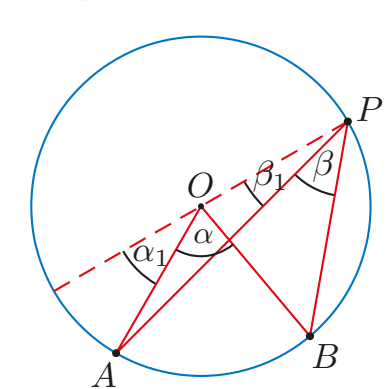
I. Środek O okręgu leży wewnątrz kąta wpisanego.



II. Środek O okręgu leży na ramieniu kąta wpisanego.



III. Środek O okręgu leży poza kątem wpisanym.



Dowód przypadku I

Z punktu P prowadzimy promień PO . Wówczas $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

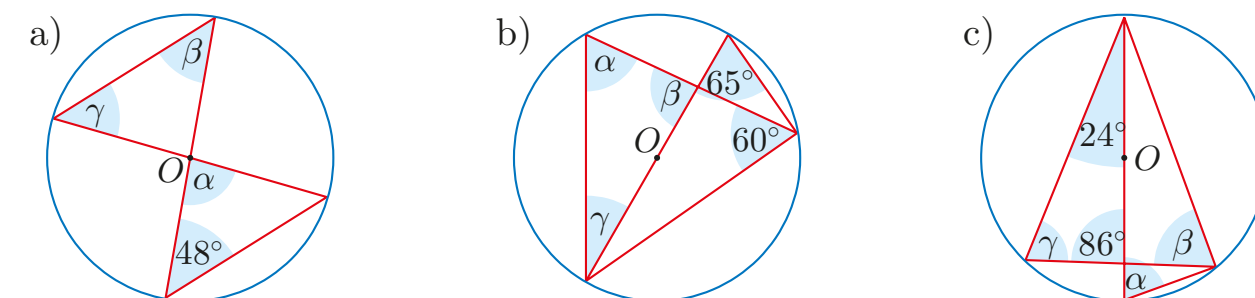
Wyznaczamy miarę kąta środkowego:

$$\alpha = 360^\circ - (180^\circ - 2\beta_1) - (180^\circ - 2\beta_2) = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$$

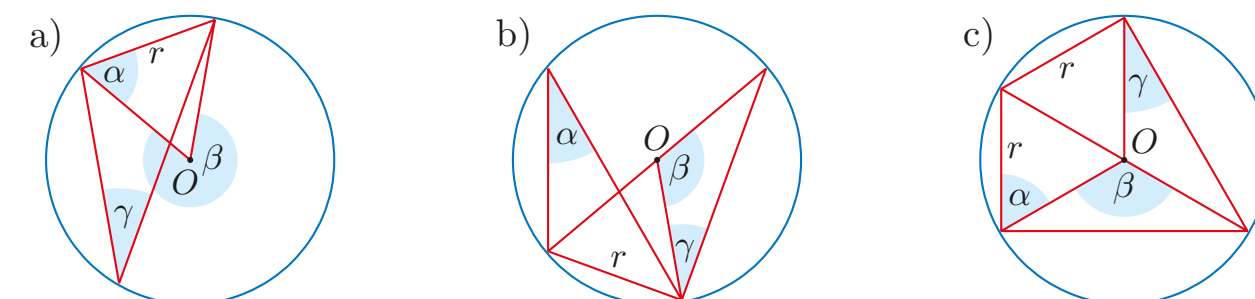
Wskazówka do przypadku III. Rozważ kąty $\alpha + \alpha_1$ i $\beta + \beta_1$.

Sprawdź się

- Oblicz miary kątów α , β i γ .



- Promień okręgu jest równy r . Oblicz miary kątów α , β i γ .

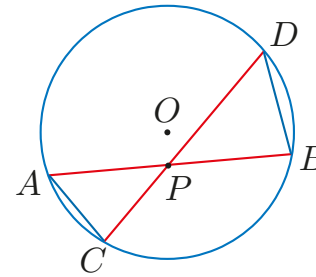


5.5. Kąty w okręgu (2)

Twierdzenie o cięciwach

Jeśli w okręgu dwie cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P , to:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$



Dowód

Kąty ACD i ABD są kątami wpisanymi opartymi na tym samym łuku, zatem $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ABD|$. Analogicznie uzasadniamy, że $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CDB|$. Również $|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle BPD|$ (uzasadnij), zatem na podstawie cechy KKK podobieństwa trójkątów stwierdzamy, że $\triangle APC \sim \triangle BPD$. Stąd otrzymujemy:

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|}$$

czyli $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

Przykład 1

Oblicz długość odcinka PB (rysunek obok).

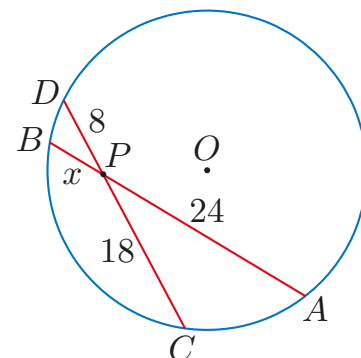
Na podstawie twierdzenia o cięciwach:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

czyli:

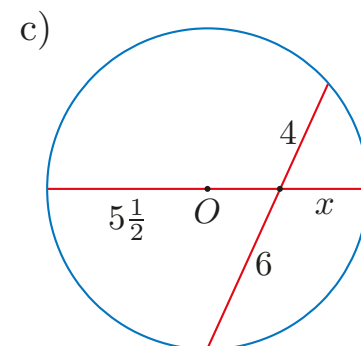
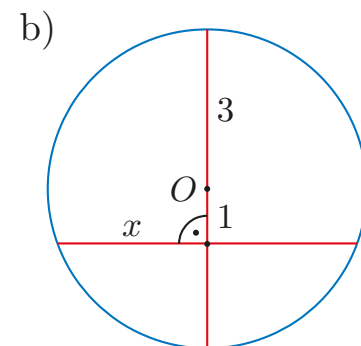
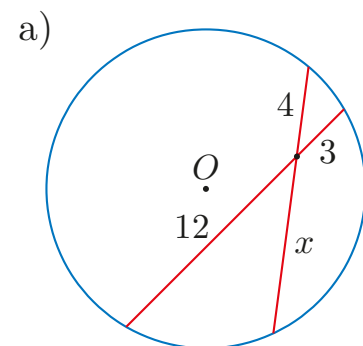
$$24 \cdot x = 18 \cdot 8$$

$$x = \frac{18 \cdot 8}{24} = 6$$



Ćwiczenie 1

Oblicz x .



Ćwiczenie 2

Średnica okręgu AB przecina cięciwę CD w punkcie P oraz $|PB| = 1$ cm, $|PC| = 2$ cm, $|PD| = 3$ cm. Oblicz długość tego okręgu.

Ćwiczenie 3

a) Dany jest okrąg o promieniu 11 cm. Przez punkt P , odległy od środka okręgu o 5 cm, poprowadzono cięciwę o długości 20 cm. Oblicz długości odcinków, na które punkt P dzieli cięciwę.

b) Cięciwa przecina średnicę okręgu pod kątem prostym i dzieli ją na odcinki o długościach 6 cm i 24 cm. Oblicz długość tej cięciwy.

Przykład 2

Prosta AP jest styczna do okręgu o środku O w punkcie A . Kąt PAB ma miarę 40° . Oblicz miarę kąta ACB .

Promień OA jest prostopadły do stycznej AP , zatem:

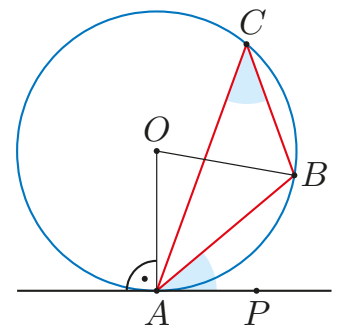
$$|\sphericalangle OAB| = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

Trójkąt AOB jest równoramienny, więc:

$$|\sphericalangle AOB| = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ$$

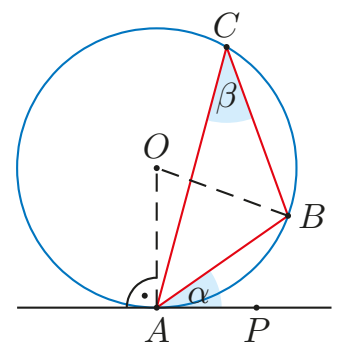
Kąt ACB jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy AOB , zatem:

$$|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2} |\sphericalangle AOB| = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$$



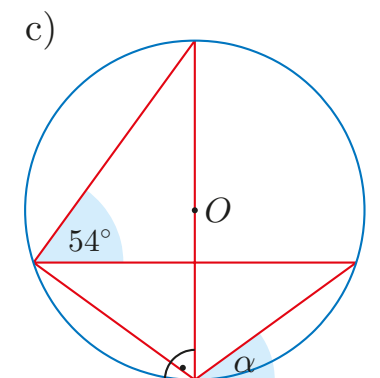
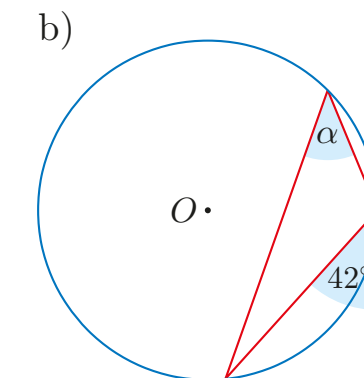
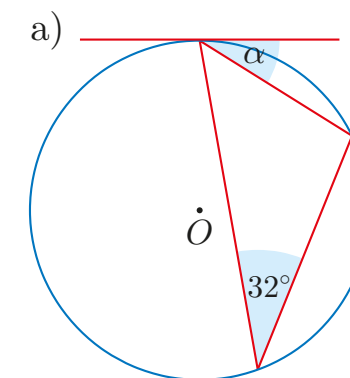
Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że kąty α i β na rysunku obok są równe, czyli że kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu opartemu na tej cięciwie.



Ćwiczenie 5

Wyznacz miarę kąta α .

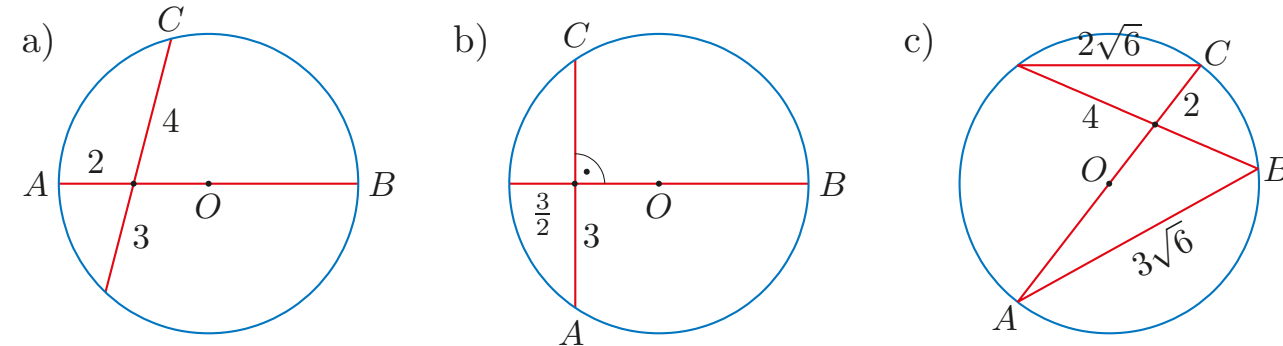


Ćwiczenie 6

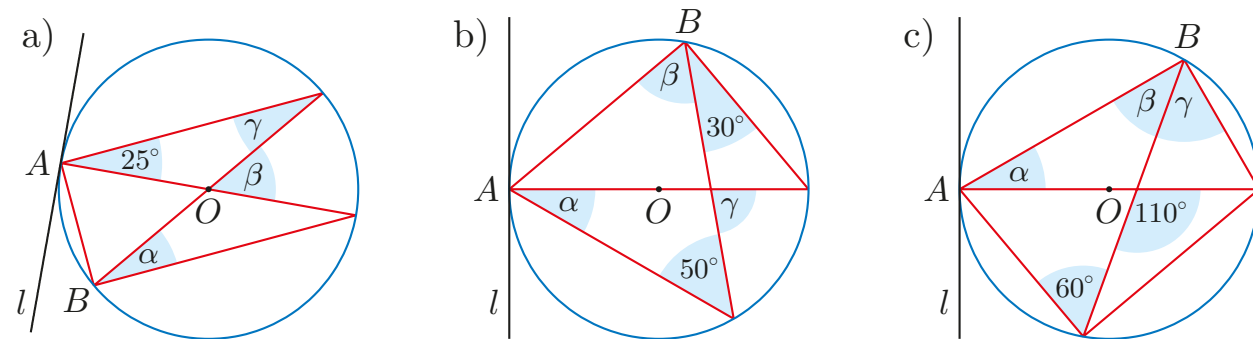
Wierzchołki trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB należą do okręgu. Kąt między bokiem BC a styczną do okręgu w punkcie B ma miarę 50° . Oblicz miary kątów tego trójkąta.

Zadania

1. Oblicz promień okręgu oraz pole trójkąta ABC .



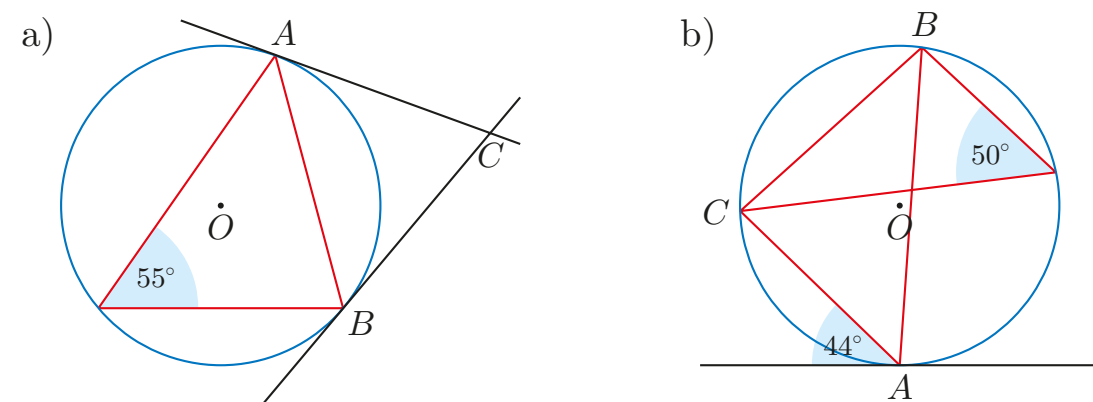
2. Wyznacz miary kątów α , β , γ oraz miarę kąta ostrego δ między cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie A .



3. a) W okręgu o środku O poprowadzono cięciwę AB . Jeden z kątów trójkąta AOB ma miarę 96° . Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną przez punkt A .
b) W okręgu o promieniu 6 cm poprowadzono cięciwę AB . Długość łuku $\widehat{AB}$ jest równa π cm. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną przez punkt B .

Sprawdź się

4. Proste przedstawione na rysunku są styczne do okręgu w odpowiednich punktach. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC .



5.6. Okrąg opisany na trójkącie

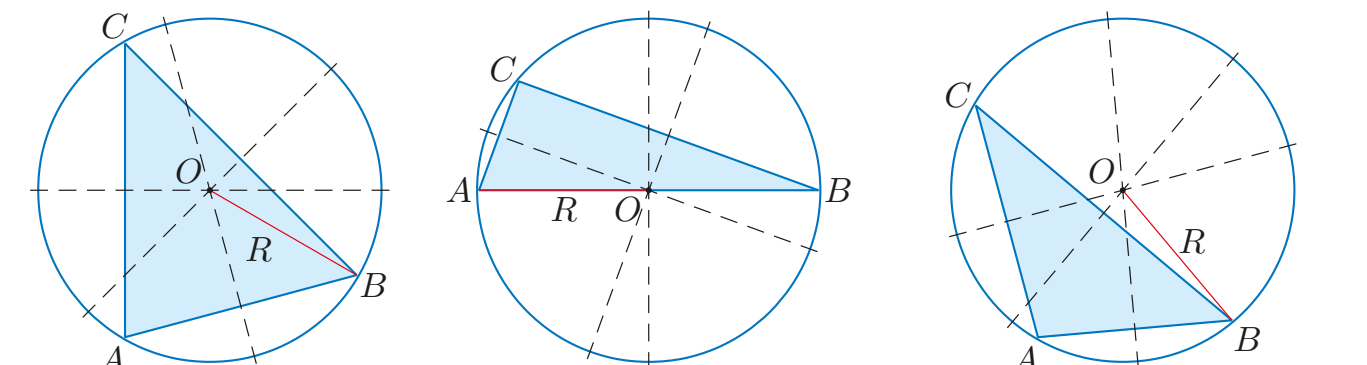
Okrąg nazywamy opisanym na trójkącie, jeżeli wszystkie wierzchołki trójkąta należą do okręgu. Mówimy też, że trójkąt jest wpisany w okrąg.

Środek okręgu opisanego na trójkącie to punkt równo odległy od wierzchołków tego trójkąta.

Na każdym trójkącie można opisać okrąg – mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.

Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.

Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży na zewnątrz tego trójkąta.

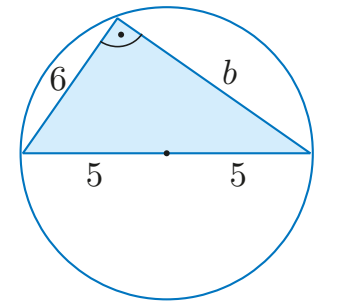
Przykład 1

Na trójkącie prostokątnym o jednej z przyprostokątnych długości 6 opisano okrąg o promieniu 5. Oblicz pole tego trójkąta.

Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej (jest ona średnicą tego okręgu), czyli przeciwprostokątna ma długość:

$$c = 2R = 2 \cdot 5 = 10$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $b^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, zatem $b = 8$, więc pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.



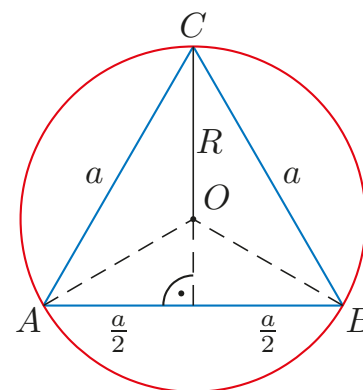
Ćwiczenie 1

- a) Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 7 cm i 12 cm.
b) Pole trójkąta prostokątnego jest równe 18 cm^2 . Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 4 cm. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.

Twierdzenie

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku a wyraża się wzorem:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



D Ćwiczenie 2

Udowodnij powyższe twierdzenie.

Ćwiczenie 3

Oblicz długość okręgu opisanego na trójkącie równobocznym:

- a) o obwodzie równym 45 cm, b) o polu równym $36\sqrt{3}$ cm².

Mówimy, że koło jest opisane na trójkącie, gdy jest na nim opisany okrąg ograniczający to koło.

Ćwiczenie 4

- a) Oblicz pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o polu $64\sqrt{3}$ cm².
b) Oblicz wysokość oraz pole trójkąta równobocznego, na którym opisano okrąg o promieniu 6 cm.

Przykład 2

W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę 30°, a podstawa ma długość 2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie oraz odległość środka tego okręgu od podstawy trójkąta.

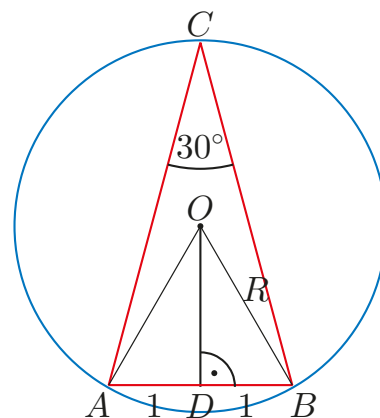
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Wówczas kąt AOB jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany ACB , czyli:

$$|\sphericalangle AOB| = 2|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$$

Zatem trójkąt AOB jest równoboczny, więc:

$$R = |OA| = |OB| = |AB| = 2$$

Odległość środka okręgu od podstawy trójkąta jest równa $|OD|$, a odcinek OD jest wysokością trójkąta równobocznego: $|OD| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.



Ćwiczenie 5

- a) W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę 45°, a podstawa ma długość 4 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
b) W okrąg o promieniu 5 cm jest wpisany trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta. Rozpatrz dwa przypadki.

Poniższe twierdzenie pokazuje, jaka zależność łączy ze sobą długości boków trójkąta, jego pole oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Twierdzenie

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wpisanego w okrąg o promieniu R wyraża się wzorem:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

Przykład 3

- a) Oblicz pole trójkąta o bokach długości 9 cm, 10 cm, 17 cm wpisanego w okrąg o promieniu równym $\frac{85}{8}$ cm.

$$P = \frac{abc}{4R} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 17}{4 \cdot \frac{85}{8}} = 36 \text{ [cm}^2\text{]}$$

- b) Dany jest trójkąt o bokach długości 10 cm, 17 cm, 21 cm i polu równym 84 cm². Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{10 \cdot 17 \cdot 21}{4 \cdot 84} = 10\frac{5}{8} \text{ [cm]}$$

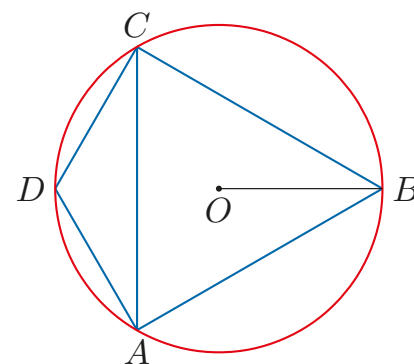
Ćwiczenie 6

- a) Oblicz pole trójkąta o bokach długości 4 cm, 13 cm, 15 cm wpisanego w okrąg o promieniu równym $\frac{65}{8}$ cm.
b) Dany jest trójkąt o bokach długości 13 cm, 14 cm, 15 cm i polu równym 84 cm². Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

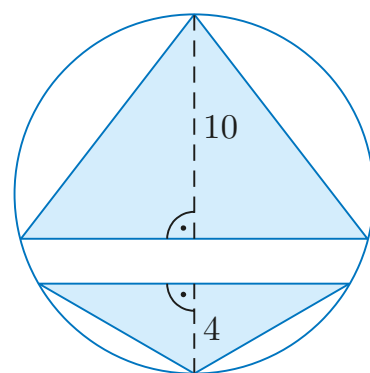
Zadania

- Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym w przypadku, gdy:
 - pole tego trójkąta wynosi 8 cm², a wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa 2 cm,
 - krótsza przyprostokątna tego trójkąta ma długość 5 cm, a jeden z jego kątów ostrych jest dwa razy większy od drugiego,
 - jest to trójkąt równoramienny, a jego obwód wynosi 6 cm.
- Oblicz obwód trójkąta prostokątnego wpisanego w okrąg o promieniu 5 w przypadku, gdy:
 - jest to trójkąt równoramienny,
 - jedna przyprostokątna tego trójkąta jest trzy razy dłuższa od drugiej.
- Odległości środka okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym od jego przyprostokątnych są równe 4 i 6. Oblicz pole tego trójkąta.

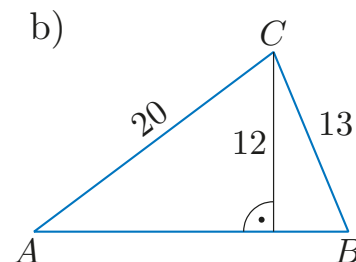
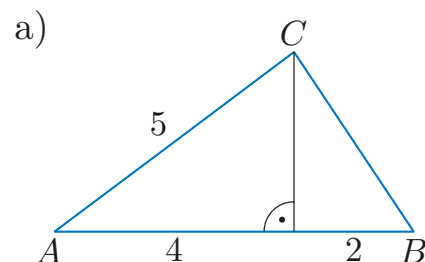
4. W okrąg o promieniu $4\sqrt{3}$ wpisano trójkąt równoboczny ABC i trójkąt równoramienny ACD (rysunek obok). Oblicz pole czworokąta $ABCD$.



5. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie 8 cm w przypadku, gdy:
- ramię tego trójkąta ma długość $4\sqrt{5}$ cm,
 - sinus kąta przy podstawie jest równy $\frac{3}{5}$.
6. Do podstawy trójkąta równoramiennego poprowadzono wysokość h . Opisany na nim okrąg ma promień równy 13 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.
- $h = 20$ cm
 - $h = 6$ cm



7. Na rysunku obok przedstawiono trójkąty równoramienne wpisane w okrąg o promieniu 8. Oblicz stosunek pól tych trójkątów.
8. Trójkąt równoramienny o kącie między ramionami równym 120° jest wpisany w okrąg o promieniu 4. Oblicz pole tego trójkąta.
9. Oblicz pole trójkąta ABC oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.



Sprawdź się

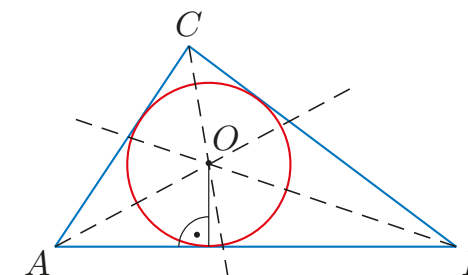
10. Pole koła opisanego na trójkącie prostokątnym jest równe 25π , a stosunek długości jego przyprostokątnych wynosi 1:7. Oblicz pole tego trójkąta.
11. Trójkąt prostokątny ma pole równe 45, a wysokość tego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją w stosunku 1:4. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.
12. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie w przypadku, gdy wysokość opuszczona na jego podstawę ma długość: a) 10 cm, b) 3 cm.

5.7. Okrąg wpisany w trójkąt

Okrąg nazywamy wpisanym w trójkąt, jeżeli wszystkie boki trójkąta są styczne do tego okręgu. Mówimy też, że trójkąt jest opisany na okręgu. Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest równo odległy od boków tego trójkąta. W każdy trójkąt można wpisać okrąg – mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

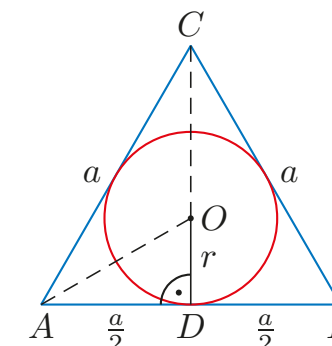


Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest równy $\frac{1}{3}$ wysokości tego trójkąta.

Twierdzenie

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a wyraża się wzorem:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



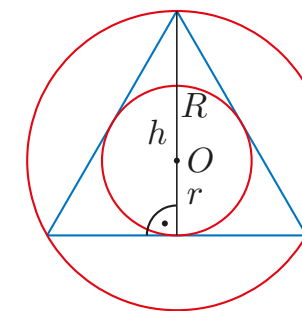
Dowód

Odcinek AO (rysunek powyżej) jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC , czyli $|\angle OAD| = 30^\circ$. Zatem $\frac{r}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg} |\angle OAD| = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, stąd $r = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ćwiczenie 1

- Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 18.
- Oblicz obwód trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o długości 10π .
- Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o polu $81\sqrt{3}$.

Zwróć uwagę na okrąg wpisany w trójkąt równoboczny i okrąg opisany na tym trójkącie – mają one wspólny środek (punkt O na rysunku obok). Punkt ten dzieli wysokość h trójkąta równobocznego w stosunku 2:1, gdy liczymy od wierzchołka, czyli $R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Ćwiczenie 2

Oblicz sumę długości okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o obwodzie równym 36 cm i okręgu opisanego na tym trójkącie.

Przykład 1

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 i 12.

Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

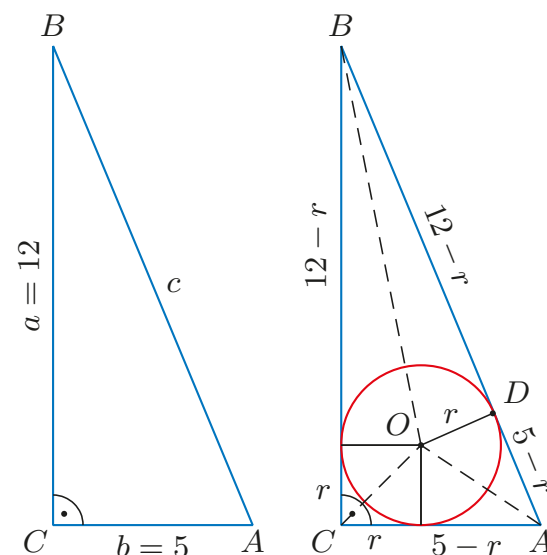
$$c = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Przy oznaczeniach jak na rysunku obok:

$$|AD| = 5 - r \text{ i } |BD| = 12 - r$$

Zatem $(5 - r) + (12 - r) = 13$.

Stąd otrzymujemy $r = 2$.



Przykład 2

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 9 i 12.

Oznaczmy $a = 9$ i $b = 12$. Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$$

Obwód trójkąta jest równy $a + b + c = 36$, a pole $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$. Przekształcamy wzór na pole trójkąta $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt:

$$r = \frac{2P}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 54}{36} = \frac{108}{36} = 3$$

Promień r okręgu wpisanego w trójkąt o bokach a , b , c oraz polu P wyraża się wzorem:

$$r = \frac{2P}{a+b+c}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości: a) 3 i 4, b) 7 i 24.

Ćwiczenie 4

a) Na okręgu o promieniu 4 cm opisano trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 10 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

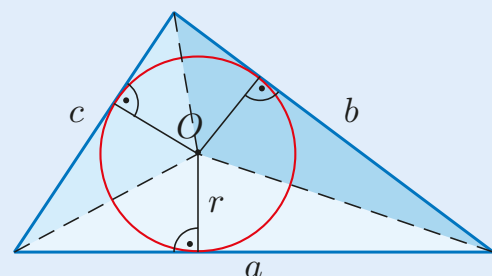
b) Na okręgu o promieniu 2 cm opisano trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 10 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Poniższe twierdzenie pokazuje, jaka zależność łączy ze sobą obwód trójkąta, jego pole oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe iloczynowi połowy obwodu tego trójkąta i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$



Uwaga. Jeśli przez p oznaczmy połowę obwodu trójkąta: $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, to $P = p \cdot r$.

Ćwiczenie 5

Uzasadnij podany wzór na pole trójkąta, korzystając z powyższego rysunku.

Ćwiczenie 6

Oblicz pole trójkąta o bokach 5, 5 i 6 opisanego na okręgu długości 3π .

Ćwiczenie 7

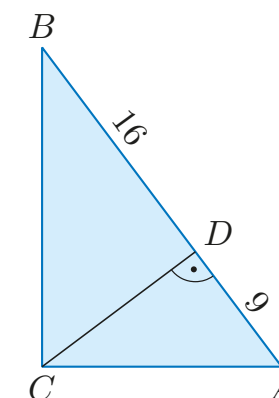
Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości: a) 12 i 16, b) 1 i 1, c) 10 i 24, d) 2 i $\sqrt{5}$.

Mówimy, że koło jest wpisane w trójkąt, gdy jest w niego wpisany okrąg ograniczający to koło.

Ćwiczenie 8

Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego trójkąta ABC dzieli jego przeciwprostokątną na odcinki o długościach 9 i 16.

