



5 Funkcja liniowa

Dla snowboardzisty czy narciarza kąt nachylenia stoku jest niezwykle istotny. Jest to jeden z czynników branych pod uwagę przy ustalaniu stopnia trudności trasy narciarskiej.

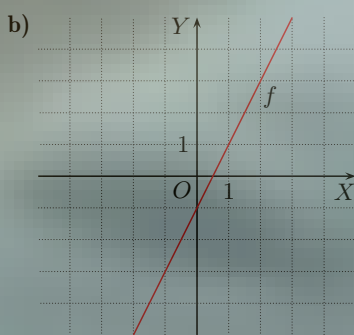
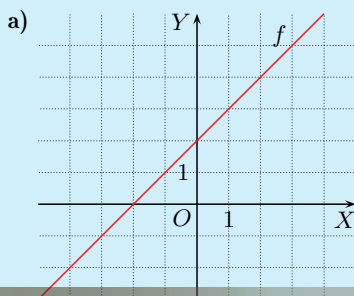
Kąt nachylenia terenu ma też zasadnicze znaczenie w zagadnieniach inżynierskich, takich jak budowa dróg czy kolei.

O nachyleniu prostej będącej wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ decyduje współczynnik a .

Uczeń:

- rozpoznaje funkcję liniową, mając dany jej wzór, oraz szkicuje jej wykres,
- interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej i wskazuje wśród danych wzorów funkcji liniowych te, których wykresy są równoległe,
- sprawdza, czy punkt należy do wykresu funkcji liniowej,
- wyznacza wzór funkcji liniowej, której wykres spełnia podane warunki, np. jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez dany punkt.

Ćwiczenie 1



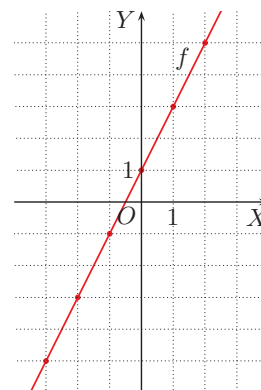
5.1. Wykres funkcji liniowej (1)

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji określonej za pomocą wzoru $f(x) = 2x + 1$, jeśli jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = 2x + 1$, sporządzamy tabelę wartości funkcji dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3	5



Otrzymane punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych. Zwróć uwagę, że wszystkie te punkty leżą na jednej prostej – jest ona wykresem funkcji f .

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f , jeśli jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

- a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = 2x - 1$ c) $f(x) = -x$ d) $f(x) = -x + 3$

Definicja

Funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a i b są stałymi, nazywamy **funkcją liniową**.

Wykresem funkcji $f(x) = ax + b$ (używamy też zapisu $y = ax + b$) jest **prosta**. Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy znaleźć dwa należące do niego punkty i poprowadzić przez nie prostą (przez dwa różne punkty przechodzi tylko jedna prosta). Prosta ta ma równanie $y = ax + b$.

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{5}{3}x - 1$.

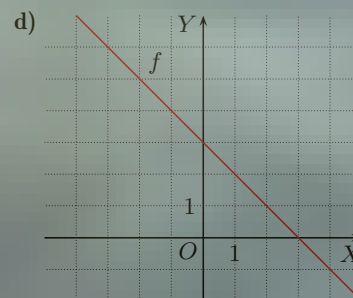
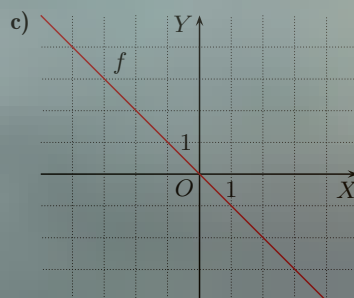
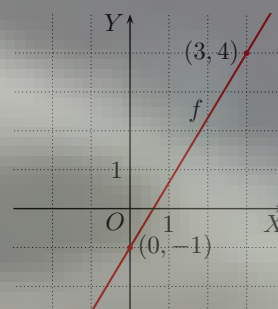
Dla $x = 0$ mamy $f(0) = \frac{5}{3} \cdot 0 - 1 = -1$.

Dla $x = 3$ mamy $f(3) = \frac{5}{3} \cdot 3 - 1 = 4$.

Otrzymane wyniki można przedstawić w tabeli.

x	0	3
$f(x)$	-1	4

Punkty $(0, -1)$ i $(3, 4)$ należą do wykresu funkcji f .



Multiteka

- Wykresy funkcji liniowych
- Proste równoległe i proste prostopadłe w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.1

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

Znajdź dwa punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f . Naskicuj ten wykres.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$ b) $f(x) = -\frac{3}{5}x$ c) $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ d) $f(x) = -\frac{4}{7}x - 1$

Definicja

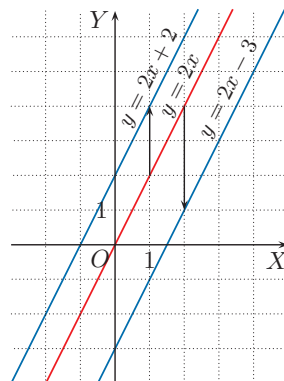
Liczbę a występującą we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej.

Przykład 3

Wykresy funkcji liniowych $y = 2x + 2$ i $y = 2x - 3$ są prostymi równoległymi. Każdy z nich możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2x$ wzdłuż osi OY .

Po przesunięciu prostej $y = 2x$ o 2 jednostki w górę otrzymamy prostą $y = 2x + 2$.

Po przesunięciu prostej $y = 2x$ o 3 jednostki w dół otrzymamy prostą $y = 2x - 3$.



Ćwiczenie 3

Naskicuj wykres funkcji $y = 3x$, a następnie wykres funkcji f .

a) $f(x) = 3x + 1$ b) $f(x) = 3x + 3$ c) $f(x) = 3x - 2$ d) $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$

Twierdzenie

Wykresy funkcji liniowych o tym samym współczynniku kierunkowym są prostymi równoległymi.

Podane powyżej twierdzenie można też sformułować następująco:

Proste dane równaniami $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.

Ćwiczenie 4

Które spośród prostych $l_1, l_2, \dots, l_8$ są równoległe?

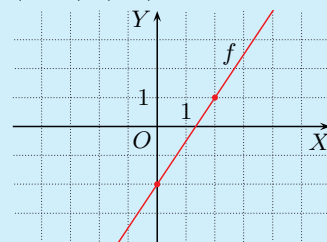
$l_1: y = \frac{1}{2}x - 3$ $l_3: y = -\frac{1}{2}x + 3$ $l_5: y = 8 - \frac{1}{2}x$ $l_7: y = 1 - 2x$
 $l_2: y = 2x - 3$ $l_4: y = 4 + 2x$ $l_6: y = 2x - \sqrt{3}$ $l_8: y = \sqrt{5} - \frac{1}{2}x$

Ćwiczenie 4

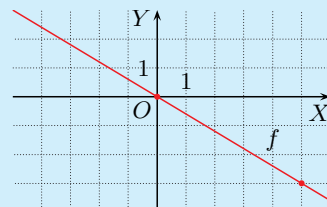
$l_2 \parallel l_4 \parallel l_6$, $l_3 \parallel l_5 \parallel l_8$

Ćwiczenie 2

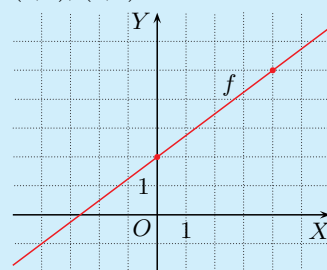
a) $(0, -2), (2, 1)$



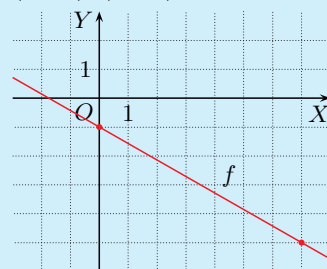
b) $(0, 0), (5, -3)$



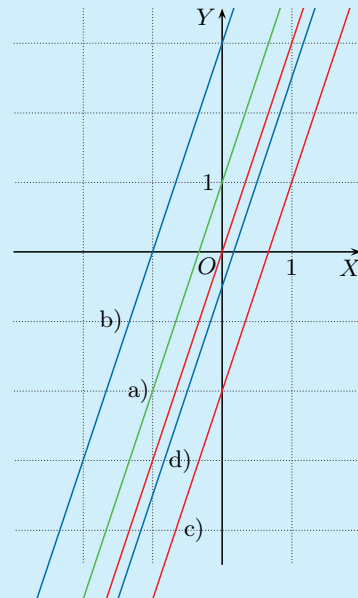
c) $(0, 2), (4, 5)$



d) $(0, -1), (7, -5)$



Ćwiczenie 3

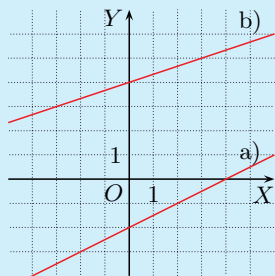


Ćwiczenie 5

- a) $y = 2x + 1$
 b) $y = -3x + 1$
 c) $y = -\frac{2}{3}x - 2$
 d) $y = -\frac{3}{5}x + 1$

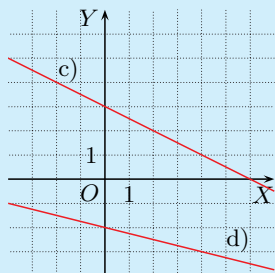
Odpowiedzi do zadań

1. a) Q b) P, R c) P d) Q
 e) P, Q f) R g) h) żaden
 2. a), b)



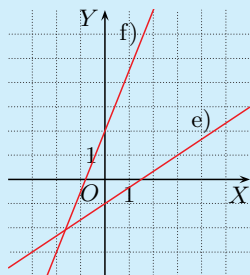
- a) np. $(0, -2)$, $(2, -1)$, $(4, 0)$
 b) np. $(-3, 3)$, $(0, 4)$, $(3, 5)$

c), d)



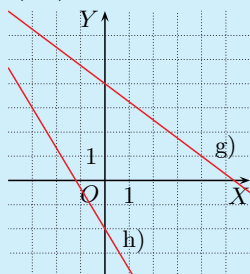
- c) np. $(-2, 4)$, $(0, 3)$, $(2, 2)$
 d) np. $(-8, 0)$, $(0, -2)$, $(4, -3)$

e), f)



- e) np. $(-3, -3)$, $(0, -1)$, $(3, 1)$
 f) np. $(-2, -3)$, $(0, 2)$, $(2, 7)$

g), h)



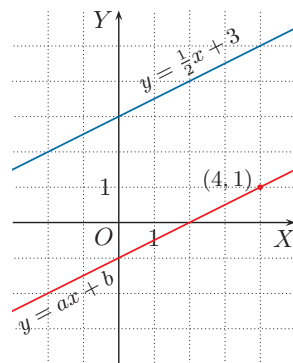
- g) np. $(-4, 7)$, $(0, 4)$, $(4, 1)$
 h) np. $(-3, 3)$, $(0, -2)$, $(3, -7)$

Przykład 4

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkt $P(4, 1)$ i równoległa do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Funkcja liniowa dana jest wzorem $y = ax + b$, a jej wykresem jest prosta równoległa do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$, więc $a = \frac{1}{2}$. Aby wyznaczyć współczynnik b , podstawiamy współrzędne punktu $P(4, 1)$ do równania $y = \frac{1}{2}x + b$ i otrzymujemy $1 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$, skąd $b = -1$.

Zatem warunki zadania spełnia funkcja $y = \frac{1}{2}x - 1$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przechodząca przez punkt P .

- a) $l: y = 2x - 4$, $P(3, 7)$ c) $l: y = -\frac{2}{3}x + 3$, $P(3, -4)$
 b) $l: y = -3x + 5$, $P(-\frac{1}{3}, 2)$ d) $l: y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$, $P(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$

Zadania

1. Naskicuj wykres funkcji. Które z punktów $P(4, 3)$, $Q(2, 5)$, $R(-2, -3)$ należą do jej wykresu?

- a) $y = x + 3$ c) $y = 2x - 5$ e) $y = -x + 7$ g) $y = -3x + 6$
 b) $y = x - 1$ d) $y = 3x - 1$ f) $y = -2x - 7$ h) $y = -4x - 3$

2. Naskicuj wykres funkcji. Podaj trzy punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do tego wykresu.

- a) $y = \frac{1}{2}x - 2$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ e) $y = \frac{2}{3}x - 1$ g) $y = -\frac{3}{4}x + 4$
 b) $y = \frac{1}{3}x + 4$ d) $y = -\frac{1}{4}x - 2$ f) $y = \frac{5}{2}x + 2$ h) $y = -\frac{5}{3}x - 2$

3. Które spośród prostych: $l_1, l_2, \dots, l_8$ są równoległe?

- $l_1: y = 5x - \frac{1}{2}$ $l_3: y = \frac{1}{5}x - \sqrt{3}$ $l_5: y = -\frac{1}{5}x + 3$ $l_7: y = 4 - \frac{1}{5}x$
 $l_2: y = -\frac{1}{5}x$ $l_4: y = 5x - \frac{1}{5}$ $l_6: y = \frac{1}{5}x + 5x$ $l_8: y = 5x - \sqrt{5}$

- D** 4. Czy czworokąt, którego boki są zawarte w prostych k, l, m, n , jest trapezem? Czy jest równoległobokiem? Odpowiedź uzasadnij.

- a) $k: y = -\frac{3}{4}x + 3$, $l: y = 0,3x - 2$, $m: y = \frac{1}{3}x + 4$, $n: y = 6 - 0,75x$
 b) $k: y = 2\sqrt{2}x - 4$, $l: y = 4 - 2,5x$, $m: y = 1 + \sqrt{8}x$, $n: y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

3. $l_1 \parallel l_4 \parallel l_6 \parallel l_8$, $l_2 \parallel l_5 \parallel l_7$

4. a) $a_k = a_n = -\frac{3}{4}$

Czworokąt ma jedną parę boków równoległych, czyli jest trapezem.

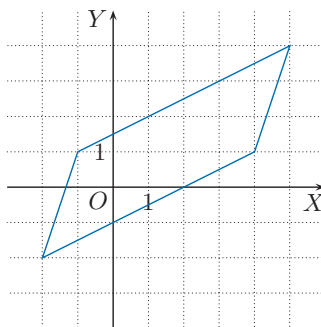
- b) $a_k = a_m = 2\sqrt{2}$, $a_l = a_n = -\frac{5}{2}$

Czworokąt ma dwie pary boków równoległych, czyli jest równoległobokiem.

5. Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej o podanym wzorze i przechodząca przez punkt P .

a) $y = 4x - 2$, $P(0, 5)$ c) $y = -\frac{4}{3}x + 6$, $P(-6, 5)$
 b) $y = -3x + 4$, $P(1, 8)$ d) $y = \frac{5}{12}x - 3$, $P(-\frac{4}{5}, \frac{2}{3})$

6. Dwa boki równoległoboku są zawarte w prostych $y = \frac{1}{2}x - 1$ i $y = 3x + 4$ (rysunek obok). Wyznacz równania prostych zawierających pozostałe boki równoległoboku.



7. Jedna z podstaw trapezu o wierzchołkach $A(0, -3)$, $B(4, 0)$, $C(-2, 4)$, $D(-3, -1)$ jest zawarta w prostej $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$. Wyznacz równanie prostej zawierającej drugą podstawę trapezu.

8. Proste l_1 i l_2 są równoległe do prostej k . Do prostej l_1 należy punkt A , a do prostej l_2 punkt B . Wyznacz równania tych prostych.

a) $k: y = \sqrt{3}x - 3$, $A(2\sqrt{3}, 6)$, $B(1 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 4)$
 b) $k: y = (\sqrt{2} - 1)x + 6$, $A(\sqrt{8}, 3 - \sqrt{2})$, $B(1 + \sqrt{2}, 4)$

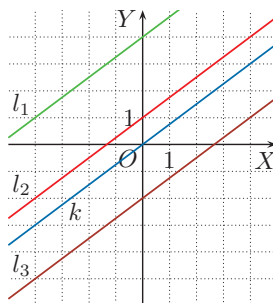
Powtórzenie

9. Naszkicuj wykres funkcji. Podaj współczynnik kierunkowy prostej.

a) $y = x - 3$ c) $y = 3 - 2x$ e) $y = \frac{1}{2}x + 2$ g) $y = \frac{1}{2}(6 - 5x)$
 b) $y = 2x + 4$ d) $y = 2 - 5x$ f) $y = \frac{x+6}{3}$ h) $y = \frac{1}{3}(4x - 6)$

10. Wśród trzech podanych prostych wskaż dwie proste równoległe.

a) $y = 2 - \frac{1}{3}x$, $y = 2x - \frac{1}{3}$, $y = \frac{6-x}{3}$
 b) $y = 2(x - 4)$, $y = 4(1 - \frac{x}{2})$, $y = -2(x + 1)$
 c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$, $y = \sqrt{3}x - 3$, $y = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$



11. Proste przedstawione na rysunku obok są równoległe do prostej $k: y = \frac{3}{4}x$. Podaj ich równania.

12. Wyznacz wzór funkcji f , której wykresem jest prosta równoległa do prostej $y = -6x + 5$ i przechodząca przez punkt P .

a) $P(1, -4)$ b) $P(\frac{2}{3}, 2)$ c) $P(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$ d) $P(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 3\sqrt{2} + 2)$

11. $l_1: y = \frac{3}{4}x + 4$, $l_2: y = \frac{3}{4}x + 1$, $l_3: y = \frac{3}{4}x - 2$

12. a) $f(x) = -6x + 2$
 b) $f(x) = -6x + 6$
 c) $f(x) = -6x + 1$
 d) $f(x) = -6x + 8$

5. a) $y = 4x + 5$
 b) $y = -3x + 11$
 c) $y = -\frac{4}{3}x - 3$
 d) $y = \frac{5}{12}x + 1$

6. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $y = 3x - 11$

7. Prosta $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ przechodzi przez wierzchołki B i C . Równanie prostej zawierającej drugą podstawę trapezu: $y = -\frac{2}{3}x - 3$.

8. a) $l_1: y = \sqrt{3}x$,
 $l_2: y = \sqrt{3}x - 1$
 b) $l_1: y = (\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2} - 1$,
 $l_2: y = (\sqrt{2} - 1)x + 3$

9. a) 1 b) 2 c) -2 d) -5
 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{3}$ g) $-\frac{5}{2}$ h) $\frac{4}{3}$

10. a) $y = 2 - \frac{1}{3}x$ i $y = \frac{6-x}{3}$
 b) $y = 4(1 - \frac{x}{2})$
 i $y = -2(x + 1)$
 c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ i $y = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$

Uczeń:

- interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej i wskazuje wśród danych wzorów funkcji liniowych te, których wykresy są równoległe,
- sprawdza, czy punkt należy do wykresu funkcji liniowej,
- wyznacza wzór funkcji liniowej, której wykres spełnia podane warunki, np. jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez dany punkt,
- stosuje własności funkcji liniowej do obliczania pól wielokątów.

Uwaga. Odcięta punktu to jego pierwsza współrzędna, rzędna – to druga współrzędna.

Ćwiczenie 2

- a) $y = 3x + 6$
b) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

Multiteka

- Wykresy funkcji liniowych
- Proste równoległe i proste prostopadłe w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.2

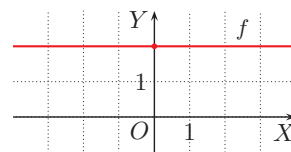
Generator
testów i sprawdzianów

5.2. Wykres funkcji liniowej (2)

Szczególnym przypadkiem funkcji liniowej jest funkcja stała.