- D** a) Uzasadnij, że trójkąty ABC , ACD i CBD są podobne.
b) Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt ABC .
c) Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt ACD oraz promień i pole koła wpisanego w trójkąt CBD .



Zadania

- D** 1. a) Uzasadnij, że pole trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem $P = \frac{3}{2}ar$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.
b) Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie równobocznym o boku a do pola koła wpisanego w ten trójkąt.
2. a) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 8, a jeden z kątów ostrych ma miarę 30° . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
b) Krótsza przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 6, a jeden z kątów ma miarę 60° . Oblicz długość okręgu wpisanego w ten trójkąt.

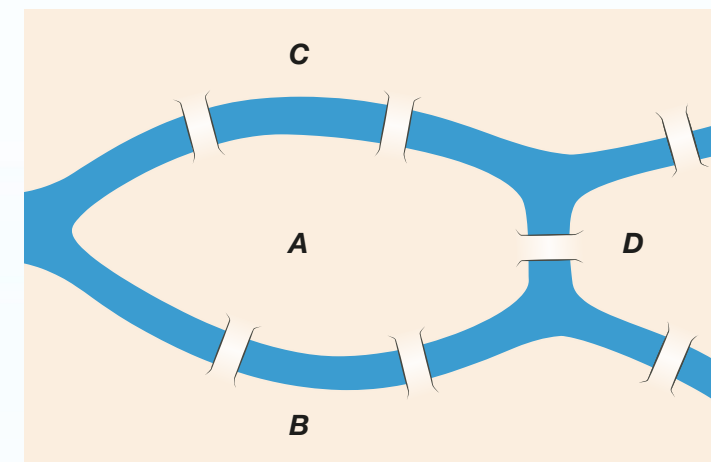
3. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość x , a jego ramię – długość y . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- a) $x = 12, y = 10$ b) $x = 10, y = 13$
4. a) Na okręgu o promieniu 3 opisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami równym 120° . Oblicz długości boków tego trójkąta.
b) W trójkąt równoramienny o kącie przy podstawie równym 30° wpisano okrąg o promieniu 2. Oblicz pole tego trójkąta.
5. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm i wysokości 4 cm wpisano koło oraz w trójkąt równoramienny o podstawie długości 8 cm i wysokości 3 cm wpisano koło. Oblicz różnicę pól tych kół.
6. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 4 cm i ramieniu długości 6 cm wpisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu oraz odległości środka okręgu od wierzchołków tego trójkąta.
7. W trójkąt wpisano okrąg o promieniu 4. Jeden z boków tego trójkąta został podzielony przez punkt styczności okręgu na odcinki o długościach 4 i $4\sqrt{3}$. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.
- D** 8. Uzasadnij, że promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b oraz przeciwprostokątnej c wyraża się wzorem:
- $$r = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

Sprawdź się

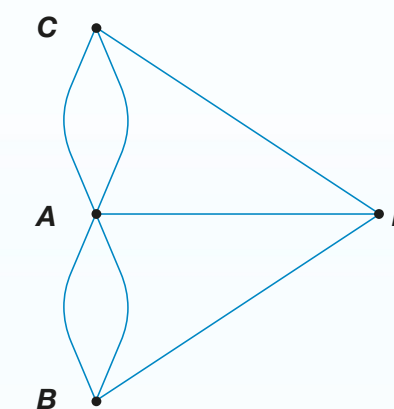
9. Pierścień kołowy ograniczony okręgiem opisanym na trójkącie równobocznym i okręgiem w niego wpisanym ma pole równe 16π . Oblicz obwód tego trójkąta.
10. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny w przypadku, gdy:
- a) jego przyprostokątne mają długości 7 cm i 1 cm,
b) miara jednego z jego kątów ostrych wynosi 30° , a długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta jest równa 8 cm,
c) środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość 5 cm, a stosunek długości przyprostokątnych wynosi 1 : 2.
11. W trójkąt równoramienny, którego podstawa ma długość 12 cm, a pole jest równe 24 cm^2 , wpisano okrąg. Oblicz obwód trójkąta i długość tego okręgu.
12. W trójkąt równoramienny, którego obwód jest równy $(12 + 6\sqrt{3}) \text{ cm}$, a kąt przy podstawie ma miarę 30° , wpisano okrąg. Oblicz długość tego okręgu.

Problem mostów królewieckich

W XVIII w. w Królewcu, mieście nad Pregolą, było aż siedem mostów. Czy można było przejść kolejno przez wszystkie mosty tak, aby każdy z nich przekroczyć tylko raz i wrócić do miejsca, z którego się wyruszyło? Na to pytanie odpowiedział w 1736 r. Leonhard Euler [czyt. leonard ojler], a zaproponowane przez niego rozwiązanie zapoczątkowało rozwój teorii grafów.



Układ mostów w XVIII-wiecznym Królewcu: jeden most łączy dwie wyspy (oznaczone A i D), sześć mostów łączy te wyspy z resztą miasta (litery B i C).



Układ mostów przedstawiony za pomocą grafu. Części miasta oznaczone na mapie jako A, B, C i D są wierzchołkami, a mosty – krawędziami grafu.

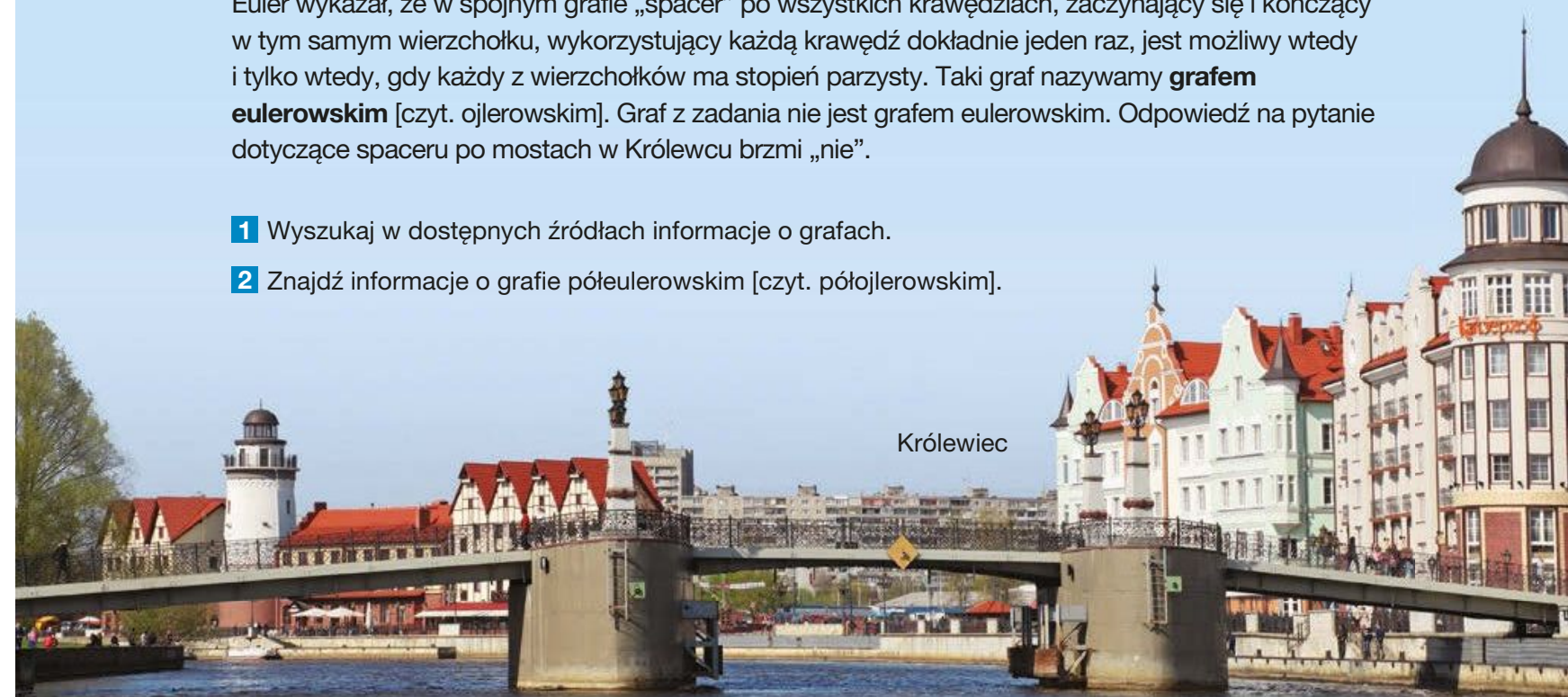
Stopniem wierzchołka grafu nazywamy liczbę krawędzi wychodzących z tego wierzchołka.

W powyższym grafie stopień wierzchołka A jest równy 5, a stopnie wierzchołków B, C i D są równe 3. Jest to przykład **grafu spójnego**, w którym między dwoma dowolnymi wierzchołkami wiedzie droga prowadząca po jego krawędziach.

Euler wykazał, że w spójnym grafie „spacer” po wszystkich krawędziach, zaczynający się i kończący w tym samym wierzchołku, wykorzystujący każdą krawędź dokładnie jeden raz, jest możliwy wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z wierzchołków ma stopień parzysty. Taki graf nazywamy **grafem eulerowskim** [czyt. ojlerowskim]. Graf z zadania nie jest grafem eulerowskim. Odpowiedź na pytanie dotyczące spaceru po mostach w Królewcu brzmi „nie”.

1 Wyszukaj w dostępnych źródłach informacje o grafach.

2 Znajdź informacje o grafie póeulerowskim [czyt. póojlerowskim].



5.8. Wielokąty foremne

Wielokątem foremnym nazywamy wielokąt, który ma wszystkie boki równe oraz wszystkie kąty równe.

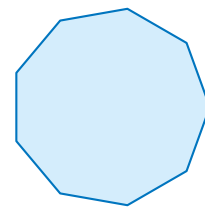
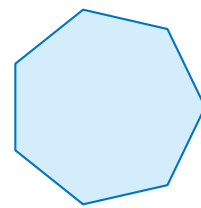
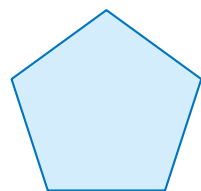
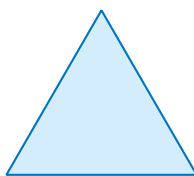
Ćwiczenie 1

Narysuj czworokąt oraz sześciokąt niebędące wielokątami foremnymi, które mają równe wszystkie: a) boki, b) kąty.

Ćwiczenie 2

Ile osi symetrii ma przedstawiony wielokąt foremny?

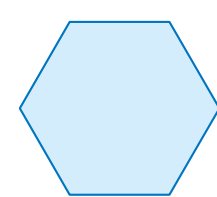
- a) trójkąt c) pięciokąt e) siedmiokąt g) dziewięciokąt



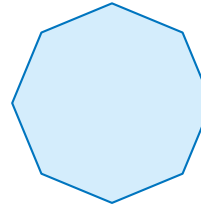
- b) kwadrat



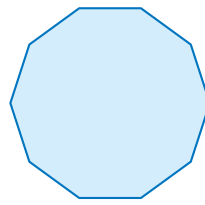
- d) sześciokąt



- f) ośmiokąt



- h) dziesięciokąt



Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia symetralnych boków tego wielokąta.

Mówimy, że koło jest opisane na wielokącie, gdy jest na nim opisany okrąg ograniczający to koło.

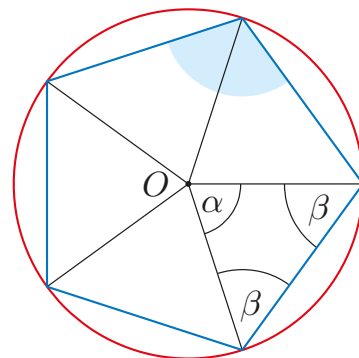
Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O opisany na pięciokącie foremnym. Oblicz miarę kąta wewnętrznego tego pięciokąta.

Kąt α ma miarę $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, czyli:

$$\beta = \frac{1}{2}(180^\circ - 72^\circ) = 54^\circ$$

Zatem kąt wewnętrzny ma miarę równą $2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$.

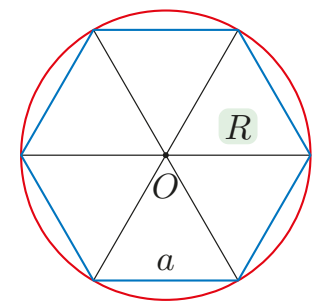


D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że kąt wewnętrzny n -kąta foremnego ma miarę równą $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O opisany na sześciokącie foremnym o boku a . Zauważ, że dłuższe przekątne sześciokąta dzielą go na sześć przystających trójkątów równobocznych. Zatem promień okręgu opisanego na sześciokącie foremnym ma długość równą długości boku sześciokąta:

$$R = a$$



Ćwiczenie 4

a) Oblicz długość okręgu opisanego na sześciokącie foremnym o polu $150\sqrt{3}$.

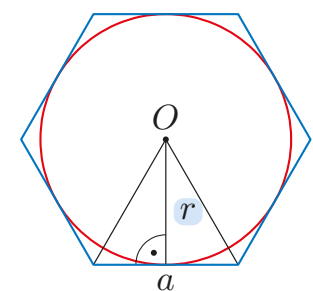
b) Oblicz pole sześciokąta foremnego wpisanego w koło o polu 32π .

W dowolny wielokąt foremny można wpisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów tego wielokąta.

Mówimy, że koło jest wpisane w wielokąt, gdy jest w niego wpisany okrąg ograniczający to koło.

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O wpisany w sześciokąt foremny o boku a . Promień tego okręgu wyraża się wzorem:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Ćwiczenie 5

a) Oblicz pole koła wpisanego w sześciokąt foremny o obwodzie 54 cm.

b) Oblicz długości przekątnych sześciokąta foremnego opisanego na okręgu o długości 12π cm.

D Ćwiczenie 6

Dany jest n -kąć foremny o boku długości a opisany na okręgu o promieniu r . Uzasadnij, że pole tego wielokąta jest równe $\frac{1}{2}n \cdot a \cdot r$.

Zadania

1. Oblicz miarę kąta wewnętrznego:

- a) ośmiokąta foremnego, b) dziesięciokąta foremnego.

2. Ile boków ma wielokąt foremny, którego suma miar kątów wewnętrznych jest równa: a) 720° , b) 900° , c) 1260° , d) 1440° , e) 1620° ?

3. Wyznacz różnicę między polem koła opisanego na podanym wielokącie oraz polem koła wpisanego w ten wielokąt.

- a) kwadrat o boku a b) sześciokąt foremny o boku a

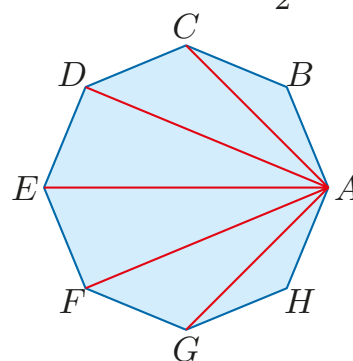
4. Sześciokąt foremny ma bok długości a i pole P . Promień okręgu opisanego na tym sześciokącie jest równy R , a promień okręgu w niego wpisanego jest równy r . Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

a	R	r	P
4 cm	?	?	?
?	6 cm	?	?
?	?	?	16 cm ²
?	?	12 cm	?

5. a) Podaj liczbę przekątnych sześciokąta foremnego.

D b) Uzasadnij, że liczba przekątnych dowolnego n -kąta jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$.

6. Przekątne ośmiokąta foremnego poprowadzone z jednego wierzchołka podzieliły ten ośmiokąt na sześć trójkątów (rysunek obok). Wyznacz miary kątów tych trójkątów.



D 7. Uzasadnij, że pole ośmiokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 jest równe $2\sqrt{2}$.

D 8. Dany jest n -kąt foremny o boku długości 2 cm. Uzasadnij, że różnica między polem koła opisanego na tym wielokącie i polem koła wpisanego w ten wielokąt jest równa π cm² niezależnie od liczby boków wielokąta.

Sprawdź się

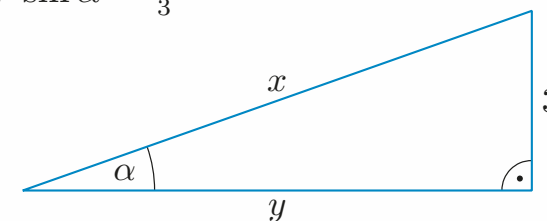
9. Oblicz obwód sześciokąta foremnego o polu równym $96\sqrt{3}$ cm².
10. Suma długości przekątnych wychodzących z jednego wierzchołka sześciokąta foremnego jest równa $12(\sqrt{3} + 1)$ cm. Oblicz pole tego sześciokąta.
11. a) Pole sześciokąta foremnego jest równe $12\sqrt{3}$ cm². Oblicz różnicę długości okręgu opisanego na tym sześciokącie i okręgu wpisanego w ten sześciokąt.
b) Promień okręgu wpisanego w sześciokąt foremny jest równy 1 cm. Oblicz obwód i pole tego sześciokąta.
12. Punkty A i B są kolejnymi wierzchołkami n -kąta foremnego. Styczna do okręgu opisanego na tym n -kącie przechodząca przez punkt A tworzy z bokiem AB kąt α . Wyznacz ten kąt dla:
- a) $n = 8$, b) $n = 10$, c) $n = 12$.

Przypomnij sobie

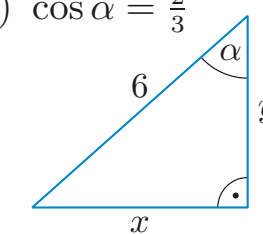
Wykorzystanie funkcji trygonometrycznych

1. Oblicz x i y .

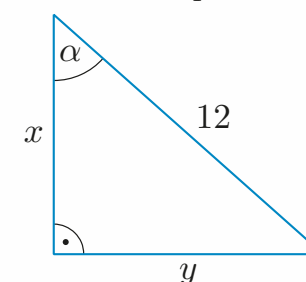
a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$



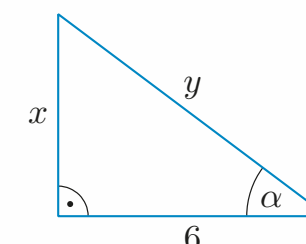
c) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$



b) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$

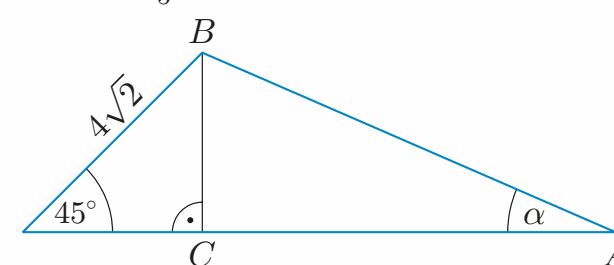


d) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

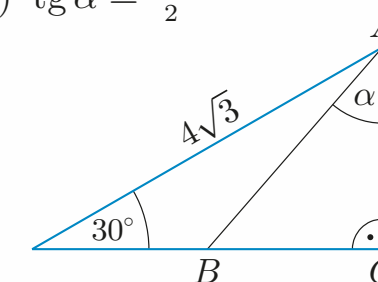


2. Oblicz pole i obwód trójkąta ABC .

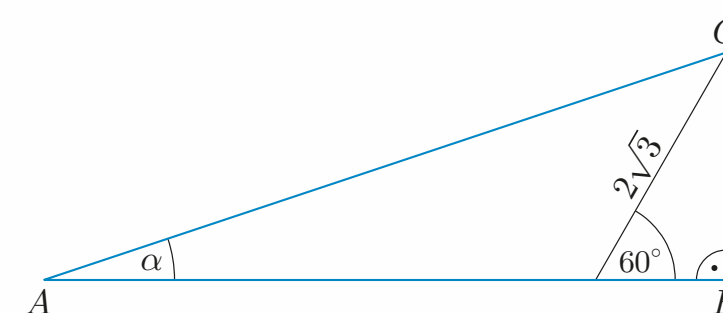
a) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$



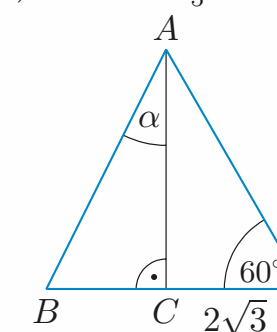
c) $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$



b) $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

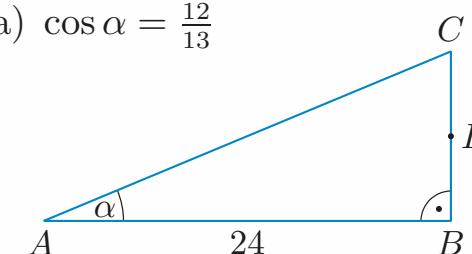


d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

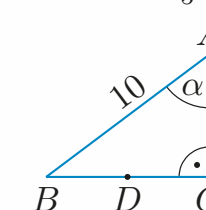


3. Oblicz długość środkowej AD trójkąta ABC .

a) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$



b) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$



5.9. Twierdzenie cosinusów (1)

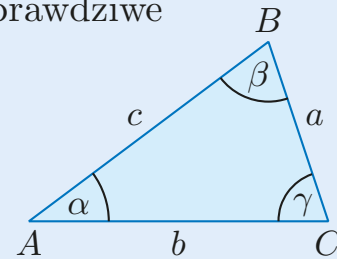
Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta (oznaczenia jak na rysunku) prawdziwe są następujące zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Dowód. Udowodnimy zależność $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. (Pozostałych dwóch zależności dowodzi się analogicznie). Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt γ . Rozpatrzmy dwa z nich (przypadek trzeci – patrz ćwiczenie 1.).

1° Kąt γ jest kątem prostym, czyli trójkąt ABC jest prostokątny.

Wówczas $\cos \gamma = 0$ i równość przybiera postać $c^2 = a^2 + b^2$ – jest ona prawdziwa na podstawie twierdzenia Pitagorasa.

2° Kąt γ jest kątem ostrym (rysunek poniżej).

Dowód przeprowadzimy przy założeniu, że $\sphericalangle BAC$ jest ostry. Z wierzchołka B opuszczamy wysokość h . Punkt D dzieli bok AC na dwa odcinki o długościach:

$$|DC| = a \cos \gamma, \quad |AD| = b - a \cos \gamma$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów CBD oraz ABD i otrzymujemy odpowiednio:

$$h^2 = a^2 - (a \cos \gamma)^2 \quad \text{oraz} \quad h^2 = c^2 - (b - a \cos \gamma)^2$$

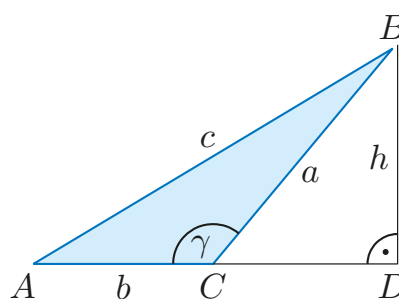
Zatem:

$$c^2 - (b - a \cos \gamma)^2 = a^2 - (a \cos \gamma)^2$$

$$c^2 - b^2 + 2ab \cos \gamma - a^2 \cos^2 \gamma = a^2 - a^2 \cos^2 \gamma$$

Ostatecznie $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Uwaga. W tym podręczniku, jeżeli nie jest powiedziane inaczej, przyjmujemy oznaczenia wierzchołków, boków i kątów trójkąta jak na rysunku przy twierdzeniu.



Ćwiczenie 1

Udowodnij, że $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ w przypadku, gdy γ jest kątem rozwartym (rysunek obok).

Wskazówka. Zauważ, że $|CD| = a \cos(180^\circ - \gamma)$, a następnie wyznacz h^2 , korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCD oraz dla trójkąta BAD .

Przykład 1

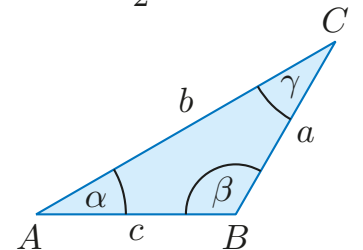
Uzasadnij, że trójkąt o bokach $a = 2\sqrt{3}$, $b = 6$ i kącie $\gamma = 30^\circ$ jest równoramienny. Oblicz miary pozostałych kątów tego trójkąta.

Aby obliczyć długość boku c , korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$c^2 = (2\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ = 12 + 36 - 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$$

Stąd $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Zatem jest to trójkąt równoramienny. Z twierdzenia cosinusów wynika, że $\cos \beta < 0$ (sprawdź), zatem β jest kątem rozwartym. Stąd $\alpha = 30^\circ$ oraz $\beta = 120^\circ$.



Ćwiczenie 2

Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC .

a) $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 60^\circ$

c) $a = 3$, $c = 2\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$

b) $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 150^\circ$

d) $b = 3$, $c = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 135^\circ$

Twierdzenie cosinusów pozwala również wyznaczyć kąty trójkąta, gdy dane są długości wszystkich jego boków.

Przykład 2

Wyznacz miary kątów trójkąta o bokach $a = 6$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{10}$.

Wyznaczamy miarę kąta γ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{36 + 18 - 90}{36\sqrt{2}} = -\frac{36}{36\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem $\gamma = 135^\circ$.

Wyznaczamy miarę kąta α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

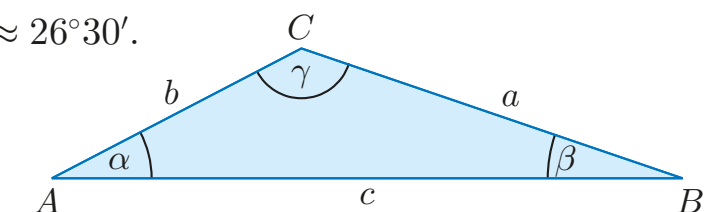
Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18 + 90 - 36}{18\sqrt{20}} = \frac{72}{36\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,8944$$

Z tablic (str. 251) odczytujemy: $\alpha \approx 26^\circ 30'$.

Wyznaczamy miarę kąta β :

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \approx 18^\circ 30'$$



Ćwiczenie 3

Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

a) $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $a = \sqrt{2}$, $b = 2$, $c = 1 + \sqrt{3}$

Zadania

- Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC .
 - $a = 4, b = \sqrt{3}, \gamma = 30^\circ$
 - $b = 5, c = 3\sqrt{2}, \alpha = 45^\circ$
 - $a = 2, b = 6, \gamma = 120^\circ$
 - $a = 2\sqrt{3}, c = 4, \beta = 150^\circ$
- Dane są długości a, b dwóch sąsiednich boków równoległoboku oraz kąt γ zawarty między tymi bokami. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.
 - $a = 2, b = 4\sqrt{3}, \gamma = 30^\circ$
 - $a = 4, b = 2\sqrt{2}, \gamma = 45^\circ$
 - $a = 5, b = 3, \gamma = 60^\circ$
 - $a = 6, b = 8, \gamma = 120^\circ$
- Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.
 - $a = 2\sqrt{3}, b = 4\sqrt{3}, c = 6$
 - $a = \sqrt{6}, b = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{3} + 3$
-  Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.
 - $a = 2, b = 3, c = 4$
 - $a = 3, b = 5, c = 7$
- Jeden z boków trójkąta jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt zawarty między nimi jest równy 60° . Trzeci bok tego trójkąta ma długość 7. Oblicz długości dwóch pozostałych boków.
 - Jeden z boków trójkąta jest czterokrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt zawarty między nimi jest równy 120° . Trzeci bok tego trójkąta ma długość 21. Oblicz długości dwóch pozostałych boków.
- Oblicz $\cos \gamma, \sin \gamma$ i pole trójkąta ABC .
 - $a = 3, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{5}$
 - $a = 2, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{3}$

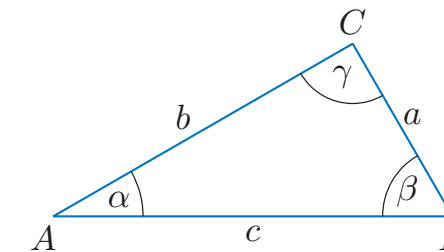
Sprawdź się

- Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC .
 - $a = 6, b = 8, \cos \gamma = \frac{1}{3}$
 - $a = 5, c = 10, \cos \beta = -\frac{2}{5}$
 - $c = \sqrt{3}, b = 6, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$
 - $a = 4, c = 5, \cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$
- Oblicz miarę kąta β trójkąta ABC .
 - $a = 5, b = \sqrt{19}, c = 3$
 - $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{10}, c = 2$
- Dane są długości dwóch boków trójkąta ABC : $a = 6, b = 10$ oraz wiadomo, że $\sin \gamma = \frac{4}{5}$. Oblicz długość boku c w przypadku, gdy kąt γ jest:
 - ostry,
 - rozwarty.

5.10. Twierdzenie cosinusów (2)

Przykład 1

Kąty trójkąta ABC (rysunek obok) spełniają zależność $\alpha < \beta < \gamma$, a jego boki – zależność $a < b < c$.



Twierdzenie

W trójkącie naprzeciwko większego kąta leży dłuższy bok.

Ćwiczenie 1

Boki trójkąta mają długości 6, $3\sqrt{2}$, $3 + 3\sqrt{3}$, a kąty mają miary 30° , 45° i 105° . Podaj długość boku leżącego naprzeciwko kąta: a) 30° , b) 105° .

Przykład 2

Dwa dłuższe boki trójkąta mają długości 4 i $3\sqrt{3}$, a najmniejszy kąt ma miarę 30° . Oblicz długość najkrótszego boku trójkąta.

Oznaczmy przez c długość najkrótszego boku trójkąta – bok ten leży naprzeciwko kąta 30° .

Korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$\begin{aligned} c^2 &= 4^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = \\ &= 16 + 27 - 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7 \end{aligned}$$

Zatem $c = \sqrt{7}$.

Ćwiczenie 2

- Oblicz długość najkrótszego boku trójkąta, którego dwa dłuższe boki mają długości $3\sqrt{2}$ cm i 5 cm, a najmniejszy kąt ma miarę 45° .
- Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, którego dwa krótsze boki mają długości 2 cm i $2\sqrt{3}$ cm, a jeden z kątów ma miarę 150° .

Ćwiczenie 3

- Suma miar dwóch kątów trójkąta ostrokątnego jest równa 135° , a jego dwa dłuższe boki mają długości $3\sqrt{2}$ cm i $(3 + \sqrt{3})$ cm. Oblicz długość najkrótszego boku tego trójkąta.
- Dwa kąty trójkąta mają miary 15° i 45° , a jego dwa krótsze boki mają długości 2 cm i $(\sqrt{3} - 1)$ cm. Oblicz długość najdłuższego boku tego trójkąta.

Przykład 3

Dany jest trójkąt o bokach 2, 3 i 4. Kąt α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, a kąt γ – największym. Oblicz $\cos \alpha$ oraz $\cos \gamma$.

Kąt α leży naprzeciwko najkrótszego boku trójkąta, a kąt γ – naprzeciwko najdłuższego. Na podstawie twierdzenia cosinusów:

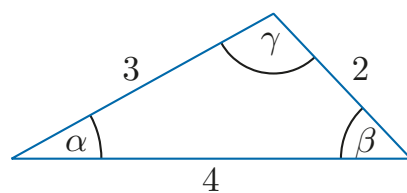
$$2^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \alpha = 25 - 24 \cos \alpha$$

$$\text{Stąd } \cos \alpha = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}.$$

Podobnie:

$$4^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos \gamma = 13 - 12 \cos \gamma$$

$$\text{Zatem } \cos \gamma = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}.$$



Ćwiczenie 4

Dany jest trójkąt o bokach 3, 5 i 6. Kąt α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, a γ – największym. Oblicz $\cos \alpha$ oraz $\cos \gamma$.

D Przykład 4

a) Wykaż, że trójkąt o bokach długości $a = 4$, $b = 6$ i $c = 9$ jest rozwartokątny.

Bok c jest najdłuższym bokiem trójkąta, zatem kąt γ jest jego największym kątem. Obliczamy $\cos \gamma$, korzystając z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4^2 + 6^2 - 9^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{-29}{48}$$

Otrzymaliśmy $\cos \gamma < 0$, więc $\gamma \in (90^\circ; 180^\circ)$. Oznacza to, że trójkąt jest rozwartokątny.

b) Wykaż, że trójkąt o bokach długości $a = 9$, $b = 7$ i $c = 6$ jest ostrokątny.

Bok a jest najdłuższym bokiem trójkąta, zatem kąt α jest jego największym kątem. Obliczamy $\cos \alpha$, korzystając z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 6^2 - 9^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

Otrzymaliśmy $\cos \alpha > 0$, więc $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$. Największy kąt trójkąta jest kątem ostrym, co oznacza, że trójkąt jest ostrokątny.

Ćwiczenie 5

Oblicz cosinus kąta leżącego naprzeciw najdłuższego boku trójkąta o podanych bokach. Czy trójkąt ten jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny?

a) $a = 8$, $b = 7$, $c = 5$

c) $a = 10$, $b = 11$, $c = 4$

b) $a = 25$, $b = 7$, $c = 24$

d) $a = 6$, $b = 20$, $c = 21$

Zadania

- Oblicz cosinus największego kąta trójkąta o podanych bokach. Czy środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz trójkąta?
a) $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$ c) $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = 1$
b) $a = 10$, $b = 7$, $c = 5$ d) $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$
- Boki trójkąta mają długości 5, 6 i 7. Oblicz:
a) cosinus kąta leżącego naprzeciwko najdłuższego boku,
b) długość środkowej poprowadzonej do boku o długości 6.
- Boki trójkąta mają długości 3, 4 i 6. Oblicz:
a) cosinus kąta leżącego naprzeciwko najkrótszego boku,
b) długość środkowej poprowadzonej do boku o długości 4.
- Dane są dwa boki a i b pewnego trójkąta oraz jego pole P . Oblicz cosinus kąta wyznaczonego przez te boki, a następnie oblicz długość boku c .
a) $a = 4$, $b = 10$, $P = 12$ b) $a = 5$, $b = 6$, $P = 10\sqrt{2}$
- W trapezie $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość $8\sqrt{3}$, a kąt BAD jest równy 60° . Przekątna AC ma długość 6 i zawiera się w dwusiecznej kąta BAD . Oblicz obwód tego trapezu.
- Kąt rozwarty równoległoboku jest dwukrotnie większy od jego kąta ostrego, a jeden z jego boków jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku. Obwód równoległoboku jest równy 16. Oblicz długości jego przekątnych.

Sprawdź się

- Oblicz cosinus największego kąta trójkąta o podanych bokach.
a) $a = 3$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$ b) $a = 3\sqrt{2}$, $b = 3$, $c = 4$
- Oblicz długość:
a) najkrótszego boku trójkąta, którego dwa pozostałe boki mają długości 10 i $6\sqrt{3}$, a najmniejszy kąt ma miarę 30° ,
b) najdłuższego boku trójkąta, którego dwa pozostałe boki mają długości 6 i 8, a jeden z kątów ma miarę 120° .
- Oblicz długości przekątnych rombu o boku a i kącie ostrym α .
a) $a = 6$ cm, $\alpha = 30^\circ$ b) $a = 8$ cm, $\alpha = 45^\circ$

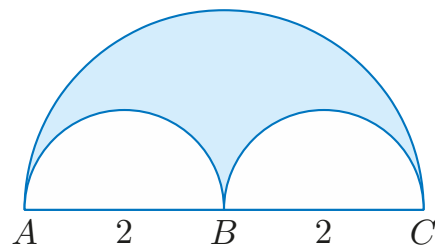


Powtórzenie

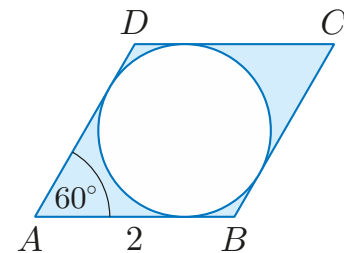
Zestaw I

1. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

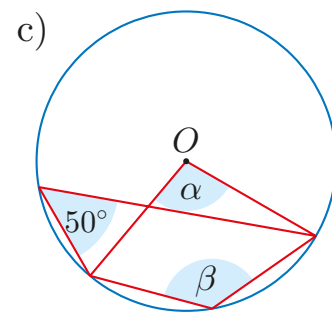
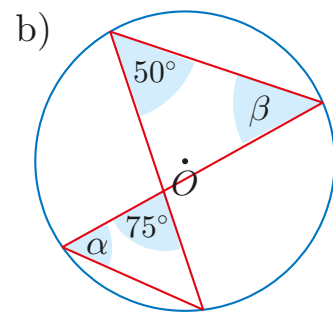
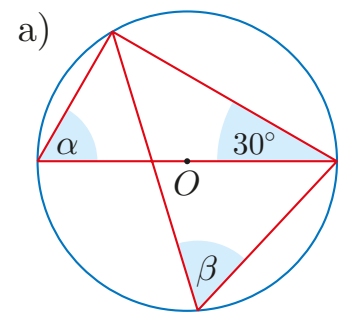
a) Wszystkie łuki są półokręgami.



b) Figura $ABCD$ jest rombem.



2. Wyznacz miary kątów α i β .

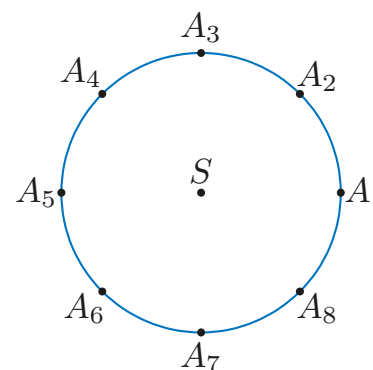


3. Odcinek AC jest średnicą okręgu o promieniu 2. Cięciwa AB tego okręgu ma długość $2\sqrt{3}$. Wyznacz miarę kąta ostrego między:

a) cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie B ,
b) cięciwą BC a styczną do okręgu w punkcie C .

4. Punkty $A_1, A_2, \dots, A_8$ dzielą okrąg na 8 łuków o równej długości (rysunek obok). Wyznacz miarę kąta ostrego między:

a) cięciwą A_1A_2 a styczną do okręgu w punkcie A_1 ,
b) cięciwą A_3A_8 a styczną do okręgu w punkcie A_8 .

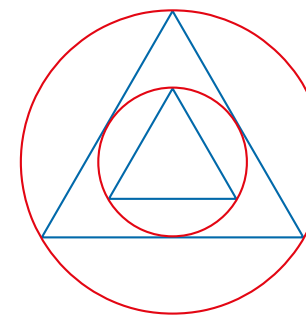


5. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym równoramiennym, którego obwód jest równy:

a) $4 + 2\sqrt{2}$, b) 4, c) 1.

6. a) Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym jest równe 27π . Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.
b) Suma pól koła wpisanego w trójkąt równoboczny i koła na nim opisanego jest równa 60π . Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

7. Suma długości okręgów przedstawionych na rysunku obok jest równa 12π . Oblicz sumę obwodów trójkątów równobocznych na tym rysunku.

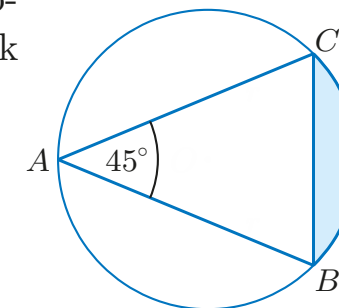


8. Jeden z boków trójkąta wpisanego w okrąg jest jego średnicą i ma długość 5 cm. Oblicz pole tego trójkąta w przypadku, gdy:

a) stosunek długości jego pozostałych boków jest równy $\frac{1}{3}$,
b) jest on równoramienny.

9. Trójkąt równoramienny ABC o kącie między ramionami 45° jest wpisany w okrąg o promieniu 8 (rysunek obok).

a) Oblicz długości łuków $\widehat{AB}$ i $\widehat{BC}$.
b) Oblicz pole zacieniowanego odcinka koła.
c) Oblicz obwód trójkąta ABC .



Zestaw II

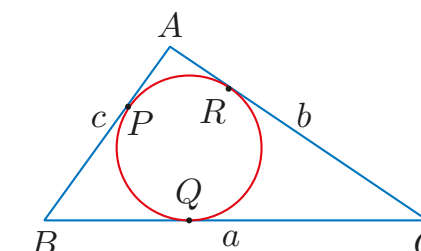
1. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego:
a) przyprostokątne mają długości 2 cm i 6 cm,
b) obwód jest równy 60 cm, a tangens jednego z jego kątów jest równy 2,4.

2. W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z przeciwprostokątną podzielił ją na odcinki długości 6 i 9. Oblicz pole tego trójkąta oraz promień wpisanego okręgu.

3. Okrąg o promieniu 1 cm jest wpisany w trójkąt równoramienny o podstawie 4 cm. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.

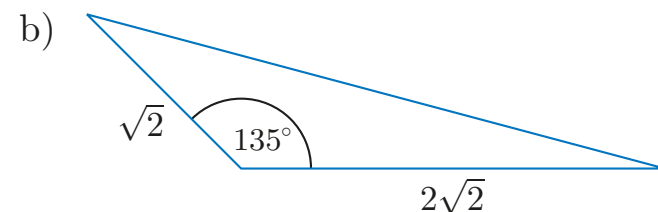
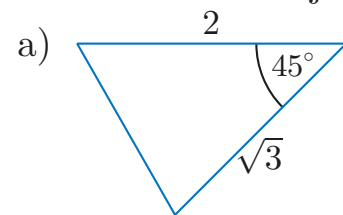
4. Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny równoramienny, którego wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość 3.

5. W trójkąt o bokach $a = 16$, $b = 13$ i $c = 9$ wpisano okrąg (rysunek obok). Oblicz długości odcinków AP , BQ i CR .



6. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym:
a) o ramieniu 12 i kącie α przy podstawie takim, że $\cos \alpha = \frac{1}{3}$,
b) o wysokości 6 opuszczonej na podstawę i kącie 120° między ramionami.

7. Oblicz obwód trójkąta przedstawionego na rysunku.



8. Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta ABC .

- a) $|AB| = 2\sqrt{3}$, $|BC| = 6$, $|\sphericalangle ABC| = 120^\circ$
b) $|AB| = 4\sqrt{2}$, $|BC| = 4\sqrt{3}$, $|\sphericalangle ABC| = 120^\circ$

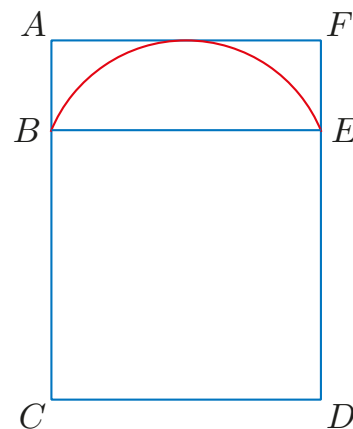
9. Oblicz miarę kąta β trójkąta ABC .

- a) $|AB| = 3$, $|BC| = 5$, $|AC| = \sqrt{19}$
b) $|AB| = 2$, $|BC| = \sqrt{2}$, $|AC| = \sqrt{10}$

10. Oblicz obwód i pole trójkąta ABC .

- a) $a = 10$, $b = 8$, $\gamma = 60^\circ$ b) $b = 4$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$

11. Bok kwadratu $BCDE$ ma długość 6 (rysunek obok), a przekątna prostokąta $ACDF$ ma długość 10. Oblicz promień okręgu, którego łukiem jest $\widehat{BE}$.



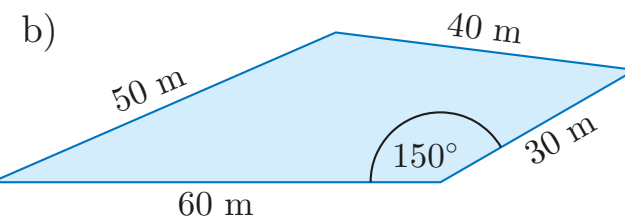
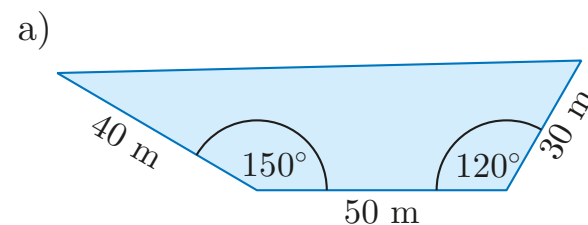
12. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt w przypadku, gdy:

- a) dwa boki trójkąta mają długości 4 cm i 8 cm, a miara kąta między nimi wynosi 60° ,
b) boki trójkąta mają długości 3 cm, 5 cm i 6 cm.

- D** 13. W trójkąt równoramienny ABC wpisano okrąg o środku O . Punkty D i E są punktami styczności okręgu oraz odpowiednio podstawy AB i ramienia BC . Uzasadnij, że trójkąty BCD i OCE są podobne. Oblicz promień okręgu.

- a) $|AB| = 4$, $|BC| = 2\sqrt{10}$ b) $|CD| = 3$, $|BE| : |EC| = 1 : 2$

14. Działka budowlana ma kształt czworokąta. Wyniki pomiarów wykonanych przez geodetę są przedstawione na rysunku. Oblicz pole powierzchni tej działki.


Przykład

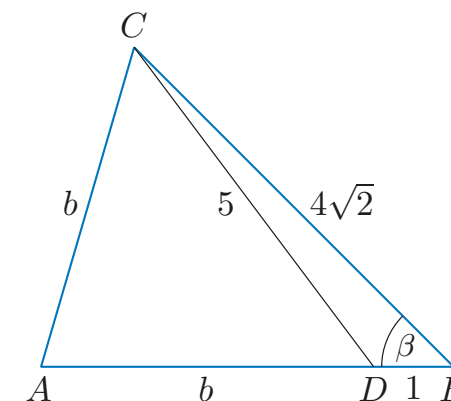
Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AD| = |AC|$, $|BD| = 1$, $|CD| = 5$ i $|BC| = 4\sqrt{2}$. Oblicz obwód trójkąta ADC .

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Aby obliczyć $\cos \beta$, korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD :

$$\begin{aligned} 5^2 &= (4\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos \beta \\ 25 &= 33 - 8\sqrt{2} \cos \beta \\ 8\sqrt{2} \cos \beta &= 8 \\ \cos \beta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$



Obliczamy b , korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC :

$$\begin{aligned} b^2 &= (b+1)^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot (b+1) \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos \beta \\ b^2 &= b^2 + 2b + 1 + 32 - 8b - 8 \end{aligned}$$

$$6b = 25$$

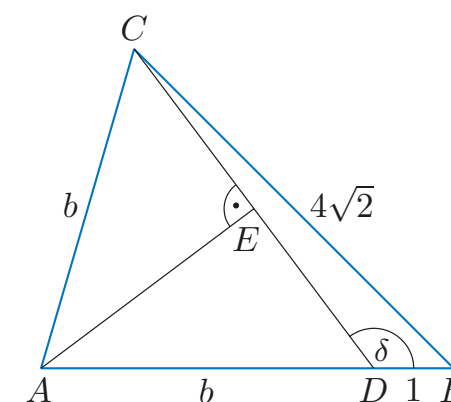
$$b = 4\frac{1}{6}$$

Obwód trójkąta ADC jest równy $2 \cdot 4\frac{1}{6} + 5 = 13\frac{1}{3}$.

II sposób

Aby obliczyć $\cos \delta$ (rysunek obok), korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD :

$$\begin{aligned} (4\sqrt{2})^2 &= 5^2 + 1^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \cos \delta \\ 32 &= 26 - 10 \cos \delta \\ 10 \cos \delta &= -6 \\ \cos \delta &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$



Zatem:

$$\cos |\sphericalangle ADC| = \cos(180^\circ - \delta) = -\cos \delta = \frac{3}{5}$$

Prowadzimy wysokość AE trójkąta równoramiennego ACD . Trójkąt ADE jest prostokątny oraz $|ED| = \frac{5}{2}$, więc:

$$\cos |\sphericalangle ADC| = \cos |\sphericalangle ADE| = \frac{|ED|}{|AD|}$$

Stąd:

$$\frac{3}{5} = \frac{\frac{5}{2}}{b}, \text{ czyli } b = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = 4\frac{1}{6}$$

Obwód trójkąta ADC jest równy $2 \cdot 4\frac{1}{6} + 5 = 13\frac{1}{3}$.

Odpowiedź: $Ob_{\triangle ADC} = 13\frac{1}{3}$

→ Zadanie 24, str. 217



W zadaniach 1–8 i 12.1 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Dany jest okrąg o promieniu $a\sqrt{2}$. Pole sześciokąta foremnego wpisanego w ten okrąg jest równe

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ B. $6a^2$ C. $3\sqrt{3}a^2$ D. $6\sqrt{3}a^2$

Zadanie 2 (0–1)

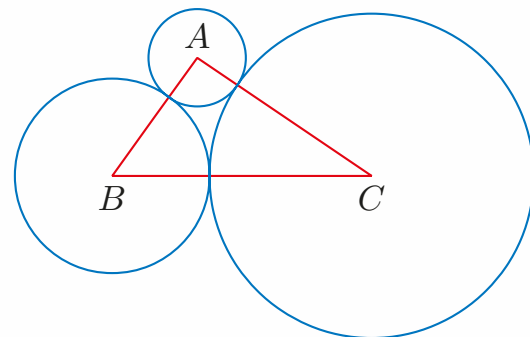
Pole wycinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez kąt 54° jest równe

- A. $0,6\pi$ B. $1,2\pi$ C. $1,8\pi$ D. $2,4\pi$

Zadanie 3 (0–1)

Dane są trzy okręgi o środkach A , B , C parami styczne zewnętrznie (rysunek obok). Promienie tych okręgów są odpowiednio równe 3, 6 i 10. Cosinus największego kąta trójkąta ABC wynosi

- A. $-\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{16}$ C. $-\frac{1}{39}$ D. 0

**Zadanie 4 (0–1)**

W trójkąt równoramienny o kącie między ramionami 120° wpisano okrąg o średnicy 12. Podstawa tego trójkąta ma długość

- A. $6 + 4\sqrt{3}$ B. $12\sqrt{3}$ C. $24 + 12\sqrt{3}$ D. $36 + 24\sqrt{3}$

Zadanie 5 (0–1)

Cosinus kąta przy wierzchołku trójkąta równoramiennego jest równy $\frac{1}{50}$, a jego ramię ma długość 30. Obwód tego trójkąta jest równy

- A. 108 B. 102 C. 96 D. 92

Zadanie 6 (0–1)

W trójkącie ABC dane są: $|\angle BAC| = 120^\circ$, $|AB| = \sqrt{2} - 1$ i $|AC| = \sqrt{2} + 1$. Wskaż długość boku BC tego trójkąta.

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{2}$

Zadanie 7 (0–1)

Dany jest trójkąt o bokach 2, $2\sqrt{2}$ i $\sqrt{6}$. Cosinus największego kąta tego trójkąta jest równy

- A. $\frac{\sqrt{6}}{12}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{8}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{8}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

Zadanie 8 (0–1)

Sąsiednie boki równoległoboku mają długości 4 i $2 + 2\sqrt{3}$, a jego kąt rozwarty ma miarę 150° . Jedna z przekątnych tego równoległoboku ma długość

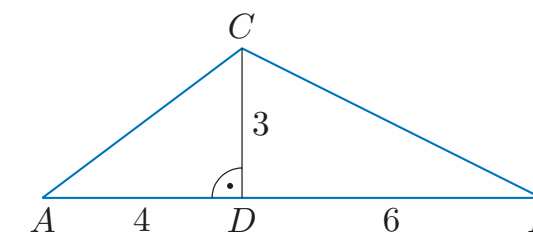
- A. $2 + \sqrt{2}$ B. $2 + \sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

**Zadanie 9 (0–1)**

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok).

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.

Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Promień okręgu opisanego na trójkącie BCD jest równy 4,5.	P	F
Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 5.	P	F

Zadanie 10 (0–1)

Kąty trójkąta równoramiennego ABC mają miary α , α i 4α , a jego ramię ma długość 2.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

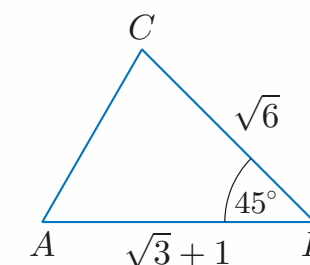
Obwód trójkąta ABC jest równy $4 + 4\sqrt{3}$.	P	F
Jedna ze środkowych trójkąta ABC ma długość $\sqrt{7}$.	P	F

Zadanie 11 (0–1)

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok).

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Bok AC ma długość równą



A.	2,	a pole trójkąta ABC jest równe	1.	$\frac{3+\sqrt{2}}{2}$.
B.	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$,		2.	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.
C.	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$,		3.	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$.

Zadanie 12

Dany jest romb o obwodzie 16 i kącie rozwartym α takim, że $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

Zadanie 12.1 (0–1)

Pole tego rombu jest równe

- A. $4\sqrt{15}$ B. $6\sqrt{15}$ C. $8\sqrt{5}$ D. $8\sqrt{15}$

Zadanie 12.2 (0–2)

Oblicz długość krótszej przekątnej tego rombu.



Zadanie 13 (0-2)

Punkty $A_1, A_2, \dots, A_8$ dzielą okrąg na osiem równych łuków.

Uzupełnij zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi wybrane spośród oznaczonych literami A–F i wpisz te litery w wyznaczonych miejscach.

Miarę równą $22^\circ 30'$ mają oraz .

A. $\sphericalangle A_1 A_4 A_3$

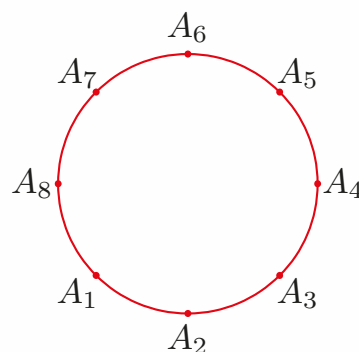
C. $\sphericalangle A_6 A_8 A_7$

E. $\sphericalangle A_2 A_6 A_3$

B. $\sphericalangle A_8 A_1 A_5$

D. $\sphericalangle A_2 A_7 A_8$

F. $\sphericalangle A_5 A_2 A_3$



Zadanie 14

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C i przyprostokątnych o długościach 10 cm oraz 24 cm.

Zadanie 14.1 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Pole koła opisanego na tym trójkącie jest równe

A.	$169\pi \text{ cm}^2$,	ponieważ średnica tego koła jest równa	1.	12 cm.
B.	$144\pi \text{ cm}^2$,		2.	24 cm.
			3.	26 cm.

Zadanie 14.2 (0-2)

Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty. Oblicz długości okręgów opisanych na tych trójkątach.

Zadanie 15 (0-2)

Dany jest trójkąt o bokach długości 4, 5 i 6. Najmniejszy kąt tego trójkąta jest równy α , a największy β .

Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj właściwe dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Numer zadania	Zdanie do uzupełnienia	Dokończenie zdania
15.1	$\cos \alpha$ jest równy	?
15.2	$\cos \beta$ jest równy	?

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

E. $\frac{4}{5}$



Zadanie 16 (0-2)

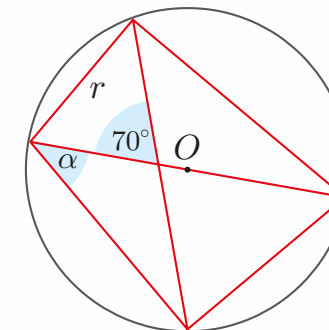
Pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy $\alpha < 180^\circ$ jest równe P . Ile jest równe pole wycinka koła o promieniu $2r$ wyznaczonego przez kąt 2α ?

Zadanie 17 (0-2)

Oblicz różnicę między polem koła opisanego na kwadracie o boku $\sqrt{2} + 1$ a polem koła wpisanego w ten kwadrat.

Zadanie 18 (0-3)

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O i promieniu r . Wyznacz kąt α .



Zadanie 19 (0-2)

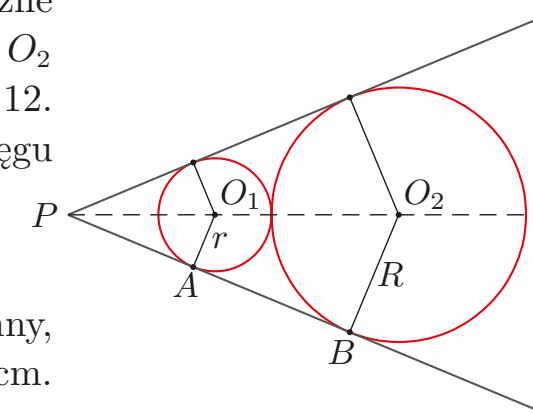
Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego najdłuższy bok ma długość 65, a najkrótszy 25.

Zadanie 20 (0-4)

Kąt rozwarty równoległoboku jest trzy razy większy od jego kąta ostrego, a stosunek długości jego boków jest równy $1:2\sqrt{2}$. Jego krótsza przekątna ma długość $2\sqrt{5}$. Oblicz pole i obwód tego równoległoboku.

Zadanie 21 (0-4)

Dane są dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 styczne zewnętrznie (rysunek obok). Okrąg o środku O_2 ma promień $R = 5$ oraz wiadomo, że $|PB| = 12$. Oblicz sinus kąta O_1PA oraz promień r okręgu o środku O_1 .



Zadanie 22 (0-4)

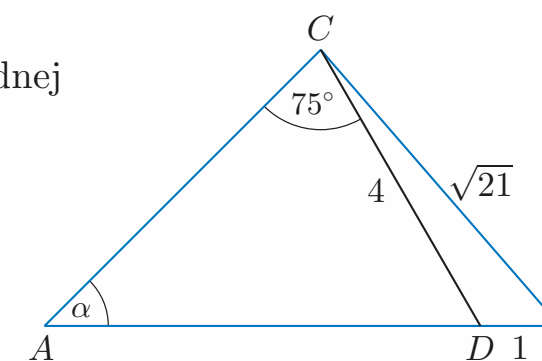
Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny, którego przeciwprostokątna ma długość 8 cm. Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 23 (0-4)

Wyznacz miary kątów rombu o boku a i jednej z przekątnych długości $a\sqrt{2} - \sqrt{2}$.

D Zadanie 24 (0-4) → Przykład, str. 213

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok). Uzasadnij, że kąt α ma miarę 45° , i oblicz obwód trójkąta ABC .



Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

1.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$

Ć 1. np. $(-3, 9)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

3. a), b) nie c), d) tak

4. a) rośnie w $(-\infty; 0]$, maleje w $[0; \infty)$
b) $x = 0$, $W(0, 0)$

5. a) f_1 - zielony, f_2 - niebieski,
 f_3 - czerwony, f_4 - brązowy,
 f_5 - fioletowy
b) f_2 : $(-1, -2)$, $(0, 0)$, $(1, -2)$, $(2, -8)$,
 f_4 : $(-2, -1)$, $(0, 0)$, $(2, -1)$, $(4, -4)$,
 f_5 : $(-4, -2)$, $(0, 0)$, $(4, -2)$, $(8, -8)$

6. a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $(-4, -8)$, $(-2, -2)$,
 $(0, 0)$, $(2, -2)$, $(4, -8)$
b) $f(x) = -4x^2$, $(-2, -16)$, $(-1, -4)$,
 $(0, 0)$, $(1, -4)$, $(2, -16)$
c) $f(x) = 3x^2$, $(-2, 12)$, $(-1, 3)$,
 $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 12)$
d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$, $(-6, -12)$, $(-3, -3)$,
 $(0, 0)$, $(3, -3)$, $(6, -12)$

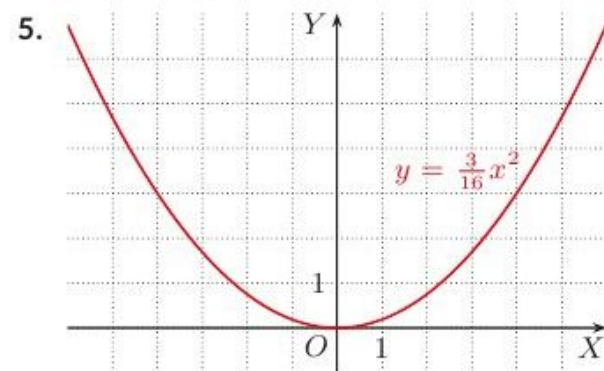
Z 1. a) $f(D) = [0; 9]$ b) $f(D) = [0; 9]$
c), d) $f(D) = [-9; 0]$
e) $f(D) = (-8; 0]$ f) $f(D) = [0; 4]$
g) $f(D) = [0; 12]$
h) $f(D) = [-8; -2]$

2. A: $y = x^2$, B: $y = \frac{1}{2}x^2$, C: $y = \frac{1}{4}x^2$,
D: $y = \frac{1}{8}x^2$, E: $y = \frac{1}{16}x^2$

3. a) $y = x^2$ b) $y = -\frac{1}{3}x^2$

4. a) $a = 6$ b) $a = 2$

c) $a = \frac{1}{2}$ d) $a = \frac{3}{4}$



6. a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 2x^2$
c) $f(x) = -4x^2$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

7. a) $f(D) = [0; 4]$ b) $f(D) = [0; 2]$
c) $f(D) = [-4; 0]$ d) $f(D) = [-1; 0]$

Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych

1. a) $g(x) = |x| + 1$, $h(x) = |x| - 2$,
 $g(D) = [1; \infty)$, $h(D) = [-2; \infty)$
b) $k(D) = [2; \infty)$, $l(D) = [-3; \infty)$

2. f : $(0, 0)$, g : $(0, 1)$, h : $(0, -3)$

3. a) $g(x) = |x + 3|$, $h(x) = |x - 2|$,
 $g(D) = h(D) = [0; \infty)$
b) k : $x = 3$, l : $x = -1$

4. f : $(0, 0)$, g : $(-1, 0)$, h : $(3, 0)$

1.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OY i osi OX

Ć 1. a) $[-3; \infty)$ b) $[1; \infty)$
c) $(-\infty; -4]$ d) $(-\infty; 2]$
2. a) maleje w $(-\infty; -3]$, rośnie w $[-3; \infty)$
b) maleje w $(-\infty; 1]$, rośnie w $[1; \infty)$
c) rośnie w $(-\infty; -2]$, maleje w $[-2; \infty)$
d) rośnie w $(-\infty; 2]$, maleje w $[2; \infty)$

3. a) $W(3, -2)$ b) $W(-2, 1)$

4. a) $W(-6, -3)$; 6 jednostek w lewo
i 3 jednostki w dół
b) $W(1, 0)$; 1 jednostkę w prawo

5. a) maleje w $(-\infty; 3]$, rośnie w $[3; \infty)$,
 $f(D) = [-4; \infty)$, $W(3, -4)$
b) maleje w $(-\infty; -2]$, rośnie w $[-2; \infty)$,
 $f(D) = [2; \infty)$, $W(-2, 2)$
c) rośnie w $(-\infty; -4]$, maleje w $[-4; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; -1]$, $W(-4, -1)$
d) rośnie w $(-\infty; 1]$, maleje w $[1; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; 3]$, $W(1, 3)$

Z 1. a) $f(x) = (x - 3)^2$, maleje w $(-\infty; 3]$,
rośnie w $[3; \infty)$
b) $f(x) = (x + 2)^2$, maleje w $(-\infty; -2]$,
rośnie w $[-2; \infty)$

2. a) $f(x) = -(x + 2)^2 + 3$
b) $f(x) = -(x - 1)^2 - 2$

3. a) $W(0, 2)$, $x = 0$ b) $W(0, -4)$, $x = 0$
c) $W(2, 0)$, $x = 2$ d) $W(-1, 0)$, $x = -1$
e) $W(1, -4)$, $x = 1$
f) $W(-3, 1)$, $x = -3$

4. a) $(-\infty; 4]$ b) $(-\infty; -1]$ c) $(-\infty; 1]$
d) $(-\infty; 1]$ e) $[1; \infty)$ f) $[-8; \infty)$
g) $[-2; \infty)$ h) $(-\infty; 4]$ i) $[-4; \infty)$

5. a) $f(D) = [-6; \infty)$, maleje w $(-\infty; 0]$,
rośnie w $[0; \infty)$, $W(0, -6)$
b) $f(D) = [0; \infty)$, maleje w $(-\infty; 4]$,
rośnie w $[4; \infty)$, $W(4, 0)$
c) $f(D) = [5; \infty)$, maleje w $(-\infty; -2]$,
rośnie w $[-2; \infty)$, $W(-2, 5)$
d) $f(D) = (-\infty; 9]$, rośnie w $(-\infty; 0]$,
maleje w $[0; \infty)$, $W(0, 9)$
e) $f(D) = (-\infty; 0]$, rośnie w $(-\infty; -8]$,
maleje w $[-8; \infty)$, $W(-8, 0)$
f) $f(D) = (-\infty; -2]$, rośnie w $(-\infty; 3]$,
maleje w $[3; \infty)$, $W(3, -2)$
g) $f(D) = [1; \infty)$, maleje w $(-\infty; 2]$,
rośnie w $[2; \infty)$, $W(2, 1)$
h) $f(D) = (-\infty; 4]$, rośnie w $(-\infty; 1]$,
maleje w $[1; \infty)$, $W(1, 4)$
i) $f(D) = [-\sqrt{2}; \infty)$, maleje w $(-\infty; -3]$,
rośnie w $[-3; \infty)$, $W(-3, -\sqrt{2})$

6. a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$
b) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2$
c) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2$
d) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$

7. a) $f(D) = [2; \infty)$ b) $f(D) = [-4; \infty)$
c) $f(D) = [-2; \infty)$ d) $f(D) = [3; \infty)$
e) $f(D) = (-\infty; 2]$
f) $f(D) = (-\infty; -1]$

Wzory skróconego mnożenia

2. a) $x^2 + 2x + 1$ b) $x^2 + 4x + 4$
c) $x^2 + 6x + 9$ d) $x^2 + 12x + 36$
e) $x^2 - 2x + 1$ f) $x^2 - 4x + 4$
g) $x^2 - 8x + 16$ h) $x^2 - 10x + 25$

3. a) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ b) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$
c) $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{16}{9}$ d) $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$
e) $x^2 - x + \frac{1}{4}$ f) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$
g) $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$ h) $x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}$

4. a) $4x^2 + 4x + 1$ b) $4x^2 + 12x + 9$
c) $9x^2 + 12x + 4$ d) $9x^2 + 24x + 16$
e) $4x^2 - 4x + 1$ f) $9x^2 - 6x + 1$
g) $9x^2 - 30x + 25$ h) $16x^2 - 24x + 9$

5. a) $a = 2$ b) $a = 4$ c) $a = 5$
d) $a = 8$ e) $a = \frac{1}{2}$ f) $a = \frac{3}{2}$

6. a) $a = 1$ b) $a = 3$ c) $a = 7$
d) $a = 10$ e) $a = \frac{1}{3}$ f) $a = \frac{1}{4}$

8. a) $x^2 - 4$ b) $x^2 - 9$ c) $16 - x^2$
d) $x^2 - 64$ e) $4x^2 - 1$ f) $9x^2 - 4$

9. a) $(x - 5)(x + 5)$ b) $(x - 7)(x + 7)$
c) $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ d) $(x - \frac{1}{6})(x + \frac{1}{6})$

1.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (1)

Ć 1. a) $y = -2x^2 + 12x - 12$
b) $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$
c) $y = 3x^2 - 30x + 84$

2. a) $y = (x + 3)^2 - 3$, $W(-3, -3)$
b) $y = (x + 2)^2 + 4$, $W(-2, 4)$
c) $y = (x - 3)^2 - 11$, $W(3, -11)$
d) $y = (x - 4)^2 - 15$, $W(4, -15)$
e) $y = (x + \frac{1}{2})^2$, $W(-\frac{1}{2}, 0)$
f) $y = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$, $W(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$

3. a) 5 b) 8 c) 0 d) -12 e) 32 f) 9

4. a) $W(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, $y = 4(x + \frac{3}{4})^2 + \frac{3}{4}$
b) $W(1, 3)$, $y = -2(x - 1)^2 + 3$
c) $W(1, \frac{1}{2})$, $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}$

Z 1. a) $y = x^2 - x + 4\frac{1}{4}$
b) $y = -x^2 + 8x - 19$
c) $y = 2x^2 - 12x + 19$
d) $y = -3x^2 - 12x - 16$
e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$
f) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$

2. $W_f(-1, 1)$, $W_g(3, -2)$, $W_h(4, 2)$,
 $f(x) = 2(x + 1)^2 + 1 = 2x^2 + 4x + 3$,
 $g(x) = 2(x - 3)^2 - 2 = 2x^2 - 12x + 16$,
 $h(x) = 2(x - 4)^2 + 2 = 2x^2 - 16x + 34$

3. a) $g(x) = 3(x - 3)^2 - 2 = 3x^2 - 18x + 25$
b) $g(x) = -4(x + 5)^2 + 100 = -4x^2 - 40x$

4. a) 81 b) -7 c) 1 d) 0 e) 42 f) -11

5. a) $\Delta = 28$, $W(-2, -7)$
 b) $\Delta = 32$, $W(3, 8)$
 c) $\Delta = 56$, $W(-1, -7)$
 d) $\Delta = 12$, $W(1, 1)$
 e) $\Delta = -2$, $W(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$
 f) $\Delta = 4$, $W(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

6. a) $W(-1, 2)$, $f(x) = (x+1)^2 + 2$
 b) $W(4, 0)$, $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$
 c) $W(1, 5)$, $f(x) = -4(x-1)^2 + 5$
 d) $W(-2, -15)$, $f(x) = 2(x+2)^2 - 15$
 e) $W(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$, $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$
 f) $W(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$, $f(x) = -2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2}$

7. a) $c = 1$, $f(x) = 2(x-1)^2 - 1$
 b) $c = -2$, $f(x) = 2(x-1)^2 - 4$
 c) $c = 6$, $f(x) = 2(x-1)^2 + 4$
 d) $c = 2$, $f(x) = 2(x-1)^2$
 e) $c = -20$, $f(x) = 2(x-1)^2 - 22$

8. a) $f_1(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{3}{2}$,
 $f_2(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + \frac{3}{2}$,
 $f_3(x) = -\frac{1}{4}(x-6)^2 + 3$,
 $f_4(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 3$
 b) f_1 - zielony, f_2 - niebieski,
 f_3 - fioletowy, f_4 - czerwony

9. a) 25 b) 1 c) 20

10. a) $W(1, -3)$ b) $W(\frac{3}{4}, \frac{17}{4})$
 c) $W(-3, -19)$ d) $W(-\frac{3}{2}, \frac{17}{4})$
 e) $W(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ f) $W(-\frac{3}{4}, \frac{9}{8})$

11. a) $y = (x-2)^2 - 6$
 b) $y = 2(x-2)^2 - 7$
 c) $y = -3(x - \frac{5}{6})^2 + \frac{19}{12}$
 d) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$
 e) $y = 8(x - \frac{1}{16})^2 - \frac{1}{32}$
 f) $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$

Obliczanie wartości trójkianu kwadratowego

1. a) 4, 12 b) $4\frac{1}{2}$, 13 c) -17, -34
 2. a) 5, $2\frac{3}{4}$ b) -5, $-\frac{1}{2}$ c) 3, $-1\frac{1}{8}$
 3. a) $g(-2) = -17$, $f(-2) = -15$,
 $h(-2) = -7$ b) $g(-2) = -10\frac{1}{2}$,
 $h(-2) = -10\frac{1}{2}$, $f(-2) = -8$
 4. a) $c = 7$ b) $c = 20$ c) $c = -5\sqrt{2}$
 5. A, B, E

6. a) $x = -1$, $W(-1, -\frac{3}{2})$
 b) $x = -1$, $W(-1, 4)$
 7. a) $x = \frac{1}{2}$, $W(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$
 b) $x = \frac{3}{2}$, $W(\frac{3}{2}, -\frac{13}{2})$
 c) $x = \frac{3}{2}$, $W(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
 d) $x = -\frac{1}{2}$, $W(-\frac{1}{2}, \frac{19}{2})$

1.4. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej (2)

1. a) $W(-2, -3)$, $y = (x+2)^2 - 3$
 b) $W(1, -2)$, $y = -(x-1)^2 - 2$
 c) $W(-1, 0)$, $y = 2(x+1)^2$
 d) $W(-2, 3)$, $y = -2(x+2)^2 + 3$
 e) $W(-1, -1)$, $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$
 f) $W(-2, 5)$, $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 5$

2. a) $W(1, 1)$ b) $W(-\frac{3}{2}, \frac{25}{4})$ c) $W(2, 9)$

3. a) $b = -4$ b) $b = 8$
 c) $b = 4$ d) $b = -6$

4. a) $f(x) = -(x-2)^2 + 2 = -x^2 + 4x - 2$
 b) $f(x) = -2(x-4)^2 = -2x^2 + 16x - 32$
 c) $f(x) = 2(x+1)^2 - 6 = 2x^2 + 4x - 4$

5. a) $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 2$
 b) $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$
 c) $a = -\frac{2}{9}$, $b = 0$, $c = 3$
 d) $a = -3$, $b = -6$, $c = 0$
 e) $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$
 f) $a = -2$, $b = 8$, $c = -4$

1. a) $f(x) = (x-3)^2 - 7$, maleje w $(-\infty; 3]$,
 rośnie w $[3; \infty)$, $f(D) = [-7; \infty)$
 b) $f(x) = (x+1)^2 - 4$,
 maleje w $(-\infty; -1]$, rośnie w $[-1; \infty)$,
 $f(D) = [-4; \infty)$
 c) $f(x) = 2(x+2)^2 - 4$,
 maleje w $(-\infty; -2]$, rośnie w $[-2; \infty)$,
 $f(D) = [-4; \infty)$
 d) $f(x) = -2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$,
 rośnie w $(-\infty; \frac{1}{2}]$, maleje w $[\frac{1}{2}; \infty)$,
 $f(D) = (-\infty; \frac{1}{2}]$
 e) $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 1$,
 maleje w $(-\infty; 4]$, rośnie w $[4; \infty)$,
 $f(D) = [1; \infty)$
 f) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2$, rośnie w $(-\infty; -2]$,
 maleje w $[-2; \infty)$, $f(D) = (-\infty; 0]$

2. a) $y = (x+3)^2 - 17$
 b) $y = -(x-3)^2 + 1$
 c) $y = \frac{1}{2}(x+6)^2 - 26$
 d) $y = -\frac{1}{4}(x-12)^2 + 28$
 e) $y = -2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{7}{2}$
 f) $y = 2(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{2}$

3. a) $b = -4$, $c = 8$ b) $b = 2$, $c = -2$
 c) $b = -1$, $c = -\frac{3}{4}$
 d) $b = 0$, $c = 3$
 e) $b = -20$, $c = 100$
 f) $b = 8$, $c = 20$

4. a) $b = -2$, $c = 1$, $f(x) = (x-1)^2$
 b) $b = 8$, $c = 2$, $f(x) = (x+4)^2 - 14$
 c) $b = -6$, $c = -6$,
 $f(x) = (x-3)^2 - 15$

5. a) $f(x) = 3x^2 - 2$
 b) $f(x) = -3(x-1)^2 + 1$

7. a) $f(x) = (x+1)^2$
 b) $f(x) = (x+1)^2 + 3$
 c) $f(x) = (x+1)^2 - 1$
 d) $f(x) = -(x-2)^2 + 4$
 e) $f(x) = (x-3)^2 - 1$
 f) $f(x) = -(x-4)^2 + 8$

8. a) $f(x) = (x-1)^2 + 4$
 b) $f(x) = 3(x+2)^2 + 3$
 c) $f(x) = -4(x+3)^2 - 4$

1.5. Równania kwadratowe (1)

1. Równanie kwadratowe może mieć 2 rozwiązania, 1 rozwiązanie lub 0 rozwiązań.

2. a) $\{-2, 0\}$ b) $\{0, \frac{7}{3}\}$ c) $\{0, \frac{5}{2}\}$ d) $\{0, 16\}$

3. a) $x = -\frac{5}{4}$, $x = \frac{5}{4}$ b) $x = -\frac{3}{10}$, $x = \frac{3}{10}$
 c) $x = -\frac{11}{2}$, $x = \frac{11}{2}$ d) $x = -\frac{4}{3}$, $x = \frac{4}{3}$

4. a) $x = -4$ b) $x = \frac{1}{2}$
 c) $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = \frac{3}{2}$
 e) $x = 2$ f) $x = -3$

5. a) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ b) sprzeczne
 c) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$ d) sprzeczne

1. a) $x = 0$, $x = 6$ b) $x = -\frac{1}{27}$, $x = 0$
 c) $x = 0$, $x = \frac{1}{6}$ d) $x = -\frac{1}{9}$, $x = 0$
 e) $x = 0$, $x = 2$ f) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = 0$

2. a) $x = -\frac{9}{10}$, $x = \frac{9}{10}$
 b) $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3}$
 c) $x = -5$ d) $x = 8$
 e) $x = 12$ f) $x = -\frac{1}{3}$
 g) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 h) $x = 2$ i) $x = 6$

3. a) $(0, 0)$, $(4, 0)$
 b) $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -12)$
 c) $(0, 12)$, nie przecina osi OX
 d) $(0, 0)$, $(-\frac{1}{225}, 0)$
 e) $(0, 4)$, nie przecina osi OX
 f) $(-\frac{1}{15}, 0)$, $(\frac{1}{15}, 0)$, $(0, -4)$

4. a) 2 b) -4 c) 3

5. a) $x = 0$, $x = 1$ b) $x = -3$, $x = 0$
 c) $x = \frac{1}{3}$ d) $x = 6$ e) $x = 4$ f) $x = 2$

6. a) 2 b) 0 c) 2

1.6. Równania kwadratowe (2)

1. a) $x = \frac{2}{3}$ b) $x = -\frac{4}{5}$ c) $x = \frac{7}{2}$

3. a) $x = -1$, $x = 3$ b) $x = -4$, $x = -2$
 c) $x = -3 - \sqrt{2}$, $x = -3 + \sqrt{2}$

4. a) $\Delta = 4 > 0$, 2 rozwiązania
 b) $\Delta = -8 < 0$, 0 rozwiązań
 c) $\Delta = 35 > 0$, 2 rozwiązania
 d) $\Delta = 49 > 0$, 2 rozwiązania
 e) $\Delta = 0$, 1 rozwiązanie
 f) $\Delta = -12 < 0$, 0 rozwiązań
 g) $\Delta = -2 < 0$, 0 rozwiązań
 h) $\Delta = \frac{25}{4} - 4\sqrt{2} > 0$, 2 rozwiązania
 i) $\Delta = 9 > 0$, 2 rozwiązania

5. a) $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$
 b) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{4}$
 c) $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$ d) $x_0 = \frac{1}{14}$
 e) $x_1 = 3 - \sqrt{10}$, $x_2 = 3 + \sqrt{10}$
 f) $x_1 = 2 - \sqrt{6}$, $x_2 = 2 + \sqrt{6}$
 g) sprzeczne
 h) $x_1 = \frac{1-\sqrt{7}}{6}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{6}$
 i) sprzeczne

1. a) $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = 7$ b) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 3$
 c) $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ d) sprzeczne
 e) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 1$ f) $x_0 = -\frac{3}{2}$
 g) sprzeczne h) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$
 i) $x_0 = \frac{2}{3}$

2. a) $x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{2}$
 b) $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 2$ c) $x_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$
 d) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{19}}{3}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{19}}{3}$
 e) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{11}}{5}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{11}}{5}$
 f), g) sprzeczne
 h) $x_1 = \frac{3-\sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{3+\sqrt{37}}{2}$
 i) $x_1 = \frac{7-\sqrt{37}}{6}, x_2 = \frac{7+\sqrt{37}}{6}$
3. a) $(0, -1), (-1, 0), (\frac{1}{3}, 0)$
 b) $(0, 3), (-\frac{\sqrt{3}+3}{2}, 0), (\frac{\sqrt{3}-3}{2}, 0)$
 c) $(0, 3), (-\frac{3}{4}, 0), (1, 0)$
 d) $(0, 12), (-6, 0)$ e) $(0, 5)$
 f) $(0, 1), (-2\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$
4. a) $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$ b) $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{5}$
 c) $x_1 = 5 - \sqrt{13}, x_2 = 5 + \sqrt{13}$
 d) $x_1 = 6, x_2 = 12$
 e) $x_1 = \frac{7-\sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{7+\sqrt{37}}{2}$
 f) sprzeczne
5. a) 2 b) 0
6. a) $x_0 = 2$ b) sprzeczne
 c) $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}, x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$ d) sprzeczne
 e) $x_1 = -8, x_2 = -4$
 f) $x_1 = -6 - 2\sqrt{17}, x_2 = -6 + 2\sqrt{17}$
7. a) -5, 3 b) $-\frac{1}{2}, 3$
8. a) $x_1 = -3, x_2 = 0$
 b) $x_1 = -4 - \sqrt{17}, x_2 = -4 + \sqrt{17}$
 c) $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = -1$
 d) $x_1 = -4 - 2\sqrt{3}, x_2 = -4 + 2\sqrt{3}$

1.7. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (1)

- Ć 1. a) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 9$
 b) $y = 4x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3}$ c) $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x$
2. a) $x_1 = 3, x_2 = 5$
 b) $x_1 = -6, x_2 = 2$
 c) $x_1 = -8, x_2 = -4$
 d) $x_1 = 0, x_2 = 9$
 e) $x_0 = 2$ f) $x_0 = -7$
3. a) $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{3}$
 b) $x_1 = 1 - \sqrt{3}, x_2 = -1 + \sqrt{2}$
4. a) $y = 5x(x - \frac{3}{5})$
 b) $y = 16(x - \frac{1}{4})(x + \frac{1}{4})$
 c) $y = 9(x - \frac{2\sqrt{2}}{3})(x + \frac{2\sqrt{2}}{3})$

5. a) $y = (x-3)(x-5)$ b) $y = (x+7)(x-4)$
 c) $y = 3(x - \frac{1}{3})(x - 2)$
 d) $y = 12(x + \frac{2}{3})(x + \frac{1}{4})$
 e) $y = -2(x-3)(x+4)$
 f) $y = -4(x + \frac{1}{4})(x - 1)$
 g) nie ma postaci iloczynowej
 h) $y = (x + \sqrt{3} - 1)(x - \sqrt{3} - 1)$
 i) $y = 2(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2})$
- Z 1. a) $x = -10, x = 20, y = x^2 - 10x - 200$
 b) $x = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{2}, y = 6x^2 - 5x + 1$
 c) $x = -3, x = \frac{4}{3}, y = 6x^2 + 10x - 24$
 d) $x = \frac{1}{2}, x = 2, y = 4x^2 - 10x + 4$
 e) $x = -\frac{1}{2}, x = -\frac{1}{3}, y = 6x^2 + 5x + 1$
 f) $x = \frac{2}{5}, x = \frac{3}{4}, y = 20x^2 - 23x + 6$
 g) $x = -3, x = 0, y = -x^2 - 3x$
 h) $x = 0, x = \frac{1}{2}, y = x^2 - \frac{1}{2}x$
 i) $x = 0, x = \frac{7}{3}, y = -3x^2 + 7x$

2. a) $y = (x-3)(x+2)$
 b) $y = -(x-3)(x+2)$
 c) $y = 2(x + \frac{1}{2})(x - 2)$
 d) $y = -2(x - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})(x - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$
 e) $y = 3(x-1)(x - \frac{4}{3})$
 f) $y = -4(x - \frac{1+\sqrt{5}}{4})(x - \frac{1-\sqrt{5}}{4})$
 g) $y = 3(x-4)(x + \frac{2}{3})$
 h) $y = (x - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})(x - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$
 i) $y = -\frac{1}{4}(x+2)(x-14)$

3. a) $f(x) = 4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}),$
 $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$
 b) $f(x) = 9(x + \frac{4}{3})(x - \frac{4}{3}),$
 $x = -\frac{4}{3}, x = \frac{4}{3}$
 c) $f(x) = \frac{1}{3}x(x + \frac{1}{2}), x = -\frac{1}{2}, x = 0$
 d) $f(x) = -9x(x - \frac{2}{3}), x = 0, x = \frac{2}{3}$
 e) $f(x) = 9(x + \frac{1}{3})^2, x = -\frac{1}{3}$
 f) $f(x) = 4(x - \frac{3}{2})^2, x = \frac{3}{2}$
5. a) $f(x) = -x(x+4) = -(x+2)^2 + 4$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x+5) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$
 c) $f(x) = 2x(x+1) = 2(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}$
 d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-2) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
 e) $f(x) = -(x+1)(x+3) = -(x+2)^2 + 1$
 f) $f(x) = \frac{1}{4}(x+1)(x-4) = \frac{1}{4}(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{16}$

6. a) $x = -1, x = 6, y = (x-6)(x+1)$
 b) $x = 1, x = 3, y = 2(x-1)(x-3)$
 c) $x = -\frac{3}{2}, x = \frac{1}{3}, y = -6(x + \frac{3}{2})(x - \frac{1}{3})$
 d) $x = 2, y = -(x-2)^2$
 e) $x = 0, x = 4, y = x(x-4)$
 f) $x = 1, x = 3, y = -2(x-1)(x-3)$
7. a) $y = (x + 2\sqrt{3})(x - \sqrt{3})$
 b) $y = \sqrt{3}x(x + 2\sqrt{3})$
 c) nie ma postaci iloczynowej
8. a) $(-6, 0), (0, 0)$ b) $(0, 0), (3, 0)$
 c) $(-2, 0), (4, 0), (0, -8)$
 d) $(-\frac{1}{2}, 0), (6, 0), (0, -3)$
 e) $(-2, 0), (\frac{1}{2}, 0), (0, 12)$
 f) $(-\frac{5}{4}, 0), (\frac{3}{2}, 0), (0, -15)$

1.8. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (2)

- Ć 1. a) $b = -8, c = 15$
 b) $b = -1, c = -12$
 c) $b = 7, c = 10$
 d) $b = \frac{3}{2}, c = -1$
 e) $b = 0, c = -3$
2. a) $x = 3, W(3, -9)$
 b) $x = 5, W(5, 25)$
 c) $x = -2, W(-2, -8)$
 d) $x = \frac{1}{2}, W(\frac{1}{2}, \frac{49}{2})$
 e) $x = \frac{1}{2}, W(\frac{1}{2}, -4)$
 f) $x = \frac{3}{4}, W(\frac{3}{4}, 4)$

3. a) $W(3, -\frac{1}{2})$ b) $W(-6, -\frac{9}{2})$
4. a) $y = x^2 - 2x - 3$
 b) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$
 c) $y = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{32}{5}$
 d) $y = \frac{2}{3}x^2 - 4x$
5. a) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-3)$
 b) $f(x) = -(x+1)(x-3)$
 c) $f(x) = -\frac{1}{6}(x+1)(x-3)$
6. a) $f(x) = -\frac{2}{3}(x+3)(x-1)$
 b) $f(x) = \frac{1}{8}(x+2)(x-4)$
 c) $f(x) = -(x+2)(x-1)$

- Z 1. a) $f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-3) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$
 c) $f(x) = -x(x+4) = -x^2 - 4x$

2. a) $y = 2(x-1)(x-4) = 2x^2 - 10x + 8$
 b) $y = \frac{1}{2}(x+6)(x-2) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$
 c) $y = -(x-2)(x+5) = -x^2 - 3x + 10$
 d) $y = -3(x-1)(x-3) = -3x^2 + 12x - 9$
3. a) $x = 1, f(x) = (x-1)(x-5),$
 $f(x) = (x-3)^2 - 4$
 b) $x = 0, f(x) = -\frac{1}{2}x(x+4),$
 $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$
 c) $x = 5, f(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-5),$
 $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$
4. a) $f(x) = 2x^2 + 8x + 6 = 2(x+2)^2 - 2$
 b) $f(x) = 2x^2 - 4x = 2(x-1)^2 - 2$
 c) $f(x) = 2x^2 - 20x + 42 = 2(x-5)^2 - 8$
5. a) $(0, 0), (-6, 0), W(-3, 9)$
 b) $(1, 0), (5, 0), (0, 5), W(3, -4)$
 c) $(-3, 0), (1, 0), (0, \frac{3}{2}), W(-1, 2)$
6. a) $y = \frac{2}{3}(x+2)(x-4) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{16}{3} =$
 $= \frac{2}{3}(x-1)^2 - 6$
 b) $y = -\frac{8}{9}x(x+6) = -\frac{8}{9}x^2 - \frac{16}{3}x =$
 $= -\frac{8}{9}(x+3)^2 + 8$
 c) $y = -\frac{2}{9}(x-1)(x-7) =$
 $= -\frac{2}{9}x^2 + \frac{16}{9}x - \frac{14}{9} =$
 $= -\frac{2}{9}(x-4)^2 + 2$

1.9. Nierówności kwadratowe

- Ć 1. a) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [1; \infty)$ b) $x \in [-1; \frac{1}{2}]$
 c) $x \in (1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$
2. a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 c) sprzeczna
3. a) $x \in \mathbb{R}$ b) sprzeczna c) $x \in \mathbb{R}$
4. a) $x \in [-\frac{3}{2}; 1]$
 b) $x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \infty)$
 c) $x \in \mathbb{R}$ d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 e) $x \in (0; \frac{2}{5})$ f) $x \in [-\frac{1}{2}; 3]$
- Z 1. a) $x \in (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$ b) $x \in [-4; 4]$
 c) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$
 e) $x \in [-1; 4]$ f) $x \in (-1; 5)$
 g) $x \in [-\frac{1}{2}; 5]$
 h) $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
 i) sprzeczna j) $x \in (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$
 k) $x \in [-2; 8]$ l) sprzeczna

2. a) 13 b) nieskończenie wiele c) 5 d) 2
3. a) 1, 2, 3, 4, 5 b) 0, 1, 2
c) -3, -2, -1, 0, 1, 2
4. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ b) $x \in \mathbb{R}$
c) $x \in (-\infty; -5] \cup [\frac{1}{3}; \infty)$
d) $x \in \mathbb{R}$ e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{9}\}$
f) $x \in (-\infty; -4] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$
g) sprzeczna h) $x = \frac{3}{2}$
i) sprzeczna
5. a) $f(x) > 5$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty)$,
 $f(x) < -3$ dla $x \in (2; 4)$
b) $x \in (1; 2) \cup (6; 7)$
6. a) $x \in (-2; 3)$
b) $x \in (-\infty; -6 - \sqrt{41}] \cup [-6 + \sqrt{41}; \infty)$
c) $x \in (-\infty; 9 - 5\sqrt{3}] \cup [9 + 5\sqrt{3}; \infty)$
d) $x \in (-\infty; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \infty)$
e) $x \in \mathbb{R}$ f) $x \in (-1; -\frac{1}{5})$
7. a) $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$
b) $(-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (1; \infty)$
c) $(-4 - \sqrt{10}; -4 + \sqrt{10})$
8. a) $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$ b) $[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$
c) $\mathbb{R}$ d) $(-\infty; -1] \cup [4; \infty)$
e) $(-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{5}{3}; \infty)$
f) $(-\infty; -4\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; \infty)$
9. a) $A \cup B = [0; 2 + \sqrt{3}]$, $A \cap B = [2 - \sqrt{3}; 3]$,
 $A \setminus B = (3; 2 + \sqrt{3}]$
b) $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = (1; 2) \cup (3; 4)$,
 $A \setminus B = (-\infty; 1] \cup [4; \infty)$
10. a) $x \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$
b) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$
c) $x \in (-\infty; 0] \cup [1; \infty)$
d) $x \in \mathbb{R}$ e) $x = 2$
f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
g) $x \in (-\infty; -7] \cup [3; \infty)$
h) $x \in (-3; 5)$ i) $x \in (-\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$
11. a) żaden b) wszystkie
c) 1 d) -12, -6, -4, -3, -2, -1, 6, 12
e) -12, -6, -4, -3, 1, 2, 3, 4, 6, 12
f) -12, -6, -4, -3, -2, 1, 2, 3, 4, 6, 12
12. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; \infty)$
b) $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$
c) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$

1.10. Funkcja kwadratowa - zastosowania (1)

1. a) 361 b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{2}$
2. 162
3. a) najmniejsza: 4, największa: 13
b) najmniejsza: -49, największa: -1
c) najmniejsza: -11, największa: -2
d) najmniejsza: $-\frac{7}{2}$, największa: 1
4. $x = 10$ cm, $P = 800$ cm²
1. a) f - najmniejsza: -1, największa: 3,
 g - najmniejsza: -3, największa: 9
b) f - najmniejsza: -33, największa: 3,
 g - najmniejsza: $-\frac{7}{2}$, największa: 21
2. a) 8 b) 32
3. 21 m $\times$ 21 m
4. 7 m $\times$ 14 m
5. 3 cm $\times$ 3 cm
6. a) $P(x) = -2x^2 + 4x$, $x \in (0; 2)$, 1×2
b) $P(x) = -3x^2 + 24x$, $x \in (0; 8)$, 4×12
7. a) najmniejsza: 1, największa: 9
b) najmniejsza: -2, największa: 10
8. 60 m $\times$ 60 m

1.11. Funkcja kwadratowa - zastosowania (2)

1. a) 12 m $\times$ 18 m b) 9 m $\times$ 24 m
2. 1,5 m
3. a) $z(x) = -50x^2 + 2250x - 17\,500$,
 $x \in [10; 35]$
b) cena misia: 22,50 zł, wielkość sprzedaży: 625 sztuk, zysk: 7812,50 zł
4. o 10 zł
1. $x = 3$
2. a) 10 cm b) $\frac{65-20\sqrt{7}}{2} \approx 6$ [cm]
3. w obu przypadkach 1,5 m
4. $x = 3$
5. $x > 2$
6. Jeśli przez x oznaczymy szerokość pokoju w metrach, to $x \in [\sqrt{17} - 1; 6]$.
7. 40 cm
8. $x \in [2; 8]$