Przykład 1

Funkcja $f(x) = 2$ dla dowolnego argumentu $x \in \mathbf{R}$ przyjmuje wartość równą 2. Jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX i przechodząca przez punkt $(0, 2)$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ax + b$, jeśli:

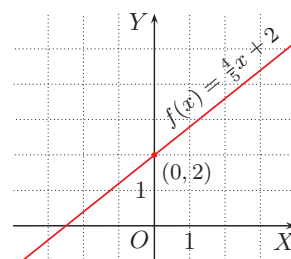
- a) $a = 0, b = 1$, b) $a = 0, b = -\frac{3}{2}$, c) $a = 0, b = 0$.

Współczynnik b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wskazuje punkt przecięcia prostej będącej wykresem funkcji z osią OY .

Przykład 2

Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{5}x + 2$ z osią OY .

Jeśli podstawimy $x = 0$ do wzoru funkcji, to otrzymamy rzędną punktu, w którym jej wykres przecina oś OY . Zatem $f(0) = \frac{4}{5} \cdot 0 + 2 = 2$, czyli wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 2)$.



Twierdzenie

Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.

Przykład 3

Wyznacz wzór funkcji, której wykres jest prostą równoległą do prostej o równaniu $y = \frac{3}{4}x - 6$ oraz przecina oś OY w punkcie $(0, 3)$.

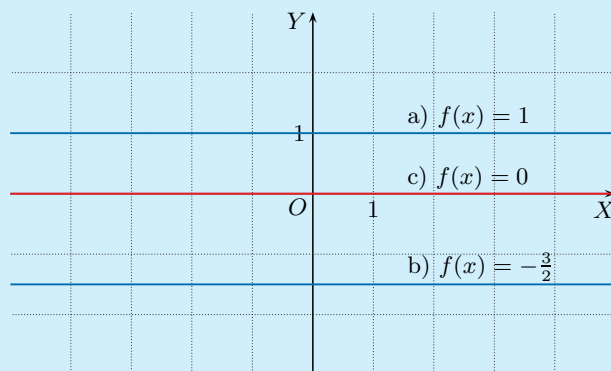
Szukany wzór funkcji ma postać $f(x) = ax + b$. Z warunków zadania: $a = \frac{3}{4}$, $b = 3$, zatem $f(x) = \frac{3}{4}x + 3$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przecinająca oś OY w punkcie P .

- a) $l: y = 3x - 4, P(0, 6)$ b) $l: y = -\frac{3}{4}x + 1, P(0, -\frac{3}{2})$

Ćwiczenie 1

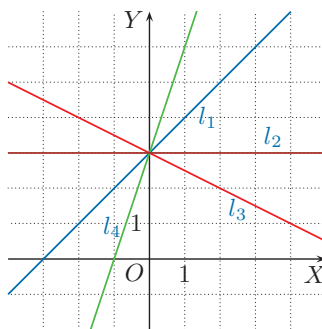


Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono proste przechodzące przez punkt $(0, 3)$. Są one wykresami funkcji liniowych:

$$f_1(x) = x + 3, \quad f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 3, \\ f_2(x) = 3, \quad f_4(x) = 3x + 3.$$

- a) Oblicz wartości tych funkcji dla $x = 1$.
b) Dla każdej z tych funkcji określ, która prosta jest jej wykresem.



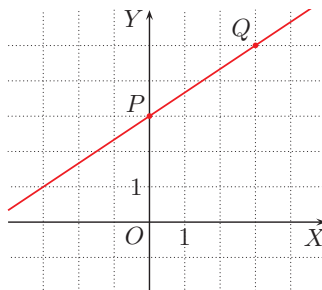
Czy wiesz, że...

Zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt nazywamy **pękiem prostych**, a punkt przecięcia tych prostych – **środkiem pęku**.

Przykład 4

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty $P(0, 3)$ i $Q(3, 5)$.

Funkcja liniowa dana jest wzorem $y = ax + b$. Jej wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 3)$, więc $b = 3$. Aby wyznaczyć współczynnik a , podstawiamy współrzędne punktu $Q(3, 5)$ do równania $y = ax + 3$ i otrzymujemy $5 = 3a + 3$, skąd $a = \frac{2}{3}$. Zatem szukany wzór funkcji: $y = \frac{2}{3}x + 3$.



Ćwiczenie 4

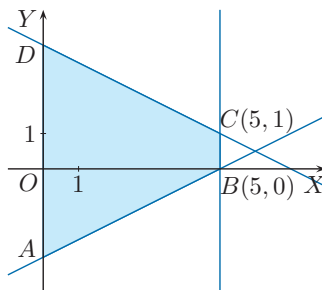
Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty P i Q . Czy punkt R należy do wykresu tej funkcji?

- a) $P(0, 5)$, $Q(4, 2)$, $R(8, -1)$ b) $P(0, -4)$, $Q(-3, -9)$, $R(6, 5)$

Ćwiczenie 5

a) Ramiona trapezu $ABCD$ zawierają się w prostych $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ i $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ (rysunek obok). Wyznacz współrzędne wierzchołków A i D , a następnie oblicz pole tego trapezu.

b) Proste $y = \frac{5}{3}x + 5$ i $y = -\frac{1}{3}x - 1$ przecinają się w punkcie $(-3, 0)$. Oblicz pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OY .



Ćwiczenie 5

- a) $A(0, -\frac{5}{2})$, $D(0, \frac{7}{2})$

Pole trapezu: $P = \frac{1}{2} \cdot (6 + 1) \cdot 5 = 17,5$

- b) Punkty przecięcia wykresów z osią OY : $A(0, 5)$ i $B(0, -1)$

Podstawa trójkąta: $|AB| = 6$

Pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$

Ćwiczenie 3

- a) $f_1(1) = 4$, $f_2(1) = 3$,
 $f_3(1) = 2\frac{1}{2}$, $f_4(1) = 6$

- b) f_1 – niebieski, f_2 – brązowy,
 f_3 – czerwony, f_4 – zielony

Ćwiczenie 4

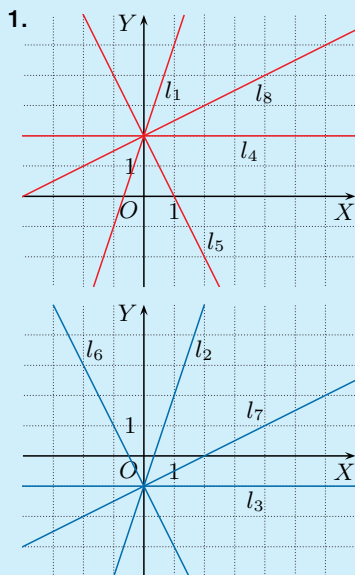
- a) Dla prostej PQ : $b = 5$.
 $2 = 4a + 5$, czyli $a = -\frac{3}{4}$.
 $y = -\frac{3}{4}x + 5$
 $-\frac{3}{4} \cdot 8 + 5 = -1$

Punkt R należy do wykresu funkcji.

- b) Dla prostej PQ : $b = -4$.
 $-9 = -3a - 4$, czyli $a = \frac{5}{3}$.
 $y = \frac{5}{3}x - 4$
 $\frac{5}{3} \cdot 6 - 4 = 6 \neq 5$

Punkt R nie należy do wykresu funkcji.

Odpowiedzi do zadań



2. a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$, Q nie należy
 b) $f(x) = 2x + 3$, Q nie należy
 c) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$, Q należy
3. a) $y = x + 4$
 b) $y = \frac{1}{2}x + 4$
 c) $y = -3x + 4$
 d) $y = -8x + 4$
4. a) $P = \frac{1}{2} \cdot (2 + 3) \cdot 6 = 15$
 b) $P = 6 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = 24$

6. a) $k_1: (0, 0)$, $k_2: (0, -4)$,
 $k_3: (0, 3)$, $k_4: (0, 5)$
 b) $k_1: (0, 0)$, $k_2: (0, -1)$,
 $k_3: (0, 8)$, $k_4: (0, \frac{1}{2})$

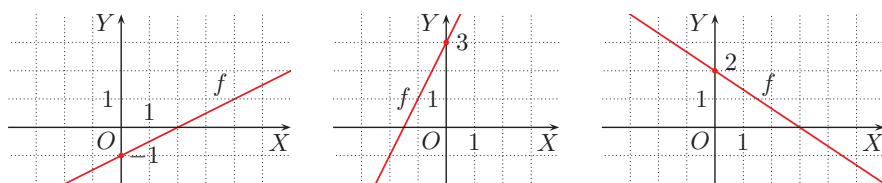
Zadania

1. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych te spośród prostych $l_1, \dots, l_8$, które przecinają oś OY w punkcie $(0, 2)$, a w drugim te, które przecinają oś OY w punkcie $(0, -1)$.

$$\begin{array}{llll} l_1: y = 3x + 2 & l_3: y = -1 & l_5: y = -2x + 2 & l_7: y = \frac{1}{2}x - 1 \\ l_2: y = 3x - 1 & l_4: y = 2 & l_6: y = -2x - 1 & l_8: y = \frac{1}{2}x + 2 \end{array}$$

2. Sprawdź, czy punkt Q należy do wykresu funkcji liniowej f , jeśli należy do niego punkt P .

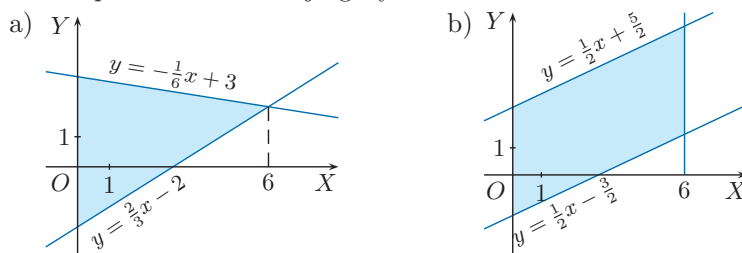
a) $P(8, 3)$, $Q(16, 9)$ b) $P(-6, -9)$, $Q(7, 19)$ c) $P(9, -4)$, $Q(8, -3\frac{1}{3})$



3. Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt P i przecina oś OY w punkcie $(0, 4)$. Wyznacz wzór tej funkcji i naskicuj jej wykres.

a) $P(2, 6)$ b) $P(-6, 1)$ c) $P(5, -11)$ d) $P(\frac{3}{4}, -2)$

4. Oblicz pole zacieniowanej figury.



Powtórzenie

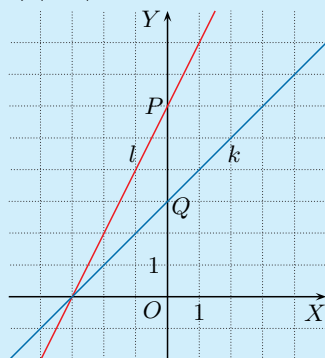
5. Prosta l przecina oś OY w punkcie P , a prosta k – w punkcie Q . Naskicuj te proste. Podaj długość odcinka PQ .

a) $l: y = 2x + 6$, $k: y = x + 3$ b) $l: y = -\frac{1}{4}x - 2$, $k: y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

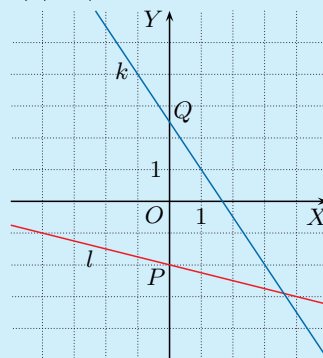
6. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych proste: k_1 , k_2 , k_3 i k_4 . Podaj punkty, w których te proste przecinają oś rzędnych.

a) $k_1: y = \frac{1}{3}x$, $k_2: y = \frac{1}{3}x - 4$, $k_3: y = \frac{1}{3}x + 3$, $k_4: y = \frac{1}{3}x + 5$
 b) $k_1: y = -2x$, $k_2: y = -2x - 1$, $k_3: y = -2x + 8$, $k_4: y = -2x + \frac{1}{2}$

5. a) $|PQ| = 3$



- b) $|PQ| = 4,5$

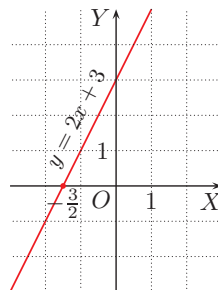


5.3. Własności funkcji liniowej

■ Miejsce zerowe funkcji liniowej

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = 2x + 3$. Jej miejsce zerowe jest równe $-\frac{3}{2}$. Można je wyznaczyć, rozwiązując równanie $2x + 3 = 0$.

Jeśli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $-\frac{b}{a}$.



D Ćwiczenie 1

Uzasadnij powyższe twierdzenie.

Ćwiczenie 2

Wyznacz miejsce zerowe funkcji:

- a) $y = -4x + 6$, b) $y = -3x - 4$, c) $y = \frac{1}{2}x + 3$, d) $y = \frac{7}{3}x - \frac{14}{9}$.

Ćwiczenie 3

Dla jakich wartości współczynników a, b funkcja $f(x) = ax + b$:

- a) nie ma miejsc zerowych, b) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych?

Przykład 1

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji $f(x) = \frac{9}{16}x + 3$ (rysunek obok).

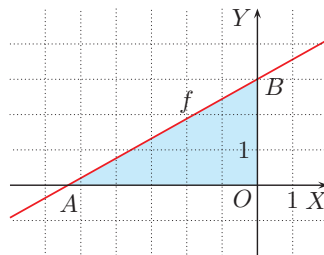
Wyznaczamy miejsce zerowe funkcji f :

$$\frac{9}{16}x + 3 = 0 \text{ dla } x = -\frac{16}{3}. \text{ Zatem } |OA| = \frac{16}{3}.$$

Punkt B ma współrzędne $(0, 3)$, stąd $|OB| = 3$.

Obliczamy pole trójkąta AOB :

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot 3 = 8$$



Ćwiczenie 4

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji f .

- a) $f(x) = 2x + 4$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 4$
b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ d) $f(x) = \frac{5}{3}x - 5$

Ćwiczenie 4

Punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych oraz pole trójkąta:

- a) $(0, 4), (-2, 0); P = 4$
b) $(0, 2), (6, 0); P = 6$
c) $(0, -4), (-8, 0); P = 16$
d) $(0, -5), (3, 0); P = 7,5$

Uczeń:

- wyznacza miejsce zerowe i określa monotoniczność funkcji liniowej danej wzorem,
- wyznacza współrzędne punktów, w których wykres funkcji liniowej przecina osie układu współrzędnych, oraz określa, w których ćwiartkach układu znajduje się wykres,
- określa monotoniczność funkcji liniowej w zależności od parametru,
- rozpoznaje wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalne.

Ćwiczenie 1

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ 0 &= ax + b \\ ax &= -b : a \neq 0 \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

- a) $x = \frac{3}{2}$
b) $x = -\frac{4}{3}$
c) $x = -6$
d) $x = \frac{2}{3}$

Ćwiczenie 3

- a) $a = 0$ i $b \neq 0$
b) $a = b = 0$

Multiteka

- Wykresy funkcji liniowych
- Monotoniczność funkcji liniowej
- Punkty przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.3

Generator
testów i sprawdzianów

■ Monotoniczność funkcji liniowej

Funkcja liniowa może być funkcją rosnącą, malejącą lub stałą.

Przypomnijmy, że funkcję f nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.

Jeśli $a > 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest **rosnąca**.

Dowód

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = ax + b$, gdzie $a > 0$.

Niech x_1, x_2 będą dowolnymi argumentami takimi, że $x_1 < x_2$.

Wówczas mamy:

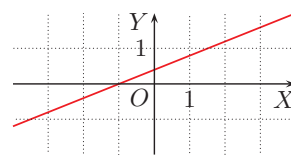
$$\begin{aligned}x_1 &< x_2 \quad / \cdot a \\ax_1 &< ax_2 \\ax_1 + b &< ax_2 + b\end{aligned}$$

Mnożymy obie strony nierówności przez liczbę $a > 0$, zatem nie zmieniamy jej zwrotu.

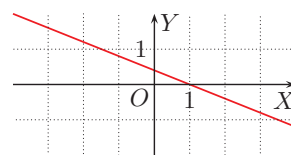
Oznacza to, że $f(x_1) < f(x_2)$. Zatem f jest funkcją rosnącą.

Funkcja f jest funkcją **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$.

Jeśli $a < 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest **malejąca**.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości rosną wraz ze wzrostem argumentów.



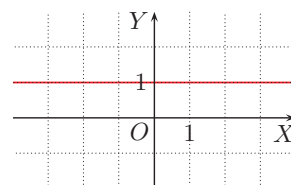
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości maleją wraz ze wzrostem argumentów.

D Ćwiczenie 5

Udowodnij powyższe twierdzenie.

Funkcja f jest funkcją **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

Jeśli $a = 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest funkcją **stałą**.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, która przyjmuje stałe tę samą wartość.

Jeśli funkcja liniowa jest funkcją stałą, to jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX .

Ćwiczenie 5

Niech x_1, x_2 będą dowolnymi argumentami takimi, że $x_1 < x_2$.

Wówczas:

$$\begin{aligned}x_1 &< x_2 \quad / \cdot a < 0 \\ax_1 &> ax_2 \\ax_1 + b &> ax_2 + b\end{aligned}$$

Oznacza to, że $f(x_1) > f(x_2)$, czyli f jest funkcją malejącą.

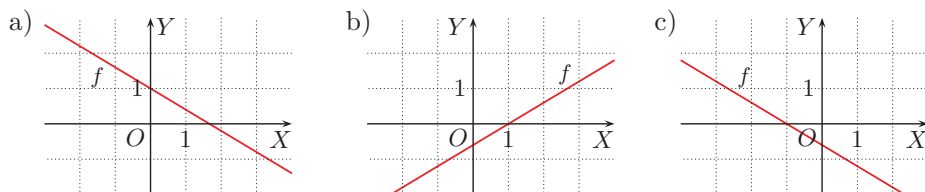
Ćwiczenie 6

Określ monotoniczność funkcji f .

- a) $f(x) = 5x - 12$ b) $f(x) = 8 - 3x$ c) $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x$ d) $f(x) = -3$

Ćwiczenie 7

Dany jest wykres funkcji $f(x) = ax + b$. Podaj znaki współczynników a i b .

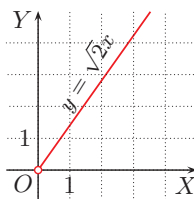


■ Proporcjonalność prosta

Przypomnijmy, że zależność między dwiema dodatnimi wielkościami x i y daną wzorem $y = ax$, gdzie $a > 0$ jest stałą, nazywamy **proporcjonalnością prostą**. Wielkości x i y nazywamy **wprost proporcjonalnymi**, a liczbę a – **współczynnikiem proporcjonalności**.

Przykład 2

Długość boku kwadratu x i długość jego przekątnej y są wielkościami wprost proporcjonalnymi: zachodzi równość $y = \sqrt{2}x$. Zależność tę przedstawiono na wykresie obok.



Ćwiczenie 8

Czy opisane wielkości są odwrotnie proporcjonalne, czy wprost proporcjonalne? Podaj wzór tej proporcjonalności.

- a) Długość boku kwadratu i jego obwód.
 b) Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o ustalonym polu P .
 c) Obwód i promień okręgu.
 d) Długości przekątnych rombu o ustalonym polu P .