9. 15
11. a) $y = -\frac{1}{9}(x-6)^2 + 4 = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$
b) $y = -\frac{1}{9}(x-6)(x+6) = -\frac{1}{9}x^2 + 4$
12. nie
13. 1,5 cm
14. a) $Ob = 30$ m, $P = 30$ m²
b) $Ob = 56$ m, $P = 84$ m²
15. 200 m

Zestaw I

1. a) $f(x) = x^2 + 4$
b) $f(x) = -(x+1)^2 + 1$
c) $f(x) = (x+1)^2 - 2$
d) $f(x) = (x-3)^2 - 4$
e) $f(x) = -(x-2)^2 + 1$
f) $f(x) = -(x+3)^2 + 8$
2. a) $f(x) = -\frac{4}{3}(x-2)^2 + \frac{4}{3}$
b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2}$
3. a) $x = -7$, $x = 7$ b) $x = -12$, $x = 12$
c) $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$ d) $x = -\frac{1}{6}$, $x = \frac{1}{6}$
e) $x = -\frac{9}{2}$, $x = \frac{9}{2}$ f) $x = -\frac{6}{5}$, $x = \frac{6}{5}$
4. a) $x = -5\sqrt{2}$, $x = 5\sqrt{2}$
b) $x = -\frac{1}{2}\sqrt{14}$, $x = \frac{1}{2}\sqrt{14}$
c) $x = -2\sqrt{2}$, $x = 2\sqrt{2}$
d) $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
e) $x = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$, $x = \frac{1}{3}\sqrt{6}$
f) sprzeczne
5. a) $x = 0$, $x = 8$, oś symetrii: $x = 4$
b) $x = -6$, $x = 0$, oś symetrii: $x = -3$
c) $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$, oś symetrii: $x = \frac{3}{4}$
d) $x = -\frac{1}{3}$, $x = 0$, oś symetrii: $x = -\frac{1}{6}$
e) $x = -7$, oś symetrii: $x = -7$
f) $x = -\frac{1}{4}$, oś symetrii: $x = -\frac{1}{4}$
6. a) $x = -7$, $x = 3$ b) $x = -3$, $x = 2$
c) $x = -3$, $x = 4$ d) $x = -3$, $x = \frac{1}{2}$
e) $x = -\frac{5}{3}$, $x = \frac{1}{2}$ f) $x = \frac{8}{3}$
g) $x = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$, $x = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$
h) $x = \frac{-5-\sqrt{13}}{6}$, $x = \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$
i) sprzeczne

7. a) $x = -2$, $x = 3$
b) $x = -2$, $x = 3$
c) $x = -1$, $x = \frac{1}{5}$
d) $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$
8. a) $(0, 0)$, $(-4, 0)$, $W(-2, -4)$
b) $(0, 0)$, $(2, 0)$, $W(1, 1)$
c) $(0, 0)$, $(4, 0)$, $W(2, -8)$
d) $(0, 1)$, $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $W(0, 1)$
e) $(0, 8)$, $(-2, 0)$, $(4, 0)$, $W(1, 9)$
f) $(0, 8)$, $(-4, 0)$, $(-2, 0)$, $W(-3, -1)$
9. a) $f(D) = [-16; \infty)$,
malejąca w $(-\infty; 4]$, rosnąca w $[4; \infty)$
b) $f(D) = (-\infty; 9]$,
rosnąca w $(-\infty; 3]$, malejąca w $[3; \infty)$
c) $f(D) = [-5; \infty)$,
malejąca w $(-\infty; -1]$, rosnąca w $[-1; \infty)$
d) $f(D) = (-\infty; 3]$,
rosnąca w $(-\infty; \frac{1}{2}]$, malejąca w $[\frac{1}{2}; \infty)$
e) $f(D) = (-\infty; 19]$,
rosnąca w $(-\infty; -3]$, malejąca w $[-3; \infty)$
f) $f(D) = [-8; \infty)$,
malejąca w $(-\infty; -6]$, rosnąca w $[-6; \infty)$
10. a) $x = 2 - 2\sqrt{2}$, $x = 2 + 2\sqrt{2}$
b) $x = -1 - \sqrt{2}$, $x = -1 + \sqrt{2}$
c) $x = 0$, $x = 4$
d) $x = 3 - \sqrt{3}$, $x = 3 + \sqrt{3}$

Zestaw II

1. a) $f(x) = 2x(x-3)$
b) $f(x) = \frac{1}{3}x(x+6)$
c) $f(x) = -(x+5)(x-3)$
d) $f(x) = 2(x+2)(x-1)$
e) $f(x) = 3(x-\frac{1}{3})(x-3)$
f) $f(x) = -2(x+\frac{1}{2})(x-2)$
2. a) $x = 7$, $f(x) = -(x-5)^2 + 4$
b) $x = -9$, $f(x) = \frac{1}{6}(x+3)^2 - 6$
c) $x = -2$, $f(x) = -\frac{8}{25}(x-\frac{1}{2})^2 + 2$
d) $x = -\frac{1}{2}$, $f(x) = -\frac{96}{49}(x-\frac{5}{4})^2 + 6$
3. a) $x \in (-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty)$
b) $x \in (-2; 2)$ c) $x \in (-3; 4)$
d) $x \in (-\infty; -5] \cup [1; \infty)$
e) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
f) $x \in [-3\frac{1}{2}; 2]$

4. a) $x \in [-1; 5]$
 b) $x \in \left(-\infty; -\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{-5+\sqrt{17}}{4}; \infty\right)$
 c) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [5; \infty)$
 d) $x = 6$ e) $x \in \left(-\frac{1+2\sqrt{2}}{7}; \frac{-1+2\sqrt{2}}{7}\right)$
 f) $x \in \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right]$
 g) $x \in (-\infty; -3) \cup (0; \infty)$
 h) $x \in (-4 - \sqrt{17}; -4 + \sqrt{17})$
 i) $x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$
5. a) 10 b) 1 c) 4 d) 1 e) 5 f) 1
6. a) 7 b) 0
7. $X \cup Y = (-\infty; -2 - \sqrt{2}] \cup [-2; \infty)$,
 $X \cap Y = [-2 + \sqrt{2}; 3]$,
 $X \setminus Y = [-2; -2 + \sqrt{2})$
8. a) $f(x) = -(x-3)^2 + 4$, $x \in [1; 5]$
 b) $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 2$,
 $x \in (-\infty; -2\sqrt{2} - 2] \cup [2\sqrt{2} - 2; \infty)$
 c) $f(x) = -2(x-4)^2 + 1$,
 $x \in \left[4 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
9. a) najmniejsza: -2 , największa: 6
 b) najmniejsza: -8 , największa: 1
 c) najmniejsza: 1 , największa: 9
 d) najmniejsza: -12 , największa: $\frac{1}{4}$
10. a) $a = b = 2$ b) $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$
 c) $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$
11. $62,5 \text{ m} \times 62,5 \text{ m}$
12. a) o 100 zł, zysk zwiększył się o 10 000 zł
 b) o 280 zł, zysk zwiększył się o 3920 zł
13. a) 0,75 dm b) 0,5 dm

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. D 2. C 3. B 4. C 5. C 6. A 7. A
 8. B 9. D
- 10.1. E 10.2. D
11. FF
12. FPF
13. AE
14. A3
- 15.1. FF 15.2. $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \infty)$
16. $x = -3$, $x = \frac{3}{2}$
17. $x \in (-\infty; -4] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$
18. $x \in [-1; \frac{2}{3}]$

19. -32
20. $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 - 1$
21. $P(x) = \frac{1}{2}x(10\frac{1}{2} - x)$, $D = (0; 10\frac{1}{2})$
23. a) $P(x_0) = -\frac{2}{3}x_0^2 + 4x_0$, $x_0 \in (0; 6)$
 b) $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(3, 2)$, $C(0, 2)$

2.1. Stopień i współczynniki wielomianu

1. a) tak, stopnia 7
 b) tak, stopnia 1
 c), d) nie e) tak, stopnia 3
2. a) $w(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$,
 $\text{st}(w) = 5$
 b) $w(x) = 2x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 - x$,
 $\text{st}(w) = 6$
 c) $w(x) = 2x^8 + x^7 + 3x^4 - x^2 + 6x - 2$,
 $\text{st}(w) = 8$
 d) $w(x) = 2x^{10} - x^6 + 3x^2 - 2x + 5$,
 $\text{st}(w) = 10$
3. a) $a_5 = -2$, $a_4 = a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = 1$,
 $a_0 = 0$, $\text{st}(w) = 5$
 b) $a_6 = 1$, $a_5 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 1$, $a_3 = 0$,
 $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = 1$, $\text{st}(w) = 6$
 c) $a_0 = 2^{10}$, $\text{st}(w) = 0$
4. a) $w(x) = -3x^4 - 3x^2 - 3$
 b) $w(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
5. a) $w(0) = -4$, $w(2) = 10$, $w(-2) = -26$
 b) $w(0) = 1$, $w(2) = 21$, $w(-2) = 13$
 c) $w(0) = -2$, $w(2) = 32$, $w(-2) = -44$
 d) $w(0) = 3$, $w(2) = -47$, $w(-2) = -75$
6. a) $w(\frac{1}{2}) = -1$, $w(-\frac{1}{2}) = 6$
 b) $w(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $w(-\frac{1}{2}) = 4\frac{1}{2}$
7. a) $v(x) = x^3 - 6x^2 + 4$,
 $a_3 = 1$, $a_2 = -6$, $a_1 = 0$, $a_0 = 4$
 b) $w(x) = -6x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x - 1$,
 $a_5 = -6$, $a_4 = 4$, $a_3 = -3$, $a_2 = 0$,
 $a_1 = 2$, $a_0 = -1$,
 $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -4$
3. a) $w(0) = -3$, $w(2) = 21$,
 $w(-2) = -19$, $w(\frac{1}{2}) = -3\frac{3}{8}$
 b) $w(0) = 2$, $w(2) = -20$, $w(-2) = 32$,
 $w(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$
 c) $w(0) = -4$, $w(2) = -6$,
 $w(-2) = -34$, $w(\frac{1}{2}) = -3\frac{3}{8}$

3. d) $w(0) = -10$, $w(2) = 6$,
 $w(-2) = -58$, $w(\frac{1}{2}) = -11\frac{7}{16}$
4. $a = 1$, $b = -2$, $c = -8$, $d = 4$
5. a) Q b) P
6. a) $a = 1$ b) $a = -72$
 c) $a = 4$ d) $a = -1$
7. a) $a = 6\frac{2}{3}$, $b = 7\frac{2}{3}$ b) $a = 3$, $b = 1$
8. a) B , C b) A
9. a) $a = 3$ b) $a = 3$

2.2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

1. a) $u(x) + w(x) = 17x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 2x$,
 $\text{st}(u) = 4$, $\text{st}(w) = 3$, $\text{st}(u+w) = 4$
 b) $u(x) + w(x) = 6x^4 - 13x^3 - 2x^2 + 5$,
 $\text{st}(u) = 5$, $\text{st}(w) = 5$, $\text{st}(u+w) = 4$
2. Na przykład:
 a) $u(x) = x^4$, $w(x) = x^4 + 1$
 b) $u(x) = x^4 + x^3$, $w(x) = -x^4 + 1$
 c) $u(x) = x^4 + x^2$, $w(x) = -x^4 - x + 1$
 d) $u(x) = x^4 + x + 1$, $w(x) = -x^4 + 1$
 e) $u(x) = x^4 + 1$, $w(x) = -x^4 + 1$
3. Współczynniki wielomianu w są liczbami przeciwnymi do odpowiednich współczynników wielomianu u .
4. a) $u(x) - w(x) =$
 $= 5x^9 + 4x^8 + 10x^4 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$,
 $\text{st}(u) = 9$, $\text{st}(w) = 8$, $\text{st}(u-w) = 9$
 b) $u(x) - w(x) = \frac{2}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$,
 $\text{st}(u) = 6$, $\text{st}(w) = 6$, $\text{st}(u-w) = 4$
5. a) $h(x) = -10x^6 + 8x^4 + 7$, $h(-1) = 5$
 b) $h(x) = -14x^4 - 15x^2 + 4$, $h(-1) = -25$
6. a) $u(x, y) + w(x, y) =$
 $= 4x^3y^2 + 3x^2y^3 - 9x^2y^2 - 4xy - 1$,
 $u(x, y) - w(x, y) =$
 $= 4x^3y^2 - 3x^2y^3 + 3x^2y^2 + 8xy + 5$
 b) $u(x, y) + w(x, y) =$
 $= 2x^4y + 6x^3y + 2xy^2 - x + 5$,
 $u(x, y) - w(x, y) = 2x^4y - 6xy^2 + x - 3$
 c) $u(x, y, z) + w(x, y, z) =$
 $= 5xy^2z^3 - 6x^2y^2z + 6x^2yz^2 + xyz^3$,
 $u(x, y, z) - w(x, y, z) =$
 $= 3xy^2z^3 - 6x^2y^2z - 6x^2yz^2 - 3xyz^3$

- d) $u(x, y, z) + w(x, y, z) =$
 $= 8x^2y + 14xz^2 - 4yz^2 + z^3$,
 $u(x, y, z) - w(x, y, z) =$
 $= 8x^2y - 2xz^2 - 8y^2z + 2yz^2 - z^3$
1. a) $f(x) + g(x) = x^6 + x^3 + x^2 - 2x + 6$,
 $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^6 - 4x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$
 b) $f(x) + g(x) = -3x^5 + x^2 - x + 2$,
 $f(x) - g(x) = -2x^6 + 3x^5 - 5x^2 + 9x + 2$
 c) $f(x) + g(x) = x^5 + 3x^4 + x - 3$,
 $f(x) - g(x) = 4x^7 - x^5 + 3x^4 + 7x - 7$
2. a) $w(x) = 2x^5 + 6x^4 - 5x^2$, $\text{st}(w) = 5$,
 $S_w = 3$, $u(x) = -3x^5 - 4x^4 - 5$, $\text{st}(u) = 5$,
 $S_u = -12$
 b) $w(x) = 12x^2 - 18x$, $\text{st}(w) = 2$,
 $S_w = -6$, $u(x) = -5x^5 - 10x^3 - 8x^2 + 27x$,
 $\text{st}(u) = 5$, $S_u = 4$
3. a) $\text{st}(p+q) = 5$
 b) $\text{st}(p+q) \leq 5$ lub $p+q \equiv 0$
4. a) $\text{st}(u+w) = 6$ dla $a \neq 0$,
 $\text{st}(u+w) = 4$ dla $a = 0$
 b) $\text{st}(u+w) = 5$ dla $a \neq -6$,
 $\text{st}(u+w) = 1$ dla $a = -6$
5. a) $u(x, y) + w(x, y) = \frac{3}{2}x^3y - \frac{2}{3}x^2y - 2xy^2$,
 $u(x, y) - w(x, y) = \frac{1}{2}x^3y + \frac{4}{3}x^2y - 4xy^2$,
 $(u+w)(-2, 3) = -8$, $(u-w)(-2, 3) = 76$
 b) $u(x, y) + w(x, y) =$
 $= \frac{5}{12}xy^3 - \frac{2}{3}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^2y$,
 $u(x, y) - w(x, y) = \frac{1}{12}xy^3 + \frac{4}{3}x^2y^2 - \frac{3}{2}x^2y$,
 $(u+w)(-2, 3) = -52,5$,
 $(u-w)(-2, 3) = 25,5$
6. $P(x, y) = \frac{5}{2}xy + 2y^2$
7. a) Q b) P c) P
8. a) $v(x, y, z) =$
 $= -x^2yz^2 + 6x^2yz - 2xyz^2 - 3xyz$
 b) $v(x, y, z) =$
 $= 4x^3y^2z - 2xy^2z^2 - 9xyz^2 + 5xyz + 6yz^2$
9. a) $v(x) = 10x^3 - x^2 + 3,5$
 b) $v(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3,5$
10. a) $v(x) = -5x^4 + 5x^2 - 6x$,
 $v(1) = -6$, $v(-1) = 6$, $v(-2) = -48$
 b) $v(x) = \frac{1}{2}x$,
 $v(1) = \frac{1}{2}$, $v(-1) = -\frac{1}{2}$, $v(-2) = -1$

11. a) $(w+u)(-2, 3) = 82$,
 $(w-u)(-2, 3) = 50$
 b) $(w+u)(-2, 3) = -140$,
 $(w-u)(-2, 3) = 121$

2.3. Mnożenie wielomianów

- ☞ 1. a) $u(x) \cdot w(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 - x^3$,
 $\text{st}(u \cdot w) = 7$
 b) $u(x) \cdot w(x) = x^7 - x^5 - x^3 + x^2 + x - 1$,
 $\text{st}(u \cdot w) = 7$
 c) $u(x) \cdot w(x) = x^3 - 1$, $\text{st}(u \cdot w) = 3$
 d) $u(x) \cdot w(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5$,
 $\text{st}(u \cdot w) = 4$
2. a) $V(x) = x^3 - x$, $x > 1$
 b) $V(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $x > -1$
 c) $V(x) = 2x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}x - 1$, $x > \frac{1}{2}$
 d) $V(x) = x^4 + 6x^3 - 54x - 81$, $x > 3$
3. a) $(u \cdot w)(x, y) =$
 $= -4x^4 + 2x^3y - 2x^3 + 6x^2y^2 + x^2y - 3xy^3$
 b) $(u \cdot w)(x, y) = 3x^3y^3 - 2x^3y +$
 $+ 6x^2y^3 - 3x^2y - 3xy^3 + 4xy - y$
 c) $(u \cdot w)(x, y) = 4x^4y^3 - 12x^4y^2 +$
 $+ 3x^3y^4 - 11x^3y^3 + 10x^3y^2 + 3x^2y^3 - 2x^2y^2$
4. a) $(u \cdot w)(x, y, z) = 2x^3y^2z + 2x^3yz^2 +$
 $- x^2y^2z - x^2yz^2 + 2xy^2z^2 - y^2z^2$
 b) $(u \cdot w)(x, y, z) = 3x^3y^2z - 4x^3yz^2 +$
 $- 2x^2y^3z + 4x^2y^2z^2 - xy^4z + 6xyz^2 +$
 $- 8xz^3 + 2y^2z^2$
 c) $(u \cdot w)(x, y, z) = x^3y^2z^2 + 2x^3yz^2 +$
 $- x^3yz + 2xy^4z^2 + 4xy^3z^2 - 2xy^3z +$
 $+ 3xy^2z^4 + 6xyz^4 - 3xyz^3$
- ☒ 1. a) $2x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 7x$, $a_4 = 2$, $a_0 = 0$
 b) $4x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 6x + 8$, $a_4 = 4$, $a_0 = 8$
 c) $2x^6 - 2x^5 - x^3 + 2x^2 - x$, $a_6 = 2$, $a_0 = 0$
 d) $-2x^6 - 3x^5 + 8x^4 + 16x^3 - 3x^2 - 24x + 6$,
 $a_6 = -2$, $a_0 = 6$
 e) $2x^5 - 2x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{1}{4}$,
 $a_5 = 2$, $a_0 = -\frac{1}{4}$
 f) $-4x^6 - x^5 - 5\sqrt{2}x^4 - \sqrt{2}x^3 + 6x^2 +$
 $+ 2x + 2\sqrt{2}$, $a_6 = -4$, $a_0 = 2\sqrt{2}$
2. a) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = 1$, $a_0 = -1$
 b) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = 6$, $a_0 = -6$
 c) $\text{st}(w) = 5$, $a_5 = -4$, $a_0 = 1$
 d) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = 1$, $a_0 = -6$

- e) $\text{st}(w) = 4$, $a_4 = -6$, $a_0 = 2$
 f) $\text{st}(w) = 5$, $a_5 = 12$, $a_0 = 6$

3. a) $v(x) = x^6 - 8x^5 + 16x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 9$,
 $\text{st}(v) = 6$
 b) $v(x) = 4x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 8x + 16$,
 $\text{st}(v) = 4$
4. a) $f(x) = x^6 - 3x^5 - 21x^4 + 2x^2$,
 $g(x) = 12x^3 + 9x^2 - 6x + 1$
 b) $f(x) = -6x^7 + 2x^6 + 6x^5 - 3x^4 - 6x^3 +$
 $+ 3x^2 - 1$,
 $g(x) = x^8 - 2x^6 + 3x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2$
 c) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 6x^3 - x + 1$,
 $g(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^2 + 4x$
5. a) $P(x) = 10x^2 + 2x - 20$,
 $x \in (2; \infty)$
 b) $P(x) = 2x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 6x + 4$,
 $x \in (-2; -1) \cup (1; \infty)$
6. a) $v(x, y) =$
 $= 4x^4 - 12x^3y^2 - 4x^3y + 7x^2y^2 - 2y^4$
 b) $v(x, y) =$
 $= -4x^4y^4 + x^4y^2 + 6x^3y^3 + 4x^2y^4 + 2xy^4$
7. a) $2x^3y + x^2y^2 - 8x^2y - 3xy^3 - 12xy^2$
 b) $4x^3 + 6x^2y - 12xy^2 - 9y^3$
 c) $x^6 + x^5y + x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$
 d) $-x^3y + x^3 + 2x^2y^2 - x^2y + xy^3 +$
 $- 2xy^2 - 2y^4$
8. a) $8x^7 - 12x^4$; $-20, 0, -4$
 b) $-6x^5 + 3x^4$; $9, 0, -3$
 c) $x^3 + 3x^2 - 4x$; $6, 0, 0$
 d) $2x^6 - 6x^4 - x^3 + 3x$; $-6, 0, -2$
 e) $x^3 - 5x^2 + 7x - 2$; $-15, -2, 1$
 f) $6x^4 + x^3 - 12x^2 - 20x - 3$;
 $10, -3, -28$
9. a) $5x^3 + 4x^2 - 9x - 8$
 b) $x^3 + 2x^2 - 7x - 6$
 c) $-6x^3 + 5x^2 - 16x + 16$
 d) $x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 8x$
10. a) $-2x^2y + 4xy^2 - 2xz^2 - 2y^2z + 4yz^2 +$
 $+ 4x^2z - 7xyz$
 b) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$
 c) $36x^2y^2 - 16x^2z^2 - 9y^4 + 4y^2z^2$
 d) $x^2 + x^2y + x^2yz + x + xy - xy^2z - xy^2z^2$

2.4. Równania wielomianowe (1)

- ☞ 1. a) $x = 2$ b) $x = -3$ c) $x = \frac{1}{2}$
 d) $x = -\frac{2}{3}$ e) $x = -0,5$ f) $x = 4$
2. a) $x = -6$, $x = 0$ b) $x = 0$, $x = \frac{5}{2}$
 c) $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$ d) $x = -\frac{1}{5}$, $x = 0$
 e) $x = -4$, $x = 6$ f) $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{2}{3}$
3. a) $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$
 b) $x = -6$, $x = 0$, $x = 5$
 c) $x = -3$, $x = -1$, $x = 0$
 d) $x = -9$, $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$
 e) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = 9$
 f) $x = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = 4$
4. a) $\{-8, -6, 0, 3\}$ b) $\{-7, -\frac{5}{2}, 0, \frac{9}{2}\}$
 c) $\{-12, -6, \frac{7}{2}, 6\}$ d) $\{-12, -3, 8, 10\}$
- ☒ 1. a) $x = 2$ b) $x = \frac{1}{4}$ c) $x = -5$
 d) $x = -\frac{1}{3}$ e) $x = 10$ f) $x = \frac{4}{5}$
2. a) $x = 4$ b) $x = 3$
 c) $x = -2$ d) $x = -6$
3. a) $x = -6$, $x = 0$
 b) $x = 0$, $x = \frac{1}{7}$
 c) $x = -8$, $x = 0$, $x = 2$
 d) $x = 0$, $x = \frac{1}{3}$
 e) $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$, $x = \frac{1}{5}$
 f) $x = -\frac{2}{3}$, $x = 0$
4. a) $x = 1$, $x = 2$, $x = 5$
 b) $x = -6$, $x = -1$, $x = -\frac{1}{4}$
 c) $x = -9$, $x = \frac{2}{5}$, $x = \frac{5}{2}$
 d) $x = -4$, $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$
 e) $x = -6$, $x = \frac{1}{6}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 5$
 f) $x = -4$, $x = -\frac{3}{4}$, $x = \frac{4}{3}$
5. a) $\{1, 2, 4\}$ b) $\{-3, \frac{5}{2}, 6\}$
 c) $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\}$ d) $\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$
6. a) $0, 3$ b) $0, \frac{2}{3}$
7. a) $x = -4$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 3$
 b) $x = -3$, $x = \frac{3}{5}$
 c) $x = -15$, $x = \frac{3}{2}$
 d) $x = -8$, $x = 0$, $x = 12$
 e) $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 9$
 f) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$
8. a) $5\frac{1}{4}$ b) 13

Rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki

1. a) $x(x+8)$ b) $x(x-\frac{3}{2})$
 c) $4x(x+7)$ d) $6x(x-3)$
 e) $9x(x+\frac{2}{3})$ f) $12x(x-\frac{3}{2})$
2. a) $(x-6)(x+6)$
 b) $(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$
 c) $4(x-\frac{3}{2})(x+\frac{3}{2})$
 d) $9(x-\frac{7}{3})(x+\frac{7}{3})$
3. a) $y = (x-1)(x-2)$
 b) $y = (x-1)(x-8)$
 c) $y = (x+1)(x+4)$
 d) $y = (x+2)(x+3)$
 e) $y = (x-1)(x+3)$
 f) $y = (x+1)(x-5)$
4. a) $y = 2(x+3)(x-\frac{1}{2})$
 b) $y = 2(x+1)(x+\frac{5}{2})$
 c) $y = 2(x+1)(x+\frac{3}{2})$
 d) $y = 3(x+2)(x+\frac{1}{3})$
 e) $y = 3(x+3)(x-\frac{2}{3})$
 f) $y = 6(x+\frac{2}{3})(x+\frac{1}{2})$
5. a) $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$
 $y = (x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$
 b) $x_1 = -2 - \sqrt{2}$, $x_2 = -2 + \sqrt{2}$
 $y = (x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})$
 c) $x_1 = 3 - \sqrt{7}$, $x_2 = 3 + \sqrt{7}$
 $y = (x-3+\sqrt{7})(x-3-\sqrt{7})$
 d) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$
 $y = 2\left(x + \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)$
 e) $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$
 $y = 2\left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$
 f) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$
 $y = 3\left(x + \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$
7. a) $y = (x-3)(x-6)$
 b), c), h) nie ma postaci iloczynowej
 d) $y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)$
 e) $y = 3(x+4)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ f) $y = \frac{1}{4}(x+4)^2$
 g) $y = \left(x - \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)$
 i) $y = -\frac{1}{3}(x-9)^2$

2.5. Równania wielomianowe (2)

- ☞ 1. a), b), f) $x = 0$
 c) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}$
 d) $x = -2, x = 0$
 e) $x = -6, x = 0, x = 6$
2. a) $x = -2, x = 0, x = 1$
 b) $x = -6, x = 0, x = 3$
 c) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = 3$
 d) $x = -5, x = 0, x = 2$
 e) $x = -4, x = -3, x = 0$
 f) $x = 0, x = \frac{1}{2}, x = 2$
3. a) $x = -2, x = 0$
 b) $x = -1, x = 0$
 c) $x = -\frac{1}{2}, x = 0$
 d) $x = -3, x = 0, x = 3$
 e) $x = -\frac{3}{2}, x = 0, x = \frac{3}{2}$
 f) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}$
4. a) $x = 0, x = 3, x = 4$
 b) $x = -1, x = -\frac{1}{3}, x = 0$
 c) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = 5$
 d) $x = 0$
 e) $x = -1 - \sqrt{5}, x = 0, x = -1 + \sqrt{5}$
 f) $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, x = 0, x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
- ☒ 1. a) $x = 0, x = 2$
 b) $x = -3, x = 0, x = 3$
 c) $x = -27, x = 0$ d) $x = 0, x = 8$
 e), f) $x = 0$
2. a) $x = 0, x = 1, x = 2$
 b) $x = -5, x = -1, x = 0$
 c) $x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, x = 0$
 d) $x = 1 - \sqrt{2}, x = 0, x = 1 + \sqrt{2}$
 e) $x = 0, x = 3$ f) $x = 0$
3. a) $x = 0, x = 2, x = 5$
 b) $x = -2, x = 0, x = 5$
 c) $x = -3, x = 0, x = 4$
 d) $x = -3, x = 0, x = 5$
 e) $x = 0, x = 4$ f) $x = 0$
4. a) $x = 0, x = 1, x = 5$
 b) $x = -4, x = -2, x = 0$
 c) $x = -4, x = 0, x = 6$
 d) $x = 0, x = 6$
 e) $x = -\frac{3}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}$
 f) $x = -\frac{2}{3}, x = 0, x = \frac{1}{4}$

5. a) $x = 0, x = 4$
 b) $x = -3, x = 0$
 c) $x = 0, x = 2$
 d) $x = -\frac{1}{6}, x = 0$
 e) $x = 0, x = 5$
 f) $x = 0, x = \frac{4}{3}$
6. a) $x = 0, x = 4$
 b) $x = -\frac{1}{4}, x = 0$
 c) $x = -2, x = 0, x = 1$
 d) $x = -1, x = 0, x = 6$
 e) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}$
 f) $x = 0, x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{3}$
7. a) $-3, -1$ b) $-4, -\frac{1}{2}, 4$
8. a) $x = -2, x = 0, x = 1$
 b) $x = -1, x = 0, x = 3$
 c) $x = -1, x = 0, x = 3$
 d) $x = -6, x = 0, x = 1$
9. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{-3+\sqrt{19}}{2}$
10. a) 2 b) 1 c) 1 d) 2 e) 1 f) 3

2.6. Wielomiany - zastosowania

- ☞ 1. a) $V = 6x^2(4 - x), D = (0; 4)$
 b) $x = 3$
2. b) kolejno uzupełniamy: 128, 108, 64
 c) 64 dm^3
- ☒ 1. a) $V(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x,$
 $D = (0; 15)$
 b) $28 \text{ cm} \times 18 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$
 c) nie jest
2. b) $4,8 \text{ dm} \times 11,2 \text{ dm}$
3. a) $V = 2x^3 - x^2, x > 0,5$ b) 112 l

Zestaw I

1. a) $w(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7, w(-2) = -23$
 b) $w(x) = 2x + 3, w(-2) = -1$
2. a) $(v + w)(x) = \frac{7}{3}x^4 + x^2 - x - 1,$
 $(v + w)(2) = 38\frac{1}{3}$
 b) $(v + w)(x) = 2x^2 + 1, (v + w)(2) = 9$
3. a) $w(-\frac{1}{2}) = 5, w(-\frac{1}{4}) = 2\frac{1}{4},$
 $w(\frac{1}{4}) = -1\frac{3}{4}$
 b) $w(-\frac{1}{2}) = 0, w(-\frac{1}{4}) = -\frac{3}{8}, w(\frac{1}{4}) = \frac{3}{8}$
 c) $w(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}, w(-\frac{1}{4}) = w(\frac{1}{4}) = 0$
4. a), b), c) nie jest

5. a) $2x^5 + 5x^4 - 3x^3$ b) $2x^8 - 8\frac{1}{2}x^7 + 2x^6$
 c) $-2x^5 + 10x^4 - 14x^3 + 6x^2$
 d) $2x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 3x^2$
6. a) $u(x) = -2x^2 + 3x - 1, \text{st}(u) = 2$
 b) $u(x) = -2x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 1, \text{st}(u) = 5$
7. a) 0 b) 63 c) 0 d) 3
8. a) 1 b) -3 c) -1 d) wszystkie
9. a) $x = -4$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $x = 4$
 d) $x = -3$ e) $x = \frac{3}{4}$ f) $x = -\frac{2}{3}$
10. a) $x = -7, x = 0, x = 9$
 b) $x = -\frac{2}{5}, x = 0, x = \frac{1}{2}$
 c) $x = -3, x = -\frac{1}{4}, x = 2$
 d) $x = -5, x = 2, x = 4$
11. a) $x = -1, x = 0, x = 2; x = -1, x = 0$
 b) $x = -\frac{3}{2}, x = 0, x = 6; x = 0$
 c) $x = -\frac{1}{2}, x = -\frac{1}{3}, x = 0$; wszystkie
 d) $x = -\frac{3}{2}, x = 0, x = \frac{2}{3}; x = 0, x = \frac{2}{3}$

Zestaw II

1. a) $x = -4, x = 0, x = 4$ b) $x = 0$
 c) $x = 0$ d) $x = -1, x = 0$
 e) $x = 0, x = 2$ f) $x = 0, x = \frac{1}{2}$
2. a) $x = -6, x = 0$ b) $x = 0, x = 3$
 c) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}$
 d) $x = -\frac{1}{2}, x = 0$ e) $x = 0, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 f) $x = -2, x = 0, x = 2$
3. a) $x = 0, x = 1, x = 4$
 b) $x = -7, x = 0, x = 3$
 c) $x = -\frac{3}{2}, x = 0, x = 1$ d) $x = 0$
4. a) $x = 0, x = 2, x = 4$
 b) $x = -2, x = 0, x = 6$
 c) $x = -\frac{1}{4}, x = 0, x = 2$
 d) $x = -\frac{2+\sqrt{2}}{2}, x = 0, x = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$
5. a) $x = 0, x = 1, x = 3; x = 3$
 b) $x = -\frac{3}{2}, x = 0, x = 6; x = 6$
 c) $x = -3, x = -\frac{8}{3}, x = 0;$
 $x = -3, x = -\frac{8}{3}$
 d) $x = -4, x = 0, x = \frac{1}{2}; x = -4$
 e) $x = 0, x = \frac{1}{5}, x = 2$; żaden
 f) $x = -2, x = 0, x = \frac{1}{3}$; żaden
6. a), d) jest b), c) nie jest
7. a) $\{1\}$ b) $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
8. a) $x = -4, x = -2$ b) $x = -\sqrt{3}$

- c) $x = -\sqrt{3}, x = -\sqrt{2}$
 d) $x = -\frac{2}{3}, x = -\frac{1}{2}$
 e) $x = -\sqrt{5}$ f) $x = -2, x = -1$
9. a) $x = 0, x = 1$ b) $x = 0$
 c) $x = -1, x = 0, x = 5$
 d) $x = -1, x = 0, x = 3$
 e) $x = -2, x = 0, x = 3$
 f) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{2}{5}$
 g) $x = -\frac{1}{3}, x = 0$
 h) $x = -6, x = 0, x = 2$
 i) $x = -4, x = -1, x = 0$
 j) $x = 0, x = 1$ k) $x = -6, x = 0$
 l) $x = 0, x = \sqrt{2}$
10. a) $a = 4, b = 6$ b) $a = -2, b = -\frac{5}{6}$

11. Na przykład:

- a) $(x - 2)^2(x + 2)^2$ b) $(x^2 - 2)^2$
 c) $(x - 1)^2(x - 2)(x - 3)$

12. a) $x = -6, x = 0, x = 3$
 b) $x = -\frac{1}{4}, x = 0$ c) $x = 0, x = \frac{3}{2}$
13. a) $v(x, y) = 4x^2y^3 - 14xy^2,$
 $v(\frac{1}{2}, -2) = -36$
 b) $v(x, y) = -\frac{5}{2}xy^3 + \frac{5}{2}xy, v(\frac{1}{2}, -2) = \frac{15}{2}$
14. a) $v(x, y) = -4x^4 - 4y^4$
 b) $v(x, y) = -x^2y^2 - \frac{1}{4}x^4 - y^4$
15. $P(x, y, z) = 4xy + 4xz + 4yz + 10x +$
 $+ 8y + 6z + 22$

Przed obowiązkową maturą z matematyki

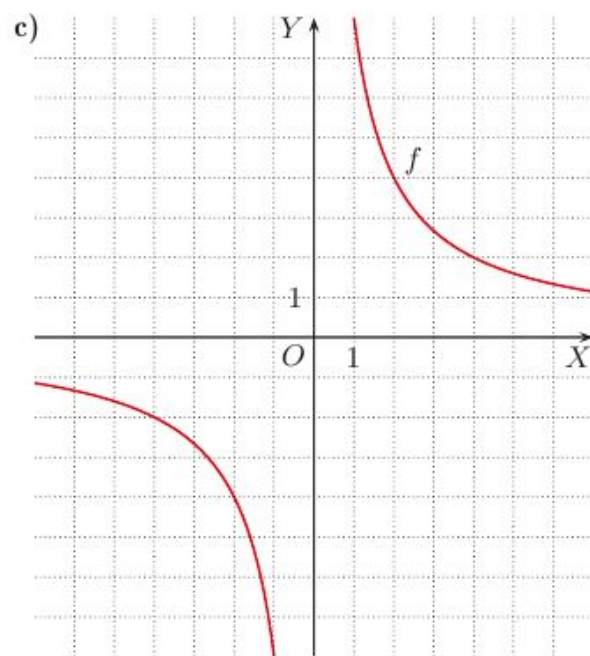
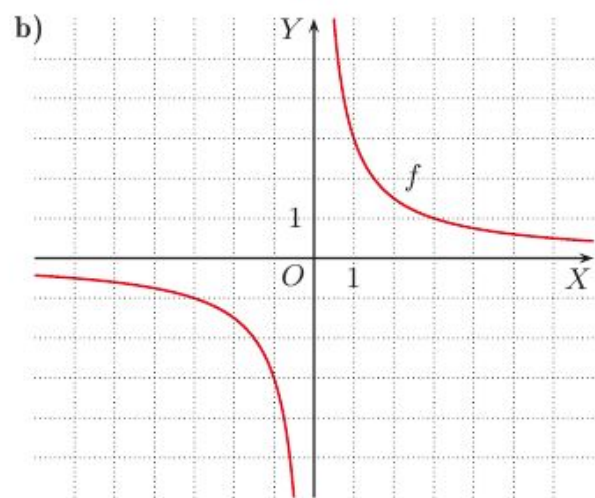
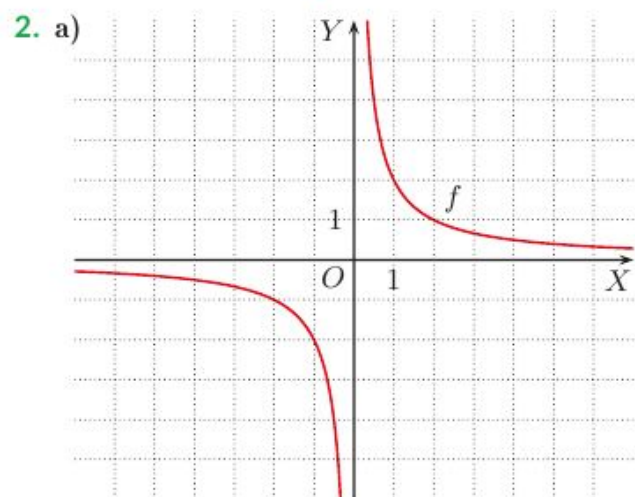
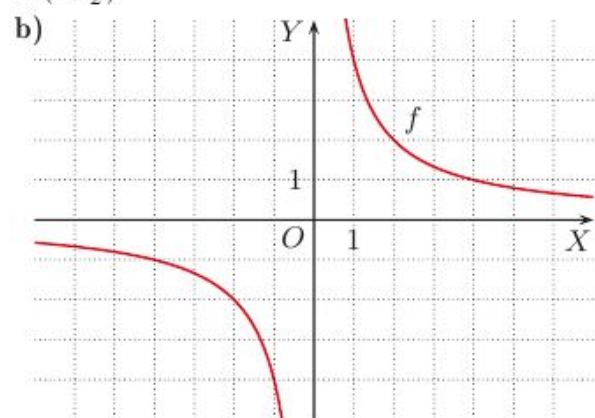
1. A 2. B 3. C 4. A 5. D 6. C 7. C 8. D
 9. PF 10. A3
 11.1. B 11.2. E
 12. FF
 13.1. PP 13.2. $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$
 14.1. A2
 15.2. $x = -2, x = 0, x = 6$
 16. $\frac{1}{4}$
 18. $\frac{5}{4}$
 19. jeden
 20. $-6, 0$
 21.1. $x = \frac{1}{2}, x = \frac{7}{2}$
 23. jest
 24. $x = \frac{16}{15}$

Proporcjonalność odwrotna

- $a = 18, y = \frac{18}{x}$
- a) $B(2, 3), C(3, 2), D(4, \frac{3}{2}), E(6, 1)$
b) kolejno uzupełniamy: 8, 4, $2\frac{2}{3}$, 2, $1\frac{3}{5}$
- a) $y = \frac{18}{x}$ b) $y = \frac{4}{x}$
c) $y = \frac{9}{4x}$ d) $y = \frac{1}{x}$
- a) g b) f c) h d) g e) g f) h

3.1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

1. a) $A(\frac{1}{2}, 8), B(1, 4), C(2, 2), D(4, 1), E(8, \frac{1}{2})$



3. a) $f(1) = \frac{1}{2}, g(1) = 2, h(1) = 4, k(1) = 6$
b) czerwony - f , niebieski - g ,
zielony - h , fioletowy - k
c) $A - k, B - g, C - f, D - g, E - h$

1. a) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
b) $f(D) = (-4; 0)$
c) $f(D) = [\frac{1}{2}; 2]$

2. a) wartość najmniejsza: 3,
wartość największa: 6
b) wartość najmniejsza: -4,
wartość największa: -2
c) wartość najmniejsza: $\frac{1}{4}$,
wartość największa: $\frac{1}{2}$
d) wartość najmniejsza: -5,
wartość największa: $-\frac{5}{2}$

3. a) czerwony - f , niebieski - g ,
zielony - h
b) P, Q

4. np. $(-6, 1), (-3, 2), (-2, 3), (-1, 6),$
 $(1, -6), (2, -3)$

5. a) $a = -3, P(1, -3),$
 $f(x) > -3$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$
b) $a = -6, P(2, -3),$
 $f(x) > -3$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

6. a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{1}{3x}$
c) $f(x) = -\frac{4}{x}$ d) $f(x) = -\frac{2}{x}$

7. a) $a = -8$ b) $a = -64$
c) $a = -\frac{2}{7}$ d) $a = 125$

3.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ wzdłuż osi OY i osi OX

1. a) $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{3\},$
asymptoty: $x = 0, y = 3$
b) $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$
asymptoty: $x = 0, y = -1$
c) $g(D) = \mathbb{R} \setminus \{-3\},$
asymptoty: $x = 0, y = -3$

2. A - $h, B - g, C - f$

3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\},$ maleje w $(-\infty; 2)$
i w $(2; \infty),$ asymptoty: $x = 2, y = 0$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\},$ maleje w $(-\infty; 4)$
i w $(4; \infty),$ asymptoty: $x = 4, y = 0$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\},$ rośnie w $(-\infty; 1)$
i w $(1; \infty),$ asymptoty: $x = 1, y = 0$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\},$ rośnie w $(-\infty; 2)$
i w $(2; \infty),$ asymptoty: $x = 2, y = 0$

4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\},$
maleje w $(-\infty; -2)$ i w $(-2; \infty),$
asymptoty: $x = -2, y = 0$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\},$
maleje w $(-\infty; -2)$ i w $(-2; \infty),$
asymptoty: $x = -2, y = 0$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\},$
maleje w $(-\infty; -4)$ i w $(-4; \infty),$
asymptoty: $x = -4, y = 0$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$
rośnie w $(-\infty; -1)$ i w $(-1; \infty),$
asymptoty: $x = -1, y = 0$
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\},$
rośnie w $(-\infty; -3)$ i w $(-3; \infty),$
asymptoty: $x = -3, y = 0$
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\},$
rośnie w $(-\infty; -4)$ i w $(-4; \infty),$
asymptoty: $x = -4, y = 0$

5. a) $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{-3\},$ asymptoty wykresu
funkcji $f: x = 1, y = 0,$ asymptoty
wykresu funkcji $g: x = 1, y = -3$
b) $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{2\},$ asymptoty wykresu
funkcji $f: x = -1, y = 0,$ asymptoty
wykresu funkcji $g: x = -1, y = 2$

1. a) $g(x) = \frac{2}{x} + 2, D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\},$
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{2\},$ asymptoty: $x = 0, y = 2$
b) $g(x) = -\frac{4}{x} - 2, D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\},$
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{-2\},$
asymptoty: $x = 0, y = -2$
2. a) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$
asymptoty: $x = 0, y = -1$
b) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-2\},$
asymptoty: $x = 0, y = -2$
c) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{1\},$
asymptoty: $x = 0, y = 1$
d) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{3\},$
asymptoty: $x = 0, y = 3$
e) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-3\},$
asymptoty: $x = 0, y = -3$
f) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{1\},$
asymptoty: $x = 0, y = 1$
3. a), b) nie należy
4. a) $g(x) = \frac{3}{x+1}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$
asymptoty: $x = -1, y = 0$
b) $g(x) = \frac{4}{x+3}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\},$
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$
asymptoty: $x = -3, y = 0$
c) $g(x) = -\frac{2}{x-3}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\},$
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$
asymptoty: $x = 3, y = 0$
d) $g(x) = -\frac{1}{x-2}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\},$
 $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$ asymptoty: $x = 2, y = 0$
5. a) $a = 1, (-2, 2), (-1, 3), (1, -1), (2, 0)$
b) $a = 2, (-2, 3), (-1, 4), (1, 0), (2, 1)$
c) $a = -2, (-2, -1), (-1, 0), (1, -4),$
 $(2, -3)$
6. a) $f(x) = \frac{3}{x-2}, f(\frac{1}{2}) = -2, f(-4) = -\frac{1}{2}$
b) $f(x) = \frac{-2}{x-2}, f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}, f(-4) = \frac{1}{3}$
7. a) asymptoty wykresu funkcji $f: x = 2,$
 $y = 0,$ asymptoty wykresu funkcji $g:$
 $x = 2, y = 1$
b) asymptoty wykresu funkcji $f: x = -1,$
 $y = 0,$ asymptoty wykresu funkcji $g:$
 $x = -1, y = -2$
8. a) 6 punktów b), d), f) 4 punkty
c) 8 punktów e) 2 punkty

9. A - g, B - k, C - f, D - h
10. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$,
maleje w $(-\infty; 4)$ i w $(4; \infty)$,
asymptoty: $x = 4, y = 0$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
rośnie w $(-\infty; -1)$ i w $(-1; \infty)$,
asymptoty: $x = -1, y = 0$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,
rośnie w $(-\infty; -3)$ i w $(-3; \infty)$,
asymptoty: $x = -3, y = 0$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
maleje w $(-\infty; 2)$ i w $(2; \infty)$,
asymptoty: $x = 2, y = 0$
11. a) $f(x) = \frac{4}{x} + 2, f(D) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
b) $f(x) = \frac{4}{x} - 5, f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
c) $f(x) = \frac{4}{x} - 3, f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
d) $f(x) = \frac{4}{x} + 13, f(D) = \mathbb{R} \setminus \{13\}$
12. a) $g(x) = \frac{3}{x-2}$, maleje w $(-\infty; 2)$
i w $(2; \infty)$, asymptoty: $x = 2, y = 0$
b) $g(x) = \frac{3}{x+1}$, maleje w $(-\infty; -1)$
i w $(-1; \infty)$, asymptoty: $x = -1, y = 0$

3.3. Wyrażenia wymierne i funkcje wymierne

1. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{7}{2}\}$
2. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
dla $x = 1: 2$, dla $x = -1: 0$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$,
dla $x = 1: -3$, dla $x = -1: -\frac{1}{2}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$,
dla $x = 1: -\frac{1}{2}$, dla $x = -1: \frac{1}{2}$
d) $D = \mathbb{R}$, dla $x = 1: 2(\sqrt{3} - 1)$,
dla $x = -1: \sqrt{3} - 1$
3. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, -x - 3$
b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, 3x$
c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}, \frac{2x}{x-5}$
d) $x \in \mathbb{R}, x$
e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{x+1}{x^3}$
f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, -\frac{x+2}{x}$
g) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \frac{x^2}{x-3}$
h) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \frac{x+2}{(x-2)(x^2+4)}$

4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}, f(0) = 2, f(-1) = \frac{6}{5}, f(1) = 2$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, f(0) = -1, f(-1) = f(1) = -\frac{5}{3}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(0) = 1, f(-1) = \frac{1}{3}, f(1) = 5$
5. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = x + 2$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}, f(x) = x$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = x^2 - 4$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, f(x) = \frac{4}{x}$
1. a), d) tak b), c) nie
2. a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
c) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ d) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$
e) $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
g) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ h) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$
3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$ b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, 0\}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}, 2\}$
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-9, 0\}$
g) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$
i) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f(-3) = -8, f(1) = 0, f(3) = \frac{8}{5}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}, f(-3) = -\frac{9}{5}, f(1) = -1, f(3) = 0$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, f(-3) = \frac{3}{5}, f(1) = -1, f(3) = 3$
d) $D = \mathbb{R}, f(-3) = -1, f(1) = \frac{3}{5}, f(3) = 1$
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}, f(-3) = 5, f(1) = -11, f(3) = 5$
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, f(-3) = 0, f(1) = -\frac{4}{3}, f(3) = \frac{54}{5}$
5. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \frac{4}{x}$,
dla $x = \frac{1}{2}: 8$, dla $x = -\frac{3}{2}: -2\frac{2}{3}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \frac{8}{x}$,
dla $x = \frac{1}{2}: 16$, dla $x = -\frac{3}{2}: -\frac{16}{3}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, 4$,
dla $x = \frac{1}{2}$ i $x = -\frac{3}{2}: 4$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}, \frac{1}{2}$,
dla $x = \frac{1}{2}$ i $x = -\frac{3}{2}: \frac{1}{2}$
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \frac{x+1}{x}$,
dla $x = \frac{1}{2}: \frac{3}{4}$, dla $x = -\frac{3}{2}: -\frac{1}{4}$

5. f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, x - \frac{1}{2}$,
dla $x = \frac{1}{2}: 0$, dla $x = -\frac{3}{2}: -2$
g) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}, x + 3$,
dla $x = \frac{1}{2}: 3\frac{1}{2}$, dla $x = -\frac{3}{2}: 1\frac{1}{2}$
h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, \frac{2}{x-3}$,
dla $x = \frac{1}{2}: -\frac{4}{5}$, dla $x = -\frac{3}{2}: -\frac{4}{9}$
6. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}, f(x) = \frac{x}{x-4}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}, f(x) = \frac{2}{2x+1}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f(x) = \frac{x-2}{x+2}$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}, f(x) = \frac{x+3}{x-3}$
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}, f(x) = \frac{1}{x-2}$
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}, f(x) = \frac{2}{x-3}$
g) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, f(x) = \frac{x+2}{x-1}$
h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}, f(x) = x - 3$
i) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}, f(x) = \frac{x-4}{x+4}$

Działania na liczbach wymiernych

1. a) 1 b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $4\frac{4}{5}$
e) -8 f) 36 g) $-1\frac{1}{4}$ h) $-1\frac{1}{2}$
2. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{25}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{7}{3}$
3. a) 2 b) $4\frac{7}{12}$ c) $\frac{25}{36}$ d) $-\frac{1}{18}$ e) $\frac{59}{75}$ f) $-\frac{1}{60}$
4. a) $m = -\frac{1}{6}$ b) $m = \frac{7}{20}$ c) $m = -\frac{11}{24}$
d) $m = -1$ e) $m = 1\frac{1}{8}$ f) $m = 14\frac{4}{5}$
5. a) 11 b) 11 c) -147 d) 1
6. a) 11 b) 16 c) 0 d) 1 e) 3 f) 4
7. a) $x = \frac{19}{15}$ b) $x = \frac{5}{18}$ c) $x = \frac{17}{10}$
d) $x = \frac{7}{3}$ e) $x = -1$ f) $x = \frac{1}{2}$
8. $x + y = \frac{5}{4}, x - y = \frac{11}{4}, xy = -\frac{3}{2}, \frac{x}{y} = -\frac{8}{3}$
9. a) 663 i 867 b) 30, 32 i 72

3.4. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

1. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}, 4$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}, -\frac{2}{x}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}, -\frac{(2x-1)(x-5)}{x}$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 3\}, -\frac{x+3}{6(x-2)}$
e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \frac{x-2}{(x+2)^2}$
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 3\}, -\frac{x+1}{2(x-1)}$
2. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, 8$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}, -\frac{3}{2}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}, \frac{4}{3}$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}, 4$

- e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-7\}, -\frac{1}{25}$
f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}, \frac{10}{9}$
3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}, 8x$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}, (x-2)(x-1)$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}, \frac{x-3}{3x(x+3)}$
4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}, \frac{x+5}{x+1}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}, \frac{(x+1)(x-2)}{x+2}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 0, 3\}, \frac{x+3}{x(x-3)}$
5. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = -2$



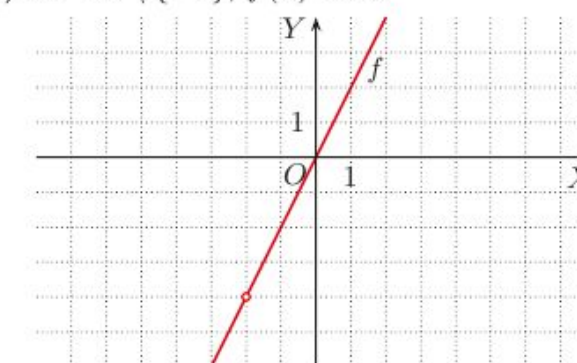
- b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = 2$



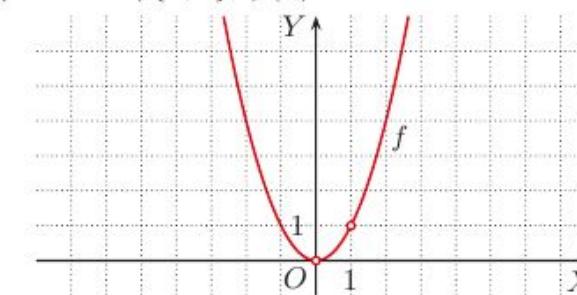
- c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, f(x) = 3$



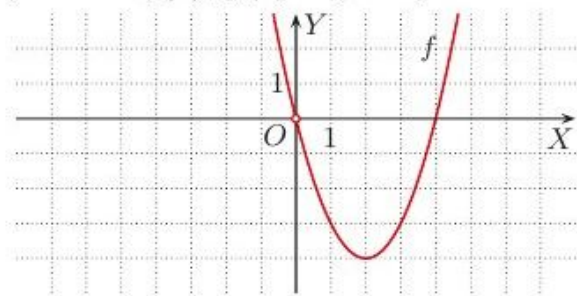
- d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f(x) = 2x$



- e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, f(x) = x^2$



5. f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = (x-2)^2 - 4$



- Z** 1. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $2x - 4$
 b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$, $\frac{8}{x+4}$
 c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, $\frac{x}{x+3}$
 d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, 0\}$, $\frac{2x-12}{x}$
 e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $3x + \frac{3}{2}$
 f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$, $\frac{4}{3x-2}$

2. a) $D_A = \mathbb{R} \setminus \{0, 9\}$, $D_B = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$,
 $D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 9\}$
 b) $D_A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $D_B = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$,
 $D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
 c) $D_A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, $D_B = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$,
 $D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
 d) $D_A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $D_B = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$,
 $D_{A \cdot B} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

3. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, $\frac{3}{2x}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, 1\}$, -3
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, $-\frac{3}{x^2}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{1}{2}, 1\}$, $\frac{x+1}{2(x-1)}$
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\}$, $\frac{(x-2)(x-3)}{x}$
 g) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $-\frac{x^2}{3}$
 h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$, $-\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$
 i) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, $\frac{x}{x-3}$

4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 2\}$, $\frac{x(x+3)}{2(x+2)}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}$, $-(x-1)(x-4)$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)^3}$

5. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{9}{2}\}$, $\frac{16}{7}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, -12
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, -12
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $\frac{4}{3}$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\frac{3}{4}x$
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$, $-4x^2$

6. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{9}{2}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$, $-\frac{2(x+2)^2}{(x-3)^2}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{5}, 0\}$, $\frac{2}{x}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{3}{2}\}$, $-\frac{2}{x-1}$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}$, $-\frac{x^2}{4}$
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$, $\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}$

7. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 3\}$, $(x+1)(x+3)$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, \frac{3}{2}, 4\}$, $-\frac{2(x+4)}{3(x-4)}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}, 2\}$, $\frac{(2x+1)(x-2)}{(x+2)(2x-1)}$

8. $\frac{3}{x+2}$

9. kolejno w wierszach: $\frac{1}{x^2+1}$, $\frac{6}{x^2+4}$, $\frac{x^2+2}{x+3}$

10. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$, $\frac{x-3}{2x}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, 0\}$, $\frac{x-5}{x+2}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$, $\frac{2x-1}{x^2}$
 11. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\}$, $\frac{(x+2)(x-6)}{x+3}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-6, -1, 0, 6\}$, $-\frac{x+6}{x+1}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $\frac{x^2+1}{x^2-x}$

3.5. Równania wymierne

C 1. a) $x = -4$ b) $x = \frac{1}{3}$
 c) $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = \frac{3}{2}$

3. a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = 1$ c) $x = 2$
 d) $x = 3$ e) $x = 2$ f) $x = 3$
 g) $x = -\frac{7}{5}$ h) $x = 0$

4. a) $x = -2$, $x = 1$ b) $x = -1$
 c) $x = -5$, $x = -1$ d) $x = 3$
 e) $x = -6$, $x = 1$
 f) $x = -4$, $x = -2$
 g) $x = -3$, $x = 1$
 h) $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$

5. a) $x = -8$ b) $x = -\frac{1}{4}$ c) $x = 4$

6. a) $x = 4$, $x = 6$ b) $x = -2$
 c) $x = -8$, $x = 1$ d) sprzeczne
 e) $x = -3\sqrt{2}$, $x = 3\sqrt{2}$
 f) $x = -9$, $x = 0$

Z 1. a) $x = \frac{5}{4}$ b) $x = 12$ c) $x = \frac{1}{8}$
 d) $x = -6$ e) $x = -1$ f) $x = 1$
 g) $x = -2$ h) sprzeczne

2. a) $x = -3$ b) $x = -\frac{8}{7}$
 c) $x = \frac{1}{3}$ d) $x = \frac{3}{2}$
 e) $x = 7$ f) $x = 0,7$

3. a) $x = -8$ b) $x = 8$
 c) $x = 2$ d) $x = 0$
 e) $x = -3$ f) $x = \frac{7}{13}$

4. a) $x = -5$, $x = 3$
 b) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 3$ c) $x = -3$
 d) $x = 3 - \sqrt{7}$, $x = 3 + \sqrt{7}$
 e) $x = 1$ f) $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{2}$

5. a) $x = -1$ b) $x = -2$ c) $x = -1$
 d) $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
 e) $x = 6 - \sqrt{7}$, $x = 6 + \sqrt{7}$
 f) $x = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$, $x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$

6. Nie ma rozwiązania: I; mają nieskończenie wiele rozwiązań: II, III, IV.

7. a), b) $x = 0$ c) $x = -2$, $x = 0$
 d) żadne

8. a) $x = 7$ b) $x = -3$ c) $x = 3$

9. a) $x = \frac{1}{3}$ b) $x = -1$ c) $x = -\frac{4}{3}$
 d) $x = 2$ e) $x = -\frac{1}{5}$ f) $x = \frac{4}{9}$

10. a) $x = \frac{5}{4}$ b) $x = -3$, $x = 5$
 c) $x = \frac{1}{2}$, $x = 4$
 d) $x = -2 - \sqrt{6}$, $x = -2 + \sqrt{6}$
 e) $x = -2$, $x = 4$ f) $x = 0$

11. a), f) 1 b), d) 2 c) 0
 e) nieskończenie wiele

3.6. Równania z wartością bezwzględną

C 3. a) $x = -1$, $x = 5$
 b) $x = 0,5$, $x = 7,5$
 c) $x = -8$, $x = -4$
 d) $x = -\frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$
 e) $x = 5$, $x = 7$
 f) $x = -7$, $x = 1$
 g) $x = -\frac{3}{4}$, $x = \frac{1}{4}$
 h) $x = -2 - \sqrt{3}$, $x = -2 + \sqrt{3}$

4. a), d) sprzeczne
 b) $x = 5$ c) $x = -9$

5. a) $x = \frac{1}{5}$, $x = 1$ b) $x = 0$, $x = 1$
 c) $x = -1$, $x = -\frac{1}{9}$ d) $x = -2$, $x = \frac{2}{3}$
 e) $x = -15$, $x = 3$ f) $x = 4$, $x = 8$
 g) $x = \frac{25}{7}$, $x = 5$ h) $x = -4$, $x = -\frac{8}{3}$

6. a) $x = 0$, $x = 6$ b) $x = -2$, $x = 6$
 c) $x = 1$, $x = 3$ d) $x = -1$, $x = 9$

Z 1. a) $x = 4$, $x = 6$
 b) $x = -1$, $x = 17$
 c) $x = -10$, $x = -2$
 d) $x = -11$, $x = -7$
 e) $x = \frac{1}{6}$, $x = \frac{1}{2}$
 f) $x = -\frac{5}{8}$, $x = \frac{1}{8}$
 g) $x = 6\frac{1}{2}$, $x = 7\frac{1}{2}$
 h) $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$

2. a) $x = -2$, $x = \frac{4}{3}$ b) $x = 1$, $x = 2$
 c) $x = -5$, $x = \frac{5}{3}$
 d) $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{15}{2}$
 e) $x = -\frac{5}{4}$
 f) $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{10}{3}$
 g) $x = -\frac{7}{3}$, $x = -1$
 h) $x = -2\sqrt{3}$, $x = 0$

3. a) $x = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$ b) $x = 0$, $x = 6$
 c) $x = 5$, $x = 7$ d) $x = -\frac{4}{3}$, $x = 0$

4. a) $x = -4$, $x = 10$ b) $x = -8$, $x = 4$
 c) $x = 2$, $x = 6$ d) $x = -2$, $x = 1$
 e) $x = -4$, $x = 8$ f) $x = -9$, $x = -3$
 g) $x = 6$, $x = 14$
 h) $x = -\frac{5}{3}$, $x = \frac{7}{3}$

5. a) $x = -3$, $x = 5$
 b) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{7}{2}$
 c) $x = -7$, $x = 3$
 d) $x = -\frac{10}{3}$, $x = 0$