Ćwiczenie 9

Wielkości x i y są wprost proporcjonalne. Podaj wzór tej proporcjonalności, a następnie przerysuj do zeszytu i uzupełnij poniższą tabelę. Naskicuj wykres tej proporcjonalności.

a)

x	$\frac{3}{4}$	1	2
y	$2\frac{1}{4}$	3	6

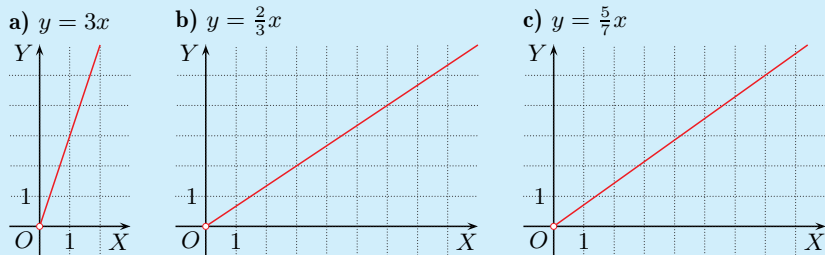
b)

x	1	1,8	3
y	$\frac{2}{3}$	1,2	2

c)

x	$2\frac{1}{3}$	7	14
y	$1\frac{2}{3}$	5	10

Ćwiczenie 9



Ćwiczenie 6

- a) rosnąca
 b) malejąca
 c) rosnąca
 d) stała

Ćwiczenie 7

- a) $a < 0$ i $b > 0$
 b) $a > 0$ i $b < 0$
 c) $a < 0$ i $b < 0$

Ćwiczenie 8

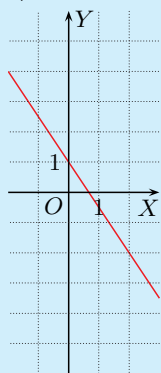
- a) wprost proporcjonalne,
 $a = \frac{1}{4}Ob$
 b) odwrotnie proporcjonalne,
 $a = \frac{2P}{b}$
 c) wprost proporcjonalne,
 $Ob = 2\pi r$
 d) odwrotnie proporcjonalne,
 $d_1 = \frac{2P}{d_2}$

Zadania

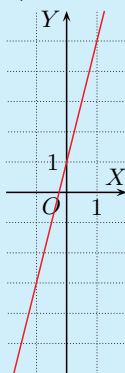
Odpowiedzi do zadań

2. a) malejąca
b), c) rosnąca
3. a) rosnąca dla $m < 5$,
stała dla $m = 5$,
malejąca dla $m > 5$
b) rosnąca dla $m > -\frac{1}{5}$,
stała dla $m = -\frac{1}{5}$,
malejąca dla $m < -\frac{1}{5}$
c) rosnąca dla
 $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
stała dla $m \in \{-1, 1\}$,
malejąca dla $m \in (-1; 1)$
4. a) malejąca b) rosnąca
c) malejąca
5. a) $y = \frac{2}{3}x + 4$
b) $y = -\frac{1}{2}x - 2$
6. a) $y = \frac{2}{5}x - 2$, $y = -\frac{3}{5}x + 3$,
 $y = \frac{3}{2}x + 3$, $y = -x - 2$
b) $y = -\frac{3}{2}x - 72$, $y = 2x - 72$,
 $y = -4x + 144$, $y = 3x + 144$
7. a) $y = -x + 3$
b) $y = -x - 4$ lub $y = x - 4$
8. a) $(-2, 0)$, $(0, 6)$, rosnąca
b) $(-\frac{3}{2}, 0)$, $(0, -3)$, malejąca
c) $(-6, 0)$, $(0, 3)$, rosnąca
d) $(-3, 0)$, $(0, -2)$, malejąca
9. Punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych oraz pole trójkąta:
a) $(2, 0)$, $(0, 4)$; $P = 4$
b) $(2, 0)$, $(0, -6)$; $P = 6$
c) $(-4, 0)$, $(0, -1)$; $P = 2$
d) $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 3)$; $P = \frac{3}{4}$

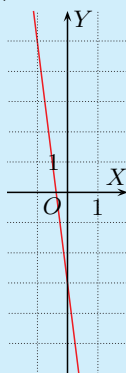
1. a) I, II, IV



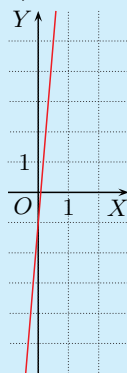
b) I, II, III



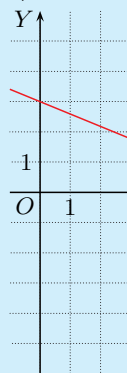
c) II, III, IV



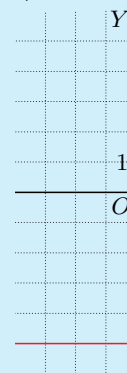
d) I, III, IV



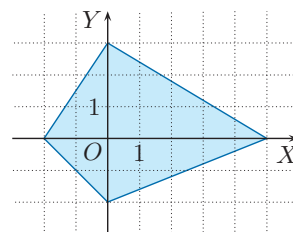
e) I, II, IV



f) III, IV



1. Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi prosta:
a) $y = -\frac{3}{2}x + 1$, c) $y = -8x - 3$, e) $y = (1 - \sqrt{2})x + 3$,
b) $y = 4x + 1$, d) $y = 12x - 1$, f) $y = -5$?
2. Określ monotoniczność funkcji $f(x) = mx - 4$, gdy:
a) $m = \sqrt{3} - 2$, b) $m = 5 - 2\sqrt{5}$, c) $m = 3 - \sqrt[3]{-27}$.
3. Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .
a) $f(x) = (5 - m)x$ b) $f(x) = (1 + 5m)x$ c) $f(x) = (|m| - 1)x$
4. Określ monotoniczność funkcji, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkty:
a) $(-37, -9)$ i $(-9, -37)$, b) $(3\sqrt{2}, 7)$ i $(2\sqrt{3}, 5)$, c) $(\frac{2}{3}, -8)$ i $(\frac{3}{5}, -7)$.
5. Wyznacz wzór funkcji liniowej, jeśli do jej wykresu należy punkt:
a) $(0, 4)$ i przyjmuje ona wartości ujemne tylko dla $x < -6$,
b) $(0, -2)$ i przyjmuje ona wartości nieujemne tylko dla $x \leq -4$.
6. Wyznacz równania prostych, w których zawierają się:
a) boki przedstawionego obok czworokąta,
b) boki czworokąta o wierzchołkach:
 $A(-48, 0)$, $B(0, -72)$, $C(36, 0)$, $D(0, 144)$.
7. Wyznacz wzór funkcji liniowej, jeśli trójkąt ograniczony jej wykresem i osiami układu współrzędnych jest równoramienny oraz:
a) funkcja ta przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x > 3$,
b) do wykresu tej funkcji należy punkt $(0, -4)$.



Powtórzenie

8. Wyznacz punkty, w których prosta przecina osie układu współrzędnych. Naskicuj tę prostą i określ monotoniczność funkcji, której jest wykresem.
a) $y = 3x + 6$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = \frac{1}{2}x + 3$ d) $y = -\frac{2}{3}x - 2$
9. Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i prostą:
a) $y = -2x + 4$, b) $y = 3x - 6$, c) $y = -\frac{1}{4}x - 1$, d) $y = 6x + 3$.

5.4. Równanie prostej na płaszczyźnie

Jeśli znamy współrzędne dwóch punktów należących do prostej, możemy wyznaczyć jej równanie. Dla prostej będącej wykresem funkcji liniowej wyznaczamy równanie postaci $y = ax + b$.

Definicja

Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

Przykład 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(-2, 1)$ i $D(4, 3)$.

Aby wyznaczyć współczynniki a, b równania $y = ax + b$, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot (-2) + b \\ 3 = a \cdot 4 + b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Równania układu otrzymujemy,} \\ \text{podstawiając współrzędne punktów} \\ \text{C i D do równania } y = ax + b. \end{array}$$

Powyższy układ spełniony jest przez parę liczb $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{5}{3}$.
Zatem równanie prostej ma postać $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Ćwiczenie 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D .

- a) $C(-1, -5)$, $D(3, 3)$ b) $C(-2, 4)$, $D(8, -1)$ c) $C(-3, -3)$, $D(6, 3)$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy punkty A, B, C są współliniowe.

- a) $A(0, 1)$, $B(6, 2)$, $C(12, 3)$ c) $A(-2, 6)$, $B(2, -2)$, $C(5, -7)$
b) $A(8, 3)$, $B(6, 4)$, $C(-2, 8)$ d) $A(-4, 5)$, $B(7, 5)$, $C(7, 2\sqrt{6})$

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(3, 2)$ i $D(3, -1)$.

Do szukanej prostej należą wszystkie punkty o pierwszej współrzędnej równej 3. Jej równanie ma postać $x = 3$.

Zwróć uwagę na to, że prosta równoległa do osi OY nie jest wykresem funkcji (dlaczego?), a jej równania nie można zapisać w postaci kierunkowej.

Ćwiczenie 2

- a) Prosta AB : $y = \frac{1}{6}x + 1$

Podstawiamy współrzędne punktu C do równania prostej AB :

$\frac{1}{6} \cdot 12 + 1 = 3$, czyli punkty A, B i C są współliniowe.

- b) Prosta AB : $y = -\frac{1}{2}x + 7$

$-\frac{1}{2} \cdot (-2) + 7 = 8$, czyli punkty A, B i C są współliniowe.

- c) Prosta AB : $y = -2x + 2$

$-2 \cdot 5 + 2 = -8 \neq -7$, czyli punkty A, B i C nie są współliniowe.

- d) Prosta AB : $y = 5$

$5 \neq 2\sqrt{6}$, czyli punkty A, B i C nie są współliniowe.

Uczeń:

- podaje równanie kierunkowe i ogólne prostej,
- zamienia równanie ogólne prostej, która nie jest równoległa do osi OY , na równanie w postaci kierunkowej (i odwrotnie),
- wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty,
- rysuje prostą opisaną równaniem ogólnym.

Ćwiczenie 1

- a) $y = 2x - 3$
b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$
c) $y = \frac{2}{3}x - 1$

Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na przykład 2 i powrócić do definicji funkcji, aby ułatwić im odpowiedź na pytanie:

„Dlaczego prosta równoległa do osi OY nie jest wykresem funkcji?”.

Multiteka

- Wykresy funkcji liniowych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.4

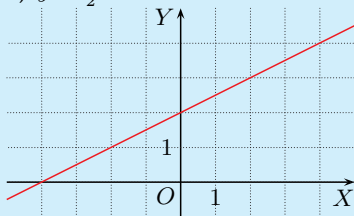
Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

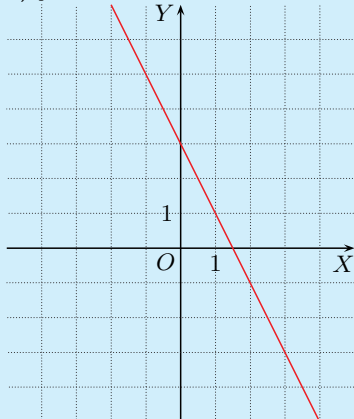
- a) $x = -3$, nie jest
- b) $y = -3$, jest
- c) $x = 8$, nie jest

Ćwiczenie 4

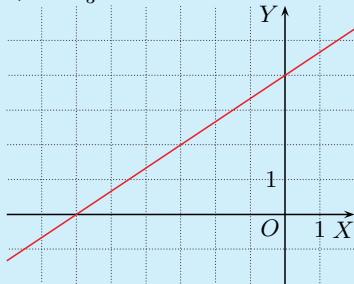
a) $y = \frac{1}{2}x + 2$



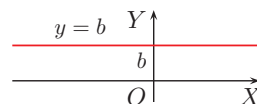
b) $y = -2x + 3$



c) $y = \frac{2}{3}x + 4$



Uwaga. Równanie prostej $y = b$ (równoległej do osi OX) jest równaniem w postaci kierunkowej. Dla tej prostej współczynnik $a = 0$.



Ćwiczenie 3

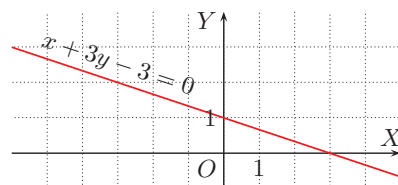
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D . Czy ta prosta jest wykresem funkcji liniowej?

- a) $C(-3, 4)$, $D(-3, 6)$ b) $C(-5, -3)$, $D(7, -3)$ c) $C(8, -2)$, $D(8, 6)$

Przykład 3

Naszkicuj prostą daną za pomocą równania $x + 3y - 3 = 0$.

Równanie przekształcamy do postaci kierunkowej $y = -\frac{1}{3}x + 1$ i następnie szkicujemy prostą.



Definicja

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

Równanie każdej prostej na płaszczyźnie (również prostej równoległej do osi OY) można zapisać w postaci $Ax + By + C = 0$.

Ćwiczenie 4

Naszkicuj prostą daną równaniem ogólnym.

- a) $-x + 2y - 4 = 0$ b) $6x + 3y - 9 = 0$ c) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + 2 = 0$

Jedna prosta może mieć wiele równań ogólnych. Na przykład każde z poniższych równań opisuje tę samą prostą.

- I. $2x + y - 4 = 0$ II. $4x + 2y - 8 = 0$ III. $x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$

Zauważ, że po przekształceniu do postaci kierunkowej w każdym z powyższych przykładów otrzymujemy równanie $y = -2x + 4$.

Ćwiczenie 5

Które z poniższych równań opisują tę samą prostą?

- $l: -\frac{3}{4}x + y - 1 = 0$ $n: 9x - 12y + 12 = 0$ $p: 3x - 4y + 4 = 0$
 $m: -3x + 4y + 4 = 0$ $o: 6x - 8y + 12 = 0$ $r: -\frac{3}{2}x + 2y - 2 = 0$

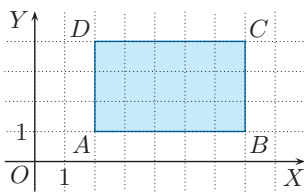
Ćwiczenie 5

Równania: l, n, p, r opisują prostą $y = \frac{3}{4}x + 1$.

Zadania

- Sprawdź, czy punkt C należy do prostej AB .
 - $A(1, 3)$, $B(7, 4)$, $C(13, 5)$
 - $A(9, 0)$, $B(4, 5)$, $C(0, 9)$
 - $A(-5, 4)$, $B(-1, -4)$, $C(2, 9)$
 - $A(3, 0)$, $B(3, 7)$, $C(3, \sqrt{6})$
- Równanie prostej przedstawionej na rysunku zapisz w postaci kierunkowej oraz w postaci ogólnej. Czy punkt $A(-10, -5)$ lub punkt $B(-3, \frac{8}{3})$ należy do tej prostej?
 -
 -
 -
- Naszkicuj prostą o podanym równaniu. Wyznacz współrzędne punktów, w których przecina ona osie układu współrzędnych.
 - $2x - y + 2 = 0$
 - $10x + 5y - 5 = 0$
 - $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$
 - $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - 2\frac{1}{4} = 0$
 - $-4(y - \frac{1}{4}x) = 16$
 - $2(1 - \frac{1}{3}y) - 4x = 0$
- Zapisz w postaci ogólnej równania prostych, w których są zawarte boki równoległoboku $ABCD$.
 -
 -
 -

Powtórzenie

- Zapisz w postaci ogólnej równanie prostej przechodzącej przez punkt $(4, 3)$ i przecinającej oś OY w punkcie:
 - $(0, -5)$
 - $(0, 6)$
 - $(0, 3)$
- Dany jest prostokąt $ABCD$ (rysunek obok). Wyznacz równania prostych, w których zawierają się boki oraz przekątne tego prostokąta.
 

Odpowiedzi do zadań

- prosta $AB: y = \frac{1}{6}x + 2\frac{5}{6}$, C należy
 - prosta $AB: y = -x + 9$, C należy
 - prosta $AB: y = -2x - 6$, C nie należy
 - prosta $AB: x = 3$, C należy
- $y = \frac{1}{3}x - 1$, $x - 3y - 3 = 0$, nie należą
 - $y = -1\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$, $4x + 3y + 8 = 0$, nie należą
 - $y = \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{2}$, $3x - 4y + 10 = 0$, A należy, B nie należy
- $(0, 2)$, $(-1, 0)$
 - $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$
 - $(0, 4)$, $(-\frac{4}{3}, 0)$
 - $(0, -3)$, $(\frac{9}{2}, 0)$
 - $(0, -4)$, $(16, 0)$
 - $(0, 3)$, $(\frac{1}{2}, 0)$
- $AB: y + 1 = 0$,
 $DC: y - 2 = 0$,
 $AD: 3x - y + 5 = 0$,
 $BC: 3x - y - 10 = 0$
 - $AB: x + 2y + 2 = 0$,
 $DC: x + 2y - 4 = 0$,
 $AD: x + 2 = 0$, $BC: x - 2 = 0$
 - $AB: x - 3y - 2 = 0$,
 $DC: x - 3y + 6 = 0$,
 $AD: x + y + 2 = 0$,
 $BC: x + y - 6 = 0$
- $2x - y - 5 = 0$
 - $3x + 4y - 24 = 0$
 - $y - 3 = 0$
- $AD: x = 2$, $BC: x = 7$,
 $AB: y = 1$, $DC: y = 4$,
 $AC: y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$,
 $BD: y = -\frac{3}{5}x + 5\frac{1}{5}$

Uczeń:

- oblicza współczynnik kierunkowy prostej, mając dane współrzędne dwóch punktów należących do tej prostej,
- szkicuje prostą, wykorzystując interpretację współczynnika kierunkowego,
- odczytuje wartość współczynnika kierunkowego, mając dany wykres,
- wyprowadza wzór na współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez dwa dane punkty.

Ćwiczenie 1

- a) $a = \frac{12-7}{9-3} = \frac{5}{6}$
b) $a = \frac{-5-5}{-7-3} = 1$
c) $a = \frac{8+2}{6-12} = -\frac{5}{3}$

Ćwiczenie 2

- $a_{PQ} = \frac{3}{2}$
a) $a_{RS} = \frac{3}{2}$, jest
b) $a_{RS} = 1$, nie jest
c) $a_{RS} = \frac{3}{2}$, jest

Multiteka

- Wykresy funkcji liniowych
- Wyznaczanie współczynnika kierunkowego prostej
- Proste równoległe i proste prostopadłe w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.5

Generator
testów i sprawdzianów

5.5. Współczynnik kierunkowy prostej

Twierdzenie

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$, dany jest wzorem:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dowód

Podstawiamy współrzędne punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2) do równania prostej i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

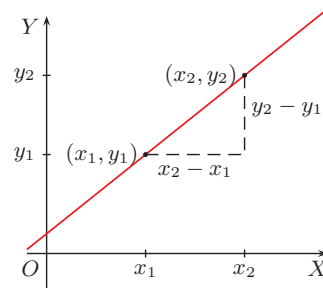
Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1$$

czyli $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$, skąd:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Uwaga:
 $x_1 \neq x_2$.



Przykład 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A(-2, 3)$ i $B(4, 6)$.

Mamy $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ oraz $(x_2, y_2) = (4, 6)$.

Zatem współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty A i B jest równy:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{4 - (-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty A i B .

- a) $A(3, 7)$, $B(9, 12)$ b) $A(3, 5)$, $B(-7, -5)$ c) $A(12, -2)$, $B(6, 8)$

Ćwiczenie 2

Czy prosta przechodząca przez punkty $P(4, 8)$ i $Q(-2, -1)$ jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty R i S ?

- a) $R(0, 6)$, $S(-4, 0)$ b) $R(-2, 4)$, $S(1, 7)$ c) $R(5, -\frac{5}{2})$, $S(8, 2)$

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-3, -5)$, $B(6, -2)$, $C(4, 2)$ oraz $D(-5, -1)$ jest równoległobokiem.

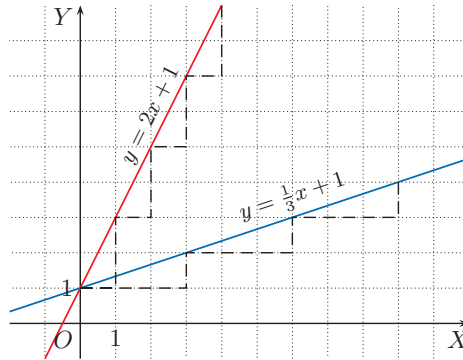
Ćwiczenie 3

$$a_{AB} = \frac{1}{3} = a_{CD}, a_{BC} = -2 = a_{DA}$$

Proste AB , CD oraz BC , DA są parami równoległe, zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

■ Interpretacja współczynnika kierunkowego

Współczynnik kierunkowy prostej pozwala określić, jak bardzo jest ona „stroma”. Na przykład dla prostej $y = 2x + 1$ wzrostowi argumentu o jedną jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o dwie jednostki, a dla prostej $y = \frac{1}{3}x + 1$ wzrostowi argumentu o trzy jednostki odpowiada wzrost wartości funkcji o jedną jednostkę.