3.7. Wyrażenia wymierne - zastosowania (1)

C 1. a) $\frac{10}{15}$ b) $\frac{3}{5}$ c) 9 i 12

2. a) $165\frac{27}{49}$ cm² b) 110 cm

3. a) Cukierki A kosztują 16 zł/kg.
 Cukierki B kosztują 20 zł/kg.
 b) 8,50 zł/kg

4. a) mama - 48 lat, tata - 54 lata
 b) ciocia - 36 lat, wujek - 40 lat

Z 1. a) 48 cm b) 72 cm lub 1080 cm

2. 512 cm³

3. 15 zł/kg

4. a) za 11 lat b) 50 lat

5. a) $\frac{13}{7}$ b) $\frac{2}{5}$

6. a) 48 cm b) 40 cm lub 96 cm

3.8. Wyrażenia wymierne – zastosowania (2)

- ☑ 1. a) 60 km/h, 80 km/h
b) 120 km/h, 90 km/h

2. 3 h 45 min

- ☑ 1. 90 km/h, 60 km/h

2. 90 km/h, 80 km/h

3. 15 km/h, 20 km/h

4. 7 h 12 min

5. 3 h 45 min

6. 45 km/h, 60 km/h

7. 2 h 24 min

Zestaw I

- a) $y = \frac{24}{x}$, np. (1, 24), (4, 6), (8, 3)
b) $y = \frac{2}{x}$, np. (1, 2), (2, 1), (4, $\frac{1}{2}$)
c) $y = \frac{1}{4x}$, np. (1, $\frac{1}{4}$), ($\frac{1}{4}$, 1), (2, $\frac{1}{8}$)
d) $y = \frac{3}{x}$, np. (1, 3), (3, 1), (6, $\frac{1}{2}$)
- a) $f(-4) = \frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = 4$, $f(\frac{2}{3}) = -3$
b) $f(-2) = -\frac{1}{4}$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{4}) = 2$
c) $f(-9) = -\frac{2}{15}$, $f(\frac{9}{10}) = 1\frac{1}{3}$, $f(1\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$
d) $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 + \sqrt{2}$, $f(\sqrt{8}) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$,
 $f(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} + 3$
- a) 6 a) P, Q
b) $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$
c) $x \in (-\infty; 0) \cup [2; \infty)$
- a) $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) $f(D) = (0; 5)$
c) $f(D) = [-5; -1]$
d) $f(D) = (-\infty; -5] \cup [5; \infty)$
- a) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$, $y = 3$
b) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$, $y = -2$
c) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $x = 4$, $y = 0$
d) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $x = -2$, $y = 0$
- a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $h(D_h) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $h(D_h) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $g(D_g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $h(D_h) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

- a) $(2, -\frac{1}{2})$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x}$
b) $(1, -2)$, $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = -\frac{2}{x}$
c) $(1, 3)$, $f(x) = -\frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x}$
d) $(2, -3)$, $f(x) = \frac{6}{x}$, $g(x) = -\frac{6}{x}$

- a) 0 b) 0, 2 c) -2, 3 d) -1, 0, 2

- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,
 $f(-3) = 3$, $f(1) = \frac{1}{3}$, $f(3) = \frac{3}{5}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$,
 $f(-3) = 5$, $f(1) = -11$, $f(3) = 5$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$,
 $f(-3) = -\frac{1}{14}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{1}{10}$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$,
 $f(-3) = \frac{5}{3}$, $f(1) = \frac{3}{5}$, $f(3) = \frac{1}{3}$

- a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$, $\frac{3}{4}$
b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, $\frac{3}{2}x$
c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}, 0\}$, $\frac{12}{x(x+1)}$
d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{3}{2}x$
e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$, $6x$
f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$, $(x+2)(x-1)$

- a) $\frac{5}{3}$ b) 9

Zestaw II

- a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = -\frac{1}{2}$ c) $x = \frac{3}{2}$
d) sprzeczne e) $x = 4$ f) $x = -\frac{2}{3}$
g) sprzeczne h) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$
- a) $x = -5$ b) $x = \frac{6}{5}$ c) $x = 2$
d) $x = -15$ e) $x = 1$ f) $x = 1$
g) $x = -2 - \sqrt{3}$, $x = -2 + \sqrt{3}$
h) $x = -1$, $x = 6$
- a) $x = -1$ b) $x = 0$ c) $x = 0$
d) $x = -3$, $x = 0$ e) $x = 2$, $x = 6$
f) $x = 4$ g) $x = 2 - \sqrt{6}$, $x = 2 + \sqrt{6}$
h) $x = -\frac{3}{2}$ i) $x = \frac{1}{2}$
- a) $x = \frac{1}{4}$ b) $x = -\frac{4}{7}$ c) $x = 7$
d) $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$ e) $x = 0$, $x = 14$
f) $x = -1 - \sqrt{7}$, $x = -1 + \sqrt{7}$
g), h), i) sprzeczne
- a) $x = \frac{25}{7}$ b) $x = \frac{9}{4}$
- a) $x = -8$ dla $a = 0$, $x = 8$ dla $a = 1$
b) $x = -9$ dla $a = 0$, $x = -3\frac{1}{2}$ dla $a = 1$
c) $x = 1$ dla $a = 0$, $x = 2$ dla $a = 1$

- d) $x = -2$, $x = 1$ dla $a = 0$,
 $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ dla $a = 1$

- a) $b = \frac{2P}{h} - a$ b) $h = \frac{2P}{a+b}$

- c) $l = \frac{P - \pi r^2}{\pi r}$ d) $h = \frac{3V}{\pi r^2}$

- e) $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$ f) $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

- a) z prostą $y = 2$: $(\frac{2}{3}, 2)$;
z prostą $y = x$: (1, 1), (-2, -2)
b) z prostą $y = 2$: $(-\frac{1}{3}, 2)$;
z prostą $y = x$: brak
c) z prostą $y = 2$: $(\frac{1}{3}, 2)$;
z prostą $y = x$: $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$,
 $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$
d) z prostą $y = 2$: $(-\frac{2}{3}, 2)$;
z prostą $y = x$: brak

- a) $A - g, \frac{4}{3}$; $B - f, 0$
b) $g(x) = x$ dla $x = 1$, $x = 4$,
 $f(x) = -x$ dla $x = -3$, $x = 0$

- a) $x = 5$, $x = 11$ b) $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$
c) $x = -8$, $x = -4$ d) $x = 0$, $x = 18$
e) $x = -12$, $x = 0$ f) sprzeczne

- a) $x = 1$, $x = 5$ b) $x = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$
c) $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{11}{2}$ d) $x = -\frac{5}{2}$, $x = 2$
e) $x = 1$, $x = 5$ f) $x = -\frac{5}{2}$, $x = \frac{3}{2}$

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. D 2. A 3. D 4. C 5. D 6. B 7. B
8. C 9. D 10. A

11. A3

12. PF

13.1. FF 13.2. B

14. BF

15.1. DA 15.2. A

16. $a = 11$

17. $x = 0$, $x = 2 - 2\sqrt{3}$

18.1. $2\frac{1}{4}$ 18.2. $x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$, $x = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

19. $x = \sqrt{2}$

21. 312 cm^2

22. $t = \frac{210}{v}$, $v > 0$, $t = 1 \text{ h } 45 \text{ min}$

23. 2 km/h

4.1. Trójkąty prostokątne

- ☑ 1. a) 50 b) 3 c) $3\sqrt{2}$ d) 4 e) 4 f) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

2. a) $x = 5$ b) $x = \sqrt{106}$

3. a), b), d) jest c) nie jest

6. a) $12(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}$
b) $Ob = 4(1 + \sqrt{2}) \text{ cm}$, $P = 4 \text{ cm}^2$

8. a) $8\sqrt{3} \text{ cm}$ b) $12\sqrt{3} \text{ cm}$

- ☑ 1. a) 9 b) 2 c) 32

2. a) $x = 2\sqrt{2}$, $y = 4$
b) $x = 4(\sqrt{3} - 1)$, $y = 4\sqrt{2}$

3. a) $8(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}$ b) $3(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ cm}$

4. $12(1 + \sqrt{3})$

5. $18\sqrt{3}$

6. a) $\sqrt{73} \text{ cm}$, $2\sqrt{13} \text{ cm}$
b) $3\sqrt{7} \text{ cm}$, $3\sqrt{13} \text{ cm}$

9. 5 cm, 12 cm

10. 4,8 cm

11. 8 cm, 10 cm

12. a) $2(\sqrt{2} + 1)$ b) $6(\sqrt{2} + 2)$ c) $8(\sqrt{2} + 1)$

13. a) $3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ b) $2(\sqrt{3} + 3)$ c) $3(\sqrt{3} + 1)$

14. a) $2\sqrt{3}$ b) $24\sqrt{3}$

15. a) $2(3\sqrt{2} + 4)$ b) $2(\sqrt{3} + 3)$ c) $2\sqrt{3} + 3$

16. $3\sqrt{21}$, $3\sqrt{39}$

4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

- ☑ 2. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$

3. a) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{12}{13}$,
 $\text{tg } \alpha = \frac{5}{12}$, $\text{tg } \beta = \frac{12}{5}$

b) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{8}{17}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{15}{17}$,
 $\text{tg } \alpha = \frac{8}{15}$, $\text{tg } \beta = \frac{15}{8}$

c) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{3}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,
 $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\text{tg } \beta = 2\sqrt{2}$

- ☑ 1. a) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{3}{5}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{4}{5}$,
 $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$, $\text{tg } \beta = \frac{4}{3}$
b) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{7}{25}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{24}{25}$,
 $\text{tg } \alpha = \frac{7}{24}$, $\text{tg } \beta = \frac{24}{7}$

- c) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{17}}{17}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg} \beta = 4$
d) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{4}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$, $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{15}$
e) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = 2$
f) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{2}$
- $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = 2$
- a) 10, 24
b) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{12}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$
- $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = 3$
- $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{9}{10}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{19}}{10}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9\sqrt{19}}{19}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{19}}{9}$
- a) $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{89}}{89}$, $\cos \alpha = \frac{8\sqrt{89}}{89}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{8}$
b) $\sin \beta = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos \beta = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{2}$
- a) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = 3$
b) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{21}}{7}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{2}{3}$,
 $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$
- $\sin |\sphericalangle BAC| = \cos |\sphericalangle BCA| = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\cos |\sphericalangle BAC| = \sin |\sphericalangle BCA| = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
 $\operatorname{tg} |\sphericalangle BAC| = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} |\sphericalangle BCA| = \frac{3}{2}$

4.3. Trygonometria – zastosowania

- Ć 1. a) około 8 m b) około 9,72 m
2. a) około 19,96 m b) około 26,43 m
3. a) $12\sqrt{6} + 6$ b) $4\sqrt{15} + 4$
4. a) $\alpha \approx 24^\circ$ b) $\alpha \approx 25^\circ$
c) $\alpha \approx 30^\circ$ d) $\alpha \approx 23^\circ$
5. a) około 58° b) około 77°
- Z 1. około 27,13 m
2. około 29,79 m
3. drzewo: około 37,3 m, cień: około 13,58 m
4. około 18,79 m
5. a) około 6° b) około 17°
c) około $26,5^\circ$ d) 45°
6. a) około 5,2%, spełnia
b) około 7%, spełnia
c) około 8,8%, nie spełnia
7. około 21,42 m
8. około 64°
9. około $41,5^\circ$, $41,5^\circ$, 97°
10. około 197 m
11. około 34,33 km
12. około 2484,48 m
13. około 91,53 m
14. około 17,17 m lub 64,84 m
15. a) około 56° b) 45° c) około $26,5^\circ$
16. około 95 cm
17. a) około 12,59 m b) około 8,81 m

4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

- Ć 1. a) $\sqrt{19}$ cm; około 26° , około 64°
b) $\sqrt{194}$ cm; około 21° , około 69°
c) 53° ; około 9,03 cm, około 11,98 cm
d) 36° ; około 5,81 cm, około 9,89 cm
2. a) $3^\circ 36'$ b) $2' 24''$ c) $9'$ d) $7' 12''$ e) $25' 12''$
3. a) $|CD| \approx 6,47$; $27^\circ 30'$, 35° , $117^\circ 30'$
b) $|CD| \approx 7,05$; 35° , około 126° , około 19°
- Z 1. a) $|\sphericalangle BCD| = 106^\circ 20'$, $|\sphericalangle DBC| = 27^\circ 10'$,
 $|\sphericalangle BDC| = 46^\circ 30'$
b) $|\sphericalangle PAB| = 90^\circ$, $|\sphericalangle ABP| = 36^\circ 50'$,
 $|\sphericalangle BPA| = 53^\circ 10'$

- a) $2\sqrt{13}$ cm, około 34° , około 56°
b) $5\sqrt{2}$ cm, około 8° , około 82°
c) $2\sqrt{41}$ cm, około 39° , około 51°
- a) $|\sphericalangle ABC| = 56^\circ$, $|AC| \approx 8,9$,
 $|AB| \approx 10,73$
b) $|\sphericalangle CAB| = 24^\circ$, $|BC| \approx 4,07$,
 $|AC| \approx 9,14$
- a) $Ob \approx 14,39$, $P \approx 7,69$
b) $Ob \approx 27,43$, $P \approx 35,7$
- a) około $75^\circ 30'$, około $104^\circ 30'$
b) około 53° c) około 67° , około 113°
- $|AB| \approx 20,88$, $|AD| \approx 8,09$,
 $|\sphericalangle DCA| \approx 28^\circ$
- 90° , około 53° , około $108^\circ 30'$,
około $108^\circ 30'$
- około $75^\circ 30'$, około $104^\circ 30'$
lub około 41° , około 139°
- $|AB| = 12$, $|BD| = 3$,
 $|AD| = 3\sqrt{13}$, $|ED| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- a) 13 cm, około $22^\circ 30'$, około $67^\circ 30'$
b) 17 cm, około 28° , około 62°
c) 20 cm, około 37° , około 53°
- a) $2\sqrt{11}$, około $56^\circ 30'$, około $33^\circ 30'$
b) 47° , około 4,77, około 5,12
c) 64° , około 25,63, około 28,51
d) 21° , około 39,08, około 41,85
- około $70^\circ 30'$, około $109^\circ 30'$

4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego

- Ć 2. $\frac{3}{4}$
3. a) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
b) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$
c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$
4. a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$
b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$
c) $\sin \alpha = \frac{21}{29}$, $\cos \alpha = \frac{20}{29}$
d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
e) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
f) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{14}}{7}$
g) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$
h) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$

- a) $\cos \alpha = \frac{3}{10}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{91}}{3}$
b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$
c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3}$, $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{34}}{34}$, $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{34}}{34}$

- Z 1. a) $\sin \alpha = 0,6$, $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$
b) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$
d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$
e) $\sin \alpha = \frac{6}{7}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6\sqrt{13}}{13}$
f) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$
g) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$
h) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$
- a) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
 - a) tak b) nie c) nie d) tak
 - a) $2\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm
b) $6\sqrt{13}$ cm, $9\sqrt{13}$ cm
 - a) 30 b) $4(\sqrt{5} + 3)$
c) $\sqrt{6} + \sqrt{3} + 3$ d) $3(\sqrt{13} + 5)$
 - a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$
c) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$
d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}$
f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$
 - a) $\cos^2 \alpha$ b) $\sin^2 \alpha$ c) $\sin \alpha$
d) $\cos \alpha$ e) $\cos \alpha$ f) 1
 - a) $\cos \alpha \approx 0,41$, $\operatorname{tg} \alpha \approx 2,25$
b) $\sin \alpha \approx 0,41$, $\operatorname{tg} \alpha \approx 0,45$
c) $\sin \alpha \approx 0,48$, $\cos \alpha \approx 0,87$
d) $\sin \alpha \approx 0,97$, $\cos \alpha \approx 0,24$
 - a) nie b) tak c) tak d) nie e) tak f) tak
 - a) 9 cm, 12 cm b) 15 cm, 36 cm

Trygonometria i astronomia

- około 40 214 477 211 796 km

4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (1)

- Ć 1. a) 45° , np. (1, 1) b) 90° , np. (0, 1)
c) 135° , np. (−1, 1)
- a) $|OP| = 5$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$

2. b) $|OP| = 10$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
 c) $|OP| = 2$, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
3. a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$
 b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -1$
 c) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -3$
4. a) $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$
 b) $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$
 c) $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$,
 $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$
5. a), c) ujemna b) dodatnia
6. a), b) tak
8. a) $\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$
 b) $\cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$
 c) $\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$
9. a) $\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$
 b) $\sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -2\sqrt{2}$
 c) $\sin^2 \alpha = \frac{9}{10}$, $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = -3$
- [Z] 1. a) $\sin |\sphericalangle AOP| = \frac{4\sqrt{17}}{17}$,
 $\cos |\sphericalangle AOP| = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg} |\sphericalangle AOP| = -4$
 b) $\sin |\sphericalangle AOQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\cos |\sphericalangle AOQ| = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} |\sphericalangle AOQ| = -\frac{1}{2}$
 c) $\sin |\sphericalangle AOR| = \frac{5\sqrt{41}}{41}$,
 $\cos |\sphericalangle AOR| = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\operatorname{tg} |\sphericalangle AOR| = -\frac{5}{4}$
2. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{10}}{5}$
3. a) $\frac{3\sqrt{10}-4\sqrt{5}}{10}$ b) $\frac{-3\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$
4. a) $\sin^2 \alpha = \frac{15}{16}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}$
 b) $\sin^2 \alpha = \frac{5}{9}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$
 c) $\sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -2$
5. a) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$
 b) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$
 c) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$

6. a) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$
 b) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$
 c) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 d) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 e) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$

4.7. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego (2)

- [C] 1. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$,
 $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{2}$
2. a) $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$
 b) $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$,
 $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$
3. a) $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$
 b) $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- [Z] 2. a) $\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
 e) $3 - 2\sqrt{3}$ f) $-10\sqrt{3}$
3. a) -1 b) -3 c) $-\frac{4}{3}\sqrt{3}$
 d) $2 - \sqrt{2}$ e) -1 f) $\frac{3}{2}(3 + \sqrt{3})$
4. a) 0,9659 b) 0,2588 c) $-0,6428$
 d) $-0,9962$ e) $-0,7813$ f) $-0,3057$
5. a), b) jest prawdziwa
6. a) $-\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$
7. a) $\beta \approx 110^\circ$ b) $\beta \approx 152^\circ$ c) $\beta \approx 164^\circ$
 d) $\beta \approx 115^\circ$ e) $\beta \approx 144^\circ$ f) $\beta \approx 109^\circ$
8. a) 69° lub 111° , 0,9336
 b) 48° lub 132° , 0,7431
 c) 123° , $-0,5446$ d) 107° , $-0,2924$
9. a) 0,3420 b) 0,9962 c) $-0,1736$
 d) $-0,8387$ e) $-4,7046$

Pole trójkąta prostokątnego

1. a) nie jest
 b) jest, $P = 54$
 c) jest, $P = 8\sqrt{3}$
2. a) $P = 24$, $Ob = 24$
 b) $P = 1$, $Ob = 3 + \sqrt{5}$
 c) $P = 6$, $Ob = 8 + 2\sqrt{10}$

3. a) $P_{\triangle ABC} = 4$, $P_{\triangle BDC} = 8$
 b) $P_{\triangle ABC} = 8\sqrt{3}$, $P_{\triangle BDC} = 10$
 c) $P_{\triangle ABC} = 4$, $P_{\triangle BDC} = 1$
 d) $P_{\triangle ABC} = 4\sqrt{5}$, $P_{\triangle BDC} = 24$
4. a) 6 b) $18\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{3}$

4.8. Pole trójkąta

- [C] 1. a) $12\sqrt{7}$ cm² b) $8\sqrt{21}$ cm²
 2. a) 120 cm² b) 120 cm² c) $\frac{169}{2}\sqrt{3}$ cm²
 3. a) $3(2 + \sqrt{2})$ cm b) 112,5 cm²
 4. b) $75\sqrt{3}$ cm²
 5. a) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ cm² b) $36\sqrt{3}$ cm
 7. a) 15 b) $30\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2}$ d) 4,5
 8. a) 12 cm b) $6\sqrt{2}$ cm c) $4\sqrt{3}$ cm
- [Z] 1. a) $\frac{35\sqrt{3}}{4}$ cm² b) $16\sqrt{2}$ cm²
 2. a) $6\sqrt{3}$ cm² b) $\frac{36}{5}\sqrt{3}$ cm²
 c) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$ cm²
 3. a) $6(2\sqrt{2} + \sqrt{10})$ cm
 b) 30° , 30° , 120° , $Ob = 4(2\sqrt{3} + 3)$ cm
 4. 6, 6, 8
 5. $P = 24$ cm², $Ob = 4(\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$ cm
 6. a) $6\sqrt{2}$
 b) $P_1 = 36(\sqrt{3} - 1)$, $P_2 = 36(3 - \sqrt{3})$
 7. $Ob = 5(2 + \sqrt{3})$, $P = \frac{25}{4}\sqrt{3}$
 8. 90°
10. a) 6 b) $4\sqrt{6}$ c) 12 d) 36
11. $\frac{9}{2}(\sqrt{3} + 1)$
12. $P_{\triangle BAM} = 6\sqrt{3}$, $P_{\triangle NAM} = 3\sqrt{3}$

4.9. Pola czworokątów (1)

- [C] 1. 6 cm
 2. a) $48\sqrt{2}$ b) 48
 3. a) 30° b) 45° c) 60°
 4. $3\sqrt{3}$, 9
 5. b) 12,5 cm²
 7. a) $P = 120$, $h = \frac{120}{13}$
 b) $P = 24\sqrt{2}$, $h = 4\sqrt{2}$
- [Z] 1. a) 18 cm² b) 1 cm, 2 cm
 2. b) $15\sqrt{2}$ cm²
 3. $8(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm

4. a) 0,96 b) 10 cm
 5. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 6. a) $P = 12$, $Ob = 4(3 + \sqrt{2})$
 b) $P = 16\sqrt{3}$, $Ob = 24$
 c) $P = 32$, $Ob = 26$
 7. $4\sqrt{3}$ cm²

4.10. Pola czworokątów (2)

- [C] 1. a) $P = 8\sqrt{17}$, $Ob = 2(8 + \sqrt{21})$
 b) $P = 21\sqrt{5}$, $Ob = 28$
 2. a) $P = 10\sqrt{3}$, $Ob = 2(5\sqrt{3} + 4)$
 b) $P = 18\sqrt{5}$, $Ob = 6(\sqrt{6} + 2)$
 3. $26\sqrt{5}$ cm²
 5. 21 lub $\frac{\sqrt{1751}}{2}$
- [Z] 1. $6(6 + \sqrt{2})$ cm
 2. $\frac{320}{9}\sqrt{5}$ cm²
 3. 0,8
 4. 161 m siatki, $P_1 = 188$ m², $P_2 = 512$ m²
 7. 12,5 cm, $P = 24$ cm²
 8. 60 cm²
 9. a) $P = 10\sqrt{3}$, $Ob = 2(7 + \sqrt{3})$
 b) $P = 14\sqrt{3}$, $Ob = 22$
 c) $P = 2(4\sqrt{3} + 3)$,
 $Ob = 7 + 4\sqrt{3} + \sqrt{73 - 24\sqrt{3}}$
10. $P = 16(3 + \sqrt{3})$ cm², $Ob = 8(5 + \sqrt{3})$ cm

Zestaw I

1. $\sqrt{3}$ cm, 2 cm, $2\sqrt{3}$ cm
 2. $4,5(2 + \sqrt{2})$
 3. 48
 4. $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$,
 $\sin \beta = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 5. a) 10, 24, 26 b) $4(\sqrt{2} + 2)$ c) $16\sqrt{7}$
 6. a) $\sin \beta = \cos \gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\cos \beta = \sin \gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{2}$
 b) $\sin \alpha = \cos \gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\cos \alpha = \sin \gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{2}$
 c) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{12}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$
 d) $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{3}{5}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4}$

7. a) $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{11}}{33}$
 b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{19}}{9}$
 c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{35}$
 d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 e) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\cos \alpha = \frac{15}{17}$
 f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$
 g) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$
 h) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{39}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$
8. a) $|AB| \approx 4,37$ cm, $|AC| \approx 6,39$ cm
 b) $|AB| \approx 7,56$ cm, $|AC| \approx 4,94$ cm
9. a) około 329,26 m b) około 70°
10. a) około 43,6 m
 b) około 20 minut
11. $\sin \beta \approx 0,5547$, $\cos \beta \approx 0,8321$,
 $\operatorname{tg} \beta \approx 0,6667$

Zestaw II

1. $6(3 + \sqrt{3})$ cm²
 2. 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm
 3. a) $P = 120$ cm², $\sin \alpha = \frac{120}{169}$
 b) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$
 4. $\sin |\sphericalangle BAP| = \frac{\sqrt{21}}{14}$, $\sin |\sphericalangle ABP| = \frac{1}{2}$
 5. $d_1 = 4\sqrt{7}$ cm, $d_2 = 4\sqrt{13}$ cm,
 $P = 24\sqrt{3}$ cm²
 6. 8 cm²
 7. a) $Ob = 2(11 + 3\sqrt{3})$ cm,
 $d_1 = 4\sqrt{7}$ cm, $d_2 = 2\sqrt{43}$ cm
 b) $Ob = 4(8 + \sqrt{3})$ cm, $d_1 = 2\sqrt{29}$ cm,
 $d_2 = 2\sqrt{41 + 20\sqrt{3}}$ cm
 8. $\sin |\sphericalangle PAD| = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos |\sphericalangle PAD| = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
 $\operatorname{tg} |\sphericalangle PAD| = \frac{1}{3}$
 9. $21(3 - \sqrt{3})$
 10. $Ob = 28 + \frac{8\sqrt{3}}{3}$, $P = \frac{28\sqrt{3}}{3}$
 11. a) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = 4$
 b) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -4$
 c) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$
 d) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$

13. a) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ b) 0 c) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$
 e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) 1 g) $3 - \sqrt{3}$ h) $-\frac{8}{3}$

15. b) $a = \sqrt{31} + 1$, $b = \sqrt{31} - 1$

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. A 2. B 3. C 4. D 5. D 6. D 7. B 8. D
 9. PP
 10. $4\sqrt{5}$, $10 + 6\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
 11.1. D 11.2. $\sin |\sphericalangle ADC| = \frac{1}{2}$, $P = 4\sqrt{3}$
 12. FFP
 13.1. FP 13.2. C
 14. A1
 15. FF
 16. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
 17. $\frac{2}{5}$
 18. 7,2
 19. $|AP| = 5,75$, $|BP| = 2,25$
 20. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$
 21. $Ob = 28$, $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $\cos \alpha = \frac{24}{25}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$
 22. $\frac{49}{25}$
 23. $\frac{\sqrt{6}}{4}$
 24. $\frac{3}{5}$
 25. około 21,8 m

5.1. Okrąg

- Ć 1. 45°
 2. $\frac{3}{2}\pi$ cm, $\frac{9}{2}\pi$ cm, $\frac{15}{2}\pi$ cm, $\frac{21}{2}\pi$ cm
 3. 16
 Z 1. okrąg: 10π cm, łuk: $\frac{5}{3}\pi$ cm
 2. a) $\frac{5}{2}\pi$ cm b) $\frac{5}{4}\pi$ cm c) $\frac{55}{12}\pi$ cm
 3. 36 cm
 4. 80°
 5. a) $x = -9$, $x = 7$ b) $x = -3$, $x = 1$
 6. a) $|O_1O_2| = 1$; 0 b) $|O_1O_2| = 5$; 1
 c) $|O_1O_2| = 3$; 1
 7. 24, 12, 12
 8. a) 27 b) $\frac{1}{3}$ c) 24
 9. 3, 4, 5, 6, 7
 10. $2\sqrt{5}\pi$ cm, $6\sqrt{5}\pi$ cm

5.2. Koło

- Ć 1. a) 9π cm² b) 3π cm
 2. a) $P = 49\pi$ cm², $r = 7$ cm
 b) $r = 8$ cm, $R = 9$ cm
 3. a) 30π b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{21}{8}\pi$
 4. 20°
 5. a) $36(\pi - 2)$ b) $12(2\pi - 3\sqrt{3})$
 c) $12(\pi - 3)$
 Z 2. $L_1 = \frac{10}{3}\pi$, $L_2 = \frac{20}{3}\pi$,
 $P_1 = \frac{25}{3}\pi$, $P_2 = \frac{50}{3}\pi$
 3. $P_1 = 2\pi - 4\sqrt{2}$, $P_2 = 14\pi + 4\sqrt{2}$
 lub $P_1 = 6\pi - 4\sqrt{2}$, $P_2 = 10\pi + 4\sqrt{2}$
 4. a) $1 - \frac{\pi}{4}$ b) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ c) $\frac{3}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{4}$
 5. a) 2π b) $\frac{9}{4}(\pi - \sqrt{3} - 1)$
 6. a) $l = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$, $P = 4\pi - 3\sqrt{3}$
 b) $l = 4 + \pi$, $P = 4\pi - 8$
 c) $l = 2\sqrt{2} + \pi$, $P = 4\pi - 8\sqrt{2}$
 8. a) $\sqrt{6}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $\frac{6}{5}\sqrt{15}$
 9. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm² b) $\frac{\pi}{6}$ cm²

5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej

- Ć 2. a) $2\sqrt{13}$ cm b) 12 cm
 3. a) 28 cm b) 5 cm
 4. a) 2 b) 3 c) 1 d) 4
 5. 0 dla $m \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$,
 1 dla $m \in \{-2, 6\}$,
 2 dla $m \in (-2; 6)$
 6. a) $2\sqrt{7}$ b) 5
 Z 1. a) $x = -8$ lub $x = 8$
 b) $x = -5\sqrt{2}$ lub $x = 5\sqrt{2}$
 c) $x = -5\sqrt{3}$ lub $x = 5\sqrt{3}$ d) $x = 0$
 2. $P(-2, -\sqrt{21})$ lub $P(-2, \sqrt{21})$
 lub $P(2, -\sqrt{21})$ lub $P(2, \sqrt{21})$
 3. $\frac{20}{9}$
 4. $3\sqrt{3}$ cm²
 5. a) 0 dla $r \in (0; 4)$,
 1 dla $r = 4$,
 2 dla $r \in (4; \infty)$
 b) 0 dla $r \in (0; \frac{1}{2})$,
 1 dla $r = \frac{1}{2}$,
 2 dla $r \in (\frac{1}{2}; \infty)$

- c) 0 dla $r \in (0; 1 + \sqrt{2})$,
 1 dla $r = 1 + \sqrt{2}$,
 2 dla $r \in (1 + \sqrt{2}; \infty)$