Ćwiczenie 4

Wykonaj rysunek przedstawiający interpretację współczynnika kierunkowego podanej prostej.

- a) $y = 3x + 2$ b) $y = \frac{1}{2}x + 2$ c) $y = -2x + 2$ d) $y = -\frac{1}{3}x + 2$

Ćwiczenie 5

Wykonaj rysunek przedstawiający interpretację współczynnika kierunkowego podanej prostej.

- a) $y = \frac{2}{5}x - 3$ b) $y = \frac{4}{3}x - 3$ c) $y = -\frac{4}{3}x - 3$ d) $y = -\frac{2}{5}x - 3$

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $P(3, -7)$ i $Q(-2, 3)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$:

$$a = \frac{3 - (-7)}{-2 - 3} = \frac{10}{-5} = -2$$

Następnie do równania $y = -2x + b$ podstawiamy współrzędne jednego z punktów: P lub Q .

Dla punktu $P(3, -7)$ otrzymujemy:

$$-7 = -2 \cdot 3 + b, \text{ stąd } b = -1.$$

Równanie prostej ma zatem postać $y = -2x - 1$.

Ćwiczenie 6

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q .

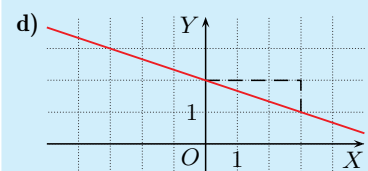
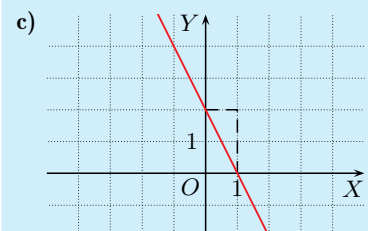
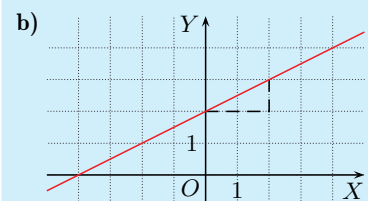
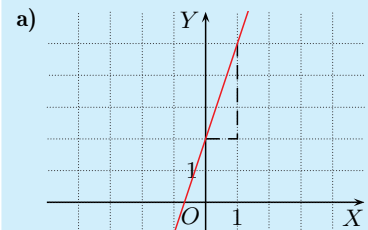
- a) $P(4, 5)$, $Q(-4, 9)$ b) $P(4, -13)$, $Q(2, -7)$ c) $P(3, 3)$, $Q(1, \frac{7}{3})$

Komentarz

Warto uświadomić uczniom, że wykres funkcji liniowej łatwiej jest narysować, kiedy rozumie się, co oznacza współczynnik kierunkowy.

Wystarczy wtedy znać współrzędne jednego punktu należącego do wykresu (np. punktu przecięcia z osią OY).

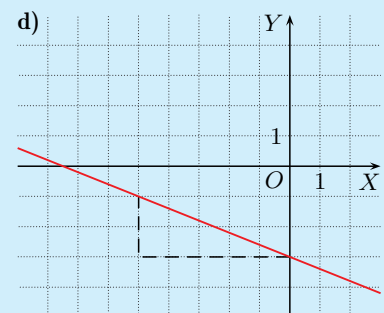
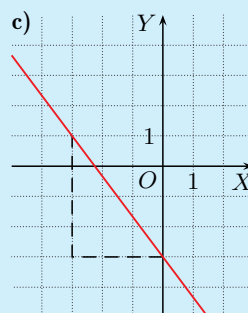
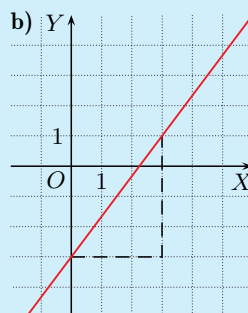
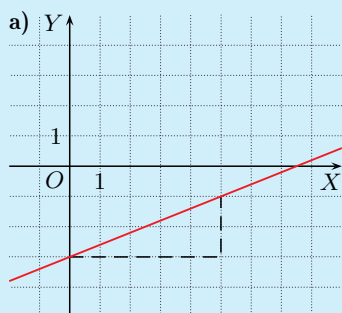
Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 6

- a) $y = -\frac{1}{2}x + 7$
b) $y = -3x - 1$
c) $y = \frac{1}{3}x + 2$

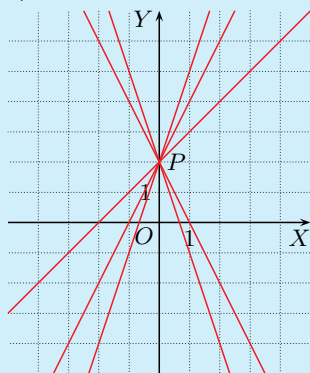
Ćwiczenie 5



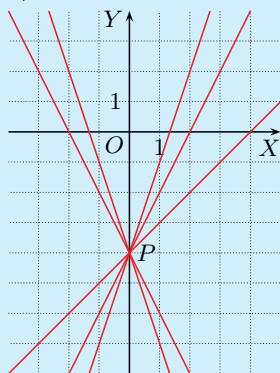
Odpowiedzi do zadań

- Współczynniki kierunkowe prostych: $AB: -\frac{1}{3}$, $BC: 3$, $AC: \frac{1}{2}$
- Współczynniki kierunkowe prostych: $AB: \frac{1}{2}$, $BC: -1$, $CD: -\frac{1}{5}$, $AD: -6$
- a) $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$
b) $y = -2x + 3$
c) $y = -12x + 5$
d) $y = 2x - 3\frac{2}{3}$
e) $y = -6$
f) $y = \sqrt{3}x + 1$
- a) $AB: y = \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}$,
 $AD: y = 2x + 6$,
 $BC: y = 2x - 6$,
 $CD: y = \frac{2}{7}x + \frac{18}{7}$
 $AB \parallel CD$ oraz $AD \parallel BC$,
zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.
b) $AB: y = -\frac{2}{7}x - 1\frac{2}{7}$,
 $AD: y = -\frac{5}{3}x - 2\frac{2}{3}$,
 $BC: y = -\frac{5}{3}x + 7$,
 $CD: y = -\frac{2}{7}x + 2\frac{6}{7}$
 $AB \parallel CD$ oraz $AD \parallel BC$,
zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.
- a) $PQ \parallel RS$: $\frac{2}{3}$, QR : $-\frac{10}{3}$,
 PS : $-\frac{4}{3}$
 $PQ \parallel RS$, zatem czworokąt $PQRS$ jest trapezem.
b) PQ : $-\frac{7}{2}$, RS : $\frac{5}{3}$,
 QR i PS : $-\frac{2}{5}$
 $QR \parallel PS$, zatem czworokąt $PQRS$ jest trapezem.
- a) $a_{AB} = 2$, $a_{AC} = -2$,
 $a_{BC} = \frac{2}{5}$
największy: a_{AB} ,
najmniejszy: a_{AC}
b) $a_{AB} = \frac{1}{3}$, $a_{AC} = \frac{1}{2}$,
 $a_{BC} = 1$
największy: a_{BC} ,
najmniejszy: a_{AB}

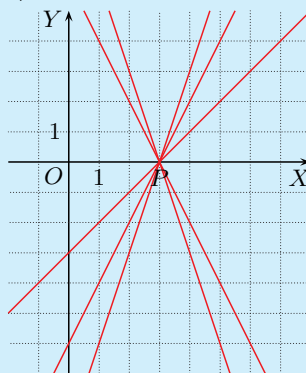
6. a)



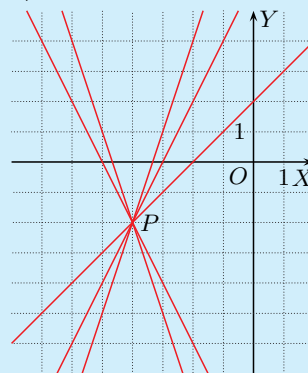
b)



c)

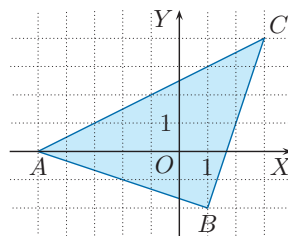


d)



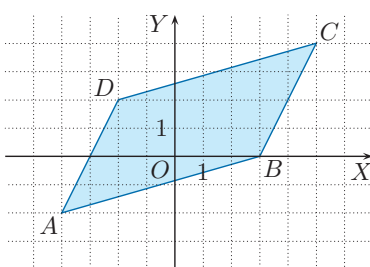
Zadania

- Odczytaj z rysunku współrzędne wierzchołków trójkąta ABC . Podaj współczynniki kierunkowe prostych zawierających jego boki.
- Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których są zawarte boki czworokąta $ABCD$, gdzie: $A(-4, -2)$, $B(2, 1)$, $C(0, 3)$, $D(-5, 4)$.
- Oblicz współczynnik kierunkowy i wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q .
a) $P(3, 4)$, $Q(7, 6)$ c) $P(\frac{1}{3}, 1)$, $Q(\frac{1}{2}, -1)$ e) $P(-2, -6)$, $Q(8, -6)$
b) $P(-2, 7)$, $Q(2, -1)$ d) $P(3, \frac{7}{3})$, $Q(2, \frac{1}{3})$ f) $P(\sqrt{3}, 4)$, $Q(3\sqrt{3}, 10)$

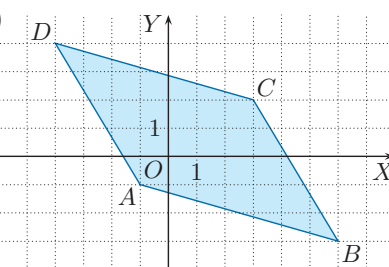


- D** 4. Oblicz współczynniki kierunkowe i wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta $ABCD$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest równoległobokiem.

a)



b)



- D** 5. Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których zawierają się boki czworokąta $PQRS$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest trapezem.
a) $P(0, -5)$, $Q(9, 1)$, $R(6, 11)$, $S(-6, 3)$
b) $P(-8, 5)$, $Q(-6, -2)$, $R(4, -6)$, $S(7, -1)$

Powtórzenie

- Naszkicuj proste o współczynnikach kierunkowych: 1, 2, 3, -2 i -3, przecinające się w punkcie P .
a) $P(0, 2)$ b) $P(0, -4)$ c) $P(3, 0)$ d) $P(-4, -2)$
- Podaj, który ze współczynników kierunkowych prostych zawierających boki trójkąta ABC jest największy, a który – najmniejszy.
a) $A(0, -2)$, $B(3, 4)$, $C(-2, 2)$ b) $A(6, 3)$, $B(0, 1)$, $C(-2, -1)$

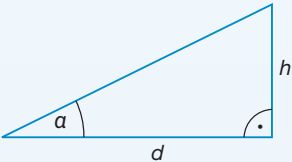
Nachylenie trasy

Współczynnik kierunkowy prostej mówi nam o jej stromości, czyli o jej nachyleniu do poziomu.

Nachylenie trasy

Nachylenie trasy często podaje się w procentach. Wyraża się je wzorem:

$$n = \frac{h}{d} \cdot 100\%$$



Nachylenie równe 100% odpowiada kątowi 45°, a nachylenie 10% – kątowi około 6°.

Kąt α	5°	10°	15°	20°	30°	45°
Nachylenie	ok. 9%	ok. 18%	ok. 27%	ok. 36%	ok. 58%	100%

Skocznia narciarska

Największa skocznia narciarska na świecie znajduje się w Vikersund w Norwegii. Ma ponad pół kilometra długości: od najwyższej belki startowej do końca odjazdu jest około 570 metrów. Maksymalne nachylenie zeskoku to 38°.

- 1 Wyszukaj informacje dotyczące nachylenia poszczególnych części skoczni narciarskiej: rozbiegu, progu, grzbietu skoczni i zeskoku.

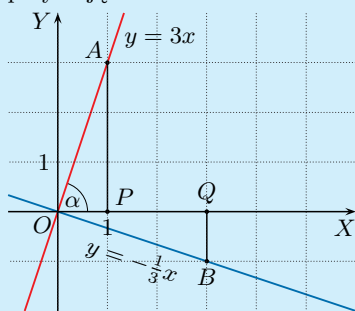


Uczeń:

- podaje warunek prostopadłości prostych o danych równaniach kierunkowych,
- wyznacza równanie prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt,
- uzasadnia warunek prostopadłości prostych o danych równaniach kierunkowych,
- rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań.

Ćwiczenie 1

a) Punkt $A(1, 3)$ należy do prostej $y = 3x$, a punkt $B(3, -1)$ do prostej $y = -\frac{1}{3}x$. Niech $P(1, 0)$ i $Q(3, 0)$. Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne tej samej długości, są więc przystające.



Przyjmijmy, że $\sphericalangle AOP = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO :

$$\begin{aligned}\sphericalangle OBQ &= \alpha \\ \sphericalangle BOQ &= 90^\circ - \alpha\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sphericalangle AOB &= \sphericalangle AOP + \sphericalangle BOQ = \\ &= \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ\end{aligned}$$

Zatem proste $y = 3x$ i $y = -\frac{1}{3}x$ są prostopadłe.

5.6. Warunek prostopadłości prostych

Przykład 1

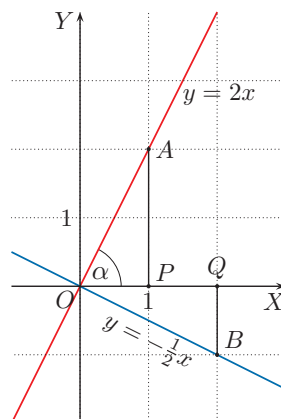
Wykaż, że proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.

Punkt $A(1, 2)$ należy do prostej $y = 2x$, a punkt $B(2, -1)$ do prostej $y = -\frac{1}{2}x$ (rysunek obok). Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne tej samej długości, są więc przystające.

Przyjmijmy, że $\sphericalangle AOP = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO : $\sphericalangle OBQ = \alpha$ oraz $\sphericalangle BOQ = 90^\circ - \alpha$. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sphericalangle AOB &= \sphericalangle AOP + \sphericalangle BOQ = \\ &= \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ\end{aligned}$$

Zatem proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.



D Ćwiczenie 1

Udowodnij, stosując metodę pokazaną w przykładzie, że proste są prostopadłe.

a) $y = 3x$ i $y = -\frac{1}{3}x$ b) $y = \frac{3}{4}x$ i $y = -\frac{4}{3}x$ c) $y = \sqrt{2}x$ i $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$

Twierdzenie

Proste $y = a_1x + b_1$ ($a_1 \neq 0$) i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2 = -\frac{1}{a_1}$ (czyli $a_1 \cdot a_2 = -1$).

Przykład 2

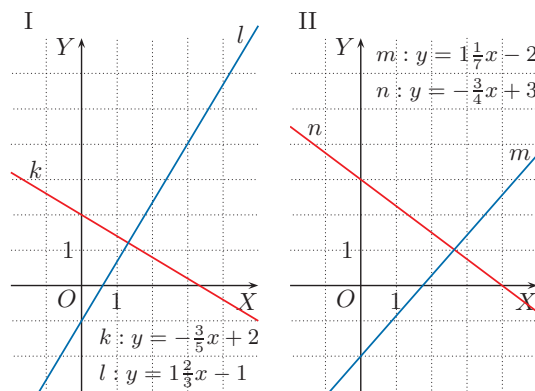
Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunkach I i II są prostopadłe.

I. Współczynniki kierunkowe prostych k i l są odpowiednio równe: $a_1 = -\frac{3}{5}$ i $a_2 = 1\frac{2}{3}$.

$a_1 \cdot a_2 = -1$, więc proste k i l są prostopadłe.

II. Współczynniki kierunkowe prostych m i n są odpowiednio równe: $a_1 = 1\frac{1}{7}$ i $a_2 = -\frac{3}{4}$.

$a_1 \cdot a_2 \neq -1$, więc proste m i n nie są prostopadłe.



b) Punkt $A(4, 3)$ należy do prostej $y = \frac{3}{4}x$, a punkt $B(3, -4)$ do prostej $y = -\frac{4}{3}x$. Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne takiej samej długości, są więc przystające.

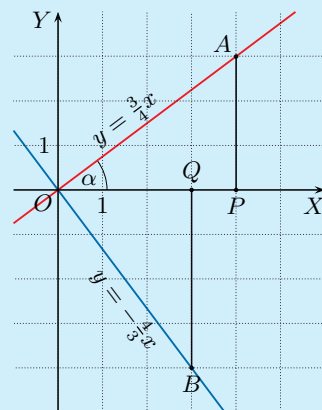
Przyjmijmy, że $\sphericalangle AOP = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO :

$$\sphericalangle OBQ = \alpha \text{ oraz } \sphericalangle BOQ = 90^\circ - \alpha$$

Stąd otrzymujemy:

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOP + \sphericalangle BOQ = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$$

Zatem proste $y = \frac{3}{4}x$ i $y = -\frac{4}{3}x$ są prostopadłe.



Multiteka

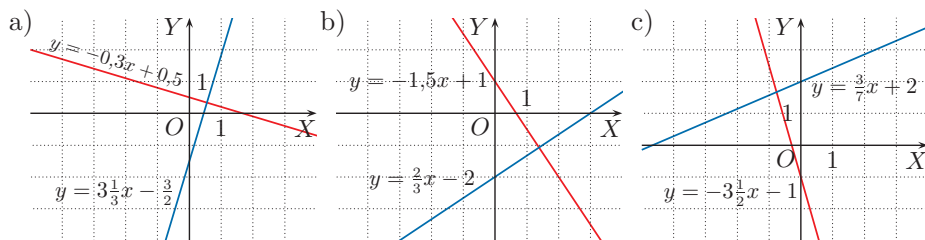
- Proste równoległe i proste prostopadłe w układzie współrzędnych

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.6

Generator
testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunku są prostopadłe.



Przykład 3

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej k , jeśli jest ona prostopadła do prostej $y = \frac{3}{8}x - 4$.

Oznaczmy przez a_1 współczynnik kierunkowy prostej k . Wówczas:

$$a_1 = \frac{-1}{\frac{3}{8}} = -\frac{8}{3}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do podanej prostej.

- a) $y = \frac{1}{5}x + 4$ b) $y = 9x$ c) $y = -2\frac{1}{3}x - 3$ d) $y = \frac{\sqrt{2}}{6}x - 1$

Ćwiczenie 4

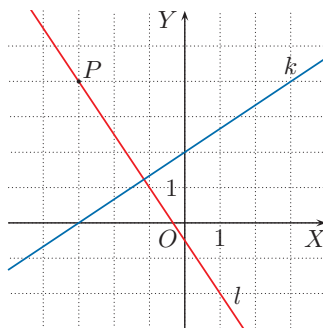
Uzasadnij, że jeśli proste $y = a_1x$ i $y = a_2x$ są prostopadłe, to dla dowolnych współczynników b_1, b_2 prostopadłe są również proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$.

Przykład 4

Prosta k ma równanie $y = \frac{2}{3}x + 2$. Wyznacz równanie prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P(-3, 4)$.

Równanie prostej l ma postać $y = -\frac{3}{2}x + b$ (ponieważ $l \perp k$). Podstawiamy do równania współrzędne punktu $P(-3, 4)$ i otrzymujemy $4 = -\frac{3}{2} \cdot (-3) + b$, stąd $b = -\frac{1}{2}$.