6. a) 12 cm² b) 168 cm²

7. $|CO_1| = 3$, $P = 3\sqrt{2}$

5.4. Kąty w okręgu (1)

- Ć 1. a) 60° b) 240° c) 330°
 2. a) 30° b) 60°
 3. a) 30° b) 96°
 c) 274° d) 149°
 4. a) 165° b) $67,5^\circ$
 c) 51° d) 315°
 6. a) $\alpha = \beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
 b) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = \gamma = 30^\circ$
 c) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 240^\circ$, $\gamma = 60^\circ$
 7. a) $\alpha = \beta = 70^\circ$, $\gamma = 20^\circ$
 b) $\alpha = \gamma = 30^\circ$, $\beta = 40^\circ$
 c) $\alpha = \gamma = 25^\circ$, $\beta = 35^\circ$
 Z 1. a) C lub O b) F lub L
 c) G lub K d) C lub O
 2. a) 30° , 60° b) 45° , 90°
 c) $112,5^\circ$, 225° d) $3,75^\circ$, $7,5^\circ$
 3. a) $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle CAD| = 20^\circ$,
 $|\sphericalangle ADC| = 140^\circ$
 b) $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle CAD| = 65^\circ$,
 $|\sphericalangle ADC| = 50^\circ$
 4. a) $\alpha = 23^\circ$, $\beta = 134^\circ$
 b) $\alpha = 51^\circ$, $\beta = 102^\circ$
 c) $\alpha = 32^\circ$, $\beta = 64^\circ$
 5. a) $\alpha = 74^\circ$, $\beta = 37^\circ$
 b) $\alpha = 113^\circ$, $\beta = 56^\circ 30'$
 c) $\alpha = 72^\circ$, $\beta = 36^\circ$
 6. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 35^\circ$
 b) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 70^\circ$
 c) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 40^\circ$
 8. a) $\alpha = 84^\circ$, $\beta = \gamma = 48^\circ$
 b) $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 85^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
 c) $\alpha = \gamma = 70^\circ$, $\beta = 66^\circ$
 9. a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 300^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
 b) $\alpha = \gamma = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$
 c) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$

5.5. Kąty w okręgu (2)

- ☑ 1. a) $x = 9$ b) $x = 2\sqrt{2}$ c) $x = 3$
 2. 7π cm
 3. a) 8 cm, 12 cm b) 24 cm
 5. a) $\alpha = 32^\circ$ b) $\alpha = 42^\circ$ c) $\alpha = 36^\circ$
 6. $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$
 ☑ 1. a) $r = 4, P = 4\sqrt{15}$
 b) $r = 3\frac{3}{4}, P = 18$
 c) $r = 4, P = 3\sqrt{15}$
 2. a) $\alpha = \gamma = \delta = 25^\circ, \beta = 50^\circ$
 b) $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 80^\circ, \delta = 50^\circ$
 c) $\alpha = 30^\circ, \beta = 40^\circ, \gamma = 50^\circ, \delta = 60^\circ$
 3. a) 48° b) 15°
 4. a) $\alpha = \beta = 55^\circ, \gamma = 70^\circ$
 b) $\alpha = 50^\circ, \beta = 44^\circ, \gamma = 86^\circ$

5.6. Okrąg opisany na trójkącie

- ☑ 1. a) $\frac{\sqrt{193}}{2}$ cm b) 9π cm
 3. a) $10\sqrt{3}\pi$ cm
 b) $8\sqrt{3}\pi$ cm
 4. a) $\frac{256}{3}\pi$ cm²
 b) $h = 9$ cm, $P = 27\sqrt{3}$ cm²
 5. a) $2\sqrt{2}$ cm
 b) $3\sqrt{10}$ cm lub $\sqrt{10}$ cm
 6. a) 24 cm² b) $8,125$ cm
 ☑ 1. a) 4 cm b) 5 cm c) $3(\sqrt{2} - 1)$ cm
 2. a) $10(1 + \sqrt{2})$
 b) $2(5 + 2\sqrt{10})$
 3. 48
 4. $48\sqrt{3}$
 5. a) 5 cm b) $\frac{25}{6}$ cm
 6. a) $4\sqrt{10}(\sqrt{3} + \sqrt{13})$ cm
 b) $4\sqrt{3}(\sqrt{13} + \sqrt{10})$ cm
 7. $\frac{5\sqrt{5}}{4}$
 8. $4\sqrt{3}$
 9. a) $P = 9, R = \frac{5\sqrt{13}}{6}$
 b) $P = 126, R = \frac{65}{6}$
 10. 7
 11. 15π
 12. a) 5,8 cm b) $\frac{25}{6}$ cm

5.7. Okrąg wpisany w trójkąt

- ☑ 1. a) $6\sqrt{3}\pi$ b) $30\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{3}\pi$
 2. $12\sqrt{3}\pi$ cm
 3. a) 1 b) 3
 4. a) 24 cm i 26 cm b) 6 cm i 8 cm
 6. 12
 7. a) 4 b) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ c) 4 d) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
 8. b) $r = 5, P = 25\pi$
 c) $r_1 = 3, P_1 = 9\pi; r_2 = 4, P_2 = 16\pi$
 ☑ 1. b) 4
 2. a) $2(\sqrt{3} - 1)$ b) $6\pi(\sqrt{3} - 1)$
 3. a) 3 b) $3\frac{1}{3}$
 4. a) $2(2\sqrt{3} + 3), 2(2\sqrt{3} + 3), 6(\sqrt{3} + 2)$
 b) $\frac{28\sqrt{3}}{3} + 16$
 5. $\frac{17}{36}\pi$ cm²
 6. $r = \sqrt{2}$ cm, $|OA| = |OB| = \sqrt{6}$ cm,
 $|OC| = 3\sqrt{2}$ cm
 7. $4(\sqrt{3} + 3), 8(\sqrt{3} + 1)$
 9. 24
 10. a) $(4 - \frac{5\sqrt{2}}{2})$ cm b) $4(\sqrt{3} - 1)$ cm
 c) $(3\sqrt{5} - 5)$ cm
 11. $Ob = 4(3 + \sqrt{13})$ cm,
 $l = 6(\sqrt{13} - 3)\pi$ cm
 12. $6(2\sqrt{3} - 3)\pi$ cm

5.8. Wielokąty foremne

- ☑ 2. a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7 f) 8
 g) 9 h) 10
 4. a) 20π b) $48\sqrt{3}$
 5. a) $\frac{243}{4}\pi$ cm² b) 12 cm, $8\sqrt{3}$ cm
 ☑ 1. a) 135° b) 144°
 2. a) 6 b) 7 c) 9 d) 10 e) 11
 3. a) $\frac{a^2}{4}\pi$ b) $\frac{a^2}{4}\pi$
 4. $R = a$

a	R	r	P
4 cm	4 cm	$2\sqrt{3}$ cm	$24\sqrt{3}$ cm ²
6 cm	6 cm	$3\sqrt{3}$ cm	$54\sqrt{3}$ cm ²
$\frac{4}{3}\sqrt[4]{12}$ cm	$\frac{4}{3}\sqrt[4]{12}$ cm	$\frac{2}{3}\sqrt[4]{108}$ cm	16 cm ²
$8\sqrt{3}$ cm	$8\sqrt{3}$ cm	12 cm	$288\sqrt{3}$ cm ²

5. a) 9
 6. $\triangle ABC$ i $\triangle AHG$: $22,5^\circ, 135^\circ, 22,5^\circ$
 $\triangle ACD$ i $\triangle AGF$: $22,5^\circ, 112,5^\circ, 45^\circ$
 $\triangle ADE$ i $\triangle AFE$: $22,5^\circ, 90^\circ, 67,5^\circ$
 9. 48 cm
 10. $54\sqrt{3}$ cm²
 11. a) $2(2\sqrt{2} - \sqrt{6})\pi$ cm
 b) $Ob = 4\sqrt{3}$ cm, $P = 2\sqrt{3}$ cm²
 12. a) $22,5^\circ$ b) 18° c) 15°

Wykorzystanie funkcji trygonometrycznych

1. a) $x = 9, y = 6\sqrt{2}$
 b) $x = 3\sqrt{7}, y = 9$
 c) $x = 2\sqrt{5}, y = 4$
 d) $x = \frac{9}{2}, y = \frac{15}{2}$
 2. a) $P = 4\sqrt{21}, Ob = 2(7 + \sqrt{21})$
 b) $P = \frac{27}{2}, Ob = 3(4 + \sqrt{10})$
 c) $P = 3\sqrt{3}, Ob = 3 + 2\sqrt{3} + \sqrt{21}$
 d) $P = 9, Ob = 3(3 + \sqrt{5})$
 3. a) $\sqrt{601}$ b) $2\sqrt{13}$

5.9. Twierdzenie cosinusów (1)

- ☑ 2. a) $c = \sqrt{39}$ b) $c = \sqrt{74 + 35\sqrt{3}}$
 c) $b = \sqrt{5}$ d) $a = \sqrt{29}$
 3. a) $\gamma = 150^\circ, \alpha = \beta = 15^\circ$
 b) $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 105^\circ$
 ☑ 1. a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{13}$ c) $2\sqrt{13}$ d) $2\sqrt{13}$
 2. a) $d_1 = 2\sqrt{7}, d_2 = 2\sqrt{19}$
 b) $d_1 = 2\sqrt{2}, d_2 = 2\sqrt{10}$
 c) $d_1 = \sqrt{19}, d_2 = 7$
 d) $d_1 = 2\sqrt{13}, d_2 = 2\sqrt{37}$
 3. a) $\alpha = 30^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 60^\circ$
 b) $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 105^\circ$
 4. a) $\alpha \approx 29^\circ, \beta \approx 46,5^\circ, \gamma \approx 104,5^\circ$
 b) $\alpha \approx 22^\circ, \beta \approx 38^\circ, \gamma = 120^\circ$
 5. a) $\sqrt{7}, 3\sqrt{7}$ b) $\sqrt{21}, 4\sqrt{21}$
 6. a) $\cos \gamma = \sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}, P = \frac{3}{2}$
 b) $\cos \gamma = \frac{3\sqrt{5}}{10}, \sin \gamma = \frac{\sqrt{55}}{10}, P = \frac{\sqrt{11}}{2}$
 7. a) $2\sqrt{17}$ b) $\sqrt{165}$
 c) $\sqrt{30}$ d) $\sqrt{41 + 8\sqrt{5}}$
 8. a) 60° b) 135°
 9. a) 8 b) $4\sqrt{13}$

5.10. Twierdzenie cosinusów (2)

- ☑ 1. a) $3\sqrt{2}$ b) $3 + 3\sqrt{3}$
 2. a) $\sqrt{13}$ cm b) $2\sqrt{7}$ cm
 3. a) $2\sqrt{3}$ cm b) $\sqrt{6}$ cm
 4. $\cos \alpha = \frac{13}{15}, \cos \gamma = -\frac{1}{15}$
 5. a) $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, ostrokątny
 b) $\cos \alpha = 0$, prostokątny
 c) $\cos \beta = -\frac{1}{16}$, rozwartokątny
 d) $\cos \gamma = -\frac{1}{48}$, rozwartokątny
 ☑ 1. a) $\cos \gamma = \frac{1}{4}$, tak
 b) $\cos \alpha = -\frac{13}{35}$, nie
 c) $\cos \beta = -\frac{3}{4}$, nie
 d) $\cos \alpha = 0$, nie
 2. a) $\frac{1}{5}$ b) $2\sqrt{7}$
 3. a) $\frac{43}{48}$ b) $\frac{\sqrt{74}}{2}$
 4. a) $\cos \gamma = \frac{4}{5}, c = 2\sqrt{13}$
 lub $\cos \gamma = -\frac{4}{5}, c = 6\sqrt{5}$
 b) $\cos \gamma = \frac{1}{3}, c = \sqrt{41}$
 lub $\cos \gamma = -\frac{1}{3}, c = 9$
 5. $2\sqrt{3}(6 + \sqrt{7})$
 6. $2\sqrt{7}, 2\sqrt{13}$
 7. a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{7}{24}$
 8. a) $2\sqrt{7}$ b) $2\sqrt{37}$
 9. a) $6\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm, $12\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ cm
 b) $8\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ cm, $8\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ cm

Zestaw I

1. a) π b) $2\sqrt{3} - \frac{3}{4}\pi$
 2. a) $\alpha = \beta = 60^\circ$
 b) $\alpha = 50^\circ, \beta = 55^\circ$
 c) $\alpha = 100^\circ, \beta = 130^\circ$
 3. a) 60° b) 30°
 4. a) $22,5^\circ$ b) $67,5^\circ$
 5. a) $\sqrt{2}$ b) $2(\sqrt{2} - 1)$ c) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$
 6. a) $\frac{27}{4}\pi$ b) $P = 36\sqrt{3}, Ob = 36$
 7. $18\sqrt{3}$
 8. a) $3,75$ cm² b) $6,25$ cm²
 9. a) $6\pi, 4\pi$
 b) $16(\pi - 2)$
 c) $8(\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2} + 2})$

Zestaw II

1. a) $(4 - \sqrt{10})$ cm b) 4 cm
2. $r = 3$, $P = 54$
3. $3\frac{1}{3}$ cm
4. $6\pi(\sqrt{2} - 1)$
5. $|AP| = 3$, $|BQ| = 6$, $|CR| = 10$
6. a) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ b) 12
7. a) $2 + \sqrt{3} + \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$
b) $\sqrt{10 + 4\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$
8. a) $2\sqrt{12 + 3\sqrt{3}}$ b) $4\sqrt{5 + \sqrt{6}}$
9. a) 60° b) 135°
10. a) $Ob = 2(9 + \sqrt{21})$, $P = 20\sqrt{3}$
b) $Ob = 2(2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6})$,
 $P = 4(1 + \sqrt{3})$
11. $3\frac{1}{4}$
12. a) $2(\sqrt{3} - 1)$ cm b) $\frac{2\sqrt{14}}{7}$ cm
13. a) $\frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}$ b) $\frac{3}{4}$
14. a) około 1750 m² b) około 926 m²

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. C 2. D 3. C 4. C 5. B 6. C 7. A 8. C
9. FF
10. FP
11. A2
12.1. A 12.2. $2\sqrt{6}$
13. CE
14.1. A3 14.2. 10π cm, 24π cm
15.1. D 15.2. A
16. $8P$
17. $\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\pi$
18. 40°
19. 20π
20. $P = 8$, $Ob = 4(1 + 2\sqrt{2})$
21. $\sin |\sphericalangle O_1PA| = \frac{5}{13}$, $r = 2\frac{2}{9}$
22. $16\pi(3 - 2\sqrt{2})$ cm²
23. 45° , 135°
24. $3 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{21}$

Indeks

alfabet grecki	144	liczba	
asymptota	89	π	174
pionowa	89	pierwiastków równania	
pozioma	89	kwadratowego	30
		najmniejsza wartość funkcji kwadratowej	
cosinus kąta	131, 147	w przedziale domkniętym	44
czworokąt wypukły	158	największa wartość funkcji kwadratowej	
długość		w przedziale domkniętym	44
łuku okręgu	174	nierówność kwadratowa	40
okręgu	174		
deltoid	163	odcinek koła (kołowy)	178
dwumian	60	odległość punktu od prostej	180
dziedzina		okrąg	174
naturalna funkcji	98	okręgi	
wyrażenia wymiernego	97	przecinające się	175, 181
		rozłączne	175, 181
figura wypukła	146	rozłączne wewnątrznie	175
funkcja		rozłączne zewnętrznie	175, 181
kwadratowa	18, 33	styczne	175, 181
wymierna	98	styczne wewnątrznie	175, 181
funkcje trygonometryczne		styczne zewnętrznie	175, 181
kąta ostrego	131	oś symetrii paraboli	10, 15, 36
kąta wypukłego	147		
		parabola	10, 15
hiperbola	89, 108	pierścień kołowy	177
hiperboloida	108	pierwiastek podwójny	
		równania kwadratowego	30
interpretacja geometryczna		pierwiastki	
równania kwadratowego	31	równania kwadratowego	26, 30
jednomian		wielomianu	70
stopnia n	60	pole	
zerowy	60	deltoidu	163
jedynka trygonometryczna	141	koła	177
		rombu	160
kąta		równoległoboku	159
rozwarty	146	trapezu	162
środkowy w okręgu	174, 184	trójkąta	154, 155, 157
wpisany w okrąg	184, 185	trójkąta opisanego na okręgu	196
wypukły	146	trójkąta prostokątnego	153
koło	177	trójkąta równobocznego	155
krzywa łańcuchowa	39	trójkąta wpisanego w okrąg	193
kwadrat	158	wycinka koła (kołowego)	177
różnicy	17		
sumy	17		

Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,430
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,301
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,081
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,636
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,290

postać	styczna do okręgu 180, 181
iloczynowa funkcji kwadratowej 33	szerokość pierścienia kołowego 177
kanoniczna funkcji kwadratowej 18	
ogólna funkcji kwadratowej 18	środek
promień	okręgu opisanego na trójkącie 191
okręgu opisanego na sześciokącie foremnym 201	okręgu wpisanego w trójkąt 195
okręgu opisanego na trójkącie równobocznym 192	tangens kąta 131, 147
okręgu wpisanego w sześciokąt foremny 201	tożsamość trygonometryczna 141, 143, 148, 151
okręgu wpisanego w trójkąt 197	trapez 158, 162
okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny 195	równoramienny 158
wewnętrzny pierścienia kołowego 177	trójka pitagorejska 127
zewewnętrzny pierścienia kołowego 177	trójmian 60
proporcjonalność odwrotna 88	kwadratowy 18
prostokąt 158	twierdzenie
przekątna kwadratu 127	cosinusów 204
punkt styczności 175, 180	o cięciwach 188
	o odcinkach stycznych do okręgu 181
	odwrotne do twierdzenia
	Pitagorasa 127
	Pitagorasa 126
ramię	
końcowe kąta 146	wartość bezwzględna liczby 109
początkowe kąta 146	wielkości odwrotnie proporcjonalne 88
romb 158, 160	wielokąt
rozkład na czynniki liniowe	foremny 200
funkcji kwadratowej 33	wklęsły 158
rozwiązania	wypukły 158
równania kwadratowego 26, 30	wielomian
równania wielomianowego 70	stopnia n 60
rozwiązanie trójkąta 138	wielu zmiennych 64
równanie	zerowy 60
kwadratowe 26	współczynnik
wielomianowe 70	jednomianu 60
wymierne 104	proporcjonalności odwrotnej 88
z wartością bezwzględną 109	wielomianu 60
równoległobok 158, 159	współrzędne wierzchołka paraboli 19, 36
różnica kwadratów 17	wycinek koła (kołowy) 177
	wyraz wolny wielomianu 60
sieczna okręgu 180	wyrazy wielomianu 60
sinus kąta 131, 147	wyrażenie wymierne 97
stopień	wyróżnik trójmianu kwadratowego 19
iloczynu wielomianów 67	wysokość trójkąta równobocznego 128
sumy wielomianów 63	wzór Herona 157
wielomianu 60	

Działania na ułamkach

Dla $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ oraz $b, d \neq 0$:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Dla $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ oraz $b, c, d \neq 0$:

- $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Wartość bezwzględna

Dla $a \in \mathbb{R}$:

- $|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$

- $|-a| = |a|$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $|a - b| = |b - a|$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $b \neq 0$:

- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

Pierwiastek kwadratowy

Dla $a \geq 0$:

- $\sqrt{a} = b$, gdy $b^2 = a$ i $b \geq 0$

Dla $a \in \mathbb{R}$:

- $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$

Dla $a, b \geq 0$:

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Dla $a \geq 0$ i $b > 0$:

- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Pierwiastek sześcienny

Dla $a \in \mathbb{R}$:

- $\sqrt[3]{a} = b$, gdy $b^3 = a$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $b \neq 0$:

- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

Pierwiastek n -tego stopnia

Dla $a \geq 0$ i parzystego n :

- $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b \geq 0$ i $b^n = a$

Dla $a \in \mathbb{R}$ i nieparzystego n :

- $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$

Potęgi i pierwiastki

Dla $a > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$:

- $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Dla $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{Q}$:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Wzory skróconego mnożenia

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Równania

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$

Dla $b \neq 0$, $d \neq 0$:

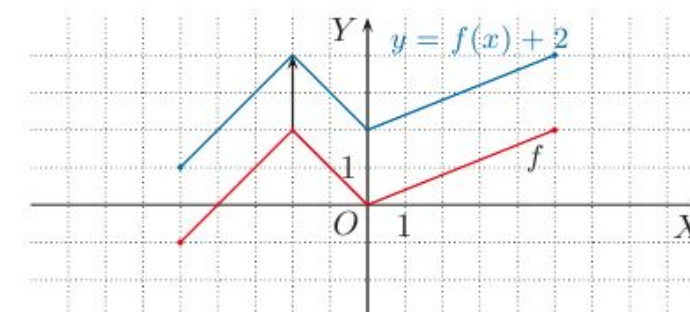
- równanie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ jest równoważne równaniu $ad = bc$

Dla $a > 0$:

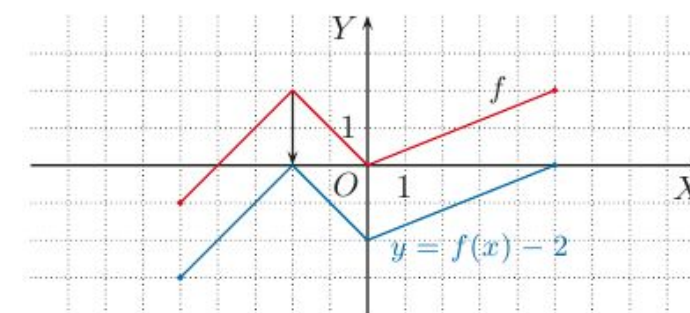
- $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -a$ lub $x = a$

Przesuwanie wykresów funkcji

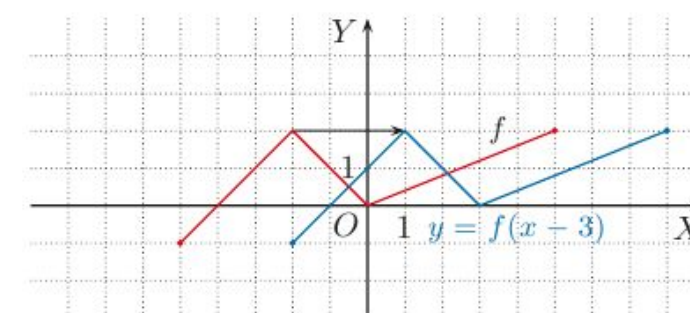
- Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w górę wzdłuż osi OY .



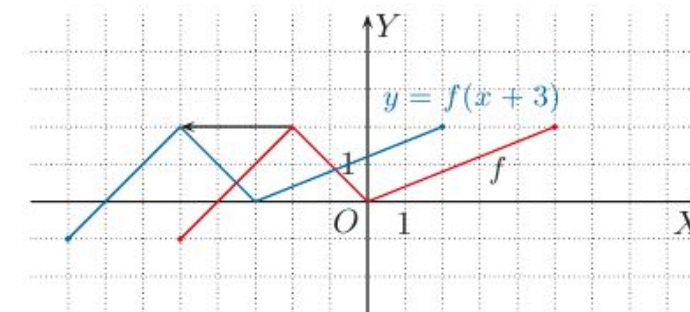
- Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w dół wzdłuż osi OY .



- Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w prawo wzdłuż osi OX .



- Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w lewo wzdłuż osi OX .



Logarytmy

Dla $a, b > 0, a \neq 1$:

- $\log_a b = x$, gdy $a^x = b$

Dla $a, b, c > 0, a \neq 1, p \in \mathbb{R}$:

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^p = p \log_a b$

Równanie prostej

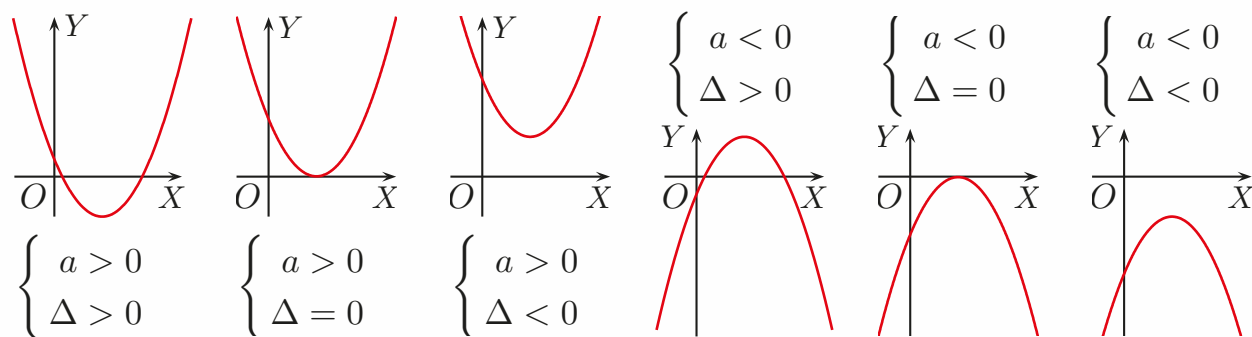
- Równanie kierunkowe: $y = ax + b$
- Równanie ogólne: $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$
- Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$
- Współczynnik kierunkowy prostej:

$$y = ax + b$$
przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
- Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:
 – równoległe, gdy $a_1 = a_2$,
 – prostopadłe, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Położenie paraboli względem osi OX



Równanie kwadratowe

- Wyróżnik równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Pierwiastki równania kwadratowego:

- Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek (podwójny):

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

Wzór funkcji kwadratowej

- Postać ogólna:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$
Współrzędne wierzchołka paraboli:

$$(p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$
- Postać kanoniczna:

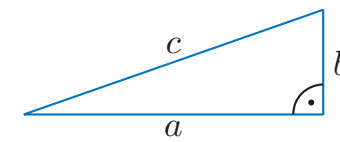
$$f(x) = a(x - p)^2 + q, a \neq 0$$
- Postać iloczynowa:
 – jeśli $\Delta > 0$, to:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), a \neq 0,$$
 gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami,
 – jeśli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$,
 gdzie x_0 jest pierwiastkiem,
 – jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma postaci iloczynowej.

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym:

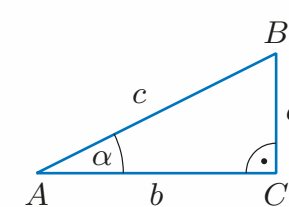
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

W trójkącie prostokątnym:

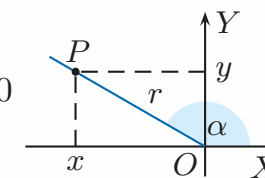
- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$



Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Dla $P(x, y)$ oraz $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

- $\sin \alpha = \frac{y}{r}, r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$
- $\cos \alpha = \frac{x}{r}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, x \neq 0$



Wzory trygonometryczne

Dla $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$:

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

Dla $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \alpha \neq 90^\circ$

Tożsamości trygonometryczne

Dla $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$:

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Dla $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ]$:

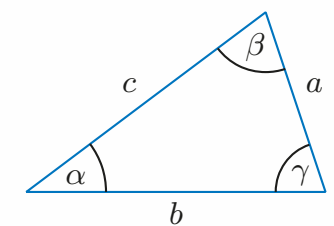
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Wartości funkcji trygonometrycznych

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

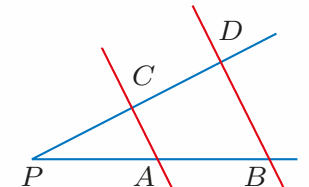
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Twierdzenie Talesa

Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to:

- $\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|AB|}$
- $\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|PD|}{|PB|}$



Trójkąty i czworokąty

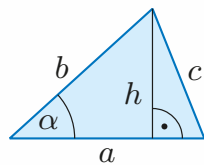
- Dowolny trójkąt

$$P = \frac{1}{2}ah$$

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$



R – promień
okręgu
opisanego,
 r – promień
okręgu
wpisanego

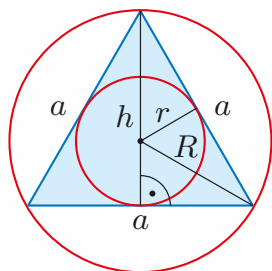
- Trójkąt równoboczny

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

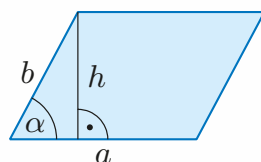
$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



- Równoległobok

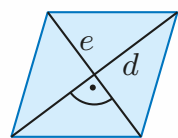
$$P = ah$$

$$P = ab \sin \alpha$$



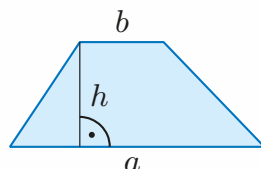
- Romb

$$P = \frac{1}{2}de$$



- Trapez

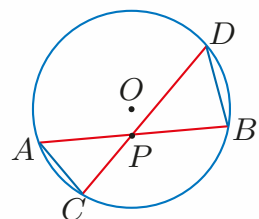
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



Twierdzenie o cięciwach

Jeśli w okręgu dwie cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P , to:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$



Koło i okrąg

- Długość okręgu:

$$l = 2\pi r$$

- Pole koła:

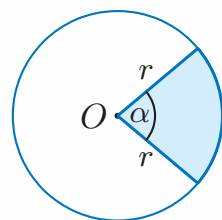
$$P = \pi r^2$$

- Pole wycinka koła:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

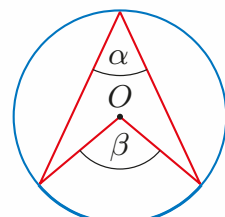
- Długość łuku okręgu:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

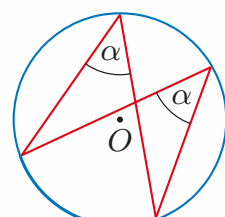


Kąty w okręgu

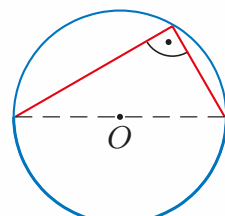
- Kąt wpisany α i kąt środkowy β oparte na tym samym łuku:
 $\beta = 2\alpha$



- Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.



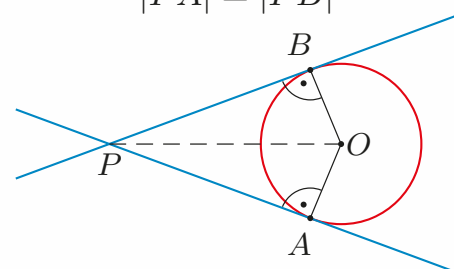
- Kąt wpisany oparty na półokręgu (na średnicy) jest kątem prostym.



Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeśli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to:

$$|PA| = |PB|$$



Za co polubisz podręcznik NOWA MATeMATyka 2?

Powód 1



Jest tu dokładnie tyle treści, ile trzeba. Ten podręcznik jest w pełni dostosowany do podstawy programowej, co oznacza, że zawiera tylko to, co jest aktualnie wymagane.

ZMIANY
W PODSTAWACH
2024

✂
podręcznik w pełni
dostosowany

Powód 2



Wiele rozwiązanych przykładów. Czy to przydatne? Tak. Łatwiej poradzisz sobie z samodzielnym rozwiązaniem podobnych zadań.

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = (x-2)^2 + 1$ otrzymamy przesuwając parabolę $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo, a następnie o 1 jednostkę w górę (rysunek obok).

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj współrzędne wierzchołka otrzymanej paraboli.

a) $f(x) = (x-3)^2 - 2$

b) $f(x) = (x+2)^2 + 1$

Powód 3



Matura. Dobrze jest mieć podręcznik, który uczy rozwiązywania takich zadań, jakie mogą pojawić się na maturze. Dzięki temu możesz mieć pewność, że wiesz, umiesz, zdasz.



Przed obowiązkową maturą

Zadanie 13

Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok) w którym $\sin \alpha = 0,4$ oraz $|AC| = 10$.

Zadanie 13.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń: prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Cosinus kąta α jest równy 0,6.