Prosta l ma zatem równanie $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do podanej prostej i przechodzącej przez punkt P .

- a) $y = -3x + 2$, $P(0, -1)$ b) $y = -0,1x$, $P(1, 9)$ c) $y = \frac{3}{7}x + 9$, $P(3, 2)$

Ćwiczenie 1

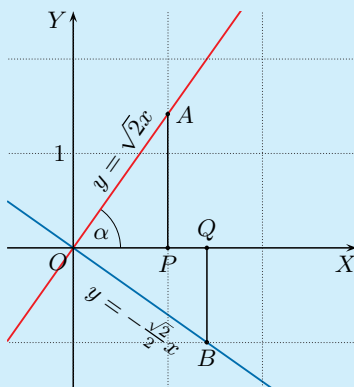
c) Punkt $A(1, \sqrt{2})$ należy do prostej $y = \sqrt{2}x$, a punkt $B(\sqrt{2}, -1)$ do prostej $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$. Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne takiej samej długości, są więc przystające. Przyjmijmy, że $\angle AOP = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO :

$$\angle OBQ = \alpha \text{ oraz } \angle BOQ = 90^\circ - \alpha$$

Stąd otrzymujemy:

$$\angle AOB = \angle AOP + \angle BOQ = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$$

Zatem proste $y = \sqrt{2}x$ i $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ są prostopadłe.



Ćwiczenie 2

- a) $a_1 = -\frac{3}{10}$, $a_2 = \frac{10}{3}$,
 $a_1 \cdot a_2 = -\frac{3}{10} \cdot \frac{10}{3} = -1$ – proste są prostopadłe
b) $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$,
 $a_1 \cdot a_2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$ – proste są prostopadłe
c) $a_1 = \frac{3}{7}$, $a_2 = -\frac{7}{2}$,
 $a_1 \cdot a_2 = \frac{3}{7} \cdot (-\frac{7}{2}) = -\frac{3}{2} \neq -1$ – proste nie są prostopadłe

Ćwiczenie 3

- a) -5 b) $-\frac{1}{9}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $-3\sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

Prostopadłość prostych uzależniona jest od współczynników kierunkowych. Z prostopadłości prostych $y = a_1x$ i $y = a_2x$ wynika, że $a_1 \cdot a_2 = -1$, zatem dla dowolnych współczynników b_1, b_2 proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe.

Ćwiczenie 5

- a) $y = \frac{1}{3}x - 1$
b) $y = 10x - 1$
c) $y = -\frac{7}{3}x + 9$

Ćwiczenie 6

- a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$
- b) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
- c) $y = -\frac{3}{2}x - 3$

Ćwiczenie 7

- a) $x = 6$
- b) $y = -5$
- c) $y = -5$

Odpowiedzi do zadań

- 1. a) $y = \frac{1}{3}x - 3$
- b) $y = -\frac{3}{2}x + 7$
- c) $y = \frac{3}{4}x + 1$
- d) $y = -\frac{2}{7}x$

Przykład 5

Miejszem zerowym funkcji liniowej jest liczba 3, a jej wykresem jest prosta l prostopadła do prostej $4x + 3y - 7 = 0$. Wyznacz równanie prostej l .

Równanie $4x + 3y - 7 = 0$ przekształcamy do postaci kierunkowej:

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

Stąd równanie prostej l ma postać $y = \frac{3}{4}x + b$. Podstawiamy współrzędne punktu $(3, 0)$ i otrzymujemy $0 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$, czyli $b = -\frac{9}{4}$.

Równanie prostej l ma zatem postać $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$.

Ćwiczenie 6

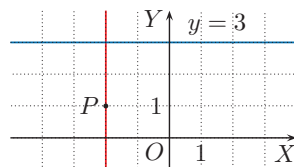
Miejszem zerowym funkcji liniowej jest liczba -2 . Wyznacz równanie prostej będącej wykresem tej funkcji i jednocześnie prostopadłej do podanej prostej.

- a) $3x + 2y + 6 = 0$
- b) $2x - \frac{1}{2}y - 5 = 0$
- c) $-\frac{3}{4}x + \frac{9}{8}y + 3 = 0$

Przykład 6

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej $y = 3$ i przechodzącej przez punkt $P(-2, 1)$.

Powyższe warunki spełnia prosta $x = -2$.



Ćwiczenie 7

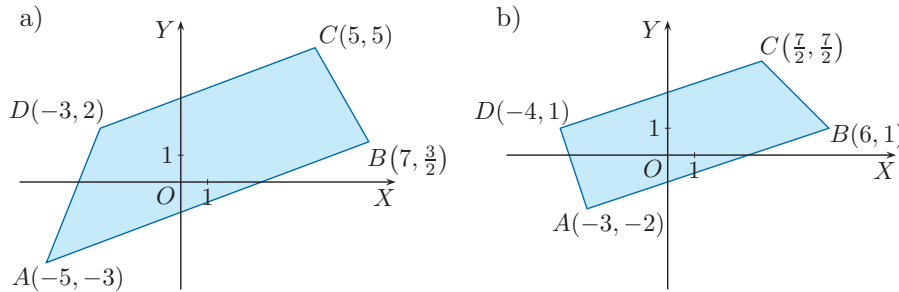
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(6, -5)$ i prostopadłej do prostej:

- a) $y = -3$,
- b) $x = -3$,
- c) $x = -2\sqrt{3}$.

Zadania

- 1. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P .
 - a) $l: y = -3x + 1, P(3, -2)$
 - b) $l: y = \frac{2}{3}x - 3, P(4, 1)$
 - c) $l: y = -\frac{4}{3}x + 11, P(-4, -2)$
 - d) $l: y = 3\frac{1}{2}x - 3, P(14, -4)$
 - 2. Wyznacz równania prostych: AB , AC i BC . Czy trójkąt ABC jest prostokątny?
 - a) $A(1, 5), B(4, 2), C(7, 5)$
 - b) $A(-2, -1), B(0, -3), C(4, 5)$
 - c) $A(-7, -2), B(8, -2), C(-2, 3)$
 - d) $A(4\frac{1}{2}, 6), B(-2, -\frac{1}{2}), C(4\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
 - 3. Punkty: A, B, C i D są kolejnymi wierzchołkami rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte przekątne tego rombu.
 - a) $A(-2, -6), B(5, -3), C(8, 4)$
 - b) $A(-1, -2), B(6, -1), D(-6, 3)$
-
- 2. a) $AB: y = -x + 6, BC: y = x - 2, AC: y = 5$, jest
 - b) $AB: y = -x - 3, BC: y = 2x - 3, AC: y = x + 1$, jest
 - c) $AB: y = -2, BC: y = -\frac{1}{2}x + 2, AC: y = x + 5$, nie jest
 - d) $AB: y = x + \frac{3}{2}, BC: y = -\frac{1}{2}, AC: x = 4\frac{1}{2}$, jest
- 3. a) $AC: y = x - 4, BD: y = -x + 2$
 - b) $AC: y = 3x + 1, BD: y = -\frac{1}{3}x + 1$

- D** 4. Uzasadnij, że przedstawiony na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Czy jest to trapez prostokątny?

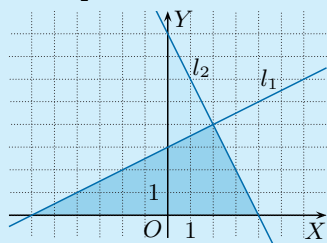


- D** 5. Uzasadnij, że czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.
- a) $P(-5, 0)$, $Q(-1, -6)$, $R(8, 0)$, $S(4, 6)$
b) $P(-8, -2)$, $Q(6, -8)$, $R(9, -1)$, $S(-5, 5)$
- D** 6. Punkty $A(0, 0)$ i $C(2, 8)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$, którego przekątna BD jest zawarta w prostej $y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4}$. Uzasadnij, że prostokąt ten jest kwadratem. Oblicz jego obwód i pole.
7. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $y = 3x + 10$, a odcinek BC jest przyprostokątną. Wyznacz współrzędne wierzchołka A tego trójkąta, jeśli:
- a) $B(-2, -8)$, $C(-2, 4)$, b) $B(-6, -8)$, $C(-6, 7)$.
8. Wyznacz równania prostych prostopadłych l_1 , l_2 przecinających się w punkcie $(2, 4)$, jeśli jedna z nich przecina oś OX w punkcie $(-6, 0)$. O ile procent większe jest pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OX od pola trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OY ?

Powtórzenie

9. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt $P(6, -2)$.
- a) $l: y = -2x + 4$ c) $l: y = -\frac{2}{3}x + 6$ e) $l: 3x + y - 3 = 0$
b) $l: y = 3x - 1$ d) $l: y = 1,5x - 2,5$ f) $l: x + 2y - 3 = 0$
10. Punkty: A, B, C są wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Wyznacz równania prostych zawierających jego boki.
- a) $A(-2, 1)$, $B(1, -2)$, $C(6, 3)$ b) $A(-15, 3)$, $B(-3, -3)$, $C(0, 3)$

8. $l_1: y = \frac{1}{2}x + 3$, $l_2: y = -2x + 8$



$$P_{OX} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$$

$$P_{OY} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$$

$P_{OX} = 4P_{OY}$, czyli P_{OX} jest większe od P_{OY} o 300%.

9. a) $y = \frac{1}{2}x - 5$ b) $y = -\frac{1}{3}x$
c) $y = \frac{3}{2}x - 11$ d) $y = -\frac{2}{3}x + 2$
e) $y = \frac{1}{3}x - 4$ f) $y = 2x - 14$
10. a) $AB: y = -x - 1$, $BC: y = x - 3$,
 $CD: y = -x + 9$, $AD: y = x + 3$
b) $AB: y = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$, $BC: y = 2x + 3$,
 $CD: y = -\frac{1}{2}x + 3$, $AD: y = 2x + 33$

4. a) $a_{AB} = \frac{4,5}{12} = \frac{3}{8} = a_{DC}$, czyli proste AB i DC są równoległe, zatem czworokąt $ABCD$ jest trapezem.
 $a_{BC} = \frac{-3,5}{2} = -\frac{7}{4} \neq -\frac{8}{3}$, czyli trapez nie jest prostokątny.
- b) $a_{AB} = \frac{1}{3} = \frac{2,5}{7,5} = a_{DC}$, czyli proste AB i DC są równoległe, zatem czworokąt $ABCD$ jest trapezem.
 $a_{AD} = \frac{3}{-1} = -3$, czyli trapez jest prostokątny.
5. a) $a_{PQ} = a_{RS} = -\frac{3}{2}$, czyli proste PQ i RS są równoległe.
 $a_{QR} = a_{SP} = \frac{2}{3}$, czyli proste QR i SP są równoległe.
 $-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$, czyli $PQ \perp QR$ oraz $RS \perp SP$.
Zatem czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.
- b) $a_{PQ} = a_{RS} = -\frac{3}{7}$, czyli proste PQ i RS są równoległe.
 $a_{QR} = a_{SP} = \frac{7}{3}$, czyli proste QR i SP są równoległe.
 $-\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = -1$, czyli $PQ \perp QR$ oraz $RS \perp SP$.
Zatem czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.
6. Przekątna $AC: y = 4x$ jest prostopadła do przekątnej BD , zatem prostokąt $ABCD$ jest kwadratem. Niech a będzie długością jego boku.
- $$|AC| = 2\sqrt{17} = a\sqrt{2}$$
- $$a = \sqrt{34}$$
- $$Ob = 4\sqrt{34}, P = 34$$
7. a) Wierzchołek C należy do przeciwprostokątnej.
Prosta $BC: x = -2$,
prosta $AB: y = -8$.
Współrzędne wierzchołka $A: (-6, -8)$.
b) Wierzchołek B należy do przeciwprostokątnej.
Prosta $BC: x = -6$,
prosta $AC: y = 7$.
Współrzędne wierzchołka $A: (-1, 7)$.

Uczeń:

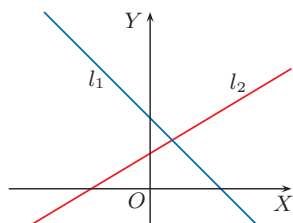
- interpretuje geometrycznie układ równań,
- rozwiązuje układ równań metodą algebraiczną i graficzną,
- wyjaśnia związek między liczbą rozwiązań układu równań a położeniem prostych.

5.7. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

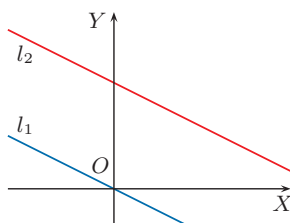
Rozpatrzmy proste l_1 i l_2 opisane równaniami układu:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

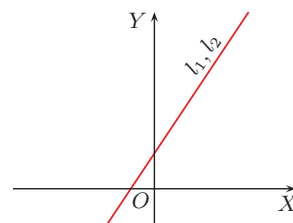
Współrzędne punktów (x, y) należących jednocześnie do obu prostych są rozwiązaniami tego układu. Może zachodzić jedna z poniższych sytuacji.



Układ oznaczony (ma jedno rozwiązanie) – proste przecinają się w jednym punkcie.



Układ spreczny (nie ma rozwiązań) – proste są równoległe i różne.



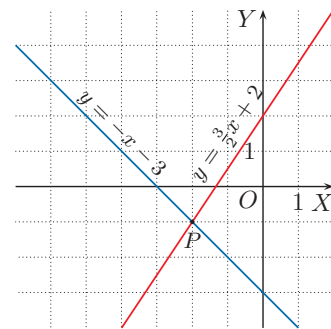
Układ nieoznaczony (ma nieskończenie wiele rozwiązań) – proste pokrywają się.

Przykład 1

Rozwiąż graficznie układ równań.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

Pierwsze równanie po przekształceniu do postaci kierunkowej ma postać $y = -x - 3$, a drugie $y = \frac{3}{2}x + 2$. Szkicujemy obie proste i odczytujemy współrzędne ich punktu przecięcia: $P(-2, -1)$.



Rozwiązaniem układu jest więc para liczb: $x = -2$, $y = -1$ (poprawność rozwiązania można sprawdzić, podstawiając je do układu równań).

Ćwiczenie 1

Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

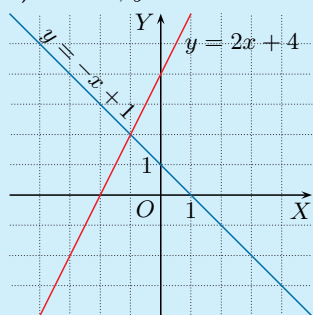
a) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ -x + 2y = 8 \end{cases}$

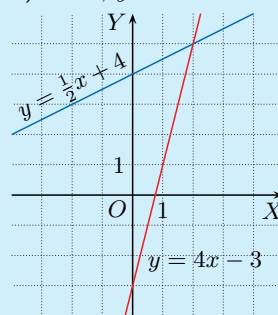
c) $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

Ćwiczenie 1

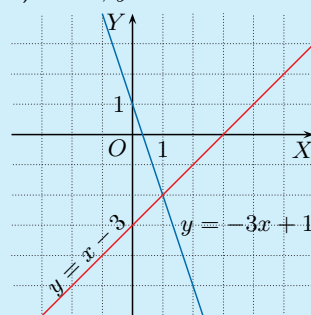
a) $x = -1$, $y = 2$



b) $x = 2$, $y = 5$



c) $x = 1$, $y = -2$



Multiteka

- Interpretacja geometryczna układu dwóch równań liniowych
- Układy równań liniowych – interpretacja geometryczna

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.7

Generator
testów i sprawdzianów

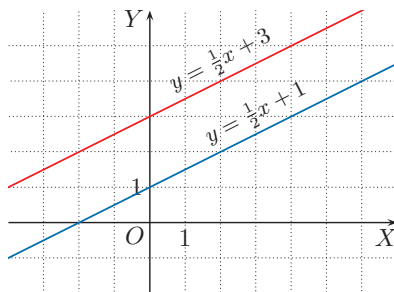
Przykład 2

Rozwiąż graficznie układ równań
$$\begin{cases} 2x - 4y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$$

Równania układu przekształcamy do postaci kierunkowej i szkicujemy obie proste.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

Są to proste równoległe – nie mają punktów wspólnych. Zatem układ równań nie ma rozwiązania – jest sprzeczny.



Przykład 3

Rozwiąż graficznie układ równań.

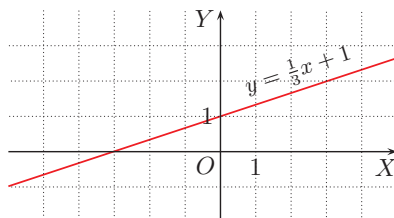
$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 2x - 6y = -6 \end{cases}$$

Obydwa równania opisują tę samą prostą o równaniu kierunkowym $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Układ ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań. Są nimi wszystkie pary liczb $(x, \frac{1}{3}x + 1)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

Rozwiązaniami tego układu są na przykład pary: $(-3, 0)$, $(0, 1)$ czy $(3, 2)$.

Podaj trzy inne pary liczb będące rozwiązaniami tego układu równań.



Ćwiczenie 2

Rozwiąż graficznie układ równań.

a)
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 0,5y - x = -3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} -3x + 2y = 2 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$$

Czasami nie musimy przekształcać równań układu, aby określić, czy jest on oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. Wystarczy przyrzeć się współczynnikom przy niewiadomych oraz wyrazom wolnym.

Ćwiczenie 3

Określ, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

a)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$$

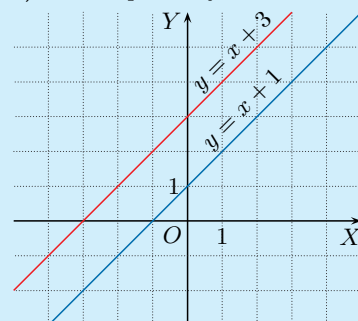
c)
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -3x + y = -4 \end{cases}$$

Ćwiczenie 3

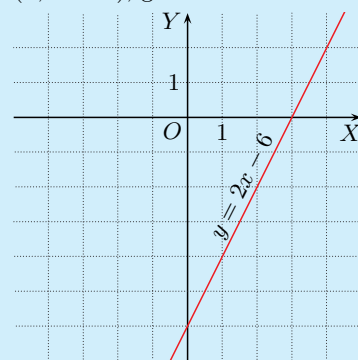
a) sprzeczny b) nieoznaczony c) oznaczony

Ćwiczenie 2

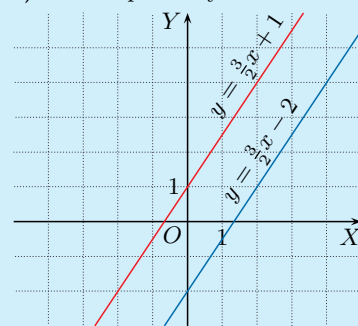
a) Układ sprzeczny



b) Układ nieoznaczony – rozwiązaniami są pary liczb postaci: $(x, 2x - 6)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.



c) Układ sprzeczny

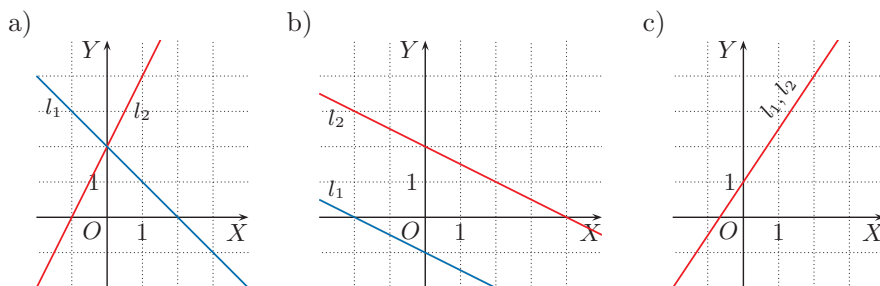


Odpowiedzi do zadań

1. a) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y = -x + 7 \end{cases}$
 $x = 3, y = 4$
 b) $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -\frac{3}{4}x - 3 \end{cases}$
 $x = 4, y = -6$
 c) $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 2 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$
 $x = 2, y = 1$
 d) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = \frac{9}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$
 $x = 1, y = 6$
 e) $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 2 \\ y = \frac{2}{3}x - 2 \end{cases}$
 Układ nieoznaczony,
 $x \in \mathbf{R}, y = \frac{2}{3}x - 2$
 f) $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 3 \\ y = -\frac{1}{3}x - 3 \end{cases}$
 Układ sprzeczny
2. a) $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases}$
 $x = 3, y = 0$
 b) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = \frac{2}{3}x + 2 \end{cases}$
 $x = 3, y = 4$
 c) $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ y = -x + 2 \end{cases}$
 $x = 2, y = 0$
 d) $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$
 $x = 1, y = 4$
 e) $\begin{cases} y = 6x + 2 \\ y = 6x + 3 \end{cases}$
 Układ sprzeczny
 f) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$
 Układ nieoznaczony,
 $x \in \mathbf{R}, y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Zadania

1. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.
- a) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y + x = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -\frac{4}{3}x + 2y = -4 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ 4y + 3x = -12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y - 2x = 4 \\ 9x - 2y = -3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3y + x = 9 \\ y + 3 = -\frac{1}{3}x \end{cases}$
2. Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.
- a) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ x = 3 + 2y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0,5x + 2y = 1 \\ y = 2 - x \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 6x + 2 \\ \frac{3-y}{2} + 3x = 0 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x = 6 - y \\ \frac{y-1}{3} = x \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y - 1 = x \\ 6y - 3x = 3 \end{cases}$
3. Napisz układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.



4. Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$$

Jakie warunki powinny spełniać współczynniki: a_1, a_2, b_1, b_2 , aby układ był:

- a) nieoznaczony, b) sprzeczny, c) oznaczony?
5. Narysuj równoległobok, którego boki są zawarte w podanych prostych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.
- a) $y = x - 2, y = x - 6, y + 3 = 0, y - 2 = 0$
 b) $y = \frac{1}{2}x + 3, y = \frac{1}{2}x - 2, y = -2x - 7, y = -2x + 8$
 c) $3x - y = -2, 3x - y = 4, x - 2y = 6, x - 2y = -14$

3. a) np. $\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$ b) np. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$ c) np. $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 6x - 4y = -4 \end{cases}$

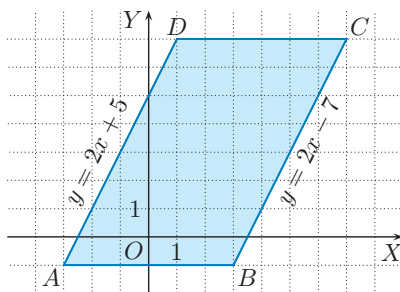
4. a) $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$
 b) $a_1 = a_2$ i $b_1 \neq b_2$
 c) $a_1 \neq a_2$ i b_1, b_2 dowolne
5. a) $A(-1, -3), B(3, -3), C(8, 2), D(4, 2)$
 b) $A(-2, -3), B(4, 0), C(2, 4), D(-4, 1)$
 c) $A(-2, -4), B(\frac{2}{5}, -2\frac{4}{5}), C(4\frac{2}{5}, 9\frac{1}{5}), D(2, 8)$

6. Trzy boki trapezu prostokątnego $ABCD$ są zawarte w prostych: $y = \frac{1}{3}x - 2$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, $y = 2x + 3$. Wierzchołek B jest punktem przecięcia osi OX z prostą $y = \frac{1}{3}x - 2$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu.

7. Dany jest równoległobok $ABCD$ (rysunek obok).

a) Punkt P jest punktem przecięcia prostej AD z prostą $y = -x + 2$. Oblicz pole trójkąta ABP .

b) Punkt Q jest punktem przecięcia prostej BC z prostą $y = -2x + 7$. Oblicz pole trapezu $ABQD$.



8. a) Uzasadnij, że trójkąt, którego boki są zawarte w prostych: $x + y = 0$, $x - y = 0$ i $y = 3$, ma pole równe polu trójkąta o wierzchołkach: $A(0, 0)$, $B(2, 2)$, $C(9, 0)$.
b) Uzasadnij, że trójkąt, którego boki są zawarte w prostych $2x - y = 0$, $y - x - 2 = 0$ i $y + 2 = 0$, ma pole równe połowie pola równoległoboku o wierzchołkach: $A(-2, -1)$, $B(4, -1)$, $C(6, 2)$, $D(0, 2)$.

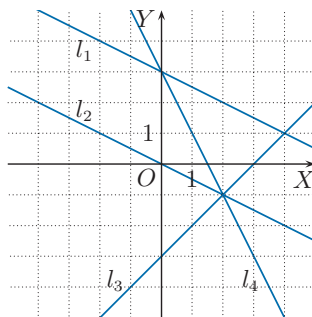
Powtórzenie

9. Sprawdź, czy współrzędne punktu $P(x, y)$, który jest punktem przecięcia prostych l_1 i l_2 , spełniają warunek $x^2 + y^2 < 25$.

- a) $l_1: y = -x + 1$, $l_2: y = \frac{1}{3}x + 5$ c) $l_1: y = 2x + 1$, $l_2: y = 4x + 5$
b) $l_1: y = x - 2$, $l_2: y = -\frac{1}{2}x + 4$ d) $l_1: y = -\frac{1}{2}x - 2$, $l_2: y = -2x + 4$

10. Która para prostych (rysunek obok) przedstawia interpretację geometryczną układu równań?

- a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ \frac{1}{2}x + y = 3 \end{cases}$

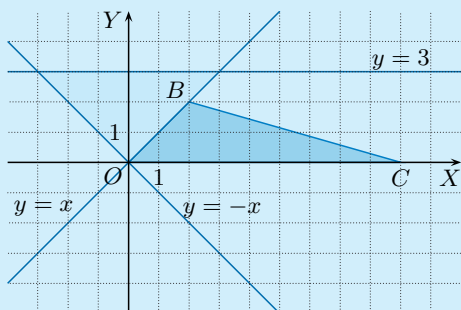


11. Podaj równanie dowolnej prostej, które wraz z równaniem prostej l_3 (rysunek obok) tworzy układ sprzeczny.

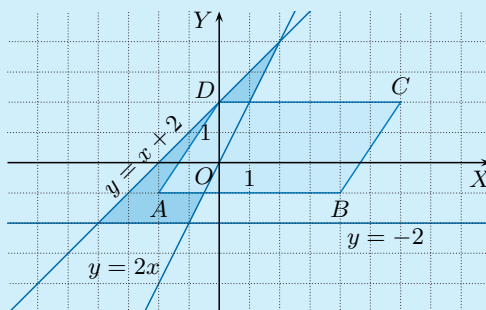
12. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

- a) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

8. a) $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 2 = 9$, $P_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$, czyli $P_{\triangle ABC} = P_2$



- b) $\frac{1}{2}P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$, $P_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$, czyli $\frac{1}{2}P_{ABCD} = P_2$



6. Równanie prostej zawierającej czwarty bok trapezu ma postać $y = -3x + b$ i prosta przechodzi przez wierzchołek $B(6, 0)$, czyli $y = -3x + 18$.

Punkt przecięcia prostych $y = \frac{1}{3}x - 2$ i $y = 2x + 3$:

$$A(-3, -3).$$

Punkt przecięcia prostych

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \text{ i } y = -3x + 18:$$

$$C(5, 3).$$

Punkt przecięcia prostych

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \text{ i } y = 2x + 3:$$

$$D(-1, 1).$$

7. a) $P(-1, 3)$,

$$P_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$$

- b) $Q(3\frac{1}{2}, 0)$,

$$P_{ABQD} = P_{ABCD} - P_{CDQ} = 6 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 27$$

9. a) $x = -3$, $y = 4$

$$(-3)^2 + 4^2 = 25$$

Nie spełnia warunku.

- b) $x = 4$, $y = 2$

$$4^2 + 2^2 = 20 < 25$$

Spełnia warunek.

- c) $x = -2$, $y = -3$

$$(-2)^2 + (-3)^2 = 13 < 25$$

Spełnia warunek.

- d) $x = 4$, $y = -4$

$$4^2 + (-4)^2 = 32 > 25$$

Nie spełnia warunku.

10. a) l_1 i l_3 b) l_1 i l_2

11. $l_3: y = x - 3$

Rozwiązaniem jest prosta postaci $y = x + b$, gdzie $b \in \mathbf{R} \setminus \{-3\}$.
Na przykład: $y = x$.

12. a) $x = -1$, $y = -3$

- b) $x = 1$, $y = 0$

- c) $x = -1$, $y = 2$

Uczeń:

- analizuje zadanie z treścią, a następnie zapisuje odpowiednie równanie, nierówność liniową lub wzór funkcji liniowej,
- rozwiązuje ułożone przez siebie równanie bądź nierówność lub analizuje własności funkcji liniowej,
- analizuje wynik i podaje odpowiedź.

Ćwiczenie 1

a) $\text{zysk} = \text{dochód} - \text{koszt}$
Niech x będzie liczbą sprzedanych krasnali.

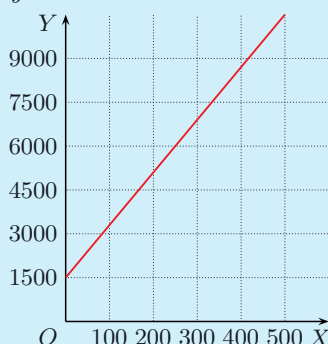
Koszty po 6 miesiącach:

$$6 \cdot 1500 + 12x = \\ = 9000 + 12 \cdot 1800 = 30600 \text{ [zł]}$$

Zysk po 6 miesiącach:

$$37x - 30600 = \\ = 37 \cdot 1800 - 30600 = 36000 \text{ [zł]}$$

b) $y = 18x + 1500$



Ćwiczenie 2

Niech x będzie liczbą wyprodukowanych puszek.

$\text{zysk} = \text{dochód} - \text{koszt}$, zatem dzienny zysk jest opisany wzorem:

$$4x - (2x + 800) = 2x - 800$$

a) $2x + 800 = 4x$

$$x = 400$$

Zerowy wynik ekonomiczny firma osiąga, gdy dzienna produkcja wynosi 400 puszek.

b) 600 c) 1100

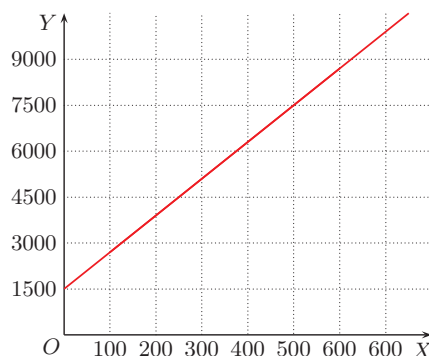
5.8. Funkcja liniowa – zastosowania

Ćwiczenie 1

Funkcja $y = 1500 + 12x$ opisuje miesięczne koszty (w złotych) firmy Skrzat produkującej krasnale ogrodowe: 1500 zł to koszt stały, 12 zł to koszt wyprodukowania jednego krasnala, x – liczba krasnali.

a) Jaki był półroczny zysk firmy, jeśli w tym czasie wyprodukowano 1800 krasnali i sprzedano je po 37 zł za sztukę?

b) Naskicuj wykres funkcji opisującej miesięczne koszty firmy, jeśli podjęto decyzję o produkcji większych krasnali, a koszt wyprodukowania jednego wyniesie 18 zł (koszty stałe bez zmian).



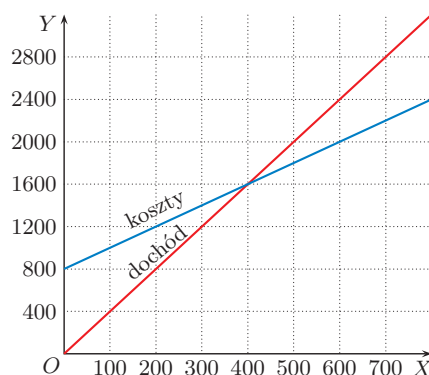
Ćwiczenie 2

Wzór $y = 2x + 800$ opisujeienne koszty, jakie ponosi firma produkująca pokarm dla kotów: 800 zł to stały koszt dzienny, x – liczba puszek pokarmu wyprodukowanych dziennie, a 2 zł – koszt wyprodukowania jednej puszki. Dochody firmy opisuje wzór $y = 4x$, gdzie x jest liczbą sprzedanych dziennie puszek pokarmu, a 4 zł to cena jednej puszki. Przyjmując, że liczba wyprodukowanych i sprzedanych danego dnia puszek jest taka sama, podaj wielkość dziennej produkcji, dzięki której firma osiągnie:

a) zerowy wynik ekonomiczny (dochód jest równy kosztom),

b) dzienny zysk w wysokości 400 zł,

c) dzienny zysk w wysokości 1400 zł.



Ćwiczenie 3

Wynajęcie lokalu A na dyskotekę kosztuje 400 zł za salę i 10 zł za każdego uczestnika. Wynajęcie lokalu B kosztuje 100 zł za salę i 15 zł za każdego uczestnika. Naskicuj wykresy przedstawiające koszty zorganizowania dyskoteki w lokalach A i B w zależności od liczby uczestników. Dla jakiej liczby uczestników koszty te będą równe?

Ćwiczenie 3.

Niech x będzie liczbą uczestników.

Koszty zorganizowania dyskoteki:

– w lokalu A: $y = 10x + 400$

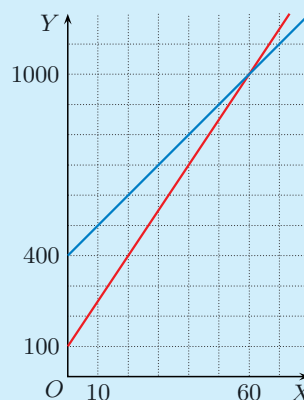
– w lokalu B: $y = 15x + 100$

Zatem:

$$10x + 400 = 15x + 100$$

$$x = 60$$

Koszty będą równe przy 60 uczestnikach.



Multiteka

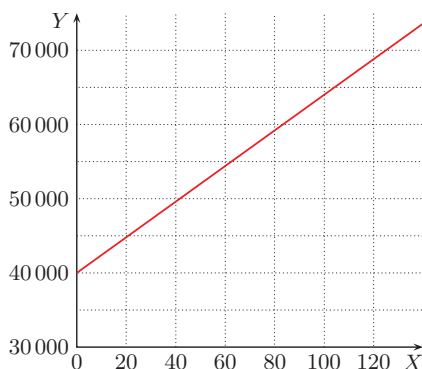
- Wykorzystanie funkcji liniowej – rozwiązanie zadania

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.8

Generator
testów i sprawdzianów

Zadania

1. Samochód A kosztuje 35 tys. zł i spala 8 l benzyny na 100 km, a samochód B kosztuje 40 tys. zł i spala 6 l benzyny na 100 km. Niech x oznacza liczbę przejechanych tysięcy kilometrów, y – cenę samochodu plus koszty paliwa w złotych (pozostałe koszty pomijamy). Na zamieszczonym obok wykresie przedstawiono łączny koszt dla samochodu B, jeśli cena benzyny wynosi średnio 4 zł za litr.



- a) Naszkicuj analogiczny wykres dla samochodu A.
b) Jeżeli zakupiono samochód B, to po przejechaniu ilu kilometrów zwróci się różnica w cenie?
2. Przeczytaj informacje dotyczące warunków wypożyczenia rowerów w wypożyczalniach Wagabunda i Szprycha (x oznacza liczbę godzin).

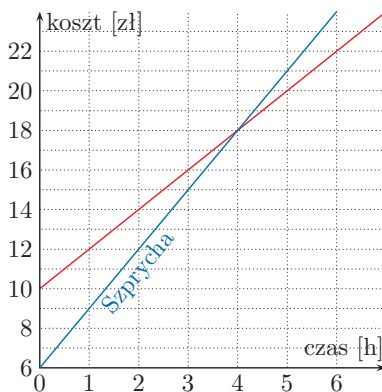
WYPOŻYCZALNIA WAGABUNDA

- Rower górski 10 zł + 2x zł
- Rower dziecięcy 6 zł + 2x zł

WYPOŻYCZALNIA SZPRYCHA

- Rower górski 6 zł + 3x zł
- Rower dziecięcy 2 zł + 3x zł

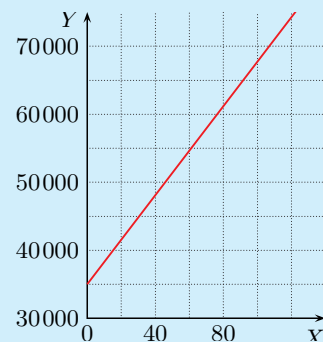
Na wykresie obok przedstawiono koszt wypożyczania roweru górskiego w wypożyczalni Wagabunda w zależności od czasu.



- a) Naszkicuj analogiczny wykres dla wypożyczalni Wagabunda.
b) Odczytaj z wykresów, dla jakiej liczby godzin korzystniejsze jest wypożyczenie roweru górskiego z wypożyczalni Wagabunda, a dla jakiej z wypożyczalni Szprycha.
c) Chcemy wypożyczyć dwa rowery górskie i jeden rower dziecięcy. Dla jakiej liczby godzin korzystniejsza jest oferta wypożyczalni Wagabunda?

Odpowiedzi do zadań

1. a) $y = 35000 + 320x$, gdzie x – liczba przejechanych tysięcy kilometrów, 320 – koszt (w zł) benzyny potrzebnej do przejechania 1000 km.



- b) Niech x będzie liczbą przejechanych tysięcy kilometrów. Łączne koszty:

– dla samochodu A:

$$y = 35000 + 320x$$

– dla samochodu B:

$$y = 40000 + 240x$$

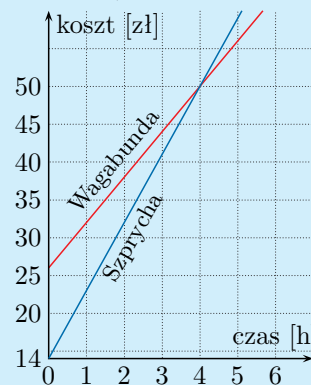
$$40000 + 240x \leq 35000 + 320x$$

$$x \geq 62,5$$

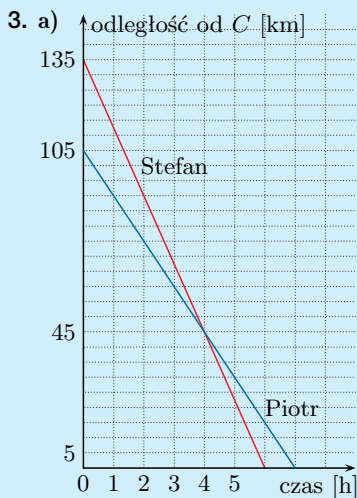
Różnica w cenie zwróci się po przejechaniu 62500 km.

2. b) Korzystniej z wypożyczalni Wagabunda dla liczby godzin większej od 4.

c) $26 + 6x < 14 + 9x$
 $x > 4$



Dla liczby godzin większej od 4.

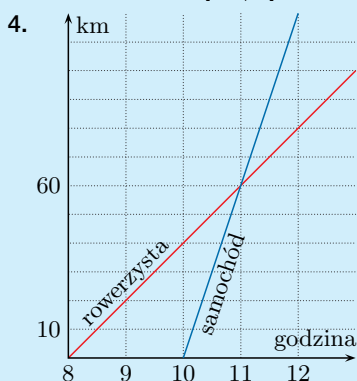


b) Stefan dogoni Piotra po 4 godzinach.

c) Niech x będzie wielkością, o jaką Piotr musi zwiększyć średnią prędkość [km/h]. Wzór na prędkość przekształcamy do postaci $t = \frac{s}{v}$. Wówczas:

$$\frac{105}{15+x} = \frac{135}{22,5}$$

$$x = 2,5 \text{ [km/h]}$$



a) o 11.00 b) 20 km c) o 12.00

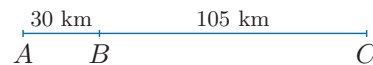
6. t – czas [h]

a) $d_1(t) = 16t$, $t \in \langle 0; 2,5 \rangle$;
 $d_2(t) = 40 - 16t$, $t \in \langle 0; 2,5 \rangle$

b) $d(t) = |32t - 40|$,
 $D_d = \langle 0; 2,5 \rangle$

Odległość między rowerzystami wyniosła 8 km po 1 h oraz po 1,5 h.

3. Piotr i Stefan wyruszają na wycieczkę rowerową do miasta C o tej samej godzinie.



Piotr startuje z miasta B i jedzie ze stałą prędkością 15 km/h, a Stefan z miasta A i jedzie ze stałą prędkością 22,5 km/h.

a) Naskicuj wykres pokazujący odległość Piotra od miasta C w zależności od czasu oraz w tym samym układzie współrzędnych – wykres pokazujący odległość Stefana od miasta C w zależności od czasu.

b) Po jakim czasie Stefan dogoni Piotra?

c) O ile Piotr musiałby zwiększyć swoją średnią prędkość, aby Stefan dogonił go dopiero w mieście C ?

4. Z miasta A o godzinie 8.00 wyjechał rowerzysta poruszający się z prędkością 20 km/h. Dwie godziny później z miasta A w tę samą stronę wyjechał samochód, który poruszał się z prędkością 60 km/h. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy zależności liczby przejechanych kilometrów przez każdy z pojazdów od czasu, jaki upłynął od rozpoczęcia podróży przez pierwszy z nich. Oblicz na podstawie wykresu:

a) o której godzinie samochód wyprzedził rowerzystę,

b) jaki dystans dzielił rowerzystę i samochód o godzinie 10.30,

c) o której godzinie samochód oddalił się od rowerzysty o 40 km.

5. Z Kartuz do odległych o 15 km Ostrzyc wyruszył pieszo turysta. Godzinę później z Ostrzyc do Kartuz wyjechał samochód, który minął turystę po 15 minutach jazdy. Po półgodzinnym postoju w Kartuzach kierowca ruszył w drogę powrotną. Po raz kolejny minął turystę zmierzającego do Ostrzyc po 50 minutach od ich ostatniego spotkania. Oblicz, ile czasu zajęła turysta droga z Kartuz do Ostrzyc. Przyjmij, że turysta szedł całą drogę w tym samym tempie, a kierowca w obie strony jechał z taką samą stałą prędkością.

6. Z miejscowości A do oddalonej o 40 km miejscowości B wyruszył rowerzysta jadący z prędkością 16 km/h. Jednocześnie z miejscowości B do miejscowości A wyruszył drugi rowerzysta, który poruszał się z tą samą prędkością.

a) Przedstaw na wykresie i za pomocą wzoru odległość każdego z rowerzystów od miejscowości A w zależności od czasu.

b) Zapisz wzór określający odległość między rowerzystami w zależności od czasu. W jakim czasie od chwili rozpoczęcia podróży odległość ta była równa 8 km?

5. Niech x oznacza odległość w km, jaką przeszedł turysta po 1 h 15 min, czyli do momentu pierwszego spotkania z kierowcą, a y – odległość w km, jaką przeszedł turysta przez kolejne 50 min, czyli między pierwszym i drugim spotkaniem z kierowcą.

Korzystamy ze wzoru na prędkość: $v = \frac{s}{t}$.

Turysta szedł w stałym tempie, czyli $\frac{x}{\frac{5}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{2}}$. Stąd $x = 1,5y$.

Kierowca jechał ze stałą prędkością, czyli $\frac{15-x}{\frac{1}{4}} = \frac{2x+y}{\frac{1}{3}}$. Stąd $10x + 3y = 60$.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} x = 1,5y \\ 10x + 3y = 60 \end{cases}$$

i otrzymujemy $x = 5$, $y = \frac{10}{3}$.

Turysta przeszedł 5 km w ciągu $\frac{5}{4}$ h, zatem 15 km pokonał w czasie 3 h 45 min.

5.9. Zagadnienia uzupełniające

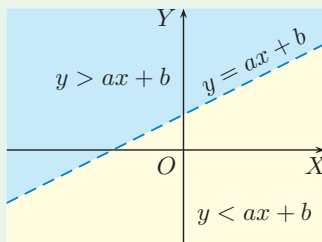
Nierówności liniowe

Półpłaszczyznę zawierającą swoją krawędź nazywamy **półpłaszczyzną domkniętą**. Półpłaszczyznę, do której nie należy żaden punkt z jej krawędzi, nazywamy **półpłaszczyzną otwartą**.

Prosta $l : y = ax + b$ wyznacza dwie półpłaszczyzny otwarte:

- zbiór $\{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R} \text{ i } y < ax + b\}$ jest półpłaszczyzną leżącą poniżej prostej l ,
- zbiór $\{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R} \text{ i } y > ax + b\}$ jest półpłaszczyzną leżącą powyżej tej prostej.

Prosta l jest krawędzią obu półpłaszczyzn.



Przykład 1

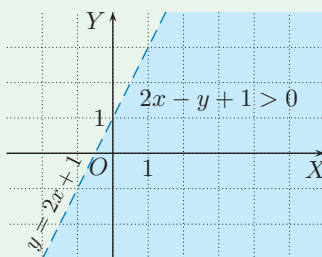
Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność $2x - y + 1 > 0$.

Nierówność zapisujemy w postaci:

$$y < 2x + 1$$

Szukany zbiór punktów jest półpłaszczyzną otwartą leżącą poniżej prostej $y = 2x + 1$.

Współrzędne punktów tej prostej nie spełniają nierówności $y < 2x + 1$, więc tę prostą rysujemy linią przerywaną.



Przykład 2

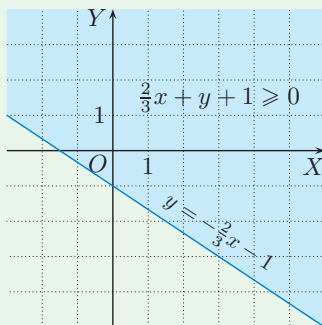
Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność $\frac{2}{3}x + y + 1 \geq 0$.

Nierówność zapisujemy w postaci:

$$y \geq -\frac{2}{3}x - 1$$

Szukany zbiór punktów jest półpłaszczyzną domkniętą leżącą nad prostą $y = -\frac{2}{3}x - 1$.

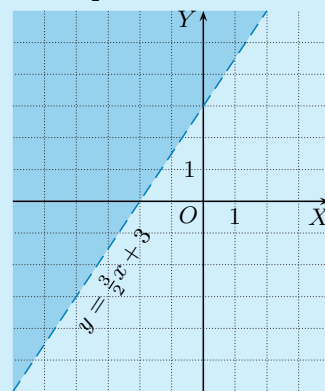
Współrzędne punktów tej prostej spełniają nierówność $y \geq -\frac{2}{3}x - 1$, więc tę prostą rysujemy linią ciągłą.



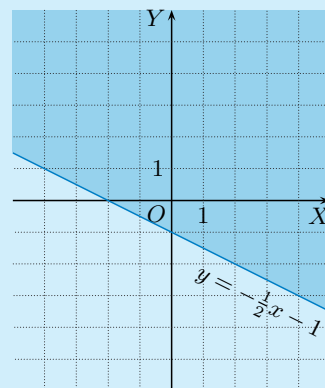
1. Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność:

a) $-3x + 2y - 6 > 0$, b) $y \geq -\frac{1}{2}x - 1$, c) $y - 2x \leq -3$.

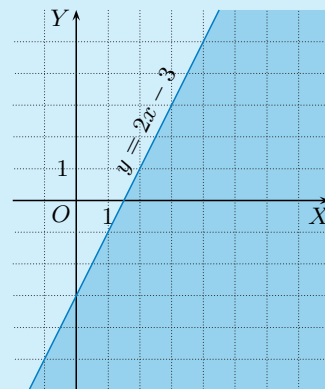
1. a) $y > \frac{3}{2}x + 3$



b) $y \geq -\frac{1}{2}x - 1$



c) $y \leq 2x - 3$



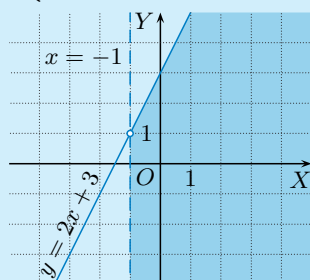
Multiteka

• Nierówność liniowa

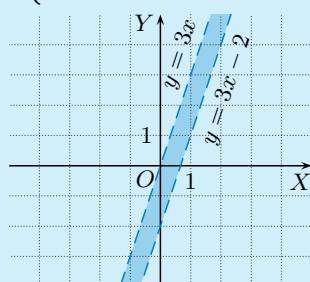
dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 5.9

Generator
testów i sprawdzianów

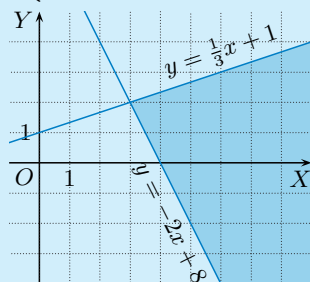
2. a) $\begin{cases} y \leq 2x + 3 \\ x > -1 \end{cases}$



b) $\begin{cases} y > 3x - 2 \\ y < 3x \end{cases}$



c) $\begin{cases} y \leq \frac{1}{3}x + 1 \\ y \geq -2x + 8 \end{cases}$



3. a) P, R b) żaden c) R

4. a) $\begin{cases} y \leq -x + 4 \\ y \geq -4x + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y < -x + 2 \\ y \geq -x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y < \frac{1}{2}x + 1 \\ x < 2 \end{cases}$

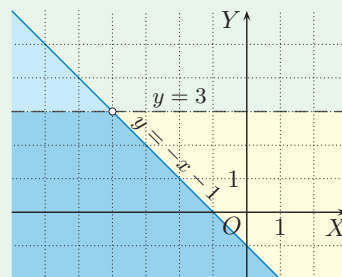
Przykład 3

Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności.

$$\begin{cases} x + y + 1 \leq 0 \\ y < 3 \end{cases}$$

Zaznaczamy odpowiednią półpłaszczyznę domkniętą, której krawędzią jest prosta $y = -x - 1$. Dla drugiej nierówności zaznaczamy półpłaszczyznę otwartą ograniczoną z góry prostą $y = 3$. Część wspólna obu półpłaszczyzn jest zbiorem punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności.

Zauważ, że punkt $(-4, 3)$ nie należy do części wspólnej obu półpłaszczyzn.



2. Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności.

a) $\begin{cases} -2x + y - 3 \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y - 2 < 0 \\ -6x + 2y < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y + 3 \geq 0 \\ 2x + y \geq 8 \end{cases}$

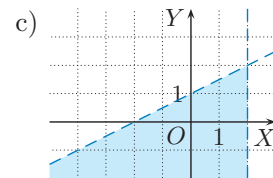
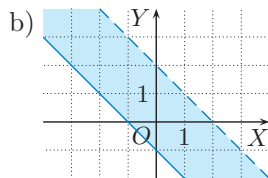
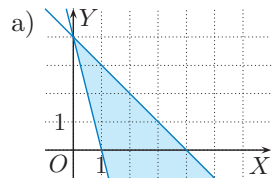
3. Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności. Które z punktów $P(6, 1)$, $Q(-3, 5)$, $R(8, -3)$ należą do otrzymanego zbioru?

a) $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ y + 3 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ x - y - 5 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y + 1 \geq 0 \\ x + 2y - 7 < 0 \end{cases}$

4. Napisz układ nierówności opisujący zbiór punktów przedstawiony na poniższym rysunku.

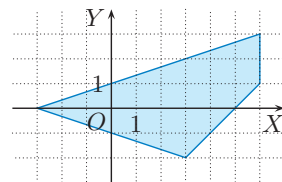


5. Napisz układ nierówności opisujący zbiór punktów leżących wewnątrz trójkąta ABC , jeśli:

a) $A(1, 2)$, $B(5, -2)$, $C(5, 4)$,

b) $A(-6, 7)$, $B(0, 1)$, $C(2, 3)$.

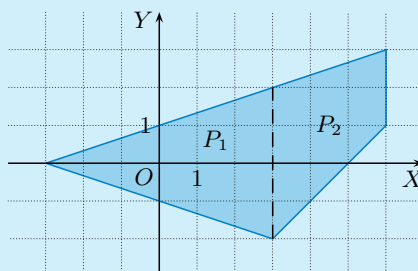
6. Napisz układ nierówności opisujący zbiór punktów leżących wewnątrz przedstawionego obok czworokąta. Oblicz pole tego czworokąta.



5. a) $\begin{cases} y < \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y > -x + 3 \\ x < 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y > -x + 1 \\ y > x + 1 \\ y < -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

6. $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$
 $P_2 = \frac{1}{2} \cdot (4 + 2) \cdot 3 = 9$
 $P = P_1 + P_2 = 21$

$$\begin{cases} y < \frac{1}{3}x + 1 \\ y > -\frac{1}{3}x - 1 \\ y > x - 5 \\ x < 6 \end{cases}$$



■ Programowanie liniowe

Przykład 4

Chcemy wyznaczyć największą i najmniejszą wartość sumy $x+y$ dla punktów (x, y) należących do wielokąta opisanego za pomocą układu nierówności:

$$\begin{cases} y \geq -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \\ y \leq \frac{1}{2}x + 1 \\ y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

Wielokąt ten przedstawiono na rysunku obok.

Skorzystamy z twierdzenia mówiącego, że wartość największa oraz wartość najmniejsza sumy $x+y$ jest osiągana w którymś z wierzchołków (lub na całym boku) danego wielokąta.

Wierzchołkami wielokąta są punkty: $(5, 0)$, $(6, 0)$, $(6, 4)$ i $(2, 2)$. Obliczamy dla nich wartości sumy $x+y$:

$$(5, 0): x+y = 5+0 = 5$$

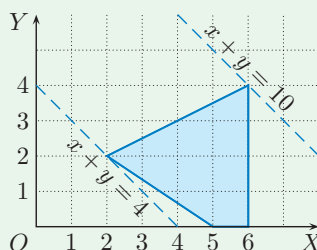
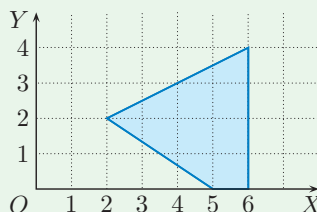
$$(6, 0): x+y = 6+0 = 6$$

$$(6, 4): x+y = 6+4 = 10$$

$$(2, 2): x+y = 2+2 = 4$$

Zatem największą wartością sumy jest 10, a najmniejszą 4.

W powyższym przykładzie przedstawiono proste zagadnienie z działy matematyki zwanego **programowaniem liniowym**. Dział ten zajmuje się zagadnieniami optymalizacyjnymi, czyli szukaniem najlepszego rozwiązania wśród wszystkich możliwych (np. maksymalizacji zysków lub minimalizacji kosztów). Programowanie liniowe było intensywnie rozwijane podczas II wojny światowej, kiedy wykorzystywano je w logistyce.

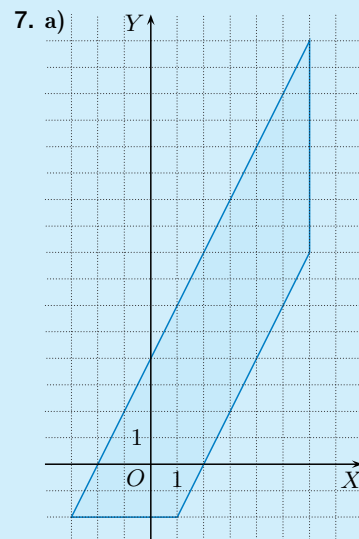


7. Znajdź wartość największą i wartość najmniejszą sumy $x+y$ dla wielokąta opisanego układem nierówności.

a)
$$\begin{cases} y \leq 2x + 4 \\ y \geq 2x - 4 \\ y \geq -2 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y \leq 2x + 9 \\ y \geq 2x - 6 \\ y \geq -x - 3 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 6 \leq 0 \\ x - y + 3 \geq 0 \\ x + y - 7 \leq 0 \\ x + 3y + 3 \geq 0 \end{cases}$$



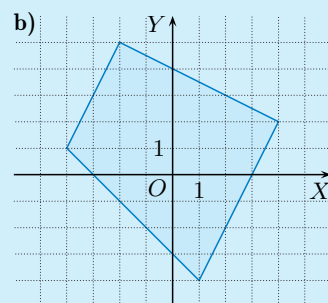
$$(-3, -2): x+y = -5$$

$$(1, -2): x+y = -1$$

$$(6, 8): x+y = 14$$

$$(6, 16): x+y = 22$$

Największą wartością sumy jest 22, a najmniejszą -5.



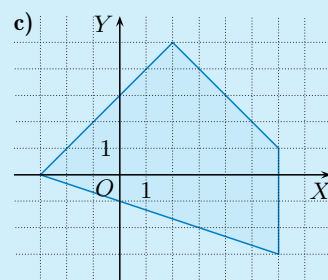
$$(-4, 1): x+y = -3$$

$$(1, -4): x+y = -3$$

$$(4, 2): x+y = 6$$

$$(-2, 5): x+y = 3$$

Największą wartością sumy jest 6, a najmniejszą -3.



$$(-3, 0): x+y = -3$$

$$(6, -3): x+y = 3$$

$$(6, 1): x+y = 7$$

$$(2, 5): x+y = 7$$

Największą wartością sumy jest 7, a najmniejszą -3.



Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. a) Wszystkie punkty należą do prostej l .
b) Punkty P i R należą do prostej l .
2. a) ujemne dla $x < -6$,
większe od 2 dla $x > -3$
b) ujemne dla $x > \frac{5}{3}$,
większe od 2 dla $x < 1$
c) ujemne dla $x > -\frac{6}{5}$,
większe od 2 dla $x < -2$
3. a) $(9, 0)$, $(0, 3)$, $P = 13,5$
b) $(14, 0)$, $(0, -8)$, $P = 56$
c) $(-\frac{5}{2}, 0)$, $(0, -\frac{15}{2})$,
 $P = 9,375$
4. a) rosnąca dla $m \in (-\frac{1}{2}; \infty)$,
malejąca dla $m \in (-\infty; -\frac{1}{2})$,
stała dla $m = -\frac{1}{2}$
b) rosnąca dla $m \in (-\infty; 9)$,
malejąca dla $m \in (9; \infty)$,
stała dla $m = 9$
5. a) nie należą
b) należą, $y = -3x - 1$
c) należą, $y = -2x - 4$
d) należą, $y = \frac{1}{2}x - 1$
6. a) 15 b) 12 c) 16
7. a) $y = \frac{3}{4}x + 9$, rosnąca
b) $y = -\frac{1}{3}x + 7$, malejąca
c) $y = -6x + 2\frac{5}{6}$, malejąca
d) $y = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}$, rosnąca
8. a) $y = -2x - 7$
b) $y = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}$
c) $x = -3$
d) $y = -1$
e) $y = -\frac{5}{3}x - 6$
f) $x = -3$
1. Naszkicuj prostą l . Podaj, które z punktów P, Q, R należą do tej prostej.
a) $l: y = 2x - 4$, $P(5, 6)$, $Q(-3, -10)$, $R(-\frac{7}{2}, -11)$
b) $l: y = \frac{1}{2}x + 2$, $P(-8, -2)$, $Q(9, \frac{11}{2})$, $R(17, 10\frac{1}{2})$
2. Naszkicuj wykres funkcji f . Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości ujemne, a dla jakich większe od 2?
a) $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$ b) $f(x) = -3x + 5$ c) $f(x) = -2,5x - 3$
3. Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji f .
a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$ b) $f(x) = \frac{4}{7}x - 8$ c) $f(x) = -3x - 7,5$
4. Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .
a) $f(x) = (m + \frac{1}{2})x - 7$ b) $f(x) = (6 - \frac{2}{3}m)x + 9$
5. Sprawdź, czy punkty A, B i C należą do wykresu tej samej funkcji liniowej.
a) $A(-4, 1)$, $B(8, 7)$, $C(11, 5)$ c) $A(-4, 4)$, $B(-2, 0)$, $C(1, -6)$
b) $A(2, -7)$, $B(3, -10)$, $C(-2, 5)$ d) $A(-4, -3)$, $B(-2, -2)$, $C(12, 5)$
6. Oblicz k , jeśli punkty P i Q należą do wykresu funkcji $y = ax$.
a) $P(\frac{2}{3}, 2)$, $Q(5, k)$ b) $P(k, 6)$, $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ c) $P(1, 8, 2, 4)$, $Q(12, k)$
7. Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkt P i równoległa do prostej l . Czy ta funkcja jest malejąca?
a) $l: y = \frac{3}{4}x - 9$, $P(-8, 3)$ c) $l: y = -6x + 27$, $P(\frac{5}{12}, \frac{1}{3})$
b) $l: y = -\frac{1}{3}x + 7$, $P(6, 5)$ d) $l: y = \frac{1}{4}x - 11$, $P(-6, 1)$
8. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(-3, -1)$ i prostopadłej do prostej l .
a) $l: y = \frac{1}{2}x - 7$ c) $l: y = -6$ e) $l: 3x - 5y - 1 = 0$
b) $l: y = -4,5x - 5$ d) $l: x = 11$ f) $l: x - y = y + x$
9. Wyznacz wzór funkcji liniowej f , która spełnia warunki:
a) $f(-2) = -4$ i $f(4) = -1$, c) $f(-8) = 6$ i $f(-3) = 4$,
b) $f(-3) = 2$ i $f(3) = 6$, d) $f(0) = 0$ i $f(\sqrt{2}) = 2$.
9. a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$
b) $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$
c) $f(x) = -\frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5}$
d) $f(x) = \sqrt{2}x$

Zestaw II

1. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości nie-dodatnie, jeśli jej wykresem jest prosta o równaniu:

a) $y = 6x + 18$, b) $y = -\frac{5}{2}x - 10$, c) $\sqrt{2}x + y - 4 = 0$.

2. Wyznacz równania prostych, w których zawarte są boki trójkąta o wierzchołkach: A, B, C . Czy jest to trójkąt prostokątny?

a) $A(0, 0), B(8, 6), C(-6, 8)$ b) $A(-6, 0), B(1, 1), C(-3, 4)$

- D** 3. Wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta o wierzchołkach: $A(-2, -3), B(4, 0), C(2, 4), D(-4, 1)$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest prostokątem.

4. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 0,5y - 0,125x = 1,5 \\ \frac{1}{8}y - \frac{1}{64}x = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 3y = -15 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y = -19 \\ \frac{1}{2}x - y = -1,5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y - \frac{3x-4}{2} = 0 \\ y - 1,5x = 5 \end{cases}$

5. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta, którego boki są zawarte w prostych: l_1, l_2 i l_3 . Narysuj ten trójkąt i oblicz jego pole.

a) $l_1: y = x + 2, l_2: y = -x + 2, l_3: y = -3x + 6$
 b) $l_1: 2x - y + 6 = 0, l_2: 3x - 4y + 4 = 0, l_3: y - 4 = 0$
 c) $l_1: x - 2y - 4 = 0, l_2: 3x + 4y - 28 = 0, l_3: x + 2 = 0$

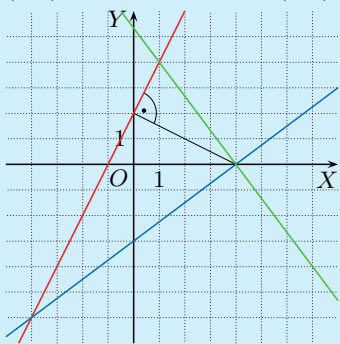
6. Przekątne rombu są zawarte w prostych $3x + 4y - 10 = 0$ i $4x - 3y - 5 = 0$, a dwa spośród jego boków w prostych $x - 2y - 5 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$. Narysuj podane proste i odczytaj współrzędne wierzchołków rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte pozostałe boki rombu.

7. Narysuj trójkąt prostokątny, którego boki są zawarte w prostych k, l, m i odczytaj współrzędne jego wierzchołków. Wyznacz współrzędne spodka wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego.

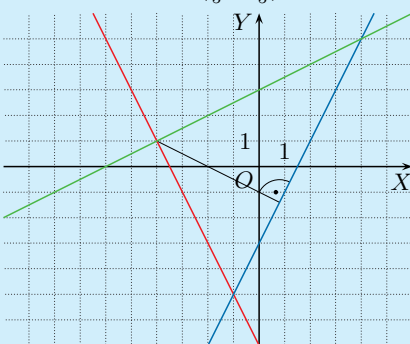
a) $k: y = 2x + 2, l: y = \frac{3}{4}x - 3, m: y = -\frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$
 b) $k: y = -2x - 7, l: y = 2x - 3, m: y = \frac{1}{2}x + 3$

8. Dwa boki równoległoboku są zawarte w prostych $y = \frac{1}{2}x - 1$ i $y = -\frac{2}{3}x + 6$, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(-1, 2)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego równoległoboku.

7. a) wierzchołki: $(-4, -6), (4, 0), (1, 4)$, spodek wysokości: $(0, 2)$



- b) wierzchołki: $(-4, 1), (4, 5), (-1, -5)$, spodek wysokości: $(\frac{4}{5}, -\frac{7}{5})$



1. a) $x \in (-\infty; -3)$

b) $x \in \langle -4; \infty)$

c) $x \in \langle 2\sqrt{2}; \infty)$

2. a) $AB: y = \frac{3}{4}x$,

$AC: y = -\frac{4}{3}x$,

$BC: y = -\frac{1}{7}x + 7\frac{1}{7}$,

$AB \perp AC$, zatem trójkąt jest prostokątny.

b) $AB: y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$,

$AC: y = \frac{4}{3}x + 8$,

$BC: y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$

$AC \perp BC$, zatem trójkąt jest prostokątny.

3. $AB: y = \frac{1}{2}x - 2$,

$BC: y = -2x + 8$,

$CD: y = \frac{1}{2}x + 3$,

$AD: y = -2x - 7$

Czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, gdyż: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ oraz $AB \perp AD$.

4. a) $x = -3, y = 2$

b) $x = 3, y = 6$

c) sprzeczny

d) $x = -5, y = -1$

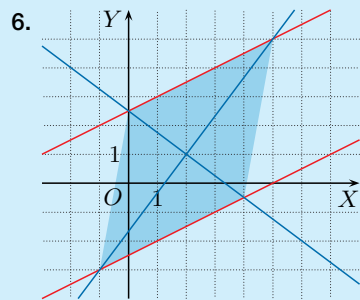
e) $x = 8, y = 5$

f) $x = -8, y = -7$

5. a) $(0, 2), (1, 3), (2, 0), P = 2$

b) $(-4, -2), (4, 4), (-1, 4), P = 15$

c) $(-2, -3), (-2, \frac{17}{2}), (\frac{36}{5}, \frac{8}{5}), P = 52,9$



$(-1, -3), (4, -\frac{1}{2}), (5, 5),$

$(0, \frac{5}{2}),$

$y = \frac{11}{2}x + \frac{5}{2}, y = \frac{11}{2}x - \frac{45}{2}$

8. $(2, 0), (6, 2), (3, 4)$



Przykład 1

Prosta $y = ax + b$ przechodzi przez punkty P i Q . Współczynnik a jest ujemny, gdy:

A. $P(-\frac{9}{5}, \frac{2}{3}), Q(-\frac{3}{5}, \frac{7}{3})$,

C. $P(-\frac{7}{2}, -\frac{4}{3}), Q(\frac{5}{2}, \frac{8}{3})$,

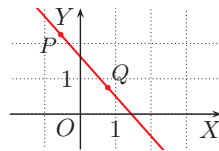
B. $P(\frac{3}{7}, -\frac{7}{6}), Q(\frac{9}{7}, \frac{5}{6})$,

D. $P(-\frac{5}{9}, \frac{9}{4}), Q(\frac{7}{9}, \frac{3}{4})$.

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych w każdym z przypadków A, B, C i D.

- Zaznaczamy punkty P i Q w układzie współrzędnych, aby sprawdzić, w którym przypadku prosta PQ jest wykresem funkcji malejącej (na rysunku obok przedstawiono prostą PQ dla przypadku D).



- Można zauważyć, że w przypadku D: $x_P < x_Q$ (gdyż $-\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$) oraz $y_P > y_Q$ (gdyż $\frac{9}{4} > \frac{3}{4}$), zatem prosta PQ jest wykresem funkcji malejącej, czyli $a < 0$.

Odpowiedź: D

Przykład 2

Która para punktów nie należy do prostej $y = ax + 2$ dla żadnej wartości współczynnika a ?

A. $(-8, -5), (8, 9)$

C. $(-8, -6), (4, -2)$

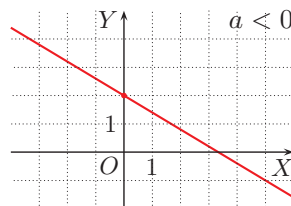
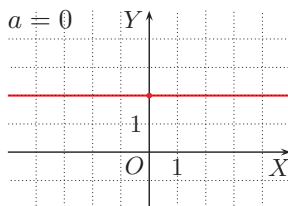
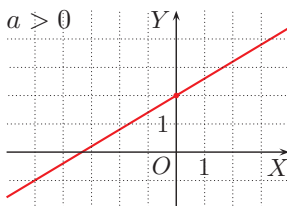
B. $(-9, 6), (9, -2)$

D. $(-10, 4), (5, 1)$

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Sprawdzamy współliniowość podanych punktów z punktem $(0, 2)$ w każdym z przypadków A, B, C i D.

- Zauważamy, że prosta $y = ax + 2$ nie może przechodzić jednocześnie przez punkty należące do III i IV ćwiartki układu współrzędnych (patrz rysunki), a takie punkty podano w przypadku C.



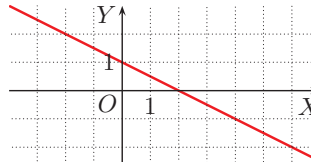
Odpowiedź: C



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszytce. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji liniowej o wzorze:

- A. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, C. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$,
B. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, D. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.



2. Przez którą ćwiartkę układu współrzędnych nie przechodzi wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{3}x - 4$?

- A. I B. II C. III D. IV

3. Miejsce zerowe funkcji $f(x) = \sqrt{2}x + 4$ jest równe:

- A. $-2\sqrt{2}$, B. $\sqrt{2}$, C. 2, D. $2\sqrt{2}$.

4. Prosta przechodząca przez punkt $(-1, 6)$ i przecinająca oś OX w punkcie o odciętej 1 przecina oś OY w punkcie:

- A. $(0, 3)$, B. $(0, \frac{3}{2})$, C. $(0, -3)$, D. $(0, -6)$.

5. Punkt $A(2k, 7)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = 2x + 1$ dla:

- A. $k = \frac{2}{3}$, B. $k = \frac{3}{2}$, C. $k = \frac{1}{2}$, D. $k = 7$.

6. Do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{3}{4}x + 6$ nie należy punkt:

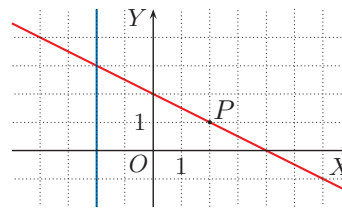
- A. $(-8, 12)$, B. $(5\frac{1}{3}, 2)$, C. $(-16, 15)$, D. $(-32, 30)$.

7. Proste $y = 3x + 3m$ i $y = (2m + 1)x + 6$ są prostopadłe, gdy:

- A. $m = 0$, B. $m = -1$, C. $m = -\frac{1}{3}$, D. $m = -\frac{2}{3}$.

8. Dwa boki trójkąta prostokątnego o kącie prostym przy wierzchołku P są zawarte w prostych przedstawionych na rysunku obok. Pole tego trójkąta jest równe:

- A. 20, C. 28,
B. 24, D. 40.

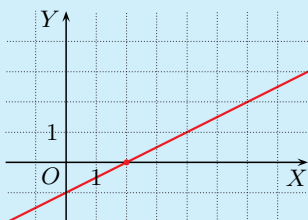


9. Która para punktów nie należy do prostej $y = a(x - 2)$ dla żadnej wartości współczynnika a ?

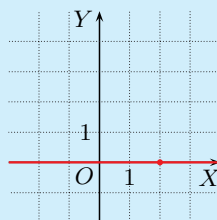
- A. $(4, 1)$, $(-4, -3)$ C. $(-3, -2)$, $(-1, 3)$
B. $(-3, -10)$, $(1, -2)$ D. $(1, 3)$, $(3, -3)$

9. Prosta $y = a(x - 2)$ nie może przechodzić jednocześnie przez punkty należące do II i III ćwiartki układu współrzędnych (patrz rysunki), a takie punkty podano w przypadku C.

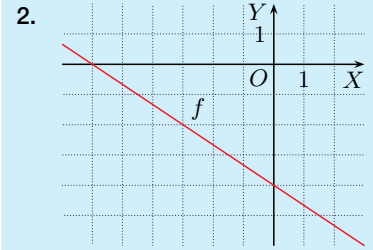
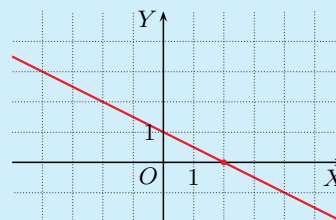
$a > 0$



$a = 0$



$a < 0$



3. $\sqrt{2}x + 4 = 0$

$$x = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

4. $y = ax + b$

$$\begin{cases} 6 = -a + b \\ 0 = a + b \end{cases}$$

$$b = 3$$

5. $7 = 2 \cdot 2k + 1$

$$4k = 6, \text{ czyli } k = \frac{3}{2}$$

6. A. $f(-8) = -\frac{3}{4} \cdot (-8) + 6 = 12$

$$B. f(5\frac{1}{3}) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{3} + 6 = 2$$

$$C. f(-16) = -\frac{3}{4} \cdot (-16) + 6 = 18$$

$$D. f(-32) = -\frac{3}{4} \cdot (-32) + 6 = 30$$

7. Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe, gdy $a_1a_2 = -1$.

$$a_1 = 3, a_2 = 2m + 1$$

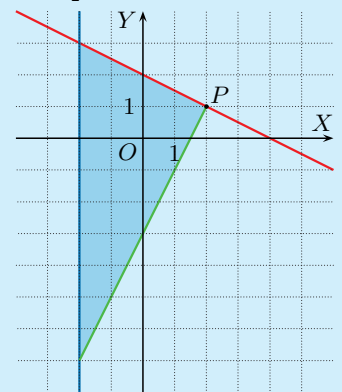
$$3 \cdot (2m + 1) = -1$$

$$6m + 3 = -1$$

$$6m = -4$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

8. $P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$





- $c = -4$
- Proste w postaci kierunkowej:
 $y = \frac{5}{3}x - 1$ i $y = -\frac{3}{5}x + 1$. Ponieważ $a_1 \cdot a_2 = \frac{5}{3} \cdot (-\frac{3}{5}) = -1$, więc proste są prostopadłe.
- Punkt przecięcia z osią OX : $(-4, 0)$. Równanie prostej k :
 $y = -2x - 8$.
- $\frac{3}{2}m + 9 < 0$, stąd $m < -6$
Największa liczba całkowita spełniająca nierówność:
 $m = -7$.
- Punkty przecięcia prostych z osią OX : $A(-5, 0)$ i $B(1, 0)$, czyli podstawa trójkąta $|AB| = 6$. Punkt przecięcia prostych: $C(3, 4)$, czyli wysokość trójkąta $h = 4$.
Pole trójkąta:
 $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$
- Równanie prostej PQ :
 $y = -\frac{3}{2}x - 1$
Współczynniki kierunkowe prostych PQ i $y = \frac{2}{3}x - 6$ spełniają warunek prostopadłości:
 $-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$. Zatem trójkąt jest prostokątny.
- $a_{AB} = \frac{1}{4}$, $a_{BC} = -2$
Równanie prostej AD , równoległej do prostej BC i przechodzącej przez punkt A :
 $y = -2x - 5$
Równanie prostej CD , równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt C :
 $y = \frac{1}{4}x + 4$
- Niech $A(-3, -5)$, $B(3, 4)$.
 $a_{AB} = \frac{3}{2}$
Równanie drugiej przyprostokątnej wychodzącej z wierzchołka B : $y = -\frac{2}{3}x + 6$.
Punkt C ma współrzędne $(-3, 8)$. Pole trójkąta:
 $P = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39$.
- Współrzędne wierzchołków czworokąta: $A(0, 5)$, $B(-3, 0)$, $C(0, -6)$, $D(4, 0)$.
Pole czworokąta jest równe sumie pól trójkątów ABC i CDA :
 $P = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 4 = 38,5$

Zadania krótkiej odpowiedzi**Zadanie 1 (2 pkt)**

Dla jakiej wartości współczynnika c miejsce zerowe funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x + c$ jest równe 6?

D Zadanie 2 (2 pkt)

Uzasadnij, że proste $y = \frac{2}{3}x - (1 - x)$ i $y = 0,4x - (x - 1)$ są prostopadłe.

Zadanie 3 (2 pkt)

Wyznacz równanie prostej k , jeśli jest ona prostopadła do prostej l : $y = \frac{1}{2}x + 2$ i przecina oś OX w tym samym punkcie co prosta l .

Zadanie 4 (2 pkt)

Znajdź największą liczbę całkowitą m , dla której prosta $y = (\frac{3}{2}m + 9)x - 4$ jest wykresem funkcji malejącej.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi**Zadanie 5 (4 pkt)**

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osią OX oraz prostymi $2x - y - 2 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$.

D Zadanie 6 (4 pkt)

Dwa boki trójkąta są zawarte w prostych $y = -\frac{3}{4}x + 4$ i $y = \frac{2}{3}x - 6$. Uzasadnij, że jeśli punkty $P(2, -4)$ i $Q(-2, 2)$ należą do trzeciego boku tego trójkąta, to jest on prostokątny.

Zadanie 7 (4 pkt)

Punkty: $A(0, -5)$, $B(8, -3)$, $C(4, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte odcinki AD i CD .

Zadanie 8 (4 pkt)

Punkty $(-3, -5)$ i $(3, 4)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $x = -3$. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 9 (5 pkt)

Prosta $y = \frac{5}{3}x + 5$ przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B , a prosta $y = 1,5x - 6$ – w punktach C i D . Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

Zadanie 10 (6 pkt)

Wyznacz punkt przecięcia przekątnych prostokąta $PQRS$, jeśli wiadomo, że $P(-3, 0)$, $S(-1, 4)$, a punkt R leży na osi OX .

- Współczynnik kierunkowy prostej PS jest równy 2. Równanie prostej SR , prostopadłej do prostej PS i przechodzącej przez punkt S :

$$y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$$

Zatem $R(7, 0)$. Przekątne prostokąta dzielą się w połowie, więc punkt przecięcia przekątnych ma współrzędne $(2, 0)$.

